



Artur Wymysłowski

Numeryczne metody  
projektowania termomechanicznego  
w montażu elektronicznym



**Artur Wymysłowski**

**Numeryczne metody projektowania  
termomechanicznego  
w montażu elektronicznym**



*Pracę tę dedykuję mojej Rodzinie – mądrej i pięknej żonie  
Izie oraz dzieciom – dużemu Wojtkowi i małej Natalce, któ-  
rym dziękuję za ich wyjątkową miłość, cierpliwość i wyrozu-  
miałość.*

*Praca ta powstała dzięki pomocy i współpracy wielu osób,  
którym składam serdeczne podziękowania. Szczególnie pragnę podziękować Panom:  
Profesorowi Kazimierzowi Friedelowi oraz Profesorowi Janowi Felbie  
za pomoc w realizacji pracy i merytoryczne wsparcie.*

*Autor*

## Spis treści

Akronimy.....	7
Spis oznaczeń.....	12
1. Wstęp.....	15
2. Mikroelektronika a montaż elektroniczny.....	21
2.1. Rola i znaczenie montażu elektronicznego.....	26
2.2. Rozwój układów scalonych a rozwój technik montażu elektronicznego.....	28
2.3. Niezawodność urządzeń elektronicznych a montaż elektroniczny.....	37
2.4. Uszkodzenia w montażu elektronicznym.....	44
2.4.1. Wytrzymałość materiałów.....	48
2.4.1.1. Stan naprężeń i odkształceń.....	49
2.4.1.2. Metody doświadczalne badania wytrzymałości materiałów.....	57
2.4.2. Stan naprężenia na skutek obciążeń termomechanicznych.....	61
2.5. Odprowadzanie energii cieplnej w montażu elektronicznym.....	63
2.5.1. Rezystancja cieplna.....	67
2.5.2. Rezystancja cieplna styku.....	68
2.6. Założenia, cele i kierunki pracy.....	74
3. Metody i algorytmy projektowania w montażu elektronicznym.....	78
3.1. Metody projektowania numerycznego.....	80
3.1.1. Modelowanie numeryczne; metoda elementów skończonych.....	82
3.1.1.1. Metoda FEM.....	86
3.1.1.2. Narzędzia do modelowania numerycznego metodą FEM.....	95
3.1.2. Planowanie eksperymentów.....	98
3.1.2.1. Plany eksperymentów.....	100
3.1.2.2. Metody interpretacji wyników eksperymentu.....	104
3.1.3. Analiza powierzchni odpowiedzi.....	110
3.1.4. Zarządzanie jakością oraz planowanie jakości.....	114
3.1.4.1. Optymalizacja.....	118
3.1.4.2. Analiza czułości.....	120
3.1.4.3. Projektowanie tolerancji.....	124
3.2. Zastosowanie algorytmów w projektowaniu numerycznym.....	127
3.2.1. Algorytm iteracyjny.....	129
3.2.2. Algorytm kompaktowy.....	130
3.2.3. Znaczenie algorytmów w projektowaniu montażu elektronicznego.....	132
3.3. Zaawansowane algorytmy kompaktowe.....	135
3.3.1. Algorytm sekwencyjny.....	136
3.3.2. Algorytm parametryczno-sekwencyjny.....	138
3.3.2.1. Zmodyfikowany kwadrat łąciński.....	139
3.3.2.2. Interpolacja powierzchni odpowiedzi metodą Kriging.....	143
3.3.2.3. Oszacowanie błędu modelu powierzchni odpowiedzi.....	150
3.3.2.4. Opracowany program komputerowy do projektowania numerycznego.....	153
3.3.4. Przykład zastosowania algorytmów w projektowaniu montażu elektronicznego.....	155
4. Numeryczne metody modelowania i prognozowania uszkodzeń w montażu elektronicznym.....	162
4.1. Uszkodzenia termomechaniczne a właściwości i modele materiałowe.....	163

---

4.1.1. Modele materiałowe.....	166
4.1.1.1. Model sprężysty.....	166
4.1.1.2. Model plastyczny.....	167
4.1.1.3. Model lepki.....	169
4.1.2. Wpływ temperatury na zachowanie modeli materiałowych.....	170
4.2. Wytrzymałość złącz bimateriałowych dla połączeń drutowych i bondingu.....	173
4.2.1. Modele materiałowe dla złącza bimateriałowego.....	176
4.2.2. Stan naprężenia dla złącza bimateriałowego .....	180
4.2.3. Kryteria uszkodzenia dla złącza bimateriałowego.....	194
4.2.3.1. Pękanie kruche i plastyczne.....	198
4.2.3.2. Rozwarstwienie.....	203
4.2.4. Przykład obliczeń analitycznych.....	207
4.3. Pełzanie i relaksacja naprężeń dla połączeń klejonych i wyprasek.....	209
4.3.1. Modele materiałowe dla połączeń klejonych i wyprasek.....	213
4.3.2. Relaksacja naprężeń.....	217
4.3.3. Pełzanie i pękanie pełzaniowe.....	223
4.3.4. Przykład pomiarów doświadczalnych i obliczeń numerycznych dla klejów przewodzących ciepłnie.....	230
4.4. Zmęczenie połączeń lutowanych.....	236
4.4.1. Modele materiałowe połączeń lutowanych.....	241
4.4.2. Wytrzymałość i trwałość zmęczeniowa.....	243
4.4.2.1. Kryterium naprężenia.....	248
4.4.2.2. Kryterium odkształcenia.....	248
4.4.2.3. Kryterium energii niesprężystej.....	251
4.4.2.4. Kryterium ustalonej propagacji pęknięcia.....	253
4.4.3. Przykład obliczeń numerycznych dla montażu typu flip–chip.....	256
5. Przykład kompleksowego projektowania numerycznego.....	263
5.1. Opis montażu elektronicznego w obudowie typu QFN.....	263
5.2. Model numeryczny układu QFN.....	265
6. Podsumowanie.....	275
Bibliografia.....	279

## Akronimy

- ACA – anizotropowe kleje przewodzące (*Anisotropic Conductive Adhesive*)
- AI – sztuczna inteligencja (*Artificial Intelligence*)
- AIC – analogowe układy scalone (*Analog Integrated Circuits*)
- APDL – skryptowy język projektowania programu Ansys (*Ansys Parametric Design Language*)
- ATC – przyspieszone cyklicznie zmienne testy cieplne (*Accelerated Thermal Cycling*)
- BC – warunki brzegowe (*Boundary Conditions*)
- BEM – metoda elementów brzegowych lub elementu brzegowego (*Boundary Element Method*)
- BGA – obudowa z kontaktami sferycznymi w siatce rastrowej (*Ball Grid Array*)
- CAE – inżynieria wspomagana komputerowo (*Computer Aided Engineering*)
- CC – nośniki struktur półprzewodnikowych (*Chip Carrier*)
- CLT – centralne twierdzenie graniczne (*Central Limit Theorem*)
- CM – modele kompaktowe (*Compact Models*)
- CMEMS – mikrosystemy ceramiczne (*Ceramic Micro Electro-Mechanical Systems*)
- CMNLP – modele kompaktowe w programowaniu nieliniowym (*Compact Models Non-linear Programming*)
- COB – montaż struktur półprzewodnikowych – nieobudowanych na płycie podłożowej (*Chip on Board*)
- COF – montaż struktur półprzewodnikowych na podłożu giętkim (*Chip on Flex*)
- COG – montaż struktur półprzewodnikowych na podłożu szklanym (*Chip on Glass*)
- CPS – ceramiczny czujnik ciśnienia (*Ceramic Pressure Sensor*)
- CTE – współczynnik rozszerzalności cieplnej (*Coefficient of Thermal Expansion*)
- DACE – projektowanie i analiza eksperymentów komputerowych (*Design and Analysis of Computer Experiments*)



---

DCA	– bezpośredni montaż struktur półprzewodnikowych na podłożu ( <i>Direct Chip Attachment</i> )
DIC	– cyfrowe układy scalone ( <i>Digital Integrated Circuits</i> )
DIP	– obudowa dwurzędowa ( <i>Dual in Line Package</i> )
DNP	– odległość od punktu neutralnego ( <i>Distance to Neutral Point</i> )
DoE	– planowanie eksperymentów ( <i>Design of Experiments</i> )
EA	– algorytmy ewolucyjne ( <i>Evolutionary Algorithms</i> )
ECA	– kleje przewodzące elektrycznie ( <i>Electrical Conductive Adhesives</i> )
EI	– spodziewana poprawa ( <i>Expected Improvement</i> )
FBGA	– obudowa z kontaktami sferycznymi w siatce o bardzo małym rastrze ( <i>Fine-pitch Ball Grid Array</i> )
FC	– montaż nieobudowanych struktur półprzewodnikowych ( <i>Flip Chip</i> )
FDM	– metoda różnic skończonych ( <i>Finite Difference Method</i> )
FEM	– metoda elementów skończonych ( <i>Finite Element Method</i> )
FLGA	– obudowa z kontaktami podwyższonymi w siatce o bardzo małym rastrze ( <i>Fine-pitch Land Grid Array</i> )
FPCB	– giętka płytką obwodu drukowanego ( <i>Flex Printed Circuit Board</i> )
FPT	– technologia montażu z małym rastrem ( <i>Fine-Pitch Technology</i> )
FVM	– metoda objętości skończonych ( <i>Finite Volume Method</i> )
GA	– algorytmy genetyczne ( <i>Genetic Algorithms</i> )
GiGo	– „śmieci na wejściu, śmieci na wyjściu” ( <i>Garbage in Garbage out</i> )
GSI	– układy scalone o gigawielkiej skali integracji ( <i>Giga Scale Integration</i> )
HB	– „wartość większa jest lepsza” ( <i>Higher is Better</i> )
HCF	– zmęczenie wysokocykliczne ( <i>High Cycle Fatigue</i> )
HCNLP	– kosztowne metody programowania nieliniowego ( <i>High Cost Non-linear Programming</i> )
HVQFN	– czterorzędowa bezkońcówkowa obudowa płaska o dużym przewodnictwie cieplnym ( <i>Heatspread Very Thin Quad Flat Non-leaded Package</i> )
IC	– układy scalone ( <i>Integrated Circuits</i> )

---

IPC	– międzynarodowe Stowarzyszenie Przemysłu Elektronicznego ( <i>Assosiation Connecting Electronics Industries</i> )
ISA	– izotropowe kleje przewodzące ( <i>Isotropic Conductive Adhesive</i> )
JEDEC	– międzynarodowa Rada Inżynierów Aparatury Elektronicznej ( <i>Joint Electronic Devices Engineering Council</i> )
KGB	– płytki wzorcowa ( <i>Konwn Good Board</i> )
KGD	– wzorcowy układ scalony ( <i>Known Good Die</i> )
LCF	– zmęczenie niskocykliczne ( <i>Low Cycle Fatigue</i> )
LGA	– obudowa z kontaktami podwyższonymi w siatce rastrowej ( <i>Land Grid Array</i> )
LH	– kwadrat łaciński ( <i>Latin Hypercube</i> )
LP	– programowanie liniowe ( <i>Linear Programming</i> )
LSI	– układy scalone dużej skali integracji ( <i>Large Scale Integration</i> )
LTCC	– niskotemperaturowa współwypalana ceramika ( <i>Low Temperature Cofiring Ceramic</i> )
MCM	– moduł wielostrukturalny ( <i>Multi Chip Module</i> )
MEMS	– mikrosystem, tj. system mikroelektromechaniczny ( <i>Mirco Elektro-Mechanical System</i> )
MES	– metoda elementów skończonych lub metoda elementu skończonego (odpowiednik polski, ang. FEM)
MLH	– zmodyfikowany kwadrat łaciński ( <i>Modified Latin Hypercube</i> )
MSI	– układy scalone o średniej skali integracji ( <i>Medium Scale Integration</i> )
MtM	– więcej niż prawo Moore ( <i>More than Moore</i> )
NB	– wartość nominalna jest lepsza ( <i>Nominal is Better</i> )
NLP	– programowanie nieliniowe ( <i>Non-linear Programming</i> )
OE	– optoelektronika ( <i>Opto-Electronics</i> )
OEIC	– optoelektroniczne układy scalone ( <i>Opto-electronics Integrated Circuits</i> )
PCB	– płytki drukowana ( <i>Printed Circuit Board</i> )
PDE	– równania różniczkowe cząstkowe ( <i>Partial Differentail Equations</i> )
PiP	– integracja na poziomie upakowania ( <i>Package in Package</i> )

---

PKG	–	upakowanie ( <i>Package</i> )
PoP	–	integracja na poziomie podłoża ( <i>Package on Package</i> )
PTH	–	montaż przewlekany układów ( <i>Package Through Hole</i> )
QFN	–	czterorzędowa bezkońcówkowa obudowa płaska ( <i>Quad Flat Pack Non-leaded Package</i> )
RF	–	częstotliwości radiowe ( <i>Radio Frequency</i> )
RFIC	–	radiowe układy scalone ( <i>Radio Frequency Integrated Circuits</i> )
RSA	–	analiza powierzchni odpowiedzi ( <i>Response Surface Analysis</i> )
RSM	–	modelowanie powierzchni odpowiedzi ( <i>Response Surface Method</i> )
SB	–	„wartość mniejsza jest lepsza” ( <i>Smaller is Better</i> )
SCM	–	moduł jednostrukturalny ( <i>Single Chip Module</i> )
SiP	–	integracja na poziomie półprzewodnikowej płytki podłożowej ( <i>System in Package</i> )
SIP	–	obudowa jednorzędowa ( <i>Single-in-Line Package</i> )
SLIM	–	moduł zintegrowany jednopoziomowy ( <i>Single Level Integrated Module</i> )
SMT	–	technologia montażu powierzchniowego ( <i>Surface Mount Technology</i> )
SoB	–	integracja systemów na poziomie płytki obwodu drukowanego ( <i>System on Board</i> )
SoC	–	integracja systemów na poziomie struktury półprzewodnikowej lub układu scalonego ( <i>System on Chip</i> )
SoP	–	integracja na poziomie podłoża ( <i>System on Package</i> )
SoPoB	–	integracja SoP na poziomie płytki obwodu drukowanego ( <i>SoP on Board</i> )
SON	–	mała obudowa bezkońcówkowa ( <i>Small Outline Non-leaded Package</i> )
SSI	–	układy scalone o małej skali integracji ( <i>Small Scale Integration</i> )
SSoC	–	integracja oddzielnych systemów na poziomie struktury półprzewodnikowej lub układu scalonego ( <i>Subsystem on Chip</i> )
TAB	–	automatyczny montaż z udziałem taśmy ( <i>Tape Automated Bonding</i> )
TCA	–	kleje przewodzące ciepłnie ( <i>Thermal Conductive Adhesives</i> )
TCR	–	rezystancja cieplna styku ( <i>Thermal Contact Resistance</i> )

---

THT	–	technologia montażu przewlekanego ( <i>Through <b>H</b>ole <b>T</b>echnology</i> )
TSOP	–	cienka obudowa miniaturowa ( <i><b>T</b>hin <b>S</b>hrink <b>O</b>utline <b>P</b>ackaging</i> )
TSSOP	–	cienka i wąska obudowa miniaturowa ( <i><b>T</b>hin <b>S</b>hrink <b>S</b>mall <b>O</b>utline <b>P</b>ackaging</i> )
ULSI	–	układy scalone ultrawielkiej skali integracji ( <i><b>U</b>ltra <b>L</b>arge <b>S</b>cale <b>I</b>ntegration</i> )
VLSI	–	układy scalone wielkiej skali integracji ( <i><b>V</b>ery <b>L</b>arge <b>S</b>cale <b>I</b>ntegration</i> )
VP	–	projektowanie numeryczne ( <i><b>V</b>irtual <b>P</b>rototyping</i> )
3D	–	montaż objętościowy lub przestrzenny ( <i><b>3D</b> <b>P</b>ackage</i> )

## Spis oznaczeń

$\bar{s}$	– wektor naprężenia, Pa
$\nabla$	– gradient
$\Delta$	– zmiana, przyrost
$a$	– współczynnik dyfuzyjności cieplnej (wyrównywania temperatury), m <sup>2</sup> /s
$A$	– pole powierzchni, m <sup>2</sup>
$a_T$	– współczynnik przesunięcia
$c$	– ciepło właściwe (pojemność cieplna właściwa), J/(kg·K)
$c_{ijkl}$	– składowe tensora sztywności
$C$	– pojemność cieplna, J/K
$c_p$	– ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, J/(kg·K)
$c_v$	– ciepło właściwe przy stałej objętości, J/(kg·K)
$\mathbf{C}$	– macierz sztywności
$E$	– moduł Younga, Pa
$E_k$	– energia kinetyczna, J
$E_p$	– energia potencjalna, J
$f$	– częstotliwość, Hz
$F$	– siła, N
$g$	– przyspieszenie ziemskie, m/s <sup>2</sup>
$G$	– moduł sztywności (sprężystości poprzecznej), Pa
$h$	– entalpia właściwa, J/kg
$H$	– entalpia, J
$K$	– moduł sprężystości objętościowej
$\mathbf{k}$	– macierz sztywności dla pojedynczego elementu

---

$\mathbf{K}$	– globalna macierz sztywności
$k$	– stała Boltzmana ( $8,61706 \cdot 10^{-5}$ eV/K)
$K$	– moduł ściśliwości objętościowej (sztywności postaciowej), Pa
$l$	– średnia droga swobodna, m
$p$	– ciśnienie, Pa
$Q$	– ilość ciepła, J
$\dot{Q}$	– strumień ciepła, W
$q$	– gęstość strumienia ciepła dla przypadku jednowymiarowego, W/m <sup>2</sup>
$\bar{q}$	– gęstość strumienia ciepła, W/m <sup>2</sup>
$R$	– stała gazowa (8,3144 J/(mol·K))
$R_e$	– granica plastyczności (umowna granica plastyczności), Pa
$R_m$	– wytrzymałość na rozciąganie, Pa
$R_{pr}$	– granica proporcjonalności, Pa
$R_T$	– rezystancja cieplna, T/K
$R_u$	– naprężenie rozrywające, Pa
$S$	– entropia, J/K
$t$	– czas, s
$T$	– temperatura, K
$T_a$	– temperatura otoczenia, K
$T_s$	– temperatura próbki, K
$U$	– energia wewnętrzna, J
$\mathbf{u}$	– wektor przemieszczeń, m
$V$	– objętość, m <sup>3</sup>
$W$	– praca, J
$\alpha$	– współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej, 1/K
$\alpha_c$	– współczynnik konwekcyjnego przekazywania ciepła
$\gamma$	– odkształcenie postaciowe

---

$\alpha_a$	–	współczynnik absorpcji promieniowania
$\gamma$	–	współczynnik cieplnej rozszerzalności objętościowej, 1/K
$\varepsilon$	–	współczynnik emisyjności
$\boldsymbol{\varepsilon}$	–	tensor odkształcenia
$\varepsilon_0$	–	przenikalność elektryczna próżni (stała dielektryczna), F/m
$\varepsilon_{ij}$	–	składowe tensora odkształcenia
$\eta$	–	lepkość, Ns/m <sup>2</sup>
$\Theta$	–	rezystancja cieplna, W/K
$\theta$	–	współczynnik procentowego udziału rezystancji cieplnej styku, %
$\Theta_{TC}$	–	rezystancja cieplna styku, W/K
$\lambda$	–	współczynnik przewodzenia ciepła, W/(m·K)
$\lambda'_{TC}$	–	względny efektywny współczynnik przewodzenia ciepła dla styku, W/(m·K)
$\lambda_{TC}$	–	efektywny współczynnik przewodzenia ciepła dla styku, W/(m·K)
$\nu$	–	współczynnik Poissona
$\rho$	–	gęstość, kg/m <sup>3</sup>
$\boldsymbol{\sigma}$	–	tensor naprężenia
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	–	naprężenia główne, Pa
$\boldsymbol{\sigma}_D$	–	dewiator naprężenia, Pa
$\sigma_{ij}$	–	naprężenie normalne w kierunku $i, j$ , Pa
$\sigma_{ij}$	–	składowe tensora naprężenia, Pa
$\boldsymbol{\sigma}_k$	–	tensor kulisty naprężenia, Pa
$\sigma_m$	–	naprężenie hydrostatyczne, Pa
$\tau_{ij}$	–	naprężenie styczne w kierunku $i, j$ , Pa
$\Phi$	–	strumień ciepła, W
$\omega$	–	częstotliwość kołowa, rad/s

## 1. Wstęp

Słowa inżynier i inżynieria mają źródło słów francuski. Niegdyś *ingénierie* oznaczało w języku francuskim umiejętność konstruowania i budowania obiektów wojskowych, broni oraz machin wojennych. Językoznawcy dopatrują się również wcześniejszego pochodzenia tego wyrazu od łacińskiego słowa *ingeniosus*, co oznacza dosłownie osobę zdolną i utalentowaną. Obecnie przez inżynierię rozumie się naukę, która pozwala na konstruowanie i budowanie różnorodnych obiektów, urządzeń i produktów o ściśle określonym przeznaczeniu. Podstawowym zadaniem współczesnego inżyniera jest projektowanie, wykonanie oraz określenie warunków poprawnej eksploatacji produktu [1]. Proces projektowania jest wieloetapowy i wymaga od inżyniera wiedzy interdyscyplinarnej, umiejętności pracy zespołowej, znajomości realiów i uwarunkowań społecznoekonomicznych. Problemy, którymi zajmują się inżynierowie, są często dobrze opisane i zbadane od strony teoretycznej. Jednak w przypadku zastosowań i rozwiązań praktycznych są zbyt złożone, aby znaleźć ich dokładne rozwiązanie. W procesie projektowania inżynier posługuje się zatem modelami fenomenologicznymi, metodami quasi-empirycznymi, uproszczonymi metodami analitycznymi itp. Ciągłe zdobywa wiedzę z zakresu nauki i techniki, gromadzi doświadczenie, rozwija umiejętności korzystania z dostępnych narzędzi i źródeł informacji, a zwłaszcza z metod i narzędzi numerycznych.

Istotnym problemem w procesie projektowania jest także konieczność spełnienia określonych zasad bezpieczeństwa oraz połączenie różnych form działania poszczególnych producentów. Sprowadza się to do poznania i przestrzegania obowiązujących wymogów, norm jakościowych i standardów. Ujednolicenie powyższego nosi nazwę normalizacji. Normalizacją zajmują się specjalne agendy rządowe<sup>1</sup>, niezależne instytucje międzynarodowe oraz określone grupy zawodowe. Początkowo zagadnienie to dotyczyło jedynie stosowanych miar i wag<sup>2</sup>. Obecnie, głównym celem normalizacji jest zastosowanie w produkcji przemysłowej jednolitych wzorców. Znaczenie normalizacji

---

1 W Polsce w tym celu został powołany w roku 1924 specjalny urząd pod nazwą Polskiego Komitetu Normalizacyjnego (PKN). Podstawą obecnej działalności PKN jest ustawa o normalizacji z 12 września 2002 r.

2 Przykładem jest opracowany i przyjęty przez Międzynarodowy Komitet Miar i Wag w roku 1958 układ jednostek SI (Système International, International System).



jest ogromne. Wpływa ona bowiem m. in. na obniżenie kosztów, umożliwia masową produkcję, współpracę urządzeń różnych producentów, wymianę części oraz ułatwia dokonywanie zamówień handlowych. W przypadku przemysłu elektronicznego najczęściej stosowanymi normami są normy opracowane przez międzynarodową organizację JEDEC<sup>3</sup> oraz stowarzyszenie IPC<sup>4</sup> – jedyną organizację międzynarodową, która skupia projektantów, producentów, dostawców materiałów oraz firmy montażowe. Owocem działania IPC są m.in. normy i standardy, jakie musi spełniać aparatura elektroniczna w zależności od wybranej klasy zastosowań<sup>5</sup>. Należy nadmienić, że normalizacja dotyczy nie tylko parametrów jakościowych i ilościowych, lecz także nazewnictwa oraz preferencji testów jakościowych i metod pomiarowych<sup>6</sup>.

Pierwszym etapem pracy inżyniera jest poszukiwanie pomysłu, który pozwoli na rozwiązanie określonego problemu. Problemy te nie są zazwyczaj określone na początku w sposób jednoznaczny, a liczba potencjalnych rozwiązań może być stosunkowo duża. Dlatego etap ten jest porównywany do pracy twórczej, która jest jednak w pełni podporządkowana istniejącemu stanowi wiedzy naukowo-technicznej, doświadczeniu, a przede wszystkim umiejętności rozumowania i kojarzenia faktów. Potem następuje faza realizacji pomysłu. Jej początkiem jest opracowanie projektu, następnie wykonanie prototypu oraz ewentualnie modelu, jego testowanie, a na końcu wdrożenie do produkcji. Od początku swego istnienia inżynieria poszukuje nowych i bardziej efektywnych metod i narzędzi projektowania i konstruowania, doskonalili również wcześniej znane. Pierwszymi narzędziami inżynierii były proste opisy matematyczne, potem zaczęto stosować określone algorytmy postępowania, w ostatnich zaś latach skoncentrowano się na narzędziach numerycznych określanych ogólnym terminem komputerowych systemów wspomagania projektowania. Systemy te mogą spełniać różne zadania, począwszy od prostych prac obliczeniowych, a skończywszy na zastosowaniu sztucznej inteligencji AI (ang. *Artificial Intelligence*). Głównym użytkownikiem zaawansowanych technik komputerowych i narzędzi numerycznych oraz inicjatorów dalszego postępu w dziedzinie inżynierii komputerowej i oprogramowania jest przemysł. Początkowo systemy komputerowe były wykorzystywane jedynie do sterowania procesami technologicznymi-

---

3 Organizacja JEDEC (*Joint Electronic Devices Engineering Council*) została powołana w roku 1960 w celu ustalania norm dla przyrządów półprzewodnikowych, natomiast od roku 1970 także dla układów scalonych.

4 Stowarzyszenie IPC – *Association Connecting Electronics Industries*® zostało powołane w roku 1957 w celu współpracy międzynarodowej przemysłu elektronicznego w związku z rozwojem technologii półprzewodnikowej. Obecnie celem działalności IPC jest tworzenie norm dla przemysłu elektronicznego, organizowanie kursów, sondowanie rynku oraz nadzór nad realizacją przepisów międzynarodowych, np. dotyczących stosowania bezołowiowych stopów lutowniczych.

5 Przykładem jest norma ANSI/IPC-PC-90 *General Requirements for Implementation of Statistical Process Control*.

6 Przykładem jest norma PKN nr PrPN-IEC 60194 *Płytki drukowane, wytwarzanie i montaż – Terminy i definicje*.

mi, obecnie są powszechnie stosowane we wspomaganiu inżyniera w całym procesie projektowania. Aktualnie komputery są nieodłącznym narzędziem każdego inżyniera i wspomagają jego działania w poszukiwaniu rozwiązań problemów projektowych, technologicznych, funkcjonalnych oraz jakościowych.

W pierwszej fazie rozwoju techniki komputerowej oraz metod numerycznych, zastosowanie komputerów sprowadzało się do wyznaczenia wartości liczbowych wybranych funkcji i zależności matematycznych, które opisywały wybrany stan badanego obiektu. Przykładem tego jest opracowana, m.in. przez autora, metoda i program komputerowy służące do wyznaczania rozkładu temperatury na powierzchni ciała bombardowanego wiązką elektronową [2, 3, 4]. W miarę dalszego postępu techniki komputerowej pojawiały się nowe możliwości zastosowania metod numerycznych, z których jedną z najważniejszych była możliwość przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Przykładem takiego zastosowania metod numerycznych jest wykonana przez autora analiza numeryczna rozpylania materiału z powierzchni ciała bombardowanego wiązką jonową [5, 6, 7, 8, 9]. W wyniku ciągłego rozwoju systemów informatycznych komputer zaczął być wykorzystywany jako narzędzie wspomagające inżyniera na wszystkich etapach jego pracy. Efektem tego stało się stworzenie komputerowych systemów doradczych i ekspertowych. Przykładem takiego systemu jest opracowany, m.in. przez autora, komputerowy system wspomaganie decyzji oraz system ekspertowy w dziedzinie spawania wiązką elektronową [10, 11, 12, 13, 14, 15]. Kolejnym krokiem w rozwoju techniki komputerowej było wykorzystanie, tzw. sztucznej inteligencji, która miała w istotnej części zastąpić naturalną. Choć zastąpienie inteligencji naturalnej inteligencją sztuczną jest dość odległe, to na obecnym etapie spełniło ono znaczną część oczekiwań naukowców i inżynierów.

Zastosowanie metod projektowania numerycznego jest bardzo pożądane w mikroelektronice, a zwłaszcza w dziedzinie montażu elektronicznego. Mikroelektronika jest to stosunkowo młoda dziedzina wiedzy dotycząca elementów, przyrządów i układów elektronicznych o bardzo małych wymiarach. Z kolei montaż elektroniczny jest zespołem czynności i etapów technologicznych, które prowadzą do obudowania, połączenia elementów, przyrządów i układów elektronicznych w celu uzyskania funkcjonalnego podzespołu i/lub urządzenia elektronicznego. Montaż elektroniczny w dobie ciągłego rozwoju układów scalonych oraz wzrastającej konkurencji decyduje o funkcjonalności, niezawodności oraz w dużej mierze o kosztach podzespołów i urządzeń elektronicznych. Proces projektowania i testowania montażu elektronicznego może być wspomagany metodami numerycznymi, co pozwala w rezultacie końcowym na skrócenie czasu każdego etapu, zwiększenie funkcjonalności i niezawodności. Nie bez znaczenia pozostaje także możliwość uwzględnienia podczas projektowania określonych norm i wymagań producentów oraz specyficznych oczekiwań użytkowników. Celem niniejszej pracy było omówienie najnowszych osiągnięć oraz aktualnego stanu wiedzy dotyczącego numerycznych metod projektowania termomechanicznego w montażu

elektronicznym, z uwzględnieniem indywidualnego i nowatorskiego wkładu autora w rozwój tych metod oraz ich implementację praktyczną.

W pracy przedstawiono podstawowe definicje oraz krótką historię rozwoju mikroelektroniki (rozdz. 1). Zwrócono uwagę, że jednym z najnowszych wyzwań mikroelektroniki jest możliwość zwiększania funkcjonalności i integracji układów scalonych z innymi elementami elektronicznymi w postaci systemów. Przedstawiono możliwości upakowania systemów na poziomie struktury, podłoża i płytki obwodu drukowanego. Następnie omówiono metody obudowywania układów scalonych i systemów oraz ich połączenie na poziomie płytki obwodu drukowanego w funkcjonalne urządzenie, co jest celem montażu elektronicznego [16, 17]. Omówiono również rolę montażu elektronicznego oraz jego klasyfikację ze względu na poziomy oraz wymieniono typowe uszkodzenia, ze szczególnym uwzględnieniem poziomu pierwszego i drugiego. Podkreślono, że główną przyczyną uszkodzeń w montażu elektronicznym są naprężenia wynikające z obciążeń termomechanicznych. Z tego powodu przedstawiono podstawy teoretyczne analizy stanu naprężeń i odkształceń oraz problem uszkodzeń na skutek obciążeń mechanicznych i termicznych. Kolejnym poruszonym w pracy zagadnieniem jest problem efektywnego odprowadzania energii cieplnej z aparatury elektronicznej. Problem wzrostu temperatury w czasie pracy urządzenia w znaczący sposób wpływa bowiem na jego niezawodność. Jako nowatorski wkład autora dotyczący zaawansowanej analizy obciążeń termomechanicznych omówiono szczegółowo problem analizy rozpraszania ciepła z uwzględnieniem rezystancji cieplnej styku. Autor zwrócił w pracy uwagę na istotność rezystancji cieplnej styku w montażu elektronicznym oraz zaproponował metodę pomiaru oraz uwzględnienie rezystancji cieplnej styku w modelowaniu numerycznym.

W rozdziale 2 pracy omówiono metody matematyczne stosowane w projektowaniu numerycznym. Do najistotniejszych metod matematycznych należy zaliczyć w tym przypadku: metodę planowania eksperymentów, metodę analizy powierzchni odpowiedzi, metodę elementów skończonych. Głównym celem projektowania numerycznego jest optymalizacja. Jednak ze względu na zastosowania przemysłowe, kluczowym problemem jest dodatkowo analiza czułości i projektowanie tolerancji. Szczególną uwagę zwrócono na efektywność i dokładność metod projektowania numerycznego oraz podkreślono, że można je osiągnąć przez zastosowanie odpowiednich algorytmów projektowania. W pracy omówiono i porównano dwa algorytmy postępowania: algorytm iteracyjny i kompaktowy. Algorytm iteracyjny zapewnia efektywny i dokładny proces optymalizacji, natomiast algorytm kompaktowy pozwala dodatkowo na analizę czułości i projektowanie tolerancji. Jako wkład autora, dotyczący rozwoju metod projektowania numerycznego w montażu elektronicznym, przedstawiono opracowany przez autora algorytm parametryczno-sekwencyjny. Algorytm ten opiera się na parametrycznym modelu numerycznym analizowanego obiektu w postaci programu skryptowego. Istotną częścią tego algorytmu jest opracowany przez autora plan eksperymentu, według zmodyfikowanego kwadratu łacińskiego oraz sekwencyjnej metody

interpolacji powierzchni odpowiedzi według metody Kriginga, z uwzględnieniem błędu dopasowania powierzchni odpowiedzi. Jednocześnie przedstawiono przykładowe wyniki projektowania numerycznego dla objętościowego montażu elektronicznego typu 3D uzyskane w wyniku zastosowania opracowywanego pod kierunkiem autora programu komputerowego. Program został opracowany używając środowiska do obliczeń numerycznych MATLAB<sup>7</sup>. Przedstawiono także przyszłe plany autora dotyczące dalszego rozwoju programu w postaci systemu typu klient-serwer na podstawie języka programowania skryptowego PYTHON<sup>8</sup>. Na zakończenie rozdziału przedstawiono przykład projektowania objętościowego montażu elektronicznego typu 3D z wykorzystaniem omówionych algorytmów. Omówiony przykład był jednym z elementów współpracy naukowo-badawczej autora z Instytutem Fraunhofera w Niemczech.

W rozdziale 3 pracy omówiono zagadnienia dotyczące projektowania numerycznego w montażu elektronicznym z punktu widzenia inżynierii materiałowej i wytrzymałości materiałów. Kluczowym problemem w tym przypadku jest możliwość prognozowania uszkodzeń w wyniku obciążeń termomechanicznych. Podstawą montażu bowiem są struktury wielowarstwowe i połączenia materiałów o różnych współczynnikach rozszerzalności cieplnej. W wyniku zmian temperatury powstają naprężenia, które prowadzą do uszkodzenia. W pracy omówiono typowe uszkodzenia pojawiające się w wyniku obciążeń termomechanicznych, takie jak: pęknięcie, rozwarstwienie, pełzanie czy zmęczenie materiału. Autor zaproponował podział i klasyfikację metod numerycznego prognozowania uszkodzeń w montażu elektronicznym w zależności od modelu materiałowego. Na podstawie przedstawionego podziału omówiono podstawowe rodzaje połączeń stosowanych w montażu elektronicznym oraz metody i kryteria prognozowania ich uszkodzeń w wyniku obciążeń termomechanicznych. W tym celu wybrano typowe połączenia, tj. drutowe, klejone oraz lutowane. Każdy rodzaj połączenia można scharakteryzować określonym modelem materiałowym, który z kolei determinuje rodzaj uszkodzenia oraz jego kryterium wystąpienia. Jako wkład autora w rozwój metod prognozowania numerycznego uszkodzeń w montażu elektronicznym należy zaliczyć udział w europejskim projekcie badawczym MEVIPRO<sup>9</sup>. Celem tego projektu było opracowanie nowoczesnych metod projektowania numerycznego

---

7 Program MATLAB firmy MathWorks jest środowiskiem do obliczeń numerycznych z zakresu algebry liniowej, rachunku macierzowego, równań różniczkowych. Program pozwala na tworzenie własnych funkcji i programów na podstawie rozbudowanego języka programowania.

8 PYTHON jest interaktywnym i interpretowanym językiem programowania, który pozwala na pisanie programów skryptowych. Język ten powstał w roku 1990 i jest aktualnie rozwijany jako projekt typu OpenSource przez fundację Python Software Foundation.

9 Program badawczy MEVIPRO „Innovative Thermo-Mechanical Prediction and Optimization Methods for Virtual Prototyping of Miniaturised Electronics and Packages and Assemblies” był realizowany w latach 2002–2006 w ramach V Programu Ramowego Unii Europejskiej – numer GRD1-2001-40296. Celem programu było opracowanie zaawansowanych metod numerycznego projektowania termomechanicznego oraz prognozowania uszkodzeń w montażu elektronicznym.

w montażu elektronicznym za pomocą metody prognozowania uszkodzeń. Dodatkowo autor współuczestniczył w pomiarach doświadczalnych i implementacji numerycznej uzyskanych wyników w celu opracowania modeli materiałów lepkosprężystych stosowanych w montażu elektronicznym. Przykładem takich materiałów są kleje przewodzące elektrycznie i/lub ciepłnie oraz polimery stosowane na wypraski. Na zakończenie rozdziału przedstawiono problem pomiaru właściwości lepkosprężystych dla klejów przewodzących ciepło oraz ich zastosowanie w modelowaniu numerycznym w celu oszacowania ich właściwości termicznych. Przedstawiony przykład został zrealizowany w ramach współpracy autora z Uniwersytetem Technicznym Delft w Holandii.

W rozdziale 4 pracy przedstawiono jeden z przykładów kompleksowego projektowania numerycznego. Autor uczestniczył w kilku projektach badawczych, zarówno krajowych jak i międzynarodowych, w których był odpowiedzialny za proces projektowania numerycznego. Przykładem tego może być zastosowanie metod projektowania numerycznego do optymalizacji krzemowego czujnika ciśnienia [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26] oraz ceramicznego czujnika ciśnienia<sup>10</sup> [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34], w ramach współpracy autora z Instytutem Jožef Stefan w Słowenii. Natomiast, przedstawiony w pracy przykład projektowania został wykonany w ramach współpracy autora z firmą Philips i dotyczył montażu elektronicznego w obudowie typu QFN. Obudowy tego typu są coraz częściej stosowane przez producentów układów scalonych ze względu na swoje zalety: niski koszt, dobre parametry cieplne i duża niezawodność. Podstawową wadą jest jednak duże prawdopodobieństwo pęknięcia struktury półprzewodnikowej w trakcie wykonywania procesów technologicznych. Dochodzi do tego najczęściej podczas procesu lutowania oraz zaprasowania przetłocznego. Celem projektowania była zatem optymalizacja istotnych parametrów geometrycznych i materiałowych tak, aby zmniejszyć prawdopodobieństwo uszkodzenia w wyniku kolejnych procesów technologicznych. Autor wykonał proces projektowania według opracowanego przez siebie algorytmu parametryczno-sekwencyjnego z uwzględnieniem optymalizacji i projektowania tolerancji.

---

10 Jednym z realizowanych przez autora projektów badawczych był projekt dotyczący zastosowanie numerycznych metod projektowania do optymalizacji ceramicznego czujnika ciśnienia CPS (ang. *Ceramic Pressure Sensor*). Projekt ten był realizowany w ramach współpracy autora z Instytutem Jožef Stefan w Ljubljanie oraz firmą HIPOT-R&D w Šentjernej ze Słowenii.

## 2. Mikroelektronika a montaż elektroniczny

Mikroelektronika jest to dziedzina wiedzy, która zajmuje się projektowaniem, mierznictwem oraz technologią wytwarzania elementów, przyrządów i układów elektronicznych o bardzo małych wymiarach oraz opisem zjawisk fizycznych w nich zachodzących [35]. Wymiary te w przeciwieństwie do typowych urządzeń spotykanych w skali makro określa się skalą mikro. Mikroelektronika zajmuje się elementami o wielkości paru mikrometrów aż do dziesiątek milimetrów. Naneoelktronika zaś, która w ostatnim czasie stała się bardzo popularna, elementami i przyrządami elektronicznymi mieszczącymi się w zakresie od pojedynczych do setek nanometrów. Początki mikroelektroniki sięgają roku 1947, w którym to wynaleziono pierwszy tranzystor półprzewodnikowy. Od tego czasu tranzystory stopniowo wypierały z rynku popularne wcześniej lampy próżniowe. Tranzystory miały wiele zalet w porównaniu z lampami próżniowymi. Do najważniejszych z nich należą: małe wymiary, lepsze techniczne parametry, niższy koszt produkcji, większa niezawodność oraz możliwość integracji na jednej półprzewodnikowej płycie podłożowej wielu tranzystorów.

Przełomem w rozwoju mikroelektroniki była właśnie zakończona sukcesem próba integracji setek tranzystorów na jednej płycie półprzewodnikowej w postaci struktury półprzewodnikowej układu scalonego przeprowadzona przez Jacka Kilby'ego w 1959 roku<sup>11</sup>. Cechą charakterystyczną tak wykonanych układów scalonych jest integracja wszystkich elementów czynnych i biernych oraz połączeń między nimi w postaci jednej struktury półprzewodnikowej. Istotne jest, że na jednej półprzewodnikowej płycie podłożowej (ang. *wafel*) można wykonać dużą liczbę takich struktur [36]. Wraz z rozwojem wiedzy oraz technologii produkcji wymiary pojedynczych elementów stawały się coraz mniejsze, natomiast wymiary całych struktur wzrastały. W roku 1965 Gordon Moore<sup>12</sup> sformułował prawo, nazwane od jego nazwiska, według którego proces integracji i rozwoju układów scalonych można opisać. Prawo to mówi o tym, że liczba tranzystorów w jednym układzie scalonym podwaja się każdego roku. W późniejszym

---

11 W skrócie układ scalony (ang. IC – *Integrated Circuit*) lub struktura półprzewodnikowa (ang. *Chip* lub *Die*).

12 G. Moore oraz R. Noyce założyli w roku 1968 firmę Intel (ang. *Integrated Electronics*) w miejscowości Santa Clara w Kalifornii. Firma zajmuje się produkcją układów scalonych, w tym: mikroprocesorów, mikrokontrolerów, pamięci, układów peryferyjnych oraz urządzeń sieciowych.

czasie prawo to zweryfikowano przyjmując, że liczba tranzystorów w jednym układzie scalonym podwaja się co 18 miesięcy.

Obecnie ścierają się dwa poglądy dotyczące dalszego tempa integracji i rozwoju układów scalonych. Pierwszy mówi o tym, że trudno będzie utrzymać powyższe tempo integracji z powodu osiągnięcia przez pojedyncze elementy tak niewielkich rozmiarów przy których ujawnią się zjawiska kwantowe, np. nieoznaczoność położenia [37]. Drugi zaś, że można to tempo przyspieszyć – **More Than More (MtM)**. Pogląd ten zrodził się na skutek presji wywieranej przez przemysł oraz na skutek nadziei związanych z rozwojem nanoelektroniki oraz bioelektroniki [38]. Układ scalony jest układem elektronicznym, który składa się z elementów czynnych – tranzystorów i diod oraz elementów biernych – rezystorów, kondensatorów. Układy scalone dzieli się ze względu na: sposób wykonania – na monolityczne i hybrydowe oraz ze względu na skalę integracji<sup>13</sup> na układy o integracji małej (SSI), średniej (MSI), dużej (LSI), wielkiej (VLSI), ultrawielkiej (ULSI), gigawielkiej (GSI).

Jednym z najnowszych osiągnięć mikroelektroniki jest możliwość wykonania całych systemów elektronicznych przez upakowanie układu scalonego oraz innych przyrządów elektronicznych, takich jak np. mikrosystemy, przyrządy optoelektroniczne (diody, lasery) czy podzespoły radiowe i mikrofalowe (komunikacja bezprzewodowa), w obszarze jednej struktury półprzewodnikowej. Cel ten można osiągnąć dzięki m. in. technologii SoC (ang. *System on Chip*), jak to przedstawiono na rysunku 2.1a. Technologia ta pozwala na zwiększenie funkcjonalności struktur półprzewodnikowych oraz zmniejszenie ich wymiarów i kosztów. Niestety, ze względów praktycznych jest ona bardzo trudna do realizacji z powodu skomplikowanej technologii wykonania oraz zintegrowanego projektowania i testowania [39]. Jednoczesne upakowanie przyrządów analogowych i cyfrowych, elementów czynnych i biernych, przyrządów RF, optoelektroniki stanowi bardzo duże wyzwanie. Zdarza się bowiem, że reguły projektowania są wzajemnie sprzeczne, dotyczy to zwłaszcza przyrządów cyfrowych oraz przyrządów analogowych czy układów RF. Istnieją jednak alternatywne metody upakowania, które pozwalają na wykonanie systemów elektronicznych. Przykładem może być technologia SSoC (ang. *Subsystem on Chip*), czyli upakowanie oddzielnych systemów, np. analogowe i cyfrowe na poziomie struktury półprzewodnikowej. Inne technologie, pozwalające na wykonanie systemów elektronicznych, to upakowanie na poziomie wspólnego podłoża, takie jak:

- technologia SiP (ang. *System in Package*), czyli upakowanie na poziomie półprzewodnikowej płytki podłożowej przez tworzenie stosów struktur (rys. 2.1b); głównym celem jest budowa układów objętościowych typu 3D i MCM (ang. *Multi-Chip Modules*), np. układy pamięci,

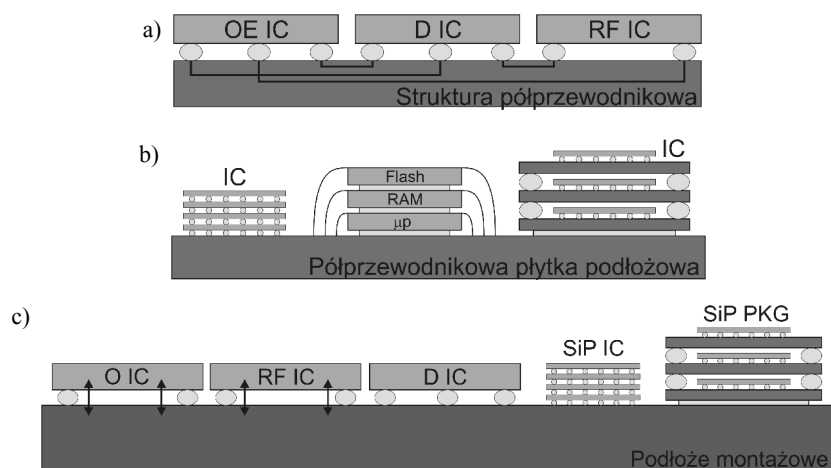
---

13 Skala integracji lub inaczej poziom scalenia oznacza liczbę elementów w pojedynczej strukturze układu scalonego. Z kolei gęstość upakowania oznacza liczbę elementów w 1 mm<sup>2</sup> pojedynczej struktury układu scalonego.

- technologia SoP (ang. *System on Package*), czyli upakowanie na poziomie podłoża montażowego, np. organicznego, takich elementów, jak układy scalone, systemy oraz układy SiP (rys. 2.1c); głównym celem jest budowa układów o dużej gęstości połączeń typu HDI (ang. *High Density Interconnections*),

Istnieje przekonanie, że upakowanie na poziomie wspólnego podłoża jest w stanie zapewnić stopień integracji układów scalonych, gęstość upakowania oraz poziom funkcjonalności zbliżony do upakowania na poziomie struktury półprzewodnikowej [40]. Do najważniejszych zalet i cech upakowania na poziomie wspólnego podłoża zalicza się [41]:

- zmniejszenie problemów związanych z wykonaniem, projektowaniem i testowaniem, np. wykorzystanie gotowych bloków projektowych,
- możliwość stosowania technologii heterogenicznych o właściwościach równych lub przewyższających technologie stosowane w przypadku SoC,
- zapewnienie dużego uzysku, obniżenia kosztów wykonania oraz skrócenie czasu wprowadzenia produktu do sprzedaży,
- dużą niezawodność, która wynika z takiej samej wartości współczynnika rozszerzalności cieplnej dla struktur półprzewodnikowych oraz podłoża;
- możliwość stosowania wyprowadzeń typu  $\mu$ C4 (ang. *Mikro Controlled Collapse Chip Connection*) lub sztywnych połączeń miedzianych oraz wykonania w podłożu wbudowanych elementów czynnych i biernych.
- wykonanie połączeń między układami a podłożem w postaci połączeń drutowych lub łączników w podłożach półprzewodnikowych, co gwarantuje małą podziałkę wyprowadzeń oraz dużą niezawodność; inną możliwością połączenia jest stosowanie kontaktów podwyższonych.

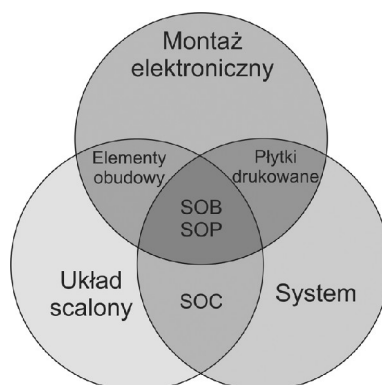


Rys. 2.1. Kierunki rozwoju integracji systemów elektronicznych: SoC (a) SiP (b) SoP (c) [39]



Metody upakowania na poziomie wspólnego podłoża wymagają usprawnienia czy opracowania nowych technologii, takich jak: tworzenie łączników w podłożu półprzewodnikowym, wykonania połączeń o dużej gęstości, zastosowanie efektywnych metod odprowadzania ciepła oraz wdrożenie odpowiednich technologii montażu i technik pomiarowych. Inne powszechnie stosowane w praktyce metody pozwalające na zwiększanie funkcjonalności i gęstości upakowania, to metody upakowania na poziomie płytki obwodu drukowanego PCB (ang. *Printed Circuit Board*): technologia SoB (ang. *System on Board*) i technologia SoPoB (ang. *System on Package on Board*).

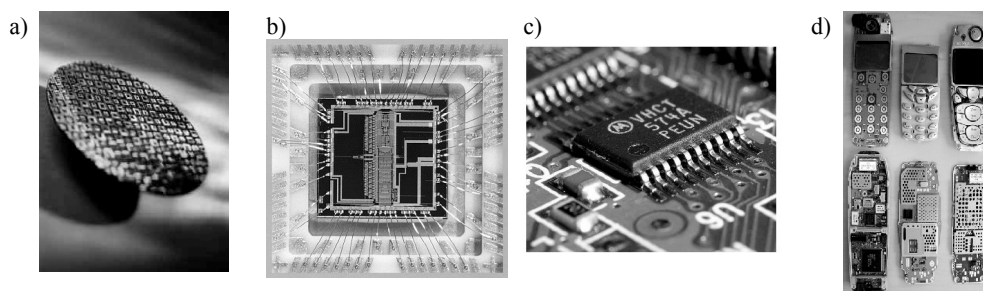
W celu praktycznego wykorzystania układów scalonych i systemów należy poddać je procesowi montażu. Wszystkie czynności i etapy technologiczne, które prowadzą do obudowania, połączenia układów scalonych i systemów oraz ich upakowanie na poziomie podłoża montażowego lub płytki obwodu drukowanego, a następnie złożenie wszystkiego w funkcjonalne urządzenie nosi nazwę montażu elektronicznego. Na rysunku 2.2 pokazano zaproponowany przez Tummala schemat relacji między układami scalonymi, systemami i montażem elektronicznym [37].



Rys. 2.2. Schemat relacji między montażem elektronicznym, układami scalonymi i systemami [37]

Proces montażu elektronicznego składa się z wielu czynności i technologii, a typowy proces montażu można podzielić na kilka etapów. W pierwszym etapie układy scalone umieszcza się w obudowie. Pola kontaktowe struktury układu scalonego łączy się z końcówkami wyprowadzeń obudowy za pomocą połączeń drutowych. Następnie układ umieszcza się w obudowie. Obudowany układ montuje się następnie na płytce obwodu drukowanego w celu połączenia go z pozostałymi elementami składowymi. Ostatnim etapem montażu jest złożenie wszystkich podzespołów w funkcjonalne urządzenie elektroniczne. Montaż elektroniczny dzieli się zazwyczaj tak, jak to przedstawiono schematycznie na rysunku 2.3, na poziomy: zerowy, pierwszy, drugi i trzeci [37]:

- Zerowy poziom dotyczy montażu na powierzchni półprzewodnikowej płytki podłożowej, lecz jeszcze przed jej pocięciem. Poziom ten wykorzystywany jest przede wszystkim do izolacji systemów, np. mikrosystemów czy przyrządów RF lub montażu membran czy innych elementów składowych mikrosystemów znajdujących się na powierzchni podłożowej płytki półprzewodnikowej oraz do wykonania połączeń powierzchniowych. W tym celu często stosowaną techniką montażu jest klejenie.
- Pierwszy poziom dotyczy pociętych nieobudowanych układów scalonych i systemów, które służą w tym przypadku jako podłoża do wykonania połączeń elektrycznych oraz zapewnienie odprowadzania energii cieplnej od układu scalonego. Struktura jest montowana na podstawie, a następnie wykonuje się połączenie pól kontaktowych struktury z końcówkami zewnętrznymi układu scalonego, np. złotym lub aluminiowym drutem. Ostatnio coraz częściej stosuje się także połączenia z wykorzystaniem kontaktów podwyższonych wykonanych w technologii flip-chip. Układ montuje się następnie w obudowie, np. metalowej, ceramicznej lub plastikowej. Obudowa zapewnia ochronę układu scalonego przed wpływem środowiska, tj. zewnętrznych narażeń mechanicznych i klimatycznych oraz dodatkowo może mieć właściwości hermetyczne<sup>14</sup>. Najczęściej stosowanymi technikami montażu jest termokompresja, zgrzewanie ultradźwiękowe, lutowanie i klejenie,
- Drugi poziom dotyczy montażu nieobudowanych oraz obudowanych układów scalonych i systemów na podłożach płytek obwodu drukowanego. Ostatnio coraz częściej stosuje się montaż nieobudowanych struktur układów scalonych na powierzchni podłoża. Najczęściej stosowanymi technikami montażu jest lutowanie i klejenie,
- Trzeci poziom dotyczy montażu gotowych układów, płytek obwodu drukowanego oraz podzespołów na poziomie urządzenia. Najczęściej stosuje się w tym przypadku technikę montażu mechanicznego, np. korzystając z elementów zaciskowych.



Rys. 2.3. Zasada podziału montażu elektronicznego na poziomy: zerowy (a), pierwszy (b), drugi (c) i trzeci (d)

14 Obudowy metalowe i ceramiczne mają właściwości hermetyczne, natomiast plastikowe nie mają.

## 2.1. Rola i znaczenie montażu elektronicznego

Nowoczesne metody montażu elektronicznego i upakowania pozwalają na zwiększenie funkcjonalności urządzeń elektronicznych z jednoczesnym zmniejszeniem wymiarów i obniżeniem kosztów projektowania i produkcji. Głównym odbiorcą układów, podzespołów i systemów elektronicznych jest przemysł. Do najważniejszych odbiorców i użytkowników należą takie gałęzie przemysłu jak motoryzacja, telekomunikacja, medycyna, przemysł wojskowy, lotniczy i kosmiczny, a także producenci elektroniki użytkowej i sprzętu gospodarstwa domowego. Montaż elektroniczny jest ważnym, można powiedzieć kluczowym, elementem budowy zarówno podzespołów, jak i całych urządzeń elektronicznych. Ma decydujący wpływ na:

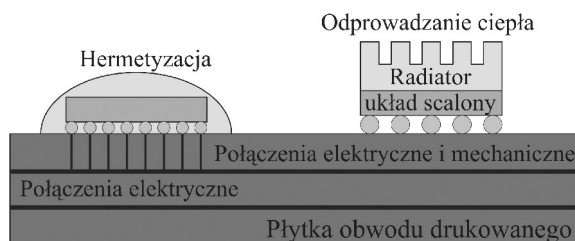
- produkcję układów scalonych i systemów, które są następnie montowane na poziomie struktury, upakowania, podłoża i płytek drukowanych; każdy układ scalony lub system, aby stać się integralną częścią urządzenia elektronicznego wymaga montażu,
- wydajność działania komputerów, które składają się z różnych podzespołów połączonych na poziomie płytki obwodu drukowanego; długość połączeń ścieżek przewodzących oraz połączeń elektrycznych w istotny sposób wpływa na częstotliwość taktowania,
- wymiary urządzeń elektronicznych; zwłaszcza w przypadku urządzeń przenośnych, np. telefonów komórkowych czy komputerów, ma to istotne znaczenie,
- liczbę wyprowadzeń; najczęściej liczba wyprowadzeń decyduje o końcowej funkcjonalności urządzenia; w tym celu stosuje się odpowiednie architektury wyprowadzeń oraz techniki montażu,
- niezawodność urządzeń elektronicznych; celem montażu jest zapewnienie pełnej funkcjonalności urządzenia po spełnieniu określonych kryteriów niezawodnościowych; w tym celu stosuje się specjalne metody upakowania oraz techniki montażu na poziomie płytki obwodu drukowanego,
- koszty końcowe podzespołów i urządzeń elektronicznych; koszt produkcji układów scalonych i mikrosystemów jest nieporównywalnie niższy niż koszt ich montażu na poziomie płytek obwodów drukowanych; w tym celu stosuje się odpowiednie obudowy układów scalonych.

Montaż elektroniczny ma spełnić także inne zadania, które przedstawiono na rysunku 2.4. Jest to m.in.:

- ochrona układów scalonych i systemów przed warunkami i wpływem środowiska; stosuje się obudowy wykonane z metalu, szkła, ceramiki oraz polimerowych tworzyw sztucznych.
- zapewnienie połączeń elektrycznych i mechanicznych między strukturą a obudową oraz różnymi układami na poziomie podłoża; pola kontaktowe struktury układu scalonego łączą się z końcówkami wyprowadzeń obudowy za pomocą połączeń drutowych w procesie zgrzewania, natomiast połączenia na poziomie płytki obwo-

du drukowanego, np. wykonanej z ceramiki czy tworzyw organicznych, wykonuje się za pomocą technologii lutowania i klejenia, korzystając z montażu przewlekane-  
go lub powierzchniowego,

- efektywne odprowadzanie ciepła do otoczenia z układów scalonych i innych układów elektronicznych na różnych poziomach montażu elektronicznego; ciepło jest odprowadzane w drodze przewodnictwa, konwekcji i radiacji.



Rys. 2.4. Rola montażu elektronicznego

Montaż elektroniczny jest dziedziną interdyscyplinarną i wymaga wiedzy z zakresu fizyki, chemii, mechaniki, elektryczności, inżynierii materiałowej, inżynierii komputerowej i środowiska. Dodatkowo przydatna jest znajomość metod projektowania, testowania i zarządzania oraz znajomość różnych technologii, takich jak [42]:

- lutowanie i klejenie, które pozwalają na wykonanie połączeń elektrycznych i mechanicznych między strukturą układu scalonego a obudową, ażurem lub podłożem oraz połączenie struktury obudowanej na powierzchni płytki obwodu drukowanego,
- termokompresja lub zgrzewanie ultradźwiękowe, za pomocą którego wykonuje się połączenia drutowe pól kontaktowych struktur układu scalonego z końcówkami wyprowadzeń obudowy,
- wykonanie obudowy przez zgrzanie lub przylutowanie wieczka metalowego, zalanie lub zaprasowanie przetłoczone w żywicy.

Istotną rolę w montażu spełniają materiały. Najczęściej stosuje się materiały, które ze względu na swoje właściwości mogą spełniać określoną rolę na danym poziomie montażu. I tak materiały stosowane na:

- podłoża, powinny charakteryzować się małą stałą dielektryczną, dużą rezystywnością, dobrym przewodnictwem cieplnym, odpowiednim współczynnikiem rozszerzalności cieplnej, odpornością na zmienne warunki środowiska zewnętrznego, dużą wytrzymałością mechaniczną,
- obudowy, powinny charakteryzować się wysoką temperaturą zeszklenia  $T_g$ , dużą odpornością na zmienne warunki środowiska zewnętrznego, małym współczynnikiem absorpcji wilgoci, dużą siłą adhezji do podłoża, niską temperaturą utwardzania oraz niewielkim skurczem chemicznym, odpowiednim współczynnikiem rozszerzalności cieplnej, małą stałą dielektryczną, dobrym przewodnictwem cieplnym oraz odpornością na promieniowanie ultrafioletowe,

- połączenia lutowane, powinny charakteryzować się odpowiednią temperaturą topnienia, dużą odpornością mechaniczną na obciążenia termomechaniczne, zarówno stałe jak i zmienne, odpowiednim współczynnikiem rozszerzalności cieplnej.

## 2.2. Rozwój układów scalonych a rozwój technik montażu elektronicznego

Rozwój technik montażu elektronicznego jest ściśle związany z rozwojem układów scalonych i systemów. W przypadku układów scalonych mamy do czynienia ze stałym wzrostem: skali integracji, liczby wejść/wyjść I/O (ang. *Input/Output*), szybkości pracy układów oraz gęstości mocy. Początkowo układy scalone stosowano głównie w przemyśle zbrojeniowym. Były one montowane w płaskich obudowach ceramicznych, które zapewniały dużą niezawodność oraz małe wymiary. W pierwszych komercyjnych układach scalonych stosowano zarówno obudowy ceramiczne, jak i plastikowe typu SIP (ang. *Single in-Line Package*) i DIP (ang. *Dual in-Line Package*). W latach 80. rozwój technologii układów scalonych VLSI sprawił, że liczba wyprowadzeń znacząco wzrosła i przekroczyła możliwości techniczne obudowy DIP<sup>15</sup> (od 8 do 64 wyprowadzeń). Konieczne okazało się zastąpienie architektury obwodowej wprowadzeniem architektury powierzchniowej, przykładem tego były obudowy typu PGA (ang. *Pin Grid Array*) oraz LCC (ang. *Leadless Chip Carrier*). Jednocześnie montaż przewlekany THT (ang. *Through Hole Technology*) był stopniowo zastępowany przez montaż powierzchniowy SMT (ang. *Surface Mount Technology*). Obudowy do montażu powierzchniowego miały końcówki typu „skrzydło mewy” (ang. *Gull Wing Leads*) i w kształcie litery J, czego przykładem mogą być obudowy typu SOIC (ang. *Small Outline Integrated Circuits*) oraz PLCC (ang. *Plastic Leader Chip Carrier*). Obudowy tego typu charakteryzowały się w stosunku do obudowy typu DIP 30–50% mniejszą powierzchnią oraz 50% mniejszą grubością. W latach 90. w miarę rozwoju technologii układów mikroprocesorowych, zwiększeniu pojemności pamięci oraz rosnącą liczbą wyprowadzeń, obudowy te zostały zastąpione przez rodzinę obudów typu SOP<sup>16</sup> (ang. *Small Outline Package*) i QFP<sup>17</sup> (ang. *Quad Flat Package*), gdzie liczba wyprowadzeń

---

15 Istnieje kilka odmian obudów typu DIP: CERDIP (ang. *Ceramic Dual in-Line Package*), PDIP (ang. *Plastic Dual in-Line Package*), SPDIP (ang. *Shrink Plastic Dual in-Line Package*).

16 Rodzina obudów typu SOP składa się z: PSOP (ang. *Plastic Small Outline Package*), TSOP (ang. *Thin Small Outline Package*), SSOP (ang. *Shrink Small Outline Package*).

17 Rodzina obudów typu QFP składa się z: PQFP (ang. *Plastic Quad Flat Package*), TQFP (ang. *Thin Quad Flat Package*).

sięga od 44 do 304. Chociaż obudowy typu PGA<sup>18</sup> stosuje się nadal, to są one stopniowo wypierane przez obudowy typu BGA<sup>19</sup> (ang. *Ball Grid Array*) i LGA (ang. *Land Grid Array*), które zamiast końcówek drutowych mają jedynie pola kontaktowe, przez co zapewniają większą gęstość wyprowadzeń. W ostatnich latach na podstawie obudów PGA i BGA opracowano model obudowy typu CSP (ang. *Chip Scale Package*), które charakteryzują się tym, że zamiast końcówek drutowych, czy pól kontaktowych mają kontakty podwyższone wykonane ze stopów lutowniczych, najczęściej w kształcie sferycznym lub kolumnowym. Obudowy te mają wiele zalet. Są nimi: duża liczba i gęstość wyprowadzeń, niski koszt produkcji, dobre parametry cieplne, duża częstotliwość graniczna oraz małe wymiary geometryczne – w przypadku obudów CSP stopień wypełnienia obudowy<sup>20</sup> wynosi do 90%. Kolejnym etapem rozwoju obudów typu BGA i CSP jest upakowanie w jednej obudowie kilka struktur półprzewodnikowych: jedna obok drugiej lub w postaci stosu struktur. Montaż tego typu nosi nazwę montażu objętościowego, a jego przykładem są układy MCM (ang. *Multi-Chip Module*) oraz 3D, czego przykładem może być montaż typu SCSP (ang. *Stacked Chip Scale Package*) lub UT-SCSP (ang. *Ultra-Thin Stacked Chip Scale Package*). Początki techniki montażu typu 3D sięgają roku 1996. W pewnym sensie montaż ten stanowi kontynuację rozwoju techniki montażu typu MCM. Montaż 3D jest stosowany m.in. do integracji części logicznej oraz pamięci w postaci jednego układu. Podstawową zaletą tego typu montażu jest możliwość zaoszczędzenia miejsca na płycie podłożowej, zwiększenie funkcjonalności oraz zmniejszenie liczby końcówek wyprowadzeń dla pojedynczego układu. Według badań pozwala on na zwiększenie stopnia upakowania o ponad 30%. W miarę rozwoju urządzeń przenośnych, typu telefony komórkowe czy laptopy, coraz większe znaczenie mają wymiary, częstotliwość graniczna pracy oraz problem efektywności odprowadzania ciepła. Z tego też powodu w urządzeniach tego typu coraz częściej montuje się struktury nieobudowane, korzystając z technologii FC (ang. *Flip-Chip*). Struktury nieobudowane umieszcza się na różnych poziomach montażu, np. na poziomie drugim tzn. na płycie PCB lub na zerowym, czyli bezpośrednio na płycie półprzewodnikowej, np. montaż WLP-FC (ang. *Wafer Level Package – Flip-Chip*). Na rysunku 2.5 przedstawiono wybrane przykłady obudów, natomiast na rysunku 2.6 przedstawiono rozwój oraz porównanie wybranych parametrów różnych obudów struktur półprzewodnikowych.

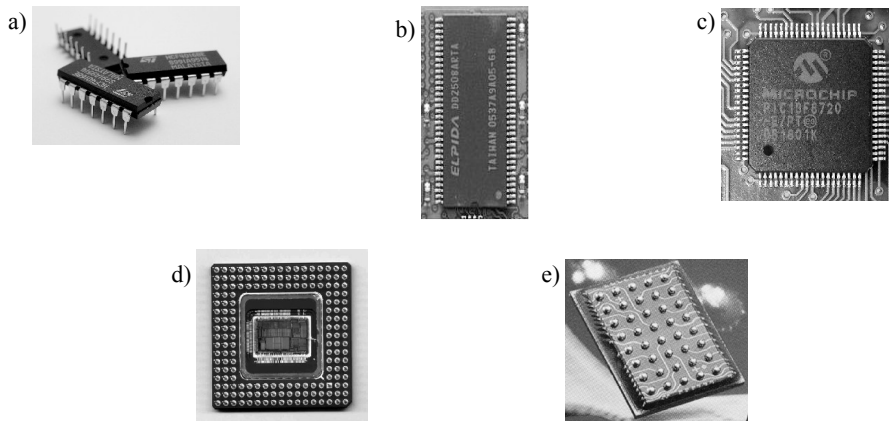
---

18 Rodzina obudów typu PGA została rozbudowana o: PPGA (ang. *Plastic Pin Grid Array*) oraz FCPGA (ang. *Flip-Chip Pin Grid Array*), CPGA (ang. *Ceramic Pin Grid Array*), OPGA (ang. *Organic Pin Grid Array*).

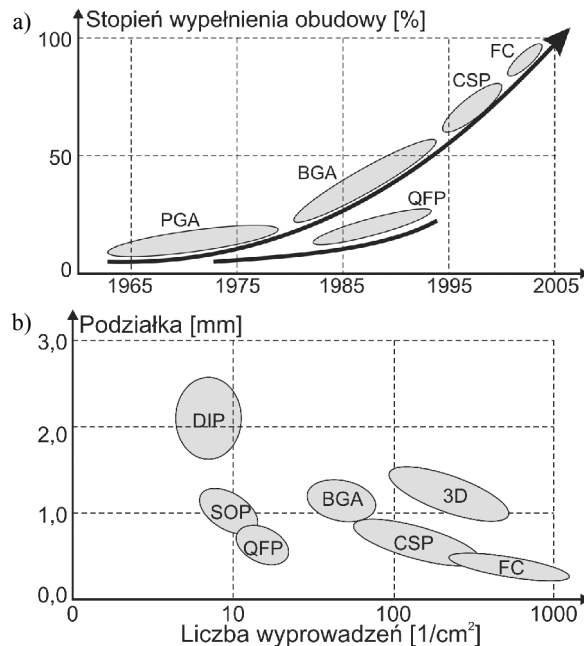
19 Rodzina obudów typu BGA składa się z: PBGA (ang. *Plastic Ball Grid Array*), CBGA (ang. *Ceramic Ball Grid Array*) oraz TBGA (ang. *Thin Ball Grid Array*)

20 Stopień wypełnienia obudowy oznacza stosunek powierzchni struktury do powierzchni obudowy – wyrażony w procentach.

Przed inżynierami zajmującymi się montażem elektronicznym wciąż pojawiają się nowe wyzwania i oczekiwania. Aby im sprostać, zarówno tym teraźniejszym jak i tym przyszłym, konieczne jest zrozumienie relacji, jaka powstaje między ciągłą ewolucją układów scalonych a koniecznością nadania za nią nowych technik upakowania



Rys. 2.5. Przykłady obudów: DIP (a), SOP (b), QFP (c), PGA (d) i CSP (e)



Rys. 2.6. Rozwój i porównanie parametrów obudów struktur półprzewodnikowych na przykładzie stopnia wypełnienia obudowy (a) oraz rozmiaru podziałki i liczby wyprowadzeń (b)

i metod montażu. Na przykład liczba I/O jest ściśle powiązana ze skalą integracji układów scalonych, co zostało zebrane w tabeli 2.1. Z kolei liczba I/O układu scalonego determinuje rozwój architektury końcówek wyprowadzeń, typu obudowy, rodzaju połączeń i metod montażu układu na powierzchni płytki obwodu drukowanego. W tabeli 2.2 przedstawiono rozwój układów scalonych, natomiast w tabeli 2.3 wymagania dotyczących montażu, według ITRS<sup>21</sup> [43].

Tabela 2.1. Zależność liczby wyprowadzeń od skali integracji układów scalonych

Skala integracji	Liczba tranzystorów	Liczba I/O
SSI	1–40	14
MSI	40–400	24
LSI	400–4500	64
VLSI	4500–300 000	64–300
ULSI	> 300 000	>300
GSI	> 1 bilion	>10 000

Tabela 2.2. Rozwój układów scalonych, według ITRS

Rok	1995	1998	2001	2004	2007
Powierzchnia struktury [mm <sup>2</sup> ]	400	600	800	1000	1250
Maksymalna moc [W]	15	30	40	40–120	40–200
Napięcie zasilania [V]	3,3	2,2	2,2	1,5	1,5
Liczba I/O	750	1500	2000	3500	5000

21 ITRS (ang. *International Technology Roadmap for Semiconductors*) stanowi społeczność osób, których celem jest opracowywanie 15-letnich planów rozwoju i wymagań dotyczących przemysłu półprzewodnikowego. Działalność ITRS jest sponsorowana przez 5 przodujących regionów przemysłu półprzewodnikowego (Europa, Japonia, Korea, Tajwan i Stany Zjednoczone). Celem działalności ITRS jest wyznaczanie strategii rozwoju dla przemysłu, jednostek badawczych, laboratoriów oraz wyższych uczelni. ITRS publikuje corocznie raporty, które można pobrać z ich strony internetowej: <http://www.itrs.net/reports.html>

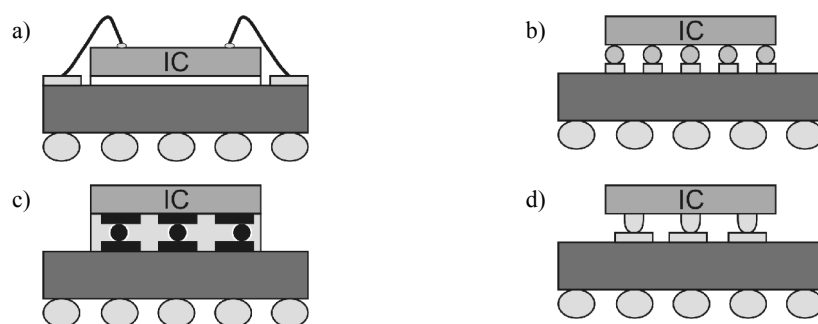


Tabela 2.3. Wymagania dotyczące montażu według ITRS

Rok	2002	2005	2008	2011	2014
Moc [W]	129	160	170	174	183
Liczba I/O	2248	3158	4437	6234	8758
Częstotliwość [MHz]	800	1000	1250	1500	1800

Według przedstawionego schematu rozwoju układów scalonych i wymagań, jakie stawia się wobec montażu elektronicznego wynika, że podstawowymi problemami są: sprawność odprowadzania ciepła, liczba I/O, podziałka wyprowadzeń, częstotliwość graniczna, koszt wykonania oraz niezawodność. Z tego też powodu technologia upakowania układów scalonych oraz technika montażu na powierzchni PCB staje się problemem kluczowym i można go scharakteryzować, według zaproponowanych przez autora następujących kryteriów konstrukcyjnych:

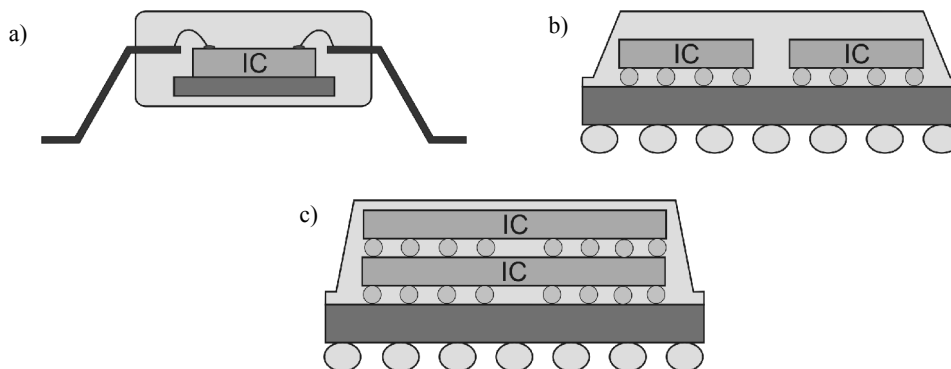
- Rodzaj połączenia pól kontaktowych układu scalonego z końcówkami wyprowadzeń podłoża. Stosuje się cztery rodzaje połączeń: drutowe, lutowane w postaci kontaktów podwyższonych (wykonane ze stopów lutowniczych), połączenia klejone oraz zgrzewane (rys. 2.7). Połączenia drutowe charakteryzują się dużą niezawodnością. Połączenia lutowane z wykorzystaniem kontaktów podwyższonych, połączenia klejone i zgrzewane wykonuje się w technologii flip-chip. Zaletą tego typu montażu jest duża gęstość upakowania oraz duża liczba I/O, krótsze połączenia (wyższa częstotliwość pracy) oraz kompatybilność z montażem powierzchniowym, natomiast wadą ich jest gorsza niezawodność. Montaż ten wymaga specjalnych technologii wykonania i kształtowania kontaktów oraz stosowania specjalnych wypełnień polimerowych, których celem jest poprawa niezawodności oraz ochrona



Rys. 2.7. Rodzaje połączeń pól kontaktowych układu scalonego z końcówkami wyprowadzeń: drutowe (a), kontakty podwyższone (b), połączenia klejone (c) oraz zgrzewane (d)

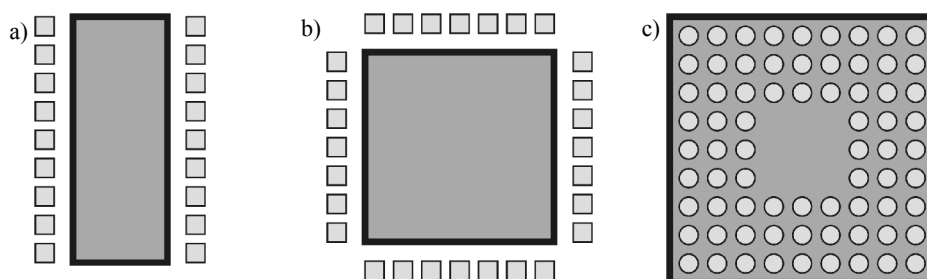
przed narażeniami mechanicznymi i środowiskowymi. Połączenia klejone są stosowane w przypadku technologii niskotemperaturowych oraz giętkich podłoży i giętkich płytek obwodów drukowanych FPCB (ang. *Flex Printed Circuit Board*). W tym celu można stosować zarówno kleje przewodzące elektrycznie – izotropowe i anizotropowe, jak i kleje nieprzewodzące,

- Rodzaj upakowania układów scalonych. Stosuje się zasadniczo trzy metody upakowania: pojedyncza struktura, moduł wielostrukturowy oraz stos struktur (rys. 2.8). Upakowanie w postaci modułów wielostrukturowych oraz stosu struktur umożliwia integrację w jednym układzie części logicznej oraz pamięci, co znacznie ogranicza liczbę I/O obudowy, a pozwala na zwiększenie częstotliwości granicznej pracy układu. Upakowanie w postaci stosu struktur jest określane także terminem montażu objętościowego.



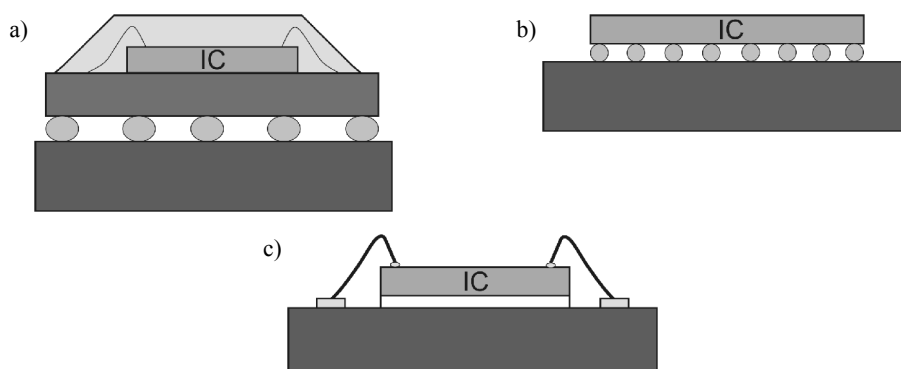
Rys. 2.8. Rodzaje upakowania układów scalonych: pojedyncza struktura (a), moduł wielostrukturowy (b) oraz stos struktur (c)

- Architektury wyprowadzeń. Stosuje się trzy główne rodzaje architektury końcówek wyprowadzeń: dwurzędową, obwodową i powierzchniową. W przypadku architektury dwurzędowej i obwodowej końcówki znajdują się na krawędzi obudowanych układów scalonych, podczas gdy cechą charakterystyczną architektury powierzchniowej jest regularne rozmieszczenie wyprowadzeń w postaci matrycy wierszy i kolumn (rys. 2.9). Architektura wyprowadzeń obudowy decyduje o gęstości i liczbie I/O, podziałce wyprowadzeń oraz sposobie montażu na powierzchni PCB. Architektura powierzchniowa oferuje znacznie większą gęstość wyprowadzeń, mniejsze wymiary układu oraz lepszą efektywność odprowadzania ciepła. Architektura dwurzędowa i obwodowa charakteryzuje się natomiast większą niezawodnością.



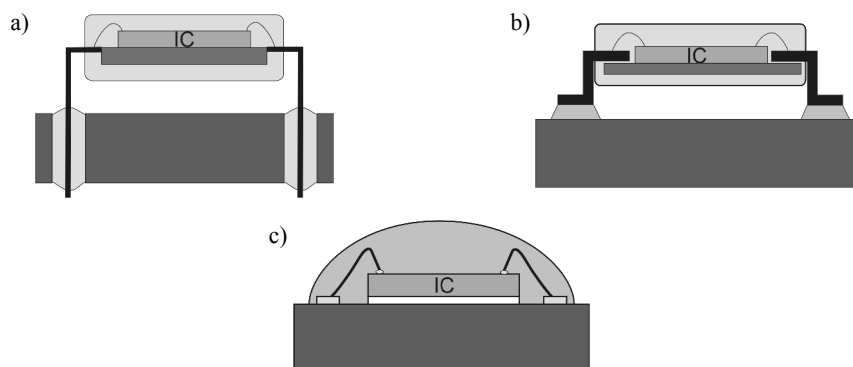
Rys. 2.9. Porównanie rozmieszczenia wyprowadzeń dla architektury wyprowadzeń: dwurzędowej (a), obwodowej (b) i powierzchniowej (c)

- Rodzaj obudowy. Najpopularniejsze są układy obudowane, jednak coraz częściej, ze względu na efektywność odprowadzania ciepła, niskie koszty, małe wymiary, większa niezawodność, dużą gęstość upakowania oraz dużą częstotliwość graniczną na powierzchni PCB montuje się bezpośrednio układy nieobudowane, tzw. proces DCA (ang. *Direct Chip Attachment*) (rys. 2.10). Układy nieobudowane łączy się z wyprowadzeniami na powierzchni PCB za pomocą połączeń drutowych – technologia COB (ang. *Chip on Board*) lub kontaktów podwyższonych – technologia *flip-chip*. Montaż struktur nieobudowanych ma niestety też wady, z których najważniejsze to: ograniczona dostępność wzorcowych układów scalonych KGD (ang. *Known Good Die*), ograniczone możliwości wymiany struktur uszkodzonych, konieczność wykonania powłok zabezpieczających. W przypadku układów obudowanych, w zależności od zastosowania używa się różnych typów obudów: metalowych, ceramicznych, plastikowych i organicznych.



Rys. 2.10. Rodzaje obudów układów scalonych: obudowane (a), nieobudowane z wykorzystaniem kontaktów podwyższonych (b) oraz połączeń drutowych (c)

- Rodzaj montażu na powierzchni PCB. Stosuje się trzy rodzaje montażu układów scalonych: przewlekany PTH (ang. *Pin Through Hole*), powierzchniowy SMT (ang. *Surface Mount Technology*) struktur obudowanych i nieobudowanych, co pokazano na rysunku 2.11. Montaż przewlekany oferuje lepsze parametry niezawodnościowe, niestety jego wykorzystanie w przypadku powszechnie stosowanych wielowarstwowych płytek PCB jest ograniczone lub praktycznie niemożliwe. Układy obudowane montuje się z wykorzystaniem połączeń lutowanych i klejonych, natomiast układy nieobudowane z wykorzystaniem połączeń lutowanych, drutowych i klejonych. Układy nieobudowane najczęściej poddaje się dodatkowo zabezpieczeniu, np. w procesie *glob-top*.



Rys. 2.11. Rodzaje montażu układów na powierzchni PCB w przypadku struktur obudowanych: przewlekany (a) i powierzchniowy struktur obudowanych (b) i nieobudowanych (c)

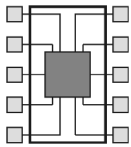
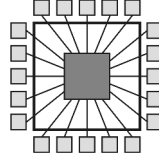
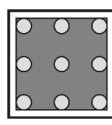
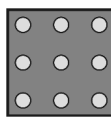
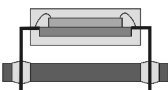
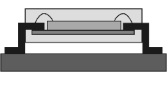
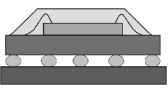

Przedstawiona charakterystyka metod upakowania i montażu nie obejmuje wszystkich stosowanych obecnie technologii. Pozwala ona jednak na ocenę zalet i wad wymienionych metod upakowania i montażu. W tabeli 2.4 przedstawiono wybrane architektury wyprowadzeń, rodzaje upakowania, typy obudowy i metody montażu na powierzchni PCB z uwzględnieniem ich najważniejszych parametrów. Z kolei, na rysunku 2.12a przedstawiono rozwój architektury wyprowadzeń, typów obudowy i montażu układów na powierzchni PCB w zależności od gęstości I/O obudowy, natomiast na rysunku 2.12b przedstawiono prognozowany rozwój i udział procentowy różnych technik montażu, według ITRS.

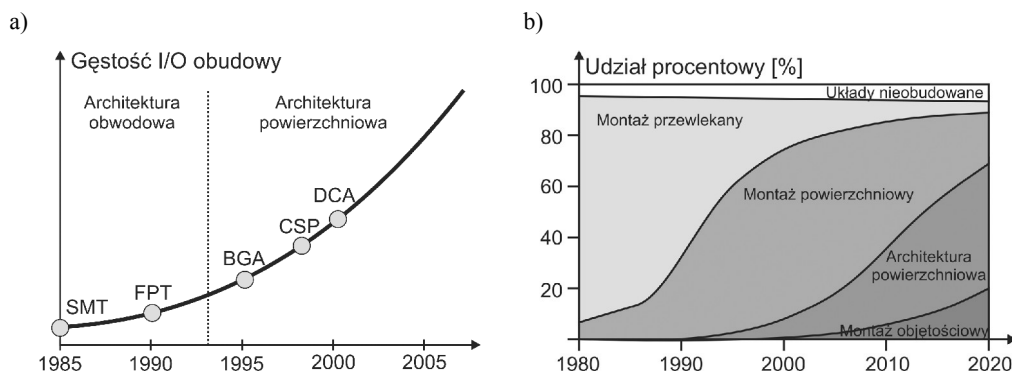
Jak wspomniano, głównym celem rozwoju technik montażu elektronicznego jest: obniżenie kosztów, zwiększenie gęstości upakowania, wydajności i częstotliwości granicznych, z jednoczesnym wzrostem niezawodności. Ze względu na zwiększenie częstotliwości granicznej, kluczowym problemem jest długość ścieżki połączenia dla sygnałów elektrycznych. W przypadku niezawodności celem jest zmniejszenie liczby połączeń składowych w łańcuchu połączeń, a dla wydajności jednoczesne wykonanie

dużej liczby połączeń, natomiast dla gęstości upakowania wykonanie jak największej liczby wyprowadzeń na jak najmniejszej powierzchni. Z porównania oczekiwanych zmian w konstruowaniu układów scalonych oraz wynikających z tego wymagań wobec montażu elektronicznego wynika, że oba te kierunki będą się rozwijały w podobnym tempie.

Wybór odpowiedniej metody upakowania i techniki montażu układów scalonych zależy od kilku kryteriów. W przypadku zastosowań, w których wymagana jest możliwość ręcznej wymiany wadliwych układów, a właściwości cieplne nie są krytyczne, preferuje się montaż struktur obudowanych metodą przewlekaną. Jeżeli celem zaś jest zastosowanie wymagające dużej liczby I/O, dobrych właściwości cieplnych i dużych częstotliwości, to preferowana jest architektura powierzchniowa oraz obudowy typu BGA i CSP, jak również układy nie obudowane typu *flip-chip*. Według rysunku 2.12b, w miarę rozwoju układów scalonych i systemów, oczekuje się wzrostu zainteresowania objętościowym montażem struktur półprzewodnikowych, architekturą powierzchniową przy jednoczesnym zmniejszeniu udziału montażu powierzchniowego układów obudowanych. Montaż układów nieobudowanych będzie wzrastał nieznacznie, natomiast montaż przewlekany będzie powoli zanikał.

Tabela 2.4. Wybrane architektury wyprowadzeń, rodzajów upakowania, typów obudowy i montażu na powierzchni PCB oraz ich najważniejsze parametry [37]

Architektura wyprowadzeń	Obwodowa		Powierzchniowa	
Rodzaj upakowania oraz typ obudowy	DIP 	QFP 	CSP 	Flip-chip 
Rodzaj montażu na powierzchni PCB	PTH 	SMT 	SMT/BGA 	DCA 
Powierzchnia struktury [mm <sup>2</sup> ]	25	256	625	1296
Liczba I/O	64	500	1600	3600
Częstotliwość [MHz]	5	80	320	1280
Rozpraszanie ciepła [W]	0,5	7,5	30	120



Rys. 2.12. Rozwój architektury wyprowadzeń oraz typów obudowy i rodzaju montażu układu na podłożu w zależności od liczby I/O obudowy (a) oraz prognozowany rozwój i udział procentowy różnych technik montażu według ITRS (b)

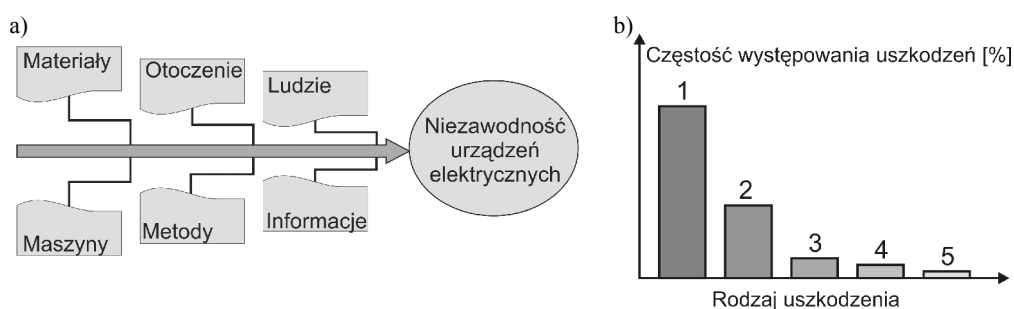
### 2.3. niezawodność urządzeń elektronicznych a montaż elektroniczny

Uzyskanie dużej niezawodności urządzeń elektronicznych jest jednym z kluczowych problemów producentów i użytkowników. Powszechnie wiadomo, że urządzenia elektroniczne ulegają uszkodzeniu zarówno w czasie procesu produkcji, jak i podczas eksploatacji. Uszkodzenia te są najczęściej spowodowane obciążeniami termomechanicznymi, które mają charakter: cykliczny, udarowy, szokowy lub ciągły. Projektowanie zatem ma na celu znalezienie kompromisu między niezawodnością, rodzajem przeznaczenia i kosztem produkcji. Urządzenia o specjalnym przeznaczeniu, np. medycznym czy militarnym, spełniają wyższe kryteria niezawodnościowe. Dlatego urządzenia elektroniczne dzieli się na trzy klasy w zależności od ich przeznaczenia:

- klasa I – sprzęt elektroniczny o przeznaczeniu ogólnym – jest to sprzęt, którego podstawowym wymaganiem jest poprawne działanie całego urządzenia w określonych warunkach eksploatacyjnych,
- klasa II – sprzęt elektroniczny o przeznaczeniu specjalistycznym – jest to sprzęt o zwiększonej niezawodności, gdy istotnym parametrem jest możliwość pracy ciągłej w przypadku różnych narażeń środowiskowych,
- klasa III – sprzęt elektroniczny o dużej niezawodności – określenie to dotyczy sprzętu o najwyższych wymaganiach niezawodnościowych, gdy zarówno warunki środowiskowe, jak i rodzaj pracy, ciągły lub okresowy, nie powinny mieć znaczenia, np. systemy medyczne do podtrzymywania funkcji życiowych człowieka.

Przyporządkowanie danego urządzenia do jednej z klas jest obwarowane wieloma normami, jakie muszą być spełnione. Przykładem takiej normy jest norma IPC o numerze J-STD-001B. Dotyczy ona wymagań, jakie muszą spełniać urządzenia elektroniczne zawierające połączenia lutowane. Celem montażu elektronicznego jest zapewnienie pełnej funkcjonalności urządzenia przy spełnieniu określonych norm i kryteriów niezawodnościowych. Aktualnym kierunkiem na rynku producentów urządzeń elektronicznych jest prognozowanie czasu życia tych urządzeń już na etapie projektowania –oczywiście jest to możliwe pod warunkiem, że znany jest średni wymagany czas użytkowania. Przykładem tak projektowanych urządzeń są telefony komórkowe powszechnego zastosowania, których średni czas użytkowania szacuje się na okres 3 lat. Takie podejście pozwala na uniknięcie zastosowania kosztownych materiałów i skomplikowanych procesów technologicznych.

Dziedzina wiedzy, która zajmuje się projektowaniem, badaniem, opisem i oceną niezawodności obiektów nosi nazwę inżynierii niezawodności. Analiza niezawodności jest bardzo złożonym problemem wymagającym wiedzy interdyscyplinarnej. Dlatego też, w przypadku analizy niezawodności korzysta się z diagramów Ishikawy, które pozwalają na ilustrację związków przyczynowo-skutkowych. Analiza polega na stwierdzeniu wystąpienia skutku (np. uszkodzenia) i identyfikacji wszystkich możliwych przyczyn, które je spowodowały (rys. 2.13a). Innym bardzo ważnym narzędziem w analizie niezawodności są wykresy Pareto. Pozwalają one na identyfikację oraz opracowanie listy najważniejszych przyczyn uszkodzeń. Przesłanką do tworzenia wykresów Pareto jest to, że zaledwie kilka typów uszkodzeń stanowi 80–90% wszystkich uszkodzeń, co zostało potwierdzone w badaniach (rys. 2.13b).



Rys. 2.13. Typowy diagram Ishikawy, przedstawiający czynniki wpływające na niezawodność urządzeń elektronicznych (a) oraz przykładowy wykres Pareto pokazujący częstość występowania uszkodzeń (b)

Inżynieria niezawodności posługuje się następującymi podstawowymi pojęciami, takimi jak: obiekt, niezawodność, metoda pozytywna, metoda negatywna, metoda kombinowana. Obiekt składa się z pojedynczych elementów i zespołów o strukturze: szeregowej, równoległej, złożonej oraz mieszanej; dodatkowo elementy i zespoły są

wzajemnie niezależne lub zależne. Niezawodność lub trwałość obiektu można wyrazić za pomocą trzech wzajemnie równoważących się metod:

- metoda pozytywna – opis dotyczy poprawnego funkcjonowania obiektu,
- metoda negatywna – opis dotyczy wadliwego funkcjonowania obiektu,
- metoda kombinowana – opis dotyczy zarówno poprawnego, jak i wadliwego funkcjonowania obiektu,

Opis niezawodności obiektu powinien składać się z trzech wzajemnie uzupełniających się części: werbalnej, logicznej oraz matematycznej. Inżynieria niezawodności wyróżnia dwie metody analizy niezawodności:

- statystyczną – niezawodność jest funkcją czasu,
- fizyczną – niezawodność jest funkcją stanu fizycznego elementów składowych obiektu.

Ocena niezawodności może być rozpatrywana w sposób:

- deterministyczny; przyczyny mają ściśle określone wartości, w związku z czym niezawodność może być określona precyzyjnie,
- probabilistyczny; przyczyny są traktowane jako wielkości losowe, tzn. opisane rozkładem prawdopodobieństwa, w związku z czym niezawodność może być także określona pewnym rozkładem prawdopodobieństwa [44].

Niezawodność według normy PN-80/N-04000 rozumie się jako właściwość obiektu charakteryzującą jego zdolność do wykonywania funkcji w określonych warunkach i w czasie. Ilościowy opis niezawodności obiektu realizuje się na podstawie wyników badań niezawodnościowych i wskaźników liczbowych, opisujących właściwości oraz warunki eksploatacji obiektu. Przykładem opisu niezawodnościowego może być funkcja określana jako intensywność uszkodzeń  $h(t)$ <sup>22</sup>, którą otrzymuje się w wyniku badań doświadczalnych, tzw. krzywa „wannowa” (rys. 2.14). Krzywa ta może być podzielona na trzy obszary:

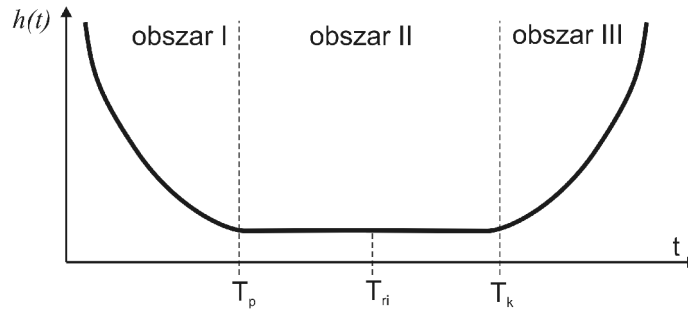
- obszar I odpowiadający, tzw. wczesnej śmiertelności; uszkodzenie występuje na etapie produkcji lub w początkowym okresie użytkowania obiektu,
- obszar II odpowiadający etapowi normalnego użytkowania obiektu; najczęściej przyczyną uszkodzenia są zbyt duże naprężenia będące wynikiem przekroczenia zalecanych parametrów eksploatacyjnych, np. upadek, szok temperaturowy,
- obszar III odpowiadający naturalnemu zużyciu się materiałów w trakcie użytkowania; uszkodzenie na skutek stopniowego starzenia się materiałów w czasie normalnego użytkowania lub w wyniku cyklicznie zmiennych obciążeń.

Wyniki badań obiektu mają najczęściej charakter losowy, w związku z czym ilościowy opis niezawodności wymaga zastosowania charakterystyk probabilistycznych

---

22 Intensywność uszkodzeń opisuje granicę stosunku prawdopodobieństwa warunkowego, gdy czas  $T$  uszkodzenia obiektu znajdzie się w danym przedziale czasu  $(t, t + \Delta t)$  do długości tego przedziału  $\Delta t$ , gdy  $\Delta t$  dąży do zera, po założeniu, że obiekt jest w stanie zdatności na początku przedziału czasu.





Rys. 2.14. Intensywność uszkodzeń  $h(t)$ , gdzie  $T_p$  oznacza czas, po którym zanika, tzw. wczesna śmiertelność,  $T_k$  oznacza czas, po którym następuje pogorszenie jakości na skutek zużywania się materiałów,  $T_n$  oznacza czas w trakcie normalnego użytkowania, kiedy istnieje możliwość naprawy obiektu

oraz rozkładów prawdopodobieństwa. W teorii niezawodności do opisu czasu poprawnej pracy obiektu, tzw. czasu zdatności, stosuje się rozkłady prawdopodobieństwa uszkodzeń w funkcji czasu  $f(t)$ . Rozkład prawdopodobieństwa  $f(t)$  opisuje prawdopodobieństwo  $P$  uszkodzenia obiektu w przedziale czasu  $t \div t + \Delta t$  jako:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t} . \quad (2.1)$$

Prawdopodobieństwo, że obiekt ulegnie uszkodzeniu do czasu  $t$  można wyznaczyć za pomocą dystrybuanty rozkładu prawdopodobieństwa:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau . \quad (2.2)$$

W takim przypadku intensywność uszkodzeń  $h(t)$  można wyznaczyć z zależności:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} . \quad (2.3)$$

W praktyce do opisu matematycznego niezawodności obiektu korzysta się z pewnej zalecanej grupy rozkładów prawdopodobieństwa oraz odpowiadających im metod wnioskowania statystycznego, których celem jest ocena wybranych wskaźników niezawodności<sup>23</sup>. Przykładowy zalecany przez normę rozkład prawdopodobieństwa uszkodzenia obiektu  $f(t)$  to [45, 46]:

23 Norma PN-79/N-04031 Niezawodność w technice. Estymacja wskaźników niezawodności.

- wykładniczy:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (2.4)$$

gdzie  $\lambda > 0$ ,

- Weibulla

$$f(t) = p \lambda t^{p-1} e^{-\lambda t^p}, \quad (2.5)$$

gdzie  $\lambda > 0$  i  $p > 0$ ,

- Rayleigha

$$f(t) = 2 \lambda t e^{-\lambda t^2}, \quad (2.6)$$

gdzie  $\lambda > 0$ ,

- normalny

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.7)$$

gdzie  $\mu$  jest wartością oczekiwaną, natomiast  $\sigma^2$  jest wariancją rozkładu.

- logarymiczno-normalny

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.8)$$

- gamma

$$f(t) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} t^{p-1} e^{-bt}, \quad (2.9)$$

gdzie  $b > 0$  i  $p > 0$ , natomiast  $\Gamma(p)$  oznacza funkcję gamma.

Niemniej jednak, w praktyce inżynierskiej, a zwłaszcza w dziedzinie montażu elektronicznego, w celu ilościowej analizy niezawodności przyjmuje się najczęściej założenia, że czas poprawnej pracy obiektu  $t$  można opisać uogólnionym rozkładem wykładniczym określanym jako rozkład Weibulla<sup>24</sup>. Rozkład Weibulla w przeciwieństwie do rozkładu wykładniczego dopuszcza możliwość zmiany wartości prawdopodobieństwa uszkodzenia w analizowanym przedziale czasu. Istnieje kilka wieloparametrowych rozkładów Weibulla [47, 45], które można zapisać w postaci ogólnej jako:

- rozkład trójparametrowy:

<sup>24</sup> W celu potwierdzenia czy wyniki badań niezawodnościowych można opisać rozkładem Weibulla należałoby skorzystać ze statystycznej metody weryfikacji hipotez, np. na podstawie nieparametrycznego testu statystycznego  $\chi^2$  (chi-kwadrat).

$$f(t) = \frac{\beta}{\lambda} \left( \frac{t-t_0}{\lambda} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-t_0}{\lambda}\right)^\beta}, \quad (2.10)$$

- rozkład dwuparametrowy:

$$f(t) = \frac{\beta}{\lambda} \left( \frac{t}{\lambda} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\beta}, \quad (2.11)$$

gdzie:  $\beta$  – parametr kształtu,  $\lambda$  – parametr skali określane niekiedy jako średni czas życia,  $t_0$  – parametr położenia lub czas początkowy.

Prawdopodobieństwo, że obiekt ulegnie uszkodzeniu do czasu  $t$  można opisać dystrybuantą, która w przypadku rozkładu Weibulla przyjmuje postać:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\beta}. \quad (2.12)$$

Prawdopodobieństwo natomiast, że obiekt będzie pracował poprawnie przez czas  $t$ , tzw. funkcja niezawodności  $R(t)$  będzie opisana zależnością:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\beta}, \quad (2.13)$$

Celem badań niezawodnościowych jest oszacowanie wartości liczbowej parametrów rozkładu oraz wyznaczenie wybranych wskaźników niezawodności, np. wartość oczekiwana. Oszacowanie parametrów rozkładu oraz wskaźników niezawodności na podstawie wyników badań niezawodnościowych jest zadaniem stosunkowo trudnym, przede wszystkim z powodu niewielkiej liczby wyników doświadczalnych. W tym celu stosuje się zazwyczaj takie metody, jak: metoda momentów<sup>25</sup>, metoda największej wiarygodności<sup>26</sup> oraz metody graficzne. W przypadku dużej liczby wyników (tzn.  $n > 15$ ) najlepsze oszacowanie wartości parametrów uzyskuje się w przypadku metody największej wiarygodności, podczas gdy w przypadku niewielkiej liczby wyników preferuje się metody graficzne [48].

W praktyce wygodnie jest posługiwać się pojęciem tzw. zdatności charakterystycznej<sup>27</sup> obiektu odpowiadającej liczbowo wartości parametru skali  $\lambda$  niezależnie od war-

25 Metoda momentów polega na identyfikacji momentów rozkładu przez odpowiednie dopasowanie wartości parametrów rozkładu. Metoda ta jest bardzo rzadko stosowana w analizie niezawodności.

26 Metoda największej wiarygodności została po raz pierwszy zastosowana przez Fishera w 1922 roku. Metoda ta dotyczy estymacji parametrów rozkładu za pomocą wartości, które maksymalizują wiarygodność  $L$  próby, która jest funkcją gęstości łącznego prawdopodobieństwa  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , gdzie  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są obserwacjami  $n$  zmiennych losowych.

27 Zdatność charakterystyczna jest definiowana jako czas  $t$ , po którym uszkodzeniu ulegnie 63,2% wszystkich badanych obiektów.

tości parametru kształtu  $\beta$ . Zdatność charakterystyczną wyznacza się po założeniu, że  $t = \lambda$ , wówczas zgodnie z zależnością (2.12) mamy:

$$F(t = \lambda) \approx 0,632. \quad (2.14)$$

Zdatność charakterystyczną można wyznaczyć metodą graficzną, dzięki czemu rozkład Weibulla staje się wyjątkowo prosty w interpretacji wyników eksperymentu i pozwala na ograniczenie ich liczby do niezbędnego minimum. Korzystając z metody graficznej aproksymacji, a następnie ekstrapolacji wyników eksperymentu, można w stosunkowo prosty sposób oszacować wartość parametru  $\lambda$ , a tym samym wartość zdatności charakterystycznej.

