

Biblioteka
Politechniki Wrocławskiej

ARC TUM

kb

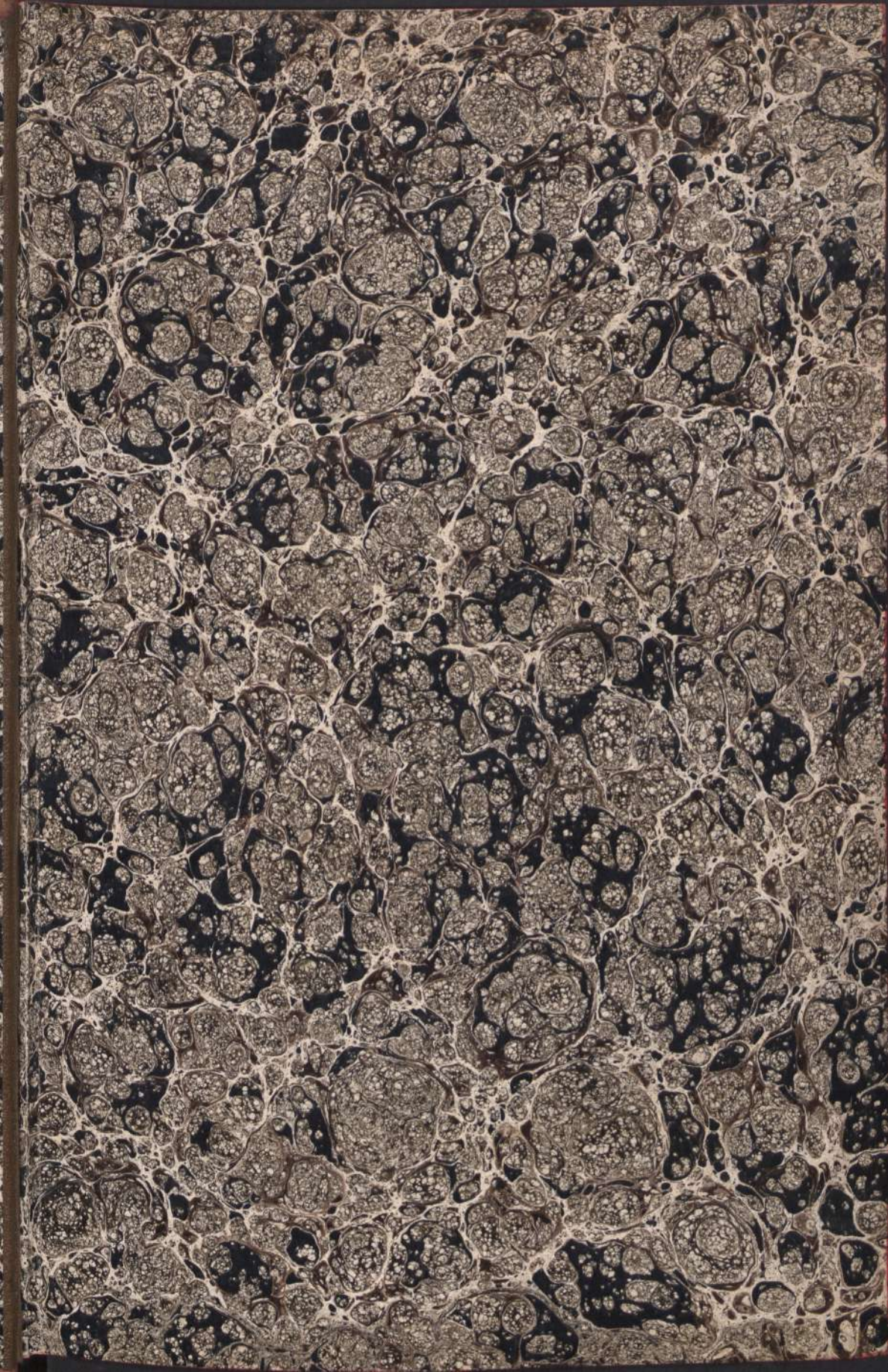
E 32



Biblioteka
Politechniki Wrocławskiej

E 32 kl

Archiwum



MULLER-POSTLETT
LEHRBUCH DER PHYSIK
METEOROLOGIE

1887



LEHRBUCH DER PHYSIK
METEOROLOGIE



P/28

E 32 kl

MÜLLER-POUILLETS
 LEHRBUCH DER PHYSIK
 UND
 METEOROLOGIE

ZEHNTE UMGEARBEITETE UND VERMEHRTE AUFLAGE

HERAUSGEGEBEN VON

LEOP. PFAUNDLER

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT GRAZ

UNTER MITARBEITUNG

VON

PROF. DR. O. LUMMER-BRESLAU, PROF. DR. A. WASSMUTH-GRAZ,
 HOFRAT PROF. DR. J. M. PERNTER-WIEN, DR. KARL DRUCKER-LEIPZIG,
 PROF. DR. W. KAUFMANN-BONN, DR. A. NIPPOLDT-POTSDAM

IN VIER BÄNDEN

MIT ÜBER 3000 ABBILDUNGEN UND TAFELN, ZUM TEIL
 IN FARBENDRUCK

ERSTER BAND

MECHANIK UND AKUSTIK

VON

LEOP. PFAUNDLER



3533 α.

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1906

Alle Rechte,
namentlich dasjenige der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Published January 27, 1906.

Privilege of Copyright in the United States reserved under the Act
approved March 3, 1905 by Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig,
Germany.



Inu. 2708.

ak. 2708/48

VORREDE ZUR ZEHNTEN AUFLAGE.

Der Fortschritt der Physik ist gegenwärtig ein so rascher, daß schon in wenigen Jahren die Lehrbücher veralten. In den wenigen Stunden, die einem Lehrer und Institutsleiter von den Amtsgeschäften übrig bleiben, ist er nicht imstande, die einzelnen Teile eines ausführlichen Lehrbuches der Physik so rasch zu bearbeiten, daß nicht der erst vollendete Teil bereits rückständig geworden ist, bevor der letzte Teil fertig wird. Die gleichzeitige Bearbeitung der einzelnen Bände durch mehrere Mitarbeiter hat aber ebenfalls große Schwierigkeiten und es geht hierbei allzuleicht die Einheitlichkeit des Ganzen und die Gleichmäßigkeit der Behandlung verloren. Diese Gründe insbesondere waren es, die mich veranlaßten, die Bearbeitung der zehnten Auflage abzulehnen und einer jüngeren rüstigeren Kraft zu überlassen. Die Verlagsfirma Friedr. Vieweg & Sohn übertrug daher Ende 1901 die Neuauflage dem Geheimen Rat Prof. Dr. H. v. Wild in Zürich. Derselbe hatte den ersten Band exklusive der Akustik umgearbeitet, als ihn der Tod am 8. September 1902 abberief. Auf Ansuchen der Verlagsfirma entschloß ich mich nun doch, das verwaiste Werk unter meine Obhut zu nehmen und zwar unter der Bedingung, daß ich mehrere Mitarbeiter zu gewinnen imstande sein werde.

Die Optik war bereits von Prof. v. Wild dem bewährten Mitarbeiter Prof. Dr. Otto Lummer in Charlottenburg anvertraut worden und ich selbst hatte für die Wärmelehre zugesagt. Es gelang mir, für das umfangreiche Gebiet des Magnetismus und der Elektrizität Herrn Professor Dr. W. Kaufmann in Bonn, für die Meteorologie den Herrn Hofrat Direktor J. M. Pernter in Wien, für die Lehre vom Erdmagnetismus Herrn Dr. A. Nippoldt in Potsdam, für die chemisch-physikalischen Teile den Herrn Dr. Karl Drucker in Leipzig und für die Wärmeleitung und Thermodynamik meinen Kollegen, Herrn Professor Dr. A. Waßmuth in Graz zu gewinnen.

Da ich den Bearbeitern der einzelnen Teile nicht vorgreifen will, so verweise ich bezüglich der Anlage des ganzen Werkes auf die

vorausgegangenen Vorreden, deren Auseinandersetzungen in der Hauptsache auch für diese zehnte Auflage gelten. Über den vorliegenden ersten Band habe ich noch folgende Bemerkungen vorausszuschicken.

Das von Prof. v. Wild hinterlassene Manuskript wies in der Lehre von den Flüssigkeiten und den Gasen nur wenige Veränderungen auf. Dagegen hatte der Verfasser, der bekanntlich ein ausgezeichnete Vertreter der Metronomie war, seiner Arbeitsrichtung folgend, den ersten Teil der Mechanik derart umgestaltet, daß sich derselbe einer Meß- und Instrumentenkunde näherte, und hatte, um den hierfür nötigen Raum zu gewinnen, Vieles fortgelassen, was mir für ein methodisches Lehrbuch der Physik unentbehrlich scheint.

Sollte dieser Teil zum Ganzen passen, so mußte er noch einmal umgearbeitet und ergänzt werden. Dabei bestrebte ich mich, die ausgezeichnet bearbeiteten metronomischen Abschnitte möglichst beizubehalten, aber auch dem methodisch-physikalischen Unterricht wiederum gebührend Rechnung zu tragen, was freilich nicht ohne Überschreitung des bisherigen Umfangs möglich war.

Ich gebe mich dabei nicht der Hoffnung hin, den Wünschen und Anschauungen aller Fachgenossen entsprochen zu haben; denn diese gehen allzuweit auseinander. Manche werden meinen, das Buch enthalte zu viel Elementares; wer ein mehrbändiges Lehrbuch der Physik zur Hand nehme, sei über diese elementaren Dinge längst unterrichtet; wozu also die Beschreibung von Hebeln und Flaschenzügen, von Feuerspritzen und Heronsbrunnen; wozu auch die vielen Abbildungen, welche nur vielen Raum einnehmen usw.

Aber irgend wo müssen doch auch diese Dinge behandelt und abgebildet sein! In den theoretischen Lehrbüchern fehlen sie ganz; in den Kompendien der Mittelschulen sind sie meist nur erwähnt, um den Lehrer an sie zu erinnern. Ihre schematischen Abbildungen genügen wohl für den theoretischen Unterricht, aber sie genügen nicht für den Mechaniker, für den das Buch doch auch bestimmt ist. Es schadet auch dem Physikstudierenden durchaus nicht, wenn er z. B. erfährt, wie denn ein Ventil, eine Stopfbüchse, eine Kolbenliderung in Wirklichkeit aussieht, da die schematische Zeichnung davon weit entfernt ist.

Würden diese Dinge fehlen, so würde der entgegengesetzte Vorwurf laut werden, daß das Buch trotz seines Umfangs sehr lückenhaft sei und über die verbreitetsten Apparate keinen oder doch nur ungenügenden Aufschluß gebe. Ich habe daher den Stoff nicht beschränkt, dagegen durch Verkleinerungen mancher Abbildungen Raum zu gewinnen gesucht.

Auch in der Darstellungsweise kann man es wohl unmöglich allen recht machen. Wer die für den Lehrer unentbehrliche Zeitschrift von Poske über physikalischen und chemischen Unterricht durchliest, der kann sich überzeugen, daß gerade über die elementarsten Dinge die Meinungen weit auseinandergehen. Um ein Beispiel anzuführen, so ist es gewiß keinem Zweifel unterworfen, daß jeder Kraftübertragung am Hebel oder an der Rolle eine Biegung oder Dehnung vorausgeht, und daß die Übertragung in Wirklichkeit nur indirekt durch elastische Kräfte erfolgt. Allein ich kann der Meinung nicht beipflichten, daß man deshalb von der Fiktion starrer Körper ganz ablassen und von Anfang an mit elastischen Maschinenteilen operieren soll. Neben den zahlreichen oft vortrefflich erdachten Vorlesungsexperimenten und neuen Apparaten dieser Zeitschrift, so wie jener für Instrumentenkunde, finden sich doch auch manche beschrieben, deren Verständnis mir schwieriger oder doch umständlicher erreichbar scheint, als das, was dadurch erklärt werden soll. Wenn ich mich daher oft auf die hergebrachten Methoden und Hilfsmittel beschränkt habe, so geschah es durchaus nicht aus Geringschätzung gegen neue Vorschläge. Im allgemeinen hat jeder gute Lehrer seine eigene Methode, die er überdies noch von Fall zu Fall der jeweiligen Fassungskraft und Vorbildung seiner Schüler und außerdem dem verfügbaren Apparate anpassen muß. Um so weniger kann man von einem Lehrbuche, das sich an die verschiedensten Leserkreise wendet, verlangen, daß es für jeden derselben die passendste Darstellungsmethode biete.

Was die Anwendung der Mathematik betrifft, so verweise ich auf das in der Vorrede zur achten Auflage Gesagte. So lange das vorherrschende Philologentum alle Gymnasiasten zwingt, ihre schönsten Jahre der Erlernung der Grammatik toter Sprachen zu opfern, ist keine Aussicht, den Maturanten die Elemente der Analysis beizubringen. Infolgedessen ist der größte Teil der Studierenden, die sich den Naturwissenschaften, der Medizin usw. widmen, gezwungen, sich auf die Benutzung solcher Lehrbücher der Physik zu beschränken, welche von der Analysis keinen Gebrauch machen; was um so mehr zu bedauern ist, als dadurch nicht nur der vorzutragende Stoff wesentlich beschränkt, sondern auch die mathematische Begründung erschwert und umständlicher gemacht wird. Man kann zwar manche Resultate der Analysis auch durch umständliche elementare Rechnungen ableiten. Hiervon wurde aber selten Gebrauch gemacht; denn es erscheint in der Regel zweckmäßiger, solche weitschweifige Ableitungen, welche den minder mathematisch Gebildeten abschrecken ohne den höher Gebildeten zu befriedigen, zu unterlassen und lieber das Resultat als die Frucht

der analytischen Mathematik ohne Beweis anzuführen. So wurden z. B. die Formeln der Trägheitsmomente nur so weit abgeleitet, als dies elementar leicht möglich ist; die übrigen einfach angeführt. Dasselbe gilt von der vollständigen Pendelformel u. a.

Von den in den früheren Auflagen eingeschalteten Kapiteln über die Molekularkräfte wurde nur jenes auf die festen Körper bezügliche (Elastizität, Stoß, Reibung) an dieser Stelle beibehalten. Die Molekularkräfte der flüssigen und gasförmigen Körper werden an geeigneter Stelle in der Wärmelehre behandelt werden.

In der Akustik wurde, ausnahmsweise, eine eingehendere Ableitung der Schallgeschwindigkeit beigefügt, um einer kritischen Bemerkung in einer englischen Zeitschrift zu entsprechen. Auch der Einfluß der Röhrenweite auf die Resonanz wurde demselben Kritiker zuliebe berücksichtigt. Außerdem sind zahlreiche größere oder kleinere Zusätze und Literaturhinweise eingefügt worden.

So hoffe ich denn, daß auch diese zehnte Auflage dem Leserkreis, dem das Buch bisher genügt hat, auch weiterhin genügen werde.

Graz, im September 1905.

Leopold Pfaundler.

INHALTSVERZEICHNIS ZUM ERSTEN BANDE.

(ERSTE ABTEILUNG.)

Einleitung.

Seite

§	1.	Begriff und Aufgabe der Naturwissenschaften	1
§	2.	Einteilung der Naturwissenschaften, Aufgabe der Physik	2
§	3.	Quellen des physikalischen Wissens	4
§	4.	Die physikalischen Apparate und Instrumente	5
§	5.	Methode der physikalischen Forschung	6
§	6.	Einteilung der Physik	10
§	7.	Physikalische Grundbegriffe	11
		Raum	11
		Zeit	12
		Bewegung	12
		Materie	14
§	8.	Allgemeine Eigenschaften der Materie	15
		1. Raumerfüllung oder Ausdehnung	15
		2. Undurchdringlichkeit	15
		3. Teilbarkeit	15
		4. Porosität	17
		5. Trägheit oder Beharrungsvermögen	17
		6. Beweglichkeit	17
		7. Gravitation, Schwere	18
		8. Aggregatzustände	18
§	9.	Kristallisation	19
§	10.	Kristallsysteme	21
		1. Das reguläre System	22
		2. Das quadratische System	23
		3. Das hexagonale System	24
		4. Das rhombische System	25
		5. Das monoklinische System	26
		6. Das triklinische System	27
§	11.	Die Hemiedrie	27
§	12.	Chemische Teilbarkeit, Atomtheorie	30
§	13.	Die Elemente oder Grundstoffe, ihre Bezeichnung und ihre Atomgewichte	32

Erstes Buch.

Die Mechanik.

Erstes Kapitel.

Von der Messung der Längen, Flächen, Volumina, Winkel, Zeiten und Massen.

§	14.	Vom Messen im allgemeinen	36
§	15.	Das metrische Maßsystem, die Längeneinheit	37

	Seite
Längenmaße	40
Flächenmaße	40
Volumenmaße	40
§ 16. Berücksichtigung der Temperatur bei Längenmessungen	41
§ 17. Hilfsmittel zur genauen Bestimmung der Bruchteile eines Maßstabteiles	42
Die Mikrometerschraube	44
Fühlhebel und Poggendorffsche Spiegelablesung	45
§ 18. Instrumente zur genaueren Längenmessung	46
Kontaktinstrumente	46
Schublehre oder den Kalibermaßstab	46
Mikrometer oder Blechlehre von Palmer	47
§ 19. Sphärometer, Fühlhebelkomparator	48
Fühlniveau-Sphärometer von Wild	49
Fühlhebelkomparator	50
§ 20. Instrumente mit optischer Pointierung. Horizontallängenkomparator . .	50
Horizontallängenkomparator	51
§ 21. Messung von Vertikalabständen; Kathetometer	54
§ 22. Rektifikation des Kathetometers. Vertikalkomparator	57
A. Rektifikation des Fadenkreuzes	57
1. Verlegung der Visierlinie in die mechanische Achse des Fernrohrs	57
2. Prüfung der Rechtwinkeligkeit des Fadenkreuzes	58
B. Vertikalstellung der Umdrehungsachse des Maßstabes	59
C. Horizontalstellung der Fernrohrachse	59
D. Parallelstellung des Maßstabes zur vertikalen Umdrehungsachse	61
E. Prüfung und Korrektion des Ganges des Schlittens	62
F. Richtigkeit der Skala, Temperaturkorrektion, genaueste Methode der Messung	63
§ 23. Längenteilmachine. Kreisteilmachine	64
§ 24. Verifikation von Längenteilungen. Mittlerer und wahrscheinlicher Fehler	66
Fehlerbestimmung von Mittelwerten	67
§ 25. Flächenmessung. Amslers Planimeter	68
§ 26. Volumenmessung	71
§ 27. Von der Winkelmessung im allgemeinen. Bestimmung der Vertikal- und Horizontalrichtung	71
Bestimmung der Vertikalen, Senklot, Libelle	72
Bestimmung der Horizontalen	72
Prüfung der Empfindlichkeit der Libelle	74
§ 28. Instrumente zur Winkelmessung, Theodolit	76
Berichtigung des Theodoliten	77
§ 29. Von der Zeitmessung im allgemeinen, Zeiteinheit	79
Mittlerer Sonnentag	80
§ 30. Zeitmeßinstrumente, Uhren	81
Sonnenuhr	81
Pendelgewichtsuhr	82
Federuhr	82
§ 31. Messung von Zeiträumen	84
§ 32. Astronomische Methoden der Zeitbestimmung	86
Bestimmung des absoluten Azimuts	88
Zeitbestimmung nach der Methode der korrespondierenden Sonnenhöhen	90
§ 33. Begriff der Masse	92
§ 34. Die Masseneinheit und die daraus abgeleitete Volumeinheit (Liter) . .	94
Bedeutung des Liters als Volumeinheit	95
§ 35. Gewicht; Gewichtssätze	96
§ 36. Dichte. Spezifisches Gewicht	98

Zweites Kapitel.

Von den Bewegungen und den Kräften im allgemeinen.

	Seite
§ 37. Einteilung der Bewegungen; gleichförmige Bewegung, Begriff der Geschwindigkeit	100
§ 38. Die gleichmäßig veränderliche Bewegung; Begriff der Beschleunigung	102
§ 39. Begriff der Kraft, Newtons Bewegungsgesetze	106
§ 40. Einteilung der Kräfte, Maß und Wirkung derselben	108
§ 41. Dynamisches Maß der Masse	109
§ 42. Dimensionen der verschiedenen Größenarten	112
§ 43. Die Schwere oder Gravitation	113
§ 44. Prinzip der Wechselwirkung; der freie Fall; Fallmaschinen	114
§ 45. Unabhängigkeitsprinzip, Zusammensetzung gleichförmiger Bewegungen, Parallelogramm der Geschwindigkeiten	122
Zusammensetzung zweier Geschwindigkeitskomponenten	123
Zusammensetzung mehrerer Geschwindigkeitskomponenten in einer Ebene	124
Zusammensetzung von Geschwindigkeitskomponenten im Raume	125
§ 46. Zusammensetzung gleichmäßig beschleunigter Bewegungen; Parallelogramm der Beschleunigungen	126
§ 47. Zerlegung einer Geschwindigkeit oder einer Kraft in ihre Komponenten	130
§ 48. Fall über die schiefe Ebene	133
§ 49. Zusammensetzung einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichmäßig beschleunigten; Wurfbewegungen	137
§ 50. Zentralbewegung	145
§ 51. Fliehkraft	150
Anwendungen der Fliehkraft	154
§ 52. Die ungleichmäßig veränderliche Bewegung; Bewegung infolge einer Kraft, die sich proportional der Zeit ändert	157
§ 53. Bewegung infolge einer Kraft, welche sich proportional dem Wege verändert; schwingende oder harmonische Bewegungen	159
§ 54. Theoretische Ableitung der Gesetze der schwingenden Bewegung	164
§ 55. Das einfache Pendel	167
§ 56. Theoretische Ableitung der Gesetze des mathematischen Pendels	173
§ 57. Das Zykloidenpendel	176

Drittes Kapitel.

Vom Gleichgewicht und den Bewegungen der festen Körper.

§ 58. Feste und starre Körper, fortschreitende und drehende Bewegung	178
§ 59. Zusammensetzung zweier in einer Ebene liegender Komponenten, welche an fest verbundenen Punkten angreifen	180
§ 60. Zusammensetzung mehrerer paralleler Kräfte	183
§ 61. Kräftepaare; deren Eigenschaften und Zusammensetzung	184
§ 62. Zusammensetzung beliebiger, einen starren Körper angreifender Kraftkomponenten	188
§ 63. Der Schwerpunkt (Massenmittelpunkt)	190
§ 64. Vom Gleichgewicht aufgehängter Körper	194
§ 65. Vom Gleichgewicht aufgestellter Körper, Standfestigkeit	197
§ 66. Die gleicharmige Wage; Richtigkeit derselben	199
§ 67. Empfindlichkeit der Wage	204
§ 68. Konstruktion und Rektifikation einer genauen Wage	210
§ 69. Gebrauch der Wage	218
§ 70. Andere Wagenkonstruktionen	222
Substitutionswage	222
Roberval-Wage	223
Sortier- oder Briefwage	223
Schnellwage oder Römische Wage	224
Brückenwage	224

	Seite
§ 71. Einfluß vertikaler Beschleunigung auf den Druck oder Zug einer Masse; Poggendorffs Wage	226
§ 72. Kraftantrieb, Bewegungsgröße, Arbeit und lebendige Kraft	231
§ 73. Begriff der Arbeit und Maß derselben	235
§ 74. Lebendige Kraft (Wucht)	239
§ 75. Begriff der Energie	242
§ 76. Die Maschinen	245
Begriff und Zweck der Maschinen	245
Einteilung der Maschinen	246
§ 77. Die Seilmaschine als Rolle	247
§ 78. Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten	251
§ 79. Die Seilmaschine als Flaschenzug und als Wellrad	252
§ 80. Räderwerke	255
§ 81. Die Hebelmaschine	259
§ 82. Die Gleitmaschine	262
§ 83. Die Kniepresse	272
§ 84. Die konstruktiven Elemente der Maschinen	273
§ 85. Die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile	274
§ 86. Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, Trägheitsmoment	275
§ 87. Berechnung des Trägheitsmomentes	278
§ 88. Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes rotierender Körper	281
§ 89. Rollen über die schiefe Ebene	282
§ 90. Der Schwingungspunkt des physischen Pendels, reduzierte Pendellänge	285
§ 91. Konjugierte Drehachsen	286
§ 92. Das Reversionspendel	290
§ 93. Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes schwingender Körper	290
§ 94. Anwendung des Pendels zur Bestimmung der Beschleunigung der Schwere. I. Bestimmung der Schwingungsdauer	292
§ 95. Fortsetzung. II. Bestimmung der reduzierten Pendellänge	300
§ 96. Werte der Schwerebeschleunigung g	302
§ 97. Ermittlung der Abnahme der Schwere mit der Höhe mittels der Wage (Methode von Jolly)	306
§ 98. Mittlere Dichte der Erdmasse	307
§ 99. Die Gravitationskonstante	309
§ 100. Anwendung des Pendels zur Regulierung der Uhren; Metronom	311
§ 101. Foucaults Pendelversuch	313
§ 102. Verminderung der Schwere durch die Zentrifugalkraft	315
§ 103. Verhältnis der Schwerkraft auf der Erde zur Anziehung des Mondes durch die letztere	316
§ 104. Verhalten rotierender Körper	316

Viertes Kapitel.

Mechanik nichtstarrer, fester Körper.

§ 105. Allgemeines über die Eigenschaften nichtstarrer Körper	325
§ 106. Elastizitätskoeffizient und Elastizitätsmodulus	327
§ 107. Volumveränderung durch Zug	332
§ 108. Torsionselastizität	333
§ 109. Festigkeit	334
§ 110. Adhäsion	336
§ 111. Vom Stoß im allgemeinen	337
§ 112. Stoß unelastischer Körper	338
§ 113. Stoß elastischer Körper	340
§ 114. Gleitende Reibung	343
§ 115. Wälzende Reibung	346
§ 116. Nutzen und Anwendung der Reibung	349

Fünftes Kapitel.

Mechanik flüssiger Körper.

	Seite
§ 117. Gleichförmige Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkeiten	354
§ 118. Niveauschichten in einer Flüssigkeit	358
§ 119. Freie Oberfläche einer Flüssigkeit	358
§ 120. Kommunizierende Gefäße	360
§ 121. Bodendruck. Hydrostatisches Paradoxon	362
§ 122. Seitendruck	365
§ 123. Druck im Inneren der Flüssigkeiten. Archimedisches Prinzip	366
§ 124. Bedingungen des Gleichgewichtes schwimmender und schwebender Körper	370
§ 125. Genauere Festsetzung der Begriffe: Dichte, spezifisches Gewicht und normales spezifisches Gewicht	374
§ 126. Bestimmung des spezifischen Gewichtes mit der Wage	376
§ 127. Konstantes Gefäß, Pyknometer	380
§ 128. Gewichtsäräometer	383
§ 129. Skalenäräometer	384
§ 130. Aräometer mit willkürlicher Skala	387
§ 131. Aräometer für besondere Flüssigkeiten	389
§ 132. Weitere weniger genaue Methoden zur Ermittlung des spezifischen Gewichtes	392
§ 133. Tabellen der spezifischen Gewichte	393
§ 134. Ausfluß der Flüssigkeiten, Torricellis Theorem	394
§ 135. Apparate zu Versuchen über die Ausflußgeschwindigkeit	396
§ 136. Versuche über Ausflußgeschwindigkeit	398
§ 137. Ausflußmenge	400
§ 138. Beschaffenheit des ausfließenden Strahles	401
§ 139. Einfluß der Ansatzröhren auf die Ausflußmenge	402
§ 140. Reibungswiderstand in langen Röhren	404
§ 141. Ausfluß durch Kapillarröhren	405
§ 142. Reaktion ausströmender Flüssigkeiten	406
§ 143. Energie der Wassergefälle; Wassermotoren	407
§ 144. Stoßheber oder hydraulischer Widder	409
§ 145. Stationäre Bewegung des Wassers in offenen Kanälen und Flüssen	411
§ 146. Wirbelbewegungen	412

Sechstes Kapitel.

Mechanik gasförmiger Körper.

§ 147. Eigenschaften der gasförmigen Körper und nächste Folgerungen daraus	414
§ 148. Verzeichnis der wichtigsten Gase, ihrer Formel und ihrer spezifischen Gewichte	414
§ 149. Gewicht der Luft, Luftdruck	416
§ 150. Erscheinungen, welche auf dem Luftdrucke beruhen	418
§ 151. Wasserpumpen	422
§ 152. Torricellis Versuch, Barometer	424
§ 153. Messung des Luftdruckes, Normalluftdruck, Druckeinheiten	426
§ 154. Konstruktion eines guten Barometers	427
1. Reinheit des Quecksilbers	427
2. Über dem Quecksilber muß ein vollkommen trockener und luftfreier leerer Raum sein	430
3. Die Kapillardepression muß möglichst vermieden werden oder doch bestimmbar sein	432
4. Der Vertikalabstand der beiden Quecksilberniveaus muß genau gemessen werden können	432
§ 155. Das Gefäßbarometer	433
§ 156. Das Heberbarometer	435
§ 157. Das Gefäßheberbarometer	439

	Seite
§§ 158. Prüfung und Korrektur des Barometers	441
§§ 159. Berechnung des Luftdruckes aus dem Barometerstande	445
§§ 160. Metallbarometer	445
§§ 161. Barometer zur vergrößerten Angabe der Variationen des Luftdruckes	448
§§ 162. Wirkung des Luftdruckes auf den menschlichen Körper	450
§§ 163. Das Gesetz von Boyle (Mariotte); Reduktion eines Gasvolumens auf Normaldruck	452
§§ 164. Manometer	458
§§ 165. Stereometer und Volumenometer	463
§§ 166. Abweichungen vom Boyleschen Gesetze	467
§§ 167. Die Luftpumpe	471
§§ 168. Die zweistiefelige Ventilluftpumpe	473
§§ 169. Die zweistiefelige Hahlluftpumpe	478
§§ 170. Einstiefelig doppelt wirkende Luftpumpen	479
§§ 171. Die wichtigsten Luftpumpenversuche	481
§§ 172. Die Ölluftpumpen	483
§§ 173. Die Quecksilberluftpumpen; Geißlers Pumpe	484
§§ 174. Töplers Quecksilberluftpumpe ohne Hahn und Ventil	492
§§ 175. Sprengels Quecksilberluftpumpe	496
§§ 176. Sprengels Pumpe mit selbsttätiger Quecksilberanhebung. System Schantel-Kahlbaum	498
§§ 177. Rotierende Quecksilberpumpe von W. Kaufmann	501
§§ 178. Die mit Quecksilberluftpumpen erreichbaren Verdünnungen; Neben- apparate	503
§§ 179. Bunsens Wasserluftpumpe. Wassertrommelgebläse	508
§§ 180. Kompressionspumpen	511
§§ 181. Heronsball und Heronsbrunnen	512
§§ 182. Die Feuerspritze	514
§§ 183. Gasbehälter	515
§§ 184. Gebläse	518
§§ 185. Die Luft als Motor	521
§§ 186. Gesetze des Ausströmens der Gase	523
§§ 187. Ausflußgeschwindigkeit verschiedener Gase bei gleichem Druck . . .	525
§§ 188. Seitendruck der Gase beim Ausströmen, aerostatisches Paradoxon . .	529
§§ 189. Wirbelbewegungen in Gasen	532
§§ 190. Vom Auftrieb der Luft; Reduktion der Wägungen auf den luftleeren Raum	533
§§ 191. Der Luftballon	535
§§ 192. Widerstand der Flüssigkeiten und Gase	539
§§ 193. Anwendung des Wasser- und Luftwiderstandes	542
Nachtrag zu § 34 und § 15	544

INHALTSVERZEICHNIS ZUM ERSTEN BANDE.
(ZWEITE ABTHEILUNG.)

Zweites Buch.

Die Akustik.

Erstes Kapitel.

Von den Schallwellen.

		Seite
§ 194.	Begriff des Schalles und seiner Arten, Fundamentalversuche über seine Entstehung und Fortpflanzung	547
§ 195.	Stehende Schwingungen und fortschreitende Wellen	551
§ 196.	Wasserwellen	552
§ 197.	Seilwellen	555
§ 198.	Luftwellen	556
§ 199.	Transversal- und Longitudinalwellen, Bäuche und Knoten	559
§ 200.	Wellenmaschinen	560
	Wellenmaschine von Weinhold	561
	" " Mach	563
	" " Wheatstone	564
	" " Pfaundler	565
	" " Crova	566
§ 201.	Verschiedenheit der Schallempfindungen	567
§ 202.	Geschwindigkeit des Schalles in Luft	568
	Methode der Schallkoinzidenzen	570
§ 203.	Beziehungen zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Wellenlänge und Schwingungszahl	571
§ 204.	Berechnung der Schallgeschwindigkeit aus der Dichte und Elastizität des Mediums	572
§ 205.	Schallgeschwindigkeit in tropfbar flüssigen und in festen Körpern	576
§ 206.	Von der Reflexion des Schalles und dem Echo	581
§ 207.	Einfluß der Dichte des reflektierenden Mediums; Reflexion am festen und freien Ende	585
§ 208.	Interferenz der Wellen; Prinzip der Koexistenz der kleinen Bewegungen	589
§ 209.	Mathematische Darstellung der Wellenbewegung	595
§ 210.	Interferenz sich begegnender Wellen, Bildung stehender Wellen	598
§ 211.	Stehende Wellen infolge Interferenz direkter fortschreitender mit reflektierten Wellen; Meldes Versuche	601
§ 212.	Stehende Luftwellen; Resonanzröhren	608
§ 213.	Singende Flammen, analysierender Spiegel, stroboskopische Untersuchungsmethode	613
§ 214.	Orgelpfeifen, manometrische Flammen, Kundtsche Röhren	619
§ 215.	Dichtigkeitsänderungen in den Knotenpunkten	625
§ 216.	Einfluß der Form der Pfeifen auf die Tonhöhe	627

Zweites Kapitel.

Von den Tönen.

	Seite
§ 217. Die musikalischen Intervalle	629
Monochord	629
Die musikalischen Werte der Tonstufen	631
§ 218. Die Tonleitern	632
Die Pythagoräische Tonleiter	633
Die Dur- und Moll-Skala	634
§ 219. Die Akkorde, Ableitung der Dur- und Moll-Skala	635
§ 220. Erweiterung der Tonleiter	637
Berechnung der relativen Tonhöhen zur Erweiterung der Dur-Skala	639
Berechnung der relativen Tonhöhen zur Erweiterung der Moll-Skala	640
§ 221. Reduktion der Tonleiter, Temperatur, chromatische Skala	642
§ 222. Absolute Schwingungszahlen der Töne	644
Physikalische, deutsche, französische und internationale Stim- mung	645
§ 223. Die Stimmgabel	648
§ 224. Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne, graphische Methode, Vibrographie, Phonautograph	650
Stimmgabelchronograph	653
§ 225. Bestimmung der Schwingungszahl durch die Sirene	653
§ 226. Grenzen der Hörbarkeit	658
Galtonpfeife	661
Minimum der Schallimpulse	662
§ 227. Einfluß der Bewegung auf die Höhe des wahrgenommenen Tones	663

Drittes Kapitel.

Von den tönenden Körpern.

§ 228. Methoden zur Untersuchung schwingender Körper; Stroboskopie	667
Stroboskopische Selbstregulierung	670
§ 229. Optische Methode mittels der Figuren von Lissajous	671
Tafel der Lissajousschen Figuren	676
§ 230. Experimentelle Darstellung der Figuren von Lissajous, drehende Bewegung derselben; Vibrationsmikroskop, Kaleidophon	677
§ 231. Schwingungen gespannter Saiten, Obertöne	686
§ 232. Transversalschwingungen elastischer Stäbe	693
§ 233. Schwingende Platten, Klangfiguren von Chladni	696
§ 234. Theorie der Klangfiguren	701
§ 235. Longitudinalschwingungen von Saiten und Stäben	704
§ 236. Die Zungenpfeifen	709
Mund-, Blasebalg- und Physharmonika	710
§ 237. Die Labial- oder Lippenpfeifen	714
§ 238. Mitteilungen der Schallschwingungen zwischen festen, flüssigen und gasförmigen Körpern	715

Viertes Kapitel.

Von dem Zusammenwirken der Töne.

§ 239. Interferenz isochroner Schallwellen	719
Interferenzröhren von Nörrenberg, Quincke und Kundt	720
Lommels Interferenzversuch	723
§ 240. Abweichungen vom Prinzip der Koexistenz kleiner Bewegungen; Machs Untersuchung der Funkenwellen	724

§	241.	Zusammensetzung von Wellen ungleicher Wellenlänge. Fouriers Theorem	727
§	242.	Obertöne, Teiltöne	730
§	243.	Beispiele für die Zusammensetzung ungleich langer Wellen, Saitenschwingungen	733
§	244.	Anwendung der graphischen und optischen Methode zur Darstellung und Untersuchung zusammengesetzter Schwingungen; Phonograph	736
§	245.	Genauere Untersuchung der Saitenschwingungen	740
§	246.	Schwebungen oder Stöße, Königs Stoßtöne	743
§	247.	Die mehrstimmigen Sirenen von Dove und v. Helmholtz	749
§	248.	Kombinationstöne	753
§	249.	Theorie der Konsonanz und Dissonanz	756
§	250.	Schwingungsform und Klangfarbe	760
		G. S. Ohms Satz	761
§	251.	Klanganalyse, Resonatoren	762
§	252.	Die musikalischen Instrumente und ihre Klangfarbe	768
§	253.	Das menschliche Stimmorgan	772
§	254.	Stimmorgane der Tiere	775
§	255.	Klangfarbe der menschlichen Sprachlaute	776
§	256.	Der Phonograph von Edison	781
§	257.	Das Gehörorgan	785
§	258.	Akustische Bewegungen	790
		Namen- und Sachregister	793

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in approximately 20 horizontal lines, with some lines appearing to be numbered on the right margin. The characters are too light and blurry to be transcribed accurately.

EINLEITUNG.

§ 1. **Begriff und Aufgabe der Naturwissenschaften.** Sobald der Mensch zum Gebrauche seiner Vernunft kommt, wird er sich bewußt, daß er Sinneseindrücke erhält und unwillkürlich versetzt er die Ursachen dieser Eindrücke nach außen. Er gelangt so zur Vorstellung eines Trägers dieser Ursachen, eines Dinges, von welchem die Einwirkungen auf die Sinne ausgehen. Dieses Ding wird Körper genannt, und die Gesamtheit aller dieser Körper heißt Natur. Im Verkehr mit seinesgleichen wird ihm offenbar, daß andere Menschen von einer parallelen Reihe von Sinneseindrücken betroffen werden, und er lernt sich mit jenen über gemeinsame Bezeichnungen dieser Eindrücke und der Körper, denen er ihre Entstehung zuschreibt, zu verständigen ¹⁾.

Wären die Sinnesorgane aller Menschen durchaus gleich beschaffen, so würden gleiche Einwirkungen von außen stets auch gleiche Sinneswahrnehmungen bei allen Individuen hervorrufen. Das ist nun allerdings nicht vollkommen der Fall. Gleichen Objekten entsprechen daher bei verschiedenen Individuen nicht immer gleiche Sinneswahrnehmungen, sowie auch umgekehrt möglich ist, daß gleichen Wahrnehmungen ungleiche Objekte entsprechen. Wir werden Beispiele hierfür unter anderem in der Lehre von den Farben und ihren Empfindungen kennen lernen.

Im großen und ganzen geht jedoch der Vorgang der Sinneseindrücke, der Wahrnehmung derselben und der Bildung der Vorstellungen über die Ursachen derselben bei allen normal entwickelten Menschen so weit parallel

¹⁾ Die Untersuchung der von den Philosophen aufgeworfenen Frage, ob den aus den Empfindungen abgeleiteten Vorstellungen außerhalb derselben auch wirklich etwas real Existierendes entspreche, oder ob nicht etwa die Empfindungen selbst das allein Existierende seien, ist nicht Gegenstand der Physik. Wir halten derlei Spekulationen für den Physiker für unfruchtbar und entbehrlich. Die Geschichte der Physik lehrt, daß deren große Entdecker Galilei, Newton, Volta, Faraday u. a. nicht auf Grund erkenntnis-theoretischer Zweifel, sondern unter Annahme einer realen Welt ihre großen Erfolge erzielt haben. Betrachten wir die Erfahrung als Lehrmeisterin der Physik nicht nur in bezug auf ihren Inhalt, sondern auch für ihre Methode, so kommen wir zu dem Schlusse, daß ihr Fortschritt unabhängig ist von den Grundanschauungen der Philosophie. Der Physiker studiert die Welt, wie sie ihm erscheint, und überläßt es dem einzelnen, dieselbe für wirklich existierend oder für ein Traumbild zu halten.

vonstatten, daß sie sich darüber bis ins einzelne genau verständigen können. Hierdurch wird es möglich, daß die zusammengehörigen Sinneswahrnehmungen, das sind die Erfahrungen eines Menschen, einem anderen durch Unterricht mitgeteilt werden können, der sie auf diese Weise als ein geistiges Besitztum erwerben und verwerten kann, ohne genötigt zu sein, alle diese Erfahrungen selbst auf dem mühsamen und zeitraubenden Wege eigener einzelner Sinneswahrnehmungen zu sammeln.

Wollte aber jede Generation der nachfolgenden ihre Erfahrungen über die Körperwelt in der zufälligen Reihenfolge, in der sie gemacht wurden, mitteilen, so würde die Aufbewahrung und Benutzung derselben an der ungeheuren Anzahl und Mannigfaltigkeit derselben scheitern.

Es muß daher eine Sichtung und Ordnung dieser Erfahrungen vorgenommen werden, irrtümliche und überflüssige Erfahrungen müssen ausgeschieden, gleichartige zusammengezogen, alle aber in ein geordnetes System und auf den einfachsten Ausdruck gebracht werden. Hierdurch wird es möglich, eine enorme, ja unbeschränkte Anzahl verwandter Einzelbeobachtungen in einen einzigen Satz oder in eine einzige Gleichung zusammenzufassen und so in die sparsamste Form zu bringen, welche gleichwohl sehr geeignet ist, alle in ähnlichen Fällen zu erwartenden Erfahrungen daraus abzuleiten.

Den Inbegriff aller systematisch geordneten und auf den einfachsten Ausdruck gebrachten Erfahrungen über die Körperwelt heißen wir Naturwissenschaft.

§ 2. Einteilung der Naturwissenschaften, Aufgabe der Physik.

Es ist nicht leicht, eine kurze und doch einwurfsfreie Definition der Physik zu geben, da man sich dabei auf Begriffe stützen müßte, welche erst im Verlaufe des physikalischen Studiums ihre Erklärung finden. Wir gelangen eher zu einer richtigen Vorstellung von der Aufgabe der Physik, wenn wir von den Naturwissenschaften diejenigen ausscheiden, welche wir als nicht zur Physik gehörig betrachten.

Wir begegnen bei einer Musterung sämtlicher Körper einer großen Klasse derselben, die wir als organisierte bezeichnen. Es sind dies die Tiere und Pflanzen, Wesen, denen die Eigenschaft des Lebens, d. h. die Fähigkeit, sich zu entwickeln, zu ernähren und fortzupflanzen, zukommt. Die mit diesen Körpern sich beschäftigenden Wissenschaften, die Zoologie, Botanik, die Physiologie der Tiere und Pflanzen, bilden eine eigene Gruppe, die Biologie. Damit ist nicht gesagt, daß diese organisierten Körper nicht auch den physikalischen Gesetzen unterliegen und nicht unter Umständen einer physikalischen Untersuchung unterworfen werden können. Der Tier- und Pflanzenkörper unterliegt ja z. B. denselben Gesetzen des freien Falls, reflektiert und absorbiert auch das Licht, leitet die Wärme und die Elektrizität wie ein nicht organisierter Körper, trägt sich also in vielen Beziehungen wie ein solcher. Aber er zeigt im lebenden Zustande Erscheinungen, die sich, wenigstens bisher, nicht auf physikalische Prinzipien zurückführen ließen. Ob dies je gelingen wird, wissen wir nicht. Die Biologie bedarf demnach der Physik als Hilfswissenschaft, geht aber über sie hinaus.

Mit den nicht organisierten Körpern, wie sie sich auf der Erde in natürlichem Zustande finden, den Mineralien und Gesteins-

arten, ihrer Verbreitung und Entstehung beschäftigt sich die Mineralogie und Petrographie, die Geognosie und Geologie, indem sie diese Naturprodukte sammelt, beschreibt und klassifiziert. Auch die Untersuchung der Mineralien und Gesteinsarten erfordert physikalische und chemische Methoden, aber zur Physik werden diese Disziplinen nicht gerechnet, denn der Physiker interessiert sich für diese Naturprodukte als solche nicht, solange sie keine Veränderungen erleiden oder zu einwirkenden Kräften in Beziehung treten.

Unter den bei der gegenseitigen Einwirkung der Körper entstehenden Veränderungen lassen sich zwei Gruppen ziemlich scharf unterscheiden. Diese Veränderungen sind entweder mehr äußerliche, die Lage, Form oder die Anordnung der wahrnehmbaren Teile derselben betreffend, nicht aber auf die materielle Zusammensetzung sich beziehend, oder aber sie erstrecken sich auf die innere materielle Beschaffenheit der Körper, indem dieselben durch ihre ganze Masse hindurch in Teile ungleicher materieller Beschaffenheit zerlegt oder aus solchen zusammengesetzt werden. Die erstere Gruppe bildet den Gegenstand der Physik, die letztere den der Chemie. Aber auch so wäre die Physik noch eine zu umfassende Wissenschaft, als daß sie von einem Menschen beherrscht werden könnte. Darum sind die Bewegungen der Weltkörper, der Fixsterne, Planeten, Kometen und Meteore einer eigenen Wissenschaft, der Astronomie, zugewiesen, ja selbst die Vorgänge in der Atmosphäre der Erde und verwandte Gegenstände werden meistens als eine besondere Abteilung der Physik unter der Bezeichnung Meteorologie abgetrennt.

Es möge das Vorgetragene noch durch ein Beispiel näher erläutert werden.

Ein Naturforscher findet ein Mineral, welches er an seiner rhombischen Kristallgestalt, seiner gelben Farbe, seiner Härte vom Grade 2, seinem spezifischen Gewichte = 2,07, seinem Knistern beim Erwärmen und seinem Gerüche beim Zerreiben als natürlichen Schwefel erkennt. Als beschreibender Naturforscher hat er mit dieser Betrachtung der Eigenschaften und der Erkennung des Minerals, der Konstatierung des Fundortes und der Art des Vorkommens, endlich mit der Einreihung des Minerals in die systematische Sammlung seine hauptsächliche Aufgabe erfüllt. Zeigt das Mineral Eigenschaften und eine Zusammensetzung, wie sie an den bisher bekannten noch nicht beobachtet wurden, so kommt noch die genaue Untersuchung dieser Zusammensetzung und Eigenschaften und die Aufgabe der Nomenclatur und der Einreihung ins System dazu.

Der Physiker nimmt die Untersuchung der Eigenschaften wieder auf, aber in anderer Weise und Richtung. Er bringt an dem Stück Schwefel äußerliche Veränderungen hervor, indem er dasselbe der Einwirkung verschiedener Agenzien aussetzt. Durch Reiben wird der Schwefel elektrisch, durch Erwärmen dehnt er sich zuerst aus, dann schmilzt und verdampft er, durch Abkühlen wird er wieder in feste Kristallform gebracht usw. Aber bei keiner dieser Veränderungen zerfällt der Schwefel in zweierlei materiell verschiedene Bestandteile oder geht mit einem fremden Körper eine Verbindung ein; immer behält er den Namen „Schwefel“.

Noch weiter aber geht der Chemiker; er entzündet den Schwefel, wobei derselbe mit dem Sauerstoff der Luft zu schwefliger Säure verbrennt, oder er

wirft ihn auf glühendes Eisen, mit welchem er sich zu Schwefeleisen verbindet; er reibt ihn mit Quecksilber zusammen, mit welchem er sich zu Zinnober vereinigt usw.; kurz, der Chemiker nimmt solche Veränderungen vor, während welcher der Schwefel aufhört, Schwefel zu sein oder zu heißen.

Die Arbeiten des Mineralogen, des Physikers und des Chemikers greifen demnach vielfach ineinander über. Auch der Mineraloge zersetzt die Mineralien, um sie zu erkennen, und der Chemiker interessiert sich um deren Vorkommen, da er sie zur Herstellung seiner Präparate benötigt. Allein dadurch wird die obige Abgrenzung nicht umgestoßen; denn indem der Mineraloge die Mineralien zersetzt, tritt er eben als Chemiker auf und benutzt die Chemie als Hilfswissenschaft der Mineralogie. Ebenso macht der Chemiker für seine Zwecke physikalische Messungen, und der Physiker führt chemische Operationen aus oder benützt chemische Prozesse zur Erzeugung von Wärme oder Elektrizität.

Physik und Chemie insbesondere sind einander ganz unentbehrlich. Ein großes Grenzgebiet beider, welches sich als physikalische Chemie zu einer eigenen Disziplin entwickelt hat, ist ihnen gemeinschaftlich angehörig, und es sind nur äußerliche praktische Gründe, welche eine gesonderte Behandlung derselben erheischen.

§ 3. Quellen des physikalischen Wissens. Das menschliche Wissen wird im allgemeinen aus drei verschiedenen Quellen geschöpft; diese sind: die Autorität, die Spekulation und die Erfahrung.

Die Autorität von Personen oder von Schriftwerken galt früher überhaupt und gilt heute noch dem Theologen als Hauptquelle für wissenschaftliche Wahrheiten. Für die physikalische Forschung ist sie nicht allein ohne Wert, sondern geradezu von schädlichem Einflusse, wie dies die Geschichte der Physik mehrfach bewiesen hat.

So z. B. zogen die Kirchenväter, gestützt auf die Autorität der Heiligen Schrift, physikalische Schlüsse über die Gestalt und Beschaffenheit der Erde, sowie über deren Stellung zum Weltall, welche sich als gänzlich unhaltbar und irrig erwiesen haben. Ebenso war die Autorität des Aristoteles und seiner Schule auf Jahrhunderte hinaus ein Hemmschuh für die Entwicklung der Wissenschaft. Der Kampf gegen das Kopernikanische System und die Verfolgung seines geistreichen Vorkämpfers Galilei war der hoffentlich letzte gewaltsame Versuch, der Autorität auf physikalischem Gebiete Geltung zu verschaffen. Seitdem dieser Versuch so gründlich gescheitert ist, nahm die Physik erst ihren ungehemmten Aufschwung. Selbst das unbedingte Vertrauen auf die Autorität berühmter Physiker ist verwerflich und hat nicht selten geschadet.

Die Spekulation, d. h. die reine Forschung mittels des Denkens ohne Zuhilfenahme der Erfahrung hat in der Mathematik unbestrittene, in der Philosophie weniger sichere Erfolge aufzuweisen. In der Physik ist sie ebenfalls nur insoweit als Quelle neuen Wissens zulässig, als sie sich auf mathematischem Boden bewegt. Wo letzteres nicht der Fall ist, ist sie unfruchtbar oder schädlich. Belege hierfür sind die Mißerfolge der griechischen Philosophen auf physikalischem Gebiete, die Unfruchtbarkeit jener Jahrhunderte, während welcher die Aristotelische Metaphysik Geltung hatte, ohne daß der

Boden der Erfahrung betreten wurde, endlich die unglaublichen Absurditäten, zu denen die neueren Naturphilosophen Hegel, Schelling, Fichte geführt wurden, als sie versuchten, auf rein spekulativem Wege physikalische Wahrheiten zu ergründen¹⁾.

Die Erfahrung bleibt somit die einzige zulässige Quelle der physikalischen Forschung. Diese Behauptung ist schon in dem enthalten, was wir am Schlusse des § 1 als Inbegriff der Naturwissenschaft überhaupt bezeichnet haben. Die Physik ist als Teil der Naturwissenschaft eben auch nur ein System von geordneten und einfach dargestellten Erfahrungen, verbunden mit dem Versuche, diese Erfahrungen untereinander in kausalen Zusammenhang zu bringen.

Die Erfahrungen können auf zweierlei Weise gewonnen werden: entweder durch Wahrnehmungen von Erscheinungen, welche uns die Natur ohne unser Zutun unmittelbar darbietet, oder indem wir die Körper absichtlich in solche Umstände versetzen, welche sie nötigen, jene Erscheinungen hervorzubringen, welche wir beobachten oder messen wollen. Im ersten Falle machen wir nur Beobachtungen, im zweiten stellen wir Versuche an, wir experimentieren. Die letztere Methode ist natürlich die fruchtbarere und wird überall dort angewendet, wo es überhaupt möglich ist. Den Blitz z. B. können wir nur beobachten, mit dem elektrischen Funken können wir experimentieren. Da wir in der Lage sind, den letzteren beliebig oft, unter den verschiedensten Umständen und insbesondere dann hervorzurufen, wenn unsere Aufmerksamkeit bereits gespannt ist und alle Mittel zur genauen Beobachtung vorbereitet sind, so ist es nicht zu verwundern, daß wir über die Natur des elektrischen Funkens viel früher und genauer unterrichtet sind als über den Blitz, obwohl letzterer um Tausende von Jahren länger beobachtet wurde als der künstliche elektrische Funke.

§ 4. Die physikalischen Apparate und Instrumente. Zur Anstellung der Versuche und Beobachtungen benutzen die Physiker eigenartige Vorrichtungen, unter denen wir drei Gruppen unterscheiden können.

Die erste Gruppe umfaßt diejenigen Vorrichtungen, welche die physikalischen Agenzien herbeischaffen, deren Wirkungen beobachtet werden sollen. Hierher gehören z. B. Motoren, Schwungmaschinen, Heiz- und Beleuchtungsapparate, Elektrisiermaschinen, galvanische Batterien, Gebläse usw. mitsamt den Vorkehrungen zur Regulierung und Applikation dieser Agenzien.

In die zweite Gruppe gehören die Vorrichtungen zur genauen Beobachtung und Messung der wirksamen Agenzien und deren Wirkungen, z. B. die Wage, das Fernrohr, das Mikroskop, der Theodolit, das Barometer, Manometer, Thermometer, Photometer, Galvanometer usw. Es sind die Meßinstrumente. Bei diesen sind Richtigkeit und Genauigkeit Hauptbedingungen.

In die dritte Gruppe gehören die Demonstrationsapparate, welche nicht dazu bestimmt sind, die Erscheinungen erst zu erforschen, sondern

¹⁾ „Ich fand“, schrieb H. v. Helmholtz in einem Briefe an den Physiologen Ludwig, „daß das viele Philosophieren zuletzt eine gewisse Demoralisation herbeiführt und die Gedanken lax und vage macht, ich will sie erst wieder eine Weile durch das Experiment und durch Mathematik disziplinieren . . .“ (L. Königsbergers Biographie H. v. Helmholtz', Bd. II, S. 162.)

bereits bekannte Erscheinungen zum Zwecke des Unterrichts womöglich vielen Zuschauern zugleich vorzuführen. Bei diesen tritt die Genauigkeit zurück, die Einfachheit und Übersichtlichkeit dagegen in den Vordergrund. Hierher gehören die verschiedenen Schulapparate, die Projektionsapparate usw.¹⁾.

Die zur physikalischen Forschung bestimmten Apparate und Instrumente kommen aus den Händen des Mechanikers nicht in vollkommenem Zustande, sie besitzen, worauf der Physiker von vornherein gefaßt ist, gewisse, schwer vermeidliche Fehler, welche derselbe entweder durch die Art des Experimentierens selbst unschädlich zu machen, zu eliminieren sucht, oder welche er zum Zwecke der Korrektur ausmittelt. Häufig ist das Instrument so eingerichtet, daß seine Fehler durch Verstellung seiner Teile weggeschafft werden können. Diese Operation wird als Adjustierung oder Rektifikation des Instruments bezeichnet.

Die richtige Behandlung der Apparate überhaupt, die Adjustierung und Rektifikation der Meßinstrumente, die Eliminierung der Beobachtungsfehler durch sinnreiche Gruppierung der Messungen, kurz, das Experimentieren erfordert nicht allein theoretische Kenntnisse, sondern auch technische Geschicklichkeit, welche selbstverständlich nur im physikalischen Laboratorium praktisch angeeignet werden kann²⁾.

§ 5. Methode der physikalischen Forschung. Bei der physikalischen Erforschung einer Gruppe von Erscheinungen lassen sich mehrere Stufen unterscheiden.

Die erste Stufe, welche wir die qualitative nennen können, beschäftigt sich mit der Beobachtung des allgemeinen Verlaufes der Erscheinungen, mit der Feststellung derjenigen Elemente oder Größen, welche dabei eine Veränderung erleiden, und mit der experimentellen Erforschung der gegenseitigen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der beobachteten Veränderungen.

Wenn z. B. das freie Fallen von Körpern Gegenstand der Erforschung wäre, so würde zuerst die senkrechte Richtung des Falls, dann die Zunahme der Geschwindigkeit mit der Verlängerung der Fallzeit oder des Fallraumes zur Beobachtung gelangen; auch würde man durch gleichzeitiges Fallenlassen mehrerer Körper von ungleicher Größe und Beschaffenheit sich überzeugen, daß die Fallgeschwindigkeit von diesen letzteren nicht merklich abhängt.

Die zweite Stufe ist die der quantitativen Erforschung. Man sucht die voneinander als abhängig erkannten veränderlichen Größen zu messen, wobei man die Umstände der Beobachtungen so auswählt, beziehungsweise die Experimente so abändert, daß alle möglichen Hauptfälle zur Beobachtung

¹⁾ Eine ganz vortreffliche, leider zu wenig bekannt gewordene Abhandlung über wissenschaftliche Apparate aus der Feder des hervorragenden englischen Physikers J. Cl. Maxwell findet sich in dem Handbuch zur internationalen Ausstellung wissenschaftlicher Apparate in London 1876, deutsche Ausgabe von R. Biedermann. London; Chapman and Hall.

²⁾ Anleitung hierzu geben die bekannten vortrefflichen Lehrbücher: Kohlrausch, Praktische Physik; Frick-Lehmann, Physikalische Technik; Wiedemann und Ebert, Physikalisches Praktikum; Weihhold, Physikalische Demonstrationen.

gelangen. Das Resultat dieses Teiles der Untersuchung erscheint demnach in Form von Zahlentabellen, welche die zusammengehörigen Werte der voneinander abhängigen veränderlichen Größen enthalten.

In dem angegebenen Beispiele würde also eine Anzahl Fallzeiten und die diesen entsprechenden Fallräume teils ohne, teils mit Anfangsgeschwindigkeit gemessen werden.

Die dritte Stufe beschäftigt sich mit der Aufstellung eines empirischen Gesetzes, beziehungsweise einer empirischen Gleichung, das heißt eines Satzes (einer Regel) oder einer Gleichung, welche, wie man sich ausdrückt, „die Beobachtungen wiedergibt“. Jede solche Gleichung enthält zwei oder mehrere veränderliche Größen und eine Anzahl konstanter Zahlenwerte, kurzweg Konstante genannt. Je weniger Konstante die Gleichung enthält, desto einfacher lautet das Gesetz. Man sucht daher mit der möglichst kleinsten Anzahl von Konstanten auszukommen und greift nicht früher zu einer größeren Anzahl derselben, als bis man sich überzeugt hat, daß die kleinere Anzahl nicht ausreicht, um sämtliche Beobachtungen mit derselben Genauigkeit darzustellen, mit der sie gemessen sind.

In dem gewählten Beispiele würde man also allenfalls zuerst versuchen, die Fallzeit t und den zugehörigen Fallraum s durch eine Gleichung von der Form:

$$s = at$$

zu verknüpfen, wonach das empirische Gesetz lauten würde: die Fallräume sind proportional den Fallzeiten. Man würde dann aber sofort finden, daß es keinen Wert der Konstanten a gibt, welcher allen Beobachtungen genügt, daß mithin dieses Gesetz ungenügend oder unrichtig ist. Man wird folglich ein weniger einfaches Gesetz, z. B. jenes entsprechend der Gleichung:

$$s = at + bt^2$$

anzuwenden versuchen und sich bald überzeugen, daß dieses bis auf die Beobachtungsfehler genau sämtlichen Messungsergebnissen sich anschließen, indem bei geeigneter Wahl der Konstanten a und b sämtliche beobachtete Werte von t , der Reihe nach in die Gleichung eingesetzt, die zugehörigen beobachteten Werte von s mit genügender Annäherung ergeben.

Die aufgestellte empirische Gleichung ist zunächst der kürzeste Ausdruck sämtlicher von uns gemachter Beobachtungen; aber sie ist noch etwas Wesentliches mehr. Haben wir die Fallräume für die Fallzeiten von 1, 3, 5 Sekunden beobachtet, so halten wir es für höchstwahrscheinlich, daß auch die Fallräume für die dazwischen liegenden Fallzeiten von 2, 4 Sekunden dieser selben Gleichung entsprechen (Interpolation), ja wir schließen, wenn auch schon mit einem geringeren Grade der Sicherheit, daß dies auch für die über das Beobachtungsgebiet von 5 Sekunden hinausgehenden Zeiträume von z. B. 10 Sekunden der Fall sein werde (Extrapolation). Das heißt, wir betrachten die empirische Gleichung nicht allein als Ausdruck aller wirklich gemachten, sondern auch als den aller künftig zu machenden Erfahrungen. Indem wir aber diese Bedeutung der Gleichung zulassen, ziehen wir, auf Grund einer stillschweigend gemachten Annahme, einen Schluß, der uns höchst wahrscheinlich scheint, dessen Berechtigung aber erst noch zu erweisen ist. Es ist dies die Annahme, daß dieselbe Abhängigkeit des Fallraumes von der Fallzeit, die wir für bestimmte Fallzeiten beobachtet

haben, auch für alle die nicht beobachteten Fallzeiten und Fallräume bestehen werde. Der hieraus gezogene Schluß heißt ein Induktionsschluß. Er erhält seine Begründung durch die Vorstellung des kausalen Zusammenhanges zwischen den Fallerscheinungen und einer gemeinsamen Ursache derselben, die wir die Schwerkraft nennen. Die Annahme einer solchen Ursache nennen wir eine Hypothese und die Auffassung der Fallerscheinungen als Folge derselben eine Erklärung oder Theorie des Falles.

Mit der Aufstellung einer solchen Theorie, welche die beobachteten Erscheinungen nunmehr als notwendige Folge der Ursache darstellt, wird aus der ursprünglichen empirischen Gleichung, aus der erfahrungsgemäßen Regel jetzt ein begründetes Gesetz. Die Konstanten der empirischen Gleichung, welche bisher nichts anderes waren als aus der Erfahrung abgeleitete Zahlenwerte, treten nunmehr als Größen mit physikalischer Bedeutung auf. So z. B. erkennen wir in der obigen Konstante a die Anfangsgeschwindigkeit, in der Größe b die halbe Beschleunigung, welche wir dann später als das Maß der wirksamen Ursache, der Kraft, erklären.

Die physikalische Methode schlägt von da an einen umgekehrten Weg ein. Aus der gewonnenen Theorie werden Folgerungen gezogen und Beobachtungsergebnisse vorausberechnet. An die Stelle des Induktionsschlusses tritt der Deduktionsschluß; statt von den Resultaten der Einzelbeobachtungen auf das allgemeine Gesetz wird jetzt umgekehrt aus diesem auf jene geschlossen. Statt empirischer Entdeckungen auf dem Wege der Beobachtungen werden jetzt theoretische Entdeckungen auf dem Wege der Rechnung gemacht, welche zu Erweiterungen unserer Kenntnis führen. Indem wir z. B. der Anfangsgeschwindigkeit a einen positiven oder negativen Wert oder den Wert Null geben, erhalten wir die Gesetze für den senkrechten Wurf nach abwärts und nach aufwärts und erkennen in dem freien Fall nur einen Spezialfall des senkrechten Wurfes.

Diese theoretischen Entdeckungen veranlassen uns dann zu neuen Versuchen, die wir anstellen, um alle Folgerungen unserer Theorie zu prüfen und die letztere dadurch immer mehr zu befestigen. Mit dem Nachweise, daß wirklich keine dieser Folgerungen mit den beobachteten Tatsachen im Widerspruche steht, hat die physikalische Forschung der untersuchten Erscheinungsgruppe ihren vorläufigen Abschluß gefunden.

Wir sagen: ihren vorläufigen Abschluß, denn wir müssen im allgemeinen stets darauf gefaßt sein, daß wir später genötigt sein werden, die Theorie und das Gesetz zu ergänzen, zu modifizieren oder auch gänzlich zu verwerfen und zu erneuern.

Die häufigste Veranlassung hierzu gibt der Umstand, daß feinere und genauere Messungsmethoden uns für die Beobachtungen Werte ergeben, die von den aus der bisherigen Theorie berechneten um Mehr abweichen, als die wahrscheinlichen oder zulässigen Beobachtungsfehler betragen. So würde z. B. eine genauere Messung der Fallräume ergeben, daß dieselben nicht ganz unabhängig seien von der Beschaffenheit des fallenden Körpers, von der absoluten Höhe und von dem Orte, an welchem das Experiment angestellt wird. Durch weitere Untersuchungen werden wir darauf geführt, diese Abweichungen durch den Widerstand der Luft und die Änderung der Schwer-

kraft zu erklären. Es gelingt uns, die Theorie entsprechend zu erweitern und eine kompliziertere Gleichung mit einer größeren Anzahl von Veränderlichen und Konstanten aufzustellen, welche nun mit den neuen Beobachtungen übereinstimmt.

In anderen Fällen sehen wir uns manchmal genötigt, die frühere Theorie gänzlich fallen zu lassen ¹⁾.

¹⁾ Wir haben mit obiger Darstellung diejenige Auffassung vertreten, welche wohl von der großen Mehrzahl der Physiker geteilt wird. Als Beleg führen wir einige Stellen aus dem Nachlasse H. v. Helmholtz' an „Über die Analyse des tatsächlich vorhandenen Wissens“:

„Die Aufstellung eines Naturgesetzes enthält die Zuversicht, daß in allen künftigen entsprechenden Fällen die Erscheinungen sich dem Gesetze fügen werden. Ein vollständiges Gesetz, welches die Bedingungen und die Größe des Erfolges vollständig und genau angibt, ist für unser Wissen der genügende Grund, sicher auf den Erfolg zu schließen. Ebenso ist es dann anzusehen als Kraft, als der objektiv genügende Grund des Eintritts. Die naturwissenschaftlichen Hypothesen sind Versuche, Gesetze von einer weiter ausgedehnten Bedeutung zu finden, als die Beobachtungen unmittelbar erlauben . . . Der Urquell alles Wissens ist die Übertragung des bisher Erfahrenen in das künftig zu Erfahrende. Die Erscheinungen begreifen oder ihre Gesetze finden, heißt die Kräfte aufsuchen, welche die Ursachen der Erscheinungen sind.“ (L. Königsbergers Biographie H. v. Helmholtz', Bd. II, S. 158, 167).

Wir dürfen aber nicht verschweigen, daß einige neuere Naturforscher andere Ansichten vertreten.

So z. B. sagt J. R. Mayer: „Die einzige Regel für die echte Naturforschung ist, die Erscheinungen kennen zu lernen, bevor wir nach Erklärungen suchen oder nach höheren Ursachen fragen mögen. Ist einmal eine Tatsache nach allen ihren Seiten bekannt, so ist sie eben damit erklärt, und die Aufgabe der Wissenschaft ist beendet.“ Nach unserer Auffassung gilt von diesem Ausspruche nur der erste Satz.

Kirchhoff definiert als Aufgabe der Mechanik: „Die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben.“

E. Mach bezeichnet die Annahme einer Ursache als Fetischismus und verwirft das Prinzip der Kausalität. Hiernach gibt es keine Erklärung, keine Ursache und keine Wirkung.

W. Ostwald erklärt die Aufstellung von Hypothesen für schädlich und entbehrlich.

Die Annahme kausalen Zusammenhanges einerseits und die Leugnung der Kausalität andererseits sind nun allerdings unüberbrückbare Gegensätze, ebenso die Annahme einer realen Welt gegenüber der Annahme, daß nur die Empfindungen allein existieren. Dagegen halten wir die Verwerfung der „Erklärung“ und die Ersetzung derselben durch „Beschreibung“ für eine bisher ungebräuchliche und nicht glückliche Anwendung des letzteren Wortes.

Die Wichtigkeit dieser Frage veranlaßt uns, dies in einem Beispiele näher auseinanderzusetzen. Die Bewegungen der Planeten können nicht vollständiger und nicht einfacher beschrieben werden als durch ein Verzeichnis ihrer Positionen am Himmel für jeden Tag, allenfalls ergänzt durch einen Atlas, in dem die scheinbaren Bahnen mit Datumsbezeichnung auf der Fixsternkarte eingezeichnet sind. Allein damit begnügten sich die Astronomen nicht. Sie fühlten das Bedürfnis, die scheinbar so verworrenen Planetenbahnen verständlich zu machen, indem sie dieselben als die geozentrischen Projektionen der wirklichen Bewegungen auf das Himmelsgewölbe aufzufassen versuchten. Das Ptolemäische und das Kopernikanische System sind solche Versuche, von denen das letztere die größere Einfachheit und nach der Verbesserung durch Keppler auch die größere Genauigkeit für sich hat. Hervorgehoben wurden diese Versuche insbesondere durch den Wunsch, astronomische Ereignisse vorausberechnen zu können. Das konnte die genaueste Beschreibung nie leisten, denn diese konnte immer nur die Tatsachen

§ 6. Einteilung der Physik. Alle Teile der Physik stehen zueinander in mehr oder weniger engen Beziehungen. Es ist deshalb sehr schwierig, sie in Abschnitte zu zerlegen, ohne Dinge voneinander zu trennen, die zusammengehören. Da aber doch bei einem so großen Lehrstoffe eine Ordnung und Gliederung stattfinden muß, so ist man genötigt, sich nach einem Einteilungsprinzip umzusehen, welches wenigstens dem praktischen Bedürfnisse Rechnung trägt.

Man hat versucht, die Physik nach der Beschaffenheit des Substrates, an dem die Erscheinungen vor sich gehen, in die Physik der Ponderabilien (der wägbaren Materie) und die Physik der Imponderabilien (der nicht wägbaren Substrate) einzuteilen. Man rechnet zur ersteren die Lehre von der Bewegung und dem Gleichgewicht der Körper (Mechanik) und die Lehre vom Schalle (Akustik), zur letzteren die Wärmelehre, die Lehre vom Lichte und die Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität. Allein diese Einteilung ist nicht stichhaltig¹⁾ und überdies nicht ausreichend, da die daraus hervorgehenden Gruppen doch wieder unterabgeteilt werden müssen.

der Vergangenheit feststellen. Der künftige Verlauf der scheinbaren Bewegungen könnte nur dann vorausgesagt werden, wenn das System der wirklichen Bewegungen bekannt war, durch deren Projektion die scheinbaren Bewegungen entstehen. Die Erschließung der wirklichen Bewegungen aus den scheinbaren nennt man aber nicht Beschreibung, sondern Erklärung der letzteren; denn durch sie wird es klar, wieso letztere zustande kommen.

Aber selbst dann, wenn man so weit gehen wollte, die Aufstellung der wirklichen Bewegungen als eine vereinfachte Beschreibung der scheinbaren zu bezeichnen, wäre damit die Aufgabe der Astronomie noch nicht erfüllt. Newton hat trotz seines Ausspruches: „hypothesen non fingo“ auf Grund der Hypothese, daß dieselbe Ursache (Kraft), welche den Stein fallen macht, auch die Bewegung des Mondes beherrsche, beide Erscheinungen einheitlich dynamisch erklärt; denn eine Beschreibung kann man seine Gravitationstheorie denn doch nicht nennen. Ebenso wenig kann man z. B. Kirchhoffs Theorie der Klangfiguren eine einfache Beschreibung dieser Figuren nennen. Wenn dies trotzdem geschieht, so dürfen wir wohl fragen, ob es zweckmäßig ist, zwei so verschiedene Leistungen, die man bisher als „beschreiben“ und „erklären“ unterschieden hat, mit einem Male mit demselben Ausdruck „beschreiben“ zu bezeichnen.

Ebenso unverständlich ist uns die Scheu vor den Hypothesen. Es handelt sich ja nicht um vage, unbegründete Hypothesen, welche allein Newton mit seinem Ausspruche gemeint haben kann. Wo stände heute die Astronomie ohne die Gravitationshypothese, wo die synthetische Chemie ohne die Daltonsche Hypothese der Atome? Unzweifelhaft wären sowohl der Neptun, sowie zahlreiche chemische Verbindungen unentdeckt geblieben. Das Kopernikanische Weltssystem ist auch nur eine Hypothese, und welchen Aufschwung hat sie der gesamten Naturwissenschaft gebracht! Warum sollen wir also so fruchtbare Hilfsvorstellungen nicht benutzen? Wir müßten es selbst dann tun, wenn wir bestimmt vermuteten, daß sie der Realität nicht entsprechen und seinerzeit besseren Hypothesen weichen werden. Solche theoretisch längst aufgegebene, aber aus Nützlichkeitsgründen noch beibehaltene Hypothesen finden sich in fast allen Teilen der Physik; nach ihrem gänzlichen Fallenlassen bleibt dann oft noch die derselben entstammende Nomenklatur erhalten. So z. B. sprechen wir heute noch vom Abfließen der Wärme, obwohl wir längst die Hypothese, daß die Wärme eine Flüssigkeit sei, aufgegeben haben.

¹⁾ Da wir z. B. die Erscheinungen der Wärme durch Bewegungen der Moleküle zu erklären versuchen und andererseits dem Äther eine Masse zuschreiben müssen.

Da alle unsere Erfahrungen durch die Sinnesorgane erworben werden, so liegt es nahe, die ersteren nach den letzteren zu ordnen. In dieser Weise lassen sich Optik dem Gesichtsinne und Akustik dem Gehörsinne, allenfalls noch die Mechanik dem Tastsinne zuweisen, allein dem Wärmesinne müßten wir sowohl die Erscheinungen der geleiteten als der strahlenden Wärme zuordnen, was unzweckmäßig wäre, da die letzteren mit den Lichterscheinungen viel näher zusammenhängen. Noch weniger lassen sich die magnetischen und elektrischen Erscheinungen in dieser Weise unterbringen, da sie alle Sinne beschäftigen.

Somit ist auch dieses Einteilungsprinzip hinfällig. Trotzdem ist die altergebrachte Einteilung in Mechanik, Akustik, Optik, Wärmelehre, Magnetismus und Elektrizität immer noch aus praktischen Gründen die beste. Was die Reihenfolge betrifft, so wäre zwar theoretisch die Optik besser zwischen die Wärmelehre und die Lehre von Magnetismus und Elektrizität zu stellen. Da aber Akustik und Optik durch die Wellenlehre zusammenhängen, so wollen wir die alte Anordnung beibehalten. Die strahlende Wärme wurde, in Abänderung des bisherigen Gebrauchs, der Optik und der größere Teil der molekularphysikalischen Erscheinungen der Wärmelehre angegliedert.

§ 7. Physikalische Grundbegriffe. Einen Begriff definieren heißt denselben auf einfachere bekannte Begriffe zurückführen. Jede Definition setzt also das Vorhandensein von einfacheren Begriffen voraus, deren Bekanntheit selbst wieder durch weitere Definition ermittelt werden muß. Daraus ergibt sich, daß das immer weiter fortgesetzte Definieren oder Zurückführen auf noch einfachere Begriffe kein Ende finden könnte, wenn man nicht endlich bei gewissen Grundbegriffen stehen bleiben würde; sei es, weil man keine weitere Zerlegung in noch einfachere Begriffe aufzufinden vermag, oder daß man diese weitere Verfolgung aus anderen Gründen aufzugeben für zweckmäßig findet.

Auf solche Grundbegriffe werden wir auch in der Physik geführt. Es sind zunächst folgende: Raum, Zeit, Bewegung und Materie.

Raum. Wir können uns die Körper nicht anders als in einem Raume vorstellen, welcher drei Dimensionen (Erstreckungen) nach Länge, Breite und Höhe hat. Ob diesem Raume wirkliche Realität zukomme, oder ob er nur eine beschränkte Erkennungsweise unseres Geistes ist, ob der Raum auch mit mehr als drei Dimensionen oder von einer ganz abweichenden Beschaffenheit gedacht werden könne, das sind lauter spekulative Fragen, welche mit der Physik nichts zu tun haben.

Durch Abstraktion gelangen wir zur Vorstellung von Raumgebilden nur zweier oder nur einer Dimension. Die Körper selbst haben drei Dimensionen, die Grenzen der Körper, nämlich die Flächen, haben deren zwei, die Grenze der Fläche, die Linie, hat nur eine Dimension, die Grenze der Linie, der Punkt, hat keine Dimension.

Die Lage eines Punktes im Raume kann vollständig bestimmt werden, wenn wenigstens drei andere, nicht in einer geraden Linie liegende Punkte bereits gegeben sind, deren Abstände von dem zu bestimmenden Punkte dann dessen Lage definieren. Meistens bestimmt man die Lage eines Punktes

im Raume durch dessen senkrechte Abstände (Koordinaten) von drei sich rechtwinklig schneidenden Ebenen (Koordinatensystem des Cartesius).

Man muß sich gegenwärtig halten, daß jede solche Ortsbestimmung nur eine relative ist, nämlich nur Bezug hat auf die Nachbarpunkte oder die gewählten Koordinatenachsen. Eine absolute Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume ist unmöglich, weil sich kein Teil des Raumes von einem anderen Teile irgendwie unterscheidet und überhaupt der Raumbegriff erst durch Anwesenheit von Bezugspunkten möglich wird.

Zeit. Der zweite uns unentbehrliche Grundbegriff ist die Zeit; sie ist ebenso schwer definierbar als der Raum. Wir können nicht anders als uns vorstellen, daß die Veränderungen der Körper und alle in uns durch sie hervorgerufenen Sinneswahrnehmungen durch ein dazwischenliegendes, nach nur einer Dimension sich erstreckendes Etwas voneinander getrennt seien, was wir eben die Zeit nennen. Sie erstreckt sich in der einen Richtung von Vergangenheit zur Zukunft.

Wie es keine absolute Raumbestimmung gibt, so gibt es auch keine absolute Zeitbestimmung, denn so wie die Orte im Raume nur durch die dasselbst anwesenden Körper, auf die wir uns beziehen, angebar sind, so sind Zeitpunkte nur angebar in bezug auf Ereignisse, welche die Zeiträume begrenzen.

Auf die Vergleichung von Zeiträumen werden wir an späterer Stelle zurückkommen.

Bewegung. Wenn ein Punkt innerhalb einer Zeitdauer seine Lage im Raume kontinuierlich ändert, so sagt man, er sei in Bewegung. Ändert er seine Lage nicht, so sagt man, er sei in Ruhe.

Man hat zu unterscheiden zwischen absoluter Bewegung (absoluter Ruhe) und relativer Bewegung (relativer Ruhe). Eine einfache Überlegung lehrt uns, daß wir nur die relative Bewegung oder Ruhe eines Punktes zu erkennen imstande sind. Gäbe es nur einen Punkt im sonst absolut leeren Raume, so könnte man eine Bewegung desselben weder erkennen, noch hätte es überhaupt einen Sinn, von einer solchen zu sprechen. Ebensowenig könnte man behaupten, daß er in Ruhe sei, weil der Begriff Ruhe fehlt, wo es keinen Gegensatz zu demselben geben kann.

Das Gesagte gilt auch von der fortschreitenden Bewegung eines Systems von Punkten oder eines Körpers. So oft wir daher in der Physik von fortschreitender Bewegung sprechen, meinen wir immer nur relative Bewegung in bezug auf andere Körper. Wenn eine große Eisscholle mit einer gewissen Geschwindigkeit einen Strom abwärts getragen wird und ein Mensch auf dieser Scholle mit derselben Geschwindigkeit stromaufwärts geht, so bleibt er über demselben Punkte des Strombettes. Er ist in relativer Bewegung in bezug auf die Eisscholle und zugleich in relativer Ruhe in bezug auf das Strombett oder die Ufer.

Dieses Beispiel läßt zugleich einsehen, daß die relativ fortschreitende Bewegung stets gegenseitig ist. Man kann ebensogut sagen: „der Mensch geht über die Scholle“ als: „die Scholle bewegt sich unter dem Menschen hindurch“. Sie bewegen sich eben beide gegeneinander. In absoluter Ruhe sind weder Scholle noch Mensch, denn sie nehmen beide an der Rotation der Erde um ihre Achse und ihrer Bewegung um die Sonne teil.

Ebenso verhält es sich in allen ähnlichen Fällen. Wenn wir daher von zwei Körpern, deren Abstand sich vergrößert oder verkleinert, sagen, der eine sei in Ruhe, der andere bewege sich zu oder von dem ersteren, so ist dies zunächst rein willkürlich, da wir ebensogut dem ersteren die Bewegung und dem zweiten die Ruhe oder auch beiden Körpern zugleich eine entfernende oder annähernde Bewegung zuschreiben könnten. Sehr häufig ist eine große Anzahl von Körpern oder Körperteilen unter sich in relativer Ruhe, daneben eine weit geringere Zahl von Körpern gegen die ersteren in relativer Bewegung. In diesem Falle betrachten wir die Majorität als ruhend, die Minorität als in Bewegung begriffen. Wir betrachten also z. B. die Erdoberfläche ruhend gegenüber dem Schiffe, das sich bewegt, aber gleichzeitig den Schiffsboden ruhend gegenüber einer Tonne, welche darauf gerollt wird, und die Oberfläche der Tonne ruhend gegenüber einer Spinne, die darüber kriecht. Das alles ist aber nur konventionell.

Vergleichung von Raum- und Zeitgrößen. Die Gleichheit zweier Raumdistanzen oder Längen wird bekanntlich dadurch konstatiert, daß man einen Körper (Maßstab) von gleicher Länge wie die erste Raumdistanz an die zweite zu vergleichende anlegt. Diese einfache Methode setzt nur voraus, daß der Raum die Eigenschaft habe, daß ein und derselbe Körper seine Dimensionen nicht ändert, wenn sein Ort im Raume geändert wird.

Schwieriger ist es, die Gleichheit zweier Zeiträume zu konstatieren. Daß die Umdrehungszeit der Erde (der Sterntag), welche wir als Zeitmaß benutzen, konstant sei, ist eben erst zu erweisen¹⁾. Auf diese, sowie auf unsere Uhren, die wir nach dem Sterntage richten, dürfen wir uns bei einer prinzipiellen Behandlung der Frage nicht stützen.

Manche Physiker haben versucht, die Zeitvergleichung auf die später zu betrachtende gleichförmige Bewegung zu stützen, indem sie definierten: Gleiche Zeiträume sind jene, welche ein gleichförmig bewegter Körper braucht, um gleiche Wege zurückzulegen. Allein die gleichförmige Bewegung wird dann selbst wieder definiert als jene, bei welcher in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt werden. Dieser *circulus vitiosus* kann vermieden werden, wenn man verfährt, wie es zuerst D'Alembert angedeutet und dann Poisson näher ausgeführt hat²⁾.

Man denkt sich, daß völlig identische Körper nacheinander unter ganz genau gleichen Umständen nach irgend einem Gesetze eine Bewegung ausführen. Mag dieselbe welcher Art immer sein, sie muß gleiche Zeiträume benötigen, falls wirklich alle Bedingungen beide Male gleich sind.

Wenn wir also z. B. ein und dasselbe Pendel zu zwei verschiedenen Malen ganz gleich weit aus der Ruhelage entfernen und eine Schwingung ausführen lassen, so wird die Zeitdauer dieser Schwingung beide Male gleich groß sein. Diese Methode, welche jener der Anlegung eines Maßstabes bei Längenvergleichen analog ist, setzt also nur voraus, daß der Verlauf physikalischer Vorgänge von der absoluten Zeit, in der die Vorgänge stattfinden, unabhängig sei, eine Bedingung ebenfalls analog derjenigen, welche

¹⁾ Siehe § 29.

²⁾ Siehe Streintz, „Die physik. Grundlagen der Mechanik“, S. 86. D'Alemberts *Traité de Dynamique*. II. Édit. 1758, p. 13.

bei der Vergleichung von Raumgrößen in bezug auf den absoluten Raum vorausgesetzt wird.

Alle Vergleichungen und Messungen in Raum und Zeit, mithin alle physikalischen Messungen überhaupt beruhen demnach auf dem obersten Grundsatz:

„Dieselben Ursachen bringen überall und immer dieselben Wirkungen hervor.“

Materie. Die physikalischen Körper haben zum Unterschiede von den geometrischen Körpern nicht allein eine Form, sondern auch einen Inhalt. Diesen Inhalt nennen wir Materie. Wir betrachten sie als die Trägerin der Eigenschaften der Körper und die Ursache der Sinneseindrücke, die wir von den Körpern empfangen.

Wir beobachten, daß verschiedene Körper bei gleicher Form ganz abweichende Eigenschaften besitzen können, woraus wir schließen müssen, daß es ihr Inhalt, also ihre Materie ist, welche die verschiedenen Eigenschaften bedingt. Wir erfahren hierdurch, daß es verschiedenartige Materie gibt.

Homogen nennen wir jene Körper, welche in jedem ihrer Volumteile durchaus gleiche Beschaffenheit haben; im anderen Falle nennen wir sie heterogen. Beispiele homogener Körper sind schlierenfreies Glas, Bergkristall, Wasser, Wasserstoff; heterogene Körper sind schlierenhaltiges Glas, Granit, eine in verschiedenen Schichten ungleich konzentrierte Salzlösung, Emulsionen (Milch), Rauch.

Isotrop heißen jene Körper, welche in allen ihren Punkten nach allen Richtungen gleiche Eigenschaften zeigen; im anderen Falle heißen sie anisotrop oder heterotrop. Isotrope Körper sind gut gekühltes Glas, Flüssigkeiten und Gase bei gleich verteilter Temperatur. Anisotrope Körper sind gepreßtes Glas, Kristalle, Flüssigkeiten und Gase mit ungleich temperierten Schichten ¹⁾.

¹⁾ Bei näherer Überlegung findet man, daß diese Definitionen eine Schwierigkeit oder Unbestimmtheit enthalten. Man rechnet Luft (oder ein anderes Gasgemisch) zu den homogenen Körpern, trotzdem Volumteile derselben von der Größenordnung der Moleküle abwechselnd Stickstoff oder Sauerstoff oder ein Vakuum enthalten. Auch ein reines Gas, z. B. Wasserstoff, wäre demnach nicht homogen, ebensowenig ein fester Körper, der Poren enthält. Nur eine den Raum kontinuierlich ausfüllende Materie könnte vollkommen homogen sein. Man spricht aber doch von homogenen mechanischen Gemischen und wird auch von einem ganzen Gebirge, das überall aus demselben Granit besteht, sagen dürfen, es habe homogene geologische Beschaffenheit. Die Definition würde erst dadurch eine Bestimmtheit erlangen, daß man die Größe der Volumelemente angibt, deren Beschaffenheit man in Vergleich zieht. So z. B. wäre Milch bei Betrachtung von Volumteilen, die von der Größenordnung der in ihr schwebenden Fettkügelchen sind, heterogen, dagegen homogen, wenn man ganze Cubikcentimeter derselben vergleicht. Dasselbe würde gelten für Siegellack, welches ein inniges Gemenge von Harz und Ocker, von Schießpulver, welches ein Gemenge von Kohle, Schwefel und Salpeter ist, von Bimsstein, welcher abwechselnd aus geschmolzener Lava und Luftblasen besteht. Man hat solche Körper auch quasihomogen oder grobhomogen genannt. Ähnliches gilt von der Isotropie. Füllen wir ein Gefäß mit feinstgepulvertem Bergkristall überall gleich dicht an, so daß nirgend die Richtung der Hauptachse der Kristalle überwiegend vorkommt, so sind Volumteile dieses Körpers, deren Größenordnung die der Kristallfragmente weit übersteigt, als isotrop anzusehen, während die Fragmente selbst anisotrop sind. Man kann solche Körper quasiisotrop nennen.

Es gibt auch Körper, welche in bezug auf eine Eigenschaft isotrop, in bezug auf andere Eigenschaften anisotrop sind. So z. B. sind Steinsalz und alle Kristalle des regulären Systems optisch isotrop, dagegen in bezug auf Härte, Spaltbarkeit anisotrop.

Es ist die Aufgabe der Chemie, die verschiedenen Stoffe kennen zu lehren, zu klassifizieren und ihre Veränderungen zu studieren. Durch die Chemie erfahren wir, daß sich viele Stoffe in einfachere zerlegen und aus solchen zusammensetzen lassen. Diejenigen Stoffe, welche sich nicht weiter zerlegen lassen, heißt man Grundstoffe oder Elemente.

Die wichtigste Eigenschaft der Materie ist ihre Unzerstörbarkeit. Es gibt erfahrungsgemäß kein Mittel, um eine einmal vorhandene Menge von Materie zu vermehren, zu vermindern oder zu vernichten.

Andere Eigenschaften derselben werden an späterer Stelle besprochen werden.

Äther. Eine große Gruppe von Erscheinungen (Licht, strahlende Wärme, magnetische und elektrische Fernwirkung) hat die Physiker genötigt, neben der gewöhnlichen mit dem Tastsinne wahrnehmbaren und wägbaren Materie noch eine materielle Substanz von außerordentlicher Feinheit anzunehmen, welche den ganzen unserer Beobachtung zugänglichen Weltraum, sowie alle Körper erfüllt. Dieselbe wird Äther (Lichtäther, Weltäther) genannt. Die Eigenschaften, welche wir diesem Äther zuschreiben müssen, sollen an geeigneter Stelle dargelegt werden.

Dagegen ist die Annahme des früher von den Physikern vorausgesetzten Wärmestoffs, sowie die der magnetischen und elektrischen Fluida entbehrlich geworden.

§ 8. Allgemeine Eigenschaften der Materie. Unter allgemeinen Eigenschaften der Materie versteht man solche, welche jeder Materie ohne Unterschied zukommen. Es sind folgende:

1. **Raumerfüllung oder Ausdehnung.** Jeder Körper nimmt einen Raum ein, dessen Größe sein Volumen genannt wird; er erstreckt sich dabei nach drei Dimensionen, die wir als Länge, Breite und Höhe bezeichnen.

2. **Undurchdringlichkeit.** Mit dieser Eigenschaft soll gesagt werden, daß in demselben Raume, den die Materie eines Körpers einnimmt, nicht zugleich ein anderer sein kann. Darauf beruht auch die Tastbarkeit der Körper. Wenn eine abgeschossene Kugel ein Stück Holz durchdringt, so wird die Holzmasse selbst nicht durchdrungen, sondern zur Seite gedrängt. Ebenso durchdringt das Wasser nicht die Materie des Schwammes, sondern füllt nur dessen Poren. Wenn Wasser ein Stück Zucker durchdringt, so entsteht eine Zuckerlösung, welche die Poren des Zuckerstückes ausfüllt.

3. **Teilbarkeit.** Alle Körper lassen sich auf mechanischem Wege, durch Spalten, Zerstoßen, Zerreiben, Ausziehen usw. in kleinere Teile zerlegen. Ein spröder Körper, z. B. Glas, läßt sich in einer Achatschale zunächst so weit zerreiben, daß weder der Finger die einzelnen Teilchen noch fühlt, noch das Auge dieselben zu unterscheiden vermag. Sie haben dann weniger als 0,01 mm Durchmesser. Dennoch fühlt man noch zwischen den Zähnen die einzelnen Körnchen. Durch fortgesetztes Zerreiben und Schlämmen

kann man es dahin bringen, daß auch zwischen den Zähnen kein Körnchen wahrgenommen wird. Aber das Mikroskop läßt dann immer noch einzelne Bruchstücke unterscheiden, deren Durchmesser nur $\frac{2}{1000}$ der Dicke eines Menschenhaares beträgt.

Der verstorbene Optiker Nibert hat auf Glas mittels seiner Teilmaschine mit einer Diamantspitze 5000 Furchen auf 1 mm Breite gezogen.

In der Technik werden Fäden von Kupfer, Eisen und Silber angewendet, welche ebenso fein sind wie ein Haar; ja Wollaston hat Platindraht dargestellt, welcher nur $\frac{1}{1200}$ mm dick war. Man müßte 140 solcher Drähte zusammenlegen, um nur die Dicke eines einzelnen Kokonfadens zu erhalten, und obgleich das Platin der schwerste aller bekannten Stoffe ist, so würde ein solcher Draht von 100 m Länge kaum 0,07 g wiegen. Um einen solchen Draht zu erhalten, nahm Wollaston einen Platindraht, dessen Durchmesser 0,25 mm betrug, befestigte ihn in der Achse einer zylindrischen Form von 5 mm Durchmesser, goß diese Form mit geschmolzenem Silber aus und erhielt so einen Zylinder von Silber, dessen Achse aus Platin bestand. Diesen Zylinder ließ er nun durch einen Drahtzug gehen; beide Metalle verlängerten sich dabei gleichmäßig. Nachdem nun der zusammengesetzte Faden bis zur äußerst möglichen Feinheit ausgezogen worden war, kochte er ihn in Salpetersäure, welche das Silber auflöste und den Kern von Platin bloßlegte. Durch Erhitzen von sich berührenden Quarzstücken bis zum Weichwerden und Wegschleudern des einen Stückes mittels einer Armbrust lassen sich Quarzfäden herstellen, welche mit unbewaffnetem Auge kaum mehr sichtbar sind. Sie finden zur Aufhängung von Elektrometernadeln u. dgl. mancherlei Anwendung.

Die Dicke des Goldüberzuges auf vergoldeten Silberfäden der Lyoner Tressen beträgt nach Réaumur nur wenig über 0,0001 mm. Ein Centigramm Karmin färbt einen Liter Wasser noch merklich rot, ein Centigramm Fuchsin ein noch größeres Volum von Alkohol. Nach Achards Berechnung wird dabei ein Cubikcentimeter in acht Millionen Teilchen zerlegt. Bei durch Indigo noch schwach blau gefärbtem Wasser geht diese Zerteilung nach Parrot sogar bis auf 30 Billionen Teilchen. Nach Kirchhoff und Bunsen wird eine Gasflamme schon durch weniger als ein Millionstel Milligramm Kochsalz merklich gelb gefärbt.

Noch weiter geht die Teilbarkeit der Riechstoffe, wie z. B. Campher, Moschus, Asa foetida. Nach Versuchen von Kreil kann ein Cubikcentimeter des letzteren Riechstoffes 1200 Billionen wahrnehmbare Teilchen liefern.

Es ist bekannt, daß viele Tiere einen sehr entwickelten Geruchssinn haben. Die Gemse wittert den Jäger auf 100 Schritt Entfernung, wenn der Luftzug günstig ist. Wie außerordentlich klein müssen die Teilchen sein, welche von der Körperoberfläche des Jägers bis ins Geruchsorgan des Tieres getragen werden! Auf der Fährte der Tiere und der Menschen bleiben ebenfalls verschwindend kleine Körpermengen zurück, welche durch ihre Verflüchtigung dem Hunde ermöglichen, die Spuren durch den Geruchssinn zu verfolgen. Und doch kann es nur ein kleiner Bruchteil der auf der Spur zurückgebliebenen materiellen Teilchen sein, welche auf die Geruchsorgane des Hundes wirken.

Die Frage, ob es überhaupt eine Grenze der Teilbarkeit gebe, führt auf eine unfruchtbare Spekulation hinaus. Man kann sich die Materie entweder



als kontinuierlich den Raum ausfüllend oder aus diskreten Teilchen mit Zwischenräumen bestehend denken. Im ersten Falle kann es theoretisch keine Grenze der Teilbarkeit geben, denn blieben wir bei irgend einer Teilungsstufe stehen, so könnten wir uns die letzten Dimensionen immer wieder halbiert denken. Nehmen wir aber an, die Materie bestehe aus diskreten Teilchen, so müßte die fortgesetzte Teilung zunächst einmal bis zur Isolierung eines solchen Teilchens führen, und wir ständen dann wieder vor der Frage, ob dieses weiter teilbar sei. Die Erfahrung kann darüber nichts lehren, daher gehört die Frage nicht in die Physik.

Von der mechanischen Teilbarkeit ist streng zu unterscheiden die chemische Teilbarkeit (Zersetzbarkeit), auf welche wir später zurückkommen werden.

4. Porosität. Wenn man nicht die Annahme einer kontinuierlichen Ausfüllung des Raumes durch die Materie machen will, so muß man Zwischenräume annehmen. Denn die Erfahrung lehrt, daß sich die Körper durch Druck oder Abkühlung (ausnahmsweise durch Erwärmung) auf einen kleineren Raum zusammendrängen lassen. Wenn nun keine Zwischenräume wären, so müßten sich die Teilchen der Materie gegenseitig durchdringen, was mit der Eigenschaft der Undurchdringlichkeit unvereinbar wäre. Nennt man diese Zwischenräume Poren, so sind alle Körper porös. Gewöhnlich werden aber nur die größeren Zwischenräume, die direkt mit dem Auge oder mittels des Mikroskops sichtbar sind, als Poren bezeichnet.

Beispiele größter Porosität sind: Badeschwamm, Bimsstein; feinere Poren, welche aber noch Quecksilber oder Wasser und Gase hindurchlassen, besitzen die Holzarten, Sandsteine, unglasierte gebrannte Tongefäße, Papier, Leder. Glühend heißes Platin läßt Wasserstoffgas hindurch. Im Glase, Bergkristall und vielen anderen Körpern sind keine Poren direkt experimentell nachweisbar. Man pflegt sie daher nicht porös zu nennen, wenn wir auch aus den obigen Gründen überzeugt sein müssen, daß sie aus Teilchen mit Zwischenräumen bestehen.

5. Trägheit oder Beharrungsvermögen wird oft als eine allgemeine Eigenschaft der Körper bezeichnet, ist aber eigentlich keine. Diese Worte sind nur der Ausdruck des allgemeinen Grundsatzes, daß jede Veränderung eine Ursache haben muß, daß daher, wenn keine Ursache da ist, auch keine Veränderung erfolgt. Die Trägheit ist demnach nur das Fehlen der Eigenschaft, vermöge welcher ein Körper instande wäre, aus sich heraus ohne eine Ursache (Kraft) seinen vorhandenen Zustand der Ruhe oder der Bewegung zu ändern. Die Ergänzung zu dieser negativen Eigenschaft bildet die

6. Beweglichkeit, das ist die Eigenschaft, unter dem Einflusse von Ursachen (Kräften) den momentanen Zustand der Ruhe oder der Bewegung zu ändern. Diese Eigenschaft kommt den Körpern in allen ihren Teilen zu und wird dann auch Teilbeweglichkeit genannt. So z. B. läßt sich ein Bleistab biegen, dehnen, tordieren (verdrehen), strecken, walzen. Bei allseitigem Drucke läßt sich das Volumen des Körpers verkleinern. Es können also die Teilchen des Körpers bis zu einem gewissen Grade verschoben, voneinander entfernt oder einander genähert werden, ohne daß eine Trennung derselben eintreten muß. Ein Körper, der diese Eigenschaft nicht im geringsten Grade hätte, wäre vollkommen starr. Da es einen solchen Körper

in der Natur nicht gibt, so ist die Teilbeweglichkeit als eine allgemeine Eigenschaft der Materie anzusehen.

Wir kommen auf die Trägheit, Beweglichkeit und Teilbeweglichkeit später ausführlicher zu sprechen.

7. Gravitation, Schwere. Während, wie wir eben hörten, die Körper nicht fähig sind, ihren eigenen Zustand der Ruhe oder Bewegung selbst zu ändern, so haben sie doch die Fähigkeit, gegenseitig eine solche Änderung zu bewirken. Wir sagen, sie ziehen sich an. Diese noch immer rätselhafte Eigenschaft heißen wir die allgemeine Gravitation, und in dem speziellen Falle, daß der eine dieser Körper die Erde ist, die Schwere. Auch diese werden wir erst in der Mechanik näher kennen lernen.

8. Aggregatzustände. Im Altertum kannte man vier „Elemente“: Erde, Wasser, Luft und Feuer. Es ist klar, daß diese nichts zu tun haben mit jenen Grundstoffen, die wir heute Elemente nennen. Dagegen ist es nicht unwahrscheinlich, daß wir in den drei ersten der vier alten Elemente die Repräsentanten der drei Aggregatzustände (Zusammenhangsformen) zu erblicken haben, während das vierte Element, das Feuer (die Wärme), das Agens darstellt, welches die Aggregatzustände ineinander überzuführen vermag.

Diese drei Aggregatzustände sind der feste, der tropfbar flüssige und der ausdehnbar flüssige oder gasförmige Zustand. Nach dieser Nomenklatur würden die Körper zunächst in feste und flüssige und dann die letzteren in tropfbar flüssige und in ausdehnbar flüssige eingeteilt werden.

Es ist aber einfacher, direkt eine Dreiteilung in feste, flüssige und gasförmige Körper anzuwenden.

Das nächstliegende Beispiel eines Körpers, welcher aller drei Zustände fähig ist, liefert das Wasser, welches als Eis oder Schnee fest, als gewöhnliches Wasser flüssig, als Dampf gasförmig ist.

Die festen Körper haben, die geringen Veränderungen abgerechnet, welche durch Wärme und Druck hervorgebracht werden, ein unveränderliches Volumen und eine selbständige Gestalt; es gehört auch eine mehr oder weniger bedeutende Kraft dazu, um einen festen Körper zu zerteilen. Es ist z. B. unmöglich, ein Stück Eisen auf die Hälfte, auf den dritten Teil seines Volumens zusammenzupressen, oder zu bewirken, daß es den doppelten, dreifachen Raum einnimmt; nur mit großer Gewalt sind wir imstande, seine Gestalt zu ändern oder es zu teilen.

Die Flüssigkeiten haben in demselben Sinne wie die festen Körper ein unveränderliches Volumen, d. h. wenn wir sie auch durch einen starken Druck ein klein wenig zusammendrücken können, wenn sie sich auch durch Erwärmung etwas ausdehnen, so sind diese Volumenveränderungen doch immer nur sehr unbedeutend; wir können das Wasser, welches eine Literflasche ausfüllt, nicht in eine Halbliterflasche hineinpresse, und wenn wir es in eine Zweiliterflasche hineingießen, so füllt es diese nur zur Hälfte aus. Die Flüssigkeiten haben aber keine selbständige Gestalt wie die festen Körper, sondern die Gestalt des Raumes, den sie einnehmen, ist von der Form der sie umgebenden festen Körper, also von der Form der Gefäße abhängig; wenn eine Flüssigkeit ein Gefäß nicht ganz ausfüllt, so ist sie oben durch eine horizontale Oberfläche begrenzt. Endlich unterscheiden sich die flüssigen Körper von den festen noch dadurch, daß schon eine sehr geringe Kraft hin-

reicht, um ihre Teilchen zu verschieben, und daß sie die einzelnen Verschiebungen nicht rückgängig zu machen suchen.

Die gasförmigen Körper haben weder eine selbständige Form, noch ein bestimmtes Volumen; der Raum, den sie einnehmen, hängt nur von dem äußeren Drucke ab. Man kann eine Luftmasse leicht auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. . . $\frac{1}{10}$ ihres Volumens zusammenpressen; und umgekehrt, wenn man sie in einen 2, 4 . . . 10 mal größeren leeren Raum bringt, so füllt sie auch diesen vollständig aus, wie wir später noch ausführlicher zeigen werden; Gase haben also ein Bestreben, sich so viel wie möglich auszudehnen. Die leichte Teilbarkeit haben die Gase mit den Flüssigkeiten gemein.

Diese Unterschiede können nach unserer Ansicht von der Konstitution der Körper nur darauf beruhen, daß bei den festen Körpern die Moleküle nicht allein in einer bestimmten Entfernung, sondern auch in einer bestimmten gegenseitigen Lage bleiben, während die Moleküle der Flüssigkeiten zwar auch in einer bestimmten Entfernung bleiben, aber doch sehr leicht sich aneinander verschieben lassen; bei den gasförmigen Körpern endlich finden wir ein Bestreben der Moleküle, sich möglichst weit voneinander zu entfernen.

Wir werden in der Wärmelehre auf diesen Gegenstand ausführlicher zu sprechen kommen.

§ 9. Kristallisation. Wenn ein Körper aus dem flüssigen (geschmolzenen oder gelösten) oder gasförmigen Zustande in den festen Zustand übergeht, so kann dies auf zwei ganz verschiedene Weisen geschehen. Wenn man z. B. eine Leimlösung durch Verdampfen des Wassers konzentriert, so wird die ganze Masse allmählich immer dickflüssiger und endlich fest, ohne daß es zu einer Ausscheidung eines festen Körpers aus der gleichzeitig vorhandenen Flüssigkeit kommt (Colloidsubstanzen). Wenn man aber z. B. eine Salzlösung ebenso behandelt, so scheiden sich bei bestimmter Konzentration und Temperatur feste Körper von regelmäßiger Gestalt und Struktur aus der Flüssigkeit aus. Die letztere heißt die Mutterlauge, die ausgeschiedenen festen Körper heißen Kristalle und die Stoffe, welche sich so verhalten, Kristalloidsubstanzen. Der ausgeschiedene Kristall wächst in seiner Mutterlauge, wenn dieselbe konzentriert wird, dasselbe geschieht bei dem Kristall, der sich aus der geschmolzenen Masse oder aus dem gasförmigen Zustande abscheidet, wenn die Temperatur sinkt. Ein festes Stück Leim dagegen wächst niemals in der flüssigen Leimlösung.

Eine einwurfsfreie Definition des Begriffs Kristall ist sehr schwer zu geben. Früher legte man das Hauptgewicht auf die regelmäßige Begrenzung der Kristalle durch Ebenen, welche nach bestimmten Gesetzen gelagert sind. Aber dies ist nicht ein charakteristisches Merkmal. Ein Würfel aus Glas ist kein Kristall, weil ihm die kristallinische Struktur fehlt, dagegen bleibt ein Kochsalzwürfel ein Kristall, auch wenn man ihn seiner regelmäßigen Begrenzung beraubt, weil er im Innern die Struktur des Kristalls behält.

Groth definiert: Kristall als einen homogenen festen Körper, in welchem die Eigenschaften seiner Elastizität, Kohäsion usw. in gesetzmäßiger Weise von der Richtung abhängen. Lehmann¹⁾

¹⁾ Über die Definition des Begriffes Kristall: Zeitschr. f. Kristallogr. 18, 457, 1890; Über fließende Kristalle: Zeitschr. f. physik. Chem. 4, 462, 1889.

definiert: Kristall ist jeder chemisch homogene Körper, welcher bei Abwesenheit eines durch äußere oder innere Spannungen hervorgerufenen Zwanges anisotrop ist, d. h. nach verschiedenen Richtungen verschiedene physikalische Eigenschaften besitzt.

Der Ausschluß der Spannungen ist notwendig, um z. B. Glaskörper, welche durch Druck anisotrop geworden sind, von der Definition des Kristalls auszuschließen. Da es nach Lehmanns Entdeckung auch „fließende Kristalle“ gibt, so ist der Ausdruck „fest“ wegzulassen. Wenn also auch die Begrenzung eines wirklichen Kristalls, d. h. seine Gestalt nicht zu seinen wesentlichen Merkmalen gehört, so ist sie doch von großer Wichtigkeit, und zwar schon deshalb, weil sie in gesetzmäßigem Zusammenhange zu seiner inneren Struktur steht.

Jedem kristallisierenden Stoffe kommt eine ihm eigentümliche Kristallform zu. Zwar zeigt ein und derselbe chemische Stoff nach Umständen verschiedene Kristallform; so z. B. kristallisiert der Schwefel je nach Umständen in verschiedenen Kristallsystemen. In der Natur findet er sich in schönen gelben Oktaedern des rhombischen Systems, die auch aus seiner Lösung in Schwefelkohlenstoff erhalten werden (α -Schwefel, rhombischer Schwefel). Läßt man geschmolzenen Schwefel allmählich erkalten, so erhält man ihn in langen schiefen Prismen des monoklinen Kristallsystems (β -Schwefel, monosymmetrischer Schwefel), welche aber allmählich einer Umwandlung in die andere Modifikation unterliegen, indem sie in ein Aggregat von kleinen Kristallen des rhombischen Systems zerfallen, wobei die früher beobachtete durchscheinende Bernsteinfarbe in die eigentliche gelbe Schwefelfarbe übergeht. Die Erscheinung, Enantiotropie genannt, kommt bei vielen Substanzen vor. Vom physikalischen Standpunkte sind aber diese Modifikationen nicht als derselbe Stoff aufzufassen; derselbe chemische Stoff kann also als verschiedenartiger physikalischer Stoff auftreten, deren jedem dann seine besondere Kristallform und Kristallstruktur zukommt¹⁾.

Das Charakteristische der Kristallform liegt nicht in der Form der Begrenzungsflächen, sondern nur in der Richtung dieser Flächen. Wenn der Kristall wächst, so verschieben sich die Begrenzungsebenen parallel zu sich selbst nach außen; es kommt aber lediglich auf die äußeren Bedingungen (Materialzufuhr) an, ob diese oder jene Fläche mehr Materialzuwachs erfährt. Die wirklichen Kristalle haben daher nur selten jene ideale Form, bei welcher eine gleichmäßige Ausbildung aller Begrenzungsflächen angenommen wird. Die Figur der begrenzenden Flächen wird durch die Parallelverschiebung derselben und die Durchschneidung mit den Nachbarflächen in mannigfaltigster Weise verändert, so daß die Kristallform für den Ungeübten kaum wiederzuerkennen ist. Eines bleibt aber streng erhalten: nämlich die Richtung der Ebenen und infolgedessen die Größe der Kantenwinkel, welche die Ebenen einschließen. So z. B. wird aus der Kristallform des Bergkri-

¹⁾ O. Lehmann (Zeitschr. f. Kristallogr. 18, 457) hält das Vorkommen einer und derselben chemischen Substanz in mehreren Kristallformen für unmöglich; demnach müssen z. B. die Modifikationen des Schwefels als verschiedene chemische Substanzen bezeichnet werden. Derselbe Autor geht sogar so weit, verschiedene Aggregatzustände einer und derselben chemischen Substanz für unmöglich zu erklären. Eis, Wasser, Wasserdampf sind ihm daher chemisch verschiedene Stoffe, was mit der bisherigen Nomenklatur nicht übereinstimmt.

stalles Fig. 1 die Form Fig. 2, die dreieckige Pyramidenfläche wird zu einer sechseckigen, die viereckige Säulenfläche g wird zu einem Achteck; dagegen beträgt der Winkel zwischen zwei benachbarten Pyramidenflächen stets $= 133^{\circ} 39'$, der Winkel zwischen zwei benachbarten Säulenflächen stets gleich 120° usw.

Wenn man die Kristallformen beschreibt oder zeichnet, so sieht man in der Regel von solchen Unregelmäßigkeiten ab und denkt sich vielmehr alle Flächen gleichmäßig ausgebildet. Wir wollen einen solchen Kristall als einen idealen bezeichnen, die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf diese idealen Formen.

Die Untersuchung der Symmetriegesetze der Kristalle und die Beschreibung ihrer Formen ist Sache einer eigenen Wissenschaft, der Kristallographie. Wegen des innigen Zusammenhanges, den die physikalischen Eigenschaften mit diesen Symmetriegesetzen zeigen, sind wir genötigt, um das Verständnis zu ermöglichen, die wichtigsten Grundzüge dieser Gesetze in den folgenden Paragraphen in Kürze darzustellen.

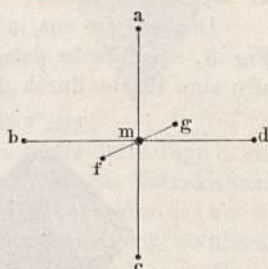
Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.



§ 10. Kristallsysteme. In jedem Kristalle kann man gewisse Richtungen unterscheiden, gegen welche die einzelnen Flächen eine symmetrische Lage haben, und welche, auch wenn diese Flächen künstlich entfernt würden, durch das physikalische Verhalten des Kristalls definiert sind. Diese Richtungen heißen Achsen. Diese Achsen sind daher nicht bestimmte gerade Linien, denn jede damit parallele Linie kann ebenfalls als dieselbe Achse angesehen werden. In dem Kristall Fig. 1 ist die Gerade, welche die Spitzen der Pyramiden verbindet, eine solche Achse, aber auch jede der damit parallelen Seitenkanten kann als Achse gelten. Da ferner die Achsen nur Richtungen sind, so haben sie auch keine bestimmte absolute Länge. Wohl aber kommt man zu dem Begriffe einer relativen Achsenlänge auf folgende Weise. Man denkt sich zunächst die sämtlichen Achsen in einem Punkte sich kreuzend, wie Fig. 3 in m zeigt. Jede der den Kristall begrenzenden Ebenen schneidet dann im allgemeinen jede der drei Achsen in Punkten, deren Abstände von dem Kreuzungspunkte für dieselbe Substanz ein konstantes Verhältnis haben. Diese Verhältniszahlen a, b, c werden als Achsenlängen bezeichnet. Liegt eine Fläche einer Achse parallel, so ist die zugehörige Achsenlänge $= \infty$.

Die gegenseitige Lage (Neigung) und das Größenverhältnis der Achsen ist für verschiedene Kristalle verschieden; man hat demnach sechs verschiedene Kristallsysteme zu unterscheiden¹⁾.

¹⁾ Die neueren Lehrbücher der Kristallographie, z. B. von P. Groth, leiten aus den Symmetrieverhältnissen 32 verschiedene Klassen ab, von denen aus prak-

1. Das reguläre System mit drei zueinander rechtwinkligen und gleichen Achsen.

Fig. 3 stellt das Achsensystem des regulären Systems dar. Die drei Achsen schneiden sich in dem Punkte m , und zwar steht jede derselben

Fig. 4.

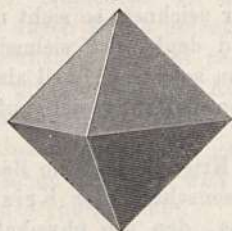


Fig. 5.

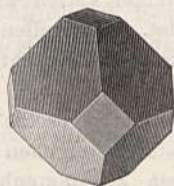
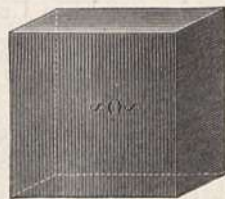


Fig. 6.



rechtwinklig auf der Ebene der beiden anderen. Zwei dieser Achsen, ac und bd , erscheinen in unserer Figur unverkürzt, dagegen erscheint die dritte, von vorn nach hinten gerichtete Achse fg verkürzt. In der Wirklichkeit ist $mf = ma = mb$.

Denken wir uns in jede der acht körperlichen Ecken des Achsenkreuzes, Fig. 3, eine Fläche gelegt, welche gegen alle drei Achsen gleich geneigt ist, also eine Fläche durch die Punkte a, f und d ; eine zweite durch f, d und c ;

Fig. 7.

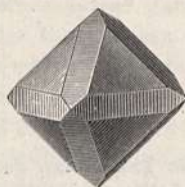


Fig. 8.



eine dritte durch f, b und a usw., so entsteht das Oktaeder, Fig. 4, welches man als die Grundgestalt des regulären Systems betrachtet, weil man von ihm leicht alle anderen Gestalten dieses Systems ableiten kann.

Diese Kristallform wird nach Weiss durch das Symbol $a : a : a$ bezeichnet, womit angedeutet wird, daß jede Achse durch jede Fläche im gleichen Abstände a geschnitten wird. Naumann schrieb dafür O (Oktaeder), Miller (111).

Wird jedes Oktaedereck durch eine Fläche abgestumpft, welche auf der entsprechenden Achse rechtwinklig steht, so entsteht der Körper Fig. 5. Denken wir uns die Abstumpfungsf lächen bis zur gegenseitigen Durchschneidung ausgedehnt, so erhält man den Würfel Fig. 6.

An dem Würfel sind wieder alle Ecken unter sich gleich; ebenso sind alle Kanten gleichartig, und jede Modifikation eines Ecks oder einer Kante findet sich in derselben Weise auch an den übrigen.

Von den Würfelflächen schneidet jede je eine Achse im Abstände a , die beiden anderen im Abstände ∞ , das Symbol ist demnach nach Weiss $a : \infty : \infty$, nach Naumann $\infty O \infty$, nach Miller (100).

tischen Erwägungen durch Zusammenlegung eine beschränktere Zahl von Kristallsystemen gebildet werden. Wir folgen, ebenfalls aus praktischen Gründen, der herkömmlichen Einteilung.

Die 12 Kanten des Oktaeders sind ebenfalls einander gleich; denken wir uns jede Oktaederkante durch eine Fläche abgestumpft, welche mit der abgestumpften Kante und einer Achse parallel läuft, so entsteht der Körper Fig. 7. Wenn die Abstumpfungsf lächen der Oktaederkanten bis zu ihrer gegenseitigen Durchschneidung wachsen, so entsteht das Rhombendodekaeder Fig. 8. Die Flächen desselben schneiden die Achsen in den Abständen aa und ∞ , daher die Symbole nach Weiss $a:a:\infty$, nach Naumann ∞O , nach Miller (110).

Damit wären nun alle Formen erschöpft, bei welchen nur Durchschneidungen in den Abständen

Fig. 9.

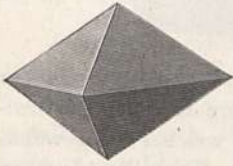


Fig. 11.

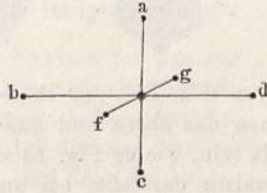
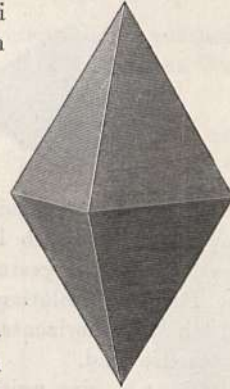


Fig. 10.



a oder ∞ vorkommen. Nach einem höchst merkwürdigen kristallographischen Gesetze kommen nun aber an demselben Achsensystem auch noch andere Formen vor, welche dadurch entstehen, daß an die Stelle der Länge a einfache ganze Multipla, z. B. $2a, 3a$, treten. So entstehen das Tetrakishexaeder $a:na:\infty$, das Triakisoktaeder $a:a:na$, das Ikositetraeder $a:na:na$ und endlich die allgemeinste Form, das Hexakisoktaeder $a:na:ma$, wo überall n und m die ganzen Zahlen 2, 3 usw. (selten mehr als 3) bedeuten (Gesetz der rationalen Indices). Im regulären System kristallisieren Alaun, Kochsalz, Granat, Flußspat usw.

2. Das quadratische System. Die Grundform dieses Systems ist ein Quadratoktaeder, Fig. 9 und Fig. 10, d. h. ein Oktaeder, welches sich von dem regulären dadurch unterscheidet, daß zwei Achsen unter sich, aber nicht der dritten gleich sind. Die letztere ausgezeichnete Achse wollen wir die Hauptachse nennen und uns dieselbe immer vertikal gestellt denken.

Die Hauptachse steht zu den beiden anderen nicht in einem rationalen Verhältnis; sie ist bald größer, bald kleiner als die horizontalen Achsen; doch ist das Achsenverhältnis für Kristalle einer und derselben Substanz stets dasselbe. Fig. 11 stellt z. B. das Achsenkreuz dar, wie es den Kristallen des arseniksauren Kalis entspricht; die Achsen fg und bd sind einander gleich, Nimmt man die Länge dieser Achsen zur Einheit, so ist für dieses Salz die vertikale Achse ac gleich 0,66. Fig. 10 stellt die Grundform des Blutlaugensalzes dar, bei welchem die Hauptachse größer ist als die Nebenachsen; und zwar verhält sich hier die Hauptachse zu den Nebenachsen wie 1,77 zu 1.

Die vier horizontalen Kanten des Quadratoktaeders sind einander gleich, aber sie sind von den übrigen Kanten dieses Oktaeders verschieden; die vier horizontalen Kanten können deshalb abgestumpft sein, ohne daß es die anderen sind, und so entsteht die Kombination Fig. 12. Liegen die Abstumpfungsf lächen der vier horizontalen Kanten der Hauptachse verhältnismäßig näher, so daß nur ein kleinerer Teil des Oktaeders bleibt, so nimmt

diese Kombination den Habitus Fig. 13 an, welche die gewöhnliche Gestalt des arseniksauren Kalis darstellt.

Die vier Abstumpfungsfächen der horizontalen Kanten bilden zusammen eine quadratische Säule, und so sind Fig. 12 und Fig. 13 Kombinationen des Quadratoktaeders mit der quadratischen Säule.

Die sechs Ecken des Quadratoktaeders sind ebenfalls nicht gleichartig; die vier Ecken, in welchen die Nebenachsen endigen, sind unter sich gleich,

Fig. 12.

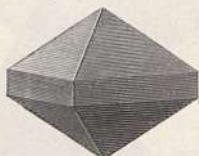


Fig. 13.



Fig. 14.



aber sie sind verschieden von dem Eck am oberen und unteren Ende der Hauptachse. Deshalb können das obere und das untere Eck des Quadratoktaeders allein abgestumpft sein, wie es Fig. 14 zeigt, welches die gewöhnliche Form des Blutlaugensalzes darstellt; bei anderen Kristallen dagegen sind die vier horizontalen Ecken abgestumpft, ohne daß es die Ecken der Hauptachse sind.

Ohne in eine weitere Betrachtung der Gestalten dieses Systems einzugehen, wird aus dem Gesagten schon klar der Grundcharakter desselben her-

Fig. 15.

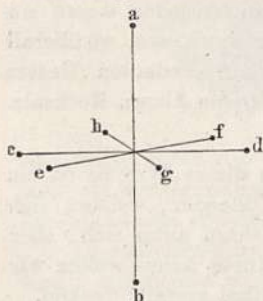


Fig. 16.

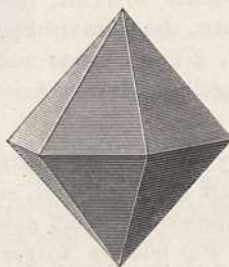


Fig. 17.



Fig. 18.



vorgehen, welcher eben darin besteht, daß die vertikale Achse von den beiden anderen, unter sich gleichartigen ausgezeichnet ist.

Auch in diesen, wie in den übrigen Systemen gilt das Gesetz der rationalen Indices. Die Abstände, in denen die Achsen geschnitten werden, sind also im allgemeinen ausgedrückt durch das Symbol $a : a : nc$, wobei c zu a irrational ist, dagegen n eine Zahl, z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 2 oder 3 ist, die zu 1 in einem einfachen rationalen Verhältnis steht. So ist z. B. für schwefelsaures Nickeloxdul $c = 1,888 a$ und $c = 0,944 a$, deren zugehörige Flächen miteinander in Kombination treten.

Im quadratischen System kristallisieren u. a.: Vesuvian, Honigstein, Blutlaugensalz, schwefelsaures Nickeloxdul, saures arseniksaures Kali usw.

3. Das hexagonale System mit vier Achsen (Fig. 15), von denen drei, nämlich cd , ef und hg , in einer Ebene liegend, einander gleich sind und einen Winkel von 60° miteinander machen, während die vierte aus-

gezeichnete Achse, die Hauptachse, rechtwinkelig auf der Ebene der drei anderen steht und ihnen ungleich ist. Bezeichnen wir mit 1 die Länge der horizontalen Nebenachsen, so ist für Bergkristall die Länge der Hauptachse 1,1, für Kalkspat aber 0,83. In dieses System gehören die regulären sechsseitigen Pyramiden (Fig. 16), welche in gleicher Weise als die Grundgestalt dieses Systems betrachtet werden können wie die Oktaeder der übrigen Systeme. Wenn die horizontalen Kanten dieser Pyramiden durch Flächen abgestumpft werden, welche mit der Hauptachse parallel sind, so entsteht die Kombination Fig. 17.

Die Abstumpfungsf lächen der horizontalen Kanten bilden zusammen eine reguläre, sechsseitige Säule, welche in Fig. 18 mit der geraden Endfläche, d. h. mit einer Fläche kombiniert ist, welche rechtwinkelig auf der Hauptachse steht.

4. Das rhombische System mit drei zueinander rechtwinkligen, aber ungleichen Achsen. Denken wir uns eine dieser Achsen vertikal gestellt, so liegen die beiden anderen in einer horizontalen Ebene, doch sind hier die beiden horizontalen Achsen nicht gleich wie beim quadratischen System.

Fig. 19 stellt das Achsenkreuz des in dieses System gehörigen natürlichen Schwefels dar. Für dieses Mineral verhalten sich die Achsen $cd : ef : ab$ wie 0,8 : 1 : 1,9. Fig. 20 stellt das rhombische Oktaeder dar, welches diesen Achsenverhältnissen entspricht.

Fig. 19.

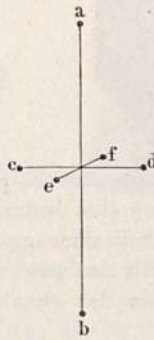


Fig. 20.



An dem rhombischen Oktaeder, Fig. 20, sind nur immer je zwei diametral gegenüberliegende Ecken einander gleich, also das obere und untere, das vordere und hintere, das Eck rechts und das Eck links; wir haben also hier drei verschiedene Arten von Oktaederecken zu unterscheiden. Ebenso hat man am rhombischen Oktaeder dreierlei Kanten zu unterscheiden: die vier horizontalen Kanten, die vier Kanten, welche in der Ebene der vertikalen und der kleineren horizontalen Achse liegen, und endlich die Kanten, welche die vertikale Achse mit der größeren horizontalen verbinden.

Werden die vier horizontalen Kanten des rhombischen Oktaeders durch Flächen abgestumpft, welche der Hauptachse parallel sind, so entsteht eine Kombination des rhombischen Oktaeders mit der geraden rhombischen Säule, Fig. 21. Die Gestalt des horizontalen Querschnittes, der Basis dieser Säule, hängt von dem Größenverhältnis der beiden horizontalen Achsen ab. In Fig. 22 stellt der Rhombus $cfde$ die Basis der rhombischen Säule, wie sie den Achsenverhältnissen des Salpeters entspricht, unverkürzt dar.

Die größere Diagonale ef dieser Basis heißt die Makrodiagonale, die kleinere cd die Brachydiagonale.

Die vertikalen Kanten der rhombischen Säule sind einander nicht alle gleich; die vordere und hintere Kante der Säule, Fig. 21, welche durch die Makrodiagonale verbunden werden, sind spitzwinkelig, während die beiden Kanten rechts und links, welche rechtwinkelig auf den Enden der Brachydiagonale aufgesetzt erscheinen, stumpfwinkelige Kanten sind.

An einem rhombischen Oktaeder kann man nach Belieben jede der drei Achsen zur Hauptachse nehmen; für eine Mineralspezies aber oder für ein Salz, welches in diesem System kristallisiert, wählt man diejenige Achse zur Hauptachse, parallel welcher die Kristalle vorzugsweise säulenartig ausgedehnt sind.

Durch Abstumpfung zweier diametral gegenüberstehenden Kanten der rhombischen Säule entsteht eine sechsseitige Säule. So erscheinen an der

Fig. 21.



Fig. 22.

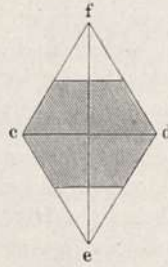


Fig. 23.



rhombischen Säule des Salpeters meist die scharfen Kanten abgestumpft, Fig. 23, wodurch eine sechsseitige Säule entsteht, deren horizontale Basis in Fig. 22 durch Schraffierung angedeutet ist.

Fig. 24 stellt den gewöhnlichen Habitus der Salpeterkristalle dar; es ist eine Kombination der eben besprochenen sechsseitigen Säule mit mehreren

Fig. 24.



Fig. 25

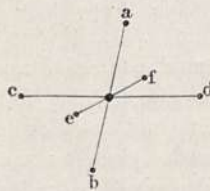


Fig. 26.



Flächen, die parallel mit der Achse cd laufen und verschiedene Neigung gegen die Hauptachse haben. Die Oktaederflächen sind bei den Salpeterkristallen meist gänzlich verschwunden.

Das rhombische System ist also dadurch ausgezeichnet, daß sich in vertikaler Richtung andere Symmetrieverhältnisse zeigen als von vorn nach hinten, und in dieser Richtung wieder andere als von der Linken zur Rechten.

Außer den schon genannten Körpern kristallisieren u. a. im rhombischen System: Zinkvitriol, schwefelsaures Kali, Aragonit, Schwerspat, Topas usw.

5. Das monoklinische System, in welchem u. a. der Gips, das Glaubersalz, der Eisenvitriol, das essigsäure Natron, der Zucker usw. kristallisieren, zeichnet sich vor dem rhombischen System dadurch aus, daß zwei Achsen sich nicht unter rechtem Winkel schneiden, während die dritte rechtwinkelig auf der Ebene der beiden schiefwinkligen steht.

Fig. 25 stellt ein in dieses System gehöriges Achsenkreuz dar: die Achse ef steht rechtwinkelig auf der Ebene der beiden anderen, dagegen schneiden sich die Achsen ab und cd nicht unter rechtem Winkel.

Die Ebene der beiden Achsen ab und cd , Fig. 25, welche sich nicht unter rechtem Winkel schneiden, heißt die symmetrische Ebene, während die rechtwinkelig auf der symmetrischen Ebene stehende Achse ef die symmetrische Achse genannt wird.

Die am meisten charakteristische und am häufigsten teils allein, teils in Kombination mit anderen Flächen vorkommende Form dieses Systems ist die schiefe rhombische Säule, Fig. 26, welche sich von der geraden rhombischen Säule des vorigen Systems dadurch unterscheidet, daß die Hauptachse dieser Säule nicht rechtwinkelig auf der Basis steht.

Die Säule ist in unserer Figur so gestellt, daß die Ebene der beiden schiefwinkligen Achsen unverkürzt, die dritte auf ihrer Ebene rechtwinkelig stehende Achse aber, als gegen den Beschauer gerichtet, verkürzt erscheint.

Fig. 27.

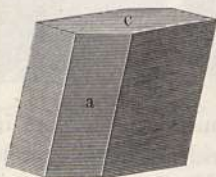


Fig. 28.

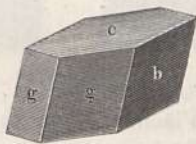
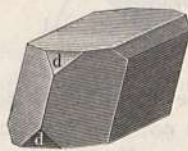


Fig. 29.



Auch hier haben wir zwei scharfe und zwei stumpfe Säulenkanten zu unterscheiden. Die Abstumpfungsfäche der vorderen und hinteren Säulenkante (die Fläche a in Fig. 27) steht rechtwinkelig zu der oberen Endfläche c ; dagegen macht die Abstumpfungsfäche b , Fig. 28, der Säulenkanten rechts und links einen schiefen Winkel mit c .

Die horizontalen Kanten der durch die Fläche c begrenzten schiefen rhombischen Säule sind nicht gleicher Natur, wie dies bei der geraden rhombischen Säule der Fall war; an der oberen Fläche, Fig. 26, sind die beiden Kanten rechts scharfe Kanten, die beiden horizontalen Kanten auf der linken Seite der oberen Fläche sind dagegen stumpfe Kanten. An der unteren Fläche liegen die beiden scharfen Kanten links, die stumpfen rechts.

Die scharfen horizontalen Kanten können für sich allein abgestumpft sein, während bei anderen Kristallen nur die stumpfen horizontalen Kanten abgestumpft sind.

Die schon oben besprochene Gestalt, Fig. 28, zeigt die gewöhnliche Kristallform des Zuckers. Häufig erscheinen aber an den Zuckerkrystallen noch die spitzen Kanten zwischen c und b und die Ecken abgestumpft, in welchen die Säulenflächen g mit den Endflächen e zusammentreffen, wie dies in Fig. 29 dargestellt ist.

6. Das triklinische System ist durch drei Achsen charakterisiert, welche alle drei ungleich sind, und von denen keine mit der anderen einen rechten Winkel macht. Die Kristalle dieses Systems zeigen unter allen am wenigsten Symmetrie. Hier sind nur immer je zwei Flächen, Kanten oder Ecken gleichartig, welche einander diametral gegenüberstehen.

Dem triklinischen System gehören u. a. die Kristalle des Axinit und des Kupfervitriols an.

§ 11. Die Hemiedrie. Es kommt bei Kristallen häufig vor, daß die Hälfte der Flächen einer einfachen Gestalt nach bestimmten Gesetzen in

solchem Maße ausgedehnt ist, daß die andere Hälfte der Flächen vollkommen verschwindet. Solche Kristalle nennt man Halbflächner oder hemiedrische Kristalle. Wir müssen hier die Hemiedrie noch kurz erwähnen, weil dieselbe in innigem Zusammenhange mit einigen physikalischen Erscheinungen der Kristalle steht.

Denken wir uns an dem regulären Oktaeder, Fig. 30, die Fläche o und die in unserer Zeichnung nicht sichtbare Fläche der oberen Pyramide hinten rechts nach allen Seiten gewachsen, so schneiden sich diese beiden Flächen in der Kante ab . Wenn ferner von den vier unteren Oktaederflächen die

Fig. 30.

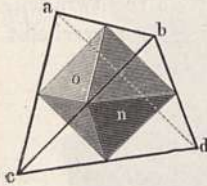


Fig. 31.

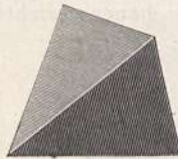


Fig. 32.



Fig. 33.



Fläche n und die Fläche hinten links wächst, so schneiden sich diese in der Kante cd ; die gewachsenen Flächen o und n schneiden sich in der Kante bc usw. Kurz, wenn die Fläche o und die drei Flächen des Oktaeders, welche mit o nur in einer Spitze zusammentreffen, wachsen, bis diejenigen Oktaederflächen, welche mit o in einer Kante zusammenstoßen, und diejenige Oktaederfläche, welche mit o parallel liegt, ganz verschwunden sind, so entsteht ein nur von vier Flächen begrenzter Körper $abcd$, Fig. 30.

Fig. 31 stellt diesen Körper, welcher das Tetraeder genannt wird, für sich allein dar.

Fig. 32 ist eine Kombination des regulären Tetraeders mit dem Würfel.

Das Tetraeder, Fig. 31, kann man sich also aus dem Oktaeder, Fig. 30, dadurch entstanden denken, daß die eine Hälfte der Oktaederflächen bis zum Verschwinden der vier übrigen Oktaederflächen gewachsen ist. Denken wir uns dagegen diese vier letzteren Oktaederflächen bis zum Verschwinden der ersteren gewachsen, so entsteht das Tetraeder, Fig. 33.

Die vier Flächen dieser Tetraeder sind gleichseitige Dreiecke, und die sechs Kanten derselben sind untereinander gleich.

Das Tetraeder Fig. 31 unterscheidet sich von dem Tetraeder Fig. 33 nur durch seine Stellung. Dadurch, daß man das letztere Tetraeder um seine vertikale Achse um 90° dreht, kommt es in die Stellung des ersteren und ist nun mit ihm vollkommen kongruent.

Einen solchen Fall der Hemiedrie, bei welchem wie hier die beiden aus derselben Grundgestalt abgeleiteten hemiedrischen Formen einander vollkommen gleich und nur durch die Stellung verschieden sind, nennt man eine kongruente oder überdeckbare Hemiedrie.

Wie aus dem regulären Oktaeder das Tetraeder, so entsteht aus der doppeltsechseitigen Pyramide des hexagonalen Systems durch Wachsen der einen Hälfte der Flächen das Rhomboeder. Denken wir uns von der oberen Pyramide Fig. 34 die Flächen r , t und diejenige auf der hinteren Seite, welche s gegenüberliegt, von der unteren Pyramide aber gerade diejenigen Flächen gewachsen, welche in einer Kante mit den ausgefallenen Flächen der oberen Pyramide zusammenstoßen, so entsteht das Rhomboeder, wie es

in Fig. 34 durch die starken Linien angedeutet und welches in Fig. 35 für sich allein dargestellt ist. Es ist dies die Grundgestalt des Kalkspats.

Fig. 36 zeigt eine Kombination dieses Rhomboeders mit der regulären sechsseitigen Säule.

Während aus der doppeltsechseckigen Pyramide, Fig. 34, durch Wachsen der einen Hälfte der Flächen das Rhomboeder Fig. 35 entsteht, so entsteht

Fig. 34.

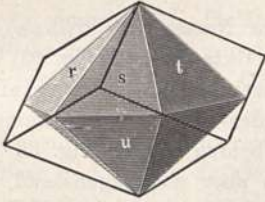


Fig. 35.

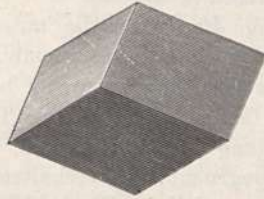


Fig. 36.



durch Wachsen der anderen Hälfte der Flächen die Grundgestalt des Rhomboeders Fig. 37. Die beiden Rhomboeder Fig. 35 und Fig. 37 sind nur

Fig. 37.

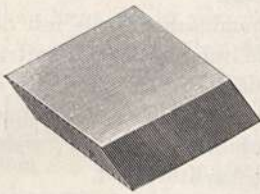


Fig. 39.

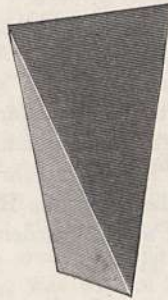


Fig. 40.

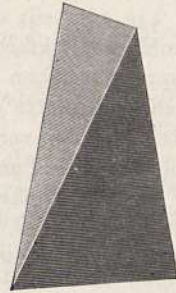


Fig. 38.

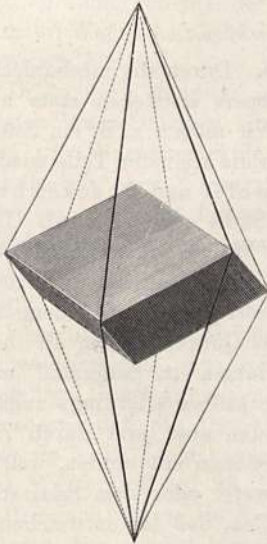
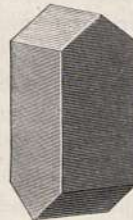


Fig. 41.



Fig. 42.



durch ihre Stellung verschieden, im übrigen aber vollkommen gleich, so daß man jedes durch Drehung auch in die Stellung des anderen bringen kann; wir haben also hier gleichfalls ein Beispiel der überdeckbaren Hemiedrie.

Eine andere wichtige hemiedrische Form des hexagonalen Systems ist das Skalenoeder, Fig. 38. Es ist die Hemiedrie einer symmetrisch zwölfseitigen Pyramide. Charakteristisch für diese Form ist es, daß ihre Seitenkanten wie die eines Rhomboeders liegen, daß man sich also jedes Skalenoeder leicht so vorstellen kann, als ob durch die Seitenkanten eines Rhomboeders Flächen nach einem Punkte der verlängerten Hauptachse gelegt wären, welcher um die n -fache Länge der vertikalen Halbchse des Rhomboeders von der Mitte des Kristalles absteht.

Fig. 39 und Fig. 40 stellen die unter dem Namen der Sphenoide bekannten beiden Halbflächen eines rhombischen Oktaeders (s. Fig. 20) dar. Die Dreiecke, durch welche diese Tetraeder begrenzt werden, sind ungleichseitig, und deshalb kann man auch das Tetraeder Fig. 40 durch keinerlei Drehung in die Stellung Fig. 39 bringen. Die beiden Körper Fig. 39 und Fig. 40 sind nicht kongruent, sie verhalten sich aber wie Gegenstand und Spiegelbild, wie rechte und linke Hand. Wir haben also hier einen Fall von nicht kongruenter oder nicht überdeckbarer Hemiedrie. Die Sphenoidé kommen nicht isoliert vor, sondern nur in Kombinationen mit anderen Flächen, namentlich mit der rhombischen Säule, bei welcher Kombination sich auch die Nicht-Überdeckbarkeit leichter übersehen läßt.

Fig. 41 stellt eine Kombination der geraden rhombischen Säule mit dem rhombischen Oktaeder dar, wie sie den Achsenverhältnissen des Zinkvitriols entspricht. Wenn nun hier nach dem oben für das reguläre Oktaeder angegebenen Gesetze die Hälfte der Oktaederflächen durch Wachsen der benachbarten Flächen verschwindet, so entsteht die Kombination Fig. 42, welche beim Zinkvitriol und beim Bittersalz sehr häufig beobachtet wird.

Bei den Zuckerkrystallen tritt die Hemiedrie häufig in der Weise auf, daß die Flächen d , Fig. 29, an der vorderen Säulenkante fehlen, während sie an der hinteren vorhanden sind.

§ 12. Chemische Teilbarkeit, Atomtheorie. Durch die mechanische Teilung eines homogenen, d. i. gleichartigen Körpers entstehen stets nur wieder Teile gleicher Art, d. h. gleichen Stoffes. Wir mögen z. B. ein Stück Zinnober noch so fein zerreiben, so bestehen doch die kleinsten Teile wieder aus Zinnober. Und doch besteht derselbe aus Schwefel und Quecksilber, da er durch Zusammenreiben und Erhitzen dieser Stoffe erhalten wird. Dagegen kann durch chemische Einwirkung, durch Wärme oder Elektrizität ein solcher chemisch zusammengesetzter Körper in seine Bestandteile zerlegt werden. So z. B. kann der Zinnober durch Eisen zerlegt werden, indem das letztere sich mit dem Schwefel verbindet und das Quecksilber in Freiheit setzt. Quecksilberoxyd zerfällt durch bloßes Erhitzen in Sauerstoff und Quecksilber. In beiden Fällen erhält man das Quecksilber allerdings zuletzt als zusammenhängende Masse. Offenbar ist dieselbe aber erst durch Zusammenfließen aller der außerordentlich kleinen Portionen entstanden, welche nach und nach aus der Verbindung mit dem Schwefel oder dem Sauerstoff frei geworden sind. Ebenso müssen wir uns vorstellen, daß das entweichende Sauerstoffgas aus den vielen kleinen Sauerstoffteilen sich ansammle, welche aus den kleinsten Teilen des Zinnobers einzeln frei werden.

Leitet man Wasserstoffgas über erhitztes Eisenoxyd, so trennt sich der Sauerstoff vom Eisen und verbindet sich mit dem Wasserstoff zu Wasserdampf,

welcher durch den Überschuß des zugeführten Wasserstoffgases fortgeführt wird. Da das zurückbleibende Eisen bei dieser Temperatur nicht zusammenschmilzt, so bleibt es in dem Zustande zurück, wie es vom weggehenden Sauerstoff hinterlassen wird. Wir dürfen uns vorstellen, daß zwischen je zwei Eisenteilchen, wo früher ein Sauerstoffteilchen lagerte, eine Lücke bleibe. Das äußerst zarte Pulver von Eisen, welches man so erhält, ist deshalb sehr geeignet, den Sauerstoff wieder aufzunehmen, weil jedes seiner Teilchen demselben sofort zugänglich ist. Bringt man daher solches reduziertes Eisen mit Luft oder Sauerstoff in Berührung, so oxydiert es sich sofort unter lebhafter Glüherscheinung. Ein massives Stück Eisen zeigt diese Erscheinung nicht, es kann sich nur an der Oberfläche oxydieren, und die dabei entwickelte Wärme verteilt sich so rasch auf die benachbarten Massen des Eisens, daß sie keine merkbare Temperaturerhöhung hervorzubringen imstande ist.

Diese und andere Erfahrungen der Chemiker haben dieselben veranlaßt, die sogenannte atomistische Theorie aufzustellen. Derselben liegt die Hypothese zugrunde, daß in den zusammengesetzten Stoffen gewisse sehr kleine Teile der einzelnen Stoffe aneinander gelagert seien. Diese kleinsten Teile werden Atome genannt. Je eine Gruppe von Atomen, welche miteinander verbunden als kleinste Menge des zusammengesetzten Stoffes für sich bestehen kann, heißt eine Molekel oder ein Molekül.

Die Kenntnisse über die Moleküle sind insbesondere durch das Studium des gasförmigen Zustandes gefördert worden.

Denken wir uns einen Tropfen Wasser in Dampf verwandelt; dabei wird sein Volumen um mehr als das Hundertfache vergrößert. Die kleinsten Teilchen des Wassers müssen daher ebenfalls ihr Volumen in diesem Verhältnisse vergrößern, oder sie müssen sich entsprechend weiter voneinander entfernen, so daß im Wasserdampf die einzelnen Teilchen durch große Zwischenräume voneinander getrennt sind. Die letztere Annahme hat nun viel mehr Wahrscheinlichkeit für sich, was wir an dieser Stelle nicht näher nachweisen können.

Die so von einander getrennt vorhandenen Wasserteilchen, welche die kleinsten Wassermengen sind, die im freien Zustande vorkommen können, heißen wir Wassermoleküle. Die Chemie lehrt, daß dennoch jedes dieser Moleküle aus zwei Wasserstoffatomen und einem Sauerstoffatom zusammengesetzt sei. Sie lehrt ferner noch, daß (außer beim Quecksilber und Cadmium) die Moleküle aller Stoffe aus mindestens zwei Atomen bestehen; die Moleküle der sogenannten Grundstoffe bestehen dann aus gleichen Atomen, z. B. ein Molekül Wasserstoff aus zwei Atomen Wasserstoff.

Über die absolute Größe der Atome und der Moleküle können wir nichts Genaueres aussagen. Aus gewissen, nach verschiedenen sinnreichen Methoden angestellten Überlegungen und Berechnungen hat man aber in neuester Zeit geschlossen, daß die Durchmesser der Körperatome kleiner als 10^{-7} und größer als $5 \cdot 10^{-8}$ mm anzunehmen seien und daß das absolute Gewicht eines Atoms Wasserstoff auf $23 \cdot 10^{-22}$ eines Milligramms zu schätzen sei.

Demnach wären die Körperatome immer noch über 1000 mal kleiner als die unter den stärksten vergrößernden Mikroskopen noch etwa zu messenden Dicken von pathogenen Bakterien, indem z. B. diejenige von *Bacillus murisepticus* bis unter $2 \cdot 10^{-4}$ mm heruntergeht. Die Größe eines Atoms verhält sich zur Größe eines Wassertropfens ungefähr wie die Größe eines Schrot-

kornes zur Größe der Erdkugel. Dieses Verhältnis ist immer noch leichter vorzustellen als das Verhältnis des Erddurchmessers, welcher $13 \cdot 10^9$ mm beträgt, zur Entfernung des uns nach der Sonne nächsten Fixsternes α Centauri, welche $41,1 \cdot 10^{18}$ mm beträgt.

§ 13. Die Elemente oder Grundstoffe, ihre Bezeichnung und ihre Atomgewichte. Durch fortgesetzte Zerlegung (Scheidung) ist es den Chemikern gelungen, viele Stoffe in einfachere zu zerlegen. Als nicht weiter zerlegbar haben sich bis heute die in beistehender Tabelle¹⁾ (S. 33) aufgeführten 79 Elemente oder Grundstoffe ergeben. Die Elemente sind nach der Höhe ihres Atomgewichtes in Gruppen mit periodisch wiederkehrenden Eigenschaften angeordnet. Ob dieselben alle wirklich einfach sind, oder durch später aufgefundene Hilfsmittel noch weiter zerlegt werden können, läßt sich nicht entscheiden. Die nähere Beschreibung dieser Grundstoffe, ihr Vorkommen und ihre Reindarstellung gehört ausschließlich der Chemie an.

Die Bedeutung der unter der Aufschrift „Atomgewicht“ aufgeführten Zahlen soll nun erklärt werden.

Indem die Chemiker die zusammengesetzten Stoffe nicht bloß in ihre Bestandteile zerlegten, um diese kennen zu lernen (qualitative Analyse), sondern dabei auch die Mengenverhältnisse bestimmten, mit welchen die einzelnen Grundstoffe in den Verbindungen vorkommen (quantitative Analyse), erkannten sie bald ein überaus wichtiges Gesetz, welches die chemischen Verbindungen charakterisiert und von den mechanischen Gemengen wesentlich unterscheidet.

Während nämlich die mechanischen Gemenge im allgemeinen nach unendlich vielen Mischungsverhältnissen zusammengesetzt sein können, finden sich die chemischen Verbindungen in der Regel nur nach wenigen bestimmten und konstanten Verhältnissen zusammengesetzt.

Die relativen Gewichtsmengen, mit welchen die Elemente in den Verbindungen vorkommen, sind entweder durch die in der Tabelle angeführten Zahlenwerte oder durch ganze, einfache Multipla dieser Zahlen gegeben.

So z. B. verbinden sich²⁾:

14	Massenteile Stickstoff mit 8	Massenteilen Sauerstoff zu	Stickoxydul,
14	" " " 16	" " "	Stickoxyd,
14	" " " 24	" " "	Salpetrigsäureanhydrid,
14	" " " 32	" " "	Stickstoffdioxyd,
14	" " " 40	" " "	Salpetersäureanhydrid.

Die Quantitäten Sauerstoff, die sich mit einer Quantität Stickstoff zu durchaus verschiedenen Substanzen verbinden, stehen also in den einfachen Verhältnissen von 1:2:3:4:5. Dieselbe charakteristische Menge von Stickstoff, welche sich mit den angeführten Mengen von Sauerstoff verbindet, tritt aber auch bei der Vereinigung mit anderen Elementen auf. So verbinden sich

14	Massenteile Stickstoff mit 1	Massenteil Wasserstoff zu	Ammoniumnitrid,
14	" " " 2	Massenteilen " "	Hydrazin,
14	" " " 2	" " " "	Ammoniak,

¹⁾ Nach H. Erdmann, Lehrb. d. anorg. Chemie, 2. Aufl., S. 61, 1900.

²⁾ Indem wir die gebräuchlichen auf ganze Zahlen abgerundeten Atomgewichte verwenden.

Name des Elementes	Zeichen	Atomgewicht	Name des Elementes	Zeichen	Atomgewicht
Wasserstoff	H	1,00	Zirkonium	Zr	89,72
Helium	He	4,00	Niob (Kotumbium)	Nb	93,02
Lithium	Li	6,97	Molybdän	Mo	95,26
Beryllium	Be	9,01	Ruthenium	Ru	100,91
Bor	B	10,86	Rhodium	Rh	102,23
Kohlenstoff	C	11,91	Palladium	Pd	106,00
Stickstoff	N	13,93	Silber	Ag	107,11
Sauerstoff	O	15,88	Cadmium	Cd	111,55
Fluor	F	18,91	Indium	In	118,10
Neon	Ne	19,86	Zinn	Sn	118,10
Natrium	Na	22,88	Antimon	Sb	119,52
Magnesium	Mg	24,10	Jod	J	125,89
Aluminium	Al	26,91	Tellur	Te	127,10
Silicium	Si	28,18	Xenon	Xe	127,10
Phosphor	P	30,75	Cäsium	Cs	131,89
Schwefel	S	31,83	Baryum	Ba	136,39
Chlor	Cl	35,18	Lanthan	La	137,59
Kalium	K	38,82	Cer	Ce	138,00
Argon	Ar	39,70	Praseodym	Pr	139,41
Calcium	Ca	39,76	Neodym	Nd	142,52
Scandium	Sc	43,78	Samarium	Sa	149,20
Titan	Ti	47,79	Gadolinium	Gd	155,57
Vanadium	V	50,99	Terbium	Tb	158,80
Chrom	Cr	51,74	Erbium	Er	164,70
Mangan	Mn	54,57	Thulium	Tu	169,40
Eisen	Fe	55,60	Ytterbium	Yb	171,88
Nickel	Ni	58,41	Tantal	Ta	181,45
Kobalt	Co	59,07	Wolfram	W	183,00
Kupfer	Cu	63,12	Osmium	Os	189,55
Zink	Zn	64,91	Iridium	Ir	191,66
Gallium	Ga	69,50	Platin	Pt	193,41
Germanium	Ge	71,93	Gold	Au	195,74
Arsen	As	74,45	Quecksilber	Hg	198,50
Selen	Se	78,58	Thallium	Tl	202,61
Brom	Br	79,34	Blei	Pb	205,36
Krypton	Kr	81,00	Wismut	Bi	206,54
Rubidium	Rb	84,75	Radium	Ra	225,00
Strontium	Sr	86,95	Thor	Th	230,80
Yttrium	Y	88,35	Uran	U	237,77
			Polonium	Po	?

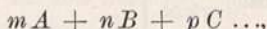
und andererseits verbinden sich

1 Massenteil Wasserstoff mit 8 Massenteilen Sauerstoff zu Wasser,

1 " " " 16 " " " Wasserstoffsperoxyd.

Diese Beispiele, die sich sehr vermehren ließen, zeigen, daß die relativen Mengen der in Verbindung tretenden Massen stets ganze Multipla der als

Atomgewichte bezeichneten Zahlenwerte sind. Bezeichnen wir also die letzteren mit $A, B, C \dots$, so sind alle möglichen Verbindungen derselben gegeben durch die Formel



wobei m, n, p ganze Zahlen sind, die in der Mehrheit der Fälle selten über 5 hinausgehen, bei den Kohlenstoffverbindungen allerdings höhere Werte (bis 30 und darüber) erreichen.

Dieser Satz heißt das Gesetz der multiplen Proportionen.

Auf der Anwendung dieser abgekürzten Zeichen der Grundstoffe mit der erwähnten Bedeutung beruht die so bequeme chemische Formelsprache.

Fig. 43.

Ti	C	Cl	P	N	S	O
Wasserstoff 10%						
Kalium 2,23%						
Natrium 2,28%						
Magnesium 2,5%						
Calcium 3,51%						
Eisen 5,08%						
Aluminium 7,26%						
Silicium 25,30%						
Sauerstoff 49,98%						

In der zweiten Spalte der vorstehenden Tabelle sind diese Zeichen angeführt. Die Chemiker pflegen dieselben unmittelbar zusammenschreiben, wie in der Algebra Faktoren geschrieben werden, und die Zahlen m, n, p als Indices den Zeichen oben oder unten beizusetzen.

Demnach bedeutet also beispielsweise SH_2O_4 eine chemische Verbindung von einmal 32 Massenteilen Schwefel mit zweimal 1 Massenteil Wasserstoff und viermal 16 Massenteilen Sauerstoff, welche Verbindung Schwefelsäurehydrat heißt.

Das Gesetz der multiplen Proportionen ist zunächst nur ein empirisches Gesetz, allein es erhält durch die Annahme der Atome und die darauf gebaute atomistische Theorie eine sehr einfache Erklärung und die Theorie dadurch einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit.

Die atomistische Theorie nimmt nämlich erstens an, daß die chemische Verbindung der Körper durch Aneinanderlagerung der Atome geschehe, und daß die relativen Gewichte der Atome eben durch die Atomgewichtszahlen ausgedrückt seien. Da sich nun beispielsweise ein Atom Sauerstoff wohl mit einem ganzen oder mit zwei ganzen Atomen Stickstoff verbinden kann, nicht aber mit einem beliebigen Bruchteil eines solchen, so erklärt es sich, daß mit 16 Teilen Sauerstoff wohl 14 Teile Stickstoff oder zweimal 14 Teile Stickstoff, nicht aber eine beliebige dazwischen gelegene Menge Stickstoff in Verbindung treten können.

Unter Atomgewicht ist also nie das absolute Gewicht eines Atoms, sondern stets nur das relative Gewicht eines solchen zu verstehen, wobei das Atomgewicht des Wasserstoffs = 1 gesetzt wird¹⁾.

Wenn man also sagt, das Atomgewicht des Kohlenstoffs ist = 12, so ist damit ausgedrückt, daß die kleinste Menge Kohlenstoff, welche mit anderen Grundstoffen in Verbindung treten kann, 12 mal so viel wiegt, als die kleinste Menge von Wasserstoff, welche sich chemisch verbinden kann.

¹⁾ Häufig wird das Atomgewicht auf Sauerstoff = 16 bezogen; dadurch werden alle Atomgewichte im Verhältnis 1000:1008, also um $\frac{8}{10}$ Proz. größer, als obige Tabelle angibt.

Das Molekulargewicht wird erhalten, indem man die Atomgewichte der in einem Molekül enthaltenen Elemente addiert. So z. B. ist das Molekulargewicht des Wassers $H_2O = 2 + 16 = 18$, das des Schwefelsäurehydrates $SH_2O_4 = 32 + 2 + 4 \cdot 16 = 98$, das des freien Wasserstoffs $HH = 1 + 1 = 2$.

Es ist nicht uninteressant, zu erfahren, in welchen Mengenverhältnissen die Elemente auf der Erde vorkommen. Dabei ist die Erdkruste bis zur erforschten Tiefe, das Weltmeer und die Atmosphäre mit in Betracht gezogen. Die nachstehende Tabelle und das statistische Diagramm, Fig. 43, gibt darüber Aufschluß.

Element	Feste Erdkruste	Weltmeer	Atmosphäre ohne Wasserdampf	Gesamt- betrag
	Proz.	Proz.	Proz.	Proz.
Sauerstoff	47,29	85,79	23,22	49,98
Silicium	27,21	—	—	25,30
Aluminium	7,81	—	—	7,26
Eisen	5,46	—	—	5,08
Calcium	3,77	0,05	—	3,51
Magnesium	2,68	0,14	—	2,50
Natrium	2,36	1,14	—	2,28
Kalium	2,40	0,04	—	2,23
Wasserstoff	0,20	10,67	—	0,94
Titan	0,33	—	—	0,30
Kohlenstoff	0,22	—	0,02	0,21
Chlor	0,01	2,08	—	0,15
Phosphor	0,10	—	—	0,09
Mangan	0,08	—	—	0,07
Schwefel	0,03	0,09	—	0,04
Baryum	0,03	—	—	0,03
Stickstoff	0,01	—	75,46	0,02
Chrom	0,01	—	—	0,01
Argon	—	—	1,30	0,00

Beim Chlorgehalt des Meerwassers sind 0,008 Proz. Brom mitgerechnet. Im Gesamtmittel verschwindet das Argon und die übrigen Elemente. Man könnte also sagen, die Erde besteht, soweit wir sie kennen, rund zur Hälfte aus Sauerstoff, zu ein Viertel aus Silicium. Da aber die mittlere Dichte der Erde höher ist als die mittlere Dichte der Erdkruste, so enthält das Erdinnere sicherlich größere Anteile an den spezifisch schweren Elementen.

Die Wichtigkeit der Elemente steht in ganz anderem Verhältnis als ihre Menge. Der Kohlenstoff beträgt nur wenig über $\frac{1}{5}$ Proz. der Erdmasse, trotzdem ist er für uns wichtiger als das Silicium, denn im Verein mit dem Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und noch einigen Elementen ist er der Hauptbestandteil aller organisierten Körper und der Träger des Lebens auf der Erde.

Erstes Buch.

Die Mechanik.

Erstes Kapitel.

Von der Messung der Längen, Flächen, Volumina, Winkel, Zeiten und Massen.

§ 14. **Vom Messen im allgemeinen.** Eine Größe messen heißt, dieselbe mit einer Größe gleicher Art vergleichen, um zu ermitteln, wie oft die eine in der anderen enthalten ist. Die Vergleichsgröße wird Maßeinheit genannt. Bedient man sich als Maßeinheit einer durch internationale Vereinbarung oder Gesetz festgesetzten Größe, so erhält man eine absolute Messung. Ist dagegen als Maßeinheit eine beliebige Größe gewählt, so erhält man nur eine relative Messung. Wenn wir z. B. konstatieren, daß die Längen der Seiten eines Dreiecks sich wie $1 : 1,5 : 1,7$ verhalten, so ist dies eine relative Messung. Wenn wir aber ermitteln, daß diese Seitenlängen $1, 1,5, 1,7$ cm betragen, so ist dies eine absolute Messung.

Die in der Physik zu messenden Größen sind sehr mannigfacher Art: Längen, Winkel, Zeiten, Massen, Geschwindigkeiten, Kräfte, Temperaturen, Wärmemengen, Lichtstärken usw. Man benötigt daher ebensovieler Maßeinheiten, als es Arten von Größen gibt. Durch den Zusammenhang dieser Größen ist es aber möglich geworden, fast alle Messungen auf drei Grundeinheiten zu reduzieren. Es sind dies die Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse. Wo dies noch nicht gelungen ist, ist es das Bestreben der Physiker, dieses Ziel zu erreichen.

Diese einheitliche Gestaltung des gesamten Maßsystems ist von enormem ökonomischen Vorteil und als ein wesentlicher Fortschritt der physikalischen Wissenschaft zu betrachten. Es wäre zwar auch möglich, mit nur zwei Grundeinheiten auszukommen; aus praktischen Gründen behalten wir aber die angegebenen drei bei. Diese sind willkürlich gewählt, die übrigen sind dann abgeleitet; die Art der Ableitung ist aber wieder eine willkürliche, durch Vereinbarung festgesetzte. Wir beginnen mit der Aufstellung der Längeneinheit.

§ 15. **Das metrische Maßsystem, die Längeneinheit.** Die alten Längenmaße waren den Dimensionen des menschlichen Körpers entnommen: Fuß (Schuh), Schritt, Daumen (Zehe), Faust, Spanne, Elle¹⁾. Sie wurden später in den einzelnen Ländern von den Regenten gesetzlich festgestellt. Dadurch entstand eine Vielheit von nicht miteinander übereinstimmenden Längenmaßen, die oft von Stadt zu Stadt wechselten, wodurch Übelstände entstanden, die desto fühlbarer wurden, je mehr der Verkehr und die Ansprüche der Wissenschaften sich steigerten.

Schon 1664 hat deshalb der holländische Physiker Huygens den Vorschlag gemacht, die Länge des einfachen Sekundenpendels als Längeneinheit zu wählen. Als 1791 die französische Nationalversammlung ein neues Maß- und Gewichtssystem einzuführen beschloß, dachte man auch zuerst an die Ausführung dieses Vorschlages, ging aber davon ab, um die Einheit der Länge nicht von der Zeitmessung abhängig zu machen. Die im März 1791 niedergesetzte Kommission, zu welcher die bedeutendsten Mathematiker und Physiker Frankreichs: Laplace, Lagrange, Borda, Delambre, Prony, Méchain und Lavoisier gehörten, beschloß vielmehr, den 10 millionsten Teil des durch die Pariser Sternwarte gehenden Erdmeridianquadranten als Längeneinheit zu wählen und zu diesem Zwecke eine neue Messung dieses Quadranten vorzunehmen. Dies geschah durch Delambre und Méchain 1792 bis 1798 auf dem Meridianbogen zwischen Dünkirchen und Montjoux bei Barcelona unter Benutzung der Toise, eines eisernen Maßstabes von 6 Pariser Fuß Länge, als damaliger Längeneinheit. Auf Grund dieser Messung wurde sodann am 25. Juni 1800 die Länge des neuen Maßes, des Meters, gesetzlich zu 0,513074 Toisen = 443,296 Pariser Linien festgestellt. Gleichzeitig wurde ein Stab aus Platin von 1 m Länge, 25 mm Breite und 4 mm Dicke, dessen Endflächen bei 0° genau den Abstand der neuen Längeneinheit haben sollten, sowie ein Platingewichtsstück von dem Gewichte eines Cubikdecimeters Wasser größter Dichte von der Kommission, welche durch fremde Gelehrte, wie Tralles und van Swinden, ergänzt worden war, der Regierung und dem gesetzgebenden Körper vorgelegt und im Archiv aufbewahrt.

Die Vorstellung, daß es bei einem etwaigen Verluste dieser Urmaße möglich sein werde, durch neue Messungen des Erdmeridians dieselben genau in derselben Größe wieder aufzufinden, ist begreiflicherweise eine illusorische, denn es ist zu erwarten, daß bei jeder solchen Messung, die sich aus sehr vielen Einzelmessungen zusammensetzt, ein etwas abweichendes Resultat sich ergeben werde. In der Tat beträgt nach Bessels Berechnungen die Länge des Erdquadranten 10 000 856, wenn man den Meterstab des Archivs = 1 setzt. Der letztere wäre demnach um 0,0856 mm, das ist ungefähr um eines Haares Dicke, zu kurz geraten.

Selbstverständlich wäre es ganz unausführbar und zwecklos, nach jeder neuen, genaueren Messung der Erde jedesmal das Längenmaß abzuändern. Als praktische Längeneinheit ist daher nicht der 10 millionste Teil des

¹⁾ Nach A. Böckh (Metrologische Untersuchungen usw., Berlin 1838) sollen die Babylonier und Ägypter und nach ihnen die meisten Völker des Altertums die Längeneinheit aus der Seite eines Würfels Wasser von bestimmtem Gewicht (1 Talent) abgeleitet haben; es ist dies gerade der umgekehrte Weg zu jenem, den man beim metrischen System eingeschlagen hat.

Erdquadranten, sondern die Länge des Platinstabes im Archiv zu Paris bei 0°C zu definieren.

Leider hat sich später herausgestellt, daß dieser Platinstab nicht gut geeignet sei, um genaue Kopien von demselben anzufertigen. Als daher auf der zweiten Konferenz der Mitglieder der „Europäischen Gradmessung“ in Berlin 1867 beschlossen wurde, für alle europäischen Länder das Meter als Längeneinheit einzuführen, wurde auch der Plan gefaßt, zur Herstellung eines neuen, zweckmäßigeren Urmeters, dessen Länge von jener des *Mètre des Archives* möglichst wenig abweichen sollte, und zur Anfertigung und Vergleichung der für die verschiedenen Länder bestimmten Kopien eine internationale Kommission zu bestellen.

Dieser von den Franzosen anfangs mit Mißtrauen aufgenommene Vorschlag kam dann endlich nach vielen Verhandlungen und durch den deutsch-französischen Krieg verursachten Störungen in erweitertem Maße zur Ausführung, indem auch die Herstellung des neuen Normalkilogrammetalons dem von einer Konferenz von 1870 gewählten, 1872 in Paris zusammengetretenen internationalen Komitee für Maß und Gewicht übertragen wurde.



Da das Platin sich als zu weich herausstellte, so wurde auf Vorschlag von St. Claire Deville beschlossen, die neuen Meter- und Kilogrammetalons aus einer Legierung von 90 Proz. Platin mit 10 Proz. Iridium, welche sich durch große Härte auszeichnet, herzustellen. Da ferner der frühere Platinstab wegen seiner geringen Querschnittsdimensionen zu biegsam war, so wurde für die neuen Meterstäbe eine Form gewählt, deren Querschnitt aus Fig. 44 in natürlicher Größe ersichtlich ist. Die Länge dieser Stäbe wurde = 102 cm gewählt und die Länge des Meters durch feine Endstriche auf der mit *ab* bezeichneten Fläche markiert.

Diese Form bietet mehrfache Vorteile dar. Sie läßt nur eine sehr geringe Biegung zu und gestattet die Anbringung der Endstriche auf der sogenannten neutralen Schicht *ab*, welche bei der Biegung keine Längenänderung erleidet. Außerdem nimmt ein solcher Stab verhältnismäßig rasch die Temperatur der Umgebung an.

Die erwähnten Endstriche sind von zwei beiderseits um 0,5 mm abstehenden parallelen Hilfsstrichen von 6- bis 8tausendel mm Dicke begleitet, behufs Auswertung der Mikrometer der Meßmikroskope des Komparators. Die drei Querstriche werden von zwei Längsstrichen in 0,2 mm Abstand durchschnitten, deren Mitte die Stellen der Querstriche bestimmen, zwischen denen die Länge bei 0° ein Meter betragen soll. Solche Maßstäbe mit Endstrichen (*Etalons à trait*) sind jenen mit Endflächen (*Etalons à bout*) vorzuziehen, weil letztere durch den Gebrauch abgenutzt und unrichtig werden, selbst wenn diese Endflächen aus harten Edelsteinen hergestellt sind.

Die französische Sektion der internationalen Kommission, welche die Herstellung der neuen Prototypen des Meters übernommen hatte, kam zwar im Frühjahr 1874 dazu, aus einer auf einmal geschmolzenen Masse von 250 kg Platin-Iridium durch Ausschmieden, Walzen, Hobeln usw. eine Anzahl von Stäben der oben angegebenen Form herzustellen, welche aber wegen eines Eisengehalts von ungefähr 2 Proz. von dem internationalen Komitee nicht angenommen wurden.

Nach langwierigen hierdurch hervorgerufenen Verhandlungen wurde dann das Material für die neuen Stäbe bei Matthey u. Co. in London bestellt und der frühere Beschluß, daß alle Stäbe aus einem Gusse stammen sollten, als unpraktisch fallen gelassen.

Im Frühjahr 1875 schlossen die Vertreter von Deutschland, Österreich, Ungarn, der Schweiz, Belgien, Dänemark, Frankreich, Italien, Rußland, Schweden und Norwegen, Spanien, Portugal, der Türkei, der Vereinigten Staaten, Argentinien, Peru und Venezuela in Paris einen Vertrag zur Gründung eines auf gemeinsame Kosten zu gründenden Instituts unter dem Namen: „Internationales Maß- und Gewichts-bureau“, welches dann auch auf der Höhe von St. Cloud bei Paris erbaut und eingerichtet wurde. Dasselbe besteht aus mehreren Beobachtungsräumen, welche mit Vorkehrungen zur Konstanthaltung verschiedener Temperaturen unter und über 0° ausgestattet sind, während das Tageslicht nur durch eine Öffnung an der Decke eintreten kann. Daneben befindet sich ein physikalisches Laboratorium zur Vornahme der nötigen Hilfsarbeiten. Das Institut steht unter der Leitung eines Direktors, dem mehrere Assistenten zur Seite stehen.

Von den fertigen Stäben wurde nach deren genauer Vergleichung mit dem alten Platinstabe derjenige ausgesucht, welcher letzterem am nächsten kam. Die Abweichung derselben betrug weniger als $\frac{1}{10000}$ mm. Dieser Stab wurde dann, mit einem gotischen **M** bezeichnet, als internationales Prototyp des Meters in einen eisernen Schrank eingeschlossen und in einem unterirdischen Gewölbe des internationalen Maß- und Gewichtsinstituts, in welchem die Temperatur nur um 4° variiert, hinter zwei eisernen Türen mit drei verschiedenen Schlüsseln, welche drei verschiedenen Personen anvertraut sind, aufbewahrt.

Die Länge dieses Stabes bei 0° Celsius gilt als Längeneinheit.

Die übrigen Stäbe wurden ebenfalls genau gemessen, auf ihre Wärmeausdehnung untersucht, und in messingene Etuis eingeschlossen, samt zwei verifizierten Thermometern den Delegierten der beteiligten Staaten übergeben. Auch diese Stäbe weichen nicht um mehr als $\pm \frac{28}{10000}$ mm von dem Prototyp ab, welche Abweichung überdies auf $\pm \frac{2}{10000}$ mm genau bestimmt wurde.

Zugleich mit der Verteilung der Metermaße fand die Verteilung der Kilogrammgewichte aus Platin-Iridium statt, von denen später die Rede sein wird.

Das internationale Institut hat außerdem dafür gesorgt, daß das Meter, wenn es verloren ginge, wieder mit einer Sicherheit von $\pm \frac{1}{1000}$ mm reproduziert werden könnte, indem durch Prof. A. Michelson aus Chicago in dem internationalen Bureau eine sorgfältige Vergleichung des Prototyps mit der Wellenlänge bestimmter roter, grüner und blauer Lichtstrahlen im Spektrum des Cadmiums ausgeführt wurde¹⁾.

¹⁾ Näheres in den Publikationen:

Procès-verbaux de la commission internationale du mètre et de la Section Française. Paris, Imprimerie Nationale, 1871—1878.

Procès-verbaux du Comité international des poids et mesures. Paris, Gauthiers-Villars, 1875—1902.

Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures. T. I—XI. Paris, Gauthiers-Villars, 1881—1895.

Das Meter wurde nach dem Decimalsystem abgeteilt und vervielfacht und auf diese Weise erhalten folgende

Längenmaße:

1 Myriameter (Mm)	= 10 000	Meter (m)
1 Kilometer (Km)	= 1 000	"
1 Hektometer (Hm)	= 100	"
1 Dekameter (Dm)	= 10	"
1 Meter (m)	= 1	"
1 Decimeter (dm)	= 0,1	"
1 Centimeter (cm)	= 0,01	"
1 Millimeter (mm)	= 0,001	"
1 Mikron (μ)	= 0,000 001	Meter (m)

Wir geben des Zusammenhanges wegen auch die Zusammenstellung der durch Quadrierung und Cubizierung abgeleiteten Maßeinheiten der Fläche und des Volumens.

Flächenmaße:

Quadrat-Kilometer (q km oder km ²)	= 1000 000	Quadratmeter
Quadrat-Hektometer (q Hm oder Hm ²) = Hektar (ha)	= 10 000	"
Quadrat-Dekameter (q Dm oder Dm ²) = Ar (a)	= 100	"
Quadrat-Meter (qm oder m ²)	= 1	"
Quadrat-Decimeter (qdm oder dm ²)	= 0,01	"
Quadrat-Centimeter (qcm oder cm ²)	= 0,000 1	"
Quadrat-Millimeter (qmm oder mm ²)	= 0,000 001	"

Volumenmaße:

Cubikmeter (cbm oder m ³) = Stère (s)	= 1	Cubikmeter
Cubikdecimeter (cdcm oder dm ³)	= 0,001	"
Cubikcentimeter (ccm oder cm ³)	= 0,000 01	"
Cubikmillimeter (cmm oder mm ³)	= 0,000 000 1	Cubikmeter.

Außer diesen direkt aus dem Längenmaße durch Cubizierung abgeleiteten Volumenmaßen sind noch folgende, nicht streng identische, aber sehr nahe gleich große Volumenmaße, indirekt aus dem Kilogramm abgeleitet, eingeführt (siehe § 34):

Kiloliter (kl)	= 1000	Liter
Hektoliter (hl)	= 100	"
Dekaliter (Dl)	= 10	"
Liter (l)	= 1	"
Deciliter (dl)	= 0,1	"
Centiliter (cl)	= 0,01	"
Milliliter (ml)	= 0,001	"
Mikroliter	= 0,000 001	Liter.

Dabei gilt als Liter das Volumen eines Kilogramms Wasser von 4° C beim Normaldruck.

Von diesen sämtlichen Maßen und deren Bezeichnungen sind nicht alle gleich üblich. Von den Längenmaßen sind die gebräuchlichsten: Kilometer, Meter, Centimeter, Millimeter.

Die in Deutschland offiziell eingeführten Namen Stab, Neuzoll und Strich für letztere drei Längenmaße haben sich glücklicherweise nicht eingebürgert.

Von den Flächenmaßen sind die gebräuchlichsten: Hektar (als Feldmaß), Quadratmeter, Quadratdecimeter, Quadratcentimeter und Quadratmillimeter.

Von den Volumenmaßen sind am meisten gebräuchlich Cubikmeter, Hektoliter, Liter, Deciliter, Cubikcentimeter.

Das Metermaßsystem ist in den meisten zivilisierten Staaten gesetzlich, in Großbritannien, Rußland und den Vereinigten Staaten Nordamerikas wenigstens fakultativ eingeführt und in der Wissenschaft überall fast ausschließlich gebraucht. Da aber manchmal ältere Messungen umzurechnen sind, so geben wir hier eine Vergleichstabelle derselben:

1 Meter	=	3,078 444	Pariser Fuß ¹⁾ ,
1 "	=	3,186 199	rheinländische Fuß (Preußen, Dänemark),
1 "	=	3,280 843	englische, russische Fuß ²⁾ ,
1 "	=	3,163 446	österreichische (Wiener) Fuß,
1 "	=	3,333 333	schweizerische, badensische Fuß,
1 "	=	3,426 310	bayerische Fuß,
1 "	=	3,490 52	württembergische Fuß,
1 "	=	3,531 20	sächsische Fuß,
1 "	=	3,423 55	hannoversche Fuß.

§ 16. Berücksichtigung der Temperatur bei Längenmessungen.

Richtig angefertigte Maßstäbe haben, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist, eine solche Teilung, daß sie bei 0° C den Unterabteilungen des internationalen Meter-Prototyps entspricht. Bei anderen Temperaturen ist aber infolge der Ausdehnung die Länge der Teile eine andere. In der Wärmelehre, der wir hier vorgreifen müssen, werden wir hören, daß ein Maßstab, dessen Länge bei 0° = M_0 ist, bei t^0 eine Länge $M_t = M_0 + M_0 \mu t = M_0(1 + \mu t)$ annimmt, wobei μ der lineare Ausdehnungskoeffizient für das Material des Maßstabes ist. Derselbe beträgt beispielsweise bis zu 40° C für:

Glas	$\mu = 0,000\ 007\ 97$
Platin-Iridium 9:1	$\mu = 0,000\ 008\ 73$
Stahl	$\mu = 0,000\ 010\ 56$
Messing	$\mu = 0,000\ 018\ 12$
Silber	$\mu = 0,000\ 018\ 63$

Hiernach wird ein Meterstab aus Platin-Iridium bei der Erhöhung der Temperatur von 0 bis 30° sich um 0,261 mm verlängern, während ein solcher von Messing um 0,543 mm, also mehr als um das Doppelte länger wird.

Mißt man nun mit einem solchen Maßstabe einen anderen Körper bei der Temperatur t , so ergibt die Messung, daß eine gewisse Länge des letzteren bei t^0 , die wir mit L_t bezeichnen wollen, gleich sei einer bestimmten Länge auf dem Maßstab ebenfalls bei t^0 ; dieselbe sei M'_t . Das Resultat der Vergleichung ist also

$$L_t = M'_t$$

¹⁾ Gemäß der ursprünglichen Definition des Meters = $\frac{1}{10\ 000\ 000}$ Erdquadrant. Nach direkten Vergleichen mit der Toise von Peru à points 3,078 500 mit der Toise à bouts 3,078 360.

²⁾ Gemäß der neuesten und genauesten Vergleichung des engl. Yards (3 Fuß) mit dem internationalen Meter-Prototyp durch Benoit 1896.

Bezeichnen wir mit λ den linearen Ausdehnungskoeffizienten der Substanz des zu messenden Körpers, dessen Länge bei $0 = L_0$ ist, so folgt

$$L_0 (1 + \lambda t) = M_0' (1 + \mu t) \dots \dots \dots (1)$$

woraus sich ergibt

$$L_0 = M_0' \frac{1 + \mu t}{1 + \lambda t} = M_0' [1 + (\mu - \lambda)t] \dots \dots \dots (2)$$

da das Produkt der kleinen Größen $\mu \lambda$ vernachlässigt werden kann. Um also die wahre Länge eines Körpers bei 0° zu bestimmen, ist nicht nötig, ihn auf 0° abzukühlen, wenn man seinen Ausdehnungskoeffizienten und den des Maßstabes kennt. Man hat nur dafür zu sorgen, daß er dieselbe Temperatur wie der Maßstab habe und daß diese bekannt sei.

Z. B.: Ein Glasstab habe bei 20°C , gemessen an einem richtigen Messingmaßstabe, die Länge von 800 mm ergeben. Dann ist seine Länge bei 0° :

$$L_0 = 800 [1 + (0,000\,018\,12 - 0,000\,007\,97) 20] = 800,1624 \text{ mm.}$$

§ 17. Hilfsmittel zur genauen Bestimmung der Bruchteile eines Maßstabteiles.

Nur bei rohen Messungen wird man den zu messenden Körper unmittelbar an den Maßstab oder umgekehrt anlegen und seine Länge direkt ablesen, denn wenn auch die zu messende Länge scharf begrenzt ist, so wird man sie an dem in Millimeter abgeteilten Maßstabe nur auf ganze Millimeter und durch Schätzung noch bis etwa auf 0,1 mm ablesen können. In vielen Fällen, z. B. wenn der Durchmesser einer Kugel oder eines Zylinders zu messen ist, kommt man mit dem Maßstabe überhaupt an die zu bestimmende Länge nicht heran. Endlich ist es meistens wünschenswert, eine größere Sicherheit der Messung zu erhalten, als es die bloße Schätzung der Zehntel eines Millimeters durch das unbewaffnete Auge gestattet. Es gibt drei Hilfsmittel, um die Bruchteile etwa der Millimeter eines Maßstabes sicherer bzw. auch genauer zu bestimmen, als dies durch bloße Schätzung der 0,1 mm mit dem Auge möglich ist. Es sind dies der Vernier, die Mikrometerschraube und der Fühlhebel.

Der Vernier, der noch meistens, wenn auch unrechtmäßig Nonius genannt wird ¹⁾, besteht in einem Schieber, der längs der Teilung des eigent-

¹⁾ Der Vernier ist zuerst vom Niederländer Peter Werner unter dem Namen Petrus Vernerius in einer zu Brüssel im Jahre 1631 erschienenen Schrift beschrieben worden. Die Vorrichtung, welche der Portugiese Pero Nuñez (Petrus

Fig. 45.

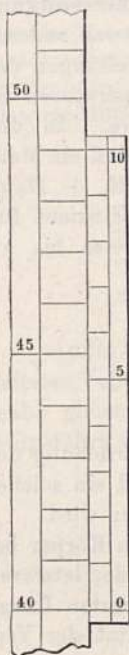


Fig. 46.



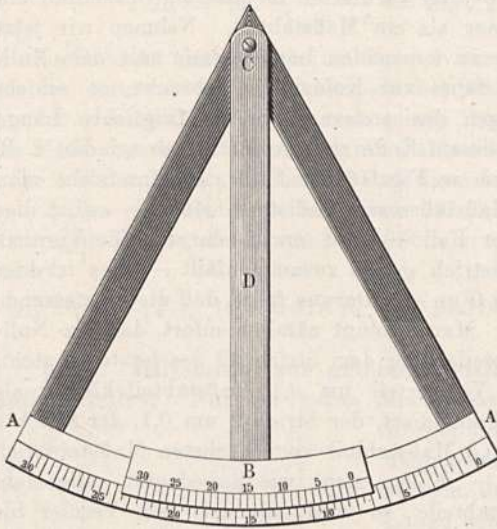
lichen Maßstabes hingeleitet. Dieser Schieber trägt ebenfalls eine Teilung, deren Striche bis zur Berührung mit den Strichen der Maßstabteilung gelangen, wie dies Fig. 45 zeigt. Die Teile des Verniers sind aber kleiner als die des Maßstabes, so daß z. B., wie in der Figur, auf 9 Teile des letzteren 10 Teile des Verniers fallen oder allgemein n Teile des Verniers auf $n - 1$ Teile des Maßstabes. Es ist also jeder Vernierteil in unserem Spezialfall um 0,1 oder allgemein um $1/n$ kleiner als ein Maßstabteil. Nehmen wir jetzt an, man habe das eine Ende der zu messenden Länge genau mit dem Nullpunkt der Teilung unseres Maßstabes zur Koinzidenz gebracht, so schiebt man den Vernier von oben gegen das andere Ende der fraglichen Länge heran, bis sein Nullpunkt mit diesem Ende zusammenfällt, es sei dies z. B. bei der Stellung des Schiebers wie in Fig. 46 der Fall. Alsdann sieht man nach, über welchem Teile des Maßstabes sein Nullstrich steht — es ist dies hier über 42 gegen 43 hin der Fall — und sucht darauf den Vernierteil auf, der mit einem Maßstabstrich genau zusammenfällt — dies ist hier der dritte Strich des Verniers von 0 an —. Daraus folgt, daß die zu messende Länge = 42,3 Maßstabteile ist. Man erkennt nämlich sofort, daß der Nullstrich des Schiebers 0,3 Maßstabteile über dem Strich 42 des letzteren steht, wenn man bedenkt, daß jeder Vernierteil um 0,1 Maßstabteil kleiner als dieser ist, also, da der Strich 3 koinzidiert, der Strich 2 um 0,1, der Strich 1 um 0,2 und der Nullstrich um 0,3 Maßstabteil vom nächsten Maßstabstrich nach oben zurückstehen muß. — Fallen also, wie angedeutet, allgemein n Vernierteile auf $n - 1$ Maßstabteile, so wird man mit dem Vernier bis auf $1/n$ Maßstabteil genau messen können. Es dürfte hiernach scheinen, daß man n nur sehr groß zu nehmen hat, um beliebig kleine Bruchteile der Maßstabteile, als beispielsweise des Millimeters, mit dem Vernier messen zu können. Die Dicke der Teilstriche des Maßstabes und seines Verniers setzt indessen dieser Verfeinerung der Messung durch den Vernier eine praktische Grenze; bei Millimeterteilungen auf Messing oder Eisen geht man gewöhnlich nicht über $1/20$ mm, d. h. 20 Teile des Verniers auf 19 mm des Maßstabes hinaus, und es bedarf schon einer sehr feinen Teilung auf Silber und einer Ablesung mit starker Lupe, wenn man bei einer Millimeterteilung noch einen Vernier mit 50 auf 49 Teile des Maßstabes soll anwenden können, der dann 0,02 mm ablesen läßt, ohne daß mehr als ein bestimmter Vernierstrich und nicht etwa zwei benachbarte zugleich mit Maßstabstrichen zusammenzufallen scheinen.

Wie für lineare Teilungen, so hat man auch für Kreisteilungen das Prinzip des Verniers angewendet, um Bruchteile der Teile des Kreises zu messen. In der Fig. 47 ist das Segment AA eines Kreisbogens (Limbus) in ganze und halbe Grade geteilt; längs dieses Bogens gleitet ein kürzeres Kreisbogensegment B , das am Arme D (Alhidade) befestigt ist und mit diesem um das gemeinschaftliche Zentrum C beider Bogen drehbar ist. Wie man sieht, ist das Segment B als Vernier in 30 Teile geteilt, welche 29 Teilen, d. h. halben

Nonius, geb. 1492) im Jahre 1542 angegeben hat, um Unterabteilungen der Grade eines Quadranten zu messen, stützt sich zwar auf ein ähnliches Prinzip wie der Vernier, ist aber in der Anwendung durchaus verschieden, so daß die Bezeichnung des Verniers mit Nonius als ungerechtfertigt zu bezeichnen ist. Die Theorie des Vernier ist übrigens schon von Christ. Clavius aus Bamberg 1611 gegeben worden.

Graden des Segments AA entsprechen; es ist also jeder Vernierteil um $\frac{1}{30}$ kleiner als ein Kreisteil oder $\frac{1}{2}^{\circ}$, man kann also mittels des Verniers noch $\frac{1}{60}^{\circ} = 1'$ genau aus der Übereinstimmung eines seiner Striche mit einem Strich der Kreisteilung messen. — Ist, wie dies bei feineren Instrumenten

Fig. 47.

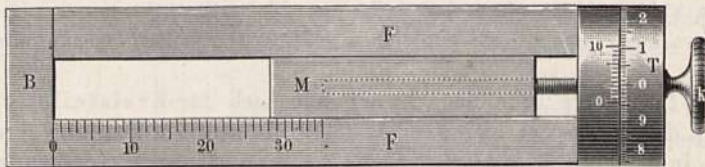


geschieht, der Kreis auf Silber in $\frac{1}{6}^{\circ} = 10'$ geteilt und soll man am Vernier noch $10''$, d. h. also $\frac{1}{60}$ Kreisteil genau ablesen können, so muß also der Vernier so geteilt sein, daß 60 seiner Teile auf 59 Teile des Kreises fallen. Die Möglichkeit sicherer Ablesung des Verniers erfordert in diesem Falle schon einen größeren Durchmesser des Kreises, abgesehen von der Benutzung einer starken Lupe.

Die Mikrometerschraube. Wenn wir eine Schraube um ihre Achse einmal herumdrehen, so wird bei fester Schraubennutter sie selbst um die Höhe eines

Schraubenganges in der Richtung der Achse vorrücken oder, wenn sie selbst sich nicht fortbewegen kann, so wird sie die bewegliche Mutter um ebensoviel in derselben Richtung fortschieben. Bringt man also auf einer am Schraubende befestigten Trommel eine Teilung an, auf welche ein fester Index weist, so wird man an ihr entsprechende Teile einer Umdrehung der Schraube oder also einer Fortschiebung der Mutter um eine Schraubenganghöhe ablesen können. Ist die Schraubenganghöhe klein und die Trommel

Fig. 48.

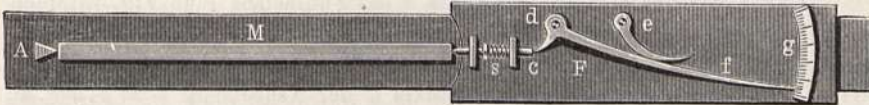


in viele Teile eingeteilt, so werden sich so offenbar recht kleine Größen durch das Fortschieben der Schraubennutter messen lassen daher der Name Mikrometerschraube. Die Fig. 48 kann das Prinzip und die Funktion einer solchen Mikrometerschraube verdeutlichen. Wenn man am Schraubenkopf k dreht, so wird bei jeder ganzen Umdrehung die Mutter M , welche als Schlitten innerhalb der Führung FF beweglich ist, um eine Schraubenganghöhe, das ist 1 mm fortgeschoben, und man wird die Zahl der ganzen Schraubendrehungen an der linearen Skala F ablesen können; die Bruchteile aber einer Umdrehung liest man an der in 100 Teile geteilten

Trommel T ab, und zwar, wenn, wie in der Figur, als Index der Nullpunkt eines in 10 Teile auf 9 Trommelteile geteilten Verniers benutzt wird, bis auf 0,1 Trommelteil genau. Man wird folglich mit dieser Mikrometerschraube ein Fortschieben ihrer Mutter M bis auf 0,001 mm oder $1\ \mu$ genau messen können. Allerdings wird dabei eine sehr exakte Konstruktion der Schraube, d. h. genau gleiche Höhe der Schraubengänge und ein sehr gleichförmiges Ansteigen dieser vorausgesetzt.

Fühlhebel und Poggendorffsche Spiegelablesung. Handelt es sich darum, kleine Verlängerungen, etwa durch die Wärme, eines Maßstabes M , der mit seinem einen Ende gegen ein festes Lager A in Fig. 49 stößt, zu messen, so kann dies passend mittels des Fühlhebels F in der Figur

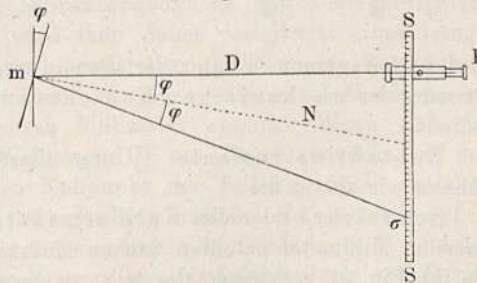
Fig. 49.



geschehen. Ein einerseits zugespitzter Stahlstift s , der in einem Lager liegt und durch eine Spiralfeder mit der Spitze gegen das andere Maßstabende angeedrückt wird, stößt mit dem anderen flachen Ende auf den kürzeren Arm c eines um die Achse d drehbaren Winkelhebels, dessen längerer Arm f auf eine Gradbogenteilung g weist. Eine zweite Feder e drückt den Arm c stets gegen das stumpfe Ende s an. Der Winkelhebel wird jede Verlängerung des Maßstabes M im Verhältnis der Länge der beiden Hebelarme f und c vergrößert auf der Teilung g angeben. Wäre dieser Gradbogen z. B. in Millimeter geteilt, das Verhältnis der Hebelarme 50:1 und am Ende des Hebels f ein Vernier angebracht, der am Gradbogen $\frac{1}{10}$ mm ablesen ließe, so würde man kleine Verlängerungen von M bis $\frac{1}{500}$ mm oder bis $2\ \mu$ genau messen können.

Fügt man aber zum Winkelhebel noch die Poggendorffsche Spiegelablesung hinzu, so kann man die Genauigkeit der Messung viel weiter treiben. Bringt man nämlich

Fig. 50.



an einer drehbaren Achse mit ihr festverbunden einen Planspiegel an, so kann man gemäß der Darstellung der Fig. 50 kleine Drehungswinkel φ dieses Spiegels bzw. der Achse dadurch sehr genau bestimmen, daß man nach Poggendorff mittels eines Fernrohres F im Spiegel die Anzahl Skalenteile beobachtet, um welche sich das

Spiegelbild der Skala SS bei der Drehung des Spiegels hinter dem Fadenkreuz des Fernrohres verschiebt, indem statt des Nullpunktes der Skala oberhalb des Fernrohres bei der anfänglichen Lage des Spiegels nunmehr der Skalenteil σ in demselben erscheint. Wenn N die Normale des Spiegels nach seiner Drehung um den Winkel φ darstellt, welche bei der anfänglichen Lage des

eine Vernierteilung 10:9 oder 20:19 angebracht ist, so daß man 0,1 mm oder 0,05 mm damit ablesen kann.

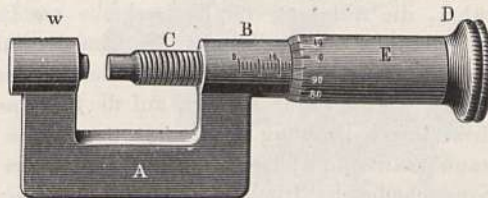
Dabei ist die Teilung auf dem Maßstab gewöhnlich so angebracht, daß beim Zusammenschieben des Querarmes *B* bis zur Berührung mit *A*, was in der ganzen Länge derselben bis zu den Spitzen hin der Konstruktion zufolge genau möglich sein soll, der Nullpunkt des Verniers auf den Nullpunkt der Maßstabteilung fällt. Man wird dann z. B. den Durchmesser eines Zylinders, den man zwischen die Querarme *A* und *B* gebracht hat, nach Näherung derselben bis zur Berührung mit dem Zylinder unmittelbar mit dem Vernier am Maßstab ablesen können. Sollte jene Bedingung der Koinzidenz der beiden Nullpunkte bei unmittelbarer Berührung der Arme *A* und *B* nicht erfüllt sein, so macht man zuerst bei dieser Stellung eine Ablesung am Vernier und zieht ihren Betrag dann von derjenigen ab, welche nach Zwischenbringen eines Gegenstandes zwischen *A* und *B* erhalten wird.

Bisweilen werden die äußeren Seiten der Querarme *A* und *B* zugespitzt und die so erhaltenen Kanten ganz schwach abgerundet, um mittels der Schublehre als Kalibermaßstab auch den inneren Durchmesser von Röhren und dergleichen messen zu können. Zu dem Ende ist dann nur nötig, daß man bei zusammengeschobenen Querarmen mit einer zweiten Schublehre die Summe ihrer beiden Dicken außen messe, welche Größe zu den unmittelbaren Ablesungen am Kalibermaßstab bei obigem Gebrauch hinzuzuaddieren ist.

Mikrometer oder Blechlehre von Palmer. Das Mikrometer besteht aus einem Bügel *A*, der bei *B* die Mutter der Mikrometerschraube *C* trägt

(siehe Fig. 52); diese wird durch Drehen am ränderten Kopf *D* bewegt, und mit ihr dreht sich die Hülse *E*, welche dabei über die Mutter *B*, an der sie innen anliegt, fort-schreitet. Ihr Rand, der in 100 Teile geteilt ist, weist dabei auf eine Längsmilli-

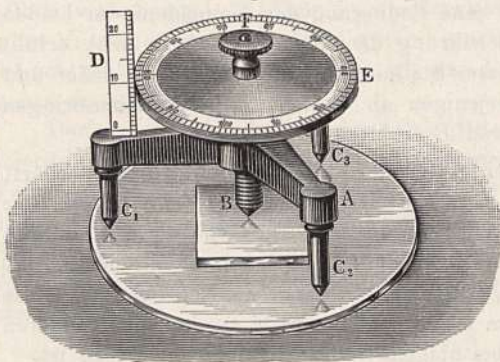
Fig. 52.



meterteilung auf *B*, welche der Schraubenganghöhe von 1 mm entspricht. An der Trommelteilung auf *E* wird man daher vermittelt eines Längs-striches auf *B*, der als Index dient, unmittelbar 0,01 mm des Fortrückens der Schraubenspindel ablesen, während die Längsteilung auf *B* die ganzen Umdrehungen oder also die ganzen Millimeter angibt. Wenn sich das Ende der Schraube gegen das Widerlager *W* am Bügel andrückt, so soll der geteilte Rand von *E* auf den Nullpunkt der Teilung auf *B* einstehen und auch der Nullpunkt der Trommelteilung auf den Längsstrich auf *B* weisen. Man kann somit die Dicke eines zwischen das Widerlager *W* und das Ende der Schraube *C* gebrachten Körpers an der Längsteilung auf *B* und der Umfangsteilung auf *E* bis auf 0,01 mm genau messen. Damit dabei das Schraubenende sowohl gegen das Widerlager als auch gegen den zwischen-geschalteten Körper jeweils mit nahe gleicher Stärke bei der Messung drücke, ist die Einrichtung getroffen, daß der Kopf *D* sich allein weiter dreht, ohne *E* und die Schraube *C* mitzunehmen, wenn dieser bestimmte Druck erreicht ist.

§ 19. **Sphärometer, Fühlhebelkomparator.** Das Sphärometer hat seinen Namen deshalb erhalten, weil es hauptsächlich zur Ermittlung der Krümmungsradien sphärischer Flächen bestimmt ist, auch wenn nur ein beschränkter Teil der Kugeloberfläche, wie z. B. bei sphärischen Linsen, gegeben ist. Es kann aber auch ebenso zur genauen Dickenmessung von Platten benutzt werden. Fig. 53 stellt ein solches Sphärometer dar. Dasselbe besteht aus einem messingenen Dreifußgestell *A* mit drei in Stahlspitzen auslaufenden Füßen *C*₁, *C*₂, *C*₃. Durch die Mitte von *A* geht eine vertikale

Fig. 53.



Stahlschraube *B*, die unten auch in einer Spitze endigt und am oberen Ende eine am Rande in 100 Teile geteilte Kreisscheibe *E* trägt. Gegen den Rand der letzteren stößt die scharfe Kante des von einem Dreifußarm getragenen Lineals *D*, an dem man die Kreisteilung ablesen kann, während die Teilung auf *D* der Schraubenganghöhe, sie sei = 1 mm, entspricht und somit durch das Fortrücken

der Kreisscheibe an ihr die ganzen Umdrehungen der Schraube angibt. Stellt man das Sphärometer auf eine plane Glasplatte, wie dies die Figur andeutet, so soll, wenn die Schraubenspitze die Platte ebenfalls leicht berührt, die Ablesung der Kreisscheibe am Lineal *D* Null sein und ihr Rand zugleich auf den Nullpunkt der Linealteilung weisen. Legt man nun nach Zurückschrauben von *B* mittels des Kopfes *F* den Körper, also etwa eine Platte, wie die Figur anzeigt, auf die Fußglasplatte unter die Spitze und senkt diese durch Drehung wieder bis zur leisen Berührung mit dem Körper, so kann man unmittelbar die Dicke an *D* in ganzen Millimetern und an der Kreisscheibe die Bruchteile derselben bis zu 0,01 mm genau ablesen, ja, wenn die Kreisscheibe groß genug ist, um noch 0,1 ihrer Hundertteilung bequem schätzen zu können, so kann die Messung bis zu 1 μ erfolgen.

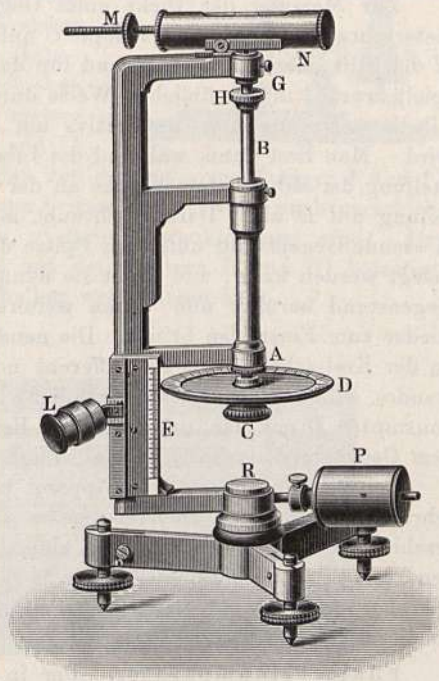
In Wirklichkeit kann aber die Genauigkeit der Messung mit dem Sphärometer in seiner vorstehenden einfachen Gestalt nicht so weit getrieben werden, weil die Kraft, mit welcher die Schraubenspitze auf die Fußplatte und nachher auf den Gegenstand aufdrückt, unbestimmbar und daher variabel ist, was man leicht daraus erkennt, daß wiederholte Messungen derselben Dicke weit über obige Grenzen hinausgehende Verschiedenheiten der Resultate aufweisen. Perreaux suchte diesem Übelstande dadurch zu begegnen, daß er die Schraube ihrer ganzen Länge nach durchbohrte und die untere Spitze eines in die Bohrung eingesetzten Stahlstiftes zur Messung benutzte. Dieser Stift dreht sich wegen einer in eine Rinne der Bohrung eingreifenden Nase mit der Schraube, kann aber in ihr auf und ab gleiten; am oberen Ende der Schraube drückt er ebenfalls mit einer Spitze auf den kurzen Arm eines Fühlhebels, dessen Achse am Kopf *F* der Schraube befestigt ist, und dessen langer Arm auf einen Gradbogen weist, während eine auf ihn wirkende Feder mit dem kurzen Arm den Stift bis zu einem Anschlag in der Schrauben-

bohrung herunterdrückt. Stößt also beim Herabschrauben der Mikrometerschraube die Spitze des Stahlstiftes auf die Grundlage oder auf den zu messenden Gegenstand, so wird er durch den Druck gehoben, wobei er die Feder des Fühlhebels spannt; geht man dabei stets nur so weit, bis der lange Arm des Fühlhebels auf einen ganz bestimmten Punkt seines Gradbogens weist, so wird auch die Spannung der Feder und damit der Druck auf den Stahlstift stets der gleiche sein. Dieser zusammen mit dem Gewicht des Stiftes wird dann den bei den Messungen immer in gleicher Größe herzustellen Druck des Stiftes auf seine Unterlage repräsentieren.

Fühlniveau-Sphärometer von Wild. In etwas anderer Weise hat H. Wild bei dem Sphärometer, das seinerzeit Hermann und Studer in Bern nach seinen Angaben konstruiert haben¹⁾, diesen Fehler zu vermeiden gesucht. Dasselbe ist in Fig. 54 dargestellt. Die Mikrometerschraube ist hier in der Hülse A eingeschlossen, welche oben und unten durch zwei Querarme am Hauptstativ befestigt ist. Dieses ist wieder mittels eines Armes am unteren Ende um die Mitte R des mit Stellschrauben versehenen Dreifußes drehbar, wobei das etwas verstellbare Gewicht P in bezug auf die Achse R als Gegengewicht dient.

Die Mikrometerschraube hat ihre Mutter am unteren Ende der Hülse A; auf ihrem oberen Ende ruht ein in der Hülse leicht verschiebbarer Stahlstift B auf, der durch eine Längsnut und eine in dieselbe eingreifende Schraubenspitze am Drehen verhindert wird. Am oberen Ende des Stiftes wird entweder ein kleiner Stahlteiler H mit planer Oberfläche, wie in der Figur, oder ein in eine Schneide auslaufendes Stahlstück aufgeschraubt. Über der Mitte dieses Tellers befindet sich im oberen Querarm des Stativs bei G eine vertikale Bohrung, in welcher ein beiderseits in Spitzen auslaufender Stahlstift sanft auf und ab gleiten kann. Er ruht unten auf dem Stahlteiler auf, wird aber, wenn dieser nach unten bewegt wird, durch eine seitliche Nase am Durchfallen verhindert. Auf dem oberen Ende des Stiftes hat die Grundplatte der Libelle N²⁾, die um eine horizontale Achse am Stativarm drehbar ist, eine Stütze. Um den Druck, den die Libelle hierbei auf den Stift ausübt, beliebig variieren zu können, ist an einer Schraube ihres anderen Endes ein

Fig. 54.



¹⁾ Beschrieben in: H. Wild, Über ein neues Polastrobometer. Bern, bei Haller, 1865, S. 55 und 56.

²⁾ Dieselbe wird im § 27 besprochen werden.

Gegengewicht M als Mutter verstellbar. Für die Messung der Dicke von Drähten und dergleichen kann dieser Stift durch einen anderen, oben ebenfalls in eine Spitze auslaufenden, unten aber mit einer Schneide versehenen ersetzt werden, welche Schneide dann der statt des Tellers aufzuschraubenden gegenüber zu stehen kommt.

Um die Bruchteile der Umdrehungen der Mikrometerschraube zu bestimmen, ist an ihrem unteren Ende eine geteilte Kreisscheibe D befestigt, welche mit dem scharfen, an sie herantretenden Rand der am Stativ sitzenden Lamelle E abgelesen wird. Diese ist mit einer der Schraubenganghöhe entsprechenden linearen Teilung versehen, an der man die ganzen Umdrehungen der Schraube zählt. Die Lupe L , die längs E verschiebbar ist, gestattet, die Stellung der Kreisscheibe an dieser Skala besser zu beobachten.

Zur Messung der Dicke eines Gegenstandes schraubt man die Mikrometerschraube, dieselbe am Knopfe C anfassend, so weit herauf, bis die Platte H den Stift oberhalb berührt und ihn dann so weit hebt, daß die Libelle einspielt, worauf in der üblichen Weise durch Justieren am Dreifuß und an der Libelle unter Drehung des Stativs um die Achse R diese vertikal gemacht wird. Man liest dann, während die Libellenblase auf die Mitte einspielt, die Stellung der Mikrometerschraube an der linearen Teilung E und an der Kreisteilung auf D ab. Darauf schraubt man sie so weit zurück, daß der zu messende Gegenstand unter der Spitze des Stahlstiftes in G auf den Teller H gelegt werden kann, und dreht sie dann wieder aufwärts, bis die Spitze den Gegenstand berührt und durch weiteres Heben der Stift dann die Libelle wieder zum Einspielen bringt. Die neue Ablesung an der linearen Skala und an der Kreisscheibe gibt als Differenz mit der früheren die Dicke des Gegenstandes. Das Übergewicht der Libelle auf der Seite des Stiftes stellt den konstanten Druck dar, unter dem die Berührung mit dem Stahlsteller und mit dem Gegenstand darauf jeweils erfolgt.

Beim ersten ausgeführten Apparat betrug die Ganghöhe der Mikrometerschraube 0,2 mm, und die Kreisscheibe war dann in 200 Teile geteilt; später erschien es besser, der Schraube eine Ganghöhe von 0,5 mm zu geben und den Kreis in 500 Teile zu teilen. In beiden Fällen konnte man also 0,001 mm oder 1μ ablesen, und die Genauigkeit der Messung bewährte sich auch bis zu dieser Grenze.

Fühlhebelkomparator. Der in Fig. 49 dargestellte, § 17 zunächst nur als Beispiel eines Fühlhebels beschriebene Apparat gibt bereits vollständig die Idee eines sogenannten Fühlhebelkomparators wieder, wie ihn Lenoir 1792 zur Vergleichung der *mètres à bouts* und anderer Endmaße angefertigt hat. Nachdem man das eine Meter M zwischen das feste Widerlager A und den Kontaktstift s gebracht und den Fühlhebelstand abgelesen hat, wird darauf das zweite Meter an seine Stelle gebracht, und es gibt dann die neue Ablesung des Fühlhebelstandes gegenüber der früheren den Unterschied der Länge beider an. Wir gehen indessen hier auf diesen und andere später von Perreaux, Fortin, Silbermann usw. konstruierte ähnliche Fühlhebelkomparatoren nicht näher ein, da sie in neuerer Zeit ganz außer Gebrauch gekommen sind.

§ 20. Instrumente mit optischer Pointierung. Horizontallängenkomparator. Bei den in diese Kategorie gehörenden Instrumenten visiert

man die Enden der zu messenden Länge mit Mikroskopen oder Fernröhren an und bestimmt die so gefaßte Länge an einem Normalmaßstab, auf welchen man sie überträgt.

Horizontallängenkomparator. Die Figuren 55 a und 55 b stellen schematisch einen Längenkomparator mit Mikrometern, die erstere von der Seite, die zweite von oben betrachtet dar, wie er zur Vergleichung eines Maßstabes mit einem Normalmaßstab benutzt wird. Die beiden zu vergleichenden Maßstäbe mm und $m'm'$ werden parallel nebeneinander und so, daß ihre Teilungsflächen auf gleiche Höhe zu liegen kommen, auf den Tisch C des Komparators gelegt, welcher mittels Rollen auf den Schienen D des Unterlagbrettes B der Quere nach zu verschieben ist, so daß bald der eine, bald der andere Stab vertikal unter die Mikroskope E und E' einzustellen ist. Die Mikroskope werden von den massiven Trägern F und F' gehalten, die selbst auf dem dreiseitigen Prisma A der Länge nach verschiebbar und mittels der Druckschrauben s daran festzuklemmen sind. Das Prisma A ist auf dem Grundbrett B mit den Haltern H und H' befestigt, welche in Fig. 55 a der Deutlichkeit halber weggelassen sind.

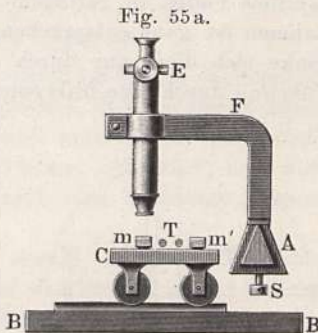
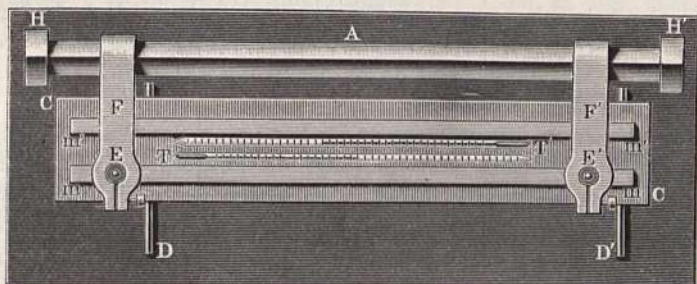


Fig. 55 b.

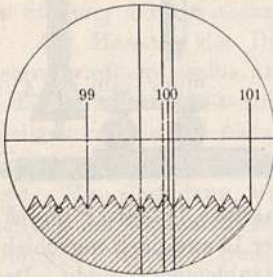


Zwischen beide Stäbe sind die beiden Thermometer T mit zylindrischen Gefäßen placiert, um die Temperatur der Stäbe bestimmen zu können. Da es auf die sichere Kenntnis der letzteren bei genauen Messungen viel ankommt, so umgibt man auch wohl für solche Zwecke die Stäbe auf dem Tisch C mit einem Blechkasten, den man oben bis auf die Stellen, wo man mit den Mikroskopen die Ablesungen an den Stäben zu machen hat, ebenfalls mit Blechplatten bedeckt; ja für ganz genaue Messungen, wie z. B. bei den Vergleichungen der Prototype im internationalen Bureau, wird der Kasten mit Wasser oder Glycerin gefüllt. Diese Vorkehrungen, wie auch eine Reihe anderer zur Justierung der Stäbe seitlich und der Höhe nach, zur bequemen Verstellung des Wagens und Begrenzung seiner Verschiebung, zum Schutz des Prismas A gegen Temperaturänderungen durch die Nähe des Beobachters usw. sind in den beiden Figuren der Übersichtlichkeit halber fortgelassen.

Die Mikroskope E und E' sind Mikrometernmikroskope (die Mikrometer

sind nur in Fig. 55 a angedeutet), mit welchen man die Bruchteile der Teilung auf den Maßstäben mißt. Zu dem Ende ist nämlich an der Stelle, wo im Mikroskop das von der Objektlinse erzeugte Bild der Maßstabteilung erscheint, nicht bloß ein rechtwinkliges Fadenkreuz angebracht, sondern es sind dort außerdem noch auf einem besonderen Rahmen zwei den Teilstrichen parallele Fäden in geringem Abstand voneinander aufgespannt, und dieser Rahmen ist ganz entsprechend wie die Mutter *M* in Fig 48, § 17 — man denke sich diese nur durch eine Öffnung durchbrochen — innerhalb einer Führung durch eine Mikrometerschraube mit geteilter Trommel verschiebbar,

Fig. 56.



so daß man wie dort die Bruchteile der Schraubenumdrehung an der Trommel mit einem festen Index ablesen kann. Die ganzen Umdrehungen der Schraube aber werden hier gewöhnlich an einem sogenannten Rechen beobachtet, welcher mit den ganzen Umdrehungen entsprechenden Lücken zwischen seinen Zähnen an der Führung *F* (Fig. 48) im Innern angebracht ist und ebenso wie die Fäden und das Bild der Teilung hinter ihnen mit dem Okular des Mikroskops in seinem Gesichtsfeld vergrößert gesehen wird, etwa so, wie es die Fig. 56 darstellt. Die mit 99, 100 und 101 bezeichneten Striche mögen hier Millimeterstriche der Maßstabteilung mit ihrer Bezifferung darstellen, von denen, wie man sieht, je zwei benachbarte auf fünf Zacken des Rechens fallen, so daß also fünf Umdrehungen der Schraube 1 mm der Teilung entsprechen. Hat die Trommel 100 Teile, so werden wir also Verschiebungen des Parallelfadens direkt bis auf 0,002 mm an ihr ablesen und durch Schätzung der Zehntel-Trommelteile sogar bis $0,2 \mu$ messen können.

Bei der Messung bringt man durch Bewegung des Wagens zuerst den zu untersuchenden Maßstab vertikal unter die Mikroskope und stellt dann durch Drehung der Mikrometerschraube bei beiden je ihren Parallelfaden auf den der Mitte des Gesichtsfeldes nächsten Teilstrich des Maßstabes so ein, daß dieser, wie es z. B. die Fig. 56 für den Teilstrich 100 zeigt, den Zwischenraum zwischen den parallelen Fäden genau halbiert, worauf man am Rechen die Stellung des Parallelfadens von der Mitte als Null aus gerechnet nach ganzen und an der Trommel nach Bruchteilen der Umdrehungen abliest. Durch Bewegung des Wagens führt man sodann rasch den Normalmaßstab vertikal unter die Mikroskope und macht dort durch Fortschiebung der Fadenplatten ebenfalls entsprechende Einstellungen der Parallelfaden auf die nächsten Teilstriche. Aus dem Unterschiede der jetzigen Ablesungen an den Filarmikrometern und der früheren wird das Verhältnis der beiden Maßstablängen zwischen den pointierten Strichen bis auf $0,2 \mu$ unter den obigen Voraussetzungen berechnet. Man habe z. B. bei den obigen Messungen an den Mikrometern nach ganzen Umdrehungen u und Trommelteilen τ abgelesen:

	Links	Rechts
Am zu prüfenden Stabe	für den Millimeter 0	für den Millimeter 100
Mikrometer	1 ^u 51,2 ^{τ}	1 ^u 65,6 ^{τ}
am Normalstab	für den Millimeter 0	für den Millimeter 100
Mikrometer	2 ^u 38,6 ^{τ}	2 ^u 47,4 ^{τ}

so ist, da $1^u = 100^\tau$ ist, das Verhältnis der Länge von 0 bis 100 Millimeterstrichen am zu prüfenden Stab: $(0 - 100)_p$ zu der Länge von 0 bis 100 mm am Normalstab: $(0 - 100)_u$ offenbar gegeben durch:

$$\begin{aligned} (0 - 100)_p &= (0 - 100)_u + (238,6 - 151,2)^\tau - (247,4 - 165,6)^\tau \\ &= (0 - 100)_u + 5,6^\tau, \end{aligned}$$

oder also:

$$(0 - 100)_p = 100,0112 \text{ wahre Millimeter,}$$

da $1^\tau = 0,002$ mm und die Teilung auf dem Normalstab als richtig angenommen wurde. Stillschweigend haben wir auch vorausgesetzt, daß bei beiden Mikrometern einer Umdrehung der Schraube und damit auch einem Trommelteile derselbe Wert von $u = 0,2$ mm oder $\tau = 0,002$ mm zukomme, was nicht immer der Fall sein wird, sondern jeweilen durch eine besondere Messung festzustellen ist.

Die vorstehende Berechnung setzt weiter voraus, daß vom Beobachter aus gesehen die Bezifferung der Teilstriche auf den Stäben in der üblichen Weise von links nach rechts wachse und die Mikroskope nicht, wie gewöhnlich, umgekehrte Bilder gegeben haben. Kehren dieselben um, so werden die Stäbe, um doch aufrechte Bilder der Zahlen im Gesichtsfelde der Mikroskope zu erhalten, verkehrt hingelegt, wobei dann, wie leicht ersichtlich, die Zeichen der Mikrometerablesungen links und rechts entgegengesetzt wie oben zu nehmen sind.

Wären die beiden Stäbe aus verschiedenen Metallen angefertigt, so hätte man nach Gleichung 2), § 16, in der letzten Gleichung oben rechts noch den Faktor $1 + (\mu - \lambda)t$ hinzuzufügen (wo t die an den Thermometern T während der Messungen abgelesene Temperatur, μ den linearen Ausdehnungskoeffizienten des Normalstabes und λ denjenigen des zu prüfenden Stabes darstellen), um das Resultat für die Normaltemperatur von 0^0 zu erhalten.

Man erkennt unmittelbar, daß bei diesem Längenkomparator nur eine Bedingung erfüllt sein muß, damit das Messungsergebnis ein sicheres sei; es soll nämlich während der Zeit, wo man von einem Stabe zum anderen übergeht und an beiden die Mikrometereinstellungen macht, keinerlei Veränderung in der relativen Stellung der Mikroskope vor sich gehen. Jene Zeit ist aber so kurz, daß diese Bedingung durchweg als erfüllt anzusehen ist; hat man aber Zweifel darüber, so braucht man bloß eine zweite Vergleichung in umgekehrter Reihenfolge der Stäbe sofort auf die erste folgen zu lassen, um aus dem Gesamtergebnisse den Einfluß einer solchen Veränderung ganz oder sehr nahe eliminiert zu sehen.

Handelt es sich bei diesem Komparator um die Vergleichung zweier Endmaße oder eines Endmaßes mit einem Strichmaß, so werden an das Endmaß, je nachdem seine Endflächen eben oder konvex sind, Zylinder mit kugelförmigen oder ebenen Enden angeschoben, die auf ihrer Oberfläche nahe diesen Enden Striche besitzen. Auf diese stellt man die Mikrometer bei der Vergleichung ein und zieht dann später vom Resultat der Vergleichung die Länge ab, welche man nach unmittelbarer gegenseitiger Berührung der Antriebszylinder als Distanz der Striche auf ihnen bestimmt hat. Bei ebenen Endflächen ist es nach Wild u. Fizeau einfacher, denselben Spitzen oder auch nach Benoit parallel zu ihnen ausgespannte Fäden anzunähern, von

denen dann durch die Endfläche Bilder erzeugt werden; nach den Reflexionsgesetzen des Lichtes repräsentiert die Mitte zwischen Gegenstand und Bild die Endfläche des Stabes, und man hat somit die Mikrometerfäden nur auf diese Mitte einzustellen, um eine Messung des Maßstabendes zu erhalten.

§ 21. Messung von Vertikalabständen; Kathetometer. In der praktischen Physik kommt häufig die Aufgabe vor, Vertikalabstände von Punkten zu messen, welche nicht lotrecht übereinander liegen. Man bedient sich zu diesem Zwecke eines Meßinstrumentes namens Kathetometer.

Dasselbe besteht in seiner einfachsten Gestalt aus einer auf Dreifuß vertikal gestellten Säule, längs welcher ein Gestell verschiebbar und in beliebiger Höhe feststellbar ist.

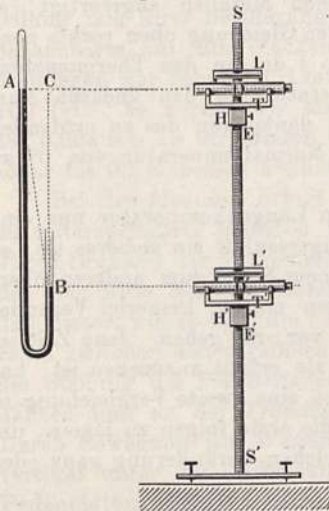
Das Gestell trägt ein Ablesefernrohr auf kurze Distanz mit einem Fadenkreuz in seinem ausziehbaren Okularrohr.

Die Säule ist mit einer Längenteilung, meistens in Millimetern, versehen, längs welcher ein an dem beweglichen Gestell befestigter Nonius verschiebbar ist.

Fig. 57 gibt eine schematische Ansicht des Instrumentes und seiner Anwendung.

AB stellt beispielsweise ein Heberbarometer vor, dessen Quecksilberkuppen A und B den vertikalen Abstand BC haben. Letzterer Abstand, die Kathete im rechtwinkligen Dreiecke ABC , soll gemessen werden; daher der Name des Instrumentes. Die Messung geschieht in der Weise, daß man nacheinander das Fernrohr in genau horizontaler Lage auf die beiden Punkte A und B richtet und die zugehörigen Ablesungen am Nonius voneinander subtrahiert.

Fig. 57.



In der einfachen Form der Fig. 57 wäre jedoch das Kathetometer nicht brauchbar. Selten liegen nämlich die beiden Visierlinien nach dem oberen und unteren Punkte in einer Vertikalebene. Es muß also das Fernrohr samt Gestell um eine vertikale Achse drehbar sein, ohne daß dadurch der Nonius seine Stellung gegenüber der Längenteilung verliert.

Wir geben in den Figuren 58a bis f eine perspektivische Zeichnung nebst einigen Durchschnitten durch die wichtigsten Teile eines Kathetometers aus der Werkstätte des Universitätsmechanikers Fr. Miller in Innsbruck.

Man hat daran folgende Bestandteile zu beachten:

Die zylindrische Säule S aus Eisen (Fig. 58b, c und f), welche in dem Dreifuß D befestigt ist und mittels der Stellschrauben m, m, m vertikal gestellt werden kann. An dieser Säule ist der Konus C , Fig. 58b, angedreht; am oberen Ende (Fig. 58c) ist eine konische Vertiefung angebracht, welche die Spitze der Schraube E aufnimmt. In der Hauptfigur ist diese Säule nicht sichtbar.

Der Hohlzylinder *H* mit dem Maßstabe *M* (Fig. 58 a, b, c, e, f), ebenfalls aus Eisen. Der Hohlzylinder trägt am unteren Ende einen Ring *R*, welcher mit seiner konischen Öffnung genau auf den massiven Konus *C* paßt

Fig. 58 a.

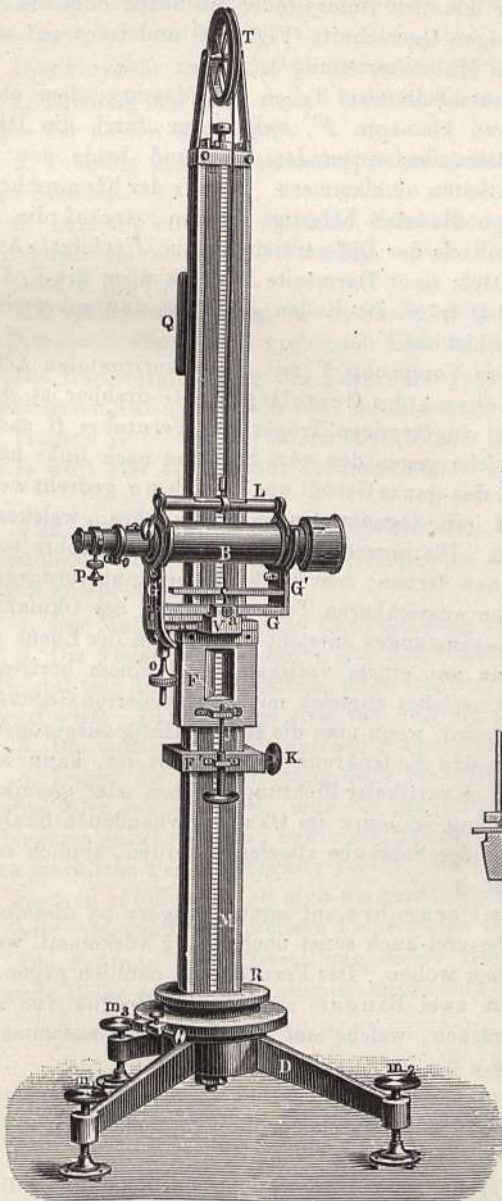


Fig. 58 c.



Fig. 58 d.

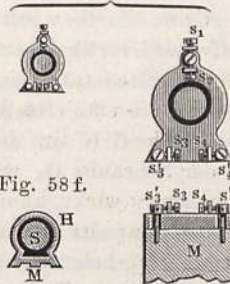


Fig. 58 f.



Fig. 58 e.

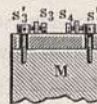
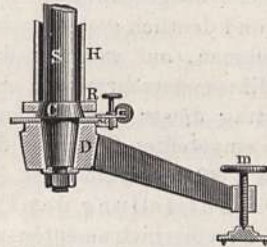


Fig. 58 b.



und auf demselben drehbar ist. Am oberen Ende ist der Hohlzylinder durch die angeschraubte Platte *P* geschlossen, welche durch die Schraube *E* auf der Säule *S* aufruhrt. Hierdurch ist also erreicht, daß Hohlzylinder samt Maßstab um die Mittelsäule gedreht werden können. Die Befestigung der

Platte P an dem Hohlzylinder ist in der Weise ausgeführt, daß beiden gegeneinander horizontale Verstellungen in jeder Richtung gegeben werden können, wozu die Schrauben s_1, s_2, s_3 und s_4 (Fig. 58 d) dienen, welche auf die in Schlitzern beweglichen Schrauben s'_3, s'_4 (Fig. 58 e, die andere vertikale Schraube nicht sichtbar) wirken. Der mit dem Hohlzylinder ein Stück bildende Maßstab M hat einen trapezförmigen Querschnitt (Fig. 58 f) und trägt auf einem eingelegten Silberstreifen die Millimeterteilung¹⁾.

Der Schlitten FF' besteht in zwei Teilen aus Messing, dem oberen größeren F und dem unteren kleineren F' , welche nur durch die Differentialerschraube JJ' miteinander verbunden sind und beide den prismatischen Maßstab von drei Seiten umklammern. Mittels der Klemmschraube K kann der Teil F' an den Maßstab befestigt werden, worauf die feine Bewegung des Schlittens F mittels der Differentialerschraube J erfolgt. Außerdem ist dieser Schlitten mittels einer Darmsaite, welche über die Rolle T gelegt ist und ein Gewicht Q trägt, am Fallen gehindert und mit geringem Kraftaufwande vertikal verschiebbar.

Der Schlitten trägt einen Vorsprung V mit einem horizontalen Achsenlager, worin die stählerne Achse a des Gestelles $G'GG'$ drehbar ist, dessen vertikale Teile $G'G'$ in die ringförmigen Träger des Fernrohrs B endigen. Mittels der Schraube O , welche gegen den vom Schlitten nach links hervorstehenden Arm n wirkt, kann das ganze Gestell um die Achse a gedreht werden.

Das Fernrohr B ist ein sogenanntes astronomisches, welches alle Gegenstände verkehrt zeigt. Die innere Einrichtung des Fernrohrs werden wir erst in der Optik kennen lernen; hier muß als bekannt vorausgesetzt werden, daß in dem vorderen ausziehbaren Teile desselben, der Okularröhre, ein Bild des beobachteten Gegenstandes entsteht und daß in der Ebene dieses Bildes ein feines Fadenkreuz aus einem vertikalen und einem horizontalen Spinnfaden ausgespannt ist, welches zugleich mit dem avisierten Gegenstande scharf und deutlich gesehen wird, wenn man die Röhre richtig ausgezogen hat. Der Rahmen, auf welchem das Fadenkreuz aufgespannt ist, kann mittels einer Mikrometerschraube p in vertikaler Richtung gehoben oder gesenkt und der Betrag dieser Verschiebung in einer im Okular vorhandenen Skala und an der eingeteilten Trommel der Schraube abgelesen werden, ähnlich so, wie dies im § 20 beschrieben ist.

Die Aufstellung des Fernrohrs auf seinen Trägern ist dieselbe, wie sie bei Nivellierinstrumenten und auch sonst noch häufig vorkommt, weshalb wir sie hier näher besprechen wollen. Das Fernrohr ist nämlich gegen beide Enden des Hauptrohrs mit zwei Ringen aus hartem Rotguß von genau gleichen Durchmesser versehen, welche auf der Drehbank zusammen abgedreht wurden.

Mit diesen Ringen lagert sich das Fernrohr in den halbkreisförmigen Ausschnitten des Trägers und wird durch darüber geschobene Spannungen

¹⁾ Da infolge der verschiedenen starken Ausdehnung von Eisen und Silber das letztere pro Meter und Grad um 0,0081 mm länger wird als das erstere, so darf der Silberstreifen nicht unverschiebbar befestigt werden. Man bringt den Silberstreifen auf einem Messingstabe an und befestigt letzteren verschiebbar auf der Eisensäule. Der Unterschied in der Verlängerung zwischen Messing und Silber beträgt pro Meter und Grad nur 0,00051 mm, und kann daher der Silberstreifen fest in das Messing eingelassen werden.

festgehalten. Das Fernrohr kann somit in seinen Lagern um eine durch die Mitte der Ringe gehende Achse gedreht werden; doch schlägt hierbei ein vorstehender stählerner Zapfen an die Spitze einer Schraube, die am Träger befestigt ist, sobald der Horizontalfaden des Fadenkreuzes genau die horizontale Lage angenommen hat. Hierdurch wird dann eine weitere Drehung nach dieser Seite verhindert.

Das Fernrohr kann also überhaupt folgende Bewegungen machen:

1. Drehung um seine eigene mechanische Achse, welche durch die Mittelpunkte der beiden Ringe geht.
2. Drehung um die horizontale Achse a mittels der Schraube o innerhalb enger Grenzen.
3. Drehung um die vertikale Achse des ganzen Instrumentes, welche oben durch die konische Vertiefung, unten durch die Achse des Konus C der Säule S gegeben ist.

4. Parallelverschiebung in vertikaler Richtung, und zwar fein mittels der Differentialschraube J , grob nach Lüftung der Klemmschraube K .

Die Horizontalstellung des Fernrohrs geschieht entweder mittels einer abnehmbaren Aufsatzlibelle L oder mittels einer unterhalb des Fernrohrs mit den Trägern $G' G'$ fest verbundenen Libelle. Die Einrichtung einer solchen Libelle wird hier als bekannt vorausgesetzt.

§ 22. Rektifikation des Kathetometers. Vertikalkomparator. Jedes Kathetometer muß, um richtige Messungen zu ermöglichen, folgenden Bedingungen entsprechen:

1. Der Maßstab und seine Längenteilung müssen genau vertikal stehen.
2. Die Visierichtung durch das Fernrohr (Kollimationslinie) muß genau horizontal sein und auch bleiben, wenn das Instrument um die vertikale Achse gedreht wird. Damit dieses stets der Fall sei, muß:
3. Die vertikale Drehungsachse genau senkrecht stehen.
4. Damit die Visierichtung auch horizontal bleibe, wenn das Fernrohr gehoben oder gesenkt wird, muß der Maßstab genau geradlinig und gegen Verbiegung gesichert sein, sowie der Schlitten enge anschließen, so daß er keine merkliche Seitenbewegung zuläßt. Da letztere Bedingung fast unmöglich ganz zu erfüllen ist, so muß die genau horizontale Stellung des Fernrohrs bei jeder Ablesung ohne weitere Fehlerquelle zu bewirken sein.

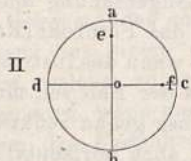
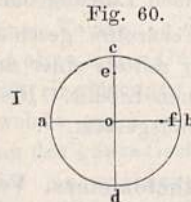
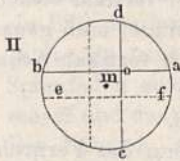
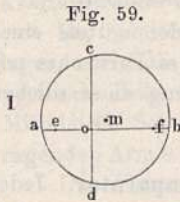
Die Prüfung bzw. Herstellung dieser Bedingungen kann durch nachfolgende Reihe von Rektifikationen ausgeführt werden.

A. Rektifikation des Fadenkreuzes.

1. Verlegung der Visierlinie in die mechanische Achse des Fernrohrs.

Nachdem man durch Ausziehen der Okularröhre und ev. durch Verstellung des Fadenkreuzes in der Richtung der Rohrachse erreicht hat, daß sowohl das anzuvisierende Objekt als das Fadenkreuz scharf gesehen werden, stellt man durch Drehen des Fernrohrs auf seinen Lagern jenen Faden, welcher als Horizontalfaden dienen soll, vorläufig annähernd horizontal.

Richtet man nun das Fernrohr so, daß irgend ein scharf sichtbarer Punkt p genau im Durchkreuzungspunkte der Fäden erscheint, so heißt man die gerade Verbindungslinie dieser beiden Punkte die Visierlinie oder die Kollimationslinie des Fernrohrs (optische Achse). Dagegen heißt die Gerade, die man sich durch die Mittelpunkte der beiden Ringe, mit welchen das Fernrohr aufliegt, gezogen denkt, die mechanische Achse des Fernrohrs. Die nachfolgenden Operationen erfordern, daß die Visierlinie mit der letzteren Achse zusammenfalle. Es sei in Fig. 59 I der Kreis das Gesichtsfeld des Fernrohrs, ab der Horizontal-, cd der Vertikalfaden, o ihr Durchkreuzungspunkt oder die Projektion der Visierlinie, m die Projektion der mechanischen Achse, welcher Punkt natürlich im Fernrohr nicht sichtbar ist; dreht man nun das Fernrohr in seinen Lagern, so beschreibt der Punkt o einen Kreis um den Punkt m , folglich verläßt der Durchkreuzungspunkt o den anvisierten Punkt p , ausgenommen, wenn die Visierlinie und die mechanische Achse zusammenfallen. Um dies zu erreichen, stellt man den Horizontalfaden ab auf zwei beliebige Punkte e und f , die man sich auf einer weißen Wand in passendem Abstände angebracht hat, scharf ein, dreht sodann das Fernrohr um 180° in seinen Lagern, also so lange, bis der Faden ab in der Lage ba , Fig. 59 II, parallel mit der früheren Lage erscheint. Hierauf liest man die Stellung der Schraube p ab, dreht dieselbe so lange, bis der Faden ba wieder durch die Punkte e und f hindurchgeht, liest wieder ab und dreht um die Hälfte der Ablesungsdifferenz wiederum zurück. Der Horizontalfaden muß dann durch die mechanische Achse gehen. Auf jeden Fall wird das Verfahren wiederholt, bis dies erreicht ist, und dann die Stellung der Schraube p , welche dieser Stellung entspricht, ein für allemal notiert.



beliebige Punkte e und f , die man sich auf einer weißen Wand in passendem Abstände angebracht hat, scharf ein, dreht sodann das Fernrohr um 180° in seinen Lagern, also so lange, bis der Faden ab in der Lage ba , Fig. 59 II, parallel mit der früheren Lage erscheint. Hierauf liest man die Stellung der Schraube p ab, dreht dieselbe so lange, bis der Faden ba wieder durch die Punkte e und f hindurchgeht, liest wieder ab und dreht um die Hälfte der Ablesungsdifferenz

wiederum zurück. Der Horizontalfaden muß dann durch die mechanische Achse gehen. Auf jeden Fall wird das Verfahren wiederholt, bis dies erreicht ist, und dann die Stellung der Schraube p , welche dieser Stellung entspricht, ein für allemal notiert.

Dasselbe Verfahren wird nun mit dem Vertikalfaden durchgeführt, wobei man sich der zu seiner Verschiebung dienenden Korrekcionsschrauben bedient. Zum Schlusse darf der Durchkreuzungspunkt o den anvisierten Punkt p nicht verlassen, wenn das Fernrohr in seinen Lagern gedreht wird.

2. Prüfung der Rechtwinkeligkeit des Fadenkreuzes.

Man visiert auf drei Punkte e , p und f , welche so gezeichnet sind, daß sie bei p einen rechten Winkel bilden. Es muß dann, wenn o auf p gerichtet wird, beim Drehen einmal wie in Fig. 60 I bei horizontaler Lage des Fadens ab , dann nochmals wie in Fig. 60 II bei vertikaler Lage desselben Fadens gelingen, die beiden Punkte e und f durch die Fäden zu bedecken. Zeigt sich ein Fehler, so muß ein neues Fadenkreuz aufgespannt werden.

B. Vertikalstellung der Umdrehungsachse des Maßstabes.

Man setzt auf das Fernrohr die Libelle L auf und bringt dieselbe durch Drehung der Schraube o zum Einspielen. Dreht man hierauf den Maßstab mit dem Hohlkörper um die Säule herum, so kann die Libelle nur dann überall einspielen, wenn die Drehungsachse vertikal steht. Man erreicht dies, indem man systematisch an den drei Fußschrauben so lange dreht, bis die Luftblase der Libelle beim Ringsumdrehen ihre Stellung nicht ändert. Bei dieser auch anderweitig sehr häufigen Operation ist es am zweckmäßigsten, die Libelle abwechselnd so zu stellen, daß sie einmal zu der Verbindungslinie zweier Fußschrauben parallel steht, dann auf dieser Verbindungslinie senkrecht steht. Hierbei bleibt dann stets die außerhalb der Libellenrichtung stehende Fußschraube unberührt.

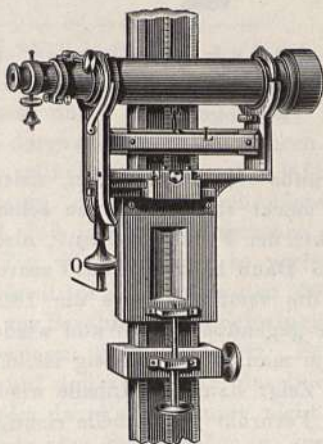
Hat man ferner nach einer dieser Richtungen die Libelle zum Einspielen gebracht und dreht dann um 180° , so korrigiert man die Hälfte der dann eintretenden Abweichungen an der Schraube o , die andere Hälfte an den Fußschrauben. Schließlich muß sich die einspielende Libelle ringsum drehen lassen, ohne ihren Stand zu ändern; dann steht auch die Umdrehungsachse vertikal.

C. Horizontalstellung der Fernrohrachse.

Diese Operation ist in verschiedener Weise auszuführen, je nachdem die Libelle wie in Fig. 58a auf die Ringe des Fernrohrs frei auf- und umzusetzen ist, oder wie in Fig. 61 mit den Trägern des Fernrohrs fest verbunden ist.

Im ersten Falle ist folgendermaßen zu verfahren: Man setzt die Libelle auf und bringt sie mittels Schraube o zum Einspielen; dann sind entweder Fernrohr und Libelle richtig gestellt oder beide haben die gleiche Winkelabweichung nach entgegengesetzter Richtung. Fig. 62 mag dies klar machen. In I ist das Fernrohr geneigt, seine mechanische und optische Achse, sowie die Verbindungslinie mn bilden mit dem Horizont einen Winkel α ; denselben Winkel bildet die mit mn zusammenfallende Verbindungslinie der unteren Fußenden der Libellenfassung, welche auf den Ringen r und r' aufliegen, mit der die Mitte der Luftblase tangierenden Horizontalrichtung hh' , doch liegt der Scheitel dieses Winkels nach der entgegengesetzten Seite. Das Einspielen der Libelle ist also nur ermöglicht, indem die Stellung der Libellenröhre in ihrer Fassung fehlerhaft ist. Setzt man nun die Libelle umgekehrt auf (Fig. 62 II), so müssen sich die Fehler in den Stellungen des Fernrohrs und der Libellenröhre summieren statt kompensieren; die Abweichung der Luftblase entspricht folglich einem Winkel 2α . Dreht man daher an der

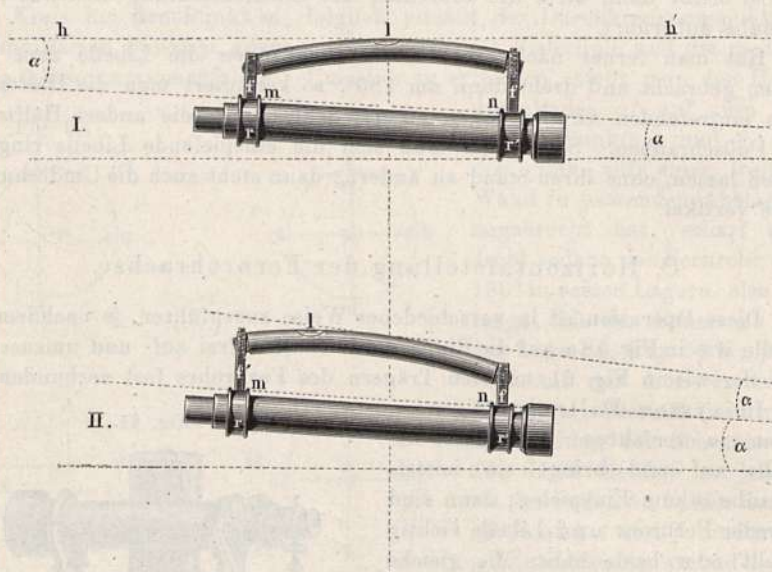
Fig. 61.



Schraube o so weit, daß die Libelle wieder einspielt, und macht dann diese Drehung um die Hälfte wieder rückgängig, so steht die Fernrohrachse horizontal. Es ist dann an der Libelle mittels des Adjustierschraubchens bei f' die andere Hälfte des Fehlers zu korrigieren. Dieses Verfahren ist so lange zu wiederholen, bis eine Umsetzung der Libelle ihren Stand nicht mehr ändert, dann ist sowohl die Libelle richtig adjustiert, als auch die Verbindungslinie der Ringoberflächen, sowie die damit parallelen Richtungen der mechanischen Achse und der Visierlinie horizontal gestellt.

Im zweiten Falle, wenn, wie in Fig. 61, die Libelle L mit den Trägern des Fernrohrs fest verbunden ist bringt man dieselbe durch Drehung der

Fig. 62.



Schraube o zum Einspielen, visiert durch das Fernrohr auf eine weiße Wand und merkt sich dort einen scharfen Punkt, der genau im Durchkreuzungspunkte der Fäden erscheint, also in der mechanischen und optischen Achse liegt. Dann hebt man das Fernrohr aus seinen Lagern, dreht das Instrument um die vertikale Achse um 180° , legt das Fernrohr in der ursprünglichen Lage gegenüber der Wand wieder ein und visiert auf den früheren Punkt, indem man, wenn es nötig ist, mit der Schraube o dreht.

Zeigt dann die Libelle wiederum den früheren horizontalen Stand, so sind Fernrohr und Libelle richtig gestellt. Zeigt jedoch die Libelle eine Abweichung, so korrigiert und mißt man dieselbe mittels der Schraube o und macht dann die Korrektur zur Hälfte rückgängig. Die andere Hälfte korrigiert man durch das Adjustierschraubchen der Libelle selbst. Dieses Verfahren ist zu wiederholen, bis sich keine Abweichung mehr zeigt, dann sind Libelle und Fernrohrachse parallel, also letztere horizontal, wenn erstere einspielt.

D. Parallelstellung des Maßstabes zur vertikalen Umdrehungsachse.

Wenn auch die vertikale Umdrehungsachse des Instrumentes genau senkrecht gestellt ist, kann doch der Maßstab mit der Längenteilung in zweifacher Weise von dieser Lage abweichen. Erstens kann, wie in Fig. 63 schematisch dargestellt ist, der Maßstab MM' in der dem Fernrohr parallelen Vertikalebene aus der mit der Umdrehungsachse SS' parallelen Lage verdreht sein, zweitens kann er (Fig. 64) in der zum Fernrohr senkrechten Ebene abweichen, z. B. unten näher der Umdrehungsachse sein als oben. Die Folge dieser beiden Fehler ist lediglich die, daß die Messungen der Höhenunterschiede zu groß ausfallen. Der schief gestellte Maßstab MM' fungiert

Fig. 63.

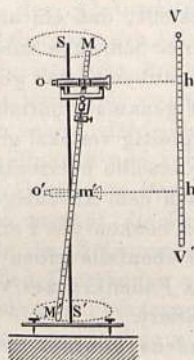


Fig. 64.

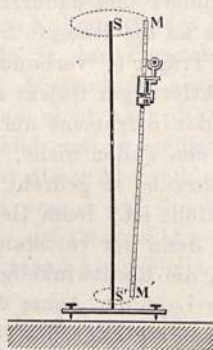
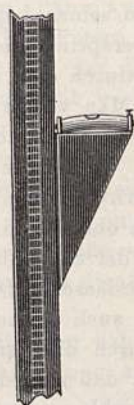


Fig. 65.



nämlich wie ein vertikal gestellter, dessen Skalenteile nur die Länge der Vertikalprojektion der Skalenteile des schiefen Maßstabes besitzen. Der Höhenunterschied hh' , Fig. 63, wird gemessen durch die Länge mm' . Derselbe Fehler entsteht in dem durch Fig. 64 dargestellten Falle. Durch Umliegen des Fernrohrs und Drehung um die vertikale Drehungsachse läßt sich dieser Fehler weder erkennen noch rektifizieren, da das Fernrohr hierdurch nicht aus seiner Lage kommt, vorausgesetzt, daß die Umdrehungsachse wirklich genau vertikal steht. Im Falle der Fig. 64 kann man so verfahren, daß man mit dem Fernrohr einen in Visierdistanz aufgehängten dünnen Seidenfaden, welcher durch ein angehängtes, zur Beruhigung der Schwingungen in Wasser tauchendes Gewicht vertikal gespannt wird, anvisiert. Schiebt man dann den Schlitten um große Strecken auf und ab, so darf das Bild des anvisierten Fadens den Durchkreuzungspunkt des Fadenkreuzes nicht verlassen. Ein vorhandener Fehler ist mittels der Schraubchen s_1 und s_2 , Fig. 58 d, zu korrigieren. Der in Fig. 63 dargestellte Fehler ist auf diese Weise nicht aufzufinden; man müßte hierzu ein Hilfsfernrohr in einer zu dem vorhandenen senkrechten Lage am Schlitten befestigen. Am einfachsten kommt man zum Ziele mittels einer Winkellibelle (Fig. 65), welche an den Seitenflächen des Maßstabes angelegt und längs derselben verschoben wird. Indem man diese Operation auf beiden Seiten vornimmt und darauf achtet, ob die einspielende Libelle ihren Stand nicht ändert, erkennt man, ob der

Maßstab senkrecht steht. Zeigt sich ein Fehler, so ist derselbe an den Schraubchen s_3 und s_4 (Fig. 58 d und e), welche auf die Schrauben s'_3 und s'_4 wirken, zu korrigieren.

Endlich könnte man auch so verfahren, daß man mittels des zu prüfenden Kathetometers die Höhe eines vertikal aufgehängten Normalmaßstabes genau mißt. Stimmt die am Instrumente abgelesene Höhendifferenz mit der gemessenen genau überein, so steht auch der Maßstab nicht merklich schief zur vertikalen Drehungsachse des Instrumentes, es müßte dann der Fehler der schiefen Stellung durch eine fehlerhafte Länge der Skalenteile eben kompensiert werden, in welchem Falle die Messungen nicht unrichtig werden.

