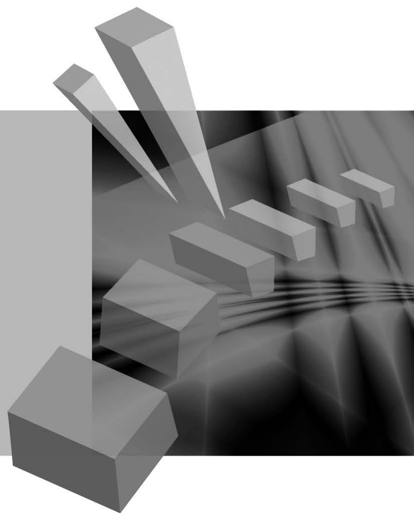
PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics

238

Zastosowania badań operacyjnych Zarządzanie projektami, decyzje finansowe, logistyka



Redaktor naukowy
Ewa Konarzewska-Gubała

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Stefan Grzesiak, Donata Kopańska-Bródka, Wojciech Sikora,
Józef Stawicki, Tomasz Szapiro, Tadeusz Trzaskalik

Redaktor Wydawnictwa: Elżbieta Kożuchowska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:
www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,
The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-195-9

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Część 3. Problemy logistyki, lokalizacji i rekrutacji

Część 4. Pomiar dokonań, konkurencja firm, negocjacje

Część 5. Problemy metodologiczne

Summaries

Part 1. Project and innovation management

Part 2. Financial decision-making

Part 3. Logistics, localization and recrutment problems

Part 4. Performance measurement, companies competition, negotiations

Part 5. Methodological problems

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS nr 238 • 2011

Zastosowanie badań operacyjnych
Zarządzanie projektami, decyzje finansowe, logistyka ISSN 1899-3192

Helena Gaspars-Wieloch
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

METAKRYTERIUM W CIĄGŁEJ WERSJI OPTYMALIZACJI WIELOCELOWEJ – ANALIZA MANKAMENTÓW METODY I PRÓBA JEJ UDOSKONALENIA

Streszczenie: Metakryterium to jedna z metod stosowanych zarówno w dyskretnej, jak i ciągłej wersji optymalizacji wielocelowej. W przypadku dyskretnej wersji metakryterium służy do tworzenia rankingów. Natomiast w wersji ciągłej ma ono na celu wyłonienie decyzji kompromisowej lub wygenerowanie zbioru rozwiązań Pareto-optymalnych. O ile w dyskretnej wersji metakryterium jest często wykorzystywane w praktyce i daje raczej dość sensowne wyniki, o tyle korzystanie z metakryterium w wersji ciągłej jako narzędzia ustalania rozwiązania kompromisowego może prowadzić do kontrowersyjnych odpowiedzi. W pracy zilustrowano przykładami liczbowymi mankamenty metody i zaproponowano różne modyfikacje pierwotnej wersji procedury, dzięki którym znajdzie ona szersze zastosowanie, a rozwiązania uzyskiwane za jej pomocą staną się bardziej logiczne.

Słowa kluczowe: metakryterium, ciągła wersja optymalizacji wielocelowej, rozwiązanie kompromisowe, stopnie realizacji.

1. Wstęp

Metakryterium to jedna z metod stosowanych zarówno w dyskretnej, jak i ciągłej wersji programowania wielokryterialnego (zwanego także optymalizacją wielocelową). W przypadku dyskretnej wersji wspomnianego zagadnienia metakryterium służy do tworzenia rankingów dla rozpatrywanych obiektów ze względu na wybrane kryteria (zob. ranking szkół wyższych, ranking funduszy emerytalnych, ranking banków itd.). Natomiast w ciągłej optymalizacji wielocelowej stosowanie metakryterium ma na celu wyłonienie decyzji kompromisowej spośród rozwiązań dopuszczalnych.

W literaturze metakryterium (*Aggregate Objective Function*, *AOF* lub *Weighted Sum Approach*, lub *Weighted Sum of Objective Functions*, lub *WLC – Weighted Linear Combination*[1]) zdefiniowane jest w sposób dość zróżnicowany. Najczęściej

[1] Zobacz http://en.wikipedia.org/wiki/Multiobjective_optimization oraz [Collette, Siarry 2008].

przedstawiane jest jako suma ważona kryteriów cząstkowych, średnia ważona kryteriów cząstkowych, suma ważona znormalizowanych kryteriów cząstkowych lub średnia ważona znormalizowanych kryteriów cząstkowych (zob. np. [Manikowski, Tarapata 2001]).

O ile w dyskretnej wersji programowania wielokryterialnego metakryterium jest często wykorzystywane w praktyce i daje raczej dość sensowne wyniki, o tyle korzystanie z metakryterium w wersji ciągłej może niekiedy budzić wątpliwości i prowadzić do kontrowersyjnych odpowiedzi.

W dalszej części pracy zostaną:
- omówione założenia dotyczące metakryterium dla ciągłej wersji optymalizacji wielocelowej (rozdział 2),
- zilustrowane przykładami liczbowymi poważne mankamenty metody (rozdziały 3–7),
- wymienione niedoskonałości metakryterium, o których jest mowa w literaturze obcojęzycznej (rozdział 8),
- zaproponowane różne modyfikacje pierwotnej wersji procedury (rozdział 9), dzięki którym znajdzie ona szersze zastosowanie w procesie podejmowania decyzji, a rozwiązania uzyskiwane za jej pomocą staną się bardziej logiczne i zgodne z postulatami decydenta.

2. Istota metakryterium w ciągłej wersji optymalizacji wielocelowej

W problemach wielokryterialnych istotne dla decydenta kryteria są zazwyczaj sprzeczne, zatem optymalne rozwiązania dla poszczególnych celów (tzw. optima cząstkowe) wiążą się najczęściej z koniecznością realizacji odmiennych planów. Dlatego w przypadku optymalizacji wielokryterialnej nie poszukuje się decyzji optymalnej, lecz rozwiązania kompromisowego. Wśród metod programowania wielocelowego opisywanych w literaturze znana jest procedura wykorzystująca metakryterium (M).

Jeżeli kryteria wyrażone są w tej samej jednostce i skali, to metakryterium można zapisać zgodnie ze wzorem (1). W przeciwnym razie zaleca się stosowanie formuły (2), w której to poszczególne funkcje celu są zastąpione stopniami realizacji (lub wskaźnikami przydatności) kolejnych celów (zob. [Anholcer 2009, s. 122–123; Bręczek 2010, s. 32–35; Marcinkowski 2008, s. 91–111; Marler, Arora 2004; Trzaskalik 2008, s. 210–211]).

$$M = \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} w_j f_j(x) \rightarrow \max, \tag{1}$$

$$M = \sum_{i=1}^{m} w_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{n} w_j g_j(x) \rightarrow \max, \tag{2}$$

gdzie: m (n) – liczba kryteriów maksymalizowanych (minimalizowanych),
w_i (w_j) – waga i-tego (j-tego) kryterium maksymalizowanego (minimalizowanego),
$f_i(x)$ ($f_j(x)$) – funkcja celu i-tego (j-tego) kryterium,
$g_i(x)$ ($g_j(x)$) – stopień realizacji i-tego (j-tego) kryterium maksymalizowanego (minimalizowanego).