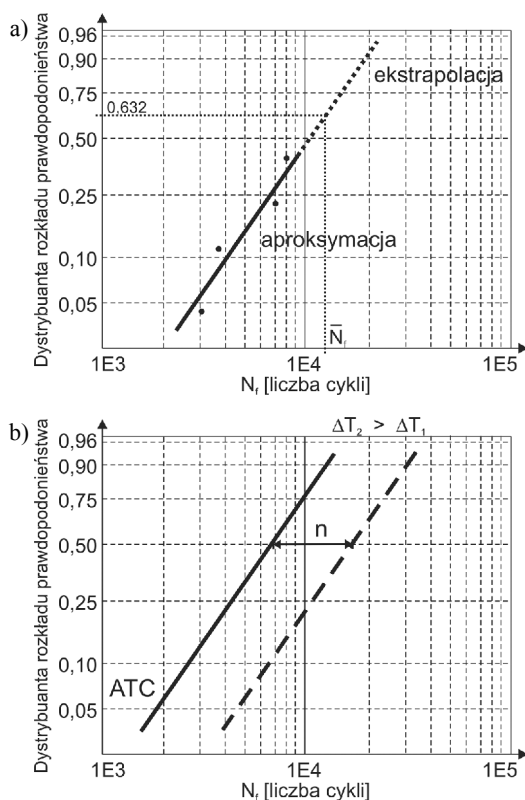
W montażu elektronicznym korzysta się ze wskaźnika liczbowego opisującego niezawodności obiektów w połączeniu z jego wytrzymałością. Wytrzymałość obiektu można badać w warunkach statycznych (stała wartość obciążenia) lub dynamicznych (okresowo zmienna wartość obciążenia). W przypadku obciążeń zmiennych okresowo, wytrzymałość obiektu opisuje się jako wartość amplitudy naprężenia lub obciążenia, która gwarantuje osiągnięcie określonej liczby cykli zmian. Z kolei trwałość zmęczeniowa opisuje liczbę cykli zmian dla zadanej amplitudy naprężenia lub obciążenia. Zdatność charakterystyczną w odniesieniu do trwałości zmęczeniowej  $\bar{N}_f$  można wyznaczyć po założeniu, że:

$$F(\bar{N}_f) \approx 0,632. \quad (2.15)$$

Na rysunku 2.15a przedstawiono przykładowe wyniki oraz graficzną metodę analizy wyników badań niezawodnościowych oraz metodę wyznaczania wartości zdatności charakterystycznej  $\bar{N}_f$ , na podstawie rozkładu Weibulla.

Wykresy Weibulla są powszechnie stosowane w montażu elektronicznym do analizy wyników doświadczalnych, w przypadku:

- Przyspieszonych cyklicznie zmiennych testów termicznych ATC (ang. *Accelerated Thermal Cycling*), (rysu. 2.15b). W testach tych korzysta się z zasady przesunięcia wzdłuż osi odciętych wykresu Weibulla w zależności od amplitudy temperatury obciążenia  $\Delta T$  w warunkach testowych. Wykorzystanie tej zasady umożliwi ograniczenie czasu koniecznego do wykonania procedur testowych dla prototypów [49, 50].
- Wyznaczania kryterium uszkodzenia na potrzeby projektowania numerycznego [51]; wyznaczona z eksperymentu zdatność charakterystyczna  $\bar{N}_f$  jest przyjmowana w projektowaniu numerycznym za kryterium uszkodzenia, co z kolei pozwala na zbudowanie empirycznych modeli uszkodzenia [52, 53, 54]. Przykładem takiego modelu jest powszechnie stosowana zależność Coffina–Mansona do oszacowania trwałości zmęczeniowej kontaktów podwyższonych [55].



Rys. 2.15. Przykład graficznej metody analizy wyników eksperymentu na podstawie rozkładu Weibulla: aproksymacja i ekstrapolacja (a), przyspieszone testy termiczne (b), gdzie  $N_f$  jest liczbą cykli obciążenia do wystąpienia uszkodzenia

Ocena niezawodności w montażu elektronicznym sprowadza się najczęściej do analizy możliwych przyczyn uszkodzeń oraz oceny prawdopodobieństwa ich wystąpienia w zadanych warunkach. Konieczna jest zatem znajomość typowych obciążeń, mechanizmów uszkodzeń oraz kryteriów ich wystąpienia.

## 2.4. Uszkodzenia w montażu elektronicznym

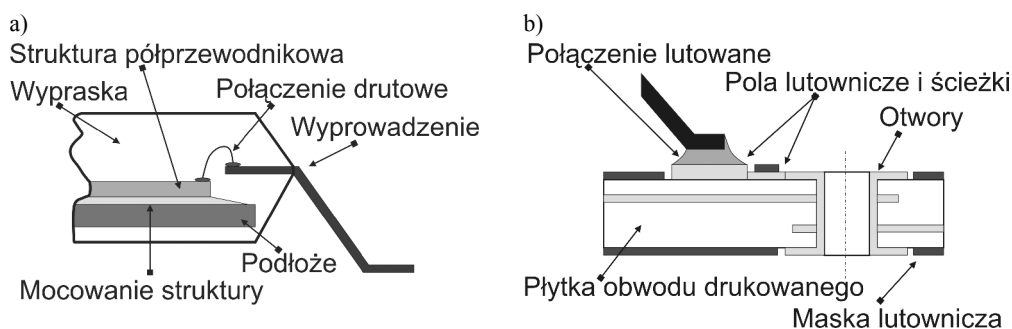
W przeciwieństwie do typowych konstrukcji mechanicznych w montażu elektronicznym użyte elementy mają znacznie mniejsze rozmiary, poza tym stosuje się jednocześnie liczne materiały oraz tworzy ich połączenia. Większość tych materiałów różni się właściwościami, a ich wzajemne połączenia w wielu przypadkach są bardzo trudne

do scharakteryzowania, np. warstwy międzymetaliczne. Z podanych powodów pełna lista możliwych uszkodzeń w montażu elektronicznym jest bardzo długa, a dokładny ich opis wymaga wiedzy interdyscyplinarnej. Na rysunku 2.16 przedstawiono przykład montażu elektronicznego na pierwszym i drugim poziomie z wyróżnieniem najważniejszych części składowych oraz potencjalnych miejsc uszkodzeń.

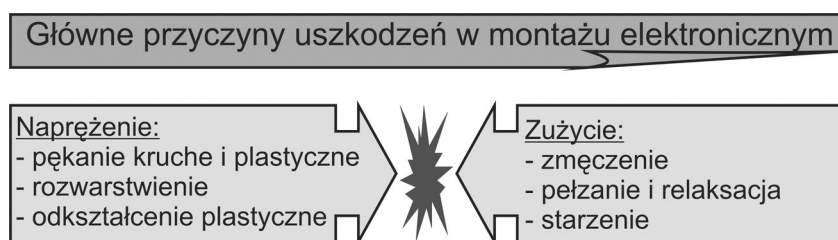
Najczęściej spotykaną lokalizacją uszkodzeń są narożniki oraz połączenia różnych materiałów. Według przeprowadzonych badań niezawodnościowych, dotyczących przyczyn uszkodzeń, ocenia się że [56]:

- jedną z głównych przyczyn uszkodzeń są błędy powstałe już na etapie projektowania,
- uszkodzenia spowodowane obciążeniami termomechanicznymi stanowią około 70% wszystkich uszkodzeń w montażu elektronicznym.

Uszkodzenia można podzielić ze względu na przyczynę (rys. 2.17): spowodowane zbyt dużym naprężeniem oraz stopniowym zużyciem materiału [57, 58, 59].



Rys. 2.16. Lokalizacja potencjalnych miejsc uszkodzeń na pierwszym (a) i drugim (b) poziomie montażu elektronicznego



Rys. 2.17. Główne przyczyny uszkodzeń na skutek obciążeń termomechanicznych

W razie zbyt dużego naprężenia wyróżnia się następujące rodzaje uszkodzeń:

- **Pękanie kruche** – uszkodzenie występuje, gdy odkształcenie sprężyste w materiale narasta do momentu, w którym główne wiązania międzyatomowe zostają zerwane i materiał rozdziela się na dwie lub więcej części. Istniejące uprzednio defekty lub

mikropęknięcia rozprzestrzeniają się, inicjując zjawisko nagłego pęknięcia, prowadzącego do powstania przełomu.

- **Pęknięcie plastyczne** – uszkodzenie powstające w wyniku rozpraszanie energii niesprężystej i gdy odkształcenie plastyczne narasta do momentu, w którym materiał rozdziela się na dwie części. Stan pierwotny oraz połączenia wewnętrzne zostają zmodyfikowane w wyniku rozprzestrzeniającego się defektu lub poślizgu wzdłuż granic ziaren.
- **Rozwarstwienie** – uszkodzenie dotyczące obszaru struktur wielowarstwowych, połączonych siłą adhezji. Uszkodzenie powstaje w chwili, gdy naprężenia ścinające lub rozrywające przekraczają wartość siły adhezji, co powoduje otwarcie, a następnie stopniowe powiększanie się szczeliny aż do rozdzielenia materiałów.
- **Odkształcenie plastyczne** – uszkodzenie występujące, gdy odkształcenie sprężyste w materiale, wymuszone przez obciążenie mechaniczne i/lub termiczne, staje się na tyle duże, by doprowadzić do trwałego odkształcenia materiału, co może doprowadzić do wadliwego wykonywania zamierzonych funkcji.

W przypadku stopniowego zużycia materiału, wyróżnia się następujące rodzaje uszkodzeń:

- **Zmęczenie materiału** występuje na skutek okresowo zmiennych obciążeń, które powodują brak stałej równowagi między stanem naprężeń a stanem obciążeń. W rezultacie może dojść do uszkodzenia w wyniku pęknięcia lub rozwarstwienia, nawet gdy stan naprężenia nie przekracza granicy plastyczności. Uszkodzenie powstaje na skutek inicjacji i następnie propagacji pęknięcia do momentu powstania przełomu. Cechą charakterystyczną uszkodzenia na skutek zmęczenia jest występowanie obciążeń i deformacji, których wartość może być znacznie mniejsza niż wartość krytyczna uzyskana w statycznych badaniach wytrzymałościowych. Zjawisko zmęczenia dzieli się na wysokocykliczne i niskocykliczne. W przypadku gdy zmiennym obciążeniem jest pole temperatury, zjawisko nazywa się zmęczeniem termicznym. Zmęczenie korozyjne natomiast jest kombinacją procesu korozji i zmęczenia materiału łącząc ich szkodliwe następstwa. Proces korozji często tworzy nieciągłości powierzchni w postaci szczelin i wgłębień, zwiększając tym samym stan naprężenia w materiale, przyspieszając proces zmęczenia materiału.
- **Pełzanie i relaksacja**; zjawisko pełzania występuje, gdy na skutek istnienia stałego stanu naprężenia następuje stopniowy wzrost odkształcenia. Odkształcenie ma charakter trwały i narasta przez określony okres aż do momentu, w którym zmiana skumulowana w strukturze materiału spowoduje nieprawidłowe funkcjonowanie urządzenia. Z kolei zjawisko relaksacji ma miejsce, gdy na skutek istnienia stałego stanu odkształcenia w materiale następuje stopniowy spadek naprężenia, co zazwyczaj jest zjawiskiem pożądanym.
- **Starzenie** materiału jest naturalnym procesem, który prowadzi do stopniowego osłabienia lub zmian chemicznych czy strukturalnych w materiale oraz występowania procesów fizycznych, takich jak dyfuzja. Proces starzenia materiału jest nieuchronny,

a jego stopień można spowolnić w przypadku niektórych materiałów czy połączeń przez zastosowanie specjalnych powłok ochronnych lub warstw buforowych.

Stan naprężeń w montażu elektronicznym powstaje w wyniku obciążeń termomechanicznych i jest przyczyną niedopasowania współczynników rozszerzalności cieplnej materiałów. W tabeli 2.5 przedstawiono typowe wartości właściwości termomechanicznych dla wybranych materiałów stosowanych w montażu elektronicznym.

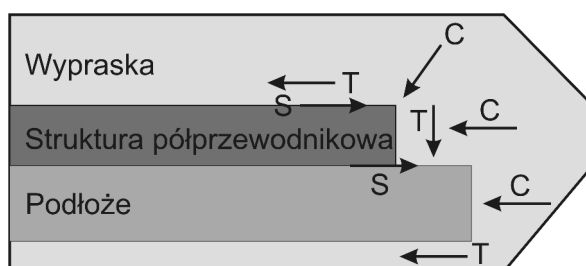
Tabela 2.5. Przykładowe właściwości termomechaniczne wybranych materiałów stosowanych w montażu elektronicznym [37, 60, 61, 62, 63, 33, 64, 65, 49, 66, 67] w temperaturze pokojowej

Materiał	$E$ [GPa]	$\nu$ [1]	$\alpha$ [ $10^{-6}/K$ ]
Krzem	112–170	0,22–0,30	2,3–2,8
SiO <sub>2</sub>	69,0–70,0	0,15	0,6–3,0
Wypraska	10,0–18,0	0,3	11,0–58,0
Klej	1,0–5,0	0,3–0,35	30,0–205
PCB (FR4)	16,8–25,0 (xy) 4,82–7,8 (z)	0,28–0,39 (xy) 0,11–0,19 (z)	14,0–18,0 (xy) 50,0–67,2 (z)
LTCC	70,0–150	0,22–0,30	4,0–6,5
Kovar	138	0,31	3,5
Miedź	68,9–130	0,30–0,38	16,0–17,8
Nikiel	151–223	0,3–0,31	12,9
Aluminium	60,0–70,0	0,3–0,35	20,0–23,6
Złoto	2,5–78,0	0,42–0,43	14,4
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	300–383	0,23–0,25	4,3–6,8
SnPb	30,0–32,6	0,34–0,37	23,7–25,0
SnAg	24,5	0,40	22,36
SnAgCu	38,0–64,0	0,21–0,40	16,7–23,0
Szkło	19,0–63,0	0,13–0,28	1,5–15,0

Uszkodzenia na skutek niedopasowania współczynników rozszerzalności cieplnej oraz obciążeń termomechanicznych mogą powstać już na etapie kolejnych procesów technologicznych. Do najbardziej niebezpiecznych procesów technologicznych zalicza



się: proces mocowania struktury krzemowej, lutowanie, proces zaprasowania przetłocznego oraz proces lutowania rozpliwowego. Kolejne procesy technologiczne mogą powodować powstanie zbyt dużych naprężeń ściskających, rozciągających lub ścinających, które mogą doprowadzić do uszkodzenia jednego lub kilku materiałów oraz ich połączeń. Na rysunku 2.18 pokazano rodzaj naprężeń oraz potencjalne miejsca ich wystąpienia [68].



Rys. 2.18. Rodzaj i miejsce powstania naprężeń termomechanicznych:  
*T* – naprężenie rozciągające (ang. *tensile stress*), *C* – naprężenie ściskające  
 (ang. *compressive stress*), *S* – naprężenie ścinające (ang. *shear stress*) [68]

W montażu elektronicznym obserwuje się zależność rodzaju uszkodzenia od charakteru obciążenia termicznego. Zarówno rodzaj uszkodzenia, jak i jego kryterium może zależeć od temperatury bezwzględnej  $T$ , zmiany temperatury  $\Delta T$ , gradientu temperatury  $\text{grad } T$ , szybkości zmiany temperatury  $dT/dt$ . W tabeli 2.6 zebrano pewne zależności między rodzajem uszkodzenia a charakterem obciążenia termicznego [68, 69].

Tabela 2.6. Wybrane zależności między rodzajem uszkodzenia a charakterem obciążenia termicznego

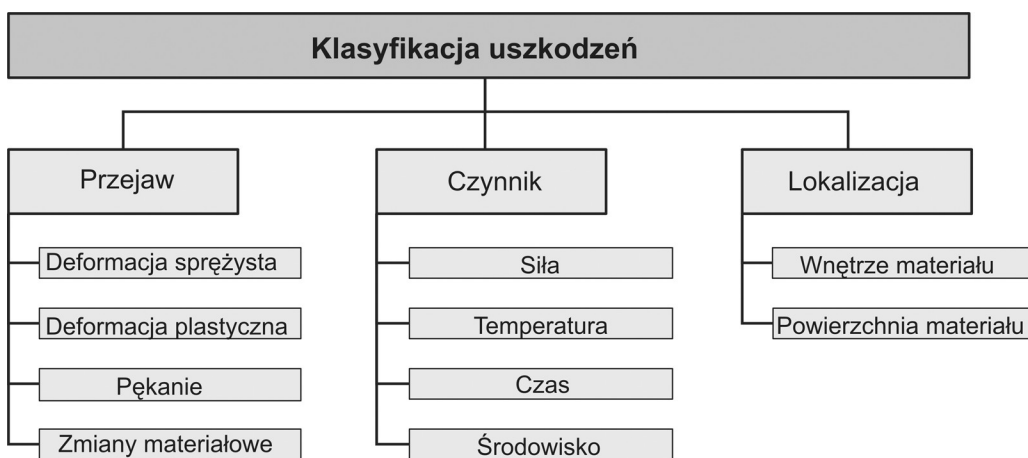
	Rodzaj uszkodzenia	Charakter obciążenia termicznego
Połączenie drutowe	zmęczenie	$\Delta T$
Struktura	pękanie	$\Delta T$ , $\text{grad } T$
Wypraska	pękanie	$\Delta T$

### 2.4.1. Wytrzymałość materiałów

Uszkodzeniami na skutek obciążeń zajmuje się dział mechaniki zwany wytrzymałością materiałów. W zakres badań wchodzi obserwacja i opisywanie procesów odkształceń oraz niszczenia materiałów. W przeciwieństwie do mechaniki teoretycznej, wytrzymałość materiałów dotyczy ciał odkształcalnych i sił wewnętrznych w tych ciałach. Celem badań i analizy jest znalezienie odpowiedzi na pytanie, czy pod wpływem

danych obciążeń w jakimś obszarze ciała siły wewnętrzne nie osiągną zbyt dużych wartości i czy materiał nie ulegnie w związku z tym uszkodzeniu. Równie ważną dziedziną badań wytrzymałości materiałów jest analiza odkształceń konstrukcji w celu oceny ich wytrzymałości w przewidzianych warunkach i określonym przedziale czasu. W przypadku konstrukcji konieczne jest uwzględnienie trzech warunków: wytrzymałości, sztywności i stateczności [70].

Uszkodzenia mechaniczne mogą być definiowane jako zmiany wymiarów, kształtu lub właściwości materiałowych struktury oraz części konstrukcji, powodując jej niezdolność do poprawnego wykonywania zamierzonych funkcji. Ogólna klasyfikacja uszkodzeń mechanicznych polega na określeniu następujących kryteriów uszkodzenia: przejawu, czynnika wywołującego i lokalizacji. Aby dokładnie opisać rodzaj uszkodzenia należy uwzględnić wszystkie wymienione kryteria: przejaw uszkodzenia w połączeniu z czynnikiem wywołującym uszkodzenie, a także jego lokalizację. Możliwe są różne kombinacje takich zestawień. Na rysunku 2.19 przedstawiono ogólną klasyfikację uszkodzeń. Podstawową metodą badań niezawodnościowych jest analiza stanu naprężeń i odkształceń oraz prognozowanie uszkodzeń według kryteriów uszkodzeń wyznaczonych w drodze badań wytrzymałościowych.



Rys. 2.19. Ogólna klasyfikacja uszkodzeń

#### 2.4.1.1. Stan naprężeń i odkształceń

Problemy wytrzymałości od lat nurtowały człowieka. Ich znajomość pozwalała na budowę coraz bardziej imponujących konstrukcji, takich jak na przykład średniowieczne katedry. Już w 1676 roku powstała pierwsza teoria, opracowana przez angielskiego uczonego Roberta Hooke'a stwierdzająca, że wydłużenie pręta  $\Delta l$  jest wprost propor-

proporcjonalne do siły rozciągającej  $F$  i długości początkowej pręta  $l_0$  oraz odwrotnie proporcjonalna do jego przekroju poprzecznego  $S$ . Teoria ta została następnie uogólniona do zasady, że naprężenie  $\sigma$  jest wprost proporcjonalne do odkształcenia  $\varepsilon$ , co można zapisać jako [71]:

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (2.16)$$

gdzie współczynnikiem proporcjonalności  $E$  jest moduł Younga lub moduł sprężystości wzdłużnej.

Prawo Hooke'a miało i ma fundamentalne znaczenie. Jest stosowane do dnia dzisiejszego. Ma charakter uniwersalny i wymagało jedynie nieznacznych modyfikacji. W przypadku płaskiego stanu odkształcenia, konieczne było wprowadzenie właściwości materiałowej noszącej nazwę współczynnika Poissona  $\nu$ , który wiąże odkształcenie wzdłużne  $\varepsilon_l$  i poprzeczne  $\varepsilon_t$  w postaci:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}, \quad (2.17)$$

gdzie znak minus oznacza, że wzrost odkształcenia wzdłużnego pociąga za sobą zmniejszanie odkształcenia poprzecznego.

W rzeczywistości naprężenie jest miarą gęstości powierzchniowej sił wewnętrznych występujących w ośrodku ciągłym. Naprężenie w dowolnym punkcie i danej płaszczyźnie przekroju jest wektorem, wyrażającym stosunek siły wewnętrznej działającej na wybrany punkt powierzchni przekroju do powierzchni tego przekroju, co można zapisać jako [72]:

$$\mathbf{s} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{A}, \quad (2.18)$$

gdzie  $\mathbf{s}$  jest wektorem naprężenia,  $\mathbf{F}$  jest wektorem sił wewnętrznych, natomiast  $A$  jest polem powierzchni przekroju. W przypadku prostokątnego układu współrzędnych można zapisać, że:

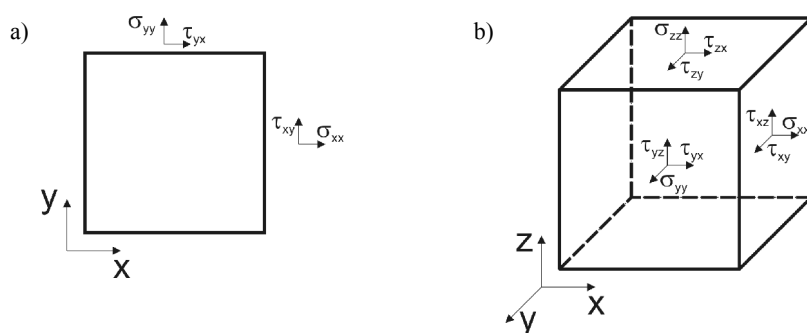
$$\mathbf{s} = \sigma_{xx} \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}, \quad (2.19)$$

gdzie  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – wersory osi prostokątnego układu współrzędnych, natomiast  $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  – składowe stanu naprężenia. Wektor naprężenia można rozłożyć na dwie składowe:

$$\mathbf{s} = \sigma \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}, \quad (2.20)$$

gdzie  $\sigma$  jest składową normalną naprężenia – prostopadłą do powierzchni,  $\mathbf{n}$  jest wektorem normalnym do powierzchni, natomiast  $\boldsymbol{\tau}$  jest składową styczną lub ścinającą naprężenia – równoległą do powierzchni.

W praktyce problem zależności między stanem naprężeń a odkształceń jest bardziej skomplikowany niż zostało to przedstawione przez Hooke'a. Wprowadzając w dowolnym punkcie ciała, w którym występuje stan naprężenia, trzy przekroje prostopadłe do osi współrzędnych dowolnie zorientowanego prostokątnego układu współrzędnych, można wyznaczyć dziewięć składowych stanu naprężenia, są to kolejno:  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  (rys. 2.20). Podobne zależności można także zapisać dla stanu odkształcenia, tzn.  $\epsilon_{xx}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\epsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{zx}$ ,  $\gamma_{zy}$ .



Rys. 2.20. Stan naprężeń w kartezjańskim układzie współrzędnych dla układu dwuwymiarowego (a) i trójwymiarowego (b)

W takim przypadku stan naprężenia  $\sigma$  i odkształcenia można opisać tensorem rzędu drugiego, czyli w notacji tensorowej<sup>28</sup> jako:

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

oraz

28 Tensor jest obiektem matematycznym, który stanowi uogólnione pojęcie wektora. Zbiór wszystkich tensorów określa się polem tensorowym. W zastosowaniach inżynierskich tensor definiuje się domyślnie w prostokątnym układzie współrzędnych. Tensory dzieli się ze względu na rząd: zerowy, pierwszy, drugi itp. Tensory rzędu zerowego odnoszą się do wielkości skalarnych, które nie zależą od wyboru układu współrzędnych. Tensory rzędu pierwszego dotyczą wielkości wektorowych i w przeciwieństwie do wielkości skalarnych wymagają określenia kierunku w wybranym układzie współrzędnych. Tensory rzędu drugiego stosuje się w celu opisanie relacji między dwoma wektorami w taki sposób, aby uwzględnić wzajemne relacje między wszystkimi ich składowymi, tzn.  $\mathbf{a} = \mathbf{T}_{3 \times 3} \mathbf{b}$  lub inaczej  $a_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} b_j$  dla  $(i=1, 2, 3)$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \quad (2.22)$$

Z prawa zachowania momentu pędu wynika, że tensor naprężenia i odkształcenia jest symetryczny, to znaczy  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  oraz  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , a zatem składowe naprężeń i odkształceń stycznych będą spełniały następujące warunki:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad (2.23)$$

oraz

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}. \quad (2.24)$$

Najczęściej stan naprężeń  $\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)$  w danym punkcie podaje się równoległe ze stanem odkształceń w tym punkcie  $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)$ , przy czym stan odkształceń jest pierwotną wielkością fizyczną. W przypadku uogólnionym należy przyjąć założenie, że istnieje zależność między poszczególnymi składowymi stanu naprężenia  $\sigma_{ij}$  i odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ , co można zapisać w postaci tensorowej jako [73, 74]:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 d_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.25)$$

lub

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (2.26)$$

gdzie  $d_{ijkl}$  – składowe tensora sztywności, natomiast  $c_{ijkl}$  – składowe tensora sprężystości.

Uogólnione prawo Hooke'a, ze względu na symetrię tensora sztywności i sprężystości, można zapisać w postaci macierzowej jako:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [D]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad (2.27)$$

oraz

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [C]\{\boldsymbol{\sigma}\} = [D]^{-1}\{\boldsymbol{\sigma}\}, \quad (2.28)$$

gdzie  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  – macierz kolumnowa naprężenia,  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$  – macierz kolumnowa odkształcenia, natomiast macierz  $[D]$  nosi nazwę macierzy sztywności a macierz  $[C]$  nosi nazwę macierzy podatności lub sprężystości.

Dla materiałów liniowo-sprężystych oraz izotropowych zależność (2.27) i (2.28) przyjmuje postać:

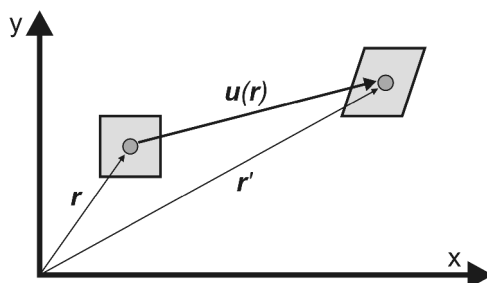
$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{vmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

W mechanice pełen opis stanu odkształcenia i naprężenia ciała na skutek obciążeń wymaga dodatkowo uwzględnienia stanu przemieszczenia  $\mathbf{u}$  (rys. 2.21). W przypadku trójwymiarowym stan naprężeń i odkształceń w danym punkcie opisuje 15 zmiennych, tj.: naprężenie 6 zmiennych, odkształcenie 6 zmiennych i przemieszczenia 3 zmienne. W celu wyznaczenia stanu naprężeń i odkształceń w danym punkcie konieczne jest rozwiązanie 15 równań, tj.: 3 równania równowagowe, 6 równań opisujących stan odkształcenie–przemieszczenie oraz 6 równań uogólnionego prawa Hooke’a. Metody rozwiązywania równań opisujących stan naprężenia i odkształcenia opierają się na rachunku wariacyjnym<sup>29</sup>, którego celem jest minimalizacja funkcjonału<sup>30</sup>, opisującego energię potencjalną ciała w stanie równowagi. Całkowitą energię potencjalną  $V$  ciała na skutek działania obciążeń zewnętrznych  $F_i$  i odpowiadających im wektorów przemieszczeń  $\mathbf{u}_i$ , można wyznaczyć z zależności [75]:

29 Rachunek wariacyjny polega na wyznaczaniu funkcji z danej klasy funkcji, w przypadku której wybrana całka osiąga wartość ekstremalną. Rachunek wariacyjny wprowadził m.in. pojęcie funkcjonału.

30 Funkcjonał jest odwzorowaniem przestrzeni funkcji na przestrzeń liczbową. Przykładem funkcjonału jest całka oznaczona z funkcji  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ , której wartościami są liczby rzeczywiste.



Rys. 2.21. Ilustracja stanu przemieszczenia i odkształcenia ciała na skutek obciążeń

$$V = \int_{\Omega} W d\Omega - \sum_{i=1}^n u_i F_i, \quad (2.31)$$

gdzie  $\Omega$  – objętość ciała, natomiast  $W$  – gęstość energii odkształcenia, która jest opisana zależnością:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (2.32)$$

W mechanice klasycznej przyjmuje się założenie, że odpowiedź układu jest natychmiastowa, tzn. brak jest opóźnienia czasowego między stanem naprężenia i odpowiadającego mu odkształcenia. W przypadku ogólnym należy jednak dodatkowo uwzględnić zależność między stanem naprężenia i odkształcenia od czasu  $t$ . W tym celu w mechanice wprowadza się pojęcie stanu prędkości odkształceń  $\dot{\varepsilon}(x, y, z)$ . Z kolei stan odkształceń można opisać wektorem przemieszczeń w postaci [76]:

$$\{\varepsilon\} = [\Gamma_l]\{u\} + [\Gamma_n]\{u\}, \quad (2.33)$$

gdzie  $\Gamma_l$  jest liniowym operatorem różniczkowania, natomiast  $\Gamma_n$  jest nieliniowym operatorem różniczkowania.

W zagadnieniach liniowych można pominąć człony nieliniowe i ostatnią zależność przepisać w postaci:

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \{u\}. \quad (2.34)$$

Zależność między stanem naprężeń, przemieszczeń, odkształceń i prędkości odkształceń można wyznaczyć na podstawie reologicznych modeli materiałowych ciał. Modele te reprezentują zachowania ciał rzeczywistych w wyniku działania obciążeń. Podstawowe modele reologiczne dla materiałów stosowanych w montażu elektronicznym opisano w dalszej części pracy.

Stan naprężeń w danym punkcie można tak zorientować względem układu współrzędnych, iż naprężenia styczne będą równe zeru, natomiast niezerową wartość będą miały wyłącznie naprężenia normalne. Tak zorientowany układ współrzędnych wyznacza kierunki główne stanu naprężenia:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

gdzie  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – naprężenia główne.

W zależności od wartości naprężeń głównych można wyróżnić następujące szczególne stany naprężenia:

- równomierne rozciąganie przestrzenne:

$$\sigma_1 = \sigma > 0, \quad \sigma_2 = \sigma, \quad \sigma_3 = \sigma, \quad (2.36)$$

- równomierne rozciąganie płaskie:

$$\sigma_1 = \sigma > 0, \quad \sigma_2 = \sigma, \quad \sigma_3 = 0, \quad (2.37)$$

- rozciąganie jednoosiowe:

$$\sigma_1 = \sigma > 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad (2.38)$$



- ścinanie:

$$\sigma_1 = \sigma > 0, \quad \sigma_2 = -\sigma, \quad \sigma_3 = 0. \quad (2.39)$$

W analizie wytrzymałościowej korzysta się niekiedy z przedstawienia tensora naprężenia jako sumy tensora kulistego  $\sigma_K$  (opisującego odkształcenie objętościowe) i dewiatora  $\sigma_D$  (opisującego odkształcenie postaciowe):

$$\sigma = \sigma_K + \sigma_D = \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{vmatrix}, \quad (2.40)$$

gdzie  $\sigma_m$  – średnia wartość naprężenia, tzw. naprężenie hydrostatyczne, wyrażona wzorem:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (2.41)$$

Oprócz modułu Younga w mechanice stosuje się jeszcze dwa moduły sprężystości:

- moduł sprężystości objętościowej, ścisłości lub moduł Helmholtza  $K$ ; opisuje zmianę objętości w wyniku naprężenia hydrostatycznego:

$$K = -\frac{p}{\Delta V}, \quad (2.42)$$

gdzie  $p$  – ciśnienie,  $\Delta V$  – odpowiadająca mu zmiana objętości,

- moduł sprężystości poprzecznej, postaciowej lub moduł Kirchhoffa  $G$ ; opisuje odkształcenie postaciowe w wyniku naprężenia stycznego lub inaczej ścinającego:

$$G = \frac{\tau}{\gamma}, \quad (2.43)$$

gdzie  $\tau$  – naprężenie styczne,  $\gamma$  – odkształcenie postaciowe:

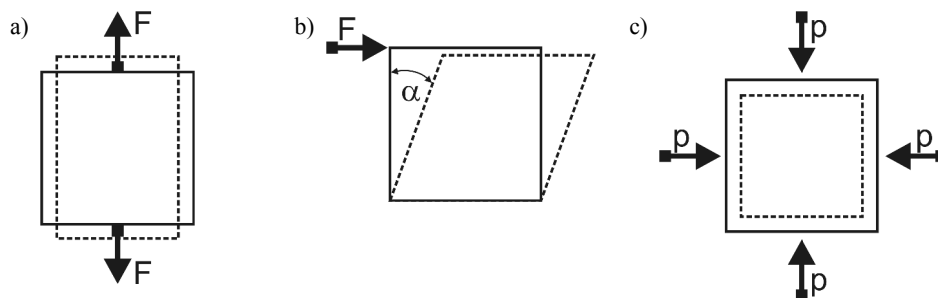
$$\gamma = \tan \alpha. \quad (2.44)$$

Ważną zasadą mechaniki jest możliwość wzajemnego przeliczenia wartości modułów sprężystości, co można zapisać w postaci równania:

$$E = 2G(1 + \nu) = 3K(1 - 2\nu). \quad (2.45)$$

W przypadku metali wartość współczynnika Poissona wynosi około  $\nu = 0,3$ , w związku z tym wartości poszczególnych modułów sprężystości można oszacować z zależności:

$$K \approx E \quad \text{oraz} \quad G \approx \frac{3}{8} E. \quad (2.46)$$



Rys. 2.22. Ilustracja różnych stanów odkształcenia ciała oraz odpowiadających im modułów sprężystości: wzdłużnej (a), poprzecznej (b), objętościowej (c)

Powszechnie stosowane rodzaje, metody i schematy obliczeniowe stosowane w dziedzinie wytrzymałości materiałów mogą być także użyte do montażu elektronicznego. Istotnym problemem w tym przypadku jest zmiana skali z makro na mikro. Wymaga to uwzględnienia m. in. nieliniowych właściwości i modeli materiałowych. Istotnym problemem jest także identyfikacja odpowiednich kryteriów uszkodzeń na podstawie badań wytrzymałościowych [77, 78].

#### 2.4.1.2. Metody doświadczalne badania wytrzymałości materiałów

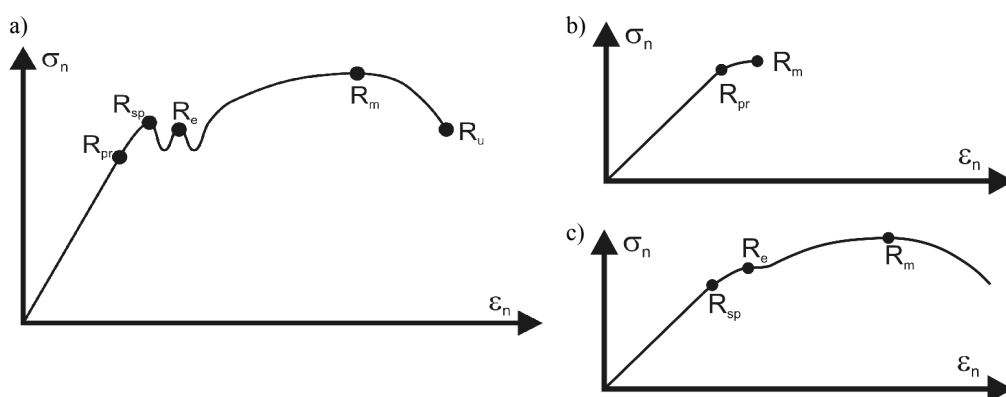
Podstawową metodą doświadczalną badania wytrzymałości materiałów jest statyczna próba rozciągania<sup>31</sup>, polegająca na rozciąganiu próbki materiału w postaci pręta. W czasie próby rejestruje się zależność przyrostu długości próbki  $\Delta l$  od wielkości siły rozciągającej  $F$ . W wyniku statycznej próby rozciągania można wyznaczyć charakterystyczne wartości naprężeń<sup>32</sup>, takie jak:

- granica proporcjonalności  $R_{pr}$  – zakres obowiązywania prawa Hooke'a,
- umowna granica sprężystości  $R_{sp}$  – zakres obowiązywania właściwości sprężystych; według normy wartość naprężenia równa  $F_{0,05}/S_0$  wyznaczona dla siły  $F_{0,05}$  powodującej trwałe odkształcenie 0,05%,
- umowna granica plastyczności  $R_e$  – według normy wartość naprężenia równa  $F_{0,2}/S_0$  wyznaczona dla siły  $F_{0,2}$  powodującej trwałe odkształcenie 0,2%,
- wytrzymałość na rozciąganie  $R_m$  – naprężenie odpowiadające maksymalnej wartości siły  $F_m$ ,
- naprężenie rozrywające  $R_u$  – naprężenie odpowiadające wartości siły  $F_u$ , przy której następuje zerwanie próbki.

31 W rzeczywistości obciążenie narasta z określoną prędkością, przyjmuje się założenie, że w każdej chwili istnieje stan równowagi między stanem naprężenia i odkształcenia.

32 Naprężenie nominalne  $\sigma_n$ , wyznacza się jako iloraz siły rozciągającej  $F$  przez pierwotne pole przekroju  $S_0$ , natomiast wartość rzeczywistego naprężenia  $\sigma$  należałoby wyznaczyć jako iloraz  $F/S$ , gdzie  $S$  jest rzeczywistym polem przekroju próbki, które zmniejsza się wraz ze zwiększeniem siły  $F$ .

Na rysunku 2.23a pokazano typowy wykres zależności naprężenie–odkształcenie  $\sigma_n = f(\varepsilon_n)$  uzyskany w statycznej próbie rozciągania jednoosiowego. Naprężenia w próbce oblicza się dzieląc siłę rozciągającą przez pole poprzeczne próbki (uwzględniając przewężenie lub nie uwzględniając go).



Rys. 2.23. Typowa krzywa naprężenie–odkształcenie uzyskana w próbie jednoosiowego rozciągania (a) oraz uproszczony wykres naprężenie–odkształcenie dla materiałów kruchych (b) i plastycznych (c):  
 $R_{pr}$  – granica proporcjonalności,  $R_{sp}$  – umowna granica sprężystości,  $R_e$  – umowna granica plastyczności,  $R_m$  – wytrzymałość na rozciąganie,  $R_u$  – naprężenie rozrywające

Otrzymana w wyniku doświadczenia charakterystyka naprężenie–odkształcenie  $\sigma = f(\varepsilon)$  ma inny kształt dla materiałów kruchych i plastycznych (rys. 2.23b i 2.23c). Dla większości materiałów granica plastyczności jest trudna do określenia, gdyż nie istnieje wyraźne przejście z zakresu sprężystego do plastycznego. W przypadku materiałów kruchych występują tylko dwa punkty krytyczne, podczas gdy dla materiałów plastycznych aż trzy punkty krytyczne. Głównym celem analizy wytrzymałościowej jest znalezienie zależności między punktami krytycznymi a granicą wytrzymałości  $K_r$  dla materiału. W przypadku materiałów kruchych przyjmuje się:

$$K_r = R_m, \quad (4.47)$$

dla materiałów plastycznych natomiast przyjmuje się:

$$K_r = R_e, \quad (4.48)$$

Jednocześnie dla większości materiałów utożsamia się granicę plastyczności z granicą sprężystości, gdyż pojawienie się odkształceń trwałych oznacza zjawisko niebezpieczne dla materiału.

Wytrzymałością materiałów i konstrukcji zajmowało się przez blisko trzysta lat bardzo wielu uczonych. Prace ich można podsumować jako różne hipotezy dzielące się na dwie grupy: hipotezy wytrzymałościowe i wytrzymałościowe [79]. Jedynym kryterium

słuszności danej hipotezy jest zgodność z doświadczeniem, np. statyczna próba rozciągania jednoosiowego. W zależności od przyjętej hipotezy kryteria uszkodzenia dla materiałów kruchych i plastycznych są różne. W przypadku materiałów kruchych występuje kilka hipotez, według których można wyznaczyć kryterium wystąpienia uszkodzenia. Do najważniejszych należą:

- kryterium maksymalnego naprężenia normalnego (rys.2.24a):

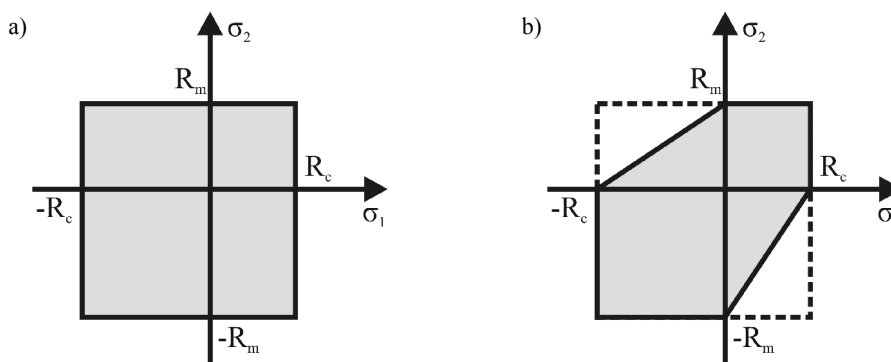
$$R_c \leq \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \leq R_m, \quad (2.49)$$

gdzie  $R_c$  – wytrzymałość na ściskanie,  $R_m$  – wytrzymałość na rozciąganie, uzyskane w statycznej próbie rozciągania i ściskania jednoosiowego, natomiast  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  – naprężenia główne.

- kryterium największego naprężenia stycznego, zaproponowane przez Coulomba (rys.2.24b):

$$R_c \leq \{\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2 - \sigma_3, \sigma_3 - \sigma_1\} \leq R_m, \quad (2.50)$$

gdzie  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  – naprężenia główne.



Rys. 2.24. Kontury graniczne wystąpienia uszkodzenia dla materiałów kruchych: kryterium maksymalnego naprężenia normalnego (a), kryterium największego naprężenia stycznego (b)

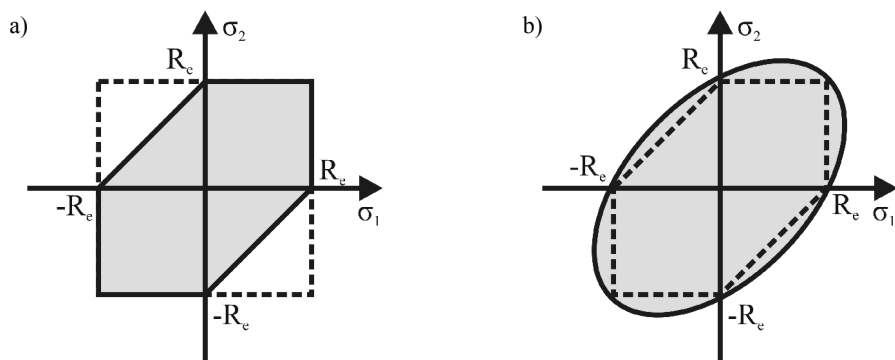
Stan naprężenia można przedstawić w postaci koła Mohra [55].

Podobnie jak dla materiałów kruchych, także dla materiałów plastycznych występuje kilka hipotez. Do najważniejszych należą:

- kryterium maksymalnego naprężenia stycznego, zaproponowana przez Tresca (rys. 2.24b):

$$\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq R_e, \quad (2.51)$$

gdzie  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  – naprężenia główne,  $R_e$  – granica plastyczności.



Rys. 2.25. Kontury graniczne wystąpienia uszkodzenia dla materiałów plastycznych:  
kryterium maksymalnego naprężenia stycznego (a),  
kryterium maksymalnej energii odkształcenia postaciowego (b)

Tabela 2.7. Wartości naprężeń krytycznych  $K$ , wybranych materiałów stosowanych w montażu elektronicznym [80, 81, 63]

Materiał	$R_c$ [MPa]	$R_m$ [MPa]
Krzem		300–7000 <sup>33</sup>
Srebro	55	300
Złoto	40	220
Miedź	60	400
Aluminium	40	200
Nikiel	70	400
Stopy cynku	160–421	200–500
Stopy cyny	7–45	14–60
Stopy ołowiu	11–55	14–70
Żywice epoksydowe	30–100	30–120
SiO <sub>2</sub>		7200
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>		5000

33 Dla krzemu obserwuje się znaczne zmniejszenie naprężenia krytycznego w przypadku występowania ostrych krawędzi, np. w wyniku trawienia anizotropowego

- kryterium maksymalnej energii odkształcenia postaciowego, znanej także jako kryterium Hubera–Misesa:

$$\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq R_e, \quad (2.52)$$

gdzie  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  – naprężenia główne,  $R_e$  – granica plastyczności.

W tabeli 2.7 przedstawiono przykładowe wartości naprężeń  $R_e$  i  $R_m$  dla wybranych materiałów stosowanych w montażu elektronicznym. Wartość naprężenia krytycznego, określanego terminem kryterium uszkodzenia  $K_r$  zależy od rodzaju materiału:

- w przypadku materiałów kruchych  $K_r = R_m$ ,
- w przypadku materiałów plastycznych  $K_r = R_e$ .

### 2.4.2. Stan naprężenia na skutek obciążeń termomechanicznych

W przypadku obciążeń termomechanicznych należy uwzględnić dwie składowe odkształcenia: składową mechaniczną oraz składową wynikającą z rozszerzalności cieplnej materiału [82]. Dla obiektu o długości  $l$  w termodynamice współczynnik rozszerzalności cieplnej  $\alpha$  wyznacza się w danej temperaturze  $T$  z zależności:

$$\alpha = \frac{d \ln(l(T))}{dT}. \quad (2.53)$$

Dla ustalonej temperatury odniesienia  $T_0$  oraz długości  $l_0$  rozważanego obiektu w tej temperaturze, w przypadku małych zmian długości w stosunku do długości pierwotnej  $l_0$ , współczynnik rozszerzalności cieplnej  $\alpha'$  można w przybliżeniu określić następująco:

$$\alpha' = \frac{1}{l_0} \frac{dl(T)}{dT}. \quad (2.54)$$

Współczynnik rozszerzalności cieplnej jest funkcją temperatury  $\alpha(T)$ . W wielu zagadnieniach dla uproszczenia przyjmuje się, że w rozpatrywanym zakresie temperatury ma on wartość stałą. Czasami korzysta się z wartości średniej dla zadanego przedziału temperatury. Wartość średnią współczynnika rozszerzalności cieplnej  $\bar{\alpha}$  w przedziale temperatury od  $T_0$  do  $T_1$  określa się z zależności:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l_0} \frac{l_1 - l_0}{T_1 - T_0}. \quad (2.55)$$

W liniowej teorii sprężystości przyjmuje się założenia, że analizowane ciało jest jednorodne, izotropowe oraz ulega deformacji w zakresie małych odkształceń. Jeżeli dodatkowo przyjmiemy założenie, że właściwości materiałowe ciała, takie jak moduł

Younga  $E$ , współczynnik Poissona  $\nu$  i współczynnik rozszerzalności cieplnej  $\alpha$  są stałe w rozpatrywanym przedziale temperatury, a ciało wolne jest od więzów zewnętrznych, to:

- na skutek zmiany temperatury  $\Delta T$  ciało ulegnie odkształceniu  $\varepsilon$ , które można wyznaczyć z zależności:

$$\varepsilon = \alpha \Delta T, \quad (2.56)$$

- powstałe odkształcenie  $\varepsilon$  może być przyczyną powstania naprężeń, które z kolei można wyznaczyć na podstawie prawa Hooke'a:

$$\sigma = E \varepsilon = E \alpha \Delta T. \quad (2.57)$$

Zależność (2.57) obowiązuje dla przypadku jednowymiarowego. W przypadku wielowymiarowym należy dodatkowo uwzględnić wzajemny wpływ poszczególnych odkształceń na naprężenia w kierunkach wzajemnie ortogonalnych, korzystając ze współczynnika Poissona  $\nu$ . Uwzględnivszy zasadę addytywności odkształceń, odkształcenie  $\varepsilon_i$  w  $i$ -tym kierunku wynosi:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{\sigma_i} + \varepsilon_{T_i}, \quad (2.58)$$

gdzie  $\varepsilon_{\sigma_i}$  oraz  $\varepsilon_{T_i}$  – składowe odkształcenia na skutek naprężenia oraz rozszerzalności cieplnej.

Związki między składowymi naprężeniami i odkształceniami można zapisać w postaci układu równań:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y - \sigma_z)] + \alpha \Delta T, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z - \sigma_x)] + \alpha \Delta T, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x - \sigma_y)] + \alpha \Delta T, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

gdzie  $G$  – moduł sprężystości poprzecznej materiału.

Po zsumowaniu stronami pierwszych trzech równań układu (2.59) otrzymujemy:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] + 3\alpha \Delta T. \quad (2.60)$$

Przyjmując, że  $s$  jest sumą naprężeń normalnych, natomiast  $e$  jest sumą odkształceń liniowych, otrzymujemy:

$$e = \frac{1-2\nu}{E} s + 3\alpha \Delta T, \quad (2.61)$$

lub

$$e = \frac{s}{3K} + 3\alpha \Delta T, \quad (2.62)$$

gdzie  $K$  – moduł ścisłości objętościowej materiału.

Po przekształceniu układu równań (2.59) można opisać stan naprężenia jako funkcję stanu odkształcenia w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left\{ \varepsilon_x - \frac{1}{1-2\nu} [\nu e - (1+\nu)\alpha \Delta T] \right\}, \\ \sigma_y &= 2G \left\{ \varepsilon_y - \frac{1}{1-2\nu} [\nu e - (1+\nu)\alpha \Delta T] \right\}, \\ \sigma_z &= 2G \left\{ \varepsilon_z - \frac{1}{1-2\nu} [\nu e - (1+\nu)\alpha \Delta T] \right\}, \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

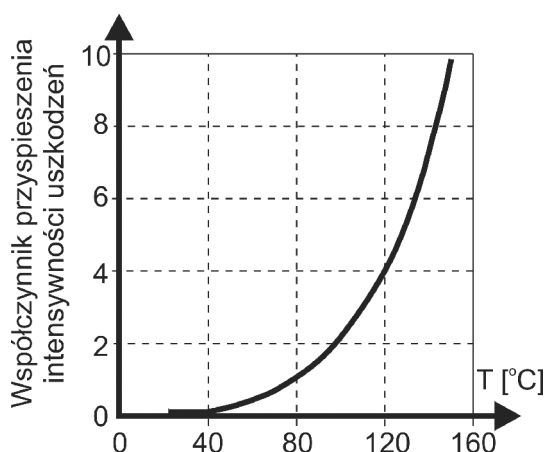
Układ równań (2.63) nazywany jest równaniami Duhmela–Neumanna i umożliwia analizę naprężeń na skutek obciążeń termomechanicznych w zakresie obowiązywania prawa Hooke'a.

## 2.5. Odprowadzanie energii cieplnej w montażu elektronicznym

Efektywność odprowadzania energii cieplnej w urządzeniach elektronicznych staje się w ostatnich latach znaczącym problemem producentów i projektantów. Zwiększanie skali integracji układów scalonych, gęstości upakowania montażu elektronicznego oraz wzrost częstotliwości pracy układów powoduje zwiększenie zarówno ilości, jak i gęstości mocy wytwarzanej w układach scalonych [83, 84, 85, 86]. Gęstość mocy generowana w nowych procesorach wykorzystywanych we współczesnych komputerach osobistych jest około 10–100 W/cm<sup>2</sup>. Znaczna część tej mocy jest rozpraszana



w postaci ciepła, powodując wzrost temperatury układu. Z kolei temperatura jest głównym czynnikiem wpływającym na przyspieszenie procesów starzeniowych układów elektronicznych oraz uszkodzeń, a tym samym na pogorszenie niezawodności. Zależność między współczynnikiem przyspieszenia intensywności uszkodzeń<sup>34</sup> a temperaturą pracy układów elektronicznych przedstawiono na wykresie 2.26 [37].



Rys. 2.26. Wpływ temperatury pracy na wartość współczynnika przyspieszenia intensywności uszkodzeń [37]

W termodynamice ciepło jest rozumiane jako forma transportu energii cieplnej w stanie nierównowagi termicznej, wynikającej z różnicy temperatury. Opis ilościowy przekazywania energii cieplnej lub w skrócie ciepła  $Q$  realizuje się z wykorzystaniem pojęcia strumienia ciepła  $\dot{Q}$  (ang. *heat rate*), tj. ilości ciepła przepływającego w jednostce czasu:

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}, \quad (2.64)$$

oraz gęstości strumienia ciepła  $q$  (ang. *heat flux*), tj. ilości strumienia ciepła przepływającego przez jednostkę powierzchni izotermicznej:

$$\vec{q} = \frac{d\dot{Q}}{ds} \vec{n} = \frac{d^2Q}{dt ds} \vec{n}, \quad (2.65)$$

gdzie  $t$  – czas,  $s$  – pole powierzchni przekroju prostopadłego do kierunku strumienia ciepła,  $\vec{n}$  – wektor normalny do tej powierzchni.

<sup>34</sup> Stosunek intensywności uszkodzeń w warunkach badań przyspieszonych do intensywności uszkodzeń w ustalonych warunkach odniesienia.

W praktyce inżynierskiej wygodnie jest posługiwać się zapisem, w którym gęstość strumienia ciepła wyraża się w postaci wielkości skalarnej, tj.:

$$q = \frac{d^2 Q}{dt ds} . \quad (2.66)$$

Zapis ten obowiązuje dla przypadku jednowymiarowego, tzn. gdy transport ciepła występuje tylko w jednym kierunku, a rozkład temperatury można wyrazić jedynie jedną współrzędną przestrzenną, np.  $x$ .

W celu ilościowego opisu transportu energii cieplnej rozróżnia się trzy mechanizmy: przewodnictwo, konwekcja, promieniowanie. Odprowadzanie energii cieplnej od pracujących układów, z wykorzystaniem wymienionych mechanizmów, jest jednym z podstawowych wyzwań współczesnych inżynierów [87, 88, 89, 90]. Dużego znaczenia nabierają także problemy związane z rozpraszaniem ciepła w przypadku małych rozmiarów urządzeń, niewielkich przepływów i dużych gęstości mocy [91, 92, 93, 94].

Przewodnictwo jest mechanizmem wyrównywania temperatury w ośrodku bez ruchu tego ośrodka. Dla ciał stałych wyróżnia się dwa mechanizmy przewodzenia ciepła. Pierwszy rodzaj występuje w metalach i polega na transporcie energii cieplnej przez wolne elektrony. Drugi rodzaj występuje w ciałach stałych, które są słabymi przewodnikami elektryczności i polega na transporcie energii cieplnej przez fonony, czyli drgania atomów lub cząstek. Współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$  stanowi sumę składowej elektronowej  $\lambda_e$  i fononowej  $\lambda_f$ . Opis ilościowy przewodnictwa cieplnego, w przypadku istnienia gradientu temperatury można zapisać w postaci ogólnej, korzystając z równania Fouriera:

$$\bar{q} = -\lambda \nabla T , \quad (2.67)$$

gdzie  $\lambda$  – współczynnikiem przewodzenia ciepła,  $\nabla T$  – gradient temperatury.

Kierunek wektora gęstości strumienia ciepła jest zatem przeciwny do kierunku gradientu pola temperatury i zgodny z kierunkiem transportu energii cieplnej, tzn. od temperatury wyższej do niższej. W przypadku jednowymiarowym równanie 2.67 przybierze natomiast postać:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} . \quad (2.68)$$

Konwekcja jest mechanizmem wyrównywania temperatury w ośrodku z jednoczesnym ruchem cząstek tego ośrodka. Konwekcja występuje najczęściej w ośrodkach płynnych lub gazowych w wyniku przejmowania energii cieplnej i następnie ruchu cząsteczek ośrodka. Rozróżnia się dwa rodzaje konwekcji: naturalną oraz wymuszoną. Ilość odprowadzonego ciepła w drodze konwekcji z powierzchni o polu  $A$  i temperaturze  $T_s$ , a ośrodkiem o temperaturze  $T_a$  można opisać równaniem Newtona:

$$q = \alpha_c (T_s - T_a), \quad (2.69)$$

gdzie  $T_s$  – temperatura powierzchni,  $T_a$  – temperatura otoczenia,  $\alpha_c$  – współczynnik konwekcyjnego przekazywania ciepła.

Promieniowanie jest mechanizmem wyrównywania temperatury w drodze promieniowania elektromagnetycznego o pewnym zakresie długości fali. Mechanizm ten nie wymaga zatem istnienia ośrodka zewnętrznego. Najwięcej energii przenosi promieniowanie podczerwone o długości fali w zakresie 0,4–40  $\mu\text{m}$ . Ilość odprowadzanego ciepła przez promieniowanie z powierzchni ciała o temperaturze  $T_s$  można opisać równaniem Stefana–Boltzmana:

$$q = \varepsilon k T_s^4, \quad (2.70)$$

gdzie  $k$  – stała Stefana–Boltzmana,  $\varepsilon$  – współczynnik emisyjności<sup>35</sup>.

W rzeczywistości, w przypadku występowania wielu źródeł promieniowania należy dodatkowo uwzględnić zjawisko absorpcji, odbicia i przezroczystości promieniowania. Ilość zaabsorbowanej przez ciało energii cieplnej z otoczenia o temperaturze  $T_a$  można opisać zależnością:

$$q_a = \alpha_a k T_a^4, \quad (2.71)$$

gdzie  $\alpha_a$  – współczynnik absorpcji promieniowania ( $0 \leq \alpha_a \leq 1$ ).

W przypadku małej powierzchni o temperaturze  $T_s$  otoczonej przez ośrodek zewnętrzny o stałej temperaturze  $T_a$  i dla przypadku ciała szarego<sup>36</sup> całkowitą ilość wypromieniowanej przez ciało energii można oszacować z zależności:

$$q = k \varepsilon (T_s^4 - T_a^4). \quad (2.72)$$

Ilość wymienianego ciepła między dwoma szarymi, równoległymi i nieskończenie długimi powierzchniami przez promieniowanie można oszacować z zależności:

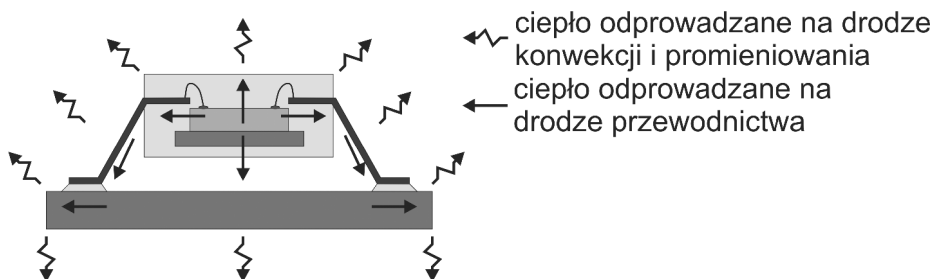
$$q = \frac{k (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}, \quad (2.73)$$

gdzie  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  są współczynnikami emisyjności natomiast  $T_1$  i  $T_2$  są temperaturami powierzchni.

35 Dla ciała doskonale czarnego wartość współczynnika emisyjności równa się 1.

36 W przypadku ciała szarego spełniony jest warunek  $\varepsilon = \alpha_a$ .

Ciepło wygenerowane w strukturze półprzewodnikowej musi zostać odprowadzone na zewnątrz układu. W pierwszej kolejności ciepło jest odprowadzane od struktury w wyniku przewodnictwa cieplnego samej struktury, materiału obudowy, doprowadzeń elektrycznych, warstw wypełniających znajdujących się pod strukturą półprzewodnikową i podłożem. W drugiej kolejności ciepło jest odprowadzane do otoczenia przez zjawisko konwekcji i promieniowania, przez sam układ, końcówki wyprowadzeń oraz płytke PCB (rys. 2.27).



Rys. 2.27. Mechanizmy odprowadzania energii cieplnej w układach elektronicznych

### 2.5.1. Rezystancja cieplna

Odprowadzanie energii cieplnej przez przewodnictwo jest bardzo istotnym mechanizmem w montażu elektronicznym. Ilościowa analiza przewodnictwa energii cieplnej w strukturach wielowarstwowych wymaga uwzględnienia problemu rezystancji cieplnej. Na podstawie analogii między przewodnictwem elektrycznym a cieplnym definiuje się pojęcie rezystancji cieplnej  $\Theta_\lambda$  w postaci zależności:

$$\Theta_\lambda = \frac{1}{\lambda} \frac{l}{A}, \quad (2.74)$$

gdzie  $l$  – długością,  $A$  – przekrój poprzeczny.

Aby wyznaczyć rezystancję cieplną, według zależności (2.74) konieczna jest znajomość współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$ . Rezystancję cieplną można wyznaczyć doświadczalnie, korzystając z zależności:

$$\Theta_\lambda = \frac{\Delta T}{q}, \quad (2.75)$$

gdzie  $q$  – gęstość strumienia ciepła.

Łącząc zależności (2.74) i (2.75), wartość współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$  można wyznaczyć z zależności:

$$\lambda = \frac{q}{\Delta T} \frac{l}{A} . \quad (2.76)$$

W przypadku struktur wielowarstwowych całkowita wartość rezystancji cieplnej zależy od rodzaju połączenia poszczególnych warstw:

- szeregowo:

$$\Theta_{\lambda} = \Theta_{\lambda_1} + \Theta_{\lambda_2} + \dots + \Theta_{\lambda_n} = \frac{1}{A} \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{l_n}{\lambda_n} \right) . \quad (2.77)$$

- równoległe:

$$\Theta_{\lambda} = \frac{1}{A \left( \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{l_n}{\lambda_n} \right)} . \quad (2.78)$$

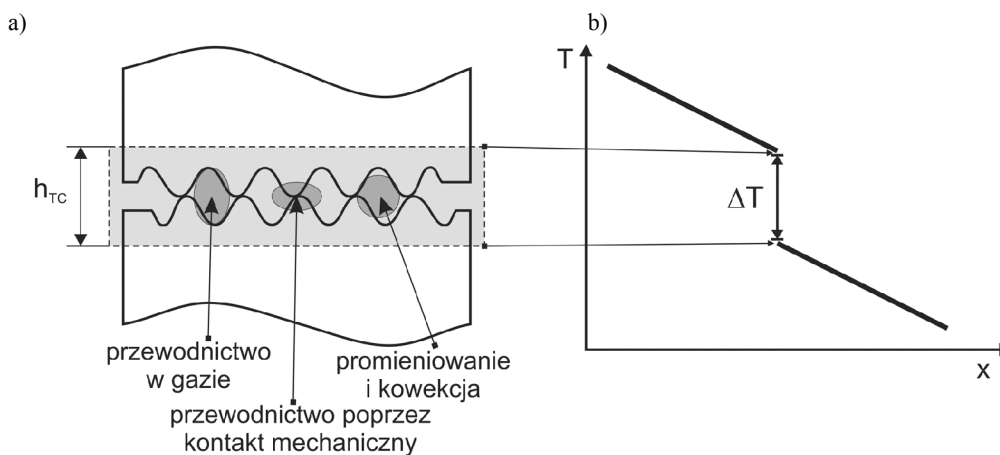
Rezystancja cieplna struktur wielowarstwowych jest bardzo istotna w montażu elektronicznym. W przypadku struktur obudowanych mamy do czynienia zwykle z warstwowym połączeniem materiałów o różnych wymiarach i wartościach współczynników przewodzenia ciepła. W celu oszacowania rezystancji cieplnej takiej struktury korzysta się zwykle z siatki rezystorów połączonych szeregowo i równoległe, odpowiadających rezystancji cieplnej poszczególnych warstw [95, 96, 97]. Podejście takie pozwala na znalezienie gorących punktów, czyli miejsc, gdzie istnieje większy opór cieplny w stosunku do średniej wartości całego układu. Punkty takie są zazwyczaj potencjalnym miejscem wystąpienia uszkodzenia .

### 2.5.2. Rezystancja cieplna styku

W literaturze zajmującej się analizą termiczną w montażu elektronicznym bardzo rzadko spotyka się odniesienie do analitycznej czy numerycznej analizy z uwzględnieniem rezystancji cieplnej styku. Jednocześnie podkreśla się istotność i znaczenie rezystancji cieplnej styku oraz jej wpływ na efektywność odprowadzania energii cieplnej [98, 99]. Coraz częściej podkreśla się także konieczność ograniczenia rezystancji cieplnej styku jako czynnika, który może być znaczący ze względu na dalsze zwiększanie skali integracji i gęstości upakowania układów scalonych. Powszechnie wiadomo, że zastosowanie specjalnych materiałów w formie past przewodzących ciepło poprawia w znacznym stopniu efektywność transportu energii cieplnej. Według autora uwzględnienie problemu rezystancji cieplnej styku w projektowaniu montażu elektronicznego jest jednym z kluczowych problemów [100, 101]. Z tego też powodu autor zaproponował metodę pomiaru rezystancji cieplnej styku oraz wprowadził pojęcie, tzw. względnego efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dla styku. Parametr ten umożliwia uwzględnienie rezystancji cieplnej styku na etapie projektowa-

nia numerycznego, a tym samym oszacowania udziału rezystancji cieplnej styku na stan naprężeń [102, 103, 104, 105, 106].

Przez rezystancję cieplną styku rozumie się rezystancję dla strumienia ciepła powierzchni styku, przez którą przepływa ten strumień [35]. Występuje ona na granicy połączenia materiałów i ma najczęściej charakter nieliniowy. W aspekcie mechanicznym styk jest rodzajem kontaktu dwóch materiałów w wyniku działania siły docisku  $F$ . Powierzchnia kontaktu zależy w sposób nieliniowy od wartości siły  $F$ , a stykające się materiały kontaktują się w trzech lub więcej punktach. W aspekcie termicznym transport energii cieplnej na granicy połączenia ma charakter złożony, przy czym dominują trzy mechanizmy przedstawione na rysunku 2.28a, do których należy zaliczyć: przewodnictwo w gazie, przewodnictwo w punktach styku mechanicznego oraz promieniowanie i konwekcja [107].



Rys. 2.28. Mechanizmy transportu energii cieplnej na granicy połączenia materiałów (a) oraz metoda wyznaczania spadku temperatury  $\Delta T$  na granicy połączonych materiałów na podstawie metody ekstrapolacji temperatury zmierzonej poza tym obszarem (b)

Analityczna ocena ilościowa transportu energii cieplnej na połączeniu materiałów ma charakter nieliniowy i może być rozważana w postaci liniowych i nieliniowych modeli mechanicznych i termicznych:

- modelu transportu ciepła przez powierzchnię styku ciał stałych:
  - modelu geometrii i deformacji powierzchni styku; model ten można rozważać na podstawie obciążenia mechanicznego i topografii powierzchni styku, np. na podstawie liczby i średniej wielkości powierzchni kontaktowych,
  - modelu transportu ciepła; model przewodnictwa cieplnego należy rozważać jako połączenie powierzchni styku i właściwości cieplnych i mechanicznych stykających się materiałów.

- modelu transportu ciepła przez gaz w obszarze styku w wyniku zjawiska przewodnictwa i konwekcji,
- modelu promieniowania w obszarze styku.

Analiza ilościowa choć teoretycznie możliwa, to ze względów praktycznych jest bardzo skomplikowana. Z tego też powodu korzysta się najczęściej z pojęcia rezystancji cieplnej. Wartość całkowita rezystancji cieplnej połączonych materiałów będzie sumą rezystancji cieplnej tych materiałów  $\Theta_{\lambda_1}$  i  $\Theta_{\lambda_2}$  oraz rezystancji cieplnej styku  $\Theta_{TC}$ :

$$\Theta = \Theta_{\lambda_1} + \Theta_{\lambda_2} + \Theta_{TC} . \quad (2.79)$$

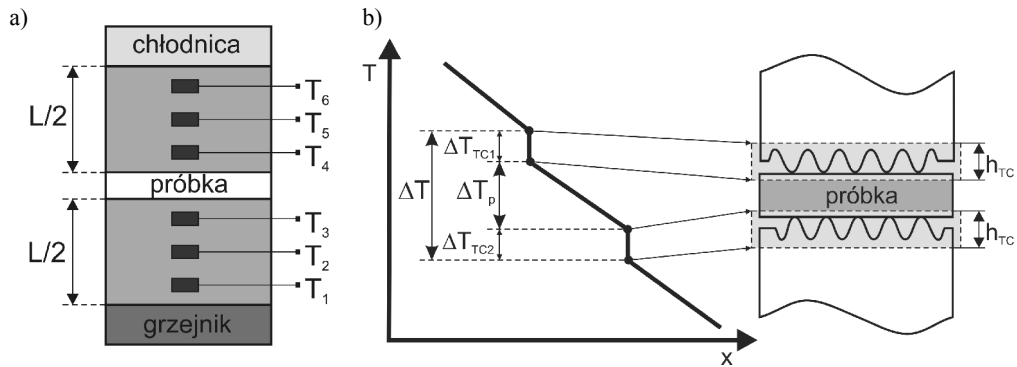
Niestety pomiar rezystancji cieplnej styku  $\Theta_{TC}$ , opisanej wzorem (2.75), jest trudny ze względu na konieczność bezpośredniego pomiaru spadku temperatury  $\Delta T$  na granicy połączonych materiałów. Istnieje jednak metoda pośrednia, która polega na oszacowaniu spadku tej temperatury przez ekstrapolację temperatury zmierzonej poza obszarem styku (rys. 2.28b).

Korzystając z tej zasady autor zaproponował metodę pomiaru rezystancji cieplnej styku, używając systemu pomiarowego przedstawionego na rysunku 2.29a. Za podstawę realizacji systemu pomiarowego przyjęto metodę proponowaną w normie ASTM E 1530<sup>37</sup>, a służącą pierwotnie do pomiaru przewodnictwa cieplnego materiałów. Po dokonaniu kilku modyfikacji, zespół w którym pracuje autor, zaprojektował, a następnie wykonał stanowisko pomiarowe. Stanowisko to składa się z dwóch bloków w kształcie cylindra, wykonanych z materiału o znanej wartości współczynnika przewodzenia ciepła. W obu blokach zostały umieszczone wzdłuż osi w ściśle określonych odległościach czujniki temperatury (termorezystory  $T_1 \div T_6$ ), co pozwala na kontrolę przepływu ciepła w funkcji czasu. Między blokami jest umieszczona badana próbka o znanej grubości  $h$ . Aby zapewnić stan ustalony jednokierunkowego przepływu ciepła, układ pomiarowy został wyposażony w grzejnik oraz chłodnicę. W celu zminimalizowania niekorzystnego wpływu konwekcji na dokładność pomiarów, cały układ jest umieszczony w komorze próżniowej. Ze względu na stosunkowo niską temperaturę można zaniedbać odprowadzanie ciepła w wyniku radiacji. Na rysunku 2.29b przedstawiono przykładowy rozkład temperatury opracowanego układu pomiarowego [108].

Opracowany i wykonany układ pomiarowy umożliwia pomiar, oprócz współczynnika przewodzenia ciepła materiału próbki, właściwości cieplnych styku materiałów<sup>38</sup>. Różnica między eksperymentem tradycyjnym, a zaproponowanym polega na definicji spadku temperatury (rys. 2.29b). Całkowita

37 Standard Test Method for Evaluating the Resistance to Thermal Transmission of Materials by the Guarded Heat Flow Meter Technique.

38 W przypadku montażu elektronicznego najczęściej bada się próbki klejów oraz past przewodzących ciepło.



Rys. 2.29. Opracowany system pomiarowy do wyznaczania rezystancji cieplnej styku (a) oraz rozkład temperatury opracowanego układu pomiarowego w stanie ustalonym z uwzględnieniem spadku temperatury na rezystancji cieplnej styku  $\Delta T_{TC1}$  i  $\Delta T_{TC2}$  oraz na badanej próbce  $\Delta T_p$ ;  $\Delta T$  – wyznaczony spadek temperatury (b)

rezystancja cieplna wynikająca z oszacowanego spadku temperatury  $\Delta T$ , będzie sumą spadków temperatury na poszczególnych warstwach:

$$\Delta T = \Delta T_{TC1} + \Delta T_{TC2} + \Delta T_p, \quad (2.80)$$

gdzie  $\Delta T_{TC1}$  i  $\Delta T_{TC2}$  – spadek temperatury na rezystancji cieplnej styków,  $\Delta T_p$  – rzeczywisty spadek temperatury na badanej próbce.

Zmierzona rezystancja cieplna jest sumą rezystancji cieplnej próbki oraz rezystancji dwóch powierzchni styku:

$$\Theta_T = 2\Theta_{TC} + \Theta_s. \quad (2.81)$$

Strumień ciepła można oszacować na podstawie gradientu spadku temperatury  $\Delta T$  bloków cylindrycznych oraz współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$  jako:

$$q = \lambda \Delta T \frac{A}{h}, \quad (2.82)$$

gdzie  $A$  – przekrój poprzeczny,  $h$  – grubość próbki.

W przypadku gdy celem jest oszacowanie wartości współczynnika przewodzenia ciepła materiału próbki, zasada pomiaru polega na pomiarze dwóch próbek, lecz o różnych grubościach  $h$  i  $h + \Delta h$ . W takim przypadku współczynnik przewodzenia ciepła można wyznaczyć z zależności:



$$\lambda_s = \frac{\Delta h}{A} \left( \frac{1}{\frac{\Delta T_2}{q_2} - \frac{\Delta T_1}{q_1}} \right), \quad (2.83)$$

gdzie  $\Delta T_1$  – spadek temperatury próbki o grubości  $h$ ,  $\Delta T_2$  – spadek temperatury próbki o grubości  $h + \Delta h$ .

Autor zaproponował modyfikację tej metody tak, aby istniała możliwość oszacowania rezystancji cieplnej styku. W tym celu umieszcza się próbkę o grubości  $h$  i znanej wartości współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda_s$ , a następnie określa spadek temperatury  $\Delta T$ . Wartość rezystancji cieplnej styku można wówczas wyznaczyć z zależności:

$$\Theta_{TC} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta T}{q} - \frac{1}{\lambda_s} \frac{h}{A} \right). \quad (2.84)$$

Wyznaczoną rezystancję cieplną styku można wykorzystać bezpośrednio do analizy termicznej opartej na tzw. siatce rezystancji. Niestety wyznaczona wartość rezystancji cieplnej styku nie może być wykorzystana w przypadku modelowania numerycznego. W metodach numerycznych korzysta się najczęściej z definicji poszczególnych materiałów oraz ich właściwości cieplnych, np. przewodnictwa cieplnego. Modelowanie numeryczne przewodnictwa cieplnego struktur wielowarstwowych, gdzie uwzględnia się problem styku, można wykonać na podstawie analizy nieliniowej uwzględniającej sprzężenie pola temperaturowego i pola odkształceń. Niestety modelowanie takie jest niezwykle żmudne i wymaga umiejętności modelowania styku termomechanicznego z uwzględnieniem zjawisk i elementów kontaktowych oraz znajomości ich właściwości termomechanicznych [109]. Właściwości te są niestety trudne do oszacowania czy wyznaczenia doświadczalnie. Autor zaproponował uproszczony sposób modelowania numerycznego wielowarstw przez zastąpienie obszaru styku zastępczą warstwę materiału (rys. 2.29b) [102, 110]. Warstwa ta charakteryzuje się określoną grubością  $h_{TC}$  oraz współczynnikiem przewodzenia ciepła  $\lambda_{TC}$ . Podejście takie wymagało wprowadzenia tzw. względnego efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dla styku  $\lambda'_{TC}$ , opisanego zależnością:

$$\lambda'_{TC} = \frac{\lambda_{TC}}{h_{TC}} = \frac{1}{\Theta_{TC} A_{TC}}, \quad (2.85)$$

gdzie  $A_{TC}$  – powierzchnia styku.

Dla określonej grubości warstwy zastępczej  $h_{TC}$  (np. 1  $\mu\text{m}$ ) istnieje możliwość oszacowania efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła styku, zgodnie z równaniem:

$$\lambda_{TC} = \lambda'_{TC} h_{TC}. \quad (2.86)$$

Współczynnik ten może być zastosowany w modelowaniu numerycznym rozkładu temperatury w strukturze wielowarstwowej z uwzględnieniem rezystancji cieplnej styku. W tym przypadku obszar styku należy zastąpić warstwą materiału o grubości  $h_{TC}$  i współczynnikiem przewodzenia ciepła  $\lambda_{TC}$ , korzystając z zależności (2.86).

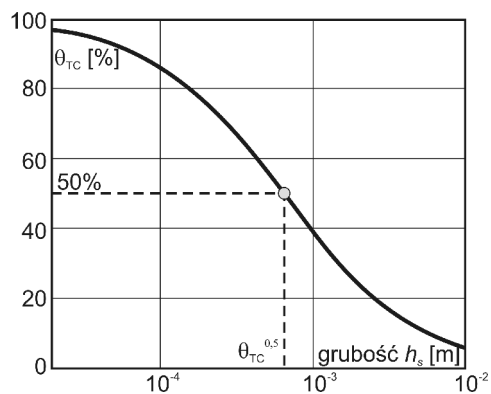
W przypadku montażu elektronicznego rezystancja cieplna styku ma istotny wpływ na efektywność odprowadzania ciepła. Udział rezystancji cieplnej styku zależy od grubości i wartości rezystancji cieplnej materiału. Autor zaproponował wprowadzenia współczynnika procentowego udziału rezystancji cieplnej styku  $\theta_{TC}$  w postaci:

$$\theta_{TC} = \frac{2 \Theta_{TC}}{\Theta_T} \cdot 100, \quad (2.87)$$

którego wartość można oszacować z zależności:

$$\theta_{TC} = \frac{2 \lambda_s}{\lambda_{TC} h_s + 2 \lambda_s} \cdot 100. \quad (2.88)$$

Procentowy udział rezystancji cieplnej  $\theta_{TC}$  styku będzie zależał od grubości  $h_s$  i współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda_s$  materiału próbki. Na rysunku 2.30 przedstawiono przykładową zależność współczynnika procentowego udziału rezystancji styku  $\theta_{TC}$  od grubości próbki  $h_s$  dla kleju przewodzącego ciepło o współczynniku przewodzenia ciepła  $\lambda_s = 1,46 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ .



Rys. 2.30. Przykładowa zależność wartości współczynnika  $\theta_{TC}$  od grubości próbki  $h_s$  dla kleju przewodzącego ciepło o  $\lambda_s = 1,46 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$

Kryterium porównawczym, które pozwoli na ocenę istotności rezystancji cieplnej styku określonej grubości próbki, może być grubość próbki  $h_s$ , dla której rezystancja cieplna styku osiąga wartość równą połowie rezystancji całkowitej:

$$\theta_{TC}^{0,5} \Rightarrow h_s^{0,5} = 2 \frac{\lambda_s}{\lambda_{TC}}. \quad (2.89)$$

W przypadku przedstawionym na rysunku 2.30 wartość ta wynosiła  $h_s^{0,5} = 620 \mu\text{m}$ . Grubość warstwy kleju przewodzącego ciepło stosowana na pierwszym poziomie montażu elektronicznego jest rzędu dziesiątych części milimetra. Z tego wniosek, że w takim przypadku nie można pominąć udziału rezystancji cieplnej styku oraz jej wpływu na stan naprężeń.

Przeprowadzone przykładowe analizy numeryczne i pomiary doświadczalne potwierdziły słuszność przyjętego rozumowania oraz pozwoliły na znaczne ograniczenie mocy obliczeniowej oraz czasu modelowania wielowarstw z uwzględnieniem rezystancji cieplnej styku [110]. Dodatkowo autor w swoich pracach rozważał także możliwość adaptacji podanej metody do oszacowania nieliniowych właściwości cieplnych styku, a przede wszystkim zależności wartości efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła od temperatury  $T$  i ciśnienia  $p$ . Problem ten jednak wymaga dalszych prac badawczych [102, 101].

## 2.6. Założenia, cele i kierunki pracy

Opinia inżyniera na temat szklanki wypełnionej do połowy wodą jest zupełnie odmienna od opinii optymisty czy pesymisty. Dla niego nie jest ona ani do połowy pełna, ani w połowie pusta. Jest po prostu źle zaprojektowana, gdyż jest o połowę za duża i należałoby ją przeprojektować przez dopasowanie rozmiarów, kształtów oraz dobór materiałów tak, aby spełniała określone normy, wymagania i warunki eksploatacyjne. Proces projektowania najlepiej byłoby jeszcze „zoptymalizować” przez zastosowanie metod, algorytmów i narzędzi numerycznych. *Celem pracy było przedstawienie metodologii projektowania numerycznego, najnowszych osiągnięć oraz aktualnego stanu wiedzy dotyczącego numerycznych metod i algorytmów projektowania termomechanicznego w montażu elektronicznym z uwzględnieniem indywidualnego i nowatorskiego wkładu autora w rozwój tych metod i algorytmów oraz ich implementację praktyczną.* Omówioną metodologię można stosować zarówno do przewidywania, kwalifikacji, jak i testowania zachowania produktu na skutek obciążeń termomechanicznych oraz w celu oszacowania ewentualnych nakładów produkcyjnych czy problemów niezawodnościowych. *Według autora, można postawić tezę, że przedstawiona metodologia pozwala na skrócenie i ograniczenie kosztów fazy badawczej i testowej procesu projektowania montażu elektronicznego, z zachowaniem wymagań konkurencyjności, parametrów jakościowych oraz norm energetycznych i materiałowych.*

Obecne metody projektowania numerycznego stały się alternatywą dla metod projektowania opartych na obiektach fizycznych. Choć trudno wyobrazić sobie proces projektowania bez udziału obiektu fizycznego, to konieczność wykonania i badań doświadczalnych na tym obiekcie można znacznie ograniczyć, przestając na jego wybranych parametrach lub wybranych etapach projektowania. Podejście takie jest możliwe, dlatego że metody i narzędzia projektowania numerycznego stają się coraz bardziej efektywne i dokładne. Ich podstawową zaletą jest możliwość przeprowadzenia całego procesu projektowania w krótkim czasie oraz bez konieczności wykonania fizycznego prototypu produktu. Zaleta ta jest szczególnie pożądana w przemyśle, który oczekuje, że czas konieczny do wprowadzenia nowego produktu na rynek będzie minimalny, po założeniu wysokiej jakości oraz niskiej ceny, w porównaniu z podobnymi produktami firm konkurencyjnych. Należy podkreślić, że pomimo osiągnięć w dziedzinie projektowania numerycznego, proces ten nadal wymaga weryfikacji oraz obecności eksperta. Tylko ekspert jest w stanie ocenić poprawność wyników oraz podjąć odpowiednią decyzję, co do dalszych kierunków postępowania. Dużą nadzieję pokłada się w projektowaniu numerycznym w odniesieniu do całego procesu produkcyjnego, poczynając od opracowania prototypu, przez jego wykonanie, testowanie i symulację pracy w warunkach zbliżonych do rzeczywistych [111, 112, 113, 114, 115].

Proces projektowania w montażu elektronicznym składa się z wielu etapów, czas trwania testów niezawodnościowych wynosi nawet kilka miesięcy, a wysokie koszty spowodowane są koniecznością wykonania czasami kilkuset doświadczeń niezbędnych do znalezienia rozwiązania optymalnego, to *niejednokrotnie wdrożenie prototypu produktu następuje bez dokończenia fazy badawczej i testowej*. Wpływa to ostatecznie na parametry produktu, konsekwencją czego jest obniżenie jego jakości oraz podniesienie kosztów serwisowych. Ponadto, ze względu na konieczność spełnienia określonych norm bezpieczeństwa, produkty finalne są zazwyczaj projektowane z pewnym „marginem bezpieczeństwa”. Ma to na celu zmniejszenie ryzyka wadliwego zachowania lub uszkodzenia, *co w przypadku niewłaściwego projektowania prowadzi do „przewymiarowania” produktu*, co wiąże się z większym zużyciem materiałów i energii. Jednym z praktycznych rozwiązań wymienionych problemów, może być zastosowanie metod numerycznych w procesie projektowania. Obecnie, proces projektowania numerycznego prowadzi się na podstawie zestawienia różnych metod, procedur, algorytmów i narzędzi numerycznych. Do najważniejszych z nich należą omówione kolejno w dalszej części pracy takie metody jak:

- Metoda FEM – umożliwia znalezienie przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych dla ośrodków ciągłych o złożonych warunkach brzegowych. Metoda opiera się na liniowej teorii sprężystości, a jej zaletą jest to, że pozwala na zachowanie ciągłości odkształceń na granicy struktur wielowarstwowych. Niestety w przypadku warstw cienkich, poniżej 1  $\mu\text{m}$ , ze względu na nieadekwatność liniowej teorii sprężystości, należałoby ją zastąpić inną teorią, np.

opartą na analizie zjawisk i naprężeń błonowych<sup>39</sup>, typowych dla dwukierunkowego stanu naprężenia [116],

- Metoda DoE – opracowanie planu eksperymentu, pozwalającego na ograniczenie niezbędnej liczby doświadczeń w celu identyfikacji istotnych czynników projektowych. Planowanie eksperymentów ma szczególne znaczenie w przypadku wielowymiarowych przestrzeni projektowych. Uzyskane wyniki poddaje się analizie statystycznej, a przyjęte wnioski podlegają zasadom odpowiadającym weryfikacji hipotez statystycznych,
- Metoda RSM – metody matematyczne, pozwalające na opracowanie przybliżonego modelu matematycznego obiektu, jak również na oszacowanie jego dokładności. Model taki może być następnie wykorzystany w procesie optymalizacji oraz analizy czułości i projektowania tolerancji. Postępowanie takie, choć może budzić zastrzeżenia, to, z zachowaniem określonych norm i zasad oraz wiedzy eksperckiej, stanowi istotny element metodologii inżynierskiej, która może być z powodzeniem wykorzystana w procesie projektowania.

Według autora, praktyczne i efektywne wykorzystanie numerycznych metod projektowania termomechanicznego w montażu elektronicznym wymaga od inżyniera umiejętności i wiedzy interdyscyplinarnej z wielu dziedzin: matematyki, statystyki, fizyki, elektroniki, chemii, mechaniki, inżynierii materiałowej, inżynierii komputerowej itd. W celu zapewnienia jakości i efektywności projektowania numerycznego, inżynier powinien, według autora, pamiętać o następujących zasadach [117]:

- Należy opracować dokładne i efektywne modele numeryczne, które będą w stanie poprawnie przewidywać zachowania analizowanego obiektu na skutek obciążeń termomechanicznych; dokładność modelu jest wymagana w celu poprawnego przewidywania, zarówno ilościowego, jak i jakościowego, wybranej odpowiedzi na skutek obciążeń zewnętrznych czy wewnętrznych; efektywność jest niezbędna do analizy jak największej części badanej przestrzeni, dla jak największej liczby czynników istotnych oraz przy zastosowaniu optymalizacji globalnej, której celem jest nie tylko poszukiwanie minimum czy maksimum, lecz także analiza czułości i projektowanie tolerancji. Należy ponadto zwrócić uwagę na następujące problemy: nieliniowy charakter obiektu, problem skali, warunki brzegowe, pola sprzężone oraz istotne zjawiska fizyczne, właściwości i modele materiałowe.
- Konieczne jest zastosowanie zaawansowanych metod i algorytmów projektowania numerycznego. Pomimo wielu osiągnięć i rozwoju różnych narzędzi do optymalizacji numerycznej, większość nie spełnia pokładanych w nich nadziei. Podstawowym problemem jest dokładność oraz liczba koniecznych doświadczeń numerycznych dla wielowymiarowych przestrzeni projektowych w celu uzyskania rozwiązania

---

39 W przypadku cienkich powłok można przyjąć założenie, że w przekrojach normalnych występują tylko naprężenia rozłożone równomiernie na grubości ściany, które określa się terminem naprężeń błonowych.

optymalnego. Jednym z istotnych wymagań w odniesieniu do stosowanych modeli numerycznych jest ich parametryczność, którą można uzyskać, korzystając z języków programowania skryptowego. W przypadku montażu elektronicznego, opracowane modele parametryczne powinny uwzględniać niestandardowe modele materiałowe, obciążenia i zachowanie obiektów, takie jak: optymalizacja jedno- i wielokryterialna<sup>40</sup>, nieliniowy charakter odpowiedzi, konieczność uwzględnienia procesów technologicznych oraz wymaganych testów niezawodnościowych, duża liczba czynników zarówno ciągłych, jak i dyskretnych.

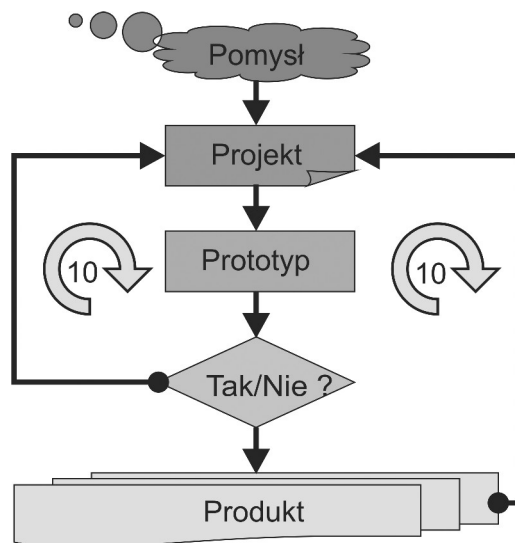
- Najbardziej istotna jest umiejętność połączenia modelowania numerycznego z metodami optymalizacji, aby zapewnić efektywność i dokładność projektowania. W rzeczywistości można rozróżnić dwa aspekty dokładności. Pierwszy dotyczy modelu numerycznego, podczas gdy drugi powierzchni odpowiedzi. Dodatkowym problemem jest uwzględnienie problemu rozrzutu losowego czynników oraz obecności czynników zakłócających. Najbardziej optymalnym rozwiązaniem wydaje się być oszacowanie korelacji między błędem modelu numerycznego a dokładnością uzyskanej powierzchni odpowiedzi, co pozwoliłoby na określenie na ile dokładny powinien być model numeryczny, aby spełnione zostało określone kryterium dokładności dla powierzchni odpowiedzi lub odwrotnie. Obecnie prowadzi się różnorodne projekty badawcze w celu korelacji różnych źródeł błędów, opartych na metodach matematycznych, statystycznych oraz doświadczalnych.
- Przyszłe kierunki rozwoju numerycznych metod projektowania termomechanicznego w montażu elektronicznym powinny obejmować, zdaniem autora [118], takie problemy, jak „łagodne” przejście ze skali mikro do skali nano z wykorzystaniem metod modelowania molekularnego w połączeniu z innymi metodami numerycznymi, np. metodą elementów skończonych [119, 120, 121, 122].

---

40 Problem optymalizacji wielokryterialnej lub inaczej polioptymalizacji występuje w przypadku, gdy w procesie decyzyjnym należy uwzględnić jednocześnie kilka funkcji celu, jak np.: cenę, niezawodność, funkcjonalność, normy bezpieczeństwa oraz zużycie energii i materiałów.

### 3. Metody i algorytmy projektowania w montażu elektronicznym

Proces projektowania w montażu elektronicznym składa się z wielu etapów, z których tylko pewne mogą być wspomagane komputerowo. Typowy proces projektowania, według G.Q. Zhanga z firmy Philips [123] składa się z około 10 cykli, co przedstawiono schematycznie na rysunku 3.1. W skład każdego z nich wchodzi opracowanie projektu produktu na podstawie koncepcji i specyfikacji. Następnie na jego podstawie wykonuje się prototyp<sup>41</sup>, który poddaje się testom, np. niezawodnościowym. Na podstawie badań prowadzi się ponowną procedurę projektowania tak, aby kolejny prototyp był pozbawiony wad ujawniających się w czasie testów. Proces ten powtarza się do momentu, gdy kolejny prototyp spełnia przyjęte założenia i wymagania. Dopiero tak przeprowadzony proces projektowania umożliwia wdrożenie produktu do masowej produkcji. Część usterek ujawnia się jednak dopiero w trakcie eksploatacji produktu, co wymaga wdrożenia kolejnego cyklu projektowania.

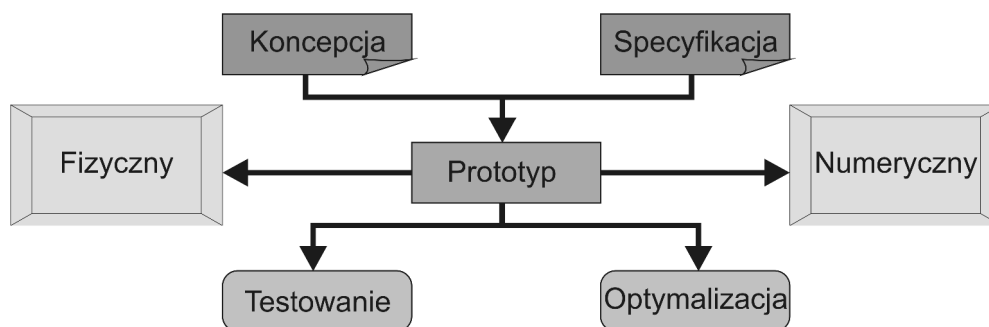


Rys. 3.1. Typowy cykl projektowania nowego produktu

Cykl projektowania nowego produktu jest procesem czasochłonnym i kosztownym. Oczekiwania i wymagania rynkowe są zgoła odmienne. Producenci są zmuszeni do ciągłego zwiększania funkcjonalności, poprawy niezawodności i obniżania kosztów produkcji z jednoczesnym skróceniem czasu projektowania. Prowadzone przez producentów badania wskazują, że większość problemów dotyczących ograniczonej niezawodności produktów pojawia się już na etapie projektowania. Problem ten jest widoczny zwłaszcza w mikroelektronice. Z tego też

41 W przypadku montażu elektronicznego stosuje się zazwyczaj pełne prototypy produktów, lecz w niektórych przypadkach dopuszczalne jest stosowanie ich zmniejszonych lub uproszczonych modeli.

powodu coraz częściej na pewnych etapach projektowania, prototyp fizyczny jest zastępowany prototypem numerycznym. Prototyp zarówno fizyczny, jak i numeryczny poddaje się testowaniu i optymalizacji (rys. 3.2).



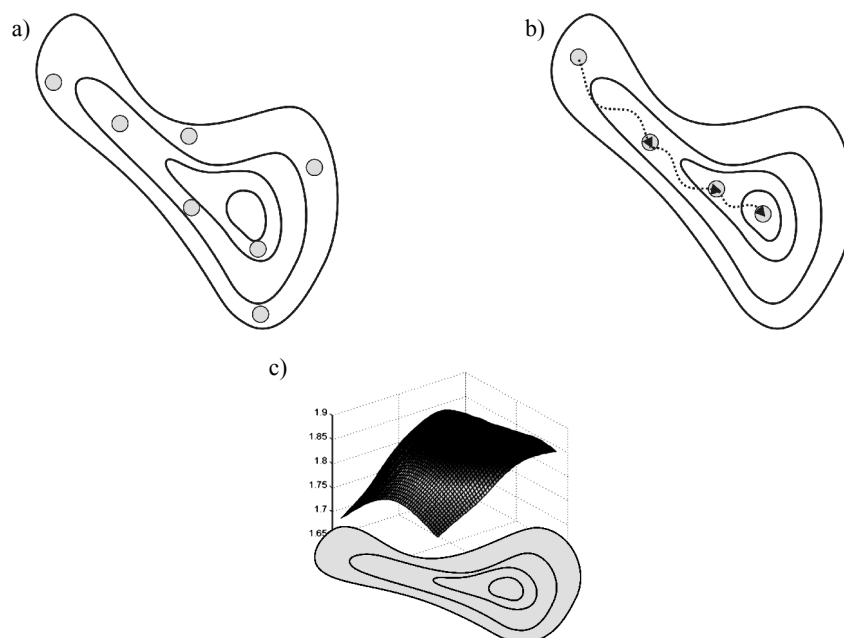
Rys. 3.2. Schemat procesu projektowania z uwzględnieniem prototypu fizycznego i numerycznego

W przypadku prototypu fizycznego testowanie realizuje się na podstawie doświadczeń fizycznych, natomiast w przypadku prototypu numerycznego doświadczeń numerycznych. Niezależnie od rodzaju prototypu doświadczenia obejmują testy przewidziane w normach dla urządzeń elektronicznych, tj. testy niezawodnościowe, udarowe, czy szokowe. Proces optymalizacji realizuje się na podstawie metod numerycznych, zarówno w przypadku prototypu fizycznego, jak i numerycznego. Celem optymalizacji jest wyznaczenie spośród dopuszczalnych rozwiązań danego problemu, rozwiązania najlepszego ze względu na przyjęte kryteria dotyczące jednego lub kilku parametrów jednocześnie, takich jak koszt, niezawodność, funkcjonalność itp. Proces optymalizacji, w zależności od doświadczenia inżyniera i oczekiwań producenta można prowadzić, jak to przedstawiono na rysunku 3.3, zgodnie z następującymi metodami:

- metoda „kolejnych prób i błędów” – oparta z jednej strony na wiedzy i doświadczeniu eksperta, z drugiej zaś na oczekiwaniach i wymaganiach użytkowników,
- metoda bezpośrednia – oparta na kryteriach oceny i procedurach matematycznych; pozwala na wyznaczeniu ekstremum dla przyjętych warunków brzegowych,
- metoda zaawansowana – oparta zarówno na wiedzy i doświadczeniu eksperta, jak i matematycznych procedurach i kryteriach oceny; pozwala na realizację procesu projektowania pod kątem: optymalizacji, analizy czułości i projektowania tolerancji.

Zastąpienie prototypu fizycznego prototypem numerycznym pozwala na poprawę konkurencyjności, niezawodności z jednoczesnym skróceniem czasu projektowania i obniżeniu kosztów. *Metodę projektowania z wykorzystaniem numerycznego prototypu obiektu określa się terminem projektowania numerycznego.* Należy jednak podkreślić, że nie jest możliwe całkowite wyeliminowanie fizycznego prototypu produktu. W większości przypadków zastosowanie numerycznych metod projektowania pozwala jedynie na skrócenie liczby niezbędnych cykli projektowania przez





Rys. 3.3. Metody optymalizacji: „kolejnych prób i błędów” (a), bezpośrednia (b) oraz zaawansowana (c)

zastosowanie metod numerycznych. Poza tym wybrane metody numeryczne mogą być z powodzeniem stosowane zarówno w przypadku prototypu fizycznego, jak i numerycznego. Ich niewątpliwą zaletą jest możliwość skrócenia czasu oraz obniżenie kosztów projektowania [124, 125, 126, 127].

### 3.1. Metody projektowania numerycznego

W przeszłości metody projektowania inżynierskiego opierały się głównie na połączeniu teorii z eksperymentem. W ostatnich latach rozwój różnych technik modelowania numerycznego, np. metody elementów skończonych, pozwolił na wyodrębnienie dodatkowego narzędzia w procesie projektowania. Narzędzie to określa się mianem inżynierii wspomaganej komputerowo CAE (ang. *Computer Aided Engineering*). Popularność CAE wynika z następujących faktów:

- modele numeryczne stają się coraz bardziej dokładne, co jest bezpośrednią konsekwencją rozwoju sprzętu komputerowego, zwiększenia mocy obliczeniowej oraz rozwoju metod numerycznych,

- wzrastająca konkurencja powoduje konieczność skrócenia czasu oraz kosztów projektowania nowego produktu; rozwiązaniem tego problemu może być projektowanie z wykorzystaniem technik modelowania numerycznego,
- jednym z ostatnich wymagań rynkowych jest dywersyfikacja produktów, to znaczy, że określone grupy odbiorców wymagają opracowania różnych typów danego produktu oraz metod jego wykonania,
- konieczność wypełnienia luki między starą a nową kadrą inżynierską; prognozy rozwoju struktury zatrudnienia przewidują dużą rotację kadry, przez co trudniej jest znaleźć pracownika z wieloletnim doświadczeniem i dostateczną wiedzą; jednocześnie wielu inżynierów, którzy byli przyzwyczajeni do tradycyjnych metod projektowania, z powodu wieku przechodzi na emeryturę.

Metody inżynierii wspomaganiej komputerowo wydają się być przydatne w dowolnej dziedzinie inżynierskiej, a zwłaszcza w przypadku mikroelektroniki oraz montażu elektronicznego. Jednak ich praktyczne wykorzystanie jest zadaniem niezwykle złożonym i obejmuje m.in. problemy testowania, optymalizacji oraz analizę zachowania w wyniku zadanych obciążeń [128, 129, 105]. Podstawowym problemem jest interdyscyplinarny zakres wiedzy, gdyż rzeczywiste obiekty wymagają uwzględnienia w obliczeniach sprzęgania pól nieliniowych właściwości materiałowych oraz optymalizacji wielokryterialnej [130]. Do najważniejszych metod projektowania numerycznego w montażu elektronicznym można zaliczyć:

- metodę elementów skończonych FEM<sup>42</sup> (ang. *Finite Element Method*); pozwala na analizę numeryczną zachowania obiektów w wyniku zadanych obciążeń,
- metodę planowania eksperymentów DoE (ang. *Design of Experiments*); umożliwia wybór serii doświadczeń składających się na eksperyment oraz interpretację uzyskanych wyników,
- metodę analizy powierzchni odpowiedzi RSM<sup>43</sup> (ang. *Response Surface Method*); umożliwia opracowanie modelu matematycznego obiektu, na podstawie uzyskanych wyników eksperymentu.

Z punktu widzenia inżyniera proces projektowania można prowadzić na podstawie obiektu fizycznego lub jego modelu analitycznego, empirycznego lub numerycznego. Zarówno model analityczny, jak i empiryczny są modelami matematycznymi, podczas gdy model numeryczny jest tworzony na podstawie narzędzi modelowania numerycznego, pozwalających na rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych. Model analityczny wyznaczany jest za pomocą rozważań teoretycznych, podczas gdy model empiryczny według wyników eksperymentu. Model empiryczny jest najczęściej uproszczonym modelem matematycznym i tylko w określonym zakresie odpowiada na pytania dotyczące wzajemnych zależności dla wybranych zmiennych badanego obiektu.

42 W języku polskim stosuje się powszechnie skrót MES od pierwszych liter terminu: Metoda Elementów Skończonych lub Metoda Elementu Skończonego.

43 W literaturze spotyka się także równoważny skrót RSA (ang. *Response Surface Analysis*).

tu. Modele matematyczne mają tę przewagę nad modelem numerycznym, że pozwalają na szybką analizę zachowania wybranych parametrów obiektu na skutek zmian czynników kontrolnych. Modele te pozwalają na zastosowanie zaawansowanych technik optymalizacyjnych mających na celu: poszukiwanie ekstremum, analizę czułości czy projektowanie tolerancji. Ogólny model matematyczny obiektu można przedstawić w postaci zależności funkcyjnej:

$$Y = f(X, Z), \quad (3.1)$$

gdzie  $X$  – macierz zmiennych wejściowych,  $Z$  – macierz zmiennych nazywanych szumem,  $Y$  – macierz zmiennych wyjściowych.

W skrócie można powiedzieć, że modelowanie numeryczne jest stosowane wówczas, gdy nie znamy modelu matematycznego opisanego funkcją analityczną  $f$ , a jedynie mamy informację na temat obciążeń, geometrii oraz warunków brzegowych.

Model matematyczny obiektu można opracować na podstawie obiektu fizycznego lub jego modelu numerycznego. W tym celu należy przygotować odpowiedni plan eksperymentu, a następnie na tej podstawie opracować odpowiedni model matematyczny. Niestety w większości przypadków procedura prowadząca do uzyskania modelu matematycznego jest nieefektywna, chaotyczna, kosztowna oraz rozciągnięta w czasie, a wynikiem jest niedokładny model matematyczny. Aby uniknąć wymienionych problemów, stosuje się metody matematyczne oraz statystyczne, aby procedura prowadząca do uzyskania modelu matematycznego była uporządkowana, efektywna, tania oraz szybka, a uzyskany model matematyczny spełniał wymagania dotyczące dokładności.

### 3.1.1. Modelowanie numeryczne; metoda elementów skończonych

Modelowanie numeryczne jest obecnie jedną z najbardziej obiecujących i jednocześnie najprężniej rozwijających się dziedzin inżynierii. Zostało ono uznane przez laureata nagrody Nobla z dziedziny fizyki Wilsona (1982), obok teorii i eksperymentu, za jeden z podstawowych paradygmatów rozwoju nauki.