Nach Vollendung dieser Operationen kann man erst daran gehen, dafür Sorge zu tragen, daß während des Visierens der eine Faden des Fadenkreuzes, welcher durch die Schraube p gehoben und gesenkt werden kann, genau horizontal liege. Die Lage dieses Fadens wird durch das Drehen des Fernrohrs in seinen Lagern geändert und dadurch festgestellt, daß ein aus dem Rohr vorspringender Zapfen an die stumpfe Spitze einer Schraube anschlägt, welche durch eine mit dem Träger G' verbundene Schraubenmutter getragen wird. Man visiert ein punktförmiges Objekt an, das genau im horizontalen Faden erscheint, und dreht das Instrument um die sorgfältig vertikal gestellte Achse. Verläßt der Punkt den Faden nicht, so ist derselbe horizontal, wo nicht, wird die erwähnte Schraube so gedreht, daß nach dem Anschlagen des Zapfens obige Bedingung erfüllt ist. Beim Heben und Senken des Fernrohrs mittels der Schraube o darf dann der vertikale Faden ebenfalls einen Punkt nicht verlassen. Damit ist, die Rechtwinkeligkeit des Fadenkreuzes vorausgesetzt, auch die horizontale Lage der Achse a konstatiert.

Durch die genau horizontale Lage des einen Fadens gewinnt man den Vorteil, daß man die Bilder der anzuvisierenden Objekte nicht notwendig in den Durchkreuzungspunkt der Fäden einzustellen braucht, sondern an irgend eine Stelle des Horizontalfadens bringen kann; ferner, daß man sich der Mikrometerschraube p zur Messung kleiner Höhenunterschiede bedienen kann, ohne den Schlitten in Bewegung setzen zu müssen.

E. Prüfung und Korrektion des Ganges des Schlittens.

Damit beim Heben und Senken des Schlittens die Fernrohrachse stets sich parallel bleibe, muß der Schlitten enge an den Maßstab sich anschließen, zugleich soll er aber sehr leicht beweglich sein. Diese beiden Bedingungen sind schwer zu erfüllen. Man wird daher stets bemerken, daß beim Heben und Senken des Schlittens die Libelle ihren Stand ändert. Denselben Erfolg haben geringe Abweichungen von der Geradlinigkeit des Maßstabes. Die hierdurch hervorgebrachten Abweichungen der Visierlinie von der horizontalen Richtung sind aber eine sehr gefährliche Fehlerquelle, welche, wenn nicht berücksichtigt, die ganze Genauigkeit der Messung vollständig illusorisch machen kann. Bei einer Visierdistanz von D Metern bringt eine Winkelabweichung der Visierlinie $= \alpha$ einen Fehler in der Höhenmessung $= D \tan \alpha$ hervor; dies beträgt z. B. für $D = 1$ m und $\alpha = 5$ Sekunden schon 0,025 mm; bei größeren Visierdistanzen nimmt der Fehler im Verhältnisse derselben zu. Es ist daher unerlässlich, vor jeder Ablesung mittels der Schraube o das Fernrohrgestell um die Achse a so zu drehen, daß die Libelle, welche sehr empfindlich sein muß, aufs genaueste einspielt.

Es ist nun zu untersuchen, ob diese Drehung nicht, indem sie den Fehler der schiefen Stellung der Visierlinie beseitigt, einen anderen Fehler herbeiführen kann. Die richtige Messung der Höhendifferenzen setzt voraus, daß bei der unteren Ablesung wie bei der oberen der vertikale Abstand zwischen dem Nullpunkte des Nonius am Schlitten und der Visierlinie des Fernrohrs konstant bleibe. Damit dieses der Fall sei, muß vor allem die Achse a senkrecht über dem Nullpunkte des Nonius in der Verlängerung seiner Kante liegen. Denn liegt diese Achse seitwärts, so wird durch deren Drehung die Fernrohrachse nicht bloß gedreht, sondern auch gehoben oder gesenkt. Wir machen auf diesen Umstand aufmerksam, weil Kathetometer aus sonst renommierten Werkstätten mit diesem Fehler behaftet sind, der durchaus nicht zu vernachlässigen ist.

Die richtige Lage der Achse a vorausgesetzt, besteht der vertikale Abstand der Fernrohrachse vom Nullpunkte des Nonius aus zwei Teilen. Einmal aus dem Abstände der Fernrohrachse von der Achse a , dann aus dem Vertikalabstände der Achse a vom Nullpunkte des Nonius. Der erstere dieser Abstände ist stets konstant, da ja das Fernrohr immer mit der Libelle gerichtet wird; der zweite dieser Abstände ist aber nicht konstant, wenn der Schlitten schief steht; denn dann steht auch die Verbindungslinie zwischen Noniusnullpunkt und Achse a schief, und es kommt statt derselben ihre senkrechte Projektion in Betracht. Ist dieser Abstand $= d$, die Winkelabweichung $= \alpha$, so beträgt die Projektion von d auf die Vertikale $d \cdot \cos \alpha$ und der Fehler in der Höhenmessung $d - d \cos \alpha = d(1 - \cos \alpha)$, eine Größe, welche unter allen Umständen verschwindend klein bleibt, wie man sich durch eine Proberechnung überzeugen kann.

Unter der Bedingung, daß die Achse a die richtige Stellung habe, ist also nicht zu fürchten, daß durch Korrektur der Fernrohrstellung an der Schraube o ein merklicher Fehler entstehen könne.

F. Richtigkeit der Skala, Temperaturkorrektur, genaueste Methode der Messung.

Nach den vorausgegangenen Prüfungen ist nun nur noch die Richtigkeit der Skala zu untersuchen, was nur durch Vergleichung mit einem Normalmaßstab, auf den man visiert, möglich ist; auch kann man wohl zur Kontrolle der relativen Richtigkeit der Teilung einen konstanten Höhenunterschied an verschiedenen Stellen des Instrumentes wiederholt messen. Dabei ist nun aber zu berücksichtigen, daß die Temperatur des Maßstabes einen nicht unbedeutenden Einfluß auf die Länge der Teilung hat (siehe § 16). Schon die unvermeidlichen Erwärmungen des Instrumentes durch die Nähe des menschlichen Körpers können bei sehr genauen Messungen störend wirken. Dieser Umstand, sowie die anderen Fehlerquellen lassen es sicherer erscheinen, das Kathetometer als Vertikalkomparator zu konstruieren beziehungsweise zu gebrauchen. Zu diesem Zwecke verzichtet man auf die Anbringung oder Benutzung eines Maßstabes an der Kathetometersäule und bringt zwei Fernrohre (oder Mikroskope) an, welche unabhängig voneinander verschiebbar und mit Mikrometer ausgerüstet sind. Man hängt neben den zu bestimmenden Höhenunterschied einen in Millimeter geteilten Normalmaßstab senkrecht auf, dessen Temperatur genauer ermittelt werden kann als

jene des Maßstabes des Instrumentes. Man visiert auf den oberen Punkt des Objektes bei genau einspielender Libelle, dreht dann das Instrument um die vertikale Achse, so daß der Normalmaßstab im Fernrohr erscheint, kontrolliert neuerlich die Libelle und liest am Normalmaßstab den Stand des Horizontalfadens ab, wobei man zwischen den nächsten Teilstreichen mittels der Mikrometerschraube interpoliert. Ebenso verfährt man am unteren Ende mit dem zweiten Fernrohr und nimmt dann die Differenz der Ablesungen. Noch sicherer ist ein Verfahren, welches wir im Institute der internationalen Meterkommission in Paris in Anwendung gesehen haben, nach welchem bei feststehendem Kathetometer mit zwei Fernrohren auf die Endpunkte des zu messenden Objektes visiert und letzteres dann mittels einer Drehvorrichtung an Stelle des Normalmaßstabes gebracht wird, den man dann anvisiert. Begreiflicherweise ist dieses Verfahren nur in speziellen Fällen anwendbar.

Wir schließen unsere Mitteilungen über das Kathetometer mit der Bemerkung, daß dasselbe, wenn gut konstruiert und rektifiziert, ein vorzügliches Instrument ist, daß es aber zu den größten Fehlern Anlaß geben kann, wenn es diesen Bedingungen nicht entspricht oder nicht mit Sachkenntnis behandelt wird. Dieser Umstand mag zugleich die Ausführlichkeit rechtfertigen, mit welcher wir dasselbe behandelt haben.

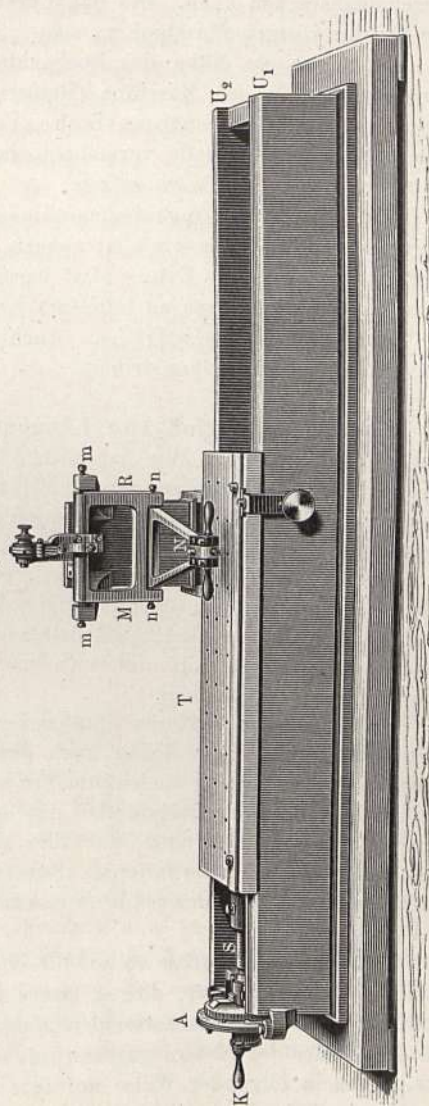
§ 23. Längenteilmachine. Kreisteilmachine. Wir erwähnen hier kurz auch die Längenteilmachine, weil sie nicht bloß zur Anfertigung von Teilungen, sondern mit geringen Zutaten auch als Längenkomparator dienen kann. Die Fig. 66 stellt eine solche Teilmaschine dar. Auf einem eisernen Support mit Schienen $U_1 U_2$ läßt sich eine eiserne Platte T durch eine möglichst exakt gearbeitete Schraube S , welche zwischen den Schienen liegt und in eine Mutter unten an der Platte eingreift, verschieben. Die Schraubenspindel trägt an ihrem äußeren Ende eine Kurbel K und eine auf der hohen Kante geteilte Kreisscheibe A , die mit einem am Support befestigten Vernier abgelesen wird. Hat also beispielsweise die Schraube eine Ganghöhe von 1 mm, der Kreis 100 Teile und gestattet der Vernier, noch 0,1 Teil abzulesen, so kann man die Platte durch Drehen an der Kurbel K mit einer Genauigkeit von 1μ verschieben. In der Mitte des Supports ist eine nach oben hervorragende Platte seitlich festgeschraubt, welche das Reißerwerk MR zum Ziehen der Striche trägt. Dasselbe besteht aus zwei Hebeln, von denen der eine seine Drehungsachse in mm , der andere in nn besitzt; der letztere trägt den Stahlstichel N . Durch einen besonderen, in der Figur nicht deutlich sichtbaren Mechanismus wird derselbe aufgehoben, dann auf den Stab, welcher auf der Platte T mit Klammern festgemacht ist, heruntergelassen und zurückgezogen, wobei er senkrecht zur Längsrichtung der Platte auf dem Stabe nach Bedürfnis kürzere oder längere Striche zieht. Nach Aufheben des Stichel schiebt man Platte mit Stab durch eine Umdrehung der Kurbel genau um 1 mm weiter und zieht wieder einen Strich usw. Will man so ganze Meter teilen, so muß bei feststehendem Reißerwerk wie in der Figur die Platte etwas über 1 m und der Support etwas über 2 m lang sein, so daß also jene mit der 1 m langen Schraube um diese Größe unter dem Stichel fortzuschieben ist. Da so lange Schrauben nie ganz genau herzustellen sind, so müssen entweder ihre Fehler, d. h. die Abweichungen ihrer Umgänge von

wahren Millimetern ermittelt und bei Anfertigung der Teilungen berücksichtigt werden, oder man fertigt die Teilungen durch Kopierung der verifizierten eines Normalmaßstabes an. Derselbe wird dann auf der Platte parallel zum zu teilenden befestigt und ein Mikroskop mit Fadenkreuz, das an einem über die Platte herüberragenden Arme am Träger des Reißerwerkes angebracht ist, auf die Teilstriche des Maßstabes successive unter Verschiebung der Platte eingestellt, worauf man jedesmal einen Strich auf dem zu teilenden Stabe zieht. Ist dieses Mikroskop noch mit einem Filarmikrometer versehen, so können mittels desselben sogar die bekannten Fehler des Normalmaßstabes berücksichtigt und für die anzufertigende Teilung eliminiert werden, was übrigens auch ohne ein solches mittels Ablesung an der Teilung A der Schraubenscheibe geschehen kann.

Denken wir uns an demselben Arme, der dieses Mikroskop trägt, näher zum Halter des Reißerwerkes noch ein zweites Mikrometernmikroskop befestigt, so kann man offenbar dieses Instrument ebenfalls als Komparator gebrauchen. Man braucht bloß an Stelle des zu teilenden einen nach dem Normalstabe zu verifizierenden Stab zu versetzen und die Filarmikrometer auf die Striche der hintereinanderliegenden Stäbe einzustellen, dann die Platte mit den Stäben zu verschieben, bis andere zu vergleichende Striche unter beide zu liegen kommen, und wieder beide Mikrometer einzustellen. Der Unterschied gegen-

über dem früher betrachteten Längenkomparator besteht dann darin, daß hier die beiden parallelen Stäbe longitudinal unter den nahe hintereinander befindlichen Mikroskopen für die Vergleichung verschoben werden, während dort der Tisch mit den Stäben transversal unter den um die zu messenden Längen auseinanderstehenden Mikroskopen nur um die Distanz der Stäbe zu verschieben war. Man unterscheidet auch wohl demgemäß Komparatoren mit transversaler und solche mit longitudinaler Verschiebung

Fig. 66.



der Stäbe. Offenbar sind die ersteren, abgesehen von speziellen Zwecken, vorzuziehen.

Man hat auch Teilmaschinen konstruiert, bei welchen der Tisch zur Aufnahme der zu teilenden Stäbe fest ist und das Reißerwerk längs desselben verschoben werden kann. Die Bank braucht dann offenbar nur halb so lang wie bei der vorigen Maschine zu sein.

Da ferner die Nähe des Beobachters beim Teilen durch Erwärmung Verstellungen an der Maschine (Reißerwerk, Stäbe usw.) zur Folge haben kann, so sind auch automatische Teilmaschinen konstruiert worden, welche diese Fehlerquelle vermeiden, indem sie an Stelle des Beobachters ein mechanisches Laufwerk setzen.

Ähnlich wie die Längenteilmaschine sind auch die Kreisteilmaschinen eingerichtet; das Reißerwerk ist nahezu gleich und kann über den größeren Originalkreis auf einer Bahn radial herübergeführt werden, damit man den Stichel auf den kleineren zu teilenden Kreis einstellen kann, der genau konaxial zum ersteren befestigt ist. Auch hierfür hat man automatisch funktionierende Maschinen konstruiert.

§ 24. Verifikation von Längenteilungen. Mittlerer und wahrscheinlicher Fehler. Wir haben in § 16 vorausgesetzt, daß ein geteilter Normalmaßstab gegeben sei, dessen Millimeter alle wahren Millimetern bei 0° entsprechen, d. h. Tausendstel des internationalen Meterprototyps bei dieser Temperatur darstellen. Ein solches Meter gibt es aber in Wirklichkeit nicht, indem nicht bloß seine ganze Länge, sondern auch seine Unterabteilungen mehr oder weniger von dem richtigen Wert abweichen werden. Der Physiker hat sich daher selbst bei Maßstäben aus renommierten Werkstätten stets davon zu überzeugen, ob und inwiefern sie den zu stellenden Genauigkeitsanforderungen entsprechen.

In den meisten größeren Staaten bestehen zurzeit Institute, sogenannte Normaleichstätten, in welchen nach den oben erwähnten nationalen Prototypen des Meters aus Platin-Iridium für wissenschaftliche Institute des Landes Verifikationen ganzer Meterstäbe mit genügender Genauigkeit ausgeführt werden. Für den Fall aber, daß dies nicht tunlich ist, kann man sich zu dem Ende an das Internationale Bureau für Maß und Gewicht in Sèvres (Bureau international des poids et mesures, Pavillon des Breteuil, Sèvres près de Paris) wenden.

Hat sich der Physiker so auf die eine oder andere Weise in Besitz eines geteilten Meters gesetzt, dessen ganze Länge wenigstens unmittelbar oder mittelbar nach dem internationalen Meterprototyp verifiziert worden ist, so daß der Fehler des Meters gegeben ist, so kann er nun selbst dessen Unterabteilungen in folgender Weise auf ihre Fehler untersuchen. Es kann dies sowohl mit Hilfe des in § 20 beschriebenen Horizontallängenkomparators als auch mittels der Teilmaschine des § 23 geschehen, wenn dieselbe mit einem Mikrometernmikroskop versehen ist. Man läßt sich zum betreffenden Meter einen aus gleichem Material angefertigten Schieber konstruieren, der etwas über ein Decimeter lang und halb so breit als das Meter ist, so daß sein einseitig zugeschärfter Rand bis zur Mitte der Teilstriche reicht, wenn der andere Rand mit einer angesetzten, nach unten vorspringenden Leiste sich an die Kante des Meters anlegt. Auf dem zugeschärften und mit einer

Silberlamelle belegten Rande des Schiebers wird eine bis zur Kante reichende Teilung angebracht, die aus folgenden wenigen Strichen besteht: Nullstrich, dann ein um 1 mm davon entfernter Strich, darauf ein vom Nullstrich um 1 cm absteher Strich und endlich ein letzter Strich, der mit dem Nullstrich 1 dm einschließt¹⁾. Mit diesem Decimeter, Centimeter und Millimeter des Schiebers erfolgt die ganze Verifikation. Zunächst vergleicht man der Reihe nach alle Decimeter des Maßstabes mit dem Decimeter des Schiebers unter allmählicher Verrückung desselben längs des Meters, indem man jeweilen mit dem Mikrometernmikroskop am einen und anderen Ende des Schieberdecimeters die Abweichungen seiner Striche von den betreffenden Decimeterstrichen des Maßstabes mißt. Bei der Teilmaschine verschiebt man zu dem Ende unter dem Mikroskop die Platte mit dem Maßstab um einen Decimeter, beim Horizontalkomparator muß jeweilen das Mikroskop um ein Decimeter verschoben werden, wenn nicht beide auf 1 dm Distanz einander genähert werden können. Auf diese Weise erhält man also alle 10 dm des Maßstabes durch den einen Decimeter des Schiebers ausgedrückt, und da die ersteren zusammen das ganze Meter, dessen Fehler bekannt ist, ausmachen, so wird also auch das 10fache des Schieberdecimeters durch die bekannte korrigierte Länge des ganzen Meters gegeben sein, woraus man die wahre Länge des Schieberdecimeters und damit dann auch die wahre Länge aller 10 Decimeter des Maßstabes findet. In ganz entsprechender Weise werden die Centimeter jedes Decimeters mittels des Centimeters des Schiebers und ebenso die Millimeter jedes Centimeters, wenn nötig, auch mit dem Millimeter des Schiebers ausgemessen und ihre wahre Länge daraus abgeleitet. Da bei einigermaßen guten Teilungen die Millimeter kaum bis zu 0,01 mm fehlerhaft zu sein pflegen, so ist ihre Untersuchung nur für eigentliche Präzisionsmessungen geboten.

Fehlerbestimmung von Mittelwerten. Sowohl bei der Verifikation des ganzen Meters als bei derjenigen der Unterabteilungen desselben wird man sich nie auf eine einzelne Messung einer Größe beschränken, sondern deren stets eine mehr oder minder große Zahl durch Wiederholung derselben anstellen. Man erhält so eine Reihe etwas verschiedener Werte für die gesuchte Größe. Haben wir keine Ursache, dem einen oder dem anderen derselben ein größeres Gewicht beizulegen, so zieht man einfach das arithmetische Mittel aller dieser Werte, welches jedenfalls eine größere Sicherheit als die einzelnen Daten gewähren wird. Die Methode der kleinsten Quadrate lehrt den Fehler solcher Mittelwerte, wie auch den der einzelnen Beobachtung in folgender Weise finden. Man bildet die Abweichungen v_1, v_2, v_3 usw. bis v_n der n einzelnen beobachteten Werte unserer Größe vom Mittel aller, dann ist der mittlere Fehler

¹⁾ Statt auf dem Rande eines Metallschiebers kann auch eine entsprechende Teilung auf einem Glasstreifen benutzt werden, welcher, mit der geteilten Seite nach unten gekehrt, direkt auf die Maßstabteilung gelegt wird; wegen der sehr verschiedenen Ausdehnung von Glas und dem zu Maßstäben gewöhnlich angewendeten Messing muß dann aber bei den Messungen viel strenger auf Erhaltung konstanter Temperatur geachtet werden.

$$\begin{aligned} \text{einer Beobachtung} &= \sqrt[n-1]{\frac{\sum v^2}{n-1}} \quad \text{streng} \quad \text{oder} = \frac{\sum v}{n} \quad \text{angenähert} \quad 1,7724 \cdot \sqrt{\frac{n}{2n-1}}, \\ \text{des Mittels} &= \sqrt[n(n-1)]{\frac{\sum v^2}{n(n-1)}} \quad \text{oder} = \frac{\sum v}{n} \quad 1,7724 \sqrt{\frac{1}{2n-1}}, \end{aligned}$$

wo die Summe Σ auf die Quadrate aller Abweichungen auszudehnen ist und $\frac{\Sigma v}{n}$ einfach das Mittel der n Abweichungen ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen darstellt. Die wahrscheinlichen Fehler sowohl der einzelnen Beobachtung als des Mittels sind rund zwei Drittel der obigen mittleren Fehler. Es folgt aus dem Obigen, daß der mittlere Fehler des Mittels um so kleiner ausfällt, je größer die Zahl n der Beobachtungen wird.

§ 25. Flächenmessung. Amslers Planimeter. Als Einheit der Fläche gilt ein Quadrat, dessen Seitenlänge gleich Eins ist. So entstehen die in § 15 aufgeführten Flächenmaße Quadratmeter, Quadratdecimeter, Quadratcentimeter und Quadratmillimeter. Die Ausmittlung von ebenen oder gekrümmten Flächen, welche von geraden oder krummen Linien begrenzt sind, ist Aufgabe der Geometrie bzw. der Integralrechnung. Es gibt aber auch mechanisch-physikalische Methoden zur Ausmittlung ebener Flächenräume.

Eine solche schon von Th. Young vorgeschlagene besteht darin, daß man die Fläche auf gleichmäßig starkem Kartonpapier aufzeichnet und ausschneidet, aus demselben Karton ein Quadrat oder einen Kreis von genau ermitteltem Flächeninhalt ausschneidet und beide abwägt. Es verhalten sich dann die Flächenräume wie die Gewichte.

Eine andere Methode, welche insbesondere bei mikroskopischen Objekten angewandt wird, besteht darin, daß man die Fläche mit einem durchsichtigen Quadratgitter bekannter Dimension bedeckt und die Quadrate abzählt, sowie die Bruchteile derselben schätzt, welche die Fläche ausfüllen.

Endlich gibt es noch sehr sinnreich konstruierte mechanische Instrumente, Planimeter genannt, welche mit einem Fahrstift versehen sind, den man nur an der Peripherie der Fläche herumzuführen braucht, um dann den gesuchten Flächenraum an einer Teilung ablesen zu können. Unter den Instrumenten dieser Art ist das Planimeter von Amsler am meisten angewendet.

Wir können dasselbe in elementarer Weise folgendermaßen erklären. Denken wir uns einen Stangen-zirkel AD (Fig. 67) aus einem runden Stabe mit zwei Spitzen an den Enden auf eine Zeichnungsebene aufgesetzt. Bewegen wir denselben parallel zu sich selbst nach BC , so beschreibt die

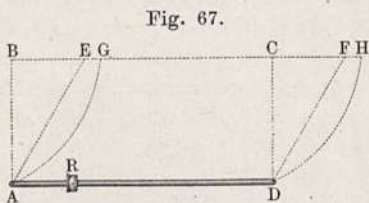


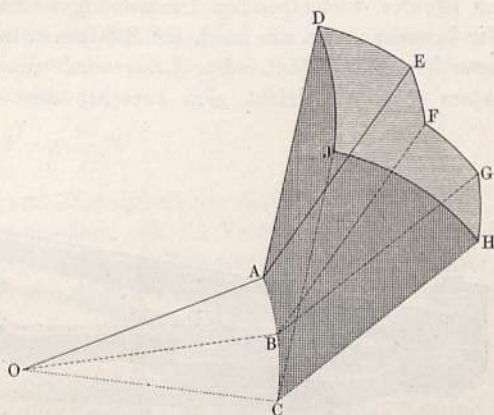
Fig. 67.

Gerade AD ein Rechteck, dessen Flächenraum gleich der Länge AD , multipliziert mit dem zurückgelegten Wege AB , ist. Diesen Weg könnten wir durch die Rolle R messen. Er ist gegeben durch die Peripherie, multipliziert mit der Anzahl der Umdrehungen. Der Flächenraum $ABCD$ ist also jedenfalls proportional der Anzahl der Rollenumgänge. Ganz dasselbe ist aber auch der Fall, wenn wir AD parallel zu sich selbst auf der schiefen

Bahn AE und DF nach EF bringen, denn der Flächenraum $Aefd$ ist ebenso groß, und auch die Anzahl der Rollenumgänge ist dieselbe wie früher. Es ist zwar der Weg AE größer als AB . Allein wir können uns die Bewegung von A nach B zerlegt denken in eine Anzahl Verschiebungen senkrecht auf AD und eine Anzahl Verschiebungen parallel zu AD . Die letzteren wirken aber nicht auf die Rolle, und die Summe der ersteren ist folglich AB . Endlich könnten wir die Gerade AD auch so parallel verschieben, daß ihre Enden irgend zwei parallele Kurven AG und DH beschreiben. Es ist leicht einzusehen, daß in allen diesen Fällen der Flächenraum gleich ist der Anzahl der Rollenumgänge, multipliziert mit einer Konstanten.

Jetzt denken wir uns den Stangenzirkel AD in Fig. 68 im Punkte A mit einer zweiten Stange OA im Punkte A drehbar verbunden. Das Ende O dieser Stange sei um den fixen Punkt O drehbar. Fährt man dann bei feststehendem Ende

Fig. 68.



Wir wollen nun aber den Fahrstift so bewegen, daß die Gerade AD abwechselnd als Radius einen Bogen um ein fixes Zentrum beschreibt, dann wieder parallel mit sich selbst sich fortbewegt. Also wir gehen z. B. zuerst bei fixem A von D nach E , wodurch der Kreissektor DAE beschrieben wird. Dann gehen wir aus der Lage AE in die parallele Lage BF , wodurch eine Art Parallelogramm beschrieben wird, dann wieder bei fixem B in die Lage BG , wodurch wieder ein Sektor beschrieben wird, dann wieder parallel fort nach CH . Von dort gehen wir wieder rückwärts, aber auf anderem Wege. Wir beschreiben zuerst den Sektor CHJ , wobei CJ parallel zu AD gewählt wird, und gehen endlich parallel in die Anfangslage AD zurück. Der Fahrstift D hat dann die Fläche $DEFGHJD = F$ umschrieben. Die Stange AD hat zuerst auf dem als positiv bezeichneten Wege von AD bis CH die horizontal schraffierte Fläche $ADHCA = F_1$ und auf dem als negativ bezeichneten Rückwege die vertikal schraffierte Fläche $HCADJH = F_2$ beschrieben. Die Fläche $DEFGHJD = F$ soll nun gemessen werden. Sie ist offenbar die Differenz der Flächen

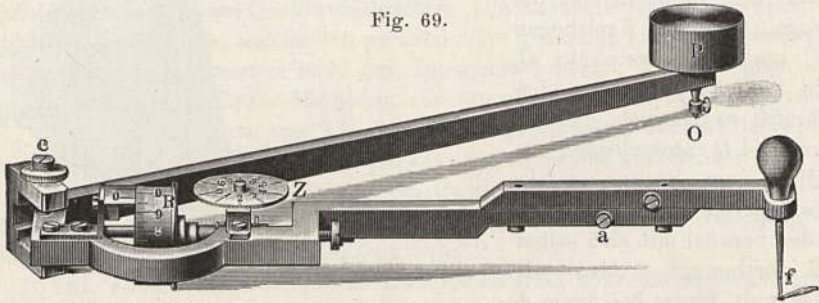
$$ADEFHGCA - ACHJDA = F_1 - F_2.$$

Jede dieser Flächen besteht aus Sektoren und Parallelogrammen. Bezeichnen wir die Summe der positiv zurückgelegten Sektoren mit $\Sigma_1 s$, die der positiv beschriebenen Parallelogramme mit $\Sigma_1 p$, so ist $F_1 = \Sigma_1 s + \Sigma_1 p$. Ebenso ist $F_2 = \Sigma_2 s + \Sigma_2 p$. Nun muß aber $\Sigma_1 s - \Sigma_2 s = 0$ sein, denn da die Stange am Ende wieder in der Anfangslage sich befindet, so ist die Summe der Winkeldrehungen auf dem Wege nach abwärts nachher auf dem Rückwege wieder kompensiert worden. Somit ist $F = F_1 - F_2 = \Sigma_1 p - \Sigma_2 p$.

Diejenigen Umdrehungen der Rolle, welche von der Bewegung längs Sektoren zustande kommen, heben sich einander auf. Von den Umdrehungen der Rolle, die durch Bewegung längs Parallelogrammen zustande kommen, bleibt dagegen ein Rest, und dieser muß proportional der Differenz $\Sigma_1 p - \Sigma_2 p$ sein, also proportional der Fläche F , die der Fahrstift umschrieben hat, d. h. wir erhalten die Fläche F , indem wir die effektiv verbleibende Drehung der Rolle mit einer Konstanten des Instrumentes multiplizieren.

Es ist nun leicht einzusehen, daß wir die Bewegung des Fahrstiftes D längs irgend einer geschlossenen Kurve zerlegt denken können in eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Bewegungen, bei denen von AD abwechselnd Sektoren und Parallelogramme beschrieben werden. Da die obige Zerlegung unabhängig ist von der Anzahl der Teilbewegungen, so folgt, daß auch in diesem Falle der Flächeninhalt der umschriebenen Fläche der Anzahl der effektiv verbleibenden Umdrehungen der Rolle proportional sein muß. Wir brauchen also nur noch ein Zählwerk, welches diese Umdrehungen und deren Bruchteile zählt. Der Leser wird nun an der Abbildung eines Planimeters (Fig. 69) leicht sich zurechtfinden. Die Spitze f entspricht dem

Fig. 69.



Fahrstifte D der Fig. 68, die Achse c dem Punkte A , die Spitze O dem Punkte O . Die Rolle R ist am Umfange eingeteilt und auf der linken Seite mit einem Nonius versehen, welcher fest steht. Die Achse der Rolle greift auf der rechten Seite mittels einer Schraube in die Zähne eines horizontalen Rades, an dessen Scheibe Z die Anzahl der ganzen Umdrehungen abzulesen ist. Durch Änderung des Abstandes cf kann die Konstante des Instrumentes verändert und auf eine runde Zahl, gewöhnlich eine Potenz von 10, gebracht werden. Die Ausführung einer Flächenmessung erfolgt also so, daß man zunächst die Spitze O an einer passenden Stelle außerhalb der Fläche durch das aufgelegte Gewicht P fixiert. Hierauf markiert man einen Anfangspunkt am Umfange der zu messenden Fläche, setzt den Fahrstift dahin und liest die Anfangsstellung an dem Zählwerk ab. Dann führt man den Fahrstift sorgsam dem Umfang entlang, bis man zum Anfangspunkte zurückgekehrt ist. Die nunmehrige Ablesung an dem Zählwerk ist eine größere oder kleinere als die erste, je nachdem man den Fahrstift rechts herum oder links herum geführt hat. Die Differenz beider Ablesungen, multipliziert mit der Konstanten des Instrumentes, gibt den gesuchten Flächenraum. Umfährt man die Peripherie 10 mal im gleichen Sinne, so erhält man den 10 fachen Flächenraum, also auch 10 fache Genauigkeit. Hat die Fläche in ihrem Inneren Inseln, die nicht mitgerechnet werden sollen, so geht man mit dem Fahrstift auf einem beliebigen Wege bis zu dem Umfang, umfährt sie

in umgekehrter Richtung und geht dann auf demselben Wege zur äußeren Peripherie zurück. Das Papier, auf welchem die Operation ausgeführt wird, darf nicht zu glatt, aber auch nicht zu rauh sein, damit die Rolle weder gleitet noch gehemmt wird¹⁾.

§ 26. Volumenmessung. Auch für die Bestimmung des räumlichen Inhaltes oder Volumens eines Körpers ist die Messung gewisser Längen genügend, wenn die Gestalt desselben eine einfache geometrische Form repräsentiert.

Bei unregelmäßiger Form des Körpers benutzt man zur Volumbestimmung indirekte Methoden. Die eine besteht darin, daß man den Körper in eine Flüssigkeit eintaucht, die in einem geeichten Gefäße enthalten ist, und alsdann an der Volumseinteilung desselben die Quantität abliest, um welche infolgedessen die Flüssigkeit im Gefäße gestiegen ist.

Eine andere Methode stützt sich auf den Satz, daß die Masse eines Körpers M durch das Produkt seines Volumens V in seine Dichtigkeit D dargestellt wird, also V nach der Formel:

$$V = \frac{M}{D}$$

zu berechnen ist, wenn die Masse und Dichtigkeit des Körpers gegeben sind. Wie diese beiden Größen bestimmt werden, soll im Verfolg gezeigt werden.

Ebenso werden wir später einige Apparate (Volumenometer, Stereometer) kennen lernen, welche das Volumen der Körper unter Anwendung der Druckgesetze der Gase bestimmen lassen.

Den Hohlraum von Gefäßen mißt man durchweg durch die Menge Wasser, welche sie fassen, wozu, wie wir gleich sehen werden, das metrische Maß- und Gewichtssystem sich ganz besonders eignet. In manchen Fällen benutzt man statt des Wassers Quecksilber. Bei dieser Methode ist, wenn große Genauigkeit verlangt wird, auf das Rücksicht zu nehmen, was im § 34 über die Bedeutung des Liters gegenüber dem Cubikdecimeter gesagt ist.

§ 27. Von der Winkelmessung im allgemeinen. Bestimmung der Vertikal- und Horizontalrichtung. Als Einheit der ebenen Winkel gilt der Grad, d. i. der 360. Teil des vollen Kreises oder der 90. Teil eines Quadranten. Manchesmal wird auch die Dezimalteilung benutzt, indem man den Quadranten in 100 Teile teilt.

Der Grad wird dann wieder in 60 Minuten und die Minute in 60 Sekunden geteilt, oder man teilt den Grad nach dem Dezimalsystem.

Die Messung ebener Winkel ist entweder eine absolute oder eine relative, je nachdem man die Richtung der Winkelschenkel auf eine bestimmte Richtung im Raume bezieht oder nur die gegenseitige Neigung der beiden

¹⁾ Es ist ersichtlich, daß man mittels des Planimeters auch die mittlere Ordinatenhöhe der Punkte einer Kurve, beziehungsweise den Mittelwert einer veränderlichen Größe (z. B. den mittleren Barometerstand während eines Tages) bestimmen kann, indem man den Flächenraum unter dem Kurvenstück durch die Länge des zugehörigen Abszissenstückes dividiert. Weitere Anwendungen siehe Jac. Amsler, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über ein neues Planimeter. Schaffhausen 1858. 8°.

Schenkel in Betracht zieht. Die absolute Winkelmessung verlangt also vorher die Festlegung bestimmter Richtungen im Raume, welche selbst wieder nur mit Bezug auf eine bereits vorhandene Richtung, z. B. die Erdachse, erfolgen kann. Zwei Richtungen sind besonders wichtig: die vertikale und die horizontale. Die erstere ist die Richtung des Lotes, die zweite ist eine der darauf senkrecht stehenden¹⁾. Winkel, deren einer Schenkel mit der Vertikalrichtung zusammenfällt, heißen Zenitdistanzen, solche, deren einer Schenkel

mit der Horizontalen zusammenfällt, heißen Höhen-(Tiefen-)winkel. Bei Winkeln, die in der Horizontalebene liegen, sind die zwei wichtigsten Bezugsrichtungen die des Meridians und die darauf senkrechte, von Ost nach West gehende.

Fig. 70.



Bestimmung der Vertikalen, Senklot, Libelle. Zur Bestimmung der Vertikalen dient das Senklot, auch Bleilot genannt, welches der Fig. 70 gemäß aus einem Faden besteht, an dem unten ein regelmäßig gestalteter zylindrischer Metallkörper, der in eine konische Spitze ausläuft, zentrisch befestigt ist. Die Spitze dieses Körpers wird sich dann jeweils von selbst vertikal unter den Aufhängepunkt des Senklotes einstellen und so der Faden oder die Verbindungslinie von Aufhängepunkt und Spitze des Senklotes eine Vertikale darstellen, so daß man danach unmittelbar die Vertikalität der Kanten von Stäben und Wänden beurteilen kann.

Bestimmung der Horizontalen. Die einfachste Vorrichtung hierzu ist die uralte Setzwage, ein gleichschenkliges Dreieck, an dessen Spitze ein Lot aufgehängt ist. Fällt dieses Lot mit der Halbierungslinie des Winkels an der Spitze zusammen, so steht die Basis des Dreiecks horizontal. Die Prüfung dieses nur geringe Genauigkeit gewährenden Apparates erfolgt durch Umsetzen der Basis um 180° , wobei das Lot wiederum mit derselben Marke zusammenfallen muß.

Will man eine horizontale Visierichtung herstellen, so kann man sich der alten Wasserwage bedienen, einer kommunizierenden Röhre mit durchsichtigen Schenkeln, in denen das Wasser in gleichem Niveau steht. Viel größere Genauigkeit gewährt die Libelle in ihren Hauptformen als Röhrenlibelle und Dosenlibelle.

Die Röhrenlibelle besteht aus einer Glasröhre, welche im Innern nach einem schwach gekrümmten Zylinder, dessen Achse also einen Teil eines Kreisbogens von großem Radius darstellt, ausgeschliffen ist. Dieselbe ist an beiden Enden geschlossen — entweder zugeschmolzen oder mit eingeschliffenen und mit Hausenblase dicht aufge kitteten Glasdeckeln versehen — und bis auf eine kleine Blase mit reinem Äther gefüllt. Nur bei ganz rohen Instru-

¹⁾ Nach der Wortableitung bedeuten lotrecht, senkrecht die Richtung des Lotes oder Senkels, d. i. die Richtung der Schwere, vertikal die Richtung im entgegengesetzten Sinne durch den Scheitel. In der Geometrie ist aber „senkrecht“ für „rechtwinklig“ in Gebrauch gekommen. Es empfiehlt sich, für diese relative Richtungsbezeichnung den Ausdruck normal zu gebrauchen und die ersteren Bezeichnungen für die absolute Richtung beizubehalten. Ganz strenge genommen weicht die lotrechte Richtung von der vertikalen (durch den Erdmittelpunkt bestimmten) ein wenig ab.

menten dieser Art wendet man zur Füllung Alkohol an; Wasser nicht, da es gefrieren könnte und auch das Glas angreift. Auf der konvexen Außenfläche der Röhre ist eine Teilung mit am besten vom einen zum anderen Ende fortlaufender Bezifferung angebracht. Mit der geteilten Seite nach oben gekehrt ist die Glasröhre zum Schutz und zur Aufstellung in eine Messingröhre gefaßt, welche über der Teilung einen Ausschnitt hat und entweder, wie dies aus Fig. 71a, 71b und 71c ersichtlich ist, mit halbsechseckig ausgeschnittenen Füßen zum Aufsetzen auf zu nivellierende Zylinder versehen ist oder durch zwei Endplatten, wie Fig. 72 zeigt, mit einer ebenen, linealartigen Metallplatte verbunden ist, um sie auf horizontal zu machende

Fig. 71a.

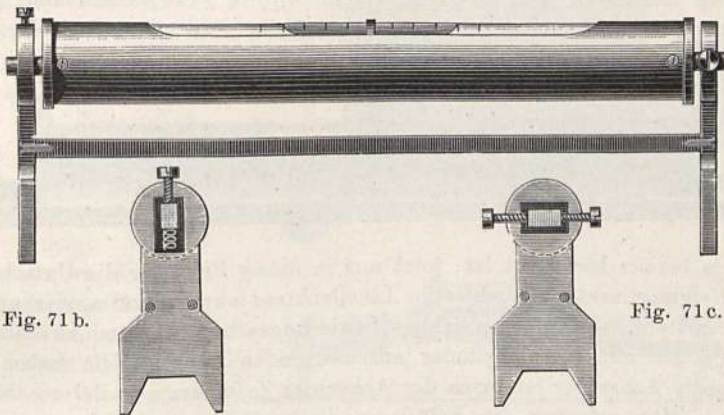


Fig. 71b.

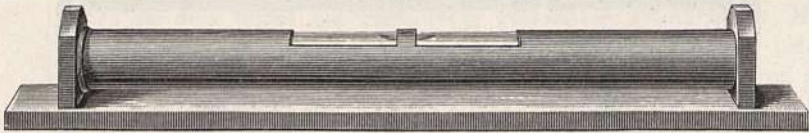
Fig. 71c.

ebene Flächen auflegen zu können. Auch hier läßt sich die Röhrenfassung durch in der Figur nicht sichtbare Justierungsschrauben gegen die Endplatten etwas verschieben, um die gleich zu erwähnenden Korrekturen ausführen zu können.

Die Luftblase wird nämlich in der Röhre immer die höchste Stelle des Kreisbogens einnehmen, wobei ihre ebene Basis ein horizontales Segment des Kreises darstellen und der Kreisradius durch ihre Mitte vertikal sein wird. Ist die feste Basis der Libelle — das Lineal oder der Zylinder, auf den wir uns die Füße von Fig. 71a aufgesetzt denken — senkrecht auf dem Kreisradius, der durch die Mitte der Teilung der Libelle geht, so wird die Luftblase auf diese Mitte mit ihrer eigenen Mitte jeweils einstehen, wenn jene feste Basis der Libelle horizontal sein wird; wir können also die Unterlage der Libelle ohne weiteres durch Justieren, bis die Blase auf die Mitte der Teilung einsteht, horizontal machen. Um nun zu erkennen, ob jene Bedingung erfüllt sei, setzt man die Libelle auf eine ebene Fläche bzw. einen Zylinder, die nivellierbar sind, auf und verändert deren Neigung, bis die Libellenblase auf die Teilungsmittle einsteht; kehrt man die Libelle hierauf um 180° um, so ist sie richtig, wenn dabei die Blase auf der Mitte der Teilung stehen bleibt. Ist dies nicht der Fall, so wird der Fuß der Libelle, von welchem die Blase sich entfernt hat, offenbar zu kurz sein, und man hat dann mittelst der in Fig. 71b ersichtlichen Korrekturenschraube und der unter ihr befindlichen Druckfeder die Libellenröhre bei diesem Fuß zu heben, wenn er der entferntere ist, oder sie zu senken, wenn er der nähere ist. Diese

Korrektion wird aber nur so weit getrieben, bis die Blase von ihrer Seitenstellung ungefähr um die Hälfte ihrer Distanz von der Mitte dieser genähert wird; die übrige Hälfte, also ihr neues Einstehen auf die Mitte der Teilung wird durch entsprechende Justierung der Unterlage der Libelle erzielt. Dreht man hierauf die Libelle in ihre frühere Lage zurück und bleibt die Blase noch nicht unverändert auf der Mitte, so wird wieder zur Hälfte an der Libelle und zur anderen Hälfte an der Unterlage korrigiert usf., bis endlich in beiden Lagen die Libellenblase auf der Mitte der Teilung stehen bleibt (siehe § 22, C.). Dann ist die Libelle in bezug auf ihre Fassung berichtigt bzw. die erwähnte Bedingung erfüllt, und die Gegenstände, auf welche man sie aufsetzt, werden beim Einspielen der Blase auf die Teilungsmittle in der zu ihr parallelen Richtung horizontal sein. Ist also eine ebene Fläche mit der Libelle horizontal zu machen, so muß man die Libelle noch um 90° drehen, und

Fig. 72.



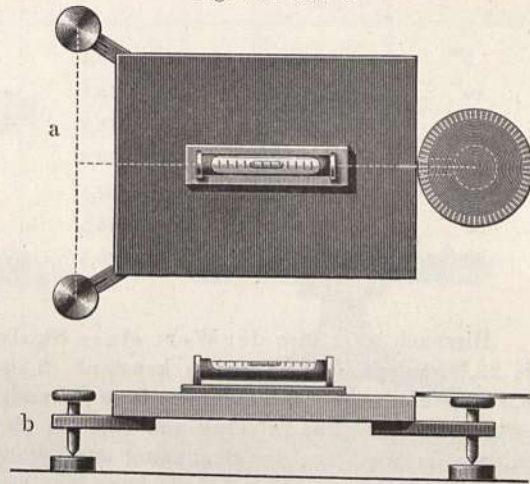
da sie ja bereits berichtigt ist, jetzt nur in dieser Richtung die Unterlage in ihrer Neigung verändern, bis die Libellenblase auch jetzt wieder auf die Mitte einsteht. — Die seitlichen Justierungsschrauben am zweiten Fuß Fig. 71 c der auf einen Zylinder aufzusetzenden Röhrenlibelle haben zum Zweck, die Achse der letzteren der Achse des Zylinders parallel machen zu können. Man erkennt die Erfüllung dieser Bedingung daran, daß die Libellenblase ihren Stand nicht verändert, wenn man die Libelle auf dem Zylinder durch schwache Drehung nach der einen oder anderen Seite hin neigt.

Die Dosenlibelle besteht aus einer metallischen zylindrischen Dose, deren Deckel von einer innen nach einer Kugelfläche ausgeschliffenen Glasplatte gebildet wird. In diese sind nahe der Mitte zwei konzentrische Kreise eingeschliffen, und die Ränder der Glasplatte sind in der gut passenden Fassung der Dose eingekittet. Von einer Schraubenöffnung im Boden der Dose aus wird diese auch mit Äther so weit gefüllt, daß der Rand der übrig bleibenden Luftblase eben zwischen die beiden konzentrischen Kreise des Glasdeckels zu liegen kommt, wenn der eben abgeschliffene untere Rand der Dose auf eine horizontale Ebene aufgesetzt wird. Hat man die Unterlage so justiert, daß die Blase der Dose, wie angedeutet, einsteht, so erkennt man sofort, ob die Dose richtig konstruiert ist, also die Unterlage in der Tat horizontal ist, indem man die Libelle um 90° und 180° umdreht. Verläßt dabei die Blase die Mitte des Deckels, so ist die Libelle unrichtig und muß durch Nachschleifen des unteren Randes korrigiert werden.

Prüfung der Empfindlichkeit der Libelle. Bei den Libellen wird gewöhnlich vom Verfertiger angegeben, welches der Bogenwert eines Skalenteiles derselben ist, d. h. um welchen Winkel man die Libelle neigen müsse, um die Mitte der Blase um einen Teilstrich fortrücken zu machen. Leider kann man sich selbst bei renommierten Werkstätten nicht ganz auf diese Angabe verlassen, wie man auch nicht sicher sein kann, ob der Bogenwert an

jeder Stelle der Skala derselbe sei oder mit anderen Worten die Libelle im Innern wirklich genau nach einem Kreisbogen ausgeschliffen sei oder sich dieser Zustand nach guter Anfertigung nachher erhalten hat. Deshalb ist es für den Physiker nötig, seine Libelle selbst untersuchen zu können. Hierzu kann mit geringer Modifikation das sog. Stellbrett, das sowieso in keinem physikalischen Laboratorium fehlen darf, dienen. Es besteht aus einer eben abgeschliffenen Metall- oder Glasplatte, die mit drei Stellschrauben versehen ist, wie die Fig. 73 a und b zeigt. Denken wir uns nun, wie die Figur es

Fig. 73 a und b.



andeutet, auf dem Kopf der einen Fußschraube einen etwa in ganze Grade geteilten Kreis zentrisch aufgesetzt und auf der Platte einen auf die Kreisteilung weisenden Zeiger befestigt, so wird eine dieser Fußschraube zugewandte, auf die Platte gesetzte Röhrenlibelle um bekannte Winkelgrößen geneigt werden können, wenn wir die Höhe eines Schraubenganges der Fußschraube und die Entfernung ihrer Fußspitze von einer Geraden durch die Fußspitzen der beiden anderen Stellschrauben — die punktierten Linien in Fig. 73 a — kennen. Diese Größen sind aber unschwer zu ermitteln. Es sei diese Entfernung e und die Schraubenganghöhe der ersteren Fußschraube h , so ist offenbar der Neigungswinkel v der Platte, welcher einer Umdrehung dieser Schraube entspricht, gegeben durch:

$$\operatorname{tang} v = \frac{h}{e}.$$

Angenommen, es sei:

$$h = 0,5 \text{ Millimeter} \quad \text{und} \quad e = 286,48 \text{ Millimeter},$$

so wird:

$$v = 6 \text{ Bogenminuten} = 360 \text{ Bogensekunden}.$$

Es wird also der Drehung der Fußschraube um 1° des auf ihr befestigten Kreises eine Neigung der Platte um 1 Bogensekunde entsprechen. Indem man also die Schraube dreht, bis die Libellenblase mit ihrer Mitte um einen, 5 oder 10 Skalenteile fortgerückt ist, und dann am Kreise die ganzen Umdrehungen und Bruchteile derselben abliest, wird man den Wert der Skalenteile in Sekunden erhalten und auch Unregelmäßigkeiten in ihrem Verlauf auffinden.

Die eigentlichen Niveauprüfer¹⁾ unterscheiden sich von dem eben geschilderten Hilfsapparat im wesentlichen nur dadurch, daß besondere Träger

¹⁾ Siehe z. B. Hunäus, Die geometrischen Instrumente, S. 17. Hannover 1864.

für die zu untersuchenden Libellen oder Niveaus die parallele Stellung derselben zu der Linie e im obigen sichern. Als Beispiel der Prüfung einer Röhrenlibelle mittels eines solchen teilen wir nachstehende Beobachtungen mit, wobei die Neigungsschraube je um 10 Sekunden vorwärts gedreht wurde:

Stellung der Schraube	Ablesungen der Enden der Blase an der Skale	Mitte der Luftblase	Differenz in Skalenteilen	Wert eines Skalenteiles
0"	8,6—21,6	15,1		
10	10,3—23,3	16,8	1,7	5,88"
20	12,2—25,2	18,7	1,9	5,26
30	14,1—27,1	20,6	1,9	5,26
40	16,0—29,0	22,5	1,9	5,26
50	18,0—31,0	24,5	2,0	5,00
60	20,0—33,0	26,5	2,0	5,00

Hiernach wäre also der Wert eines Skalenteiles der Libelle von 16,8 bis 22,5 Skalenteile Blasenmitte konstant: 5,26 Sekunden und von 16,8 bis 26,5 Blasenmitte im Durchschnitt: 5,16 Sekunden mit einer Unsicherheit von $\pm 0,1$ Sekunde. Das Intervall von 16,8 bis 15,1 Blasenmitte ist als zu verschieden im Wert von der Benutzung auszuschließen.

Mit einer so geprüften Libelle kann man selbstverständlich auch kleinere Neigungswinkel mit großer Sicherheit messen.

§ 28. Instrumente zur Winkelmessung, Theodolit. Die Winkelmeßinstrumente bestehen im allgemeinen aus einem geteilten Kreise oder Kreisbogen (Limbus) und einem um den Mittelpunkt desselben drehbaren Radius (Alhidade), welcher nacheinander in die Richtung der Schenkel des zu messenden Winkels gebracht wird. Die Differenz der zugehörigen Ablesungen am Teilkreise gibt dann den Winkel. Wir übergehen als bekannt die einfacheren geometrischen Instrumente dieser Art, den Regeltransporteur, das Anlegegoniometer usw., und wenden uns zu dem wichtigsten Instrumente, welches gestattet, Winkel in Horizontal- und Vertikalebene zu messen. Dies ist der Theodolit, dessen Name vom englischen *The aliydeday* abstammen soll, das selbst wieder aus dem arabischen Worte: *hadá*, führen, abgeleitet wird.

Der in den Figuren 74, 75 und 76 in seinen wesentlichen Teilen dargestellte Theodolit besteht aus einem Dreifuß G mit Stellschrauben S , welcher den horizontalen Teilkreis oder Limbus L trägt. In der Vertiefung desselben liegt eine an den inneren Rand des Teilkreises sich innig anschließende Scheibe, die Alhidade A , welche auf dem konischen, in einer entsprechenden Büchse von G steckenden, vertikalen Zapfen C befestigt ist und sich so um das Zentrum des Kreises drehen läßt. Die Stellung der Alhidade wird an der Kreisteilung mit den auf ihr angebrachten, diametral sich gegenüberstehenden Indices nn oder Vernieren abgelesen. Auf der Alhidade erheben sich die beiden

Träger *T* mit den Achsenlagern der horizontalen Achse *H* des Fernrohrs *F*. Am einen Ende dieser Achse ist der Vertikalkreis *V* befestigt, und am betreffenden Träger *T* sitzt ein Querarm mit den festen Vernieren *n'n'* zur Ablesung desselben. Auf die Zapfen der Horizontalachse ist eine Röhrenlibelle mit Füßen (Fig. 71 a) zur Nivellierung aufzusetzen.

Bei genaueren Instrumenten der Art ist der Limbus des Horizontalkreises und des Vertikalkreises auf eingelassenem Silberstreifen in $\frac{1}{6}^{\circ}$ geteilt und sind die Verniere so eingerichtet, daß man mit ihnen noch $10''$ ablesen

Fig. 74.

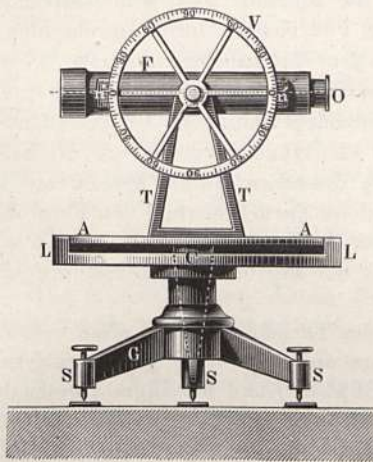
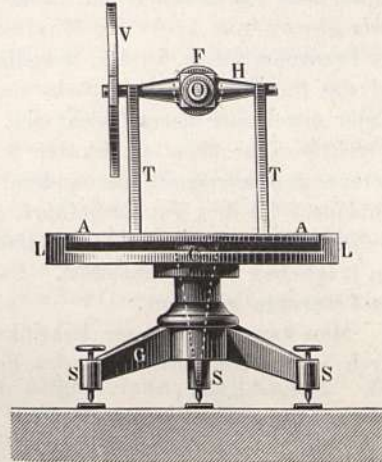


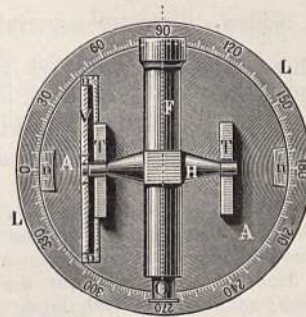
Fig. 75.



kann; ferner sind an beiden Kreisen Klemmen und Mikrometerschrauben behufs feinerer Einstellung des Fernrohrs angebracht.

Zur Berichtigung des Theodoliten behufs Messung von horizontalen und vertikalen Winkeln wird zunächst mit Hilfe der auf die horizontale Achse aufgesetzten Libelle die Drehungsachse der Alhidade vertikal und damit der Limbus horizontal gemacht, indem man abwechselnd die Libellenfüße und den Dreifuß justiert, bis die Libellenblase beim Umdrehen der Alhidade auf der Mitte der Teilung stehen bleibt. Um hierbei rascher zum Ziel zu gelangen, stellt man die Horizontalachse zuerst über den einen Fuß hin und nivelliert nur in dieser Richtung unter Umdrehung der Achse um 180° ; alsdann dreht man die Alhidade um 90° und hat dann zur vollständigen Nivellierung der Vertikalachse nur noch die beiden anderen Stellschrauben am Dreifuß die eine zurück-, die andere vorwärtsdrehen, bis die Libelle auch in dieser Richtung einsteht. — Darauf legt man, wie im § 22 C. beschrieben ist, die Libelle auf dem Zapfen der Fernrohrachse um 180° um; bleibt die Blase in der Mitte stehen, so ist diese Achse wirklich horizontal, d. h. die Höhe der Achsen-

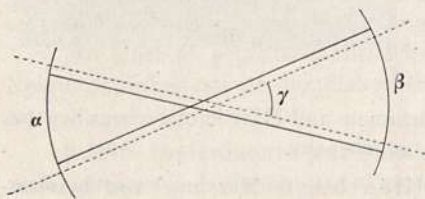
Fig. 76.



lager dieselbe¹⁾. Tritt dagegen eine Verschiebung der Blase ein, so ist wieder die Libelle und der eine Träger T je zur Hälfte zu korrigieren, bis die Umliegung der Libelle keine Standänderung der Blase an ihrer Skala zur Folge hat. Nach dieser Korrektur ist dann auch gemäß der mechanischen Anfertigung der Vertikalkreis genau genug wirklich vertikal. — Schließlich ist noch die optische Achse des Fernrohrs, d. h. die Verbindungslinie der Mitte des Objektivs mit dem Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes beim Okular, senkrecht zur horizontalen Drehungsachse desselben zu machen. Man stellt zu dem Ende das Fadenkreuz des Fernrohrs auf irgend einen entfernten scharfen Punkt nahe am Horizont ein, dreht dann die Alhidade nach dem Horizontalkreis genau um 180° im Horizont um und richtet durch Durchschlagen des Fernrohrs, d. h. Drehen desselben in der Vertikalebene dasselbe wieder auf das fragliche Objekt. Steht dann das Fadenkreuz des Fernrohrs nicht wieder genau auf dieses Objekt ein, so verschiebt man mit den betreffenden Korrektionsschrauben am Okular O das Fadenkreuz horizontal um die halbe Distanz und korrigiert die andere Hälfte desselben durch Drehen an der Alhidade. Ist dies gut ausgeführt, so wird bei Zurückführung des Fernrohrs in die frühere Lage der Vertikalfaden des Fadenkreuzes wieder genau auf den fraglichen Punkt eintreten. Damit ist der sogenannte Kollimationsfehler des Fernrohrs annulliert.

Man kann nach dieser Rektifikation des Theodoliten jetzt ohne weiteres durch successive Einstellung des Fernrohrs auf zwei nahe gleich entfernte

Fig. 77.



Objekte²⁾ und jeweiliges Ablesen der Verniere am Horizontalkreis den Horizontalwinkel bestimmen, welchen zwei Vertikalebenen durch die Objekte miteinander einschließen. Hätte man hierbei für die Ablesung am Horizontalkreis nur einen Index oder Vernier benutzt, so würde man bei exzentrischer Lage der Alhidade zum Limbus, wie dies Fig. 77 darstellt, entweder einen zu kleinen Winkel α oder zu großen β erhalten haben, während das Mittel aus den Ablesungen an beiden, diametral gegenüberstehenden Vernieren: $\frac{\alpha + \beta}{2}$ gleich dem

wahren Winkel γ , wie bei zentrischer Lage ist. Um ferner zugleich die Höhenwinkel der Objekte, d. h. in den betreffenden Vertikalebenen die Winkel der Visierlinien zu den Objekten mit dem Horizont zu erhalten, muß außer den Ablesungen der Verniere am Vertikalkreis bei der Einstellung des Faden-

¹⁾ Dies gilt allerdings nur, wenn die beiden Zapfen, wie es sein soll, gleich dick sind. Ob diese Bedingung erfüllt ist, kann man durch Umliegen der Fernrohrachse in ihren Lagern erkennen. Verschiebt sich dabei die Blase der Libelle, so ist daraus die Ungleichheit der Zapfendicke zu erkennen und auch zu messen, worauf man an den Neigungen der Achse für die Messungen eine hier nicht näher zu besprechende Korrektur anzubringen hat.

²⁾ Wäre die Distanz der Objekte vom Beobachter erheblich verschieden, so müßte behufs deutlichen Sehens die Fadenkreuz- und Okularstellung vom einen zum anderen verändert werden, wodurch eventuell eine Verstellung der optischen Achse erfolgen könnte. Es wäre dann an der Messung eine bezügliche Korrektur anzubringen.

kreuzes auf die Objekte auch noch diejenige Ablesung an demselben bekannt sein, welche bei horizontaler Visur erhalten wird. Die letztere wird aber dadurch gefunden, daß man den Horizontalfaden des Fadenkreuzes auf einen scharfen Fixpunkt nahe dem Horizont einstellt, die Verniere am Vertikalkreis abliest, dann die Alhidade um die Vertikalachse um 180° dreht und das Fernrohr unter Durchschlagen desselben wieder genau auf denselben Punkt richtet. Das Mittel aus der früheren und jetzigen Ablesung der Verniere am Vertikalkreis gibt die dem Zenit des Ortes entsprechende Ablesung am letzteren an, und man hat also bloß 90° davon abzuziehen, um die Stellung des Fernrohrs für den Horizont zu erhalten. Gewöhnlich ist der Vertikalkreis auf seiner Achse bereits so befestigt, daß nahezu 0° und 180° Ablesung der Verniere an ihm der Horizontalstellung der optischen Achse des Fernrohrs entsprechen, so daß man durch die vorstehende Beobachtung den sogenannten Indexfehler am Vertikalkreis erhält. Je nach der Richtung, in welcher am letzteren die Bezifferung fortschreitet, wird man dabei zu der kleineren Ablesung eventuell 360° hinzuzuzählen haben, um richtige Werte für den Zenit zu erhalten; ein bezüglicher Irrtum ist indessen nicht möglich, da man ja ohne weiteres ersieht, welche Ablesung bei annähernd vertikaler Lage des Fernrohrs erhalten werden soll.

Die Winkelmessung mittels der Poggendorffschen Spiegelmethode wurde bereits in § 17 besprochen.

§ 29. Von der Zeitmessung im allgemeinen, Zeiteinheit. Die Messung von Zeiträumen führt auf die Winkelmessung zurück, da wir die Drehung der Erde um ihre Achse dabei zugrunde legen.

Als Einheit der Zeit gilt allgemein in der Physik die Sekunde des mittleren Sonnentags, d. h. also der 86 400ste Teil dieses Tages, indem der Tag: d (dies), in 24 Stunden: h (hora), die Stunde in 60 Minuten: m und die Minute in 60 Sekunden: s geteilt wird. Es ist also:

$$1^d = 24^h = 1440^m = 86400^s.$$

Dieser Tag wird in folgender Weise aus dem Sterntag, d. i. der Rotationsdauer unserer Erde abgeleitet, welche wir als eine sehr nahe konstante Zeit betrachten können ¹⁾.

Der Sterntag oder 24 Stunden Sternzeit der Astronomen wird so genannt, weil wir die Umdrehungszeit der Erde um ihre Achse am besten nach Beobachtungen an den Fixsternen bestimmen, indem sie die Zeit darstellt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen, d. h. Durchgängen eines und desselben Sternes durch den Meridian eines Ortes ²⁾. So sehr sich

¹⁾ Die Rotationsdauer der Erde nimmt infolge des Einflusses von Ebbe und Flut angestellten Berechnungen zufolge in 1000 Jahren nur um $0,012^s$ zu [siehe Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik (deutsche Ausgabe) I, 2, S. 403. Braunschweig 1874].

²⁾ Man sieht unmittelbar ein, daß wir so die wahre Umdrehungszeit der Erde um ihre Achse nur erhalten, wenn die Visierlinie von der Erde zum Stern im Raume sich parallel bleibt, trotz der Fortbewegung der ersteren in ihrer Bahn um die Sonne während eines Tages, die $2,565 \cdot 10^6$ Kilometer beträgt. Da aber nach § 12 die Entfernung des nächsten Fixsternes, α Centauri, von der Erde immerhin noch gleich $41,1 \cdot 10^{12}$ Kilometer ist, so würden zwei Gerade zu ihm von den um einen Tag differierenden Bahnstellen der Erde nur einen Winkel von $0,013''$ einschließen,

daher der Gebrauch dieser Sternzeit für die Astronomen eignet, so unbequem wäre aber ihre Anwendung im bürgerlichen Leben, weil sie nicht mit der scheinbaren Bewegung der Sonne, an welche sich alle Einrichtungen unseres Lebens knüpfen, in Übereinstimmung ist.

Der wahre Sonnentag entspricht der scheinbaren täglichen Umlaufzeit der Sonne um unsere Erde und ist um ungefähr 4 Minuten länger als der Sterntag. Infolge der Bewegung der Erde um die Sonne projiziert sich nämlich diese für uns nach und nach auf andere Sternbilder, d. h. auf andere Stellen des unendlich entfernten Sternenhimmels, so daß sie da von West nach Ost unter den Sternen fortzurücken scheint. Es kommt also die Sonne gegenüber den benachbarten Sternen jeden Tag etwas später, nämlich um nahe 4^m, zur Kulmination.

Indessen können wir auch diesen wahren Sonnentag nicht praktisch als Zeitmaß verwenden, weil die wahre scheinbare Umlaufzeit der Sonne um die Erde im Laufe des Jahres keine gleichförmige ist. Da nämlich die Erdachse auf der Ebene ihrer Bahn um die Sonne schief steht (Neigung $23\frac{1}{2}^{\circ}$) und die Erde sich außerdem in ihrer elliptischen Bahn mit verschiedener Geschwindigkeit fortbewegt (in der Sonnennähe rascher als in der Sonnenferne), so ist die scheinbare Bewegung der Sonne eine durchaus ungleichförmige, und es wird also die Differenz zwischen Sonnentag und Sterntag zu verschiedenen Jahreszeiten variieren. Einer solchen Bewegung könnte man aber den Gang einer gewöhnlichen Uhr, der notwendig ein gleichförmiger ist, nicht anpassen.

Mittlerer Sonnentag. Man hat daher an Stelle der wahren Sonne gewissermaßen eine mittlere Sonne gesetzt, welche sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf dem Äquator bewegen würde und mit der scheinbaren Bewegung der wahren Sonne nur die Umlaufzeit um die Erde gemein hätte. Diese fingierte Sonne eilt der wahren Sonne bald voraus, bald bleibt sie hinter ihr zurück. Diese positiven und negativen Differenzen zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit heißt man die Zeitgleichung. Die immer gleiche Zeit nun zwischen aufeinanderfolgenden Kulminationen dieser gedachten mittleren Sonne hat man den mittleren Sonnentag oder den Tag mittlerer, bürgerlicher Zeit genannt.

Nach dieser Zeit werden nämlich im bürgerlichen Leben die Uhren reguliert, während, wie schon bemerkt, die Astronomen die ihrigen nach Sternzeit richten. Das genaue Verhältnis beider ist:

$$\begin{aligned} 1 \text{ mittlerer Sonnentag} &= 1,0027379 \text{ Sterntag} \\ &= 1 \text{ Sterntag} + 3^m 56,555^s \text{ Sternzeit,} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 1 \text{ Sterntag} &= 1 \text{ mittlerer Sonnentag} - 3^m 55,909^s \text{ Sonnenzeit} \\ &= 86164,091 \text{ Sekunden mittlerer Sonnenzeit.} \end{aligned}$$

Außer durch diese Verschiedenheit in der Größe der Zeiteinheit unterscheidet sich aber die bürgerliche Zeitrechnung und die der Astronomen auch

während es des ganzen Halbmessers der Erdbahn um die Sonne bedarf, um diesen Winkel, die sogenannten Parallaxe des fraglichen Sternes, auf die Größe von 0,75'' zu erheben.

noch dadurch, daß wir den Tag im bürgerlichen Leben um Mitternacht beginnen und gewöhnlich statt 24 Stunden deren zweimal 12 zählen, die wir dann durch den Zusatz Vormittag und Nachmittag oder durch die Zeichen a (*ante meridiem*) und p (*post meridiem*) unterscheiden, während die Astronomen sowohl für Sternzeit als mittlere Zeit den Tag um Mittag des betreffenden bürgerlichen Tages anfangen und die Stunden bis 24 zählen. Es ist also nach mittlerer Zeit z. B.:

$$11^d 22^h \text{ astronomisch} = 12^d 10^h \text{ a bürgerlich gezählt.}$$

Was die absolute Vergleichung von astronomischer Sternzeit und mittlerer Sonnenzeit wie auch wahrer Sonnenzeit betrifft, so ist dieselbe ohne weiteres den astronomischen Ephemeriden¹⁾ für das betreffende Jahr zu entnehmen.

Außer dem Tag wird zur Zählung größerer Zeitabschnitte auch das Jahr, d. h. die tropische Umlaufzeit der Erde um die Sonne gebraucht²⁾. Dasselbe beträgt etwas weniger als $365\frac{1}{4}$ Tag. Da das bürgerliche Jahr nur 365 ganze Tage zählt, so wird bekanntlich zur Regulierung alle vier Jahre im Februar ein Tag zugeschaltet: Schaltjahr. Damit wird aber wieder etwas zu viel zugelegt, und um diesen Fehler wieder gut zu machen, läßt man alle 100 Jahre den Schalttag wegfallen.

Zur Feststellung beziehungsweise Ableitung unserer Zeiteinheit, das ist der Sekunde des mittleren Sonnentags, bedürfen wir der Zeitmeßinstrumente, die wir daher zunächst zu betrachten haben.

§ 30. Zeitmeßinstrumente, Uhren. Zu den ältesten Zeitmeßinstrumenten gehören jedenfalls die Sonnenuhren. Diese geben unmittelbar durch den Schatten, den die Sonne von undurchsichtigen Gegenständen auf helle Flächen wirft, oder durch Lichtpunkte, welche sie durch Öffnungen in Schirmen mit oder ohne Linsen auf beschatteten Flächen erzeugt, nur die wahre Sonnenzeit an, und man hat daher an ihren Angaben, wenn man die mittlere Sonnenzeit erhalten will, noch die oben erwähnte Zeitgleichung anzubringen, die man für den betreffenden Tag unmittelbar den astronomischen Ephemeriden entnehmen kann. Bei der Äquatorial-Sonnenuhr von Fléchet ist auf der beschatteten Platte eine die Zeitgleichung darstellende Kurve statt einer einfachen Meridianlinie gezogen, so daß man durch Einstellung des von einer Linse entworfenen Sonnenbildchens auf sie nicht bloß unmittelbar die mittlere Sonnenzeit an der Uhr ablesen kann, sondern nach Einstellung auf die Breite des Ortes am bezüglichen Gradbogen das Instrument auch nach dem Meridian des Ortes orientieren kann, indem man es so lange im Horizont

¹⁾ Nautical Almanac, Berliner astronomisches Jahrbuch, *Connaissance des temps*. Weniger vollständig: Nautisches Jahrbuch von Bremiker, in dem man aber auch kurze Anleitungen zu astronomischen Beobachtungen und Berechnungen findet.

²⁾ Man unterscheidet das siderische und das tropische Jahr, von denen sich das erstere auf die Rückkehr der Sonne zu ein und demselben Stern der Ekliptik, das letztere auf die Rückkehr der Sonne zum Frühlingsäquinoktialpunkt bezieht. Die bürgerliche Zeitrechnung hält sich an das letztere, das tropische Jahr, weil nach dem ersten Tag- und Nachtgleiche sich allmählich infolge der Präzession der Erdachse verschiebt.

dreht, bis das Sonnenbildchen auf das eben stattfindende Datum auf der Zeitgleichungskurve fällt.

Die Genauigkeit der Zeitbestimmung mit diesen Instrumenten und ähnlichen einfachen Apparaten, wie Sanduhren, Wasseruhren usw., ist indessen zu gering, höchstens bis 1 Minute, um für wissenschaftliche Messungen ausreichend zu sein; man bedient sich daher gegenwärtig ausschließlich der eigentlichen Uhren, die man in Pendelgewichtsuhr und in Federuhren nach ihren bewegenden und regulierenden Organen einteilt.

Pendelgewichtsuhr. Da bei der Pendelgewichtsuhr sowohl die treibende Kraft, das allmählich fallende Gewicht, als auch der die Bewegung regulierende Teil, das Pendel, in ihren Funktionen bloß von der an ein und demselben Ort konstanten Kraft der Schwere abhängen, so stellt sie bei guter Ausführung aller Teile das genaueste Mittel zur Zeitmessung dar. Ohne hier näher auf die später zu betrachtende Einrichtung der Pendeluhr einzugehen, bemerken wir nur, daß die allmählichen Verbesserungen des Ankers und Steigrades, die vollständigere Kompensation des Pendels gegen Veränderung durch die Temperatur, sowie gegen den geringeren störenden Einfluß der Luftdruckvariationen — man hat zu dem Ende sogar versucht, die Uhr durch Einschluß in luftdichte Gefäße unter konstantem Druck zu halten und durch Aufstellung derselben in tiefen Kellern die Temperaturvariationen bedeutend zu beschränken — wesentliche Momente zur Erhöhung der Leistungsfähigkeit dieses Zeitmeßinstrumentes bildeten. Durch das Pendel ist die vertikale Lage der Uhr von selbst angezeigt; man hängt sie an festen Mauerwänden, auf Sternwarten sogar an unabhängig vom Zimmerfußboden unmittelbar im Erdboden fundamentierten, besonderen Steinpfeilern auf, um sie möglichst allen störenden Erschütterungen zu entziehen, ja es wird sogar zu dem Ende eine unmittelbare Berührung des Uhrgehäuses mit dem Uhrwerk und Pendel vermieden.

Die Federuhren, welche als Präzisionsinstrumente speziell Chronometer genannt werden, und zwar die in der Tasche zu tragenden: Taschen-Chronometer und die größeren, in besonderen Gehäusen kardanisch, d. h. vermittelt umgebender Ringe und zwei aufeinander senkrechter Achsen daran, in jeder Richtung beweglich, in horizontaler Lage aufgehängten Box-Chronometer oder Marine-Chronometer sind ihrer leichten Transportfähigkeit halber bei physikalischen Messungen mehr im Gebrauch und werden auch meistens nach mittlerer Sonnenzeit reguliert, während die Pendeluhr auf den Sternwarten der Bequemlichkeit halber bei der Beobachtung der Gestirne durchweg nach Sternzeit gehen. Obschon die treibende Kraft hier durch die Elastizität einer gespannten Stahlfeder gegeben ist und der gegen Temperatureinflüsse kompensierte regulierende Balancier ebenfalls durch eine sich öffnende und schließende Spiralfeder in Schwingung erhalten wird, also an Stelle der konstanten Kraft der Schwere bei den Pendelgewichtsuhr die im allgemeinen weniger konstante elastische Kraft getreten ist, hat man es doch in der allmählichen Verfeinerung dieser Chronometer, insbesondere ihrer Wichtigkeit zur Längenbestimmung bei der Schifffahrt halber, dahin gebracht, daß sie nahe dieselbe Genauigkeit wie Pendeluhr zu gewähren vermögen. Allerdings muß zu dem Ende das Chronometer sorgfältig vor Erschütterungen und raschen Temperaturänderungen geschützt sein und vor allem stets in horizontaler Lage (Achse des Balancier vertikal) erhalten werden, wozu eben,

besonders beim Gebrauch auf Schiffen, die erwähnte kardanische Aufhängung dient. Taschen-Chronometer gewähren daher beim Tragen in der Tasche stets eine geringere Genauigkeit.

Man beurteilt die Güte einer Präzisionsuhr oder eines Chronometers nicht sowohl nach der absoluten Größe ihres täglichen Ganges, d. h. der Anzahl Sekunden, um welche sie im Laufe von 24 Stunden vor- oder nachgeht gegen richtige Zeit, als vielmehr nach der Konstanz dieses täglichen Ganges an aufeinanderfolgenden Tagen oder auch während längerer Zeiträume. Einige Beispiele werden zeigen, zu welchem hohem Grade der Vollkommenheit in neuester Zeit der Gang der Uhren von den Verfertigern gebracht worden ist.

Nach den Beobachtungen von E. Becker betrug der tägliche Gang der Pendeluhr von Knoblich in Altona Nr. 1952 des Astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam im Jahre 1877 Mai bis 1878 Mai¹⁾:

im Mittel: $-0,11^s \pm 0,006^s$,

mit den extremen Werten: $-0,14^s$ und $+0,10^s$,

wo also $\pm 0,006^s$ die mittleren Schwankungen des täglichen Ganges darstellt, während die größten im Laufe des Jahres beobachteten Abweichungen vom Mittel $-0,11^s$, nämlich $-0,14^s$ und $+0,10^s$, gewissen Störungen, wie z. B. raschen Änderungen der Temperatur, beizumessen sind.

Vom gleichen Verfertiger zeigte die Pendeluhr Nr. 1963 der Sternwarte in Straßburg nach Winnecke²⁾ vom März bis Oktober als größte Abweichungen von mittleren täglichen Gang:

$-0,13^s$ und $+0,12^s$.

Für eine derselben Sternwarte angehörige Pendeluhr von Hohwei in Amsterdam Nr. 25 fand Winnecke aus Beobachtungen je von Mai bis Oktober als extreme Werte des täglichen Ganges³⁾:

im Jahre 1876 . . .	$-0,22^s$	und	$+0,19^s$
„ „ 1877 . . .	$-0,19$	„	$+0,23$
„ „ 1878 . . .	$-0,16$	„	$+0,13$

An der Pendeluhr von Mairet in Locle, die im Meridiansaal der Sternwarte des eidgenössischen Polytechnikums in Zürich aufgestellt und also extremen Schwankungen der Temperatur ausgesetzt ist, hat Wolfer folgende extreme Werte des täglichen Ganges beobachtet⁴⁾:

im Jahre 1876 . . .	$+0,15^s$	und	$-0,13^s$
„ „ 1877 . . .	$+0,23$	„	$-0,06$
„ „ 1878 . . .	$+0,24$	„	$-0,28$

¹⁾ Astronomische Nachrichten 96, 151, 1880.

²⁾ Astronomische Nachrichten 96, 92, 1880. Bei diesen außerordentlich günstigen Resultaten ist indessen zu berücksichtigen, daß die Wintermonate ausgeschlossen sind, wo am leichtesten Störungen durch starke Temperaturvariationen erfolgen.

³⁾ Astronomische Nachrichten 96, 25, 1880.

⁴⁾ Mitteilungen von Wolf, V, Nr. XLVIII, S. 222, 1879. — Die Daten für die Jahre 1899 bis 1901 entstammen einer gefälligen Mitteilung von Herrn Direktor Wolfer, da sie noch nicht publiziert sind.

im Jahre 1899	. . .	— 0,43 ^s	und	— 0,02 ^s
„ „	1900	. . .	— 0,58	„ — 0,06
„ „	1901	. . .	— 0,46	„ — 0,05

Für 1899 bis 1901 ergeben die auf 0^o und einen Barometerstand von 700 mm reduzierten täglichen Gänge im Mittel:

$$- 0,226^s \text{ und } \pm 0,093^s.$$

Noch ist zur besseren Beurteilung des Ganges dieser Uhr hinzuzufügen, daß von den im ganzen aus 221 Zeitbestimmungen abgeleiteten täglichen Gängen je

82	Werte	nur	$\pm 0,00^s$	bis	$0,05^s$	Abweichungen	vom	Mittel
63	„	„	$\pm 0,05$	„	0,10	„	„	„
42	„	„	$\pm 0,10$	„	0,15	„	„	„
15	„	„	$\pm 0,15$	„	0,20	„	„	„
6	„	„	$\pm 0,20$	„	0,25	„	„	„
1	„	„	$\pm 0,25$	„	0,30	„	„	„
1	„	„	$\pm 0,30$	„	0,35	„	„	„

aufweisen, also die größeren Abweichungen fast gar nicht vorkommen.

Ein Box-Chronometer von Wirén Nr. 150 in St. Petersburg zeigte im meteorologisch-magnetischen Observatorium in Pawlowsk (bei St. Petersburg) in den Jahren 1891, 1893 und 1894 nur mittlere monatliche Abweichungen von seinem täglichen Gange im Betrage von $\pm 0,14^s$ mit den extremen Werten $\pm 0,01^s$ und $\pm 0,37^s$ ¹⁾.

Bei der Prüfung, allerdings nur während $1\frac{1}{2}$ Monate, fand man im Observatorium zu Neuchâtel für Marine-Chronometer als extreme Abweichungen vom mittleren täglichen Gange ²⁾:

U. Nardin in Locle Nr. 4/5805	— 0,26 ^s	und	+ 0,24 ^s ,
H. Grandjean u. Co. in Locle Nr. 98	— 0,22	„	+ 0,25.

§ 31. Messung von Zeiträumen. Die Aufgaben der Zeitmessung in der Physik bestehen gewöhnlich nicht darin, den absoluten Zeitpunkt vom Eintritt eines Ereignisses anzugeben, sondern die Zeitdauer eines solchen zu bestimmen. Wollen wir z. B. die Geschwindigkeit eines gleichförmig sich fortbewegenden Körpers ermitteln, so haben wir den Zeitabstand zu messen, in welchen derselbe in seiner Bahn zwei in einem bestimmten Abstände sich befindende markierte Punkte passiert; ist die Schwingungsdauer eines Pendels oder eines um eine vertikale Achse oszillierenden Magnets zu finden, so sind die Zeitintervalle zu messen, in welchen dieselben ihre Gleichgewichtslage aufeinanderfolgend passieren und dergleichen mehr.

Die einfachste Methode nun, solche Zeitintervalle mit den Uhren zu messen, besteht darin, daß man nach den Schlägen einer Pendeluhr mit Sekunden- oder Halbsekundenpendel oder eines Box-Chronometers — dieselben

¹⁾ Annalen des physikalischen Zentral-Observatoriums in St. Petersburg von 1891, 1893 und 1894. Teil I: Einleitung zu den Beobachtungen in Pawlowsk.

²⁾ Bulletin de la Société des sciences nat. de Neuchâtel, T. XV, 1886. Rapport du directeur Hirsch pour 1884.

schlagen gewöhnlich halbe Sekunden, man zählt aber nur die geraden Schläge — die Sekunden, nach erfolgter Notierung der Stunde und Minute, zählt, bis der bewegte Körper die erste Marke bzw. bei Schwingungen zum ersten Male die Gleichgewichtslage passiert, worauf man sofort die Sekunde unter Weiterzählung der Sekundenschläge notiert. Wenn die Bewegung keine rasche ist, so kann man das den Anfänger leicht störende Weiterzählen der Sekunden unterlassen und nach der Uhr neu zu zählen anfangen, wenn sich der Körper in seiner Bahn der zweiten Marke bzw. dem nächsten Durchgang durch die Gleichgewichtslage nähert, worauf man dann wieder die Sekunde des Durchganges durch diese notiert und ebenso die Stunde und Minute, in welche diese fällt. Nun wird aber im allgemeinen der Durchgang des bewegten Körpers durch die Marke nicht genau auf einen Sekundenschlag fallen, sondern zwischen zwei aufeinanderfolgende und bald näher, bald ferner vom ersten zum zweiten Schlag entfernt. Bei einiger Übung ist es leicht möglich, nach Zehnteln der Sekunde die Zeit zu schätzen, wo nach dem ersten Schlag der Körper die Marke passiert; das wird sehr erleichtert, wenn man sich auf irgend eine Weise räumlich die Stellen merkt, wo beim ersten Schlag der Körper diesseits der Marke und beim folgenden Schlag jenseits derselben sich befand; nach dem Verhältnis dieser beiden Räume lassen sich dann recht gut die Zehntel der Sekunde für den wirklichen Durchgang schätzen. Man habe so z. B. gefunden, daß der Durchgang durch die erste Marke oder zum ersten Male durch die Gleichgewichtslage um $3^h 12^m 24,7^s$ erfolgte und daß darauf der durch die zweite Marke um $3^h 13^m 6,5^s$ stattgefunden habe, so ist das zu messende Zeitintervall $41,8^s$ gewesen. Auf diesem Wege wird man unmittelbar die Dauer des Ereignisses kaum genauer als bis auf $0,1^s$ ermitteln können.

Wir werden weiter unten bei den Pendelbeobachtungen zeigen, wie man bei isochron schwingenden Körpern durch wiederholte Beobachtung der Schwingungsdauer auch nur mittels einfacher Uhrmessung zu viel größerer Genauigkeit gelangen kann.

In den Fällen, wo die Bewegung eines Körpers eine recht rasche ist oder kurz aufeinanderfolgende Ereignisse ihrem Zeiteintritt nach zu messen sind und das erwähnte Weiterzählen der Sekunden nach den Schlägen des Chronometers wegen geringer Übung oder wegen Geräuschen in der Umgebung schwierig ist, kann man sich mit Vorteil der sog. Chronograph-Chronometer bedienen. Dieselben besitzen außer dem Stunden- und Minutenzeiger noch zwei, übereinander stehende $\frac{1}{5}$ Sekunde springende Zeiger, welche beide unabhängig voneinander durch Drücker am Umfang der Taschenuhr arretierbar sind; außerdem kann durch einen zweiten Druck auf die Arretierung des einen Zeigers dieser veranlaßt werden, dem anderen inzwischen fortgehenden Zeiger nachzuspringen. Der Gebrauch ist daher ein doppelter. Für weniger als eine Minute Intervall darbietende zwei Ereignisse wird beim Eintritt des ersteren der eine und beim Eintritt des zweiten der andere Zeiger je durch die betreffenden Drücker arretiert, worauf man ihnen in aller Ruhe die Dauer des Zeitintervalls bis auf $0,2^s$ genau ablesen kann. Für wiederholte Beobachtungen, wie z. B. bei Pendelschwingungen, arretiert man bloß den einen Zeiger beim Durchgang des Pendels durch die Gleichgewichtslage, liest rasch seinen Stand am Zifferblatt ab und läßt ihn dann durch einen zweiten Druck auf die Arretierung dem

anderen Zeiger wieder nachspringen, worauf sich die folgende Beobachtung ohne Zählung der Sekunden wieder in gleicher Weise machen läßt.

Handelt es sich aber darum, Zeiten bedeutend genauer als bis $0,1^s$ zu messen, so bedient man sich der eigentlichen Chronographen mit elektrischer Registrierung der Zeiten. Durch ein Uhrwerk wird bei ihnen ein mit Papier bedeckter Zylinder mehr oder minder rasch in Umdrehung um seine Längsachse versetzt, wobei er zugleich längs dieser eine langsame Verschiebung erfährt, oder es wird ein endloser Papierstreifen, wie beim bekannten Morseschen Telegraphenapparat, durch das Uhrwerk zwischen zwei kleinen Walzen durchgezogen. Zwei nebeneinander gestellte Federn schreiben auf dem Papier parallele Linien auf, welche im ersteren Fall den Zylinder schraubenförmig umlaufen. Beide Federn sind an den Ankern von Elektromagneten so befestigt, daß beim Anziehen derselben die Federn auf dem Papier seitlich um eine geringe Größe ausweichen. Der eine Elektromagnet ist in den Stromkreis einer Uhr eingeschaltet, welche alle Sekunden auf ganz kurze Zeit, etwa $0,1^s$, einen Kontakt bewirkt und so den Strom der galvanischen Batterie vorübergehend schließt. Die betreffende Ankerfeder wird daher eine Reihe von Zacken auf der von ihr verzeichneten Linie aufweisen, deren Abstand je einer Sekunde Zeit entspricht. Der Elektromagnet der zweiten Feder wird dadurch zum Anziehen seines Ankers bewogen, daß der Beobachter im Moment des Eintritts des seiner Zeit nach zu messenden Ereignisses in einem zweiten, diesen Elektromagnet einschließenden Leitungskreis der Batterie durch Niederdrücken eines Tasters einen Stromschluß bewirkt. Die Marke, welche infolgedessen die zweite Feder auf ihrer Linie macht, wird im allgemeinen zwischen zwei Sekundenmarken der benachbarten Linie fallen und je nach dem Abstände der letzteren ihre Entfernung von der einen derselben auf größere oder kleinere Bruchteile einer Sekunde abzumessen sein. Beträgt z. B. die Entfernung der Sekundenmarken voneinander nur 20 mm, so wird die leichte Abmessung bis zu 0,1 mm bereits einer Genauigkeit von $\frac{1}{200}$ oder $0,005^s$ in der Zeitbestimmung entsprechen. Die Sicherheit aber der Registrierung von Zeitereignissen nach dieser Methode hängt nicht bloß von der Distanz der Sekundenmarken und der Abmessung ab, sondern auch von der Gleichförmigkeit der Bewegung des Papiers durch sein Uhrwerk und von der guten Funktion der die Sekundenkontakte bzw. Sekundenmarken auf dem Papier bewirkenden Uhr. Man hat in neuerer Zeit sowohl bei Pendeluhren (Krille, Hansen, Hipp und andere), als auch bei Box-Chronometern (Nardin in Locle) solche Kontaktvorrichtungen angebracht, welche auf den Gang der Uhren nur unmerklich oder jedenfalls in so konstanter Weise einwirken, daß die chronometrischen Eigenschaften dieser Uhrwerke dadurch nicht beeinträchtigt werden; und ebenso ist es auch durch besondere Reguliervorrichtungen (schwingende Feder von Hipp, Regulatoren von Foucault, von Siemens usw.) gelungen, den Gang der Laufwerke für die Fortbewegung des Papiers gleichförmig genug zu machen.

Auf andere Apparate zur Messung kleiner Zeitintervalle, welche ganz spezielle Zwecke verfolgen, werden wir bei den betreffenden Anwendungen zu sprechen kommen.

§ 32. Astronomische Methoden der Zeitbestimmung. Stehen dem Physiker ähnliche Einrichtungen wie auf einer Sternwarte zur Disposition,

d. h. ein fest aufgestelltes Passagen- oder Meridian-Instrument mit den nötigen Schutzvorrichtungen gegen die Unbilden der Witterung, unbeschadet der Möglichkeit, durch zeitweise Entfernung jener den Durchgang der Gestirne im Meridian zu beobachten, so besteht die einfachste Methode der Zeitbestimmung darin, daß man mittels jenes Passagen-Instrumentes event. eines Theodoliten, wie oben beschrieben wurde, die Zeit des Durchganges eines dem Himmelsäquator nahen Fixsternes (in seiner oberen Kulmination) an dem Fadenkreuz (Vertikalfaden) seines Fernrohrs, dessen optische Achse sich nahezu im Meridian des betreffenden Ortes befinden soll, nach der Uhr beobachtet. Heißen wir die beobachtete Uhrzeit des Durchganges U und den gesuchten Uhrfehler in diesem Moment ΔU , so folgt aus der Betrachtung bezüglicher sphärischer Dreiecke, daß:

$$\Delta U = \alpha - U - i \cdot \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - a \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - c \cdot \frac{1}{\cos \delta} \dots (1)$$

wobei α die Rektaszension (gerade Aufsteigung) und δ die Deklination (Abweichung) des betreffenden Sternes für diese Zeit, φ die geographische Breite des Beobachtungsortes, ferner i die Neigung der horizontal sein sollenden Drehungsachse des Fernrohrs gegen den Horizont (+, wenn das Westende derselben höher als das Ostende ist), a das Azimut der Normalen dieser Drehungsachse, d. h. ihren Winkel mit dem astronomischen Meridian (+, wenn sie im Süden vom astronomischen Meridian nach Osten abweicht), endlich c die sogenannte Kollimation der optischen Achse des Fernrohrs, d. h. den Winkel dieser mit der Normalen der Drehungsachse des Fernrohrs (+, wenn das Objektivende des Fernrohrs mit dem Ende der Drehungsachse, an welcher der Höhenkreis befestigt ist, den Winkel $90 + c$ einschließt), darstellen. Da man die Breite φ des Ortes als gegeben betrachten kann, α und δ unmittelbar astronomischen Ephemeriden für die Beobachtungszeit und den betreffenden Stern zu entnehmen sind, so bleibt nur übrig, die Neigung i der Horizontalachse durch das aufzusetzende Niveau (Libelle), die Kollimation c durch Umlegen des Fernrohrs in seinen Lagern unter Anvisierung einer in der Nähe des Horizonts und nahe am Meridian aufgestellten Mire¹⁾ und jeweilige Abmessung der Distanz des Fadenkreuzes von ihr, sei es durch Drehung am Horizontalkreis, sei es durch ein Okularmikrometer, endlich das Azimut a durch entsprechende Abmessung, wenn das Azimut der fraglichen Mire bekannt ist, zu bestimmen. Es sind dann alle Größen rechts vom Gleichheitszeichen in (1) gegeben und somit der Uhrfehler ΔU danach zu berechnen. Man wird ihn in Sternzeit erhalten, da man auch die abgelesene Uhrzeit U entweder direkt an einer nach Sternzeit gehenden Uhr beobachtet hat oder, wenn sie nach mittlerer Sonnenzeit reguliert sein sollte, die abgelesene Zeit U vor Einführung in die Gleichung vermittelt der Ephemeriden in absolute Sternzeit zu verwandeln hatte. Es ist dies übrigens auch schon deshalb nötig, um nach den Ephemeriden den Durchgang des Sternes durch das Fernrohr erwarten zu können.

¹⁾ Unter Mire versteht man einen fernen, zur scharfen Einvisierung geeigneten Gegenstand, wie z. B. eine Kirchturmspitze, ein ganz schmales Fenster oder eine Mauerlücke, ein an einer Mauer angebrachtes vertikales Zeichen oder auch geradezu einen Kollimator, d. h. ein im Focus einer Linse befestigtes Fadenkreuz, der auf einem Steinfeiler sicher aufgestellt ist.

Macht man nun 24 Stunden später mit demselben möglichst unverrückt erhaltenen Instrument eine zweite Durchgangsbeobachtung desselben Sternes, welche zur Uhrzeit U' stattgefunden haben soll, so erhält man entsprechend für den jetzigen Uhrfehler $\Delta U'$:

$$\Delta U' = \alpha - U' - i' \cdot \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - a' \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} - c' \cdot \frac{1}{\cos \delta} \dots (1')$$

da α , δ und φ dieselben Werte wie tags zuvor haben.

Aus den beiden Gleichungen (1) und (1') folgt aber:

$$\Delta U - \Delta U' = U' - U - x \dots (2)$$

wo abkürzend gesetzt wurde:

$$x = (i - i') \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + (a - a') \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + (c - c') \frac{1}{\cos \delta} \dots (2')$$

Es ist aber $\Delta U - \Delta U'$ nichts anderes als der gesuchte tägliche Gang des Chronometers (in Sternzeit), um den es hauptsächlich dem Physiker zu tun ist, und er ist also unmittelbar durch die Differenz der beobachteten Durchgangszeiten U und U' gegeben, wenn $x = 0$ ist, d. h. das Instrument seine Lage durchaus unverändert beibehalten hat, oder $i = i'$, $a = a'$, $c = c'$ sind.

Hat man aber das Instrument, wie es in § 28 angegeben ist, jeweilen berichtet, d. h. die Neigung i und die Kollimation c vor der Beobachtung annulliert, so fallen in (1) und (1') und also auch in (2') die Korrektionsglieder mit i und c von selbst fort und es bleibt nur das mit dem Azimut a der Normalen der Drehungsachse des Fernrohrs oder jetzt der optischen Achse desselben, da die Kollimation $c = 0$ gemacht worden ist, übrig. Heißen wir A das Azimut der Mire (+, wenn sie im Norden nach Osten, im Süden nach Westen vom Meridian abweicht), durch welches wir a ausdrücken wollen, m die Ablesung am Horizontalkreis des Instrumentes bei der Beobachtung des Sterndurchganges im Fernrohr und m' die weitere Ablesung an jenem bei der Einstellung des Fernrohrs unter Drehung um die Vertikalachse auf die Mire, so ist, wenn wir den Winkel $m' - m = b$ setzen, die gesuchte Größe a :

$$a = b - A.$$

In betreff der Bestimmung des Azimuts A der Mire könnten wir, wie in bezug auf manche andere Details, auf astronomische Handbücher verweisen; da indessen die Bestimmung dieser Größe zur Orientierung überhaupt wie speziell für die später zu betrachtende magnetische Deklination doch nötig ist, so wollen wir sie hier gleich mit erörtern.

Die Bestimmung des absoluten Azimuts einer Mire geschieht am besten durch Beobachtung des Polarsternes mittels des Theodoliten. Heißen wir nämlich am vollständig berichtigten Theodolit die Ablesung am Horizontalkreis bei Einstellung des Fernrohrs auf die Mire h' und diejenige nach Einstellung auf den Polarstern h , so ist das Azimut A der Mire gegeben durch:

$$A = a + h' - h,$$

wenn die Bezifferung auf dem Horizontalkreis im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers wächst und a das Azimut des Polarsternes (+ von Nord nach Ost gerechnet) darstellt. Für den Moment des Durchganges des Polarsternes

durch den Vertikalfaden des Fernrohrfadenskreuzes berechnet sich aber dessen Azimut nach der Formel:

$$\operatorname{tanga} = \frac{-\sin t}{\cos \varphi \operatorname{tang} \delta - \sin \varphi \cos t} \dots \dots \dots (3)$$

wo φ die geographische Breite des Beobachtungsortes, δ die Deklination und t den sogenannten Stundenwinkel des Polarsternes zur Zeit der Beobachtung bedeuten. Dieser Stundenwinkel ist aber gegeben durch:

$$t = s - \alpha \dots \dots \dots (3')$$

falls s die beobachtete Sternzeit beim erwähnten Durchgang des Polarsternes durch den Vertikalfaden im Fernrohr und α die Rektaszension des Polarsternes für diese Zeit darstellen. δ und α sind wieder für die Zeit der Beobachtung den astronomischen Ephemeriden zu entnehmen. Da α und ebenso s in Zeit angegeben sind, so muß ihre Differenz, um den Wert von t zu erhalten, aus Stunden, Minuten und Sekunden durch Multiplikation mit 15 in Grade-Minuten und Sekunden-Bogen verwandelt werden. Ist aber die Beobachtung nicht mit einem nach Sternzeit gehenden, sondern nach mittlerer Sonnenzeit regulierten Chronometer gemacht worden, so ergibt sich:

$$s = U.v + m \dots \dots \dots (4)$$

wo U die korrigierte Chronometerzeit beim Durchgang, durch Multiplikation mit v in Sternzeit verwandelt oder nach den Ephemeridentafeln in Sternzeit umgerechnet, und m die Sternzeit des mittleren Mittags am Beobachtungsort ist. Die Ephemeriden geben die letztere unmittelbar bloß für Greenwich, Berlin, Paris usw. Ist der Beobachtungsort um die Länge λ ausgedrückt, in Stunden, Minuten und Sekunden, von einem dieser Orte abgehend, so bilde man die Differenz A der Sternzeit des mittleren Mittags am Ephemeridenort für den Beobachtungstag und den nächstfolgenden, dann ist zu ersterer hinzuzufügen: $\pm A \frac{\lambda^h}{24}$, wo das positive Zeichen gilt, wenn der Ort westlich vom

Ephemeridenort gelegen ist. Man kann den Polarstern in vier Hauptlagen beobachten, in seiner oberen oder unteren Kulmination und in seiner östlichsten oder westlichsten Elongation; man wählt die letzteren Lagen, wenn man der Korrektion des verwendeten Chronometers nicht ganz sicher ist, da ein Zeitfehler da weniger auf das Resultat influirt. Ist dagegen der Uhrfehler gut bekannt, so ist die Durchgangsbeobachtung in den ersten Lagen wegen der rascheren seitlichen Bewegung des Sternes bequemer.

Häufig ist es indessen tunlicher, das Azimut einer Mire durch Beobachtung der Sonne zu bestimmen. Zu dem Ende richtet man nach Voraussetzung des Sonnenglases ¹⁾ das Fernrohr des Theodoliten auf die Sonne und bestimmt nach den Schlägen des nach mittlerer Sonnenzeit gehenden Chronometers die Zeit des Antritts des ersten Sonnenrandes an den Durchschnittspunkt des Fadenskreuzes, wobei man zu dem Ende durch Drehen der Mikrometerschraube am Höhenkreis (der Horizontalkreis bzw. seine Alhidade bleibt geklemmt und unverändert) der Sonne in ihrer Vertikalbewegung mit

¹⁾ Das Sonnenglas ist ein sehr dunkel gefärbtes Glas, welches die Sonne nur noch als helle Scheibe zeigt, sie also ohne Blendung des Auges zu betrachten erlaubt.

dem Horizontalfaden folgt. Nachdem man rasch die Achsenlibelle abgelesen und umgelegt hat und den Stand des Höhenkreises notiert hat, beobachtet man in gleicher Weise die Zeit des Antritts des zweiten Sonnenrandes an das Fadenkreuz, liest dann wieder die Achsenlibelle und den Höhenkreis ab und nunmehr auch den Horizontalkreis. Darauf löst man dessen Klemme, stellt das Fernrohr auf die Mire ein und notiert wieder die Stellung der Alhidade am Horizontalkreis.

Heißen wir das Mittel aus den für den Fadenantritt des ersten und zweiten Sonnenrandes beobachteten Uhrzeiten U , so berechnet sich damit das Azimut der Sonne a , vom Nordpunkt positiv nach Osten gezählt, wieder nach der Formel (3), wo jetzt δ die Deklination der Sonne zur Zeit der Beobachtung — die mit Berücksichtigung der Längendifferenz des Beobachtungsortes gegen Greenwich und der stündlichen Änderung der Deklination $\Delta\delta$ dem „Nautical Almanac“ zu entnehmen ist — und der Stundenwinkel der Sonne t durch die Formel gegeben ist:

$$t = 15 \cdot (U + \Delta U - Z) \dots \dots \dots (5)$$

wenn ΔU die Uhrkorrektion und Z die Zeitgleichung darstellen und 15 wieder den Faktor zur Verwandlung von Zeiten in Bogen repräsentiert. Dabei ist zu bemerken, daß zu den am Vormittag am Chronometer abgelesenen Uhrzeiten jeweilen noch 12 Stunden hinzuzuzählen sind.

Bezeichnen wir ferner den aus den Ablesungen am Horizontalkreis sich ergebenden Horizontalwinkel zwischen Sonne und Mire mit d , so ist das gesuchte Azimut A der letzteren:

$$A = a - d \dots \dots \dots (6)$$

wo der Winkel α mit einem positiven Vorzeichen zu nehmen ist, wenn die Sonne, vom Beobachter aus betrachtet, rechts von der Mire steht. An dem Horizontalwinkel d ist für den Fall, daß die Neigung i der Horizontalachse des Fernrohrs nicht nahezu annulliert sein sollte, noch eine Korrektion anzubringen, so daß dann statt d in obiger Gleichung zu setzen ist:

$$d' = d + i \operatorname{tang} h,$$

wo h die am Vertikalkreis abgelesene Höhe der Sonne über dem Horizont bei der Beobachtung darstellt.

Daß das Messungsergebnis durch wiederholte Einstellung auf die Mire und durch weitere Beobachtungen des Sonnendurchganges etwa nach Umlegen des Fernrohrs in seinen Lagern usw. sicherer zu gestalten ist, bedarf kaum der Erwähnung.

Zeitbestimmung nach der Methode der korrespondierenden Sonnenhöhen. Viel geringere Hilfsmittel als die erörterte Zeitbestimmung mit dem Passageninstrument erheischt die Methode der korrespondierenden Sonnenhöhen. Nach derselben beobachtet man nämlich an der betreffenden Uhr die Zeiten, wo die Sonne einige Stunden vor und einige Stunden nach Mittag genau gleiche Höhen über dem Horizont einnimmt. Heißen wir die beobachteten Uhrzeiten am Vormittag U_1 und am Nachmittag U_2 , sowie U_0 die Uhrzeit des wahren Mittags, so ist, wenn das Chronometer nach mittlerer Sonnenzeit geht:

$$U_0 = \frac{U_1 + U_2}{2} - \frac{\Delta\delta}{15} \left(\frac{\operatorname{tang} \varphi}{\sin 15t} - \frac{\operatorname{tang} \delta}{\operatorname{tang} 15t} \right) t \dots \dots \dots (7)$$

wo abkürzend gesetzt wurde:

$$t = \frac{U_2 - U_1}{2}.$$

Den zweiten Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen heißt man die Mittagsverbesserung. Hat man sie an $\frac{U_1 + U_2}{2}$ angebracht, also U_0 berechnet, so findet man dann die Uhrkorrektion ΔU des Chronometers für den Mittag, bezogen auf mittlere Sonnenzeit, nach der Formel:

$$\Delta U = 24^h - U_0 + Z \dots \dots \dots (8)$$

wo Z wieder die Zeitgleichung für den betreffenden Ort, und Tag (mittlere Zeit weniger wahre Zeit) darstellt und ein positives Vorzeichen von ΔU ein Zurückgehen des Chronometers gegen mittlere Sonnenzeit bezeichnet. Da die Breite φ des Ortes als bekannt vorauszusetzen ist und die Deklination δ der Sonne am wahren Mittag des Ortes sowie die stündliche Zunahme derselben $\Delta\delta$, ebenso wie Z , unmittelbar den astronomischen Ephemeriden zu entnehmen sind, so ist nach den Formeln (7) und (8) die Uhrkorrektion aus den Beobachtungszeiten U_1 und U_2 leicht zu berechnen, welche des nähern in folgender Weise bestimmt werden.

Steht für die Beobachtung der Sonne bei diesen Messungen ein Theodolit mit Sonnenglas am Fernrohrkular zur Verfügung, so stellt man nach erfolgter Berichtigung desselben sein Fernrohr am Vormittag so auf die Sonne ein, daß dieselbe mit ihrem oberen Rande noch etwas unter dem Horizontalfaden des Fadenkreuzes sich befindet, zieht die Klemme am Höhenkreise an und zählt nach den Schlägen des Chronometers die ganzen Sekunden mit Schätzung der Zehntel derselben, bis der obere Sonnenrand eben den Horizontalfaden berührt. So erhält man U_1 . Ohne die Klemme am Höhenkreise zu lösen, also bei gleicher Höhe des Fernrohrs, richtet man dasselbe am Nachmittag durch Drehung der Alhidade um die Vertikalachse wieder auf die Sonne, und zwar zu einer Zeit, wo der obere Rand desselben noch etwas über dem Horizontalfaden seines Fadenkreuzes sich befindet, und beobachtet wie am Vormittag wieder die Uhrzeit, wo eben die Berührung mit dem Horizontalfaden eintritt. Diese Beobachtung gibt U_2 . Man kann aber auch am Vormittag das Fernrohr nach dem Höhenkreise successive auf verschiedene bestimmte, nicht sehr verschiedene Höhen einstellen und jeweilen die Zeiten messen, wo die Sonne mit ihrem oberen Rande durch Berührung des Horizontalfadens diese Höhe erreicht. Verfährt man dann in gleicher Weise am Nachmittag und bildet das Mittel aus allen beobachteten Zeiten am Vormittag einerseits und Nachmittag andererseits, so erhält man für U_1 und U_2 Werte, welche offenbar eine größere Sicherheit darbieten.

Noch einfacher wird diese Beobachtung des Durchganges der Sonne durch bestimmte Höhen mit dem Sextanten oder Prismenkreis unter Benutzung des Quecksilberhorizontes oder künstlichen Horizontes. Während beim Quecksilberhorizont die freie Oberfläche des in einer Schale befindlichen Quecksilbers von selbst einen horizontalen Planspiegel darbietet, wird dieser beim künstlichen Horizont mittels einer sehr empfindlichen Libelle durch Aufsetzen derselben auf eine Planplatte aus schwarzem Glase mit Stellschrauben erreicht. Das Nähere über die Einrichtung der ersteren Instrumente auf ihre Beschreibung in der Optik verschiebend, bemerken wir über das

Messungsverfahren zu obigem Zweck nur kurz folgendes. Man stellt auch da am Teilkreise desselben auf bestimmte Höhen ein und beobachtet ebenfalls am Vormittag und Nachmittag die Zeiten, wo die Sonne diese Höhen erreicht, d. h. bei vertikaler Stellung des in der Hand gehaltenen Kreises das direkt gesehene Bild der Sonne im Quecksilberhorizont mit dem Bilde derselben nach Spiegelung am festen und beweglichen Spiegel des Sextanten koinzidiert oder, was besser ist, die Ränder dieser beiden Bilder der Sonne sich berühren.

Entsprechende Messungen korrespondierender Sonnenhöhen in der einen oder anderen Weise an folgenden Tagen gestatten, aus dem Unterschiede der gefundenen Uhrkorrekturen den täglichen Gang des Chronometers zu berechnen.

§ 33. Begriff der Masse. Die Masse eines Körpers wird gewöhnlich definiert als die Quantität der Materie, die er enthält. Diese viel verbreitete und viel bekämpfte Definition wäre in der Tat eine nichtssagende und deshalb unnütze Phrase, wenn wir sie nicht durch nachfolgende Erläuterungen erklären und vervollständigen würden.

Wir gelangen zunächst zu einer einwurfsfreien Vorstellung von relativen Quantitäten von Materie, wenn wir verschieden große Volumina gleichartiger Materie ins Auge fassen. So enthalten sicherlich 2 Liter Wasser doppelt soviel Materie als 1 Liter desselben Wassers. Setzen wir demnach die Masse, welche in 1 Liter Wasser enthalten ist, gleich Eins, so ist die Masse von n Litern Wassers gleich n .

Wir überlegen weiter, daß die Menge der Materie eines Körpers oder seine Masse nicht geändert wird, wenn wir nichts Materielles von ihm fortnehmen oder hinzugeben, mögen wir sonst was immer für Veränderungen mit dem Körper vornehmen. Lassen wir also n Liter Wasser gefrieren, so ändert sich wohl Volumen und Zustand desselben, aber nicht seine Masse. Sie würde sich auch nicht ändern, wenn wir das Wasser in Dampf verwandeln oder wenn wir es durch einen elektrischen Strom in seine Bestandteile, Wasserstoff und Sauerstoff, zerlegen würden. Das entstehende Gemisch der letztgenannten beiden Gase, das sogenannte Knallgas, hätte also ebenfalls die Masse $= n$ und würde dieselbe auch behalten, wenn wir das Gas beliebig verdichten oder ausdehnen würden. Die Masse eines Körpers ist also dasjenige, was bei allen Verwandlungen desselben unverändert gleich groß bleibt.

Sind wir auf diese Weise in den Stand gesetzt, Massen von Eis, Wasser, Dampf und Knallgas miteinander zu vergleichen und nach gemeinsamem Maße zu messen, so sind wir deshalb noch nicht imstande, die Massen auch solcher Körper miteinander zu vergleichen, welche nicht durch physikalische oder chemische Vorgänge ineinander übergeführt werden können. Wir sind z. B. nicht von vornherein imstande zu ermitteln, wie sich die Masse eines Liters Quecksilber zu der eines Liters Wasser verhält.

Um die Massen solcher Körper zu vergleichen, welche aus verschiedenen chemischen Grundstoffen bestehen, ist es deshalb notwendig, eine Eigenschaft der Materie aufzusuchen, welche ihr unabhängig von der Art der Materie zukommt und allein von der Quantität derselben abhängig ist. Es bieten sich zwei solcher Eigenschaften dar. Die erste derselben ist die Eigenschaft

der Materie, sich gegenseitig anzuziehen (Gravitation, Schwere); die zweite ist die Eigenschaft, jeder Änderung der vorhandenen Geschwindigkeit einen Widerstand entgegenzusetzen (Trägheit, Beschleunigungswiderstand).

Durch sorgfältige Versuche, welche freilich nicht immer einfach, sondern meist auf großen Umwegen ausführbar sind, kann man sich zunächst überzeugen, daß die Stärke der gegenseitigen Anziehung der Körper so lange dieselbe bleibt, solange die Quantität der angezogenen Materie (in oben erläuteter Weise verglichen) dieselbe bleibt, mag man sonst was immer für Veränderungen mit ihr vornehmen. Denkt man sich also z. B. auf die eine Schale einer Wage Gewichtsstücke gelegt, auf die andere ein verschlossenes Gefäß gesetzt, welches so viel Wasser enthält, daß die Wage im Gleichgewicht steht, d. h. also, daß beide Belastungen derselben gleich starke Anziehung erleiden, so bleibt diese Gleichheit fortbestehen, wenn das Wasser innerhalb des Gefäßes ganz oder teilweise in Eis oder in Dampf oder in Knallgas verwandelt wird. Wir sagen deshalb, das Wasser, das Eis, der Dampf und das Knallgas haben das gleiche Gewicht. Dies ist insbesondere beim Knallgas bemerkenswert, welches ganz anderer chemischer Natur ist als das Wasser.

Denken wir uns ein andermal, wir hätten auf die eine Schale der Wage ein Gefäß gegeben, welches, voneinander getrennt, äquivalente Mengen von Kochsalz (Chlornatrium) und Höllenstein (salpetersaures Silber) nebst einer Quantität von Wasser enthält. Diesen Materialien sei durch Gewichtsstücke auf der anderen Schale das Gleichgewicht gehalten. Vermischen wir dann die erstgenannten Materialien, so zersetzen sie sich gegenseitig, und es entstehen Körper mit ganz anderen chemischen und physikalischen Eigenschaften, nämlich festes Chlorsilber und eine Lösung von Natronsalpeter. Trotzdem wird das Gleichgewicht an der Wage nicht gestört, weil nichts Materielles fortgekommen oder dazugekommen ist, mit anderen Worten, weil die Masse der Materie unverändert blieb. Durch unzählige ähnliche Versuche gewinnen wir also die Überzeugung, daß gleichen Massen gleiche Gewichte entsprechen.

Durch einen Induktionsschluß, der aber zunächst nur auf einer Hypothese beruht und noch nicht bewiesen ist, kommen wir dann dazu, diesen Satz umzukehren und zu sagen: Gleichen Gewichten entsprechen immer auch gleiche Massen. Ein Körper, dessen Gewicht n mal so groß als das Gewicht eines Liters Wassers ist, hat also auch eine Masse n .

Daß diese Verallgemeinerung, vermöge welcher wir auch bei solchen Körpern, die nicht auseinander entstehen können, aus gleichen Gewichten auf gleiche Massen schließen, nicht von vornherein sicher ist, lehrt folgende Überlegung. Es wäre gewiß denkbar, daß die Erde in ihrer Anziehung gewisse Stoffe bevorzuge und deshalb gleiche Massen von diesen stärker anziehe als gleiche Massen anderer Stoffe, so etwa, wie der Magnet eine gleiche Masse Eisen stärker anzieht wie eine gleiche Masse Mangan, Nickel usw. Wir wissen demnach wohl bestimmt, daß 1 kg Eis dieselbe Masse habe wie 1 kg Wasser, aber nicht, ob dies dieselbe Masse habe, wie z. B. 1 kg Quecksilber.

Solange wir also die Definition: „Masse ist die Quantität der Materie“ beibehalten wollen, wird uns die Eigenschaft der Anziehung allein nicht mit Sicherheit die Massen verschiedener Körper vergleichen lassen. Geben wir obige Definition auf und nennen willkürlich solche Massen gleiche Massen, welche gleiches Gewicht haben, so entfällt zwar jeder Einwurf, aber auch

jeder Vorteil der Einführung des Namens Masse, der dann neben dem Ausdruck Gewicht überflüssig ist.

Wir müssen uns also nach einem weiteren Kriterium umsehen, nach welchem wir die Quantität der Materie beurteilen können, und wir werden später ein solches finden in der Eigenschaft der Materie, unter dem Einflusse einer Kraft eine Beschleunigung zu erleiden, deren Größe nur allein abhängt von der Quantität der Materie, auf welche die Kraft wirkt. Da wir die Begriffe Kraft und Beschleunigung noch nicht erklärt haben, so müssen wir uns hier vorläufig mit der Festsetzung begnügen, daß wir jene Massen als gleich annehmen, welche sich auf der Wage das Gleichgewicht halten.

§ 34. Die Masseneinheit und die daraus abgeleitete Volumeinheit (Liter). Dieselbe französische Kommission, welche im Jahre 1799 das Meter als den 10 millionten Teil des Erdquadranten definierte, hatte auch festgesetzt, daß als Einheit der Masse unter dem Namen Gramm die Masse eines Cubikcentimeters reinen Wassers, gemessen bei der Temperatur seiner größten Dichte, nämlich 4° C, gelten solle.

Lefèvre-Gineau und Fabbroni wurden mit der schwierigen Aufgabe betraut, nach dieser Definition die Masseneinheit, bzw. ein zweckmäßiges Vielfaches derselben materiell herzustellen. Sie benutzten dazu einen von Fortin angefertigten, möglichst genauen, geschlossenen Zylinder aus Messing von rund 11 Cubikdecimeter Inhalt, dessen äußeres Volumen durch sorgfältige Abmessung genau ermittelt wurde, worauf sie die diesem Volumen entsprechende Wassermasse durch den scheinbaren Gewichtsverlust bestimmten, welchen der Zylinder infolge des Archimedischen Prinzips beim Einsenken in reines Wasser erfuhr. Dem Resultate dieser Messungen zufolge stellte dann Fortin als Normalmasseneinheit (Kilogrammetalton des Archives) einen Platinzylinder her, dessen Höhe gleich dem Durchmesser war, und der im leeren Raume ebensoviel wiegen sollte wie ein Cubikdecimeter reinen Wassers bei 4° C. Da die Wägung im Wasser nicht bei 4°, sondern bei einer anderen Temperatur und nicht im luftleeren Raume vorgenommen werden konnte, so waren verschiedene Korrekturen anzubringen, deren Ausmittlung schwierig ist und im Verein mit anderweitigen Fehlerquellen verursacht haben, daß ebenso wie das Meter nicht genau als der 10 millionte Teil des Erdmeridians, auch das Kilogramm nicht genau als die Masse eines Cubikdecimeters Wasser von 4° erhalten worden war. Spätere Messungen haben im Mittel ergeben, daß das ursprüngliche Platinkilogramm der Archive zu Paris gegenüber seiner Definition einige Centigramm zu groß ausgefallen war. Der mittlere Fehler aller Einzelmessungen betrug ± 142 Milligramm¹⁾.

Da nun aber bei der Vergleichung zweier Kilogramme auf der Wage eine Genauigkeit von $\pm 0,0022$ Milligramm zu erreichen ist, so hat die Internationale Meterkommission vom Jahre 1872 ohne weiteres darauf verzichtet, das neue internationale Kilogramm nach seiner idealen Definition herzustellen, sondern festgesetzt, daß dasselbe dem bestehenden Platinkilogramm der

¹⁾ H. Wild, De la détermination du poids, d'un décimètre cube d'eau distillée à 4° C. Bull. de l'Acad. de St. Pétersbourg 15 (1870). — Deutsch: Über die Bestimmung des Gewichtes von einem Cubikdecimeter destillierten Wassers bei 4° C. Pogg. Ann., Ergänzungsbd. 5, 15, 1870. Siehe die neuesten Resultate S. 95.

Archive möglichst gleich, jedoch aus der widerstandsfähigeren Legierung von 90 Proz. Platin und 10 Proz. Iridium hergestellt werde. Im Jahre 1889 wurde das neue Prototyp im Internationalen Bureau fertiggestellt und eine Anzahl gleichwertiger Kopien desselben an die betreffenden Staaten verteilt. Dieses Prototyp stellt einen gleichseitigen Zylinder mit ganz schwach abgerundeten Kanten aus der erwähnten Platiniridiumlegierung dar, dessen Oberfläche zum Hochglanz poliert und ohne Marke ist, um das Ansetzen von Staub zu vermeiden. Die 40 nationalen Kopien sind ebenso hergestellt, nur tragen sie auf der Seitenfläche ganz schwach in matt gehaltenen Zügen die unterscheidenden Nummern. Alle Kilogramme ruhen für gewöhnlich auf einer polierten Quarzplatte auf, die im Grunde einer Vertiefung der messingenen Fußplatte liegt, und sind alle von einem polierten Platinringe umgeben, welcher sie vor der Berührung mit dem Messing schützt. Über die Zylinder sind zwei auf der ebenen Fußplatte staubdicht aufruhende Glasglocken gestülpt, von denen die äußere durch einen besonderen, mit Schlüssel zu öffnenden Verschluss an der Platte festgeklemmt ist. Das internationale Prototyp ist im eisernen Schranke noch unter eine besondere tubulierte Glasglocke gestellt, welche luftleer gepumpt werden kann. Von allen Kopien des Prototyps wurde das Volumen durch Wägung in Wasser genau ermittelt und das genaue Gewicht derselben im Vergleich mit dem des Prototyps, bezogen auf den luftleeren Raum, mit einer Genauigkeit von $\pm 0,0022$ Milligramm festgestellt¹⁾.

Die Masse dieses Platiniridiumkilogramms, bzw. ihr tausendster Teil gilt nunmehr als Masseneinheit, also nicht mehr die Masse eines Cubikdecimeters Wasser.

Durch decimale Unterteilung und Vervielfachung entstehen folgende Massenmaße:

1 Tonne (t)	= 1000000	Gramm (g)
1 Kilogramm (kg)	= 1000	"
1 Hektogramm (Hg)	= 100	"
1 Dekagramm (Dg)	= 10	"
1 Gramm (g)	= 1	"
1 Decigramm (dg)	= 0,1	"
1 Centigramm (cg)	= 0,01	"
1 Milligramm (mg)	= 0,001	"
1 Mikrogramm	= 0,000001	"

Bedeutung des Liters als Volumeinheit. Nach neueren sehr sorgfältigen Untersuchungen ergaben sich für die Masse eines Cubikdecimeters Wasser bei 4°C und Normaldruck, gemessen nach dem eben definierten Kilogramm, nachfolgende Werte:

Macé de Lépinay, 1. Methode	0,999954
Macé de Lépinay, Pérot et Fabry, 2. Methode	0,999974
Chappuis	0,999976
Guillaume, Mittel aus vier Versuchen	0,999936

¹⁾ Rapport sur la construction, les comparaisons et les autres opérations ayant servi à déterminer les équations des nouveaux prototypes métriques par le directeur du bureau international R. Benoit et présenté par le comité international à la première Conférence générale. September 1889. Paris, Gauthier-Villars.

Hieraus wurde mit Berücksichtigung aller Umstände das Gesamtergebn abgeleitet, daß die

Masse eines Cubikdecimeters Wasser = $0,999\,960 \pm 0,000\,010$ kg sei. Das Kilogrammprototyp ist also um etwa 40 Milligramm zu groß geraten.

Da man nun den Inhalt von Hohlmaßen viel sicherer durch Abwägen ihres Masseninhaltes als durch Ausmessen ihrer Dimensionen ermittelt, so hat die Internationale Kommission vom 2. Oktober 1880 behufs präziser Definition festgesetzt, daß

Die Einheit des Volumens für Präzisionsmessungen jenes Volumen sein solle, welches von der Masse eines Kilogramms Wasser im Maximum seiner Dichte (bei 4° C) und beim Normaldruck¹⁾ eingenommen wird. Diese Volumeinheit (also nicht das Cubikdecimeter) wird fortan Liter genannt.

Die vom Liter abgeleiteten Maße Kiloliter, Hektoliter, Dekaliter, Deciliter, Centiliter, Milliliter und Mikroliter sind also im Einklange mit dem Kilogramm und dort anzuwenden, wo das Volumen durch Wägung ermittelt wird, während die Maße Cubikmeter, Cubikdecimeter, Cubikcentimeter und Cubikmillimeter im Einklange mit dem Meter stehen und streng genommen nur dann anzuwenden wären, wenn das Volumen durch Abmessungen mit dem Längenmaße ermittelt würde. Die internationale Generalversammlung von 1901 sanktionierte diese Festsetzung und fügte in Anbetracht der oben erwähnten Messungen hinzu, daß für Volumbestimmungen, deren Genauigkeit $\frac{1}{25\,000}$ der zu messenden Größe nicht übersteigt, der Unterschied zwischen Cubikdecimeter und Liter vernachlässigt werden kann²⁾.

§ 35. Gewicht; Gewichtssätze. Man versteht unter dem Gewichte eines Körpers die Kraft, mit welcher derselbe von der Erde angezogen wird³⁾. Demnach ist das Gewicht eine Größe ganz anderer Art als die Masse. Das geht schon daraus hervor, daß die letztere unveränderlich ist, während das Gewicht von Umständen abhängt, die außerhalb des Körpers liegen. Wenn man mit einem Kilogramm auf Reisen geht, so behält es, solange es nicht beschädigt wird, seine Masse unverändert bei, hingegen verringert sich sein Gewicht, so oft wir eine Höhe ersteigen oder in geringere geographische Breiten kommen. Ein Körper, dessen Gewicht in

¹⁾ Nach Beschluß des Internationalen Maß- und Gewichtskomitees gilt als Normaldruck der Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0° C unter 45° Breite im Meeresniveau. Dabei sei die Dichte des Quecksilbers bei 0° = 13,595 93 und die Beschleunigung der Schwere unter 45° Breite und im Meeresniveau = 980,665 cm - s. Letzterer Wert abgeleitet aus den Bestimmungen von Desforges für das Internationale Bureau = 980,991, und multipliziert mit dem Reduktionskoeffizienten 0,999 668 zur Reduktion auf 45° und Meereshöhe.

²⁾ Procès-verbaux des séances du Comité intern. des p. et m. de 1901, 2. série, T. I. Annexe: Décisions prises par la conférence générale des p. et m. et par le Comité international concernant les unités et les prototypes métriques.

³⁾ Die Definition: „Gewicht ist der Druck, den ein Körper infolge der Schwere auf die Unterlage, oder der Zug, den er auf den Aufhängepunkt ausübt“, ist nicht zweckmäßig, weil sie nicht anwendbar ist auf fallende, geworfene Körper, auf Luftballons usw., die doch auch ein Gewicht haben, da die Erde eine Kraft auf sie ausübt.

Madrid = 1 gesetzt wird, hat in Christiania das Gewicht 1,0018, es ändert sich vom Äquator bis zum Nordpol um ein halbes Prozent.

Das Kilogramm ist eine Masse und kein Gewicht, man kann nur sagen, es habe ein Gewicht und kann diesem die Bezeichnung Kilogramm-gewicht beilegen¹⁾.

Auch die sogenannten Gewichtssätze sollten richtiger Massensätze heißen, denn die auf den Gewichtsstücken angebrachten Zahlen bedeuten nur die Größe der Massen, nicht aber die Anziehungskräfte, welche die Gewichtsstücke von der Erde erleiden. Auch haben wir beim Wägen in der Regel gar nicht die Absicht, irgend etwas über diese Anziehungskräfte zu erfahren, wir wollen nur, fußend auf dem Satze, daß gleichen Gewichten unter gleichen Umständen auch gleiche Massen entsprechen, die letzteren unter sich vergleichen.

Ein richtig adjustierter Gewichtssatz soll so beschaffen sein, daß er im luftleeren Raume mit den Platiniridiumprototypen übereinstimmt. Wäre der Gewichtssatz aus demselben Material, so würde er auch bei Wägung in Luft damit übereinstimmen. Wegen der Kostbarkeit dieses Materials fertigt man aber die Gewichtssätze in der Regel aus Messing und nur die Bruchteile des Grammes aus Platin (oder Aluminium). Da nun aber Messing bei gleicher Masse ein mehr als doppelt so großes Volumen hat als Platiniridium (die Volumina verhalten sich wie $\frac{1}{8,39} : \frac{1}{21,45} = 1:2,55$), so verdrängt es auch mehr Luft und erleidet nach dem Archimedischen Prinzip einen größeren Auftrieb als Platiniridium. Folglich kann ein richtig adjustiertes Messinggewichtsstück mit einem richtigen Platiniridiumgewichtsstücke bei Wägung in Luft nicht übereinstimmen. Der Unterschied beträgt bei einem Kilogramm und Luft mittlerer Beschaffenheit ungefähr 0,09 g, also einen Betrag, der schon auf einer gewöhnlichen Krämerwage noch bemerkbar ist, also keineswegs vernachlässigt werden darf. Bei Präzisionswägungen ist es deshalb auch erforderlich, daß alle Gewichtsstücke aus gleich dichtem Material seien, da man sonst für jedes einzelne den Auftrieb besonders bestimmen müßte. Darum dürfen Präzisionsgewichte auch keine Hohlräume enthalten. Gewichtsstücke mit eingeschraubten Stielchen sind deshalb als solche nicht zulässig, denn ist der Hohlraum unter dem Stielchen von der Atmosphäre abgeschlossen, so hat er Einfluß auf den Auftrieb, ist er aber mit der Atmosphäre in Verkehr, so gibt er zu anderen Fehlern infolge des Eindringens von Staub oder Feuchtigkeit Anlaß. Ferner müssen die Messinggewichte mit einem nicht oxydierbaren Metall überzogen sein, da Firnissschichten nicht unveränderlich sind. Man pflegt daher solche Gewichte zu vergolden oder zu vernickeln. Vergoldete Gewichte haben den

¹⁾ Die dritte Generalversammlung für M. u. G. hat in ihrer Sitzung vom 22. Oktober 1901 zu Paris einstimmig die Erklärung adoptiert:

1. Das Kilogramm ist die Einheit der Masse und gleich der Masse des internationalen Prototyps des Kilogramms.
2. Der Ausdruck Gewicht bezeichnet eine Größe gleicher Natur wie eine Kraft; das Gewicht eines Körpers ist das Produkt seiner Masse in die Beschleunigung der Schwere und speziell das Normalgewicht das Produkt seiner Masse in die Normalbeschleunigung der Schwere (980,665 cm-s).

Nachteil, daß sie gegen Quecksilber ungemein empfindlich sind, auch ist der Nickelüberzug härter. Galvanische Platinüberzüge haben sich nicht bewährt.

Um solche vergoldete oder vernickelte Gewichtsstücke leichter rektifizieren zu können, ohne deren schützenden Überzug zu verletzen, pflegt man sie mit einem Eichstifte aus massivem Golde oder Nickel zu versehen. Für chemische Laboratorien, in denen die sauren Dämpfe die Gewichtsstücke gefährden, sind Bergkristallgewichte empfehlenswert. Hohle, mit Quecksilber oder mit Bleischrot gefüllte Glasgewichte sind aus den oben angeführten Gründen wegen ungleichen Auftriebes und wohl auch wegen der hygroskopischen Eigenschaften des Glases für Präzisionswägungen nicht brauchbar. Die Bezeichnung der Gewichtsstücke durch vertiefte Zahlen ist wegen des in den Vertiefungen sich ansammelnden Staubes zu vermeiden.

Für die Rektifikation der Gewichtsstücke ist notwendig, daß die gleichwertigen Stücke voneinander kenntlich gemacht seien. Daß Präzisionsgewichte nie mit den Händen berührt, sondern nur mittels Pinzetten mit beinernen oder lederumhüllten Spitzen angefaßt werden dürfen und auch nur in Etuis mit weichen Umhüllungen aufbewahrt werden sollen, erscheint selbstverständlich.

Auf die Richtigkeit gekaufter Gewichtssätze darf sich der Physiker nie verlassen, er muß sie stets von Zeit zu Zeit einer Prüfung unterziehen. Er benötigt dazu ein verifiziertes Normalgewicht, am besten in der Höhe der Summe der Nennwerte der zu prüfenden Gewichtsstücke, also z. B. ein Normalkilogramm oder ein Normalhektogramm, wenn das größte Gewichtsstück des Satzes 500 oder 50 g beträgt. Der Gewichtssatz enthalte z. B. drei 1 g-Stücke, ein 2 g-Stück, ein 5 g-Stück, zwei Zehner, einen Zwanziger und ein 50 g-Stück. Man vergleicht dann zunächst durch Vertauschung auf derselben Schale, während auf der anderen eine Tara liegt, die drei Einser, dann zwei Einser zusammen mit dem Zweier, dann die Summe $1 + 1 + 1 + 2$ mit 5 usf. Man erhält dann die Gewichte aller Stücke zunächst ausgedrückt durch einen der Einser als Einheit mit gewissen kleinen Korrekturen. Indem man schließlich die Summe aller Stücke mit dem Normalgewichte vergleicht, erhält man die wahren Werte aller Stücke. Sind die Abweichungen nicht groß, so kann man sie für die gröberen Wägungen vernachlässigen, für die genaueren Wägungen in Rechnung bringen, indem man statt der Nennwerte die wahren Werte addiert. Dazu müssen, wie oben erwähnt, die gleichwertigen Stücke voneinander kenntlich sein.

Sind die Abweichungen alle gleichen Zeichens und ungefähr proportional den Nennwerten, so gelingt es vielleicht, einen gemeinsamen Reduktionsfaktor zu berechnen, mit dem man die Summe der Nennwerte einer Wägung multipliziert, um das wahre Gewicht bis auf einen zu vernachlässigenden Fehler zu erhalten.

Diese Verfahrensweisen führen fast immer sicherer und schneller zum Ziele als eine wirkliche Abänderung der Gewichtsstücke, die man am besten dem Mechaniker überläßt.

Über die Ausführung der Wägungen, die Korrektion wegen des Auftriebes usw. soll bei der Wage das Nähere besprochen werden.

§ 36. Dichte. Spezifisches Gewicht. Zu dem Begriffe der Dichte gelangen wir zunächst in einwurfsfreier Weise, indem wir von der Tat-

sache ausgehen, daß sich die Körper durch Druck oder Abkühlung auf einen kleineren Raum bringen lassen. Wir können uns dies in der Weise vorstellen, daß sich die kleinsten Teile des Körpers gegenseitig nähern, sich also, wie man sagt, dichter anordnen. Für ein und denselben homogenen Körper erhalten wir demnach ein sicheres Maß der Dichte in dem Verhältnis zwischen der Maßzahl seiner Masse und der Maßzahl seines Volumens, da ja die Anzahl seiner Teile der Masse proportional sein muß. Hat also die Masse des Körpers die Größe M , das Volumen die Größe V , so ist die Dichte d gegeben durch

$$d = \frac{M}{V} \dots \dots \dots (1)$$

Dagegen ist es nicht möglich, von Körpern verschiedener Materie zu sagen, wie ihre Dichten sich verhalten, weil wir nicht wissen, ob ihre Teilchen einander näher oder ferner stehen. Wenn wir trotzdem die Beziehung $d = \frac{M}{V}$ verallgemeinernd auch zur Vergleichung der Dichten verschiedener

Körper gelten lassen, so geben wir die ursprüngliche Dichtevorstellung auf und ersetzen sie durch ein konventionelles Zahlenverhältnis. Wir definieren dann die Dichte als die Masse der Volumeneinheit des Körpers.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir erfahren, daß es zwei Volumenmaße gibt: Cubikdecimeter (Cubikcentimeter) einerseits und Liter (Milliliter) andererseits, welche nahe aber nicht genau übereinstimmen.

Messen wir die Massen nach Kilogrammen (Grammen), die Volumina nach Litern (Millilitern), so erhalten wir für das Wasser von 4° die Dichte = 1, während wir bei Zugrundelegung des Cubikdecimeters (Cubikcentimeters) diese Dichte = 0,99996 finden müßten. Behalten wir, was zweckmäßiger ist, die erstere Meßweise bei, so entspricht dieselbe auch folgender Definition der Dichte: Die Dichte eines Körpers ist das Verhältnis seiner Masse zur Masse eines gleichen Volumens Wasser größter Dichte.

Sobald ferner feststeht, daß am selben Orte die Massen proportional sind den Gewichten, kann man das Verhältnis der Massen durch das Verhältnis der Gewichte ersetzen. Daher stammt dann der Ausdruck spezifisches Gewicht für Dichte.

Die Dichte (spezifisches Gewicht) der festen Körper und Flüssigkeiten pflegt man auf Wasser von 4°, die der Gase und Dämpfe entweder auf Luft oder auf Wasserstoffgas, beide bei 0° und Normaldruck genommen, zu beziehen.

Ausnahmsweise bezieht man die Dichte von Gasen und Dämpfen bei irgend einer Temperatur und irgend einem Drucke auf Luft oder Wasserstoffgas von derselben Temperatur und demselben Drucke. Das muß aber jedesmal ausdrücklich bemerkt werden.

Über die Ausführung der Dichtebestimmungen können wir erst später Näheres mitteilen.

Zweites Kapitel.

Von den Bewegungen und den Kräften im allgemeinen.

§ 37. Einteilung der Bewegungen; gleichförmige Bewegung, Begriff der Geschwindigkeit. Wenn ein Punkt seine Lage gegenüber anderen Punkten innerhalb einer gewissen Zeit stetig, d. h. ohne Überspringung von Zwischenlagen ändert, so sagt man, er bewege sich.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns eigentlich nur mit den Bewegungen einzelner materieller Punkte oder solcher Systeme von materiellen Punkten, bei welchen die letzteren sämtlich die gleiche Bewegung miteinander machen.

Die Lehre von den Bewegungen ohne Rücksicht auf die bewegten Massen und die bewegenden Kräfte heißt Phronomie.

Die Bewegungen eines Punktes können eingeteilt werden entweder in räumlicher Beziehung, d. h. in bezug auf die Gestalt seiner Bahn, oder in zeitlicher Beziehung, nämlich in bezug auf die Zeitdauer, in welcher die einzelnen Teile der Bahn zurückgelegt werden.

Die Bahn der Bewegung ist entweder eine gerade Linie, was den einfachsten Fall darstellt, oder sie ist eine ebene Kurve, z. B. ein Kreis, oder sie ist eine Raumkurve, z. B. eine Schraubenlinie.

Die Richtung der Bewegung ist bei der geradlinigen Bewegung diese Gerade selbst, also immer gleichbleibend, bei der krummlinigen Bewegung ist sie veränderlich. Unter der momentanen Richtung versteht man dann die Tangente an den Punkt der Bahn, wo sich momentan der bewegliche Punkt befindet.

Der Sinn der Bewegung (im gewöhnlichen Sprachgebrauche ebenfalls mit „Richtung“ bezeichnet) drückt aus, ob dieselbe vorwärts oder rückwärts stattfindet. Nach welcher Seite man ursprünglich die Bewegung als vorwärts oder + rechnet, ist willkürlich und gleichgültig, wenn nur der entgegengesetzte Sinn dann rückwärts genannt und durch das Zeichen — bezeichnet wird.

In bezug auf den zeitlichen Verlauf können wir die Bewegungen nach folgendem Schema einteilen:

Bewegung		
1. gleichförmige	ungleichförmige oder veränderliche	
	2. gleichmäßig veränderliche	3. ungleichmäßig veränderliche usw.

Die gleichförmige Bewegung ist diejenige, bei welcher in unter sich gleichen Zeiträumen stets unter sich gleiche Weglängen zurückgelegt werden.

Die Geschwindigkeit ist ein unmittelbar gegebener Begriff, dessen quantitative Unterschiede wir schon im täglichen Leben mit den Ausdrücken langsam, schnell ausdrücken. Die Größe der Geschwindigkeit wird gemessen durch das Verhältnis der Maßzahl des zurückgelegten Weges zur Maßzahl des inzwischen verflossenen Zeitraumes.

Bei der gleichförmigen Bewegung ist dieses Verhältnis, also die Geschwindigkeit, konstant.

Sind also:

$s_1, s_2 \dots s_n$ beliebig ausgewählte Wegstrecken,

$t_1, t_2 \dots t_n$ die zugehörigen Zeitlängen,

so ist die Geschwindigkeit gegeben durch:

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \dots = \frac{s_n}{t_n}.$$

Setzt man also für die Länge irgend einer Wegstrecke das allgemeine Zeichen s und für die zugehörige Zeitdauer das allgemeine Zeichen t , endlich für die Geschwindigkeit das Zeichen c , so gelten die Beziehungen:

$$c = \frac{s}{t}, \quad s = ct, \quad t = \frac{s}{c} \quad \dots \quad (1)$$

¹⁾ Man drückt diese fundamentalen Beziehungen oft mit den Worten aus: die Geschwindigkeit ist gleich dem Wege dividiert durch die Zeit; der Weg ist gleich Geschwindigkeit, multipliziert mit der Zeit; die Zeit ist gleich dem Wege, dividiert durch die Geschwindigkeit. Wenn diese Ausdrucksweise auch im Gespräche als Abkürzung zulässig sein mag, so müssen wir doch darauf aufmerksam machen, daß sie nicht korrekt ist, denn man kann nicht ein Ding durch ein anderes dividieren oder mit einem anderen multiplizieren. Man kann dagegen eine Weglänge in eine Anzahl Teile teilen oder so und so viel mal nehmen, oder das Verhältnis zwischen zwei Weglängen suchen, weil beide gleichartige Größen sind.

Die Gleichung $c = \frac{s}{t}$ kann also nur den Sinn haben: Man teile die Länge des Weges s in so viele Teile, als die Zeit t Zeiteinheiten enthält. Das Resultat dieser Teilung ist natürlich selbst eine Weglänge, und diese Weglänge ist das Maß der Geschwindigkeit c . Hat die Bewegung überhaupt nur eine Zeiteinheit lang gedauert, so entfällt die Teilung durch den Nenner Eins, und wir erhalten die Definition:

Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung wird gemessen durch die Länge des Weges in der Zeiteinheit.

Hat die Bewegung nicht eine Zeiteinheit lang, sondern länger oder kürzer gedauert, so kann diese Definition beibehalten werden, wenn man sie dahin erweitert, daß die Geschwindigkeit durch die Weglänge gemessen wird, welche zurückgelegt worden wäre, wenn die Bewegung eine Zeiteinheit lang gedauert hätte.

Indem man die Geschwindigkeit in dieser Weise definiert, kann man auch den beiden anderen Formeln unter (1) eine physikalische Anschaulichkeit und einen korrekten Ausdruck in Worten geben.

Die Gleichung $s = ct$ sagt einfach: Der Weg in t Zeiteinheiten ist t mal so lang als der Weg c einer Zeiteinheit.

Die Gleichung $t = \frac{s}{c}$ sagt: Die Zeitdauer t einer gleichförmigen Bewegung ist gleich dem Verhältnis der Länge s des zurückgelegten Weges zur Länge c jenes Weges, der in der Zeiteinheit zurückgelegt würde.

Es versteht sich von selbst, daß die Zahl, welche man für die Geschwindigkeit berechnet, von den Einheiten abhängt, nach welchen man die Längen und die Zeiten mißt. Es ist deshalb notwendig, das Längen- und Zeitmaß beizufügen. Im (C.G.S.)-System mißt man die Wege in Centimetern, die Zeiten in Sekunden.

§ 38. Die gleichmäßig veränderliche Bewegung; Begriff der Beschleunigung. Während bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit immer gleich groß bleibt, ändert sich dieselbe bei der ungleichförmigen Bewegung fortwährend, sie nimmt zu oder ab. Den nächst einfachsten Fall bildet dann diejenige Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit proportional mit der Zeit zu- oder abnimmt. Es ist dies dann zwar keine gleichförmige, aber doch eine gleichmäßig veränderte Bewegung. Je nachdem die Geschwindigkeit derselben mit der Zeit zunimmt oder abnimmt, nennen wir sie eine gleichmäßig beschleunigte oder eine gleichmäßig verzögerte Bewegung. Wir wollen die veränderliche Geschwindigkeit zum Unterschiede von der konstanten mit v bezeichnen.

Hat die Bewegung nach der Zeit t die Geschwindigkeit v , nach der Zeit t' die Geschwindigkeit v' erreicht, so ist $t' - t$ die Zeitdauer, während welcher sich die Geschwindigkeit um $v' - v$ verändert hat. Für die gleichmäßig veränderliche Bewegung ist das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung zum Zeitfortschritt also die Größe $\frac{v' - v}{t' - t} = \varphi$ eine Konstante und wird Beschleunigung genannt. Dabei wird dieselbe als positiv betrachtet, wenn die Geschwindigkeit wächst. Nimmt dagegen die Geschwindigkeit ab, erleidet also die Bewegung eine Verzögerung, so wird dieselbe als negative Beschleunigung angesehen. Wählt man für $t' - t$ den Wert Eins, so ist $\varphi = v' - v$. Daraus folgt die Definition: Die Beschleunigung bei der gleichmäßig veränderten Bewegung wird gemessen durch den Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit.

Endlich ist noch zu bemerken, daß eine entgegengesetzte Geschwindigkeit durch entgegengesetztes algebraisches Zeichen ausgedrückt wird.

Beispiele der Berechnung der Geschwindigkeit:

1. Ein Punkt des Äquators beschreibt in 24 Stunden (86 400 Sekunden) einen Kreis gleich dem Umfang der Erde, welcher am Äquator 40 070 km beträgt, folglich ist seine Geschwindigkeit:

$$c = \frac{40\,070\,000}{86\,400} = 464 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}} = 46\,400 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}$$

2. Nach Régnaults Versuchen durchläuft der Schall in einer Minute in einer 1,1 m weiten Röhre eine Strecke von 19 851 m, folglich ergibt sich für die Geschwindigkeit des Schalles:

$$c = \frac{19\,851}{60} = 331 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}} = 33\,100 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}$$

3. Cornu hat nach Fizeaus Methode gefunden, daß das Licht in der Luft eine Entfernung von 10 310 m in 0,000 034 55 Sekunden durchläuft, mithin ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes (in Luft):

$$c = \frac{10,31}{0,000\,034\,55} = 298\,400 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Sekunden}} = 2984 \cdot 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}$$

Um die Beschleunigung zu finden, sollte man die am Anfange und am Ende eines beliebig langen, aber bekannten Zeitintervalls vorhandenen Geschwindigkeiten ermitteln und ihre Differenz durch die Dauer des Intervalls dividieren. Dabei stoßen wir auf die Schwierigkeit, daß wir die aus der gleichförmigen Bewegung (im vorigen Paragraphen) abgeleitete Definition der Geschwindigkeit hier nicht ohne weiteres anwenden können. Während bei der gleichförmigen Bewegung die Rechnungsregel: $\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weglänge}}{\text{Zeitdauer}}$ stets zu demselben Werte führt, wie groß man auch den Weg oder die Zeit wählt, so ist dies bei einer veränderlichen Bewegung nicht mehr der Fall. Wir können bei dieser nicht von einer andauernden, konstanten Geschwindigkeit, sondern nur von einer momentanen (augenblicklichen) Geschwindigkeit sprechen, welche gar keine Zeitlänge hindurch und keine Wegstrecke entlang dauert, sondern nur in einem Zeitpunkte und an einem Punkte des Weges vorhanden ist.

Wir kommen zu einer stichhaltigen Definition dieser momentanen Geschwindigkeit auf folgende Weise. Wir denken uns von dem gegebenen Punkte der Zeit und des Weges an, für welchen die Geschwindigkeit gesucht wird, die Bewegung noch eine kleine Zeit τ hindurch dauern und während derselben die kleine Weglänge σ zurücklegen. Das Verhältnis $\frac{\sigma}{\tau}$ gibt dann zunächst einen angenäherten Wert der gesuchten Geschwindigkeit. Hierauf geben wir dem σ und dem τ immer kleinere und kleinere zusammengehörige Werte. Dabei nähert sich ihr Verhältnis immer mehr und mehr einem Grenzwerte. Dieser Grenzwert ist die gesuchte momentane Geschwindigkeit. Man drückt dies oft auch so aus, daß man sagt, die Geschwindigkeit sei das Verhältnis einer unendlich kleinen Wegstrecke zur zugehörigen unendlich kleinen Zeitdauer¹⁾.

Auf diese Weise definiert, ist die momentane Geschwindigkeit eine mathematische Abstraktion. Die physikalische Bedeutung der momentanen Geschwindigkeit ist auch hier die einer Weglänge, nämlich jener Weglänge, welche der bewegte Punkt in einer Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn seine Geschwindigkeit von dem ins Auge gefaßten Zeitmomente an keine Veränderung mehr erleiden würde.

Wir haben jetzt noch die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen Zeit t , Geschwindigkeit v , Beschleunigung φ und Weg s in der mathematischen Zeichensprache auszudrücken.

Wir beschränken uns dabei hier auf den einfachsten Fall, daß zur Zeit $t = 0$, wo wir uns die Bewegung beginnend denken, die Geschwindigkeit und der (bereits zurückgelegte) Weg $= 0$ seien. Wir haben es demnach hier nur mit der gleichmäßig beschleunigten, nicht mit der verzögerten Bewegung zu tun. Den allgemeinen Fall, wo v und s Anfangswerte haben, werden wir später bei der Zusammensetzung von Bewegungen in Behandlung nehmen.

¹⁾ In der Analysis bezeichnet man diese unendlich kleinen Größen mit ds und dt und nennt ihr Verhältnis $\frac{ds}{dt}$ den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit.

Da binnen der Zeit von o bis t die Geschwindigkeit von a bis v zugenommen hat, so berechnet sich die Zunahme per Zeiteinheit, d. i. die Beschleunigung:

$$\varphi = \frac{v}{t} \dots \dots \dots (1)$$

woraus folgt:

$$v = \varphi t \dots \dots \dots (2)$$

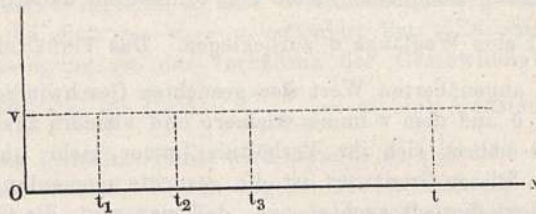
und

$$t = \frac{v}{\varphi} \dots \dots \dots (3)$$

Um den Weg s zu erhalten, wollen wir eine geometrische Darstellungsweise zu Hilfe nehmen, welche nach mehrfacher Richtung nützliche Dienste leistet und schon dem Schöpfer der Bewegungslehre G. Galilei zu demselben Zwecke gedient hat.

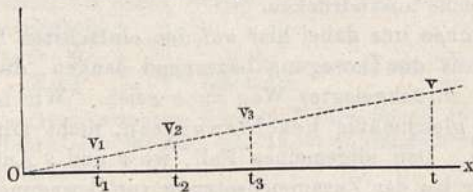
Wir haben bei der gleichförmigen Bewegung die Größe des zurückgelegten Weges durch ein Produkt aus der Größe der Zeitdauer und der

Fig. 78.



Größe der Geschwindigkeit zu berechnen gelernt. In der Geometrie kann jedes Produkt aus zwei Größen durch den Flächeninhalt eines Rechteckes dargestellt werden, dessen Seitenlängen die beiden Faktoren sind. Trägt man daher auf einer Abszissenachse ox , Fig. 78, Längen $ot_1, ot_2, ot_3 \dots$ auf, welche den Zeiten t_1, t_2, t_3 entsprechen, ebenso auf der Ordinatenachse ein Stück ov , welches die Größe der Geschwindigkeit v darstellt, so repräsentieren die Flächenräume der Rechtecke über den Grundlinien $ot_1, ot_2, ot_3 \dots$ die Größen der entsprechenden zurückgelegten Wegstrecken.

Fig. 79.



Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die Geschwindigkeit v veränderlich, und zwar proportional der Zeit anwachsend. Wollen wir demnach dieselbe Darstellungsweise verallgemeinernd auf diese Bewegung anwenden, so müssen wir an Stelle der horizontalen Geraden eine schiefe Gerade zeichnen, Fig. 79, welche vom Punkte o bis zum Punkte v über dem

Abszissenpunkte t ansteigt. Es werden dann offenbar die bei dieser Bewegung zurückgelegten Wegstrecken der Größe nach durch die Flächenräume dargestellt, welche begrenzt sind einerseits durch die Abszissenachse und die schiefe Gerade, andererseits durch die Ordinaten, welche den Zeitpunkten der Bewegung entsprechen¹⁾. Der Weg in der Zeit bis t_1 ist also der Größe nach dargestellt durch den Flächeninhalt des Dreiecks ot_1v_1 , der Weg von t_1 bis t_2 durch den Flächeninhalt des Trapezes $t_1t_2v_2v_1$ und so fort. Der ganze Weg in der Zeit von o bis t ist also der Größe nach gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks otv ; daraus folgt:

$$s = \frac{v \cdot t}{2} \dots \dots \dots (4)$$

woraus mit Rücksicht auf (2)

$$s = \frac{\varphi t^2}{2} \dots \dots \dots (5)$$

erhalten wird.

Es bietet nun keine Schwierigkeit, aus den abgeleiteten fünf Gleichungen durch Substitution noch sieben weitere abzuleiten, so zwar, daß jede der vier Größen v , t , φ , s durch je zwei von den drei übrigen ausgedrückt erscheint. Wir geben dieses System von Beziehungen hier in übersichtlicher Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} v &= \varphi t = \frac{2s}{t} = \sqrt{2s\varphi} \\ t &= \frac{v}{\varphi} = \frac{2s}{v} = \sqrt{\frac{2s}{\varphi}} \\ \varphi &= \frac{v}{t} = \frac{2s}{t^2} = \frac{v^2}{2s} \\ s &= \frac{vt}{2} = \frac{\varphi t^2}{2} = \frac{v^2}{2\varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Beispiele zur Anwendung dieser Gleichungen werden sich später bei der Fallbewegung darbieten.

Denkt man sich die ganze Zeitdauer der Bewegung in kleinere Zeitintervalle, z. B. Sekunden, geteilt und berechnet die Wegstrecken für die einzelnen Zeiträume, so stellt sich diese Rechnung in übersichtlicher Weise wie folgt dar:

¹⁾ Dieser Sachverhalt ist für jeden klar Denkenden so unmittelbar einleuchtend, daß es uns nicht nötig scheint, denselben durch die sonst übliche „Staffelmethode“ noch näher zu erläutern. Man kann auch so überlegen: Zur Berechnung einer Wegstrecke darf offenbar weder die größte Geschwindigkeit am Ende v , noch die kleinste Geschwindigkeit am Anfang v_0 , sondern nur die mittlere Geschwindigkeit verwendet werden. Diese ist aber bei gleichförmiger Zunahme gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{v_0 + v}{2}$. Diese, mit der Zeit t multipliziert, gibt den Weg $\frac{v_0 + v}{2} t$ oder, wenn $v_0 = 0$, den Weg $\frac{vt}{2}$.

Zeitdauer der Bewegung von Anfang an:	Weglängen von Anfang an gerechnet:	Weglängen in den einzelnen auf- einander folgenden Zeit- intervallen:
0	0	
1	$\frac{\varphi}{2}$	$\frac{\varphi}{2}$
2	$4 \frac{\varphi}{2}$	$3 \frac{\varphi}{2}$
3	$9 \frac{\varphi}{2}$	$5 \frac{\varphi}{2}$
4	$16 \frac{\varphi}{2}$	$7 \frac{\varphi}{2}$
5	$25 \frac{\varphi}{2}$	$9 \frac{\varphi}{2}$
·	·	·
·	·	·
·	·	·
t	$t^2 \frac{\varphi}{2}$	$(2t - 1) \frac{\varphi}{2}$

Das Resultat dieser Rechnung kann mit Worten in folgender Weise ausgesprochen werden:

1. Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung verhalten sich die von Anfang an zurückgelegten Wege wie die Quadrate der Zeiten.

2. Die Wege innerhalb der aufeinander folgenden gleichen Zeitintervalle verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

3. Der Weg in der ersten Zeiteinheit ist gleich der halben Beschleunigung.

Dazu kommt noch das früher erwähnte Gesetz von der Geschwindigkeit:

4. Die erlangte Geschwindigkeit wächst proportional mit der Zeit.

§ 39. Begriff der Kraft, Newtons Bewegungsgesetze. So oft wir beobachten, daß ein Bewegungszustand sich verändert, vermuten wir hierfür eine Ursache; diese Ursache nennen wir Kraft.

Die Änderung der Bewegung kann sich entweder auf den zeitlichen Verlauf derselben, also auf die Geschwindigkeit, oder auf die Form der Bahn beziehen.

Die Änderung der Geschwindigkeit kann verschiedener Art sein. Entweder hatte der Körper vorher die Geschwindigkeit Null und bekommt jetzt eine Geschwindigkeit nach der Richtung der Kraft. Oder die vorher vorhandene Geschwindigkeit wird durch einen Zuwachs in derselben Richtung vermehrt, oder durch den Hinzutritt von entgegengesetzter Geschwindigkeit vermindert oder ganz aufgehoben, oder in entgegengesetzte Richtung gebracht, oder endlich der Geschwindigkeitszuwachs hat eine seitliche Richtung. Wenn wir den letzteren Fall mit einbeziehen, so haben wir auch die Änderung der Bahn bereits berücksichtigt. Wir kommen somit zur Definition:

Kraft ist die Ursache, welche bewirkt, daß eine Masse ihre Geschwindigkeit (nach Größe oder Richtung) ändert¹⁾.

Diese Definition beruht auf den Anschauungen, welche zuerst Galilei 1602 ausgesprochen hat, als er das Gesetz der Trägheit oder des Beharrungsvermögens aufstellte²⁾. Dasselbe lautet in der Fassung, die ihm Newton³⁾ gegeben hat, folgendermaßen:

I. Jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern⁴⁾.

Dieser Satz wird als das erste Bewegungsgesetz Newtons bezeichnet. Das zweite Bewegungsgesetz Newtons lautet:

II. Die Bewegungsänderung ist proportional der bewegenden Kraft und hat mit ihr gleiche Richtung.

¹⁾ Im Altertum war das Kausalitätsbedürfnis sicherlich ebenso lebhaft wie jetzt; trotzdem kamen die Alten zu einer anderen Auffassung über den Zusammenhang von Bewegung und Kraft. Der Grund war der, daß sie die Frage: was bestimmt den Zustand eines Körpers und wann ändert sich derselbe? ganz abweichend beantworteten. Sie suchten das Wesentliche des Zustandes des Körpers in seiner Lage. Jede Änderung derselben, also jede Bewegung, auch die gleichförmige, erschien ihnen konsequenterweise als eine fortdauernde Änderung des Zustandes und erforderte daher in ihren Augen zur Erklärung die Annahme einer fortdauernden Ursache. Daher die Vorstellung, daß der geworfene Stein, solange er fliegt, Kraft brauche und, da er solche von außen nicht mehr erhält, aus sich heraus entwickle. Daß der geworfene Stein weiterfliegt, wurde demnach nicht als die Folge eines durch die Kraft des Armes hervorgebrachten Bewegungszustandes angesehen, sondern als die fortdauernde Wirkung einer während des Fluges fortdauernden Kraft. — Man kann diese Ansicht der Alten nicht als unrichtig bezeichnen. E. Mach („Die Mechanik in ihrer Entwickelung“) hat gezeigt, daß von vornherein nicht „herausphilosophiert“ werden kann, ob durch eine Kraft eine Lage oder eine Geschwindigkeit oder eine Beschleunigung verändert wird. Nur kommt man auf diese Weise dazu, einen anderen Begriff als Kraft zu definieren, welcher von Leibniz 1695 als „lebendige Kraft“ bezeichnet wurde. Wir kommen hierauf später zurück. Es handelt sich darum, welcher Begriff sich zur Darstellung der Erscheinungen besser eignet.

²⁾ Durch Druck veröffentlicht wurde dieselbe in Galileis *Discorsi e demonstrationi matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed ai movimenti locali*. Leiden 1638. Die wichtigste Stelle findet sich Bd. II der Ausgabe Florenz 1718, im Dialogo quarto, Giornata quarta: „De motu projectorum“, p. 631.

³⁾ Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. III. Auflage übersetzt von J. Wolfers, Berlin 1872.

⁴⁾ C. Neumann hat in einer Antrittsvorlesung „Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie“ darauf aufmerksam gemacht, daß das so ausgesprochene Gesetz an einer Unbestimmtheit leide. Da nämlich jede fortschreitende Bewegung nur eine relative ist in bezug auf einen anderen Körper, auf den die Bewegung bezogen wird, so entsteht die Frage, welcher Körper als solcher Bezugskörper zu gelten hat. Es kann ja eine Bewegung, welche, von der Erde aus betrachtet, geradlinig ist, von der Sonne aus als krummlinig erscheinen. H. Streintz schlug daher nach einer kritischen Untersuchung anderer Versuche folgende erweiterte Formulierung des Trägheitsgesetzes vor: „Ein materieller Punkt, der keiner fremden Einwirkung unterworfen ist, bewegt sich hinsichtlich eines Körpers, der gleichfalls keiner fremden Einwirkung unterworfen ist und keine Drehbewegung vollführt, in gerader Linie und mit konstanter Geschwindigkeit.“ Näheres in seiner Schrift „Die physikalischen Grundlagen der Mechanik“, S. 3 bis 24.

Dieses Gesetz wird uns dazu dienen, ein Maß der Kraft zu gewinnen. Wir wollen gleich das dritte Bewegungsgesetz Newtons hier anführen, obwohl wir erst später dessen Bedeutung auseinandersetzen können.

III. Wirkung und Gegenwirkung sind stets einander an Größe gleich und der Richtung nach entgegengesetzt.

Unsere nächste Aufgabe ist, die Arten der Kräfte und ihre Einteilung kennen zu lernen.

§ 40. Einteilung der Kräfte, Maß und Wirkung derselben. Für die Einteilung der Kräfte nach ihrem zeitlichen Verlaufe können wir ein analoges Schema aufstellen wie jenes in § 37 für die Einteilung der Bewegungen. Auch wollen wir gleich mitteilen, daß die gleich numerierten Kräfte und Bewegungen als Ursache und Wirkung zusammengehören.



Eine konstante Kraft ist eine solche, welche fortwährend die gleiche Stärke beibehält, d. h. eine solche, welche fortwährend in gleichen Zeiträumen gleich große Änderungen der Geschwindigkeit bewirkt. Die Größe der Kraft ist also proportional der Größe der Beschleunigung. Nun lehrt aber, wie wir sehen werden, die Erfahrung außerdem, daß die Größe dieser Beschleunigung bei gleichen Kräften verkehrt proportional ist der Masse, deren Bewegung beschleunigt werden soll. Bezeichnen wir die Größe der Kraft mit P , die Größe der Masse mit M , die Größe der Beschleunigung mit φ , und ist C eine Konstante, so gilt demnach

$$\varphi = C \frac{P}{M} \dots \dots \dots (1)$$

Setzen wir überdies jene Kraft $P = 1$, welche der Masse $M = 1$ die Beschleunigung $\varphi = 1$ erteilt, so entfällt die Konstante C , da sie $= 1$ wird, und es gilt

$$\varphi = \frac{P}{M} \dots \dots \dots (2)$$

woraus

$$P = \varphi M \dots \dots \dots (3)$$

und

$$M = \frac{P}{\varphi} \dots \dots \dots (4)$$

folgt.

Im (C.G.S.)-Maßsystem ist die Einheit der Masse das Gramm, die Einheit des Weges das Centimeter, die Einheit der Zeit die Sekunde, die Einheit der Geschwindigkeit demnach gegeben durch 1 Centimeter pro Sekunde, die Einheit der Beschleunigung durch den Zuwachs der Geschwindigkeit um diese Einheit pro Sekunde. Folglich ist die Einheit der konstanten Kraft nach diesem Maßsystem diejenige, welche der Masse 1 Gramm während einer Sekunde die Beschleunigung 1 Centimeter pro Sekunde erteilt. Diese Einheit wird Dyne genannt.

Unter einer „momentanen Kraft“ verstehen wir eine solche, welche nur eine verschwindend kurze Zeit dauert und dann aufhört. Eine solche gibt es, streng genommen, gar nicht, denn es ist nicht möglich, daß einer Masse Geschwindigkeit erteilt wird, ohne daß die wirkende Ursache eine gewisse Zeit hindurch dauert.

Als Beispiel einer solchen momentanen Kraft können wir einen plötzlichen Stoß (Impuls) ansehen. Wenn z. B. ein Billardspieler mit dem Queu die Kugel stößt, so bleibt auch bei kürzester Stoßdauer doch die Spitze des Queus auf eine gewisse kurze Strecke und durch eine gewisse kurze Zeit in Berührung mit der Kugel. Während dieser kurzen Zeit wird auf die Masse der Kugel eine gewisse Geschwindigkeit übertragen. Vermöge des Gesetzes der Trägheit bewegt sich dann die Kugel mit dieser Geschwindigkeit fort und würde sie, wenn ihr dieselbe nicht durch Reibung oder andere Kräfte wieder entzogen würde, immerfort beibehalten.

Die Wirkung des Stoßes, nämlich die erlangte Geschwindigkeit, wird desto größer sein, je stärker der Stoß, d. h. je stärker die sogenannte momentane Kraft ist, andererseits ist auch diesmal der Geschwindigkeitszuwachs verkehrt proportional der gestoßenen Masse. Setzen wir wiederum jene momentane Kraft $F = 1$, welche der Masse 1 die Geschwindigkeit $= 1$ erteilt, so gilt

$$F = Mc.$$

Man nennt das Produkt Mc die Bewegungsgröße (auch Bewegungsmenge oder Bewegungsmoment).

Fassen wir das Gesagte zusammen, so erhalten wir die Sätze:

Die momentane Kraft oder der Impuls wird gemessen durch das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit.

Die konstante Kraft wird gemessen durch das Produkt aus Masse und Beschleunigung.

Die momentane Kraft bringt eine gleichförmige, die konstante Kraft eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung hervor¹⁾.

Daraus folgt dann von selbst der Schluß, daß eine veränderliche Kraft eine Bewegung mit veränderlicher Beschleunigung hervorbringt.

§ 41. Dynamisches Maß der Masse. Im § 33 haben wir als vorläufiges Mittel zur Vergleichung zweier Massen die Vergleichung ihrer Ge-

¹⁾ Wir haben schon oben bemerkt, daß es eine „momentane“ Kraft streng genommen nicht gibt. Was wir so nennen, ist eine Kraft, die innerhalb einer gewissen Zeit fort dauert, also auch kontinuierlich ist. Innerhalb dieser Zeit bringt demnach auch diese Kraft nicht eine gleichförmige, sondern eine beschleunigte Bewegung hervor. Andererseits wird auch die von einer konstanten Kraft hervorgerufene beschleunigte Bewegung zu einer gleichförmigen in dem Moment, wo die Kraft aufhört. Somit haben wir es eigentlich immer nur mit kontinuierlichen Kräften zu tun. Die Art der durch dieselben schließlich entstehenden Bewegung hängt also auch nicht von deren kürzerer oder längerer Dauer, sondern von dem Umstande ab, ob die Kraft noch fort dauert oder bereits aufgehört hat, auf die Masse einzuwirken. Wenn wir trotzdem die mathematische Fiktion einer momentanen Kraft festhalten, so geschieht es nur, weil diese Vorstellung unter Umständen praktische Vorteile gewährt.

wichte mittels der Wage angegeben, aber hinzugefügt, daß dieses Maß, welches wir das statische Maß nennen können, nicht von vornherein als sicher zu betrachten ist, denn, falls etwa die Erde bei ihrer Anziehung das Platiniridium bevorzugen würde, so wie der Magnet das Eisen mehr anzieht als gleiche Massen anderer Stoffe, so könnten das Platiniridiumkilogramm und ein Liter Wasser sich auf der Wage das Gleichgewicht halten und trotzdem das erstere weniger Masse enthalten als das letztere. Nun haben wir im vorangegangenen Paragraphen als gleiche Kräfte solche angenommen, welche gleichen Massen gleiche Beschleunigung erteilen. Daraus folgt umgekehrt, daß Massen, welche durch gleiche Kräfte gleiche Beschleunigung erfahren, unter sich gleich sein müssen. Um also beispielsweise zu prüfen, ob auch nach diesem dynamischen Maße gemessen das Platiniridiumkilogramm und ein Liter Wasser gleiche Massen enthalten, müssen wir auf beide eine gleiche Kraft wirken lassen, von der wir überzeugt sein können, daß sie unabhängig von der Art der Materie ist, auf welche sie wirkt. Eine solche Kraft ist die Federkraft. Wir denken uns also folgenden Versuch ausgeführt ¹⁾.

Auf einer glatten Bahn (Fig. 80) sind zwei leicht gebaute Wägelchen von gleicher Masse ohne merkliche Reibung über geteilten Maßstäbchen verschiebbar. Sie sind durch Schnüre mit den Enden einer elastischen Drahtspirale oder eines Kautschukfadens FF' verbunden. Wir belasten den einen Wagen mit einem Normalkilogramm, den anderen mit einem Liter Wasser (bei 4° gemessen). Das Gefäß denken wir uns entweder so leicht, daß seine Masse vernachlässigt werden kann, oder dasselbe durch eine Tara aus gleichem Material und gleichem Gewicht auf dem anderen Wagen ausgeglichen. Ziehen wir nun die Wagen auseinander, bis die Zeiger z und z' auf die Anfangspunkte der Maßstäbe zeigen, so wirkt die elastische Kraft der Spiralfeder auf beiden Seiten gleich stark, denn da diese elastische Kraft zu den Materialien auf den Wagen in keiner Beziehung steht und nur von den Vorgängen in der Feder selbst abhängt, die nach beiden Seiten vollständig symmetrisch sind, so ist kein Zweifel, daß beide Wagen mit ihren Lasten mit gleicher Kraft angezogen werden, welche Kraft auch während der Kontraktion der Feder beiderseits gleich bleiben muß. Lassen wir dann die beiden Wagen zu gleicher Zeit frei, so werden sie erfahrungsgemäß gleichzeitig an den Hemmstiften h und h' ankommen, welche um gleiche Wegstrecken von den Ausgangspunkten entfernt sind. Die beiden Massen haben also in jedem Zeitpunkte unter sich gleiche Beschleunigungen erhalten, denn die Wege gleicher Zeiten verhalten sich wie die Beschleunigungen.

¹⁾ Die Präzisionsversuche, welche zum wissenschaftlich strengen Erweise der Gültigkeit von Gesetzen dienen, sind wegen der vielen zu berücksichtigenden Nebenumstände selten einfach und übersichtlich; auch erfordert meistens ihr Verständnis die Bekanntschaft mit Lehrsätzen und Apparaten, die erst später besprochen werden können; sie eignen sich daher selten zu Demonstrationsversuchen, bei denen es nicht auf Genauigkeit, wohl aber auf Übersichtlichkeit und Einfachheit ankommt. Häufig ist man sogar genötigt, rein ideelle Versuche zu beschreiben, bei welchen Annahmen gemacht werden, die sich nie ganz verwirklichen lassen, wie z. B. die Annahme von Kolben ohne Reibung, Gefäßwänden ohne Wärmeleitung usw. Auch der hier beschriebene Versuch ist solcher Art. Der präzise Nachweis, daß gleiche Massen verschiedener Stoffe von der Erde gleich stark angezogen werden, wird durch Pendelversuche geführt, von denen erst später die Rede sein kann.

Wir könnten die beschriebene Vorrichtung eine dynamische Wage nennen. Die Versuche mit ihr sind zwar sicher viel weniger genau als die mit der statischen Wage, aber sie haben eben den prinzipiellen Vorzug, daß sie einen etwaigen Einfluß der Verschiedenheit des Materials ganz ausschalten, während bei dem Abwägen auf der statischen Wage, wo die Schwerkraft unmittelbar auf die Materialien wirkt, deren Einfluß nicht von vorn herein ausgeschlossen ist.

Haben die Vergleichenungen mit unserer dynamischen Wage aber einmal ergeben, daß sie mit denen der statischen Wage übereinstimmen, dann können wir von da an die Massen durch ihre Gewichte vergleichen.

Würden wir die Feder FF' aus einem so leichten Material (Kautschukfaden) wählen, daß wir ihre eigene Masse gegenüber denen der belasteten Wagen vernachlässigen dürfen, so könnten wir unseren Apparat auch zur Bestimmung des Verhältnisses zweier ungleichen Massen verwenden. Angenommen die Masse links (samt der des Wagens) sei $= M$, die rechts M' , die Beschleunigungen seien links φ , rechts φ' , so müssen, da die Wege s und s' sich in gleichen Zeiten wie die Beschleunigungen verhalten, die Produkte $M s$ und $M' s'$ gleich groß sein, also die Proportion gelten:

$$M : M' = s' : s.$$

Wählen wir also die Massen links 1 kg, rechts $\frac{1}{2}$ kg, und stellen den Hemmstift rechts doppelt so weit vom Anfangspunkte als links, so müssen wieder beide Wagen zugleich an ihr Ziel gelangen.

Die wirksamen Kräfte bei diesem Experimente sind keine konstanten, sondern, wie jede Federkraft, veränderliche. Das hat zwar keinen Einfluß auf die Stichhaltigkeit der Schlüsse, da es hier nur darauf ankommt, daß in jedem Moment die Kräfte auf beiden Seiten gleich sind. Wollte man aber mit einer konstanten Federkraft, die überdies in bekanntem Verhältnis vergrößert werden kann, derlei Versuche anstellen, so könnte man sich der folgenden Modifikation bedienen (Fig. 81).

Der elastische Faden ist an der Handhabe bei a befestigt und reicht mit dem anderen Ende je nach der Spannung bis b oder b' . Der Wagen wird mit dem Schläge eines Sekundenpendels losgelassen und während seiner Bewegung durch Anziehen mit der Hand die Spannung der Feder möglichst konstant erhalten, was einige Übung erfordert. Man belastet den Wagen nacheinander mit verschiedenen Massen, variiert auch die Spannung der Feder oder nimmt den elastischen Faden doppelt und mißt die Wege, die bis zum nächsten Sekundenschlage zurückgelegt

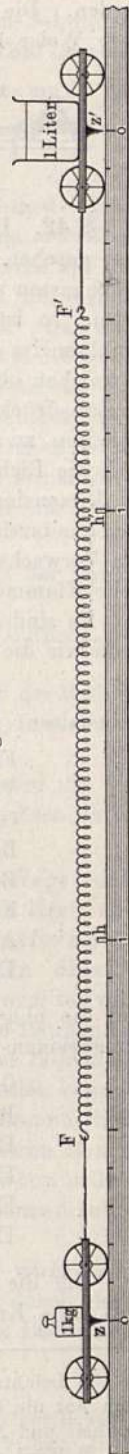
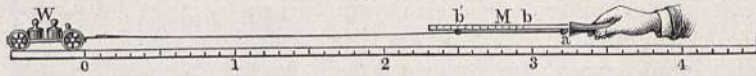


Fig. 80.

werden. Die Beschleunigungen sind doppelt so groß wie diese Wege. Auf diese Weise läßt sich das Gesetz $p = \varphi m$ bestätigen¹⁾.

Fig. 81.



§ 42. Dimensionen der verschiedenen Größenarten. Da, wie wir hier gesehen haben und in der Folge noch weiter erfahren werden, alle Größenarten sich als Funktionen der Zeit T , Länge L und Masse M darstellen lassen, so ist man nach dem Vorschlage von Maxwell übereingekommen, dieselben im absoluten Maßsystem nach den Dimensionen zu bezeichnen, in welchen obige drei Fundamentalgrößen in ihnen auftreten. Diese Dimensionsausdrücke gestatten, in einfachster Weise von einer Gruppe von Grundeinheiten zu einer solchen von anderen Einheiten überzugehen und ebenso auch die Richtigkeit physikalischer Gleichungen zu prüfen, da bei Einsetzung der Dimensionen für die darin vorkommenden Größenarten beiderseits vom Gleichheitszeichen schließlich derselbe Dimensionsausdruck entstehen muß. Um Verwechslungen zu verhüten, pflegt man die Dimensionsausdrücke in steile Klammern einzuschließen.

Es sind demnach die Dimensionsausdrücke oder kurzweg Dimensionen, wenn wir die obigen Abkürzungen

Zeit: T , Länge: L , Masse: M

beibehalten:

Fläche F	$= [L^2]$
Volumen V	$= [L^3]$
Geschwindigkeit v	$= [L \cdot T^{-1}]$
Beschleunigung φ	$= [L \cdot T^{-2}]$
Bewegungsgröße $M \cdot v$	$= [ML \cdot T^{-1}]$
Konstante Kraft P	$= [MLT^{-2}]$
Arbeit, Energie ²⁾ A	$= [ML^2 T^{-2}]$
Effekt ²⁾ E	$= [ML^2 T^{-3}]$

und die obigen Einheiten im (C.G.S.)-System wären also durch folgende Dimensionensymbole darzustellen:

Geschwindigkeitseinheit	$1 [CS^{-1}]$
Beschleunigungseinheit	$1 [CS^{-2}]$
Einheit der Bewegungsgröße	$1 [CGS^{-1}]$
Eine Dyne	$1 [CGS^{-2}]$
Ein Erg ²⁾	$1 [C^2GS^{-2}]$
Einheit des Effekts ²⁾	$1 [C^2GS^{-3}]$

Um die Anwendung der obigen Dimensionen zu veranschaulichen, sei z. B. eine Kraft P , die im (C.G.S.)-System ausgedrückt ist, in dem von

¹⁾ Leichter und genauer geschieht dies mit der Fallmaschine von Atwood; doch hat die beschriebene Ausführung den didaktischen Vorzug der größeren Einfachheit und Anschaulichkeit.

²⁾ Wird später erklärt werden.

Gauss und Weber seinerzeit begründeten Millimeter-Milligramm-Sekunden-System (mm. mg. s) anzugeben. Dann ist, wenn B eine gewisse Zahl darstellt

$$P = B[C, G, S^{-2}] = B[\text{mm} \cdot 10 \cdot \text{mg} \cdot 10^3 \cdot \text{s}^{-2}] = 1000 B[\text{mm} \cdot \text{mg} \cdot \text{s}^{-2}].$$

Im (mm. mg. s)-System würde also der Zahlenwert von P , wie wir sehen, 10 000 mal größer sein.

§ 43. Die Schwere oder Gravitation. Die für uns wichtigste Kraft ist die Schwerkraft. J. Newton hat sich unsterblichen Ruhm erworben, indem er 1687 zuerst die Aufstellung gemacht hat, daß die Schwere auf der Erde nur eine spezielle Äußerung einer ganz allgemeinen Kraft im Weltall sei, die er die allgemeine Schwere oder Gravitation nannte. Daß eine solche Kraft bestehe, und nach welchem Gesetze sie wirke, leitete Newton aus den Keplerschen Gesetzen über die Bewegung der Planeten um die Sonne ab. Es hatte nämlich schon im Jahre 1609 und vollständiger 1619 der Mathematiker und Astronom Kepler, von der Kopernikanischen Weltanschauung ausgehend, aus den astronomischen Beobachtungen seiner Zeit, namentlich denen von Tycho Brahe in Prag, seine Gesetze über die Bewegung der Planeten um die Sonne abgeleitet. Sie lauten:

1. Jeder Planet bewegt sich in einer durch den Mittelpunkt der Sonne gehenden Ebene.
2. Die Bahnkurven der Planeten in diesen Ebenen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne sich befindet.
3. Die Planeten bewegen sich in diesen Bahnen derart, daß der Radius vector (die Verbindungslinie von der Sonne zum Planeten) in gleichen Zeiten gleiche Wege beschreibt.
4. Die Quadrate der Umlaufzeiten der verschiedenen Planeten um die Sonne verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

Aus diesen Gesetzen folgerte Newton auf mathematischem Wege, daß sich die Planeten so bewegen, als ob sie von der Sonne mit einer Kraft angezogen würden, welche ihrer Größe nach dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional und dem Produkte der Massen direkt proportional wirke, welche Kraft aber unabhängig sei von der qualitativen Natur dieser Massen. Newton zeigte dann ferner, daß auch die Bewegung der Satelliten (Monde) um die Planeten und ebenso diejenige eines fallenden Steines auf der Erde durch die Annahme derselben Kraft erklärt werden könne, welche dabei nach demselben Gesetze wirke. Woher diese Kraft stammt und ob sie wirklich von einer Masse zur anderen durch den absolut leeren Raum hindurch ohne vermittelndes Medium wirkt, diese Fragen hat Newton selbst offen gelassen, und sie haben bis heute noch keine abschließende Beantwortung gefunden ¹⁾.

Nur so viel scheint festzustehen, daß die Vorstellung einer wirklichen actio in distans, einer unvermittelten Fernwirkung der Körper durch den leeren Raum hindurch immer weniger Anhänger findet und das Bedürfnis einer anderen Erklärung immer allgemeiner empfunden wird.

¹⁾ Hierüber sowie über die Versuche älterer und jüngerer Physiker zur Beantwortung dieser Frage sehe man das interessante Buch von C. Isenkrahe: „Das Rätsel der Schwerkraft“, Braunschweig 1879.

Der experimentelle Nachweis der Gravitation, die genaue Bestimmung ihrer Größe und alle einschlägigen Folgerungen können wir erst weiter unten nach Erklärung des physischen Pendels behandeln.

§ 44. Prinzip der Wechselwirkung; der freie Fall; Fallmaschinen.

Im § 39 wurde als das dritte Bewegungsgesetz von Newton der Satz ausgesprochen:

„Wirkung und Gegenwirkung sind stets einander an Größe gleich und der Richtung nach entgegengesetzt.“

So oft also ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, erfährt er stets von dem letzteren eine rückwirkende Kraft gleicher Größe. Man heißt diesen Satz kürzer das Prinzip der Wechselwirkung.

Dies gilt daher auch von der Anziehung zwischen der Erde und den auf ihr befindlichen Körpern. Der Körper drückt auf die Unterlage und wird gleich stark von ihr gedrückt. Entzieht man ihm die Unterlage, so setzt die gegenseitige Anziehungskraft sowohl den Körper als auch die Erde in Bewegung, beide fallen gegeneinander. Da aber die gegenseitig durch die gleiche Kraft erteilten Beschleunigungen den Massen verkehrt proportional sind, so ist bei der unverhältnismäßig größeren Masse der Erde ihre Beschleunigung verschwindend klein gegenüber der Beschleunigung, die der Körper erhält.

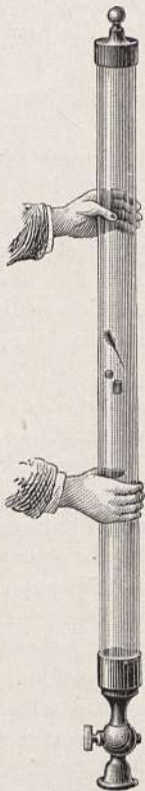
Man kann daher in der Regel die Erde als ruhig stehend und den Körper allein als fallend ansehen. Findet die Fallbewegung ohne jede Hemmung statt, so nennt man sie den freien Fall.

Über den freien Fall der Körper hatte man vor Galilei ganz unrichtige Vorstellungen. Man behauptete, daß die Körper desto schneller fallen, je größer ihre Masse (ihr Gewicht) sei. Der einfachste Versuch reicht hin, sich von der Unrichtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Läßt man mehrere Kugeln aus Blei, Stein, Holz, Kork gleichzeitig aus Zimmerhöhe auf den Boden fallen, so bemerkt man kaum einen Unterschied in den Fallzeiten. Bei Körpern von sehr geringem spezifischen Gewichte, sowie bei relativ großem Querschnitte beobachtet man allerdings ein Zurückbleiben, welches aber offenbar nur von dem störenden Widerstande der Luft herrührt. Daß dem so sei, zeigt ein Versuch im luftleeren Raume. Dieser Versuch ist am bequemsten mit dem in Fig. 82 abgebildeten Apparate anzustellen. Eine etwa $1\frac{1}{2}$ m lange, ungefähr 7 cm weite Glasröhre ist an beiden Enden verschlossen und an einem derselben mit einem Hahn und einem Ansatzstücke versehen,

welches auf die Luftpumpe aufgeschraubt werden kann. Die Röhre enthält eine kleine Bleikugel, ein Stück Kork und ein Vogelfederchen oder dergleichen.

Hat man in später zu erklärender Weise die Luft aus der Röhre entfernt und richtet die letztere rasch in die senkrechte Lage auf, so beobachtet man leicht, daß alle jene Körperchen gleich schnell fallen. Läßt man dann wieder

Fig. 82.



Luft einströmen, so zeigt sich wieder der Einfluß des Widerstandes, den diese der Bewegung entgegenstellt.

Noch einfacher, wenn auch weniger sicher und instruktiv ist folgender Versuch. Man bedeckt eine Münze mit einem kreisförmig geschnittenen Papierblättchen von etwas kleinerem Durchmesser und läßt dann die Münze in horizontaler Lage fallen. Das darauf liegende Papierblättchen fällt dann gleich schnell, da der Widerstand der Luft durch das vorausgehende Metallstück bereits beseitigt wird.

Die unrichtige Behauptung, daß Körper desto schneller fallen, je größer ihr Gewicht, je größer also die Kraft ist, mit der sie von der Erde angezogen werden, beruht auf dem Übersehen des Umstandes, daß in demselben Verhältnisse auch die Masse größer ist, die in Bewegung gesetzt werden muß. Das Irrtümliche jener Behauptung dürfte ganz treffend dargetan werden, wenn man analog behaupten würde, daß zwei Schnelläufer zusammen doppelt so schnell laufen können als ein Schnelläufer allein, weil sie zusammen genommen doppelt so stark sind als einer. Gerade so, wie in diesem Falle die doppelte Kraft sich auf die doppelte Körpermasse verteilt, so daß auf einen Körper immer nur die einfache Kraft trifft, so ist es auch bei der Anziehung der Körper durch die Erde. Ein Körper von doppelter Masse wird allerdings doppelt so stark angezogen, aber von dieser Anziehungskraft entfällt auf die einfache Masse nur die Hälfte.

Alle Körper fallen daher (im luftleeren Raume) gleich schnell, oder mit anderen Worten ausgedrückt: alle Körper erhalten durch die Schwerkraft die gleiche Beschleunigung. Dies ist das erste Gesetz des freien Falles.

Die Tatsache der gleich großen Beschleunigung aller Körper durch die Schwere wird auch wohl ausgedrückt durch die Redensart: alle Körper sind gleich schwer, was aber nicht sagen will, sie hätten gleiches Gewicht oder sie würden mit gleich großer Kraft zur Erde gezogen.

Das zweite Gesetz des freien Falles bezieht sich auf die Art der Bewegung, d. h. auf den zeitlichen Verlauf derselben, also auf die Geschwindigkeit und die Fallräume.

Da wir die Schwerkraft für geringe Fallhöhen als eine konstante Kraft ansehen dürfen und in § 40 erörtert haben, daß eine solche Kraft eine gleichförmig beschleunigte Bewegung erzeuge, so folgt daraus, daß die Fallbewegung durch dieselben Gleichungen und Regeln dargestellt werde, welche wir im § 38 unter (6), sowie am Schlusse desselben mitgeteilt haben.

Ist also g die Beschleunigung der Schwere, t die Fallzeit, s der Fallraum, v die momentane Geschwindigkeit, so gelten die Beziehungen

$$v = gt, s = \frac{gt^2}{2} \dots \dots \dots (1)$$

sowie die Regeln:

Die Fallräume verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten
die Fallräume der einzelnen aufeinander folgenden Zeitintervalle
verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

Zahlenbeispiel: Ein Mensch fällt aus einem Luftballon von 4410 m Höhe zur Erde, wieviel Zeit bleibt ihm, um sich zum Tode zu bereiten?

Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an?

$$\text{Antwort: } t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{8820}{9,8}} = \sqrt{900} = 30 \text{ Sekunden}$$

$$v = gt = 9,8 \cdot 30 = 294 \text{ m pro Sekunde.}$$

Um die Fallgesetze durch das Experiment zu bestätigen und damit auch den Beweis zu erbringen, daß konstante Kräfte gleichmäßig beschleunigte Bewegungen bewirken, kann man sich verschiedener Methoden bedienen.

Entweder man behält den freien Fall bei, verfeinert aber die Beobachtungsmethoden für die verhältnismäßig kurzen Zeiträume, in denen die Fallbewegung vor sich geht, oder man ersetzt die Bewegung des freien Falles durch eine künstlich verlangsamte gleicher Art, indem man das Verhältnis zwischen der wirksamen Kraft und der zu bewegenden Masse verringert, so daß der Quotient $\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \text{Beschleunigung}$ kleiner wird. Die so verringerte Beschleunigung gestattet eine leichtere Beobachtung der verlangsamten Bewegung, aus deren Ergebnis dann auf die Bewegung des freien Falles zurückgeschlossen werden kann.

Zu den Apparaten, bei welchen direkt der freie Fall beobachtet und die dabei zurückgelegten Wege gemessen werden, gehören die Fallmaschinen von Morin¹⁾, Laborde²⁾, F. Lippich³⁾, J. Müller⁴⁾, Rabs, dann der Fallapparat von Edelman in Verbindung mit dem Vibrationschronoskop von v. Beetz⁵⁾.

Zu der zweiten Klasse von Apparaten, an denen die künstlich verlangsamte Fallbewegung beobachtet und gemessen wird, gehören die Fallrinne von Galilei und die Fallmaschine von Atwood.

Bei der Fallmaschine von Morin zeichnet ein zwischen Führungsleisten fallender schwerer Körper mittels eines Schreibstiftes eine Linie auf eine senkrecht stehende Schreibfläche, welche während des Falles in horizontaler Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit vorbei bewegt wird. Die so gezeichnete Linie stellt hiermit eine Kurve dar, deren Abszissen den Fallzeiten, deren Ordinaten den Fallräumen entsprechen.

Da die Versuche als Kurve die Hälfte einer Parabel mit senkrecht stehender Achse ergeben, bei welcher, wie bekannt, die Ordinaten sich verhalten wie die Quadrate der Abszissen, so folgt daraus die Richtigkeit des Fallgesetzes, daß die Fallräume proportional den Quadraten der Fallzeiten sind.

Bei den Apparaten von Laborde, Lippich, Müller und Rabs ist der fallende Körper eine Platte, welche zugleich als Schreibfläche für einen Stift dient. Dieser Stift wird durch einen elastischen Körper zu Schwingungen in horizontaler Richtung veranlaßt, wodurch auf der Platte während ihres Falles eine sogenannte Schwingungskurve aufgezeichnet wird, aus welcher in unten beschriebener Weise das Fallgesetz abgeleitet werden kann. Von den eben zitierten Apparaten dürfte jener von Lippich die genauesten Messungen gestatten. Da es aber bei Vorlesungsversuchen mehr auf Ein-

¹⁾ Beschrieben und abgebildet in Jamin, Cours de Physique.

²⁾ Cosmos 1860, XVII.

³⁾ Wien. Akad. Ber. 52 [2], 549.

⁴⁾ Dieses Buches X. Auflage 1, 277.

⁵⁾ M. Th. Edelman, Neuere Apparate usw. 1, 37.

fachheit als Genauigkeit ankommt, so wollen wir hier den Apparat von Rabs in München beschreiben. Derselbe ist in Fig. 83 abgebildet.

Ein schwerer Dreifuß aus Eisen trägt eine eiserne Schiene rr , welche durch die Seitenstücke ss festgehalten wird.

Die Schiene r ist auf jeder Seite mit zwei Zuschärfungsflächen versehen, wie man aus Fig. 84 deutlicher sieht, welche die Schiene r samt dem Fallschlitten in ein Drittel der natürlichen Größe im Auf- und Grundriß darstellen. Diese genau abgehobelten und geglätteten Zuschärfungsflächen sind es, welche zur Leitung des Fallschlittens dienen, dessen Einrichtung gleichfalls aus Fig. 84 ersichtlich ist. Die beiden Stücke A und B des Fallschlittens sind durch zwei eiserne Stangen z verbunden, welche 50 bis 60 cm lang und in Fig. 84 nur der Raumersparnis wegen viel zu kurz gezeichnet sind. Das Brett b ist im Aufriß der Fig. 84 ganz weggelassen. Um gute Resultate zu erzielen, muß der ganze Apparat sorgfältig gearbeitet und die einzelnen Teile der Fallschiene so disponiert sein, daß der Schwerpunkt des ganzen fallenden Systems in die vertikale Mittellinie der Schiene r fällt.

Fig. 83.

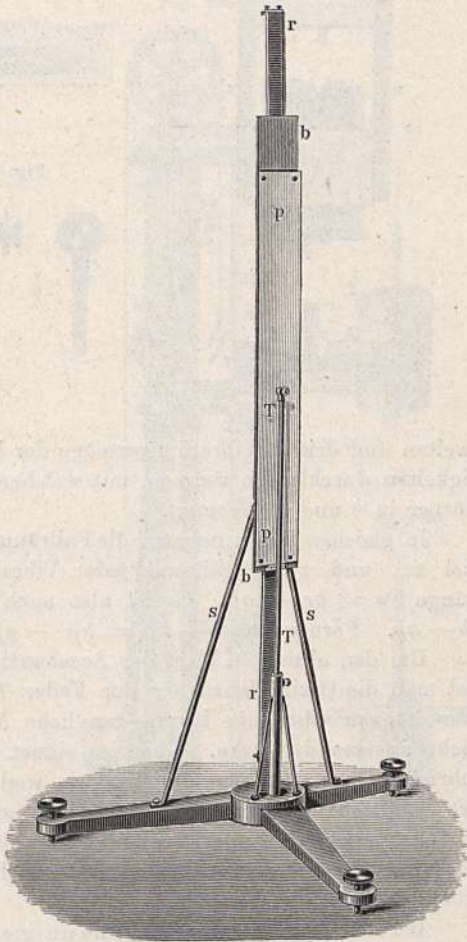


Fig. 85 stellt das am unteren Ende des Fallbrettes b angebrachte Häkchen dar, welches dazu dient, das obere Ende der Feder T seitlich festzustellen; Fig. 86 endlich stellt das obere Ende der Feder mit dem Schreibstifte von hinten und von der Seite gesehen dar.

Bei Ausführung des Versuches wird der Fallschlitten mit einem Streifen glatten Papiers überspannt, dann so weit gehoben, daß der Vorsprung der seitwärts gebogenen Feder in das erwähnte Häkchen eingelegt werden kann. Läßt man nun den Schlitten fallen, so wird gleichzeitig die Feder losgelassen, und ihr Stift schreibt auf der Papierfläche eine Kurve, welche in Fig. 87 abgebildet ist.

Durch diese Schwingungskurve, Fig. 87, wird nun das Fallgesetz sehr anschaulich dargestellt. Während der ersten, zweiten, dritten Oszillation des Stabes T werden die Räume ab , bc , cd durchfallen, und die Messung dieser

Fallräume zeigt, daß $ac = 4ab$, $ad = 9ab$, daß sich also die Fallräume wirklich wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten.

Zieht man von bc und cd die Längen $cn = do = ba$, also Längen ab, welche dem Fallraume während der ersten Vibration gleich sind, so bleiben die Längen bn und co , welche die Wege darstellen, welche während der

Fig. 84.

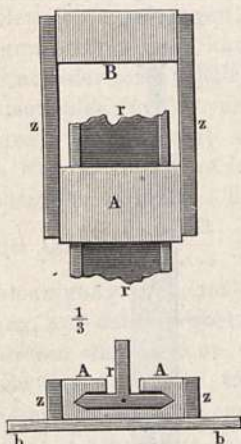


Fig. 85.



Fig. 86.

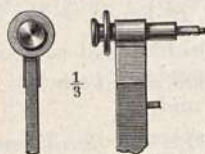
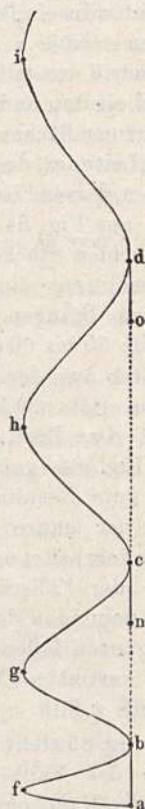


Fig. 87.



zweiten und dritten Vibration vermöge der Endgeschwindigkeiten durchlaufen werden, mit welchen der fallende Körper in b und c ankommt.

In gleichen Zeiten nehmen die Fallräume um gleichviel zu, und zwar während jeder Vibration um die Länge $bn = bc - ab$. Es ist also auch $cd - cb = cb - ab$. Ferner ist $ih - hg = hg - gf = bn$ usw.

Um den absoluten Wert der Acceleration zu finden, hat man die Oszillationsdauer der Feder T zu kennen. Wir können aber die hierzu taugliche Methode hier nicht auseinandersetzen. Überdies eignet sich der beschriebene Apparat hierzu nicht gut, weil die Reibung des Schlittens an der eisernen Schiene und der Schreibspitze immer eine geringe Verzögerung der Bewegung veranlaßt. Bei dem Apparate von Lipich ist diese Fehlerquelle vermieden, da der die Schreibfläche tragende Körper vollständig frei fällt.

Bei dem Apparate von Edelmann geschieht die Zeitmessung durch eine schwingende Stimmgabel, welche jedoch nicht auf dem fallenden Körper selbst schreibt. Die Zeitmarken für den Abgang und die Ankunft eines fallenden Körpers werden dabei auf elektrischem Wege vermittelt. Wir werden diese Methode erst später beschreiben.

Von der zweiten Klasse von Apparaten zur Beobachtung einer künstlich verlangsamten Fallbewegung wollen wir die Fallmaschine von Atwood beschreiben. Die Fallrinne von Galilei kann erst nach der Erklärung der Zerlegung der Kräfte in Verhandlung kommen.

Fallmaschine von Atwood. Die Bewegung beim freien Falle erfolgt, wie bereits erwähnt, zu schnell, als daß man ohne feinere Hilfsmittel die

Wege messen könnte, welche innerhalb der ersten, zweiten, dritten usw. Sekunde zurückgelegt werden. Gäbe es ein Mittel, diese Bewegung etwa auf ein Hundertstel zu verlangsamen, so daß die Wege, welche sonst so und so viele Meter betragen, nur mehr ebensoviele Centimeter umfassen, so wäre die direkte Messung ermöglicht.

Wir gelangen zu dieser Verlangsamung, wenn wir einen Körper von der Masse 100 g durch die Kraft in Bewegung setzen, mit welcher 1 g von der Erde angezogen wird. Wir müssen also eine solche Anordnung treffen, daß die Anziehung der Erde auf 99 von den 100 g aufgehoben wird und nur noch die Anziehung auf 1 g übrig bleibt, welche auf alle 100 g gleich verteilt wirken und sie in Bewegung setzen muß. Es kommt dann auf jedes einzelne Gramm nur $\frac{1}{100}$ der Schwerkraft zur Wirkung, die Beschleunigung, welche sonst 9,8 m beträgt, wird nur mehr 9,8 cm betragen; die ganze Bewegung spielt sich im 100mal verkleinerten Maßstab ab.

Hängen wir über eine Rolle Fig. 88, welche ohne merkliche Reibung um eine horizontale Achse drehbar und von verschwindend kleiner Masse ist, einen Faden und an jedes Ende desselben ein Gewicht von 50 g, so halten sich die Zugkräfte das Gleichgewicht und es erfolgt keine Bewegung. Nehmen wir aber jetzt von der einen Seite $\frac{1}{2}$ g fort und legen dasselbe zu den 50 g der anderen Seite, so sind die beiderseitigen Kräfte die von $49\frac{1}{2}$ und $50\frac{1}{2}$ g. Es ist also auf der letzteren Seite ein Überschuß von 1 g, dessen Anziehung durch die Erde nicht aufgehoben ist, während die Anziehung auf die übrigen 99 neutralisiert ist. Damit wäre also unser Zweck erreicht.

Nun ist es aber nicht möglich, eine Rolle zu finden, welche eine verschwindend kleine Masse hat. Gesetzt, wir könnten die Masse ihrer Achse und der Speichen so klein machen, daß wir sie vernachlässigen dürften, so bliebe nur der Umfang der Rolle zu berücksichtigen. Eine einfache Über-

Fig. 88.

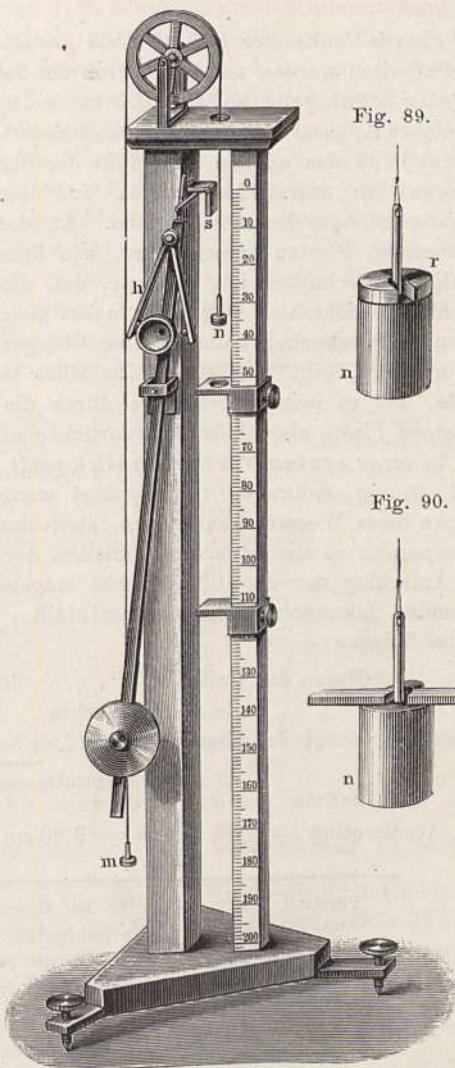
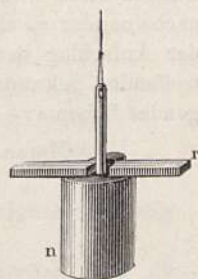


Fig. 89.



Fig. 90.



legung lehrt uns, daß die am Umfange der Rolle befindliche Masse bei der durch das Übergewicht eingeleiteten Bewegung dieselbe Geschwindigkeit annehmen muß wie die angehängten Gewichte. Gesetzt, die am Umfange befindliche Masse der Rolle betrage 79 g, so hängen wir an die Fadenenden nur die Massen 10 und 11 g, dann haben wir wiederum im ganzen $79 + 10 + 11 = 100$ g in Bewegung gesetzt durch den Zug von 1 g.

Die Atwoodsche Fallmaschine besteht nun aus einer solchen Rolle, welche auf einer Säule von ungefähr 2 m Höhe befestigt ist, Fig. 88, 89 und 90.

Eine in Centimeter geteilte Skala gestattet die Abmessung der Fallräume. Die Fallzeiten werden meistens durch ein Sekundenpendel gemessen, welches bei jeder Schwingung an eine Glocke schlägt. Außerdem ist eine bei verschiedenen Apparaten mannigfach abgeänderte Vorrichtung vorhanden, welche bewirkt, daß das an den Nullpunkt der Skala gestellte Schälchen mit dem Übergewichte zuerst festgehalten und dann im Augenblicke des ersten Sekundenschlages losgelassen wird. An der Skala sind zwei Schieber mit horizontalen Platten verschiebbar, von denen die eine in der Mitte kreisförmig ausgeschnitten ist, so zwar, daß die an den Faden gehängten zylindrischen Gewichtchen, Fig. 89 r, nebst gleichgeformter Schale *n* ohne anzustoßen hindurchgehen können. Dem Übergewichtchen, welches die Bewegung hervorbringt, gibt man die Form eines länglichen Plättchens von solcher Größe, daß es beim Durchgange durch die erwähnte kreisförmige Öffnung der einen Platte abgehoben und zurückbehalten wird, Fig. 90 r.

In einer ersten Versuchsreihe prüft man die Wegstrecken, welche in 1, 2, 3 usw. Sekunden zurückgelegt werden. Man berechnet zu diesem Zwecke diese Wegstrecken voraus, stellt den nicht durchbrochenen Schieber nacheinander an die berechneten Stellen der Skala und beobachtet dann, ob der Aufschlag der das Übergewicht tragenden Schale genau mit dem betreffenden Sekundenschlage zusammenfällt. Man hat also beispielsweise folgendes Schema:

Masse der Rolle	=	79 g
" " gleichen Gewichte	=	20 "
" des Übergewichtes	=	1 "
Bewegte Gesamtmasse	=	100 g

$$\text{Acceleration} = 9,80 \frac{1}{100} \text{ m} = 9,80 \text{ cm.}$$

Versuch Nr.	Zeitdauer der Bewegung in Sekunden	Fallraum berechnet
1	1	4,9
2	2	19,6
3	3	44,1
4	4	78,4
5	5	122,5

X Die Beobachtung ergibt gewöhnlich ein geringes Zurückbleiben, d. h. eine Verspätung, weil die Reibung an der Achse der Rolle und der Luftwiderstand die Bewegung etwas hemmen. Auch ist die Masse der Speichen und der

Achse der Rolle nicht ganz ohne Einfluß, endlich noch der Umstand etwas störend, daß das Übergewicht des Fadens im Anfange gegen die Bewegung, später im Sinne derselben wirksam ist. Will man, daß die Versuche möglichst genau eine bestimmte Acceleration geben, so vergrößert man probeweise das Übergewichtchen so lange, bis die berechneten Fallräume herauskommen. Das Mehrgewicht des Übergewichtchens kommt dann auf Rechnung der Reibung und der übrigen störenden Umstände.

In einer zweiten Versuchsreihe prüft man die momentanen Geschwindigkeiten, welche nach dem Falle von 1, 2, 3 usw. Sekunden erlangt werden. Zu diesem Zwecke setzt man die Platte mit der kreisförmigen Öffnung der Reihe nach auf dieselben Punkte der Skala, welche nach 1, 2, 3 usw. Sekunden erreicht werden, und setzt die volle Platte so weit unter die ausgeschnittene, daß die sinkenden Gewichte eine Sekunde nach dem Durchgange durch die letztere zum Aufschlage gelangen. Im Moment dieses Durchganges wird das Übergewichtchen abgehoben und damit jede Ursache zu einer weiteren Beschleunigung entfernt, so daß die Gewichte nur vermöge ihrer Trägheit die Bewegung mit der erlangten Geschwindigkeit fortsetzen. Läßt man also diese gleichförmige Bewegung eine Sekunde andauern, so ist der während derselben zurückgelegte Weg (der Abstand der beiden Platten) gleich der zu beobachtenden Geschwindigkeit. Das Schema wäre also etwa folgendes:

Versuch Nr.	Zeit bis zum Abheben des Übergewichtes in Sekunden	Teilstrich der Skala, wo das Abheben erfolgte	Teilstrich der Skala, wo die Gewichte eine Sekunde später ankommen	Erlangte Geschwindigkeit im Moment des Abhebens
1	1	4,9	14,7	9,8
2	2	19,6	39,2	19,6
3	3	44,1	73,5	29,4
4	4	78,4	117,6	39,2
5	5	122,5	171,5	49,0

Die Zahlen sind die berechneten und müssen durch die Versuche bestätigt werden.

Eine dritte Versuchsreihe kann dazu benutzt werden, um die fundamentale Beziehung: Beschleunigung = $\frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ experimentell zu bestätigen. Zu diesem Zwecke ändert man zunächst die Kraft allein, indem man Gewichtsstücke von einem der Schälchen ins andere legt, wodurch wohl die Größe des Übergewichtes, nicht aber die der gesamten in Bewegung gesetzten Masse geändert wird. Dann ändert man die Gesamtmasse allein, indem man auf beide Schälchen gleich große Gewichte zulegt. Endlich können beide Änderungen gleichzeitig vorgenommen werden.

Erster Versuch. Man nimmt beispielsweise von den 10 g des einen Schälchens $\frac{1}{2}$ g fort und legt es zu den 11 g des anderen Schälchens, dadurch wird das Übergewicht = 2, also die Kraft verdoppelt, also auch die Beschleunigung und die Fallräume sowie die momentanen Geschwindigkeiten, was der Versuch bestätigen muß.

Zweiter Versuch. Man macht die beiderseitigen Gewichte = 58 und 59 g, folglich ist die Gesamtmasse = $79 + 58 + 59 = 196$ g, das Übergewicht beträgt nur 1 g, also die treibende Kraft im (C. G. S.)-System = 980 Dynen. Daraus ergibt sich die Beschleunigung $\gamma = \frac{980}{196} = 5$ cm; die Fallräume in 1, 2, 3, 4, 5 Sekunden berechnen sich daraus zu 2,5, 10, 22,5, 40, 62,5 cm, was durch den Versuch zu bestätigen ist.

Dritter Versuch. Durch Überlegen eines halben Gramms von dem einen Schälchen auf das andere macht man ihre Belastungen = 57,5 und 59,5, also das Übergewicht = 2 g, ohne an der Gesamtmasse 196 g etwas zu ändern. Dadurch wird nur die Kraft verdoppelt, die Beschleunigung wird mithin = 10 cm. Die Fallräume werden = 5, 20, 45, 80, 125 cm.

Endlich wollen wir darauf aufmerksam machen, daß man unter Voraussetzung der Richtigkeit des Fallgesetzes die in Betracht kommende Masse der Rolle durch den Versuch ermitteln kann.

Hätte man z. B. nur durch den letzten Versuch konstatiert, daß bei einer Belastung der beiden Schalen = 57,5 g und 59,5 g, also 2 g Übergewicht in fünf Sekunden der Fallraum 125 cm beträgt, so hätte man zuerst die Beschleunigung $\gamma = 2 \cdot \frac{125}{5^2} = 10$ cm zu berechnen und dann die Gleichung

$$10 = \frac{2,980}{x + 5,75 + 59,5}$$

nach x aufzulösen. Man erhält daraus die in Betracht kommende Masse der Rolle $x = 79$ g. Unter dieser „in Betracht kommenden Masse“ der Rolle ist diejenige Masse zu verstehen, welche, am Umfange der Rolle allein vorhanden, der Beschleunigung denselben Trägheitswiderstand entgegensetzen würde wie die wirklich vorhandene Masse der Rolle, von der ein Teil sich näher der Achse befindet. Wir werden auf diesen Umstand später bei der Besprechung des Trägheitsmomentes zurückkommen.

§ 45. Unabhängigkeitsprinzip, Zusammensetzung gleichförmiger Bewegungen, Parallelogramm der Geschwindigkeiten. Wir haben im § 7 darauf aufmerksam gemacht, daß es nicht zulässig sei, von einem Punkte zu behaupten, er sei in absoluter Ruhe oder in absoluter fortschreitender Bewegung, da wir nur relative Ruhe oder relative fortschreitende Bewegung zu erkennen vermögen. Wenn wir folglich irgend einen Körper gegenüber einem anderen in eine relative Geschwindigkeit versetzen, so müssen wir stets daran denken, daß er vorher schon eine relative Geschwindigkeit in bezug auf einen anderen Körper besitze, oder vielmehr, daß er in bezug auf mehrere andere Körper gleichzeitig schon mehrere relative Geschwindigkeiten besitze, während er wieder anderen Körpern gegenüber in relativer Ruhe sich befinde. Wäre nun der Verlauf der von uns eingeleiteten relativen Bewegung des Körpers abhängig von den vorher in ihm vorhandenen relativen Bewegungen, so würde daraus folgen, daß wir in bezug auf den Verlauf der ersteren gar nichts Bestimmtes voraussagen könnten, denn je nachdem wir diesen oder jenen Bezugskörper als ruhig stehend annehmen wollten, wäre vorher diese oder jene Bewegung vorhanden. Soll also die von uns einem

Körper erteilte Geschwindigkeit eine vorauszusagende bestimmte Folge haben, so ist das nur möglich, wenn die einzelnen einem Körper erteilten relativen Geschwindigkeiten voneinander unabhängig sind. Da wir dem Körper nur dadurch eine (gleichförmige) Bewegung, d. h. eine Geschwindigkeit erteilen können, daß wir eine gewisse Zeit hindurch auf ihn eine beschleunigende Kraft wirken lassen, welche nach dem Aufhören eine Endgeschwindigkeit hinterläßt, so folgt daraus, daß auch die Wirkung einer beschleunigenden Kraft unabhängig sein muß von dem Vorhandensein einer anderen Bewegung, also auch von dem Vorhandengewesensein einer anderen beschleunigenden Kraft. Dieses Prinzip, welches schon von Galilei implicite vorausgesetzt, von Newton zuerst ausgesprochen ist, wird das Prinzip der Unabhängigkeit der Kräfte genannt.

Zusammensetzung zweier Geschwindigkeitskomponenten. Fassen wir folgendes Beispiel näher ins Auge. In Fig. 91 stelle das Rechteck AB den Boden eines Waggons vor, welcher in einer bestimmten Zeit,

Fig. 91.

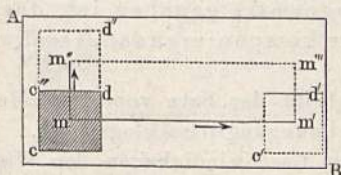
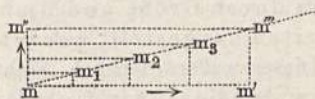


Fig. 92.



z. B. in einer Sekunde, um eine Strecke gleich der Länge mm' nach rechts gleichförmig bewegt werde. Auf dem Boden des Waggons befinde sich eine Kiste cd , welche gleichzeitig von Menschenhand mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Strecke mm'' verschoben werde, so daß sie in die Lage $c'd''$ gelangt. Fassen wir einen Punkt m auf dem Deckel der Kiste ins Auge, so erfährt derselbe zunächst mitsamt dem Waggon in bezug auf die Erde eine relative Bewegung nach m' und zugleich in bezug auf den Waggon eine relative Bewegung nach m'' . Welches ist dann die relative Bewegung des Punktes m in bezug auf die Erde? Es ist wohl unmittelbar einleuchtend, daß sich der Punkt m nach Verlauf der Sekunde in m''' befinden muß; nämlich dort, wo sich die gegenüberliegende Ecke eines Parallelogramms befindet, das wir mit den Seiten mm' und mm'' konstruieren können¹⁾. Fragen wir in ähnlicher Weise nach dem Orte, wo sich der Punkt m nach der Hälfte dieser Zeit befinden muß, so werden wir durch dieselbe Überlegung zu dem Resultate gelangen, daß er sich in der gegenüberliegenden Ecke eines Parallelogramms aus den Hälften der Seiten mm' und mm'' befinden müsse. Suchen wir so fort die Orte auf für beliebige Bruchteile oder

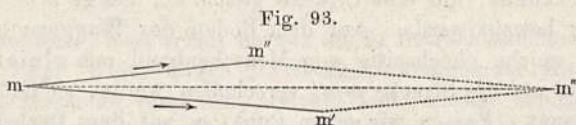
¹⁾ Man kann sich zunächst vorstellen, daß zuerst eine Sekunde lang der Waggon, dann eine Sekunde lang die Kiste allein sich bewegen oder umgekehrt zuerst die Kiste verschoben, dann der Waggon bewegt werde. Beide Male gelangt der Punkt m nach m''' ; er gelangt auch dann dahin, wenn abwechselnd einen Bruchteil der Zeit die eine, dann die andere Bewegung stattfindet, wenn nur jede der Bewegungen im ganzen eine Sekunde dauert. Da also die schließliche Lage des Punktes von diesen Umständen unabhängig ist, so leuchtet ein, daß sie auch bei Gleichzeitigkeit dieser Bewegungen resultieren wird. Trotzdem lassen wir es dahingestellt, ob dieses Resultat durch Spekulation strenge abzuleiten oder nur durch Erfahrung zu gewinnen sei.

Vielfache der Sekunde, so werden wir, wie Fig. 92 erläutert, unmittelbar zur Einsicht geführt, daß der Punkt m in bezug auf die Erde die relative Bewegung längs der Diagonale mm'' , und zwar ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit ausführen müsse. Wir heißen diese Bewegung die resultierende Bewegung oder kurz die Resultierende; die beiden, aus denen sie sich zusammensetzte, die komponierenden Bewegungen oder die Komponenten. Da mm' und mm'' Wege pro Sekunde, also Geschwindigkeiten darstellen, so stellt auch die Diagonale mm'' den Weg pro Sekunde, also die resultierende Geschwindigkeit vor.

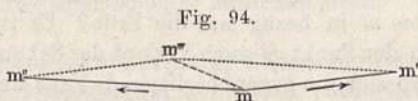
Das eben gewonnene Resultat ist offenbar ganz unabhängig von dem Winkel, den die Geschwindigkeitsrichtungen mm' und mm'' miteinander einschließen; wir können es in folgende Worte zusammenfassen: Wenn einem Körper in bezug auf ein System anderer Körper zwei Geschwindigkeiten nach verschiedenen Richtungen erteilt werden, so erhält er hierdurch in bezug auf dasselbe Körpersystem eine resultierende Geschwindigkeit, welche der Größe und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelogramms gegeben ist, dessen Seiten durch Größe und Richtung der komponierenden Geschwindigkeiten dargestellt werden.

Dieser außerordentlich wichtige Satz heißt der Satz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten (auch Bewegungsparallelogramm).

Für den Fall, daß die komponierenden Geschwindigkeiten den Winkel $= 0$ oder 180° einschließen, d. h. in ein und dieselbe Gerade zu liegen



kommen, läßt sich kein Parallelogramm mehr konstruieren; man übersieht aber sofort aus solchen Beispielen, Fig. 93 und Fig. 94, bei welchen der



Winkel der Komponenten sich dem Werte Null oder 180° nähert, daß an die Stelle der zu konstruierenden Diagonale im ersten Falle die Summe, im zweiten Falle die Differenz der Seitenlängen zu treten hat.

Rechnet man die Geschwindigkeitskomponenten nach entgegengesetzten Richtungen mit entgegengesetzten Zeichen, so ist die Resultierende gegeben durch die algebraische Summe der Komponenten. Durch die Zusammensetzung zweier gleichförmiger Bewegungen auf ein und derselben Geraden entsteht also wiederum eine gleichförmige Bewegung auf derselben Geraden. In dem speziellen Falle, daß die Geschwindigkeitskomponenten gleich groß sind und entgegengesetztes Zeichen haben, ist die resultierende Geschwindigkeit $= 0$; d. h. es tritt relative Ruhe ein.

Zusammensetzung mehrerer Geschwindigkeitskomponenten in einer Ebene. Gehen wir noch einmal auf das Beispiel mit der Kiste auf dem Waggon zurück, Fig. 95. Im Punkte s befinde sich eine Spinne,

welche zu gleicher Zeit, während der Waggon den Weg sw , die Kiste auf dem Waggon den Weg sk beschreibt, auf der Kiste den Weg ss' mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurücklege.

Ziehen wir $s's''$ und wk' parallel zu sk , ks'' und $k's'''$ parallel zu ss' und ziehen ss'' und ss''' , so erhalten wir, was wohl keiner weiteren Erklärung bedarf, folgende Wege:

Die Spinne bewegt sich relativ zur Kiste auf dem Wege	ss'
" " " " " zum Waggon auf dem Wege	ss''
" " " " " zur Erde " " "	ss'''

Diese Wege werden sämtlich mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurückgelegt, deren Größe durch die Länge der Linien ss' , ss'' und ss''' vorgestellt wird, falls die Bewegung gerade eine Sekunde lang dauert. Den Weg bzw.

Fig. 95.

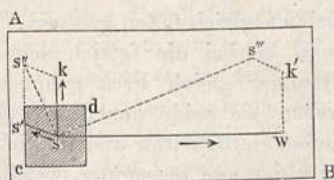
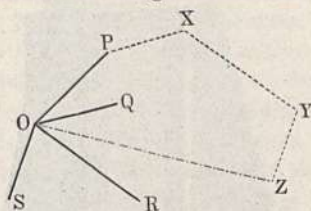


Fig. 96.



die Geschwindigkeit ss''' nennen wir die Resultierende der drei Komponenten ss' , sk und sw .

In Fig. 96 ist der Fall dargestellt, daß noch mehr Komponenten, nämlich OP , OQ , OR und OS zu einer Resultierenden zusammengesetzt werden sollen.

Man zieht zuerst PX parallel und gleich lang mit OQ , dann XY parallel und gleich lang mit OR , dann YZ parallel und gleich OS , endlich die Resultierende OZ . Die so entstehende Figur $OPXYZ$ wird das Geschwindigkeitspolygon genannt. Wenn die Konstruktion dieses Polygons ergibt, daß der Endpunkt der zuletzt angefügten Komponenten in den Ausgangspunkt O fällt, so ist die Resultierende $= 0$. Die sämtlichen Bewegungen heben einander dann auf. Der Punkt O bleibt in Ruhe.

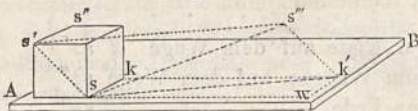
Zusammensetzung von Geschwindigkeitskomponenten im Raume. Fig. 97 stelle wiederum, aber diesmal in perspektivischer Darstellung, den Boden des oben erwähnten Waggons mit der darauf befindlichen parallelepipedischen Kiste vor. Während der Waggon um ein Stück sw nach rechts geht, werde die Kiste um sk nach rückwärts geschoben, und während derselben Zeit krieche eine in s befindliche Spinne längs der Diagonale der vorderen Wandfläche nach s' .

Es ist dann die relative Bewegung der Spinne in bezug auf den Waggon von s nach s'' gerichtet, die relative Bewegung derselben in bezug auf die Erde ist ss''' . Um den Punkt s''' zu finden, konstruieren wir zuerst das Parallelogramm aus den Seiten sw und sk in der Ebene des Waggonbodens; dann denken wir uns von k' eine schief aufsteigende Gerade $k's'''$ parallel und gleich mit ss' gezogen. Die Diagonale des Parallelogramms $sk's'''s'$, nämlich die Gerade ss''' , ist daher die gesuchte Resultierende der drei Komponenten sw , sk und ss' .

In ähnlicher Weise kann man immer vorgehen, indem man nach und nach die Komponenten zur Konstruktion von Parallelogrammen heranzieht.

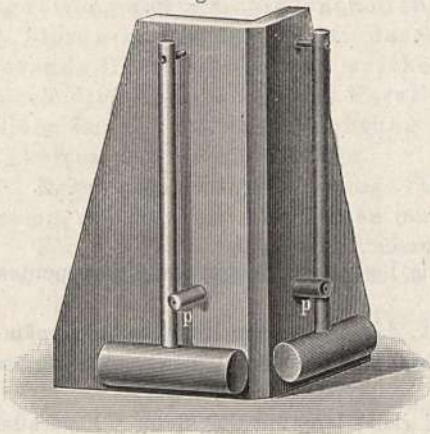
Um den Satz vom Geschwindigkeitsparallelogramm durch einen Vorlesungsversuch zu belegen, kann man sich (unter Beschränkung auf einen

Fig. 97.



speziellen Fall) einer von A. F. Weinhhold¹⁾ beschriebenen einfachen Vorrichtung bedienen. Dieselbe ist in Fig. 98 in perspektivischer Ansicht in ein Sechstel natürlicher Größe abgebildet und wohl ohne weitere Beschreibung verständlich. Beim Versuche

Fig. 98.



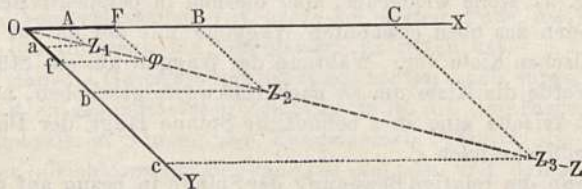
wird die Vorrichtung auf eine horizontale Tischplatte gestellt, an die Ecke eine Elfenbeinkugel an die beiden Hämmer angelegt, dann zuerst jeder Hammer für sich, endlich beide zugleich fallen gelassen. Hatte man hierbei die (gleich schweren) Hämmer gleich hoch gehoben, so geben sie beide der Kugel gleiche Geschwindigkeiten und folglich eine resultierende Bewegung, welche den Winkel der Komponenten halbiert.

Für andere quantitative Versuche ist der Apparat wohl nicht geeignet, doch läßt sich zeigen, daß sich die Richtung der Resultierenden desto mehr einer der beiden Komponenten nähert, je mehr man dieselbe (durch Höherheben des betreffenden Hammers) vergrößert.

Die Kautschukpuffer *pp* verhindern ein Zusammenschlagen der Hämmer.

§ 46. Zusammensetzung gleichmäßig beschleunigter Bewegungen; Parallelogramm der Beschleunigungen. Auf einen materiellen Punkt *O*, Fig. 99, wirken zwei konstante Kräfte, deren Richtungen *OX* und *OY* einen

Fig. 99.



beliebigen Winkel einschließen und deren Größen durch die Beschleunigungen *OF* und *Of* vorgestellt seien.

Unter dem Einflusse dieser Kräfte werden in der ersten Sekunde Wege zurückgelegt, welche gleich der halben Beschleunigung sind. Die Wege der folgenden Sekunden sind dann 3 mal, 5 mal, 7 mal usw. so groß.

¹⁾ Physikalische Demonstrationen, S. 64.

Wäre also bloß die Kraft nach X vorhanden, so wären die vom Punkte O zurückgelegten Wege der ersten drei Sekunden $= OA = \frac{1}{2} OF$, dann $AB = 3 OA$, dann $BC = 5 OA$ und so fort. Wäre nur die Kraft nach Y vorhanden, so wären die entsprechenden Wege Oa, ab, bc usw. Auf Grund des im vorausgehenden Paragraphen besprochenen Unabhängigkeitsprinzips folgt nun, daß, wenn beide Kräfte zugleich wirken, der Punkt nach 1, 2 und 3 Sekunden in Stationen angelangt sein wird, die wir finden, wenn wir uns die beiderseitigen Bewegungen nacheinander ausgeführt denken. Hierdurch gelangen wir zur Einsicht, daß diese Stationen in den Punkten Z_1, Z_2, Z_3 gelegen sein müssen, die wir durch Konstruktion der Parallelogramme mit den Seiten OA und Oa, OB und Ob, OC und Oc erhalten. Denken wir uns nun die Zeiteinheit (Sekunde) in kleinere Teile zerlegt, z. B. in Zehntelsekunden, und wiederholen wir die Konstruktion mit den diesen kleineren Zeiteinheiten entsprechenden Wegen, so wird dadurch wohl die Zahl der zu konstruierenden Parallelogramme vermehrt, jedoch müssen wiederum alle gefundenen Stationspunkte in die Diagonale OZ fallen, welche mithin die Bahn des Punktes O darstellt. Daß die resultierende Bewegung wiederum eine gleichmäßig beschleunigte sein werde, ersieht man aus dem Verhältnis der aufeinander folgenden Wegstrecken, die sich ebenfalls verhalten wie $1:3:5$ usw. Die resultierende Beschleunigung ist dargestellt durch das Doppelte des Weges OZ_1 der ersten Zeiteinheit, also durch die Länge $O\phi$.

Man nennt deshalb das Parallelogramm $OF\phi f$ das Parallelogramm der Beschleunigungen oder, da bei gleicher Masse die Beschleunigung als Maß der Kraft gilt, das Parallelogramm der Kräfte.

Fassen wir die Resultate zusammen:

1. Durch die Zusammensetzung zweier geradliniger, gleichmäßig beschleunigter Bewegungen entsteht wiederum eine geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

2. Größe und Richtung der Beschleunigung dieser resultierenden Bewegung ergibt sich durch die Größe und Richtung der Diagonale des Parallelogramms der Beschleunigungen.

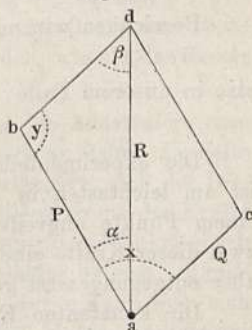
Bezüglich der speziellen Fälle, in denen die zusammensetzenden Beschleunigungen in eine Gerade fallen, wobei sie im selben Sinne oder gegeneinander gerichtet sein können, gilt genau dasselbe wie bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. Die resultierende Beschleunigung ist in diesen Fällen die algebraische Summe der Komponenten.

Ebenso kann man bei mehreren in einer Ebene wirksamen Kräften ein Beschleunigungspolygon konstruieren. Endlich lassen sich Komponenten, welche nicht in einer Ebene liegen, ganz so zusammensetzen wie Geschwindigkeitskomponenten.

So oft bei der Zusammensetzung von Beschleunigungen (Kräften) die Resultierende $= 0$ ausfällt, heben sich die Kräfte gegenseitig auf, man sagt, es herrsche Gleichgewicht der Kräfte.

Die Resultierende zweier Geschwindigkeiten oder zweier Beschleunigungen läßt sich nach Größe und Richtung außer durch die Konstruktion des Parallelo-

Fig. 100.



gramms auch durch Rechnung ableiten. Nehmen wir an, daß auf den Punkt a , Fig. 100, zwei Kräfte P und Q wirken, welche sich verhalten wie die Linien ab und ac , während ihre Richtungen den Winkel x miteinander einschließen, so ist die Resultierende durch die Diagonale ad dargestellt, die wir mit R bezeichnen wollen. ad ist aber eine Seite des Dreiecks abd . Einem bekannten trigonometrischen Satze zufolge ist also:

$$ad^2 = ab^2 + bd^2 - 2 ab \cdot bd \cdot \cos y$$

oder

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2 P \cdot Q \cos y,$$

wenn man mit y den Winkel abd bezeichnet. Nun aber ist $y = 180^\circ - x$, also $\cos y = -\cos x$, folglich

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2 P \cdot Q \cos x \quad \dots \quad (1)$$

Es sei z. B. $P = 3$, $Q = 2$ und der Winkel x gleich 75° , so ergibt sich

$$R^2 = 9 + 4 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 75^\circ$$

$$R^2 = 13 + 12 \cdot 0,259 = 16,1$$

mithin

$$R = 4,0 \dots$$

Ist einmal die Größe der Resultierenden mit Hilfe der Gleichung (1) ermittelt, so kann man leicht auch die Winkel berechnen, welche die Resultierende mit den Seitenkräften bildet. Bezeichnen wir den Winkel bad mit α , so ergibt sich aus dem Dreieck abd

$$R : Q = \sin y : \sin \alpha,$$

also

$$\sin \alpha = \frac{Q \sin y}{R} = \frac{Q \sin (180 - x)}{R}$$

oder

$$\sin \alpha = \frac{Q \sin x}{R},$$

da $\sin x = \sin (180 - x)$ ist. Für unser obiges Beispiel ergebe sich also

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin 75^\circ}{4} = 0,5 \cdot 0,966 = 0,483,$$

mithin

$$\alpha = 28^\circ 52'.$$

Bezeichnen wir mit β den Winkel, welchen Q mit R macht, so ist

$$\beta = x - \alpha,$$

also in unserem Falle

$$\beta = 75^\circ - 28^\circ 53' = 46^\circ 7'.$$

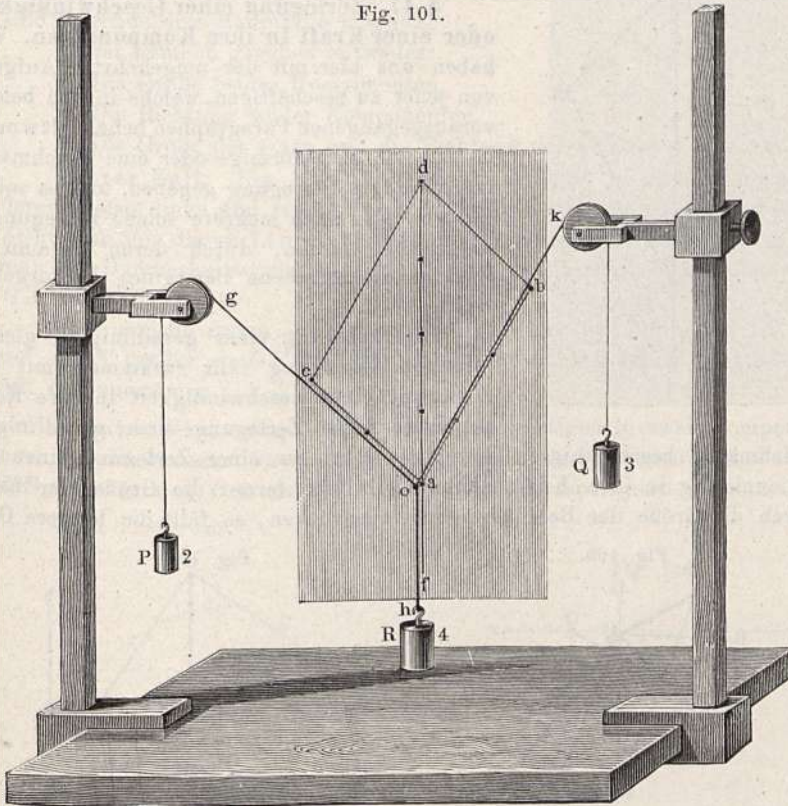
Die experimentelle Bestätigung des Satzes vom Kräfteparallelogramm ist am leichtesten in dem Falle durchzuführen, in welchem durch drei in einem Punkte angreifende Kräfte Gleichgewicht hergestellt wird, indem je zwei dieser Kräfte eine Resultierende geben, welche der dritten Kraft gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist.

Die konstanten Kräfte werden hierbei durch den Zug von Gewichtsstücken hervorgebracht. Fig. 101 zeigt eine hierzu geeignete Vorrichtung.

An einem Tischplatte sind zwei vertikale Stäbe angeschraubt, an jedem Stabe aber ist eine Hülse verschiebbar, welche eine um ihre Achse in verti-

kaler Ebene leicht bewegliche Rolle trägt; die Stäbe müssen so angeschraubt sein, daß die Vertikalebene beider Rollen zusammenfallen. Schlingt man eine Schnur über die Rollen, hängt an dem einen Ende ein Gewicht P , am anderen Ende ein Gewicht Q , zwischen den Rollen ein Gewicht R an, so wird

Fig. 101.

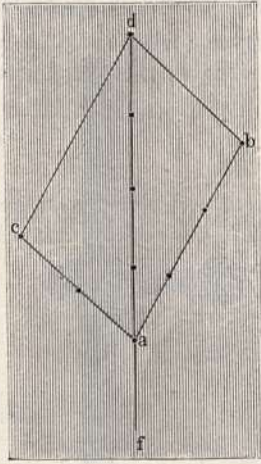


sich bei irgendeiner bestimmten Lage der Fäden alles ins Gleichgewicht stellen; man hat nun drei auf den Punkt o nach der Richtung og , ok und oh wirkende Kräfte, und es ist leicht zu prüfen, ob zwischen der Größe und Richtung derselben diejenigen Beziehungen wirklich stattfinden, wie sie das Gesetz des Parallelogramms der Kräfte verlangt.

Es sei z. B. $P = 2 dg$, $Q = 3 dg$ und $R = 4 dg$, so konstruiere man ein Parallelogramm $abcd$, Fig. 102, in welchem die Seite ac 2 dm, die Seite ab 3 dm und die Diagonale ad 4 dm lang ist, und verlängere noch die Diagonale da nach f hin. Wenn nun das Gesetz des Parallelogramms der Kräfte richtig ist, so muß der Winkel cab dieses Parallelogramms dem Winkel gleich sein, welchen unter den gegebenen Umständen die Schnüre og und ok miteinander einschließen; daß dies in der Tat der Fall ist, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Konstruktionsfigur so hinter die Schnüre hält, daß der Punkt a hinter o und af hinter oh fällt, wie dies in Fig. 101 angedeutet ist.

Einen auf denselben Grundsätzen beruhenden, ebenfalls sehr zweckmäßigen Apparat zur experimentellen Bestätigung der Lehre vom Parallelogramm der Kräfte hat Grahay¹⁾ beschrieben.

Fig. 102.



§ 47. Zerlegung einer Geschwindigkeit oder einer Kraft in ihre Komponenten. Wir haben uns hier mit der umgekehrten Aufgabe von jener zu beschäftigen, welche in den beiden vorausgegangenen Paragraphen behandelt wurde. Es ist eine gleichförmige oder eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung gegeben, und es sollen je zwei oder auch mehrere solche Bewegungen aufgesucht werden, durch deren Zusammensetzung die gegebene Bewegung hervorgehen würde.

Die Zerlegung einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung fällt zusammen mit der Zerlegung einer Geschwindigkeit in ihre Komponenten. Die Zerlegung einer geradlinigen, gleichmäßig beschleunigten Bewegung führt zu einer Zerlegung einer Beschleunigung in ihre Komponenten. Da wir ferner die Größe der Kraft durch die Größe der Beschleunigung ausdrücken, so fällt die letztere Ope-

Fig. 103.

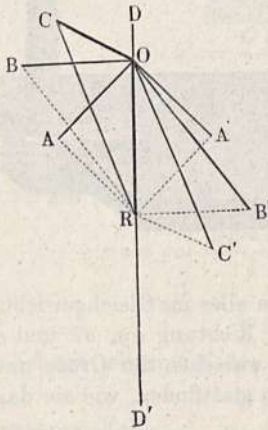
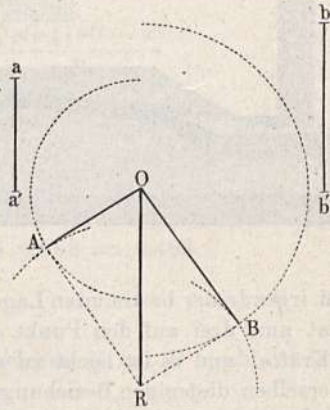


Fig. 104.



ration auch zusammen mit der Zerlegung einer gegebenen Kraft in mehrere Kräfte solcher Richtung und Stärke, daß ihre Wirkung gleich ist der Wirkung der ursprünglich gegebenen Kraft.

Diese sämtlichen Zerlegungen erfolgen nach derselben Methode. Wir betrachten zunächst die Zerlegung einer Resultierenden (Geschwindigkeit oder Beschleunigung) in zwei Komponenten.

Da man zu einer gegebenen Diagonale eine unbegrenzte Menge von Parallelogrammen zeichnen kann, so ist es auf unbegrenzt viele Weisen mög-

¹⁾ Poggend. Ann. 60, Fricks physik. Technik, 6. Aufl., S. 176.

lich, eine Resultierende in zwei Komponenten zu zerlegen. In Fig. 103 z. B. ist die Resultierende OR zerlegbar in OA und OA' oder in OB und OB' , oder in OC und OC' , oder in OD und OD' .

Die Aufgabe bleibt also unbestimmt, solange nicht einschränkende Bedingungen über Richtung oder Größe der Komponenten gegeben sind. Dabei sind folgende drei Hauptfälle möglich.

Es ist nämlich gegeben entweder:

1. Die Größe beider Komponenten.
2. Die Richtung beider Komponenten.
3. Die Größe der einen und die Richtung der anderen Komponente.

Erster Fall. Fig. 104. OR sei zu zerlegen in zwei Komponenten, deren Größen links und rechts durch die Längen aa' und bb' dargestellt sind. Zieht man mit diesen Längen als Radien aus O und R Kreisbögen, so erhält man die Durchschnittpunkte A und B und damit die beiden Komponenten OA und OB .

Man ersieht sofort, daß diese Aufgabe nur dann möglich ist, wenn $aa' + bb'$ größer als OR ist. Für $aa' + bb' = OR$ fallen die Richtungen mit OR zusammen.

Zweiter Fall. Fig. 105. OR sei zu zerlegen in zwei Komponenten nach den Richtungen Ox und Oy . Zieht man die Parallelen $RA \parallel Oy$ und $RB \parallel Ox$, so sind OA und OB die gesuchten Komponenten.

Fig. 105.

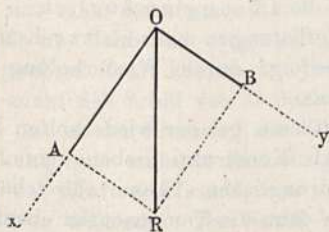
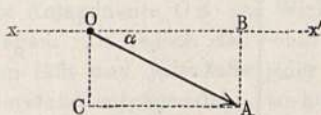


Fig. 106.



Dieser Fall kommt sehr häufig in folgender Weise vor. Ein Punkt O , Fig. 106, sei nur in einer bestimmten Richtung xx' beweglich. Es werde auf ihn eine Geschwindigkeit oder Beschleunigung in der Richtung und Größe OA übertragen, und es fragt sich nun, mit welcher Geschwindigkeit oder Beschleunigung er sich gegen x' bewegen werde. Wählt man die Richtung der zweiten Komponente senkrecht auf Ox' , so ist einzusehen, daß nun von beiden Komponenten OB und OC nur die erstere zur Ausführung kommen kann. Die zweite Komponente OC könnte nur einen Druck auf das Hemmnis hervorbringen, welches den Punkt zwingt, in der Geraden xx' zu bleiben. Offenbar ist $OB = OA \cos \alpha$ und wird die Projektion der Geschwindigkeit oder der Kraft auf die Richtung der Bewegung genannt.

Dritter Fall. Fig. 107. OR sei zu zerlegen in eine Komponente von der Größe aa' auf der linken Seite und in eine Komponente von der Richtung Oy auf der rechten Seite. Man beschreibt mit dem Radius $= aa'$ Kreisbögen um O und R . Hier sind nun wieder drei Fälle möglich.

a) Fig. 107, der von R aus beschriebene Kreisbogen schneidet die Gerade Oy in zwei Punkten B und B' . Man zieht die Parallelen $OA \parallel BR$ und

$OA' // B'R$ und erhält so die Aufgabe doppelt gelöst, denn sowohl die Komponenten OA und OB , als auch die Komponenten OA' und OB' geben mitsammen die Resultierende OR .

Fig. 107.

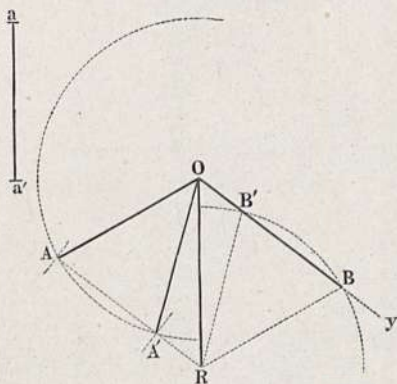
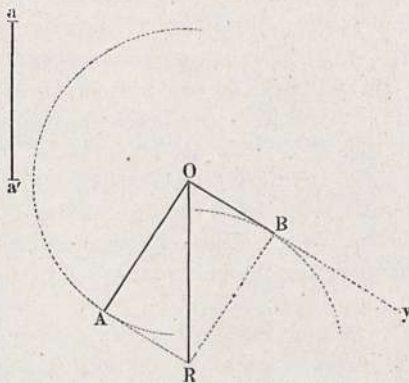
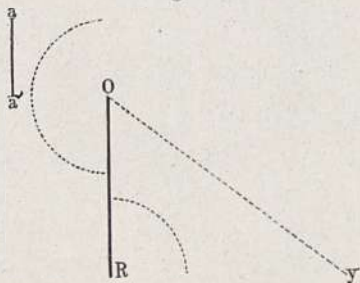


Fig. 108.



b) Fig. 108, der von R aus beschriebene Bogen hat mit der Geraden Oy nur einen Punkt gemeinsam, dann gibt es nur eine Lösung.

Fig. 109.



c) Fig. 109, der um R gezogene Kreisbogen erreicht die Gerade Oy gar nicht, dann ist die Lösung unmöglich.

Die Zerlegung in mehr als zwei Komponenten erfolgt durch Wiederholung des Verfahrens.

Wählt man bei der wiederholten Zerlegung als Konstruktionsebene eine von der ursprünglichen Ebene abweichende, so liegen dann die Komponenten ebenfalls nicht in einer Ebene, sondern im Raume.

Beispiele: Einfache Zerlegung. Von den überaus zahlreichen Anwendungen der Zerlegung der Kräfte wollen wir hier die Wirkung des Steuers an einem Schiffe darstellen.

Es sei SS' , Fig. 110, die Kielrichtung, d. h. Längsachse des Schiffes, $S'O$ das um eine vertikale Achse bei S' drehbare Steuerruder, auf welches in der hier angenommenen Seitenstellung der Widerstand des Wassers in der Richtung des Pfeiles P' eine Kraft ausübt, wenn das Schiff durch die Ruderschläge in der Richtung des Pfeiles P in Bewegung gesetzt wird. OR stelle die Größe und Richtung dieser Kraft vor. Dieselbe ist in zwei Komponenten zerlegbar, von denen die eine parallel dem Steuerruder OB unbenutzt bleibt, die andere auf dem Steuer senkrechte OA das Hinterteil des Schiffes nach links zu verschieben trachtet. Hierdurch wird ein nach rechts Lenken des Vorderteiles erreicht.

Hängt das Schiffchen an seiner Spitze mittels eines der Strömung parallelen Seiles und einer Laufrolle an einem den Fluß quer überspannenden Seile, so wird es durch den besprochenen Seitendruck auf das Steuer vom linksseitigen Flußufer auf das rechtsseitige (den Blick stromabwärts gedacht)

übergeführt. Um dann wieder an das frühere Ufer zurückzukehren, muß man das Steuerruder umstellen.

Wiederholte Zerlegung. Ein interessantes Beispiel für die wiederholte Zerlegung einer Kraft ist die Anwendung des Segels zur Bewegung des Schiffes.

In Fig. 111 stelle SS' ein kleines Segelboot von oben gesehen vor. VV' sei die Ebene des Segels, auf welches der Wind in der Richtung des Pfeiles

Fig. 110.

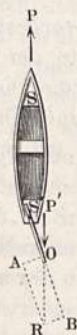
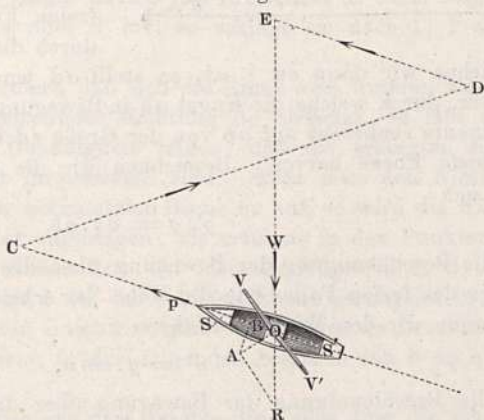


Fig. 111.



W mit einer konstanten Kraft drücke, welche durch die Strecke OR nach Größe und Richtung vorgestellt werde. Von dieser schieb auf die Segelfläche ausgeübten Kraft kommt nur die senkrechte Komponente OA zur Wirkung. Sie sucht das Schiff von O nach A zu bewegen. Da jedoch das Schiff sich fast nur in der Richtung des Kieles bewegen läßt und jedenfalls jeder Verückung quer auf den Kiel ein großer Widerstand entgegensteht, so kommt von der Kraft OA wieder nur die Projektion auf die Richtung OS , nämlich OB zur Wirkung. Das Schiff bewegt sich also mit einer gewissen Kraft in der Richtung des Pfeiles p . Stellt man es dann nach einiger Zeit z. B. in C mit der Spitze gegen D und wendet das Segel um, so daß seine Fläche wiederum den Winkel zwischen jener Richtung, aus welcher der Wind bläst und der Richtung des Laufes des Schiffes halbiert, so wird das letztere gegen D hingetrieben. Auf diese Weise kommt es zu dem auffallenden Resultate, daß das Schiff, im Zickzack hin und her fahrend (lavierend), durch den Wind getrieben, sich jener Gegend nähern kann, von welcher der Wind weht. Auf ähnliche Weise werden in nördlichen Gegenden Segelschlitten durch den Wind in einer Richtung in Bewegung gesetzt, die keineswegs mit der Richtung des Windes zusammenfallen muß. Es läßt sich vielmehr zeigen, daß der Segelschlitten in dem Falle, wo die Windrichtung quer auf die Richtung der Fahrt gerichtet ist, in größere Fahrgeschwindigkeit, als die des Windes selbst ist, versetzt werden kann, was nicht möglich ist, wenn die Windrichtung in die Fahrtrichtung fällt.