Wagi określają znaczenie (użyteczność) kryteriów dla decydenta. Jeżeli metakryterium traktowane jest jako średnia ważona kryteriów cząstkowych (bądź znormalizowanych kryteriów cząstkowych), to suma wag musi wynosić jeden. W przeciwnym razie (tzn. gdy metakryterium interpretowane jest jako suma kryteriów) wagi poszczególnych celów są zazwyczaj liczbami naturalnymi, a zatem ich suma jest z pewnością znacznie większa od jedności. Jeżeli decydent rozpatruje dwa cele, a pierwszy z nich jest dla niego trzy razy ważniejszy od drugiego, to wagi mogą być równe $w_1 = 0{,}75$ i $w_2 = 0{,}25$ (w przypadku średniej ważonej kryteriów) albo $w_1 = L$ i $w_2 = 1/3 \cdot L$ (w przypadku sumy kryteriów), gdzie L oznacza dowolną liczbę większą od zera (np. $w_1 = 6$ i $w_2 = 2$ lub $w_1 = 4{,}5$ i $w_2 = 1{,}5$ itd.).

Stopnie realizacji można obliczyć zgodnie ze wzorami (3)–(6). Przyjmują one zawsze wartości z przedziału [0,1].

$$g_k^I(x) = \frac{f_k(x)}{M_k}, \tag{3}$$

$$g_k^I(x) = \frac{m_k}{f_k(x)}, \tag{4}$$

$$g_k^{II}(x) = \frac{f_k(x) - m_k}{M_k - m_k}, \tag{5}$$

$$g_k^{II}(x) = \frac{M_k - f_k(x)}{M_k - m_k}, \tag{6}$$

gdzie: $g_k(x)$ – stopień realizacji (I lub II rodzaju) k-tego celu,
$f_k(x)$ – funkcja celu k-tego kryterium,
M_k (m_k) – maksymalna (minimalna) wartość k-tego kryterium w danym zbiorze rozwiązań.

Formuły (3) i (5) oraz (4) i (6) dotyczą odpowiednio kryteriów maksymalizowanych i minimalizowanych. Warto zauważyć, że wzorów (3)–(4) (tj. stopni realizacji I rodzaju) nie można stosować, gdy kryteria w rozpatrywanym zbiorze rozwiązań przyjmują wartości zerowe lub ujemne! Wyrażenia (5)–(6) (tj. stopnie realizacji II rodzaju) opierają się na teorii zbiorów rozmytych i nie mają takich ograniczeń (por. [Marcinkowski 2008, s. 92–94]). Dodajmy, że w ramach danej funkcji metakryterium dobrze jest dla wszystkich celów cząstkowych wykorzystać albo I grupę (tj. formuły (3) i (4)) albo II grupę (tj. formuły (5) i (6)) wzorów[2].

Skoro, stosując metakryterium, decydent może uwzględnić w zagregowanej funkcji celu znaczenie, jakie ma dla niego każdy cel, to intuicyjnie oczekujemy, że rozwiązanie kompromisowe stanowić będzie plan realizujący przede wszystkim kryterium najważniejsze.

3. Mankament pierwszy

Rozpatrzmy następującą sytuację. Dany jest problem dwukryterialny:

Przykład 1

$$\begin{array}{ll}
(01) & x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\
(02) & 5x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
(1) & 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\
(2) & 5x_1 + 2x_2 \le 40 \\
(3) & x_1, \quad x_2 \ge 0
\end{array}$$

Decydent zamierza ustalić rozwiązanie kompromisowe na podstawie metakryterium. Pierwszy cel (01) jest dla niego cztery razy ważniejszy od celu (02). Załóżmy, że cele wyrażone są w tych samych jednostkach (np. w tys. zł). Na podstawie współczynników stojących przy zmiennych w funkcjach celu ($c_{11} = 1$, $c_{12} = 5$ oraz $c_{21} = 5$ i $c_{22} = 1$) możemy też stwierdzić, że skala obu kryteriów jest taka sama. W związku z powyższym sformułowanie metakryterium na podstawie wzoru (1) jest teoretycznie poprawne:

$$M = 4 \cdot (x_1 + 5x_2) + 1 \cdot (5x_1 + x_2) = 9x_1 + 21x_2 \rightarrow \max .$$

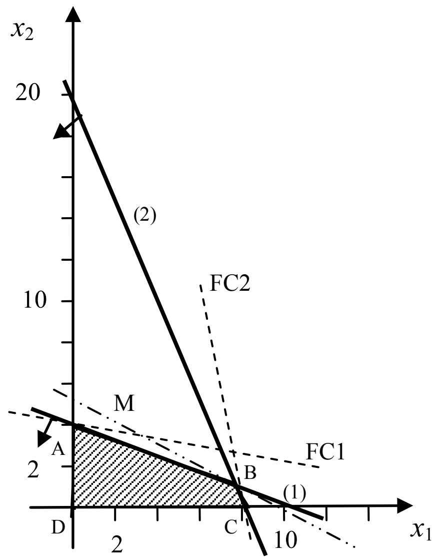
Optymalne rozwiązania cząstkowe (punkty A i C) oraz ostateczne rozwiązanie kompromisowe (punkt B) wskazano na rys. 1 i opisano w tab. 1.

Tabela 1. Optymalne rozwiązania cząstkowe i rozwiązanie kompromisowe

Kryterium	(01) – punkt A	(02) – punkt C	Metakryterium – punkt B
Optymalne wartości zmiennych	$x_1 = 0$; $x_2 = 4$	$x_1 = 8$; $x_2 = 0$	$x_1 = 160/21 = 7{,}62$ $x_2 = 20/21 = 0{,}95$
Wartość funkcji (01)	20 (max)	8	12,38
Wartość funkcji (02)	4	40 (max)	39,05

Źródło: opracowanie własne.

[2] Druga grupa wzorów na stopnie realizacji stosowana jest w optymalizacji wielocelowej nie tylko w przypadku metakryterium. W literaturze zagranicznej tak skonstruowana miara (nazywana *utility function*) ma zastosowanie np. w programowaniu celowym (*Multi-Choice Goal Programming-Utility* – MCGP-U) [Chang 2011; Lai, Hwang 1994; Yang i in. 1991].



Rys. 1. Optima cząstkowe i rozwiązanie kompromisowe (przykład 1)

Źródło: opracowanie własne.

Przypomnijmy, że pierwsze kryterium miało dla decydenta cztery razy większe znaczenie aniżeli drugie kryterium. Tymczasem w planie końcowym wartość funkcji (01) spadła, w stosunku do swojej maksymalnej możliwej wartości w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych (tj. *ZRD*), o ponad 7 jednostek (z 20 do 12,38), tj. o ponad 35%, podczas gdy wartość funkcji (02) spadła o niecałą jednostkę (z 40 do 39,05), tj. o niecałe 2,5%! Preferencje decydenta nie znalazły zatem żadnego odzwierciedlenia w ostatecznym rozwiązaniu. Skoro pierwszy cel był tak istotny, to oczekiwalibyśmy od zastosowanej metody wskazania planu leżącego znacznie bliżej punktu A, tj. punktu stanowiącego optimum cząstkowe dla tegoż kryterium.