W montażu elektronicznym mamy do czynienia z problemami, które ze względów fizycznych dotyczą teorii pola, a z matematycznych mogą być opisane równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Do typowych pól spotykanych w montażu elektronicznym można zaliczyć pola: temperatury, naprężeń i odkształceń, elektryczne, magnetyczne, przepływów oraz pola sprzężone, np. elektromagnetyczne lub termomechaniczne. Opis pola wymaga definicji przestrzeni fizycznej oraz zmiennej (np. pole temperaturowe oraz temperatura), która ma wartość skończoną w wybranym punkcie tej przestrzeni. Zmienna pola  $v$  może przyjmować nieskończoną liczbę wartości, gdyż jest funkcją położenia opisanego zmiennymi przestrzennymi:

$$v = f(x, y, z). \quad (3.2)$$

Niestety, pomimo precyzyjnego matematycznego opisu oraz zaawansowanych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, w przypadku większości problemów inżynierskich rozwiązania analityczne nie są znane. Dlatego też, coraz więcej uwagi poświęca się metodom numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Jednym z podstawowych założeń w modelowaniu numerycznym zagadnień z teorii pola jest problem ciągłości. Ciągłość w tym przypadku oznacza, że wartości zmiennej pola w dowolnych sąsiadujących punktach przestrzeni różnią się niewiele. Główną zaletą metod numerycznych jest możliwość znalezienia rozwiązania przybliżonego danego problemu, które inaczej należałoby określić doświadczalnie. W przypadku dużej części zagadnień inżynierskich rozwiązaniem wystarczającym jest identyfikacja kierunku zmian zmiennej pola w wyniku zadanych obciążeń. Dodatkowo rozwiązanie takie można znaleźć przy niewielkim nakładzie sił i środków. Podstawową wadą metod numerycznych stosowanych w zagadnieniach inżynierskich jest ich ograniczona dokładność. Jest to spowodowane brakiem ogólnych zasad modelowania, popartych wiedzą eksperta, komputerowych systemów eksperckich czy dostatecznej wiedzy na temat: zjawisk fizycznych oraz ich wzajemnej interakcji, właściwości i modeli materiałowych, modeli i kryteriów uszkodzeń, procesów technologicznych itp.

W ostatnich latach powstało wiele metod numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Do najczęściej używanych należą:

- metoda różnic skończonych FDM (ang. *Finite Difference Method*) [131],
- metoda elementów skończonych lub elementu skończonego FEM (ang. *Finite Element Method*) [132],
- metoda elementów brzegowych lub elementu brzegowego BEM (ang. *Boundary Element Method*) [133],
- metoda objętości skończonych FVM (ang. *Finite Volume Method*) [134],

W wielkim skrócie wymienione metody polegają na podziale analizowanego obszaru ciągłego na skończoną liczbę podobszarów, a następnie na uzyskaniu rozwiązania przybliżonego w punktach węzłowych. Rozwiązanie w dowolnym punkcie przestrzeni można uzyskać na zasadzie interpolacji wyników w węzłach sąsiadujących. Podstawowa różnica między wymienionymi metodami dotyczy sposobu dyskretyzacji obszaru analizy, sposobu definicji warunków brzegowych i obciążeń oraz metody poszukiwania rozwiązania.

Metoda FDM opiera się na założeniu, że różniczka  $\delta x$  może być zastąpiona przyrostem skończonym  $\Delta x$ . Zgodnie z rozwinięciem szeregów Taylora, jeżeli znamy wartość funkcji w punkcie  $x$ , to możemy wyznaczyć jej wartość w punkcie  $x+h$ , gdy funkcja jest ciągła i różniczkowalna:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} \dot{f}(x) + \dots, \quad (3.3)$$

gdzie  $h$  – niewielki przyrost zmiennej  $x$ .

Korzystając z powyższego założenia, pierwsza pochodna może być w przybliżeniu zastąpiona przez różnicę skończoną:

$$\dot{f}(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{h}. \quad (3.4)$$

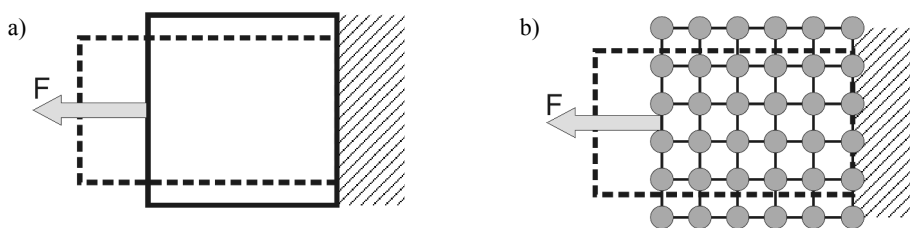
Błąd, jaki się popełnia, można oszacować na podstawie różnicy centralnej, z następującej zależności:

$$\varepsilon = \frac{1}{27} \ddot{f}(x) h^2. \quad (3.5)$$

Im przyrost  $h$  jest mniejszy, tym dokładniejsza jest szacowana wartość pochodnej.

Metodę FEM stosuje się w celu rozwiązywania problemów inżynierskich oraz w zagadnieniach fizyki matematycznej. Jej zaletą jest dokładne odwzorowanie kształtów o skomplikowanej geometrii, możliwość deklarowania złożonych obciążeń oraz definicji nieliniowych właściwości materiałowych, tzn. wszędzie tam, gdzie znalezienie rozwiązania analitycznego jest praktycznie niemożliwe. Typowym zastosowaniem metody FEM jest analiza zagadnień mechanicznych, termicznych, elektromagnetycznych oraz pól sprzężonych. Tym samym metoda ta jest odpowiednia do modelowania zagadnień charakterystycznych dla montażu elektronicznego. Na rysunku 3.4 przedstawiono odkształcenie ciała w wyniku działania siły  $F$  oraz jego uproszczoną reprezentację w przypadku metody FEM.

Metoda FEM polega na utworzeniu geometrycznie podobnego modelu składającego się ze zbioru połączonych i uproszczonych matematycznie reprezentacji podobszarów, tzw. elementów skończonych. Elementy te są następnie łączone w punktach, które są

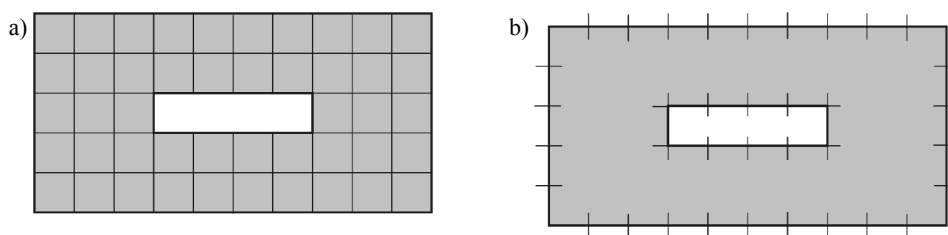


Rys. 3.4. Problem odkształcenia na skutek działania siły zewnętrznej  $F$  (a) oraz jego reprezentacja w metodzie FEM (b)

wspólne dla dwu, trzech i więcej elementów (tzw. węzłów lub punktów węzłowych) na granicy połączenia. Podstawowym problemem w metodzie elementów skończonych jest poprawna definicja właściwości elementów. W metodzie FEM korzysta się z definicji lokalnej  $[k]$  i globalnej macierzy sztywności  $[K]$ , odpowiednio dla pojedynczego elementu i dla zbioru połączonych elementów. Bardzo ważnym elementem

modelowania FEM jest zamiana obiektu fizycznego (rys. 3.4a) na jego reprezentację numeryczną (rys. 3.4b) – model dyskretny zawierający skończoną liczbę elementów.

Metoda BEM jest stosowana od niedawna i stanowi alternatywę dla metody FEM. Różnica między tymi metodami polega na sposobie dyskretyzacji obszaru analizy. Podczas gdy metoda FEM wymaga dyskretyzacji całego obszaru, metoda BEM wymaga jedynie dyskretyzacji granic obszaru (rys. 3.5).



Rys. 3.5. Zasada dyskretyzacji obszaru analizy dla metody FEM (a) oraz BEM (b)

Metoda BEM w przypadku skomplikowanej geometrii oraz złożonych warunków brzegowych może prowadzić do przyspieszenia procesu modelowania – brak procedury tworzenia i modyfikacji siatki. Jedną z najważniejszych zalet metody BEM jest możliwość znalezienia rozwiązania w punktach osobliwych. Wynika to z tego, że w metodzie BEM korzysta się z analitycznych układów równań, które nie zależą od geometrii analizowanego obszaru. Inne zalety metody BEM to: możliwość uzyskania rozwiązania dokładnego w przypadku obszarów nieskończonych i uproszczony sposób reprezentacji układów symetrycznych – brak dyskretyzacji linii, płaszczyzn i osi symetrii. Niestety do wad metody BEM można zaliczyć sposób reprezentacji obszarów o niejednorodnych i nieliniowych właściwościach materiałowych. Konieczna jest ponadto znajomość odpowiednich układów równań analitycznych w analizowanych problemach.

Metoda FVM jest z kolei alternatywą dla metody FEM i BEM. Metoda ta została opracowana na potrzeby zagadnień, w których nie musi być spełniona zasada zachowania ciągłości zmiennej pola w analizowanym obszarze. Metoda FVM w przeciwieństwie do metod FEM i BEM opiera się na analizie zachowania zmiennej pola wewnątrz komórek siatki, zamiast w węzłach siatki. W metodzie FVM korzysta się z prawa zachowania, według którego dla dowolnych dwóch punktów  $x_1$  i  $x_2$  analizowanej przestrzeni spełniona jest zależność:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_2, t)) - f(q(x_1, t)), \quad (3.6)$$

gdzie  $q(x, t)$  – miara gęstości wybranej zmiennej pola,  $f(q(x, t))$  – funkcja wyrażająca strumień tej zmiennej.

Równanie (3.6) oznacza, że „całkowita masa” tej zmiennej między dwoma dowolnymi punktami może ulec zmianie tylko i wyłącznie na skutek przepływu strumienia tej zmiennej. Prawo zachowania masy jest spełnione dla wielu podstawowych zmiennych i pól fizycznych, np. przepływu cieczy czy gazów. Problem nieciągłości zmiennej pola stanowi duży problem metod numerycznych. Metody klasyczne, takie jak FEM czy FDM, opierają się na oszacowaniu pochodnej wewnątrz wybranego elementu. Niestety, w przypadku występowania nieciągłości metody te nie są w stanie ocenić wartości pochodnej poprawnie, co prowadzi do błędnego rozwiązania. W przypadku metody FVM, zamiast oszacowania pochodnej na podstawie wartości zmiennej pola w węzłach siatki, korzysta się z oszacowania całki  $q(x,t)$  wewnątrz komórek siatki lub jej wartości średniej – wartość całki podzielona przez objętość komórki. Wyznaczone wartości zmiennej pola są następnie aktualizowane w kolejnych krokach czasowych, korzystając z funkcji strumienia, który przepływa przez komórki. Podstawowym problemem metody FVM jest poprawna definicja funkcji strumienia tak, aby stanowiła ona poprawne przybliżenie strumienia rzeczywistego, korzystając jedynie z wartości średnich w komórkach siatki.

### 3.1.1.1. Metoda FEM

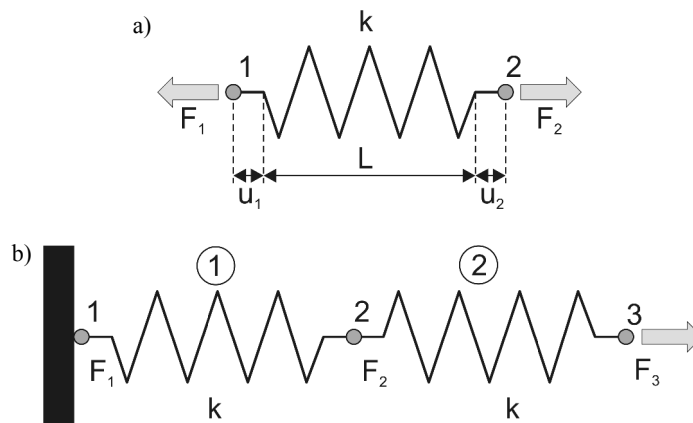
W poprzednim rozdziale omówiono wybrane metody rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. W przypadku zagadnień inżynierskich najczęściej stosuje się metodę FEM. Podstawy metody FEM zostały opracowane w 1956 roku przez zespół M.J. Turnera, a termin „element skończony” został po raz pierwszy, w tym samym roku, zastosowany przez R.W. Clougha [135]. Znaczący udział w rozwoju metody FEM miał także polski uczyony O.C. Zienkiewicz, który opublikował kilka książek z zakresu tej tematyki [136, 137, 138, 139]. W Polsce duże zasługi w promocji metody FEM miał także zespół J. Szmeltera [140, 141], a pierwsze programy komputerowe do obliczeń metodą FEM opracowano w zespole M. Kleibera [142, 143].

Zasadą obliczeń metodą FEM jest zastąpienie obszaru ciągłego zbiorem wzajemnie połączonych elementów skończonych o określonych właściwościach. W przypadku pojedynczego elementu przedstawionego na rysunku 3.6a można przyjąć założenie, że jego właściwości są opisane stałą sprężystości  $k$ . Stała sprężystości  $k$  lub sztywność wiąże ze sobą siłę  $F$  oraz przemieszczenie punktów węzłowych  $u$ , zgodnie z następującym równaniem:

$$F = k u . \quad (3.7)$$

W przypadku pojedynczego elementu można zapisać następujący układ równań:

$$\begin{aligned} F_1 &= k u_1 - k u_2, \\ F_2 &= -k u_1 + k u_2, \end{aligned} \quad (3.8)$$



Rys. 3.6. Przykład definicji właściwości pojedynczego elementu (a) oraz opisu połączenia dwóch elementów (b) w metodzie FEM

który może być przepisany w formie macierzowej jako:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

lub

$$[k]\{u\}=\{F\}, \quad (3.10)$$

gdzie  $[k]$  stanowi macierz sztywności dla pojedynczego elementu. W przypadku szeregowego połączenia dwóch elementów przedstawionych na rysunku 3.6b równanie równowagi systemu może być zapisane jako:

$$\begin{aligned} F_1 &= k u_1 - k u_2 \\ F_2 &= -k u_1 + k u_2 + k u_2 - k u_3 \\ F_3 &= -k u_2 + k u_3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

lub w formie macierzowej:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & k+k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.12)$$



czyli

$$[\mathbf{K}]\{u\}=\{F\}, \quad (3.13)$$

gdzie  $[\mathbf{K}]$  – globalna macierz sztywności.

Należy zauważyć, że globalna macierz sztywności może być utworzona na podstawie lokalnej macierzy sztywności oraz reprezentacji schematu połączeń elementów. W przypadku pokazanym na rysunku 3.6 sposób konstrukcji globalnej macierzy sztywności pokazano na rysunku 3.7.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & k & k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

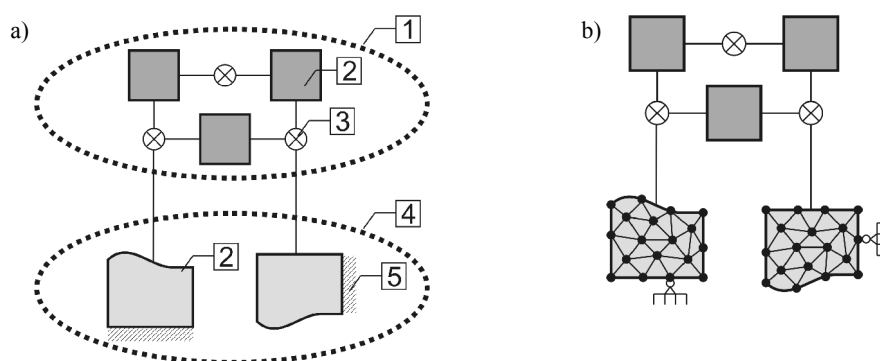
Rys. 3.7. Metoda konstrukcji globalnej macierzy sztywności  $[\mathbf{K}]$

W rzeczywistości metoda FEM opiera się na definicji lokalnej  $[\mathbf{k}]$  oraz globalnej macierzy sztywności  $[\mathbf{K}]$ , odpowiednio dla pojedynczego elementu i zbioru połączonych elementów. Celem analizy jest wyznaczenie przemieszczenia węzłów  $u_i$ . Równanie oraz macierz sztywności dla pojedynczego elementu  $[\mathbf{k}]$ , a także dla całego układu  $[\mathbf{K}]$  ma kilka charakterystycznych właściwości:

- równanie dla pojedynczego elementu tworzy się w taki sam sposób, niezależnie od rodzaju pola, typu obciążeń i właściwości materiałowych – w przypadku gdy konieczne jest uwzględnienie nieliniowych właściwości materiałowych, wówczas macierz sztywności  $[\mathbf{K}]$  zawiera zamiast stałych  $k$ , zależności funkcyjne typu  $k(u)$ ,
- współczynniki  $k$  można wyznaczyć na podstawie ogólnych praw fizyki i inżynierii materiałowej lub oszacować na podstawie metod doświadczalnych,
- zgodnie z prawem Maxwella–Betti macierz sztywności  $[\mathbf{K}]$  w przypadku ortogonalnych układów współrzędnych jest macierzą symetryczną.

Obiekt fizyczny może składać się zarówno z obszarów ciągłych, jak i dyskretnych. Obszary ciągłe mają elementy, których właściwości są rozłożone w sposób ciągły w przestrzeni, tak jak masa czy elementy sprężyste lub tłumiące. W przypadku obszarów dyskretnych należy korzystać z elementów o parametrach skupionych, jak bryły sztywne o skupionych parametrach masowych, bezwymiarowe elementy sprężyste lub tłumiące (rys. 3.8a). W celu utworzenia reprezentacji numerycznej obiektu fizycznego, konieczna jest dyskretyzacja obszarów ciągłych, np. korzystając z metod aproksymacji zmiennej pola w obszarach ciągłych. W przypadku metody FEM aproksymację realizuje się według funkcji ciągłych, które opisują zachowanie poszczególnych elementów w danym obszarze analizowanego pola. W rezultacie prowadzi to do utworzenia modelu dyskretnego analizowanego problemu, co przedstawiono na rysunku 3.8b. Kolejne etapy tworzenia modelu dyskretnego składają się z następujących czynności:

- podziału obszaru ciągłego na skończoną liczbę elementów oraz odpowiadających im węzłów,
- wyboru zmiennej pola oraz odpowiednich wielkości fizycznych w poszczególnych węzłach, które w następnej kolejności będą poddane procesowi aproksymacji lub interpolacji,
- definicji warunków brzegowych i ograniczeń dla węzłów oraz elementów,
- aproksymacji lub interpolacji zmiennej pola oraz wybranych wielkości fizycznych według odpowiednich funkcji kształtu, np. wielomianów.



Rys. 3.8. Model obiektu fizycznego zawierający elementy ciągłe oraz dyskretne (a) oraz reprezentacja numeryczna obiektu fizycznego zawierająca obszary ciągłe zastąpione elementami skończonymi (b): 1 – obszar dyskretny, 2 – bryła sztywna, 3 – element sprężysty i /lub tłumiący, 4 – obszar ciągły, 5 – warunki brzegowe

W przypadku metody FEM każdy element może zawierać inną funkcję kształtu. Należy jednak pamiętać, aby wybrane funkcje kształtu zapewniały możliwie najlepszą ciągłość zmiennej pola między poszczególnymi elementami dla przyjętych warunków brzegowych i ograniczeń. Wartość zmiennej pola dla danego elementu można opisać przez wartości węzłowe, korzystając z funkcji ciągłej  $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ , w postaci:

$$\Phi = \sum_{i=1}^w N_i(x_1, x_2, x_3) \Phi_i(t), \quad (3.14)$$

gdzie  $N_i$  – funkcja kształtu dla  $i$ -tego węzła w punkcie o współrzędnych  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\Phi_i(t)$  – wartość wielkości węzłowej w  $i$ -tym węźle,  $w$  – liczba węzłów dla danego elementu.

Równanie to można zapisać także w formie macierzowej, jako:

$$\Phi = N_e \Phi_e, \quad (3.15)$$

gdzie  $N_e$  – macierz funkcji kształtu dla elementu –  $N_e = [N_1, N_2, \dots, N_w]$ ,  $\Phi_e$  – wektor wielkości węzłowych elementu –  $\Phi_e = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_w\}^T$ .

Jeżeli w rozpatrywanym elemencie zmienna pola nie jest skalarem, lecz wektorem lub tensorem, to  $\Phi$  należy zastąpić wektorem zawierającym odpowiednie wielkości fizyczne. W przypadku gdy zostanie wybrana odpowiednia funkcja kształtu, a analizowany obszar zostanie poprawnie podzielony na elementy oraz zostaną właściwie wybrane warunki brzegowe i ograniczenia, wówczas należy oczekiwać, że otrzymane rozwiązanie będzie odpowiadało rzeczywistemu zachowaniu analizowanego obiektu.

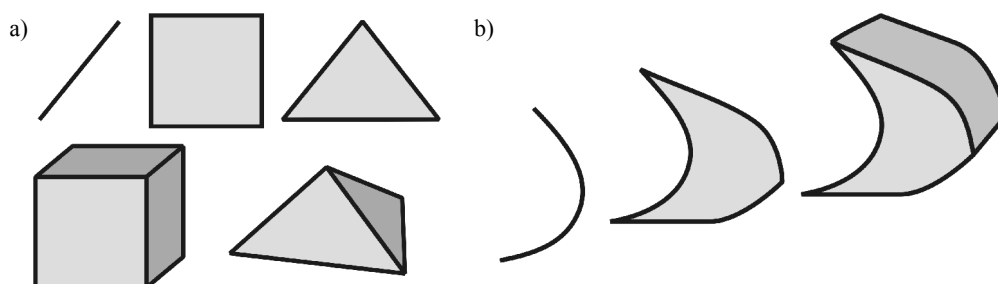
Jednym z najistotniejszych elementów metody FEM jest poprawna dyskretyzacja analizowanego obszaru ciągłego, tj. odpowiednia liczba elementów i właściwe odwzorowanie kształtu obiektu oraz wybór funkcji kształtu. Funkcja kształtu powinna dokładnie oddawać zachowanie zmiennej pola w poszczególnych elementach. Aby warunek ten został spełniony, funkcje kształtu powinny zapewniać:

- I. ciągłość przemieszczeń wewnątrz elementów oraz ich zgodność na granicach,
- II. możliwość opisywania stałych przemieszczeń elementu – jego ruchu jako ciała sztywnego,
- III. możliwość opisanie stanu stałych odkształceń wewnątrz elementu dla wyznaczonych przemieszczeń węzłów.

W przypadku gdy funkcje kształtu spełniają warunek I, wówczas elementy takie nazywa się elementami zgodnymi. Natomiast elementy, które spełniają warunek I i II nazywa się elementami zupełnymi. Stosowanie elementów zupełnych nie zawsze zapewnia monotoniczną zbieżność rozwiązań podczas zwiększania liczby elementów. Zbieżność taką można uzyskać, gdy spełniony zostanie warunek ciągłości odkształceń na granicy elementów. Najczęściej stosowanymi funkcjami kształtu elementów są wielomiany tworzone na podstawie ciągów Pascala, wielomianów Lagrange'a i wielomianów Hermite'a. W przypadku modelowania numerycznego wygodnie jest stosować funkcje kształtu utworzonych na podstawie wielomianów Lagrange'a. Odwzorowanie funkcji kształtu wielomianami Hermite'a stosuje się wówczas, gdy zmienna pola w węzłach siatki jest nie tylko funkcją przemieszczenia, lecz także ich pochodnych.

Obecnie stosuje się całe spektrum różnego rodzaju elementów, a dodatkowo ciągle trwają prace nad opracowaniem nowych. Każdy element charakteryzuje zespół cech, który pozwala określić jego właściwości i zastosowanie. Klasyfikację elementów realizuje się najczęściej według następujących kryteriów: wymiar, kształt geometryczny, typ funkcji kształtu, liczba węzłów oraz rodzaj więzów ogólnych. Ze względu na wymiar elementy dzieli się na jedno-, dwu- i trójwymiarowe. Ze względu na geometrię rozróżnia się elementy podstawowe, jak: odcinkowe, trójkątne, prostokątne, czworosiennie, prostopadłościennie (rys. 3.9a). W przypadku gdy istnieje konieczność odwzorowania obszaru z brzegami zakrzywionymi, zamiast dużej liczby elementów podstawowych ograniczonych liniami prostymi lub płaszczyznami, stosuje się elementy złożone o konturach zakrzywionych (rys. 3.9b). W przypadku elementów złożonych stosuje się transformację ich geometrii do geometrii elementów podstawowych. Ze względu na sposób opisu wyróżnia się trzy klasy elementów złożonych: izoparame-

tryczne, superparametryczne, subparametryczne. W przypadku elementów izoparametrycznych geometria i pole odkształceń są opisane tymi samymi funkcjami kształtu. Jeżeli do opisu geometrii zastosuje się więcej węzłów niż do opisu pola odkształceń, to element określa się terminem superparametryczny. Odwrotna sytuacja występuje w przypadku elementu subparametrycznego.



Rys. 3.9. Przykłady geometrii elementów podstawowych (a) i elementów złożonych (b)

Ze względu na stopień wielomianu przyjętej funkcji kształtu elementy dzieli się na: liniowe, kwadratowe, sześciennie i  $n$ -tego stopnia. Elementy liniowe to takie, w których funkcja kształtu ma charakter liniowy – wielomian stopnia pierwszego. Oznacza to, że aproksymowana wewnątrz elementu wielkość fizyczna zależy liniowo od współrzędnych przestrzennych węzłów. Elementy kwadratowe to takie, w których funkcja kształtu jest wielomianem stopnia drugiego. W przypadku elementów sześciennych funkcje aproksymujące są stopnia trzeciego, a dla elementów  $n$ -tego stopnia wielomian aproksymujący jest także stopnia  $n$ -tego. W niektórych elementach przyjmuje się kilka funkcji kształtu w zależności od wielkości fizycznej i/lub kierunku w przestrzeni. Ze względu na liczbę węzłów elementy dzieli się na dwu-, trój- i więcej węzłowe. Węzły mogą być umieszczone w wierzchołkach, na krawędziach lub wewnątrz elementu. Liczba węzłów elementu jest ściśle związana z typem funkcji kształtu, tj. stopniem wielomianu. Aproksymowana wielkość fizyczna jest jednoznacznie zależna od liczby węzłów w elemencie. Przykładowo dla elementu jednowymiarowego i liniowego funkcja kształtu ma dwie stałe. W celu jednoznacznego uzależnienia od parametrów węzłowych przyjmuje się w elemencie dwa węzły. Dla elementu jednowymiarowego, lecz kwadratowego konieczne już są trzy węzły.

Ważnym zagadnieniem w przypadku metody FEM jest metoda poszukiwania rozwiązania. Z matematycznego punktu widzenia układ równań może mieć kilka rozwiązań. Z kolei z fizycznego punktu widzenia właściwe rozwiązanie to takie, które spełnia zasadę zachowania energii. W przypadku metody FEM celem jest znalezienie takiego rozwiązania, które spełnia zasadę minimalizacji energii potencjalnej układu. Metody rozwiązywania równań opisujących stan naprężenia i odkształcenia oparte są na rachunku wariacyjnym, którego celem jest minimalizacja funkcjonału opisującego

energię potencjalną ciała w stanie równowagi (p. rozdz. 2.4.1.1). W rzeczywistości metoda FEM jest szczególnym przypadkiem rachunku wariacyjnego<sup>44</sup> [144, 74]. W przypadku analizy przemieszczeń w wyniku działania siły zewnętrznej  $F$ , całkowita energia potencjalna  $E_p$  jest sumą wewnętrznej energii przemieszczenia  $U_i$  oraz energii potencjalnej sił zewnętrznych  $U_e$ :

$$E_p = U_i + U_e. \quad (3.16)$$

W przypadku pojedynczego węzła można zapisać:

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2} k u^2, \\ U_e &= -F u, \end{aligned} \quad (3.17)$$

czyli:

$$E_p = \frac{1}{2} k u^2 - F u. \quad (3.18)$$

Z równania (3.18) można określić następujący warunek stanu równowagi układu [145, 146]:

$$\frac{dE_p}{du} = 0. \quad (3.19)$$

W przypadku pojedynczego elementu całkowitą wartość energii odkształcenia dla ciała liniowosprężystego, korzystając z zależności (2.27) i (2.32) można zapisać w postaci:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon_e\}^T [D] \{\varepsilon_e\} dV, \quad (3.20)$$

gdzie  $V_e$  – objętość elementu.

44 W przypadku równań różniczkowych cząstkowych typu  $Au = f$  mamy do czynienia z dwoma metodami poszukiwania rozwiązania, tj. mocna i słaba. Forma mocna – reprezentowana przez metodę różnicy skończonej – polega na zastąpieniu równań różniczkowych w wybranych węzłach siatki równaniami różnicowymi, przy czym oczekuje się, że równania te będą spełnione we wszystkich punktach siatki. W wyniku otrzymujemy macierz układu równań liniowych dla funkcji ciągłej. W przypadku formy słabej – reprezentowanej przez metodę elementów skończonych – korzysta się z kroku pośredniego, który polega na wykonaniu operacji iloczynu skalarnego między układem równań różniczkowych a wybraną arbitralnie funkcją. Operacja ta ma na celu zamianę układu równań na równoważną postać skalarną w postaci funkcjonału, opisującego energię potencjalną układu. Znalazienie minimum funkcjonału będzie odpowiadało rozwiązaniu równania różniczkowego.

Korzystając z równania (3.15), które łączy wartości zmiennej pola z wartościami węzłowymi przez funkcję kształtu, wartości odkształceń dla pojedynczego elementu można zapisać w formie macierzowej jako:

$$\{u_e\} = [N_i] \{u_i\} . \quad (3.21)$$

Zależność między odkształceniem a przemieszczeniem jest wyrażona zależnością (2.34), tj.:

$$\{\varepsilon_e\} = [\Gamma_l] \{u_e\} , \quad (3.22)$$

gdzie  $\Gamma_l$  – liniowy operator różniczkowania.

Odształcenie dla elementu można zapisać jako:

$$\{\varepsilon_e\} = [\Gamma_l][N_i]\{u_i\} = [B]\{u_i\} . \quad (3.23)$$

Ostatecznie całkowita energia odkształcenia dla pojedynczego elementu będzie wyrażona następującym funkcjonałem:

$$W_e(\{u_i\}) = \frac{1}{2} \{u_i\}^T \left( \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{u_i\} . \quad (3.24)$$

Pracę sił zewnętrznych działających w węzłach danego elementu  $\{F_i\}$  można wyznaczyć z zależności:

$$W_i(\{u_i\}) = \frac{1}{2} \{u_i\}^T \{F_i\} , \quad (3.25)$$

Warunek równowagi dla pojedynczego elementu można zapisać jako:

$$\{F_i\} = \left( \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{u_i\} . \quad (3.26)$$

Równanie (3.26) można przepisać w postaci równoważnej:

$$\{F_i\} = [k_i] \{u_i\} . \quad (3.27)$$

gdzie macierz  $[k_i]$  nosi nazwę macierzy sztywności elementu i wynosi:

$$[k_i] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV . \quad (3.28)$$

W przypadku zbioru elementów warunek równowagi będzie opisany zależnością (3.13), gdzie globalna macierz sztywności  $[K]$  będzie sumą macierzy sztywności wszystkich elementów, tzn.:

$$[K] = \sum [k_i]. \quad (3.29)$$

Korzystając z zależności (2.31) wartość energii potencjalnej ciała  $V$  na skutek działania obciążeń zewnętrznych opisanych wektorem sił  $\{F\}$  i odpowiadających im przemieszczeń opisanych wektorem  $\{u\}$  można przepisać w postaci funkcjonału:

$$V(\{u\}) = \int_{\Omega} (W - \{F\}\{u\}) d\Omega, \quad (3.30)$$

gdzie  $\Omega$  – objętość ciała,  $W$  – gęstość energii odkształcenia ciała.

Dla stanu równowagi wartość energii powinna być najmniejsza, dlatego celem rozwiązania jest znalezienie wartości minimalnej całki (3.30) w przestrzeni funkcji wektorowej  $\{u\}$ , dla danych warunków brzegowych.

Jak wcześniej podano, problemem modelowania numerycznego jest jego ograniczona dokładność [139, 147]. W większości przypadków jest to element decydujący o tym, czy model numeryczny obiektu może być wykorzystany w procesie projektowania. Główne źródła błędów metody FEM, to:

- nieznanie lub pominięcie istotnych właściwości i modeli materiałowych,
- niewłaściwie dobrana metoda poszukiwania rozwiązania,
- zbyt duże uproszczenia dotyczące rzeczywistych zjawisk fizycznych, np. pominięcie zjawiska sprzęgania pól,
- zbyt mała dokładność odwzorowania geometrii oraz istotnych jej szczegółów, np. chropowatości powierzchni,
- zbyt mała gęstość dyskretyzacji obszaru analizy oraz niewłaściwy typ elementów,
- zbyt duża wartość kroku czasowego – analiza dynamiczna lub przejściowa,
- brak weryfikacji doświadczalnej dla przyjętych modeli oraz założonych warunków brzegowych.

Innym niezmiernie istotnym problemem metody FEM są tzw. punkty osobliwe<sup>45</sup>. Zmienna pola w takich punktach jest nieokreślona, choć w rzeczywistości przyjmuje wartość skończoną. Przykładem może być naprężenie, którego wartość będzie dążyć do nieskończoności w miarę zwiększania gęstości dyskretyzacji obszaru w okolicy krawędzi. Jakkolwiek bardzo trudno jest wyeliminować wszystkie punkty nieciągłości, istnieje kilka sposobów, które pozwalają uniknąć popełnienia błędu lub jego minimalizację [148, 149]:

- jeżeli dany podobszar nie jest istotny, a zawiera punkty osobliwe, to można go uprościć lub ostatecznie pominąć,
- jeżeli podobszar zawierający punkty osobliwe jest istotny, to należy stworzyć jego dokładne odwzorowanie geometryczne,

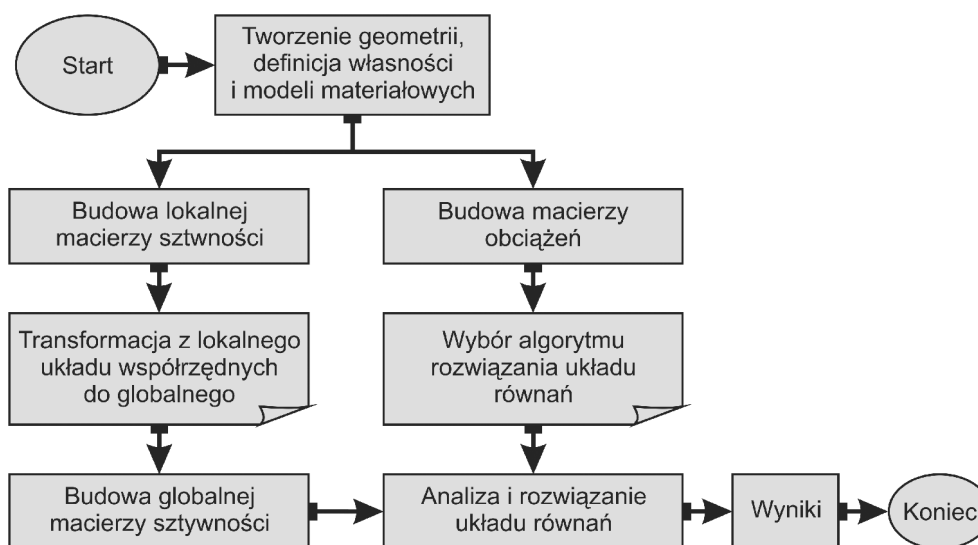
---

<sup>45</sup> Punkty osobliwe występują na ostrych wierzchołkach i na krawędziach analizowanego obiektu.

- wybrany podobszar może być analizowany za pomocą odpowiedniej techniki, np. modelowania krokowego, częściowego itp,
- zastosowanie ekstrapolacji wyników w danym podobszarze w celu oszacowania wartości zmiennej pola w punkcie osobliwym.

### 3.1.1.2. Narzędzia do modelowania numerycznego metodą FEM

Metoda FEM jest od wielu lat z powodzeniem stosowana do rozwiązywania zagadnień opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Niewątpliwie jej rozwój jest ściśle związany z rozwojem metod numerycznych oraz sprzętu komputerowego. Metoda FEM jest oparta na rachunku macierzowym i dzięki zastosowaniu narzędzi numerycznych i komputerów umożliwia szybkie i dokładne rozwiązywanie układów równań liniowych i nieliniowych z tysiącami niewiadomych. Każdy program komputerowy oparty na metodzie FEM składa się z kilku podstawowych bloków, a ogólny schemat blokowy typowego programu pokazano na rysunku 3.10.



Rys. 3.10. Schemat blokowy programu do obliczeń metodą FEM

Głównymi elementami przedstawionego schematu są: blok budowy macierzy dla pojedynczego elementu, blok budowy macierzy globalnej dla całego analizowanego układu, blok budowy wektora obciążeń zewnętrznych oraz najważniejszy blok analizy i rozwiązywania układu równań. Aby rozwiązać wybrany problem metodą FEM, należy postępować według następującego schematu. W pierwszej kolejności należy zdefiniować lokalną macierz sztywności pojedynczego elementu. Następnie należy



wykonać transformację układu współrzędnych z lokalnego na globalny oraz wykonać połączenie równań poszczególnych elementów do postaci układu równań, uwzględniając jednocześnie macierz obciążeń. Obliczenia metodą FEM są oparte na założeniu, że model dyskretny w dostateczny sposób odzwierciedla rzeczywistą geometrię i rzeczywiste zjawiska zachodzące w modelu rzeczywistym. Przyjmuje się, że model rzeczywisty może zawierać fragmenty dyskretne oraz ciągłe. Fragmenty dyskretne to takie, w których występują elementy o parametrach skupionych, jak: elementy sprężyste, tłumiące, czy bryły sztywne o skupionych parametrach masowych. Fragmenty ciągłe to takie, w których właściwości masowe, sprężyste i tłumiące są rozłożone w przestrzeni w sposób ciągły. Metoda FEM umożliwia otrzymanie modelu dyskretnego przez aproksymację fragmentów ciągłych modelu fizycznego, po założeniu, że każdą wielkość (np. naprężenie, odkształcenie) można opisać za pomocą funkcji ciągłej w danym obszarze modelu rzeczywistego.

Istnieje cała gama programów komputerowych, które są powszechnie stosowane do rozwiązywania problemów inżynierskich opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi z pomocą metody FEM. Programy te dzieli się na specjalistyczne, tzn. przeznaczone do rozwiązywania wybranego rodzaju problemów oraz programy uniwersalne o przeznaczeniu dowolnym. Programy uniwersalne mogą służyć do rozwiązywania problemów inżynierskich z różnych dziedzin, np.:

- Zagadnienia mechaniki takie, jak statyka, dynamika, drgania własne, analiza harmoniczna, analiza spektralna, stany nieustalone, wyboczenie, kinematyka, mechanika pękania. Istotnym elementem jest możliwość analizy nieliniowego zachowania związanego z dużymi odkształceniami i przemieszczeniami, powierzchniami kontaktowymi, uwzględniając dodatkowo zjawisko tarcia. W przypadku modelowania zachowania materiałów rzeczywistych, niewątpliwą zaletą metody FEM jest możliwość uwzględnienia właściwości anizotropowych oraz nieliniowych modeli materiałowych jak plastyczność, lepkość i pełzanie w połączeniu z ich zależnością od temperatury.
- Zagadnienia termiczne, takie jak analiza rozkładu pola temperatury zarówno w warunkach statycznych, jak i zmiennych w czasie, rozpraszania ciepła na skutek przewodnictwa, konwekcji i promieniowania oraz możliwość uwzględnienia zjawiska zmiany fazy.
- Zagadnienia mechaniki płynów, jak przepływy laminarne i turbulenty, analiza w odniesieniu do płynów ściśliwych i nieściśliwych, transport energii cieplnej, zjawiska interakcji płyn–struktura, np. wpływ ciśnienia cieczy na wytrzymałość i deformacje opływającego profilu oraz problem mieszania płynów.
- Zagadnienia elektromagnetyczne, takie jak modelowanie pól ustalonych i nieustalonych, analiza harmoniczna i problemów dotyczących wysokiej częstotliwości oraz możliwość symulacji obwodów elektrycznych.
- Problem pól sprzężonych, jak zagadnienia termomechaniczne.

Łatwość implementacji metody FEM w programach komputerowych przyczyniła się do rozwoju wielu aplikacji, które można podzielić na programy komercyjne, programy typu shareware oraz darmowe programy i biblioteki numeryczne, np.

- programy komercyjne: ANSYS, ABAQUS, FlexPDE, NASTRAN, MARC, ALGOR, ADINA, PATRAN, COSMOS, DiffPack, FEMLab, CADFEM itp,
- programy typu shareware: ASAP, CALFEM, COOL, FEMIS, Mefisto, OOF, PDELab, SINDA/FLUINT, FRANC3D, UNA, GetDP, FE2D, HPE itp,
- darmowe programy i biblioteki numeryczne: ALADDIN, OpenFEM, PFEM, FELIB, MiniFEM, FEMLAB-2D, FEMSET, WARP3D, EMAP, EXPDE, FEATFLOW, NLFET, OOFEM, FRMECH, FEA2D, FEA itp.

Podstawową zaletą programów komercyjnych w porównaniu z programami typu shareware i oprogramowaniem darmowym, zwłaszcza ceniona przez jednostki badawcze oraz przemysł, jest możliwość uzyskania wsparcia technicznego oraz „gwarancji” co do dokładności otrzymanych wyników modelowania. Do najczęściej stosowanych komercyjnych programów komputerowych w inżynierii należy zaliczyć ANSYS i ABAQUS<sup>46</sup>. Programy te są wiodącymi na świecie uniwersalnymi pakietami do obliczeń metodą FEM, umożliwiającymi wykonanie kompleksowych analiz niemal w każdej dziedzinie inżynierii. Ich charakterystyczną cechą jest możliwość optymalnego dopasowania aplikacji do własnych potrzeb. Programy te składają się z trzech głównych części, tj.: preprocesora, procesora i postprocesora. W preprocesorze użytkownik tworzy geometrię konstrukcji podobnie jak w systemach CAD oraz generuje siatkę elementów. Możliwe jest korzystanie z operacji Boole’a (np. dodawanie czy odejmowanie brył), jak również możliwość projektowania parametrycznego. Istnieje także możliwość transferu modeli stworzonych w popularnych systemach typu CAD, np. CATIA czy Pro/Engineer w standardowych formatach STEP, SAT, IGES. Programy te oferują wiele sposobów generowania siatki, jak np. stosowanie metody adaptacyjnej pozwalającej na automatyczne dopasowanie gęstości siatki tak, aby ograniczyć błąd modelowania. W części procesora użytkownik definiuje typ zagadnienia oraz określa rodzaj analizy i jej szczegółowe opcje (np. statyczna lub dynamiczna, opcje rozwiązywania zagadnień nieliniowych itp). Dodatkowo użytkownik definiuje obciążenia i warunki brzegowe (np. ograniczenia, stopnie swobody poszczególnych węzłów, warunki symetrii i antysymetrii). W postprocesorze użytkownik tworzy prezentację wyników w formie graficznej i/lub tekstowej. Programy te oferują takie możliwości prezentacji wyników, jak: wykresy, diagramy, izolinie, mapy kolorowe i wektorowe, powierzchnie naprężeń i deformacji, które mogą być przedstawiane dla dowolnie wybranego przekroju. Jedną z najważniejszych cech obu programów, w odniesieniu do projektowania, jest możliwość korzystania z języków programowania skryptowego. W przypadku programu ANSYS jest to język APDL, natomiast w przypadku programu ABAQUS

---

46 Oba wymienione programy są z powodzeniem stosowane przez autora w realizowanych pracach badawczych i projektowych.

jest to język PYTHON. Programy skryptowe pozwalają na automatyzację wielu zadań projektowych, jak tworzenie modeli parametrycznych, możliwość dołączenia własnych procedur, optymalizacja konstrukcji – dobieranie kształtu, aby uzyskać optymalne wartości funkcji celu (np. ciężar, naprężenie, temperatura itd.) z zachowaniem narzuconych przez użytkownika ograniczeniach (np. maksymalne ugięcie). Inne możliwości oferowane przez te programy to tzw. superelementy, będące w rzeczywistości zbiorem połączonych elementów w celu ułatwienia modelowania i skrócenia czasu obliczeń. W ostatnich latach coraz częściej korzysta się z techniki modelowania określanego nazwą submodeling. Technika ta polega na wycięciu z konstrukcji obszarów o wysokich gradientach zmiennej pola, a następnie ponownym przeprowadzeniu obliczeń z użyciem gęstszej siatki i uwzględnieniu wpływu pozostałej części struktury. Technika ta jest stosowana głównie do modelowania bardzo dużych struktur. Oba programy charakteryzują się ponadto intuicyjnym interfejsem użytkownika, zapewniającym dobrą komunikację z rozbudowanymi funkcjami programu. Programy te dodatkowo oferują obszerny system pomocy, zawierający opis podstaw teoretycznych analizowanych zjawisk oraz bibliotekę przykładowych problemów inżynierskich.

### 3.1.2. Planowanie eksperymentów

Eksperyment jest jednym z podstawowych narzędzi badawczych pozwalającym na znalezienie właściwości oraz wzajemnych zależności badanego obiektu. W miarę rozwoju badań opartych na eksperymencie powstała dyscyplina naukowa, która zajmowała się planowaniem eksperymentu, a która odnosiła się do dwóch istotnych problemów [150]:

- optymalny planu eksperymentu,
- metody interpretacji wyników eksperymentu.

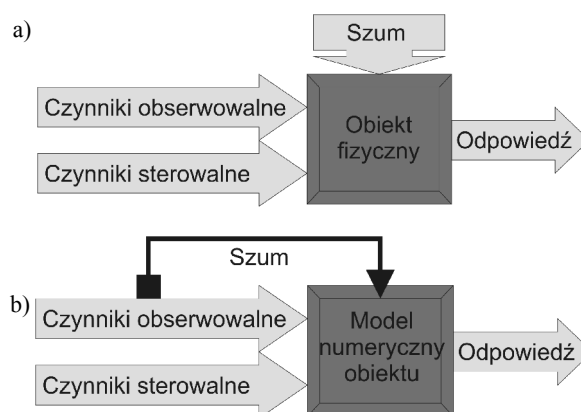
Eksperyment rozumiany jest jako szereg zaplanowanych doświadczeń (pomiar albo obserwacja), pozwalających na uzyskanie pojedynczej informacji o badanym obiekcie. Celem planowania eksperymentów DoE jest opracowanie takiego eksperymentu, który dla najmniejszej liczby doświadczeń będzie w stanie dostarczyć najwięcej informacji na temat badanego obiektu, a w rezultacie końcowym będzie w stanie doprowadzić nas do wyznaczenia empirycznego modelu badanego obiektu [151, 152].

W metodzie DoE obiekt traktuje się jako system, który przetwarza sygnały wejściowe na sygnały wyjściowe. Zmienne wejściowe nazywa się czynnikami, natomiast zmienne wyjściowe odpowiedziami. Czynniki mogą być zmiennymi ciągłymi lub dyskretnymi, ponadto mogą być zmiennymi losowymi lub procesami losowymi. Wartości czynników określa się jako poziomy i można je podzielić na:

- czynniki sterowalne – łatwe w identyfikacji, są mierzalne oraz które możemy kontrolować,
- czynniki obserwowalne – łatwe w identyfikacji, są mierzalne, jednak których nie możemy kontrolować,

- czynniki zakłócające – trudne w identyfikacji oraz niemierzalne i niemożliwe do kontroli; czynniki zakłócające nazywa się czasami czynnikami szumu; dzieli się je ponadto na zakłócenia wewnętrzne i zewnętrzne.

Obiekt może być rzeczywistym produktem lub jego modelem numerycznym. Należy tutaj jednak nadmienić, że cechą charakterystyczną modeli numerycznych jest brak czynników zakłócających charakterystycznych w przypadku obiektów fizycznych. Wynika to z tego, że dla tych samych wartości czynników sterowalnych oraz obserwowalnych otrzymamy zawsze taki sam wynik. W związku z tym dla modeli numerycznych stosuje się jedynie dwa rodzaje czynników, tj. czynniki sterowalne oraz czynniki obserwowalne. Czynniki obserwowalne traktuje się jednocześnie jako czynniki szumu, co pokazano na rysunku 3.11.



Rys. 3.11. Schemat przetwarzania i podziału sygnałów w planowaniu eksperymentów dla obiektu fizycznego (a) i modelu numerycznego obiektu (b)

Celem projektowania jest opracowanie tzw. „dobrego eksperymentu”, który w praktyce pozwoli na obniżenie kosztów oraz skrócenie niezbędnego czasu. Z tego też powodu plan eksperymentu powinien zawierać jedynie „konieczne” doświadczenia, tzn. takie, które wniosą istotną informację na temat zachowania produktu, a pominięcie tych doświadczeń, które są nieistotne ze względu na model lub w jakiś sposób pokrywają się z poprzednimi [153, 154]. Z punktu widzenia eksperymentatora, konieczne jest podjęcie kilku kluczowych decyzji:

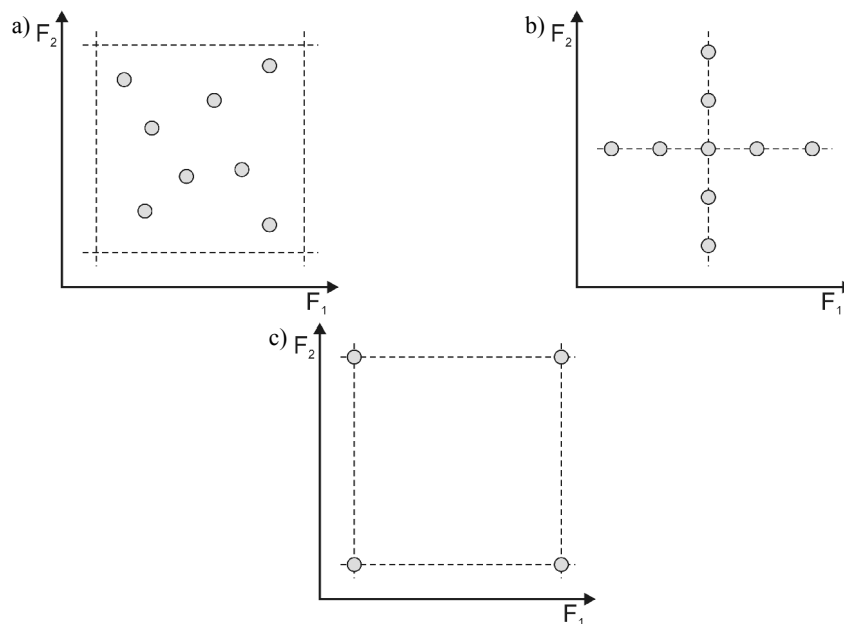
- dobór odpowiedniej liczby doświadczeń w celu uzyskania określonego modelu empirycznego, czyli zaplanowanie takiego eksperymentu, który zawiera minimalną liczbę doświadczeń,
- dobór czynników; celem eksperymentu jest określenie poziomu istotności poszczególnych czynników, należy je wybrać według kryterium sterowalności, tzn. czy i na ile będą możliwe zmiany wartości czynnika, aby uzyskać określoną odpowiedź,

- określenie potencjalnego rozrzutu wartości czynników, który występuje w przypadku produktu końcowego; w praktyce spotykamy się z naturalnym rozrzutem wartości parametrów geometrycznych, właściwości materiałowych, lecz także ze zmianami czynników obserwowalnych, których nie jesteśmy w stanie kontrolować, jak np. temperatura otoczenia,
- definicja charakteru modelu odpowiedzi – charakter liniowy lub nieliniowy; w większości przypadków przyjmuje się założenie o liniowość modelu, choć dla większości przypadków w montażu elektronicznym model odpowiedzi jest nieliniowy,
- określenie czy model odpowiedzi jest jedno- czy wieloparametrowy,
- ocena czy czynniki mają charakter ciągły lub dyskretny, deterministyczny lub losowy,
- jaki jest udział czynników szumu, których nie jesteśmy w stanie kontrolować lub możemy kontrolować, lecz tylko w określonym zakresie; celem procesu projektowania jest opracowanie takiego produktu, którego parametry tylko w niewielkim stopniu będą zależały od takich czynników, jak np. temperatura otoczenia,
- czy proces optymalizacji będzie wymagał znalezienia wielokryterialnego optimum; w praktyce w większości przypadków istnieje konieczność znalezienia rozwiązania kompromisowego między wartościami wybranych parametrów produktu, np. takich jak koszt i jakość,
- czy proces optymalizacji będzie wymagał znalezienia tylko wartości optymalnej, minimalnej, maksymalnej bądź nominalnej, czy też dodatkowo będzie wymagana analiza czułości oraz projektowanie tolerancji.

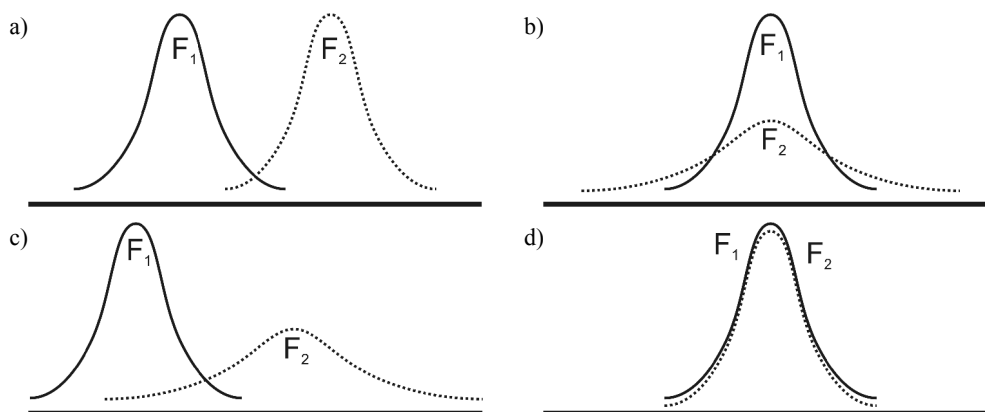
### 3.1.2.1. Plany eksperymentów

Najprostszym planem eksperymentu jest plan, według którego rejestruje się zmianę odpowiedzi przy zmianie wartości wybranego czynnika, podczas gdy pozostałe czynniki nie zmieniają swojej wartości – jeden czynnik w czasie. Najgorszym rodzajem eksperymentu, niestety często spotykanym w praktyce, jest taki, w którym rejestrujemy zmiany odpowiedzi z jednoczesną zmianą wartości wszystkich czynników – plan losowy. Istnieje jednak możliwość zachowania warunków „dobrego eksperymentu” z jednoczesną zmianą wartości kilku czynników jednocześnie – plan „poprawny” statystycznie. Przykładowe plany eksperymentów przedstawiono na rysunku 3.12.

Projektowanie eksperymentów według reguł obowiązujących w statystyce jest wyjątkowo efektywne. Plan taki pozwala na wydobycie z eksperymentu maksimum informacji, z zachowaniem minimalnej liczby doświadczeń. Statystyka dostarcza także narzędzi, które pozwalają na interpretację uzyskanych wyników [155, 150]. W przypadku eksperymentów, które są „poprawne statystycznie”, możliwe jest uzyskanie odpowiedzi na pytanie: w jaki sposób wybrane czynniki wpływają na odpowiedź obiektu. Istnieje kilka możliwości, np. zmiana wartości średniej i/lub wariancji, co przedstawiono na rysunku 3.13.



Rys. 3.12. Przykładowe plany eksperymentów: losowy (a), jeden czynnik w czasie (b), statystycznie „poprawny” (c), gdzie  $F_1$  i  $F_2$  są czynnikami sterowanymi

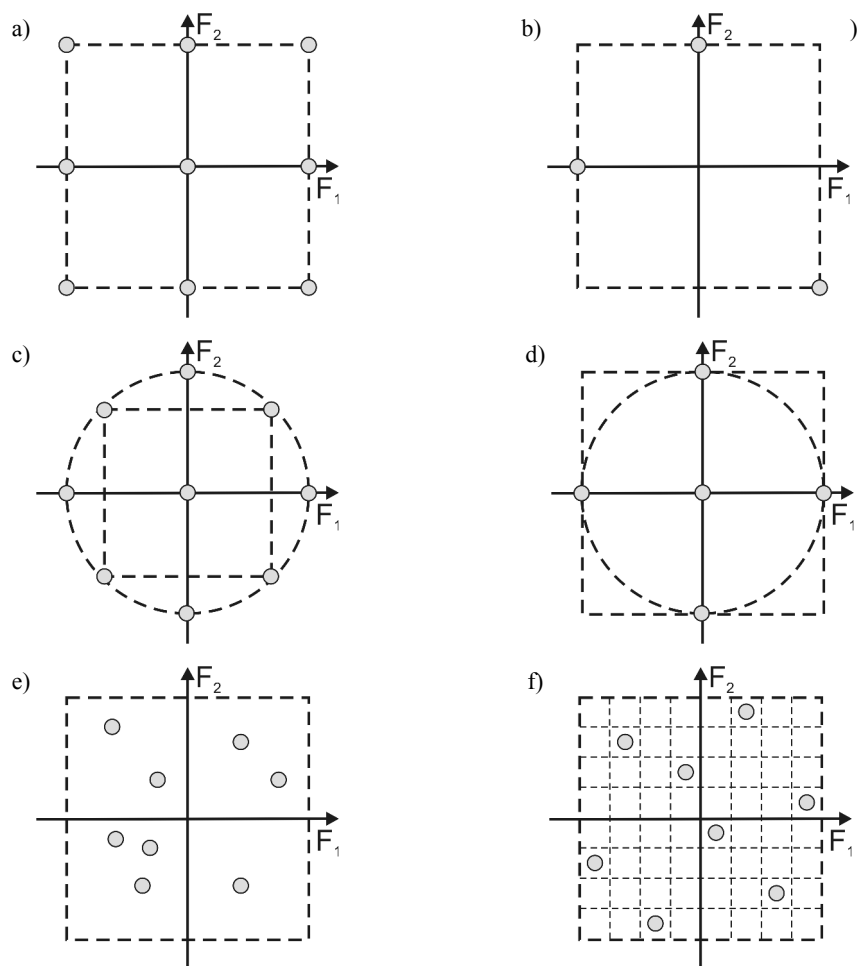


Rys. 3.13. Możliwe wyniki eksperymentu: a) czynnik zmienia wartość średnią, b) czynnik zmienia wariancję, c) czynnik zmienia zarówno średnią, jak i wariancję, d) czynnik, który nie zmienia ani średniej, ani wariancji;  $F_1$  i  $F_2$  – czynniki sterowalne

Metody DoE stosuje się praktycznie we wszystkich dziedzinach inżynierii. Sama metoda nie ulega zmianie, natomiast różnica dotyczy celu eksperymentu, który z kolei determinuje odpowiedni plan eksperymentu. Takim celem eksperymentu może być:

- identyfikacja efektów głównych; w czasie takiego eksperymentu bierze się pod uwagę dużą liczbę czynników, a następnie wybiera się spośród nich kilka, które mają największy udział w odpowiedzi; czynniki takie noszą nazwę efektów głównych; wadą tego typu eksperymentów jest brak możliwości wyznaczenia udziału interakcji między czynnikami;
- identyfikacja efektów głównych i interakcji; eksperyment ten, w odróżnieniu od poprzedniego, pozwala dodatkowo na wyznaczenie, oprócz udziału efektów głównych, także poziomu istotności interakcji między czynnikami,
- analiza powierzchni odpowiedzi; celem eksperymentu jest taki dobór doświadczeń, które pozwolą na uzyskanie modelu matematycznego odpowiedzi, za pomocą metody aproksymacji lub interpolacji; wadą tego eksperymentu jest konieczność posiadania częściowej wiedzy a priori w odniesieniu do charakteru odpowiedzi, np. czy będzie to zależność liniowa czy nieliniowa,
- analiza czułości stosowana w przypadku, gdy mamy do czynienia z rozrzutem statystycznym wyników na skutek obecności czynników szumu; w takim przypadku konieczny jest wybór odpowiedniej liczby doświadczeń przez kilkakrotne powtórzenie eksperymentu dla tych samych wartości czynników sterowalnych.
- projektowanie tolerancji; stosowana w przypadku, gdy mamy do czynienia z rozrzutem statystycznym wyników na skutek losowego charakteru czynników sterowalnych; celem eksperymentu jest ocena wpływu zmian losowych czynników głównych na odpowiedź; efektem końcowym takiego eksperymentu powinien być produkt o wysokiej jakości, to znaczy taki, którego istotna odpowiedź tylko w niewielkim stopniu zależy od losowych zmian czynników,
- projektowanie na podstawie obiektu fizycznego lub jego modelu numerycznego; istnieją zasadnicze różnice między tymi eksperymentami, z których najważniejsze to:
  - w przypadku modeli numerycznych czynniki szumu nie mają żadnego znaczenia, powtarzanie zatem doświadczeń w tym samym punkcie planu nie ma żadnego sensu w przeciwieństwie do obiektów fizycznych,
  - w przypadku eksperymentów dla obiektów fizycznych jednym z najbardziej interesujących obszarów badanych jest krawędź przestrzeni czynnikowej,
  - w przypadku eksperymentów dla modeli numerycznych istotna jest cała badana przestrzeń czynnikowa.

W praktyce stosuje się wiele różnych planów eksperymentów, z których do najbardziej popularnych należą: ortogonalny pełny i ułamkowy, centralny kompozytowy, według schematu Box–Benkena, D-optimalny, według metody Monte Carlo, według kwadratu łacińskiego LH (ang. *Latin-Hypercube*). Każdy z wymienionych planów ma swoje zalety i wady, a wybór jednego z nich zależy od zaplanowanego celu. Na rysunku 3.14 przedstawiono porównanie graficzne wybranych planów eksperymentu w przypadku dwóch czynników.



Rys. 3.14. Porównanie graficzne wybranych planów eksperymentów dla dwóch czynników: ortogonalny pełny (a), ortogonalny ułamkowy (b), centralny – kompozytowy (c), według schematu Box–Benkena (d), według metody Monte Carlo (e), według kwadratu łańciskowego LH (f)

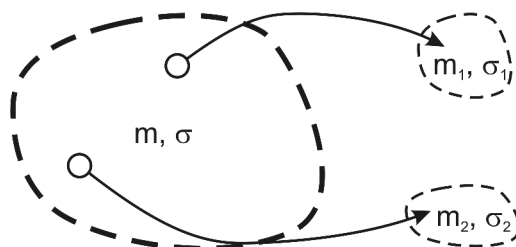
Klasycznym planem eksperymentu jest plan ortogonalny pełny i ułamkowy. Ze względu na szybki wzrost liczby eksperymentów wraz ze wzrostem liczby czynników najczęściej stosuje się eksperymenty ortogonalne ułamkowe. Podstawową wadą eksperymentów klasycznych jest to, że nie można ich zastosować do przestrzeni czynnikowych innych niż kształt prostokątny. Alternatywą dla eksperymentów ortogonalnych są eksperymenty losowe lub pseudolosowe. Eksperymenty losowe, w przeciwieństwie do eksperymentów ortogonalnych, charakteryzują się dużą liczbą doświadczeń oraz stosunkowo dużą korelacją wynikającą z tego, że punkty planu mogą być położone bli-



sko siebie. Wady tej nie ma jednak eksperyment pseudolosowy oparty na kwadracie łańcuchowym. Plan ten znajduje zastosowanie w przypadku konieczności równomiernego przebadania wnętrza przestrzeni czynnikowej. Dodatkowo plan ten pozwala na stworzenie eksperymentu, który zawiera z góry określoną liczbę doświadczeń. Jest to przydatne w przypadku, gdy pojedyncze doświadczenie jest kosztowne i/lub czasochłonne [156, 157].

### 3.1.2.2. Metody interpretacji wyników eksperymentu

Wyniki eksperymentu dotyczą próbek statystycznych oraz stochastycznych, zatem narzędzia do interpretacji tych wyników są także oparte na statystyce. W rzeczywistości analiza i interpretacja wyników jest ważniejsza niż sam eksperyment. Czasami zdarza się, że wnioski wynikające z przeprowadzonego eksperymentu są oczywiste i nie wymagają specjalnej analizy. Najczęściej jednak w celu uzyskania statystycznej pewności jest konieczna analiza szczegółowa oparta na metodach wnioskowania statystycznego. Wnioskowanie statystyczne polega na uogólnieniu wyników uzyskanych na podstawie wylosowanej próby czy próbek  $n$ -elementowych<sup>47</sup>, co przedstawiono na rysunku 3.15 w odniesieniu do całej populacji<sup>48</sup>. Najważniejsze narzędzia wnioskowania statystycznego to estymatory i hipotezy statystyczne. Dodatkowo, w projektowaniu numerycznym do interpretacji wyników stosuje się takie metody, jak analiza wariancji ANOVA (ang. *Analysis of Variance*).



Rys. 3.15. Próbkę losowe uzyskane na podstawie populacji oraz ich parametry:  
 $m$  i  $\sigma$  – odpowiednio wartość średnia i odchylenie standardowe dla populacji,  
 $m_i$  i  $\sigma_i$  – odpowiednio wartość średnia i odchylenie standardowe dla próbek losowych

Teoria estymacji dostarcza metod statystycznych pozwalających na oszacowanie nieznanymi parametrów charakterystycznych dla całej populacji, jak: wartość średnia, wariancja – estymacja parametryczna, czy charakter rozkładu prawdopodobieństwa na

47 Próba statystyczna to wynik wyboru losowego podzbioru elementów populacji. W praktyce inżynierskiej badanie całej populacji jest najczęściej niemożliwe lub kosztowne, dlatego bada się jedynie wybrane losowo próby całej populacji.

48 Populacja statystyczna to zbiór elementów podlegający badaniu statystycznemu, gdzie poszczególne elementy populacji różnią się między sobą. W projektowaniu numerycznym populacja jest najczęściej pojęciem hipotetycznym.

podstawie próbki losowej – estymacja nieparametryczna. Estymację parametryczną można podzielić na punktową i przedziałową. Celem estymacji parametrycznej punktowej jest oszacowanie wartości liczbowej konkretnego parametru populacji  $\Theta$  o znanym rozkładzie na podstawie wybranego estymatora  $Z_n$  tego parametru [158]:

$$\Theta \Rightarrow Z_n(\mathbf{X}) . \quad (3.31)$$

Przykładem takich estymatorów może być estymator wartości średniej  $m$  populacji:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i , \quad (3.32)$$

oraz odchylenia standardowego  $\sigma$  populacji:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (3.33)$$

Estymator  $Z_n$  jest w rzeczywistości zmienną losową, a jego realizacja dla danej próby jest wartością liczbową. W związku z tym „dobry” estymator powinien być:

- zgodny, tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - \Theta| > \varepsilon) = 0 . \quad (3.34)$$

- nieobciążony, tzn.

$$E(Z_n) = \Theta . \quad (3.35)$$

Niestety estymator odchylenia standardowego opisany wzorem (3.33) jest estymatorem obciążonym, a jego postać nieobciążoną można zapisać jako:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (3.36)$$

Celem estymacji parametrycznej przedziałowej jest oszacowanie prawdopodobieństwa, że szukana wartość znajduje się w zadanym przedziale ufności. W przypadku estymacji nieparametrycznej, tj. populacji o nieznanym rozkładzie, korzysta się najczęściej z weryfikacji hipotez.

Weryfikacja hipotez statystycznych dotyczy sprawdzenia pewnych przypuszczeń rozkładu lub wybranych parametrów populacji na podstawie próby losowej. Procedura weryfikacji hipotez składa się z kilku podstawowych etapów [158]:

- Sformułowanie hipotezy zerowej  $H_0$ ; w postaci założenia, że nie ma różnicy między wybranymi parametrami lub rozkładem dla danej populacji i uzyskanej na jej podstawie próby losowej, co zapisuje się w postaci:

$$H_0 : \Theta_1 = \Theta_2, \quad (3.37)$$

- Wybór statystyki i obliczenie jej wartości na podstawie próby; statystykę  $Z = f(\mathbf{X})$ , której wartość wyznacza się na podstawie próby losowej, opracowuje się przy założeniu, że hipoteza zerowa  $H_0$  jest prawdziwa. Wartość statystyki wyznacza się zgodnie z odpowiednią procedurą dla wybranego testu. W inżynierii najczęściej stosuje się następujące testy:

- Test  $\chi^2$  (chi-kwadrat) – jest prawdopodobnie najczęściej używanym testem w praktyce. Pozwala na badanie zarówno cech mierzalnych, jak i niemierzalnych populacji. Stosuje się go m.in. do badania zgodności próbki losowej z założonym rozkładem prawdopodobieństwa populacji o wartości średniej  $m$  i odchyleniu standardowym  $\sigma$ , np. rozkład normalny  $N(m, \sigma)$ , korzystając z następującej statystyki:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2, \quad (3.38)$$

- Test  $t$  – stosuje się do oszacowania wartości średniej populacji  $m$  oraz jej przedziałów ufności na podstawie parametrów próbki losowej oraz czy średnie z dwóch różnych próbek losowych o wielkości  $n_1$  i  $n_2$  mogą pochodzić z tej samej lub różnych populacji, korzystając kolejno z następującej statystyki:

$$t = \frac{|\bar{x} - m|}{S}, \quad (3.39)$$

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\bar{S}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}, \quad (3.40)$$

gdzie

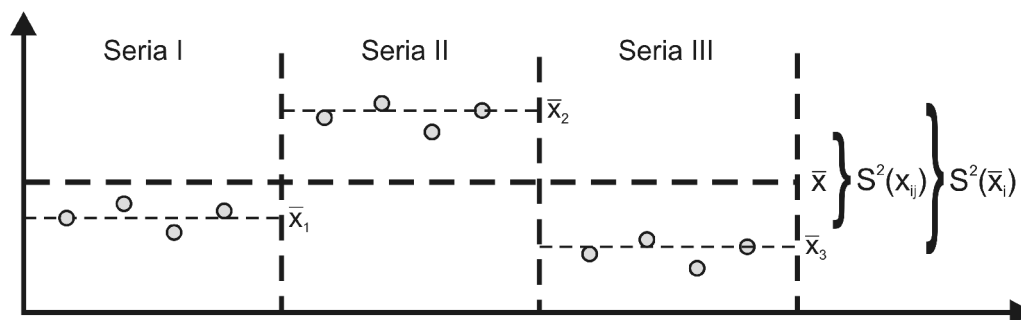
$$\bar{S} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_j - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}, \quad (3.41)$$

- Test  $F$  – pozwala na ocenę na podstawie stosunku dwóch wariancji dla dwóch próbek losowych czy pochodzą z tej samej populacji, czy różnych populacji, lecz o tych samych wariancjach, korzystając z następującej statystyki:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}, \quad (3.42)$$

- Podjęcie decyzji na podstawie wybranego poziomu istotności  $\alpha$ ; w rzeczywistości nie można stwierdzić, czy hipoteza zerowa jest prawdziwa, można jednak oszacować prawdopodobieństwo, że jest ona fałszywa. Prawdopodobieństwo przy którym odrzuca się hipotezę zerową nazywa się poziomem istotności  $\alpha$ . Najczęściej przyjmuje się taką wartość poziomu istotności  $\alpha$ , aby ryzyko popełnienia błędu było bliskie zeru, tzn.  $\alpha \leq 0,1$ . Zasada podejmowania decyzji polega na tym, że albo hipoteza zostaje odrzucona, albo stwierdza się, że brak jest podstaw do jej odrzucenia – hipoteza zerowa może, ale nie musi być prawdziwa.

Test  $t$  pozwala na porównanie dwóch wartości średnich próbek losowych oraz weryfikację hipotezy, czy mogą one pochodzić z tej samej populacji. W przypadku gdy konieczne jest porównanie większej liczby średnich, wówczas korzysta się z analizy wariancji ANOVA. ANOVA jest oparta na wnioskowaniu statystycznym, które wywodzi się z centralnego twierdzenia granicznego CLT (ang. *Central Limit Theorem*) w połączeniu z testem  $F$ , co przedstawiono schematycznie na rysunku 3.16. Niestety, jedną z wad takiego postępowania jest niepewność związana z podejmowanymi decyzjami. Inne metody, które częściowo wiążą się z analizą wariancji, to: analiza udziału procentowego, estymacja odpowiedzi, poziomy ufności oraz wykresy efektów głównych.



Rys. 3.16. Ilustracja analizy ANOVA dla kilku serii danych,  $\bar{x}_i$  – wartości średnie dla poszczególnych serii danych,  $S^2(\bar{x}_i)$  – wariancja rozrzutu wartości średnich,  $\bar{x}$  – wartość średnia dla wszystkich serii danych,  $S^2(x_{ij})$  – całkowita wariancja wyznaczona kolejno dla wszystkich serii danych

Centralne twierdzenie graniczne CLT dotyczy dowolnej populacji, niezależnie od jej rozkładu gęstości prawdopodobieństwa. Zgodnie z twierdzeniem CLT, jeżeli zmienne losowe  $x_i$  są niezależne i pochodzą z rozkładów populacji o wartościach oczekiwanych  $m$  i odchyleniu standardowym  $\sigma$ , to zmienna losowa  $x$  opisana zależnością:

$$x = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (x_i - m), \quad (3.43)$$

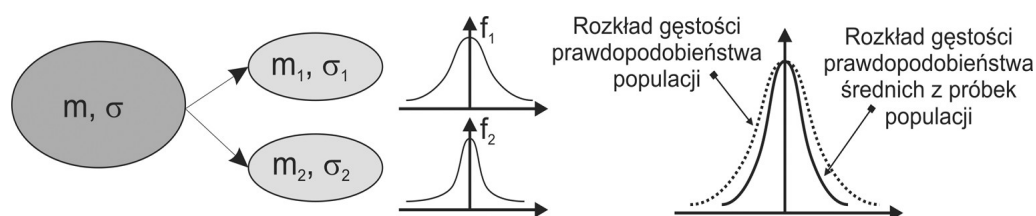
zbliża się do standardowego rozkładu normalnego  $N(0,1)$ , co oznacza, że rozkład normalny będzie przypadkiem granicznym sumy niezależnych zmiennych losowych. Ze względów praktycznych twierdzenie CLT można podsumować następująco:

„Jeżeli losujemy z populacji  $k$  próbek losowych o jednakowej wielkości  $n$ , wówczas rozkład wartości średnich  $f(\bar{x}_i)$  próbek będzie dążył dla  $n \rightarrow \infty$  do rozkładu normalnego o wartości średniej  $m$  i odchyleniu standardowym  $\sigma/\sqrt{(n)}$ , co można zapisać jako:

$$f(\bar{x}_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{(n)}}\right). \quad (3.44)$$

Zgodnie z twierdzeniem CLT będą spełnione zatem następujące założenia, co przedstawiono schematycznie na rysunku 3.17 [159, 160]:

- rozkład gęstości prawdopodobieństwa średnich próbek populacji  $f(\bar{x}_i)$  będzie dążył do rozkładu normalnego, niezależnie od rozkładu prawdopodobieństwa poszczególnych próbek losowych,
- wartość średnia rozkładu średnich próbek  $\bar{x}(\bar{x}_i)$  będzie dążyć do wartości średniej rozkładu populacji  $m$ ,
- wartość odchylenia standardowego rozkładu średnich próbek  $\sigma(\bar{x}_i)$  będzie mniejsza od wariancji rozkładu populacji o czynnik  $\sqrt{n}$ .



Rys. 3.17. Ilustracja centralnego twierdzenia granicznego

W zastosowaniach praktycznych najważniejszą zasadą analizy ANOVA jest możliwość oceny, czy rozrzut wartości średnich jest wynikiem losowości, czy raczej wynikiem innych przyczyn, np. obecność innego czynnika. W tym celu korzysta się z oszacowania wariancji za pomocą dwóch metod, zgodnie z rysunkiem 3.16:

- twierdzenie CLT – wariancja rozkładu wartości średnich próbek losowanych z populacji może być wyznaczona na podstawie wariancji populacji podzielonej przez liczebność  $n$  próbek, co odnosi się także do estymatorów wariancji, tzn.:

$$\sigma^2(\bar{x}_i) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow S^2(\bar{x}_i) = \frac{S^2}{n}, \quad (3.45)$$

- na podstawie wariancji dla poszczególnych serii, tzw. wariancja błędu:

$$S^2(x_{ij}) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left( \frac{1}{(n_i-1)} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i) \right). \quad (3.46)$$

W przypadku zastosowania analizy ANOVA do projektowania, celem jest odpowiedź na pytanie, czy dany czynnik ma istotny wpływ na wybraną odpowiedź. Na to pytanie można odpowiedzieć, porównując wariancję dla danego czynnika  $S_F^2$  z wariancją błędu  $S_e^2$ . Porównanie wykonuje się na podstawie testu statystycznego  $F$ :

$$F = \frac{S_F^2}{S_e^2}. \quad (3.47)$$

Porównanie różnych wartości dla testu  $F$  możliwe jest za pomocą odpowiednich tablic statystycznych. Jeżeli wartość  $F$  jest większa niż podana w tablicy, to wnioskuje się, że dwie porównywane próbki pochodzą z różnych populacji. Decyzja taka jest podejmowana po założeniu określonego poziomu ufności. Aby precyzyjnie określić istotność statystyczną danego czynnika, potrzebne są następujące dane:

- akceptowana wartość poziomu ryzyka  $\alpha$  lub ufności  $1 - \alpha$ ,
- liczba stopni swobody dla pierwszej próbki  $\nu_1$ ,
- liczba stopni swobody dla drugiej próbki  $\nu_2$ .

W wyniku analizy ANOVA możliwa jest ocena, czy próbki pochodzą z jednej populacji czy różnych populacji na podstawie analizy rozrzutu wartości średnich, a następnie zakwalifikowanie czynników do jednej z dwóch grup:

- czynniki istotne – wartość  $F$  jest większa od wybranego kryterium; w przypadku tych czynników przyjmuje się tezę, że ich zmienność nie może być wynikiem rozrzutu losowego lecz wynika z istnienia czynnika dodatkowego, który wpływa na wartość średnią,
- czynniki, dla których wartość  $F$  jest mniejsza od wybranego kryterium; w przypadku tych czynników przyjmuje się tezę, że ich zmienność może być wynikiem rozrzutu losowego i nie wpływa na wartość średnią.

W tabeli 3.1 przedstawiono przykładowe wyniki analizy ANOVA. W tym przypadku korzysta się z faktu, że wariancja całkowita może być rozdzielana na części. Wariancję dla danego czynnika  $S_i$  można obliczyć jako sumę kwadratów odchyłeń od wartości średniej  $SS_i$ , dzieląc przez liczbę stopni swobody  $\nu_i$  dla tego czynnika. Następnie dla każdego czynnika określa się wartość testu  $F$ , dzieląc wyznaczone wartości wariancji  $S_i$  przez wariancję błędu  $S_e$ . Wariancję błędu  $S_e$  wyznacza się najczęściej dla wspólnej puli błędów  $e_p$  (ang. *pooled*) przez dodanie do siebie sum kwadratów wszystkich czynników, które uznano za mało istotne. Analizę wariancji można zakończyć na tym etapie lub dodatkowo wyznaczyć dla każdego czynnika udział procentowy  $P$ , dzieląc zredukowaną sumę kwadratów  $SS_i'$  przez sumę kwadratów dla wszystkich obserwacji

$SS_T$ . Zredukowaną sumę kwadratów dla danego czynnika  $SS_i'$  wyznacza się przez odjęcie od sumy kwadratów  $SS_i$  wartości odpowiadającej błędowi danego czynnika  $v_i S_e$  [159, 48].

Tabela 3.1. Przykład tabeli zawierającej analizę wariancji:  $SS$  – suma kwadratów,  $v$  – stopnie swobody,  $S$  – wariancja,  $F$  – wartość testu F,  $SS'$  – zredukowana suma kwadratów,  $P$  – udział procentowy,  $T$  – wszystkie obserwacje,  $e_p$  – wspólna pula błędów

Czynnik	$SS$	$v$	$S$	$F$	$SS'$	$P$ [%]
$F_1$	40	2	20	40	39	52,0
$F_2$	20	2	10	20	19	25,3
$F_{1+} F_2$	10	2	5	10	9	12,0
$e_p$	5	10	0,5		8	10,7
$T$	75	16			75	100,0

Test statystyczny  $F$  odnosi się do wariancji i dotyczy zmienności średnich. Jeżeli wartość  $F$  jest zbyt duża, to poszczególne wariancje zmieniają się w zbyt dużym zakresie w porównaniu do wartości rzeczywistej, co oznacza, że średnie zmieniają się w zakresie większym niż oczekiwano by ze względu na zmienność poszczególnych próbek. Dlatego też zamiast przyjmować założenie, że próbki pochodzą z jednej populacji, przyjmuje się założenie, że próbki pochodzą z co najmniej dwóch różnych populacji o różnych wartościach średnich. Ufność ze statystycznego względu oznacza, że przyjmując określoną tezę istnieje pewne prawdopodobieństwo popełnienia błędu. W celu zmniejszenia tego prawdopodobieństwa należy wybrać dużą wartość ufności. Z kolei duża wartość ufności nie oznacza jednocześnie dużych zmian między wartościami średnimi poszczególnych próbek, co miałyby znaczenie praktyczne podczas projektowania.

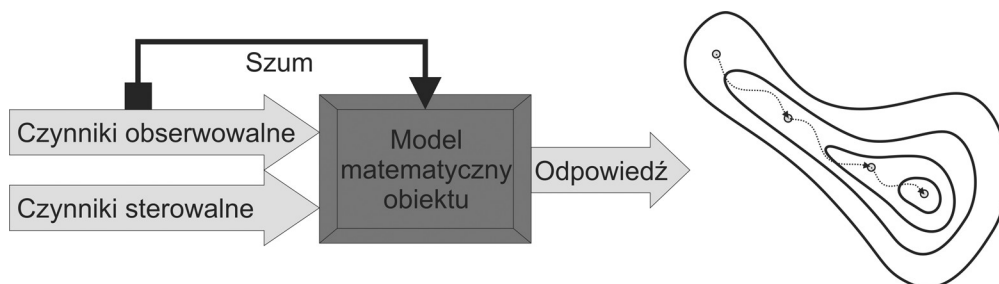
Metody planowania eksperymentów mają szczególne znaczenie w przypadku montażu elektronicznego. Jak wcześniej wspomniano problemy montażu elektronicznego można opisać dużą liczbą czynników, które mogą mieć mniej lub bardziej istotny udział w analizowanej odpowiedzi. Szczególną uwagę należy zwrócić na czynniki obserwowalne, takie jak temperatura otoczenia. Zastosowanie metod planowania eksperymentów pozwala na ograniczenie liczby koniecznych doświadczeń w celu ustalenia istotności wybranych czynników zarówno ze względu na ich udział w wartości średniej, jak i wariancji.

### 3.1.3. Analiza powierzchni odpowiedzi

Jednym z celów projektowania jest opisanie zachodzących w obiekcie zjawisk i zachowania obiektu w wyniku zadanych obciążeń za pomocą modelu matematycznego

analitycznego lub empirycznego. Model taki oczywiście tylko z pewną dokładnością oraz w ograniczonej przestrzeni zmiennych wejściowych oddaje rzeczywiste zachowanie obiektu. Pozwala on jednak przewidzieć zachowanie obiektu na skutek zmian ich wartości. Model taki można zapisać (zależność 3.1) w sposób ogólny jako funkcję zmiennych wejściowych, tj. czynników sterowalnych i obserwowalnych. Metoda poszukiwania modelu matematycznego obiektu na podstawie wyników eksperymentu nosi nazwę analizy powierzchni odpowiedzi RSM. Najczęściej metoda RSM jest bezpośrednio związana z metodą DoE. Aby uzyskać poprawny model matematyczny, konieczny jest odpowiedni plan eksperymentu oraz liczba doświadczeń. W przypadku metody RSM stosuje się taką samą terminologię jak w przypadku metody DoE.

Znajomość modelu matematycznego obiektu jest kluczowym elementem w procesie projektowania. Pierwszym krokiem prowadzącym do identyfikacji modelu jest eksperyment przeprowadzony według odpowiedniego planu DoE. Celem eksperymentu jest identyfikacja modelu, nawet przy braku pełnego zrozumienia zjawisk w nim zachodzących oraz jego zachowania w wyniku zadanych obciążeń. Uzyskany model pozwala na przybliżoną analizę zachowania odpowiedzi, a w następnej kolejności na optymalizację obiektu w przestrzeni czynnikowej, tak jak to pokazano na rysunku 3.18 [161, 162].



Rys. 3.18. Projektowanie z wykorzystaniem modelu matematycznego obiektu

W praktyce korzysta się z dwóch metod, które prowadzą do opracowania modelu matematycznego obiektu, tj. metody analitycznej i eksperymentalnej. Metoda analityczna polega na opracowaniu równań analitycznych oraz ich rozwiązaniu dla zadanego problemu. Z kolei metoda eksperymentalna bazuje na omówionym wcześniej planie eksperymentu. Metoda eksperymentalna może być zastosowana zarówno do obiektu fizycznego, jak i jego modelu numerycznego. Metoda RSM pozwala na dopasowanie modelu matematycznego do wyników eksperymentu oraz na modyfikację planu eksperymentu w zależności od charakteru modelu odpowiedzi. Najczęściej model matematyczny obiektu jest ograniczony jedynie do czynników istotnych, które są wynikiem analizy wariancji. W przypadkach najprostszych, np. odpowiedzi jednowymiarowych i liniowych, metoda RSM nie wymaga nawet użycia komputera, jednak w przypadku wielowymiarowym i odpowiedzi o charakterze nieliniowym jest on niezbędny. Główną zaletą metody RSM jest możliwość bezpośredniego zastosowania, bez konieczności



wykonywania dodatkowych doświadczeń, takich procedur jak: optymalizacja, analiza czułości i projektowanie tolerancji.

Metoda RSM pozwala na ograniczenie liczby koniecznych eksperymentów, dlatego jej zastosowanie jest jak najbardziej uzasadnione pod względem finansowym i czasowym. Jak wcześniej wspomniano, metoda RSM powinna być bezpośrednio powiązana z metodą DoE oraz analizą wariancji. W przypadku zidentyfikowania czynników można podjąć jedno z następujących działań:

- Znaleźć wartość oczekiwaną; jest to bardzo rzadko osiągane w praktyce. Zaletą tej metody jest jednak możliwość znalezienia wartości oczekiwanej na podstawie powierzchni odpowiedzi, bez konieczności wykonywania dodatkowych doświadczeń.
- Znaleźć wartości ekstremalne; w przypadku wielu problemów mamy do czynienia z odpowiedzią, która nie jest optymalna z pewnych względów. Przykładem może być odpowiedź optymalizowana ze względu na każdy czynnik oddzielnie, bez uwzględnienia interakcji między czynnikami.
- Przeprowadzić analizę czułości; stosunkowo często zdarza się, że odpowiedź obiektu zależy w znacznym stopniu od zmienności czynników obserwowalnych, np. temperatury otoczenia. Odpowiedź obiektu ma charakter losowy. Istnieje wówczas możliwość analizy powierzchni odpowiedzi pod kątem istnienia obszarów przestrzeni czynnikowej, w której kształt powierzchni odpowiedzi jest „płaski”, tzn. charakteryzuje się niewielkim gradientem,
- Zaprojektować tolerancję; jedną z głównych różnic między zachowaniem obiektu fizycznego a jego modelem matematycznym jest losowy charakter czynników sterowalnych; w czasie procesu produkcyjnego wartości czynników mogą ulegać zmianie, jak wymiary geometryczne czy właściwości materiałowe. Celem projektowania tolerancji jest specyfikacja dopuszczalnych zmian czynników, które nie powodują jeszcze znaczącego pogorszenia parametrów produktu,
- Dokonać analizę bezpieczeństwa; w czasie eksploatacji produktu obciążenia mogą przekraczać wartości testowe lub dodatkowo mogą pojawić się zupełnie nowe obciążenia. Analiza powierzchni odpowiedzi pozwala na oszacowanie zachowania się obiektu na skutek pojawienia się obciążeń ekstremalnych lub większych przez ekstrapolację powierzchni odpowiedzi.
- Przeprowadzić analizę wieloczynnikową; kiedy w obszarze zainteresowań inżyniera znajduje się tylko i wyłącznie jedna odpowiedź, zdarza się to niezwykle rzadko. Często inżynier jest zmuszony do poszukiwania kompromisu między kilkoma odpowiedziami obiektu, np. jakością i ceną. Odpowiedzi te mogą być dodatkowo od siebie uzależnione, co może oznaczać, że poprawa jednej prowadzi jednocześnie do pogorszenia drugiej. Problem ten można rozwiązać w praktyce przez konstrukcję, tzw. funkcji celu, a następnie zastosowanie odpowiedniej procedury optymalizacji. Funkcja celu może być kombinacją liniową lub nieliniową kilku powierzchni odpowiedzi oraz przypisanych im wag.

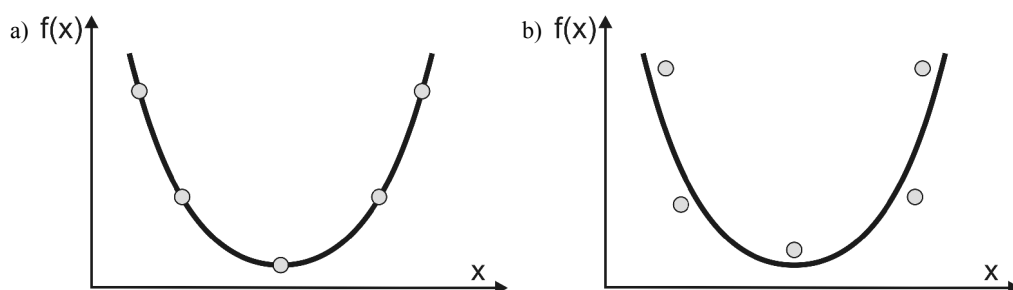
Dokładność metody RSM zależy od prawidłowego planu eksperymentu. Wybór planu zależy od charakteru modelu matematycznego obiektu. W przypadku modelu nieliniowego metoda RSM powinna uwzględniać określony rodzaj nieliniowości, np. drugiego lub trzeciego rzędu. Jeżeli natomiast odpowiedź ma charakter liniowy, to plan eksperymentu może opierać się na dwóch poziomach wartości dla każdego czynnika i może być zgodny z planem ortogonalnym zarówno pełnym jak i ułamkowym. Jednak w przypadku nieliniowości drugiego rzędu, plan eksperymentu powinien opierać się na trzech poziomach wartości dla każdego czynnika. Z tego też powodu, w celu identyfikacji prostych nieliniowości, najlepszym rozwiązaniem wydaje się stosowanie planu eksperymentu ortogonalnego opartego na trzech poziomach dla każdego czynnika. W przypadkach powierzchni złożonych, aby poprawnie oddać charakter odpowiedzi, np. dla nieliniowości trzeciego rzędu, plan eksperymentu powinien zawierać testy na czterech poziomach wartości dla każdego czynnika [163, 164, 165].

Nie ulega wątpliwości, że wyniki procesu projektowania będą zależały od dokładności modelu matematycznego obiektu. Z drugiej jednak strony dokładność modelu jest ściśle związana z planem eksperymentu. W matematyce można wyróżnić dwie metody, które są stosowane do dopasowania modelu matematycznego do wyników eksperymentu. Są to metody oparte na interpolacji oraz aproksymacji. Istnieje wiele metod matematycznych, które pozwalają na aproksymację lub interpolację powierzchni odpowiedzi. W praktyce inżynierskiej stosuje się wiele różnych modeli matematycznych pozwalających na interpolację lub aproksymację wyników eksperymentu. Jednak do najczęściej stosowanych należą: wielomiany, spliny, model Bayesiana, funkcje radialne, modele stochastyczne (np. metoda Kriging), sieci neuronowe.

Dodatkowo coraz częściej są stosowane specjalne algorytmy, np. sekwencyjne, które charakteryzują się tym, że eksperyment dzieli się na kilka etapów. Pierwszy etap pozwala na wstępne dopasowanie modelu z zastosowaniem niewielkiej liczby doświadczeń, a następnie na podstawie wybranego kryterium dobiera się kolejne punkty w przestrzeni czynnikowej. Procedura ta pozwala na zwiększenie dokładności modelu odpowiedzi z jednoczesnym ograniczeniem liczby wymaganych doświadczeń [166, 167, 168].

Istnieje zasadnicza różnica między eksperymentami opartymi na obiekcie fizycznym, a jego modelem numerycznym. Różnica ta wynika, jak wcześniej napisano, z istnienia czynników szumu, co z kolei determinuje metodę dopasowania powierzchni odpowiedzi do wyników eksperymentu. Na rysunku 3.19 przedstawiono aproksymację eksperymentu prowadzonego dla obiektu fizycznego i interpolację eksperymentu prowadzonego dla modelu numerycznego obiektu [169].

Zastosowanie zaawansowanych algorytmów dopasowania powierzchni odpowiedzi jest dużo trudniejsze w przypadku eksperymentów prowadzonych dla obiektu fizycznego niż jego modelu numerycznego. Jest to tym spowodowane, że metody zaawansowane wymagają stosowania metody oceny dokładności dopasowania powierzchni odpowiedzi, co jest prostsze w przypadku metod interpolacyjnych.



Rys. 3.19. Różnica między metodą interpolacji (a) a metodą aproksymacji (b)

### 3.1.4. Zarządzanie jakością oraz planowanie jakości

Jakość, oprócz ceny i funkcjonalności, jest jednym z najważniejszych parametrów produktu. Jakość, według normy ISO 8402:1994, jest określana jako zespół właściwości jednostki, dzięki którym jednostka jest w stanie zaspokajać ustalone lub założone potrzeby. Problemem jakości zajmuje się dziedzina wiedzy określana jako zarządzanie jakością lub zarządzaniem przez jakość. Norma ISO 8402/3.2:1993 definiuje zarządzanie jakością jako zespół działań związanych z całym procesem kierowania, ustalające politykę jakości, cele oraz zakres odpowiedzialności. Działania te realizowane są w ramach systemu jakości za pomocą takich środków, jak planowanie jakości, sterowanie jakością, zapewnienie jakości i poprawa jakości. Aby osiągnąć ten cel, stosuje się kilka metod planowania i kontroli jakości, które są wykorzystywane m. in. przez inżynierię niezawodności, jak omówione w rozdziale 2.3 diagramy Ishikawy i wykresy Pareto. Dodatkowo stosuje się inne metody, jak np. metoda zarządzania jakością Six Sigma<sup>49</sup> czy statystyczne metody kontroli i sterowania procesem SPC<sup>50</sup> (ang. *Statistical Process Control*) [170, 171].

Planowanie i kontrola jakości zostały zrewolucjonizowane m.in. przez japońskiego inżyniera G. Taguchiego, zajmującego się projektowaniem eksperymentów. Nowością było jego podejście do problemu jakości oraz definicja współczynnika sygnał/szum S/N. Ideą jego pracy było dopasowanie procesów i produktów do krzywych jakości

49 Zarządzania jakością Six Sigma został wprowadzony w latach 60. XX w. w firmie Motorola przez Galvina oraz Smitha. Metoda ta jest obecnie stosowana powszechnie na całym świecie w odniesieniu do różnych problemów dotyczących jakości. Celem metody Six Sigma jest zmniejszenie liczby uszkodzeń do 3,4 na milion. Powszechnie uważa się, że uzyskanie poprawy jakości powyżej tej liczby wymaga narzędzi SPC (ang. *Statistical Process Control*).

50 Statystyczna Kontrola i Sterowanie Procesem SPC to realizowana w czasie rzeczywistym (ang. *online*) kontrola procesu w postaci, np. aktualnej jakości produktu, służąca do wykrywania jego zmian, a w konsekwencji służąca do poprawy lub utrzymania jego jakości. Najczęściej stosowanymi narzędziami w metodzie SPC są wskaźniki zdolności oraz karty kontrolne.

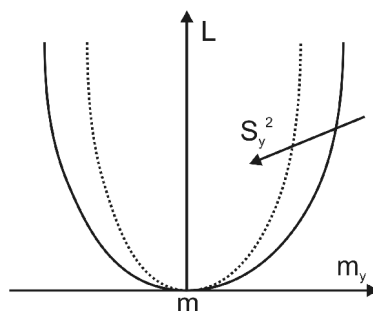
tak, aby straty związane z usuwaniem uszkodzeń były jak najmniejsze. W przeciwieństwie do prac innych teoretyków jakości, Taguchi mówi raczej o pogorszeniu jakości, niż o samej jakości. Jego metoda pozwala projektantom opracować krok po kroku taki produkt, który zaspokaja jednocześnie potrzeby klienta i minimalizuje koszty serwisowe ponoszone przez producenta. Jest ona wygodna, ponieważ nie wymaga dużej znajomości statystyki, czy statystycznej kontroli jakości i została stworzona głównie pod kątem zastosowań inżynierskich [172, 173, 174].

Taguchi łączy jakość produktu ze stratą dla społeczeństwa, tzn. pogorszenie jakości produktu prowadzi do straty dla społeczeństwa. Produkt przekazany klientowi, a mający obniżoną jakość, powoduje stratę w postaci niezadowolenia klienta, kosztów serwisowych, nadmiernego zużycia materiałów, zanieczyszczenie środowiska itp. Kluczowym osiągnięciem Taguchiego było opracowanie funkcji strat (ang. *Loss Function*) oraz znalezienie narzędzia do analizy tej funkcji opartej na projektowaniu eksperymentów. Taguchi zaproponował kilka metod projektowania eksperymentów, które w chwili obecnej noszą nazwę metod Taguchiego [159]. Metody te odnoszą się do tworzenia różnego rodzaju planów eksperymentów, na podstawie eksperymentów dwu- lub trójpoziomowych lub na podstawie planów ortogonalnych pełnych lub ułamkowych. Funkcja strat miała na celu znalezienie korelacji między wyższą ceną produktu o podwyższonej jakości i wynikającymi stąd mniejszymi stratami dla społeczeństwa. W praktyce stosuje się całą rodzinę funkcji strat w zależności od wartości odpowiedzi, która ma być optymalizowana. Przykładem funkcji strat dla przypadku „wartość nominalna jest najlepsza” może być następująca zależność:

$$L(y) = k[\delta_y^2 + (\bar{y} - m)^2], \quad (3.48)$$

gdzie  $k$  – współczynnik proporcjonalności,  $\delta_y^2$  – wariancją odpowiedzi,  $\bar{y}$  – wartość średnia odpowiedzi wyznaczona na podstawie próbki losowej,  $m$  – planowana wartość średnia.

Na rysunku 3.20 przedstawiono typowy kształt funkcji strat.

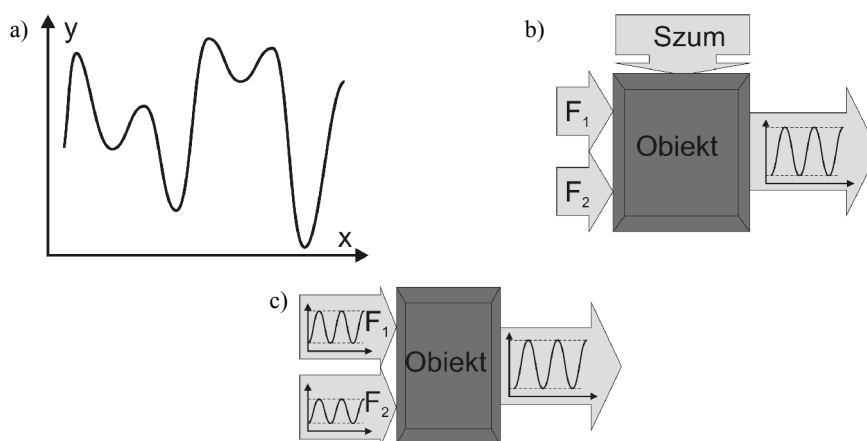


Rys. 3.20. Typowy kształt funkcji strat

W rzeczywistości funkcja strat wykorzystuje wartość wariancji w celu oszacowania straty. W przypadku projektowania tolerancji dla czynników mniej istotnych wariancja całkowita nie ulegnie zmianie lub zmieni się nieznacznie. Tym samym ze względu na funkcję strat projektowanie tolerancji dla takich czynników nie ma sensu. Inaczej jest w przypadku czynników, które w istotny sposób wpływają na wartość wariancji. W takim przypadku projektowanie tolerancji jest uzasadnione i w znaczący sposób wpłynie na ocenę ewentualnych strat i zysków.

Jakość według Taguchiego jest mierzalna. Poszczególne jej cechy określamy przez charakterystyki o pożądanej wartości: najmniejszej, największej czy nominalnej. Zwykle dodatkowo określamy pewien przedział tolerancji z *DPT* (*dolnym poziom zakresu tolerancji*) oraz *GPT* (*górnym poziom zakresu tolerancji*). Im większy udział procentowy odchyłeń mieści się w środku przedziału tolerancji, tym mniejsze są koszty powstawania błędów, a więc otrzymujemy wzrost jakości. Ideałem jest więc utrzymanie 100% produkcji na poziomie wartości zamierzonej. Na liczbę odchyłeń w czasie produkcji mają wpływ różne czynniki sterowalne oraz zakłócające (tj. obserwowalne oraz szum). Należy zatem rozpoznać czynniki sterowalne i czynniki zakłócające oraz określić ich wzajemny stosunek. Stosunek czynników sterowalnych do zakłócających jest odwrotnie proporcjonalny do funkcji strat. Oznacza to, że im stosunek ten jest większy, tym mniejsze ponosi się straty przy stałej poprawie jakości. Im mniej czynników zakłócających bierze udział w całym procesie produkcji, tym lepiej dla jakości końcowej produktu.

Celem projektowania jest uzyskanie produktu o wysokiej jakości, czyli charakteryzującego się optymalnymi parametrami, a jednocześnie odpornego na zakłócenia. Problem planowania jakości można ograniczyć do następujących zagadnień (rys. 3.21):



Rys. 3.21. Podstawowe zagadnienia procesu projektowania: optymalizacja (a), analiza czułości (b), projektowanie tolerancji (c)

- optymalizacji – określenie poziomu istotności wybranych czynników oraz ewentualnie ich wzajemnych interakcji na odpowiedź obiektu, a następnie znalezienie najbardziej pożądanego wartości czynników sterowalnych tak, aby uzyskać oczekiwaną wartość odpowiedzi,
- analizy czułości – ocena istotności czynników zakłócających oraz taka modyfikacja wartości czynników sterowalnych, aby doprowadzić do zmniejszenia czułości wybranej odpowiedzi ze względu na istnienie czynników zakłócających,
- projektowanie tolerancji – oszacowanie istotności wpływu statystycznego rozrzutu czynników sterowalnych na rozrzut odpowiedzi; problem polega na umiejętności stwierdzenia, kiedy i w jakim stopniu należy ograniczyć dopuszczalną tolerancję czynników sterowalnych tak, aby zapewnić mały rozrzut odpowiedzi, czyli wyższą jakość produktu, a tym samym lepszą wydajność i niższe koszty eksploatacji.

Optymalizacja, analiza czułości i projektowanie tolerancji powinno być jednym z podstawowych zagadnień procesu projektowania. W wielu przypadkach proces projektowania ogranicza się jedynie do optymalizacji polegającej na poszukiwaniu wartości najbardziej pożądanego, bez uwzględniania rozrzutu statystycznego czynników sterowalnych oraz czynników zakłócających. Można podać wiele przykładów, kiedy w procesie projektowania nie uwzględniono wpływu zmian temperatury otoczenia na produkt. Produkt zachowuje się w sposób przewidywalny dla zadanej temperatury otoczenia, natomiast w czasie jej zmiany może zachowywać się w sposób nieprzewidywalny. Ten sam problem odnosi się także do naturalnego rozrzutu wartości właściwości materiałowych, wymiarów geometrycznych czy parametrów procesu technologicznego. Wymienione czynniki w sposób zasadniczy mogą ograniczać jakość produktu końcowego.

Podsumowując, jednym z zasadniczych elementów projektowania powinna być także poprawa jakości produktu. Z matematycznego punktu widzenia planowanie jakości odnosi się jednocześnie do problemu wartości średniej odpowiedzi, jak również do wariancji odpowiedzi. Poprawę jakości można zatem osiągnąć przede wszystkim przez optymalizację oraz analizę czułości. W przypadku gdy wyniki nie są zadowalające, projektant powinien skorzystać z procedury projektowania tolerancji. Tylko wówczas produkt końcowy będzie spełniał określone wymagania jakościowe, a wybrana odpowiedź będzie znajdowała się wewnątrz wcześniej zdefiniowanego i dopuszczalnego przedziału wartości. Jak wcześniej napisano proces projektowania jakości można prowadzić dla obiektu fizycznego lub jego modelu numerycznego. Należy jednak zwrócić uwagę na różnice między nimi, jak brak czynników szumu w przypadku modelowania numerycznego oraz pominięcie kolejnych procesów technologicznych, co z kolei wymaga końcowej weryfikacji doświadczalnej. Proces projektowania jakości można także zrealizować na podstawie opracowanego modelu analitycznego powierzchni odpowiedzi lub przyjętego estymatora funkcji celu, w postaci:

$$\hat{y} = f(\mathbf{X}), \quad (3.49)$$

gdzie  $\mathbf{X}$  – macierz czynników sterowalnych oraz ich zakres dopuszczalnych wartości.