2 Wind

§ 48. Fall über die schiefe Ebene. Nachdem wir die Zerlegung einer Kraft in Komponenten kennen gelernt, können wir nun auch den Fall über die schiefe Ebene, an welchem Galilei zuerst die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung studiert hat, in Behandlung ziehen.

In Fig. 112 stelle ab die schiefe Ebene vor, welche mit der Horizontalen bc den Winkel α einschlieÙe. An die höchste Stelle bei a denken wir uns

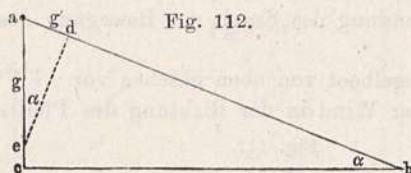


Fig. 112.

eine kleine Kugel gelegt, welche uns einen beweglichen, materiellen Punkt vertreten soll. Die Kraft, mit welcher diese Kugel von der Erde längs der Richtung ac angezogen wird, wird durch die Beschleunigung g des freien Falles gemessen und werde durch die Länge ae vorgestellt.

Ziehen wir dann $ed \perp ab$, so stellt ad jene Komponente der Schwerkraft vor, durch welche die Kugel ab in Bewegung gesetzt wird. Die andere Komponente senkrecht auf ab von der Größe ed bringt nur einen Druck auf die schiefe Ebene hervor. Bezeichnen wir die Komponente ad mit g' , so ergibt sich

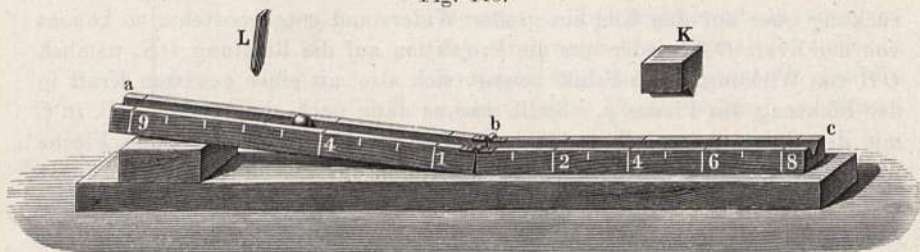
$$g':g = ac:ab,$$

d. h. die Beschleunigung der Bewegung über die schiefe Ebene verhält sich zu jener des freien Falles wie die Höhe der schiegen Ebene zu ihrer Länge. Oder, wenn wir den Winkel einführen

$$g' = g \cdot \sin \alpha,$$

d. h. die Beschleunigung der Bewegung über die schiefe Ebene ist gleich jener des freien Falles, multipliziert mit dem Sinus des Neigungswinkels. Man kann daher durch passende Neigung die Bewegung beliebig verlangsamen¹⁾. Zur Anstellung der Galileischen Fallversuche bedient man sich am besten einer etwa 2 bis 4 m langen hölzernen Fallrinne ab , Fig. 113,

Fig. 113.



welche durch zwei wohl polierte, unter rechtem Winkel sich schneidende ebene Flächen gebildet wird. Der Länge nach ist diese Fallrinne, deren Neigung gegen die Horizontale beliebig geändert werden kann, in Decimeter (oder nach einer größeren Einheit) eingeteilt, wie Fig. 113 zeigt. Ist die Fallrinne so gestellt, daß $g' \sin x = 2$ dcm, daß also der Fallraum der ersten Sekunde 1 dcm ist, so wird man finden, daß die Kugel in 2, 3 usw. Sekunden

¹⁾ Die hier abgeleiteten Gesetze gelten, streng genommen, nur für einen materiellen Punkt oder auch einen Körper, der über die schiefe Ebene ohne Reibung gleitet. Bei einem rollenden Körper wird ein Teil der Kraft zur Rotationsbewegung verwendet und ist deshalb die fortschreitende Geschwindigkeit erheblich geringer. Es wird dieser Sachverhalt an späterer Stelle näher auseinandergesetzt werden.

einen Weg von 4, 9 usw. Decimetern in der Fallrinne durchläuft, daß sich also die Fallräume wirklich wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten.

Statt des Sekundenpendels mit hörbarem Schlag kann man mit Vorteil auch das Metronom¹⁾ benutzen, weil es gestattet, statt der Sekunde auch eine beliebig kleinere Zeiteinheit in Anwendung zu bringen.

Um den Versuch anzustellen, wird der Klotz *K* so gestellt, daß seine Vorderfläche (links) bei *b* gerade auf den Nullpunkt der Teilung zu stehen kommt. Läßt man dann die Kugel mittels des Brettchens *L* beim Schlage des Sekundenpendels bei 1, 4 oder 9 los, so schlägt sie nach 1, 2 oder 3 Sekunden am Klotz *K* an.

Ist der Apparat so konstruiert, daß sich die Rinne vom unteren Ende *b* der schiefen Ebene an in horizontaler Richtung *bc* fortsetzt, so läßt sich wenigstens mit angenäherter Genauigkeit zeigen, daß die erlangten Endgeschwindigkeiten der Fallzeit proportional sind. Stellt man den Klotz *K* bei den Teilstrichen 2, 4, 6 der horizontalen Rinne *bc* auf, so wird die Kugel an ihn 2, 3, 4 Sekunden später anschlagen, als man sie in den Punkten 1, 4, 9 der schiefen Ebene losgelassen hat. Ist also die Kugel in 1, 2 oder 3 Sekunden von 1, 4 oder 9 bis *b* auf der schiefen Ebene herabgefallen, so läuft sie vermöge der erlangten Geschwindigkeit (ohne weitere Beschleunigung) auf der horizontalen Ebene in der folgenden Sekunde von *b* an noch 2, 4 oder 6 dcm weiter.

Eine interessante Folgerung aus dem Gesetze des Falles über die schiefe Ebene ist ein unter dem Namen „Fall durch die Sehne“ bekannter, schon von Galilei abgeleiteter Lehrsatz. Derselbe lautet: Alle Sehnen eines Kreises, die vom oberen Ende eines vertikalen Durchmessers ausgehen oder zum unteren Ende desselben hinführen, werden in derselben Zeit durchlaufen wie der vertikale Durchmesser selbst beim freien Falle.

Denken wir uns in einem Kreise, dessen Ebene vertikal steht, den vertikalen Durchmesser *ac*, Fig. 114, ferner von irgendeinem Punkte *d* des Um-

Fig. 114.

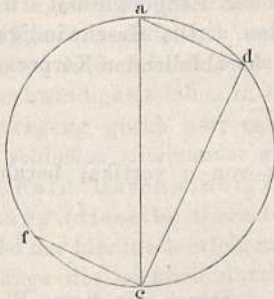
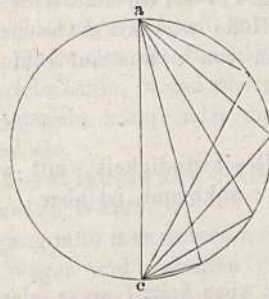


Fig. 115.



fanges aus die Sehnen *da* und *dc* gezogen, so ist bekanntlich *dac* ein rechtwinkeliges Dreieck, und wenn man mit *x* den Winkel bezeichnet, welchen *dc* mit der Vertikalen macht, so ist *x* auch der Winkel zwischen *ad* und der Horizontalen; ferner ist $ad = ac \cdot \sin x$, es wird also die Sehne *ad* in derselben Zeit durchlaufen, welche ein frei fallender Körper braucht, um den vertikalen Durchmesser *ac* zu durchfallen.

¹⁾ Siehe § 100.

Dies gilt, welche Stellung der Punkt *d* auch auf dem Kreisumfange einnehmen mag; alle von *a*, Fig. 115, ausgehenden Sehnen werden in gleicher Zeit durchlaufen wie der vertikale Durchmesser *ac*.

Denken wir uns durch *c* in Fig. 114 eine Sehne *cf* parallel mit *ad* gezogen, so hat *cf* nicht allein gleiche Neigung gegen die Horizontale wie *ad*, sondern auch gleiche Länge, woraus dann folgt, daß alle in *c* zusammenlaufenden Sehnen des Kreises in gleicher Zeit durchlaufen werden wie der vertikale Durchmesser *ac*.

In Fig. 116 ist noch eine andere elegante, schon von Galilei aufgefundene Form dieses Lehrsatzes dargestellt. Läßt man gleichzeitig von *a* aus nach verschiedenen Richtungen auf den schiefen Ebenen *ae*, *af*, *ag* ... Kugeln fallen, so befinden sich während des Falles stets alle Kugeln am Umfange eines Kreises, der durch den Punkt *a* hindurchgeht. Die in der Figur gezeichneten Kreise entsprechen den Fallzeiten 1, 2 und 3. Die Durchmesser der Kreise verhalten sich wie die Quadrate, die Flächenräume derselben wie die vierten Potenzen der Fallzeiten.

Fig. 116.

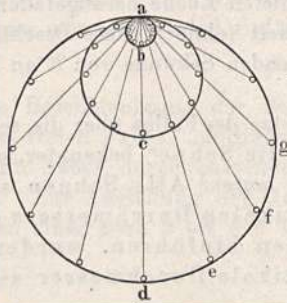
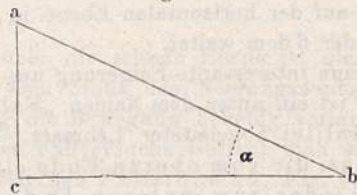


Fig. 117.



Endlich haben wir noch einen wichtigen Satz in bezug auf die Geschwindigkeit abzuleiten, mit welcher der über die schiefe Ebene fallende Körper am Fuße derselben ankommt.

In Fig. 117 sei *ab* eine schiefe Ebene, deren Länge wir mit *l* und deren vertikale Höhe wir mit *h* bezeichnen wollen. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein von *a* aus auf schiefer Ebene herabfallender Körper in *b* ankommt, ist

$$V = \sqrt{2gl \sin \alpha} \dots \dots \dots (1)$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher ein von *a* vertikal herabfallender Körper in *c* ankommt, ist aber

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Es ist aber $h = l \cdot \sin \alpha$ oder $l = \frac{h}{\sin \alpha}$. Setzen wir diesen Wert von *l* in Gleichung (1), so kommt:

$$V = \sqrt{2gh},$$

es ist also $V = v$, d. h., wenn ein Körper auf einer schiefen Ebene den Weg *ab* zurückgelegt hat, so erlangt er stets dieselbe Geschwindigkeit, als ob er die Höhendifferenz zwischen *a* und *b*, also die Länge *ac* frei durchfallen wäre.

Um den Satz vom Fall durch die Sehne experimentell zu demonstrieren, kann man sich des in Fig. 118 abgebildeten Apparates bedienen. Derselbe

besteht aus einer senkrecht stehenden prismatischen Holzsäule ab von ungefähr 80 cm Höhe, an welcher oben mittels eines Scharniers die Holzrinne cd befestigt ist. Eine ebensolche Rinne ist vor dieser Säule um ein Scharnier bei b drehbar. Beide Rinnen werden mittels einer Schraubenklemme aneinander festgestellt, wobei man mittels eines Winkelhakens die Rechtwinkeligkeit des Winkels cdb kontrollieren kann. Werden dann bei a und c zwei kleine Kugeln aus Stein gleichzeitig losgelassen, so fallen beide gleichzeitig auf, die erste bei b auf dem Boden, die andere an einem Vorsprunge

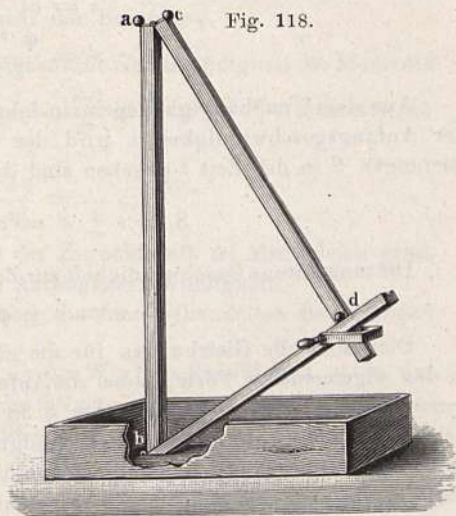


Fig. 118.

der Schraubenklemme bei d . Ebenso kommen zwei Kugeln, die man bei c und d gleichzeitig losläßt, gleichzeitig bei d und b an. Der Versuch kann bei verschiedener Neigung der schiefen Ebene wiederholt werden.

§ 49. Zusammensetzung einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichmäßig beschleunigten; Wurfbewegungen. Während bei der Zusammensetzung zweier geradliniger gleichförmiger oder zweier gleichmäßig beschleunigter Bewegungen immer wieder eine geradlinige Bewegung derselben Art hervorgeht, ist dies nicht mehr allgemein der Fall, wenn man eine gleichförmige Bewegung mit einer gleichmäßig beschleunigten kombiniert oder, was dasselbe bedeutet, wenn man einem Körper, der bereits eine Geschwindigkeit besitzt, auch noch eine Beschleunigung erteilt¹⁾.

Dabei sind mehrere Fälle möglich. Entweder die Beschleunigung und die Geschwindigkeit fallen in dieselbe gerade Linie, wobei überdies der Sinn der Bewegung gleich oder entgegengesetzt sein kann; oder die Richtungen beider schließen miteinander einen Winkel ein.

I. Fall: Geschwindigkeit und Beschleunigung haben dieselbe Richtung (dieselbe Gerade), vertikaler Wurf.

Bei der hierdurch erfolgenden Bewegung muß man unterscheiden zwischen der Länge des wirklich durchlaufenen Weges und zwischen der hierdurch erlangten Entfernung vom Ausgangspunkte. Da nämlich die Bewegung auch eine rückläufige sein kann, so fallen diese beiden Begriffe nicht immer zusammen.

Bezeichnen wir also mit s die infolge der anfänglichen Geschwindigkeit c in der Zeit t erlangten Entfernungen vom Ausgangspunkte und mit s' jene

¹⁾ Dabei denken wir uns sowohl die Geschwindigkeit als die Beschleunigung als relative in Rücksicht auf dasselbe Bezugssystem.

Entfernungen, welche infolge der Beschleunigung φ allein in der Zeit t erreicht würden, so haben wir:

$$s = ct$$

$$s' = \frac{\varphi t^2}{2}.$$

Aus dem Unabhängigkeitsprinzip folgt dann, daß die unter dem Einflusse der Anfangsgeschwindigkeit c und der Beschleunigung φ erlangten Entfernungen S in der Zeit t gegeben sind durch die Formel:

$$S = s \pm s' = ct \pm \frac{\varphi t^2}{2} \dots \dots \dots (1)$$

Die momentane Geschwindigkeit zur Zeit t ist gegeben durch die Gleichung:

$$v = c \pm \varphi t \dots \dots \dots (2)$$

Dies sind die Gleichungen für die gleichmäßig veränderliche Bewegung in der allgemeineren Form, wobei die Anfangsgeschwindigkeit nicht $= 0$ angenommen ist, wie dies früher im § 38 vorläufig geschah. Das doppelte Zeichen \pm deutet an, daß die Beschleunigung φ mit der Anfangsgeschwindigkeit c gleich gerichtet oder entgegengesetzt gerichtet sein kann. Im ersten Falle ergibt sich eine gleichmäßig beschleunigte, im zweiten Falle eine gleichmäßig verzögerte Bewegung.

Zwischen diesen beiden Bewegungen ist nur ein Unterschied des Richtungssinnes vorhanden, insofern jede nach rechts gerichtete gleichmäßig verzögerte Bewegung nach einer gewissen Zeit in eine nach links gerichtete gleichmäßig beschleunigte Bewegung übergeht, sowie umgekehrt eine nach rechts gerichtete gleichmäßig beschleunigte Bewegung als die Fortsetzung einer früher begonnenen nach links gerichteten gleichförmig verzögerten aufgefaßt werden kann.

Aus den Gleichungen für die gleichförmig verzögerte Bewegung

$$s = ct - \frac{\varphi t^2}{2}$$

und

$$v = c - \varphi t$$

lassen sich leicht berechnen die Zeit und der Ort der Umkehr der Bewegung und die Zeit der Zurückkunft zum Ausgangspunkte.

Die Bewegung findet in positiver Richtung statt, solange $c > \varphi t$, sie kehrt um in dem Momente, wo $v = 0$, also $t = \frac{c}{\varphi}$. Die bis dahin erlangte Entfernung s ist demnach, indem wir für t substituieren:

$$s = c \cdot \frac{c}{\varphi} - \frac{\varphi}{2} \frac{c^2}{\varphi^2} = \frac{c^2}{\varphi} - \frac{c^2}{2\varphi} = \frac{c^2}{2\varphi} \dots \dots \dots (3)$$

Um die Zeit der Rückkehr zum Ausgangspunkte zu finden, setzen wir $s = 0$, also:

$$0 = ct - \frac{\varphi t^2}{2},$$

woraus

$$t = \frac{2c}{\varphi} \dots \dots \dots (4)$$

folgt.

Diese Zeit bis zur Zurückkunft $\frac{2c}{\varphi}$ ist also genau doppelt so groß als die Zeit $\frac{c}{\varphi}$ bis zum Moment der Umkehr der Bewegung.

Berechnen wir endlich noch die momentane Geschwindigkeit im Momente der Zurückkunft, indem wir den Wert $t = \frac{2c}{\varphi}$ in $v = c - \varphi t$ einsetzen, so bekommen wir:

$$v = c - \varphi \frac{2c}{\varphi} = -c.$$

Die Geschwindigkeit im Momente der Zurückkunft ist also gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet wie die Anfangsgeschwindigkeit.

Die nächstliegenden Beispiele über die hier behandelten Bewegungen liefert der vertikale Wurf.

Beim Wurf nach abwärts ist $c =$ der Wurfgeschwindigkeit, $\varphi =$ der Acceleration der Schwere, also $= g (= 9,8 \text{ m})$, und zwar haben beide dasselbe Zeichen. Man hat daher die Falltiefe:

$$s = ct + \frac{gt^2}{2}$$

und die erlangte Geschwindigkeit:

$$v = c + gt.$$

Beim Wurf nach aufwärts dagegen ist die in der Zeit t erlangte Höhe gegeben durch:

$$s = ct - \frac{gt^2}{2},$$

die höchste erreichte Höhe (Wurfhöhe) findet man:

$$h = \frac{c^2}{2g} = \frac{c^2}{19,6} \text{ m.}$$

Die Zeit zum Steigen und die Zeit zum Fallen ist:

$$t = \frac{c}{g} = \frac{c}{9,8}.$$

Die Zeit bis zur Rückkunft also:

$$= \frac{2c}{g} = \frac{c}{4,9}.$$

Zahlenbeispiel. Eine Kanonenkugel werde mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 400 m senkrecht in die Höhe geschossen. Wie lange und wie hoch steigt dieselbe? Wann fällt sie wieder zur Erde?

Antwort: Sie steigt während $\frac{400}{9,8} = 40,8$ Sekunden, fällt nieder nach zweimal 40,8 Sekunden, also nach 1 Minute 21,6 Sekunden; die erreichte Höhe beträgt $\frac{(400)^2}{19,4} = 8163 \text{ m}^1$.

¹⁾ Bei genauer Berechnung müßte auf die Abnahme der Schwerkraft und auf den Luftwiderstand Rücksicht genommen werden.



Um die gleichförmig verzögerte Bewegung beim vertikalen Wurf durch einen Vorlesungsversuch zu demonstrieren, kann man sich recht gut der im § 44 beschriebenen Fallmaschine von Atwood bedienen. Es wurde daselbst gezeigt, daß man die Bewegung des freien Falles im Maßstab $\frac{1}{100}$ nachahmen kann, wenn man die Masse des Rades und der beiden Gewichte so reguliert, daß die Gesamtmasse z. B. = 100 g, das Übergewicht = 1 g beträgt. In analoger Weise können wir die vertikale Wurfbewegung in demselben Verhältnis verlangsamt vorführen. Wir geben z. B. das Tischchen mit der durchbrochenen Platte an den Teilstrich 78,4 cm; das stäbchenförmige Gewichtsstück, welches abgehoben werden soll, wählen wir = 2 g, wovon aber nur 1 g Übergewicht wirksam ist¹⁾. Wie aus der Tabelle S. 120 ersichtlich ist, fällt das Schälchen unter diesen Umständen in 4 Sekunden bis zum Skalenpunkte 78,4, wo es mit einer Geschwindigkeit von 39,2 cm ankommt. Da aber hier nicht bloß das Übergewicht 1 g, sondern noch um 1 g mehr abgehoben wird, so ist jetzt auf dem anderen Schälchen 1 g Übergewicht, folglich bewegen sich die Schälchen von da an mit gleichförmig verzögerter Bewegung, und zwar mit einer Verzögerung von 9,8 cm pro Sekunde. Hieraus ergibt sich, daß die verzögerte Bewegung nach der Gleichung:

$$s = 39,2 t - \frac{9,8}{2} t^2$$

vor sich gehen müsse, wobei s in Centimetern erhalten wird. Das Maximum von s ist somit:

$$s = \frac{c^2}{2g} = \frac{(39,2)^2}{19,6} = 78,4 \text{ cm.}$$

Diese Zahl muß mit dem Fallraume bis zum Abheben des Zweigrammgewichtes übereinstimmen, da die Verzögerung jetzt ebenso groß ist, als früher die Beschleunigung war. Das Schälchen wird also vom Abhebepunkte noch 78,4 cm weiter bis zum Punkte 156,8 gehen, dort umkehren und wieder mit beschleunigter Bewegung zurückkehren.

Die Zeit bis zur Umkehr wird $t = \frac{39,2}{9,8} = 4$ Sekunden dauern; ebenso lange die Rückkehr zum Abhebepunkte. Darauf folgt dann noch die verzögerte Bewegung bis zum Nullpunkte der Skala nach dem Wiederaufnehmen des abgelegten Gewichtsstückes. Verwechselt man inzwischen das abgelegte Zweigrammstück mit einem Eingrammstück, so kann man noch eine Messung der Endgeschwindigkeit vornehmen, da die Bewegung nach Aufnahme des Eingrammstückes eine gleichförmige werden muß. Da diese Endgeschwindigkeit gleich der Anfangsgeschwindigkeit $c = 39,2$ cm beträgt, so muß das Schälchen 2 Sekunden nach Aufnahme des Grammgewichtes am Skalenpunkte $78,4 - 2(39,2) = 0$ ankommen. Das ganze Experiment wird also folgendermaßen verlaufen:

¹⁾ Beträgt die Masse des Rades, wie beim Versuche S. 117, 79 g, so wählt man die Masse des einen Schälchens = 10 g, die des anderen = 9 g und legt außerdem ein abhebbares Gewicht = 2 g auf.

Sekundenschlag	0	} Der Fall beginnt vom Punkte 0.	
"	1		
"	2		} Beschleunigte Bewegung nach abwärts.
"	3		
"	4		
"	4		} Das Zweigrammgewicht wird abgelegt bei Punkt 78,4.
"	5		
"	6		} Verzögerte Bewegung nach abwärts.
"	7		
"	8		} Umkehr bei 156,8.
"	9		
"	9		} Beschleunigte Bewegung nach aufwärts (das Zweigrammgewicht wird inzwischen mit dem Eingrammgewicht vertauscht).
"	10		
"	11		
"	12	} Das Eingrammgewicht wird aufgenommen bei Punkt 78,4.	
"	12		
"	13	} Gleichförmige Bewegung nach aufwärts mit 39,2 cm Geschwindigkeit.	
"	13		
"	14	} Ankunft im Punkte 0.	
"	14		

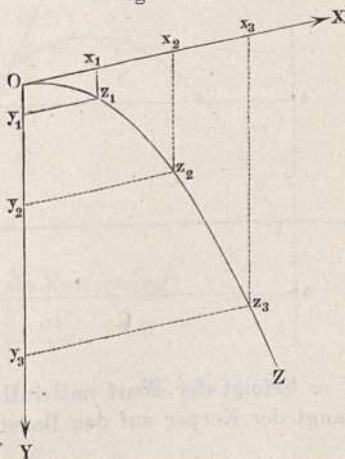
Das andere Schälchen bewegt sich gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung und ahmt daher vom Sekundenschlag vier bis zwölf die Bewegung eines mit der Geschwindigkeit von 39,2 m nach aufwärts geworfenen Körpers in $\frac{1}{100}$ der natürlichen Dimensionen nach.

Dieser Versuch kann noch mannigfach modifiziert werden.

II. Fall: Die Richtung der Geschwindigkeit macht mit der Richtung der Beschleunigung einen Winkel; horizontaler und schiefer Wurf. Ein materieller Punkt O , Fig. 119, besitze eine Geschwindigkeit in der Richtung $O X$, vermöge welcher er in gleichen Zeitintervallen die gleichen Wegstrecken $0 x_1, x_1 x_2, x_2 x_3$ usw. zurücklegen würde.

Auf denselben Punkt wirkt gleichzeitig eine konstante Kraft, welche ihm eine Beschleunigung in der Richtung $O Y$ erteilt, vermöge welcher er in den aufeinander folgenden gleichen Zeitintervallen die Wege $O y_1, y_1 y_2, y_2 y_3$ usw. beschreiben würde, die sich wie 1:3:5 usw. verhalten. Unter gleichzeitigem Einflusse der Geschwindigkeit und der Beschleunigung wird demnach gemäß der früher abgeleiteten Grundsätze die in Fig. 119 durchgeführte Konstruktion der Parallelogramme zur Auffindung der Stationspunkte $z_1, z_2,$

Fig. 119.



z_3 usw. führen. Denkt man sich unendlich viele Zwischenpunkte ebenso bestimmt, so werden dieselben eine kontinuierliche Kurve $O Z$ darstellen, welche mithin als die resultierende Bahn des Punktes O erscheint.

Wie eine einfache Überlegung lehrt und weiter unten durch Rechnung gezeigt wird, ist die so entstehende Kurve eine Parabel mit senkrecht stehender Achse.

Eine solche Kurve entsteht jedesmal, so oft zu einer Geschwindigkeit eine Beschleunigung tritt, welche eine konstante andere Richtung hat als jene.

Ein naheliegendes Beispiel einer solchen Bewegung bildet der Wurf in horizontaler oder in schiefer Richtung.

Horizontaler Wurf. Ein Körper erhalte durch den Wurf eine horizontale Geschwindigkeit $= c$, durch die Schwere eine senkrechte Beschleunigung $= g$. In der Zeit t ist demnach der horizontale Weg $x = ct$, der vertikale Weg $y = \frac{gt^2}{2}$. Setzt man den Wert von t aus der ersten Gleichung $\frac{x}{c}$ in der zweiten unter, so erhält man:

$$y = \frac{g}{2c^2} x^2$$

als die Gleichung der Parabel, welche die Bahn darstellt. Fig. 120 zeigt die Ausführung der Konstruktion, welche keine weitere Erklärung erfordert.

Fig. 120.

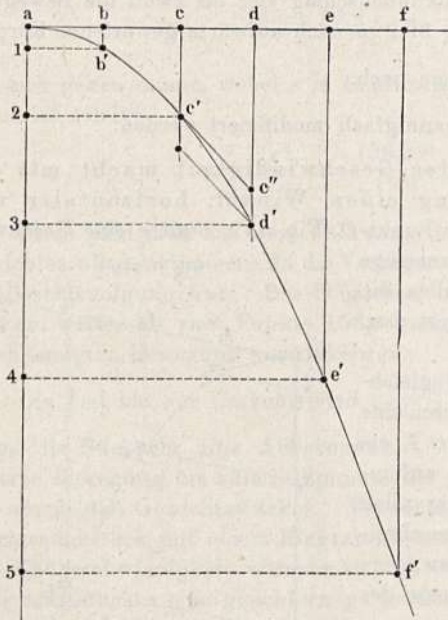
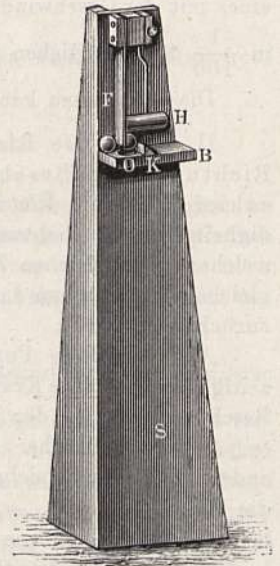


Fig. 121.



Erfolgt der Wurf in der Höhe h über einer horizontalen Ebene, so gelangt der Körper auf den Boden, wenn $y = h$, also wenn:

$$h = \frac{g}{2c^2} x^2,$$

daraus ergibt sich die Wurfweite, d. i. der Horizontalabstand des Auffallpunktes vom Ausgangspunkte:

$$x = c \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Setzt man diesen Wert von x in $x = ct$ unter, so erhält man die Fallzeit:

$$t = \frac{x}{c} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Dies ist genau dieselbe Zeit, welche der Körper zum freien Falle durch die Höhe h brauchen würde.

Daß ein horizontal geworfener Körper gleich schnell durch dieselbe Höhe fällt wie ein frei fallender, kann nach Weinhold durch den in Fig. 121 abgebildeten Apparat demonstriert werden.

Läßt man den Hammer H fallen, so wird gleichzeitig die durch das federnde Holzplättchen F eingeklemmte Kugel O fallen gelassen und die andere davor liegende Kugel hinausgeschleudert. Sie fallen dann beide gleichzeitig auf der horizontalen Tischplatte auf, auf welche der Apparat beim Versuche gestellt wird.

Zahlenbeispiel: Ein Schütze schießt in der Höhe von 1,5 m über einem horizontalen Boden eine Kugel mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 200 m ab. Wie weit fliegt die Kugel?

Antwort:

$$x = 200 \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5}{9,8}} = 110,6 \text{ m.}$$

In Wirklichkeit wird dieses Resultat durch den Luftwiderstand verkleinert.

Schiefer Wurf. Der Körper erhalte durch den Wurf eine Geschwindigkeit c in einer Richtung, welche mit dem Horizont einen Winkel $= \alpha$ einschließt (Fig. 122). Diese Geschwindigkeit denke man sich zerlegt in zwei Komponenten.

Die horizontale Komponente hat dann die Größe $c \cdot \cos \alpha$, die vertikale die Größe $c \cdot \sin \alpha$. In der Zeit t ist demnach die erreichte horizontale Entfernung:

$$x = ct \cos \alpha,$$

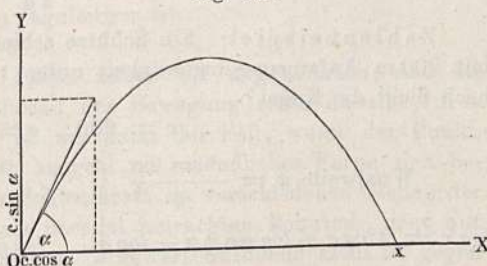


Fig. 122.

dagegen ist die gleichzeitig erreichte vertikale Entfernung:

$$y = ct \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Durch Einsetzung des Wertes von t aus der ersten Gleichung in die zweite erhält man:

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Dies ist die Gleichung der Bahnkurve (Parabel mit senkrecht stehender Achse).

Liegen Ausgangspunkt und Endpunkt der Wurfbahn in gleicher Höhe, so erhält man die Wurfweite, indem man $y = 0$ setzt und x ausrechnet. Diese Rechnung gibt:

$$x = \frac{2c^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tang} \alpha}{g} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Der größte Wert, den $\sin \alpha$ annehmen kann, ist $\sin 90^\circ = \sin (2 \cdot 45^\circ)$. Mithin ist für $\alpha = 45^\circ$ die Wurfweite am größten, sie beträgt dann, da $\sin 2\alpha = 1$:

$$x_1 = \frac{c^2}{g}.$$

Für $\alpha = 45 + \alpha'$ ist $\sin 2\alpha = \sin (90 + 2\alpha') = \cos 2\alpha'$,

„ $\alpha = 45 - \alpha'$ ist $\sin 2\alpha = \sin (90 - 2\alpha') = \cos 2\alpha'$.

In beiden Fällen ist also auch die Wurfweite x gleich groß. Es ist also z. B. die Wurfweite dieselbe für 40° wie für 50° , für 20° und für 70° usw.

Da die Bahn symmetrisch ist, so muß der höchste Punkt derselben in der horizontalen Entfernung der halben Wurfweite liegen, also in:

$$x_1 = \frac{x}{2} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Setzt man diesen Wert in die Kurvengleichung und berechnet das zugehörige y , so erhält man die Wurfhöhe:

$$y = \frac{c^2 \sin 2\alpha \operatorname{tang} \alpha}{2} - \frac{g}{2c^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{c^4 \sin^2 2\alpha}{4g^2}.$$

Beachtet man, daß $\frac{\sin 2\alpha}{2} = \sin \alpha \cos \alpha$, so reduziert sich dieser Ausdruck auf:

$$y = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Zahlenbeispiel: Ein Schütze schießt, am Boden liegend, eine Kugel mit 200 m Anfangsgeschwindigkeit unter 1° Elevation. Wie weit und wie hoch fliegt die Kugel?

$$c = 200, \quad \alpha = 1^\circ,$$

$$\text{Wurfweite } x = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\text{Wurfhöhe } y = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

$$\log x = 2 \log c + \log \sin 2\alpha - \log g$$

$$\log y = 2 \log c + 2 \log \sin \alpha - \log 2g$$

$$2 \log 200 = 4,602060$$

$$\log 200 = 2,301030$$

$$\log \sin 2^\circ = 8,542819 - 10$$

$$\log \sin 1^\circ = 8,241855 - 10$$

$$\text{Summa} = 3,144879$$

$$\text{Summa} = 0,542885$$

$$\log 9,8 = 0,991616$$

$$\times 2 = 1,085770$$

$$\log x = 2,153263$$

$$\log 19,6 = 1,292646$$

$$x = 142,3 \text{ m}$$

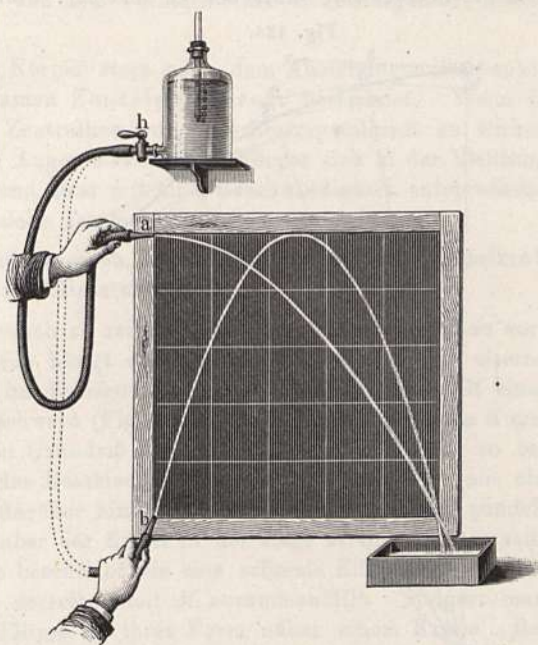
$$\log y = 0,793124 - 1$$

$$y = 0,621 \text{ m}$$

Infolge Luftwiderstandes wird der absteigende Parabelast erheblich steiler gestaltet und die Wurfweite verkürzt.

Um die Bewegung beim horizontalen und schiefen Wurfe zu demonstrieren, bedient man sich am besten der Wasserstrahlen, da sie den Vorteil bieten, daß die Wurfbahn längere Zeit sichtbar erhalten bleibt. Eine hierzu dienliche Anordnung mag in Fig. 123 dargestellt sein.

Fig. 123.

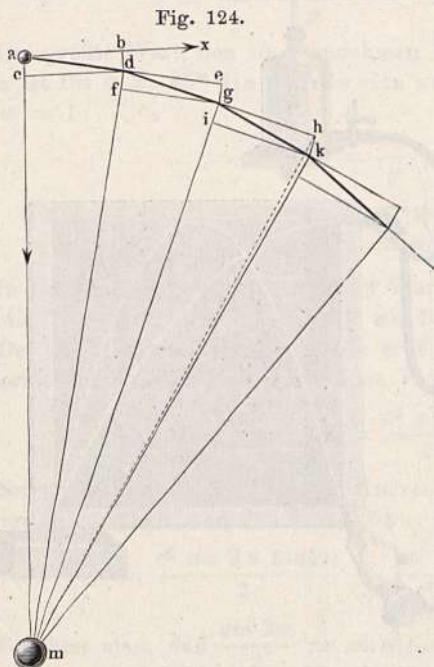


Die Wurfbahnen werden auf einer mit einem Quadratnetz bedeckten Tafel vorgezeichnet und dann durch Öffnen des Hahnes *h* der in passender Höhe aufgestellten Mariotteschen Flasche ¹⁾ ein konstanter Strom Wassers dem Kautschukschlauch zugeführt. Das Ende desselben ist mit einer etwas verengten Mündung versehen, welche einen vollen Strahl ausfließen läßt. Man setzt diese Mündung bei *a* oder *b* in gewünschter Neigung mit freier Hand an und reguliert die Ausflußgeschwindigkeit durch Zusammendrücken des Schlauches, bis der Wasserstrahl der vorgezeichneten Kurve folgt, oder man benutzt einen Apparat, bei welchem das Mundstück um den Mittelpunkt eines getheilten Kreises beweglich und die Wassergeschwindigkeit durch einen Hahn regulierbar ist.

§ 50. Zentralbewegung. Bisher haben wir angenommen, daß die Richtung der Beschleunigung während der Bewegung stets dieselbe, d. h. sich selbst parallel bleibe. Dies ist nur dann der Fall, wenn der Punkt, von dem die beschleunigende Kraft ausgeht, in unendlicher Ferne sich befindet. Daß wir die Richtung der Schwerkraft an verschiedenen Stellen der Bahn eines geworfenen Körpers als parallel betrachten konnten, liegt nur daran, daß die Länge der durchlaufenen Bahn verschwindend klein ist gegen die Entfernung des Erdmittelpunktes, gegen welchen der geworfene Körper stets hingetrieben wird. Sobald aber die Bahn des Körpers eine namhafte Länge im Vergleich zur Entfernung des Anziehungsmittelpunktes hat, haben wir es mit einer Zentralbewegung zu tun. In diese Kategorie gehört die Bewegung des Mondes um die Erde, der Erde und der übrigen Planeten um die Sonne. Denken wir uns, daß der Punkt *a*, Fig. 124, welcher durch eine stetig wirkende Anziehungskraft nach dem Punkte *m* hingetrieben wird, beim Beginne seiner Bewegung durch irgend eine momentan wirkende Kraft einen

¹⁾ Die Mariottesche Flasche wird später besprochen werden; sie bezweckt, daß der Druck des Wassers, also auch seine Ausflußgeschwindigkeit konstant bleibe.

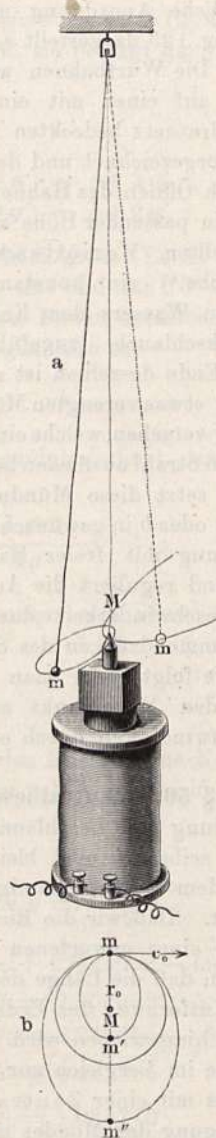
Stoß in der Richtung ab erhalten hätte, so wird er sich weder in der Richtung ab , noch in der Richtung ac bewegen, sondern in einer anderen ad , die sich nach dem Gesetze des Parallelogramms der Kräfte ausmitteln läßt. Um die Betrachtung einfacher zu machen, wollen wir annehmen, daß die



stets nach m gerichtete anziehende Kraft stoßweise in kleinen Intervallen wirke. Man wird sich bei dieser Betrachtungsweise um so weniger von der Wahrheit entfernen, je kleiner man sich die Intervalle denkt.

Wenn der seitwärts gerichtete Stoß für sich allein den materiellen Punkt in einem kleinen Zeitteilchen t von a nach b , die anziehende Kraft, für sich allein wirkend, ihn in derselben Zeit nach c führen würde, so bewegt er sich unter Einwirkung beider Kräfte in dem Zeitteilchen t von a nach d . In d angekommen, würde er sich in der Richtung de weiter bewegen, und zwar würde in der Zeit t der Weg gerade so groß sein wie ad , wenn nicht die anziehende Kraft von neuem wirkte, und zwar so, als ob der Körper in d einen Stoß erhalten hätte, der ihn, für sich allein wirkend, in der Zeit t von d nach f geführt haben würde. Durch diese abermalige Einwirkung der anziehenden Kraft wird also der Körper wieder von der Richtung de abgelenkt und nach g geführt. Man begreift daraus leicht, daß, wenn der Körper in a einmal einen seitwärts gerichteten Stoß empfangen hat, die anziehende Kraft aber stoßweise in kleinen Intervallen wirkt, daß alsdann der Körper ein

Fig. 125.



Polygon beschreiben muß, welches sich einer krummen Linie um so mehr nähert, je kleiner jene Intervalle sind. Wenn die anziehende Kraft stetig wirkt, wie dies in der Natur wirklich der Fall ist, so ist die Bahn eine krumme Linie, deren Natur von dem Verhältnis der sie bedingenden Kräfte abhängt.

Die Kraft, welche den Körper stets nach dem Anziehungsmittelpunkte hintreibt, wird mit dem Namen Zentripetalkraft bezeichnet. Wenn in irgend einem Momente der Zentralbewegung die Zentripetalkraft zu wirken aufhörte, so würde von dem Augenblicke an der Körper sich in der Richtung der Tangente fortbewegen, und zwar mit einer Geschwindigkeit, entsprechend einer momentanen Kraft, welche Tangentialkraft genannt wird.

Je nach dem Verhältnis zwischen Tangentialkraft und Zentripetalkraft kann die Bahn ein Kreis, eine Ellipse usw. sein.

Um dies durch den Versuch zu zeigen, kann man folgendermaßen vorgehen: Von der Decke herab hängt an einem Faden eine kleine eiserne Kugel m , so daß dieselbe im Ruhezustande nahe über dem Pole M eines kräftigen Elektromagneten schwebt (Fig. 125 a). Zieht man dann die Kugel zur Seite nach m (siehe den Grundriß Fig. 125 b) und läßt sie los, so bewegt sie sich mit wachsender Beschleunigung zum Pole M , dann mit abnehmender Beschleunigung darüber hinaus, dann wieder zurück und pendelt so hin und her. Gibt man aber der Kugel in der Lage m eine geringe seitliche Geschwindigkeit c_0 , so beschreibt sie eine schmale Ellipse mm' , wobei der entferntere Brennpunkt derselben mit M zusammenfällt. Steigert man c_0 allmählich, so wird die Ellipse in ihrer Form näher einem Kreise. Bei bestimmtem Wert von $c_0 = c$ wird sie genau ein Kreis. Bei weiterer Steigerung von c_0 wird die Bahn wieder eine Ellipse, deren näherer Brennpunkt mit M zusammenfällt. Wäre die Eisenkugel nicht durch eine Schwerkraftskomponente an M gebunden, sondern ganz frei beweglich, so würde bei einem Werte der Geschwindigkeit $c_0 = 2c$ die Ellipse in eine Parabel, bei weiterer Steigerung in eine Hyperbel übergehen, wie dies bei einigen Kometen, die nicht wiederkehren, der Fall zu sein scheint.

Die Verbindungslinie des Zentrums der Zentralbewegung mit dem jeweiligen Orte des Körpers heißt der Leitstrahl oder der Radiusvektor des Körpers. Es läßt sich nun ein für alle Arten von Zentralbewegungen gültiger wichtiger Satz beweisen, welcher lautet:

Der Radiusvektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Betrachtet man die Fig. 126, so ersieht man sofort, daß $\triangle amd = \triangle dme$, da ja $ad = de$ und der Scheitel m gemeinsam ist. Ferner ist $\triangle dme = \triangle dm g$, weil beide Dreiecke auf derselben Basis dm stehen und $dm \parallel eg$ ist. Es ist folglich auch $\triangle amd = \triangle dm g$. Dasselbe ließe sich von allen folgenden Dreiecken beweisen. Diese Dreiecke sind nun aber nichts anderes als die in aufeinanderfolgenden gleichen kleinen Zeiträumen beschriebenen Flächen. Da wir uns nun zwei beliebige in gleichen Zeiten vom Radiusvektor beschriebene Flächen in gleich viele und gleich große derartige Dreiecke zerlegt denken können, so folgt daraus die Richtigkeit des obigen Satzes.

Ein weiterer wichtiger Satz ist der folgende:

Die Geschwindigkeiten an zwei Punkten der Bahn verhalten sich verkehrt wie die senkrechten Abstände der an diese Punkte gezogenen Tangenten vom Mittelpunkte der Zentralbewegung.

Es seien in Fig. 127 ab und $a'b'$ zwei in unendlich kleinen, aber gleichen Zeiträumen zurückgelegte Bahnstrecken. Dieselben fallen wegen ihrer Klein-

Fig. 126.

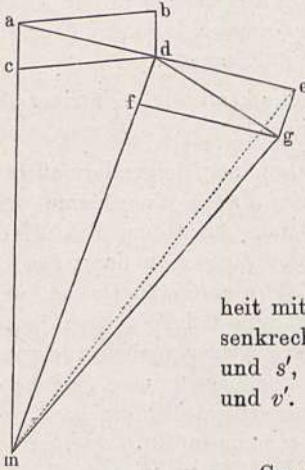
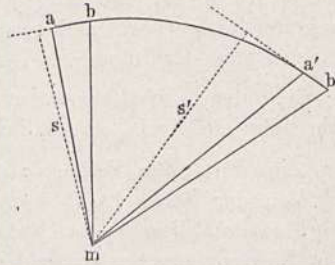


Fig. 127.



heit mit den Tangenten an a und a' zusammen. Die senkrechten Abstände dieser Tangenten von m seien s und s' , die Geschwindigkeiten in a und a' seien v und v' . Es gilt dann zunächst:

$$v : v' = ab : a'b'.$$

Gemäß dem obigen Satze über die Gleichheit der Flächenräume ist $\triangle amb = \triangle a'mb'$, folglich auch:

$$ab \cdot s = a'b' \cdot s',$$

denn dies sind die Produkte der Grundlinien dieser Dreiecke mit ihren Höhen.

Daraus folgt:

$$ab : a'b' = s' : s,$$

also auch:

$$v : v' = s' : s.$$

Die Geschwindigkeit längs der Bahn ist also im allgemeinen keine konstante. Dies ist nur dann der Fall, wenn die senkrechten Abstände der Tangenten vom Mittelpunkte immer gleich groß sind, also bei der kreisförmigen Zentralbewegung.

Wir können uns hier nur mit der kreisförmigen Zentralbewegung beschäftigen, und zwar wollen wir zunächst die Beziehung ausmitteln, welche zwischen der Größe der Zentripetalkraft, dem Halbmesser des Kreises und der Umlaufzeit stattfindet.

In Fig. 128 sei m der Mittelpunkt des Kreises, welchen der Körper a beschreibt; ab sei der Weg, welchen er in der Zeiteinheit, etwa in einer Sekunde, zurücklegt. Fällt man nun von b ein Perpendikel bd auf den von a aus gezogenen Durchmesser des Kreises, so ist offenbar ad der Weg, um welchen der Körper a in der Zeiteinheit gegen m hin sich bewegen würde, wenn der Körper in a nicht schon eine Tangentialgeschwindigkeit hätte, sondern lediglich durch die Zentripetalkraft gegen m hin getrieben würde.

Einem bekannten Satze der Geometrie zufolge ist nun ab (wenn wir den Bogen als geradlinig betrachten, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, wenn ab nur ein kleiner Teil des Kreisumfanges ist) die mittlere Proportionale zwischen ad und an , es ist also:

$$ab^2 = ad \times an$$

und daraus:

$$ad = \frac{ab^2}{an}.$$

Es ist aber an der Durchmesser des Kreises, also $2r$, wenn wir mit r den Halbmesser desselben bezeichnen; ferner ist der in der Zeiteinheit zurückgelegte Bogen ab gleich dem Kreisumfang, dividiert durch die Umlaufzeit T , also:

$$ab = \frac{2\pi r}{T}.$$

Bezeichnen wir nun den Weg ad , um welchen sich der Körper a unter alleinigem Einfluß der Zentralkraft dem Mittelpunkte m in der Zeiteinheit nähern würde, durch p , so haben wir:

$$p = \frac{2\pi^2 r}{T^2}.$$

Die Endgeschwindigkeit v , welche der Körper unter dem Einfluß der Zentripetalkraft am Ende der ersten Sekunde erlangen würde, wenn er von a aus gegen m fiel, ist aber gleich $2p$, also:

$$v = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Da aber die Endgeschwindigkeit nach der ersten Sekunde gleich ist der Beschleunigung, so ist diese selbst durch obigen Ausdruck gegeben. Die Größe der Zentripetalkraft ist wie die Größe jeder konstanten Kraft gleich dem Produkte der Masse und der Beschleunigung.

Beträgt also die Masse des Körpers m , so ist die Zentripetalkraft K gegeben durch den Ausdruck:

$$K = \frac{4\pi^2 r m}{T^2} \dots \dots \dots (1)$$

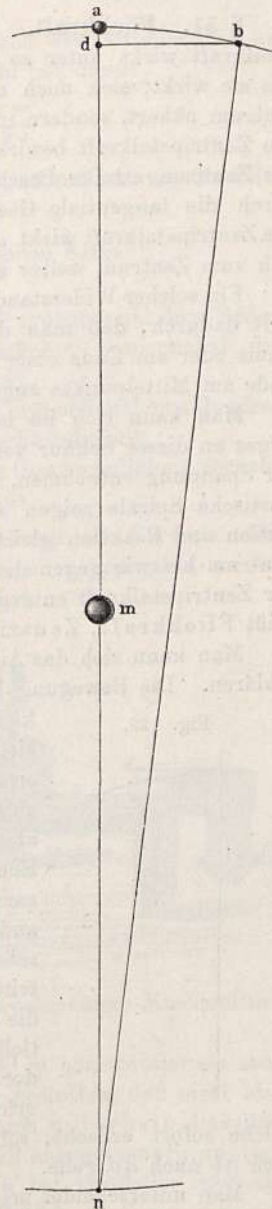
Will man statt der Umdrehungszeit T die peripherische Geschwindigkeit u einführen, so hat man zu überlegen, daß:

$$u = \frac{2r\pi}{T}, \quad \text{also:} \quad u^2 = \frac{4r^2\pi^2}{T^2},$$

mithin:

$$K = \frac{u^2 m}{r} \dots \dots \dots (2)$$

Fig. 128.



Diese beiden Formeln liefern die Zentripetalkraft, gemessen nach ab-
absolutem Maße. Wollten wir sie im Gravitationsmaß (nach Kilogramm-
gewicht) erhalten, so hätten wir noch mit $g = 9,81$ zu dividieren.

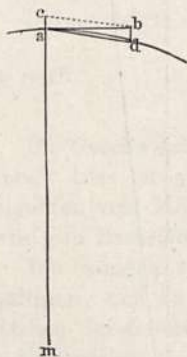
§ 51. **Fliehkraft.** Die im vorigen Paragraphen berechnete Zentri-
petalkraft wirkt unter so eigentümlichen Umständen, daß der Körper, auf
den sie wirkt, sich doch nicht in der Richtung der Kraft dem Anziehungs-
zentrum nähert, sondern immer in gleicher Entfernung von demselben bleibt.
Die Zentripetalkraft bewirkt nur, daß durch die von ihr dem Körper gegen
das Zentrum erteilte Beschleunigung die Entfernung vom Zentrum, welche
durch die tangentielle Geschwindigkeit eintreten würde, kompensiert wird.
Die Zentripetalkraft wirkt also wie ein Widerstand, der den Körper hindert,
sich vom Zentrum weiter zu entfernen.

Ein solcher Widerstand kann aber auch auf andere Weise geleistet werden,
z. B. dadurch, daß man den Körper nötigt, innerhalb einer kreisförmigen
Rinne oder am Ende einer Schnur befestigt, sich zu bewegen, deren anderes
Ende am Mittelpunkte angebunden ist.

Man kann sich im letzteren Falle die Zentripetalkraft in Form eines
Zuges an dieser Schnur vorstellen, ja man könnte die Größe derselben aus
der Spannung entnehmen, welche eine an der Stelle dieser Schnur befindliche
elastische Spirale zeigen würde. Wie bei allen Kräften, so ist auch hier
Aktion und Reaktion gleich, d. h. die Spirale wird ebenso stark nach dem
Zentrum hin wie gegen den bewegten Körper hin angezogen. Diese letztere
der Zentripetalkraft entgegengesetzt gerichtete, aber an Größe gleiche Kraft
heißt Fliehkraft, Zentrifugalkraft oder auch Schwungkraft.

Man kann sich das Auftreten dieser Fliehkraft auch auf folgende Weise
erklären. Die Bewegung infolge der tangentialen Geschwindigkeit würde in

Fig. 129.



kleinem Zeitintervall von a nach b (Fig. 129) vor
sich gehen. In dieser Richtung kann sie aber nicht
erfolgen wegen des Widerstandes der Schnur. Sie
geht also nach der Komponente ad vor sich; dies ist
aber nur möglich, wenn gleichzeitig eine andere
Komponente auftritt, welche mit der ersten zu-
sammen die ursprüngliche ab ersetzen kann. Diese
andere Komponente ist ac , welche als Fliehkraft er-
scheint. Sobald die Schnur durchschnitten wird,
tritt an Stelle der beiden Komponenten sofort wieder
die Resultierende ab , d. h. die ursprüngliche tangen-
tielle Geschwindigkeit, vermöge welcher der Körper in
der Richtung der Tangente fortfliegt; das Fortfliegen
erfolgt also nicht in der Richtung der Fliehkraft,
welche sofort erlischt, sobald die Nötigung entfällt, daß der Körper statt
nach ab nach ad gehe.

Man unterscheidet manchmal eine so zustande kommende Bewegung als
gebundene Zentralbewegung von der im vorigen Paragraphen be-
handelten freien Zentralbewegung.

Die Größe der Fliehkraft ist, da sie der Zentripetalkraft an Größe gleich
ist, ebenfalls gegeben durch die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Aus-
drücke:

$$F = \frac{4 \pi^2 r m}{T^2} = \frac{u^2 m}{r} \dots \dots \dots (1)$$

wobei r den Radius, m die Masse, T die Umlaufszeit, u die peripherische Geschwindigkeit bedeuten.

Um die Fliehkraft im Gravitationsmaß, d. h. nach Gewicht auszudrücken, hat man noch durch $g = 9,81$ zu dividieren. Man hat dann:

$$F' = \frac{4 \pi^2}{g} \frac{r m}{T^2} = 4,024 \frac{r m}{T^2} \dots \dots \dots (1')$$

Dabei ist r nach Metern, m nach Kilogrammen zu messen, um die Fliehkraft ebenfalls in Kilogrammgewicht zu erhalten.

Aus den obigen Formeln folgen die nachstehenden Sätze:

1. Die Fliehkraft ist proportional der Masse m .
2. " " " bei gleicher Umlaufszeit T proportional dem Radius.
3. " " " bei gleichem Radius verkehrt proportional dem Quadrat der Umlaufszeit.
4. " " " bei gleichem Radius direkt proportional dem Quadrate der peripherischen Geschwindigkeit.
5. " " " bei gleicher peripherischer Geschwindigkeit verkehrt proportional dem Radius.

Um diese Gesetze zu demonstrieren, und überhaupt um Versuche über die Fliehkraft anzustellen, bedient man sich eines eigenen Apparates, welcher die Schwung- oder Zentrifugalmaschine genannt wird.

Fig. 130.

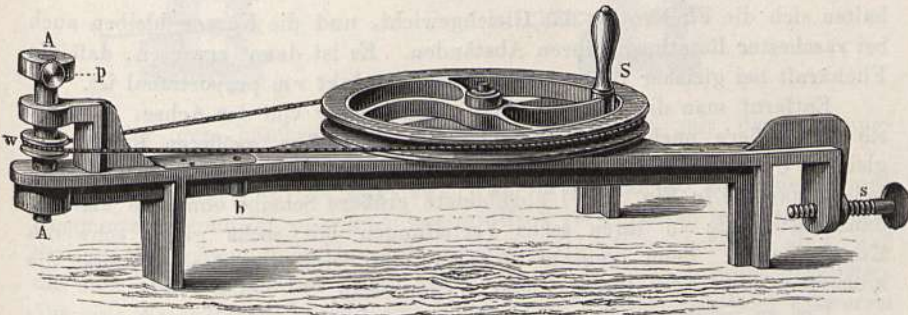


Fig. 130 zeigt eine solche Schwungmaschine zweckmäßiger Konstruktion in ungefähr $\frac{1}{5}$ der natürl. Größe ¹⁾.

Dieselbe soll so gebaut sein, daß sie sich sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Lage gebrauchen läßt. Sie soll ferner gestatten, daß nicht bloß Apparate über der Achse AA befestigt, sondern auch unterhalb derselben angebracht werden können. Die an das eiserne Gestell angegossene Schraubenzwinde s gestattet ein Festklemmen an den Tisch bei vertikaler Stellung. Die Achse des Schwungrades ist verstellbar, um die Schnur (Darmsaite mit Hakenschloß) nachspannen zu können. Bei b ist eine vertikale Bohrung

¹⁾ Dieselbe ist dem Buche „Physikalische Demonstrationen“ von D. A. F. Weinholt entnommen; eine ähnliche Konstruktion rührt vom Mechaniker Stöhrer in Leipzig her.

mit Schraubengewinde angebracht, die zur Befestigung verschiedener Vorrichtungen dient. Die Nebenapparate werden mittels Zapfens in die zylindrische Bohrung der Achse AA eingesetzt und mittels der Schraube p angeklemt.

Um den ersten der obigen Sätze, nämlich den Einfluß der Masse zu zeigen, kann man sich eines Apparates, wie er in Fig. 131 abgebildet ist, bedienen.

Derselbe ist ohne weitere Beschreibung verständlich. Die beiden Zylinder (oder Kugeln) sind von ungleicher Masse, und zwar im einfachen Verhältnisse, z. B. 1 : 2 stehend. Haben beide gleichen Abstand von der Achse, so fliegt stets die schwerere nach außen, indem sie die leichtere nach sich zieht. Wählt man aber die Abstände verkehrt proportional den Massen, so

Fig. 131.

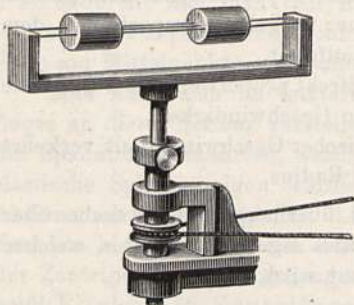
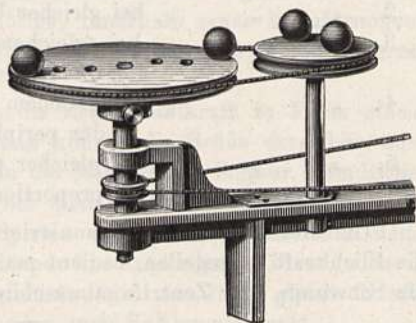


Fig. 132.



halten sich die Fliehkräfte das Gleichgewicht, und die Körper bleiben auch bei raschster Rotation in ihren Abständen. Es ist damit erwiesen, daß die Fliehkraft bei gleicher Umlaufzeit T dem Produkt rm proportional ist.

Entfernt man die kleinere Masse noch weiter von der Achse, so zieht sie die größere nach sich. Dies beweist, daß dem größeren Radius bei gleicher Umlaufzeit größere Fliehkraft zukommt. Dasselbe läßt sich zeigen, indem man die in Fig. 132¹⁾ abgebildete größere Scheibe ohne die kleinere danebenstehende in ihren sechs Vertiefungen mit sechs gleich schweren Kugeln belegt. Beim langsam beschleunigten Drehen verlassen zuerst die äußersten Kugeln den Platz, zuletzt die innersten.

Um zu zeigen, daß bei gleicher peripherischer Geschwindigkeit und gleicher Masse die Fliehkraft größer ist, wenn der Radius kleiner ist (Satz 5), wird die kleinere Scheibe aufgesetzt und mit der größeren durch eine Schnur verbunden. Da die nun an den Rand aufgesetzten Kugeln sich unmittelbar über der Schnur befinden, haben sie gleiche peripherische Geschwindigkeit. Es werden dann die Kugeln der kleineren Scheibe zuerst abgeworfen.

Daß endlich die Fliehkraft unter übrigens gleichen Umständen dem Quadrat der Umlaufzeit verkehrt proportional ist, läßt sich annäherungsweise mit Hilfe des Apparates Fig. 133 nachweisen. Innerhalb eines Rahmens, welcher, wie der vorige Apparat, auf die Schwungmaschine aufgesetzt werden kann, ist ein Winkelhebel abc angebracht, welcher bei b um eine horizontale

¹⁾ Die Abbildung dieses Apparates ist ebenfalls dem zitierten Buche von A. Weinhold entnommen.

Achse leicht drehbar ist. Bei *d* trägt er eine Metallkugel, bei *c* aber eine Metallplatte, auf welche verschiedene Gewichte aufgelegt werden können. Sobald dieser Apparat um seine Achse gedreht wird, strebt die Kugel *d*, sich von derselben zu entfernen und die Gewichte bei *c* zu heben, was in der That erfolgt, sobald die Schwungkraft der Kugel *d* groß genug geworden ist. Nehmen wir an, das auf *c* gelegte Gewicht sei so justiert, daß die Kugel *d* an das Seitenbrett anschlägt, wenn das Schwungrad der Schwungmaschine einmal in der Sekunde umgedreht wird, so wird bei doppelter Umdrehungsgeschwindigkeit dasselbe erfolgen, wenn auf *c* so viel Gewicht gelegt wird, daß der Druck, mit welchem die Platte *c* auf ihrer Unterlage aufliegt, viermal so groß ist als vorher.

Der beschriebene Apparat ist zwar einfach, wirkt aber nicht sehr genau. Genauere Resultate sind mit einem vor längerer Zeit von Schleiermacher konstruierten Apparate zu erhalten, welchen wir in der vorigen Auflage beschrieben, hier aber wegen Raumersparnis weggelassen haben.

Fig. 133.

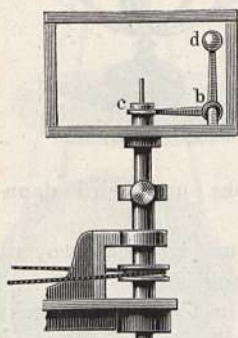
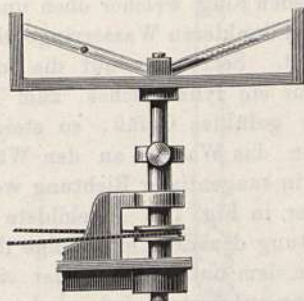


Fig. 134.



Außer den beschriebenen Experimenten werden mit der Schwungmaschine meist noch folgende Versuche angestellt.

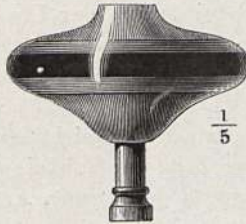
Der Apparat Fig. 134 zeigt zwei Glasröhren, welche, an beiden Enden zusammengeschmolzen oder auch nur mit Kork verschlossen, in einem passenden auf die Schwungmaschine aufzusetzenden Gestelle so befestigt sind, daß die nach außen gekehrten Enden höher stehen als die nach innen gekehrten. Die eine dieser Röhren enthält eine kleine Kugel von Elfenbein oder schwerem Holz, die andere ist zum Teil mit Quecksilber und gefärbtem Wasser gefüllt. Sobald der Apparat in Rotation versetzt wird, läuft die Kugel in der einen Röhre in die Höhe, während in der anderen das Quecksilber die höchste Stelle in der Röhre einnimmt, worauf dann das Wasser und zu unterst die noch in der Röhre enthaltene Luft folgt.

Füllt man aber die Röhren mit Wasser und setzt außerdem ein paar Kugeln ein, welche leichter sind als Wasser, also im Ruhezustande die äußersten höchsten Stellen der Röhren einnehmen, so werden dieselben während der Rotation durch die stärkere Fliehkraft des Wassers verdrängt und gegen die Achse geschoben.

Das Aufsteigen von Flüssigkeiten unter dem Einflusse der Schwungkraft läßt sich auch sehr nett mit dem Apparate Fig. 135 zeigen. Er besteht aus einem möglichst großen Petroleumlampenglas, welches mit einer zum Auf-

schrauben auf die Schwungmaschine dienenden Fassung versehen ist. Eine in das Gefäß gegossene Flüssigkeit, welche im Ruhezustande den Boden bedeckt, steigt bei hinlänglich rascher Rotation in den Bauch des Gefäßes, um hier einen Ring zu bilden, welcher nach innen mit einer vertikalen Zylinderfläche begrenzt ist. Enthält das Gefäß Quecksilber und gefärbtes Wasser,

Fig. 135.



so bildet das Quecksilber einen die weiteste Stelle des Gefäßes einnehmenden silberglänzenden Ring, welcher oben und unten von dem dunkleren Wasserringe eingefasst erscheint. Setzt man auf die Schwungmaschine ein zylindrisches, zum Teil mit Wasser gefülltes Gefäß, so steigt beim Rotieren das Wasser an den Wänden in die Höhe und wird dann vom Rande in tangentialer Richtung weggeschleudert.

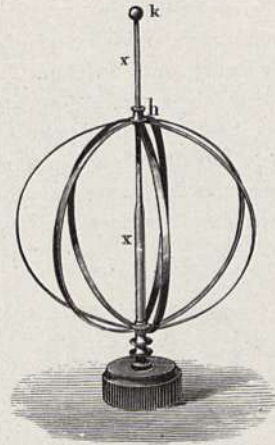
Der in Fig. 136 abgebildete Apparat dient, um zu erläutern, wie die Abplattung der Erde eine Folge ihrer Achsendrehung ist.

An dem unteren Ende der eisernen Achse x , welche auf die Schwungmaschine aufgesetzt wird, sind mehrere elastische Streifen von Messingblech mittels Scharnieren befestigt. Oben laufen diese elastischen Streifen wieder in einer leicht auf der Achse x verschiebbaren Hülse h zusammen. Im Zustande der Ruhe strecken sich die Federn so, daß die Hülse h an dem Knopfe k ansteht; sobald aber der Apparat rasch um die Achse x rotiert, nehmen die Metallstreifen die in unserer Figur angedeutete Gestalt an, indem alle Theilchen derselben sich möglichst weit von der Rotationsachse zu entfernen streben. Je schneller die Umdrehung, desto mehr werden die Streifen gekrümmt, desto tiefer wird also die Hülse h herabgezogen.

Nach Weinhold läßt sich die Abplattung recht schön an einer Kugel aus weichem Ton von etwa 19 cm Durchmesser (etwa 4,2 kg Gewicht) zeigen, welche man in der durch Fig. 137 ersichtlichen Weise mittels zweier Bandschlingen an die Achse der Schwungmaschine anhängt. Die Abplattung kann bis zu etwa $\frac{4}{5}$ des Äquatordurchmessers getrieben werden; bei rascherem Drehen zerreißt die Tonkugel.

Anwendungen der Fliehkraft. Eine der ältesten Anwendungen der Fliehkraft dürfte die Schleuder (Fig. 138) sein. Sie besteht aus einem Stück Leder, an dem starke Schnüre von $\frac{1}{2}$ bis 1 m Länge befestigt sind. Das Ende der einen Schnur wird fest um die Finger gewickelt, das andere Ende mit dem Daumen festgehalten. Der auf das Leder gelegte Stein wird im Kreise geschwungen und im richtigen Moment frei gelassen, indem

Fig. 136.



man das eine Schnurende losläßt. Die Treffsicherheit dieser Vorrichtung ist gering und nur durch viele Übung zu erreichen. Hat die Schleuder eine

Fig. 137.

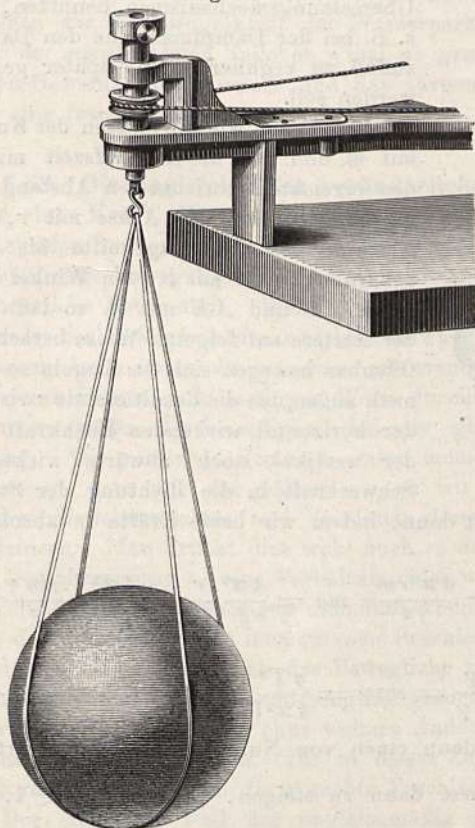
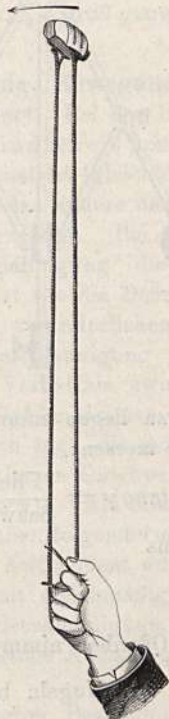


Fig. 138.



Länge von 0,6 m, der Stein ein Gewicht von 0,5 kg und wird derselbe fünfmal pro Sekunde im Kreise geschwungen, so berechnet sich die Fliehkraft nach der Formel (1'):

$$F' = \frac{4 \pi^2 r m}{g \cdot T^2} = 4,024 \frac{0,6 \cdot 0,5}{(0,2)^2} = 30 \text{ kg,}$$

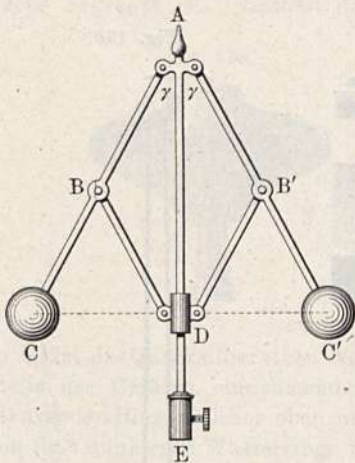
die Anfangsgeschwindigkeit des geschleuderten Steines:

$$v = \frac{2 \pi r}{T} = 3,14 \cdot 1,2 \cdot 5 = 18,84 \text{ m pro Sekunde.}$$

Eine wichtige Anwendung der Fliehkraft ist das Zentrifugalpendel. Dasselbe besteht, wie Fig. 139 zeigt, aus einem vertikalen Stabe AE , an welchem oben bei A zwei Stäbe mit Scharnieren eingelenkt sind, die unten zwei massive Kugeln C und C' tragen. Bei B und B' sind die Stäbe wiederum mittels Gelenken mit den Stäben BD und $B'D$ verbunden, welche letztere zu einer Hülse D führen, an welcher sie mit Scharnieren befestigt sind. Setzt man den Stab AE auf das Ende einer vertikal rotierenden Achse, z. B. der Schwungmaschine, so beobachtet man, wie die Kugeln, durch

die Fliehkraft nach außen getrieben, in die Höhe steigen und dadurch die Hülse *D* am Stabe *AE* emporheben, und zwar um so höher, je größer die Rotationsgeschwindigkeit ist. Diese Bewegung der Hülse läßt sich durch

Fig. 139.



Übersetzungsmechanismen benutzen, um z. B. bei der Dampfmaschine den Dampfzufluß zu regulieren, wie später gezeigt werden soll.

Bezeichnen wir die Massen der Kugeln mit *m* und *m*, die Umlaufszeit mit *T*, den erreichten horizontalen Abstand der Kugelmitten von der Achse mit *r*, den Abstand von der Kugelmitte bis zum Scharnier bei *A* mit *l*, den Winkel zwischen *AC* und *AE* mit γ , so läßt sich der letztere auf folgende Weise berechnen. Offenbar bewegen sich die Kugeln so weit nach außen, bis die Resultierende zwischen der horizontal wirkenden Fliehkraft und der vertikal nach abwärts wirkenden Schwerkraft in die Richtung der Stange

AC zu liegen kommt. Es ist dann, indem wir beide Kräfte in absolutem Maße messen:

$$\tan \gamma = \frac{\text{Fliehkraft}}{\text{Schwerkraft}} = \frac{4 \pi^2 r m}{T^2} : mg = \frac{4 \pi^2 r}{g T^2} = \frac{4 \pi^2 l \cdot \sin \gamma}{g T^2},$$

woraus

$$\frac{\sin \gamma}{\tan \gamma} = \cos \gamma = \frac{g T^2}{4 \pi^2 l} \dots \dots \dots (2)$$

Offenbar nimmt γ erst dann einen von Null verschiedenen Wert an, d. h. die Kugeln beginnen erst dann zu steigen, wenn $\frac{g T^2}{4 \pi^2 l} < 1$, also

$T < 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ geworden ist, d. h. wenn die Umlaufszeit kürzer geworden ist als die Dauer einer Doppelschwingung des Pendels.

Bei der Bewegung der Eilzüge auf Bahnkurven bewirkt die Fliehkraft einen Druck gegen die Außenseite der Kurve, welcher sich mit der Schwerkraft zu einer Resultierenden vereinigt. Um zu erreichen, daß diese durch die Mitte der Schienen verläuft, muß das äußere Geleise entsprechend erhöht werden. Ebenso erhöht man die Rennbahn für Radfahrer gegen die Außenseite, und zwar um so mehr, je stärker die Krümmung ist.

Der Zirkusreiter muß aus demselben Grunde sich und das Pferd nach innen neigen, damit die Resultierende aus Fliehkraft und Schwerkraft durch die Füße gerichtet ist, da er sonst nach außen geschleudert würde. Mit Erfolg hat man in neuerer Zeit die Schwingkraft in der Industrie benutzt, z: B. in Zuckerfabriken, um den Zucker vom Sirup zu reinigen, in Färbereien, um Garne und Zeuge schnell zu trocknen usw.

Babo hat die Schwingkraft auch bei chemischen Arbeiten in Anwendung gebracht, namentlich um Kristalle von sirupartiger schmieriger Mutterlauge zu trennen und um das Absetzen von Niederschlägen zu beschleunigen,

welche unter den gewöhnlichen Umständen sehr lange suspendiert bleiben. Wenn nämlich die beschleunigende Kraft, mit welcher sich die geschwungene Flüssigkeitsmasse von der Rotationsachse zu entfernen strebt, n mal so groß ist als die beschleunigende Kraft der Schwere, so ist auch die Differenz zwischen der Zentrifugalkraft der Wasserpartikelchen und der Zentrifugalkraft der suspendierten Teilchen n mal so groß als die Differenz der spezifischen Gewichte des Wassers und des suspendierten Körpers, es muß also auch eine rasche Ausscheidung erfolgen, wenn der Wert von n groß genug ist.

§ 52. Die ungleichmäßig veränderliche Bewegung; Bewegung infolge einer Kraft, die sich proportional der Zeit ändert. Bei den bisher betrachteten Bewegungsarten war entweder die Geschwindigkeit konstant (gleichförmige Bewegung) oder die Beschleunigung konstant (gleichförmig veränderliche Bewegung). Wenn weder das eine noch das andere der Fall ist, so ist die Bewegung eine ungleichmäßig veränderliche. Bei dieser Bewegung kann nur mehr von einer „momentanen Beschleunigung“ die Rede sein, deren Definition in analoger Weise durchzuführen ist wie die Definition der momentanen Geschwindigkeit bei der gleichmäßig veränderlichen Bewegung. Wir verstehen demnach unter momentaner Beschleunigung jenen Grenzwert, dem wir uns nähern, wenn wir in dem Verhältnis zwischen Geschwindigkeitszunahme und Zeitdauer diese beiden Größen immer mehr verkleinern. Man drückt dies wohl auch so aus, daß man sagt, die momentane Beschleunigung sei das Verhältnis einer unendlich kleinen Geschwindigkeitszunahme zur zugehörigen unendlich kleinen Zeitdauer¹⁾. Am klarsten wird die Vorstellung der momentanen Beschleunigung aber folgendermaßen gewonnen. Man denke sich das Bewegliche von jenem Zeitmoment an, für welches die momentane Beschleunigung gesucht wird, mit gleichmäßig veränderlicher Bewegung, also ohne weitere Änderung der Beschleunigung, eine Sekunde lang fortschreiten. Die in dieser Zeit eingetretene Änderung der Geschwindigkeit ist dann die gesuchte Beschleunigung.

Der einfachste Fall der ungleichmäßig beschleunigten Bewegung ist offenbar jener, bei welchem die Beschleunigung in gleichen Zeiten um gleiche Größen zunimmt.

Wir haben nun zu zeigen, wie man bei einer solchen Bewegung die in irgend einer Zeit erreichten Entfernungen, sowie die in irgend einer Zeit erlangten momentanen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen berechnen kann.

Wir wollen dabei, um alle Einzelfälle umfassende Ausdrücke zu erhalten, voraussetzen, daß das Bewegliche im Zeitmoment $= 0$, wo wir die Sekunden zu zählen anfangen, bereits eine Entfernung vom Nullpunkte der Bahn, eine Anfangsgeschwindigkeit und eine Beschleunigung besitze.

Es bedeute also:

¹⁾ In der analytischen Mechanik wird dieses Verhältnis mit $\varphi = \frac{dv}{dt}$ bezeichnet.

Da nach Anmerkung S. 103 $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so ist $\varphi = \frac{d}{dt} \frac{ds}{dt}$, wofür $\frac{d^2s}{dt^2}$ gesetzt werden kann. Dieses Verhältnis heißt der zweite Differentialquotient von s nach t .

ψ	die Zunahme der Beschleunigung pro Sekunde,
φ	momentane Beschleunigung zur Zeit t ,
φ_0	" " " " " " 0 (Anfangsbeschleunigung),
v	" " Geschwindigkeit " " t ,
v_0	" " " " " " 0 (Anfangsgeschwindigkeit),
s	Entfernung des Beweglichen vom Nullpunkte der Bahn zur Zeit t ,
s_0	" " " " " " " " " " " 0 (Anfangsstellung).

Wir behaupten nun, daß dann die Werte von s , v und φ gegeben seien durch die Gleichungen:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\varphi_0 t^2}{2} + \frac{\psi t^3}{6} \dots \dots \dots (1)$$

$$v = v_0 + \varphi_0 t + \frac{\psi t^2}{2} \dots \dots \dots (2)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \psi t \dots \dots \dots (3)$$

Dabei können die vorkommenden Größen auch gleich Null oder negativ sein. Ein negatives t würde bedeuten t Sekunden vor dem Zeitmoment, von dem an die Sekunden gezählt wurden. Ein negatives s oder s_0 bedeutet eine Entfernung vom Nullpunkte der Bahn nach rückwärts (z. B. nach links, wenn die positiven Entfernungen nach rechts gerechnet werden). Ein negatives v bedeutet Geschwindigkeit nach links (ein positives v Geschwindigkeit nach rechts). Ein negatives φ bedeutet Beschleunigung nach links (also entweder Zunahme der Geschwindigkeit nach links oder Abnahme jener nach rechts). Endlich ein negatives ψ eine Abnahme einer positiven Beschleunigung (oder Zunahme einer negativen).

Den Beweis für obige Formeln können wir auf elementarem Wege¹⁾ etwa folgendermaßen führen. Sind t und t' zwei aufeinander folgende Zeitmomente, so sind nach (1) die zugehörigen Entfernungen s und s' :

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\varphi_0}{2} t^2 + \frac{\psi}{6} t^3$$

$$s' = s_0 + v_0 t' + \frac{\varphi_0}{2} t'^2 + \frac{\psi}{6} t'^3,$$

woraus der zurückgelegte Weg durch Subtraktion gefunden wird:

$$s' - s = v_0 (t' - t) + \frac{\varphi_0}{2} (t'^2 - t^2) + \frac{\psi}{6} (t'^3 - t^3).$$

Da dieser Weg in der Zeit $t' - t$ zurückgelegt wird, so ist deren Verhältnis:

$$\frac{s' - s}{t' - t} = v_0 + \frac{\varphi_0}{2} (t' + t) + \frac{\psi}{6} (t'^2 + t't + t^2).$$

Dieses Verhältnis geht über in den Wert der momentanen Geschwindigkeit v zur Zeit t , wenn wir t' immer näher dem t setzen, für den Grenzwert $t' = t$ wird also:

¹⁾ In der Analytik erhält man aus dem Ausdruck für s den für v durch einmaliges, den für φ durch zweimaliges Differenzieren. Die Berechnung des v und s aus ψ und den Anfangswerten φ_0 , v_0 und s_0 geschieht durch Integrieren.

$$v = v_0 + \varphi_0 t + \frac{\psi}{2} t^2.$$

Damit ist also bereits erwiesen, daß, wenn für die momentane Geschwindigkeit v die Gleichung (2) gilt, dann für die Entfernung s die Gleichung (1) gelten muß, da wir von dieser auf jene geführt wurden.

Für einen Zeitpunkt t' ist die zugehörige momentane Geschwindigkeit v' gegeben durch

$$v' = v_0 + \varphi_0 t' + \frac{\psi}{2} t'^2.$$

Demnach ist die Zunahme der momentanen Geschwindigkeit gleich:

$$v' - v = \varphi_0 (t' - t) + \frac{\psi}{2} (t'^2 - t^2).$$

Dividieren wir diese Zunahme der Geschwindigkeit durch die Zunahme der Zeit $t' - t$, in welcher sie stattgefunden hat, so bekommen wir:

$$\frac{v' - v}{t' - t} = \varphi_0 + \frac{\psi}{2} (t' + t).$$

Dieser Ausdruck geht über in den Wert für die momentane Beschleunigung φ für die Zeit t , wenn wir t' immer näher an t nehmen, bis es zuletzt $= t$ geworden ist. Dann ist also:

$$\varphi = \varphi_0 + \psi t.$$

Wir erhalten also aus Gleichung (2) die Gleichung (1). Diese letztere folgt aber unmittelbar aus der Definition von ψ . Ist nämlich ψ die Zunahme der Beschleunigung pro Sekunde, so ist ψt die Zunahme in t Sekunden, und diese, addiert zum Anfangswert φ_0 , muß den Wert der Beschleunigung zur Zeit t geben.

Die Gleichungen (1), (2) und (3) enthalten die Gleichungen für die gleichförmige und für die gleichmäßig veränderte Bewegung als spezielle Fälle in sich. Man erhält die letztere, indem man $\psi = 0$ setzt, die erstere, indem man auch $\varphi_0 = 0$ setzt. Nimmt man $s_0 = 0$, so beginnt die Bewegung zur Zeit 0 im Anfangspunkte der Bahn, setzt man $v_0 = 0$, so beginnt die Bewegung von der Ruhe aus, also ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Eine ungleichmäßig veränderliche Bewegung entsteht durch eine veränderliche Kraft. Soll die Beschleunigung in gleichen Zeiten um Gleiches wachsen oder abnehmen, so muß die Kraft ebenfalls proportional der Zeit, d. i. gleichmäßig veränderlich sein.

Wollten wir einen Vorlesungsversuch anstellen, der dieser Bedingung entspricht, so könnten wir hierzu die Atwoodsche Fallmaschine anwenden, wenn wir das treibende Übergewichtchen durch ein kleines Gefäß ersetzen, aus dem das eingefüllte Wasser während der Bewegung in regelmäßiger Weise ausfließt. Ein solcher Versuch wurde in der vorigen Auflage S. 174 bis 180 beschrieben.

§ 53. Bewegung infolge einer Kraft, welche sich proportional dem Wege verändert; schwingende oder harmonische Bewegungen. Eine besonders wichtige Art der ungleichmäßig veränderlichen Bewegung ist jene, welche zustande kommt durch eine Kraft, deren Stärke an jedem Punkte der Bahn proportional der erlangten Entfernung von einem als

Ruhepunkt bezeichneten Punkte ist. In letzterem Punkte selbst ist keine Kraft vorhanden.

Eine solche Bewegung kann auf mehrfache Weise hervorgebracht werden. Es dürfte für das Verständnis vorteilhaft sein, wenn wir auch diese Bewegung zuerst an der Atwoodschen Fallmaschine demonstrieren, da hierdurch ihr Verhältnis zu den früheren in klares Licht gesetzt wird.

Zu den gewöhnlichen Fallversuchen, also zur Hervorbringung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung, gibt man dem Übergewicht eine konstante Größe. Zur Erzeugung der im vorigen Paragraphen beschriebenen Bewegung hätten wir ein Übergewicht anzuwenden, welches proportional mit der Zeit sich änderte.

Diesmal soll das Übergewicht proportional dem zurückgelegten Wege sich ändern. Wir erreichen dies am einfachsten durch die in Fig. 140 angedeutete Anordnung. Über die Rolle R ist ein Faden gelegt, der an beiden Enden gestielte Gewichtchen (p, p') trägt. Auf der einen Seite ist dann überdies unter dem Gewichtchen noch ein feines Metallkettchen aa' angehängt, welches bei den später zu erwähnenden Versuchen eine Länge von 100 cm und ein Gewicht von 17,2 g besitzen mag. Beim Teilstrich 100 sind zwei Tischchen d, d' angesetzt. Die Masse von p' ist so reguliert, daß durch dieselbe das Gegengewicht p und die Hälfte des Kettchens im Gleichgewicht gehalten wird. Es bildet demnach die untere Hälfte des Kettchens ein Übergewicht von 8,6 g, durch welches eine Anfangsbeschleunigung hervorgebracht wird, welcher man durch passende Wahl der Gesamtmasse einen beliebigen Wert geben kann. In dem Maße aber, wie die Kette sinkt, lagert sich ein immer größerer Teil derselben auf dem Tischchen a' ab, welcher nicht mehr als Übergewicht wirkt. Ist die Mitte des Kettchens am Tischchen angelangt, so ist die Beschleunigung = 0 geworden und erlangt von da an, da infolge der Trägheit die Bewegung fortgesetzt wird, einen negativen Wert, der bis zur früheren Höhe des positiven Anfangswertes ansteigt, während der Rest des Kettchens abgelagert wird. Wenn keine Reibung und kein Stoß stattfände, würde sich von da an das Kettchen, immerfort schwingend, auf und ab bewegen, indem seine Mitte gleich weit nach oben und nach unten über den Punkt 50 hinausginge. Infolge der Reibung und Stöße nehmen aber die Wege bald ab, und das Kettchen kommt zur Ruhe, indem sich seine Mitte gegenüber dem Punkt 50 einstellt.

Fig. 140.

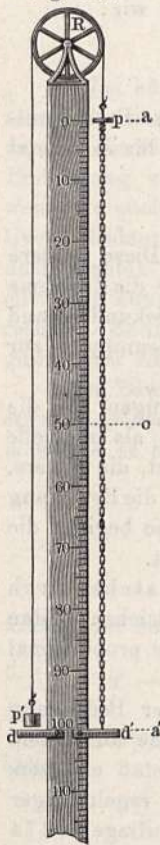
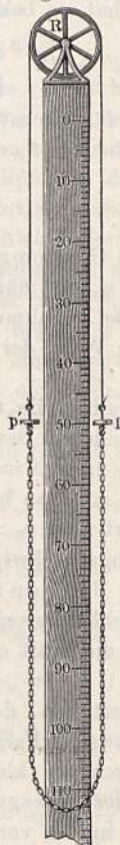


Fig. 141.



Während der Rest des Kettchens abgelagert wird. Wenn keine Reibung und kein Stoß stattfände, würde sich von da an das Kettchen, immerfort schwingend, auf und ab bewegen, indem seine Mitte gleich weit nach oben und nach unten über den Punkt 50 hinausginge. Infolge der Reibung und Stöße nehmen aber die Wege bald ab, und das Kettchen kommt zur Ruhe, indem sich seine Mitte gegenüber dem Punkt 50 einstellt.

Bei dieser Versuchsanordnung ist der Einwurf zu erheben, daß die Gesamtmasse während der Bewegung sich (um die Masse des Kettchens) verändert; man muß also jedenfalls die Masse des Kettchens klein gegen die Gesamtmasse wählen. Eine andere Art, den Versuch anzustellen, ist in Fig. 141 angedeutet. Die Rolle R wird auf einen Vorsprung gestellt, so daß die über dieselbe gelegten Fadenenden nicht neben der Säule, sondern vor derselben herabhängen. Die Fadenenden tragen gestielte Gewichtchen p, p' und darunter eine Metallkette, welche mit beiden Enden an die Gewichtchen befestigt ist. Hebt man das Gewichtchen p um n cm, so sinkt gleichzeitig das Gewichtchen p' um n cm, folglich kommt auf die erstere Seite ein Übergewicht gleich dem Gewichte von $2n$ cm des Kettchens. Dieses Übergewicht, also auch die dadurch erzeugte Beschleunigung wächst proportional mit der zurückgelegten Wegstrecke, da die Gesamtmasse konstant bleibt.

Legt man auf die Gewichtsstücke p und p' gleich große Zulagegewichte, so kann man hierdurch die Gesamtmasse vergrößern, ohne daß zugleich die beschleunigende Kraft vergrößert wird; folglich ist es auf diesem Wege möglich, der Beschleunigung bei gleicher Entfernung von der Ruhelage einen beliebigen Wert zu erteilen. Denselben Zweck erreichen wir durch Ersetzung des Kettchens durch ein solches von geringerem Gewichte.

Mit einem der beiden Apparate überzeugen wir uns zunächst, daß die Bewegung des aus dem Gleichgewicht gebrachten Kettchens eine periodische ist, d. h., daß die gleichen Bewegungen in gleichen Zeitintervallen wiederkehren. Wären keine Reibung und sonstige Hindernisse vorhanden, so würde dies genau der Fall sein. Den größten Abstand des Beweglichen von seiner Ruhelage nach oben oder unten nennen wir die Amplitude oder die Schwingungsweite. Die Zeit, welche verstreicht von einer äußersten Lage bis zur anderen, also die Zeit zwischen zwei Umkehrungen oder zwischen zwei Durchgängen durch die Ruhelage, nennen wir Schwingungsdauer, die Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde die Schwingungszahl, irgend eine momentane Entfernung des Beweglichen von der Ruhelage seine Elongation. Zeitmomente gleichen Bewegungszustandes nennt man gleiche Phasen. Phasendifferenz nennt man den Bruchteil der Schwingungsdauer, welcher zwischen zwei momentanen Lagen des Beweglichen verfließt.

Durch eine erste Versuchsreihe entdecken wir die auf den ersten Blick überraschende Tatsache, daß die Schwingungsdauer unabhängig ist von der Schwingungsweite. Haben wir es z. B. durch geeignete Wahl der gleichen Gewichte p und p' dahin gebracht, daß das um 10 cm gehobene Gewicht p gerade binnen einer Sekunde bis 10 cm unter die Ruhelage, also in Fig. 140 oder 141 von 40 bis 60, sich bewegt, so wird es in derselben Zeit auch von 30 bis 70, von 20 bis 80 usw. sich bewegen.

Da die Kraft, also auch die Beschleunigung, proportional mit der Entfernung von der Ruhelage (der Elongation) sich ändert, so entspricht einer n fachen Amplitude der Schwingungen auch eine n fache Anfangsbeschleunigung. Folglich ergeben die Versuche, daß sich die Schwingungsdauer nicht ändert, wenn das Verhältnis zwischen Amplitude und Anfangsbeschleunigung unverändert bleibt.

Durch eine zweite Versuchsreihe ermitteln wir den Einfluß der verschieden großen Anfangsbeschleunigung bei gleich großer Amplitude. Hat

in der ersten Versuchsreihe die Masse des Kettchens $\frac{1}{n}$ der Gesamtmasse betragen, so belasten wir jetzt die Schälchen p und p' so viel, daß die Masse des Kettchens nur mehr $\frac{1}{4n}$ der Gesamtmasse beträgt, oder wir nehmen ein diesem Verhältnis entsprechend leichteres Kettchen. Die Anfangsbeschleunigung muß dann ein Viertel der früheren betragen. Der Versuch zeigt nun, daß dann die Schwingungsdauer das Doppelte der früheren beträgt. Sie ist also der Quadratwurzel aus der Beschleunigung bei gleicher Amplitude verkehrt proportional.

Würde man dann die Amplitude auf das Vierfache vergrößern, so würde sich die Anfangsbeschleunigung auch auf das Vierfache, also bis zum früheren Werte vergrößern und dennoch die Schwingungsdauer unverändert, also gleich dem doppelten der früheren bleiben. Daraus folgt, daß bei gleicher Anfangsbeschleunigung die Schwingungsdauer dem Quadrate der Amplitude proportional sein müsse.

Bezeichnen wir die Schwingungsdauer (Schwingung hin und zurück) mit T , die Anfangsbeschleunigung mit φ_0 , die Amplitude mit a , so können wir die bisher gefundenen Resultate dahin zusammenfassen, daß T proportional dem Ausdrucke $\sqrt{\frac{a}{\varphi_0}}$ sei, daß also die Formel für T die Form haben müsse:

$$T = k \sqrt{\frac{a}{\varphi_0}} \dots \dots \dots (1)$$

worin k einen konstanten Koeffizienten bezeichnet.

Um den Zahlenwert dieses Koeffizienten auszumitteln, haben wir durch einen quantitativen Versuch zusammengehörige Werte von T und $\frac{a}{\varphi_0}$ zu bestimmen.

Bei einem derartigen nach Fig. 140 angeordneten Versuche waren folgende Daten erhalten worden:

Masse des Rades ¹⁾	94 g
Masse der beiden Schälchen samt aufgesetzten gleichen Gewichtsstücken	131 „
Masse des halben Kettchens	8,6 „
Masse des gleich großen Gegengewichtes auf dem anderen Schälchen	8,6 „
Gesamtmasse ²⁾	242,2 g

¹⁾ Unter der „Masse des Rades“ ist hier nur die in Betracht kommende Masse (das sogenannte Trägheitsmoment) verstanden. Siehe hierüber § 86. Man kann statt obiger Berechnung dieser Gesamtmasse dieselbe auch durch einen Fallversuch ausmitteln, indem man statt des Kettchens eine halb so große Masse auf das Schälchen gibt und ein bekanntes Übergewicht auflegt.

²⁾ Die Gesamtmasse ist in Wirklichkeit bei dieser Versuchsanordnung veränderlich, da bald mehr, bald weniger als die Hälfte des Kettchens dazu gehört; obiges ist der Mittelwert.

Anzahl der Sekunden für zwei Auf- und Niedergänge = 15

Daraus sich ergebende Schwingungsdauer $T = \frac{15}{2} = 7,5''$

Länge des halben Kettchens 50 cm

Daraus folgt Masse des Kettchens pro Centimeter Länge

$$= \frac{8,6}{50} = \dots \dots \dots 0,172 \text{ g}$$

Die Anfangsbeschleunigung bei 1 cm Amplitude berechnet sich daraus zu

$$\varphi_0 = 0,172 \frac{980,8}{242,2} = 0,6965.$$

Daraus ergibt sich dann der Wert der Konstanten:

$$k = \frac{T}{\sqrt{\frac{1}{\varphi_0}}} = T \sqrt{\varphi_0} = 7,5 \sqrt{0,6965} = 7,5 \cdot 0,834 = 6,254.$$

Dieser Wert von k ist nahe gleich dem Werte der verdoppelten Ludolphschen Zahl $2\pi = 6,28318$, was kein Zufall ist, da, wie wir unten zeigen werden, wirklich der Wert von 2π herauskommen sollte. Indem wir dieses Resultat antizipieren, erhalten wir als Ergebnis unserer Versuche für die Schwingungsdauer die Formel:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{\varphi_0}}$$

Bezeichnen wir die Dauer einer einfachen Schwingung hin oder zurück mit $t = \frac{T}{2}$, so kommt

$$t = \pi \sqrt{\frac{a}{\varphi_0}} \dots \dots \dots (2)$$

Eine weitere Versuchsreihe gilt der Untersuchung der Geschwindigkeit, mit welcher die Ruhelage passiert wird. Hierzu eignet sich ebenfalls die Anordnung Fig. 140. Die Ruhelage entspricht daselbst jener Stellung des Gewichtchens p , wo es gegenüber dem Skalenpunkte 50 anlangt und die Hälfte des Kettchens abgelagert ist. Offenbar ist es für die erste Hälfte der Bewegung ganz gleichgültig, wenn man die obere Hälfte des Kettchens durch einen Faden von verschwindendem Gewicht ersetzt und dafür dem Gewichte p ebensoviel zusetzt, als die Hälfte des Kettchens wiegt. Dafür entfällt dann von dem Moment an, wo die Ruhelage passiert wird, jedes weitere Übergewicht, also jede Beschleunigung; die Bewegung wird also von da an eine gleichförmige und folglich die Geschwindigkeit eine konstante, also meßbare. Um die Messung auszuführen, reguliert man die Schwingungsdauer auf eine gerade Anzahl von Sekunden, so daß das Gewichtchen p mit einem Sekundenschlage losgelassen, auch mit einem Sekundenschlage die Ruhelage passiert. Man stellt dann ein Tischchen mit durchbrochener Platte so weit unterhalb der Ruhelage auf, daß das Gewicht p mit dem darauf folgenden Sekundenschlage auffällt, nachdem Kettchen und Faden ungehindert passiert sind. Der Abstand zwischen Ruhelage und Tischchen ist dann gleich der momentanen Geschwindigkeit, welche der schwingenden Bewegung zukommt in dem Moment, wo die Ruhelage passiert wird. Es erhellt sofort, daß man auf

ähnliche Weise die momentane Geschwindigkeit auch an anderen Punkten der Bahn ermitteln kann.

Das Resultat einer solchen Untersuchung, deren Ausführung wohl ohne Zahlenbeispiel verständlich sein dürfte, würde sein, daß die Geschwindigkeit der Quadratwurzel aus dem Produkt von Amplitude und Anfangsbeschleunigung gleich ist. Also:

$$v = \sqrt{a \varphi_0} \dots \dots \dots (3)$$

Ändert man daher an dem Apparate nichts, vergrößert aber die Amplitude beispielsweise auf das Doppelte, so wird zugleich die Anfangsbeschleunigung verdoppelt, das Produkt aus beiden also vervierfacht. Die Geschwindigkeit, mit der die Ruhelage passiert wird, ist dann die doppelte. Sie wird ebenfalls die doppelte, wenn man bei gleicher Amplitude durch Änderung der Massen die Beschleunigung allein vervierfacht.

§ 54. Theoretische Ableitung der Gesetze der schwingenden Bewegung.

Die im vorigen Paragraphen experimentell aufgefundenen Gesetze der schwingenden Bewegung lassen sich auf theoretischem Wege ableiten. Es gelingt dies auf einfache Weise, wenn man sich der Hilfsmittel der höheren Mathematik bedienen darf. Auf elementarem Wege kommen wir zu diesem Ziele am schnellsten, wenn wir von der im § 50 abgehandelten kreisförmigen Zentralbewegung ausgehen. Es wurde daselbst gezeigt, daß eine kreisförmige Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit entsteht, wenn auf einen materiellen Punkt von der Masse m , der in der Richtung der Tangente eines Kreises eine Geschwindigkeit u besitzt, eine beschleunigende Kraft K einwirkt, welche gegen das Zentrum des Kreises gerichtet ist und die Größe $K = \frac{u^2 m}{r}$ besitzt [siehe Formel (2)]. Die Beschleunigung

dieser Kraft ist also $\varphi = \frac{u^2}{r}$ oder, wenn man statt der Geschwindigkeit u

die Umlaufzeit einführt, mit Rücksicht auf $u = \frac{2 r \pi}{T}$:

$$\varphi = \frac{4 \pi^2 r}{T^2} \dots \dots \dots (1)$$

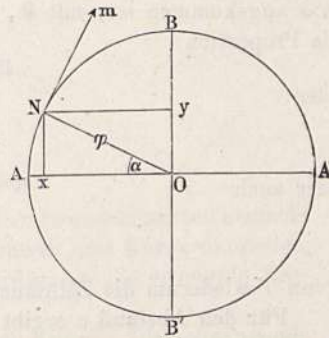
Es stelle nun in Fig. 142 der Kreis $ABA'B'$ die Bahn dieser Zentralbewegung vor. Der bewegte Punkt befinde sich momentan in N . Die von N nach dem Mittelpunkte O gerichtete Beschleunigung werde der Größe nach durch den Radius NO selbst vorgestellt. Wir denken uns nun dieselbe zerlegt nach den zwei Richtungen parallel zu AA' und parallel zu BB' . Die Komponenten werden die Größen xO und yO haben.

Fassen wir diese Komponenten getrennt ins Auge, so erkennen wir bald, daß jede derselben eine Beschleunigung vorstellt, welche in jedem Augenblicke ihre Größe ändert; und zwar ist die Größe der zu AA' parallelen Beschleunigung in jedem Augenblicke proportional dem momentanen Abstände des Punktes N von der Geraden BB' . Ebenso ist die zu BB' parallele Beschleunigung in jedem Augenblicke proportional dem jeweiligen Abstände von der Geraden AA' . Daraus folgt, daß sich die kreisförmige Zentralbewegung auffassen läßt als die Resultierende zweier schwingender Bewegungen, welche senkrecht aufeinander nach den Richtungen AA' und BB' stattfinden, welche beide die gleich große

Amplitude = dem Radius r des Kreises und die gleiche (einfache) Schwingungsdauer t besitzen. Die letztere ist gleich der Hälfte der Umlaufzeit T der kreisförmigen Bewegung.

Um diesen Sachverhalt recht deutlich zu übersehen, denke man sich gleichzeitig von dem Punkte A aus zwei materielle Punkte ausgehen. Der eine N bewege sich innerhalb der Zeit t mit gleichförmiger Geschwindigkeit u längs der Kreisperipherie von A über B nach A' und dann wieder in der Zeit t über B' nach A zurück. Der andere Punkt n bewege sich von A in der Zeit t durch den Durchmesser AA' nach A' , und zwar mit einer Beschleunigung, welche in jedem Punkte durch den jeweiligen Abstand $On = Ox$ gegeben ist. Von A' kehre dieser Punkt wieder in der Zeit t nach A zurück. Es werden dann stets die beweglichen Punkte N und n sich senkrecht übereinander befinden, so daß also n immer als die Projektion von N auf den Durchmesser AA' erscheint. Wir können daher auch kurz sagen: Die schwingende Bewegung von A nach A' und zurück verläuft genau so wie die Projektion der gleichförmigen Kreisbewegung von A über B, A', B' nach A , vorausgesetzt, daß beide gleiche Dauer haben.

Fig. 142.



Für diese Dauer T folgt aus (1) der Wert:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}} \dots \dots \dots (2)$$

folglich für das halb so große t (entsprechend einem Hin- oder Hergange):

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}} \dots \dots \dots (3)$$

welche Formel für die Schwingungsdauer mit jener übereinstimmt, welche wir im vorigen Paragraphen experimentell aufgefunden haben, da der Radius r identisch ist mit dem der Amplitude a und die Beschleunigung φ identisch mit der Anfangsbeschleunigung φ_0 in dem Punkte A .

Man erkennt ferner sofort, daß die Geschwindigkeit, mit welcher der schwingende Punkt n die Mitte bei O passiert, gleich sein müsse der Geschwindigkeit, mit welcher der im Kreise bewegte Punkt N die Stelle bei B passiert, also überhaupt gleich der peripherischen Geschwindigkeit u . Aus $\varphi = \frac{u^2}{r}$

folgt nun

$$u = \sqrt{\varphi r} \dots \dots \dots (4)$$

d. h. der schwingende Punkt geht durch die Ruhelage mit einer Geschwindigkeit, welche der Quadratwurzel aus dem Produkt von Anfangsbeschleunigung und Amplitude gleich ist. Auch diesen Satz haben wir bereits im vorigen Paragraphen als Ergebnis der Versuche bezeichnet.

Zur vollständigen Charakterisierung einer Bewegung gehört eine Formel für den Weg oder genauer für die in einer beliebigen Zeit erreichte Entfernung von dem Nullpunkte der Bahn.

Wir wählen, da es bequemer ist, nicht A , sondern O zum Nullpunkte der Bahn und rechnen die erlangten Entfernungen nach rechts positiv, nach links negativ; dann ist:

$$s = Ox = -r \cos NOx.$$

Bezeichnen wir die Zeit, welche verflossen ist von dem Moment an, wo die schwingende Bewegung in A ausgegangen, bis zu dem Moment, wo sie in x angekommen ist, mit ϑ , so haben wir zur Bestimmung des Winkels α die Proportion:

$$\vartheta : t = \alpha : 180$$

oder:

$$\alpha = 180 \frac{\vartheta}{t},$$

oder auch

$$\alpha = 360 \frac{\vartheta}{T},$$

wenn T wiederum die Zeitdauer einer Doppelschwingung bedeutet.

Für den Abstand s ergibt sich folglich:

$$\begin{aligned} \text{oder:} \quad s &= -r \cos 360 \frac{\vartheta}{T} \\ s &= -r \cos 2\pi \frac{\vartheta}{T} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (5)$$

Nach dieser Gleichung ist also $s = r$ für:

$$\vartheta = \frac{1}{2} T, \vartheta = \frac{3}{2} T, \vartheta = \frac{5}{2} T \text{ usw.};$$

es ist ferner:

$$s = 0$$

für:

$$\vartheta = \frac{1}{4} T, \vartheta = \frac{3}{4} T, \vartheta = \frac{5}{4} T \text{ usw.};$$

es wird:

$$s = -r$$

für:

$$\vartheta = 0, \vartheta = T, \vartheta = 2T, \vartheta = 3T \text{ usw.}$$

Berücksichtigt man ferner den Umstand, daß die momentane Geschwindigkeit v der schwingenden Bewegung an jedem Orte die Projektion der gleichzeitigen tangentiellen Geschwindigkeit u der Kreisbewegung ist, so erhält man:

$$v = u \cdot \cos mNy,$$

also auch, da $\angle mNy$ komplementär zu $\angle \alpha$ ist:

$$v = u \cdot \sin \alpha.$$

Zählen wir die positive Geschwindigkeit von links nach rechts, so bleibt v positiv von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 180^\circ$; es ist also hier kein Zeichenwechsel vorzunehmen, wie es für s nötig war. Setzen wir für α seinen Wert, so kommt:

$$\begin{aligned} v &= u \sin 360 \frac{\vartheta}{T} \\ v &= u \sin 2\pi \frac{\vartheta}{T} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (6)$$

Die Geschwindigkeit wird also gleich Null für

$$\vartheta = 0, \vartheta = \frac{1}{2} T, \vartheta = T, \vartheta = \frac{3}{2} T \text{ usw.},$$

also gerade für solche Momente, in welchen s ein Maximum erreicht, während umgekehrt v in solchen Momenten am größten wird, in denen

$$s = 0,$$

nämlich

$$v = u$$

für

$$\vartheta = \frac{1}{4} T, \vartheta = \frac{5}{4} T \text{ usw.},$$

und

$$v = -u$$

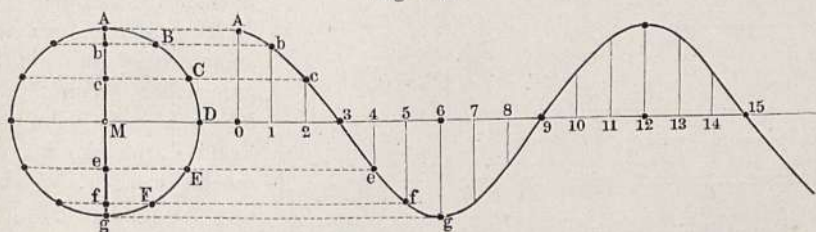
für

$$\vartheta = \frac{3}{4} T, \vartheta = \frac{7}{4} T \text{ usw.}$$

Wir wollen nun noch, wie wir es bisher bei allen Bewegungsarten gemacht haben, den Verlauf der schwingenden Bewegung durch eine Kurve darstellen, deren Abszissen die verfloßenen Zeiten, deren Ordinaten die erlangten Entfernungen vom Nullpunkte der Bahn vorstellen.

Fig. 143 zeigt die Konstruktion einer solchen Kurve. Die schwingende Bewegung erfolge längs der Geraden Ag um die Ruhelage M . Teilen wir

Fig. 143.



die Peripherie in eine Anzahl, z. B. 12, gleiche Teile und ziehen durch die Teilpunkte B, C, D, E, F Senkrechte auf Ag , so werden dadurch die Punkte b, c, d, e, f bestimmt, wo der zwischen A und g schwingende Punkt nach $\frac{1}{12}$,

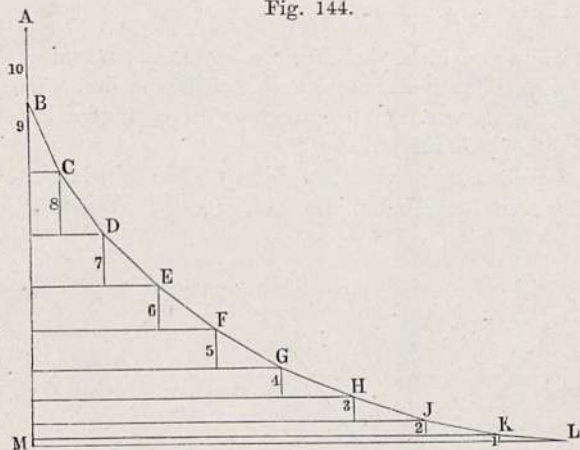
$\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ usw. seiner, doppelten, Schwingungsdauer T ankommt. Verlängert

man nun die Gerade MD und trägt auf derselben von einem willkürlich gewählten Anfangspunkte 0 an beliebige gleich lange Stücke auf, deren Enden man mit $1, 2, 3, 4$ usw. bezeichnet, und errichtet man auf diesen Punkten Ordinaten, welche der Reihe nach den Abständen $AM, bM, cM, null, eM, fM, gM, fM, eM, cM, bM, AM$ usw. gleich sind, so stellt die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Ordinaten die Schwingungskurve dar. Wir werden dieser Kurve noch öfter, besonders in der Akustik, begegnen.

§ 55. Das einfache Pendel. In § 48 haben wir gezeigt, daß man in der schiefen Ebene ein Mittel hat, eine Bewegung zu erzeugen mit einer Beschleunigung, welche einen beliebigen Bruchteil der Beschleunigung beim freien Fall beträgt. Die Beschleunigung über die schiefe Ebene ist nämlich gleich jener beim freien Fall, multipliziert mit dem Verhältnis der Höhe der schiefen Ebene zur Länge derselben.

Es liegt daher auch wohl der Gedanke nahe, eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung dadurch hervorzubringen, daß man eine veränderliche Beschleunigung durch veränderliche Neigung der Bahn erzeugt. Betrachten wir z. B. die Bahn, welche in Fig. 144 dargestellt ist; dieselbe setzt sich aus vielen kleinen, aber gleich langen Stücken zusammen, dabei ändert sich von einem zum anderen die Beschleunigung im Verhältnis der Höhen dieser schiefen Ebenen. In Fig. 144 ist die Länge aller einzelnen schiefen Ebenen konstant = 10 mm, die Höhen aber nehmen von 10 mm an je um 1 mm ab. Ist also die Beschleunigung längs des senkrechten Stückes $AB = g$, so ist sie längs $BC = \frac{9}{10}g$, längs $CD = \frac{8}{10}g$, längs $DE = \frac{7}{10}g$ usf., längs KL nur noch $\frac{1}{10}g$. Die Beschleunigung ändert sich also proportional dem

Fig. 144.



zurückgelegten Wege, wodurch eine Bewegung erzeugt werden muß, welche nach demselben Gesetze vor sich geht wie die Bewegung eines schwingenden Körpers. Um dies vollkommen zu erreichen, müßten nur noch die Änderungen der Neigung der Bahn statt sprunghaft in kontinuierlicher Weise erfolgen, also die Bahn der Figur durch eine Kurve ersetzt werden, welche ihre Neigung in der besprochenen Weise ändert.

Eine solche Kurve, welche, wie Huyghens gezeigt hat, eine Zyklode ist, nähert sich in ihrem unteren Teile sehr einem Kreisbogen und kann daher dort mit großer Annäherung durch einen solchen ersetzt werden. Statt aber den Körper über eine kreisförmig gebogene Unterlage rollen zu lassen, ist es zweckmäßiger, ihn dadurch zur Einhaltung einer kreisförmigen Bahn zu zwingen, daß man ihn mittels eines Fadens an einem festen Punkte aufhängt und um denselben schwingen läßt.

Eine solche Vorrichtung, Fig. 145, bestehend aus einem kleinen Körper (Kugel), welcher an einem dünnen Faden aufgehängt ist, heißt ein einfaches Pendel. Denkt man sich diesen Körper ersetzt durch einen schweren, materiellen Punkt, der an einem Faden ohne Gewicht hängt, so heißt man diese Anordnung ein mathematisches Pendel. Dasselbe ist natürlich nie herstellbar, sondern existiert nur in der Vorstellung. Die wirklich ausführbaren physischen Pendel sind entweder einfache oder zusammengesetzte. Wir beschäftigen uns hier zunächst mit den Gesetzen des mathematischen Pendels, die wir auch als jene des einfachen Pendels gelten lassen dürfen, später werden wir dann das zusammengesetzte Pendel in Behandlung ziehen.

Bringt man die Kugel des Pendels aus ihrer Gleichgewichtslage, d. h. bringt man das Pendel aus seiner vertikalen Stellung, so macht es, wenn man es losläßt, ohne ihm irgend einen Anstoß zu geben, Schwingungen, welche fortwährend in derselben Vertikalebene bleiben. Bringt man z. B. das Pendel

in die Lage FA , so beschreibt die Kugel den Bogen AC ; in C kommt sie mit solcher Geschwindigkeit an, daß sie auf der anderen Seite bis B steigt, d. h. zu der Höhe des Punktes A ; vom Punkte B geht die Kugel abermals zurück, durchläuft in umgekehrter Richtung wieder den Bogen BCA und setzt auf dieselbe Weise ihre Schwingungen fort. Beim Niedergange des Pendels nimmt seine Geschwindigkeit fortwährend zu, beim Aufsteigen nimmt sie ab; in dem Moment also, in welchem das Pendel die Gleichgewichtslage passiert, hat es seine größte Geschwindigkeit.

Der Winkel $AFC = \alpha$ heißt Ausschlagswinkel oder auch nur Ausschlag.

Als Schwingungsweite oder Amplitude bezeichnet man häufig den ganzen Bogen AB ; es ist aber zweckmäßiger, damit, wie im vorigen Paragraphen, die Hälfte der ganzen Bahn, also den Bogen AC zu bezeichnen.

Die Bewegung von A bis B oder von B bis A heißt eine (einfache) Schwingung (Oszillation); von A bis C ist eine halbe niedergehende, von C bis B eine halbe aufsteigende Oszillation.

Die Schwingungsdauer oder Oszillationsdauer ist die Zeit, welche das Pendel nötig hat, den ganzen Bogen AB zu durchlaufen.

Nach dem ersten Anblicke sollte man aus den Versuchen schließen, daß die Bewegung eines Pendels immer fortdauern müßte, denn wenn es, von A ausgehend, auf der anderen Seite zu einer gleichen Höhe B ansteigt, so muß es, von B ausgehend, auch wieder bis A steigen, und es wird so denselben Weg zum zweiten, zum dritten Male usw. bis ins Unendliche machen müssen.

Dieser Schluß würde ganz richtig sein, wenn B wirklich absolute gleiche Höhe mit A hätte; aber die Reibung am Aufhängepunkte F , der Widerstand der Luft, welche die Kugel vor sich wegtreiben muß, machen es unmöglich, daß dieselbe genau wieder bis zu der Höhe steigt, von welcher sie herabfiel. Die Abnahme der Amplituden wird freilich erst nach einer Reihe von Schwingungen merklich.

Die von Galilei zuerst aufgestellten Gesetze der Pendelschwingungen sind folgende:

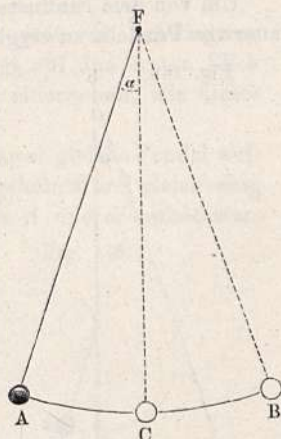
1. Die Schwingungsdauer des Pendels ist unabhängig vom Gewicht des schwingenden Körpers und von der Natur seiner Substanz.

2. Bei kleinen Ausschlägen ist die Schwingungsdauer nahezu unabhängig von der Größe der Amplitude (Isochronismus).

3. Die Schwingungsdauer ungleich langer Pendel verhält sich wie die Quadratwurzel aus den Pendellängen.

Das erste Gesetz folgt als notwendige Konsequenz, wenn vorher erwiesen ist, daß die Anziehungskraft der Erde auf alle Materien gleich groß ist und folglich alle Körper gleiche Beschleunigung des freien Falles erhalten. Denn da beim Pendel eine Komponente dieser Beschleunigung als wirksame Kraft auftritt und die Bewegung derselben auf den Fall über eine schiefe Ebene zurückgeführt werden kann, so ist es ebenso sicher, daß alle Körper

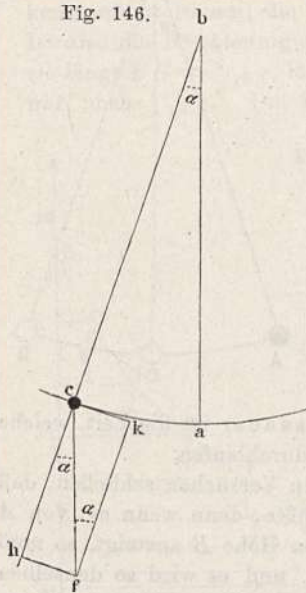
Fig. 145.



bei gleicher Pendellänge gleich schnell schwingen, wie daß sie gleich schnell frei fallen. In Wahrheit haben jedoch die Physiker umgekehrt aus der Tatsache der gleichen Schwingungsdauer bei Pendeln aus verschiedenem Materiale und Gewicht den Beweis abgeleitet, daß die Acceleration der Schwere für alle Körper gleich groß sei.

Um von dem Einflusse des Luftwiderstandes unabhängig die Schwingungsdauer von Pendeln zu vergleichen, hat Newton hohle hölzerne Kugeln gleicher

Fig. 146.



Größe an Fäden gleicher Länge aufgehängt und mit den verschiedensten Materialien, wie Gold, Silber, Blei, Glas, Sand, Kochsalz, Holz, Wasser, Weizen, angefüllt schwingen lassen. Es konnte kein Unterschied nachgewiesen werden.

Das zweite Gesetz ist erwiesen, sobald gezeigt worden ist, daß beim Pendel mit Annäherung dieselben Bewegungsbedingungen vorhanden sind wie bei der schwingenden Bewegung, die wir in dem vorausgegangenen Paragraphen studiert haben.

Fassen wir die Fig. 146 ins Auge. Die Pendelkugel befindet sich momentan in *c*. Die Schwerkraft sucht derselben eine Beschleunigung = *g* zu erteilen, welche durch die Gerade *cf* nach Richtung und Größe vorgestellt sein mag. Von dieser Beschleunigung kann nur die Komponente *ck* in der Richtung der Tangente zur Bewegung beitragen.

Die andere Komponente *ch* kann nur den Faden spannen. Nun ist:

$$ck = cf \cdot \sin \alpha = g \sin \alpha.$$

Die Beschleunigung, welche die Pendelkugel erfährt, ist also in jedem Punkte der Bahn proportional dem Sinus des Ausschlagswinkels. Da nun aber für kleine Winkel die Sinus nahezu proportional den Bögen selbst sind, so ist damit auch eine angenäherte Proportionalität zwischen Weg und Beschleunigung gegeben, folglich erwiesen, daß die Gesetze der schwingenden Bewegung auch für das Pendel angenähert gelten müssen, solange die Amplituden klein sind.

Um ein Zahlenbeispiel beizubringen, welches zeigt, wie nahe die Bögen und die Sinus derselben übereinstimmen, wenn man unter 5° bleibt, möge folgende Tabelle dienen:

Winkel	Bogenlänge (Radius = 1)	Sinus
1°	0,0174533	0,0174524
2°	0,0349066	0,0348995
3°	0,0523599	0,0523360
4°	0,0698132	0,0697565
5°	0,0872665	0,0871558

Man sieht, daß bis 3° der Unterschied erst in der fünften Dezimale auftritt und daselbst noch nicht $\frac{1}{2000}$ des Wertes erreicht.

So lange man also den Ausschlagswinkel nicht über 3° steigen läßt, kann man mit genügender Annäherung behaupten, daß die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude sei, also die Schwingungen isochron seien.

Die Behauptung, daß dasselbe Pendel zu einer größeren Schwingung nicht mehr Zeit brauche als zu einer kleineren, klingt auf den ersten Blick paradox. Durch folgende Betrachtung ist aber leicht einzusehen, wie dieses Resultat zustande kommen muß.

Denken wir uns (Fig. 147) dicht hintereinander zwei gleiche Pendel aufgehängt, das eine bis c , das andere halb so weit bis c' gehoben und gleichzeitig losgelassen, so werden sie gleichzeitig in den Punkten d und d' ankommen,

Fig. 147.

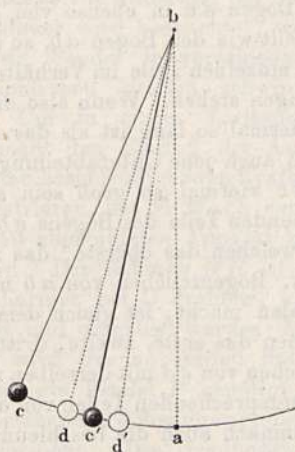
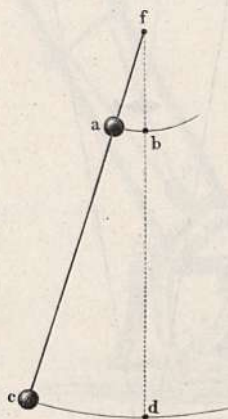


Fig. 148.



wenn $c'd' = \frac{1}{2}cd$. Die beschleunigende Kraft in d ist aber doppelt so groß als in d' , außerdem aber langt das eine Pendel in d mit einer Geschwindigkeit an, welche doppelt so groß als diejenige ist, mit welcher das andere den Punkt d' passiert, und daraus folgt denn, daß auch in dem nächsten kleinen Zeiteilchen das eine Pendel einen doppelt so großen Weg zurücklegt als das andere. Auf diese Weise fortschließend findet man endlich, daß beide Pendel gleichzeitig in a ankommen müssen.

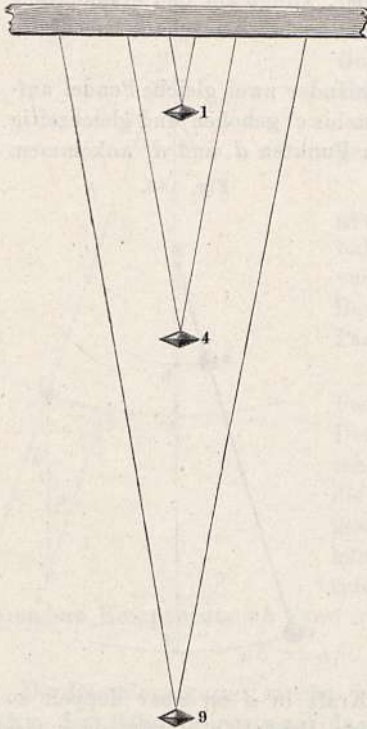
Diese Schlußweise läßt sich auch noch anwenden, wenn das Verhältnis der Ausschlagswinkel nicht gerade das von 1 zu 2, sondern ein anderes ist, weil für kleinere Ausschlagswinkel die beschleunigende Kraft stets der Entfernung von der Gleichgewichtslage proportional ist; und so läßt sich allgemein zeigen, daß bis zu der Grenze hin, bis zu welcher $\sin \alpha$ mit $\frac{ac}{bc}$ vertauscht werden darf, die Schwingungsdauer von der Größe der Ausschlagswinkel unabhängig ist.

Um dies Gesetz durch den Versuch zu bestätigen, muß man die Zeit genau bestimmen, welche nötig ist, damit ein Pendel mehrere hundert Schwingungen vollendet. Macht man diese Beobachtung zu Anfang der Bewegung, wenn die Amplitude 2° bis 3° ist, später, wenn sie nur noch 1° bis

2^o beträgt, und zuletzt, wenn die Oszillationen so klein geworden sind, daß man sie mit der Lupe beobachten muß, so findet man, daß die Oszillationen in diesen drei Stadien so gut wie vollständig isochron sind.

Das dritte Gesetz, welches sagt, daß die Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus der Pendellänge proportional sei, ergibt sich auf folgende

Fig. 149.



Weise. Man denke sich den Schwingungsbogen ab , Fig. 148, eines Pendels in so viel gleiche Teile geteilt, daß man jedes dieser Bogenteilchen als geradlinig betrachten kann. Wenn nun der Ausschlagswinkel eines längeren Pendels ebenso groß ist, so muß sich der Schwingungsbogen cd desselben zu ab verhalten wie die Pendellänge fc zu fa . Denken wir uns den Bogen dc in ebenso viel gleiche Teile geteilt wie den Bogen ab , so werden auch die einzelnen Teile im Verhältnis der Pendellängen stehen. Wenn also das eine Pendel viermal so lang ist als das andere, so werden auch jene Unterabteilungen des Bogens dc viermal so groß sein als die entsprechenden Teile des Bogens ab . Der Winkel, welchen das oberste, das zweite, dritte usw. Bogenteilchen von ab mit der Horizontalen macht, ist gleich dem Winkel, welchen das erste, zweite, dritte usw. Bogenteilchen von cd mit derselben macht; auf den entsprechenden Teilen von ab und cd ist demnach auch die beschleunigende Kraft dieselbe.

Wenn aber verschiedene Wege mit gleicher beschleunigender Kraft durchlaufen werden, so lehrt uns die Formel $s = \frac{g}{2} t^2$, daß sich die Fallzeiten verhalten wie die Quadratwurzeln der Fallräume; wenn also der Bogen cd 2-, 3-, 4-, n mal so groß ist als der Bogen ab , so wird die Zeit, in welcher ein Teilchen von cd durchlaufen wird, auch $\sqrt{2}$ -, $\sqrt{3}$ -, $\sqrt{4}$ -, \sqrt{n} mal so groß sein als die, in welcher das entsprechende Teilchen von ab durchlaufen wird. Da dies aber für alle Bogenteilchen gilt, so gilt es auch für ihre Summe, was denn mit anderen Worten heißt, die Schwingungsdauer ist der Quadratwurzel aus der Pendellänge proportional.

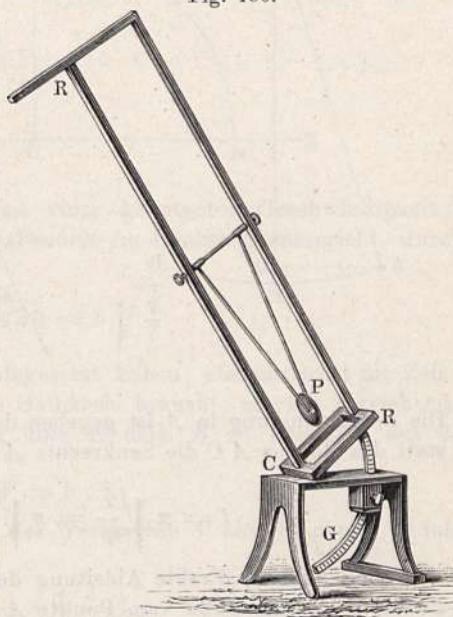
Um die Richtigkeit des dritten Gesetzes durch den Versuch nachzuweisen, hat man nur die Schwingungsdauer verschieden langer Pendel zu vergleichen. Wenn sich z. B. die Pendellängen wie die Zahlen 1:4:9 verhalten, so verhalten sich die entsprechenden Schwingungszeiten wie 1:2:3. Am bequemsten hängt man zu diesem Versuche die Kugeln an einem doppelten Faden auf, wie Fig. 149 zeigt. Während ein Pendel, dessen Länge 4 dm ist, eine Oszillation macht, macht das viermal kürzere Pendel zwei Oszillationen;

und während ein Pendel von 1 dm Länge dreimal hin und her geht, macht ein 9 dm langes nur einen Hin- und Hergang.

Die eben besprochenen Gesetze sind von der Intensität der Schwere ganz unabhängig. Wenn die Schwerkraft auch hundertmal stärker oder schwächer wirkte, so würden kleine Schwingungen eines und desselben Pendels doch unter sich isochron bleiben, und die Schwingungszeiten verschieden langer Pendel würden sich noch immer wie die Quadratwurzeln ihrer Länge verhalten. Die absolute Dauer der Oszillationen ändert sich aber mit der Intensität der Schwerkraft. Dasselbe Pendel wird schneller oszillieren müssen, wenn die Intensität der Schwerkraft wächst, und langsamer, wenn sie abnimmt.

Eine solche Änderung der Oszillationsdauer wird beobachtet, wenn man ein Pendel in verschiedenen geographischen Breiten schwingen läßt. Um in einem Vorlesungsexperiment den Einfluß der Änderung der beschleunigenden Kraft zu demonstrieren, hat E. Mach den in Fig. 150 abgebildeten Apparat konstruiert. Der Rahmen *RR* ist um ein Scharnier bei *C* drehbar, kann geneigt und umgelegt werden; hierdurch wird das an steifen Stäben aufgehängte Pendel *P* genötigt, in schief stehenden Schwingungsebenen zu schwingen. Der Gradbogen *G* dient zur Messung und Festklemmung der geneigten Lage. Bei derselben kommt von der ganzen Schwerkraft von vornherein nur eine Komponente von der Größe $g \cos \beta$ zur Wirkung, wenn wir mit β den Winkel bezeichnen, um welchen die Schwingungsebene aus ihrer ursprünglich senkrechten Lage gedreht wurde. Die Schwingungsdauer des geneigten Pendels verhält sich dann zu jener des senkrechten wie 1 zu $\sqrt{\cos \beta}$.

Fig. 150.



§ 56. Theoretische Ableitung der Gesetze des mathematischen Pendels. Die sämtlichen im vorigen Paragraphen empirisch nachgewiesenen Gesetze lassen sich durch die Formel darstellen:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \dots \dots \dots 1)$$

worin t die Dauer einer Schwingung hin oder zurück, l die Länge des Pendels und g die Beschleunigung der Schwere bedeuten. Wir gelangen zu dieser Formel, welche ebenfalls nur für kleine Schwingungsbögen angenähert gilt, aus der Formel 3) des § 54:

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}}$$

indem wir für r und φ ihre Werte einsetzen. Aus Fig. 151 ersieht man, daß der senkrechte Abstand AD gegeben ist durch $AF \cdot \sin \alpha = l \sin \alpha$.

Fig. 151.

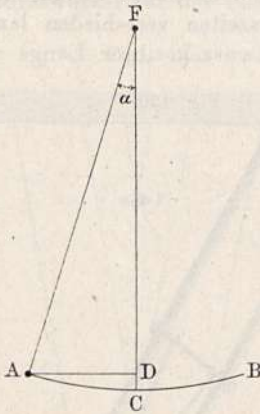
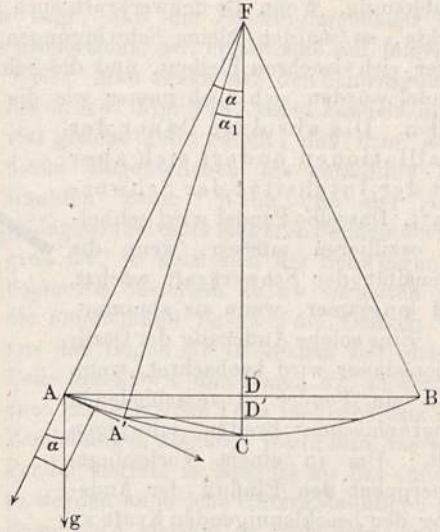


Fig. 152.



Die Beschleunigung in A ist gegeben durch $g \cdot \sin \alpha$. Da wir nun angenähert statt des Bogens AC die Senkrechte AD setzen dürfen, so erhalten wir:

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}} = \pi \sqrt{\frac{l \sin \alpha}{g \sin \alpha}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Eine andere, direkte Ableitung der Pendelformel ist beifolgende: Das Pendel geht (Fig. 152) vom Punkte A aus und wird, sobald es in A' angelangt ist, die Endgeschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2ge}$$

haben, wenn e den Vertikalabstand DD' bedeutet. Bezeichnen wir ferner die Bögen AC und $A'C$ mit b und b' , so können wir bei Beschränkung auf kleine Bögen an ihre Stelle die zugehörigen Sehnen setzen und erhalten dann:

$$CD = h = \frac{b^2}{2l}, \quad CD' = h_1 = \frac{b_1^2}{2l} \dots \dots \dots 2)$$

wenn l die Länge des Pendels $CF = AF$ darstellt.

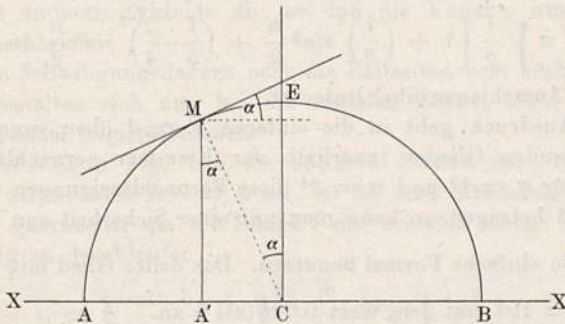
Da nun $e = h - h_1$, so kommt auch:

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{l} (b^2 - b_1^2)} \dots \dots \dots 3)$$

Denken wir uns jetzt gemäß Fig. 153 den Bogen ACB auf der X -Achse eines Koordinatensystems gerade ausgestreckt und einen schweren Punkt auf dieser Geraden mit denselben Geschwindigkeiten wie das Pendel auf seinem Bogen sich bewegen, so wird die Zeit t , welche der schwere Punkt braucht, um von A nach B zu gelangen, gleich der Schwingungsdauer des Pendels sein.

Um diese Zeit zu finden, beschreiben wir mit $AC = b$ als Radius über ACB einen Halbkreis AEB und nehmen an, es werde dieser Halbkreis von

Fig. 153.



einem zweiten schweren Punkt mit einer konstanten Geschwindigkeit V , welche der Endgeschwindigkeit des Pendels im Punkte C entspricht, durchlaufen, so ist:

$$V = \sqrt{2gh} = b \sqrt{\frac{g}{l}} \dots \dots \dots 4)$$

wo wir für h den Wert aus 2) eingesetzt haben; alsdann wird die Zeit t , welche der schwere Punkt auf dem Halbkreis braucht, um mit vorstehender konstanter Geschwindigkeit von A über E nach B zu kommen, aus der Gleichung

$$t \cdot V = b \cdot \pi$$

zu finden sein. Unter Einsetzung des Wertes von V aus Gleichung 4) folgt hieraus:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots \dots \dots 5)$$

Nun ist aber die horizontale Geschwindigkeit dieses zweiten schweren Punktes stets gleich derjenigen des ersten Punktes vertikal darunter, also z. B. die horizontale Komponente der Geschwindigkeit V im Punkte M gleich derjenigen im Punkte A' darunter, d. h. v_1 . In der Tat ist jene horizontale Komponente:

$$V \cos \alpha = V \cdot \frac{\sqrt{b^2 - b_1^2}}{b},$$

oder, wenn wir für V den Wert aus Gleichung 4) einsetzen:

$$V \cdot \cos \alpha = \sqrt{\frac{g}{l}} (b^2 - b_1^2) = v_1$$

nach Gleichung 3), was zu zeigen war. Da also die beiden schweren Punkte auf dem Kreise und auf der Geraden stets dieselbe horizontale Geschwindigkeit haben und also immer vertikal übereinander liegen werden, so werden sie zu gleicher Zeit von A ausgehend auch zugleich im Punkt B anlangen, und es wird somit auch die Schwingungsdauer des Pendels sein:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots \dots \dots 6)$$

Die strenge Formel für die Schwingungsdauer des Pendels für Amplituden beliebiger Größe ist nur durch höhere Rechnung erhältlich. Sie läßt sich durch nachfolgende Reihe ausdrücken:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right] \quad \cdot \cdot \quad 7)$$

worin α den Ausschlagswinkel bedeutet.

Dieser Ausdruck geht in die einfache Formel über, wenn das zweite und die folgenden Glieder innerhalb der Klammer vernachlässigt werden dürfen. Da für $\alpha = 1^\circ$ und $\alpha = 2^\circ$ diese Vernachlässigungen nur 0,000019 und 0,000076 betragen, so kann man mit einer Sicherheit von $\frac{1}{10\,000} t$ selbst für 2° noch die einfache Formel benutzen. Das dritte Glied mit $\sin^4 \frac{\alpha}{2}$ nimmt selbst für $\alpha = 10^\circ$ erst den Wert 0,0000016 an.

Da der Wert von g , wie wir oben mitgeteilt haben, rund gleich 980 cm ist, so folgt aus der obigen Gleichung für die Schwingungsdauer $t = 1$ als Länge L des einfachen Sekundenpendels angenähert:

$$L = \frac{g}{\pi^2} = 99,3 \text{ cm}$$

und für $t = \frac{1}{2} s$ als Länge des einfachen halbe Sekunden schlagenden Pendels:

$$L' = \frac{g}{4 \pi^2} = 24,8 \text{ cm.}$$

§ 57. Das Zyklidenpendel. Da die Schwingungsdauer beim Pendel, so wie die Fallzeit auf einer Kreisbahn abhängt von der Amplitude, so suchte Huygens eine Bahn zu finden, auf welcher ein Körper in genau

Fig. 154.

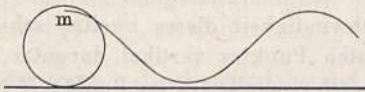


Fig. 155.

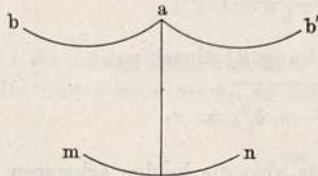
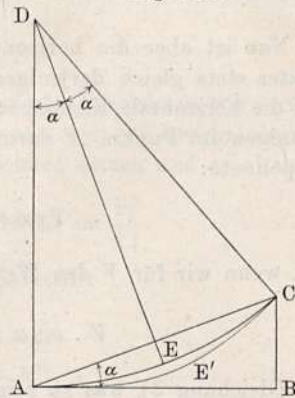


Fig. 156.



gleichen Zeiten große und kleine Amplituden durchlaufen würde. Er fand, daß dies bei der Zykloide der Fall sei. Eine solche Kurve wird erhalten, wenn man einen Punkt m eines auf ebener Bahn rollenden Kreises dabei eine Linie beschreiben läßt, wie dies Fig. 154 darstellt.

Da eine Zykloide zugleich die Abwicklung einer anderen Zykloide darstellt, so konstruierte Huygens zur Herstellung eines Pendels, das eine

Zykloide beschreibt, zwei feste aneinanderstoßende Zykloiden ab und ab' , Fig. 155, in deren Durchschnittspunkt a der Pendelfaden aufgehängt war. Beim Schwingen des Pendels wickelte sich dann der Faden abwechselnd von der einen und anderen Zykloide ab, so daß die Kugel c nun auch eine Zykloide mn beschrieb.

Die halben Schwingungsdauern oder die Fallzeiten vom höchsten Punkte zum tiefsten gestalten sich nun bei der schiefen Ebene, beim Kreispendel und Zykloidenpendel folgendermaßen.

Es stelle ABC in Fig. 156 die schiefe Ebene dar, deren Länge $AC = l$ und deren Höhe $BC = h$ sei, so ist nach Früherem die Zeit t_1 , die ein Körper gebraucht, um die Länge l der schiefen Ebene vermöge der Schwerkraft zu durchlaufen:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{g \cdot \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot l^2}{g \cdot h}} = 2l \sqrt{\frac{1}{2gh}} \dots \dots \dots 1)$$

Legen wir durch A und C einen Kreisbogen AEC , dessen Zentrum D im Durchschnittspunkt der Vertikalen durch A und der Normalen auf der Mitte von AC liege, so repräsentiert DA ein Pendel von der Länge $DC = r$ mit dem halben Schwingungsbogen AEC , und die Zeit t_2 , die das Pendel braucht, um den Bogen AEC zu durchlaufen, ist die halbe Schwingungsdauer desselben, also:

$$t_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{2g \sin \alpha}} = \frac{\pi}{2} l \sqrt{\frac{1}{2gh}} \dots \dots \dots 2)$$

Für den durch A und C gehenden Zykloidenbogen $AE'C$, der durch das Fortwälzen eines Kreises vom Durchmesser $BC = h$ entstanden ist, ist die Fallzeit eines Körpers auf ihm gegeben durch:

$$t_3 = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}} = \pi h \sqrt{\frac{1}{2gh}} \dots \dots \dots 3)$$

Hiernach verhalten sich die Fallzeiten auf der schiefen Ebene, dem Kreisbogen und der Zykloide AC :

$$t_1 : t_2 : t_3 = 2l : \frac{\pi}{2} l : \pi h,$$

d. h. die erstere ist die größte, die letzte die kleinste. Die Fallzeit auf der Zykloide wird erst dann gleich derjenigen auf dem Kreisbogen, wenn der Durchmesser des die Zykloide erzeugenden Kreises h gleich der halben Länge der schiefen Ebene oder also der Winkel $\alpha = 30^\circ$ würde; dann wäre aber die Pendelamplitude $2\alpha = 60^\circ$, und es gälte nicht mehr die obige einfache Formel für die Schwingungsdauer des Pendels.

Daraus, daß im Ausdruck für die Fallzeit auf der Zykloide die Länge der schiefen Ebene bzw. die Länge des Bogens $AE'C$ nicht vorkommt, folgt, daß von jedem Punkte der Zykloide aus die Fallzeit bis zum Ende derselben in A dieselbe ist.

Die Theorie und die Anwendungen des physischen Pendels können erst an späterer Stelle behandelt werden.

Drittes Kapitel.

Vom Gleichgewicht und den Bewegungen der festen Körper.

§ 58. **Feste und starre Körper, fortschreitende und drehende Bewegung.** Bei den bisherigen Betrachtungen beschränkten wir uns nur auf das Gleichgewicht oder die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes, oder ließen, falls deren mehrere vorhanden waren, die Nachbarpunkte unberücksichtigt, was aber nur selten zulässig ist.

Die festen Körper, mit denen wir in Wirklichkeit zu tun haben, können wir uns als ein Aggregat von materiellen Punkten vorstellen, die fest miteinander verbunden sind. Diese Verbindung ist aber wiederum in Wirklichkeit nie eine vollkommen starre, d. h. die materiellen Punkte halten ihre gegenseitige Lage unter dem Einflusse von Kräften nicht aufrecht, sondern erfahren vorübergehende oder dauernde Veränderungen dieser Lage. Der vollkommen starre Zustand ist demnach nur als ein idealer Grenzfall anzusehen, dem sich die festen Körper mehr oder weniger nähern. Ein Stück Quarz, eine dicke Stahlstange, ein Holzblock nähern sich diesem Grenzfall der Starrheit. Eine dünne Stahlstange (Stahlfeder), ein hölzernes Lineal dagegen weichen schon stark davon ab, da sie elastisch biegsam sind. Ein Bleidraht, eine Hanfschnur, ein Kokonfaden sind in steigender Reihe davon entfernt, als starre Körper zu gelten, obwohl sie immer noch feste Körper sind.

Für die nicht starren Körper lassen sich keine einfachen allgemeinen Regeln über Gleichgewicht und Bewegung angeben. Es muß vielmehr jeder einzelne Fall einzeln untersucht werden. Dabei wird man immer so vorgehen, daß man zuerst untersucht, was geschehen würde, wenn der Körper vollkommen starr wäre, und dann erst auf den Einfluß der Elastizität, Dehnbarkeit usw. Rücksicht nehmen. Wir haben uns daher im folgenden nur mit starren Körpern (Punktsystemen) zu beschäftigen.

Auch in bezug auf die Beweglichkeit ist ein bedeutender Unterschied zwischen dem einzelnen materiellen Punkte und dem aus vielen solchen Punkten zusammengesetzten Körper. Der einzelne Punkt kann nur eine fortschreitende Bewegung haben, und die Mannigfaltigkeit derselben beschränkt sich auf die Formen der Bahn und die Arten des zeitlichen Verlaufes. Beim Punktsystem (Körper) ist eine viel größere Mannigfaltigkeit gegeben, da sich die Bewegungen der einzelnen Punkte voneinander verschieden gestalten können.

Der einfachste Fall wird demnach der sein, daß alle Einzelpunkte genau dieselbe Bewegung, also kongruente Bahnen mit gleichem zeitlichen

Verläufe ausführen. Diese Bewegungsart nennen wir die fortschreitende Bewegung des Körpers. Bei dieser bleibt jede auf dem Körper gezogene Gerade stets sich selbst parallel.

Ein zweiter Fall ist der, bei welchem alle Punkte gleichzeitig in parallelen Ebenen Kreise um eine gemeinschaftliche Achse beschreiben. Diese Bewegungsart nennen wir die drehende oder Rotationsbewegung. Jede andere noch so komplizierte Bewegung läßt sich stets als eine Zusammensetzung einer fortschreitenden mit einer drehenden Bewegung auffassen.

Als Beispiel einer fortschreitenden Bewegung könnten wir die eines Schlittens anführen, der auf stets gleich geneigter Bahn geradlinig fortbewegt wird. Ein Beispiel der rotierenden Bewegung wäre die eines Schwungrades einer feststehenden Maschine.

Dagegen ist das Wagenrad eines fahrenden Wagens ein Beispiel einer zusammengesetzten Bewegung. Ein anderes Beispiel hierfür wäre die Bewegung einer Schraube (Korkziehers) in ihrer feststehenden Schraubenmutter.

Beim Wagenrad gesellt sich zur Rotationsbewegung ein Fortschreiten der Achse in einer Richtung senkrecht auf dieselbe; bei der Schraube eine solche in einer Richtung parallel zur Achse.

Die Erde hat eine Rotationsbewegung um ihre Achse und eine fortschreitende Bewegung in ihrer Bahn um die Sonne, wobei die Rotationsachse schief auf der Ebene der fortschreitenden Bewegung steht.

Man darf sich bei der Definition der fortschreitenden Bewegung nicht dadurch irre machen lassen, daß die einzelnen Punkte möglicherweise sämtlich Kreise beschreiben. Denken wir uns in Fig. 157 eine Scheibe um eine vertikale Achse in C drehbar. Am Rande der Scheibe in N_0 sei auf eine Nadelspitze eine Magnetenadel ns frei beweglich aufgesetzt. Drehen wir die Scheibe, so

Fig. 157.

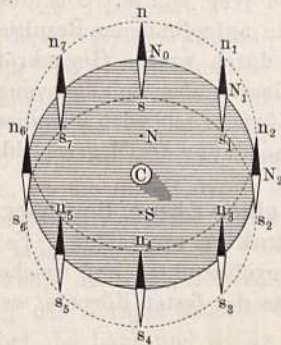
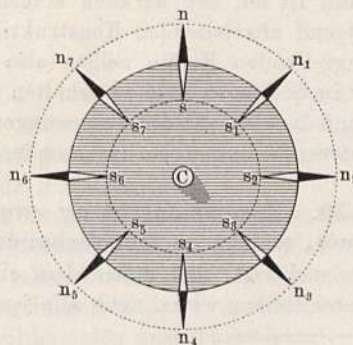


Fig. 158.



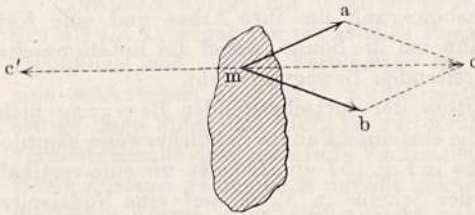
beschreibt die Nadelspitze N_0 einen Kreis um die Achse C ; da aber die Magnetenadel (von zufälligen Schwingungen abgesehen) ihre zum magnetischen Meridian parallele Richtung beibehält, so bewegt sich ihr Nordpol n auf einem Kreise n, n_1, n_2, \dots um den Punkt N , der Südpol s auf einem Kreise s, s_1, s_2, \dots um den Punkt S . Mithin hat nur die Scheibe eine drehende Bewegung, während die Magnetenadel eine fortschreitende Bewegung besitzt. Wäre die Magnetenadel nicht frei beweglich, sondern auf der Scheibe unverrückbar befestigt, so würde sie, wie in Fig. 158 dargestellt ist, ebenfalls eine drehende

Bewegung haben, wobei ihr Nordpol n und ihr Südpol s sowie alle übrigen Punkte des Systems Kreise um eine und dieselbe Achse C beschreiben ¹⁾.

Noch auf einen wesentlichen Unterschied in dem Verhalten einzelner materieller Punkte einerseits und der starren Punktsysteme oder Körper andererseits glauben wir schon hier aufmerksam machen zu sollen.

Wenn m , Fig. 159, ein einzelner materieller Punkt wäre, und wir ließen auf denselben die Kraftkomponenten ma und mb einwirken, so würde uns das Parallelogramm $macb$ sowohl als Kräfteparallelogramm als auch als Bewegungsparallelogramm gelten, das heißt, wir wüßten nicht bloß, daß die beiden Kräfte, die durch ma und mb vorgestellt sind, zusammen die resultierende Kraft mc ergeben, sondern auch, daß, wenn ma und mb die durch die komponierenden Kräfte bewirkten Wege vorstellen, der resultierende Weg mc ist. Ist aber m einem Körper angehörig, auf den im Punkte m die beiden Kräfte ma und mb angreifen, so ist zwar sicher, daß daraus eine den Körper in m angreifende resultierende Kraft mc hervorgeht, die durch eine gleich große entgegengesetzte mc' im Gleichgewichte gehalten werden könnte; es folgt aber daraus keineswegs, daß der Körper sich so bewegt, daß der Punkt m den Weg mc beschreibt.

Fig. 159.



Die eintretende Bewegung des Punktes m hängt vielmehr zunächst davon ab, ob alle Punkte des Körpers frei beweglich sind, und ist auch dann, wenn dieses der Fall ist, von der Massenverteilung im Körper abhängig. Nur wenn alle Punkte frei beweglich sind und außerdem

der (später zu definierende) Massenmittelpunkt in der Geraden mc gelegen ist, dann ist mc der wirklich eingeschlagene Weg von m . Die durch die nachfolgend abzuleitenden Konstruktionsregeln aufgefundenen Resultierenden der angreifenden Kräfte zeigen also wohl, durch welche Gegenkräfte der Körper im Gleichgewichte zu erhalten ist, sie lassen aber im allgemeinen noch nicht auf die eintretenden Bewegungen des Körpers schließen, da diese noch von anderen Bedingungen, insbesondere der Anordnung der Massen, abhängen.

§ 59. Zusammensetzung zweier in einer Ebene liegender Komponenten, welche an fest verbundenen Punkten angreifen. Es ist sofort einleuchtend, daß außer dem einen Angriffspunkte, auf welchen eine Kraft unmittelbar wirkt, auch alle jene Punkte des festen Körpers, welche in

¹⁾ Die beiden Figuren 157 und 158 lassen überdies erkennen, daß die fortschreitende Bewegung der Magnetnadel in Fig. 157 als Resultierende zweier Drehbewegungen aufgefaßt werden kann. Denkt man sich nämlich dieselbe zunächst wie in Fig. 158 mit der Scheibe rechts herum gedreht und daneben gleichzeitig um ihre Aufhängespitze ebenso schnell links herum gedreht, so entsteht die Bewegung wie in Fig. 157. Ebenso kann die Rotationsbewegung in Fig. 158 aufgefaßt werden als eine fortschreitende nach Fig. 157, verbunden mit einer Drehbewegung der Magnetnadel um ihre Aufhängespitze in demselben Sinne. Der Mond hat eine fortschreitende Bewegung auf seiner Bahn um die Erde, da er sich aber gleichzeitig um seine eigene Achse dreht, so kehrt er der Erde immer dieselbe Hälfte zu, so wie in Fig. 158 der Magnet immer denselben Pol der Achse der Scheibe zukehrt.

der Richtung der Kraft liegen, ebenfalls als Angriffspunkte betrachtet werden können. Wenn z. B. an dem festen Körper *M*, Fig. 160, im Punkte *A* eine Kraft angreift, welche nach *x* oder nach *y* gerichtet ist, so ist die Wirkung dieselbe, wie wenn dieselbe Kraft in irgend einem Punkte der Richtung *xy*, z. B. in *B*, *C*, *D* oder *E* angreifen würde. Dabei wird nur vorausgesetzt, daß diese Punkte wirklich starr und unverschiebbar verbunden, also nicht etwa elastischer Bewegungen gegeneinander fähig seien.

Auf diesen Satz von der Verlegung des Angriffspunktes gestützt, können wir sofort daran gehen, einige weitere Sätze abzuleiten über die gemeinschaftliche Wirkung zweier Kräfte, welche an zwei verschiedenen Punkten eines Körpers angebracht werden.

I. Zusammensetzung zweier in einer Ebene wirkender Komponenten, welche, unter einem Winkel gegeneinander gerichtet, zwei verschiedene Punkte eines starren Körpers angreifen.

Auf die Punkte *A* und *B* des starren Körpers *MM'*, Fig. 161, seien in der Richtung und mit der Größe *AX* und *BY* zwei Kräfte wirksam. Die Wirkung dieser Kräfte bleibt unverändert, wenn dieselben statt in *A* und *B* in dem Durchschneidungspunkte *C* angreifen. Ihre Resultierende muß daher, wie bisher, durch das Kräfteparallelogramm gefunden werden, welches wir konstruieren, indem wir $CD = AX$, $CE = BY$ abschneiden, die Parallelen *DF* und *EF*, endlich die Diagonale *CF* ziehen, deren Verlängerung die Richtung der resultierenden Kraft angibt. Ihre Größe ist gleich *CF*, und als ihr Angriffspunkt kann jeder Punkt des Körpers, der in der Richtung von *CF* liegt, angesehen werden. Wir dürfen also diesen Angriffspunkt auch in dem Punkte *G* annehmen, wo die Resultierende die Gerade *AB* schneidet.

Fig. 160.

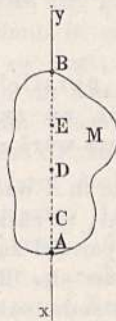
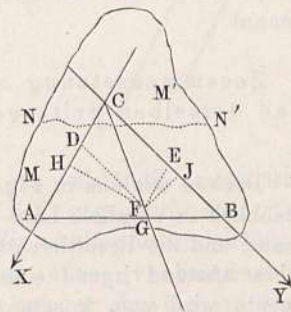


Fig. 161.



An diesem Resultate würde offenbar nichts geändert, wenn man von dem Körper längs der Linie *NN'* ein Stück abtrennen würde, wodurch der Punkt *C* außerhalb des angegriffenen Körpers fallen würde, denn da die starre Verbindung der übrigen Punkte des angegriffenen Körpers dieselbe bleibt, so muß auch die Lage und Größe der Resultierenden dieselbe bleiben.

Ziehen wir nun die Hilfslinien $FH \perp CA$ und $FJ \perp CB$, so sind die Dreiecke *DHF* und *EJF* ähnlich, und es gelten somit die Proportionen:

$$\begin{aligned} FH : FJ &= DF : EF \\ &= CE : CD \\ &= BY : AX \end{aligned}$$

Ebenso wie die senkrechten Abstände *FH* und *FJ* verhalten sich aber offenbar alle senkrechten Abstände irgend eines anderen Punktes der Resultierenden von den Richtungen der Komponenten.

Daraus folgt also der Satz:

Die senkrechten Abstände irgend eines Punktes der Resultierenden von den Richtungen der Komponenten verhalten sich verkehrt wie die Größen dieser Komponenten.

Bezeichnen wir die Komponenten mit p und p' , die zugehörigen senkrechten Abstände mit e und e' , so ist der mathematische Ausdruck obigen Satzes:

$$p : p' = e' : e,$$

woraus folgt:

$$pe = p'e',$$

d. h.:

Das Produkt aus dem senkrechten Abstände irgend eines Punktes der Resultierenden von der Richtung der Komponente mit der Größe der letzteren ist beiderseits gleich groß.

Die beiden Komponenten können, wie begreiflich, ebensowohl zwei momentane als auch zwei konstante Kräfte vorstellen.

Das Produkt einer Kraft mit dem senkrechten Abstände eines Punktes von der Richtung dieser Kraft wird das statische Moment oder das Drehungsmoment dieser Kraft in bezug auf die durch den Punkt gehende Achse, welche auf der Ebene der Kraft und des Punktes senkrecht steht, genannt.

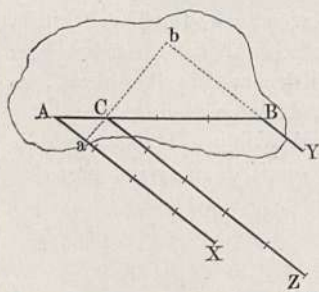
II. Zusammensetzung zweier paralleler Komponenten, welche, nach derselben Seite gerichtet, an zwei Punkten eines starren Körpers wirken.

Denken wir uns in Fig. 161 die in A und B angreifenden Komponenten allmählich in parallele Lage gebracht, so rückt der Punkt C ins Unendliche hinaus, und die Resultierende wird parallel zu den Komponenten. Der senkrechte Abstand irgend eines Punktes der Resultierenden von einer Komponente wird zum konstanten Abstände zwischen diesen beiden Geraden. Endlich wird die Größe der Resultierenden, d. i. die Diagonale des Parallelogramms, für diesen Fall gleich der Summe der Komponenten.

Wir fassen dies in den Satz zusammen:

Die Resultierende zweier paralleler, an zwei starr verbundenen Punkten nach derselben Seite wirkender Kräfte ist der

Fig. 162.



Größe nach gleich der Summe der Komponenten, ihrer Richtung nach den letzteren parallel und so gelegen, daß die Produkte ihrer Abstände von den Komponenten mit der Größe der letzteren beiderseits gleich sind.

Um also beispielsweise die Resultierende der beiden parallelen Komponenten AX und BY zu finden, welche die Punkte A und B (Fig. 162) angreifen, teilen wir den Abstand AB im Punkte C so, daß $AC \cdot AX = BC \cdot BY$, und ziehen $CZ = AX + BY$

parallel zu letzteren. Zieht man Ca und Cb senkrecht auf die Richtungen der Komponenten, so geben auch diese senkrechten Abstände, multi-

pliziert mit ihren zugehörigen Komponenten, gleiche Produkte auf beiden Seiten.

Da, wie ersichtlich, die Lage des Punktes C nur vom Größenverhältnis und nicht von der Richtung der parallelen Komponenten abhängt, so bleibt C der Angriffspunkt der Resultierenden für alle beliebigen (unter sich parallelen) Richtungen der gegebenen Komponenten.

Man nennt den Punkt C den Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

III. Zusammensetzung zweier paralleler Komponenten, welche an zwei starr verbundenen Punkten nach entgegengesetzter Richtung wirken.

Es seien A und B , Fig. 163, die fest verbundenen Punkte, an denen Kräfte angebracht werden, welche der Größe und Richtung nach durch die Stücke AX und BY vorgestellt werden. Es sei beispielsweise BY viermal so groß als AX . Wir zerlegen zunächst die Komponente BY , welche die größere ist, in zwei andere, deren eine, gleich groß mit AX , aber entgegengesetzt gerichtet, in A angreift, die andere CZ , gleich der Differenz $BY - AX$, muß dann in einem Punkte C angreifen, welcher so liegt, daß $AB : CB = CZ : AX$ ist, also in unserem Beispiele muß $BC = \frac{1}{3} AB$ sein. Nach Anbringung der Komponenten AX' und CZ können wir uns die Komponente BY entfernt denken, da sie vollständig ersetzt ist. Nun heben sich aber die Komponenten AX und AX' gegenseitig auf. Es bleibt also schließlich die Resultierende CZ übrig. Wir erhalten daher den Satz:

Die Resultierende zweier paralleler, an starr verbundenen Punkten nach entgegengesetzter Seite wirkender Kräfte ist der Größe nach gleich der Differenz der Komponenten, der Richtung nach parallel und gleich gerichtet mit der größeren Komponente und so gelegen, daß ihre Abstände von den Komponenten multipliziert mit deren Größe gleiche Produkte geben.

§ 60. Zusammensetzung mehrerer paralleler Kräfte. Sind allgemein mehrere parallele Kräfte gegeben, so setzt man zuerst zwei derselben zu einer Resultierenden zusammen, diese dann mit einer dritten Kraft wieder zu einer Resultierenden usf., bis man zuletzt die Gesamtresultierende bzw. Mittelkraft und deren Angriffspunkt erhält.

Es seien z. B. in Fig. 164 zunächst die beiden parallelen Kräfte p_1 und p_2 gegeben, welche in den Entfernungen a_1 und a_2 von A auf der Geraden AB angreifen. Dann hat die Mittelkraft $p_1 + p_2$ ihren Angriffspunkt im Abstände e_1 von A , und es gilt hierfür die Gleichung:

Fig. 163.

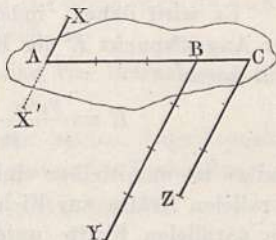
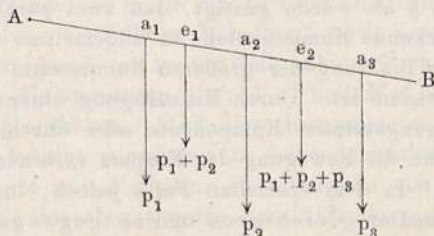


Fig. 164.



$$p_1(e_1 - a_1) = p_2(a_2 - e_1),$$

woraus folgt:

$$e_1 = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_1 + p_2}.$$

Kommt nun eine dritte Kraft p_3 dazu, deren Angriffspunkt in a_3 ist oder doch dorthin verlegt werden kann, und bezeichnen wir wieder die Entfernung $A a_3$ ebenfalls mit a_3 , so gibt die Kombination dieser dritten Kraft p_3 mit der Resultierenden $p + p_2$ eine neue Resultierende $p_1 + p_2 + p_3$, deren Angriffspunkt e_2 von A aus eine Entfernung e_2 hat, welche durch die Gleichung bestimmt wird:

$$p_3(a_3 - e_2) = (p_1 + p_2)(e_2 - e_1) = (p_1 + p_2) \left(e_2 - \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_1 + p_2} \right),$$

woraus folgt:

$$e_2 = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3}{p_1 + p_2 + p_3}.$$

Es wird daher, indem man in dieser Weise fortschließt, allgemein der Angriffspunkt E der Resultierenden P von n parallelen Kräften gegeben sein durch

$$E = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum p a}{P} \dots \dots (1)$$

und es ist unmittelbar einleuchtend, daß E unabhängig von der Stellung der parallelen Kräfte zur Richtung AB ist, oder mit anderen Worten, daß wir die parallelen Kräfte unter Wahrung ihres Parallelismus beliebig gedreht denken können, ohne daß die Lage des Mittelpunktes derselben irgendwie verändert wird.

Sind die parallelen Kräfte im Körper nicht in einer Ebene gelegen, sondern auf beliebige Ebenen verteilt, so beziehen wir die Angriffspunkte auf die rechtwinkeligen Koordinatenebenen und denken uns die Kräfte nacheinander unter Drehung um ihre Angriffspunkte jeder dieser Ebenen parallel gemacht. Heißen wir dann X, Y, Z die Koordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte bzw. des Angriffspunktes der Resultierenden P und $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ usw. die Koordinaten der Angriffspunkte der einzelnen Kräfte $p_1, p_2 \dots$, so ergibt sich

$$X = \frac{\sum p x}{P}, \quad Y = \frac{\sum p y}{P}, \quad Z = \frac{\sum p z}{P} \dots \dots (2)$$

§ 61. Kräftepaare; deren Eigenschaften und Zusammensetzung.

Im § 59 wurde gezeigt, daß zwei parallele, nach entgegengesetztem Sinne wirkende Komponenten im allgemeinen eine Resultierende haben, welche in der Richtung der größeren Komponente mit der Differenz der Komponenten wirksam ist. Durch Hinzufügung einer dieser Resultierenden gleichen entgegengesetzten Komponente oder durch Feststellung ihres Angriffspunktes kann die Bewegung des Körpers verhindert werden.

In dem speziellen Falle jedoch, in welchem die ursprünglichen Komponenten gleich groß und entgegengesetzt sind, erhält man zwar für die Resultierende den Wert Null, aber trotzdem kann der Körper nicht in Ruhe bleiben, sondern er wird eine drehende Bewegung annehmen, Fig. 165. Es gibt dann keine einzelne Gegenresultierende, mit der man die Bewegung

aufheben könnte, auch keinen einzelnen Punkt, durch dessen Feststellung man die Bewegung verhindern könnte.

Zwei solche gleiche und entgegengesetzte Komponenten werden ein Komponentenpaar (Kräftepaar) oder auch kurz ein Drehpaar (Drehwilling) genannt. Ihr senkrechter Abstand ab , Fig. 165, heißt der Arm des Drehpaares. Das Produkt aus dem Arm und der Größe einer der Komponenten heißt das Moment des Drehpaares. Ist also eine der beiden Komponenten der Größe nach $= P$, ihr Abstand $= d$, so ist $P \cdot d$ das Moment des Drehpaares. Mit der Bezeichnung Drehpaar ($P \cdot d$) soll ausgedrückt sein ein Drehpaar, bestehend aus zwei Komponenten von der Stärke P im Abstände d .

Ein solches Drehpaar hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß es ohne Änderung der Wirkung in seiner Ebene gedreht, parallel mit sich selbst verschoben, ja sogar in eine mit der ursprünglichen Ebene fest verbundene parallele Ebene übertragen werden kann, daß ferner seine Komponenten oder sein Arm geändert werden dürfen, wenn nur ihr Produkt, also ihr Moment und außerdem die Drehungsrichtung unverändert bleiben.

Wir wollen diese Behauptung durch eine Reihe von Betrachtungen ableiten.

1. Aus Fig. 165 ist ersichtlich, daß man den beiden Angriffspunkten A und B die Punkte a und b , welche durch eine senkrechte Verbindungslinie

Fig. 165.

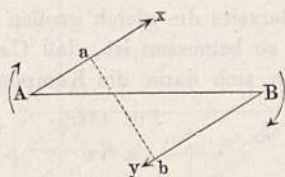
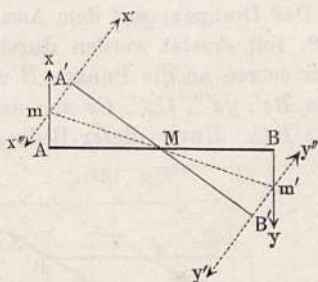


Fig. 166.



erhalten werden, substituieren und dadurch das schiefwinkelige Drehpaar in ein rechtwinkeliges von gleichem Moment verwandeln kann.

2. In Fig. 166 sei AB der Arm des rechtwinkligen Drehpaares mit den Komponenten Ax und By . Ziehen wir durch die Mitte M eine beliebig geneigte Gerade $A'B' = AB$, welche ebenfalls in M halbiert wird, so wird offenbar die Wirkung nicht geändert, wenn wir in den Endpunkten A' und B' die gleichen und entgegengesetzten Komponenten $A'x'$, $A'x''$ und $B'y'$, $B'y''$ anbringen, welche sich gegenseitig aufheben. Sind diese Komponenten der Größe nach gleich Ax und By , so können wir aber auch folgendermaßen die Gesamtwirkung bestimmen: Ax gibt mit $A'x''$ eine Resultierende von der Richtung Mm , ebenso By mit $B'y''$ eine ebenso große Resultierende von der Richtung Mm' . Diese beiden Resultierenden heben sich auf, es bleiben also nur noch die Komponenten $A'x'$ und $B'y'$, welche das neue Drehpaar bilden, welches gegen das frühere um den Winkel AMA' gedreht erscheint.

Es ist also gestattet, das Drehpaar um seine Mitte zu drehen.

3. Um die perspektivische Darstellung zu erleichtern, wollen wir in Fig. 167 zwei miteinander parallele Ebenen als die oberen Flächen zweier nebeneinander liegender Prismen darstellen. Auf der tiefer liegenden Ebene befinde sich das rechtwinkelige Drehpaar Ax und By an dem Arme AB . Es soll gezeigt werden, daß sich dasselbe ohne Änderung der Wirkung an die Kante der oberen Ebene übertragen lasse.

Wir denken uns an dieser Kante die Gerade $A'B'$ gleich und parallel AB gezogen, an den Endpunkten A' und B' je zwei darauf senkrechte Komponenten gleich und parallel mit Ax und By angelegt. Es ist klar, daß diese vier Komponenten, $A'x$, $A'x''$, $B'y'$, $B'y''$, sich gegenseitig aufheben, also ohne Wirkung sein müssen.

Ziehen wir nun die Hilfslinien AB' und BA' ; dieselben müssen sich in einem Punkte M schneiden und gegenseitig halbieren, denn $ABB'A'$ sind die Ecken eines Parallelogramms.

Kombinieren wir nun die Komponenten Ax mit $B'y''$, dann By mit $A'x''$, so geben diese Kombinationen je eine an M wirkende horizontale Resultierende von doppelter, unter sich gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung. Es fallen somit die Wirkungen von Ax , $B'y''$, $B'y'$, $A'x''$ als sich gegenseitig aufhebend fort, und bleiben nur noch die Komponenten $A'x'$ und $B'y'$ übrig, welche das übertragene Drehpaar bilden. Es ist somit erwiesen, daß eine solche Übertragung in eine parallele Ebene an der Wirkung eines Drehpaares nichts ändern kann.

4. Das Drehpaar mit dem Arm AB und den Komponenten Ax und By , Fig. 168, soll ersetzt werden durch ein gleich wirkendes, dessen Arm BC ist. Wir setzen an die Punkte B und C beiderseits die gleich großen Komponenten Bz' , yz''' , Cz'' , Cz an, deren Größe so bemessen ist, daß $Cz : By = AB : BC$. Unter dieser Bedingung halten sich dann die Komponenten

Fig. 167.

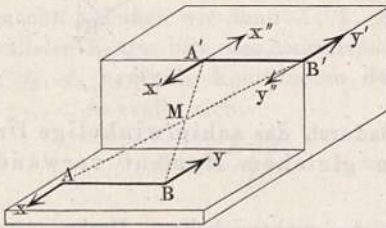
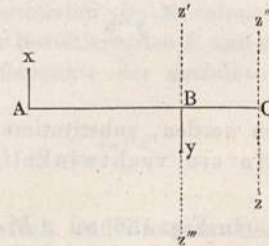


Fig. 168.



Ax und Cz'' zusammen einerseits und Bz''' andererseits das Gleichgewicht, so daß sie also ohne Änderung der Wirkungen fortgelassen werden können. Es bleiben mithin die Komponenten Bz' und Cz , welche mit dem Arm BC das neue Drehpaar bilden. Da $Cz \cdot BC = AB \cdot By$, so hat dieses Drehpaar dasselbe Moment wie das frühere.

Es können also Drehpaare durch andere von gleichem Moment und gleicher Drehrichtung, welche in derselben oder in einer parallelen Ebene liegen, füreinander gesetzt werden. Drehpaare, deren Arm $= 1$ genommen ist, heißen reduzierte Drehpaare. Um ein Drehpaar vom Arm d und den Komponenten P in ein reduziertes von gleichem

Moment zu verwandeln, bringt man am Arm $= 1$ Komponenten von der Größe $= Pd$ an.

Drehpaare, welche einander ersetzen können, heißen äquivalent. Äquivalente Drehpaare haben daher stets drei Stücke miteinander gemein. Erstens gleiches Moment, zweitens gleiche Drehrichtung, drittens gleiche Lage der Ebene, d. h. ihre Ebenen müssen parallel sein.

Eine sehr einfache und zweckmäßige Methode, verschiedene Drehpaare darzustellen, ist folgende: Man bezeichnet die Lage der Ebene des Drehpaares durch eine auf dieser Ebene errichtete Senkrechte. Die Richtung der Drehung bezeichnet man dadurch, daß man diese Senkrechte von der Ebene an nach jener Seite zieht, von welcher gesehen die Drehung rechtläufig (wie ein Uhrzeiger) gesehen wird. Endlich bezeichnet man die Größe des Moments durch die Länge der Senkrechten. Diese letztere wird dann die Achse des Drehpaares genannt, womit aber noch durchaus nicht gesagt sein soll, daß um diese Achse die Drehung des ganzen Körpers erfolgen müsse.

Der Vorteil dieser Darstellung eines Drehpaares durch seine Achse besteht darin, daß man, um zwei oder mehrere Drehpaare zusammensetzen, einfach ihre Achsen zusammensetzen kann, wie wenn es Kraft- oder Geschwindigkeitskomponenten wären. Die resultierende Achse ist die Achse des resultierenden Drehpaares.

Zusammensetzung parallelachsiger Drehpaare. Es seien in Fig. 169 in perspektivischer Zeichnung (wobei die Dimensionen von vorn nach

Fig. 169.

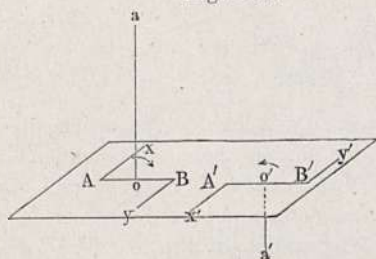
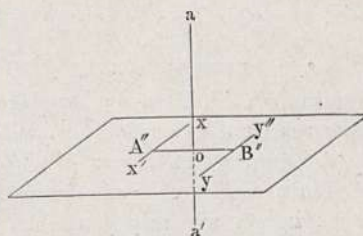


Fig. 170.

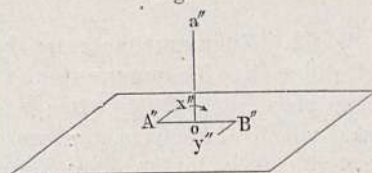


rückwärts etwa auf die Hälfte verkürzt erscheinen) zwei Drehpaare dargestellt, welche man zuvor auf dieselbe Ebene übertragen, auf den Arm 1 reduziert und in parallele Lage der Arme gedreht hat.

$oa = Ax = By$ ist die Achse des einen, $o'a' = A'x' = B'y'$ ist die Achse des anderen. Die letztere ist nach abwärts gerichtet, weil, von unten gesehen, die Drehungsrichtung rechtläufig erscheint.

Durch Verschiebung kann man nun die beiden Drehpaare so zusammensetzen, daß die Achsen in eine Gerade fallen, Fig. 170. Ebenso fallen die Komponenten an den Enden mit gleichen Buchstaben in je eine Gerade. Die Resultierenden dieser Komponenten sind daher gleich ihrer algebraischen Summe (hier ist infolge entgegengesetzten Zeichens zu subtrahieren). Folg-

Fig. 171.



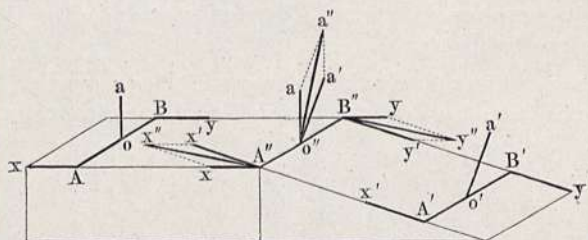
lich muß auch die Achse des resultierenden Drehpaares, Fig. 171, gleich sein der algebraischen Summe der Achsen der zusammensetzenden Paare. (Die nach abwärts gerichtete Achse ist negativ in Rechnung zu bringen.)

Ebenso können eine beliebige Anzahl von parallelachsigen Drehpaaren zusammengesetzt werden, indem man die sämtlichen Achsen mit dem Anfangspunkte zusammenlegt und algebraisch summiert.

Zusammensetzung von Drehpaaren, deren Achsen gegeneinander geneigt sind.

Es seien in Fig. 172 gegeben das in horizontaler Ebene gelegene Drehpaar AB mit der vertikalen Achse oa und das auf der schiefen Ebene gelegene Drehpaar $A'B'$ mit der Achse $o'a'$. Beide Drehpaare seien zuvor auf den Arm 1 reduziert und so gedreht, daß ihre Arme mit der Durchschnittskante der beiden Ebenen parallel liegen. Verschiebt man dann beide Arme in die Kante, so erhalten die Komponenten die Lagen $A''x$, $A''x'$, $B''y$, $B''y'$, deren Resultierende $A''x''$ und $B''y''$ durch Konstruktion des Kräfteparallelogramms erhalten werden. Die Ebene des resultierenden Drehpaares ist nun die durch

Fig. 172.



die Punkte x'' , A'' , B'' und y'' zu legende Ebene. Die Achse des resultierenden Drehpaares ist die Gerade $o''a''$, welche auf der obigen Ebene senkrecht steht und die Länge $= A''x'' = B''y''$ besitzt. Man ersieht aber sofort, daß wir diese resultierende Achse aus den früheren Achsen $o''a$ und $o''a'$ direkt erhalten können, indem wir mit denselben das Kräfteparallelogramm $o''aa'a'$ konstruieren und dessen Diagonale ziehen.

Daraus folgt also, daß man mit den Achsen der Drehpaare ganz ebenso operieren kann wie mit Kraftkomponenten, indem man sie nach Analogie des Kräfteparallelogramms zusammensetzt.

§ 62. Zusammensetzung beliebiger, einen starren Körper angreifender Kraftkomponenten. Mit Hilfe der in den vorausgehenden Paragraphen abgeleiteten Sätze ist man nun imstande, für eine beliebige Anzahl von Kraftkomponenten, welche in beliebiger Größe und Richtung auf fest verbundene Punkte eines Körpers wirken, die Resultierende abzuleiten.

Man verfährt dabei in folgender Weise: Man wählt einen beliebigen Punkt des Körpers O und denkt sich an demselben eine Anzahl von Komponenten angebracht, welche sowohl an Anzahl als auch an Größe und Richtung mit jenen Komponenten übereinstimmen, welche ursprünglich gegeben sind. Außer diesen denkt man dann noch eine gleiche Anzahl von Komponenten gleicher Größe, aber von entgegengesetztem Richtungssinne angebracht.

Es ist klar, daß durch diese beiden Systeme gleichgerichteter und entgegengerichteter Komponenten nichts geändert wird, da sie unter sich im Gleichgewichte stehen. Nun verbindet man in bekannter Weise die sämtlichen an O angebrachten, mit den ursprünglichen Komponenten gleich gerichteten unter sich zu einer Resultierenden Oz . Es bleiben dann noch eine Anzahl von Drehpaaren übrig, die man auf den Arm 1 reduziert und nach und nach zu je zweien kombiniert, wie im vorausgehenden Paragraphen gezeigt wurde. Zuletzt bleiben dann die Resultierende Oz und ein Drehpaar übrig, welche beide auch den Wert Null annehmen können.

Es folgt daraus, daß eine beliebige Anzahl beliebig gerichteter Kräfte im allgemeinen eine fortschreitende und eine drehende Bewegung hervorbringen und daß jede Lagenänderung eines Körpers von einer fortschreitenden

Fig. 173.

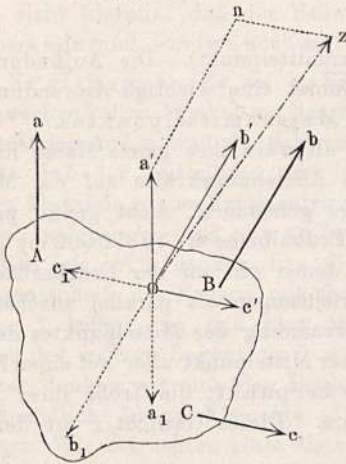
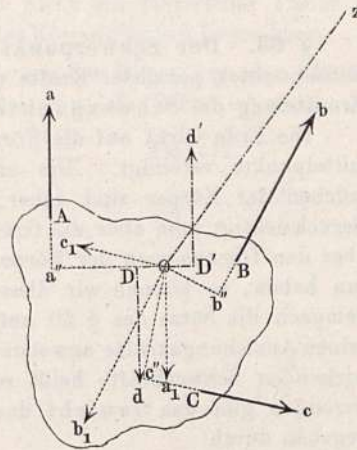


Fig. 174.



und einer drehenden Bewegung zusammengesetzt werden kann, wie bereits in § 58 behauptet wurde.

Wir wollen, um die mitgeteilte Methode deutlicher auseinanderzusetzen, ein Beispiel nehmen, bei welchem, um die Zeichnung nicht zu sehr zu komplizieren, alle Komponenten in einer Ebene sich befinden.

An den Punkten A , B und C des Körpers, Fig. 173, seien die Kräfte Aa , Bb und Cc nach der in der Zeichnung angegebenen Größe und Richtung angebracht. Wir wählen willkürlich den Punkt O und bringen an demselben die Kräfte Oa' , Ob' und Oc' parallel und gleich den früheren Kräften an, außerdem noch die (gestrichelt ausgezogenen) entgegengesetzten Kräfte Oa_1 , Ob_1 und Oc_1 . Jetzt setzen wir Oa' mit Ob' zusammen, indem wir $a'n$ parallel zu Ob' und gleich lang wie dieses ziehen. Die (nicht ausgezogene) Resultierende On setzen wir mit Oc' zusammen, indem wir nz gleich, und parallel Oc' konstruieren. Mithin ist Oz die Resultierende der drei Kräfte Oa' , Ob' und Oc' . Wir denken uns nun diese letzteren weggelöscht, es bleiben uns dann (Fig. 174) noch die Drehpaare Aa mit Oa_1 , Bb mit Ob_1 , Cc mit Oc_1 übrig. Die Figur zeigt, wie diese schiefen Drehpaare in rechtwinkelige verwandelt werden können. Reduziert man hierauf noch alle drei Paare auf den Arm $DD' = 1$ und summiert sie mit Rücksicht auf das Zeichen, so

bleibt endlich das nach links drehende Kräftepaar Dd und $D'd'$ am Arm DD' übrig, welches mitsamt der Resultierenden Oz alle ursprünglichen Kräfte zu ersetzen vermag. Damit ist aber noch nicht behauptet, daß der angegriffene Körper sich wirklich um den Punkt O drehen werde; denn dieser Punkt ist ja ganz willkürlich gewählt. Unsere Ableitung gibt nur resultierende Kräfte, die den ursprünglich vorhandenen an Wirkung gleich sind; welche Bewegung durch sie entsteht, hängt noch von anderen Umständen (von der Anordnung der Masse des Körpers oder von der Lage seiner Drehachse) ab (s. § 58, Schluß).

Soll der Körper in vollständiger Ruhe bleiben, d. h. sollen die sämtlichen Komponenten miteinander im Gleichgewichte stehen, so muß sowohl die Resultierende der parallel zu sich in einen beliebigen gemeinsamen Angriffspunkt versetzten Kräfte $= 0$ sein, als auch das Moment des resultierenden Drehpaares $= 0$ sich ergeben.

§ 63. Der Schwerpunkt (Massenmittelpunkt). Die Auffindung des Mittelpunktes paralleler Kräfte (§ 60) findet eine wichtige Anwendung zur Ermittlung des Schwerpunktes oder Massenmittelpunktes.

Die Erde wirkt auf die Körper so, als wäre ihre ganze Masse im Erdmittelpunkte vereinigt. Die einzelnen Anziehungskräfte auf die Massenteilchen der Körper sind daher, strenge genommen, nicht genau parallel. Berücksichtigt man aber die Größe des Erdhalbmessers (6370000 m) gegenüber den Dimensionen der Körper, mit denen wir auf der Erdoberfläche zu tun haben, so können wir diese Krafrichtungen als parallel ansehen und demnach die Sätze des § 60 auf die Berechnung des Mittelpunktes der einzelnen Anziehungskräfte anwenden. Dieser Mittelpunkt aller auf einen Körper wirkenden Schwerkkräfte heißt sein Schwerpunkt, die Größe ihrer Resultierenden gibt das Gewicht des Körpers. Dieses Gewicht P ist demnach gegeben durch

$$P = A \frac{Mm}{R^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

worin M die Masse der Erde, m die des Körpers, R den Erdhalbmesser und A die sogenannte Gravitationskonstante bedeuten.

Die Lage des Schwerpunktes, in welchem dieses Gewicht P angreift, können wir nach § 60 bestimmen, wobei wir daran erinnern, daß dem dort Gesagten zufolge diese Lage ganz unabhängig ist von der Stellung des Körpers zur Vertikalen; d. h. der Schwerpunkt des Körpers behält seine Lage, wenn wir den Körper beliebig drehen oder wenden. Gemäß § 60, Gleichung (2) sind die rechtwinkeligen Koordinaten X , Y , Z des Mittelpunktes paralleler Kräfte je durch die Summe der Produkte aller Kräfte $p_1, p_2, p_3 \dots$ in die bezüglichen Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ usw. ihrer Angriffspunkte, dividiert durch die Größe der Resultierenden P , gegeben. Ist die Acceleration der Schwere $= g$, haben die einzelnen Massenteilchen des Körpers die Massen $m_1, m_2 \dots$, so sind die Einzelkräfte $p_1 = m_1 g, p_2 = m_2 g \dots$, die Resultierende $P = Mg$, wenn $M = m_1 + m_2 + \dots$ die Masse des ganzen Körpers bezeichnet. Somit sind die Koordinaten des Schwerpunktes gegeben durch

$$X = \frac{\Sigma m x}{M}, \quad Y = \frac{\Sigma m y}{M}, \quad Z = \frac{\Sigma m z}{M} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

wonach die Lage des Schwerpunktes nur von der Verteilung der Massen $m_1, m_2 \dots$ in ihm abhängt, weshalb er ganz richtig auch Massenmittelpunkt genannt wird.

Die Lage des Schwerpunktes läßt sich entweder berechnen oder empirisch ausmitteln. Der erstere Weg ist bei regelmäßig geformten Körpern mit homogener oder doch regelmäßiger Massenordnung ausführbar und erfordert im allgemeinen die Anwendung der Integralrechnung. In einfacheren Fällen führt auch die elementare Rechnung zum Ziele. Nachstehende Beispiele zeigen dies für einige häufig vorkommende Fälle.

Gerade Linie, die man sich gleichmäßig mit Masse bedeckt denkt, bzw. eine dünne, überall gleich dicke homogene Stange. Ihr Schwerpunkt ist offenbar in der Mitte ihrer Länge gelegen (1)

Kreislinie (Ring). Ihr Schwerpunkt fällt in den Kreismittelpunkt. Man sieht hieraus, daß der Schwerpunkt nicht ein materieller Punkt des Körpers sein muß, sondern auch außerhalb der Körpergrenzen liegen kann. . . (2)

Kreisbogen. Es sei in Fig. 175 *amb* der Bogen von der Länge b , entsprechend dem Winkel α , der Radius sei $= r$, die Sehne $ab = s$. Aus

Symmetriegründen muß der Schwerpunkt auf der Mittellinie *om* in einem Abstände z vom Kreiszentrum liegen, welcher Abstand nun zu berechnen ist. Wir denken uns die Längeneinheit des Bogens mit der Masse 1 belegt, so daß also die Masse des ganzen Bogens $= b$ ist. Ferner denken wir uns den Bogen in unendlich kleine Elemente Δb zerlegt. Wir betrachten eines dieser Elemente, welches um den Winkel φ von *m* absteht. Denken wir uns nun den Bogen um eine durch den Kreismittelpunkt mit *ab* parallele Achse *xx'* gedreht, so muß, da das Drehungsmoment des Schwerpunktes

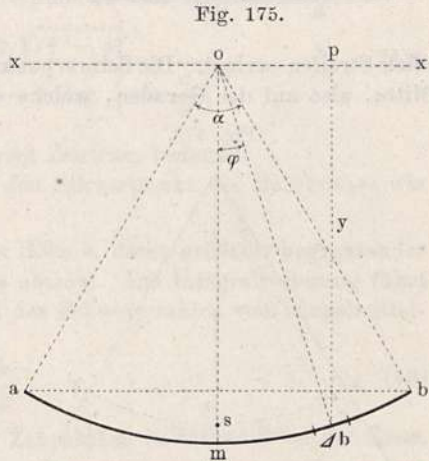


Fig. 175.

gleich dem des Bogens sein muß, die Gleichung gelten:

$$bz = \Sigma \Delta b \cdot y = \Sigma \Delta b r \cos \varphi,$$

wobei y der Abstand des Elementes Δb von *xx'* ist.

Da aber $\Delta b \cos \varphi$ die Projektion des Elementes Δb auf die *xx'*-Achse ist, so ist auch

$$bz = r \cdot \Sigma \Delta x = r \cdot s,$$

woraus für z folgt:

$$z = \frac{r \cdot s}{b} = \frac{\text{Radius} \cdot \text{Sehne}}{\text{Bogen}} \dots \dots \dots (3)$$

Will man z durch den Winkel α und den Radius r ausdrücken, so erhält man, da

$$b = \frac{\alpha}{360} 2 r \pi \quad \text{und} \quad s = 2 r \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{ist:}$$

$$z = \frac{r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{360} \cdot \pi} \dots \dots \dots (4)$$

Für den Halbkreisbogen ist $s = 2r$, $b = r\pi$, folglich

$$z_1 = \frac{2r}{\pi} \dots \dots \dots (5)$$

Dreieck (homogene, überall gleich dicke, dreieckige Platte), Fig. 176. Wir denken uns das Dreieck in lauter unendlich schmale, zur Seite ab par-

Fig. 176.

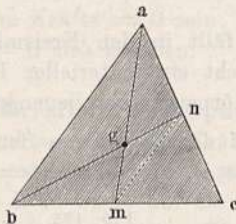
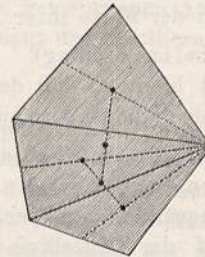
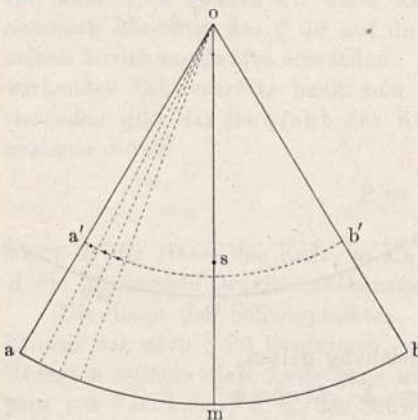


Fig. 177.



alle Streifen zerlegt. Die Schwerpunkte aller dieser Streifen liegen in deren Mitte, also auf der Geraden, welche die Ecke c mit der Mitte von ab verbindet. Es muß also auch der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks auf dieser Geraden liegen. Da dasselbe auch von den anderen Verbindungsgeraden der übrigen Ecken mit den gegenüberstehenden Seitenmitten gelten muß, so folgt, daß der Schwerpunkt des Dreiecks in deren Durchschnittspunkt, welcher um zwei Drittel der Länge dieser Geraden von der Ecke absteht, liegen muß (6)

Fig. 178.



Polygon, Fig. 177. Man zerlegt dasselbe in Dreiecke, sucht für jedes deren Schwerpunkt nach der eben gegebenen Regel und aus diesen

dann den des ganzen Polygons (7)

Kreisfläche. Dieselbe hat offenbar den Schwerpunkt in ihrem Zentrum (8)

Kreisausschnitt (Fig. 178). Der Schwerpunkt liegt jedenfalls auf der Halbierungslinie des Ausschnittes in einem Abstände z . Man denkt sich den Ausschnitt in unendlich viele kleine Ausschnitte zerlegt, die man dann als Dreiecke ansehen kann. Da jedes derselben nach (6) seinen Schwerpunkt im Abstände $\frac{2}{3}r$ vom Zentrum hat, so ist der gesuchte Schwerpunkt jener eines Kreisbogens $a'b'$ mit dem Radius $\frac{2}{3}r$. Derselbe hat aber nach (3) den Abstand

$$os = z = \frac{2}{3} \frac{rs}{b} \dots \dots \dots (9)$$

wo wieder s die Sehne und b den Bogen bedeuten.

Führt man den Winkel α des Ausschnittes ein, so erhält man

$$z = \frac{2}{3} \frac{r \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{360} \pi} = \frac{240 \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha \cdot \pi} r \dots \dots \dots (10)$$

Halbkreis. Setzt man in (9) $s = 2r$, $b = r\pi$, so kommt

$$z = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \dots \dots \dots (11)$$

Der Schwerpunkt liegt also in der Symmetrielinie um $\frac{4}{3\pi} r$ vom Zentrum entfernt.

Kreisabschnitt. Die Integralrechnung führt zu dem komplizierten Ausdrücke für den Abstand z des Schwerpunktes vom Kreismittelpunkte:

$$z = \frac{\frac{2}{3} (r^2 - a^2) \sqrt{r^2 - a^2}}{\frac{r^2 \pi}{2} - a \sqrt{r^2 - a^2} - r \text{Arc.} \left(\sin \frac{a}{r} \right)} \dots \dots \dots (12)$$

worin a den Abstand der Schnittlinie vom Zentrum bedeutet.

Setzt man $a = 0$, so erhält man den Schwerpunkt des Halbkreises wie oben.

Fläche einer Kugelzone von der Höhe h , deren größerer begrenzender Kreis um a von dem Kugelmittelpunkte absteht. Die Integralrechnung führt zur einfachen Formel, daß der Abstand des Schwerpunktes vom Kugelmittelpunkte

$$z = a + \frac{h}{2} \dots \dots \dots (13)$$

ist, d. h. der Schwerpunkt liegt in der Zonenachse in halber Höhe der Zone.

Halbkugelzone. Setzt man in (13) $a = 0$, $h = r$, so kommt

$$z = \frac{r}{2} \dots \dots \dots (14)$$

Rechtwinkeliges Prisma. Der Schwerpunkt liegt in der Mitte der Achse $\dots \dots \dots (15)$

Gerader Zylinder (auch Hohlzylinder). Der Schwerpunkt liegt in der Mitte der Achse $\dots \dots \dots (16)$

Gerade Pyramide von der Höhe h (Fig. 179). Der Schwerpunkt liegt in der Achse in der Höhe

$$z = \frac{3}{4} h \dots \dots \dots (17)$$

Gerader Kegel (Fig. 180) wie (17) $\dots \dots \dots (18)$

Kugel und Kugelschale. Der Schwerpunkt fällt selbstverständlich ins Zentrum $\dots \dots \dots (19)$

Kugelabschnitt. Der Schnitt im Abstände a vom Zentrum geführt. Die Integralrechnung ergibt für die Entfernung des Schwerpunktes vom Kugelmittelpunkte

$$z = \frac{1}{2} \frac{r^2(r^2 - h^2) - \frac{1}{2}(r^4 - h^4)}{r^2(r - h) - \frac{1}{3}(r^3 - h^3)} \dots \dots \dots (20)$$

Halbkugel. Setzt man in (20) $h = 0$, so kommt

$$z = \frac{3}{8}r \dots \dots \dots (21)$$

Der Schwerpunkt liegt also um $\frac{3}{8}$ des Radius von dem Kugelmittelpunkte ab.

Die empirische Bestimmung des Schwerpunktes kann unter Umständen auf Grund des Satzes erfolgen, daß der Schwerpunkt eines aufgehängten Körpers immer senkrecht unter dem Aufhängepunkte liegen muß, sobald das Gleichgewicht eingetreten ist.

Man hänge den Körper an einem Punkte a auf, Fig. 181a, so wird die Verlängerung des den Körper tragenden Fadens in einem Punkte c aus dem Körper austreten. Auf der Linie ac muß notwendig der Schwerpunkt liegen.

Fig. 179.

Fig. 181a.

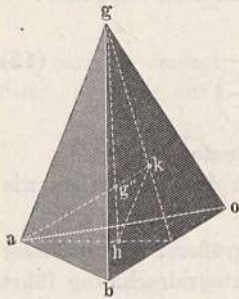


Fig. 180.

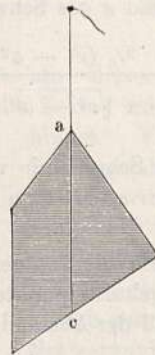
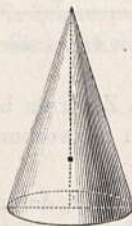
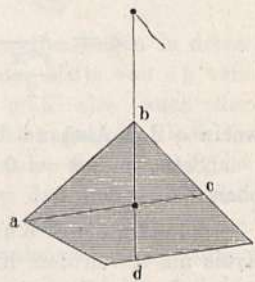


Fig. 181b.



Hängt man den Körper in einem zweiten Punkte b , Fig. 181b, auf, so muß der Schwerpunkt abermals auf der Verlängerung des Fadens, also auf der Linie bd liegen; der Schwerpunkt liegt also auf dem Durchschnittspunkte der Linien bd und ac . Der Schwerpunkt von homogenen ebenen Scheiben ist nach dieser Methode leicht zu bestimmen; bei anderen Körpern ist es jedoch mit Schwierigkeiten verbunden, die Verlängerung des vertikalen Fadens durch das Innere des Körpers genau zu verfolgen.

§ 64. Vom Gleichgewicht aufgehängter Körper. Die einzige Gleichgewichtsbedingung fester, der Schwerkraft allein ausgesetzter Körper ist die, daß ihr Schwerpunkt unterstützt sei. Diese Bedingung kann aber auf verschiedene Weise erfüllt sein, je nachdem die Körper in festen Punkten aufgehängt sind oder auf Unterlagen ruhen.

Betrachten wir zunächst einen Körper, der an einem festen Punkte oder einer horizontalen Achse gleichsam aufgehängt ist, um welche er sich frei drehen kann, so ist er nur dann im Gleichgewicht, wenn sein Schwerpunkt s mit jenem festen Drehpunkte c oder der Drehachse in einer Vertikallinie liegt. Was die gegenseitige Lage dieser Punkte betrifft, so sind folgende drei Fälle möglich:

1. Der feste Punkt c (die feste Drehungsachse) geht durch den Schwerpunkt des Körpers selbst hindurch, wie dies z. B. Fig. 182 darstellt. In diesem Falle liegen s und c , weil identisch, jedenfalls in einer Vertikalen, welche Lage man übrigens auch dem Körper gibt; es findet also Gleichgewicht statt, wie er auch gestellt sein mag, für die Stellung AB also ebensogut wie für die Stellung CD .

Es ist dies der Fall des indifferenten Gleichgewichtes.

2. Der Schwerpunkt s A liegt vertikal unter dem Drehpunkte (der Drehachse) c , Fig. 183. Dreht man den Körper aus dieser Lage heraus, so daß etwa der Schwerpunkt nach s' kommt, so führt die Schwerkraft den Körper wieder in die Gleichgewichtslage zurück, sobald die störende Kraft zu wirken aufhört. Ein solches Gleichgewicht wird ein beständiges oder stabiles genannt. Liegt endlich

3. der Schwerpunkt s des Körpers vertikal über dem Drehpunkte (der Drehachse) wie Fig. 184, so befindet sich der Körper im Zustande des labilen

Fig. 182.

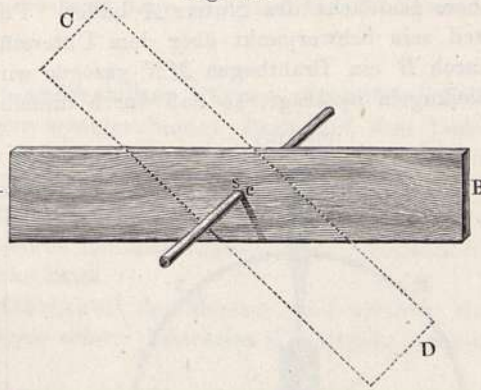


Fig. 183.

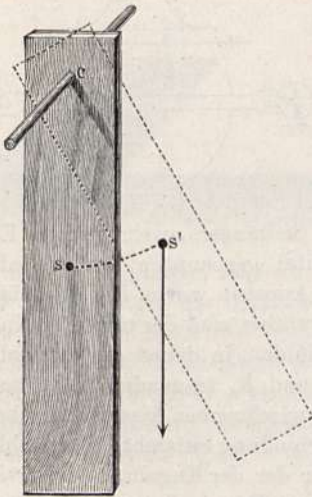
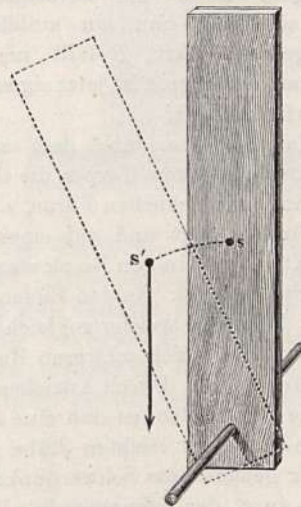


Fig. 184.



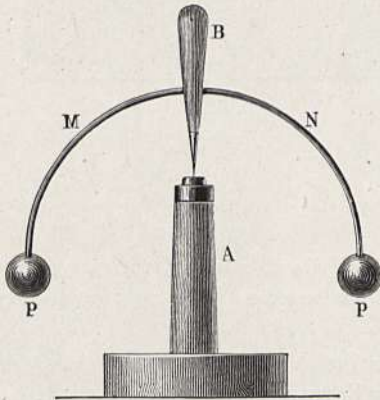
oder unbeständigen Gleichgewichtes; denn wenn die geringste störende Kraft den Körper aus dieser Lage herausbringt, so wirkt die im Schwerpunkte s' angreifende Schwerkraft des Körpers dahin, ihn noch weiter aus dieser Gleichgewichtslage zu entfernen, und er kann nicht eher wieder zur Ruhe kommen, als bis nach einer halben Umdrehung der Schwerpunkt vertikal unter

dem Drehpunkte angekommen und ein neues, nunmehr stabiles Gleichgewicht eingetreten ist.

Einen interessanten Fall des stabilen Gleichgewichtes zeigt Fig. 185.

Ein Holzstück B , welches unten mit einer Stahlspitze versehen ist, wird mit dieser auf ein flach ausgehöhltes Metallstückchen gesetzt, welches die obere Endfläche des Statives A bildet. Für sich allein würde es umfallen, weil sein Schwerpunkt über dem Unterstützungspunkte liegt. Wenn aber durch B ein Drahtbogen MN gezogen wird, welcher an beiden Enden die Bleikugeln pp trägt, so daß durch dieselben der gemeinschaftliche Schwer-

Fig. 185.

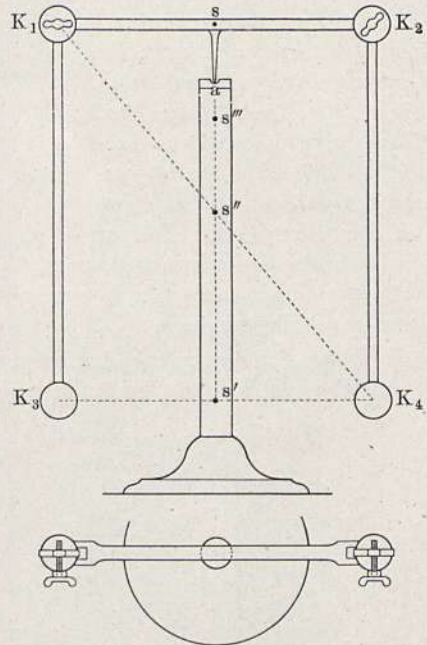


punkt des Holzstückes B und der Bleikugeln unter die Stahlspitze fällt, so findet nun ein stabiles Gleichgewicht statt, B fällt nicht mehr um; der Körper ist jetzt eigentlich aufgehängt.

Man gibt manchmal dem auf die Spitze gestellten Körper die Gestalt einer menschlichen Figur, z. B. eines Seiltänzers, welcher zwei Eimer in den Händen trägt und auf einem horizontal gespannten Drahte balanciert. Instruktiver ist ein von Bock stammender Apparat, wovon Fig. 186 einen Auf- und Grundriß gibt. An den Enden des Querstabes sind die schweren Kugeln K_1 und K_2 befestigt, welche zugleich Gelenke bilden, in denen die vertikal herabgehenden, die gleich schweren Kugeln K_3 und K_4 tragenden Stäbe beweglich eingehängt sind. Durch Anziehen der Flügelschrauben lassen sich aber diese Gelenke fest stellen, so daß eine starre Verbindung entsteht. Vernachlässigen wir die Masse der leichten Stäbe gegenüber der der Kugeln, so ist ersichtlich, daß der gemeinsame Schwerpunkt der oberen Kugeln in s , jener der unteren Kugeln in s' , der Schwerpunkt aller zusammen in s'' liegen muß. Das starre System hat daher seinen Schwerpunkt s'' unter dem Aufhängepunkt a und ist deshalb stabil.

Lockert man eines der Gelenke, z. B. bei K_1 , so wirkt die Masse der Kugel K_3 so, als ob sie in K_1 wäre. Der gemeinsame Schwerpunkt der unteren beiden Kugeln kommt also dann scheinbar nach s'' zu liegen, der

Fig. 186.



Schwerpunkt des ganzen Systems nach einem Punkte bei s''' . Er liegt unter den gegebenen Bedingungen immer noch unter der Spitze a , und es herrscht daher noch immer stabiles Gleichgewicht. Sobald man aber auch das andere Gelenk K_2 lockert, so daß beide Vertikalstangen schwingen können, ist es so, als ob die Schwerpunkte der unteren Kugeln in die oberen verlegt wären. Der Schwerpunkt des ganzen Systems erscheint dann in s , und das Gleichgewicht ist ein labiles geworden.

§ 65. Vom Gleichgewicht aufgestellter Körper, Standfestigkeit.

Wenn ein Körper mit mehr oder weniger breiter Basis auf dem Boden steht, so muß die durch seinen Schwerpunkt gezogene Vertikale noch die Basis selbst treffen, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. Demnach muß der schiefe Zylinder, Fig. 187, im Gleichgewicht sein, wenn er nur die in der Figur schattierte Länge hat; er würde umfallen müssen, wenn er die durch punktierte Linien angedeutete Höhe hätte.

Man versteht unter Standfestigkeit das Moment, mit welchem sich ein auf seiner Basis ruhender Körper seinem Umwerfen (Umkippen) um eine Kante dieser Basis widersetzt.

Soll z. B. der prismatische Körper, den Fig. 188 im Durchschnitt darstellt, durch eine in seinem Schwerpunkte s angreifende Kraft P um seine

Fig. 187.

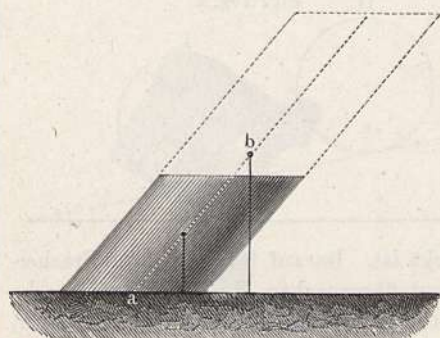
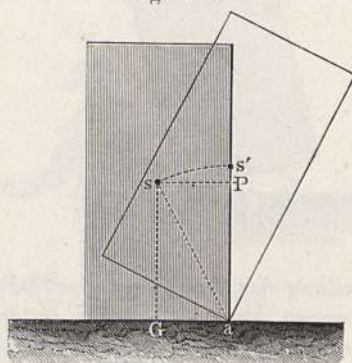


Fig. 188.



Kante bei a umgestürzt werden, so ist der Hebelarm, an welchem diese Kraft P in bezug auf die Drehachse a wirkt, gleich der Höhe h des Schwerpunktes über der Basis des Körpers, also das Moment derselben $= P \cdot h$. Diesem Moment wirkt entgegen dasjenige des Gewichtes G des Körpers, das ebenfalls im Schwerpunkt s angreift. Dieses Moment ist $G \cdot b$, wenn b den horizontalen Abstand der Drehkante a von dem Lote sG bedeutet. Es findet demnach Gleichgewicht statt, solange

$$P = G \frac{b}{h} \dots \dots \dots (1)$$

ist, d. h. es muß die Kraft P um so größer werden, je größer das Gewicht G des Körpers und die Breite b der Basis und je kleiner die Höhe des Schwerpunktes über der Basis ist.

Ist der Körper bereits um einen gewissen Winkel α um die Achse a gedreht, wie Fig. 189 andeutet, so ändert sich die Kraft P , welche ihm das

Gleichgewicht hält. Bezeichnen wir wiederum die Strecke ab mit b , die Höhe sb mit h , so tritt in dieser neuen Lage an Stelle von ab der Abstand $ae = ad - ed = b \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha$, und an die Stelle von sb tritt die Strecke $se = bd + dc = b \cdot \sin \alpha + h \cdot \cos \alpha$.

Die Gleichung (1) verwandelt sich dann in die folgende

$$P = G \frac{b \cdot \cos \alpha - h \sin \alpha}{b \cdot \sin \alpha + h \cdot \cos \alpha} = G \frac{b - h \tan \alpha}{b \tan \alpha + h} \dots \dots \dots (2)$$

Daraus folgt, daß die Kraft P gegenüber dem Gewichte G des Körpers um so kleiner werden muß, je näher der letztere durch die Drehung in die Fig. 188 angedeutete Lage gebracht ist, wo der Schwerpunkt s vertikal über der Kante a liegt oder $b - h \tan \alpha = 0$ wird. In letzterem Falle herrscht labiles Gleichgewicht, und eine unendlich kleine Kraft P bewirkt das Umfallen.

Nicht immer befindet sich der Schwerpunkt dort, wo wir ihn nach der äußeren Gestalt des Körpers vermuten, weil er durch eine unhomogene Ver-

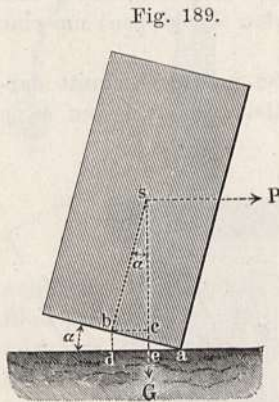


Fig. 189.

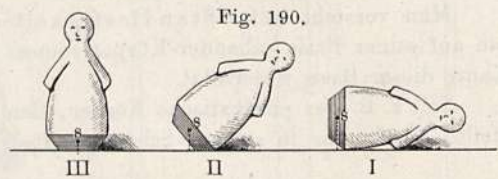


Fig. 190.

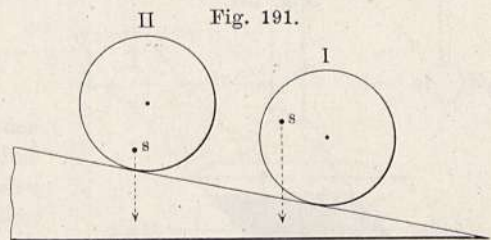


Fig. 191.

teilung der Massen von der Stelle gerückt ist. Darauf beruhen dann Erscheinungen, die uns auf den ersten Moment überraschen, bis wir ihre Ursache erkannt haben. Hierher gehören z. B. die sogenannten Stehaufmännchen, Fig. 190. Sie bestehen aus einer Figur aus Holundermark, welche auf einem bleiernen Fuß in Form eines umgekehrten Kegelstumpfes aufgekittet ist. Ein solches Männchen kann weder in der Lage I noch in der Lage II verbleiben, weil der Schwerpunkt s nicht unterstützt ist. Dies ist erst in der aufrechten Lage III der Fall. Der bergauf laufende Zylinder, Fig. 191, ist eine Walze aus Holz, welche durch Einguß von Blei ihren Schwerpunkt s außerhalb der Achse nahe der Mantelfläche erhalten hat. In der Lage I kann derselbe auf der schiefen Ebene nicht stehen bleiben, er rollt aufwärts, bis er in die Lage II gekommen ist. Auf einem anderen Prinzip beruht der scheinbar bergauf laufende Doppelkegel. Fig. 192 zeigt denselben im Auf- und Grundriß. Der Doppelkegel ss wird auf eine schiefe Ebene aufgesetzt, die aus den beiden im Winkel auf das Grundbrett A aufgeleimten Seitenbrettchen B, B gebildet wird. Er bleibt dann nicht stehen, sondern wandert nach der Lage $s's'$, was bei oberflächlicher Betrachtung den Schein erweckt, als rolle er aufwärts. Man sieht aber sofort beim Anblick des Aufrisses, daß der in der Achse gelegene Schwerpunkt s in Wirklichkeit nicht steigt,

vielmehr auf dem Wege nach s' sinkt, was daher kommt, daß der Doppelkegel im Anfang der Bewegung an seiner dicksten Stelle, am Ende derselben mit den dünnen Enden auf den divergierenden Leisten aufruht.

Andere kompliziertere Schwerpunktsapparate sind der einfache und doppelte Treppenläufer, Figuren mit beweglichen Gliedern, welche teilweise mit Quecksilber gefüllt sind. Die durch die Bewegung des letzteren eintretenden Schwerpunktsverschiebungen verursachen die possierlichen Bewegungen dieser Figuren. Wir erwähnen alle diese Apparaten, weil sie nun einmal zum Inventar der physikalischen Kabinette gehören und deshalb dem Physiker bekannt sein müssen.

Auch bei den Bewegungen und Haltungen des menschlichen Körpers spielt der Schwerpunkt eine wichtige Rolle. Der Mann, Fig. 193, der eine Last auf dem Rücken trägt, muß sich nach vorn beugen, der Gärtner, Fig. 194, nach der rechten Seite neigen, um den Schwerpunkt in jene Lage zu bringen, daß die Vertikallinie durch denselben innerhalb der Fußbasis zu liegen kommt.

Fig. 193.



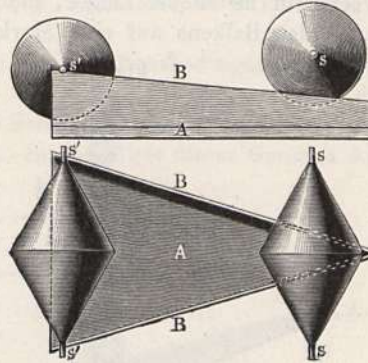
Fig. 194.



§ 66. Die gleicharmige Wage ; Richtigkeit derselben. Die gleicharmige Wage, in einfachster Ausführung wie in Fig. 195 auch Krämerwage genannt, beruht auf den in den §§ 56 und 60 abgeleiteten Sätzen und dient zur Vergleichung der Gewichte der Körper zum Zwecke der Bestimmung ihrer Massen.

Die gleicharmige Wage besteht aus einem aus zwei symmetrischen Armen bestehenden Wagebalken AB , welcher um eine horizontale Achse (Mittelachse) drehbar, und zwar im stabilen Gleichgewichte aufgehängt ist. Die Mittelachse wird durch die nach abwärts gerichtete Kante s eines am Balken befestigten Prismas aus hartem Material gebildet (Mittelschneide), welche auf einer Unterlage (Pfanne), ebenfalls aus hartem Material, aufruht. An den Enden des Balkens sind ebensolche, aber nach aufwärts gerichtete

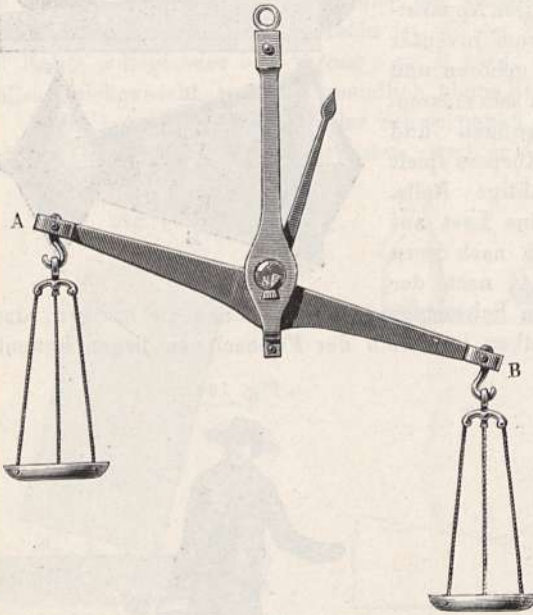
Fig. 192.



Kanten (Endschneiden, Endachsen) befestigt, auf welchen die Gehänge entweder ebenfalls mit Pfannen oder in einfacherer Weise aufgehängt sind, welche die Schalen tragen.

Zur leichteren Konstatierung der horizontalen Lage des Wagebalkens oder auch zur Messung der Abweichung von derselben ist senkrecht auf die Längsrichtung des Balkens in der Mitte desselben nach aufwärts oder abwärts ein metallener Zeiger, die Zunge, befestigt, welche bei horizontaler Lage des Balkens auf eine Marke oder auf den mittleren Teilstrich einer

Fig. 195.



Skala zeigt, welcher meistens, aber nicht immer, mit Null bezeichnet ist. Wenn die Zunge, sobald der Balken zur Ruhe gekommen ist, auf diesen mittleren Teilstrich zeigt, sagt man, die Waage „spiele ein“ oder sie sei im Gleichgewicht. Das Eintreten dieses Ruhezustandes wird aber nicht immer abgewartet, sondern meist aus den Ausschlägen der Zunge erschlossen.

Die Mittelpfanne ist nur bei Handwagen oder solchen von geringerer Genauigkeit, wie in Fig. 195, an einer Schere aufgehängt. Bei genauen Wagen ruht sie auf einer feststehenden Metallsäule. Ferner ist bei

genauen Wagen dafür gesorgt, daß der Balken und die Schalen, manchmal auch die Gehänge, während des Nichtgebrauches der Waage separat unterstützt werden können, um einen schädlichen Druck auf die Schneiden und dadurch eine Abnutzung derselben zu vermeiden.

Es geschieht dies durch die Arretierungsvorrichtungen. Endlich werden feine Wagen durch Wagekästen mit Glaswänden gegen Staub und Luftzug geschützt, deren Unterbau zwischen den Schubladen zur Unterbringung der Gewichte und Utensilien gewöhnlich noch eine durch einen Schlüssel in Drehung zu setzende Achse enthält, mittels welcher die Arretierung aufgehoben oder wirksam gemacht werden kann.

Daß der Wagebalken stabil aufgehängt, also die Mittelachse über dem Schwerpunkte angebracht sein müsse, damit man mit der Waage wägen könne, ist leicht einzusehen. Wäre die Aufhängung indifferent, also der Schwerpunkt in die Mittelachse fallend, so würde bei gleicher Belastung der Balken in jeder Lage stehen bleiben. Bei ungleicher Belastung würde ein großes Übergewicht keine andere Wirkung hervorbringen als ein kleines; beide würden die mehr belastete Schale bis zur Hemmung heruntersinken machen. Man hätte also kein Mittel, zu erkennen, wie weit man noch vom Gleichgewichte entfernt ist. Bei labilem Gleichgewichte würde der Balken fortwährend auf

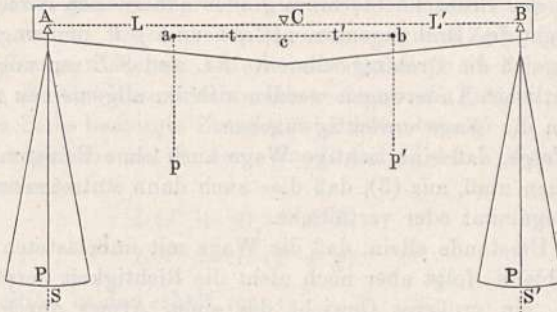
der einen oder der anderen Seite bis zur Hemmung niedersinken. Nur bei der stabilen Aufhängung ist es möglich, aus der Größe der Abweichung von der horizontalen Lage den Betrag der noch fehlenden Gewichtsstücke zu schätzen und so durch systematisches Probieren sich der gleichen Belastung sicher zu nähern.

Man nennt eine Wage richtig, wenn ihr Balken bei beliebig großer gleicher Belastung der beiden Schalen in horizontaler Lage zur Ruhe kommt.

Wir wollen nun untersuchen, welche Konstruktionsbedingungen erfüllt sein müssen, damit die Wage richtig sei.

Es stelle Fig. 196 eine schematische Zeichnung einer Wage vor. AB sei die Verbindungslinie der Endschnitten. In der Mitte dieser Geraden soll,

Fig. 196.



wie wir später erörtern werden, die Mittelschneide C und senkrecht darunter der Schwerpunkt c liegen. Wir wollen aber die Armlängen AC und BC vor-derhand als möglicherweise ungleich mit L und L' bezeichnen. Denkt man sich den Balken durch eine Ebene in zwei symmetrische Hälften geteilt, so kann man sich vorstellen, daß jede dieser Hälften für sich einen Schwerpunkt habe. Diese Punkte seien in a und b gelegen, deren Abstände von der Mitte wir ebenfalls als möglicherweise ungleich mit l und l' bezeichnen. Es sollen ferner bedeuten:

p und p' die in a und b wirkenden Gewichte der Balkenhälften,

S und S' die Gewichte der beiden Schalen,

P und P' die gleichen Gewichte der beiderseits aufgelegten Gewichtsstücke.

Soll die Wage in horizontaler Lage zu Ruhe kommen, so muß auf beiden Seiten beim Eintritte dieser Lage die Summe der Drehungsmomente gleich groß sein. Es muß also die Gleichung erfüllt sein:

$$PL + SL + pl = PL' + S'L' + p'l \dots (1)$$

Soll diese Gleichung für beliebige gleiche Belastungen P gültig bleiben, so muß $L=L'$ sein, d.h. die Wage muß genau gleicharmig sein (erste Bedingung der Richtigkeit).

Es bleibt somit von Gleichung (1), wenn wir $L=L'$ setzen, noch übrig:

$$SL + pl = S'L + p'l \dots (2)$$

Soll diese Gleichheit auch dann fortbestehen, wenn der Wagebalken infolge Temperaturänderungen eine Änderung seiner Dimensionen erleidet, so müssen zunächst:

$$l = l' \text{ und } p = p' \text{ sein, woraus dann auch } S = S' \text{ folgt} \dots (3)$$

Das heißt also, es müssen die Schwerpunkte der Arme eine gleiche Entfernung von der Drehschneide haben und diese Arme sowie die Schalen gleiches Gewicht besitzen. Diese Bedingungen lassen sich dahin formulieren, daß die beiden Wagebalkenarme in bezug auf Masse und ihre Verteilung und Anordnung durchaus symmetrisch seien (zweite Bedingung der Richtigkeit) und die Schalen gleiches Gewicht besitzen (dritte Bedingung der Richtigkeit).

Es könnte scheinen, daß der Gleichung (2) auch dadurch entsprochen werden könnte, daß man ein größeres Balkengewicht auf einer Seite durch ein entsprechend größeres Schalengewicht auf der anderen Seite kompensiert. Die Wage würde dann allerdings bei allen gleichen Belastungen sowie unbelastet im Gleichgewichte bleiben, aber nur so lange, als sich die Temperatur nicht ändert. Geschieht dies, so rücken die unsymmetrischen Massen der Arme von der Drehschneide hinweg oder nähern sich derselben und verändern dadurch die Drehungsmomente pl und $p'l'$ um ungleiche Werte; ebenso ändern sich die Drehungsmomente SL und $S'L$ um ungleiche Größen, und diese sämtlichen Änderungen werden sich im allgemeinen nicht kompensieren, sondern die Wage unrichtig machen.

Aus (2) folgt, daß eine richtige Wage auch ohne Belastung der Schalen horizontal stehen muß, aus (3), daß dies auch dann eintreten muß, wenn man die Schalen wegnimmt oder vertauscht.

Aus dem Umstande allein, daß die Wage mit unbelasteten Schalen horizontal stehen bleibt, folgt aber noch nicht die Richtigkeit derselben, da, wie oben erwähnt, ein größeres Gewicht des einen Armes durch ein größeres Gewicht der anderen Schale kompensiert sein könnte.

Auch das Horizontalstehen des Balkens ohne Schalen ist für sich noch kein Beweis für die Richtigkeit der Wage. Sie könnte nämlich ungleicharmig sein und diese Ungleichheit durch unsymmetrische Massenordnung kompensiert sein.

Um also eine Wage vollständig auf ihre Richtigkeit zu prüfen, hat man folgende Proben vorzunehmen:

1. Man läßt die Wage bei unbelasteten Schalen einspielen und vertauscht dann die Schalen. Zeigt sie beide Male auf 0 oder doch auf denselben Skalenteil, so sind die beiden Schalen gleich schwer.

2. Man belastet die beiden Schalen mit den größten gleichen Gewichten, für welche die Tragkraft der Wage ausreicht, und stellt, wenn nötig, das Einspielen auf 0 durch kleine Zulegegewichtchen her; hierauf vertauscht man die Schalen samt den darauf befindlichen Gewichten. Zeigt sich kein Unterschied in dem Einspielen, so ist die Wage gleicharmig.

3. Man bringt die Wage bei ziemlich großen Belastungen zum Einspielen und setzt sie dann Temperaturänderungen aus, welche aber für beide Arme in gleicher Weise erfolgen müssen. Zeigt sich dann wieder kein Unterschied im Einspielen, so ist auch die Masse an beiden Armen symmetrisch angeordnet.

Ist durch die Probe 2. die Gleicharmigkeit der Wage erwiesen, so erkennt man aus dem Ausfalle der Probe 1., wenn dieselbe die Gleichheit der Schalengewichte ergeben hat, überdies noch, ob auch die beiden Arme gleich schwer sind. In diesem Falle stellt sich die Wage vor und nach Vertauschung der Schalen horizontal. Nimmt sie aber hierbei beide Male nach derselben Seite

dieselbe schiefe Stellung ein, so sind die Arme ungleich schwer. Weicht sie dagegen beide Male nach entgegengesetzten Richtungen um gleich viel ab, so folgt daraus die Ungleichheit der Schalen.

Die Probe 2. kann auch ohne Aushängen der Schalen ausgeführt werden, indem man die Wage zuerst ohne Belastung, wenn nötig, durch eine kleine Zulage ins Einspielen bringt und dann vollkommen gleich große Gewichte beiderseits auflegt. Spielt die Wage neuerdings ein, so ist sie gleicharmig. Da man aber selten sicher ist, daß die verfügbaren größeren Gewichte vollkommen gleich sind, so verfährt man am zweckmäßigsten auf folgende Weise, wobei man den Fehler nicht bloß nachzuweisen, sondern auch der Größe nach zu bestimmen vermag:

Man beobachtet den Ruhepunkt der Zunge bei unbelasteter Wage (aber mit angehängten Schalen), setzt dann die wenigstens angenähert gleichen Gewichte auf, deren genaue Werte mit P und P' bezeichnet seien, und fügt dann links oder rechts, wo es eben nötig ist, noch das Zulagegewichtchen p hinzu, um die Zunge wiederum auf dieselbe Ruhelage zu bringen. Hierauf vertauscht man die Gewichte und verfährt ebenso wie früher. Das diesmal auf der anderen Seite benötigte Zulagegewichtchen betrage q .

Sind die Längen der beiden Arme $= L$ und L' , so ergeben sich hieraus die beiden Gleichungen:

$$L(P + p) = L'P'$$

$$L'P' = L'(P + q).$$

Durch Addition beider erhält man:

$$L(P + P' + p) = L'(P + P' + q),$$

woraus das Verhältnis der Armlängen

$$\frac{L}{L'} = \frac{P + P' + q}{P + P' + p} = (\text{angenähert}) 1 + \frac{q - p}{P + P'}$$

folgt.

Die letzte Umformung beruht auf der Erwägung, daß die Gewichtchen $p + q$ gegenüber $P + P'$ sehr klein sind. Infolgedessen unterscheidet sich das Drehungsmoment Lp von $L'p$ nur um die verschwindend kleine Größe $(L - L')p$. Man kann sich daher vorstellen, man habe, statt auf der linken Seite das Gewichtchen p zuzulegen, dasselbe auf der rechten Seite fortgenommen.

Die obige Gleichung wird dann;

$$L(P + P') = L'(P + P' + q - p),$$

woraus sofort

$$\frac{L'}{L} = 1 + \frac{q - p}{P + P'}$$

folgt.

Aus dem gleichen Grunde kann man auch, falls beide Übergewichtchen auf derselben Seite aufzulegen wären, eines derselben als negatives auf der anderen Seite ansehen. Für $P + P'$ kann man die Summe der Nennwerte dieser Gewichte einsetzen.

Zahlenbeispiel: Man habe auf die bei leeren Schalen im Gleichgewichte befindliche Wage aufgelegt:

Links: Rechts:
 ein 500 g-Stück nebst 0,5 mg; ein 200 g-Stück und 3 Stücke zu 100 g.

Die links zugelegten 0,5 mg stellen das Gleichgewicht her.

Hierauf vertausche man und habe bei wieder eingetretenem Gleichgewicht:

Links: Rechts:
 das 200 g-Stück und die 3 Stücke zu 100 g; das 500 g-Stück nebst 5,5 mg;
 folglich ist:

$$p = 0,5 \text{ mg} \quad q = 5,5 \text{ mg} \quad P + P' = 1000 \text{ g} = 1000000 \text{ mg}$$

$$\frac{L}{L'} = 1 + \frac{5,5 - 0,5}{1000000} = 1,000005.$$

Eine solche Ungleichheit ist bei den Wägungen entweder durch Rechnung zu korrigieren, oder durch die Methode der Wägung zu eliminieren, oder endlich an der Wage selbst mittels hierzu angebrachter Adjustiervorrichtungen wegzuschaffen, worüber später Näheres mitgeteilt werden soll. Überhaupt sind die obigen Bedingungen der Richtigkeit nicht zugleich als die Bedingungen der Brauchbarkeit anzusehen. So z. B. ist eine kleine Ungleichheit im Gewichte der Schalen, ja sogar der Balkenhälften von geringer Bedeutung, da man sie durch die Art des Wägens ebenfalls eliminieren kann.

Viel wichtiger ist, daß die Wage bei wiederholter Arretierung und Auslösung immer wieder in gleicher Weise einspiele, daß ferner die Schwingungsbögen nur langsam abnehmen (also die Reibung an der Achse sehr gering sei), daß die Arretierung den Balken beiderseits gleichzeitig loslasse; ferner daß eine Verstellung der Gewichtsstücke auf derselben Schale keine Änderung im Einspielen zur Folge habe, endlich daß die Wage die nötige Empfindlichkeit habe, worüber der folgende Paragraph handeln soll.

§ 67. Empfindlichkeit der Wage. Eine Wage, mit welcher man genau wägen will, muß empfindlich sein, d. h. sie muß schon bei einem sehr kleinen Übergewicht p einen meßbaren Ausschlag α geben. Die Empfindlichkeit ist also verkehrt proportional dem dazu erforderlichen Übergewichte, also direkt proportional dem reziproken Werte desselben $\frac{1}{p}$. Wir wollen nun untersuchen, von welchen Konstruktionsbedingungen diese Empfindlichkeit abhängt.

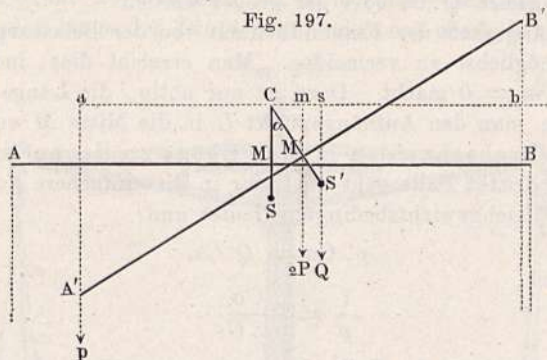
Es seien A und B in Fig. 197 die Endschnitten eines Wagebalkens, an denen die gleichen Gewichte P und P (die Schalen inbegriffen) hängen.

Durch die Mitte von AB in M denken wir uns in der Zeichnungsebene eine Senkrechte gezogen. In dieser müssen der Aufhängepunkt C (die Mittelschneide) und der Schwerpunkt S gelegen sein. Daß der letztere unterhalb des ersteren sich befinden müsse, haben wir bereits erörtert, da sonst kein stabiles Gleichgewicht bestehen könnte. Hingegen ist in bezug auf die relative Lage des Aufhängepunktes C gegenüber M bisher noch nichts festgestellt.

Nehmen wir daher einmal an, derselbe befinde sich über dem Mittelpunkt M , wie Fig. 197 zeigt, in C . Nach dem Auflegen des Übergewichtes p auf die linksseitige Schale nimmt die Wage die neue Ruhelage an, welche

durch die Punkte A', B', M, S' gegeben ist. Diese Punkte haben sämtlich um den Aufhängepunkt C dem Winkel α entsprechende Kreisbögen beschrieben.

Fig. 197.



Ist die Wage in Ruhe gekommen, so muß die Summe der Drehmomente beiderseits gleich groß sein. Die beiden gleichen Gewichte P und P können wir uns in dem Punkte M vereinigt denken. Das Gewicht des Balkens Q greift in S' an, das Übergewicht p in A' . Ziehen wir die Horizontale durch C und die vertikalen Hilfslinien $A'a, M'm, S's, B'b$, so muß die Gleichung bestehen:

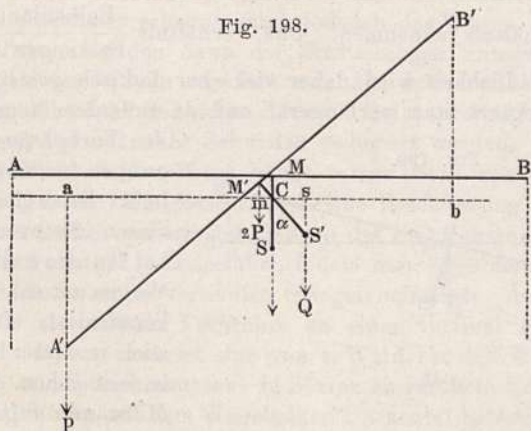
$$p \cdot Ca = Q \cdot Cs + 2P \cdot Cm,$$

also:

$$\frac{1}{p} = \frac{Ca}{Q \cdot Cs + 2P \cdot Cm}.$$

Man ersieht aus diesem Ausdrucke zunächst, daß die Empfindlichkeit außer von den übrigen Konstruktionsverhältnissen der Wage insbesondere

Fig. 198.



noch von der Größe der Belastung der Endschneiden abhängt, und zwar nimmt in diesem Falle die Empfindlichkeit ab, wenn die Belastung zunimmt.

In Fig. 198 ist der andere Fall dargestellt, wo der Aufhängepunkt C sich unterhalb der Mitte M befindet. Für diese Lage erhält man:

$$\frac{1}{p} = \frac{Ca}{Q \cdot Cs - 2P \cdot Cm}.$$

Hier nimmt die Empfindlichkeit zu, wenn die Belastung $2P$ zunimmt. Soll die Wage nicht indifferent werden oder gar umschlagen, so darf jedoch $2P \cdot Cm$ nicht gleich $Q \cdot Cs$ oder gar größer werden.

Diese Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Belastung ist bei einer guten Wage möglichst zu vermeiden. Man erreicht dies, indem man das Produkt $2P \cdot Cm = 0$ macht. Dazu ist nur nötig, die Länge $Cm = 0$ zu machen, indem man den Aufhängepunkt C in die Mitte M verlegt, so daß also alle drei Drehschnitten in eine Ebene zu liegen kommen.

In diesem dritten Falle geht die Figur in die einfachere Form (Fig. 199) über, und die Gleichgewichtsbedingung lautet nun:

$$p \cdot Ca = Q \cdot Cs,$$

daraus folgt:

$$\frac{1}{p} = \frac{Ca}{Q \cdot Cs}.$$

Da Ca proportional der Balkenlänge, Cs proportional dem Abstände des Schwerpunktes vom Aufhängepunkte ist, so ergibt sich hiermit:

Die Empfindlichkeit direkt proportional der Balkenlänge. (1)

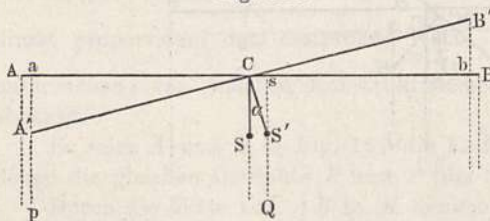
„ „ „ „ „ „ „ „ dem Balkengewichte (2)

„ „ „ „ „ „ „ „ dem Abstände des Schwerpunktes von der Mittelschneide . . . (3)

Wollte man aus dem Satze (1) schließen, daß es für die Empfindlichkeit der Wage zweckmäßig sei, ihrem Balken eine möglichst große Länge zu geben, so wäre dies ein Irrtum, denn man würde dadurch mit der aus (2) folgenden Bedingung, daß der Balken so leicht als möglich zu machen sei, in Widerspruch geraten.

Soll nämlich der Balken fest genug bleiben, um sich unter der Belastung nicht merklich zu biegen, so muß bei Zunahme seiner Länge sein Gewicht in rascherem Verhältnis zunehmen. Das Verhältnis $\frac{\text{Balkenlänge}}{\text{Balkengewicht}}$ und damit auch die Empfindlichkeit wird daher viel eher dadurch gesteigert, daß man den Balken verkürzt statt verlängert, und da außerdem kurze Balken noch

Fig. 199.

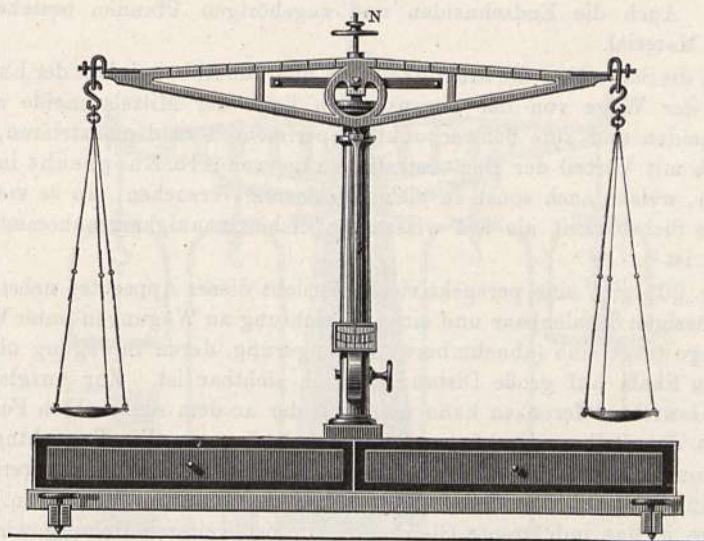


den Vorteil rascherer Schwingungen für sich haben, so gebührt ihnen der Vorzug. Auf diesen Sachverhalt gestützt, hat Bunge in Hamburg zuerst Wagen mit sehr kurzen Balken konstruiert. Doch darf man auch in dieser Richtung nicht zu weit gehen, da sonst andere Mißstände auftauchen.

Das möglichst geringe Gewicht des Balkens bei genügender Festigkeit sucht man außerdem dadurch zu erreichen, daß man den Wagebalken in durchbrochener Form (Fig. 200) ausführt oder auch durch Strebepanzen gegen Verbiegungen schützt. Neuestens wird der Wagebalken mit Erfolg aus der von Mach jun. entdeckten Legierung aus Aluminium und Magnesium, welche unter dem Namen Magnalium im Handel vorkommt und sich durch Leichtigkeit und Festigkeit auszeichnet, hergestellt.

Die aus (3) folgende Bedingung verlangt, daß der Schwerpunkt nahe dem Aufhängepunkte, d. i. der Mittelschneide, liege. Dies ist stets und in beliebigem Grade zu erreichen mit Hilfe eines verschiebbaren Gewichtes, welches entweder längs der Zunge oder (meistens) oberhalb der Balkenmitte

Fig. 200.



an einer senkrecht stehenden Schraubenspindel in Form einer geränderten Scheibe auf und ab zu schrauben ist. Theoretisch könnte hierdurch die Empfindlichkeit bis ins Unbegrenzte gesteigert werden. In der Praxis ist man aber durch den Umstand beschränkt, daß die dadurch empfindlicher gemachte Wage langsamer schwingt und dadurch das Wägen endlich zu zeitraubend wird. Auch werden dann die Einstellungen unregelmäßiger. Bei gewöhnlichen genauen Wagen reguliert man den Schwerpunkt so, daß eine Schwingung ungefähr zehn Sekunden dauert. Bei kurzarmigen Wagen kann die Schwingungsdauer auf sechs Sekunden reduziert werden.

Die Empfindlichkeit der Wage hängt ferner auch von der Länge des Zeigers (der Zunge) ab. Um diese Länge ohne Beschwerung des Balkens zu vergrößern, hat man bei den feinsten Wagen die Poggendorffsche Spiegelablesung mit Fernrohr (§ 17) eingeführt, indem man über der Drehachse oder am Ende des Balkens einen vertikalen Spiegel befestigte, dessen Bewegung von einem Ende aus mittels Fernrohrs an einer vertikal gestellten Skala beobachtet wird. Besser noch ist eine von v. Wild bei den Wagen des internationalen Maß- und Gewichts-bureaus in Sèvres eingeführte Konstruktion, bei welcher der Spiegel oben auf dem Wagebalken horizontal befestigt und darüber ein total reflektierendes Prisma aufgestellt wird. Das letztere wirft die Strahlen nach vorn, so daß mittels einer vor die Wage gestellten horizontalen Skala mit Fernrohr beobachtet werden kann. Hierdurch wird die Übersicht über die Wage erhalten und einseitige Erwärmung durch den Beobachter sicherer vermieden. Kuhlmann in Hamburg hat eine Spiegelablesung am Ende der Zunge angebracht, welche mittels eines Zylinderspiegels ein fünf-fach vergrößertes Bild der Skala erzeugt.

Zu den eben abgeleiteten mathematischen Bedingungen der Empfindlichkeit kommt noch die technische, daß die Drehschneiden möglichst ohne Reibung beweglich seien, was durch möglichste Schärfe der Kante des Prismas erreicht wird. Um dieselbe recht haltbar zu machen, wählt man für das Prisma und dessen Unterlage sehr hartes Material, wie Stahl, Achat, Bergkristall. Auch die Endschnneiden und zugehörigen Pfannen bestehen aus solchem Material.

Um die Sätze über die Richtigkeit und über die Abhängigkeit der Empfindlichkeit der Wage von der gegenseitigen Lage der Mittelschneide zu den Endschnneiden und zum Schwerpunkte experimentell zu demonstrieren, kann man sich mit Vorteil der Demonstrationswage von Alb. Rueprecht in Wien bedienen, welche auch sonst zu vielen Vorlesungsversuchen, wo es mehr auf deutliche Sichtbarkeit als auf wissenschaftliche Genauigkeit ankommt, sehr geeignet ist¹⁾.

Fig. 201 gibt eine perspektivische Ansicht dieses Apparates nebst einem überschüssigen Schalenpaar und einer Vorrichtung zu Wägungen unter Wasser. Die Zunge trägt eine (abnehmbare) Verlängerung, deren Bewegung über der einfachen Skala auf große Distanz deutlich sichtbar ist. Zur Ausgleichung kleiner Gewichtsunterschiede kann man sich der an dem senkrechten Fortsatze oberhalb des Balkens drehbaren „Fahne“ bedienen. Die Vorrichtung zur Verrückung des Schwerpunktes besteht aus einer auf der Zunge verschiebbaren Hülse. Hebt man diese bis zu einer angebrachten Marke, so kommt die Wage in das indifferente Gleichgewicht, bei weiterer Hebung wird ihre Aufhängung eine labile. Schiebt man die Hülse ungefähr 1 cm unter die erwähnte Marke herab, so erhält die Wage eine Empfindlichkeit, welche ein Übergewicht von 20 mg dem Auditorium noch sicher zu erkennen gibt. Geht man noch weiter, endlich bis zur Grenze herunter, so nimmt die Empfindlichkeit ab, so daß schließlich 2 g Übergewicht erforderlich werden, um einen Grad Ausschlag zu geben.

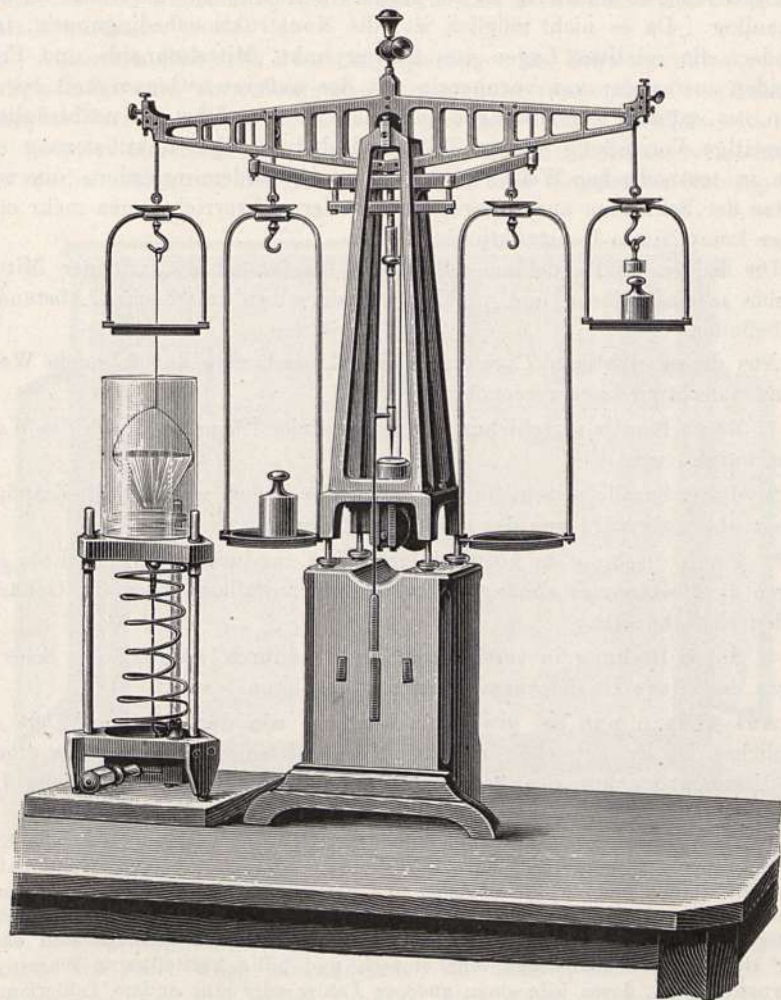
Um den Einfluß der relativen Stellung der Mittelschneide zu den Endschnneiden zu zeigen, sind letztere derartig verstellbar befestigt, daß sie aus ihrer normalen Lage um 5 mm gesenkt oder gehoben werden können. Zu diesem Zwecke werden die beiden seitlichen Lappenschrauben gelüftet, die beiden vertikal wirkenden Kopfschrauben nieder- oder emporgeschraubt und dann die Lappenschrauben wiederum fest angezogen.