Reasumując, pierwszy dostrzeżony mankament metakryterium polega na tym, że otrzymane za jego pomocą rozwiązanie kompromisowe niekoniecznie musi znajdować się blisko planu optymalnego z punktu widzenia celu cząstkowego, uznanego przez decydenta za najważniejszy.

4. Mankament drugi

To nie koniec zaskakujących spostrzeżeń! Otóż uważny Czytelnik sam się zorientuje, że w analizowanym zadaniu (przykład 1) każda kombinacja wag kryteriów w_1 i w_2, dla której stosunek współczynników c_1 i c_2 stojących przy zmiennych x_1 i x_2 w funkcji metakryterium spełnia poniższy warunek:

$$\frac{2}{5} < \frac{c_1}{c_2} < \frac{5}{2},$$

wskaże rozwiązanie kompromisowe w punkcie B (zob. tab. 2), a więc zarówno kombinacja wag 4:1, jak i… 1:4.

Wynika to z tego, że punkt ten jest jedynym wierzchołkiem stanowiącym rozwiązanie Pareto-optymalne, który znajduje się między punktami wskazującymi optima cząstkowe (A i C). Wystarczy zatem, by izokwanta związana z funkcją metakryterium była bardziej stroma od warunku (1) i mniej stroma niż warunek (2), a plan kompromisowy będzie zawsze w punkcie B. Stosowanie metakryterium z formułą (1) nawet wtedy, gdy kryteria wyrażone są w tej samej skali i jednostce, nie jest więc do końca prawidłowym podejściem.

Bardziej racjonalne rozwiązania dla przykładu 1 uzyskamy, korzystając z formuły opartej na stopniach realizacji (zob. wzór (2)). Jeżeli obliczymy je zgodnie ze wzorem (3) lub (5)[3], to punkt B będzie rozwiązaniem kompromisowym dla stosunku wag kryteriów cząstkowych w_1/w_2 z przedziału [2/1, 1/9][4], co jest już mniej kontrowersyjne, choć nadal zaskakujące (tab. 3).

Tabela 2. Współczynniki funkcji metakryterium (opartej na wzorze (1)) i nachylenie jego izokwanty przy różnych wagach kryteriów cząstkowych

Kryterium (01)			Kryterium (02)			Metakryterium		Warunek (1)	Metakryterium	Warunek (2)
w_1	c_{11}	c_{12}	w_2	c_{21}	c_{22}	c_1	c_2	A_{11}/a_{12}	c_1/c_2	a_{21}/a_{22}
10	1	5	1	5	1	15	51	2/5 = 0,4	0,294	5/2 = 2,5
9	1	5	1	5	1	14	46	2/5 = 0,4	0,304	5/2 = 2,5
8	1	5	1	5	1	13	41	2/5 = 0,4	0,317	5/2 = 2,5
7	1	5	1	5	1	12	36	2/5 = 0,4	0,333	5/2 = 2,5
6	1	5	1	5	1	11	31	2/5 = 0,4	0,355	5/2 = 2,5
5	1	5	1	5	1	10	26	2/5 = 0,4	0,385	5/2 = 2,5
4	1	5	**1**	5	1	9	21	2/5 = 0,4	0,429	5/2 = 2,5
3	1	5	1	5	1	8	16	2/5 = 0,4	0,500	5/2 = 2,5
2	1	5	1	5	1	7	11	2/5 = 0,4	0,636	5/2 = 2,5
1	1	5	1	5	1	6	6	2/5 = 0,4	1,000	5/2 = 2,5
1	1	5	2	5	1	11	7	2/5 = 0,4	1,571	5/2 = 2,5
1	1	5	3	5	1	16	8	2/5 = 0,4	2,000	5/2 = 2,5
1	1	5	**4**	5	1	21	9	2/5 = 0,4	2,333	5/2 = 2,5
1	1	5	5	5	1	26	10	2/5 = 0,4	2,600	5/2 = 2,5
1	1	5	6	5	1	31	11	2/5 = 0,4	2,818	5/2 = 2,5
1	1	5	7	5	1	36	12	2/5 = 0,4	3,000	5/2 = 2,5
1	1	5	8	5	1	41	13	2/5 = 0,4	3,154	5/2 = 2,5
1	1	5	9	5	1	46	14	2/5 = 0,4	3,286	5/2 = 2,5
1	1	5	10	5	1	51	15	2/5 = 0,4	3,400	5/2 = 2,5

Źródło: opracowanie własne.

[3] W tym akurat przykładzie wzory (3) i (5) będą miały dokładnie tę samą postać.

[4] W rozważaniach założono, że rozpatrujemy tylko wagi całkowite.

Tabela 3. Współczynniki funkcji metakryterium (opartej na wzorze (2)) i nachylenie jego izokwanty przy różnych wagach kryteriów cząstkowych

Kryterium (01)			Kryterium (02)			Metakryterium		Warunek (1)	Metakryterium	Warunek (2)
w_1	c_{11}	c_{12}	w_2	c_{21}	c_{22}	c_1	c_2	a_{11}/a_{12}	c_1/c_2	a_{21}/a_{22}
10	1	5	1	5	1	0,625	2,525	2/5 = 0,4	0,248	5/2 = 2,5
9	1	5	1	5	1	0,575	2,275	2/5 = 0,4	0,253	5/2 = 2,5
8	1	5	1	5	1	0,525	2,025	2/5 = 0,4	0,259	5/2 = 2,5
7	1	5	1	5	1	0,475	1,775	2/5 = 0,4	0,268	5/2 = 2,5
6	1	5	1	5	1	0,425	1,525	2/5 = 0,4	0,279	5/2 = 2,5
5	1	5	1	5	1	0,375	1,275	2/5 = 0,4	0,294	5/2 = 2,5
4	1	5	1	5	1	0,325	1,025	2/5 = 0,4	0,317	5/2 = 2,5
3	1	5	1	5	1	0,275	0,775	2/5 = 0,4	0,355	5/2 = 2,5
2	1	5	**1**	5	1	0,225	0,525	2/5 = 0,4	0,429	5/2 = 2,5
1	1	5	1	5	1	0,175	0,275	2/5 = 0,4	0,636	5/2 = 2,5
1	1	5	2	5	1	0,300	0,300	2/5 = 0,4	1,000	5/2 = 2,5
1	1	5	3	5	1	0,425	0,325	2/5 = 0,4	1,308	5/2 = 2,5
1	1	5	4	5	1	0,550	0,350	2/5 = 0,4	1,571	5/2 = 2,5
1	1	5	5	5	1	0,675	0,375	2/5 = 0,4	1,800	5/2 = 2,5
1	1	5	6	5	1	0,800	0,400	2/5 = 0,4	2,000	5/2 = 2,5
1	1	5	7	5	1	0,925	0,425	2/5 = 0,4	2,176	5/2 = 2,5
1	1	5	8	5	1	1,050	0,450	2/5 = 0,4	2,333	5/2 = 2,5
1	1	5	**9**	5	1	1,175	0,475	2/5 = 0,4	2,474	5/2 = 2,5
1	1	5	10	5	1	1,300	0,500	2/5 = 0,4	2,600	5/2 = 2,5

Źródło: opracowanie własne.