### 3.1.4.1. Optymalizacja

Optymalizacja stanowi oddzielną dziedzinę wiedzy, która dotyczy zastosowania odpowiednich metod postępowania, które pozwolą na znalezienie najlepszego rozwiązania ze względu na wybrane kryterium. Metody odpowiednie dla zagadnień jednego typu mogą być zupełnie bezużyteczne w zagadnieniach innego typu. W dziedzinie inżynierii istnieje cała gama różnych specyficznych problemów optymalizacyjnych, np. znalezienia optymalnej liczby permutacji pewnej liczby zmiennych niezależnych. W przypadku montażu elektronicznego problem ten jest nieistotny, a problem optymalizacji dotyczy zagadnień, które można zapisać w postaci modeli matematycznych. Istotnym problemem jest za to konieczność zastosowania optymalizacji wielokryterialnej oraz złożonych funkcji celu. Optymalizacja tego typu problemów jest wyjątkowo trudna i wymaga najczęściej udziału eksperta [175].

Problem optymalizacji pojawia się w przypadku dużej liczby czynników, nieliniowego charakteru odpowiedzi oraz kilku ekstremów lokalnych. Podstawowym kryterium wyboru odpowiedniej metody optymalizacyjnej jest możliwość rozróżnienia między ekstremum lokalnym a globalnym. Niezależnie od wyboru metody optymalizacyjnej główny cel optymalizacji określa się jako: *Znalezienie takich wartości czynników sterowalnych, które powodują optymalizację wybranej odpowiedzi w zadanej przestrzeni czynnikowej oraz dla przyjętych ograniczeń.*

W przypadku optymalizacji wybrana odpowiedź nosi nazwę funkcji celu, natomiast ograniczenia, którym podlegają zmienne niezależne, określa się także jako warunki brzegowe. Ponieważ maksimum funkcji  $f$  jest jednocześnie minimum funkcji  $-f$ , dlatego ogólny problem optymalizacji można zapisać z matematycznego punktu widzenia w postaci:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{X}), \text{ dla } \mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ \text{dla} \\ c_i(\mathbf{X})=0, \quad i=1, 2, \dots, m \\ c_i(\mathbf{X})\geq 0, \quad i=m+1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.50)$$

gdzie  $f(\mathbf{X})$  – funkcja celu,  $\mathbf{X}$  – wektor kolumnowy  $n$  zmiennych niezależnych,  $c_i(\mathbf{X})$  – ograniczenia zmiennych niezależnych.

Ze względu na dużą liczbę różnych metod i algorytmów optymalizacyjnych istotna wydaje się umiejętność identyfikacji problemu oraz umiejętność doboru odpowiedniej metody optymalizacyjnej, która np. zapewni znalezienie optimum przy minimalnym nakładzie obliczeniowym w zależności od warunków zbieżności itp. Problemy optymalizacyjne często klasyfikuje się według charakteru funkcji celu, warunków brzegowych oraz zmiennych niezależnych. Prawdopodobnie najważniejszym kryterium wyboru metody optymalizacyjnej jest charakter funkcji celu – liniowy lub nieliniowy. Dana funkcja jest liniowa  $f(\mathbf{X})$ , jeżeli spełnione są następujące zależności:

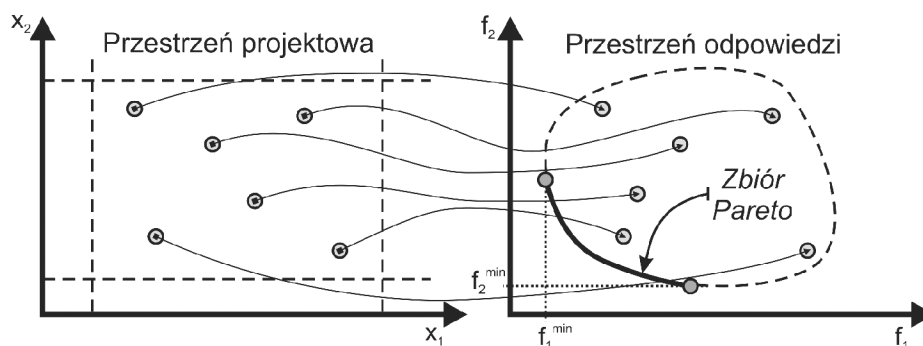
$$\begin{aligned} f(a\mathbf{X}) &= a f(\mathbf{X}), \\ f(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) &= f(\mathbf{X}) + f(\mathbf{Y}), \end{aligned} \quad (3.51)$$

w przeciwnym razie funkcja ma charakter nieliniowy.

Do najczęściej stosowanych metod optymalizacyjnych jednokryterialnych, w montażu elektronicznym, można zaliczyć: metodę gradientową, metodę simpleks, algorytmy genetyczne, symulowaną krystalizację (wyżarzanie) [176, 177]. W przypadku dużej liczby kryteriów oceny może dochodzić do konieczności poszukiwania kompromisu między różnymi funkcjami celu, a ostateczne rozwiązanie nie ekstremalizuje wszystkich wybranych kryteriów. Celem optymalizacji wielokryterialnej lub inaczej polioptymalizacji jest znalezienie takiego rozwiązania, dla którego będzie spełniony warunek:

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{X}) &= \{f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_m(\mathbf{X})\}, \\ \text{dla } \mathbf{X} &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T. \end{aligned} \quad (3.52)$$

W inżynierii problem optymalizacji wielokryterialnej formułuje się najczęściej w postaci zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto, co zostało przedstawione na rysunku 3.22. Rozwiązanie jest optymalne w sensie Pareto, jeżeli nie jest możliwe znalezienie rozwiązania lepszego z uwagi na co najmniej jedno kryterium bez jednoczesnego pogorszenia rozwiązania ze względu na kryteria pozostałe [178].



Rys. 3.22. Definicja optimum w sensie Pareto

Oprócz metody optymalizacji wielokryterialnej w sensie Pareto, stosuje się także inne metody, z których najważniejsze znaczenie praktyczne w projektowaniu numerycznym mają [179]:

- Metoda ważonych kryteriów; metoda ta polega na zamianie optymalizacji wielokryterialnej na jednokryterialną przez definicję nowego kryterium, które jest opisane funkcją celu  $z(\mathbf{X})$  w postaci sumy ważonej wybranych funkcji celu  $f_i(\mathbf{X})$ :



$$z(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N (w_i f_i(\mathbf{X})), \quad (3.53)$$

gdzie wagi  $w_i$  spełniają następujące kryteria:

$$0 \leq w_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1. \quad (3.54)$$

W rzeczywistości rozwiązanie uzyskane metodą ważonych kryteriów odpowiada punktowi przecięcia zbioru rozwiązań optymalnych w sensie Pareto z prostą opisaną równaniem (3.53) – punkt przecięcia będzie zależał od wartości wag  $w_i$ .

- Metoda optymalizacji hierarchicznej; metoda ta polega także na zamianie optymalizacji wielokryterialnej do optymalizacji jednokryterialnej przez wykonywanie kolejno optymalizacji dla wybranych funkcji celu, począwszy od kryterium najważniejszego  $f_1(\mathbf{X})$  do najmniej ważnego  $f_N(\mathbf{X})$ , przy czym powinien być spełniony warunek:

$$f_{i+1}(\mathbf{X}) \leq \left(1 \pm \frac{\varepsilon_i}{100}\right) f_i(\mathbf{X}), \quad (3.55)$$

gdzie  $\varepsilon_i$  – dozwolona procentowa wartość odchylenia funkcji celu  $f_i(\mathbf{X})$ .

- Metoda algorytmów ewolucyjnych; metoda ta polega na zastosowaniu wybranych algorytmów genetycznych. Metoda jest stosowana, gdy wymienione wyżej tzw. metody klasyczne są niewystarczające, tzn. w przypadku gdy zbiór rozwiązań optymalnych w sensie Pareto jest bardzo duży.

### 3.1.4.2. Analiza czułości

Jednym z typowych problemów planowania eksperymentów jest analiza istotności wpływu czynników zakłócających. W takim przypadku konieczny jest wybór odpowiedniej liczby doświadczeń przez kilkakrotne powtórzenie eksperymentu przy tych samych wartościach czynników sterowalnych. W ten sposób uzyskuje się statystyczną wiarygodność wyników, np. analizując wartości średnie próbek. Takie postępowanie określa się terminem zwiększenia liczby stopni swobody wybranych czynników. Można to osiągnąć, m.in. przez zwiększenie liczby doświadczeń. W praktyce istnieje jednak niebezpieczeństwo, że zostanie zwiększona liczba stopni swobody dla błędu, a nie dla wybranego czynnika.

Celem projektowania jest otrzymanie określonej wartości średniej przy minimalnej wartości wariancji. Czynniki w zależności od ich poziomu mogą mieć swój udział zarówno w zmianie wartości średniej, jak i w zmianie wariancji. Jednocześnie mniejsza wartość wariancji byłaby bardziej pożądana, gdyż przekłada się bezpośrednio na poprawę jakości produktu. Standardowa procedura w przypadku analizy wartości średniej wymaga jedynie jednego punktu planu dla zadanych wartości czynników, natomiast

w przypadku istnienia czynników szumu procedura standardowa wymaga powtórzenia eksperymentów kilkakrotnie w każdym punkcie testowym, z jednoczesną zmianą wartości dla czynników szumu. Tak uzyskane wyniki są poddawane odpowiedniej transformacji w zależności od celu optymalizacji. Interpretację wykonuje się za pomocą analizy ANOVA. Wcześniej jednak wyniki są poddane konwersji do nowej wartości określonej jako współczynnik sygnał/szum, w skrócie  $S/N$  (ang. *Signal to Noise*) [173, 159]. Zasada postępowania została przedstawiona w tabeli 3.2.

Tabela 3.2. Typowa tabela przedstawiająca plan eksperymentu w przypadku analizy czułości odpowiedzi bez uwzględnienia (a) i przy uwzględnieniu czynników szumu (b), gdzie  $S/N$  jest współczynnikiem sygnał/szum dla przypadku LB

Poziomy		Odpowiedź	Poziomy			Odpowiedź	Wartość średnia	Wartość $S/N$
Czynnik A	Czynnik B		A	B				
1	1	10	1	1	9	11	10	20,03
1	2	7	1	2	6	7	8	7
2	1	3	2	1	3	2	4	3
2	2	1	3	2	0	1	2	1
								2,23

Współczynnik  $S/N$  jest w rzeczywistości miarą zmienności odpowiedzi spowodowanej szumem dla danego doświadczenia w przestrzeni czynnikowej. Niestety metoda transformacji wyników eksperymentu zależy od wybranego celu optymalizacji – wartości maksymalnej, nominalnej lub minimalnej. W tym celu opracowano wiele różnych metod konwersji wyników, przy czym do najczęściej stosowanych należą:

- dla wartości maksymalnej HB (ang. *Higher is Better*):

$$S/N = -10 \log \left( \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{1}{y_i^2} \right), \quad (3.56)$$

gdzie  $y_i$  – kolejne odpowiedzi w danym punkcie testowym,  $r$  – liczba powtórzeń doświadczeń w danym punkcie planu.

- dla wartości nominalnej NB (ang. *Nominal is Best*):

$$S/N = -10 \log \left( \frac{\sum_{i=1}^r y_i^2 - r \bar{y}^2}{r-1} \right), \quad (3.57)$$

gdzie  $y_i$  – kolejne odpowiedzi w danym punkcie testowym,  $r$  – liczba powtórzeń doświadczeń w danym punkcie planu.

- dla wartości minimalnej LB (ang. *Lower is Better*):

$$S/N = 10 \log \left( \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_i^2 \right), \quad (3.58)$$

gdzie  $y_i$  – kolejne odpowiedzi w danym punkcie planu,  $r$  – liczba powtórzeń doświadczeń w danym punkcie planu.

Podane sposoby konwersji wyników stosuje się dlatego, że wariancja próbkki  $\delta^2$  jest funkcją średniej wszystkich próbek  $\bar{y}$ :

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N - 1}, \quad (3.59)$$

gdzie  $N$  – liczba punktów testowych w próbce,  $\delta^2$  – miara bezwzględna, a nie względna rozrzutu danych w stosunku do średniej.

W przypadku zależności 3.59 wartość w liczniku może być taka sama dla różnych próbek, tzn.:

$$\Delta y_i = (y_i - \bar{y})^2 = \text{const}, \quad (3.60)$$

co w zagadnieniach praktycznych może prowadzić do zupełnie różnej interpretacji. Dlatego też ważniejsza jest miara względna rozrzutu. Przykładowo ta sama wartość wariancji dla dużej wartości średniej nie oznacza to samo, co dla małej wartości średniej. W takim przypadku udział procentowy czynnika szumu będzie zupełnie różny.

Wyniki eksperymentu dostarczają informacji o istotności czynników sterowalnych w odniesieniu do wartości średniej oraz wariancji. Dzięki temu istnieje możliwość zakwalifikowania każdego czynnika do jednej z czterech grup dotyczących istotności na poziomie średniej lub wariancji:

- czynnik, który ma istotny wpływ na wartość wariancji,
- czynnik, który ma istotny wpływ na wartość średnią oraz wariancję,
- czynnik, który ma istotny wpływ na wartość średnią,
- czynnik, który nie ma istotnego wpływu na wartość średnią ani wariancję.

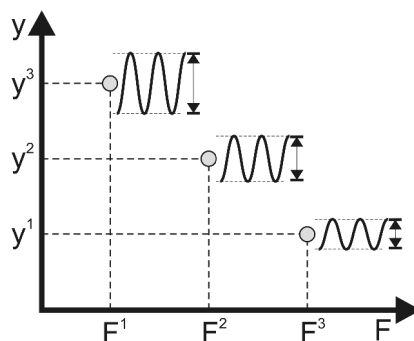
W tabeli 3.3 przedstawiono schemat postępowania w przypadku analizy czułości z uwzględnieniem istotności czynników w odniesieniu do wartości średniej i wariancji.

W zależności od przynależności danego czynnika do określonej grupy, istnieje możliwość podjęcia określonych decyzji. Celem zasadniczym analizy czułości jest znalezienie takich wartości istotnych czynników sterowalnych, które zapewniają najmniejszą możliwą wariancję odpowiedzi, na skutek obecności czynników zakłócających, z jednoczesnym zapewnieniem określonej wartości średniej odpowiedzi. Dla większości przypadków konieczne jest przyjęcie określonego kompromisu, gdyż war-

tość czynników, która zapewni bardziej optymalną wartość średnią odpowiedzi, jednocześnie pogarsza jej wariancję (rys. 3.23).

Tabela 3.3. Analiza czułości z uwzględnieniem istotności czynników w odniesieniu do wartości średniej i wariancji,  $F_i$  – czynniki sterowalne

Czynnik	Średnia	Wariancja
$F_1$	Nie	Nie
$F_2$	Tak	Nie
...	...	...
$F_n$	Tak	Tak



Rys. 3.23. Przykład zmienności odpowiedzi w zależności od wartości czynnika  $F$ , w obecności czynników szumu

Jednym z istotnych problemów projektowania czułości jest proces projektowania wieloparametrowego. Ten sam czynnik może powodować poprawę jednej odpowiedzi, jednocześnie powodując pogorszenie innej. Schemat analizy wielowskaźnikowej przedstawiono w tabeli 3.4.

Tabela 3.4. Analiza czułości dla problemu wieloparametrowego,  $F_i$  – czynniki sterowalne

Czynnik	Odpowiedź 1		Odpowiedź 2	
	Średnia	Wariancja	Średnia	Wariancja
$F_1$	↑	↑	↓	↓
$F_2$	↑	↓	↑	↓
...	...	...	...	...
$F_n$	↓	↓	↑	↓

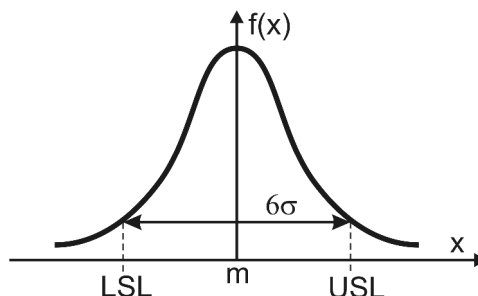
Celem analizy czułości jest minimalizacja wariancji dla danej wartości średniej odpowiedzi. Należy jednak zauważyć, że dla wielu osób zajmujących się statystyką stosowaną, jednoczesna analiza wartości średniej i wariancji w postaci współczynnika  $S/N$  jest wadą prezentowanej metody. Niemniej jednak w zastosowaniach praktycznych analiza wariancji współczynnika  $S/N$  pozwala na identyfikację istotnych czynników mających udział w analizie czułości. Tym samym możliwa jest optymalizacja odpowiedzi ze względu na dwa istotne parametry odpowiedzi: wartość średnią oraz wariancję.

### 3.1.4.3. Projektowanie tolerancji

Problem projektowania tolerancji jest związany z losowym rozrzutem czynników sterowalnych. Celem projektowania tolerancji jest znalezienie odpowiedzi na pytania: kiedy, o ile i w jaki sposób należy określić wartości tolerancji czynników sterowalnych, aby zapewnić wysoką jakość produktu. Wydawałoby się, że najprostszym sposobem poprawy jakości produktu byłoby maksymalne zacieśnienie pola tolerancji wszystkich istotnych czynników sterowalnych. Niestety podejście takie z wielu powodów jest niepożądane. Po pierwsze wiąże się z podniesieniem kosztu końcowego produktu, z drugiej zaś wcale nie daje pewności poprawy jakości. Jednocześnie powszechnie wiadomo, że znacznie lepsze efekty przynosi ograniczenie pola tolerancji jedynie najbardziej istotnych czynników. Z tego też powodu bardziej pożądaną metodą postępowania byłaby metoda, która w pierwszym etapie pozwalałaby na identyfikację czynników sterowalnych, których losowy charakter ma decydujący wpływ na zmienność odpowiedzi. Dopiero w następnym etapie należałoby oszacować ich dopuszczalne pole tolerancji krytycznych. Projektowanie tolerancji jest zazwyczaj ostatnim krokiem projektowania, który następuje po optymalizacji i analizie czułości.

W codziennej praktyce inżynierskiej wartości parametrów konstrukcyjnych są podawane przez projektantów z uwzględnieniem dopuszczalnej tolerancji ich wartości. Ten sposób postępowania pozwala na utrzymanie określonej jakości produktu, przez utrzymanie wartości oczekiwanej odpowiedzi w zadanym zakresie wartości. Niestety, sposób projektowania dopuszczalnego pola tolerancji w montażu elektronicznym może sprawiać duże problemy – w wielu przypadkach opiera się na doświadczeniu eksperta lub czasochłonnych i kosztownych badaniach. Projektowanie tolerancji stosuje się najczęściej w przypadku, gdy wyniki otrzymane na etapie analizy czułości zakończyły się niepowodzeniem lub okazały się niezadowolające. Rozwiązaniem w takim przypadku może być zacieśnienie przedziału dopuszczalnej tolerancji istotnych czynników sterowalnych tak, aby odpowiedź znajdowała się w zadanym zakresie wartości (rys. 3.24).

W przypadku metod projektowania opartych na obiekcie fizycznym, w codziennej praktyce inżynierskiej stosuje się powszechnie metodę Six Sigma. Zgodnie z opisem gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu normalnego, tylko  $1,97 \cdot 10^{-9}$  obserwacji wychodzi poza zakres  $6\sigma$ . W celu oszacowania dopuszczalnego przedziału tolerancji



Rys. 3.24. Rozrzut wartości odpowiedzi na skutek losowego rozrzutu czynników istotnych

definiuje się dwa istotne parametry: wskaźnik zdolności  $C_p$  (ang. *Capability Index*) oraz równoważny wskaźnik zdolności  $C_{pk}$  (ang. *Equivalent Capability Index*). Zazwyczaj podaje się oba wskaźniki jednocześnie, ponieważ wskaźnik zdolności  $C_p$  opisuje możliwości teoretyczne, podczas gdy równoważny wskaźnik zdolności  $C_{pk}$  opisuje stan aktualny. Wartości wskaźników  $C_p$  i  $C_{pk}$  – według normy ANSI/IPC-PC-90 – wyznacza się z zależności [180, 48]:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}, \quad (3.61)$$

$$C_{pk} = C_p(1 - k), \quad (3.62)$$

gdzie  $\sigma$  – odchylenie standardowe,  $LSL$  – dolna granica procesu (ang. *Lower Specification Limit*),  $USL$  – górna granica procesu (ang. *Upper Specification Limit*),  $k$  – współczynnik skali opisany zależnością:

$$k = \frac{m - \mu}{(USL - LSL)/2}, \quad (3.63)$$

gdzie  $m$  – oczekiwana wartość nominalna,  $\mu$  – wartość średnia próbki losowej.

W przypadku gdy przedział tolerancji ograniczony jest tylko z jednej strony, wartość wskaźnika zdolności  $C_p$  wyznacza się jako:

$$C_{pu} = \frac{USL - m}{3\sigma} \quad \text{lub} \quad C_{pl} = \frac{m - LSL}{3\sigma}, \quad (3.64)$$

gdzie  $C_{pu}$  – wartość wskaźnika  $C_p$  z ograniczeniem od góry,  $C_{pl}$  – wartość wskaźnika  $C_p$  z ograniczeniem od dołu.

Jednocześnie dla obu wskaźników obowiązuje warunek:

$$C_{pk} = \min(C_{pu}, C_{pl}). \quad (3.65)$$

Definicja wskaźnika  $C_p$  wynika z założenia, według którego licznik oznacza wymagania projektowe, natomiast mianownik możliwości produkcyjne. W przypadku stanu naturalnego jest spełniona zależność:

$$USL - LSL = (m + 3\sigma) - (m - 3\sigma) = 6\sigma. \quad (3.66)$$

Według przyjętych norm, aby produkt spełniał określone wymagania jakościowe, wskaźnik  $C_p$  powinien spełniać jeden z następujących warunków:

- niska jakość –  $C_p < 1$ ,
- średnia jakość –  $1 < C_p < 1,33$  lub  $1 < C_p < 2$ ,
- wysoka jakość –  $C_p > 1,33$  lub  $C_p > 2$ .

W przypadku metod projektowania opartych na modelu numerycznym czy modelu matematycznym obiektu, stosuje się dwie metody projektowania tolerancji:

- Taguchiego – preferowana w przypadku numerycznego modelu obiektu.
- Monte Carlo – preferowane w przypadku matematycznego modelu obiektu.

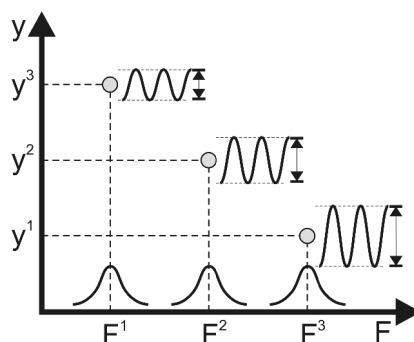
Metoda Taguchiego opiera się na ortogonalnym planie eksperymentu i wymaga oprócz tablicy wewnętrznej także tablicy zewnętrznej. Tablica zewnętrzna zawiera dopuszczalne procentowe zmiany czynników istotnych spowodowane rozrzutem losowym. W wyniku takiego eksperymentu można ocenić istotność zadeklarowanych wartości dopuszczalnych pól tolerancji dla wybranych czynników. Celem analizy jest oszacowanie zależności między zmiennością czynników a wariancją odpowiedzi. Przykładowy plan eksperymentu opierający się na tablicy wewnętrznej i zewnętrznej przedstawiono w tabeli 3.5 [181].

Tabela 3.5. Typowa tabela przedstawiająca plan eksperymentu w przypadku projektowania tolerancji według metody Taguchiego

		Tablica zewnętrzna (procentowe zmiany wartości czynników)
Nr doświadczenia	Tablica wewnętrzna (wybrane poziomy czynników)	Odpowiedzi (wyniki doświadczeń)
1		
.		
.		
N		

Projektowanie tolerancji oparte na metodzie Monte Carlo można wykonać, przyjmując założenie dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa poszczególnych istotnych czynników. Niestety analiza ta wymaga wykonania dużej liczby doświadczeń, w związku z tym nie stosuje się jej w przypadku obiektów fizycznych czy ich modeli

numerycznych. Może być z powodzeniem stosowana w przypadku modeli matematycznych otrzymanych w wyniku analizy RSM. Zastosowanie metody Monte Carlo w przypadku modelu powierzchni odpowiedzi, gdy dany czynnik ma charakter losowy, wymaga posługiwania się pojęciem wartości średniej odpowiedzi, gdyż odpowiedź ma wówczas także charakter losowy. Przykład zastosowania metody Monte Carlo w przypadku jednego czynnika  $F$  przedstawiono na rysunku 3.25.



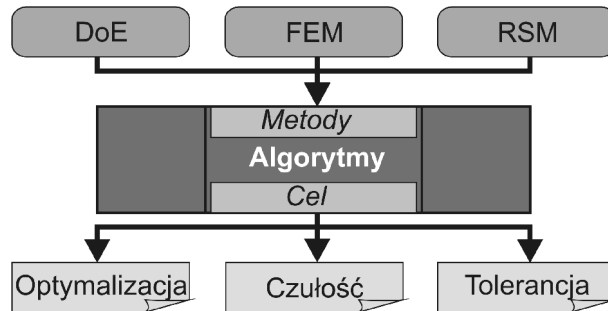
Rys. 3.25. Przykład analizy Monte Carlo oraz zmienności odpowiedzi w wyniku rozrzutu losowego w zależności od czynnika  $F$

## 3.2. Zastosowanie algorytmów w projektowaniu numerycznym

Opisane wcześniej metody projektowania numerycznego CAE pozwalają na analizę zachowania obiektów oraz poszukiwania optymalnych wartości dla przyjętych istotnych czynników sterowalnych. Niestety liczba tych czynników może sięgać dziesiątek lub setek [182], co wymaga zastosowania specjalnie opracowanych algorytmów w procesie projektowania numerycznego. Algorytmy pozwalają na optymalne wykorzystanie i zastosowanie wcześniej omówionych metod numerycznych: FEM, DoE czy RSM (rys. 3.26).

Algorytmy matematyczne mogą znacznie usprawnić proces projektowania. Problem poszukiwania optimum najczęściej sprowadza się do problemu wartości ekstremalnych. Natomiast z punktu widzenia inżyniera poszukiwanie optimum nie dotyczy wyłącznie problemu wartości ekstremalnych, lecz także dotyczy problemu czułości i tolerancji. Powszechnie dąży się do tego, aby algorytmy były stosunkowo proste, co niestety ogranicza ich zastosowanie do nieskomplikowanych zagadnień. Opracowuje się również algorytmy zaawansowane, które mogą być stosowane w dowolnych





Rys. 3.26. Wykorzystanie algorytmów w projektowaniu numerycznym

przypadkach. Trudno je jednak stosować do rozwiązywania typowych problemów inżynierskich, ponieważ są zbyt skomplikowane. Z tego też powodu znalezienie złotego środka jest tutaj jak najbardziej pożądane.

Z chwilą pojawienia się komputera, szczególnego znaczenia nabrały algorytmy numeryczne. Podstawowe algorytmy numeryczne można podzielić na dwie grupy: programowanie liniowe oraz nieliniowe – nazwa programowanie jest nazwą historyczną i w rzeczywistości dotyczy problemu optymalizacji [183]. Obecnie najczęściej stosuje się algorytmy programowania nieliniowego NLP (ang. *Nonlinear Programming*) z ograniczeniami i bez ograniczeń. W dziedzinie projektowania numerycznego najczęściej stosowanym algorytmem jest algorytm określany nazwą kosztownego programowania nieliniowego HCNLP (ang. *High-Cost Nonlinear Programming*). Problem optymalizacji algorytmu NLP w sposób formalny można zapisać jako:

$$(\text{HCNLP}) = \left\{ \begin{array}{l} \max f_0(y) \\ f_j(y) \leq a_j, \quad j=1, \dots, J \\ g_k(y) \leq b_k, \quad k=1, \dots, K \\ c_i \leq y_i \leq d_i, \quad i=1, \dots, I \end{array} \right\}. \quad (3.67)$$

W przypadku tego typu problemów zmienne niezależne  $y_i$  są czynnikami sterowanymi i obserwowalnymi,  $f_j(y)$  są funkcjami odpowiedzi, natomiast  $g_k(y)$  są a priori znanymi ograniczeniami. W przedstawionym przypadku bardzo ważną rolę odgrywają dwa pojęcia:

- punkt pomiarowy; oznacza pojedyncze doświadczenie dla przyjętych wartości czynników w przestrzeni projektowej,
- przestrzeń projektowa; oznacza zbiór punktów pomiarowych, które spełniają określone ograniczenia:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_k(y) \leq b_k, \quad k=1, \dots, K \\ c_i \leq y_i \leq d_i, \quad i=1, \dots, I \end{array} \right\}. \quad (3.68)$$

Celem tej metody jest optymalizacja wybranej odpowiedzi ( $f_0(y)$ ) tak, aby inne funkcje odpowiedzi spełniały określone warunki. Zasadnicza różnica między klasyczną metodą NLP a HCNLP jest taka, że w przypadku klasycznej metody NLP zarówno funkcje odpowiedzi, jak i ograniczenia są opisane zależnościami funkcyjnymi, które są znane a priori. Natomiast w przypadku algorytmu HCNLP wartości funkcji są wyznaczane na drodze modelowania numerycznego i mogą być stosowane jedynie w przypadku numerycznych modeli obiektów. Ponieważ proces modelowania jest czasochłonny, więc taki sposób szukania odpowiedzi nosi nazwę kosztownych metod programowania nieliniowego HCNLP. W codziennej praktyce inżynierskiej rozróżnia się dwa podstawowe algorytmy oparte na algorytmie HCNLP, w skrócie: algorytm iteracyjny i algorytm kompaktowy CM (ang. *Compact Method*) lub CMNLP (ang. *Compact Method for Nonlinear Programming*) [182].

### 3.2.1. Algorytm iteracyjny

Algorytm iteracyjny polega na wykonywaniu kolejnych obliczeń w celu znalezienia rozwiązania optymalnego. Poszukiwanie rozpoczyna się od wybranego punktu startowego. Następnie na podstawie uzyskanego wyniku oraz odpowiedniego algorytmu, wybiera się następny punkt pomiarowy. Procedura ta jest powtarzana tak długo, aż zostanie spełnione określone kryterium. Jedną z charakterystycznych cech algorytmu iteracyjnego jest możliwość wykorzystania klasycznych metodach optymalizacyjnych. Klasyczne metody optymalizacyjne mogą być teoretycznie wykorzystane do problemów ogólnych typu NLP lub problemów typu HCNLP. Niestety ich wadą jest często niewystarczająca efektywność<sup>51</sup>.

Klasyczne metody optymalizacyjne można podzielić na metody rzędu: zerowego, pierwszego i drugiego. Metody rzędu zerowego nie wymagają wyznaczania pochodnej. Były bardzo popularne w latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych ubiegłego wieku [184, 185, 186]. Jedną z ostatnich prac dotyczących modyfikacji i zastosowania tych metod, ze szczególnym naciskiem położonym na problem zbieżności, opublikował V.J. Torczon [187, 188, 189]. Zastosowanie metod rzędu zerowego do problemów typu HCNLP ma wiele wad, z których najważniejsze to:

- problem zbieżności w przypadku występowania ekstremum lokalnego; wyjątkiem jest tutaj metoda zaproponowana przez Torczona [187, 188];
- metody te nie nadają się w przypadku występowania nieliniowych warunków brzegowych,
- kolejny punkt pomiarowy zależy tylko i wyłącznie od poprzedniego punktu pomiarowego, nie wykorzystuje się praktycznie informacji „historycznej”, tzn. wiedzy

---

51 Efektywność w tym przypadku należy rozumieć jako liczbę eksperymentów koniecznych do znalezienia optimum.

dotyczącej przestrzeni projektowej uzyskanej we wcześniejszych punktach pomiarowych.

Obecnie większość metod optymalizacyjnych stosowanych do rozwiązywania problemów typu NLP to metody rzędu pierwszego i drugiego. Dokładny opis tego typu metod został podany przez Gilla, Murraya i Wrighta [190]. Na szczególną uwagę zasługują tutaj metody oparte na punktach wewnętrznych [191]. Niestety mają one także w przypadku problemów typu HCNLP, podobnie jak metody rzędu zerowego, wiele wad, np.:

- konieczność korzystania z pochodnej funkcji odpowiedzi; z tego też powodu, każdy kolejny punkt pomiarowy wymaga dużej liczby dodatkowych doświadczeń, porównywalnej do liczby wszystkich czynników w celu wyznaczenia gradientu funkcji odpowiedzi w otoczeniu aktualnego punktu pomiarowego,
- wyniki kolejnych doświadczeń zależą od błędów aproksymacji, zaokrągleń czy uproszczeń; błędy te nie mają charakteru stochastycznego, co może powodować ich akumulację; ponieważ metody pierwszego i drugiego rzędu korzystają z oszacowania pochodnej metodą różnicy skończonej, dlatego też bardzo istotna jest dokładność obliczeń,
- podobnie jak w przypadku metod rzędu zerowego, kolejny punkt pomiarowy zależy tylko i wyłącznie od punktu poprzedniego, natomiast praktycznie nie wykorzystuje się wyników uzyskanych w kilku poprzednich doświadczeniach.

Większość algorytmów stosowanych powszechnie w programach komputerowych CAE korzysta z algorytmów iteracyjnych. Algorytmy te mają możliwość optymalizacji ze względu na klasyczne metody rzędu zerowego, pierwszego czy drugiego. Niemniej nadal trwają prace nad usprawnieniem tych metod i dostosowaniem ich do problemów typu HCNLP [67, 192, 193, 194], np. prace Conna i Tointa [195, 196]. Proponowane modyfikacje dotyczą najczęściej wykorzystania informacji „historycznej”<sup>52</sup> odnośnie do analizowanej przestrzeni projektowej. Pomysł ten wynika z faktu, że czas wykonania pojedynczego doświadczenia jest stosunkowo długi, w związku z czym bardziej efektywne jest dokładne wyznaczenie położenie punktu następnego. Pomimo wielu osiągnięć algorytmów iteracyjnych należy stwierdzić, że wymagają one nadal dalszych badań i modyfikacji, szczególnie w celu ich dostosowania do problemów typu HCNLP.

### 3.2.2. Algorytm kompaktowy

Alternatywą dla algorytmów iteracyjnych są algorytmy kompaktowe CMNLP (ang. *Compact Models for Nonlinear Programming*). Ich główną zaletą jest możliwość optymalizacji zaawansowanej obejmującej analizę czułości i projektowanie tolerancji.

---

52 W takim przypadku wybór następnego punktu pomiarowego zależy od punktu ostatniego, jak i punktów poprzedzających, czy wiedzy na temat badanego obiektu.

Podstawowym założeniem algorytmów kompaktowych jest to, że funkcja odpowiedzi, jak i warunki brzegowe mogą być zastąpione przez funkcje aproksymujące:

$$(\text{CMNLP}) = \left\{ \begin{array}{l} \max \hat{f}_0(y) \\ \hat{f}_j(y) \leq a_j, \quad j=1, \dots, J \\ g_k(y) \leq b_k, \quad k=1, \dots, K \\ c_i \leq y_i \leq d_i, \quad i=1, \dots, I \end{array} \right\}, \quad (3.69)$$

gdzie funkcje  $\hat{f}_i(y)$  – powierzchnie odpowiedzi funkcji  $f_i(y)$  uzyskane w drodze aproksymacji lub interpolacji.

W tym celu konieczne jest wykonanie eksperymentu, w wyniku którego wyznacza się powierzchnię odpowiedzi, co pozwala na zastąpienie problemu optymalizacji opisanej zależnością 3.67 przez zależność 3.69. Algorytmy kompaktowe są powszechnie stosowane w różnych dziedzinach inżynierii [197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204], a ich wykorzystanie do projektowania numerycznego ze szczególnym uwzględnieniem montażu elektronicznego można znaleźć w pracach den Hertoga i Stehouwera [205, 182, 123] oraz autora [20, 27, 206, 207, 208, 33, 34]. Typowa procedura projektowania składa się z kilku etapów, takich jak: tworzenie modelu numerycznego obiektu, planowanie eksperymentu, opracowanie modelu powierzchni odpowiedzi, optymalizacja, analiza czułości i projektowanie tolerancji.

Algorytm kompaktowy w sposób naturalny integruje takie metody, jak: FEM, DoE i RSM. W rzeczywistości nie tylko integruje, lecz także je usprawnia i rozszerza w postaci metod projektowania i analizy eksperymentów komputerowych DACE (ang. *Design and Analysis of Computer Experiments*), co zostało m. in. przedstawione przez Sachsa [202] i Myersa [201]. Algorytm kompaktowy składa się z następujących etapów: definicji problemu, planowania eksperymentu, modelu powierzchni odpowiedzi, optymalizacji i weryfikacji.

- Definicja problemu; na tym etapie określa się problem typu NLP, którego celem jest uzyskanie kryterium optymalizacyjnego oraz przestrzeni projektowej. Kryterium optymalizacyjne jest najczęściej wyrażone w postaci funkcji celu  $f_0(y)$ , natomiast definicja przestrzeni projektowej wymaga określenia: czynników sterowalnych i obserwowalnych oraz warunków brzegowych.
- Planowanie eksperymentów; celem planowania eksperymentów jest wybór zbioru punktów pomiarowych w przestrzeni projektowej korzystając z metody DoE. Niestety zastosowanie klasycznych metod planowania eksperymentów proponowanych przez Taguchiego [172] czy Montgomery'ego [200] nie jest optymalne w przypadku eksperymentów numerycznych. Z tego też powodu według Hertoga i Stehouwera [205] w przypadku problemów typu HCNLP powinno się stosować plany eksperymentów, które pozwalają na równomierne rozmieszczenie punktów po-

miarowych w przestrzeni projektowej. Eksperymenty numeryczne mają charakter deterministyczny, nie są zatem obarczone szumem.

- Model powierzchni odpowiedzi; celem tego etapu jest jak najlepsze dopasowanie modelu powierzchni odpowiedzi do wyników uzyskanych w wyniku eksperymentu metodą RSM. W praktyce uzyskany model odpowiedzi może być wykorzystany do przewidywania odpowiedzi w dowolnym punkcie przestrzeni projektowej. Znaczący udział w rozwoju metod kompaktowych miał m. in. autor, który oprócz powierzchni odpowiedzi w procesie projektowania stosował także powierzchnię błędu odpowiedzi [207, 208, 33, 34]. Celem tego było wykonanie kolejnych doświadczeń w przypadku, gdy wyznaczona powierzchnia odpowiedzi nie spełniała wybranego kryterium dokładności.
- Optymalizacja; na tym etapie korzysta się z uzyskanej powierzchni odpowiedzi w celu znalezienia rozwiązania optymalnego dla metody typu CMNLP. Należy tutaj zauważyć, że optymalizacja może dotyczyć dużej liczby czynników, a tym samym problem ten może prowadzić do problemów typu LP (ang. *Linear Programming*) lub NLP z tysiącem warunków brzegowych oraz wymaga konieczności stosowania globalnych metod optymalizacyjnych. Zaletą metody kompaktowej opartej na funkcji celu jest optymalizacja zaawansowana, którą można prowadzić pod kątem:
  - poszukiwania wartości oczekiwanej odpowiedzi w postaci minimum, maksimum lub wartości nominalnej,
  - analizy warunkowej typu „jeżeli, to”,
  - analizy czułości i projektowania tolerancji; w przypadku tradycyjnym analiza taka wymagałaby wykonania dodatkowych doświadczeń, natomiast w przypadku metody CMNLP można ograniczyć się do wyznaczenia wartości funkcji celu na podstawie modelu powierzchni odpowiedzi. Pozwala to na oszczędność czasu, jak i kosztów związanych z dodatkowymi doświadczeniami.
- Weryfikacja; celem tego etapu jest weryfikacja otrzymanego rozwiązania optymalnego oraz otrzymanej powierzchni odpowiedzi przez wykonanie co najmniej jednego doświadczenia dla wybranych wartości czynników optymalnych. Wybór punktów pomiarowych powinien być losowy lub wybrany przez eksperta.

### 3.2.3. Znaczenie algorytmów w projektowaniu montażu elektronicznego

Projektowanie montażu elektronicznego, zarówno przez jednostki przemysłowe lub badawcze, jest coraz częściej wspomagane metodami numerycznymi. Do najczęściej stosowanych algorytmów należą metody typu HCNLP. Algorytmy typu HCNLP mają wiele zalet w porównaniu z algorytmami tradycyjnymi:

- Pozwalają na znalezienie lepszego rozwiązania optymalnego w zadanej przestrzeni projektowej. W literaturze można znaleźć porównania, które mówią nawet o 50%

poprawie położenia optymalnego [205, 123]. Należy także zauważyć, że algorytmy iteracyjne w porównaniu z kompaktowymi znacznie lepiej radzą sobie z poszukiwaniem ekstremum dla zadanego problemu optymalizacyjnego. Niemniej w przypadku większości problemów typowych dla montażu elektronicznego, celem optymalizacji jest także analiza czułości i projektowanie tolerancji. W takim przypadku znacznie lepiej sprawdza się metoda kompaktowa.

- Jednym z najważniejszych aspektów projektowych, oprócz dokładności, jest czas konieczny do opracowania i zoptymalizowania analizowanego obiektu. Omawiane metody pozwalają na znaczne skrócenie czasu projektowania aż do 60% [56]. Wynika to z mniejszej liczby doświadczeń numerycznych koniecznych do znalezienia optimum. Jest to szczególnie widoczne w przypadku algorytmu kompaktowego, gdyż doświadczenia numeryczne wykonywane są w czasie jednej sesji, co pozwala na realizację obliczeń numerycznych w nocy lub dni wolne od pracy. W przypadku algorytmu iteracyjnego kolejny krok obliczeń zależy od wyniku kroku poprzedniego. Dodatkowo w przypadku algorytmów kompaktowych kolejne doświadczenia można wykonać na podstawie modelu powierzchni odpowiedzi, podczas gdy w przypadku algorytmu iteracyjnego konieczne jest przeprowadzenie kolejnych obliczeń.
- Metody projektowania komputerowego umożliwiają analizę interdyscyplinarną i wieloparametrową; aspekt ten pozwala m.in. na uniknięcie problemu rozwiązania pseudooptymalnego, które nie spełnia warunków projektowych. Rozwiązanie optymalne w przypadku analizy wieloparametrowej można osiągnąć przez odpowiednią definicję funkcji celu. Należy przy tym zauważyć, że zastosowanie analizy wieloparametrowej i interdyscyplinarnej jest prostsze w przypadku algorytmu kompaktowego niż iteracyjnego.
- Jedną z najważniejszych zalet metod projektowania numerycznego jest możliwość ich zastosowania przez osoby nie będące ekspertami w dziedzinie projektowania. Należy jednak zauważyć, że projektowanie numeryczne jest stosunkowo skomplikowane, szczególnie na etapie interpretacji wyników i etap ten powinien być zarezerwowany wyłącznie dla ekspertów. W przypadku algorytmów kompaktowych istnieje możliwość wykorzystania powierzchni odpowiedzi przez osoby nie będące ekspertami, aby zobrazować istotną zależność, czy przeprowadzić proces optymalizacji. Coraz częściej stosowana w dużych firmach jest możliwość opracowania powierzchni odpowiedzi w oddziale badawczym, a następnie jej wykorzystanie w oddziale projektowym. Według niektórych badaczy właśnie ta możliwość jest jedną z najbardziej niedocenionych i niewykorzystanych zalet algorytmów kompaktowych [205]. Możliwość ta nie dotyczy algorytmów iteracyjnych.
- Większa dokładność oraz wiarygodność, która może być rozpatrywana na kilku poziomach:
  - algorytmy kompaktowe oferują większą wiarygodność, że otrzymane rozwiązanie jest rzeczywiście optymalne; wiarygodność oznacza, że w razie powtórzenia

całego procesu projektowania, dla tych samych lub podobnych założeń i narzędzi numerycznych, otrzyma się podobne rozwiązanie; w metodzie kolejnych „prób i błędów” projektant nigdy nie ma pewności, że poświęcając większą ilość czasu osiągnie lepsze rozwiązanie.

- rozwiązanie optymalne w mniejszym stopniu zależy od tego, kto prowadzi proces optymalizacji; tym samym cały proces projektowania staje się bardziej wiarygodny i stabilny.
- w wyniku projektowania otrzymujemy nie tylko rozwiązanie optymalne, lecz także możliwość prowadzenia analizy czułości oraz projektowania tolerancji bez konieczności wykonywania kolejnych doświadczeń, dotyczy to jednak jedynie algorytmu kompaktowego.

Biorąc pod uwagę powyższe spostrzeżenia, można stwierdzić, że w przypadku projektowania numerycznego montażu elektronicznego algorytm kompaktowy wydaje się być bardziej odpowiedni oraz oferuje więcej możliwości niż algorytm iteracyjny (tabela 3.6).

Tabela 3.6. Porównanie zalet oraz wad algorytmu iteracyjnego i kompaktowego

Problem	Algorytm iteracyjny	Algorytm kompaktowy
Wartość optymalna	tak	tak/nie
Analiza czułości	nie	tak
Projektowanie tolerancji	nie	tak
Lepsza dokładność	tak	tak
Ograniczenie czasu projektowania	tak/nie	tak
Analiza wieloparametrowa	tak/nie	tak
Wykorzystanie przez nie ekspertów	nie	tak

Metoda kompaktowa, oprócz rozwiązania problemu typu HCNLP, pozwala dodatkowo na lepsze zrozumienie charakteru optymalizowanej funkcji celu  $f_0(y)$  oraz realizację procesu analizy czułości i projektowania tolerancji. Wadą algorytmu kompaktowego w porównaniu z iteracyjnym jest niewątpliwie mniejsza dokładność i ograniczona wiarygodność w odniesieniu do rozwiązania optymalnego. W ostatnich latach coraz częściej firmy zajmujące się tworzeniem oprogramowania typowo symulacyjnego dołączają do swoich pakietów moduły umożliwiające realizację zarówno algorytmu iteracyjnego, jak i kompaktowego. W ostatnich latach pojawiła się duża liczba usprawnień oraz modyfikacji wymienionych algorytmów, które zazwyczaj spotykane są w praktyce inżynierskiej. Przykładem takich modyfikacji mogą być następujące algorytmy:

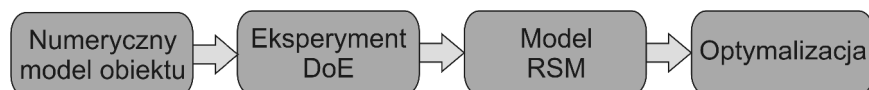
- adaptacyjny ARSM (ang. *Adaptive Response Surface Method*) [209, 210], którego celem jest ograniczenie analizowanej przestrzeni parametrów konstrukcyjnych do najbardziej obiecującego obszaru ze względu na rozwiązanie optymalne; niestety w takim przypadku tracimy informację na temat zachowania funkcji celu w całej przestrzeni parametrów konstrukcyjnych;
- dynamiczny DRSM (ang. *Dynamic Response Surface Method*) [211], który koncentruje się na problemach typowych dla zagadnień chemicznych i problemach, gdzie powierzchnia odpowiedzi zmienia się w funkcji czasu, np. na skutek trwania reakcji chemicznej; konieczne jest więc opracowanie parametrycznej powierzchni odpowiedzi, gdzie parametrem jest czas;
- sekwencyjny SRSM (ang. *Sequential Response Surface Method*) [212], którego głównym celem jest minimalizacja koniecznej liczby doświadczeń w celu uzyskania rozwiązania optymalnego; algorytm opiera się na sekwencyjnym przeszukiwaniu przestrzeni projektowej;
- parametryczno-sekwencyjny PSRSM (ang. *Parametric–Sequential Response Surface Method*) opracowany m. in. przez autora [206, 207, 208] koncentruje się na problemie dokładności i efektywności procesu projektowania numerycznego w dziedzinie montażu elektronicznego [33, 34]; dotyczy problemów o charakterze nieliniowym oraz z dużą liczbą czynników i ograniczeń dla przestrzeni projektowej; modele numeryczne analizowanych obiektów mają charakter parametryczny i są oparte na językach programowania skryptowego.

### 3.3. Zaawansowane algorytmy kompaktowe

W projektowaniu numerycznym montażu elektronicznego stosuje się dwa rodzaje algorytmów kompaktowych: tradycyjny oraz zaawansowany. Algorytmy tradycyjne są oparte na doświadczeniach nieskorelowanych i dotyczą obiektów fizycznych. Algorytmy zaawansowane oparte są na doświadczeniach skorelowanych i dotyczą numerycznych modeli obiektów. Cechą poprawnego eksperymentu jest jego optymalność. Optymalność może być rozważana z punktu matematycznego lub na podstawie wiedzy eksperta. W przypadku projektowania numerycznego korzysta się najczęściej z procedury tradycyjnej, która składa się z doświadczeń nieskorelowanych. Główne jej etapy to (rys. 3.27):

- wykonanie modelu numerycznego obiektu z uwzględnieniem wybranych czynników oraz odpowiedzi,
- opracowanie planu eksperymentu dla wybranych czynników,
- dopasowanie modelu matematycznego odpowiedzi do wyników eksperymentu,
- optymalizacja funkcji celu oparta na powierzchni odpowiedzi.





Rys. 3.27. Schemat tradycyjnej procedury projektowania numerycznego

Procedura tradycyjna charakteryzuje się dużą prostotą, niestety sprawdza się jedynie w przypadkach prostych problemów. W przypadkach problemów skomplikowanych, np. dla odpowiedzi o charakterze nieliniowym, procedura ma wiele wad, z których najważniejsze to:

- brak możliwości automatycznego wyznaczenia kolejnych doświadczeń skorelowanych z poprzednimi,
- mniejsza efektywność, której wynikiem jest zbyt duża liczba doświadczeń w celu uzyskania odpowiedzi o określonej dokładności,
- brak miary dokładności uzyskanej powierzchni odpowiedzi, co z kolei wpływa na ograniczone zastosowanie w planowaniu jakości.

Pierwszy z wymienionych czynników wymaga od projektanta wykonania dużej liczby żmudnych obliczeń manualnych. W przypadku pozostałych dwóch czynników inżynier jest zmuszony do wyboru pośredniego między efektywnością eksperymentu, a jakością powierzchni odpowiedzi. Sytuacja, w której następuje poprawa dokładności powierzchni odpowiedzi, z jednoczesnym ograniczeniem koniecznej liczby doświadczeń, występuje stosunkowo rzadko [213, 214].

W przeciwieństwie do algorytmów tradycyjnych, algorytmy zaawansowane składają się z doświadczeń nieskorelowanych. Wynikiem tego jest ograniczenie koniecznej liczby doświadczeń w celu otrzymania powierzchni odpowiedzi o zadanej dokładności. Metoda zaawansowana składa się najczęściej z dwóch eksperymentów [215, 216]. Pierwszy „eliminujący” jest oparty na ortogonalnym planie eksperymentu. Celem jego jest identyfikacja czynników istotnych i eliminacja czynników nieistotnych. Drugi „identyfikujący” jest oparty na losowym lub pseudolosowym planie eksperymentu. Pozwala na uzyskanie dokładnego modelu powierzchni odpowiedzi.

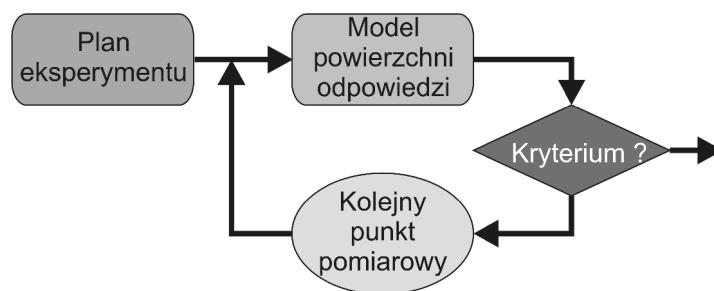
Obecnie coraz więcej jednostek zajmujących się projektowaniem montażu elektronicznego stosuje algorytmy zaawansowane. Chociaż metody i algorytmy projektowania numerycznego używa się od lat, to ich wykorzystanie w projektowaniu numerycznym montażu elektronicznego wymagało pewnych modyfikacji [56]. W tym celu usprawniono istniejące już algorytmy, przykładem tego jest algorytm sekwencyjny oraz parametryczno-sekwencyjny [217].

### 3.3.1. Algorytm sekwencyjny

Algorytm sekwencyjny opracowano przede wszystkim pod kątem optymalizacji numerycznej. Podstawowym jego założeniem jest znalezienie powierzchni odpowiedzi dla obiektu, która będzie spełniała określone warunki dokładności dla minimalnej

koniecznej liczby doświadczeń. Założenie to można najlepiej spełnić przez sekwencyjne przeszukiwanie przestrzeni projektowej. Algorytm sekwencyjny składa się zasadniczo z dwóch etapów. Podobną zasadę stosuje się w metodach Taguchiego, przy tym różnica polega na planie eksperymentu oraz specyfice projektowania numerycznego.

Pierwszym krokiem algorytmu sekwencyjnego jest wykonanie eksperymentu według planu kwadratu łańciskowego, a następnie opracowanie modelu powierzchni odpowiedzi. Następnym krokiem jest wykonanie kolejnych doświadczeń numerycznych z jednoczesnym uaktualnieniem modelu powierzchni odpowiedzi. Położenie kolejnych punktów pomiarowych w przestrzeni projektowej określa się na podstawie powierzchni błędu modelu odpowiedzi. Proces dodawania kolejnych punktów pomiarowych i uaktualniania modelu powierzchni odpowiedzi jest powtarzany do chwili, gdy zostanie spełnione określone kryterium dokładności. Przykładem takiego kryterium może być różnica między dwoma kolejnymi modelami powierzchni odpowiedzi.



Rys. 3.28. Schemat postępowania w przypadku algorytmu sekwencyjnego

Jednym z problemów algorytmu sekwencyjnego jest optymalny wybór początkowej liczby doświadczeń  $N$  w przestrzeni projektowej. Może się zdarzyć tak, że liczba przeprowadzonych doświadczeń będzie zbyt duża w stosunku do liczby koniecznej, tj. wystarczającej do uzyskania modelu powierzchni odpowiedzi. Z drugiej strony, jeżeli liczba doświadczeń jest zbyt mała, to uzyskany model powierzchni odpowiedzi może być zbyt niedokładny i w rezultacie można pominąć rozwiązanie optymalne. Niestety, liczba koniecznych doświadczeń początkowych, która jest w stanie zapewnić poprawny model powierzchni odpowiedzi, zależy od charakteru rzeczywistej odpowiedzi nieznannej a priori. Pożądane zatem byłoby, aby wybór kolejnych punktów pomiarowych był realizowany według następujących kryteriów:

- w pierwszej fazie kolejne punkty pomiarowe powinny znajdować się jak najdalej od dotychczasowych,
- w drugiej fazie kolejne punkty pomiarowe powinny koncentrować się w pobliżu położenia optymalnych.

Równowaga między tymi dwoma kryteriami powinna być ustalona według odpowiednich współczynników wagowych. Wartości tych współczynników zależne są

nie tylko od liczby aktualnie wykonanych doświadczeń, lecz także od charakteru rzeczywistej odpowiedzi.

Zaletą metody sekwencyjnej jest to, że proces optymalizacji w miarę dodawania kolejnych punktów pomiarowych powoduje poprawę modelu powierzchni odpowiedzi. Charakter rzeczywistej powierzchni odpowiedzi w pewien sposób determinuje wybór kolejnych doświadczeń w przestrzeni projektowej. Wadą tej metody jest to, że nie gwarantuje ona uzyskania dokładnego modelu powierzchni odpowiedzi w całej przestrzeni projektowej. Algorytm ten nie nadaje się zatem do analizy czułości czy projektowania tolerancji.

### 3.3.2. Algorytm parametryczno-sekwencyjny

Rozwinięciem algorytmu sekwencyjnego, ale jednocześnie pozbawionym jego wad, jest algorytm parametryczno-sekwencyjny. Algorytm ten został zaproponowany przez autora [208, 207, 206] i został dostosowany do projektowania numerycznego w dziedzinie montażu elektronicznego i mikrosystemów [33, 34]. Główne założenia opracowanego algorytmu parametryczno-sekwencyjnego, to:

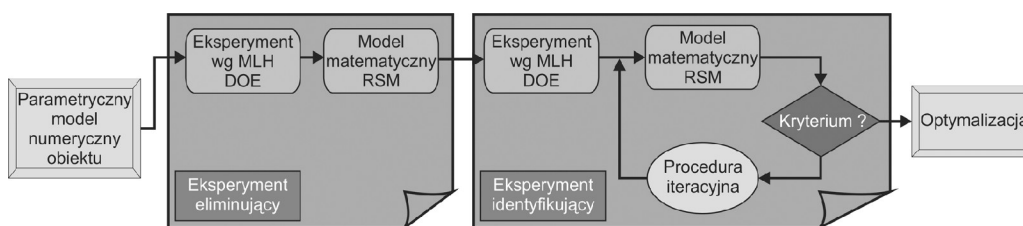
- zastąpienie numerycznego modelu obiektu, numerycznym modelem parametrycznym,
- uwzględnienie wiedzy eksperta w procesie planowania eksperymentu,
- oszacowanie błędu modelu powierzchni odpowiedzi,
- możliwość planowania jakości, czyli optymalizacji, analizy czułości oraz projektowanie tolerancji.

W przeciwieństwie do algorytmów tradycyjnych zaproponowany algorytm opiera się na eksperymencie w postaci skorelowanych doświadczeń. Numeryczny model parametryczny obiektu umożliwia pełną automatyzację procesu projektowania, z uwzględnieniem wiedzy eksperta. Dodatkowo zaletą jest możliwość ograniczenia niezbędnej liczby doświadczeń oraz możliwość planowania jakości. Algorytm składa się z dwóch planów eksperymentu, tj. eliminującego i identyfikacyjnego, a jego główne etapy to:

- wykonanie modelu parametrycznego obiektu z użyciem języków programowania skryptowego, np. ADPL dla programu ANSYS czy Python dla programu ABAQUS; parametryzacja modelu obejmuje m.in. geometrię, warunki brzegowe oraz obciążenia – model parametryczny pozwala na zmianę wartości czynników, analizę wybranej odpowiedzi a także automatyzację procesu modelowania i projektowania numerycznego,
- opracowanie oraz realizacja eksperymentu eliminującego zgodnie z planem ortogonalnym oraz analizą wariancji; plan ortogonalny umożliwia minimalizację koniecznej liczby eksperymentów w celu identyfikacji czynników istotnych oraz ich interakcji, jak również określenie poziomu ich istotności,

- opracowanie oraz realizacja eksperymentu identyfikującego opracowanego według planu LH lub zmodyfikowanego kwadratu łacińskiego MLH (ang. *Modified Latin HyperCube*) i ograniczonego do czynników istotnych, a następnie opracowanie modelu powierzchni odpowiedzi metodą interpolacji, według metody Kriging,
- realizacja algorytmu iteracyjnego, polegającego na wyborze kolejnych doświadczeń przez oszacowanie błędu powierzchni odpowiedzi oraz „spodziewanej poprawy” IE (ang. *Expected Improvement*) dla wybranej funkcji celu; wynikiem takiego postępowania jest otrzymanie powierzchni odpowiedzi spełniającej określone kryterium dokładności,
- zastosowanie metod planowania jakości w odniesieniu do otrzymanej powierzchni odpowiedzi dla obiektu, w celu znalezienia optymalnych wartości czynników w zadanej przestrzeni projektowej.

Opracowana metoda ogranicza niezbędną liczbę doświadczeń, a jednocześnie uzyskuje się w miarę dokładny model powierzchni odpowiedzi w przypadku dużej liczby czynników. Schemat opracowanego algorytmu parametryczno-sekwencyjnego przedstawiono na rysunku 3.29.



Rys. 3.29. Schemat ideowy opracowanego algorytmu parametryczno-sekwencyjnego [208]

Zgodnie z przedstawionym schematem pierwszym etapem algorytmu parametryczno-sekwencyjnego jest eksperyment eliminujący, który ma na celu identyfikację czynników istotnych. Dopiero w następnej kolejności przeprowadza się eksperyment identyfikujący oparty na procedurze sekwencyjnej, którego celem jest uzyskanie powierzchni odpowiedzi o określonej dokładności. Uzyskana powierzchnia odpowiedzi jest w następnej kolejności wykorzystana do planowania jakości, czyli optymalizacji, analizy czułości i projektowania tolerancji.

### 3.3.2.1. Zmodyfikowany kwadrat łaciński

Klasyczne metody projektowania eksperymentów są oparte na planie ortogonalnym, i stosuje się je w przypadku obiektów fizycznych. W przypadku numerycznych modeli obiektów stosuje się plany, które pozwalają na równomierne rozmieszczenie doświadczeń wewnątrz przestrzeni czynnikowej, np. Monte Carlo czy LH. Plan Monte Carlo jest planem losowym, a jego główną wadą jest występowanie korelacji między poszczególnymi doświadczeniami, co objawia się tym, że odległości w przestrzeni

czynnikowej, między niektórymi punktami mogą być zbyt małe. Z kolei plan LH należy do eksperymentów pseudolosowych, a jego zaletą jest zmniejszenie korelacji między doświadczeniami do bardzo małej lub ustalonej wartości, co jest szczególnie istotne w przypadku estymacji parametrów modelu odpowiedzi. Jedną z charakterystycznych cech planu LH jest równomierne rozmieszczenie punktów wewnątrz przestrzeni czynnikowej.

Plan LH jest preferowany w przypadku eksperymentów numerycznych. Plan ten składa się z punktów, które są wybierane w sposób pseudolosowy z przestrzeni czynnikowej. Pseudolosowość polega na tym, że przestrzeń czynnikowa jest podzielona na  $r^n$  podobszarów o równym prawdopodobieństwie, gdzie  $r$  oznacza liczbę planowanych doświadczeń, a  $n$  liczbę czynników. Plan LH jest tworzony według następującego schematu (rys. 3.14f):

- określenie liczby doświadczeń  $n$  w planie eksperymentu,
- podział każdego wymiaru przestrzeni czynnikowej na  $n$  równych części,
- generacja dla każdego czynnika  $n$  losowych permutacji wartości poziomów,
- połączenie wygenerowanych permutacji, dla wszystkich czynników i ich poziomów w plan eksperymentu.

Korzystając z podanego schematu można utworzyć wiele różnych planów LH dla danej liczby doświadczeń. Istnieje jednak kryterium oceny poprawności planu LH. Miarą optymalności planu LH jest najmniejsza odległość między punktami w przestrzeni czynnikowej. Optymalizacja planu LH polega na znalezieniu takiego planu, który maksymalizuje tę odległość

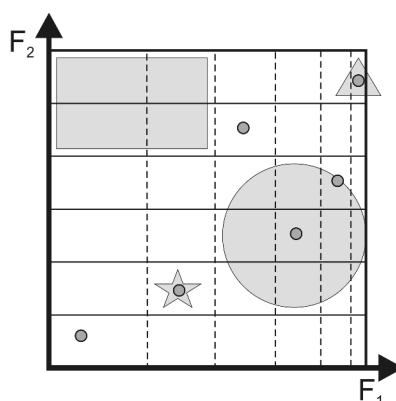
$$d_{\min} \rightarrow \max . \quad (3.70)$$

Miara ta pozwala na równomierne wypełnienie przestrzeni czynnikowej doświadczeniami.

Plan LH stosuje się najczęściej do prostokątnych przestrzeni czynnikowych. Można go jednak stosować także do przestrzeni nieprostokątnych. W takim przypadku tworzy się więcej poziomów niż to wynika z założonej liczby doświadczeń. Następnie losuje się punkty, przy czym jeżeli nie można utworzyć planu eksperymentu, to proces generacji jest powtarzany, z jednoczesnym zwiększaniem liczby poziomów. Z inżynierskiego punktu widzenia wadą planu LH jest losowy wybór punktów w przestrzeni czynnikowej. Z punktu widzenia eksperta określone punkty lub obszary przestrzeni czynnikowej są bardziej pożądane niż inne. Z tego też powodu zespół kierowany przez autora zaproponował modyfikację standardowej procedury wyboru punktów doświadczeń, według schematu LH. Celem modyfikacji było uwzględnienie istniejącej wiedzy eksperta w odniesieniu do badanej przestrzeni czynnikowej oraz zachowanie specyfikacji planu LH. Zaproponowana modyfikacja została określona terminem zmodyfikowanego kwadratu łacińskiego MLH (ang. *Modified Latin Hypercube*) [208, 206, 218]. W tabeli 3.7 przedstawiono przyjęte założenia dla planu eksperymentu według schematu MLH, natomiast na rysunku 3.30 przedstawiono ich reprezentację graficzną.

Tabela 3.7. Przyjęte założenia dotyczące planu MLH

Propozycje zmian planu według kwadratu łacińskiego	Oznaczenie
Wybór „kluczowych” podobszarów przestrzeni czynnikowej	☆
Zagęszczanie podobszarów w miejscach, gdzie spodziewany jest nieliniowy charakter powierzchni odpowiedzi	-----
Dołączenie punktów planu, które znajdują się w pobliżu granicy przestrzeni czynnikowej	▲
Wykluczenie tych podobszarów, które wydają się być mało istotne lub są ograniczone warunkami brzegowymi	■
Generowanie $n$ eksperymentu i wybór takiego, dla którego odległość minimalna między punktami będzie maksymalna	○



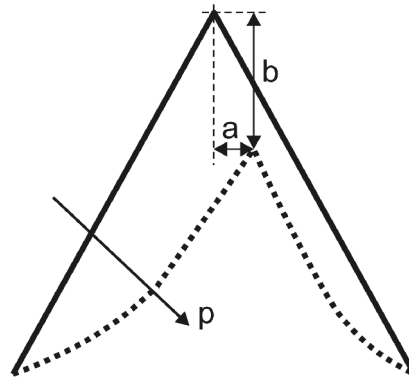
Rys. 3.30. Reprezentacja graficzna założeń dotyczących konstrukcji planu MLH

W przypadku standardowego kwadratu łacińskiego przyjmuje się równomierny podział na  $n$  części każdego wymiaru przestrzeni czynnikowej. Założenie to odpowiada jednostajnemu rozkładowi prawdopodobieństwa. Podstawowym problemem w przypadku implementacji zmodyfikowanego kwadratu łacińskiego jest odpowiedni podział poszczególnych wymiarów przestrzeni czynnikowej na podstawie niejednostajnego rozkładu prawdopodobieństwa (rys. 3.30). Zaproponowano nową klasę funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$  opartą na trójparametrowym rozkładzie:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} b + (1-b)(p+1) \left( \frac{x}{a} \right)^p \quad \text{dla } x \in [0, a] \\ b + (1-b)(p+1) \left( \frac{1-x}{1-a} \right)^p \quad \text{dla } x \in (a, 1) \end{array} \right\}, \quad (3.71)$$

gdzie poszczególne parametry  $a$ ,  $b$  i  $p$  spełniają następujące założenia:

- parametr  $a \in (0, 1)$  jest odpowiedzialny za przesunięcie wierzchołka trójkąta,
- parametr  $b \in (0, 1+1/p)$  jest odpowiedzialny za zmianę wysokości trójkąta,
- parametr  $p \in [0, \infty]$  jest odpowiedzialny za zmianę kształtu ramion trójkąta, co zostało przedstawione w formie poglądowej na rysunku 3.31.



Rys. 3.31. Schemat poglądowy opracowanego trójparametrowego rozkładu prawdopodobieństwa

W przypadkach granicznych, tzn.:

- gdy  $a = 0$ , otrzymuje się rozkład dany wzorem:

$$f(x) = b + (1-b)(p+1)(1-x)^p \quad (3.72)$$

- gdy  $a = 1$ , otrzymuje się rozkład dany wzorem:

$$f(x) = b + (1-b)(p+1)x^p \quad (3.73)$$

- gdy  $b = 1$  i  $p = 0$ , otrzymujemy rozkład jednostajny:

$$f(x) = 1 \quad (3.74)$$

Opracowany rozkład prawdopodobieństwa spełnia przyjęte założenia oraz pozwala w rezultacie na:

- transformację wiedzy eksperta w postaci odpowiedniego podziału przestrzeni czynnikowej na podobszary o niejednostajnym rozkładzie,
- bardziej optymalny dobór planu eksperymentu,
- ograniczenie koniecznej liczby eksperymentów w celu uzyskania powierzchni odpowiedzi o zadanej dokładności.

Jednocześnie należy stwierdzić, że:

- w celu efektywnego wykorzystania możliwości planu MLH niezbędna jest wiedza eksperta; takie podejście jest warunkiem koniecznym w przypadku odpowiedzi

o charakterze nieliniowym i pozwala na bardziej dokładną i efektywną analizę odpowiedzi o charakterze nieliniowym z ograniczeniem niezbędnej liczby eksperymentów,

- konsekwencją niejednostajnego rozkładu prawdopodobieństwa jest nierównomierny podział przestrzeni czynnikowej na podobszary; w takim przypadku pojawia się dodatkowy problem związany z uzyskaniem powierzchni odpowiedzi – zastosowanie aproksymacji opartej na wielomianach lub splinach jest niedokładne, natomiast najlepsze wyniki osiąga się w przypadku interpolacji np. metoda Kriging,
- w przypadku tradycyjnego planu LH nie ma możliwości wyboru punktów doświadczeń na krawędzi przestrzeni czynnikowej lub w jej pobliżu; plan MLH umożliwia takie zagęszczenie, które umożliwia wybór punktów w pobliżu krawędzi przestrzeni czynnikowej; warunek ten jest szczególnie przydatny w przypadku typowych zagadnień inżynierskich z tego powodu, że najbardziej interesujący obszar zazwyczaj leży w pobliżu krawędzi przestrzeni czynnikowej,
- połączenie planu MLH oraz metody RSM, opartej na interpolacji według metody Kriging, i oszacowanie błędu powierzchni odpowiedzi pozwala na implementację metody sekwencyjnej ograniczającej niezbędną liczbę doświadczeń w celu otrzymania powierzchni odpowiedzi o określonej dokładności.

### 3.3.2.2. Interpolacja powierzchni odpowiedzi metodą Kriging

W wielu dziedzinach inżynierii najczęściej spotyka się powierzchnie odpowiedzi o charakterze nieliniowym. Dotyczy to zwłaszcza dziedziny montażu elektronicznego. Wynika to z istnienia zjawisk oraz materiałów o właściwościach nieliniowych. Jako model powierzchni odpowiedzi stosuje metody stochastyczne. Przykładem jest metoda Kriging, która należy do metod interpolacyjnych, w związku z czym można ją stosować w przypadku braku czynników szumu.

W przypadku metod stochastycznych przyjmuje się założenie, że uzyskana w wyniku przeprowadzonego eksperymentu powierzchnia odpowiedzi ma charakter deterministyczny  $y(\mathbf{X})$ , a jednocześnie może być opisana jako realizacja procesu stochastycznego. Stochastyczny charakter procesu dotyczy czynnika błędu. Przykładem takiego procesu mogą być obliczenia numeryczne. W takim przypadku model powierzchni odpowiedzi można potraktować jako kombinację modelu matematycznego, np. wielomianu oraz dodatkowego czynnika określanego czynnikiem błędu  $\varepsilon(x)$ :

$$\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^k \beta_i f_i(x) + \varepsilon(x). \quad (3.75)$$

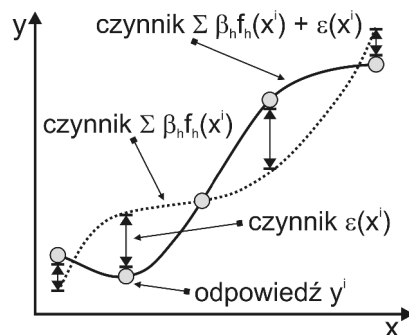
Błąd  $\varepsilon(x)$  jest odchyleniem wyników eksperymentu od założonego modelu matematycznego, co przedstawiono na rysunku 3.32 [219, 220]. Błąd ten można potraktować jako wynik realizacji procesu stochastycznego o wartości średniej  $\varepsilon$  równej 0 i kowariancji  $V$  między dwoma punktami przestrzeni  $u$  i  $v$ :



$$V(u, v) = \sigma^2 R(u, v), \quad (3.76)$$

gdzie  $\sigma^2$  – wariancja procesu,  $R(u, v)$  – korelacja.

Funkcja kowariancji odpowiada za gładkość dopasowania powierzchni odpowiedzi. W przypadku gładkich powierzchni odpowiedzi funkcja kowariancji ma pochodne, w przeciwieństwie do powierzchni nieregularnych.



Rys. 3.32. Metoda dopasowanie powierzchni odpowiedzi w przypadku metod stochastycznych

Procedura dopasowania modelu powierzchni odpowiedzi składa się z dwóch etapów:

- wyznaczenia funkcji głównej np. metodą regresji,
- interpolacji odchyleń w punktach eksperymentu, tak jakby nie została wcześniej przeprowadzona procedura regresji.

Metoda Kriging jest stosunkowo trudna w implementacji. Wymaga ona precyzyjnego oszacowania parametrów modelu. Z kolei zaletą tej metody jest możliwość oszacowania modelu powierzchni błędu odpowiedzi. Powierzchnia błędu pozwala na zastosowanie procedury sekwencyjnej, tzn. oszacowanie położenia kolejnego punktu w przestrzeni czynnikowej, który zapewnia najlepszą poprawę modelu powierzchni odpowiedzi.

Metoda Kriging zapewnia stosunkowo dużą elastyczność ze względu na dobór odpowiedniej funkcji korelacji  $R(u, v)$ . Dodatkowo w niektórych przypadkach – w zależności od funkcji korelacji – można uzyskać model powierzchni odpowiedzi na zasadzie aproksymacji. W przypadku eksperymentów numerycznych, które z natury są deterministyczne, najczęściej stosuje się jednak metodę interpolacji.

Jeżeli macierz  $x$  oznacza punkty wybranego planu eksperymentu dla  $k$  czynników oraz  $n$  punktów, natomiast macierz  $y$  wyniki eksperymentu, to można zapisać, że:

$$y^i = f(x_1^i, x_2^i, \dots, x_k^i); \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.77)$$

gdzie

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_k^1 \\ x_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & \cdot & \cdot & x_k^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

Zgodnie z zależnością 3.75 można dopasować model powierzchni odpowiedzi do wyników doświadczeń według następującej zależności:

$$y^i = \sum_{h=1}^k \beta_h f_h(\mathbf{x}^i) + \varepsilon^i, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.79)$$

gdzie  $f_h(\mathbf{x}^i)$  może być liniową lub nieliniową funkcją położenia  $\mathbf{x}^i$ ,  $\beta_h$  – nieznanymi współczynniki proporcjonalności założonej funkcji,  $\varepsilon^i$  – czynnik błędu odchylenia założonej funkcji od wyników eksperymentu – błąd ten ma rozkład normalny  $N(0, \delta^2)$ .

Dodatkowo można przyjąć założenie, że czynniki błędu  $\varepsilon^i$  można zapisać jako funkcję ciągłą położenia  $\mathbf{x}^i$ :

$$\varepsilon^i = \varepsilon^i(\mathbf{x}^i). \quad (3.80)$$

W takim przypadku czynniki błędu będą wzajemnie skorelowane oraz zależne od wartości odpowiedzi i odległości między punktami w przestrzeni projektowej. Jeżeli punkty te znajdują się blisko siebie, wówczas błędy powinny być podobne, co oznacza dużą wartość korelacji. Z tego też powodu przyjmuje się założenie, że korelacja błędów jest funkcją odległości między punktami. Za funkcję odległości można przyjąć zwykłą odległość euklidesową lub częściej następującą funkcję o współczynnikach wagowych  $\Theta$  i  $p$ :

$$d(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j) = \sum_{h=1}^k \Theta_h |x_h^i - x_h^j|^{p_h}, \quad (3.81)$$

gdzie współczynnik  $\Theta$  jest większy od 0, natomiast współczynnika  $p_h$  zawiera się w przedziale  $[1, 2]$ .

Korzystając z przyjętej funkcji odległości opisanej zależnością (3.81), korelację między błędami można wyznaczyć z zależności:

$$\text{corr}[\varepsilon(\mathbf{x}^i), \varepsilon(\mathbf{x}^j)] = \frac{1}{e^{d(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j)}}. \quad (3.82)$$

Funkcja korelacji ma następujące właściwości:

- jeżeli odległość między punktami jest mała, to wartość funkcji korelacji jest duża,
- jeżeli odległość między punktami jest duża, to wartość funkcji korelacji zbliża się do 0.

Wartości funkcji korelacji tworzą, tzw. macierz korelacji  $\mathbf{R}$  o wymiarach  $n \times n$ , która ma kluczowe znaczenie dla modelu powierzchni odpowiedzi:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ \vdots & \cdot & \cdot \\ r_{n,1} & \cdot & r_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

gdzie współczynniki  $r_{ij}$  są wektorami postaci:

$$r_{i,j} = \text{corr}[\varepsilon(\mathbf{x}^i), \varepsilon(\mathbf{x}^j)]. \quad (3.84)$$

Funkcja korelacji oraz macierzy korelacji  $\mathbf{R}$  pozwala na wyznaczenie prostego liniowego modelu powierzchni odpowiedzi, np. metodą regresji lub rachunku wariacyjnego. Wyznaczony model powierzchni odpowiedzi ma kilka ważnych zalet, z których najważniejsza to możliwość zastąpienia czynników regresji współczynnikami o stałej wartości  $\mu$ :

$$\mu = \sum_{h=1}^k \beta_h f_h(\mathbf{x}^i), \quad i=1, \dots, n. \quad (3.85)$$

Pozwala to, m.in. na przepisanie zależności (3.79) w postaci:

$$y(\mathbf{x}^i) = \mu + \varepsilon(\mathbf{x}^i), \quad \varepsilon(\mathbf{x}^i) \rightarrow N(0, \delta^2). \quad (3.86)$$

Metoda Kriging jest stosowana do interpolacji wyników eksperymentu. Niestety jej główną wadą jest implementacja praktyczna, która wynika z następujących problemów:

- konieczność estymacji współczynników funkcji odległości opisanej zależnością (3.81); w praktyce dla przypadku jednowymiarowego należy oszacować  $2k+2$  współczynników, to znaczy:  $\mu, \delta^2, \theta_1 \dots \theta_k, p_1 \dots p_k$ ,
- poprawna definicji funkcji odległości oraz estymacja jej współczynników w przypadku wielowymiarowym.

Estymację współczynników funkcji odległości można otrzymać metodą największej wiarygodności przez maksymalizację funkcji  $F$  opisanej zależnością:

$$F = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\delta^2)^{n/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \frac{1}{e^{\frac{(y-\mathbf{1}\mu)' \mathbf{R}^{-1} (y-\mathbf{1}\mu)}{2\delta^2}}}, \quad (3.87)$$

gdzie  $\mathbf{1}$  –  $n$ -wymiarowy wektor jednostkowy,  $\mathbf{y}$  –  $n$ -wymiarowy wektor zaobserwowanych odpowiedzi:

$$\mathbf{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n)'. \quad (3.88)$$

Estymatory współczynników  $\mu$  oraz  $\delta^2$ , które maksymalizują funkcję  $F$  opisaną zależnością (3.87), można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{\mathbf{1}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{1}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{1}} \\ \hat{\delta}^2 &= \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{1} \hat{\mu})' \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{1} \hat{\mu})}{n}\end{aligned}\quad (3.89)$$

Z kolei najlepszym nieobciążonym estymatorem wartości odpowiedzi  $y$  w punkcie  $\mathbf{x}'$  jest estymator opisany zależnością:

$$y(\mathbf{x}') = \hat{\mu} + \mathbf{r}' \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{1} \hat{\mu}), \quad (3.90)$$

gdzie  $\mathbf{r}$  –  $n$ -wymiarowy wektor macierzowym, którego współczynniki można wyznaczyć z zależności:

$$r_i(\mathbf{x}') = \text{corr}[\varepsilon(\mathbf{x}^\wedge), \varepsilon(\mathbf{x}^i)]. \quad (3.91)$$

Jak wcześniej podano, zaletą metody Kriging jest możliwość oszacowania błędu dopasowania modelu powierzchni odpowiedzi. Oszacowanie takie można wykonać przez porównanie wartości odpowiedzi  $y(\mathbf{x}')$  oraz wartości rzeczywistej  $y^i$  w tym punkcie, korzystając z definicji wartości średniej błędu kwadratowego  $s^2(\mathbf{x}')$  w postaci:

$$s^2(\mathbf{x}') = E[(\hat{y}(\mathbf{x}') - y(\mathbf{x}'))^2] = \hat{\delta}^2 \left[ \mathbf{1} - \mathbf{r}' \mathbf{R} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{1} - \mathbf{1}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}'}{\mathbf{1}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{1}} \right]. \quad (3.92)$$

Dla większości przypadków wygodniej jest jednak posługiwać się pierwiastkiem wartości średniej błędu kwadratowego  $s(\mathbf{x})$ :

$$s(\mathbf{x}) = \sqrt{s(\mathbf{x})^2}. \quad (3.93)$$

Jak wynika z zależności (3.92), oszacowanie błędu interpolacji jest funkcją macierzy korelacji  $\mathbf{R}$  opisanej zależnościami (3.83) i (3.84). Elementy macierzy  $\mathbf{R}$  można wyznaczyć dla przypadku jednowymiarowego z zależności:

$$r_{i,j} = \frac{1}{e^{\theta_h |x^i - x^j|^p}}. \quad (3.94)$$

Aby wyznaczyć macierz korelacji  $\mathbf{R}$  należy dokonać estymacji współczynników  $\theta_h$  oraz  $p_h$ , co stanowi ważny problem metody Kriging. W tym celu można przyjąć założenie, że współczynnik  $p$  jest równy 2, natomiast wartość współczynnika  $\theta$  wyznacza się wówczas – ze względu na brak odpowiedniego estymatora – wybraną metodą optymalizacji. Współczynnik  $\theta$  można uznać za miarę istotności zmiennej  $x_h$ , co można wyrazić w postaci stwierdzenia, że nawet małe wartości odległości  $d_h^{i,j}$ :

$$d_h^{i,j} = \left| \mathbf{x}_h^i - \mathbf{x}_h^j \right|, \quad (3.95)$$

mogą prowadzić do dużych zmian wartości funkcji w punktach  $x_i$  i  $x_j$ . Wartość współczynnika  $\Theta_h$  ma istotne znaczenie:

- jeżeli wartość  $\Theta_h$  jest duża, to małe zmiany  $d_h^{i,j}$  prowadzą do małej wartości korelacji,
- jeżeli wartość  $\Theta_h$  jest mała, to małe zmiany  $d_h^{i,j}$  prowadzą do dużej wartości korelacji,

W praktyce stosuje się następujące metody estymacji współczynnika  $\Theta_h$ :

- metoda oparta na procedurze sprawdzianu krzyżowego [123, 221],
- metoda oparta na wyznaczniku macierzy korelacji  $\det \mathbf{R}$  [222],
- metoda zaproponowana przez autora, oparta na rachunku wariacyjnym [208, 206]; metoda polega na wyznaczeniu wartości maksymalnej funkcjonału parametrycznego  $F(\Theta, p)$  opisującego całkowity błąd interpolacji.

Metoda oparta na procedurze sprawdzianu krzyżowego (ang. *cross-validation*) polega na wyznaczeniu błędu dopasowania uzyskanej powierzchni odpowiedzi, według schematu:

$$E(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_{-i}(\mathbf{x}) - \hat{y}(\mathbf{x}))^2}, \quad (3.96)$$

gdzie  $n$  – liczba punktów eksperymentu,  $\hat{y}(\mathbf{x})$  – dopasowana powierzchnią odpowiedzi,  $\hat{y}_{-i}(\mathbf{x})$  – dopasowana powierzchnię powierzchni uzyskaną dla  $n - 1$  punktów, przy założeniu, że „usunięty” jest  $i$ -ty punkt eksperymentu.

Procedura wymaga zatem dopasowania  $n - 1$  powierzchni odpowiedzi  $\hat{y}_{-i}(\mathbf{x})$ . Optymalną wartość współczynnika  $\Theta$  uzyskuje się w wyniku minimalizacji błędu dopasowania  $E(\mathbf{x})$  opisanego zależnością (3.96), tj.:

$$\hat{\Theta} = \min_{\Theta} E(\mathbf{x}). \quad (3.97)$$

Metoda oparta na wyznaczniku macierzy korelacji  $\det \mathbf{R}$  polega na wyznaczeniu wartości minimalnej funkcjonału opisanego zależnością:

$$F(\Theta, p) = (\det \mathbf{R})^{\frac{1}{n}} \hat{\delta}^2. \quad (3.98)$$

Jeżeli przyjmie się założenie, że wartość parametru  $p = 2$ , to estymator parametru  $\Theta$  można zapisać w postaci:

$$\hat{\Theta} = \min_{\Theta} F(\Theta, p=2) = \min_{\Theta} (\det \mathbf{R})^{\frac{1}{n}} \hat{\delta}^2. \quad (3.99)$$

Z kolei metoda zaproponowana przez autora polega na wyznaczeniu wartości maksymalnej funkcjonału parametrycznego  $F(\Theta, p)$  w postaci całki oznaczonej opisującej całkowity błąd interpolacji:

$$F(\Theta, p) = \int_{x'}^{x''} s(\mathbf{x}, \Theta, p) d\mathbf{x}, \quad (3.100)$$

gdzie  $\mathbf{x}$  – wektor punktów, w których szacuje się wartość odpowiedzi,  $s(\mathbf{x})$  – pierwiastek z wartości średniej błędu kwadratowego.

W przypadku przyjęcia założenia, że wartość parametru  $p = 2$ , estymator parametru  $\Theta$  można zapisać jako:

$$\hat{\Theta} = \min_{\Theta} F(\Theta, p=2) = \min_{\Theta} \int_{x'}^{x''} s(\mathbf{x}, \Theta, 2) d\mathbf{x}. \quad (3.101)$$

Wartość estymatora parametru  $\Theta$  wyznacza się metodą numeryczną. Metoda ta polega na numerycznym całkowaniu oraz optymalizacji z wykorzystaniem metody sympleks [183]. W takim przypadku funkcjonal opisany zależnością (3.100) należy przepisać w postaci:

$$F(\Theta, p) = \sum_{x'}^{x''} s(\mathbf{x}, \Theta, p) d\mathbf{x} \quad (3.102)$$

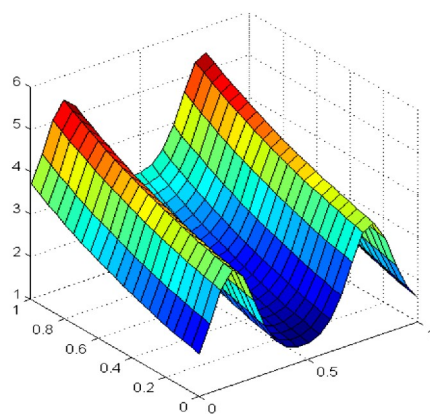
Innym istotnym problemem metody Kriging jest estymacja współczynników  $\Theta_{hi}$  w przypadku wielowymiarowym. Istnieje wówczas konieczność oszacowania parametrów  $\Theta_{hi}$  dla każdego wymiaru oddzielnie. Dla przypadku dwuwymiarowego funkcję odległości można zapisać w postaci:

$$r_{i,j} = \frac{1}{e^{\Theta_{h1}|x_1^i - x_{1h}^j| + \Theta_{h2}|x_2^i - x_{2h}^j|}}, \quad (3.103)$$

co wymaga estymacji dwóch współczynników:  $\Theta_{h1}$  i  $\Theta_{h2}$ .

Problem estymacji wielowymiarowej występuje stosunkowo często w praktyce inżynierskiej i stanowi poważne wyzwanie dla istniejących obecnie metod. Wydaje się, że jedną z najbardziej optymalnych metod w tym celu, jest metoda sprawdzianu krzyżowego oraz metoda zaproponowana przez autora. Przykładem odpowiedzi, która wymaga takiego podejścia może być powierzchnia odpowiedzi, która w jednym wymiarze ma charakter monotoniczny, w drugim natomiast charakter okresowy, np. model funkcji opisanej następującą zależnością (rys. 3.33):

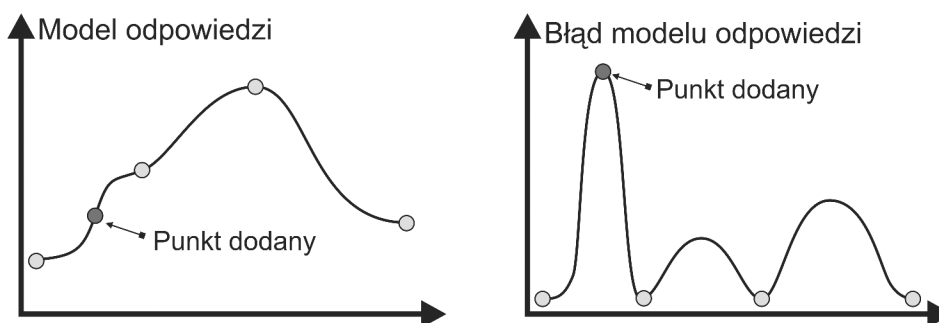
$$f(x, y) = e^{\sin(10x)} + e^y, \quad (3.104)$$



Rys. 3.33. Przykład modelu powierzchni odpowiedzi, wymagającej estymacji dwóch parametrów  $\Theta$

### 3.3.2.3. Oszacowanie błędu modelu powierzchni odpowiedzi

Celem opracowanego algorytmu parametryczno-sekwencyjnego było ograniczenie koniecznej liczby doświadczeń, aby uzyskać model powierzchni odpowiedzi o określonej dokładności. Procedura sekwencyjna zakładała możliwość dodawania kolejnych doświadczeń do już przeprowadzonego eksperymentu w celu poprawy modelu powierzchni odpowiedzi. Warunkiem było opracowanie obiektywnego kryterium, które w sposób optymalny pozwalałoby na wybór kolejnego punktu w przestrzeni projektowej. Za kryterium wyboru przyjęto błąd modelu powierzchni odpowiedzi. Nowy punkt był wybierany w położeniu, w którym błąd modelu powierzchni odpowiedzi był największy. Kolejne doświadczenie prowadziło do najbardziej optymalnej poprawy modelu powierzchni odpowiedzi (rys. 3.34).



Rys. 3.34. Schemat ideowy algorytmu sekwencyjnego

Wyznaczony błąd modelu powierzchni odpowiedzi można traktować jako prognozę jej spodziewanej poprawy  $EI$  (ang. *Expected Improvement*). Wartość  $EI$  w przypadku wykonania kolejnego doświadczenia w punkcie  $\mathbf{x}$ , można wyznaczyć z zależności:

$$EI(\mathbf{x}) = (f_{\min} - \hat{y}) \Phi\left(\frac{f_{\min} - \hat{y}}{\hat{s}}\right) + \hat{s} \varphi\left(\frac{f_{\min} - \hat{y}}{\hat{s}}\right), \quad (3.105)$$

gdzie  $f_{\min}$  – optymalna wartość możliwa do uzyskania w czasie doświadczenia,  $\Phi$  oraz  $\varphi$  – gęstość i dystrybuanta rozkładu normalnego.

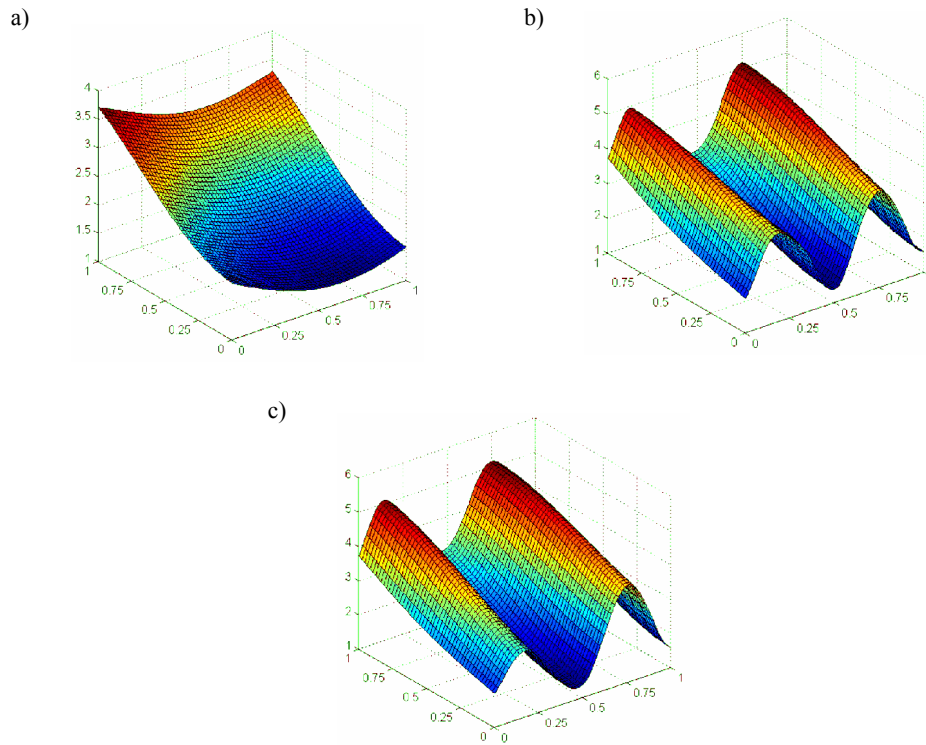
Korzystając ze współczynnika  $EI$ , algorytm parametryczno-sekwencyjny będzie składał się z następujących kroków:

1. opracowanie parametrycznego modelu numerycznego obiektu,
2. wykonanie eksperymentu eliminującego, według planu ortogonalnego,
3. opracowanie wstępnego modelu powierzchni odpowiedzi, według metody Kriging,
4. oszacowanie błędu modelu powierzchni odpowiedzi,
5. znalezienie położenia kolejnego punktu, który zapewnia najlepszą poprawę modelu powierzchni odpowiedzi,
6. jeżeli wartość spodziewanej poprawy modelu powierzchni odpowiedzi, opisanej zależnością (3.105), jest mniejsza niż założona wartość, to procedura dodawania kolejnych punktów zostaje przerwana,
7. jeżeli wartość spodziewanej poprawy powierzchni odpowiedzi, opisanej zależnością (3.105), jest większa niż założona wartość, to procedura dodawania kolejnych punktów jest kontynuowana.

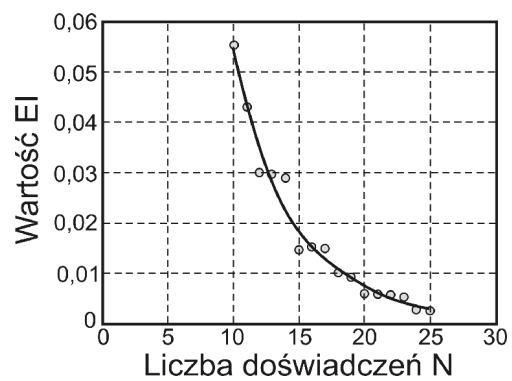
Na rysunku 3.35 przedstawiono przykładowe wyniki procedury dodawania kolejnych punktów, dla przypadku funkcji dwuwymiarowej – monotonicznej w jednym wymiarze, a periodyczną w drugim opisanej zależnością (3.104) oraz przedstawionej na rysunku 3.33.

Jednym z istotnych problemów opracowanego algorytmu parametryczno-sekwencyjnego jest plan eksperymentu eliminującego, zwłaszcza początkowa liczba doświadczeń  $N_0$ . Jeżeli liczba doświadczeń  $N_0$  będzie zbyt duża, to istnieje niebezpieczeństwo wykonania zbyt dużej liczby doświadczeń – co jest czasochłonne i kosztowne. Jeżeli natomiast liczba doświadczeń  $N_0$  będzie zbyt mała, to istnieje niebezpieczeństwo przeoczenia istotnej wartości ekstremalnej. Z drugiej jednak strony należy zauważyć, że liczba doświadczeń początkowych  $N_0$  będzie zależała także od rzeczywistego charakteru powierzchni odpowiedzi, który nie jest znany a priori. Zaletą opracowanego algorytmu jest ograniczenie liczby koniecznych doświadczeń, niezależnie od wiedzy i doświadczenia inżyniera. Algorytm pozwala na uzyskanie modelu powierzchni odpowiedzi o założonej dokładności. Na rysunku 3.36 przedstawiono przykładową wartość błędu modelu powierzchni odpowiedzi jako funkcji całkowitej liczby przeprowadzonych doświadczeń  $N$ .





Rys. 3.35. Model powierzchni odpowiedzi dla funkcji opisanej zależnością 3.104 uzyskanej w wyniku algorytmu parametryczno-sekwencyjnego dla całkowitej liczby doświadczeń  $n$  równych: a)  $n = 9$ , b)  $n = 12$ , c)  $n = 15$



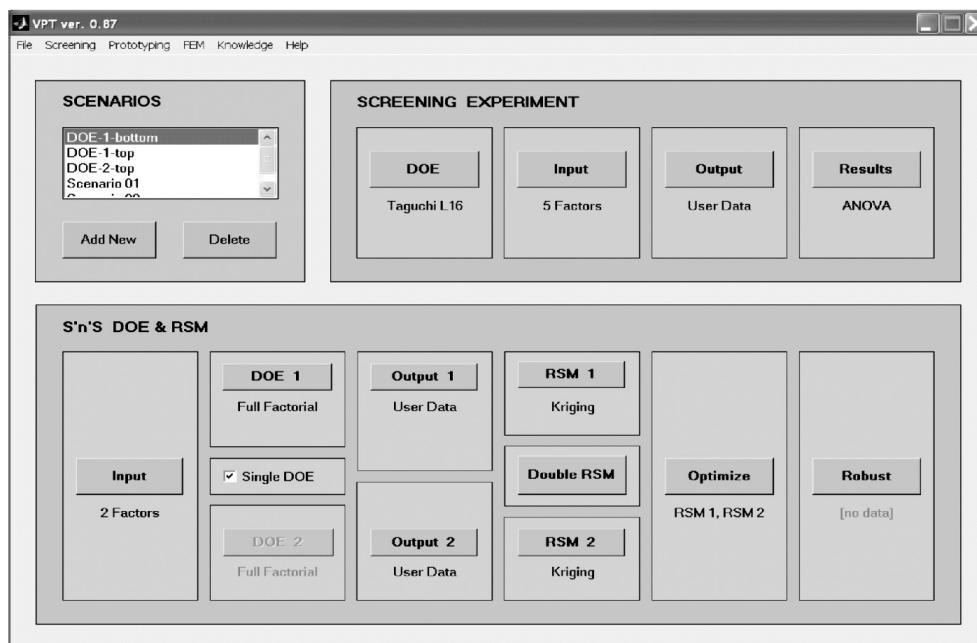
Rys. 3.36. Przykładowa zależność błędu powierzchni odpowiedzi od całkowitej liczby doświadczeń  $N$

### 3.3.2.4. Opracowany program komputerowy do projektowania numerycznego

Korzystając z dostępnych metod i algorytmów projektowania numerycznego wykonano pod kierownictwem autora program komputerowy pod nazwą VPT (ang. *Virtual Prototyping Tool*). Program zrealizowano za pomocą środowiska do obliczeń matematycznych MATLAB. Na rysunku 3.37 przedstawiono interfejs opracowanego programu. Głównym celem opracowanego programu było udostępnienie narzędzi do:

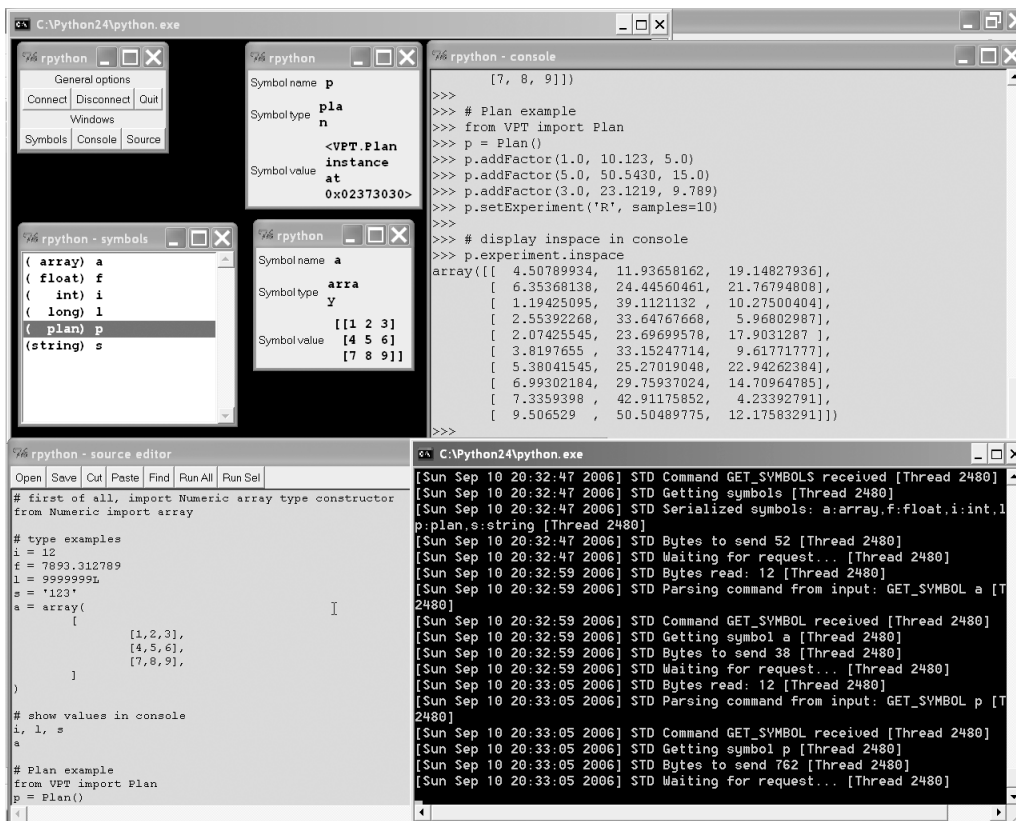
- testowania procedur i algorytmów stosowanych w projektowaniu numerycznym,
- projektowania numerycznego na potrzeby dydaktyki oraz programów badawczych ukierunkowanych na problemy projektowania.

Program pozwala na definicję scenariusza, tj. *Scenarios* i realizację planu eksperymentu składającego się z dwóch części: planu eliminującego, tj. *Screening* i planu identyfikującego, tj. *Smart and Sequential*. Część eliminująca oparta jest na planie ortogonalnym i pozwala na identyfikację czynników istotnych, korzystając z analizy wariancji. Z kolei część identyfikująca oparta jest np. na planie LH lub MLH i pozwala na opracowanie modelu powierzchni odpowiedzi. Część tę rozbudowano o możliwość prowadzenia optymalizacji dwukryterialnej, jak również o moduł optymalizacyjny i projektowania tolerancji.



Rys. 3.37. Interfejs opracowanego programu do projektowania numerycznego

O wyborze programu MATLAB zdecydował fakt, że środowisko to zawiera gotowe procedury matematyczne dotyczące operacji na macierzach. Istotne było również, że środowisko MATLAB pozwala na tworzenie własnych aplikacji i pakietów, które mają możliwość korzystania tylko z „jądra” programu. Dodatkowo rozpoczęto także prace nad aplikacją samodzielną, która nie wymaga programu MATLAB. W tym celu skorzystano z języka programowania C/C++ oraz języka skryptowego Python. Celem opracowywanego programu jest udostępnienie metod i algorytmów projektowania numerycznego nie tylko do celów dydaktyki i prac badawczych, lecz także do zastosowań komercyjnych [56, 223, 224].



Rys. 3.38. Opracowany program typu klient–serwer do tworzenia i uruchamiania programów skryptowych w języku Python

Dodatkowo pod kierunkiem autora [225], rozpoczęto także prace nad programem komputerowym typu klient–serwer. Program ten ma możliwość pisania i uruchamiania programów skryptowych w języku Python. Zaletą programów skryptowych w języku Python jest niezależność od wykorzystywanego systemu operacyjnego. Dodatkowo

planuje się w przyszłości wykonanie odpowiedniej aplikacji sieciowej za pomocą języka programowania Java, co pozwala użytkownikom na tworzenie własnych procedur i algorytmów projektowania. Ideą tworzonego systemu jest udostępnienie metod i algorytmów projektowania numerycznego dla osób zainteresowanych ich implementacją. Ponadto biorąc pod uwagę wysokie ceny programów komercyjnych, także w celu ich wykorzystania przez małe i średnie jednostki produkcyjne.

Jądro opracowanego programu pozwala na obsługę wielu użytkowników jednocześnie oraz zawiera interpreter języka skryptowego, jak i definicje podstawowych typów danych skalarnych oraz typów tablicowych, które mogą następnie być wykorzystane w postaci kontenerów. Serwer zawiera definicje nowych typów danych, jak:

- czynnik, tj. typ *Factor*; jest podstawowym typem danych o charakterze tablicowym, przechowuje wszystkie informacje dotyczące danego czynnika,
- eksperyment, tj. typ *Experiment*; składa się z danych typu tablicowego oraz typu *Factor*, przechowuje wszystkie informacje na temat danego eksperymentu,
- plan, tj. typ *Plan*; jest najbardziej ogólnym kontenerem, w skład którego wchodzi dane typu *Factor* i *Experiment*.