Die dadurch bewirkte Verrückung des Schwerpunktes kann mittels der Hülse an der Zunge ausgeglichen werden, so daß die unbelastete Wage wieder sehr empfindlich ist. Sind die Endschnneiden um 5 mm gesenkt worden, so zeigt sich dann eine rasche Abnahme dieser Empfindlichkeit mit Zunahme der Belastung, so daß zuletzt bei 1 kg Belastung auf jeder Seite 1 g Übergewicht erforderlich ist, um einen deutlichen Ausschlag zu geben. Hat man dagegen die Endschnneiden um 5 mm über ihre normale Lage gehoben, so zeigt die Wage bei Vermehrung der Belastung eine zunehmende Empfindlichkeit, welche bei weiterer Vermehrung der ersten in das indifferente und dann ins labile Gleichgewicht übergeht.

¹⁾ Nähere Beschreibung dieser Wage und ihrer Anwendungen findet man in der Zeitschrift für Instrumentenkunde, März 1882, S. 99.

Hat man bei verhältnismäßig kleinen Belastungen die normale Lage der Endschneiden durch Herstellung konstanter Empfindlichkeit hervorgebracht, so kann man bei großen Belastungen eine eintretende Biegung des Balkens an dem Umstande erkennen, daß dann infolge der Senkung der Endschneiden

Fig. 201.



wieder eine Abnahme der Empfindlichkeit bei steigender Belastung eintritt. Hebt man die Endschneiden so weit, daß die Empfindlichkeit wiederum konstant erscheint, so beträgt diese Verrückung ebenso viel wie die Biegung, da sich beide kompensieren.

Auch in bezug auf die Richtigkeit gestattet die Rueprechtsche Demonstrationswage Abänderungen vorzunehmen.

Zu diesem Zwecke ist eine Einrichtung getroffen, daß die Endschneiden auch in horizontaler Richtung um 1 mm der Mittelachse genähert, bzw. von ihr entfernt werden können. Durch Vertauschung der nahe gleich belasteten

Gehänge läßt sich dann die Ungleichheit der Arme konstatieren, ihr Verhältnis messen und ihre Lage korrigieren¹⁾.

§ 68. Konstruktion und Rektifikation einer genauen Wage. So einfach in der Theorie die Konstruktion einer richtigen und empfindlichen Wage erscheint, so schwierig ist die praktische Ausführung derselben für den Mechaniker. Da es nicht möglich ist, die Konstruktionsbedingungen, insbesondere die relativen Lagen von Schwerpunkt, Mittelschneide und Endschneiden zueinander von vornherein mit der äußersten Genauigkeit herzustellen, so müssen Vorrichtungen getroffen sein, welche die nachträgliche gegenseitige Vorstellung dieser Teile und dadurch die Rektifizierung der Wage in methodischer Weise ermöglichen. Außerdem erfordern die zum Schutze der Schneiden anzubringenden Arretierungsvorrichtungen mehr oder minder komplizierte Konstruktionen.

Die beiden Endschneiden sollen, wie gezeigt wurde, mit der Mittelschneide in einer Ebene und parallel mit derselben in gleichen Abständen sich befinden.

Aus dieser richtigen Lage kann eine Endschneide auf folgende Weise in eine unrichtige Lage verschoben sein:

1. durch Parallelverschiebung in horizontaler Ebene, wodurch die Wage ungleicharmig wird;
2. durch Parallelverschiebung in vertikaler Ebene, wodurch die Empfindlichkeit abhängig wird von der Größe der Belastung;
3. durch Drehung in horizontaler Ebene, wodurch das Verhältnis der Längen der Balkenarme abhängig wird von der zufälligen Lage der Gehänge auf den Endschneiden;
4. durch Drehung in vertikaler Ebene, wodurch während der Schwingungen der Wage Ungleicharmigkeit eintreten kann.

Aus 4. kann nur bei grober Abweichung von der richtigen Lage ein erheblicher Fehler entstehen und wird deshalb selten hierfür eine eigene Adjustierungsvorrichtung angebracht. Aus 2. folgt keine eigentliche Un-

¹⁾ Der Verfasser hat beim Unterrichte die Erfahrung gemacht, daß alle Konstruktionen von Wagen, an denen alle Fehler einzeln oder in Kombination hergestellt werden können, zeitraubend und umständlich zu behandeln sind; auch ist es schwierig, dafür zu sorgen, daß die Fehler unabhängig voneinander und in beliebiger Kombination hervorgebracht werden können. Er bedient sich daher lieber einer ganzen Reihe von sehr einfach und billig herstellbaren Wagen mit hölzernen Balken, deren jede einen anderen Fehler oder eine andere Fehlerkombination besitzt. Es befinden sich darunter z. B.

eine Wage mit ungleichen Armlängen, kompensiert durch ungleiche Schalen-
gewichte,
eine Wage mit ungleichen Armlängen, kompensiert durch ungleiche Arm-
gewichte,
eine Wage mit gleichen Armlängen, aber ungleichen Armgewichten, kom-
pensiert durch ungleiche Schalen,
eine Wage mit Aufhängepunkt über der Verbindungsgeraden der Endschneiden,
eine Wage mit Aufhängepunkt unter der Verbindungsgeraden der Endschneiden
usw. Der Umstand, daß man gleichzeitig nebeneinander die Wirkung des Auflegens
gleicher größerer Gewichte auf die verschiedenen fehlerhaften Wagen zeigen kann,
ist von didaktischem Vorteile.

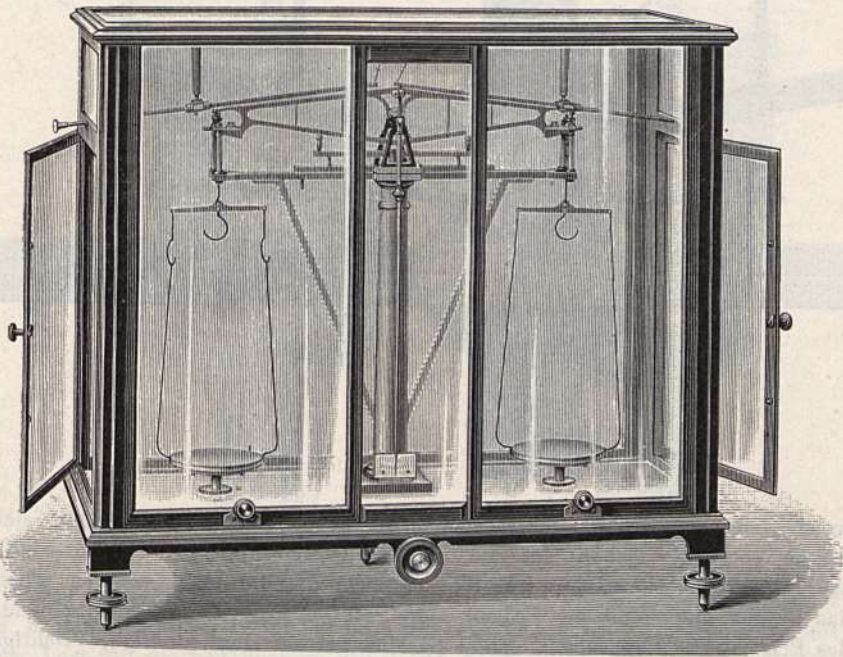
richtigkeit, sondern nur eine Unvollkommenheit der Wage, dagegen sind die Abweichungen aus 1. und 3. um so wichtiger, und es sollen daher bei jeder guten Wage Adjustierungsvorrichtungen vorhanden sein, wodurch diese Fehler korrigiert werden können.

Wie man die Fehler 1. und 2. erkennt, wurde bereits oben gezeigt. Methoden zur Entdeckung der Fehler 3. und 4. werden weiter unten mitgeteilt werden.

Außerdem sind noch zwei Adjustierungen des Schwerpunktes erforderlich, nämlich eine Vorrichtung zur Verschiebung desselben in vertikaler und eine zur Verschiebung in horizontaler (mit dem Balken paralleler) Richtung.

Die Art und Weise, wie die Mechaniker diese Adjustierungsvorrichtungen für die Schneiden und den Schwerpunkt an dem Wagebalken anbringen, ist

Fig. 202.



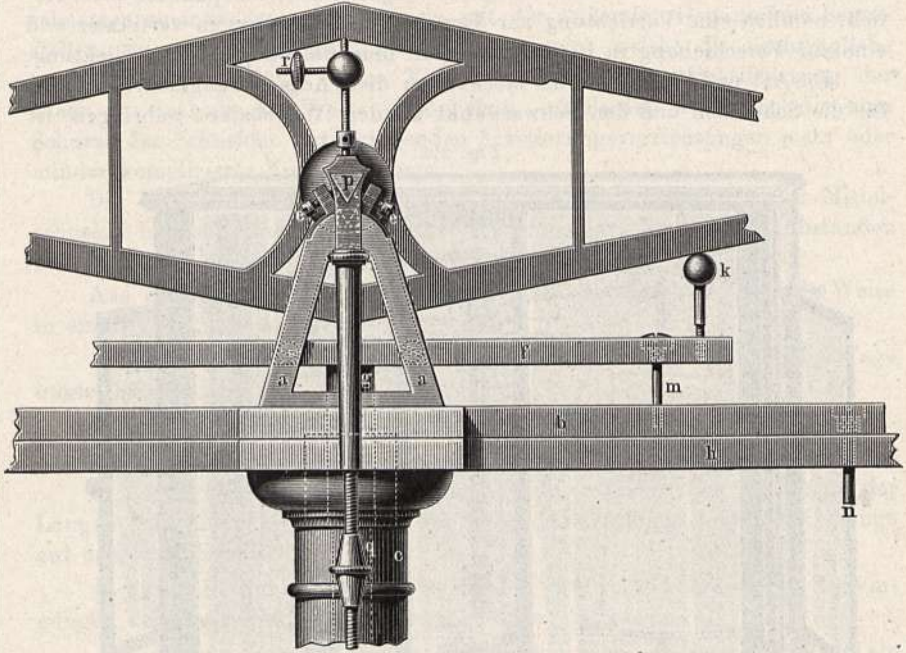
sehr mannigfaltig, ebenso wechselt die Konstruktion der Arretierungsvorrichtungen von einer Wage zur anderen. Wir können hier nur einige Hauptformen erwähnen und wollen zunächst eine Wage mittlerer Tragkraft von Rueprecht in Wien näher beschreiben. Die Fig. 202 gibt eine perspektivische Totalansicht derselben in $\frac{1}{7}$, die Figuren 203 bis 209 Detaildarstellungen in $\frac{3}{4}$ der wirklichen Größe.

Der Wagekasten ist, um möglichst wenig Licht abzuhalten und insbesondere, um der Unbeständigkeit des Holzes auszuweichen, ganz aus Messing und Glas gearbeitet. Die Schiebertüren an der Vorderseite werden durch Gegengewichte in jeder Lage im Gleichgewicht gehalten.

Die Wagsäule besteht aus drei konzentrischen Teilen, zwei Hohlzylindern und einem zylindrischen Kern. Siehe Fig. 204. Der äußere Hohlzylinder *c* bildet die feststehende Säule, sie ist mit der horizontalen

Lamelle *b* und den beiden Böcken *a, a* zu einem festen Ganzen zusammengeschaubt. Auf den Böcken sind die Planlagersteine aus Bergkristall *p, p* befestigt, auf welche die Mittelschneide niedergelassen wird, wenn der Balken frei schwingen soll. Der zylindrische Kern *g* aus Stahl vermittelt die Balkenarretierung. Er trägt zu diesem Zwecke die fest mit ihm verbundene Lamelle *f* (Fig. 203) und nach aufwärts die beiden Böcke *d, d* (Fig. 204),

Fig. 203.



welche, oben geschlitzt, das Prisma *m* des Balkens aufnehmen, indem sich dessen schräge Flächen auf die polierten, abgerundeten, harten Stahlschrauben *e, e, e* auflegen. Durch passende Stellung der letzteren erhält das Prisma und damit der Balken seine richtige Lage, wobei die Schneide des Prismas der Lagerebene genau parallel gestellt und auch ihre richtige Einstellung in bezug auf eine vertikale Achse gesichert wird. Eine weitere Unterstützung erhält der Balken gleichzeitig durch die Kugelschrauben *K* (Fig. 203). Die Balkenarretierung erhält durch die zylindrischen Stifte *m* eine Führung im feststehenden Teile *b*.

Die Gehängearretierung wird durch den inneren Hohlzylinder *l* (Fig. 204) vermittelt, welcher im unteren Teile der Säule seine Führung findet und mit den beiden schief ansteigenden Stützen, Fig. 202, fest verbunden ist. Am oberen Ende ist dieser Hohlzylinder mit dem horizontalen Träger *h* zusammengeschaubt, welcher selbst an seinen Enden je zwei Säulchen *i, i* (Fig. 209) zur Arretierung der Gehänge trägt. Die Art und Weise, wie der Träger *h* durch den äußeren Hohlzylinder *c* hindurch wirkt, ist aus Fig. 206 ersichtlich, welche den Träger *h* von oben gesehen zeigt. Der letztere besitzt zwei Ausschnitte in Form von konzentrischen Kreissegmenten, durch welche der geschlitzte äußere Hohlzylinder, der als Tragsäule fungiert, hindurchtritt.

Außerdem erhält der Träger *h* noch eine Führung durch die zylindrischen Stifte *n*, welche vom feststehenden Teil *b* aus in Bohrungen von *h* eingreifen.

Die Hebung und Senkung der beiden Arretierungsvorrichtungen erfolgt durch die Drehung zweier an einer Welle unterhalb der Säule liegender Exzenter (in der Figur nicht sichtbar).

Die Schalenarretierung wird mittels eines dritten Exzenter an derselben Stelle durch Hebelübertragung vermittelt.

Fig. 204.

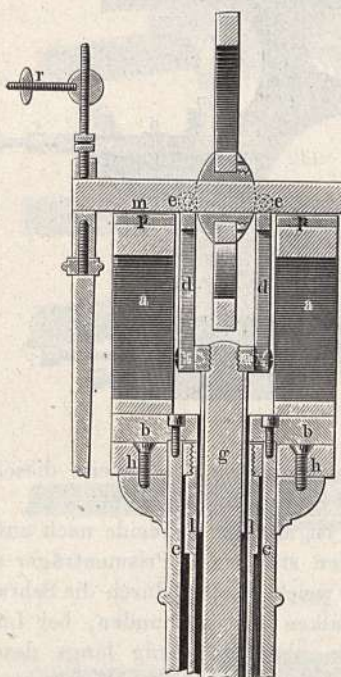
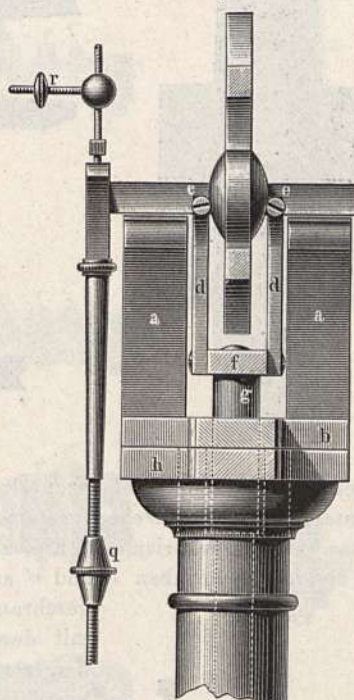


Fig. 205.



Der Vorgang bei der Lösung der Arretierung ist derartig, daß zuerst die Schalen von der Unterstüzung frei werden, danach die Gehänge mit ihrer Last auf die Seitenachsen aufgesetzt werden und erst jetzt die Mittelschneide des Balkens mit den Lagersteinen in Berührung kommt. Die Arretierung erfolgt in umgekehrter Reihenfolge¹⁾.

Der Wagebalken hat die aus der Fig. 203 ersichtliche durchbrochene Form. Die Art der Befestigung des Prismas *p* aus Bergkristall ist aus dem Querschnitt Fig. 204 hinlänglich ersichtlich; sie gestattet eine Drehung des Prismas um eine seiner Schneide parallele Achse. Ebenso ersichtlich ist aus Fig. 204 und der Seitenansicht Fig. 205 die Befestigung der Zunge mit dem

¹⁾ Man findet oft auch die umgekehrte Anordnung, und es lassen sich für beide Gründe vorbringen. Für das Lösen der Arretierung ist die oben beschriebene Anordnung vorzuziehen, für die Arretierung selbst verdient die entgegengesetzte Reihenfolge den Vorzug. Siehe Löwenherz, Metrologische Instrumente, S. 251 des Berichtes über die wissenschaftlichen Apparate der Londoner Ausstellung 1876 (Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn, 1878).

Laufgewichte q zur Regulierung der Lage des Schwerpunktes in vertikaler, sowie die Vorrichtung r zur Verschiebung derselben in horizontaler, dem Balken paralleler Richtung.

Von den Adjustierungsvorrichtungen für die Endschnneiden sind bei dieser Wage zwei vorhanden, von denen die eine die Endschneide in

Fig. 206.

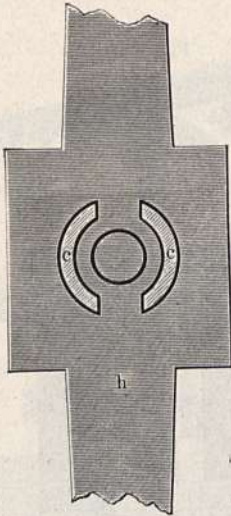


Fig. 207.

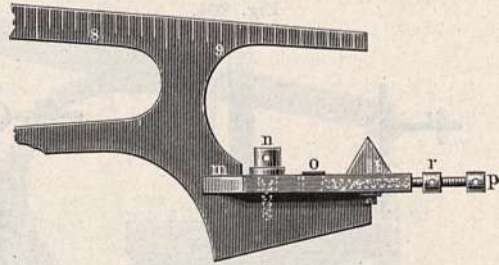


Fig. 208.



der Richtung des Balkens horizontal zu verschieben, die zweite dieselbe in horizontaler Ebene zu drehen gestattet (Figuren 207 bis 209).

Das Bergkristallprisma b , Fig. 207, ist mit der Schneide nach aufwärts durch die zwei Schrauben v und v' an den stählernen Prismenträger m angeschraubt, welcher selbst durch die Schraube n mit dem Balken fest verbunden, bei Lüftung der letzteren aber ein wenig längs desselben verschiebbar ist. Er erhält dabei seine horizontale Führung einerseits an seinen geschlitzten Enden, andererseits an dem prismatischen Stück o , welches durch einen viereckigen Ausschnitt des Trägers emporragt. Die Bewegung erfolgt durch die Schraube p . Zur Parallelstellung endlich dienen die Schrauben r, r' , welche gegen den Hals der Fixierungsschrauben der Seitenachsen drücken und deren Verschiebung bewerkstelligen können. Die richtige Höhe der Endschneide und eine allfällig nötige Drehung derselben in einer durch sie senkrecht auf den Balken gelegten Vertikalebene muß bei dieser Konstruktion durch Abfeilen des Prismenträgers oder Unterlegen des Prismas erreicht werden.

Fig. 209.

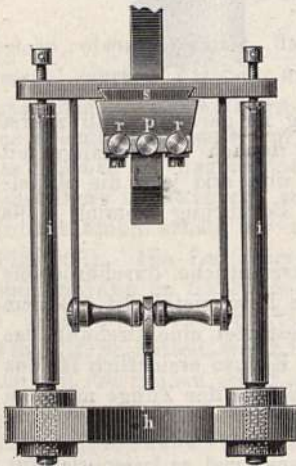


Fig. 209 stellt die stählernen Gehänge der Wage vor, in welche bei s die Planfläche aus Bergkristall prismatisch eingefügt ist. Seine beiden Bügel sind durch eine in der Mitte eingekerbte und hier rein auspolierte harte

Stahlwalze verbunden. In dieser rechtwinklig zur Seitenachse stehenden Kerbe hängt eine schneidige und gehärtete Stahlöse, welche die Wagschale trägt.

Eine Konstruktion, welche alle vier theoretisch gebotenen Rektifikationen mit der Endschneide, und zwar unabhängig voneinander vorzunehmen

Fig. 210.

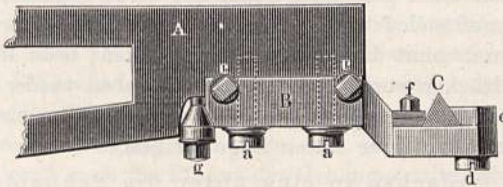


Fig. 211.

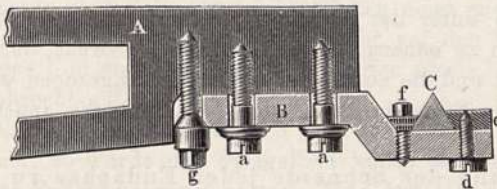


Fig. 212.

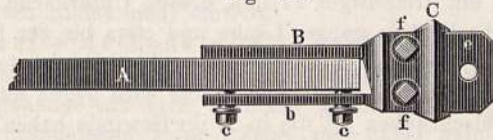


Fig. 213.

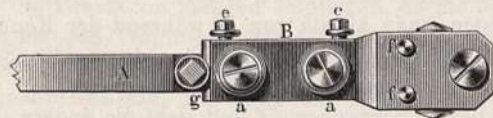


Fig. 214.

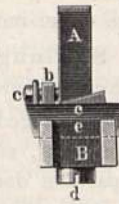


Fig. 215.



gestattet, hat sich Georg Westphal in Celle patentieren lassen. Dieselbe ist folgende:

An dem Endteil des Balkens *A* (Figuren 210 bis 215) ist der Teil *B* und auf diesem die Endachse *C* befestigt; die Adjustierungen geschehen in folgender Weise:

1. Stellung der Endachsen in die richtige Höhe gegen die Mittelachse, so daß eine an die Schneide der Mittelachse und durch die Mitte ihrer Länge gelegte gerade Linie so viel oberhalb der beiden Endachsen liegt, als es die verlangte und zulässige Empfindlichkeit des Wagebalkens erforderlich macht.

Die Unterkante des Balkens *A* ist an seinem Ende, da, wo der Teil *B* angesetzt ist, im Querschnitt spitzwinklig, die Oberkante von *B* dem entsprechend gearbeitet, wie Fig. 214 zeigt. Die beiden Preßschrauben *aa*, Fig. 210 und 211, mit untergelegten Stahlplättchen, verbinden beide Teile fest miteinander. Die Löcher für dieselben in *B* sind größer gebohrt, als

die Hälse von aa dick sind, so daß, wenn aa gelöst, eine Verschiebung von B nach allen Richtungen möglich wird. In einem Vorsprung b auf der Oberkante an B (siehe besonders wieder Fig. 214) sind zwei Stellschrauben cc mit viereckigen Köpfen angebracht, welche gegen den Balken treten und vorerst so gestellt sind, daß der Vorsprung b in der Längsrichtung parallel der Seitenfläche des Balkens steht. Schraubt man sie nun, während aa genügend gelöst sind, mittels eines passenden Schlüssels beide gleichmäßig in den Vorsprung hinein, so muß sich letzterer parallel vom Balken abbewegen, dadurch aber der Teil B und somit die Endachse sich senken; beim Heraus-schrauben von cc und Andrücken von B , so daß die Schrauben wieder gegen den Balken liegen, wird die Achse umgekehrt sich heben, und zwar wird ihre Schneide dabei immer parallel zu ihrer ersten Lage bleiben.

2. Stellung jeder Endachse in eine unter die Schneide der Mittelachse gelegte horizontale Ebene.

Sollte die gedachte Ebene das eine Ende einer Endachse eher berühren als das andere, so muß B unter der schiefen Unterkante an A , anstatt es vorher parallel dem Balken zu nähern oder zu entfernen, gedreht, daher die eine der Schrauben c gelöst und die andere um ebensoviel angezogen werden, wodurch das eine Ende der Schneide von C sich hebt und das andere um ebensoviel sich senkt.

3. Parallele Stellung der Schneide jeder Endachse zu einer durch die Schneide der Mittelachse gelegten senkrechten Ebene.

Die Endachse C bildet ein dreiseitiges Prisma, dessen Unterfläche auf B ruht. Die rechte Seitenfläche liegt in ganzer Länge und etwa bis zur halben Höhe, so weit es das Spiel der Gehänge gestattet, gegen die Seitenkante eines auf B mit der Schraube d befestigten Plättchens e . Sie wird gegen letzteres angedrückt durch zwei Stahlschrauben ff , die in B ihr Gewinde haben. Der Kopf dieser Schrauben besteht außer dem Vierkant für den Schlüssel aus einem Zylinder und einem darunter befindlichen Konus. Der Zylinder liegt (in der Zeichnung) links gegen einen Absatz von B , während der Konus sich rechts gegen die Seite der Achse legt. Durch Anziehen der beiden Schrauben ff wird daher die Achse fest gegen e und auf B angepreßt.

Löst man nun eine der beiden Schrauben ff und zieht die andere ebensoviel an, so wird die Achse sich drehen, indem zugleich das Plättchen e um die Schraube d sich ebensoviel dreht, womit das Mittel für die verlangte Parallelstellung gegeben ist.

4. Stellung der Endachsen in gleiche Entfernung von der Mittelachse.

Diese wird hervorgebracht durch Verschiebung des Teiles B in der Längsrichtung des Balkens mittels der Schraube g , welche ebenso konstruiert ist wie ff . Der Zylinder ihres Kopfes legt sich links gegen den Balken, der Konus rechts gegen B .

Schraubt man also nach Lösung der beiden Preßschrauben aa g tiefer in den Balken hinein, so wird der Konus den Teil B samt der Achse nach rechts schieben, dieser Hebelarm also länger werden. Schraubt man umgekehrt g heraus, so hat man den Teil B nach links hinüber zu drücken.

Wir wollen hier einige Mitteilungen über die Methoden einschalten, deren man sich bedient, um die Abweichungen der Endschnitten vom Par-

allelismus mit der Mittelschneide zu erkennen. Es gibt deren insbesondere zwei¹⁾.

Erste Methode von Gauss mit Spiegel²⁾. Nehmen wir zunächst an, die Endschneide sei innerhalb der Horizontalebene, also um eine vertikale Achse so verdreht, daß das dem Beschauer zugekehrte Ende der Mittelschneide genähert, das rückwärtige Ende aber von derselben weiter entfernt sei. Sobald die Wage schwingt, beschreibt dann die Endschneide die Mantelfläche eines Kegelstutzes, dessen Achse in die verlängerte Mittelschneide fällt, und zwar mit dem Scheitel gegen den Beschauer gerichtet. Es ist folglich klar, daß die Schneide beim Steigen sich nach vorn neigen muß, beim Sinken dagegen nach rückwärts.

Dieselbe Neigung nach vorn und nach rückwärts während der Schwingungen muß auch die Pfanne des Gehänges mitmachen. Befestigt man daher auf dieser Pfanne einen kleinen Spiegel, dessen Ebene möglichst nahe senkrecht auf die Schneide gestellt ist, so neigt sich auch dieser beim Neigen der Endschneide nach vorn über, beim Sinken neigt er sich oben zurück. Beobachtet man daher mittels eines senkrecht auf den Spiegel gerichteten Fernrohres das Bild einer vertikal aufgestellten Skala, so schwingt auch dieses Bild senkrecht auf und nieder.

Sollte die Endschneide auch in vertikaler Ebene vom Parallelismus abweichen, so würde das Spiegelbild außer der vertikalen Bewegung auch noch eine Seitenbewegung zeigen. Man hat also an den Adjustierungsvorrichtungen so lange zu operieren, bis im Spiegel keine Verschiebung des anvisierten Bildes mehr eintritt.

Zweite Methode mittels Probiiergehänge³⁾. Man behängt die zu prüfende Endschneide mit einem eigens zu diesem Zwecke angefertigten Probiiergehänge mit sehr schmaler Pfanne, die man auf der Schneide vor- und zurückschieben kann. Zeigt sich dabei kein Unterschied in der Einstellung der Wage, so ist sie von diesem Fehler frei. Diese Methode dürfte sich für die Praxis am meisten empfehlen, da sie leicht ausführbar ist.

Um bei den Wägungen den Gebrauch von Gewichtsstücken unter 1 cg vermeiden zu können, bedient man sich des von Berzelius angegebenen Milligrammhakens, d. i. eines aus Draht hergestellten Laufgewichtes von 1 cg Gewicht, welches man rittlings auf den in zehn gleiche Längsteile geteilten Wagebalkenarm aufsetzt. Befindet sich dieser Milligrammhaken auf dem ersten, zweiten, dritten usw. Teilstriche, von der Mittelschneide an gerechnet, so ersetzt er dort ein auf die Wagschale gelegtes Gewicht von ein, zwei, drei usw. Milligramm. Die Unterabteilungen können dann noch weiter geschätzt werden.

Strenge genommen sollte der Milligrammhaken auf der Verbindungslinie der Schneiden aufgehängt werden, weshalb auch bei manchen Wagen ein eigens hierzu bestimmtes, an den Wagebalken befestigtes Reiterlineal vorhanden ist. Dasselbe braucht übrigens nicht die ganze Länge des Balkens zu besitzen, falls nur das Gewicht des zugehörigen Milligrammreiters so

¹⁾ Eine dritte auf Anwendung der Anlegelibelle beruhende liefert nicht genügende Resultate.

²⁾ Göttingische gelehrte Anzeigen 1837, März 13. Gauss' sämtliche Werke, Band V, S. 511.

³⁾ Prof. Hartig, „Civilingenieur“ 1867.

reguliert wird, daß es, auf den äußersten mit 10 bezeichneten Teilstrich aufgesetzt, einem auf die Schale aufgelegten Zentigrammgewicht äquivalent ist. Man gibt auch manchmal dem Reiter das Gewicht von 5 mg und verschiebt ihn längs des ganzen Balkens, wodurch ebenfalls eine Belastungsdifferenz von 10 mg erzielt wird.

Die Verschiebung und Abnahme des Reiters erfolgt entweder mit Pinsel oder Pinzette oder, was bei genaueren Wagen immer der Fall ist, durch eine eigene von der Außenseite des Kastens in Bewegung zu setzende Vorrichtung, die Reiterverschiebung, welche das Öffnen des Wagekastens während des letzten Auswägens vermeiden läßt. Dieselbe besteht aus einer oberhalb des Balkens oder des Reiterlineals parallel mit diesem verschiebbaren und um seine Achse drehbaren massiven oder hohlen Messingstange, welche die Seitenwand des Kastens durchsetzt und in passender Weise geführt ist. Ihr äußeres Ende trägt einen geränderten Knopf, ihr inneres Ende einen Seitenarm mit seitlich hervorragendem Stifte, mittels welchem man in die Öse des Milligrammreiters eingreifen und denselben darauf abheben kann, indem man den Knopf passend dreht. Auf analoge Weise erfolgt das Wiederaufsetzen des Reiters an anderer Stelle. Bei manchen Wagen ist diese Einrichtung noch dahin vervollkommnet, daß die Bewegung des den Reiter abhebenden Stiftes in genau senkrechter Richtung (statt in einem Bogen) erfolgt. Sehr bequeme Reitervorrichtungen hat Nemetz in Wien an seinen Wagen angebracht, welche das Herabfallen des Reiters unmöglich machen und die Verschiebung erleichtern. Auf jeden Fall soll dafür Sorge getragen sein, daß die Bewegung des Reiterträgers gehemmt wird, bevor er auf den Balken aufschlagen oder den Reiter zu weit abheben würde.

Die Fig. 202 zeigt zwei einfache Reiterverschiebungen auf beiden Seiten des Balkens.

Zum Schlusse wollen wir erwähnen, daß es Wagen gibt, welche kunstreiche Mechanismen enthalten, durch welche man aus Distanz, ohne den Kasten zu öffnen, die aufgelegten (zu vergleichenden) Gewichtsstücke vertauschen kann¹⁾, ja auch solche, welche eine vollständige Abwägung mit vielen Gewichtsstücken in einem luftleer gepumpten Kasten auszuführen gestatten²⁾. Endlich sei noch einer neuestens konstruierten Vorrichtung von Rueprecht gedacht³⁾, welche unterhalb des Bodens des Wagekastens angebracht werden kann, durch welche ein auf die Schale gesetzter Körper sofort annähernd abgewogen wird, so daß man sogleich weiß, welche größeren Gewichtsstücke aufzusetzen sind, und keine Zeit mit dem Probieren derselben verliert — ein Vorteil, der beim Wägen hygroskopischer Körper besonders hervortritt.

§ 69. Gebrauch der Wage. Die Aufstellung der Wage hat auf einer vor Erschütterungen möglichst gesicherten Unterlage, am besten auf einer an die Mauer befestigten horizontalen Steinplatte zu geschehen. Da-

¹⁾ Eine solche Wage von Rueprecht in Wien dient im Bureau des internationalen Maß- und Gewichtskomitees in Paris zur Vergleichung der Kilogramm-etalons. Sie findet sich beschrieben und abgebildet in den *Travaux et Mémoires* dieses Komitees, Band I.

²⁾ Siehe über die Vakuumwage von Stückrath den Bericht über die wissenschaftlichen Instrumente der Berliner Gew.-Ausst. 1879 von L. Löwenherz, S. 186.

³⁾ Nach brieflicher Mitteilung des Erfinders.

bei ist insbesondere noch Sorge zu tragen, daß die Wage nicht der einseitigen Erwärmung von seiten des Ofens oder des direkten Sonnenlichtes ausgesetzt sei¹⁾. Sind die Schneiden der Wage von Stahl, so ist alles sorgfältig zu meiden, was dieselben zum Rosten veranlassen könnte. Das Lokal soll daher möglichst trocken sein, und es dürfen in demselben keinerlei Objekte aufbewahrt werden, welche saure Dämpfe, wenn auch nur in geringer Menge, entwickeln (Reagenzien, galvanische Batterien, Lötlwasser). Um die Luft im Wagekasten trocken zu erhalten, stellt man ein Gefäß mit hygroskopischen Substanzen hinein. Es empfiehlt sich dazu besser Ätzkalk als Chlorcalcium, weil letzteres durch Dissoziation Spuren von Salzsäure entwickeln kann. Bei Anwendung des ersteren muß auf dessen Volumzunahme Rücksicht genommen werden.

Die Aufstellung mittels der Fußschrauben des Kastens soll so geschehen, daß der arretierte Balken horizontal steht. Man stellt meistens mittels eines Senkels oder einer Libelle, welche vom Mechaniker angebracht sind; diese Hilfsmittel müssen daher so adjustiert sein, daß beim Einspielen des Senkels oder der Libelle die Arretierung dem Balken eine horizontale Lage verschafft. Kleine Abweichungen von dieser Bedingung bringen jedoch keinen Nachteil. Daß unter allen Umständen bei arretiertem Balken die Zunge auf den mittleren Teilstrich der Skala zeigen soll, versteht sich von selbst. Vor jedesmaligem Aufsetzen oder Abnehmen von Gewichten muß die Wage arretiert werden.

Vor dem Wägen muß mittels eines feinen Pinsels der auf Balken, Gehängen und Schalen abgelagerte Staub vorsichtig entfernt werden. Da dies nicht auf beiden Seiten in vollkommen gleicher Weise möglich ist und insbesondere auch die Schalen infolge des Gebrauches ihr Gewicht verändern, so wird die Zunge der Wage, wenn letztere auch ursprünglich aufs genaueste rektifiziert worden war, bei unbelasteten Schalen im allgemeinen nicht mehr auf die Mitte der Skala einspielen. Soll daher eine sog. einfache Wägung vorgenommen werden, bei welcher der abzuwägende Körper auf die eine Seite, die Gewichte auf die andere Seite gesetzt werden, bis die Zunge einspielt, so muß vorher die Abweichung der Zunge durch eine der hierzu vorhandenen Vorrichtungen (drehbare Fahne, Laufgewichtchen) beseitigt werden.

Wägt man nach der unten beschriebenen Tariermethode oder der Methode der Doppelwägung, so entfällt die Notwendigkeit dieser Regulierung. Sie entfällt auch dann, wenn der abzuwägende Körper in einem Gefäße gewogen werden soll, welches man dann vorher auf die Schale setzt und durch Gewichte auf der anderen Seite bis zum Einspielen der Zunge austariert.

Bestimmung des Ruhepunktes. Es wäre zu zeitraubend, die Wage jedesmal so lange schwingen zu lassen, bis sie zur Ruhe kommt. Man beobachtet vielmehr die Ausschläge auf beiden Seiten. Bei minder genauen Wägungen nimmt man an, daß der Ruhepunkt der Zunge in der Mitte zwischen zwei aufeinander folgenden Umkehrpunkten gelegen sei. Da die

¹⁾ Wie wichtig es ist, den Wagebalken vor einseitigen Temperaturänderungen zu bewahren, geht daraus hervor, daß bei einem Balken aus Messing, dessen Ausdehnungskoeffizient $\lambda = 0,000018$ ist, bei einer Belastung von 1 kg eine Temperaturdifferenz der Balkenarme von nur $\frac{1}{10}$ Grad bereits einen Wägefehler von 1,8 mg veranlaßt.

Amplitude der Schwingungen fortwährend abnimmt, so ist dies nicht genau richtig, und deshalb leitet man den Ruhepunkt aus einer ungeraden Anzahl von beobachteten Umkehrpunkten ab, indem man von der jedenfalls nahe richtigen Annahme ausgeht, daß die Amplituden um gleiche Differenzen abnehmen.

Ist die Mitte der Skala mit Null bezeichnet, so rechnet man zweckmäßig die Ausschläge nach der Seite, wo die Gewichte aufgelegt werden, als positiv, die auf der anderen Seite als negativ. Die Umkehrpunkte jeder Seite werden zuerst für sich zu einem arithmetischen Mittel vereinigt und dann aus beiden Mitteln wieder (unter Rücksicht auf das Zeichen) das Mittel genommen. Ein positives Resultat deutet an, daß der abzuwägende Körper mehr wiegt als die aufgelegten Gewichte.

Angenommen, man beschränke sich, was in der Regel genügt, auf die Beobachtung der ersten drei Umkehrpunkte l_1, r_1, l_2 . Man rechnet die Ruhelage $R = \frac{1}{2} \left(\frac{l_1 + l_2}{2} + r_1 \right) = \frac{l_1 + l_2 + 2r_1}{4}$. Man habe z. B. nach Auflegung von 21,25 g an Gewichtsstücken und Aufsetzung des Reiters auf den Punkt 5 die Umkehrpunkte erhalten:

Auf Seite der Last	der Gewichte
$l_1 = - 3,6$	$r_1 = + 4,1$
$l_2 = - 3,4$	

so ist die Ruhelage

$$R = \frac{- 3,6 - 3,4 + 8,2}{4} = \frac{1,2}{4} = 0,3.$$

Daraus ersieht man, daß das Gewicht 21,255 g noch etwas zu klein ist. Statt aber den Reiter so lange hin und her zu schieben, bis der Ruhepunkt Null herauskommt, ermittelt man die dem Ruhepunkte Null zugehörige Gewichtsmenge durch Interpolation mit Hilfe eines zweiten Schwingungsversuches, bei welchem der Milligrammreiter um einen Teilstrich nach außen, also auf 6, geschoben wird.

Angenommen, man erhalte dann den Ruhepunkt $- 0,6$, so weiß man, daß Einem Milligramm eine Verschiebung des Ruhepunktes von 0,9 Skalenteil entspricht, daß man also nur $\frac{1}{3}$ mg hätte hinzufügen müssen, um den Ruhepunkt Null zu erhalten. Das gesuchte Gewicht wäre also gleich 21,2553 g.

Viel bequemer und weniger zu Rechenfehlern Anlaß gebend ist es, wenn man die Mitte der Skala statt mit Null mit Zehn bezeichnet und alle Umkehrpunkte positiv rechnet. Man kann dann einfach in der Weise verfahren, daß man die ersten drei Ausschläge untereinander anschreibt, wobei man aber gleich den mittleren verdoppelt. Die Summe gibt dann die vierfache Ruhelage. Obiges Beispiel würde sich dann folgendermaßen gestalten:]

$l_1 = 6,4$	$r_1 = 14,1$	$6,4$
		$28,2$
$l_2 = 6,6$		$6,6$
		$41,2$
		$R = 41,2 : 4 = 10,3.$

Da es gleichgültig ist, nach welchem Maße man die Ausschläge mißt, so kann man, solange die Anzahl der drei Umkehrpunkte beibehalten wird,

auch das Dividieren durch 4 unterlassen und festhalten, daß die Belastungen einander gleich sind, sobald die Summe 40 herauskommt.

Wägung nach der Tariermethode. Man setzt auf die eine Schale (meist auf die rechtsseitige, weil man mit der rechten Hand leichter manipuliert) den abzuwägenden Körper, auf die andere (linksseitige) Schale eine Tara, zu welcher man am bequemsten einen zweiten Gewichtssatz benutzt, der nicht genau adjustiert zu sein braucht. Die letzte Ausglei chung geschieht dann mittels des Reiters auf der rechten Seite, den man so lange verschiebt, bis angenähert der Ruhepunkt 0 (bzw. 10 oder 40) herauskommt. Derselbe wird notiert, ebenso die Reiterstellung.

Hierauf vertauscht man den abzuwägenden Körper mit genauen Gewichtsstücken und verschiebt den Reiter wieder, bis nahezu derselbe Ruhepunkt wie früher erscheint; dieser, sowie die Reiterstellung werden samt den Gewichten notiert. Endlich verschiebt man noch den Reiter um einen Teilstrich, so daß ein Ruhepunkt eintritt von solcher Lage, daß der erstgefundene zwischen dem zweiten und dritten zu stehen kommt. Aus diesen beiden ermittelt man durch Interpolation jene Stellung des Reiters, welche wiederum den ersten Ruhepunkt herbeiführen würde. Bei dem folgenden Beispiele wird angenommen, daß man die Mitte der Skala mit 10 bezeichnet habe und die Zahl 40 als zugehörigen Ruhepunkt nehme.

Linksseitige Schale	Rechtsseitige Schale	Reiter	Ruhepunkt
I. Tara	abzuwägender Körper	3 mg	40,5
II. Dieselbe Tara	Gewichte = 302,53 g	7 "	41,5
III. " "	" = 302,53 "	8 "	40,1

Aus II. und III. berechnet man die Reiterstellung für den Ruhepunkt in I. wie folgt:

$$= 7 \text{ mg} + \frac{41,5 - 40,5}{41,5 - 40,1} = 7 + \frac{1}{1,4} = 7,7 \text{ mg } ^1).$$

¹⁾ Da Wägungen zu den häufigsten Arbeiten des Physikers gehören, so lohnt es sich, dieselben so bequem als möglich einzurichten. Man ersetzt dann die obige Interpolationsrechnung mit Vorteil durch ein graphisches Verfahren. Eine kleine abwischbare Tafel enthält ein passendes Quadratnetz eingraviert. Auf der Abszisse trägt man die Reiterstellungen in II. und III. auf, dazu die Ruhepunkte als Ordinaten. Diese werden (etwa durch Anlegen des Schreibstiftes) geradlinig verbunden. Wo diese Gerade die Ordinatenhöhe des Ruhepunktes I. besitzt, zeigt die zugehörige Abszisse die gesuchte Reiterstellung. Hätten die Wagen bei allen Belastungen dieselbe Empfindlichkeit, so könnte das Verfahren sehr vereinfacht werden, indem man die Bezifferung der Skala so einrichtet, daß sie die Gewichte angibt, welche noch zugelegt werden müßten, um die Gleichheit der Belastungen herzustellen, bzw. den Ruhepunkt auf 0 zu bringen. Man hätte dann nur jedesmal den Betrag der aufgelegten Gewichtsstücke, die Reiterstellung und die aus den Schwingungen abgeleitete Ruhelage zu addieren. Da aber die Abweichungen der Ruhelage vom Nullpunkte zwar dem Übergewichte proportional, aber außerdem von der Belastung abhängig sind, so ist dies im allgemeinen nicht ausführbar. Das bequemste Verfahren besteht dann darin, sich für jede Wage ein Täfelchen zu berechnen, welches für eine Reihe passend absteigender Belastungen die Übergewichte angibt, welche den verschiedenen Werten der Ruhelagen entsprechen. Natürlich behält dieses Täfelchen nur so lange Gültigkeit, als die Empfindlichkeit der Wage nicht geändert wird. Will man daher ganz sicher gehen, so ist das oben beschriebene Verfahren der Interpolation aus zwei benachbarten Ruhelagen immer das empfehlenswerteste.

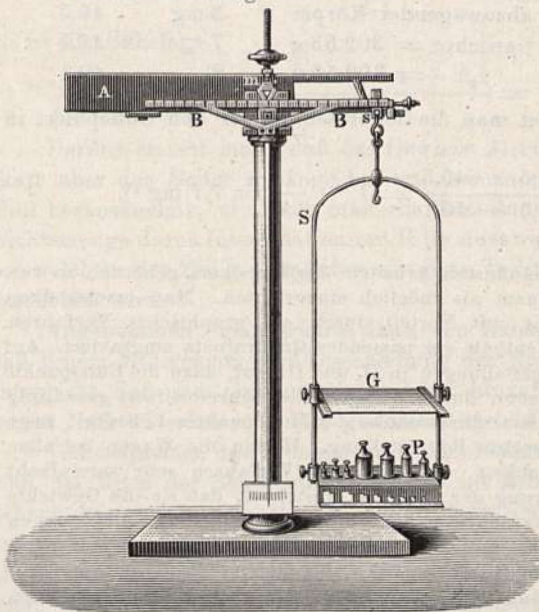
Folglich ist das gesuchte Gewicht $= 302,5377 - 0,003 = 302,5347$ g.
Dieses Verfahren ist frei von dem Einfluß der Ungleicharmigkeit und des ungleichen Gewichtes der Arme oder Schalen.

Doppelwägung. Man legt einmal den abzuwägenden Körper auf die linke Schale, die Gewichte auf die rechte und sucht den Ruhepunkt; dann legt man den Körper auf die rechte Schale und ermittelt die Gewichte, welche auf die linke Schale gelegt, denselben Ruhepunkt hervorbringen. Das gesuchte Gewicht ist dann, streng genommen, gleich dem geometrischen Mittel der beiden beobachteten Gewichte, wofür aber stets mit vollkommen genügender Annäherung das arithmetische Mittel gesetzt werden kann. Dieses gibt dann das gesuchte Gewicht unabhängig von der Ungleicharmigkeit der Balkenarme und dem ungleichen Gewichte der Schalen usw.

Von den beiden erwähnten Methoden wird die letztere häufig als die vorzüglichere erklärt; wir möchten aber in den meisten Fällen der Tariermethode den Vorzug geben, da sie nicht bloß bequemer, sondern auch schneller in der Ausführung ist und deshalb auch bei Änderungen des Auftriebes in der Luft genauere Resultate verspricht.

§ 70. **Andere Wagenkonstruktionen.** Substitutionswage. Reimann hat die in Fig. 216 dargestellte besondere Form einer Wage angegeben, welche die Wägung nach der Tariermethode in eigentümlicher

Fig. 216.



gegeben, welche die Wägung nach der Tariermethode in eigentümlicher (im Prinzip übrigens schon von F. E. Neumann¹⁾ angegebener) Weise gestattet. Dieselbe besitzt nur eine Schale *S* mit zwei Etagen, wovon die untere *P* zur Aufnahme des ganzen Gewichtssatzes und die obere *G* für den abzuwägenden Körper bestimmt ist. Das Gegengewicht zu der konstanten Belastung durch den Gewichtssatz bildet die am anderen Balkenarme angebrachte Masse *A*. Der Balken *BB* ist auch zur Aufnahme eines Reiters eingerichtet. Hat man den abzuwägenden Körper auf

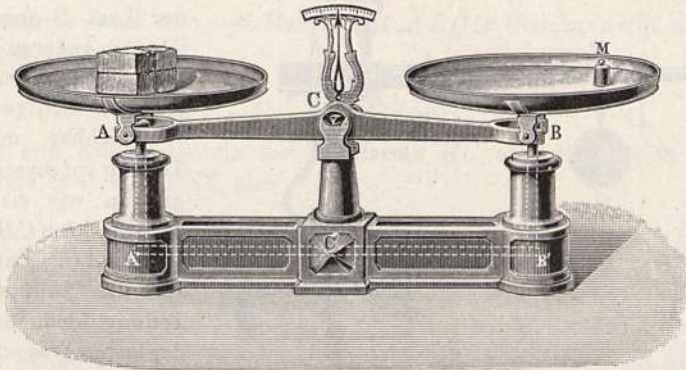
die Schale *G* gebracht, so nimmt man vom Gewichtssatz *P* so viele Stücke weg, bis wieder Gleichgewicht eintritt, und erhält so das gesuchte Gewicht. Die Wage bleibt also, wie schon bemerkt, stets gleich belastet. Diesen Vorteil und diese ganze Art der Wägung könnte man selbstverständlich auch mit

¹⁾ C. Pape, Einleitung in die theoretische Physik von F. E. Neumann, S. 115. Leipzig bei Teubner, 1883.

der gewöhnlichen gleicharmigen Wage erzielen, wenn man ebenfalls den ganzen Gewichtssatz auf die eine Wagschale bringen und den Körper unter Fortnahme der entsprechenden Gewichtsstücke auf dieselbe Schale legen würde. Dazu wird aber meist der Platz fehlen.

Roberval-Wage (Tisch- oder Tafelwage, Fig. 217). Es ist diese Wage eine besondere Form der gleicharmigen Wage, die bezweckt, die beiden Schalen oben ganz frei und doch stets in horizontaler Lage zu haben. Zu dem Ende sind ihre vertikalen Tragstangen, wie dies die Abbildung eines rohen Modelles, Fig. 218, zeigt, in zwei untereinander liegende parallele Wag-

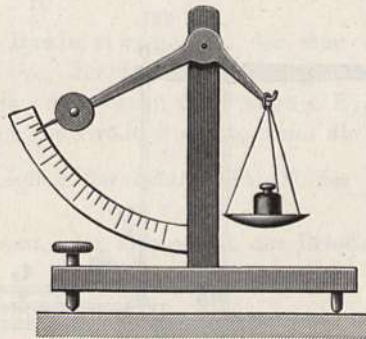
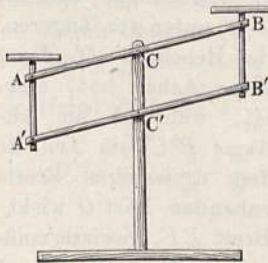
Fig. 217.



arme AB und $A'B'$ eingelenkt, die bei C und C' ihre Mittelachsen haben. Ein am oberen Arme angebrachter Zeiger, der ebenfalls auf einen Gradbogen weist, läßt die normale Gleichgewichtslage ablesen. Da hier für den zweiten Wagarm noch drei weitere Achsen hinzukommen, so kann eine solche Wage selbstverständlich nicht so empfindlich wie eine gewöhnliche Wage sein.

Fig. 219.

Fig. 218.



Sortier- oder Briefwage. Um rasch Gegenstände verschiedenen Gewichtes nach gewissen Klassen zu sortieren, benutzt man die in der Fig. 219 schematisch dargestellte Sortier- oder Briefwage, da sie auch zur raschen Wägung der Briefe in dieser oder einer verwandten Form dient. Der dem Wagschalenarme gegenüberstehende Arm der Wage ist nach unten gebogen, mit einem Gegengewichte versehen und weist zugleich mit seiner Spitze als Zeiger auf einen Gradbogen. Sowie nämlich dieser Arm beim Beschweren

der Wagschale steigt, wirkt das Gegengewicht in einem größeren Abstände, wodurch wieder Gleichgewicht hergestellt wird. Die Teilung am Gradbogen wird empirisch so angefertigt, daß die Teilstriche unmittelbar das auf die Wagschale gelegte Gewicht in Grammen angeben.

Schnellwage oder Römische Wage. Zu den ungleicharmigen Wagen gehört auch die uralte Schnellwage oder Römische Wage, wie sie die

Fig. 220.

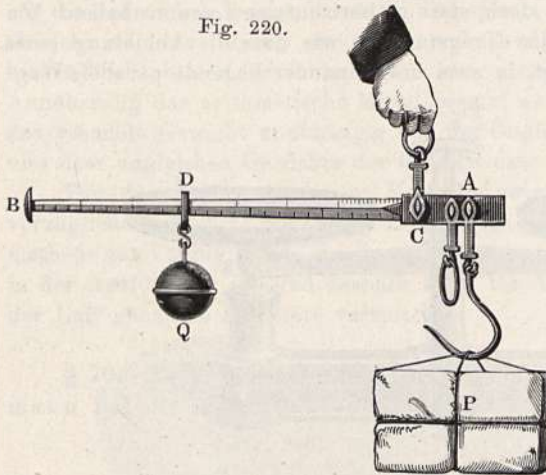


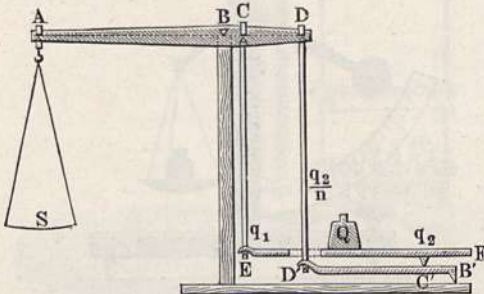
Fig. 220 zeigt. Der zweiarmige Hebel hat seine Achse bei C, während bei A die Wagschale oder ein Haken zur Aufnahme der Last P angebracht ist. Am anderen prismatisch gestalteten Arme B ist ein Laufgewicht Q verschiebbar, und eine Teilung auf diesem Arme gibt an, wie viele Male der Hebelarm CD größer ist als AC. Entspricht also der Nullpunkt der Teilung dem Gewichte der leeren Wagschale, so

wird, wenn Q auf Teilstrich n steht, die Last P dem n-fachen Gewichte von Q entsprechen.

Brückenwage. Eine sehr häufig gebrauchte, wichtige Anwendung der ungleichen Hebel stellt die Brückenwage dar, deren Prinzip wir am besten an der schematischen Fig. 221 klar machen können.

Am längeren Arme des Wagbalkens ABCD ist bei A die Wagschale S für die Gewichte angehängt, die also am Hebelarme AB wirkt. Jenseits der

Fig. 221.



Achse B sind am kürzeren Arme zwei Stangen bei C und D angehängt, von welchen DD' unten am längeren Arme des Hebels B'D', der bei B' seine Achse hat, eingelenkt ist, während am kürzeren Arme B'C' ein Teil der auf dem dreieckigen Brette EF ruhenden Last Q wirkt. Das Brett EF, gewissermaßen die andere Wagschale der Wage,

hat also bei C' seinen einen Stützpunkt (oder, wie wir sehen werden, zwei der Basis des Dreiecks entsprechende Stützpunkte) und bei E den zweiten, indem dort an der Spitze des Dreiecks das untere Ende der Stange CE eingelenkt ist.

Setzen wir nun kurz die Hebelarme:

$AB = l$, $BC = m$, $BD = o$, $B'D' = o'$, $B'C' = m'$ und bezeichnen das auf die Schale S gelegte Gewicht mit P, die Last auf dem Brette EE

oder der zweiten Wagschale mit Q und die Distanzen dieser Last vom Stützpunkt bei E und bei C' mit r und s , so sind die Teilkräfte q_1 und q_2 , mit welchen die Last Q bei E auf die Stange EC und bei C' auf den unteren Hebel $D'B'$ drückt, gegeben durch:

$$q_1 = Q \frac{s}{r+s}, \quad q_2 = Q \frac{r}{r+s};$$

ferner ist die Kraft, welche am Hebel $D'B'$ bei D' der Kraft q_2 das Gleichgewicht hält bzw. an der Stange DD' wirken wird:

$$q_2' = \frac{m'}{o'} \cdot q_2 = Q \cdot \frac{r}{r+s} \cdot \frac{m'}{o'}.$$

Demnach wird nun am Haupthebel $ABCD$ Gleichgewicht stattfinden, wenn man hat:

$$P \cdot l = m q_1 + o q_2' = Q \left[m \frac{s}{r+s} + o \frac{m'}{o'} \frac{r}{r+s} \right].$$

Ist nun das Verhältnis der Hebelarme BC und BD gleich dem der Hebelarme $B'C'$ und $B'D'$, also:

$$\frac{m}{o} = \frac{m'}{o'} \quad \text{oder} \quad o = m \frac{o'}{m'},$$

so wird einfach

$$P \cdot l = Q \cdot m.$$

Es hängt also das Verhältnis $\frac{P}{Q}$ bloß von demjenigen der Hebelarme $\frac{m}{l}$, d. h. dem Arme der Wagschale l und dem kurzen Arme m jenseits, an welchem die Stange CE wirkt, ab, und ist ganz unabhängig von der Stelle, an welcher die Last Q auf die Brücke aufgesetzt wird. Ist also der Arm l 10 mal länger als m , so hat man

$$P = \frac{Q}{10},$$

und erhält also dann die sogenannte Dezimalwage, bei der man auf die Wagschale S zum Gleichgewicht nur $\frac{1}{10}$ der Last Q aufzulegen braucht. Aus den obigen Gleichungen folgt auch, daß, wenn die Stange CE , welche das Brett an der einen Seite hält, um die Größe x sinkt, dann die Stange DD' am Hebel BD um $x \frac{o}{m}$ und folglich der Stützpunkt C' des Brettes am Hebel $D'B'$ um $x \frac{o}{m} \cdot \frac{m'}{o'}$ sinken wird, oder also gemäß der Relation

$$\frac{m'}{o'} = \frac{m}{o}$$

ebenfalls um x ; das Brett bleibt sonach, wie es auch das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten verlangt, bei der Bewegung der Wage horizontal, wenn es anfänglich diese Lage hatte.

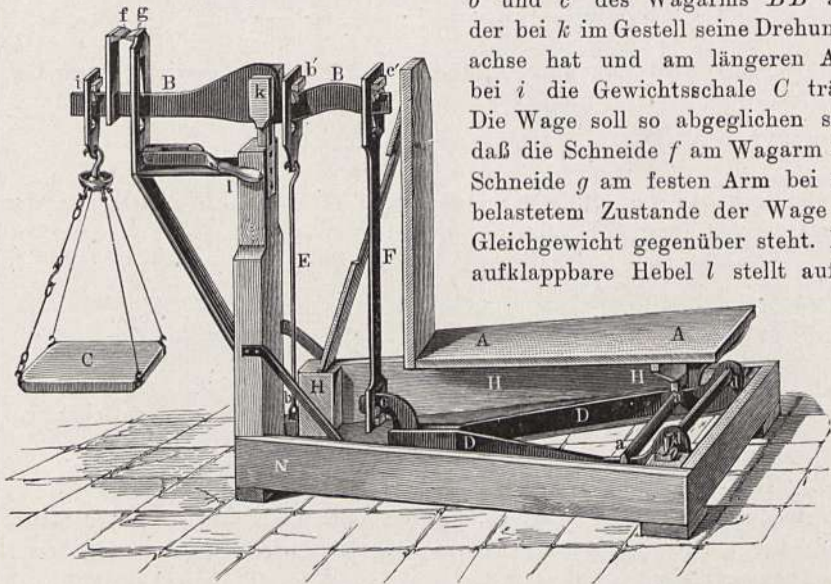
Die Fig. 222 gibt eine perspektivische Ansicht einer Dezimalwage, wie sie 1823 von Quintenz in Straßburg angegeben und konstruiert worden ist.

Das Brett A , welches zur Aufnahme der Last dient, ist auf einem dreiseitigen hölzernen Rahmen H befestigt, von dem die Figur ebenso wie vom

Brett *A* nur die hintere Hälfte darstellt, um den unteren Mechanismus zu zeigen.

Der Rahmen *H* ruht nämlich einerseits auf der langen Schneide *aa* auf und hängt andererseits mit einem Haken in der Öse *b* der Stange *E*. Die Schneide *aa* ist auf den Schenkeln des eisernen Dreiecks *DD* befestigt, dessen Basis mit den Schneiden *dd* als Achsen auf festen Pfannen am Gestell *N* aufruhet. An der Spitze des Dreiecks ist die Nase *c* mit Schneide befestigt, die in eine Pfanne der Stange *F* eingehängt ist. Die Stangen *E* und *F*

Fig. 222.



ruhen mit Pfannen auf der Schneide *b'* und *c'* des Wagarms *BB* auf, der bei *k* im Gestell seine Drehungsachse hat und am längeren Arm bei *i* die Gewichtsschale *C* trägt. Die Wage soll so abgeglichen sein, daß die Schneide *f* am Wagarm der Schneide *g* am festen Arm bei unbelastetem Zustande der Wage im Gleichgewicht gegenüber steht. Der aufklappbare Hebel *l* stellt aufge-

schlagen eine Arretierung der Wage dar, indem er durch Heben des Wagschalearms das Brett *A* so weit sinken macht, daß es sich auf den Rand des Gestelles *N* auflegt. Zur Schonung der Schneiden wird der Hebel erst heruntergeschlagen, wenn auf die Schale *C* bereits so viel Gewichte aufgelegt worden sind, daß sie der Last auf der Brücke *A* nahezu das Gleichgewicht halten und man dann nur wenig hinzuzulegen oder fortzunehmen hat, um die beiden Schneiden *f* und *g* zum Einstehen zu bringen.

Eine für den Gebrauch wohl etwas bequemere und kompändiosere Form der Brückenwage hat Schönemann 1854 angegeben¹⁾.

§ 71. Einfluß vertikaler Beschleunigung auf den Druck oder Zug einer Masse; Poggendorffs Wage. Denken wir uns zwei Körper *A* und *B* (Fig. 223) aufeinander gelegt. Die Masse des oberen Körpers *A* betrage *m*, folglich der Druck desselben auf den unteren Körper im Ruhezustande *mg*, wenn *g* die Acceleration der Schwere ist. Dieser selbe Druck wird gemäß dem Prinzip der Wechselwirkung (§ 44) auch auf den oberen

¹⁾ Denkschriften der math.-naturforschenden Klasse der Wiener Akademie VIII, 1854, Abh. von Nichtmitgliedern.

Körper ausgeübt. Um dies besser einzusehen, können wir uns denken, daß zwischen beide Körper eine Spiralfeder gelegt werde (Fig. 224). Es ist klar, daß dieselbe, indem sie zusammengedrückt wird, nach unten und nach oben den gleichen Druck ausüben muß¹⁾, welchen die direkt aufeinander gelegten Körper gegenseitig ausüben.

Der untere Körper drückt offenbar nur deshalb auf den oberen, weil er ihn am Fallen hindert; wenn also der untere Körper selbst fällt, so hindert er auch den oberen nicht mehr am Fallen, und somit hört auch der gegenseitige Druck während des freien Fallens beider Körper auf.

Um auch dies klarer einzusehen, denken wir uns zuerst beide Körper vertikal übereinander mit einem Abstände zwischen beiden festgehalten und dann zu gleicher Zeit frei fallen gelassen. Beide fallen gleich schnell; ihr Abstand bleibt daher während des Fallens immer gleich groß. Würden wir daher beide Körper vor dem Fallenlassen durch eine nicht gespannte Spiralfeder

Fig. 223.



Fig. 224.

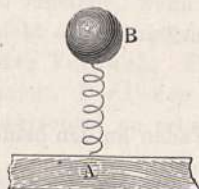
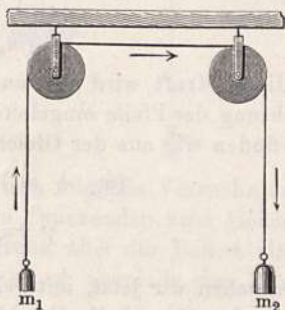


Fig. 225.



feder verbunden haben, so würde diese Feder auch während des Fallens keinen Druck und keinen Zug erleiden; die beiden Körper würden daher auch dann aufeinander keine Kraft ausüben, wenn sie von vornherein unmittelbar miteinander in Berührung ständen.

Was wird aber erfolgen, wenn wir den unteren Körper nicht mit der Acceleration des freien Falles g , sondern mit einer kleineren γ nach abwärts bewegen? Der untere Körper hindert dann den oberen Körper zwar nicht vollständig, zwingt ihn aber doch, eine um $g - \gamma$ kleinere Beschleunigung anzunehmen als er bei voller Freiheit annehmen würde. Es ist unschwer einzusehen, daß unter diesen Umständen der gegenseitige Druck die Größe $m(g - \gamma)$ haben wird. Für $\gamma = 0$, d. h. für den Fall der Ruhe, geht dieser Ausdruck in mg über, für den Fall $\gamma = g$, d. h. für den freien Fall, wird er $= 0$. Würden wir $\gamma > g$ werden lassen, so würde der Druck $= m(g - \gamma)$ negativ, d. h. aus dem Druck wird ein Zug, der die Körper trennt oder zu trennen strebt, wenn sie zusammenhängen.

Geben wir endlich dem unteren Körper eine Beschleunigung nach aufwärts, d. h. nehmen wir γ negativ, so wird der gegenseitige Druck $= m(g + \gamma)$, also größer als während der Ruhe.

Fassen wir dies zusammen, so können wir sagen: der Druck, den ein Körper infolge der Schwere auf seine Unterlage ausübt und seinerseits von

¹⁾ Das Gewicht der Spiralfeder wird hier vernachlässigt.

der letzteren erfährt, ist keine unter allen Umständen konstante Größe, sondern abhängig von dem Werte der Beschleunigung, mit welcher der Körper samt der Unterlage sich der Erde nähert oder von ihr entfernt. Der Druck ist nämlich nicht bloß proportional der Masse des Körpers, sondern auch dem Unterschied zwischen der Beschleunigung des freien Falles und der Beschleunigung der wirklich stattfindenden Bewegung. Dasselbe gilt natürlich auch für den Zug von Körpern, welche vertikal übereinander zusammenhängen.

Denken wir uns jetzt einen Faden horizontal über zwei Rollen gelegt und an dem einen Ende mit der Masse m_1 , an dem anderen mit der Masse m_2 belastet (Fig. 225).

Ist die Acceleration der Schwere $= g$, so sind die Kräfte, mit welchen die ruhig hängenden Massen m_1 und m_2 den Faden nach der einen und nach der anderen Seite zu ziehen suchen, gegeben durch

$$m_2 g \text{ und } m_1 g.$$

Es sei nun $m_2 > m_1$, mithin überwiegt die Kraft auf Seite der Masse m_2 um den Betrag

$$(m_2 - m_1) g.$$

Mit dieser Kraft wird also auch eine Bewegung der Massen m_1 und m_2 in der Richtung der Pfeile eingeleitet werden. Die dabei eintretende Beschleunigung γ finden wir aus der Gleichung:

$$(m_1 + m_2) \gamma = (m_2 - m_1) g$$

$$\gamma = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g.$$

Untersuchen wir jetzt, mit welcher Kraft der Faden an den beiden Enden gespannt wird, während die Beschleunigung γ dauert.

Die Masse m_1 wird von der Schwere mit der Acceleration g nach abwärts gezogen, gleichzeitig wirkt die oben berechnete resultierende Beschleunigung γ nach aufwärts, folglich ist die Fadenspannung auf der linken Seite $= m_1(g + \gamma)$. Auf der rechten Seite findet man für dieselbe auf ähnliche Weise den Wert $m_2(g - \gamma)$.

Diese beiden Fadenspannungen müssen nun offenbar einander gleich sein gemäß dem Prinzip der Wechselwirkung. Dabei darf man aber nicht die Kräfte, welche den Faden während der Bewegung spannen, verwechseln mit der Kraft, die den Faden samt den Massen in Bewegung setzt.

In der Tat erhält man für die beiden Fadenspannungen, wenn man für γ seinen Wert untersetzt, ein und denselben Wert, nämlich:

$$\frac{2 g m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Mit dieser selben Kraft werden die Achsen der beiden Rollen senkrecht nach abwärts gedrückt, während die Bewegung vor sich geht¹⁾.

Würde man dagegen die Bewegung hindern, indem man den Faden zwischen den Rollen festhält, so wären die beiden Fadenspannungen, also auch die Vertikaldrucke auf die Rollennachsen nicht gleich groß, sondern hätten die oben angegebenen Werte $m_1 g$ und $m_2 g$.

¹⁾ Die Richtigkeit dieser Behauptung wird später bei Besprechung der fixen Rolle erwiesen werden.

Um das hier Vorgetragene experimentell zu bestätigen, eignet sich vortrefflich der unter dem Namen Poggendorffsche Wage (oder Poggendorffsche Fallmaschine) bekannte, bestehend schematisch abgebildete Apparat, Fig. 226.

Der Wagebalken besteht aus zwei parallelen Stäben, welche durch drei Querstäbe in der Mitte und an den beiden Enden verbunden sind. Der mittlere Querstab dient zugleich als Mittelachse für den Balken und als Achse für die Rolle *C*. Von den Querstäben an den Enden dient der eine ebenfalls als Achse einer Rolle *B*, der andere, *A*, trägt ein Gehänge mit Schale *S*.

Der über die beiden Rollen gelegte starke Faden kann mit zwei Massen, m_1 und m_2 , belastet werden, welche die Form von Gefäßen besitzen, um Zulagegewichte aufnehmen zu können. Es ist bequem, wenn das Gehänge mit der Schale links ebensoviel wiegt wie die Rolle *B*, so daß sich also der Balken horizontal einstellt, wenn die Massen

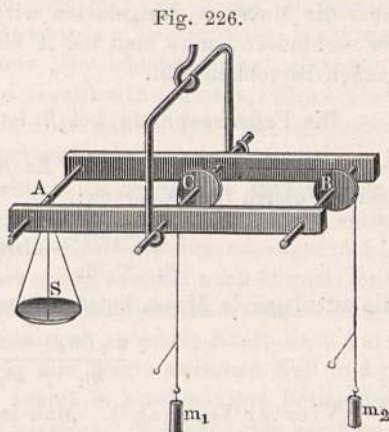


Fig. 226.

m_1, m_2 nicht angehängt sind. Man kann nun folgende Versuche anstellen ¹⁾.

Erster Versuch. Es werden an die Fadenenden zwei gleiche Massen m_1 angehängt. Der Faden bleibt dann in Ruhe, aber der Balken sinkt bei *B*; um ihn horizontal zu erhalten, muß man bei *A* ebenfalls eine Masse = m_1 zulegen.

Zweiter Versuch. An das Fadenende bei *C* wird eine Masse m_1 , an das Fadenende bei *B* eine größere Masse $m_2 = m_1 + q$ angehängt. Um die letztere zu kompensieren, wird auf die Schale *S* eine gleich große Masse aufgelegt. Dann wird zuerst eine am Faden rechts befindliche Schleife an das Zapfende von *B* eingehängt, damit die Masse m_2 noch nicht sinken kann. Es muß dann der Wagebalken horizontal stehen bleiben. Hängt man aber jetzt die Schleife aus (oder brennt sie ab), so beginnt m_2 zu sinken, und sofort steigt der Balken bei *B* in die Höhe. Er wird nämlich bei *B*, wie oben berechnet wurde, nur mit der Kraft $\frac{2 g m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ nach abwärts gezogen, während das Ende *A* mit der Kraft $g m_2$ angezogen wird. Die Differenz dieser Kräfte ist:

$$g m_2 - \frac{2 g (m_1 m_2)}{m_1 + m_2} = \frac{g m_2 (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

Folglich muß an den Faden bei *B* noch eine Masse

$$= \frac{m_2 (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + q) q}{2 m_1 + q}$$

¹⁾ Die ersten drei dieser Versuche sind von W. Barentin quantitativ angestellt und in Poggendorffs Jubelband, S. 213, näher beschrieben. Es wurde dabei zur Kompensation der Reibung und der Trägheit der Rollenmasse noch ein weiteres Zulegegewicht beigefügt. Wegen der richtigen Deutung dieser Versuche vergleiche man Dr. A. Amthors kritische Darstellung in den Sitzungsberichten der Naturw. Ges. Isis in Dresden 1879, S. 32.

hinzugegeben werden, damit während der Bewegung der Massen der Wagebalken im Gleichgewicht bleibe.

Dritter Versuch. An das Fadenende bei B kommt die Masse m_1 , an das Ende bei C die größere Masse $m_2 = m_1 + q$. Die Schale S erhält eine Masse $= m_1$. Es wird zunächst das Sinken von m_2 durch Einhängen der Fadenschleife verhindert. Der Balken stellt sich dann horizontal. Sowie aber die Masse m_2 freigelassen wird, so sinkt der Balken bei B . Um dieses zu verhindern, muß man bei A eine Masse zulegen, welche sich folgendermaßen berechnen läßt.

Die Fadenspannung bei B ist wiederum wie früher $= \frac{2g(m_1 m_2)}{m_1 + m_2}$, die bei A dagegen ist $= m_1 g$. Es muß daher bei A eine Kraft hinzugefügt werden gleich der Differenz:

$$\frac{2g(m_1 m_2)}{m_1 + m_2} - m_1 g = g \frac{m_1(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2},$$

die zuzulegende Masse beträgt demnach:

$$\frac{m_1(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 q}{2m_1 + q}.$$

Vierter Versuch¹⁾. Man legt den Faden nur über die Rolle B allein und hängt an seine beiden Enden die Massen m_1 und $m_2 = m_1 + q$. Man verhindert zuerst das Sinken von m_2 , indem man eine Fadenschleife einhängt. Die Schale S wird mit einer Masse $= m_1 + m_2$ belastet, worauf der Wagebalken sich horizontal stellt. Läßt man nun die Masse m_2 frei, so sinkt sie, während m_1 steigt. Dies hat denselben Effekt, als wenn die Masse $m_2 - m_1 = q$ allein sinken würde. Die Beschleunigung γ , mit der dies geschieht, ist $= \frac{q}{2m_1 + q} g$. Indem die Masse q mit der Beschleunigung γ sinkt, verliert sie an Zugkraft die Größe:

$$\gamma q = \frac{q_2 g}{2m_1 + q},$$

was einem Verluste an Masse $= \frac{q_2}{2m_1 + q}$ gleichkommt.

Man muß also auch der Schale S eine Masse $= \frac{q_2}{2m_1 + q}$ entnehmen, damit während der Bewegung der Balken horizontal bleibt.

Poggendorff hat bei Veröffentlichung dieses sehr instruktiven Apparates das demselben zugrunde liegende Prinzip folgendermaßen ausgesprochen: Das Gewicht eines Körpers ändert sich, wenn er sich vertikal nach aufwärts oder abwärts bewegt, und zwar wird der Körper im ersten Falle schwerer, im letzten Falle leichter.

Allein in dieser Form ist der Satz nicht bloß ungenau, sondern geradezu unrichtig.

¹⁾ E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, S. 192. Dasselbst ist auch eine vollkommener ausgeführte Poggendorffsche Wage abgebildet. Der Verfasser hat statt des Abbrennens der Fadenschleife eine elektromagnetische Auslösung angebracht, welche die Rolle durch elektromagnetische Einwirkung festhält und durch Öffnen eines Stromkontaktes frei läßt.

Es ist klar, daß hier „Gewicht“ nicht als Masse verstanden ist. Definieren wir aber Gewicht als Kraft, mit der der Körper von der Erde angezogen wird, so würde obiger Satz dem Unabhängigkeitsprinzip (§ 45) widersprechen, welches verlangt, daß die Einwirkung einer Kraft auf einen Körper unabhängig sei von dem Bewegungszustande, der vorher in ihm vorhanden ist. Statt „Gewicht“ muß hier Druck auf die Unterlage oder Fadenspannung gesagt werden. Aber auch dann ist der Satz noch unrichtig, da er als Bedingung für die „Gewichtsänderung“ einfach nur Bewegung in vertikaler Richtung ausspricht. Es müßte also auch dann diese „Gewichtsänderung“ eintreten, wenn man den Körper mit konstanter Geschwindigkeit, ohne Beschleunigung bewegen würde. Dies ist aber nicht der Fall; nur eine Beschleunigung kann diese Wirkung hervorbringen.

Um dies einzusehen, fassen wir noch einmal die in Fig. 224 dargestellten, durch eine Spiralfeder verbundenen Körper ins Auge. Dieselben seien ursprünglich in Ruhe, daher die Spirale mit der Kraft mg zusammengedrückt. Wir versetzen nun den Körper A in eine Bewegung vertikal nach abwärts mit konstanter Geschwindigkeit v . Offenbar ist es unmöglich, diese Geschwindigkeit sofort zu erreichen, wenn wir auch eine noch so große Kraft dazu aufwenden. Die Geschwindigkeit muß vielmehr alle Werte zwischen Null und v erst durchlaufen, d. h. der Körper A wird zuerst in beschleunigte Bewegung und dann erst in gleichförmige Bewegung versetzt. Während der beschleunigten Bewegung gilt nun das, was wir oben gezeigt. Je nachdem die Beschleunigung gleich, kleiner oder größer als g ist, wird während dieser ersten Zeit die Spiralfeder entspannt oder zusammengedrückt, oder auseinandergezogen.

Nach Eintritt der konstanten Geschwindigkeit ändert sich der Sachverhalt. Der Körper A hindert von da an wiederum den Körper B am freien Fall, d. h. an Zunahme von Geschwindigkeit, es muß daher wiederum die Feder zunächst zusammengedrückt werden wie während der Ruhe. In Wirklichkeit wird die Feder dabei in schwingende Bewegung um die frühere Ruhelage gelangen.

Denken wir uns jetzt die beiden Körper ohne Spiralfeder direkt im Zusammenhange, so werden sie denselben Druck (bzw. Zug) direkt aufeinander ausüben, den sie vorhin durch die Spiralfeder ausübten. Sobald die Geschwindigkeit konstant geworden, drücken oder ziehen sie sich wie während der Ruhe. Dasselbe gilt bei gleichförmiger Geschwindigkeit vertikal nach aufwärts. Wenn man in einem Aufzuge (Lift) emporsteigt oder niedersinkt, bemerkt man stets nur zu Beginn und am Ende der Fahrt, wo sich die Geschwindigkeiten ändern, eine Wirkung auf das Blut im Gehirn, nicht aber während der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

§ 72. Kraftantrieb, Bewegungsgröße, Arbeit und lebendige Kraft.

Indem wir bei der Darstellung der Bewegungserscheinungen zunächst nur die Raum- und Zeitbeziehungen ins Auge faßten, gelangten wir zu den vier Begriffen: Weg, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung, für welche wir die Gleichungen

$$v = \varphi t, s = \frac{\varphi t^2}{2}$$

feststellten. Aus der letzteren folgt:

$$\varphi s = \frac{\varphi^2 t^2}{2} = \frac{v^2}{2}.$$

Wir können also die Beziehungen dieser vier Größen ausdrücken durch das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} v &= \varphi t \\ \varphi s &= \frac{v^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Nachher führten wir den Begriff der Masse ein. Multiplizieren wir die Gleichungen (1) beiderseits mit m , so kommt:

$$\left. \begin{aligned} m v &= m \varphi t \\ m \varphi s &= \frac{m v^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Das Produkt $m \varphi$ haben wir sodann mit dem Namen Kraft belegt. Führen wir zur Abkürzung hierfür den Buchstaben p ein, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} m v &= p t \\ p s &= \frac{m v^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Die in diesen beiden Gleichungen vorkommenden Größen haben, teils schon vor längerer, teils in neuerer Zeit eigene Benennungen erhalten, und zwar nennt man:

- $m v$ die Bewegungsgröße (Bewegungsquantität¹⁾,
- $p t$ den Kraftantrieb (Impuls, Zeiteffekt der Kraft²⁾,
- $p s$ die Arbeitsgröße (Wegeffekt der Kraft³⁾,
- $\frac{m v^2}{2}$ die lebendige Kraft⁴⁾ (lebendige Arbeit, Wucht).

Die Gleichungen (3) lauten also in Worten:

1. Die Bewegungsgröße hat denselben Wert wie der Kraftantrieb.
2. Die Arbeitsgröße hat denselben Wert wie die lebendige Kraft.

Wir haben nun die physikalische Bedeutung dieser Sätze zu erklären.

Es handelt sich darum, ein richtiges Maß für die Wirkung einer Kraft aufzustellen. Nun tritt aber eine Wirkung durch eine Kraft nur ein, wenn sie eine gewisse Zeit hindurch und einen gewissen Weg entlang ausgeübt wurde, und es ist von vornherein klar, daß die Größe ihrer Wirkung außer von der Größe der Kraft selbst auch noch von der Zeitdauer derselben, bzw.

¹⁾ Diese Benennung stammt von Cartesius.

²⁾ Die Bezeichnung Kraftantrieb wurde 1847 von Belanger vorgeschlagen.

³⁾ Der Ausdruck Arbeit wurde zuerst von Coriolis gebraucht, von Poncelet wurde dessen Gebrauch befestigt.

⁴⁾ Diese Bezeichnung wurde ursprünglich von Leibniz 1695 für die Größe $m v^2$ eingeführt, dann von Coriolis auf $\frac{m v^2}{2}$ übertragen. Nach Belanger wird $m v^2$ als lebendige Kraft, $\frac{m v^2}{2}$ als lebendige Potenz bezeichnet. Das deutsche Wort „Wucht“ bezeichnet den Begriff sehr treffend.

von der Länge des Weges abhängig sein müsse. Von vornherein sind daher beide Fragen gleichberechtigt; nämlich die Frage: welches ist die Wirkung einer Kraft in gegebener Zeit? und die andere Frage: welches ist die Wirkung einer Kraft nach Zurücklegung eines gegebenen Weges ihres Angriffspunktes? Das erstemal fragen wir nach dem Zeiteffekt, das zweitemal nach dem Wegeffekt der Kraft.

In beiden Fällen äußert sich die Wirkung der Kraft darin, daß eine Masse eine gewisse Geschwindigkeit aufnimmt. Aus der Größe dieser Masse und der von ihr aufgenommenen Geschwindigkeit muß also die Wirkung der Kraft berechnet werden. Es ergibt sich aber nun, daß diese Berechnung in den beiden Fällen nach ganz verschiedener Weise erfolgen muß, wenn ihr Resultat ein richtiges Maß für die zu messende Kraftwirkung liefern soll. Offenbar soll die Berechnung der Wirkung aus Masse und Geschwindigkeit ein Resultat ergeben, welches unter allen Umständen proportional ist der Größe der Ursache, denn sonst erhielten wir ja kein brauchbares Maß.

Die erste der Gleichungen unter (3) zeigt nun, daß der Zeiteffekt der Kraft (der Antrieb der Kraft p in der Zeit t) gemessen wird durch das Produkt aus der Größe der Masse m und der aufgenommenen Geschwindigkeit v , d. i. durch die Bewegungsgröße.

Die zweite der obigen Gleichungen zeigt, daß der Wegeffekt der Kraft (die Arbeit) gemessen wird durch das Produkt aus der Größe der Masse m mit dem halben Quadrate der aufgenommenen Geschwindigkeit v .

Beide Arten zu messen sind, wie gesagt, gleich richtig und gleich berechtigt. Der lange Streit, der seinerzeit zwischen Cartesius und Leibniz über das richtige Maß der Kraftwirkung geführt wurde¹⁾, wobei Cartesius die erstere, Leibniz die letztere Methode verfocht, beruhte daher wie später D'Alembert²⁾ gezeigt hat, auf einem Mißverständnis.

Die Gleichung

$$pt = mv$$

sagt also zunächst aus, daß die Wirkung einer Kraft p in gegebener Zeit t desto größer ist, je stärker die Kraft p ist und je länger die Zeit t dauert; sie sagt ferner, daß die Kraft bei gleicher Zeitdauer um so größer sein müsse, je größer die Masse m ist, welche in gegebener Zeit in Bewegung gesetzt werden soll, und je größer die Geschwindigkeit ist, welche sie dabei aufnehmen soll.

Um irgend eine Masse m in Bewegung mit der Geschwindigkeit v zu versetzen, reicht also eine beliebig kleine Kraft p aus, wenn wir sie nur hinlänglich lange Zeit t hindurch wirken lassen. Soll jedoch die Geschwindigkeit in kurzer Zeit erreicht werden, so muß die Kraft entsprechend größer sein. Hierher gehört folgender Versuch. An eine Masse, z. B. gleich einem Kilogramm, binden wir einen Faden, der eben hinreicht, etwas mehr als 1 kg zu tragen, ohne zu reißen. Ziehen wir nun an diesem Faden das Kilogramm anfangs sehr langsam, allmählich immer schneller in die Höhe, so können wir demselben nach und nach eine beliebig große Geschwindigkeit erteilen, ohne daß der Faden abreißt. Ziehen wir aber den Faden rasch an, so reißt

¹⁾ Derselbe wurde von 1686 an vorzugsweise in den „Acta eruditorum“ geführt.

²⁾ Traité de dynamique, 1743.

derselbe sofort ab, weil die Kraft, welche nötig wäre, um das Kilogramm so schnell in Bewegung zu setzen, größer ist, als der Faden verträgt.

Durch dasselbe Prinzip erklärt sich auch der folgende Versuch: Eine 200 bis 300 g schwere Metallkugel *A*, Fig. 227, hängt an einem Zwirnfaden, während ein zweiter ganz gleicher Faden von der Kugel herabhängt. Zieht

Fig. 227.



man nun langsam an dem Querstäbchen *B*, so bricht der obere Faden, während der untere bricht, wenn man das Querstäbchen durch einen raschen, kräftigen Ruck herabreißt.

Im ersten Falle hat der obere Faden den Zug der Hand und das Gewicht der Kugel, der untere Faden nur den Zug der Hand auszuhalten. Im zweiten Falle hat der untere Faden die größere Kraft auszuhalten, die nötig ist, um der Kugel rasch große Geschwindigkeit zu geben.

Den Flügel einer geöffneten Tür kann man durch den schwachen Druck eines Fingers leicht um seine Angeln drehen, weil man Zeit genug aufwenden kann, den nötigen Kraftantrieb allmählich zu sammeln. Schießt man dagegen eine Pistolenkugel gegen den Türflügel ab, so wird er durchlöchert, ohne sich merklich zu bewegen, weil der Widerstand, den die Kohäsion des Holzes der Durchbohrung entgegengesetzt, immer noch schwächer ist als die Kraft, welche nötig wäre, in so kurzer Zeit einen Kraftantrieb zu liefern, um die Masse des Flügels mit so großer Geschwindigkeit in Bewegung zu setzen. Auf ähnliche Versuche kommen wir bei der Reibung zu sprechen.

Da wir von keinem Körper sagen können, welchen absoluten Wert von Geschwindigkeit er besitzt, da ja Geschwindigkeit nur eine relative Größe ist (§ 7), welche je nach dem Bezugskörper einen verschiedenen Wert haben kann, so können wir auch von keiner Masse sagen, wie groß der absolute Wert ihrer Bewegungsquantität ist. Auf der Erdoberfläche nehmen wir gewöhnlich an, daß eine Masse keine Bewegungsquantität habe, wenn sie in bezug auf die Erdoberfläche in relativer Ruhe ist. Wir lassen also die Bewegungsquantität unberücksichtigt, welche der Masse schon infolge ihrer Rotation um die Erdachse und der Bewegung um die Sonne zukommt. Ferner machen wir darauf aufmerksam, daß, da die Masse immer nur eine positive Größe ist, dagegen v positiv oder negativ genommen werden kann, auch die Bewegungsquantität sowohl positiv als negativ sein kann. Demgemäß sollte also die Gleichung $pt = mv$ besser so ausgedrückt werden: die Veränderung der Bewegungsgröße eines Körpers ist numerisch gleich dem Antriebe der Kraft, durch welchen sie hervorgebracht wird, und stimmt in der Richtung mit jener der Kraft überein.

Bevor wir daran gehen, die physikalische Bedeutung der zweiten Gleichung

$$ps = \frac{mv^2}{2}$$

zu erklären, müssen wir die Begriffe der Arbeit und der lebendigen Kraft näher auseinandersetzen, weil von dem richtigen Erfassen der Bedeutung dieser überaus wichtigen Begriffe das Verständnis eines großen Teiles der Physik abhängt.

§ 73. **Begriff der Arbeit und Maß derselben.** Man sagt, eine Kraft leiste eine Arbeit, wenn durch diese Kraft ihr Angriffspunkt in ihrer Richtung unter Überwindung einer Gegenkraft oder überhaupt eines Widerstandes längs eines Weges verschoben wird. Zu einer Arbeit gehören also immer zwei Dinge, eine Kraft und eine dadurch bewirkte Bewegung; wo eines von beiden fehlt, ist keine Arbeitsleistung vorhanden.

So z. B. übt ein auf den Tisch gestelltes Kilogrammgewicht zwar einen Druck, also eine Kraft aus; da aber keine Bewegung erfolgt, so ist dabei keine Arbeit. Ein Pferd, das an einen Wagen gespannt ist, welchen es nicht in Bewegung zu setzen vermag, leistet trotz allen Kraftaufwandes keine Arbeit. Andererseits leistet ein Mann, der eine Säge in freier Luft hin und her bewegt, keine Arbeit, da dabei kein Widerstand, keine Gegenkraft überwunden wird¹⁾. Sobald aber die Säge in den Holzblock eingreift, beginnt der Widerstand und damit die Arbeitsleistung.

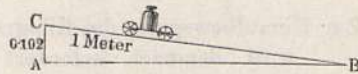
Arbeiten oder Arbeit leisten bedeutet also zunächst den Akt oder den Vorgang der Bewegung unter Überwindung einer Gegenkraft. Das, was daraus entsteht, die eingetretene Veränderung in der Lage oder im Bewegungszustande der Massen, also das Resultat des Arbeitens wird meistens Arbeit genannt, doch werden wir noch einen anderen Ausdruck dafür kennen lernen. Die Arbeitsgröße wird bestimmt durch das Produkt aus der Länge des bei der Arbeitsleistung zurückgelegten Weges mit der Größe der Kraft. Wird der Angriffspunkt der Kraft nicht in ihrer Richtung, sondern in einer anderen Richtung verschoben, so kommt nur die in die Richtung der Bewegung fallende Komponente der Kraft in Betracht.

Als Einheit der Arbeitsgröße gilt die Überwindung einer Kraft von der Stärke Eins längs des Weges Eins. Im Gravitationsmaßsystem ist Kräfteinheit bekanntlich jene Kraft, mit welcher 1 kg nach abwärts gezogen wird. Als Längeneinheit gilt das Meter. Folglich ist eine Arbeitseinheit in diesem Maßsystem entsprechend der Hebung eines Kilogramms um die Höhe eines Meters. Diese Arbeitseinheit heißt Kilogramm-meter oder Meterkilogramm.

Im absoluten Maßsystem gilt als Kräfteinheit für größere Kräfte diejenige Kraft, welche einer Masse = 1 kg pro Sekunde die Beschleunigung 1 m erteilt. Die Überwindung dieser Kraft längs eines Meters ist demnach die absolute Einheit der Arbeit. Hierfür wird der Name Joule (zu Ehren des englischen Physikers dieses Namens) gebraucht²⁾. In diesem Maße gemessen wäre die Hebung eines Kilogramms auf 1 m Höhe eine Arbeit = 9,8 Joule (vorausgesetzt, daß 9,8 m die Acceleration der Schwere an dem betreffenden Orte ist).

Um uns auch von dieser Arbeitseinheit nach absolutem Maße eine klare Vorstellung zu verschaffen, denken wir uns eine schiefe Ebene, Fig. 228, deren Hypothenuse die Länge = 1 m, deren vertikale Kathete die Höhe von $\frac{1}{9,8}$ m = 10,2 cm besitzt. Setzen wir auf diese schiefe Ebene eine ohne Reibung

Fig. 228.



¹⁾ Dabei wird von der Masse der Säge zunächst abgesehen.

²⁾ Ursprünglich verstand man unter „Joule“ nur die der Arbeitseinheit äquivalente Wärmemenge; jetzt benutzen wir „Joule“ als Einheit der Energie überhaupt.

bewegliche Masse = 1 kg, so erfährt dieselbe (nach § 48) in der Richtung CB eine Kraft, welche gleich $\frac{1}{9,8}$ der Kraft ist, mit welcher das Kilogramm von der Erde angezogen wird. Da die letztere Kraft aber in absolutem Maße = 9,8 ist, so ist sie längs der schiefen Ebene = $\frac{9,8}{9,8} = 1$. Um also das Kilogramm vom Fuße der schiefen Ebene in B auf die Höhe C zu bewegen, ist in absolutem Maße die Arbeit = 1 erforderlich. Genau dieselbe Arbeit ist aber auch erforderlich, um das Kilogramm vom Fußpunkte A auf die Höhe bis C zu heben. Denn die zu überwindende Kraft ist = 9,8, der Weg = $\frac{1}{9,8}$, das Produkt Kraft \times Weg ist also = $9,8 \times \frac{1}{9,8} = 1$ wie vorhin.

Zum horizontalen Transport des Kilogramms von B nach A ist kein Arbeitsaufwand erforderlich, da die Richtung BA auf der Richtung der Schwerkraft senkrecht steht, also die Projektion der Kraft auf die Bewegungsrichtung = 0 ist. Es folgt somit, daß der Transport von B über A nach C genau ebensoviel Arbeitsaufwand erfordert wie der Transport über die schiefe Ebene BC nach C .

Statt der aus dem Meter und dem Kilogramm abgeleiteten für physikalische Messungen unbequem großen Kraft- und Arbeitseinheiten sind, wie schon im § 40 mitgeteilt wurde, von den Physikern die Einheiten des Centimeter-Gramm-Sekunden-Systems (C. G. S.) adoptiert worden.

Die aus diesem System abgeleitete Krafteinheit, welche einem Gramm pro Sekunde 1 cm Geschwindigkeit erteilt, wurde Dyne genannt. Die demselben System angehörige Arbeitseinheit, welche der Überwindung einer Dyne längs 1 cm gleichkommt, heißt Erg¹⁾.

Beispielsweise wird also an einem Orte, wo die Acceleration der Erde 980 cm beträgt:

1 g von der Erde angezogen mit der Kraft von . . . 980 Dynen,
 Zur Hebung von 1 g auf 1 cm Höhe erfordert eine
 Arbeit = 980 Erg,
 Auf der in Fig. 228 dargestellten schiefen Ebene
 wird 1 kg längs CB durch die Schwerkrafts-
 komponente gezogen mit einer Kraft = . . 1000 \times 100 Dynen
 = 10^5 Dynen,
 Zur Hinaufbewegung des Kilogramms von B bis C
 wird demnach erfordert ein Arbeitsauf-
 wand = 1000 \times 100 \times 100 Erg
 = 10^7 Erg.

Wir haben demnach:

$$1 \text{ Joule} = \frac{\text{Meterkilogramm}}{9,8} = 10^7 \text{ Erg},$$

$$1 \text{ Erg} = \frac{\text{Centimeter-Gramm}}{980} = \frac{\text{Joule}}{10^7}.$$

¹⁾ Abgekürzt von Ergon ($\epsilon\rho\rho\omega\rho$) die Arbeit. In manchen Lehrbüchern wird statt „die Dyne“ „das Dyn“ gebraucht. Rein sachlich betrachtet ist die Kraft allerdings nichts Weibliches. Etymologisch wird aber „die Dyne“, „das Erg“ als die richtige Übersetzung anzusehen sein. Vom physikalischen Standpunkte ist wohl beides gleich zulässig.

Die Größe der Arbeit ist ganz unabhängig von der Zeit, in der sie geleistet wird. Natürlich wird eine größere Kraft dieselbe Arbeit in kürzerer Zeit zu leisten vermögen.

Die pro Sekunde geleistete Arbeit heißt Effekt oder Leistung. Als Einheit dieser Größe gilt: 1 Joule pro Sekunde. Diese Einheit des Effektes wurde zu Ehren des Erfinders der verbesserten Dampfmaschine Watt genannt. Es gilt also:

$$1 \text{ Watt} = \frac{\text{Joule}}{\text{Sekunde}} = \frac{1 \cdot \text{Meterkilogramm}}{9,8 \text{ Sekunde}} = \frac{10^7 \text{ Erg}}{\text{Sekunde}}$$

In der Maschinenlehre werden 735 Watt als gleichwertig mit 1 Pferdekraft (richtiger Pferdeleistung) gerechnet, da man letztere (wofür das Zeichen HP üblich geworden) = $75 \frac{\text{Meterkilogramm}}{\text{Sekunde}}$ annimmt.

Solange wir mit einer konstanten Kraft zu tun haben, ist die Arbeitsgröße einfach proportional der Kraft und ebenso proportional dem Wege, also durch das Produkt der beiden Größen der letzteren gegeben.

Wie jedes Produkt, so können wir deshalb auch eine Arbeitsgröße durch den Flächeninhalt eines Rechteckes darstellen, wie Fig. 229 andeutet.

Ist die Kraft nicht konstant, so erhalten wir die Arbeitsgröße demnach nach einem analogen Verfahren durch den Flächeninhalt einer Figur, bei welcher an Stelle der Parallelen yp eine andere Kurve tritt.

Nehmen wir z. B. folgenden Fall: die Spiralfeder AO , Fig. 230, sei bei A befestigt und reiche ungespannt bis O . Dasselbst sei ein Faden angeknüpft, der bei R über eine Rolle läuft und bei S eine Schale zur Aufnahme von Gewichten trägt. Bei einer Belastung gleich $10,204 \text{ g}$ werde die Spiralfeder um 30 cm verlängert. $10,204 \text{ g}$ entsprechen einer Kraft = $10,204 \times 980$ Dynen

Fig. 229.

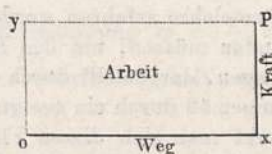
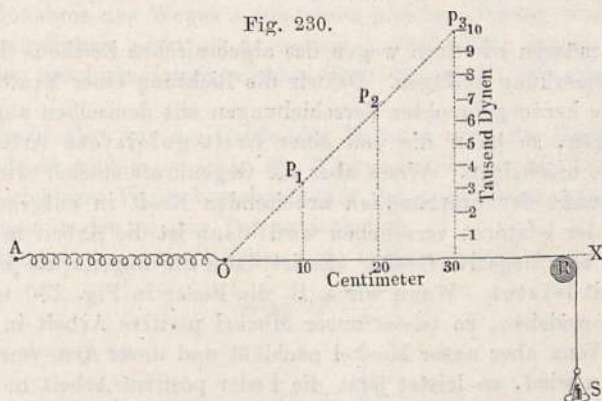


Fig. 230.

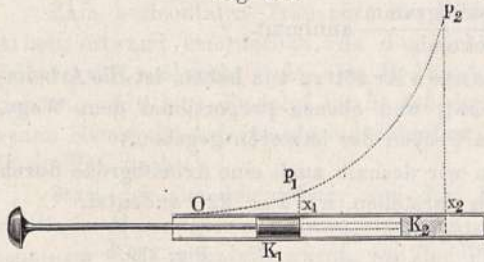


= 10000 Dynen. Wir tragen daher im Punkte 30 der Abszissenachse nach einem beliebigen Maße die Höhe 10000 als Ordinate auf. Ebenso verfahren wir bei einer Reihe anderer geringerer Belastungen. Ist die Spannkraft der Feder, was meistens annähernd der Fall ist, proportional ihrer Verlängerung,

so bilden die Spitzen aller Ordinaten p_1, p_2, p_3 eine Gerade, welche vom Punkte O ausgeht, weil dort die Kraft noch $= 0$ ist. Die zum Spannen des Fadens bis 30 erforderliche Arbeit wird dann offenbar erhalten durch den Flächeninhalt des Dreiecks. Derselbe ist in unserem Falle $= \frac{30 \times 10\,000}{2}$

$= 150\,000$ Erg. Wäre die Kraft der Feder nicht proportional der Verlängerung derselben, so würde an Stelle der Geraden Op_3 eine krumme Linie treten; die Arbeit würde aber wiederum durch den Flächeninhalt unter der Kurve gegeben sein. Um auch für diesen Fall ein Beispiel heranzuziehen, denken wir uns in Fig. 231 eine einerseits geschlossene Röhre, in welcher mittels des Kolbens K Luft komprimiert wird. Nehmen wir nun die Kolbenwege

Fig. 231.



als Abszissenwerte und tragen wir für die erreichten Stellungen derselben, z. B. x_1 und x_2 die Widerstände, welchen der Kolben dabei begegnet, als Ordinaten $x_1 p_1, x_2 p_2$ usw. auf, so erhalten wir eine Kurve $Op_1 p_2$, deren Gestalt je nach den Umständen verschieden gestaltet ist, wie wir in der Wärmelehre erfahren werden. Jedenfalls ist aber die Arbeit, welche wir aufwenden müssen, um den Kolben aus der Stellung K_1 in die Stellung K_2 zu bringen, dargestellt durch den Flächenraum der Figur $x_1 p_1 p_2 x_2 x_1$, und kann demgemäß durch ein geeignetes planimetrisches Verfahren ausgemittelt werden. Denkt man sich diesen Flächeninhalt wirklich bestimmt und dividiert man denselben durch den Wert der Länge $x_1 x_2$, so erhält man die Höhe eines Rechtecks von gleichem Flächeninhalt. Diese Höhe, die mittlere Ordinatenhöhe der Kurve $p_1 p_2$, stellt die mittlere Kraft vor. Man kann daher auch sagen, man erhält die Größe einer durch eine veränderliche Kraft geleisteten Arbeit, indem man die Größe des Weges mit dem mittleren Betrage der Kraft multipliziert.

Endlich müssen wir noch wegen des algebraischen Zeichens der Arbeitsgröße eine Bemerkung beifügen. Da wir die Richtung einer Kraft, sowie die durch dieselbe hervorgebrachten Verschiebungen mit demselben algebraischen Zeichen belegen, so kann die von einer Kraft geleistete Arbeit nur als positive Größe erscheinen. Wenn aber die Gegenkraft stärker wird, so daß der Angriffspunkt der ursprünglich arbeitenden Kraft in entgegengesetzter Richtung zu der letzteren verschoben wird, dann ist die Arbeit in bezug auf diese letztere eine negative Größe. Es ist dann die Gegenkraft jene, welche positive Arbeit leistet. Wenn wir z. B. die Feder in Fig. 230 mit unserer Muskelkraft ausziehen, so leistet unser Muskel positive Arbeit in bezug auf die Feder. Wenn aber unser Muskel nachläßt und unser Arm von der Feder zurückgezogen wird, so leistet jetzt die Feder positive Arbeit in bezug auf unseren Arm. Man sagt dann auch, die früher vom Muskel geleistete Arbeit werde wieder verbraucht, die Arbeit des Muskels sei nun eine negative. Da nie eine Kraft ohne Gegenkraft auftritt, so ist stets Arbeitsleistung mit Arbeitsverbrauch, positive Arbeit mit negativer verknüpft; es ist also stets nur die Übertragung einer Arbeitsgröße von einem System zum anderen, nie

aber eine Erzeugung allein, welche stattfinden kann. Wir kommen hierauf später zurück. Vorderhand wollen wir festhalten, daß wir die Arbeit einer Kraft positiv bezeichnen, wenn die Bewegung im Sinne dieser Kraft stattfindet.

§ 74. Lebendige Kraft (Wucht). Im vorigen Paragraphen haben wir Beispiele von Arbeitsleistungen in Betracht gezogen, deren Resultat darin bestand, daß die Massen des Körpersystems, auf welche die arbeitende Kraft einwirkte, in eine andere relative Lage zueinander gebracht wurden.

Wird z. B. durch eine Kraft eine Masse vertikal gehoben, so wird dadurch der gegenseitige Abstand dieser Masse und der Erde vergrößert; bei Spannung einer elastischen Feder werden die Teile derselben in eine neue erzwungene Lage gebracht; bei Kompression der Luft werden die Luftteile einander genähert.

Nicht immer ist das Resultat einer Kraftwirkung ein derartiges. Häufig besteht dasselbe darin, daß einer Masse eine Geschwindigkeit erteilt wird, ohne daß dabei eine andere Kraft oder ein anderer Widerstand überwunden wird als jener, den jede Masse vermöge ihrer Trägheit einer Änderung ihres Geschwindigkeitszustandes entgegensetzt. Denken wir uns z. B., die Masse m werde auf einer ganz glatten horizontalen Unterlage, auf welcher sie ohne Reibung beweglich ist, durch eine horizontale konstante Kraft p in Bewegung gesetzt. Die Masse m erhält dadurch eine Beschleunigung $\varphi = \frac{p}{m}$ und, nachdem sie einen Weg s zurückgelegt hat, eine Geschwindigkeit, welche aus der Gleichung

$$\varphi s = \frac{v^2}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

berechnet werden kann; man findet dieselbe:

$$v = \sqrt{2 \varphi s}.$$

Während also die von der konstanten Kraft p geleistete Arbeit mit jeder gleichen Zunahme des Weges s um einen gleichen Betrag zunimmt, wächst die Geschwindigkeit nicht in demselben Verhältnisse; es ist vielmehr das Quadrat der Geschwindigkeit, welches proportional mit der geleisteten Arbeit wächst.

Will man also aus der Größe der Masse m und der Geschwindigkeit v einen Ausdruck bilden, welcher die Wirkung der von der Kraft geleisteten Arbeit in richtiger Weise berechnen läßt, so muß dieser Ausdruck die Geschwindigkeit in der zweiten Potenz enthalten.

Multipliziert man die Gleichung (1) beiderseits mit m , so kommt

$$m \varphi s = \frac{m v^2}{2}$$

oder, da $m \varphi = p$ ist:

$$p s = \frac{m v^2}{2}.$$

Letztere Größe wird nun, wie oben mitgeteilt wurde, mit dem nicht glücklich gewählten Namen: „Lebendige Kraft“ bezeichnet. Diese Gleichung sagt daher aus, daß die aufgewendete Arbeit numerisch gleich sei der entstandenen lebendigen Kraft.

Was ist also lebendige Kraft?

Lebendige Kraft ist ein Begriff, durch welchen der Bewegungszustand einer Masse derartig definiert wird, daß er der Größe nach übereinstimmt mit der Arbeit, welche eine Kraft leisten mußte, um diese Masse in diesen Bewegungszustand zu versetzen.

Wir wollen als Beispiel der Anwendung dieses Satzes von der Gleichheit der lebendigen Kraft und der Arbeit die Bewegung einer Flintenkugel in Rechnung ziehen.

Eine Flintenkugel von 20 g Masse werde aus einem Flintenlaufe von 60 cm Länge durch eine Pulverladung herausgeschossen, welche vom Moment der Entzündung bis zum Moment, wo die Kugel den Lauf verläßt, auf die letztere einen mittleren Druck gleich dem Gewichte von 153 kg ausübe. Mit welcher Geschwindigkeit wird die Kugel den Lauf verlassen, wenn die Reibung im Laufe vernachlässigt wird?

Wir verwandeln zuerst den Druck von $153 \text{ kg} = 153000 \text{ g}$ in absolute Kräfteinheiten, indem wir letztere Zahl mit 980 multiplizieren. Wir erhalten $p = 153000 \times 980 = 149940000$ Dynen. Diese multipliziert mit dem Wege $s = 60 \text{ cm}$ geben eine Arbeitsleistung der Pulvergase $= 60 \times 149940000 = 8996400000$ Erg.

Diese Arbeit muß nun gleich sein der lebendigen Kraft $\frac{mv^2}{2}$, worin $m = 20$. Man hat daher:

$$v^2 = \frac{2 \times 8996400000}{20} = 899640000$$

$$v = 29993 \text{ cm} = 299,94 \text{ m.}$$

So wie die Arbeit einer Kraft verwendet werden kann, um in einer Masse lebendige Kraft aufzuspeichern, so kann auch umgekehrt eine mit lebendiger Kraft versehene Masse wiederum eine Arbeit leisten, wobei ebensoviele von der vorhandenen lebendigen Kraft verschwindet, als Arbeit geleistet wird.

So könnte beispielsweise die oben betrachtete Flintenkugel mit rund 300 m Geschwindigkeit verschiedenartige Arbeit leisten, indem sie verschiedenartige Kräfte überwindet. Als einfachsten Fall fassen wir den folgenden ins Auge. Wir denken uns die Flinte senkrecht gestellt, so daß die Kugel vertikal in die Höhe steigen muß. Sie leistet dabei die Arbeit der Überwindung der Anziehungskraft der Erde längs der ganzen Steighöhe.

Die letztere beträgt, wie bekannt (§ 49), $\frac{v^2}{2g}$, wenn v die Anfangsgeschwindigkeit

ist, also in unserem Falle $\frac{899640000}{2 \times 980}$ cm. Die Anziehungskraft ist die

von 20 g, also gleich 20×980 Dynen. Das Produkt beider gibt die Arbeit, nämlich $\frac{899640000 \times 20 \times 980}{2 \times 980} = 8996400000$ Ergs, wie wir früher

hatten. Sobald also die Kugel den höchsten Punkt erreicht hat, ist ihre lebendige Kraft wiederum $= 0$ geworden und die gleich große Arbeit wieder von ihr geleistet, welche früher für sie zur Erzeugung ihrer lebendigen Kraft von den Pulvergasen geleistet worden war.

Allein sofort beginnt eine neue Umwandlung. Die Kugel und die Erde bilden zusammen ein Körpersystem, welches fähig ist, Arbeit zu leisten, sobald

beide auf einen Abstand voneinander entfernt worden sind, so daß sie der gegenseitigen Anziehung Folge leisten können. Diese Arbeitsfähigkeit wurde eben durch die Arbeit gewonnen, welche aus der lebendigen Kraft entstand. Indem also jetzt die Kugel durch die Schwerkraft nach abwärts in Bewegung gesetzt wird, sammelt sich in ihr wiederum lebendige Kraft an. Sehen wir vom Luftwiderstande ab, so erlangt bekanntlich der fallende Körper bis zu seiner Ankunft am Ausgangspunkte die gleiche Geschwindigkeit, also auch die gleiche lebendige Kraft wieder, die er hatte, als er emporzusteigen begann. Dafür hat das Körpersystem, Erde — Kugel, die Fähigkeit verloren, Arbeit zu leisten.

Die Verfolgung dieses Gegenstandes vorbehaltend, wollen wir noch bezüglich des algebraischen Zeichens der lebendigen Kraft einiges bemerken.

Da das Quadrat einer Größe immer positiv ausfällt, so muß auch das Quadrat der Geschwindigkeit immer positiv sein, wenn auch die Richtung der Bewegung sich umkehrt; da ferner die Masse immer nur positiv sein kann, so muß eine aufgenommene lebendige Kraft $\frac{mv^2}{2}$ stets eine positive Größe sein, ebenso wie die geleistete Arbeit, aus der sie hervorgegangen und der sie numerisch gleich sein muß.

Sobald ein Körper auf Kosten seiner lebendigen Kraft selbst Arbeit leistet, d. h. eine Arbeitsgröße auf ein anderes System überträgt, kann man allerdings, dem Sprachgebrauch der Algebra gemäß, sagen, er habe negative lebendige Kraft aufgenommen, was aber nichts anderes bedeutet, als daß er positive lebendige Kraft abgegeben habe.

Ferner machen wir darauf aufmerksam, daß bezüglich der lebendigen Kraft wie bezüglich der Bewegungsquantität nie davon die Rede sein kann, ihren absoluten Wert zu bestimmen.

Die Kugel z. B., von der eben die Rede war, besitzt ja schon, bevor der Schuß losgeht, eine Geschwindigkeit infolge Achsendrehung der Erde und Bewegung um die Sonne. Die davon stammende lebendige Kraft lassen wir aber für gewöhnlich unbeachtet. In Wahrheit können wir also immer nur von einer Vermehrung oder Verminderung der lebendigen Kraft, nie aber von ihrem absoluten Werte sprechen.

Steigt die Geschwindigkeit einer Masse m von v auf v_1 , so ist der Zuwachs an lebendiger Kraft $= \frac{m}{2} (v_1^2 - v^2)$.

Sowie ein Körper A gleichzeitig in bezug auf einen Körper B in Ruhe und gleichzeitig in bezug auf einen anderen Körper C in Bewegung sein kann, so kann ein Körper A auch in bezug auf einen Körper B ohne lebendige Kraft sein und gleichzeitig in bezug auf einen Körper C eine solche besitzen.

Stellen wir uns eine größere Eisscholle vor, welche mit der Geschwindigkeit von 10 m pro Sekunde einen Fluß hinabgetrieben wird. Auf der Scholle liege eine Kugel. Dann haben sowohl Scholle als Kugel lebendige Kraft in bezug auf die Erdoberfläche.

Wenn nun aber ein Mann auf der Scholle die Kugel antreibt, so daß sie mit 10 m Geschwindigkeit flußaufwärts rollt, so hat dieselbe keine lebendige Kraft mehr in bezug auf die Erdoberfläche, wohl aber solche in bezug auf die Scholle. Da man überhaupt von zwei Körpern A und B , die sich relativ nähern oder entfernen, nie behaupten kann, der eine stehe still und der

andere bewege sich, so kann man auch nie behaupten, der eine sei ohne lebendige Kraft, der andere besitze sie. Sie besitzen sie eben beide zusammen. Dies hindert uns aber nicht, für gewöhnlich die lebendige Kraft in demjenigen Körper vorhanden zu betrachten, den wir konventionell als den bewegten ansehen.

§ 75. Begriff der Energie. Die in den vorangegangenen Paragraphen besprochenen Beispiele von Arbeitsleistungen lassen uns erkennen, daß die dazu nötige Kraft stets aus einem Körper oder Körpersystem stammt, welches entweder durch die Lage und Verteilung seiner Massen oder durch die in ihm aufgespeicherte lebendige Kraft die Fähigkeit besitzt, Arbeit zu leisten.

Die Fähigkeit, Arbeit zu leisten, wird Energie genannt¹⁾.

Energie besitzt also eine gehobene Last, welche mit der Erde zusammen als Körpersystem anzusehen ist (aufgezogene Gewichtsuhr, Wassergefälle); Energie besitzt eine gespannte Feder (aufgezogene Taschenuhr, gespannte Armbrust); Energie besitzt ferner ein komprimiertes Gas, ein gespannter Dampf; ebenso ist Energie aufgespeichert in explosiven Stoffen (im Schießpulver, Dynamit, Knallgas).

Energie besitzt jede bewegte Masse (fließendes Wasser, Wind, abgeschossene Kugel, geschwungener Hammer, rotierendes Schwungrad); Energie muß ferner aufgespeichert sein in dem Muskelapparate der Menschen und der Tiere, da sie sonst nicht Kraft entwickeln und Arbeit leisten könnten.

Alle diese Energie besitzenden Körpersysteme, von denen hier nur wenige als Beispiele aufgezählt wurden, verlieren jedoch an Arbeitsfähigkeit, sobald sie Arbeit leisten. Ihr Energieinhalt vermindert sich um einen Betrag, den wir messen durch die Anzahl Arbeitseinheiten, welche geleistet wurden. So z. B. sinkt das Gewicht der Uhr, indem die Räder bewegt werden, die gespannte Feder erschlafft, indem sie den Pfeil fortschleudert, der Dampf verliert seine Spannung, indem er den Kolben treibt, die chemische Energie des Schießpulvers ist verbraucht, wenn es seine Wirkung getan hat, das Wasser verliert an Gefälle oder an Geschwindigkeit, indem es das Rad treibt, die abgeschossene Kugel ermattet, indem sie in einen Körper eindringt, das Schwungrad kommt zur Ruhe, indem es Arbeit leistet, wenn ihm nicht neue Energie zugeführt wird, ja selbst der Muskelapparat der Menschen und Tiere ermüdet und wird erschöpft, wenn ihm nicht durch die Nahrungsmittel und den eingeatmeten Sauerstoff die ausgegebene Energie ersetzt wird.

Gleichzeitig mit der Verminderung der Energie des einen Körpersystems wird folgerichtig die Arbeitsfähigkeit jenes anderen Körpersystems, auf welches die arbeitende Kraft einwirkt, um denselben Betrag erhöht. Man kann demnach geradezu sagen: Arbeit leisten heißt Energie übertragen. Die

¹⁾ Aus dem griechischen Worte *ἐνέργεια* Tatkraft; der Ausdruck wurde von Rankine und Thomson eingeführt. Gegen diese Definition ist, nicht mit Unrecht, der Einwand erhoben worden, daß nicht jeder Energie enthaltende Körper wirklich Arbeit leisten (übertragen) kann. Ein schwerer Körper, der nicht weiter sinken kann, weil er bereits die tiefste Lage hat, die er unter den gegebenen Umständen annehmen kann, ebenso ein warmer Körper, der keine Wärme abgeben kann, weil alle umgebenden Körper keine tiefere Temperatur haben, kann nicht Arbeit leisten (übertragen). Es wäre daher die Definition etwa folgendermaßen zu ergänzen: „Energie ist die Fähigkeit, unter gewissen Umständen Arbeit zu leisten.“

Energie kann also durch eine Reihe von aufeinander folgenden Arbeitsleistungen von einem materiellen System auf ein zweites, drittes usw. übergehen, wobei sie die mannigfaltigsten Formen annehmen kann. Sie kann dabei natürlich auch geteilt, sozusagen zersplittert, und die Teile können unter Umständen wieder gesammelt werden.

Fassen wir nochmals das im vorigen Paragraphen benutzte Beispiel der senkrecht abgeschossenen Kugel ins Auge. Das Schießpulver enthält Energie infolge der Lage seiner chemischen Bestandteile.

Durch die chemische Umsetzung derselben bei der Entzündung geht ein Teil seiner Energie auf die entwickelten Gase und von diesen auf die Kugel über; dieselbe enthält dann Energie in Form von lebendiger Kraft. Indem die Kugel steigt, gibt sie die Energie der lebendigen Kraft wieder ab, und es entsteht dafür Energie, welche dem Körpersystem Erde—Kugel infolge ihrer getrennten Lage innewohnt. Auch diese wird bei Aufhebung dieser Lage wieder in die Form lebendiger Kraft zurückverwandelt, um dann beim Auffallen der Kugel noch kompliziertere Formen anzunehmen.

Wir heben also nochmals hervor, daß zu einer Arbeitsleistung immer zwei materielle Systeme gehören, wovon eines Energie abgibt, die das andere aufnimmt. Man sagt dann, von dem ersten System werde Arbeit geleistet an dem zweiten oder für das zweite.

Damit also die Quantität der Energie eines Systems sich ändere, ist stets notwendig, daß dasselbe nach außen arbeitend wirke oder von außen eine Einwirkung erfahre.

Vorgänge im Inneren eines Systems ohne äußere Einwirkung können den Energieinhalt desselben nicht ändern. Es ist dies ebenso unmöglich, wie es unmöglich ist, sich selbst dadurch aus dem Wasser zu ziehen, daß man mit den Händen am eigenen Körper emporzieht. Man muß nach einem Außengegenstande greifen und auf diesen Zugkraft ausüben, um den eigenen Körper zu heben. Ebenso kann man, auf einem Schlitten sitzend, auf horizontaler Eisfläche sich ¹⁾ nicht von selbst fortbewegen, sondern man muß entweder von einem Außenstehenden gezogen werden oder sich gegen das Eis stemmen. Die Hebung des menschlichen Körpers im ersten Falle, die Erlangung einer Geschwindigkeit für Mensch und Schlitten im zweiten Falle wären mit einer Zunahme des Energieinhaltes verknüpft.

Die Unmöglichkeit der Änderung des Energieinhaltes eines Systems durch innere Kräfte geht schon aus der folgenden Überlegung hervor. Wenn ein System auf ein anderes arbeitend einwirkt, so gibt es an das andere Energie ab. Das erste verliert, das zweite gewinnt ebensoviel Energie. Denkt man sich nun aber beide Systeme zusammen als eines, so ändert sich sein Energieinhalt nicht, wenn auch die Verteilung derselben sich ändert.

Es ist dies ein Grundsatz, welcher gewöhnlich als das „Prinzip der Erhaltung der Energie“ ²⁾ bezeichnet wird, und welchem wegen seiner außer-

¹⁾ Genauer gesagt: den gemeinsamen Schwerpunkt von Körper und Schlitten.

²⁾ Dieses Prinzip ist für beschränkte Gebiete von Naturerscheinungen schon von Newton und D. Bernouilli ausgesprochen worden. Die Möglichkeit seiner allgemeinen Gültigkeit hat zuerst der deutsche Arzt Jul. Rob. Mayer in Heilbronn 1842 in einer Abhandlung in Liebigs Annal. 42 dargelegt; eine epochemachende Darstellung wurde von H. Helmholtz in seiner Schrift: „Über die Erhaltung der Kraft“, Berlin 1847, geliefert.

ordentlich ausgedehnten Tragweite wohl kaum ein anderes physikalisches Prinzip an Wichtigkeit gleichkommen dürfte.

Dasselbe läßt sich folgendermaßen formulieren:

„Die Gesamtenergie jedes materiellen Systems ist eine Größe, welche durch Wirkungen zwischen den Teilen des Systems weder vermehrt noch vermindert, wohl aber in andere Formen umgewandelt werden kann.“

Daraus folgt, daß, wenn man alle im Universum vorhandenen materiellen Systeme in eines zusammengefaßt denkt, wobei also von einer äußeren Einwirkung nicht mehr die Rede sein kann, weil alle Kraftursachen bereits dem Inneren des Systems angehören, die Gesamtenergie eine konstante Größe bleiben muß. Diese Folgerung ist auch in der Tat von R. Clausius mit den Worten „die Energie des Weltalls ist konstant“ ausgesprochen worden. So überaus wahrscheinlich dieser Satz ist, falls man das Weltall als begrenzt ansehen darf, so wollen wir doch nicht vergessen, daß das Prinzip der Erhaltung der Energie nur ein Erfahrungssatz ist und daher zunächst nur innerhalb des Rahmens als bewiesen zu betrachten ist, in welchem wir unsere Erfahrungen sammeln konnten.

Bei einer Musterung der Energievorräte, die wir in Körpersystemen finden, erkennen wir bald, daß die Energie in zwei Hauptformen vorkommt, auf welche wir schon im Eingange dieses Paragraphen hingedeutet haben.

Die Arbeitsfähigkeit eines Systems folgt entweder aus der Lage seiner Teile, wie z. B. bei der gespannten Feder, dem komprimierten Gase, der gehobenen Last, dem Schießpulver; oder sie folgt aus der Bewegung bzw. der lebendigen Kraft, wie z. B. bei der geschossenen Kugel, dem treibenden Wasser oder Winde usw. Man unterscheidet demnach zwischen Energie der Lage und Energie der Bewegung. Mit Rücksicht auf die gespannte Lage der ersteren Körpersysteme gebraucht man hierfür auch die Ausdrücke Spannkraft einerseits und lebendige Kraft andererseits.

Es ist aber zweckmäßiger, das Wort Kraft zu vermeiden; am meisten empfehlen sich die Ausdrücke potentielle Energie und kinetische Energie, welche sich schon allgemein eingebürgert haben.

Unter potentieller Energie eines Körpersystems versteht man also die Arbeitsfähigkeit, welche dasselbe infolge der Lage oder der Beschaffenheit seiner Teile besitzt.

Unter kinetischer Energie eines Körpersystems versteht man die Arbeitsfähigkeit, welche demselben infolge der lebendigen Kraft, also infolge seiner Geschwindigkeit im ganzen und in seinen Teilen zukommt.

Während es verhältnismäßig leicht ist, die Zunahme oder Abnahme der kinetischen Energie eines Körpersystems aus den Massen und deren Geschwindigkeitsänderungen zu berechnen, ist dies bei der potentiellen Energie bisher nicht immer möglich; doch kann sie dann meist durch Experimente ermittelt werden. Der absolute Wert des Energieinhaltes eines Körpersystems ist nie angebar, auch sind wir nie imstande, einem Körper allen Energieinhalt zu entziehen.

Als Maßeinheit für die Energie kann die Arbeitseinheit, also das Erg (oder das Joule) angewendet werden; ein anderes Maß werden wir in der Wärmelehre kennen lernen.

§ 76. Die Maschinen. Begriff und Zweck der Maschinen. Wenn wir zu irgend einem speziellen Zwecke eine Arbeit aufwenden wollen, so genügt es nicht, daß uns von einer Energiequelle, z. B. einem Wasser- oder Dampfmotor oder durch Muskelkraft, das dazu nötige Quantum der Energie zur Verfügung gestellt werde, sondern es muß auch dafür gesorgt werden, daß diese Energie in einer dem Zwecke der Arbeit angemessenen Form zur Verwendung komme. Es ist dazu oft nötig, die verfügbare Kraft auf Kosten der Geschwindigkeit oder umgekehrt zu vergrößern, ihre Angriffspunkte, ihre Richtung oder überhaupt die Bahn der Bewegung abzuändern. Wir bewerkstelligen dies mittels besonderer Apparate, welche Maschinen genannt werden.

Es ist schon oft versucht worden, eine einwurfsfreie Definition der Maschine zu formulieren¹⁾; vom physikalischen Standpunkte aus möchten wir etwa folgende Fassung in Vorschlag bringen:

Maschine im weitesten Sinne ist eine Vorrichtung, welche dazu dient, ein gegebenes Energiequantum zu übertragen und dasselbe hierbei in bezug auf Richtung und Bahn, Form und Zusammensetzung derart abzuändern, wie es der zu leistenden Arbeit entspricht.

Diese Definition betrifft die Maschine im weitesten Sinne; sie paßt daher beispielsweise auch auf Dampfmaschine, Eismaschine, Elektrisiermaschine, dynamo-elektrische Maschine, sowie auf die mechanischen Maschinen.

Wir beschränken uns hier auf eine engere Gruppe von Maschinen, bei welchen die übertragene Energie eine mechanische Arbeitsgröße ist, schließen also jene aus, bei welchen die Energie in einer der wesentlich abweichenden Formen, wie Wärme, Elektrizität, Affinität usw., übertragen wird.

Für diese engere Gruppe von Maschinen scheint uns die von Laboulaye gegebene Definition am besten zu entsprechen: Maschine heißt jedes Körpersystem, welches dazu bestimmt ist, die Arbeit der Kräfte zu übertragen und infolgedessen sowohl die Kräfte selbst in bezug auf ihre Intensität abzuändern, als die hervorgerufene Bewegung hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit und Richtung mit Rücksicht auf das zu erreichende Ziel umzugestalten.

Wir wollen ferner zunächst nur solche Maschinen ins Auge fassen, bei welchen nur an einem Angriffspunkte Energie aufgenommen und an einem Angriffspunkte wiederum abgegeben, dieselbe also nicht geteilt oder zersplittert wird. Insofern dies in Wirklichkeit nie ganz der Fall ist, da bei allen wirklich ausgeführten Maschinen stets Teile der aufgenommenen Energie durch Reibung oder andere Umstände zersplittert werden, müssen wir die hier betrachteten Maschinen als ideale auffassen. Wir werden dies auch insofern tun, als wir die bei den Maschinen vorkommenden starren Körper als vollkommen starr, hingegen die biegsamen Körper (Seile, Schnüre, Riemen) als vollkommen biegsam ansehen werden, was in Wirklichkeit auch nie der Fall sein kann. Unsere Resultate werden dadurch nicht unbrauchbar, da wir

¹⁾ Reuleaux hat in seiner Maschinenlehre eine große Zahl solcher Definitionen gesammelt und schließlich die folgende beibehalten: Eine Maschine ist eine Verbindung widerstandsfähiger Körper, welche so eingerichtet ist, daß mittels ihrer mechanische Naturkräfte genötigt werden können, unter bestimmten Bewegungen zu wirken.

dann leicht von den vollkommenen Maschinen auf die wirklichen schließen können.

Einteilung der Maschinen. Die Maschinen, welche zur Übertragung mechanischer Energie dienen, haben nicht alle die gleiche Aufgabe zu leisten. Ihre einfachste Aufgabe besteht wohl darin, die Richtung der arbeitenden Kraft abzuändern, ohne daß an der Zusammensetzung des Produktes Kraft \times Weg etwas geändert wird. Apparate, die dies leisten, könnten wir als Richtung ändernde Maschinen in eine erste Gruppe zusammenfassen.

In eine zweite Gruppe würden dann alle jene Maschinen einzureihen sein, welche bei der Übertragung der Energie die Zusammensetzung des Produktes Kraft \times Weg in der Weise verändern, daß entweder die Kraft auf Kosten des Weges oder der Weg auf Kosten der Kraft vergrößert wird, wobei jedoch das Übersetzungsverhältnis während des Fortganges der Übertragung ein konstantes bleibt.

Unter Übersetzungsverhältnis versteht man das Verhältnis zwischen der Größe der Kraft nach der Übertragung zu jener vor der Übertragung. Die zweite Gruppe hätte also zu umfassen die Maschinen mit konstantem Übersetzungsverhältnis.

Eine dritte Gruppe von Maschinen ändert ebenfalls die Kraft auf Kosten des Weges, jedoch in der Weise, daß während des Fortganges der Übertragung das Übersetzungsverhältnis sich verändert. Eine solche Maschine ist daher imstande, eine konstante Kraft in eine veränderliche oder umgekehrt zu verwandeln, wobei natürlich die Wege, also auch die Geschwindigkeiten entsprechend verändert werden. Das wären also Maschinen mit veränderlicher Übersetzung.

Nach ihrer äußeren Form lassen sich die wichtigeren einfachen Maschinen nach drei hervorragenden Typen gruppieren. Diese Typen sind:

- I. Die Seilmaschine (Rolle, Wellrad usw.).
- II. Die Hebelmaschine.
- III. Die Gleitmaschine (schiefe Ebene, Keil, Schraube usw.).

Es wird sich zeigen, daß nach jedem dieser Typen Maschinen konstruiert werden können, welche die oben in drei Stufen unterschiedenen Aufgaben zu leisten vermögen, nämlich entweder erstens nur die Richtung einer Kraft zu ändern, oder zweitens Kraft auf Kosten der Geschwindigkeit (oder umgekehrt) im konstanten Verhältnis abzuändern, oder drittens zu bewirken, daß während der Arbeitsübertragung die Kraft auf Kosten der Geschwindigkeit (oder umgekehrt) in beliebig veränderlicher Weise abgeändert werde.

Jener Punkt an der Maschine, an welchem die arbeitende Kraft angreift, soll kurz der „Angriffspunkt der Kraft“ genannt werden; hingegen jener Punkt, wo die zu überwindende Kraft angreift, soll als „Angriffspunkt der Last“ bezeichnet werden. Diese Bezeichnung, welche darauf beruht, daß man sich die überwundene Kraft als Anziehungskraft der Erde auf eine Masse vorstellt, darf jedoch nicht einseitig ausgelegt werden. Es versteht sich vielmehr, daß auch irgend eine andere Kraft überwunden werden kann, und daß überhaupt, soweit nicht die Reibung hinderlich ist, die beiden Angriffspunkte ihre Rolle vertauschen können.

§ 77. Die Seilmaschine als Rolle. Die Seilmaschine hat das Eigentümliche, daß bei ihr außer starren Körpern auch ein biegsamer in Anwendung kommt: das Seil (Schnur, Riemen).

Die einfachste Seilmaschine ist die Rolle.

Die Rolle ist eine runde, am Rande mit einer ringförmigen Rinne versehene Scheibe, welche um eine durch ihren Mittelpunkt gehende, auf ihrer Ebene rechtwinkelig stehende Achse drehbar ist; diese Achse wird gewöhnlich durch eine Schere getragen, deren Arme zu beiden Seiten der Rolle bis etwas über ihre Mitte reichen, wie man dies Fig. 232 sieht.

Man unterscheidet feste und bewegliche Rollen. Feste Rollen sind solche, deren Achse unbeweglich ist, wie die Achse der Rolle *A*, Fig. 232, so daß keine Verrückung derselben, sondern nur eine Drehung um dieselbe möglich ist, während bei den beweglichen Rollen, wie bei *B*, Fig. 232, auch eine Ortsveränderung der Achse möglich ist.

Wenn um einen Teil des Umfanges einer festen Rolle eine Schnur oder ein Seil gelegt ist und an beiden Enden desselben Kräfte wirken, so findet

Fig. 232.

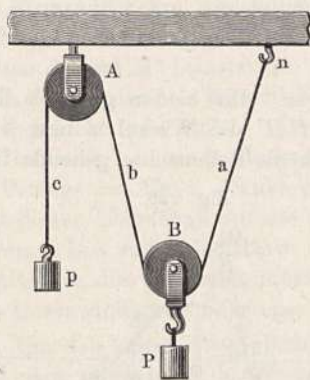
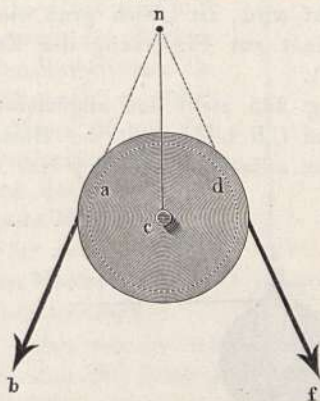


Fig. 233.



nur dann Gleichgewicht statt, wenn die Kraft, welche das Seil auf der einen Seite spannt, der auf der anderen Seite wirkenden Kraft gleich ist. Es läßt sich dies leicht von vornherein einsehen, wenn man bedenkt, daß die beiden Kräfte unter sonst ganz gleichen Umständen die Rolle nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben. Übrigens läßt sich das Gleichgewicht der Kräfte an der Rolle auch vom Parallelogramm der Kräfte ableiten, und von diesem Gesichtspunkte aus wollen wir die Rolle hier näher betrachten. Fig. 233 stellt eine um ihren festen Mittelpunkt *c* drehbare Rolle dar; das um dieselbe geschlungene Seil sei durch Kräfte gespannt, welche nach den Richtungen *ab* und *df* wirken. Denken wir uns die Linien *df* und *ab* bis zu ihrem Durchschnittspunkte *n* verlängert, so ist klar, daß, wenn *n* ein mit der Rolle fest verbundener Punkt wäre, man, ohne in der Wirkung etwas zu ändern, die Angriffspunkte der beiden Kräfte von *a* und *d* nach *n* verlegen könnte, und so hätte man dann zwei in einem Punkte *n* angreifende Kräfte, die nur dann im Gleichgewichte sein können, wenn ihrer Resultierenden das Gleichgewicht gehalten wird. Wenn die beiden in *n* angreifenden, nach den Richtungen *nb* und *nf* wirkenden Kräfte gleich sind, so wird ihre Resultierende den Winkel *bnf* halbieren, die Richtung dieser Resultierenden geht

alsdann durch den festen Mittelpunkt c , und mithin findet Gleichgewicht statt. Wäre eine der beiden Kräfte größer als die andere, so würde die Resultierende nicht mehr durch diesen festen Punkt gehen, es könnte also auch kein Gleichgewicht mehr stattfinden.

Der Druck, den die Achse der Rolle auszuhalten hat, ist offenbar der Resultierenden der beiden Kräfte gleich, und wenn die Richtungen der beiden Kräfte parallel sind, so ist der Druck auf die Achse gleich der Summe der beiden Kräfte (wozu unter Umständen noch das Gewicht der Rolle selbst zu rechnen ist).

In dem Falle, der in Fig. 234 dargestellt ist, wo zwei gleiche Kräfte von der Größe p , die eine an dem vertikalen, die andere an dem horizontalen Schnurende wirken, ist der Druck auf die Achse unter 45° gerichtet und der Größe nach $= \frac{p}{\sin 45}$. Sucht man nun den Wert der vertikalen Komponente dieses Druckes, so erhält man dafür $\frac{p \cdot \cos 45}{\sin 45} = p$. Die Kraft, mit welcher demnach unter diesen Umständen die Achse der Rolle vertikal nach abwärts gedrückt wird, ist gleich groß wie die Kraft, welche am Schnurende zieht. Dies dient zur Ergänzung der Erklärung der Poggendorffschen Wage im § 71.

Fig. 235 stellt den allgemeinen Fall vor. Die beiden gleichen Kräfte CA und CB bilden mit der Horizontalen HH' die Winkel α und β und schließen selbst den Winkel γ ein. Die durch die Rollenachse gehende Resultierende ist CR . Zieht man die Senkrechten auf die Kraftrichtungen OS und OS' , so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CAR und SOS' :

Fig. 234.

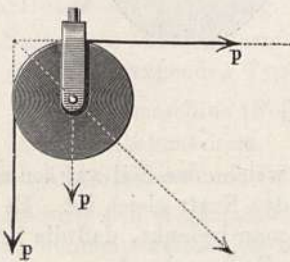
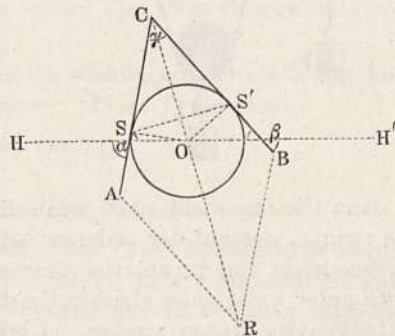


Fig. 235.



tierende ist CR . Zieht man die Senkrechten auf die Kraftrichtungen OS und OS' , so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CAR und SOS' :

$$CR : CA = SS' : SO.$$

Bezeichnen wir die Kraft $CA = CB$ mit P , die Resultierende CR mit R , die Sehne SS' mit c , den Rollenhalbmesser OS mit r , so folgt:

$$R : P = c : r \quad \dots \quad (1)$$

$$R = P \frac{c}{r} = 2 P \cos \frac{\gamma}{2} = 2 P \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \dots \quad (2)$$

Die Beziehung (1) lautet in Worten: Der Druck auf die Rollenachse verhält sich zur Spannung des Seiles wie die Sehne des vom Seil umspannten Bogens zum Radius der Rolle.

Will man noch die Vertikalkomponente dieses Druckes suchen, so ergibt eine einfache Rechnung für dieselbe den Wert:

$$2 \cdot P \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Solange die Kräfte an der Rolle im Gleichgewichte sind, leisten sie keine Arbeit. Eine Übertragung von Energie findet erst dann statt, wenn die eine Kraft (die Last) von der anderen „überwunden“ wird. Man pflegt zu sagen, daß dies dann eintrete, wenn diese andere Kraft um ein unendlich Kleines größer sei als die Last. Es ist dies aber keine ganz glückliche Ausdrucksweise, denn sie kann leicht mißverstanden werden und ist dann im Widerspruch mit dem Prinzip der Wechselwirkung (§ 44), welches Gleichheit der Kraft und Gegenkraft fordert. Auch würde daraus folgen, daß bei der Übertragung der Energie durch eine Maschine ein, wenn auch beliebig kleiner Teil der Energie vernichtet werde. Um in diesem Punkte volle Klarheit zu gewinnen, denken wir uns (Fig. 236) eine fixe Rolle ohne alle Reibung und ohne eigene Masse, deren Schnur beiderseits mit den gleichen Massen M und M' belastet ist. Die beiden Massen seien im vertikalen Abstände s befindlich, und es herrscht zunächst Gleichgewicht und Ruhe. Die höhere Masse M auf der rechten Seite hat einen Überschuß an potentieller Energie im Betrage $= Mg \cdot s$. Sinkt dieselbe um die Höhe s , so wird dieser Überschuß auf die andere Masse M' links übertragen. Die sinkende Masse arbeitet für die steigende. Damit aber dies geschehe, müssen wir den Massen entweder eine Geschwindigkeit oder eine Beschleunigung erteilen.

Fig. 236.



Um den ersten Weg einzuschlagen, geben wir der höheren Masse einen Stoß nach abwärts, d. h. wir lassen kurze Zeit eine Kraft einwirken, welche beiden Massen eine gewisse Endgeschwindigkeit v erteilt. Dazu ist ein Energiezuschuß $= \frac{2 M v^2}{2} = M v^2$ erforderlich, den wir etwa durch eine losschnellende Feder erteilen könnten.

Sobald nun die Massen den Weg s zurückgelegt haben und die potentielle Energie Mgs von rechts nach links übertragen ist, haben beide Massen noch den Zuschuß kinetischer Energie in sich, den sie wieder abgeben könnten, indem sie selbst die Feder wieder spannen, durch deren Losschnellen ihre Geschwindigkeit erzeugt war. Wir haben dann nichts von der übertragenen potentiellen Energie verloren; aber wir mußten Energie zu leihen nehmen, um die Übertragung zustande zu bringen. Der Betrag derselben kann verschwindend klein sein, immer angenommen, daß wir keine Reibung im Spiele haben.

Denselben Erfolg der Übertragung der potentiellen Energie können wir aber auch durch eine Beschleunigung erreichen, d. h. durch eine konstante Kraft, die wir durch ein Übergewichtchen von der Masse m hervorbringen, das wir der Masse M beilegen. Hat die Übertragung stattgefunden, dann besitzen beide Massen noch den geliehenen Betrag mgs an potentieller

Energie, umgewandelt in kinetische Energie vom Betrage $\frac{(2M + m)v^2}{2}$, wovon der Bruchteil $\frac{Mv^2}{2}$ in der angestiegenen, der Bruchteil $\frac{(M + m)v^2}{2}$ in der gesunkenen Masse aufgespeichert ist.

Diese Bruchteile können, wenn keine Reibung stattfindet, zwar beliebig klein sein, aber ohne ihre Zuhilfenahme gelingt die Übertragung nicht.

Nach diesen Auseinandersetzungen, welche mit angemessener Veränderung auf alle Maschinen übertragbar sind, werden wir nicht mehr mißverstanden werden, wenn wir sagen:

Die fixe Rolle ist eine Maschine, welche nur die Richtung der arbeitenden Kraft ändert, aber sonst an dem Produkte Kraft \times Weg keine Veränderung vornimmt.

Die geänderte Richtung liegt mit der ursprünglichen in derselben Ebene; soll dies nicht mehr der Fall sein, so müssen zwei oder mehr Rollen miteinander kombiniert werden.

Die bewegliche Rolle, deren Anordnung (in Verbindung mit einer fixen) aus Fig. 232 (S. 247) zu ersehen ist, kann gewissermaßen durch Umkehrung der Anordnung der fixen Rolle entstanden gedacht werden. Bezüglich des Verhältnisses zwischen der Kraft, mit welcher die Achse der Rolle angezogen wird, gelten genau dieselben Ausdrücke, welche oben unter (1) und (2) mitgeteilt wurden.

Die Richtung dieser Resultierenden ist natürlich bei einer frei hängenden beweglichen Rolle immer vertikal.

Bringt man also an der Schere einer beweglichen Rolle vom Radius r eine Kraft $= R$ an, und haben die Schnüre eine solche Lage, daß sie die Rolle auf einem Bogen umspannen, dessen Sehne $= c$ ist, wobei die Schnurrichtungen den Winkel γ einschließen, so wird jede der beiden Schnüre mit einer Kraft P gespannt, welche gegeben ist durch die Ausdrücke:

$$P = \frac{r}{c} R = \frac{R}{2 \cos \frac{\gamma}{2}}$$

Sind die Schnüre parallel, also die Sehne gleich dem Durchmesser oder der Winkel $\gamma = 0$, so folgt

$$P = \frac{1}{2} R.$$

Jede der Schnüre wird also mit der halben Kraft gespannt. Befestigt man das eine Schnurende und hebt das andere um eine Strecke s in die Höhe, so überträgt man auf dieses Ende eine Arbeit $= Ps$. Eine gleich große Arbeit wird von der Maschine an der Schere der beweglichen Rolle geleistet, denn es wird die doppelt so große Kraft R längs eines Weges, der halb so groß ist als s , überwunden. Die bewegliche Rolle gehört also zu jenen Maschinen, welche die übertragene Energie in ihrer Zusammensetzung abändern, indem sie die Kraft auf Kosten des Weges vergrößert oder umgekehrt.

Solange man nur mit der beweglichen Rolle mit parallelen Schnüren zu tun hat, bleibt das Übersetzungsverhältnis konstant. Bei der beweglichen Rolle mit divergierenden Schnüren ändert sich fortwährend der eingeschlossene Winkel, und damit das Übersetzungsverhältnis. Wir haben also

dann eine Maschine mit veränderlicher Übersetzung. Dies wäre z. B. bei der Anordnung in Fig. 232 der Fall. Ziehen wir an dem über die fixe Rolle A gehenden Schnurende mit konstanter Kraft P nach abwärts, so wird dadurch die Achse der beweglichen Rolle B nicht mit konstanter Kraft nach aufwärts gehoben, sondern mit der veränderlichen Kraft $R = P \cdot 2 \cos \frac{\gamma}{2}$.

Je weiter die Bewegung fortschreitet, desto größer wird der Winkel zwischen den Schnüren a und b , desto kleiner sein Cosinus, desto kleiner also auch die an der Schere der beweglichen Rolle ausgeübte Kraft. Da gleichen Wegstrecken des Angriffspunktes am Schnurende auch gleiche Quantitäten übertragener Energie entsprechen, so müssen die gleichzeitigen Wegstrecken am Angriffspunkte der Last (an der Schere) im reziproken Verhältnis zur Kraft sich verändern. Gleichen Wegen am Schnurende entsprechen daher fortwährend zunehmende Erhebungen der beweglichen Rolle.

§ 78. Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Die soeben abgeleiteten Verhältnisse an der beweglichen Rolle geben uns die erste Gelegenheit, ein Prinzip zu erörtern, das sich als sehr fruchtbar und bequem in der Anwendung erwiesen hat, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten¹⁾. An einer Maschine mit konstantem Übersetzungsverhältnis, wie z. B. der beweglichen Rolle mit parallelen Schnüren, verhalten sich beliebige gleichzeitige Wege der Angriffspunkte verkehrt wie die Kräfte, also auch die Geschwindigkeiten verkehrt wie die Kräfte. Bei einer Maschine mit veränderlichem Übersetzungsverhältnis, wie bei der beweglichen Rolle mit divergenten Schnüren, können wir von einem konstanten Verhältnis der Geschwindigkeiten nicht sprechen. Wohl aber entspricht jeder bestimmten Lage der Maschinenteile ein momentanes Verhältnis der Geschwindigkeiten, welches wir finden, wenn wir die gleichzeitigen Wege der Angriffspunkte immer kleiner werden lassen und die Grenze aufsuchen, dem sich ihr Verhältnis nähert. Man nennt dieses Grenzverhältnis dann das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten. Dasselbe muß dann ebenfalls verkehrt proportional sein dem Kräfteverhältnis, wenn Gleichgewicht herrschen soll. Praktisch könnten wir also z. B. folgendermaßen verfahren. Es sei bei der beweglichen Rolle, Fig. 232, zu ermitteln, welche Gewichte sich bei der gegebenen Lage der Rolle das Gleichgewicht halten würden. Bewegen wir p um 1,9 mm nach abwärts, so steigt P nur um 1 mm, folglich ist das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten 1,9 : 1, folglich das der Kräfte (Gewichte) wie 1 : 1,9.

So könnten wir bei jeder Maschine verfahren; sie könnte mit einem Tuche verdeckt sein, so daß wir nur die beiden Angriffspunkte sehen, wir würden doch ihr Kraftverhältnis aus den virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte entnehmen können. Ja wir könnten an einer Reihe miteinander verkuppelter Maschinen an jedem ihrer beweglichen Bestandteile aus seiner reziproken Geschwindigkeit sofort die Größe der Kraft entnehmen, mit welcher dieser Bestandteil bewegt wird.

Die Produkte aus den virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte mit den in ihrer Richtung wirksamen Kräften heißt man auch die virtuellen

¹⁾ Die ersten Andeutungen dieses Prinzips hat Aristoteles um 350 v. Chr. an ungleichartigen Hebel gegeben. Viel bestimmter und allgemeiner ausgesprochen und angewendet findet sich dasselbe bei Leonardo da Vinci um 1500 n. Chr.

Momente. Nimmt man ihr Zeichen positiv, wenn die Richtung der Kraft mit der Richtung der virtuellen Geschwindigkeit übereinstimmt, im anderen Falle dagegen negativ, so kann man die Gleichgewichtsbedingung jeder Maschine ausdrücken durch den Satz:

An der Maschine herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe der virtuellen Momente gleich Null ist.

Man erkennt leicht, daß diese virtuellen Momente nichts anderes sind als die von der Maschine aufgenommenen und von ihr wieder abgegebenen Arbeitsgrößen. Rechnet man die aufgenommene Arbeit positiv, die abgegebene negativ, so ist ihre algebraische Summe gleich Null.

§ 79. Die Seilmaschine als Flaschenzug und als Wellrad. Eine Kombination von fixen und beweglichen Rollen wird im allgemeinen ein Flaschenzug genannt.

Die gebräuchlichste Form derselben (der gemeine Flaschenzug) ist in Fig. 237 schematisch dargestellt, bei welcher die Rollen ungleiche Größe haben und senkrecht übereinander stehen. Bei einer anderen Ausführung haben die Rollen alle gleiche Größe und sind in zwei Gruppen nebeneinander je um eine gemeinsame Achse drehbar. Das System der miteinander in ein und demselben Gehäuse angebrachten Rollen heißt eine Flasche. Der Flaschenzug besteht also aus zwei Flaschen und dem verbindenden Seil, dessen Wickelungsart aus den Figuren zu ersehen ist.

Zieht man an dem freien Seilende, bis eine Verschiebung des dortigen Angriffspunktes um eine Strecke s stattgefunden hat, so verteilt sich die Länge derselben in gleicher Weise auf alle übrigen Seilstränge. Sind deren zwischen beiden Flaschen in der Zahl n vorhanden, so beträgt demnach die Verkürzung jedes Stranges $\frac{s}{n}$, und dieses ist auch die zugehörige Verschiebung der unteren Flasche, deren Gehäuse den Angriffspunkt der Last trägt. Somit ist das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten $= 1:n$, mithin das Verhältnis der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte $= n:1$.

Potenzflaschenzug wird die in Fig. 238 abgebildete Kombination einer fixen Rolle mit einer beliebigen Anzahl von beweglichen Rollen genannt. Wird das freie Seilende um die Strecke s angezogen, so wird die erste (oberste) bewegliche Rolle um $\frac{s}{2}$ gehoben, die zweite um $\frac{s}{4}$, die dritte um $\frac{s}{8}$ usw.

Sind n bewegliche Rollen vorhanden, so wird die letzte Rolle um $\frac{s}{2^n}$ gehoben. Das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten zwischen den Angriffspunkten der Kraft und der Last ist demnach gleich $1:\frac{1}{2^n}$, folglich herrscht Gleichgewicht, wenn Kraft zu Last in dem Verhältnis $1:2^n$ stehen¹⁾. Dadurch erklärt sich auch der Name Potenzflaschenzug.

¹⁾ Dabei wird vom Gewicht der Rollen selbst abgesehen.

Der Differentialflaschenzug von Weston, Fig. 239, besteht aus zwei auf derselben Achse sitzenden miteinander drehbaren fixen Rollen von

Fig. 237.

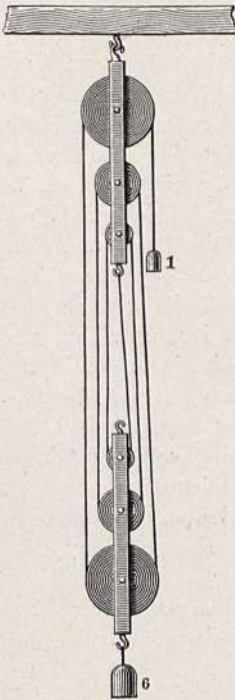


Fig. 238.

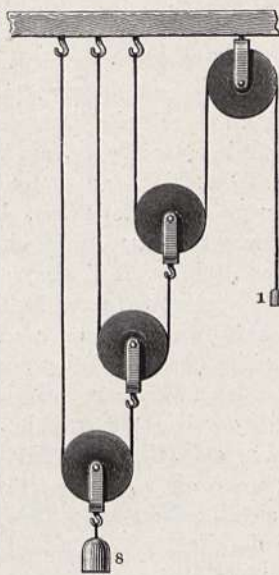
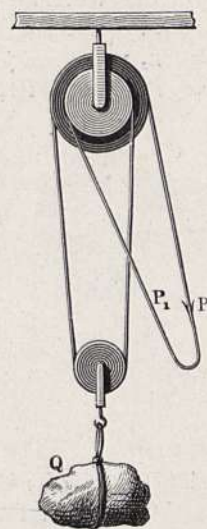


Fig. 239.



ungleich großen, aber wenig verschiedenen Radien R und r und einer beweglichen Rolle. Ein endloses, d. h. an den Enden vereinigttes Seil ist, wie die Figur zeigt, um diese Rollen herumgelegt. Der Angriffspunkt der

Kraft befindet sich an der Stelle P des Seiles; die Last Q an der Schere der beweglichen Rolle. Zieht man bei P um eine Strecke s nach abwärts, so wird die fixe Doppelrolle um einen Bogen von der gleichen Länge s gedreht. Gleich-

zeitig ist die von der kleineren Rolle zurückgelegte Bogenlänge $= s \frac{r}{R}$,

um dieselbe Länge wird das Seil von der kleineren Rolle abgewickelt. Die Gesamtlänge der zwischen der festen und der beweglichen Rolle befindlichen

Seilstücke wird also um $s - s \frac{r}{R} = s \frac{R - r}{R}$ verkürzt; von dieser Ver-

kürzung trifft es auf jeden Seilstrang die Hälfte, folglich beträgt die Hebung

$s \frac{R - r}{2R}$. Das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeit ist also $1 : \frac{R - r}{2R}$,

folglich ist das Verhältnis der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte

$1 : \frac{2R}{R - r}$. Die Übersetzung ist offenbar desto größer, je weniger die beiden

Radien voneinander differieren.

Damit der Strang P_1 , welcher lose hängt, nicht zu einem Gleiten Anlaß gebe, ist das Seil durch eine Kette ersetzt, deren Glieder in warzenförmige Vorsprünge der Rollen eingreifen.

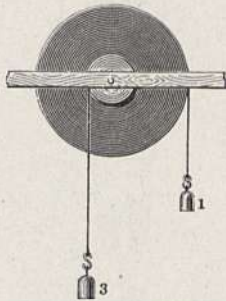
Bei sämtlichen Flaschenzügen haben wir es mit Maschinen zu tun, welche die übertragene Arbeitsgröße in ihrer Zusammensetzung zugunsten der Kraft

auf Kosten des Weges (oder umgekehrt) verändern, wobei jedoch das Übersetzungsverhältnis während der Übertragung konstant bleibt.

Die nächst verwandte Maschine ist

das Wellrad (Haspel, Winde, Göpel). Dasselbe besteht im wesentlichen aus zwei miteinander fest verbundenen Rollen verschiedenen Halbmessers R und r , um deren jede ein Seil geschlungen wird, dessen eines Ende am Umfange befestigt ist, dessen anderes Ende als Angriffspunkt dient, Fig. 240.

Fig. 240.



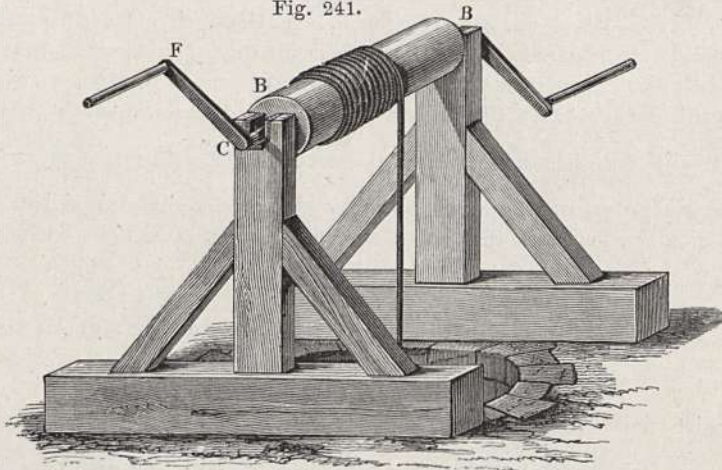
Die kleinere Rolle hat jedoch meistens die Form einer zylindrischen Welle, um welche das Seil in mehreren parallelen Windungen aufgewickelt wird. An Stelle der größeren Rolle tritt häufig ein Speichenrad, an dessen Umfang direkt ohne Seil die Kraft angreift, oder es sind von diesem selbst nur die Speichen allein noch vorhanden, deren Enden abwechselnd als Angriffspunkte fungieren, oder endlich es ist nur mehr eine Speiche übrig geblieben, welche mit einem der Welle parallelen Fortsatze versehen ist, an welchem der Angriff der Kraft stattfindet. Dieser Bestandteil heißt dann eine Kurbel, Fig. 241; die ganze Maschine

heißt Haspel oder Winde; wenn die Achse vertikal steht, auch Göpel.

Offenbar verhalten sich die virtuellen Geschwindigkeiten wie die zugehörigen Radien, daher die Kräfte beim Gleichgewicht sich verkehrt den Radien verhalten müssen.

Um also eine große Übersetzung zu erhalten, sollte man den Radius der Welle recht klein, die Kurbel recht lang machen. Allein dies hat seine

Fig. 241.



praktischen Grenzen da die Welle sonst zu schwach würde und die Kurbellänge den Dimensionen des Arbeiters anzupassen ist. Um bedeutendere Übersetzungen zu erzielen, verwendet man daher eine der folgenden Maschinen:

Das Differentialwellrad, Fig. 242, besitzt zwei Wellen von verschiedenen Halbmessern r_1 und r_2 , deren eine die Fortsetzung der anderen auf gleicher Achse bildet. Das Seil ist, wie aus der Figur ersichtlich, auf beide

Wellen aufgewickelt, so zwar, daß es sich gleichzeitig von der einen Welle ab- und auf die andere aufwickelt. Das dazwischen befindliche Seilstück trägt eine bewegliche Rolle, deren Schere als Angriffspunkt der Last dient. Die Kraft greift am Ende einer Kurbel vom Radius R an.

Beschreibt das Ende der Kurbel einen Bogen von der Länge s , und zwar in dem Sinne, daß das Seil auf der größeren Welle vom Radius r_1 aufgewickelt wird, so beträgt die aufgewickelte Länge des letzteren

$s \frac{r_1}{R}$; gleichzeitig wickelt sich von der kleineren Welle ein Stück $= s \frac{r_2}{R}$ ab. Das ganze die bewegliche

Rolle tragende Stück des Seiles wird daher um den Betrag

$$s \frac{r_1}{R} - s \frac{r_2}{R} = \frac{s}{R} (r_1 - r_2)$$

verkürzt, davon trifft es auf jeden Strang die Hälfte, also beträgt die Hebung

$$\frac{s}{R} \cdot \frac{r_1 - r_2}{2}.$$

Das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten ist daher gleich

$$1 : \frac{r_1 - r_2}{2R},$$

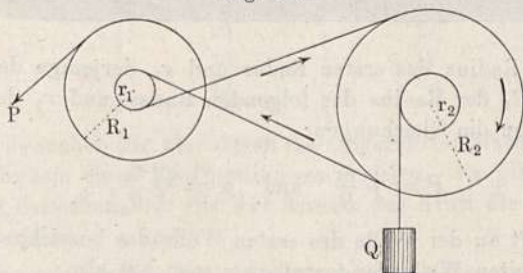
mithin das Übersetzungsverhältnis der Kräfte gleich

$$1 : \frac{2R}{r_1 - r_2}.$$

Dasselbe ist also desto größer, je kleiner die Differenz der Radien der Wellen ist. Die Maschine wirkt also analog dem Differentialflasenzug von Weston, Fig. 239.

§ 80. Räderwerke. Schneckenrad. Eine Verbindung mehrerer Wellräder in der Art, daß die Welle des einen Wellrades je mit dem Rade

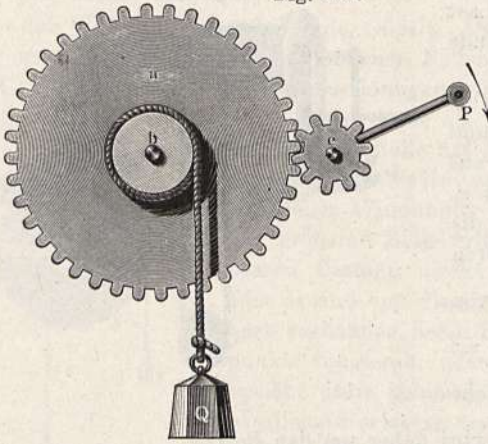
Fig. 243.



des folgenden, sei es durch einen über beide gelegten Riemen, sei es durch Zahnung des Umfanges, sei es endlich durch direkte Reibung der Oberflächen

verbunden ist, heißt man ein Räderwerk. Die Kraft wirkt am ersten Rade, die Last hängt an der letzten Welle. Fig. 243 zeigt eine Verbindung

Fig. 244.

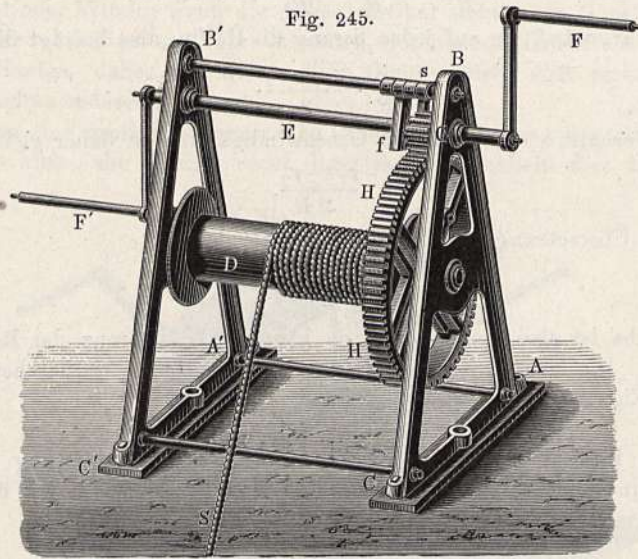


zwischen den beiden Wellrädern durch einen Riemen, und zwar durch einen gekreuzten Riemen, bei dem das Gleiten weniger leicht erfolgt.

In der Fig. 244 (Fig. 245 gibt eine perspektivische Ansicht einer Maschine dieser Art) greift die Welle des ersten Wellrades, d. i. der Kurbel, an der die Kraft P wirkt, mit Zähnen in das gezahnte Rad des zweiten Wellrades ein, an deren Welle das Seil mit der Last Q befestigt ist. Man

heißt die gezahnte Welle das Getriebe und das gezahnte Rad das Zahnrad.

Fig. 245.



Ist R_1 der Radius des ersten Rades und r_1 derjenige der betreffenden Welle, sodann R_2 der Radius des folgenden Rades und r_2 derjenige dieser Welle, so bestehen die Gleichungen:

$$P = p \frac{r_1}{R_1} \quad \text{und} \quad p = Q \frac{r_2}{R_2},$$

wenn p die Kraft an der Welle des ersten Wellrades bezeichnet, die sich auf das Rad des zweiten Wellrades fortpflanzt; man hat also:

$$P = Q \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot \dots \dots \dots (1)$$

und allgemein, wenn wir so n Räder hintereinander hätten, würde sein:

$$P = Q \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_n}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot \dots \cdot R_n} \dots \dots \dots (2)$$

Bei gezahnten Rädern und Wellen verhalten sich aber die Radien r und R der Getriebe und der Räder wie die Zahl der Zähne auf deren Umfang, da ja die beiderseitigen Zähne zum Ineinandergreifen gleich groß sein müssen. Heißen wir z_1, z_2 usw. die Zahl der Zähne bei den Getrieben und Z_1, Z_2 usw. die Zahl der Zähne am Umfang der Räder, so wird demnach auch sein:

$$P = Q \cdot \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n}{Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot \dots \cdot Z_n} \dots \dots \dots (2')$$

In gleichem Verhältnis wie die Kraft P gegenüber Q abnehmen kann, wird auch, wie leicht ersichtlich, der Quotient der Geschwindigkeit oder der von beiden zurückgelegten Wege größer werden, so daß man hat:

$$c_p = c_q \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot \dots \cdot Z_n}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n} \dots \dots \dots (3)$$

Bezeichnen wir die Umlaufszeit des Wellrades ab in Fig. 244 mit T_2 und mit T_1 diejenige des anderen Wellrades c , d. h. der Kurbel P mit ihrem Getriebe, so werden die beiden Umlaufzeiten offenbar das Verhältnis eingehen:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{R_2} = \frac{z_1}{Z_2} \dots \dots \dots (4)$$

wenn r_1 den Radius und z_1 die Zahl der Zähne auf dem Getriebe (erstes Wellrad), R_2 den Radius und Z_2 die Zähnezah auf dem Zahnrad (zweites Wellrad) darstellen.

Nach diesen Regeln bestimmt man z. B. die Zahl der Zähne bei dem Räderwerke einer Uhr. Da nämlich der Sekundenzeiger einen Umlauf in einer Minute, der Minutenzeiger in einer Stunde oder 60 Minuten und der Stundenzeiger in 12 Stunden oder 720 Minuten machen soll und alle drei Zeiger im selben Sinne sich drehen sollen, was also stets noch ein Zwischenrad zwischen ihren Rädern erheischt, so sind folgende Räder und Getriebe notwendig, deren Zähnezahlen z. B. sein können:

	Zahl der Zähne am Rade	Zahl der Zähne am Getriebe	Umlaufszeit in Minuten
Steig- oder Sekundenrad	—	10	1
Mittelrad	80	12	8
Minutenrad	90	12	60
Wechselrad	36	12	180
Stundenrad	48	—	720

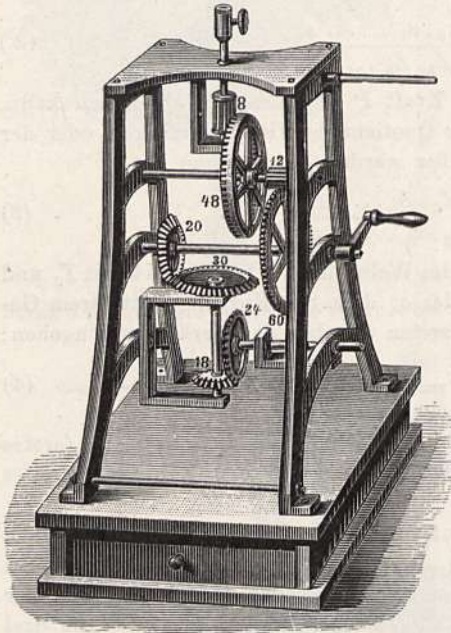
Meistenteils suchen wir also durch die aufgeführten Maschinen auf Kosten der Geschwindigkeit einen Kraftgewinn zu erzielen. Es gibt indessen auch Verwendungen derselben, wo wir auf Kosten der Kraft die Geschwindigkeit zu vermehren suchen.

Rotationsapparate. Um Scheiben und dergleichen zu gewissen, später näher zu erörternden Zwecken sehr rasch und gleichmäßig rotieren zu lassen, hat man Räderwerke konstruiert, bei welchen ein größeres Gewicht oder die

Elastizität einer starken gespannten Feder an dem letzten Rade als treibende Kraft wirkt, während auf die Achse des ersten Rades die rasch zu drehende Scheibe aufgesetzt wird. Da die Kraft bei diesem Rade infolge der Übersetzung eine sehr kleine ist, so genügt häufig schon die Reibung der Luft an der Scheibe, um eine gleichförmige Geschwindigkeit zu erzielen.

Fig. 246 zeigt einen solchen Rotationsapparat mit Räderwerk, der von der Hand mit einer Kurbel gedreht wird und wo die nach oben hervorragende

Fig. 246.

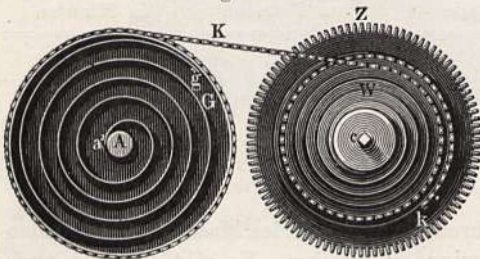


letzte vertikale Achse — die durch Umlegen des Apparates auch horizontal zu stellen ist — 60 Umdrehungen auf eine Umdrehung der unten anzusetzenden Kurbel macht.

Die bisher betrachteten Formen des Wellrades stellen sämtlich Maschinen mit konstanter Übersetzung vor. Es kann aber auch das Wellrad in eine Maschine mit veränderlicher Übersetzung umgestaltet werden. Hierzu ist nötig, daß das Verhältnis der Radien, an denen Kraft und Last angreifen, veränderlich wird. Dies ist z. B. in Ausführung gebracht beim Schneckenrade. *Z* (Fig. 247) stellt ein gezahntes Wellrad vor, dessen Welle nicht zylindrisch, sondern nach Form eines Schneckenhauses ausgeführt ist. Die bei *k* befestigte Kette *K*

wird daher beim Drehen des Rades nach rechts auf einer Welle mit immer kleiner werdendem Radius aufgewickelt. Das andere Ende der Kette ist am Umfange einer zylindrischen Trommel *G* befestigt und in parallelen Windungen auf derselben aufgewickelt. Die Trommel selbst ist um die feststehende Achse *A* drehbar. Eine in Form einer ebenen Spirale geformte, bandförmige Stahlfeder (Uhrfeder) ist einerseits an der Achse *A* bei *a*, andererseits am inneren Umfange der drehbaren Trommel bei *g* befestigt. Sowie man also das Zahnrad *Z* mit der Schneckenwelle

Fig. 247.



nach rechts dreht, wird die Trommel ebenfalls nach rechts gedreht und die Spiralfeder aufgewickelt. Läßt man wieder los, so veranlaßt die Spiralfeder die Trommel zur Drehung nach links, wobei die Kette von der Welle ab- und auf die Trommel aufgewickelt wird. Die Kraft, mit welcher die Spiralfeder die Trommel dreht, ist nicht konstant; sie ist am Anfange am größten, am Ende

gleich Null. Wäre das Wellrad ein gewöhnliches, so würde der gezahnte Umfang desselben ebenfalls mit fortwährend abnehmender Kraft in Bewegung gesetzt. Dieser Abnahme wirkt aber hier der Umstand entgegen, daß bei der Drehung des Rades der wirksame Teil der Kette auf eine Welle von immer größerem Radius zu liegen kommt. Bei richtiger Konstruktion muß es daher möglich sein, zu erreichen, daß beide Änderungen sich gerade kompensieren. Man hat dann den Zweck der Anordnung erreicht, der darin liegt, mittels der veränderlichen Kraft der Spiralfeder eine konstante Kraft auf den Umfang des Zahnrades auszuüben.

Diese Anordnung kommt bei Taschenuhren vor. Es ist bei diesen noch die Einrichtung getroffen, daß das Zahnrad Z (auch Bodenrad genannt) und die Welle (das Schneckenrad) nicht fest miteinander verbunden sind. Beim Aufziehen der Uhr, wobei das Schneckenrad die Kette aufwickelt, bleibt das Bodenrad stehen, beim Ablauf der Uhr dagegen nimmt das Schneckenrad das Bodenrad mit Hilfe einer sog. Sperrklinke mit. Die Zähne des Bodenrades setzen dann die übrigen Räder der Uhr in Bewegung.

§ 81. Die Hebelmaschine. Dieselbe besteht, wie die meisten einfachen Maschinen, aus zwei Teilen, der Hebelstange und der Unterlage¹⁾, um welche die erstere gedreht wird. Die Kräfte wirken dabei in der Regel in einer auf der Achse senkrecht stehenden Ebene; sollte dies nicht der Fall sein, so kann man sich dieselben durch ihre Projektionen auf eine solche Ebene ersetzt denken. Je nach der Lage der Angriffspunkte zur Achse haben wir mehrere Fälle zu unterscheiden.

Fig. 248.

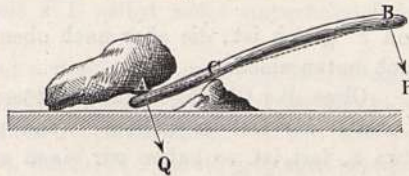


Fig. 250.

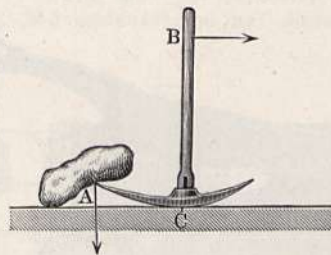
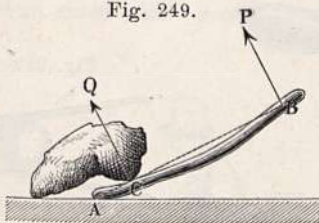


Fig. 249.



Liegen beide Angriffspunkte in einer durch die Achse gehenden Geraden, so hat man einen geraden Hebel, und zwar einen zweiarmligen, Fig. 248, wenn die beiden Angriffspunkte von der Achse aus nach entgegengesetzter Seite, einen einarmigen, Fig. 249, wenn sie auf derselben Seite liegen. Sind die beiden Angriffspunkte nicht mit der Achse in einer Geraden gelegen, so hat man einen Winkelhebel (Fig. 250).

Sind beide Angriffspunkte gleich weit von der Achse entfernt, so ist der Hebel gleicharmig, wie z. B. bei der gewöhnlichen Wage²⁾.

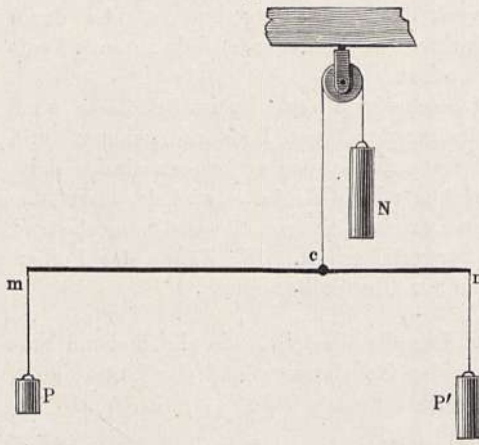
¹⁾ Auch Hypomochlion genannt.

²⁾ Die Wagen gehören nur hinsichtlich ihrer Konstruktion zu den Maschinen, ihrem Zwecke nach zu den Meßinstrumenten, da ihre Aufgabe nicht in der Übertragung von Energie, sondern in der Vergleichung von Druckkräften besteht.

Die Hebelgesetze sind im wesentlichen bereits durch das in den §§ 59 und 60 Vorgetragene erschöpft.

Beim geraden Hebel hat der feste Drehpunkt einen Druck auszuhalten, welcher der Summe der an beiden Seiten wirkenden Kräfte gleich ist; ein solcher Hebel kann aber auch im Gleichgewicht sein, wenn dieser mittlere

Fig. 251.



Punkt nicht fest ist, sondern wenn in ihm eine Kraft wirkt, welche der Summe der beiden anderen gleich, der Richtung nach aber ihnen entgegengesetzt ist. Die Fig. 251 mag dies erläutern. Nehmen wir an, c sei der feste Drehpunkt eines Hebels mn , an dessen Enden die Kräfte P und P' angreifen und sich einander das Gleichgewicht halten. Dieses Gleichgewicht wird nun nicht gestört, wenn der Punkt c aufhört, fest zu sein, wenn in ihm aber eine Kraft N angebracht wird, welche der Summe von P

und P' gleich ist, die aber nach oben wirkt, während die Kräfte P und P' nach unten ziehen.

Ohne das Gleichgewicht zu stören, kann man jeden der drei Punkte m , c und n als fest betrachten; wenn nur einer der beiden äußeren Punkte, etwa n , fest ist, so haben wir einen einarmigen Hebel, d. h. einen solchen, bei welchem die Angriffspunkte der beiden sich das Gleichgewicht haltenden

Fig. 252.

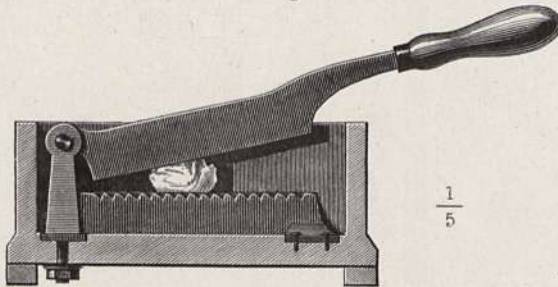
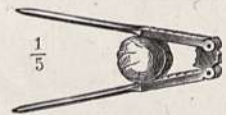
 $\frac{1}{5}$

Fig. 253.

 $\frac{1}{5}$

Kräfte N und P auf derselben Seite des festen Drehpunktes n liegen. Die beiden Kräfte haben in diesem Falle entgegengesetzte Richtung, und der Druck auf den Unterstützungspunkt ist dem Unterschiede der beiden Kräfte P und N gleich. Der Hebelarm der Kraft P ist $l + l'$, wenn man mit l die Länge mc , mit l' die Länge nc bezeichnet; der Hebelarm der Kraft N ist aber l' . Wäre c der feste Drehpunkt gewesen, so hätte man als Bedingung des Gleichgewichts:

$$P' : P = l : l'$$

und daraus folgt:

$$P' + P : P = l + l' : l'$$

oder:

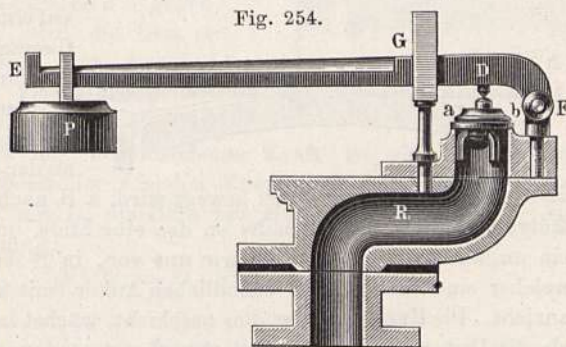
$$N : P = l + l' : l'$$

Sollen sich also an dem einarmigen Hebel die entgegengesetzten Kräfte das Gleichgewicht halten, so müssen sie sich auch verkehrt verhalten wie die Hebelarme.

Die Citronenpresse, Fig. 252, und der Nußknacker, Fig. 253, sind zwei bekannte Formen der Anwendung des einarmigen Hebels, welche wohl keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

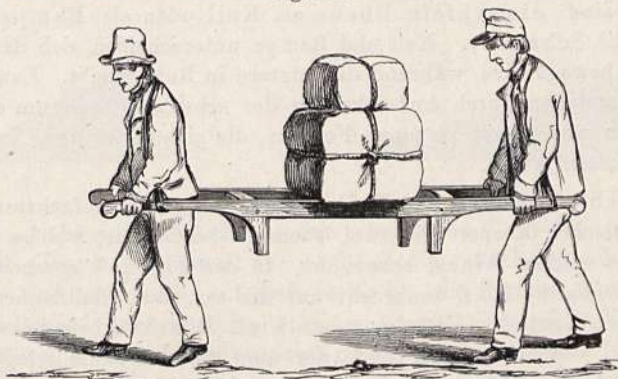
Bei dem Sicherheitsventil der Dampfkessel, Fig. 254, kommt der einarmige Hebel gleichfalls in Anwendung. Indem der Dampf aus dem

Dampfkessel in das Rohr *R* tretend gegen die untere Fläche der Platte *ab* drückt, strebt er den um das Hypomochlion *F* drehbaren Hebel zu heben, während derselbe durch das Gewicht *P* niedergedrückt wird. Bei der Berechnung des Druckes, welcher auf dem Ventil *ab* lastet, darf das Gewicht des materiellen Hebels *FE* selbst nicht unberücksichtigt bleiben.



Auch die beiden Endpunkte *m* und *n* der Stange *mn*, Fig. 251, können fest sein, während in *c* eine Kraft *N* wirkt; alsdann aber hat der Punkt *m* einen Druck *P*, der Punkt *n* einen Druck *P'* auszuhalten. Wenn die auf einer Tragbahre liegende Last, Fig. 255, durch zwei Leute getragen werden soll, so verteilt sie sich auf die beiden Träger; im Falle sie gerade auf der Mitte der Bahre liegt, kommt auf jeden Träger die Hälfte der Last; wird sie aber dem einen näher gerückt, wie Fig. 255 andeutet, so hat dieser einen

Fig. 255.

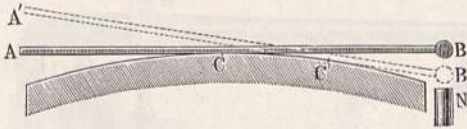


größeren Teil zu tragen. Gesetzt, die aufgelegte Last betrage 100 kg, die ganze Bahre sei 2 m lang und der Schwerpunkt der Last liege 80 cm von dem rückwärtigen, 120 cm von dem vorderen Ende, so haben die Schultern des nachfolgenden Trägers einen Druck von 60 kg, die des vorausgehenden einen Druck von 40 kg auszuhalten.

Zu den zusammengesetzten Hebeln gehören auch die Robervalsche und die Brückenwage, welche bereits in § 70 besprochen wurden.

Hebel mit veränderlicher Übersetzung. Die bisher betrachteten Beispiele von Hebeln, denen noch eine Anzahl anderer beigefügt werden könnte, waren sämtlich derartige, daß das Übersetzungsverhältnis während der Arbeitsleistung konstant blieb. Es gibt aber auch Hebelvorrichtungen mit veränderlicher Übersetzung. Man erhält solche z. B. einfach durch eine Anordnung, wie sie in Fig. 256 angedeutet ist.

Fig. 256.



Die gerade Hebelstange AB ist auf einer Unterlage mit konvexem Querschnitt befindlich. Der Unterstützungspunkt ist in C ungefähr in der Mitte, also das Übersetzungsverhältnis bezüglich der an den Enden angreifenden Kräfte $= 1$. Sowie aber der Hebel bewegt wird, z. B. nach $A'B'$, so rückt der Unterstützungspunkt nach C' , nahe an das eine Ende, und dadurch wird der Hebel ein ungleicharmiger. Stellen wir uns vor, in N befindet sich ein Magnetpol, welcher einen am Ende B befindlichen Anker (mit kreisförmigem Querschnitt) anzieht. Die Kraft, mit der dies geschieht, wächst in viel rascherem Verhältnis, als die Distanz abnimmt. Soll nun aber trotzdem am Ende A eine wenigstens annähernd konstante Kraft ausgeübt werden, so kann dies durch die in Rede stehende Vorrichtung erreicht werden, da die anziehende Kraft des Magneten bei der Übertragung auf das andere Hebelende um so mehr geschwächt wird, je mehr sie selbst durch Annäherung des Ankers an den Pol gewachsen ist. In der Tat wird von diesem Prinzip bei dem bekannten Kohlenlichtregulator von Foucault Anwendung gemacht. Auch der Winkelhebel, Fig. 251, ist ein solcher mit veränderlicher Übersetzung, da sein Unterstützungspunkt C während der Bewegung die Stelle wechselt.

§ 82. Die Gleitmaschine. Die hauptsächlichsten Formen der Gleitmaschine sind: die schiefe Ebene als Keil oder als Rampe, das Exzentrik, die Schraube. Keil und Rampe unterscheiden sich dadurch, daß der erstere bewegt wird, während die letztere in Ruhe bleibt. Exzentrik und Schraube entstehen durch Aufwicklung der schiefen Ebene um eine Achse. Wir wenden uns zuerst zu jenen Formen, die sich unter dem Namen Keil zusammenfassen lassen.

Die schiefe Ebene als Keil erscheint in ihrer einfachsten Form als ein prismatischer Körper mit zwei ebenen Gleitflächen, welche sich unter einem meist spitzen Winkel schneiden. In der Fig. 257 erscheint derselbe im Vertikalschnitt ABC senkrecht auf die von den Gleitflächen AB und AC gebildete Kante A . Eine konstante Kraft P , welche beispielsweise durch ein Gewicht, welches an das Ende der über die fixe Rolle gelegten Schnur gehängt ist, hervorgebracht wird, zieht die schiefe Ebene in der Richtung Ax . Hierdurch soll der Angriffspunkt einer vertikal nach abwärts wirkenden Kraft Q , welche wir uns im Schwerpunkt einer Masse m angebracht denken, in vertikaler Richtung nach aufwärts verschoben werden.

Durch eine in horizontaler Richtung angewendete Kraft soll also eine Arbeit in vertikaler Richtung geleistet werden.

Für die erstere Richtung dient die horizontale Gleitfläche und die Unterlage derselben als Führung, für die vertikale Richtung können wir uns eine Führung durch parallele Leisten, zwischen denen die Masse m auf und ab verschiebbar ist, gegeben denken. Wir stellen uns vor, daß die Bewegung ohne alle Reibung vor sich gehe. Um das Verhältnis der virtuellen Geschwindigkeiten zu finden, denken wir uns die schiefe Ebene um eine Strecke aA gegen X verschoben; hierdurch wird die Last m um die Höhe ab gehoben. Das gesuchte Verhältnis zwischen der Verschiebung des Angriffspunktes der arbeitenden Kraft und jener des Angriffspunktes der überwundenen Kraft ist also gleich dem Verhältnis zwischen der Basis der schiefen Ebene und der Höhe derselben. Bezeichnen wir die Basis mit B , die Höhe mit H , so gilt demnach für das Kraftverhältnis die Beziehung:

$$P : Q = H : B$$

oder

$$\frac{P}{Q} = \tan \alpha$$

wenn α der von den Gleitflächen eingeschlossene Winkel ist.

Soll demnach in diesem Falle die schiefe Ebene nur die Richtung und nicht auch die Größe der Kraft (und des Weges) verändern, so müßte $H = B$, also $\alpha = 45^\circ$ gemacht werden.

Für den Fall, daß die neue Krafrichtung einen von 90° verschiedenen Winkel mit der Richtung der arbeitenden Kraft bildet, muß auch die schiefe Ebene einen anderen Winkel haben, wenn das Übersetzungsverhältnis gleich Eins sein soll. Es sei z. B. Dy , Fig. 258, die Richtung der zu überwinden-

Fig. 258.

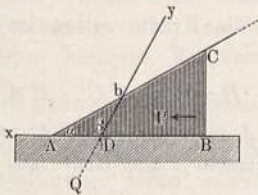
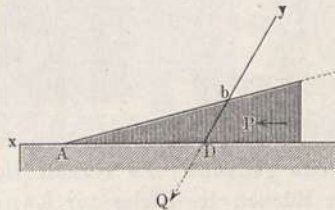


Fig. 259.



den Kraft, welche mit der Richtung der arbeitenden Kraft Dx den Winkel β einschließt. Tragen wir von D aus zwei beliebige gleiche Strecken DA und Db nach x und nach y hin auf und verbinden die Punkte A und b , so ist bAD der Winkel der gesuchten schiefen Ebene, denn einer Verschiebung derselben gegen x entspricht eine gleich große Verschiebung der Last gegen y .

Der Winkel α dieser schiefen Ebene ist gleich $90 - \frac{\beta}{2}$. Jede andere schiefe

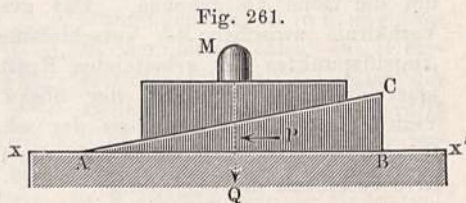
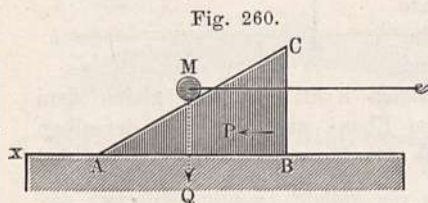
Ebene ändert nicht bloß die Richtung, sondern auch die Zusammensetzung der übertragenen Arbeitsgröße, wobei das Übersetzungsverhältnis durch das

Verhältnis der Dreiecksseiten $\frac{DA}{Db}$ gegeben ist. Soll also z. B. eine Kraft,

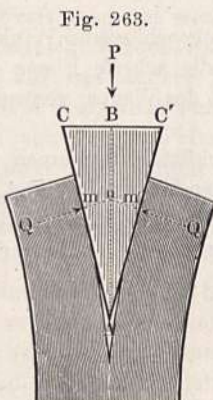
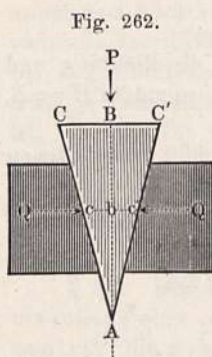
welche in der Richtung Dx (Fig. 259) gegeben ist, nach der Richtung Dy in dreifacher Stärke wirken, so tragen wir eine beliebige Strecke Db und eine Strecke $DA = 3Db$ auf; DAb ist dann der Winkel der gewünschten schiefen Ebene.

Die äußere Anordnung zur Führung der Kräfte kann eine sehr verschiedene sein.

So z. B. kann die Last m statt durch vertikale Leisten dadurch in vertikaler Richtung geführt sein, daß sie mittels einer horizontalen Schnur gehalten wird (Fig. 260), oder dadurch, daß sie auf einem zweiten prismatischen Stücke aufruhet, dessen horizontale Bewegung gehindert ist (Fig. 261).



Denkt man sich die letztere Anordnung in bezug auf xx' symmetrisch verdoppelt, wie Fig. 262 in aufgerichteter Lage zeigt, so hat man den



symmetrischen Keil, bei welchem die Richtung der arbeitenden Kraft den Kantenwinkel des Keiles halbiert. Wirkt dabei die zu überwindende Kraft Q senkrecht gegen die Mittellinie AB , so sind die zusammengehörigen Wege der Angriffspunkt der Kräfte P und Q im Verhältnis von

$$bA : cc' = BA : CC',$$

also die Kräfte selbst im Verhältnis

$$P : Q = CC' : BA$$

stehend. CC' wird der Rücken des Keiles, BA seine Länge, $CA = C'A$ seine Seite genannt. Es verhält sich also in diesem Falle Kraft zur Last wie der Rücken des Keiles zur Länge desselben.

Ist aber die Gegenkraft Q beiderseits senkrecht auf die Seite des Keiles gerichtet (Fig. 263), so sind offenbar die gleichzeitigen Wege der Angriffspunkte von P und Q in dem Verhältnis:

$$nA : 2mn = CA : CC'$$

also die Kräfte im Verhältnis:

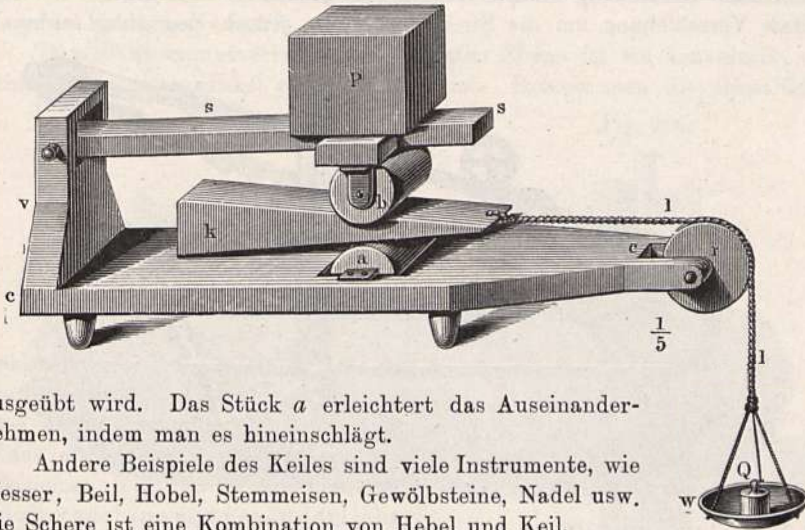
$$P : Q = CC' : CA$$

stehend, d. h. es verhält sich Kraft zur Last wie der Rücken des Keiles zur Seite desselben.

Der in Fig. 264 abgebildete Apparat dient zum Nachweis des ersten dieser Sätze, so weit dies wegen der verhältnismäßig großen Reibung möglich ist.

Fig. 265 zeigt eine sog. Keilpresse im Durchschnitt; c, c ist der zu pressende Körper, b ist der Keil, durch dessen Hineinschlagen der Druck

Fig. 264.



ausgeübt wird. Das Stück a erleichtert das Auseinandernehmen, indem man es hineinschlägt.

Andere Beispiele des Keiles sind viele Instrumente, wie Messer, Beil, Hobel, Stemmeisen, Gewölbsteine, Nadel usw. Die Schere ist eine Kombination von Hebel und Keil.

Die schiefe Ebene als Rampe. (Schiefe Ebene im engeren Sinne.) Es sei eine Masse m vom Niveau AA' , Fig. 266, auf das um h höhere Niveau BB' zu heben.

Fig. 265.

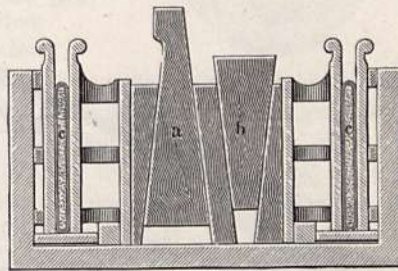
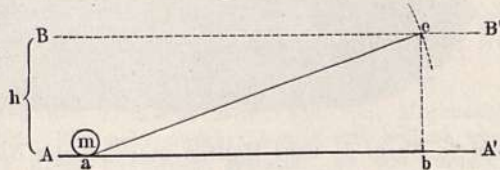


Fig. 266.



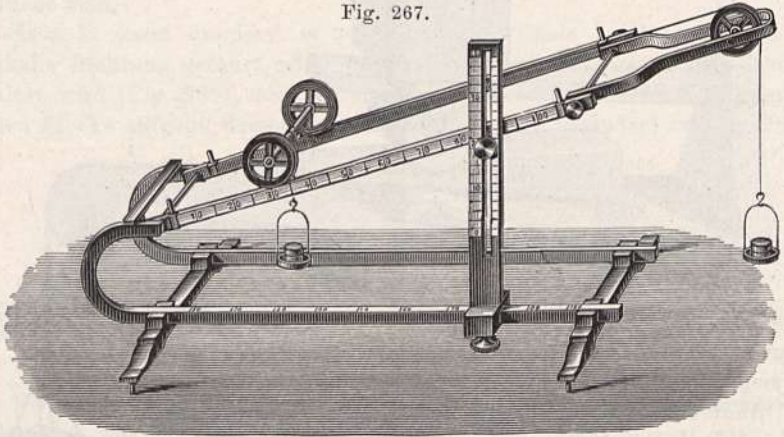
Ist g die Acceleration der Schwere, so ist eine Kraft $= mg$ erforderlich, um diese Hebung in vertikaler Richtung zu bewerkstelligen. Wenn nun aber eine solche Kraft nicht zur Verfügung steht, sondern nur eine kleinere Kraft $= \frac{mg}{n}$, so kann man die Hebung auf einer schiefen Ebene bewerkstelligen, deren schiefe Länge $l = nh$ ist. Nimmt man eine Länge $= nh$ in den Zirkel (in der Figur ist $n = 3$) und beschreibt man von a aus den Bogen, der BB' in c schneidet, so ist ac die gewünschte schiefe Ebene, denn wie bereits § 48 gezeigt wurde, ist die längs ac wirksame Komponente der Anziehungskraft der Erde auf die Masse m gleich:

$$\frac{mgh}{l} = \frac{mg}{n}$$

Die schiefe Ebene vermindert also nicht, aber sie erleichtert die zu leistende Arbeit, indem sie die Zusammensetzung derselben ändert, nämlich die Kraft auf Kosten des Weges vermindert.

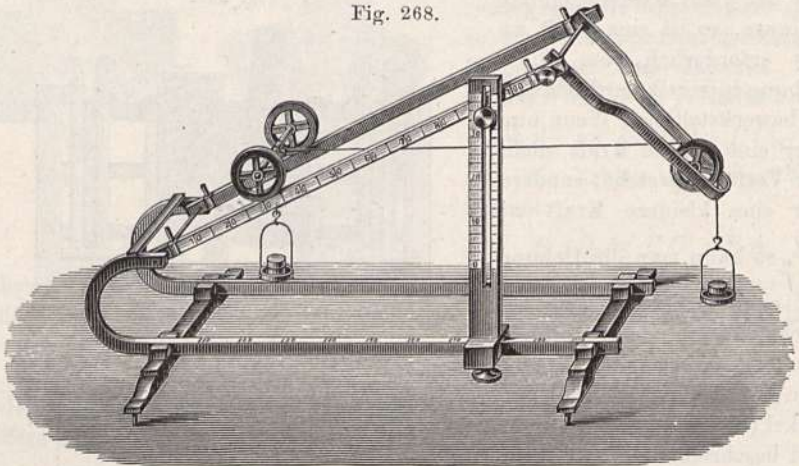
Außer der Hebung um die Höhe h erfolgt hierbei auch noch eine horizontale Verschiebung um die Strecke ab . Da jedoch Bewegung senkrecht

Fig. 267.



auf die Richtung einer Kraft keine Arbeitsleistung erfordert (immer vorausgesetzt, daß keine Reibung zu überwinden ist), so können wir diese horizontale Verschiebung [vor oder nach dem Anstiege über die schiefe Ebene ohne weiteren Aufwand von] Energie bewerkstelligen. Wir könnten auch die

Fig. 268.



schiefe Ebene in zwei Hälften umgekehrter Neigung zerlegen, wie es tatsächlich bei unseren Haustreppen häufig verwirklicht ist.

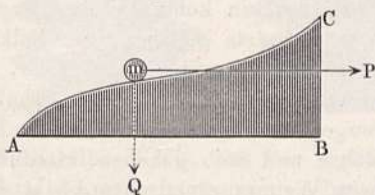
Die schiefe Ebene kommt manchenmal auch noch in der Weise zur Anwendung, daß die arbeitende Kraft nicht parallel der Länge, sondern parallel der Basis wirkt. Man hat dann den in Fig. 260 bereits dargestellten Fall, nur mit dem Unterschiede, daß dort die schiefe Ebene sich gegen die zu hebende Masse bewegt, während hier die schiefe Ebene ruht und die Masse

gegen sie bewegt wird. Wie dort, verhält sich daher auch hier die Kraft zur Last wie die Höhe der schiefen Ebene zur Basis derselben.

Zur Demonstration der beiden Anwendungen der schiefen Ebenen eignet sich der in Fig. 267 und 268 dargestellte Apparat¹⁾, welcher wohl keiner weiteren Erklärung bedarf.

Das Übersetzungsverhältnis der schiefen Ebene ist ein konstantes, weil eben der Neigungswinkel ein konstanter ist. Ersetzt man die ebene Gleit-

Fig. 269.

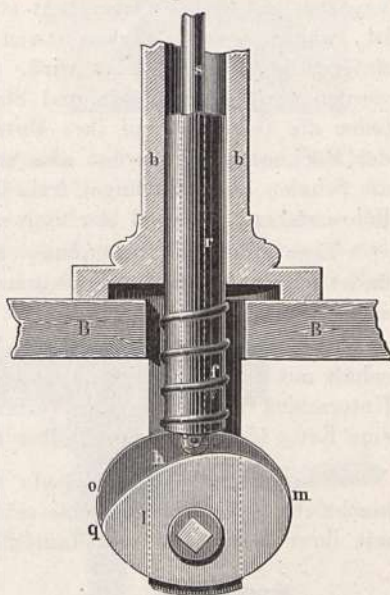


fläche derselben durch eine solche mit veränderlicher Neigung, so daß also ihre Projektion auf die Zeichnungsebene statt einer Geraden eine Kurve erscheinen läßt, so erhält man eine Gleitmaschine mit veränderlicher Übersetzung, Fig. 269.

Eine damit nahe verwandte Maschine erhält man, wenn man sich eine solche Kurve statt auf einer geradlinigen Basis auf der Mantelfläche eines Zylinders aufgewickelt denkt. Indem dann der Zylinder um seine Achse gedreht wird, schiebt sich die Gleitfläche mit wechselnder Höhe unter der zu hebenden Last vorbei. Eine solche Vorrichtung ist das Exzentrik²⁾.

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir eine der Vorrichtungen beschreiben, welche an Wagen angebracht werden, um die Arretierung des Balkens und der Schalen zu bewerkstelligen. Wie wir in § 68 mitgeteilt haben, enthält die Wagsäule eine zylindrische Röhre und innerhalb derselben ein zylindrisches Stäbchen. Fig. 270 zeigt eine solche Vorrichtung im Querschnitt³⁾. *B* ist der Boden, auf dem die hohle Wagsäule *b* steht, *r* ist die Röhre, durch deren Hebung die Schalen (oder Gehänge) frei gesetzt, durch deren Senkung sie arretiert werden. *s* ist der zylindrische Stab, durch dessen Hebung der Balken arretiert, durch dessen Senkung er frei

Fig. 270.



¹⁾ Derselbe ist nach Angabe des Professors Bertram vom Mechaniker E. Ernecke in Berlin ausgeführt. Eine sehr zweckmäßige Form, welche auch den Normaldruck auf die schiefe Ebene zu messen gestattet, ist von Professor Weinhold in seinen „Physikalischen Demonstrationen“, S. 70 beschrieben und abgebildet.

²⁾ Streng genommen sollte man darunter nur solche Vorrichtungen verstehen, deren Gleitfläche nach einem um die Drehachse exzentrisch gelegenen Kreis, bzw. Kreissegment geformt ist; doch gebraucht man diesen Namen auch bei anders geformten Gleitflächen.

³⁾ Die Zeichnung bezieht sich auf eine Wage von Kraft in Wien.

gemacht wird. l und h sind zwei miteinander verbundene exzentrische Scheiben, welche sich mittels eines auf dem viereckigen Zapfen aufzusteckenden Schlüssels drehen lassen. Auf dem Umfange der Scheibe h sitzt die Röhre r auf und wird durch die Spiralfeder f an die erstere angedrückt. Auf dem Umfange der Scheibe l sitzt das am unteren Ende der Stange s befindliche Rädchen i auf. Wenn der Wagebalken frei spielt, ist die Doppelscheibe so gedreht, daß die Röhre r bei dem Punkte o , das Rädchen i bei dem Punkte q aufsitzt. Dreht man in der Richtung des Pfeiles, so bleibt zunächst die Röhre unverrückt stehen, weil om ein konzentrischer Bogen ist, während das Rädchen i von q bis m aufwärts gehoben, der Balken unterstützt, also arretiert wird. Dreht man noch weiter nach links, so werden von da an Röhre und Stab gesenkt, so daß hierdurch die Schalen (oder die Gehänge) auf ihre Unterstüzungen herabgelassen werden. Bei der Rückbewegung werden also zuerst Röhre und Stab gehoben, hierdurch die Schalen (oder Gehänge) frei, dann beim Weiterzurückdrehen bleibt die Röhre stehen, während der Stab sinkt und hierdurch den Balken frei gibt.

Eine ähnliche Anwendung eines spiralförmig geformten Exzentricks findet man bei manchen Kopiermaschinen; auch bei der Nähmaschine finden sich verwandte Konstruktionen.

Wie man sieht, haben derlei Vorrichtungen eine prinzipielle Verwandtschaft mit dem im vorigen Paragraphen beschriebenen Schneckenrade. Der Unterschied besteht in der Verbindungsweise, welche bei letzterem durch eine Kette (Seil), hier unmittelbar durch die Gleitfläche hergestellt ist.

Die schiefe Ebene als Schraube. Während die vorangehend beschriebene Maschine als eine schiefe Ebene aufgefaßt werden kann, welche mit ihrer Basis auf die Mantelfläche eines auf ihr senkrecht stehenden

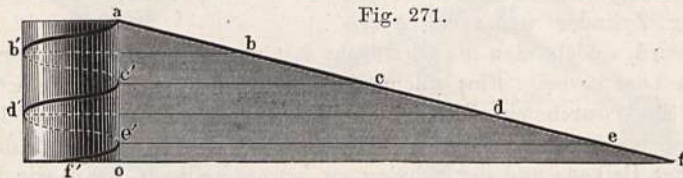


Fig. 271.

Zylinders aufgewickelt ist, erhalten wir die Schraube, indem wir eine schiefe Ebene auf einem zu ihr parallelen, auf ihrer Basis senkrecht stehenden Zylinder aufwickeln.

Es sei aof , Fig. 271, ein rechtwinklig dreieckiges Stück Papier, dessen vertikale Kathete an einem Zylinder befestigt ist. Wird nun das Papier um den Zylinder herumgewickelt, so bildet die Hypotenuse af auf dem Zylinder eine Schraubenlinie, deren Lauf man in der Figur leicht verfolgen kann.

Ist cc' gleich dem Umfange des Zylinders, so wird beim Umwickeln c nach c' , also vertikal unter a kommen. Der Punkt b kommt nach b' , d nach d' usw. Die auf die hintere Seite des Zylinders fallenden Stücke der Schraubenlinie sind punktiert. Die Höhe von a bis c' , von b' bis d' usw. ist die Höhe eines Schraubenganges.

Denken wir uns längs der Schraubenlinie um den Zylinder ein Dreieck, dessen Ebene radiale Richtung behält, fortgeführt, welches die Höhe eines

Schraubenganges hat, so entsteht ein sog. scharfes Schraubengewinde, wie ein solches in Fig. 272 dargestellt ist; denkt man sich aber ein Viereck, dessen Höhe gewöhnlich halb so groß ist als die Höhe eines Schraubenganges,

Fig. 272.

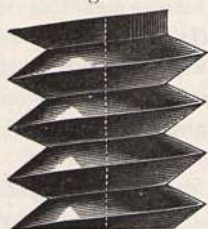
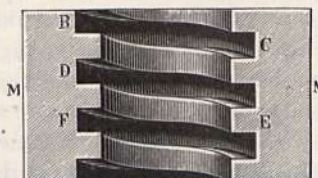


Fig. 273.



Fig. 274.



auf dieselbe Weise um den Zylinder geführt, so entsteht ein flaches Schraubengewinde; ein solches ist in Fig. 273 dargestellt.

Wir haben eben nur solche Schraubengewinde betrachtet, welche um einen soliden Zylinder herumgelegt sind; Schrauben, welche auf diese Weise gebildet sind, werden Schraubenspindeln genannt; werden aber die Gewinde auf dieselbe Weise im Innern eines hohlen Zylinders herumgeführt, so entsteht eine Schraubenmutter.

Fig. 275.

Eine Schraubenspindel ist für sich allein zur Hervorbringung mechanischer Effekte nicht zu gebrauchen; sie muß mit einer Schraubenmutter so verbunden sein, daß die Erhabenheiten der einen genau in die Vertiefungen der anderen passen. Fig. 274 stellt eine Schraubenmutter dar, welche zu der Schraubenspindel Fig. 273 paßt.

Die Schraubenwinde, Fig. 275, ist ganz besonders geeignet, um die Anwendung der Schraube zu erläutern. In der Mitte des durch vier eiserne Säulchen getragenen massiven Messingstückes *mn* ist die Schraubenmutter eingeschnitten, in welche die eiserne Schraubenspindel *ss* paßt.



Sobald nun diese Schraubenspindel umgedreht wird, so wird sie bei jeder Umdrehung um die Höhe eines Schraubenganges auf oder nieder gehen, indem die Windungen der Schraubenspindel auf den Windungen der Schraubenmutter wie auf einer schiefen Ebene auf und nieder gleiten.

Wenn nun auf den Kopf *k*, mit welchem die Schraubenspindel oben endigt, irgend eine Last aufgelegt wird, so muß diese Last dadurch gehoben

werden, daß die Schraubenspindel in der entsprechenden Richtung umgedreht wird, und es ist klar, daß hier dieselben Prinzipien zur Anwendung kommen, als ob die Last auf einer schiefen Ebene hinaufgezogen werden sollte, welche ebenso stark gegen die Horizontale geneigt ist wie die Windungen der Schraube; es wird sich also für den Fall des Gleichgewichts die (am Umfange der Schraubenspindel angebrachte) Kraft zur Last verhalten wie die Höhe eines Schraubenganges zum Umfange der Spindel, da man bei der geringen Steigung solcher Schrauben die Länge eines Schraubenganges ohne merklichen Fehler dem Schraubenumfange gleichsetzen kann.

Nehmen wir an, die Höhe eines Schraubenganges an der Winde, Fig. 275, sei ein Zehntel vom Umfange der Spindel ss , so könnte man (abgesehen von

Fig. 276.

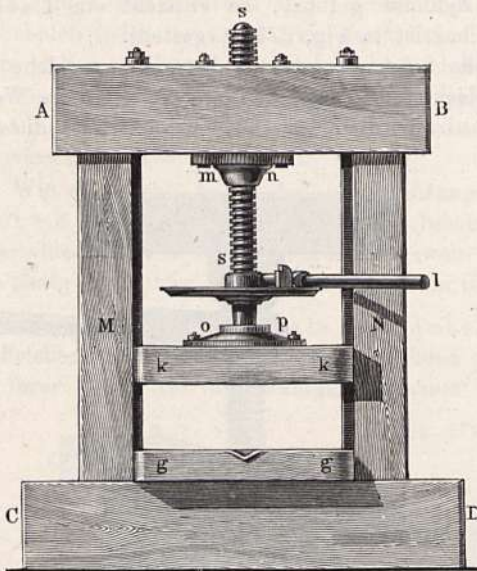


Fig. 277.

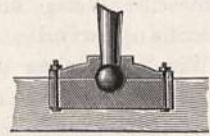
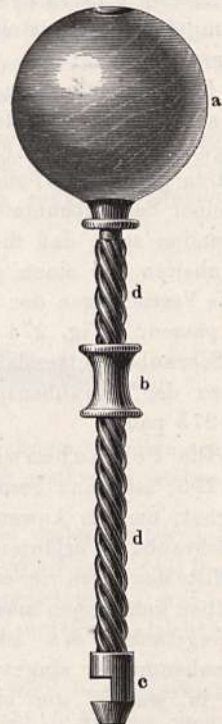


Fig. 278.



der Reibung) mit einer am Umfange dieser Spindel angebrachten Kraft von 1 kg eine auf der Schraube liegende Last von 10 kg heben. Um aber mit der Schraube einen größeren Effekt zu erreichen, wird die Kraft nicht direkt am Umfange der Spindel, sondern am Ende eines Hebelarmes l , Fig. 275, angebracht. Nehmen wir an, die Länge dieses Hebelarmes sei 10 mal so groß als der Radius der Spindel, so bestände also zwischen der am Ende des Hebels l angreifenden Kraft und der auf k liegenden Last das Verhältnis von 1 zu 100.

So gut wie man mit Hilfe einer Schraube eine Last zu heben imstande ist, kann man sie auch anwenden, um einen großen Druck auszuüben, und darauf gründet sich ihre Anwendung in der Schraubenpresse, Fig. 276. Die Schraubenspindel SS paßt in die metallene Schraubennutter mn , welche in dem starken horizontalen Balken AB befestigt ist. AB ist mit CD durch

zwei starke vertikale Balken M und N verbunden. Die Drehung der Schraube wird mittels des Hebels l bewerkstelligt. — Der auf und nieder gehenden Bewegung der Schraube SS folgt die Preßplatte kk , ohne jedoch an der Drehung der Spindel teilzunehmen. Das untere Ende der Schraubenspindel steckt nämlich mittels eines Kugelgelenkes Fig. 277 in der auf der Preßplatte befestigten Metallplatte op , so daß sich also die Spindel ohne die Preßplatte drehen kann, welche letztere durch die Seitenpfosten M und N an einer Drehung gehindert wird. Der zu pressende Körper wird zwischen die Preßplatte kk und die Bodenplatte gg gelegt.

Wenn es gilt, mit Hilfe einer Schraubenwinde eine Last zu heben oder mit Hilfe einer Schraubenpresse einen starken Druck auszuüben, so kann man jedoch nie den nach den oben angedeuteten Prinzipien berechneten theoretischen Effekt erreichen, weil ein großer Teil der Kraft zur Überwindung der hier nicht unbedeutenden Reibungswiderstände erforderlich ist.

Auch zu anderen Zwecken als zur Hebung einer Last oder zur Ausübung eines großen Druckes wird die Schraube angewandt. Eine Schraube, welche in ihrer Längsrichtung nicht verschiebbar ist, wird eine bewegliche Schraubenmutter bei jeder Umdrehung um einen Schraubengang voranschreiben; bei gleichförmiger Umdrehung der Schraube wird also auch die Mutter mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fortgeschoben, und zwar um so langsamer, je feiner das Gewinde ist. Darauf beruht u. a. das gleichförmige Fortschieben des Supports an Drehbänken.

Da bei einigermaßen feinen Schraubengängen selbst einer ganzen Umdrehung des Schraubenkopfes nur ein sehr geringes Fortschieben entspricht, so benutzt man bei Meßinstrumenten eine feine Schraube zur genaueren Einstellung. Soll das Fortschieben mit besonderer Langsamkeit geschehen, so benutzt man die Differentialschraube (ein Zylinder mit zwei Schraubengewinden von wenig verschiedener Schraubenhöhe in entsprechenden Schraubennuttern). Wir haben eine solche bei der Beschreibung des Kathetometers erwähnt. Ihre Wirksamkeit ist ganz analog der Differentialwelle.

Die Anwendung der Mikrometerschraube zum Messen und Teilen wurde in § 17, 19 und 23 besprochen.

Während bei der Seilmaschine und dem Hebel meist eine Umkehrung der Maschine in der Weise, daß man den Angriffspunkt der Kraft mit jenem der Last vertauscht, keiner Schwierigkeit begegnet, ist eine solche umgekehrte Anwendung bei der schiefen Ebene, insbesondere der Schraube wegen der großen Reibung in der Regel nicht möglich. Es ist dies nur dann ausführbar, wenn der Winkel der schiefen Ebene (die Neigung der Schraubenwindung) ziemlich groß oder die Reibung sehr gering ist.

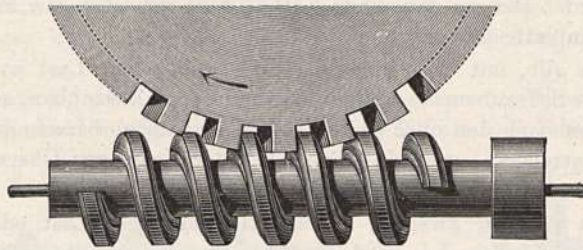
Ein Beispiel für den ersteren Fall bildet der Drillbohrer, Fig. 278¹⁾, die Mutter b der steilen, mehrgängigen Schraube d wird auf- und abbewegt und bringt dadurch die Rotation des in c einzusetzenden Bohrers hervor.

Ein Beispiel für die umgekehrte Anwendung des Keiles bei geringer Reibung wäre das Herausschnellen eines schlüpfrigen Apfelkernes zwischen den zusammengepreßten Fingern.

¹⁾ Entliehen aus Fricks Physik. Technik, sechste von O. Lehmann bearbeitete Auflage 1, 190.

Eine Kombination der Schraube mit dem Wellrade ist die sogenannte Schraube ohne Ende (Fig. 279), bei welcher die Schraubenmutter durch die Zähne des Rades gebildet wird. Ist die Schraube auch noch mit einer Kurbel (Hebel) versehen, so haben wir dann eine Kombination der drei Haupttypen Hebel, Schraube und Wellrad, welche häufig mit Vorteil angewandt wird. Ist L die Länge der Kurbel (des Hebels), l der Radius des

Fig. 279.



Schraubengewindes, u der Umfang, h die Höhe des letzteren, R der Radius des Wellrades, r der Radius der Welle, so ist das Übersetzungsverhältnis gegeben durch:

$$\frac{L}{l} \cdot \frac{u}{h} \cdot \frac{R}{r} = \frac{2\pi L \cdot R}{h \cdot r} \dots \dots \dots (1)$$

Der Kraftgewinn kann also sehr bedeutend werden.

§ 83. Die Kniepresse. Zum Schlusse wollen wir noch eine Maschine beschreiben, welche sich nicht ungezwungen in eine der drei Typen einreihen

Fig. 280.

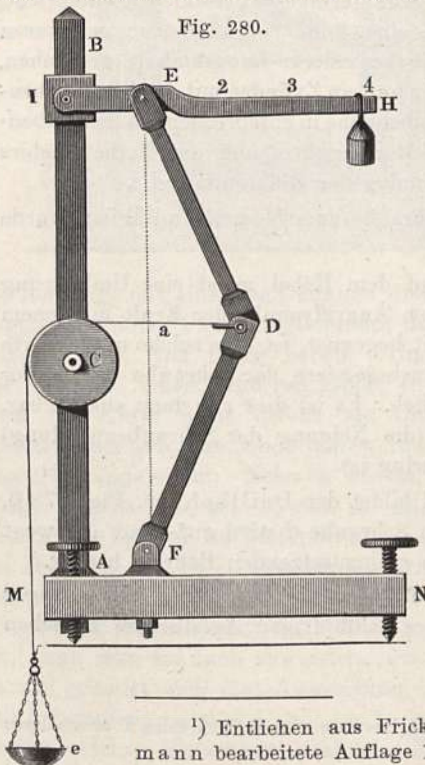


Fig. 281.

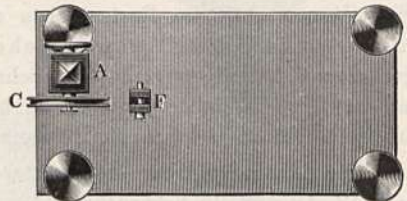
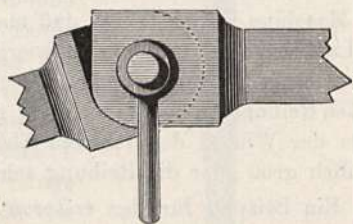


Fig. 282.



läßt. Es ist die Kniepresse, von welcher ein Modell in den Figuren 280 bis 282¹⁾ abgebildet erscheint.

An der auf dem Grundbrette MN befestigten prismatischen Säule AB

¹⁾ Entliehen aus Fricks Physik. Technik, sechste von O. Lehmann bearbeitete Auflage 1, 190.

(Fig. 280) lassen sich mittels Hülßen die fixe Rolle C und der Hebel IH in beliebiger Höhe fixieren. Sie seien wie in der Figur so gestellt, daß am Knie D der beiden Stangen ED und DF mittels der über die Rolle gehenden Schnur a und dem in der Wagschale e befindlichen Gewichte eine horizontale Kraft angebracht werden kann, während der Hebel IH auch nahe horizontal zu stehen kommt. Durch das Laufgewicht läßt sich dann der bei E entstehende vertikale Druck demonstrieren. Das Kniegelenk ist, wie Fig. 280 zeigt, so konstruiert, daß der Winkel EDF den Betrag von 180° nicht überschreiten kann.

Diese Maschine gehört zu jenen mit veränderlicher Übersetzung und hat eine gewisse theoretische Verwandtschaft mit der beweglichen Rolle, wenn man sich deren Seilstücke steif gemacht und statt auf Zug auf Schub eingerichtet denkt. Da einer ziemlich großen Verschiebung von D nur eine kleine Hebung von E entspricht, so muß nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten die auf E ausgeübte Kraft, insbesondere zuletzt, eine sehr bedeutende sein.

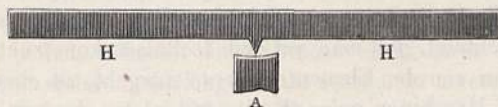
§ 84. Die konstruktiven Elemente der Maschinen. Die in den vorausgegangenen Paragraphen gegebene Darstellung der einfachen Maschinen ist durchaus keine erschöpfende und nur so weit durchgeführt, um das physikalische Prinzip der Maschinen klar zu stellen.

Wenn man die Maschinen nicht vom physikalischen, sondern vom technisch-konstruktiven Standpunkte aus untersucht, so gelangt man zur Einsicht, daß jede Maschine aus gewissen Elementen bestehe, welche stets paarweise vorkommen¹⁾.

Ein paar Beispiele werden dies sofort erkennen lassen.

Die Hebelmaschine besteht nicht bloß aus der Hebelstange HH (Fig. 283), sondern es gehört als wesentlicher Teil auch jener unterstützende Körper A

Fig. 283.



dazu, um den sich die Stange drehen kann. Beide zusammen bilden ein Elementenpaar.

Ebenso bildet die schiefe Ebene mit dem darauf gleitenden Körper, die Schraube mit der Schraubenmutter je ein Elementenpaar. Die fixe Rolle dagegen enthält schon zwei Elementenpaare, das erste Paar wird durch die feste Achse einerseits und durch den sie umschließenden Hohlzylinder andererseits gebildet. Das zweite Elementenpaar der Rolle besteht aus der Rinne am Umfange einerseits und dem Seile andererseits. Das zweite Element des ersten Paares (der Hohlzylinder) und das erste Element des zweiten Paares (die Rinne) sind miteinander durch die Scheibe der Rolle zu einem festen Stücke verbunden.

Eine derartige Verkettung von noch mehreren Elementenpaaren wird von Reuleaux eine kinematische Kette genannt.

¹⁾ Reuleaux, Kinematik.

Die Elemente eines Elementenpaares haben sich gegenseitig als Führung zu dienen, indem sie sich vollständig oder unvollständig umhüllen. Hält man eines dieser Elemente fest, so wird dadurch das andere zugehörige Element veranlaßt, seine Bewegungen auf bestimmter vorgeschriebener Bahn auszuführen.

Diese Führung kann entweder eine solche sein, bei welcher das eine Element das andere zwingt, nur diese und keine andere Bewegung zu machen, wie z. B. die Schraubenmutter und die Schraubenspindel, ein Hebel von beistehend gezeichneter Konstruktion, dessen Achse rings umschlossen ist, Fig. 284; oder die Führung ist an sich keine vollständig zwingende, und es wird die Beihilfe einer Kraft erfordert, welche dafür sorgt, daß die nicht beabsichtigten Bewegungen nicht eintreten. So z. B. ist der in Fig. 283 ab-

Fig. 284.



gebildete Hebel nicht gezwungen, sich um die Schneide zu drehen, da er sich ja auch von der Unterlage weg bewegen könnte. Nur die Kraft, welche ihn gegen das Achsenlager andrückt, sorgt dafür, daß er nur die gewünschte Bewegung einhält.

Die Elementenpaare werden demnach in zwangsläufig verbundene oder selbständige und in kraftschlüssig verbundene oder unselbständige eingeteilt. Fig. 284 stellt ein ersteres, Fig. 283 ein letzteres dar.

Das kraftschlüssige Elementenpaar ist in gewisser Hinsicht weniger vollkommen als das zwangsläufige, und es geht das Betreiben des Maschinenkonstruktors im allgemeinen dahin, kraftschlüssige Verbindungen zu vermeiden, und durch zwangsläufige zu ersetzen.

Daß dies aber nicht unbedingt in allen Fällen gilt, zeigt z. B. die Konstruktion der Wage, wo die kraftschlüssige Verbindung, Fig. 283, wegen ihrer geringeren Reibung der zwangsläufigen, Fig. 284, überlegen ist.

Es ist einleuchtend, daß man auf dem technisch-konstruktivischen Standpunkte, indem man von den Elementenpaaren ausgeht, zu einer ganz anderen Klassifikation der Maschinen gelangt, als jene ist, zu der wir oben vom physikalischen Standpunkte aus gelangt sind. So rechnet z. B. Reuleaux die fixe Rolle nicht zu den einfachen Maschinen, da sie bereits zwei Elementenpaare enthält. Bezüglich dieses Gegenstandes müssen wir auf das oben zitierte Buch von Reuleaux verweisen.

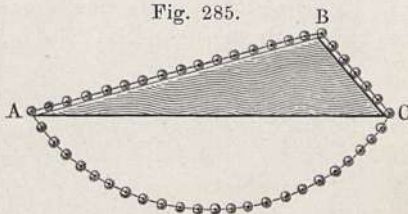
§ 85. Die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile. Unter einem Perpetuum mobile versteht man eine Maschine, welche sich nicht allein selbst im Gange zu erhalten, sondern auch noch einen Überschuß von Arbeitskraft nach außen abzugeben vermag. Daß eine solche Maschine unmöglich ist, dürfte nach den Erörterungen in den §§ 75 und 78 unschwer einzusehen sein. Würde man vom abzugebenden Überschuß absehen und gäbe es weder Reibung noch Luftwiderstand, dann wäre jedes Schwungrad und jedes Pendel ein Perpetuum mobile. Bei jeder Maschine, die wirklich existiert, ist es nicht zu vermeiden, daß ein Teil der übertragenen Energie zur Überwindung von Reibung und Widerstand verbraucht wird. Die an dem ersten Angriffspunkte

aufgewendete Arbeit wird also bereits mit einem Verluste auf den zweiten Angriffspunkt übertragen; versucht man sie daher von diesem aus durch eine zweite Maschine wieder auf den ersten Angriffspunkt zurückzubringen, so ist bei diesem Kreisprozesse zweimal ein Verlust entstanden, der sich bei jeder neuen Hin- und Herübertragung wiederholt und deshalb nach einiger Zeit beide Maschinen zum Stillstande bringen muß. Da das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten nur eine andere Formulierung des Satzes von der Konstanz der übertragenen mechanischen Energie ist, so erklärt sich, daß Leonardo da Vinci (1452—1519), der zuerst die allgemeine Gültigkeit jenes Prinzips sowie die Reibungsverluste kannte, auch zuerst die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile ausgesprochen hat.

Stevin (1548—1620), der Hauptbegründer der Statik, hat über diesen Punkt nicht nur vollständig richtig gedacht, sondern sogar die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile als ein selbstverständliches Axiom zugrunde gelegt, um aus demselben die Gesetze des Gleichgewichtes auf der schiefen Ebene abzuleiten.

Er denkt sich ein dreiseitiges Prisma ABC , Fig. 285, über welches eine leicht bewegliche Kette ohne Ende ¹⁾, wie die Figur zeigt, gelegt ist. Wäre diese Kette nicht im Gleichgewichte, so müßte sie in Bewegung geraten; da sie dadurch immer in derselben Anordnung bleiben würde, so müßte die Ursache zur Bewegung immer fort-dauern.

Fig. 285.



Da es aber undenkbar sei, daß die Kette sich fort und fort in derselben Richtung in Bewegung erhalte, so müßte sie im Gleichgewichte sein. Da nun der untere frei hängende Teil, der aus zwei symmetrischen Hälften besteht, für sich im Gleichgewichte sein muß, so muß es auch der obere aufliegende Teil für sich sein. Dieser Teil besteht aus den zwei Stücken AB und BC , deren Massen sich verhalten wie die Längen der schiefen Ebenen, auf denen sie ruhen. Sollen diese Stücke trotz ihrer ungleichen Massen dennoch gegeneinander im Gleichgewichte stehen, so müssen sich die Zugkräfte gleicher Massen längs der schiefen Ebenen umgekehrt verhalten wie die Längen der letzteren. Dies muß auch dann noch gelten, wenn die schiefe Ebene BC allmählich immer steiler und endlich senkrecht gerichtet wird. Es verhält sich dann die Zugkraft einer Masse längs einer schiefen Ebene zur Zugkraft der frei hängenden Masse wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge. Stevin gelangte so zu denselben Sätzen, die wir in § 48 mitgeteilt haben.

Nicht immer liegen die Verhältnisse so einfach und unmittelbar erkennbar vor Augen; aber auch bei komplizierten Maschinen bedarf es nur der konsequenten Anwendung der an den einfachen Maschinen erkannten Prinzipien, um einzusehen, daß ein Perpetuum mobile unmöglich sei.

§ 86. Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, Trägheitsmoment. Im § 61 haben wir das Gleichgewicht der Kräfte bei einem Körper,

¹⁾ Stevin dachte sich eine Reihe in gleichen Abständen befindlicher Kugeln.

der sich um eine Achse drehen läßt, untersucht. Wir haben jetzt noch zu ermitteln, welchen Einfluß die Masse und ihre Verteilung auf die Wirkung der drehenden Kräfte ausübt.

Wie bei der geradlinigen Bewegung, so wird auch bei der drehenden Bewegung durch eine sogenannte Momentankraft eine konstante Geschwindigkeit, durch eine konstante Kraft eine Beschleunigung hervorgebracht.

Die Geschwindigkeit der Drehung oder die Winkelgeschwindigkeit wird durch den Winkel φ gemessen, um welchen sich der Körper in der Zeiteinheit dreht. Man pflegt denselben nicht durch Grade, sondern durch die Länge des Bogens am Radius 1 auszudrücken, wobei der Radius selbst als Längeneinheit dient (d. h. man wählt den Winkel von $57^{\circ} 14' 45''$ zur Einheit).

Ein Punkt, welcher um r von der Achse absteht, legt demnach in der Zeiteinheit einen Weg $= r\varphi$ zurück (periphere Geschwindigkeit). Man kann demnach auch sagen, die Winkelgeschwindigkeit ist gleich der peripheren Geschwindigkeit für den Radius 1.

Die Winkelbeschleunigung ϑ ist die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit φ in der Zeiteinheit. Ein im Abstände r von der Achse befindlicher Punkt hat dann die periphere Beschleunigung $= r\vartheta$.

Es sei oa (Fig. 286) eine gewichtslose starre Menge, welche sich um die Achse o drehen läßt. Im Abstände r von der Achse werde eine Masse m angebracht, welche, durch eine konstante Kraft p stets in der Richtung der Tangente angetrieben, im Kreise bewegt wird. Es entsteht hierdurch eine Drehung mit der Winkelbeschleunigung ϑ .

Es soll nun berechnet werden, welche andere Masse m' (anstatt der Masse m), im Abstände 1 von der Achse angebracht, durch dieselbe im Abstände r wirkende Kraft p die gleiche Winkelbeschleunigung ϑ erfahren würde. Im ersten Falle legt die Masse m in der Zeit t den Weg

$$s = \frac{r\vartheta}{2} t^2 = \frac{p}{2m} t^2 \quad 1)$$

zurück, woraus folgt:

$$m = \frac{p}{2s} t^2 \quad \dots \quad (1)$$

Im zweiten Falle legt die Masse m' in derselben Zeit t den Weg

$$s' = \frac{\vartheta}{2} t^2 = \frac{p'}{2m'} t^2$$

zurück, wobei p' die der Kraft p in r äquivalente im Abstände 1 angreifende Kraft ist. Daraus folgt:

$$m' = \frac{p'}{2s'} t^2.$$

Nun ist aber offenbar $s' = \frac{s}{r}$, $p' = pr$, folglich

$$m' = \frac{p r^2}{2s} t^2 \quad \dots \quad (2)$$

¹⁾ Beschleunigung $r\vartheta = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{p}{m}$; siehe § 41.

Aus (1) und (2) folgt dann

$$m' = m r^2 \dots \dots \dots (3)$$

Das Produkt $m r^2$ aus der Masse mit dem Quadrat ihres Abstandes von der Drehachse heißt das Trägheitsmoment dieser Masse in bezug auf diese Drehachse.

Besteht ein Körper aus einer Anzahl von Massen $m_1, m_2 \dots m_n$, welche um die Abstände $r, r_2 \dots r_n$ von der Drehachse entfernt sind, so ist das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf diese Achse gegeben durch:

$$K = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \Sigma m r^2 \dots \dots (4)$$

Bezeichnen wir mit $p_1, p_2 \dots p_n$ die einzelnen Kräfte, welche auf diese Massen in der tangentialen Richtung einwirken, und mit ϑ wieder die gemeinsame Winkelbeschleunigung, welche sie hervorrufen, so gilt

$$p_1 = m_1 r_1 \vartheta, \quad p_2 = m_2 r_2 \vartheta \dots, \quad p_n = m_n r_n \vartheta.$$

Alle diese Kräfte sind ersetzbar durch eine im Abstände 1 wirkende Kraft:

$$P = \vartheta (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) = \vartheta \Sigma m r^2 \dots (5)$$

welche das resultierende Drehungsmoment vorstellt. Daraus folgt:

$$\vartheta = \frac{P}{K} \dots \dots \dots (6)$$

d. h. die Winkelbeschleunigung ist gleich dem Drehungsmoment, dividiert durch das Trägheitsmoment.

Wären die angreifenden Kräfte Momentankräfte gewesen, so wäre an die Stelle ϑ in dieser Gleichung die Winkelgeschwindigkeit φ getreten.

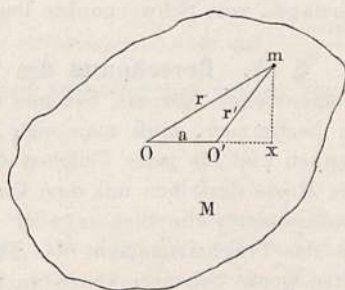
Das Trägheitsmoment eines Körpers gilt, so wie das Drehungsmoment, immer nur in bezug auf eine bestimmte Achse (oder, wie wir sehen werden, für eine bestimmte Reihe paralleler Achsen). Verschiebt man die Achse, so wird das Trägheitsmoment im allgemeinen ein anderes.

In dieser Beziehung läßt sich nun ein wichtiger und oft verwendbarer Satz ableiten, welcher lautet:

Ist K das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse M für eine durch seinen Schwerpunkt gehende Achse, so ist das Trägheitsmoment für eine dazu im Abstände a parallel liegende Achse gegeben durch:

$$K' = K + a^2 M \dots \dots \dots (7)$$

Fig. 287.



Beweis: Es sei in Fig. 287 M ein Durchschnitt des Körpers durch seinen Schwerpunkt O . Die Drehungsachse, für welche das Trägheitsmoment gleich K ist, gehe senkrecht auf diesen Durchschnitt durch den Schwerpunkt, die neue Drehungsachse sei um den Abstand $O O' = a$ in der Richtung gegen x verschoben. Beachten wir irgend einen materiellen Punkt m , dessen Masse $= m$, dessen Koordinaten mit Bezug auf ein durch O gelegtes rechtwinkeliges Koordinatensystem $x = ox, y = mx$ seien. Die Entfernung Om

sei $= r$, $O'm = r'$. Das Trägheitsmoment dieses Punktes in bezug auf die durch O gehende Achse ist:

$$k = m r^2.$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf die durch O' gehende Achse ist dann:

$$\begin{aligned} k' &= m r'^2 = m [(x - a)^2 + y^2] \\ &= m (x^2 + y^2) - 2 m a x + m a^2, \end{aligned}$$

da $x^2 + y^2 = r^2$, so ist das Trägheitsmoment in bezug auf die eine Achse durch O' für den Punkt m :

$$k = m r^2 - 2 m a x + m a^2;$$

analog findet man für einen zweiten Punkt m_1

$$k_1 = m_1 r_1^2 - 2 m_1 a x_1 + m_1 a^2,$$

ebenso für einen dritten Punkt m_2

$$k_2 = m_2 r_2^2 - 2 m_2 a x_2 + m_2 a^2 \text{ usf.}$$

Denkt man sich so die Trägheitsmomente aller materiellen Punkte des Körpers von der Masse $M = m + m_1 + m_2 + \dots$ gebildet und summiert, so erhält man das Trägheitsmoment für die ganze Masse M :

$$K' = K - 2 a \Sigma m x + M a^2.$$

Der Ausdruck $\Sigma m x$, d. h. die Summe aller Produkte aus den einzelnen Massenteilchen mit ihren Abständen vom Schwerpunkte O , ist aber, seiner Definition gemäß, = Null. Folglich erhält man, wie zu beweisen war:

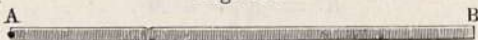
$$K' = K + a^2 M.$$

Daraus folgt, daß für alle Achsen, welche unter sich parallel im gleichen Abstände vom Schwerpunkte liegen, das Trägheitsmoment gleich groß ist.

§ 87. Berechnung des Trägheitsmomentes. Um das Trägheitsmoment eines Körpers, bezogen auf eine gewisse Drehachse, durch Rechnung zu bestimmen, muß man sich denselben in lauter kleine Teilchen zerlegt denken und für jedes Teilchen das Trägheitsmoment berechnen, indem man die Masse desselben mit dem Quadrat seiner Entfernung von der Drehachse multipliziert; die Summe aller einzelnen so berechneten Trägheitsmomente ist das Trägheitsmoment des Körpers. Eine derartige Berechnung läßt sich ohne große Schwierigkeiten ausführen, wenn es sich um homogene Körper von einfachen Formen handelt.

Es sei z. B. das Trägheitsmoment eines Stabes AB , Fig. 288, zu berechnen, dessen Länge sehr groß ist im Vergleich zu seinem Querschnitt, und dessen

Fig. 288.



Umdrehungsachse an dem einen Ende desselben bei A liegt. Denken wir uns den Stab durch Querschnitte in eine große Zahl dünner Blättchen zerlegt, deren jedes die Dicke δ hat, so ist die Masse eines solchen Blättchens:

$$\frac{M}{L} \delta,$$

wenn M die Masse und L die Länge des ganzen Stabes bedeuten. — Bezeichnen wir ferner mit a, b, c, d usw. den Abstand des ersten, zweiten, dritten, vierten usw. Blättchens, so ist offenbar das Trägheitsmoment des ganzen Stabes:

$$K = \frac{M}{L} \left\{ a^2\delta + b^2\delta + c^2\delta + d^2\delta + \dots \right\}$$

Nun aber ist $b = a + \delta, c = b + \delta, d = c + \delta$ usw., es ist also auch:

$$\begin{aligned} b^3 &= a^3 + 3a^2\delta + 3a\delta^2 + \delta^3 \\ c^3 &= b^3 + 3b^2\delta + 3b\delta^2 + \delta^3 \\ d^3 &= c^3 + 3c^2\delta + 3c\delta^2 + \delta^3 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Wir können δ beliebig klein annehmen; nehmen wir es so klein an, daß diejenigen Glieder, welche den Faktor δ^2 bzw. δ^3 enthalten, als verschwindend klein gegenüber den dritten Potenzen von a, b, c, d usw. angesehen werden dürfen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} a^2\delta &= \frac{b^3 - a^3}{3} \\ b^2\delta &= \frac{c^3 - b^3}{3} \\ c^2\delta &= \frac{d^3 - c^3}{3} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Es ist also:

$$K = \frac{M}{L} \left\{ \frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{c^3 - b^3}{3} + \frac{d^3 - c^3}{3} + \dots + \frac{y^3 - x^3}{3} + \frac{z^3 - y^3}{3} \right\}$$

wenn mit x, y und z der Abstand der letzten Blättchen bezeichnet wird.

Die ganze unter der Klammer stehende Summe reduziert sich aber auf $\frac{z^3 - a^3}{3}$.

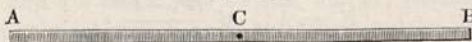
Da aber $z = L$ ist und a wegen seiner Kleinheit vernachlässigt werden kann, so ergibt sich:

$$K = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3} \dots \dots \dots (1)$$

d. h. in Worten: Das Trägheitsmoment eines Stabes, dessen einer Endpunkt die Umdrehungsachse bildet, ist dasselbe, als ob der ganze Stab gewichtslos und an seinem anderen Ende eine Masse vereinigt wäre, welche ein Drittel von der Masse des gegebenen Stabes beträgt.

Danach läßt sich nun leicht auch das Trägheitsmoment eines um seinen Mittelpunkt C , Fig. 289, rotierenden oder oszillierenden Stabes AB ableiten;

Fig. 289.



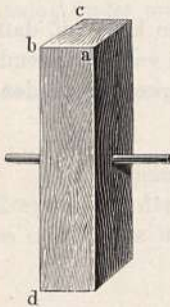
denn wenn m und l die Masse und die Länge von jeder der Hälften AC und BC bezeichnen, so ist das Trägheitsmoment von jeder dieser Hälften $\frac{ml^2}{3}$, folglich das Trägheitsmoment des ganzen Stabes $\frac{2}{3} ml^2$. Bezeichnet man

aber mit L die Gesamtlänge, mit M die Gesamtmasse des Stabes, so ist $m = \frac{M}{2}$ und $l = \frac{L}{2}$, und wenn man diese Werte für l und m substituiert, so ergibt sich für das gesuchte Trägheitsmoment der Wert:

$$K = \frac{M \cdot L^2}{12} \dots \dots \dots (2)$$

Das Trägheitsmoment eines prismatischen rektangulären Stabes, Fig. 290, welcher um eine durch seinen Schwerpunkt gelegte, mit der Kante ab parallele Achse rotiert oder oszilliert, ist:

Fig. 290.



$$K = \frac{L^2 + B^2}{12} \cdot M \dots \dots \dots (3)$$

wenn L und B die Länge der Kanten bd und bc bezeichnen, welche nicht mit der Umdrehungsachse parallel sind.

Die Formel 3) geht in Gleichung 2) über, wenn B sehr klein ist im Vergleich zu L .

Aus Betrachtungen, welche den oben durchgeführten ähnlich sind, ergibt sich, daß das Trägheitsmoment einer homogenen kreisförmigen Scheibe, welche um ihren Mittelpunkt rotiert,

$$K = \frac{1}{2} MR^2 \dots \dots \dots (4)$$

ist, wenn M die Masse und R den Halbmesser der Scheibe bezeichnet.

Dieselbe Formel gilt für das Trägheitsmoment eines Kreissektors, sowie das eines homogenen Zylinders in bezug auf seine Längsachse.

Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders vom inneren Radius r und dem äußeren Radius R , bezogen auf seine Achse, ist:

$$K = \frac{M}{2} (r^2 + R^2) \dots \dots \dots (5)$$

bezogen auf eine zur Achse senkrechte Mittellinie (wenn L die Höhe des Zylinders):

$$K = M \left(\frac{L^2}{12} + \frac{r^2 + R^2}{4} \right) \dots \dots \dots (6)$$

Endlich das Trägheitsmoment einer Kugel vom Radius r :

$$K = \frac{2}{5} Mr^2 \dots \dots \dots (7)$$

Das Trägheitsmoment eines abgestumpften Kegels, dessen obere und untere Grenzfläche die Radien r und R haben in bezug auf die geometrische Achse des Kegels ist

$$K = \frac{3}{10} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} \dots \dots \dots (8)$$

Hieraus folgt, indem man $r = 0$ setzt, das Trägheitsmoment eines vollen Kegels:

$$K = \frac{3}{10} MR^2 \dots \dots \dots (9)$$

für einen vollen Kegel von der Höhe H und einem Radius der Grundfläche

$= R$, dessen Drehungsachse durch die Spitze senkrecht auf die geometrische Achse hindurchgeht:

$$K = \frac{3}{5} M \left(\frac{R^2}{4} + H^2 \right) \dots \dots \dots (10)$$

Aus dem Satze 7) § 86 folgt dann für das Trägheitsmoment eines homogenen Vollkegels in bezug auf eine zur Basis parallele Drehachse, die durch seinen Schwerpunkt, der $\frac{3}{4} H$ von der Spitze entfernt liegt:

$$K = \frac{3}{5} M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{16} \right) \dots \dots \dots (11)$$

§ 88. Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes rotierender Körper. Bei Körpern von komplizierter Gestalt ist die Berechnung des Trägheitsmomentes ohne Integralrechnung nicht ausführbar, und wenn dieselben mehr oder weniger unregelmäßig gestaltet sind, ganz unmöglich; in solchen Fällen aber kann man das gesuchte Trägheitsmoment auf experimentellem Wege bestimmen. Zu diesem Zwecke braucht man nur den fraglichen Körper durch eine beschleunigende Kraft von bekannter Größe in Rotation zu versetzen und die Geschwindigkeit zu beobachten, welche er in einer gegebenen Zeit erlangt.

Ein erläuterndes Beispiel bildet die Ausmittlung des Trägheitsmomentes des Rades einer Atwoodschen Fallmaschine. Wir haben schon am Schlusse des § 44 auf diese Aufgabe hingewiesen.

Angenommen, die beiden Fadenenden seien je mit der Masse M belastet und ein Übergewichtchen von der Masse m bewirke, daß die Fallbeschleunigung γ betrage.

Die treibende Kraft beträgt dann mg , wenn g die Acceleration beim freien Falle bedeutet. Das gesamte Trägheitsmoment inklusive der angehängten Massen $2M + m$ beträgt dann $2M + m + K$, wenn K das Trägheitsmoment des Rades allein bedeutet. Es ist daher:

$$\gamma = \frac{mg}{2M + m + K},$$

woraus

$$K = m \frac{g}{\gamma} - (2M + m).$$

Wären z. B. die Massen $M = 100$, $m = 4$ g, die beobachtete Acceleration gleich 9,8 cm, so ergäbe sich

$$2M + m + K = 400$$

$$K = 400 - 204 = 196 \text{ g.}$$

Kurz hat einen Apparat, Fig. 291 und 292, angegeben, um das Gesetz des Trägheitsmomentes experimentell zu bestätigen. Eine hölzerne Rolle hat drei Rinnen aa und bb , deren jede 90 mm, und cc , welche 45 mm Halbmesser hat. In der Rinne a ist eine Schnur befestigt, welche ein Übergewicht von 50 g trägt, während eine über b geschlungene Schnur zwei Gewichte von je $\frac{1}{2}$ kg oder eine über c geschlungene Schnur zwei Gewichte von je 2 kg trägt. Die Rolle läuft zwischen Stahlspitzen, deren gußeiserne Träger mittels einer eisernen Platte auf dem Gipfel einer hölzernen Säule (etwa der Säule einer Atwoodschen Fallmaschine) aufgeschraubt sind.

Das Übergewicht p von 50 g durchläuft den Fallraum von 185 cm in sechs Halbsekunden, wenn über die Rinne b eine Schnur geschlungen ist,

Fig. 291.

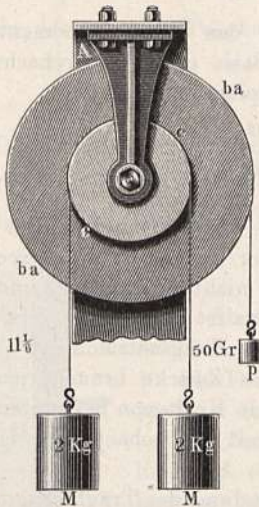
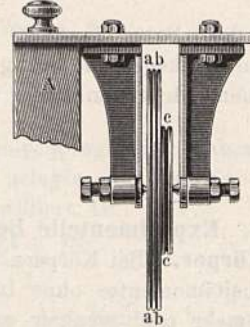


Fig. 292.



welche auf jeder Seite $\frac{1}{2}$ kg trägt, während das Übergewicht p den gleichen Weg in sieben Halbsekunden zurücklegt, wenn über die Rinne c eine Schnur geschlungen ist, welche auf jeder Seite ein Gewicht von 2 kg trägt. — Daß

im letzteren Falle die Fallzeit um eine Halbsekunde länger ist, rührt nur daher, daß im letzteren Falle die Reibung an den Spitzen größer und die Masse des hölzernen Rades nicht verschwindend klein gegen die übrigen Massen ist.

§ 89. **Rollen über die schiefe Ebene.** Die im § 48 abgeleiteten Gesetze des Falles über die schiefe Ebene gelten bezüglich der absoluten Werte der erreichten Geschwindigkeiten und der Beschleunigung nur unter der Annahme, daß der fallende Körper keine Rotationsbewegung annehme, also nur (ohne Reibung) gleite. Wir wollen jetzt annehmen, daß der Körper ohne zu gleiten auf der schiefen Ebene rolle.

Ist der rollende Körper ein Hohlzylinder (Fig. 293) von geringer Wandstärke, so können wir annehmen, daß seine ganze Masse sich im Abstände r , gleich dem Radius des Zylinders, von der Achse befinde. Diese Masse erhält dann beim Rollen gleichzeitig eine fortschreitende Geschwindigkeit längs der schiefen Ebene und eine Rotationsgeschwindigkeit um die Achse. Wir wollen die nach Zurücklegung einer Strecke der schiefen Ebene erlangte Endgeschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung mit v , jene der rotierenden Bewegung mit u bezeichnen. Die Fallhöhe sei $= h$. Die Arbeit, welche erforderlich ist, um die Masse m des Körpers auf die Höhe h zu heben, ist gegeben durch mgh . Die lebendigen Kräfte nach dem Hinabrollen sind

$$= \frac{mv^2}{2} \quad \text{und} \quad \frac{mu^2}{2}.$$

Es muß nun die Gleichung gelten:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mgh.$$

Offenbar ist aber $u = v$; man braucht sich nur vorzustellen, daß der rollende Körper stehen bleibe und statt dessen die schiefe Ebene unter ihm

Fig. 293.