Reasumując, drugi mankament metakryterium polega na tym, że jego funkcja celu, niezależnie od tego, czy składa się ona z kryteriów cząstkowych, czy też ze znormalizowanych kryteriów cząstkowych, może wskazać dokładnie to samo rozwiązanie kompromisowe dla zbioru bardzo zróżnicowanych kombinacji wag (użyteczności) poszczególnych celów. Dzieje się tak, ponieważ odpowiednikiem planu kompromisowego wyznaczonego przez metakryterium jest najczęściej wierzchołek zbioru rozwiązań dopuszczalnych (ZRD), a nie punkt leżący na jego boku, czy też punkt znajdujący się wewnątrz ZRD (por. też [Grodzevich, Romanko 2006].

5. Mankament trzeci

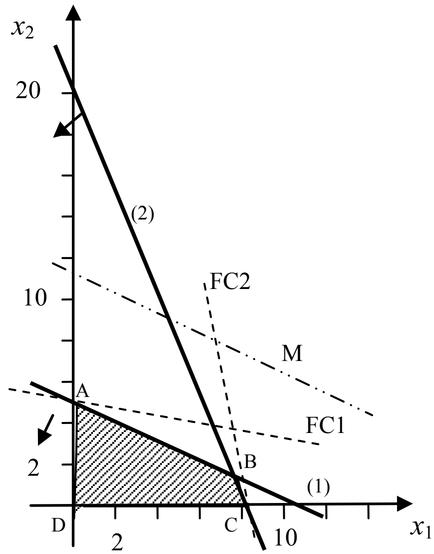
Z wnioskiem sformułowanym w poprzednim rozdziale ściśle wiąże się kolejna kwestia. Rozważmy następujące zadanie:

Przykład 2

$$\begin{array}{lrlcrlcr}
(01) & & x_1 & + & 5 & x_2 & \rightarrow & \max \\
(02) & 5 & x_1 & + & & x_2 & \rightarrow & \max \\
(1) & 2{,}5 & x_1 & + & 5 & x_2 & \leq & 25 \\
(2) & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 & \leq & 40 \\
(3) & & x_1, & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Jak widać, różni się ono od pierwszego przykładu jedynie wartościami dwóch parametrów w pierwszym warunku. Dodatkowo przyjmijmy, że wagi poszczególnych kryteriów wynoszą $w_1 = 3$ i $w_2 = 1$. Jeżeli zatem sformułujemy metakryterium zgodnie z formułą (1), to będzie miało ono postać:

$$M = 3 \cdot (x_1 + 5x_2) + 1 \cdot (5x_1 + x_2) = 8x_1 + 16x_2 \rightarrow \max .$$



Rys. 2. Optima cząstkowe i rozwiązania kompromisowe (przykład 2)

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 2 pokazano nieco zmieniony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (ZRD), izokwanty dla kryteriów cząstkowych i nową izokwantę dla metakryterium. Ta ostatnia celowo nie została przedstawiona jako styczna do boku AB, gdyż wówczas nie byłaby widoczna.

W każdym razie z pewnością możemy stwierdzić, że w przypadku tego problemu dwukryterialnego izokwanta M, w punkcie styczności z ZRD, wskazuje nie jedno, lecz wiele rozwiązań kompromisowych! Oznacza to, że według funkcji metakryterium rozwiązanie leżące w punkcie A jest tak samo dobre jak decyzja wskazana przez punkt B, a także jak każdy inny plan wyznaczony przez punkty leżące na odcinku AB. W tabeli 4 zaprezentowano wartości funkcji kryteriów cząstkowych dla różnych punktów z tego odcinka.

Przypomnijmy, że dla decydenta kryterium (01) było trzy razy ważniejsze od drugiej funkcji celu. Tymczasem otrzymaliśmy zbiór dość zróżnicowanych rozwiązań kompromisowych, dla których wartość pierwszego kryterium może być zarówno pięciokrotnie wyższa od wartości drugiego kryterium (25 i 5), jak i pięciokrotnie od niej niższa (8 i 40)!

Tabela 4. Wartości kryteriów cząstkowych dla wybranych punktów leżących na odcinku AB

	A	F	G	B
Wartość zmiennej x_1	0	2	6	8
Wartość zmiennej x_2	5	4	2	0
Wartość funkcji (01)	25	22	16	8
Wartość funkcji (02)	5	14	32	40

Źródło: opracowanie własne.

Przy odpowiednio dobranych wagach moglibyśmy taki sam paradoks wykazać dla metakryterium skonstruowanego na podstawie formuły (2).

Reasumując, trzeci przedstawiony mankament omawianej metody polega na tym, że punkty leżące na boku wskazanym przez funkcję metakryterium jako zbiór rozwiązań kompromisowych, choć tak samo dobre z punktu widzenia tej funkcji, dają zupełnie różne wartości poszczególnych kryteriów cząstkowych! W takim przypadku zadeklarowana przez decydenta ważność rozpatrywanych celów również nie znajduje odzwierciedlenia w uzyskanych wynikach.

6. Mankament czwarty

Dotychczas analizowaliśmy jedynie problemy dwukryterialne, w których to obie funkcje miały ten sam kierunek optymalizacji. Przyjrzyjmy się zatem teraz nieco bardziej urozmaiconemu przykładowi:

Przykład 3

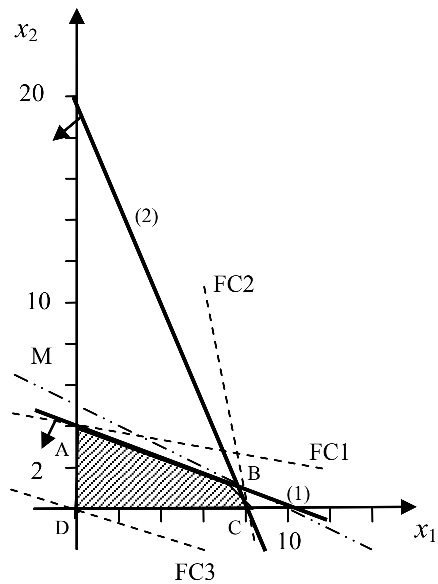
$$\begin{array}{cl} (01) & x_1 + 5x_2 \to \max \\ (02) & 5x_1 + x_2 \to \max \\ (03) & x_1 + 3x_2 \to \min \\ (1) & 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ (2) & 5x_1 + 2x_2 \le 40 \\ (3) & x_1, \quad x_2 \ge 0 \end{array}$$

Powyższe zadanie różni się od przykładu 1 tym, że zawiera ono trzeci cel, w dodatku – o odmiennym kierunku optymalizacji. Załóżmy, że wagi są równe $w_1 = 4$, $w_2 = 1$, $w_3 = 3$. Nadal cele wyrażone są w tych samych jednostkach i tej samej skali, więc konstruując metakryterium, można skorzystać ze wzoru (1):

$$M = 4 \cdot (x_1 + 5x_2) + 1 \cdot (5x_1 + x_2) - 3 \cdot (1x_1 + 3x_2) = 6x_1 + 12x_2 \to \max .$$

Aktualna funkcja metakryterium ma charakter mieszany, gdyż zawiera kryteria zarówno maksymalizowane, jak i minimalizowane.