Program klienta został wykonany w wersji zawierającej jedynie linie poleceń oraz w postaci graficznego interfejsu użytkownika. Podstawą komunikacji klienta z serwerem jest zaimplementowany protokół sieciowy z wykorzystaniem bibliotek języka Python oraz dodatkowych komend związanych z komunikacją oraz obsługą błędów.

### 3.4. Przykład zastosowania algorytmów w projektowaniu montażu elektronicznego

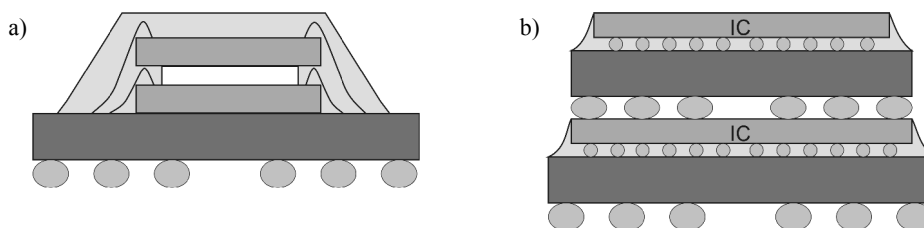
W ramach współpracy autora z Instytutem Fraunhoffera IZM w Niemczech został zrealizowany projekt<sup>53</sup>, którego celem było zastosowanie metod i algorytmów projektowania numerycznego w objętościowym montażu elektronicznym typu 3D [226, 227].

Wraz ze wzrostem stopnia integracji układów scalonych zwiększają się także wymagania dotyczące montażu elektronicznego, co zostało opisane w rozdziale 2.1. Z kolei w rozdziale 2.2 stwierdzono, że jednym z ostatnich wyzwań w dziedzinie montażu jest technika montażu objętościowego typu 3D. Montaż ten polega na wykorzystaniu wymiaru wertykalnego i utworzeniu pojedynczej struktury składającej się

---

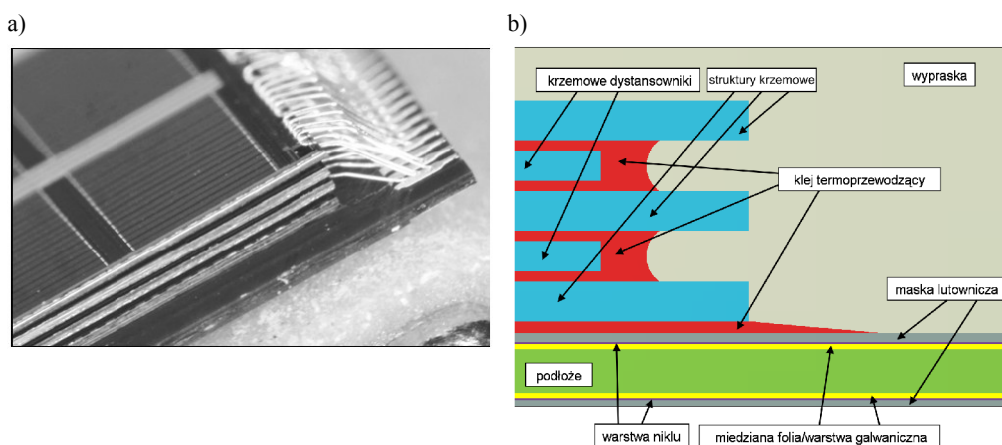
53 W roku 2005 z inicjatywy autora podpisano umowę o wzajemnej współpracy naukowo-badawczej między Fraunhofer IZM –Micro Materials Center Berlin and Chemnitz a Politechniką Wrocławską – Wydział Elektroniki Mikrosystemów i Fotoniki. Jednym z wyników współpracy była praca dyplomowa *Zastosowanie numerycznej metody projektowania w montażu elektronicznym typu 3D* wykonana przez Ł. Dowhania pod kierunkiem autora i dr R. Dudka z Fraunhofer IZM.

z kilku struktur półprzewodnikowych (ang. *Die Stacking*) oraz gotowych układów (ang. *Package Stacking*) – przykład montażu typu 3D przedstawiono na rysunku 3.39.



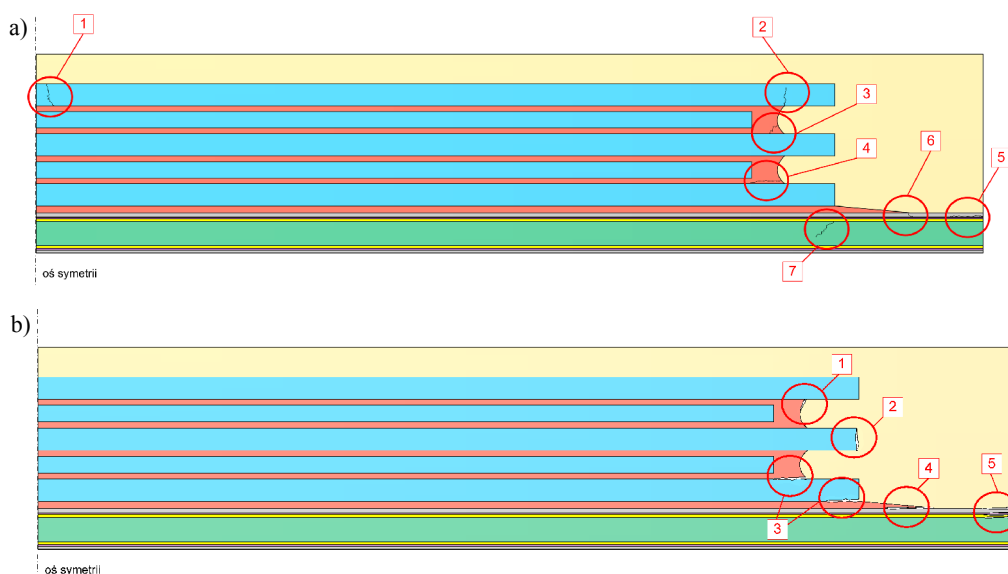
Rys. 3.39. Przykłady montażu typu 3D, w przypadku struktur (a) i układów (b)

W miarę wzrostu zainteresowania montażem typu 3D zwiększają się także wymagania dotyczące jego niezawodności, a tym samym potrzeba optymalizacji z wykorzystaniem technik projektowania numerycznego [228, 229, 230, 231]. Przeprowadzony proces projektowania numerycznego montażu typu 3D wykonano na przykładzie modułu pamięci. Wybrany moduł pamięci jest stosowany w urządzeniach przenośnych, w przypadku których małe wymiary są sprawą kluczową. Analizowany moduł składał się z trzech struktur półprzewodnikowych oddzielonych od siebie krzemowymi dystansownikami oraz warstwą kleju przewodzącego ciepło. Wykonaną strukturę umieszczono na podłożu, na którym znajdowały się warstwy m.in. maski lutowniczej, folii miedzianej oraz galwaniczne warstwy miedzi i niklu. Połączenia pól montażowych struktur oraz podłoża wykonano za pomocą połączeń drutowych. Tak wykonany moduł był poddany hermetyzacji w procesie zaprasowania przetłocznego. Na rysunku 3.40 przedstawiono zdjęcie oraz wykonany model numeryczny modułu.



Rys. 3.40. Zdjęcie (a) oraz model numeryczny (b) analizowanego modułu pamięci

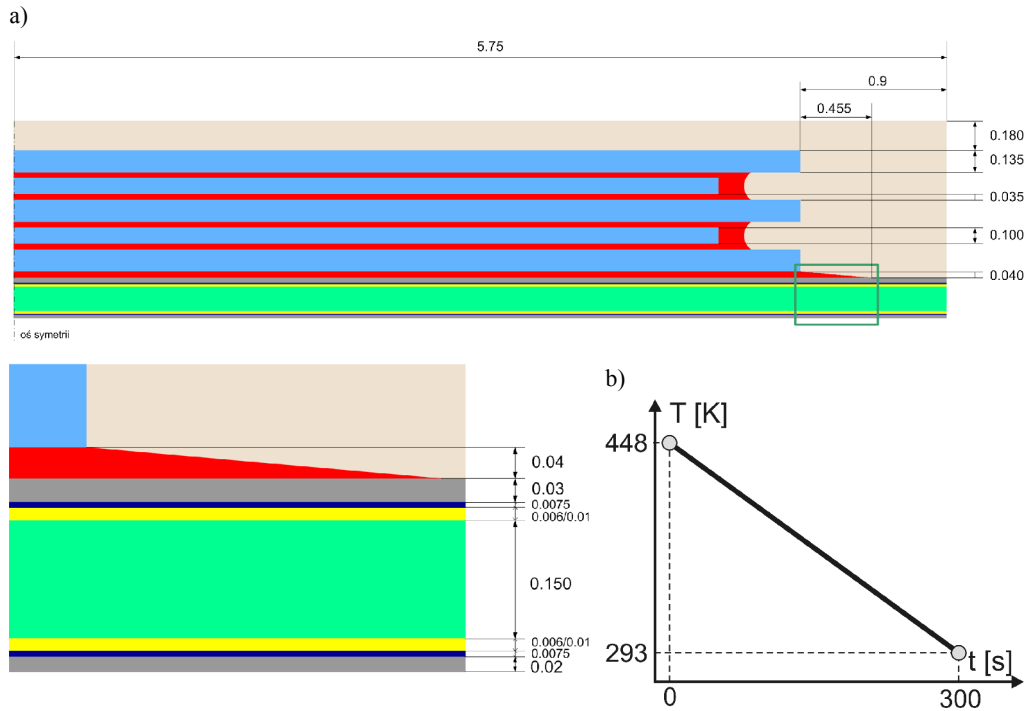
Podstawowym problemem montażu 3D jest problem odprowadzania ciepła i niedopasowania współczynników rozszerzalności cieplnej materiałów. W czasie pracy dochodzi do nagrzewania i chłodzenia modułu, a tym samym do powstawania naprężeń termomechanicznych. Naprężenia te mogą prowadzić do uszkodzenia w wyniku pęknięcia lub rozwarstwiania. Na rysunku 3.41 przedstawiono potencjalne miejsca uszkodzeń analizowanego modułu pamięci.



Rys. 3.41. Potencjalne miejsca uszkodzeń analizowanego modułu w wyniku: pęknięcia (a), rozwarstwienia (b)

Proces projektowania zrealizowano na podstawie parametrycznego modelu numeryczny modułu, który wykonano w programie ABAQUS, korzystając z języka skryptowego Python. Model parametryczny uwzględniał: wymiary geometryczne, właściwości materiałowe, warunki brzegowe oraz obciążenia. Na rysunku 3.42 przedstawiono nominalne wartości wybranych parametrów geometrycznych oraz przyjęty profil obciążenia temperaturowego w postaci 5-minutowego cyklu chłodzenia modułu od temperatury  $T = 448$  K do temperatury  $T = 293$  K. W tabeli 3.8 przedstawiono przyjęte modele materiałowe dla poszczególnych warstw i materiałów.

Celem optymalizacji było zastosowanie algorytmu iteracyjnego i kompaktowego oraz porównanie wyników pod kątem liczby przeprowadzonych doświadczeń oraz otrzymanego rozwiązania optymalnego. Algorytm iteracyjny oparto na odmianie algorytmu genetycznego pod nazwą ewolucji różnicowej (ang. *differential evolution*)



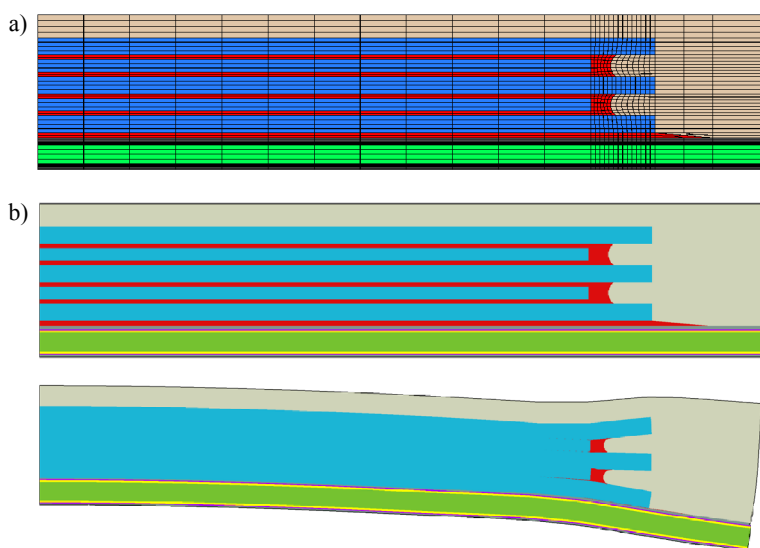
Rys. 3.42. Nominalne wymiary geometryczne (a) oraz profil obciążenia temperaturowego (b)

Tabela 3.8. Modele materiałowe dla poszczególnych warstw modelu numerycznego

Warstwa/materiał	Model materiałowy
Wypraska	lepkosprężysty
Struktura krzemowa	sprężysty
Klej	lepkosprężysty
Maska lutownicza	lepkosprężysty
Nikiel	sprężysto-plastyczny
Miedź	sprężysty
Podłoże	sprężysty

i programie OPTIMUS. Ewolucja różnicowa jest prostym, łatwym do implementacji algorytmem ewolucyjnym bazującym na schemacie rozwoju populacji. Algorytm kompaktowy oparto na opracowanym przez autora algorytmie parametryczno-sekwencyjnym, opisanym w rozdziale 3.3.2 i programie VPT.

Optymalizację wykonano dla modelu dwu- i trójwymiarowego, przy czym ze względu na złożoność oraz dużą liczbę elementów oraz wynikający z tego długi czas obliczeń, algorytm iteracyjny ograniczono jedynie do modelu dwuwymiarowego. W przypadku obu modeli numerycznych konieczne było przyjęcie określonych założeń w odniesieniu do rodzaju elementów, typu symetrii czy ograniczeń. Model dwuwymiarowy miał oś symetrii oraz unieruchomiony węzeł w jej dolnym wierzchołku. Wybrany rodzaj elementów opisywał uogólniony płaski stan odkształcenia (ang. *generalized plane strain*). Jako odpowiedź wybrano ugięcie modułu (ang. *warpage*) na skutek zmiany temperatury. Ugięcie jest jednym z kryteriów pozwalających na ocenę wystąpienia uszkodzenia w montażu elektronicznym. Minimalizując wartość ugięcia można zapobiec takim uszkodzeniom, jak pęknięcie czy rozwarstwianie [232, 233, 234]. Na rysunku 3.43 przedstawiono moduł z podziałem na elementy skończone oraz przykładowy wynik modelowania.



Rys. 3.43. Opracowany model modułu pamięci z podziałem na elementy skończone (a) oraz przykładowy wynik modelowania w postaci ugięcia układu (b)

Proces optymalizacji ograniczono do pięciu czynników – wybrano dwa czynniki geometryczne i trzy czynniki materiałowe. Za czynniki geometryczne przyjęto: grubość struktury krzemowej oraz grubość warstwy kleju między strukturą a dystansownikiem.



Za czynniki materiałowe przyjęto współczynniki rozszerzalności cieplnej CTE (ang. *Coefficient of Thermal Expansion*) wypraski, kleju oraz podłoża. Należy podkreślić, że zdefiniowane CTE miały dwa zakresy wartości: poniżej oraz powyżej temperatury zeszklenia  $T_g$  – wartość CTE poniżej  $T_g$  zdefiniowano jako wartość stałą, natomiast wartość CTE powyżej  $T_g$  zmieniała się proporcjonalnie. Dodatkowo moduł Younga kleju zmieniał się odwrotnie proporcjonalnie do wartości CTE poniżej  $T_g$ . W tabeli 3.9 przedstawiono wartości nominalne i ich dopuszczalne zakresy dla wybranych czynników oraz porównanie zastosowanych metod optymalizacyjnych w przypadku modelu dwuwymiarowego.

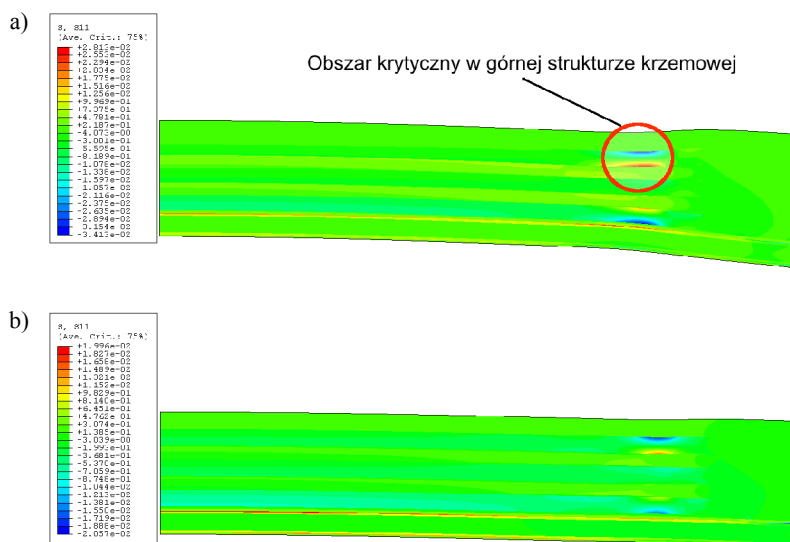
Tabela 3.9. Przyjęte wartości nominalne i ich zakresy dla wybranych czynników oraz porównanie zastosowanych metod optymalizacyjnych dla modelu dwuwymiarowego

Czynniki	Wartości czynników			Wartości optymalne	
	nominalne	minimalne	maksymalne	Algorytm iteracyjny	Algorytm kompaktowy
CTE dla wypraski $\alpha_w$ [ $10^{-6}/K$ ]	10	8	22	21,991	22
CTE dla kleju $\alpha_k$ [ $10^{-6}/K$ ]	110	70	130	70,066	70
CTE dla podłoża $\alpha_p$ [ $10^{-6}/K$ ]	14,5	12	20	12,001	12
Grubość struktury $h_s$ [mm]	0,135	0,125	0,145	0,145	0,145
Grubość kleju $h_k$ [mm]	0,035	0,025	0,045	0,025	0,025
Liczba doświadczeń:				510	36
Ugięcie [mm]	0,02728 (nominalne)			0,01155	0,01153

Porównując wyniki optymalizacji zawarte w tabeli 3.9 można stwierdzić, że oba algorytmy, tj. iteracyjny oraz kompaktowy dały podobne wyniki. Korzystając z analizy ANOVA stwierdzono, że największy wpływ na ugięcie modułu miały współczynniki rozszerzalności cieplnej dla wypraski, kleju oraz podłoża. Czynniki geometryczne miały nieznaczny wpływ na ugięcie. Największy wpływ na wartość ugięcia miał współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału wypraski. Dla maksymalnej wartości tego czynnika wartość ugięcia modułu była najmniejsza.

Na rysunku 3.44 przedstawiono porównanie rozkładu naprężenia dla modułu z nominalnymi wartościami czynników oraz wartościami optymalnymi. W przypadku wartości nominalnych w górnej strukturze powstaje naprężenie rozciągające, które może być przyczyną pękania. Wartość tego naprężenia wynosi w krytycznym miejscu ok.

280 MPa, co w przypadku ostrych krawędzi, np. narożników jest naprężeniem niebezpiecznym dla krzemu – tabela 2.7. W przypadku wartości optymalnych, wartość tego naprężenie wynosi 127 MPa i jest znacznie mniejsze od wartości krytycznej.



Rys. 3.44. Porównanie ugięcia modułu dla wartości nominalnych (a) i optymalnych (b) czynników

Porównując z kolei optymalizację według algorytmu iteracyjnego i kompaktowego pod kątem rozwiązania oraz liczby doświadczeń można stwierdzić, że w wyniku algorytmu iteracyjnego osiągnięto nieznacznie gorsze rozwiązanie. Jest to spowodowane tym, że algorytm przeszukuje wnętrze przestrzeni projektowej, podczas gdy rozwiązanie optymalne znajdowało się na jej krawędzi. Niemniej jednak zasadnicza różnica między tymi algorytmami dotyczyła liczby wykonanych doświadczeń. Algorytm iteracyjny wymagał 510 doświadczeń, podczas gdy algorytm kompaktowy wymagał jedynie 36 doświadczeń. Różnica ta ma decydujące znaczenie w przypadku, np. optymalizacji modelu trójwymiarowego, który wymaga znacznie większego nakładu czasu na przeprowadzenie pojedynczego doświadczenia numerycznego.

## 4. Numeryczne metody modelowania i prognozowania uszkodzeń w montażu elektronicznym

Duża część zagadnień inżynierskich dotyczy zjawisk ciągłych, które można opisać równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Równania te odnoszą się do praw teorii pola, a więc takich dziedzin nauki, jak mechanika czy termodynamika. Opis ten można z powodzeniem stosować do analizy zjawisk, które traktują materię jako kontinuum, pomijając jej naturę ziarnistą. Przy takim założeniu prawa fizyki można traktować w sposób deterministyczny, co oznacza w praktyce ścisłą zależność przyczynowo-skutkową między wymuszeniem a odpowiedzią. Taki opis zjawisk określa się terminem fenomenologii [235, 236].

Analityczne rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych w większości zagadnień inżynierskich jest bardzo trudne lub niemożliwe. Wynika to ze złożonej natury właściwości materiałowych, geometrii, warunków brzegowych i obciążeń. Rozwiązanie analityczne wymaga znalezienia nieskończonej liczby wartości zmiennej pola, która powinna być określona w dowolnym punkcie analizowanej przestrzeni. Z inżynierskiego punktu widzenia, rozwiązanie można ograniczyć jedynie do wybranych punktów przestrzeni, a wartość zmiennej pola może być wyznaczona w sposób przybliżony. Warunek ten jest spełniony w przypadku rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych za pomocą metod numerycznych, które opisano w rozdziale 3.1.1.

Istotnym problemem modelowania numerycznego jest znajomość zachowania materiałów w wyniku istnienia obciążeń, a zwłaszcza umiejętność matematycznego opisu ich właściwości, charakterystyk i modeli materiałowych. Precyzyjny opis właściwości materiałów, jak i ich zachowania na skutek obciążeń, zależy od bardzo wielu czynników: rodzaju materiału, stanu skupienia, temperatury czy rodzaju i typu obciążeń. Dlatego też projektowanie numeryczne w dziedzinie montażu elektronicznego wymaga znajomości zagadnień inżynierii materiałowej.

Z kolei znajomość metod obliczeniowych wytrzymałości materiałów jest niezbędna w celu prognozowaniu uszkodzeń. Metody obliczeniowe wytrzymałości materiałów pozwalają na definicję kryteriów uszkodzenia, które z kolei mogą być wykorzystane

w procesie modelowania i prognozowania uszkodzeń. Kryteria uszkodzeń są ściśle związane z rodzajem uszkodzenia oraz modelem materiałowym. W montażu elektronicznym rodzaje uszkodzeń rozpoznawane są w wyniku badań niezawodnościowych, a odpowiadające im kryteria wyznaczane są metodą doświadczalną. Dopiero jednak umiejętne połączenie inżynierii materiałowej z metodami obliczeniowymi wytrzymałości materiałów pozwala na poprawne modelowanie i prognozowanie uszkodzeń.

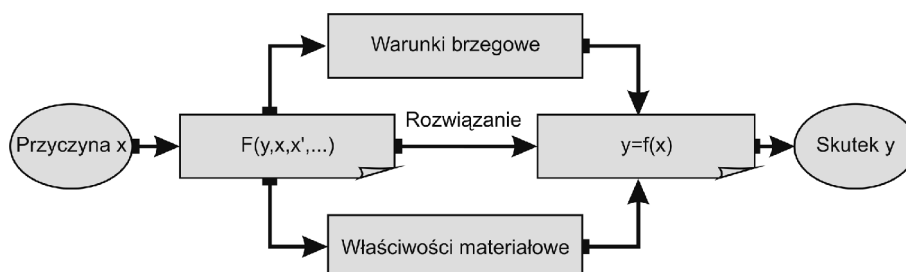
W rozdziale tym omówiono problem prognozowania numerycznego uszkodzeń, które są typowe w dziedzinie montażu elektronicznego. Według autora precyzyjne prognozowanie uszkodzeń na drodze numerycznej wymaga połączenia rodzaju uszkodzenia oraz jego kryterium wystąpienia z odpowiednim modelem materiałowym. W przypadku montażu elektronicznego, jak to omówiono w rozdziale 2.4, większość uszkodzeń powstaje w wyniku obciążeń termomechanicznych, a typowe uszkodzenia to pękanie, rozwarstwienie, zmęczenie itp. W tabeli 4.1 przedstawiono omówione w dalszej części pracy rodzaje połączeń oraz typowe uszkodzenia i przykładowe kryteria ich wystąpienia w połączeniu z odpowiadającymi im modelami materiałowymi.

Tabela 4.1. Rodzaje uszkodzeń i przykładowe kryteria ich wystąpienia oraz odpowiadające im modele materiałowe

	Połączenie zgrzewane	Połączenia klejone	Połączenia lutowane
Rodzaj uszkodzenia	pękanie kruche i plastyczne, rozwarstwienie	pełzanie i pękanie pełzaniowe	zmęczenie, pękanie pełzaniowe oraz zmęczeniowe
Kryterium uszkodzenia	$R_m, R_e, \Delta \varepsilon_p$	$\Delta W_i$	$\Delta \varepsilon_p, \Delta W_i$
Model materiałowy	sprężysto-plastyczny	lepkosprężysty	lepkosprężysto-plastyczny

## 4.1. Uszkodzenia termomechaniczne a właściwości i modele materiałowe

Zachowanie materiałów na skutek obciążeń opisuje się za pomocą równań lub układów równań, gdzie w postaci stałych występują właściwości materiałowe. Każdy materiał może być opisany przez właściwości oraz charakterystyki, które można podzielić na: właściwości fizyczne, fizykochemiczne, mechaniczne, termiczne, elektromagnetyczne, akustyczne itp. Znajomość właściwości i charakterystyk materiałowych pozwala na analizę zachowania rzeczywistego materiału w wyniku obciążeń (rys. 4.1).



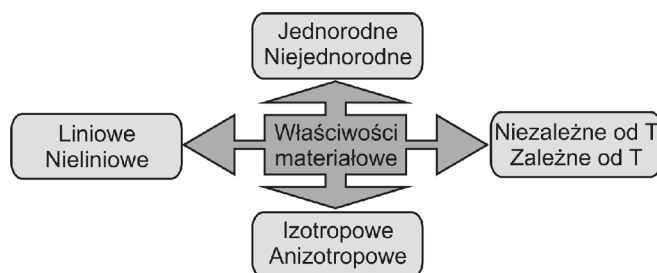
Rys. 4.1. Schemat postępowania podczas rozwiązywania problemów inżynierskich [223, 237]

W modelowaniu numerycznym korzysta się z możliwości opisanego zagadnień inżynierskich za pomocą równań różniczkowych cząstkowych. Aby możliwe było rozwiązanie takich równań, konieczna jest znajomość matematycznego opisu zjawiska, właściwości materiałowych, po spełnieniu określonych warunków brzegowych. Ogólne równanie różniczkowe można zapisać w postaci:

$$F(y, x, x', x'', \dots) = 0 \quad (4.1)$$

Współczynniki zmiennej niezależnej  $x$  oraz jej pochodnych  $x'$ ,  $x''$ , ...,  $x^n$  występujące w równaniu wyznacza się na podstawie właściwości materiałowych i są one niezbędne do rozwiązania równania.

W przypadku zagadnień mechaniki, oprócz właściwości materiałowych stosuje się także modele materiałowe. Natomiast w montażu elektronicznym szczególnego znaczenia nabierają także takie problemy, jak: nieliniowe właściwości materiałowe, cienkie warstwy, zależność właściwości materiałowych od temperatury, wpływ procesów technologicznych, niejednorodność materiału, problem ziarnistości, anizotropia itp. [238, 239]. Niestety większość obliczeń numerycznych jest wykonywanych przy założeniu, że materiał stanowi strukturę ciągłą, charakteryzuje się ponadto właściwościami liniowymi i izotropowymi oraz niezależnymi od temperatury. Autor na potrzeby modelowania numerycznego zaproponował klasyfikację właściwości materiałowych według schematu przedstawionego na rysunku 4.2 [77].



Rys. 4.2. Proponowana klasyfikacja właściwości materiałowych na potrzeby modelowania numerycznego [237, 77]

Oprócz właściwości materiałowych konieczne jest stosowanie prostych, jak i złożonych modeli materiałowych. Do prostych modeli zalicza się: model sprężysty, plastyczny oraz lepki. Modele złożone tworzy się na podstawie modeli prostych. *Według autora znajomość zachowania modeli prostych oraz umiejętność ich łączenia jest kluczem do prognozowania uszkodzeń na podstawie metody modelowania numerycznego i metody obliczeniowe wytrzymałości materiałów.*

Innym ważnym problem modelowania termomechanicznego w montażu elektronicznym jest zarówno znajomość zależności właściwości, jak i modeli materiałowych od temperatury. Praktycznie wszystkie właściwości termomechaniczne dla materiałów stosowanych w montażu elektronicznym zależą od temperatury. To samo dotyczy także modeli materiałowych. *Według autora znajomość zależności temperaturowych modeli materiałowych oraz ich opis matematyczny i pomiar doświadczalny jest niezbędny do poprawnego prognozowania uszkodzeń w montażu elektronicznym.*

Zachowanie się ciała stałego na skutek działania obciążeń termomechanicznych można przedstawić w postaci układu równań jako:

$$f(\sigma, \varepsilon, \frac{d\varepsilon}{dt}, T) = 0$$

$$d\sigma = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\right)_{\dot{\varepsilon}, T} d\varepsilon + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}}\right)_{\varepsilon, T} d\dot{\varepsilon} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_{\varepsilon, \dot{\varepsilon}} dT, \quad (4.2)$$

gdzie:  $T$  – temperatura,  $\sigma$  – naprężenie,  $\varepsilon$  – odkształcenie.

Aby znaleźć stan równowagi, należy przyjąć odpowiednie założenie dotyczące metody wyznaczenia odkształcenia całkowitego:

- rozłączne – dokonuje się rozdzielania składowych zależnych i niezależnych od czasu:

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_p + \varepsilon_l, \quad (4.3)$$

gdzie  $\varepsilon_s$  oznacza odkształcenie sprężyste,  $\varepsilon_p$  oznacza odkształcenie plastyczne, natomiast  $\varepsilon_l$  oznacza odkształcenie lepkie.

- łączne – składowe zależne i niezależne od czasu nie są rozdzielone:

$$d\sigma = E\left(\varepsilon, \frac{d\varepsilon}{dt}, T\right), \quad (4.4)$$

przy czym

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_n(\varepsilon_p, \varepsilon_l), \quad (4.5)$$

gdzie  $\varepsilon_n$  – odkształcenie niesprężyste.

W większości zastosowań praktycznych, jak analiza zmęczeniowa, stosuje się podejście rozłączne. W tym przypadku obliczenia można wykonać zarówno metodami analitycznymi, jak i numerycznymi. Podejście łączne stosuje się stosunkowo rzadko,

ale jest ono niezbędne do analizy szoków termicznych lub prób zrzutowych [240, 241, 242, 243, 244, 54, 245]. W tym przypadku obliczenia można jedynie wykonać metodami numerycznymi.

#### 4.1.1. Modele materiałowe

Powszechnie wiadomo, że materiał poddany obciążeniom termomechanicznym ulega odkształceniu. Całkowite odkształcenie można wyznaczyć za pomocą modeli materiałowych prostych i złożonych. Zgodnie z zasadami inżynierii materiałowej modele materiałowe można także podzielić na liniowe i nieliniowe. Model sprężysty traktuje się jako liniowy, podczas gdy modele plastyczny i lepki jako nieliniowe. Model lepki dodatkowo zależy także od czasu. W rzeczywistości modele proste są jedynie modelami teoretycznymi. W praktyce każdy materiał opisuje się najczęściej modelem złożonym, a modele proste stosuje się jedynie w ograniczonym zakresie.

W dziedzinie numerycznego projektowania montażu elektronicznego stosuje się najczęściej złożone modele materiałowe, jak: sprężysto-plastyczny, lepkosprężysty oraz lepkosprężysto-plastyczny. Modele złożone tworzy się łącząc poszczególne modele proste, przy czym najczęściej korzysta się z zasady addytywności odkształceń. Według tej zasady odkształcenie całkowite  $\varepsilon$  można wyznaczyć jako:

$$\varepsilon(\sigma, t, T) = \varepsilon_s(\sigma_s, T) + \varepsilon_p(\sigma_p, T) + \varepsilon_l(\sigma_l, t, T), \quad (4.6)$$

gdzie  $\varepsilon_s$  – odkształcenie sprężyste,  $\varepsilon_p$  – odkształcenie plastyczne,  $\varepsilon_l$  – odkształcenie lepkie.

Modele materiałowe stosuje się do prognozowania uszkodzeń, takich jak pękanie, rozwarstwienie czy zmęczenie. W tym celu wybiera się uszkodzenie najbardziej prawdopodobne oraz odpowiadające mu kryterium, które wyznacza się w drodze doświadczałnej. Poprawny opis matematyczny modeli prostych wymaga znajomości charakterystyk naprężenie–odkształcenie oraz według równania (4.6), zależności od czasu i temperatury.

##### 4.1.1.1. Model sprężysty

W przypadku modelu sprężystego zależność między stanem naprężenia a odkształcenia na skutek obciążenia można opisać za pomocą prawa Hooke'a:

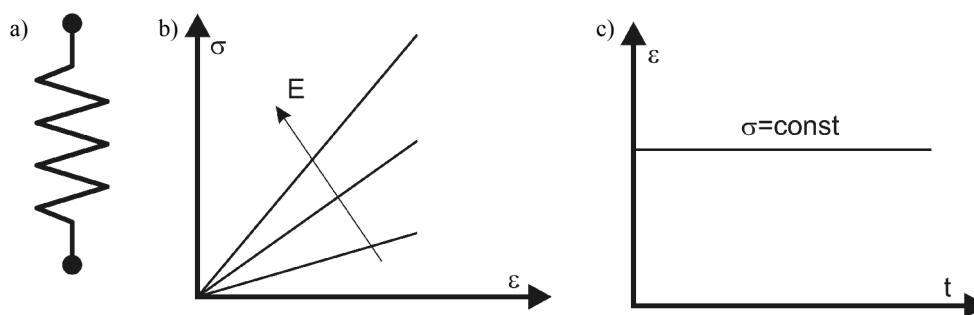
$$\sigma = E \varepsilon, \quad (4.7)$$

gdzie  $E$  – moduł Younga.

W praktyce model sprężysty stosuje się w przypadku małych odkształceń, tzn. dla  $\varepsilon < 0,01$ . Model sprężysty przedstawia się na schematach za pomocą sprężyny o sztywności równej modułowi Younga  $E$ . Podstawowe charakterystyki – statyczna i dynamiczna, dla modelu sprężystego przedstawiono na rysunku 4.3.

Podstawową cechą modelu sprężystego jest zjawisko odwracalności, tzn. energia zgromadzona w czasie działania obciążenia może być całkowicie odzyskana po jego ustąpieniu. W przypadku modelu sprężystego nie występuje rozpraszanie energii.

Materiały idealnie sprężyste bardzo rzadko występują w praktyce. Zazwyczaj przyjmuje się, że materiał zachowuje się idealnie sprężysto poniżej granicy plastyczności  $R_e$ . Za kryterium uszkodzenia przyjmuje się wartość naprężenia  $R_m$  lub  $R_e$  (rys. 2.23), uzyskaną z pomiarów wytrzymałościowych, np. w wyniku statycznej próby rozciągania jednoosiowego.



Rys. 4.3. Typowe charakterystyki dla modelu sprężystego: symbol modelu sprężystego (a), zależność między odkształceniem a naprężeniem (b), zależność odkształcenia od czasu dla stałej wartości naprężenia (c)

#### 4.1.1.2. Model plastyczny

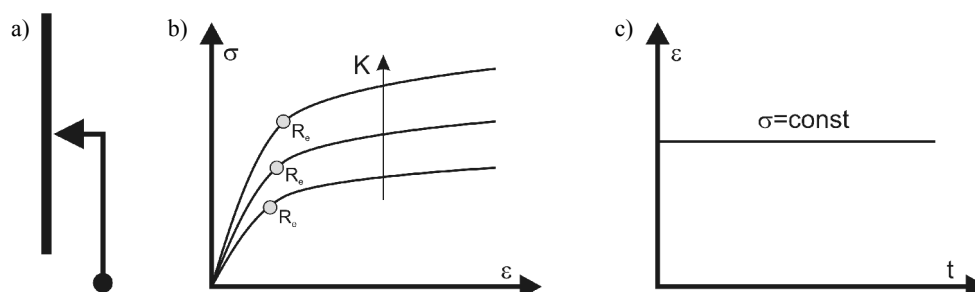
W przypadku modelu plastycznego zależność między stanem naprężenia a odkształcenia, po przekroczeniu granicy plastyczności  $R_e$ , na skutek obciążenia można opisać następującą zależnością:

$$\sigma = K \varepsilon^n, \quad (4.8)$$

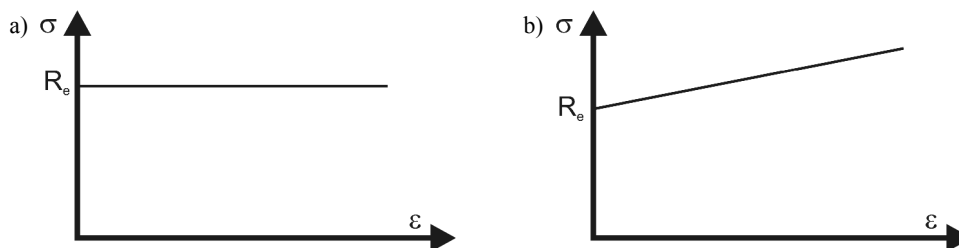
gdzie  $K$  – współczynnik wytrzymałości,  $n$  – wykładnik umocnienia lub uplastycznienia.

Wykładnik umocnienia  $n$  zawiera się zazwyczaj w przedziale od 0 do 1. Do odkształcenia plastycznego dochodzi wówczas, gdy materiał na skutek obciążeń zewnętrznych przekracza granicę plastyczności  $R_e$ . W praktyce, odkształcenie plastyczne występuje dla wartości odkształceń  $\varepsilon = 0,01-0,6$ . Typowe charakterystyki – statyczna i dynamiczna – dla modelu plastycznego przedstawiono na rysunku 4.4. W przypadku modelowania numerycznego przyjmuje się czasami modele uproszczone, tj.: model sztywno-plastyczny i sztywno-plastyczny z umocnieniem (rys. 4.5).





Rys. 4.4. Typowe charakterystyki modelu plastycznego: symbol oznaczenia dla modelu plastycznego (a), zależność między odkształceniem a naprężeniem (b), zależność odkształcenia od czasu dla stałej wartości naprężenia (c)



Rys. 4.5. Uprozczone modele plastyczne: sztywno-plastyczny (a), sztywno-plastyczny z konsolidacją (b)

Model plastyczny, w porównaniu z modelem sprężystym, nie ma cechy odwracalności. Część energii zgromadzona w czasie działania obciążenia jest zamieniana na odkształcenie trwałe, a energii tej nie można już odzyskać po ustąpieniu obciążenia. W przypadku modelu plastycznego występuje zjawisko rozproszenia energii. W praktyce inżynierskiej najczęściej spotyka się modele sprężysto-plastyczne. Właściwości plastyczne dla takich materiałów ujawniają się po przekroczeniu granicy plastyczności  $R_e$ . Całkowitą wartość odkształcenia można wówczas wyznaczyć z zależności:

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (4.9)$$

Za kryterium uszkodzenia przyjmuje się najczęściej wartość granicy plastyczności  $R_e$ , którą można wyznaczyć w wyniku statycznej próby rozciągania jednoosiowego<sup>54</sup>. W przypadku obciążeń cyklicznych za kryterium uszkodzenia można przyjąć wartość

54 W przypadku nowszych rozwiązań konstrukcyjnych oraz korzystając z właściwości współczesnych materiałów, dopuszcza się czasem, aby element pracował w obszarach podplastycznych, a nawet lekko je przekraczał.

zakumulowanego odkształcenia plastycznego  $\Delta\varepsilon_p$  lub wartość energii odkształcenia niesprężystego  $\Delta W_i$ , po jednym cyklu obciążeniowym.

#### 4.1.1.3. Model lepki

W przypadku modelu lepkiego zależność między stanem naprężenia a odkształcenia na skutek obciążeń można opisać, korzystając z opisu dla cieczy Newtona. W przypadku cieczy newtonowskiej przyjmuje się następujące założenia:

- opór podczas przepływu jest wprost proporcjonalny do prędkości względnej,
- zmiana objętości cieczy jest wprost proporcjonalna do ciśnienia hydrostatycznego.

Ciecz Newtona opisuje laminarny przepływ strug ośrodka ciekłego. Różnica prędkości strug wynika z przekazywania pędu w wyniku istnienia naprężenia stycznego na granicy  $\tau$  strug. Zgodnie z teorią Newtona naprężenie styczne  $\tau$  wynosi:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}, \quad (4.10)$$

gdzie  $\eta$  – współczynnik lepkości lub inaczej lepkość,  $v$  – prędkość strug,  $y$  – współrzędna w kierunku poprzecznym do przepływu strugi.

Ciecze, które spełniają podany warunek noszą nazwę cieczy newtonowskich, pozostałe zaś noszą nazwę cieczy nienewtonowskich. Wartość naprężenia  $\tau$  będzie zatem zależała od szybkości zmian odkształcenia  $\varepsilon$ , co można zapisać jako:

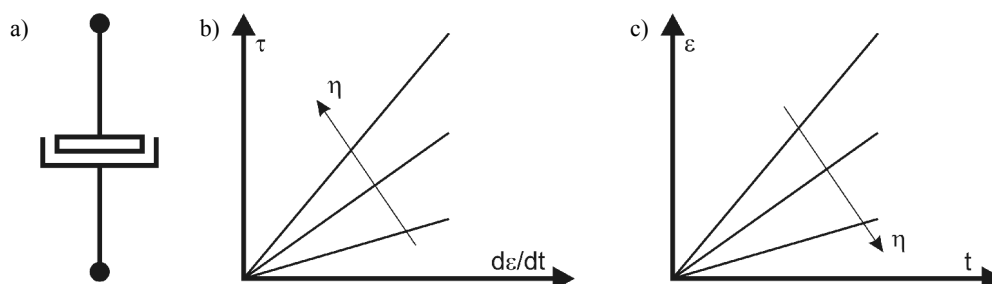
$$\tau = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (4.11)$$

Wartość odkształcenia można wyznaczyć z zależności:

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} \tau t. \quad (4.12)$$

Ze względu na kinematykę odkształcenie lepkie jest podobne do odkształcenia plastycznego, z tą różnicą, że lepkość jest dodatkowo funkcją czasu. W praktyce istnieje bardzo duża liczba zależności, które opisują zachowanie lepkie w funkcji temperatury, czasu i wybranego naprężenia zredukowanego. Typowe charakterystyki dla modelu lepkiego przedstawiono na rysunku 4.6.

Podobnie jak w przypadku modelu plastycznego, odkształcenie lepkie nie jest odwracalne. Oznacza to, że w czasie działania obciążenia część energii ulega rozproszeniu wewnątrz materiału w postaci odkształcenia lepkiego, przy czym energii tej nie można już odzyskać po ustąpieniu obciążenia. Za kryterium uszkodzenia w przypadku obciążeń cyklicznych przyjmuje się wartość zakumulowanego odkształcenia niesprężystego  $\Delta W_i$ .

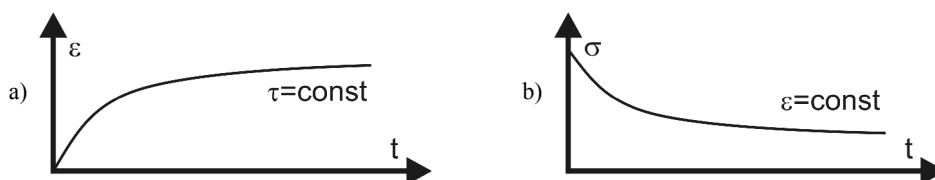


Rys. 4.6. Typowe charakterystyki modelu lepkiego: symbol oznaczenia modelu lepkiego (a), zależność między naprężeniem a szybkością odkształcania (b), zależność odkształcenia od czasu (c)

Ciecz newtonowska jest jedynie pojęciem wyidealizowanym. W rzeczywistości nie spotyka się materiałów, które można scharakteryzować lepkością doskonałą. Najczęściej spotyka się materiały, które można opisać modelem lepko-sprężystym. Wartość szybkości zmian odkształcenia dla tego typu materiałów można wyznaczyć z zależności:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_l = \frac{d\sigma}{dt} \frac{1}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (4.13)$$

W przypadku materiałów lepko-sprężystych występują dwa zjawiska charakterystyczne: pełzanie i relaksacja naprężeń. Lepko-sprężystość charakteryzuje się stopniowym odkształcaniem materiału przy stałym naprężeniu, podczas gdy proces relaksacji charakteryzuje się zmniejszaniem naprężenia przy stałym odkształceniu (rys. 4.7).



Rys. 4.7. Zależność właściwości lepko-sprężystych od czasu:  
dla stałej wartości naprężenia – zjawisko pełzania (a),  
dla stałej wartości odkształcenia – zjawisko relaksacji naprężeń (b)

#### 4.1.2. Wpływ temperatury na zachowanie modeli materiałowych

Powszechnie wiadomo, że materiały zmieniają swoje właściwości w wyniku zmian temperatury. To samo dotyczy także modeli materiałowych. Jednak w przypadku modeli materiałowych opis zależności odkształcenie–naprężenie będzie zależał nie tylko od temperatury, lecz także od historii obciążenia termomechanicznego [81].

W przypadku modelu sprężystego wzrost temperatury powoduje zmianę modułu Younga. W postaci symbolicznej można to przedstawić jako zmianę sztywności sprężyny. Prawo Hooke'a można w takim przypadku zapisać jako:

$$\sigma = E(T)\varepsilon, \quad (4.14)$$

gdzie  $E(T)$  – moduł Younga w temperaturze  $T$ .

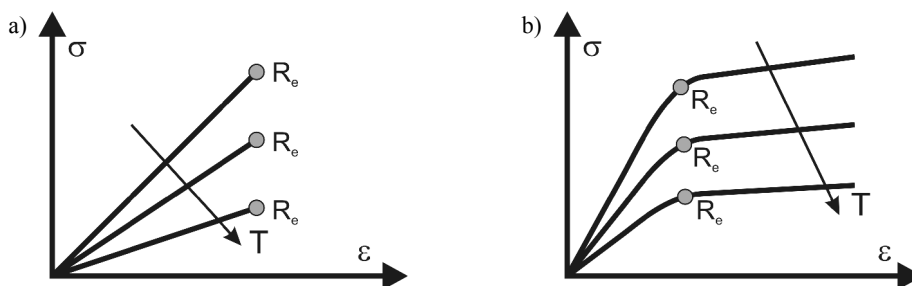
Dla większości materiałów moduł Younga maleje ze wzrostem temperatury (rys. 4.8a). W tabeli 4.2 pokazano przykład zależności modułu Younga od temperatury dla typowych stopów lutowniczych stosowanych w montażu elektronicznym [246].

Tabela 4.2. Zależność wartości modułu Younga od temperatury dla typowych stopów lutowniczych stosowanych w montażu elektronicznym, gdzie  $T$  [°C] [246, 247]

Stop lutowniczy	$E$ [kPa] = $f(T$ [°C])
SnPb	$E = 35366 - 151 T$
SnAgCu	$E = 52400 - 193,05 T$

W przypadku modelu plastycznego widać wyraźną zależność granicy plastyczności  $R_e$  od temperatury  $T$  (rys. 4.8b):

$$R_e = f(T). \quad (4.15)$$



Rys. 4.8. Zależność charakterystyki naprężenie–odkształcenie od temperatury dla modelu sprężystego (a) i modelu plastycznego (b)

Stan naprężenia po przekroczeniu granicy plastyczności  $R_e$  można zapisać w postaci (równanie (4.8)):

$$\sigma = K(T)\varepsilon^n, \quad (4.16)$$

gdzie  $K(T)$  – współczynnik wytrzymałości w temperaturze  $T$ .

Dla modelu lepkiego zmiana temperatury  $T$  powoduje zmianę współczynnika lepkości  $\eta$ , wartość zatem naprężenia  $\sigma$  można wyznaczyć z zależności:

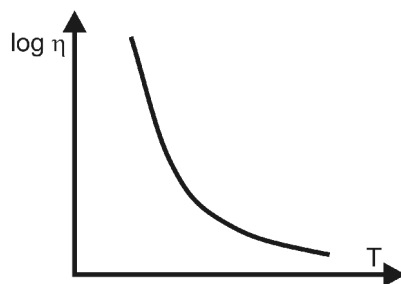
$$\sigma = \eta(T) \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (4.17)$$

gdzie  $\eta(T)$  – współczynnik lepkości w temperaturze  $T$ .

Szybkość odkształcania będzie funkcją zarówno naprężenia  $\sigma$ , jak i temperatury  $T$ :

$$\dot{\varepsilon} = f(\sigma, T). \quad (4.18)$$

W przypadku modelu lepkiego istotna jest zależność współczynnika lepkości  $\eta$  od temperatury  $T$ . Dla większości materiałów zachowanie lepkie zaczyna się ujawniać powyżej temperatury zeszklenia  $T_g$  i wykazuje wówczas zależność wykładniczą od temperatury (rys. 4.9) [81].



Rys. 4.9. Zależność lepkości od temperatury

Zależność między stanem naprężenia i odkształcania w przypadku zmiany temperatury można w przybliżeniu wyznaczyć ze zmodyfikowanego równania Ramberga–Osgooda<sup>55</sup> [248]:

$$\varepsilon(T, \dot{\varepsilon}) = \frac{\sigma}{E} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0(T, \dot{\varepsilon})} \right)^{n(T, \dot{\varepsilon})}, \quad (4.19)$$

gdzie  $n$  – współczynnik umocnienia,  $\alpha$  i  $\sigma_0$  – stałe materiałowe.

Chwilowe wartości  $n$  i  $\sigma_0$  dla danej temperatury  $T$  można wyznaczyć z zależności:

$$\sigma_0(T, \dot{\varepsilon}) = \sigma_0 + aT' + b\dot{\varepsilon}', \quad (4.20)$$

$$n(T, \dot{\varepsilon}) = n + cT' + d\dot{\varepsilon}', \quad (4.21)$$

<sup>55</sup> Ogólna postać równania Ramberga–Osgooda dotyczy jedynie modelu sprężysto-plastycznego dla  $T = \text{const}$ .

gdzie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  – współczynniki proporcjonalności,  $T'$  i  $\dot{\varepsilon}'$  są opisane zależnościami:

$$T' = \frac{T - T_r}{T_m - T_r}, \quad (4.22)$$

$$\dot{\varepsilon}' = \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_r}\right), \quad (4.23)$$

gdzie  $T_m$  – temperatura topnienia,  $T_r$  – temperatura odniesienia,  $\dot{\varepsilon}_r$  – szybkość zmian odkształcenia w temperaturze odniesienia.

Zaletą zmodyfikowanego równania Ramberga–Osgooda jest możliwość uproszczonej analizy stanu naprężenie–odkształcenie w funkcji temperatury oraz szybkości zmian odkształcenia. Równanie to jednak nie uwzględnia wielu istotnych zjawisk, jak np. zmiany wartości modułu Younga w funkcji temperatury w zakresie sprężystym. W takim przypadku zdaniem autora równanie to należałoby zapisać w postaci:

$$\varepsilon(T, \dot{\varepsilon}) = \frac{\sigma}{E(T)} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0(T, \dot{\varepsilon})} \right)^{n(T, \dot{\varepsilon})}, \quad (4.24)$$

gdzie  $E(T)$  można oszacować z zależności:

$$E(T) = E_0 - eT, \quad (4.25)$$

gdzie  $E_0$  i  $e$  – stałe materiałowe – wartości tych stałych dla przykładowych stopów lutowicznych zawarto w tabeli 4.2.

## 4.2. Wytrzymałość złączy bimateriałowych dla połączeń drutowych i bondingu

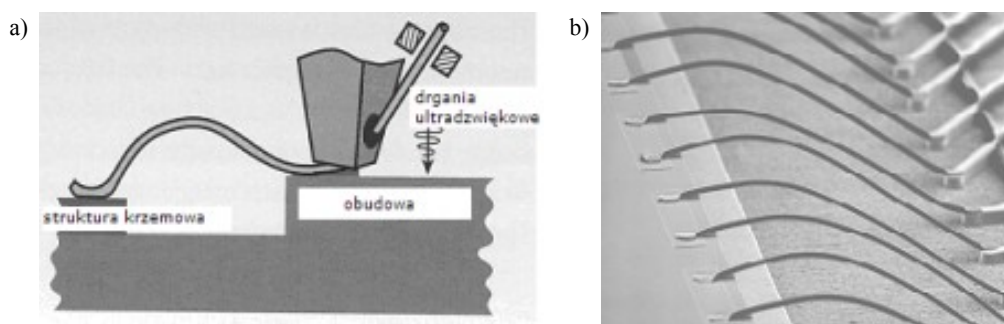
Wielowarstwy są jedną z najczęściej występujących struktur materiałowych w montażu elektronicznym. Na granicy połączonych materiałów można wyróżnić, tzw. złącza bimateriałowe. Złącze bimateriałowe stanowi strukturę dwóch materiałów o różnych właściwościach termomechanicznych, np. o różnym współczynniku rozszerzalności cieplnej oraz module Younga. Jedną z najczęstszych przyczyn uszkodzeń struktury bimateriałowej jest pękanie lub rozwarstwienie na skutek obciążeń termomechanicznych. Prognozowanie wytrzymałości złącza bimateriałowego wymaga znajomości rozkładu naprężeń w samym złączu oraz jego najbliższym otoczeniu. W przypadku przekroczenia wartości krytycznej naprężenia złącze ulega uszkodzeniu. Analiza

naprężeń oraz prognozowanie uszkodzenia dla złącza bimateriałowego jest wyjątkowo trudne. Jest to związane z istnieniem punktu osobliwego w szczelinie pęknięcia lub na granicy rozwarstwienia. Dużą trudność sprawia także definicja właściwości materiałowych oraz pomiar doświadczalny parametrów wytrzymałościowych w obszarze szczeliny pęknięcia. Otrzymanie tych parametrów jest jednak niezbędne w celu prawidłowej analizy numerycznej inicjacji, a następnie propagacji pęknięcia lub rozwarstwienia, jak to pokazano na rysunku 4.10.



Rys. 4.10. Przykład uszkodzeń struktury bimateriału na skutek pęknięcia (a) lub rozwarstwienia (b) w wyniku obciążeń termomechanicznych

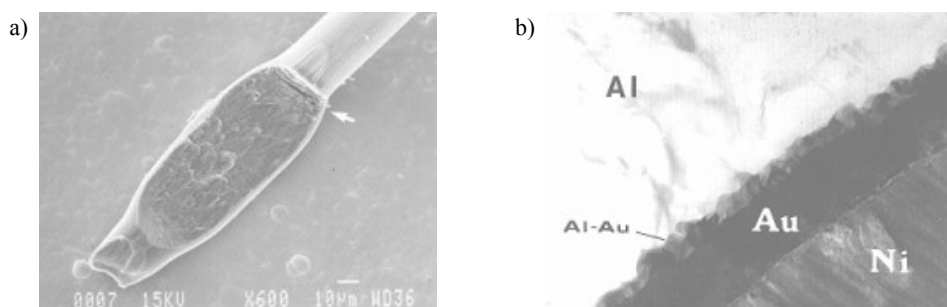
Jednym z najczęściej stosowanych procesów technologicznych w montażu elektronicznym jest proces trwałego łączenia dwóch materiałów w celu uzyskania połączenia elektrycznego i/lub mechanicznego. Przykładem może być proces zgrzewania w celu uzyskania połączenia drutowego. Połączenia drutowe stosuje się na pierwszym poziomie montażu elektronicznego. Proces zgrzewania wykonywany jest z użyciem dużego ciśnienia, wysokiej temperatury i/lub ultradźwięków (rys. 4.11). W wyniku procesu zgrzewania na granicy dwóch materiałów powstaje złącze bimateriałowe.



Rys. 4.11. Przykład procesu zgrzewania (a) oraz wykonanego połączenia drutowego na I poziomie montażu elektronicznego (b) [249]

Połączenia drutowe mogą ulec uszkodzeniu w wyniku procesu technologicznego lub w trakcie pracy na skutek cyklicznych zmian temperatury. Przyczyną uszkodzenia może być rozwarstwienie złącza lub mikropęknięcia metalurgiczne, które powstają w obszarze zgniotu klinowego (rys. 4.12). Mikropęknięcia mogą propagować w wyniku cyklicznych zmian temperatury, a w rezultacie doprowadzić do powstania przelomu. Umocnienie przez zgniot powstaje w trakcie procesu tworzenia połączenia

drutowego, tj. termokompresji lub zgrzewania ultradźwiękowego w obszarze złącza bimateriałowego. Złącze wykonane podczas montażu ultradźwiękowego już podczas samego procesu formowania zostaje narażone na znaczne naprężenia na skutek obciążeń termomechanicznych. Kolejne operacje technologiczne, takie jak tworzenia pętli, często prowadzą do powstania mikropęknięć na krawędziach lub przewężeniach, co pokazano na rysunku 4.12a.



Rys. 4.12. Przykład zgniotu klinowego i mikropęknięcia dla połączenia drutowego wykonanego w procesie zgrzewania (a) oraz obecności związku międzymetalicznego w obszarze złącza (b) [249]

Główną przyczyną inicjacji uszkodzenia połączenia drutowego są mikropęknięcia. Powstają one zazwyczaj w obszarze krawędzi złącza, zarówno dla typu klinowego jak i sferycznego. Mikropęknięcia w obszarze złącza powstają w wyniku jednego lub kilku czynników, do których należą:

- stosowanie nieodpowiedniego nacisku narzędzia,
- nieumiejętne sterowanie urządzeniem,
- wibracje urządzenia będące częstą przyczyną oderwania złącza,
- zbyt duża deformacja złącza,
- zbyt niska pętla połączenia drutowego.

W przypadku złącz bimateriałowych występuje dodatkowe zjawisko związane z tworzeniem się związków międzymetalicznych w obszarze złącza, jak to pokazano na rysunku 4.12b. Związek taki ma inne właściwości materiałowe niż materiały wyjściowe i jest zazwyczaj materiałem kruchym. Dla złota i aluminium w temperaturach 150–300 °C mogą powstawać w wyniku przemian fazowych związki międzymetaliczne, które mają pośrednie właściwości termomechaniczne. Faza międzymetaliczna powstaje przy udziale dwóch metali. Zajście reakcji warunkują takie czynniki, jak czas i temperatura. Przyczyną zmniejszenia wytrzymałości mechanicznej fazy międzymetalicznej jest m.in. występowanie zjawiska Kirkendalla<sup>56</sup>. W wyniku zjawiska Kirkendal-

56 Zjawisko Kirkendalla zostało opisane po raz pierwszy w roku 1947. Zjawisko to obserwuje się m.in. na granicy połączenia stopu metali i metalu w podwyższonej temperaturze.



la dochodzi do powstawania luk w strukturze przestrzennej materiału na skutek różnej szybkości dyfuzji atomów. Efekt ten ma istotny wpływ na niezawodność połączeń w montażu elektronicznym<sup>57</sup>, co zostało opisane po raz pierwszy w roku 1972 przez C.W. Horstinga [250]. Powstałe luki mogą się następnie łączyć, co prowadzi do tworzenia pustek lub inaczej porów w materiale. W wyniku tego procesu dochodzi do osłabienia wytrzymałości struktury złącza. Zmiany temperatury prowadzą do powstania naprężeń i w rezultacie do inicjacji mikropęknięć materiału w obszarze złącza.

Innym rodzajem procesów technologicznych stosowanych w montażu elektronicznym, który prowadzi do powstania złącz bimateriałowych, jest bonding. Bonding, w przeciwieństwie do zgrzewania, dotyczy dużych i płaskich powierzchni. Według J.A. Dziubana [251], bonding można scharakteryzować jako zespół procesów technologicznych, których celem jest trwałe połączenie materiałów o gładkich i płaskich powierzchniach. Jedną z cennych zalet bondingu jest zarówno możliwość łączenia całych podłoży, jak i pojedynczych struktur. Można go stosować na różnych poziomach montażu elektronicznego, poczynając od struktur półprzewodnikowych, a skończywszy na obudowach. Bonding stosuje się najczęściej w celu trwałego łączenia krzemu ze szkłem. W praktyce stosuje się wiele rodzajów bondingu, a jednym z kryteriów jego podziału jest temperatura:

- bonding wysokotemperaturowy ( $> 700\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), np. zgrzewanie,
- bonding średnotemperaturowy ( $200\text{--}500\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), np. lutowanie,
- bonding niskotemperaturowy ( $20\text{--}200\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), np. klejenie.

Proces bondingu może być dodatkowo wspomagany polem elektrycznym, jak to ma miejsce w bondingu anodowym.

Materiały łączone w procesie bondingu mogą ulec uszkodzeniu, zarówno w trakcie trwania samego procesu, jak i na skutek późniejszych obciążeń termomechanicznych. Przyczyną uszkodzenia są naprężenia powstałe na skutek niedopasowania współczynników rozszerzalności cieplnej materiałów oraz małej wytrzymałości mechanicznej. Z tego też powodu w bondingu należy stosować materiały o odpowiednich właściwościach termomechanicznych. Materiały takie powinny charakteryzować się dużą wytrzymałością na pękanie czy rozwarstwienie [252, 253].

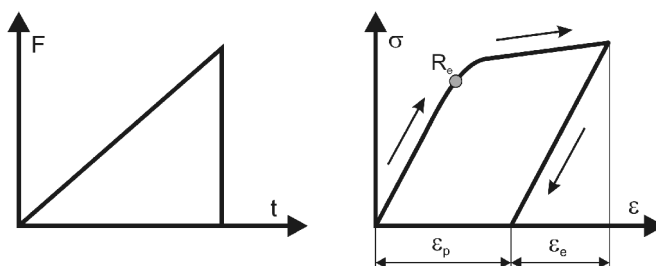
#### 4.2.1. Modele materiałowe dla złącza bimateriałowego

Większość materiałów stosowanych w procesach zgrzewania oraz bondowania można opisać modelem sprężysto-plastycznym. Dominującym rodzajem uszkodzeń jest w takim przypadku zjawisko pękania oraz rozwarstwienia. Modelowanie numeryczne oraz wyznaczenie odpowiedniego kryterium uszkodzenia można zrealizować na podstawie obliczeń wytrzymałościowych dla materiału lub dla złącza bimateriałowego.

---

57 W przypadku połączeń Au–Al uszkodzenia są wynikiem tworzenia się luk powstających w wyniku wzajemnej dyfuzji atomów aluminium i złota.

Zakres sprężysty dotyczy odkształceń nietrwałych o charakterze liniowym lub nieliniowym. Natomiast zakres plastyczny dotyczy odkształceń trwałych. Model sprężysto-plastyczny charakteryzuje się, w zależności od aktualnego stanu odkształcenia czy naprężenia, zarówno odkształceniami nietrwałymi jak i trwałymi [55]. Problem istnienia odkształceń trwałych i nietrwałych można zaobserwować doświadczalnie w statycznej próbie obciążania, a następnie odciążania próbki po przekroczeniu granicy plastyczności  $R_e$ , co przedstawiono na rysunku 4.13.



Rys. 4.13. Wykres odkształcenie–naprężenie dla statycznej próby jednoosiowego rozciągania, przy obciążaniu i odciążaniu próbki, gdzie  $R_e$  jest umowną granicą plastyczności

Zgodnie z przedstawionym przykładem w obszarze obowiązywania prawa Hooke'a zależność między odkształceniem a naprężeniem jest liniowa, a odkształcenie ma charakter nietrwały, czyli odwracalny. W chwili przekroczenia granicy plastyczności, zależność między odkształceniem a naprężaniem staje się nieliniowa, co można zapisać w postaci ogólnej jako:

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (4.26)$$

lub analogicznie do prawa Hooke'a jako:

$$\sigma = E' \varepsilon, \quad (4.27)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności  $E'$  nosi nazwę zastępczego modułu Younga, a jego wartość zależy od odkształcenia:

$$E' = f(\varepsilon). \quad (4.28)$$

Tym samym współczynnik  $E'$  traci charakter stałej materiałowej [79]. W przypadku montażu elektronicznego można z powodzeniem stosować uproszczone modele sprężysto-plastyczne:

- Model bez konsolidacji mechanicznej<sup>58</sup>, którego charakterystykę przedstawiono na rysunku 4.14a. Charakterystyka ta stanowi kombinację modelu sprężystego oraz

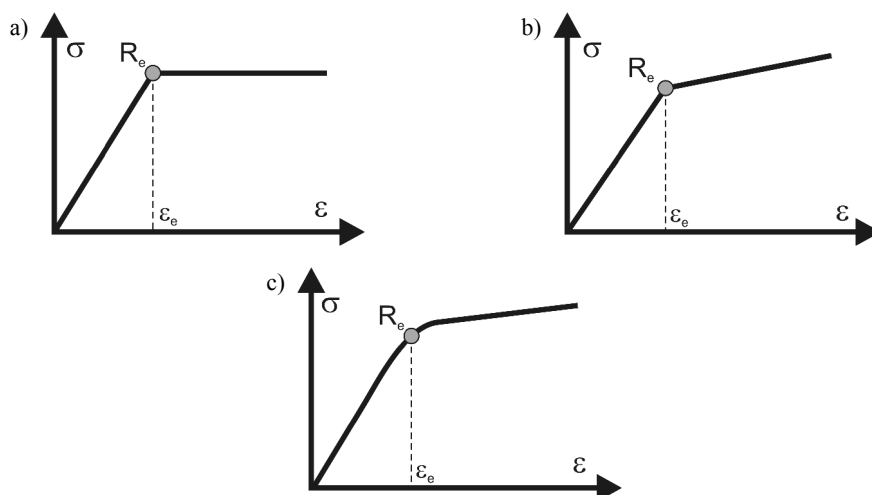
58 Konsolidacja mechaniczna lub inaczej umocnienie dotyczy zjawiska wzrostu naprężenia po przekroczeniu granicy plastyczności  $R_e$ .

modelu idealnie plastycznego. Model ten charakteryzuje się brakiem wzrostu naprężeń po przekroczeniu granicy plastyczności:

$$\begin{aligned} \sigma &= E \varepsilon \quad \text{dla } \varepsilon < \varepsilon_e \\ \sigma &= \sigma_e = E \varepsilon_e \quad \text{dla } \varepsilon \geq \varepsilon_e \end{aligned} \quad (4.29)$$

- Model z konsolidacją mechaniczną liniową lub nieliniową, którego charakterystykę przedstawiono na rysunku 4.14. W przypadku liniowym (rys.4.14b) model ten stanowi kombinację dwóch modeli sprężystych, przy czym w zakresie odkształceń czysto sprężystych obowiązuje moduł Younga  $E$ , natomiast w zakresie odkształceń plastycznych obowiązuje zastępczy moduł Younga  $E'$ :

$$\begin{aligned} \sigma &= E \varepsilon \quad \text{dla } \varepsilon < \varepsilon_e \\ \sigma &= \sigma_e + E'(\varepsilon - \varepsilon_e) \quad \text{dla } \varepsilon \geq \varepsilon_e \end{aligned} \quad (4.30)$$



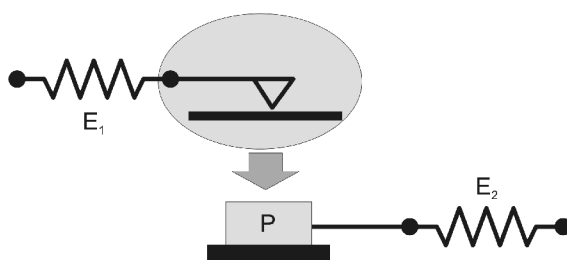
Rys. 4.14. Charakterystyka modelu sprężysto-plastycznego bez konsolidacji mechanicznej (a) konsolidacją mechaniczną: liniową (b) i nieliniową (c)

W przypadku nieliniowym (4.14c) model ten w zakresie sprężystym można opisać prawem Hooke'a, natomiast w zakresie plastycznym zależnością 4.8:

$$\begin{aligned} \sigma &= E \varepsilon \quad \text{dla } \varepsilon < \varepsilon_e \\ \sigma &= K \varepsilon^n \quad \text{dla } \varepsilon \geq \varepsilon_e \end{aligned} \quad (4.31)$$

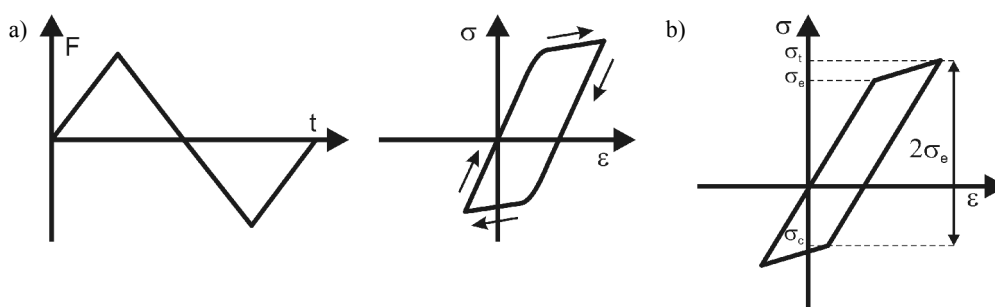
Całkowitą wartość odkształcenia dla modelu sprężysto-plastycznego można wyznaczyć z równania (4.9). Model sprężysto-plastyczny z nieliniową konsolidacją me-

chaniczną jest bardziej zbliżony do rzeczywistości niż model bez konsolidacji. Model sprężysto-plastyczny można przedstawić w postaci symbolicznej jako układ składający się ze sprężyny i suwaka. Suwak z kolei można traktować jako połączenie sprężyny i ciężarka, co zostało przedstawione schematycznie na rysunku 4.15. W zakresie sprężystym zachowanie odpowiada modelowi sprężyny o module Younga  $E_1$ . W zakresie plastycznym zachowanie odpowiada suwakowi o zmiennej sztywności ze względu na istnienie drugiej sprężyny o module Younga  $E_2$ , w momencie pokonania oporu tarcia przez ciężarek  $P$ .



Rys. 4.15. Schemat symboliczny modelu sprężysto-plastycznego

W montażu elektronicznym występują zarówno obciążenia stałe, jak i zmienne. Obciążenia zmienne w sposób okresowy noszą nazwę obciążeń cyklicznych. Obciążenia te charakteryzują się tym, że w czasie ich trwania występują kolejno dwa zjawiska: ściskanie i rozciąganie próbki. W takim przypadku charakterystyka naprężenie–odkształcenie ma kształt histerezy, co zostało przedstawione na rysunku 4.16a.



Rys. 4.16. Wykres odkształcenie–naprężenia dla próby jednoosiowego rozciągania, w przypadku obciążenia cyklicznego (a) oraz tzw. efekt Bauschingera (b)

Jeżeli przyjmiemy założenie, że materiał ma taką samą granicę plastyczności dla stanu rozciągania, jak i ściskania, to mamy do czynienia z efektem Bauschingera. Efekt ten charakteryzuje się tym, że granica plastyczności po stronie rozciągania ulega zazwyczaj podwyższeniu, a po stronie ściskania obniżeniu w stosunku do wartości

pierwotnej, co zostało przedstawione na rysunku 4.16b. W przypadku efektu Bauschingera spełniona jest zależność:

$$\sigma_c = \sigma_t - 2\sigma_e, \quad (4.32)$$

co oznacza, że wzrost granicy plastyczności po stronie rozciągania jest taki sam, jak obniżenie granicy plastyczności po stronie ściskania [254]. Efekt Bauschingera ma duże znaczenie praktyczne w modelowaniu numerycznym. Jest on powszechnie stosowany do analizy zachowania materiałów o charakterze sprężysto-plastycznym na skutek obciążeń cyklicznych.

### 4.2.2. Stan naprężenia dla złącza bimateriałowego

W wyniku obciążeń termomechanicznych w złączu bimateriałowym pojawia się stan naprężeń. Znajomość rozkładu naprężeń w złączu jest podstawowym warunkiem poprawnej analizy wytrzymałościowej oraz oceny jego niezawodności [255]. Wyznaczenie rozkładu naprężeń dla złącza bimateriałowego wymaga szczególnej ostrożności i bardzo dokładnej analizy. Metody oparte na modelowaniu numerycznym mogą okazać się niewystarczające lub niekiedy całkowicie błędne. Wynika to z faktu istnienia punktów osobliwych oraz nieciągłości w obszarze krawędzi złącza<sup>59</sup>. Z tego też powodu wynik modelowania numerycznego w takich punktach będzie zależał przede wszystkim od gęstości dyskretyzacji. Na rysunku 4.17 przedstawiono przykładową dwuwymiarową strukturę ze złączem bimateriałowym oraz stan naprężenia zredukowanego  $\sigma$  według teorii Hubera–Misesa, jako funkcję gęstości dyskretyzacji.

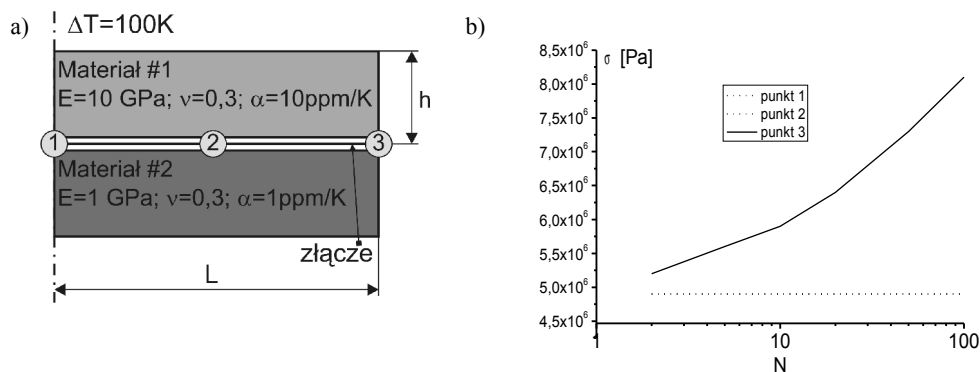
Jak wynika z rysunku 4.17, wyznaczony stan naprężenia na podstawie metodę elementów skończonych na krawędzi złącza bimateriałowego – punkt 3, zależy od gęstości dyskretyzacji, podczas gdy dla punktów położonych z dala od krawędzi – punkty 1 i 2, już nie. Dlatego też, w przypadku analizy wytrzymałościowej złącza preferowanym rozwiązaniem jest rozwiązanie analityczne.

Rozwiązanie analityczne dla struktury ze złączem bimateriałowym zostało po raz pierwszy przedstawione w 1925 roku przez S.P. Timoshenko [256]. Dotyczyło ono zarówno odkształcenia struktury, jak i maksymalnego naprężenia, jakie wystąpi w obszarze złącza. Rozwiązanie analityczne rozkładu naprężeń w obszarze samego złącza zostało przedstawione w roku 1986 przez E. Suhira [257].

Analiza teoretyczna stanu naprężenia w obszarze złącza jest niezmiernie trudna i wymaga przyjęcia określonych założeń:

---

59 Jednym z warunków poprawnych obliczeń metodą elementów skończonych jest spełnienie warunku ciągłości, co oznacza m. in. konieczność istnienia równań lub warunków brzegowych w otoczeniu danego punktu.



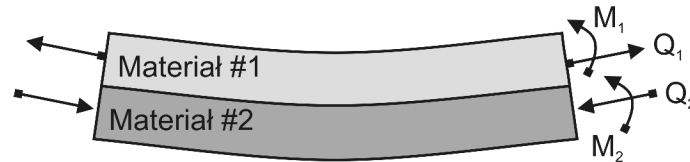
Rys. 4.17. Przykładowa struktura ze złączem bimateriałowym (a) oraz wyznaczona zależność naprężenia zredukowanego według teorii Hubera–Misesa (b) w wybranych punktach złącza w funkcji gęstości dyskretyzacji:  $N$  – liczba elementów skończonych wzdłuż bocznej krawędzi struktury

różnica współczynników rozszerzalności cieplnej obu materiałów pozostaje stała podczas zmian temperatury,

- szerokość złącza jest jednostkowa i bardzo mała w stosunku do innych wymiarów, w związku z czym model złącza można traktować jako płaski,
- oba materiały można opisać modelem idealnie sprężystym,
- oba materiały są izotropowe oraz jednorodne,
- połączenie obu materiałów jest trwałe,
- zmiana temperatury jest na tyle wolna, że można zaniedbać istnienie gradientu temperatury,
- w temperaturze początkowej  $T_0$ , będącej temperaturą odniesienia, struktura ze złączem bimateriałowym nie jest odkształcona oraz nie występują w niej żadne naprężenia,
- zjawisko rozszerzalności cieplnej całej struktury nie jest zakłócone żadnymi ograniczeniami zewnętrznymi.

W przypadku gdyby oba materiały nie były połączone, wówczas każdy materiał na skutek zmiany temperatury uległby wydłużeniu o wartość względną równą  $\alpha\Delta T$ . W przypadku gdy materiały są połączone, w wyniku zmiany temperatury początkowej  $T_0$  o wartość  $\Delta T$ , struktura ulegnie odkształceniu, jak na rysunku 4.18. Jednocześnie powstanie stan równowagi, charakteryzujący się rozkładem naprężeń w obszarze złącza tak, że jeden materiał będzie rozciągany, a drugi ściskany.

Dla dowolnego przekroju poprzecznego struktury można wyróżnić siłę wzdłużną  $Q$  oraz moment zginający  $M$  działający na ten przekrój. Wszystkie siły działające na materiał #1 reprezentuje osiowo rozciągająca siła  $Q_1$  oraz moment zginający  $M_1$ , natomiast na materiał #2 działa osiowo ściskająca siła  $Q_2$  oraz moment zginający  $M_2$ .



Rys. 4.18. Odształcenie struktury ze złączeniem bimateriałowym przy zmianie temperatury o  $\Delta T$ , gdzie  $Q$  jest siłą wzdłużną, natomiast  $M$  jest momentem zginającym

Ponieważ na strukturę nie działają żadne siły zewnętrzne, to siły wewnętrzne w danym przekroju będą w równowadze, co można zapisać jako:

$$Q_1 = Q_2 = Q, \quad (4.33)$$

oraz

$$\frac{Qh}{2} = M_1 + M_2, \quad \text{dla } h = h_1 + h_2, \quad (4.34)$$

gdzie  $h$  – grubość całej struktury,  $h_1$  i  $h_2$  – grubości warstw struktury dla materiału #1 i #2.

Stan równowagi dla struktury można opisać dwoma równaniami.

Związek między promieniem krzywizny pręta  $\rho$  a momentem zginającym można wyrazić jako:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-M}{EI}, \quad (4.35)$$

gdzie  $I$  – moment bezwładności,  $E$  – sztywność na zginanie.

Wzór (4.35) opisuje ugięcie w wyniku działania siły zginającej. Momenty zginające dla obu materiałów można zapisać w postaci:

$$M_1 = \frac{E_1 I_1}{\rho}, \quad (4.36)$$

$$M_2 = \frac{E_2 I_2}{\rho}. \quad (4.37)$$

Uwzględniając powyższe zależności w równaniu (4.34) otrzymuje się, że:

$$\frac{Qh}{2} = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2}{\rho}. \quad (4.38)$$

W przypadku prostokątnego przekroju poprzecznego po założeniu, że szerokość analizowanej struktury ma wartość jednostkową, momenty bezwładności dla materiału #1 i #2 wynoszą odpowiednio:

$$I_1 = \frac{h_1^3}{12}, \quad (4.39)$$

$$I_2 = \frac{h_2^3}{12}. \quad (4.40)$$

W obszarze złącza odkształcenia obu materiałów będą jednakowe, przy czym odkształcenie wzdłużne będzie sumą trzech składowych:

- odkształcenia związane ze współczynnikiem rozszerzalności cieplnej:

$$\varepsilon = \alpha \Delta T, \quad (4.41)$$

- odkształcenia związanego z naprężeniem wzdłużnym:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{Q}{Ebh}, \quad (4.42)$$

gdzie  $b$  – szerokość materiału, w analizowanym przypadku równa jedności,

- odkształcenia związanego z ugięciem materiału:

$$\varepsilon = \frac{h}{2\rho}. \quad (4.43)$$

Całkowite odkształcenie wzdłużne  $\varepsilon$  dla materiału będzie wyrażone zależnością:

$$\varepsilon = \alpha \Delta T + \frac{Q}{Eh} + \frac{h}{2\rho}. \quad (4.44)$$

Ostatecznie można zapisać, że w obszarze złącza, gdzie  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , spełniona jest zależność:

$$\alpha_1 \Delta T + \frac{Q_1}{E_1 h_1} + \frac{h_1}{2\rho} = \alpha_2 \Delta T - \frac{Q_2}{E_2 h_1} - \frac{h_2}{2\rho}. \quad (4.45)$$

Po przekształceniu równania otrzymuje się wzór na promień krzywizny  $\rho$  struktury w postaci:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{6(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T (1+m)^2}{h(3(1+m))^2 + (1+mn) \left( m^2 + \frac{1}{mn} \right)}, \quad (4.46)$$



gdzie

$$m = \frac{h_1}{h_2}, \quad (4.47)$$

$$n = \frac{E_1}{E_2}. \quad (4.48)$$

W przypadku gdy grubości obu warstw struktury są równe, tzn.  $m = 1$ , wzór (4.46) upraszcza się do postaci:

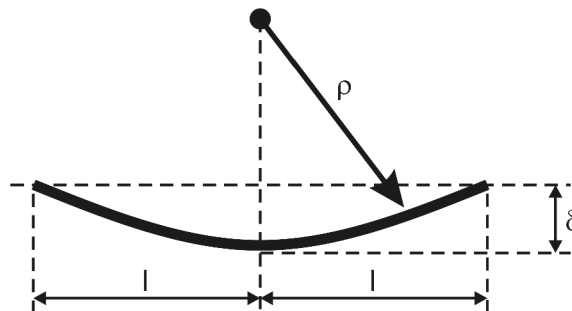
$$\frac{1}{\rho} = \frac{24 \Delta \alpha \Delta T}{h \left( 14 + n + \frac{1}{n} \right)}. \quad (4.49)$$

Z zależności (4.49) widać, że promień krzywizny  $\rho$  struktury jest:

- odwrotnie proporcjonalny do różnicy współczynników rozszerzalności cieplnej  $\Delta \alpha$  materiałów,
- wprost proporcjonalny do grubości całej struktury  $h$ ,
- praktycznie niezależny od parametru  $n$ , wyrażającego stosunek modułów Younga obu materiałów.

Korzystając z zależności opisującej promień krzywizny  $\rho$  struktury ze złączem bimateriałowym można wyznaczyć jej ugięcie  $\delta$ . W tym celu przyjmuje się założenie, że struktura jest podparta na końcach i ugina się na skutek zmiany temperatury o  $\Delta T$  (rys. 4.19). Ponieważ kształt struktury jest łukiem okręgu o promieniu  $\rho$ , zatem spełniona jest zależność:

$$\delta(2\rho - \delta) = l^2. \quad (4.50)$$



Rys. 4.19. Ugięcie struktury bimateriału na skutek zmiany temperatury o  $\Delta T$

Ponieważ ugięcie  $\delta$  jest małe w porównaniu z promieniem krzywizny  $\rho$ , więc można zapisać, że będzie ono wyrażone zależnością:

$$\delta = \frac{l^2}{2\rho}. \quad (4.51)$$

Istotnym parametrem ze względu na ocenę wytrzymałości struktury jest wartość maksymalnego naprężenia w obszarze samego złącza. Maksymalne naprężenie  $\sigma_{\max}$ , w przypadku zmiany temperatury o  $\Delta T$  w obszarze złącza będzie składać się z dwóch składowych:

- naprężenia wywołanego siłą wzdłużną:

$$\sigma = \frac{Q}{bh}, \quad (4.52)$$

- naprężenia wywołanego zginaniem:

$$\sigma = E \frac{h}{2\rho}. \quad (4.53)$$

Można zatem zapisać, że:

$$\sigma_{\max} = \frac{Q}{h} + \frac{hE}{2\rho}. \quad (4.54)$$

Przykładowo dla materiału #1 wartość naprężenia maksymalnego  $\sigma_{\max}$  wynosi:

$$\sigma_{\max} = \frac{Q}{h_1} + \frac{h_1 E_1}{2\rho}, \quad (4.55)$$

lub korzystając z równania (4.38):

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{2}{h h_1} (E_1 I_1 + E_2 I_2) + \frac{h_1 E_1}{2} \right). \quad (4.56)$$

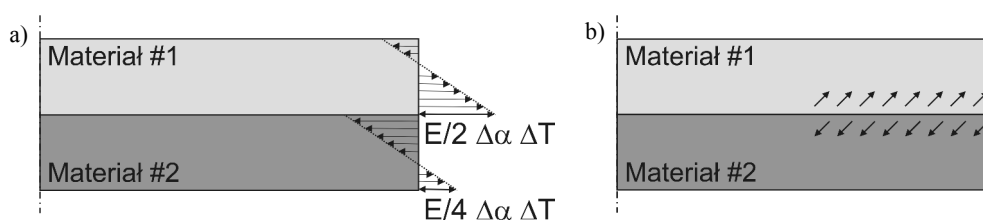
Jeżeli przyjmie się założenia, że  $E_1 = E_2$ ,  $h_1 = h_2$  oraz skorzysta się z zależności (4.49) opisującej promień krzywizny  $\rho$ , to otrzymuje się zależność uproszczoną na naprężenie maksymalne  $\sigma_{\max}$  w obszarze złącza w postaci:

$$\sigma_{\max} = \frac{E}{2} \Delta \alpha \Delta T. \quad (4.57)$$

Z zależności tej wynika, że naprężenie maksymalne  $\sigma_{\max}$  jest:

- wprost proporcjonalne do różnicy współczynników rozszerzalności cieplnej materiałów  $\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ,
- wprost proporcjonalne do modułu Younga  $E = E_2 = E_1$  obu materiałów.

Rozkład naprężeń normalnych wzdłuż przekroju poprzecznego struktury w przypadku, gdy moduły Younga są jednakowe, pokazano na rysunku 4.20a. Naprężenia w obszarze złącza znajdują się w stanie równowagi i mogą być w przybliżeniu podzielone na dwie części o przeciwnych zwrotach.



Rys. 4.20. Rozkład naprężeń normalnych (a) oraz stycznych (b) w pobliżu krawędzi struktury bimateriałowej po założeniu, że  $E = E_2 = E_1$  oraz  $h_1 = h_2$

Przedstawione rozważania dotyczące stanu naprężeń w obszarze złącza odnoszą się jedynie do obszaru położonego w pewnej odległości od jej końca. Rozkład naprężeń w pobliżu krawędzi złącza jest jednak bardziej skomplikowany. W przypadku najprostszym, tzn. gdy spełnione są warunki:  $E = E_1 = E_2$  oraz  $h_1 = h_2$ , w obszarze krawędzi złącza pojawiają się dodatkowo naprężenia styczne (rys. 4.20b). Niestety wyznaczenie rozkładu naprężeń stycznych wzdłuż granicy połączenia materiałów jest bardzo trudne. Z całą pewnością można jedynie stwierdzić to, że będą one koncentrowały się na końcu struktury. Ponadto wartość tych naprężeń może być tego samego rzędu co wartość naprężeń normalnych. Przedstawione przez Timoshenko rozwiązanie jest jedynie przybliżeniem sytuacji rzeczywistej. Pozwala ono na wyznaczenie promienia krzywizny oraz wartości naprężeń normalnych na końcach struktury. Rozwiązanie to jednak nic nie mówi o naprężeniach stycznych, jak również nie pozwala na wyznaczenie rozkładu naprężeń w obszarze samego złącza. Rozwiązanie pozwalające na wyznaczenie wartości wszystkich naprężeń na krawędzi złącza bimateriałowego zostało podane przez Hessa [258], a następnie poprawione przez Eischena [259]. Po raz pierwszy problem rozkładu naprężeń w obszarze złącza bimateriałowego został przedstawiony przez Chena i Nelsona [59]. Precyzyjne rozwiązanie analityczne zostało z kolei zaproponowane przez Suhira [257]. Według zaproponowanych koncepcji rozkład poszczególnych naprężeń wzdłuż złącza powinien mieć charakter przedstawiony na rysunku 4.21.

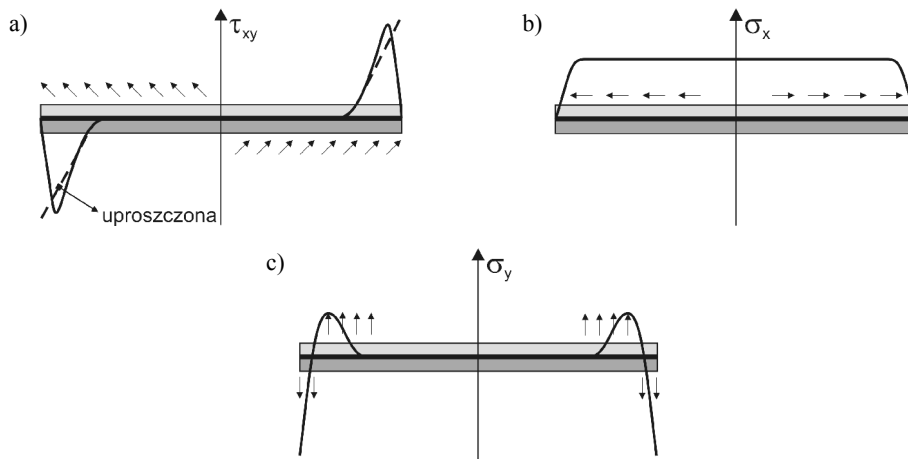
Według Suhira, w celu wyznaczenia rozkładu naprężeń w obszarze złącza bimateriałowego zamiast odkształcenia całkowitego  $\varepsilon$ , należy skorzystać z przemieszczenia  $u(x)$ , które stanowi funkcję odległości  $x$  od punktu neutralnego:

$$\Delta u(x) = \varepsilon x . \quad (4.58)$$

Oczywiście, przemieszczenia w obszarze złącza dla obu materiałów będą jednakowe:

$$u_1(x) = u_2(x), \quad (4.59)$$

przy czym przemieszczenie  $u(x)$  będzie funkcją czterech składowych:



Rys. 4.21. Charakter rozkładu naprężeń: styczne  $\tau_{xy}$  (a), normalne poprzeczne  $\sigma_y$  (b), normalne wzdłużne  $\sigma_x$  (c)

przemieszczenia związanego ze współczynnikiem rozszerzalności cieplnej:

$$u(x) = \alpha \Delta T x \quad (4.60)$$

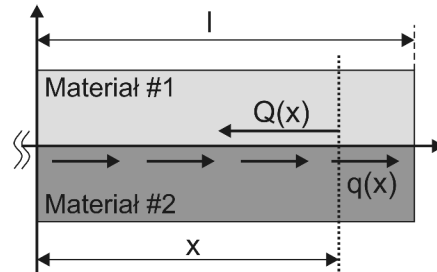
- przemieszczenia związanego z naprężeniem wzdłużnym po założeniu, że naprężenie jest rozłożone jednorodnie wzdłuż całej struktury z jednoczesnym brakiem przemieszczeń w kierunku poprzecznym:

$$u(x) = \frac{1-\nu^2}{Ehb} \int_0^x Q(\xi) d\xi, \quad (4.61)$$

gdzie  $b$  – szerokość materiału – w analizowanym przypadku równa jedności,  $h$  – grubość struktury,  $Q(x)$  – siła przypadająca na dany przekrój poprzeczny (rys. 4.22) i wyrażona zależnością:

$$Q(x) = \int_{-l}^x q(\xi) d\xi, \quad (4.62)$$

przy czym  $q(\xi)$  jest siłą styczną przypadającą na jednostkę długości;



Rys. 4.22. Siły działające w przekroju poprzecznym

- przemieszczenia związanego z istnieniem sił stycznych  $q(x)$ :

$$u(x) = \kappa q(x), \quad (4.63)$$

gdzie  $\kappa$  – współczynnik podatności międzyfazowej wyrażony zależnością:

$$\kappa = \frac{2(1+\nu)}{3E} \frac{h}{b}, \quad (4.64)$$

- przemieszczenia związanego z ugięciem materiału:

$$u(x) = \frac{h}{2} \int_0^x \frac{d\xi}{\rho(\xi)}, \quad (4.65)$$

gdzie  $\rho(\xi)$  – promień krzywizny ugięcia.

Całkowite przemieszczenie  $u(x)$  dla materiału można zapisać jako:

$$u(x) = \alpha \Delta T x - \frac{1-\nu^2}{Ehb} \int_0^x Q(\xi) d\xi + \kappa q(x) + \frac{h}{2} \int_0^x \frac{d\xi}{\rho(\xi)}. \quad (4.66)$$

Przemieszczenia  $u_1(x)$  i  $u_2(x)$  odpowiednio dla materiału #1 i #2 można wyznaczyć z układu równań:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \alpha_1 \Delta T x - \frac{1-\nu_1^2}{E_1 h_1 b} \int_0^x Q(\xi) d\xi + \kappa_1 q(x) + \frac{h_1}{2} \int_0^x \frac{d\xi}{\rho(\xi)}, \\ u_2(x) &= \alpha_2 \Delta T x - \frac{1-\nu_2^2}{E_2 h_2 b} \int_0^x Q(\xi) d\xi + \kappa_2 q(x) + \frac{h_2}{2} \int_0^x \frac{d\xi}{\rho(\xi)}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

gdzie  $\kappa_1$  i  $\kappa_2$  – współczynniki podatności międzyfazowej dla materiału #1 i #2.

Z warunku zgodności przemieszczeń otrzymuje się:

$$\kappa q(x) - \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1 h_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2 h_2} \right) \int_0^x Q(\xi) d\xi + \frac{bh}{2} \int_0^x \frac{d\xi}{\rho \xi} = b \Delta \alpha \Delta T x, \quad (4.68)$$

gdzie  $h = h_1 + h_2$ ,  $\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$  oraz:

$$\kappa = b(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{2(1+\nu_1)}{3E_1} h_1 + \frac{2(1+\nu_2)}{3E_2} h_2. \quad (4.69)$$

Równanie równowagi w wybranym miejscu złącza można zapisać jako:

$$M_1(x) + M_2(x) - \frac{h}{2} Q(x) = 0, \quad (4.70)$$

gdzie  $M_1(x)$  i  $M_2(x)$  są momentami gnącymi i można je wyznaczyć z zależności:

$$M_1(x) = \frac{b D_1}{\rho(x)}, \quad (4.71)$$

$$M_2(x) = \frac{b D_2}{\rho(x)}, \quad (4.72)$$

natomiast  $D_1$  i  $D_2$  oznaczają sztywność :

$$D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\nu_1^2)}, \quad (4.73)$$

$$D_2 = \frac{E_2 h_2^3}{12(1-\nu_2^2)}. \quad (4.74)$$

Z równań (4.70), (4.71) i (4.72) otrzymuje się zależność na promień krzywizny:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{h}{2bD} Q(x), \quad (4.75)$$

gdzie:

$$D = D_1 + D_2. \quad (4.76)$$

Po uwzględnieniu formuły (4.75) w równaniu (4.68) otrzymuje się równanie całkowe opisujące siły styczne

$$q(x) - k^2 \int_0^x Q(\xi) d\xi = b \frac{\Delta \alpha \Delta T}{\kappa} x, \quad (4.77)$$

gdzie:

$$k^2 = \frac{\lambda}{\kappa}, \quad (4.78)$$

$$\lambda = \frac{1}{12} \left( \frac{h_1^2}{D_1} + \frac{h_2^2}{D_2} + \frac{3h^2}{D} \right). \quad (4.79)$$

Po rozwiązaniu równania (4.77) dla warunków brzegowych  $q(0) = 0$  i  $Q(l) = 0$  otrzymujemy rozkład naprężeń stycznych w obszarze złącza bimateriałowego w postaci

$$\tau_{xy}(x) = \frac{q(x)}{b} = \frac{\Delta \alpha \Delta T}{k \kappa \cosh(kl)} \sinh(kx). \quad (4.80)$$

Maksymalna wartość naprężenia stycznego występuje na krawędziach złącza, a więc dla  $x = l$ :

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{\Delta \alpha \Delta T}{k \kappa} \operatorname{tgh}(kl) = \frac{\Delta \alpha \Delta T}{\sqrt{\lambda \kappa}} \operatorname{tgh}(kl). \quad (4.81)$$

W przypadku gdy wartość  $kl$  jest duża, wówczas zależność (4.81) można zapisać jako

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{\Delta \alpha \Delta T}{\sqrt{\lambda \kappa}}. \quad (4.82)$$

Maksymalne naprężenie styczne  $\tau_{xy}^{\max}$  w złączu bimateriałowym występuje na krawędzi, ponadto jego wartość:

- nie zależy od długości  $l$  struktury,
- rośnie wraz ze wzrostem grubości  $h$  struktury.

Po podstawieniu równania (4.80) do równania (4.62) otrzymujemy:

$$Q(x) = -\frac{b \Delta \alpha \Delta T}{\lambda} \chi(x), \quad (4.83)$$

gdzie funkcja

$$\chi(x) = 1 - \frac{\sinh(kx)}{\cosh(kl)} \quad (4.84)$$

charakteryzuje rozkład sił  $Q(x)$  i naprężenia normalne. Promień krzywizny ugięcia struktury można wyznaczyć przez podstawienie równania 4.83 do równania 4.75:

$$\frac{1}{\rho(x)} = -\frac{h \Delta \alpha \Delta T}{2 \lambda D} \chi(x) \quad (4.85)$$

Równania opisujące momenty zginające możemy zapisać zatem w postaci

$$\begin{aligned} M_1(x) &= -\frac{bh \Delta \alpha \Delta T}{2 \lambda D} D_1 \chi(x), \\ M_2(x) &= -\frac{bh \Delta \alpha \Delta T}{2 \lambda D} D_2 \chi(x). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Naprężenia normalne wzdłużne  $\sigma_x(x)$  będące wynikiem działania siły  $Q(x)$  oraz momentów  $M_1(x)$  i  $M_2(x)$  można opisać zależnościami:

$$\begin{aligned} \sigma_x^1(x) &= -\frac{\Delta \alpha \Delta T}{\lambda h_1} \left[ 1 + \frac{3h D_1}{h_1 D} \right] \chi(x), \\ \sigma_x^2(x) &= -\frac{\Delta \alpha \Delta T}{\lambda h_2} \left[ 1 + \frac{3h D_2}{h_2 D} \right] \chi(x). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Wyznaczona zależność dla rozkładu naprężenia normalnego różni się od zależności wyprowadzonej przez Timoshenko czynnikiem  $\chi(x)$ . Wynika z tego, że naprężenie maksymalne jest niezależne od czynnika  $\kappa$ , w związku z tym można je wyznaczyć w sposób zaproponowany przez Timoshenko. W przypadku gdy wartość  $kl$  jest duża, czynnik  $\chi(x)$  może być zapisany w postaci:

$$\chi(x) = 1 - e^{-k \cdot (l-x)}, \quad (4.88)$$

co oznacza, że dla małych wartości  $x$ , np. dla przekroju oddalonego od krawędzi struktury, czynnik  $\chi(x)$  jest bliski jedności. Tym samym, naprężenie nie zależy od położenia danego przekroju wzdłuż złącza. Podczas gdy w pobliżu krawędzi złącza, gdzie współrzędna  $x$  jest równa  $l$ , wartość naprężenia gwałtownie zmniejsza się, aby przyjąć następnie wartość zerową na końcu złącza.

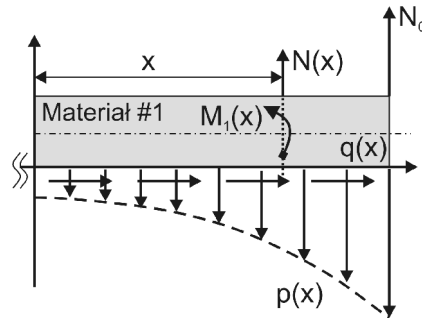
Rozkład sił poprzecznych  $p(x)$  w obszarze złącza można wyznaczyć na podstawie równań dla stanu równowagi zapisanych jedynie dla wybranej części złącza (rys. 4.23):

$$(x+l)N_0 - b \int_{-l}^x \int_{-l}^{\xi} p(\xi') d\xi' d\xi = M_1(x) - \frac{h_1}{2} Q(x) - M_2(x) + \frac{h_2}{2} Q(x) = \mu Q(x) \quad (4.89),$$

gdzie:

$$\mu = \frac{h_2 D_1 - h_1 D_2}{2D}. \quad (4.90)$$





Rys. 4.23. Siły i momenty występujące w obszarze złącza bimateriałowego

Po zróżniczkowaniu równania (4.89) otrzymuje się:

$$N(x) = b \int_{-l}^x p(\xi) d\xi = N_0 - \mu q(x) = N_0 - b \mu \tau_{xy}(x) \quad (4.91)$$

oraz rozkład naprężenia normalnego poprzecznego w postaci:

$$\sigma_y(x) = \frac{\mu}{\kappa} \Delta \alpha \Delta T \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kl)} \quad (4.92)$$

Warunek równowagi wymaga, aby  $N(l) = 0$ , czyli :

$$N_0 = b \mu \tau_{xy}^{\max} \quad (4.93)$$

Maksymalne naprężenia normalne poprzeczne  $\sigma_y^{\max}$  występuje na krawędzi złącza i można opisać zależnością:

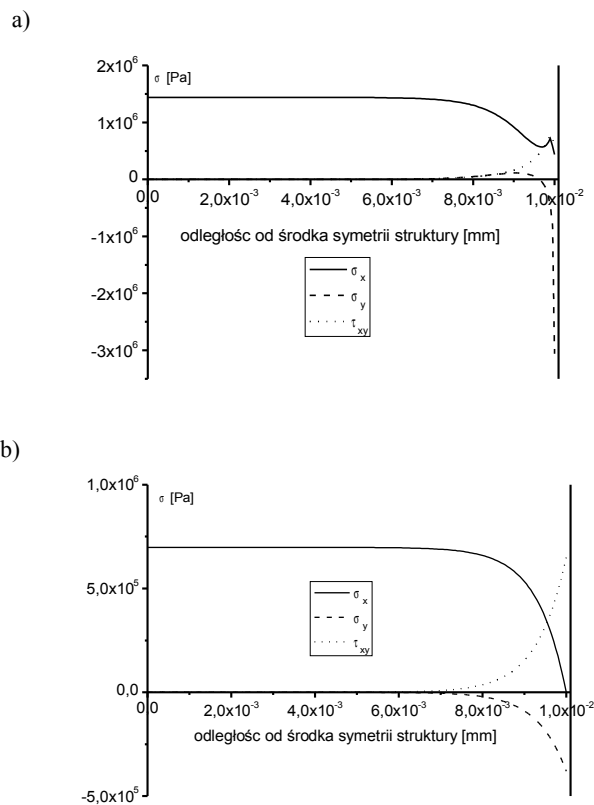
$$\sigma_y^{\max} = \sigma(l) = \frac{\mu}{\kappa} \Delta \alpha \Delta T \quad (4.94)$$

Naprężenie normalne poprzeczne  $\sigma_y$  nie wystąpi w przypadku, gdy spełniony będzie warunek:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{h_1}{h_2} \quad (4.95)$$

W przypadku gdy wartość  $\mu$  nie jest pomijalnie mała, wówczas naprężenie normalne poprzeczne  $\sigma_y$  będzie duże i może w konsekwencji doprowadzić do zniszczenia złącza.

Na rysunku 4.24 przedstawiono porównanie rozkładów naprężenia stycznego  $\tau_{xy}(x)$  oraz naprężeń normalnych: poprzecznego  $\sigma_y(x)$  i wzdłużnego  $\sigma_x(x)$  (równania (4.80), (4.92) i (4.87)), dla struktury przedstawionej na rysunku 4.17a. Naprężenia zostały kolejno wyznaczone na drodze modelowania numerycznego oraz metodą analityczną.



Rys. 4.24. Przykładowe rozkłady naprężeń dla struktury przedstawionej na rysunku 4.17a, w obszarze złącza bimateriałowego wyznaczone w drodze modelowania numerycznego (a) oraz metodą analityczną (b)

W przypadku naprężeń stycznych  $\tau_{xy}(x)$  i normalnych poprzecznych  $\sigma_y(x)$  wartości maksymalne występują przy krawędziach złącza, natomiast w przypadku naprężenia normalnego wzdłużnego  $\sigma_x(x)$ , które jest wypadkową naprężeń  $\sigma_x^1(x)$  i  $\sigma_x^2(x)$ , w jego środku. Jednocześnie z rysunku 4.24 wynika, że naprężenia wyznaczone metodą modelowania numerycznego są znacznie większe niż naprężenia uzyskane analitycznie. Niedokładność rozwiązania numerycznego jest szczególnie duża na krawędzi obszaru złącza, czyli w miejscu, które jest istotne ze względu na analizę wytrzymałościową.