Fig. 294.



aufwärts bewegt werde. Hierdurch wird seine rotierende Bewegung ohne die fortschreitende erhalten. Jeder Punkt der Mantelfläche beschreibt dann einen gleich langen Bogen wie die Länge der darunter hinweggehenden Strecke der schiefen Ebene. Es muß also $u = v$ sein, und man erhält:

$$v^2 = gh$$

$$v = \sqrt{gh}.$$

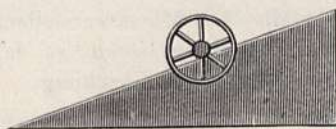
Da nun beim Falle ohne Rotieren $v = \sqrt{2gh}$ gefunden wird, so folgt, daß der rollende Hohlzylinder sich mit nur halb so großer Beschleunigung über die schiefe Ebene bewege als ein ohne Reibung gleitender Körper¹⁾. Der absolute Wert der Beschleunigung ist also $\frac{g \sin \alpha}{2}$, wenn α der Neigungswinkel der schiefen Ebene ist.

Nehmen wir jetzt statt des Hohlzylinders einen Vollzylinder (Fig. 294) von gleichem Radius r . Aus § 87 wissen wir, daß das Trägheitsmoment eines Zylinders in bezug auf seine Achse $= \frac{m r^2}{2}$ ist. Das heißt mit anderen Worten, ein Vollzylinder vom Radius r verhält sich einer beschleunigenden Kraft, die ihn zu drehen sucht, gegenüber ebenso, als wäre seine halbe Masse

Fig. 295.



Fig. 296.



im Abstände r angebracht; er verhält sich also ebenso wie der früher betrachtete Hohlzylinder, wenn derselbe die Masse $\frac{m}{2}$ besitzen würde. Die Gleichung für die lebendigen Kräfte lautet demnach:

$$\frac{m v^2}{2} + \frac{m v^2}{4} = m g h,$$

woraus:

$$\frac{3}{4} v^2 = g h$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} g h}.$$

Die Beschleunigung des über die schiefe Ebene rollenden Vollzylinders verhält sich demnach zu jener beim Falle ohne Rollen wie $\frac{4}{3} g : 2 g$, sie ist also nur $\frac{2}{3}$ so groß wie diese. Ihr absoluter Wert ist also $\frac{2}{3} g \sin \alpha$.

¹⁾ Mit Rücksicht auf Gleichung (6) S. 105 $\varphi = \frac{v^2}{2s}$ und $s = \frac{h}{\sin \alpha}$.

Für eine homogene Vollkugel (Fig. 295) vom Radius r ist das Trägheitsmoment in bezug auf einen Durchmesser als Achse gegeben durch:

$$\frac{2}{5} m r^2.$$

Für die Kugel gilt demnach:

$$\begin{aligned} \frac{m v^2}{2} + \frac{\frac{2}{5} m v^2}{2} &= m g h \\ \frac{7}{10} v^2 &= g h \\ v &= \sqrt{\frac{10}{7} g h}. \end{aligned}$$

Die Beschleunigung, welche eine über die schiefe Ebene rollende Kugel erhält, ist demnach zu jener Beschleunigung, welche ein ohne Reibung gleitender Körper erhält, im Verhältnis $\frac{10}{7}:2$ stehend, also nur gleich $\frac{5}{7}$ von der letzteren. Der absolute Wert der Beschleunigung ist also $= \frac{5}{7} g \sin \alpha$.

Setzen wir demnach die Beschleunigung des ohne Reibung gleitenden Körpers gleich 1, so ergibt sich folgende Reihe:

Beschleunigung eines gleitenden Körpers	= 1
" einer rollenden Kugel	= $\frac{5}{7}$
" eines rollenden Vollzylinders	= $\frac{2}{3}$
" " " Hohlzylinders	= $\frac{1}{2}$.

Wollten wir die Beschleunigung noch weiter verringern, so müßten wir den Versuch so einrichten, daß die Geschwindigkeit der Rotationsbewegung der Masse größer wird.

Wenn wir z. B. ein schweres Rad, Fig. 296, vom Radius R und der Masse m durch Speichen ohne Masse an die Welle vom Radius r , die wir uns ebenfalls ohne Masse vorstellen, befestigt denken und die Welle über die schiefe Ebene rollen lassen, so daß das Rad sich frei umdrehen kann, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{m v^2}{2} + \frac{m \left(v \frac{R}{r} \right)^2}{2} = m g h,$$

woraus:

$$v = \sqrt{2 g h \cdot \frac{r^2}{R^2 + r^2}}$$

folgt. Man sieht sofort, daß durch Vergrößerung von R gegenüber r die Beschleunigung beliebig weit verkleinert werden kann.

Wollte man in entgegengesetzter Weise einen Körper konstruieren, der möglichst schnell über eine schiefe Ebene rollt, so müßte man ihm einen großen Umfang geben, aber möglichst alle Masse in der Achse konzentrieren. Ein Korkzylinder, durch dessen Achse ein dünner Bleizylinder gesteckt ist, würde sich dieser Bedingung nähern.

Ein gleitender Körper, dessen Geschwindigkeit durch die Reibung sehr vermindert würde, wäre durch einen auf möglichst leichte Friktionsrollen gesetzten Körper zu ersetzen.

Es ist sehr leicht, sich durch ein Experiment von der Richtigkeit dieser Resultate über die Reihenfolge der Geschwindigkeiten zu überzeugen. Man braucht nur über eine schiefe Ebene gleichzeitig eine Kugel, einen Zylinder und einen Reif rollen zu lassen. Die erste geht voraus, der letzte bleibt zurück.

§ 90. Der Schwingungspunkt des physischen Pendels, reduzierte Pendellänge. Die im § 56 entwickelte Formel für die Schwingungsdauer eines Pendels gilt nur für ein einfaches (mathematisches) Pendel. Sie gilt nicht mehr für ein zusammengesetztes (physisches) Pendel, wie sich leicht einsehen läßt, wenn man bedenkt, daß die dem Aufhängepunkte näheren Massen für sich allein eine kürzere Schwingungsdauer haben würden und daher auf die Schwingungen der weiter entfernten beschleunigend einwirken müssen. Umgekehrt wirken die weiter vom Aufhängepunkt entfernten Massen verzögernd auf die näher liegenden. Es muß demnach an jedem zusammengesetzten Pendel möglich sein, einen Punkt zu finden, welcher durch die übrige Masse des Pendels weder beschleunigt noch verzögert wird, d. h. welcher gerade so schnell schwingt, wie wenn er, allein vorhanden, ein einfaches Pendel bilden würde, dessen Länge gleich dem Abstände dieses Punktes vom Aufhängepunkte wäre.

Diesen Punkt nennt man den Schwingungsmittelpunkt oder kürzer Schwingungspunkt (Centrum oscillationis). Er fällt durchaus nicht, wie man auf den ersten Blick meinen möchte, mit dem Schwerpunkt zusammen.

Den Abstand dieses Schwingungspunktes vom Aufhängepunkt heißt man die reduzierte Pendellänge. Es ist dies die Länge eines einfachen (mathematischen) Pendels von gleicher Schwingungsdauer mit dem physischen Pendel.

Diese reduzierte Pendellänge soll nun berechnet werden.

Nach Formel 6, § 86, ist die Winkelbeschleunigung, welche ein um eine Achse drehbarer Körper, also auch ein physisches Pendel erfährt, gleich

$$\vartheta = \frac{P}{K},$$

worin P das Drehungsmoment, K das Trägheitsmoment $= \Sigma m r^2$ bedeuten.

Bei einem mathematischen Pendel von der Länge l und der Masse m ist das Drehungsmoment für den Ausschlagwinkel α gleich $m g l \cdot \sin \alpha$, das Trägheitsmoment $= m l^2$, somit

$$\vartheta = \frac{m g l \cdot \sin \alpha}{m l^2} = \frac{g \cdot \sin \alpha}{l}.$$

Für die Schwingungsdauer t bei kleinen Amplituden ist nach § 56 (1):

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\vartheta}} \dots \dots \dots (1)$$

Bei einem physischen Pendel, bestehend aus den Massen $m_1, m_2, \dots m_n$ in den Abständen $r_1, r_2, \dots m_n$, ist das Drehungsmoment für den Ausschlagwinkel $\alpha = g \Sigma m r \sin \alpha$, das Trägheitsmoment $= \Sigma m r^2$, folglich die Winkelbeschleunigung

$$\vartheta_1 = g \cdot \frac{\Sigma m r \cdot \sin \alpha}{\Sigma m r^2},$$

folglich $\frac{\sin \alpha}{\vartheta_1} = \frac{\Sigma m r^2}{g \Sigma m r}$, mithin in Analogie mit Formel 1) die Schwingungsdauer für kleine Amplituden

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{g \Sigma m r}} \quad \dots \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt, daß $t_1 = t$, wenn

$$l = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r} \quad \dots \quad (3)$$

Dies ist also der Ausdruck für die reduzierte Pendellänge.

Der Zähler $\Sigma m r^2$ ist das Trägheitsmoment des physischen Pendels K , der Nenner $\Sigma m r$, die Summe der Produkte der Massen mit ihren Abständen vom Drehpunkte, kann ersetzt werden durch ML , wenn M die Gesamtmasse und L den Abstand des Schwerpunktes vom Drehpunkte bedeuten.

Wir können also auch schreiben:

$$l = \frac{K}{ML} \quad \dots \quad (4)$$

Multiplizieren wir noch Zähler und Nenner mit g , so kommt:

$$l = g \frac{K}{g ML} = g \frac{K}{D} \quad \dots \quad (5)$$

worin D das Drehungsmoment bezeichnet. Mit Worten:

Reduzierte Pendellänge = Acceleration der Schwere $\times \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Drehungsmoment}}$ ¹⁾.

Diese Formel haben Borda, Arago und Biot, sowie später Bessel benutzt, um für physische Pendel geometrisch einfacher Gestalt die Länge des korrespondierenden, d. h. gleich schnell schwingenden, einfachen Pendels zu berechnen.

§ 91. Konjugierte Drehachsen. Im § 86, Gleichung (7), haben wir einen Lehrsatz mitgeteilt, welcher lautet:

$$K^1 = K + a^2 M \quad \dots \quad (1)$$

und besagt, daß, wenn K das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse M in bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Achse ist, für eine um a davon entfernte parallele Achse das Trägheitsmoment durch den Ausdruck für K^1 berechnet werden kann.

Daraus ergibt sich dann die reduzierte Pendellänge für die neue Achse nach Formel (3), § 90:

$$l = \frac{K + a^2 M}{a M} = \frac{K}{a M} + a \quad \dots \quad (2)$$

denn die im Schwerpunkt vereinigt gedachte Masse M wirkt dann im Abstände a von der neuen Achse.

Da nun für ein und denselben Körper K und M unveränderliche Größen sind, so bleibt l gleich groß, solange a gleich groß bleibt. Daraus folgt:

¹⁾ Im Gravitationsmaß ist das Drehungsmoment = $m r$, daher fällt der Faktor g fort.

Für alle Achsen, welche unter sich parallel in demselben Abstände vom Schwerpunkte liegen, hat derselbe Körper als Pendel dieselbe reduzierte Pendellänge und dieselbe Schwingungsdauer.

Stellt also die Fig. 297 wiederum den Vertikalschnitt durch den Schwerpunkt O eines Körpers vor, so wird derselbe gleich schnell schwingen,

Fig. 297.

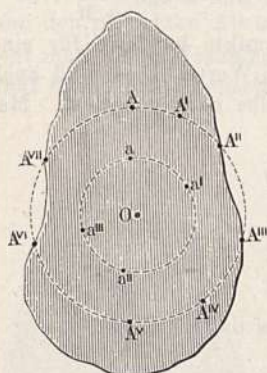
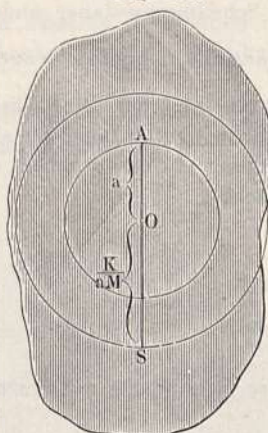


Fig. 298.



ob man ihn um eine Achse durch a oder a' oder a'' oder a''' schwingen läßt, sobald diese Punkte auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte in O liegen. Für die auf einem anderen konzentrischen Kreise liegenden Punkte A, A', A'' usf. ist die Schwingungsdauer im allgemeinen eine andere, aber unter sich gleiche.

Nun beachten wir noch die Lage des Schwingungspunktes. Aus (2) folgt, daß l , d. i. die Distanz des Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte, um $\frac{K}{aM}$ größer ist als a , welches den Abstand des Aufhängepunktes vom Schwerpunkte bedeutet. Die Lage der drei Punkte, die wir mit A, O und S bezeichnen wollen, ist also, wie Fig. 298 zeigt, eine solche, daß (während der Ruhelage) zu oberst der Aufhängepunkt A , dann um a tiefer der Schwerpunkt O , dann um $\frac{K}{aM}$ tiefer der Schwingungspunkt S liegt.

Denken wir uns jetzt den Körper im Schwingungspunkte S selbst aufgehängt, so ändert sich a in $\frac{K}{aM}$, die reduzierte Pendellänge wird dann, indem wir in 2) statt a den Wert $\frac{K}{aM}$ substituieren:

$$l' = \frac{K}{\frac{K}{aM} \cdot M} + \frac{K}{aM} = a + \frac{K}{aM} = l.$$

Wir finden auf diese Weise den wichtigen Satz, daß ein Pendel dieselbe Schwingungsdauer beibehält, wenn es statt im ursprünglichen Drehpunkte im Schwingungspunkte aufgehängt wird. Die Punkte A und S können also einfach miteinander vertauscht werden. Es

gilt folglich auch für den Punkt S , was wir oben für A nachgewiesen, daß jeder andere Punkt, der denselben Abstand vom Schwerpunkte O hat wie S , als Aufhängepunkt gewählt werden kann, ohne daß dadurch die Schwingungsdauer verändert wird.

Ziehen wir daher durch A sowohl wie durch S in Fig. 298 vom Mittelpunkte O aus konzentrische Kreise, so kann die Drehachse des Pendels durch jeden Punkt der Peripherie dieser beiden Kreise gelegt werden, ohne daß sich die Schwingungsdauer ändert. Wir wollen daher solche Kreise konjugierte Achsenkreise nennen. Ihre Radien sind a und $\frac{K}{aM}$.

Der Abstand der Drehachse vom Schwerpunkte hat also für eine bestimmte Schwingungsdauer im allgemeinen zwei Werte. Dies muß auch aus der Gleichung (2) hervorgehen, wenn man dieselbe nach a auflöst. Man erhält zunächst:

$$a^2 - al + \frac{K}{M} = 0$$

und daraus

$$a = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{K}{M}},$$

a hat also zwei Werte mit Ausnahme des Falles, daß:

$$\frac{l^2}{4} = \frac{K}{M}$$

oder:

$$l = 2 \sqrt{\frac{K}{M}},$$

in welchem Falle dann der einzige Wert von a :

$$a_1 = \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

erhalten wird. Die konjugierten Kreise legen sich in diesem Falle in einen einzigen mit dem Radius $a_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ zusammen.

Dieser Wert a_1 ist, nebenbei bemerkt, zugleich derjenige Wert von a in Gleichung (2), für welchen die reduzierte Pendellänge, also auch die Schwingungsdauer am kleinsten ausfällt.

Der Radius a_1 ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Radien je zweier konjugierter Kreise, wie man sofort findet, indem man aus dem Produkt von a mit $\frac{K}{aM}$ die Quadratwurzel auszieht.

Diesen Zusammenhang kann man zur Lösung folgender Aufgaben benutzen.

Erste Aufgabe. An einem Körper (Fig. 299), der im Punkte A stabil aufgehängt ist, sei die Lage des Schwerpunktes O und des Schwingungspunktes S ermittelt worden, man suche jenen Kreis, dessen Peripherie alle jene Punkte enthält, welche, als Aufhängepunkte angewendet, den Körper am schnellsten schwingen lassen.

Die beiden konjugierten Radien sind OA und OS . Beschreiben wir über AS als Durchmesser einen Halbkreis und errichten wir in O die Senk-

rechte Ob , so ist diese die mittlere geometrische Proportionale zwischen OA und OS , also gleich dem Radius Oa_1 des gesuchten Kreises, welcher gestrichelt ausgezogen ist.

Zweite Aufgabe. Für irgend einen von Oa_1 verschiedenen Abstand, z. B. Oa , sei der zugehörige (konjugierte) Abstand der Achse vom Schwerpunkt, dem eine gleiche Schwingungsdauer zukommt, durch Konstruktion zu finden.

Man zieht die Gerade ab und trägt an dieselbe in b einen rechten Winkel auf; der Durchschnitt des zweiten Schenkels mit der Vertikallinie s gibt dann den gesuchten Abstand Os .

Legt man einen Winkelhaken mit dem Scheitel des rechten Winkels an den Punkt b und dreht denselben in der Zeichnungsebene um b , so schneiden

Fig. 299.

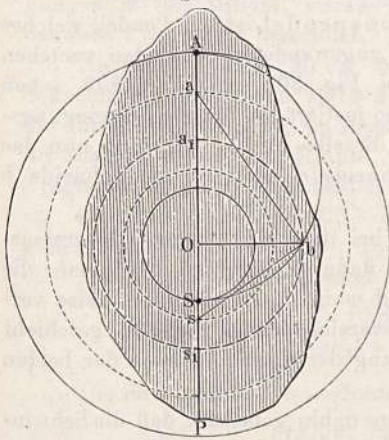
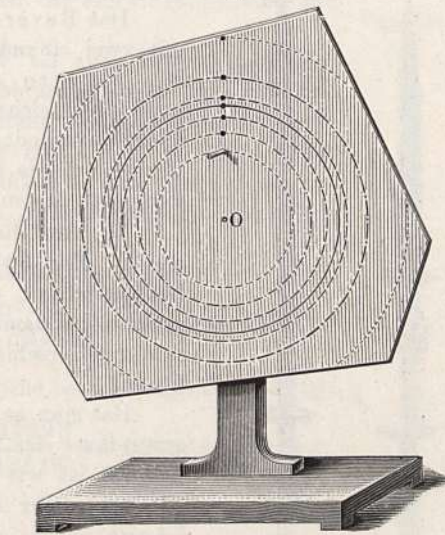


Fig. 300.



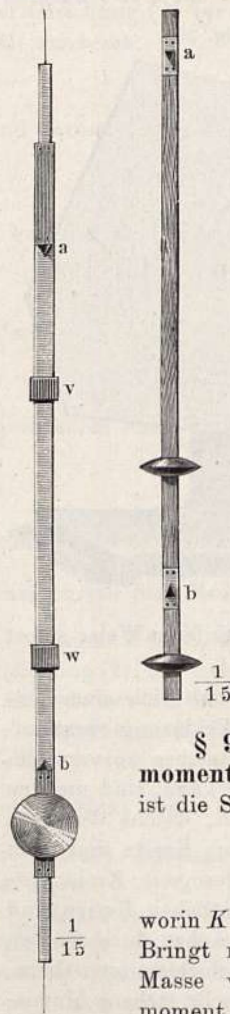
die beiden Katheten auf der Vertikallinie AC in zwei Punkten durch, von denen der obere als Aufhängepunkt und der untere als zugehöriger Schwingungspunkt anzusehen ist. Man erhält auf diese einfache Weise sofort eine beliebige Anzahl konjugierter Kreise.

Um das Vorgetragene zu demonstrieren, bedient man sich eines einfachen Apparates nach Fig. 300, der wohl ohne weitere Erklärung verständlich ist. Auf dem als Pendel schwingenden Brettchen, welches an verschiedenen Punkten an die horizontale Achse gehängt werden kann, sind um den Schwerpunkt eine Anzahl konzentrischer Kreise gezogen, welche der eben beschriebenen Konstruktion entsprechen. Die konjugierten Kreise sind nach übereinstimmender Manier ausgezogen; der ganz ausgezogene Kreis entspricht dem Minimum der Schwingungsdauer. Die sämtlichen Kreise sind an verschiedenen Stellen mit Löchern versehen, um die Achse durchstecken zu können. Würde man die Drehachse dem Schwerpunkt noch weiter nähern, so fiel der Schwingungspunkt ringsum über den Rand des Brettchens hinaus; zugleich würde sich die Schwingungsdauer noch mehr verlängern. Hat man den Schwerpunkt selbst erreicht, so ist die Schwingungsdauer unendlich groß geworden, d. h. die Scheibe schwingt gar nicht mehr; sie würde, einmal an-

getrieben, wenn keine Reibung wäre, mit konstanter Geschwindigkeit fortrotieren; zur Ruhe gebracht, würde sie in jeder Lage im indifferenten Gleichgewichte stehen bleiben.

Die eben behandelten Aufgaben setzen voraus, daß die Lage des Schwingungspunktes (und des Schwerpunktes) bereits bekannt sei. Man kann aber auch umgekehrt mittels der abgeleiteten Sätze den Schwingungspunkt und die reduzierte Pendellänge experimentell ausmitteln. Diese Aufgabe soll im folgenden Paragraphen behandelt werden.

§ 92. Das Reversionspendel. Um die Länge des Sekundenpendels mit möglichster Genauigkeit zu finden, brachte zuerst Bohnenberger¹⁾ das Reversionspendel in Vorschlag, welches später auch Kater²⁾ in England in Anwendung brachte, ohne Bohnenbergers Vorschlag zu kennen.



Das Reversionspendel ist ein Pendel, welches mit zwei einander zugewendeten Schneiden versehen ist, wie man aus Fig. 301 und Fig. 302 sehen kann, und welches so justiert ist, daß die Schwingungsdauer unverändert dieselbe bleibt, mag man nun das Pendel um die Schneide *a* oder um die Schneide *b* oszillieren lassen.

Es wird dies bei dem Katerschen Reversionspendel, Fig. 301, dadurch erreicht, daß man die Laufgewichte *v* und *w* in entsprechender Weise verschiebt; bei dem Reversionspendel, Fig. 302, geschieht es durch Verschiebung der einen oder auch der beiden Linsen.

Hat man es nun dahin gebracht, daß die Schwingungsdauer des Pendels für die eine Schneide genau so groß ist wie für die andere, so ist die Entfernung der beiden Schneiden gleich der Länge eines einfachen Pendels von gleicher Schwingungsdauer.

Die Richtigkeit dieser Behauptung wurde im vorausgegangenen Paragraphen erwiesen.

§ 93. Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes schwingender Körper. Nach Formel (2) in § 90 ist die Schwingungsdauer eines physischen Pendels

$$t = \pi \sqrt{\frac{\sum mr^2}{g \sum mr}} = \pi \sqrt{\frac{K}{D}} \dots \dots \dots (1)$$

worin *K* das Trägheitsmoment, *D* das Drehungsmoment bedeuten. Bringt man nun an diesem schwingenden Körper noch eine Masse vom Trägheitsmoment *Q* an, ohne an dem Drehungsmoment *D* etwas zu ändern, so ist die dadurch verlängerte

¹⁾ Bohnenberger, Lehrbuch der Astronomie, 1811.
²⁾ Kater, Phil. Transact., 1818.

Schwingungsdauer gegeben durch

$$t' = \pi \sqrt{\frac{K + Q}{D}} \dots \dots \dots (2)$$

Aus (1) und (2) kann man dann leicht sowohl K als auch D berechnen. Man findet:

$$K = Q \frac{t^2}{t'^2 - t^2} \dots \dots \dots (3)$$

$$D = Q \frac{\pi^2}{t'^2 - t^2} \dots \dots \dots (4)$$

Beispiel: Ein Pendel von der in Fig. 303 dargestellten Einrichtung, dessen Gesamtlänge 110 cm betrug, machte ohne die Linsen c und d 68 Schwingungen in der Minute, woraus sich die Schwingungsdauer pro Sekunde $t = 0,882$ berechnet.

Fig. 303.

Nachdem sowohl 20 cm über als auch 20 cm unter der Schneide eine Linse von 220 g angebracht worden war, während die Linse b unverändert an ihrer Stelle blieb, machte das Pendel 48 Schwingungen pro Minute, es ist also $t' = 1,25''$. Das Trägheitsmoment Q der beiden Linsen c und d zusammen ist $= 400 \cdot 2 \cdot 220 = 176000$, das Drehungsmoment derselben gleich Null.

Man erhält demnach durch Substitution dieser Werte in (3)

$$K = 176000 \frac{(0,882)^2}{(1,25)^2 - (0,882)^2} = 174508.$$

Die im Abstände 1 cm erforderliche beschleunigende Kraft ist:

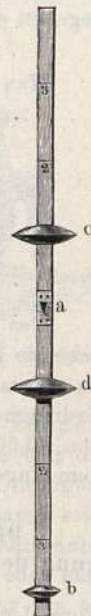
$$D = Q \cdot \frac{\pi^2}{t'^2 - t^2} = \frac{176000 \cdot (3,14159)^2}{(1,25)^2 - (0,882)^2} = 2213991 \text{ Dynen,}$$

entsprechend dem Zuge einer Masse von:

$$M = \frac{2213991}{980,9} = 2257 \text{ g,}$$

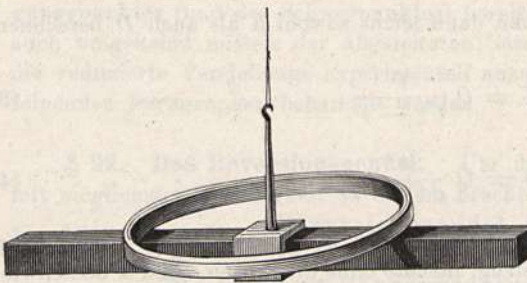
d. h. das Pendel, Fig. 303, schwingt ohne die Linsen c und d gerade ebenso, als ob an einer gewichtslosen Stange 1 cm weit von der Schneide eine Masse von 174508 g angebracht wäre, auf welche eine beschleunigende Kraft von 2213991 Dynen (hervorgebracht durch den Zug von 2257 g) wirkt. Würde man die Masse im Abstände von 1 dm vom Drehpunkte anbringen, so müßte sie 1745,08 g betragen und durch eine Kraft von 221399,1 Dynen (hervorgebracht durch den Zug von 225,7 g) in Bewegung gesetzt werden.

Dieselbe Methode zur Bestimmung des Trägheitsmomentes läßt sich aber auch noch in Anwendung bringen, wenn ein Körper nicht unter dem Einfluß der Schwerkraft, sondern unter dem Einfluß irgend einer anderen beschleunigenden, aber der Schwerkraft ähnlich wirkenden Kraft oszilliert, welche man jederzeit auch auf das Maß der Schwerkraft zurückführen kann. Ein Beispiel mag dies erläutern.



Ein in einer messingenen Hülse liegender, an einem Faden aufgehängter 27 cm langer Magnetstab brauchte 10 Sekunden zu einer Schwingung.

Fig. 304.



Um sein Trägheitsmoment zu bestimmen, wurde ein 130 g schwerer Messingring von 6,6 cm mittlerem Radius in der Weise aufgelegt, wie Fig. 304 zeigt, und nun betrug die Schwingungsdauer 13 Sekunden. Ist der Ring schmal, so kann annäherungsweise angenommen werden, daß seine ganze Masse sich im

Abstande des mittleren Radius befindet¹⁾, sein Trägheitsmoment ist dann gegeben durch:

$$Q = (6,6)^2 \cdot 130 = 5662,8.$$

Man findet ferner:

$$K = 5662,8 \cdot \frac{10^2}{13^2 - 10^2} = 8207$$

$$D = 5662,8 \cdot \frac{(3,14159)^2}{13^2 - 10^2} = 80,502$$

$$M = \frac{80,502}{980,9} = 0,082.$$

Das Trägheitsmoment des Magnetstabes, auf eine durch seine Mitte gehende Drehungsachse bezogen, ist also gleich dem einer Masse von 8207 g im Abstande von 1 cm von der Achse, und die beschleunigende Kraft des Erdmagnetismus wirkt auf den Magnetstab gerade so stark wie eine Kraft von 80,502 Dynen, die im Abstande 1 cm angreift. Diese Kraft wäre gleich dem Zuge einer Masse von 0,082 g.

§ 94. Anwendung des Pendels zur Bestimmung der Beschleunigung der Schwere. I. Bestimmung der Schwingungsdauer. Aus der

Formel über die Schwingungsdauer des Pendels $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ folgt:

$$g = \pi^2 \frac{l}{t^2} \dots \dots \dots (1)$$

Die Größe g kann daher experimentell ermittelt werden, wenn man die Länge l des einfachen (oder die reduzierte Länge des physischen) Pendels und seine Schwingungsdauer t bestimmt und in die Formel (1) einsetzt.

Um zunächst in einem Vorlesungsexperiment den Einfluß der Änderung der beschleunigenden Kraft zu demonstrieren, hat E. Mach den in Fig. 305 abgebildeten Apparat konstruiert. Der Rahmen RR ist um ein Scharnier bei C drehbar, kann geneigt und umgelegt werden; hierdurch wird das an steifen Stäben aufgehängte Pendel P genötigt, in schief stehenden Schwingungs-

¹⁾ Die genauere Formel ist nach § 87 (5) $Q = \frac{m}{2} (r^2 + R^2)$.

ebenen zu schwingen. Der Gradbogen G dient zur Messung und Festklemmung der geneigten Lage. Bei derselben kommt von der ganzen Schwerkraft von vornherein nur eine Komponente von der Größe $g \cos \beta$ zur Wirkung, wenn wir mit β den Winkel bezeichnen, um welchen die Schwingungsebene aus ihrer ursprünglich senkrechten Lage gedreht wurde. Die Schwingungsdauer des geneigten Pendels verhält sich dann zu jener des senkrechten wie 1 zu $\sqrt{\cos \beta}$.

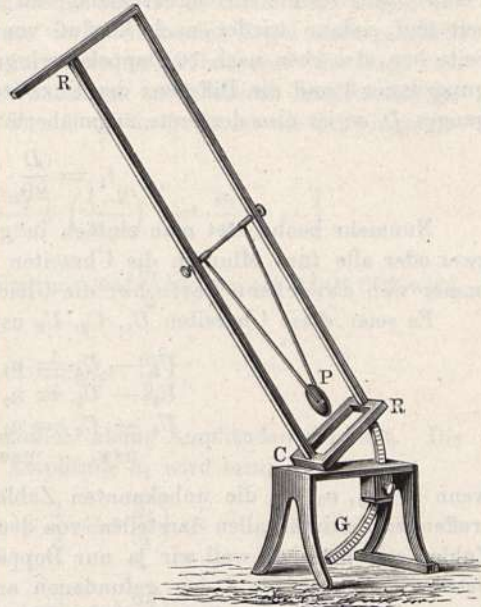
Eine ganz befriedigende Genauigkeit kann bei diesem Versuche wegen der Reibung begreiflicherweise nicht erreicht werden.

Die Beschleunigung der Schwere g ist an verschiedenen Orten der Erdoberfläche verschieden. Da die genaue Bestimmung dieser Größe ein hervorragendes Interesse gewährt und in neuerer Zeit sehr vervollkommen wurde, so wollen wir die dabei angewendeten Methoden etwas eingehender behandeln, als bisher in den Lehrbüchern geschehen ist. Die ganze Bestimmung zerfällt in eine Reihe einzelner Messungen, deren wichtigste zunächst betrifft:

I. Die genaue Messung der Schwingungsdauer des Pendels. Wir haben schon im allgemeinen in § 31 erörtert, wie man mit der Uhr den Eintritt eines Zeitereignisses und speziell auch den wiederholten Durchgang eines schwingenden Körpers durch seine Gleichgewichtslage und damit seine Schwingungsdauer beobachtet. Es wurde dabei bemerkt, daß man durch direkte Beobachtung nach den Sekundenschlägen einer Pendeluhr oder eines Chronometers wohl eine Sicherheit der einzelnen Zeitbeobachtung bis auf 0,1 Sekunde erreichen kann.

An dem Pendel, dessen Schwingungsdauer nach einer Uhr zu bestimmen ist, soll sich eine Marke etwa in Form eines feinen vertikalen Striches befinden, bei einem Fadenpendel kann der Faden selbst hierzu benutzt werden. Auf diesen stellt man dann zweckmäßig, um nicht wegen störender Temperatureinflüsse des Beobachters auf das Pendel nahe an dasselbe herankommen zu müssen, ein Fernrohr ein, in dessen Gesichtsfeld außer dem Fadenkreuz noch eine horizontale Skala angebracht ist, deren Nullpunkt mit dem Vertikalfaden des ersten zusammenfallen soll und mit dem das Bild des Pendelstriches in der Ruhelage desselben zur Koinzidenz gebracht wird. An dieser Skala beobachtet man dann die Amplituden der Schwingungen, wenn sie nicht zu groß sind, sonst auch wohl an einer unmittelbar beim Pendel angebrachten Skala, was voraussetzt, daß man den Wert der Skalen-

Fig. 305.



teile in Graden oder Minuten kenne; außerdem kann die Skala in der früher angedeuteten Weise als Hilfsmittel zur Schätzung der Zehntel-Sekunden dienen.

Nachdem das Pendel in Schwingung versetzt ist, wird zuerst die Dauer von etwa 10 Doppelschwingungen durch Beobachtung des Durchganges des Pendels durch seine Gleichgewichtslage zu Anfang unter Notierung der Uhrzeit und sodann wieder nach Verfluß von 10 Durchgängen von derselben Seite her, also eben nach 10 Doppelschwingungen, gemessen. Ist die Schwingungsdauer t und die Differenz der Uhrzeiten des ersten und letzten Durchganges D , so ist also der erste angenäherte Wert von t :

$$t_1 = \frac{D}{20}.$$

Nunmehr beobachtet man einfach in größeren Zeitintervallen, z. B. alle zwei oder alle fünf Minuten die Uhrzeiten am Chronometer, wo das Pendel immer von derselben Seite her die Gleichgewichtslage passiert.

Es seien diese Uhrzeiten U_1, U_2, U_3 usw., so ist offenbar:

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= n_1 \cdot t_1, \\ U_3 - U_2 &= n_2 \cdot t_1, \\ U_4 - U_3 &= n_3 \cdot t_1, \\ \text{usw.} & \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

wenn n_1, n_2, n_3, \dots die unbekanntenen Zahlen der Schwingungen in den betreffenden Zeitintervallen darstellen, von denen wir nur wissen, daß es gerade Zahlen sein müssen, weil wir ja nur Doppelschwingungen beobachtet haben. Setzen wir daher für t den gefundenen angenäherten Wert von t_1 ein, so können wir mit voller Sicherheit die Werte von n_1, n_2 usw. finden, da die Unsicherheit von t_1 nicht so groß sein wird, um Zweifel zu gestatten, ob man bei den Quotienten:

$$n_1 = \frac{U_2 - U_1}{t_1}, \quad n_2 = \frac{U_3 - U_2}{t_1}, \quad \text{usw.}$$

die eine oder andere nächst gelegene gerade Zahl als richtigen Wert für die n wählen soll. Mittels der so gefundenen Werte von n_1, n_2 usw. berechnen sich dann aus den Beobachtungsintervallen eine Reihe genauerer Werte der Schwingungsdauer, nämlich:

$$t_1 = \frac{U_2 - U_1}{n_1}, \quad t_2 = \frac{U_3 - U_2}{n_2}, \quad t_3 = \frac{U_4 - U_3}{n_3} \quad \text{usw.} \quad (2)$$

welche sich nur durch die Beobachtungsfehler voneinander unterscheiden werden, wenn wir bloß bei kleinen Amplituden gemessen haben. Alsdann kann einfach t :

$$t = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots}{z} \quad (3)$$

d. h. das Mittel aus allen Werten für z Intervalle als richtige Schwingungsdauer betrachtet werden, allerdings unter der Voraussetzung, daß die Zahlen n_1, n_2, n_3 usw. nahe gleich groß seien. Nach der § 24 angegebenen Weise läßt sich dann aus den Abweichungen der einzelnen t_1, t_2, t_3 , usw. vom Mittelwert t die Sicherheit des letzteren berechnen. Hat man eine größere Zahl von Schwingungen beobachtet, so kann auf diese Weise auch ohne An-

wendung eines Chronographen für das Mittel eine Sicherheit von $\pm 0,00002 \cdot t$ erreicht werden. Die Benutzung des Chronographen erlaubt, sich auf eine geringere Zahl von Schwingungen zu beschränken.

Strebt man aber eine solche größere Genauigkeit in der Bestimmung von t an, so darf dann allerdings nach § 56, die Anfangsamplitude höchstens 1° betragen. Bei so kleiner Anfangsamplitude ist es dann aber wegen der unvermeidlichen allmählichen Abnahme derselben in der Regel nicht möglich, eine genügend große Zahl der Schwingungen zu beobachten. Es fragt sich also, wie sich diese Beobachtungsverhältnisse bei größeren Amplituden gestalten. Gemäß den Gleichungen (6) und (7) in § 56 ist die Schwingungsdauer t_1 bei einer Amplitude a_1 :

$$t_1 = t \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \cdot \frac{a_1}{2} + \left(\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \cdot \frac{a_1}{2} + \dots \right]$$

oder, da selbst für $a_1 = 10^\circ$ das Glied mit $\sin^4 \frac{a_1}{2}$ kleiner als 0,000 002 wird, für alle Fälle genügend:

$$t_1 = t \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \cdot \frac{a_1}{2} \right),$$

wo t die Schwingungsdauer für unendlich kleine Amplituden darstellt. Die folgende Schwingungsdauer bei der Amplitude a_2 wird sein:

$$t_2 = t \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{a_2}{2} \right)$$

usw. bis allgemein:

$$t_n = t \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{a_n}{2} \right).$$

Summieren wir diese n Schwingungsdauern und setzen die ganze Zeit gleich dem oben angenommenen ersten größeren Zeitintervall $U_2 - U_1$, so wird also sein:

$$U_2 - U_1 = t \left(n + \frac{1}{4} \sum \sin^2 \frac{a_n}{2} \right),$$

oder, wenn wir für den \sin die Bogen einführen, was wegen der Kleinheit der a gestattet ist:

$$U_2 - U_1 = t \left[n + \sum \left(\frac{a_n}{4} \right)^2 \right].$$

Nun nehmen erfahrungsgemäß innerhalb mäßiger Zeitintervalle die Amplituden a_1, a_2, \dots bis a_n nach einer geometrischen Reihe ab, so daß, wenn c der Quotient derselben ist, sein wird:

$$a_2 = c \cdot a_1, a_3 = c^2 \cdot a_1, \dots, a_n = c^{n-1} \cdot a_1,$$

wo

$$c = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[n]{\frac{a_n + 1}{a_1}} \dots \dots \dots (4)$$

Es wird daher jetzt auch sein:

$$U_2 - U_1 = t \left[n + \left(\frac{a_1}{4} \right)^2 \sum c^{2n-2} \right].$$

Nun ist:

$$\sum c^{2n-2} = 1 + c^2 + c^4 + \dots + c^{2n-2} = \frac{1-c^{2n}}{1-c^2}.$$

Somit erhalten wir:

$$U_2 - U_1 = t \left[n + \left(\frac{a_1}{4} \right)^2 \frac{1-c^{2n}}{1-c^2} \right],$$

oder auch:

$$nt = (U_2 - U_1) - t \left(\frac{a_1}{4} \right)^2 \frac{1-c^{2n}}{1-c^2}$$

und wenn wir für c den Wert aus Gleichung (4) einführen:

$$nt = (U_2 - U_1) - t \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{a_1^2 - a_{n+1}^2}{1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_1} \right)^2}.$$

Die Amplituden: a_1 und a_{n+1} werden sich aber nur wenig unterscheiden, so daß, wenn wir:

$$a_1 = a + \mathcal{A} \text{ und } a_{n+1} = a - \mathcal{A}$$

setzen, das \mathcal{A} eine kleine Größe sein wird, während:

$$a = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2}$$

das Mittel aus der Anfangs- und Endamplitude darstellt. Dies oben eingesetzt, gibt nach Multiplikation mit $\left(1 + \frac{\mathcal{A}}{a} \right)^2$:

$$nt = (U_2 - U_1) - t \cdot \frac{a^2}{16} \cdot \frac{4 \frac{\mathcal{A}}{a} \left(1 + \frac{\mathcal{A}}{a} \right)^2}{\left(1 + \frac{\mathcal{A}}{a} \right)^2 - \left(1 - \frac{\mathcal{A}}{a} \right)^2},$$

und mit Vernachlässigung der höheren Glieder mit $\frac{\mathcal{A}}{a}$ als den quadratischen:

$$nt = (U_2 - U_1) - t \frac{a^2}{16} n \left\{ 1 + \frac{2}{n} \frac{\mathcal{A}}{a} + \left[\left(\frac{2}{n} \right)^2 - 1 \right] \left(\frac{\mathcal{A}}{a} \right)^2 \frac{1}{3} \right\},$$

oder auch, wenn wir für n die Zahl der oben angenommenen Schwingungen im ersten Intervall n_1 setzen:

$$t = \frac{U_2 - U_1}{n_1} - t \frac{a^2}{16} \left\{ 1 + \frac{2}{n_1} \frac{\mathcal{A}}{a} + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2}{n_1} \right)^2 - 1 \right] \left(\frac{\mathcal{A}}{a} \right)^2 \right\}.$$

Angenommen, es sei $n_1 = 100$, $\mathcal{A} = 1/2^0$ und $a = 5^0$, so wird:

$$\frac{2}{n_1} \cdot \frac{\mathcal{A}}{a} = \frac{1}{500}.$$

Bei vorstehender Annahme ist aber:

$$\frac{a^2}{16} = \frac{25^0}{16} \cdot \sin^2 \cdot 1^0 = 0,000473.$$

Es wird also $\frac{1}{500}$ dieser Zahl eine sehr kleine, ganz zu vernachlässigende Größe sein und um so mehr auch das mit den Quadraten von $\frac{2}{n}$ und $\frac{\mathcal{A}}{a}$ be-

haftete Glied in der Klammer. Wir werden somit stets mit ganz ausreichender Sicherheit einfach setzen können:

$$t = \frac{U_2 - U_1}{n_1} = t \cdot \frac{a^2}{16},$$

oder wenn wir für $U_2 - U_1$ aus Gleichung 2) den ohne Rücksicht auf die Amplitudenabnahme berechneten Wert t_1 einsetzen, so wird die reduzierte Schwingungsdauer t'_1 auch sein:

$$t'_1 = t_1 \left(1 - \frac{a^2}{16} \right) \dots \dots \dots (5)$$

wo der Faktor von t_1 die Reduktion der Schwingungsdauer auf unendlich kleine Amplituden darstellt und a_i (nicht a_1) jetzt das Mittel aus den zu Anfang und am Schluß des Zeitintervalls $U_2 - U_1$ beobachteten Amplituden repräsentiert.

Entsprechende Reduktionen werden an allen ferneren Werten: t_2, t_3, t_4 usw., die aus den weiteren Beobachtungsintervallen $U_3 - U_2, U_4 - U_3$ usw. abgeleitet worden sind, anzubringen sein, indem man jeweilen auch für diese Intervalle Anfangs- und Endamplituden abliest. Man wird also analog mit (5) haben:

$$t'_2 = t_2 \left(1 - \frac{a''^2}{16} \right),$$

$$t'_3 = t_3 \left(1 - \frac{a'''^2}{16} \right),$$

usw. Das schließliche Mittel t wird wieder, wenn wir z Intervalle benutzt haben, nach Gleichung 3) sein:

$$t = \frac{t'_1 + t'_2 + t'_3 + \dots}{z} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots}{z} - \frac{t}{16 \cdot z} (a_i^2 + a''^2 + a'''^2 + \dots).$$

Wir können also auch an dem in Gleichung 3) ohne Rücksicht auf die Amplitudenkorrekturen berechneten Mittelwert: $t = \frac{1}{z} (t_1 + t_2 + t_3 + \dots)$ eine Gesamtreduktion C anbringen, die gegeben ist durch:

$$C = - \frac{t}{16 \cdot z} (a_i^2 + a''^2 + a'''^2 + \dots + a_z^2).$$

Auch diese Amplituden a_i, a'', a''' usw. werden ganz wie die obigen a_1, a_2, a_3 usw. nach einer geometrischen Reihe abnehmen und somit die Summe ihrer Quadrate wie oben zu behandeln sein, so daß wir erhalten:

$$C = - \frac{t}{16 \cdot z} \frac{a_i^2 - a_{z+1}^2}{1 - \left(\frac{a_{z+1}}{a_i} \right)^2},$$

und wenn wir wie dort:

$$a_i = a + \mathcal{A}' \text{ und } a_{z+1} = a - \mathcal{A}'$$

setzen, wo \mathcal{A}' auch eine kleine Größe ist, so werden wir mit Vernachlässigung der kleinen Größen zweiter Ordnung finden:

$$C = - \frac{t}{16} \cdot a^2,$$

wo also ist:

$$a = \frac{a_1 + a_{z+1}}{2},$$

und a , das Mittel aus der ersten und letzten Amplitude des ersten Zeitintervalls und a_{z+1} das Mittel aus der ersten und letzten Amplitude des letzten Zeitintervalls darstellen; da aber die letzte Amplitude a_{n+1} des ersten Zeitintervalls um nahe dieselbe Größe kleiner denn die erste a_1 sein wird, als die erste Amplitude des letzten Zeitintervalls: a_x größer ist denn die letzte Amplitude desselben a_{x+n+1} , so werden wir unbedenklich für a auch das Mittel aus der allerersten und allerletzten Amplitude setzen können.

Aus dieser Betrachtung rechtfertigt sich also der Usus, aus dem Mittelwert t von einer Reihe beobachteter Schwingungsdauern, der ohne Rücksicht auf die Größe der Amplituden, wie für isochrone Schwingungen, nach Gleichung 3) berechnet ist, die wahre Schwingungsdauer t_0 durch Reduktion von t auf unendlich kleine Amplituden nach der Formel:

$$t_0 = t \left(1 - \frac{a^2}{16}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (6)$$

abzuleiten, wo a einfach das Mittel der allerersten und der allerletzten Amplitude bzw. der zu Anfang und am Schluß der Beobachtungsreihe abgelesenen Amplituden darstellt.

Wir haben die Bestimmung der Schwingungsdauer des Pendels hier so ausführlich behandelt, weil solche Messungen bei anderen oszillierenden Körpern in der Physik sehr viel vorkommen und es daher wichtig ist, sich ein für allemal darüber eingehend zu orientieren.

Es gibt noch eine andere Methode zur genauen Ermittlung der Schwingungsdauer, die aber nur unter besonderen Umständen anwendbar ist; es ist die Methode der Koinzidenz, wie sie zuerst Borda und später auch Bessel zur Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels angewendet haben. Die Anordnung des Apparates zur Ausführung dieses Verfahrens, wie sie von Borda und nachher auch von Arago und Biot benutzt wurde, zeigt Fig. 306 (entlehnt aus Wüllner, Experimentalphysik, 5. Aufl., I, 143). Das aus einem dünnen Platindraht und einer Platinkugel bestehende einfache Pendel BG ist, wie man sieht, vor einer astronomischen Pendeluhr CD aufgehängt und mittels des eisernen Trägers EF wie diese unmittelbar an einer soliden Mauer befestigt. Uhr und Pendel sind zum Schutz vor Luftströmungen von einem Glasgehäuse umgeben. Man konnte so leicht den Vorübergang des Pendelfadens vor dem Strich D auf der weißen Platte des Uhrpendels beobachten. Hätten das einfache Pendel und das Uhrpendel genau gleiche Schwingungsdauer und würde die Bewegung des ersteren so reguliert, daß es zugleich mit dem letzteren durch seine Gleichgewichtslage geht, also der Pendelfaden auf jenen Strich sich projiziert, so würde dieser Zustand unverändert sich erhalten. Hat aber das eine Pendel eine größere oder kleinere Schwingungsdauer als das andere, ist z. B. die des einfachen Pendels um $\frac{1}{10}$ der Schwingungsdauer des Uhrpendels, also $0,1^\circ$ größer, so wird es hinter dem anderen zurückbleiben, und zwar bei jeder Schwingung um $0,1^\circ$. Gingen sie also zu Anfang oder bei der nullten Schwingung zusammen durch die Gleichgewichtslage, d. h. koinzidierten sie da zum ersten Male, so kommt nach der ersten

Schwingung der Pendelfaden um $0,1^s$ später an und wird von Schwingung zu Schwingung immer mehr hinter dem Durchgang des Striches D am Uhrpendel zurückbleiben, und erst, wenn bei der 10. Schwingung des Uhrpendels die Differenz gegen das Fadenpendel $10 \cdot 0,1^s$ oder 1^s geworden ist, gehen beide zugleich durch; dies ist dann die zweite Koinzidenz. Um diese scharf erkennen zu können, ist in einiger Entfernung in der Richtung DD' ein Fernrohr aufgestellt, welches den Pendelfaden und den Strich D am Uhrpendel zugleich zu sehen erlaubt. Während der Zeit vom ersten gemeinsamen Durchgang der ersten Koinzidenz bis zu dieser zweiten Koinzidenz hat also nach dem Vernier-Prinzip das Uhrpendel 10, das Fadenpendel aber nur 9 Schwingungen gemacht, oder allgemein wird für die Zeit von der ersten zur zweiten Koinzidenz gelten:

$$(n - 1) t_p = n t_u = U_2 - U_1,$$

wenn n die Zahl der Schwingungen des Uhrpendels von der ersten zur zweiten Koinzidenz, t_u dessen Schwingungsdauer und t_p diejenige des Fadenpendels darstellen und wir andererseits mit U_2 die Uhrzeit bei der zweiten Koinzidenz und mit U_1 diejenige beim Beginn der Beobachtung oder der ersten Koinzidenz bezeichnen.

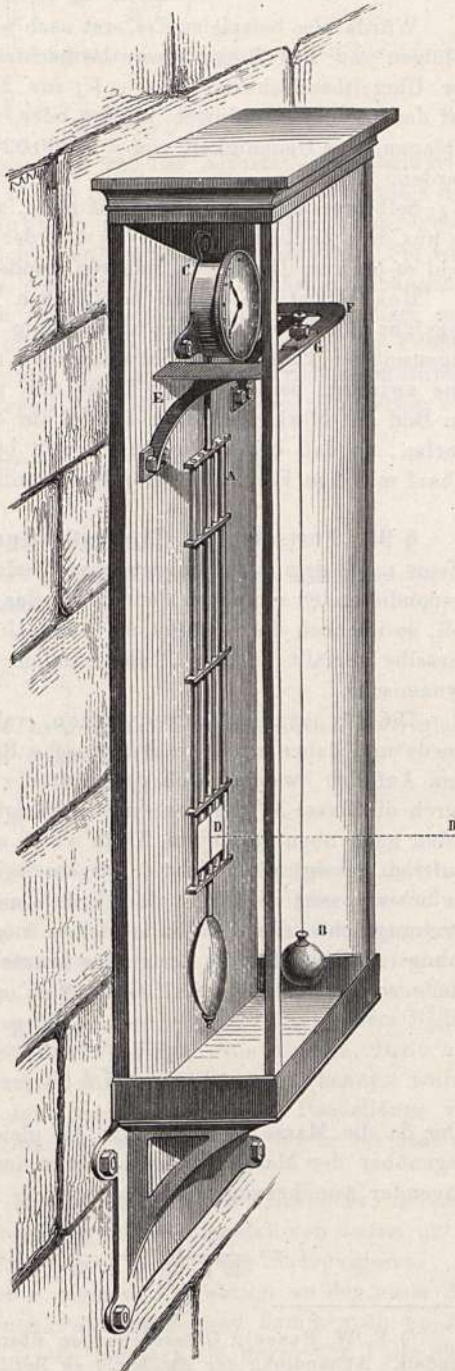
Für die dritte Koinzidenz zur Uhrzeit U_3 wird die Gleichung gelten:

$$2(n - 1) t_p = 2n t_u = U_3 - U_1,$$

und zur Zeit U_m der m ten Koinzidenz wird man haben:

$$(m - 1) \cdot (n - 1) \cdot t_p = (m - 1) \cdot n \cdot t_u = U_m - U_1.$$

Fig. 306.



Hieraus folgt aber:

$$t_p = \frac{(m-1)n}{(m-1)(n-1)} \cdot t_u = \frac{U_m - U_1}{(m-1)(n-1)}.$$

Würde also beispielsweise erst nach je 51 Schwingungen eine Koinzidenz erfolgen und 101 Koinzidenzen beobachtet werden, so würde der Fehler in der Uhrzeitbeobachtung $U_m - U_1$ zur Ableitung der Schwingungsdauer t_p auf den 5000 Teil reduziert werden oder, wenn wir jenen Fehler auf $0,1^s$ anschlagen, eine Genauigkeit von $\pm 0,00002^s$ in der Bestimmung von t_p erzielt werden.

Selbstverständlich ist es nicht nötig, alle m -Koinzidenzen zu beobachten, da aus dem Zeitintervall $U_2 - U_1$ von der ersten zur zweiten Koinzidenz die Zahl m bis zur Uhrzeit U_m mit genügender Sicherheit zu berechnen ist.

Bessel hat bei seinen bezüglichen Versuchen¹⁾ die beiden Pendel in ungefähr 3 m Distanz ganz unabhängig voneinander aufgestellt, um den gegenseitigen Einfluß der Schwingungen aufeinander zu vermeiden. Durch eine zwischen beide gesetzte Linse von passender Brennweite wurde dann ein Bild der Marke am einen Pendel auf die Marke am anderen Pendel entworfen, so daß beide Marken — von besonderer Einrichtung — zugleich scharf mit dem Fernrohr beobachtet werden konnten.

§ 95. Fortsetzung. II. Bestimmung der reduzierten Pendellänge.

Wenn nach dem oben angegebenen Verfahren die richtige Länge des korrespondierenden einfachen Pendels für das zusammengesetzte erhalten werden soll, so ist noch die Reduktion desselben auf den leeren Raum nötig. Dieselbe zerfällt in zwei Teile, nämlich eine ärostatische und eine ärodynamische.

Die ärostatische Reduktion, welche schon von Newton angegeben wurde und daher auch die Newtonsche Reduktion genannt wird, beruht auf dem Auftrieb, welche nach den später zu erörternden Gesetzen das Pendel durch die Masse M' der von ihm verdrängten Luft erfährt. Diese vertikal von unten nach oben gerichtete Kraft wirkt aber, wie später in der Lehre vom Auftrieb gezeigt wird, nicht so als ob sie im Schwerpunkt der Masse, sondern im Schwerpunkt der Figur des Pendels angreifen würde, der um L' von der Drehungsachse des Pendels abstehen möge; infolgedessen ist in der Gleichung (4), § 90, für die Länge des korrespondierenden einfachen Pendels an Stelle von ML zu setzen $ML - M'L'$, so daß man hat:

$$l = \frac{K}{ML \left(1 - \frac{M'L'}{ML}\right)},$$

oder da die Masse M' der Luft, die gleiches Volumen wie das Pendel hat, gegenüber der Masse M des letzteren immer sehr klein ist, wird mit genügender Annäherung auch sein:

$$l = \frac{K}{ML} \left(1 + \frac{M'L'}{ML}\right) = l' \left(1 + \frac{M'L'}{ML}\right). \quad \dots \quad (1)$$

¹⁾ F. W. Bessel, Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels. Abhandlung der Akademie zu Berlin für 1826.

wo l' den unkorrigierten Wert für l darstellt. Die in Beziehung hierauf korrigierte Schwingungsdauer wird dann sein:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l'}{g} \left(1 + \frac{M' L'}{M L}\right)}$$

oder auch, wenn wir mit t' die unkorrigierte Schwingungsdauer bezeichnen:

$$t = t' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{M' L'}{M L}\right) \dots \dots \dots (2)$$

Das Glied in der Klammer stellt also den von der ärostatischen Reduktion herstammenden Korrektionsfaktor für die Schwingungsdauer des Pendels dar.

Die äerodynamische Reduktion ist zuerst von Bessel angegeben und bei seinen erwähnten Untersuchungen berücksichtigt worden. Sie wird dadurch bedingt, daß eine gewisse, dem Pendel durch Adhäsion anhängende Luftschicht an den Schwingungen desselben teilnimmt. Durch diese mit-schwingende Luftmasse M'' wird offenbar das Trägheitsmoment des Pendels vergrößert, etwa um: $c M''$, wo c einen unbekanntes, empirisch zu ermittelnden Faktor darstellt. Infolge hiervon wird die Länge des reduzierten einfachen Pendels werden:

$$l = \frac{K + c \cdot M''}{M L} = l'' \left(1 + \frac{c \cdot M''}{K}\right),$$

wenn l'' den unkorrigierten Wert der Pendellänge darstellt.

Führen wir wieder diesen Wert an Stelle von l in den Ausdruck für die Schwingungsdauer ein, so wird dieselbe:

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l''}{g} \left(1 + \frac{c M''}{K}\right)},$$

oder es ist die in bezug auf die hydrodynamische Reduktion korrigierte Schwingungsdauer t gegenüber der unkorrigierten t'' :

$$t = t'' \left(1 + \frac{c \cdot M''}{2 K}\right).$$

Reduktion der Pendellänge wegen des Einflusses der Schneiden. Laplace hatte bereits darauf hingewiesen, daß bei der Anwendung von Schneiden als Drehungsachsen für die Pendel die wahre Drehungsachse nicht in der scharfen Kante der Schneiden bzw. an deren Unterlage, sondern um eine gewisse Größe darunter zu suchen sei, weil die Kante der Schneiden nicht eine mathematische Linie, sondern einen Zylinder von kleinem Radius darstelle. Da nun in der Tat bei den Versuchen von Borda, Biot und Arago eine Schneide als Drehungsachse für das Fadenpendel benutzt wurde, so würden dieser Bemerkung zufolge ihre Messungen der Pendellänge von der Schneide bzw. ihrer ebenen Unterlage an zu große Werte für jene ergeben haben.

Biot bestritt die praktische Erheblichkeit dieses Einwandes, indessen hat Bessel, der diese Frage theoretisch und experimentell von neuem untersuchte, die Richtigkeit der Laplaceschen Bemerkung nachgewiesen. Es wird dadurch in der Tat eine kleine negative Korrektion an der unter Anwendung von Schneiden gefundenen Pendellänge und damit auch an der Schwingungsdauer bedingt, deren Größe indessen im gegebenen Falle nicht

sicher zu ermitteln ist, da man den Krümmungsradius der Schneidekante nicht wohl messen kann.

In derselben oben erwähnten Abhandlung hat aber Bessel am Schlusse auch darauf hingewiesen, daß bei einem Reversionspendel sowohl die aërostatistische als aërodynamische Reduktion wie auch der Einfluß der Schneiden durch die abwechselnden Schwingungen auf den beiden Schneiden aus dem Resultat herausfalle, wenn man dem Pendel eine von ihm vorgeschlagene symmetrische Form bezüglich beider Schneiden gebe und die Schneiden vertauschbar mache.

Ein nach diesen Angaben Bessels konstruiertes Reversionspendel, das E. Plantamour als erstes dieser Art für die Schweizerische geodätische Kommission von den Gebrüdern Repsold in Hamburg anfertigen ließ, hat derselbe 1865, 1866 und 1867 zur Bestimmung der Schwere zunächst in Genf und auf Rigi-Kulm, später 1871 nochmals in Genf benutzt und in der unten zitierten Abhandlung darüber beschrieben und abgebildet¹⁾.

In neuerer Zeit wurde noch eine weitere Fehlerquelle beim Pendel, die man schon früher vermutete, näher, besonders durch Cellérier und Pierce, untersucht, welche auf der elastischen Mitschwingung der Träger des Pendels beruht. Plantamour fand aus seinen bezüglichen Experimenten, daß für das obige Pendel die Länge des korrespondierenden einfachen Pendels infolge dieses Mitschwingens des Gestelles eine Korrektion von $+0,1724$ mm bedürfte. Es würde hier zu weit führen, auf die Mittel zur Bestimmung dieser Fehlerquelle, wie überhaupt auf die Praxis des Reversionspendels näher einzutreten; wir verweisen bezüglich dessen auf die unten zitierte Schrift von F. R. Helmert²⁾.

Da es wichtig ist, an möglichst vielen Punkten der Erdoberfläche die Schwerkraft bzw. Beschleunigung der Schwere g messen zu können und das Reversionspendel für absolute Bestimmungen von g zwar sehr geeignet ist, für den Gebrauch auf Reisen aber zu unbequem wäre, so hat Oberst von Sterneck zu letzterem Zweck einen für relative Messungen sehr geeigneten kompensiösen und leicht transportablen Apparat mit invariablem Halbskundenpendel konstruieren lassen, der bereits in vielen Ländern und auf Reisen zu Pendelmessungen verwendet worden ist³⁾.

§ 96. Werte der Schwerebeschleunigung g . Aus den Beobachtungen an der Breite und Höhe über Meer nach verschiedenen Punkten der Erdober-

¹⁾ E. Plantamour, Expériences faites à Genève avec la pendule à réversion et Nouvelles expériences avec la pendule à réversion et détermination de pesanteur à Genève et au Rigi-Kulm. Mém. de la Société de phys. et d'histoire naturelle à Genève. T. XVIII, 1866 et T. XXI, 1872.

²⁾ F. R. Helmert, Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Veröffentlichung des Königl. preuß. geodätischen Instituts und des Centralbureaus der internationalen Erdmessung. Potsdam 1898 (Teubner in Leipzig).

³⁾ R. v. Sterneck, Der neue Pendelapparat. Mitteilungen des militärgeographischen Instituts in Wien, Bd. VII, 1887 und Zeitschrift für Instrumentenkunde 1888, S. 157, siehe auch: Helmert, Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen von der Ostsee bis zur Schneekoppe. Veröffentlichung des Königl. preuß. geodätischen Instituts, Berlin 1896, S. 184 u. f., und J. B. Messerschmitt, Relative Schwerebestimmungen in der Schweiz im Auftrage des Schweizerischen geodätischen Kommission, Zürich 1897 (bei Fäsi u. Beer).

fläche ergab sich bald, daß g vom Äquator nach den Polen hin wachse und bei der Erhebung über Meer abnehme. Das letztere ist unmittelbar verständlich, da mit der Entfernung von der Erdoberfläche die Anziehung der Erde umgekehrt proportional mit der Entfernung vom Erdzentrum abnimmt, so daß wir, wenn g_0 die Beschleunigung der Schwere an der Erdoberfläche und g_h diejenige in der Höhe h über der Erdoberfläche darstellt, haben werden:

$$g_0 = g_h \left(\frac{h + R}{R} \right)^2 \dots \dots \dots (1)$$

wo R den Halbmesser der Erde darstellt. Da $\frac{h}{R}$ jedenfalls eine kleine Größe ist, also die höheren Potenzen davon zu vernachlässigen sind, so kann man mit ganz genügender Annäherung auch setzen:

$$g_0 = g_h \left(1 + \frac{2h}{R} \right) \dots \dots \dots (1a)$$

Wenn aber die Erhebung h nicht in der freien Luft über der im Meeresniveau liegenden Erdoberfläche stattfindet, sondern einem Orte auf der über die Meeresfläche um h erhobenen Erdoberfläche zukommt, so hat man nach Poisson noch Rücksicht auf die Anziehung der Gebirgsschichten vom Meeresniveau bis zum betreffenden Orte zu nehmen. Demzufolge soll, wenn man nach A. von Humboldt die Dichte der oberen Erdschichten gleich $\frac{1}{2}$ der mittleren Dichte der Erde ansetzt, sein:

$$g_0 = g_h \left(1 + \frac{5}{4} \frac{h}{R} \right) \dots \dots \dots (2)$$

Die Zunahme der Schwere vom Äquator gegen die Pole hin wird durch den Umstand bedingt, daß die Erde nicht eine Kugel, sondern ein an den Polen abgeplattetes Sphäroid (Rotationsellipsoid) darstellt, dessen Hauptdimensionen nach Clarke (1880) sind:

Halber Äquatordurchmesser	Halbe Polachse der Erde
$a = 6378250 \text{ m}$	$b = 6356500 \text{ m}$.

Daraus folgt für die sog. Abplattung der Erde:

$$\frac{a - b}{a} = \frac{21750}{6378250} = \frac{1}{293,5}$$

Nach Helmert soll die Abplattung gegenwärtig genauer durch: 1 : 298,3 dargestellt sein.

Dazu kommt, daß infolge der Drehung der Erde um ihre Achse, wie wir weiterhin sehen werden, eine der Schwere entgegenwirkende sog. Fliehkraft entsteht, welche am Äquator am größten ist und an den Polen Null wird.

Laplace hat eine Formel zur Berechnung dieser Gesamtzunahme der Schwere vom Äquator zu den Polen hin angegeben, wonach die Schwere in der Breite φ gegeben ist durch:

$$g_\varphi = g_0 (1 + m \cdot \sin^2 \varphi) \dots \dots \dots (3)$$

wenn g_0 hier die Schwere am Äquator, und

$$m = \frac{5}{2} u - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \dots \dots \dots (4)$$

eine konstante Größe darstellt, welche aus dem Verhältnis u der Schwerkraft und Fliehkraft am Äquator und der Exzentrizität der Meridianellipse ε , wie angegeben, berechnet werden kann. Andere Forscher, wie Schmidt, Hansteen, Bovenius, Listing, haben es vorgezogen, aus einer großen Zahl vorliegender Bestimmungen von g an verschiedenen Orten die wahrscheinlichsten Werte für die Konstante m und zugleich für g_0 abzuleiten. Eine andere Form der obigen Gleichung ist:

$$g_{\varphi} = g_{45} (1 - m' \cdot \cos^2 \varphi) \dots \dots \dots (5)$$

wo

$$m' = \frac{\frac{1}{2} m}{1 + \frac{1}{2} m} \dots \dots \dots (6)$$

ist und g_{45} die Schwerkraft in 45° Breite repräsentiert. Einschließlich der Veränderung mit der Höhe werden also die Formeln für die Berechnung der Beschleunigung der Schwere in der Breite φ und der Höhe h über Meer:

$$g_{\varphi, h} = g_{0,0} (1 + m \cdot \sin^2 \varphi) (1 - n \cdot h) \dots \dots \dots (7)$$

und

$$g_{\varphi, h} = g_{45,0} (1 - m' \cdot \sin^2 \varphi) (1 - n \cdot h) \dots \dots \dots (8)$$

Drücken wir h in Metern aus, so wird theoretisch:

$n = 0,0000003142$ bei Erhebung um h über Meer in freier Luft,

$n = 0,0000001960$ bei Erhebung des Landes um h über Meer.

Für die Konstanten m und m' hat man folgende Werte berechnet:

Nach Bessel	0,0053084	0,0026472
Meridian von Paris	0,0051663	0,0025764
„ „ Sibirien bis Indien	0,0054710	0,0027280
„ „ London	0,0051769	0,0025818
„ „ Konstantinopel	0,0051827	0,0025846
Nach E. Schmidt	0,0052004	0,0025935
„ Baily	0,0051715	0,0025791
„ Hansteen	0,0051956	0,0025911
„ Bovenius	0,0051624	0,0025745
„ Fischer (1868)	0,0051851	0,0025958
„ Listing (1878)	0,0052015	0,0025940
„ Helmert (1884)	0,0053100	0,0026480

Für das Bureau international hat hiernach, als für das mittlere Europa geltend, Broch¹⁾ folgende Formel adoptiert:

$$g_{\varphi, h} = g_{45,0} (1 - 0,002590 \cdot \cos . 2 \varphi) (1 - 0,00000196 \cdot h) \dots \dots \dots (9)$$

die auch von Mascart und Wild den „Tables météorologiques internationales“, Paris 1890 (Gauthier Villars) in den bezüglichen Teilen zugrunde gelegt wurde.

¹⁾ Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures. T. 1. Paris 1881.

Helmert¹⁾ hat folgende Formel aufgestellt und dabei die Benutzung des Faktors von $h : 0,314010 \cdot 10^{-6}$ auch für Landerhebungen begründet:

$$g_{\varphi,h} = g_{0,0} (1 + 0,005310 \cdot \sin^2 \varphi) (1 - 0,0000003140 \cdot h) \quad (10)$$

oder

$$g_{\varphi,h} = g_{45,0} (1 - 0,002648 \cos^2 \varphi) (1 - 0,0000003140 \cdot h) \quad (10a)$$

und als Wert der Beschleunigung $g_{0,0}$ am Äquator und im Meeresniveau gefunden:

$$\left. \begin{aligned} g_{0,0} &= 978,000 \text{ cm} \\ g_{45,0} &= 980,60 \text{ cm} \\ g_{90,0} &= 983,19 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10b)$$

woraus folgt:
und:

	Breite	+ Östl. Länge von Greenwich	Höhe über Meer m	g in Centimetern
Spitzbergen	78° 50'	11° 40'	6	983,07
Christiania	59 55	10 43	28	981,95
Stockholm	59 21	18 3	45	981,86
Greenwich	51 29	0 0	48	981,20
Kopenhagen	55 41	12 35	18	981,58
Pulkowa	59 46	30 20	70	981,91
Moskau	55 45	37 34	142	981,59
Tiflis	41 41	44 48	471	980,21
Königsberg	54 43	20 30	22	981,50
Potsdam	52 23	13 4	87	981,29
Leipzig	51 20	12 24	119	981,22
München	48 9	11 36	529	980,74
Brüssel (Uccle)	50 51	4 22	102	981,17
Paris	48 50	2 20	60	980,96
Wien	48 13	16 22	183	980,88
Budapest	47 30	19 4	122	980,86
Genf	46 12	6 9	405	980,60
Zürich	47 23	8 33	467	980,67
Mailand	45 28	9 11	141	980,59
Rom	41 54	12 30	59	980,36
Catania	37 30	15 5	43	980,07
Madrid	40 24	— 3 41	657	980,02
Algier	36 47	3 4	3	979,95

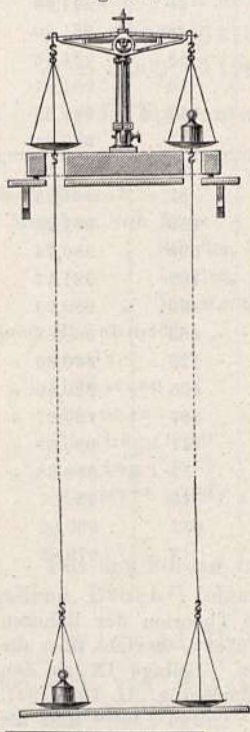
¹⁾ F. R. Helmert, Mathematische und physikalische Theorien der höheren Geodäsie 2, 241 und 244, Leipzig 1884; siehe auch: Helmert, Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten. Beilage IX zu den Verhandlungen der 13. allgem. Konferenz für internat. Erdmessung. II. Teil, 1901, bei G. Reimer, Berlin. (Hier ist S. 368 als Faktor von $h : 0,3155 \cdot 10^{-6}$ und als besserer Wert für $g_{0,0}$ S. 371: 978,045 angegeben, woraus für $g_{45,0}$ folgen würde 980,642. Diese Zahl ist nur wenig kleiner als 980,665, welche nach § 35, S. 97, Anmerkung, von der internationalen Generalkonferenz für Maß und Gewicht als Normalbeschleunigung der Schwere unter 45° Breite und im Meeresniveau adoptiert worden ist.

	Breite	+ Östl. Länge von Greenwich	Höhe über Meer m	g in Centimetern
St. Helena	— 15° 55'	— 5° 42'	11	978,68
Kapstadt	— 33 56	18 29	11	979,68
Sidney	— 33 52	151 12	43	979,69
Kalkutta	22 33	88 21	6	978,83
Tokio	35 43	139 46	15	979,82
Washington	38 53	— 77 1	14	980,12
San Francisco	37 47	—122 26	114	979,98
Rio de Janeiro	— 22 55	— 43 18	3	978,87
Kap Horn	— 55 51	— 67 13	12	981,64

Die Abweichung der nach obiger Formel berechneten Werte von g von den beobachteten ist durchweg geringer als 0,0001 des ganzen Wertes¹⁾. In der vorstehenden Tabelle geben wir die beobachteten Werte von g nach Helmerts unten angeführtem Bericht für eine Auswahl von Orten.

§ 97. Ermittlung der Abnahme der Schwere mit der Höhe mittels der Wage (Methode von Jolly). Den Einfluß der Erhebung über die

Fig. 307.



Oberfläche der Erde auf die Schwerkraft g hat zuerst Ph. v. Jolly²⁾ auf einem anderen Wege, nämlich mittels der Wage nachzuweisen gesucht. Wie die Fig. 307 zeigt, stellte er zu dem Ende eine genaue Wage bei ersten Versuchen 5,5 m, bei den späteren 25 m hoch über dem Fußboden auf und hing an deren Wagschalen vermittelst entsprechend langer Drähte zweite Schalen auf, welche sich bloß 0,2 m bzw. 4 m über dem Boden befanden. Die Wage wurde im ersten Falle mit 1 kg, im letzteren mit 5 kg auf jeder Schale belastet und unter Beobachtung aller nötigen Vorsichtsmaßregeln Wägungen ausgeführt, wobei abwechselnd beide Gewichte auf den oberen Schalen lagen und darauf das eine auf die betreffende untere Schale gebracht wurde.

Bei der Belastung mit 1 kg betrug die Gewichtszunahme beim Übertragen von der oberen zur unteren Schale für die Höhendifferenz 5,29 m im Mittel vieler Versuche:

1,510 mg;

bei der Belastung mit 5,00945 kg für die Höhendifferenz 21,005 m stieg sie auf

31,686 mg.

Nach Gleichung (1a), § 96, soll aber dem Gravitationsgesetz zufolge sein:

¹⁾ Tafeln zur Erleichterung der Berechnung nach (10) hat publiziert: v. Triulzi, Formeln und Hilfstafeln für relative Schwerebestimmungen. Pola 1895.

²⁾ Ph. v. Jolly, Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation. Abhandlung der königl. bayerischen Akademie, II. Cl., XIII. Bd., 1. Abt. 1771, und XIV. Bd., 2. Abt. 1881.

$$g_0 = g_h \left(1 + \frac{2h}{R} \right)$$

oder

$$g_0 - g_h = g_h \frac{2h}{R}$$

Die gleiche Beziehung gilt aber auch für die Gewichte G_0 und G_h , welche oben und unten der konstanten Tara das Gleichgewicht halten. Setzen wir hier obige Werte ein und für R den Wert von München: 6365722, so ergibt sich:

$$G_0 - G_{5,20} = 1,662 \text{ mg} \quad \text{und} \quad G_0 - G_{21,00} = 33,06 \text{ mg}.$$

Der erste theoretische Wert ist um 9 Proz., der zweite um 4 Proz. größer als der beobachtete, was wohl auf den vermindernden Einfluß der umgebenden Gebäudemassen zurückzuführen ist.

Entsprechende Beobachtungen haben später Thiesen¹⁾ im Pavillon de Breteuil, sowie Richarz und Krigar-Menzel²⁾ in Spandau angestellt und ebenfalls geringere als die theoretischen Werte für die Abnahme der Schwere mit der Höhe gefunden. Für den Koeffizienten n von h in unseren Formeln (7) und (8), § 96, ergeben sich demnach folgende Werte:

$n = 0,000\,000\,314$	theoretisch,	} von W. Jolly,
$= 0,000\,000\,285$	1. Versuch	
$= 0,000\,000\,301$	2. „	} Thiesen,
$= 0,000\,000\,248$	unmittelbar	
$= 0,000\,000\,278$	korrigiert	} Richarz und Krigar-Menzel,
$= 0,000\,000\,279$		
$= 0,000\,000\,196$	theoretisch.	

Hiernach erscheint der erste theoretische Wert, den Helmert in seiner Formel aufgenommen hat, auch nach diesen Bestimmungen der richtigere zu sein. (Helmert nimmt jetzt [1901], wie oben angegeben, den Wert 0,0000003155 an.)

Die Zahl 0,0000003 sagt also aus, daß die Beschleunigung der Schwere bei der Erhebung um 1 m über das Meeresniveau um 0,3 Millionstel ihres Wertes abnehme oder daß das Gewicht von 1 kg, wenn man es um 1 m hebt, um 0,3 mg kleiner werde. Wenn man also Wägungen bis auf 0,01 mg sicher ausführen will, so dürfen die Schwerpunkte von Kilogrammgewichten in den beiden Wagschalen in der Höhe um nicht mehr als 3 cm differieren.

§ 98. Mittlere Dichte der Erdmasse. Das Pendel und die gewöhnliche Wage (auch die Torsions- und Bifilarwage, die wir später näher betrachten werden) haben ferner dazu gedient, die mittlere Dichte der

¹⁾ M. Thiesen, Détermination de la variation de la pesanteur avec la hauteur au Pavillon de Breteuil. Travaux et Mémoires du Bureau internat. des poids et mesures, T. VII, 1890.

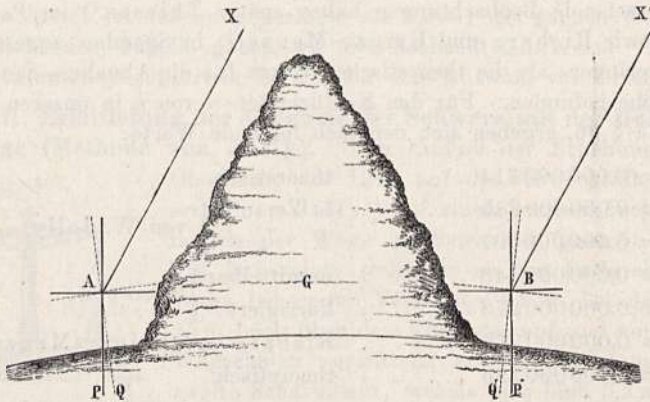
Der zweite Wert ist von Thiesen in bezug auf das umgebende Gebäude korrigiert worden.

²⁾ F. Richarz und O. Krigar-Menzel, Die Abnahme der Schwere mit der Höhe, bestimmt durch Wägungen. Sitzungsbericht der Berliner Akademie vom 23. März 1883 und Ann. der Physik und Chemie. Neue Folge, 51, 559, 1894.

Erde: Δ , bezogen auf die Dichte des Wassers, dieselbe als 1 gesetzt, zu ermitteln.

Maskelyne und Hutton haben zuerst versucht, aus der Ablenkung, welche das Pendel oder Bleilot in der Nähe isoliert stehender Gebirge erfährt, die Anziehung derselben nach dem Gravitationsgesetz zu bestimmen. Indem sie dann die Größe dieser Anziehung mit derjenigen der Erde verglichen, war es ihnen möglich, aus dem bekannten Volumen des Gebirges und der Dichte seiner Masse, sowie aus den bekannten Volumen der Erde auf die mittlere Dichte dieser zu schließen. Sie wählten hierzu die Bergkette Shehallien in Schottland, an deren Nord- und Südseite die Ablenkung des Bleilotes aus der Vertikalen gegen den Berg hin gemessen wurde, wie dies Fig. 308 andeutet. Da die Dichte und Größe der Bergmasse nur annähernd

Fig. 308.



bekannt waren, so war eine erhebliche Sicherheit des Resultates nicht zu erwarten. Bedeutend genauer schon war die Bestimmung von Cavendish, welcher die Anziehung von Bleikugeln auf eine horizontale Torsionswaage maß. Carlini beobachtete Pendelschwingungen auf einem Berge. Reich stellte seine, auf das gleiche Prinzip wie bei Cavendish sich stützenden Versuche unter Anwendung einer Bifilarwaage an, die größere Sicherheit als die Torsionswaage gewährte. Im Auftrage der Londoner astronomischen Gesellschaft wiederholte sodann Baily die Experimente von Cavendish. Nach derselben Methode haben Cornu und Baille mit der Torsionswaage sehr sorgfältige Beobachtungen ausgeführt und dabei auch einen Fehler in den Bestimmungen von Baily erkannt (siehe nebenstehende Tabelle).

Airy verglich Pendelschwingungen an der Erdoberfläche und in der Tiefe eines Bergwerkschachtes von 383 m Tiefe. Mit der Waage haben Poynting und wenig später auch v. Jolly, bei dem zweiten der oben erwähnten Versuche, die Anziehung größerer Bleimassen auf Gewichte, welche auf der Wagschale sich befanden, gemessen. Mit einem Pendelapparat und großen Bleimassen bestimmte Wilsing zwei Werte und später mit der Torsionswaage Boys, endlich mit der gewöhnlichen Waage Richarz und Krigar-Menzel die mittlere Dichte der Erde. Nachstehend sind die Resultate aller dieser Bestimmungen zusammengestellt und in der letzten Kolonne die zur Mittelbildung benutzten Werte.

Beobachter	Zeit	\mathcal{A}'	\mathcal{A}
Maskelyne und Hutton	1776	4,71	—
Cavendish	1798	5,48	5,48
Carlini	1824	4,84	
Reich	{1837 1849}	{5,49 5,58}	5,53
Baily	1842	5,67	
Korrigiert von Cornu		5,55	5,55
Airy	1856	6,57	—
Korrigiert von Haughton		5,48	5,48
Cornu und Baille	{1872 1873}	{5,56 5,50}	5,53
Poynting	1878	{5,52 5,46}	5,49
v. Jolly	1879	5,69	5,69
Wilsing	1887	{5,594 5,587}	5,59
Boys		5,527	5,53
Richarz und Krigar-Menzel	1896	5,505	5,50

Mittel der letzten Reihe $\mathcal{A} = 5,537$

§ 99. Die Gravitationskonstante. Im § 43 wurde mitgeteilt, daß nach Newtons Entdeckung zwei Massen M und m sich mit einer Kraft anziehen, welche proportional dem Produkt ihrer Massen Mm und verkehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes R sei. Ist also M die Masse der Erde, m eine Masse an ihrer Oberfläche, R der Erdradius, so ist die Kraft mg , mit welcher die Masse m von der Erde angezogen wird, gegeben durch

$$mg = A \frac{Mm}{R^2} \dots \dots \dots (1)$$

wo A eine Konstante ist, welche man die Gravitationskonstante nennt.

Da nach den Rechnungen der analytischen Mechanik eine Kugel so wirkt, als wenn ihre Masse im Mittelpunkt konzentriert wäre, so ist für R der Erdradius einzusetzen. Da nun (1) die Größe m beiderseits sich aufhebt, so folgt für die Gravitationskonstante

$$A = g \cdot \frac{R^2}{M} \dots \dots \dots (2)$$

Ist \mathcal{A} die mittlere Dichte der Erde, so ist

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \mathcal{A} \dots \dots \dots (3)$$

und

$$A = g \cdot \frac{3}{4 \pi R \mathcal{A}}$$

Für R ist der Radius einer Kugel zu setzen, welche gleiches Volum mit dem Erdsphäroid hat, nämlich

$$R = 6370284 \text{ m.}$$

Für A setzen wir den im § 98 erhaltenen Mittelwert

$$A = 5 \cdot 537.$$

Für g ist der Wert für 45° Breite zu nehmen, indessen ist der bezügliche Wert nach Helmert aus (10b), § 96: 980,60 cm noch mit dem Einfluß der Zentrifugalkraft aus der Drehung der Erde behaftet, während obige Formel auf die reine Anziehung ohne solche sich bezieht. Zur Elimination der Zentrifugalkraft ist, wie wir später sehen werden, der obige Wert von g um die Komponente der letzteren nach der Vertikalen des Ortes zu vergrößern, die für eine Breite φ ist:

$$F_{\varphi} = \frac{4\pi^2 R \cos^2 \varphi}{U^2},$$

wo R wieder den mittleren Radius der Erde und U die Umdrehungszeit um ihre Achse (Sterntag), und zwar in Sekunden mittlerer Sonnenzeit repräsentiert.

Führen wir diese Werte: $R = 6370284$ m und $T = 86164$ s (s. § 29) ein, so kommt:

$$F_{\varphi} = 0,03387 \cdot \cos^2 \varphi,$$

also:

$$F_{45} = 0,01693 \text{ m.}$$

Da R oben in Meter³ und F_{45} auch in Meter ausgedrückt ist, so ist also die oben einzusetzende Größe:

$$g = 9,8060 + 0,0169 = 9,8229 \text{ m.}$$

Somit wird:

$$A = \frac{3 \cdot 9,8229}{4 \pi \cdot 5,537 \cdot 6370284} = 6,648 \cdot 10^{-8}. \quad \dots \quad (4)$$

Da die Masse M oben in Cubikmeter ausgedrückt ist und 1 m³ Wasser 1 Tonne wiegt, so sagt vorstehender Wert der Gravitationskonstante auch aus, daß die Beschleunigung, welche die Masse von 1 Tonne auf 1 m Entfernung durch die Gravitationsanziehung erteilt, gleich $5,648 \cdot 10^{-8}$ m pro Sekunde ist.

Die Dimension aber der Gravitationskonstante wird, da diejenige von g : [t⁻²] ist, gemäß Gleichung (2):

$$\text{Gravitationskonstante: [m}^{-1} \text{ l}^{-3} \text{ t}^{-2}\text{].}$$

Führen wir statt 1 m als Längeneinheit 1 cm und statt der Masse von 1 Tonne die 10⁶ mal kleinere von 1 g ein, so ändert sich am Zahlenwert der Konstante nach vorstehender Dimension offenbar nichts. Es wird also im (C. G. S.-)System die Gravitationskonstante dargestellt durch das Dimensionensymbol:

$$\text{Gravitationskonstante: [C}^3 \text{ G}^{-1} \text{ S}^{-2}\text{],}$$

und der Zahlenwert derselben sagt aus, daß die Masse von 1 g einem Körper in der Entfernung von 1 cm eine Beschleunigung von $6,648 \cdot 10^{-8}$ cm pro Sekunde durch die Gravitation erteilt, also die Gravitationsanziehung auf die Masse von 1 g durch die Masse von 1 g in 1 cm Entfernung gleich ist $6,648 \cdot 10^{-8}$ Dynen oder 0,06648 Mikrodynen.

Die Bestimmung der Beschleunigung der Schwere durch das Pendel hat uns also zu der der mittleren Dichtigkeit der Erde und durch diese zu derjenigen der Gravitationskonstante geführt. Wir gehen jetzt zur zweiten Hauptanwendung des Pendels über.

§ 100. Anwendung des Pendels zur Regulierung der Uhren; Metronom. Die Länge des einfachen Sekundenpendels ist gegeben durch:

$$l = \frac{g}{\pi^2} \dots \dots \dots (1)$$

wird also wie g mit der Breite und Höhe variieren. Nach der Formel von Helmert für g ist daher:

$$l_{\varphi, h} = 99,092 (1 + 0,005310 \cdot \sin^2 \varphi) (1 - 0,0000003140 \cdot h) \text{ cm} \dots (2)$$

so daß also z. B. in 45° Breite und am Pol je im Meeresniveau ist:

$$l_{45,0} = 99,355 \text{ cm}, \quad l_{90,0} = 99,619 \text{ cm}.$$

Vom Äquator zum Pol nimmt somit die Länge des einfachen Sekundenpendels um etwas über 5 mm zu. Nachdem man die Benutzung dieser Länge als Naturmaßeinheit für die Länge verlassen hat, hat ihre genaue Kenntnis keine praktische Bedeutung mehr.

Pendeluhr. Dagegen hat schon Galilei die Idee gehabt, das Pendel zur Regulierung der Uhr zu verwenden, wie die beistehende Kopie, Fig. 309, in verkleinertem Maßstabe einer von ihm hinterlassenen, nach seinen Angaben von seinem Sohn Vincenzo und seinem Schüler Viviani angefertigten Zeichnung beweist, deren Ausführung er nicht mehr erlebt hat¹⁾.

Als Erfinder der Pendeluhr in ihrer heutigen Gestalt ist Chr. Huygens anzusehen.

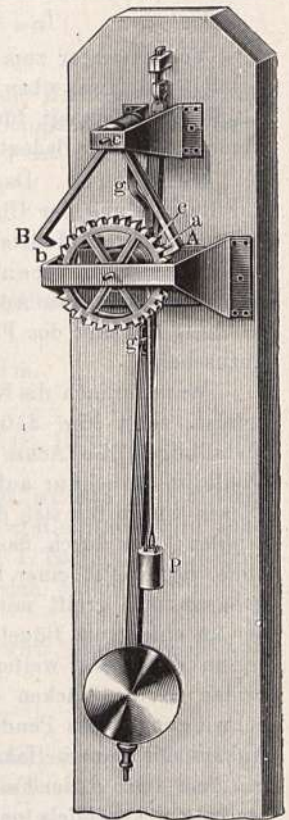
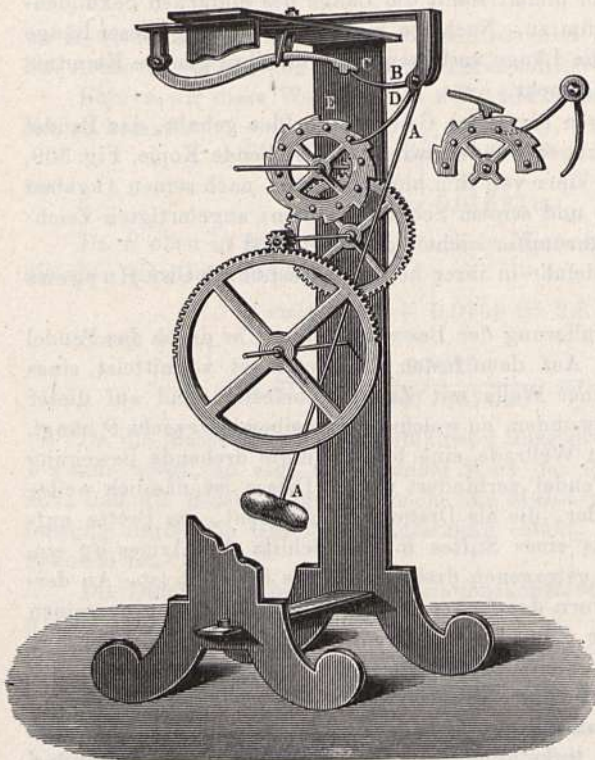
Wie hiernach die Regulierung der Bewegung einer Uhr durch das Pendel erfolgt, zeigt Fig. 310. Auf dem festen Uhrbrette ist vermittelt eines Metallbügels die Achse einer Welle mit Zahnrad befestigt und auf dieser Welle ist die Schnur aufgewunden, an welcher das treibende Gewicht P hängt. Dieses würde für sich dem Wellrade eine beschleunigte drehende Bewegung erteilen, was durch das Pendel verhindert wird. Dieses ist nämlich weiter oben vermittelt einer Feder, die als Drehungsachse dient, am Brette aufgehängt und greift mittels eines Stiftes in den Schlitz des Armes gg ein, der an einer vom Bügel C getragenen drehbaren Welle befestigt ist. An derselben Welle sitzt weiter vorn der Anker AB , der mit den Haken an seinen Enden in die Lücken der Zähne des Zahrades einfallen kann. Bei den Schwingungen des Pendels greift abwechselnd der eine und andere Arm des Ankers mit seinem Haken in das Zahnrad ein, wie es z. B. in der Zeichnung mit dem Arme A der Fall ist, der den Zahn a des Zahnrades bei der äußersten Stellung des Pendels nach links anhält, so daß die Drehung des Wellrades, die durch das Gewicht erfolgt, gehemmt wird. Wenn nun das Pendel zurückschwingt, so verläßt der Haken von A den Zahn a , so daß sich das Rad drehen kann, aber nur um einen halben Zahn, indem sofort auf der anderen Seite der Haken des Armes B in das Zahnrad eingreift und den Zahn b bei der äußersten Stellung des Pendels auf dieser Seite ebenfalls festhält. Schwingt dann das Pendel wieder auf die erste Seite aus, so wird das Rad ebenfalls für einen Moment frei und kann um einen halben Zahn sich weiter drehen, bis der Haken von A in die folgende Zahnücke eingreift und der folgende Zahn c des Rades sich jetzt an den Haken anlegt. Wenn also das Pendel wieder

¹⁾ Dieselbe findet sich samt einer Wiedergabe der darauf bezüglichen Mitteilungen Vivianis in R. Biedermanns Bericht über die Ausstellung wissenschaftlicher Apparate in London 1876, S. 411.

zum Ausgangspunkte zurückgekehrt ist, also zwei Schwingungen gemacht hat, so hat sich in zwei Sprüngen das Zahnrad um einen Zahn vorwärts gedreht; hat es also 30 Zähne, so wird ein an seiner Achse befestigter Zeiger in 60 Sprüngen den Kreisumfang zurückgelegt haben, bzw. einem Sekundenzeiger entsprechen, wenn die Schwingungsdauer des Pendels eine Sekunde beträgt. Dies kann durch Verschieben der schweren Linse an der Pendelstange mittelst der Schraubenmutter, auf die sie sich stützt, erzielt werden. Die Bewegung der Uhrzeiger ist somit keine gleichförmige, sondern eine

Fig. 310.

Fig. 309.



sprungweise, aber durch das Pendel auf gleiche Intervalle regulierte, kann aber beim Stundenzeiger wegen der großen Verlangsamung für das unbewaffnete Auge bereits als eine gleichförmige erscheinen. Infolge der Reibung und des Luftwiderstandes würde das Pendel allmählich zur Ruhe kommen; dies wird aber bei der Uhr dadurch verhütet, daß die Zähne des Zahnrades jeweilen bei der Hemmung einen Druck auf die Ankerhaken ausüben und damit durch das Mittel des Ankers dem Pendel den Bewegungsverlust wieder ersetzen. Damit dies im richtigen Verhältnis geschieht, muß das treibende Gewicht den Reibungsverlusten so angepaßt werden, daß das Pendel stets dieselbe Schwingungsamplitude beibehält.

Metronom. Um durch ein Pendel beliebig zu bestimmende Zeitintervalle angeben zu können, hat Mälzel (1813) den Taktmesser (Metronom,

Fig. 311) konstruiert, indem er an einer mit einer Federuhr verbundenen Pendelstange mit der Hauptmasse M jenseits der Drehungsachse c noch eine verschiebbare Masse m anbrachte. Bezeichnen wir die Entfernungen der Massen M und m von der Drehungsachse mit D und d , so ist mit Vernachlässigung der Masse des dünnen Stabes die Entfernung L des Schwerpunktes, in welchem die Masse $M + m$ angreift, gegeben durch:

$$L = \frac{MD - m \cdot d}{M + m},$$

also das Drehungsmoment der Massen:

$$(M + m) \cdot L = 9 (MD - md),$$

und das Trägheitsmoment:

$$K = MD^2 + md^2.$$

Es ist somit die Länge des korrespondierenden einfachen Pendels angenähert:

$$l = \frac{MD^2 + md^2}{MD - md},$$

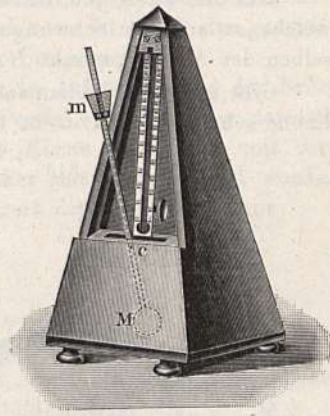
woraus folgt, daß man durch Vergrößerung von d gegenüber D auch bei einem kurzen Pendel beliebige große l bzw. Schwingungsdauern erzielen kann.

Es gibt noch eine andere Art von Pendeln, nämlich horizontale Pendel mit vertikaler Drehungsachse, welche letztere durch Fäden oder Drähte dargestellt werden, wie das Torsionspendel oder die Torsionswaage, das bifilare Pendel oder die Bifilarwaage und das sogenannte Horizontalpendel, sie sollen an einer anderen Stelle behandelt werden.

§ 101. Foucaults Pendelversuch. Nach dem Gesetze vom Beharrungsvermögen oder der Trägheit verharrt jeder Körper in dem Zustande der Ruhe oder der Bewegung, in welchem er sich eben befindet, falls nicht eine äußere Kraft auf ihn einwirkt, welche seine Geschwindigkeit nach Größe oder Richtung verändert. Die Stärke des Impulses, welcher auf eine Masse m wirken muß, um ihr die Geschwindigkeit v zu erteilen, ist durch das Produkt mv gegeben. Da nach Newton die Reaktion stets gleich der Aktion ist, so können wir auch sagen, daß sich der Körper von der Masse m mit einem Widerstande von der Größe mv jeder Änderung seiner Geschwindigkeit um den Betrag v widersetze. Dies gilt nicht allein, wenn dem ruhenden Körper die Geschwindigkeit v erteilt oder dem mit der Geschwindigkeit v behafteten Körper diese genommen werden soll, sondern auch dann, wenn ihm Geschwindigkeit in anderer Richtung gegeben werden soll. Daher kommt es, daß jeder Körper einer Änderung seiner Bewegungsrichtung einen Widerstand entgegengesetzt, welcher abhängt von der ihm erteilten Bewegungsgröße mv .

Diese Schlußweise findet Anwendung auf das Verhalten schwingender und rotierender Körper. Auf die letzteren werden wir später zurückkommen;

Fig. 311.



hier soll die Anwendung auf die Schwingungen des Pendels erörtert werden. Das Pendel behält seine Schwingungsebene im Raume unverändert bei, solange nicht eine äußere Kraft ablenkend auf dieselbe einwirkt.

Um dies zu zeigen, bedient man sich der einfachen Vorrichtung Fig. 312, welche so auf eine Schwungmaschine befestigt wird, daß bei Drehung derselben der Aufhängepunkt *B* keinen Kreis beschreibt.

Gibt man dem Fadenpendel einen Anstoß, so daß es in einer bestimmten Ebene schwingt, und dreht dann die Schwungmaschine langsam herum, so

Fig. 313

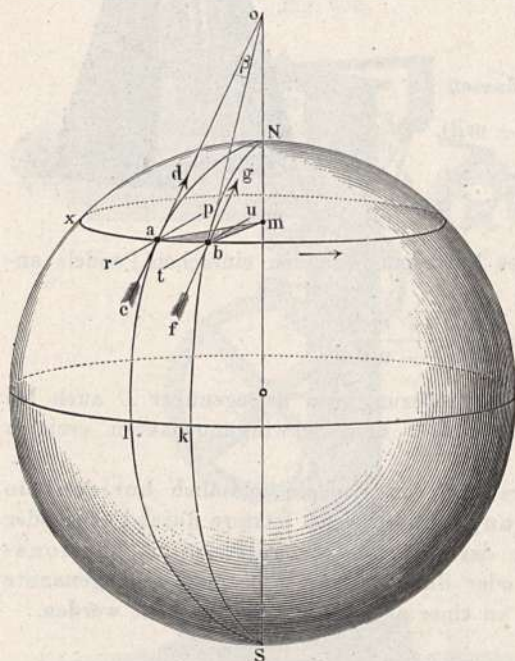
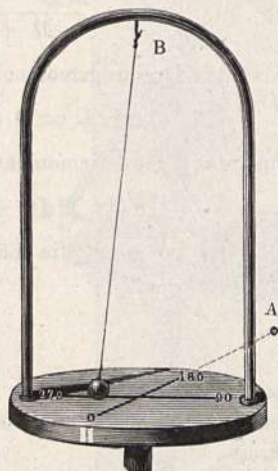


Fig. 312.



behält das Pendel den Weltgegenen gegenüber die Lage seiner Schwingungsebene bei. Denkt man sich nun an Stelle der Schwungmaschine die rotierende Erde gesetzt, also das Pendel über einem der Erdpole aufgehängt, so muß ebenfalls die Schwingungsebene in ihrer Orientierung zum Weltall erhalten bleiben, während unter demselben die Erde von West nach Ost vorbei rotiert.

Ein daneben aufgestellter Beobachter würde offenbar den Eindruck erhalten, daß die Schwingungsebene binnen 24 Stunden in Richtung von Osten nach Westen im Kreise gedreht werde. Würde man ein Pendel am Äquator der Erde aufhängen, so könnte daselbst keinerlei Drehung eintreten, da daselbst die Erde keinerlei Rotation in bezug auf eine durch den Aufhängepunkt des Pendels gehende Vertikallinie hat.

An allen Punkten zwischen Pol und Äquator wird eine scheinbare Drehung der Schwingungsebene eintreten, welche sich um so bedeutender einstellen muß, je näher dem Pole der Aufstellungspunkt des Pendels liegt. Auf der nördlichen Halbkugel wird diese Drehung in der Richtung Ost, Süd, West, auf der südlichen nach der Richtung Ost, Nord, West erfolgen.

Die Rechnung lehrt, daß der Drehungswinkel dem Sinus der geographischen Breite proportional ist. Um dies nachzuweisen, möge in Fig. 313 *NS*

die Erdachse, $xabz$ den Parallelkreis durch den Standpunkt des Pendels und m den Mittelpunkt dieses Kreises vorstellen.

Das Pendel schwinde in a in der Richtung des Pfeiles cd , also in der Meridianebene. Eine in dieser Ebene an den Punkt a gezogene Tangente treffe die verlängerte Erdachse in O , der Winkel aom ist gleich der geographischen Breite des Punktes a und werde mit φ bezeichnet.

Nach einiger Zeit gelangt der Ort a infolge der Achsendrehung der Erde nach b , die Tangente erhält die Lage bo , das Pendel schwingt aber parallel mit cd in der Richtung des Pfeiles fg , seine Ebene bildet also mit der Meridianebene einen Winkel $gbo = aob$, welcher mit β bezeichnet werde. Gleichzeitig hat sich die Erde um den Winkel $amb = \alpha$ gedreht. Aus

$$\alpha : \beta = bo : bm$$

folgt:

$$\beta = \alpha \frac{bm}{bo} = \alpha \sin \varphi.$$

An diesem Resultate würde nichts geändert, wenn die Schwingungsebene in a bereits einen Winkel mit dem Meridian gebildet hätte.

Auf dem Vorgetragenen beruht der Foucaultsche Pendelversuch, welcher als ein direkter physikalischer Beweis für die Achsendrehung der Erde im Jahre 1852 von Foucault im großen Maßstabe zur Ausführung gebracht wurde, indem er an der Kuppel des Pantheons an einem 67 m langen Stahldraht eine 28 kg schwere Kugel aufhängte und als Pendel in Schwingungen versetzte. Der Versuch gelingt jedoch auch in kleinerem Maßstabe unter Anwendung einiger Vorsichtsmaßregeln¹⁾.

§ 102. Verminderung der Schwere durch die Zentrifugalkraft.

Wir sind jetzt auch imstande, die Verminderung, welche die Schwere auf der Erde durch die Zentrifugalkraft erleidet, genau zu bestimmen. Unter dem Äquator wird die letztere für die Masse 1 nach § 51 sein:

$$F_0 = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

wenn R der Radius der Erde daselbst, d. h. 6378250 m, und T die Umlaufszeit der Erde, d. h. 86164 Sekunden darstellt.

Es ist also in Centimetern:

$$F_0 = 3,391.$$

Vom Äquator gegen die Pole hin wird der schwächende Einfluß der Fliehkraft immer geringer, einmal, weil der Radius der Parallelkreise immer kleiner wird, also in der Breite φ statt R sein wird $R \cdot \cos \varphi$, und sodann, weil nicht die ganze radial wirkende Fliehkraft, sondern bloß ihre Komponente nach der Vertikalen des Ortes, also: $F \cdot \cos \varphi$ der Schwere entgegenwirkt. Es ist somit in einer Breite φ die Verminderung der Schwere durch die Zentrifugalkraft gegeben durch:

$$F_\varphi = F_0 \cdot \cos^2 \varphi = F_0 (1 - \sin^2 \varphi);$$

¹⁾ Siehe Weinhold, „Physikalische Demonstrationen“, S. 97. Die oben gegebene Ableitung ist nicht streng richtig. Vgl. die Zusammenstellung neuerer Untersuchungen in Günthers Lehrbuch der Geophysik I, S. 233.

also auch:

$$F_0 - F_\varphi = F_0 \sin^2 \varphi = 3,391 \cdot \sin^2 \varphi.$$

Nun ist nach § 96, Formel 10 b, die bereits um die Zentrifugalkraft verminderte Schwere am Äquator: 978,0, also wird diejenige in der Breite φ sein:

$$\begin{aligned} g_\varphi &= 978,0 + 3,391 \sin^2 \varphi, \\ &= 978,0 (1 + 0,003647 \cdot \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

In der Formel (§ 96, 10) von Helmert ist aber der Koeffizient von $\sin^2 \varphi$ viel größer, nämlich 0,005310, was dem weiteren Anwachsen der Schwere vom Äquator zum Pol infolge der Abplattung der Erde an den Polen zuzuschreiben ist. Die Differenz beider Größen entspricht dem letzteren Effekt.

§ 103. Verhältnis der Schwerkraft auf der Erde zur Anziehung des Mondes durch die letztere. Wenn die Anziehung, welche der Mond der allgemeinen Gravitation zufolge durch die Erde erfährt, in der Tat derselben Kraft entspringt, welche einen Stein auf der Erdoberfläche fallen macht, so muß sich jene Anziehung Z zu g verhalten umgekehrt wie die Quadrate der Entfernung E des Mondes und der Erdoberfläche vom Erdzentrum oder der Radius R der Erde, also soll sein:

$$\frac{Z}{g} = \frac{R^2}{E^2}.$$

Andererseits muß aber die Anziehung Z gleich sein der Zentrifugalkraft des Mondes bei seiner Bewegung um die Erde, also:

$$Z = \frac{4 \pi^2 E}{U^2},$$

wo U , die Umlaufszeit des Mondes um die Erde darstellt.

Es soll also sein:

$$g \cdot \frac{R^2}{E^2} = \frac{4 \pi^2 E}{U^2}.$$

Nun ist:

$$R = 6370000 \text{ m}, \quad E = 384000000 \text{ m}$$

und $U = 2361000$ Sekunden, und wenn wir für g die Schwere am Pol einführen: $g = 983,2$ cm. Mit befriedigender Übereinstimmung in Anbetracht der Unsicherheit mancher Größen ergeben sich so für die Beschleunigungen durch Gravitation und durch Fliehkraft die Werte:

$$0,2706 \quad \text{und} \quad 0,2719 \text{ cm},$$

d. h. die Beschleunigung, welche die Erde durch ihre Anziehung dem Monde gegen sich hin pro Sekunde erteilen würde, ist 0,27 cm pro Sekunde und wird also in der Tat durch die entgegengesetzt gerichtete Zentrifugalkraft des Mondes in seiner Bahn aufgehoben, womit die Identität der Schwere auf der Erdoberfläche mit der allgemeinen Gravitation nachgewiesen ist, wie dies zuerst Newton getan hat.

§ 104. Verhalten rotierender Körper. Wenn ein Körper sich um eine Achse dreht, in bezug auf welche die Massenteilchen desselben ganz symmetrisch angeordnet sind, so werden sich die Zentrifugalkräfte entsprechend gelegener Teilchen beiderseits der Achse aufheben, und es wird daher die

Achse keinerlei einseitigen Druck auszuhalten haben. Eine solche durch den Schwerpunkt gehende Achse heißt man eine Hauptachse der freien Drehung oder eine freie Achse, deren es drei in jedem Körper gibt; diejenige, für welche das Trägheitsmoment den größten Wert hat, ist insoweit stabil, als der Körper bei der Rotation von selbst in diese Lage zurückkehrt. Die Trägheit wird mit

Fig. 314.

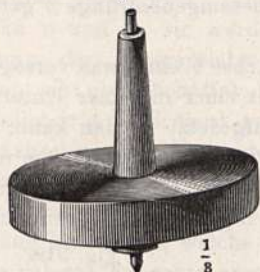


Fig. 316.

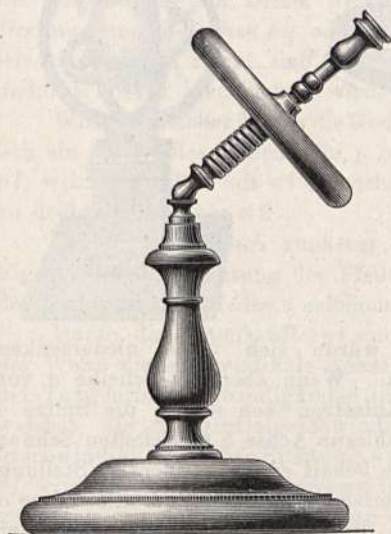


Fig. 315.

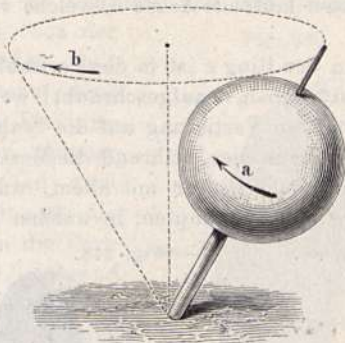
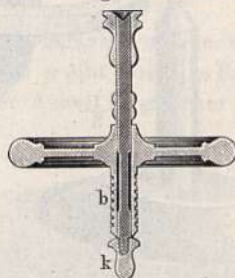


Fig. 317.



ihrer Bewegungsgröße $m \cdot v$ die Lage der Achse im Raume um so stärker festhalten, je größer die Geschwindigkeit der Drehung und die Masse des Körpers sind. Auf dieser Eigenschaft beruht der Kreisel, der seine Achse

lange Zeit unverändert beibehält, wenn er wie in Fig. 314 aus einer schweren Bleischeibe mit stählerner, unten zugespitzter Achse besteht und etwa durch Abziehen einer auf seine Achse aufgewundenen Schnur in rasche Rotation versetzt wird. Er widersetzt sich mit einer gewissen Kraft jeder Umstellung der Achse durch einen seitlichen Druck. Gibt man der Achse des Kreisels absichtlich wie in Fig. 315 eine schiefe Lage, so daß sein Schwerpunkt außerhalb des Stützpunktes fällt, also die Schwere ihn beständig umzustürzen sucht, so geschieht dies nicht, sondern es erfolgt eine langsame Verschiebung der Achse senkrecht zu der Richtung der störenden Kraft, so daß die Achse, wie es die Figur andeutet, die Oberfläche eines Kegels um die vertikale Stellung beschreibt. Die Pfeile *a* und *b* zeigen die entsprechenden Bewegungsrichtungen an. Diese langsame Umstellung der Rotationsachse heißt man Präzession. Einen für diese Versuche geeigneten Apparat stellt Fig. 316 dar.

Die Fig. 317 gibt einen Durchschnitt durch den auf den Fuß aufgesetzten Kreisel.

Noch viel schöner und sicherer läßt sich diese langsame Drehung einer Rotationsachse an dem Gyroskop, Fig. 318, zeigen. *a* ist eine runde messingene Scheibe, deren äußere Begrenzung durch einen dicken messingenen Wulst gebildet wird. Durch die Mitte dieser Scheibe geht eine stählerne, in Spitzen laufende Achse *b*, welche von einem messingenen Ringe *c* getragen wird.

An den Ring *c* ist in der Vertikalebene der Achse *b* ein etwas vorragendes Metallstückchen *n* aufgeschraubt, welches mittels einer in seiner Unterfläche angebrachten Vertiefung auf die Stahlspitze *o* aufgesetzt werden kann.

Geschähe dies, während die Messingscheibe *a* nicht um ihre Achse rotiert, so könnte der Ring *c* mit allem, was in ihm befestigt ist, die horizontale Stellung nicht behaupten, in welcher ihn unsere Figur darstellt, sein Schwer-

Fig. 318.

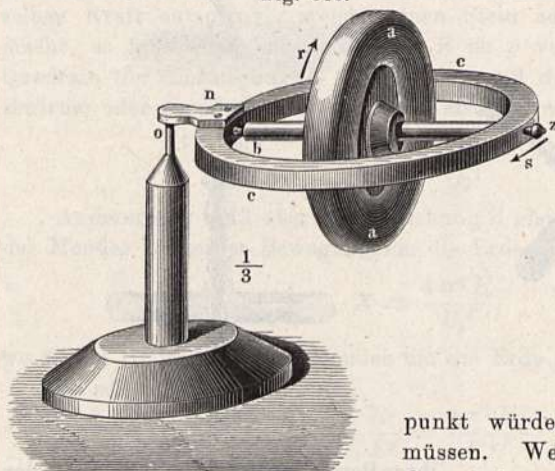
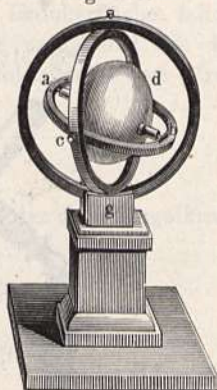


Fig. 319.



punkt würde sich rasch niedersinken müssen. Wenn aber die Scheibe *a* vor dem Aufsetzen von *n* auf die Spitze *o* durch kräftiges Abziehen einer um die stählerne Achse *b* gewickelten Schnur in rasche Rotation versetzt worden ist, so behält er die horizontale Stellung bei, während er sich nun langsam in horizontaler Ebene um die Spitze *o* umdreht. Erst nach einiger Zeit, wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe *a* infolge der unvermeidlichen Reibung bis zu einem gewissen Grade abgenommen hat, beginnt der Ring *c* samt seinem Inhalte allmählich zu sinken.

Der Bohnenbergersche Präzessionsapparat, bei welchem der schwere Körper mit seiner Rotationsachse, wie die Fig. 319 zeigt, noch um zwei senkrecht zueinander stehende Achsen drehbar aufgestellt ist, gestattet, wie leicht ersichtlich, eine allgemeinere Verwendung.

Wie sich die fragile Erscheinung, wenigstens in ihren Hauptzügen, ohne Kalkül erklären läßt, hat Poggendorff in seinen Annalen¹⁾ gezeigt. Auf unseren speziellen Fall angewandt, würde die Poggendorffsche Erklärung ungefähr folgende sein:

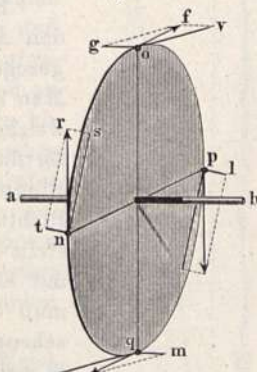
Wenn die materielle Scheibe *nopq*, Fig. 320, um die eben horizontal stehende Achse *ab* sehr rasch rotiert, so haben alle Teilchen der Scheibe

¹⁾ 40, 348.

tangentiale Geschwindigkeiten erlangt, welche für die Punkte n , o , p und q durch Pfeile angedeutet sind.

Wenn nun durch irgend eine Kraft die rechte Seite der Achse ab etwas gesenkt, also die Scheibe um die Achse np oder eine damit parallele etwas gedreht wird, so werden dadurch die Geschwindigkeiten, mit welchen gerade die Punkte o und q behaftet sind, nicht alteriert, sie werden nur parallel mit sich selbst verschoben. Anders verhält es sich mit den materiellen Teilchen in n und p ; sie werden genötigt, aus der Richtung der Tangentialgeschwindigkeiten, mit welchen sie eben behaftet sind, hervorzutreten; das Teilchen n z. B. wird genötigt, die Richtung ns einzuschlagen. Dadurch wird aber offenbar die ursprüngliche Geschwindigkeit nr in zwei Seitenkräfte zerlegt, von welchen die eine ns die Richtung bezeichnet, welche die in n an die Peripherie gelegte Tangente annehmen muß, während die andere Seitenkraft nt rechtwinkelig zur Ebene der Scheibe als ein Druck wirkt, welcher eine Drehung um die Achse oq oder eine, damit parallele zu bewirken strebt, und zwar in der Art, daß dadurch b nach vorn bewegt wird.

Fig. 320.



Wird in gleicher Weise die Geschwindigkeit zerlegt, mit welcher ursprünglich ein materielles Teilchen in p behaftet war, so ergibt sich eine Seitenkraft pl , welche parallel mit nt die Scheibe samt der Achse in gleicher Richtung zu drehen strebt wie nt .

Daraus ergibt sich zunächst, daß, wenn die Scheibe a des Apparates Fig. 318 in der Richtung des Pfeiles r rotiert, eine Drehung des Ringes c in der Richtung des Pfeiles s erfolgen muß.

Durch die Seitenkräfte nt und pl , Fig. 320, wird nun die Scheibe in der Weise um eine vertikale Achse gedreht, daß dadurch auch die Richtung der Tangentialgeschwindigkeiten in o und q alteriert wird. Das Teilchen o , welches die Tangentialgeschwindigkeit of hatte, wird eine Tangentialgeschwindigkeit in der Richtung ov annehmen müssen, die Geschwindigkeit of wird also in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine nach ov gerichtet ist, während die andere og als ein Druck auf die Scheibe wirkend dahin strebt, die rechte Seite der Achse ab zu heben; eine gleiche Wirkung geht aus der Zerlegung der ursprünglichen Tangentialgeschwindigkeit von q hervor.

Infolge der Drehung der Rotationsachse ab um eine vertikale Achse treten also Kräfte auf, welche ihr äußeres Ende b zu heben streben, also der ursprünglich störenden Kraft gerade entgegenwirken; und so kommt es denn, daß, wenn die Rotationsgeschwindigkeit nur groß genug ist, die horizontale Lage der Rotationsachse erhalten bleibt.

Wir haben hier nur einen speziellen Fall.

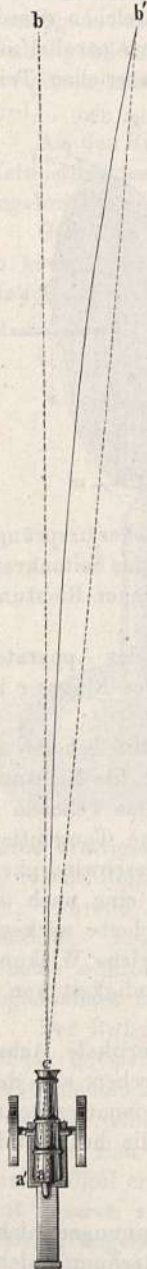
Eine vollständige Erklärung der hierher gehörigen Erscheinungen nicht allein der Art, sondern auch der Größe nach, ist ohne höhere Rechnung nicht wohl möglich.

Diese Versuche erklären auch die Präzession und Nutation der Erdachse. Auf die Erdachse üben nämlich die Sonne einerseits und der Mond anderer-

seits wegen der abgeplatteten Gestalt der Erde und der Neigung der Achse zur Erdbahn durch ihre Anziehung eine solch umstellende Tendenz aus, infolge welcher die Erdachse um den Pol der Ekliptik im Laufe von 25000 Jahren einen Konus von $23^{\circ} 28'$ Winkel beschreibt, die man Präzession genannt hat, und die Nutation manifestiert sich als kleine Störung im Gange der Präzession infolge einer 19 jährigen Schwankung der Mondbahnneigung gegen den Erdäquator.

Fig. 321 a.

b



Eine interessante, hierher gehörige Erscheinung ist die den Artilleristen wohlbekannte Seitenabweichung der aus gezogenen Geschützen abgeschossenen rotierenden Projektile. Man hat bemerkt, daß dieselben nicht in der Vertikalebene, welche man sich durch die Rohrachse gelegt denken kann, fortfliegen, sondern außer der vertikalen Krümmung der Flugbahn auch eine Krümmung derselben in horizontaler Richtung, und zwar meistens nach rechts zeigen. Fig. 321 a stellt dieses Verhalten in übertriebenem Maßstabe dar. Um mit einem solchen Geschütze das anvisierte Ziel zu treffen, muß die Visierichtung (durch Linksverschiebung des Absehens) nach rechts gedreht werden, und zwar um so mehr, je weiter das Ziel entfernt ist. In der Fig. 321 a ist ab die verlängerte Rohrachse, b' das Ziel, c das Korn (oder die Mücke), a das Absehen in der normalen, a' in der verschobenen Lage.

Wäre diese Abweichung durch eine schiefe Bohrung des Rohres veranlaßt, so müßte, wenn man dasselbe auf dem Rücken liegend abfeuern würde, die Abweichung die entgegengesetzte werden; auch könnte durch eine schiefe Bohrung nur eine Winkelabweichung, aber nicht eine horizontal gekrümmte Flugbahn entstehen.

Diese Erscheinung erklärt sich vielmehr folgendermaßen:

Zunächst ist klar, daß die Achse des Geschosses sich parallel zu bleiben sucht, während die Richtung der Flugbahn ihren Winkel mit dem Horizont ändert (s. Fig. 321 b, wo die Lage des Geschosses am Anfang, in der Mitte und am Ende der Bahn angedeutet ist). Das Geschöß stellt offenbar dem Luftwiderstande immer mehr seine Unterseite entgegen. Bei den zur Anwendung kommenden Geschößformen geht nun die Resultierende des Luftwiderstandes fast immer über den Schwerpunkt hinweg und sucht daher die Achse des Geschosses vorn aufzurichten. Nach dem oben Vorgetragenen ist nun klar, daß eine solche Aufrichtung, verbunden mit der Rechtsrotation des Geschosses, eine Drehung desselben um seine vertikale Achse herbeiführen muß, und zwar der Art, daß die Spitze nach rechts abweicht.

Ist diese Drehung einmal eingetreten, so wird durch die nun auf der linken Seite überwiegende Wirkung des Luftwiderstandes auch eine Seiten-

verschiebung aus der Vertikalebene der Flugbahn nach rechts eintreten müssen¹⁾.

Um diese Erscheinung zu demonstrieren, hat der Verfasser einen Apparat konstruiert, der die Bewegung eines rotierenden Projektils nachahmt. Derselbe ist in Fig. 322 in perspektivischer Ansicht, in Fig. 323 und 324 von oben und von der Seite gesehen gezeichnet.

Das Spitzgeschoß *A* ist innerhalb des horizontalen Rahmens *B* um seine eigene horizontale Achse drehbar und kann durch Abziehen einer in *a* eingehängten aufgewickelten Schnur in Rotation versetzt werden. An zwei an der Außenseite des Rahmens angebrachten Häkchen in *bb*, deren Verbindungslinie senkrecht auf der Rotationsachse steht und durch den Schwerpunkt des ganzen Apparates geht, sind zwei weiter oben sich vereinigende Fäden angebunden, deren gemeinschaftliche Fortsetzung bis zu einem Haken an der Decke des Zimmers reicht und dort befestigt ist. Die Einrichtung ähnelt daher dem eines sogenannten Taubenschießens.

An der Hinterseite ist ein Steuerflügel *C* in der Weise angebracht, daß durch dessen Stellung die Resultierende des Luftwiderstandes oberhalb oder unterhalb des Schwerpunktes des Projektils zu liegen kommt (Fig. 322 zeigt die erstere Lage). Damit durch die Verstellung des Steuerflügels der Schwerpunkt des Ganzen nicht verrückt werde, ist ein Gegengewicht *D* angefügt, so daß der Flügel sich um seinen eigenen Schwerpunkt drehen muß. Außerdem kann man den Flügel um seine Längsachse drehen oder auch ihn fortnehmen und durch einen anderen mit zwei aufeinander senkrechten Flächen (Fig. 324 *C*) ersetzen.

Mit diesem Apparate können nun folgende Experimente gemacht werden:

1. Stabilität der Rotationsachse (Vorteil der gezogenen Geschütze). Man läßt den Apparat in einem Bogen von etwa 5 m Länge schwingen, indem man ihn am Flügel haltend rückwärts zieht und fallen läßt. Rotiert das Projektil nicht, so schlägt es leicht um, oder kommt durch geringe Ursachen aus seiner Richtung, rotiert es, so bleibt sich seine Achse schön parallel. Hierbei ist dem Steuerflügel eine gegen den Luftwiderstand neutrale Stellung zu geben.

2. Seitendrehung. Man läßt nach rechts rotieren, stellt den Flügel *C* nach aufwärts, dann richtet sich die Spitze beim Vorwärtsfliegen deutlich nach rechts. Ändert

¹⁾ Außerdem bewirkt auch noch die Reibung des Geschosses an der umgebenden Luft eine Abweichung in demselben Sinne. Einen Apparat zur Demonstration dieser Wirkung hat v. Beetz angegeben.

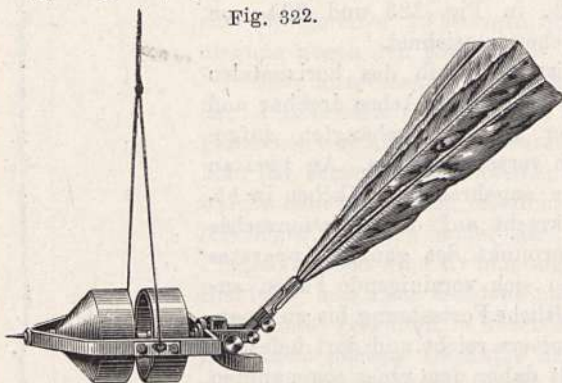
Fig. 321 b.



man die Rotationsrichtung oder die Flügelstellung ins Gegenteil, so dreht sich die Spitze nach links, ändert man beides, so bleibt die Drehung nach rechts.

3. Seitenabweichung. Dieselbe läßt sich einigermaßen mittels des Doppelflügels (Fig. 324 C) erreichen. Man stellt seine Ebenen so, daß eine

Fig. 322.



vertikal, die andere nach aufwärts oder abwärts gerichtet ist.

Der Flügel ist bei diesem Apparate deshalb nötig, um den größeren Luftwiderstand des viel schneller bewegten geschossenen Projektils durch die größere Fläche des langsamer fliegenden Apparates zu erreichen.

Auf denselben Prinzipien beruhen die merkwürdigen Bewegungen des Bumerangs, eines australischen Wurfholzes, welches, wenn richtig fortgeschleudert, in der Luft umkehrt und dem Werfenden zu Füßen niederfällt.

Fig. 323.

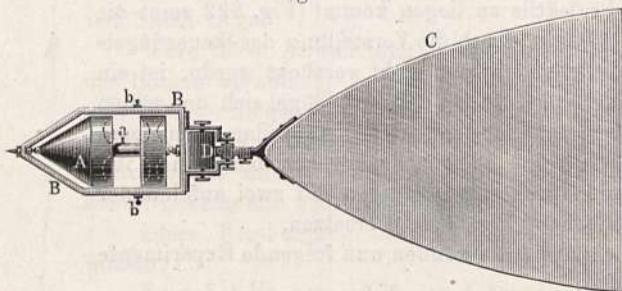


Fig. 324.

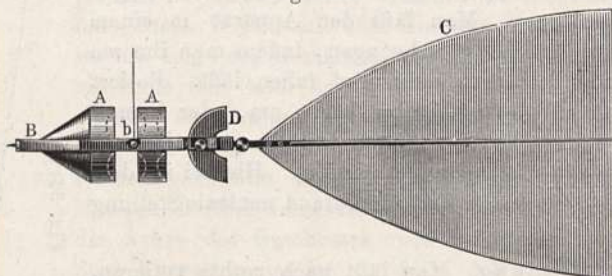


Fig. 325 a und b zeigt die Hauptformen des Bumerangs. Es sind mehr oder weniger gebogene Hölzer von 70 bis 80 cm ausgestreckter Länge, 5 bis 6 cm Breite und 1 cm Dicke. Ihr Querschnitt ist derselbe wie bei einer plankonvexen Linse. Außerdem haben dieselben eine Torsion von 2 bis 3 Graden in der Weise, daß bei dem Typus a eine Schraubenfläche entsprechend einer rechtshändigen Schraube, beim Typus b einer linkshändigen

Schraube vorhanden ist¹⁾. Fig. 326 zeigt, wie der Bumerang gehandhabt wird; man gibt ihm gleichzeitig eine Rotation im Sinne des Pfeiles und eine fortschreitende Geschwindigkeit in horizontaler Richtung. Er fliegt dann unter günstigen Umständen bis 100 m weit und darüber, wendet nach links und

Fig. 325.

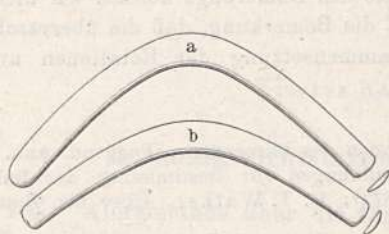
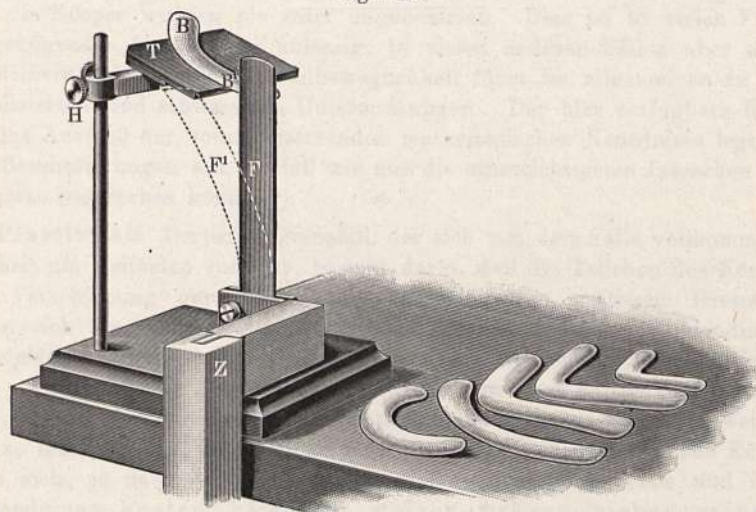


Fig. 326.



kommt nach Zurücklegung eines, manchmal mehrerer (bis zu fünf) Kreise wieder zum Ausgangspunkte zurück. Eine zweite Art, ihn zu werfen, geht

Fig. 327.



von horizontaler Lage seiner Ebene aus. Er fliegt dann eine Strecke weit, steigt dann in die Höhe und kehrt zurück. Der Typus *b* zeigt mehr geradlinige, in sich zurückkehrende Bahnen.

Um solche Experimente im Hörsaal vornehmen zu können und von der Geschicklichkeit des Werfenden unabhängig zu machen, hat der Verfasser kleine Bumerangs aus hohlgeklopftem Aluminiumblech und eine Schleudervorrichtung, Fig. 327, konstruiert²⁾. Dieselbe besteht aus einer vertikal eingespannten breiten Stahlfeder *F*, einem verstellbaren und drehbaren Tischchen *T* mit Halter *H*, welche auf gemeinsamem Fußbrette befestigt sind und mittels

¹⁾ Gilbert T. Walker, Phys. Zeitschr. 2, 457.

²⁾ Wiener Akad. Ber. 1905, der Apparat ist beim Institutsmechaniker Rabsch in Graz erhältlich.

einer Zwinge Z an den Tisch angeschraubt werden können. Der Bumerang wird, nachdem man die Feder F in die Lage F' zurückgezogen, auf das Tischchen aufgelegt, wie die Figur zeigt. Läßt man die Feder losschnellen, so fliegt der Bumerang 6 bis 8 m weit schief in die Höhe und kehrt ungefähr zum Ausgangspunkte zurück.

Auf die sehr komplizierte Theorie des Bumerangs können wir hier nicht eingehen. Wir beschränken uns auf die Bemerkung, daß die überraschenden Bewegungen das Resultat der Zusammensetzung der Rotationen und des Einflusses des Luftwiderstandes ist ¹⁾.

¹⁾ Erdmann, Erklärung der Bahnen des Bumerangs, Poggend. Ann. 137, 1 (1869); W. Stille, Versuche und Rechnungen zur Bestimmung der Bahn des Bumerangs, Poggend. Ann. 147, 1 (1872); G. T. Walker, Über den Bumerang, Phys. Zeitschr. 2, 457—461 (1901).

Viertes Kapitel.

Mechanik nichtstarrer, fester Körper.

§ 105. Allgemeines über die Eigenschaften nichtstarrer Körper.

Im § 58 wurde bemerkt, daß es vollkommen starre Körper, streng genommen, gar nicht gibt, weil allen wirklichen Körpern ein mehr oder minder hoher Grad von Teilbeweglichkeit zukommt. Bei den im vorausgehenden Kapitel vorgenommenen Untersuchungen über Gleichgewicht und Bewegung der festen Körper wurde von dieser Teilbeweglichkeit vorderhand abgesehen, d. h. die Körper wurden als starr angenommen. Dies ist in vielen Fällen mit genügender Annäherung zulässig, in vielen anderen Fällen aber nicht. Die Mitberücksichtigung der Teilbeweglichkeit führt im allgemeinen zu sehr komplizierten und schwierigen Untersuchungen. Der hier verfügbare Raum und das Ausmaß der vorauszusetzenden mathematischen Kenntnisse legt uns aber Beschränkungen auf, so daß wir nur die allerwichtigsten Tatsachen und Lehrsätze besprechen können¹⁾.

Plastizität. Derjenige Grenzfall, der sich von dem Falle vollkommener Starrheit am weitesten entfernt, besteht darin, daß die Teilchen des Körpers einer Verschiebung gar keine Kraft entgegensetzen. Diesem Grenzfall nähern sich am meisten die dünnflüssigen Stoffe (flüssiges Kohlendioxyd, Schwefeläther, Wasser, Quecksilber), mit denen wir uns hier nicht beschäftigen. Unter den als „fest“ bezeichneten Körpern sind es die plastischen Stoffe, welche sich dem erwähnten Grenzzustande nähern, also z. B. weiches Wachs, feuchter Ton, in geringerem Grade Blei, Gold usw. Solche Körper lassen sich, je nach der Art des Zusammenhanges ihrer Teile und ihrer Formänderung, kneten, hämmern, walzen, prägen, ziehen, spinnen. Das Charakteristische dieses Zustandes liegt darin, daß infolge des Mangels von Kräften, welche den ursprünglichen Zustand wiederherzustellen suchen, die durch die einwirkenden Kräfte verursachten Verschiebungen auch nach dem Aufhören der Kräfte erhalten bleiben.

Elastizität. Der andere Grenzfall wäre der, bei welchem durch die eintretenden Verschiebungen der Teilchen Gegenkräfte geweckt werden, welche nach dem Aufhören der äußeren Kräfte die verschobenen Teilchen wieder in ihre ursprüngliche Anordnung zurückbringen. Geschähe dies, was in Wirklichkeit nicht vorkommt, sofort und vollkommen, so würden wir einen solchen Körper vollkommen elastisch nennen. Dem vollkommen elastischen Zustande

¹⁾ Für eingehenderen Unterricht verweisen wir auf Spezialwerke, so insbesondere auf A. d. Wernickes Lehrbuch der Mechanik III. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn, 1903.

nähern sich z. B. Stahl, Elfenbein, Glas, Gummielastikum. Je nach der Art der Verschiebung unterscheiden wir Zug- und Druckelastizität, Biegeelastizität, Torsionselastizität und Schub(Scherungs-)elastizität. Alle diese zusammen werden als Gestaltelastizität bezeichnet. Findet der Druck von allen Seiten gleichmäßig statt, so erfährt ein elastischer Körper eine Volumsverminderung, welcher die Volums(Kompressions-)elastizität entspricht. Unter Elastizität versteht man aber nicht bloß die Eigenschaft der Körper, Verschiebungen der Teile Widerstand entgegenzustellen, sondern auch die Kraft, mit der es geschieht. Diese ist nach dem Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion ebenso groß wie die äußere Kraft, welche die Verschiebung bewirkt.

Elastizitätsgrenze. Die elastischen Körper zeigen unter sich bedeutende Unterschiede in bezug auf die Größe der Verschiebungen, die sie erleiden können, ohne daß ihre Eigenschaft, die ursprüngliche Form wieder anzunehmen, aufhört. So z. B. kann man ein Kautschukband wohl bis zur doppelten Länge ausziehen; es nimmt nachher doch wieder die ursprüngliche Länge an. Ein Stahlband gleicher Dimensionen verträgt nur ein geringeres Ausziehen. Wird eine gewisse Grenze der Verlängerung überschritten, so bleibt ein Teil derselben nachher erhalten, das Band ist bleibend gedehnt worden. Die elastischen Körper sind also nur bis zur Elastizitätsgrenze mehr oder weniger vollkommen elastisch, über diese Grenze hinaus nähern sie sich zunächst dem plastischen Zustande.

Festigkeit. Wird die Verschiebung (Verlängerung usw.) noch weiter getrieben, so kommt eine weitere Grenze, wo der Zusammenhang der Teilchen plötzlich ganz aufhört. Der gedehnte Körper wird zerrissen, der gebogene bricht ab, der komprimierte wird zermalmt usw. Die Festigkeit gegen das Eindringen eines anderen Körpers wird Härte genannt.

Sprödigkeit. Körper, deren Elastizitäts- und Festigkeitsgrenzen sehr beschränkt sind, deren Teilchen also schon bei sehr geringen Verschiebungen den Zusammenhang verlieren, heißen spröde. Sprödigkeit und Elastizität sind daher eigentlich keine Gegensätze. Derselbe Körper, der für geringe Verschiebungen noch sehr elastisch ist, kann für nur wenig größere Verschiebungen sehr spröde sein. So z. B. sind harter Stahl, Glas, die Mehrzahl der kristallisierten Körper elastisch und spröde. Aber auch Plastizität und Sprödigkeit, obwohl Gegensätze, können an ein und demselben Körper vorkommen. So z. B. ist eine Siegelackstange für geringe Verschiebungen (insbesondere wenn sie langsam erfolgen) noch plastisch, dagegen für etwas größere (insbesondere rasche) Verschiebungen spröde. Beispiele größter Sprödigkeit sind die bekannten batavischen Tränen sowie die Bologneser Fläschchen, welche bei der geringsten Verletzung in viele Teile zersplittern. Diese Erscheinung hat aber hier den Grund in inneren Spannungen infolge der raschen Abkühlung des Glases während des Erstarrens.

Einfluß der mechanischen Behandlung. Die erwähnten Eigenschaften hängen bei den amorphen Körpern nicht allein von deren chemischer Zusammensetzung, sondern in hohem Grade auch von deren vorausgegangener mechanischer Behandlung ab. So z. B. ist sowohl Elastizität als auch Festigkeit verschieden groß für Stäbe, welche nur aus gegossenem Metalle oder aus gehämmertem, gezogenem Metalle bestehen.

Einfluß der Wärme. Derselbe zeigt sich in doppelter Weise. Einmal ändern sich die erwähnten Eigenschaften mit der Temperatur des Körpers, so z. B. zeigt Stahl bei tiefer Temperatur größere Sprödigkeit, bei höherer Temperatur größere Dehnbarkeit, während Zink bei 120°C am dehnbarsten ist, dagegen in der Kälte und über 200° spröde erscheint.

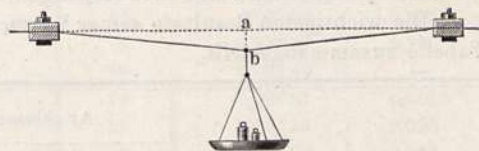
Dann aber bewirkt eine Erwärmung auch eine bleibende Veränderung, welche nach dem Erkalten fort dauert. So z. B. erfährt der durch rasches Abkühlen gehärtete und spröde gewordene Stahl durch vorübergehendes Erwärmen auf Temperaturen von 200 bis 350° eine gradweise Veränderung seiner Eigenschaften von der größten Härte bis zur größten Dehnbarkeit (Anlassen des Stahles). Man pflegt hierbei in der Praxis den Grad der Veränderung aus den Anlauffarben, mit denen sich eine blanke Oberfläche überzieht, zu erschließen.

Einfluß der Zeit. Es wurde bereits oben bemerkt, daß eine Siegelackstange für rasche Biegungen spröde, für langsame plastisch erscheint. Wir erklären uns dies aus der Annahme, daß die Moleküle des Harzes, welche durch die Deformation in gespannte Lagen gekommen sind, allmählich durch langsame Bewegungen (Fließen) in ungespannte gegenseitige Lagen gelangen.

Hierher gehören auch die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung. Spannt man eine elastische Feder, so ist die Kraft, mit der sie in die ursprüngliche Lage zurückzukehren sucht, unmittelbar nach der Spannung am größten, nimmt dann aber allmählich bis zu einem gewissen Grade ab. Auch kehrt sie nach kurzer Spannung vollkommener in die frühere Lage zurück als nach längerer Spannung. Endlich findet die Rückkehr in die frühere Form nicht sofort in voller Weise statt, sondern es dauert längere Zeit, bis die letzten Formänderungen einen Abschluß erlangen.

§ 106. Elastizitätskoeffizient und Elastizitätsmodulus. Um die Verlängerung zu messen, welche Drähte erfahren, wenn sie durch Gewichte innerhalb ihrer Elastizitätsgrenze gespannt werden, welche also weder Zerreißen noch eine merkliche bleibende Verlängerung erfahren, wandte S'Gravesande folgende Methode an. Der zu prüfende Draht wurde, wie Fig. 328 andeutet, in horizontaler Richtung ausgespannt, an beiden Enden fest eingeklemmt und dann in der Mitte durch Gewichte belastet. Wird die Länge ab gemessen, um welche die Mitte des Drahtes durch das angehängte Gewicht niedergezogen wird, so läßt sich daraus leicht die Verlängerung berechnen, welche der Draht erfahren hat.

Fig. 328.



Diese Methode ist für dickere Drähte und für Stäbe nicht mehr anwendbar. Wertheim fand es am zweckmäßigsten, die Verlängerung direkt zu messen, und zwar auf folgende Weise. Der Stab, dessen Verlängerung gemessen werden sollte, war oben in einen eisernen Träger (Fig. 329, S. 331) eingeklemmt und trug unten einen Haken, an welchen ein zur Aufnahme von Gewichten dienender Kasten angehängt wurde. Auf dem Stabe waren zwei Punkte a und b markiert, deren Abstand vor und während der Belastung durch ein bestimmtes Gewicht mit Hilfe des Kathetometers gemessen wurde.

Die elastischen Körper folgen innerhalb gewisser Grenzen einem 1678 von Hookes nachgewiesenen Gesetze, demzufolge die Deformationen den sie hervorbringenden Kräften direkt proportional sind. Nur soweit die Körper diesem Gesetze folgen, sind sie als vollkommen elastisch anzusehen.

Die elastische Verlängerung eines Drahtes oder Stabes ist demnach proportional:

1. dem angehängten Gewichte,
2. der Länge des Stabes,
3. umgekehrt dem Querschnitt des Stabes.

Die Verlängerung d , welche ein Stab von der Länge l und dem Querschnitt f durch ein Gewicht P erleidet, ist also:

$$d = k \frac{Pl}{f} \dots \dots \dots (1)$$

wenn k einen konstanten Faktor bezeichnet, welcher für jede Substanz einen besonderen Wert hat und welcher der Elastizitätskoeffizient genannt wird.

Aus Gleichung (1) folgt:

$$\frac{Pl}{df} = \frac{1}{k} = E \dots \dots \dots (2)$$

Da k für jede Substanz eine konstante Größe ist, so ist auch $\frac{1}{k}$ oder E eine konstante Größe, welche mit dem Namen des Elastizitätsmodulus bezeichnet wird. Denken wir uns in Gleichung (2) $l = 1, f = 1$ und $d = 1$ gesetzt, so wird $P = E$; E ist also das Gewicht, welches erforderlich wäre, um einen Stab von dem Querschnitt 1 und der Länge 1 um die Länge 1 auszudehnen, oder, was dasselbe ist, um ihn auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge auszuziehen, vorausgesetzt, daß er eine solche Dehnung ohne Überschreitung der Elastizitätsgrenze ertragen könnte.

Verschiedene Physiker haben die Elastizitätskonstanten mehrerer Stoffe mit möglichster Genauigkeit bestimmt. Die vollständigsten Untersuchungen über diesen Gegenstand sind aber diejenigen, welche Wertheim angestellt hat¹⁾.

Die wichtigsten Resultate seiner Versuche über Metalle sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	Angelassen		Gezogen	
	k	E	k	E
Blei	0,000570	1727	0,000555	1803
Gold	0,000179	5585	0,000123	8131
Silber	0,000140	7141	0,000137	7274
Zink	—	—	0,000114	8734
Kupfer	0,000095	10519	0,000080	12449
Platin	0,000064	15518	0,000058	17044
Stahldraht	0,000058	17278	0,000053	18809
Gußstahl	0,000051	19561	0,000051	19549
Eisen	0,000048	20794	0,000048	20869
Messing	—	—	0,000117	8543

¹⁾ Pogg. Ann., Ergänzungsband II.

Unter k findet man, um den wievielten Teil seiner Länge ein Draht des in der ersten Kolumne genannten Metalles von 1 qmm Querschnitt verlängert wird, wenn er durch ein Gewicht von 1 kg gespannt wird. Ein 1 m langer Silberdraht von 1 qmm Querschnitt wird also durch Anhängen von 1 kg um 0,14 mm verlängert. — Auch die unter E stehenden Zahlen beziehen sich auf 1 qmm Querschnitt.

Für verschiedene Glassorten erhielten Wertheim und Chevandier folgende Werte von k und E :

	k	E
Spiegelglas	0,000 142	7015
Fensterglas	0,000 126	7917
Kristallglas	0,000 145	6890
desgl. bleihaltig . .	0,000 182	5477

Als Elastizitätsgrenze bezeichnet man das Gewicht, welches eine bleibende Verlängerung von 0,000 05 der Stab- oder Drahtlänge bewirkt, welches also einen 1 m langen Draht bleibend um 0,05 mm verlängert. Die folgende Tabelle gibt in dem eben angedeuteten Sinne die Elastizitätsgrenze für Drähte von 1 qmm Querschnitt in Kilogrammen.

	Elastizitäts- grenze	Verlänge- rung bei der Elastizitäts- grenze	Verlänge- rungs- maxima
Blei, ausgezogen	0,25	0,000 14	0,243
„ angelassen	0,20	0,000 12	0,614
Silber, ausgezogen	11	0,001 49	0,0045
„ angelassen	3	0,000 36	0,168
Kupfer, ausgezogen	12	0,000 93	0,003
„ angelassen	3	0,000 27	0,220
Platin, ausgezogen	26	0,001 42	—
„ angelassen	14	0,000 81	0,0023
Eisen, ausgezogen	32	0,001 50	0,026
„ angelassen	5	0,000 22	0,109
Stahldraht, ausgezogen	43	0,002 00	—
„ angelassen	15	0,000 56	0,0044

Ferner finden wir in dieser Tabelle angegeben, um den wievielten Teil seiner Länge ein Draht von 1 qmm Querschnitt höchstens ausgezogen werden darf, wenn keine merkliche Verlängerung zurückbleiben soll; in der letzten Kolumne endlich findet man angegeben, um den wievielten Teil ihrer Länge Drähte noch ausgezogen werden können, ehe der Bruch erfolgt.

So sehen wir z. B., daß man an einen ausgezogenen Kupferdraht von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt bis zu 12 kg anhängen darf, ohne daß er eine merkliche (über 0,05 mm gehende) bleibende Verlängerung erfährt, daß der fragile Draht durch 12 kg um 0,93 mm elastisch verlängert wird, und daß er im ganzen um 3 mm ausgezogen werden kann, ehe der Bruch erfolgt.

Wertheim und Chevandier¹⁾ fanden für Holzstäbe in der Richtung der Fasern bei 20 Proz. Feuchtigkeit folgende Werte für die Elastizitätskonstanten (auf 1 qmm Querschnitt bezogen).

	Spezifisches Gewicht	Elastizitätskoeffizient k	Elastizitätsmodulus E	Elastizitätsgrenze
Akazie	0,717	0,000792	1262	3,2
Tanne (Pin. abies)	0,493	0,000890	1113	2,2
Föhre (Pin. silv.)	0,559	0,000773	564	1,6
Hagebuche	0,756	0,000921	1086	1,3
Birke	0,812	0,001003	997	1,6
Buche	0,823	0,001020	980	2,3
Eiche	0,872	0,001085	921	2,3
Ahorn	0,674	0,000979	1021	2,7
Pappel	0,477	0,001934	517	1,5

Durch akustische Versuche ermittelten Wertheim und Chevandier folgende Werte für den Elastizitätsmodulus verschiedener Holzarten in der Richtung des Radius und in der Richtung der Tangente:

	In der Richtung	
	des Radius	der Tangente
Hagebuche	208	103
Ahorn	157	73
Eiche	189	130
Birke	81	155
Buche	270	159
Pappel	73	39
Tanne	94	34
Föhre	97	29

Die Proportionalität zwischen der Verlängerung und dem spannenden Gewichte findet auch bei spiralförmig gewundenen Metalldrähten, sogenannten Spiralfedern, statt, nur ist hier eine verhältnismäßig kleine Kraft schon imstande, bedeutende Verlängerungen zu bewirken, wie sich dies z. B. an Jollys Federwaage (Fig. 330) zeigen läßt. — Ein spiralförmig gewundener Draht (etwa Klaviersaite Nr. 6) ist bei a aufgehängt und trägt an seinem unteren Ende zwei kleine Wagschalen c und d , von denen die letztere stets in Wasser eingetaucht ist. Das Glas, welches das Wasser enthält, steht auf einem Träger B , der am Stativ A auf und nieder geschoben werden kann, und welcher stets so zu stellen ist, daß d frei im Wasser schwebt. Um die Stellung der Marke m bequem und sicher ablesen zu können, ist die am

¹⁾ Pogg. Ann., Ergänzungsband II, S. 481.

Stativ *A* angebrachte Teilung auf einen Spiegelstreifen aufgetragen. Um richtig abzulesen, mit welchem Teilstrich der Skala sich *m* in gleicher Höhe befindet, hat man das Auge in eine solche Stellung zu bringen, daß die Marke *m* mit ihrem Spiegelbilde zusammenfällt.

Bei einer Spirale von 36 Windungen der oben bezeichneten Drahtsorte stellte sich z. B. die Marke *m* beim Teilstrich 64 ein, als die Wage nicht weiter belastet war. Als auf die Wagschale *c* das Gewicht von 1 g aufgelegt wurde, mußte man den Schieber *B* niedersenken, um die Wagschale *d* im Wasser frei schwebend zu erhalten, und nun stellte sich die Marke *m* beim

Fig. 329.

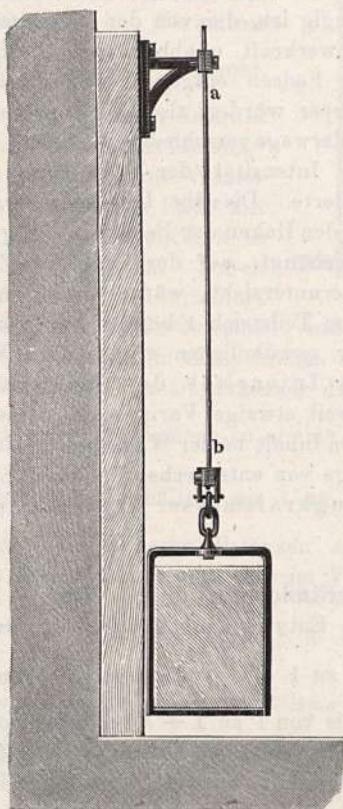
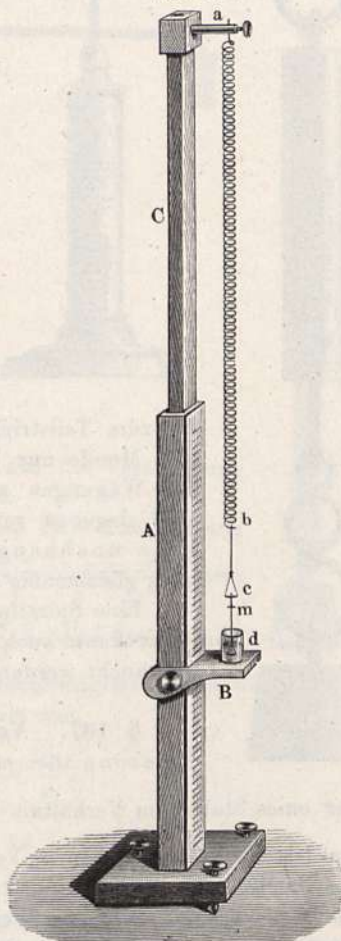


Fig. 330.



Teilstrich 436 ein. Die Spirale hat also durch die Last von 1 g eine Verlängerung von $436 - 64 = 372$ Teilstrichen erhalten. Durch ein Gewicht von 0,5 oder 0,1 g erleidet sie eine Verlängerung von 186 oder 37,2 Teilstrichen. 1 mg verlängert die Spirale um 0,372 Teilstriche.

Das Auflegen eines kleinen Kristalls auf die Wagschale *c* bewirkte eine Verlängerung der Spirale um 211 Teilstriche, das Gewicht dieses Kristalls beträgt also $\frac{211}{372} = 0,567$ g. Um das spezifische Gewicht des Kristalls zu

bestimmen, wird er in die in Wasser eingetauchte Schale d gebracht und dann eine abermalige Wägung ausgeführt¹⁾.

Nach demselben Prinzip hat man auch Federwagen mit stärkerem Stahldraht für den alltäglichen Gebrauch konstruiert, wie eine solche in Fig. 331, die wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf, dargestellt ist. Während bei

Fig. 331.

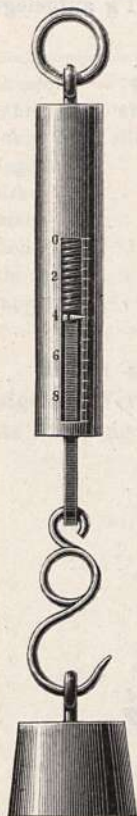
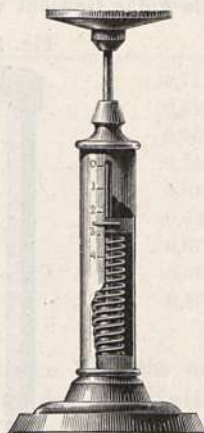


Fig. 332.



dieser Federwage die (bis 9 kg schweren) angehängten Lasten die Spiralfeder verlängern, wird bei der Briefwage, Fig. 332, die Spiralfeder durch die aufgelegten Gewichte zusammengedrückt.

Bei der Federwage wirkt das Gewicht des zu wägenden Körpers, welches von der Intensität der Schwerkraft abhängig ist, der von der Intensität der Schwerkraft unabhängigen Elastizität der Federn entgegen; für denselben Körper würden also die Angaben der Federwage verschieden ausfallen, wenn die Intensität der Schwerkraft sich änderte. Dieselbe Last z. B., welche, an den Haken der Federwage, Fig. 331, angehängt, auf der Erde den Zeiger

bis zum Teilstrich 6 herunterzieht, würde denselben auf dem Monde nur bis zum Teilstrich 1 herabziehen können. Die Wägungen mit der gewöhnlichen zweiarmigen Wage sind dagegen von der Intensität der Schwerkraft ganz unabhängig, weil etwaige Variationen derselben ganz gleichmäßig auf den Inhalt beider Wagschalen wirken.

Eine Spiralfederwage von entsprechend starkem Stahldraht kann auch als Zugkraftmesser (Dynamometer) gebraucht werden.

§ 107. Volumveränderung durch Zug. Nach Poissons theoretischen Entwicklungen wird der Durch-

messer eines Stabes im Verhältnis von 1 zu $1 - \frac{\lambda}{4}$ verkleinert, wenn die Länge desselben durch Ziehen im Verhältnis von 1 zu $1 + \lambda$ vermehrt worden ist²⁾. Damit stimmen die Resultate der Versuche von Cagniard La Tour überein, welche auf folgende Weise angestellt wurden. Der Metallstab, dessen unteres Ende festgehalten ist, während sein oberes Ende durch eine Hebelvorrichtung aufwärts gezogen wird, wie Fig. 333 anschaulich macht,

¹⁾ Über die Verwendbarkeit der Jollyschen Federwage hat Prof. A. Steinhäuser Untersuchungen veröffentlicht in der Zeitschrift „Die Realschule“, 1873, III. Jahrg. Nr. 4 u. 5.

²⁾ Man bezeichnet das Verhältnis zwischen der Querkontraktion zur Längsdilatation $\frac{\lambda'}{\lambda} = \mu$ als „Elastizitätszahl“. Nach Poisson ist also $\mu = \frac{1}{4}$, nach Wertheim $\mu = \frac{1}{3}$.

ist von einer engen, mit Wasser gefüllten Glasröhre umgeben. Sobald der Stab, durch Anziehen verlängert, dünner wird, senkt sich der Spiegel des Wassers in der Röhre, und man braucht nur die Größe dieser Senkung zu messen, um daraus die Verminderung des Stabdurchmessers berechnen zu können.

Wertheims Versuche stimmen jedoch mit diesen Resultaten nicht überein. Zunächst machte er Versuche mit Kautschukstäben von quadratischem Querschnitt, Fig. 334; er fand durch direkte Messung, daß,

wenn diese Stäbe durch angehängte Gewichte im Verhältnis von 1 zu $1 + \lambda$ verlängert werden, die Seite des Querschnittes im Verhältnis von 1 zu $1 - \frac{\lambda}{3}$ abnimmt.

— Zu dem gleichen Resultat führten Versuche mit Messingröhren, welche, mit Wasser gefüllt, am oberen Ende mit einem engen Glasröhrchen in Verbindung standen. Durch Ausziehen der Röhre verändert sich der Rauminhalt derselben, wie man aus der Veränderung des Wasserstandes im Glasröhrchen erkennt.

Wenn sich der Durchmesser des Stabes im Verhältnis von 1 zu $1 - \frac{\lambda}{3}$ verkleinert, so nimmt der Flächeninhalt des Quer-

schnittes ab im Verhältnis von 1 zu $1 - \frac{2}{3} \lambda$ (da λ klein genug

ist, um seine höheren Potenzen zu vernachlässigen). Das Volumen des ganzen Stabes ändert sich aber im Verhältnis von

$$1 \text{ zu } (1 + \lambda) \left(1 - \frac{2}{3} \lambda\right),$$

oder, was dasselbe ist, im Verhältnis von 1 zu $1 + \frac{1}{3} \lambda$.

Diese Ausdrücke lassen sich sofort von Zug auf Druck übertragen, indem man den Größen λ und $\lambda' = \mu \lambda$ das entgegengesetzte Zeichen gibt. Für Kautschuk haben andere Forscher für μ den Wert $\frac{1}{2}$ erhalten. Es scheint also die Größe μ keinen konstanten Wert zu haben, sondern von einer Substanz zur anderen zu wechseln.

§ 108. Torsionselastizität. Wenn ein Stab an einem Ende festgeklemmt, an dem anderen Ende durch irgend eine Kraft um seine Achse umgedreht wird, so erleiden die einzelnen Teilchen eine Verschiebung, durch welche eine elastische Kraft hervorgerufen wird, welche die verschobenen Teilchen wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückzuführen strebt. Um die Erscheinung der Torsionselastizität an Drähten zu studieren, werden sie an

Fig. 333.

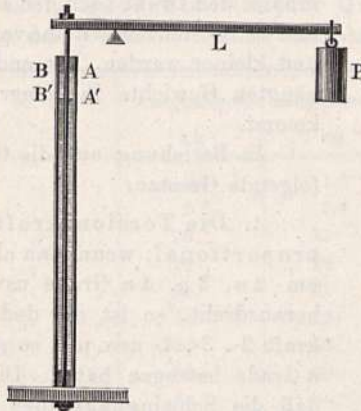
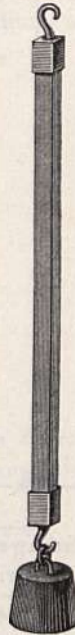
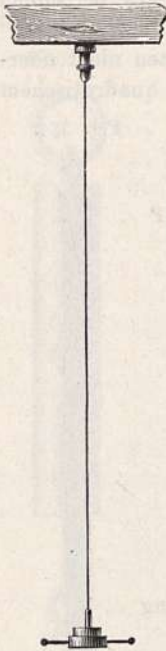


Fig. 334.



ihrem oberen Ende eingeklemmt, wie Fig. 335 zeigt, unten aber durch Gewichte belastet.

Fig. 335.



Wenn man das Gewicht aus seiner ursprünglichen Lage um einen bestimmten Winkel herausdreht, wobei die Achse des Drahtes die Umdrehungsachse bildet, und es sich dann selbst überläßt, so wird es durch die Torsionselastizität zunächst in seine Gleichgewichtslage zurückgeführt. In der Gleichgewichtslage angekommen, bleibt es aber nicht in derselben stehen, sondern es geht infolge seiner Trägheit über dieselbe hinaus, den Draht nach der entgegengesetzten Seite windend und so entsteht eine Reihe von Schwingungen, welche kleiner und kleiner werden, bis endlich der Draht mit dem angehängten Gewichte in seiner Gleichgewichtslage zur Ruhe kommt.

In Beziehung auf die Größe der Torsionskraft gelten folgende Gesetze:

1. Die Torsionskraft ist dem Drehungswinkel proportional; wenn man also das untere Ende des Drahtes um $2n$, $3n$, $4n$ Grade usw. aus der Gleichgewichtslage herausdreht, so ist die dadurch hervorgerufene Torsionskraft 2-, 3-, 4- usw. mal so groß, als wenn die Drehung nur n Grade betragen hätte. Dies Gesetz geht daraus hervor, daß die Schwingungsdauer von der Größe der ursprünglichen Drehung unabhängig ist, vorausgesetzt, daß man die Elastizitätsgrenze nicht überschritten hat.

Auf dieses Gesetz hat Coulomb, welcher überhaupt die Torsionselastizität zuerst gründlich studiert hat, seine Drehwaage gegründet, welche als ein für die Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität höchst wichtiges Instrument später besprochen werden soll.

2. Die Torsionskraft ist von der Spannung des Drahtes unabhängig.

3. Die Torsionskraft ist der Länge des Drahtes umgekehrt, dagegen der vierten Potenz des Durchmessers direkt proportional.

§ 109. Festigkeit. Die Kraft, mit welcher ein Körper der Trennung seiner Teilchen widersteht, nennt man seine Festigkeit.

Der zwischen den einzelnen Teilchen eines festen Körpers stattfindende Zusammenhang läßt sich durch Zerreißen, durch Zerbrechen, durch Zerwinden (Abdrehen) oder durch Zerdrücken aufheben.

Absolute Festigkeit nennt man die Kraft, mit welcher ein Körper dem Zerreißen widersteht, wenn er der Länge nach gespannt wird. Dieser Widerstand ist dem Querschnitte des zu zerreißenden Körpers proportional, denn es muß ja der Zusammenhang von zwei-, drei-, viermal soviel Teilchen aufgehoben werden, wenn der Querschnitt des Körpers zwei-, drei-, viermal so groß ist. Es ist also

$$P = qk,$$

wenn P die absolute Festigkeit, also die eben zum Zerreißen nötige Kraft, q den Querschnitt des Körpers und k einen konstanten Faktor bezeichnet, welcher von der Natur der zu zerreißenden Substanz abhängig ist. Dieser

Faktor k , also die Kraft, welche eben nötig ist, um einen Stab zu zerreißen, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, wird der Festigkeitsmodulus genannt. Der Zahlenwert von k hängt davon ab, welche Flächeneinheit und welche Gewichtseinheit man wählt.

Schon Muschenbroek hat zahlreiche Versuche über die absolute Festigkeit verschiedener Körper angestellt. Die folgende Tabelle enthält den in Kilogrammen ausgedrückten Festigkeitsmodulus, wenn man das Quadratmillimeter als Flächeneinheit annimmt, also das Gewicht, welches eben nötig ist, um Drähte von einem Quadratmillimeter Querschnitt zu zerreißen, wie es Wertheim in der bereits oben zitierten Abhandlung angibt.

	Ausgezogen	Angelassen
	kg	kg
Blei	2,2	1,9
Zinn	2,6	2,4
Gold	26	11
Silber	29	16
Kupfer	40	31
Platin	34	25
Eisen	63	48
Gußstahl	83	65
Messing	60	—

Auf denselben Querschnitt beziehen sich die folgenden von Wertheim und Chevandier ermittelten Werte für den Festigkeitsmodulus verschiedener Holzsorten:

	In der Richtung		
	der Fasern	des Radius	der Tangente
Akazie	7,93	—	—
Tanne (Pin. abies)	4,18	0,22	0,29
Föhre (Pin. silv.)	2,48	0,26	0,20
Hagebuche	2,99	1,00	0,61
Birke	4,30	0,82	1,06
Buche	3,57	0,88	0,75
Eiche	5,66	0,58	0,41
Ahorn	2,71	0,72	0,37
Pappel	1,48	0,15	0,21

Nach anderen Angaben ist die absolute Festigkeit der Holzarten bedeutend größer, so z. B. für

Eiche	6 bis 8 kg
Tanne	8 " 9 "
Buche	8 "

Der Grund dieser Verschiedenheit ist vielleicht im ungleichen Wassergehalt, im verschiedenen Alter der Bäume, verschiedenem Standort usw. zu suchen.

Für Hanfseile ist nach älteren Bestimmungen die absolute Festigkeit für das Quadratmillimeter Querschnitt 3,5 bis 6,2.

Die große Verschiedenheit in der Festigkeit der Hanfseile rührt von der ungleichen Beschaffenheit der Materiale her, aus denen sie gefertigt sind. Dünne Seile sind verhältnismäßig stärker als dicke, weil sie aus besserem Hanf gemacht sind. Durch starkes Drehen der einzelnen Fäden wird die Tragkraft der Seile bedeutend vermindert. Nasse Seile haben eine geringere Festigkeit als trockene.

Bei praktischen Anwendungen wird man der Sicherheit wegen wohl tun, bei Metallen nur ein Drittel, bei Hölzern nur ein Viertel der durch die Versuche ermittelten absoluten Festigkeit in Rechnung zu bringen.

Die Kraft, welche ein Körper dem Zerbrechen entgegengesetzt, nennt man seine relative, diejenige, welche er dem Zerdrücken entgegengesetzt, die rückwirkende Festigkeit. Die relative Festigkeit sowohl wie die rückwirkende steht in einem innigen Verhältnis zur absoluten, was sich auch in mathematischer Form ausdrücken läßt; doch ist hier nicht der Ort, weiter darauf einzugehen.

§ 110. Adhäsion. Dieselbe Kraft, welche die Teilchen eines festen Körpers zusammenhält, wirkt auch, um die Teilchen zweier vorher getrennter Körper zusammenzuhalten, wenn man nur imstande ist, sie in eine hinreichend innige Berührung zu bringen. So verbinden sich Spiegelplatten, welche nach der Politur dicht aneinander gelegt worden sind, oft so innig miteinander, daß sie nicht mehr getrennt werden können, ohne die Platten zu zerbrechen. Ebenso haften zwei blanke Bleiplatten, die man zusammendrückt, fast so fest aufeinander, als ob sie nur eine einzige Bleimasse ausmachten, vorausgesetzt, daß die Flächen, in welchen sich die beiden Bleistücke berühren, vollkommen eben und metallisch sind.

Dieses Aneinanderhaften zweier Körper wird mit dem Namen der Adhäsion bezeichnet.

Die Adhäsion zeigt sich nicht allein zwischen gleichartigen, sondern auch zwischen verschiedenartigen Körpern. Eine Bleiplatte mit einer Zinnplatte oder eine Kupferplatte mit einer Silberplatte durch Glättwalzen gezogen, gibt ein fast untrennbares Ganzes.

Besonders stark zeigt sich die Adhäsion, wenn ein flüssiger Körper mit einem festen Körper in Berührung gebracht und dann durch Erkalten oder durch Verdunstung des Lösungsmittels fest wird; hierauf beruht das Leimen, Kitten und Löten. Kittet man z. B. mittelst Siegellack zwei Glasstücke zusammen, so kommt es oft vor, daß sich beim Auseinanderreißen nicht das Glas vom Siegellack trennt, sondern daß Stücke aus dem Glase herausgerissen werden. Wenn man eine Glasplatte mit Leim bestreicht, so haftet dieser oft so fest am Glase, daß Stücke aus demselben (dem Glase) herausgerissen werden, wenn sich der Leim beim Austrocknen zusammenzieht.

Wenn zwei Körper mit ebenen Flächen aufeinander liegen, und man den einen über den anderen hinwegschieben will, so setzt die Adhäsion dieser Bewegung ein Hindernis entgegen; die Adhäsion hat also einigen Anteil am Reibungswiderstand, der überall da überwunden werden muß, wo zwei Körper übereinander hingleiten, oder wo sich ein Körper über einen anderen hinwält. Von der Reibung wird noch weiter unten die Rede sein.

J. Stefan hat nachgewiesen¹⁾, daß die Adhäsion aufeinander gelegter ebener Platten in vielen Fällen nur eine scheinbare ist. Hängt man nämlich die obere Platte horizontal an einen Wagebalken und bringt sie ins Gleichgewicht, stellt die zweite Platte sehr nahe der ersteren und parallel unterhalb derselben auf, so wird durch jedes noch so kleine Übergewicht die obere Platte mit langsam beschleunigter Geschwindigkeit abgezogen. Ist die Distanz der Platten klein, ihr Durchmesser groß, so erfolgt die Bewegung anfangs so langsam, daß man längere Zeit hindurch dieselbe nicht direkt wahrzunehmen vermag. Trotzdem läßt sich durch optische Mittel (Interferenzstreifen) der Nachweis führen, daß die Bewegung der Platte sofort nach dem Auflegen eines Übergewichtes beginnt.

Am auffälligsten ist diese Erscheinung, wenn die Platten sich innerhalb einer tropfbaren Flüssigkeit, z. B. unter Wasser, befinden.

So beobachtete z. B. Stefan an zwei Platten von 155 mm Durchmesser, welche unter Wasser anfänglich um 0,1 mm voneinander abstanden, daß durch den kontinuierlichen Zug eines Gramms dieser Abstand in 1½ Minuten um 0,01 mm, in 7 Minuten erst um 0,1 mm vergrößert wurde. Durch diese Langsamkeit der Bewegung irre geführt, wird man versucht, das Phänomen für ein solches zu halten, welches auf statischem Gleichgewichte beruht, während es in Wirklichkeit ein dynamisches Phänomen ist. Sollen die Platten sich entfernen, so muß sich der entstehende größere Zwischenraum zuvor mit Flüssigkeit füllen, da sonst der äußere Druck die Entfernung hindert.

Infolge der Reibung dringt jedoch die umgebende Flüssigkeit anfangs nur sehr langsam ein und verursacht die Verzögerung. Stefan fand, daß sowohl in Luft als in tropfbaren Flüssigkeiten die Zeit zur Erreichung eines gewissen größeren Abstandes dem aufgelegten Übergewichte genau verkehrt proportional sei, diese Zeit wächst ferner bei gleichem Übergewicht nahezu im quadratischen Verhältnis, wenn die Plattendistanz im einfachen Verhältnis abnimmt. Endlich verhalten sich unter sonst gleichen Umständen diese Zeiten wie die vierten Potenzen der Radien der Platten. Auf die Erörterung des theoretischen Zusammenhanges dieser Gesetze mit denen der inneren Reibung müssen wir hier verzichten.

Aus dem Mitgeteilten ist nicht zu folgern, daß es überhaupt keine wahre Adhäsion gebe, wohl aber ist die Annahme der letzteren auf solche Fälle zu beschränken, in denen die Abstände der Platten so klein sind, daß sie in den Wirkungskreis der Molekularkräfte kommen.

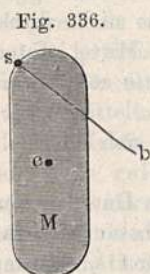
§ 111. Vom Stoß im allgemeinen. Wenn ein in Bewegung begriffener Körper auf seiner Bahn mit irgend einem anderen Körper zusammentrifft, so entsteht ein Stoß, infolgedessen jeder den Bewegungszustand des anderen mehr oder weniger modifiziert. Der nächste in sehr kurzer Zeit vollendete Erfolg des Stoßes ist eine Formveränderung der zusammentreffenden Körper, welche vorübergehend ist bei elastischen, bleibend bei nicht elastischen Substanzen. Bei letzteren tritt überdies Wärmeentwicklung ein.

In Beziehung auf die Lage des Punktes, in welchem ein Körper zuerst durch einen anderen ihn treffenden gestoßen wird, unterscheidet man zentrale und exzentrische (nicht zentrale) Stöße. Denkt man sich auf der Ober-

¹⁾ Sitzungsber. d. Wiener Akademie vom Jahre 1874 (2) 69, 713.

fläche des Körpers in dem Punkte, auf welchen der Stoß erfolgt, eine Normale gezogen, so ist der Stoß zentral, wenn diese Normale durch den Schwerpunkt des Körpers geht; der Stoß ist exzentrisch, wenn dies nicht der Fall ist.

Wie also auch eine homogene Kugel mit anderen Körpern zusammentreffen mag, so erleidet sie stets einen zentralen Stoß, weil alle Normalen der Kugeloberfläche durch den Mittelpunkt derselben gehen; wird jedoch ein homogener Körper M von der Gestalt Fig. 336 im Punkte s von irgend einem anderen getroffen, so ist der Stoß in Beziehung auf diesen Körper M nicht zentral, weil die Normale sb nicht durch den Schwerpunkt C des Körpers M geht.



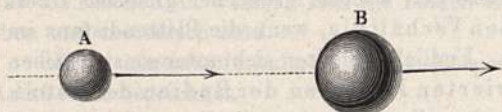
In Beziehung auf die Bewegungsrichtung unterscheidet man den geraden und den schiefen Stoß. Beim geraden Stoß fällt die Bewegungsrichtung mit der Normalen des Berührungspunktes zusammen, beim schiefen Stoß ist dies nicht der Fall.

Der Stoß zweier Kugeln wird also ein gerader sein, wenn sich beide in der Verbindungslinie der Mittelpunkte bewegen.

Wir beschäftigen uns hier nur mit dem geraden zentralen Stoß, der schiefe Stoß läßt sich auf eine Komponente des geraden zurückführen.

§ 112. Stoß unelastischer Körper. Wenn zwei unelastische Körper A und B , Fig. 337, mit verschiedenen Geschwindigkeiten behaftet, zusammenstoßen, so findet zunächst eine gegenseitige Zusammendrückung, eine Formveränderung statt, welche beendet ist, wenn die Geschwindigkeit beider Körper die gleiche geworden ist. Es ist nun die Aufgabe, diese gemeinschaftliche Endgeschwindigkeit zu finden.

Fig. 337.



Es seien M und M_1 die Massen der beiden Körper, c und c_1 ihre Geschwindigkeiten, welche positiv bezeichnet werden sollen, wenn sie von der Linken zur Rechten gerichtet sind. Die Bewegungsgrößen der beiden Körper sind Mc und M_1c_1 ; was der eine nach dem Stoß an Bewegungsquantität eingebüßt hat, um so viel hat die Bewegungsquantität des anderen zugenommen, und danach läßt sich die gemeinschaftliche Geschwindigkeit v nach dem Stoße berechnen. Nehmen wir an, daß bei gleichgerichteter Geschwindigkeit beider Körper die Geschwindigkeit c des Körpers A größer sei als die Geschwindigkeit c_1 des Körpers B , so ist der Verlust an Bewegungsquantität, welchen A durch den Stoß erleidet, $M(c - v)$, die Zunahme der Bewegungsquantität von B ist dagegen $M_1(v - c_1)$, wir haben also

$$M(c - v) = M_1(v - c_1)$$

und daraus

$$v = \frac{Mc + M_1c_1}{M + M_1} \dots \dots \dots (1)$$

Wenn sich B in entgegengesetzter Richtung von A bewegt, so ist c_1 negativ, und man erhält

$$v = \frac{Mc - M_1 c_1}{M + M_1}.$$

Jeder Stoß unelastischer Körper ist mit einem Verlust an lebendiger Kraft verbunden. Die lebendige Kraft des Körpers *A* ist vor dem Stoße

$$\frac{M c^2}{2},$$

die des Körpers *B* ist

$$\frac{M_1 c_1^2}{2},$$

also die Summe der lebendigen Kräfte vor dem Stoße

$$M \frac{c^2}{2} + M_1 \frac{c_1^2}{2} \dots \dots \dots (2)$$

Nach dem Stoße ist die lebendige Kraft

$$(M + M_1) \frac{v^2}{2} \dots \dots \dots (3)$$

Zieht man den Wert (3) von (2) ab, so erhält man als Verlust an lebendiger Kraft durch den Stoß

$$\alpha = M \frac{c^2 - v^2}{2} + M_1 \frac{c_1^2 - v^2}{2}.$$

Dieser Wert läßt sich in folgender Weise umformen:

$$\alpha = \frac{M}{2} (c + v) (c - v) + \frac{M_1}{2} (c_1 + v) (c_1 - v)$$

$$\alpha = \frac{M}{2} (c + v) (c - v) - \frac{M_1}{2} (v + c_1) (v - c_1) \dots \dots (4)$$

Setzen wir in die Differenz $c - v$ für v seinen obigen Wert bei (1), so kommt

$$c - v = \frac{M_1 (c - c_1)}{M + M_1}$$

und

$$M (c - v) = \frac{M M_1 (c - c_1)}{M + M_1},$$

da aber $M (c - v) = M_1 (v - c_1)$, so ist auch

$$M_1 (v - c_1) = \frac{M M_1 (c - c_1)}{M + M_1}.$$

Setzt man diese Werte für $M (c - v)$ und $M_1 (v - c_1)$ in Gleichung (4), so kommt

$$\alpha = \frac{M M_1 (c - c_1)}{M + M_1} \cdot \frac{(c + v - v - c_1)}{2}$$

$$\alpha = \frac{M M_1}{M + M_1} \cdot \frac{(c - c_1)^2}{2} \dots \dots \dots (5)$$

¹⁾ Diese Formel bezieht sich auf das absolute Maßsystem; im Gravitations-Maßsystem, in welchem statt der Massen M , M_1 die Gewichte P , P_1 eingeführt werden, erhalte man

$$\alpha = \frac{P P_1}{P + P_1} \frac{(c - c_1)^2}{2g}.$$

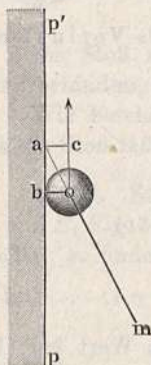
Die Größe $\frac{M M_1}{M + M_1}$ bezeichnet man als das harmonische Mittel der Massen M und M_1 .

Zahlenbeispiel: Wenn z. B. auf einer Eisenbahn zwei Züge von 60 000 kg und 80 000 kg Masse in entgegengesetzter Richtung mit den Geschwindigkeiten $c = 7$ m und $c_1 = -5$ m sich bewegend zusammenstoßen, so entsteht ein auf die Zerstörung der Lokomotiven und Wagen verwendeter Verlust an lebendiger Kraft, welcher bei vollständigem Mangel an Elastizität aller zum Stoß gelangender Teile sein würde:

$$\frac{60\,000 \cdot 80\,000}{140\,000} \cdot \frac{(7 + 5)^2}{2} = 2\,468\,563 \text{ Joule (in absolutem Maße}^1\text{)}.$$

Aus den obigen Betrachtungen und Berechnungen geht hervor, wie nachteilig Stöße in einer Maschine wirken müssen, welche nicht geradezu zur Ausübung von Stößen bestimmt ist, sondern in welcher dieselben nur infolge mangelhafter Konstruktion auftreten.

Fig. 338.



Solche Stöße verzehren nicht allein ganz unnötigerweise einen großen Teil lebendiger Kraft, sondern sie führen auch die Maschine selbst einem raschen Ruin entgegen.

Stoß einer unelastischen Kugel gegen eine ebensolche Wand. Es bewege sich die unelastische Kugel o , Fig. 338, in der Richtung ma gegen die Wand pp' ; die Strecke oa stelle die Geschwindigkeit derselben vor. Zerlegt man diese in die auf die Wand senkrechte Komponente ob und in die zur Wand parallele Komponente oc , so ist ersichtlich, daß die erstere die Abplattung der Kugel, die letztere die Fortbewegung derselben in der Richtung oc parallel zur Wand bewirkt. Bei der Ausführung eines derartigen Versuches, etwa mit einer Kugel aus weichem Ton, tritt diese Folgerung nur angenähert ein, weil diese Kugel immer noch etwas elastisch ist und auch die entstehende Drehbewegung einen Einfluß ausübt.

§ 113. Stoß elastischer Körper. Wenn zwei Körper im geraden zentralen Stoß zusammentreffen, so ist der erste Effekt eine gegenseitige Zusammendrückung, welche so lange fort dauert, bis die Geschwindigkeit der beiden Massen die gleiche geworden ist. Ist bis zu diesem Moment die Verschiebung der Teilchen beider Körper über ihre Elastizitätsgrenze hinausgegangen, so daß ihre Formveränderung (wenn nicht gar Zertrümmerung erfolgt) eine bleibende ist, so erfolgt die fernere Bewegung nach den im vorigen Paragraphen besprochenen Gesetzen. Ist jedoch durch Zusammendrückung der beiden zusammenstoßenden Körper in dem Augenblicke, in welchem ihre Geschwindigkeit die gleiche geworden ist, ihre Elastizitätsgrenze noch nicht überschritten, so streben nun beide Körper, ihre ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen, wodurch sie, in dem Berührungspunkte gegeneinander drückend, gleichsam einen abermaligen Stoß erleiden. Jede Kugel erhält durch die

¹⁾ Im Gravitations-Maßsystem: $\frac{60\,000 \cdot 80\,000}{140\,000} \cdot \frac{(7 + 5)^2}{2 \cdot 9,8} = 251\,895 \text{ mkg.}$

Wiederherstellung der Form den Stoß zurück, welchen sie während der Zusammendrückung auf die andere ausgeübt hat.

Zur Ableitung der Formel wollen wir wieder wie im vorigen Paragraphen von dem Fall ausgehen, daß sich beide Körper nach derselben Seite hin (nach der rechten) bewegen. Die links sich befindliche Kugel A , deren Masse M ist, habe die größere Geschwindigkeit c ; wenn sie gegen die andere Kugel B , deren Masse M_1 und deren Geschwindigkeit c_1 ist, anstößt, so verliert sie beim Anstoß während der Zusammendrückung bis zu dem Moment, in welchem beide Kugeln gleiche Geschwindigkeit haben, die Bewegungsquantität $M(c - v)$, wo v dieselbe Bedeutung hat wie in § 112. Die Bewegungsquantität der Kugel B hat dabei aber um $M_1(v - c_1)$ zugenommen. Während nun beide Kugeln ihre ursprüngliche Gestalt wieder annehmen, erleidet jede Kugel einen Rückstoß, welcher dem Stoße gleich ist, den sie der anderen erteilt hat; die Kugel A wird also abermals einen Verlust an Bewegungsquantität erleiden, welcher gleich ist $M(c - v)$; der Gesamtverlust an Bewegungsquantität, welchen die Kugel A nach Beendigung des elastischen Stoßes erlitten hat, ist also:

$$2 M (c - v).$$

In gleicher Weise ergibt sich für den Gewinn an Bewegungsquantität, welchen die Kugel B bis zu dem Moment erfahren hat, wo beide Kugeln ihre ursprüngliche Gestalt wieder angenommen haben und auseinander zu fahren beginnen,

$$2 M_1 (v - c_1).$$

Die Geschwindigkeit von A wird also nach Beendigung des elastischen Stoßes sein:

$$V = c - 2(c - v) = 2v - c (1)$$

Die Geschwindigkeit von B wird aber geworden sein:

$$V_1 = c_1 + 2(v - c_1) = 2v - c_1 (2)$$

Setzen wir in diese Werte von V und V_1 für v seinen Wert aus § 112 (1), so kommt:

$$V = \frac{(M - M_1) c + 2 M_1 c_1}{M + M_1} (3)$$

und

$$V_1 = \frac{(M_1 - M) c_1 + 2 M c}{M + M_1} (4)$$

Für den Fall, daß die beiden Kugeln gleiche Masse besitzen, also $M = M_1$ ist, gehen diese Formeln über in folgende:

$$V = c_1$$

$$V_1 = c,$$

d. h. die Kugeln vertauschen beim Stoße ihre Geschwindigkeiten.

Die Bewegungsquantität der beiden Kugeln vor dem Stoße war:

$$M c + M_1 c_1 (5)$$

Nach dem elastischen Stoße ist sie:

$$M V + M_1 V_1 (6)$$

Setzen wir für V und V_1 ihre Werte (1) und (2), so kommt:

$$\begin{aligned} MV + M_1 V_1 &= M(2v - c) + M_1(2v - c_1) \\ &= 2(M + M_1)v - (Mv + M_1 c_1). \end{aligned}$$

Nun aber ist nach § 112 (1):

$$(M + M_1)v = Mc + M_1 c_1.$$

Setzt man nun für $(M + M_1)v$ diesen Wert in obige Gleichung, so kommt:

$$\begin{aligned} MV + M_1 V_1 &= 2(Mc + M_1 c_1) - (Mc + M_1 c_1) \\ MV + M_1 V_1 &= Mc + M_1 c_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Bewegungsquantität ist nach dem elastischen Stoß ebenso groß wie vor demselben.

Gehen wir nun zur Bestimmung der lebendigen Kräfte nach dem elastischen Stoß über.

Zieht man Gleichung (2) ab von der Gleichung (1), so kommt:

$$V - V_1 = c_1 - c$$

und daraus:

$$V + c = V_1 + c_1 \quad (8)$$

Aus der obigen Gleichung (7) ergibt sich aber:

$$M(V - c) = M_1(c_1 - V_1) \quad (9)$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (9) und (8) erhält man aber:

$$M(V^2 - c^2) = M_1(c_1^2 - V_1^2),$$

und daraus endlich:

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{M_1 V_1^2}{2} = \frac{Mc^2}{2} + \frac{M_1 c_1^2}{2},$$

d. h. die Summe der lebendigen Kräfte nach dem elastischen Stoß ist ebenso groß wie vor demselben, beim elastischen Stoß findet also kein Verlust an lebendiger Kraft statt.

Stoß auf eine Reihe elastischer Kugeln (Fig. 339). Hängt man eine Reihe gleich schwerer elastischer Kugeln aus Elfenbein, hartem Holze oder Glas hintereinander in gerader Linie bifilar auf (Mariottes Stoßapparat), oder legt dieselben (nach Tyndall) in eine glatte Rinne, so kann man folgendes zeigen:

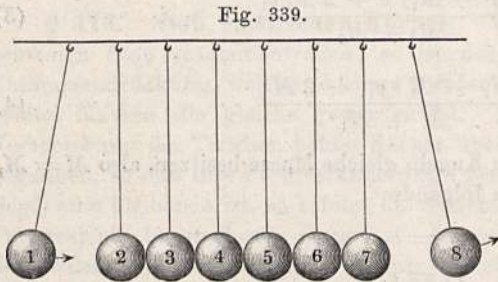


Fig. 339.

Läßt man die äußerste Kugel 1 links aus einer gewissen Höhe auf die Kugel 2 fallen, so bleiben alle folgenden bis auf die letzte ruhig hängen,

nur die letzte (8.) steigt (nahe) ebensoweit in die Höhe. Dasselbe wiederholt sich beim Rückfalle. Erklärung: Jede Kugel tauscht mit der folgenden ihre Geschwindigkeit.

Hebt man die Kugeln 1 und 2 und läßt sie nacheinander oder zugleich fallen, so steigen die Kugeln 8 und 7 nacheinander oder gleichzeitig in die Höhe. Läßt man 4 Kugeln fallen, so steigen die restlichen vier in die Höhe.

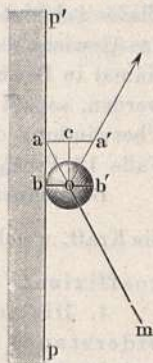
Läßt man 5 Kugeln gegen 3 fallen, so bleiben die 3 ersten stehen, die 5 letzten fliegen empor.

Die Erklärung aller dieser Fälle ergibt sich durch konsequente successive Anwendung desselben Grundsatzes von der Vertauschung der Geschwindigkeiten.

Hat die Hälfte der Kugeln eine größere Masse als der Rest, so pflanzt sich ein auf die erste übertragener Stoß zwar ebenfalls auf die letzte Kugel fort; es entsteht aber an der Grenze zwischen den schwereren und den leichteren Kugeln eine Teilung der Stoßwirkung. Nur der eine Teil der lebendigen Kraft geht bis ans Ende fort, der andere Anteil wird an der Grenze reflektiert. Dabei ist der Sinn der Bewegung der einzelnen Kugeln davon abhängig, ob der Stoß in der Richtung von den schwereren zu den leichteren Kugeln oder umgekehrt stattgefunden hat. Im ersten Falle ist der Sinn der reflektierten Bewegung von dem gleichen Zeichen, im letzteren Falle von entgegengesetztem Zeichen mit dem Sinne des ursprünglichen Stoßes.

Stoß einer elastischen Kugel gegen eine elastische Wand. Die elastische Kugel o , Fig. 340, bewege sich in der Richtung ma gegen die Wand. Die Strecke oa stelle die Geschwindigkeit dar. Zerlegt man diese nach den Komponenten ob und oc senkrecht und parallel zur Wand, so bewirkt erstere zunächst Abplattung und sofort darauf Rückstoß von der Wand mit einer Geschwindigkeit $= ob'$. Diese Komponente setzt sich mit der Komponente oc zusammen zu einer Resultierenden $oa' = oa$. Es ist ersichtlich, daß nach dieser Theorie der Winkel mob' gleich dem Winkel $b'oa'$ sein muß. Der Einfallswinkel ist also gleich dem Reflexionswinkel. Da in Wirklichkeit die Kugel nicht vollkommen elastisch ist und außerdem eine Drehbewegung um eine auf der Reflexionsebene senkrechte Achse o entstehen muß, welche auf die weitere Bewegung Einfluß ausübt, so stimmt, wie Versuche am Billard ergeben, die Erfahrung mit obiger Theorie nur angenähert überein.

Fig. 340.



§ 114. **Gleitende Reibung.** Ein schon mehrfach besprochener Widerstand, welcher fast auf alle Bewegungen einen bedeutenden Einfluß ausübt, ist die Reibung. Um eine nur etwas große Last auf einer horizontalen Ebene fortzuschleifen, ist ein bedeutender Kraftaufwand nötig, welcher lediglich von den Reibungswiderständen herrührt. Wäre die Ebene sowohl, auf welcher die Last fortgeschleift werden soll, als auch die Unterfläche der Last selbst absolut hart und glatt (was in der Natur nie der Fall ist) und fände außerdem nicht die mindeste Adhäsion zwischen den übereinander hingleitenden Flächen statt, so könnte die kleinste Kraft die größte Last in Bewegung setzen, und einmal angestoßen, müßte sich die Last mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf der horizontalen Ebene fortbewegen.

Die Reibung rührt unstreitig daher, daß die Erhabenheiten einer jeden der übereinander hingleitenden Flächen in die Vertiefungen der anderen eingreifen. Wenn nun die Bewegung stattfinden soll, so müssen entweder die hervorragenden Teilchen von der Masse ihres Körpers abgerissen oder der eine Körper muß fortwährend über die Unebenheiten hinweggehoben werden.

Ersteres findet vorzugsweise statt, wenn die reibenden Flächen sehr rauh, letzteres, wenn sie mehr geglättet sind. Je glatter die reibenden Flächen sind, desto mehr Einfluß gewinnt auch die Adhäsion, welche namentlich bei Anwendung von flüssiger oder halbflüssiger Schmiere von Bedeutung wird.

Um Versuche über gleitende Reibung anzustellen, wandte Coulomb den Fig. 341 dargestellten Apparat (Tribometer) an. Ein Kästchen *A*,

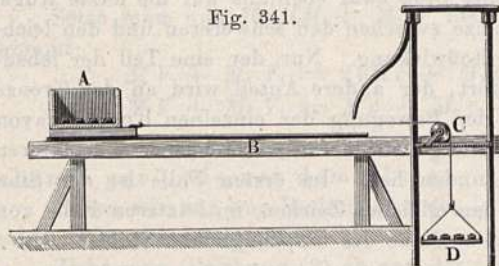


Fig. 341.

welches man nach Belieben mit Gewichten belasten kann, ruht auf zwei horizontalen Schienen, welche nebeneinander gelegt sind. Eine an dem Kästchen befestigte Schnur geht über eine Rolle *C* und trägt an ihrem freien Ende eine Wagschale *D*, auf welche so lange Gewichte zugelegt

werden, bis dadurch das Kästchen *A* eben noch in Bewegung gesetzt oder, wenn angestoßen, in gleichförmiger Bewegung erhalten wird.

Nehmen wir an, die untere Fläche des Kästchens sei durch eine eiserne Platte gebildet und die Schienen seien gleichfalls von Eisen; ferner betrage das Gewicht des Kästchens *A* samt allem, was darin liegt, 10 kg, so wird es, einmal in Bewegung gesetzt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortgeschleift werden, sobald die Wagschale *D* samt ihrem Inhalte 1,4 kg wiegt. Die zur Überwindung der Reibung hier anzuwendende Kraft beträgt also in diesem Falle 14 Proz. der Last.

Bezeichnet man mit *P* die Normalkraft auf die Reibungsfläche, mit *p* die Kraft, welche die Reibung eben überwindet, so ist $f = \frac{p}{P}$ der Reibungskoeffizient. Derselbe beträgt demnach für Eisen auf Eisen 0,14.

1. Die zur Überwindung der Reibung nötige Kraft (Reibungswiderstand) ist der Kraft proportional, mit welchem die Flächen, welche übereinander hergleiten sollen, normal aufeinander gedrückt werden.

Hätte man, ohne am Gewicht des Kästchens etwas zu ändern, die eisernen Schienen breiter oder schmaler gemacht, so würde man doch immer zu demselben Resultat gekommen sein, d. h. zur Überwindung der Reibung würden immer 14 Proz. der Last nötig gewesen sein, und so ergibt sich:

2. Der Reibungswiderstand ist unabhängig von der Ausdehnung der reibenden Flächen.

Eine sehr einfache Methode zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten ergibt sich aus den Gesetzen über die Bewegung auf der schiefen Ebene. Man gibt der Ebene, auf welcher die Reibung des Körpers *P* zu untersuchen ist, eine solche Neigung α , daß der Körper *P*, wenn angestoßen, mit gleichförmiger Geschwindigkeit abrutscht. Die Kraft *p* zur Überwindung der Reibung ist dann gegeben durch

$$p = P \cdot \sin \alpha,$$

folglich

$$f = \frac{p}{P} = \sin \alpha.$$

Die folgende Tabelle enthält nach Morins Versuchen einige der in der Praxis wichtigsten Reibungskoeffizienten.

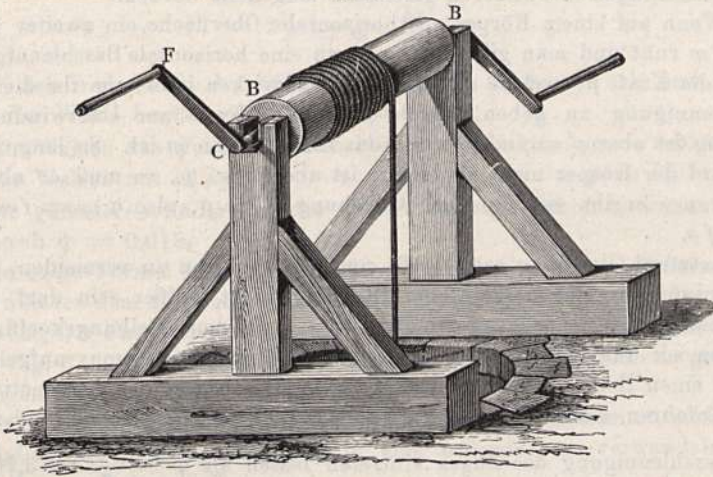
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen	0,14
Messing auf Gußeisen	0,19
Schmiedeeisen auf Gußeisen	0,20
Buche auf Buche (Fasern parallel)	0,36
Eiche auf Eiche („ „)	0,48
„ „ „ („ gekreuzt)	0,32

Durch eine zweckmäßige Schmiere kann der Reibungswiderstand noch verringert werden. Für Metalle ist Öl, für Holz hingegen Talg oder Seife das beste Schmiermittel. So ist z. B. bei guter Schmiere der Reibungskoeffizient für Schmiedeeisen auf Gußeisen nur 0,06.

Bei Hölzern ist es nicht gleichgültig, wie die Fasern laufen; die Reibung ist nämlich bei gekreuzten Fasern viel geringer als bei parallelen.

Den Reibungskoeffizienten zwischen Eisen und Eis hat J. Müller in folgender Weise bestimmt: ein junger Mann hielt, auf seinen Schlittschuhen (neuer Konstruktion mit glatter Bahn) stehend, eine Federwage von der in Fig. 331, Seite 332, dargestellten Art in den Händen; an derselben war eine starke Schnur befestigt, mittels welcher ihn ein zweiter Schlittschuhläufer auf dem Eise fortzog. Beim Beginn der Bewegung zeigte die Federwage eine

Fig. 342.



Zugkraft von 5 bis 6 kg, während des Laufes aber schwankte sie zwischen 1 und 2 kg. Da nun der gezogene junge Mann 62 kg wog, so beträgt der Reibungskoeffizient während der Bewegung $\frac{1}{62}$ bis $\frac{2}{62}$ oder 1,6 bis 3,2 Proz.

Gleitende Reibung findet unter anderem auch überall da statt, wo Zapfen in ihren Pfannen gedreht werden. Untersuchen wir z. B. den Effekt der Zapfenreibung an dem schon öfter betrachteten Haspel, Fig. 342. Das Gewicht des Wellbaumes selbst mit allem, was daran befestigt ist, mitsamt der daran hängenden Last von 50 kg, bewirke während des Aufwindens einen Gesamtdruck auf die Zapfenlager = 100 kg. Wenn die Zapfenlager von Gußeisen, die Zapfen aber von Schmiedeeisen sind, so beträgt der Rei-

bungswiderstand, welcher am Umfange der Zapfen wirkt, 20 Proz., der Effekt der Reibung ist also derselbe, als ob man statt ihrer um den Zapfen eine Schnur in derselben Richtung geschlungen hätte, wie das Seil, welches die Last trägt, und an dieser Schnur ein Gewicht $100 \cdot 0,2$ oder 20 kg angehängt hätte; oder als wenn die am Umfange des Wellbaumes wirkende Last um $\frac{20}{5} = 4$ kg größer gewesen wäre, vorausgesetzt nämlich, daß der Durch-

messer des Zapfens $\frac{1}{5}$ vom Durchmesser des Wellbaumes ist. Es werden also bei diesem Haspel etwa 8 Proz. der angewandten Kraft für die Überwindung der Reibungswiderstände verzehrt.

Wenn ein Körper, welcher bis dahin ruhig auf seiner Unterlage lag, in Bewegung gesetzt werden soll, so ist der dabei zu überwindende Reibungswiderstand etwas größer als die Reibung, welche überwunden werden muß, wenn die Bewegung bereits eingeleitet ist. Für sehr harte Körper ist dieser Unterschied unbedeutend, und er ist nur durch den Kraftaufwand bedingt, welcher nötig ist, um dem bis dahin ruhenden Körper eine gewisse Geschwindigkeit mitzuteilen. Bei weichen Körpern ist die Reibung der Ruhe, d. h. die Kraft, welche angewendet werden muß, um den bis dahin ruhenden Körper in Bewegung zu setzen, erheblich größer als die während der Bewegung zu überwindende Reibung, weil ein weicher Körper, welcher einige Zeit lang gegen einen anderen angepreßt wurde, notwendig eine Zusammendrückung erfährt, wodurch die kleinen Hervorragungen des einen mehr und mehr in den Vertiefungen des anderen gleichsam eingekeilt werden.

Wenn auf einem Körper mit horizontaler Oberfläche ein zweiter von der Masse m ruht und man gibt dem ersteren eine horizontale Beschleunigung φ , so ist die Kraft p , welche auf die Masse m wirken muß, um ihr die gleiche Beschleunigung zu geben, gleich φm . Die Kraft zur Überwindung der Reibung ist aber $p' = fmg$, da mg das Gewicht von m ist. So lange $p' > p$ ist, wird der Körper nicht abgleiten, ist aber $p' < p$, so muß er abgleiten. Die Grenze ergibt sich aus der Gleichung $p' = p$, also $\varphi m = fmg$ oder $\varphi = fg$.

Letztere Gleichung sagt, daß, um das Abgleiten zu vermeiden, die Beschleunigung in der horizontalen Richtung nicht größer sein darf als die Beschleunigung der Schwere multipliziert mit dem Reibungskoeffizienten. Nehmen wir für die auf dem Boden eines Eisenbahnwaggons aufgeladenen Kisten einen Reibungskoeffizienten $f = \frac{1}{3}$ an, so darf der Lokomotivführer beim Anfahren, sowie während der Fahrt nie eine größere positive oder negative Beschleunigung des Zuges eintreten lassen als $\varphi = \frac{9,8}{3} = 3,266 \frac{m}{sek.}$,

da sonst die Körper verschoben werden. Hierher gehört auch das bekannte Experiment, das man mit einer Visitenkarte und einer Münze anstellen kann, die man auf die Mündung einer Flasche gelegt hat. Schiebt man die Karte langsam fort, so nimmt sie die Münze mit; schnellt man aber die Karte rasch in horizontaler Richtung ab, so fällt die Münze in die Flasche. Vgl. auch § 72, Versuch Fig. 227.

§ 115. Wälzende Reibung findet da statt, wo ein runder Körper, etwa eine Kugel, ein Zylinder, über die Unterlage hinwegrollt. Es kommt dabei die Unterlage stets mit neuen Punkten des rollenden Körpers in Berührung.

Der hierbei entstehende Widerstand ist bei weitem geringer als der Widerstand der gleitenden Reibung. Coulomb verwandte zu seinen Versuchen über wälzende Reibung Walzen von Guajak- und Ulmenholz, deren Durch-

Fig. 343.

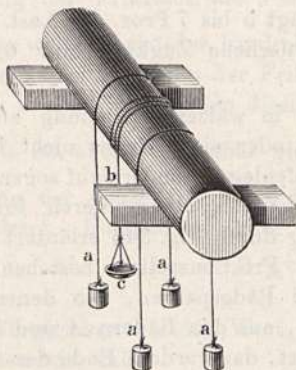
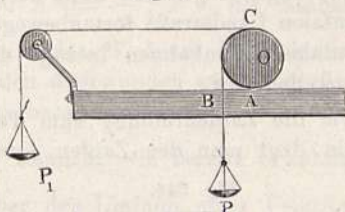


Fig. 344.



messer von 5 bis 31 cm variierte und die er auf Unterlagen von Eichenholz wälzen ließ. Um auch den Druck abzuändern, mit welchem die Walze auf die Unterlage aufgedrückt wird, wurden zwei Schnüre *a* über die Walze gelegt und an beiden

Seiten gleiche Gewichte angehängt, wie Fig. 343 andeutet. Das Übergewicht, welches die Bewegung hervorbringen soll, wurde in die an der Schnur *b* hängende leichte Wagschale gelegt.

Nach diesen Versuchen ist die wälzende Reibung dem Druck direkt und dem Halbmesser der Walze umgekehrt proportional, oder es ist

$$F = \varphi \cdot \frac{P}{R},$$

wenn *F* den Widerstand der wälzenden Reibung, *P* den Druck und *R* den Radius der Walze bezeichnet. Coulomb fand

für Walzen aus Guajakholz den konstanten Faktor $\varphi = 0,018$

für Walzen aus Ulmenholz $\varphi = 0,031$.

Für gußeiserne Räder, welche auf gußeisernen Schienen laufen, fand Weisbach $\varphi = 0,018$.

Die obige Formel setzt voraus, daß die Kraft *F* an einem Hebelarm angreift, welcher dem Halbmesser der Walze gleich ist, wie es bei der obigen Anordnung der Fall war; wenn aber die Kraft an dem oberen Ende *C* der Walze, Fig. 344, angreift, so ist die wälzende Reibung nur halb so groß wie im vorigen Falle.

Wo es auf Verminderung der Reibungswiderstände ankommt, sucht man wo möglich die gleitende Reibung in eine wälzende zu verwandeln; um schwere Lasten fortzuschaffen, legt man dieselben auf Walzen,

Fig. 345.

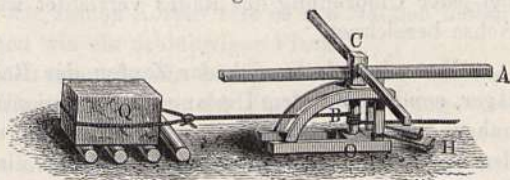


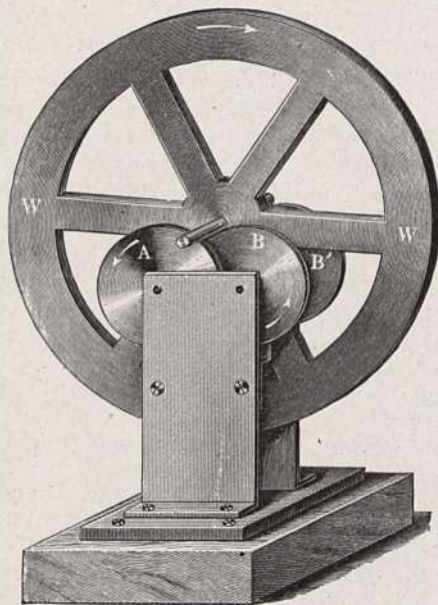
Fig. 345, und darin liegt auch der Vorteil der Räder unserer Fuhrwerke, an deren Umfang nur wälzende Reibung zu überwinden ist, während die gleitende Reibung lediglich auf die Achsen reduziert bleibt, wo die Überwindung derselben nur einen geringen Kraftaufwand in Anspruch nimmt, weil der Reibungskoeffizient durch Glätte der Flächen und Anwendung von Schmiermitteln möglichst herabgesetzt ist.

Aus obiger Formel geht auch hervor, daß der Reibungswiderstand an einem Wagen um so geringer ausfallen wird, je größer der Halbmesser seiner Räder ist.

Die Zugkraft, welche nötig ist, um einen Lastwagen auf einer guten horizontalen Landstraße fortzubewegen, beträgt 5 bis 7 Proz. der Last. Auf horizontalen Eisenbahnen beträgt die erforderliche Zugkraft nur 0,5 bis 0,7 Proz. der Last.

Um die Zapfenreibung zum Teil noch in wälzende Reibung zu verwandeln, legt man den Zapfen einer Welle oder eines Rades nicht in ein Zapfenlager, sondern auf sogenannte

Fig. 346.



Friktionsrollen, deren Einrichtung durch Fig. 346 erläutert wird. Die Friktionsrollen bestehen aus zwei Räderpaaren, von denen das eine, aus den Rädern *A* und *B* gebildet, das vordere Ende der Achse trägt, um welche das Rad *W* gedreht werden soll, während das hintere Ende dieser Achse in gleicher Weise auf den Rädern *A'* und *B'* (*A'* ist in der Figur gänzlich verdeckt) aufliegt. Die Umdrehungsachsen der beiden dicht hintereinander liegenden zusammengehörigen Räder wie *A* und *B* sind um mehr als den Halbmesser und um weniger als den Durchmesser eines solchen Rades voneinander entfernt, so daß sie oben miteinander einen einspringenden Winkel bilden, in welchen die Achse des Rades *W* hineingelegt wird.

Bezeichnet *P* die auf die Achse des Rades *W* ausgeübte Kraft, *f* den Koeffizienten für gleitende Reibung, so ist *fP* der Reibungswiderstand, welcher zu überwinden wäre, wenn die Achse des Rades *W* sich in einem Zapfenlager drehen müßte, und

$$K = f \cdot P \cdot u \dots \dots \dots (1)$$

ist die mechanische Arbeit, welche durch Überwindung dieser Zapfenreibung bei jeder Umdrehung des Rades verrichtet würde, wenn *u* den Umfang der Achse bezeichnet.

Nun aber dreht sich der Zapfen des Rades *W* nicht in einem Zapfenlager, sondern auf dem Umfange der Friktionsrollen, deren Achsen zusammen nahezu ebenfalls die Last *P* zu tragen haben, so daß *fP* nun auch die Summe der Reibung an den Achsen der Friktionsrollen bezeichnet. Dreht sich nun das Rad *W* um, so findet am Umfange seiner Achse eine wälzende Reibung statt, welche sehr unbedeutend ist; allein die Räder *A* und *B* einerseits, sowie *A'* und *B'* andererseits drehen sich um ihre Achsen, und an diesen Achsen ist nur die gleitende Reibung zu überwinden.

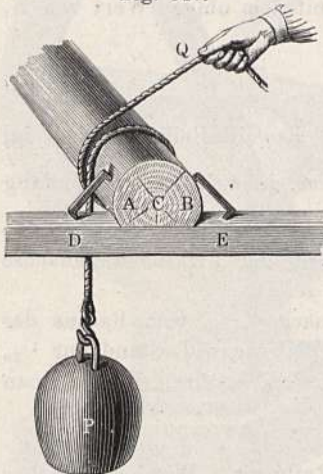
die Last P niedergehen soll, ist dann sehr bedeutend, so daß eine geringe Kraft Q hinreicht, um das Herabsinken von P zu verhindern.

Q	ist ungefähr	$0,6000 P$	bei	$\frac{1}{4}$	Umwickelung des Zylinders,
Q	"	$0,3800 P$	"	$\frac{1}{2}$	" " "
Q	"	$0,1200 P$	"	1	" " "
Q	"	$0,0150 P$	"	2	Umwickelungen " "
Q	"	$0,0002 P$	"	4	" " "

Man macht hiervon Gebrauch, um eine große unteilbare Last von einer gewissen Höhe herabzulassen, indem man das Seil, an welchem die Last hängt, um einen festgeklammerten runden Stamm schlägt und das andere Ende des Seiles in die Hand nimmt.

So kann ein Faßzieher, wenn er beim Hinablassen eines vollen Fasses in einen Keller das dabei angewandte Seil 3mal um einen quer über die

Fig. 347.



Kellertür gelegten Stamm wickelt, mit einer Kraft gleich dem Gewichte von 12,5 kg eine Last von 6600 kg ohne Gefahr hinablassen.

Ohne Reibung würde eine Lokomotive nicht imstande sein, einen Wagenzug fortzubringen. Die Kraft der Dampfmaschine der Lokomotive bewirkt zunächst eine Umdrehung der Treibräder. Diese Räder laufen nun entweder um, während die Lokomotive fortrollt; dann müssen sämtliche Reibungs- und sonstige Widerstände an dem Wagenzug überwunden werden, welcher der Lokomotive folgt; — oder die Treibräder drehen sich um, während die Lokomotive an ihrer Stelle stehen bleibt, dann ist die gleitende Reibung zu überwinden, welche beim Schleifen der Treibräder auf den Schienen entsteht. Es

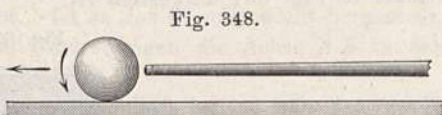
ist nun klar, daß der Zug fortgehen wird, solange die Summe aller Widerstände, welche beim Fortrollen des ganzen Wagenzuges überwunden werden müssen, noch kleiner ist als die gleitende Reibung, welche am Umfange der Treibräder entsteht, wenn sie umgedreht werden sollten, ohne daß die Lokomotive fortrollt.

Ist die fortzuziehende Last zu groß, so findet in der Tat ein Umlaufen der Treibräder ohne entsprechendes Fortrollen statt, wie man dies bei großen Güterzügen oft bemerkt, wenn der Zug sich in Bewegung setzen soll, weil beim Anfange der Bewegung nicht allein die Reibungswiderstände, sondern auch der Trägheitswiderstand der bedeutenden in Bewegung zu setzenden Masse überwunden werden muß.

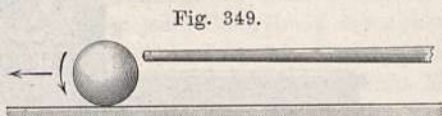
Aus dem allen geht hervor, daß es bei der Lokomotive nicht allein darauf ankommt, daß die Maschine mit großer Kraft die Räder umdreht, sondern auch darauf, daß die gleitende Reibung, welche beim Schleifen der Treibräder auf den Schienen entsteht, recht groß ist; diese Reibung wächst aber mit dem Gewichte der Lokomotive; die Dampfmaschine der Lokomotive muß also nicht allein die gehörige Kraft entwickeln, sondern die Lokomotive selbst muß auch das genügende Gewicht haben, welches um so größer sein

muß, je größere Lasten fortgezogen werden sollen; deshalb muß man auch nicht allein stärkere, sondern auch schwerere Maschinen anwenden, wenn die Eisenbahn nur eine Steigung von 1 bis $1\frac{1}{2}$ m auf eine Länge von 100 m hat.

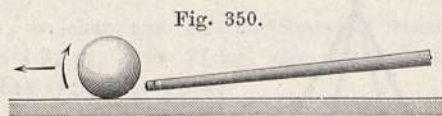
Eine verwandte Wirkung der Reibung findet auch bei der Bewegung gestoßener Kugeln, z. B. beim Billardspiel, statt. Stößt man mit dem Billardstock (Queue) eine Kugel in zentraler Richtung, Fig. 348, so würde sie, wenn sie sich auf der Unterlage nicht reiben würde, nur eine fortschreitende Bewegung erhalten.



Durch die Reibung erlangt sie daneben noch eine Rotation im Sinne des gebogenen Pfeiles um eine horizontale, auf die Stoßrichtung senkrechte Achse.



Stößt man sie, wie in Fig. 349, in einer Richtung, welche oberhalb ihres Schwerpunktes verläuft, so erhält sie von vornherein sowohl eine fortschreitende als auch eine rotierende Bewegung, welche ihrerseits durch die Reibung die fortschreitende Geschwindigkeit vermehrt.

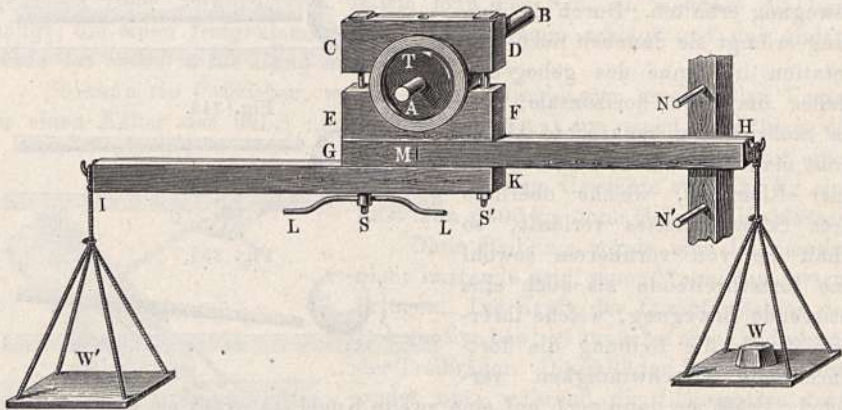


Stößt sie dann noch auf eine zweite Kugel, so prallt sie nicht zurück, sondern läuft derselben nach oder bleibt stehen. Stößt man dagegen die Kugel wie in Fig. 350 tief unten, so erhält sie neben der fortschreitenden Bewegung eine Rotationsbewegung im Sinne des krummen Pfeiles, welche für sich allein unter Mitwirkung der Reibung die Kugel zurücktreiben würde. Sie prallt dann von einer zweiten gestoßenen Kugel zurück. Durch einen passend geführten Schlag mit der etwas angefeuchteten senkrecht gehaltenen Hand vertikal von oben nach unten auf den rückwärtigen Teil der Kugel kann man leicht erreichen, daß sie zuerst nach vorn fliegt, dann aber unter dem Einfluß der fortdauernden Rotation nach augenblicklichem Stehen rückwärts rollt. Dieses Experiment entspricht dem senkrechten Wurf nach aufwärts, wo die momentane Kraft des Stoßes die Anfangsgeschwindigkeit nach oben gibt, während die fortdauernde Kraft der Schwere ihr diese Geschwindigkeit nach einiger Zeit nimmt und eine entgegengesetzte Beschleunigung nach abwärts übrig bleibt. Stößt man eine Kugel seitwärts, so erhält sie neben der fortschreitenden Geschwindigkeit eine solche um eine vertikale Achse. Da durch die Reibung am Boden eine Rotation um eine horizontale Achse dazu kommt, so geben die beiden Rotationsbewegungen zusammen eine resultierende Rotation um eine schief stehende Achse, welche zusammen mit der Reibung eine konstante Seitenkraft weckt. Die Kugel beschreibt dann keine geradlinige Bahn, sondern eine krummlinige. Der Billardspieler macht hiervon beim sog. „Falschnehmen“ Gebrauch.

Auch durch schiefen Abprall von den Wänden des Billards kommt diese Rotationsweise zustande, weshalb die abprallende Kugel nachher einen Bogen beschreibt. Die vollständige Theorie des Billardspieles ist deshalb eine ziemlich komplizierte und schwierige, da auch die im § 104 erörterten Gesetze dabei zu berücksichtigen sind.

Man wendet die Reibung auch an, um die mechanische Leistung verschiedener Motoren zu bestimmen. In der Regel besteht die Arbeit der Motoren, z. B. der Wasserräder, Dampfmaschinen usw., in der Umdrehung einer Welle, deren Bewegung dann auf irgend eine Weise fortgepflanzt wird. An diese Welle wird nun, um die Leistung des Motors zu bestimmen, während die Maschine keine weitere Arbeit verrichtet, ein sog. Bremsdynamometer oder der nach seinem Erfinder genannte Pronysche Zaum angelegt, welcher in Fig. 351 dargestellt ist.

Fig. 351.



AB ist ein Stück der horizontalen Achse, welche durch den Motor, etwa durch ein Wasserrad, umgedreht wird. Auf dieser Achse wird eine eiserne Trommel T befestigt, deren Mantelfläche bei ungefähr $\frac{1}{2}$ m Durchmesser eine Breite von 15 cm hat. Auf dem Umfange dieser Trommel ist nun oben das Holzstück CD aufgesetzt, dessen fast halbkreisförmiger Ausschnitt gleichen Radius mit der Trommel hat. In dem Ausschnitt eines ähnlichen Holzstückes EF liegt die untere Hälfte der Trommel.

Durch Anziehen der Schrauben S und S' kann man die beiden Holzbacken CD und EF mehr oder weniger fest auf den Umfang der Trommel andrücken und auch während des Versuchs den Druck mit Hilfe des Hebels LL regulieren. Unterhalb des Holzbackens EF ist ein im ganzen ungefähr $2\frac{1}{2}$ m langer Balken GH angebracht, welcher bei H eine Wagschale W trägt. Um das Gewicht dieses Wagebalkens GH und der Wagschale W nicht in Rechnung bringen zu müssen, ist ihm entgegengesetzt ein zweiter, dem ersteren gleicher Hebelarm KI angebracht, welcher die Wagschale W' trägt, so daß GH mit W durch IK und W' äquilibrirt ist. Sollte das Gleichgewicht nicht vollständig sein, so kann man es leicht durch Auflegen kleiner Gewichte auf die eine oder andere Wagschale herstellen.

Wenn sich nun die Achse AB in der Richtung des Pfeiles umdreht, so würde auch die ganze Brems- und Hebelvorrichtung in der gleichen Richtung gedreht werden, wenn auf W gar kein oder doch ein zu geringes Gewicht aufgelegt wäre. Um die Drehung in dieser Richtung zu begrenzen, ist in einem seitlich stehenden vertikalen Balken der eiserne Stab N eingesetzt, an welchem der Hebelarm GH alsbald anstoßen wird.

Wird auf die Wagschale W ein Gewicht aufgelegt, welches gerade der Reibung am Umfange der rotierenden Trommel T das Gleichgewicht hält, so

wird der Hebel GH , unbedeutende Schwankungen abgerechnet, auch während der Rotation der Achse AB in horizontaler Lage verbleiben, während er niedergezogen wird, wenn das auf W aufgelegte Gewicht zu groß ist. Um ein zu weites Herabziehen des Hebels GH zu verhindern, dient der eiserne Stab N' .

Der Versuch wird nun in der Weise angestellt, daß man, während die Achse AB samt der Trommel T rotiert, das Gewicht W und die Reibung am Umfange von T mit Hilfe des Hebels LL so reguliert, daß der Hebelarm GH in horizontaler Stellung verbleibt. Ist so das Gleichgewicht hergestellt, so hat man noch zu zählen, wieviel Umdrehungen die Achse AB in der Minute macht.

Wenn alles in der angegebenen Weise reguliert ist, so hält das auf W aufgelegte Gewicht P gerade der Reibung am Umfange der Rolle das Gleichgewicht, und die Arbeit, welche die Maschine bei jeder Umdrehung der Achse verrichtet, ist (im Gravitationsmaße) gleich $P 2 \pi r$, wenn r den Abstand des Hakens, an welchem die Wagschale W aufgehängt ist, von dem Punkt M bezeichnet, welcher auf dem Balken GH vertikal unter dem Mittelpunkte der Trommel liegt.

Bei einem derartigen Versuche, welcher zur Kraftbestimmung einer Turbine angestellt wurde, war $r = 1,92$ m, $P = 21$ kg, also die Arbeit, welche bei jeder Umdrehung der Achse verrichtet wurde,

$$21 \cdot 1,92 \cdot 2 \cdot 3,14 = 253,2 \text{ Meterkilogramm.}$$

Da aber die Achse 120 Umdrehungen in der Minute, also 2 Umdrehungen in der Sekunde machte, so war die während einer Sekunde geleistete Arbeit 506,4 Meterkilogramm oder gleich der Arbeit von

$$\frac{506,4}{75} = 6,75 \text{ Pferdekraften.}$$

Fünftes Kapitel.

Mechanik flüssiger Körper.

§ 117. Gleichförmige Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkeiten.

Wir haben in § 8 den flüssigen Aggregatzustand der Materie dahin charakterisiert, daß bei ihm die Teilchen zwar auch noch durch innere Kräfte in bestimmten Entfernungen voneinander gehalten werden, aber nicht mehr wie bei den festen Körpern an bestimmte Nachbartheilchen gebunden erscheinen, vielmehr eine vollkommene Verschiebbarkeit derselben gegeneinander stattfindet, so daß eine Flüssigkeit stets die Form des Gefäßes annimmt, in dem sie sich befindet, ohne aber dabei ihr Volumen zu verändern. Von dieser Vorstellung aus gelangen wir unmittelbar zu einer klaren Einsicht in das Hauptprinzip des Gleichgewichtes der Flüssigkeiten, das in dem aus der Erfahrung abgeleiteten Satze besteht: Jede Kraft, die an irgend einer Stelle einer Flüssigkeitsmasse, z. B. auf einen Teil ihrer Oberfläche, ausgeübt wird, pflanzt sich nach allen Richtungen mit gleicher Stärke fort.

Wenn wir also an einer Stelle eines Flüssigkeitsvolumens auf die Flächeneinheit eine Kraft p ausüben, so wird an jeder anderen Stelle auf die Flächeneinheit eine gleiche Kraft p wirken. Gleichwohl bleiben die Teilchen im Inneren der Flüssigkeit in Ruhe, da vermöge des obigen Prinzips auf sie von allen Seiten gleiche und daher sich gegenseitig aufhebende Kräfte wirken. Die auf die Flächeneinheit ausgeübte Kraft heißen wir Druck¹⁾.

Betrachten wir im Inneren der Flüssigkeit einen von ihr gebildeten Würfel von 1 mm Seite und nehmen an, obige Kraft beziehe sich auf 1 mm² als Flächeneinheit, so erfolgt nach unserem Satze senkrecht gegen jede Seite des Würfels von außen her ein Druck p , und es werden sich dabei je die auf die gegenüberstehenden Seitenflächen ausgeübten Kräfte gegenseitig kompensieren, somit der Würfel in Ruhe bleiben. Nicht so verhält es sich aber mit den Teilchen an der Oberfläche, bzw. mit unserem Würfel, wenn eine seiner Seitenflächen in die Oberfläche fällt; alsdann kompensieren sich zwar wieder die Drucke auf die senkrecht zu dieser stehenden Seitenflächen des Würfels, dagegen wird der Druck p auf die der Oberfläche gegenüberstehende Basis

¹⁾ Es ist also Druck $= \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$. Diese Definition gilt für Flüssigkeiten und Gase allgemein, während bei festen Körpern noch vielfach Druck gleichbedeutend mit Kraft (Gewicht) ohne Rücksicht auf die Größe der Fläche gebraucht wird. Wir wollen für letztere Größe die Bezeichnung „Gesamtdruck“ gebrauchen.

des Würfels nicht durch einen Flüssigkeitsdruck aufgehoben, und es würde daher die Flüssigkeit an dieser Stelle durch ihn nach außen getrieben, wenn nicht eine feste Wand da ist, oder ein gleich großer Druck p von außen auf die Flüssigkeitsoberfläche ausgeübt wird. Soll also auch an der Oberfläche der Flüssigkeit Gleichgewicht stattfinden, so muß an allen Stellen derselben senkrecht zu ihr auf die Flächeneinheit ebenfalls ein Druck p stattfinden.

Es sei in Fig. 352 der horizontale Durchschnitt eines mit Wasser gefüllten, allseitig geschlossenen Gefäßes dargestellt, an welchem sich in gleicher Höhe vier vollkommen gleiche Röhren befinden, die durch Kolben verschlossen sind. Da diese Kolben gleichen Durchmesser haben und in gleicher Höhe liegen, so haben sie auch vollkommen gleiche Kraft durch die Schwere des Wassers auszuhalten, einen Druck, von welchem wir also vorderhand ganz absehen können, den wir also als nicht vorhanden betrachten wollen.

Würde nun durch irgend eine Kraft einer der Kolben, etwa A , nach innen gedrückt, so pflanzt sich dieser Druck durch das Wasser hindurch auf die übrigen Kolben fort, und man müßte, um zu verhindern, daß diese Kolben herausgedrückt werden, auf jeden derselben einen nach innen gerichteten Gegendruck anbringen, welcher vollkommen dem auf den Kolben A wirkenden Druck gleich ist; das Gleichgewicht kann also nur dann bestehen, wenn alle vier Kolben durch ganz gleiche Kräfte nach innen gedrückt werden.

Der Druck pflanzt sich jedoch nicht allein vom Kolben A auf die übrigen Kolben, sondern auf alle Teile der Gefäßwand fort, so daß jeder Flächenteil der Gefäßwand, welcher ebenso groß ist wie der Querschnitt des Kolbens A , auch eine ebenso große Kraft auszuhalten hat.

In Fig. 353 ist der Durchschnitt eines ähnlichen Gefäßes mit zwei Röhren dargestellt, welche gleichfalls mit Kolben geschlossen sein sollen, die Röhren und folglich auch der Querschnitt der Kolben sind aber nicht gleich. Es sei

Fig. 352.

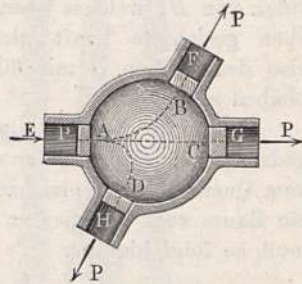


Fig. 353.

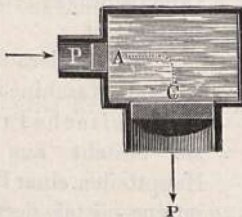


Fig. 354.



z. B. die Oberfläche des Kolbens C zehnmal so groß als die des Kolbens A , so wird, wenn irgend eine Kraft den Kolben A drückt, die Kraft auf den Kolben C auch zehnmal so groß sein als der auf A wirkende, weil jedes Flächenstück des Kolbens C , welches der Oberfläche des Kolbens A gleich ist, eine ebenso große Kraft auszuhalten hat als A selbst.

Wenn man also den Kolben A mit einer Kraft gleich dem Gewichte von 5 kg nach innen drückt, so müßte man zur Erhaltung des Gleichgewichtes an dem Kolben C eine nach innen gerichtete Kraft gleich dem Gewichte von 50 kg anbringen.

Der Druck pflanzt sich nicht allein in einer Horizontalebene fort, wie dies in den bisher betrachteten Beispielen der Fall war, sondern nach allen Seiten, also auch nach oben und nach unten.

Fig. 354 stellt den vertikalen Durchschnitt zweier unten verbundener Röhren von ungleichem Querschnitt dar. Der die Röhren verbindende Raum sei mit Wasser gefüllt und auf dieses die Kolben *A* und *B* aufgesetzt. Wenn nun auf den Kolben *A*, dessen Querschnitt zehnmal kleiner sein mag als der des Kolbens *B*, ein Gewicht, etwa von 6 kg, aufgelegt wird, so wird sich der Druck in der Weise bis zum Kolben *B* fortpflanzen, daß gegen jedes Flächenstück von *B*, welches ebenso groß ist als der Querschnitt von *A*, eine nach oben gerichtete Kraft gleich dem Gewicht von 6 kg wirkt; man müßte also den Kolben *B* mit 60 kg belasten, wenn das Gleichgewicht ungestört bleiben soll.

Wird der Kolben *A* mit dem Querschnitt *q* und einer Höhe *h* hinabgedrückt, so verdrängt er ein Volumen Wasser = *qh*. Wird der Kolben *B* vom Querschnitt *Q* gleichzeitig um die Höhe *H* gehoben, so wird dadurch ein Raum vom Volumen = *QH* gewonnen. Da nun offenbar *qh* = *QH* sein muß, so folgt hieraus:

$$h:H = Q:q \dots \dots \dots (1)$$

d. h. die Wege der Kolben verhalten sich verkehrt wie ihre Querschnitte. Da aber die Querschnitte sich verhalten wie die Kräfte, so verhalten sich die

Wege verkehrt wie die Kräfte, wie wir dies bei den aus festen Körpern gebauten Maschinen nachgewiesen haben. Es gilt also auch bei der Vorrichtung in Fig. 354, daß die übertragene Arbeit gleich groß bleibt, oder daß auch hier das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten erfüllt bleibt.

Eine hierauf beruhende Maschine ist die hydraulische Presse; sie besteht aus zwei Hauptteilen, einer Druckpumpe, mittels deren der Druck auf das Wasser ausgeübt wird, und einem Kolben mit einer

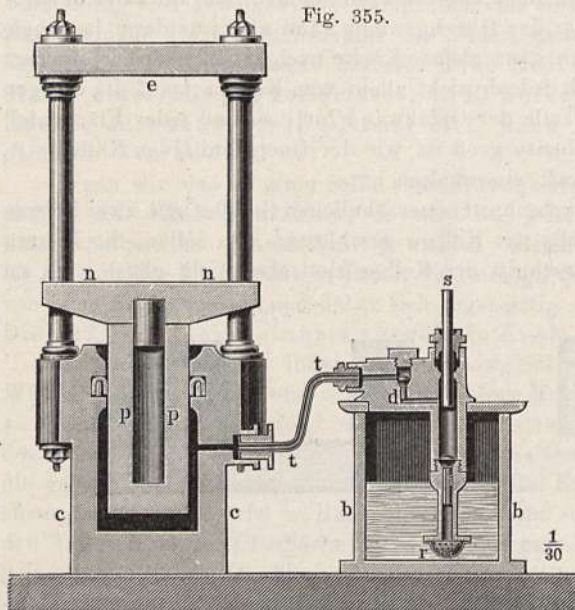


Fig. 355.

Platte, welcher den Druck empfängt, um ihn auf den zu pressenden Körper zu übertragen. Fig. 355 ist ein Durchschnitt der hydraulischen Presse und Fig. 356 eine äußere Ansicht der Druckpumpe von der rechten Seite der Fig. 355 gesehen. Durch den Hebel *l* wird der Kolben *s* gehoben, das Wasser des Behälters *b* dringt durch das Sieb *r*, hebt das Ventil *i* und gelangt so unter den Kolben *s*. Wenn man den Hebel niederdrückt, so geht auch der Kolben *s*

nieder, das zurückgetriebene Wasser schließt das Ventil i , hebt das Ventil d und gelangt durch die Röhre t in den Zylinder c der Presse; hier drückt es nun, vorausgesetzt, daß die ganze Höhlung von c samt der Röhre t bereits mit Wasser gefüllt sind, gegen den Kolben p , den es mit der Platte n hebt, und so wird der zu pressende Körper zwischen n und der festen Platte e zusammengedrückt.

Wenn der Kolben s durch irgend eine Kraft niedergedrückt wird, so hat jeder Flächenteil der Gefäßwände, welcher dem Querschnitt des Kolbens s gleich ist, eine gleiche Kraft auszuhalten. Ist also der Querschnitt des Kolbens pn mal so groß als der des Kolbens s , so wird der Kolben p mit einer Kraft nk gehoben, wenn der Kolben s mit einer Kraft k niedergedrückt wird.

Bezeichnen wir mit K die Kraft, mit welcher der große Kolben gehoben wird, so ist:

$$K = k \frac{R^2}{r^2},$$

wenn r den Halbmesser des kleinen, R den des großen

Kolbens bezeichnet. Ist nun ferner l der Hebelarm, an welchen der kleine Kolben angehängt ist, L der Hebelarm, an welchem der Arbeiter drückt, so ist:

$$k = D \frac{L}{l},$$

wenn D die Kraft bezeichnet, welche der Arbeiter ausübt, mithin haben wir:

$$K = D \frac{L \cdot R^2}{l \cdot r^2}.$$

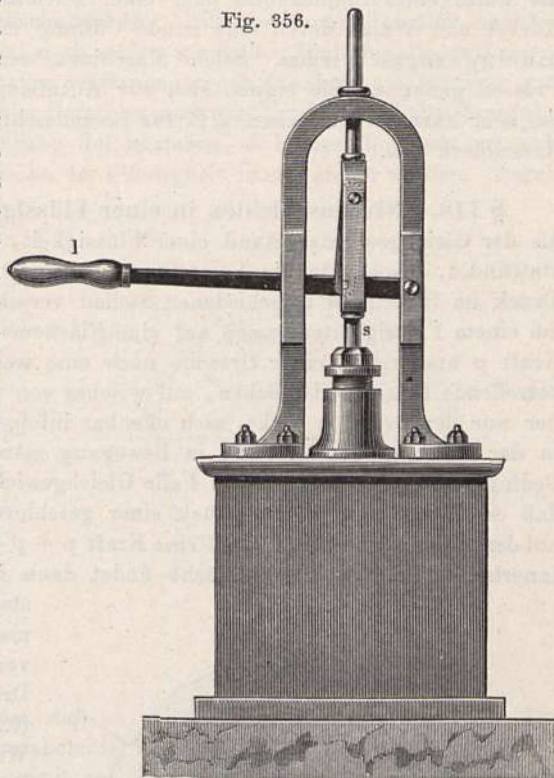
Ist z. B. $R = 10r$ und $L = 6l$, so ist $K = D \cdot 600$.

Wenn also der Hebel bei l mit einer Kraft gleich dem Gewicht von 10 kg niedergedrückt wird, so wird der Kolben p mit einer Kraft gleich dem Gewicht von 6000 kg gehoben.

Von der Kraft, welche am Hebel l angewandt wird, geht ein Teil durch Reibungswiderstände verloren, bevor sie sich bis zum Kolben p fortpflanzt; deshalb wird der Effekt stets geringer sein, als er nach den eben angeführten Betrachtungen sein sollte.

Da das Übersetzungsverhältnis an der hydraulischen Presse ein desto größeres ist, je größer das Verhältnis der Durchmesser der Kolben, so hat

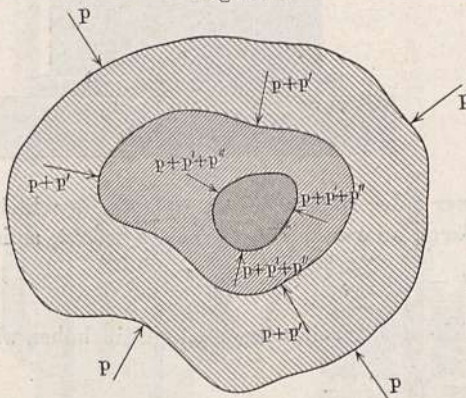
Fig. 356.



man zur Erreichung möglichst großer Kräfte den Durchmesser des Preßkolbens möglichst groß, dagegen jenen des Druckkolbens möglichst klein zu machen. Dies bedingt aber den Mißstand, daß der Druckkolben zu schwach wird; man hat deshalb Maschinen konstruiert, bei welchen der Druckkolben die Form eines Stahldrahtes oder einer Darmsaite besitzt, welche mittels Kurbel und Walze durch eine runde Öffnung in das Innere des Behälters hineingezogen werden. Solche Maschinen werden stereohydraulische Pressen genannt. Sie eignen sich zur Ausübung sehr bedeutender Kräfte auf sehr kurze Wegstrecken, z. B. für Lochmaschinen zur Durchbohrung von Kesselblech usw.

§ 118. Niveauschichten in einer Flüssigkeit. Mehr Schwierigkeit als der Gleichgewichtszustand einer Flüssigkeit, wo überall derselbe Druck stattfindet, macht für die Vorstellung derjenige einer Flüssigkeit, wo der Druck im Innern an verschiedenen Stellen verschieden ist. Es wirke z. B. bei einem Flüssigkeitsvolumen auf eine Flächeneinheit im Innern außer der Kraft p aus irgend einer Ursache noch eine weitere Kraft p' , so wird das betreffende Flüssigkeitsteilchen, auf welches von der entgegengesetzten Seite her nur der Druck p wirkt, sich offenbar infolge des Drucküberschusses p' in der Richtung des letzteren in Bewegung setzen, und es gibt bloß eine Bedingung, um auch in diesem Falle Gleichgewicht zu erhalten, die nämlich, daß das betreffende Flächenstück einer geschlossenen Oberfläche angehöre, auf deren Flächeneinheit überall eine Kraft $p + p'$ von außen ausgeübt werde. Innerhalb dieser neuen Oberfläche findet dann überall ein Druck $p + p'$

Fig. 357.



statt, so daß auch jedes Element der Oberfläche wieder von allen Seiten einen gleichen Druck erfährt und somit in Ruhe bleiben wird. Auf diese Weise können wir uns noch eine Reihe weiterer geschlossener Oberflächen denken, innerhalb welcher und auf welche senkrecht zu ihnen je immer höhere Drucke ausgeübt werden, wie dies Fig. 357 für drei Oberflächen darstellt, und es kann somit unbeschadet des Gleichgewichtes der Druck in einer Flüssigkeit von Stelle zu Stelle variieren. Die geschlossenen Oberflächen gleichen Druckes, welche in diesem Falle in der Flüssigkeit vorhanden sein müssen und die je auf den Richtungen der Drucke senkrecht stehen, werden Niveauschichten genannt.

§ 119. Freie Oberfläche einer Flüssigkeit. Auch die freie Oberfläche einer Flüssigkeit wird eine solche Niveauschicht sein, sich also stets an jeder Stelle senkrecht zur Resultanten der wirkenden Kräfte einstellen. Demgemäß wird die freie Oberfläche der Flüssigkeit in einem Gefäße, wenn nur die Schwere auf sie einwirkt, eine horizontale

Ebene sein, was wir vorwegnehmend bereits in § 27 auf die Libelle angewendet haben. Tritt aber zu der Schwere noch eine andere Kraft hinzu, z. B. wie im Falle der Fig. 358 die Zentrifugalkraft, wenn wir das zylindrische Gefäß CC um seine Achse AA rotieren lassen, so nimmt die Flüssigkeitsoberfläche statt der Horizontalebene durch aa' die Gestalt eines Rotationsparaboloids an vom Durchschnitt $bc'b'$. Die Resultante r nämlich aus der Schwerkraft g und der radial nach außen wirkenden Zentrifugalkraft f wird, je weiter wir uns von der Achse entfernen, wegen Zunahme der letzteren mit dem Radius bei gleichbleibender Rotationsgeschwindigkeit gemäß Gleichung (1), § 51, immer mehr der Richtung der letzteren, d. h. der Horizontalen, sich nähern und somit die Oberfläche der Flüssigkeit immer steiler werden. Durch

Fig. 358.

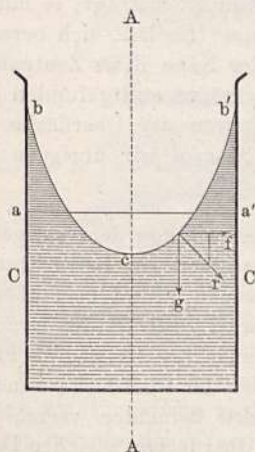
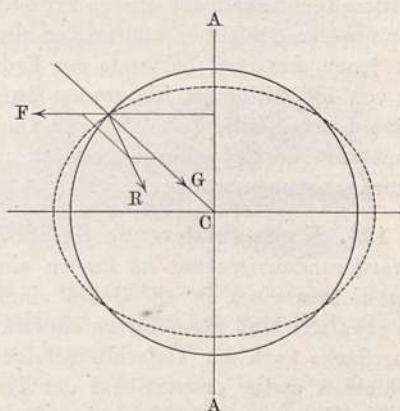


Fig. 359.



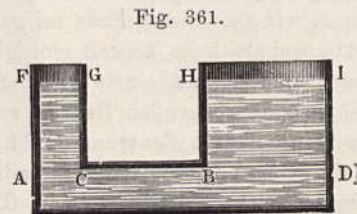
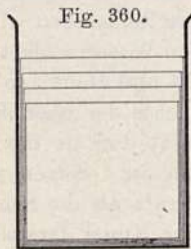
höhere Rechnung findet man, daß so die Flüssigkeitsoberfläche in der Tat die Gestalt eines Rotationsparaboloids, wie angegeben, annehmen wird.

Nehmen wir an, unsere Erde sei ganz mit einer Wasserschicht bedeckt, und die Atmosphäre habe überall eine gleiche Dichte und Höhe, so wird die Wasseroberfläche ringsum einem gleichen, dem Gewichte der über ihr ruhenden Luftsäule entsprechenden Drucke ausgesetzt sein, der als der Schwere entspringend nach dem Zentrum der Erde gerichtet ist. Setzen wir diese zunächst als ruhend voraus, so daß keine andere Kraft als die Schwere auf die Flüssigkeit wirke, so würde deren Oberfläche eine Kugel darstellen. Infolge der Drehung der Erde um ihre Achse AA , Fig. 359, kommt aber zu der nach dem Zentrum C hin gerichteten Schwerkraft G noch die senkrecht zur Achse AA nach außen wirkende Fliehkraft F hinzu, so daß sich die freie Oberfläche der Wasserschicht senkrecht zur Resultanten R aus beiden einstellen wird, woraus dann für die ganze Oberfläche statt einer Kugel die Gestalt eines an den Enden der Erdachse abgeplatteten Rotationsellipsoids (punktierte Linie der Figur) resultiert, wie wir dies in § 102 bereits als eine der Ursachen der Zunahme der Schwere vom Äquator zum Pole hin erwähnt und in § 51 durch einen Versuch mit der Schwungmaschine an elastischen Messingringen und einer plastischen Tonkugel demonstriert haben.

Da aber auch die feste Erdrinde und nicht bloß der flüssige Teil derselben zufolge der Gradmessungen ein an den Polen abgeplattetes Rotations-

ellipsoid darstellt, so hat man daraus geschlossen, daß die Erde in einer früheren Epoche ihrer Existenz feurig flüssig gewesen sein müsse und damals diese Gestalt angenommen habe. Wie dem auch in Wirklichkeit gewesen sein möge, so würde die durchweg flüssige Erde ein vorzügliches Beispiel einer Flüssigkeitsmasse darbieten, bei welcher infolge des Gewichtes der nächst höheren Schichten auf die tieferen der Druck nach innen zu beständig wächst und wo die geschlossenen Niveauschichten konzentrische Kugelflächen bzw. Sphäroide zur äußeren Oberfläche repräsentieren, also doch überall Gleichgewicht stattfinden könnte. Infolge dieses mit der Tiefe wachsenden Druckes wird aber auch die Dichtigkeit der Flüssigkeit gegen das Zentrum der Erde hin zugenommen haben; in der Tat ist die mittlere Dichtigkeit der Erdmasse, wie wir gesehen haben, 5,5, während nach A. v. Humboldt die mittlere Dichtigkeit der oberen Erdschichten nur 2,5 beträgt; es muß also die der unteren Schichten viel größer als 5,5 sein. Es läßt sich berechnen, daß in jenem flüssigen Zustande der Erde in der Nähe ihres Zentrums ein Druck von $1\frac{1}{2}$ Millionen Kilogramm auf 1 cm^2 müßte stattgefunden haben, was eine beträchtliche Zunahme der Dichtigkeit von der Oberfläche gegen das Zentrum der Erde hin begreiflich macht, worauf wir übrigens später noch zurückkommen werden.

§ 120. Kommunizierende Gefäße. Gehen wir von dem vorigen Beispiel variierenden Druckes im Innern einer Flüssigkeit zur Betrachtung des Gleichgewichtes einer in ein Gefäß eingeschlossenen Flüssigkeit über, auf welche ebenfalls bloß die Schwere einwirkt, so wird auch da der Druck von der Oberfläche nach der Tiefe hin zufolge des Gewichtes der oberen Flüssigkeitsschichten stetig proportional der Tiefe unter der Oberfläche zunehmen, wobei die Ergänzung der übereinander liegenden Schichten verschiedenen Druckes zu geschlossenen Niveauschichten oder Oberflächen gleichen Druckes durch einen Verlauf derselben je an den Wänden des Gefäßes herum statt-

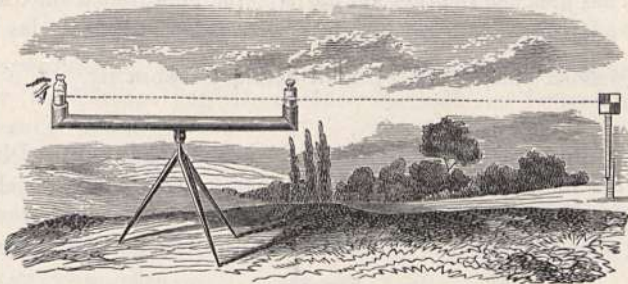


findet, wie dies Fig. 360 darstellt, wo die zusammenfallenden Niveauschichten längs den Wänden nur behufs der Verdeutlichung separat gezeichnet sind. In jeder Horizontalebene eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes muß also überall derselbe Druck stattfinden, der abgesehen von dem auf die Oberfläche wirkenden Luftdruck dem Gewicht der Flüssigkeitssäule über der Flächeneinheit bis zur Oberfläche entspricht. Hieraus folgt unmittelbar zunächst der Satz, daß in kommunizierenden zylindrischen Röhren auch von verschiedener Weite die Flüssigkeit gleich hoch steht, d. h. in beiden Röhren in dieselbe Horizontale falle. In der Tat werden in den unten kommunizierenden Zylindern AF und DI der Fig. 361 die Oberflächen FG und HI behufs Gleichgewicht in dieselbe Horizontale fallen müssen, da nur dann in

der horizontalen Niveauschicht $ACBD$ überall derselbe Druck stattfinden wird. Man kann dies auch aus der gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes an der Hand der gleiche Form und Dimensionen aufweisenden Fig. 354 demonstrieren, indem offenbar die dort auf die Flüssigkeitsoberflächen drückenden Gewichte der beiden Kolben mit den auf ihnen ruhenden Lasten, die sich zueinander behufs Gleichgewicht wie die Querschnitte der beiden Zylinder verhalten müßten, durch Wassersäulen mit diesen Querschnitten und gleicher Höhe GC und HB ersetzt werden können.