Na rysunku 3 pokazano izokwantę dla trzeciego kryterium cząstkowego i nową izokwantę dla metakryterium. Rozwiązanie kompromisowe znajduje się w punkcie B.



Rys. 3. Optima cząstkowe i rozwiązanie kompromisowe (przykład 3)

Źródło: opracowanie własne.

W tym przypadku warto zwrócić uwagę na fakt, że pomimo wprowadzenia do zadania trzeciego celu, którego optimum cząstkowe znajduje się w punkcie D i którego użyteczność wynosi aż $w_3 = 3$, rozwiązanie kompromisowe wskazane przez nową funkcję metakryterium w ogóle się nie zmieniło w porównaniu z decyzją kompromisową wyznaczoną w przykładzie 1! Na dodatek ostateczny plan realizuje przede wszystkim kryterium o najniższym znaczeniu (punkt B leży znacznie bliżej punktu C aniżeli punktu A czy też D)!

Warto też podkreślić, że gdybyśmy dla tego przykładu zastosowali wzór (2), to metakryterium miałoby postać (uwaga! korzystamy z formuł (5) i (6), gdyż w przypadku trzeciego kryterium wartość parametru m jest zerowa):

$$M = 4 \cdot \left(\frac{x_1 + 5x_2 - 0}{20 - 0} \right) + 1 \cdot \left(\frac{5x_1 + x_2 - 0}{40 - 0} \right) + 3 \cdot \left(\frac{12 - (x_1 + 3x_2)}{12 - 0} \right) =$$
$$= 0{,}075x_1 + 0{,}275x_2 + 3 \to \max$$

i wówczas rozwiązanie kompromisowe znalazłoby się w punkcie A. Taki wynik znacznie bardziej odpowiada preferencjom decydenta, gdyż właśnie ten punkt wskazuje optimum cząstkowe dla najważniejszego kryterium. Ponadto odległość między wierzchołkiem A (optimum dla kryterium (01)) a wierzchołkiem D (optimum dla kryterium (03)) jest zdecydowanie krótsza aniżeli odległość między wierzchołkiem A a wierzchołkiem C (optimum dla kryterium (02)), a to z kolei pokazuje, że w przypadku metakryteriów konstruowanych na podstawie drugiej formuły łatwiej jest (choć pewnie nie zawsze) doszukać się związku między wagami przyjętymi dla poszczególnych kryteriów a ostatecznym rozwiązaniem.

Reasumując, czwarty mankament analizowanej metody wiąże się z tym, że w niektórych przypadkach wprowadzenie celów minimalizowanych do mieszanych funkcji metakryterium powoduje jedynie proporcjonalne obniżenie wartości wag przy poszczególnych zmiennych, lecz nie zmienia istotnie nachylenia pierwotnej izokwanty dla tej funkcji ani jej kierunku optymalizacji. Zatem nawet przy relatywnie wysokich wagach ustalonych dla takich kryteriów nie ma szansy na uzyskanie planu bliskiego ich optymalnym rozwiązaniom cząstkowym. W takiej sytuacji kryteria minimalizowane są niejako dyskryminowane.

7. Mankament piąty

Jak już wspomnieliśmy, metakryteria można (a niekiedy nawet trzeba) formułować na podstawie wzoru (2). Dotychczas stwierdziliśmy, że stosowanie tego właśnie wzoru może prowadzić do mniejszych rozbieżności między deklarowanymi użytecznościami kryteriów cząstkowych a końcowymi wynikami. Zauważmy jednak, że to drugie podejście również nie jest pozbawione wad. Rozważmy ostatni już przykład:

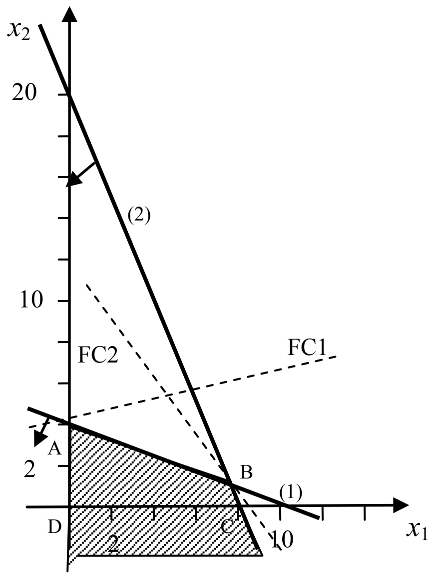
Przykład 4

$$\begin{array}{lrlcrlcr}
(01) & & -x_1 & + & 5 & x_2 & \rightarrow & \max \\
(02) & 150 & x_1 & + & 100 & x_2 & \rightarrow & \max \\
(1) & 2 & x_1 & + & 5 & x_2 & \leq & 20 \\
(2) & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 & \leq & 40 \\
(3) & & x_1 & & & & \geq & 0
\end{array}$$

Przyjmijmy, że oba kryteria są tak samo ważne. Na rysunku 4 pokazano *ZRD* (uwaga! zmienna x_2 może przyjmować dowolne wartości) oraz izokwanty dla celów cząstkowych.

Kryteria wyrażono w różnych skalach, zatem konstruując metakryterium, z pewnością skorzystać należy z formuły (2). Teraz powinniśmy wybrać wzory pozwalające przekształcić kryteria na kryteria znormalizowane. Okazuje się, że niemożliwe jest zastosowanie:

– I grupy (wzory (3) i (4)), gdyż w analizowanym zbiorze rozwiązań kryteria mogą przyjąć ujemne wartości,



Rys. 4. Optima cząstkowe (przykład 4)

Źródło: opracowanie własne.

– II grupy (wyrażenia (5) i (6)), ponieważ parametry m_k w przypadku obu celów są nieokreślone (ZRD jest otwarty w kierunku minimalizacji kryteriów)!

Reasumując, piąty mankament metakryterium polega na tym, że w przypadku niektórych problemów decyzyjnych sformułowanie tej zagregowanej funkcji jest niewykonalne. Nie ma bowiem możliwości zapisania metakryterium, gdy wystąpią jednocześnie następujące ograniczenia: a) cele przedstawione są w różnych jednostkach bądź skali, b) kryteria mogą przyjmować ujemne wartości w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych, c) parametry m_k lub M_k są nieokreślone.