Rozwiązanie analityczne rozkładu naprężeń zaproponowane przez Suhira było w kolejnych latach uzupełniane o kolejne poprawki, z których najważniejsze to [260, 261]:

- uwzględnienie warunku równowagi naprężeń normalnych poprzecznych  $\sigma_y(x)$  oraz niezerowej wartości naprężeń normalnych wzdłużnych  $\sigma_x(x)$  przy krawędzi złącza, zaproponowane przez samego Suhira [262],
- istnienie skończonej wartości naprężeń normalnych poprzecznych  $\sigma_y(x)$  na krawędzi złącza podczas zmian temperatury  $\Delta T$ , wykonana przez Gu i Phelana [263],
- rozwiązanie uwzględniające proporcjonalną zależność wzdłuż złącza między naprężeniem normalnym poprzecznym  $\sigma_y(x)$  a pierwszą pochodną naprężenia stycznego  $d\tau_{xy}(x)/dx$ , zaproponowane przez Ru [264]; według tego rozwiązania maksimum naprężenia stycznego  $\tau_{xy}(x)$  występuje w miejscu, gdzie zeruje się naprężenie normalne poprzeczne  $\sigma_y(x)$ ,
- opracowanie reguły pozwalającej na prognozowanie rozwarstwienia dla złącza bimateriałowego, zaproponowanej przez Moore'a i Jarvisa [265]; według tej reguły kryterium uszkodzenia w wyniku rozwarstwienia struktury bimateriałowej zależy od całkowitego momentu naprężenia normalnego poprzecznego  $\sigma_y(x)$ , który jest wynikiem zmiany znaku tego naprężenia w pobliżu krawędzi złącza.

### 4.2.3. Kryteria uszkodzenia dla złącza bimateriałowego

Uszkodzenie struktury bimateriałowej nastąpi wówczas, gdy stan naprężenia przekroczy wytrzymałość struktury. Wytrzymałość można opisać wartością krytyczną naprężenia, którą z kolei wyznacza się na podstawie badań doświadczalnych. Badania doświadczalne realizuje się najczęściej dla jednoosiowego stanu naprężenia, a następnie wyniki przelicza się w postaci odpowiedniego kryterium dla przypadku wielowymiarowego. Naprężenia powstałe w wyniku obciążeń termomechanicznych wykonują określoną pracę w trakcie deformacji ciała. Praca ta jest następnie przekształcana na energię odkształcenia, która w zależności od modelu ciała może mieć charakter energii sprężystej lub niesprężystej. Całkowita energia odkształcenia przypadająca na jednostkę objętości  $dx-dy-dz$  w funkcji naprężeń głównych  $\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3$  i odpowiadających im odkształceń głównych  $\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3$  może być wyznaczona z założenia, że całkowita energia odkształcenia  $U_T$  będzie równa wykonanej pracy  $W$ :

$$U_T = W. \quad (4.96)$$

Założenie to obowiązuje dla przypadku, w którym nie występuje rozpraszanie energii. W wyniku działania obciążeń ciało ulega odkształceniu, w związku z czym energia odkształcenia może być wyznaczona jako praca naprężenia, zmieniającego się od wartości 0 do  $\sigma$ , wzdłuż wybranego kierunku. Praca  $W$ , wykonana przez siłę  $F$ , zmieniającą się od wartości  $F_p$  do  $F_k$ , wzdłuż drogi  $d$ , na której ona działa, wynosi:

$$W = \left( \frac{F_p + F_k}{2} \right) d. \quad (4.97)$$

Wzór (4.97) jest spełniony, gdy zależność między siłą a drogą jest liniowa. Jeżeli przyjmie się następujące założenia:

- siła  $F_p = 0$ ,
- siła  $F_k$  może być wyznaczona jako iloczyn naprężenia oraz pola powierzchni:

$$F_k = \sigma_1 dy dz, \quad (4.98)$$

- droga  $d$  może być wyznaczona jako iloczyn odkształcenia i długości krawędzi komórki objętości:

$$d = \varepsilon_1 dx, \quad (4.99)$$

wówczas energia odkształcenia zgromadzona w jednostce objętości  $U_T$  będzie równa:

$$U_{T_1} = W_1 = \left( \frac{\sigma_1 dy dz}{2} \right) (\varepsilon_1 dx). \quad (4.100)$$

Wartość energii przypadająca na jednostkę objętości  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  związanej z naprężeniami głównymi  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ , można wyznaczyć przez podzielenie zależności (4.100) przez objętość:

$$U_1 = \frac{U_{T_1}}{dx dy dz} = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2}, \quad U_2 = \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2}, \quad U_3 = \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \quad (4.101)$$

Całkowita wartość gęstości energii  $U_T$  będzie równa sumie wszystkich trzech składowych związanych z naprężeniami głównymi:

$$U_T = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2} [\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3]. \quad (4.102)$$

W przypadku rozpraszania energii w postaci odkształcenia niesprężystego całkowita energia zgromadzona w jednostce objętości  $U_T$  będzie równa sumie gęstości energii odkształcenia sprężystego i niesprężystego:

$$U_T = U_T^s + U_T^n = \frac{1}{2} [\sigma_1 (\varepsilon_1^s + \varepsilon_1^n) + \sigma_2 (\varepsilon_2^s + \varepsilon_2^n) + \sigma_3 (\varepsilon_3^s + \varepsilon_3^n)], \quad (4.103)$$

gdzie  $U_T^s$  – energia sprężysta,  $U_T^n$  – energia niesprężysta zgromadzona w jednostce objętości.

W przypadku energii sprężystej mówimy o zjawisku odwracalnym, to znaczy, że po ustaniu obciążenia układ wraca do stanu pierwotnego. W przypadku energii niesprężystej mówimy o zjawisku rozpraszania energii, to znaczy że po ustaniu obciążenia w układzie pozostaje stan trwałego odkształcenia.

Analiza wytrzymałościowa dotyczy najczęściej obciążenia dla jednoosiowego stanu naprężenia, dzięki czemu może być łatwo zweryfikowana doświadczalnie przez pomiar

charakterystyki odkształcenie–naprężenie. Za kryterium uszkodzenia może przyjąć wartość naprężenia, przy której materiał wkracza w zakres odkształceń plastycznych, czyli przekracza granicę plastyczności  $R_e$  [266]. *W przypadku modelowania numerycznego niezbędna jest umiejętność połączenia wyników doświadczalnych dla jednoosiowego stanu naprężenia z wielowymiarowym stanem naprężenia.* W przypadku wielowymiarowego stanu naprężenia poszczególne kierunki mogą wpływać na siebie wzajemnie. W związku z czym przyjęcie jednoznacznego kryterium uszkodzenia nie jest możliwe. Jednak z drugiej strony, w celu oceny wytrzymałości konieczne jest zdefiniowanie jednoznacznego kryterium uszkodzenia. Z tego też powodu opracowano wiele hipotez, które łączą jednoosiowe kryterium uszkodzenia uzyskane doświadczalnie z wielowymiarowym stanem naprężenia [79, 267].

Dla przypadku jednoosiowego tylko jedna wartość naprężenia głównego jest niezerowa. W związku z tym dla wartości krytycznej naprężenia  $\sigma_f$ , wartość energii przypadająca na jednostkę objętości  $U_f$ , w chwili uszkodzenia będzie równa:

$$U_f = \frac{1}{2E} [\sigma_f^2]. \quad (4.104)$$

Kryterium uszkodzenia dla przypadku wielowymiarowego można przedstawić w postaci zależności:

$$U_T \geq U_f \quad (4.105)$$

lub inaczej:

$$\left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] \geq \sigma_f^2. \quad (4.106)$$

Powyższa zależność została zaproponowana w roku 1885 przez Beltramiego i mówi, że:

***Kryterium uszkodzenia dla wielowymiarowego stanu naprężenia jest taką wartością całkowitej energii odkształcenia, przypadająca na jednostkę objętości, która jest równa lub większa od całkowitej wartości energii odkształcenia, przypadająca na jednostkę objętości, dla przypadku jednoosiowego, uzyskanego na drodze doświadczalnej.***

W roku 1904 kryterium uszkodzenia zostało poprawione przez T.M. Hubera<sup>60</sup>. Huber sformułował hipotezę wyteżenia materiału według energii odkształcenia czysto

60 T.M. Huber w 1904 roku obronił rozprawę doktorską w Lwowskiej Szkole Politechnicznej z teorii stykania się ciał sprężystych. W tym samym roku opublikował pracę, dotyczącą hipotezy wytrzymałości i energii odkształcenia postaciowego, *Właściwa praca odkształcenia postaciowego jako miara wyteżenia materiału.*

postaciowego [116] – całkowitą energię odkształcenia  $U_T$  można rozłożyć na dwie składowe:

- energię hydrostatyczną  $U_V$  związaną ze zmianą objętości,
  - energię postaciową  $U_d$  związaną ze zmianą kształtu,
- co można zapisać jako:

$$U_T = U_d + U_V \quad (4.107)$$

Aby wyznaczyć energię odkształcenia, wektor naprężeń głównych należy rozłożyć na dwie składowe:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{S}, \quad (4.108)$$

gdzie  $\boldsymbol{S}$  – macierz określana terminem naprężenia hydrostatycznego – zmiana objętości, gdyż składowe naprężenia są jednakowe we wszystkich kierunkach. Energię hydrostatyczną związaną ze zmianą objętości można wyznaczyć z zależności:

$$U_V = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right]^2. \quad (4.109)$$

W celu wyznaczenia energii postaciowej należy od całkowitej energii odjąć energię związaną ze zmianą objętości, co można zapisać jako:

$$U_d = \frac{1}{2} \left[ \frac{1+\nu}{3E} \right] \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (4.110)$$

Krytyczne naprężenie  $\sigma_f$  przypadające na jednostkę objętości  $U_d$  w momencie uszkodzenia ma postać:

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_f^2. \quad (4.111)$$

Kryterium uszkodzenia dla energii odkształcenia postaciowego można zapisać jako:

$$\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \geq \sigma_f^2. \quad (4.112)$$

Hipoteza Hubera została następnie uzupełniona przez Misesa. Zgodnie z tą hipotezą:

**Kryterium uszkodzenia** przedstawia taką wartość energii odkształcenia postaciowego dla wielowymiarowego stanu naprężenia, przypadającej na jednostkę objętości, która jest równa lub większa od energii odkształcenia postaciowego, przypadającego na jednostkę objętości, dla przypadku jednowymiarowego, uzyskanej doświadczalnie.

Kryterium uszkodzenia według energii odkształcenia postaciowego zostało wprowadzone w celu uzyskania zgodności między prognozą a wynikami doświadczalnymi. Badania doświadczalne wykazały, że hydrostatyczny stan naprężeń nie jest poprawnym kryterium uszkodzenia. Mimo że hipoteza Hubera i Misesa została opracowana dla zakresu sprężystego, to wyniki doświadczalne wskazują, że obowiązuje ona także dla zakresu niesprężystego.

#### 4.2.3.1. Pękanie kruche i plastyczne

Pękanie w montażu elektronicznym jest prawdopodobnie dominującym rodzajem uszkodzenia na skutek obciążeń termomechanicznych [268]. W wyniku pęknięcia może dojść do uszkodzenia materiału lub złącza. Pękanie wystąpi wówczas, gdy wartość naprężenia  $\sigma$  przekroczy wartość krytyczną dla danego materiału  $K_c$ :

$$\sigma \geq K_c . \quad (4.113)$$

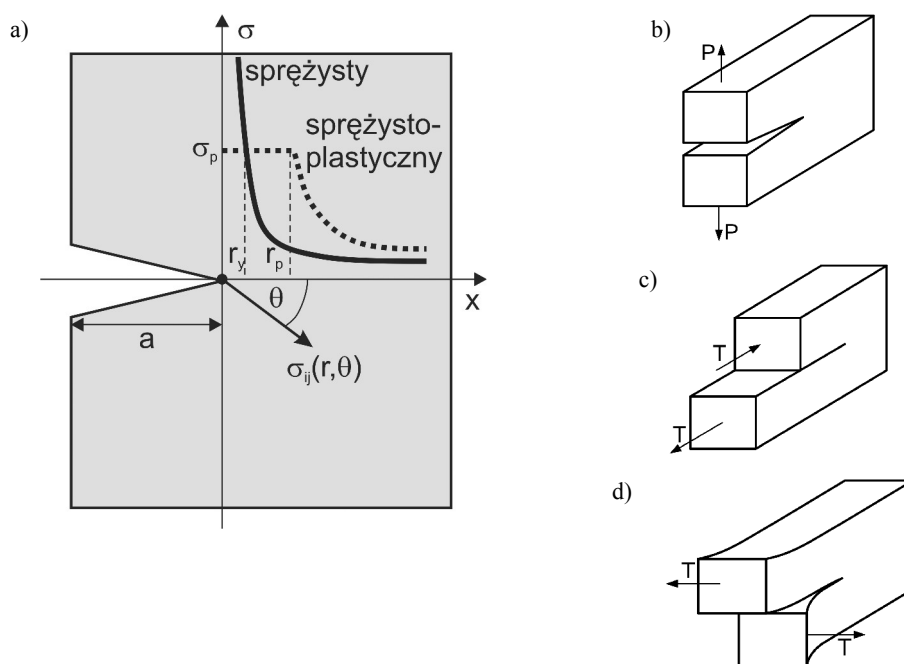
Wiele materiałów inżynierskich zbudowanych jest z kryształów. W przypadku kryształów idealnych wartość krytyczną naprężenia można wyznaczyć na podstawie sztywności wiązań międzyatomowych. Siły międzyatomowe zależą od odległości między atomami. W przypadku gdy odległość między środkami atomów jest równa odległości równowagowej  $2r_0$ , wówczas siły międzyatomowe osiągają wartość minimalną, podobnie jak wartość energii potencjalnej  $E_p$  wiązania międzyatomowego. W przypadku obciążeń zewnętrznych w materiale powstaje stan naprężenia, a odległość między środkami atomów w zależności od rodzaju obciążenia albo zwiększa się, albo maleje. W chwili gdy naprężenie w materiale przekroczy wartość krytyczną odpowiadającą maksymalnej wartości sił wiązania międzyatomowego, wówczas może dojść do pęknięcia kryształu. Wyznaczona teoretycznie wytrzymałość krytyczna dla kryształów wynosi około  $E/15$  [80]. Wartość ta jest jednak dużo wyższa niż wartość krytyczna wyznaczona doświadczalnie. Dzieje się tak, dlatego że materiały rzeczywiste zawierają defekty i dyslokacje, które w wyniku obciążeń mogą się przemieszczać, powodując odkształcenie kryształu. Naprężenie, przy którym następuje przemieszczanie się defektów i dyslokacji odpowiada granicy plastyczności  $R_e$ . W przypadku, gdy po przekroczeniu granicy plastyczności następuje dalszy wzrost naprężeń, zjawisko takie nazywa się umocnieniem.

Prognozowanie wytrzymałości materiału wymaga znajomości mechaniki pęknięcia. Mechanika pęknięcia pozwala określić rozkład naprężeń w pobliżu czoła szczeliny i opisać zjawisko inicjacji i propagacji pęknięcia. W przypadku materiałów sprężysto-plastycznych wyróżnia się dwa mechanizmy pęknięcia nagłego na skutek obciążeń stałych:

- pękanie kruche – rozrywanie wiązań atomowych wzdłuż płaszczyzn krystalograficznych,
- pękanie plastyczne – inicjacja oraz łączenie mikroszczelin w materiale.

Pole naprężeń w otoczeniu czoła szczeliny można analizować w zależności od rodzaju sił rozciągających  $P$  i równoległych  $T$  oraz przemieszczenia powierzchni

w czole szczeliny pęknięcia (rys. 4.25). Mechanika pęknięcia wyróżnia się trzy typy obciążenia pęknięcia i odpowiadające im modele obciążeń i deformacji szczeliny: rozwarcie – model I, ścinanie podłużne – model II oraz ścinanie poprzeczne – model III [70, 269].



Rys. 4.25. Rozkład naprężenia w czole szczeliny (b) oraz podstawowe typy obciążenia pęknięcia i odpowiadające im modele mechaniki pęknięcia: rozwarcie – model I (b), ścinanie podłużne – model II (c) ścinanie poprzeczne – model III (d)

Rozkład naprężenia, w przypadku gdy nie przekracza ono granicy plastyczności, można wyznaczyć na podstawie liniowo sprężystej mechaniki pęknięcia LEFM<sup>61</sup> (ang. *Linear Elastic Fracture Mechanics*). Metody, w których korzysta się z mechaniki LEFM pozwalają na wyznaczenie naprężenia w dowolnym punkcie obszaru szczeliny. Są one jednak złożone i nie dają się przedstawić w prostej postaci. Uwzględniając jednak tylko naprężenia w pobliżu czoła szczeliny, czyli dla obszaru o promieniu dużo mniejszym od długości szczeliny oraz korzystając z równań przybliżonych, składowe naprężenia  $\sigma_{ij}$  można wyrazić w postaci ogólnej zależnością:

61 W języku polskim stosuje się także skrót LSMP od pierwszych liter terminu liniowo-sprężysta mechanika pęknięcia.



$$\sigma_{ij} = \frac{K_n}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^n(\Theta) + \dots, \quad (4.114)$$

gdzie  $r$  i  $\theta$  – współrzędne biegunowe punktu względem czoła szczeliny,  $K_n$  – współczynnik intensywności naprężenia dla odpowiedniego modelu pęknięcia:  $K_I$  dla rozwarcia,  $K_{II}$  dla ścinania podłużnego,  $K_{III}$  dla ścinania poprzecznego.

W praktyce problem pęknięcia rozpatruje się dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Ostatnie równanie można wówczas zapisać w postaci [270]:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot f_{ij}^I(\Theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\Theta). \quad (4.115)$$

Jednym z najczęściej stosowanych kryteriów pęknięcia kruchego jest kryterium według teorii Griffitha. Według Griffitha zjawisko inicjacji i wzrostu pęknięcia jest zbyt skomplikowane, aby opisać je tylko na podstawie pola naprężeń w obszarze szczeliny pęknięcia. W związku z tym Griffith zaproponował kryterium energetyczne, według którego niestabilny wzrost pęknięcia pojawia się, jeśli całkowita energia ciała pozostanie stała albo zmniejszy się w wyniku zwiększenia długości szczeliny pęknięcia. Zgodnie z kryterium Griffitha warunek wzrostu długości szczeliny pęknięcia wyraża się następująco:

$$\frac{dW}{da} \geq \frac{dU}{da}, \quad (4.116)$$

gdzie  $W$  – energia odkształceń sprężystych,  $U$  – energia potrzebna do wzrostu długości szczeliny pęknięcia,  $a$  – długość szczeliny pęknięcia.

Ostatnie wyrażenia można zapisać w postaci:

$$K \geq K_c, \quad (4.117)$$

w którym  $K_c$  – krytyczny współczynnik intensywności naprężeń lub inaczej wytrzymałość na pęknięcie lub w postaci:

$$G \geq G_c, \quad (4.118)$$

gdzie  $G$  – współczynnik intensywności uwalniania energii,  $G_c$  – wartość krytyczna intensywności uwalniania energii lub inaczej odporność na pęknięcie<sup>62</sup>.

Zaletą tej formy zapisu jest to, że wartość współczynnika  $G$  można wyznaczyć analitycznie jako sumę współczynników dla poszczególnych modeli pęknięcia:

$$G = G_I + G_{II} + G_{III}, \quad (4.119)$$

62 Współczynnik  $G$  jest określany także jako siła napędowa wzrostu pęknięcia, natomiast  $G_c$  jako siła oporu wzrostu pęknięcia.

gdzie:

- model I – dla płaskiego stanu odkształcenia:

$$G_I = \frac{K_I^2(1-\nu^2)}{E}, \quad (4.120)$$

- model II – dla płaskiego stanu odkształcenia:

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2(1-\nu^2)}{E}, \quad (4.121)$$

- model III:

$$G_{III} = \frac{K_{III}^2(1+\nu)}{E}. \quad (4.122)$$

W praktyce najwięcej uwagi poświęca się modelowi pęknięcia podczas rozwarcia szczeliny. W takim przypadku zgodnie z teorią LEFM wartość współczynnika intensywności naprężenia  $K_I$  dla płaskiego stanu odkształcenia w wierzchołku pęknięcia można oszacować z zależności:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}, \quad (4.123)$$

gdzie  $\sigma$  – naprężenie w wierzchołku pęknięcia.

Współczynnik  $K_I$  można zatem wyznaczyć metodą modelowania numerycznego, a tym samym ocenić prawdopodobieństwo uszkodzenia w wyniku pęknięcia. Jeśli przyłożone obciążenie jest na tyle duże, że oszacowana wartość  $K_I$  jest większa niż wartość krytyczna  $K_c$ , to istnieje duże prawdopodobieństwo pęknięcia materiału. Dla każdego materiału krytyczną wartość współczynnika intensywności naprężeń  $K_c$  wyznacza się doświadczalnie. Współczynnik  $K_c$  traktuje się jako jednoparametrowe kryterium uszkodzenia<sup>63</sup>. Niestety wartość tego współczynnika zależy nie tylko od rodzaju materiału, lecz także od temperatury, warunków środowiskowych, geometrii oraz mechanizmu pęknięcia. W tabeli 4.3 przedstawiono przykładowe wartości współczynnika  $K_c$  wyznaczone doświadczalnie.

W montażu elektronicznym w większości przypadków mamy do czynienia z pękaniem plastycznym. Ze względu na inny mechanizm pęknięcia w przypadku materiałów kruchych oraz plastycznych należy przyjąć także odpowiednie kryterium uszkodzenia. Teoria LEFM przewiduje nieskończoną wartość naprężenia w wierzchołku szczeliny pęknięcia. W rzeczywistości naprężenie ma wartość skończoną. Ponadto analiza naprężeń w zakresie sprężystym jest nieodpowiednia w przypadku, gdy szczelina podlega odkształceniom niesprężystym. W takim przypadku należy uwzględnić

63 W języku angielskim współczynnik  $K_c$  określa się jako *Fracture Toughness*.

Tabela 4.3. Przykładowe wartości współczynnika  $K_c$  dla wybranych materiałów, wyznaczone na drodze doświadczalnej w temperaturze pokojowej [271, 63]

Materiał	$K_c$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]
Krzem	0,83–0,95
Aluminium	20–49
Metale plastyczne (Cu, Ni, Ag)	100–350
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	4–5
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	2,5–7
Szkło	0,7–0,8
Żywice epoksydowe	0,3–0,5
Wypełniacze do montażu typu flip-chip	1,9–3,1

niesprężyste zachowanie materiału w czole szczeliny pęknięcia (rys. 4.25a). Przykładem metody, która uwzględnia plastyczność wierzchołka pęknięcia jest metoda zaproponowana przez Irwina [269, 78].

Metoda Irwina polega na wyznaczeniu strefy uplastycznienia w postaci odległości  $r_y$  od wierzchołka szczeliny, w którym naprężenie sprężyste jest równe naprężeniu  $\sigma_p$  – granicy plastyczności materiału. Dla modelu pęknięcia dotyczącego rozwarcia szczeliny odległość tę można oszacować z zależności:

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_p} \right)^2. \quad (4.124)$$

Wydaje się, że lepszym oszacowaniem strefy uplastycznienia jest parametr  $r_p = 2r_y$ . Jeśli parametr  $r_p$  jest porównywalny z długością szczeliny pęknięcia, wówczas za kryterium uszkodzenia można przyjąć wartość współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$ . Jeżeli natomiast wartość parametru  $r_p$  będzie większa od długości szczeliny pęknięcia, to za kryterium uszkodzenia należy przyjąć efektywną wartość współczynnika intensywności naprężeń  $K_{eff}$ , wyrażoną zależnością:

$$K_{eff} = \sigma \sqrt{\pi(a + r_p)}, \quad (4.125)$$

gdzie  $a$  – długość szczeliny pęknięcia.

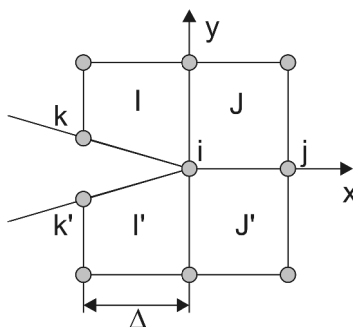
W przypadku projektowania numerycznego stosuje się metody pozwalające na numeryczne oszacowanie współczynników intensywności naprężeń  $K_I$  lub odpowiadają-

cych im współczynników uwalniania energii  $G_i$  [272, 273]. Przykładem takich metod są:

- metoda zaproponowana przez Wilsona i Yu [274] – oparta na zmodyfikowanej całce energii  $J$  i łączy ona współczynnik intensywności naprężeń  $K$  oraz współczynnik uwalniania energii  $G$  ze zmodyfikowaną wartością całki energii  $J$ ,
- metoda zaproponowana przez Yuuki i Cho [275] – określana skrótem CFDEM (ang. *Crack Flank Displacement Extrapolation Method*) oparta jest na ekstrapolacji współczynników  $K_I$  i  $K_{II}$ ,
- metoda zaproponowana przez Rybickiego i Kanninena [276] – określana skrótem VCCM (ang. *Virtual Crack Closure Method*) oparta jest na oszacowaniu wartości współczynników  $G_I$  i  $G_{II}$  za pomocą wartości sił  $F_{ij}$  w węzłach w obszarze szczeliny oraz ich przesunięć  $u_n$  i  $v_n$ , (rys. 4.26):

$$G_I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{-1}{2\Delta} [F_{yi}(v_k - v_{k'})] \right\}, \quad (4.126)$$

$$G_{II} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{-1}{2\Delta} [F_{xi}(u_k - u_{k'})] \right\}. \quad (4.127)$$

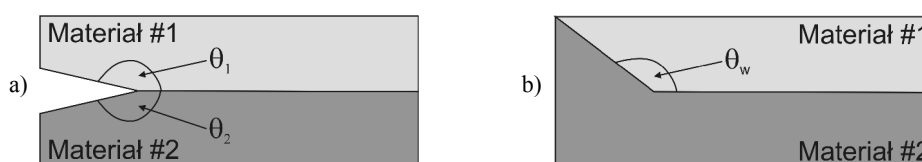


Rys. 4.26. Sposób wyznaczania współczynników  $G_I$  i  $G_{II}$  na drodze modelowania metodą FEM

#### 4.2.3.2. Rozwarstwienie

Rozwarstwienie jest rodzajem uszkodzenia w strukturach wielowarstwowych oraz materiałach kompozytowych. Rozwarstwienie jest jednym z podstawowych rodzajów uszkodzeń w montażu elektronicznym. Połączone warstwy materiałów mogą ulec rozwarstwieniu pod wpływem obciążeń termomechanicznych oraz zewnętrznych czynników, takich jak wilgoć. Rozwarstwienie jest w rzeczywistości rodzajem pęknięcia, które występuje na granicy połączeniu dwóch materiałów, czyli w obszarze złącza. Na połączeniu warstw może powstać pęknięcie i następnie propagować wzdłuż złącza. Jednak w przeciwieństwie do pęknięcia, w przypadku rozwarstwienia istotne znaczenie

ma rodzaj oraz siła połączenia materiałów [277, 278, 279, 280, 281]. Podczas gdy dla procesu pęknięcia materiału istotne znaczenie mają jego właściwości mechaniczne, to w przypadku rozwarstwienia kluczową rolę odgrywiają właściwości mechaniczne samego połączenia. Ścieżka propagacji pęknięcia zależy od prędkości uwalniania energii oraz wytrzymałości połączenia, która zależy od rodzaju obciążenia i modelu pęknięcia. Ponadto ze względu na okresowość rozkładu naprężenia w obszarze szczeliny pęknięcia nie jest możliwe zastosowanie metod mechaniki pęknięcia. Analizę ilościową procesu rozwarstwienia można wykonać, korzystając ze współczynnika uwalniania energii  $G$  lub współczynnika intensywności naprężeń  $K$  oraz kąta fazowego  $\Psi^{64}$  [282, 283, 284]. Na rysunku 4.27 przedstawiono dwie podstawowe konfiguracje połączonych materiałów, istotne ze względu na prognozowanie rozwarstwienia w montażu elektronicznym.



Rys. 4.27. Podstawowe konfiguracje połączonych materiałów, istotne ze względu na prognozowanie uszkodzenia wskutek rozwarstwienia w montażu elektronicznym

Korzystając z metody LEFM, kryterium propagacji pęknięcia można określić na podstawie równowagi energii  $U$ , opisującej gęstość energii w jednostce objętości przypadającej na jednostkę czasu w postaci:

$$U_e = U_i + U_a + U_d + U_k, \quad (4.128)$$

gdzie  $U_e$  – energia zewnętrzna dostarczona przez obciążenie,  $U_i$  – energia sprężysta zgromadzona w materiale,  $U_a$  – energia rozproszona w wyniku propagacji pęknięcia,  $U_d$  – energią rozproszona w materiale w wyniku innych mechanizmów,  $U_k$  – energia kinetyczna.

W przypadkach praktycznych przyjmuje się założenie, że  $U_d = U_k = 0$ . Po podzieleniu ostatniego równania przez długość próbki  $L$  i długość szczeliny pęknięcia  $a$ , otrzymuje się warunek na propagację pęknięcia w postaci:

$$\frac{1}{L} \left( \frac{dU_e}{da} - \frac{dU_i}{da} \right) = \frac{1}{L} \left( \frac{dU_a}{da} \right), \quad (4.129)$$

gdzie współczynnik uwalniania energii  $G$  wynosi:

64 Bardzo istotny wpływ na wartość krytyczną ma współczynnik intensywności uwalniania energii  $G_c$  oraz współczynnik intensywności naprężeń  $K_c$ , a także wilgotność.

$$G = \frac{1}{L} \left( \frac{dU_e}{da} - \frac{dU_i}{da} \right). \quad (4.130)$$

Niestety, prognozowanie uszkodzenia według ostatniego równania wymaga znajomości rozkładu naprężenia w obszarze szczeliny oraz relacji między poszczególnymi modelami pękania, a zwłaszcza modelem I i II [285, 286, 287].

Opis analityczny rozkładu naprężenia w szczelinie dla struktur wielowarstwowych jest bardzo trudny, a naprężenia w wierzchołku szczeliny rozwarstwienia mają wartość nieoznaczoną [288]. Rozkład naprężenia w obszarze szczeliny ma charakter okresowy i można go opisać w postaci ogólnej jako :

$$\sigma_{ij} = r^{p-1} f_{ij}(\theta, p), \quad (4.131)$$

gdzie  $r$  i  $\theta$  – współrzędne biegunowe,  $p$  – rząd nieoznaczoności.

Opis analityczny rozkładu naprężenia w obszarze szczeliny rozwarstwienia, uwzględniający jego okresowość, został po raz pierwszy zaproponowany przez Hutchinsona i Suo [289]. Przyjęli oni założenie, według którego współczynnik intensywności naprężeń jest liczbą zespoloną  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K} = K' + iK'', \quad (4.132)$$

gdzie  $K'$  – część rzeczywista,  $K''$  – część urojona.

W takim przypadku rozkład naprężenia w obszarze szczeliny można zapisać w postaci zależności:

$$\sigma_x + i\sigma_y = \frac{8}{(1+2i\varepsilon)\cosh(\pi\varepsilon)} \frac{K' + iK''}{E'} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} r^{i\varepsilon}, \quad (4.133)$$

gdzie  $r$  – odległość od końca szczeliny,  $E'$  i  $\varepsilon$  – kolejno efektywny moduł Younga oraz efektywne odkształcenie w obszarze szczeliny.

Wartości te można wyznaczyć z zależności zaproponowanych przez J.R. Rice'a [290]:

$$E' = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2} \quad (4.134)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right), \quad (4.135)$$

gdzie  $\beta$  – współczynnik wyrażony zależnością:

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{G_1(1-2\nu_2) - G_2(1-2\nu_1)}{G_1(1-2\nu_2) + G_2(1-\nu_1)}, \quad (4.136)$$

gdzie  $G_1$  i  $G_2$  – moduł sprężystości postaciowej,  $\nu$  – współczynnik Poissona.

Korzystając z kolei z zależności Malysheva i Salganika [291], zależność między zespolonym współczynnikiem intensywności naprężeń  $K$  a współczynnikiem uwalniania energii  $G$  można zapisać w postaci:

$$G = \frac{1}{E' \cosh^2(\pi \varepsilon)} K_{eff}^2, \quad (4.137)$$

gdzie

$$K_{eff} = \sqrt{K'^2 + K''^2} \quad (4.138)$$

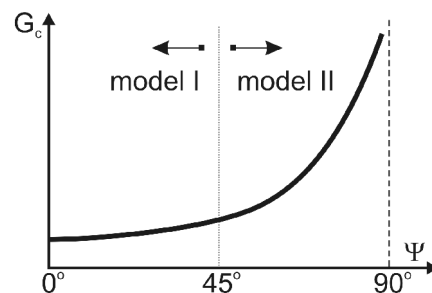
jest efektywnym współczynnikiem intensywności naprężeń  $K_{eff}$  w obszarze szczeliny rozwarstwienia.

Istotnym parametrem dotyczącym analizy procesu rozwarstwienia jest kąt fazowy  $\Psi$ , określony równaniem:

$$\Psi = \text{tg}^{-1} \left( \frac{K''}{K'} \right). \quad (4.139)$$

Kąt ten pozwala na ocenę udziału składowej ścinania (model II, gdzie  $\Psi > 45^\circ$ ) względem składowej rozwarścia (model I, gdzie  $\Psi < 45^\circ$ ) na proces propagacji rozwarstwienia. Złożenie rodzajów obciążenia oznacza jednocześnie występowanie dwóch modeli pęknięcia. Wartość  $\Psi = 0^\circ$  oznacza, że występuje tylko model I, podczas gdy  $\Psi = 90^\circ$  oznacza, że występuje model II pęknięcia, według rysunku 4.25. Na rysunku 4.28 przedstawiono krytyczną wartość współczynnika uwalniania energii  $G_c$  w zależności od kąta fazowego  $\Psi$ .

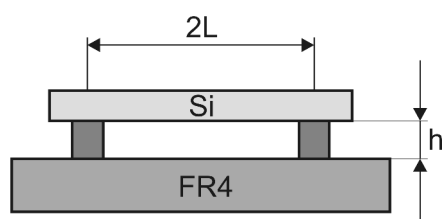
Zgodnie z przedstawionym rysunkiem najmniejsza wytrzymałość na rozwarstwienie występuje dla  $\Psi = 0^\circ$ , czyli dla modelu I pęknięcia, to znaczy dla rozwarścia szczeliny [283]. Należy jednak nadmienić, że problem prognozowania rozwarstwienia w montażu elektronicznym, prawdopodobnie już niedługo, będzie coraz częściej analizowany z wykorzystaniem narzędzi do modelowania molekularnego [292, 293].



Rys. 4.28. Zależność wytrzymałości połączenia od kąta fazowego  $\Psi$

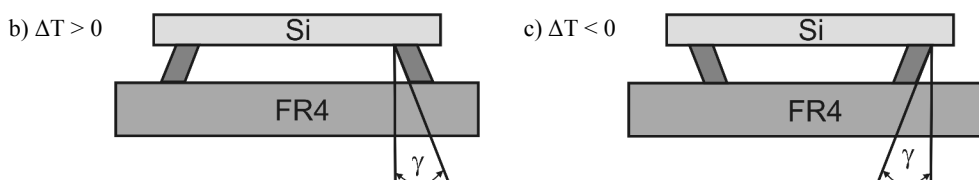
#### 4.2.4. Przykład obliczeń analitycznych

Załóżmy, że mamy układ dwuwymiarowy zespołu mikroelektronicznego, składający się z podłoża oraz płytki krzemowej połączonej za pomocą połączenia lutowanego w postaci kontaktów podwyższonych. Schemat zespołu przedstawiono na rysunku 4.29. Celem obliczeń jest wyznaczenie odkształcenia postaciowego  $\gamma$  na skutek zmiany temperatury o wartość  $\Delta T$ .



Rys. 4.29. Przykład dwuwymiarowego zespołu mikroelektronicznego typu *flip-chip*

Przedstawiony zespół elektroniczny w zależności od wartości współczynników rozszerzalności cieplnej materiałów  $\alpha$  (dla przypadku  $\alpha_{FR4} > \alpha_{Si}$ , gdzie  $\alpha_{Si}$  jest współczynnikiem dla płytki krzemowej, natomiast  $\alpha_{FR4}$  jest współczynnikiem dla podłoża) może ulec albo ścisnaniu, albo rozciąganiu (rys. 4.30).



Rys. 4.30. Zależność odkształcenia kontaktów podwyższonych dla zespołu elektronicznego w zależności od wartości współczynników rozszerzalności cieplnej, gdzie  $\alpha_2 > \alpha_1$

Przyjmując założenia, że zastosowane materiały mają właściwości sprężyste, brak jest gradientów temperatury, a w zespole występuje płaski stan odkształcenia, wówczas odkształcenie na skutek zmiany temperatury można wyznaczyć jako:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{Si} &= \alpha_{Si} \Delta T \\ \varepsilon_{FR4} &= \alpha_{FR4} \Delta T,\end{aligned}\quad (4.140)$$

gdzie przyrosty długości przy krawędzi płytki krzemowej wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned}d_{Si} &= \varepsilon_{Si} L = \alpha_{Si} \Delta T L, \\ d_{FR4} &= \varepsilon_{FR4} L = \alpha_{FR4} \Delta T L.\end{aligned}\quad (4.141)$$



Odształcenie postaciowe  $\gamma$  dla połączenia lutowanego można wyznaczyć z równania:

$$\gamma = \frac{d_{FR4} - d_{Si}}{h} = \frac{L}{h} \Delta \alpha \Delta T. \quad (4.142)$$

Z równania (4.142) wynika, że wartość odształcenia postaciowego oraz odpowiadające mu naprężenie styczne  $\tau$  według zależności (2.43) dla połączenia lutowanego<sup>65</sup>:

- jest wprost proporcjonalna do
  - różnicy współczynników rozszerzalności cieplnej  $\Delta \alpha = (\alpha_{FR4} - \alpha_{Si})$ ,
  - odległości od punktu neutralnego,
  - zmiany temperatury  $\Delta T$ ,
- jest odwrotnie proporcjonalna do wysokości kontaktów podwyższonych  $h$ .

Korzystając z podanych założeń oraz obliczeń przybliżonych w połączeniu z wynikami doświadczalnymi istnieje możliwość opracowania modelu opisującego prawdopodobieństwo uszkodzenia omawianego zespołu elektronicznego. Po raz pierwszy model taki został zaproponowany przez Engelmaiera [294] dla stopu lutowniczego SnPb w odniesieniu do trwałości zmęczeniowej – problem trwałości zmęczeniowej omówiono szczegółowo w rozdziale 4.4. Według tego modelu, trwałość zmęczeniową można oszacować z zależności:

$$N_f(P) = \frac{1}{2} \left( \frac{F_k \Delta \gamma}{2 \varepsilon_f} \right)^{\frac{1}{c(T_s, f)}} \left( \frac{\ln(1 - 0,01 P)}{\ln 0,5} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (4.143)$$

gdzie  $P$  – przyjęte prawdopodobieństwo uszkodzenia w procentach,  $\Delta \gamma$  – zakres zmian odształcenia postaciowego,  $F_k$  – współczynnik korekcji zależny m.in. od geometrii zespołu,  $\varepsilon_f$  – granica zmęczenia,  $\beta$  – współczynnik nachylenia wykresu Weibulla dla wyników doświadczalnych danego zespołu,  $c(T_s, f)$  – współczynnik zależny od temperatury średniej  $T_s$  i częstotliwości  $f$  zmian obciążenia.

Należy podkreślić, że pomimo wielu uproszczeń oraz prostej geometrii analizowanego zespołu, podane wnioski są także ważne dla geometrii i przypadków bardziej skomplikowanych niż przedstawiono na rysunku 4.29. W przypadkach rzeczywistych należałoby uwzględnić dodatkowo trójwymiarowy charakter odształcenia, nieliniowe właściwości materiałowe oraz odształcenia podłoża i struktury. Niemniej nie ulega wątpliwości, że wnioski dotyczące zmniejszenia odształcenia postaciowego, a tym samym naprężenia stycznego pozostają także ważne dla większości rzeczywistych zespołów elektronicznych, jak np. zmniejszenie różnicy między współczynnikami rozszerzalności cieplnej. Niestety, spełnienie wymienionych wymagań jest trudne do realizacji praktycznej. Z tego też powodu jest konieczne zastosowanie metod i algorytmów projektowania numerycznego.

65 Odształcenie to ma charakter globalny. Dodatkowo należałoby jeszcze wyznaczyć wartości naprężeń lokalnych dla złącza płytka krzemowa–lut i złącza lut–podłoże.

### 4.3. Pełzanie i relaksacja naprężeń dla połączeń klejonych i wyprasek

Jednym z najistotniejszych problemów modelowania numerycznego jest umiejętność opisu zachowania materiałów w funkcji czasu. Stan mechaniczny większości materiałów zmienia się w funkcji czasu [79]. Gałąź mechaniki ośrodków ciągłych, która zajmuje się zachowaniem ciał w funkcji czasu i naprężeń nosi nazwę reologii. Reologia jest dziedziną wiedzy, która łączy w sobie teorię sprężystości ciał doskonale sprężystych oraz mechanikę cieczy newtonowskich. Zajmuje się ona zagadnieniami związanymi z pełzaniem i relaksacją naprężeń oraz odpowiadającym im modelem materiałowym, które określa się terminem lepkosprężystości. Według jednego z postulatów reologii, każdy rzeczywisty materiał ma cechy lepkosprężystości [295, 296].

Przykładem materiałów o właściwościach lepkosprężystych są: pasty, emulsje, zawiesiny, farby, kleje, lakiery, żywice, ciekłe kryształy, tworzywa sztuczne, polimery, a nawet metale w podwyższonej temperaturze itp. Przykładem materiałów o właściwościach lepkosprężystych, które stosuje się powszechnie w montażu elektronicznym są głównie polimery. Najczęściej stosuje się je w postaci klejów do wykonania połączeń lub jako materiały wyprasek na obudowy hermetyczne struktur półprzewodnikowych [297, 298].

Polimer jest związkiem chemicznym o bardzo dużej masie cząsteczkowej<sup>66</sup>, składa się z wielokrotnie powtórzonych jednostek podstawowych zwanych monomerami. Polimery można podzielić ze względu na:

- pochodzenie:
  - naturalne, czyli spotykane w naturze, np. celuloza, czy skrobia,
  - syntetyczne, czyli otrzymywane w procesach syntezy chemicznej,
- zachowanie się w wysokich temperaturach:
  - termoutwardzalne; charakteryzują się tym, że utwardzają się w podwyższonej temperaturze<sup>67</sup>, np. żywice epoksydowe,
  - termoplastyczne; charakteryzują się tym, że mięknią w czasie ogrzewania, a w czasie chłodzenia twardnieją, przy czym właściwość ta jest zjawiskiem odwracalnym<sup>68</sup>.

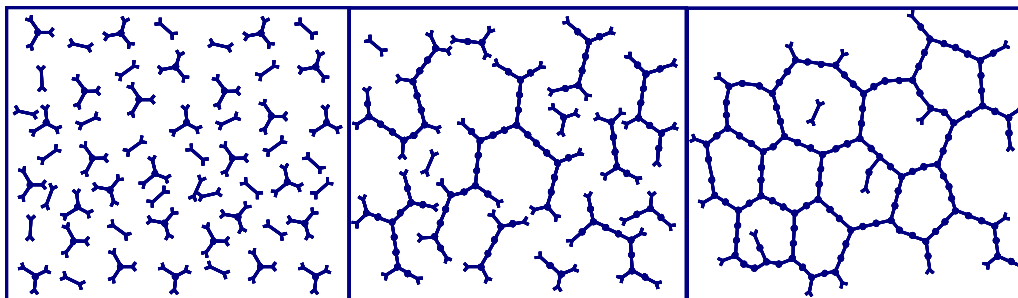
Zachowanie polimerów jest wynikiem ich budowy wewnętrznej. Składają się one w pierwszej fazie z pojedynczych monomerów, które w trakcie procesu polimeryzacji reagują same ze sobą. W wyniku tego powstają cząsteczki o wielokrotnie większej

66 Przez „bardzo dużą masę cząsteczkową” rozumie się zwykle taki stan, gdy odjęcie lub przyłączenie jednego meru nie zmienia właściwości chemicznych i fizycznych związku chemicznego.

67 Ich właściwości wynikają z faktu istnienia wiązań poprzecznych między poszczególnymi łańcuchami polimerowymi, uniemożliwiając ich wzajemne przesuwanie się względem siebie.

68 Degradacja następuje wówczas, gdy polimer jest ogrzewany do temperatury krytycznej, w której pękają wiązania w łańcuchach polimerowych.

masie cząsteczkowej, tworząc łańcuchy polimerowe (rys. 4.31). W przypadku montażu elektronicznego mówi się dodatkowo o procesie utwardzania polimeru (ang. *curing*), który polega na usieciowaniu już istniejących łańcuchów polimerowych [299].

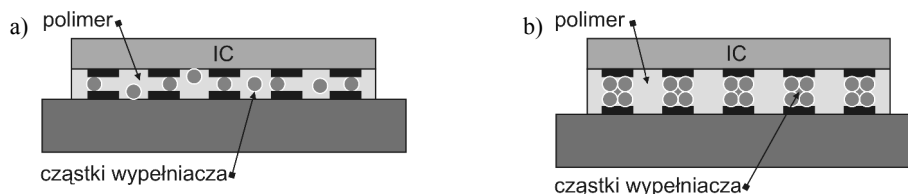


Rys. 4.31. Zmiana budowy wewnętrznej polimeru w wyniku procesu polimeryzacji i utwardzania

Jednym z głównych zadań montażu elektronicznego jest wykonanie połączeń elektrycznych i/lub mechanicznych. W przypadku montażu układów na powierzchni PCB, najczęściej korzysta się z połączeń lutowanych, a zwłaszcza ze stopów lutowniczych. Alternatywą dla połączeń lutowanych z wykorzystaniem stopów są kleje przewodzące elektrycznie ECA (ang. *Electrically Conductive Adhesive*). Większość stopów lutowniczych zawiera cynę, głównie ze względu na niską temperaturę topnienia oraz dobrą zwilżalność innych metali. Niestety, jedną z istotnych wad stopów lutowniczych jest, w porównaniu z klejami przewodzącymi elektrycznie, wysoka temperatura procesów montażu. Fakt ten wpływa na zwiększone prawdopodobieństwo uszkodzenia płytek PCB i układów w czasie montażu oraz na ograniczone zastosowanie tanich podłoży czy obudów układów wykonanych z materiałów organicznych i polimerowych. W przeciwieństwie do stopów lutowniczych, kleje przewodzące elektrycznie są najczęściej kompozytami polimerowymi, które wypełnia się cząstkami metali (srebro Ag, miedź Cu) lub ceramiki (alundowej  $Al_2O_3$ , berylowej BeO) [300]. Z tego też powodu, właściwości elektryczne, mechaniczne czy cieplne klejów, znacznie różnią się od właściwości stopów lutowniczych. Kleje przewodzące elektrycznie dzieli się na anizotropowe ACA (ang. *Anisotropic Conductive Adhesive*) oraz izotropowe ISA (ang. *Isotropic Conductive Adhesive*)<sup>69</sup>, jak to pokazano na rysunku 4.32. Oprócz klei przewodzących elektrycznie w montażu elektronicznym stosuje się także kleje przewodzące ciepłnie TCA (ang. *Thermal Conductive Adhesives*). Kleje TCA stosuje się

<sup>69</sup> Ostatnio stosuje się także kleje nieprzewodzące NCA (ang. *Non-conductive Adhesives*) bez wypełniaczy. Przewodnictwo elektryczne uzyskuje na zasadzie kontaktu mechanicznego końcówek wyprowadzeń podłoża i struktury półprzewodnikowej. Technika ta wymaga stosowania dużych ciśnień oraz wysokiej temperatury.

w celu poprawy efektywności odprowadzania ciepła oraz jednocześnie poprawy niezawodności połączenia mechanicznego układów, np. w odniesieniu do zniszczenia zmęczeniowego [301, 302].



Rys. 4.32. Przykład połączeń klejonych w montażu typu flip-chip z wykorzystaniem klejów przewodzących anizotropowo ACA (a) i izotropowo ICA (b) [301]

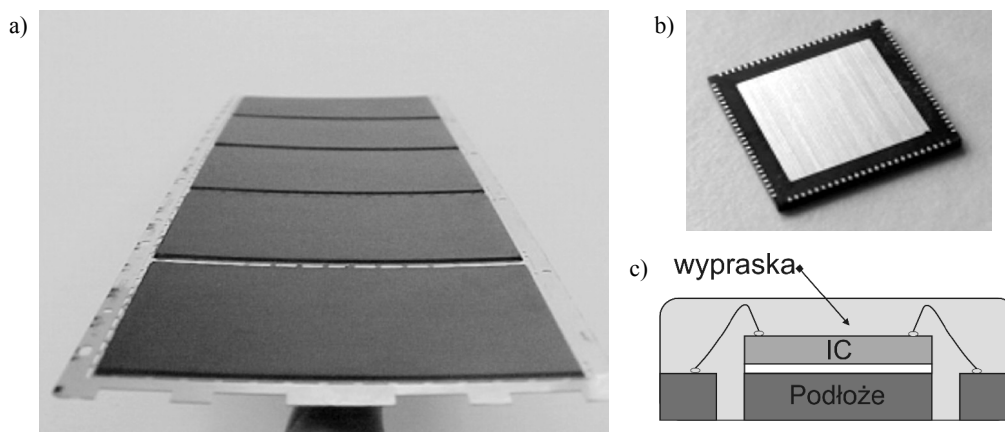
Kleje w porównaniu ze stopami lutowniczymi mają zarówno zalety, jak i wady. Materiały, z których wykonywane są kleje są zazwyczaj przyjazne dla środowiska, wymagają niższych temperatur oraz mniej etapów w procesach technologicznych. Połączenia klejone charakteryzują się lepszą wytrzymałością na zniszczenie zmęczeniowe. Ponadto, ze względu na małe rozmiary cząstek wypełniacza, nawet rzędu 10–100 nm, pozwalają na uzyskanie dużej gęstości wyprowadzeń. Niestety, wadą klejów są znacznie gorsze parametry elektryczne i cieplne – różnica jednego rzędu – oraz mała wytrzymałość na obciążenia szokowe i efekty starzeniowe, co zebrano w tabeli 4.4. Z tego też powodu w chwili obecnej połączenia klejone w montażu elektronicznym są stosowane jedynie w niewielkim zakresie. Do najważniejszych zastosowań można zaliczyć montaż powierzchniowy układów i struktur na podłożach szklanych i giętkich, jak COG (ang. *Chip on Glass*) czy COF (ang. *Chip on Flex*). W przypadku montażu układów i struktur o dużej mocy, jak mikroprocesory, nadal stosuje się stopy lutownicze.

Tabela 4.4. Porównanie przykładowych właściwości elektrotermomechanicznych dla stopów lutowniczych i klejów [301]

Właściwość	Stopy lutownicze	Kleje
Rezystancja powierzchniowa $R$ [ $\Omega\text{m}$ ]	0,0015	0,035
Współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda$ [W/mK]	50	3,5
Temperatura obróbki $T$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	180–220	150–170
Wytrzymałość na ścinanie $S$ [MPa]	15	13

Ostatnim etapem technologicznym w montażu elektronicznym jest zazwyczaj wykonanie wypraski. Zdaniem wypraski jest izolacja całego układu od wpływu czynników zewnętrznych, np. wilgoci. Niestety jednym z typowych problemów tego etapu jest wbudowywanie naprężeń w wyniku przeprowadzonych procesów technologicz-

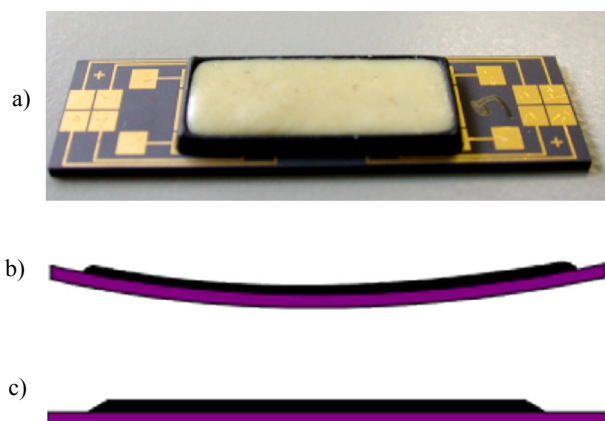
nych, czego objawem jest ugięcie pakietu. Wynikiem tego jest m. in. zmniejszenie niezawodności układów. Im większa wartość ugięcia pakietu, tym gorsza niezawodność. Na rysunku 4.33a przedstawiono przykład pakietu z wykonaną wypraską dla montażu elektronicznego w obudowie typu QFN [303].



Rys. 4.33. Przykład wypraski dla obudowy typu QFN (a), gotowy układ (b) oraz jego przekrój poprzeczny [303]

Zarówno wypraski, jak i połączenia klejone można opisać właściwościami lepkosprężystymi. W ośrodkach lepkosprężystych występują dwa rodzaje zjawisk istotnych ze względu na montaż elektroniczny: pełzanie i relaksacja naprężeń. Jak napisano wcześniej, pełzanie jest z natury zjawiskiem niekorzystnym, podczas gdy relaksacja naprężeń jest z natury zjawiskiem korzystnym i może prowadzić do zmniejszenia naprężeń wbudowanych (ang. *residual stresses*) [304]. Innym niekorzystnym problemem dotyczącym materiałów lepkosprężystych, a niezmiernie istotnym w montażu elektronicznym jest zjawisko skurczu. Skurcz materiału polimerowego może być wynikiem reakcji chemicznych i/lub odparowania rozpuszczalników. Skurcz następuje m.in. na etapie utwardzania. Zjawisko skurczu może być zaletą lub wadą materiału polimerowego. W przypadku klejów zjawisko skurczu prowadzi do powstania ścieżek przewodzących cząstek wypełniacza, co znacznie poprawia właściwości przewodnictwa elektrycznego i cieplnego. Niestety ze względu na zjawisko relaksacji naprężeń i pełzania parametry te mogą ulegać pogorszeniu w czasie pracy urządzenia. Natomiast w przypadku wyprasek zjawisko skurczu jest przyczyną znacznego pogorszenia niezawodności urządzeń elektronicznych. Skurcz w czasie utwardzania prowadzi do powstania niezerowego stanu naprężeń, czego objawem zewnętrznym jest ugięcie zespołu elektronicznego, jak to przedstawiono na rysunku 4.34. Z kolei zjawiskiem korzystnym w przypadku wyprasek jest zjawisko relaksacji naprężeń i pełzania. W wyniku tych zjawisk następuje stopniowe przemieszczanie łańcuchów polime-

rowych i poprawy parametrów niezawodnościowych. Z tego też powodu bardzo częstą praktyką stosowaną w montażu elektronicznym jest proces wygrzewania (ang. *post-curing*) zespołu elektronicznego po procesie utwardzania.



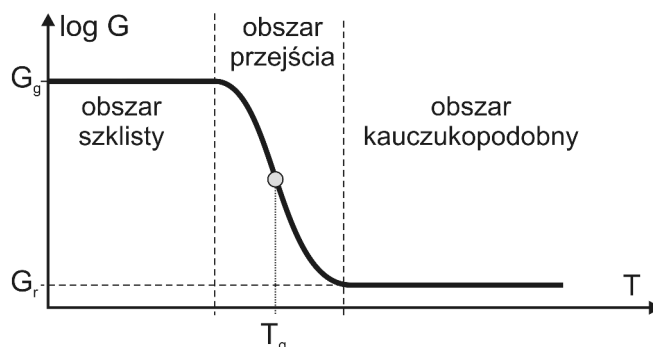
Rys. 4.34. Przykład ugięcie zespołu mikroelektronicznego po procesie utwardzania (b) i procesie wygrzewania (c)

### 4.3.1. Modele materiałowe dla połączeń klejonych i wyprasek

Właściwości termomechaniczne polimerów można opisać jako zbiór uporządkowany lub nieuporządkowany łańcuchów polimerowych zanurzonych w wybranym ośrodku. Łańcuchy te zachowują się jak małe sprężyny pracujące w ośrodku lepkim, w związku z czym odpowiednim modelem materiałowym jest model lepkosprężysty. Charakterystyczną cechą polimerów jest zmiana ich właściwości termomechanicznych w zależności od stanu polimeryzacji, czy utwardzenia oraz temperatury. Zmiana ta najczęściej obejmuje kilka rzędów wartości w zależności od tego, w jakim aktualnie stanie i temperaturze znajduje się polimer. Przykładem takiego zachowania może być moduł sprężystości postaciowej  $G$ , którego zmiany w funkcji temperatury są tak duże, że zazwyczaj przedstawia się je w skali logarytmicznej (rys. 4.35) [305].

Wartość modułu sprężystości postaciowej  $G$  oraz innych właściwości termomechanicznych zmienia się o kilka dekad. Dla materiałów lepkosprężystych wyróżnia się trzy podstawowe obszary właściwości [298]:

- kauczukopodobny; polimer występuje najczęściej w stanie płynnym – materiał wykazuje dużą sprężystość, a odkształcenia są prawie całkowicie odwracalne i dodatkowo nie zależą od czasu,
- przejściowy; polimer występuje w stanie pośrednim między cieczą a ciałem stałym – wykazuje właściwości lepkosprężyste, odkształcenie zaś jest funkcją naprężenia, czasu i temperatury.



Rys. 4.35. Zależność modułu sprężystości  $G$  od temperatury:  
 $T_g$  – temperatura zeszklenia,  $G_g$  i  $G_r$  – kolejno  
 moduł sprężystości postaciowej dla stanu szklistego i kauczukopodobnego

- szklisty; polimer występuje w stanie stałym – zachowuje się jak ciało doskonale sprężyste, dla którego spełnione jest prawo Hooke’a, a odkształcenie zależy tylko od naprężenia.

Jednym z najważniejszych zagadnień w reologii jest doświadczalne ustalanie zależności między naprężeniem i wywołanym przez to naprężenie odkształceniem. Głównym problemem jest pomiar doświadczalny właściwości i charakterystyk materiałów lepkosprężystych. W przypadku lepkosprężystości stosuje się dwa rodzaje badań:

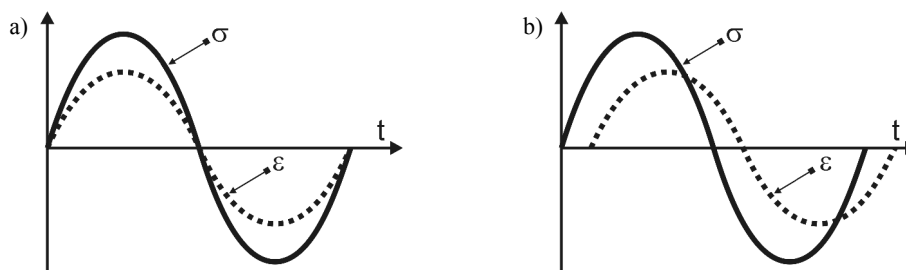
- statyczne, w wyniku których analizuje się zjawiska relaksacji oraz pełzania,
- dynamiczne, w wyniku których analizuje się m.in. właściwości lepkosprężyste w funkcji czasu i temperatury.

Podstawowe badania statyczne polimerów polegają na próbach prostego ścinania i rozciągania oraz ściskania objętościowego. Jednocześnie najprostszym i najważniejszym badaniem jest próba prostego ścinania. Celem tego badania jest wyznaczenie modułu sprężystości postaciowej  $G$ , który określa zmianę kształtu próbki przy stałej objętości, według zależności (2.43) i (2.44). Ważną cechą badań dotyczących prostego ścinania czy rozciągania jest możliwość przeliczenia wyników jednego badania na drugie, według zależności (2.45).

Badania dynamiczne polimerów polegają na obciążaniu próbki siłą zmienną w sposób okresowy z częstotliwością  $f$ . W przypadku materiałów sprężystych naprężenie i odpowiadające mu odkształcenie są w tej samej fazie, natomiast dla materiałów lepkosprężystych, naprężenie i odpowiadające mu odkształcenie nie są w tej samej fazie, ale są przesunięte o kąt  $\theta$  (rys. 4.36).

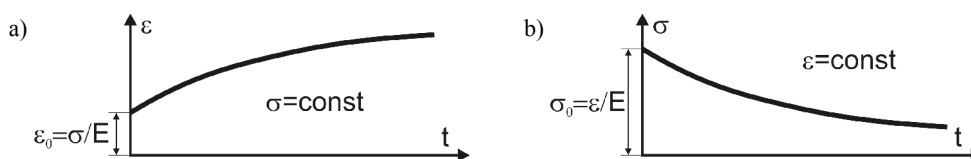
Podstawowym równaniem w reologii jest tzw. równanie stanu, które wiąże ze sobą stan naprężenia  $\sigma$  i odkształcenia  $\varepsilon$  oraz prędkości ich zmian, co można zapisać jako:

$$f\left(\sigma, \frac{d\sigma}{dt}, \varepsilon, \frac{d\varepsilon}{dt}\right) = 0. \quad (4.144)$$



Rys. 4.36. Wyniki badań dynamicznych dla materiałów sprężystych (a) i lepko-sprężystych (b)

Stan naprężenia w zakresie sprężystym można opisać prawem Hooke'a, podczas gdy stan naprężenia dla części lepkiej można opisać zależnością (4.12). Problem istnienia zależności odkształcenia i naprężenia można zaobserwować doświadczalnie w próbie jednoosiowego rozciągania. Na rysunku 4.37 przedstawiono zależność charakterystyki odkształcenie–naprężenia w funkcji czasu dla stałej wartości naprężenia  $\sigma = \text{const}$  – zjawisko pełzania oraz stałej wartości odkształcenia  $\varepsilon = \text{const}$  – zjawisko relaksacji naprężeń.



Rys. 4.37. Wykres odkształcenie–naprężenie dla próby jednowymiarowego rozciągania, przy stałej wartości naprężenia (a) i odkształcenia (b)

Zależność stanu naprężenia i odkształcenia w funkcji czasu  $t$ , dla liniowego modelu lepko-sprężystego, można zapisać w postaci równania całkowego Volterra<sup>70</sup>, w przypadku [306]:

- pełzania, jako:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_c} + \int_0^t C(t-t')\sigma(t')dt', \quad (4.145)$$

- relaksacji naprężeń, jako:

$$\sigma(t) = E_r'\varepsilon(t) + \int_0^t R(t-t')\varepsilon(t')dt', \quad (4.146)$$

70 Równanie całkowe, w którym tylko jedna z granic całkowania jest stałą typu  $f(x) = \int_a^x K(x,y) \cdot \phi(y) dy$ .



gdzie  $E'_c$  i  $E'_r$  – kolejno chwilowy moduł Younga w przypadku pełzania i relaksacji,  $C(t)$  i  $R(t)$  – kolejno funkcje opisujące zjawisko pełzania i relaksacji naprężeń, np.

$$C(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} - \frac{1}{E} e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (4.147)$$

$$R(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

Do podstawowych modeli reologicznych, przedstawionych w postaci symbolicznej na rysunku 4.38, zalicza się dwa modele: Maxwella oraz Kelvina–Voighta.



Rys. 4.38. Postać symboliczna modelu lepkościowego według Maxwella (a) oraz Kelvina–Voighta (b)

W przypadku ośrodka Maxwella wartość odkształcenia można wyznaczyć z zależności:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad (4.148)$$

gdzie  $\eta$  – lepkość.

Cechą charakterystyczną modelu Maxwella jest możliwość analizy zarówno zjawiska pełzania, jak i relaksacji naprężeń. Korzystając z zależności (4.148) równanie opisujące zjawisko pełzania można zapisać jako:

$$\sigma = \text{const}(t) \Rightarrow \varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma}{\eta} t, \quad (4.149)$$

co oznacza, że dla stałej wartości naprężenia, odkształcenie wzrasta wprost proporcjonalnie do czasu. Z drugiej strony, korzystając z zależności (4.148), równanie opisujące zjawisko relaksacji naprężeń można zapisać jako:

$$\varepsilon = \text{const}(t) \Rightarrow \sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{T_R}}, \quad (4.150)$$

gdzie  $T_R$  oznacza czas relaksacji i jest wyrażony wzorem:

$$T_R = \frac{\eta}{E}. \quad (4.151)$$

Z fizycznego punktu widzenia, czas relaksacji oznacza czas, po upływie którego naprężenie zmniejszy się do wartości 0,37 wartości naprężenia początkowego. Stałe  $\varepsilon_0$  oraz  $\sigma_0$  można interpretować jako wartości odkształcenia i naprężenia w stanie początkowym dla  $t = 0$ . W rzeczywistości odpowiadają one odkształceniu sprężystemu, które występuje w materiale w momencie wystąpienia obciążenia. Jedną z zalet modelu Maxwella jest możliwość analizy zjawiska relaksacji naprężenia po ustaniu obciążenia.

W przypadku modelu Kelvina–Voighta wartość naprężenia można wyznaczyć z zależności:

$$\sigma = E \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}. \quad (4.152)$$

Model Kelvina–Voighta pozwala na analizę zjawiska pełzania, lecz nie umożliwia analizy zjawiska relaksacji. Korzystając z zależności (4.152) równanie opisujące zjawisko pełzania można zapisać jako:

$$\sigma(t) = \text{const}(t) \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left( 1 - e^{-\frac{tE}{\eta}} \right). \quad (4.153)$$

Zaletą modelu Kelvina–Voighta jest możliwość analizy zjawiska pełzania w wyniku obciążenia dynamicznego.

### 4.3.2. Relaksacja naprężeń

Problem analizy oraz modelowania zjawiska relaksacji naprężeń należy rozważać dla dwóch przypadków obciążeń: statycznych i dynamicznych. W przypadku obciążeń statycznych zjawisko relaksacji naprężeń można opisać za pomocą zależności modułu sprężystości postaciowej od czasu  $G(t)$  – inaczej określanego jako moduł relaksacji. Moduł relaksacji  $G(t)$  mierzy się w próbie prostego ścinania przez nagłe odkształcenie próbki i następnie pomiar zmieniającego się naprężenia w funkcji czasu przy stałej wartości odkształcenia:

$$G(t) = \frac{\tau(t)}{\gamma}. \quad (4.154)$$

Moduł relaksacji  $G(t)$  zmienia się w zakresie od  $G_g$  dla stanu szklanego do  $G_r$  dla stanu kauczukopodobnego:

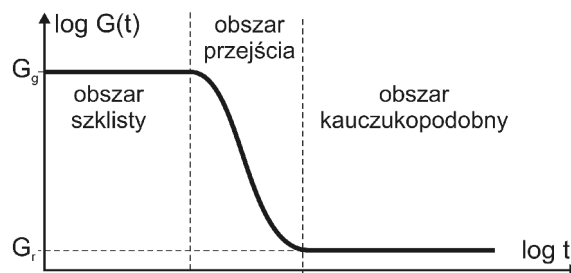
$$\begin{aligned} G_g &= G(t=0), \\ G_r &= G(t=\infty), \end{aligned} \quad (4.155)$$

gdzie  $G_g$  – moduł sprężystości postaciowej dla stanu szklanego,  $G_r$  – moduł sprężystości postaciowej dla stanu kauczukopodobnego.

W przypadku statycznym wartość naprężenia stycznego  $\tau$  w funkcji czasu  $t$  można wyznaczyć z zależności;

$$\tau = G(t)\gamma, \text{ gdzie } G_r \leq G(t) \leq G_g. \quad (4.156)$$

Zachowanie relaksacyjne polimerów dla obciążenia statycznego można przedstawić na wykresie logarytmicznym w postaci zależności modułu relaksacji  $G(t)$  od czasu  $t$  (rys. 4.39) [296].



Rys. 4.39. Zależność modułu relaksacji  $G(t)$  od czasu:  $G_g$  – moduł sprężystości postaciowej dla stanu szklanego,  $G_r$  – moduł sprężystości postaciowej dla stanu kauczukopodobnego

W przypadku dynamicznym dla materiałów lepkosprężystych, naprężenie i odkształcenie nie są zgodne w fazie, lecz są przesunięte o kąt  $\theta$ , przy czym odkształcenie jest opóźnione w stosunku do naprężenia, co przedstawiono na rysunku 4.36. Naprężenie można rozłożyć na dwie składowe: zgodną i przesuniętą w fazie o  $90^\circ$  stopni względem odkształcenia. Gdy tak otrzymane składowe podzieli się następnie przez wartość odkształcenia, otrzymamy zespolony moduł sprężystości postaciowej  $\mathbf{G}$  w postaci:

$$\mathbf{G} = G' + i G'', \quad (4.157)$$

gdzie część rzeczywista  $G'$  nosi nazwę modułu zachowawczego, natomiast część urojona  $G''$  nosi nazwę modułu stratności. Korzystając z ostatniej zależności, można przedstawiać oraz interpretować wyniki badań dynamicznych dla danej częstości  $f$  jako:

- moduł liczby zespolonej:

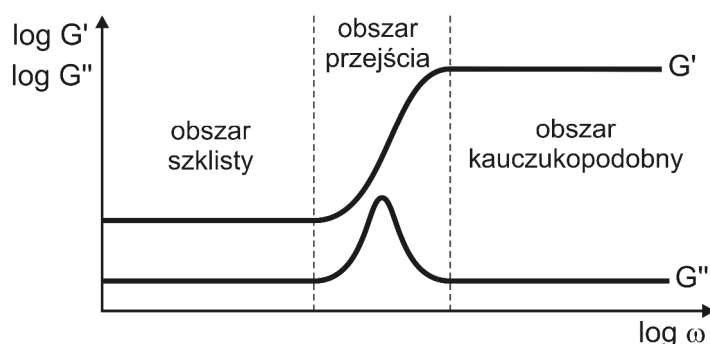
$$|\mathbf{G}| = \sqrt{G'^2 + G''^2}, \quad (4.158)$$

- argument liczby zespolonej:

$$\Theta = \arctg\left(\frac{G''}{G'}\right). \quad (4.159)$$

Składowa rzeczywista  $G'$  jest związana z odkształceniem sprężystym, podczas gdy składowa urojona  $G''$  z odkształceniem niesprężystym – rozpraszanie energii, np.

w postaci ciepła. Zachowanie lepkosprężyste przedstawia się na wykresach logarytmicznych w postaci zależności modułów w funkcji częstotliwości  $f$ , a właściwie częstości kołowej  $\omega$ <sup>71</sup> lub w skrócie częstości, co zostało przedstawione na rysunku 4.40. Przy dużych częstościach materiał zachowuje się jak materiał sprężysty, natomiast przy małych częstościach jak materiał lepki. Dla częstości pośrednich ośrodek zachowuje się jak materiał lepkosprężysty.



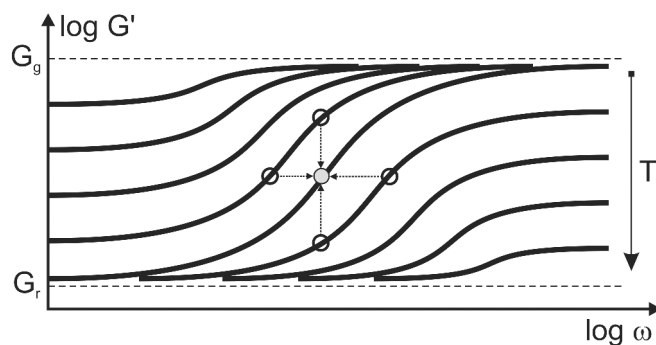
Rys. 4.40. Zależność składowych modułu sprężystości postaciowej w funkcji częstości kołowej  $\omega$

Jak wspomniano wcześniej właściwości lepkosprężyste zależą nie tylko od czasu  $t$ , lecz także od temperatury  $T$ . Dodatkowo ważną cechą materiałów lepkosprężystych jest równoważność zmian właściwości lepkosprężystych od czasu i temperatury. Lepkosprężystość można modelować jako sprężynę, która pracuje w ośrodku lepkim. W krótkich odcinkach czasu materiał przejawia właściwości sprężyste, natomiast w długich odcinkach czasu właściwości lepkie. Podobną zależność uzyskuje się w przypadku temperatury. W temperaturach niskich, gdy lepkość dąży do nieskończoności, szybkość reakcji sprężyny maleje do zera, a materiał zachowuje się jak materiał sprężysty, natomiast w podwyższonej temperaturze szybkość reakcji sprężyny wzrasta ze względu na zmniejszenie lepkości ośrodka, a materiał zachowuje się jak materiał lepki [298]. W przypadku materiałów lepkosprężystych mówimy zatem o zasadzie skalowalności czasu i temperatury (rys. 4.41). Zasada skalowalności oznacza, że dany stan naprężenia dla temperatury  $T$  można uzyskać w wyniku odpowiedniej zmiany czasu  $t$ . Zasada skalowalności obowiązuje w zakresie lepkosprężystości liniowej [307].

Ogólne równanie opisujące zależność stanu naprężenia w funkcji czasu  $t$  i temperatury  $T$  dla materiałów lepkosprężystych<sup>72</sup> można zapisać w postaci [254, 297]:

71 Częstość kołowa lub inaczej pulsacja określa szybkość powtarzania się zjawiska okresowego. Częstość kołowa  $\omega$  jest powiązana z częstotliwością  $f$  przez zależność  $\omega = 2\pi f$ .

72 Lepkosprężystość może mieć charakter zarówno liniowy, jak i nieliniowy. Zależność ta obowiązuje jedynie w przypadku lepkosprężystości liniowej.



Rys. 4.41. Wpływ temperatury na przebieg modułu sprężystości postaciowej w funkcji częstości kołowej  $\omega$

$$\sigma_{ij}(t, T) = \int_{-\infty}^t \left\{ 2G(t-s, T) \varepsilon_{ij}^d + K(t-s, T) \varepsilon_V^{eff} \right\} ds, \quad (4.160)$$

gdzie  $\sigma_{ij}$  i  $\varepsilon_{ij}$  – odpowiednio składowe tensora naprężenia i odkształcenia,  $s$  – przesunięcie czasowe,  $G$  – moduł sprężystości postaciowej,  $K$  – moduł sprężystości objętościowej,  $\varepsilon_V^{eff}$  – efektywne odkształcenie objętościowe składające się ze składowych odkształcenia mechanicznego i cieplnego.

W przypadku ogólnym należałoby jeszcze uwzględnić [308, 309]:

- stopień utwardzenia  $\alpha$ ; równanie (4.160) obowiązuje dla materiału w pełni utwardzonego,
- zjawisko skurczu materiału w czasie utwardzania,
- zależność modułu sprężystości postaciowej  $G$  i objętościowej  $K$  od temperatury  $T$  i stopnia utwardzenia  $\alpha$ .

Powyższe problemy są najczęściej pomijane w modelowaniu numerycznym. Częściowo jest to wynik skomplikowanych i kosztownych pomiarów doświadczalnych. W przypadku gdy czas jest na tyle krótki, że można przyjąć założenie  $t = 0$ , wówczas zarówno moduł sprężystości postaciowej  $G$ , jak i objętościowej  $K$  można uznać za wielkości stałe, a ich wartości można wyznaczyć z zależności:

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)}, \quad (4.161)$$

$$K_0 = \frac{E_0}{3(1-2\nu)}. \quad (4.162)$$

W przypadku obowiązywania zasady skalowalności zależność modułu sprężystości postaciowej  $G$  od czasu  $t$  i temperatury  $T$  zapisuje się w postaci:

$$G(t, T) \rightarrow G(t_r, [T]), \quad (4.163)$$

gdzie  $t_r$  – tzw. czas zredukowany, zależność  $G(t_r)$  określa się terminem krzywej złożonej.

Ze względu na równoważność czasu i temperatury można dokonać rozdzielania zmiennych przez wprowadzenie pojęcia czasu zredukowanego  $t_r$ , opisanego równaniem:

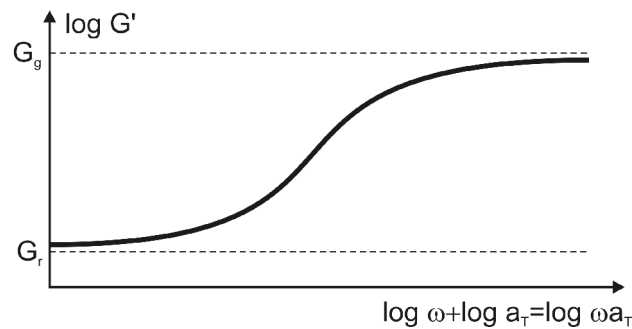
$$t_r = \int_0^t a_T dt, \quad (4.164)$$

gdzie  $a_T$  – współczynnik przesunięcia:

$$a_T = \frac{\tau}{\tau_s}, \quad (4.165)$$

a  $\tau$  – czas relaksacji w temperaturze  $T$ ,  $\tau_s$  – czas relaksacji dla danej temperatury  $T_s$ .

Wpływ temperatury na zachowanie materiału lepkosprężystego można opisać za pomocą współczynnika przesunięcia  $a_T$ , który pozwala na uzyskanie pojedynczej krzywej, opisującej zachowanie materiału lepkosprężystego zarówno w funkcji temperatury  $T$ , jak i czasu  $t$ . Krzywa ta nosi nazwę krzywej złożonej (ang. *master curve*), a jej typowy kształt przedstawiono na rysunku 4.42.



Rys. 4.42. Krzywa złożona modułu  $G'$  w funkcji czasu zredukowanego  $\omega a_T$

Procedurę taką można zobrazować graficznie jako przesunięcie krzywych dla różnych temperatur względem siebie o wartość równą  $\Delta \log a_T$  w taki sposób, aby otrzymać krzywą złożoną. Wartość przesunięcia można odczytać z wykresu, jako odległość poziomą między krzywymi w odpowiadających sobie punktach. Wartość współczynnika przesunięcia  $a_T$  można wyznaczyć, korzystając z równania WLF opracowanego w roku 1995. Skrót WLF pochodzi od pierwszych liter nazwisk badaczy, tj. William, Landel i Ferry, a dotyczy materiałów lepkosprężystych powyżej temperatury zeszklenia  $T_g$ :

$$\log(a_T) = \frac{-C_1(T - T_s)}{C_2 + T - T_s}, \quad (4.166)$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  – stałe materiałowe,  $T_s$  – temperatura odniesienia wyznaczona doświadczalnie.

Wartość temperatury  $T_s$  można w przybliżeniu wyznaczyć z następującego równania:

$$T_s = T_g + 50. \quad (4.167)$$

Zaletą krzywej złożonej jest to, że można ją wykreślić na podstawie niewielkiej liczby pomiarów, korzystając z metody ekstrapolacji wyników na obszary, w których nie wykonano pomiarów. Wadą krzywej złożonej jest brak możliwości uwzględnienia zjawiska typowego dla polimerów, tj. stopnia utwardzania  $\alpha$ , o czym w swoich pracach wspomina K. Jansen i L. Ernst [310, 311, 312]. W takim przypadku należałoby uwzględnić, oprócz czasu i temperatury, jako zmienną także stopień utwardzenia  $\alpha$ , o czym m.in. wspomina w swoich pracach autor [308, 309]. W tym celu należy skorzystać ze zmodyfikowanej zależności (4.160), tak aby uwzględniała dodatkowo stopień utwardzenia  $\alpha$ :

$$\sigma_{ij}(t, T, \alpha) = \int_{-\infty}^t \left\{ 2G(t-s, T, \alpha) \varepsilon_{ij}^d + K(t-s, T, \alpha) \varepsilon_V^{eff} \right\} ds, \quad (4.168)$$

gdzie efektywne odkształcenie objętościowe  $\varepsilon_V^{eff}$  składa się w tym przypadku z trzech składowych: odkształcenia mechanicznego  $\varepsilon_V^m$ , temperaturowego oraz skurczu materiału na skutek utwardzania, co można zapisać w postaci:

$$\varepsilon_V^{eff} = \varepsilon_V^m - \varepsilon_V^\alpha - \varepsilon_V^T, \quad (4.169)$$

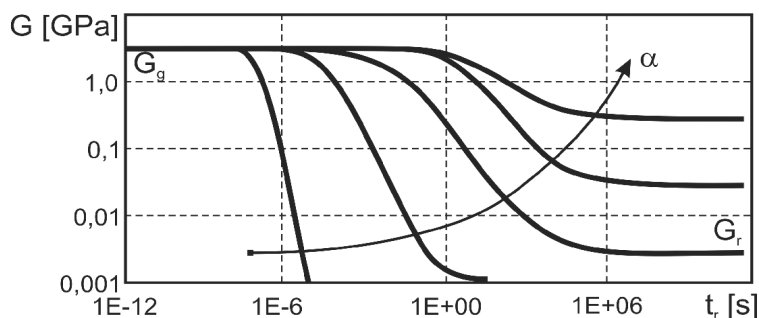
przy czym:

$$\varepsilon_V^T = 3\beta_L^s \beta_L^r (T - T_{ref}), \quad (4.170)$$

$$\varepsilon_V^\alpha = -3\gamma_L(\alpha - \alpha_{ref}), \quad (4.171)$$

gdzie  $\beta_L^s$  i  $\beta_L^r$  – kolejno współczynniki rozszerzalności cieplnej zmierzone poniżej i powyżej temperatury zeszklenia,  $\gamma$  – liniowy współczynnik skurczu w czasie utwardzania.

Przykładowe wyniki pomiaru zależności krzywej złożonej dla modułu sztywności  $G$  od stopnia utwardzenia  $\alpha$  i czasu zredukowanego  $t_r$  został pokazany na rysunku 4.43.



Rys. 4.43. Przykłady wynik pomiaru zależność krzywej złożonej dla modułu sztywności  $G$  w funkcji czasu zredukowanego  $t_r$  i od stopnia utwardzenia  $\alpha$

Analiza zachowania lepkosprężystego w zależności od stopnia utwardzenia  $\alpha$  wymaga znajomości kinetyki utwardzania [313, 314, 303]. Zależność analityczną pozwalającą na opis szybkości utwardzania zaproponowali Kamal i Sourour [315] w postaci zależności:

$$\frac{d\alpha}{dt} = k_T \alpha^m (1-\alpha)^n, \quad (4.172)$$

gdzie  $m$  i  $n$  – współczynniki materiałowe,  $k_T$  – stała szybkości reakcji, którą można opisać równaniem Arrheniusa:

$$k_T = A \exp\left(\frac{-Q}{RT}\right), \quad (4.173)$$

gdzie  $A$  – współczynnik proporcjonalności,  $Q$  – energia aktywacji,  $R$  – stała gazowa,  $T$  – temperatura.

### 4.3.3. Pełzanie i pękanie pełzaniowe

Zjawisko narastania z upływem czasu trwałych odkształceń pod stałym obciążeniem określa się terminem pełzania. Pełzaniu podlegają wszystkie materiały. Proces ciągłego wzrostu odkształcenia  $\varepsilon$  przebiega na ogół bardzo powoli w funkcji czasu  $t$  i zależy od naprężenia  $\sigma$  i temperatury  $T$ :

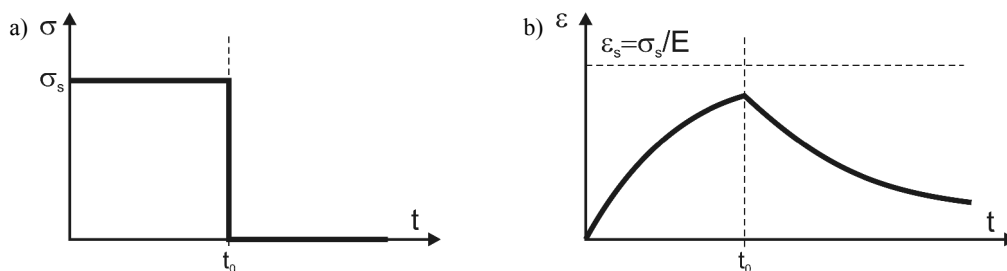
$$\varepsilon = f(t, T, \sigma). \quad (4.174)$$

Szybkość pełzania zwiększa się w istotny sposób zarówno podczas wzrostu temperatury  $T$ , jak i zwiększeniu naprężeń  $\sigma$ . Odkształcenie na skutek pełzania może mieć charakter odwracalny lub nieodwracalny. Stan odwracalny występuje w bardzo wąskim zakresie temperatury i naprężenia. Odkształcenie to ma wówczas charakter tarcia wewnętrznego i nie stanowi dużego zagrożenia w analizie wytrzymałościowej. W za-



gadnieniach praktycznych można jednak przyjąć założenie, że odkształcenie wskutek pełzania ma charakter nieodwracalny. Wyróżnia się dwa mechanizmy pełzania: poślizg wewnątrz ziaren – pełzanie dyfuzyjne oraz poślizg wzdłuż granic ziaren – pełzanie dyslokacyjne. Przyjmuje się, że w niskiej temperaturze dominuje pełzanie dyfuzyjne, które jest podstawowym mechanizmem pełzania, podczas gdy pełzanie dyslokacyjne zaczyna dominować w temperaturze wysokiej. W przypadku gdy zjawisko pełzania wkracza w zakres nieustalony, wówczas w materiale zaczynają zachodzić zmiany mikrostruktury w postaci pojawienia się mikropeknięć i mikropustek. Wynikiem tego jest pojawienie się szczeliny pęknięcia oraz jej wzrost, aż do powstania przełomu w materiale. Zjawisko takie nosi nazwę pęknięcia pełzaniowego [316].

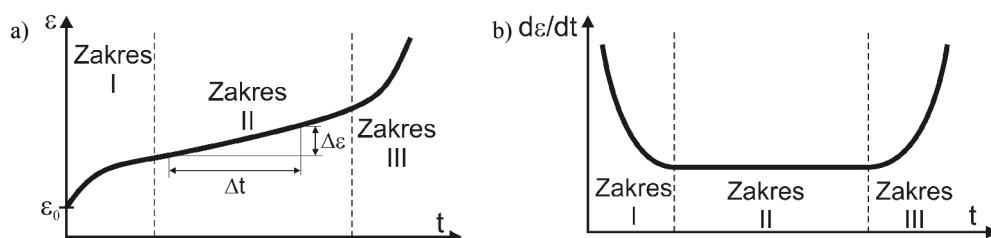
Istotnym problemem dotyczącym zjawiska pełzania jest analiza i modelowanie stanu naprężenie–odkształcenie wskutek obciążeń cyklicznych. Obciążenia cykliczne prowadzą do procesu stopniowej zmiany mikrostruktury materiału w postaci inicjacji i propagacji pęknięcia. Mechanizmy te prowadzą po pewnym czasie do zniszczenia materiału. Jak wcześniej podano, analiza stopniowego wzrostu odkształcenia na skutek obciążeń zmiennych jest możliwa w przypadku lepkosprężystego modelu materiałowego według Kelvina–Voighta (rys. 4.44).



Rys. 4.44. Analiza stanu naprężenie–odkształcenie na skutek obciążania cyklicznego

Opis ilościowy zjawiska pełzania określa się na podstawie badań doświadczalnych. Wyniki są przedstawiane w postaci wykresów odkształceń całkowitych lub pełzaniowych w funkcji czasu  $t$  dla stałego naprężenia  $\sigma$  i temperatury  $T$ . Są to tak zwane krzywe pełzania. Typową krzywą pełzania przedstawiającą odkształcenie materiału w funkcji czasu oraz zmianę prędkości pełzania pod stałym obciążeniem pokazano na rysunku 4.45.

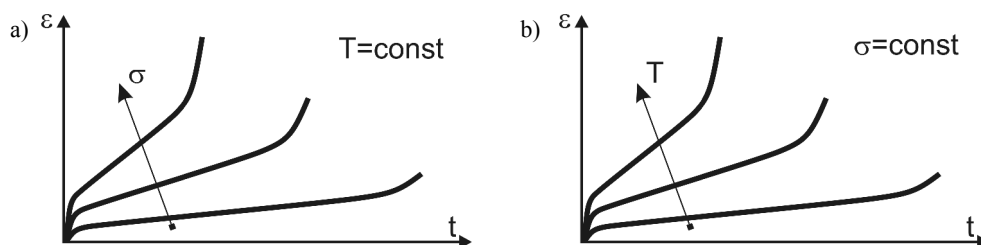
Na krzywej pełzania można wyróżnić trzy zakresy. W zakresie I następuje szybkie zmniejszanie szybkości odkształcenia z upływem czasu, w zakresie II szybkość odkształcania jest stała, natomiast w zakresie III następuje szybki wzrost szybkości odkształcenia. Taki kształt krzywej wynika z tego, że odkształcenie zachodzące bezpośrednio po przyłożeniu obciążenia prowadzi do szybkiego wzrostu dyslokacji. Koniec zakresu I występuje po ustaleniu



Rys. 4.45. Krzywa pełzania: odkształcenie w funkcji czasu przy stałym obciążeniu i temperaturze (a), zależność prędkości pełzania od czasu (b):  $\epsilon_0$  – odkształcenie początkowe w wyniku odkształcenia sprężystego i plastycznego

w materiale stanu równowagi dynamicznej. Wytworzona równowaga utrzymuje się przez cały zakres II, czego wynikiem jest stała wartość szybkości pełzania. W zakresie III występuje wyraźna przewaga wzrostu szybkości pełzania w stosunku do wzrostu naprężenia. W rezultacie następuje wyraźna zmiana przekroju poprzecznego ciała w wyniku przewężenia lub akumulacji wewnętrznych mikropęknięć, co prowadzi do uszkodzenia.

Duży wpływ na zjawisko pełzania ma nie tylko stan naprężenia, lecz także temperatura (rys. 4.46) [80]. W związku z tym rozróżnia się dwa rodzaje pełzania: niskotemperaturowe i wysokotemperaturowe. Pełzanie niskotemperaturowe dotyczy głównie metali. Występuje ono zarówno w niskiej temperaturze, lecz dla naprężeń przekraczających granicę plastyczności materiału. Charakterystyczną cechą pełzania niskotemperaturowego jest to, że jest ono znacznie mniejsze niż odkształcenie początkowe ( $t = 0$ ), będące sumą odkształcenia sprężystego i plastycznego, tzn.  $\epsilon_l < \epsilon_s + \epsilon_p$ . Ponadto ma ono największą wartość na samym początku, a następnie stabilizuje się i po pewnym czasie zanika całkowicie. Z tego też powodu, nie bierze się go pod uwagę w przypadku obciążeń statycznych, a ma ono znaczenia jedynie dla obciążeń dynamicznych. Z kolei pełzanie wysokotemperaturowe charakteryzuje się tym, że odkształcenie na skutek pełzania przekracza wartość odkształcenia początkowego ( $t = 0$ ), tj. sprężystego i plastycznego, tzn.  $\epsilon_l > \epsilon_s + \epsilon_p$ . Wzrost odkształcenia po pewnym czasie stabilizuje się na określonej wartości i przechodzi w stan nieustalony, co prowadzi do pęknięcia. Z tego też powodu



Rys. 4.46. Kształt krzywej pełzania w przypadku zmian naprężenia (a) i temperatury (b)

pełzanie wysokotemperaturowe bierze się pod uwagę zarówno w przypadku obciążeń statycznych, jak i dynamicznych. Wpływ różnych mechanizmów na zjawisko pełzania wysokotemperaturowego jest bardzo złożony, a najważniejszym mechanizmem jest zależność zmian mikrostruktury materiału w funkcji temperatury i naprężenia.

W przypadku pełzania wartość odkształcenia w funkcji czasu można oszacować z zależności zaproponowanej przez Andrade [269] w postaci:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \beta t^n + \dot{\varepsilon} t, \quad (4.175)$$

gdzie  $\varepsilon_0$  – odkształcenie początkowe ( $t = 0$ ),  $n$  i  $\beta$  – stałe materiałowe.

Człon pierwszy równania opisuje stan odkształcenia początkowego – odkształcenie sprężyste i plastyczne, człon drugi opisuje przyrost odkształcenia dla I zakresu pełzania, natomiast człon trzeci dla II zakresu pełzania. Ze względu na obciążenia termiczne, w czasie których stosunkowo wolno narasta temperatura, dominujące znaczenia mają badania stanu zależności między naprężeniem i odkształceniem dla zakresu II pełzania – o ustalonej szybkości pełzania. W przypadku najprostszym, zależność między naprężeniem a szybkością zmian odkształcenia dla zakresu II można zapisać w postaci równania:

$$\dot{\varepsilon} = A \sigma^n e^{-\frac{Q}{RT}}, \quad (4.176)$$

gdzie:  $A$  i  $n$  – stałe materiałowe,  $Q$  – energia aktywacji,  $R$  – uniwersalna stała gazowa,  $T$  – temperatura.

Wartości liczbowe tych stałych są wyznaczane doświadczalnie. Model szybkości pełzania opisany ostatnią zależnością nosi nazwę modelu Ananda–Nortona [317]. Jest on jedynie przybliżeniem rzeczywistego zachowania materiału i powinien być stosowany jedynie w przypadku obliczeń przybliżonych. W zakresie II pełzania ustalonego stosowane są także inne modele, z których najważniejsze to:

- model potęgowy – stanowi zmodyfikowaną wersję modelu Ananda–Nortona, który dodatkowo uwzględnia zależność naprężenia od temperatury [318]:

$$\dot{\varepsilon} = A \frac{\sigma^n}{T} e^{-\frac{Q}{RT}}, \quad (4.177)$$

gdzie:  $A$  i  $n$  – stałe materiałowe.

- sinus hiperboliczny; model ten nie ma bezpośredniej interpretacji fizycznej, jest jednak często stosowany w dziedzinie montażu elektronicznego [319, 320]:

$$\dot{\varepsilon} = A \sinh\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{Q}{RT}}, \quad (4.178)$$

gdzie  $A$ ,  $\sigma_0$ ,  $n$  – stałe materiałowe.

Model ten wyraża się też w postaci zmodyfikowanej, jako [321, 322]:

$$\dot{\gamma} = A \frac{G(T)}{T} \sinh\left(\alpha \frac{\tau}{G(T)}\right)^n e^{-\frac{Q}{RT}}, \quad (4.179)$$

gdzie  $G(T)$  – moduł sztywności materiału jako funkcja temperatury.

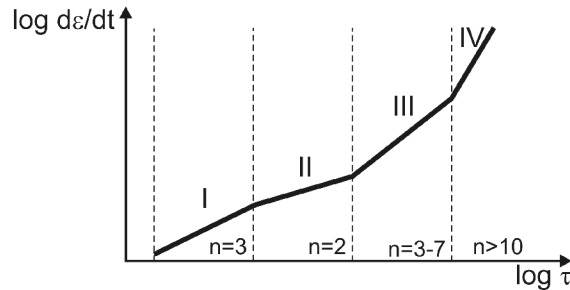
W tabeli 4.5 zebrano przykładowe wartości stałych materiałowych dla wymienionych modeli pełzania wybranych stopów lutowniczych. Ponieważ badania doświadczalne wykonuje się na podstawie albo próby rozciągania, albo ścinania, konieczne jest odpowiednie przeliczenie wyników. W tym celu dla materiałów izotropowych korzysta się ze zredukowanego naprężenia według Hubera–Misesa w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{3} \tau \\ \varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma \end{aligned} \quad (4.180)$$

Tabela 4.5. Przykładowe wartości stałych materiałowych modeli pełzania w zakresie II dla wybranych stopów lutowniczych [323, 319, 324, 325]

	Ananda–Nortona	Sinus hiperboliczny	Potęgowy
SnPb	$A$ [1/s] = $1,142 \cdot 10^{-10}$ $Q$ [kJ/mol] = 125 $n = 10,36 - 2,043 \cdot 10^{-2} T$	$A$ [1/s] = $2,0 \cdot 10^{-4}$ $n = 2,11$ $\sigma_0$ [MPa] = 5,0 $Q$ [kJ/mol] = 54,1	
SnAgCu		$A$ [1/s] = $1,5 \cdot 10^{-5}$ $n = 4,0$ $\sigma_0$ [MPa] = 5,26 $Q$ [kJ/mol] = 71,3	$A$ [K/s] = $1,5 \cdot 10^{-12}$ $n = 8,36$ $Q$ [kJ/mol] = 59,8
SnAg		$A$ [1/s] = $1 \cdot 10^{-4}$ $n = 5,5$ $\sigma_0$ [MPa] = 19,0 $Q$ [kJ/mol] = 63,0	$A$ [K/s] = $5 \cdot 10^{-6}$ $n = 11,0$ $Q$ [kJ/mol] = 79,8

W przypadku miękkich stopów lutowniczych stosowanych w montażu elektronicznym pojawia się dodatkowo problem zależności szybkości pełzania w zakresie ustalonym od wartości naprężenia. Dzieje się tak dlatego, że kinetyka procesu odkształcenia jest wynikiem kilku mechanizmów pełzania. Zjawisko to można zaobserwować na wykresie przedstawiającym zależność prędkości pełzania od naprężenia dla stopu SnPb (rys. 4.47) [78].



Rys. 4.47. Zależność prędkości pełzania w zakresie ustalonym od wartości naprężenia dla stopu lutowniczego SnPb [325]

W takim przypadku stosuje się model wypadkowy, który uwzględnia dwie szybkości pełzania, dla obszaru II i III (rys. 4.47) w postaci zależności [326, 327]:

$$\dot{\varepsilon} = A_{II} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n_{II}} e^{-\frac{Q_{II}}{RT}} + A_{III} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n_{III}} e^{-\frac{Q_{III}}{RT}}, \quad (4.181)$$

lub [328, 329]:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{B_{II}}{T} \sigma^{m_{II}} e^{-\frac{H_{II}}{RT}} + \frac{B_{III}}{T} \sigma^{m_{III}} e^{-\frac{H_{III}}{RT}}, \quad (4.182)$$

gdzie  $\sigma_0$ ,  $A_{II}$ ,  $A_{III}$ ,  $B_{II}$ ,  $B_{III}$ ,  $n_{II}$ ,  $n_{III}$ ,  $m_{II}$ ,  $m_{III}$ ,  $Q_{II}$ ,  $Q_{III}$ ,  $H_{II}$  i  $H_{III}$  – stałe materiałowe.

W tabeli 4.6 przedstawiono przykładowe parametry wybranych stopów lutowniczych oraz ich parametry materiałowe uzyskane na drodze doświadczalnej.

W celu porównania właściwości wytrzymałościowych różnych materiałów ze względu na zjawisko pełzania rozpatruje się dwa kryteria: granicę pełzania oraz wytrzymałość na pełzanie:

- granica pełzania – stałe obciążenie podzielone przez początkowy przekrój próbki, które po upływie określonego czasu działania w danej temperaturze spowoduje trwałe wydłużenie próbki o określoną wartość, np.  $\varepsilon = 1\%$ , granicę pełzania oznacza się przez  $R_{X/T/t}$ , gdzie  $T$  oznacza temperaturę,  $t$  oznacza czas natomiast wartość  $X$  jest określona zależnością:

$$X = \log \left( \frac{t}{t_0} \right), \quad (4.183)$$

- wytrzymałość na pełzanie – stałe obciążenie podzielone przez początkowy przekrój próbki, po upływie określonego czasu działania w danej temperaturze spowoduje zerwanie próbki; wytrzymałość na pełzanie oznacza się przez  $R_{ZT/t}$ .

Tabela 4.6. Przykładowe wartości stałych materiałowych modelu pełzania dla dwóch zakresów, dla wybranych stopów lutowniczych [328, 321, 330, 64]

	Potęgowy-1	Potęgowy-2
SnPb	$A_{II} [1/s] = 1 \cdot 10^{-12}$ $n_{II} = 3,0$ $Q_{II} [kJ/mol] = 45,2$ $A_{III} [1/s] = 8,9 \cdot 10^{-24}$ $n_{III} = 7$ $Q_{III} [kJ/mol] = 45,2$ $\sigma_0 [MPa] = 25,0$	$B_{II} [K/s] = 18,14 \cdot 10^{-3}$ $m_{II} = 1,97$ $H_{II} [kJ/mol] = 48$ $B_{III} [K/s] = 2,31 \cdot 10^{-3}$ $m_{III} = 7,51$ $H_{III} [kJ/mol] = 79,0$
SnAgCu	$A_{II} [1/s] = 1 \cdot 10^{-6}$ $n_{II} = 3,0$ $Q_{II} [kJ/mol] = 34,8$ $A_{III} [1/s] = 1 \cdot 10^{-12}$ $n_{III} [1] = 12$ $Q_{III} [kJ/mol] = 61,1$ $\sigma_0 [MPa] = 1,0$	$B_{II} [K/s] = 1,33 \cdot 10^{-5}$ $m_{II} = 3,2$ $H_{II} [kJ/mol] = 23$ $B_{III} [K/s] = 3,18 \cdot 10^{-10}$ $m_{III} = 11,5$ $H_{III} [kJ/mol] = 62,0$
SnAg	$A_{II} [1/s] = 7 \cdot 10^{-4}$ $n_{II} = 3$ $Q_{II} [kJ/mol] = 46,8$ $A_{III} [1/s] = 2 \cdot 10^{-4}$ $n_{III} = 11$ $Q_{III} [kJ/mol] = 93,1$ $\sigma_0 [MPa] = 1,0$	

Mechanizmy zjawiska pełzania są przede wszystkim aktywowane cieplnie, co wyraża m.in. zależność (4.176), gdzie  $Q$  oznacza energię aktywacji zjawiska pełzania. Materiały odporne na zjawisko pełzania powinny charakteryzować się dużą wartością energii aktywacji  $Q$  (energia aktywacji samodyfuzji i współczynnika samodyfuzji). Materiały takie powinny zatem charakteryzować się wysoką temperaturą topnienia  $T_m$ , dużą wartościowością, gęsto upakowaną siecią krystalograficzną oraz dużym udziałem wiązań kowalencyjnych. W niektórych przypadkach stosuje się także odpowiednie pierwiastki stopowe, które zwiększają odporność materiału na pełzanie. Zjawisko pełzania staje się istotne w zakresie temperatur  $0,3-0,5T_M$  – temperatura topnienia w skali Kelvina. W przypadku polimerów, które nie mają ściśle określonej temperatury topnienia, istotnym parametrem jest temperatura zeszklenia  $T_G$ . Zjawisko pełzania dla polimerów występuje w temperaturze wyższej od  $T_G$ .

#### 4.3.4. Przykład pomiarów doświadczalnych i obliczeń numerycznych dla klejów przewodzących ciepłnie

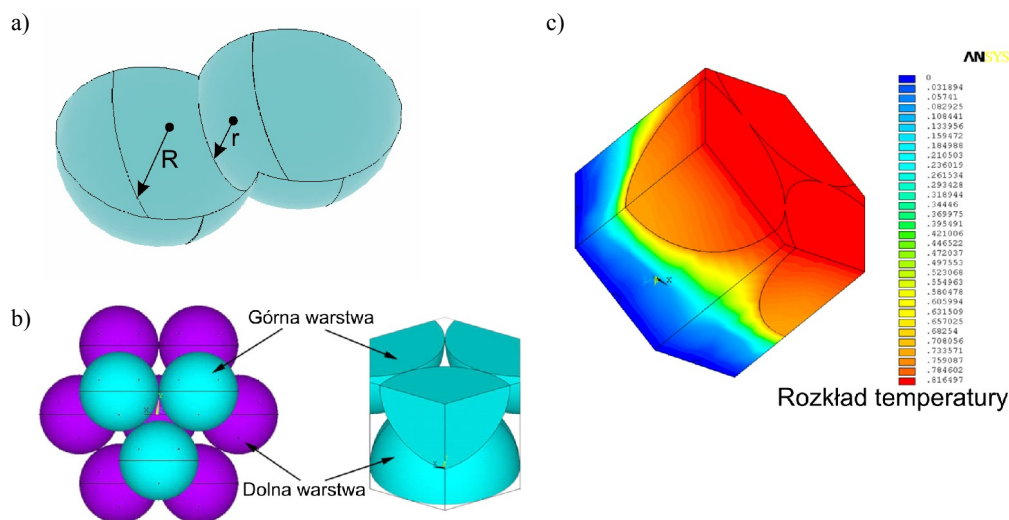
W ramach współpracy autora z Uniwersytetem Technicznym w Delft w Holandii<sup>73</sup> wykonano wspólne badania i modelowanie właściwości klejów przewodzących ciepłnie TCA [308, 71]. Kleje TCA należą do polimerowych materiałów kompozytowych, które składają się z osnowy polimerowej – faza ciągła oraz cząstek wypełniacza – faza dyspersyjna. Badania klejów wymagały przede wszystkim określenia właściwości lepkosprężystych osnowy polimerowej, a następnie oszacowanie ich wpływu na wartość współczynnika przewodzenia ciepła klejów oraz ocenę jego stabilności w funkcji czasu i temperatury, korzystając z metod modelowania numerycznego. Wartość współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$  klejów, zgodnie z tabelą 4.4 wynosi około 3,5 W/m·K. Jednak, według różnych autorów, wartość ta może zawierać się w przedziale<sup>74</sup> od 0,1 aż do 60 W/(m·K) [331, 332]. Ocenia się, że przewodnictwo ciepłne klejów jest ograniczona przez rezystancję ciepłną styku<sup>75</sup>, która występuje między cząstkami wypełniacza. W wyniku procesu utwardzania dochodzi do skurczu chemicznego osnowy polimerowej, tzw. skurcz polimerowy, który prowadzi do powstania kontaktu, a następnie do odkształcenia plastycznego cząstek wypełniacza (rys. 4.48a). Na rysunku 4.48b przedstawiono przykładową wyidealizowaną strukturę przestrzenną kleju będącą odpowiednikiem struktury krystalicznej typu HCP lub FCC<sup>76</sup>. Korzystając z wykonanego modelu numerycznego, oszacowano zmianę współczynnika przewodzenia ciepła kleju w zależności od wartości  $r/R$  opisującego stosunek promienia  $R$  cząstek wypełniacza oraz promienia  $r$  powierzchni kontaktu cząstek, co pokazano na rysunku 4.48c oraz przedstawiono w tabeli 4.7. Właściwości ciepłne wybranego modelu kleju zależą przede wszystkim od właściwości materiału osnowy polimerowej, a nie materiału wypełniacza, natomiast wybór struktury typu HCP lub FCC pozwala uniknąć problemu progu perkolacji. Ponadto powierzchnię kontaktu cząstek można opisać przez promień koła, a czynniki takie jak zanieczyszczenia, niejednorodność itp. są pomijalnie małe. Tym samym wybrany model kleju stanowi przypadek, dla którego można uzyskać maksymalną graniczną wartość współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$  [333].