Auf das Gesetz der kommunizierenden Röhren gründet sich die Wasserwaage oder Kanalwaage, wie sie in ihrer Anwendung zum Nivellieren im

Fig. 362.



Felde die Fig. 362 darstellt. Wie wir später sehen werden, dürfen aber dabei nicht ganz enge Röhren verwendet werden, da bei ihnen noch andere Kräfte als die Schwere zur Geltung kommen.

Haben wir in kommunizierenden Röhren statt einer Flüssigkeit deren zwei, welche sich nicht mischen, wie dies in Fig. 363 dargestellt

Fig. 363.

ist, so müssen sich, damit Gleichgewicht stattfindet, die Höhen der Flüssigkeitssäulen in beiden Schenkeln über der Trennungsfäche umgekehrt verhalten wie die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten. In der durch die Berührungsfäche B gelegten Horizontalebene durch beide Schenkel BA muß nämlich überall derselbe Druck stattfinden. Der Druck in BF bei B ist aber: $h \cdot d$, und in AE ist er bei A : $h' d'$; wenn d und d' die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten darstellen und h und h' die Höhen BF und AE ; sollen diese Drucke gleich sein, so muß also in der Tat sein:

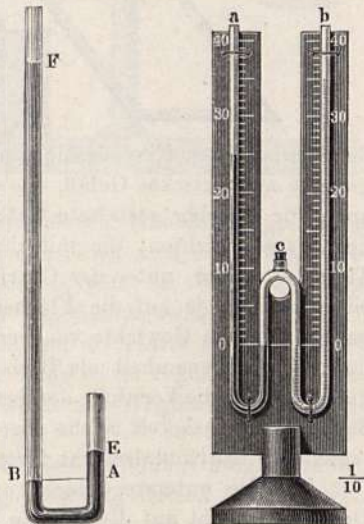
$$\frac{h}{h'} = \frac{d'}{d} \quad \dots \quad (1)$$

Hätten wir z. B. in der Röhre BF Wasser und in AE Quecksilber, so müßte sein:

$$\frac{h}{h'} = 13,6,$$

da die Dichtigkeit d' des Quecksilbers 13,6 mal größer ist als die des Wassers d .

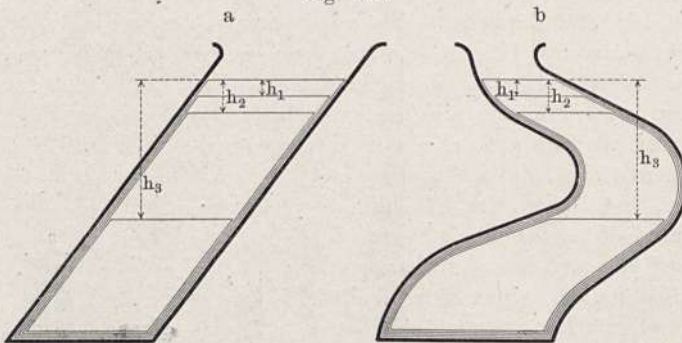
Fig. 364.



Sind die beiden Flüssigkeiten mischbar, so kann man sich zur Prüfung dieses Gesetzes des in Fig. 364 dargestellten Apparates bedienen, bei welchem die beiden Flüssigkeiten in getrennten kommunizierenden Röhren *a* und *b* sich befinden, deren kürzere Schenkel bei *c* vereinigt sind und dort eine durch einen Kork oder besser durch einen Hahn verschließbare Öffnung besitzen. Man komprimiert von da aus mit einer Handluftpumpe oder einem Kautschukball oder auch bloß mit dem Munde durch einen angesetzten Kautschukschlauch die Luft in diesen kurzen Schenkeln, wodurch die Flüssigkeiten in den beiden äußeren Schenkeln verschieden gehoben wird. Eine Teilung längs dieser Schenkel *a* und *b* läßt dann die Höhe der Flüssigkeitssäulen über den Niveaus der Flüssigkeiten in den kürzeren abmessen, wodurch man in Anbetracht des gleichen Druckes auf die letzteren unmittelbar die Gleichung (1) verifizieren oder auch, wie wir später noch erörtern werden, das Verhältnis von $\frac{d'}{d}$ bestimmen kann, wenn es nicht bereits bekannt ist.

§ 121. Bodendruck. Hydrostatisches Paradoxon. Die Betrachtung über die Zunahme des Druckes in einer Flüssigkeit, die sich in einem Gefäße befindet, mit der Tiefe unter der Oberfläche entsprechend dem Gewichte der Flüssigkeitssäule von der betrachteten Stelle bis zur Oberfläche und über

Fig. 365.



den Verlauf der Niveauschichten längs der Wände gilt nicht bloß für ein gerades zylindrisches Gefäß, wie es in Fig. 360 angenommen wurde, sondern auch für beliebig gestaltete Gefäße wie in der Fig. 365 a und b. Innerhalb der Niveauschichten, die mit ihrer oberen horizontalen Begrenzung in den Tiefen h_1 , h_2 , h_3 unter der Oberfläche sich befinden, wird bis zur nächsten Niveauschicht je auf die Flächeneinheit in jeder Richtung eine Kraft ausgeübt, die dem Gewichte von vertikalen Flüssigkeitssäulen von diesen Höhen und der Flächeneinheit als Basis entspricht, wobei es offenbar ganz gleichgültig ist, ob die Vertikale der betreffenden Niveauschicht direkt bis zur Oberfläche der Flüssigkeit reiche oder nicht, da sich ja der Druck von Horizontalschicht zu Horizontalschicht fortpflanzt und wächst.

Für die unterste Schicht unmittelbar über dem Boden wird also der Druck senkrecht auf die Flächen auch dem Gewichte einer vertikalen Wassersäule vom Boden bis zur Oberfläche der Flüssigkeit entsprechen ohne Rücksicht darauf, wie das Gefäß über diesem Boden geformt sei, und wird folglich der ganze horizontale Boden eine Kraft auszuhalten haben, die

einfach dem Gewichte einer vertikalen Flüssigkeitssäule über ihm bis zur Oberfläche der Flüssigkeit im Gefäße gleichkommt, ob nun das Gefäß zylindrisch ist, sich nach oben verengt oder erweitert oder irgend eine Gestalt hat.

Bezeichnet Q den Querschnitt des horizontalen Bodens, H die Höhe der Flüssigkeit im Gefäße über ihm und d ihre Dichte, d. h. die Masse in der Volumeneinheit, so ist somit die auf den Boden ausgeübte Kraft P im absoluten Maße gegeben durch:

$$P = Q \cdot H \cdot d \cdot g^1) \quad (1)$$

Drücken wir Q in Quadratcentimetern und H in Centimetern aus und messen wir P nach Grammgewicht, so erhalten wir, wenn reines Wasser im Gefäße ist:

$$P = Q \cdot H.$$

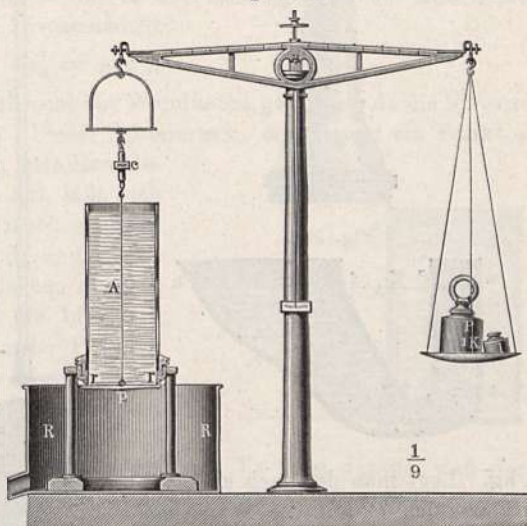
Die Verwechslung dieser Kraft mit dem Gewichte des ganzen Gefäßinhalts, der bei Verengung des Gefäßes oberhalb des Bodens kleiner und bei Erweiterung desselben größer wird, hat jedenfalls dazu geführt, obiger Eigenschaft des Bodendruckes den Namen hydrostatisches Paradoxon beizulegen. Pascal hat denn auch einen besonderen Apparat angegeben, um die Richtigkeit obiger Gleichung durch das Experiment zu beweisen.

Fig. 366 stellt einen Apparat dieser Art dar.

Die untere Öffnung eines Messingringes r , welcher genau 0,798 dm inneren Durchmesser hat, und dessen unterer genau horizontal stehender Rand vollkommen eben abgeschliffen sein muß, wird durch eine Messingplatte p geschlossen, welche mittels eines Drahtes an den einen Arm einer Wage angehängt ist. In die Wagschale auf der anderen Seite der Wage wird ein Gewicht l gelegt, welches genau der Platte p das Gleichgewicht hält. Bei c befindet sich eine Vorrichtung, mittels deren man die Platte p etwas heben oder senken kann, und welche erlaubt, ihre Höhe so zu regulieren, daß sie gerade die Öffnung des Ringes r schließt, wenn der Wagbalken horizontal steht.

In den Ring r ist nun zunächst ein zylindrisches Gefäß A eingeschraubt, welches gleichen Durchmesser mit dem Ringe hat und dessen Boden durch

Fig. 366.



in den Ring r ist nun zunächst ein zylindrisches Gefäß A eingeschraubt, welches gleichen Durchmesser mit dem Ringe hat und dessen Boden durch

¹⁾ Die Kraft P wird oft auch als „Bodendruck“ bezeichnet. Darunter ist aber nicht der Druck auf die Flächeneinheit, sondern der Gesamtdruck zu verstehen (siehe die Anmerkung S. 354).

die Platte p gebildet wird. Der Inhalt dieses Gefäßes vom Boden bis zu einer 2 dm über dem Boden befindlichen Marke beträgt: $0,798^2 \cdot \pi \cdot 2$ oder gerade 1 dm^3 , das diesen Raum ausfüllende Wasser hat also das Gewicht von

Fig. 367.



Fig. 368.

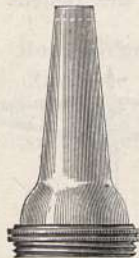


Fig. 369.

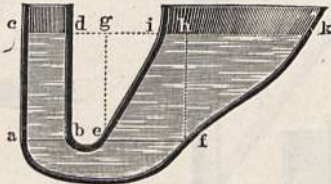
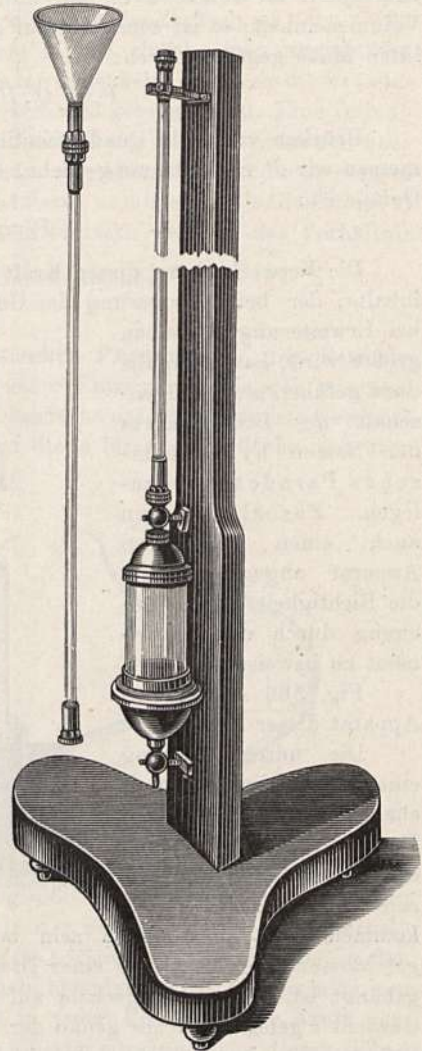


Fig. 370.



1 kg. Legt man demnach ein Kilogrammstück P auf die Wagschale rechts, so wird gerade Gleichgewicht bestehen, wenn das Gefäß A bis zur Marke mit Wasser gefüllt ist; jedes fernere Zuschütten von Wasser bewirkt ein Niederdrücken der Bodenplatte p , infolgedessen ein Teil des Wassers aus A in das Gefäß B ausfließt (dessen Durchmesser in unserer Figur der Raumersparnis wegen zu klein gezeichnet ist).

Schraubt man nun in den Ring r statt des zylindrischen Gefäßes A das oben verengte Gefäß Fig. 368, oder das oben erweiterte Gefäß Fig. 367, so muß man dieselben wieder genau 2 dm hoch mit Wasser füllen, wenn der Druck auf den Boden derselbe bleiben, jedes fernere Zugießen von Wasser also ein Abdrücken der Bodenplatte p bewirken soll.

Es bedarf nach dem Vorigen keiner näheren Begründung mehr, warum auch in dem durch Fig. 369 dargestellten Falle, d. h. bei unregelmäßig ge-

stalteter kommunizierender Röhre, der oben für zylindrische Röhren aufgestellte Satz doch gilt, also auch hier die Niveaus der Flüssigkeit in beiden Schenkeln cd und ik in dieselbe horizontale Ebene fallen werden.

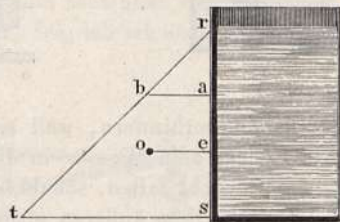
Auf den Satz über den Bodendruck gründet sich die Realsche Presse, die in Fig. 370 dargestellt ist¹⁾ und bezweckt, Wasser oder andere Flüssigkeiten unter hohem Drucke zur Extraktion von Säften aus Pflanzenteilen durchzutreiben, die zwischen zwei Drahtsiebe im unteren weiteren Teile des Apparates eingelagert sind. Da der Druck auf das Sieb nur von der Höhe der Wassersäule über ihnen abhängt, so genügt zur Erhöhung desselben, auf den oberen Teil des Apparates eine lange, enge, also nicht viel Flüssigkeit fassende Röhre aufzuschrauben und diese mittels des Trichters am oberen Ende mit Wasser zu füllen.

§ 122. Seitendruck. Die Niveauschichten in den Figuren 360 und 365 a und b lassen auch unmittelbar auf den Seitendruck schließen, der von der Flüssigkeit auf die Gefäßwände ausgeübt wird. So ist z. B. nach den letzteren Figuren der Druck der Wand in der Tiefe h_2 unter der Oberfläche entsprechend der betreffenden Niveauschicht:

$$p_2 = h_2 dg,$$

und zwar ist derselbe stets senkrecht zur Wandfläche gerichtet, da die Niveauschicht an dieser hin verläuft. Dieser Seitendruck, den irgend ein Punkt a des vertikalen, mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes in Fig. 371 auszuhalten hat, läßt sich durch Zeichnung anschaulich machen. Man ziehe in a eine horizontale Linie und mache ihre Länge ab gleich der Tiefe von a unter dem Wasserspiegel, so kann die Linie ab den Druck repräsentieren, den der Punkt a auszuhalten hat. Macht man dieselbe Konstruktion für mehrere Punkte der vertikalen Linie rs , so werden die Endpunkte aller der horizontalen Drucklinien in die Linie rt fallen. Es folgt daraus, daß der Gesamtdruck, welchen die Linie rs der vertikalen Gefäßwand auszuhalten hat, durch den Flächenraum des Dreiecks rst repräsentiert ist.

Fig. 371.



Somit hat man, wenn P die gesamte Kraft auf die Seitenwand darstellt, diese eine Breite B hat und die Höhe der Flüssigkeitsoberfläche über dem Boden H ist:

$$P = \frac{H^2}{2} \cdot B \cdot d \cdot g \dots \dots \dots (2)$$

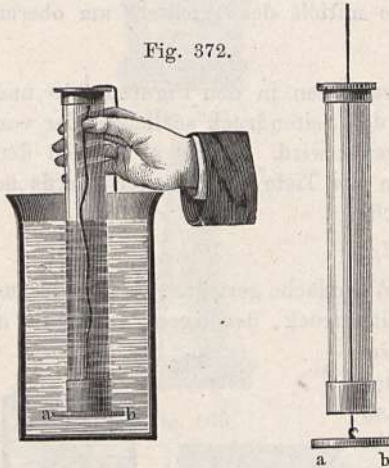
Der Angriffspunkt dieser Resultierenden aller elementaren Pressungen, welche das Wandstück auszuhalten hat, heißt Mittelpunkt des Druckes. Er liegt immer tiefer als der Schwerpunkt des Wandstückes, weil ja die Stärke des Druckes nach unten wächst. Der Mittelpunkt des Druckes für die vertikale Linie rs ist leicht zu ermitteln; denn es ist offenbar derjenige Punkt e , in welchem die Linie rs von derjenigen horizontalen Linie getroffen wird, die durch den Schwerpunkt o des Dreiecks rst geht. Es liegt also der

¹⁾ Entnommen aus Fricks Physikalische Technik, 6. Aufl., von O. Lehmann, 1, 225.

Mittelpunkt des Druckes P auf der vertikalen Mittellinie der Wand, und zwar ist seine Höhe über dem Boden ein Drittel der Höhe, in welcher sich die Flüssigkeitsoberfläche über dem Boden befindet ¹⁾.

§ 123. Druck im Inneren der Flüssigkeiten. Archimedisches Prinzip. Jedes Teilchen einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit hat von allen Seiten her einen vollkommen gleichen Druck auszuhalten. Gegen die untere Seite einer sehr dünnen horizontalen Wasserschicht wirkt also ein ebenso großer Druck von unten her, wie der ist, welcher von oben her auf ihr lastet. Daß im Inneren der Flüssigkeit ein solcher nach oben wirkender Druck wirklich vorhanden ist, läßt sich leicht durch den Versuch zeigen.

Fig. 372.



Das untere Ende einer 5 bis 6 cm weiten Glasröhre, Fig. 372, ist mit einer Messingfassung versehen, deren Rand eben abgeschliffen ist. ab ist eine dünne Metallscheibe, welche in ihrer Mitte einen Haken hat, vermittelt dessen man sie an einer durch die Röhre hindurchgehenden Schnur anhängen kann, so daß, wenn man den Faden anzieht, die Scheibe die untere Öffnung der Röhre vollkommen verschließt. Auf diese Weise verschlossen, wird die Röhre in Wasser eingetaucht. Nun ist es nicht mehr nötig, den Faden anzuziehen, um das Herunterfallen der

Scheibe zu verhindern, weil sie durch die Flüssigkeit nach oben gedrückt wird. Gießt man Wasser in die Röhre, so wird die Metallscheibe durch ihr eigenes Gewicht fallen, sobald, oder richtiger, bevor das Niveau des Wassers in der Röhre dem äußeren gleich geworden ist, denn nun erleidet die Metallscheibe durch die Flüssigkeit gleichen Druck nach unten und nach oben.

Auf dem erwähnten Drucke beruht das

Archimedische Prinzip ²⁾. Dasselbe lautet: Jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper erleidet infolge des Druckes der ersteren eine nach aufwärts gerichtete Kraft, welche der Größe nach gleich ist dem Gewichte der vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmasse. Diese Kraft heißt der Auftrieb. Da diese Kraft dem Gewichte des Körpers entgegen gerichtet ist, so kommt nur die Differenz beider Kräfte zur Wirkung. Man pflegt daher das Archimedische Prinzip auch so auszudrücken. Jeder Körper verliert beim Eintauchen in eine Flüssigkeit scheinbar so viel von seinem Gewichte, als die von ihm verdrängte Flüssigkeit wiegt. Ein wirklicher „Gewichtsverlust“ findet nicht statt, denn das wirkliche Gewicht, d. i. die Anziehungskraft der Erde auf den Körper, erleidet durch sein Eintauchen keine Verminderung.

¹⁾ Über Apparate für Seitendruck und Bodendruck vgl. A. Höfler, Zeitschr. für phys. u. chem. Unterricht 16, 257; A. Hartwich, ebend. S. 275.

²⁾ Über die Entdeckung dieses Prinzips durch Archimedes (287 bis 212 v. Chr.) berichtet Vitruv, „De architectura“, lib. 9.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Gesetzes durch eine einfache Betrachtung überzeugen. Irgend ein gerades Prisma sei in eine Flüssigkeit eingetaucht, wie dies Fig. 373 darstellt. Da in jeder Niveauschicht die Drucke ringsum senkrecht gegen die vertikalen Seitenwände des Prismas gerichtet sind, so werden sich offenbar die Flüssigkeitsdrucke auf die Seitenwände des Prismas gegenseitig aufheben, so daß im horizontalen Sinne kein Kraftüberschuß an irgend einer Stelle übrig bleibt. Dagegen ist dies für die obere und untere Fläche des Prismas nicht der Fall. Die Kraft von unten wird sein: $p' = h' q d . g$, wenn d die Dichtigkeit der Flüssigkeit und q den Querschnitt des Prismas darstellt, und die Kraft von oben ist: $p = h . q . d . g$; es ist somit ein Kraftüberschuß D von unten über den von oben:

$$D = p' - p = (h' - h) q . d . g.$$

Nun ist $(h' - h) q$ nichts anderes als das Volumen des Prismas, und es stellt daher D in der Tat das Gewicht einer dem Volumen des Prismas gleichen Flüssigkeitsmasse dar.

Nehmen wir statt eines einzelnen Prismas ein Bündel von mehreren wie dies Fig. 374 darstellt, so ist klar, daß jedes einzelne Prisma durch das Eintauchen in die Flüssigkeit von seinem Gewichte scheinbar so viel verliert, als ein gleiches Volumen der Flüssigkeit wiegt, folglich ist auch der schein-

Fig. 373.



Fig. 374.

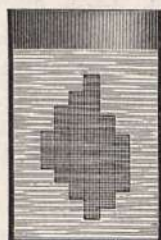
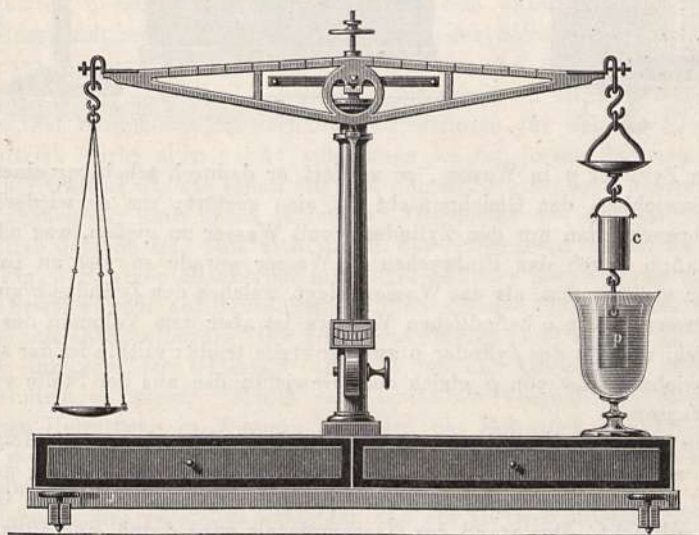


Fig. 375.



bare Gewichtsverlust, welchen der ganze aus mehreren Prismen zusammengesetzte Körper erleidet, gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitsmasse, deren Volumen dem Gesamtvolumen aller Prismen gleich ist. Da man sich aber einen jeden Körper in eine Menge solcher vertikal stehender Prismen von

sehr kleinem Querschnitt zerlegt denken kann, so läßt sich unser Schluß auf jeden beliebigen Körper ausdehnen, und es ist also damit die Richtigkeit des Archimedischen Prinzips für jeden beliebig geformten Körper bewiesen.

Von der Wahrheit des Archimedischen Prinzips kann man sich übrigens auch durch den Versuch überzeugen. An der einen Schale einer Wage, Fig. 375, ist ein hohler Zylinder *c* angehängt, an welchem wieder ein massiver Zylinder *p* hängt, der ganz genau in die Höhlung des oberen hineinpaßt, wie man dies Fig. 376 sieht, in welcher der Zylinder *p* teilweise in *c* steckend in größerem Maßstabe dargestellt ist. Auf die andere Wagschale legt man so viele Gewichte, daß das Gleichgewicht hergestellt ist. Taucht man nun

Fig. 376.

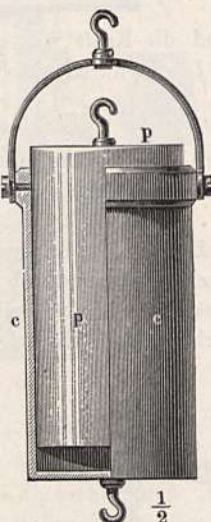
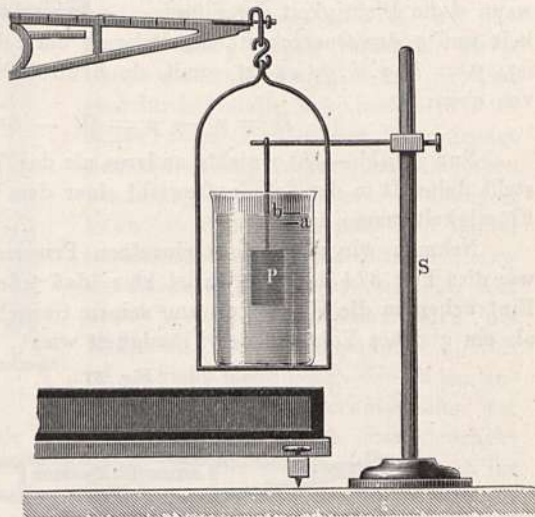


Fig. 377.



aber den Zylinder *p* in Wasser, so verliert er dadurch scheinbar einen Teil seines Gewichtes, das Gleichgewicht ist also gestört; um es wiederherzustellen, braucht man nur den Zylinder *c* voll Wasser zu gießen, was offenbar zeigt, daß *p* durch das Eintauchen in Wasser gerade so viel an Gewicht scheinbar verloren hat, als das Wasser wiegt, welches den Zylinder *c* ausfüllt. Das Volumen des in *c* befindlichen Wassers ist aber dem Volumen des Wassers gleich, welches der Zylinder *p* aus der Stelle treibt; mithin ist der scheinbare Gewichtsverlust von *p* gleich dem Gewichte des aus der Stelle vertriebenen Wassers.

Eine lehrreiche Modifikation des beschriebenen Experimentes ist folgende. Auf die rechtsseitige Schale der Wage wird ein Gefäß mit Wasser gesetzt, Fig. 377, und dieses durch Gewichte auf der anderen Schale ins Gleichgewicht gebracht. Der Stand des Wasserspiegels wird durch eine angeklebte Marke *a* bezeichnet. Hierauf wird ein an dem horizontalen Arme eines festen Stativs *S* aufgehängter Körper *P* in das Wasser eingesenkt. Die Schale sinkt, und es ist eine Anzahl von Gewichtsstücken auf der anderen Schale zuzulegen, damit das Gleichgewicht wiederhergestellt wird. Der Wasserspiegel reicht jetzt bis *b*, wo eine zweite Marke angebracht wird.

Nimmt man nun den eingehängten Körper wieder fort, so steigt die Schale wieder und kommt erst ins Gleichgewicht, wenn so viel Wasser zugegossen wird, bis dessen Spiegel wieder an die Marke b reicht.

Noch vollkommener wird diese Umkehr des Experimentes erreicht, wenn man am festen Stativ die Vereinigung beider Körper (wie in Fig. 375 bei der Wagschale) aufhängt und den massiven unteren Zylinder p wie dort in das Gefäß auf der Wagschale eintaucht. Es steigt dann auch das Wasser in diesem von a bis b ; statt aber auf die andere Wagschale zur Herstellung des Gleichgewichtes Gewichte aufzulegen, saugt man mit einer Pipette Wasser aus dem Gefäße auf und läßt es in den oberen hohlen Zylinder c laufen. Ist dieser auf diese Weise eben bis zum Rande mit Wasser aus dem Glase gefüllt, so wird wieder Gleichgewicht an der Wage eingetreten sein.

Wie man sieht, unterscheidet sich das Experiment vom vorigen wesentlich nur dadurch, daß diesmal der eingetauchte Körper unbeweglich, dagegen die Flüssigkeit samt dem Gefäße beweglich ist, während es früher umgekehrt war.

Der „Auftrieb“ kann also je nach Umständen auch als „Niedertrieb“ wirken; er stellt eben eine Kraft vor, welche, wie eine zusammengedrückte Spiralfeder, nach beiden Seiten wirkt, den eingetauchten Körper nach oben, die umgebende Flüssigkeit samt dem Gefäße nach unten voneinander zu entfernen strebt.

Es ist hier noch die Frage zu untersuchen, wo der Angriffspunkt des Auftriebes gelegen ist. Man findet darüber meistens die Angabe, derselbe befinde sich in dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeitsmasse (in ihrer Lage, bevor sie verdrängt wurde). Dies ist nicht richtig ausgedrückt. Fürs erste ist zu bedenken, daß die Definition des Schwerpunktes fester Körper, wie sie im § 63 abgeleitet wurde, sich nicht ohne weiteres auf Flüssigkeiten übertragen läßt. Man denkt sich unter dem Schwerpunkte einer Flüssigkeitsmasse den Punkt, welcher der Schwerpunkt eines festen homogenen Körpers von gleicher Form, Größe und Lage wäre, oder mit anderen Worten, man denkt sich die Flüssigkeit zu einem festen Körper erstarrt und nimmt den Schwerpunkt des letzteren für den der Flüssigkeit. Der Auftrieb wirkt aber nicht auf diesen so definierten Schwerpunkt, er wirkt in Wirklichkeit, wie schon aus den obigen Erörterungen hervorgeht, an allen Punkten der nach unten gerichteten Oberfläche des eingetauchten Körpers. Daß dem so sei, läßt sich durch das Experiment nachweisen. Man stelle, Fig. 378, einen Glaskörper mit abgeschliffener ebener Basis und senkrechten Seitenwänden auf den ebengeschliffenen Boden eines Gefäßes und fülle dasselbe mit Quecksilber¹⁾. Der Glaskörper steigt nicht empor, es sei denn, daß wir ihn von der Unterlage abheben, so daß Quecksilber unter seine Basis eindringen kann. Macht man denselben Versuch mit einem prismatischen Holzstücke in Wasser, so steigt das Holzstück allerdings in die Höhe, weil immer eine wenn auch dünne Schicht Wasser unter seiner Basis vorhanden ist, welche den Druck des Wassers fortpflanzt.

Wenn es also zweifellos sicher ist, daß der Auftrieb an allen Punkten der Unterfläche des eingetauchten Körpers angreift, so läßt sich doch zeigen, daß die Resultierende aller dieser Auftriebskräfte denselben Effekt hat, wie wenn

¹⁾ Statt dessen kann auch ein Holzprisma mit auf die Basis aufgekitteter Spiegelglasplatte und eine Glasschale mit auf den Boden aufgekitteter Glasplatte dienen.

sie direkt im Schwerpunkte einer homogenen Masse wirkte, die man sich an die Stelle des eingetauchten Teiles des Körpers gesetzt denkt.

Wir denken uns wiederum den eingetauchten Körper (Fig. 379) in unendlich kleine vertikale Prismen $abnm$ und alle diese Prismen durch horizontale Schnitte in elementare Prismen von verschwindend kleiner Höhe geteilt. Der Gesamtauftrieb setzt sich dann zusammen aus den Auftrieben auf die Flächen ab, cd, de usf. Der Auftrieb auf ab ist gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule $abmn$. Es ändert sich nichts in dem Effekt, wenn wir diese Kraft

Fig. 378.

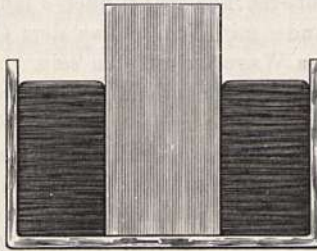
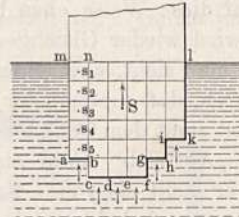


Fig. 379.



in fünf gleiche Teilkräfte teilen, deren je eine in dem Schwerpunkte s_1, s_2, s_3 der elementaren Prismen angreift. Denken wir uns eine solche Verteilung für alle Prismen durchgeführt, so tritt an Stelle des an der Unterseite des Körpers wirkenden Auftriebes die Summe aller in den Schwerpunkten der elementaren Prismen wirkenden Auftriebe. Diese müssen sich aber ebenso zu einer Resultierenden vereinigen, die durch den gemeinsamen Schwerpunkt s geht, wie dies bei der Schwere der Fall ist. Wir kommen demnach zu dem Schlusse: Der Auftrieb wirkt zunächst nur auf jene Oberflächen-teile des eingetauchten Körpers, deren Horizontalprojektionen einen von Null verschiedenen Flächenraum haben, und zwar positiv (nach aufwärts) an der Unterseite, negativ (d. h. abwärts) auf der Oberseite des eingetauchten Körpers oder Körperteiles. Der Effekt ist aber derartig, als fielen der Angriffspunkt des gesamten Auftriebes in den Schwerpunkt eines homogenen festen Körpers, den wir uns an Stelle des eingetauchten Körpers denken. Diesen Schwerpunkt pflegt man abkürzungsweise als den „Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit“ zu bezeichnen; zweckmäßiger nennt man ihn „Mittelpunkt des Auftriebes“.

§ 124. Bedingungen des Gleichgewichtes schwimmender und schwebender Körper. Bezeichnen wir mit G das Gewicht eines Körpers, mit W den scheinbaren Gewichtsverlust, welchen er durch Untertauchen unter Wasser erleidet, so ist die Kraft K , welche ihn im Wasser noch niedertreibt:

$$K = G - W. \dots \dots \dots (1)$$

Ist $G > W$, d. h. ist der Körper schwerer als die verdrängte Wassermasse, so hat K einen positiven Wert, der Körper wird, sich selbst überlassen, untersinken.

Ist $G < W$, d. h. ist der Körper leichter als die durch ihn verdrängte Wassermasse, so wird K negativ, der Körper sinkt nicht mehr unter, sondern er steigt infolge des überwiegenden Auftriebes in die Höhe, bis ein Teil desselben über die Oberfläche des Wassers hervorragt, bis er schwimmt.

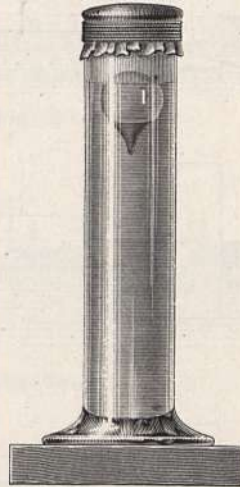
Das (wirkliche) Gewicht eines schwimmenden Körpers ist gleich dem Gewichte der durch den untergetauchten Teil verdrängten Flüssigkeit.

Wenn $G = W$, so ist $K = 0$; ein Körper, dessen Gewicht genau gleich dem eines gleichen Volumens Wasser ist, wird, in Wasser untergetaucht, weder sinken noch steigen, er wird schweben.

Einen in Wasser schwebenden Körper könnte man etwa dadurch herstellen, daß man in eine Kugel von weißem Wachs einige Schrotkörner von passender Größe einknetet. Ein so hergestellter, in Wasser schwebender Körper wird in Weingeist untersinken, in Salzwasser aber schwimmen.

Ein solches Schweben läßt sich auch leicht mit Hilfe eines Apparates, Fig. 380, hervorbringen; die hohle Glaskugel l ist zum Teil mit Luft, zum Teil mit Wasser gefüllt und hat unten eine kleine Öffnung; sie schwimmt auf dem Wasser eines Glaszylinders, welcher oben mit einer Blase oder einer Kautschukmembrane verschlossen ist. Drückt man auf die Blase, so wird etwas mehr Wasser in die Kugel l hineingepreßt, sie wird schwerer und sinkt nieder; wenn der Druck nachläßt, dehnt sich die Luft in der Kugel l wieder aus und treibt etwas Wasser aus, die Kugel wird leichter und steigt; es ist nun leicht, den Druck so zu regulieren, daß die Kugel gerade im Wasser schwebt, ohne zu sinken oder zu steigen. Statt der hohlen Glaskugel hat man dem eingetauchten Körper manchmal die Form einer hohlen menschlichen Gestalt oder gar eines Teufelchens mit seitwärts gebogenem Schwanze gegeben. Dient der letztere als Ausströmungsöffnung für das Wasser, so tritt außer der Hebung und Senkung auch noch eine Reaktionswirkung ein, welche die Gestalt um ihre Vertikalachse drehen macht (Cartesianischer Taucher).

Fig. 380.



Die Gleichung (1) spricht die Bedingungen aus, unter welchen ein fester Körper in einer Flüssigkeit untersinkt, schwimmt oder schwebt. Damit aber der Körper mit Stabilität schwimme oder schwebe, müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein.

Auf einen schwebenden oder schwimmenden Körper wirken zwei Kräfte in entgegengesetzter Richtung; sein Gewicht, im Schwerpunkte des Körpers angreifend, zieht ihn nach unten; der Auftrieb hebt ihn nach oben, die Resultierende aller den Auftrieb bewirkenden Kräfte geht vertikal durch den oben definierten Mittelpunkt des Auftriebes. Soll demnach Gleichgewicht herrschen, so müssen jedenfalls diese beiden Punkte (Schwerpunkt des Körpers s und Mittelpunkt des Auftriebes a) in einer Vertikalen liegen. Beim schwebenden Körper gelten dann für die Art des Gleichgewichtes dieselben Regeln wie bei einem frei aufgehängten Körper, man hat nur an Stelle des Aufhängepunktes den Mittelpunkt des Auftriebes zu setzen.

Ist also der Schwerpunkt im Mittelpunkte des Auftriebes gelegen (was jedenfalls bei homogenen Körpern der Fall ist, aber auch sonst der Fall sein

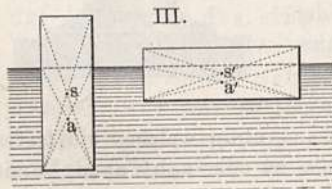
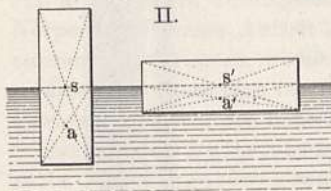
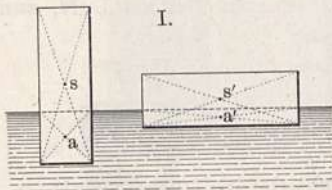
kann), so herrscht indifferentes Gleichgewicht; ist der Schwerpunkt s über a , so ist labiles, ist s unter a , so ist stabiles Gleichgewicht gegeben.

Nicht so einfach liegt die Sache bei den schwimmenden Körpern. Es kann der Schwerpunkt s über dem Mittelpunkte des Auftriebes a liegen und dennoch stabiles Gleichgewicht herrschen. Auch nimmt der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers nicht immer die tiefste Lage an, die wir ihm geben könnten.

Man beachte, um dies einzusehen, die Figuren 381 I, II und III.

Das homogene Prisma in Fig. 381 I habe die Dichte $d = 1/3$. Es sinkt daher in Wasser mit einem Drittel seines Volumens ein, während zwei Drittel desselben herausragen. Sein Schwerpunkt ist in s , der Mittelpunkt des Auftriebes in a . In der aufrechten Lage ist es im labilen Gleichgewichte, es schlägt daher um und schwimmt erst stabil, wenn es sich in die flachste Lage begeben hat. In diesem Falle trifft die Regel der aufgehängten Körper zu, daß der Schwerpunkt die tiefste Lage aufsucht.

Fig. 381.



Das homogene Prisma in Fig. 381 II habe die Dichte $d = 1/2$. Sein Schwerpunkt s kommt dann in den Wasserspiegel zu liegen und bleibt daselbst bei allen Lagen. Trotzdem schwimmt der Körper nicht im indifferenten Gleichgewicht; auch hier ist dasselbe in der aufgerichteten Lage labil, und erst in der flachen Lage stabil, obwohl bei der letzteren der Schwerpunkt nicht tiefer zu liegen kommt.

Das homogene Prisma in Fig. 381 III habe eine Dichte $d = 2/3$. Auch dieses schwimmt aufrecht labil, beim Umschlagen in die stabile flache Lage erhöht sich diesmal sogar der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers. Die Lage des Schwerpunktes allein ist also für die Stabilität nicht ent-

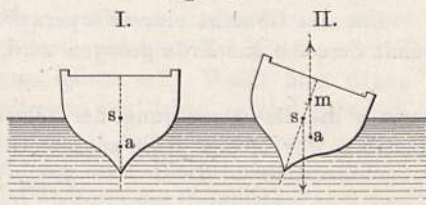
scheidend. In allen drei Fällen hat der Mittelpunkt des Auftriebes in der stabilen Lage die höchste Stellung. Trotzdem würde man irren, wenn man diesen Umstand als die einzige Bedingung für die Stabilität ansehen würde. Beachten wir, um dies einzusehen, den Fall, daß wir an dem Prisma der Fig. 381 III links unter Beibehaltung des Gewichtes den Schwerpunkt s künstlich unter a hinunter verlegt hätten. Das entstandene nunmehr inhomogene Prisma würde dann in aufrechter Lage stabil schwimmen, obwohl beim Übergange in die flache Lage der Mittelpunkt des Auftriebes ansteigen würde.

Die Bedingung für die Stabilität des schwimmenden Körpers ist die, daß in der gegebenen Lage der gemeinsame Schwerpunkt des ganzen Systems „Körper und Flüssigkeit“ eine tiefere Lage habe als in allen unmittelbar benachbarten Lagen. Wir können dies auch so ausdrücken, daß die potentielle Energie des ganzen Systems in der

gegebenen Lage ein relatives oder absolutes Minimum sein müsse. Es ist leicht, dies einzusehen. Beim Anblick der Fig. 381 erkennen wir sofort, daß erstens das Niveau der Flüssigkeit, auch wenn sie begrenzt ist, in allen Lagen des Körpers dasselbe bleiben muß, da immer gleich viel davon verdrängt wird; daß ferner der Schwerpunkt einer der Masse des Körpers gleichen Flüssigkeitsmasse ebenso viel sinkt, als der Mittelpunkt des Auftriebes steigt. Geht der Körper mit der Masse M mit seinem Schwerpunkte aus der Lage s in die Lage s' über, so geht gleichzeitig eine Flüssigkeitsmasse M mit dem Schwerpunkte in a' in die Lage a über. Ist nun die Höhendifferenz zwischen s und $s' = h_s$, jene zwischen a' und $a = h_a$, so ist $Mg(h_s + h_a)$ die Abnahme der potentiellen Energie. Diese Abnahme liegt am größten, die potentielle Energie am kleinsten, wenn s' die tiefste mögliche, a' die höchst mögliche Lage angenommen hat, also dann, wenn der Abstand $s'a'$ am kleinsten geworden ist. Dabei ist derselbe positiv zu rechnen, solange s' über a' liegt, ein negativer Wert, wobei s' unter a' liegt, gilt als kleiner ¹⁾.

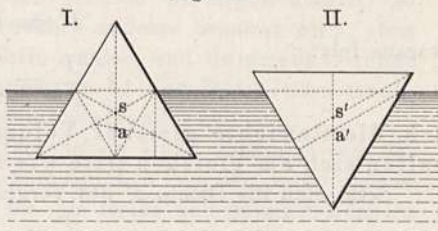
Bei schwimmenden Körpern, welche um eine vertikale Ebene symmetrisch sind, läßt sich die Bedingung des stabilen Gleichgewichtes mit Hilfe eines Punktes formulieren, den man das Metazentrum nennt. Denken wir uns in Fig. 382 einen solchen Körper,

Fig. 382.



z. B. einen Schiffsrumpf, bei welchem Schwerpunkt s und Auftriebsmittelpunkt a die angegebene Lage haben. Geben wir dem Körper eine geringe Neigung, so bleibt der Schwerpunkt in der Mittellinie, der Punkt a rückt aber zur Seite heraus. Ziehen wir durch a eine neue Vertikale, so schneidet sie die Mittellinie in einem Punkte m , welcher das Metazentrum für diese Lage genannt wird. Wir können uns nun den Angriff des Auftriebes in diesen Punkt verlegt denken, und es ist dann klar, daß die ursprüngliche Lage eine stabile sein wird, wenn

Fig. 383.



das Metazentrum m über den Schwerpunkt s zu liegen kommt, daß dagegen eine labile Lage vorhanden ist, wenn m unterhalb s zu liegen kommt. Ob bei einer gegebenen Form und Lage des Körpers die angegebenen Bedingungen der Stabilität zutreffen, darüber läßt sich keine einfache allgemeine Regel geben. Nur wenn der Schwerpunkt unter dem Mittelpunkte des Auftriebes

¹⁾ Duhamel formuliert in seiner analytischen Mechanik Bd. II, S. 212 bis 219 die Bedingung für stabiles Gleichgewicht folgendermaßen: Stabiles Gleichgewicht herrscht erstens immer, wenn der Schwerpunkt des Körpers unter dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit liegt; zweitens aber auch dann, wenn er zwar oberhalb liegt, sobald die Entfernung der beiden Punkte weniger beträgt als das kleinste der Trägheitsmomente der Schnittfläche des Körpers mit der Flüssigkeitsfläche in bezug auf die durch seinen Schwerpunkt gezogene Gerade, dividiert durch das untergetauchte Volum.

liegt, ist unbedingt Stabilität vorhanden. Bei Schiffen erreicht man dies durch Einlagerung von schwerem Ballast in die untersten Schiffsräume.

Ein Körper kann mehrere stabile Lagen beim Schwimmen annehmen, die durch labile Zwischenlagen ineinander übergeführt werden können. So z. B. hat ein homogenes Prisma mit regulär dreieckigem Querschnitt drei solche unter sich gleiche stabile Lagen, die durch Fig. 383 II dargestellt sind, während die Zwischenlagen Fig. 383 I nicht stabil sind. Die Dichte desselben ist zu drei Viertel angenommen. Die geometrische Konstruktion der Punkte s und a ist aus den Figuren ersichtlich. Beim Übergange aus der labilen Lage I in die stabile Lage II sinkt sowohl a als s , weil aber s mehr sinkt als a , so vermindert sich die Höhe von s über a , und da sie kleiner ist als in allen Nachbarlagen, so schwimmt der Körper in der Lage II stabil.

§ 125. Genauere Festsetzung der Begriffe: Dichte, spezifisches Gewicht und normales spezifisches Gewicht. Im § 36 (1) wurde für die Dichte d die Definition gegeben:

$$d = \frac{M}{V} \cdot \dots \dots \dots (1)$$

was in Worten ausgedrückt heißt:

Die Dichte ist gleich der Masse in der Volumeinheit.

Für das Gewicht eines Körpers P von der Masse M , d. h. für die Kraft, womit derselbe zur Erde gezogen wird, gilt

$$P = Mg \cdot \dots \dots \dots (2)$$

worin g die Beschleunigung der Schwere an dem gegebenen Orte bedeutet. Setzt man für M den Wert aus der Gleichung (1), so kommt:

$$P = V \cdot d \cdot g \cdot \dots \dots \dots (3)$$

Bezeichnen wir mit P' das Gewicht eines anderen Körpers von gleichem Volumen V , aber anderer Dichte d' an demselben Orte, so ist:

$$P' = V d' g \cdot \dots \dots \dots (4)$$

woraus folgt:

$$\frac{P}{P'} = \frac{d}{d'} \cdot \dots \dots \dots (5)$$

d. h. die Gewichte gleicher Volumina verschiedener Körper verhalten sich am gleichen Orte wie ihre Dichten.

Setzt man die Dichte d' des Vergleichskörpers = 1, so ist:

$$\frac{P}{P'} = d \cdot \dots \dots \dots (6)$$

Man nennt dann $\frac{P}{P'}$ das spezifische Gewicht, welches demnach unter der ausgesprochenen Bedingung der Größe nach mit der Dichte zusammenfällt. Spezifisches Gewicht ist also eine Verhältniszahl, nämlich das Verhältnis zwischen dem Gewichte eines Körpers und dem Gewichte eines gleichen Volumens jenes Körpers, den man als Vergleichskörper gewählt hat. Das spezifische Gewicht ist demnach in seiner Größe nur abhängig von der Wahl des Einheitskörpers, dagegen unabhängig von dem angewendeten Maß- und Gewichtssystem. Mißt man z. B. die Volumina nach Cubikzollen und die Gewichte nach Pfunden, so erhält man dasselbe spezifische Gewicht, wie wenn man die Volumina nach Cubikcentimetern und die Gewichte nach Grammen rechnet.

Die Zahl, die man für die Dichte erhält, ist dagegen vom Maß- und Gewichtssystem abhängig.

Im ursprünglich französischen, nun internationalen Maß- und Gewichtssystem hat man das Wasser von 4° als Vergleichskörper gewählt, und es war die Absicht, das System so zu gestalten, daß bei Wahl desselben das spezifische Gewicht und die Dichte stets durch dieselbe Maßzahl ausgedrückt werden. Dies wäre gelungen, wenn es möglich gewesen wäre, die Masseneinheit Kilogramm genau gleich der Masse der Volumeinheit, d. i. eines Cubikdecimeters Wasser zu machen; denn dann wäre die Dichte des Wassers von 4° $= \frac{\text{Masse}}{\text{Volum}} = 1$ und sein spezifisches Gewicht $= \frac{\text{Gewicht}}{\text{Gewicht}}$ eo ipso $= 1$ zu setzen, folglich würden dann auch die Dichten aller anderen Körper mit ihren spezifischen Gewichten genau übereinstimmen.

Wie im § 34 mitgeteilt wurde, ist jedoch das Kilogramm um ungefähr 40 Milligramm zu groß geraten, da nach diesem gemessen 1 Cubikdecimeter Wasser von 4° nur 0,99960 Kilogramm wiegt. Wählt man demnach Cubikdecimeter oder Cubikcentimeter zur Einheit des Volumens, so ist die Dichte des Wassers von 4° nicht $= 1$, sondern $= 0,99960$. Das spezifische Gewicht dieses Wassers muß aber seiner Definition nach $= 1$ sein. Um diesem Übelstande abzuhelfen, hat man eine andere Volumeinheit, das Liter, angenommen und als dasjenige Volumen definiert, welches, mit Wasser von 4° erfüllt, genau die Masse eines Kilogramms haben soll. Wählt man diese Volumeinheit und das Kilogramm zur Berechnung der Dichte, so wird natürlich die Dichte des Wassers von 4° $= 1$ und fällt mit dem spezifischen Gewichte zusammen, sowie auch für alle übrigen Körper diese Werte zusammenfallen.

Da dies jedenfalls zweckmäßig ist und überdies der Unterschied zwischen beiden Messungsweisen kleiner ist als $\frac{1}{25\,000}$, also bei allen gewöhnlichen Messungen vollständig innerhalb der Fehlergrenzen zu liegen kommt, so werden wir von nun an, wo nicht ausdrücklich anderes bemerkt wird, stets stillschweigend das Liter zur Volumeinheit wählen und demnach Dichte und spezifisches Gewicht, wenn auch nicht der Definition nach, wohl aber der Größe nach als zusammenfallend ansehen.

Das spezifische Gewicht ist in beträchtlichem Maße abhängig von der Temperatur des Körpers und auch ein wenig von dem Drucke, unter dem er steht. Der letztere Einfluß ist allerdings bei den festen und flüssigen Körpern so gering, daß er meist vernachlässigt werden kann. Streng genommen wäre er ebenfalls zu berücksichtigen, und es hat deshalb auch die internationale Kommission 1880 festgesetzt, daß als Verhältniskörper Wasser von 4° unter Normaldruck, d. i. unter einem Drucke gleich dem einer Quecksilbersäule von 0°, 760 mm Höhe unter 45° Breite, im Meeresniveau zu gelten habe¹⁾.

Gibt man das spezifische Gewicht eines Körpers für irgend eine Temperatur an, so bezieht man es doch auf Wasser von 4°, nicht aber auf Wasser von derselben Temperatur²⁾.

Als normales spezifisches Gewicht oder Normaldichte bezeichnet man das spezifische Gewicht des Körpers bei 0° und Normaldruck.

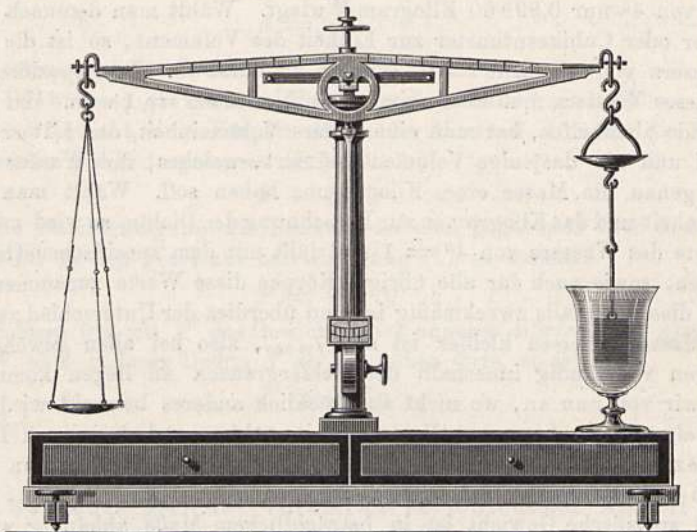
¹⁾ Siehe die Anmerkung S. 96.

²⁾ Der in neuerer Zeit aufgetauchte Vorschlag, Wasser von 15° als Vergleichsflüssigkeit zu wählen, ist nicht zu empfehlen.

§ 126. Bestimmung des spezifischen Gewichts mit der Wage.

Die Bestimmung des spezifischen Gewichts hat sich auf die Gleichung (6) § 125 zu stützen. Die Ermittlung des Gewichts P eines festen Körpers mit der Wage hat keine Schwierigkeit; müßte man aber zur Ermittlung von P' das Volumen desselben bestimmen, so würde man dabei behufs Erlangung genügender Genauigkeit im allgemeinen auf große Schwierigkeiten stoßen. Glücklicherweise erlaubt das Archimedische Prinzip, die Größe P' ebenfalls bequem und genau genug mit der Wage zu bestimmen. Taucht man nämlich den Körper, nachdem sein absolutes Gewicht in der Luft bestimmt ist, in ein untergestelltes Gefäß mit reinem Wasser ein, so erhält er nach jenem Prinzip einen Auftrieb so groß, als das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers beträgt, und wir erhalten somit unmittelbar das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser, wenn wir durch Auflegen von Gewichten auf die betreffende Wagschale wieder das Gleichgewicht derselben herstellen.

Fig. 384.



Um diese Bestimmung mittels einer Wage leicht ausführen zu können, wird an derselben eine kleine Veränderung angebracht, wodurch sie in eine sogenannte hydrostatische Wage umgewandelt wird, wie dies Fig. 384 anzeigt. Man hängt nämlich statt der einen Wagschale eine andere an, welche nicht so weit herabreicht und an welcher sich unten ein Haken befindet. An dieses wird der feste Körper, dessen spezifisches Gewicht zu ermitteln ist, mittels eines möglichst feinen Drahtes (Platindraht) (viel feiner als in der Figur gezeichnet ist) angehängt. Ist dies geschehen, so bestimmt man durch Auflegen von Gewichten auf die andere Wagschale das absolute Gewicht P des Körpers. Taucht man ihn nun in Wasser ein, so muß man auf der Wagschale darüber ein Gewicht P' auflegen, um das Gleichgewicht der Wage wiederherzustellen; P' ist also der scheinbare Gewichtsverlust, welchen der Körper beim Eintauchen in das Wasser erleidet, folglich:

$$s = \frac{P}{P'} \dots \dots \dots (1)$$

sein spezifisches Gewicht. Ist der Körper in Wasser löslich, so nimmt man statt des Wassers eine andere Flüssigkeit von bekanntem spezifischen Gewicht s' , in welcher sich der Körper nicht löst. Heißen wir den jetzigen Gewichtsverlust P'' , so ist jetzt das spezifische Gewicht des Körpers:

$$s = s' \frac{P}{P''} \quad \dots \quad (2)$$

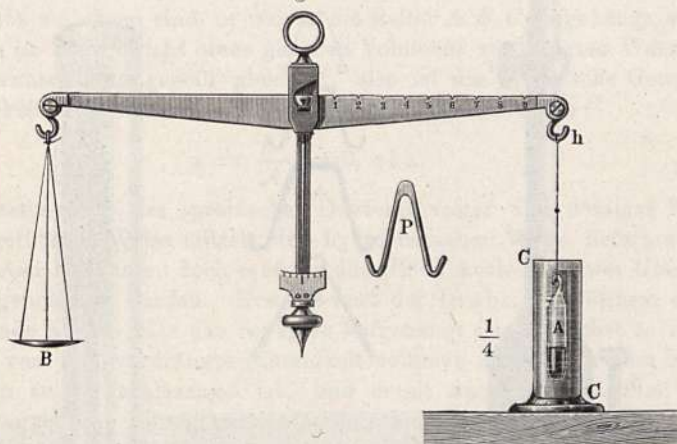
Da $s' = \frac{P''}{P'}$ zu setzen ist, so ist in der Tat wieder:

$$s = \frac{P}{P'}$$

Sinkt der Körper in der Flüssigkeit nicht unter, so befestigt man ihn an einen schwereren Körper (Metallklemme), dessen Gewichtsverlust für sich allein bestimmt wurde, und zieht letzteren von dem Gesamtgewichtsverlust ab.

Soll das spezifische Gewicht von Flüssigkeiten bestimmt werden, so kann dies wieder mit derselben hydrostatischen Wage geschehen, indem man sich auf den Satz stützt, daß der scheinbare Gewichtsverlust, welchen ein und derselbe Körper in verschiedenen Flüssigkeiten erleidet, dem spezifischen Gewichte derselben proportional ist. Nachdem wir hiernach bei obigem Versuch zur Bestimmung von s den Gewichtsverlust des rechts an der kleinen Wagschale hängenden Körpers in reinem Wasser P' bestimmt haben,

Fig. 385.



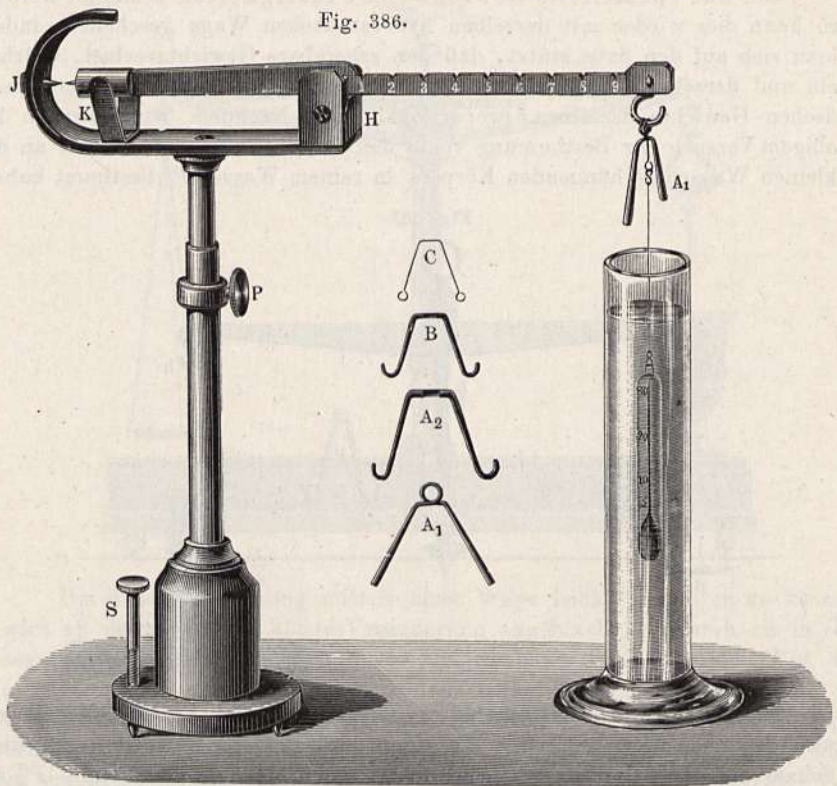
wird statt Wasser in das Glasgefäß die zu untersuchende Flüssigkeit gegossen und der neue Gewichtsverlust P'' durch Auflegen von Gewichten auf diese Schale bis zu neuem Einstehen der Wage ermittelt. Da die P' und P'' zukommenden Volumina gleich sind, so ist das spezifische Gewicht der Flüssigkeit s' gegeben durch:

$$s' = \frac{P'}{P''} \quad \dots \quad (3)$$

Zur raschen Ausführung einer solchen Bestimmung des spezifischen Gewichts von Flüssigkeiten eignet sich die Mohrsche Wage, die in Fig. 385 dargestellt ist. An dem einen Arme der Wage hängt mittels eines feinen Platindrahtes das Senkgläschen A , ein oben und unten geschlossenes, zum

Teil mit Quecksilber gefülltes Glasröhrchen, welches durch die Wagschale *B* genau äquilibrirt ist. Der Arm der Wage, an welchem *A* hängt, ist in zehn gleiche Teile geteilt. In der Nebenfigur ist in vergrößertem Maßstabe durch *P* die Form der zu dieser Wage gehörigen, aus Messingdraht gefertigten Gewichte dargestellt, nämlich zwei, die wir mit *P* bezeichnen wollen und deren jedes genau so viel wiegt wie der Gewichtsverlust v des Senkgläschens *A* in Wasser beträgt, und zwei kleine Haken p und p' , welche $\frac{1}{10}v$ und $\frac{1}{100}v$ wiegen. Soll nun das spezifische Gewicht irgend einer Flüssigkeit ermittelt werden, so wird dieselbe in das Glasgefäß *C* eingegossen, in welches das Senkgläschen *A* herabhängt, und dann die Gewichtshaken so angehängt, daß der Wagebalken bei ganz untergetauchtem Senkgläschen vollkommen horizontal steht.

Bei einem derartigen Versuche mit Äther mußte man z. B. den großen Haken *P* bei 7, den Haken p bei 2 und den Haken p' bei 4 anhängen: Das



Gewicht des Äthers, welcher durch das Senkgläschen verdrängt wird, beträgt also: $0,7v + 0,02v + 0,004v$ oder $0,724v$; das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser ist v , also $0,724$ das spezifische Gewicht des Äthers.

Als englische Schwefelsäure in das Glas *C* eingegossen war, mußte man zur Herstellung des Gleichgewichts anhängen: eines der Gewichte *P* bei h , eines bei 8, das Gewicht p bei 4, das Gewicht p' bei 7, das spezifische Gewicht der Flüssigkeit war also gleich $1,847$.

Eine recht bequeme Form wurde der Mohrschen Wage von Georg Westphahl in Celle gegeben. Dieselbe ist in der Fig. 386 dargestellt. Der am Haken h hängende Senkkörper besteht hier aus einem kleinen Quecksilberthermometer, welches zugleich die Temperatur der Flüssigkeit angibt. Ihm hält das Gegengewicht K am anderen Arme der Wage das Gleichgewicht, welcher Arm mit seiner Spitze zugleich als Zeiger dient, indem diese beim Gleichgewicht der Spitze J am Halter der Wage mit Drehungsachse bei H gegenüberstehen soll. Das Gewicht A , wie oben P , ist gleich dem Gewicht des vom Senkkörper verdrängten reinen Wassers bei 15°C und ist zum Anhängen am Haken h bestimmt, um bei Einfüllung von Wasser ins Gefäß den Auftrieb desselben gerade zu kompensieren, also die Wage wieder ins Gleichgewicht zu bringen; A_2 ist ein gleich großes Gewicht wie A_1 aber zum Aufsetzen auf den Wagearm bestimmt, ebenso wie die Reitergewichte $B = 0,1 A$ und $C = 0,01 A$.

Hat man beim Eintauchen des Thermometersenkkörpers in eine andere Flüssigkeit als Wasser die drei Reiter A_2 , B und C in den Entfernungen a , b und c bzw. in den $0,1$ des ganzen Wagearmes entsprechenden Lücken desselben eingehängt, um Gleichgewicht herzustellen, so ist das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit gegeben durch:

$$P'' = \frac{a}{10} A + \frac{b}{10} \frac{A}{10} + \frac{c}{10} \frac{A}{100} = 0, a \cdot b \cdot c \cdot A,$$

wo an Stelle der Buchstaben a , b , c unmittelbar die Zahlen der Lücken als Dezimalbruch zu setzen sind, in welche die Reiter A , B , C eingehängt worden sind. Nun ist das Gewicht eines gleichen Volumens verdrängten Wassers P' unserer Voraussetzung gemäß gleich A , also ist das spezifische Gewicht s' der Flüssigkeit ohne weiteres als Dezimalbruch gegeben durch:

$$s' = \frac{P''}{A} = 0, abc.$$

Die Bestimmung des spezifischen Gewichts fester und flüssiger Körper in der angeführten Weise mittels der hydrostatischen Wage liefert weitauß die genauesten Resultate, doch muß zu dem Ende noch auf zwei Umstände Rücksicht genommen werden. Erstlich muß der Draht, an welchem der zu untersuchende Körper oder das Senkglas aufgehängt ist, möglichst fein sein, damit das von ihm verdrängte Flüssigkeitsvolumen neben dem vom Körper verdrängten zu vernachlässigen ist, und damit auch die von ihm durch Kapillarität gehobene Flüssigkeitsmasse unbedeutend genug sei.

Ferner ist darauf zu achten, daß der eingetauchte Körper frei von anhängenden Luftbläschen sei, da sonst sein spezifisches Gewicht zu klein erhalten wird.

Da die Temperatur des Wassers bei den Bestimmungen des spezifischen Gewichts selten gerade genau 4°C betragen wird, vielmehr zweckmäßig nahe der Umgebungstemperatur gewählt wird, damit sie sich während des Versuches nicht ändere, so ist das direkt erhaltene Resultat noch einer Korrektion zu unterwerfen.

Es sei bei der Bestimmung des spezifischen Gewichtes eines festen Körpers sein absolutes Gewicht $(= P^1)$, der Auftrieb in Wasser von der Tempe-

¹⁾ Von dem Gewichtsverlust in Luft und der darauf bezüglichen Korrektion kann erst an späterer Stelle die Rede sein.

ratur t sei A_t . Die Dichte des Wassers (oder der an dessen Stelle gewählten Eintauchflüssigkeit) bei t^0 sei d_t ; den Auftrieb, den der Körper ohne Änderung seines Volumens in Wasser von 4^0 erhalten hätte, bezeichnen wir mit A_4 . Zunächst ist:

$$A_4 = \frac{A_t}{d_t},$$

daraus ergibt sich das spezifische Gewicht des Körpers bei t^0 :

$$s_t = \frac{P}{A_4} = \frac{P}{A_t} d_t \dots \dots \dots (4)$$

Man hat also das rohe Resultat mit der Dichte des Wassers oder überhaupt der Eintauchflüssigkeit bei t^0 zu multiplizieren.

Genauere Tabellen über die Dichten des Wassers bei verschiedenen Temperaturen werden wir in der Wärmelehre bringen.

Soll auch das normale spezifische Gewicht des Körpers, das heißt sein spezifisches Gewicht bei 0^0 , berechnet werden, so muß noch durch eine besondere Untersuchung seine Temperatúrausdehnung ermittelt und das Ver-

hältnis $\frac{s_0}{s_t}$ bekannt sein. Man findet dann:

$$s_0 = \frac{P}{A_t} \cdot d_t \frac{s_0}{s_t} \dots \dots \dots (5)$$

Handelt es sich um die Bestimmung des spezifischen Gewichts einer Flüssigkeit, so ist sehr darauf zu achten, daß die Auftriebe in der Flüssigkeit und im Wasser bei derselben Temperatur t bestimmt werden, da sonst auch noch die Ausdehnung des Senkkörpers bekannt sein und berücksichtigt werden muß.

Angenommen, diese beiden Auftriebe seien im Wasser A_t , in der untersuchten Flüssigkeit A'_t . Es ist dann der Auftrieb in Wasser von 4^0 :

$$A_4 = \frac{A_t}{d_t}$$

und das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bei t^0 :

$$s_t = \frac{A'_t}{A_4} = \frac{A'_t}{A_t} d_t \dots \dots \dots (6)$$

Man hat also hier das rohe Resultat mit der Dichte des Wassers bei t^0 zu multiplizieren. Die Berechnung des normalen spezifischen Gewichts s_0 erfordert wiederum eine besondere Untersuchung der Ausdehnung zwischen 0^0 und t^0 ; kennt man das Verhältnis $\frac{s_0}{s_t}$, so kann man s_0 berechnen nach:

$$s_0 = \frac{A'_t}{A_t} d_t \cdot \frac{s_0}{s_t} \dots \dots \dots (7)$$

§ 127. Konstantes Gefäß, Pyknometer. Eine andere Methode, das spezifische Gewicht sowohl fester als flüssiger Körper mit der Wage zu bestimmen, besteht in der Anwendung des konstanten Gefäßes oder Pyknometers, d. h. eines Glasgefäßes von ganz bestimmten bzw. scharf abzugrenzendem Volumen. Die einfachste Form des Pyknometers besteht aus

einem Gläschen mit nicht zu enger Öffnung, deren Rand eben abgeschliffen ist und die durch eine aufgelegte, ebenfalls eben abgeschliffene Glasplatte verschlossen werden kann, so daß dadurch ein bestimmtes Volumen abgegrenzt wird. Eine andere einfache Form des Pyknometers stellt Fig. 387

Fig. 387.



Fig. 389.

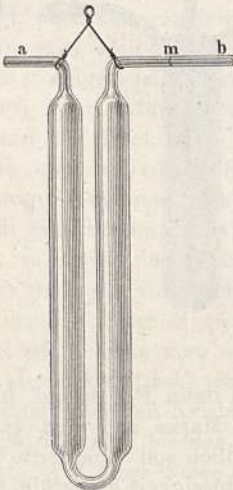
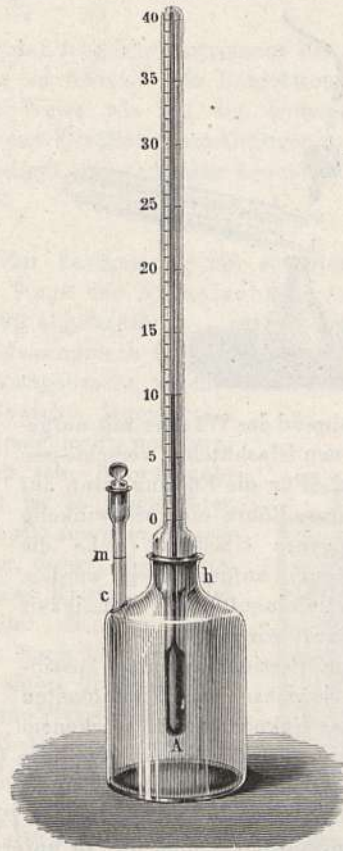


Fig. 388.



dar, wo ein in den Hals des Gefäßes *A* eingeschliffener Stöpsel *B* das Volumen abgrenzt, indem letzterer durchbohrt und außen mit einer Marke *m* versehen ist. Durch Anlegen von Fließpapier an die Öffnung der Bohrung wird die Flüssigkeit im Gefäß so weit entfernt, daß sie eben bis zur Marke *m* reicht.

Vollkommener ist das in Fig. 388 abgebildete Pyknometer, bei welchem zur unmittelbaren Bestimmung der Temperatur der Flüssigkeit im Gefäß *A* ein Thermometer als Stöpsel in den Hals *h* desselben eingesetzt ist und die das Volumen abgrenzende Marke *m* an einer seitlichen kapillaren, am Ende mit Stöpselchen versehenen Röhre *c* angebracht ist.

Sind nur Flüssigkeiten auf ihr spezifisches Gewicht zu untersuchen, so eignet sich dazu besonders das in Fig. 389 abgebildete Sprengelsche Pyknometer, wo das Ende *a* des kapillaren Rohres die eine und die Marke *m* an dem etwas weiteren Rohre *b* die andere Abgrenzung des zu fixierenden Volumens darstellen. Die Art und Weise der Füllung dieses Pyknometers zeigt die Fig. 390 an.

Fig. 391 endlich stellt eine sehr praktische Modifikation des Sprengel'schen Pyknometers mit in das Gefäß eingeschmolzenem Thermometer dar. Die beiden Kapillarröhren, von denen auch die eine enger als die andere mit Marke versehene ist, können zur Verhütung von Verdunstung der Flüssig-

Fig. 390.



keit während des Wägens mit aufgeschliffenen Glashütchen verschlossen werden. Für die Füllung kann auf die weitere Röhre ein rechtwinkelig umgebogenes Glasrohr (siehe die Nebenfigur) aufgeschoben werden, das in die einzufüllende Flüssigkeit eingetaucht wird.

Zur Bestimmung des spezifischen Gewichts von Flüssigkeiten wird das Pyknometer in trockenem

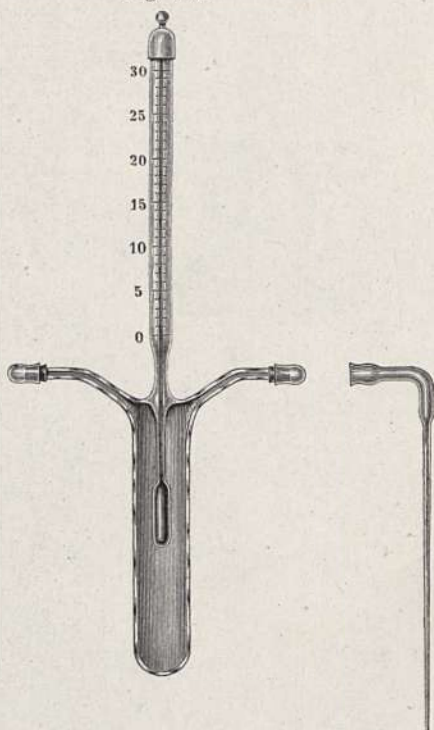
Zustande zuerst leer gewogen; sein Gewicht sei dann P'_1 ; darauf füllt man es mit reinem (destilliertem) Wasser bis zu der Marke an, wägt es wieder, wobei man als Gewicht des Ganzen P'_2 finde; endlich soll eine dritte Wägung erfolgen, nachdem man die zu untersuchende Flüssigkeit eingefüllt hat (daß das Pyknometer vorher ganz getrocknet werden muß, etwa durch einen durchgeleiteten warmen Luftstrom, ist selbstverständlich); dieses dritte erhaltene Gewicht sei P'_3 ; dann ist das spezifische Gewicht der Flüssigkeit s' :

$$s' = \frac{P'_3 - P'_1}{P'_2 - P'_1} \dots \dots \dots (1)$$

Die Gewichte P'_1 und P'_2 können offenbar für ein bestimmtes Gefäß ein für allemal bestimmt werden, so daß dann eine einzige Wägung P'_3 mit der zu untersuchenden Flüssigkeit zur Ermittlung ihres spezifischen Gewichts genügt.

Um das spezifische Gewicht s eines festen Körpers, der in Pulverform oder wenigstens in kleinen Stücken vorhanden ist, zu ermitteln, wägt man zuerst eine gewisse Menge des Körpers, die genügt, das Pyknometer zum größeren Teil zu füllen, in der Luft ab; es sei dies Gewicht P_1 , sodann wiegt man das mit destilliertem Wasser gefüllte Pyknometer ab, es sei dieses Ge-

Fig. 391.



wicht entsprechend wie oben P_2 ; endlich macht man eine dritte Wägung, nachdem man die fragliche Menge des Körpers in das Pyknometer gebracht und dasselbe wieder bis zur Marke mit destilliertem Wasser gefüllt hat; dieses Gewicht sei P_3 ; dann ist offenbar:

$$s = \frac{P_1}{P_1 + P_2 - P_3} \dots \dots \dots (2)$$

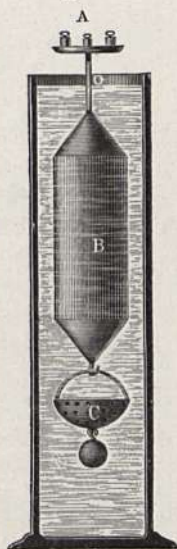
Ist wieder ein für allemal P_2 für das fragliche Instrument bestimmt, so sind nur zwei Wägungen nötig, um s zu finden. Die Korrekturen wegen der Temperaturen sind in ähnlicher Weise wie bei den hydrostatischen Wägungen an den unmittelbar erhaltenen Resultaten anzubringen.

Wir gehen nun dazu über, die weniger genauen, aber bequemeren und oft ausreichenden Methoden zu betrachten.

§ 128. Gewichtsariometer. Zur Bestimmung des spezifischen Gewichts fester Körper kann statt der Wage das Nicholsonsche Aräometer angewendet werden, welches in Fig. 392 abgebildet ist.

An einem hohlen Körper B von Messingblech ist unten ein Sieb C angehängt, oben aber ein feines Stäbchen angebracht, welches einen Teller trägt, auf den man kleinere Körper und Gewichte legen kann. In Wasser eingetaucht, schwimmt das Instrument, und zwar aufrecht, weil dafür gesorgt ist, daß sein Schwerpunkt genügend tief liegt. Das Instrument ist so eingerichtet, daß der oberste Teil des Körpers B noch aus dem Wasser herausragt. Legt man nun den Körper, dessen spezifisches Gewicht man bestimmen will, etwa einen Kristall, auf den Teller, so sinkt das Instrument weiter ein, und durch ferneres Auflegen von Tariergewichten kann man es leicht dahin bringen, dass es genau bis zu einem Punkte O eingesenkt ist, welchen man auf irgend eine Weise (gewöhnlich durch einen Feilstrich) auf dem Stäbchen markiert hat. Man nimmt nun den Kristall weg und legt statt dessen so viel Gewichte auf, bis das Instrument wieder genau bis O einsinkt. Auf diese Weise erhält man das absolute Gewicht des Körpers. Es betrage P Milligramm.

Fig. 392.



Nun werden die P Milligramm wieder weggenommen und der Kristall in das Sieb gelegt. Das Instrument würde nun wieder bis O einsinken, wenn der in das Sieb C gelegte Körper nicht durch das Eintauchen im Wasser scheinbar an Gewicht verlöre. Man wird also auf den Teller noch Gewichte, P' Milligramme, auflegen müssen, damit das Instrument wieder bis zur Marke eingetaucht ist. Man hat auf diese Weise das absolute Gewicht des Körpers P und das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser P' ermittelt; das gesuchte spezifische Gewicht ist also:

$$s = \frac{P}{P'} \dots \dots \dots (1)$$

Auch das spezifische Gewicht von Flüssigkeiten kann man mit dem Nicholsonschen Aräometer bestimmen. Da das Instrument stets so weit einsinkt, daß sein Gewicht samt den Gewichten auf dem Teller dem Gewichte

der verdrängten Flüssigkeitsmasse gleich ist, so kann man mit Hilfe dieses Instrumentes ausmitteln, wie viel ein bestimmtes Volumen der Flüssigkeit wiegt. Dazu ist aber nötig, daß man das Gewicht des Instrumentes selbst kennt; wir wollen es mit P' bezeichnen. Wenn es, in Wasser eingetaucht, bis O einsinken soll, so muß noch Gewicht zugelegt werden. Bezeichnen wir dies Zulagegewicht mit P'' , so ist $P' + P''$ das Gewicht der verdrängten Wassermasse. Taucht man nun das Instrument in die zu untersuchende Flüssigkeit, so wird man irgend ein anderes Gewicht P''' anstatt P'' auflegen müssen, um ein Einsinken bis O zu bewerkstelligen; P''' wird größer sein als P'' , wenn die Flüssigkeit schwerer, kleiner als P'' , wenn sie leichter ist als Wasser. Das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist $P' + P'''$, während $P' + P''$ das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser ist, das spezifische Gewicht der fraglichen Flüssigkeit ist also:

Fig. 393.

$$s' = \frac{P' + P'''}{P' + P''} \dots \dots \dots (2)$$

Dieses Aräometer ist um so empfindlicher, je dünner das Stäbchen im Vergleich zum Volumen des Körpers B ist.



§ 129. Skalenaräometer. Mit Hilfe des Nicholsonschen Aräometers kann man das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit aus der Vergleichung der absoluten Gewichte gleicher Volumina ableiten. Der Gebrauch der Skalenaräometer aber gründet sich darauf, daß bei gleichem Gewichte zweier Flüssigkeitsmassen ihre Volumina sich umgekehrt verhalten wie die spezifischen Gewichte. Es stellt Fig. 393 ein Skalenaräometer dar. In der Regel besteht dasselbe aus einer zylindrischen Glasröhre, welche unten erweitert ist, wie man in der Abbildung sieht. In der unteren Kugel befindet sich etwas Blei oder Quecksilber, wodurch nur bezweckt wird, daß das Instrument aufrecht schwimmt. Noch zweckmäßiger enthält das Instrument ein Thermometer, dessen Kugel den nötigen Ballast liefert, wie Fig. 398 zeigt. Denken wir uns das Instrument in Wasser schwimmend, so ist das Gewicht des verdrängten Wassers dem Gewichte des Instrumentes gleich. Bringen wir es in eine andere Flüssigkeit, so wird es tiefer oder weniger tief einsinken, je nachdem die Flüssigkeit leichter oder schwerer ist als Wasser.

Man begreift nun wohl, daß, wenn die Röhre zweckmäßig geteilt ist, man aus einer einzigen Ablesung das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit ermitteln kann. Die verschiedenen Aräometer unterscheiden sich durch die Art der Teilung, welche zu dem Ende auf der zylindrischen Röhre angebracht ist. Wir betrachten zunächst das seiner Skala nach einfachste Instrument dieser Art, nämlich das

Volumeter von Gay-Lussac. Es bezeichne V das Volumen des Aräometers bis zu dem Punkte der Röhre, bis zu welchem es in destilliertem Wasser einsinkt. Denken wir uns jetzt die zylindrische Röhre mit einer Skala versehen, von welcher jedem Teile das Volumen $\frac{V}{a}$ zukomme und deren Null-

punkt dem Volumen V entspreche, so ist, wenn in einer anderen Flüssigkeit das Aräometer bis zum Teile $\pm n$ vom Nullpunkt aus einsinkt, das eintauchende Volumen $V \pm n \frac{V}{a}$. Da sich die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten

umgekehrt wie die eintauchenden Volumina des Aräometers verhalten, so ist also das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, in welcher das Aräometer bis zum Skalenteil $\pm n$ einsinkt, gegeben durch:

$$s' = \frac{V}{V \pm n \frac{V}{a}} = \frac{a}{a \pm n} \dots \dots \dots (1)$$

Gewöhnlich macht man jeden Teil des Aräometers gleich $\frac{V}{100}$ oder also $a = 100$, so daß dann ist:

$$s' = \frac{100}{100 \pm n} \dots \dots \dots (1a)$$

Der letzten Gleichung entsprechend wird der Skalenteil, bis zu welchem das Aräometer in Wasser einsinkt, der sogenannte Wasserpunkt, nicht mit Null, sondern mit 100 bezeichnet und die Bezifferung von da aus nach oben wachsend, nach unten zu abnehmend angebracht. Würde also beispielsweise das Aräometer bis zum Teilstrich 125, d. h. $100 + 25$ in einer Flüssigkeit einsinken, so wäre ihr spezifisches Gewicht nach obiger Gleichung:

$$s' = \frac{100}{125} = 0,800.$$

Dagegen würde dasselbe für eine Flüssigkeit, in welcher das Aräometer beim Teilstrich 80, d. h. $100 - 20$ stehen bleibt, sein:

$$s' = \frac{100}{80} = 1,250.$$

Die Genauigkeit eines solchen Instrumentes ist um so größer, je größer die Entfernung eines Teilstriches von dem anderen, je dünner also die Röhre im Vergleich zu dem Volumen des ganzen Instrumentes ist. Damit jedoch die Röhre nicht gar zu lang wird, macht man kein Volumeter, welches für alle Flüssigkeiten anwendbar ist, sondern solche, welche entweder nur für leichtere oder nur für schwerere Flüssigkeiten gebraucht werden können. Bei den ersteren findet sich der mit 100 bezeichnete Wasserpunkt nahe am unteren, bei den letzteren aber nahe am oberen Ende der Röhre.

Sind die Teile am Volumeter so groß, daß man noch 0,1 eines Skalenteiles beim Eintauchen in die Flüssigkeit sicher schätzen kann, oder bringt man eine feinere Teilung an, bei der jeder Teil gleich $0,001 \cdot V$ ist, so kann man mittels desselben das spezifische Gewicht bis zur dritten Decimale genau bestimmen.

Bevor man die Teilung aufträgt, hat man erst durch Vermehrung oder Verminderung der Quecksilbermasse in der Kugel das Instrument so zu regulieren, daß es in Wasser bis zu einem entweder nahe am unteren oder oberen Ende der Röhre gelegenen Punkte einsinkt. Ist dies geschehen, so hat man einen zweiten Punkt der Skala zu bestimmen, und dies geschieht auf folgende Art:

Das Instrument sei für schwere Flüssigkeiten bestimmt, also der Wasserpunkt am oberen Ende der Röhre. Man verschafft sich eine Flüssigkeit, deren spezifisches Gewicht genau 1,25 ist; eine solche Flüssigkeit läßt sich leicht durch Mischen von Wasser und Schwefelsäure erhalten und ihr spezifisches Gewicht mit Hilfe der Wage prüfen. In diese Flüssigkeit taucht man nun das Instrument und merkt sich den Punkt, bis zu welchem es einsinkt. Das spezifische Gewicht 1,25 entspricht aber dem Teilstrich 80 der Volumenskala; dieser zuletzt markierte Punkt ist also mit 80 zu bezeichnen, der Zwischenraum zwischen ihm und dem Wasserpunkt in 20 gleiche Teile zu teilen und diese Teilung auch noch unterhalb des Punktes 80 fortzusetzen.

Ist das Volumeter für leichtere Flüssigkeiten bestimmt, also der Punkt 100 am unteren Ende der Röhre, so findet man einen zweiten Punkt der Skala, indem man das Instrument in eine Mischung von Wasser und Weingeist taucht, deren spezifisches Gewicht genau 0,8 ist. Das spezifische Gewicht 0,8 entspricht dem Teilstrich 125, man hat also den Raum zwischen diesem Teilstrich und dem Wasserpunkt in 25 gleiche Teile zu teilen.

In der Regel ist die Teilung auf einem Papierstreifen gemacht und in dem Inneren der Röhre befestigt.

Der Vorteil in der Konstruktion des Volumeters von Gay-Lussac besteht darin, daß die Teilung, ein gleichmäßiges Kaliber der Röhre vorausgesetzt, aus gleichweit abstehenden Strichen besteht und deshalb leicht mit der Teilmaschine fehlerfrei ausführbar ist. Dagegen hat das Instrument den verhältnismäßig geringfügigen Nachteil, daß es jedesmal eine kleine Rechnung erfordert, um die spezifischen Gewichte zu erhalten.

Die nachstehende Tabelle gibt einen Vergleich der Volumetergrade mit dem spezifischen Gewicht.

Spezifisches Gewicht	Entsprechende Volumetergrade	Spezifisches Gewicht	Entsprechende Volumetergrade
2,0	50,00	1,1	90,90
1,9	52,63	1,0	100
1,8	55,55	0,95	105,26
1,7	58,82	0,90	111,11
1,6	62,50	0,85	117,64
1,5	66,66	0,80	125,00
1,4	71,43	0,75	133,33
1,3	76,92	0,70	142,85
1,2	83,33		

Densimeter. Zur Vermeidung der Umrechnung der Volumetergrade in spezifisches Gewicht haben Gay-Lussac und vor ihm schon Brisson u. G. G. Schmidt Aräometer konstruiert, welche direkt das spezifische Gewicht ablesen lassen. Dieselben werden Dichtearäometer oder Densimeter genannt und unterscheiden sich von den Volumetern nur durch die Skala. Rechnet man nämlich nach Gleichung (1a):

$$100 \pm n = \frac{100}{s'}$$

für verschiedene um gleiche Intervalle fortschreitende Werte von s' aus, so erhält man für $100 \pm n$ der obigen Tabelle entsprechende Volumetergrade. Die Figuren 394 und 395 repräsentieren Aräometerskalen, die erstere für schwerere, die letztere für leichtere Flüssigkeiten als Wasser, welche links

mit der Volumerteilung, rechts mit der Densimeterskala versehen sind. Man sieht sofort, daß die letztere aus ungleich weit abstehenden Teilstrichen besteht. Je größer die spezifischen Gewichte sind, desto näher rücken die Teilstriche zusammen. Es sind daher solche Teilungen viel schwieriger anzufertigen und daher im allgemeinen weniger verläßlich. Die Firma Fr. Müller in Bonn liefert ganze Sätze von 19 bis 23 kleinen Densimetern, welche das Intervall von $s = 0,6$ oder $0,7$ bis $s = 1,85$ oder $s = 2$ umfassen und auf 3 bis 4 Decimalen genau messen lassen. Mit einer „Suchspindel“ wird zuerst eine angenäherte Bestimmung ausgeführt, um zu ersehen, welches der Instrumente anzuwenden ist. Man hat dabei nicht bloß den Vorteil größerer Genauigkeit, sondern auch den sehr in Betracht kommenden, daß man (bei den kleineren Sätzen) mit Flüssigkeitsmengen bis 50 cm^3 ausreicht. Bei genauen Messungen ist zu beachten, daß das Aräometer immer nur für eine bestimmte Temperatur (in der Regel 15°C) richtig ist. In einer Flüssigkeit von dieser Temperatur gibt dasselbe die Dichte der Flüssigkeit für diese Temperatur, bezogen auf Wasser von 4°C , an. Hat aber die Flüssigkeit und mit ihr das Aräometer eine andere Temperatur,

so ist auch der Stand desselben aus zwei Ursachen ein anderer; einmal, weil sich das Volum des Aräometers geändert hat; dann, weil die Dichte der Flüssigkeit eine andere ist. Der erstere Einfluß läßt sich durch eine Korrektion¹⁾ beseitigen. Dagegen läßt sich die Dichte der Flüssigkeit nur dann auf eine Normaltemperatur umrechnen, wenn ihr Ausdehnungskoeffizient bekannt ist.

§ 130. Aräometer mit willkürlicher Skala. Die hier zu erwähnenden Instrumente haben lediglich dem Umstande ihre Entstehung zu verdanken, daß ihre Skalen leichter anzufertigen sind. Einen wissenschaftlichen Wert haben sie nicht; da aber noch viele Gebrauchsvorschriften und Rezepte sich auf diese Skalen berufen, so müssen wir dieselben kennen lernen.

Fig. 394.

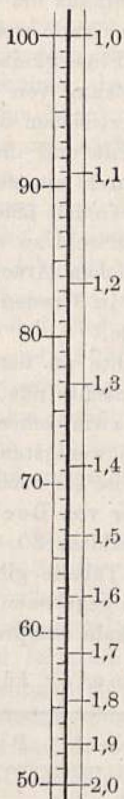
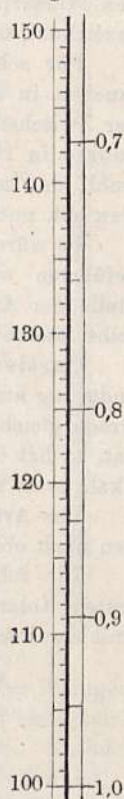


Fig. 395.



¹⁾ Diesbezügliche Tabellen werden von den staatlichen Eichämtern den Instrumenten beigegeben.

Baumé¹⁾ ermittelte an den für leichtere Flüssigkeiten bestimmten Aräometern außer dem Wasserpunkte noch einen zweiten fixen Punkt dadurch, daß er das Instrument in eine Lösung von 1 Gewichtsteil Kochsalz in 9 Gewichtsteilen Wasser tauchte. Den Raum zwischen diesen beiden Punkten teilte er in 10 gleiche Teile, die er Grade nannte; die Teilung ist noch über den Wasserpunkt hinaus um 40° fortgesetzt. Der Wasserpunkt ist mit 10 bezeichnet, und die Grade werden nach oben gezählt.

Für schwere Flüssigkeiten wurde der zweite feste Punkt durch Eintauchen in eine Lösung von 15 Tln. Kochsalz in 85 Tln. Wasser bestimmt, der Zwischenraum zwischen diesem und dem mit Null bezeichneten Wasserpunkte in 15° geteilt und die Teilung nach unten fortgesetzt. Man sieht wohl, daß man durch ein solches Instrument direkt weder das spezifische Gewicht, noch den Gehalt einer Flüssigkeit erfährt.

Es wäre daher wohl zu wünschen, daß diese und die unten noch aufgeführten willkürlichen Aräometerskalen außer Gebrauch gesetzt und an Stelle der Angabe in Graden immer die Angabe der spezifischen Gewichte selbst treten möchte.

Cartier brachte an der Bauméschen Skala eine unwesentliche Veränderung an, er machte nämlich die Grade etwas größer, so daß 15 seiner Grade gleich 16 Bauméschen sind. Wenn er dadurch auch nichts genützt hat, so hat er doch wenigstens seinen Namen verewigt, denn so wertlos seine Skala auch ist, so ist sie doch ungemeyn verbreitet.

Das Aräometer von Beck hat den Wasserpunkt zu seinem Nullpunkte, den nach oben gezählten 30. Grad beim spezifischen Gewicht 0,85.

Die folgende Tabelle gibt an, welche spezifischen Gewichte den in der ersten Kolonne angegebenen Gradzahlen der Bauméschen, Cartierschen und Beckschen Skala entsprechen.

Aräometer für leichtere Flüssigkeiten.

Grade	Baumé	Cartier	Beck
0	—	—	1,000
10	1,000	—	0,944
20	0,933	0,934	0,895
30	0,875	0,871	0,850
40	0,824	0,815	0,809
50	0,778	—	0,773

Aräometer für schwerere Flüssigkeiten.

{ Grade	Baumé	Beck	Grade	Baumé	Beck
0	1,000	1,000	40	1,400	1,308
10	0,077	1,062	50	1,555	1,417
20	1,167	1,133	60	1,750	1,545
30	1,273	1,214	70	2,000	1,700

¹⁾ Eléments de Pharmacie, 8. édition, p. 341 (1797). Die Angaben dieses Instruments wurden 1873 von Berthelot, Coulier und Almeida verifiziert. Die Schreibweise Baumé ist nicht richtig.

§ 131. **Aräometer für besondere Flüssigkeiten.** Im praktischen Leben ist es meistens nicht direkt der Zweck, das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit zu erfahren, sondern man will den Konzentrationsgrad einer Salzlösung, die Mischungsverhältnisse einer Flüssigkeit mit einer anderen kennen lernen. Diese stehen nun freilich mit dem spezifischen Gewicht in genauer Beziehung, so daß, wenn man mit Hilfe des Aräometers das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit ausgemittelt hat, man daraus auch auf die Natur der Flüssigkeit schließen kann. Man hat jedoch für solche Flüssigkeiten, welche in der Praxis häufig vorkommen, besondere Aräometer konstruiert, welche unmittelbar die Mischungsverhältnisse angeben. Wir wollen hier nur eines der wichtigsten, nämlich das Alkoholometer, näher betrachten.

Das Alkoholometer dient zur Bestimmung des Alkoholgehaltes einer Mischung von Wasser und Alkohol (Weingeist).

Das normale spezifische Gewicht des reinen Alkohols ist nach Mendelejeff¹⁾ bezogen auf Wasser von $4^{\circ} d_{0,4^{\circ}} = 0,80625$; eine Mischung von Wasser und absolutem Alkohol wird also ein spezifisches Gewicht haben, welches zwischen 1 und 0,80625 fällt und sich mehr der einen oder der anderen Grenze nähert, je nachdem die Mischung mehr Wasser oder Alkohol enthält. Das spezifische Gewicht der Mischung weicht jedoch von dem arithmetischen Mittel ab, welches man aus den Mischungsverhältnissen berechnet.

Der Grund dieser Abweichung liegt darin, daß, wenn man Wasser und Alkohol mischt, eine Kontraktion stattfindet, die wir erst durch einen Versuch anschaulich machen wollen.

Man gieße eine Glasröhre, Fig. 396, welche ungefähr eine Länge von 80 cm hat, halb voll Wasser und fülle die andere Hälfte mit hochgradigem Weingeist (für Vorlesungen ist gefärbter Weingeist zu empfehlen) bis zu einer Marke an, so werden sich die Flüssigkeiten nicht sofort mischen; der Weingeist schwimmt auf dem Wasser. Nachdem das offene Ende durch einen Korkstöpsel fest verschlossen worden ist, so daß durchaus keine Flüssigkeit entweichen kann, kehrt man die Röhre um, und nun wird durch das Sinken des Wassers alsbald eine Mischung der Flüssigkeiten vor sich gehen. Hat die Mischung vollständig stattgefunden, so sieht man, daß die Flüssigkeit nicht mehr bis zur Marke reicht, sondern ungefähr 3 cm tiefer steht.

Fig. 396.



100 Maßteile Wasser +	0 Maßteile Alkohol geben	100 Maßteile
90	10	99,4
80	20	98,2
70	30	97,2
60	40	96,6
50	50	96,3
40	60	96,6
30	70	96,9
20	80	97,4
10	90	98,3
0	100	100

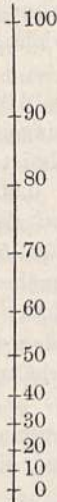
¹⁾ Pogg. Ann. 138 (1869).

Aus diesen Angaben folgt, daß das spezifische Gewicht einer Mischung von Wasser und Weingeist stets größer sein muß als das berechnete arithmetische Mittel.

Aus der folgenden Tabelle ersieht man, wie viel Maßteile Wasser man zu den in der ersten Kolonne angegebenen Maßteilen Alkohol schütten muß, um 100 Maßteile Mischung zu erhalten. Das spezifische Gewicht der so erhaltenen Mischungen ist in der letzten Kolonne angegeben.

Fig. 398.

Fig. 397.



Maßteile Alkohol	Maßteile Wasser	Spezifisches Gewicht der Mischung
100	0,00	0,794 ¹⁾
90	11,94	0,834
80	22,87	0,864
70	33,14	0,891
60	43,73	0,914
50	53,745	0,935
40	63,45	0,952
30	72,72	0,966
20	81,72	0,976
10	90,72	0,987
0	100	1,000

Wenn man nun an einer Aräometerröhre diejenigen Punkte markiert, welche den spezifischen Gewichten 0,794, 0,834... 0,976, 0,987 und 1 entsprechen, und sie mit den Zahlen 100, 90, 80... 20, 10, 0 bezeichnet, wenn man ferner, was ohne merk-

lichen Fehler geschehen kann, den Raum zwischen je zweien dieser Punkte in 10 gleiche Teile teilt, so erhält man ein Prozent-Aräometer für Weingeist, d. h. ein Aräometer, an welchem man unmittelbar ablesen kann, wie viel Volumprocente Alkohol in einer Mischung von Wasser und Weingeist sich befinden. Solche Alkoholometer wurden in Frankreich nach Gay-Lussacs, in Deutschland nach Tralles' Angaben ausgeführt, und es ist gesetzlich bestimmt, daß der Alkoholgehalt des der Besteuerung unterworfenen Branntweins, Weingeistes usw. mit Hilfe dieses Instruments ermittelt werden soll. Beistehende Skala, Fig. 397, zeigt die Hauptabteilungen eines solchen Alkoholometers in ihrem richtigen Verhältnis. Man sieht, wie sich erwarten ließ, daß die Abteilungen ungleiche Größe haben. Die Skala des Alkoholometers von Tralles bezog sich (wie die obige Tabelle) auf eine Temperatur von $60^{\circ} \text{F} = 12\frac{4}{9}^{\circ} \text{R} = 15,56^{\circ} \text{C}$ und auf Wasser von derselben Temperatur. Für andere Temperaturen des Alkohols ist aus den diesbezüglich berechneten Tabellen (enthalten in der Tabellensammlung von Landolt u. Börnstein) eine Korrektur anzubringen. Es gibt auch Instrumente, bei denen, wie in beistehender Fig. 398 ange-

¹⁾ Diese spezifischen Gewichte beziehen sich auf Alkohol von $15,56^{\circ} \text{C}$, verglichen mit Wasser von derselben Temperatur, bedeuten also $\frac{d_{15,56}}{15,56}$.

deutet, ein Thermometer angebracht und diese Korrektion gleich neben der Temperaturskala aufgetragen ist. Doch gilt sie dann nur für Alkohol zwischen 94 und 100 Proz.

Das Volumeter oder Densimeter kann das Alkoholometer recht gut ersetzen, wenn man nur eine Tabelle zur Hand hat, in welcher der Alkoholgehalt angegeben ist, welcher den verschiedenen spezifischen Gewichten entspricht.

Begreiflicherwise kann man das Alkoholometer einzig und allein zu dem angegebenen Zwecke verwenden, für jede andere Flüssigkeit ist es völlig unbrauchbar. Auf ähnliche Weise, wie das Alkoholometer, hat man auch Aräometer konstruiert, welche den Gehalt einer Säure, einer Salzlösung usw. angeben sollen. Weil jedoch ein solches Instrument nur für eine einzige spezielle Flüssigkeit brauchbar ist, so wendet man besser ein für allemal das Volumeter oder ein Densimeter an und sucht den Gehalt, welcher dem beobachteten spezifischen Gewichte entspricht, in Tabellen, welche eigens zu diesem Zwecke berechnet worden sind.

So gibt z. B. die folgende Tabelle das spezifische Gewicht einer Mischung an, welches der in der zweiten Kolumne angegebenen Anzahl von Gewichtsprozenten Schwefelsäurehydrat (SO_4H_2) in 100 Teilen der Mischung entspricht.

Hat man z. B. mit Hilfe des Volumeters oder des Densimeters gefunden, daß das spezifische Gewicht eines Gemisches von Wasser und Schwefelsäure 1,20 ist, so ersehen wir aus der Tabelle (welche übrigens nur für eine Temperatur von 15°C genau richtig ist), daß es 27,32 Proz. Schwefelsäurehydrat und 22,30 Proz. Schwefelsäureanhydrid enthält.

Auszug aus der Tabelle nach Lunge und Isler
(Zeitschr. f. angewandte Chemie 1890).

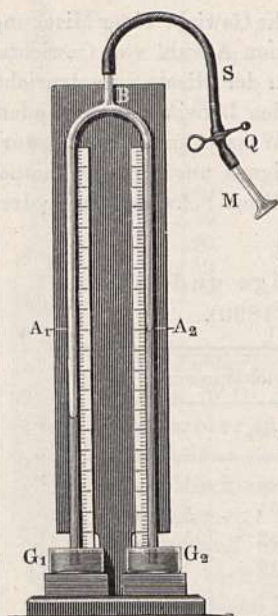
	Spezifisches Gewicht $d_{15^\circ/4^\circ}$	Gewichtsprocente an	
		SO_4H_2	SO_3
	1,0	0,09	0,07
	1,1	14,35	11,71
	1,2	27,32	22,30
	1,3	39,19	31,99
	1,4	50,11	40,91
	1,5	59,70	48,73
	1,6	68,51	55,93
	1,7	77,17	63,00
	1,8	86,90	70,94
	1,82	90,05	73,51
	1,83	92,10	75,19
	1,84	95,60	78,04
Dichtemaximum	1,8415	97,70	79,76
	1,84	99,20	80,98
	1,8385	99,95	81,59

In die Klasse der Prozentaräometer gehört auch die sogenannte Mostwage, welche dazu dient, den Zuckergehalt des Traubenmostes zu ermitteln. Das spezifische Gewicht des Mostes nimmt mit seinem Gehalt an (Trauben-)

Zucker zu. Der Punkt der Skala, bis zu welchem das Instrument in einer Lösung einsinkt, welche 20 Proz. Traubenzucker (d. h. 20 g Zucker in 100 g Most) enthält, ist mit 100, der Punkt, welcher einer Lösung von 12 Proz. Zucker entspricht, ist mit 60 bezeichnet. Der Zwischenraum zwischen diesen beiden Punkten, von welchen der eine nahe am oberen, der andere nahe am unteren Ende der Skala liegt, ist in 40 Grade geteilt. Je 5° der Mostwage entsprechen also einem Zuckergehalt von 1 Proz. Ein Most, in welchem das Instrument bis zu 80° einsinkt, enthält also $\frac{80}{5} = 16$ Proz. Traubenzucker.

§ 132. Weitere weniger genaue Methoden zur Ermittlung des spezifischen Gewichts. Eine einfache Methode zur Bestimmung des spezifischen Gewichts fester und flüssiger Körper besteht darin, daß man das absolute Gewicht einer abgegrenzten Masse derselben bestimmt — es sei dies P — und darauf das Volumen V dieser Masse durch Eingießen der Flüssigkeit in einen graduierten Zylinder mißt, beziehungsweise durch Einsenken des festen Körpers in einen solchen, der teilweise bereits mit Wasser gefüllt ist, aus dem Steigen des Wasserniveaus auf dessen Volumen schließt. Das spezifische

Fig. 399.



Gewicht ist dann $s = \frac{P}{V}$, wenn wir P in Grammen, V in Cubikcentimetern angeben.

Schwimmethode. Hat man eine Reihe von Probekörpern (zugeschmolzene Glaskugeln) von stufenweise verschiedenem mittleren spezifischen Gewicht zur Verfügung, so erkennt man die Dichte einer Flüssigkeit daran, daß eine Anzahl von Kugeln in ihr untersinken, die leichteren dagegen schwimmen. Die gesuchte Dichte liegt dann zwischen zwei Grenzen, die durch die leichteste untergesunkene und die schwerste schwimmende Kugel gegeben sind. Umgekehrt bestimmt man das spezifische Gewicht von festen Körpern, von denen nur sehr kleine Mengen zur Verfügung stehen, indem man sie in eine Reihe von Flüssigkeiten mit stufenweise steigendem spezifischen Gewicht eintaucht und beobachtet, in welchen sie eben noch schwebend bleiben. Leider ist die Auswahl der Flüssigkeiten mit größerem spezifischen Gewicht eine sehr beschränkte und reicht nur bis zum spez. Gewicht = 4¹⁾.

Hydrometer von Alexander. In § 120 haben wir bereits durch Fig. 364 einen Apparat kennen gelernt, um das Verhältnis der Höhen verschiedener Flüssigkeiten über einem gemeinsamen Niveau in kommunizierenden Röhren zu demonstrieren. Alexander hat dieses Gesetz in seinem Hydrometer, das Fig. 399 darstellt, benutzt, um das spezifische Gewicht einer

¹⁾ Siehe E. Cohen: Neues Jahrb. f. Mineralogie 1883, Bd. II, S. 87; Rosenbusch: Mikroskopische Physiographie 1885, S. 224.

Flüssigkeit zu bestimmen. Die kommunizierenden Röhren A_1 und A_2 tauchen mit ihren offenen unteren Enden in zwei Gefäße G_1 und G_2 , von denen das eine Wasser, das andere die zu untersuchende Flüssigkeit enthält. Oben sind beide Röhren verbunden und münden in das Rohr B aus. Saugt man am Mundstück M , das durch einen Kautschukschlauch S mit B verbunden ist, nach Lüftung des Quetschhahns Q , so steigen die Flüssigkeiten in den Schenkeln A_1 und A_2 , und es verhalten sich dann die an den Teilungen abgelesenen Höhen der beiderlei gehobenen Säulen umgekehrt wie die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten.

§ 133. Tabellen der spezifischen Gewichte einer Reihe von festen Körpern und Flüssigkeiten.

Tabelle der spezifischen Gewichte einiger fester Körper (bei 0 Grad).

Platin (gewalzt)	21,40	Porzellan	2,49 bis 2,14
Gold { gemünzt	19,32	Gips (kristallisiert)	2,31
{ geschmolzen	19,25	Schwefel (natürlich)	2,03
Iridium	22,25	Elfenbein	1,92
Wolfram	17,60	Alabaster	1,87
Blei, gewalzt	11,38	Graphit	1,8 bis 2,4
Palladium	11,30	Anthracit	1,80
Silber	10,53	Phosphor	1,83
Wismut	9,80	Magnesium	1,74
Kupfer { gehämmert	8,88	Bernstein	1,08
{ gegossen	7,79	Wachs, weißes	0,97
{ zu Draht gezogen	8,78	Natrium	0,98
Cadmium, gegossen	8,56	Kalium bei 0°	0,86
Molybdän	8,61	Lithium	0,59
Messing	8,39	Ebenholz	1,23
Arsen	5,71	Eichenholz (alt)	1,17
Nickel	8,28	Buchsbaumholz	1,33
Stahl	7,82	Ahornholz { frisch	0,90
Kobalt	8,1 bis 9,5	{ trocken	0,65
Eisen { geschmiedet	7,79	Buchenholz { frisch	0,98
{ gegossen	7,21	{ trocken	0,59
Bleiglanz	7,76	Edeltanne { frisch	0,89
Zinn	7,29	{ trocken	0,45
Zink	7,15	Erlenholz { frisch	0,86
Antimon bei 4°	6,70	{ trocken	0,50
Tellur	6,11	Eschenholz { frisch	0,90
Jod	4,95	{ trocken	0,64
Schwerspat	4,43	Hainbuchenholz { frisch	0,94
Diamant	3,52	{ trocken	0,77
Flintglas	3,78 bis 3,20	Lindenholz { frisch	0,82
Flußspat	3,15	{ trocken	0,44
Aluminium bei 4°	2,58	Mahagoniholz	1,06
Bouteillenglas	2,60	Nußbaumholz	0,68
Spiegelglas	2,37	Zypressenholz	0,60
Turmalin (grün)	3,15	Zedernholz	0,56
Marmor	2,84	Pappelholz	0,38
Smaragd	2,77	Kork	0,24
Bergkristall	2,68		

Spezifisches Gewicht einiger Flüssigkeiten
(bei 0 Grad, wo nichts weiter bemerkt ist).

Destilliertes Wasser	0,99987	60proz. Säure	1,348
Quecksilber	13,59593	70 " "	1,398
Brom	3,15	80 " "	1,438
Schwefelsäure (englische)	1,848	90 " "	1,473
Verdünnte Schwefelsäure nach		100 " "	1,500
Delezenne bei 15° C.:		Chloroform	1,480
10proz. Säure	1,066	Schwefelkohlenstoff	1,272
20 " "	1,138	Glycerin	1,260
30 " "	1,215	Milch	1,030
40 " "	1,297	Meerwasser	1,026
50 " "	1,387	Wein: Malaga-	1,022
60 " "	1,486	" Rhein-	0,999
70 " "	1,595	Öle: Citronenöl	0,852
80 " "	1,709	" Leinöl	0,953
90 " "	1,805	" Mohnöl	0,929
100 " "	1,840	" Olivenöl	0,915
Verdünnte Salpetersäure:		" Terpentinöl	0,872
10proz. Säure	1,054	Benzol $C_{12}H_6$	0,868
20 " "	1,111	Steinöl (Petroleum)	0,836
30 " "	1,171	Alkohol, absoluter	0,793
40 " "	1,234	Schwefeläther	0,715
50 " "	1,295	Valyl (C_8H_8)	0,694

Es mögen hier zum Vergleich noch die Zahlenwerte für das spezifische Gewicht einiger Gase Platz finden, obgleich wir die Methoden, nach welchen es bestimmt wird, erst später besprechen können.

Spezifisches Gewicht einiger Gase
(bei 0 Grad und beim Normalluftdruck¹⁾ ebenfalls bezogen auf Wasser bei 4° C).

Chlorgas	0,00322	Atmosphärische Luft	0,001293
Kohlensäure	0,00192	Stickstoff	0,001267
Sauerstoff	0,00123	Wasserstoff	0,000090

§ 134. Ausfluß der Flüssigkeiten, Torricellis Theorem. Die Bewegungserscheinungen der Flüssigkeiten unter der Einwirkung der Schwere und analoger äußerer Kräfte sind erheblich verwickelter als bei den festen Körpern, weil eben die Teilchen gegeneinander verschiebbar sind und nur das Volumen der ganzen Masse etwas Unveränderliches darstellt. Die nächstliegende Bewegung dieser Art entsteht beim Abfluß einer Flüssigkeit aus einem Gefäß. Macht man in der Seitenwand oder am Boden eines mit Flüssigkeit gefüllten oben offenen Gefäßes eine Öffnung, welche im Vergleich mit den Dimensionen des Gefäßes klein ist, so strömt die Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit aus, welche um so größer ist, je tiefer sich die Öffnung unter dem Spiegel der Flüssigkeit befindet. Der Zusammenhang zwischen

¹⁾ Siehe § 34, Anmerkung 1, S. 16.

Ausflußgeschwindigkeit und Druckhöhe läßt sich am einfachsten auf folgende Weise ausdrücken: Die Ausflußgeschwindigkeit ist gerade so groß wie die Geschwindigkeit, welche ein frei fallender Körper erlangen würde, wenn er von dem Spiegel der Flüssigkeit bis zur Ausflußöffnung herabfiel.

Dieser Satz ist unter dem Namen des Torricellischen Theorems bekannt. Er läßt sich durch folgende Schlußweise ableiten.

Wenn die Flüssigkeitsschicht $abcd$, Fig. 400, welche sich unmittelbar über der Öffnung ab befindet, frei herabfiel, ohne durch die über ihr lastende Flüssigkeit beschleunigt zu sein, so würde sie die Öffnung mit derjenigen Geschwindigkeit verlassen, welche der Höhe ac entspricht, die wir mit h bezeichnen wollen. Diese Geschwindigkeit ist $v' = \sqrt{2gh}$. Nun aber ist die ausströmende Schicht nicht bloß durch ihre eigene Schwere beschleunigt, sondern durch die Schwere der ganzen auf ihr lastenden Flüssigkeit.

Fig. 400.

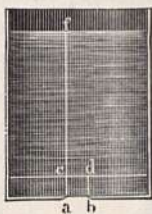


Fig. 401.



Die beschleunigende Kraft g verhält sich demnach zur beschleunigenden Kraft g' , welche die flüssigen Teilchen wirklich austreibt, wie ac zu af oder wie h zu H , wenn die Druckhöhe mit H bezeichnet wird, d. h. $h:H = g:g'$, also ist die auf die ausfließende flüssige Schicht wirkende beschleunigende Kraft $g' = \frac{g}{h} H$. Wenn aber die beschleunigende Kraft, welche auf die ausfließende Schicht wirkt, nicht g , sondern g' ist, so ist auch die Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g'h}$, und wenn wir in diesen Wert von v den eben abgeleiteten Wert von g' setzen, so erhalten wir für die Ausflußgeschwindigkeit den Wert:

$$v = \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (1)$$

Dies ist aber dieselbe Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er eine Höhe H durchfällt.

Wir wollen diesen Satz auch noch aus dem Gesetze der Erhaltung der Energie ableiten. Das Gefäß, Fig. 401, habe den Querschnitt Q , die Öffnung am Boden den Querschnitt q , die Höhe der Flüssigkeit betrage H . Während des Ausfließens müssen sich offenbar die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit verkehrt verhalten wie ihre Querschnitte. Ist also die Geschwindigkeit durch die Öffnung am Boden gleich v , so ist die Geschwindigkeit innerhalb des Gefäßes $v_1 = v \frac{q}{Q}$. Ist nun ein kleiner Teil der Flüssigkeit von der Masse m , entsprechend der in dem Raume $A'B'BA$ enthaltenen, ausgeflossen, so ist es ebenso, als wäre die Masse m um die Höhe H gesunken, was einer Arbeit (Energie) von der Größe mgH entspricht. Andererseits ist lebendige Kraft erzeugt worden, nämlich die des ausfließenden Strahles und die der Bewegung der Flüssigkeit im Gefäße. Die letztere ist nun sehr klein, wenn v_1 sehr klein ist, also wenn die Öffnung q sehr klein ist im Verhältnis zu Q ; es ist daher nur die lebendige Kraft des ausgeflossenen Teiles allein in

Rechnung zu ziehen. Dieselbe beträgt $\frac{mv^2}{2}$. Soll keine Energie verloren gehen, so muß $mgH = \frac{mv^2}{2}$, also $v = \sqrt{2gH}$ sein.

Aus dem Torricellischen Theorem folgt unmittelbar:

1. Die Ausflußgeschwindigkeit hängt nur von der Tiefe der Öffnung unter dem Niveau, aber nicht von der Natur der Flüssigkeit ab, da in Gleichung (1) der Wert des spezifischen Gewichtes der Flüssigkeit gar nicht vorkommt. Bei gleichen Druckhöhen muß also Wasser und Quecksilber gleich schnell ausfließen. Jede Quecksilberschicht wird zwar durch einen Druck angetrieben, welcher 13,6 mal so groß ist als beim Wasser, dagegen ist aber auch die Masse eines Quecksilbervolumens, welches ausfließt, 13,6 mal größer als die eines gleich großen Wasservolumens.

2. Die Ausflußgeschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Druckhöhen. Aus einer Öffnung, welche 100 cm unter dem Wasserspiegel liegt, muß also die Flüssigkeit mit 10 mal größerer Geschwindigkeit ausfließen als aus einer anderen, welche nur 1 cm unter dem Niveau liegt.

§ 135. Apparate zu Versuchen über die Ausflußgeschwindigkeit.

Um das Torricellische Gesetz durch das Experiment zu prüfen, wendet man Gefäße an, deren Rauminhalt bedeutend ist im Vergleich zu der Größe der Öffnung. Die Öffnungen selbst müssen in ganz dünne Metallblättchen gemacht sein, welche man in die Seitenwand oder in den Boden des Gefäßes einsetzen kann; denn wenn die Öffnungen sich in einer dicken Wand befänden, so würde die Ausflußgeschwindigkeit zu sehr durch die Reibung an den Wänden der Öffnung vermindert werden.

Besonders zweckmäßig zu Versuchen über den Ausfluß von Flüssigkeiten ist der in Fig. 402 abgebildete, im wesentlichen nach Weisbach konstruierte Apparat. Die drei Ausflußöffnungen befinden sich 1, 4 und 9 dm unter einem im oberen Teile des Gefäßes angebrachten Merkzeichen, bis zu welchem es mit Wasser gefüllt wird. Der Verschuß der Ausflußöffnungen wird durch kleine, mit vulkanisiertem Kautschuk besetzte Kolben bewerkstelligt, welche man nach Belieben auf die Öffnung aufdrücken, wie es die mittlere Öffnung darstellt, oder von derselben zurückziehen kann, wie man es bei der obersten Öffnung sieht. Den Öffnungen gegenüber sind in der Wand Stopfbüchsen angebracht, durch welche die Stangen mit jenen Kolben zum Hin- und Herschieben hindurchgehen.

Statt der in unserer Figur dargestellten Ausflußöffnungen, aus welchen der Wasserstrahl in horizontaler Richtung hervorspringt, kann man auch kurze Röhren anschrauben, welche mit einer nach oben gerichteten Öffnung versehen sind, so daß man auch Versuche mit dem aufsteigenden Wasserstrahl anstellen kann.

Wenn man Ausflußversuche bei unveränderter Druckhöhe anstellen will, so muß man dafür sorgen, daß oben stets so viel Wasser in das Reservoir zufließen kann, als durch die Ausflußöffnung abfließt.

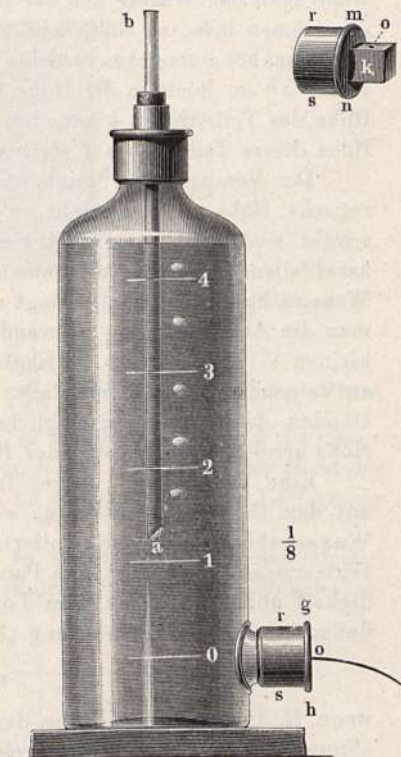
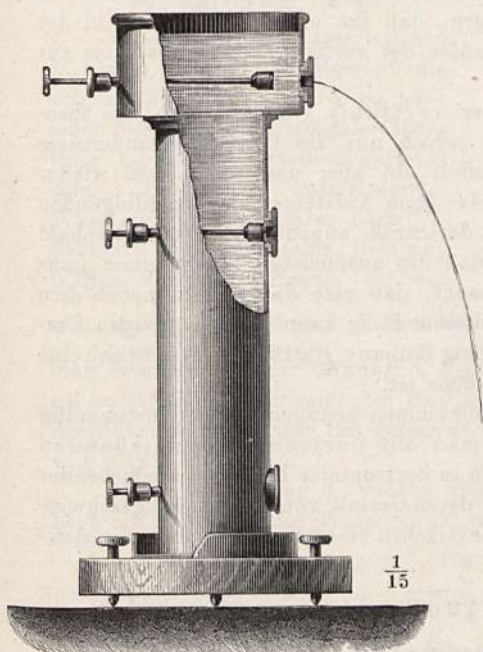
Ein anderer Apparat, welcher zu Versuchen über die Ausflußgeschwindigkeit dienen kann, ist das in Fig. 403 abgebildete Mariottesche Gefäß

(Mariottesche Flasche). An einer großen Glasflasche mit vertikalen Wänden ist unten seitlich ein Tubulus angebracht und auf diesen eine Messingfassung mit einer kurzen, weiten Messingröhre *r* aufgekittet. Die Röhre *r* dient zur Aufnahme der Ausflußöffnungen.

Damit der Ausfluß längere Zeit unter unverändertem Druck stattfindet, wird der Hals der Flasche mittels eines Korkes verschlossen, durch welchen

Fig. 403.

Fig. 402.



eine oben und unten offene Glasröhre hindurchgeht, deren untere Öffnung *a* sich unter dem Wasserspiegel befindet. In dem Maße nun, als unten Wasser ausfließt, dringt die Luft durch die Glasröhre *ba* ein, indem fortwährend Luftblasen von *a* in den oberen Teil der Flasche aufsteigen; auf diese Weise ist aber, wie später gezeigt werden wird, die ganze Wassermasse von *a* aufwärts durch den Luftdruck äquilibrirt, so daß nur die Höhe der Flüssigkeitssäule von *a* bis zur Ausflußöffnung herunter die Ausflußgeschwindigkeit bedingt.

Es ist nun auf der Flasche eine Teilung angebracht, deren Nullpunkt in der Höhe der Ausflußöffnung liegt, während die folgenden Teilstriche 1, 2, 3 usw. Decimeter über demselben angebracht sind. Der Ausfluß wird dann mit einer Geschwindigkeit stattfinden, welche einer Druckhöhe von 1, 2, 3 oder 4 dm entspricht, wenn man die Röhre so stellt, daß ihr unteres Ende sich in der Höhe des Teilstriches 1, 2, 3 oder 4 befindet.

Um einen Wasserstrahl vertikal in die Höhe springen zu lassen, kann man ein gebogenes kurzes Glasröhrchen mittels eines Korkes in *r* einsetzen,

Die Richtigkeit der Formel (1) hat Michelotti durch Versuche im großen in der Nähe von Turin geprüft und gefunden, daß die beobachteten Werte des Parameters $4H$ nur um 0,99 kleiner waren als das Vierfache der wirklichen Druckhöhe H .

Zur Verdeutlichung fügen wir noch folgende Konstruktion der Kurve nach einem Zahlenbeispiel bei. Gesetzt, die Öffnung a in Fig. 404 befände sich 1 dm unter dem Wasserspiegel, so ist nach dem Torricellischen Gesetze die Ausflußgeschwindigkeit

$$\sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,1} = 1,4 \text{ m.}$$

Wenn also ein Wasserteilchen in einem bestimmten Moment die Öffnung verläßt, so wird es nach einer Sekunde in horizontaler Richtung 1,4 m von derselben entfernt sein. Ein eben ausströmendes Wasserteilchen wird also nach $\frac{2}{10}$ Sekunde in horizontaler Richtung 0,28 m von der Öffnung entfernt

sein; in $\frac{2}{10}$ Sekunde fällt es aber um $\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 0,196 \text{ m}$ herab. Wenn man demnach von der Öffnung a , Fig. 405, in vertikaler Richtung die Länge $ab = 0,196 \text{ m}$ herab mißt, so muß eine von b aus in horizontaler Richtung nach dem Wasserstrahle hin gezogene Linie bc denselben in einer Entfernung von 0,28 m treffen.

Aus einer Öffnung d , welche viermal so tief unter dem Wasserspiegel liegt als a , strömt der Wasserstrahl mit der doppelten Geschwindigkeit her-

Fig. 404.

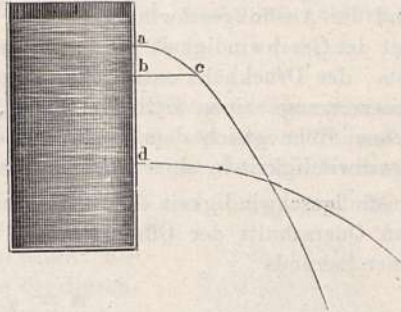
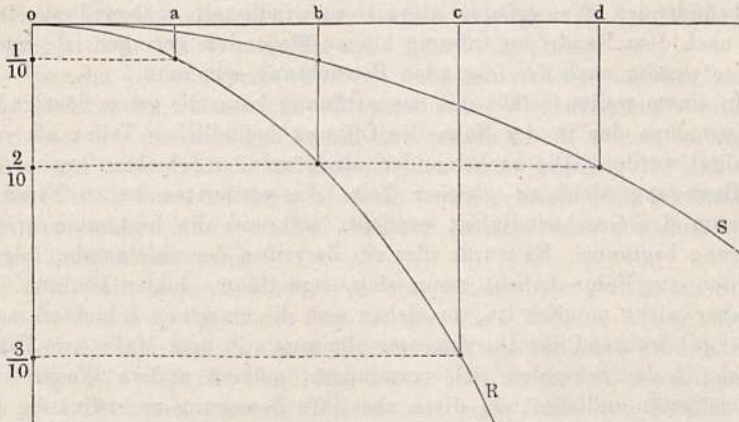


Fig. 405.



vor. Wenn man also von d aus 0,196 m herabmißt und dann in horizontaler Richtung eine Linie gegen den Strahl hingezogen denkt, so muß sie denselben in einer Entfernung $2 \cdot 0,28$, also in einer Entfernung von 0,56 m treffen.

Daß der horizontal ausfließende Wasserstrahl in der Tat die dem Gesetz entsprechende Parabel beschreibt, davon überzeugt man sich am besten, wenn

geringer ist, je näher sie dem Rande der Öffnung sind, und daraus folgt denn, daß die Ausflußmenge geringer sein muß, als wenn alle Teilchen die Öffnung mit der Geschwindigkeit des Kernstrahles verließen.

Die wahre Ausflußmenge M beträgt ungefähr 64 Proz. der sogenannten theoretischen. Die wahre Ausflußmenge ist also

$$M = c \cdot q \cdot \sqrt{2gH},$$

wo man für den konstanten Faktor c den Zahlenwert 0,64 zu setzen hat. Mit wachsender Druckhöhe nimmt der Zahlenwert des konstanten Faktors c etwas ab.

§ 138. **Beschaffenheit des ausfließenden Strahles.** Gleich nachdem der flüssige Strahl die Öffnung verlassen hat, beobachtet man eine auffallende Veränderung desselben; er zieht sich rasch zusammen; in einer Entfernung von der Öffnung, welche dem Halbmesser der Öffnung gleich ist, beträgt die Größe des Querschnittes des Strahles nur noch zwei Drittel vom Querschnitt der Öffnung selbst, so daß also an dieser Stelle der Durchmesser des Strahles ungefähr 0,8 vom Durchmesser der Öffnung ist.

Dieses Zusammenziehen des Strahles wird mit dem Namen der *Contractio venae* bezeichnet.

Man glaubte früher, daß von der bezeichneten Stelle an der Strahl sich wieder ausbreite; Savart hat aber gezeigt, daß ein solches Kontraktionsmaximum nur bei aufwärts gerichteten Strahlen stattfindet; bei anderen Strahlen nimmt die Zusammenziehung fortwährend, wenn auch kaum merklich, zu.

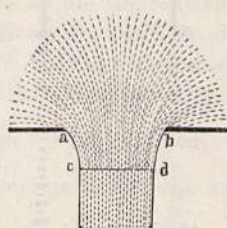
Die Fig. 406 stellt diese Kontraktion des Strahles dar; die Entfernung von der Öffnung ab bis zu der Stelle cd , von welcher an die fernere Zusammenziehung fast unmerklich wird, ist etwas größer als der Halbmesser der Öffnung selbst. cd ist ungefähr acht Zehntel der Länge ab .

Die Ursache der *Contractio venae* ist wohl keine andere als die, welche schon im Inneren des Gefäßes den Seitenzufluß der Wasserteilchen veranlaßt.

Verfolgen wir den flüssigen Strahl auf seinem Laufe weiter, so finden wir, daß er aus zwei wohl zu unterscheidenden Teilen besteht; der eine Teil, welche der Öffnung zunächst liegt, ist ruhig und durchsichtig wie ein massiver Glasstab, der andere entferntere Teil erscheint zerrissen und aus einer Reihe getrennter Tropfen bestehend.

Fig. 407 stellt einen flüssigen, von oben nach unten gerichteten Strahl dar, wie er dem Auge erscheint: an ist der klare Teil; in n beginnt der gestörte Teil des Strahles, welcher abwechselnd aus Bäuchen und Knoten besteht. Fig. 407a stellt den Strahl dar, wie er nach Savarts Untersuchungen wirklich ist. Der ganz gestörte Teil ist aus einer Reihe von Tropfen zusammengesetzt. Die Bäuche bestehen aus breiten, in horizontaler Richtung ausgedehnten Tropfen, die Knoten aber aus solchen, welche in vertikaler Richtung verlängert sind. Da aber die Knoten und Bäuche eine fixe Stellung haben, so muß ein und derselbe Tropfen abwechselnd breit und lang werden, je nachdem er sich an der Stelle eines Bauches oder Knotens befindet; jeder Tropfen muß also in regelmäßigen Perioden aus einer Gestalt in die andere

Fig. 406.



übergehen. Alle Tropfen scheinen gleiche Größe zu haben und denselben Veränderungen unterworfen zu sein. Zwischen je zweien dieser Tropfen scheint noch ein weit kleinerer sich zu befinden, wodurch die Bäuche ein röhrenartiges Ansehen erhalten.

Fig. 407. Fig. 407 a. Fig. 408.

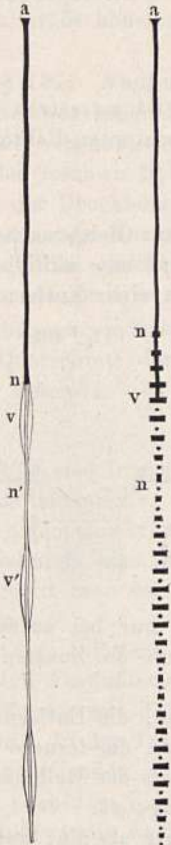
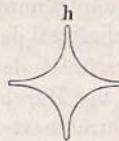


Fig. 409.



Fig. 410.



Die Gegenwart der Luft hat auf die Form und die Dimensionen des Strahles keinen Einfluß.

Wenn die Öffnungen nicht kreisförmig sind, so erleidet der Strahl sehr merkwürdige Formveränderungen. Ein Strahl z. B. welcher aus einer quadratischen Öffnung in horizontaler Richtung hervorspringt, hat in verschiedenen Entfernungen von der Öffnung die Querschnitte Fig. 408, 409 und 410. Es rührt dies gewiß größtenteils daher, daß die Stelle, bis zu welcher hin die starke Kontraktion stattfindet, nicht für alle Teilchen in gleicher Entfernung von der Öffnung liegt, weil ja der Durchmesser der Öffnung nicht nach allen Richtungen derselbe ist.

§ 139. Einfluß der Ansatzröhren auf die Ausflußmenge. Wenn der Ausfluß nicht durch Öffnungen geschieht, welche in eine dünne Wand gemacht sind, sondern durch kurze Röhren, so finden merkwürdige Modifikationen statt, die wir jetzt näher betrachten wollen.

Wenn die kurze Ansatzröhre selbst die Gestalt des kontrahierten Strahles hat, so übt sie weiter keinen Einfluß auf die Ausströmung des Wassers aus.

Durch kurze zylindrische und nach außen konisch erweiterte Ansatzröhren fließt der Strahl entweder frei durch wie durch eine Öffnung, welche gleichen Durchmesser mit dem inneren Ende der Röhre hat, Fig. 411, und in diesem Falle übt die Röhre keinen Einfluß aus; oder das Wasser hängt

Fig. 411.

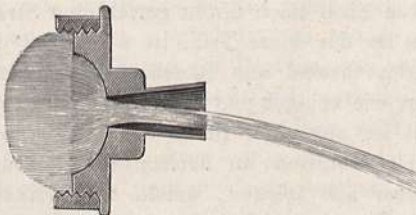
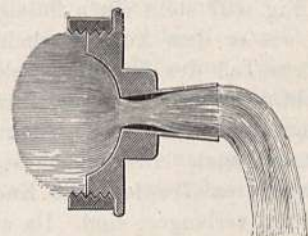


Fig. 412.



sich an die Wände der Röhre, so daß die Flüssigkeit die ganze Röhre ausfüllt und ein Strahl vom äußeren Durchmesser der Röhre ausfließt, Fig. 412;

in diesem Falle veranlaßt die Ansatzröhre eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit und eine Vermehrung der Ausflußmenge. Während eine Öffnung in dünner Wand 0,64 der theoretischen Ausflußmenge gibt, erhält man durch eine zylindrische Ansatzröhre 84 Proz., vorausgesetzt, daß die Länge der Röhre ihrem vierfachen Durchmesser gleich ist. Bei geringer Druckhöhe ist der Strahl stets anhängend, bei großer Druckhöhe hingegen ist er frei. Bei mittlerem Drucke kann man ihn nach Belieben bald frei, bald anhängend machen; ein geringes Hindernis stellt das Anhängen her, und oft reicht ein ganz schwacher Stoß hin, um den Strahl wieder frei zu machen.

Ein konisches, nach außen erweitertes Ansatzrohr bewirkt, im Falle es voll ausfließt, wie in Fig. 412, eine noch größere Vermehrung der Ausflußmenge als ein zylindrisches.

Es ist bereits bemerkt worden, daß die Vermehrung der Ausflußmenge von einer Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit begleitet ist. Der Grund davon ist leicht einzusehen. Die Adhäsion des Wassers an die Röhrenwände ist keine beschleunigende Kraft, sie kann die lebendige Kraft des ausfließenden Strahles nicht vermehren. Bezeichnen wir mit M die Ausflußmenge durch eine Öffnung in dünner Wand, durch v die entsprechende Geschwindigkeit, so ist $\frac{Mv^2}{2}$ die lebendige Kraft des Strahles. Wird nun die Ausflußmenge M vermehrt, indem sie M' wird, so muß doch die lebendige Kraft des ausfließenden Strahles unverändert bleiben, es ist also:

$$M \frac{v^2}{2} = M' \frac{v'^2}{2},$$

oder:

$$v'^2 = v^2 \frac{M}{M'},$$

v' ist also kleiner als v .

Es ist jetzt noch zu untersuchen, wie es kommt, daß Ansatzröhren die Ausflußmenge auf die erwähnte Weise vermehren und die Ausflußgeschwindigkeit dagegen vermindern.

Indem das Wasser in das Ansatzrohr einströmt, erleidet es eine Kontraktion, wie wenn es aus einer Öffnung in dünner Wand ausflösse; weiterhin aber, sobald einmal die Röhrenwände benetzt sind, bewirkt die Adhäsion an die Röhrenwände, daß sich die Ansatzröhre vollständig ausfüllt, und somit ist der Querschnitt des Strahles durch das Ansatzrohr vergrößert, er ist beim Austritt aus dem Rohre größer als an der Stelle der Kontraktion, wie man dies in Fig. 412 sieht.

Wenn nun die Wasserteilchen, den ganzen Querschnitt der Röhre ausfüllend, dieselbe mit der Geschwindigkeit verlassen, mit welcher sie die Stelle der größten Kontraktion passieren, so müßte notwendig ein Zerreißen der aufeinander folgenden Wasserschichten eintreten. Die Trennung der Wasserteilchen, also die Bildung von leeren Räumen, wird aber durch den Druck der Luft verhindert, welche den Eintritt der Wasserteilchen in das Rohr beschleunigt, dagegen aber auch den Ausfluß aus demselben verzögert. Durch den Druck der Luft werden die ausfließenden Wasserteilchen so viel zurückgehalten, daß dadurch ein voller Ausfluß möglich wird.

Daß der Luftdruck hier wirklich diese Rolle spielt, geht vorzüglich daraus hervor, daß, wenn der Versuch in einem luftleeren Raume stattfindet, der Ausfluß stets in der Fig. 411 dargestellten Weise vor sich geht, also die Ausflußmenge nicht vermehrt wird.

Macht man in die Seitenwand der Ansatzröhre da, wo die größte Kontraktion stattfindet, ein Loch, so wird durch diese Öffnung Luft eingesaugt, und der Strahl hört auf kontinuierlich zu sein.

Wenn in eine solche von obenher gemachte Seitenöffnung eine heberförmig gebogene Röhre xy , Fig. 413, eingesetzt wird, deren unteres Ende in ein Gefäß mit Wasser oder Quecksilber mündet, so wird durch das Bestreben des Wassers, in der Ansatzröhre einen luftleeren Raum zu bilden, die Flüssigkeit in der Röhre xy in die Höhe gesaugt. Dieses Phänomen des Saugens beweist ebenfalls den Einfluß des Luftdruckes auf die soeben betrachteten Erscheinungen. Da eine konische Ansatzröhre eine noch größere Ausflußmenge gibt als eine zylindrische, so muß sie auch ein stärkeres Saugen erzeugen, d. h. es wird in der Röhre xy unter übrigens gleichen Umständen durch ein konisches Ansatzrohr die aufgesaugte Flüssigkeitssäule zu einer größeren Höhe gehoben als durch ein zylindrisches.

Wir werden an späterer Stelle bei Beschreibung der Luftpumpen und der Gebläse Apparate kennen lernen, welche auf einem verwandten Prinzip beruhen.

§ 140. **Reibungswiderstand in langen Röhren.** Mit der nach der Gleichung $v = \sqrt{2gH}$ berechneten Geschwindigkeit fließt eine Flüssigkeit nur durch eine in dünner Wand angebrachte Öffnung aus; wenn dagegen der Ausfluß durch lange und verhältnismäßig enge Röhren geschieht, so findet ein Reibungswiderstand statt, welcher die Ausflußgeschwindigkeit erheblich vermindert. Aus diesbezüglichen Versuchen ergibt sich für dieselbe annähernd die Formel:

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + b \frac{l}{d}}} \dots \dots \dots (1)$$

worin l die Länge, d den Durchmesser der Röhre, und b eine mit der Geschwindigkeit v selbst veränderliche Größe bedeutet. Es ist nämlich nach Weisbach, wenn alle Größen in Meter gemessen werden:

$$v = 0,01439 + \frac{0,009471}{\sqrt{v}}$$

Diese Formel für die Ausflußgeschwindigkeit gilt aber auch nur für den Fall, daß die Röhrenleitung überall gleich weit und ziemlich gerade, namentlich, daß kein besonderer Widerstand beim Eintritt aus dem Reservoir in die Röhre zu überwinden ist.

Wenn das aus dem Gefäße, Fig. 414, durch die Röhre ac ausfließende Wasser auf seinem Wege keine Reibung zu überwinden hätte, wenn es bei c mit der Geschwindigkeit ausflösse, welche der vollen Druckhöhe entspricht,

so hätten die Röhrenwände keinerlei Druck auszuhalten. Infolge des zu überwindenden Reibungswiderstandes aber hat jede Stelle der Röhre einen Druck auszuhalten, welche dem Reibungswiderstande proportional ist, der auf dem Wege von der fraglichen Stelle bis zur Mündung *c* der Röhre noch zu überwinden ist.

Wird in die Ausflußröhre bei *a* ein vertikales Glasrohr eingesetzt, so wird das Wasser in ihm bis zu einer Höhe *ad* aufsteigen. Der Druck der Wassersäule *ad* hält dem Reibungswiderstande das Gleichgewicht, welchen das durch die Röhre strömende Wasser auf dem Wege von *a* bis *c* noch zu überwinden hat.

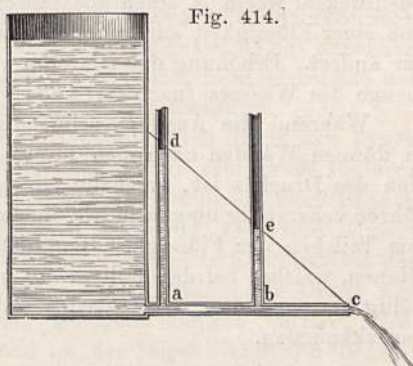


Fig. 414.

Wird in der Mitte zwischen *a* und *c*, also bei *b*, eine vertikale Glasröhre eingesetzt, so wird in ihr das Wasser nur bis zu einer Höhe *bc* steigen, welche $= \frac{1}{2}ad$ ist, weil der auf dem Wege von *b* bis *c* zu überwindende Widerstand nur die Hälfte von dem von *a* bis *c* zu überwindenden ist.

Wenn man überhaupt an irgend einer Stelle der Röhre *ac* eine vertikale Glasröhre einsetzt, so wird das Wasser in derselben so hoch steigen, daß der Gipfel der Wassersäule auf die gerade Linie *dc* fällt.

§ 141. Ausfluß durch Kapillarröhren. Um die Gesetze des Ausflusses von Flüssigkeiten durch Kapillarröhren zu untersuchen, wandte Poisseuille den Fig. 415 abgebildeten Apparat an. Die Kapillarröhre *AB* ist an eine weitere, mit einer kugelförmigen Erweiterung versehene Glasröhre angesetzt. Über und unter der Kugel sind die Marken *M* und *N* angebracht; das Volumen des Gefäßes zwischen *M* und *N* ist genau bestimmt. Nachdem der Apparat durch Saugen mit der Flüssigkeit gefüllt ist, wird das obere Ende desselben mit einem Reservoir verbunden, welches komprimierte

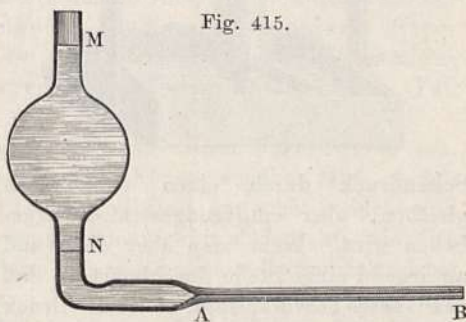


Fig. 415.

Luft enthält, deren Druck durch ein Quecksilbermanometer gemessen wird. Man beobachtet die Zeit, welche erforderlich ist, damit unter konstantem Druck der Spiegel der Flüssigkeit von *M* bis *N* sinkt; wird alsdann der Versuch bei verschiedenem Druck wiederholt, so findet man, daß die Ausflußzeit für dieselbe Flüssigkeitsmenge dem Drucke umgekehrt proportional ist.

Aus seinen Versuchen mit diesem Apparate fand Poisseuille, daß die in einer gegebenen Zeit ausströmende Flüssigkeitsmenge *Q* direkt proportional dem Drucke *p* und der vierten Potenz des Durchmessers *D*, dagegen verkehrt proportional der Länge der Kapillarröhre sei. Sie läßt sich also durch die Formel

$$Q = N \frac{p \cdot D^4}{L} \dots \dots \dots (1)$$

ausdrücken, worin N einen konstanten Faktor bezeichnet, dessen Größe sich von einer Flüssigkeit zur anderen, sowie auch insbesondere mit der Temperatur ändert. Erhöhung der letzteren von 0 bis 60° steigert z. B. die Ausflußmenge des Wassers (nach Girards Versuchen) um mehr als das Dreifache.

Während die Ausflußgeschwindigkeit der Flüssigkeiten aus Öffnungen in dünnen Wänden nach dem Torricellischen Gesetze lediglich eine Funktion des Druckes ist, erscheint dieses Gesetz beim Ausfluß durch Kapillarröhren vollständig umgewandelt, indem hier die Molekularwirkungen zwischen den Teilchen der Flüssigkeit und denen der Röhrenwand einen Einfluß gewinnen, welcher bei den Fällen, auf welche das Torricellische Gesetz paßt, völlig verschwindet. Wir werden auf diesen Gegenstand an späterer Stelle zurückkommen.

§ 142. Reaktion ausströmender Flüssigkeiten. Denken wir uns ein Gefäß, welches mit Wasser gefüllt ist, so bleibt alles in Ruhe, weil jeder

Fig. 416.

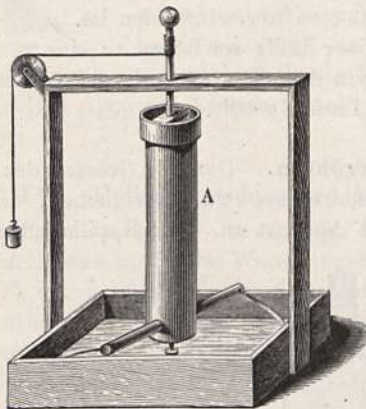
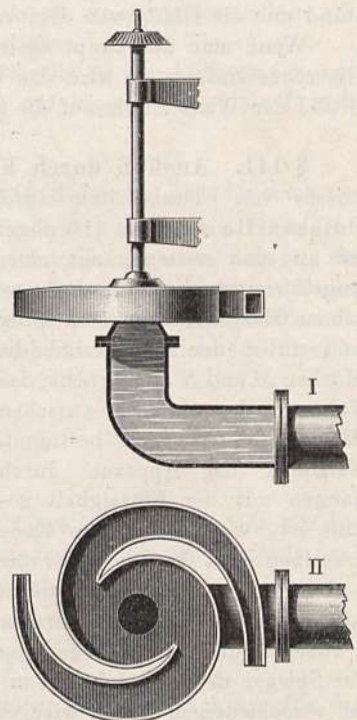


Fig. 416I u. II.



Seitendruck durch einen vollkommen gleichen, aber entgegengesetzten aufgehoben wird. Wenn man aber die Wand an irgend einer Stelle durchbohrt, so daß das Wasser hervorspringt, so ist der Druck an dieser Stelle offenbar weggenommen, während das der Öffnung diametral gegenüberliegende Wandstück noch gerade so stark gedrückt wird als vorher. Der Druck auf diejenige Gefäßwand, in welcher sich die Öffnung befindet, ist also geringer als der Druck, welchen die gegenüberstehende Wand aushält; mithin wird das ganze Gefäß sich in einer Richtung bewegen müssen, welche der Richtung des ausfließenden Wasserstrahles entgegengesetzt ist, wenn diese Bewegung nicht durch Reibung oder auf irgend eine andere Weise verhindert wird. Es ist dies dem Rückstoße der Geschütze zu vergleichen. Man kann die beim

Ausfließen des Wassers wirkende Reaktion durch einen Apparat anschaulich machen, welcher unter dem Namen des Segnerschen Wasserrades, Fig. 416, bekannt ist. Es besteht aus einem um eine vertikale Achse leicht drehbaren Gefäße A , an dessen unterem Ende sich zwei oder mehrere horizontale Röhren befinden, die alle (von der Mitte aus gesehen) auf derselben Seite mit kleinen Öffnungen versehen sind. Das Gefäß dreht sich nach der den ausströmenden Wasserstrahlen entgegengesetzten Richtung.

Die beschriebene Konstruktion hat die Nachteile, daß durch den Druck der großen Wassermenge auf die Spitze der Achse eine sehr große Reibung erzeugt wird und daß durch die scharf rechtwinklig umgebogenen Bahnen des Wassers viel lebendige Kraft verloren geht. Die Fig. 416I und II zeigt in teilweisem Vertikal- und Horizontalschnitt die verbesserte Konstruktion des Althansschen Reaktionsrades, bei welchem das Wasser unter Druck von unten zugeführt und durch spiralförmig gebogene Röhren entleert wird. Dieser Apparat bildet auch den Übergang zu den eigentlichen Turbinen, welche das Prinzip der Reaktion in bestmöglicher Weise ausnutzen.

§ 143. Energie der Wassergefälle; Wassermotoren. Wenn eine Wassermasse M von der Höhe H herabsinkt, so wird dabei eine Energie verfügbar, deren Größe im absoluten Maßsystem durch MHg , im Gravitationsmaßsystem durch MH ausgedrückt wird. Im letzteren Falle wird M in Kilogramm, H in Metern gemessen, also das Produkt in Kilogrammetern erhalten. Da man die Arbeit eines Pferdes pro Sekunde auf 75 kgm veranschlagt, so ist ein Wassergefälle, welches pro Sekunde 75 kgm liefert, als äquivalent mit einer „Pferdekraft“ anzusehen.

Diese Arbeit oder Energie kann man auf zweierlei Weise auf eine Maschine übertragen.

1. Indem man das Wasser die der Fallhöhe entsprechende Geschwindigkeit erlangen läßt und dann seine lebendige Kraft auf einen anderen Körper durch Stoß überträgt, wie dies z. B. bei den unterschlächtigen Wasserrädern, sowie bei der Turbine von Fourneyron, dem Peltonrade u. a. der Fall ist, oder

2. indem man das Wasser schon während seines Falles durch sein Gewicht einen Druck auf den zu bewegenden Körper ausüben läßt, so daß es die seiner Fallhöhe entsprechende Geschwindigkeit gar nicht erreicht und überhaupt mit bedeutend verminderter Beschleunigung niedergeht, wie dies z. B. bei überschlächtigen Wasserrädern, bei gewöhnlichen Turbinen und bei Wassersäulenmaschinen der Fall ist. Hier wird die lebendige Kraft der fallenden Wassermasse gewissermaßen gleich im Moment ihrer Entstehung konsumiert.

Mag nun aber die Benutzung der lebendigen Kraft eines Wassergefälles auf die eine oder die andere Weise stattfinden, so wird es doch nie gelingen, den theoretischen Effekt, als welchen wir die Arbeit MH bezeichnen wollen, vollständig zu verwerten, und zwar deshalb schon nicht, weil im ersten der beiden oben betrachteten Fälle dem Wasser doch noch eine bestimmte Geschwindigkeit bleiben muß, mit welcher es abfließt, im zweiten Falle aber das Wasser doch nicht ohne alle Beschleunigung niedergehen kann. Außerdem aber geht noch ein großer Teil der lebendigen Kraft des Gefälles durch die Reibung des Wassers in den Kanälen, sowie durch Reibungswider-

stände in den zu bewegendenden Maschinen verloren, so daß selbst mit den besten hydraulischen Maschinen kaum ein Nutzeffekt erzielt werden kann, welcher mehr als 70 Proz. des theoretischen Effektes beträgt.

Indem wir auf eine Beschreibung der übrigen Wassermotoren verzichten müssen¹⁾, wollen wir als Repräsentanten der ersten Klasse derselben, bei denen der Stoß des Wassers wirkt, das aus Amerika importierte Peltonrad, Fig. 417 a, b, beschreiben. Das Charakteristische desselben beruht in der Form der Schaufeln, welche in der Mitte, wie der Querschnitt Fig. 417 b

Fig. 417 a.

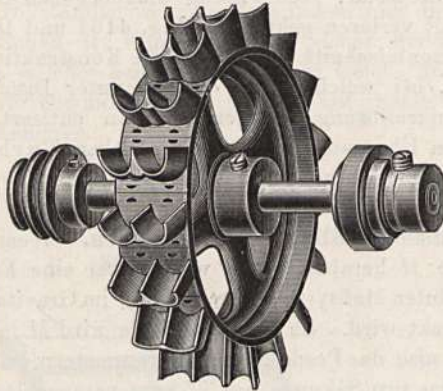
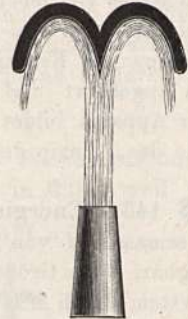


Fig. 417 b.



zeigt, durch eine scharfe Schneide in zwei zylindrische Hohlräume geteilt sind. Der aus einer Düse unter hohem Druck austretende Wasserstrahl wird durch diese Schneide in zwei Hälften zerschnitten, deren jede längs der hohlen und glatten Innenfläche der Schaufel entlang streicht und dabei seine lebendige Kraft mit nur geringem Reibungsverlust an die Schaufel abgibt. Dieser Motor empfiehlt sich bei hohem verfügbarem Wasserdruck insbesondere in den Fällen, wo, wie bei Dynamomaschinen, hohe Umdrehungsgeschwindigkeit erwünscht ist²⁾.

Als Beispiel eines Motors, bei dem der Druck des Wassers ausgenutzt wird, wollen wir den Wassermotor von A. Schmidt in Zürich, der sich für das Kleingewerbe in Städten, wo Wasserleitungen mit hohem Druck zur Verfügung stehen, bewährt hat, in Kürze beschreiben.

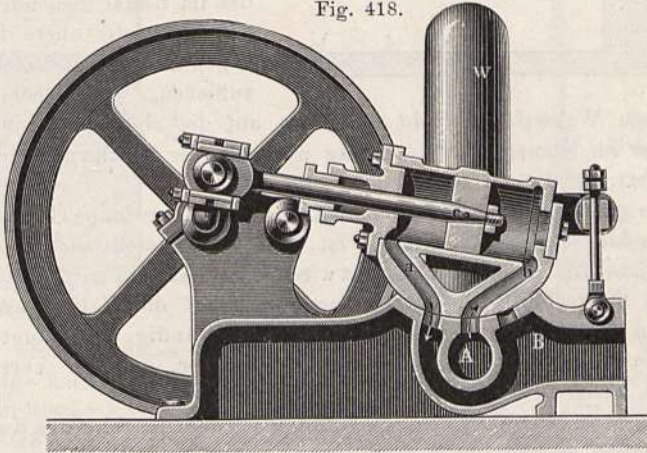
Die Maschine, Fig. 418, besteht aus einem oszillierenden Zylinder, dessen Kolben vom Druckwasser hin und her getrieben wird. Die Kolbenstange geht durch eine Stopfbüchse und steht mit der Kurbel in direkter Verbindung. Vermöge der rotierenden Bewegung der Kurbel wird der Zylinder durch die Kolbenstange in eine oszillierende Bewegung versetzt, deren Achse durch den Punkt *c* geht. An dem Zylinder ist unterhalb ein Bauch mit Zuführungskanälen und zylindrischer Schieberfläche angegossen, welche letztere sich in der Figur als ein von *c* aus beschriebenes Kreissegment darstellt. Die hohl gegossene Grundplatte *B* legt sich dicht schließend an die auf ihr hin und her gleitende Schieberfläche des Zylinders; sie enthält drei Kanäle,

¹⁾ Ausführlicheres findet man bei M. Rühlmann, Allgemeine Maschinenlehre 1.

²⁾ Kleinere Peltonräder liefert die Firma H. Breuer u. Co. zu Höchst a. M.

wovon der mittlere *A* das Druckwasser abwechselnd dem Kanal *a* oder *b* zuführt, während seine beiden Seitenkanäle dasselbe bei *B* abströmen lassen. Man ersieht leicht aus der Figur, in welcher Weise durch die Bewegung des Kolbens das Oszillieren des Zylinders und hierdurch eine den jeweiligen Kolbenstellungen entsprechende Kommunikation der Kanäle hervorgebracht wird, durch welche dann das Druckwasser abwechselnd durch *a* und *b* zu- und abgeführt werden muß. Bei jeder Umdrehung des Schwungrades findet

Fig. 418.



zweimal, und zwar in den Momenten, wo der Kolben eine der äußersten Lagen angenommen, eine Absperrung sämtlicher Kanäle statt. Die Stöße, welche hierdurch entstehen würden, werden durch den Windkasten *W* unschädlich gemacht, indem die in seinem oberen Teile enthaltene Luft bei jeder Absperrung durch das eindringende Wasser komprimiert wird, um sich dann wieder auszudehnen.

Der Schmidtsche Wassermotor wird in 21 verschiedenen Größen ausgeführt, wovon bei einem Wasserdrucke von 20 m der kleinste bei einem Durchmesser des Zylinders = 4 cm und einem Wasserverbrauch von 40 Liter pro Minute etwa $\frac{1}{5}$ Pferdekraft entwickelt, während der größte von 30 cm Durchmesser und 2150 Liter Wasserverbrauch pro Minute eine Kraft von $7\frac{1}{5}$ Pferden liefert.

§ 144. Stoßheber oder hydraulischer Widder. Wenn eine in einem geschlossenen Kanäle fließende Wassermenge durch plötzliches Verschließen der Ausflußmündung abgesperrt wird, so wird durch die lebendige Kraft der Wassermenge ein Stoß auf die Verschußfläche, sowie auch auf die übrigen Wandungen des Kanals ausgeübt.

Montgolfier hat einen Apparat konstruiert, den er hydraulischen Widder oder Stoßheber nannte, bei welchem die Energie des stoßenden Wassers in sinnreicher Weise dazu benutzt wird, einen Bruchteil desselben auf eine größere Höhe zu heben, als die Höhe des Wasserspiegels in dem Gefäße ist, aus welchem der Kanal gespeist wird.

Bevor wir diesen Apparat selbst beschreiben, wollen wir einen einfachen Versuch angeben, welcher das jenem zugrunde liegende Prinzip zu demonstrieren gestattet.

Aus einem Wasserreservoir *E*, Fig. 419, ströme das Wasser durch den entsprechend langen Kanal *A* und fließe an der Mündung *ab* mit einer gewissen Geschwindigkeit aus. Schließt man nun plötzlich einen Teil der Mündung *ab*, z. B. die untere Hälfte *ac*, durch eine vorgehaltene Platte oder

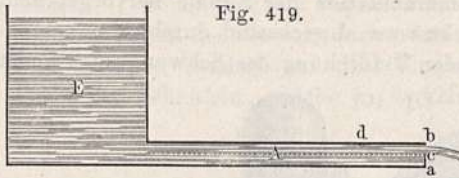


Fig. 419.

durch Daraufdrücken des Fingers *ab*, so kann man sich vorstellen, daß dadurch die untere Hälfte des im Kanal fließenden Wassers gehemmt, die obere Hälfte dagegen nicht behindert werde, auszufließen. Die lebendige Kraft der unteren Wasserhälfte geht aber nun auf die obere Hälfte über, diese wird daher im Moment der Hemmung mit größerer Geschwindigkeit herausgeschleudert.

Diese größere Geschwindigkeit dauert aber nur so lange, bis die Energie des stoßenden Wassers übertragen ist; von da an stellt sich (nahezu) die ursprüngliche Ausflußgeschwindigkeit wieder ein, während natürlich die Stromstärke im Querschnitt des Kanals (ungefähr) auf die Hälfte gesunken ist. Öffnet man nun wiederum die Mündung *ab* vollständig, so erlangt bald das Wasser im Kanal die frühere Stromstärke wieder, und der Versuch kann wiederholt werden.

Wenn man überdies noch eine Öffnung an der Oberseite des Kanals etwa bei *d* anbringt, so wird im Moment des vollständigen Verschlusses der Mündung *ab* die lebendige Kraft des Wassers dazu verwendet, einen Teil desselben durch die Öffnung bei *d* hinauszustoßen, und es wird dadurch ein Wasserstrahl hervorgebracht, der kurze Zeit hindurch weit über das Niveau von *E* emporreicht, welcher aber nacher, nachdem die Stoßwirkung vorüber ist, unter diese Höhe herabsinkt.

Bei dem Apparate von Montgolfier handelt es sich nun darum, dieses abwechselnde Öffnen und Verschließen der Mündung *ab* selbsttätig zu veranlassen, und dann noch den intermittierenden Wasserstrahl durch Anwendung eines sogenannten Windkessels in einen kontinuierlich wirkenden umzuwandeln.

Fig. 420 zeigt einen solchen Stoßheber. Derselbe hat folgende Bestandteile: Das Reservoir *E*, die Fallröhre *A*, den Kanal *B*, welcher möglichst gerade und lang sein soll, die Ventile 1 und 2, den Windkessel *C* mit der Steigröhre *D*. Das Wasser strömt zuerst durch die Öffnung des Ventils 2 massenhaft aus und hebt, sobald es eine gewisse Geschwindigkeit erlangt hat, die Ventilklappe empor, wodurch die Öffnung abgesperrt wird. Der dadurch erzeugte Stoß auf die Röhrenwände trifft die Klappe des Ventils 1, hebt dieselbe und drängt eine Quantität Wasser in den Kessel, in welchem oberhalb der Mündung *b* des Rohres *D* ein Luftquantum abgesperrt wird, welches seinerseits auf das Wasser rückwärts einen elastischen Druck ausübt, durch welchen das Ventil 1 geschlossen und das eingedrungene Wasser in das Rohr *D* gehoben wird.

Sobald die Stoßwirkung vorüber und das Wasser im Kanal *AB* zur Ruhe gekommen ist, fällt die Ventilklappe 2 wieder herab, der Ausfluß daselbst beginnt von neuem, und so wiederholt sich der frühere Vorgang. Unter fortwährend abwechselndem Spiele der beiden Ventile wird durch das Rohr ein

Wasserstrahl auf eine Höhe emporgetrieben, welche das Gefälle vom Wasserspiegel in *E* bis zur Mündung bei 2 vielmal übersteigen kann. Würde keine Energie zur Bewegung der Klappen, zur Reibung usw. nebenbei nutzlos verbraucht werden, so würde sich die Steighöhe des Wassers zu seiner Fallhöhe verhalten wie die bei 2 ausfließende Menge desselben zu der emporgehobenen.

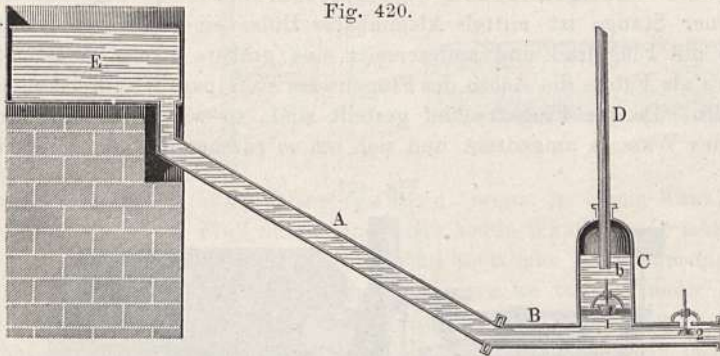


Fig. 420.

Es könnte also beispielsweise ein Fünftel der durch den Kanal fließenden Wassermenge um die fünffache Höhe des verfügbaren Gefalles gehoben werden. Dieser theoretische Effekt wird begreiflicherweise in der Praxis nie erreicht.

Der Stoß des Wassers, welcher in dem beschriebenen Apparate eine nützliche Anwendung findet, kann in ausgedehnten Wasserleitungen sehr schädlich werden und unter Umständen die Leitung zerstören. Man muß, um dies zu vermeiden, dafür sorgen, daß die Hähne nicht zu plötzlich geschlossen werden, oder besser durch miteingeschaltete Luftkessel die Stöße aufnehmen und unschädlich machen.

§ 145. Stationäre Bewegung des Wassers in offenen Kanälen und Flüssen. Bei der Bewegung des Wassers in offenen Kanälen und Flußbetten treten analoge Reibungshindernisse durch die Wände wie in langen Röhren ein. Infolgedessen wird da im allgemeinen die Beschleunigung der Schwere ganz aufgehoben, so daß ein gleichförmiger, der Neigung des Flußbettes entsprechender Abfluß, der sogenannte stationäre Zustand, zustande kommt. Dabei muß offenbar durch jeden Querschnitt des Gefäßes in der Zeiteinheit eine gleiche Flüssigkeitsmenge durchgehen, da sonst stellenweise eine Zusammenpressung, Stauung oder eine Dilatation derselben bzw. Zerreißen erfolgen würde. Heißen wir also *V* die Geschwindigkeit im Querschnitt *R* und *v* die Geschwindigkeit im Querschnitt *q*, so muß, damit das Volumen nicht verändert werde, sein:

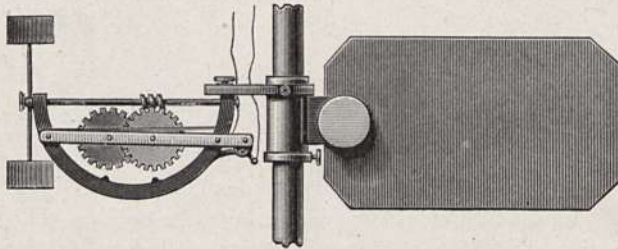
$$Q \cdot V = q \cdot v \dots \dots \dots (1)$$

d. h. im kleinen Querschnitt wird die Geschwindigkeit entsprechend größer als im größeren Querschnitt sein müssen, daher der bekannte Satz: „Jede Strommenge ist auch eine Stromschnelle.“

In den Kanälen sind noch analoge Berechnungen der Geschwindigkeit und damit der in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt fließenden Wassermengen möglich wie bei den Röhren; bei unregelmäßigen Flußbetten dagegen sind die Geschwindigkeiten in irgend einem Querschnitte zu unregelmäßig

verteilt, um eine Berechnung derselben zu gestatten. Es bleibt dann zur Bestimmung der Durchflußmenge nichts anderes übrig, als das Profil des Flußbettes möglichst genau durch Messungen zu ermitteln und die Geschwindigkeiten an vielen Stellen desselben zu messen, um daraus eine mittlere Geschwindigkeit der Strömung abzuleiten. Hierzu bedient man sich zweckmäßig des Woltmannschen Strommessers, wie ihn Fig. 421 darstellt. An einer Stange ist mittels klemmbarer Hülse einerseits der Halter einer Achse mit Flügelrad und andererseits eine größere Platte befestigt, welche letztere als Fahne die Achse des Flügelrades stets parallel zur Stromrichtung einstellt. Da die Flügel schief gestellt sind, so wird das Rad durch den Stoß des Wassers umgedreht und sich um so rascher drehen, je stärker das

Fig. 421.



Wasser strömt. Um diese Umdrehungen zu zählen, ist an der Achse eine Schraube ohne Ende eingeschnitten, welche in das eine der beiden, am Rande getheilten Zahnräder eingreift, während das zweite die ganzen Umdrehungen des ersten angibt. Der Eingriff des ersten Zahnrades in die Schraube erfolgt aber erst, wenn man mittels der Schnur, die am Stabe nach oben läuft, durch Anziehen den Hebel hebt, in welchem die Radachsen sitzen. Man kann somit an jeder Stelle, wohin man den Strommesser bringt, durch Einschalten der Zahnräder während einer bestimmten Zeit, etwa 10 Minuten, aus den Ablesungen an ihnen vorher und nachher die Zahl der Umdrehungen des Flügelrades und damit nach den ausgeführten empirischen Konstantenbestimmungen des Instrumentes die Wassergeschwindigkeit an der betreffenden Stelle finden.

Einfacher in Herstellung und Benutzung, aber weniger genau ist die demselben Zwecke dienende Pitotsche Röhre, eine vertikale, oben offene, unten in horizontale Richtung umgebogene und mit einer trichterförmigen Mündung versehene Röhre aus Glas oder aus Blech mit Glasfenstern. Versenkt man diesen Apparat in das strömende Wasser mit der Mündung des Trichters gegen die Stromrichtung, so wird durch den Stoß des Wassers in der Röhre eine Niveaudifferenz hervorgebracht, aus welcher auf die Stromgeschwindigkeit geschlossen werden kann. Das Instrument wird empirisch geeicht.

§ 146. Wirbelbewegungen. Wenn Wasser aus einer zentralen Öffnung im Boden eines Gefäßes ausfließt, so bildet sich infolge der rascheren Bewegung der mittleren Theilchen gegen die Öffnung hin nicht bloß eine Vertiefung der Flüssigkeitsoberfläche, sondern zugleich eine drehende Bewegung der Flüssigkeitsfaden um die Achse der Öffnung, so daß ein Theilchen

von der Oberfläche nicht geradlinig oder in einfach gekrümmter Linie, sondern in einer sich verengenden Schraubenlinie gegen die Öffnung sich hinbewegt, wie es die Fig. 422 andeutet. Es entsteht so oft ein starker spiralförmiger Wirbel um die Öffnung. Ebenso beobachtet man horizontale

Fig. 422.

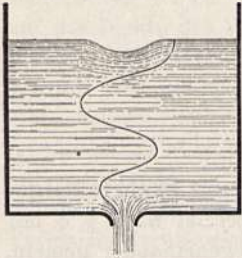


Fig. 423.



Fig. 424.



Wirbelbewegungen, wenn in einem Kanal oder Fluß durch eine vorstehende Wand, ein Brückenjoch oder dergleichen eine plötzliche Verkleinerung des Querschnittes erfolgt. Es bilden sich, besonders im toten Wasser hinter der Wand und oft auch vor ihr, Wirbel, wie dies Fig. 423 anzeigt. Es ist dies offenbar so zu erklären, daß vor der Wand ein Rückstoß des bewegten Wassers erfolgt und daß die hinter derselben in den geschützten Raum einbiegenden Wasserfäden die benachbarten weiteren Teilchen mitreißen und dadurch eine kleine Depression des Wasserspiegels in der Ecke veranlassen, welche eine Bewegung des äußeren Wassers dahin und damit dann auch die wirbelnde Bewegung zur Folge hat.

Eine besondere Art von Wirbelbewegung entsteht, wenn man einen Wasserstrahl rasch vorübergehend von unten in die Mitte eines mit Wasser gefüllten Gefäßes emporsteigen läßt. Ist der Wasserstrahl gefärbt, so bemerkt man zuerst die Bildung einer Scheibe, die sich in der Mitte konvex erhebt und dann, indem ihre Ränder nach innen sich umstülpen, nach und nach in einen horizontalen Wirbelring verwandelt, in welchem das Wasser auf der Innenseite von unten nach oben und außen kreist, wie Fig. 424 dies im Durchschnitt durch einen solchen Ring darstellt. Ähnliche Wirbelbewegungen finden auch bei den gasförmigen Körpern statt.

Sechstes Kapitel.

Mechanik gasförmiger Körper.

§ 147. **Eigenschaften der gasförmigen Körper und nächste Folgerungen daraus.** Der gasförmige Zustand der Körper hat nach § 8 mit dem flüssigen die leichte Verschiebbarkeit der Teilchen gegeneinander gemein, dagegen tritt bei ihm an Stelle der ein bestimmtes Volumen des Ganzen erhaltenden Zusammenhangskraft eine entgegengesetzte, die Teilchen auseinander-treibende Kraft, die sogenannte Expansivkraft oder Spannkraft der Gase.

Infolge der ersteren Eigenschaft gelten für die Gase dieselben Gesetze, welche wir bei den Flüssigkeiten als Folge ihrer Verschiebbarkeit der Teilchen kennen gelernt haben. Jeder Druck pflanzt sich im Inneren eines Gases ebenso wie dort nach allen Seiten mit gleicher Stärke fort, und wenn der Druck im Inneren eines Gasvolumens variiert, so müssen zur Erhaltung des Gleichgewichtes den verschiedenen Drucken ebenfalls geschlossene Niveauschichten entsprechen. Die Expansivkraft der Gase aber würde zu einer unbegrenzten Verflüchtigung derselben führen, wenn nicht äußere Kräfte, wie etwa die festen Wände eines Gefäßes, in das sie eingeschlossen sind, dies verhindern. Im letzteren Falle haben die Gefäßwände einen der Expansivkraft entsprechenden Druck auszuhalten.

Dieses Bestreben der Gase, sich auszudehnen, wird leicht durch folgenden Versuch nachgewiesen. Man legt unter die Glocke der Luftpumpe eine nur wenig Luft enthaltende und deshalb runzelige Tierblase, deren Öffnung fest zugebunden ist. Nach einigen Kolbenzügen schon bläht sich die Blase auf und ist endlich gerade so straff angespannt, als ob man mit aller Gewalt Luft hineingeblasen hätte. Läßt man die Luft wieder in den Rezipienten hineintreten, so schrumpft die Blase wieder zusammen. Die in der Blase eingeschlossene Luft hat also wirklich ein Bestreben, sich auszudehnen, dem nur durch die umgebende Luft Widerstand geleistet wird.

§ 148. **Verzeichnis der wichtigsten Gase, ihrer Formel und ihrer spezifischen Gewichte.** So wie das Wasser als Hauptrepräsentant der flüssigen Körper, so erscheint die uns umgebende atmosphärische Luft als Hauptrepräsentant der gasförmigen Körper. Der chemischen Zusammensetzung nach ist diese Luft ein Gemisch von mehreren gasförmigen Körpern, wovon Stickstoff und Sauerstoff die Hauptmenge ausmachen, während Wasserdampf, Kohlendioxyd, Ammoniak, Argon und noch einige neu entdeckte Elemente in geringerer Quantität beigemengt sind. Die vom Wasserdampf, dessen Menge sehr stark wechselt, befreite, also trockene Luft enthält im Durchschnitt 0,03 Volumprozent Kohlendioxyd, 78,40 Volumprozent Stick-

stoff, 20,94 Volumprozent Sauerstoff und 0,63 Volumprozent Argon, Krypton und Neon. Der Wasserdampf beträgt im Durchschnitt 1,3 Volumprozent.

Gasförmige Körper, welche nicht ein Gemenge darstellen, sondern nur ein Element oder eine chemische Verbindung von Elementen enthalten, heißen schlechtweg Gase. Wie man die Dichte der festen und flüssigen Körper auf die Dichte des Wassers als Einheit bezog, so hat man für gasförmige Körper die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft als Einheit gewählt und als spezifisches Gewicht derselben die Zahl bezeichnet, die angibt, um wievielfach schwerer oder leichter ein gewisses Volumen des Gases ist als ein gleiches Volumen Luft. Da aber die Dichtigkeit der Gase in noch höherem Grade als die der festen und flüssigen Körper von der Temperatur und dem Druck, unter dem sie stehen, abhängt, so hat man dieselbe beim Vergleich der Gewichte gleicher Volumina auch wieder bei 0° Temperatur und beim Normalluftdruck genommen.

Nun bezeichnet aber das spezifische Gewicht bei festen und flüssigen Körpern wegen der Beziehung auf die Dichte des Wassers als Einheit zugleich nach dem metrischen Maß- und Gewichtssystem das Gewicht von 1 cm³ derselben in Grammen bzw. das absolute Gewicht der Volumseinheit derselben bei 0° und beim Normalluftdruck. Es dürfte daher besser sein, auch für Gase diese Definition des spezifischen Gewichtes beizubehalten, wie dies bereits in der Tabelle des § 133 geschehen ist.

Demgemäß werden wir im folgenden mit spezifischem Gewicht der Gase bezeichnen das absolute Gewicht der Volumseinheit derselben, gemessen bei 0° und dem Normalluftdruck, oder das Gewicht von 1 cm³ bei obiger Temperatur und obigem Druck in Grammen; mit relativer Dichte, bezogen auf Luft als Einheit, bezeichnen wir die Zahl, die angibt, um wievielfach kleiner oder größer die Masse eines bestimmten Volumens des betreffenden Gases ist als die eines gleichen Volumens atmosphärischer Luft, beide gemessen bei 0° und dem Normalluftdruck; mit relativer Dichte, bezogen auf Wasserstoff als Einheit, bezeichnen wir das Verhältnis der Dichte des betreffenden Gases zu demjenigen des Wasserstoffs, beide wiederum bei 0° und dem Normalluftdruck gemessen.

Zur Orientierung sind in der umstehenden Tabelle für eine Reihe von Gasen ihre chemische Formel, das entsprechende Molekulargewicht, ihr spezifisches Gewicht, die relative Dichte, bezogen auf Luft als Einheit, und die relative Dichte, bezogen auf Wasserstoff als Einheit, zusammengestellt (größtenteils entnommen dem Lehrbuch der anorganischen Chemie von H. Erdmann). Man wird bemerken, daß die relative Dichte, bezogen auf Wasserstoff, mit dem Molekulargewicht sehr nahe übereinstimmt (Gesetz von Avogadro).

Die Tabelle setzt voraus, daß man den Ausdruck „Gas“ im weitesten Sinne nehme, nämlich auch solche Körper einbeziehe, welche unter gewöhnlichen Druck- und Temperaturverhältnissen bereits in den tropfbarflüssigen Zustand übergehen, wie dies z. B. mit Wasserdampf der Fall ist. In diesem Falle hat die in der Tabelle aufgeführte Dichte nur eine theoretische Bedeutung, welche in der Wärmelehre näher erörtert werden soll. Eben- dasselbst werden wir auch den Unterschied zwischen „Gas“ und „Dampf“, soweit derselbe noch festgehalten werden kann, besprechen. Im gewöhnlichen Sprachgebrauche versteht man unter Gas meist nur einen solchen Körper,

Name des Gases	Chem. Formel des Moleküls	Molekulargewicht	Spez. Gewicht $\times 1000$, also Gramme pro Liter	Relative Dichte	
				Luft = 1	Wasserstoff = 1
Acetylen	C_2H_2	28,54	1,171	0,9056	26,02
Ammoniak	NH_3	16,93	0,775	0,599	17,22
Arsenwasserstoff	AsH_3	77,45	3,487	2,697	77,50
Brom	Br_2	158,68	7,141	5,523	159,54
Bromwasserstoff	HBr	80,34	3,617	2,797	80,38
Chlor	Cl_2	70,36	3,168	2,450	70,40
Chlorwasserstoff	HCl	36,18	1,641	1,269	36,46
Grubengas	CH_4	15,92	0,726	0,559	16,06
Jodwasserstoff	HJ	126,89	5,766	4,440	127,58
Kohlenoxyd	CO	27,80	1,246	0,9672	27,80
Kohlenoxysulfid	COS	59,63	2,722	2,105	60,48
Kohlensäure	CO_2	43,68	1,921	1,529	43,96
Phosphorwasserstoff	PH_3	33,75	1,523	1,178	33,84
Sauerstoff	O_2	31,76	1,4292	1,1056	31,75
Schweflige Säure	SO_2	63,59	2,898	2,260	64,44
Schwefelwasserstoff	H_2S	33,83	1,526	1,180	33,90
Siliciumfluorid	$SiFl_4$	103,74	4,635	3,585	103,02
Stickstoff	N_2	27,86	1,2507	0,967	27,78
Stickstoffoxyd	NO	29,81	1,343	1,039	29,86
Stickstoffoxydul	N_2O	43,74	1,978	1,530	43,95
Wasserdampf	H_2O	17,88	0,8040	0,6218	17,88
Wasserstoff	H_2	2,00	0,0900	0,0696	2,00
Atmosphärische Luft	—	—	1,2930	1,0000	28,75

der unter den gewöhnlich herrschenden Druck- und Temperaturverhältnissen noch nicht flüssig wird. Permanente Gase nannte man bis zu Ende des Jahres 1877 jene wenigen Gase, welche bis dahin noch nicht in tropfbarflüssigen Zustand übergeführt worden waren.

§ 149. Gewicht der Luft, Luftdruck. Schon sehr früh, ja selbst schon vor Aristoteles, vermutete man, daß auch die Luft schwer sei. Aristoteles nahm eine Blase und wog sie im leeren und im aufgeblasenen Zustande. Er fand letztere etwas schwerer und schloß daraus, daß die Luft schwer sei. Er hat hierbei aus einem fehlerhaften Versuche eine Tatsache abgeleitet, die an sich richtig ist.

Ptolemäus fand bei Wiederholung des Versuches umgekehrt die aufgeblasene Blase leichter. Erst Syriacus (im 4. Jahrh. n. Chr.) fand, daß kein Gewichtsunterschied stattfindet. Der Fehler bei Aristoteles kann durch Eindringen von Feuchtigkeit oder Überspannung, jener bei Ptolemäus durch Temperaturänderung erklärt werden. Der fehlerfrei angestellte Versuch kann keine Gewichtsdivergenz ergeben, weil der Auftrieb der Luft gleich ist ihrem Gewichte. Erst Galilei hat 1640 bewiesen und sein Schüler Torricelli später durch schöne Versuche bestätigt, daß auch die Luft schwer sei. Durch folgenden Versuch läßt sich die Schwere der Luft direkt nach-

weisen: Auf den Hals eines Glasballons, Fig. 425, ist eine Messingfassung gekittet, die auf eine Luftpumpe (deren Einrichtung alsbald besprochen werden wird) aufgeschraubt werden kann. In dieser Fassung befindet sich ein Hahn, mittels dessen man den Ballon nach Belieben öffnen oder schließen kann. Ist der Ballon auf die Luftpumpe aufgeschraubt, so kann man ihn evakuieren und, nachdem der Hahn geschlossen worden ist, an den einen Arm einer Wage anhängen. Durch Auflegen von Gewicht auf der anderen Seite wird das Gleichgewicht hergestellt. Öffnet man nun den Hahn, so füllt sich der Ballon wieder mit Luft, das Gleichgewicht wird gestört, und die Wage neigt sich nach der Seite des Ballons hin. Auf der anderen Seite muß man von neuem Gewichte auflegen, um das Gleichgewicht wiederherzustellen, und zwar gerade so viel, als die Luft im Ballon wiegt. Für einen Ballon von 1 Liter Inhalt beträgt die Differenz der Gewichte ungefähr 1,2 g (bei 0° und dem Normalluftdruck, unter Voraussetzung, daß der Ballon ganz entleert worden, 1,293 g). 1 cbm Luft wiegt also ungefähr $1\frac{1}{5}$ kg. In einem Zimmer von 6 m Länge und Breite und 4 m Höhe sind demnach über 170 kg Luft enthalten.

Würde man obigen Ballon schließlich noch mit Wasser statt mit Luft füllen und an die Wage hängen, so würde bei vorstehendem Volumen desselben gleich 1 Liter das Zulagegewicht auf der anderen Wagschale 1000 g zur Herstellung des Gleichgewichtes betragen müssen. Wenn also obiges Volumen Luft 1,293 g und dasselbe Volumen Wasser 1000 g wiegt, so ist das spezifische Gewicht der Luft:

$$\frac{1,293}{1000} = 0,001293.$$

In dieser Weise sind in der Tat die angeführten spezifischen Gewichte der Gase bestimmt worden, worauf wir der zu berücksichtigenden Druck- und Temperaturverhältnisse halber erst in der Wärmelehre näher werden eintreten können.

Nachdem gezeigt worden, daß auch die Gase wie die festen und flüssigen Körper schwer sind, d. h. von der Erde gegen ihren Mittelpunkt hin angezogen werden, so wird die die Erde umgebende Luft-hülle, die Atmosphäre, gemäß den Betrachtungen des § 118, analog wie die teilweise Wasserhülle und die hypothetische feurigflüssige Erde, ebenfalls aus konzentrischen Niveauschichten mit dem Erdsphäroid bestehen, wo infolge des Druckes der oberen Schichten auf die unteren dieser Druck von außen gegen die Oberfläche der Erde hin von Schicht zu Schicht beständig zunimmt und damit auch die Dichtigkeit der Luft wächst. An der Erdoberfläche entsteht so ein erheblicher, dem Gewicht der ganzen Luftsäule bis zu den Grenzen der Atmosphäre entsprechender Druck, der in jeder Niveaufläche überall, also auch in den stets nur unvollkommen abgeschlossenen Räumen der Wohngebäude, derselbe ist. Von der Existenz dieses Druckes kann man sich z. B. durch folgenden Versuch überzeugen.

Fig. 425.



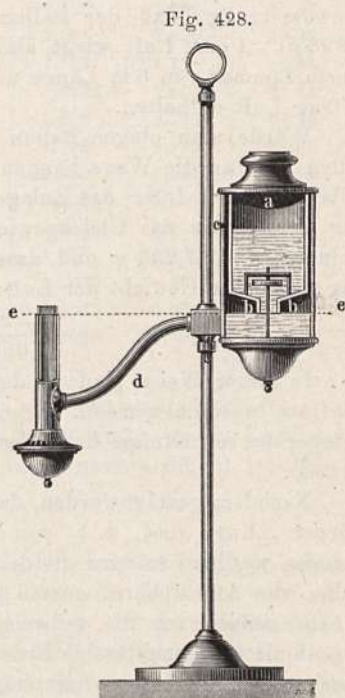
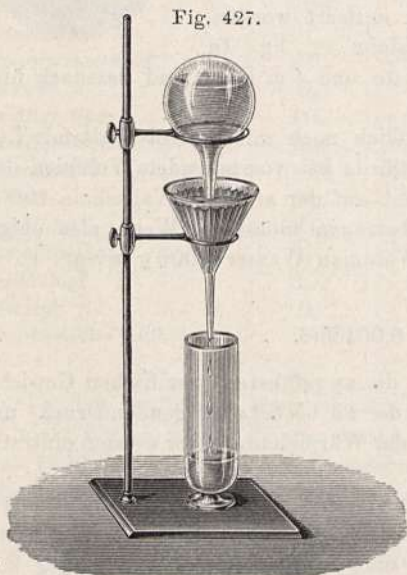
Fig. 426.



Man setze auf den Teller der Luftpumpe einen Glas- oder Metallzylinder mit etwas dicken Wänden, welcher oben mit einer stark angespannten und an dem Rande recht fest gebundenen Tierblase verschlossen ist. Die Blase erleidet von beiden Seiten gleichen Druck und bildet deshalb eine Ebene. Zieht man nun mittels der Luftpumpe die Luft aus dem Zylinder heraus, so gewinnt der äußere Luftdruck das Übergewicht und drückt die Blase nach innen, wie dies Fig. 426 darstellt. Je mehr man auspumpt, desto mehr nimmt die Krümmung der Blase zu, bis sie endlich in Stücke reißt, wobei ein heftiger Knall gehört wird. Dieser Knall wird durch das rasche Eindringen der Luft hervorgebracht.

§ 150. Erscheinungen, welche auf dem Luftdrucke beruhen. Wir wollen hier zunächst noch einige Erscheinungen betrachten, welche sich durch die Wirkung des Luftdrucks erklären lassen.

Taucht man das eine Ende einer Röhre in ein mit Wasser gefülltes Gefäß, so wird sich die Flüssigkeit in der Röhre, vorausgesetzt, daß dieselbe



nicht zu eng ist, ebenso hoch stellen wie außerhalb, weil der Luftdruck in der Röhre gerade so auf das Niveau der Flüssigkeit wirkt wie außerhalb. Saugt man aber einen Teil der Luft aus der Röhre, so steigt die Flüssigkeit in ihr um so mehr, je länger man saugt. Durch dieses Saugen wird nämlich der Luftdruck im Inneren der Röhre vermindert, während der äußere Luftdruck unverändert bleibt. Der Überschuß des äußeren Luftdrucks nun preßt die Flüssigkeit im Inneren der Röhre in die Höhe, bis das Gewicht der gehobenen Wassersäule diesem Überschuß das Gleichgewicht hält.

Wenn man eine mit Wasser gefüllte, mit einem Kork geschlossene Flasche umkehrt und den Hals in ein Becken mit Wasser taucht, so kann man nun unter dem Wasser diesen Kork herausziehen, ohne daß das Wasser

aus der Flasche ausfließt, weil es sozusagen durch den Luftdruck getragen wird.

Hebt man die Flasche langsam in die Höhe, bis die Mündung des Halses über dem Spiegel des Wassers im Becken steht, so beginnt jetzt freilich das Wasser auszulaufen, aber nicht etwa weil der Luftdruck zu wirken aufhörte, sondern weil nun Luftblasen in die Flasche eindringen können. Darauf gründen sich einige Vorrichtungen, um in Gefäßen, aus welchen ein gleichförmiger Abfluß stattfindet, stets ein nahezu unveränderliches Niveau zu erhalten, wie dies z. B. bei dem Apparat Fig. 427 der Fall ist. Durch das Filter des Trichters tropft beständig Wasser in das untergesetzte Gefäß, in folgedessen sinkt der Spiegel der Flüssigkeit im Trichter. Dieses Sinken kann nur fort dauern, bis die untere Öffnung des in das Wasser des Trichters eingetauchten und |gleichfalls mit Wasser gefüllten Ballons frei wird, denn nun dringt eine Luftblase in den Ballon ein, eine ihr entsprechende Quantität Wasser fließt aus, um die Öffnung des Ballons wieder auf kurze Zeit zu schließen.

Fig. 429.



So kann aus dem unten offenen Ölgefäß *a* der Lampe, Fig. 428, erst dann Öl ausfließen, wenn das äußere Niveau *bb* so weit gesunken ist, daß die untere Öffnung des Ölgefäßes *a* für einen Augenblick frei wird. Dahin gehört auch das Tintenfaß, Fig. 429. Aus dem Hauptgefäße kann

Fig. 430.



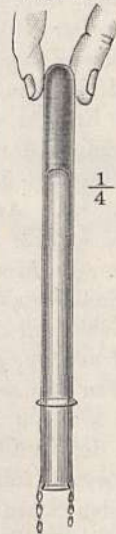
Fig. 431.



Fig. 432.



Fig. 433.



nur dann wieder etwas Tinte in das seitliche oben offene Eintauchrohr eintreten, wenn in demselben die Flüssigkeit so weit gesunken ist, daß eine Luftblase in das Hauptgefäß eindringen kann.

Wenn man ein Trinkglas, dessen Rand möglichst eben ist (am besten mit abgeschliffenem Rande), ganz mit Wasser füllt, ein Papierblatt darauf deckt und dann das Glas rasch umkehrt, Fig. 430, so läuft das Wasser nicht aus; der gegen die untere Fläche des Papiers wirkende Luftdruck hindert das Herabfallen der Wassermasse. Das Papier ist nur deshalb nötig, um das Glas umkehren zu können, ohne daß das Wasser an den Seiten ausläuft und statt dessen Luft in das Gefäß eindringt. Das Papier kann auch durch ein

Sieb ersetzt werden. Wenn die untere Öffnung klein genug ist, um ein solches Auslaufen nicht befürchten zu müssen, wie dies beim Stechheber der Fall ist, so ist das Papier nicht mehr nötig. Der Stechheber ist gewöhnlich ein röhrenförmiges Gefäß, Fig. 431 und 432, welches oben und unten etwas enger und an beiden Enden offen ist. Taucht man es, wenn beide Öffnungen

Fig. 434.

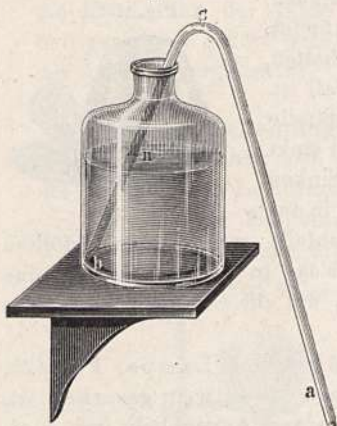
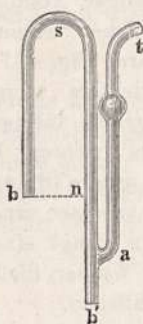


Fig. 435.



frei sind, ganz in eine Flüssigkeit, so füllt es sich mit derselben, und wenn man nun die obere Öffnung mit dem Daumen verschließt, so kann man den Stechheber in die Höhe ziehen, ohne daß die in demselben enthaltene Flüssigkeit ausläuft.

Ein hübscher Versuch ist auch der folgende. Eine Proberöhre wird mit Wasser gefüllt und eine etwas engere zweite

Proberöhre einige Centimeter weit in die erstere hineingesteckt. Kehrt man dann das Ganze um, Fig. 433, so fließt das Wasser aus, während die innere Röhre, durch den Luftdruck gehoben, in die äußere hineingeschoben wird.

Der Heber ist eine gekrümmte Röhre *bsa*, Fig. 434, deren Schenkel meistens ungleiche Längen haben. Wenn der eine Schenkel in eine Flüssigkeit eingetaucht und die ganze Röhre mit derselben gefüllt ist, so läuft sie am Ende *a* des anderen Schenkels, solange dasselbe tiefer liegt als das Niveau *n*, fortwährend aus; man kann also mit Hilfe eines Hebers leicht ein Gefäß über den Rand hinweg entleeren. Die Wirkung des Hebers ist leicht zu erklären. Auf der einen Seite hat die Wassersäule *sa*, auf der anderen die Wassersäule von *s* bis zum Spiegel der Flüssigkeit im Gefäße ein Bestreben, vermöge ihrer Schwere herabzufallen; der Schwere der in beiden Schenkeln befindlichen Wassersäulen wirkt aber auf beiden Seiten der Luftdruck entgegen, welcher auf der einen Seite gegen die Öffnung *a*, auf der anderen Seite aber auf den Spiegel des Wassers im Gefäße wirkt und dadurch die Bildung eines leeren Raumes im Inneren der Röhre verhindert, welcher sich notwendigerweise bei *s* bilden würde, wenn die Wassersäulen auf beiden Seiten herabließen. Da der Luftdruck auf der einen Seite so stark wirkt wie auf der anderen, so würde vollkommenes Gleichgewicht stattfinden, wenn die Wassersäulen in beiden Schenkeln gleich hoch wären, wenn sich also die Öffnung *a* in der Höhe des Wasserspiegels im Gefäße befände; sobald aber *a* tiefer liegt, erhält die Wassersäule im Schenkel *sa* das Übergewicht, und in dem Maße, als hier das Wasser ausläuft, wird auf der anderen Seite durch den Luftdruck von neuem Wasser in die Röhre hineingetrieben, so daß das Ausfließen bei *a* fort dauert, bis der Spiegel der Flüssigkeit im Gefäße so weit gefallen ist, daß die Öffnung bei *b* frei wird.

Es ist also nicht der Luftdruck, welcher das Wasser zum fließen bringt; er bewirkt nur, daß sich die Wassersäulen nicht an dem Scheitel des Hebers

trennen; die Bewegung des Wassers erfolgt durch den hydrostatischen Überdruck auf der Ausflußseite.

Um den Heber bequem füllen und in Wirksamkeit setzen zu können, wird manchmal eine Saugröhre *at*, Fig. 435, angebracht (Giftheber). Einen gewöhnlichen Heber füllt man nämlich dadurch, daß man bei *a*, Fig. 534, saugt; dabei ist aber leicht möglich, daß man etwas von der Flüssigkeit in den Mund bekommt, was in manchen Fällen unangenehm, oft sogar gefährlich sein kann, wie z. B. wenn man den Heber anwenden will, um ein Gefäß mit Schwefelsäure zu entleeren. In einem solchen Falle ist das Saugrohr unentbehrlich; denn wenn man die Röhre bei *b'*, Fig. 435, verschließt, so kann man durch Saugen bei *t* den ganzen Schenkel *sb* füllen, ohne daß die Flüssigkeit an den Mund kommt. Das Auslaufen beginnt alsdann, sobald man das Röhrende *b'* wieder öffnet.

Eine auf die Wirkung des Hebers gegründete Spielerei ist der Vexierbecher (Tantalusbecher), Fig. 436, der sich durch den Boden entleert, sobald er ganz gefüllt wird.

Daß beim Heber wirklich der Luftdruck die eben bezeichnete Rolle spielt, läßt sich mit Hilfe des einfachen Apparates Fig. 437 zeigen. Der Hals eines zum Teil mit Wasser gefüllten Glasballons ist mit einem wohl-

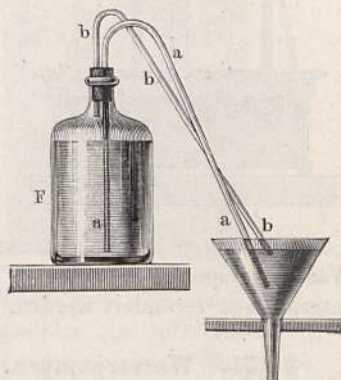
Fig. 436.



Fig. 437.



Fig. 438.



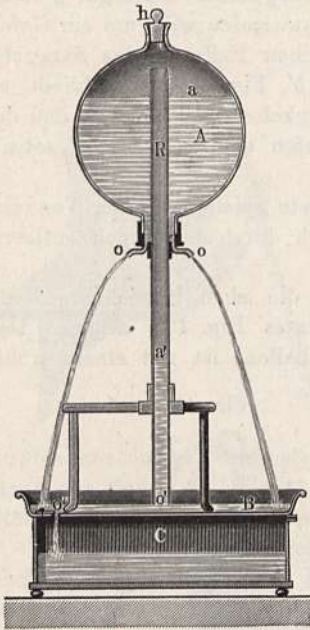
schließenden Kork verschlossen, welcher doppelt durchbohrt ist. In dem einen Loche steckt das kurze Röhrchen *ab*, im anderen der fast bis auf den Boden reichende Heber *cde*. Wenn man den Heber durch Einblasen bei *a* zum Fließen gebracht hat, so hört dieses Fließen alsbald auf, sobald man auf irgend eine Weise die Öffnung bei *a* verschließt, weil nun der Überdruck der Flüssigkeit durch den entgegengesetzt wirkenden Überdruck der Luft kompensiert wird.

Durch den Heber *a*, Fig. 438, kann nur so lange Wasser aus der Flasche ausfließen, als der obere Teil derselben durch das Rohr *b* mit der äußeren Luft in Verbindung steht. Wenn das aus *a* ausfließende Wasser auf ein Filter gelangt, durch welches es nur tropfenweise abfließt, so wird das Niveau des Wassers im Trichter bald steigen, bis die freie Öffnung von *b* verschlossen ist. Nun hört der Heber *a* zu fließen auf und fängt erst wieder zu fließen an, wenn so viel Wasser durch das Filter abgeflossen ist, daß das untere Ende des Rohres *b* nicht mehr in das Wasser des Trichters eintaucht. Die

Vorrichtung erfüllt also denselben Zweck wie jene der Fig. 427. Auf demselben Prinzip beruht der intermittierende Brunnen, der, obwohl ein Spielzeug, doch zugleich ein recht instruktiver Apparat ist.

Die Fig. 439, welche einen Vertikalschnitt durch einen solchen darstellt, läßt als Bestandteile ersehen: das mit Wasser gefüllte Reservoir *A*, in welches

Fig. 439.



die weite, oben und unten offene Glasröhre *R* hineinreicht, die Ausflußöffnungen *o, o*, die Schale *B*, welche das aus *o, o* ausfließende Wasser zuerst aufnimmt, aber allmählich durch die mittels Schieber *s* regulierbare Öffnung *o''* in das Gefäß *C* abfließen läßt. Der Apparat wird entweder nach Verschließen von *o, o* bei *h* mit Wasser gefüllt, oder auch nach Umkehren des ganzen oberen Theiles durch die Öffnung *o'*, wobei dann die Tubulatur *h* entbehrlich ist. Indem dann bei *o, o* Wasser ausströmt, wird zunächst Luft bei *o'* in den Raum oberhalb des Wasserspiegels *a* eingesaugt. Sperrt aber das ausgeflossene Wasser der Schale *B* die Öffnung *o'*, so kann keine Luft mehr eindringen, es wird dann eine Wassersäule *o'a'* gehoben, welche jener zwischen *o* in *a* das Gleichgewicht hält. Der Brunnen hört daher auf zu fließen. Nach einigen Sekunden ist aber so viel Wasser aus *B* durch *o''* nach *C* geflossen, daß die Öffnung *o'* frei wird, es dringen Luftblasen ein, die Säule *o'a'* sinkt, und der Ausfluß bei *o, o* beginnt von neuem und dauert an, bis die Öffnung *o'* wieder durch das Wasser versperrt wird. Durch Regulierung der Öffnung *o''* kann die Zeit der Intermittenz verändert werden.

§ 151. **Wasserpumpen.** Wir haben bereits im vorigen Paragraphen gesehen, wie man in einer Röhre, deren unteres Ende in Wasser getaucht ist, dasselbe dadurch in die Höhe steigen macht, daß man an dem oberen Ende saugt. Den luftverdünnten Raum, welcher in diesem Falle durch den Mund erzeugt wurde, kann man aber auch dadurch hervorbringen, daß man in dem Rohre einen luftdicht schließenden Kolben emporzieht. Ist das untere Ende des Rohres in Wasser eingetaucht, so füllt sich das Rohr mit dieser Flüssigkeit, wie sich dies an den gewöhnlichen Spritzbüchsen zeigen läßt.

Dies Prinzip wird nun auch bei Pumpen zur Hebung bedeutenderer Wassermengen angewandt. Fig. 440 stellt eine Saugpumpe der einfachsten Konstruktion dar. Das hölzerne Saugrohr *a* steht in dem Brunnenschacht, und zwar geht es bis unter den Spiegel des in der Tiefe sich sammelnden Wassers *B* hinab. Das Wasser kann durch eine seitliche Öffnung, welche zur Abhaltung von Unreinigkeiten durch ein Sieb verschlossen ist, in das Saugrohr eintreten. Auf das nach den Umständen kürzere oder längere, aus einem oder mehreren Stücken bestehende Saugrohr ist nun das etwas weitere, zwischen 6 bis 9 dcm hohe, genau zylindrisch ausgebohrte Kolbenrohr *b*

aufgesetzt, in welchem ein Kolben luft- und wasserdicht schließend auf und ab bewegt werden kann.

Das obere Ende des Saugrohres *a* ist durch ein Ventil (hier eine in der Mitte mit Metall beschlagene Lederklappe) bedeckt, welches durch einen Druck von unten gehoben, also geöffnet, durch einen Druck von oben aber fest auf die Öffnung aufgedrückt, also geschlossen wird. Dieses Ventil bildet gewissermaßen den Boden des Kolbenrohres *b* und wird deshalb das Bodenventil genannt.

Der im Kolbenrohre befindliche Kolben ist an einer eisernen Stange befestigt, welche durch eine passende Hebelvorrichtung bewegt werden kann; dieser Kolben ist selbst wieder hohl und das obere Ende dieser Höhlung mit einem Ventil in gleicher Weise versehen wie das obere Ende des Saugrohres, so daß es durch einen Druck von oben geschlossen, durch einen Druck von unten geöffnet wird.

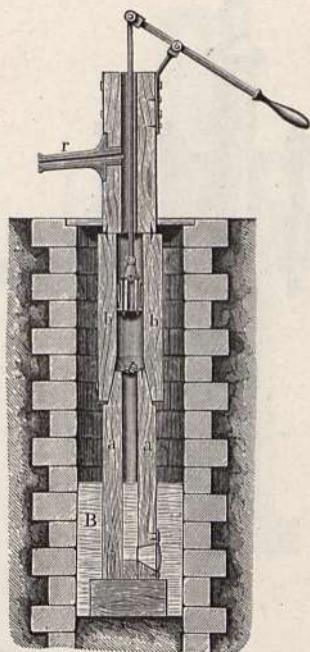
Der Umfang dieses Kolbens ist durch eine Lederkappe gebildet, welche unten um den hölzernen Kolben herum festgenagelt ist, oben aber frei von demselben absteht, so daß die Lederkappe, wenn sich einmal Wasser über dem Kolben befindet, fest gegen die Röhrenwände angepreßt und dadurch ein guter Schluß erhalten wird.

Wenn der eben am unteren Ende des Kolbenrohres befindliche Kolben in die Höhe gezogen wird, so wirkt er wie ein massiver Kolben, weil sich das Kolbenventil schließt, und es bildet sich unter demselben ein luftverdünnter Raum; das Bodenventil öffnet sich, und das Wasser steigt in dem Saugrohre in die Höhe. Beim Niedergange des Kolbens schließt sich zunächst das Bodenventil, wodurch das Zurückfallen des im Saugrohre gestiegenen Wassers verhindert wird, das Kolbenventil aber öffnet sich und läßt die noch im Kolbenrohre befindliche Luft durch.

Erst nach mehrmaliger Wiederholung der Operation, wenn das Wasser bis in das Kolbenrohr gestiegen ist, beginnt die Pumpe wirklich Wasser zu fördern. Bei jedem Niedergange wird dann das im Kolbenrohre befindliche Wasser, welchem nun durch das Bodenventil der Rückweg verschlossen ist, durch den Kolben hindurchgehen; bei jedem Aufziehen des Kolbens wird das bereits über demselben befindliche Wasser aus dem Kolbenrohre in das Steigrohr gehoben, aus welchem es dann durch die seitliche Öffnung *r* abfließt, während zugleich eine neue Wassermenge von unten her in das Kolbenrohr aufgesaugt wird.

Bei vollkommen luftdichtem Schluß des Kolbens und der Ventile würde man bei mittlerem Luftdruck das Wasser bis zu 10 m aufsaugen können; bei der geringen Vollkommenheit jedoch, mit welcher solche Pumpen aus-

Fig. 440.



geführt sind, darf das Bodenventil nicht wohl mehr als 6 m über dem Wasserspiegel im Bassin angebracht sein.

Um das Wasser auf größere Höhen zu heben, um es in Dampfkessel hineinzupressen usw., werden Druckpumpen angewandt, welche sich von

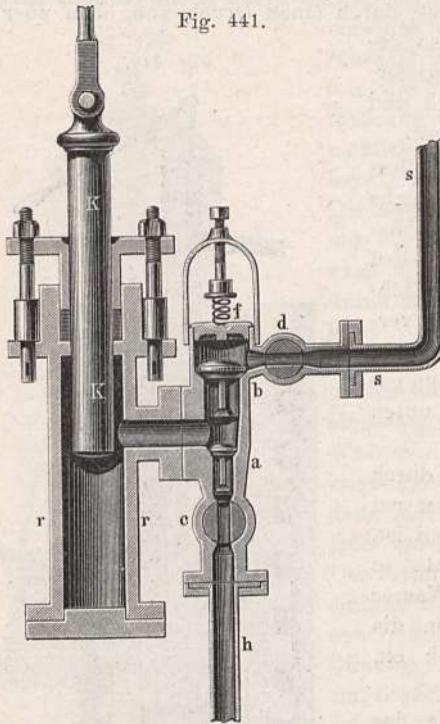


Fig. 441.

den vorigen dadurch unterscheiden, daß der Kolben massiv ist und daß das aufgesaugte Wasser durch ein seitliches Rohr in die Höhe gedrückt wird, dessen unteres Ende durch ein nach oben sich öffnendes Ventil geschlossen wird. Fig. 441 stellt eine Druckpumpe dar; *h* ist das Saugrohr, *r* das Kolbenrohr, *s* das Steigrohr.

Der Kolben *K* geht luftdicht durch die Stopfbüchse, welche das obere Ende des Kolbenrohres schließt. Beim Aufgange des Kolbens hebt sich das Saugventil *a*, um Wasser aus dem Saugrohr durchzulassen, während das Druckventil *b* geschlossen bleibt; beim Niedergange des Kolbens schließt sich *a*, und das vorher aufgesaugte Wasser wird nun durch das geöffnete Ventil *b* in das Steigrohr *s* gepreßt.

Bei *d* und *c* sind Hähne angebracht, die man abstellen kann, wenn die Pumpe nicht mehr arbeiten soll.

Der Deckel *f* kann entfernt werden, wenn man die Ventile nachsehen will. Er ist durch eine starke Drahtfeder aufgedrückt, so daß er gehoben wird, wenn der Druck zu stark werden sollte, wie es z. B. erfolgen kann, wenn das Steigrohr sich verstopft hat oder der Hahn *d* geschlossen bleibt, während *c* offen ist und die Ventile spielen. Der Deckel *f* dient also in diesem Falle als Sicherheitsventil, indem durch sein Heben das Bersten der Röhrenwände verhindert wird.

§ 152. Torricellis Versuch, Barometer. Als zur Zeit Galileis die Pumpenmacher in Florenz in einem Saugrohre das Wasser über 10 m heben wollten, sahen sie zu ihrem größten Erstaunen, daß es nicht höher stieg. Damals erklärte man das Aufsteigen von Flüssigkeiten, indem man sagte, die Natur habe einen *horror vacui*, d. h. eine Scheu vor dem Leeren.

Aus obiger Tatsache schloß Galilei, daß es nicht ein „horror vacui“, sondern eine Kraft von beschränkter Größe sein müsse, die das Aufsteigen des Wassers in der Saugröhre der Wasserpumpen bedinge. Indessen hat erst sein Schüler Torricelli in einem Briefe an Ricci vom Juni 1644 als wahre Ursache dieser Erscheinung und des Ende 1643 auf seine Anregung hin von seinem Freunde Viviani gemachten Experimentes mit Quecksilber den Druck der Luft erkannt, welchem eben jene Flüssigkeitssäulen das Gleich-

gewicht halten. Dieses entscheidende Experiment Vivianis bestand aber darin, daß derselbe auf den Rat Torricellis eine ungefähr zwei Ellen (120 cm) lange Glasröhre mit angeblasener Kugel am einen Ende vom anderen offenen Ende aus ganz mit Quecksilber füllte, sie dann mit dem Finger verschloß, umkehrte und mit diesem Ende in ein flaches, mit Quecksilber gefülltes Gefäß eintauchte. Nach Wegziehen des Fingers fiel dann das Quecksilber im vertikal

Fig. 442.

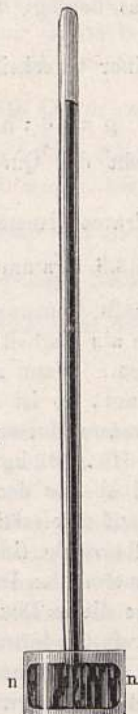


Fig. 443.

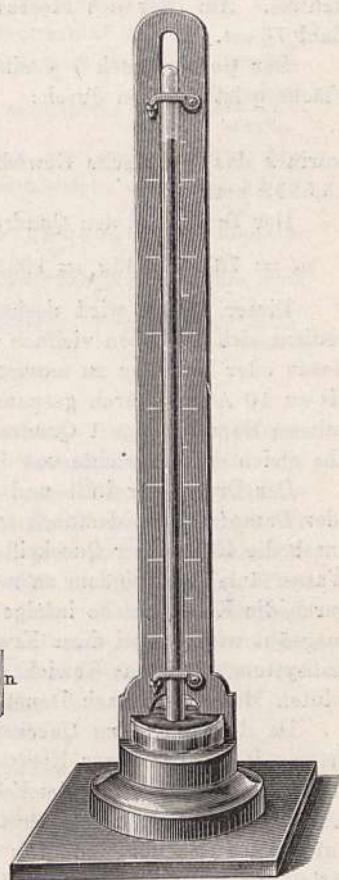


Fig. 442 stellt eine solche einfache Torricellische Röhre mit dem Quecksilbergefaß *nn* dar; den leeren Raum in der Röhre oberhalb des Quecksilbers nennt man ihm zu Ehren die Torricellische Leere. Indem Torricelli an der Röhre eine Skala anbrachte und den Stand des Quecksilbers im Rohre an diesem beobachtete, erkannte er, daß der Luftdruck am gleichen Orte nicht immer derselbe sei, also sein Instrument auch die Schwankungen des Luftdruckes angebe. Da er den Druck der Luft an der Erdoberfläche aus dem Gewicht der ganzen Luftsäule bis zu den Grenzen der Atmosphäre erklärte, so schloß er auch bereits daraus, daß der Luftdruck auf hohen Bergen geringer sein müsse, also das Quecksilber in seinem Instrument dort eine kleinere Höhe zeigen werde. Dies hat einige Jahre später Perrier auf Anregung von Pascal wirklich am Puy-de-Dôme nachgewiesen, indem er fand, daß am Fuße dieses Berges das Quecksilber in der Torricellischen Röhre um 85 mm höher stand als auf dem 975 m darüber sich erhebenden Gipfel. In England beschäftigte sich besonders Boyle (um 1660) mit Verbesserungen des Torricellischen Instrumentes zu Luftdruckmessungen und gab ihm auch statt des bis dahin gebräuchlichen Namens: Torricellische Röhre den passenderen: Barometer, der bald allgemein Eingang fand.

Fig. 443 zeigt ein Barometer mit Skala zur Ablesung des Quecksilberstandes in seiner einfachsten Gestalt (Standbarometer); den vertikalen Abstand des Quecksilberniveaus in der Röhre vom Niveau desselben im Gefäß heißt

man kurz die Barometerhöhe oder den Barometerstand. Dieser ist nach den Gesetzen der kommunizierenden Röhren durchaus unabhängig von der Form der Röhre und des Gefäßes, bzw. des zweiten offenen Schenkels einer Röhre.

§ 153. Messung des Luftdruckes, Normalluftdruck, Druckeinheiten. Schon oben wurde bemerkt, daß der Barometerstand veränderlich sei. Am Ufer des Meeres beträgt derselbe durchschnittlich in runder Zahl 76 cm.

Der Gesamtdruck¹⁾ p einer Quecksilbersäule von der Höhe h auf die Fläche q ist gegeben durch:

$$p = q \cdot h \cdot s,$$

worin s das spezifische Gewicht des Quecksilbers bedeutet, welches bei 0° 13,5959 beträgt.

Der Druck auf den Quadratcentimeter berechnet sich demnach

$$p_0 = 76 \cdot 13,5959 = 1033,3 \text{ Gramm-} = 1,0333 \text{ Kilogrammgewicht.}$$

Dieser Druck wird deshalb Atmosphärendruck genannt, und man bedient sich desselben vielfach als Einheit, um Drucke oder Spannkraften von Gasen oder Dämpfen zu messen. Wenn man also sagt, ein Dampfkessel sei bis zu 10 Atmosphären gespannt, so ist damit gesagt, daß der darin enthaltene Dampf auf je 1 Quadratcentimeter der Kesselfläche einen Druck ausübe gleich dem Gewichte von 10 · 333 kg.

Der Druck der Luft und ebenso der irgend eines abgesperrten Gases oder Dampfes kann demnach auf zweierlei Weise gemessen werden. Einmal durch die Höhe einer Quecksilbersäule (kleine Drucke durch die Höhe einer Wassersäule), welche dem zu messenden Drucke das Gleichgewicht hält, dann durch die Kraft, welche infolge dieses Druckes auf die Flächeneinheit (1 cm²) ausgeübt wird, wobei diese Kraft wiederum entweder nach dem Gravitationsmaßsystem durch das Gewicht (Kilogramm und Gramm) oder nach dem absoluten Maßsystem nach Dynen (Megadynen) ausgedrückt wird.

Da die Erde eine Quecksilbersäule wie alle Massen an verschiedenen Orten mit verschiedener Kraft anzieht, so entspricht gleichen Quecksilbersäulen nicht überall ein gleicher Luftdruck. Man reduziert daher die beobachtete Höhe der Quecksilbersäule auf jene Höhe, welche sie bei gleichem Luftdrucke an einem Orte von der geographischen Breite 45° in Meereshöhe hätte. Ist g die Acceleration der Schwere an dem Beobachtungsorte, wo die Quecksilbersäule h gemessen wurde, und $g_{45,0}$ die Acceleration der Schwere unter 45° in Meereshöhe, so ist der reduzierte Luftdruck = $h \frac{g}{g_{45,0}}$.

Für $g_{45,0}$ hat das internationale Maß- und Gewichtskomitee die Zahl 980,665 cm/sec angenommen, was mit der neuesten von Helmholtz gefundenen Zahl 980,642 nahe übereinstimmt.

Der Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0° Temperatur in Meereshöhe unter 45° Breite wird als Normalluftdruck bezeichnet.

¹⁾ Unter „Gesamtdruck auf eine Fläche“ verstehen wir die auf die ganze Fläche ausgeübte Kraft. Unter „Druck“ wird bei Flüssigkeiten und Gasen die auf die Fläche Eins ausgeübte Kraft verstanden. Siehe § 117.

Unter Zugrundelegung des spezifischen Gewichtes des Quecksilbers = 13,59593 erhält man diesen Druck als Gewicht auf 1 qcm gleich dem Gewicht von 1,0333 kg. Diese dem Gravitationsmaßsystem angehörige Druckeinheit enthält mehrere Willkürlichkeiten. Einmal die Wahl der abgerundeten Zahl 760 mm, welche keineswegs genau mit dem Mittel der Druckhöhen am Ufer des Meeres übereinstimmt; dann die Wahl des Quecksilbers, während sonst der Massen- und Gewichtseinheit das Wasser zugrunde gelegt wird, endlich die willkürliche Festsetzung der Breite 45° bzw. eines Wertes der Acceleration, wie er in dieser Breite beobachtet wurde.

Von diesen Willkürlichkeiten frei ist das absolute Maß des Druckes. Ein Druck von 1000000 Dynen auf das Quadratcentimeter = $1 \frac{\text{Megadyne}}{\text{cm}^2}$ würde einer Quecksilbersäule von 75,005 cm Höhe entsprechen. Auf dem physikalischen Kongresse in Paris 1900 wurde beschlossen, diese auf 75 cm abgerundete, mit $1 \frac{\text{Megadyne}}{\text{cm}^2}$ innerhalb der Beobachtungsfehler übereinstimmende absolute Druckeinheit unter dem Namen Megabarie, die dem (CGS)-System entsprechende, eine Millionmal kleinere Druckeinheit $\frac{\text{Dyne}}{\text{cm}^2}$ mit Barie zu bezeichnen¹⁾.

§ 154. Konstruktion eines guten Barometers. Wegen der großen Bedeutung des Barometers für die exakten Naturwissenschaften und für die Technik erscheint es geboten, bevor wir auf die speziellen Konstruktionsformen desselben eingehen, die allgemeinen prinzipiellen Forderungen, welche zur Erzielung einer befriedigenden Genauigkeit an jede Art von Barometer zu stellen sind, näher kennen zu lernen. Obwohl für die meisten Verwendungen dieses Instrumentes eine Genauigkeit von 0,1 mm ausreichend ist, so muß bei den einzelnen Fehlerquellen schon auf eine Fehlergrenze von 0,01 mm Bedacht genommen werden, damit durch das Zusammentreffen der Fehler nicht ein noch größerer Gesamtfehler entstehen kann.

1. Reinheit des Quecksilbers.

Da eine Verminderung des spezifischen Gewichtes des Quecksilbers von 13,5959 auf 13,5957 (eine Vermehrung ist kaum zu befürchten) bereits genügt, um den Barometerstand von 760 mm um 0,01 mm zu hoch werden zu lassen, so ist auf die Reinheit des Quecksilbers sehr zu achten. Es ist dies auch aus dem Grunde nötig, weil unreines, Oxyd oder fremde Metalle enthaltendes Quecksilber am Glase haftet und die Röhrenwände beschmutzt.

Das Quecksilber des Handels ist aber selten rein genug, es muß daher erst gereinigt werden.

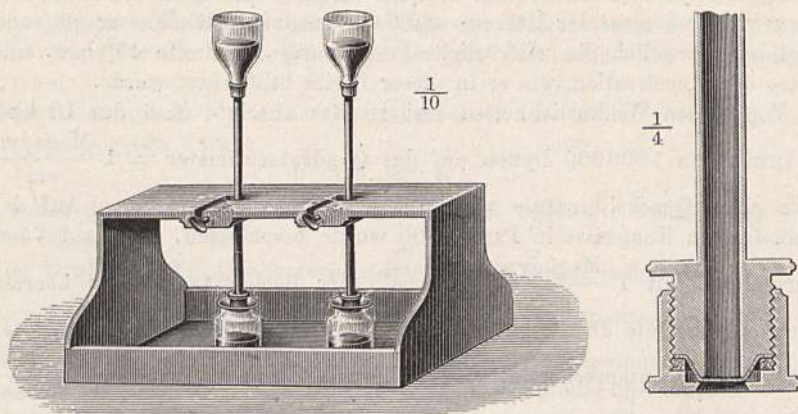
Von Staub und Schmutz, sowie von der größten Menge von Oxyd befreit man das Quecksilber, indem man es durch Filter von Fließpapier laufen läßt, deren Spitze mit einer Nadel durchstoichen wurde. Viel besser wirkt jedoch Durchpressen durch Leder.

¹⁾ Diese Druckeinheit ist für die Rechnungen in der Elastizitätslehre usw. bequem.

Recht bequem läßt sich dies mittels einer einfachen, vom Verfasser konstruierten Vorrichtung erreichen, bei welcher das Quecksilber infolge seines eigenen Druckes durch das Leder getrieben wird. Fig. 444 zeigt die Anordnung des ganzen Apparates samt Gestell, Fig. 444a einen Vertikaldurch-

Fig. 444.

Fig. 444a.



schnitt durch den unteren Teil der Filtrierapparate, deren zwei nebeneinander aufgestellt sind. Ein Scheibchen weichen sämisch gegerbten Leders wird mittels einer Überwurfschraube über die Mündung der Vertikalröhre fest angespannt. Gießt man das Quecksilber in den Trichter, so beginnt es, sobald die drückende Säule ungefähr 20 cm überschritten hat, in feinem Regen durch das Leder zu träufeln, während Schmutz und Staub zurückgehalten werden. Man entfernt die größte Menge der Unreinigkeiten durch die erste Röhre und gießt dann, wenn nötig, nochmals durch die zweite. Man kann dann dieselben Lederscheibchen oftmals benutzen.

Enthält das Quecksilber fremde Metalle oder viel Oxyd, so genügt dieses Verfahren nicht, es muß vielmehr entweder auf chemischem Wege oder durch Destillation gereinigt werden.

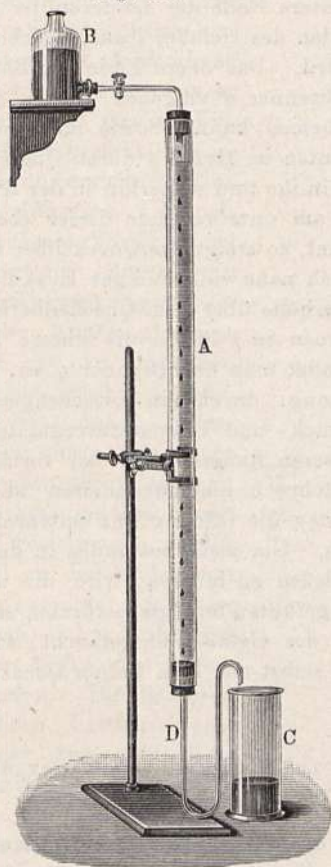
Das erstere geschieht nach verschiedenen Methoden, indem man das Quecksilber in fein verteiltem Zustande entweder mit verdünnter Salpetersäure, oder mit verdünnter Eisenchloridlösung, oder endlich mit einer Lösung von 5 g doppelchromsaurem Kali auf 1 Liter Wasser, welcher einige Cubikcentimeter Schwefelsäure beigemischt sind, in Berührung bringt. Man schüttelt das Quecksilber anhaltend mit diesen Flüssigkeiten oder läßt es aus Trichtern mit feiner Öffnung in dünnem Strahle durch hohe Schichten der Flüssigkeiten hindurchrinnen¹⁾. Die Fig. 445 zeigt eine hierzu geeignete Anordnung. Bei Anwendung des chromsauren Salzes ist das Schütteln vorzuziehen; dasselbe ist so lange fortzusetzen, bis das anfänglich entstehende rote Quecksilberchromat verschwunden ist und die wässrige Lösung durch das gebildete Chromsulfat rein grün gefärbt erscheint. Auf jeden Fall ist sodann das Quecksilber mit ausgekochtem, destilliertem Wasser vollkommen

¹⁾ L. Meyer, Anal. Zeitschrift 2, 241.

zu waschen und zuletzt unter dem Rezipienten der Luftpumpe über einem Gefäße mit konzentrierter Schwefelsäure zu trocknen¹⁾.

Sicherer führt Destillation zum Ziele. Sie geschieht entweder aus eisernen Flaschen mit eingeschraubter eiserner Destillerröhre, welche man in kaltes Wasser münden läßt, oder viel besser im luftleeren Raume mittels eines von

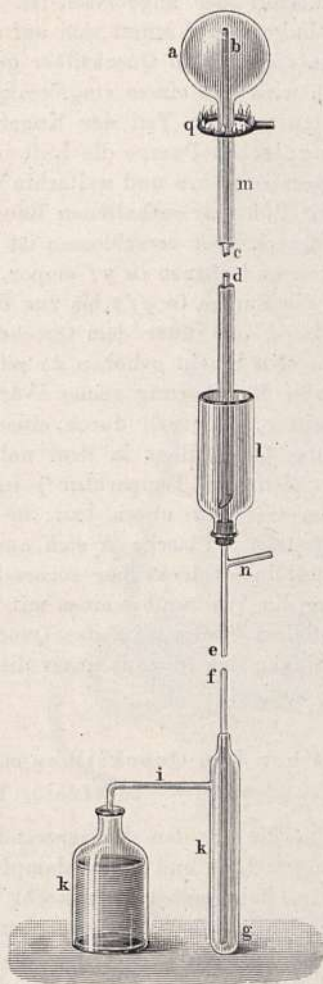
Fig. 445.



A. Weinhold²⁾ erfundenen Apparates. Der Hauptvorteil dabei ist, daß sofort trockenes oxydfreies Quecksilber erhalten wird.

Die Fig. 446 zeigt die wesentlichsten Teile des Weinhold'schen³⁾ Apparates. Durch den tubulierten Boden eines Glasgefäßes *l* geht quecksilberdicht eine oben und unten offene Glasröhre *bc — de — fg* von nahe 2 m Länge hindurch, die bei *n* eine seitliche, mit einer Sprengelschen Queck-

Fig. 446.



¹⁾ Eine Modifikation der von Ulex angegebenen Reinigung mit verdünnter Eisenchloridlösung, die recht gute Resultate liefert (spezifisches Gewicht des Quecksilbers nahe 13,5958), findet man in v. Wilds Artikel: „Methode zur Fällung von Barometerröhren“ (Repert. f. Meteorologie 2, 119) angegeben.

²⁾ Carls Repert. 15.

³⁾ Carls Repertorium für Experimentalphysik 9, 69.

silberluftpumpe (siehe unten) verbundene Ansatzröhre besitzt ¹⁾. Über das untere Ende g der Röhre ist das Gefäß k , mit seitlicher Ausflußröhre i , etwas unterhalb seiner oberen Öffnung, geschoben, welches mit reinem Quecksilber gefüllt wird.

Das obere Ende b der Röhre mündet in den oberen Teil der Glaskugel a aus, welche an der über die erstere geschobenen, weiteren Glasröhre m angeschmolzen oder angeblasen ist. Das untere Ende der letzteren ist schief abgeschnitten und stützt sich auf den Boden des Gefäßes l auf, welches mit dem zu reinigenden Quecksilber gefüllt wird. Das obere Ende der Röhre m endlich wird von einem ringförmigen Gasbrenner q umgeben, mittels dessen man den unteren Teil der Kugel a erwärmen kann. Sowie man mit der Sprengelschen Pumpe die Luft in der unten im Gefäß g durch Quecksilber abgesperrten Röhre und weiterhin in dem in ihr und weiterhin in der Kugel a und der Röhre m enthaltenen Raum, der am unteren Ende dieser ebenfalls durch Quecksilber verschlossen ist, verdünnt, so steigt das Quecksilber in der letzteren und ebenso in gf empor, um nach nahe vollständiger Evakuierung durch die Pumpe in gfe bis zur Barometerhöhe über dem Quecksilberniveau im Gefäß k und über dem Quecksilberniveau in l bis in die untere Hälfte der Kugel a hinein gehoben zu sein. Zündet man den Brenner q an, unter passender Regulierung seiner Wärmewirkung, durch ein zwischengesetztes Drahtgitter, eventuell durch einen Gasdruck- und Temperaturregulator, so wird das Quecksilber in dem nahe luftleeren Raume schon bei verhältnismäßig niedriger Temperatur ²⁾ in die Röhre b hineindestillieren und als rein im Gefäß k unten bzw. in der unter die Öffnung des Seitenrohres i untergestellten Flasche K sich ansammeln. Um nicht beständig in das Gefäß l unreines Quecksilber successive zugießen zu müssen, wird die untere Öffnung der Ansatzröhre eines mit diesem gefüllten und umgestürzten seitlich aufgestellten Ballons in das Quecksilber des Gefäßes eingetaucht, so daß beim Sinken des Niveaus unter diese von selbst aus dem Ballon Quecksilber wieder zufließt.

2. Über dem Quecksilber muß ein vollkommen trockener und luftfreier leerer Raum sein.

Um die an den Röhrenwandungen des Barometerrohres anhaftenden Spuren von Luft und Wasserdampf vollständig zu entfernen, muß das Quecksilber im Rohr selbst ausgekocht werden. Diese etwas mißliche Operation kann auf folgende Weise geschehen:

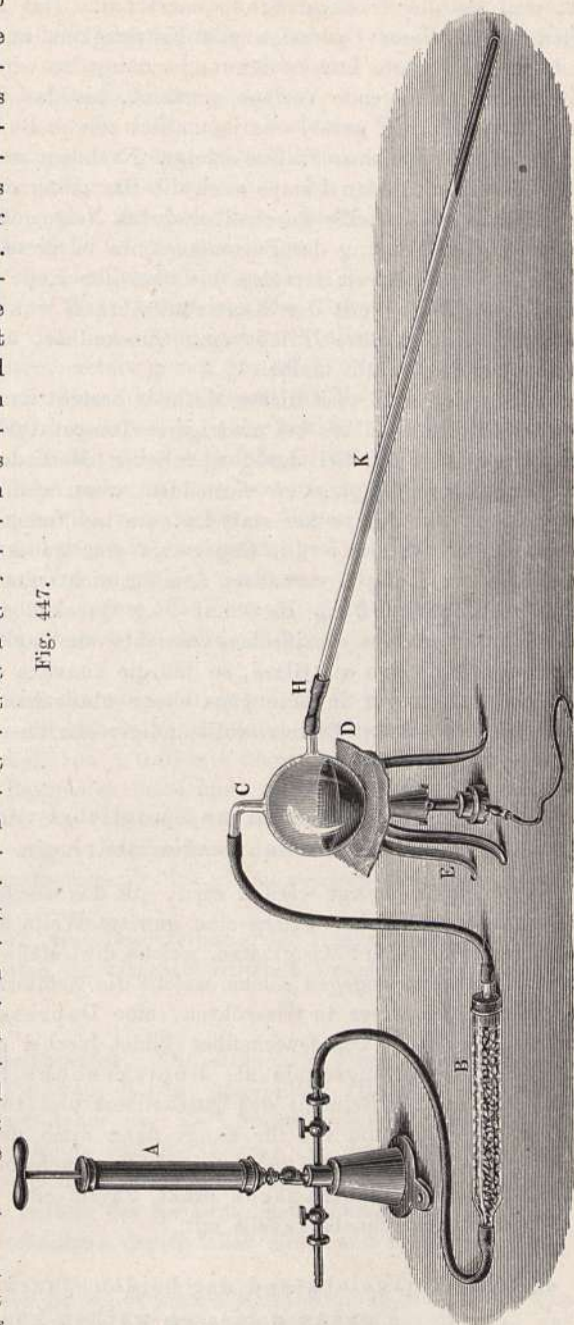
Man füllt ein Drittel der Röhrenlänge mit Quecksilber an und kocht es in schiefer Lage seiner ganzen Ausdehnung nach über einem Kohlenfeuer oder besser über einer großen Gasflamme; alsdann gießt man eine neue Portion Quecksilber zu, welches aber etwas warm sein muß, damit die Röhre nicht springt, und kocht die neu hinzugegossene Quecksilbersäule auf dieselbe Weise, und so fort, bis man fast die ganze Röhre auf diese Weise behandelt hat, und gießt zuletzt noch etwas heißes Quecksilber auf, um die Röhre voll-

¹⁾ Im Notfalle tut es auch eine andere gute Luftpumpe.

²⁾ Während Quecksilber bei gewöhnlichem Luftdruck, i. e. 760 mm, erst bei 357° siedet, gerät dasselbe bei einem mit der Sprengelschen Pumpe leicht zu erzielenden Druck von bloß 10 mm schon bei 180° ins Sieden.

ständig zu füllen. Um das leichte Springen der Barometerröhren bei dieser Operation zu vermeiden, was hauptsächlich dem hohen Siedepunkte des Quecksilbers von 357° beizumessen ist, suchte v. Wild nach Taupenot¹⁾ durch teilweises Evakuieren des Apparates diesen bei der Operation des Auskochens zu erniedrigen, was er mittelst der in Fig. 447 dargestellten Vorrichtung erzielte²⁾. Eine kugelförmige, doppelt tubulierte Vorlage wird einerseits durch ein kurzes Stück ungeschwefeltes Kautschukrohr mit der zu füllenden Barometerröhre *K*, andererseits durch Kautschukröhren mit einer Trockenröhre (Röhre mit Stücken geschmolzenen Chlorcalciums gefüllt und an den Enden mit Baumwollepfropfen versehen) und weiterhin mit einer Luftpumpe *A* verbunden. Die letzteren Röhren bestehen entweder aus sehr dickwandigem Kautschuk oder sie sind durch eingelegte Drahtspiralen gegen das Zusammendrücken durch den äußeren Luftdruck geschützt. Zunächst wird der ganze Apparat: Trockenröhre, Vorlage und Barometerrohr, nachdem man in die Vor-

Fig. 447.



¹⁾ Note sur la construction du baromètre et l'ébullition du mercure dans le vide par Taupenot.

Ann. de Chimie et de Physique, 3 série, t. 49, p. 91, 1857.

²⁾ H. Wild, Methode zur Füllung von Barometerröhren ohne Auskochen und ohne Gefahr des Zerspringens derselben. Repert. für Meteorologie 2, 115, 1872.

lage eine passende Menge reinen Quecksilbers gebracht hat, evakuiert und dann wieder von der Luftpumpe her Luft eingelassen, welche nun trocken ist, weil sie die Trockenröhre passiert hat. Hat man durch mehrmaliges Wiederholen dieser Operation alle Feuchtigkeit aus dem Inneren entfernt und eine mögliche Luftverdünnung erzeugt, so wird die auf einem Dreifuß mit Drahtnetz liegende Vorlage erwärmt, bis das Quecksilber, welches sie enthält, ins Kochen gerät, was im nahezu leeren Raume, wie erwähnt, schon bei ungefähr 180° ohne Stoßen erfolgt. Nachdem man hierauf mit derselben oder mit einer zweiten Lampe auch die Barometerröhre noch etwas erwärmt hat, läßt man das heiße Quecksilber durch Neigen der Vorlage langsam und bei schwacher Neigung der Barometerröhre in dieselbe einlaufen. In dieser Weise wird die Barometerröhre bis über ihr Ende hinaus mit Quecksilber gefüllt und darauf mit der Kautschukröhre *H* von der Vorlage abgezogen. In der Kautschukröhre *H* läßt man Quecksilber, damit beim Erkalten die Barometerröhre gefüllt bleibt.

Ein weiterer Vorteil dieser Methode besteht darin, daß sich wegen des Siedens des Quecksilbers bei niedrigerer Temperatur auch viel weniger Oxyd desselben bildet als bei der gewöhnlichen Methode des Auskochens. (Die Oxydation ist sogar ganz zu vermeiden, wenn man nach dem ersten Evakuieren von der Pumpe her statt Luft ein indifferentes Gas, wie z. B. Kohlensäure, einströmen läßt.) Die Gegenwart von Quecksilberoxydul, Hg_2O , und Quecksilberoxyd, HgO , verändert nämlich nicht nur das spezifische Gewicht des Quecksilbers (70 mg HgO auf 1 kg Quecksilber bedingen bereits eine Verminderung seines spezifischen Gewichts um 0,0002), sondern wesentlich auch seine Adhäsion am Glase, so daß die konvexe Oberfläche derselben im Barometerrohr sogar in eine ganz ebene übergehen kann, was man früher fälschlich als einen Beweis vollständiger Luftleere im Torricellischen Vakuum betrachtete.

3. Die Kapillardepression muß möglichst vermieden werden oder doch bestimmbar sein.

Wie später gezeigt werden wird, gilt das Gesetz der kommunizierenden Röhren nur für solche, welche eine gewisse Weite überschreiten. In engen Röhren erheben sich Flüssigkeiten, welche die Gefäßwände benetzen, über das normale Niveau, wogegen solche, welche die Gefäßwände nicht benetzen, wie das reine Quecksilber in Glasröhren, eine Depression unter das normale Niveau erleiden. Das Quecksilber bildet hierbei eine Kuppe, deren Höhe über dem Berührungsrande als Meniskushöhe bezeichnet wird. Diese Höhe ist von der Reinheit des Quecksilbers und von der Beschaffenheit des Glases abhängig, und von ihr hängt dann auch die Depression ab. Diese wird erst bei Röhren von 25 mm aufwärts verschwindend klein. Wir teilen im § 159 aus F. Kohlrauschs prakt. Physik eine nach Mendelejeff und Gutkowsky berechnete Tabelle mit.

4. Der Vertikalabstand der beiden Quecksilberniveaus muß genau gemessen werden können.

Zu diesem Behufe ist das Barometer mit einem genau und richtig getheilten Maßstabe zu versehen, welcher aber nicht der ganzen Länge nach

geteilt zu sein braucht. Dieser Maßstab muß genau vertikal stehen, während dies für die Röhre durchaus nicht nötig ist. Ferner soll der Maßstab der ganzen Länge nach aus ein und demselben Material sein, damit man die Wärmeausdehnung desselben berücksichtigen kann. An dem Maßstabe müssen Ablesevorrichtungen vorhanden sein, welche ein möglichst genaues Einstellen auf die Kuppen des Quecksilbers gestatten.

Bei Standbarometern kann die Ablesung mittels des Kathetometers erfolgen. Nur durch Aufwendung der genauesten Hilfsmittel ist bei der Ablesung eine Genauigkeit von 0,01 mm zu erreichen; bei gewöhnlichen guten Barometern muß man schon sehr zufrieden sein, wenn der Fehler in der Messung der Barometerhöhe nicht 0,1 mm übersteigt.

5. Da die Höhe der Quecksilbersäule von ihrer Temperatur abhängt und ebenso auch der Maßstab seine Länge mit der Temperatur ändert, so muß dafür vorgesorgt sein, daß diese Temperatur in allen Höhen möglichst dieselbe sei und mittels Thermometers genau gemessen werden kann.

Bei einem Barometer mit Messingskala macht ein Fehler in der Temperaturbestimmung von 0,08°C bereits einen Fehler von 0,01 mm im Resultate. Das Thermometer soll deshalb mit seinem Gefäße in der halben Höhe der Quecksilbersäule und möglichst nahe an derselben angebracht sein, oder es werden mehrere Thermometer in verschiedenen Höhen gleich verteilt angebracht. Das Instrument soll gegen Wärmestrahlungen von Sonne oder Ofen, sowie von Seite des Beobachters sorgfältig geschützt sein. Es ist deshalb anzuraten, beim Ablesen immer zuerst die Temperatur zu beobachten, dann erst den Barometerstand, da erstere durch die Körperwärme rascher beeinflußt wird als der letztere.

Ein Barometer, welches die eben aufgestellten Bedingungen in vollkommener Weise erfüllt und deshalb zu absoluten Bestimmungen des Luftdruckes mit einer Genauigkeit von $\pm 0,01$ mm dienen kann, wird als Normalbarometer oder absolutes Barometer bezeichnet. Da ein solches Instrument wegen seiner Kostspieligkeit nur von größeren Instituten angeschafft werden kann, so verweisen wir wegen Beschreibung eines solchen auf das von v. Wild konstruierte Normalbarometer des physikalischen Zentralobservatoriums zu St. Petersburg¹⁾.

Im folgenden geben wir eine Beschreibung der Hauptformen des Barometers, welche am häufigsten zu wissenschaftlichen Zwecken im Gebrauche stehen.

§ 155. Das Gefäßbarometer. Die einfachste Form des Gefäßbarometers ist bereits durch Fig. 443, § 152, abgebildet. Dasselbe ist jedoch nicht gut transportabel und daher nur als „Standbarometer“ verwendbar; außerdem hat es den Übelstand, daß das Niveau im unteren Gefäße fortwährend wechselt und dessen Höhe nicht gut abzulesen ist. Will man die Höhe der Quecksilbersäule mittels des Kathetometers messen, so senkt man auf die Oberfläche des Quecksilbers des Gefäßes einen von einer Schrauben-

¹⁾ Ausführlich beschrieben im Repertorium f. Meteorologie 16, Nr. 4, 1892. Man vergleiche auch J. Perret: Über die bei Messungen von absoluten Drucken und Temperaturen durch Kapillarkräfte bedingten Korrekturen und über die Aragose Methode zur Bestimmung der Luftspannung im Vakuum der Barometer. Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1886, S. 377.

mutter gehaltenen stählernen Stift von bekannter Länge, den man in genau vertikaler Lage so weit auf und ab bewegt, bis seine untere Spitze eben das Niveau berührt. Man mißt dann nur noch den Höhenabstand zwischen dessen oberer Spitze und der Quecksilberkuppe im Rohre, zu welcher man die Länge des Stiftes addiert. Das früher manchmal angewendete Verfahren,

Fig. 448.

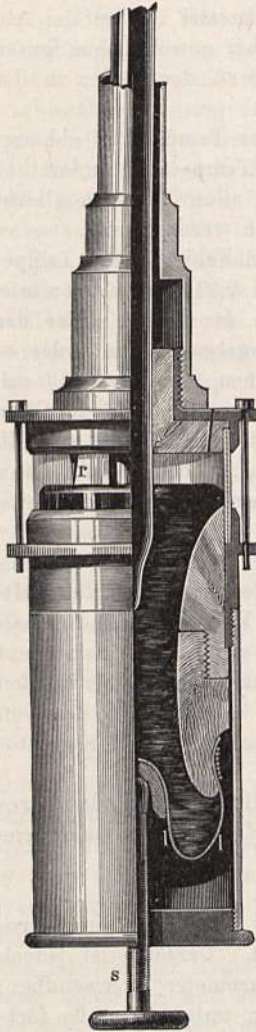


Fig. 449.

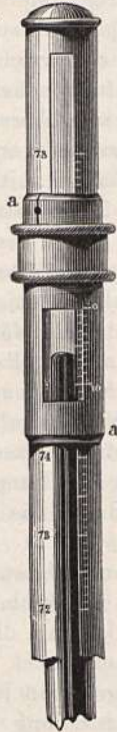
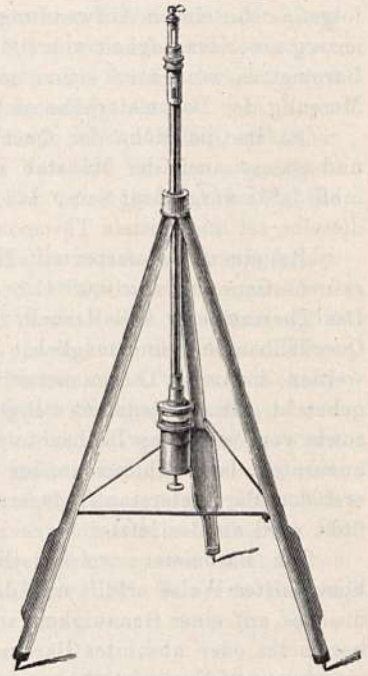


Fig. 450.



die veränderliche Höhe des Quecksilbers im Gefäß aus der Höhe im Rohre, und dem Durchmesser-Verhältnis zwischen Gefäß und Rohr zu berechnen, ist umständlich und ungenau, da das Volumen des Quecksilbers infolge Temperaturschwankungen sich ändert.

Die verbreitetste Form des transportablen Gefäßbarometers ist die, welche den Namen ihres Erfinders, Fortin, trägt.

Fig. 448 zeigt den unteren, Fig. 449 den oberen Teil, Fig. 450 das ganze Instrument samt Stativ.

Bei diesem Instrument ist durch eine eigentümliche Vorrichtung dafür gesorgt, daß vor jeder Ablesung der Quecksilberspiegel im Gefäße genau in dieselbe Höhe gestellt werden kann. Der Boden des Gefäßes, welches in Fig. 448 ungefähr in natürlicher Größe, halb in äußerer Ansicht, halb im Durchschnitt dargestellt ist, wird nämlich durch einen Lederbeutel *l* (oder besser durch einen Beutel, dessen innere Seite aus nicht vulkanisiertem Kautschuk und dessen äußere aus Leder besteht) gebildet, gegen welchen von

unten her der abgerundete Kopf der Schraube *s* drückt; je nachdem man die Schraube *s* dreht, wird also der Quecksilberspiegel im Gefäße gehoben oder gesenkt. Am Deckel des Gefäßes aber ist ein unten zugespitzter Stift *r* von Elfenbein oder Stahl befestigt, dessen Bild man in dem Quecksilberspiegel des Gefäßes erblickt. Durch Drehen der Schraube *s* ist es leicht, die Oberfläche des Quecksilbers gerade so hoch zu heben, daß sie eben die Spitze des Stiftes berührt. Diese Spitze nun ist der Nullpunkt der Barometerskala.

Das Rohr dieses Barometers ist vollständig von einer Messinghülse eingeschlossen, in welcher, um die Quecksilberkuppe im Rohre beobachten zu können, oben zwei einander gegenüberstehende Schlitze angebracht sind. Diese Messinghülse trägt eine Skala, deren Nullpunkt die bereits erwähnte Spitze ist. Um den Stand der Quecksilberkuppe richtig ablesen zu können, ist auf dem geteilten Messingrohr eine Hülse *aa*, Fig. 449, verschiebbar, in welcher sich ebenfalls zwei diametral gegenüberstehende Schlitze befinden, welche auf die Schlitze des Rohres passen und nur etwas breiter sind als jene, so daß man noch die Teilung des Rohres sehen kann. Die oberen Ränder der beiden Schieberschlitze sind genau in gleicher Höhe, und um eine Beobachtung zu machen, stellt man den Schieber so, daß diese oberen Ränder der Schieberschlitze in gleicher Höhe mit der Quecksilberkuppe stehen. Die eine Seite des vorderen Schieberschlitzes ist mit einem Nonius versehen.

Mittels cardanischer Aufhängung, d. h. um zwei zueinander rechtwinklige horizontale Achsen drehbar, wird nun das Instrument in den Hals eines dreiseitigen Stativs eingesetzt, wie man Fig. 450 sieht, so daß das Barometer durch das bedeutende Gewicht des Gefäßes stets in vertikaler Richtung erhalten wird. Um das Barometer zu transportieren, wird die Schraube *s*, Fig. 448, so hoch in die Höhe geschraubt, daß das Rohr sowohl wie das Gefäß vollständig mit Quecksilber gefüllt sind. Die zusammengelegten Füße des Stativs bilden dann das Gehäuse, in welchem das Instrument verpackt wird.

Die Anwendung des beweglichen Bodens zur Einstellung des Quecksilberspiegels im Gefäß auf einen bestimmten Punkt rührt von Horner her, welcher übrigens den Boden des Gefäßes nicht durch einen Lederbeutel herstellte, sondern dazu einen dicht an die Wände anschließenden, mit Leder überzogenen Kolben gebrauchte, welcher durch eine Schraube auf und nieder geschoben werden konnte.

Die Aufhängung des Barometers in einem dreibeinigen Stativ wurde zuerst von Engelfield angewandt.

§ 156. Das Heberbarometer. Den bisher besprochenen Gefäßbarometern gegenüber bilden die Heberbarometer eine zweite Hauptform dieses wichtigen Instrumentes, welche sich durch mehrfache Vorteile auszeichnet, namentlich sind die Heberbarometer bei gleicher Genauigkeit weit transportabler als die Gefäßbarometer.