8. Mankamenty metakryterium wymieniane w literaturze światowej

Na koniec warto zwrócić uwagę na to, jak metakryterium jest postrzegane w literaturze zagranicznej. Wśród najpoważniejszych mankamentów metakryterium, sygnalizowanych w artykułach obcojęzycznych, wymienia się:

– możliwość wystąpienia globalnie niewypukłego zbioru Pareto [Das, Dennis 1997],
– możliwość wystąpienia maksymalizowanej niewklęsłej lub minimalizowanej niewypukłej funkcji metakryterium,
– trudności związane z doborem wag dla poszczególnych kryteriów zwłaszcza wówczas, gdy cele nie są porównywalne [Messac, Mullur 2007],

– ryzyko pominięcia niektórych rozwiązań Pareto-optymalnych w przypadku generowania zbioru Pareto dla liniowych funkcji metakryterium [Arora 2007],
– niemożność ustalenia konkretnego rozwiązania kompromisowego w punkcie znajdującym się między optimami cząstkowymi w przypadku liniowych funkcji celu dla poszczególnych kryteriów[5].

Poza ostatnią kwestią niedoskonałości metakryterium, na które zwracają uwagę autorzy zagraniczni, dotyczą innych aspektów aniżeli te, na których skoncentrowano się w pracy. Może to wynikać m.in. z tego, że autorzy literatury światowej rzadko wykorzystują metakryterium do ustalania konkretnego rozwiązania kompromisowego. Stosowane jest ono raczej jako narzędzie do generowania całego zbioru rozwiązań Pareto-optymalnych[6].

Opracowano już sporo różnych alternatywnych procedur, które zdaniem ich twórców nie pociągają za sobą zaobserwowanych utrudnień lub je znacząco ograniczają. W literaturze światowej za metody lepsze od pierwotnej wersji metakryterium, lecz zachowujące jego główne założenia, uznaje się m.in:
– *compromise programming AOF* (metoda ta ma zastosowanie także wówczas, gdy zbiór Pareto jest wklęsły, ale problem doboru wielkości parametrów nadal istnieje),
– *weighted min-max method* (jej dwie podstawowe wady to uciążliwy dobór parametrów oraz nieróżniczkowalność funkcji),
– *goal programming* (programowanie celowe, w którym odchylenia „in plus” i „in minus” od pożądanego wyniku kryterium cząstkowego są niestety traktowane równorzędnie),
– *physical programming* (w którym definiowanie wag celów cząstkowych jest zbędne) [Messac i in. 1996].

Powyższe metody nie są jednak do końca kompletną odpowiedzią na mankamenty metakryterium zilustrowane w rozdziałach 3–7 niniejszej pracy. Dlatego w następnym rozdziale zaproponowane zostanie zupełnie nowe podejście.

9. Próba udoskonalenia metody

Biorąc pod uwagę zaprezentowane wady omawianej metody, podejmijmy próbę zmodyfikowania metakryterium w taki sposób, aby jego pierwotne założenia zostały zachowane i aby było ono pozbawione dostrzeżonych ograniczeń. Przyjrzyjmy się poniższemu modelowi:

[5] Autorzy pracy [Grodzevich, Romanko 2006] zaznaczają jednak, że jeżeli zamiast metody simpleksowej wykorzysta się inne procedury (zob. np. metoda punktu wewnętrznego lub wprowadzenie kwadratowych funkcji celów cząstkowych), to znalezienie jednego konkretnego rozwiązania między optimami cząstkowego jest możliwe.

[6] Zobacz http://en.wikipedia.org/wiki/Multiobjective_optimization oraz [Collette, Siarry 2008; Cotrutz i in. 2001, s. 4; Messac i in. 2000; Messac, Mattson 2003; Sharaf, El-Gammal 2009].

$$(0) \quad y \to \max$$
$$(1) \quad h_1(x) \geq y$$
$$(2) \quad h_k(x) \geq w_k y \qquad k = 2,...,K$$
$$(3) \quad x \in ZRD, y \in [0,1],$$

gdzie: y – minimalny gwarantowany stopień realizacji kryterium o najniższym znaczeniu ($y \in [0,1]$),
$h_k(x)$ – stopień realizacji k-tego kryterium,
w_k – waga k-tego celu,
K – liczba kryteriów cząstkowych ważnych dla decydenta.

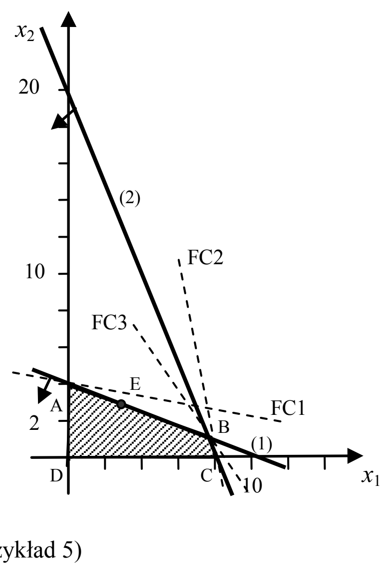
Uwaga, tym razem stopień realizacji wyznaczamy nieco inaczej. Wzory (7) i (8) obowiązują odpowiednio dla kryterium maksymalizowanego i minimalizowanego.

$$h_k(x) = \frac{f_k(x) - m_k^*}{M_k - m_k^*}, \tag{7}$$

$$h_k(x) = \frac{M_k^* - f_k(x)}{M_k^* - m_k}, \tag{8}$$

gdzie: m^*_k, M^*_k – wartość k-tego kryterium w najmniej korzystnym dla niego punkcie, wskazującym optimum cząstkowe dla innego celu.

Przetestujmy zaproponowaną modyfikację metody, analizując przykład 5 (zob. rys. 5). Niech wagi wynoszą $w_1 = 4$, $w_2 = 1$, $w_3 = 3$.



Rys. 5. Optima cząstkowe (przykład 5)

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 5

$$\begin{array}{lrcl}
(01) & x_1 + 5x_2 & \to & \max \\
(02) & 5x_1 + x_2 & \to & \max \\
(03) & 3x_1 + 2x_2 & \to & \max \\
(1) & 2x_1 + 5x_2 & \leq & 20 \\
(2) & 5x_1 + 2x_2 & \leq & 40 \\
(3) & x_1, \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

W tabeli 5 podano wartości funkcji celu poszczególnych kryteriów w punktach stanowiących optima cząstkowe.

Tabela 5. Wartości kryteriów cząstkowych w punktach A, B i C (przykład 5)

Punkty\wartości kryteriów	Kryterium (01)	Kryterium (02)	Kryterium (03)
A ($x_1 = 0$, $x_2 = 4$)	20 (najlepiej)	4 (najgorzej)	8 (najgorzej)
B ($x_1 = 160/21$, $x_2 = 20/21$)	260/21 = 12,38	820/21 = 39,05	520/21 = 24,76 (najlepiej)
C ($x_1 = 8$, $x_2 = 0$)	8 (najgorzej)	40 (najlepiej)	24

Źródło: opracowanie własne.