73 Autor otrzymał stypendium naukowe z Uniwersytetu Technicznego Delft w Holandii w roku 2002. Zespół, w którym pracuje autor, utrzymuje od tamtego czasu ścisłą współpracę z Wydziałem Mechanicznym tego Uniwersytetu, czego efektem była między innymi praca doktorska T. Fałata *Transport ciepła w wypełnionych polimerowych materiałach kompozytowych*.

74 Podawane przez różnych autorów wartości współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$  dla klejów zależą od różnych czynników: zastosowana metoda pomiarowa, rodzaj cząstek wypełniacza, zawartość procentowa lub wagowa cząstek wypełniacza oraz właściwości termomechaniczne osnowy polimerowej.

75 Problem rezystancji ciepłnej styku został opisany szczegółowo w rozdziale 2.5.

76 Komórka HCP lub FCC zapewnia maksymalne wypełnienie przestrzeni cząstkami wypełniacza, które wynosi w przypadku cząstek o kształcie sferycznym  $V_f/V_t = 74,05\%$ , gdzie  $V_f$  jest objętością cząstek wypełniacza, natomiast  $V_t$  jest objętością całkowitą kleju.



Rys. 4.48. Powierzchnia kontaktu cząsteczek (a) i struktura przestrzenna cząstek wypełniacza oraz przykładowy wynik modelowania przewodnictwa cieplnego kleju (c)

Tabela 4.7. Wyznaczone numerycznie wartości współczynnika przewodzenia ciepła kleju  $\lambda$  w zależności od współczynnika stosunku promieni  $r/R$ .

$r/R$	$\lambda$ [W/(m·K)]
0,05	49,12
0,02	26,46

Z wykonanych obliczeń wynika, że wartość współczynnika przewodzenia ciepła kleju zależy od powierzchni styku cząstek wypełniacza, czyli jest funkcją właściwości lepkosprężystych kleju, a zwłaszcza współczynnika skurczu polimerowego materiału osnowy – żywicy, stopnia wypełnienia osnowy cząstkami wypełniacza – srebra oraz ich właściwościami termomechanicznymi. Niestety istotnym problemem jest także zjawisko pełzania i relaksacji naprężeń, w wyniku którego stan naprężenie–odkształcenie między cząstkami wypełniacza zmienia się w funkcji czasu i temperatury. W związku z tym można spodziewać się zmniejszenia wartości współczynnika przewodzenia ciepła kleju wskutek pełzania i relaksacji naprężeń dla materiału osnowy, tj. żywicy. Aby oszacować wpływ właściwości lepkosprężystych kleju na wartość współczynnika przewodzenia ciepła kleju, konieczne było wykonanie wielu pomiarów do-



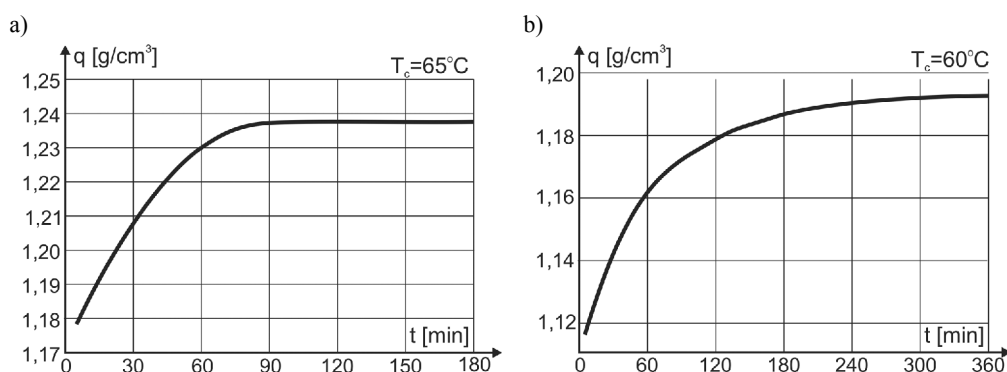
świadczalnych, opisanych szczegółowo w rozdziale 4.3.2. Celem pomiarów było uzyskanie:

- wartości współczynnika skurczu żywicy w procesie utwardzania,
- krzywej złożonej (ang. *master curve*) opisującej właściwości lepkosprężyste dla żywicy w pełni utwardzonej,
- parametrów materiałowych opisujących szybkości procesu utwardzania.

Wszystkie wymienione pomiary doświadczalne dla przykładowych klejów zostały wykonane na Uniwersytecie Technicznym Delft w Holandii.

Pomiar wartości współczynnika skurczu żywicy w procesie utwardzania wykonano mierząc zmianę gęstości żywicy w funkcji czasu dla danej temperatury utwardzania, korzystając z prawa Archimedesesa. W tym celu próbka żywicy była zanurzona w oleju o temperaturze  $T_c$ , a następnie mierzono wyporność próbki w czasie procesu utwardzania. Na rysunku 4.48 przedstawiono przykładowe wyniki pomiaru, natomiast w tabeli 4.8 – uzyskane wyniki wartości współczynnika skurczu żywicy dla dwóch wybranych próbek klejów.

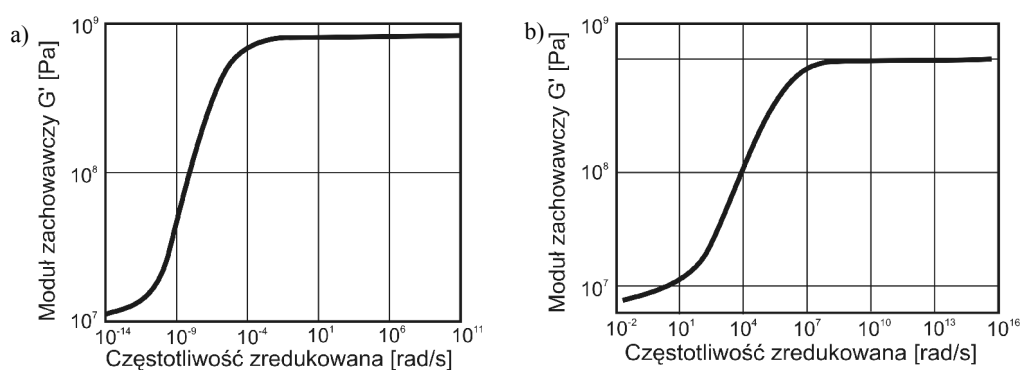
Pomiar właściwości lepkosprężystych dla w pełni utwardzonej żywicy wykonano na podstawie próby jednoosiowego rozciągania dynamicznego DMA (ang. *Dynamical Mechanical Analysis*), korzystając z analizatora firmy Metravib typu Viscoanalyzer VA4000. Celem pomiarów była ocena trzech parametrów opisujących zjawisko relaksacji naprężeń modelu lepkosprężystego w funkcji temperatury i czasu, tj.: modułu zachowawczego  $G'$  i modułu stratności  $G''$  oraz kąta przesunięcia fazowego  $\theta$ . Wyniki wykonanych pomiarów umożliwiły opracowanie krzywej złożonej oraz odpowiadającej jej zależności współczynnika  $a_T$  od temperatury, co przedstawiono na rysunku 4.50 oraz na rysunku 4.51. W następnej kolejności wyznaczono wartości współczynników równania WLF – zależność (4.166) (tab. 4.9).



Rys. 4.49. Zmiana gęstości żywicy w trakcie procesu utwardzania dla próbki I (a) i próbki II (b)

Tabela 4.8. Uzyskane wartości współczynnika objętościowego i liniowego skurczu żywicy dla badanych próbek kleju

Próbka	Skurcz objętościowy [%]	Skurcz liniowy [%]
I	6,44	2,20
II	7,56	2,59



Rys. 4.50. Opracowana na podstawie pomiarów krzywa złożona dla próbki I (a) i próbki II (b)

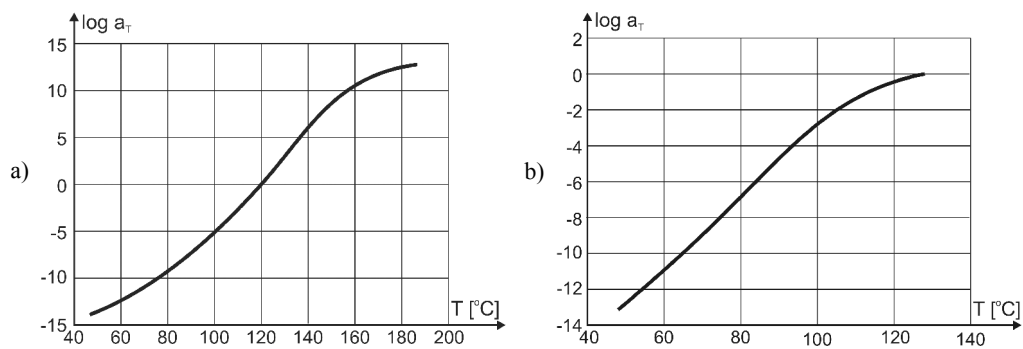
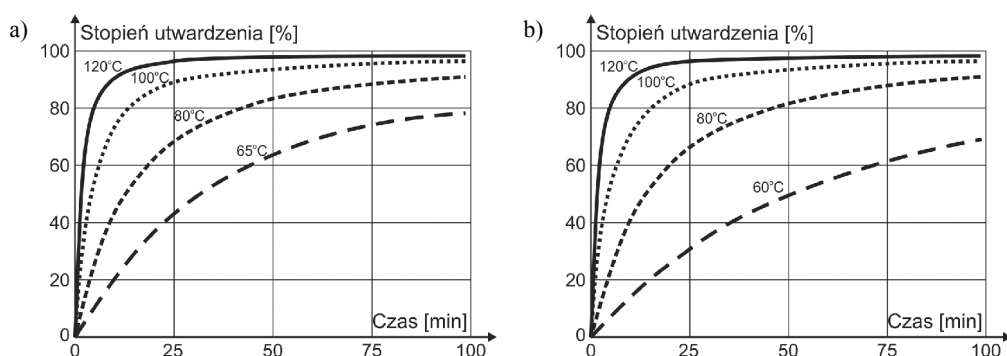
Rys. 4.51. Wyznaczona zależność współczynnika  $a_T$  od temperatury dla próbki I (a) i próbki II (b)

Tabela 4.9. Współczynniki równania WLF dla badanych próbek

Próbka	$T_s$ [C]	$C_1$	$C_2$
I	120	23,5	53,2
II	120	6,28	73,3

Pomiar kinetyki utwardzania wykonano na podstawie różnicowej kalorymetrii skaningowej (ang. *Differential Scanning Calorimetry*), korzystając z urządzenia DSC2920 firmy TA Instruments. Pomiary wykonano dla czterech prędkości nagrzewania próbki, tj. 1, 2, 5 i 10 °C/min. Na rysunku 4.52 przedstawiono wyniki pomiarów szybkości utwardzania w funkcji temperatury, natomiast w tabeli 4.10 przedstawiono uzyskane na ich podstawie współczynniki równania Kamala–Souroura (zależność (4.172)) opisujące szybkość procesu utwardzania.



Rys. 4.52. Zależność stopnia utwardzenia od czasu i temperatury dla próbki I (a) i próbki II (b)

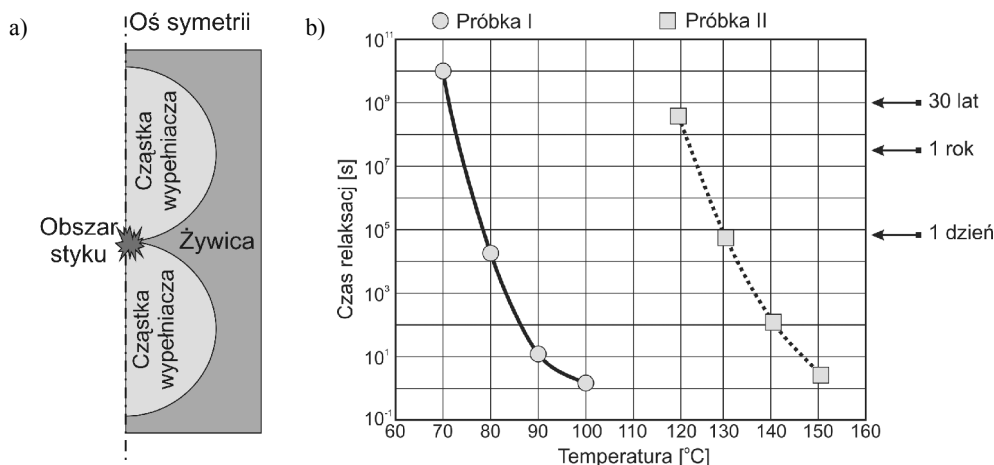
Tabela 4.10. Uzyskane współczynniki równania Kamala–Souroura dla badanych próbek

Próbka	$A$ [1/s]	$Q$ [kJ/mol]	$m$	$n$
I	1,53E6	61,0	0,192	1,762
II	1,91E6	62,0	0,126	1,807

Niestety, jak napisano wcześniej, moduł sprężystości poprzecznej jest funkcją stopnia utwardzenia  $G = f(\alpha)$ . W przypadku gdy stopień utwardzenia  $\alpha < 70\%$ , wówczas można przyjąć, że w żywicy nadal jest dużo swobodnych monomerów, które mogą się swobodnie przemieszczać, a tym samym stan naprężenia relaksuje się bardzo szybko. W przypadku gdy  $\alpha > 70\%$ , w żywicy pozostaje niewiele wolnych monomerów i zauważalna staje się zależność modułu relaksacji od stopnia utwardzenia, jak to pokazano na rysunku 4.43. W przypadku modelowania numerycznego właściwości lepkosprężyste definiuje się m.in. w postaci krzywej złożonej. Niestety programy do modelowania numerycznego metodą FEM nie pozwalają na definicję kilku krzywych złożonych w zależności od stopnia utwardzenia. Ponadto nie mają także możliwości oszacowania stopnia utwardzenia według zależności Kamala–Souroura.

Korzystając z wyników pomiarów doświadczalnych, wykonano uproszczony model numeryczny kleju (rys. 4.53a). Przyjęto założenie, że wystarczający jest model dwuwymiarowy o symetrii obrotowej, składający się z dwóch identycznych cząstek wypełniacza, o kształcie kulistym umieszczonych w żywicy. Przyjęto założenie, że cząstki można opisać modelem sprężystym oraz że stykają się początkowo w jednym punkcie. Analizę podzielono na dwa etapy. W etapie pierwszym uwzględniono skurcz żywicy na skutek procesu utwardzania – suma dwóch czynników, tj. skurczu chemicznego i współczynnika rozszerzalności cieplnej. Natomiast w etapie drugim analizowano zjawisko relaksacji naprężeń w funkcji czasu i temperatury. Celem modelowania była ocena czasu koniecznego do pełnej relaksacji stanu naprężenia badanych próbek kleju. Wyniki modelowania przedstawiono na rysunku 4.53b.

Otrzymane wyniki modelowania pokazują, że stabilność współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$  dla klejów TCA zależy w sposób istotny od relaksacji naprężeń. Stwierdzenie to jest prawdziwe w przypadku odkształcenia sprężystego cząstek wypełniacza. W rzeczywistości cząstki mogą odkształcać się także w sposób trwały w wyniku odkształcenia plastycznego. Poprawne oszacowanie właściwości cieplnych klejów przez modelowanie numeryczne wymaga zatem wielu charakterystyk oraz algorytmów. Niestety wymagane w tym celu modele nie stanowią integralnej części programów do modelowania numerycznego metodą FEM. W związku z czym konieczne są dalsze badania oraz opracowanie własnych algorytmów, używając języków programowania skryptowego<sup>77</sup>.



Rys. 4.53. Wykonany model numeryczny struktury kleju (a) oraz wyznaczony czas konieczny do pełnej relaksacji naprężeń dla badanych próbek kleju (b)

77 W przypadku programu ANSYS jest to język ADPL, natomiast w przypadku programu ABAQUS jest to język Python.

## 4.4. Zmęczenie połączeń lutowanych

Zmęczenie wskutek obciążeń termomechanicznych jest najczęściej spotykanym rodzajem uszkodzenia eksploatacyjnego w montażu elektronicznym. Typowym rodzajem uszkodzenia jest pękanie połączeń lutowanych. Występuje ono w wyniku działania cyklicznie zmiennego obciążenia termomechanicznego i prowadzi do występowania cyklicznie zmiennych lokalnych i globalnych naprężeń i odkształceń oraz rozpraszania energii niesprężystej. W rezultacie dochodzi do uszkodzenia zmęczeniowego materiału wskutek pękania. Wnikliwa analiza zjawiska pękania, a zwłaszcza jego inicjacji i propagacji, pozwala na oszacowanie i prognozowanie uszkodzenia zmęczeniowego [334]. Zmęczenie wskutek cyklicznie zmiennej temperatury określane jest nazwą zmęczenia cieplnego.

Połączenia lutowane wykonuje się za pomocą stopów lutowniczych. Stopy lutownicze nazywane są w skrócie lutowiem, lutem lub spoiwem. Proces lutowania pozwala na łączenie metali przez wypełnienie stopionym lutowiem szczeliny między łączonymi powierzchniami. Stop lutowniczy powinien mieć odpowiednie parametry elektryczne, termiczne i mechaniczne, tzn. powinien zapewniać dobre przewodnictwo elektryczne i ciepłe oraz dużą wytrzymałość mechaniczną. Stopy lutownicze dzieli się ze względu na temperaturę topnienia na luty miękkie o  $T_m < 450$  °C i luty twarde o  $T_m > 450$  °C. W montażu elektronicznym stosuje się najczęściej luty miękkie, które wykonane są na bazie cyny, głównie ze względu na niską temperaturę topnienia ( $T_m < 232$  °C) oraz dobrą zwilżalność innych metali. Najbardziej popularnym stopem lutowniczym jest lut cynowo-ołowiowy SnPb o temperaturze topnienia w przedziale 180–220 °C. Niestety luty cynowo-ołowiowe zawierają groźny dla środowiska ołów. Zagrożenie to nie jest wynikiem ilości zużywanego przez przemysł elektroniczny ołowiu, co powszechnością zastosowania urządzeń elektronicznych oraz ich ciągłego rozwoju. Innym elementem istotnym dla przemysłu jest czynnik marketingowy, urządzenia pozbawione ołowiu sprzedają się w niektórych krajach znacznie lepiej niż urządzenia zawierające ołów. Przykładem takiego działania może być japońska firma Panasonic, która już w roku 1999 wprowadziła do sprzedaży urządzenia elektroniczne z naklejką „Lead-free”.

W Japonii już w roku 2005 zakazano stosowania ołowiu w urządzeniach elektronicznych powszechnego użytku. Podobne restrykcje dotyczą także Unii Europejskiej. Zgodnie z dyrektywą RoHS<sup>78</sup> Unii Europejskiej, ołów oraz inne groźne pierwiastki po-

---

78 Dyrektywa RoHS z dnia 27 stycznia 2003 roku „Directive 2002/95/EC of the European Parliament and of the Council: on the restriction of use of certain hazardous substances in electrical and electronic equipment”. Polskie tłumaczenie to „Dyrektywa 2002/95/WE Parlamentu Europejskiego i Rady: w sprawie ograniczenia stosowania niektórych niebezpiecznych substancji w sprzęcie elektrycznym i elektronicznym”. Zgodnie z Art. 4 ust. 1 Państwa Członkowskie zapewniają, iż od dnia 1 lipca 2006 r. nowy sprzęt elektryczny i elektroniczny wprowadzony do obrotu nie zawiera ołowiu, rtęci, kadmu, sześciowartościowego chromu, polibromowego difenyłu lub polibromowego eteru fenolowego.

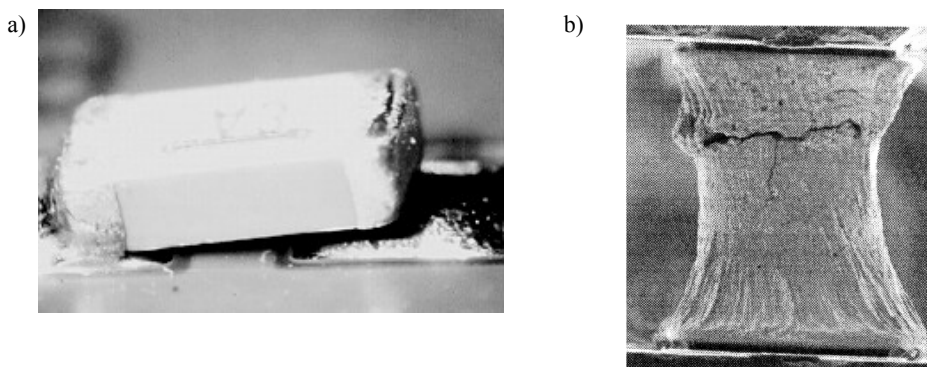
winy być wycofane z użycia w nowych urządzeniach elektronicznych z dniem 1 lipca 2006 r. W Polsce z kolei od 1 lipca 2006 r. obowiązuje równoległe rozporządzenie Ministra Gospodarki i Pracy<sup>79</sup> dotyczące ograniczenia wykorzystywania w urządzeniach elektronicznych, niektórych substancji mogących negatywnie oddziaływać na środowisko. Alternatywą dla połączeń lutowanych zawierających ołów są stopy bezołowiowe oraz kleje przewodzące elektrycznie ECA. Do najczęściej stosowanych i jednocześnie zalecanych stopów bezołowiowych w montażu elektronicznym zalicza się luty na bazie srebra SnAg oraz na bazie srebra z dodatkiem miedzi SnAgCu. Niestety jedną z istotnych wad wymienionych stopów bezołowiowych, w porównaniu ze stopem SnPb<sup>80</sup>, jest wyższa temperatura topnienia nawet o 40°C. W związku z tym proces lutowania rozplwowego (z ang. *reflow temperature*) wymaga podniesienia temperatury o 30–40 °C, co z kolei zwiększa prawdopodobieństwo uszkodzenia płytek PCB i układów w czasie montażu. Z drugiej jednak strony temperatura topnienia nie może być zbyt niska, gdyż urządzenia elektroniczne pracują w zakresie temperatur 50–80 °C, natomiast testy niezawodnościowe wykonuje się w temperaturze 125 °C. Wybór zatem odpowiedniego stopu lutowniczego, który spełniałby określone wymagania dotyczące ochrony środowiska, temperatury topnienia, kosztów, a przy tym miałby odpowiednie parametry elektryczne, mechaniczne i termiczne nie jest zadaniem prostym [335, 322].

Jak napisano wcześniej, celem rozwoju technik montażu elektronicznego jest: obniżenie kosztów, wzrost gęstości upakowania, poprawa właściwości cieplnych, zwiększenie wydajności i częstotliwości granicznych z jednoczesnym wzrostem niezawodności. Układy scalone łączy się z polami końcówek wyprowadzeń obudowy za pomocą połączeń drutowych. Z kolei obudowane układy łączy się na powierzchni płytki drukowanej za pomocą połączeń lutowanych, rzadziej klejonych, w procesie lutowania rozplwowego (ang. *reflow process*). W ostatnich latach w wyniku rozwoju układów scalonych, jak i technik montażu elektronicznego, coraz częściej korzysta się z połączeń lutowanych w postaci kontaktów podwyższonych. Połączenia tego typu są m.in. stosowane w montażu typu flip-chip, co zostało szczegółowo opisane w rozdziale 2.2. Montaż typu flip-chip oferuje dużą gęstość upakowania, małe wymiary, niski koszt, dobre właściwości cieplne oraz wysoką częstotliwość graniczną. Niestety podstawowym problemem montażu typu flip-chip jest duże prawdopodobieństwo uszkodzenia w wyniku zmęczenia kontaktów podwyższonych. Kontakty podwyższone są wykonywane ze stopów lutowniczych zarówno ołowiowych, jak i bezołowiowych. Mają one najczęściej kształt baryłki, klepsydry lub walca i mają niewielką objętość. Z tego też po-

79 W Polsce z dniem 1 lipca 2006 roku obowiązuje: „Rozporządzenie Ministra Gospodarki i Pracy z dnia 6 października 2004 r.: w sprawie szczegółowych wymagań dotyczących ograniczenia wykorzystywania w sprzęcie elektronicznym i elektrycznym niektórych substancji mogących negatywnie oddziaływać na środowisko”. Rozporządzenie to znajduje się w Dzienniku Ustaw nr Dz. U. Nr 229 z 2004 r. Poz. 2310

80 Temperatura topnienia stopu SnPb wynosi 183 °C podczas, gdy stopu SnAg 217 °C, a stopu SnAgCu 221 °C.

wodu, gęstość energii rozproszonej w trakcie obciążeń termicznych jest stosunkowo duża. Wynikiem tego jest uszkodzenie zmęczeniowe na skutek pęknięcia materiału (rys. 4.54).



Rys. 4.54. Przykłady uszkodzenia połączenia lutowanego w wyniku zmęczenia dla układu na powierzchni PCB w montażu powierzchniowym SMT (a) oraz dla kontaktu podwyższonego w montażu typu flip-chip (b)

Zmęczenie jest zjawiskiem uszkodzenia materiału w wyniku zmiennych w czasie obciążeń, które określa się terminem obciążeń zmęczeniowych. Przebieg obciążeń zmiennych w czasie może mieć charakter nieregularny, przypadkowy lub ustalony. W przypadku obciążeń powtarzających się w sposób okresowy mówi się o obciążeniu cyklicznym. Szczególnym przypadkiem obciążeń cyklicznych jest obciążenie zmienne sinusoidalnie. Właśnie ten typ obciążenia jest podstawą badań zmęczeniowych materiałów i konstrukcji. W przypadku montażu elektronicznego zmęczenie materiału w wyniku obciążeń termomechanicznych jest dominującym rodzajem uszkodzenia eksploatacyjnego. Podstawowym mechanizmem zniszczenia zmęczeniowego jest zjawisko pęknięcia i rozwarstwienia [336, 337, 338].

Wytrzymałość zmęczeniowa oznacza natomiast graniczną wartość amplitudy czynnika zmęczeniowego, takiego jak: naprężenie  $\sigma$ , odkształcenie  $\epsilon$ , poniżej których materiał nie ulega zniszczeniu dla danej liczby cykli  $N_f$ <sup>81</sup>. Cykl obciążeń sinusoidalnie zmiennych jest opisany zależnością:

$$\sigma = \sigma_a \sin(\omega t), \quad (4.184)$$

gdzie  $\sigma_a$  – amplituda naprężenia,  $\omega$  – częstość kołowa.

Dodatkowo korzysta się z następujących parametrów: maksymalnej i minimalnej wartości czynnika zmęczeniowego, naprężenia maksymalnego  $\sigma_{\max}$  i minimalnego  $\sigma_{\min}$ ,

81 Cykl jest rozumiany jako pełen pojedynczy okres obciążenia okresowo zmiennego w czasie.

okresu trwania cyklu  $T$  lub jego częstotliwości  $f$ . Ponadto przy opisie definiuje się następujące parametry:

- zakres zmian naprężenia  $\Delta\sigma$ :

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}, \quad (4.185)$$

- naprężenie średnie:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad (4.186)$$

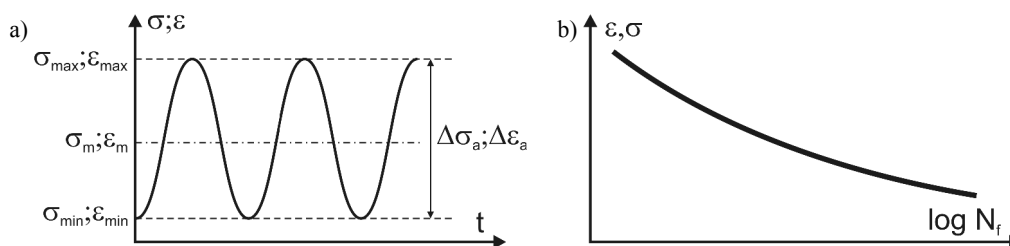
- amplituda zmian naprężenia:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad (4.187)$$

- współczynnik asymetrii cyklu:

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (4.188)$$

Badania zmęczeniowe są prowadzone na podstawie zmiennych w czasie obciążania w postaci rozciągania i/lub ściskania. W przypadku montażu elektronicznego najczęstszym obciążeniem cyklicznym jest zmienna temperatura. Wyniki badań doświadczalnych przedstawia się w postaci krzywej  $S/N$ , gdzie  $S$  oznacza amplitudę czynnika zmęczeniowego, natomiast  $N_f$  oznacza liczbę cykli do wystąpienia uszkodzenia (rys. 4.55).



Rys. 4.55. Analiza uszkodzenia w wyniku zmęczenia

Cechą charakterystyczną zniszczenia zmęczeniowego jest to, że do uszkodzenia może dojść przy naprężeniach znacznie mniejszych niż wynikałoby to z wytrzymałości na rozciąganie  $R_m$ , granicy plastyczności  $R_e$ , czy wytrzymałości na pękanie  $K_c$ . W zależności od rodzaju materiału zmęczenie dzieli się na [339, 340]:

- zmęczenie wysokocykliczne HCF (ang. *High Cycle Fatigue*) – występuje dla liczby cykli  $N_f > 10^4$ ; analiza zmęczeniowa dotyczy zakresu sprężystego, tzn. jeżeli  $\sigma < R_e$ ;



w przypadku zmęczenia wysokocyklicznego wyniki doświadczalne można opisać prawem Basquina:

$$\Delta \sigma = C_1 N_f^a, \quad (4.189)$$

gdzie  $a$  i  $C_1$  – stałe materiałowe, uzyskane w wyniku badań doświadczalnych,  $\Delta \sigma$  – zakres zmian naprężenia w trakcie jednego cyklu obciążeniowego,

- zmęczenie niskocykliczne LCF (ang. *Low Cycle Fatigue*) – występuje dla liczby cykli  $N_f < 10^4$ ; analiza zmęczeniowa dotyczy zakresu plastycznego, tzn. jeżeli  $\sigma > R_e$ ; w przypadku zmęczenia niskocyklicznego wyniki doświadczalne można opisać prawem Coffina–Mansona :

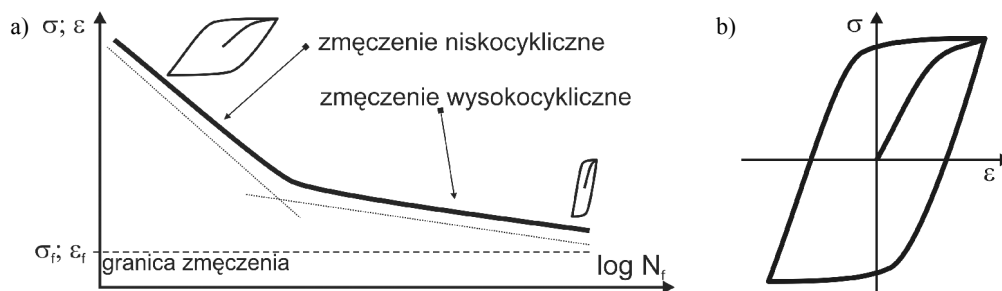
$$\Delta \varepsilon_p = C_2 N_f^b, \quad (4.190)$$

gdzie  $b$  i  $C_2$  – stałe materiałowe uzyskane w wyniku badań doświadczalnych,  $\Delta \varepsilon_p$  – zakres odkształceń plastycznych w trakcie jednego cyklu obciążeniowego.

W przypadku montażu elektronicznego korzysta się także z pomiaru ilości energii niesprężystej  $\Delta W$  rozpraszanej w trakcie jednego cyklu obciążeniowego. Wartość tej energii można oszacować na podstawie krzywej histerezy odkształcenie–naprężenie (rys. 4.56). W takim przypadku zależność Coffina–Mansona można przepisać w postaci:

$$\Delta W = C_3 N_f^c, \quad (4.191)$$

gdzie  $c$  i  $C_3$  – stałe materiałowe uzyskane w wyniku badań doświadczalnych.



Rys. 4.56. Charakterystyka zmęczeniowa dla materiałów (a) oraz pętla histerezy (b)

Według A. Dasgupty [323, 341] problem zniszczenia zmęczeniowego w wyniku obciążeń termicznych można rozważać według zasady rozdziału energii EP (ang. *Energy Partitioning*). Zasada ta przewiduje, że zniszczenie zmęczeniowe jest wynikiem trzech mechanizmów odkształcenia: lepkiego, plastycznego i sprężystego.

Całkowitą wartość energii zgromadzona w materiale  $W_f$ , która prowadzi do zniszczenia zmęczeniowego, można zapisać w postaci zależności:

$$W_f = W_s + W_p + W_l, \quad (4.192)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} W_s &= C_1' N_{fs}^{a'} \\ W_p &= C_2' N_{fp}^{b'}, \\ W_l &= C_3' N_{fl}^{c'} \end{aligned} \quad (4.193)$$

gdzie  $C_1'$ ,  $C_2'$ ,  $C_3'$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  – stałe materiałowe.

Całkowitą liczbę cykli do zniszczenia  $N_f$  można oszacować, korzystając z zasady superpozycji poszczególnych mechanizmów zniszczenia, tzn.:

$$\frac{1}{N_f} = \frac{1}{N_{fs}} + \frac{1}{N_{fp}} + \frac{1}{N_{fl}}. \quad (4.194)$$

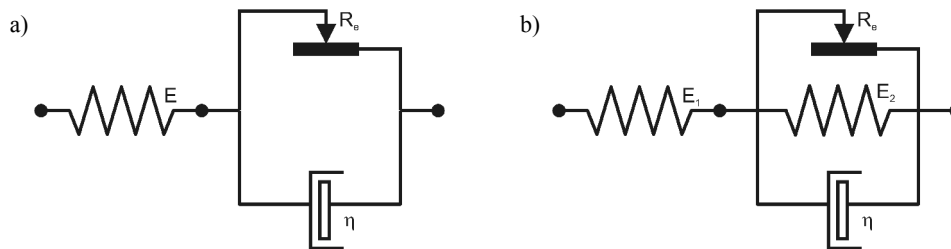
Zasada rozdziału energii EP jest stosowana do prognozowania uszkodzeń metodą modelowania numerycznego typu FEM [342]. Zasada ta w tym przypadku jest przedstawiana w postaci addytywności odkształceń wyrażonej wzorem (4.4). Jak wcześniej jednak podano, zasada ta nie obowiązuje w przypadku szokowych prób zniszczeniowych, np. próby zrzutowej.

Należy zauważyć, że zarówno modele, jak i kryteria zniszczenia zmęczeniowego dla połączeń lutowanych mają jedynie charakter empiryczny. Zależą one m.in. od rodzaju połączenia, jak również od wielu dodatkowych parametrów, takich jak rodzaj powłoki pól kontaktowych. Z tego też powodu w literaturze najczęściej modele i kryteria zniszczenia zmęczeniowego są odniesione do danego typu połączenia, a wyniki modelowania numerycznego mają charakter szacunkowy i wymagają weryfikacji doświadczalnej [343, 66].

#### 4.4.1. Modele materiałowe połączeń lutowanych

Najczęściej stosowane modele materiałowe stopów lutowniczych w montażu elektronicznym to: model sprężysto-plastyczny, lepkosprężysty oraz lepkosprężysto-plastyczny [344, 345, 53, 65]. Modele materiałowe wykorzystuje się do przewidywania rzeczywistego zachowania materiału i analizy zależności odkształcenie–naprężenia w obecności obciążeń zarówno monotonicznych, jak i cyklicznych. Model sprężysto-plastyczny oraz lepkosprężysty omówiono kolejno w rozdziałach 4.1 i 4.2. Jednym z najbardziej ogólnych modeli materiałowych jest model lepkosprężysto-plastyczny. Opis zachowania modelu lepkosprężysto-plastycznego można analizować na podstawie modelu materiałowego Perzyny lub Pragera. Model Perzyny i model Pragera,

w postaci symbolicznej, składają się z połączonych równoległe i szeregowo modeli prostych (rys. 4.57) [346, 347].



Rys. 4.57. Model materiałowe lepkosprężysto-plastyczne według Perzyny (a) i Pragera (b)

Zaletą modelu Perzyny i Pragera jest możliwość analizy takich zachowań materiałów jak: sprężystość, plastyczność, pełzanie, relaksacja naprężeń. Stan naprężenie–odkształcenie dla modelu Pragera można opisać w postaci następujących równań:

- w zakresie sprężystym, tzn. gdy spełniony jest warunku  $\sigma < R_e$ :

$$\sigma = E_1 \varepsilon, \quad (4.195)$$

- w zakresie niesprężystym, tzn. gdy spełniony jest warunek  $\sigma \geq R_e$ :

$$\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \sigma + \frac{\lambda}{E_1} \dot{\sigma} = E_2 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} + R_e. \quad (4.196)$$

Korzystając z modelu Pragera, możliwa jest analiza zachowania materiału dla szerokiego spektrum obciążeń termomechanicznych. W zależności od wartości obciążenia i jego rodzaju materiał może wykazywać inny rodzaj odkształceń. Charakter tych odkształceń może być sprężysty lub niesprężysty, może opisywać zjawisko pełzania lub relaksacji naprężeń. Prognozowanie uszkodzenia i ocena wytrzymałości będzie zależała od stanu naprężenia i rodzaju odkształcenia oraz odpowiedniego kryterium uszkodzenia. W przypadku odkształceń sprężystych energia zgromadzona w materiale może być całkowicie odzyskana, podczas gdy w przypadku odkształceń niesprężystych występuje rozpraszanie energii. Ilość rozproszonej energii może być z kolei traktowana jako kryterium oceny wytrzymałości zmęczeniowej.

Istnieje kilka metod analizy numerycznej zniszczenia zmęczeniowego. W przypadku montażu elektronicznego problem ten dotyczy głównie stopów lutowniczych zarówno ołowiovych, jak i bezołowiovych. Stopy te zazwyczaj opisuje się nieliniowym modelem materiałowym, który uwzględnia zarówno odkształcenia plastyczne, jak i lepkie.

Jednym z głównych celów badań doświadczalnych jest wyznaczenie parametrów modeli materiałowych, które następnie stosuje się w modelowaniu numerycznym.

W zależności od rodzaju stopu lutowniczego i typu obciążenia termomechanicznego do oceny trwałości zmęczeniowej w praktyce inżynierskiej stosuje się następujące kryteria uszkodzenia (tab. 4.11): ustalona propagacja pęknięcia  $da/dN$ , naprężenie  $\sigma$ , odkształcenie plastyczne  $\Delta\varepsilon_p$ , energia niesprężysta  $\Delta W$ . Każde z wymienionych kryteriów można stosować do analizy zniszczenia zmęczeniowego pod warunkiem, że zostaną spełnione określone warunki i kryteria [348].

Tabela 4.11. Typowe kryteria uszkodzeń w wyniku zniszczenia zmęczeniowego stosowanych dla połączeń lutowanych w montażu elektronicznym

Rodzaj kryterium	Naprężenie	Odkształcenie	Energia	Propagacja pęknięcia
Dominujący rodzaj odkształceń	sprężyste	sprężysto-plastyczne	lepkosprężysto-plastyczne	sprężyste
Kryterium uszkodzenia	naprężenie $\sigma$	odkształcenie plastyczne $\Delta\varepsilon_p$	energia niesprężysta $\Delta W$	propagacja pęknięcia $da/dN$

Jak wynika z tabeli 4.11, wybrane kryterium uszkodzenia zależy od kilku czynników:

- typu stopu lutowniczego, jego właściwości termomechanicznych oraz rodzaju modelu materiałowego,
- rodzaju obciążenia i odpowiadającego mu stanu naprężenie–odkształcenie,
- analizowanego obiektu, jego geometrii, techniki montażu elektronicznego oraz zastosowanych materiałów.

Wybór odpowiedniego kryterium powinien być dokonany przez eksperta oraz na podstawie odpowiednich badań doświadczalnych. W zależności od techniki montażu elektronicznego i rodzaju połączeń lutowanych, ten sam stop lutowniczy może wymagać innego kryterium do prognozowania zniszczenia zmęczeniowego. Najbardziej ogólne kryterium uszkodzenia dotyczy akumulacji energii niesprężystej  $\Delta W$  oszacowanej na podstawie wartości średniej przypadającej na pojedynczy cykl obciążenia lub uśrednioną na podstawie kilku cykli obciążenia. Istotnym problemem jest jednak identyfikacja doświadczalna współczynników i stałych materiałowych, rozpoznania właściwych modeli oraz zastosowania odpowiednich metod analizy w przypadku, np. prób zrzutowych [349, 350].

#### 4.4.2. Wytrzymałość i trwałość zmęczeniowa

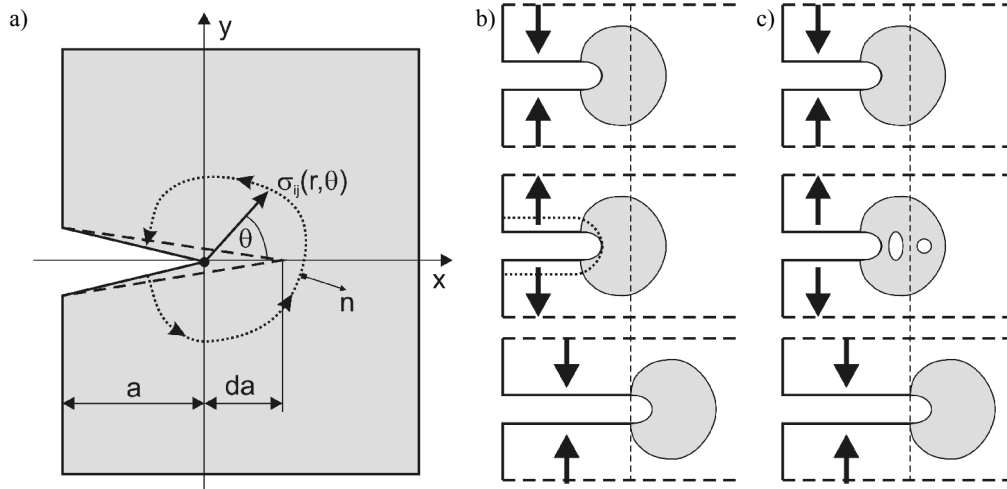
Wytrzymałość zmęczeniowa oznacza graniczną wartość amplitudy czynnika zmęczeniowego, poniżej której materiał nie ulega zniszczeniu dla danej liczby cykli  $N_f$ . Trwałość zmęczeniowa oznacza czas graniczny  $t_f$  albo liczbę cykli  $N_f$  obciążenia przy

danej wartości amplitudy czynnika zmęczeniowego, po których nastąpi uszkodzenie obiektu. Badania zniszczenia zmęczeniowego przeprowadza się w urządzeniach pozwalających na cykliczną zmianę warunków pracy, np.: temperatury, rodzaju, formy i częstości obciążeń cyklicznych, wilgoci itp. Podobnie jak dla obciążeń statycznych zniszczenie zmęczeniowe następuje w wyniku pęknięcia lub rozwarstwienie. Jednak w przeciwieństwie do kryterium statycznego, kryterium dynamiczne zależy od ilości energii rozpraszanej w pojedynczym cyklu obciążeniowym. Propagacja pęknięcia wystąpi wówczas, gdy ilość energii dostarczona do czoła szczeliny pęknięcia będzie wystarczająco duża, aby utworzyć nową powierzchnię pęknięcia. W wyniku tego długość szczeliny pęknięcia  $a$  będzie wzrastać po każdym cyklu obciążeniowym o wartość  $da$  (rys. 4.58) [267, 270].

Aby ocenić, czy ilość dostarczonej do czoła szczeliny energii jest wystarczająca do wywołania propagacji pęknięcia, korzysta się ze współczynnika rozpraszania energii  $W$ . Jeżeli jest spełniony warunek:

$$W > W_c, \quad (4.197)$$

gdzie  $W_c$  – ilość energii konieczna do utworzenia nowej płaszczyzny pęknięcia.



Rys. 4.58. Tworzenia nowej powierzchni pęknięcia na skutek działania obciążenia cyklicznego oraz mechanizm wzrostu pęknięcia zmęczeniowego w wyniku: uplastycznienia czoła szczeliny (b), tworzenia pustek w obszarze czoła szczeliny (c)

Jeżeli spełniony jest ten warunek, to istnieje duże prawdopodobieństwo propagacji pęknięcia. Wartość współczynnika rozpraszania energii  $W$  można oszacować z zależności:

$$W = \frac{1-\nu^2}{E} \left( K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1-\nu} \right), \quad (4.198)$$

gdzie  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  – współczynniki intensywności naprężeń dla poszczególnych modeli pęknięcia.

Podobny rodzaj analizy można przeprowadzić w razie uszkodzenia na skutek rozwarstwienia. W tym przypadku współczynnik rozpraszania energii jest funkcją zarówno geometrii, obciążenia, jak i właściwości obu materiałów:

$$W = \frac{|K^2|}{E' \cosh^2(\pi \epsilon)}, \quad (4.199)$$

gdzie  $E'$  – funkcja modułów Younga obu materiałów:

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}. \quad (4.200)$$

Propagacja rozwarstwienia wystąpi wówczas, gdy wyznaczony współczynnik rozpraszania energii  $W$  jest większy niż wartość krytyczna  $W_c$  wyznaczona eksperymentalnie:

$$W > W_c. \quad (4.201)$$

W przeciwieństwie do zjawiska pęknięcia, w przypadku rozwarstwienia pierwszoplanową rolę odgrywa dodatkowo sposób obciążenia połączonych materiałów, który jest opisany kątem fazowym  $\Psi$ , jak to omówiono szczegółowo w rozdziale 4.2.3.2. Kąt fazowy pozwala ocenić udział składowej ścinającej względem składowej rozrywającej.

Analiza teoretyczna rozpraszania energii i propagacji pęknięcia może być zrealizowana na podstawie nieliniowej mechaniki pęknięcia EPFM (ang. *Elasto-Plastic Fracture Mechanics*). W tym przypadku znaczenie praktyczne mają dwie metody: przemieszczenia wierzchołka pęknięcia CTOD (ang. *Crack Tip Opening Displacement*) oraz całka energii  $J$ .

W przypadku metody CTOD propagacja pęknięcia jest wynikiem odkształcenia plastycznego w czole szczeliny i powstania nowej powierzchni pęknięcia w strefie czoła (rys. 4.58b). Innym wyjaśnieniem jest tworzenie pustek w obszarze czoła i strefy uplastycznienia, które w kolejnych cyklach łączą się ze sobą, prowadząc do wzrostu długości pęknięcia (rys. 4.58c). Po raz pierwszy zostało to stwierdzone przez Wellsa [351]. Opis analityczny metody CTOD jest bardzo trudny. Początkowo korzystano ze zmodyfikowanego opisu modelu Irwina – omówionego w rozdziale 4.2.3.1, wprowadzając poprawkę dotyczącą rozmiaru obszaru plastycznego w czole szczeliny pęknięcia. Metoda dokładniejsza oparta jest na założeniu, że nowa płaszczyzna pęknięcia powstaje na granicy obszaru odkształcenia plastycznego. Po przyjęciu założenia można wyznaczyć zależność między przemieszczeniem wierzchołka pęknięcia  $u_a$ , szybkością

uwalniania energii odkształceń  $G$  oraz współczynnikiem intensywności naprężeń  $K$  w postaci:

$$u_a = \frac{K_I^2}{m \sigma_y E} = \frac{G}{m \sigma_y}, \quad (4.202)$$

gdzie  $m$  – stała, która dla płaskiego stanu naprężenia równa jest 1, natomiast dla płaskiego stanu odkształcenia równa jest 2.

Metodą alternatywną do metody CTOD jest metoda oparta na oszacowaniu wartości rozpraszanej energii niesprężystej za pomocą całki energii  $J$ . Całka energii  $J$  jest definiowana zarówno dla odkształceń sprężystych, jak i niesprężystych. Opisuje ona stan energetyczny w strefie wierzchołka pęknięcia. Zaproponował ją Rice [352, 353], w postaci zależności:

$$J = \int_C W dy - T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) ds, \quad (4.203)$$

gdzie  $C$  – krzywa zamknięta otaczająca wierzchołek pęknięcia (rys. 4.58),  $T$  – wektor naprężenia działający wzdłuż krzywej  $C$ ,  $u$  – wektor przemieszczenia,  $ds$  – wycinek krzywej  $C$ ,  $W$  – gęstość energii odkształcenia, definiowana jako:

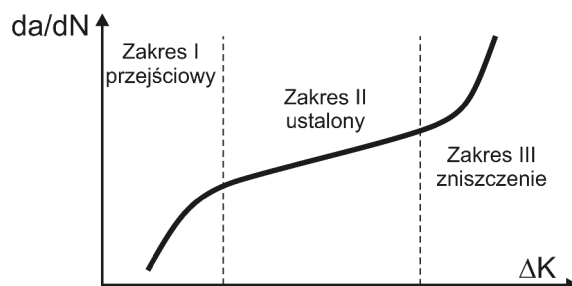
$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (4.204)$$

Stosowanie całki energii  $J$  do wyznaczania wzrostu szczeliny zmęczeniowej w warunkach odkształcenia niesprężystego nie jest łatwe. Wynika to z tego, iż całka ta jest określona dla materiałów sprężysto-plastycznych w warunkach stosowalności deformacji teorii plastyczności (występowania małych odkształceń). Na ogół plastyczność może być opisywana w sposób adekwatny jedynie za pomocą przyrostowej teorii plastyczności, ale chwilowe naprężenia i odkształcenia nie są na jej gruncie określone jednoznacznie.

W przypadku obciążeń cyklicznych występuje zjawisko propagacji pęknięcia, gdy wartość naprężenia nie przekracza wartości krytycznej. Problem ten koncentrował uwagę badaczy od bardzo dawna. Już wczesne badania doświadczalne wykazały, że szybkość propagacji pęknięcia  $da/dN$ , w określonych warunkach, ma charakter ustalony. Zależność szybkości od współczynnika intensywności naprężeń  $\Delta K$  (rys. 4.59).

W zakresie ustalonym zależność między szybkością propagacji pęknięcia a współczynnikiem intensywności naprężeń  $\Delta K$  można zapisać w postaci zależności:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m, \quad (4.205)$$



Rys. 4.59. Zależność szybkości propagacji pęknięcia od współczynnika intensywności naprężeń

gdzie  $C$  i  $m$  – stałe materiałowe wyznaczone doświadczalnie, wykładnik  $m$  zmienia się zwykle od 2 do 7.

Zależność (4.205) jest słuszna jedynie w zakresie prędkości propagacji  $10^{-9}$ – $10^{-6}$  m/cykl i nazywa się prawem Parisa [55]. W literaturze można znaleźć wiele innych związków opisujących zależność prędkości propagacji pęknięcia, także w w zakresie przejściowym. Do bardziej znanych należy zależność Formana [354]:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \Delta K^m}{(1-R) K_c - \Delta K} \quad (4.206)$$

W rzeczywistości zależność opisująca szybkość propagacji pęknięcia  $da/dN$  jest bardziej złożona i należy także uwzględnić historię obciążenia, co można przedstawić w postaci zależności:

$$\frac{da}{dN} = f(\sigma, a, C, Y, R, \chi), \quad (4.207)$$

gdzie  $\sigma$  – naprężenie wyrażone przez amplitudę naprężenia cyklicznego,  $a$  – długość pęknięcia,  $C$  – stałe materiałowe,  $Y$  – parametr związany z kształtem,  $\chi$  – funkcja lub funkcjonal reprezentujący historię obciążenia.

Inną modyfikacją zależności Parisa jest formuła, gdzie współczynnik intensywności naprężeń  $\Delta K$  jest zastąpiony wartością rozproszonej energii niesprężystej  $\Delta W$  w trakcie jednego cyklu obciążeniowego, co można zapisać w postaci [355]:

$$\frac{da}{dN} = C' \Delta W^{m'} \quad (4.208)$$

Zależność (4.208) jest często wykorzystywana w dziedzinie projektowania numerycznego, a szczególnie w celu prognozowania zniszczenia zmęczeniowego w montażu elektronicznym [356].



#### 4.4.2.1. Kryterium naprężenia

Ocenę trwałości zmęczeniowej według kryterium naprężenia zaproponował Basquin. Kryterium to dotyczy zakresu sprężystego i jest stosowane dla zmęczenia wysokocyklicznego. Według tego kryterium zależność między naprężeniem a liczbą cykli do uszkodzenia, w przypadku gdy średnia wartość naprężeń  $\sigma_m = 0$ , można zapisać w postaci:

$$\sigma = B N_f^{-a}, \quad (4.209)$$

gdzie  $a$  i  $B$  – stałe materiałowe.

Ostatnią zależność można zapisać także w postaci zależności amplitudy zmian naprężenia  $\Delta\sigma$  w postaci:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma_f (2 N_f)^{-n'}, \quad (4.210)$$

gdzie  $\sigma_f$  – granica zmęczenia,  $n'$  – współczynnik umocnienia cyklicznego.

Równanie to zostało potwierdzone doświadczalnie dla liczby cykli zmęczeniowych  $N_f$  do  $10^6$ .

W przypadku gdy wartość średnia naprężenia  $\sigma_m \neq 0$ , wówczas należy zastosować regułę Goodmana, która mówi o konieczności zmniejszenia zakresu zmienności naprężeń, według zależności:

$$\Delta\sigma_{am} = \Delta\sigma_0 \left( 1 - \left| \frac{\sigma_m}{R_m} \right| \right), \quad (4.211)$$

gdzie  $\Delta\sigma_0$  – zakres zmienności dla liczby cykli  $N_f$  gdy  $\sigma_m = 0$ ,  $\Delta\sigma_{am}$  – zakres zmienności dla liczby cykli  $N_f$  przy  $\sigma_m \neq 0$ .

Jeżeli zmienności podlega także zakres zmian naprężenia  $\Delta\sigma \neq \text{const}$ , to należy zastosować zasadę sumowania zniszczeń podaną przez Minerą:

$$\sum_i \frac{N_i}{N_{fi}} = 1, \quad (4.212)$$

przy czym  $N_i$  – liczba cykli,  $N_{fi}$  – liczba cykli do zniszczenia dla zakresu obciążeń  $\Delta\sigma_i$ .

#### 4.4.2.2. Kryterium odkształcenia

Pierwotna zależność Basquina odnosi się jedynie dla odkształceń sprężystych. Zależność Basquina można jednak rozszerzyć także na zakres odkształceń plastycznych oraz lepkich, a tym samym na zmęczenia niskocykliczne. Po zapisaniu wartości składowych odkształcenia elastycznego  $\Delta\varepsilon_e$  i plastycznego  $\Delta\varepsilon_p$  jako :

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = \frac{\Delta \sigma}{2E}, \quad (4.213)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon_f' \left( \frac{\Delta \sigma}{2\sigma_f'} \right)^{\frac{1}{n'}}, \quad (4.214)$$

zależność (4.210) można przedstawić w postaci:

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b, \quad (4.215)$$

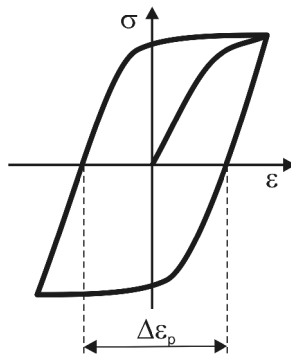
$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon_f' (2N_f)^c, \quad (4.216)$$

gdzie  $c$  – wykładnik zmęczenia plastycznego, definiowany jako stosunek wytrzymałości zmęczeniowej  $b$  i współczynnika umocnienia cyklicznego  $n'$  ( $c = b/n'$ ).

Po zsumowaniu składowych odkształcenia sprężystego i plastycznego, otrzymuje się równanie określane jak prawo Coffina–Mansonna, w postaci [357]:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c. \quad (4.217)$$

W montażu elektronicznym, dla obciążeń termomechanicznych, stosuje się kryterium oparte na zredukowanym odkształceniu plastycznym  $\Delta \varepsilon_p$  (rys. 4.60) Aby wyznaczyć liczbę cykli do zniszczenia zmęczeniowego, stosuje się w tym przypadku zależność Coffina–Mansona w postaci:



Rys. 4.60. Metoda wyznaczania zredukowanego odkształcenia plastycznego po jednym cyklu obciążeniowym

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_s + \Delta \varepsilon_p = \frac{\sigma_f}{E} (2 N_f)^b + \varepsilon_f (2 N_f)^c, \quad (4.218)$$

gdzie  $\sigma_f$  – granica zmęczenia,  $b$  – stała materiałowa,  $c$  i  $\varepsilon_f$  – współczynnik oraz wykładnik uplastycznienia.

W praktyce stosuje się najczęściej uproszczoną formę zależności Coffina–Mansona, która nie uwzględnia składowej odpowiedzialnej za odkształcenie sprężyste, tzn.:

$$N_f = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta \varepsilon_p}{2 \varepsilon_f} \right)^{\frac{1}{c}}. \quad (4.219)$$

W dziedzinie projektowania numerycznego montażu elektronicznego zależność Coffina–Mansona zapisuje się w postaci ogólnej, jako [358, 359]:

$$N_f = C \Delta \varepsilon_p^{-n}, \quad (4.220)$$

gdzie  $\Delta \varepsilon_p$  – zredukowane odkształcenie plastyczne po jednym cyklu obciążeniowym,  $N_f$  – liczba cykli do uszkodzenia,  $C$  i  $n$  – stałe materiałowe.

Stale materiałowe wyznacza się na podstawie badań doświadczalnych i analizy Weibulla [360, 359] – co opisano szczegółowo w rozdziale 2.3. W tabeli 4.12 przedstawiono przykładowe wartości stałych materiałowych dla wybranych stopów lutowniczych.

W przypadku gdy dominujący udział ma także zjawisko pełzania, wówczas zależność Coffina–Mansona można zapisać w postaci:

$$N_f = B \Delta \varepsilon_l^{-m}, \quad (4.221)$$

gdzie  $\Delta \varepsilon_l$  – zakumulowane odkształcenie lepkie po jednym cyklu obciążeniowym,  $N_f$  – liczba cykli do uszkodzenia,  $B$  i  $m$  – stałe materiałowe.

Tabela 4.12. Przykładowe wartości stałych materiałowych formuły Coffina–Mansona dla wybranych stopów lutowniczych [340, 324, 361, 362, 359, 363]

Stop lutowniczy	$C$	$n$	$B$	$m$
SnPb	0,38–1,29	1,96	12,21–20,5	1,04–1,14
SnAgCu	4,5–12	1,0–1,3	5,08–26,4	1,0–1,07

W rzeczywistości w tym przypadku proces pęknięcia należałoby podzielić na dwa etapy: inicjacji oraz propagacji. Pęknięcie zostaje zainicjowane na powierzchni materiału w miejscu, gdzie występuje duże naprężenie. Następnie zainicjowane pęknięcie może stopniowo propagować w wyniku pełzania. Całkowita liczba cykli do wystą-

pienia uszkodzenia jest sumą liczby cykli koniecznych do inicjacji pęknięcia  $N_{fi}$  oraz liczby cykli do pojawienia się przełomu  $N_{fp}$ :

$$N_f = N_{fi} + N_{fp} . \quad (4.222)$$

Liczbę cykli koniecznych do inicjacji pęknięcia  $N_{fi}$  można wyznaczyć z zależności:

$$N_{fi} = C_1 \Delta \varepsilon_l^{C_2} , \quad (4.223)$$

podczas gdy liczbę cykli koniecznych do pojawienia się przełomu  $N_{fp}$  można wyznaczyć modyfikując zależność (4.205) dotyczącą prędkości propagacji pęknięcia w postaci:

$$\frac{da}{dN} = C_3 \Delta \varepsilon_l^{C_4} , \quad (4.224)$$

czyli:

$$N_{fp} = \frac{A}{C_3 \Delta \varepsilon_l^{C_4}} , \quad (4.225)$$

gdzie  $A$  – długość analizowanego połączenia,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$  – stałe materiałowe wyznaczane doświadczalnie.

Całkowitą liczbę cykli do zniszczenia zmęczeniowego można oszacować w postaci [321]:

$$N_f = N_{fi} + A \frac{dN}{da} . \quad (4.226)$$

W tabeli 4.13 zebrano przykładowe wartości stałych materiałowych dla wybranych stopów lutowniczych [364, 53].

Tabela 4.13. Przykładowe wartości stałych materiałowych w przypadku zmodyfikowanej formuły Coffina–Mansonna wybranych stopów lutowniczych [364]

Stop lutowniczy	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
SnPb	60,947	-0,5391	0,0057	0,7376
SnAgCu	4,48	-1,2965	0,021	0,681

#### 4.4.2.3. Kryterium energii niesprężystej

Analogicznie do kryterium w postaci odkształcenia, w przypadku analizy opartej na rozproszonej energii niesprężystej  $\Delta W$ , formułę Coffina–Mansonna (równanie (4.220)) można zapisać w postaci zmodyfikowanej, jako:

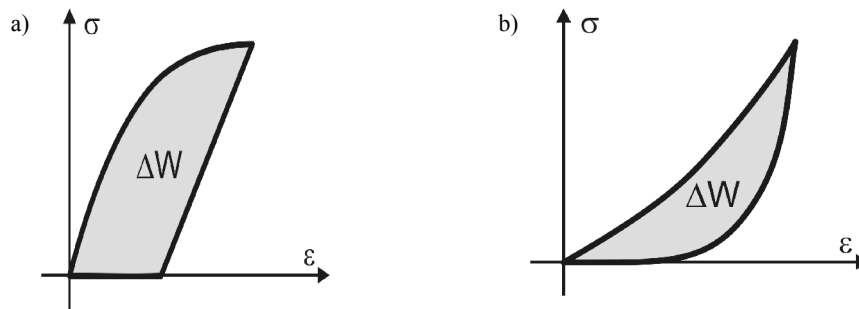
$$N_f = C \Delta W^{-n}, \quad (4.227)$$

gdzie  $n$  i  $C$  – stałe materiałowe wyznaczone doświadczalnie.

Zależność (4.227) można stosować w przypadku odkształceń niesprężystych, czyli także plastycznych. Jednak, jako kryterium uszkodzenia stosuje się wówczas wartość pola powierzchni histerezy, a nie jedynie wartość zredukowanego odkształcenia plastycznego czy lepkiego (rys. 4.61). Wynika to z tego, że oprócz odkształcenia plastycznego dodatkowo może wystąpić zjawisko pełzania czy relaksacji naprężeń. Zjawisko pełzania jest jedną z głównych przyczyn rozpraszania energii niesprężystej. Wartość pola histerezy można wyznaczyć przez modelowanie numeryczne. W montażu elektronicznym stosuje się czasami uśrednioną wartość pola histerezy, wyznaczoną na podstawie kilku elementów skończonych, znajdujących się w obszarze krytycznym, według zależności [321]:

$$\Delta \bar{W} = \frac{\sum_{i=1}^N V_i \Delta W_i}{\sum_{i=1}^N V_i}, \quad (4.228)$$

gdzie  $\Delta W_i$  – wartość pola histerezy dla elementu  $i$ ,  $V_i$  – objętość elementu  $i$ ,  $N$  – liczba rozpatrywanych elementów.



Rys. 4.61. Rozproszona energia niesprężysta dla odkształceń plastycznych (a) i lepkich (b)

Proces pęknięcia można podzielić na dwa etapy: inicjacji oraz propagacji, a całkowita liczba cykli do wystąpienia uszkodzenia, według zależności (4.222) jest sumą liczby cykli koniecznych do inicjacji pęknięcia  $N_{fi}$  oraz liczby cykli do pojawienia się przełomu  $N_{fp}$ . Liczbę cykli koniecznych do inicjacji pęknięcia  $N_{fi}$  można wyznaczyć z zależności:

$$N_{fi} = C_1 \Delta W^{C_2}, \quad (4.229)$$

podczas gdy liczbę cykli koniecznych do pojawienia się przełomu  $N_{fp}$  można wyznaczyć, modyfikując zależność (4.205) dotyczącą prędkości propagacji pęknięcia w postaci:

$$\frac{da}{dN} = C_3 \Delta W^{C_4}, \quad (4.230)$$

gdzie  $\Delta W$  – energia odkształcenia niesprężystego po jednym cyklu obciążeniowym,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  – stałe materiałowe wyznaczone doświadczalnie.

Całkowitą liczbę cykli do zniszczenia zmęczeniowego można oszacować z zależności (4.226) [358, 49]:

$$N = N_{fi} + \frac{A}{\frac{da}{dN}} = C_1 \Delta W^{C_2} + A C_3^{-1} \Delta W^{-C_4}. \quad (4.231)$$

W tabeli 4.14 zebrano przykładowe wartości stałych materiałowych dla wybranych stopów lutowniczych.

Tabela 4.14. Przykładowe wartości stałych materiałowych w przypadku zmodyfikowanej formuły Coffina–Mansonna wybranych stopów lutowniczych [324, 321, 362, 359, 365]

Stop lutowniczy	$C$	$n$	$C_1$ [1/sPa]	$C_2$ [1]	$C_3$ [m/sPa]	$C_4$ [1]
SnPb	205–960	0,95–1,2	15,4E9	–1,52	2,57E–9	0,98
SnAgCu	145–1165	1,0–1,03	–	–	–	–

Należy podkreślić, że kryterium oparte na rozproszonej energii niesprężystej  $\Delta W$  jest jednym z najczęściej stosowanych w montażu elektronicznym. Jest to wynik dużej zgodności wyników modelowania numerycznego z wynikami doświadczalnymi [321, 362].

#### 4.4.2.4. Kryterium ustalonej propagacji pęknięcia

Według mechaniki pęknięcia, prędkość propagacji pęknięcia można wyrazić w postaci funkcji uproszczonej. Wykorzystuje się tu fakt, że w obszarze czoła pęknięcia uaktywnia się większość mechanizmów pęknięcia. Ich intensyfikacja następuje wewnątrz strefy zniszczenia, która dla materiałów kruchych bądź prawie kruchych jest „kontrolowana” jedynie przez człon rozwinięcia asymptotycznego. Amplitudę tego członu stanowi współczynnik intensywności naprężeń  $\Delta K$ , który jest m.in. funkcją naprężeń, długości pęknięcia oraz wymiarów geometrycznych. Prędkość propagacji pęknięcia w formie uproszczonej można zapisać jako:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, C), \quad (4.232)$$

gdzie  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ ,  $C$  – stała materiałowa.

Funkcję  $f(\Delta K, C)$  można wyrazić w postaci równania (4.205). Po scałkowaniu zależności (4.232) otrzymujemy wyrażenie określające liczbę cykli  $N_f$ , która prowadzi do powstania przelomu:

$$N_f = \int_0^{N_f} dN = \frac{1}{C} \int_{a_i}^{a_f} \Delta K^{-m} da, \quad (4.233)$$

przy czym  $a_i$  – długość początkowa pęknięcia,  $a_f$  – długość, przy której powstaje uszkodzenie, np. długość połączenia.

W mechanice przyjmuje się czasami założenie, że  $a_f$  można traktować jako wartość krytyczną, która jest charakterystyczna dla danego materiału i/lub konstrukcji.

Jak napisano wcześniej, proces pęknięcia należy podzielić na dwa etapy: inicjacji oraz propagacji, a całkowita liczba cykli do wystąpienia uszkodzenia, według zależności (4.222) jest sumą liczby cykli koniecznych do inicjacji pęknięcia  $N_{fi}$  oraz liczby cykli do pojawienia się przelomu  $N_{fp}$ , co można wyznaczyć z zależności:

$$N_f = N_{fi} + \frac{1}{C} \int_{a_i}^A \Delta K(a)^{-m} da, \quad (4.234)$$

gdzie  $A$  jest długością połączenia, natomiast  $a$  jest długością pęknięcia.

Wartość współczynnika intensywności naprężeń  $K$  można oszacować metodą modelowania numerycznego, korzystając z następującej zależności:

$$\Delta K(a) = \alpha \Delta \sigma \sqrt{\pi a}, \quad (4.235)$$

gdzie  $\alpha$  – współczynnik proporcjonalności (np.  $\alpha = 2/\pi$ ),  $\Delta \sigma$  – zmienność naprężeń.

Jeżeli przyjmiemy założenie, że wartość  $\Delta \sigma = \text{const}$ , to  $\Delta K$  wzrasta w miarę powiększania się długości szczeliny pęknięcia. Liczbę cykli do wystąpienia uszkodzenia można wyznaczyć z zależności:

$$N_f = N_{fi} + k_C \Delta \sigma^{-m} \int_{a_i}^A (\sqrt{a})^{-m} da, \quad (4.236)$$

gdzie  $k_C$  – współczynnik proporcjonalności.

W przypadku montażu elektronicznego coraz częściej dostrzega się potrzebę projektowania z uwzględnieniem rozrzutu statystycznego czynników istotnych [366, 367, 331, 368]. Według autora analiza taka może być wykonana w przypadku ustalonej

propagacji pęknięcia, opisanej zależnością (4.235), za pomocą metody Monte Carlo. Po przyjęciu założenia, że  $N_f \gg N_i$  ostatnią zależność można zapisać w postaci:

$$N_f \simeq k_C \Delta \sigma^{-m} \int_{a_i}^A (\sqrt{a})^{-m} da. \quad (4.237)$$

W celu uwzględnienia rozrzutu statystycznego w czasie projektowania, autor zaproponował, aby następujące parametry równania (4.237) potraktować jako zmienne losowe o określonym rozkładzie prawdopodobieństwa [369, 370]:

- współczynnik proporcjonalności  $k_C$  można opisać rozkładem logarymiczno-normalnym, w postaci:

$$f(k_C) = \frac{1}{\delta_k \sqrt{2\pi}} \frac{1}{k_C} \exp \left\{ -\frac{\left[ \ln \left( \frac{k_C}{m_k} \right) \right]^2}{2 \delta_k^2} \right\}, \quad (4.238)$$

gdzie  $m_k$  – wartość średnia,  $\delta_k$  – odchylenie standardowe dla współczynnika  $k_C$ ,

- długość początkowa pęknięcia  $a_i$  może być opisana rozkładem Weibulla, w postaci:

$$f(a_i) = \frac{\beta_a}{\lambda_a} \left( \frac{a_i}{\lambda_a} \right)^{\beta_a - 1} \exp \left\{ -\left( \frac{a_i}{\lambda_a} \right)^{\beta_a} \right\}, \quad (4.239)$$

gdzie  $\beta_a$  – parametr kształtu,  $\lambda_a$  – parametr skali dla długości początkowej pęknięcia  $a_i$ ,

- zakres zmian naprężenia  $\Delta \sigma$  można opisać rozkładem logarymiczno-normalnym w postaci:

$$f(\Delta \sigma) = \frac{1}{\delta_\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Delta \sigma} \exp \left\{ -\frac{\left[ \ln \left( \frac{\Delta \sigma}{m_\sigma} \right) \right]^2}{2 \delta_\sigma^2} \right\}, \quad (4.240)$$

gdzie  $m_\sigma$  – wartość średnia,  $\delta_\sigma$  – odchylenie standardowe dla zakresu zmian naprężenia  $\Delta \sigma$ .

Przeprowadzone przez autora obliczenia dowodzą, że wyniki prognozowania uszkodzenia, w przypadku analizy deterministycznej i probabilistycznej, według zależności (4.237), mogą różnić się w sposób znaczący. Według autora największa różnica dotyczy przypadku, gdy między zmiennymi losowymi istnieje wzajemna korelacja, tzn. gdy losowy wzrost długości początkowej szczeliny pęknięcia  $a_i$  prowadzi automatycznie do zmiany zakresu naprężenia  $\Delta \sigma$  i/lub współczynnika proporcjonalności  $k_C$  [369].

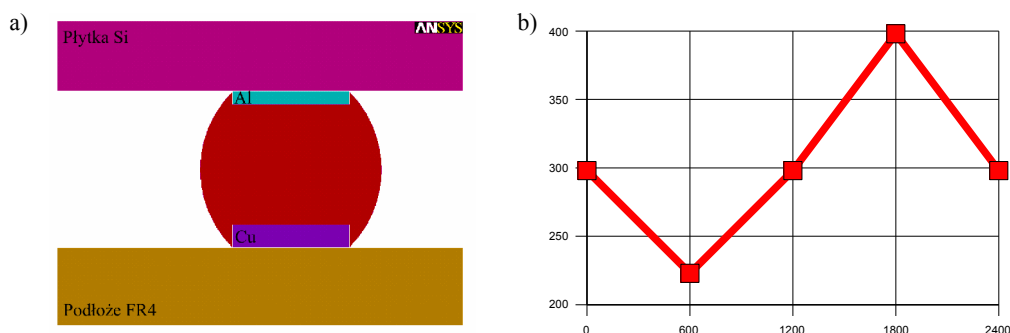


### 4.4.3. Przykład obliczeń numerycznych dla montażu typu flip-chip

Ze względu na czasochłonność i wysoki koszt badań na obiektach rzeczywistych, szczególnie atrakcyjne wydaje się zastosowanie metod modelowania numerycznego w celu określania trwałości zmęczeniowej. Pozwala ono w stosunkowo prosty, szybki oraz niedrogi sposób na oszacowanie wytrzymałości połączenia. Przedstawiono przykładowe obliczenia numeryczne oceny trwałości zmęczeniowej wykonane przez autora w przypadku struktur nieobudowanych dla montażu typu flip-chip. Cechą charakterystyczną montażu typu flip-chip jest to, że układ scalony jest odwrócony powierzchnią aktywną w kierunku podłoża, a połączenia między układem i podłożem są wykonane za pomocą kontaktów podwyższonych ze stopów lutowniczych [77, 371, 372].

W celu przeprowadzenia oceny trwałości zmęczeniowej, wykonano model numeryczny zespołu elektronicznego typu flip-chip w programie Ansys v.7.0. Przyjęto następujące założenia: płytką krzemową Si umieszczoną jest na podłożu organicznym FR4, a kontakty wykonano z eutektycznego stopu lutowniczego SnPb. W celu uproszczenia geometrii układu, jako pola kontaktowe przyjęto 5  $\mu\text{m}$  warstwę Al na płytce krzemowej oraz 9  $\mu\text{m}$  warstwę Cu na podłożu FR4. Pominięto pośrednie warstwy stosowane podczas wytwarzania pól kontaktowych. Celem obliczeń było wyznaczenie trwałości zmęczeniowej połączenia lutowanego wskutek cyklicznej zmiany temperatury otoczenia. Obliczenia wykonano dla modelu dwuwymiarowego oraz trójwymiarowego.

Schemat wykonanego modelu numerycznego dla zespołu elektronicznego typu flip-chip przedstawiono na rysunku 4.62a, natomiast profil zmiany temperatury pokazano na rysunku 4.62b. W tabeli 4.15 przedstawiono przyjęte właściwości oraz modele materiałowe dla poszczególnych warstw. Ocenę trwałości zmęczeniowej wykonano według różnych modeli materiałowych, które uwzględniały odkształcenia sprężyste



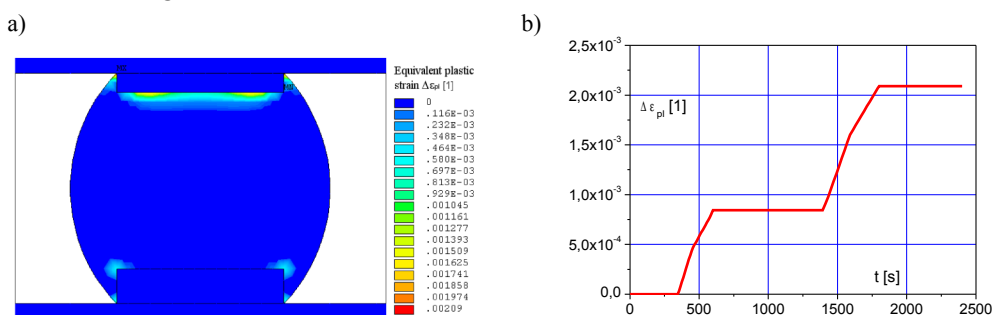
Rys. 4.62. Przykład dwuwymiarowego modelu zespołu elektronicznego typu flip-chip (a) oraz profil obciążenia temperaturowego (b)

Tabela 4.15. Przyjęte właściwości oraz modele materiałowe

Materiał	Model	$E$ [GPa]	$\nu$	$\alpha$ [ $10^{-6}/K$ ]
FR4	sprężysty	17,2	0,28	16.0 ( $x, y$ ) 72.0 ( $z$ )
Si[110]	sprężysty	168	0,39	3,1
Al.	sprężysty	68	0,33	24
Cu	sprężysty	110	0,343	16,4
Sn/Pb	273K	sprężysto-plastyczny	30	25
	373K	sprężysto-plastyczny oraz lepkosprężysty	21	27

i niesprężyste. Podejście takie wymagało użycia odpowiedniego kryterium uszkodzenia zmęczeniowego dla danego przyjętego modelu materiałowego. Celem modelowania było porównanie wyników modelowania, w zależności od przyjętego modelu materiałowego oraz porównanie ich z wynikami uzyskanymi w wyniku doświadczalnych badań zmęczeniowych.

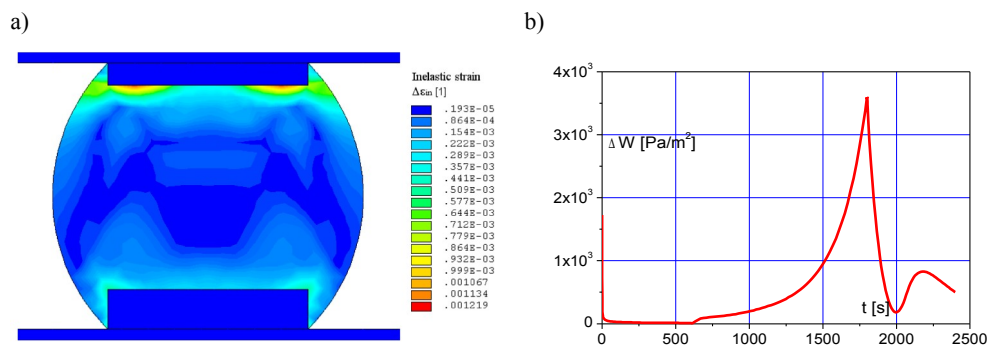
Eutektyczny stop lutowniczy SnPb jest materiałem, który można opisać modelem sprężysto-plastycznym, lepkosprężystym lub lepkosprężysto-plastycznym w zależności od charakteru obciążenia [373]. Ponadto ze względu na obciążenia termiczne konieczne było uzależnienie właściwości i modeli materiałowych od temperatury  $T$ , zarówno w przypadku modelu sprężysto-plastycznego, jak i modelu lepkosprężystego. W pierwszym etapie wykonano modelowanie w przypadku sprężysto-plastycznym modelu materiałowego dla eutektycznego stopu lutowniczego SnPb. Na rysunku 4.63 przedstawiono wyznaczony rozkład zakumulowanego odkształcenia plastycznego oraz wartość zmiany zakumulowanego odkształcenia plastycznego w czasie trwania jednego cyklu obciążeniowego.



Rys. 4.63. Wyznaczony rozkład zakumulowanego odkształcenia plastycznego po jednym cyklu obciążeniowym (a) oraz wartość zmiany zakumulowanego odkształcenia plastycznego w czasie trwania jednego cyklu obciążeniowego (b)

Przeprowadzone obliczenia umożliwiły oszacowanie wartości zakumulowanego odkształcenia plastycznego po jednym cyklu obciążeniowym. Wartość ta wynosiła w przybliżeniu  $\Delta\varepsilon_p = 0,0021$ , a odkształcenie plastyczne znajdowało się w pobliżu krawędzi złącza. Trwałość zmęczeniową  $N_f$  oszacowano na podstawie formuły Coffina–Mansona, według zależności (4.177). Wartość ta wynosiła około  $N_f = 2 \cdot 10^5$  cykli i była znacznie większa od wyników doświadczalnych. Według wyników doświadczalnych, trwałość zmęczeniowa dla tego typu połączenia wynosi około 1000 cykli. Może to świadczyć o niepoprawności modelu sprężysto-plastycznego i/lub dwuwymiarowego modelu numerycznego zespołu elektronicznego typu flip-chip.

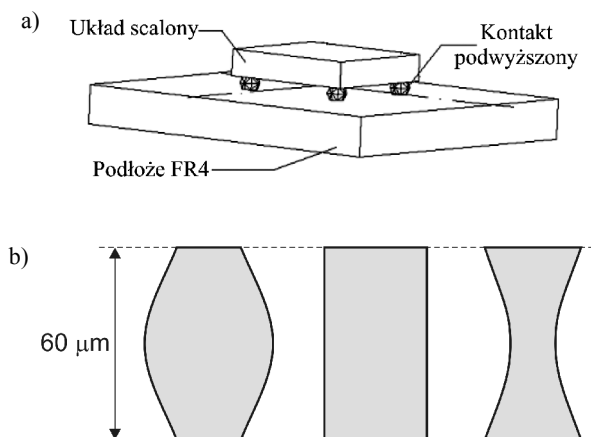
W drugim etapie wykonano modelowanie w przypadku lepkosprężystego modelu dla eutektycznego stopu lutowniczego SnPb. Na rysunku 4.64 przedstawiono wyznaczony rozkład zakumulowanego odkształcenia niesprężystego po jednym cyklu obciążeniowym oraz wartość zmiany gęstości odkształcenia niesprężystego w czasie trwania cyklu obciążeniowego. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń wyznaczono maksymalną wartość energii odkształcenia niesprężystego w pobliżu złącza, która wynosiła w przybliżeniu  $\Delta W = 1.5 \text{ MPa}$ . W celu oszacowania trwałości zmęczeniowej  $N_f$  skorzystano z kryterium zmęczeniowego opisanego zależnością (4.233). Wartość  $N_f$  dla analizowanego przypadku oszacowano na  $N_f = 5 \cdot 10^2$  cykli. Wartość ta jest zbliżona do wyników doświadczalnych, co może świadczyć o poprawności modelu lepkosprężystego i dwuwymiarowego modelu numerycznego dla zespołu elektronicznego typu flip-chip. Otrzymane wyniki modelowania pozwalają stwierdzić, że dominującym zjawiskiem ograniczającym trwałość zmęczeniową połączenia lutowanego wybranego obciążenia jest zjawisko pełzania.



Rys. 4.64. Wyznaczony rozkład zakumulowanego odkształcenia niesprężystego po jednym cyklu obciążeniowym (a) oraz wartość zmiany gęstości odkształcenia niesprężystego w czasie jednego cyklu obciążeniowego (b)

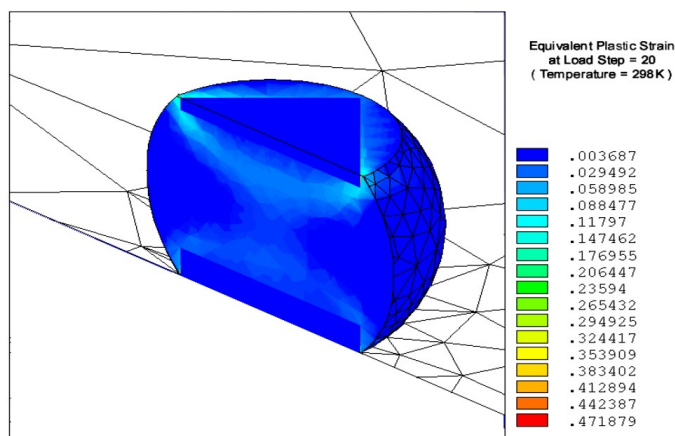
Podobny rodzaj analizy został wykonany przez autora także dla modelu trójwymiarowego zespołu elektronicznego typu flip-chip. Schemat wykonanego modelu

przedstawiono na rysunku 4.65a. Celem modelowania była ocena trwałości zmęczeniowej połączeń lutowanych w zależności od kształtu i wysokości kontaktów podwyższonych. Na rysunku 4.65b przedstawiono badane kształty kontaktów [374, 375].



Rys. 4.65. Trójwymiarowy modelu pakietu elektronicznego typu flip-chip (a) oraz badane kształty kontaktów (b)

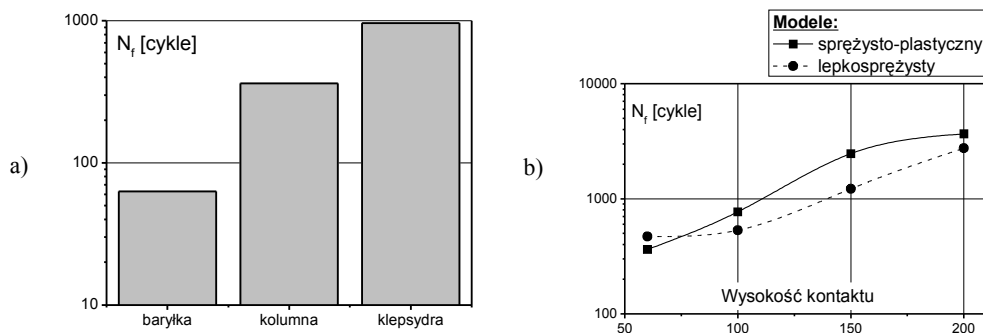
Jako model materiałowy wybrano model lepkosprężysto-plastyczny. Na rysunku 4.66 przedstawiono przykładowy rozkład zakumulowanego odkształcenia plastycznego  $\Delta\varepsilon_p$  po jednym cyklu obciążeniowym. Trwałość zmęczeniową  $N_f$  oszacowano na podstawie wartości zakumulowanego odkształcenia plastycznego  $\Delta\varepsilon_p$  oraz wartości energii



Rys. 4.66. Rozkład zakumulowanych odkształceń plastycznych  $\Delta\varepsilon_p$  po jednym cyklu obciążeniowym

Tabela 4.16. Zestawienie wyników modelowania dla trzech kształtów kontaktów

Kształt kontaktu	Wysokość kontaktu [mm]	$\Delta\varepsilon_p$ [1]	$N_{fp}$ [cykle]	$\Delta W$ [MPa]	$N_{fc}$ [cykle]
Baryłka	0,060	0,137	63	9,15	97
Klepsydra	0,060	0,034	965	1,33	848
Kolumna	0,060	0,056	363	2,24	470
Kolumna	0,100	0,038	770	2,01	533
Kolumna	0,150	0,021	2468	0,96	1219
Kolumna	0,200	0,016	3664	0,47	2752



Rys. 4.67. Wyniki symulacji trzech kształtów kontaktów (a) oraz zależność liczby cykli dla kolumny w zależności od wysokości kontaktu (b)

niesprężystej  $\Delta W$ . Z przedstawionych wyników modelowania widać, że największa wartość zakumulowanego odkształcenia plastycznego znajduje się w okolicach złącza. Najbardziej krytycznym punktem, ze względu na trwałość zmęczeniową, jest narożnik oddalony najbardziej od środka symetrii układu. Podobną analizę przeprowadzono kolejno dla przyjętych kształtów kontaktów, a wyniki oszacowanej trwałości zmęczeniowej przedstawiono w tabeli 4.16 oraz na rysunku 4.67a.

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że największą odporność na zniszczenie zmęczeniowe mają kontakty o kształcie zbliżonym do klepsydry. Najmniej korzystnym kształtem jest baryłka, której trwałość zmęczeniowa nie przekracza 100 cykli. Na rysunku 4.67b przedstawiono zależność prognozowanej trwałości zmęczeniowej jako funkcji wysokości kontaktu o kształcie kolumny. Otrzymane wyniki oszacowania trwałości zmęczeniowej dla modelu lepkosprężysto-plastycznego stopu lutowniczego SnPb oraz trójwymiarowego modelu numerycznego są zgodne z wynikami doświadczalnymi. W tabeli 4.17 zebrano przykładowe wyniki pomiarów ekspery-

Tabela 4.17. Przykładowe wyniki pomiarów eksperymentalnych trwałości zmęczeniowej kontaktów podwyższonych wykonanych za pomocą eutektycznego stopu lutowniczego SnPb

Autor	Uwagi	$N_f$ [cykli]
Schubert A. [376]	Montaż typu FCOB (ang. <i>Flip Chip on Board</i> )	630–1215
Vandeveld B. [377]	Montaż typu PSGA (ang. <i>Polymer Stud Grid Array</i> )	6528–9160
Braun T. [378]	Montaż typu flip-chip na podłożu FR-4 (testy wysokotemperaturowe)	250–1500
Sinnadurai N. [379]	Montaż typu TBGA (ang. <i>Tape Ball Grid Array</i> )	400–600
Spraul M. [380]	Montaż typu <i>flip-chip</i> na podłożu LTCC	749–1611
Stepniak F. [381]	Montaż typu <i>flip-chip</i> na podłożu FR-4	1000–5000

Tabela 4.18. Przykładowe wyniki modelowania trwałości zmęczeniowej kontaktów podwyższonych wykonanych za pomocą eutektycznego stopu lutowniczego SnPb

Autor	Uwagi	$N_f$ [cykli]
Patterson D. [382]	Ocena trwałości dokonywana przez wyznaczenie całki J	800
Wong B. [330]	Ocena trwałości zmęczeniowej oparta na propagacji pęknięcia i rozpraszaniu energii niesprężystej $\Delta W$	1197
Lau J.H. [372]	Model numeryczny uwzględniał efekt pełzania materiału kontaktów. Zakres wartości dla różnych rozmiarów struktury krzemowej	182–1009
Darveaux R. [383]	Ocena trwałości zmęczeniowej oparta na propagacji pęknięcia i rozpraszaniu energii niesprężystej $\Delta W$	1192
Vandeveld B. [384]	Model numeryczny uwzględniał efekt pełzania materiału.	739–1582
Lai Y.S. [385]	Ocena trwałości zmęczeniowej oparta na propagacji pęknięcia i rozpraszaniu energii niesprężystej $\Delta W$ uwzględniające sprzężenie pól termomechanicznych	782–9236
Lee S.W. [49]	Ocena trwałości zmęczeniowej oparta na zmodyfikowanej zależności Coffina–Mansona w postaci propagacji pęknięcia i rozpraszaniu energii niesprężystej $\Delta W$	2563–2751
Lau J.H. [386]	Model nie uwzględniał efektu pełzania. Zakres wartości dla różnych kształtów kontaktów podwyższonych. Wartości szacowane na podstawie zakumulowanej energii odkształceń.	97–848
Wymysłowski A. [77]	Oceny trwałości dokonano na podstawie energii rozproszonej odkształcenia nieelastycznego, dla kontaktów podwyższonych w kształcie kolumny w zależności od ich wysokości. Model 3D uwzględniał odkształcenia sprężyste, plastyczne i lepkie.	363–3664

mentalnych, natomiast w tabeli 4.18 wyniki modelowania trwałości zmęczeniowej dla kontaktów podwyższonych wykonanych za pomocą eutektycznego stopu lutowniczego SnPb. Podane wyniki mają jedynie charakter porównawczy. Celem przedstawionych wyników było oszacowanie wartości trwałości zmęczeniowej dla różnych kształtów i konfiguracji kontaktów podwyższonych. Ponadto wyniki te pokazują wpływ przyjętych modeli materiałowych oraz kryterium uszkodzenia na wartość oszacowanej trwałości zmęczeniowej. Innym celem jest weryfikacja wyników modelowania z wynikami pomiarów doświadczalnych.

Z przedstawionego zestawienia wynika, że uzyskana przez autora trwałość zmęczeniowa dla montażu typu flip-chip, (tj. od 363 do 3664 w przypadku kontaktów podwyższonych w kształcie kolumny w zależności od ich wysokości) pokrywa się z wynikami prac innych autorów, a zwłaszcza tych, którzy uwzględnili zjawisko pełzania dla połączenia lutowanego. Pozwala to na stwierdzenie, że sposób symulacji i obliczenia niezawodności wykonano prawidłowo, a przyjęte uproszczenia nie wpłynęły znacząco na wyniki.

Dodatkowo należy zaznaczyć, że zjawisko pełzania połączenia elektronicznego nie zawsze musi być efektem niepożądanym. W przypadku połączeń techniką flip-chip za pomocą izotropowych klejów przewodzących pełzanie może być pozytywną cechą. Właściwości kleju pozwalają na większe odkształcenia – mniejsza wartość modułu Younga, niż w przypadku stopu lutowniczego SnPb. Ponadto pożądanym zjawiskiem w przypadku klejów jest relaksacja naprężeń, która prowadzi do zmniejszenia wartości naprężeń [387, 388].

## **5. Przykład kompleksowego projektowania numerycznego**

Rozdział ten dotyczy kompleksowego projektowania numerycznego w montażu elektronicznym, na przykładzie układu elektronicznego w obudowie typu QFN. Przedstawiony przykład projektowania obejmuje podstawowe etapy modelowania numerycznego dla opracowanego algorytmu parametryczno-sekwencyjnego. Należy tutaj nadmienić, że w wielu zagadnieniach zarówno teoretycznych, jak i praktycznych istnieje zazwyczaj kilka metod alternatywnych, które prowadzą do rozwiązania danego problemu. Wybór określonej metody zależy w dużej mierze od możliwości weryfikacji doświadczalnej, posiadanych narzędzi numerycznych, czasu, oczekiwanego zysku, doświadczenia inżyniera czy ostatecznie przewidywanych kosztów projektowania. Wybrany przykład dotyczy projektowania numerycznego, które zostało wykonane w ramach współpracy autora z firmą Philips [206, 207, 208].

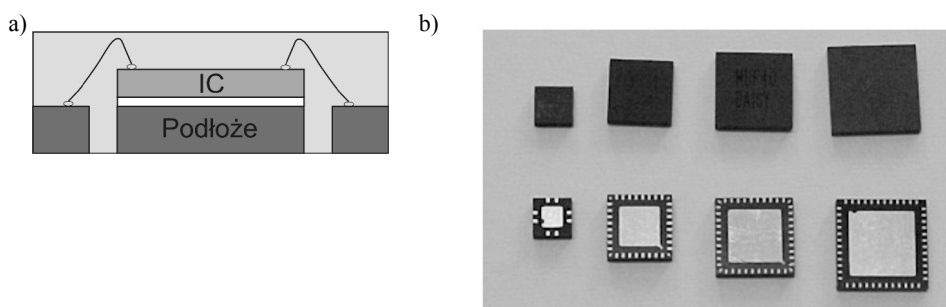
### **5.1. Opis montażu elektronicznego w obudowie typu QFN**

Jednym z ostatnich osiągnięć w dziedzinie montażu elektronicznego jest montaż układów scalonych w obudowie typu QFN (ang. *Quad Flat Non-leaded Package*), tj. czterorzędowej bezkońcówkowej obudowie płaskiej z odsłoniętym podłożem montażowym. Układ elektroniczny w obudowie typu QFN ze względów konstrukcyjnych jest stosunkowo prosty. Składa się z płaskiego azuru metalowego, np. miedzianego, który zawiera prostokątny obszar do montażu układu scalonego. Obszar ten otoczony jest przez wyspy końcówek wyprowadzeń, które łączy się za pomocą połączeń drutowych w procesie zgrzewania z układem scalonym. Układ scalony jest następnie mocowany do azuru w procesie lutowania lub klejenia. Ostatnim etapem jest wykonanie zapraski, która izoluje cały układ od wpływu czynników zewnętrznych w procesie zaprasowania przetłocznego. Montaż ten, ze względu na swoje zalety, jest coraz częściej stosowany w przemyśle elektronicznym, a zwłaszcza półprzewodnikowym, co zostało m.in. szczegółowo omówione w pracach Van Driela [389, 390, 391, 392]. Układ elektroniczny typu QFN charakteryzuje się następującymi zaletami: małymi rozmiarami – jest



płaski i cienki, niskim kosztem wykonania, dobrymi parametrami cieplnymi, dużą częstotliwością graniczną, wysoką niezawodnością. Układy tego typu bardzo często stosuje się w urządzeniach przenośnych, takich jak: telefony komórkowe, palmtopy, laptopy itp.

Jako materiał podłoża, które jednocześnie stanowi w fazie montażu odsłonięte końcówki montażowe, stosuje się w większości przypadków metal, np. miedź. Końcówki znajdują się w dolnej części zespołu, choć zdarzają się rozwiązania z końcówkami znajdującymi się w części górnej. W praktyce występuje wiele rozwiązań tego typu montażu. Przykładem zaawansowanego technologicznie montażu z odsłoniętymi końcówkami jest cienka i wąska obudowa miniaturowa TSSOP (ang. *Thin Shrink Small Outline Packaging*). Obudowa ta zapewnia możliwość opcjonalnego wykorzystania odsłoniętych końcówek wyprowadzeń. Na rysunku 3. przedstawiono przekrój poprzeczny przykładowego układu elektronicznego w obudowie QFN oraz zdjęcie gotowego układu. Charakterystyczną cechą montażu typu QFN są odsłonięte końcówki umiejscowione wzdłuż krawędzi układu.



Rys. 5.1. Przekrój poprzeczny układu elektronicznego typu QFN (a) oraz zdjęcie zespołu QFN przygotowanego do montażu na powierzchni PCB (b)

Ze względu na prostotę, optymalną cenę i parametry jakościowe, a jednocześnie duże oczekiwania rynkowe w stosunku do montażu QFN, wydaje się on zwłaszcza odpowiedni do optymalizacji numerycznej. Celem projektowania numerycznego może być znalezienie najbardziej pożądanej grubości azuru miedzianego. Grubość ta powinna spełniać następujące wymagania [393, 394]:

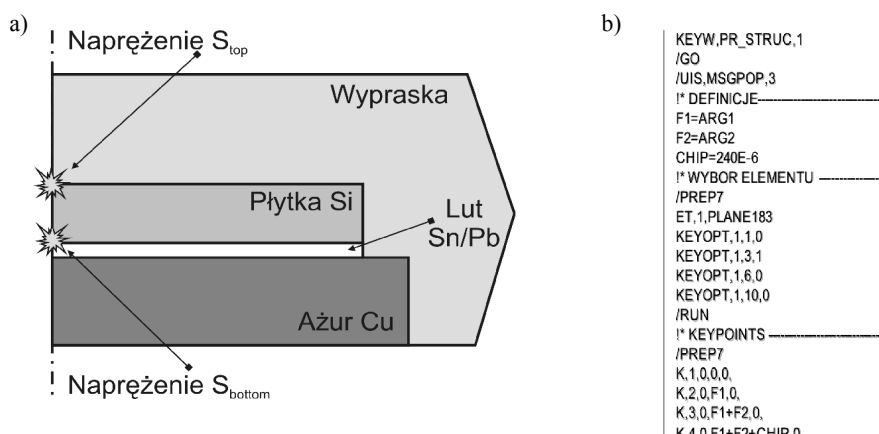
- nie generować wysokich kosztów produkcji; minimalna niezbędna ilość materiału, np. miedzi pozwoli na obniżenie ceny końcowej układu,
- nie wpływać negatywnie na niezawodność; w czasie procesu technologicznego może nastąpić pęknięcie struktury krzemowej – uszkodzenie to jest związane z grubością azuru miedzianego.

## 5.2. Model numeryczny układu QFN

Aby wykonać model numeryczny układu elektronicznego QFN, przyjęto następujące założenia:

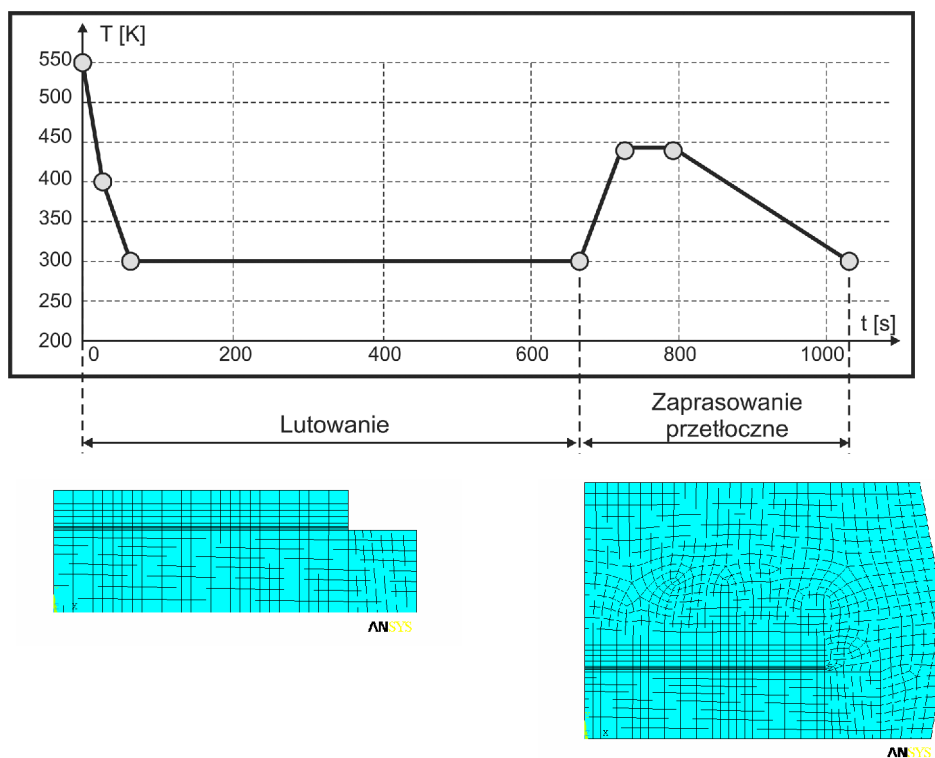
- model powinien być parametryczny,
- ze względu na prostotę oraz symetrię układu wystarczający jest model dwuwymiarowy, który może być wykonany z elementów o symetrii obrotowej, co zostało m.in. opisane przez Kelly [395],
- w celu spełnienia wymagań dotyczących odkształcenia, dolny węzeł na osi symetrii powinien być trwale zamocowany,
- właściwości płytki krzemowej mogą być izotropowe oraz sprężyste, według opisu podanego m.in. przez Madelunga [396],
- azur miedziany powinien być opisany modelem plastyczno-sprężystym, przy czym zarówno punkt plastyczności, jak i moduł Younga powinien zależeć od temperatury – według materiałów wewnętrznych firmy Philips [397],
- materiał zapraski powinien być opisany modelem sprężystym, dla którego zarówno moduł Younga, jak i współczynnik rozszerzalności cieplnej powinny być funkcją temperatury,
- materiałem łączącym płytkę krzemową z azurem jest eutektyczny stop lutowniczy Sn/Pb.

Na rysunku 5.2a przedstawiono przekrój poprzeczny przez opracowany model numeryczny układu elektronicznego w obudowie typu QFN. Parametryczny model numeryczny wykonano w postaci programu skryptowego z zastosowaniem języka APDL dostępnego w programie ANSYS v.8.0, fragment przedstawiono na rysunku 5.2b.



Rys. 5.2. Przekrój poprzeczny przez opracowany model numeryczny układu QFN (a) oraz fragment opracowanego skryptowego programu parametrycznego (b)

Projektowanie optymalizacji ma na celu ograniczenie naprężeń w środku układu dla płytki krzemowej w czasie kolejnych procesów technologicznych: lutowania i tworzenia wypraski. Z tego powodu, jako odpowiedź układu przyjęto dwa naprężenia skierowane prostopadle do powierzchni płytki krzemowej, znajdujące się w jej dolnej i górnej części środkowej. Przebieg profilu obciążenia temperaturowego układu w trakcie kolejnych procesów technologicznych przedstawiono na rysunku 5.3.