Die Heberbarometer, Fig. 451, sind aus einem heberförmig gebogenen Glasrohre verfertigt, welches wenigstens an den Stellen der oberen und unteren Quecksilberkuppe gleichen Durchmesser haben muß.

Bei diesen Barometern hat die Quecksilberkuppe im kürzeren Schenkel durchaus keine feste Stellung. Solange die Temperatur nicht wechselt, muß

bei verändertem Luftdruck die Quecksilbersäule in dem einen Schenkel genau so viel steigen, wie sie im anderen fällt, man könnte also aus den Schwankungen im einen Schenkel auf die im anderen schließen; da jedoch bei

Fig. 452.

Fig. 451.

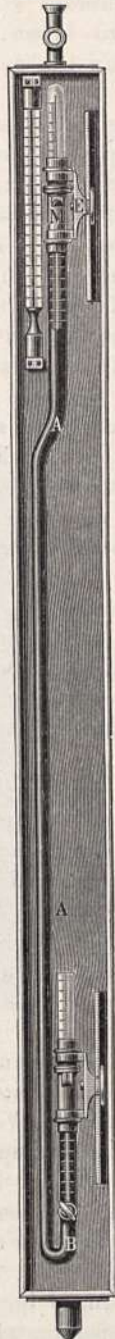
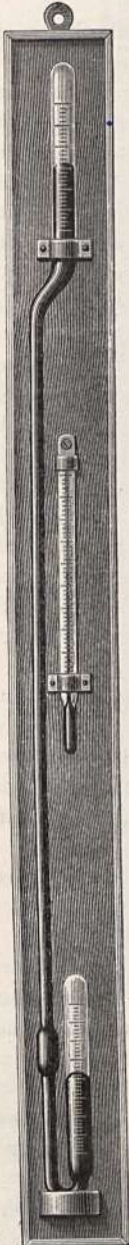


Fig. 453.



Fig. 454.

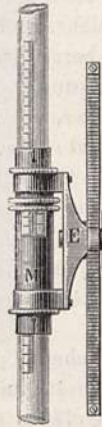


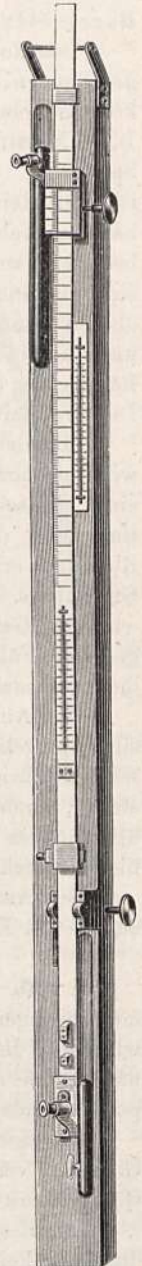
Fig. 455.



Fig. 456.



Fig. 457.



wechselnder Temperatur auch das Volumen des Quecksilbers im Barometer sich ändert, so ist die Beobachtung beider Kuppen unerlässlich.

Bei den Heberbarometern sind entweder

1. das Rohr und die Skala fest;
2. die Skala fest und das Rohr in vertikaler Richtung verschiebbar;
3. das Rohr fest und die Skala verschiebbar.

Im ersten Falle ist es am bequemsten, wenn der Nullpunkt der Skala noch unter der unteren Kuppe liegt. Man hat alsdann abzulesen, wie hoch die obere und wie hoch die untere Kuppe über dem erwähnten Nullpunkte liegt; die Differenz der beiden Ablesungen gibt dann die Barometerhöhe.

Bei den besten nach diesem Prinzip konstruierten Barometern ist die Teilung oft auf das Glasrohr selbst geätzt.

Ein solches Instrument ist in Fig. 451 abgebildet¹⁾; Fig. 452 zeigt ein ähnliches Instrument mit Glasnonien, deren Einrichtung aus den Nebensfiguren 453, 454, 455 genügend erhellt.

Die Fig. 456 deutet die Konstruktion eines einfachen Heberbarometers der zweiten Art an.

Das Rohr ist auf der Messingplatte *d* befestigt, welche mit Hilfe der Schraube *s* auf und nieder geschoben werden kann, wodurch dann auch das Barometerrohr selbst gehoben oder gesenkt wird, indem die messingenen Halter *b* und *c* dasselbe zwar auf dem Brette halten, aber doch eine Verschiebung in vertikalem Sinne gestatten. Soll eine Beobachtung gemacht werden, so wird zunächst die untere Kuppe auf den Nullpunkt der Skala eingestellt und dann der Stand der oberen abgelesen.

Bei den Heberbarometern der dritten Art ist die Skala mittels eines in eine gezahnte Stange eingreifenden Triebes verschiebbar; sie wird bei jeder Beobachtung so eingestellt, daß der Nullpunkt der Skala in die Höhe der unteren Quecksilberkuppe zu stehen kommt. Ein Barometer dieser Art ist in Fig. 457 abgebildet. Die Barometerröhre ist ganz in ein Brett eingelassen, welches nur an den beiden Stellen durchbrochen ist, an welchen beobachtet werden soll; die verschiebbare Skala ist auf der Vorderseite dieses Brettes angebracht. Am unteren Ende der geteilten Stange ist ein kleines Mikroskop befestigt, welches so eingerichtet ist, daß man durch dasselbe die untere Kuppe des Barometers scharf sehen kann. Der Kreuzungspunkt des in diesem Mikroskop angebrachten Fadenkreuzes liegt in gleicher Horizontalinie mit dem Nullpunkte der Skala, und dieser Kreuzungspunkt wird genau auf den Gipfel der unteren Kuppe eingestellt. Am oberen Ende der geteilten Stange ist gleichfalls aufs feinste verschiebbar ein Nonius angebracht, dessen Nullpunkt in der Horizontalinie eines von ihm getragenen zweiten Mikroskopes liegt, welches auf die obere Kuppe eingestellt wird. Der Nonius ist so geteilt, daß man mit demselben unmittelbar 0,02 mm ablesen kann. Ein gleicher Grad von Genauigkeit ist bei dem Fortinschen Barometer kaum möglich, selbst wenn man die Einstellung auf die obere Kuppe mit dem Mikroskop ausführen wollte, weil die Einstellung auf die Spitze *r* im Gefäß, Fig. 548, nicht mit der Genauigkeit ausgeführt werden kann, wie die Einstellung auf die untere Kuppe des eben beschriebenen Instrumentes.

¹⁾ Die Abbildungen Fig. 451, 452 bis 455 und 458 sind dem Kataloge der Firma R. Fuess (vormals J. G. Greiner jun. u. Geissler) in Berlin entnommen.

Überhaupt trägt es sehr zur Genauigkeit der Messung bei, wenn beide Ablesungen durch gleichartige Vorrichtungen bewerkstelligt werden. Will man die höchste Genauigkeit erreichen, so benutzt man Konstruktionen, welche gestatten, beide Ablesungen nicht nur durch gleichartige, sondern

Fig. 458.



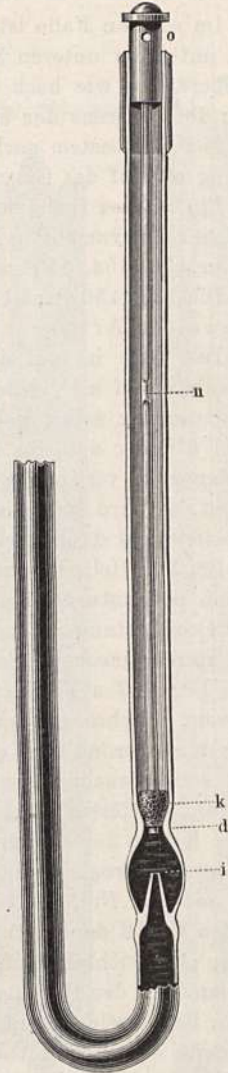
Fig. 459.



Fig. 460.



Fig. 461.



durch die nämliche Vorrichtung vorzunehmen. Man ist dann ganz sicher, konstante Ablesefehler durch die Methode der Messung zu eliminieren.

Besondere Mühe hat man darauf verwandt, die Heberbarometer so zu konstruieren, daß sie bequem und sicher transportiert werden können. Fig. 458 stellt das Rohr des von Gay-Lussac angegebenen Barometers dar. Der offene Schenkel hat nur eine kapillare Öffnung *a*, groß genug, um die Luft frei eintreten zu lassen, aber zu klein, als daß Quecksilber durch dieselbe auslaufen könnte; man darf also das Instrument umkehren, Fig. 459, ohne fürchten zu müssen, daß man Quecksilber verliert. Damit man das Barometer aus der Lage Fig. 459 wieder zur Beobachtung umkehren könne, ohne daß Luft in den längeren Schenkel eintreten kann, hat Bunten an diesen Barometern die Fig. 460 abgebildete Einrichtung getroffen.

Bei den Gay-Lussacschen Barometern findet man die Teilung meist auf das Glas geätzt.

Fig. 461 stellt den sehr zweckmäßigen Verschluss der Greinerschen Heberbarometer dar. Der offene Schenkel ist nämlich nahe über der Krümmung bei *d* etwas verengt und unter dieser Einschnürung bauchig erweitert. In diese Erweiterung erhebt sich vom unteren Rande aus eine konisch verjüngte oben bei *i* offene Fortsetzung des unteren Röhrenteils. Das Barometer enthält nun gerade so viel Quecksilber, daß die bauchige Erweiterung noch bis *d* mit Quecksilber gefüllt bleibt, wenn man durch Neigen des Instrumentes die Torricellische Leere vollständig mit Quecksilber ausgefüllt hat. Zum Verschluss dient alsdann ein genau in die Verengung bei *d* passender Kork *k*, welcher am unteren Ende einer im Lichten ungefähr 1 mm weiten, bei *n* zugeschmolzenen Glasröhre befestigt ist. Wenn nun selbst kleine Luftblasen in dem abgesperrten Teile zurückblieben, so können diese doch niemals in der Öffnung bei *i* und durch diese in den längeren Schenkel des Barometers eindringen. Wenn bei steigender Temperatur das abgesperrte Quecksilber sich ausdehnt, so kann es in die durch den Kork *k* gesteckte Glasröhre eintreten. Es ist dafür gesorgt, daß während des Transports die fragile Glasröhre samt dem Kork *k* in der Stellung festgehalten wird, in welcher sie Fig. 461 darstellt. Soll das Instrument gebraucht werden, so wird die enge Glasröhre samt dem daran steckenden Kork *k* in die Höhe gezogen.

Bei manchen Heberbarometern wird das Quecksilber, nachdem durch Neigen das Vakuum nahe ausgefüllt ist, durch einen Hahn abgesperrt.

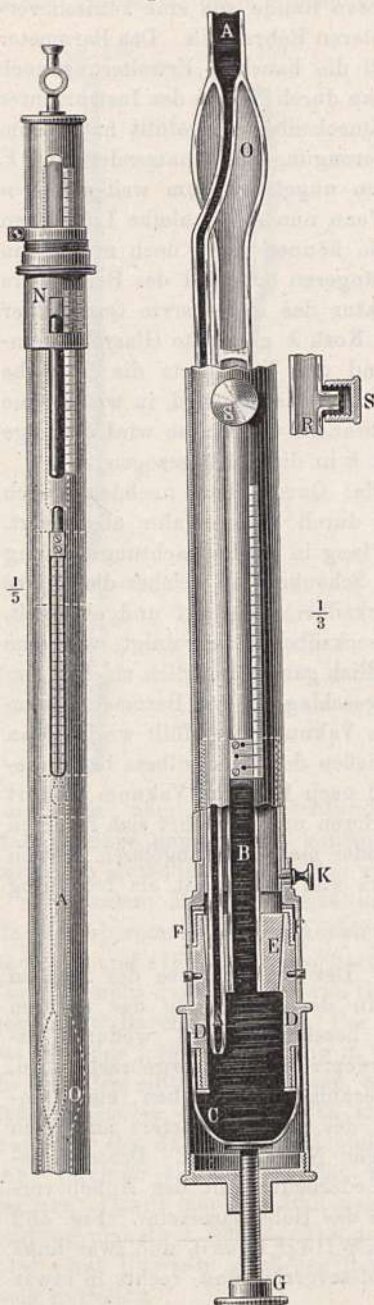
Wenn ein Heberbarometer einige Jahre lang in der Beobachtungsstellung hängen bleibt, so wird die Stelle des offenen Schenkels, an welcher die untere mit der Luft in Berührung stehende Quecksilberkuppe auf und ab spielt, durch anhaftendes Quecksilberoxyd und Quecksilber verunreinigt, was eine genaue Beobachtung sehr erschwert und endlich ganz unmöglich macht. Um diesen Übelstand zu vermeiden, wird vorgeschlagen, das Barometer beim Nichtgebrauch so schief zu hängen, daß das Vakuum ausgefüllt wird. Man vermeidet dadurch auch das Aus- und Einfließen des Quecksilbers bei Änderungen des Luftdruckes, wodurch nach und nach Luft ins Vakuum geführt wird. Dieser letztere Vorteil geht aber verloren und verkehrt sich in einen Nachteil, wenn das Barometer täglich ein- oder mehrmals abgelesen werden soll, da dann der Verkehr des Quecksilbers viel größer ist als bei ruhig hängendem Instrument.

§ 157. Das Gefäßheberbarometer. Der am Schlusse des vorigen Paragraphen besprochene Übelstand, daß in der Umgebung der unteren Kuppe das Glasrohr durch Quecksilberoxyd beschmutzt wird, wodurch insbesondere auch eine unregelmäßige Kapillardepression hervorgebracht wird, sowie noch ein wichtiger Umstand haben Veranlassung gegeben, ein Barometer zu konstruieren, welches die Vorteile des Gefäßbarometers mit jenen des Heberbarometers vereinigt und den obigen Namen führt. Dasselbe besitzt vom Fortinschen Instrumente den Lederbeutel mit der Anhebevorrichtung, ist aber doch doppelschenkelig, wie das Heberbarometer. Fig. 462 zeigt ein solches Instrument nach dem System Wild-Fuess¹⁾, und zwar links die obere Hälfte desselben mit Skala und Ablesevorrichtung, rechts in etwas

¹⁾ H. Wild: Neueste Form des Kontrollbarometers. Bulletin de l'Académie Imp. de St. Pétersbourg, T. XXVIII, p. 292, 1883.

größeren Maßstabe den unteren Teil, wobei durch teilweise Wegnahme der Wände die Verbindung der beiden Schenkel und die Einrichtung des Quecksilbergefäßes sichtbar gemacht ist.

Fig. 462.



Die beiden Schenkel *A* und *B* hängen an der mit der äußeren Luft nicht kommunizierenden Erweiterung *O* zusammen. Der obere Teil von *A* liegt in der Verlängerung von *B*, seine Fortsetzung aber ist seitlich durch *O* hindurch und hierauf parallel zu *B* fortgeführt. *A* und *B* sind in den Stahlkonus *E* gekittet, über welchen *A* ein Stück weit hinausreicht, während *B* mit dem Konus abschneidet.

Der Schenkel *B* hat unterhalb *O* einen Ansatz, durch den er mit der Atmosphäre kommuniziert, welcher durch die Schraube *S* verschlossen werden kann.

Der Konus *F* ist in ein eisernes Gefäß *D* eingelassen und wird durch eine Überfangschraube darin festgehalten. Auf *D* ist der Lederbeutel *C* aufgebunden. An der Außenseite von *D* ist die messingene Schutzröhre, welche zugleich die Skala trägt, angeschraubt. Auf ihr verschiebt sich die mit einem Nonius versehene Ablesevorrichtung *N*, welche mit einer Schraube zur feinen Einstellung versehen ist. Diese nämliche Ablesevorrichtung kann nach Wegnahme des Knopfes *S* zur unteren Kuppe hinabgeschoben und zur dortigen Ablesung benutzt werden. Für weniger genaue Messungen benutzt man bequemer ein eigenes Nullpunktvisier, das mittels der Schraube *K* festgeklemmt werden kann. Man hebt dann das Quecksilber im kurzen Schenkel bis zu diesem Visier und bewerkstelligt die obere Ablesung mittels des Nonius *N*.

Soll das Instrument auf kürzere Strecken im zusammengesetzten Zustande transportiert werden, so wird das Quecksilber im Rohre *B* ganz gehoben, die Öffnung bei *S* verschlossen und das Instrument umgekehrt.

Die Versendung des Instrumentes auf weitere Strecken geschieht im zerlegten Zustande, ohne daß eine neue Füllung

notwendig wird. Zu diesem Zwecke wird in umgekehrter Lage nach Abnahme des Skalenrohres vom Gefäß *D* und nach Lösung der Mutter *F* der

Stahlkonus *E* mitsamt den beiden eingekitteten Röhren aus *D* herausgehoben und nach Abnahme von *S* das Quecksilber aus dem Schenkel *B* abgelassen, während der längere Schenkel *A* gefüllt bleibt. Die beiden Röhre werden dann samt dem Konus *E* abgesondert vom übrigen Instrument verpackt, damit im Falle eines Bruches das ausfließende Quecksilber nicht die Metallteile beschädigt. Bei der Wiederzusammensetzung wird in umgekehrter Reihenfolge verfahren.

Zum Schlusse sei erwähnt, daß Barometer mit anhebbaarem Quecksilber nach Löwenherz auch ohne Lederbeutel durch Anfügung eines dritten kommunizierenden Schenkels, aus dem das Quecksilber durch einen Kolben verdrängt wird, konstruiert werden.

§ 158. Prüfung und Korrektion des Barometers. Um ein Barometer auf seinen brauchbaren Zustand zu prüfen, wird man zunächst aus der blanken Oberfläche des Quecksilbers und dem wohlausgebildeten Meniskus auf die Reinheit des Quecksilbers schließen dürfen. Die Weite der Röhre und die Beschaffenheit der Ablesevorrichtungen wird dann einen Maßstab über die erreichbare Genauigkeit der Ablesung ergeben. Die Richtigkeit der Skala kann wohl nur durch Untersuchung mittels eines Kathetometers geprüft werden, wobei insbesondere auf die richtige Stellung der Nullmarke zu der übrigen Teilung zu achten ist.

Die Vollkommenheit des Vakuums kann zunächst annähernd dadurch geprüft werden, daß man das Instrument vorsichtig so neigt, daß das Quecksilber mit mäßiger Stärke an das verschlossene Ende anschlägt. Entsteht dabei ein heller, klingender Ton, so ist dies ein gutes Zeichen, dagegen zeigt ein dumpfer Ton an, daß Luft vorhanden, welche den Stoß elastisch aufnimmt. Man wird dann auch, falls das Ende der Röhre sichtbar ist, daselbst die zurückbleibende Luftblase beobachten und der Größe nach beiläufig schätzen können. Je größer der Raum über dem Quecksilber, je weiter und je länger also die Röhre ist, desto weniger Ungenauigkeit wird durch ein kleines Luftbläschen entstehen können. Schon aus diesem Grunde sind enge Röhren verwerflich. Bei Heberbarometern, deren offener Schenkel lang genug ist, so daß man die Quecksilbersäule durch Nachgießen von Quecksilber noch um ein Beträchtliches erhöhen kann, sowie bei den Anhebebarometern, z. B. dem zuletzt beschriebenen Gefäßbarometer, läßt sich eine genaue Bestimmung des Fehlers, der durch einen Luftgehalt entstanden ist, nach folgender von Arago¹⁾ stammender Methode ermitteln.

Man macht unmittelbar nacheinander zwei sorgfältige Ablesungen der Barometerhöhe, die erste, *h*, bei gewöhnlicher Füllung, die zweite, nachdem man durch Nachfüllen oder Anheben des Quecksilbers den Raum des Vakuums auf die Hälfte des früheren gebracht hat. Ist die dann abgelesene Höhe gleich *h'*, so ist der Fehler der ersten Messung gegeben durch die Differenz $h - h'$. Diese Größe ist zur zuerst abgelesenen Höhe zu addieren.

Die Erklärung für dieses Verfahren ist einfach, sobald man das später mitzuteilende Gesetz von Boyle kennt, nach welchem sich die Spannkraft der Luft in demselben Verhältnisse erhöht, in welchem das Volumen derselben abnimmt. Durch Zusammendrücken der Luft auf ihr halbes Volumen wird

¹⁾ Nach Régnaults Angabe (Relation des exp. 1, p. 491, Anm.). Dieselbe Methode wurde von A. T. Kupffer 1832 beschrieben (Pogg. Ann. 26, 450).

ihre Spannkraft verdoppelt. Bei der ersten Ablesung war die gefundene Höhe h gleich der wahren Barometerhöhe b weniger der Spannkraft der eingeschlossenen Luft, welche mit x bezeichnet sei, also:

$$h = b - x \dots \dots \dots (1)$$

Bei der zweiten Ablesung tritt an Stelle von x der Wert $2x$, also gilt:

$$h' = b - 2x \dots \dots \dots (2)$$

Aus (1) und (2) folgt aber:

$$h - h' = x.$$

Diese Methode gilt angenähert auch bezüglich des im Vakuum enthaltenen Wasserdampfes, solange davon nicht eine so große Menge vorhanden ist, daß sich derselbe beim Versuche teilweise kondensiert.

Es leuchtet ein, daß man das Volumen des Vakuums nicht gerade auf die Hälfte zu reduzieren braucht; das Verfahren wird vielmehr noch empfindlicher, wenn man die Volumverminderung noch weiter treibt. Vermindert man das Volumen auf $\frac{1}{n}$ des ursprünglichen, so ist:

$$h = b - x, h' = b - nx,$$

woraus:

$$x = \frac{h - h'}{n - 1}.$$

Reduziert man also beispielsweise das Vakuum auf den elften Teil, so gibt die Differenz der Ablesungen der Barometerhöhen das Zehnfache des Fehlers der ersten Ablesung.

Um diese Methode genau durchzuführen, sollte das Barometerrohr eine Volumeinteilung besitzen. Es dürfte aber meistens genügen, die relativen Volumina aus den Längen abzuleiten, wobei man noch den Inhalt der Kalotte abschätzen kann.

Die Korrektion wegen der Kapillardepresion ist leider eine ziemlich unsichere, da die diesbezüglichen Korrektionstabellen verschiedener Autoren nicht übereinstimmen. Wir führen hier die aus den Beobachtungen von Mendelejeff und Gutkowski von F. Kohlrausch berechnete Tabelle auf.

Kapillardepresion des Quecksilbers in einer Glasröhre.

Durchmesser	Höhe des Meniskus in Millimetern							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
4	0,83	1,22	1,54	1,98	2,37			
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80		
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,43	
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13
8		0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77
9		0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10			0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11			0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12			0,08	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19
13			0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

Bravais gibt folgende Werte der Depression in ihrer Abhängigkeit vom Randwinkel (dem Winkel, den die nach außen gerichtete Tangente zum Rande der Quecksilberoberfläche an der Wand mit dem nach oben gerichteten Teile desselben einschließt).

Röhrendurchmesser in Millimeter	Randwinkel		
	105°	120°	138°
6	0,405	0,780	1,138
8	0,239	0,459	0,670
10	0,144	0,275	0,402
12	0,088	0,167	0,242
14	0,052	0,101	0,144
16	0,031	0,060	0,086
18	0,018	0,035	0,051
20	0,011	0,021	0,031

Aus beiden Tabellen geht hervor, daß die Depression in Röhren von 12 mm Weite noch die Größe von 0,1 mm übersteigen kann, daß sie selbst bei 20 mm Weite noch 0,01 übersteigt. Erst bei einer Weite von 24 mm wird dieselbe unmerklich.

Wäre die Depression bei gegebener Röhrenweite immer dieselbe, so könnte sie in Rechnung gebracht werden; da sie aber veränderlich ist, so bleibt nur das Mittel übrig, die Barometerröhre wenigstens dort, wo die Ablesung erfolgen soll, so weit zu nehmen, daß die Unterschiede in den Depressionen als verschwindend klein angenommen werden dürfen. Jedenfalls muß man vor der Ablesung zur Herstellung normaler Oberflächen des Quecksilbers dasselbe durch Klopfen, noch besser durch Anheben in Bewegung setzen, wozu die oben beschriebenen Einrichtungen getroffen sind.

Es könnte scheinen, daß man durch Anwendung des Heberbarometers, bei welchem beide Schenkel gleich weit sind, die Kapillardepression gänzlich eliminieren könne. Dies ist aber leider nicht der Fall, weil der Meniskus im Vakuum stets höher ist als im offenen Schenkel, wo das Quecksilber und das Glas mit feuchter Luft in Berührung und mehr oder weniger verunreinigt sind. Die Depression ist deshalb am oberen Niveau stets eine größere und wird durch die geringere Depression im unteren Schenkel nur zum Teil aufgehoben.

Die Korrektion wegen der Temperatur kommt in drei Richtungen in Betracht, nämlich einmal wegen der Ausdehnung des Quecksilbers, dann wegen der Ausdehnung des Maßstabes, endlich wegen der Tension der Quecksilberdämpfe im Torricellischen Raume.

Da wir die Grundlagen dieser Korrektionen erst in der Wärmelehre vortragen können, so beschränken wir uns hier auf die Mitteilung der betreffenden Korrektionswerte.

1. Ist die Höhe einer Quecksilbersäule bei $t^{\circ}\text{C} = h$, so ist sie bei 0°C $h_0 = h - 0,000181 t h$.

2. Hat man h an einem Maßstabe gemessen, der nicht die Temperatur Null hat (bei welcher seine Teilung als richtig angenommen wird), sondern

die Temperatur t wie das Quecksilber, so ist bei Anwendung eines Maßstabes von Messing (Ausdehnungskoeffizient = 0,000 019)

$$h_0 = h - 0,000 162 t h;$$

bei einem Maßstabe von Glas (Ausdehnungskoeffizient = 0,000 008)

$$h_0 = h - 0,000 173 t h.$$

3. Die Korrektur wegen der Tension der Quecksilberdämpfe ist geringfügig, sie beträgt nach:

Temperatur	Régnault	Hagen	Hertz
0°	0,0200 mm	0,015 mm	0,0002 mm
10°	0,0268 "	0,018 "	
20°	0,0372 "	0,021 "	0,0013 "
30°	0,0530 "	0,026 "	

Die Zahlen von Hertz sind vom Verfasser bestätigt worden. Nehmen wir sie als die richtigen an, so kann die Tensionskorrektur bei den Zimmertemperaturen ganz entfallen.

Es ist sehr darauf zu achten, daß man die Temperatur des Quecksilbers des Barometers richtig bestimme. Ein neben oder an dem Barometer angebrachtes Thermometer gibt nur dann die Temperatur des Quecksilbers richtig an, wenn es vor störenden Einflüssen, wie Wärmestrahlen von seiten der Sonne, des Ofens, des Beobachters usw., dann vor Luftströmungen geschützt ist, und wenn die Temperatur der Umgebung nicht rasche Änderungen erleidet. Man hat daher das Thermometer immer zuerst abzulesen und dann erst das Barometer.

Beispiele der Berechnung des korrigierten Barometerstandes.

- a) An einem Gefäßbarometer mit Skala auf Messing
 habe man abgelesen die Temperatur $t = 20,5^{\circ}$
 Nach Einstellung des unteren Niveaus stand die
 Quecksilberkuppe bei $h = 750,10$ mm
 Die Röhre habe 10 mm innere Weite, der Meniskus
 eine Höhe = 1 "

Daraus ergibt obige Tabelle eine Kapillardepression . $c = 0,20$ "

Dann ist der auf 0° reduzierte und korrigierte Barometerstand:

$$b = h - 0,000 163 t h + c$$

$$b = 750,10 - 2,51 + 0,20 = 747,79$$
 mm

- b) An einem Heberbarometer sei bei einer Temperatur $t = -6,0^{\circ}$ mm
 abgelesen die Höhendifferenz der beiden Kuppen . $h = 720,00$ "
 Die beiden Schenkel seien beide 8 mm weit, die Höhe
 des Meniskus sei an der oberen Kuppe = 0,6 "
 An der unteren Kuppe = 1,2 "
 Nach der Tabelle entsprechen diesen Höhen die De-
 pressionen 0,20 und 0,46 "

Die Skala sei auf der Glasröhre selbst aufgetragen.

Man erhält:

$$\begin{aligned} b &= h - 0,000173 th + 0,20 - 0,46 + 0,01 \\ &= 720,00 + 0,75 + 0,20 - 0,46 = 720,49 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Da nämlich t negativ ist, so wird das zweite Glied positiv. Die Depression im kürzeren Schenkel kommt in Abzug, weil sie der Depression im langen Schenkel entgegenwirkt.

§ 159. Berechnung des Luftdruckes aus dem Barometerstande.

Der Luftdruck wird gemessen durch die Höhe einer Quecksilbersäule von 0° , welche von der Erde mit jener Kraft angezogen wird, welche sie auf die Körper unter 45° Breite in Meereshöhe ausübt.

An einem Orte von anderer Breite und in einer anderen Höhe ist der Druck (das Gewicht) aller Körper, also auch der Druck einer Quecksilbersäule infolge verschieden großen Wertes der Schwerkraft verschieden groß.

Ist g die Acceleration der Schwere an dem Orte, wo der Barometerstand b gemessen wurde, und g_{45} die Acceleration der Schwere unter 45° Breite in Meereshöhe, so ist der Luftdruck $= b \frac{g}{g_{45}}$. Siehe § 96.

Diese Reduktion des Barometerstandes auf die Normalschwere in 45° Breite und auf die Meereshöhe ist stets da anzubringen, wo man, wie in der Meteorologie die Luftdrucke an verschiedenen Orten miteinander vergleichen will. Man berechnet diese Korrektion für einen Ort in der Breite φ und der Seehöhe z aus:

$$c_1 = -b (0,002648 \cos^2 \varphi + 0,0000003140 z).$$

In den meteorologischen Jahrbüchern der meisten Länder findet man in neuerer Zeit überall den Betrag dieser Schwerekorrektion am Kopfe der betreffenden Tabellen angegeben. Eine Abweichung um $9'$ von der Breite 45° und eine Erhebung von 42 m über das Meeresniveau bewirkt bei einem Barometerstande $= 760$ mm bereits je eine Korrektion von 0,01 mm, ist also keineswegs eine Größe, die man ganz vernachlässigen kann, wie gewöhnlich geschieht, indem man die Barometerhöhe direkt gleich dem Luftdruck setzt.

§ 160. Metallbarometer. Die geringe Handlichkeit und Kompendiosität, sowie die Zerbrechlichkeit des Quecksilberbarometers haben zur Konstruktion von Luftdruckmessern Anlaß gegeben, welche kein Quecksilber enthalten, sondern nur aus festen Metallteilen bestehen und deshalb nicht sehr passend Metallbarometer genannt wurden. Andere Bezeichnungen sind Aneroid, Holosterikbarometer.

Aneroid von Bourdon. Wenn eine aus dünnem Metallblech gebildete Röhre von abgeplattetem Querschnitt und ungefähr so gebogen, wie es Fig. 463 darstellt, überall hermetisch verschlossen ist und nur durch das Röhrchen r mit der äußeren Luft in Verbindung steht, so wird sich das Rohr stärker krümmen, wenn man durch das Ansatzröhrchen r die Luft aus dem Inneren herauszieht, es wird sich dagegen mehr strecken, wenn man die Luft im Inneren komprimiert.

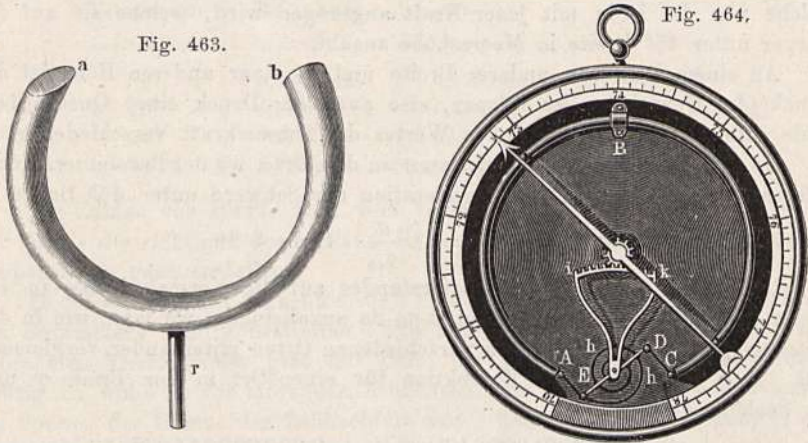
Es läßt sich dies leicht zeigen, wenn man die Vorrichtung Fig. 463 durch das Röhrchen r mit einer Luftpumpe in Verbindung setzt; sobald man evakuiert, nähern sich die Hörner a und b . Setzt man dagegen die Vor-

richtung auf eine Kompressionspumpe, so entfernen sich die Hörner voneinander, wenn die Luft im Inneren verdichtet wird.

Dieselbe Wirkung, wie eine Druckvermehrung (Verminderung) im Inneren bringt eine Druckverminderung (Vermehrung) von außen hervor.

Wenn das Rohr, Fig. 463, luftleer gemacht ist, so wird seine Krümmung doch noch mit dem Luftdruck variieren, dagegen werden Änderungen der Temperatur keinen oder nur noch geringen Einfluß haben.

Fig. 464 stellt ein möglichst einfach konstruiertes Aneroidbarometer nach Bourdon dar. Die nahezu kreisförmige, luftleer gemachte Röhre ist



in ihrer Mitte bei *B* auf die Bodenplatte des Gehäuses befestigt, im übrigen aber ist sie frei. Wenn der Luftdruck abnimmt, so entfernen sich die freien Enden *A* und *C* des Rohres voneinander und bewirken dadurch mittels der Metallstäbchen *CD* und *AE* die Drehung eines Hebels, dessen längerer Arm mit einem gezahnten Bogen *ik* endet. Dieser bei abnehmendem Luftdruck nach rechts gehende gezahnte Bogen greift aber in einen Trieb ein, auf dessen Achse ein Zeiger befestigt ist, der sich nun nach der entgegengesetzten Richtung drehen muß wie *ik*. Wenn dagegen der Luftdruck zunimmt, so krümmt sich die Röhre stärker, und die Spiralfeder *h* kann die Achse des Zeigers wieder zurückdrehen, so daß also die Spitze desselben sich bei wachsendem Luftdrucke nach der Rechten bewegt.

Die Skala dieses Instrumentes kann natürlich nur durch Vergleichung mit einem anderen Barometer graduiert werden.

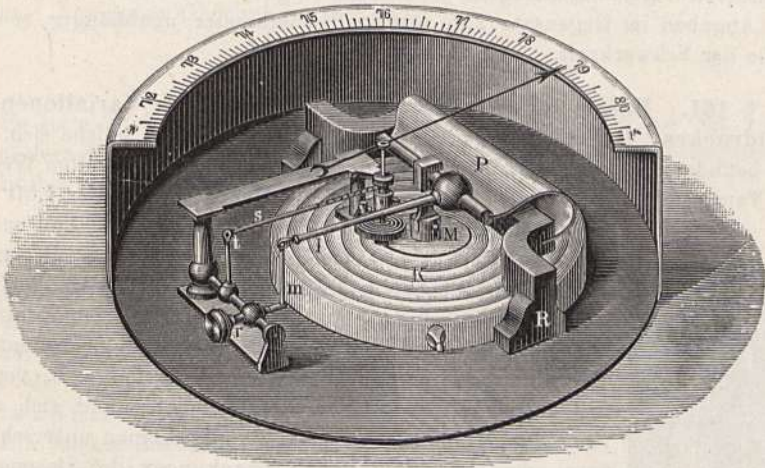
Um das Rohr luftleer zu machen, verfährt man auf folgende Weise:

In der Art, wie es Fig. 463 zeigt, mit einem Röhrchen *r* von Zinn versehen, wird das gekrümmte Rohr mittels der Luftpumpe evakuiert und alsdann das Röhrchen *r* nahe an seiner Ansatzstelle fest zugeedrückt, abgeschnitten und dann verlötet.

Aneroid von Vidi, Fig. 465. Der Hauptbestandteil des Apparates ist die luftleere Metalldose *K*, deren Deckplatte zum Zwecke größerer Beweglichkeit kreisförmig gewellt ist; die an der Bodenplatte des Apparates mittels der Träger *R* befestigte starke breite Metallfeder *P* ist mit der Mitte des Dosedeckels bei *M* fest verbunden. Der Luftdruck sucht die Dose einzudrücken, die Feder *P* wirkt diesem Drucke entgegen. Zwischen beiden

kommt es zum Gleichgewicht, wobei der Deckel desto stärker niedergedrückt bleibt, je größer der Luftdruck ist. Aller übrige Mechanismus dient nur dazu, die Bewegungen der Mitte des Dosendeckels, bzw. des Bügels *P*, in geeignetem Maßstabe sichtbar zu machen. Steigt der Luftdruck, so sinkt *P*, sowie dessen Verlängerung *l*, der Hebel *m r* wird nach rechts gedreht, hier-

Fig. 465.



durch die Kette *s* nach rechts hin nachgelassen, was weiterhin eine Drehung der Zeigerachse nach rechts, also ein Fortschreiten der Zeigerspitze auf der Randskala im Sinne wachsender Zahlen zur Folge hat. Eine Spiralfeder sorgt dafür, daß die Kette *s* gespannt bleibt. Sinkt der Luftdruck, so wird die Kraft der Feder *P* überwiegend, *M*, *l*, *m* rücken in die Höhe, der Hebel *m r* wird nach links gedreht, die Kette *s* nach links gezogen, folglich auch der Zeiger nach links gedreht.

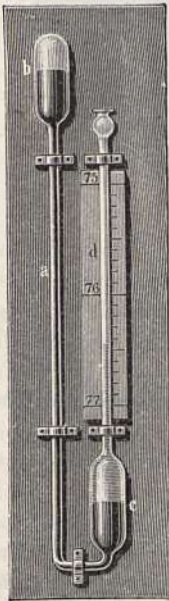
Die Skala sollte so angefertigt sein, daß die Ablesung am Instrumente den Luftdruck in Millimetern Quecksilbersäule ergibt.

Dies ist selten genau der Fall. Gewöhnlich zeigt sich eine Differenz; aber auch diese bleibt bei verschiedenem Werte des Luftdruckes selten konstant. Die Elastizität einer metallenen Feder ist nämlich keine ganz konstante Kraft, sondern einmal von der Temperatur abhängig und sodann bei einseitiger Inanspruchnahme im Laufe der Zeit etwas nachgebend (elastische Nachwirkung). Infolgedessen geht z. B. beim Vidischen Aneroid die luftleere Büchse nach und nach etwas zusammen, so daß dasselbe allmählich zu hohe Drucke anzeigt. Was den Temperatureinfluß betrifft, so suchen gute Fabrikanten dem Nachgeben der Büchse bei höherer Temperatur dadurch zu begegnen, daß sie noch etwas Luft in derselben lassen, deren Ausdehnung dann jenes Nachgeben kompensiert. v. Wild hat mehrfach bei Aneroiden von Naudet u. Co. in Paris, sowie bei Taschenaneroiden englischer Fabrikanten vollständige Temperaturkompensation konstatieren können. — Im allgemeinen ist also bei Aneroiden stets eine Untersuchung über den Temperatureinfluß und eine Verifikation der Druckskala nötig, letztere soll sogar von Zeit zu Zeit in betreff des absoluten Wertes wiederholt werden. Wie beim Quecksilberbarometer, so hat man demnach auch bei den Aneroiden

durchweg eine Temperaturkorrektur, etwa auch eine Reduktion auf 0° Temperatur, und eine, meistens mit dem abgelesenen Stande etwas variierende, namentlich aber stets im Laufe der Zeit sich verändernde Korrektur anzubringen. — Endlich muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß wegen der elastischen Nachwirkung bei raschen Änderungen des Druckes, wie z. B. beim Aufstieg auf einen Berg oder im Ballon die Aneroide nur unter ganz besonderen Vorsichtsmaßregeln brauchbare Angaben machen. Dagegen sind ihre Angaben im Gegensatz zum Quecksilberbarometer unabhängig von der Größe der Schwerkraft.

§ 161. Barometer zur vergrößerten Angabe der Variationen des Luftdruckes. Das Gewicht der atmosphärischen Luftsäule, welche sich über uns befindet, ist durch mancherlei Einflüsse bedingt. Der beständige Wechsel der Temperatur, die Winde, die veränderliche Menge der in der Luft verbreiteten Wasserdämpfe führen fortwährende Änderungen des Luftdruckes mit sich, welcher auf das Barometer wirkt. Man begreift demnach sehr wohl, daß die Barometersäule an einem und demselben Orte nicht stationär bleiben kann, und daß sie mehr oder weniger bedeutende Variationen erleidet. In unseren Gegenden z. B. vergeht fast kein Tag, an welchem der Barometerstand sich nicht um einige Millimeter änderte. Im allgemeinen unterscheidet man zweierlei Arten von Schwankungen des Barometers, nämlich periodische und zufällige Schwankungen. Die ersteren treten regelmäßig zu bestimmten Zeiten ein und haben eine konstante Größe; die letzteren hingegen sind unregelmäßig, so daß man weder ihre Zeit noch ihre Größe voraussehen kann. Mit diesen Erscheinungen beschäftigt sich die Meteorologie.

Fig. 466.



Da die Variationen des Barometerstandes an demselben Orte nicht sehr bedeutend sind, so hat man sich viel Mühe gegeben, diese Schwankungen dem Auge merklicher zu machen. Wir wollen hier einige solche Vorrichtungen betrachten.

Fig. 466 stellt ein von Huygens konstruiertes Barometer dar. Die Barometeröhre *a* erweitert sich oben bei *b*, wo sich die Torricellische Leere befindet, und unten bei *c*, wo eine Flüssigkeit von geringerem spezifischen Gewicht auf das Quecksilber aufgegossen ist. Das Gefäß *c* geht in eine engere, oben offene Röhre *d* über, so daß die leichtere Flüssigkeit, etwa gefärbtes Wasser oder gefärbter Weingeist, den oberen Teil von *c* und den unteren von *d* füllt.

Das Gefäß bei *b* habe gleichen Durchmesser wie das bei *c*; das Rohr bei *d* habe aber einen n mal kleineren Querschnitt. Wenn die Quecksilbersäule in *b* um x mm sinkt, so steigt der Quecksilberspiegel in *c* um ebensoviel, die farbige Flüssigkeit in der Röhre *d* aber um nx mm, die Höhe der farbigen Flüssigkeit hat also um $(n-1)x$ mm zugenommen. Eine $(n-1)x$ mm hohe Säule dieser Flüssigkeit drückt ebenso stark wie eine $\frac{(n-1)x}{s}$ mm hohe Quecksilbersäule, wenn s die Zahl ist, welche angibt, um wievielmal

das spezifische Gewicht der farbigen Flüssigkeit geringer ist als das des Quecksilbers.

Wenn also das Quecksilber in b um x mm sinkt, so ist

$$y = 2x + \frac{n-1}{s}x$$

die Höhe einer Quecksilbersäule, welche der Abnahme des Luftdruckes entspricht. Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$x = \frac{sy}{2s + n - 1}$$

Es sei z. B. der Querschnitt der Röhre d 20mal kleiner als der von b und c ; ferner sei die farbige Flüssigkeit Wasser, also 13,6mal leichter als Quecksilber, so ist $n = 20$, $s = 13,6$ und also:

$$x = \frac{13,6y}{2 \cdot 13,6 + 20 - 1} = 0,294y.$$

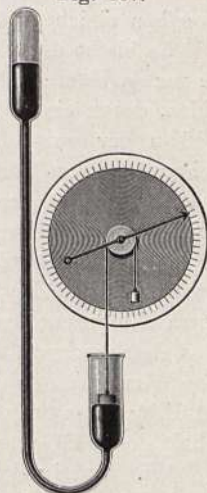
Fällt ein gewöhnliches Barometer um y mm, so fällt also das Quecksilber in b um $0,294y$ mm, die farbige Flüssigkeit in d steigt aber um $20 \cdot 0,294y$, also um $5,88y$ mm. So oft also ein gewöhnliches Gefäßbarometer um 1 mm steigt oder fällt, wird die farbige Flüssigkeit unseres Barometers um 5,88 mm, also fast 6 mal so viel, fallen oder steigen.

Ein solches Barometer ist sehr zweckmäßig, wenn es sich nur um die Beobachtung der Barometerschwankungen und nicht um genaue Ermittlung der absoluten Barometerhöhe handelt. Die Skala, welche hinter der Röhre d angebracht ist, wird am besten so angefertigt, daß man einen Punkt nahe am oberen und einen nahe am unteren Ende derselben durch Vergleichung mit einem Normalbarometer bestimmt und den Zwischenraum einteilt.

Hookes Radbarometer, Fig. 467, hat folgende Einrichtung: Auf dem Quecksilber im offenen Schenkel eines Heberbarometers schwimmt ein eisernes Gewicht; von diesem Gewichte geht eine Schnur über eine Rolle, welche auf der anderen Seite durch ein etwas geringeres Gewicht gespannt ist. An der Achse der Rolle ist ein langer Zeiger befestigt, dessen Endpunkt also einen großen Weg durchläuft, wenn das Quecksilber nur wenig steigt oder fällt und dadurch die Rolle dreht. — Zu genauen Messungen ist begreiflicherweise auch ein solches Instrument nicht zu gebrauchen.

Um eine Vergrößerung der Niveauschwankung gegenüber den Angaben eines Quecksilberbarometers zu erzielen, hat man mehrfach vorgeschlagen, statt des Quecksilbers im Barometer eine spezifisch leichtere Flüssigkeit anzuwenden, die dann im umgekehrten Verhältnis der spezifischen Gewichte größere Schwankungen aufweisen werde. Ein solches Barometer ist z. B. das von Jordan für das Observatorium in Kew konstruierte Glycerinbarometer. Da das spezifische Gewicht des Glycerins 1,26 ist, so werden in einem solchen Barometer die Niveauveränderungen des Glycerins

Fig. 467.



im geschlossenen Schenkel $\frac{13,6}{1,26}$ mal, also mehr als 10 mal größer sein als die gleichzeitigen eines Quecksilberbarometers.

F. Kohlrausch hat auf die Achse des Zeigers eines Aneroids einen kleinen Spiegel aufgesetzt und die Bewegung dieses mittels der Poggenдорffschen Ablesung durch Fernrohr und Skala (siehe § 17) beobachtet, wodurch eine weitgehende Vergrößerung der Angaben erzielt wird.

Über Instrumente, welche unter Verwendung sei es von Quecksilber-, sei es von Metallbarometern die Barometerstände meistens auch in vergrößertem Maßstabe kontinuierlich selbst aufzeichnen, die sog. Barographen, werden wir besser in der Abteilung Meteorologie Näheres angeben, da sie besonders für dieses Wissensgebiet wichtig sind.

§ 162. Wirkung des Luftdruckes auf den menschlichen Körper.

Da die Oberfläche des menschlichen Körpers bei einem Erwachsenen weit mehr als 1 qm beträgt, so ist der Totaldruck der Luft auf diese Oberfläche sehr bedeutend; er beträgt ungefähr das Gewicht von 15000 bis 20000 kg. Es könnte daher die Frage erhoben werden, wie so es kommt, daß der menschliche Körper unter einer solchen Last nicht erdrückt werde. Die Erklärung ist einfach diese, daß die festen, nicht hohlen Teile des Körpers, z. B. die Knochen, einen noch größeren Druck aushalten könnten, ebenso könnten die tropfbaren Flüssigkeiten noch größerem Drucke ausgesetzt werden, ohne merklich komprimiert zu werden. Die mit Luft angefüllten Räume endlich werden deshalb nicht eingedrückt, weil der Druck im Inneren derselben gleich groß ist wie der von außen.

Es bleibt demnach nur noch etwa der Zweifel zu heben übrig, ob nicht die zarten Häutchen und Gewebe, welche die Hüllen der einzelnen Gefäßchen bilden, durch einen so starken Druck Not leiden müßten. Von einem Zerreißen der zarten Gewebe kann aber keine Rede sein, weil der Druck gleichmäßig von beiden Seiten wirkt; um aber die Häutchen etwa zu zerquetschen, ist der Druck nicht stark genug. Da es sich hier nur um kleine Gefäßchen handelt, so kommt auch nur der Druck in Betracht, der auf die kleine Oberfläche derselben wirkt; aus der obigen Tabelle aber kann man entnehmen, daß der Luftdruck auf eine 1 qcm große Oberfläche nur ungefähr einem Kilogramm entspricht, auf 1 qmm nur dem Gewichte von ungefähr 10 g gleichkommt.

Wenn man den Luftdruck von irgend einer Stelle des Körpers entweder mit Hilfe eines Schröpfkopfes oder einer Luftpumpe wegnimmt, so wird der Inhalt der Gefäßchen ein Bestreben geltend machen, sich auszudehnen.

Wie wichtig der Luftdruck für die Ökonomie der Kräfte des menschlichen Körpers ist, haben die klassischen Untersuchungen der Gebrüder Weber gezeigt.

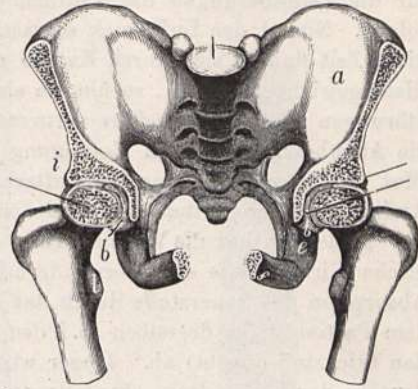
Betrachtet man das Knochengerüst des menschlichen Körpers, so findet man an jeder Seite des Beckens eine spiegelglatte, mit einer schlüpfrigen Flüssigkeit benetzte Vertiefung, die Pfanne, in welche der kugelförmige Kopf des Schenkelknochens genau hineinpaßt, wie man dies in Fig. 468 deutlich sehen kann, welche das Becken mit den Schenkelknochen darstellt.

Der vordere Teil des Beckens und der beiden Schenkelköpfe ist in Fig. 468 durch einen senkrechten Schnitt weggenommen, damit man besser

sehen kann, wie die Schenkelköpfe in den Pfannen sitzen; da sich nun der Schenkelkopf in der Pfanne nach allen Seiten leicht drehen läßt, so begreift man, daß das Bein nach allen Seiten hin beweglich ist.

Das ganze Gelenk ist durch eine Kapselmembran eingehüllt, welche, das Becken mit dem Schenkelkopfe verbindend, an dem knöchernen Pfannende und am Halse des Schenkelkopfes angewachsen ist.

Fig. 468.



Wenn man auf einem Beine steht und das andere nur so viel krümmt, daß es hängt, ohne den Boden zu berühren, so kann man mit ungemein geringer Muskelanstrengung das hängende Bein hin und her schwingen lassen. Während das Bein so schwingt, sind die Muskeln, welche das Becken mit dem Schenkelbeine verbinden, ganz schlaff, und daraus geht schon hervor, daß diese Muskeln es nicht sein können, welche das schwebende Bein

tragen. Die Gebrüder Weber haben dies auch durch den Versuch nachgewiesen, indem sie an einem Leichnam alle Muskeln durchschnitten, welche den Schenkel mit dem Becken verbinden. Das frei schwebende Bein fiel nicht herab, wie es der Fall gewesen wäre, wenn es im Leben durch die Muskeln getragen würde.

Auch die Kapselmembran wurde durchschnitten, und das Bein fiel nicht herab.

Wurde dagegen durch das Becken hindurch mitten in die Pfanne ein kleines Loch gebohrt, so fiel das Bein in demselben Augenblicke herab, in welchem die Spitze des Bohrers die Pfanne eben durchbrochen hatte und den Schenkelkopf noch nicht berührte. Als der Schenkelkopf nun wieder in die Pfanne hineingeschoben wurde, so daß seine Kugelfläche wieder genau mit der Kugelfläche der Pfanne in Berührung kam, und man dann das Loch im Becken mit dem Finger zuhielt, wurde das Bein auch wieder durch den Luftdruck getragen; es fiel aber sogleich wieder herab, sobald man den Finger wieder von dem Loche wegnahm, so daß die Luft von oben eindringen konnte.

Daraus folgt also, daß der Luftdruck es ist, durch welchen das Bein am Becken festgehalten wird. Dies dürfte aber nicht in der Weise mißverstanden werden, als hätte infolgedessen der Mensch das Gewicht des gehobenen Beines überhaupt nicht zu tragen. Es ist irrigerweise versucht worden, die Ermüdung des Körpers bei der Besteigung hoher Berge auf die Verringerung des Luftdruckes zurückzuführen, der infolgedessen die Muskeln, die das Bein tragen, weniger zu unterstützen vermöge. Es wäre dies ein ähnlicher Irrtum, wie etwa der, wenn man glaubte, man erspare sich das Gewicht eines Korbes zu tragen, wenn man diesen, statt ihn in der Hand zu halten, an das Handgelenk angebunden tragen würde. Hierdurch können offenbar nur jene Muskeln entlastet werden, welche den Zusammenhang zwischen Korb und Arm herzustellen haben, nicht aber die übrigen Muskeln, welche den Körper

mitsamt dem Korbe zu tragen haben. Die Arbeitsleistung des Menschen im ganzen ist genau dieselbe, ob er den Korb angebunden oder in der Hand trägt; also auch ob das Bein durch Muskeln oder durch Luftdruck am Körper festgehalten wird.

Wenn wir oben nachgewiesen haben, daß der Luftdruck dem menschlichen Körper keinen Schaden zufügen kann, so ist dies nicht mehr gültig für die Veränderungen des Luftdruckes, insbesondere, wenn sie rasch erfolgen. Nimmt der Luftdruck so rasch ab, daß die Luft in den Hohlräumen nicht Zeit findet, sich durch Kanäle oder Poren mit der äußeren Luft ins Gleichgewicht zu setzen, so übt sie einen Druck auf die Gefäße aus, welcher Störungen des Wohlbefindens verursachen kann. Es erklären sich dadurch die Atembeschwerden bei Besteigung hoher Berge, das Hervorströmen von Blut aus Nase und Ohren bei Luftschiffern, schmerzliche Empfindungen bei Änderungen der Witterungsverhältnisse.

Außerdem hat die Verminderung des Luftdruckes eine ähnliche physiologische Wirkung wie eine Verminderung des Sauerstoffgehaltes der Luft. Die Absorption des Sauerstoffs durch das Blut in der Lunge hängt nämlich von dem Partialdrucke desselben (d. i. dem Drucke, den der Sauerstoff allein ohne den Stickstoff ausübt) ab. Dieser wird aber durch Verminderung des Totaldruckes der beiden Gase ebenfalls vermindert, so daß also in dieser Hinsicht verdünnte Luft wirkt wie sauerstoffärmere. Hieraus erklärt sich auch die günstige Wirkung des Einatmens von in Schläuchen mitgenommenem Sauerstoffgas durch die Luftschiffer.

Auch die Luftverdichtung, welcher beispielsweise die Taucher in der Taucherglocke in größerer Meerestiefe ausgesetzt sind, hat störenden Einfluß auf den Organismus, der um so merklicher ist, je rascher die Verdichtung erfolgt. (Caissonkrankheit bei Arbeitern unter Wasser.)

§ 163. Das Gesetz von Boyle (Mariotte); Reduktion eines Gasvolumens auf Normaldruck. Wenn man ein Gas oder Gasgemisch, z. B. von einem gegebenen Volumen V und einem Anfangsdruck P durch Kompression oder Expansion auf ein anderes Volumen V' bringt und dafür sorgt, daß die dabei eintretenden Änderungen der Temperatur wieder aufgehoben werden, so daß also das Gas nachher wiederum dieselbe Temperatur hat wie vorher (isothermische Kompression), so gilt, wenn P' den neuen Druck des Gases bedeutet, mit sehr großer Annäherung die Proportion:

$$V:V' = P':P,$$

woraus auch folgt:

$$VP = V'P'.$$

Dieses Gesetz, welches zuerst von R. Boyle 1662, dann nochmals von Mariotte 1679 ausgesprochen wurde, ist bisher in Deutschland und Frankreich meist unter dem Namen Mariottesches Gesetz bekannt gewesen. In Worten ausgedrückt lautet es: Bei gleicher Temperatur verhalten sich die Volumina eines Gasquantums verkehrt wie die Druckkräfte desselben; oder: Solange die Temperatur eines Gasquantums dieselbe bleibt, ist das Produkt aus Volumen und Druck desselben eine konstante Größe.

Um dieses wichtige Gesetz durch den Versuch zu beweisen, nehme man eine gekrümmte zylindrische Röhre, deren kürzerer Schenkel oben geschlossen

ist, während der längere Schenkel offen bleibt, Fig. 469, und welche auf einem Brette befestigt ist. Man gieße zu Anfang nur wenig Quecksilber ein, neige dann den Apparat ein wenig, damit etwas Luft aus dem kürzeren Schenkel entweicht; so kann man es leicht dahin bringen, daß das Quecksilber in beiden Schenkeln gleich hoch steht, Fig. 470. Alsdann ist die in dem geschlossenen Schenkel abgesperrte Luft genau dem Drucke der Atmosphäre ausgesetzt.

Gießt man nun von neuem Quecksilber in den offenen Schenkel, so wird der Druck, den die eingeschlossene Luft auszuhalten hat, vermehrt, sie wird dadurch auf einen kleineren Raum zusammengepreßt. Wenn das Quecksilber im kürzeren Schenkel bis zum Punkte *N*, Fig. 471, gestiegen ist, welcher sich in der Mitte zwischen *M* und dem Gipfel *A* der geschlossenen Röhre befindet, so ist die Luft auf die Hälfte ihres vorherigen Volumens zusammengepreßt;

bezeichnet man nun auf dem längeren Schenkel den Punkt *N'*, welcher mit *N* gleiche Höhe hat, und mißt man dann, wie hoch das Quecksilber sich im längeren Schenkel noch über *N'* erhebt, so findet man, daß die Höhe dieser Quecksilbersäule genau der Barometerhöhe gleich ist; die in dem kurzen Rohre abgeschlossene Luft hat demnach jetzt einen Druck von zwei Atmosphären auszuhalten.

Solche Versuche kann man mit verschiedenen Drucken wiederholen. Stets erhält man den auf das abgesperrte Gas ausgeübten Druck, indem man zu der Niveaudifferenz des Quecksilbers im offenen und geschlossenen Schenkel die Höhe des Barometers addiert. Die so ermittelten Drucke werden den zugehörigen Werten des Gasvolumens nahe verkehrt proportional sein. Die etwaigen Abweichungen sind meist Temperatureinflüssen zuzuschreiben. Das Gas wird nämlich durch die Kompression erwärmt, man muß daher abwarten bis es sich wieder auf die ursprüngliche Temperatur abgekühlt hat. Es ist bequem, wenn der Apparat, Fig. 469, mit einem Hahn am Ende der geschlossenen Röhre (aus Glas oder Stahl) und mit einem ebensolchen zum Ablassen des Quecksilbers aus dem Apparate an der tiefsten Stelle versehen ist.

Um das Gesetz von Boyle auch für Drucke unter einer Atmosphäre nachzuweisen, kann man sich des Apparates Fig. 472 bedienen.

Fig. 470. Fig. 471.

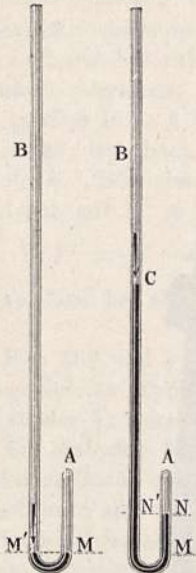
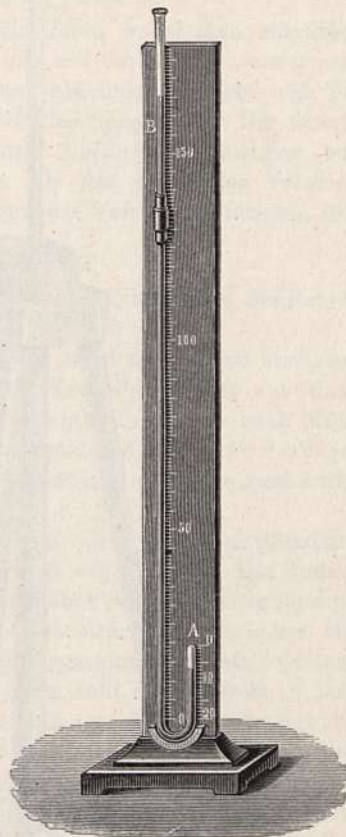


Fig. 469.



Eine etwas weite eiserne Röhre *r*, welche oben in ein weiteres Gefäß *ab* endet und unten geschlossen ist, wird in einem Gestelle, wie es Fig. 472 zeigt, so angebracht, daß sie vertikal steht, und dann ungefähr bis zur Höhe *nn* mit Quecksilber vollgegossen. Nun füllt man eine Barometeröhre, wie zum Torricellischen Versuche, mit Quecksilber, jedoch nicht ganz voll, sondern

Fig. 472.

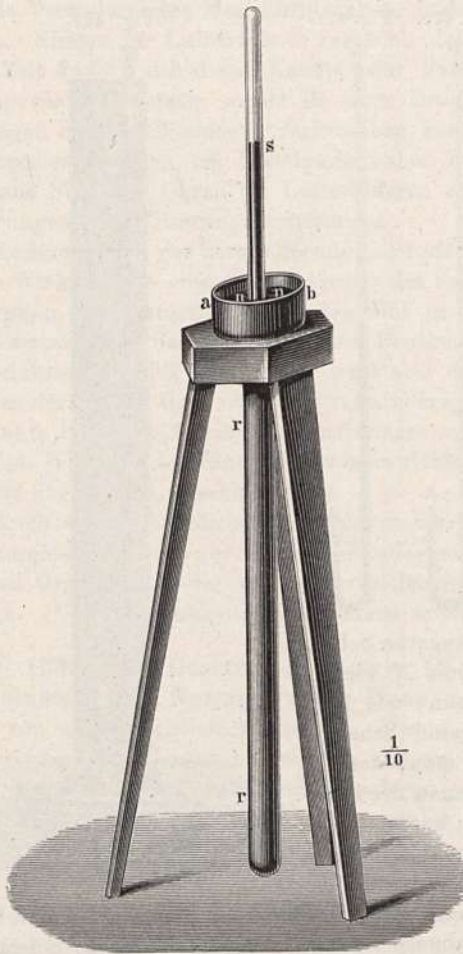
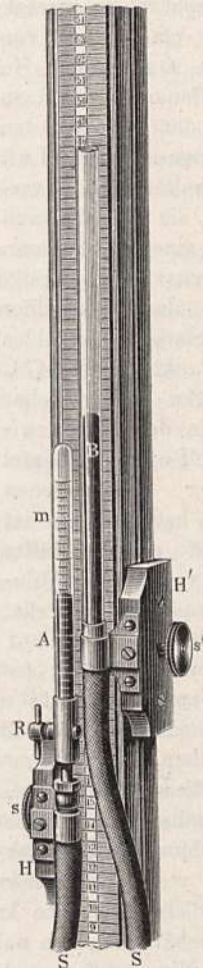


Fig. 473.



nur so weit, daß noch etwa 5 bis 7 cm nicht mit Quecksilber angefüllt sind. Kehrt man die Röhre um, nachdem man die Öffnung mit dem Finger geschlossen hat, so wird die Luftblase in den oberen Teil der Röhre hinaufsteigen. Wenn man nun, wie bei dem Torricellischen Versuche, das untere Ende der Röhre in das Quecksilber des Gefäßes *ab* taucht und dann den Finger von der Öffnung wegzieht, so wird die Quecksilbersäule im Barometerrohre bis auf einen bestimmten Punkt fallen. Man wird aber sogleich bemerken, daß der Gipfel *s* der Quecksilbersäule nicht so hoch über *nn* steht, als die Barometerhöhe beträgt, weil ja im oberen Teile unserer Röhre sich Luft befindet und kein Vakuum wie beim Barometer.

Wenn man die Röhre niederdrückt, so daß sie weiter und weiter in das Quecksilber des Rohres r hinabreicht, so wird das Volumen der oben eingeschlossenen Luft immer kleiner. Man drückt nun die Röhre so weit hinab, daß das Quecksilber in derselben genau in der Höhe des Quecksilberspiegels nn steht; in diesem Falle steht die abgesperrte Luft genau unter dem Drucke einer Atmosphäre.

Die Länge der abgesperrten Luftsäule, welche dem Drucke einer Atmosphäre ausgesetzt ist, wird nun gemessen; sie sei gleich V .

Zieht man nun das Glasrohr wieder in die Höhe, wobei man möglichst vermeidet, die abgesperrte Luft durch Berührung mit der Hand zu erwärmen, so vermehrt sich das Volumen derselben, und gleichzeitig erhebt sich die Quecksilberkuppe um eine gewisse Höhe h über den Spiegel nn . Der Druck, unter dem jetzt die Luft steht, ist gleich dem Luftdrucke weniger dem Drucke der Quecksilbersäule h . Bezeichnen wir das zugehörige Volumen der Luft mit V' , den Luftdruck mit H , so muß der Versuch bestätigen, daß

$$V:V' = H - h:H,$$

denselben Versuch kann man dann bei verschiedenen Erhebungen des Rohres wiederholen.

Die beiden Apparate, Fig. 469 und Fig. 472, sind mit Vorteil ersetzbar durch den in Fig. 473 abgebildeten Apparat. Derselbe besteht aus einer Säule mit Dreifuß, welche an der Vorderseite einen Maßstab, der nach Millimetern geteilt ist, trägt. Ein einfacher Mechanismus gestattet, zwei Träger vertikal zu verschieben und nach Bedürfnis festzustellen, an welche zwei kurze stählerne Rohrstücke angeschraubt sind.

In das rechtsseitige dieser Rohrstücke ist von oben eine offene Glasröhre B eingekittet, von unten ein Kautschukschlauch S angebunden. Das andere Rohrstück ist unten mit dem anderen Ende desselben Schlauches verbunden; oben trägt es mittels konischen Ansatzes und Überwurfschraube u ein mit Hahn R versehenes Stahlrohr, in welches ein oben geschlossenes, mit Volumenskala versehenes Glasrohr A eingekittet ist. Man füllt das Glasrohr A beiläufig zur Hälfte mit Luft, zur anderen Hälfte mit Quecksilber, befestigt die Überwurfschraube auf dem mit Quecksilber angefüllten Schlauche und gibt nun zunächst den beiden Trägern eine solche Höhe, daß das Niveau beider Quecksilberkuppen gleich hoch steht. Das abgelesene Luftvolumen V entspricht dann dem Atmosphärendrucke H . Hebt man dann die Röhre B oder senkt dieselbe, so erhält man eine Druckdifferenz des Quecksilbers h' , bzw. $-h''$, wobei wir einen Überdruck auf der rechten Seite positiv bezeichnen. Sind die dabei abgelesenen Volumina V' und V'' , so muß sich bestätigen, daß

$$V:V' = H + h':H$$

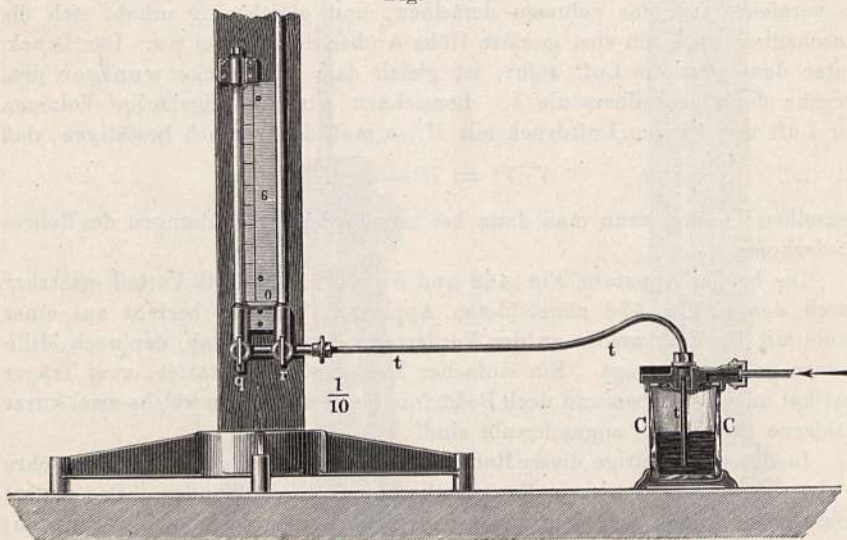
$$V:V'' = H - h'':H.$$

Ersetzt man die rechtsseitige Glasröhre durch eine oben mit Stahlhahn oder Glashahn versehene, um 760 mm längere Röhre, so kann man den Luftdruck H durch den Druck einer äquivalenten Quecksilbersäule ersetzen. Man senkt zu diesem Zwecke das Rohr B , bis alle Luft aus demselben durch den geöffneten Hahn vollständig entwichen ist, verschließt dann den Hahn und verfährt wie früher. Man beobachtet dann direkt die Überhöhen $H + h'$ und $H - h''$. Das Rohr B spielt dabei offenbar die Rolle des Baro-

eters. Für genauere Versuche müßte es freilich auch wie dieses ganz luftfrei gefüllt werden.

Um das Gesetz von Boyle für Drucke zu prüfen, welche zwei Atmosphären übersteigen, muß man sich stärkerer Apparate und höherer Quecksilbersäulen bedienen. Fig. 474 zeigt die Abbildung eines solchen, wie er in der mechanischen Werkstätte zu Genf konstruiert wurde. *CC* ist ein starkes Glasgefäß, welches oben luftdicht geschlossen und zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt ist. Die Röhre *t* geht fast auf den Boden des Druckgefäßes *C*, in welchem sich über dem Quecksilber Wasser oder Luft befindet.

Fig. 474.



Wird nun durch die Druckpumpe einer kleinen hydraulischen Presse ferner Wasser oder mit einer Luftkompressionspumpe ferner Luft in *C* eingepumpt, so wird das Quecksilber durch die Röhre *t* gleichzeitig in die Manometerröhre und die Druckröhre hinübergespreßt, in welcher es auf diese Weise gleichförmig steigt.

Arago und Dulong haben durch eine besondere Versuchsreihe dargetan, daß das Boylesche Gesetz wenigstens für atmosphärische Luft bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären noch keine erhebliche Änderung erleidet. Die aus 13 sechsfüßigen Glasröhren mittels eiserner Fassungen zusammengesetzte Druckröhre ihres Apparates war an einem Mastbaume befestigt, welcher in einem Turme des Collège de France aufgerichtet worden war. Der kurze Schenkel war 1,7 m lang und 5 mm weit. Das Quecksilber wurde durch eine Druckpumpe in die beiden Röhren in ähnlicher Weise eingepreßt, wie wir es oben beim Genfer Apparate gesehen haben. Eine genaue Beschreibung des Apparates von Arago und Dulong, sowie der mit demselben angestellten Versuche findet man im 18. Bande von Poggendorffs Annalen.

Régnauld hat die Richtigkeit des Gesetzes von Boyle für verschiedene Gase geprüft, indem er ermittelte, welchen Druckes es bedurfte, um diese Gase auf die Hälfte ihres Volumens zusammenzudrücken. Ist der Anfangs-

druck und das Anfangsvolumen des untersuchten Gases = P und V , der nachher beobachtete Druck P' , das zugehörige Volumen V' , so sollte der Quotient

$$\frac{P V'}{P' V} = 1$$

sein. Ein abweichender Wert zeigt an, inwieweit das Gesetz von Boyle unzureichend ist.

Als Régnault für P und P' die Drucke von einer und zwei Atmosphären anwendete, erhielt er für das obige Zahlenverhältnis folgende Werte:

Wasserstoff	0,999	Kohlendioxyd	1,008
Stickstoff	1,001	Chlorwasserstoff	1,009
Sauerstoff	1,002	Schwefelwasserstoff	1,011
Stickoxyd	1,003	Ammoniak	1,019
Kohlenoxyd	1,003	Schweflige Säure	1,021
Grubengas	1,006	Cyngas	1,024
Stickoxydul	1,007		

Diese Tabelle läßt erkennen, daß wenigstens die ersteren dieser Gase bei gewöhnlicher Temperatur und mäßiger Drucksteigerung dem Gesetze von Boyle so genau unterworfen sind, daß dasselbe in den meisten Fällen als gültig angenommen werden kann. Für höhere Drucke und niedrigere Temperaturen ist dies, wie wir später erfahren werden, nicht mehr der Fall.

Aus dem oben Mitgeteilten folgt, daß die Messung eines Gasvolumens nur dann mit anderen Messungen dieser Art vergleichbaren Wert ergeben kann, wenn dabei derselbe Druck geherrscht hat. Man ist übereingekommen, alle Gasmessungen auf den Druck von 760 mm Quecksilber als Normaldruck zu beziehen, und wenn sie bei anderem Drucke gemacht sind, auf diesen Normaldruck zu reduzieren. Unter Annahme der Gültigkeit des Gesetzes von Boyle geschieht dies einfach in folgender Weise:

Ist V das beim Drucke H gemessene Volumen (wobei H in Millimetern angegeben ist), so ist das Volumen V_n beim Normaldruck 760 gegeben durch:

$$V_n = V \cdot \frac{H}{760}.$$

Eine Gasmenge nehme z. B. unter einem Drucke von 500 mm das Volumen von 84 ccm ein, so würde dieselbe Gasmenge unter einem Drucke von 760 mm das Volumen

$$V = \frac{500}{760} \cdot 84 = 55,2 \text{ ccm}$$

einnehmen.

Das Volumen der Gase ist in hohem Grade auch von der Temperatur beeinflusst. Wir werden darüber in der Wärmelehre ausführlich berichten. Da wir aber die Reduktion auf 0°C schon früher benötigen, so teilen wir hier vorläufig mit, daß man das Volumen V_t eines Gases bei der Temperatur t auf das Volumen bei $0^\circ = V_0$ umrechnet, indem man

$$V_0 = \frac{V_t}{1 + \alpha t}$$

setzt, wobei α nach dem Gesetze von Charles (Gay-Lussac) für alle Gase nahe denselben Wert

$$\alpha = 0,00367$$

hat. Die vollständige Formel für die Reduktion eines Gasvolumens vom Drucke h und der Temperatur t auf 760 mm und 0° lautet demnach:

$$V_{760,0} = V_{ht} \frac{h}{760 (1 + \alpha t)}$$

§ 164. **Manometer.** Apparate, welche wie der in Fig. 474 abgebildete dazu dienen, den Druck von Gasen oder Dämpfen zu messen, welche in einem Raume eingeschlossen sind, heißen Manometer. Es gibt deren nach verschiedenen Systemen, insbesondere unterscheidet man offene und geschlossene Manometer.

In Fällen, wo der zu messende Druck nur gering ist, wendet man für den fraglichen Zweck Flüssigkeitssäulen an, welche in doppelt gebogenen Röhren, Fig. 475 und 476, enthalten sind. Das eine Ende a des Manometerrohres wird mittels eines Korkes in eine entsprechende Öffnung des Gasbehälters eingesetzt, oder mittels einer Messingfassung auf dieselbe aufgeschraubt. Ist nun der Druck des Gases auf den Gipfel der Flüssigkeitssäule im Schenkel bc größer als der Druck der atmosphärischen Luft, welcher auf die Flüssigkeitssäule in dc wirkt, so muß die Flüssigkeit im äußeren Schenkel cd höher stehen als im inneren.

Solche Manometer wendet man zur Messung des Druckes an, unter welchen das Gas in den Gasometern und Leitungsröhren der Gasbeleuchtungsanstalten steht. Als Sperrungsflüssigkeit dient in diesem Falle gefärbtes Wasser. Die Fig. 477 zeigt eine andere Form des offenen Hebermanometers.

Ganz ähnlich sind die Manometer konstruiert, durch welche der Luftdruck in Gebläsen gemessen wird und welche den Namen der Windmesser führen.

Zu diesen Manometern können wir auch die Welterschen Sicherheitsröhren rechnen, welche Fig. 478 und 479 in zwei verschiedenen

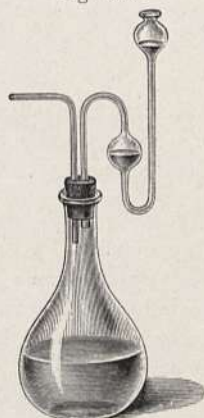
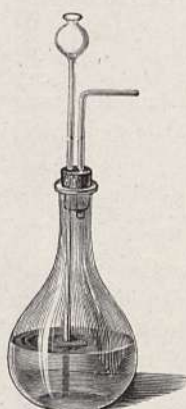
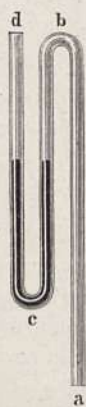
Fig. 475.

Fig. 476.

Fig. 477.

Fig. 478.

Fig. 479.



Formen dargestellt sind. Durch den Kork, welcher das Glasgefäß, Fig. 478, verschließt, in welchem ein Gas entwickelt werden soll, gehen zwei Röhren hindurch. Die eine, nicht weiter in das Gefäß hinunterführend, ist die Abzugsröhre für das entwickelte Gas, die andere, bis in die Flüssigkeit hinunter-

reichend, ist die Sicherheitsröhre. Soll das Gas ausströmen, so muß der Gasdruck im Inneren des Glasgefäßes größer sein als der Druck der äußeren Luft, die Flüssigkeit wird also in der Sicherheitsröhre in die Höhe getrieben, und aus der Höhe der in derselben stehenden Flüssigkeitssäule erkennt man die Größe des Überdruckes im Inneren des Gefäßes. In gleicher Weise kann man die Größe des Gasdruckes im Gefäße Fig. 479 aus der Niveaudifferenz der Sperrflüssigkeit in der doppelt gebogenen Röhre erkennen.

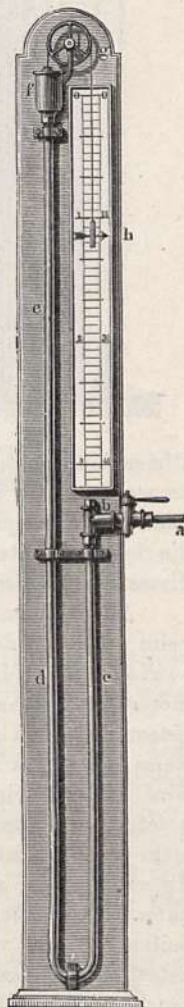
Für höhere Drucke wird das Quecksilbermanometer verwendet. Régnault hatte ein solches von über 23 m Höhe angewendet, welches aus mehreren durch Stahlfassungen zusammengeschraubten Glasröhren bestand. Ein eigener Fahrstuhl, den der Beobachter selbst mittels eines Mechanismus auf und nieder bewegen konnte, ermöglichte die Ablesungen in verschiedener Höhe. Noch viel weiter gelangten Amagat und Cailletet, welche in stählernen Röhren, die sie teils an Berglehnen (auch am Eiffelturm) hinaufführten, teils in Schachte versenkten, Quecksilbersäulen bis zu 325 m Höhe anwendeten, womit Drucke bis zu 430 Atmosphären gemessen werden konnten. Wir kommen darauf in einem der nächsten Paragraphen zu sprechen.

Fig. 480 zeigt die Einrichtung eines Quecksilbermanometers mit eiserner Röhre, wie es bei stationären Dampfmaschinen angewendet wird. Die Röhre *a* kommuniziert mit dem Raume, dessen Spannung gemessen werden soll. Die Höhe der Quecksilberkuppe in der undurchsichtigen Röhre *dc* wird mittels eines eisernen Schwimmers ermittelt, welcher durch sein Steigen und Sinken das Gegengewicht zum Sinken und Steigen bringt. Die vertikale Skala enthält eine Einteilung nach Atmosphären oder nach Kilogrammen pro Quadratcentimeter.

Ein neuerdings von M. Thiesen¹⁾ wieder aufgegriffener Gedanke, welcher darauf ausgeht, die hohe Quecksilbersäule in eine Anzahl kleinerer zu zerlegen, ist durch die schematisch im Durchschnitt gezeichnete Fig. 481 verständlich gemacht. In zwei horizontale Stahlröhren ist eine Reihe von vertikalen Glasröhren in der ersichtlichen Weise eingesetzt. Eine Anzahl von Hähnen gestattet, oben die Kommunikation zwischen den Röhren 1 und 2, 3 und 4 usw., unten zwischen den Röhren 2 und 3, 4 und 5 usw. herzustellen oder aufzuheben. Der Apparat wird zur Hälfte mit Quecksilber, zur anderen Hälfte mit Wasser gefüllt. Das linksseitige Ende der oberen Stahlröhre wird mit dem Raume, in dem der Druck gemessen werden soll, verbunden.

Der Gesamtdruck setzt sich dann zusammen aus der Summe der Überhöhen der Quecksilbersäulen weniger der Summe der auf Quecksilber reduzierten Überhöhen der Wassersäulen.

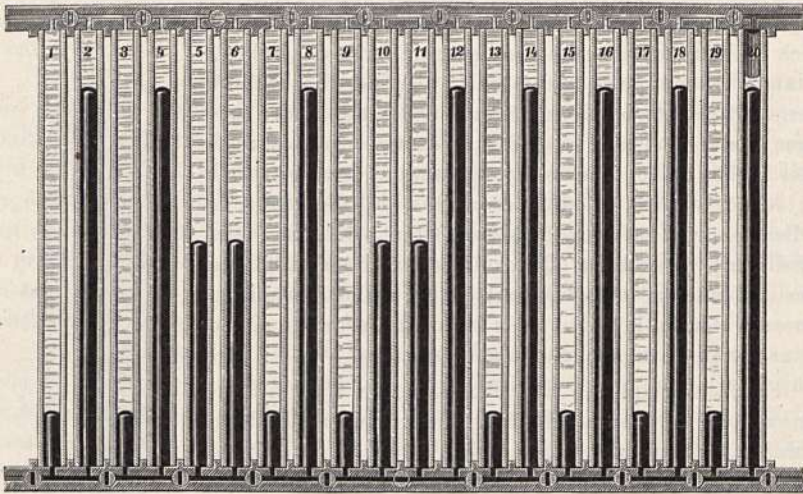
Fig. 480.



¹⁾ Zeitschrift für Instrumentenkunde 1881.

Ist der Druck so gering, daß man nicht alle Partialdrucke benötigt, so kann man einzelne Manometer ganz ausschalten, indem man die betreffenden Hähne öffnet. So z. B. erscheint in der Figur der Hahn oben zwischen 5 und 6, unten zwischen 10 und 11 geöffnet. Dadurch gleicht sich der Niveauunterschied in den zur Verbindung gebrachten Röhren aus, während er in den übrigen entsprechend größer wird. Sind sämtliche Röhren gleicher

Fig. 481.



Dimension, so braucht nur an den letzten beiden die Beobachtung gemacht zu werden, der dort gemessene Druck ist einfach mit der Zahl der Röhrenpaare zu multiplizieren. In diesem Falle könnten auch die Röhren bis auf die beiden letzten aus Stahl angefertigt sein. An Genauigkeit wird aber dieses Manometer dem einschenkeligen stets nachstehen müssen.

Alle Manometer, die wir bisher betrachtet haben, sind auf der einen Seite offen, so daß hier der Druck der Atmosphäre wirken kann. Die geschlossenen Manometer haben die Form eines Gefäß- oder Heberbarometers, jedoch mit dem Unterschiede, daß der Vakuumraum mit Luft oder einem anderen Gase gefüllt ist, so daß der hervorgebrachte Druck vorzugsweise durch die Kompression der in der Röhre abgesperrten Luft gemessen wird. Dabei wird in der Regel das Boylesche Gesetz als richtig vorausgesetzt, was aber, wie wir alsbald hören werden, für höhere Drucke nicht mehr zulässig ist. Fig. 482 zeigt einen auf demselben Prinzip beruhenden Apparat, wie er auf Dampfkessel oder Dampfleitungen aufgeschraubt werden kann. Durch den Kanal *a* verbreitet sich der Dampfdruck in den von allen Seiten luftdicht verschlossenen Raum *b*. In demselben steht, auf dem Boden befestigt, ein eisernes, zum Teil mit Quecksilber gefülltes Gefäß, und in dieses taucht eine mit Luft gefüllte Glasröhre ein. Der Druck des Dampfes treibt das Quecksilber in das Rohr, wodurch die eingeschlossene Luft komprimiert wird. Wenn sie auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ usw. ihres ursprünglichen Volumens komprimiert ist, so übt sie einen Druck von 2, 4, 8 usw. Atmosphären auf den Gipfel der Quecksilbersäule aus. Der Druck der letzteren ist dann zu jener der Luft hinzuzuaddieren.

Um das Kompressionsrohr besser zu schützen, ist es meist von einem mit zwei diametral gegenüberliegenden 4 bis 5 mm breiten Schlitten versehenen Metallrohr umgeben, auf welchem auch die Skala angebracht ist.

Wenn die Röhren solcher Kompressionsmanometer zylindrisch sind, so werden natürlich die Abteilungen der Skala, welche gleichen Druckdiffe-

Fig. 482.

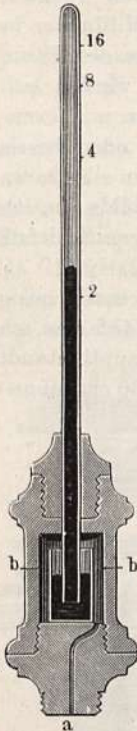
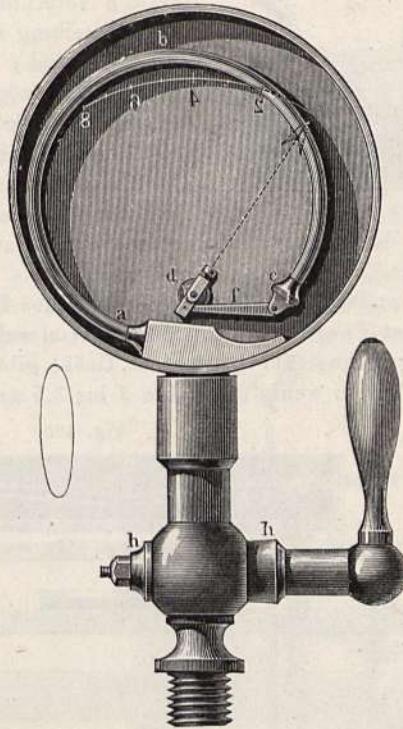


Fig. 483.



renzen entsprechen, nach oben hin sehr rasch abnehmen. Um dies zu verhindern, macht man die Röhren oft von unten nach oben verjüngt, ganz oben aber in eine kugelförmige Erweiterung auslaufend.

Endlich werden jetzt häufig Manometer ohne Quecksilber nach dem Prinzip des Bourdonschen Metallbarometers angewendet. Fig. 483 zeigt ein solches Instrument, dessen Einrichtung nach dem, was wir im § 160 vortragen, wohl keiner weiteren Erklärung bedarf.

Dieses Manometer hat den großen Vorzug, daß es nicht zerbrechlich und dabei leicht transportabel ist. In der Tat wird es auf Lokomotiven und Lokomobilen vielfach angewandt.

Auch das dem Metallbarometer von Vidi zugrunde liegende Prinzip ist zu manometrischen Messungen verwendet worden. W. C. Röntgen¹⁾, M. Th. Edelmann²⁾, Fr. Kohlrausch³⁾, Dieterici⁴⁾ u. a. haben durch Verbin-

¹⁾ Pogg. Ann. 148, 580; Wiedem. Ann. 4, 305.

²⁾ Edelmanns „Neuere Apparate“, S. 134.

³⁾ Pogg. Ann. 150, 423 (1873).

⁴⁾ Wiedem. Ann. 50, 55 (1893), 62, 624 (1897).

derung desselben mit der Spiegelablesung Apparate (Pneumatometer) hergestellt, welche außerordentlich kleine Druckänderungen zu messen gestatten.

Um kleine Druckdifferenzen zu messen gibt man dem Manometer die in Fig. 484 im Vertikalschnitt skizzierte Form. Das aus zwei kommunizierenden

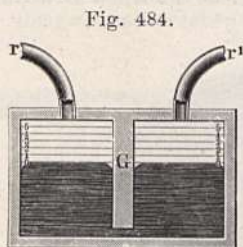


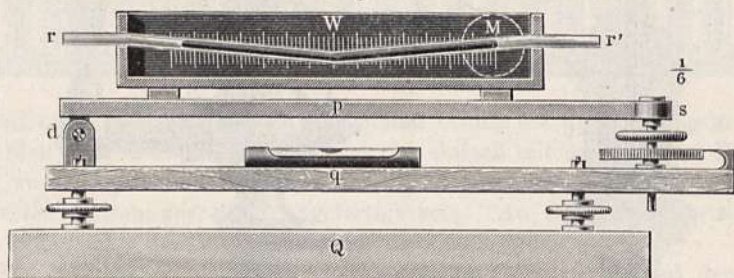
Fig. 484.

offenen Metallgefäß *b* wird durch aufgelegte Glasplatten verschlossen, deren rückwärtige eine Vertikalteilung in halbe Millimeter besitzt. Die Röhren *r* und *r'* führen zu den Räumen, deren Druckdifferenz gemessen werden soll. Mittels zweier Mikroskope visiert man von vorn auf die Quecksilbermenisken oder besser auf die Mitte zwischen der nächsten sichtbaren Teilungslinie und ihrem Spiegelbilde im Quecksilber.

Eine mit dem Apparat verbundene Libelle sichert gegen Schiefstellung der Teilung ¹⁾.

Eine andere zur Messung sehr kleiner Druckdifferenzen geeignete Vorrichtung ist Toeplers Drucklibelle ²⁾, von welcher Fig. 485 eine schematische Abbildung in ungefähr $\frac{1}{6}$ der nat. Größe gibt. Ihr Hauptbestandteil ist die in der Mitte ein wenig geknickte 3 bis 3,5 mm weite, 30 cm lange Glasröhre,

Fig. 485.



deren Enden mit den Räumen, deren Druckdifferenz gemessen werden soll, durch elastische Glasröhren in Verbindung stehen. Die Röhre enthält einen etwa 25 cm langen Faden einer nicht flüchtigen, leicht beweglichen Flüssigkeit (Xylol) und ruht in einem Wasserbade *W* mit Glaswänden unmittelbar vor einer Millimeterteilung. Das Bad selbst ruht auf der Metallplatte *p*, welcher in der aus der Figur ersichtlichen Weise verschiedene Neigung gegeben werden kann. Die Größe des Neigungswinkels ist an der Trommel der Elevationsschraube *s* zu messen. Ein an der Platte *P* befestigtes, horizontal gegen die rechtsseitige Kuppe der Flüssigkeit gerichtetes Mikroskop *M* gestattet die Stellung dieser Kuppe mit Bezug auf die Millimeterskala genau zu beobachten. Ist die erste Beobachtung bei Druckgleichheit beiderseits gemacht, so läßt sich eine eintretende Druckdifferenz entweder aus der Verschiebung der Kuppe, oder durch die Elevation, welche diese Verschiebung rückgängig macht, ermitteln. Die Genauigkeit der Methode hängt natürlich von dem

¹⁾ Thiesen u. Scheel, Zeitschr. f. Instrumentenk. 20, 345 (1900); 21, 175 (1901).

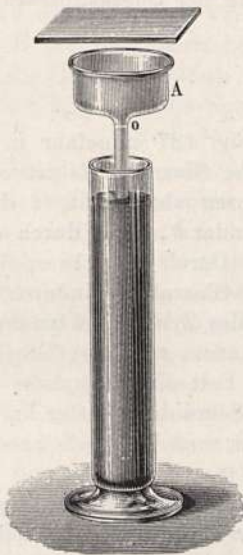
²⁾ Wiedem. Ann. 34, 790 (1888) und 56, 609 (1895).

Winkel 2α ab, um den die Schenkel geknickt sind. Ist das spezifische Gewicht der angewendeten Flüssigkeit $= s$, so entspricht einer Verschiebung von l cm eine Druckdifferenz $= (2s \sin \alpha) l$ Gramm pro Quadratcentimeter. Ist die Verschiebung durch eine Elevation von φ^0 kompensiert, so ist die Druckdifferenz $= sa \sin \varphi$, wo a den Abstand der Kuppen bedeutet. Nach dieser Methode konnte Toepler noch Druckdifferenzen von $1/100\,000\,000$ Atmosphären messen.

§ 165. Stereometer und Volumenometer. Eine sehr sinnreiche Anwendung hat zuerst der französische Physiker Say von dem Boyleschen Gesetze gemacht, um das Volumen pulverförmiger Körper zu bestimmen. Später sind Apparate, auf dieselbe Methode gestützt, von verschiedenen Physikern, namentlich von Leslie, Kopp und Régnault vorgeschlagen worden. Says Apparat, Fig. 486, welchen derselbe Stereometer genannt hat, besitzt folgende Einrichtung.

An das Glasgefäß A setzt sich eine möglichst genau zylindrische Glasröhre an. Der Rand des Gefäßes ist mit Schmirgel abgeschliffen, so daß der innere Raum mittels einer Glasplatte luftdicht abgesperrt werden kann. Das

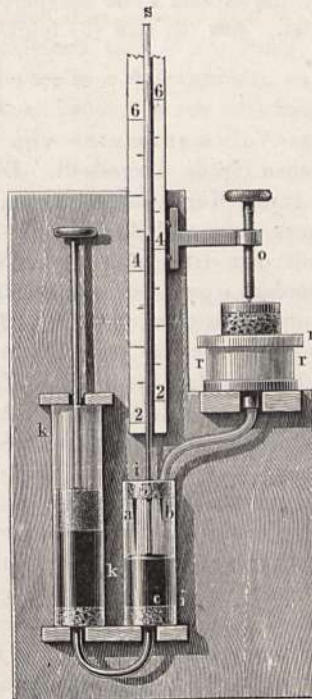
Fig. 486.



Rohr ist mit einer Längenteilung versehen und genau bestimmt, welches der dem Zwischenraume zweier Teilstriche entsprechende Rauminhalt der Röhre ist.

Während der Behälter A offen ist, wird die Röhre in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß bis zum Nullpunkte o der Teilung eingetaucht. Wird alsdann die Glasplatte auf den Rand von A luftdicht aufgesetzt, so ist ein bestimmtes Luftvolumen V von einer Dichtigkeit abgesperrt, welche dem Barometerstande H entspricht.

Fig. 487.



$\frac{2}{5}$

Wird nun, während A geschlossen bleibt, das Instrument in die Höhe gezogen, so tritt ein Teil der Luft aus A in die Röhre, während das Quecksilber von unten her in derselben über das äußere Niveau steigt. Es sei v die durch Ablesung an der Röhre ermittelte Zunahme des Luftvolumens, h die Höhe der gehobenen Quecksilbersäule, so haben wir:

$$\frac{V + v}{V} = \frac{H}{H - h} \quad \dots \dots \dots (1)$$

woraus folgt:

$$V = v \cdot \frac{H - h}{h} \quad \dots \dots \dots (2)$$

Wiederholt man denselben Versuch, nachdem man den pulverförmigen Körper, dessen Volumen x man bestimmen will, in das Reservoir A gebracht hat, so ist das Volumen der in A abgesperrten Luft, wenn das Instrument bis zum Nullpunkte eingetaucht ist, gleich $V - x$. Erhebt man die Röhre, bis das Volumen der abgesperrten Luft gleichfalls um v zugenommen hat, so hat man:

$$\frac{V - x + v}{V - x} = \frac{H}{H - h'} \quad \dots \dots \dots (3)$$

wenn h' die diesem Falle entsprechende Hebung der Quecksilbersäule in der Röhre ist. Aus (2) und (3) folgt dann

$$x = v \left[\frac{H}{h} - \frac{H}{h'} \right] \quad \dots \dots \dots (4)$$

Das Volumenometer von Kopp ist Fig. 487 ungefähr in 0,4 der natürlichen Größe dargestellt. Die zylindrische Glasröhre ii ist oben und unten durch Kork luftdicht verschlossen; unten aber steht ii durch ein gebogenes engeres Röhrchen mit dem Glaszylinder k , oben durch ein Glasrohr mit dem Glasgefäße rr in Verbindung. Durch den oberen Verschluss des Zylinders i geht noch ein vertikales engeres Glasrohr s hindurch, welches, unten und oben offen, fast bis auf den Boden des Zylinders i hinabreicht.

Der obere, etwas breite Rand des Glaszylinders r ist sorgfältig plan abgeschliffen, so daß man mit Hilfe von etwas Fett eine Glasplatte luftdicht aufsetzen kann, welche dann noch durch eine Schraube o fester aufgedrückt wird. In dem Glaszylinder r befindet sich ein zunächst noch leeres Platingefäß.

Der untere Teil von i und k ist mit Quecksilber gefüllt, wie es unsere Figur zeigt. In der Röhre k aber sitzt auf dem Quecksilber ein Lederkolben auf, welcher zwar nicht absolut luftdicht, aber doch quecksilberdicht schließt. Wird dieser Kolben in die Höhe gezogen, so geht das Quecksilber aus i nach k hinüber, das untere Ende c der Steigröhre s wird frei, und es wird sich alsdann der obere Teil von i und das mit demselben in Verbindung stehende Gefäß r mit Luft von atmosphärischer Dichtigkeit füllen.

Sobald aber nun der Kolben in k niedergedrückt und dadurch das Quecksilber nach i getrieben wird, kommt auch das untere Ende des Steigrohres s wieder unter den Quecksilberspiegel, es ist also dadurch ein gewisses Quantum Luft in i und r abgesperrt, welche eben unter atmosphärischem Druck stehend das Volumen V einnahm, welche aber durch ferneres Niederdrücken des Kolbens in k mehr und mehr komprimiert wird. Hat man den Kolben

in *k* niedergedrückt, bis der Quecksilberspiegel in *i* eben die Spitze *a* berührt, welche ähnlich wie beim Fortinschen Barometer von dem oberen Verschluss der Röhre *i* hinabreicht, so ist die abgesperrte Luft um das Volumen *v* (den Rauminhalt der Röhre *i* zwischen *c* und *a*) komprimiert, während infolge ihrer Verdichtung das Quecksilber in dem Steigrohre *s* um die Höhe *h* über das Niveau des Quecksilbers in *i* gestiegen ist.

Hat man den eben herrschenden Barometerstand *b* und die Höhe *h* der Quecksilbersäule in *s* beobachtet, so ergibt sich die Gleichung:

$$v : V = h : b + h \dots \dots \dots (1)$$

Wiederholt man nun denselben Versuch, nachdem man *n* g Wasser¹⁾ in das vorher erwähnte Platingefäß eingefüllt hat, so wird in *s* eine Quecksilbersäule *h'* gehoben sein, wenn das Quecksilber in *i* bis zur Spitze *a* hinaufgepreßt worden ist, und demnach ergibt sich nun die Gleichung:

$$v : V - n = h' : b + h' \dots \dots \dots (2)$$

Aus der Kombination der Gleichungen (1) und (2) ergeben sich aber die Werte von *v* und *V*, da alle anderen Größen, nämlich *h*, *h'* und *b*, bekannt sind.

Nachdem einmal die Werte von *V* und *v* ermittelt sind, ist es leicht, das Volumen *x* eines beliebigen, und zwar auch eines pulverförmigen Körpers zu bestimmen. Man bringe denselben nur in das in *r* befindliche Platingefäß und wiederhole den Versuch ganz in der oben angegebenen Weise. Es sei nun *B* der jetzt herrschende Barometerstand und *H* die Höhe, bis zu welcher die Quecksilbersäule in *s* über die Spitze *a* gehoben ist; wenn das Quecksilber in *i* oben die Spitze *a* berührt, so haben wir die Gleichung:

$$B + H : B = V - x : V - x - v,$$

aus welcher sich *x* berechnen läßt.

Eine zweite Drahtspitze *b* dient zu Kontrollversuchen. An der Steigrohre sind zwei Skalen angebracht, der Nullpunkt der einen ist *a*, der der anderen aber *b*. Die Höhe der Steigrohre beträgt etwa 40 cm.

Für solche Substanzen, welche bei höherem Drucke eine größere Quantität Luft absorbieren, wie dies z. B. bei der Kohle der Fall ist, läßt sich natürlich auch dieses Instrument nicht anwenden.

Hat man mit Hilfe des Kopp'schen Volumenometers das Volumen und durch die Wage das absolute Gewicht des zu untersuchenden Körpers bestimmt, so ist sein spezifisches Gewicht leicht zu berechnen.

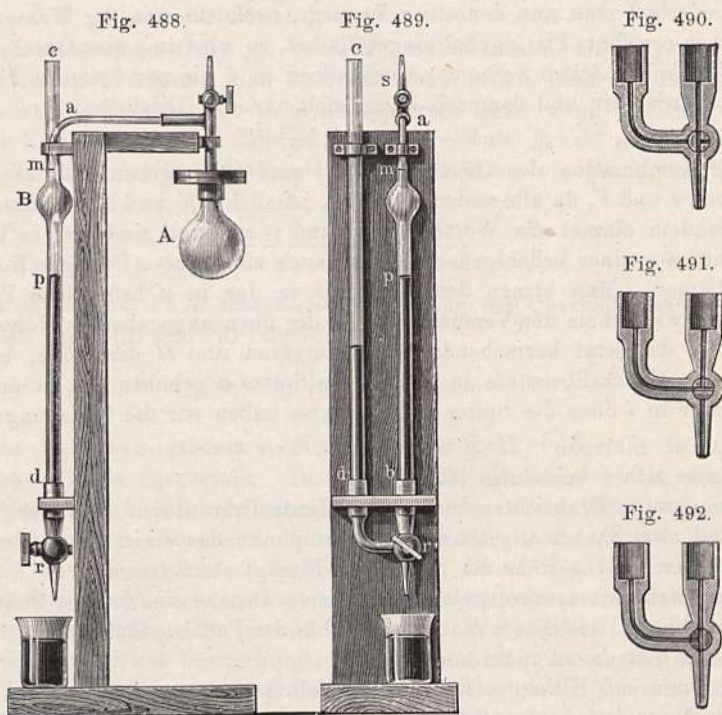
Die folgende Tabelle enthält das spezifische Gewicht einiger Körper, wie es Kopp mit Hilfe seines Instrumentes bestimmte.

Körper	Spezif. Gewicht	Körper	Spezif. Gewicht	
Bimsstein (gepulvert)	2,15	Holzfaser von	Lindenholz	1,13
Asche von Buchenholz	2,85		Tannenholz	1,16
Stärkemehl	1,56		Nußbaumholz	1,17
Flachs	1,45		Birnbaumholz	1,23
Seide (rohe Kokonfäden)	1,56		Eichenholz	1,27
Baumwolle	1,27		Buchenholz	1,29

¹⁾ Statt des Wassers dürfte wegen des Dampfdruckes desselben Quecksilber mehr zu empfehlen sein, von dem dann $\frac{n}{15,596}$ g zu nehmen sind.

Um das spezifische Gewicht der Holzfaser zu erhalten, war das Holz fein geraspelt und gut getrocknet worden. Man sieht hier, daß das spezifische Gewicht der Holzfaser weit größer ist als das eines massiven Holzstückes, daß also das Holzstück ein Aggregat von Holzfaser und Luft ist.

Régnaults Volumenometer ist in Fig. 488 bis 492 abgebildet. *A* ist ein Glasballon von ungefähr 300 ccm Inhalt. Der Hals desselben trägt eine Metallplatte, welche erlaubt, den Ballon mit Hilfe von vier Schrauben durch Zwischenlegen eines gefetteten Leders (noch besser einer Platte von vulkanisiertem Kautschuk) an den manometrischen Apparat luftdicht zu befestigen.



Von *A* führt nun eine Röhre direkt in die Höhe; sie kann durch den Hahn *s* abgesperrt werden; eine andere führt zu der vertikalen, 14 mm weiten Röhre *ab*, welche nahe an ihrem oberen Ende zu einer Kugel *B* erweitert ist. Auf dieser Röhre ist ein Merkstrich bei *m* und einer bei *p* gemacht; unten ist sie in eine eiserne Fassung eingekittet und kann mittels des Hahnes *r* entweder nach unten geöffnet oder mit der Röhre *cd* in Verbindung gesetzt werden, wie es die Figuren 490 und 491 erläutern.

Das Volumen *v* der Röhre *ab* zwischen *m* und *p* wird dadurch ermittelt, daß man in der Stellung Fig. 491 bei geöffnetem Hahn *s* durch die Röhre *cd* Quecksilber eingießt, bis es bei *m* steht, und dann durch den in die Stellung Fig. 490 gebrachten Hahn *r* ausfließen läßt, bis es auf *p* gesunken ist. Die ausgeflossene Quecksilbermenge wird durch Wägung gemessen.

Um nun das Volumen *V* der Kugel *A* und der Röhrenverbindung zwischen *A* und *m* zu ermitteln, wird bei angesetzttem Ballon *A* und offenem Hahn *s* in der Stellung Fig. 491 bis zur Höhe *p* Quecksilber eingefüllt, dann *s* ge-

geschlossen und so viel Quecksilber durch cd nachgegossen, bis es im Schenkel ab an die Marke m reicht.

Ist nun h die Überhöhe des Quecksilbers im Schenkel cd , H der Atmosphärendruck, so ist:

$$\frac{V + v}{V} = \frac{H + h}{H},$$

woraus:

$$V = v \frac{H}{h}.$$

Wird dann die nämliche Operation wiederholt, nachdem man vorher den Körper, dessen Volumen x gemessen werden soll, in den Ballon A gebracht hat, und ist diesmal die Überhöhe des Quecksilbers h' , so ist:

$$\frac{V - x + v}{V - x} = \frac{H + h'}{H}$$

und endlich:

$$x = vH \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h'} \right).$$

Hierbei ist sorgfältig auf Konstanz der Temperatur zu achten.

§ 166. Abweichungen vom Boyleschen Gesetze. Viele Physiker haben sich damit beschäftigt, das Verhalten der Gase unter größerem Drucke zu prüfen. Besonders zu erwähnen sind die Versuche von Oersted und Swendsen, Depretz, Pouillet, Arago und Dulong, Régnault, Andrews, sowie die neueren Untersuchungen von Amagat, von Mendelejeff u. a.

Um zu zeigen, daß verschiedene Gase bei gleicher Drucksteigerung eine ungleiche Verminderung des Volumens erleiden, hat Pouillet den Apparat Fig. 493 konstruiert, den wir als eine Kombination zweier geschlossener Manometer bezeichnen können.

Der Hals des gußeisernen Gefäßes V ist mittels einer Stopfbüchse geschlossen, durch welche der massive Kolben K hindurchgeht; der obere Teil desselben ist mit einem Schraubengewinde versehen, welches sich in der Schraubenmutter M drehen läßt. Aus dem unteren Teile des Gefäßes V führt die eiserne Röhre t zu einem horizontalen Kanal des gußeisernen Klotzes F , auf welchen von oben her zwei vertikale Kanäle münden. Auf diese Kanäle sind die 2 m langen, genau geteilten Glasröhren A und B aufgeschraubt. Oben sind diese Glasröhren offen, aber in eine feine Spitze ausgezogen.

Der untere Teil des Gefäßes V enthält Quecksilber, der obere Teil desselben ist mit Öl gefüllt. Durch Umdrehung des Hebels C wird der Kolben K niedergeschraubt und dadurch das Quecksilber in die Röhren A und B hineingetrieben, bis es die Spitzen derselben erreicht hat. Sobald dies der Fall ist, setzt man die Spitze der einen Röhre mit einer Glocke in Verbindung, welche mit dem zu prüfenden Gase gefüllt ist, während die Spitze der anderen durch eine Trockenröhre mit der äußeren Luft in Verbindung steht. Schraubt man nun den Kolben in die Höhe, so sinkt das Quecksilber langsam in beiden Röhren; die eine füllt sich mit trockener Luft, die andere mit dem Gase der Glocke, beide aber unter dem Drucke der Atmosphäre. Sobald das Quecksilber in beiden Röhren bis zum Punkte o gesunken ist, werden

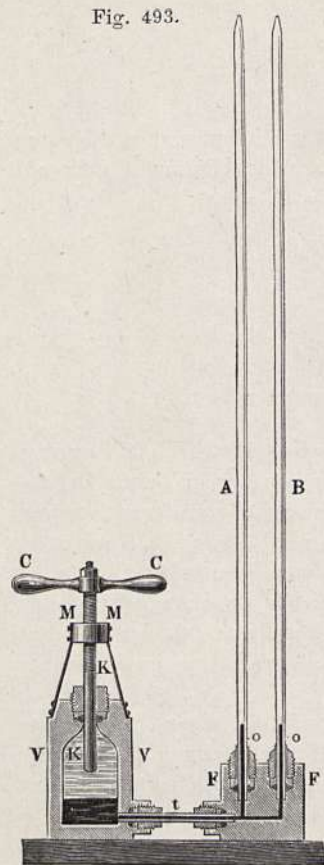
die Spitzen beider Röhren vor dem Lötrohr zugeschmolzen, und somit ist der Versuch vorbereitet.

Wird nun der Kolben *K* abermals niedergeschraubt, so wird in der einen der beiden Glasröhren atmosphärische Luft, in der anderen das zu prüfende Gas komprimiert, und man kann bei dieser Vorrichtung den Druck bis auf

100 Atmosphären steigern. Es zeigt sich dabei, daß Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlenoxydgas sich nahezu gleich wie Luft verhalten, während diejenigen Gase, welche schon bei relativ geringer Druckerhöhung flüssig werden, wie schweflige Säure, Ammoniakgas, merklich kompressibler sind als Luft.

Arago und Dulong bedienten sich zur Prüfung des Boyleschen Gesetzes eines Verfahrens, welches mit dem in § 163 zuerst beschriebenen im wesentlichen übereinstimmte. Nur war der dazu verwendete, nach Art der Fig. 474 konstruierte Apparat mit einer Druckröhre von größerer Höhe versehen. Die genannten Forscher fanden das Volumen der komprimierten Luft stets kleiner als das nach Boyles Gesetz berechnete. Da aber die Abweichungen nur gering waren, hielten sie dies für eine Folge der Beobachtungsfehler.

Eine definitive Lösung erhielt endlich die Frage durch eine von Régnault im Jahre 1845 ausgeführte Untersuchung¹⁾. Der äußerst zweckmäßig und sorgfältig konstruierte Apparat, dessen er sich bediente, hatte große Ähnlichkeit mit dem in § 163 erwähnten Apparat von Arago und Dulong. Die 3 m lange Manometerröhre war im Inneren nahezu 1 cm weit; ihr unteres Ende kommunizierte mit einer 30 m hohen Druck-



röhre. Durch eine Druckpumpe wurde das Quecksilber von unten her gleichzeitig in die Manometerröhre und in die Druckröhre hineingepreßt.

Bei den Arago-Dulong'schen Versuchen wurde die nämliche Luftmenge, welche in der Manometerröhre ursprünglich eine Länge von 2 m einnahm, durch den Druck einer Quecksilbersäule von 30 m Höhe auf die Länge von 0,0667 m zusammengedrückt, der gleiche Fehler in der Ablesung der Quecksilberkuppe wird deshalb bei hohem Druck auf die Messung des Gasvolumens einen verhältnismäßig viel nachteiligeren Einfluß ausüben als bei geringem Druck. Ein Ablesungsfehler von 1 mm z. B. mußte das ursprüngliche Volumen um $\frac{1}{2000}$ fehlerhaft angeben, während der gleiche Ablesungsfehler die Bestimmung des Gasvolumens bei einem Drucke von 30 m um $\frac{1}{66}$ fehlerhaft machte.

¹⁾ Mém. de l'Acad. d. Scienc. de l'Inst. de France 21.

Régnault hat diesen Übelstand auf folgende Weise vermieden. Statt das untere Manometerrohr oben zuzuschmelzen, setzte er einen sehr gut gearbeiteten, vollkommen sicher schließenden Hahn auf, durch welchen derselbe mit einem kupfernen, mit komprimiertem Gas gefüllten Reservoir in Verbindung gesetzt werden konnte. Ein Merkzeichen war am unteren Ende der Manometerrohre angebracht, und ein zweites in der Mitte derselben, so daß durch dasselbe das Volumen der Röhre vom Hahn bis zum unteren Merkzeichen in zwei gleiche Teile geteilt wurde. Um einen Versuch zu machen, wurde der Hahn am oberen Ende der Röhre, den wir h nennen wollen, geöffnet und aus dem Gasreservoir so viel Gas in die Manometerrohre hinübergetrieben, daß dieselbe bis zum unteren Merkzeichen mit Gas gefüllt war. Nun wurde der Hahn h geschlossen, das im Manometerrohre abgesperrte Gas nahm nun den Raum V_0 unter dem Drucke P_0 ein.

Jetzt ließ man die Druckpumpe spielen, bis das Quecksilber im unteren Manometerrohre die zweite Marke erreicht hatte; das Volumen des abgesperrten Gases war dadurch auf V_1 (die Hälfte von V_0) vermindert, der Druck, unter welchem es stand, aber auf P_1 erhöht worden. — Die Versuche wurden nun ganz in der gleichen Weise für einen anfänglichen Druck P_0 wiederholt, welcher nach und nach von 739 mm bis 9336 mm gesteigert wurde; es wurde also bei niederem und hohem Drucke mit gleich großem Gasvolumen operiert.

Die Endresultate der Régnaultschen Untersuchung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Sie gibt den Druck (in Metern ausgedrückt) an, welcher nötig ist, ein anfänglich unter 1 m Quecksilberdruck stehendes Gas auf $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ und $\frac{1}{20}$ seines ursprünglichen Volumens zu komprimieren.

Volumen	Druck		
	Luft m	Kohlendioxyd m	Wasserstoffgas m
1	1,0000	1,0000	1,0000
$\frac{1}{5}$	4,9794	4,8288	5,0116
$\frac{1}{10}$	9,9162	9,2262	10,0560
$\frac{1}{15}$	14,8248	13,1869	15,1359
$\frac{1}{20}$	19,7198	16,7054	20,2687

Nach diesen Daten werden also Luft und Kohlendioxyd bei steigendem Drucke stärker komprimiert, als nach Boyles Gesetz folgen würde, dagegen Wasserstoff weniger stark.

In bezug auf die Höhe der angewendeten Druckkräfte werden alle früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand weit übertroffen von den neueren Messungen, welche Amagat¹⁾ 1880 angestellt hat.

Die Beobachtungsapparate und das Quecksilbermanometer waren in einem zu Méons bei St. Etienne befindlichen Schachte von 400 m Tiefe aufgestellt. Auf dem Grunde des Schachtes befand sich die Kompressionspumpe, welche zunächst auf Glycerin und durch dieses auf das Quecksilber wirkte. Dieses

¹⁾ Ann. de chim. et de phys. (5) 19, 345; Fortschritte der Physik im Jahre 1880, 36, 171.

wurde in ein zweischenkeliges Manometer eingepreßt, dessen kürzerer, aus einer kalibrierten, oben geschlossenen Glasröhre bestehender Schenkel reines Stickstoffgas enthielt. Der andere Schenkel bestand aus einer nach dem Ausgange des Schachtes führenden dünnen, stählernen Röhre, welche aus vielen Stücken von mehreren Metern Länge zusammengeschaubt war. Die Gesamthöhe dieser Druckröhre betrug etwas mehr als 325 m, was einem Drucke der darin enthaltenen Quecksilbersäule von 430 Atmosphären entspricht.

Während nun ein Beobachter mittels Fernrohres den Stand der Quecksilberkuppe abzulesen hatte, wurde ein zweiter Beobachter in einem Korbe bis zu einer der Stellen gehoben, wo zwei Stücke zusammengeschaubt waren. Diese Verbindung wurde gelöst, ein Stück offenes Glasrohr angesetzt und dann gewartet, bis durch die Pumpe das Quecksilber bis in die Glasröhre getrieben war. Hierauf erfolgte die gleichzeitige Ablesung des Druckes und des Gasvolumens. Dabei wurde insbesondere für Konstanthalten der Temperatur des Gases Sorge getragen.

Das Resultat dieser Messungen am Stickstoffgase ist nachstehend in der Weise angegeben, daß für die in Metern Quecksilber von 0° gemessenen Drucke P das zugehörige Produkt PV aus Druck und Volumen beigefügt ist

Druck in Metern Quecksilber von 0° P	Produkt aus Volumen und Druck PV
20,740	50 989
25,337	50 897
47,146	50 811
55,482	50 857
61,241	50 895
69,140	50 987
82,970	51 226
96,441	51 602
128,296	52 860
158,563	54 214
190,855	55 850
221,103	57 796
252,353	59 921
283,710	62 192
327,388	65 428

Minimum bei
 $P = 50$

Wie man sieht, nimmt das Produkt PV nicht fortwährend ab, sondern erreicht für $P = 50$ ein Minimum, um von da an nicht unbedeutend anzusteigen.

Nachdem nun so das Stickstoffgas untersucht war, konnte dasselbe zur Füllung eines geschlossenen Manometers benutzt werden, um damit andere Gase einer ähnlichen Untersuchung zu unterziehen. Sauerstoff, Luft, Äthylen, Kohlenoxyd und Grubengas zeigten hierbei insofern ein gleichmäßiges Verhalten, als die Produkte PV ein Minimum bei wachsendem Drucke erreichten. Dasselbe liegt ungefähr bei folgenden Quecksilberdruckhöhen:

Stickstoff	50 m	Kohlenoxyd	50 m
Sauerstoff	100 „	Grubengas	120 „
Luft	65 „	Äthylen	65 „

Das Minimum war bei den fünf ersten dieser Gase nur wenig ausgeprägt, dagegen außerordentlich auffallend beim Äthylen, für dieses sank der Wert des Produktes PV , welcher bei 24 m Quecksilberdruck = 21473 war, für 63,96 m Druck auf 9370 herab, um dann bei 303,02 m Druck auf 29333 anzusteigen.

Wasserstoff zeigte kein solches Minimum, doch vermutet Amagat ein solches bei geringerem Drucke.

Für Drucke unter einer Atmosphäre liegen mehrere Untersuchungen vor, welche aber nicht zu übereinstimmenden Resultaten geführt haben.

Die Arbeiten von Mendelejeff und Kirpitschoff¹⁾ ergaben für Luft, daß mit Abnahme des Druckes P auch das Produkt PV abnimmt. Setzt man für $P = 646$ mm $PV = 1$, so ist nach den genannten Autoren für $P = 14,5$ mm $PV = 0,96551$. Die Volumenbestimmungen geschahen durch Wägung des in den verdünnten Raum eintretenden Quecksilbers.

Wir kommen auf diese Abweichungen und deren theoretische Deutung in der Wärmelehre näher zu sprechen.

§ 167. Die Luftpumpe. Zu den unentbehrlichsten und wichtigsten Instrumenten des Physikers gehört die Luftpumpe, welche seit ihrer Erfin-

Fig. 494.

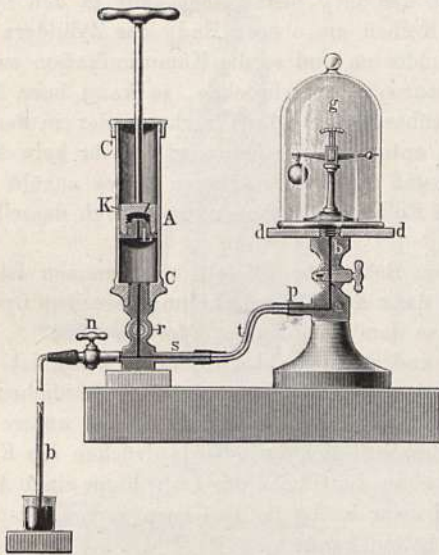
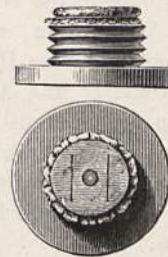


Fig. 495.



dung (1650) durch Otto von Guericke mancherlei Veränderungen und Verbesserungen erfahren hat. Wir wollen sie zunächst in einer möglichst einfachen Gestalt kennen lernen.

Fig. 494 stellt eine sogenannte Handluftpumpe dar, wie sie gewöhnlich in

chemischen Laboratorien gebraucht wird. CC ist der Stiefel, d. h. ein hohler Messingzylinder, in welchem ein luftdicht schließender Kolben A auf und ab bewegt werden kann.

Von dem Boden des Zylinders führt ein vertikaler Kanal herab bis zu dem horizontalen Rohre s , welches durch ein Glasrohr t mit Hilfe von Kautschukröhren mit dem Rezipienten g , d. h. mit dem Raume in Verbindung gesetzt werden kann, aus welchem man die Luft entfernen will. Die Glasröhre t verbindet nämlich die Messingröhren s und p , von welchen letztere zu

¹⁾ Fortschr. d. Physik i. J. 1874, 30, 232.

dem vertikalen Kanal ab führt, der oben in der Mitte des eben abgeschliffenen Tellers dd mündet. Auf diesen Teller wird dann die Glasglocke g aufgesetzt, deren unterer Rand ebenfalls eben abgeschliffen ist, und der des besseren Schlusses wegen mit Talg oder Schweinefett bestrichen wird.

Der Kolben A besteht aus verschiedenen Stücken, nämlich erstens einem zum Teil hohlen Messingstücke K , welches von einer Lederkappe umgeben ist, die fest an die Wände des Zylinders andrückt, und namentlich beim Aufziehen des Kolbens noch durch den von oben her wirkenden Luftdruck an dieselben gepreßt wird, und zweitens aus einem von unten her in K eingeschraubten Metallstücke L , welches in der Mitte durchbohrt ist und die Bodenplatte des Kolbens bildet.

Dieses Metallstück L ist nun oben mit einem Ventil versehen, welches dadurch gebildet wird, daß man ein Stück Schweinsblase so über dasselbe bindet, daß es die Öffnung des vertikalen Kanales verschließt, und dann seitlich von dieser Öffnung zwei Einschnitte anbringt, wie Fig. 459 zeigt, welche das fragliche Stück im Grund- und Aufriß darstellt.

Dieses Ventil wird fest auf die Öffnung aufgepreßt, wenn der Luftdruck von oben her, es wird geöffnet, wenn er von unten her stärker ist.

Wird der eben am unteren Ende des Stiefels C aufsitzende Kolben A in die Höhe gezogen, so entsteht unter dem Kolben ein luftverdünnter Raum, und infolge davon tritt ein Teil der in g befindlichen Luft in den Zylinder über. Wird dann, wenn der Kolben am oberen Ende des Zylinders C angekommen ist, der Hahn r geschlossen und so die Kommunikation zwischen dem Stiefel C und dem Rezipienten g unterbrochen, so kann beim Niederdrücken des Kolbens A die herübergesaugte Luft nicht wieder in den Rezipienten zurückkehren, die Luft unter dem Kolben wird, da ihr kein Ausweg bleibt, allmählich so verdichtet, daß sie einen stärkeren Druck ausübt als die äußere Luft, sie wird also das Kolbenventil heben und durch dasselbe entweichen.

Sobald der Kolben auf dem Boden des Stiefels angekommen ist, wird der Hahn r wieder geöffnet und dann durch Wiederholung derselben Operation von neuem eine Portion Luft aus dem Rezipienten g fortgeschafft.

Da das beständige Öffnen und Schließen des Hahnes r lästig ist, so hat man die zentrale Öffnung im Boden des Zylinders mit einem ähnlichen Ventil versehen, wie das ist, welches sich im Kolben befindet. Dieses untere Ventil öffnet sich beim Aufziehen und schließt sich beim Niederdrücken des Kolbens.

In unserer Figur sehen wir unter der Glocke der Luftpumpe einen Apparat stehen, welcher erst später, und zwar in demjenigen Paragraphen besprochen werden wird, welcher vom Luftballon handelt.

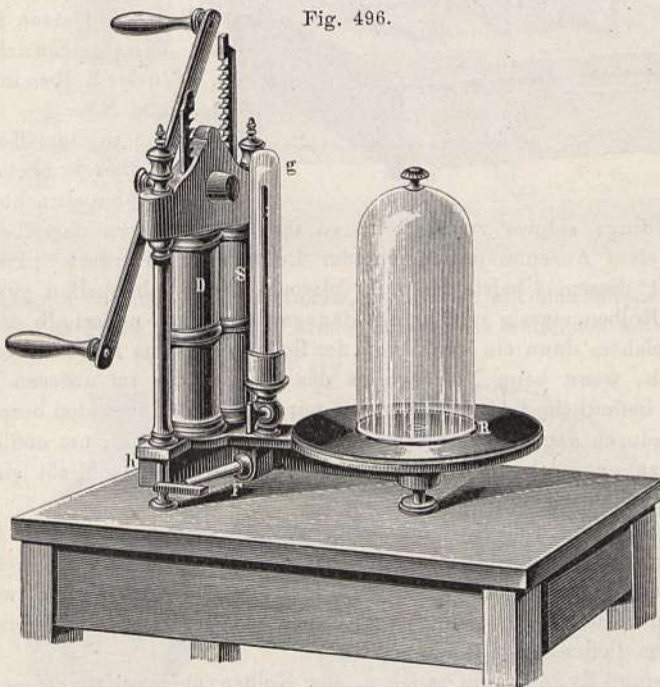
Den Grad der Luftverdünnung, welchen man durch Auspumpen hervor gebracht hat, kann man durch eine sogenannte Barometerprobe messen. Für die kleinen Handluftpumpen ist die Barometerprobe so eingerichtet, wie Fig. 494 zeigt. Eine etwa 80 cm lange Glasröhre b taucht mit ihrem unteren Ende in ein Gefäß voll Quecksilber; oben ist sie umgebogen und mittels eines Kautschukröhrchens an die Pumpe befestigt. Wenn der Hahn n geöffnet ist, so steigt das Quecksilber in die Röhre b , und zwar um so höher, je weiter die Verdünnung getrieben wird. Wenn es möglich wäre, einen ganz luftleeren Raum durch die Luftpumpe zu erzeugen, so würde die Höhe der im Rohre b gehobenen Quecksilbersäule der Barometerhöhe gleich sein.

Man begreift leicht, daß mit einem derartigen Instrumente niemals ein absolut luftleerer Raum hervorgebracht werden kann, wie vollkommen es auch konstruiert sein mag; denn wie lange man auch fort pumpen mag, so wird durch jeden neuen Kolbenzug die im Rezipienten befindliche Luft doch nur von neuem verdünnt und nie vollständig entfernt. Aber auch durch noch so lange fortgesetztes Pumpen kann man die Verdünnung der Luft im Rezipienten nicht über eine gewisse Grenze bringen, welche im nächsten Paragraphen näher bezeichnet werden soll.

Größere Luftpumpen hat man in sehr verschiedenen Formen konstruiert, welche der Hauptsache nach in zwei Hauptklassen zerfallen, nämlich in Ventilluftpumpen und Hahnluftpumpen. Bei den ersteren wird die Unterbrechung und Wiederherstellung der Kommunikation des Stiefels mit dem Rezipienten durch ein Ventil bewerkstelligt, bei den letzteren geschieht dieses durch einen Hahn.

Bei größeren Luftpumpen, seien es nun Hahn- oder Ventilluftpumpen, sind gewöhnlich zwei Stiefel angebracht, um schneller evakuieren zu können.

§ 168. Die zweistiefelige Ventilluftpumpe. Fig. 496 stellt eine zweistiefelige Ventilluftpumpe von der Seite gesehen, Fig. 497 stellt die vordere



Ansicht desselben Instrumentes dar. Die innere Einrichtung einer solchen Luftpumpe erkennt man aus dem Grundriß Fig. 500 und dem Durchschnitt Fig. 498, für welchen zu bemerken ist, daß die Durchschnittsebene für den vorderen Teil des Instrumentes durch die Mitte des Stiefels *D*, für den hinteren Teil durch die Mitte des ganzen Instrumentes geht.

Im Kolben *B*, dessen Einrichtung aus Fig. 499 deutlicher ersehen werden kann, ist ein Ventil angebracht, welches sich durch einen Druck von unten öffnet, durch einen Druck von oben aber geschlossen wird.

Eine Stange *ca*, Fig. 498, trägt das Bodenventil. Wenn der Kolben gehoben wird, so wird die ganze Stange gehoben, bald aber stößt der Absatz *c*

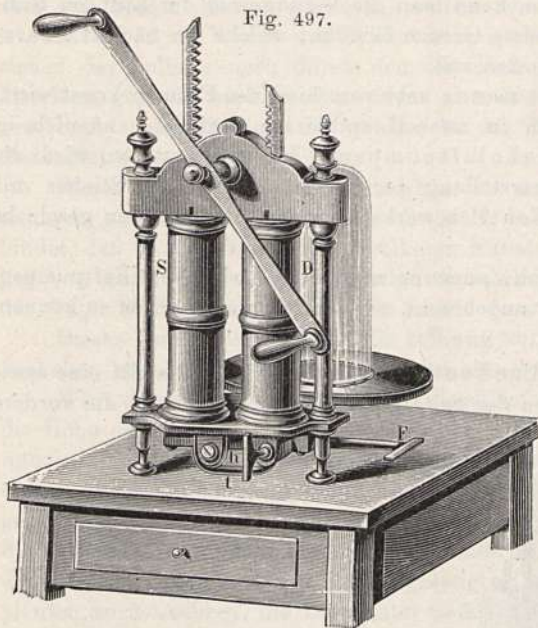


Fig. 497.

an die obere Platte des Zylinders, und der Kolben bewegt sich nun mit einiger Reibung längs der ganzen Stange hin. Sobald der Kolben niedergeht, wird der abgestumpfte Kegel *a* in die unter ihm befindliche konische Öffnung gedrückt, so daß die obere Fläche dieses Kegels mit dem Boden des Zylinders in eine Ebene zusammenfällt und der Kolben sich also vollkommen auf diesen Boden aufsetzen kann.

Dieselbe Einrichtung hat auch der Kolben im anderen Stiefel *S*.

Die in dem Kolben der eben beschriebenen Luftpumpe angebrachten Ventile sind allerdings schwer zugänglich, so daß ein Reinigen derselben immer ein teilweises Auseinandernehmen der Luftpumpe erfordert. Ekling in Wien hat diesem Übelstande auf folgende Weise abzuhelpen gesucht: er läßt den Kolben massig und bringt dagegen ein Ventil außerhalb des Stiefels an, zu welchem dann ein Kanal von der Bodenplatte aus führt. Dieses Ventil öffnet sich, wenn beim Niedergange des Kolbens die im unteren Teile des Zylinders befindliche Luft komprimiert wird und nun durch den besprochenen Kanal hindurch gegen die untere Fläche des Ventils drückt, um endlich durch dasselbe zu entweichen. Beim Aufziehen des Kolbens schließt sich dieses Ventil natürlich wieder.

Die Mitte des Tellers *R*, Fig. 498 und Fig. 500, welcher zum Aufsetzen von Glasglocken dient, wird durch eine Schraube gebildet, auf welche man Ballons usw. aufschrauben kann. Von hier führt ein Kanal bis *d*, wo er sich in zwei Arme teilt, von welchen der eine zum Boden des Zylinders *D*, der andere zum Boden des Zylinders *S* führt.

Derjenige Zylinder, in welchem der Kolben eben aufsteigt, saugt Luft aus dem Rezipienten, während in dem anderen Stiefel, in welchem der Kolben gleichzeitig niedergeht, die vorher aus dem Rezipienten gesaugte Luft durch das Kolbenventil entweicht.

Bei diesen Luftpumpen ist die Barometerprobe in der Regel von etwas anderer Einrichtung als die vorher erwähnte. Gewöhnlich ist sie ein abgekürztes Barometer, welches in eine lange, enge Glasglocke *g*, Fig. 496 und

Fig. 498, eingeschlossen ist, die mit dem Kanal der Maschine in Verbindung steht. Diese Verbindung kann mittels eines Hahnes willkürlich unterbrochen und wiederhergestellt werden. Fig. 501 stellt eine isolierte Barometerprobe von 20 cm Länge dar. Das Quecksilber füllt den zugeschmolzenen Schenkel

Fig. 498.

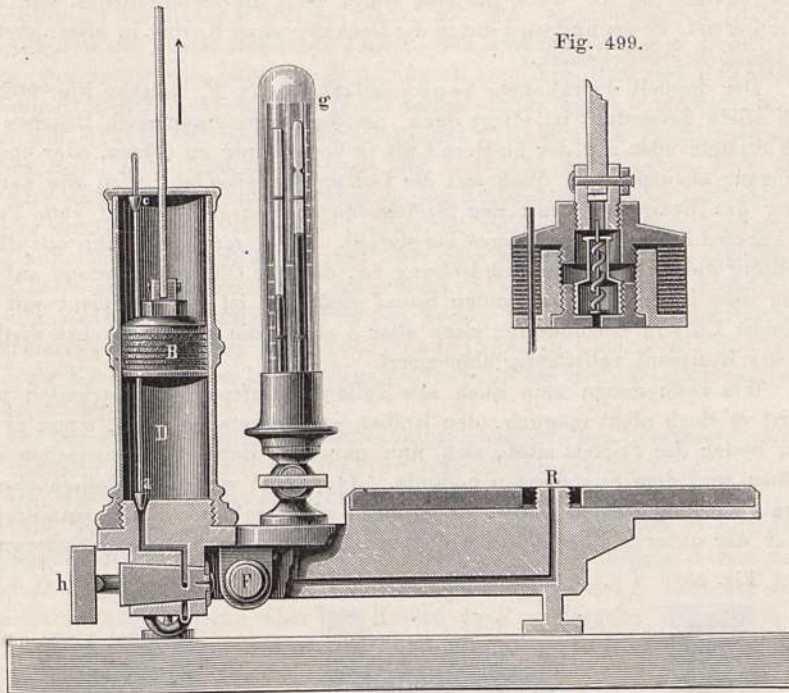
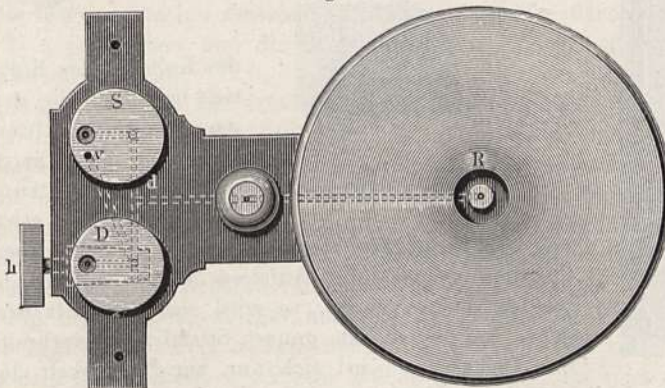


Fig. 499.

ganz aus und beginnt erst zu sinken, wenn der auf den offenen Schenkel wirkende Luftdruck bis auf $\frac{1}{4}$ Atmosphärendruck reduziert ist. Ist dieser

Fig. 500.



Grad von Verdünnung erreicht, so gibt die Barometerprobe stets den Druck der Luft im Rezipienten an, welcher der Differenz im Stande der beiden Quecksilberkuppen gleich ist. Sobald man wieder Luft zuläßt, treibt der

Druck derselben das Quecksilber mit Gewalt in die verschlossene Röhre zurück; man muß deshalb das Einströmen mäßigen, damit der Gipfel der Glasröhre nicht durchgeschlagen wird; um dies zu verhindern, ist überdies die Glasröhre an einer Stelle eingeschnürt.

Die Kolbenstangen der beiden Zylinder sind gezahnt und greifen in dasselbe Getriebe ein; wenn die eine steigt, geht die andere nieder, und diese alternierende Bewegung wird durch die Drehung einer Kurbel in alternierender Richtung hervorgebracht.

Der doppelt durchbohrte Senguerdsche Hahn *F*, welcher Fig. 502 für sich allein dargestellt ist, dient dazu, um den Rezipienten nach Belieben mit den Stiefeln oder mit der äußeren Luft in Verbindung zu setzen, oder endlich ihn ganz abzusperrn. Während die Luftpumpe arbeitet, wird die Verbindung des Rezipienten mit den Stiefeln durch den in Fig. 502 zum Punkt verkürzten Kanal *n* des Hahnes hergestellt. Dreht man den Hahn aus dieser Stellung durch eine Viertelumdrehung so, daß die Öffnung *o* gerade auf den nach dem Rezipienten führenden Kanal stößt, so ist der Rezipient mit der äußeren Luft in Verbindung; wenn aber *o* gegen die Stiefel gekehrt wird, so ist der Rezipient vollständig abgesperrt.

Wie vollkommen man auch alle Teile der Luftpumpe ausarbeiten mag, so ist es doch nicht möglich, den Kolben so herzustellen, daß, wenn er auf dem Boden des Stiefels sitzt, sich nun gar kein Raum mehr zwischen dem Kolben und dem Stiefelboden befände. Ja, selbst wenn der Kolben absolut genau auf den Boden paßte, so ist noch ein namhafter Raum unmittelbar unter der unteren Fläche des Kolbenventils. Wenn nun beim Niedergange

Fig. 501.



Fig. 502.

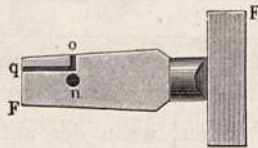


Fig. 504.

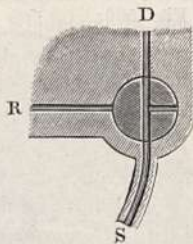
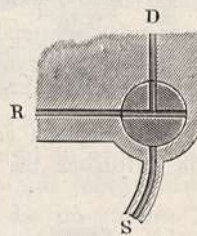


Fig. 503.



des Kolbens das Kolbenventil sich hebt, um die zusammengepreßte Luft entweichen zu lassen, so bleibt immer noch in dem erwähnten schädlichen Raume etwas Luft

von der Dichtigkeit der Atmosphäre zurück. Denken wir uns nun während des Aufstiegs des Kolbens den Rezipienten abgeschlossen, so wird sich die Luft des schädlichen Raumes in dem ganzen Stiefelraume verbreiten, und ihre Dichtigkeit wird sich nun zur Dichtigkeit der atmosphärischen Luft gerade so verhalten wie das Volumen des schädlichen Raumes zum Volumen des ganzen Stiefels. Wenn nun die im Rezipienten zurückgebliebene Luft auch schon bis zu diesem Grade verdünnt ist, so ist klar, daß durchaus keine Luft mehr aus dem Rezipienten in den Stiefel

übergehen kann, wenn auch eine Verbindung zwischen beiden besteht, und somit ist denn die Grenze der Luftverdünnung mittels einer gewöhnlichen Luftpumpe gegeben. Hat man einmal diesen Punkt erreicht, so ist alles fernere Pumpen nutzlos, die Barometerprobe bleibt stationär.

Der nachteilige Einfluß des schädlichen Raumes läßt sich durch Vorrichtungen vermindern, welche nicht Luft von atmosphärischer Dichtigkeit, sondern nur stark verdünnte Luft in den schädlichen Raum eindringen lassen. Am einfachsten läßt sich dies dadurch erreichen, daß man den Stiefel auch oben luftdicht schließt, die runde Kolbenstange durch eine Stopfbüchse gehen läßt und in der oberen Deckplatte des Zylinders ein Ventil anbringt, welches beim Aufziehen des Kolbens die Luft aus dem oberen Teile des Zylinders entweichen, beim Niedergehen des Kolbens aber keine Luft in den Zylinder eintreten läßt. Bei dieser Einrichtung befindet sich, wenn der Kolben unten ankommt, nur verdünnte Luft über dem Kolbenventil, der schädliche Raum kann sich also auch nur mit verdünnter Luft füllen. Diese Einrichtung wendet u. a. auch Carrée bei seinen für künstliche Eisbereitung konstruierten Luftpumpen an. Auch Staudinger in Gießen und Stöhrer in Leipzig haben die eben besprochene Einrichtung bei ihren Handluftpumpen in Anwendung gebracht.

Bei den zweistiefeligen Ventilluftpumpen, wie sie oben beschrieben sind, wird derselbe Vorteil durch den Babinetschen Hahn erreicht.

Das Wesentliche dieser Einrichtung besteht darin, daß, wenn ein gewisser Grad von Verdünnung erreicht ist, die Verbindung des Stiefels *D* mit dem Rezipienten abgesperrt, dagegen eine Verbindung des Stiefels *S* mit dem Stiefel *D* hergestellt wird. Nun kann nur noch der Stiefel *S* Luft aus dem Rezipienten saugen; wenn aber der Kolben in *S* niedergeht und der in *D* steigt, so wird die unter dem Kolben in *S* befindliche Luft nicht verdichtet, sondern sie wird ohne Verdichtung in den Zylinder *D* hinüberschafft, so daß, wenn der Kolben in *S* auf dem Boden ankommt, sich im schädlichen Raume keine Luft von atmosphärischer Dichtigkeit, sondern nur eine sehr verdünnte Luft befindet.

Wenn nun der Kolben in *S* zu steigen, der in *D* niederzugehen beginnt, so wird die Kommunikation zwischen den beiden Zylindern durch das Bodenventil in *D* unterbrochen und die in *D* unter dem Kolben befindliche Luft durch denselben entfernt.

In den Fig. 496 bis 498 ist der Babinetsche Hahn mit *h* bezeichnet; seine Einrichtung ist aus Fig. 503 und 504 näher zu ersehen. Auf den Umfang des Hahnes führen drei Kanäle; einer nach oben führt zum Zylinder *D*; einer nach unten führt durch ein Rohr *t*, welches in der vorderen Ansicht der Luftpumpe, Fig. 497, deutlich zu sehen ist, zum Boden des Stiefels *S*, wo es mit einer Öffnung *v*, Fig. 500, mündet; der dritte vom Hahn nach links gehende Kanal endlich führt zum Rezipienten. Solange der Hahn die Stellung Fig. 503 behält, welcher auch Fig. 497 und Fig. 498 entspricht, sind beide Zylinder mit dem Rezipienten in Verbindung, und jeder Zylinder saugt aus dem Rezipienten, wenn sein Kolben aufsteigt. Ist man auf diese Weise so weit gekommen, daß ein ferneres Pumpen die Barometerprobe nicht weiter fallen macht, so wird der Hahn *h* um 90 Grad gedreht, so daß er in die Stellung Fig. 504 kommt. Jetzt ist, wie man sieht, die Verbindung zwischen *D* und *S*, d. h. die Verbindung zwischen beiden Stiefeln, hergestellt, aber die

Verbindung zwischem dem Stiefel *D* und dem Rezipienten *R* unterbrochen. Nun wird bei weiterem Pumpen die Barometerprobe von neuem sinken, bis eine neue weitere Grenze der Verdünnung erreicht ist. Mit Hilfe des Babinetschen Hahnes läßt sich, wenn die Pumpe trocken ist, die Verdünnung ungefähr so weit treiben, daß die Barometerprobe nur noch einen Luftdruck von 1 mm anzeigt.

§ 169. Die zweistiefelige Hahnluftpumpe. Eine solche Luftpumpe ist in Fig. 505 dargestellt, welche wohl auch ohne detaillierte Beschreibung

Fig. 505.

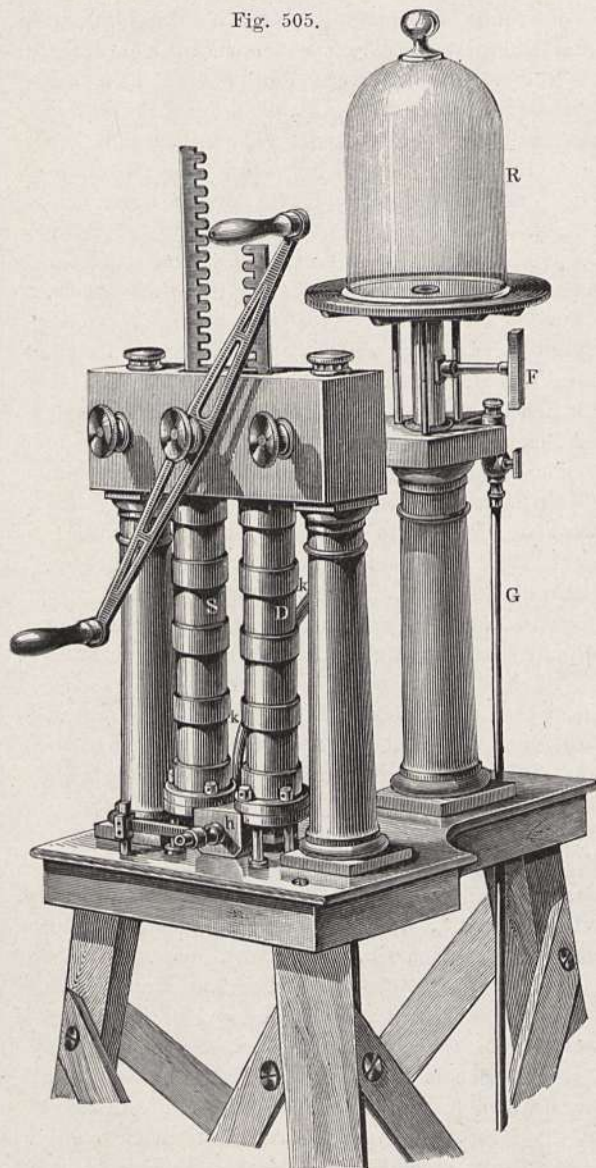


Fig. 506.

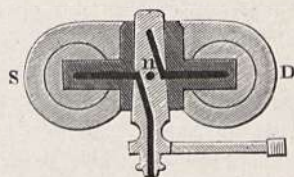


Fig. 507.

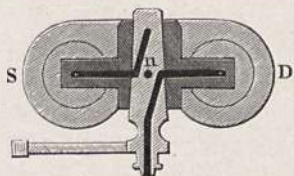
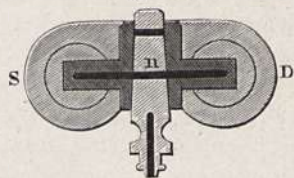


Fig. 508.



verständlich sein wird, und zwar um so mehr, da alle Teile mit denselben Buchstaben bezeichnet sind wie die entsprechenden Teile der zweistiefeligen Ventilpumpe. Von dem Rezipienten führt ein Rohr *k*, welches in unserer Figur nur stellenweise sichtbar ist, zu einem Hahn *h*, welcher sich in

der Bodenplatte zwischen den beiden Zylindern befindet; je nachdem dieser Hahn gestellt ist, wird durch ihn die Verbindung entweder des einen oder

des anderen Stiefels mit dem Rezipienten vermittelt, wie dies Fig. 506 und Fig. 507 erläutern.

Wenn der Hahn die Stellung Fig. 506 einnimmt, so ist durch ihn der Stiefel rechts (*D*) mit dem Rezipienten in Verbindung, von dem Stiefel links (*S*) führt aber ein Kanal in die äußere Luft, dies ist also die Stellung des Hahns, wenn der bei dieser Luftpumpe nicht mit einem Ventil versehene Kolben im Stiefel *D* eben in die Höhe, der in *S* aber niedergeht.

Ist der Kolben in *D* oben, der in *S* unten angekommen, so wird der Hahn *h* durch eine halbe Umdrehung in die Stellung Fig. 507 gebracht, so daß jetzt *S* mit dem Rezipienten und *D* mit der äußeren Luft kommuniziert.

Bei jedem Umsetzen der Kolbenbewegung muß natürlich der Hahn *h* um 180 Grad gedreht werden, was bei vielen derartigen Instrumenten durch eine besondere Vorrichtung (Hahnsteuerung) bewerkstelligt wird, deren Besprechung hier nicht nötig scheint.

Grassmann hat bereits im Jahre 1819 diesem Hahn eine Einrichtung gegeben, mittels deren er tauglich wird, bei der zweistiefeligen Hahnluftpumpe dasselbe Prinzip in Anwendung zu bringen, welches dem Babinetschen Hahn bei den zweistiefeligen Ventilluftpumpen zugrunde liegt. Der Hahn ist nämlich mit einer weiteren Durchbohrung *n* versehen, welche rechtwinkelig zu der Ebene der bisher betrachteten Kanäle steht. Wird nun der Hahn aus der Stellung Fig. 506 durch eine Viertelumdrehung in die Stellung Fig. 508 gebracht, so sind nun beide Zylinder miteinander verbunden und beide sowohl vom Rezipienten als auch von der äußeren Luft abgesperrt.

Nachdem nun durch die oben beschriebenen Manipulationen, bei welchen der Hahn abwechselnd aus der Stellung Fig. 506 in die Stellung Fig. 507 gebracht wird, die so mögliche Grenze der Verdünnung erreicht ist, wird von nun an, wenn der Zylinder *S* Luft aus dem Rezipienten gesaugt hat, der Hahn aus der Stellung Fig. 507 in die Stellung Fig. 508 gebracht und also beim Niedergange des Kolbens in *S* die unter demselben befindliche Luft in den Zylinder *D* geschafft, so daß, wenn nun der Kolben in *S* unten ankommt, sich nur bedeutend verdünnte Luft im schädlichen Raume befindet. Ehe nun das Aufziehen des Kolbens in *S* wieder beginnt, wird der Hahn wieder in die Stellung Fig. 507 gebracht usw.

§ 170. Einstiefelig doppelt wirkende Luftpumpen. Gleichen Effekt wie die zweistiefeligen geben auch die einstiefeligen doppelt wirkenden Luftpumpen, d. h. solche, bei welchen, während der Kolben in die Höhe geht, die Luft aus dem Rezipienten in den unteren, während er hinabgeht, aber in den oberen Teil des Stiefels gesaugt wird. An solchen doppelt wirkenden Luftpumpen, welche übrigens weit weniger verbreitet sind als die zweistiefeligen, hat man in neuerer Zeit noch die Verbesserung angebracht, daß die auf und ab gehende Bewegung des Kolbens durch eine Kurbel vermittelt wird, deren mit einem Schwungrad versehene Achse stets in gleicher Richtung gedreht wird.

Sehr einfach und zweckmäßig ist die Konstruktion der doppelt wirkenden Luftpumpe von Bianchi, Fig. 509, deren Spiel durch die Durchschnittsfigur 510 erläutert wird. Durch einen vor *B* angesetzten Kautschukschlauch, der über eine Drahtspirale gezogen ist, wird der zu evakuierende Rezipient mit dem Stiefel verbunden. Beim Niedergange des Kolbens strömt die vom

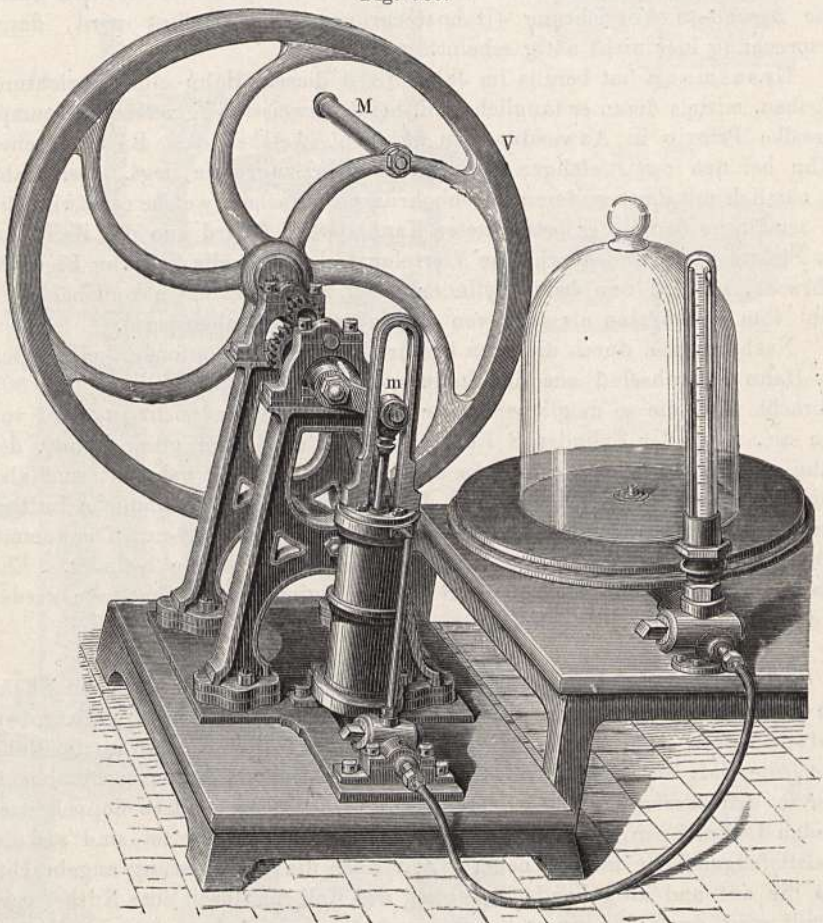
Rezipienten kommende Luft durch das Rohr *C* bis *s* in den oberen Teil des Zylinders ein, während die im unteren Teile des Zylinders komprimierte Luft durch das Ventil *b* und die Höhlung *X* der Kolbenstange entweicht.

Beim Aufgange des Kolbens strömt die vom Rezipienten kommende Luft bei *s'* in den unteren Teil des Zylinders ein, während die in dem oberen Teile desselben befindliche Luft durch das Ventil *a* entweicht.

Die auf und nieder gehende Bewegung des Kolbens wird bei der Bianchischen Luftpumpe dadurch bewerkstelligt, daß das obere Ende der Kolbenstange mit dem Kurbelarme *m*, Fig. 509, verbunden ist.

Durch Umdrehung des Kurbelarmes *m* wird aber die Kolbenstange nicht allein aufgezogen und dann wieder hinuntergeschoben, sondern ihr oberes

Fig. 509.



Ende wird auch bald nach rechts, bald nach links bewegt. Damit aber die Kolbenstange auch dieser letzteren Bewegung folgen könne, ist der Zylinder um eine mit der Bodenplatte zusammenhängende horizontale Achse drehbar, in deren vorderem Teile bei *B* sich der Kanal befindet, durch welchen die vom Rezipienten kommende Luft in den Stiefel eintritt, und welche in zwei Zapfenlagern ruht, von welchen in Fig. 509 nur das vordere sichtbar ist.

Wenn also die Kurbel umgedreht wird, so muß der Zylinder um diese Achse ganz so oszillieren, wie es bei oszillierenden Dampfmaschinen der Fall ist.

Da die Maschine durch ein gleichförmiges Umdrehen des Schwungrades *V* in Gang gesetzt wird, so bedarf sie nur einer sehr geringen Kraftanstrengung, und da der gußeiserne Zylinder derselben ziemlich bedeutende Dimensionen hat, so evakuiert sie sehr rasch.

Bei *R* ist ein dem Babinetschen (§ 168) entsprechender Hahn angebracht, auf dessen nähere Beschreibung wir hier nicht eingehen können.

Um die Nachteile zu vermeiden, welche die Einfettung des Kolbens mit sich bringt, hat Deleuil in Paris eine einstiefelige doppelwirkende Luftpumpe mit freiem Kolben, d. h. mit einem Kolben konstruiert, der nicht fest an die Zylinderwände anschließt. Der Stiefel ist von Glas, der Kolben von Metall. Der Durchmesser des Kolbens (6 cm) ist $\frac{1}{20}$ mm kleiner als der des Stiefels. Die Länge des Kolbens, auf dessen Umfang 1 cm voneinander abgehend parallel mit der Basis kleine Rinnen eingedreht sind, ist ungefähr doppelt so groß als der Durchmesser.

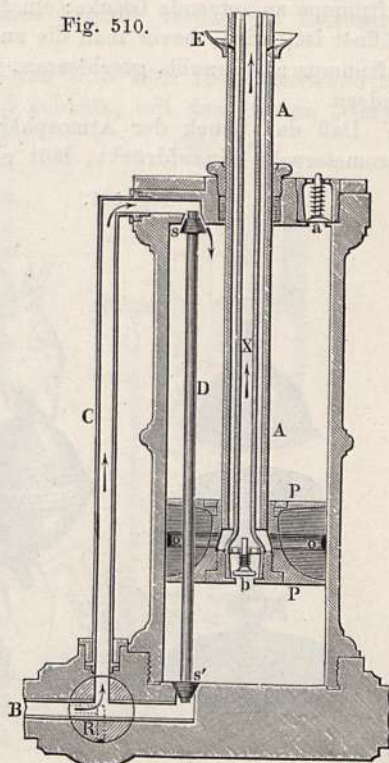
Die Wirksamkeit dieser Pumpe erklärt sich einerseits durch den Umstand, daß sich Luft in kapillaren Räumen nur schwer bewegt, andererseits aber dadurch, daß in doppelwirkenden Luftpumpen die Druckdifferenz zu beiden Seiten des Kolbens stets unbedeutend ist.

Die Vorteile, welche die Deleuilsche Pumpe bietet, beruhen vorzugsweise darin, daß keine Kolbenreibung stattfindet und daß alle Verunreinigung der Ventile durch Fett wegfällt. Deleuil brachte mit diesem Instrumente unter Anwendung eines Babinetschen Hahnes in einem Rezipienten von 1 Liter Inhalt eine Luftverdünnung bis zu 4 mm Quecksilberdruck hervor.

Hochgesang in Ohrdruf bei Gotha hat eine zweistiefelige doppelwirkende Luftpumpe konstruiert, welche natürlich sehr rasch evakuiert.

§ 171. Die wichtigsten Luftpumpenversuche. Otto von Guericke machte mit seiner Maschine den merkwürdigen Versuch mit den Magdeburger Halbkugeln, welcher darin bestand, eine Hohlkugel von Metall, deren Hälften, Fig. 511, nur einfach aufeinander gesetzt waren, luftleer zu machen. Ehe die Luft ausgepumpt ist, sind die beiden Hälften leicht zu trennen; wenn aber im Inneren keine Luft mehr vorhanden ist, um dem äußeren Luftdrucke das Gleichgewicht zu halten, so haften sie außerordentlich stark zusammen. Mag z. B. der Radius der Kugel nur 1 dm sein, so

Fig. 510.



beträgt der Querschnitt der Kugel 314 qcm, und demnach beträgt der äußere Druck, welcher die Hälften zusammenpreßt, mehr als 314 kg. Um den Kontakt vollständiger zu machen, beschmiert man die Ränder der Halbkugeln, welche aufeinander gesetzt werden, mit Fett, wie eine auf den Teller der Luftpumpe zu setzende Glocke; ein Hahn, welcher während des Auspumpens geöffnet ist, wird, bevor man die zusammengedrückten Halbkugeln von der Luftpumpe abschraubt, geschlossen, um den Wiedereintritt der Luft zu verhindern.

Daß der Druck der Atmosphäre es ist, welcher das Quecksilber ins Barometerrohr hinaufdrückt, läßt sich sehr schön mittels der Luftpumpe

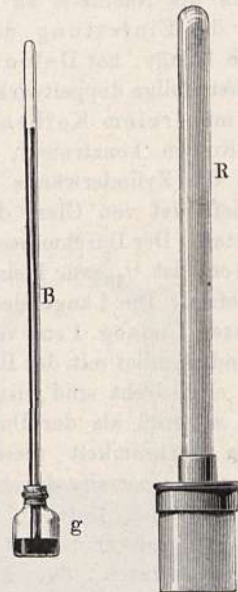
Fig. 511.



Fig. 512.



Fig. 513.



zeigen. Ein Barometer von der durch Fig. 512 erläuterten Einrichtung wird unter dem langen und engen Rezipienten *R*, Fig. 513, auf den Teller der Luftpumpe gebracht. Wird nun evakuiert, so wird der Druck vermindert, welcher auf dem Quecksilberspiegel im Gefäße *g* lastet, das Quecksilber in der Röhre sinkt; es steigt wieder, sobald die Luft wieder zugelassen wird.

Unter den vielen Luftpumpenversuchen wollen wir nur noch einige andeuten. Man zeigt z. B. mit Hilfe der Luftpumpe, daß brennende Körper im luftleeren Raume verlöschen; daß der Rauch wie ein schwerer Körper zu Boden fällt; daß Luft im Wasser absorbiert enthalten ist; daß sich eine Luftschicht zwischen den Flüssigkeiten und den Wänden der Gefäße befindet, in welchen sie enthalten sind, denn diese Luftschicht zeigt sich durch eine Menge kleiner Bläschen, welche in dem Verhältnis wachsen, als der Luftdruck abnimmt. Mit Hilfe der Luftpumpe kann man laues Wasser zum Kochen bringen usw.

Von einigen Versuchen mit der Luftpumpe war schon früher die Rede, von anderen, wie z. B. dem Sieden unter geringem Luftdruck, dem Gefrieren durch rasche Verdampfung usw., wird noch später die Rede sein.

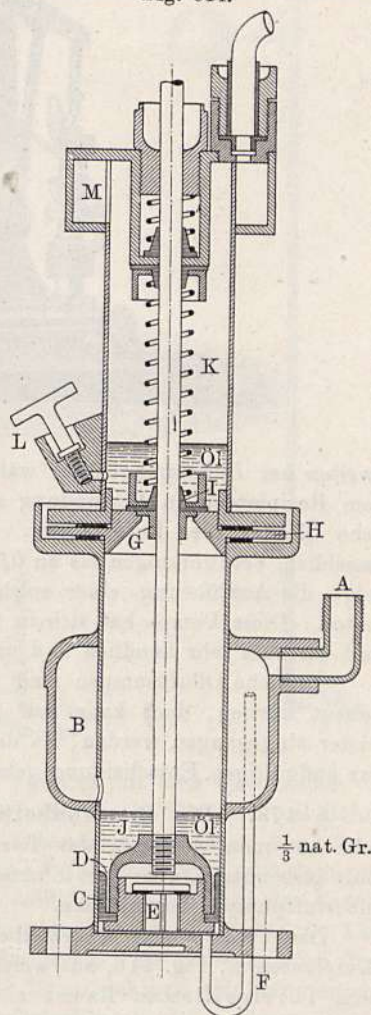
§ 172. Die Ölluftpumpen. Das Gemeinsame dieser Pumpen liegt darin, daß die Luft aus dem schädlichen Raume durch Öl verdrängt wird, weshalb schon mit einem einzigen Zylinder und Kolben höhere Verdünnungen erreicht werden als mit den gewöhnlichen Kolbenpumpen. Durch Kombination zweier Zylinder nach dem Babinetschen Prinzip werden die Leistungen noch weiter gesteigert.

Die erste Ölluftpumpe ist wohl die von Rob. Gill 1874 konstruierte¹⁾. Vor einigen Jahren kam eine von Fleuß gebaute, mit dem Namen „Geryk-pumpe“ bezeichnete Ölluftpumpe von England aus nach Deutschland, wo sie seither von der Firma Arthur Pfeiffer in Wetzlar fabriziert wird. Die Fig. 514 gibt einen Vertikalschnitt durch einen der beiden Zylinder in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Größe. In der unteren Hälfte des metallischen Stiefels bewegt sich der mit einer losen Ledermanschette *C* gedichtete mit Öl überdeckte Kolben auf und nieder.

Fig. 514.

Ein unterhalb *B* befindliches Luftloch verbindet den Stiefelraum durch die umhüllende Kammer mit dem Saugrohr, welches zum Rezipienten führt. Im Kolben befindet sich ein Ventil *E*, welches aber nur beim Beginn des Auspumpens funktioniert und geschlossen bleibt, sobald der Druck auf etwa 13 mm gesunken ist. Während dieser ersten Kolbenbewegungen wird Luft durch das Saugrohr *F* unter den Kolben gesaugt, wodurch derselbe entlastet wird. Beim Heben des Kolbens wird das Luftloch *B* abgesperrt, die über dem Kolben befindliche Luft zu dem Auslaßventil *G* emporgetrieben. Der dadurch entstandene Druck preßt die Lederlinderung fest an die Zylinderwand und verhindert das Durchtreten von Öl unter den Kolben. Sollte dennoch etwas Öl unter den Kolben gelangen, so wird es durch das Ventil *E* wieder über den Kolben gepreßt, sobald derselbe den Boden erreicht.

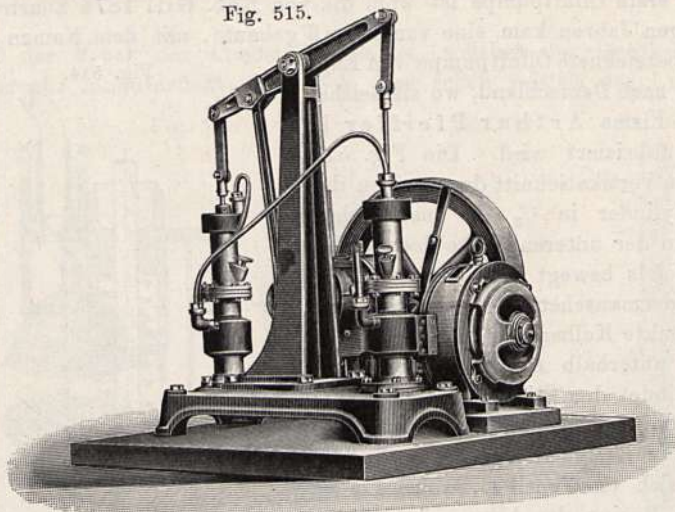
Kommt der Kolben an das obere Ende, so hebt er das Ventil *G* um $6\frac{1}{2}$ mm, preßt die Luft und hinterher einen Teil des Öles durch das Ventil *G* empor. Die Kolbenstange ist durch eine Liderung bei *I*, deren Flansch die Hülse *G* bedeckt, abgedichtet. Sobald der Kolben wieder um $6\frac{1}{2}$ mm gesunken ist, schließt sich wieder das Ventil *G*, nachdem vorher eine ent-



¹⁾ Dieselbe ist beschrieben in Fricks Physik. Technik, 6. Aufl., von O. Lehmann, S. 368.

sprechende Menge Öl in den unteren Zylinder geflossen ist. Sobald dann der Kolben so weit gesunken ist, daß das Luftloch *B* frei wird, strömt Luft aus dem Rezipienten durch *A* und *B* in das Innere des Zylinders. Auf diese Weise werden Verdünnungen bis zu $\frac{1}{4}$ mm erreicht. Um die Wirkung weiter zu steigern, werden zwei solche Stiefel in der Weise miteinander verbunden, daß das Saugrohr des ersten mit dem oberen Zylinderraum des

Fig. 515.



zweiten bei *L* kommuniziert, während das Saugrohr des zweiten erst mit dem Rezipienten in Verbindung steht. Hierdurch wird das in *K* befindliche Öl von aller Luft befreit. Eine solche Duplexpumpe gestattet dann angeblich, Verdünnungen bis zu 0,0002 mm Quecksilber zu erreichen. Fig. 515 zeigt die Ausführung einer solchen Pumpe mit Schwungrad und Elektromotor. Diese Pumpe hat sich in zwölfjährigem Gebrauche sehr gut bewährt und wird als sehr handlich und unverwüsthlich gerühmt¹⁾.

Ähnliche Ölluftpumpen sind in neuerer Zeit auch von anderen Firmen gebaut worden, doch kann auf diese Konstruktionen vorläufig hier nicht weiter eingegangen werden, da die Patentverhandlungen darüber noch nicht zur endgültigen Entscheidung gelangt sind.

§ 173. Die Quecksilberluftpumpen; Geißlers Pumpe. Schon früh hat man versucht, das Torricellische Vakuum zum Auspumpen der Luft zu benutzen, aber erst in neuerer Zeit ist es gelungen, brauchbare Quecksilberluftpumpen herzustellen.

Das Prinzip aller Quecksilberluftpumpen besteht darin, daß man den Rezipienten *R*, Fig. 516, aus welchem die Luft ausgepumpt werden soll, mit dem Torricellischen Raume *v* mittels eines Kanals in Verbindung setzt, welche Verbindung beispielsweise durch einen Hahn *h* hergestellt oder unterbrochen werden kann. Die Luft aus *R* wird sich dann zum Teil in das Vakuum begeben und dort einen Druck auf die Quecksilbersäule ausüben, wodurch die Höhe derselben, die ursprünglich *op* betrug, desto mehr vermindert wird, je größer der Raum *R* und je kleiner der Raum des Vakuums *v* ist.

¹⁾ Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterr. XIV, 285; XVII, 61.

Sobald der Druck in diesen beiden Räumen gleich groß geworden, kommt auch das Quecksilber zur Ruhe. Man hat nun den Hahn *h* zu schließen und das Torricellische Vakuum aufs neue herzustellen. Je nach der Art, wie man das letztere bewerkstelligt, unterscheidet man zwei verschiedene Systeme von Quecksilberluftpumpen. Bei dem ersten System (welches wir System

Fig. 516.

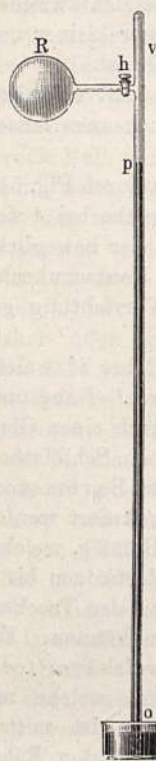


Fig. 517.

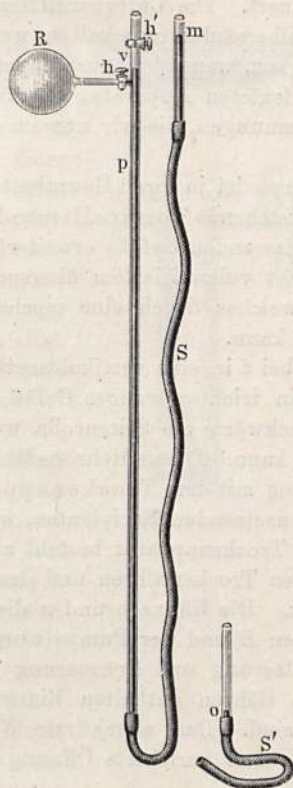
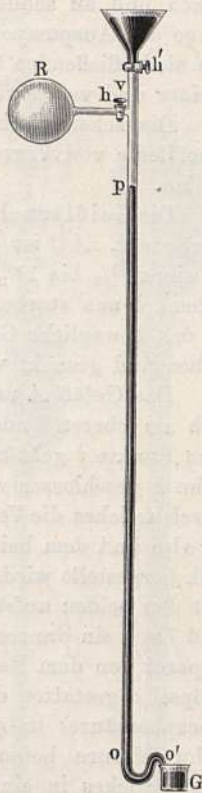


Fig. 518.



Geißler nennen wollen) nimmt man die Füllung mit dem Quecksilber von unten nach oben vor und entfernt die Luft am oberen Ende aus der Röhre. Zu diesem Zwecke kann man, wie Fig. 517 schematisch andeutet, den offenen Schenkel des Heberbarometers durch einen Kautschukschlauch mit dem verschlossenen Schenkel verbinden und durch Anheben des ersteren das Quecksilber auch in letzterem zum Ansteigen veranlassen. Zum Austritte der Luft dient der Hahn *h'* an dem oberen Ende der Röhre, bis zu dem oder über welchen hinaus man das Quecksilber steigen läßt. Schließt man dann wieder diesen Hahn, senkt den beweglichen Schenkel *S* in die Lage *S'*, so ist das Vakuum wiederhergestellt und kann durch Öffnung des Hahnes *h* wieder mit *R* in Verbindung gesetzt werden. Dieses Spiel ist so oft zu wiederholen, bis zwischen *h* und *h'* keine Luft mehr vorhanden ist.

Bei dem zweiten System von Quecksilberluftpumpen (System Sprengel) wird die Neufüllung mit Quecksilber von oben nach unten vorgenommen und die Luft am unteren Ende aus der Röhre geschafft.

Fig. 518 zeigt die dazu nötige schematische Anordnung. Das Quecksilber fließt in vollem Strahle aus dem Trichter T durch den Hahn h' in den Raum oberhalb p , drängt die Luft vor sich her nach dem unteren Ende und von dort durch die Öffnung o' hinaus. Das mit ausfließende Quecksilber wird in einem untergesetzten Gefäße G aufgefangen. Man erkennt sofort, daß es in diesem Falle nicht nötig ist, den Hahn h wechselweise mit h' zu öffnen und zu schließen. Man kann beide Hähne gleich offen lassen, solange das Auspumpen andauert. Die Luftquantitäten, welche sich zwischen die niederfließenden Quecksilbersäulen einschalten, werden immer kleiner und kleiner und verschwinden ganz, wenn das Auspumpen zu Ende ist.

Die schematisch angedeuteten Apparate, Fig. 517 und 518, erfordern eine Reihe von Vervollkommnungen, die wir nun im einzelnen kennen lernen wollen.

Die Geißlersche Pumpe ist in ihren Hauptbestandteilen durch Fig. 519 dargestellt. AC ist die feststehende Torricellische Röhre, welche bei A sich zu einem $\frac{1}{2}$ bis $1\frac{1}{2}$ Liter fassenden Gefäße erweitert. D ist der bewegliche Schenkel aus starkem, nicht vulkanisiertem überspannenen Kautschukrohr, B das bewegliche Gefäß, welches durch eine mechanische Vorrichtung gehoben und gesenkt werden kann.

Das Gefäß A mündet bei t in eine vertikal ansteigende Röhre ti , welche sich am oberen Ende in ein trichterförmiges Gefäß i erweitert. Nahe über dem Punkte t geht nach rückwärts ein Seitenrohr, welches durch einen Glashahn h geschlossen werden kann. Dieses Rohr endet bei s in ein Schliffstück, durch welches die Verbindung mit dem Trockenapparat samt Barometerprobe und dem bei R anzusetzenden Rezipienten, welcher evakuiert werden soll, hergestellt wird. Der Trockenapparat besteht aus dem Gefäß q , welches mit den beiden aufsteigenden Trockenröhren und den Röhrenfortsätzen bis R und bis s ein Ganzes bildet. Die Hähne p und n dienen dazu, den Trockenapparat von dem Rezipienten R und der Pumpe absperrern zu können. Ein Stöpsel o gestattet die Entleerung und Erneuerung der Schwefelsäure (oder Phosphorsäure) in q . Die Röhren enthalten Bimssteinstücke, welche mit Schwefelsäure befeuchtet sind. Das abgekürzte Barometer m ist mittels Schliffstückes in eine nach oben gerichtete Öffnung der horizontalen Röhre eingesetzt.

Zwischen t und i befinden sich noch zwei Hähne h' und h'' , von denen der zweite nicht unbedingt erforderlich, aber zur Erreichung eines vollkommenen Vakuums sehr dienlich ist¹⁾. Bei i kann noch ein eingeschliffenes krummes Glasrohr k eingesetzt werden, welches die ausgepumpten Gase in eine pneumatische Wanne l überzuführen gestattet. Die vollkommene Dichtung bei i wird durch etwas eingegossenes Quecksilber sichergestellt.

Die Glashähne werden am besten durch eine Mischung von reinem Wachs mit reinstem Vaseline (einem mineralischen Fett) eingefettet. Diese Mischung kann in verschiedenem Grade von Dickflüssigkeit hergestellt werden, entwickelt keine Dämpfe und verharzt nicht²⁾.

Das Auspumpen erfordert nun folgende Operationen:

¹⁾ Bei den Geißlerschen Pumpen älterer Konstruktion fehlte der zweite Hahn.

²⁾ Röntgen, Wied. Ann. XXIII, S. 26.

Die Hähne p , n , h' und h'' sind offen, h wird geschlossen, das Gefäß B so weit gehoben, daß das Quecksilber von A über den Hahn h' emporsteigt. Nun wird h' geschlossen, B gesenkt, h geöffnet. A füllt sich mit Luft aus dem Rezipienten R . Hierauf wird wieder h geschlossen, h' geöffnet und B gehoben wie früher und so fort. Ist auf diese Weise

beinahe alle Luft hinausgeschafft, was man daran erkennt, daß beim Ansteigen des Quecksilbers in t nur noch ein kleines Bläschen übrig bleibt, wobei auch die Barometerprobe m nahezu den Druck Null anzeigt, so kann man, wenn nötig, die Evakuierung noch weiter vervollkommen, indem man von jetzt an auch den obersten Hahn h'' mit benutzt, welcher bisher offen gestanden hat. Man läßt zu diesem Behufe das Quecksilber bis über h'' ansteigen, schließt dann h'' , senkt B , bis das Quecksilber unter h' gesunken, schließt nun h' und senkt dann erst bis zur Entleerung des Gefäßes A . Öffnet man nun h und schließt wieder, hebt dann das Quecksilber wiederum bis zum Hahn h' , so kann man die dort zusammengedrückte Spur von Luft durch Öffnen von h' mit dem Vakuum zwischen h' und h'' in Verbindung setzen. Hierdurch wird dieselbe verhindert, am Glase zu adhären, von wo sie sich sonst bei Wiederherstellung des Vakuums in A in demselben ausbreiten könnte. Das Vakuum zwischen den Hähnen h' und h'' wirkt also analog der Vorrichtung von Babinet.

Beim Gebrauch der Pumpe ist Vorsicht nötig, damit das Quecksilber nicht zu rasch in das Vakuum einströme, da sonst durch den harten Anprall des Quecksilbers das Gefäß zerschlagen werden könnte.

Statt der oben beschriebenen Einrichtung mit den Hähnen h und h' findet man manchmal eine abweichende Konstruktion, bei welcher diese beiden Hähne durch einen einzigen nach dem Prinzip des Senguerdschen durchbohrten Hahnes ersetzt sind.

Fig. 519.

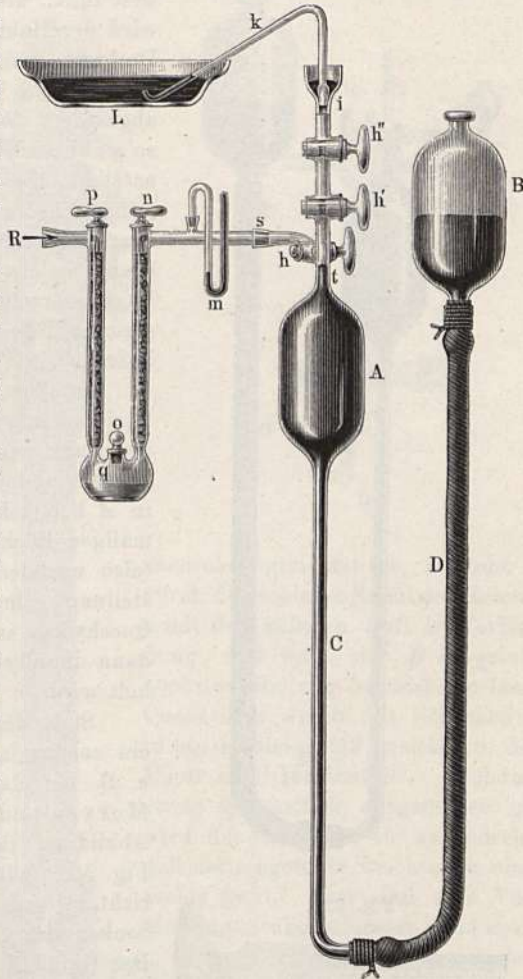


Fig. 520 zeigt diese ältere Konstruktion ¹⁾, Fig. 521 den Hahn für sich. Je nach Stellung des Hahnes ist durch ihn die Verbindung zwischen t und r oder t und p hergestellt. Das Spiel des Apparates ist dann folgendes:

Wenn der Hahn bei o so gestellt ist, daß Verbindung zwischen A und p besteht, wird das mit Quecksilber gefüllte Gefäß B langsam gehoben, so daß sich zuerst A und dann auch p ungefähr so weit füllt, wie es die Figur zeigt. Alsdann wird der Hahn um 45° gedreht (an welcher Drehung auch die Kugel p teilnimmt) und dadurch alle Verbindung von A nach oben abgesperrt. Wird nun B allmählich gesenkt, so sinkt auch das Quecksilber in A , und es entsteht hier eine Torricellische Leere, mit welcher man den Rezipienten durch eine abermalige Drehung des Hahnes um 45° (durch welche nun die Kugel p in eine solche Lage gebracht wird, daß ihr Mittelpunkt in gleicher Höhe mit der Achse des Hahnes sich befindet) in Verbindung setzt.

Ist dann ein Teil der Luft aus dem Rezipienten nach A übergegangen, so wird der Hahn zunächst wieder um 45° zurückgedreht und durch Hebung von B die Luft in A komprimiert, welche dann nach abermaliger Rückdrehung des Hahnes um 45° (also nachdem er wieder in seine Anfangsstellung gebracht worden ist) durch das Quecksilber in p ausgetrieben wird, worauf dann dieselbe Reihe von Operationen wiederholt wird.

Statt des Glashahnes wird wohl auch ein solcher aus Stahl verwendet, wie dies z. B. bei den Quecksilberluftpumpen von Morren und von Jolly der Fall ist. Die Abbildung des letzteren Instrumentes in Fig. 522 läßt zugleich die mechanische Einrichtung ersehen, wodurch das Heben und Senken des Gefäßes B bewerkstelligt wird. Das Gefäß A ist oben und unten in eiserne Fassungen eingekittet, deren obere den Teller T trägt, und mit dem Hahn o versehen, während die untere mit dem eisernen Rohre C

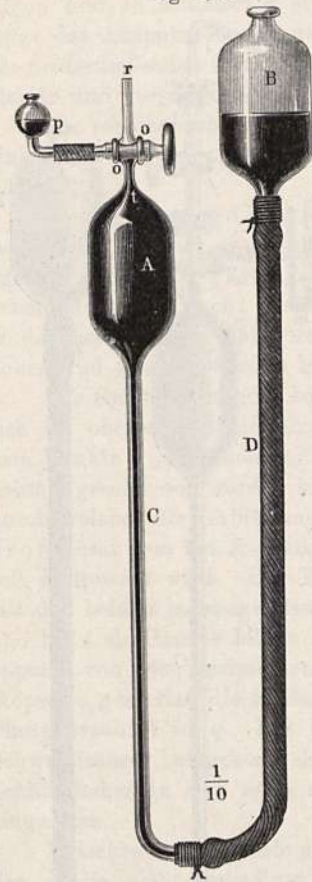
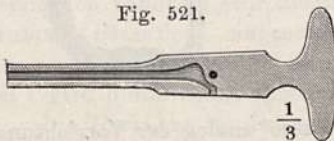


Fig. 521.



verbunden ist. Der Hahn o , dessen Einrichtung Fig. 523 und 524 deutlicher zeigt, unterscheidet sich von dem in Fig. 521 dargestellten dadurch, daß er noch einen Kanal K hat, welcher rechtwinklig steht zu der gerade durchgehenden, mit dem Griffe des Hahnes o parallel laufenden Bohrung.

¹⁾ Die neueren Geißlerschen Pumpen mit Senguerdschem Hahn haben noch einen zweiten gewöhnlichen Hahn oberhalb des ersten.

Auf der einen Seite der vorderen Hahnenfläche ist eine Linie eingefeilt, welche mit *K* parallel läuft. Wird der Hahn so gedreht, daß der eingefeilte Strich

Fig. 522.

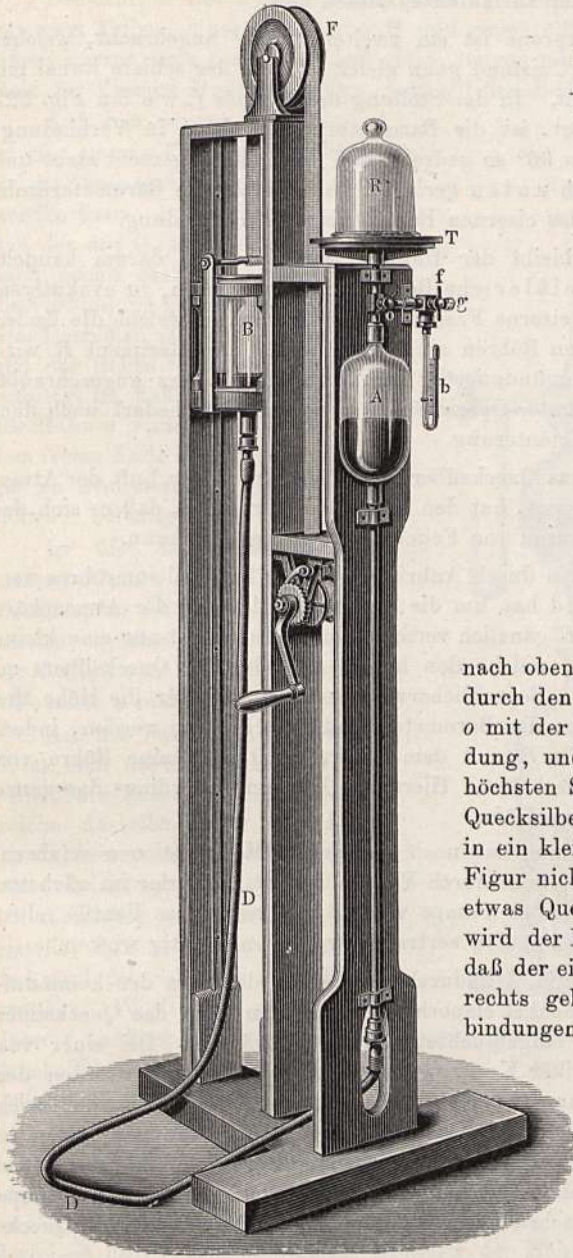


Fig. 523.



Fig. 524.

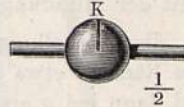
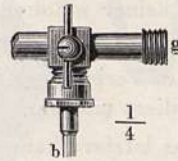


Fig. 525.



nach oben gerichtet ist, so steht *A* durch den schiefen Kanal des Hahnes *o* mit der äußeren Luft in Verbindung, und wenn sich *B* in seiner höchsten Stellung befindet, so läuft Quecksilber durch das Röhrchen *n* in ein kleines Gefäß, welches in der Figur nicht sichtbar ist. Nachdem etwas Quecksilber ausgeflossen ist, wird der Hahn um 45° so gedreht, daß der eingefeilte Strich nach oben rechts geht. Nun sind alle Verbindungen abgeschlossen, und wenn *B* bis in seine tiefste Stellung herabgelassen wird, so sinkt das Quecksilber in *A*, und über demselben bildet sich ein Torricellisches Vakuum, in welches die Luft aus dem Rezipienten

R einströmt, sobald man den Hahn um 45° weiter dreht, so daß der Griff des Hahnes vertikal steht und der eingefeilte Strich horizontal nach rechts schaut. Jetzt ist auch die Barometerprobe *b* mit *A* in Verbindung, und man

kann den Grad der Verdünnung ablesen. Hat sich alles ins Gleichgewicht gestellt, so wird der Hahn o wieder um 45° zurückgedreht, B in seine höchste Stellung gebracht, der Hahn o nochmals um 45° zurückgedreht, um abermals etwas Quecksilber auslaufen zu lassen usw.

Über der Barometerprobe ist ein zweiter Hahn f angebracht, welcher dem Hahn o bis auf den Umstand ganz gleich ist, daß der schiefe Kanal mit der Mündung n ganz fehlt. In der Stellung des Hahnes f , wie ihn Fig. 522 (deutlicher Fig. 525) zeigt, ist die Barometerprobe mit A in Verbindung; wird aber der Hahn f um 90° so gedreht, daß der Griff wagerecht steht und der eingefeilte Strich nach unten gerichtet ist, so steht die Barometerprobe auch mit der Mündung des eisernen Rohres bei g in Verbindung.

In dieser Stellung bleibt der Hahn f , wenn es sich darum handelt, kleinere Räume, etwa Geißlersche Röhren und dergleichen, zu evakuieren. Es wird dann bei g eine eiserne Fassung angeschraubt, in welche die Enden der luftleer zu machenden Röhren eingekittet sind. Der Rezipient R wird entfernt und die Röhrenmündung in der Mitte des Tellers zugeschraubt. Wie der Hahn o während der Operation zu verstellen ist, bedarf nach dem Obigen keiner weiteren Erläuterung.

Der Umstand, daß das Quecksilber im Gefäße B mit der Luft der Atmosphäre in Verbindung kommt, hat den Übelstand zur Folge, daß es sich dabei oxydiert und auch Spuren von Feuchtigkeit aufnehmen kann.

Das letztere kann man durch Anbringung eines Chlorcalciumrohres verhindern. A. P. Weinhold hat, um die Kommunikation mit der Atmosphäre zu vermeiden, das Gefäß B gänzlich verschlossen und daselbst nur eine kleine Luftblase zurückbehalten, welche den harten Anschlag des Quecksilbers zu verhindern bestimmt ist. Begreiflicherweise muß dann aber die Höhe des Schenkels D um die Höhe des Barometerstandes vergrößert werden, indem man zwischen dem Gefäße B und dem Schlauche D noch eine Röhre von entsprechender Länge einschaltet. Hierdurch bekommt allerdings das ganze Instrument eine unbequeme Höhe.

Die Geißlersche Pumpe hat noch mancherlei Modifikationen erfahren, so hat z. B. v. Babo den Hahn durch Ventile ersetzt. Bei der im nächsten Paragraphen zu beschreibenden Pumpe von Töpler sind diese Ventile selbst wiederum durch Quecksilbersäulen vertreten, welche selbsttätig wirken.

Statt das Quecksilber in A dadurch anzuheben, daß man den kommunizierenden beweglichen Schenkel emporhebt, kann man auch das Quecksilber in letzterem durch einen eingetauchten Körper verdrängen. Bei einer von dem Innsbrucker Mechaniker Kravogl noch vor dem Bekanntwerden der Geißlerschen Pumpe konstruierten Quecksilberluftpumpe¹⁾ wurde durch einen Mechanismus ein Stahlzylinder durch eine Stopfbüchse von unten in das Gefäß A hineingeschoben und wieder zurückgezogen und hierdurch das den Stahlzylinder bedeckende Quecksilber gehoben und gesenkt. Die Pumpe ähnelt dann der oben beschriebenen Ölpumpe, in der das Öl durch Quecksilber ersetzt ist.

¹⁾ Beschrieben von A. v. Waltenhofen (Sitzungsber. d. Wiener Akad. 1861, Bd. 44).

Endlich kann die Hubhöhe des Quecksilbers in der Torricellischen Röhre nach Poggendorff¹⁾ dadurch vermindert werden, daß man eine gewöhnliche Luftpumpe zu Hilfe nimmt.

Der Körper des Poggendorffschen Instrumentes, Fig. 526, besteht aus zwei Teilen, einer Glasflasche *B* und einem eiförmigen Glasgefäß *A* mit einem kurzen Hals nach oben und einem langen nach unten, welcher in den Hals der Flasche *B* eingeschliffen, fast auf den Boden derselben hinabreicht.

Auf dem oberen Halse von *A* ist eine eiserne Fassung aufgekittet, welche durch einen Hahn geschlossen werden kann, dessen Bohrung ähnlich der des Geißlerschen ist. Je nach seiner Stellung vermittelt er die Verbindung zwischen *A* und dem Glasfläschchen *d*, oder zwischen *A* und der Röhre *l*, welche jedoch so befestigt ist, daß sie an der Drehung des Hahnes *g* nicht teilnimmt. An dem freien Ende der Röhre *l* werden die zu evakuierenden Räume samt Zubehör befestigt.

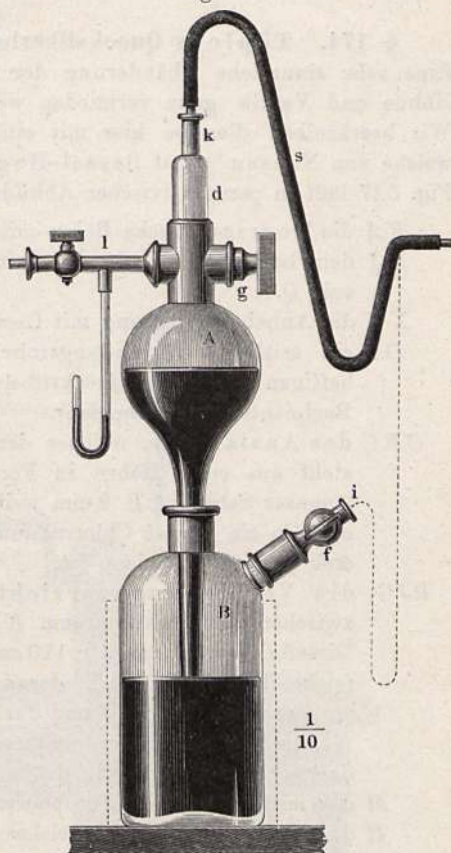
In die obere Fassung der kleinen Flasche *d* kann ein hohler Metallzapfen luftdicht eingesteckt werden, welcher das eine Ende des zur Luftpumpe führenden Gummischlauches *s* bildet.

Auf die Tubulatur der Flasche *B* ist eine durch den Hahn *f* verschließbare Fassung aufgekittet, in welche dasselbe Ende des Kautschukrohres *s* eingesteckt werden kann, welches jetzt in *k* steckt.

Zunächst wird der Hahn *g* so gestellt, daß *A* und *d* verbunden sind, und der Schlauch *s* bei *k* eingesteckt. Wird nun, während der Hahn *f* geöffnet bleibt, die Luftpumpe in Bewegung gesetzt, so steigt das Quecksilber aus *B* nach *A*. Man fährt mit Pumpen fort, bis auch *d* mit Quecksilber gefüllt ist.

Nun wird durch eine Drehung des Hahnes *g* um 45° alle Verbindung von *A* nach oben abgesperrt, der Schlauch *s* bei *i* eingesteckt und die Luftpumpe abermals in Tätigkeit gesetzt. Das Quecksilber geht von *A* nach *B* herab, und in *A* entsteht ein Torricellisches Vakuum, mit welchem der Rezipient durch eine abermalige Drehung des Hahnes *g* um 45° in Verbindung gebracht wird usw.

Fig. 526.



¹⁾ Pogg. Ann., Bd. 125.

Der Sicherheit halber ist das Gefäß *B* in ein weiteres Holzgefäß eingestellt, welches in unserer Figur durch Punktierung angedeutet ist.

Dasselbe Prinzip kommt bei den komplizierteren Quecksilberluftpumpen, welche von Mitscherlich¹⁾, Neesen²⁾, A. Schuller³⁾ u. a. angegeben wurden, zur Anwendung. Schullers Pumpe ist mit einer sehr sinnreichen Steuerung versehen, welche automatisch wirkt, so daß man nur die Hilfspumpe (welche auch eine Wasserluftpumpe sein kann) in Gang zu setzen braucht.

§ 174. Töplers Quecksilberluftpumpe ohne Hahn und Ventil.

Eine sehr sinnreiche Abänderung der Geißlerschen Pumpe, wodurch die Hähne und Ventile ganz vermieden werden, hat A. Töpler⁴⁾ angegeben. Wir beschreiben dieselbe hier mit einigen nachträglichen Verbesserungen, welche von Neesen⁵⁾ und Bessel-Hagen⁶⁾ angebracht worden sind. Die Fig. 527 läßt in perspektivischer Abbildung folgende Teile erkennen:

KA die Torricellische Röhre mit dem Vakuumraum *K*.

SQ den beweglichen Schenkel mit dem anhebbaren Quecksilberreservoir *Q*.

XY die Anhebevorrichtung mit Gestell und Winde.

DO ein seitliches Verbindungsrohr (von Neesen eingeführt, um die heftigen Stöße des Quecksilbers beim Eintritte der Luft aus dem Rezipienten zu vermeiden).

OBC das Auslaßrohr, welches den Auslaßhahn ersetzt. Dasselbe besteht aus einer Röhre in Form eines Heberbarometers⁷⁾, deren längerer Schenkel *B* 2 mm weit und 815 mm lang, dessen kürzerer, oben in ein offenes Chlorcalciumrohr mündender Schenkel *C* 13 mm weit und 250 mm lang ist.

*PJG*₁ die Verbindungsvorrichtung, welche die Kommunikation zwischen dem Vakuumraum *K* und dem Rezipienten *R* vermittelt. Dieselbe besteht aus der 110 cm langen, oben offenen Steigröhre *PJ* (siehe Fig. 528), dem daran befestigten, als Quecksilberwanne fungierenden Gefäße *F* und der verkehrt U-förmigen Röhre *G*₁ bzw. *G*₂, welche mit ihrem weiteren Schenkel über das Steigrohr *PJ* darüber gestülpt ist, so daß sie in das Quecksilber in *F* eintaucht.

M das mit wasserfreier Phosphorsäure beschickte Trockengefäß.

H das Verbindungsrohr, welches mit dem Rezipienten *R* (hier als Geißlersche Röhre angenommen) entweder durch Anschmelzen (Fig. 527) oder durch Schlißstücke und Hähne (Fig. 528) verbunden ist.

¹⁾ Pogg. Ann., Bd. 150, S. 420.

²⁾ Wied. Ann., Bd. 13, S. 304, dann Zeitschrift für Instrumentenkunde 1882, S. 285.

³⁾ Wied. Ann., Bd. 13, S. 528.

⁴⁾ A. Töpler, Dingl. polyt. Journ., Bd. 163, S. 426, 1862.

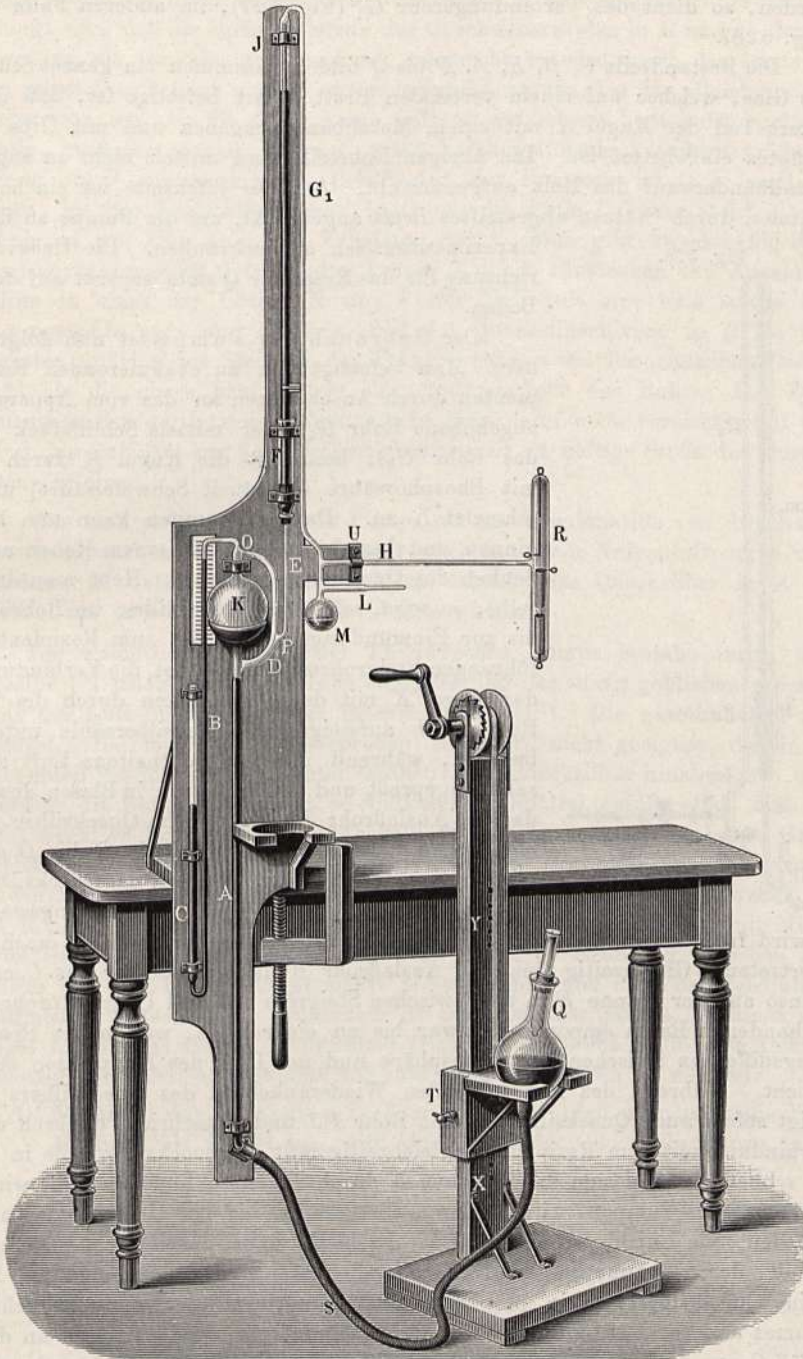
⁵⁾ Neesen (Wied. Ann., Bd. 3, S. 608, 1878) verwendete zuerst das Rohr *DO* (Fig. 527) bei seiner Quecksilberventilluftpumpe.

⁶⁾ E. Bessel-Hagen (Wied. Ann., Bd. 12, S. 425, 1881). Dessen Abhandlung ist auch die Fig. 527 entnommen.

⁷⁾ Töpler hatte ursprünglich die Form eines Gefäßbarometers angewendet.

L (Fig. 527) ist eine Öffnung, welche zur Einbringung der Phosphorsäure dient und dann dünn ausgezogen und zugeschmolzen wird.

Fig. 527.

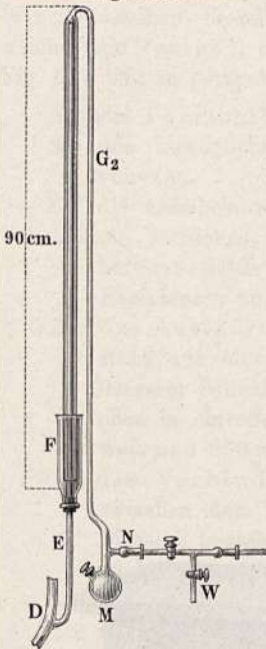


Durch dieselbe Öffnung läßt man wiederum Luft ein, indem man die Spitze abbricht.

Soll jeder Hahn gänzlich vermieden und die höchste Verdünnung erreicht werden, so dient das Verbindungsrohr G_1 (Fig. 527), im anderen Falle G_2 (Fig. 528).

Die Bestandteile C, B, K, A, P bis J bilden zusammen ein ganzes Stück aus Glas, welches auf einem vertikalen Brett derart befestigt ist, daß der untere Teil der Kugel K mit einem Metallband umgeben und mit Gips in letzteres eingebettet ist. Die übrigen Rohrteile sind mittels nicht zu enger Metallbänder auf das Holz aufgeschraubt. Auf der Rückseite ist ein horizontales, durch Stützen abgestieftes Brett angebracht, um die Pumpe an den Experimentiertisch anzuschrauben. Die Hebevorrichtung für das Reservoir Q steht separat auf dem Boden.

Fig. 528.



Der Gebrauch der Pumpe ist nun folgender: Man befestigt den zu evakuierenden Rezipienten durch Anschmelzen an das vom Apparate abgehobene Rohr G_1 (oder mittels Schliffstück an das Rohr G_2), beschickt die Kugel M durch L mit Phosphorsäure (eventuell Schwefelsäure) und schmelzt L zu. Das Auspumpen kann nun beginnen und besteht lediglich in einem Heben und Senken des Quecksilbergefäßes Q . Hebt man dasselbe, so wird, sobald das Quecksilber im Rohre A bis zur Einmündungsstelle P des zum Rezipienten führenden Steigrohres gestiegen ist, die Verbindung der Kugel K mit dem Rezipienten durch die im Rohre PJ aufsteigende Quecksilbersäule unterbrochen, während die in K enthaltene Luft zusammengepreßt und genötigt wird, in Blasen durch das im Auslaßrohr BC befindliche Quecksilber zu entweichen. Ist das Quecksilber in K bis O gestiegen, so wird Q wieder gesenkt, das Quecksilber fließt aus K und PJ zurück, die Einmündungsstelle

P wird frei, und die im Rezipienten enthaltene Luft kann neuerdings nach K übertreten. Gleichzeitig steigt im Auslaßrohr B das Quecksilber aus C und ebenso aus der Wanne F in den zwischen Steigrohr PJ und Überstülprohr G vorhandenen Raum empor, und zwar bis zu einer Höhe, welche der Spannungsdifferenz zwischen der Atmosphäre und der Luft des Rezipienten entspricht. Während des nun folgenden Wiederanhebens des Quecksilbers Q steigt sofort auch Quecksilber in das Rohr PJ und unterbricht dadurch die Verbindung mit dem Rezipienten, gleichzeitig fällt die Quecksilbersäule in B , bis schließlich wiederum die Luft aus K durch B und C hinausgepreßt wird. Diese Art des Pumpens wird so lange fortgesetzt, bis bei C keine oder nur unbedeutende Luftblasen entweichen. Es bleibt dabei das Rohr B mit Luft gefüllt, deren Spannung gleich ist jener der Atmosphäre, vermehrt um die kleine Quecksilbersäule in C . Diese Luft entspricht jener des schädlichen Raumes anderer Luftpumpen. Um sie zu eliminieren, wird von jetzt an das Gefäß Q nur noch langsam höher, und zwar so weit gehoben, bis das Queck-

silber aus *K* in das Rohr *B* eintritt und die Luft vor sich her bei *C* hinaus treibt. Bringt man hierauf *Q* wieder in die tiefste Lage, so entsteht nun in *K* eine Torricellische Leere, welche mit dem Rezipienten in Verbindung gelangt, sobald die Stelle *P* frei wird. Sollte aus *K* so viel Quecksilber nach *C* gelangt sein, daß die Höhendifferenz der Quecksilbersäulen in *B* und *C* kleiner geworden, als dem Atmosphärendruck entspricht, so wird durch den letzteren von selbst Quecksilber nach *K* zurückgedrückt werden, bis das Gleichgewicht eingetreten ist. Damit dabei keine haftend gebliebene Luft zurückgeführt werde, muß die weitere Röhre *C* nicht halbkugelförmig, sondern trichterförmig an *B* angesetzt sein. Bei Beginn des Pumpens ist *Q* so weit zu heben, bis das Quecksilberniveau in *Q* um die Säule *C* höher steht als *O*; später ist nur eine geringere Erhebung nötig. Man gibt zweckmäßig dem das Quecksilbergefäß *Q* tragenden Träger *T* durch Einstecken von Anschlagstiften in eines der Löcher *X* und *V* der Holzsäule nur eine solche Bewegungsweite auf- und abwärts, daß das Quecksilberniveau in *Q* bei der höchsten und tiefsten Stellung des Trägers nahezu um Barometerhöhe tiefer steht als die obere bzw. untere Einmündungsstelle des Rohres *D*. Zum Hinausschaffen der letzten Luftreste hebt man dann noch vorsichtig mit der Hand das Gefäß *Q* aus dem Träger, damit nicht zu heftige Stöße des Quecksilbers erfolgen.

Wie man sieht, ist Töplers Pumpe als eine Kombination von drei Barometern anzusehen; man kann sie aber auch mit einer Kolbenluftpumpe vergleichen, in welcher das Rohr *AK* als Stiefel, das Quecksilber in *A* als Kolben, das in *CB* und in *PJ* als Ventile wirken.

Ein wesentlicher Vorteil der Töplerschen Pumpe besteht darin, daß dieselbe bei jedem einzelnen Hube eine Messung der übrig gebliebenen Spannung der Luft im Raume *K* zu machen gestattet¹⁾. Die gewöhnlichen abgekürzten Barometer (Barometerproben) sind dazu nicht geeignet, da die zu messenden Spannungen bis unter 0,000 01 mm Quecksilber hinabreichen und überdies die Barometer selten so vollkommen luftfrei gefüllt sind, daß sie nicht negative Drucke anzeigen, sobald die Verdünnung einen hohen Grad erreicht hat. Bei Töplers Pumpe geschieht die Druckmessung der restierenden Luft nach dem Prinzip von Arago (§ 158). Zu diesem Zwecke ist das Rohr *B* mit einer Skala versehen, welche auf der einen Seite mit Millimeterteilung, auf der anderen Seite mit einer Volumteilung versehen ist, welche von dem Einmündungspunkte *O* an beginnt und nach Zehntel-Cubikcentimetern fortschreitet. Außerdem ist das gemeinschaftliche Volumen der Kugel *K* und des Rohres *D* zwischen *O* und *P* bestimmt. Um eine Druckmessung vorzunehmen, hat man folgende drei Ablesungen zu machen:

1. Während das Quecksilber in *K* so tief steht, daß eben noch die Verbindung bei *P* frei ist, wird der Stand der Quecksilberkuppe in *B* notiert.
2. Während das Quecksilber in *K* bis *O* steht, wird wiederum der Stand in *B* notiert.
3. Gleichzeitig wird daselbst das Volumen *v* abgelesen.

¹⁾ A. Töpler (Sitzungsber. der naturw. Ges. Iris in Dresden 1877, S. 135).

- Ist h die Differenz der Ablesungen in 1. und 2. ¹⁾,
 v das zurückgebliebene Volumen,
 V das Volumen der Kugel K samt Rohr D ,
 x der zu bestimmende Druck, welcher die erreichte Luftverdünnung mißt, so ist nach dem Boyleschen Gesetze:

$$Vx = v(x + h), \text{ woraus } x = \frac{v}{V - v} h,$$

oder, da v neben V verschwindend klein ist, $x = \frac{v}{V} h$.

Gegen die volle Richtigkeit dieser Methode ließe sich nach unserer Meinung nur der eine Einwand erheben, daß während des Ansteigens des Quecksilbers in K infolge Zunahme des Druckes von x auf $x + h$ bereits ein Teil der Luft an die Wände sich anlegen oder von dem Quecksilber absorbiert werden kann, so daß infolgedessen etwas zu niedrige Werte für den Druck, also zu hohe Verdünnungen gefunden werden.

§ 175. Sprengels Quecksilberluftpumpe. Nachdem wir das Prinzip dieser Luftpumpe im § 173 erörtert haben, erübrigt uns nur noch, ein wirklich brauchbares Instrument dieser Art zu beschreiben. Eine nach dem Schema der Fig. 518 konstruierte Pumpe hätte vor allem den Nachteil, daß, wenn das Quecksilber in dem Trichter einmal ganz ausginge, sofort Luft in den Rezipienten eindringen würde und die ganze Arbeit des Auspumpens von vorn an wiederholt werden müßte. Am vollkommensten ausgebildet wurde die Sprengelsche Pumpe wohl von Gimingham ²⁾, dessen Apparat von Crookes zu seinen Experimenten benutzt worden ist. Die in Fig. 529 in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Größe abgebildete von A. Weinhold ³⁾ ist als eine Vereinfachung derselben zu betrachten. Ihre Bestandteile sind:

- f Die Fallröhre von 2 mm Weite, in deren oberem, weiterem Teile, dem Saugrohr, sich das Vakuum bilden soll.
- r Die Zuführungsröhre für das Quecksilber, verbunden mit dem beweglichen Schenkel aus Kautschuk und dem Reservoir T .
- E Das Trockengefäß, welches einerseits mit der Fallröhre f , andererseits mit dem Rezipienten durch R , außerdem mit dem Manometer B durch Schliffstücke in Verbindung steht.
- g Ein Sammelgefäß mit zwei nach aufwärts gebogenen seitlichen Ausflußröhren, wovon die obere zum Austritt der Luft, die untere zum Ausfluß des Quecksilbers dient. Die Fallröhre mündet natürlich unterhalb der Höhe der letzteren Ausflußöffnung.

Das Trockengefäß E wird durch die Schlifföffnung des Manometers B mit Schwefelsäure oder Phosphorsäure gefüllt. Es ruht auf dem Kork k

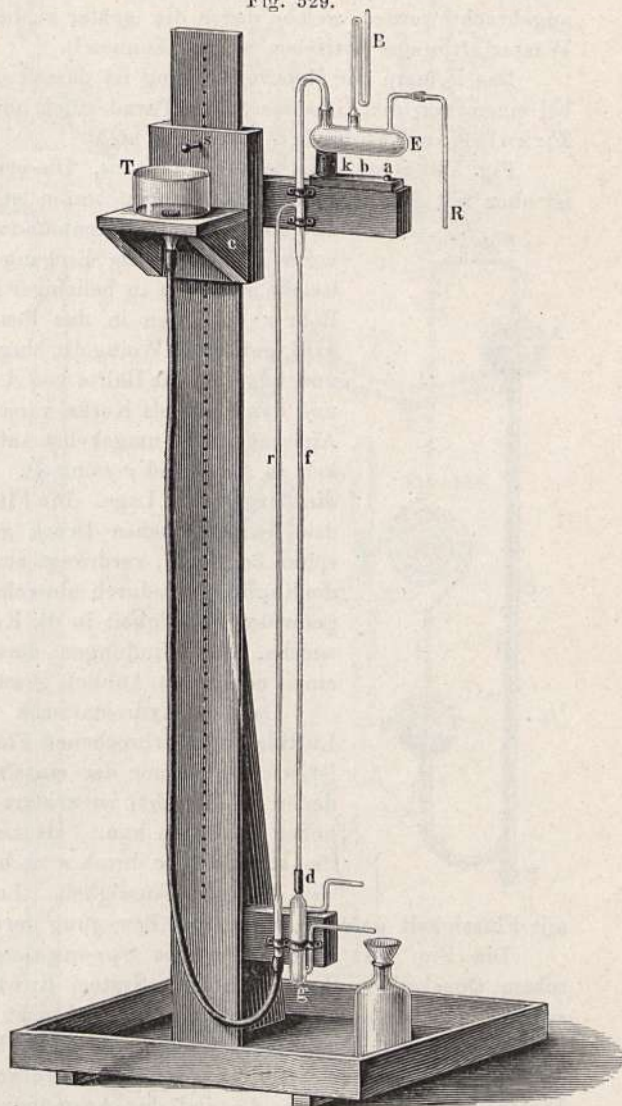
¹⁾ Die Niveauänderung im Rohre C kann bei der Messung von h vernachlässigt werden, da C viel weiter ist als B .

²⁾ Proc. Roy. Soc. XXV, p. 396. Eine Beschreibung und Abbildung dieses zwar sehr sinnreichen, aber auch sehr komplizierten (aus 20 größtenteils durch Schliffstellen verbundenen Glasteilen zusammengesetzten) Apparates findet sich in Wiedem. Beibl., Bd. I, S. 175, 1877.

³⁾ A. Weinhold, Physik. Demonstr., S. 171.

auf, welcher auf dem Brettchen *b* festgeleimt ist. Dreht man letzteres um die Schraube *a*, so kann das Trockengefäß nach abwärts losgelöst werden. Da außerdem das Trockengefäß um das Schliffstück der Saugröhre wie um eine vertikale Achse, ferner das Verbindungsrohr *R* um sein Schliffstück als horizontale Achse gedreht werden können, so ist dadurch dem Verbindungsrohr allseitige Beweglichkeit gesichert.

Fig. 529.



Beim Gebrauche wird der Träger *c* des Quecksilberreservoirs *T* anfangs so hoch an dem Stativ befestigt, daß das Niveau etwas über der Einmündungsstelle des Rohres *r* in das Fallrohr *f* steht. Sowie die Entleerung fortschreitet, senkt man nach und nach das Reservoir *T* so weit, daß oben noch immer Quecksilber durch den Luftdruck nach der Fallröhre hinübergetrieben wird. Gegen Ende wird das Niveau von *T* um die Barometerhöhe tiefer stehen als die Einmündungsstelle. Das unten ausfließende Quecksilber wird in der Flasche aufgefangen und oben wiederum aufgegossen. Man beobachtet an dem Kleinerwerden der mitgerissenen Luftblasen und dem härteren Klange des aufschlagenden Quecksilbers den Fortschritt des Auspumpens.

Bei der oben erwähnten Gimingham'schen Pumpe sind der rascheren Verdünnung wegen statt einer einzigen Fallröhre drei nebeneinander vorhanden. Ferner ist diese Pumpe mit einem Apparat zur Messung der Verdünnung nach McLeod ausgerüstet, welcher auf demselben Prinzip wie jener an der Töplerschen Pumpe beruht und im nächsten Paragraphen beschrieben wird.

§ 176. Sprengels Pumpe mit selbsttätiger Quecksilberanhebung. System Schantel-Kahlbaum. Wie bei den Quecksilberpumpen nach Geißlerschem Prinzip, so sind auch für jene nach dem Sprengelschen Prinzip selbsttätige Vorrichtungen zur Wiederanhebung des Quecksilbers angebracht worden, welche durch die (später zu beschreibende) Bunsensche Wasserluftpumpe betrieben werden können¹⁾.

Das Prinzip der Hebevorrichtung ist dasselbe, welches schon seit lange bei einem von den Glasbläsern als Parastück angefertigten Apparate, dem Zirkulationsheber, in Anwendung steht.

Fig. 530 zeigt einen solchen Apparat. Die etwa fingerdicke Glasröhre *C* ist oben mit dem Reservoir *A* verbunden, unten ist sie umgebogen und endet

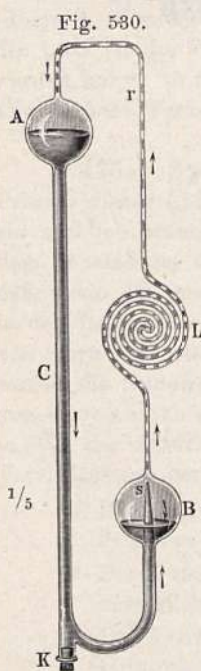


Fig. 530.

mit einer engen Röhrenmündung *s* innerhalb des Reservoirs *B* nahe beim Eingang in die Kapillarröhre *L*, welche mehrfach in beliebiger Form gewunden durch das Rohr *r* von oben in das Reservoir *A* mündet. Bei *K* wird gefärbter Weingeist eingegossen, bis die Röhre *C* und ungefähr die Hälfte von *A* damit ausgefüllt erscheint, und dann mittels Korks verschlossen. Man hängt den Apparat zuerst umgekehrt auf, damit sich alle Flüssigkeit in *A*, *C* und *r* sammelt. Dann bringt man ihn in die dargestellte Lage. Die Flüssigkeit fließt nun, durch den hydrostatischen Druck getrieben, an der Röhrenspitze bei *s* aus, verdrängt aus dem Reservoir die Luft in die Kapillare, wodurch abwechselnd mit Luft Tropfen der gefärbten Flüssigkeit in die Kapillare eingeführt werden, welche, den Windungen derselben entlang wandernd, einen niedlichen Anblick gewähren.

Da der hydrostatische Gegendruck dieser durch Luftblasen unterbrochenen Flüssigkeitssäule nur so groß ist wie die Summe der einzelnen Flüssigkeitssäulen, aus denen sie besteht, so erklärt sich, daß die Flüssigkeit höher ansteigen kann, als sie von *A* aus gesunken ist. Sie steigt daher durch *r* nach *A* und vereinigt sich mit der dortigen Flüssigkeit. Endlich ist das Reservoir *B* mit Flüssigkeit gefüllt, worauf die Bewegung derselben aufhört.

Die Fig. 531 zeigt uns eine Sprengelsche Pumpe mit automatischem Quecksilberanhub nach dem System Kahlbaum, mit den Abänderungen, welche L. Zehender²⁾ daran angebracht hat, in $\frac{1}{10}$ d. n. Gr. Auf einem vertikalen Holzrahmen, dessen Fuß in der Figur fortgelassen ist, sind folgende Bestandteile befestigt: das Sprengelsche Fallrohr *F* mit der Einströmungsvorrichtung *Af* und der Ausmündung in das Gefäß *G*₂; das Zuführungsrohr *R*₁ mit dem Luftfang *L*, welcher oben durch ein Ventil (oder Hahn) *H*₁ verschlossen, unten durch den mit der Klemme *K* verschließbaren Schlauch mit dem Gefäße *G*₁ verbunden ist; das Steigrohr *R*₂, welches aus dem Gefäße *G*₂ bis zum Scheidungsgefäße *G*₃ aufsteigt, von welchem letzteren das von der Luft befreite Quecksilber in das Gefäß *G*₁

¹⁾ Von L. v. Babo 1878, von Schantel 1888, von Kahlbaum 1891.

²⁾ L. Zehender, Ann. d. Phys. 10, 623, 1903.

abfließt; das Verbindungsrohr s_2 , welches durch die Trockenflasche T_3 hindurch mit der Wasserluftpumpe (in der Figur nicht gezeichnet) in Ver-

Fig. 531.

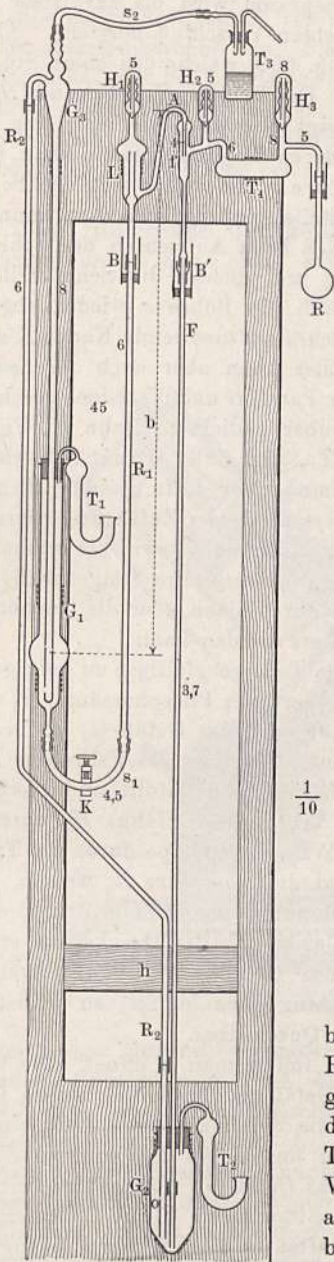


Fig. 532.

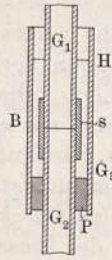


Fig. 533.

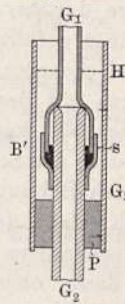


Fig. 534.

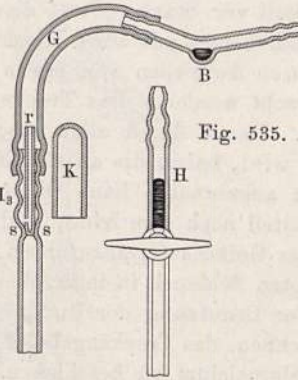
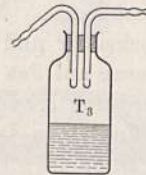


Fig. 535.

Fig. 536.



bindung steht; endlich der auszupumpende Rezipient R , welcher durch das Trockengefäß T_4 mit der Fallröhre in Verbindung steht. Außerdem sind noch zwei Trockenröhren T_1 und T_2 und noch zwei Ventile oder Hähne H_2 und H_3 an den aus der Figur ersichtlichen Stellen angebracht. Die lichten Weiten der Röhren sind in Millimetern daneben angeschrieben.

Die Verbindung der einzelnen Teile kann, wenn es sich um die höchsten Leistungen in kürzester Zeit handelt, durch Anschmelzen bewerkstelligt werden, doch führt auch die in der Figur angedeutete Verbindung zum Ziele. Dieselbe

ist aus den Figuren 532 und 533 ersichtlich, welche in größerem Maßstabe gezeichnet sind. In Fig. 532 sind die aneinanderstoßenden Röhren durch einen Kautschukschlauch S verbunden und mittels des Korkes P eine weitere Glasröhre darüber gesteckt. Der Zwischenraum wird bis zur Höhe H mit Quecksilber gefüllt, welches einen luftdichten Verschluss herstellt. Ähnlich, aber noch sicherer, ist die Verbindung Fig. 535, welche das obere Stück des Fallrohres mit dem unteren verbindet. Die Ventile H_1 , H_2 und H_3 sind nach Fig. 534 konstruiert. Dieselbe zeigt überdies, wie man eine solche Röhre durch den Schlauch G mit einem anderen Raume verbinden kann, worauf man durch Hebung bzw. Senkung der Röhre r , die man durch den Schlauch hindurch erfaßt, die Kommunikation herstellen und unterbrechen kann. Der bei B vorhandene Tropfen Quecksilber fällt beim Aufrichten des Schlauches in den Raum oberhalb der Einschnürung und dichtet die Schliffstelle vollkommen. Dieses Quecksilber kann durch die Röhre r wieder abgesaugt werden. Die nach Wegnahme des Schlauches aufzusetzende Kappe K schützt das Ventil vor Staub. Statt dieses Ventiles kann aber auch der bequemer zu handhabende, mit einer Mischung von Paraffin und Vaselineöl geschmierte und durch Aufgießen von etwas Quecksilber gedichtete Hahn H , Fig. 535, angebracht werden. Das Trockengefäß T_3 , Fig. 536, ist mit Schwefelsäure gefüllt. Damit durch allzu rasche Strömung der Luft dieselbe nicht verspritzt wird, haben die an den Enden verschlossenen Zuführungsröhren nur seitlich angebrachte feine Öffnungen. Endlich haben wir als wesentlichen Bestandteil noch eine feine, schlitzförmige Öffnung o im Steigrohr R_2 innerhalb des Gefäßes G_2 anzuführen, welche durch einen über die Nachbarröhre gestülpten Schlauch in ihrer Weite reguliert werden kann.

Vor Benutzung der Pumpe sind alle Teile sorgfältigst zu reinigen und zu trocknen, das Trockengefäß T_4 mit wasserfreier Phosphorsäure, T_1 und T_2 mit Chlorcalcium zu beschicken. Hierauf wird das Gefäß G_2 so hoch mit trockenem Quecksilber gefüllt, daß die untere Öffnung des Fallrohres F eben verschlossen ist. Ebenso wird das Gefäß G_1 voll gefüllt und hierauf die Klemme K geschlossen. Man schließt Ventil (oder Hahn) H_2 durch Ein gießen von Quecksilber und läßt nun die Wasserluftpumpe durch das Trockengefäß T_3 hindurch auf das Gefäß G_3 und die Steigröhre R_2 wirken, bis die Grenze der hierdurch erreichbaren Verdünnung (etwa 15 mm Druck) erreicht ist. Hierauf öffnet man langsam die Klemme K , das Quecksilber steigt in den Luftfang L hinauf; bevor es in das Fallrohr F bei A überzuffießen beginnt, schließt man K . Ist der Luftfang ganz gefüllt, so schließt man auch das Ventil H durch Aufgießen von Quecksilber.

Nun kann das Evakuieren beginnen, indem man K öffnet. Die Wasserluftpumpe saugt fortwährend aus dem Gefäß G_2 durch die untere Öffnung der Röhre R_2 Quecksilber und durch die Seitenöffnung o Luft ein, hebt die unterbrochenen Quecksilbersäulen in das Gefäß G_3 , von wo die Luft durch s_2 abgeführt, das Quecksilber in das Gefäß G_1 übergeführt wird, aus welchem es in R_1 wieder emporsteigt, mitgerissene kleine Luftmengen im Luftfang abgibt und so vollständig entlüftet in die Fallröhre gelangt. Die aus dem Rezipienten angesaugte Luft wird durch die Fallröhre in das Gefäß G_2 geschafft und entweicht durch T_2 .

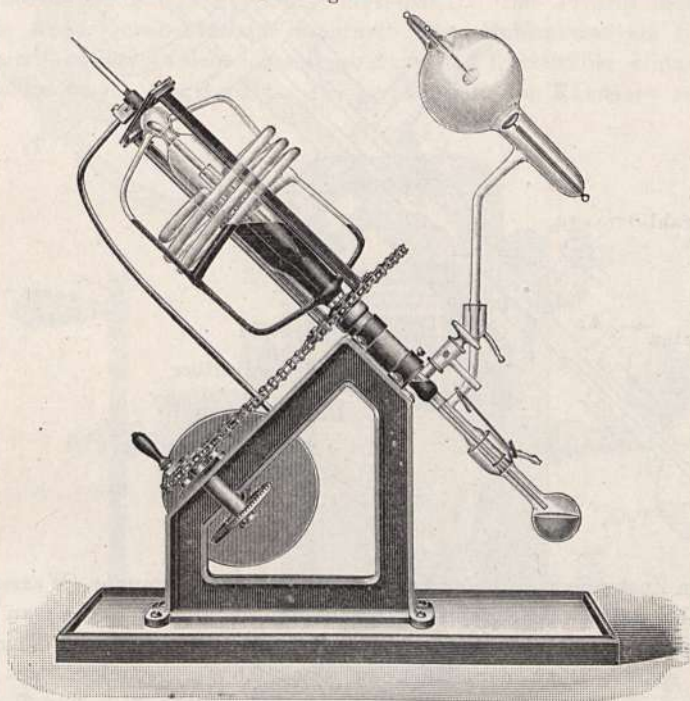
Zum Abstellen der Pumpe schließt man K , läßt das in G_2 angesammelte überflüssige Quecksilber möglichst nach G_3 hinübersaugen, zieht den Saug-

schlauch vom Trockengefäß T_3 ab und sperrt zuletzt die Wasserluftpumpe ab. Beim Evakuieren größerer Räume arbeitet man mit der Wasserluftpumpe allein vor, indem man sie mit dem Hahn H_2 verbindet.

Die beschriebene Pumpe braucht weniger als 3 kg (220 cm^3) Quecksilber und pumpt einen Rezipienten von 600 cm^3 in 20 bis 25 Minuten bis auf $0,001 \text{ mm}$ Quecksilberhöhe aus. Sie hat sich bestens bewährt; nur kommt es nicht selten, wie bei der Sprengelschen Pumpe überhaupt, vor, daß die Fallröhre — vielleicht durch elektrische Entladungen — zersprengt wird. Zehender hat deshalb das Fallrohr dickwandiger genommen. Auch ist dasselbe durch ein Stahlrohr ersetzt worden.

§ 177. Rotierende Quecksilberpumpe von W. Kaufmann. Von den vielen außer den eben beschriebenen noch aufgetauchten Kon-

Fig. 537.

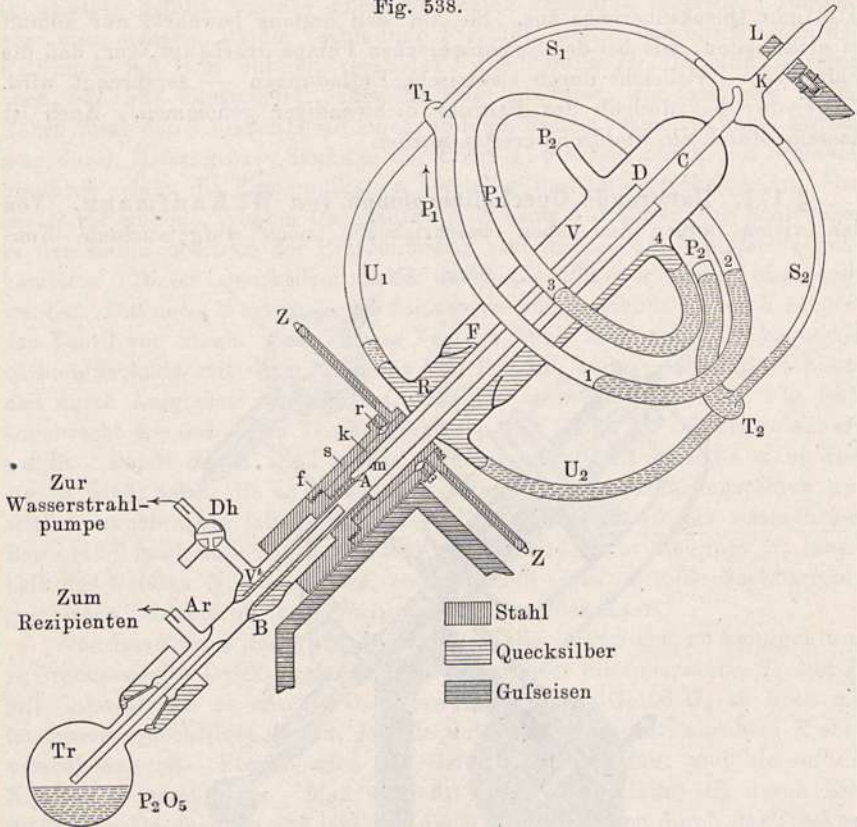


struktionen von Quecksilberpumpen wollen wir hier noch die rotierende Quecksilberluftpumpe von Prof. W. Kaufmann in Bonn¹⁾ besprechen. Fig. 537 gibt eine perspektivische Ansicht der mit einem Elektromotor ausgerüsteten Pumpe in etwa $\frac{1}{10}$ der natürlichen Größe, Fig. 538 eine schematische Durchschnittszeichnung der Hauptteile. Denken wir uns zum leichteren Verständnis zunächst den unterhalb des Zahnkranzes ZZ befindlichen Teil fort und den auszupumpenden Raum an der Spitze bei K angesetzt, also an der Rotation des Apparates teilnehmend. Dreht man denselben der Pfeilrichtung entgegen ein- bis zweimal um seine Achse, so entleert sich

¹⁾ Zeitschrift für Instrumentenkunde 1905, S. 129.

mindestens eins der beiden Spiralrohre P_1 , P_2 (letzteres ist der Deutlichkeit wegen fortgelassen) durch T_1 (T_2) in den Raum U_1 (U_2) und in den Raum V , den wir das Vorvakuum nennen. Das Hauptvakuum K steht dann durch s_1 (s_2) und die Spiralen hierdurch mit dem Vorvakuum V in Verbindung.

Fig. 538.

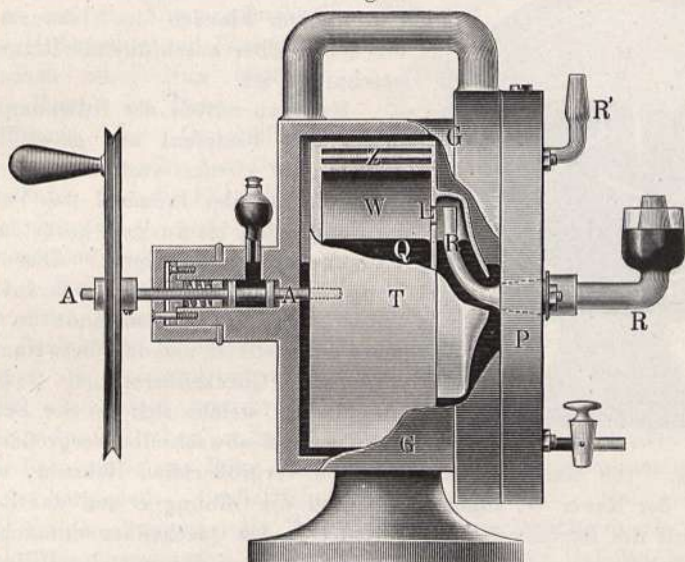


In diesem Zustande wurde der Apparat durch eine Hilfspumpe (Wasserstrahl-pumpe) bis auf etwa 2 cm Quecksilberhöhe ausgepumpt. Dreht man hierauf den Apparat der Pfeilrichtung nach, anfangs mit 20 bis 25 Touren pro Minute, später, wenn der Druck auf etwa 0,5 mm gesunken, mit 10 bis 15 Touren pro Minute, so erhebt sich das Quecksilber in U_1 bis T_1 , sperrt die Verbindung zwischen s_1 mit P_1 ab. Die Quecksilbersäule 1 bis 2 treibt die Luft vor sich her in den Raum V , während von rückwärts weitere Luft aus s_1 nachgesaugt wird, bis sich beim weiteren Drehen die Verbindung bei T_1 wieder schließt. So wird bei jeder Umdrehung ein Luftvolum in die Spirale eingesaugt, abgesperrt und durch das Rohr D weggeschafft. Das treibende Quecksilber entleert sich dann bei 4 in den Raum R . Ist es ganz ausgelaufen, so gelangt zunächst Luft aus dem Vorraum V in die Spirale, aber nur bis zu der Oberfläche 2 der nächsten Quecksilbersäule, und wird von dieser mit der abgesperrt gewesenen Luft ausgetrieben. Die trichterförmige Luftfalle verhindert ein Mitreißen der Luft aus V in die Röhren U und ins Vakuum.

Nachtrag zu Seite 503.

Rotierende Quecksilberluftpumpen sind neuerdings mehrere konstruiert worden, unter denen die von Dr. W. Gaede in Freiburg i. Br. durch rasche Wirkung und handliche Konstruktion hervorrage. Wir geben nachstehend eine Beschreibung und Abbildung derselben¹⁾. Das Prinzip besteht darin, daß in einem Quecksilberbade innerhalb eines Hohlraumes ein System von Kammern rotiert, welche abwechselnd in das Quecksilber eintauchen und wieder herausgehoben werden. Die herausgehobenen Kammern schließen in

Fig. 538 a.



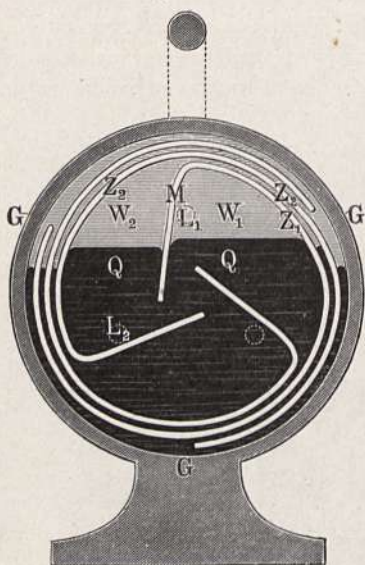
sich ein Torricellisches Vakuum ab, das mit dem Rezipienten verbunden wird; beim darauffolgenden Wiedereintauchen wird das aus dem Rezipienten geschöpfte Gasquantum durch das Quecksilber nach außen verdrängt. Das System hat daher eine gewisse Ähnlichkeit mit der Gasuhr, nur daß bei dieser das bewegte Gas die Rotation bewerkstelligt, während bei der Pumpe die Rotation durch äußere Kraft erfolgt und das Gas in Bewegung setzt.

Die Gaedesche Pumpe ist in ihren Hauptbestandteilen durch Fig. 538 a in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Größe dargestellt. Das zylindrische, mit Handgriff und Fuß versehene Gehäuse *G* aus Gußeisen ist bei *P* durch eine, in einen

¹⁾ Wir verdanken dieselbe dem Erfinder Dr. W. Gaede.

Gußeisenring gefaßte, 2 cm dicke Glasplatte verschlossen und bis Q mit Quecksilber gefüllt. In diesem Quecksilberbade rotiert im Inneren des Gehäuses eine Porzellantrommel T um die Stahlwelle AA und wird von außen her durch Drehen des auf der Welle sitzenden Rades mit der Hand oder einem kleinen Laboratoriumsmotor angetrieben. In die 2 cm dicke Glasplatte sind drei Glasröhren eingeschliften. Das unterste, mit Hahn versehene Rohr dient bei der Montierung zum Füllen, bzw. Ablassen des Quecksilbers aus der Pumpe. An das Rohr R , das durch die Glaswand hindurch in das Innere der Porzellantrommel führt, wird mittels Quecksilberschliffes der aus-zupumpende Rezipient angesetzt. Das Rohr R' schließlich wird mittels Schlauches mit einer gewöhnlichen Luftpumpe (Wasserstrahlpumpe oder Stiefelpumpe) verbunden, welche kein höheres Vakuum als 10 bis 20 mm zu geben braucht. Gegen die äußere Atmosphäre ist das Gehäuse an der Eintrittsstelle der drehbaren Achse A durch eine mit Quecksilber gefüllte Stopfbüchse abgedichtet, deren Einzelheiten aus Fig. 538a ersichtlich sind. An der Auflagefläche der Glasscheibe P auf dem Gehäuse ist die Dichtung dadurch erzielt, daß in dem Flansch des Gehäuses eine mit Quecksilber auszufüllende Rinne eingeschritten ist.

Fig. 538b.



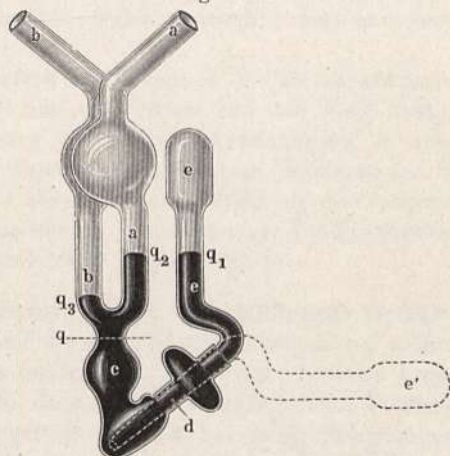
Hat man mittels der Hilfspumpe Gehäuse und Rezipient auf einen Druck von 10 bis 20 mm evakuiert, so wird durch Drehen der Trommel das Vakuum im Rezipienten bis zu den höchsten Verdünnungsgraden gesteigert. Diese Wirkung der Trommel beruht darauf, daß dieselbe durch Zwischenwände in Kammern unterteilt ist, und daß diese Kammern über dem Quecksilberspiegel Q Räume abschließen, welche sich bei der Drehung der Trommel abwechselnd vergrößern und

verkleinern. Die Kammern mit den sich vergrößern Räumen, wie in Fig. 538a der Raum W , füllen sich durch die Öffnung L und das Rohr R mit der Luft des Rezipienten. Die wieder in das Quecksilber eintauchenden Kammern geben das aufgenommene Gasvolumen an das mit der Hilfspumpe erzeugte Vorvakuum ab. In welcher Weise die Zwischenwände in der Trommel angeordnet sind, damit diese Pumpwirkung zustande kommt, zeigt der Querschnitt Fig. 538b senkrecht zur Rotationsachse. Die Trommel hat drei Wände, die ungefähr spiralförmig von innen nach außen verlaufen und nach Fig. 538a vorn und hinten durch ebene Trommelböden begrenzt sind. Die Teile M und Z_1 der einen Wand schließen über dem Quecksilberspiegel Q einen Raum W_1 ab, der bei einer Rotation der Trommel, entgegen dem Sinn des Uhrzeigers, sich vergrößert, und durch die im vorderen Trommelboden befindliche Öffnung L_1 Luft aus dem Rezipienten ansaugt. Kommt durch Drehen der Trommel die Öffnung L unter die Quecksilberoberfläche, so haben wir die Verhältnisse wie in der linken Kammer. Das

Gas im Raume W_2 ist vom Rezipienten abgeschlossen und wird bei der Drehung der Trommel durch die als Kolben wirkende Quecksilberoberfläche aus dem Raum W_2 unter Kompression in den Raum zwischen den Wänden Z_1 und Z_2 gedrängt und von hier aus bei fortgesetzter Drehung an das Vorvakuum abgegeben.

Der in Fig. 538c in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Größe skizzierte Glasapparat wird bei a und b an die Rohrleitungen R und R' (Fig. 538a) der Pumpe angeschlossen und dient erstens als Barometer, um den Druck im Rezipienten und im Pumpengehäuse abzulesen, und zweitens als Hahn, um nach Belieben Kommunikation zwischen diesen beiden Räumen herstellen zu können. ab ist ein U-förmiges Rohr mit einem Ansatz c , der durch den mit Quecksilber gedichteten Schliff d mit dem Rohr e verbunden ist. Bei Beginn des Versuches ist das Rohr e vollständig und das Rohr c bis q mit Quecksilber gefüllt. Das U-Rohr ab ist somit frei von Quecksilber und bietet, da a mit R und dem Rezipienten, b mit R' und der Hilfspumpe verbunden ist, dem Gasinhalt des Rezipienten freien Durchtritt zur Hilfspumpe. Hat die Hilfspumpe auf etwa 20 mm Druck evakuiert, so sinkt das Quecksilber in e und steigt in die Röhren a und b , so daß die Kommunikation zwischen Hilfspumpe und Rezipient unterbrochen ist. Nun beginnt man die Pumpe zu drehen. Die Höhendifferenz der Quecksilberkuppen q_1 und q_2 gibt den Druck im Rezipienten, und die Höhendifferenz der Kuppen q_2 und q_3 gibt den Unterschied zwischen dem Vakuum und dem Vorvakuum. Will man für einen neuen Versuch Luft in den Rezipienten einlassen, so dreht man die Trommel entweder rückwärts, oder besser, man bringt

Fig. 538c.



das Rohr e durch Drehen im Schliff d in die Lage e' . Das Quecksilber fließt aus dem Rohr ab in das Rohr e' zurück, und die Kommunikation durch das U-Rohr ist hergestellt. Schließlich ist noch zu erwähnen, daß ebenso wie bei den übrigen Pumpen, die Wasserdämpfe zweckmäßig durch Anschluß eines mit Phosphorpentoxyd oder Chlorcalcium gefüllten Gefäßes bei R oder R' entfernt werden.

Der Vorteil, den das Verwenden einer Hilfspumpe mit sich bringt, liegt darin, daß der Höhenunterschied der Quecksilberspiegel innerhalb und außerhalb der Trommel nur 10 bis 20 mm beträgt, wenn der Rezipient ganz ausgepumpt ist. Hätten wir außerhalb der Trommel im Pumpengehäuse Atmosphärendruck, so müßten die Dimensionen der Pumpe, um innerhalb und außerhalb der Trommel einen Höhenunterschied von 760 mm zu ermöglichen, ganz ungeheuerliche sein. Die Pumpe ist im ganzen nur 30 cm hoch und pumpt bei einer Quecksilberfüllung von $1\frac{1}{2}$ Liter 10- bis 20mal so rasch, wie die bisher gebräuchlichen Quecksilberluftpumpen. So wurde ein $6\frac{1}{4}$ Litergefäß beim Druck des Wasserstrahlvakuum von 12 mm beginnend in

3 Minuten auf 0,09 mm, in 6 Minuten auf 0,004 mm, in 9 Minuten auf 0,0006 mm, in 12 Minuten auf 0,0001 mm und in 15 Minuten auf 0,00006 mm evakuiert. Verglichen mit den Ölluftpumpen, zeigt sich hier der Vorteil, den die geringe Dampfspannung des Quecksilbers gegenüber der nach den Messungen von Nutting 20- bis 30 mal größeren Spannkraft des Öls bietet, indem Vakua unterhalb 0,1 mm mit Gaedes Quecksilberluftpumpe ungleich schneller erzielt werden, als mit der Ölluftpumpe. Die Spannkraft des Quecksilberdampfes in der Pumpe kann noch wesentlich vermindert werden, wenn man die ganze Pumpe in ein mit Eis oder einer Kältemischung gefülltes Blechgefäß einsetzt, das die Antriebswelle durch eine seitliche, mit der Kappe der Stopfbüchse wasserdicht verschließbare Öffnung durchläßt. Ihrer raschen Wirkung und bequemen Handhabung verdankt die Pumpe ihren hohen Demonstrationswert für Vorlesungen.

Bisher dachten wir den auszupumpenden Rezipienten bei K angesetzt und mitrotierend. Da dies nicht angängig ist, so muß eine anderweitige Verbindung hergestellt sein. Von dem Raum K aus erstreckt sich das Rohr C durch die Pumpe hindurch bis zum Barometerverschluß B , so daß K durch C hindurch mit dem Trockengefäß Tr und dem Ansatzrohr Ar mit dem Rezipienten kommuniziert. Der Raum V' über dem Außenniveau des Barometerverschlusses steht bei entsprechender Stellung des Dreiweghahnes Dh einerseits mit der Wasserstrahlpumpe, andererseits durch den engen ringförmigen Kanal A zwischen C und D mit dem Raum V in Verbindung. Der rotierende Teil des Apparates ist in einen Stahlkonus eingekittet, welcher selbst in einen Hohlkonus eingeschliffen ist. Die Dichtung wird durch Quecksilber, welches den ringförmigen Raum r erfüllt, vervollständigt. Das Ausfließen dieses Quecksilbers wird durch die kapillare Depression des schmalen Spaltes verhindert. Die Montierung des ganzen Apparates ist eine derartige, daß das Übergewicht des Oberteiles durch ein Achsenlager getragen wird. Die Rotation erfolgt entweder von freier Hand durch Kettenübertragung oder durch Antrieb eines elektrischen Motors. Die Füllung mit Quecksilber geschieht durch die geöffnete Spitze des Rohres K , welches nachher zugeschmolzen wird.