Model pozwalający wyłonić rozwiązanie kompromisowe przyjmie następującą postać.

$$\begin{array}{ll}
(0) & y \to \max \\
(1) & \dfrac{(x_1 + 5x_2) - 8}{20 - 8} \geq 4y \\
(2) & \dfrac{(5x_1 + x_2) - 4}{40 - 4} \geq y \\
(3) & \dfrac{(3x_1 + 2x_2) - 8}{\dfrac{520}{21} - 8} \geq 3y \\
(4) & 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\
(5) & 5x_1 + 2x_2 \leq 40 \\
(6) & x_1, \quad x_2 \geq 0, \quad y \in [0,1]
\end{array}$$

W warunkach (1)–(3) skorzystano z formuły (7), gdyż wszystkie trzy rozpatrywane cele są maksymalizowane, przy czym wartości parametrów m^*_k zaczerpnięto z tab. 5.

Punkt kompromisowy (E) zaznaczono na rys. 5, a dane dotyczące rozwiązania kompromisowego zebrano w tab. 6. Wynika z nich, że minimalny stopień realizacji najmniej ważnego kryterium (02) wynosi przynajmniej 17% ($y = 0,169$), a faktycznie jest on równy 49,5%. Pozostałe kryteria uzyskały stopnie realizacji na poziomie 68% (cel 1.) i 51% (cel 3.). Ograniczenia (1) i (3) są wiążące.

Tabela 6. Informacje o rozwiązaniu kompromisowym (przykład 5)

Rozwiązanie kompromisowe	Kryterium (01)	Kryterium (02)	Kryterium (03)
E ($x_1 = 3{,}87$, $x_2 = 2{,}45$, $y = 0{,}169$)	16,13	21,81	16,52
Stopnie realizacji kryteriów (tj. wartości lewych stron pierwszych trzech warunków)	0,6774	0,4946	0,5081
Wartości prawych stron warunków	0,6774	0,1694	0,5081

Źródło: opracowanie własne.

Zanim wyciągniemy wnioski dotyczące zaproponowanej procedury, warto przeanalizować jeszcze jeden, bardziej złożony, problem (przykład 6), w którym to kryteria będą miały różne kierunki optymalizacji, zmiennych decyzyjnych będzie więcej i będą mogły one przyjmować także wartości ujemne. W tabeli 7 znajdują się wartości kryteriów cząstkowych dla interesujących nas punktów.

Przykład 6

$$
\begin{array}{rl}
(01) & x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max \\
(02) & 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 0x_4 \to \min \\
(03) & 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max \\
(1) & 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 \le 100 \\
(2) & x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 \le 80 \\
(3) & 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \ge -50 \\
(4) & x_2,\ x_3 \ge 0
\end{array}
$$

Tabela 7. Wartości kryteriów cząstkowych w punktach A, B i C (przykład 6)

Punkty	Kryterium (01)	Kryterium (02)	Kryterium (03)
A	66,1538 (najlepiej)	238,4615	147,6923
B	34,2105	–134,2110 (najlepiej)	–65,2632 (najgorzej)
C	–1350 (najgorzej)	1250 (najgorzej)	350 (najlepiej)

Źródło: opracowanie własne.

Jeżeli przyjmiemy, że wagi wynoszą odpowiednio 1, 2, 4, to ostateczne zadanie będzie miało następującą postać:

$$
\begin{aligned}
&(0)\quad y \to \max \\
&(1)\quad \frac{(x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4) - (-1350)}{66{,}1539 - (-1350)} \geq y \\
&(2)\quad \frac{1250 - (5x_1 + 2x_2 + 6x_3)}{1250 - (-134{,}21)} \geq 2y \\
&(3)\quad \frac{(3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4) - (-65{,}26)}{350 - (-65{,}26)} \geq 4y \\
&(4)\quad 2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 \leq 100 \\
&(5)\quad x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 \leq 80 \\
&(6)\quad 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq -50 \\
&(7)\quad x_2, x_3 \geq 0, y \in [0,1]
\end{aligned}
$$

Tabela 8. Informacje o rozwiązaniu kompromisowym (przykład 6)

Rozwiązanie kompromisowe	Kryterium (01)	Kryterium (02)	Kryterium (03)
E (x_1 = 146,18, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = –192,37, y = 0,1875)	–623,289	730,9211	246,1842
Stopnie realizacji kryteriów (tj. wartości lewych stron pierwszych trzech warunków)	0,513158	0,375	0,75
Wartości prawych stron warunków	0,1875	0,375	0,75

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 8 zamieszczono wyniki dotyczące rozwiązania kompromisowego. Wynika z nich, że minimalny stopień realizacji najmniej ważnego kryterium (01) wynosi przynajmniej 18,75% (y = 0,1875), a faktycznie jest on równy 51,32%. Pozostałe kryteria uzyskały stopnie realizacji na poziomie 37,5% (cel 2.) i 75% (cel 3.). Ograniczenia (2) i (3) są wiążące.

10. Podsumowanie

Niniejsza praca miała na celu zdiagnozowanie ograniczeń metakryterium jako jednej z metod stosowanych w ciągłej optymalizacji wielokryterialnej oraz zaproponowanie pewnych modyfikacji w pierwotnej procedurze, dzięki którym będzie ona pozbawiona zaobserwowanych wad.

Przyjrzyjmy się wprowadzonym zmianom i przeanalizujmy ich konsekwencje.

Po pierwsze, oryginalna metoda dopuszcza formułowanie metakryterium na różne sposoby, w zależności od tego, czy kryteria wyrażone są w tej samej skali, tej samej jednostce oraz czy cele mogą przyjmować w rozpatrywanym zbiorze rozwiązań wartości ujemne. Zauważmy jednak, że w niektórych przypadkach istnieje kilka poprawnych możliwości zapisania funkcji metakryterium, a każdej z nich może odpowiadać inny rezultat końcowy! Fakt ten wprowadza spore zamieszanie w procesie podejmowania decyzji. Tymczasem w rozdziale 9 zaprezentowano tylko jeden, uniwersalny sposób generowania planu kompromisowego. Ujednolicenie metody należy potraktować jako istotne udogodnienie, gdyż w nowej wersji zawsze uzyskamy dokładnie jedną odpowiedź i nie będziemy mieli wątpliwości, który sposób w danym przypadku jest najbardziej odpowiedni.

Po drugie, stosowanie pierwotnej procedury często prowadzi do otrzymywania planów, które nie odzwierciedlają przyjętych przez decydenta wag dla poszczególnych kryteriów. W zmodyfikowanej metodzie ważność celów jest bardziej widoczna w ostatecznym rozwiązaniu. Najmniej ważne kryterium uzyskuje stopień realizacji równy co najmniej y, natomiast pozostałe cele osiągają stopnie realizacji wynoszące nie mniej niż $w_k{\cdot}y$. Warunki (1)–(2) w modelu ogólnym podanym w rozdziale 9 nie mogą być zapisane w postaci równań, gdyż w takiej sytuacji analizowane problemy byłyby najczęściej sprzeczne. Tu warto zwrócić uwagę na jedną kwestię. Otóż w przykładzie 5 hierarchia faktycznych stopni realizacji kryteriów cząstkowych jest adekwatna do zadeklarowanych wag (por. 0,6774; 0,4946; 0,5081 i wagi 4, 1, 3). Natomiast w przykładzie 6 kryterium najmniej istotne (cel 1.) zdobyło wartość wyższą aniżeli kryterium od niego ważniejsze (por. 0,5131; 0,375; 0,75 i wagi 1, 2, 4). Takie sytuacje mogą mieć miejsce, gdy w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych optimum cząstkowe mało znaczącego kryterium znajduje się stosunkowo blisko punktu wyznaczającego najlepsze rozwiązanie dla celu uznanego przez decydenta za najważniejszy.