Rys. 5.3. Charakterystyka czasowo-temperaturowa kolejnych procesów technologicznych

Proces projektowania numerycznego wykonano zgodnie z opracowanym przez autora algorytmem parametryczno-sekwencyjnym, który opisano w rozdziale 3.3.2. Algorytm ten składa się z dwóch etapów. Pierwszym etapem projektowania był eksperyment eliminujący, którego celem była identyfikacja czynników najbardziej istotnych ze względu na wybraną odpowiedź, czyli naprężeń w płytce krzemowej. Drugim etapem była identyfikacja modelu powierzchni odpowiedzi. Uzyskana powierzchnia posłużyła z kolei do projektowania. Przyjęta metoda postępowania pozwoliła na uzyskanie wiarygodnej powierzchni odpowiedzi z zachowaniem minimalnej liczby doświadczeń numerycznych. W tabeli 5.1 przedstawiono wybrane materiały oraz ich modele mate-

riałowe. Dodatkowo przedstawiono przyjęte parametry projektowe oraz ich wartości nominalne i zakres dopuszczalnych zmian kolejnych etapów projektowania. Przyjęte modele materiałowe uwzględniały odkształcenie sprężyste, plastyczne oraz lepkie w trakcie kolejnych procesów technologicznych.

Tabela 5.1. Materiały, modele materiałowe oraz wartości parametrów projektowych

Materiał	Model materiałowy	Parametry i oznaczenia	Wartości nominalne [mm]	Eksperyment eliminujący [mm]	Eksperyment identyfikujący [mm]
Zapraska	liniowo-sprężysty: $E = f(T)$ , $a = f(T)$	długość grubość	6,5 3,3	– –	– –
Krzem	liniowo-sprężysty	długość – $L_{\text{chip}}$ grubość – $h_{\text{chip}}$	4,3 0,240	3,87–4,73 0,216–0,264	3,3–5,3 –
Miedź	sprężysto-plastyczny: $E = f(T)$ , $R_e = f(T)$	długość – $L_{\text{leadframe}}$ grubość – $h_{\text{leadframe}}$	5,3 0,6	4,77–5,83 0,54–0,66	– 0,2–1,0
Lut SnPb	lepkosprężysty: $E = f(T)$ , $R_e = f(T)$	długość grubość – $h_{\text{solder}}$	4,3 0,05	– 0,045–0,055	– –

Zjawisko pęknięcia poprzecznego jest ściśle związane z wartością naprężenia występującego w płytce krzemowej, o czym wspomina Madelung [396]. Dopuszczalne wartości naprężenia wyznaczono na podstawie badań doświadczalnych dotyczących wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie [208]:

- w przypadku rozciągania maksymalne dopuszczalne naprężenia wynosiło 150 MPa,
- w przypadku ściskania maksymalne dopuszczalne naprężenie wynosiło –500 MPa.

Poprawność przyjętych założeń dotyczących modelu numerycznego zweryfikowano doświadczalnie po wykorzystaniu:

- trójwymiarowej interferometrii Moire, co zostało opisane przez Yi oraz van Driela [390, 398],
- spektroskopii mikro-Ramanowskiej, co opisano w pracach de Wolf [399, 400].

Plan eksperymentu eliminującego wykonano za pomocą ułamkowego planu ortogonalnego. W analizowanym przypadku skorzystano z ułamkowego planu ortogonalnego opartego na dwóch poziomach wartości czynników, tablica L16. W tabeli 5.2 przedstawiono plan eksperymentu oraz wyniki modelowania numerycznego, natomiast na rysunku 5.4 pokazano wykres efektów głównych dla wybranych czynników.

Zgodnie z otrzymanymi wynikami z 5 wybranych czynników projektowych tylko 3 mają statystycznie istotny wpływ na wartość odpowiedzi. Czynniki te to: długość płytki krzemowej  $L_{\text{chip}}$ , grubość azuru miedzianego  $h_{\text{leadframe}}$  oraz grubość płytki krzemowej  $h_{\text{chip}}$ . Ostatecznie zdecydowano, że tylko dwa czynniki, ze względów praktycznych<sup>82</sup>, mają istotne znaczenie, tzn. długość płytki krzemowej  $L_{\text{chip}}$  oraz grubość azuru

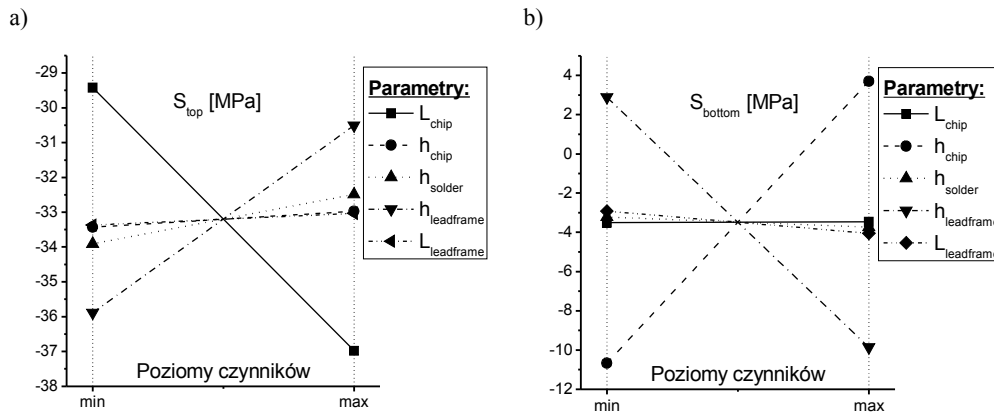
82 Oczekiwania, założenia i możliwości techniczne producenta, tj. firmy Philips.

miedzianego  $h_{\text{leadframe}}$ , natomiast wartość grubości płytki krzemowej  $h_{\text{chip}}$  przyjęto na poziomie nominalnym.

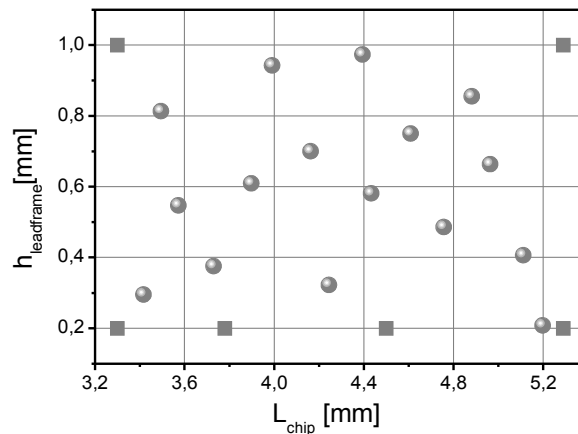
Plan eksperymentu identyfikacyjnego wykonano na podstawie zmodyfikowanego kwadratu łacińskiego MLH. Zaletą tego planu jest możliwość wykonania określonej liczby doświadczeń, przy czym jednocześnie punkty pomiarowe są równomiernie rozrzucone w całej przestrzeni czynnikowej. Opracowany plan eksperymentu dla wybranych czynników istotnych przedstawiono na rysunku 5.5, natomiast w tabeli 5.3 – wylosowane punkty w przestrzeni czynnikowej oraz dodatkowe punkty otrzymane w wyniku procedury sekwencyjnej. Eksperyment oparto na 16 doświadczeniach wygenerowanych na podstawie planu zmodyfikowanego kwadratu łacińskiego MLH oraz na 6 dodatkowych punktach otrzymanych w trakcie procedury sekwencyjnej, której celem była poprawa powierzchni odpowiedzi tak, aby spełniała określone kryterium dokładności.

Tabela 5.2. Plan eksperymentu początkowego oraz wyniki modelowania

Nr	$L_{\text{chip}}$	$h_{\text{chip}}$	$h_{\text{solder}}$	$h_{\text{leadframe}}$	$L_{\text{leadframe}}$	$S_{\text{top}}$ [MPa]	$S_{\text{bottom}}$ [MPa]
1	1	1	1	1	1	-33,54	-3,85
2	1	1	1	2	2	-28,13	-14,66
3	1	1	2	1	2	-31,47	-5,16
4	1	1	2	2	2	-26,89	-15,34
5	1	2	1	1	2	-33,05	8,53
6	1	2	1	2	1	-27,12	-3,49
7	1	2	2	1	1	-31,57	9,02
8	1	2	2	2	2	-25,55	-4,07
9	2	1	1	1	2	-40,26	-5,82
10	2	1	1	2	1	-35,69	-17,36
11	2	1	2	1	1	-39,15	-4,15
12	2	1	2	2	2	-33,30	-19,01
13	2	2	1	1	1	-41,05	13,31
14	2	2	1	2	2	-34,42	-3,43
15	2	2	2	1	2	-39,03	11,25
16	2	2	2	2	1	-33,96	-3,49



Rys. 5.4. Wykres efektów głównych dla naprężenia rozciągającego w górnej (a) i dolnej (b) części płytki krzemowej



Rys. 5.5. Wygenerowany plan eksperymentu, według zmodyfikowanego kwadratu łacińskiego oraz procedury sekwencyjnej, gdzie: ● – punkty początkowe i ■ – punkty dodatkowe

Jak wcześniej wspomniano, w wielu zagadnieniach inżynierskich pojawia się problem projektowania wielokryterialnego. Najczęściej oznacza to konieczność poszukiwania rozwiązania kompromisowego, które będzie spełniało warunek będący kombinacją kilku kryteriów. Warunek ten, określany z matematycznego punktu widzenia jako funkcja celu, jest najczęściej definiowany na podstawie wiedzy i doświadczenia eksperta. W przedstawionym przypadku analizowano dwie odpowiedzi w postaci na-

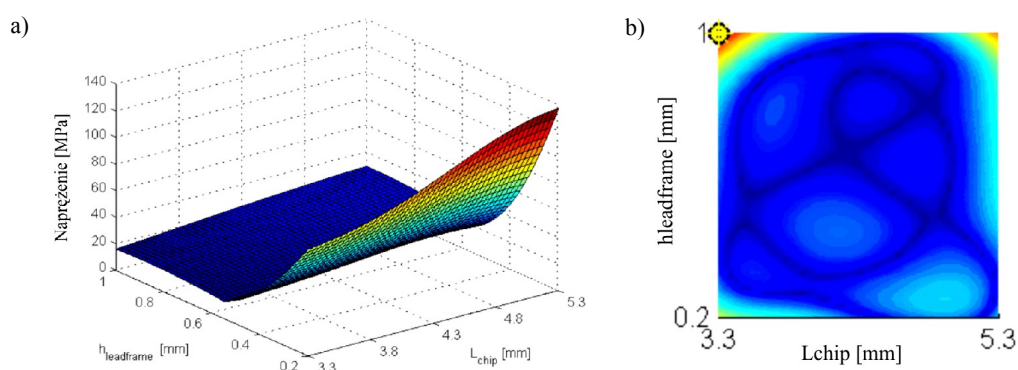
prężenie w górnej i dolnej części płytki krzemowej. W celu ograniczenia zjawiska pęknięcia płytki krzemowej wskutek przeprowadzonych procesów technologicznych, konieczne było ograniczenie naprężenia całkowitego. W tym celu skorzystano z projektowania wielokryterialnego, stosując metodę ważonych kryteriów. Metoda ta pozwalała na definicję jednokryterialnej funkcji celu jako uśrednionej wartości naprężeń  $S_{top}$  i  $S_{bottom}$ , co można zapisać w postaci wyrażenia:

Tabela 5.3. Wylosowane i dodatkowe punkty doświadczeń oraz odpowiadające im wyniki modelowania numerycznego

Eksperyment początkowy				
Nr	$L_{chip}$ [mm]	$h_{leadframe}$ [mm]	$S_{top}$ [MPa]	$S_{bottom}$ [MPa]
1	3,417	0,295	-54,03	56,74
2	3,495	0,813	-20,21	-15,11
3	3,573	0,547	-28,40	1,02
4	3,730	0,375	-45,00	33,99
5	3,898	0,609	-28,67	-4,70
6	3,991	0,942	-23,64	-20,50
7	4,163	0,700	-28,03	-11,73
8	4,245	0,322	-60,97	60,10
9	4,394	0,973	-25,34	-23,22
10	4,433	0,581	-34,58	-1,74
11	4,609	0,750	-30,33	-16,00
12	4,757	0,486	-43,98	14,17
13	4,882	0,855	-30,44	-23,22
14	4,964	0,663	-35,60	-10,76
15	5,112	0,406	-57,24	38,22
16	5,198	0,208	-113,92	149,96
Procedura sekwencyjna				
17	3,30	1,00	-16,72	-18,39
18	3,30	0,20	-73,89	95,01
19	3,78	0,20	-83,76	109,95
20	5,29	1,00	-31,51	-29,54
21	5,29	0,20	-117,68	158,24
22	4,50	0,20	-99,68	133,43

$$S = \frac{|S_{\text{top}}| + |S_{\text{bottom}}|}{2}. \quad (5.1)$$

Wyznaczona powierzchnia odpowiedzi dla tak zdefiniowanej funkcji celu została przedstawiona na rysunku 5.6. Dodatkowo oszacowano błąd interpolacji dla wyznaczonej powierzchni funkcji celu, co pozwala na zastosowanie metody sekwencyjnej w przypadku optymalizacji wielokryterialnej. Celem optymalizacji była minimalizacja funkcji celu względem długości płytki krzemowej  $L_{\text{chip}}$  oraz grubości ażuru miedzianego  $h_{\text{leadframe}}$ .

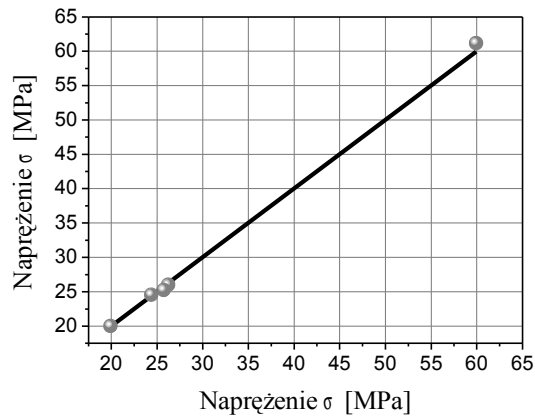


Rys. 5.6. Wyznaczona powierzchnia odpowiedzi dla zdefiniowanej funkcji celu (a) oraz wyznaczony błąd interpolacji dla wyznaczonej powierzchni funkcji celu (b)

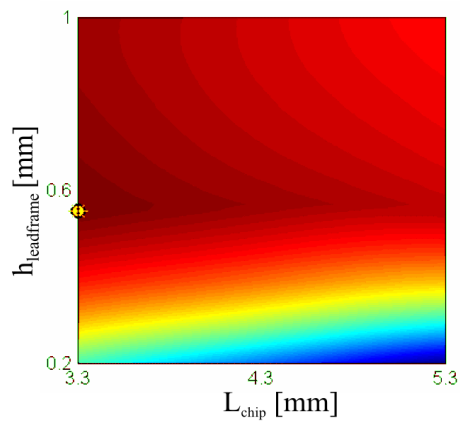
Po uzyskaniu powierzchni odpowiedzi wykonano eksperyment weryfikacyjny, który pozwolił na ocenę jej dokładności. W tym celu wykonano kilka losowo wybranych doświadczeń numerycznych z zadanej przestrzeni czynnikowej dla wylosowanych wartości długości płytki krzemowej  $L_{\text{chip}}$  oraz grubości ażuru  $h_{\text{leadframe}}$ . Na rysunku 5.7 przedstawiono porównanie wyników modelowania z wynikami otrzymanymi na podstawie uzyskanej powierzchni odpowiedzi. Różnica między wynikami modelowania oraz wynikami otrzymanymi na podstawie powierzchni odpowiedzi nie różniły się więcej niż 2%. Podana dokładność pozwala zatem na wykorzystanie dopasowanej powierzchni odpowiedzi w procesie projektowania.

Częścią procesu projektowania jest optymalizacja. W przypadku najprostszym celem optymalizacji może być znalezienie takich wartości czynników projektowych, które zapewniają optymalną wartość odpowiedzi. W analizowanym przypadku celem było znalezienie takich wartości czynników istotnych, które minimalizują funkcję celu, czyli uśrednioną wartość naprężenia. Na rysunku 5.8 przedstawiono wyniki optymalizacji spełniającej podane kryterium.





Rys. 5.7. Porównanie wyników eksperymentu weryfikacyjnego z wynikami otrzymanymi na podstawie uzyskanej powierzchni odpowiedzi



Rys. 5.8. Powierzchnia do optymalizacji wybranej funkcji celu

Zgodnie z wynikami przedstawionymi na rysunku 5.8, minimalna wartość zdefiniowanej funkcji celu występuje w przypadku następujących istotnych wartości czynników:

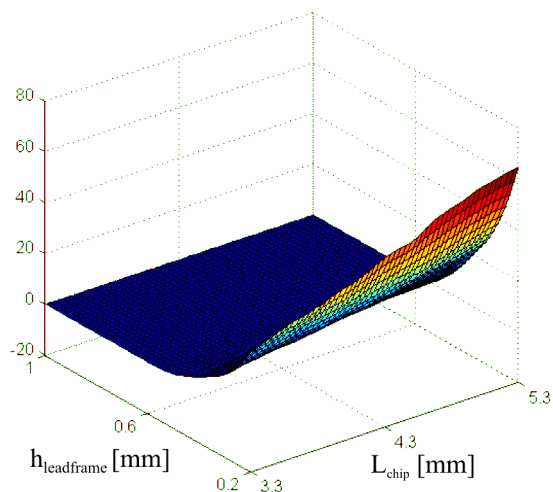
- $L_{\text{chip}} = 3,3$  mm,
- $h_{\text{leadframe}} = 0,55$  mm.

Celem projektowania jest również analiza czułości i projektowanie tolerancji. W analizowanym przypadku skoncentrowano się na projektowaniu tolerancji. Projektowanie tolerancji jest konieczne ze względu na naturalny rozrzut statystyczny czyn-

ników sterowalnych. Niestety parametry rozrzutu statystycznego czynników sterowalnych są stosunkowo trudne do analizy, w związku z tym najczęściej stosowaną metodą jest przyjęcie założenia dotyczącego ich rozkładu prawdopodobieństwa. Dzięki takiemu założeniu oraz otrzymanej powierzchni odpowiedzi projektowanie tolerancji można było wykonać metodą Monte Carlo.

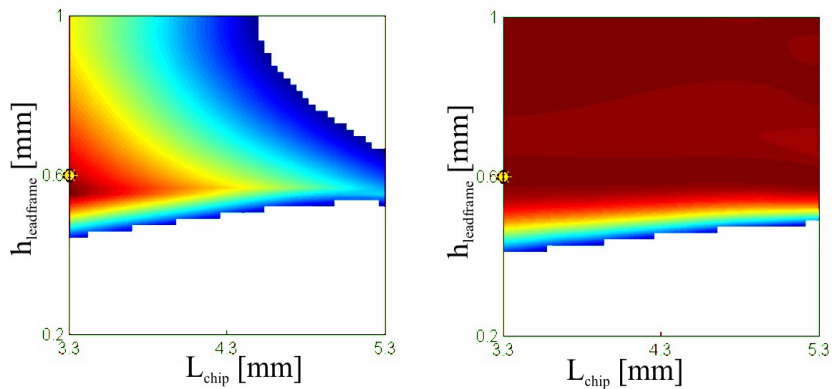
Wykorzystanie metody Monte Carlo w przypadku doświadczeń na obiektach fizycznych czy numerycznych jest stosunkowo trudne, co jest konsekwencją dużej liczby doświadczeń – minimum 1000. W przypadku obiektów numerycznych natomiast oraz wyznaczonych na ich podstawie powierzchni odpowiedzi liczba koniecznych do przeprowadzenia doświadczeń nie stanowi praktycznie żadnego ograniczenia. Warunkiem jest jednak duża dokładność uzyskanej powierzchni odpowiedzi. W analizowanym przypadku warunek ten został spełniony dzięki zastosowaniu algorytmu parametryczno-sekwencyjnego, uwzględniającego analizę błędów powierzchni odpowiedzi.

Projektowanie tolerancji wykonano metodą Monte Carlo dla próbki składającej się z 1000 doświadczeń, po założeniu, że istotne czynniki mają rozkład normalny. Przykładowy wynik przeprowadzonej analizy Monte Carlo w postaci powierzchni odpowiedzi uwzględniającej rozrzut losowy czynników istotnych, przedstawiono na rysunku 5.10.



Rys. 5.9. Powierzchnia czułości odpowiedzi otrzymana w wyniku analizy Monte Carlo

Celem projektowania tolerancji było znalezienie rozwiązania kompromisowego między oczekiwaną odpowiedzią, po założeniu rozrzutu statystycznego istotnych czynników, co przedstawiono na rysunku 5.10.



Rys. 5.10. Optymalizacja zaawansowana, po założeniu 10% tolerancji względem wartości minimalnej: pierwotnej (a) oraz uwzględniającej rozrzut losowy (b)

Zgodnie z wynikami przedstawionymi na rysunku 5.10, rozwiązanie kompromisowe, po założeniu 10% tolerancji w odniesieniu do minimalnej wartości funkcji celu, uwzględniającej rozrzut losowy czynników istotnych, można uzyskać dla następujących wartości czynników istotnych:

- $L_{\text{chip}} = 3,3$  mm,
- $h_{\text{leadframe}} = 0,60$  mm.

Jak wynika z przedstawionych wyników projektowania, podstawowa różnica między optymalizacją standardową a optymalizacją z projektowaniem tolerancji dotyczy grubości ażuru miedzianego  $h_{\text{leadframe}}$ . Aby zatem otrzymać rozwiązanie optymalne, jest konieczna zmiana grubości ażuru miedzianego o 0,05 mm, z wartości 0,55 mm na 0,60 mm. Zmiana ta jest konieczna, gdy założymy, że wartości nominalne czynników sterowalnych mają rozrzut losowy, który można opisać rozkładem normalnym.

## 6. Podsumowanie

W pracy omówiono najnowsze osiągnięcia oraz aktualny stan wiedzy dotyczący numerycznych metod projektowania termomechanicznego w montażu elektronicznym, z uwzględnieniem indywidualnego i nowatorskiego wkładu autora w rozwój tych metod oraz ich implementację praktyczną. Przedstawiona metodologia oraz przykłady projektowania termomechanicznego w montażu elektronicznym mają przede wszystkim wymiar inżynierski. Istotą działań inżynierskich jest nie tylko poszukiwanie rozwiązania danego problemu, lecz także uwzględnienie dodatkowych parametrów, takich jak: jakość, zużycie materiałów i energii, koszt, funkcjonalność, preferencje użytkowników, normy bezpieczeństwa, zalecenia obowiązujące w danej społeczności, możliwości produkcyjne i serwisowe itp. Przedstawiona metodologia projektowania numerycznego pozwala na skrócenie fazy badawczej i testowej produktu, z zachowaniem wymagań konkurencyjności, parametrów jakościowych oraz norm energetycznych i materiałowych. Ostatecznie otrzymujemy zatem produkt o zadowalającej jakości i kosztach ze znacznie większą funkcjonalnością.

W przypadku montażu elektronicznego, zwiększenie zainteresowania projektowaniem numerycznym jest m.in. wynikiem coraz większej presji przemysłu elektronicznego w obliczu wzrastającej konkurencyjności oraz oczekiwań konsumentów. Nie bez znaczenia jest także konieczność projektowania proekologicznego i płynnej wymiany kadry inżynierskiej. Poza tym ciągle zwiększanie funkcjonalności oraz miniaturyzacji i integracji układów scalonych – miniaturyzacja przebiega głównie na poziomie układu scalonego, integracja zaś na poziomie montażu. Przetwarzanie większej ilości informacji powoduje, że dąży się do wytwarzania przyrządów szybkich, pracujących na coraz wyższych częstotliwościach. Dlatego metody i algorytmy projektowania numerycznego stają się jednym z kluczowych narzędzi. Stosuje się je zarówno do przewidywania, kwalifikacji i testowania zachowania produktu na skutek obciążeń termomechanicznych, jak i do oszacowania ewentualnych nakładów produkcyjnych czy problemów niezawodnościowych.

W pracy omówiono wybrane metody i algorytmy projektowania numerycznego w montażu elektronicznym oraz zaproponowano metodologię postępowania. Jest to optymalizacja niezawodności montażu elektronicznego z uwzględnieniem takich aspektów, jak analiza czułości i projektowanie tolerancji według opracowanego algorytmu parametryczno-sekwencyjnego, opartego na metodzie DoE i RSM. Metodolo-

gia ta polega na opracowaniu parametrycznego modelu numerycznego analizowanego obiektu oraz zastosowanie odpowiednich kryteriów do prognozowania uszkodzeń typowych połączeń w montażu elektronicznym na skutek obciążeń termomechanicznych w zależności od rodzaju uszkodzenia i modelu materiałowego. W przypadku metod inżynierskich jednym z kluczowych aspektów stosowalności są możliwości aplikacyjne, łatwość interpretacji uzyskanych wyników, koszty wdrożenia, możliwości kadrowe itp. Dąży się do opracowania metod uniwersalnych, które uwzględniałyby jednak specyfikę zastosowań danej dziedziny inżynierskiej. Jako indywidualny i nowatorski wkład autora w rozwój metod inżynierskich opartych na metodach numerycznego projektowania termomechanicznego w montażu elektronicznym należy zaliczyć:

- zaproponowanie uproszczonej metody uwzględnienia rezystancji cieplnej styku w analizie numerycznej rozpraszania energii cieplnej w strukturach wielowarstwowych,
- opracowanie układu pomiarowego do oszacowania właściwości cieplnych styku materiałów oraz wyznaczenia względnego efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dla obszaru styku,
- opracowanie planu MLH oraz metody dopasowania powierzchni odpowiedzi, według metody Kriging i oszacowania jej dokładności,
- opracowanie algorytmu parametryczno-sekwencyjnego, pozwalającego na implementację zaawansowanych metod projektowania na podstawie parametrycznego modelu obiektu, plan MLH i metodę RSM oraz postępowanie sekwencyjne,
- wykonanie programu komputerowego do wspomaganie inżynierskich prac projektowych opartych na metodach DoE i RSM,
- zwrócenie uwagi na konieczność stosowania typowych języków skryptowych dostępnych w komercyjnych pakietach do modelowania metodą FEM, jak ADPL dla programu ANSYS i PYTHON dla programu ABAQUS, w celu implementacji zaawansowanych procedur projektowania parametrycznego,
- klasyfikację metod, oszacowanie i prognozowanie uszkodzeń typowych połączeń w montażu elektronicznym, jak połączenia drutowe, bondowane, klejone i lutowane, biorąc pod uwagę klasyczne i złożone modele materiałowe,
- zaproponowanie uproszczonej metody projektowania z uwzględnieniem takich problemów, jak poszukiwanie wartości optymalnych oraz analiza czułości i projektowanie tolerancji,
- zwrócenie uwagi na brak implementacji poprawnego modelu lepkosprężystego w komercyjnych pakietach do modelowania metodą FEM oraz zaproponowanie metody pomiaru i opisu analitycznego parametrów modelu lepkosprężystego z uwzględnieniem stopnia utwardzenia – istotne w przypadku obciążeń cyklicznie zmiennych,
- przedstawienie typowych przykładów projektowania termomechanicznego w montażu elektronicznym oraz zwrócenie uwagi na typowe problemy oraz możliwości

ich rozwiązania, jak naprężenia w strukturach wielowarstwowych, modele lepkości-prężyste, procesy technologiczne itp.

- zwrócenie uwagi na konieczność i możliwości realizacji optymalizacji wielokryterialnej w montażu elektronicznym, które przedstawiono na przykładzie kompleksowego projektowania montażu elektronicznego w obudowie typu QFN,
- aktywny udział w opracowywaniu i rozpowszechnianiu numerycznych metod projektowania w montażu elektronicznym przez udział w międzynarodowych programach badawczych, szkoleniach, komitetach organizacyjnych konferencji oraz prowadzenia zajęć dydaktycznych dla studentów itp.

Według autora przyszłe kierunki rozwoju numerycznych metod projektowania termomechanicznego w montażu elektronicznym będą ściśle związane z dalszym rozwojem układów scalonych i systemów. Ponieważ montaż elektroniczny jest jedną z podstawowych przyczyn ograniczających niezawodność urządzeń elektronicznych to w miarę wzrostu skali integracji, liczby wejść/wyjść, szybkości pracy i gęstości mocy układów scalonych, powstanie konieczność zastosowania nowych metod, technik i algorytmów projektowania, które pozwolą na:

- uwzględnienie w procesie projektowania numerycznego wszystkich czynności i etapów technologicznych prowadzących do obudowania, połączenia układów scalonych i systemów oraz ich upakowanie na poziomie podłoża montażowego lub płytki obwodu drukowanego, a następnie złożenie wszystkiego w funkcjonalne urządzenie,
- zastąpienie dotychczas stosowanych metod opisu analizowanych problemów w postaci równań różniczkowych cząstkowych przez stochastyczne równania różniczkowe cząstkowe, co pozwoli na dalszą poprawę niezawodności projektowanych urządzeń,
- opracowanie systemów doradczych i ekspertowych, wspomagających inżyniera na etapie projektowania, zwłaszcza w razie konieczności uwzględnienia problemu optymalizacji wielokryterialnej, różnych rodzajów uszkodzeń i kryteriów ich wystąpienia oraz zastosowania materiałów o ściśle określonych właściwościach termomechanicznych,
- uwzględnienie wymagań dotyczących ochrony środowiska, jak zastosowanie materiałów przyjaznych dla środowiska oraz możliwość uwzględnienia demontażu i ponownego wykorzystania niektórych elementów urządzenia,
- jednym z istotnych aspektów rozwoju będzie problem „łagodnego” przejście ze skali mikro do skali nano z wykorzystaniem metod modelowania molekularnego w połączeniu z innymi metodami numerycznymi, np. metodą elementów skończonych; niewątpliwie pojawi się konieczność opisu zjawisk, które będą wymagały zastosowania metod modelowania numerycznego obejmującego zarówno fizykę ciągłą, jak i kwantową.

Należy podkreślić, że dzięki pracy tysięcy inżynierów i naukowców z całego świata metody i narzędzia projektowania numerycznego stają się coraz bardziej efektywne,

dokładne, przystępne i łatwe w obsłudze. Celem projektowania numerycznego nie jest jednak wyeliminowanie całkowicie doświadczeń fizycznych, lecz jedynie ograniczenie ich liczby do niezbędnego minimum. Zasadniczym celem jest znalezienie równowagi i wspólnej płaszczyzny wymiany informacji między metodami numerycznymi a tradycyjnymi. Po pierwsze, metody tradycyjne są konieczne do poprawnej identyfikacji i pomiaru danych, takich jak właściwości i modele materiałowe oraz charakterystyki struktur wielowarstwowych, ich połączeń oraz opisu możliwych uszkodzeń i kryteriów ich wystąpienia. Po drugie, wyniki projektowania numerycznego wymagają weryfikacji doświadczalnej. Weryfikacja ta powinna być przeprowadzona w całej analizowanej przestrzeni lub jej istotnej części, włączając w to krytyczne etapy procesu produkcyjnego oraz obciążenia rzeczywiste.

Obecnie, każdy liczący się na rynku elektronicznym producent, np. Siemens, Philips, Nokia czy Sony, prowadzi badania dotyczące niezawodności. Według tych badań większość uszkodzeń powstaje na poziomie montażu elektronicznego, a ich podstawową przyczyną są naprężenia wskutek obciążeń termomechanicznych. Ocenia się, że 70% wszystkich uszkodzeń w montażu elektronicznym występuje właśnie w wyniku tego typu obciążeń, a powodem tych uszkodzeń są w dużej mierze błędy powstałe na etapie projektowania [401]. Z punktu widzenia przemysłu, istotne jest, że wdrożenie metod projektowania numerycznego już po krótkim czasie przynosi korzyści znacznie przekraczające poniesione koszty. Zalety te dostrzegło wiele wiodących na światowym rynku elektronicznym firm. Należy jednak pamiętać, że zaawansowane metody projektowania numerycznego nie stanowią przysłowiowej czarnej skrzynki, która generuje zawsze poprawne wyniki. Metody te mają również swoje słabe strony. Niemniej jednak nie ulega wątpliwości, że projektowanie numeryczne prowadzi do poprawy jakości produktu, obniżenia kosztów produkcji oraz skrócenia czasu projektowania. Zgodnie z regułami rynku jakość oraz funkcjonalność produktu w znacznej mierze decyduje o jego sukcesie, a więc również o opłacalności jego produkcji.

## Bibliografia

- [1] Tarnowski W, Kiczkowiak T, *Komputerowe wspomaganie projektowania*, Wydawnictwo Uczelniane Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie, 1994.
- [2] Wymysłowski A, Bielawski M, *A computer modelling of surface heat source for electron beam hardening*, Proceedings of IVth International Conference on Electron Beam Technologies, Varna, Bulgaria, 1994, 143–148.
- [3] Friedel K, Bielawski M, Felba J, Wymysłowski A, *Modyfikacja własności warstwy wierzchniej stali metodą obróbki cieplnej wiązką elektronową*, Raport wewnętrzny PWr. WEMiF, Wrocław, Praca niepublikowana, 1994.
- [4] Friedel K, Wymysłowski A, *Komputerowa symulacja procesu spawania elektronowego*, Raport wewnętrzny PWr. WEMiF, Wrocław, Praca niepublikowana, 1991.
- [5] Wymysłowski A, Konarski P, Cyrański R, *Numeryczna metoda optymalizacji pompy jonowo-sorpcyjnej ze względu na szybkość pompowania*, Elektronika 1998 R. 39 nr 5, 1998, 27–33.
- [6] Cyrański R, Konarski P, Wymysłowski A, Sobolewski A, *Pompy jonowo-sorpcyjne o podwyższonej stabilności pompowania gazów szlachetnych i aktywnych*, Elektronika 1998 R. 39 nr 5, 1998, 34–39.
- [7] Cyrański R, Konarski P, Wymysłowski A, Sobolewski A, Magielko H, Marks J, Pytkowski S, *Konstrukcja i wyniki badań pomp jonowo-sorpcyjnych PJ-50 i PJ-400*, Wybrane materiały V Krajowej Konferencji Techniki Próżni i V Polsko-Białoruskiego Sympozjum Technologii Próżniowych, Borki, Poland, 1999, 109–112.
- [8] Konarski P, Iwanejko I, Wymysłowski A, *Trawienie jonowe mikrocząstek pyłów zanieczyszczających środowisko*, Wybrane materiały V Krajowej Konferencji Techniki Próżni i V Polsko-Białoruskiego Sympozjum Technologii Próżniowych, Borki, Poland, 1999, 93–96.
- [9] Konarski P, Iwanejko I, Mierzejewska A, Wymysłowski A, *Ion sputtering of microparticles in SIMS depth profile analysis*, Vacuum 2001, Vol. 63, No. 4, 2001, 685–689.
- [10] Friedel K, Felba J, Wymysłowski A, *Informatyczne systemy zarządzania*, Raport wewnętrzny PWr. WEMiF, Wrocław, Praca niepublikowana, 1994.
- [11] Wymysłowski A, *An expert system in field of electron beam welding*, Proceedings of the 5th International Scientific Conference. Gliwice-Wisla, Poland, 1996, 265–268.
- [12] Friedel K, Wymysłowski A, *System ekspertowy w technologii spawania elektronowego*, Elektronika 1997 R. 38 nr 3, 1997, 12–17.
- [13] Friedel K, Felba J, Wymysłowski A, *Zasady konstrukcji systemu doradczego i ekspertowego oraz propozycja programu prac budowy systemu informatycznego dla spawania elektronowego*, Raport wewnętrzny PWr. WEMiF, Wrocław, Praca niepublikowana, 1995.
- [14] Friedel K, Gaczoł M, Wymysłowski A, *Komputerowy system doradczy do spawania elektronowego w próżni*, Proceedings of VI Konferencja Naukowa ELTE 97, Krynica, Poland, 1997, 319–322.
- [15] Friedel K, Wymysłowski A, *Application of an expert system in electron beam welding*, Proceedings of V International Conference on Electron Beam Technologies. EBT '97, Varna, Bulgaria, 1997, 131–136.



- [16] Friedel K, Felba J, Wymysłowski A, *Uruchomienie laboratorium technologii aparatury elektronicznej*, Raport wewnętrzny PWr. WEMiF, Wrocław, Praca niepublikowana, 1997.
- [17] Friedel K, Felba J, Wymysłowski A, *Opracowanie i wdrożenie w ITE metod badania jakości płytek drukowanych i montażu powierzchniowego*, Raport wewnętrzny PWr. WEMiF, Wrocław, Praca niepublikowana, 1996.
- [18] Wymysłowski A, Friedel K, *Modelling of complete silicon pressure sensor structure*, Proceedings of 21st International Spring Seminar on Electronics Technology. ISSE '98, Neusiedl am See, Austria, 1998, 206–209.
- [19] Wymysłowski A, *Optimization of mechanical and electrical properties of the complete silicon pressure sensor structure*, Zastosowanie pakietu ANSYS w mechanice konstrukcji. II Konferencja dydaktyczno-naukowa, Gliwice, Poland, 1998, .
- [20] Wymysłowski A, *FEM modeling and optimization of a piezoresistive silicon pressure sensor structure*, Proceedings of 22nd International Spring Seminar on Electronics Technology, Dresden, Germany, 1999, 282–285.
- [21] Wymysłowski A, *FEM modeling of a piezoresistive silicon pressure sensor*, Proceedings of the 4th International Workshop on Electronics, Control, Measurement and Signals. ECMS '99, Liberec, Czech Republic, 1999, 39–42.
- [22] Wymysłowski A, *FEM modelling of piezoresistive diaphragm for silicon pressure sensors*, Proceedings of 22-nd Conference of the International Microelectronics and Packaging Society Poland Chapter, Zakopane, Poland, 1999, 351–354.
- [23] Wymysłowski A, Friedel K, *The thermo-mechanical analysis of silicon piezoresistive pressure sensors*, Proceedings of the 4th International Seminar in Precision and Electronic Technology. INSEL '99. Warsaw, Poland, 1999, 45–50.
- [24] Wymysłowski A, *Ocena dokładności modelowania numerycznego na przykładzie piezorezystancyjnego krzemowego czujnika ciśnienia*, Proceedings of COE 2000 Conference – Czujniki optoelektroniczne i elektroniczne, Gliwice, Poland, 2000, 462–467.
- [25] Wymysłowski A, *Numerical simulation and assesment of different piezoresistive silicon pressure sensor configurations*, Proceedings of MIXDES 2000 International conference – Mixed design of integrated circuits and systems, Gdynia, Poland, 2000, 309–312.
- [26] Wymysłowski A, *Numerical modelling accuracy assessment and optimization of a piezoresistive silicon pressure sensor*, SPIE Proceedings Series – IV Conference on Optoelectronic and Electronic Sensors, Gliwice, Poland, 2001, 139–148.
- [27] Belavic D, Friedel K, Wymysłowski A, Santo-Zarnik M, *Virtual prototyping of the ceramic pressure sensor*, Proceedings of the 3rd ESIME International Conference on Benefiting from Thermal and Mechanical Simulatin in (Micro)-Electronics, 2002, 38–44.
- [28] Belavic D, Friedel K, Wymysłowski A, Santo-Zarnik M, *Virtual thermo-mechanical prototyping of the ceramic pressure sensor*, Proceedings of IMAPS Conference – Poland Chapter, Cracow, Poland, 2002, 369–374.
- [29] Santo-Zarnik M, Friedel K, Wymysłowski A, Belavic D, *Experimental verification of the finite-element model of a thick-film ceramic pressure sensor*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 305–311.
- [30] Belavic D, Degann A, Dziedzic A, Friedel K, Golonka Leszek, Hrovat Marko, Kita J, Santo-Zarnik M, Wymysłowski A, *Investigations of materials and modelling of sensitivity of thick-film resistors on different substrates for strain-gauge applications*, Proceedings of 14th European Microelectronics and Packaging Conference & Exhibition, Friedrichshafen, Germany, 2003, 448–452.
- [31] Santo-Zarnik M, Belavic D, Friedel K, Wymysłowski A, *Finite-element analysis of a piezoresistive LTCC pressure sensor*, Proceedings of 9th International Symposium for Design and Technology of Electronic Packages, Timisoara, Romania, 2003, 69–73.

- [32] Wymysłowski A, Santo-Zarnik M, Friedel K, Belavic D, *Numerical simulation and experimental verification of the piezoresistivity phenomenon for the printed thick-film piezoresistors*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 359–366.
- [33] Wymysłowski A, Santo-Zarnik M, Belavic D, *Sequential approach to numerical optimization of the LTCC ceramic pressure sensor*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, 2005, 376–383.
- [34] Wymysłowski A, Urbański K, Berlicki T, *Numerical simulation and optimisation of the vacuum microsensor*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, 2005, 576–583.
- [35] Praca zbiorowa pod redakcją: Groszkowski J, Misztal F, Smoleński D, Kulesze Cz, *Encyklopedia techniki – elektronika*, Wydawnictwo NT, Warszawa, 1983.
- [36] Saburo Muroga, *Projektowanie układów VLSI*, WNT, Warszawa, 1986.
- [37] Tummala R.R, *Fundamentals of Microsystem Packaging*, McGraw-Hill, 2001.
- [38] Zhang G.Q.; Graef M.; van Roosmalen F, *Strategic Research Agenda of "More than Moore"*, Proceedings of 7th EuroSime Conference, Como, Italy, 2006, .
- [39] Madiseti V.K, *Electronic System, Platform, and Package Codesign*, esign & Test of Computers, IEEE, Vol. 23, Issue 3, 2006, 220–233.
- [40] Tummala R.R, Madiseti V.K, *System on chip or system on package?*, Design & Test of Computers, IEEE, Vol. 16, Issue 2, 1999, 48–56.
- [41] Friedel K, *Materiały do wykładu "Montaż w elektronice"*, Politechnika Wrocławska, WEMIF, 2006.
- [42] Kisiel R, *Podstawy technologii dla elektroników*, Wydawnictwo btc, 2005.
- [43] ITRS, <http://www.itrs.net>, Strona Internetowa, 2006.
- [44] Praca zbiorowa pod redakcją Migdalskiego J, *Inżynieria niezawodności – poradnik*, ATR Bydgoszcz, ZETOM Warszawa, 1992.
- [45] Montgomery D.C, Runger G.C, *Applied Statistics and Probability for Engineers*, John Wiley & Sons, 2006.
- [46] Gerstenkorn T, Śródka T, *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa, 1983.
- [47] Hines W.W, Montgomery D.C, *Probability and Statistics in Engineering and Management Science*, John Wiley&Sons, New York, 1980.
- [48] Metody statystyczne w zarządzaniu jakością, <http://www.statsoft.pl/>, Strona internetowa, 2006.
- [49] Ricky S.W, Lau D, *Computational Model Validation with Experimental Data from Temperature Cycling Tests of PBGA Assemblies for the Analysis of Board Level Solder Joint Reliability*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 115–120.
- [50] Peng C.T, Chiang K.N, Ku T, Chang K, *Design, Fabrication and Comparison of Lead-free/Eutectic Solder Joint Reliability of Flip Chip Package*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 149–156.
- [51] Hauck T, Bohm C, Muller W.H, *Weibull Statistics for Multiple Flaw Distribution and its Application in Silicon Fracture Prediction*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 242–247.
- [52] Stoeckl S, Pape H, *Design Study for Improved Solder Joint Reliability of VQFN Packages*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 297–304.
- [53] Zukowski E, Deier E, Wilde J, *Correct Modelling of Geometry and of Materials Properties in the Thermo-Mechanical Finite-Elements-Simulation of Chip Scale PACKages*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 545–552.
- [54] Luan J, Tee T.Y, Goh K.Y, Ng H.S, Barton X, Bronner R, Sorrieul M, *Drop Impact Life Prediction Model for Lead-free BGA Packages nad Modules*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 559–565.
- [55] Zahavi E, *Fatigue design – life expectancy of Machine Parts*, A Solomon Press Book, 1996.

- [56] MEVIPRO-Praca Zbiorowa, *Innovative Thermo-Mechanical Prediction and Optimization Methods for Virtual Prototyping of Miniaturised Electronics and Packages and Assemblies*, V Programu Ramowego Unii Europejskiej – numer GRD1-2001-40296, 2002–2006.
- [57] Zhuang W.D, Chang P.C, Chou F.Y, Shiue R.K, *Effect of solder creep on the reliability of large area die attachment*, Microelectronics Reliability, 2001.
- [58] Amagai M, *Chip Scale Package (CSP) solder joint reliability and modeling*, Microelectronics Reliability, 1999, .
- [59] Chen W.T, C.W. Nelson, *Thermal Stresses in Bonded Joints*, IBM Journal Research and Development, Vol. 23, No.2, 1979, 179–188.
- [60] Yuan C, Zhang Q, *Design and Analysis of a Novel Fan-out WLCSP Structure*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 297–304.
- [61] Valtanen J, Heino P, *Reliability Oprimization of Stacked System-in-Package Using FEA*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 313–317.
- [62] Lai Y, Wang T.H, Lee C, Chen H, *Numerical Examination and Experimental Verification of Thermal Performance of Board-level QFP with Unttached Drop-in Heat Spreader*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 380–385.
- [63] MatWeb – Material Property Data, <http://www.matweb.com/>, Strona Internetowa, 2006.
- [64] Meuwissen M.H.H, Veninga E.P, Tjindink M.W.W.J, Meijerink M.G.H, *Computer Assisted Design Study of a Low-Cost Pressure Sensor*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 516–523.
- [65] Erinic M, Schreurs P.J.G, Zhang G.Q, Geers M.G.D, *Reliability of SnAgCu Solder Balls in Packaging*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 656–660.
- [66] Chaillot A.G, Munier C, Michaud M, *Microprocessor Packaging Strategy: Reliability of Various Flip Chip BGA Packages on Different Printed Circuit Boards*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 323–327.
- [67] Pecht M.G, et al, *Electronic Packaging: Materials amd Their Properties*, CRC Press, 1999.
- [68] Slattery O.F, Kelly G, Greer J, *Thermal and Mechanical Problems in Microelectronics*, Proceedings of 1st EuroSimE Conference, The Netherlands, 2000, 17–26.
- [69] Wolf de I, *Reliability of MEMS*, Proceedings of 7th EuroSime Conference, Como Italy, 2006, 716–721.
- [70] Dyląg Z, Jakubowicz A, Orłoś Z, *Wytrzymałość materiałów – tom 1*, WNT, Warszawa, 2003.
- [71] Nowacki W, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa, 1970.
- [72] Jakubowicz A, Orłoś Z, *Wytrzymałość materiałów*, WNT, Warszawa, 1984.
- [73] Nye J.F, *Własności fizyczne kryształów w ujęciu tensorowym i macierzowym*, PWN, Warszawa, 1962.
- [74] Gniazdowski Z, *Krzemowe piezorezystywne czujniki wielkości mechanicznych – teoretyczne i praktyczne aspekty modelowania i konstrukcji*, Instytut Technologii Elektronowej, Warszawa, 2005.
- [75] Fung Y.C, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa, 1969.
- [76] Landau L.D, Lifszyc E.M, *Teoria sprężystości – fizyka teoretyczna*, PWN, Warszawa, 1993.
- [77] Wymysłowski A, *Reliability prediction of the solder joints in electronic packages*, Proceedings of IMAPS Conference – Poland Chapter, Cracow, Poland, 2002, 375–381.
- [78] Zhang G.Q, Driel van W.D, Fan X.J, *Mechanics of Mircroelectronics*, Springer, 2006.
- [79] Walczak J, *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*, PWN, Warszawa, 1978.
- [80] Blicharski M, *Wstęp do inżynierii materiałowej*, WNT, Warszawa, 2003.
- [81] William D, Callister Jr, *Materials Science and Engineering – An Introduction*, John Wiley & Sons, Inc, 2006.
- [82] Orłoś Z, *Napreżenia cieplne*, PWN, Warszawa, 1991.

- [83] Yang A.J, Yang C, Liang C, Lai J.Y, Wang Y.P, Hsiao C.S, *An Investigation of Thermal Enhancement of MPM BGA Package*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 267–272.
- [84] Rodgers P, *Prediction of Microelectronics Thermal Behavior in Electronic Equipment: Status, Challenges and Future Requirements*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 29–39.
- [85] Davies M, *From Macroscopic Cooling to Microscopic Reliability*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 17–29.
- [86] Behnia M, *Cooling Problems and Thermal Issues in High Power Electronics – A Multi Faceted Design Approach*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 519–526.
- [87] Lasance C.J.M, *Sense and Nonsense of Heat Transfer Correlation Applied to Electronics Cooling*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 8–16.
- [88] Eveloy V, Rodgers P, Hashami M, *Numerical Prediction of Electronic Component Operational Temperature: A Perspective*, IEEE CPT, Vol. 27, 2004, 268–282.
- [89] Karimpourian B, Mahmoudi J, *Some Important Considerations in Heatsink Design*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 406–413.
- [90] Rodgers P, Eveloy V, Pecht M.G, *Extending the Limits of Air-Cooling in Microelectronic Equipment*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 695–702.
- [91] Tuckerman D.B, Pease R.F.W, *High Performance Heat Sinking for VLSI*, IEEE Electron Device Letters, Vol. EDL-2, no 5, 1981, 126–129.
- [92] Punch J, *Point-of-Source Thermal Management*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 688–694.
- [93] Dhisa K, Bailey C, Pericleous K, *Low Reynolds Number Models for Accurate Thermal Simulation of Electronic Components*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 483–490.
- [94] Sabry M.N, Djebedjian B.O, Saleh S.H, Mahgoub M.M, *Modeling Heat Transfer and Liquid Flow in Micro-Channels*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 511–518.
- [95] Salleras M, Palacin J, Puig M, Samitier J, Marco S, *Development of a Compact Thermal Model for a Micro-Pyrotechnic Actuator*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 299–304.
- [96] Bohm C, Hauck T, Rudnyi E.B., *Compact Electro-thermal Models of Semiconductor Devices with Multiple Heat Sources*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 101–104.
- [97] Feuillet V, Gatto V, Scudeller Y, Jarny Y, *Tri-dimensional Reduced-order Thermal Model of Stacked Electronic Structures*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 423–428.
- [98] Shailesh Y, Vaidy A, Razani A, *Thermal Modeling of Steady State Contact Resistance Between Two Dissimilar Materials*, Journal of Franklin Institute, Vol. 335B, no 8, 1998, 1493–1506.
- [99] Yeh C.L, Wen C.Y, Chen Y.F, Yeh S.H, Wu C.H, *An experimental investigation of thermal contact conductance across bolted joints*, Experimental Thermal and Fluid Science, Vol. 25, 2001, 349–357.
- [100] Joshi Y, Baelmans M, Copeland D, Lasance C.J, Parry J, Rantala J, *Challenges in thermal modeling of electronics at the system level*, Microelectronics Journal, Vol. 32, 2000, 797–800.
- [101] Friedel K, Wymysłowski A, *An Approach to Numerical Simulation of Thermal Contact Problems in Modern Electronic Packages*, Journal of Microelectronics and Electronic Packaging, vol.1, no 1, 2004, 39–46.
- [102] Friedel K, Wymysłowski A, *An approach to numerical simulation of thermal contact problems in modern electronic packages*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 183–189.
- [103] Falat T, Felba J, Friedel K, Wymysłowski A, *Simulation based approach to thermal contact properties assessment in modern electronic packages*, Proceedings of the 10th MIXDES 2003 Conference Lodz, Poland, 2003, 361–366.

- [104] Wymysłowski A, Friedel K, Felba J, Fałat T, *An experimental-numerical approach to thermal contact resistance*, Proceedings of International Workshop on THERMal INvestigation of ICs and Systems. THERMINIC, Aix-en-Provence, France, 2003, 161–172.
- [105] Zhang G.Q, Tay A, Ernst L.J, *Virtual thermo-mechanical prototyping of electronic packaging – Bottlenecks and solutions of damaging modelling*, 3rd Electronic Packaging Technology Conference (EPTC), Singapore, 2000, 263–269.
- [106] Fałat T, Felba J, Wymysłowski A, *Improved method for thermal conductivity measurement of polymer based materials for electronic packaging*, Proceedings of XXVIII International Conference of International Microelectronics and Packaging Society Poland Chapter, Wrocław, Poland, 2004, 219–222.
- [107] Becker M, *Heat Transfer: A Modern Approach*, Plenum Press, New York, 1986.
- [108] Fałat T, Felba J, Friedel K, Wymysłowski A, *Metody analizy właściwości termicznych polimerowych materiałów kompozytowych*, Raport wewnętrzny PWr. WEMiF, Wrocław, Praca niepublikowana, 2005.
- [109] Salgon J.J, Robbe-Valloire F, Blouet J, Bransier J, *A mechanical and geometrical approach to thermal contact resistance*, International Journal of Heat & Mass Transfer, Vol. 40, no 5, 1997, 1121–1129.
- [110] Wymysłowski A, Fałat T, Friedel K, Felba J, *Numerical simulation and experimental verification of the thermal contact properties of the polymers bonds*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 177–183.
- [111] Liu Y, Irving S, Desbiens D, Luk T, *Simulation and Analysis for Package Assembly Manufacture*, Proceedings of 7th EuroSime Conference, Como, Italy, 2006, 180–189.
- [112] Wachutka G, *Multi\_Energy Domain Modeling of Microdevices: Virtual Prototyping by Predictive Simulation*, Proceedings of 7th EuroSime Conference, Como Italy, 2006, 758–763.
- [113] Liu Y, Irving S, Desbiens D, Luk T, *Impact of the Die Attach Process on Power&Thermal Cycling for a Discrete Style Semiconductor Package*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 221–226.
- [114] Steenberge N.V, Vandeveld B, Schildermans I, Willems G, *Analytical and Finite Element Models of the Thermal Behavior for Lead-free Soldering Processes in Electronic Assembly*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 675–680.
- [115] Orain S, Barbe J.C, Federspiel X, Legallo P, Jaouen H, *FEM-based Method to Determine Mechanical Stress Evaluation During Process Flow in Microelectronics. Application to Stress-voiding*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 47–52.
- [116] Huber M.T, *Stereo-mechanika techniczna: wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa, 1958.
- [117] Wymysłowski A, Vandeveld B, Andersson D, *Thermal, mechanical and multi-physics simulation and experiments in micro-electronics and micro-systems*, Microelectronics Reliability, vol.47, 2007, 159–160.
- [118] Matkowski P, Wymysłowski A, Felba J, *Application of Molecular Modeling as a Novel Promising Numerical Tool in Microelectronics*, Proceedings of XXX IMAPS Poland Chapter Conference, Cracow, Poland, 2006, 509–516.
- [119] Dasgupta A, *Computational Challenges for Reliability Assessment of Next-Generation Micro&Nano Systems*, Proceedings of 7th EuroSime Conference, Como, Italy, 2006, 11–13.
- [120] Richardson A, Slattery O, Rencz M, *Design for Micro & Nano Manufacture – The "PATENT-DfMM Network of Excellence: Modelling & Simulation Cluster"*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 63–67.
- [121] Iwamoto N, Bonne U, *Molecular Modeling of Analyte Adsorption on MEMS GC Stationary Phases*, Proceedings of 7th EuroSime Conference, Como Italy, 2006, 749–757.
- [122] Fan H.B, Chan E.K.L, Wong C.K.Y, Yuen M.M.F, *Thermal Cycling Simulation in Electronic Packages Using Molecular Dynamic Method*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 36–40.
- [123] Zhang G.Q, Stehouwer H.P, *Simulation-based optimization in virtual thermo-mechanical prototyping of electronic packages*, Proceedings of 1st EuroSimE Conference, The Netherlands, 2000, 151–164.

- [124] Stoyanov S, Bailey C, *Optimisation and Finite Element Analysis for Reliable Electronic Packaging*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 391–398.
- [125] Driel van W.D, Grech A.M, Hauck T, Schmadlak I, Zhang X, Orain S, *Virtual Prototyping Based Design Optimization of the Substrate, Leadframe and Flip Chip Package Families with Low-k Technology*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 583–588.
- [126] Ohtomi K, *Importance of Upstream Design in Product Development and Its Methodology*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 17–18.
- [127] Lee C.C, Lee C.C, Chiang K.N, *Thermal Performance and Solder Joint Reliability for Board Level Assembly of Modified Leadframe package*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 553–558.
- [128] Zhang G.Q, *The challenges of virtual prototyping and qualification for future microelectronics*, Journal of Microelectronics Reliability, Vol. 43, 2003, 1777–1785.
- [129] Zhang G.Q, Janssen J, Ernst L.J, Bisschop J, Liang Z.N, Kuper F, Schravendeel, *Virtual thermo-mechanical prototyping of electronic packaging using Philips' optimization strategy*, IMAPS2000, USA, 2000, .
- [130] Yuan C.A, Han C.N, Chiang K.N, *Design and Analysis of Novel Glass WLCSP Structure*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 279–285.
- [131] Langtangen H.P, *Computational Partial Differential Equations: Numerical Methods and Diffpack Programming*, Springer, 2002.
- [132] Thompson E.G, *Introduction to the Finite Element Method*, John Wiley & Sons, 2005.
- [133] Beer G, *Programming the Boundary Element Method: An Introduction for Engineers*, John Wiley & Sons, 2001.
- [134] LeVeque R.J, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.
- [135] Turner M.J, Clough R.W, Martin H.C, Topp L.J, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, Journal of Aerospace Science, Vol. 23, 1956, 805–824.
- [136] Zienkiewicz O.C, *Metoda Elementów Skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.
- [137] Zienkiewicz O.C, Morgan K, *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, 1983.
- [138] Zienkiewicz O.C, *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill Book Company, London, 1971.
- [139] Zienkiewicz O.C, Taylor R.L, *The Finite Element Method: Volumes 1–3*, Butterworth-Heinemann, London, 2000.
- [140] Szmelter J, *Metody komputerowe w mechanice*, PWN, Warszawa, 1980.
- [141] Landau L, Lifszyc E, *Mechanika*, PWN, Warszawa, 1961.
- [142] Kleiber M, *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa, 1985.
- [143] Praca zespołowa pod redakcją M. Kleibera, *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych. Mechanika Techniczna*, PWN, Warszawa, 1995.
- [144] Michlin S.G, Smolicki C.L, *Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*, PWN, Warszawa, 1972.
- [145] Bronsztejn I.N, Sieniedajew K.A, *Matematyka – poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa, 1976.
- [146] Kreyszig E, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, 2006.
- [147] Adams V, Askenazi A, *Building Better Products with Finite Element Analysis*, OnWord Press, 1999.
- [148] Rzepka S, *Automated FEM Mesh Optimization for Nonlinear Problems Based on Error Estimation*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Belgium, 2004, 201–209.
- [149] Zienkiewicz O.C, Boroomand B, Zhu J.Z., *Recovery Procedures in Error Estimation and Adaptivity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 176, 1999, 11–25.
- [150] Montgomery D.C, *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons Inc, 2005.

- [151] Mańczak K, *Technika planowania eksperymentu*, WNT, Warszawa, 1976.
- [152] Rafajłowicz E, *Optymalizacja eksperymentu – z zastosowaniami w monitorowaniu jakości produkcji*, Oficyna Wydawnicza PWR, Wrocław, 2005.
- [153] Trocine L, Malone L.C, *Finding Important Independent Variables Through Screening Designs: a Comparison of Methods*, Proceedings of 2000 Winter Simulation Conference, 2000, 749–754.
- [154] Beauregard M.R, Mikulak R.J, Olson B.A, *Experimenting for Breakthrough Improvement*, Resource Engineering, 1989.
- [155] Green T.J, Launsby R.G, *Using DOE to Reduce Costs and Improve the Quality of Microelectronic Manufacturing Processes*, The International Journal of Microcircuits and Electronic Packaging, Vol. 18, no 3, 1995, 290–296.
- [156] Simpson T. W, Peplinski J, Koch P. N, Allen J. K, *On the Use of Statistics in Design and the Implications for Deterministic Computer Experiments*, Proceedings of DETC'97, ASME Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, California, 1997, .
- [157] Raferty A.E, Madigan D, *Bayesian Model for Linear Regression Models*, Journal of the American Statistical Association, 1998, 179–191.
- [158] Sadowski W, *Statystyka matematyczna*, PWE, Warszawa, 1969.
- [159] Ross P.J, *Taguchi Techniques for Quality Engineering*, McGraw-Hill Book Company, 1988.
- [160] Hines W.W, Montgomery D.C, *Probability and Statistics in Engineering and Management Science*, John Wiley & Sons, 1990.
- [161] Todoroki A, *Teach Yourself Response Surface Methodology*, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan, .
- [162] Greenwood A.G, Rees L.P, Siochi F.C, *An Investigation of the Behavior of Simulation Response Surfaces*, European Journal of Operational Research, Vol. 110, 1998, 282–313.
- [163] Chen J, Wolf de I, *Micro-Raman spectroscopy study of the mechanical stress induced by BGA-assembly and validation by FEM*, Journal of Microelectronics International, Vol. 18, no 2, 2001, .
- [164] Myers R. H, Khuri A. I, Carter W. H, *Response Surface Methodology: 1996–1988*, Technometrics, Vol. 31, no 2, 1989, 137–157.
- [165] Wu A, Wu K.Y, Chen R.M.M, Shen Y, *Parallel Optimal Statistical design Method with Response Surface Modelling using Genetic Algorithms*, IEEE Proc.-Circuit Devices Syst, Vol. 145, no. 1, 1998, 7–12.
- [166] Salgon J.J, Robbe-Valloire F, Blout J, Bransie J, *A mechanical and geometrical approach to thermal contact resistance*, Pergamon, International Journal of Heat Mass Transfer, Vol. 40, no 5, 1997, 1121–1129.
- [167] Powell M.J.D, *A direct search optimisation method that models the objective and constraint functions by linear interpolation*, Proceedings of SIAM Conference, 1996, .
- [168] Conn A.R, and Toint Ph.L, *An algorithm using quadratic interpolation for unconstrained derivative free optimisation*, Nonlinear Optimization and Applications, Plenum Publishing, 1996, 27–47.
- [169] Volk W, *Statystyka stosowana dla inżynierów*, WNT, Warszawa, 1973.
- [170] Montgomery D.C, *Introduction to Statistical Quality Control*, John Wiley & Sons, 1996.
- [171] Doty L.A, *Statistical Process Control*, Industrial Press, 1996.
- [172] Taguchi G, *The System of Experimental Design: Engineering Methods to Optimize Quality and Minimize Costs*, Quality Resources, 1987.
- [173] Taguchi G, *Taguchi Methods: Signal-To-Noise Ratio for Quality Evaluation*, Irwin Professional Publishing, 1993.
- [174] Taguchi G, *Taguchi Methods: On-Line Production*, Irwin Professional Publishing, 1994.
- [175] Xu L, Reinikainen T, Ren W, *A Simulation-based Multi-Objective Design Optimization of Electronic Packaging under Thermal Cycling and Bend Loading*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 485–490.

- [176] Mitchell M, *An Introduction to Genetic Algorithms*, IEEE Digital Library, 2004.
- [177] Codreanu I, Obreja V.V.N, Codreanu C, *Application of GAs to Optimization of Heat Transfer in Micro-Channels*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 597–603.
- [178] Sawaragi Y, Nakayama H, Tanino T, *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, 1985.
- [179] Collette Y, Siarry P, *Multiobjective optimization: principles and case studies*, Springer, 2004.
- [180] Six Sigma, <http://www.isixsigma.com/>, Strona internetowa, 2006.
- [181] Taguchi G, Chowdhury S, Wu Y, *Taguchi's Quality Engineering Handbook*, Wiley-Interscience, 2004.
- [182] Hertog den D, Stehouwer P, *Product and Process Optimization with Simulation*, Proceedings of ESIME'2000 Conference on Benefiting from Thermal and Mechanical Simulation in Micro-Electronics, 2000, 179–192.
- [183] Stachurski A, Wierzbicki A. P, *Podstawy optymalizacji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej; Warszawa, 2001.
- [184] Hooke R, Jeeves T.A, *Direct search solution of numerical and statistical problems*, Journal of the Association for Computing Machinery (ACM) 8, 1961, 212–229.
- [185] Nelder J.A, Mead R, *A simplex method for function minimization*, The Computer Journal, Vol. 7, 1965, 308–313.
- [186] Powell M.J.D, *An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives*, The Computer Journal, Vol. 7, 1964, 155–162.
- [187] Torczon V.J, *On the convergence of the search algorithm*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 1, 1991, 123–145.
- [188] Torczon V.J, *On the convergence pattern search algorithms*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 7, 1997, 1–25.
- [189] Lewis R.M, Torczon V.J, *Pattern search methods for linearly constrained minimization*, ICASE Technical report 98–3, 1998.
- [190] Gill P.E, Murray W, Wright M.H, *Practical Optimization*, Academic Press Inc, 1981.
- [191] Hertog den D, *Interior Point to Linear, Quadratic and Convex Programming: Algorithms and Complexity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [192] Powell M.J.D, *A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation*, Advances in Optimization and Numerical Analysis, Vol. 275, 1994, 51–67.
- [193] Toropov V.V, *Multipoint approximation method in optimization problems with expensive function values*, Computational Systems Analysis, Elsevier, 1992, 207–212.
- [194] Toropov V.V, Filatov A.A, Polynkine A.A, *Multiparameter structural optimization using FEM and multipoint explicit approximations*, Structural Optimization, Vol. 6, 1993, 7–14.
- [195] Conn A.R, Toint Ph.L, *An algorithm using quadratic interpolation for unconstrained derivative free optimization*, Nonlinear Optimization and Applications, Plenum Publishing, 1996, 27–47.
- [196] Conn A.R, Scheinberg K, Toint Ph.L, *On the convergence of derivative-free methods for unconstrained optimization*, Approximation Theory and Optimization, Cambridge University Press, 1997, 83–108.
- [197] Barteley J, Haftka R.T, *Approximation concepts for optimum structural design – a review*, Structural Optimization, Vol. 5, 1993, 129–144.
- [198] Booker A.J, Dennis J.E, Frank P.D, Serafini D.B, Torczon V.J, Trosset M.W, *A rigorous framework for optimization of expensive functions by surrogates*, Structural Optimization, Vol. 17, 1999, 1–3.
- [199] Dennis J.E, Torczon V.J, *Managing approximation models in optimization*, Multidisciplinary Design Optimization, 1997, 330–347.
- [200] Montgomery D.C, *Design and Analysis of Computer Experiments*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [201] Myers R.H, *Response surface methodology – current status and future directions*, Journal of Quality Technology, Vol. 31, 1999, 30–44.



- [202] Sachs J, Welch W.J, Mitchel T.J, Wynn H.P, *Design and analysis of computer experiments*, Statistical Science, Vol. 4, 1989, 409–435.
- [203] Schoofs A.J.G, *Experimental design and structural optimization*, Ph.D. Thesis, Technical University of Eindhoven, 1987.
- [204] Sobieszanski-Sobieski J, Haftka R.T, *Multidisciplinary aerospace design optimization: survey of recent developments*, Structural Optimization, Vol. 14, 1997, 1–23.
- [205] Hertog den D, Stehouwer P, *High-Cost Nonlinear Programming*, European Journal of Operational Research, Vol. 140, no 2, 2002, 197–211.
- [206] Driel van W, Peer van den J, Tzannetakis N, Wymysłowski A, Zhang Q, *Advanced numerical prototyping methods in modern engineering applications*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 211–218.
- [207] Wymysłowski A, Driel W. van, Zhang Q, Peer J. van de, Tzannetakis Nick, *Smart and sequential approach to numerical prototyping in micro-electronic applications*, Proceedings of XXVIII International Conference of International Microelectronics and Packaging Society Poland Chapter, Wrocław, Poland, 2004, 421–425.
- [208] Wymysłowski A, Driel W. van, Zhang Q, Peer J. van de, Tzannetakis N, *Smart and sequential approach to numerical prototyping in micro-electronic applications*, Journal of Microelectronic Packaging, Vol. 2, no 1, 2005, 1–7.
- [209] Wang G, Dong Z, Aitchison P, *Adaptive Response Surface Method: A Global Optimization Scheme for Computation-intensive Design Problems*, Journal of Engineering Optimization, Vol. 33, no 6, 2001, 707–734.
- [210] Wang G, *Adaptive Response Surface Method Using Inherited Latin Hypercube Design Points*, Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 125, 2003, 210–220.
- [211] Edwards I.M, Jutan A, *Optimization and control using response surface methods*, Computers and Chemical Engineering, Vol. 21, no 4, 1997, 441–453.
- [212] Schagen I.P, *Sequential Exploration of Unknown Multi-dimensional Functions as an Aid to Optimization*, IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 4, 1984, 337–347.
- [213] Stehouwer P, Hertog D, *Simulation-based Design Optimisation: Methodology and applications*, Proceedings of 1st ASMO UK on Engineering Design Optimization, 1999, .
- [214] Bowden R.O, Hall J.D, *Simulation optimisation research and development*, Simulation Conference Proceedings, Vol. 2, 1998, 693 – 698.
- [215] Driel van W.D, Peer van de J, Tzannetakis N, Wymysłowski A, Zhang G.Q, *Advanced Numerical Prototyping Methods in Modern Engineering Applications*, Proceedings of the 5th International Conference on Thermal and Mechanical Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems, 2004, 211–218.
- [216] Wymysłowski A, Driel van W.D, Zhang G.Q. , Peer van de J, Tzannetakis N, *Smart and Sequential Approach to Numerical Prototyping in Micro-Electronic Application*, Journal of Microelectronics Packaging, Vol. 2, no 1, 2005, 1–7.
- [217] Wymysłowski A, Driel van W.D, Peer van de J, Tzannetakis N, Zhang G.Q, *Advanced numerical prototyping methods in modern engineering applications – Optimisation for micr-electronic package reliability*, Microelectronics Reliability, vol.47, 2007, 280–289.
- [218] Ivanov M.A, Kozłowski M, Piesiewicz T, Stephanovich V.A, Weron A, Wymysłowski A, *The lineshape of inelastic neutron scattering in the relaxor ferroelectrics*, Fizika Tverdavo Tela, t. 47 vyp. 10, 2005, 1852–1860.
- [219] Ghiocel D.M, *Stochastic Field Models for Approximating Highly Nonlinear Random Responses*, Proceedings of ASCE Engineering Mechanics Conference, New York, USA, 2002, 576.
- [220] Sacks J, Schiller S.B, Welch W.J, *Design for Computer Experiments*, Technometrics, Vol. 31, no 1, 1989, 41–47.

- [221] Franke R, *Scattered data interpolation: tests of some methods*, Mathematics Computational, Vol. 48, 1982, 181–200.
- [222] Wang B.P, *Parameter optimization in multiquadric response surface approximations*, Structural And Multidisciplinary Optimization, Vol. 26, 2004, 219–223.
- [223] Wymysłowski A, *Numeryczne metody optymalizacyjne w projektowaniu montażu elektronicznego. Numerical Optimization Methods in Prototyping of Microelectronic Packaging*, Raport wewnętrzny PWr. WEMiF, Wrocław, Praca niepublikowana, 2003.
- [224] Friedel K, Felba J, Wymysłowski A, *Numeryczne metody projektowania w dziedzinie montażu elektronicznego*, Raport wewnętrzny PWr. WEMiF, Wrocław, Praca niepublikowana, 2004.
- [225] Brajewski S, *Opracowanie jądra programu komputerowego do projektowania numerycznego w języku programowania C/C++*, Praca dyplomowa pod kierunkiem dr inż. A. Wymysłowskiego, 2006.
- [226] Dowhań Ł, Wymysłowski A, Dudek R, Auersperg J, *Parametric Approach to Numerical Design for Optimization of Stacked Packages*, Proceedings of 1st ESTC Conference, Drezden, Germany, 2006, 1194–1202.
- [227] Dowhań Ł, Wymysłowski A, Dudek R, Auersperg J, *Numerical Approach to Optimization of Stacked Packages*, Proceedings of XXX IMAPS Poland Chapter Conference, Cracow, Poland, 2006, 283–288.
- [228] Tee T.Y, Barton X, Lim M, Ng H.S, Zhong Z, *Design and Optimization of Wirebond Stacked Die BGA Packages for Improved Board Level Solder Joint Reliability*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 207–231.
- [229] Bullema J.E, Meuwissen M.H.H, Veninga E.P, *Design Study for Stacked MEMS*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 279–283.
- [230] Noritake C, Limaye P, Gonzalez M, Vandeveld B, *Thermal Cycle Reliability of 3D Chip Stacked Package Using Pb-free Solder Bumps: Parametric Study by FEM Analysis*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 237–242.
- [231] Dellutri M. et al, *1Gb Stacked Solution of Multilevel NOR Flash Memory Packaged in a LFBGA 8 mm by 10mm by 1.4 mm thickness*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 471–475.
- [232] Egan E, Kelly G, O'Donovan T, Kennedy P, *Response Surface Methodology for Enhancing Theoretical Models: Application to Warpage Prediction of CSP BGAs*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 221–228.
- [233] Zewi I.G, Daniel I.M, Gotro J.T, *Residual Stresses and Warpage on Woven-Glass/Epoxy Laminates*, Experimental Mechanics, 1987, 44–50.
- [234] Zwemer D. et al, *PWB Warpage Analysis and Verification using and AP210 Standards-based Engineering Framework and Shadow Moire*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 121–131.
- [235] Kącki E, *Równania różniczkowe cząstkowe*, WNT, Warszawa, 1992.
- [236] Malczewski J, Piekarski M, *Modele procesów transportu masy, pędu i energii*, PWN, Warszawa, 1992.
- [237] Wymysłowski A, *Modelowanie MES naprężeń termicznych i mechanicznych w montażu układów elektronicznych i mikrosystemów*, Raport wewnętrzny Pwr. WEMiF, Wrocław, Praca niepublikowana, 2001.
- [238] Silfhout van R.B.R, Roustant J.D, Driel van W.D, Li Y, Zhang G.Q, Yang D.G, *Effects of Delamination of IC/Compound Interface on Passivation Cracking*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 353–358.
- [239] Dudek R, Walter H, Zapf J, Michel B, *Investigations on Low Cycle Fatigue of Electrodeposited Thin Copper and Nickel Films*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 381–388.
- [240] Lim C.T, *Numerical Simulation of the Drop Impact Response of Portable Electronic Product*, IEEE Trans-CPMT-A, Vol. 25, no 3, 2002, 478–485.

- [241] Ren W, Wang J, *Assembly-Induced Stress and Its Effect on the Integrity of Assembly System in Drop Simulation*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 127–133.
- [242] Yeh Ch, Lai Y, *Impact Force Characteristics of Package Level Solder Joints Under Ball Impact Test*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 145–151.
- [243] Heaslip G.M, Punch J.M, Rodgers B.A, Ryan C, Reid M, *A Stress-Life Methodology for Ball Grid Array Lead-Free and Tin-Lead Solder Interconnects Under Impact Conditions*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 277–284.
- [244] Yeh C.L, Lai Y.S, *Transient Analysis of Impact Fracturing of Solder Joints*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 503–509.
- [245] Tee T.Y, Luan J.L, Pek E, Lim E.T, Zhong Z, *Novel Numerical and Experimental Analysis of Dynamic Responses under Board Level Drop Test*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 133–140.
- [246] Darveaux R, Banerji K, *Constitutive Relations for Tin-based Solder Joints*, IEEE Transactions on Components, Hybrids and Manufacturing Technology, Vol. 15, no 6, 1992, 1013–1024.
- [247] Vandenvelde B, Gonzalez M, Limaye P, Ratchev P, Beyne E, *Thermal Cycling Reliability of SnAgCu and SnPb Solder Joints: A Comparison for Several IC-Packages*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 565–570.
- [248] Pang J.H.L, Xiong B.S, Che F.X, *Modeling Stress Strain Curves for Lead-Free SnAgCu Solder*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 449–453.
- [249] The Nordic Electronics Packaging Guideline, <http://extra.ivf.se/ngl/>, Strona internetowa, 2006.
- [250] Horsting C. W, *Purple Plague and Gold Purity*, Proceedings of 10th Annual IEEE Reliability Symposium, USA, 1972, 155–158.
- [251] Dziuban J, *Technologia i zastosowanie mikromechanicznych struktur krzemowych i krzemowo-szklanych w technice mikrosystemów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2002.
- [252] Degryse D, Vandeveld B, Beyne E, *Cu Bonding to Cu Low K Wafers: a Systematic Study of the Mechanical Bonding Process*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 41–48.
- [253] Plaza J.A, Gonzalez E, Esteve J, *FEM of Anodic Bonding Test Structures*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 366–370.
- [254] Skrzypek J, *Teoria plastyczności i pełzania*, Politechnika Krakowska, Kraków, 1980.
- [255] Żółkiewicz D, *Ocena wpływu skali analizy na dokładność modelowania numerycznego w technice mikrosystemów*, Praca dyplomowa pod kierunkiem dr inż. Artura Wymysłowskiego, 2001.
- [256] Timoshenko S.P, *Analysis of Bi-Metal Thermostats*, Journal of the Optical Society of America, Vol. 11, 1925, 233–255.
- [257] Suhir E, *Stresses in Bi-Metal Thermostats*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, 1986, 657–660.
- [258] Hess MS, *The End Problem for Laminated Elastic Strip – I The General Solution*, Journal of Composite Materials, Vol. 3, 1969, 262–281.
- [259] Eischen J, Chung C, Kim J, *Realistic Modelling of Edge Effects Stresses in Bimaterial Elements*, Journal of Electronic Packaging, Vol. 112, 1990, 16–23.
- [260] Suján D, Murthy M.V.V, Seetharamu K.N, Hassan A.Y, *Complete Model for Interfacial Stresses of a Two Layered Structure*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 454–461.
- [261] Kinsella C, Moore T.D, Jarvis J.L, *Exact Modelling of Stress Fields in Bimaterial Beams Using Readily Available Mathematical Software*, Proceedings of 7th EuroSime Conference, Como, Italy, 2006, 355–361.
- [262] Suhir E, *Interfacial Stresses in Bi-material Thermostats*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 56, 1989, 595–600.
- [263] Gu B, Phelan P, *Thermal Peeling Stress Analysis of Thin-Film High Tc Superconductors*, Applied Superconductivity, Vol. 6, no 1, 1998, 19–29.

- [264] Ru C.Q., *Interfacial Thermal Stresses in Bimaterial Beams: Modified Beam Models Revisited*, ASME Journal of Electronic Packaging, Vol. 124, no 1, 2002, 141–146.
- [265] Moore T.D., Jarvis J.L., *A Simple and Fundamental Design Rule for Resisting Delamination in Bimaterial Structures*, Microelectronics Reliability, Vol. 43, 2003, 487–494.
- [266] Mutermilch J., *Wytrzymałość materiałów*, Arkady, Warszawa, 1974.
- [267] Praca zbiorowa pod redakcją J. Mutermilcha, *Wytrzymałość materiałów*, Arkady, Warszawa, 1974.
- [268] Wu J.D., Huang C.Y., Liao C.C., *Fracture strength characterization and failure analysis of silicon dies*, Microelectronics Reliability, Vol. 43, 2003, .
- [269] Wyrzykowski J.W., Pleszakow E., Sieniawski J., *Odkształcenie i pękanie metali*, WNT, Warszawa, 1999.
- [270] Zhang G.Q., van Driel W.D., Fan X.J., *Mechanics of Microelectronics*, Springer, 2006.
- [271] Ashby M.F., Jones D.R.H., *Materiały inżynierskie – właściwości i zastosowania*, WNT, Warszawa, 1995.
- [272] Ridout S., Dusek M., Bailey C., Hunt C., *Finite Element Modelling of Crack Detection Tests*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 141–146.
- [273] Brocks W., Cornec W., Scheider I., *Computational Aspects of Nonlinear Fracture Mechanics*, Comprehensive Structure Integrity, Vol. 3, 2003, 127–209.
- [274] Wilson W.K., Yu I.W., *The use of the J-Integral in Thermal Stress Crack Problems*, International Journal of Fracture, Vol. 15, no 4, 1979, .
- [275] Yuuki R., Cho S.B., *Efficient Boundary Element Calculation of Stress Intensity Factors for Interface Cracks in Dissimilar Materials*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 9, 1977, 931–938.
- [276] Rybicki E.F., Kanninen M.F., *A Finite Element Calculation of Stress Intensity Factors by a Modified Crack Closure Integral*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 9, 1977, 931–938.
- [277] Rice J.R., Sih G.C., *Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, 1965, 418–423.
- [278] Tay A.A.O., *The Role of Simulation in Failure Prediction and Design Optimization in Electronics Packaging*, Proceedings of 7th EuroSime Conference, Como, Italy, 2006, 26–33.
- [279] Tay A.A.O., *Modeling of Interfacial Delamination in Plastic IC Packages Under Hygrothermal Loading*, ASME Journal of Electronic Packaging, 2005, 268–275.
- [280] Yuen M.M.F., Fan H., *Delamination of Electronic Packages*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 15–21.
- [281] Shih C.F., *Cracks on Bimaterial Interfaces: Elasticity and Plasticity Aspects*, Material Science Engineering, Vol. A143, 1991, 77–90.
- [282] Lau J.H., *Low Cost Flip Chip Technologies: for DCA, WLCSP and PBGA Assemblies*, McGraw-Hill, 2000.
- [283] Thijsse J., van Driel W.D., van Gils M.A.J., van Sluis O., *Interfacial Adhesion Method for Semiconductor Applications Covering the Full Mode Mixture*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 422–426.
- [284] Kravchenko G., Bagdahn J., *Fracture and Delamination of Thin Multilayers on Ultra-thin Silicon*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 419–422.
- [285] Shih C.F., *Cracks on Bimaterial Interfaces: Elasticity and Plasticity Aspects*, Materials Science and Engineering, A143, 1991, 77–90.
- [286] Reeder J.R., Crews J.R., *Mixed-Mode Bending Method for Delamination Testing*, AIAA Journal, Vol. 28, no 7, 1990, 1270–1276.
- [287] Auersperg J., Kieselstein E., Schubert A., Michel B., *Delamination Risk Evaluation for Plastic Packages Based on Mixed Mode Fracture Mechanics Approaches*, Transaction of ASME, JEP, Vol. 124, 2002, 318–322.
- [288] Auersperg J., Vogel D., Michel B., *Crack and Delamination Risk Evaluation of Thin Silicon Applications Based on Fracture Mechanics Approaches*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 169–174.

- [289] Hutchinson J.W, Suo Z, *Mixed Mode Cracking in Layered Materials*, Adv. Applied Mechanics, Vol. 29, 1992, 64–187.
- [290] Rice J.R, *Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks*, ASME Transaction Journal of Applied Mechanics, 1988, 98–103.
- [291] Malyshev B.M, Salganik R.L, *The Strength of Adhesives Joints Using the Theory of Cracks*, International Journal of Fracture Mechanics, 1965, 114–128.
- [292] Chan E.K.L, Fan H, Yuen M.M.F, *Effect of Interfacial Adhesion of Copper/Epoxy Under Different Moisture Level*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 525–529.
- [293] Fan H, Wong C.K.Y, Yuen M.M.F, *Molecular Simulation of Cu-SAM Adhesion Force*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 575–579.
- [294] Engelmaier W, *Functional Cycles and Surface Mounting Attachment Reliability*, Circuit World, Vol. 11, no 3, 1985, 61–72.
- [295] Macosko C.W, *Rheology Principles, Measurements and Applications*, John Wiley & Sons, USA, 1994.
- [296] Hof van C, Wisse G, Ernst L.J, Jansen K.M.B, Yang D.G, Zhang G.Q, Bressers H.J.L, *A Novel Tool for Cure Dependent Viscoelastic Characterization of Packaging Polymers*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 385–390.
- [297] Ferry J.D, *Lepkosprężystość polimerów*, WNT, Warszawa, 1965.
- [298] Dzierża W, Czerniawski T, *Własności mechaniczne i termiczne polimerów*, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń, 2000.
- [299] Bower D.I, *An introduction to polymer physics*, Cambridge University Press, 2004.
- [300] Meuwissen M.H.H, Steijvers H.L.A.H, Nieuwenhof van den M.A.C.J, Veninga E.P, *Thermo-Mechanical properties of an Electrically Conductive Adhesives*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 49–56.
- [301] Li Y, Wong C.P, *Recent advances of conductive adhesives as a lead-free alternative in electronic packaging: Materials, processing, reliability and applications*, Materials Science and Engineering, R 51, 2006, 1–35.
- [302] Farley D, Dasgupta A, *Characterization of Non-Conductive Adhesives*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 471–477.
- [303] Yang D.G, Jansen K.M.B, Ernst L.J, Zhang G.Q, Driel van W.D, Bressers H.J.L, *Modeling of Cure-Induced Warpage of Plastic Packages*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 33–40.
- [304] Ernst L.J. et al, *Mechanical Modeling and Characterization of the Curing Process of Underfil Materials*, ASME Journal of Electronic Packaging, Vol. 124, no 2, 2002, 97–105.
- [305] Zhu W.H, Gan S.L, Toh C.L, *Mechanical Properties of Moulding Compounds (MCs) under Different Moisture Conditions and in a Wide Temperature Range*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 593–598.
- [306] Constitutive Equations: Viscoelasticity, <http://www.engin.umich.edu/>, Strona internetowa, 2006.
- [307] Ferry J.D, *Viscoelastic Properties of Polimers*, John Wiley & Sons, 1980.
- [308] Fałat T, Wymysłowski A, Kolbe J, Kaspar M.B, Ernst L, *Numerical Approach to Characterization of Thermally Conductive Adhesives*, Proceedings of 7th EuroSimE Conference, Como, Italy, 2006, 290–296.
- [309] Fałat T, Felba J, Wymysłowski A, Jansen K.M.B, Nakka J.S, *Viscoelastic Characterization of Polymer Matrix of Thermally Conductive Adhesives*, Proceedings of 1st ESTC Conference, Drezden, Germany, 2006, 773–781.
- [310] Yang D.G, Jansen K.M.B, Ernst L.J, Zhang G.Q, Bressers H.J.L, Janssen J.H.J, *Measuring and Modeling the Cure-Dependent Rubbery Moduli of Epoxy Molding Compound*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 120–125.

- [311] Jansen K.M.B, Ernst L.J, Bressers H.J.L, *Effects of Chemistry on Viscoelastic Properties of Moulding Compounds*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 605–610.
- [312] Milosheva B.V, Jansen K.M.B, Janssen J.H.J, Bressers H.J.L, Ernst L.J, *Viscoelastic Characterization of Fast Curing Moulding Compounds*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 462–466.
- [313] Yang D.G, Jansen K.M.B, Wang L.G, Ernst L.J, Zhang G.Q, Bressers H.J.L, *Micromechanical Modeling of Stress Evaluation Induced during Cure in a Particle-Filled Electronic Packaging Polymer*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 57–62.
- [314] Jansen K.M.B, Wang L, Hof van C, Ernst L.J, Bressers H.J.L, Zhang G.Q, *Cure, Temperature and time Dependent Constitutive Modeling of Moulding Compounds*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 581–586.
- [315] Sourour S, Kamal M.R, *Differential Scanning Calorimetry of Epoxy Cure: Isothermal Cure Kinetics*, *Thermochimica Acta*, Vol. 14, 1976, 41–59.
- [316] Neimitz A, *Mechanika pekania*, PWN, Warszawa, 1998.
- [317] Anand L, *Constitutive Equations for Rate Dependent Deformation of Metals at Elevated Temperatures*, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 104, no 1, 1992, 12–17.
- [318] Wiese S, Wolter K.J, *Microstructure and Creep Behaviour of Eutectic SnAg and SnAgCu Solders*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 435–442.
- [319] Rollig M, Wiese S, Wolter K.J, *Extraction of Material Parameters for Creep Experiments on Real Solder Joints by FE Analysis*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 281–289.
- [320] Darveaux R, Banerji K, *Constitutive Relation for Tin-based Solder Joints*, *IEEE Transaction on Components, Hybrid and Manufacturing Technology*, Vol. 15, 1992, 1013–1024.
- [321] Xu Y.J, Liang L.H, Liu Y, *Models Correlation and Comparison for Solder Joint Reliability*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 423–429.
- [322] Ganesan S, Pecht M, *Lead-free Electronics: 2004 Edition*, CALCE EPSC Press, 2003.
- [323] Ladani L.J, Dasgupta A, *The Successive-Initiation Modeling Strategy for Modeling Damage Progression: Application to Voided Solder Interconnects*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 570–575.
- [324] Syed A, *Updated Life prediction Models for Solder Joints with Removal of Modeling Assumptions and Effect of Constitutive Equations*, Proceedings of 7th EuroSime Conference, Como Italy, 2006, 639–647.
- [325] Grivas D, Murty K.L, Morris J.W, *Deformation of Sn-Pb Eutectic Alloys at Relatively High Strain Rates*, *Acta Metallurgica*, Vol. 27, 1979, 731–737.
- [326] Grivas D, Murty K.L, Wolter K.J, *Deformation of SnPb Eutectic Alloys at Reliability High Strain Rates*, *Acta Metallurgica*, Vol. 27, 1979, 731–737.
- [327] Wiese S, Roelling M, Wolter K.J, *Creep of Thermally Aged SnAgCu Solder Joints*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 79–85.
- [328] Deplanque S, Nuchter W, Spraul M, Wunderle B, Dudek R, Michel B, *Relevance of Primary Creep in Thermo-Mechanical Cycling for Life-Time Prediction in Sn-Based Solders*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 71–78.
- [329] Deplanque S, Nuchter W, Wunderle B, Walter H, Michel B, *Evaluation of the Primary and Secondary Creep of SnPb Solder Joint Using a Modified Grooved-lap Test Specimen*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 351–358.
- [330] Wong B, Helling D.E, Clark R.W, *A Creep-Rupture Model for Two-Phase Eutectic Solders*, *IEEE CHMT*, Vol. 11, no 3, 1988, 284–290.
- [331] Sire R.A, Harris D.O, *Probabilistic Fracture Mechanics Modelling of Micro-Electronic Component Reliability*, *ASME/JSME Joint Conference on Electronic Packaging*, USA, 1992, .

- [332] Felba J, Fałat T, Wymysłowski A, *Influence of thermo-mechanical properties of polymer matrices on the thermal conductivity of adhesives for microelectronic packaging*, Materials Science-Poland, Vol. 25, no. 1, 2007, 45–55.
- [333] Fałat T, Wymysłowski A, Kolbe J, *Numerical approach to characterization of thermally conductive adhesives*, Microelectronics Reliability, vol.47, 2007, 342–346.
- [334] Ellyin F, *Fatigue Damage, Crack Growth and Life Prediction*, KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS GROUP, 1996.
- [335] Knott S, Mikula A, *The State of the Art of Lead-free Solders*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 429–433.
- [336] Spraul M, Nuchter W, Moller A, Schubert A, Michel B, *Comparison of Lifetime Predictions with 3D Finite Element Models of a High Density Flip Chip without Underfill on LTCC*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 407–412.
- [337] Sobczyk K, Spencer B.F, *Stochastyczne modele zmeczeniowe materialów*, WNT, Warszawa, 1996.
- [338] Vandeveld B, Beyne B, *Thermal Fatigue Reliability Optimization of Flip Chip Assemblies*, Proceedings of 1st EuroSimE Conference, The Netherlands, 2000, 165–173.
- [339] Manson S.S, *Thermal Stress and Low-Cycle Fatigue*, McGraw-Hill Book Company, USA, 1966.
- [340] Solomon H.D, *Low Cycle Fatigue of 60/40 Solder Plastic Strain Limited vs. Displacement Limited Testing*, Proceedings of ASM Electronic Packaging: Mater. Process, 1987, 29–47.
- [341] Dasgupta A, Oyan C, Barker D, Pecht M, *Solder Creep-Fatigue Analyses by an Energy Partitioning*, Journal of Electronic Packaging, Vol. 114, no 2, 1991, 152–160.
- [342] Massiot G, Munier C, *A Review of Creep Fatigue Models in Solder Material – Simplified Use of a Continuous Damage Mechanical Approach*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 465–472.
- [343] Lai Y.S, Wang T.H, Tsai H.H, Wu J.D, *A Study of Cyclic Bending Reliability of Bare-die-type Chip-scale Packages*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 313–316.
- [344] Darveaux R, *Crack Initiation and Growth in Surface Mount Solder Joins*, Proceedings of ISHM'93 Conference, 1993, 86–96.
- [345] Rodgers B, Flood B, Punch J, Waldron F, *Experimental Determination and Finite Element Model Validation of the Anand Viscoplasticity Model Constants for SnAgCu*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 490–496.
- [346] Perzyna P, *Recent Advances in Applied Mechanics: Fundamental Problems in Viscoplasticity*, Academic Press, New York, 1966.
- [347] Ubachs R.L.J.M, Schreurs P.J.G, Geers M.G.D, *Microstructural Behaviour of Solder Alloys*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 543–547.
- [348] Lee W.W, Nguyen L.T, Selvaduray G.S, *Solder Joint Fatigue Models: Review and Applicability to Chip Scale Packages*, Microelectronics Reliability, Vol. 40, 2000, 231–244.
- [349] Chaboche J.L, *Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity*, International Journal of Plasticity, Vol. 5, 1989, 247–302.
- [350] Bonnaud E.L, Gudmundson P, *Lead-Free Solder Plasticity Characterization for Drop Test Simulation*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 134–137.
- [351] Wells A. A, *Application of Fracture Mechanics at and Beyond General Yielding*, British Welding Journal, Vol. 10, 1963, 563–570.
- [352] Rice J.R, *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations by Notches and Cracks*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, 1968, 379–386.
- [353] He Y.T, Zhang G.Q, Gils van M.A.J, Silfhout van R.B.R, Driel van W.D, Ernst L.J, *Prediction of Crack Growth in IC Passivation Layers*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 323–328.

- [354] Anderson T.L., *Fracture Mechanics Fundamentals and Applications*, CRC Press, Boca Raton, USA, 1995.
- [355] Bhate D, Chan D, Subbarayan G, *Non-Empirical Modeling of Fatigue in Lead-Free Solder Joints: Fatigue Failure Analysis and Estimation of Fracture Parameters*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 42–47.
- [356] Dudek R, Faust W, Vogel J, Michel B, *A Comparative Study of Solder Fatigue Evaluated by Microscopic In-situ Analysis, On-line Resistance Measurement and FE Calculations*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 610–617.
- [357] Coffin L.F., *A Study of the Effects of Cyclic Thermal Stresses on a Ductile Material*, Transaction of ASME, Vol. 76, 1954, 931–950.
- [358] Darveaux R, *Solder Joint Fatigue Life Model: Design and Reliability of Solders and Solder Interconnections*, Proceedings of TMS Annual Meeting, USA, 1997, 213–218.
- [359] Spraul M, Nuchter W, Moller A, Wunderle B, Michel B, *Reliability of SnPb-free Flip-Chips under Different Test Conditions*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 437–442.
- [360] Bielen J, Gommans J.J, Theunis F, *Prediction of High Cycle Fatigue in Aluminium Bond Wires: A Physics of Failure Approach Combining Experiments and Multi-Physics Simulations*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 55–61.
- [361] Moreau S, Leroy R, Lequeu T, Jerisian R, *Comparison of Lifetime Predictions with 3-D Finite Element Model of Power Electronic Devices*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 430–435.
- [362] Spraul M, Nuchter W, Wunderle B, Michel B, *FE Analysis and Experimental Testing of a 4-Pin Ceramic Test Vehicle with Tin-Lead and Tin-Silver-Copper Solder Joints*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 441–447.
- [363] Yeo A, Lee C, Pang J.H.L., *FlipChip Solder Joint Fatigue Analysis using 2D and 3D FE Models*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 549–555.
- [364] Deplanque S, Nuchter W, Wunderle B, Schacht R, Michel B, *Lifetime Prediction of SnPb and SnAgCu Solder Joints of Chips on Copper Substrate Based on Crack Propagation FE-Analysis*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 243–250.
- [365] Dudek R, Walter H, Doering R, Michel B, *Thermal Fatigue Modelling for SnAgCu and SnPb Solder Joints*, Proceedings of 5th EuroSimE Conference, Brussel, Belgium, 2004, 557–564.
- [366] Linag J.S, Yang D.G, Li Q.Y, Ernst L.J, Zhang G.Q, *Parametric Study on Flip Chip Package with Lead-free Solder Joints by Using the Probabilistic Designing Approach*, Proceedings of 4th EuroSimE Conference, Aix-en-Provence, France, 2003, 455–463.
- [367] Wilde J, Zukowski E, *Probabilistic Analysis of the Influences of Design Parameter on the Reliability of Chip Scale Packages*, Proceedings of EuroSime Conference, Italy, 2006, 596–603.
- [368] Limaye P, Vandeveld B, Peer de van J, Donders S, Darveaux R, *Probabilistic Design Approach for Package Design and Solder Joint Reliability Optimization for a Lead Free BGA Package*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 531–537.
- [369] Wymysłowski A, *Probabilistic approach to numerical reliability assessment of microelectronic components*, Proceedings of 2nd EuroSimE Conference, Paris, France, 2001, 67–73.
- [370] Fałat T, *Zastosowanie metody Monte Carlo do oceny niezawodności połączeń w montażu elektronicznym*, Praca dyplomowa pod kierunkiem dr inż. A. Wymysłowskiego, 2002.
- [371] Buda K, *Ocena niezawodności połączeń w montażu elektronicznym typu flip-chip z uwzględnieniem zjawiska pęczania materiałów*, Praca dyplomowa pod kierunkiem dr inż. Artura Wymysłowskiego, 2002.
- [372] Lau J.H, *Low Cost Flip Chi Technologies*, McGraw-Hill, 2000.
- [373] Wiese S, Feustel F, Meusel E, *Solder Material Characterization and Modeling*, Proceedings of 1st EuroSimE Conference, The Netherlands, 2000, 27–36.
- [374] Dziduszko J, *Numeryczna metoda oceny niezawodności połączeń w montażu elektronicznym typu flip-chip*, Praca dyplomowa pod kierunkiem dr inż. A. Wymysłowskiego, 2001.



- [375] Dziduszko J, Wymysłowski A, Friedel K, *Numerical method of reliability assessment of the flip chip packaging*, Proceedings of 2nd EuroSimE Conference, Paris, France, 2001, 263–267.
- [376] Schubert A, Dudek R, Kloeser J, Michel B, Reichl H, Hauck T, Kaskoun K, *Experimental and Numerical Reliability Investigations of FCOB Assemblies with Process-induced Defects*, Proceedings of ECTC Conference, USA, 2000, 624–632.
- [377] Vandeveldel B, Gonzalez M, Limaye P, Ratchev P, Beyne E, *Thermal Cycling Reliability of SnAgCu and SnPb Solder Joints: A Comparison for Several IC-Packages*, Microelectronics Reliability, Vol. 47, 2007, 259–265.
- [378] Braun T, Becker K.F, Koch M, Bader V, Aschenbrenner R, Reichl H, *High-temperature reliability of Flip Chip assemblies*, Microelectronics Reliability, Vol. 46, 2006, 144–154.
- [379] Sinnadurai N.; *Reliability of new packaging concepts*, Microelectronics Reliability, Vol. 40; 2000; pp. 1073–1080
- [380] Spraul M, Nuchter W, Moller A, Wunderle B, Michel B, *Reliability of SnPb and Pb-free flip-chips under Different Test Conditions*, Microelectronics Reliability, Vol. 47, 2007, 252–258.
- [381] Stepniak F, *Failure criteria of flip chip joints during accelerated testing*, Microelectronics Reliability, Vol. 42, 2002, 1921–1930.
- [382] Patterson D, Moraca F, Yang H, *Reliability of Fine Pitch Solder Bump Flip-Chip-on-Flex: Designs and Assembly Techniques, Part I*, www.flipchip.com, 2001.
- [383] Darveaux R, *Effects of Simulation Methodology on Solder Joint Crack Growth Correlation and Fatigue Life Prediction*, ASME Journal of Electronic Packaging, Vol. 124, 2002, 147–152.
- [384] Vandeveldel B, Beyne E, Zhang K, Caers J, *Parametrised Modeling of thermomechanical reliability for a 5x4 CSP*, Proceedings of 2nd EuroSimE Conference, Paris, France, 2001, 49–54.
- [385] Lai Y.S, Wang T.H, Lee C.C, *Thermal-Mechanical Coupling Analysis for Coupled Power and Thermal Cycling Reliability of Chip-Scale Packages*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 539–544.
- [386] Lau J.H, *Solder Joint Reliability of Low Cost Chip Size Package: NuCSP*, Microelectronics Reliability, 1998, 1519–1529.
- [387] Tymowski J, *Materiały konstrukcyjne w budowie aparatury elektronicznej*, WNT, Warszawa, 1978.
- [388] Rusanen O, *Modelling of ICA Creep Properties*, VTT Electronics, 2000.
- [389] Driel van W.D, Zhang G.Q, Janssen J.H.J, Ernst L.J, *Response Surface Modeling for Nonlinear Packaging Stresses*, Journal of Electronic Packaging, Transactions of the ASME, vol.125, 2003, 490–497.
- [390] Driel van W.D, Zhang G.Q, Janssen J.H, Fei J.H.J, Yi S, Ernst L.J, *Prediction and Verification of Process-induced Thermal Deformation of Electronic Packages Using Non-linear FEB and 3D Interferometry*, Proceedings of 2nd EuroSimE Conference, Paris, France, 2001, 362–368.
- [391] Driel van W.D, Zhang G.Q, Janssen J.H.J, Ernst L.J, Su F, Chian K.S, Yi S, *Prediction and Verification of Process Induced Warpage of Electronic Packages*, Journal of Microelectronics & Reliability Vol. 43, no 5, 2003, 765–774.
- [392] Beijer J.G.J, Janssen J.H.J, Bressers H.J.L, Drijf van W.D, Jansen K.M.B, Yang D.G, Zhang G.Q, *Warpage Minimization of the HVQFN Map Mould*, Proceedings of 6th EuroSimE Conference, Berlin, Germany, 2005, 168–174.
- [393] Driel van W.D, Zhang G.Q, Janssen J.K.J, Ernst L.J, *Response Surface Modelling for Non-linear Packaging stresses*, Journal of Electronic Packaging, Vol. 125, no 4, 2003, 490–497.
- [394] Boomen van de R, Seegers M.C, *Leadframe materials*, Internal Philips Report, 1990.
- [395] Kelly G, *The simulation of Thermomechanically Induced Stress in Plastic Encapsulated IC Packages*, Kluwer Academic Publisher, 1999.
- [396] Madelung O, *Physics of Group IV Elements and III-IV Compounds*, Landolt-Bornstein New Series, Group III, Vol. 17, Pt. A, Springer-Verlag, Heidelberg, 1982, .

- 
- [397] Boomen van den R, Seegers M.C, *Leadframe Materials*, Philips internal report, 1990.
- [398] Yi S, *A Novel Portable 3D Moire System – Patent Pending*, Nanyang Technological University, Singapore, 2000.
- [399] Chen J, Vandavelde B, Wolf de I, *Local Stress Analysis on Polymer Stud Grid Array Packages by Raman Spectroscopy and Fem Simulations*, Proceedings of 2nd EuroSimE Conference, Paris, France, 2001, 209–214.
- [400] Wolf de I, *Experimental Verification of Analytical and Finite Element Models Through Micro-Raman Spectroscopy*, Proceedings of 2nd EuroSimE Conference, Paris, France, 2001, 141–154.
- [401] Schwarz B, *Simulation Overview in the Industry*, Proceedings of 1st EuroSimE Conference, The Netherlands, 2000, 1–16.

Wzrost zainteresowania projektowaniem numerycznym jest między innymi wynikiem coraz większej presji przemysłu elektronicznego ze względu na wzrastającą konkurencyjność oraz oczekiwania konsumentów. Nie bez znaczenia jest również problem projektowania proekologicznego i płynnej wymiany kadry inżynierskiej. Miniaturyzacja i integracja układów scalonych oraz wzrost przetwarzanej ilości informacji również powoduje, że dąży się do wytwarzania przyrządów i urządzeń przenośnych o zwiększonej funkcjonalności i pracujących na coraz wyższych częstotliwościach. Metody i algorytmy projektowania numerycznego stają się jednym z kluczowych narzędzi inżynierskich. Stosuje się je zarówno do przewidywania, kwalifikacji, testowania zachowania i niezawodności produktu na skutek obciążeń termomechanicznych, jak i do oszacowania ewentualnych nakładów produkcyjnych.

Omówiono wybrane metody i algorytmy projektowania numerycznego w montażu elektronicznym oraz zaproponowano pewną metodologię, której celem jest optymalizacja niezawodności montażu elektronicznego, z uwzględnieniem takich aspektów, jak analiza czułości i projektowanie tolerancji. Polega ona na opracowaniu parametrycznego modelu numerycznego analizowanego obiektu oraz zastosowaniu odpowiednich kryteriów do prognozowania uszkodzeń typowych połączeń w montażu elektronicznym na skutek obciążeń termomechanicznych, w zależności od rodzaju uszkodzenia i modelu materiałowego. W przypadku inżynierii istotnym aspektem są możliwości aplikacyjne, łatwość interpretacji uzyskanych wyników, koszty wdrożenia, możliwości kadrowe itp. Dąży się więc do opracowania metod uniwersalnych, które uwzględniałyby jednak specyfikę zastosowań danej dziedziny inżynierskiej.



Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej  
są do nabycia w księgarni  
„Tech”  
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław  
budynek D-1 PWr., tel. 071 320 29 35  
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową

ISBN 978-83-7493-325-4