Po trzecie, wprowadzone zmiany umożliwiają wskazanie planu kompromisowego niekoniecznie w wierzchołku ZRD, lecz np. w konkretnym punkcie jego brzegu (zob. przykład 5), a nawet w środku wspomnianego zbioru (zob. przykład 6). Dzieje się tak w przypadku zadań z przeciwstawnymi kryteriami cząstkowymi! Z kolei pierwotna metoda jest tak opracowana, że decydent, dla zbioru bardzo zróżnicowanych kombinacji wag kryteriów, może uzyskiwać zawsze to samo rozwiązanie.

Po czwarte, w oryginalnej wersji metakryterium istnieje ryzyko otrzymania, dla danej kombinacji wag, zbioru zupełnie różnych, ze względu na stopnie realizacji poszczególnych celów, rozwiązań. Stosując nowe podejście, uzyskamy zawsze mało liczny (najczęściej jednoelementowy) zbiór decyzji o zbliżonej charakterystyce.

Po piąte, dzięki formułom (7) i (8) metoda znajduje zawsze zastosowanie, tzn. nawet wówczas, gdy zbiór rozwiązań dopuszczanych jest otwarty w kierunku minimalizacji (maksymalizacji) kryterium maksymalizowanego (minimalizowanego).

Po szóste, warto zauważyć, że w rozdziale 9 zaproponowano maksymalizację minimalnego gwarantowanego stopnia realizacji najmniej istotnego kryterium. Gdybyśmy jednak postanowili maksymalizować wartość y dla innego celu (średnio istotnego lub nawet najważniejszego), odpowiednio zmieniając parametry w_k dla pozostałych celów, to nie miałoby wpływu na uzyskane rozwiązanie kompromisowe.

Nowa procedura szukania rozwiązania kompromisowego nie zakłada formułowania metakryterium w postaci zagregowanej funkcji stanowiącej sumę (średnią) ważoną wszystkich kryteriów cząstkowych, zatem można sobie zadać pytanie, czy ma ona jeszcze cokolwiek wspólnego z pierwotną metodą. Jednak mimo wprowadzenia dość istotnych zmian, zaproponowany sposób zachowuje podstawowe założenia metakryterium, czyli możliwość określenia znaczenia, jakie dla decydenta mają poszczególne cele, oraz możliwość normalizowania poprzez stopnie realizacji nieporównywalnych kryteriów cząstkowych.

Literatura

Anholcer M. [2009], *Badania operacyjne*, Materiały Dydaktyczne 239, Wyd. Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.

Arora J.S. [2007], *Optimization of Structural and Mechanical Systems*, World Scientific Publishing Co.

Brzęczek T. [2010], *Optymalizacja wielocelowa*, [w:] T. Brzęczek, H. Gaspars-Wieloch, B. Godziszewski, *Podstawy badań operacyjnych i ekonometrii*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań.

Chang C.T. [2011], *Multi-choice goal programming with utility functions*, "European Journal of Operational Research", 215 (2011), s. 439–445.

Collette Y., Siarry P. [2008], *On the Sensitivity of Aggregative Multiobjective Optimization Methods*, "Journal of Computing and Information Technology" 1, s. 1–13.

Cotrutz C., Lahanas M., Kappas C., Baltas D. [2001], *A multiobjective gradient based dose optimization algorithm for external beam conformal radiothepary*, "Physics in Medicine and Biology", vol. 46, no. 8.

Das I., Dennis J. [1997], *A Closer Look at Some Drawbacks of Minimising Weighted Sums of Objectives for Pareto Set Generation in Multi-criteria Optimisation Problems*, "Structural Optimisation" 14, s. 63–69.

Grodzevich O., Romanko O. [2006], *Normalization and Other Topics in Multi-Objective Optimization*, Proceedings of the Fields – MITACS Industrial Problems Workshop.

Lai Y.-J., Hwang C.-L. [1994], *Fuzzy Multi Objective Decision Making: Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin.

Manikowski A., Tarapata Z. [2001], *Ocena projektów gospodarczych*, cz. I: *Modele i metody*, Difin, Warszawa.

Marcinkowski J. [2008], *Optymalizacja wielokryterialna*, [w:] *Badania operacyjne*, red. W. Sikora, PWE, Warszawa.

Marler R.T., Arora J.S. [2004], *Survey on multi-objective methods for engineering*, "Structural and Multidisciplinary Optimization" 26 (6), s. 369–395.

Messac A., Gupta S., Akbulut B. [1996], *Linear Physical Programming: A new approach to multiple objective optimization*, "Transactions on Operational Research" 8, s. 39–59.

Messac A., Mattson C.A. [2003], *Generating Well-Distributed Sets of Pareto Points for Engineering Design Using Physical Programming*, "Optimization and Engineering", vol. 3, no. 4, s. 431–450.

Messac A., Mullur A.A. [2007], *Multiobjective Optimization: concepts and methods*, [w:] *Optimization of Structural and Mechanical Systems*, ed. J.S. Arora, World Scientific Publishing Co.

Messac A., Puemi-Sukam C., Melachrinoudis E. [2000], *Aggregate Objective Functions and Pareto Frontiers: Required Relationships and Practical Implications*, "Optimization and Engineering", vol. 1, no. 2, s. 171–188.

Sharaf A.M., El-Gammal A.A. [2009], *A Multi Objective Multi-Stage Particle Swarm Optimization MOPSO Search Scheme for Power Quality and Loss Reduction on Radial Distribution System*, International Conference on Renewable Energies and Power Quality (ICREPQ' 2009), Valencia 15–17, April 2009.

Trzaskalik T. [2008], *Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*, wyd. II zmienione, PWE, Warszawa.

Yang T, Ignizio J.P., Kim H.J. [1991], *Fuzzy programming with nonlinear membership functions: Piecewise linear approximation*, “Fuzzy Sets and Systems” 41, s. 39–53.

THE AGGREGATE OBJECTIVE FUNCTION IN THE CONTINUOUS VERSION OF THE MULTICRITERIA OPTIMIZATION – ANALYSIS OF THE SHORTCOMINGS OF THE METHOD AND ATTEMPT AT IMPROVING IT

Summary: The aggregate objective function (*AOF*) is one of the methods applied in the discrete and continuous version of the multiobjective optimization. In the first case the procedure is used to prepare ratings. In the other one it finds application in the setting of a compromise solution or in the Pareto front searching. The *AOF* comes very offen in useful in practical discrete problems and gives then quite reasonable results. Nevertheless in the continuous version the application of the *AOF* as a compromise solution searching tool may lead to controversial answers. The author illustrates by means of numerical examples the shortcomings of the method and presents a new approach which allows to solve any multicriteria problem and to obtain more logical answers.

Keywords: meta-criterion (weighed sum of objective functions), continuous version of the multi-objective optimization, compromise solution, implementation degrees.