Die Vorteile dieser Quecksilberpumpe sind folgende: Sie ist von geringen Dimensionen, bedarf nur gegen 250 ccm Quecksilber und ist leicht transportabel. Sie gestattet die Erreichung sehr hoher Verdünnungen in sehr kurzer Zeit, so daß z. B. eine Röntgenröhre von 12 cm Durchmesser in 12 Minuten wirksam wird und in 20 Minuten keine Entladung mehr durchläßt. Gefährdung durch Quecksilberstöße ist ausgeschlossen, das Quecksilber kommt nur mit Glas in Berührung und bleibt folglich rein ¹⁾.

§ 178. Die mit Quecksilberluftpumpen erreichbaren Verdünnungen; Nebenapparate. Während die gewöhnlichen Luftpumpen selten gestatten, die Verdünnung so weit zu treiben, daß der Druck bis unter 1 mm Quecksilbersäule herabsinkt, weshalb denn auch die gewöhnliche Prüfung mittels des abgekürzten Barometers genügt, ist bei den Quecksilberpumpen eine viel weiter gehende Verdünnung zu erreichen, für deren Messung dann auch feinere Beobachtungsmethoden nötig werden.

A. v. Waltenhofen hat bereits 1861 ²⁾ an der Quecksilberluftpumpe von Kravogl ein Verfahren angewendet, bei welchem der erreichte Minimaldruck in dem verdünnten Raume aus dem Volumen ermittelt wurde, welches die zurückgebliebene Luft nachher bei Atmosphärendruck einnahm. Zu diesem Zwecke war an den aus einem weiten kalibrierten Glasrohr bestehenden Rezipienten eine enge kalibrierte Röhre angesetzt und die Einrichtung so getroffen, daß der evakuierte Rezipient von der Pumpe abgenommen und mit der Mündung unter Quecksilber geöffnet werden konnte. Die weite Röhre und ein Teil der engen wurde durch den Luftdruck mit Quecksilber gefüllt und aus dem restlichen Volumen der Luft nach bekannten Grundsätzen die Verdünnung berechnet.

Verwandte Methoden wurden oben bei Töplers Pumpe beschrieben und bei Gimingham's Pumpe (Mc Leods Apparat) erwähnt.

¹⁾ Die Pumpe wird von der Firma Geißlers Nachfolger in Bonn geliefert.

²⁾ Sitzungsber. d. Wien. Akad. 1861, Bd. 44.

Mc Leods Vakuummesser ist in der von Zehender beschriebenen Ausführung ¹⁾ in Fig. 539 in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Größe und ein Bestandteil

Fig. 539.

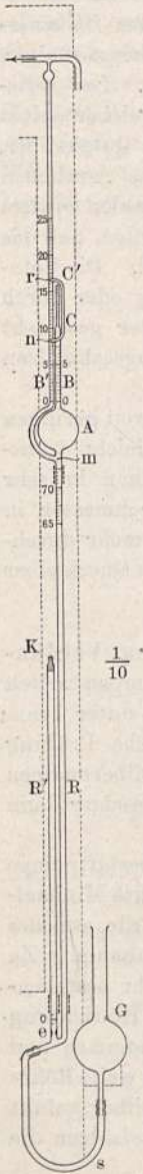
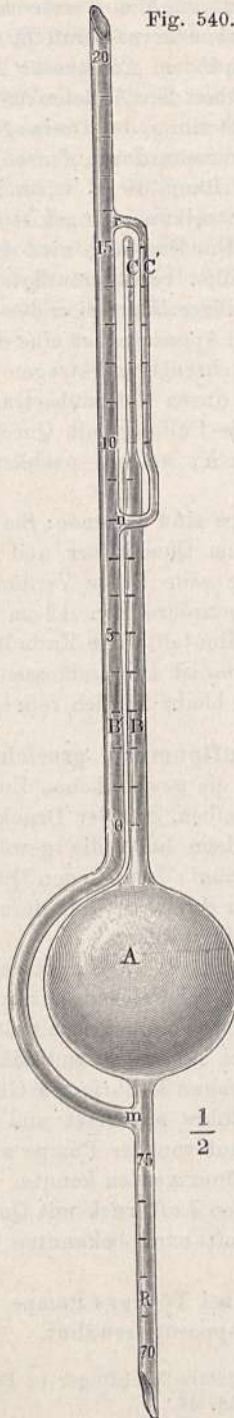


Fig. 540.



desselben in Fig. 540 in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Größe abgebildet. Die Röhre R ist am unteren zur Seite gebogenen Ende durch den Schlauch s mit dem Gefäße G verbunden, welches höher oder tiefer gestellt werden kann. Oben mündet die Röhre R in ein kugelförmiges Gefäß A , welches sich nach oben in eine Röhre B und weiter oben in eine engere Röhre C fortsetzt, welche verschlossen ist. Unterhalb der Kugel A bei m ist ein Seitenrohr B' angesetzt, welches parallel mit B emporsteigt und mit dem oberen Ende in den Raum einmündet, dessen Verdünnungsgrad gemessen werden soll. Mit diesem Rohr B kommuniziert bei n und r das engere mit C parallele Rohr C' . B und B' , sowie C und C' sind genau gleich weit, um gleiche Kapillarwirkungen auszuüben. Endlich steigt von der Stelle e des Rohres R ein paralleles, gleich weites Rohrstück R' in die Höhe, welches oben bei K nur lose verschlossen ist. Nahe bei e befindet sich in o der Nullpunkt einer Längenteilung, welche zunächst einige Centimeter umfaßt und unterhalb m eine Fortsetzung hat. Ebenso sind die Röhren B und B' , C und C' mit übereinstimmenden Längenteilungen versehen, welche oberhalb A bei o ihren Nullpunkt haben. Will man nun eine Verdünnung zunächst annähernd messen, so hebt man das Gefäß G , bis das Quecksilber in dem Rohr R' bei o steht, und beobachtet den Stand in der Röhre R . Die Differenz zwischen der so beobachteten Quecksilbersäule und der Barometerhöhe gibt den Druck im verdünnten Raum. Um dann stärkere

¹⁾ Zehender, Ann. d. Phys. 10, 623, 1903.

Verdünnungen genauer zu messen, hebt man G , bis das Niveau in die Röhre B oder C gestiegen ist, und mißt die Überhöhe in B' bzw. C' . Wie aus den auskalibrierten Volumen der Kugel A und der Röhrenteile in B und C mit Hilfe der erwähnten Beobachtungen die Verdünnung zu berechnen ist, ist bereits im § 174 an der Töpler-Pumpe erklärt worden.

Wir müssen jedoch darauf aufmerksam machen, daß die auf solche Weise gefundenen Minimaldrucke sich nur auf den Druck der zurückgebliebenen Luft, nicht auf den Gesamtdruck beziehen, der sich aus dem Druck der Luft und dem Druck des Quecksilberdampfes zusammensetzt.

Nach Hertz und nach Pfaundler beträgt die Spannung des gesättigten Quecksilberdampfes;

$$\text{bei } 0^{\circ} e = 0,0002 \text{ mm}$$

$$\text{„ } 20^{\circ} e = 0,0013 \text{ mm.}$$

Demnach kann der Gesamtdruck im Inneren der Pumpe bei Zimmertemperatur von 20° nicht unter $0,0013$ mm herabgesetzt werden.

Steht mit der Pumpe ein Rezipient in Verbindung, der nur ein Gas, aber kein Quecksilber (oder andere Flüssigkeit) enthält, so kann demnach dieses Gas auch nicht weiter als auf etwa $0,0013$ mm verdünnt werden. Anders steht die Sache, wenn durch Diffusion oder auf andere Weise auch das im Rezipienten enthaltene Gas mit Quecksilberdämpfen gesättigt wurde. Es kann dann auch in diesem zwar nicht der Totaldruck, wohl aber der vom Gase allein ausgeübte Partialdruck ebenso weit herabgesetzt werden wie im Torricellischen Raume der Pumpe.

Wir verdanken Bessel-Hagen ¹⁾ vergleichende Messungen der Minimalpartialdrucke der Luft, welche durch die Quecksilberluftpumpen nach Geißlers alter und neuer Konstruktion, dann mittels der Töplerschen Pumpe erreicht werden, welchen Angaben in der nachfolgenden Tabelle noch die mit einer Sprengel-Gimingham'schen, sowie mit einer Kravoglschen Pumpe erreichten Druckminima hinzugefügt sind. Die Messungen Bessel-Hagens geschahen in der Weise, daß eine Töplersche und eine Geißlersche Pumpe miteinander verbunden wurden, so zwar, daß zuerst die erstere, dann die letztere als Rezipient diente, während zuerst die letztere, dann die erstere als Pumpe funktionierte. Die Druckmessung geschah dann an der Töplerschen Pumpe in der oben beschriebenen Weise. Die Angabe für die Kravoglsche Pumpe ist den v. Waltenhofenschen Messungen entnommen.

Die Resultate sind in der Rangordnung der erreichten Verdünnungen in der umstehenden Tabelle aufgeführt:

Zur Erreichung solcher hoher Verdünnungsgrade ist eine vollständige Trockenheit aller Apparateile, sowie eine vollkommen dichte Verbindung zwischen Rezipient und Pumpe erforderlich. Verbindungen mittels Kautschukröhren genügen nicht; in der Regel werden die einzelnen Glasbestandteile durch Aneinanderschmelzen vereinigt. Um denselben trotzdem eine, wenn auch eng begrenzte Verschiebbarkeit zu sichern und hierdurch die Gefahr des Zerbrechens zu vermindern, verwendet man zu den Verbindungen entweder spiralförmig gewundene Glasröhren oder besser die von A. Kundt ²⁾ eingeführten „Glasfedern“.

¹⁾ Wiedem. Ann. 12, S. 441, 1881.

²⁾ Pogg. Ann. 155, S. 364.

Instrument	Beobachter	Minimum des erreichten Partialdruckes der Luft in Millimetern	Grenze der erreichten Verdünnung in Bruchteilen einer Atmosphäre
Geißlers Pumpe älterer Konstruktion	Bessel-Hagen	0,11	$\frac{1}{6909}$
Kravogls Pumpe	v. Waltenhofen	0,0316 ¹⁾	$\frac{1}{24\ 000}$
Geißlers Pumpe neuerer Konstruktion	Bessel-Hagen	0,0082	$\frac{1}{92\ 683}$
Sprengels Pumpe oben beschriebener Kon- struktion	Zehender	0,0008 ²⁾	$\frac{1}{950\ 000}$
Sprengel-Gimingham's Pumpe	Crookes	0,000046	$\frac{1}{17\ 000\ 000}$
Töplers Pumpe neuerer Konstruktion	Bessel-Hagen	0,000009 ³⁾	$\frac{1}{84\ 000\ 000}$ ⁴⁾
Sprengel-Gimingham's Pumpe mit einer weiteren Verbesserung ⁴⁾	Prof. Ogden N. Rood vom Columbia-College in New York	0,0000069	$\frac{1}{110\ 000\ 000}$

Fig. 541 und 542 zeigen im Aufriß und in Perspektive eine solche Kundtsche Glasfeder in ungefähr $\frac{1}{6}$ der natürlichen Größe. Eine lange,

Fig. 541.

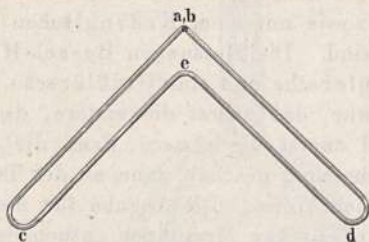
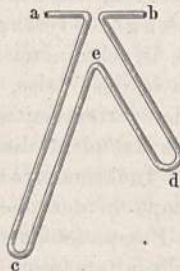


Fig. 542.



dünne Glasröhre wird zweimal U-förmig gebogen, so daß die beiden U in einer Ebene liegen, aber bei *e* einen rechten Winkel miteinander machen.

¹⁾ Diese Zahl folgt durch Rechnung aus dem Grade der Verdünnung, welcher, wie oben angegeben, bestimmt wurde.

²⁾ Bei Anwendung von Kautschukverbindungen 0,001 bis 0,004.

³⁾ Im Mittel aus sechs Versuchen wurde erhalten Druck = 0,000012 mm entsprechend einer Verdünnung gleich $\frac{1}{63}$ Milliontel Atmosphäre; wie weit die Wirkung der Töplerschen Pumpe in der ursprünglichen Form geht, ist nicht gemessen worden.

⁴⁾ Die Verbesserung soll darin bestehen, daß das Quecksilber aus einem evakuierten Gefäße in das Fallrohr gelangt; dies ist aber schon bei der ursprünglichen Gimingham-Pumpe der Fall (Rood, The New York Times, 19. Nov. 1880, p. 2, Sp. 3). Das angegebene Minimum wurde nur in einem Falle erreicht und sonst zu $\frac{1}{94}$ Milliontel Atmosphäre bestimmt.

Die beiden Enden *a* und *b* der Röhre sind senkrecht zur Ebene der U umgebogen, so daß sie in eine Gerade zu liegen kommen. Denkt man sich das Ende *a* festgehalten, so ermöglicht das U-Rohr *c* dem Ende *b* eine Bewegung in der Richtung *ed*, ebenso das U-Rohr *d* eine Bewegung nach *ec*. Da außerdem *a* und *b* sich etwas voneinander entfernen können, so ist innerhalb gewisser Grenzen für eine allseitige Beweglichkeit des Endes *b* gegenüber dem Ende *a* vorgesorgt. Bei einer 1,8 m langen, 6 mm weiten Röhre beträgt der Spielraum mehrere Centimeter. Engere Röhren können entsprechend kürzer genommen werden.

Größere Beweglichkeit erhält man durch Anwendung zweier ineinander gesteckter Kautschukschläuche, deren Zwischenraum durch Quecksilber ausgefüllt ist.

Lösbare Verbindungen werden mittels Quecksilbers dicht erhalten. Eine solche Verbindungsweise wurde bei der Töplerschen Pumpe, andere oben in Fig. 532 bis 534 beschrieben, wieder eine andere bei der Geißlerschen Pumpe angewendete ist in Fig 543 abgebildet. Die Glasröhre *b* ist in den Trichter *a* eingeschliffen. Der Trichter wird mit Quecksilber *c* gefüllt und, wenn man recht sicher gehen will, mit einer Schicht von Schwefelsäure *d* überdeckt, welche hindert, daß Luft zwischen Quecksilber und Glas eindringe. Statt der gewöhnlichen Glashähne sind ebenfalls mit Quecksilber hergestellte Vorrichtungen anzuwenden. Eine solche von Bessel-Hagen vorgeschlagene ist in Fig. 544 abgebildet; sie kann dazu dienen, den evakuierten Rezipienten *R* aus einem Gasometer *G* mit einem anderen Gase zu füllen. Zwischen *R* und *G* befindet sich die U-Röhre *abc* mit einer kugelförmigen Erweiterung bei *a*. Am tiefsten Punkte der U-Röhre ist eine Abzweigung nach abwärts, welche mittels Kautschukrohr zum Reservoir *d* führt. Von *b* bis *e* ist Barometerhöhe. Die Quecksilbersäule *be* sperrt den Zutritt zum Rezipienten hermetisch; senkt man aber das Reservoir *d*, so entleert sich der Schenkel *c* und erniedrigt sich die Quecksilbersäule *be* so weit, daß das bei *G* zugeführte Gas eintreten kann. Die Erweiterung *a* verhindert das Übersteigen von Quecksilber nach *R*.

Eine andere, einen Hahn ersetzende, durch Quecksilber gedichtete Verbindungsweise ist der „Vakuumzapfen“ von Gimmingham, welcher an dessen Pumpe mehrfach verwendet wurde. Derselbe ist in Fig. 545 im zerlegten Zustande abgebildet; er besteht aus den drei Glasteilen *a*, *b* und *c*. *b* und *c* wirken zusammen ganz ebenso wie die Vorrichtung Fig. 543 und werden ebenso mit Quecksilber und Schwefelsäure gedichtet.

Fig. 543.

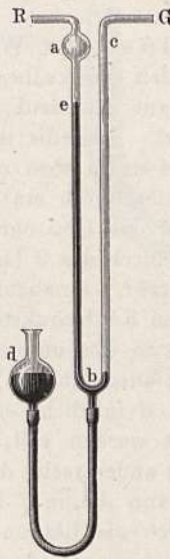
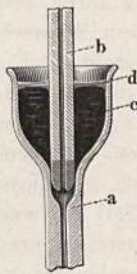
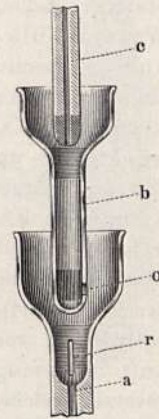


Fig. 545.



Das mittlere Stück *b* hat jedoch am unteren verschlossenen Ende ein seitliches Loch *o*, das unterste Stück *a* besitzt bei *r* eine vertikale Rinne *r*. Sobald die Schliffstellen ineinander gesteckt sind, kann das Mittelstück *b* so gedreht werden, daß dasselbe durch das Loch *o* und die Rinne *r* mit dem unteren Stück *a* kommuniziert, oder aber so, daß das Loch versperrt ist. Der Trichter des unteren Stückes wird ebenfalls mit Quecksilber und Schwefelsäure gedichtet.

Wird das Stück *c* weggenommen, so fällt Quecksilber in den unteren Teil von *b* und bedeckt das Loch *o* auch von innen, wodurch ein vollkommener Verschuß bewerkstelligt wird, währenddem an das Stück *c* andere Apparate angesetzt werden können. Vor dem Wiedereinsetzen des „Zapfens“ wird das Quecksilber aus *b* mittels Pipette und amalgamierten Messingdrahtes wieder entfernt.

Als Schmiermittel für Glashähne, welches nicht ausgepreßt wird, nicht erhärtet und keine Dämpfe entwickelt, wird neuestens von Travers ein durch Zusammenschmelzen von 2 Tln. Kautschuk, 1 Tl. Vaseline und $\frac{1}{8}$ Tl. Paraffin bereitetes Gemisch¹⁾ empfohlen.

§ 179. Bunsens Wasserluftpumpe. Wassertrommelgebläse. Statt der fallenden Quecksilbersäule hat Bunsen schon früher eine fallende Wassersäule zur Konstruktion einer Luftsaugepumpe (Wasserluftpumpe) benutzt. Dieselbe ist in ihrer ursprünglichen Form in Fig. 546 abgebildet. Aus einem oben offenen Wasserbehälter oder der Wasserleitung strömt das Wasser durch ein Bleirohr *a*, Fig. 546, das verbindende Kautschukrohr *b* und das Glasrohr *c* in das weitere Glasrohr *d*, um dann von hier aus weiter durch das 9 bis 12 m lang vertikal hinabreichende ungefähr 8 mm weite Bleirohr *f* hinabzufallen. Das weitere Rohr *d* ist oben mit einem wohl schließenden Kautschukstopfen geschlossen, durch welchen ein engeres Glasrohr *mn* bis in den unteren Teil des weiteren Rohres *d* hinabreicht (bei den gegenwärtig ausgeführten Wasserluftpumpen ist das Glasrohr *mn* in das obere Ende von *d* luftdicht eingeschmolzen). Der Raum, aus welchem die Luft ausgesaugt werden soll, wird mit dem Glasrohr *st* in Verbindung gesetzt, welches andererseits durch eine Kautschukröhre mit *mn* verbunden ist. So zieht dann die in *f* herabfallende Wassersäule die Luft aus dem Rezipienten durch die Röhren *st* und *mn* nach. Der Grad der erzielten Luftverdünnung kann an dem Quecksilbermanometer *pq* abgelesen werden. Alle am Apparate befindlichen Kautschukverbindungen bestehen aus ziemlich engen, aber sehr dickwandigen Röhrenstücken.

Die Bunsensche Luftsaugepumpe wird in chemischen Laboratorien unter anderem zur Beschleunigung des Auswaschens von Niederschlägen gebraucht. Zu diesem Zwecke wird die Röhre des Trichters, auf welchem das Filter mit dem Niederschlage liegt, mittels eines Kautschukstopfens luftdicht in den Hals eines Glasgefäßes *A*, Fig. 547, eingesetzt. Dieser Kautschukstopfen hat aber noch eine zweite Durchbohrung, an welcher ein durch ein dickwandiges Kautschukrohr *K* mit dem Glasrohr *st*, Fig. 546, in Verbindung zu setzendes Glasröhrchen steckt. Sobald nun die Luftpumpe funktioniert, wird das auf

¹⁾ Experimentelle Untersuchung von Gasen von M. W. Travers, deutsch von Dr. Estreicher. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1905.

den Trichter gegossene Wasser durch den Niederschlag und das Filter hindurchgesaugt und so ein rasches Auswaschen des Niederschlages bewirkt. Damit das Filter nicht reiße, wird seine Spitze in einen kleinen, aus dünnem

Fig. 546.

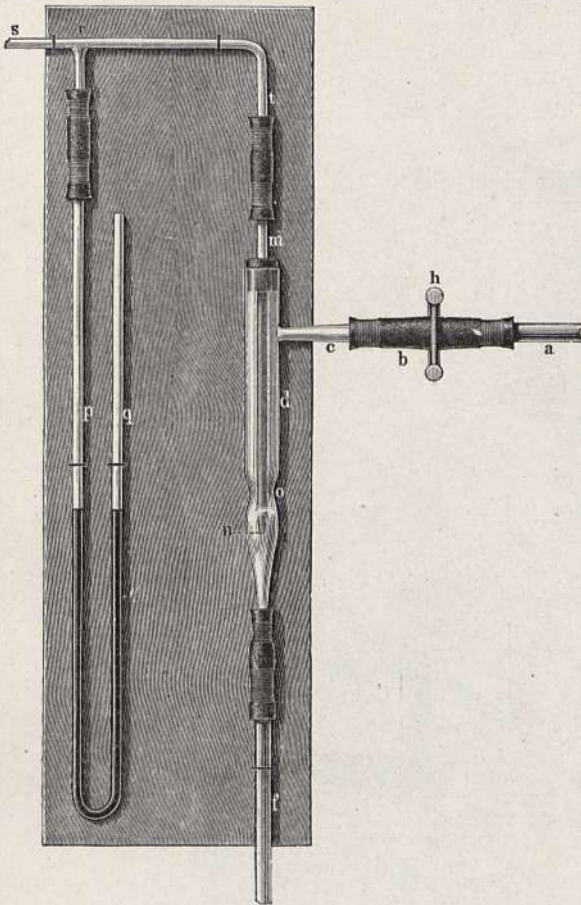


Fig. 547.



Fig. 548.

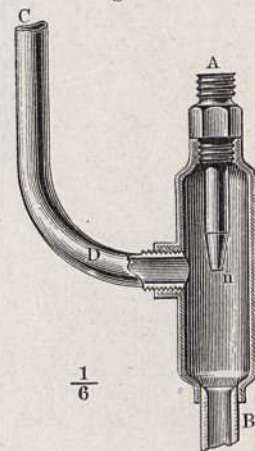


Fig. 549.



Platinblech zusammengelegten Hohlkegel eingesetzt und nur eine mäßige Verdünnung in Anwendung gebracht.

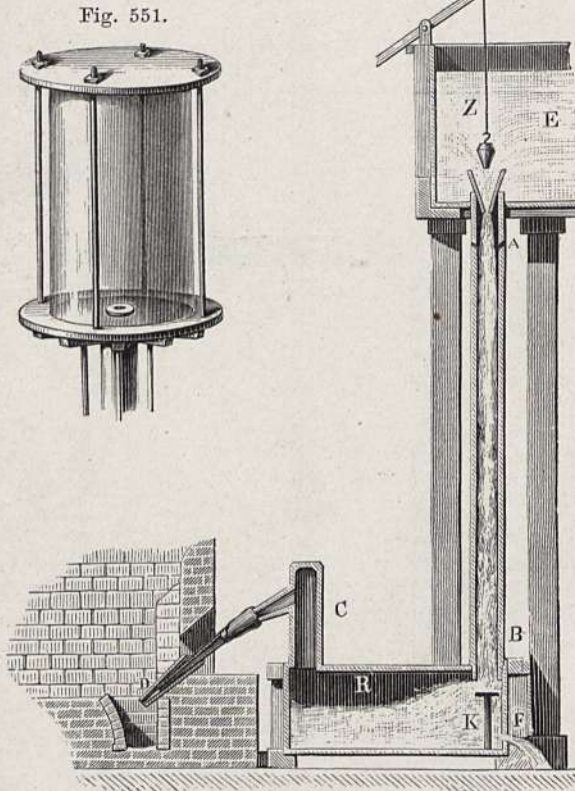
Die Menge des zuströmenden Wassers muß mit Hilfe des Quetschhahnes *h* gehörig reguliert werden.

Hagenbach hat in der physikalischen Anstalt des Bernoullianums zu Basel eine Wasserluftpumpe in größerem Maßstabe konstruiert, deren wesentlichster Teil in Fig. 548 dargestellt ist. Bei *A* wird das Rohr *An* an die Wasserleitung angeschraubt, welche einen Druck von ungefähr drei Atmosphären hat, während bei *B* das 13 m lange Abflußrohr angesetzt ist, welches in einen Schacht führt, in welchem das Wasser versickert. Es ist zweckmäßig, wenn das Rohr unten in ein gefülltes Gefäß mündet, damit, wenn der Wasserzufluß aufhört, das Wasser im Ablaufrohr stehen bleibt. Am oberen Ende des 0,5 m hohen Rohres *DC* wird der Rezipient angesetzt, aus welchem

die Luft herausgesaugt werden soll. Die Gestalt der Ausflußöffnung bei n ist nicht gleichgültig; am zweckmäßigsten ist eine kreuzförmige Öffnung, wie solche in Fig. 549 in natürlicher Größe dargestellt ist.

Bei freiem Zutritt der Luft saugt dieser Apparat 34 Liter in der Minute, während eine zweistiefelige Luftpumpe bei raschem Pumpen nur $12\frac{1}{2}$ Liter

Fig. 550.



und eine Bunsensche Wasserluftpumpe nur 2 bis 3 Liter Luft in der gleichen Zeit einsaugt.

Was die Grenze der Verdünnung betrifft, welche man mit den Wasserluftpumpen erreichen kann, so ist klar, daß im günstigsten Falle die zu leerenden Gasräume nur bis zu einem Drucke gleich der Spannkraft des die Pumpe füllenden Wasserdampfes entleert werden können.

Ähnliche Wasserluftpumpen, bei denen schon ein geringeres Gefälle genügt, sind von Arzberger und Zulkowski konstruiert und wegen ihrer Bequemlichkeit in Laboratorien vielfach verwendet.

Die Wasserluftpumpe kann jedoch auch als Kompressionspumpe (Gebläse) gebraucht werden, indem man die durch das Wasser fortgeführte Luft wirken läßt. Fig. 550 zeigt eine solche statt des Blasebalges bei Schmiedefeuern unter dem Namen Wassertrommelgebläse angewendete Vorrichtung. Aus dem Wasserbehälter stürzt das Wasser durch eine

Röhre in den Windkasten *B*, welcher oben geschlossen ist, unten aber eine Auflußöffnung hat. Das herabstürzende Wasser saugt nun Luft durch die Löcher *A* ein und reißt sie mit Gewalt in den Windkasten *B*, aus welchem sie durch die Düse *D* ausströmt, während das Wasser bei *F* ausfließt. Dieser Apparat gehört also zu den Gebläsen, die wir in § 183 besprechen werden.

Fig. 552.

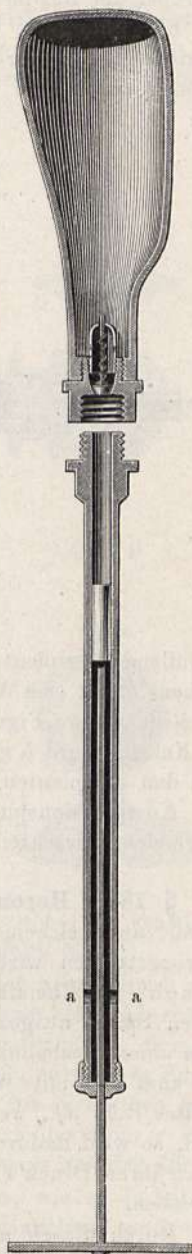
§ 180. **Kompressionspumpen.** Um die Luft in einem Rezipienten zu verdichten, kann man jede Hahnluftpumpe gebrauchen, nur muß der Hahn entgegengesetzt gestellt werden wie beim Verdünnen, d. h. derjenige Stiefel, in welchem der Kolben gerade in die Höhe geht, muß mit der äußeren Luft, derjenige, in welchem der Kolben niedergeht, muß mit dem Rezipienten in Verbindung stehen.

Ballons, in welchen die Luft komprimiert werden soll, werden auf der Schraube in der Mitte des Luftpumpentellers aufgeschraubt; Rezipienten aber, welche auf den Teller aufgesetzt werden, müssen in der in Fig. 551 dargestellten Weise auf den Teller der Luftpumpe aufgedrückt und auf ihm festgehalten werden.

Bei Ventilapparaten, welche zum Verdichten der Luft dienen sollen, müssen sich die Ventile nach der entgegengesetzten Seite öffnen, wie bei der Luftpumpe.

Eine der bekanntesten Formen der Kompressionspumpe ist die, welche man zum Laden der Windbüchse anwendet. Der Rezipient der Windbüchse ist aus Schmiedeeisen oder Stahl gefertigt; ein Ventil, welches sich nach innen öffnet, läßt die Luft zwar eintreten, hindert aber ihren Austritt. An diesen Rezipienten wird ein Rohr angeschraubt, wie man in Fig. 552 sieht, in welchem ein Kolben luftdicht auf und ab geschoben werden kann. Wenn sich der Kolben am unteren Ende des Laderohres befindet, so kann Luft durch zwei seitliche Löcher *a* eintreten; diese Luft wird nun beim Hinauftreiben des Kolbens in das Reservoir hineingepreßt. Zieht man den Kolben wieder nieder, so kann die Luft aus dem Reservoir nicht zurücktreten, die Röhre aber füllt sich mit einer neuen Portion Luft, die nun auch in das Reservoir gepreßt wird usw.

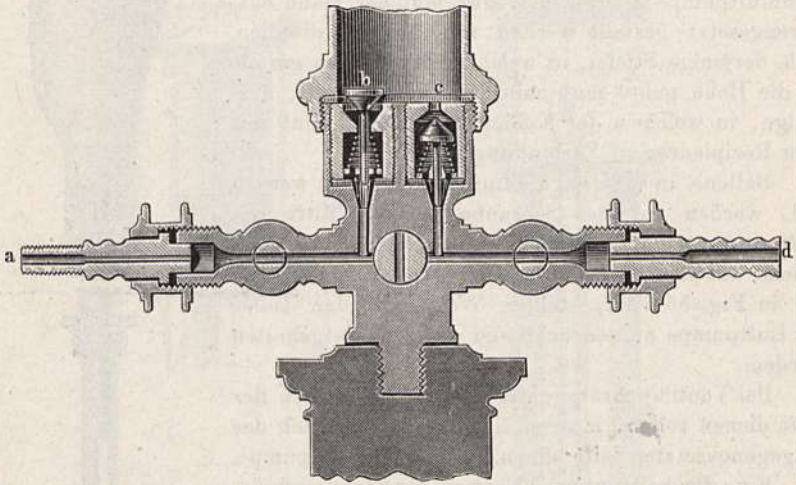
Wenn man mit Hilfe der Kompressionspumpe die Luft im Rezipienten der Windbüchse bis auf 8 oder 10 Atmosphären komprimiert hat, wird ein Lauf angeschraubt, welcher der Kugel die Richtung geben soll. Das Ventil, welches den Rezipienten verschließt, wird durch Anziehen des Drückers momentan geöffnet, so daß ein Teil der eingeschlossenen Luft mit großer Gewalt entweicht und die Kugel fort-



treibt; das Ventil schließt sich aber augenblicklich wieder. Mit einer guten Windbüchse kann man eine Kugel mit annähernd ebenso großer Geschwindigkeit fortschießen wie mit einem Feuegewehr. Man kann, ohne von neuem zu komprimieren, mehrere Schüsse nacheinander tun, und zwar um so mehr, je größer der Rezipient ist.

Fig. 553 zeigt die Einrichtung einer kleinen, von Silbermann jun. konstruierten Kompressionspumpe, welche dazu dient, Gas aus einem Raume in einen anderen zu bringen. Das zu entleerende Reservoir wird bei *a*, der

Fig. 553.



zu füllende Rezipient wird bei *d* angeschraubt. Beim Aufziehen des massiven Kolbens öffnet sich das Ventil *b*, um das Gas in den Zylinder zu saugen, von welchem unsere Figur nur den untersten Teil zeigt. Beim Niederdrücken des Kolbens wird *b* geschlossen, das Ventil *c* aber geöffnet und das Gas durch *b* in den Rezipienten getrieben.

Kompressionspumpen zur Verflüssigung von Gasen werden wir in der Wärmelehre beschreiben.

§ 181. Heronsball und Heronsbrunnen. Der Heronsball ist ein Gefäß, aus welchem ein Wasserstrahl durch den Druck komprimierter Luft hervorgetrieben wird. Ein Heronsball einfachster Form ist die Spritzflasche der Chemiker, Fig. 554. Eine Glasröhre *abc*, welche bei *a* zu einer feinen Spitze ausgezogen ist, geht luftdicht durch den Kork, welcher den Hals eines Glasballons verschließt, und zwar geht sie fast bis auf den Boden des zum Teil mit Wasser gefüllten Gefäßes herab. Wenn nun durch ein zweites Rohr *df*, welches dicht unter dem Korke mündet, Luft eingeblasen wird, so wird dadurch die Luft im oberen Teil des Ballons komprimiert und durch ihren Druck ein Wasserstrahl aus der Öffnung der Röhre *cba* hervorgetrieben.

Durch Blasen mit dem Munde kann man natürlich keine starke Kompression im Ballon bewirken und also nur einen schwachen Wasserstrahl hervortreiben. Wenn es sich um die Erzeugung eines kräftigeren Wasserstrahles auf diesem Wege handelt, muß man der größeren Festigkeit wegen

Metallgefäße anwenden und die Zusammendrückung der Luft durch eine Kompressionspumpe besorgen. Einen derartigen Heronsball stellt Fig. 555 dar. Nachdem das Gefäß etwas über die Hälfte mit Wasser gefüllt und das Spritzrohr aufgeschraubt ist, wird die Ausflußspitze entfernt und dann auf den Apparat eine Kompressionspumpe aufgeschraubt, mit Hilfe derer man so viel Luft einpumpt, daß der Druck derselben zwei bis vier Atmosphären beträgt. Nun wird der Hahn, welcher in dem Spritzrohre angebracht ist, geschlossen, und nachdem die Kompressionspumpe von dem Apparat entfernt

Fig. 554.

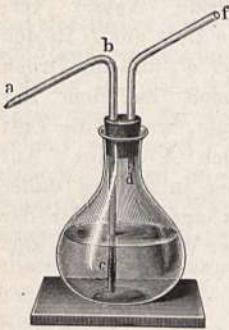


Fig. 556.

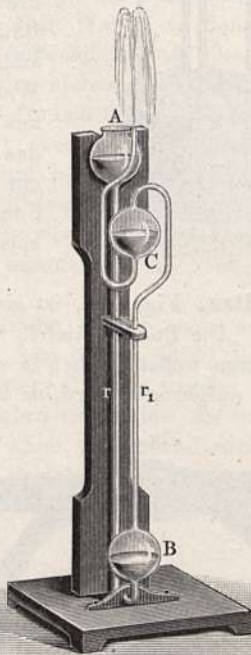


Fig. 557.

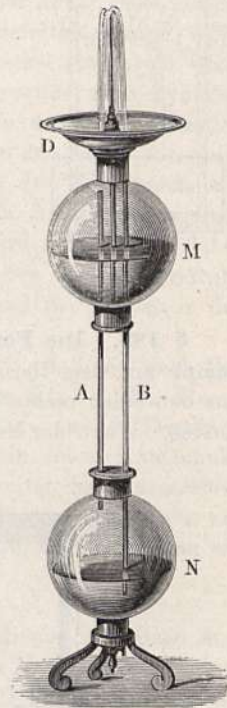
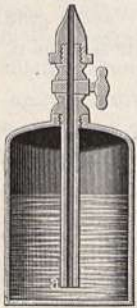


Fig. 555.



ist, die Ausflußspitze wieder auf das Spritzrohr aufgeschraubt. Ein kräftiger Wasserstrahl entsteigt dem Spritzrohr, sobald man den Hahn öffnet.

Wenn man die Einrichtung trifft, daß die Luft im Heronsball durch den Druck einer Wassersäule komprimiert wird, so erhält man einen Heronsbrunnen. Fig. 556 stellt einen möglichst einfach konstruierten Heronsbrunnen dar. Wenn man in die Kugel *A* Wasser eingießt, so wird es durch das Rohr *r* in das Gefäß *B* herabfließen und die Luft aus demselben verdrängen. Der dadurch erzeugte Druck pflanzt sich durch das Rohr *r* zum Heronsball *c* fort und bewirkt so das Springen des Wassers aus demselben.

Die Fig. 557 zeigt den Heronsbrunnen in der Form, wie er in Salons zu Blumentischen verwendet wird. Man findet dabei manchmal auch die Einrichtung, daß nach Ablauf des Wassers in das untere Gefäß durch Drehen beider Gefäße um eine horizontale Achse, welche die nötigen Kommunikationen enthält, der Springbrunnen wieder in Gang gesetzt werden kann.

Wegen der vielfachen Reibung erreicht der Wasserstrahl meist nur die Hälfte der theoretischen Steighöhe. Um diese zu erhöhen, kann man dasselbe Prinzip wiederholt zur Anwendung bringen. Fig. 558 zeigt dies schematisch, Fig. 559 bei einem aus Blech ausgeführten Heronsbrunnen. Beide Gefäße sind durch Vertikalwände in zwei Hälften geteilt.

Fig. 558.

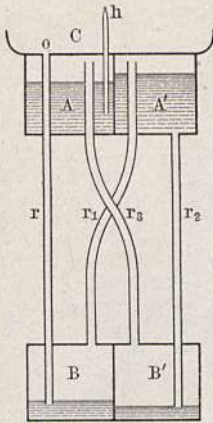


Fig. 559.

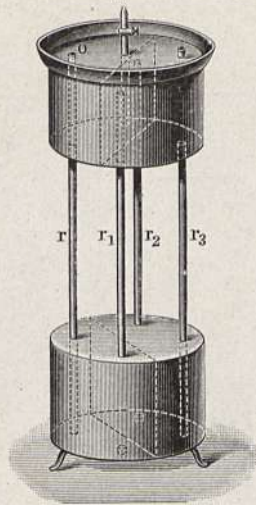
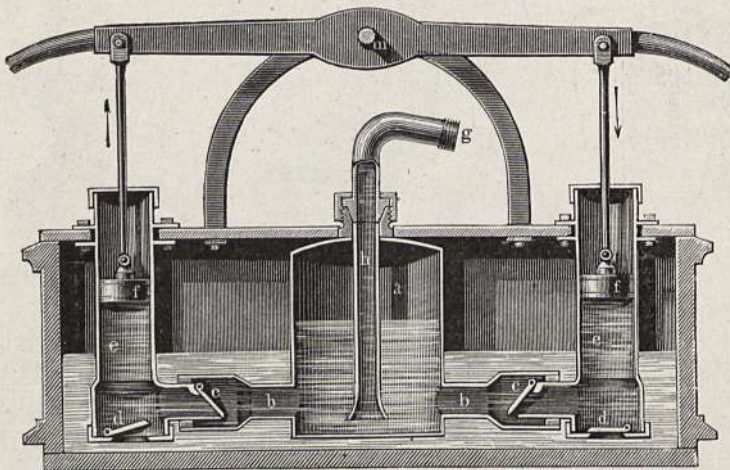


Fig. 558 zeigt dies schematisch, Fig. 559 bei einem aus Blech ausgeführten Heronsbrunnen. Beide Gefäße sind durch Vertikalwände in zwei Hälften geteilt. Das aus c (Fig. 558) durch r niedergehende Wasser verdrängt die Luft aus B in den Raum über A' , und ihr Druck addiert sich zu dem der Wassersäule, welche die Luft aus B' nach A drängt. Auf das Wasser in A wird daher ein Druck ausgeübt, der der Summe der Wassersäulen entspricht.

§ 182. Die Feuerspritze, Fig. 560, ist eine Verbindung der Druckpumpe mit dem Heronsball. Die Pumpenstiefel, von denen wir vorderhand nur den einen rechts betrachten wollen, stehen in einem mit Wasser gefüllten Kasten. Wenn der Kolben f aufgezogen wird, so hebt sich die Klappe d , und

Fig. 560.



das Wasser dringt in den Stiefel. Beim Niedergange des Kolbens schließt sich das Ventil d , die Klappe c wird geöffnet, und das Wasser wird durch das Gurgelrohr b in den Windkessel a gepreßt. Dieser Windkessel ist nichts anderes als ein großer Heronsball; je mehr Wasser in den Windkessel gepumpt wird, desto mehr wird die Luft im oberen Teile desselben komprimiert. Das Rohr h reicht fast bis auf den Boden des Windkessels, bei g wird eine

Röhre mit enger Öffnung, der Schwanenhals, oder ein Wasserschlauch angeschraubt. Durch den Druck, welchen die im Windkessel komprimierte Luft auf das Wasser in demselben fortwährend ausübt, wird ein starker Wasserstrahl aus der Öffnung des Schwanenhalses hervorgetrieben. An eine Öffnung, welche sich in der Wand des Windkessels nahe am Boden befindet, kann ein längerer Schlauch mit einer metallenen Mündung angeschraubt werden, mit welcher man sich dem Feuerherde nähern kann.

Der Auf- und Niedergang der Kolben wird durch einen zweiarmigen Hebel bewerkstelligt.

In unserer Figur ist die Spritze in einem Moment dargestellt, in welchem der Kolben rechts niedergeht, während der Kolben auf der linken Seite steigt; auf der linken Seite wird also gerade Wasser in den Stiefel eingesaugt, während auf der rechten Seite eben Wasser in den Windkessel eingepreßt wird.

Es ist nicht gerade notwendig, daß eine Feuerspritze zwei Zylinder habe, und in der Tat werden kleinere Feuerspritzen nur mit einem Zylinder gebaut; in diesem Falle ist freilich der Wasserzugang in den Kessel intermittierend, dessen ungeachtet aber wird aus dem Rohre des Windkessels ein kontinuierlicher Wasserstrahl hinausgetrieben, weil die komprimierte Luft auch noch wirkt, während der Kolben aufgezogen wird. Es finden dabei allerdings Schwankungen in der Kraft statt, mit welcher der Wasserstrahl hervordringt, denn diese nimmt allmählich ab, während der Kolben in die Höhe geht.

Die neueren Feuerspritzen werden meist so gebaut, daß sie nach Bedarf das Wasser statt aus dem Kasten direkt aus einem Kanale oder Flusse ansaugen können. Zu diesem Zwecke werden die Öffnungen der Ventile *d* mit einem gemeinsamen Rohre verbunden, an welches ein dickes Kautschukrohr angeschraubt werden kann, dessen anderes Ende unter die Wasseroberfläche versenkt wird. Im Prinzip stimmt eine solche Feuerspritze ganz mit der S. 424 beschriebenen Saug- und Druckpumpe überein, nur daß daran ein Windkessel vorhanden ist.

§ 183. Gasbehälter. Apparate, welche dazu dienen, um Gase aufzubewahren, werden meistens mit dem wenig passenden Namen Gasometer, d. i. Gasmesser, bezeichnet, während man die eigentlichen Gasmesser mit dem Namen Gasuhren belegt. Es gibt verschiedene Formen von solchen Gasbehältern.

Fig. 561 stellt ein Gasometer nach P e p y dar, wie es in chemischen Laboratorien gewöhnlich gebraucht wird. *B* ist ein Zylinder von lackiertem Blech von 40 bis 50 cm Höhe und 25 bis 30 cm Durchmesser, dessen oberer Deckel etwas nach oben gewölbt ist. Auf diesem Deckel ruht auf Stützen *cc* ein zweiter, oben offener Zylinder *A*, dessen Höhe aber nur $\frac{1}{3}$ von der des unteren ist. Der obere Zylinder ist mit dem unteren durch zwei Röhren verbunden, von denen die eine, *b*, gerade in der Mitte des Deckels sich befindet. Sie darf durchaus nicht in den unteren Zylinder hineinragen. Eine zweite Verbindungsröhre *a* geht fast bis auf den Boden des unteren Zylinders. In jeder dieser Röhren befindet sich ein Hahn, vermittelt dessen man nach Belieben die Verbindung der beiden Zylinder herstellen und unterbrechen kann. Bei *e* befindet sich eine kurze horizontale Röhre, welche ebenfalls durch einen Hahn verschlossen werden kann und an welcher vorn ein

Schraubengewinde eingeschnitten ist, um andere Röhren und Ausströmungsöffnungen anschrauben zu können. Nahe am Boden des unteren Zylinders befindet sich bei *d* eine schief nach aufwärts gerichtete Öffnung, welche mittels einer Schraube oder eines Korkes verschlossen werden kann.

Wenn man den Behälter mit einem Gase füllen will, füllt man ihn erst mit Wasser, und zwar auf folgende Weise. Die Öffnung bei *d* wird ver-

Fig. 561.

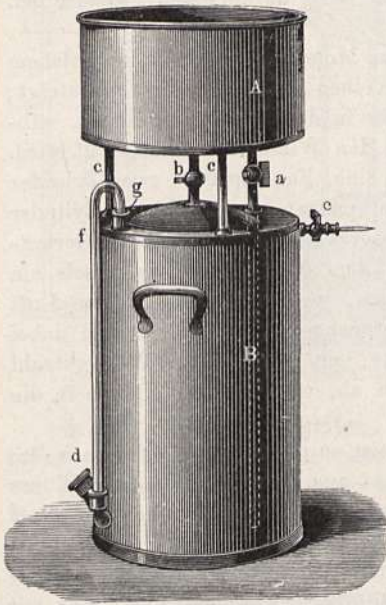
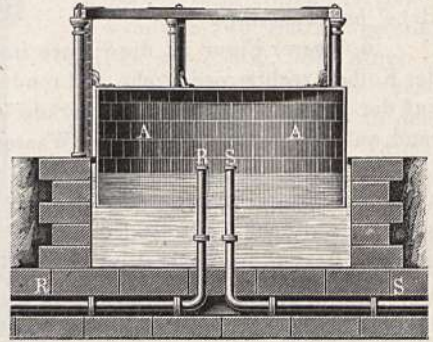


Fig. 562.



schlossen, die drei Hähne werden geöffnet und in das obere Gefäß Wasser gegossen. Das Wasser fließt in den unteren Zylinder, und wenn dieser so weit gefüllt ist, daß Wasser bei *e* auszufließen beginnt, schließt man diesen Hahn. Der Rest von Luft, welcher nun noch im Zylinder sich befindet, entweicht durch das Rohr *b*. Ist der untere Zylinder auf diese Weise mit Wasser

gefüllt, so werden die Hähne der Verbindungsrohre geschlossen und die Schraube oder der Kork bei *d* weggenommen. Wasser kann hier nicht ausfließen, weil keine Luftblasen eindringen können. Wenn man aber bei *d* ein Gasleitungsrohr einsteckt, so wird neben diesem Rohre das Wasser ausfließen, während aus demselben fortwährend Gasblasen in den oberen Teil des Behälters aufsteigen. Auf diese Weise füllt sich der untere Zylinder mehr und mehr mit Gas. Wie weit der Zylinder mit Gas gefüllt ist, sieht man an dem Glasrohre *fg*, welches mit dem Gefäße *B* oben und unten in Verbindung steht, so daß das Wasser in diesem Glasrohre gleiche Höhe hat wie im Zylinder.

Nachdem der Behälter mit Gas gefüllt ist, wird die Öffnung bei *d* verschlossen, der Hahn der Verbindungsrohre *a* geöffnet. Sobald nun auch der Hahn *e* geöffnet wird, strömt das Gas hier mit einer dem Drucke der Wassersäule in der Röhre *a* entsprechenden Geschwindigkeit aus.

Diese Gasometer haben zwei Übelstände, deren einer darin besteht, daß das Gas während des Ausströmens nicht unter konstantem Drucke steht, deren anderer in der Unbequemlichkeit beruht, daß bei jeder Füllung die Wassermasse entleert werden muß.

Von diesen Übelständen frei sind die Glockengasometer. Fig. 562 zeigt ein solches von der Art, wie sie zur Aufbewahrung des Leuchtgases

Verwendung finden. In ein mit Wasser gefülltes Bassin ist ein unten offener, oben geschlossener, aus zusammengenieteten Platten von Eisenblech gebildeter Zylinder *A* eingetaucht. Von unten her ragen zwei Röhrenleitungen *RR* und *SS* in diesen umgestülpten Zylinder hinein, deren Mündung sich über dem Wasserspiegel im Bassin befindet. Durch die Röhrenleitung *RR* strömt, während die andere durch einen Hahn verschlossen ist, das Leuchtgas aus den Retorten, in welchen es erzeugt wird, durch die Reinigungsapparate in die Höhlung des Zylinders *A* ein. In dem Maße aber, in welchem das Gas einströmt, muß der ganze Zylinder *A* aus dem Wasser des Bassins emporsteigen. Fünf eiserne, an dem Rande des Bassins angebrachte Säulen dienen, wie aus der Figur leicht zu ersehen ist, dem Zylinder zur Führung, so daß er sich beim Steigen nicht auf die Seite neigen kann.

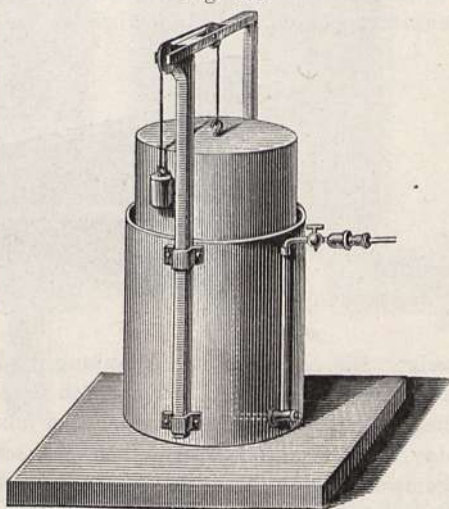
Ist das Gasometer gefüllt, so wird das Zuströmungsrohr geschlossen, der Hahn des Abströmungsrohres, welches sich in viele enge, zu den Gasschnäbeln führende Röhren teilt, wird geöffnet; das Gas strömt nun durch die Röhrenleitung *SS* ab, indem es durch das Gewicht des Blechzylinders *A* komprimiert wird, infolgedessen dann auch der Wasserspiegel in *A* um mehrere Centimeter tiefer steht als außen. In dem Maße, in welchem das Gas durch die Röhrenleitung *SS* abströmt, sinkt der Zylinder *A* wieder allmählich nieder. Bei größeren Gasometern dieser Art wird der mittlere Teil des Wasserbassins durch Mauerwerk ausgefüllt, so daß nur ein ringförmiges Bassin überbleibt, in welches die Glocke einsinkt.

Nach demselben Prinzip werden auch kleinere Gasometer für Laboratorien konstruiert. In Fig. 563 ist ein solcher Apparat abgebildet, und wohl ohne weitere Erklärung verständlich. Es befindet sich hier meist nur eine Zuleitungsrohre, aus welcher man erst das Gas ein- und nachher auch wieder ausströmen läßt.

Auch bei diesen Apparaten ist es vorteilhaft, den mittleren Wasserraum durch einen hohlen Blechkörper auszufüllen, wodurch das Gewicht des Ganzen sehr verringert wird.

Manchmal benutzt man zur Aufsammlung von Gasen luftdichte Säcke aus Kautschukstoff, so insbesondere zur getrennten Aufbewahrung von Wasserstoff und Sauerstoff zum Zwecke der Erzeugung des Drummond'schen Lichtes (Optik). Man gibt diesen Säcken am bequemsten die Form eines Keilpolsters und legt sie beim Gebrauch zwischen zwei durch Scharnier verbundene Bretter, deren oberes belastet wird, sobald das Gas ausströmen soll. Diese Säcke lassen aber stets nach und nach die Gase hindurch diffundieren und sind deshalb nicht allgemein als Gasbehälter verwendbar.

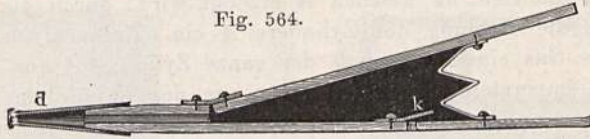
Fig. 563.



§ 184. Gebläse. Unter Gebläsen versteht man Vorrichtungen, welche dazu dienen, an eine bestimmte Stelle einen mehr oder minder starken Luftstrom hinzuleiten.

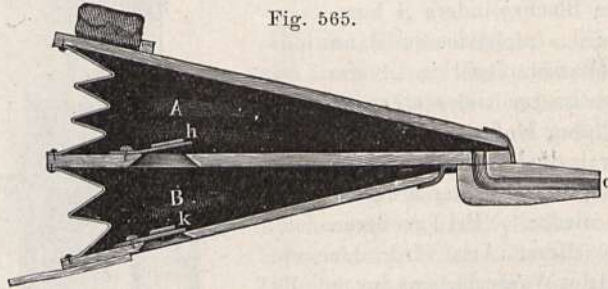
Die bekannteste Form des Gebläses ist der Blasebalg, welcher in Fig. 564 in seiner einfachsten Form dargestellt ist. Beim Aufziehen des Deckels hebt sich das im Boden angebrachte Ventil k , es dringt von außen

Fig. 564.



her Luft in den inneren Raum des Blasebalges, welche beim Niederdrücken des Deckels durch die Düse d ausgetrieben wird, weil sich bei diesem Niederdrücken die Klappe k schließt. Mit einem einfachen Blasebalge kann man aber keinen kontinuierlichen Luftstrom erzeugen, wie dies in Schmiedewerken, in chemischen Laboratorien usw. nötig ist; man wendet in diesem Falle zusammengesetzte Blasebälge an, welche konstruiert sind, wie Fig. 565

Fig. 565.



zeigt. Die in der oberen Abteilung A (dem Reservoir) eines solchen Blasebalges enthaltene Luft wird durch Gewichte, welche auf dem oberen Deckel liegen, komprimiert; sie kann aber nur durch die Düse o entweichen, weil das Ventil h zwischen A und B sich schließt, sobald die Luft in A stärker komprimiert ist als in B . Wenn man die untere Platte des Raumes B (des Schöpfers) hebt, so wird die Luft in B komprimiert, sie hebt das nach A führende Ventil h und dringt in den oberen Raum. Beim Niedergange der untersten Platte schließt sich das Ventil h wieder, das Ventil k öffnet sich, und B füllt sich von neuem mit Luft, welche durch Aufziehung der untersten Platte abermals in den oberen Raum geschafft wird. Man begreift leicht, daß das Ausströmen der Luft aus A durch die Düse nicht unterbrochen wird, während B von neuem sich mit Luft füllt.

Fig. 566 zeigt eine ähnlich aber kräftiger wirkende Vorrichtung, das Kautschukgebläse. Die längliche Birne, welche an beiden Enden mit Ventilen versehen ist, die sich in der Richtung des Luftstromes öffnen, schöpft die Luft von außen, wenn sie sich durch ihre Elastizität ausgedehnt hat. Beim darauffolgenden Komprimieren mit der Hand wird die Luft in das kugelförmige Reservoir geschafft, welches sie aufbläst, während sie gleichzeitig in der Pfeilrichtung weitergetrieben wird. Die Birne und die Kugel spielen also dieselbe Rolle wie der Schöpfer und das Reservoir des zusammengesetzten Blasebalges. Ein Netz schützt die Kugel vor zu starker Ausdehnung.

Solche Kautschukgebläse liefern Luftspannungen bis zu 40 cm Quecksilberhöhe.

Das vollkommenste aller Gebläse ist das Zylindergebläse, welches in Fig. 567 abgebildet ist. In einem wohlausgebohrten gußeisernen Zylinder *A*, in welchem ein Kolben *C*, an den Wänden luftdicht schließend, auf und nieder bewegt werden kann, geht die Kolbenstange *a* luftdicht durch die in

Fig. 566.

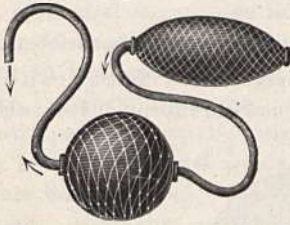
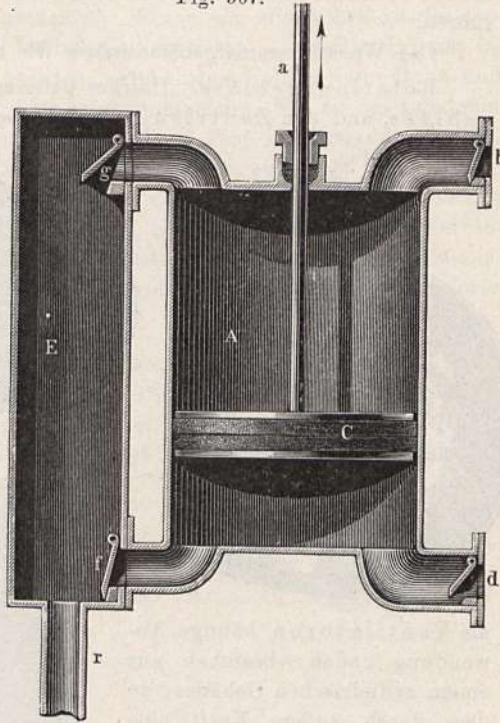


Fig. 567.



der Mitte des oberen Deckels befindliche Stopfbüchse. Durch die Öffnung bei *b* kommuniziert der obere, durch die Öffnung bei *d* der untere Teil des Zylinders mit der freien Luft; die Öffnungen bei *g* und *f* aber verbinden den Zylinder mit einem viereckigen Kasten *E*. Bei *b* und *d* befinden sich Klappen, die sich nach innen, bei *g* und *f* aber solche, die sich nach außen öffnen. Wenn nun der Kolben niedergeht, schließt sich die Klappe bei *d*, die bei *f* aber öffnet sich, und alle Luft aus dem unteren

Teile des Zylinders wird in den Raum *E* getrieben. — Unterdessen dringt aber durch die Klappe bei *b* Luft von außen her in den oberen Teil des Zylinders. Wenn der Kolben wieder in die Höhe geht, schließt sich *b*, und alle Luft, die beim Niedergang des Kolbens hier eingedrungen war, wird durch die Öffnung bei *g* in den Kasten *E* geschafft, während *f* geschlossen ist und sich der untere Teil des Zylinders wieder durch die geöffnete Klappe *d* mit Luft füllt. Die in *E* komprimierte Luft strömt durch ein am unteren Ende von *E* befestigtes Rohr nach dem Feuerraum.

Die Geschwindigkeit des Kolbens ist am größten, wenn er die Mitte des Zylinders passiert, sie nimmt um so mehr ab, je mehr er sich der oberen oder unteren Grenze seines Weges nähert. Daraus geht hervor, daß der Wind, welchen ein solcher Zylinder liefert, nicht gleichmäßig ausströmt. Da aber für die meisten Schmelzprozesse ein gleichmäßiger Windstrom nötig ist, so muß man dafür sorgen, ihn zu regulieren. Man erreicht dies entweder dadurch, daß man an demselben Windkasten *E* drei Zylinder anbringt, deren Kolben nicht gleichzeitig die Mitte ihres Weges passieren, oder auch dadurch, daß man die Luft aus *E* erst in einen Behälter, z. B. eine Gasometerglocke,

treten läßt, dessen Rauminhalt sehr groß ist im Vergleich zum Volumen des Zylinders. Je größer dieser Luftbehälter ist, welcher den Namen Regulator führt, desto weniger Einfluß hat die Unregelmäßigkeit der Kolbenbewegung auf die Gleichmäßigkeit des aus dem Regulator austretenden Luftstromes.

Um den Druck zu messen, welchem die Gase in den verschiedenen Behältern und Gasleitungsröhren ausgesetzt sind, bedient man sich der Manometer (§ 164), welche bei Gebläsen auch den Namen der Windmesser führen.

Das Wassertrommelgebläse haben wir bereits in § 179 beschrieben.

Rotationsgebläse. Hierher gehören insbesondere die Schraubengebläse und das Zentrifugalgebläse. Die Schraubengebläse, welche

Fig. 568.

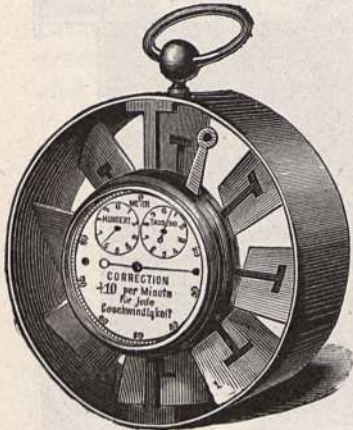


Fig. 569.

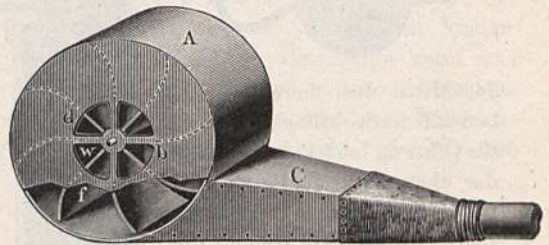
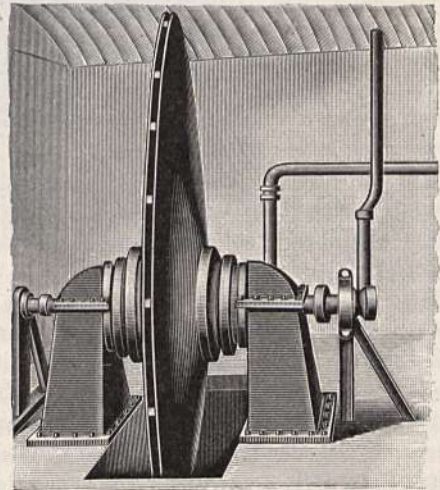


Fig. 570.



als Ventilatoren häufige Anwendung finden, bestehen aus einem zylindrischen Gehäuse, in dem durch äußere Kraft eine Achse mit Flügeln in Form von Schraubenflächen in Rotation versetzt werden kann. Die Luft, welche die Schraubenflächen umgibt, spielt hierbei die Rolle der Schraubenmutter und wird längs der Achse in Bewegung gesetzt, wenn die Schraubenspindel rotiert. Derselbe Apparat dient umge-

kehrt als Windmesser oder Anemometer¹⁾, Fig. 568. Die längs der Achse in die Röhre eintretende Luft versetzt die Schraube in Rotation, und durch ein angefügtes Zählwerk kann die Anzahl der Umgänge, welche proportional der durch den Windmesser hindurchgeströmten Luftmasse ist, gezählt werden. Ähnliche Vorrichtungen finden sich häufig am oberen Rande der Fenster eingesetzt, wo sie durch das Ausströmen der wärmeren Stubenluft ins Freie in

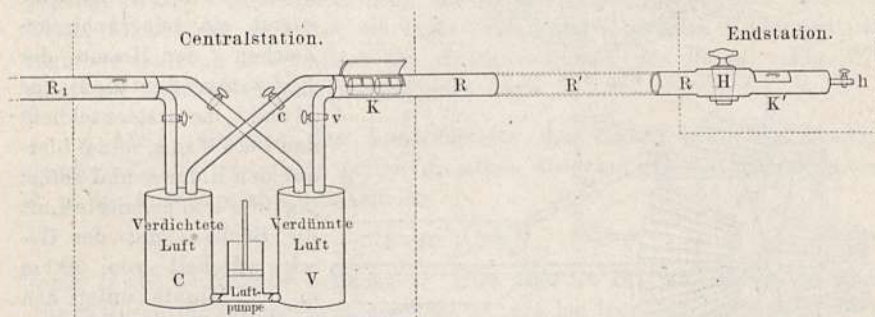
¹⁾ Der Windmesser für freien Wind wird in der Meteorologie beschrieben werden.

Rotation gesetzt werden. Den Namen Ventilator verdienen sie hierbei allerdings nicht, denn sie hemmen vielmehr den Austritt der Luft, welche schneller ausströmen würde, wenn ihr kein Hindernis in den Weg gestellt wäre.

Wirksamer sind die Zentrifugalgebläse. Innerhalb eines zylindrischen Gehäuses *A*, Fig. 569, wird ein Flügelrad in rasche Rotation versetzt. Die zwischen den Flügeln *f, f* vorhandene Luft wird durch Zentrifugalkraft gegen die Mantelfläche des Gehäuses gedrückt und entweicht daselbst durch ein tangential angesetztes Röhrenstück *C*. Rings um die Achse ist das Gehäuse offen und läßt bei *w* neue Luftmassen eintreten. Dasselbe Prinzip ist auch zu Luftpumpen verwendet worden, welche ohne Kolben, ohne Hahn und ohne Ventil funktionieren. Fig. 570 zeigt eine solche, wie sie im Londoner Zentralpostamt zum Betriebe der pneumatischen Post in Verwendung steht. Sie besteht aus zwei großen Eisenscheiben, welche auf einer horizontalen Achse befestigt sind. Ihr Zwischenraum ist durch radiale Wände in Kanäle geteilt. Die Achse ist auf einer Seite hohl und mit dem Raum in Verbindung, welcher ausgepumpt werden soll. Mittels einer aufgekeilten Riemenscheibe wird der Apparat durch eine Dampfmaschine oder einen anderen Motor in rasche Rotation versetzt.

§ 185. Die Luft als Motor. Die komprimierte Luft wird vielfach als Motor benutzt, wovon wir bereits in § 180 bei der Windbüchse ein Beispiel beschrieben haben. Die Anwendung der komprimierten (oder auch verdünnten) Luft bietet dabei den Vorteil, daß die Apparate zur Verdichtung

Fig. 571.



(oder Verdünnung) der Luft entfernt von dem Orte aufgestellt sein können, wo ihre bewegende Kraft benutzt wird, indem man die Luft durch Röhren der Verbrauchsstelle zuführt, wobei auch oft nebenbei die abkühlende und ventilierende Wirkung der ausströmenden Luft zum Vorteil gereicht. So z. B. werden die Bohrmaschinen beim Tunnelbau und in Bergwerken vielfach durch komprimierte Luft betrieben, welche dabei in ähnlicher Weise zur Anwendung kommt, wie der Wasserdampf bei den Dampfmaschinen. Eine hierher gehörige Anwendung ist die pneumatische Post (Rohrpost), welche den rascheren Briefverkehr innerhalb großer Städte vermittelt. Wir wollen die Einrichtung einer solchen Rohrpostanlage an der Hand der schematischen Figur 571 kennen lernen.

Im Mittelpunkte der Stadt befindet sich in Verbindung mit dem Hauptpostamt eine Zentralstation, in deren Kellerräumen sich zwei große Luftbehälter *V* und *C* befinden, sowie eine durch Maschinenkraft betriebene Luft-

pumpe, die fortwährend die Luft des einen Behälters *V* herauspumpt und in den anderen Behälter *C* hineindrückt. (In der Fig. 571 sind die Behälter und die Pumpe im Verhältnis zu den Röhren zu klein gezeichnet.) Von der Zentralstation führen unterirdisch Röhren von $6\frac{1}{2}$ cm Durchmesser nach allen Endstationen, wo Postnebenämter vorhanden sind. Jede dieser Röhren ist in der Zentrale durch zwei Rohrleitungen mit den beiden Behältern in Verbindung. Die Fig. 571 zeigt dies für zwei Rohrleitungen. Diese Zuleitungen sind durch Hähne *v*, *c* verschließbar; ebenso sind die äußeren Enden der Rohrleitungen mit Hähnen *h* verschlossen. Sowohl in der Zentralstation als an jeder Endstation ist die Rohrleitung an der Oberseite durch einen luftdicht schließenden Deckel *k*, *k'* zu öffnen. Durch diese Öffnung können nun mehrere

Fig. 572.

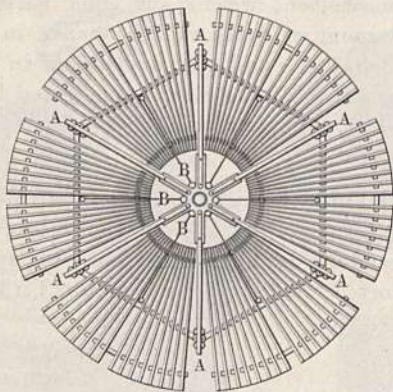
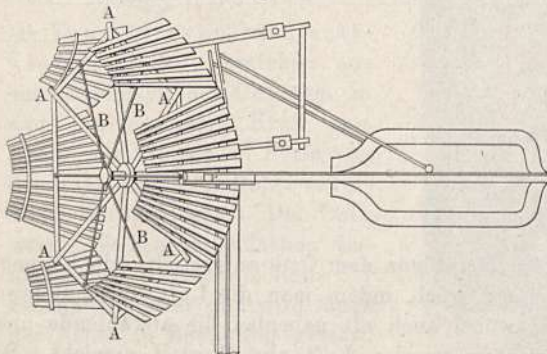


Fig. 573.



zylindrische, mit Leder überzogene Büchsen *B*, *B*, die mit leichter Reibung nahe luftdicht der Rohrwandung anliegen und in ihrem Inneren ungefähr 20 Briefe aufzunehmen vermögen, hintereinander eingelegt werden. Soll eine solche Sendung von *k* aus nach der Endstation *k'* befördert werden, so gibt der Beamte an der Zentrale zuerst ein telegraphisches Zeichen, der Beamte der Endstation öffnet die Hähne *H* und *h*, der erstere schließt den Deckel in *k*, öffnet hierauf den Hahn *c*, und sofort jagt die komprimierte Luft die Büchsen mit der Geschwindigkeit von 500 m in der Minute unter den Straßen, Kellern und Kanälen der Stadt hinweg bis in den Kasten *k'* der Endstation. Dort schließt der Beamte zuerst den Hahn *H*,

öffnet dann den Deckel *k'* und nimmt die Sendung in Empfang. Will er nun Briefe in die Zentrale schicken, so legt er die gefüllten Büchsen bei *k'* ein, schließt den Deckel, öffnet die Hähne *h* und *H* und gibt der Zentrale ein telegraphisches Zeichen, wonach der dortige Beamte den Hahn *c* schließt, aber *v* öffnet. Sofort drückt die Atmosphäre die Büchsen gegen den Kasten *k*, wo sie nach Schließen des Hahnes *v* herausgenommen und nötigenfalls an eine andere Endstation weiterbefördert werden. Auf diese Weise ist es möglich, alle Stationen untereinander in raschen Verkehr zu setzen.

In den vierziger Jahren des verflossenen Jahrhunderts hat man in England und Frankreich sogar versucht, ganze Eisenbahnzüge auf analoge

Weise durch Luft in Bewegung zu setzen (atmosphärische Eisenbahn), doch wurden diese Versuche wegen technischer und finanzieller Schwierigkeiten bald wieder aufgegeben. Dagegen werden ausnahmsweise dort, wo Rauchentwicklung ausgeschlossen werden muß, Lokomotiven durch komprimierte Luft in Bewegung gesetzt.

Die älteste Anwendung der Luft als Motor ist wohl die direkte Ausnutzung der Winde bei den Segelschiffen und Windmühlen. Während die ersteren schon von den Alten benutzt wurden, sind die letzteren wahrscheinlich erst im Mittelalter in Deutschland in Gebrauch gekommen. Man unterscheidet bei den Windmühlen die Bockwindmühlen, bei welchen das ganze Gehäuse zusammen mit der Achse des Windrades an seinem oberen Ende jeweilen so gedreht wird, daß diese in die Windrichtung fällt, und in holländische Windmühlen, bei welchen der Unterbau feststeht und nur das Dach mit dem Windrad jeweilen nach dem Winde gedreht wird. Bei den neueren Windmotoren erfolgt diese Drehung automatisch mit Hilfe eines Steuerflügels, der am entgegengesetzten Ende der Windradachse angebracht ist. Wir ersehen diese Einrichtung aus der nach amerikanischem Muster von Fr. Filler in Hamburg-Eimsbüttel gebauten Windradpumpe, Fig. 572 und 573¹⁾. Das Windrad selbst ist aus vielen radial angeordneten schmalen, unter schiefer Winkel gegen die Radebene gestellten Brettchen zusammengesetzt. Die letzteren sind in sechs Gruppen angeordnet, so daß jede Gruppe sich um eine Seite des sechseckigen Gestells nach rückwärts umkippen läßt. Diesem Umkippen wird durch ein an einem Hebelwerk angebrachtes Gewicht entgegengewirkt. Überschreitet nun die Stärke des Windes einen gewissen Grad, so bewirkt er selbst ein mehr oder weniger starkes Umkippen und reguliert dadurch automatisch die Geschwindigkeit des Rades. Fig. 573 zeigt das Windrad in ganz umgekippter Lage.

§ 186. Gesetze des Ausströmens der Gase. Für die Ausflußgeschwindigkeit der Gase gelten dieselben Gesetze wie bei Flüssigkeiten, d. h. die Ausflußgeschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (1)$$

wenn H die Druckhöhe bezeichnet. Hier aber ist H eine Größe, die nicht direkt durch die Beobachtung gegeben ist, wie bei tropfbar-flüssigen Körpern. Für diese bezeichnet H die Höhe der Flüssigkeitssäule, deren Druck den Ausfluß bewirkt und welche von derselben Natur und Dichtigkeit ist wie die ausfließende Flüssigkeit selbst. Gase, welche in einem Gefäße eingeschlossen sind, sind aber nie durch eine Gassäule von gleichmäßiger Dichtigkeit und wohl begrenzter Höhe gedrückt, sondern sie sind einem Drucke ausgesetzt, welcher durch die Höhe h einer Wassersäule oder einer Quecksilbersäule gemessen wird.

Ist das spezifische Gewicht des eingeschlossenen Gases (Wasser = 1 gesetzt) gleich d , so ist die Höhe H einer Säule dieses Gases, welche einer Wassersäule von der Höhe h das Gleichgewicht hält:

$$H = \frac{h}{d},$$

¹⁾ Diese Figuren sind dem Buch der Erfindungen, II. Bd. (Ing. E. Rosenboom) entlehnt.

Raum einströmt. Man hat für diesen Fall nur $b = 0$ zu setzen und erhält alsdann:

$$v = 396,5 \sqrt{\frac{h}{h}} = 396,5,$$

also stets den gleichen Wert von v , welches auch der Wert von h sein mag.

Die Ausflußmenge in einer Sekunde würde man erhalten, wenn man den Querschnitt der Öffnung f mit diesem Werte von v multipliziert, vorausgesetzt, daß in jedem Punkte des Querschnittes die ausströmenden Luftteilchen mit dieser Geschwindigkeit passieren. Die Ausflußmenge in t Sekunden würde demnach sein:

$$M = f \cdot t \cdot 396,5 \sqrt{\frac{h}{b + h}}.$$

Die Erfahrung aber zeigt, wie wir dies ja auch schon bei tropfbarflüssigen Körpern gesehen haben, daß die wirkliche Ausflußmenge geringer ist als die theoretische; und zwar hat man die theoretische Ausflußmenge mit einem bestimmten Faktor μ zu multiplizieren, um die wirkliche zu erhalten.

Für Wasser ist bekanntlich dieser Faktor 0,64 und ist fast ganz unabhängig von der Druckhöhe, indem er nur sehr unbedeutend wächst, wenn die Druckhöhe abnimmt. Für Gase aber ist der Wert von μ sehr veränderlich. Nach Schmidt, welcher diesen Gegenstand zuerst einer genaueren Untersuchung unterworfen hat, ist μ bei einer Druckhöhe von 1 m Wasser gleich 0,52. Nach d'Aubuissons Versuchen ist, innerhalb der Druckhöhen von 3 bis 15 cm, der Wert von $\mu = 0,65$ zu setzen. Solche Verschiedenheiten können nicht wohl von Beobachtungsfehlern herrühren und beweisen unzweifelhaft eine Veränderlichkeit von μ .

Eine sehr genaue Reihe von Versuchen hat Koch über diesen Gegenstand angestellt. Er hat gefunden, daß, wenn die Druckhöhe von 2 m Wasser bis 5 cm abnimmt, der Wert von μ von 0,5 bis auf 0,6 wächst. Buff hat gezeigt, daß, wenn man

$$\mu = 0,626 (1 - 0,789 \sqrt{h})$$

setzt, wo h , wie bisher, die Druckhöhe bezeichnet, die nach dieser Formel berechneten Werte sehr gut mit den Kochschen Beobachtungen übereinstimmen, daß also diese Formel das empirische Gesetz für die Veränderlichkeit des Ausflußkoeffizienten μ ist. Später hat Buff hierüber selbst genaue Versuche bei geringem Drucke, wie er besonders in der Praxis vorkommt, angestellt, welche gleichfalls die Veränderlichkeit des Koeffizienten μ in der erwähnten Weise bestätigen.

Die Differenz zwischen der theoretischen und wirklichen Ausflußmenge hat hier einen ganz analogen Grund wie bei den tropfbarflüssigen Körpern, und es läßt sich daraus schließen, daß auch hier eine *Contractio venae* stattfinden muß, obgleich wir sie nicht unmittelbar beobachten können.

Zylindrische Ansatzröhren ebenso wie konische, mag nun die weite Öffnung nach innen oder nach außen gekehrt sein, vermehren die Ausflußmenge der Gase.

§ 187. Ausflußgeschwindigkeit verschiedener Gase bei gleichem Druck. Nach Gleichung (2) des vorigen Paragraphen ist die Ausströmungs-

geschwindigkeit v' eines Gases, dessen spezifisches Gewicht nicht d , sondern nd ist,

$$v' = \sqrt{2g \frac{h}{nd}} = v \sqrt{\frac{1}{n}} \dots \dots \dots (1)$$

Wenn verschiedene Gase unter gleichem Drucke ausströmen, so ist also ihre Ausströmungsgeschwindigkeit der Quadratwurzel aus ihren spezifischen Gewichten umgekehrt proportional. Ein viermal leichteres Gas wird also doppelt so schnell ausströmen. Das spezifische Gewicht der Kohlensäure ist 1,5, das des Wasserstoffgases ist 0,069 mal so groß als das der atmosphärischen Luft. Die Ausströmungsgeschwindigkeit der Kohlensäure ist also $\frac{v}{\sqrt{1,5}} = 0,816 v$, die des Wasserstoffgases ist $\frac{v}{\sqrt{0,069}} = 3,8 \cdot v$, wenn v die Ausströmungsgeschwindigkeit der atmosphärischen Luft unter gleichem Druck bezeichnet.

Da nun aber die Ausflußzeit der Ausflußgeschwindigkeit umgekehrt proportional ist, so folgt, daß das spezifische Gewicht eines Gases dem Quadrat der Zeit proportional ist, welches ein gegebenes Gasvolumen unter sonst gleichbleibenden Umständen braucht, um aus einer feinen Öffnung auszuströmen.

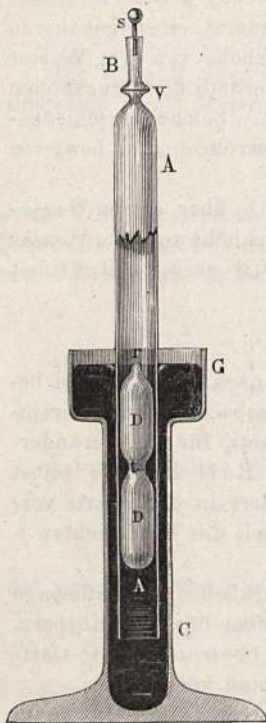
Bezeichnen wir mit t und t' die Zeiten, welche zwei gleiche Volumina verschiedener Gase brauchen, um bei gleichem Druck durch die gleiche Öffnung auszuströmen, so haben wir also:

$$\frac{s}{s'} = \frac{t^2}{t'^2} \dots \dots \dots (2)$$

wenn wir mit s und s' die spezifischen Gewichte der beiden Gasarten bezeichnen.

Bunsen gründete darauf ein sehr sinnreiches Verfahren, um das spezifische Gewicht von Gasen zu ermitteln. Zur Aufnahme des zu untersuchenden Gases dient eine Glasröhre A , Fig. 574, welche ungefähr 40 cm lang ist. Oben ist sie verengt und ein Glasröhrchen B angesetzt. In der etwas verdickten Vereinigungsstelle V ist ein dünnes Platinplättchen eingeschmolzen, welches eine feine Öffnung hat, durch welche das Gas aus A ausströmen kann, wenn das Röhrchen B nicht durch den Glasstöpsel s geschlossen ist. Unten ist das Gas durch Quecksilber gesperrt, welches sich in einem oben erweiterten Gefäß befindet. Während der Stöpsel s wohl schließend aufgesetzt ist, wird nun die Glasröhre A so tief in das Quecksilber niedergedrückt und durch eine entsprechende Vorrichtung festgehalten, daß die Spitze r eines aus einer Glasröhre gefertigten Schwimmers D durch ein mehrere Schritte entferntes Fernrohr genau im Niveau des Quecksilbers im Gefäß C erscheint. Nun wird der Stöpsel s weggenommen; das Gas beginnt aus-

Fig. 574.



gedrückt und durch eine entsprechende Vorrichtung festgehalten, daß die Spitze r eines aus einer Glasröhre gefertigten Schwimmers D durch ein mehrere Schritte entferntes Fernrohr genau im Niveau des Quecksilbers im Gefäß C erscheint. Nun wird der Stöpsel s weggenommen; das Gas beginnt aus-

zuströmen, der Schwimmer D steigt, und man hat nur die Zeit zu messen, welche vom Wegnehmen des Stöpsels an vergeht, bis die an einer Verengung des Schwimmers D angebrachte Marke t im Niveau des äußeren Quecksilbers erscheint. Hat man mit demselben Instrument gleich hintereinander diese Messung mit zwei verschiedenen Gasarten angestellt, so verhalten sich ihre spezifischen Gewichte wie die Quadrate der beobachteten Ausflußzeiten. Zur Erläuterung mögen folgende von Bunsen angestellte Messungen dienen. Damit der Schwimmer D um die Höhe rt stieg, waren erforderlich:

für atmosphärische Luft	für Knallgas (elektrolytisch)
117,9 Sekunden	75,4 Sekunden
117 " "	75,8 " "
117,9 " "	75,7 " "
117,6 Sekunden	75,6 Sekunden.

Setzen wir nach diesen Versuchsergebnissen in Gleichung (1) $t = 75,6$, $t' = 117,6$ und $s' = 1$, so ergibt sich für das spezifische Gewicht des Knallgases:

$$s = \frac{75,6^2}{117,6^2} = 0,413,$$

was mit dem aus dem spezifischen Gewichte der Bestandteile berechneten spezifischen Gewichte des Knallgases (0,415) sehr nahe übereinstimmt.

Fig. 575 zeigt eine verbesserte Form des Ausströmungsapparates, welchen Bunsen zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Gase angewendet hat (Bunsen, Gasometrische Methoden, S. 129).

Wenn die Gase nicht durch Öffnungen in dünner Wand, sondern durch Kapillarröhren ausströmen, so erscheinen die Ausströmungsgesetze in ähnlicher Weise modifiziert wie die der tropfbar-flüssigen Körper.

Um die Gesetze zu ermitteln, nach welchen das Ausströmen eines Gases durch die kapillaren Kanäle eines Gipspfropfens stattfindet, wandte Bunsen (Gasometrische Methoden, Seite 214) die in Fig. 576 abgebildete Vorrichtung an. Eine graduierte Röhre ist oben mit einem bei 60°C getrockneten Gipspfropfen b geschlossen. Durch ein seitliches Rohr kann man sie mit einem beliebigen Gase füllen und dann mittels eines Quetschhahnes absperrern, welcher das Kautschukröhrchen q zudrückt. — Über dem Gipspfropfen b erweitert sich die Glasröhre etwas, und in diese konische Erweiterung paßt der eingeriebene Glasstöpsel o . Erst wenn dieser in die Höhe gezogen ist, kann eine Durchströmung des Gipspfropfens nach der einen oder anderen Richtung hin beginnen. Durch den Raum über dem Gipspfropfen b kann man nun aber mittels des Röhrchens i einen Gasstrom von der rechten Seite her einführen, während auf der linken Seite eine gleiche Gasmenge ausströmt, und so ist es möglich, auch über dem Gipspfropfen b eine beständig erneuerte Atmosphäre irgend eines Gases zu erhalten.

Es sei nun das Rohr ähnlich wie in Fig. 574 durch Quecksilber abgesperrt und mit Sauerstoffgas gefüllt, während über den Gipspfropfen ein Strom von Sauerstoffgas hinwegstreicht; wenn unter diesen Umständen das Rohr so hoch in die Höhe gezogen wird, daß der Spiegel des Quecksilbers im Rohr einige Centimeter höher steht als außen, so wird unter dem Einfluß dieser Druckdifferenz Sauerstoffgas von oben her durch den Gipspfropfen in die Röhre eintreten, und man kann nun messen, wieviel

Zeit erforderlich ist, damit bei konstant erhaltener Druckdifferenz ein gegebenes Volumen Sauerstoff eindringt.

Bunsen hat den Versuch für das nämliche Gas bei verschiedener Druckdifferenz angestellt und ihn dann in gleicher Weise mit verschiedenen

Fig. 575.

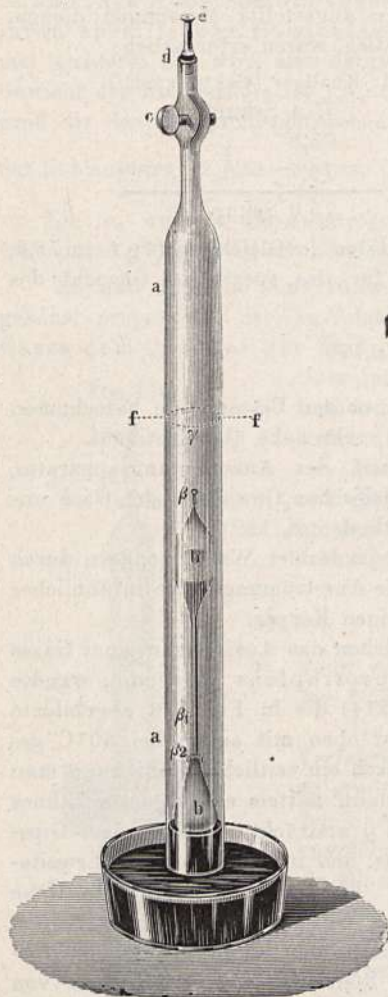
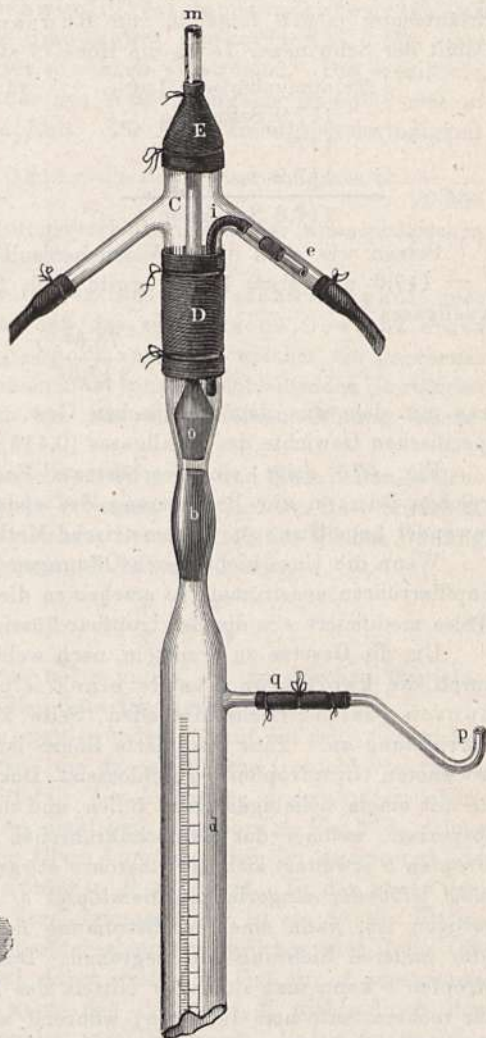


Fig. 576.



Gasen wiederholt. Aus diesen Versuchen ergab sich zunächst, daß die in gleichen Zeiten durch den Gipspfropfen eingeströmten Volumina desselben Gases der Druckdifferenz proportional sind.

Vergleicht man aber die Volumina verschiedener Gase, welche unter gleicher Druckdifferenz in derselben Zeit einströmen, so verhalten sich diese nicht umgekehrt wie die Quadratwurzel aus den spezifischen Gewichten der Gase. Die unter gleicher Druckdifferenz in gleichen Zeiten eingetretenen Volumina von Sauerstoffgas und Wasser-

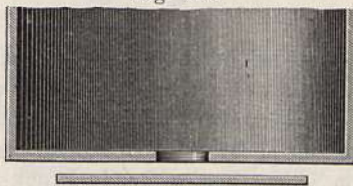
stoffgas verhalten sich nach dem Versuche wie 1 : 2,73; während die Quadratwurzeln aus den spezifischen Gewichten im Verhältnis von 1 : 3,995 stehen.

Es geht daraus hervor, daß der Durchgang eines Gases durch einen Gipspfropfen durch einen Reibungskoeffizienten modifiziert ist, welcher von der Natur des Gases abhängt, und daß also die Hohlräume des Gipses gegen hindurchströmende Gase sich nicht wie ein System von feinen Öffnungen in dünner Wand, sondern wie ein System kapillarer Röhren verhalten.

§ 188. Seitendruck der Gase beim Ausströmen, aerostatisches Paradoxon. Wenn sich Luft durch Röhrenleitungen bewegt, so ist ein Reibungswiderstand zu überwinden, und dazu wird ein Teil der Spannung des komprimierten Gases verwandt werden, also für die Bewegung verloren gehen. Der Druck, den die Röhrenwände von der Tension der durchströmenden Luft auszuhalten haben, nimmt um so mehr ab, je mehr man sich der Mündung des Rohres nähert, wie man sich durch Manometer überzeugt, welche an verschiedenen Stellen des Rohres angebracht werden. Es ist dies ganz den Erscheinungen analog, welche man bei der Bewegung von Flüssigkeiten durch Röhrenleitungen beobachtet. Über den Reibungswiderstand, welcher bei der Bewegung der Luft durch Röhren überwunden werden muß, sind besonders von d'Aubuisson und Buff Versuche angestellt worden.

Das Phänomen des Saugens findet bei der Bewegung der Gase auf eine ganz ähnliche Weise wie bei dem Ausströmen von Flüssigkeiten statt. Clement und Desormes haben eine äußerst interessante, hierher gehörige Erscheinung beschrieben. Wenn man in den Boden eines Reservoirs, Fig. 577, welches komprimierte Luft enthält, eine Öffnung von 2 bis 5 cm Durchmesser macht, so entweicht die Luft mit großer Gewalt. Wenn man der Öffnung eine Scheibe von Holz oder Metall nähert, welche ungefähr 20 cm Durchmesser hat, so wird sie, nachdem der erste Widerstand überwunden ist, nicht mehr abgestoßen; sie oszilliert lebhaft, indem sie in sehr kurzen Zwischenräumen (hundertel Sekunden) sich der Öffnung bald nähert, bald von ihr entfernt. Die Luft entweicht dabei mit großem Geräusch zwischen der Scheibe und der Wand. Wenn man versucht, die Scheibe wegzunehmen, so muß man große Kraft anwenden, wie wenn sie auf die Wand festgeleimt wäre. Clement und Desormes erklärten dies Phänomen ganz richtig. Der Luftstrahl, welcher die Öffnung verläßt, muß sich in eine dünne Schicht zwischen der Scheibe und der Wand ausbreiten. Bei unveränderter Dicke muß sie sich um so mehr ausbreiten, je mehr sie sich dem Rande der Scheibe nähert; sie befindet sich also in dem Falle wie ein flüssiger Strahl, welcher die immer wachsenden Querschnitte eines konischen Ansatzrohres ausfüllen soll. Zwischen der Scheibe und der Wand bildet sich ein luftverdünnter Raum, infolgedessen die atmosphärische Luft, von unten gegen die Scheibe drückend, sie an die Wand anpreßt.

Fig. 577.



Man kann diesen Versuch auch im kleinen anstellen, wenn man Luft mit dem Munde durch eine Röhre bläst, welche mit einer ebenen Scheibe endigt, wie dies in Fig. 578 dargestellt ist. Diese Scheibe hat in der Mitte ein Loch. Nahe am Rande sind drei Stäbchen, etwa von Draht, befestigt. An ihrem unteren Ende ist an jedem dieser Stäbchen ein Knopf angebracht, und auf diesen drei Knöpfchen liegt endlich frei nach oben beweglich eine

Fig. 578.

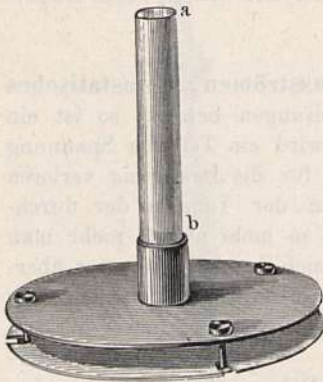


Fig. 579.

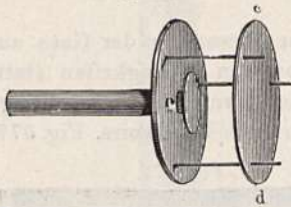
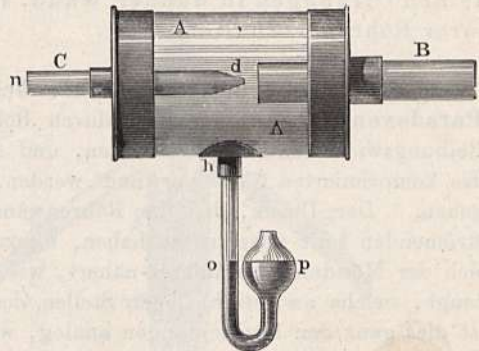


Fig. 580.



Scheibe von Kartenpapier; sie hat drei Einschnitte, durch welche die drei Stäbchen hindurchgehen. Sobald man bei *a* in die Röhre *ab* kräftig hineinbläst, wird die bewegliche Scheibe gehoben und bleibt nahe der oberen Scheibe hängen, bis man mit Blasen aufhört.

Eine andere Form dieses Versuches ist in Fig. 579 dargestellt. Vor der Mündung *o* des horizontal gehaltenen Rohres ist in geringem Abstände ein Messingscheibchen befestigt, dessen Durchmesser etwas größer ist als der der Öffnung, so daß der bei *o* austretende Luftstrom alsbald eine seitliche Richtung annehmen muß. Bei richtiger Stellung dieses kleinen Scheibchens kann der gegen die bewegliche Scheibe *cd* von außen her wirkende Druck so stark werden, daß sie schon aus einer Entfernung von 5 cm angezogen wird.

Den Durchmesser der Scheiben kann man ungefähr 1 dcm, die vertikale Entfernung der beiden Scheiben 1 cm machen.

Die einfachste Art, diesen Versuch anzustellen, hat Faraday angegeben. Man schließe die Finger der offenen Hand fest aneinander, so wird doch noch von Gelenk zu Gelenk ein spaltartiger Zwischenraum bleiben. Während man nun die Hand auf diese Weise horizontal hält, so daß die Fläche abwärts gekehrt ist, appliziere man die Lippen dem Intervall zwischen dem Zeige- und Mittelfinger nahe an ihren Wurzeln und blase möglichst stark. Bringt man nun ein Stück Papier von ungefähr 16 qcm an die Öffnung, durch welche der Luftstrom hindurchgeht, so wird es weder durch diesen Luftstrom fortgeblasen, noch fällt es durch sein Gewicht herab, was aber sogleich geschieht, sobald man mit dem Blasen aufhört.

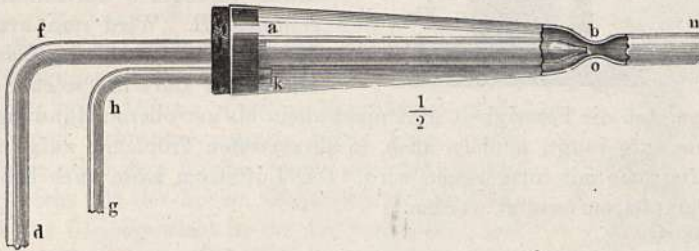
Das Phänomen des Saugens durch ausströmende Gase wollen wir auch mittels des Apparates Fig. 580 erläutern. Ein etwas weiteres, kurzes

Glasrohr *A* ist auf beiden Seiten durch aufge kittete Klappen von Messingblech geschlossen. In die eine derselben ist die Glasröhre *B*, in die andere ist die noch engere Glasröhre *C* so eingekittet, daß die etwas eingezogene, etwa 2 mm weite Mündung *d* der Röhre *C* ganz nahe vor dem einen Ende der Röhre *B* steht. Bei *h* ist die Röhre *A* durchbohrt und in eine hier aufge kittete Messingfassung ein auf der einen Seite kugelförmig erweitertes Manometerrohr eingekittet. Das Manometerrohr wird ungefähr bis zur Höhe *op* mit gefärbtem Wasser gefüllt. Wenn man nun bei *n* stark in das Rohr *C* hineinbläst, so sieht man alsbald, wie die Flüssigkeit im Manometerrohr von *o* aus mehrere Centimeter hoch in die Höhe steigt, ein Beweis, daß durch das Blasen eine Luftverdünnung in *A* hervorgebracht wird.

Die Luftverdünnung rührt daher, daß der bei *d* mit ziemlicher Geschwindigkeit austretende Luftstrom, in dem weiteren Rohre *b* sich ausbreitend, eine saugende Wirkung auf die Luft in *A* ausübt. Dieser Versuch erklärt sehr gut die Wirkung des sogenannten Blaserohrs der Lokomotiven.

Weit kräftiger noch läßt sich die Wirkung des Saugens mit dem von Reichert ganz aus Glas und Korkstopfen konstruierten Apparat, Fig. 581,

Fig. 581.

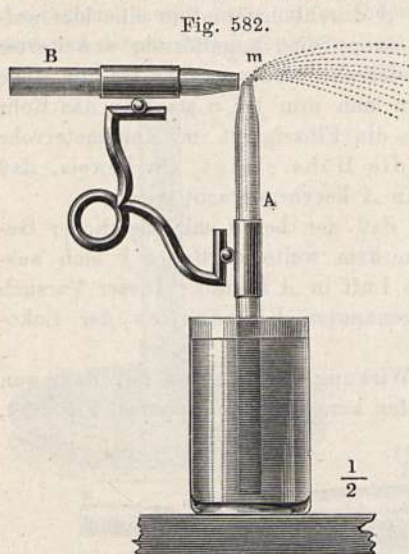


zeigen, dessen Einrichtung nach dem Vorangehenden wohl ohne weiteres verständlich sein wird. Zur Erläuterung der Figur ist nur noch zu bemerken, daß die äußere Glasröhre bei *b* im Durchschnitt dargestellt ist. Der links aus dem Korkstopfen hervorragende Teil der Röhren *ofd* und *hkg* ist in horizontaler und vertikaler Richtung weit länger, als es in der Figur der Raumersparnis wegen dargestellt ist.

Das vertikal herabgehende Röhrenstück *fd* ist in den Hals eines Kochgefäßes, etwa eines kleinen Papinschen Topfes, eingesetzt, dessen Wasser erhitzt wird. Sobald die Dämpfe bei *o* mit hinreichender Gewalt ausströmen, saugen sie nicht nur das Wasser aus einem Gefäß, in welches das untere Ende von *hg* eingetaucht ist, empor, sondern sie treiben dasselbe auch noch zur Öffnung bei *n* hinaus. Setzt man bei *n* mittels eines Kautschukröhrchens ein kurzes Glasrohr an, welches mit einer verengten Mündung versehen ist, wie die bei *o*, so strömt aus dieser Mündung ein kontinuierlicher Wasserstrahl hervor, welcher unter günstigen Umständen bis zur Decke des Zimmers aufsteigt, wenn diese Mündung vertikal nach oben gerichtet ist.

Diese Vorrichtung ist auch geeignet, die Wirkung der Dampfstrahlpumpe (des Injektors) zu erläutern, welche in neuerer Zeit vielfach zur Speisung der Dampfkessel benutzt wird, für deren nähere Besprechung aber hier nicht der Ort ist.

Die Gebrüder Körting in Hannover haben nach diesem Prinzip eine Reihe von Apparaten konstruiert, welche zum Fortbewegen und Heben von Flüssigkeiten, als Ersatz von Pumpen, dann zum Fortbewegen von Gasen, als Gebläse, Ventilatoren, Exhaustoren, Luftpumpen, ja selbst zum Fortblasen



und Heben von festen Körpern (Korn, Knochenkohle usw.) eine vielfache und sehr vorteilhafte Anwendung finden.

Eine in neuerer Zeit sehr verbreitete Anwendung des Saugphänomens sind auch die Flüssigkeitszerstäuber, deren einfachste Form in Fig. 582 in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Größe dargestellt ist. Dicht bei der etwas verengten oberen Öffnung des vertikalen Glasrohres *A*, dessen untere Öffnung in die zu zerstäubende Flüssigkeit eingetaucht ist, mündet das bei *m* gleichfalls etwas verengerte horizontale Glasröhrchen *B*. Wird nun kräftig in das Röhrchen *B* hineingeblasen, so strömt die Luft mit solcher Gewalt

bei *m* aus, daß die Flüssigkeit in *A* nicht allein bis zur oberen Mündung dieses Röhrchens aufgesaugt, sondern auch, in die zartesten Tröpfchen aufgelöst, von dem Luftstrome mit fortgerissen wird. Der Luftstrom kann auch hier durch einen Dampfstrom ersetzt werden.

§ 189. Wirbelbewegungen in Gasen. In § 146 haben wir von den Wirbelbewegungen gesprochen, die beim Ausströmen von tropfbaren Flüssigkeiten aus einer Öffnung im Boden eines Gefäßes entstehen. Aus ganz denselben Ursachen werden auch beim Ausströmen von Gasen aus Gefäßen solche Wirbelbewegungen auftreten. Auf diese Weise erklären sich die Rauchringe, welche Raucher aus dem Munde blasen und die sich ganz so verhalten wie die Flüssigkeitswirbelringe der Fig. 424. Man kann dieselben leicht mit folgendem einfachen Apparat reproduzieren. Ein beiderseits offener Glas- oder Blechzylinder wird an einem Ende mit einer elastischen Membran verschlossen und am anderen mit einem Papierblatt, das in der Mitte eine etwa 1 cm im Durchmesser haltende runde Öffnung besitzt. Füllt man den Zylinder, etwa durch Einblasen mittels einer Glasröhre, mit Rauch an, so genügt jeweilen ein schwacher Schlag auf die Membran, um aus der Öffnung einen Rauchring aufsteigen zu sehen, und man wird ohne Schwierigkeit in ihm die wirbelnde Bewegung bemerken.

Auch beim Abfeuern von Kanonen oder Böllern entstehen solche Ringe, insbesondere wenn nur Schießpulver und kein Geschöß geladen wird. Dieselben haben Durchmesser von 1 bis 2 m, bewegen sich unter sausendem Geräusch mit der Geschwindigkeit von 30 bis 35 m bis auf eine Distanz von über 300 bis 450 m und bringen dort, wo sie auf eine Scheibe aufschlagen, namhafte zerstörende Wirkungen hervor. Hierauf gründen sich die von

den Meteorologen noch sehr skeptisch aufgenommenen Versuche, durch Schießen die Hagelbildung in den Wolken zu verhindern (Wetterschießen).

H. v. Helmholtz hat die Bewegungen und Eigenschaften dieser Wirbel zunächst für eine ideale, absolut leicht bewegliche Flüssigkeit berechnet und hat dabei außerordentlich merkwürdige und interessante Resultate erhalten, welche sich bis zu einem gewissen Grade an den Wirbeln in wirklichen Flüssigkeiten und Gasen nachweisen lassen. Ein Wirbelring bewegt sich in der Richtung fort, nach welcher die Teile im Innern rotieren. Wenn er gegen eine Wand gerät, so breitet er sich aus. Von zwei in gleicher Richtung forteilenden Ringen holt stets der rückwärtige den vorderen ein; dieser erweitert sich und läßt den anderen hindurch, worauf sich das Spiel wiederholt. Wir können leider auf diesen Gegenstand nicht näher eingehen.

§ 190. Vom Auftrieb der Luft; Reduktion der Wägungen auf den luftleeren Raum. Das Gesetz des Archimedes gilt für Gase ebenso

wie für Flüssigkeiten. Jeder in ein Gas getauchte Körper erfährt von diesem einen Auftrieb, welcher dem Gewichte der verdrängten Gasmasse gleich ist. Es läßt sich dies mit Hilfe des Apparates Fig. 583 nachweisen, welcher den Namen des Baroskops oder des Dasymeters führt. Er besteht aus einem Wagebalken, an welchem auf der einen Seite eine hohle Glaskugel angehängt ist, während der andere Arm eine weit kleinere massive Metallkugel trägt, die an einem Schraubengewinde etwas nach rechts oder links geschoben werden kann, um dadurch das Gleichgewicht mit der hohlen Glaskugel herzustellen.

Ist das Gleichgewicht in der Art hergestellt, daß der Wagebalken horizontal steht, wenn der ganze Apparat von Luft umgeben ist, so wird er unter die Glocke der Luftpumpe gebracht. Sobald man evakuiert, hört das Gleichgewicht auf; der Arm, an welchem die hohle Glaskugel hängt, sinkt um so tiefer, je verdünnter die Luft unter der Glocke wird.

Es läßt sich davon leicht Rechenschaft geben. Es sei:

G das Gewicht der Glaskugel	}	im leeren Raume,
P das Gewicht der Metallkugel		
L der Gewichtsverlust der Glaskugel	}	wenn sie in Luft eingetaucht sind,
l der Gewichtsverlust der Metallkugel		

so ist, wie uns das ursprüngliche Gleichgewicht am Wagebalken lehrt:

$$G - L = P - l,$$

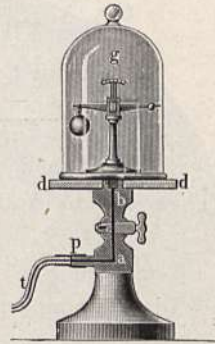
also:

$$G = P + L - l;$$

da nun aber jedenfalls $L > l$, weil das Volumen der hohlen Glaskugel größer ist als das der Metallkugel, so ist auch $G > P$, im luftleeren Raume ist also die Glaskugel schwerer als die Metallkugel, obgleich sie sich im luftgefüllten Raume an der Wage das Gleichgewicht hielten.

Da die Wägung der Körper fast immer in der Luft stattfindet, so muß, um das wahre absolute Gewicht der Körper zu erhalten, eine Reduktion der Wägungen auf den leeren Raum vorgenommen werden.

Fig. 583.



Bezeichnen wir mit:

P das gesuchte Gewicht des abgewogenen Körpers im leeren Raume,
 G das Gewicht der verwendeten Gewichtsstücke im leeren Raume,
 π den Gewichtsverlust des Körpers P in Luft,
 γ " " " " der Gewichtsstücke in Luft,
 s das spezifische Gewicht des Körpers P bei 0° ,
 s' " " " " der Gewichtsstücke G bei 0° ,
 k den kubischen Ausdehnungskoeffizienten des Körpers P ,
 k' " " " " der Gewichtsstücke G ,
 l_0 das spez. Gewicht der Luft bei $0^\circ = 0,001\ 293$,
 α den Ausdehnungskoeffizienten der Luft $= 0,003\ 67$,
 h den Luftdruck während der Wägung in Millimeter Quecksilber,

so ist

$\frac{P}{s} (1 + kt)$ das Volumen des gewogenen Körpers bei der Wägungstemperatur t ,

$\frac{G}{s'} (1 + k't)$ das Volumen der Gewichtsstücke bei der Wägungstemperatur t ,

$\frac{l_0 h}{760 (1 + \alpha t)}$ das spez. Gewicht der Luft bei t° und h Millimetern Druck,

folglich sind die Auftriebe von P und G :

$$\pi = \frac{l_0 h}{760 (1 + \alpha t)} \cdot \frac{P}{s} (1 + kt) \quad \gamma = \frac{l_0 h}{760 (1 + \alpha t)} \cdot \frac{G}{s'} (1 + k't).$$

Die Wägung ergibt die Gleichheit der scheinbaren Gewichte:

$$P - \pi = G - \gamma,$$

woraus

$$P = G + \pi - \gamma;$$

die Korrektur wegen der Reduktion der Wägung auf den leeren Raum ist demnach:

$$\pi - \gamma = \frac{l_0 h}{760 (1 + \alpha t)} \left[\frac{P}{s} (1 + kt) - \frac{G}{s'} (1 + k't) \right]. \quad (1)$$

Diese Formel enthält selbst das zu berechnende P ; da aber die ganze Größe $\pi - \gamma$ nur eine Korrekursionsgröße ist, so kann man in erster Annäherung für P das unkorrigierte G einsetzen.

Man erhält dann

$$\text{Corr} = \pi - \gamma = G \cdot \frac{l_0 h}{760 (1 + \alpha t)} \left[\frac{1 + kt}{s} - \frac{1 + k't}{s'} \right]. \quad (2)$$

Wo nicht große Genauigkeit verlangt wird, kann man bei festen und flüssigen Körpern auch deren Volumänderungen und jene der Gewichtsstücke mit der Temperatur vernachlässigen, so daß dann der Ausdruck für die Korrektur lautet:

$$\text{Corr} = \pi - \gamma = G \frac{l_0 h}{760 (1 + \alpha t)} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} \right). \quad (3)$$

Die Korrektur wird gleich Null, wenn $s = s'$, d. h. die spez. Gewichte des abzuwägenden Körpers und der Gewichtsstücke gleich sind; sie wird

positiv, wenn das spezifische Gewicht des Körpers s kleiner ist als das der Gewichtsstücke, negativ für den umgekehrten Fall.

Nehmen wir an, wir hätten ein Kilogramm Wasser mit Gewichtsstücken aus Messing bei 760 mm Luftdruck und 15°C abgewogen. In diesem Falle ist $s = 1$, s' etwa $= 8$, $\frac{l_0 h}{760(1 + \alpha t)} = 0,00112 \text{ g}$, $\pi - \gamma = 0,980 \text{ g}$. Hier beträgt also die Korrektion beinahe ein Gramm.

Bei den genauesten Wägungen ist auch noch auf den jeweiligen Wasserdampf- und Kohlensäuregehalt der Luft Rücksicht zu nehmen.

§ 191. Der Luftballon. Auf dem Gewichtsverlust der rings von Luft umgebenen Körper beruht auch das Steigen des Luftballons. Ein Körper muß nämlich in der Luft aufsteigen, sobald sein Gesamtgewicht kleiner ist als das Gewicht eines gleichen Volumens der umgebenden atmosphärischen Luft.

Einen solchen Körper kann man aber herstellen, wenn man eine entsprechende Hülle mit einem Gase füllt, welches leichter ist als die Luft. Eine solche Vorrichtung wird ein Luftballon genannt.

Die Brüder Montgolfier konstruieren einen großen Ballon von gefirnissetem Papier oder Taffet, welcher unten eine Öffnung von ungefähr 1 m Durchmesser hatte. In einiger Entfernung unter dieser Öffnung war ein Korb von Metalldraht angehängt, welcher mit brennenden Stoffen gefüllt war. Durch die Verbrennung derselben wird eine Menge warmen, leichten Gases gebildet, welches aufsteigt und bald den ganzen Ballon anfüllt. Sobald das warme Gas im Ballon samt der Hülle und allem, was daran hängt, leichter ist als die verdrängte Luftmenge, muß der Ballon steigen; er nimmt den brennenden Körper, der ihm die Steigkraft verleiht, mit in die Höhe. Der Ballon muß so lange steigen, bis er in eine Höhe kommt, in welcher die Luft schon so verdünnt ist, daß das Gewicht des Ballons dem der verdrängten Luftmenge gleich ist. Der erste Luftballon dieser Art, welche man Montgolfiere nennt, stieg zu Anonay den 5. Juni 1783.

Am 19. September desselben Jahres ließ Montgolfier in Gegenwart des Königs zu Versailles einen Luftballon steigen, an welchem ein Käfig mit einem Schaf, einem Hahn und einer Ente angehängt war. Pilatre de

Fig. 584.

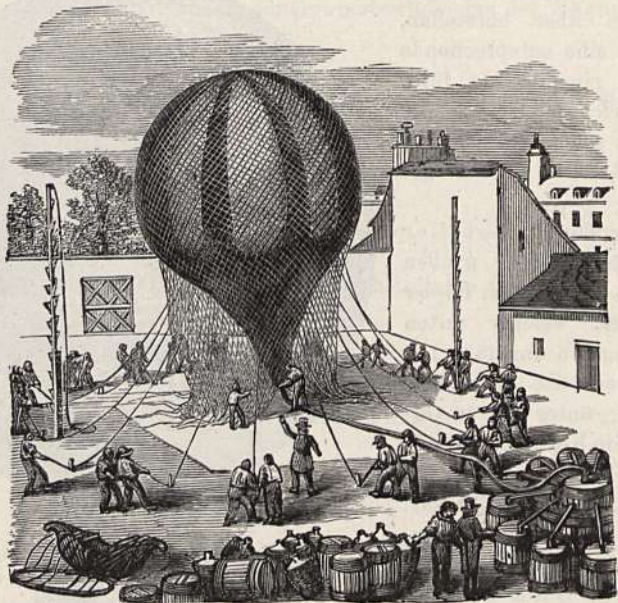


Rozier und der Marquis von Arlandes unternahmen mit einer Montgolfiere, welche in Fig. 584 abgebildet ist, am 21. November 1783 die erste Luftfahrt.

Der Physiker Charles zu Paris hatte den glücklichen Gedanken, zur Füllung des Luftballons Wasserstoffgas statt der erwärmten Luft anzuwenden, von welchem Cavendish bereits im Jahre 1766 nachgewiesen hatte, daß sein spezifisches Gewicht beinahe 14 mal geringer ist als das der atmosphärischen Luft.

Den ersten mit Wasserstoffgas gefüllten Ballon ließ Charles am 27. August 1783 steigen, und am 1. Dezember 1783 stieg er mit einem solchen 500 cbm Wasserstoffgas haltenden, von Robert begleitet, in die Luft. In wenigen Minuten hatten sie eine Höhe von 3000 Fuß erreicht und legten in diesen Regionen einen Weg von fünf Meilen in zwei Stunden zurück. Charles stieg in den Tuileries auf. Die ganze Bevölkerung von Paris war in Bewegung. Alle öffentlichen Plätze, alle hochliegenden Orte waren mit Zuschauern bedeckt. Ein Kanonenschuß gab das Signal der Abfahrt, und

Fig. 585.



man sah den Ballon sich wie ein Meteor am Horizont erheben. Hoch in den Lüften sah man noch die flatternden Fähnchen, von der Sonne beleuchtet, und die Schiffer, welche ruhig die Erde grüßten. Nie hat wohl ein physikalisches Experiment solche allgemeine Bewunderung erregt.

In der Schlacht bei Fleurus am 26. Juni 1794 bedienten sich die Franzosen eines Luftballons, um die Bewegungen der Österreicher zu beobachten. Im Jahre 1804 unternahmen Gay-Lussac und Biot eine Luftfahrt zu wissenschaftlichen Zwecken, bei welcher sie eine Höhe von 4000 m erreichten. Eine zweite Fahrt unternahm Gay-Lussac allein und erreichte eine Höhe von 7000 m, die größte Höhe, zu der bis dahin ein Mensch gelangt war. In einer solchen Höhe fühlte man eine empfindliche Kälte:

Gay-Lussacs Thermometer zeigte -10°C , während am Boden eine Hitze von 30°C war. Die Luft war so trocken, daß die hygroskopischen Körper rasch ihre Feuchtigkeit verloren, der Himmel erschien sehr dunkelblau. Nach einer Fahrt von sechs Stunden hatte Gay-Lussac in horizontaler Richtung einen Weg von 15 Meilen zurückgelegt und sank in der Nähe von Rouen langsam nieder.

Fig. 585 stellt einen Luftballon dar, welcher eben mit Wasserstoffgas gefüllt wird.

Neuerer Zeit erfolgt diese Füllung bei den Militärballons, die meist nur als Fesselballons gebraucht werden, aus mitgeführten stählernen Behältern, in denen das Wasserstoffgas auf 100 Atmosphären oder mehr komprimiert ist. Sonst werden jetzt die meisten Luftballons mit Leuchtgas aus einer in der Nähe befindlichen Gasanstalt gefüllt.

Um den Ballon in vertikaler Richtung zu lenken, wird er am oberen Ende mit einem Ventil und außerdem mit einem Vorrat von Ballast aus Sandsäcken ausgerüstet. Auswerfen von Ballast macht den Ballon steigen, Öffnen des Ventils sinken. Wenn in verschiedenen Höhen die Windrichtung eine verschiedene ist, so kann auf diese Weise indirekt auch die Fahrtrichtung beeinflusst werden.

Die Gefahren der Luftschiffahrt treten insbesondere beim Aufsteigen und noch mehr beim Landen auf, wenn der Ballon mit der Gondel durch die Luftströmung gegen Dächer, Schornsteine oder Baumkronen geschleudert wird. Um sicherer landen zu können, wird ein Anker ausgeworfen, der aber auch oft Unheil anrichtet. Durch Anbringung einer Reißleine, bei deren Anziehen der Ballon zerrissen und dadurch rasch zur Entleerung und zum Sinken gebracht wird, ist diese Gefahr vermindert worden. In großen Höhen bläht sich der Ballon infolge des geringen äußeren Druckes auf und würde zerplatzen, wenn er von Anfang an ganz stramm gefüllt wäre.

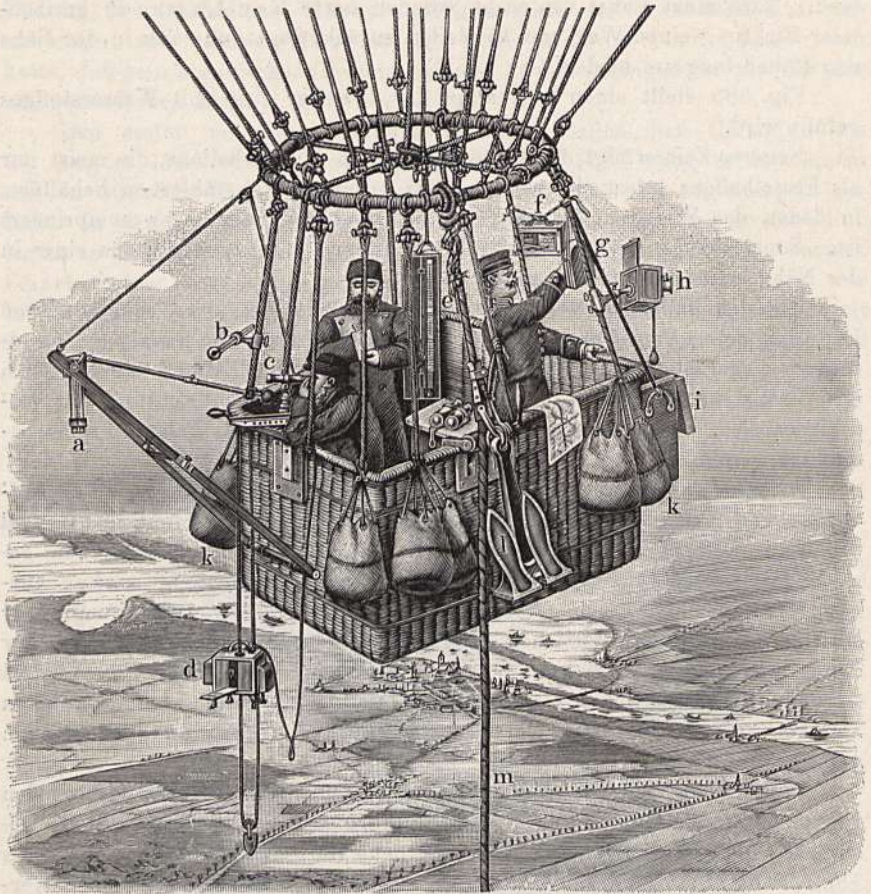
Eine andere Gefahr besteht in der physiologischen Wirkung der großen Luftverdünnung in bedeutenden Höhen, worüber wir an anderer Stelle gesprochen haben. Auch die außerordentliche Kälte bildet eine Gefahr. Als 1862 der berühmte englische Luftschiffer Glaisher mit Coxwell von Wolverhampton aus bis zu 8000 m anstieg, wurde er schwach, und bei 9900 m fiel er ohnmächtig auf den Rücken. Coxwell wollte nun das Ventil öffnen, erfor aber hierbei die Hände und mußte mit den Zähnen die Leine ziehen, worauf der Ballon zu sinken begann. Der Ballon soll eine Höhe von 11 000 m erreicht haben, wie aus dem Drucke der Luft von 18 cm berechnet wurde. Beim Landen kommt noch die Gefahr hinzu, daß das ausströmende Gas durch elektrische Funkenentladungen entzündet und zur Explosion gebracht werden kann. Die zahlreichen Bemühungen, den Luftballon in wogerechter Richtung lenkbar zu machen, haben bisher noch nicht zum vollen Erfolge geführt.

Praktischen Nutzen hat die Luftschiffahrt bisher nur im Dienste der wissenschaftlichen Erforschung und im Kriege (Beobachtung des Feindes, Entweichen aus belagerten Plätzen) gebracht.

Die Abbildung Fig. 586, entnommen dem Buche „Moderne Luftschiffahrt“ von Dr. Fr. Linke, zeigt die Gondel eines zu wissenschaftlichen Untersuchungen ausgerüsteten Ballons. *a* ist ein Aspirationspsychrometer,

welches mittels des Fernrohrs *c* beobachtet wird, *b* ist ein Thermometer zur Messung der Intensität der Sonnenstrahlung, *d* ein Aspirationsthermograph,

Fig. 586.



e ein Quecksilber-, *g* ein Aneroidbarometer, *f* ein registrierendes Barometer, *h* ein photographischer Apparat, *i* ein Instrumentenkoffer, *K, k* sind Säcke mit Ballast, *l* ein Anker, *m* ein Schleptau.

Tragkraft des Luftballons.

Bezeichnen wir mit

R den Radius des Ballons in Metern,

h das Gewicht des Stoffes der Hülle pro Quadratmeter in Kilogrammen,

l das Gewicht eines Kubikmeters Luft in Kilogrammen,

s das Gewicht eines Kubikmeters des Füllgases in Kilogrammen,

so beträgt der Auftrieb des Ballons

$$A = \frac{4\pi R^3}{3} l \dots \dots \dots (1)$$

das Gewicht des Ballons beträgt

$$P = \frac{4\pi R^3}{3}s + 4\pi R^2h \dots \dots \dots (2)$$

die Tragkraft berechnet sich demnach

$$T = A - P = \frac{4\pi R^3}{3}(l - s) - 4\pi R^2h \dots \dots \dots (3)$$

Man kann annehmen, daß 1 m³ Luft rund 1,2 kg wiegt, und daß die Gasfüllung pro m³ für die Montgolfiere $\frac{2}{3}$, für Leuchtgas $\frac{1}{4}$, für ungerinigtes Wasserstoffgas $\frac{1}{7}$ davon betrage.

Beispiele: Ein Ballon von Seidenpapier von 1 m Halbmesser, der durch Anheizen mit Luft von etwa 93° gefüllt ist, hat pro Quadratmeter Hülle ein Gewicht $h = 0,025$ kg; $l - s = 1,2 \cdot \frac{2}{3} = 0,8$ kg

$$T = \frac{4\pi}{3} \cdot 1^3 \cdot 0,8 - 4\pi \cdot 1^2 \cdot 0,025 = 1,672 - 0,314 = 1,358 \text{ kg.}$$

Ein mit Leuchtgas gefüllter Ballon aus Taffet, dessen Hülle pro Quadratmeter 0,15 kg wiegt, habe 5 m Radius, $l - s = 1,2 \cdot \frac{3}{4} = 0,9$

$$T = \frac{4\pi}{3} \cdot 125 \cdot \frac{3}{4} - 4\pi \cdot 25 \cdot 0,15 = 470 \cdot 25 - 47 \cdot 10 = 423,15 \text{ kg.}$$

Dieser Ballon könnte also leicht vier Personen und überdies 100 kg Ballast tragen. Die gewöhnlichen Luftballons haben gegen 3 m Radius und tragen dann zwei Personen nebst Ballast.

§ 192. Widerstand der Flüssigkeiten und Gase. Wenn ein fester Körper in einer Flüssigkeit oder in einem Gase bewegt werden soll, so muß er notwendig mehr oder weniger Flüssigkeits- oder Luftteilchen vor sich herschieben und auf die Seite treiben, und dadurch wird stets ein Teil der beschleunigenden Kraft verzehrt, welche auf den festen Körper wirkt; kurz Flüssigkeiten und Gase üben einen Widerstand gegen die Bewegung fester Körper innerhalb ihrer Masse aus.

Die Größe dieses Widerstandes hängt ab

1. von der Größe des Querschnittes des bewegten Körpers,
2. von der Geschwindigkeit desselben,
3. von der Form desselben.

Der Satz 1. sagt, daß ein und derselbe Körper bei gleicher Geschwindigkeit bald mehr, bald weniger Widerstand zu überwinden hat, je nachdem er mit seiner breiten oder mit seiner schmalen Seite gegen die Luft oder das Wasser stößt, wovon man sich leicht mit Hilfe eines etwas breiten hölzernen Lineals überzeugen kann.

Den Einfluß des Querschnittes kann man auch mit Hilfe des Apparates (Fig. 587) nachweisen. Die Umdrehung der horizontalen Achse xx wird durch ein Gewicht bewerkstelligt, welches an einer um die Spule s geschlungenen Schnur hängt; die Windflügel w können nach Belieben so gestellt werden, daß ihre Oberfläche rechtwinkelig zur Achse xx oder daß sie parallel mit ihr steht. Unsere Figur zeigt die letztere dieser beiden Stellungen. In der ersten Stellung durchschneiden die Windflügel gleichsam die Luft, und es erfolgt eine rasche Rotation; im letzteren Falle aber, wo sie mit

ihrer vollen Breite gegen die Luft drücken, ist der zu überwindende Widerstand so bedeutend, daß nur eine langsame Umdrehung erfolgt.

Der verzögernde Einfluß des Luftwiderstandes (oder Wasserwiderstandes) ist um so bedeutender, je größer der Querschnitt des zu bewegenden Körpers im Vergleich zu der beschleunigenden Kraft ist, welche ihn treibt. Um zu bewirken, daß ein Körper in der Luft langsam fällt, hat man nur dafür zu sorgen, daß er bei gleicher Masse einen möglichst großen Querschnitt habe. Eine Seifenblase fällt langsamer als ein Wassertropfen von gleichem Gewicht. Auf diesem Umstande beruht auch das langsame Fallen einer Flaumfeder, die Wirkung des Fallschirmes, Fig. 588 und 589 usf.

Fig. 587.

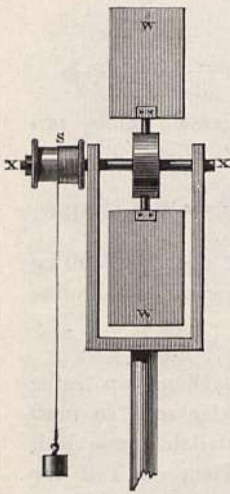
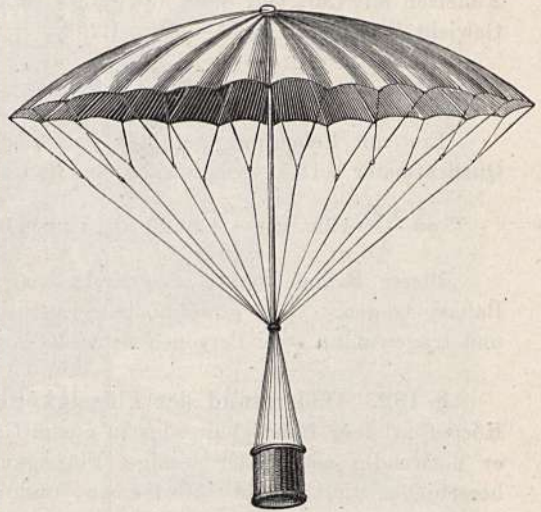


Fig. 588.



Fig. 589.



Je mehr man einen Körper verkleinert, desto langsamer wird er im Wasser oder in der Luft fallen, weil bei der Verkleinerung seine Masse, also auch die beschleunigende Kraft, welche ihn niedertreibt, in weit rascherem Verhältnis abnimmt als sein Querschnitt. Betrachten wir z. B. eine Kugel von Kreide, welche 1 mm im Durchmesser hat, so wird dieselbe mit einer bestimmten Geschwindigkeit im Wasser sinken; ein Kreidekügelchen aber, welches nur $\frac{1}{10}$ mm Durchmesser hat, wiegt 1000 mal weniger, die Kraft, welche es fallen macht, ist also 1000 mal geringer, während sein Querschnitt nur 100 mal geringer ist als der Querschnitt einer 1 mm dicken Kugel. Für die kleine Kugel ist also, wenn dieselbe im Wasser fällt, der Widerstand des Wassers im Vergleich zur beschleunigenden Kraft, welche sie niedertreibt, 10 mal größer als für die große Kugel, die kleine Kugel wird also auch weit langsamer fallen als die große. Dieser Umstand erklärt auch, wie es kommt, daß ganz fein zerteilte Substanzen, wie Kreidepulver, Lehmteilchen, welche das Wasser trüben, sehr lange in demselben suspendiert bleiben und sich nur sehr langsam absetzen; er erklärt ferner, wie es kommt, daß feine Stäubchen, Nebelbläschen usw. in der Luft schweben.

Untersuchen wir nun, in welcher Beziehung der Luft- und Wasserwiderstand zur Geschwindigkeit der bewegten Körper steht.

Während bei den festen Körpern der Widerstand der Reibung von der Geschwindigkeit des über einen anderen hingleitenden Körpers nahezu unabhängig ist, wächst der Widerstand der Flüssigkeiten und Gase, wenn die Geschwindigkeit der in ihnen sich bewegenden Körper zunimmt, und zwar in einem weit rascheren Verhältnis als diese Geschwindigkeit selbst, wie sich aus folgender Betrachtung ergibt:

Wenn ein Körper sich mit der doppelten, mit der dreifachen Geschwindigkeit bewegt, so muß er in gleicher Zeit nicht allein die doppelte, die dreifache Luft- oder Wassermasse aus dem Wege räumen, sondern auch den aus ihrer Stelle getriebenen Partikelchen die doppelte, die dreifache Geschwindigkeit mitteilen; daraus schloß Newton, daß der fragliche Widerstand im Verhältnis des Quadrats der Geschwindigkeit zunehme.

Es ist dies jedoch nur eine erste Annäherung; in der Tat wächst der Widerstand der Flüssigkeiten und Gase in einem noch etwas rascheren Verhältnis.

Da nun für einen mit beschleunigter Geschwindigkeit fallenden Körper der Luftwiderstand so rasch zunimmt, so muß nach einiger Zeit notwendig dieser Widerstand so groß werden, daß er der beschleunigenden Kraft das Gleichgewicht hält, und von diesem Augenblick an fällt der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

Dieser Zeitpunkt, in welchem infolge des Luftwiderstandes die beschleunigte Bewegung des fallenden Körpers in eine gleichförmige übergeht, muß notwendig um so eher eintreten, je größer sein Querschnitt im Vergleich zu seinem Gewichte ist. Eine Seifenblase, eine Flaumfeder, Schneeflocken usw. sehen wir sofort mit gleichförmiger Geschwindigkeit sinken. — Auch die Regentropfen dürften wohl mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit fallen, welche bei weitem geringer ist, als die Geschwindigkeit, mit welcher sie auf dem Boden ankommen würden, wenn ihr Fall nicht durch den Luftwiderstand verzögert worden wäre. Ein Wassertropfen, der von einer Höhe von 1000 m herabgefallen ist, müßte ohne eine solche Verzögerung mit der enormen Geschwindigkeit von 140 m aufgeschlagen, während die Fallgeschwindigkeit der Regentropfen schwerlich viel größer ist als 10 m in der Sekunde.

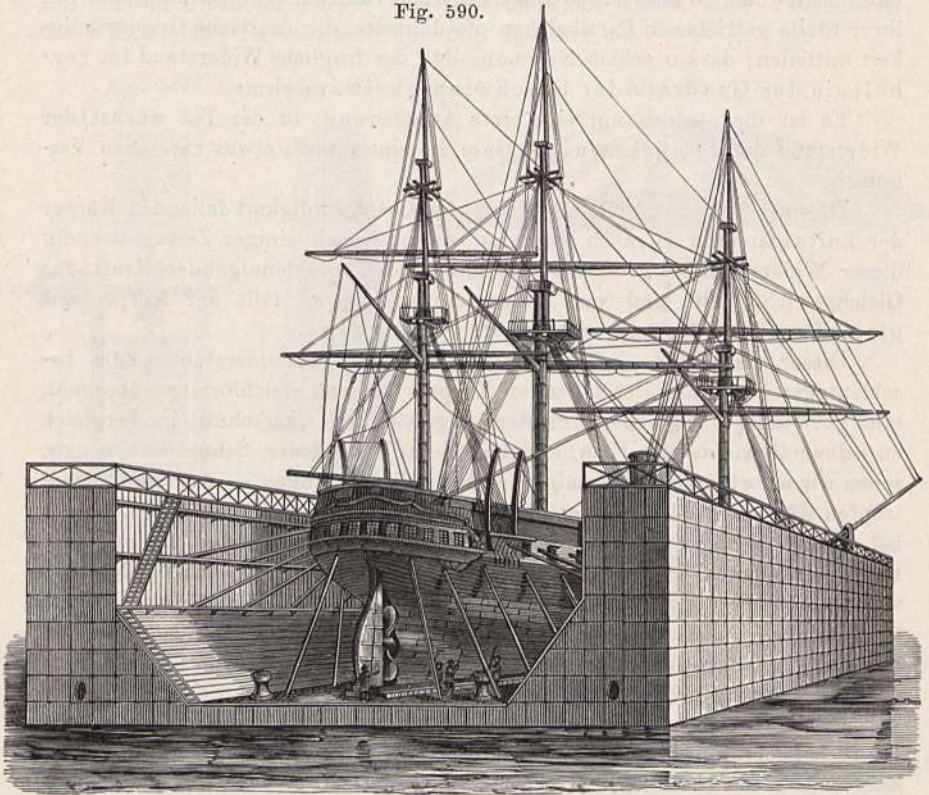
Wie durch den Luftwiderstand eine beschleunigte Bewegung sehr bald in eine gleichförmige übergeführt werden kann, läßt sich auch mit Hilfe des schon oben beschriebenen Apparates (Fig. 587) nachweisen. Der Windflügel bedient man sich auch, um einen gleichförmigen Gang der Uhrwerke zu erzielen, welche die Umdrehung der größeren Äquatorealinstrumente um ihre Hauptachse besorgen. Durch eine Pendeluhr könnte diese Umdrehung nur stoßweise erfolgen.

Daß endlich bei gleichem Querschnitt der Widerstand sowohl in Flüssigkeiten als in Gasen von der Form abhängig ist, lehrt ebenso die Überlegung als die Erfahrung. Man läßt das Vorderende der Schiffe in eine spitzige Kante auslaufen, gibt den Geschossen die Form eines Zylinders mit Kegelspitze usw. Konkave Flächen bieten größeren Widerstand als ebene und diese größeren als konvexe. Versucht man z. B. einen aufgespannten Regenschirm mit der konkaven Fläche gegen die Luft zu bewegen, so verspürt man viel größeren Widerstand als bei umgekehrter Stellung. Hierauf beruht auch die Anwendung des Robinsonschen Windmessers, der in dem meteorologischen Abschnitt beschrieben werden soll.

§ 193. Anwendung des Wasser- und Luftwiderstandes. Gerade so wie die Reibung den Füßen des Pferdes den festen Stützpunkt verleiht, dessen es bedarf, um eine Last fortzuziehen, so bietet auch der Widerstand des Wassers dem Ruder, der Schiffsschraube einen, wenn auch nicht vollkommen festen Stützpunkt, durch welchen es möglich wird, den Kahn und das Dampfschiff auf dem Wasser fortzubewegen.

Die Wirkungsweise des Ruders bedarf wohl kaum einer weiteren Erläuterung, da es sich ja hier nicht darum handelt, die Größe des Nutzeffektes

Fig. 590.



zu ermitteln, welche man mit diesen Vorrichtungen erreicht. Fast ebenso leicht ist die Wirkungsweise der Schiffsschraube zu übersehen, welche von dem Schweizer Daniel Bernoulli 1752 erdacht, von dem Amerikaner Stevens um 1800, dann von dem Österreicher Jos. Ressel 1826 zuerst praktisch ausgeführt wurde und in neuerer Zeit eine große Bedeutung für Dampfschiffe gewonnen hat.

Wenn die Umdrehungsachse einer frei beweglichen, ganz in Wasser eingetauchten Schraube eine horizontale Lage hat, so muß eine rasche Rotation um diese Achse notwendig eine fortschreitende Bewegung in horizontaler Richtung bewirken, wie dies in der Tat bei den Schraubendampfschiffen der Fall ist.

Die Schiffsschraube besteht aber in der Regel nicht aus Schraubenflächen, welche einen zusammenhängenden ganzen Umgang bilden, sondern aus ein-

zelenen Flügeln, deren jeder ein Stück einer Schraubenfläche bildet, und zwar werden die Schiffsschrauben meist nur aus zwei, oder auch aus drei oder vier solcher Flügel gebildet.

Die Achse der Schiffsschraube, welche unmittelbar vor dem Steuerruder angebracht ist, und welche sich ganz unter Wasser befindet, ist dem Kiele, also der Längsachse des Schiffes, parallel, und ihre Umdrehung wird durch eine Dampfmaschine bewerkstelligt. Fig. 590, welche die hintere Ansicht einer gedeckten Schraubenkorvette in einem schwimmenden Dock darstellt, zeigt, wie die (hier zweiflügelige) Schraube zwischen dem Hinterteil des Schiffes und dem Steuerruder angebracht ist, und läßt auch die Größenverhältnisse der Schraube erkennen.

Für Kriegsschiffe liegt der Hauptvorteil der Schraube vor den Schaufelrädern der älteren Dampfschiffe darin, daß sie den feindlichen Kugeln nicht so ausgesetzt ist und daß die ganze Breitseite des Schiffes mit Geschützen besetzt werden kann.

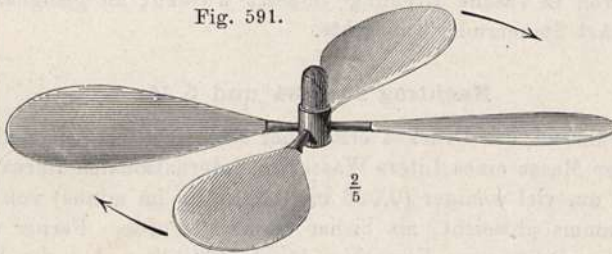
Je nach der Richtung, in welcher die Schraube umgedreht wird, geht das Schiff vorwärts oder rückwärts.

Der 1829 nach Ressels Angaben in Triest gebaute Schraubendampfer blieb trotz guten Erfolges unbeachtet.

Das erste größere Schraubenschiff „Archimedes“, welches der Engländer Smith im Jahre 1838 konstruierte, hatte eine Schraube, welche nur aus einer einzigen Windung von 360° bestand. Neuestens werden größere Dampfer mit zwei getrennten, dem Kiel parallel gestellten Schrauben ausgerüstet.

Daß auch die Luft Widerstand genug darbietet, um in ähnlicher Weise die Fortbewegung eines Gegenstandes durch sie zu bewerkstelligen, beweist

Fig. 591.



der Flug der Vögel und kann mit dem bekannten Kinderspielzeug, das unter dem Namen des Fliegers oder Spiralifer bekannt ist, leicht demonstriert werden. An einem kurzen aus Blech gemachten Zylinder (Fig. 591) sind vier Flügel befestigt; dieselben sind nun sämtlich etwas gegen die Ebene geneigt, welche rechtwinklig auf der Achse des zentralen Zylinders steht; jeder dieser Flügel bildet also ein Stück einer sehr schwach aufsteigenden um den zentralen Dorn gelegten Schraubenfläche. Diese Vorrichtung wird nun in die Gabel der Rotationsvorrichtung *AB* (Fig. 592) gelegt. Den Handgriff *B* hält man in der linken Hand, während man durch rasches Abziehen einer Schnur, welche um den oberen, um seine vertikale Achse drehbaren Teil gewunden ist, diesen in rasche Rotation versetzt. Diese Rotation teilt sich auch dem Flieger mit, der sich nun infolge derselben in der Luft gleichsam hinaufschraubt und eine ziemlich bedeutende Höhe erreichen kann.

Wenn man den Versuch im Zimmer anstellt, so steigt der Flieger bis an die Decke, an welcher er so lange verweilt, bis die Rotationsgeschwindigkeit so weit abgenommen hat, daß sie ihn nicht mehr in der Luft zu erhalten vermag.

Fig. 592.

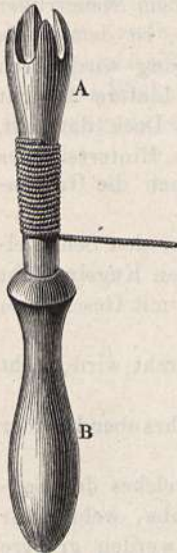


Fig. 593.

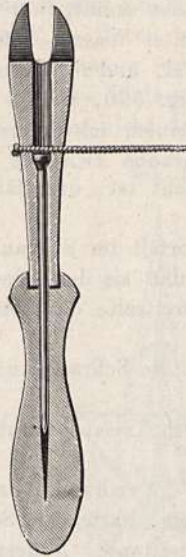


Fig. 593 zeigt einen Durchschnitt der Vorrichtung, durch welche man den Flieger in Rotation versetzt. Das Experiment gelingt am leichtesten, wenn man die Schnur zuerst entgegengesetzt aufwickelt und durch rasches Abziehen den Apparat so in Rotation versetzt, daß sich die Schnur nachher von selbst aufwickelt. Beim neuerlichen Abziehen steigt dann der Flieger in die Höhe.

Bei den künstlichen Fledermäusen, welche in den Spielwarenhandlungen verkauft werden, wird die Kraft eines zusammengedrehten Kautschukfadens zur Drehung der Schraubenflügel verwendet.

In neuester Zeit hat man mit mehr oder minder Erfolg versucht, Ballons, die sonst nur ganz der Bewegung der umgebenden Luft folgen, dadurch in derselben vorwärts zu treiben und damit dann auch lenkbar zu machen, daß man Schraubenflügel, wie Fig. 591 in großem Maßstabe, welche durch leichte Motoren in rasche Drehung versetzt wurden, an geeigneten Stellen nebst einer Art Steuerruder anbrachte.

Nachtrag zu § 34 und § 15.

Nach während des Druckes erhaltener Nachricht hat die definitive Bestimmung der Masse eines Liters Wasser im internationalen Bureau ergeben, daß dieselbe um viel weniger (0,026 bis 0,0257 mg im minus) von der Masse eines Kilogramms abweicht, als bisher vermutet wurde. Ferner wurde der von England ausgegangene Vorschlag, für das Milliliter, d. i. das Volum von 1 g Wasser die Bezeichnung Mil zu wählen, angenommen. Die Unterabteilungen 0,1 Mil und 0,01 Mil werden demgemäß mit decimil und centimil bezeichnet.

ZWEITES BUCH.

DIE A K U S T I K.

Erstes Kapitel.

Von den Schallwellen.

§ 194. **Begriff des Schalles und seiner Arten, Fundamentalversuche über seine Entstehung und Fortpflanzung.** Die Akustik ist derjenige Teil der Physik, welcher sich mit jenen Vorgängen beschäftigt, die wir mit dem Gehör wahrnehmen. Die Gesamtheit dieser Gruppe von Sinnesindrücken fassen wir unter dem Worte Schall zusammen. Wir unterscheiden jedoch darunter einzelne Arten, die wir durch die Bezeichnungen Geräusch, Knall, Ton, Klang usw. näher charakterisieren. Unter Geräusch verstehen wir einen unregelmäßigen, unter Knall einen momentanen Schall, Ton und Klang sind regelmäßige (periodisch organisierte) Schallarten, welche auch in der Musik gebraucht werden. Wie wir später hören werden, ist Ton ein solcher Schall, welcher vom Gehör als einfache Empfindung wahrgenommen wird, Klang dagegen ist als eine Zusammensetzung von Tönen zu betrachten. Die musikalisch gebrauchten „Töne“ sind fast ausnahmslos nicht einfache physikalische Töne, sondern Klänge.

Über die Entstehung und Verbreitung des Schalles hatten die alten Griechen nur sehr mangelhafte Vorstellungen. Allerdings war man schon in den ältesten Zeiten der Meinung, daß der Schall durch irgend eine Bewegung des tönenden Körpers erzeugt und durch eine entsprechende Bewegung der Luft bis zum Ohre fortgepflanzt werde; was aber die Art dieser Bewegung betrifft, so begnügte man sich mit den vagsten Ideen, wie dies unter anderen aus verschiedenen Stellen der Schriften des Aristoteles hervorgeht.

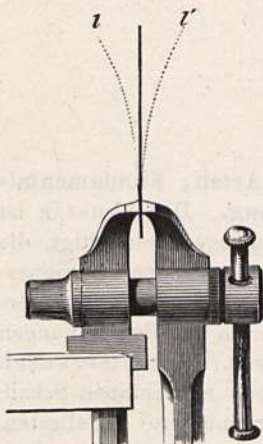
Besser schon sind die Erklärungen Vitruvs, welcher bereits ganz richtig die Verbreitung der Schallwellen mit der Verbreitung der Wasserwellen vergleicht. Aber erst Newton hat in seinem unsterblichen Werke: *Philosophiae naturalis principia mathematica* eine richtige Definition der Schallwellen und ihrer Verbreitung gegeben.

Der Schall entsteht durch eine schwingende Bewegung elastischer Körper; durch eine solche Schwingungsbewegung werden in der umgebenden Luft abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen erzeugt, welche die Schwingungsbewegung bis zu unserem Ohr fortpflanzen und, hier den entsprechenden Nervenapparaten mitgeteilt, die Schallempfindung hervorrufen.

Suchen wir dies noch etwas anschaulicher zu machen! Wenn irgend ein elastischer Körper, z. B. ein elastischer Stahlstreifen, Fig. 594, dessen eines Ende fest eingeklemmt ist, aus seiner Gleichgewichtslage herausgebogen

und sich selbst überlassen wird, so schwingt er eine Zeitlang mit mehr oder minder großer Geschwindigkeit zwischen zwei Grenzlagen hin und her, wie dies in unserer Figur angedeutet ist. Indem sich nun das obere Ende des Stahlstreifens rasch von l bis l' bewegt, werden die zunächst rechts von ihm liegenden Luftschichten gleichfalls nach der rechten Seite hingetrieben, und dadurch entsteht hier eine Verdichtung der Luft. Indem aber die kom-

Fig. 594.

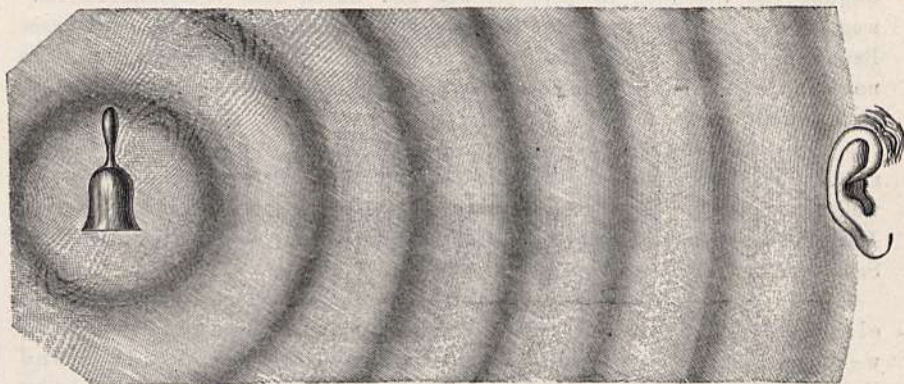


primierte Luft sich infolge ihrer Elastizität wieder ausdehnt, übt sie einen Stoß auf die zunächst folgenden Luftschichten aus, und so wird die ursprünglich vom schwingenden Körper ausgehende Bewegung, wie später noch ausführlicher nachgewiesen werden soll, der Reihe nach von einer Luftschicht zur anderen übertragen, und die Verdichtung, welche der schwingende Körper zunächst nur in den benachbarten Schichten hervorgebracht hatte, pflanzt sich infolgedessen mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit fort.

Während nun so die Verdichtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich fortpflanzt, schwingt der Körper in seine Grenzlage zur Linken zurück; dadurch werden nun die zunächst rechts vom Stahlstreifen befindlichen Luftschichten gleichfalls nach der Linken gerissen, es entsteht rechts vom Stahlstreifen eine Luftverdünnung, die sich in gleicher Weise verbreitet wie vorher die Verdichtung, indem nun die aufeinander folgenden Luftschichten der Reihe nach ihre Schwingungsbewegung nach der linken Seite hin ausführen.

So erzeugt denn jede vollständige Schwingung des tönenden Körpers, d. h. jede hin und her gehende Bewegung desselben eine neue Verdichtung

Fig. 595.



und eine ihr folgende Verdünnung, welche alle mit gleicher Geschwindigkeit fortschreitend sich in gleichen Zwischenräumen einander folgen, wie dies durch Fig. 595 anschaulich gemacht werden soll, wo die Verdichtungen, welche von der etwa durch den Anschlag eines Hammers zum Tönen gebrachten Glocke ausgehen, durch dunklere Schattierung angedeutet sind.

In der Optik werden wir einen von A. Töpler erfundenen Apparat (Schlierenapparat) beschreiben, mittels welchem diesem Physiker das höchst interessante Experiment gelungen ist, die durch einen elektrischen Funken entstandenen und durch einen zweiten Funken beleuchteten Schallwellen direkt sichtbar zu machen.

Es ist wichtig, von Anfang an die unrichtige Vorstellung zurückzuweisen, als ob bei der Fortpflanzung des Schalles vom Schall erregenden Körper bis ins Ohr die Luftteilchen diesen Weg mit zurücklegen würden. Dies ist durchaus nicht der Fall; die Luftteilchen bleiben vielmehr, von ihrer geringen Schwingung abgesehen, im wesentlichen an Ort und Stelle. Man kann dies experimentell nachweisen, indem man die den Schallerreger umgebenden Luftteilchen durch Rauch sichtbar macht. So pflanzt sich z. B. der Schall eines Geschützes viele Kilometer weit fort, während der gleichzeitig entstandene Pulverrauch nur wenige Meter weit fortgeschleudert wird. Würden die vor der Mündung der Kanone befindlichen Luftmassen mit dem Schalle gleich schnell sich fortbewegen, so würde der Rauch mit fortgetragen werden und es müßte durch die Luftbewegung ein Orkan von sonst nie beobachteter Stärke entstehen.

Ein anderer Nachweis hierfür folgt aus der wichtigen Tatsache, daß nicht allein die Luft, sondern alle mehr oder minder elastischen materiellen Medien den Schall fortzupflanzen vermögen, also auch die festen Körper, bei denen von einem Fortbewegen ihrer Teilchen mit dem Schalle überhaupt nicht die Rede sein kann.

Im Wasser pflanzt sich der Schall sehr gut fort, die Taucher hören, was am Ufer gesprochen wird, und am Ufer hört man deutlich, wenn in großen Tiefen zwei Steine aneinander geschlagen werden.

Als Vorlesungsexperiment zum Nachweise der Schalleitung flüssiger Körper eignet sich das folgende. Eine Stimmgabel, deren Stiel in ein Stück Holz eingeschraubt ist, wird angeschlagen, und nachdem sie beinahe ausgeklungen, mit dem Holze in ein Glas Wasser getaucht, das auf dem Tische steht. Sofort wird der Ton der Stimmgabel wieder hörbar. Die Stimmgabel muß hierbei am Stiele gehalten werden.

Um die Schalleitung in festen Körpern zu zeigen, kann man zunächst die angeschlagene Stimmgabel mit dem Stiele auf den Tisch aufstemmen, wodurch ihr Ton sofort stärker hörbar wird. Ein anderer auffälliger Versuch ist folgender: Man legt eine Taschenuhr auf einen gepolsterten Sessel und bedeckt sie mit mehrfachen Lagen eines Tüches. Man wird dann ihr Ticken kaum hören. Stellt man nun aber einen hölzernen Stab direkt auf das Uhrgehäuse, so hört man das Ticken, wenn man auch die Uhr selbst sorgfältig einhüllt, und zwar kommt der Ton vom oberen Teile des Stabes. Derselbe wird bedeutend stärker, sobald man auf das obere Ende des Stabes ein größeres Brettchen von gut getrocknetem Holze auflegt, da nun die Zahl der Stellen, wo der Schall in die Luft übergeht, vermehrt wird. Man kann endlich noch eine sehr lange horizontale hölzerne Stange mit dem einen Ende auf den erstgenannten Stab auflegen und wird dann das Ticken der Taschenuhr noch deutlich hören, wenn man das Ohr an das andere Ende der Stange anlegt.

Es ist überhaupt nicht nötig, daß der Schall durch die Luft in das Ohr gelange, er kann auch direkt durch die festen Teile des Kopfes zum Gehörnerven gelangen. Verschließt man sich die Ohren mit den Fingern und

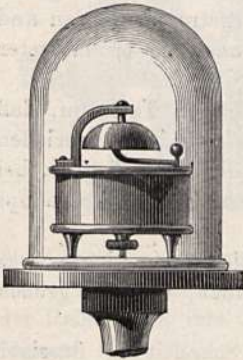
faßt die oben genannte Stange zwischen die Zähne, so hört man ebenfalls ganz deutlich das Ticken der Uhr.

Auch eine stramm gespannte Schnur leitet den Schall ganz gut. Man hänge an die Mitte einer Schnur irgend eine Metallstange (eiserne Schaufel, Feuerzange usw.), wickele die beiden Schnurenden um die Spitzen der beiden Zeigefinger und stecke diese fest in die Ohrgänge. Läßt man hierauf den frei hängenden Körper an einen anderen anschlagen, so dröhnt der Schall mit auffallender Stärke in die Ohren.

Zur Fortpflanzung des Schalles sind materielle Medien unbedingt erforderlich; das Vakuum kann den Schall nicht leiten.

Um dies zu zeigen, setze man auf den Teller der Luftpumpe ein aufgezogenes Weckerwerk, Fig. 596, jedoch so, daß die Füße desselben nicht direkt auf dem Teller aufstehen, sondern auf einem Kissen von Wolle oder

Fig. 596.



Kattun oder auf einigen aufeinander gelegten Plättchen von dickem vulkanisiertem Kautschuk ruhen. Durch das Uhrwerk wird ein Hammer, welcher sich bei unserer Vorrichtung im Inneren der Glocke befindet, bald auf der einen, bald auf der anderen Seite derselben angeschlagen. Der dadurch erzeugte Schall wird sogleich schwächer, wenn man die gläserne Luftpumpenglocke aufsetzt, aber immerhin bleibt er noch deutlich hörbar; wird aber nun evakuiert, so verschwindet der Ton vollständig. Läßt man dann die Luft allmählich wieder eintreten, so unterscheidet man alsbald den Ton, welcher stärker und stärker wird, wenn sich die Glocke mehr und mehr mit Luft füllt. Der Schall kann sich also nicht durch den leeren Raum fortpflanzen.

Der größte Lärm auf der Erde kann sich demnach nicht über die Grenzen unserer Atmosphäre verbreiten, dagegen kann aber auch von keinem anderen Himmelskörper nur das mindeste Geräusch bis zu unserer Erde dringen; die furchtbarsten Explosionen könnten auf dem Monde stattfinden, ohne daß wir davon etwas hörten.

Saussure sagt, daß auf dem Gipfel des Montblanc ein Pistolenschuß weniger Geräusch macht, als wenn man in der Ebene ein Kinderkanöchen losschießt, und Gay-Lussac fand mit seinem Ballon in einer Höhe von 7000 m, also in einer sehr verdünnten Luft schwebend, daß die Intensität seiner Stimme ungemein abgenommen hatte.

Nicht in der Luft allein, sondern in allen Gasen und Dämpfen kann sich der Schall verbreiten. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur die Gase oder Dämpfe in das Vakuum eintreten zu lassen, in welchem sich das gehende Weckerwerk, Fig. 596, befindet.

Leslie¹⁾ hat auf diese Weise gezeigt, daß Wasserstoff den Schall am schlechtesten leitet. Entleert man nämlich die Glocke der Luftpumpe zur Hälfte von der Luft, so daß der Schall merklich geschwächt wird, und läßt dann Wasserstoffgas ein, bis der Druck dem ursprünglichen gleich geworden, so wird der Schall nach außen nicht nur nicht verstärkt, sondern gänzlich

¹⁾ Trans. of Cambridge Soc. I, 267.

unhörbar. Dieses Experiment wurde von Stokes¹⁾, dann insbesondere von Dvořák²⁾ einer näheren Prüfung unterzogen. Der letztere Physiker hat gezeigt, daß bei diesem Versuche die Resonanz einen wesentlichen Einfluß habe³⁾.

§ 195. **Stehende Schwingungen und fortschreitende Wellen.** Betrachtet man die im vorigen Paragraphen besprochenen Vorgänge näher, so zeigt sich zunächst ein wesentlicher Unterschied zwischen den Schwingungen des schallerzeugenden Körpers und den Vibrationen der Teilchen des schallverbreitenden Mediums. Die Schwingungen des schallerzeugenden Körpers sind der Art, daß alle Teilchen gleichzeitig in Bewegung geraten, gleichzeitig ihre Gleichgewichtslage passieren, gleichzeitig die Grenzen ihrer Schwingungswerte erreichen und gleichzeitig ihren Rückweg beginnen. Von dieser Art, welche Weber als stehende Schwingungen bezeichnet, sind die Schwingungen des Stahlstabes, Fig. 594, die Schwingungen einer gespannten Saite usw. Alle tönenden Körper befinden sich im Zustande stehender Schwingungen.

Nur Körper von verhältnismäßig geringen Dimensionen, bei denen eine an irgend einer Stelle bewirkte Verschiebung der Teilchen aus ihrer Gleichgewichtslage sich momentan oder doch in verschwindend kleinen Zeiteinheiten bis zu den äußersten Grenzen fortpflanzt, können direkt in den Zustand stehender Schwingungen versetzt werden. Sind dagegen die Dimensionen eines elastischen Mediums so bedeutend, daß eine namhafte Zeit vergeht, bis die an irgend einer Stelle erregte Schwingungsbewegung auf entfernte Stellen fortgepflanzt wird, so entstehen zunächst fortschreitende Wellen, deren Wesen darin besteht, daß jedes folgende Teilchen dieselben Schwingungen macht wie das vorhergehende, nur mit dem Unterschiede, daß es seine Bewegung um so später beginnt, je weiter es von dem Ursprunge der Wellenbewegung entfernt ist.

¹⁾ Phil. Mag. [4] XXXVI, 401.

²⁾ Wien. Akad. Ber., Band LXIX, 2. Abt., S. 151.

³⁾ Da die Resonanz erst später zur Erklärung gelangt, so können wir hier nur vorgreifend folgendes beifügen. Die Stärke des Schalles außerhalb des Rezipienten hängt wesentlich von den Dimensionen des letzteren beziehungsweise von dem Verhältnis der Eigentöne desselben zu den Partialtönen des tönenden Körpers ab. Es kann daher geschehen, daß bei langsamem Zuströmen des Wasserstoffs die Schallstärke abwechselnd zunimmt und wieder abnimmt, je nachdem der auf diese Weise veränderte Eigenton des Rezipienten mit dem Grundton oder einem der Ober-töne des tönenden Körpers übereinstimmt.

Die mathematische Theorie lehrt, daß der tönende Körper den verschiedenen (reinen oder gemischten) Gasen eine lebendige Kraft erteilt, welche der Quadratwurzel aus dem Produkte der Dichte mit der Spannkraft des Gases proportional ist. Andererseits geben nach den Gesetzen des elastischen Stoßes die Gase an die Wände des Rezipienten eine lebendige Kraft ab, die wiederum proportional derselben Quadratwurzel ist. Daraus folgt, daß die vom tönenden Körper an den Rezipienten abgegebene lebendige Kraft, also auch die Schallstärke, proportional sein muß dem Produkte der beiden Quadratwurzeln, also proportional dem Produkt aus Dichte und Spannkraft der Gase. Bei gleicher Spannkraft wäre also der Theorie nach die nach außen übertragene Schallstärke bei Wasserstoff nur ungefähr $\frac{1}{14}$ von der bei Luft. Die letztere müßte auf $\frac{1}{4}$ verdünnt werden, um gleiche Schallstärke zu liefern wie Wasserstoff. Dieses Gesetz, welches bei dem Versuche von Leslie durch die Resonanz modifiziert wird, hat Dvořák durch andere Versuche bestätigt gefunden.

Beispiele von Wellenbewegung liefert uns eine ruhige Wasserfläche, auf welche man einen Stein fallen läßt (wo aber nicht die Elastizität des Wassers, sondern die Schwere desselben die Kraft ist, welche die Schwingungsbewegung der Wasserteilchen bedingt); ein sehr langes gespanntes Seil, gegen welches man nahe an einem Ende einen kräftigen Schlag führt; die Schallwellen in der Luft usw.

Wir wollen hier zunächst die wichtigsten Gesetze der Wellenbewegung überhaupt etwas näher betrachten und diese Betrachtung mit den Wasserwellen beginnen, weil von ihnen doch der Begriff der Welle entnommen ist und weil durch das Verständnis der Wasserwellen das Verständnis anderer Wellenbewegungen, namentlich der Schallwellen, welche uns hier vorzugsweise interessieren, sehr erleichtert wird.

§ 196. Wasserwellen. Wenn man einen Stein ins Wasser wirft, so bilden sich kreisförmige Wellen, welche sich von einem Mittelpunkte (der Stelle, wo der Stein ins Wasser fiel) aus nach allen Richtungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit verbreiten, wenn nicht irgend eine störende Ursache wirkt. Die Wellen bestehen aus abwechselnden Bergen und Tälern, welche ziemlich rasch aufeinander folgen und welche in der Richtung von dem Mittelpunkte nach außen hin fortschreiten.

Während nun ein Wellenberg nach außen hin fortschreitet, nehmen nicht etwa auch die einzelnen Wasserteilchen an dieser fortschreitenden Bewegung teil; denn wenn ein Stückchen Holz auf dem Wasser schwimmt, so sieht man, wie es abwechselnd gehoben wird und sich dann wieder senkt, wenn Wellenberge und Wellentäler gleichsam unter ihm wegziehen.

Die Kraft, durch welche die Wasserwellen hier fortgepflanzt werden, ist die Schwere; denn wenn durch irgend eine Ursache in der horizontalen Wasserfläche eine Erhöhung oder Vertiefung hervorgebracht wird, so wirkt alsbald die Schwere der einzelnen Wasserteilchen, um die gestörte horizontale Oberfläche wiederherzustellen; dadurch wird eine Schwingungsbewegung hervorgebracht, welche nach und nach von Teilchen zu Teilchen fortgepflanzt wird.

Sobald sich einmal regelmäßige Wellen gebildet haben, beschreiben die einzelnen Wasserteilchen an der Oberfläche während des Fortschreitens der Welle in sich zurückkehrende Kurven, welche im Falle der größten Regelmäßigkeit Kreise sind; nur in solchen Fällen, in welchen der dem Gipfel vorangehende Teil des Wellenberges dem folgenden nicht gleich ist, beschreiben die einzelnen Wasserteilchen Kurven, die nicht in sich geschlossen sind, von der Art, wie sie Fig. 597, dargestellt sind.

Die Bewegung der einzelnen Wasserteilchen während des Fortschreitens der Welle ist von den Gebrüdern Weber¹⁾ durch eine Reihe genauer Versuche ermittelt worden. Sie bedienten sich zu diesen Versuchen einer größeren und einer kleineren Wellenrinne. Die kleinere war ungefähr $1\frac{1}{2}$ m lang und über 20 cm tief; die beiden Seitenwände wurden durch Glastafeln gebildet, welche ungefähr 14 mm weit voneinander abstanden; bei der größeren, welche einen 2 m langen, 80 cm tiefen und ungefähr 3 cm

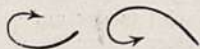


Fig. 597.

Welle in sich zurückkehrende Kurven, welche im Falle der größten Regelmäßigkeit Kreise sind; nur in solchen Fällen, in welchen der dem Gipfel vorangehende Teil des Wellenberges dem folgenden nicht

gleich ist, beschreiben die einzelnen Wasserteilchen Kurven, die nicht in sich geschlossen sind, von der Art, wie sie Fig. 597, dargestellt sind.

Die Bewegung der einzelnen Wasserteilchen während des Fortschreitens der Welle ist von den Gebrüdern Weber¹⁾ durch eine Reihe genauer Versuche ermittelt worden. Sie bedienten sich zu diesen Versuchen einer größeren und einer kleineren Wellenrinne. Die kleinere war ungefähr $1\frac{1}{2}$ m lang und über 20 cm tief; die beiden Seitenwände wurden durch Glastafeln gebildet, welche ungefähr 14 mm weit voneinander abstanden; bei der größeren, welche einen 2 m langen, 80 cm tiefen und ungefähr 3 cm

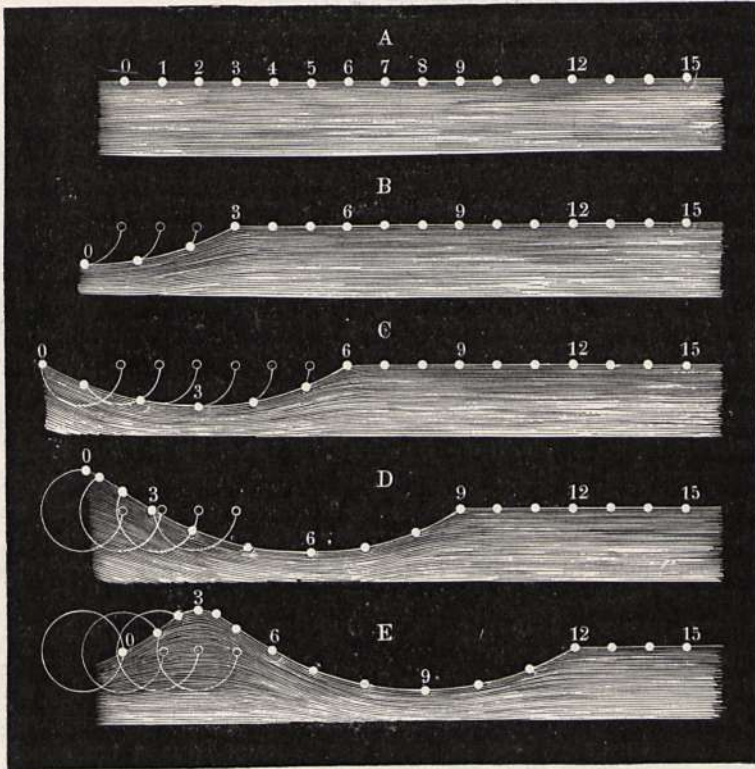
¹⁾ Wellenlehre auf Experimente gegründet von den Brüdern F. H. Weber und W. Weber, Leipzig 1825.

breiten Raum einschloß, waren die Seitenwände durch Bretter gebildet, in denen nur an einzelnen Stellen Glasstreifen wasserdicht eingesetzt waren.

Betrachten wir nun den Zusammenhang zwischen der Bewegung der einzelnen Wasserteilchen und dem Fortschreiten der Welle etwas genauer.

Nehmen wir an, eine ganz regelmäßige Wellenbewegung habe sich, von der Linken zur Rechten fortschreitend, bis zu dem Wasserteilchen 0, (Fig. 598) fortgepflanzt und veranlasse dieses Teilchen, nun eine kreisförmige Bahn zurückzulegen. Während das Teilchen 0 zum erstenmal seine Kreisbahn vollendet, wird die Bewegung eine bestimmte Strecke sich fort-

Fig. 598.



pflanzen. Das mit 12 bezeichnete Wasserteilchen sei nun dasjenige, bis zu welchem sich die Schwingungsbewegung von 0 aus fortpflanzt, während 0 eine Umdrehung vollendet; es wird also 12 seine erste Umdrehung in demselben Momente beginnen, in welchem 0 seine zweite Umdrehung beginnt.

Denken wir uns nun den Umfang des Kreises, welchen das Teilchen 0 beschreibt, ebenso den Raum zwischen 0 und 12 in 12 gleiche Teile geteilt, so wird die Wellenbewegung in der Richtung von 0 nach 12 immer um eine Abteilung weiter schreiten, während das Teilchen 0 gerade $\frac{1}{12}$ seiner kreisförmigen Bahn zurücklegt.

Während das Teilchen 0 das erste Zwölftel seiner Bahn zurücklegt, pflanzt sich also die Wellenbewegung bis 1, während 0 das erste Viertel seiner Bahn zurücklegt, pflanzt sie sich bis 3 fort.

Fig. 598 B stellt den Moment dar, in welchem das Teilchen 0 den vierten Teil oder $\frac{3}{12}$ des Kreises zurückgelegt hat, den es durchlaufen soll; das Teilchen 1 hat in diesem Augenblicke $\frac{2}{12}$, das Teilchen 2 hat $\frac{1}{12}$ seiner Kreisbahn zurückgelegt, das Teilchen 3 ist noch nicht aus seiner Gleichgewichtslage verrückt.

Die Fig. 598 C bezieht sich auf den Augenblick, in welchem das Teilchen 0 die Hälfte seiner Bahn zurückgelegt hat; das Teilchen 1 hat $\frac{5}{12}$, das Teilchen 2 hat $\frac{4}{12}$, das Teilchen 3 hat $\frac{3}{12}$ seiner Bahn zurückgelegt, die Teilchen 4 und 5 befinden sich in derselben Lage wie die Teilchen 1 und 2 der vorigen Figur. Das Teilchen 6 ist noch nicht aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, beginnt aber eben seine Bewegung.

Hier hat das Teilchen 3 seine tiefste Stellung erreicht; es befindet sich in der Mitte eines Wellentals.

Wenn nun abermals $\frac{1}{12}$ der Zeit vergangen ist, welche ein Teilchen braucht, um seinen Kreislauf ganz zu vollenden, so wird das Teilchen 3 in eine solche Lage gegen seine ursprüngliche Stellung gekommen sein, wie es jetzt für das Teilchen 2 der Fall ist; das Teilchen 4 hat seine tiefste Stellung erreicht, es ist um $\frac{1}{4}$ Kreis von seiner Gleichgewichtslage entfernt; das Wellental ist also in diesem Zeiteilchen von 3 bis 4 fortgerückt.

Fig. 598 D stellt den Moment dar, wo das Teilchen 0 $\frac{3}{4}$ seines Weges zurückgelegt, wo es den höchsten Punkt seiner Bahn erreicht hat; hier ist also der Gipfel eines Wellenberges. Das Teilchen 1 hat bereits $\frac{8}{12}$, 2 hat $\frac{7}{12}$, 3 hat $\frac{6}{12}$ seiner Bahn zurückgelegt; die Teilchen 4, 5, 6, 7, 8 befinden sich in derselben Lage wie 1, 2, 3, 4 und 5 der vorigen Figur. Von dem Momente an, auf welchen sich Fig. 598 C bezieht, bis zu dem Momente, welchen Fig. 598 D darstellt, ist das Wellental von 3 bis 6 fortgerückt.

Während das Teilchen 0 das letzte Viertel seiner Bahn zurücklegt, schreitet der Wellenberg von 0 bis 3, das Wellental von 6 bis 9 fort, und in demselben Moment, wo 0 seine Bahn zum erstenmal zurückgelegt hat, um sie zum zweitenmal zu beginnen, wird das Teilchen 12 zum erstenmal seine Bewegung anfangen.

Dieser Moment ist in Fig. 598 E dargestellt, welche wohl keiner Erläuterung mehr bedarf.

Der schraffierte Teil der Fig. 599 stellt den Wellenzug für den Augenblick dar, in welchem das Teilchen 0 zum zweitenmal seine Schwingung vollendet hat; in diesem Moment wird das Teilchen 12 zum erstenmal eine Schwingung vollendet und die Bewegung überhaupt sich bis 24 fortgepflanzt haben; ein Wellenberg ist in 3, ein zweiter in 15, ein Wellental in 9, ein zweites in 21.

Wenn nun die Wellenbewegung ungestört fort dauert, so werden dadurch, daß die einzelnen Wasserteilchen fortfahren, ihre Kreisbahnen zu durchlaufen, die Wellenberge sowohl als die Wellentäler gleichmäßig in der Richtung von der Linken zur Rechten fortschreiten, indem ein Teilchen nach dem anderen den höchsten oder tiefsten Punkt seiner Bahn erreicht.

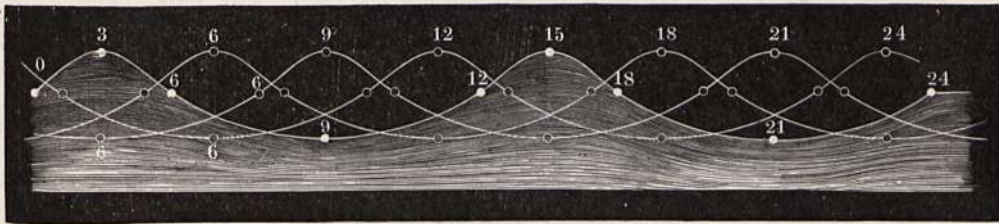
Von dem eben besprochenen Moment an gerechnet werden die Teilchen 6 und 18 nach $\frac{1}{4}$, die Teilchen 9 und 21 nach $\frac{1}{2}$, die Teilchen 12 und 24 nach $\frac{3}{4}$ der ganzen Schwingungsdauer auf dem Gipfel des Wellenberges angekommen sein. Die Welle wird also der Reihe nach die in Fig. 599 durch ausgezogene Kurven angedeuteten Lagen einnehmen.

So schreitet denn Wellenberg und Wellental dadurch voran, daß allen Wasserteilchen dieselbe Kreisbewegung mitgeteilt wird, daß aber jedes folgende Teilchen dieselbe später beginnt als das vorangehende.

Die Entfernung von einem Teilchen bis zum nächsten, welches sich in gleichen Schwingungszuständen (Phasen) befindet, also die Entfernung von 0 bis 12, von 12 bis 24, heißt eine Wellenlänge; denn jene Teilchen beginnen gleichzeitig ihre Schwingung, sie erreichen gleichzeitig ihren tiefsten und ihren höchsten Stand. Demnach ist auch die Entfernung von dem Gipfel eines Wellenberges bis zum nächsten, also in unserer Figur von 3 bis 15, von der Mitte eines Wellentales bis zur Mitte des nächsten Wellentales, also hier von 9 bis 21, eine Wellenlänge.

Solche Teilchen, welche um eine halbe Wellenlänge voneinander entfernt sind, wie 0 und 6, 3 und 9, 9 und 15, befinden sich stets in entgegengesetzten

Fig. 599.



Schwingungszuständen. Das Teilchen 9 z. B. bildet eben den tiefsten Punkt eines Wellentales, 3 und 15 dagegen den Gipfel eines Wellenberges. Die Teilchen 0 und 6 befinden sich zwar beide in der Höhe ihrer Gleichgewichtslage, allein die Bewegung von 0 ist nach unten, die von 6 ist nach oben gerichtet.

Während ein Teilchen eine ganze Schwingung vollendet, schreitet die Welle um eine Wellenlänge voran.

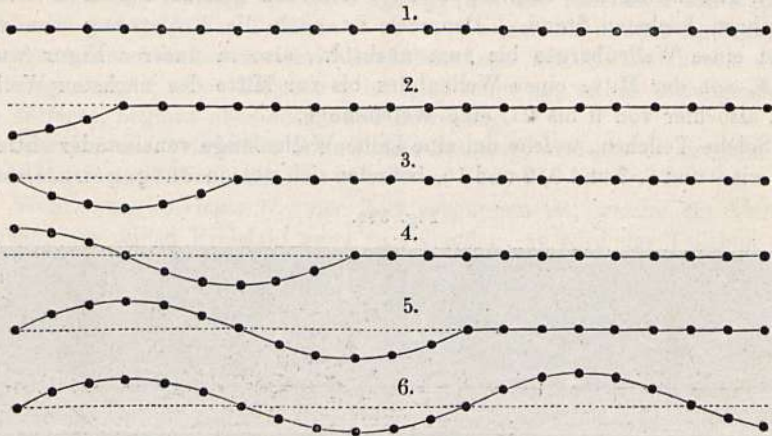
Die nähere Betrachtung des Verhältnisses zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, der Größe und Dauer der Schwingungen und der Gestalt der Wellen, der Schwingungsbewegung der Teilchen im Inneren der Flüssigkeit, der Abnahme der Höhe der Wellenberge und Täler mit der Entfernung von dem Ursprunge der Welle, die Bildung der Wellen auf großen Gewässern unter dem Einflusse des Windes würde uns hier zu weit führen; wir müssen in dieser Beziehung auf das schon oben genannte klassische Werk der Gebrüder Weber verweisen. Ebenso lassen wir hier die Erscheinungen der Reflexion und Interferenz der Wasserwellen unberücksichtigt, da wir die entsprechenden Erscheinungen bei den Schall- und Lichtwellen doch näher untersuchen müssen.

§ 197. Seilwellen. Es ist schon bemerkt worden, daß die Bahnen der Wasserteilchen nicht immer, wie wir in unseren Zeichnungen annahmen, genau kreisförmig, ja nicht einmal immer in sich selbst zurückkehrende Kurven sind. Häufig geht die kreisförmige Bahn in eine elliptische über, indem bald der horizontale, bald der vertikale Durchmesser der größere ist. Wäre der horizontale Durchmesser gleich Null, so würden die einzelnen Teilchen nur rechtwinkelig zu der Richtung, nach welcher sich die Wellen fort-

pflanzen, auf und nieder schwingen. Eine Bewegung der Art ist es, welche die Wellen am gespannten Seile fortpflanzt. Später werden wir auch eine solche Wellenbewegung bei der Lehre vom Lichte kennen lernen.

Die Kurven 1 bis 6, Fig. 600, sollen dazu dienen, die Fortpflanzung solcher Wellen, also etwa der Seilwellen, anschaulich zu machen. Diese

Fig. 600.



Kurven entsprechen ganz den Figuren 598 und 599; sie lassen sich aus diesen ableiten, wenn man den horizontalen Teil der Bewegung gleich Null setzt, sie werden deshalb auch ohne weitere Erklärung verständlich sein.

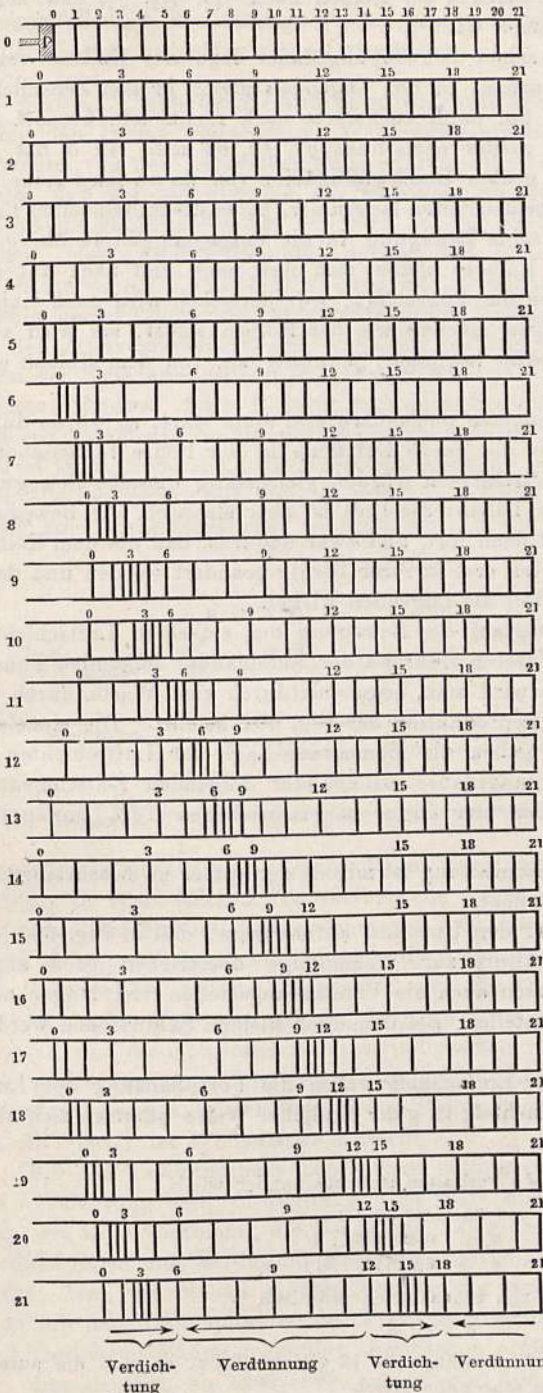
Wenn eine Seilwelle, gegen den einen Befestigungspunkt fortschreitend, an demselben angekommen ist, so wird sie reflektiert, sie kehrt wieder nach dem anderen Ende zurück und läuft so mehrmals hin und her. Wenn aber nun fortwährend neue Wellen erzeugt werden, so wird es kommen, daß die reflektierten Wellen den neu ankommenden begegnen; durch das Zusammenwirken der Wellensysteme aber können sich unter gewissen Bedingungen stehende Wellen bilden. Wir kommen auf diesen Gegenstand später ausführlich zurück.

§ 198. Luftwellen. Um die Art und Weise, wie sich die Schallschwingungen in der Luft fortpflanzen, anschaulich zu machen, wollen wir uns denken, daß die Luft in einer an einem Ende offenen Röhre durch die hin und her gehende Bewegung eines am anderen Ende angebrachten Kolbens in Schwingungen versetzt werde.

In Fig. 601 ist eine solche Röhre dargestellt; die anfangs gleich weit voneinander stehenden mit 0, 1, 2... bezeichneten Striche stellen die Grenzen einzelner Schichten der überall gleich dichten Luft dar; p ist der Kolben. Dieser Kolben soll um die Länge ag , Fig. 602, rasch hin und her gehen; und zwar wollen wir annehmen, daß er diese Schwingungen nach den Gesetzen der Pendelbewegung für kleine Amplituden ausführe.

Denken wir uns demnach die Zeit, welche der Kolben zu einem Hin- und Hergange braucht, in 12 gleiche Teile geteilt, so findet man die Punkte, in welchen er sich in jedem dieser 12 Momente befindet, durch die auf S. 167 besprochene Konstruktion. Diese Konstruktion ist in Fig. 602 für die

Fig. 601.



Ruhelage der Luftschichten.

Die Schichte 0 schwingt nach links.

Die Schichte 1 folgt nach links.

Die Schichte 0 erreicht die äußerste Lage links.

Die Schichte 0 beginnt die Bewegung nach rechts.

Die Schichte 1 beginnt die Bewegung nach rechts.

Die Schichte 0 passiert die Ruhelage nach rechts.

Die Schichte 1 passiert die Ruhelage nach rechts.

Die Wellenbewegung ist bis Punkt 8 fortgeschritten.

Die Luftschichte 0 erreicht die äußerste Lage rechts.

Die Luftschichte 0 geht wieder nach links.

Wellenbewegung bis Punkt 11 fortgeschritten.

Die erste ganze Welle bis Punkt 12 fertig.

Beginn der zweiten Schwingung.

u. s. f.

"

"

"

1 1/2 Wellen fertig bis 18.

1 3/4 Wellen fertig bis 21.

Amplitude ag des Kolbens ausgeführt, und es sind auf diese Weise auf ag die Stellen bezeichnet, in welchen der Kolben nach $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ usw. seiner Schwingungsdauer ankommen wird ¹⁾.

Im ersten Zwölftel seiner Schwingungsdauer lege der Kolben von d ausgehend den Weg dc zurück; in den folgenden gleich großen Zeiteilchen die Wege cb , ba , dann rückwärts nach rechts ab , bc , cd , de , ef , fg , dann wieder nach links gf , fe , ed usw. In d hat der Kolben seine größte Geschwindigkeit; von da an wird seine Bewegung nach beiden Seiten langsamer, bis er die Enden seiner Bahn erreicht, wo seine Bewegung in die entgegengesetzte übergeht.

Fig. 602.



Diese Bewegung des Kolbens pflanzt sich nun nach und nach auf alle die einzelnen Luftschichten der Röhre fort, jede derselben wird nach einiger Zeit dieselben Schwingungen machen wie der Kolben selbst, sie wird aber diese Bewegung um so später beginnen, je weiter sie von dem Kolben entfernt ist.

Wenn die Luft vollkommen unelastisch und starr wäre, so würde durch die Bewegung des Kolbens die ganze Luftsäule in der Röhre fortgeschoben werden, alle einzelnen Luftschichten würden gleichzeitig dieselbe Bewegung, und zwar die des Kolbens, haben; die Luft ist aber elastisch, die Bewegung pflanzt sich nur nach und nach fort, und zwar dadurch, daß die dem Kolben zunächst liegenden Schichten erst in ihrer Dichte geändert werden und dann vermöge ihrer Elastizität auf die folgenden wirken.

Über den weiteren Verlauf der Bewegung der einzelnen Luftschichten und die Verteilung der letzteren während der aufeinander folgenden Phasen der fortschreitenden Welle wird man, besser als durch viele Worte, durch die Betrachtung oder eigene Reproduktion der Fig. 601 belehrt. Die einzelnen Abteilungen dieser Figur geben die momentane Lage der Luftschichten in den um $\frac{1}{12}$ der Schwingungsdauer aufeinander folgenden Zeitmomenten. Das Weitere ist durch den der Figur beigeschriebenen Text hinlänglich erklärt.

Eine noch faßlichere Darstellung ist mittels der später zu beschreibenden Wellenmaschinen ermöglicht.

Wir machen noch auf den Umstand aufmerksam, daß in Fig. 601 die Exkursionsweite im Verhältnis zur Wellenlänge übertrieben groß angenommen wurde, infolgedessen auch die Verdünnungsstellen viel länger ausfielen als die Verdichtungsstellen. Bei unendlich kleinen Exkursionen werden beide gleich lang.

Wir haben bisher der Einfachheit wegen die Fortpflanzung der Luftwellen in einer Röhre betrachtet; in ganz ähnlicher Weise pflanzen sich aber

¹⁾ Die Längen dc , db , da verhalten sich zueinander wie

$$\sin 30 : \cos 30 : 1$$

oder wie $0,5 : 0,866035 : 1$

oder wie $4 : 6,92828 : 8,$

wofür man bei Zeichnungen von Sinuskurven praktisch

$$4 : 7 : 8$$

setzen kann. Teilt man die Wellenlänge in 12 gleiche Teile, so sind die aufeinander folgenden Exkursionen sehr nahe gleich

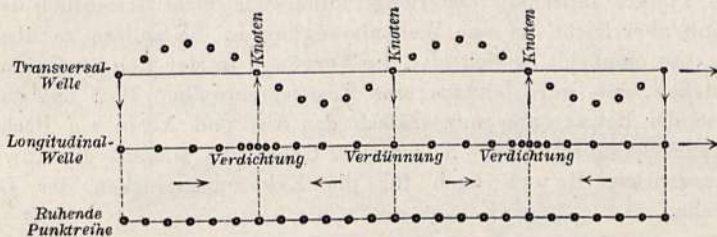
$$0, 4, 7, 8, 7, 4, 0, - 4, - 7, - 8, - 7, - 4, 0.$$

auch die Wellen in freier Luft von den schwingenden Körpern nach allen Seiten hin fort. So wie sich um die Stelle des Wassers, in welche der Stein hineingefallen ist, kreisförmige Wellen bilden, so bilden sich um den schwingenden Körper kugelförmige Luftwellen.

§ 199. Transversal- und Longitudinalwellen, Bäuche und Knoten.

Unter den bisher betrachteten Wellenbewegungen unterscheiden sich die Seilwellen von den Luftwellen außer durch das Medium insbesondere dadurch, daß bei den ersteren die Schwingungen senkrecht auf die Fortpflanzungsrichtung, bei den letzteren in der Fortpflanzungsrichtung stattfinden. Man pflegt Wellen der ersteren Art Transversalwellen, Wellen der letzteren Art Longitudinalwellen zu nennen. Als eine Zusammensetzung beider können die zuerst betrachteten Wasserwellen angesehen werden. Bei den Transversalwellen sind wiederum mehrere Fälle möglich, je nach der Form der Schwingungsbahn in der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene. So z. B. kann man leicht Seilwellen erzeugen, bei welchen sich die einzelnen Punkte des Seiles in Kreisen bewegen. Der einfachste Fall ist jener, wobei die Transversalschwingungen aller Punkte in einer Ebene, z. B. alle senkrecht, auf und ab erfolgen. Wählt man diese Schwingungsebene zur Zeichnungsebene, so erscheint die einfache Transversalwelle als

Fig. 603.



Schwingungskurve (Sinuskurve), deren Konstruktion auf S. 167 gezeigt wurde. In einer solchen Transversalwelle folgen aufeinander Strecken entgegengesetzter Exkursionen, welche man Bäuche (Wellenberge und Wellentäler) zu nennen pflegt und welche je die Länge einer halben Welle besitzen. Die Grenzpunkte zwischen denselben, wo die Exkursion momentan gleich Null ist, heißen Knotenpunkte. In je zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten sind die momentanen Geschwindigkeiten von entgegengesetzter Richtung und am größten. An den Stellen größter Exkursion sind die Geschwindigkeiten momentan gleich Null. Diese Stellen liegen von den Knotenpunkten um ein Viertel der Wellenlänge entfernt.

Bei den Longitudinalwellen folgen aufeinander abwechselnd Strecken mit Verdichtung und Verdünnung. Es wäre aber nicht richtig, wenn man, wie wohl vorkommt, die Berge und Täler der Transversalwelle mit den Verdichtungen und Verdünnungen der Longitudinalwelle in Analogie setzen wollte; denn die Stellen größter Verdichtung und Verdünnung fallen vielmehr mit den Knotenpunkten der Transversalwelle zusammen, sind also um eine Viertelwellenlänge gegenüber den Stellen größter Exkursion verschoben. Um dies deutlich zu übersehen, ist in Fig. 603 an unterster Stelle eine ruhende Punktreihe gezeichnet, aus welcher die darüber stehende Longitu-

dinalwelle und die zu oberst stehende Transversalwelle abgeleitet sind. Jede Exkursion, welche in der Transversalwelle nach aufwärts (abwärts) stattfindet, ist in der Longitudinalwelle nach rechts (links) aufgetragen. Beide Wellenzüge enthalten hier je zwei Wellenlängen, also vier halbe Wellen. Man übersieht sofort, daß senkrecht übereinander liegen:

In der Transversalwelle:	In der Longitudinalwelle:
Knoten mit momentaner Geschwindigkeit nach aufwärts	Stellen größter Verdichtung,
Knoten mit momentaner Geschwindigkeit nach abwärts	Stellen größter Verdünnung,
Wellenberg oder Bauch nach aufwärts .	Strecke mit Exkursionen nach rechts,
Wellental oder Bauch nach abwärts . .	Strecke mit Exkursionen nach links.

Man pflegt deshalb auch bei der Longitudinalwelle die Stellen größter Verdichtung und Verdünnung als Knoten zu bezeichnen ¹⁾.

Die Darstellung einer Transversalwelle ist stets übersichtlicher als die der analogen Longitudinalwelle, da man bei ersterer die Ruhelage in der Längsrichtung der Welle vor sich hat, während die Ruhelage der schwingenden Punkte innerhalb der Longitudinalwelle nicht ersichtlich ist. Da man nun aber leicht die eine Wellenbewegung in die andere zu übersetzen vermag, so empfiehlt es sich oft, die Vorgänge in der Longitudinalwelle so darzustellen, als wäre letztere eine Transversalwelle. Man hat dann am Schlusse der Betrachtung nur einfach das Auf und Ab in ein Rechts und Links zurückzuübertragen. Aus diesem Gebrauche stammt die Anwendung des Ausdruckes Bauch auch für die Exkursionsstrecken der Longitudinalwelle.

§ 200. Wellenmaschinen. Um die manchmal etwas verwickelten Erscheinungen der Wellenbewegung beim Unterrichte leichter verständlich zu machen, bedient man sich sogenannter Wellenmaschinen. Obwohl wir nun die stehenden Wellen erst später besprechen können, so wollen wir doch hier schon bei der Beschreibung der Versuche zur Darstellung der fortschreitenden Wellen die vollständige Anleitung zum Gebrauch der Wellenmaschinen einschalten, um auf diesen Gegenstand nicht zu oft später zurückgreifen zu müssen.

Die Wellenmaschinen zerfallen in zwei Klassen; bei der einen Klasse dieser Apparate werden wirkliche Wellenbewegungen hervorgerufen, bei der

¹⁾ In vielen Lehrbüchern wird die Bezeichnung Knoten nur für die unbewegt bleibenden Stellen stehender Wellen gebraucht. Es liegt jedoch gar kein Grund vor, warum man den Ausdruck nicht auch für die fortschreitenden Wellen gebrauchen sollte, so wie man den Ausdruck Bauch in beiden Fällen anwendet. Unter allen Umständen bezeichnet dann Knoten eine Stelle am schwingenden Körper oder Medium, welche sich momentan oder dauernd in der Ruhelage befindet; momentan bei fortschreitender Welle, dauernd bei stehender Wellenbewegung. In der fortschreitenden Welle schreiten Knoten und Bäuche fort, in der stehenden Welle bleiben beide an ihrer Stelle.

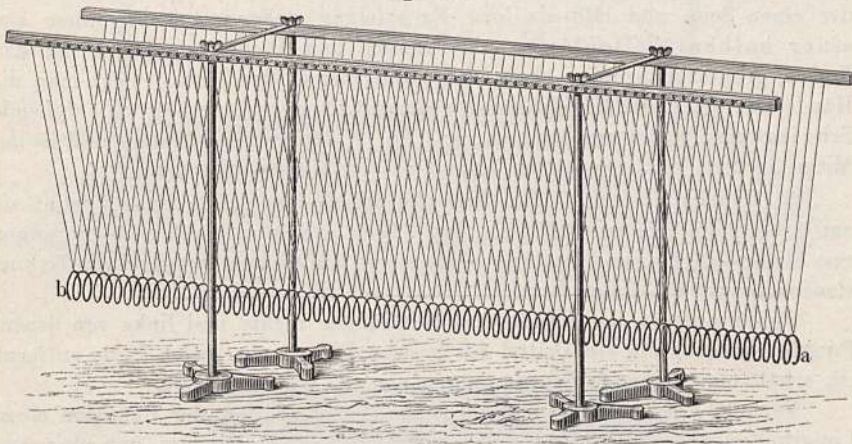
anderen werden die Wellenbewegungen nur künstlich entweder auf mechanischem oder nur auf optischem Wege nachgeahmt.

Ein Apparat der ersteren Klasse ist die Longitudinalwellenmaschine von A. F. Weinhold ¹⁾, Fig. 604.

Eine Spirale von 72 ungefähr 7 cm weiten Windungen eines 2 mm starken Kupferdrahtes ist in der aus der Figur ersichtlichen Weise mit Hilfe von an jeder Windung festgeknüpften Doppelfäden von ungefähr 60 cm Länge an einem Gestell aufgehängt; die Fadenenden sind durch Löcher gezogen und an Wirbeln befestigt, so daß man sie bequem auf gleiche Länge bringen kann.

Um in der Spirale eine Longitudinalwelle hervorzurufen, faßt man die äußerste Windung zwischen Daumen und Zeigefinger und bewegt dieselbe rasch in der Richtung der Spiralenachse um ungefähr 2 cm vorwärts oder zurück. Man sieht dann die Verdichtung oder Verdünnung die ganze

Fig. 604.



Spirale entlang laufen. Sobald die Welle am Ende der Spirale angelangt ist, wird sie reflektiert, und zwar in diesem Falle, wo das reflektierende Ende frei beweglich ist, in der Weise, daß die Verdichtung als Verdünnung zurückkehrt und umgekehrt.

Um die Reflexion am festen Ende zu zeigen, klemmt man das eine Ende der Spirale an einem beschwerten eisernen Halter fest. Die Verdichtung wird dann als Verdichtung reflektiert, die Verdünnung als Verdünnung.

Man beobachtet dies am besten, indem man die Bewegung der äußersten Windungen, von wo die Welle ursprünglich ausgegangen, in dem Momente ins Auge faßt, wo die Welle dahin zurückkehrt. War das reflektierende Ende frei, so erfolgt die Bewegung dieser Windungen in der mit dem ursprünglichen Anstoß gleichen Richtung; war das reflektierende Ende dagegen fest, so erfolgt die Bewegung in entgegengesetzter Richtung.

Um stehende Wellen hervorzurufen, hat man ²⁾ verschieden vorzugehen, je nachdem die Enden der Spirale beide frei, oder beide fest, oder nur eines derselben fest ist.

¹⁾ Physikalische Demonstrationen, S. 197 bis 199.

²⁾ Weinhold, l. c.

1. Beide Enden frei. Man faßt mit beiden flachen Händen um etwa drei Windungen von der Mitte nach rechts und links zwischen die Windungen der Spirale und bringt durch rhythmische Annäherung und Entfernung der Hände die Schwingungen hervor, worauf man die Hände zurückzieht. Die Spirale macht dann stehende Schwingungen von einer halben Wellenlänge, wobei in der Mitte ein Knoten mit Verdünnung und Verdichtung, an den Enden größte Exkursionen ohne Dichteänderung eintreten.

In ähnlicher Weise kann man durch doppelt so rasche Schwingungen der Hände, welche rechts und links um etwa drei Windungen von dem ersten und dritten Viertelpunkte der Spirale eingreifen, dieselbe mit zwei halben Wellenlängen schwingen lassen. Sie hat dann an den zwei erwähnten Stellen je einen Knoten, in der Mitte und an den Enden ihre größten Exkursionen.

2. Beide Enden fest. Beide Enden werden in beschwerte Halter eingespannt, dann faßt man die Mitte der Spirale, zieht sie ungefähr 2 dm nach der einen Seite und läßt sie los. Es erfolgen stehende Schwingungen von einer halben Wellenlänge mit Knoten und Dichteänderungen an den Enden, größter Exkursion ohne Dichteänderung in der Mitte. Legt man die Hände wie bei 1. an, bewegt sie aber doppelt so rasch, so erhält man stehende Schwingungen mit zwei halben Wellen, Knoten an den Enden und in der Mitte, größten Exkursionen im 1. und 3. Viertelpunkte.

3. Ein Ende fest. Man faßt die Spirale am freien Ende, dehnt sie um 1 bis 2 dm aus und läßt sie los. Man erhält stehende Schwingungen von einer Viertelswellenlänge mit einem Knoten am festen, einem Exkursionsmaximum am freien Ende.

Durch Anlegen der Hände drei Windungen rechts und links von jenem Punkte, welcher um ein Drittel der ganzen Länge vom freien Ende entfernt ist, erhält man stehende Schwingungen von $\frac{3}{4}$ Wellenlänge.

Nach F. Richarz¹⁾ eignet sich zur Demonstration der Reflexion einer Longitudinalwelle am festen und am freien Ende besonders gut eine aus einem Stahldraht von 34 m Länge und 1,5 mm Dicke hergestellte Spirale von 115 Windungen mit 9 cm Durchmesser, deren oberes Ende an der Decke des Hörsaales befestigt ist, während das untere Ende frei über dem Experimentiertische endigt. Die Wellen brauchen ungefähr 1 Sekunde zum Durchlaufen der Spirale und lassen sich leicht verfolgen, so wie auch die Phasenwechsel leicht ersichtlich sind.

Eine Wellenmaschine, welche gleichzeitig longitudinale und transversale (fortschreitende oder stehende) Wellenbewegung hervorruft, ist von van Schaik konstruiert und von J. Vaes mitgeteilt worden²⁾. Sie besteht aus einer Reihe pendelnder Stäbe, die derart durch Spiralfedern verbunden sind, daß die Schwingungen des äußersten Stabes sich allen folgenden mitteilen. Die unteren Enden der Stäbe markieren die longitudinale Welle, die am Drehpunkte angesetzten Seitenarme bilden mit ihren Enden die transversale Welle.

Eine der Weinhold'schen Wellenmaschine nahestehende, bei welcher Kugeln am unteren Rande von vertikal aufgehängten Fadennetzen angehängt

¹⁾ Sitzungsber. d. Naturh. Ges. zu Marburg 1901; Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 15, 290.

²⁾ Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 14, 89 (1901).

sind, ist von v. Rostowzew beschrieben¹⁾. Endlich ein „sehr einfacher Wellenapparat“, bestehend aus einem quadratischen Netze elastischer Spiralen, in deren Kreuzungspunkten Kugeln befestigt sind, von Fred. J. Hillig²⁾.

Zu den Wellenmaschinen der zweiten Klasse, welche die Wellenbewegungen nur nachahmen gestatten, gehört unter anderen die Wellenmaschine von E. Mach, wovon die Figuren 605 und 606 Abbildungen geben.

An einem eisernen Gestelle *ab* ist eine horizontale Leiste *cd* befestigt, an deren Unterseite eine Anzahl um vertikale Achsen *x, x, x* drehbarer

Fig. 605.

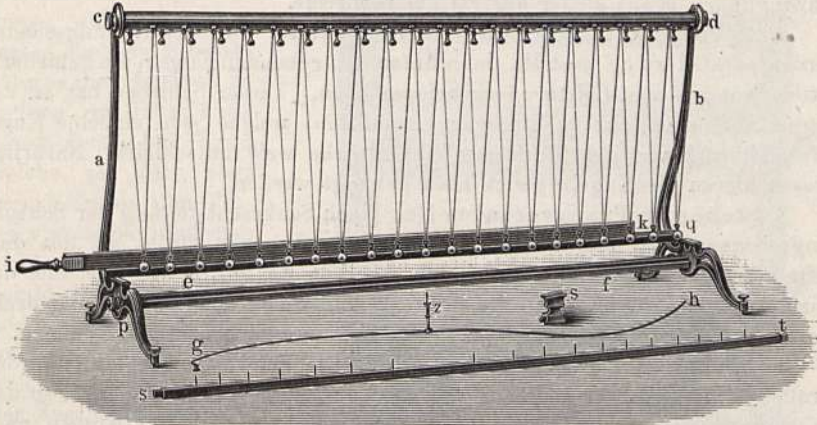
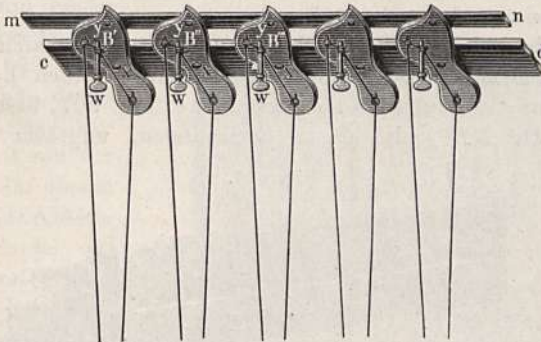


Fig. 606.



Brettchen *B, B', B''* angeschraubt sind (Fig. 606). Diese sämtlichen Brettchen sind durch eine der Leiste parallele Eisenschiene *mn* bei *y, y, y* zusammengekuppelt, so daß sie alle zugleich um ihre Achsen eine Vierteldrehung beschreiben, sobald man die Eisenschiene verschiebt. Die Form der Brettchen begrenzt diese Drehung in der Weise, daß die angehängten Fäden, welche eine Anzahl weiß gefärbter Bleikugeln tragen, mit ihren Ebenen parallel zu *cd* oder senkrecht dazu gestellt werden können. Die Schwin-

¹⁾ Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 16, 274 (1903).

²⁾ Ebend. 17, 329 (1904).

gungsebenen der Pendel sind daher ebenfalls entweder parallel oder senkrecht zur Kugelreihe gerichtet; es ist möglich, diese Richtungen während der Schwingungen zu wechseln. Die Länge der Fäden wird durch die Wirbel w , w , w reguliert. Mit diesem Apparate können folgende Demonstrationen gemacht werden:

1. Fortschreitende Transversalwelle. Zu diesem Zwecke wird ein langes Lineal ik , Fig. 605, mit Handgriff hinter den Kugeln mittels einer Nut aufgestellt, dann die Kugeln hinter dieselbe gesetzt und hierauf das Lineal mit konstanter Geschwindigkeit seitwärts herausgezogen. Hierdurch wird eine Kugel nach der anderen frei gelassen und jede folgende führt ihre Schwingungen etwas später aus als die vorherige.

2. Fortschreitende Longitudinalwelle. Die Schwingungsebenen werden parallel zu cd gestellt, dann unter den ruhenden Kugeln ein Schieber S mittels Nut auf der Leiste ef vorbeigeschoben. Dieser Schieber hat an der oberen Seite eine schräge Rinne eingeschnitten, welche jede einzelne Kugel aufnimmt und vor dem Loslassen eine Strecke weit mitschleift. Natürlich müssen hierzu die Kugeln gleich hoch gehängt werden.

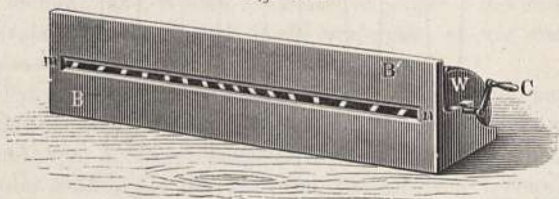
3. Stehende Transversalwelle. Nach Senkrechtstellung der Schwingungsebenen setzt man den in Wellenform gebogenen Draht gh mit dem Stifte z senkrecht nach abwärts in ein Loch in der Mitte der Oberseite der Leiste ef , legt die Kugeln an die konvexe Außenseite des Drahtes und dreht den letzteren rasch zur Seite, so daß die Kugeln zum Schwingen kommen.

4. Stehende Longitudinalwelle. Die Schwingungsebenen werden parallel cd gestellt, die Leiste st auf die Vorsprünge p und q gelegt, so daß die eingeschlagenen Drahtstifte nach vorn gerichtet sind, die Kugeln nach rechts und links an die Außenseite dieser Stifte gehängt und dann die Leiste rasch nach rückwärts gezogen, so daß sämtliche Kugeln zugleich in ihren größten Exkursionen frei gelassen werden.

Jede der besprochenen Wellen kann aus der transversalen Schwingungsweise in die longitudinale oder umgekehrt umgelegt werden ¹⁾.

Die Wheatstonesche Wellenmaschine, Fig. 607, besteht aus einem vertikalen Brette BB' mit einem horizontalen, ungefähr 1 cm breiten

Fig. 607.



Schlitz mn , hinter welchem sich eine Walze W durch eine Kurbel C drehen läßt. Auf der Mantelfläche der Walze ist auf dunklem Grunde ein weißes Kurvensystem aufgetragen, welches im abgewickelten Zustande in Fig. 608 abgebildet ist. Die Vorderseite des Brettes ist ebenfalls geschwärzt. Es ist leicht einzusehen, daß man auf diese Weise durch den Durchschnitt der

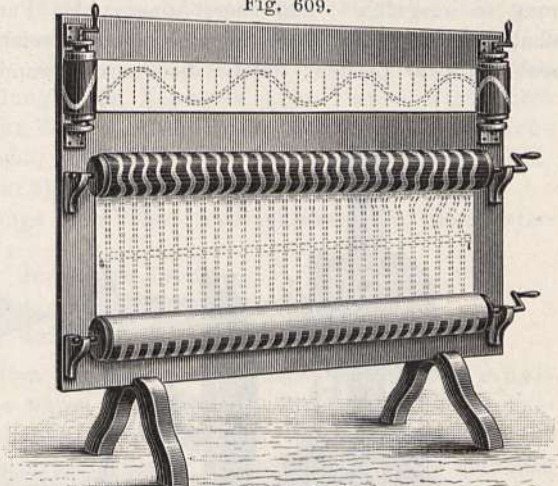
¹⁾ Vorteilhafte Modifikationen der Machschen Wellenmaschine sind von A. Höfler und von K. Mack angegeben worden. Siehe Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 9, 66 (1896) und 16, 265 (1903).

Kurven mit dem Schlitz jede Art periodischer Longitudinalbewegung darstellen kann. Die Figur zeigt das Kurvensystem für eine fortschreitende Welle; für eine stehende Welle muß eine andere Walze eingelegt oder der Überzug ihrer Mantelfläche vertauscht werden.

Fig. 608.

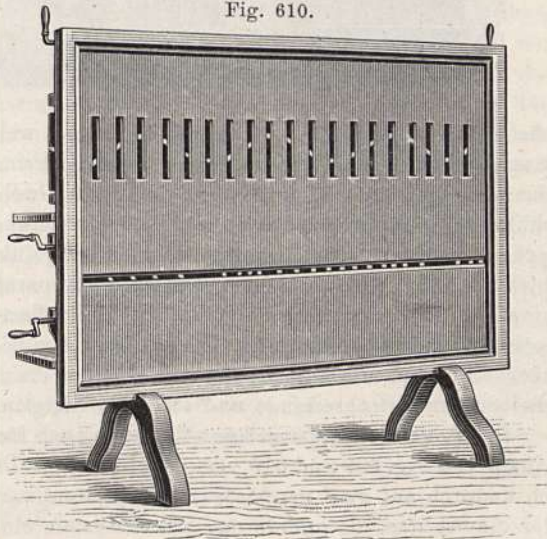


Fig. 609.



Dasselbe Prinzip kommt bei einer transparenten Wellenmaschine zur Anwendung, welche der Verfasser, ohne den Wheatstoneschen Apparat zu kennen, im Jahre 1857 konstruiert hat und welche vor dem eben beschriebenen den Vorteil voraus hat, daß man nicht allein die fertig gebildeten Longitudinal- und Transversalwellen, sondern auch solche, welche vor den Augen der Zuschauer erst entstehen, darstellen kann. Auch eignet sich die Transparentform besser für ein größeres Auditorium. Fig. 609 zeigt eine Abbildung dieses Apparates von der Rückseite, Fig. 610 von der Vorderseite. Im oberen Teile der undurchsichtigen, aus Pappe auf Holzrahmen bestehenden Wand ist eine horizontale Reihe vertikaler Schlitzze von ungefähr $\frac{1}{2}$ cm Breite eingeschnitten, über welche ein Streifen Pauseleinwand von etwas größerer Breite als die Schlitzze hoch sind, in horizontaler Richtung vorübergezogen werden

Fig. 610.

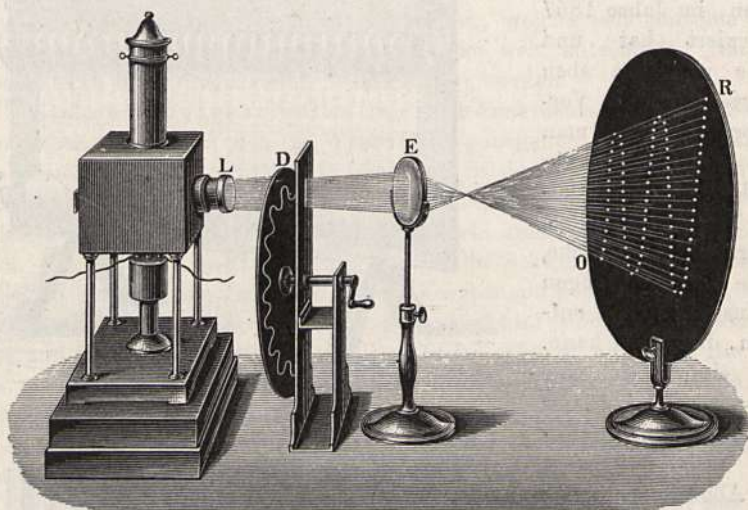


kann. Dieser Streifen wickelt sich von einer vertikalen Walze auf einer Seite ab und auf einer eben solchen auf der anderen Seite auf. Auf dem-

selben ist eine Transversalwelle transparent aufgezeichnet, der übrige Raum des Streifens ist geschwärzt; den Beginn der Welle macht eine gerade horizontale Linie. Im Transparent erscheint daher zuerst eine helle Punktreihe, welche dann von einem Ende her in transversale fortschreitende Schwingungen gerät.

Der untere Teil ist der Darstellung der Longitudinalwellen gewidmet. Über den horizontalen Schlitz wird nach Art einer Gardine mittels zweier Walzen ein großes Stück Pauseleinwand in vertikaler Richtung gezogen, auf welcher in ähnlicher Weise, wie in Fig. 608, ein durchsichtiges Kurvensystem mit schwarzem Zwischengrunde aufgetragen ist. Auch hier ist die Zeichnung so ausgeführt, daß zuerst eine ruhige Punktreihe erscheint, welche allmählich in longitudinale Schwingungen versetzt wird. Der Apparat trägt noch ein paar Leisten, welche die Pauseleinwand nahe an den Schlitz an-

Fig. 611.



drücken, sowie Vorrichtungen zur Beleuchtung, welche in der Zeichnung weggelassen sind. Endlich hat Crova dasselbe Prinzip in der Weise zur Ausführung gebracht, daß er das Kurvensystem, welches die Schlitzze oder den Schlitz zu durchkreuzen hat, auf eine rotierende Scheibe auftrug. Der Apparat ist dann in solchen Dimensionen ausgeführt, daß das darzustellende Objekt in die Bildebene eines Projektionsapparates (Laterna magica oder Skioptikon) eingesetzt und die Wellen vergrößert auf einen weißen Schirm projiziert werden können (s. Fig. 611). Dem Crovaschen Apparate sind außer einer Scheibe für die fortschreitende Transversalwelle noch mehrere Scheiben für fortschreitende und stehende Longitudinalwellen beigegeben.

Der Projektionsapparat kann übrigens auch für Wellenapparate nach dem Prinzip von Fig. 609 und 610 verwendet werden. Der ganze Apparat reduziert sich dadurch auf zwei geschwärzte Glasplatten, von denen die eine den Schlitz oder die Schlitzze, die andere das Kurvensystem eingeritzt enthält. Nach den Erfahrungen des Verfassers übt jedoch der Anblick dieser Projektionen eine sehr ermüdende Wirkung auf das Auge aus, was bei dem Apparate Fig. 609 und 610 nicht der Fall ist.

Außer den hier beschriebenen Apparaten sind noch die auf mechanischer Nachahmung beruhenden Wellenmaschinen von Eisenlohr¹⁾ (Wasserwellen), Plücker und Fessel²⁾, Schulze³⁾ und Gerling⁴⁾ zu erwähnen. Die letzteren sind insbesondere zur Darstellung der Lichtwellen geeignet. Endlich hat J. Müller die stroboskopische Scheibe von Stampfer, sowie Quincke die stroboskopische Trommel zur Darstellung von Wellenbewegungen benutzt. Auch Vorrichtungen zur Zusammensetzung von Wellen werden wir an der betreffenden Stelle beschreiben.

§ 201. Verschiedenheit der Schallempfindungen. Im § 193 haben wir bereits erwähnt, daß wir unter dem Namen Schall Gehörseindrücke verschiedener Art zusammenfassen. Zunächst unterscheiden wir zwischen Geräuschen (Zischen, Plätschern, Rasseln usw.) und musikalischen Klängen oder Tönen. Die Empfindung eines Klanges oder Tones wird durch regelmäßige Oszillationen des tönenden Körpers, also durch periodische Bewegungen hervorgebracht, während Geräusche von nicht periodischen Bewegungen herrühren⁵⁾.

Die verschiedenen Klänge oder Töne unterscheiden sich aber untereinander

1. durch ihre Tonhöhe,
2. durch ihre Stärke,
3. durch ihre Klangfarbe.

Die alten Griechen hatten zwar die Unterschiede der Tonhöhe musikalisch richtig erfaßt, sie waren aber nicht imstande, dieselben physikalisch zu definieren. Allerdings hatte Pythagoras die musikalischen Intervalle durch Zahlen ausgedrückt, die er auf empirische Weise gefunden hatte. Er hatte nämlich die Erfahrung gemacht, daß man die Oktav, die Quint, die große Terz eines Tones erhält, wenn man die Saite, welche diesen Grundton gibt, bei unveränderter Spannung auf $\frac{1}{2}$, auf $\frac{2}{3}$, auf $\frac{4}{5}$ ihrer ursprünglichen Länge verkürzt, und er schloß daraus, daß das Intervall der Oktav durch das Zahlenverhältnis 1 : 2, das Intervall der Quint durch das Verhältnis 2 : 3 usw. charakterisiert sei. Die Beziehung dieser Zahlen zu den Tönen wurde aber im Altertume sowohl wie auch vorzugsweise im Mittelalter nur mystisch aufgefaßt und führte, indem man auch in anderen Dingen, z. B. unter den Gestirnen, ähnlichen Zahlenverhältnissen nachspürte, zu den wunderlichsten Träumereien, wie unter anderen zu denen über die Harmonie der Sphären, von denen sich selbst Männer von wissenschaftlichem Geiste, wie Kepler, nicht ganz frei zu machen imstande waren.

Erst im 17. Jahrhundert wurde es richtig erkannt, wodurch die Verschiedenheit der Tonhöhe bedingt und welches die physikalische Bedeutung der Pythagoräischen Zahlen sei. Diesen wichtigen Fortschritt verdankt die Wissenschaft dem Minoritenpater Mersenne, welcher sich schon durch die Übersetzung der Schriften Galileis ins Französische ein großes Verdienst

¹⁾ Lehrb. d. Physik, 11. Aufl. von P. Zech, S. 137.

²⁾ Pogg. Ann., Bd. LXXVIII.

³⁾ Ebend., Bd. C, S. 583.

⁴⁾ Ebend., Bd. CV, S. 175.

⁵⁾ Näheres hierüber: E. Brücke, „Über die Wahrnehmung der Geräusche“. Wien. Akad. Ber. XC, III. Abt., S. 199 (1885).

um die exakte Mechanik erworben hatte. Ganz im Geiste der Galileischen Forschung unternahm Mersenne die Untersuchung der Schwingungsgesetze gespannter Saiten, deren Resultate er im Jahre 1636 in einem Werke veröffentlichte, welches den Titel: *Harmonicorum libri XII* führt.

Mersenne stellte zuerst den Satz auf, daß die Tonhöhe nur von der Schwingungsdauer des tönenden Körpers oder, was dasselbe ist, von seiner Schwingungszahl, d. h. von der Anzahl der Schwingungen abhängt, welche er in einer gegebenen Zeit, etwa in einer Sekunde, ausführt.

Die Töne sind um so höher, je größer ihre Schwingungszahl oder je kleiner ihre Schwingungsdauer ist.

Welches die Schwingungszahl der verschiedenen Töne ist und wie man dieselbe ermitteln kann, wird weiter unten besprochen werden.

Die Stärke oder Intensität des Tones hängt von der Amplitude, d. i. der Schwingungsweite der Schwingungen ab, welche der tönende Körper macht; und zwar ist die Stärke des Tones dem Quadrat der Amplitude proportional.

Unter Klangfarbe oder Klangcharakter versteht man die Eigenlichkeiten, durch welche man bei gleicher Tonhöhe und gleicher Stärke den Ton verschiedener Instrumente unterscheiden kann. So hat z. B. derselbe Ton einen ganz anderen Charakter, je nachdem er von einer Violine oder von einer Klarinette oder von einer Trompete herrührt.

Das Wesen der Klangfarbe ist vorzugsweise durch die Untersuchungen von Helmholtz ermittelt worden; wir werden darauf später zurückkommen.

§ 202. Geschwindigkeit des Schalles in Luft. Alle Töne, welches auch ihre Höhe, ihre Intensität und ihre Klangfarbe sein mag, verbreiten sich in der Luft sehr nahe mit gleicher Geschwindigkeit; denn wenn an einer bestimmten Stelle ein Konzert aufgeführt und von verschiedenen Beobachtern in verschiedenen Entfernungen angehört wird, so hören sie denselben Takt, dieselbe Harmonie. Wenn etwa die tiefen Töne den hohen merklich voraneilen oder umgekehrt, so würde bald aller Takt aufhören, und was in einer Entfernung von 10 Schritten eine Harmonie ist, würde in einer Entfernung von 100 Schritten die unerträglichste Kakophonie sein.

Mersenne bestimmte die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft zu 1378, die Florentiner Akademiker bestimmten sie im Jahre 1660 zu 1111 Pariser Fuß. Seitdem sind zu gleichem Zwecke viele Versuche angestellt worden, deren Resultate man im fünften Bande von Poggendorffs Annalen, S. 476 zusammengestellt findet. Hier wollen wir die Versuche besprechen, welche im Jahre 1822 in der Nähe von Paris zwischen den Orten Villejuif und Montlhéry von Prony, Arago, Mathieu, Humboldt, Gay-Lussac und Bouvard angestellt wurden. An beiden Orten waren Zwölfpfünder aufgestellt, welche während der Nacht abwechselnd in Zwischenzeiten von fünf Minuten abgefeuert wurden. Auf diese Weise konnte der Einfluß der Windrichtung eliminiert werden, da man annehmen durfte, daß derselbe die Schallbewegung nach der einen Richtung ebensoviel begünstigte als die nach der entgegengesetzten hemmte.

Die Beobachter zu Villejuif hörten vollkommen gut alle Schüsse von Montlhéry, jeder von ihnen beobachtete auf seinem Chronometer die Zeit, welche von dem Moment der Lichterscheinung an bis zur Ankunft des Schalles verging. Die größte Differenz zwischen den Resultaten der drei Beobachter bei einem und demselben Versuche überstieg nicht $\frac{3}{10}$ bis $\frac{4}{10}$ Sekunden. Die längste beobachtete Zeit war 55, die kürzeste 54,7, das Mittel 54,84 Sekunden.

Zu Montlhéry konnte man nur 7 von den 12 Schüssen von Villejuif hören, und von diesen 7 wurde auch nicht ein einziger von den drei Beobachtern zugleich gehört; doch stimmen die Resultate ziemlich gut überein. Die längste Zeit war 54,9, die kürzeste 53,9, das Mittel 54,43 Sekunden.

Man kann demnach als Mittel für die Zeit, welche der Schall brauchte, um sich von einer Station bis zur anderen fortzupflanzen, 54,6 Sekunden annehmen.

Aus diesen Daten und der von Arago durch Triangulation ausgemittelten Distanz von 9549,6 Toisen läßt sich eine Geschwindigkeit von 174,9 Toisen = 340,88 m per Sekunde ableiten. Dieses Resultat, welches bei der Temperatur 16° und einer Luftfeuchtigkeit von 78° Saussure erhalten worden, gibt für 0° und trockene Luft eine Geschwindigkeit von 331,05 m.

Wir geben hier noch eine Übersicht der späteren direkten ¹⁾ Messungen der Schallgeschwindigkeit.

Moll und van Beck ²⁾ erhielten 1823 bei Amsterdam nach einem dem obigen ähnlichen Verfahren den Wert	332,26 m
Nach späterer Berechnung von Schröder van der Kolk	332,77 m
Régnauld ³⁾ 1862 und 1863 aus Versuchen mit Pistolenschüssen in langen, verschieden weiten Wasserleitungsröhren der Stadt Paris Werte zwischen	334,16 und 325,66 m
Derselbe in einer Röhre von 1,1 m Durchmesser auf eine Wegstrecke von beinahe 20 000 m den Mittelwert	330,6 m
Auf eine Wegstrecke von beinahe 20 000 m den Minimalwert	330,3 m
Derselbe aus Versuchen mit Kanonenschüssen in freier Luft	330,7 m
Le Roux ⁴⁾ in Röhren nach ähnlicher Methode	330,66 m

Bei Régnaulds Versuchen wurden sowohl Abgang als Ankunft des Schalles automatisch durch elektrische Ströme registriert und die Zeiten mittels Stimmgabelchronographen gemessen. Seine Versuche ergaben, daß die Schallgeschwindigkeit mit der Entfernung von der Schallquelle anfangs rascher, später immer langsamer abnimmt. Sie betrug z. B. auf 1281 und 2445 m Distanz von der Kanone 331,37 und 330,7 m.

¹⁾ Die indirekten Bestimmungen aus Schwingungszahl und Wellenlänge können wir erst an anderer Stelle bringen.

²⁾ Pogg. Ann. 5, 351, 469.

³⁾ Compt. rend. 67, 209.

⁴⁾ Ann. de chimie et de phys. 4. Ser., T. 12.

Die Schallgeschwindigkeit in Röhren ist desto geringer, je enger die Röhre und je tiefer der Ton ist, doch ist die Abnahme rascher als die des Durchmessers der Röhre.

Helmholtz¹⁾ suchte diese von Kundt²⁾ nachgewiesene Tatsache durch Berücksichtigung der Reibung zu erklären. Da dies noch nicht genügte, brachte Kirchhoff³⁾ auch noch den Wärmeverlust an die Wände in Rechnung, und da auch dies noch nicht hinreichte, vermutete er, daß auch die Wärmestrahlung mitwirke. Aber auch das Material der Röhren ist von Einfluß. So erhielt F. A. Schulze bei neueren Versuchen nach der Quincke'schen Interferenzmethode folgende Werte:

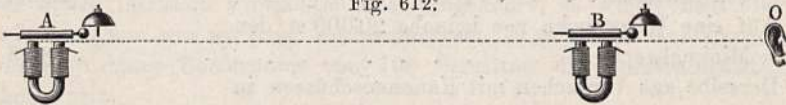
	Tonhöhe	Geschwindigkeit m
Glasröhre von 1,01 mm Durchmesser	512	265
„ „ 1,01 mm „	384	258
„ „ 1,51 mm „	512	290
„ „ 1,51 mm „	484	282
Messingröhre von 0,99 mm „	512	208
„ „ 0,99 mm „	383	189
„ „ 1,48 mm „	512	253
„ „ 1,48 mm „	384	230
Kautschukröhre von 1,50 mm Durchmesser	512	195

Durch Röhren von 0,5 mm und darunter gelang es überhaupt nicht mehr, einen Schall durchzusenden.

J. Bosscha⁴⁾ hat 1853 zuerst eine Methode der Messung der Schallgeschwindigkeit auf kürzere Distanzen vorgeschlagen, welche dann von König⁵⁾ in Paris verwirklicht wurde. Es ist die Methode der Schallkoinzidenzen.

Man denke sich in *A* und *B*, Fig. 612, zwei Schlagwerke, welche genau gleichzeitig jede Sekunde einen Schlag geben. Bei *O* in der geraden Verlängerung der Linie *AB* befinde sich ein Ohr. Offenbar wird dasselbe den

Fig. 612:



n ten Schlag des Werkes *A* zugleich mit dem *n* + 1 ten Schlage des Werkes *B* zugleich hören, wenn der Abstand von *A* bis *B* gleich der Schallgeschwindigkeit ist. Man hat also die beiden Schlagwerke nur so lange zu entfernen oder zu nähern, bis in *O* die Sekundenschläge genau zusammenfallend gehört werden. Die Entfernung der Schlagwerke ist dann gleich der Schallgeschwindigkeit. Würden die Schlagwerke ihre Schläge in Zeitintervallen von $\frac{1}{10}$ Sekunde geben, so wäre die zugehörige Entfernung gleich dem zehnten Teile der Schallgeschwindigkeit.

¹⁾ Verhandl. d. naturw.-med. Vereins zu Heidelberg 1863, Bd. III, S. 16.

²⁾ Monatsber. d. Berliner Akad., 19. Dezbr. 1867, Pogg. Ann. 135.

³⁾ Pogg. Ann. 134, 177 (1868).

⁴⁾ Ebend. 92.

⁵⁾ Ebend. 118.

König verwendete Schlagwerke der letzteren Art, die auf elektromagnetischem Wege gleichzeitig durch eine stromunterbrechende Stimmgabel in Bewegung gesetzt wurden. Eine verwandte, etwas kompliziertere Methode wurde von Bosscha ausgeführt ¹⁾.

Kahl ²⁾ hat noch die weitere Vereinfachung vorgeschlagen, sich mit einem Schlagwerke so lange einer Wand zu nähern, bis das Echo jedes Schlages mit dem nächsten direkt gehörten Schläge zusammentrifft. Offenbar ist dann der Abstand des Schlagwerkes von der Wand gleich dem halben Wege, den der Schall im Zeitintervall zwischen zwei Schlägen zurücklegt.

Auf anderem Wege ist es durch Verfeinerung der Messungsmethoden gelungen, die Geschwindigkeit des Schalles innerhalb noch viel kürzerer Strecken zu bestimmen. So z. B. hat Tumlirz ³⁾ solche Bestimmungen an einer Blechröhre von 21 m Länge und 2,4 cm Weite vorgenommen. Die aller-kürzesten Distanzen sind aber bei den Messungen von E. Mach ⁴⁾ über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Explosionswellen, insbesondere der durch einen elektrischen Funken hervorgerufenen Wellen zur Anwendung gekommen. Wir können die dabei angewendeten Messungsmethoden hier noch nicht beschreiben, wollen aber schon jetzt mitteilen, daß sich dabei das überraschende Resultat ergeben hat, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit heftiger Schallimpulse in nächster Nähe des Entstehungsortes bedeutend höhere Werte erreichen kann. So z. B. ergab sich

für einen Abstand von der Schallquelle gleich	eine Geschwindigkeit von
80 mm	756 m pro Sekunde
137 "	540 " " "
254 "	453 " " "
400 "	416 " " "
977 "	373 " " "

Wenn wir unter normaler Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles jene verstehen wollen, bei welcher die Schwingungsamplituden verschwindend klein sind, so können wir für trockene Luft bei 0° Régnaults Wert 330,7 m annehmen. Für Luft mittlerer Temperatur und Feuchtigkeit kann rund 340 m gelten.

§. 203. Beziehungen zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Wellenlänge und Schwingungszahl. Ein schwingender Körper mache pro Sekunde n Schwingungen und die dadurch hervorgerufene Wellenbewegung pflanze sich per Sekunde auf eine Strecke von C Metern fort. Da jeder Hin- und Hergang des schwingenden Körpers je eine Welle hervorruft, so müssen längs der Strecke C eine Anzahl = n Wellenlängen vorhanden sein. Daraus folgt, daß die Wellenlänge λ ausgedrückt wird durch:

¹⁾ Man vergleiche auch Röber, Berl. Ber. für 1862, 18, 129 und D. Kahl in Schlömilchs Zeitschrift 1864, S. 64.

²⁾ l. c.

³⁾ Tumlirz, Wien. Akad. Ber. 80, 439 (1879).

⁴⁾ Mach und Sommer, Wien. Akad. Ber. 75 (1877); E. Mach, O. Tumlirz und C. Kögler, Wien. Akad. Ber. 77, 7 (1877).

gewinnen. Wir denken uns in einer Röhre mit dem konstanten Querschnitt vom Flächeninhalt = Eins eine Reihe von gleich dicken Schichten A, B, C usw. des elastischen Mediums, z. B. Luft, abgegrenzt (Fig. 613 I).

Die Dicke jeder dieser Schichten sei durch S , der Druck, welchen sie auf den Querschnitt = Eins ausübt, durch P ausgedrückt.

Wird nun die erste Schicht A plötzlich so komprimiert, daß, wie Fig. 613 II zeigt, ihre linksseitige Begrenzung um die Strecke s nach rechts vorrückt, also die Dicke der Schicht auf $S - s$ reduziert wird, so muß die Dichtigkeit, also auch die Spannkraft des Mediums innerhalb dieser Schicht um einen Betrag p wachsen. Nehmen wir mit Newton (vorläufig) an, daß dies nach dem Boyleschen (Mariotteschen) Gesetze erfolge, so ergibt sich aus

$$\begin{aligned} S - s : S &= P : P + p \\ pS - ps &= Ps. \end{aligned}$$

Da in den meisten Fällen sowohl s als auch p gegenüber S und P sehr klein sind, so verschwindet das Glied ps und ergibt sich mit genügender Annäherung:

$$p = P \frac{s}{S} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

Die Schicht B hat also jetzt von links her den Druck $P + p$, von rechts den Druck P auszuhalten; es bleibt daher als beschleunigende Kraft die Differenz p wirksam.

Nach einer gewissen Zeit $= t$ wird die erste Schicht wieder ihre ursprüngliche Dichte und Dicke angenommen haben und die Verdichtung ganz auf die Schicht B übergegangen sein (Fig. 613 III).

Die Wellenbewegung ist dann um die Strecke gleich der Dicke S fortgerückt. Die Geschwindigkeit derselben ist also

$$C = \frac{S}{t}, \text{ mithin } t = \frac{S}{C} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

Während die Verdichtung von A auf B übergeht, nimmt die bewegende Kraft von p bis 0 ab, denn in dem Moment, der durch Fig. 613 III vorgestellt ist, ist die Dichtigkeit zu beiden Seiten der Schicht B gleich groß. Der mittlere Wert der beschleunigenden Kraft, welche die Verdichtung von B bewirkt hat, kann also $= \frac{p}{2}$ gesetzt werden. Da durch diese Kraft die Schicht B um den Weg s vorgedrängt wurde, so ist die dabei geleistete Arbeit gegeben durch den Ausdruck $\frac{ps}{2}$.

Diese Arbeit muß der Größe nach gleich sein der lebendigen Kraft die daraus hervorging.

Ist die Dichte des Mediums im nicht komprimierten Zustande $= D$, so ist die in der Schicht B von der Dicke S und dem Querschnitt Eins enthaltene Masse gleich $D \cdot S$. Der Schwerpunkt dieser Masse wurde offenbar um die Strecke $\frac{s}{2}$ verschoben, und zwar innerhalb der Zeit t . Betrachten wir die dabei wirksame Kraft als eine konstante, so ergibt sich (nach § 38, 6)

für die Endgeschwindigkeit der Wert $\frac{s}{t}$, für die lebendige Kraft der Wert

$$\frac{D \cdot S \cdot s^2}{2 t^2}.$$

Setzen wir diesen Wert gleich jenem der aufgewendeten Arbeit, so bekommen wir die Gleichung

$$\frac{p s}{2} = \frac{D S s^2}{2 t^2}$$

und nach Substitution der oben unter (2) und (3) gefundenen Werte für p und t folgt hieraus:

$$C = \sqrt{\frac{P}{D}}.$$

Wir wollen nun nach dieser theoretischen Formel die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft von 0° berechnen.

Der Druck der Luft auf 1 qcm ist gleich dem Drucke einer Quecksilbersäule von 1 qcm Basis und 76 cm Höhe. Da das spezifische Gewicht des Quecksilbers = 13,5953, so ist also der Druck der Luft auf 1 qcm gleich dem einer Masse von $13,5953 \times 76 = 1033,243$ g. Diese im Gravitationsmaßsystem ausgedrückte Druckkraft (Spannkraft) erhalten wir nach absolutem Maße, indem wir mit $g = 980,6$ multiplizieren, gleich $1033,243 \times 980,6 = 1013\,198$ Dynen. Dies ist die Größe P . Die Dichte der Luft D , d. h. die Masse von einem Cubikcentimeter derselben in Grammen, beträgt 0,001293.

Setzt man diese Werte in die Formel für C , so erhält man

$$C = 27\,993 \text{ cm} = 279,93 \text{ m}.$$

Dieses Resultat ist nun aber mit der Erfahrung nicht in Übereinstimmung, sondern viel zu klein, da die wirkliche Schallgeschwindigkeit nach § 202 nahezu 331 m beträgt. Die Ursache dieser Nichtübereinstimmung wurde von La Place aufgedeckt; sie liegt in der Unrichtigkeit der Annahme, daß die Spannkraft der Luft bei der Verdichtung nach dem Boyleschen (Mariotteschen) Gesetze wachse. Da nämlich durch die Verdichtung die Luft erwärmt wird, so wächst ihre Spannkraft in einem rascheren Verhältnis. In der Wärmelehre wird gezeigt werden, daß man die wirkliche Spannkraft erhält, indem man dem oben berechneten Werte von p noch als Faktor den Quotienten der beiden Wärmekapazitäten für konstanten Druck und konstantes Volum hinzufügt. Dieser Quotient $\frac{c_p}{c_v}$ hat für Luft nach Röntgen¹⁾ den Wert 1,4053; setzt man diesen in die von La Place ergänzte Formel:

$$C = \sqrt{\frac{P}{D} \frac{c_p}{c_v}} \dots \dots \dots (4)$$

so erhält man $C = 331,16$ m, was mit dem beobachteten Werte sehr nahe übereinstimmt.

¹⁾ Poggend. Ann. 148, 580 bis 624. Da das Verhältnis $\frac{c_p}{c_v}$ schwieriger zu bestimmen ist als die Schallgeschwindigkeit, so hat man oft umgekehrt jenes aus dieser berechnet.

Von der Größe des Luftdruckes ist die Schallgeschwindigkeit unabhängig, weil durch eine Änderung des ersteren sowohl P als D im gleichen Verhältnis geändert werden. Der Quotient $\frac{P}{D}$ bleibt also bei allen Barometerständen derselbe und folglich auch die Schallgeschwindigkeit, dagegen ändert sich diese sehr beträchtlich mit der Temperatur und auch ein wenig mit dem Feuchtigkeitsgehalt derselben.

Ist die Dichte der Luft bei $0^\circ = D_0$, so ist sie bei t° gleich $\frac{D_0}{1 + \alpha t}$, wobei α der Ausdehnungskoeffizient der Luft = 0,00367 ist. Enthält die Luft Wasserdampf von der Spannkraft f bei einem Barometerstande b und einer Temperatur t , so ist ihre Dichte gleich

$$D_0 \frac{b - 0,377 gf}{760 (1 + 0,00367 t)}.$$

Dabei sind f und b in Millimetern auszudrücken. Dieser Wert der Dichte ist in die Formel für C einzusetzen.

Drückt man die Größe P , wie es gebräuchlicher ist, statt in absolutem Maße durch die Höhe h einer Quecksilbersäule aus, so ist $P = gh\sigma$ zu setzen, wobei σ das spezifische Gewicht des Quecksilbers bedeutet.

Die vollständige Formel für die Schallgeschwindigkeit in irgend einem Gase, dessen Dichte im Normalzustande (verglichen mit Wasser) = D , dessen Temperatur = t° , welches beim Barometerstande b mit Wasserdampf von der Spannkraft f gemischt ist und für welches das Verhältnis der Wärmekapazitäten $\frac{c_p}{c_v}$ gleich k ist, lautet demnach:

$$C = \sqrt{\frac{gh\sigma}{D} \cdot \frac{760 (1 + 0,00367 t)}{b - 0,3779 f}} k \dots \dots (5)$$

Dabei sind b und f in Millimetern, g und h in Metern auszudrücken, um C ebenfalls in Metern zu erhalten.

Wie die Formel zeigt, vermehren gesteigerte Temperatur und Wassergehalt die Schallgeschwindigkeit. Für Luft von mittlerer Zimmertemperatur und mittlerer Feuchtigkeit kann sie rund zu 340 m angenommen werden. Für andere Gase erhält man sie, indem man den Wert für Luft durch die Quadratwurzel aus der Dichte des Gases dividiert. So findet man beispielsweise für Wasserstoff $c = 1257$ m, für Kohlendioxyd $c = 267$ m¹⁾.

¹⁾ Die hier mitgeteilte Ableitung der Formel für die Geschwindigkeit des Schalles ist in einer englischen Kritik als ungenügend bezeichnet worden. Es ist in der Tat nicht leicht, ohne Hilfe der höheren Mathematik eine einfache und doch strenge Ableitung zu geben. Wir teilen hier noch eine elementare Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Röhren mit, die wir Herrn Prof. Waßmuth verdanken. Es mögen bedeuten:

- C die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit,
- T die Dauer einer ganzen Schwingung hin und zurück,
- t die Zeit seit Beginn der fortschreitenden Bewegung vom Punkte 0 aus,
- x die in dieser Zeit zurückgelegte Wegstrecke der Schallwelle,
- y die zur Zeit t im Punkte x erlangte Elongation,
- λ die Wellenlänge,
- a die Amplitude.

§ 205. Schallgeschwindigkeit in tropfbar flüssigen und in festen Körpern. Die Formel (1) des vorausgehenden Paragraphen

$$C = \sqrt{\frac{P}{D}}$$

ist auch auf tropfbar flüssige und feste Körper anwendbar, wobei man nur für P den entsprechenden Wert einzusetzen hat.

Es gilt dann, wie im § 207 gezeigt werden wird,

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

oder da $\frac{\lambda}{T} = C$

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{C} \right) \dots \dots \dots (1)$$

Wäre die Welle eine stehende, so würde sich y in einem Zeitelement τ ändern um $y'\tau$, wobei y' die momentane Geschwindigkeit vorstellt. Da außerdem die Welle in der Zeit τ um ξ fortschreitet, so wird sich innerhalb der kleinen Strecke ξ das y überdies ändern um eine Größe $y_x\xi$. Die gesamte Änderung von y wird dann also betragen $y'\tau + y_x\xi$. Diese Änderung muß wieder verschwinden für einen Punkt der Abszisse, die um eine Wellenlänge absteht. Setzen wir dieselbe = Null, so folgt

$$\frac{\xi}{\tau} = - \frac{y'}{y_x} = C \dots \dots \dots (2)$$

denn da ξ der Weg in der Zeit τ ist, so ist $\frac{\xi}{\tau}$ die Geschwindigkeit C . Daraus folgt dann

$$y_x = - \frac{y'}{C} \dots \dots \dots (3)$$

Es ist nun unschwer einzusehen, daß auch für die Dichte und den Druck der Luft, die sich ja in gleicher Weise periodisch ändern, gleichartige Beziehungen bestehen müssen.

Bezeichnen wir mit D die Dichte im Ruhezustande, mit d den momentanen Wert der veränderlichen Dichte, so können wir setzen

$$d = D(1 + \delta) \dots \dots \dots (4)$$

und da δ eine sehr kleine Größe vorstellt, ist deren Änderung analog mit (3)

$$\delta_x = - \frac{\delta'}{C}$$

Für die Änderungen des Druckes mit dem Volum gilt, da es sich um eine adiabatische Kompression (siehe Wärmelehre) handelt, das Poissonsche Gesetz $p v^k = \text{Const.}$

Führt man statt der Volumina die reziproken Dichten ein, so folgt, wenn wir wieder mit P den Anfangsdruck und mit p den veränderlichen momentanen Wert desselben bezeichnen,

$$\frac{p}{d^k} = \frac{P}{D^k}$$

und mit Rücksicht auf (4)

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{d}{D} \right)^k = (1 + \delta)^k = 1 + k\delta,$$

da δ sehr klein ist, so daß dessen höhere Potenzen verschwinden. Also

$$p = P(1 + k\delta).$$

Indem wir nun wiederum schließen, daß die Druckänderung $P_k\delta$ dem Gesetze (3) unterliege, setzen wir

$$p_x = - \frac{p'}{C} = - \frac{Pk\delta'}{C} \dots \dots \dots (5)$$

Die Bedeutung von P ist aus Gleichung (2) § 203 ersichtlich. Es folgt aus ihr

$$P = S \frac{p}{s}.$$

P ist also das Verhältnis zwischen einer Drucksteigerung p und der zugehörigen Verkürzung s , einer Schicht des Mediums von der Länge S und

Die Luftschicht vom Querschnitt 1 und der Dicke ξ hat bei der Dichte d die Masse ξd . Bezeichnen wir die ihr erteilte Beschleunigung mit y'' , so ist die wirksame Kraft $\xi d y''$. Diese ist identisch mit dem Überdruck. Die andere Fläche erleidet den Druck p , die rückwärtige den Druck $p + p_x \xi$, der Überdruck beträgt demnach $p - (p + p_x \xi) = -p_x \xi$.

Setzen wir diesen gleich der wirksamen Kraft, so kommt

$$\begin{aligned} -p_x \xi &= \xi d y'' \\ y'' &= -\frac{p_x}{d} \end{aligned}$$

oder nach (5)

$$y'' = \frac{P_x \delta'}{d \cdot C} \dots \dots \dots (6)$$

Es ist klar, daß der Zusammenhang der Luft fortbestehen muß. Ist ihre Dichte zu irgend einer Zeit $= D(1 + \delta)$, ihre Masse $= D(1 + \delta)\xi$, so ändert sich diese in der Zeiteinheit um $D\delta'\xi$. Da ferner y' die Geschwindigkeit des Querschnittes darstellt, so schiebt sich durch die vordere Fläche ein Zylinder von der Masse dy' hinein, während durch die hintere um ξ entfernte Fläche die Masse $d(y' + y_x \xi)$ austritt. Es verbleibt also ein Massenzuwachs $dy' - d(y' + y_x \xi) = -dy'_x \xi$. Diese Massenänderung muß der obigen $D\delta'\xi$ gleich sein. Also

$$-dy'_x \xi = D\delta'\xi.$$

Da D und d bis auf Größen höherer Ordnung gleich sind, so können wir setzen

$$-y'_x = \delta' \dots \dots \dots (7)$$

und da auch y' dem Gesetze (3) folgt, so muß

$$-y'_x = \frac{y''}{C}$$

sein, also wegen (7)

$$y'' = C\delta'.$$

Mit Rücksicht auf (6) ergibt sich demnach

$$C\delta' = \frac{P_k \delta'}{dC},$$

woraus, da für d D gesetzt werden kann,

$$C = \sqrt{\frac{P}{D} k} = \sqrt{\frac{P}{D} \cdot \frac{c_p}{c_v}}.$$

In dieser Rechnung ist von Anfang an angenommen, daß die Schwingungen harmonische (nach dem Pendelgesetz für kleine Amplituden vor sich gehende) seien, was wiederum voraussetzt, daß die elastische Kraft in jedem Momente proportional der Elongation sei. Das ist im allgemeinen sicher nicht der Fall und kann nur für verschwindend kleine Amplituden und Dichteänderungen als annähernd angenommen werden. Bei starken Schallerregungen sind in der Nähe derselben die Amplituden sicher von größerem Werte und infolgedessen die Spannkraft rascher ansteigend als die Elongationen, daher auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine größere als die oben berechnete. Das ist denn auch beobachtet. Nach den angeführten Messungen von E. Mach haben z. B. Explosionswellen des elektrischen Funkens in 80 mm Abstand eine Geschwindigkeit von 756 m pro Sekunde, also eine doppelt so große als die normale, welche erst in Entfernungen über 1 m erreicht wird.

dem Querschnitte Eins. Setzen wir die Länge $S = 1$ voraus, so ist die Masse der Schicht gleich ihrer Dichte D , ihr Druck auf die Unterlage $= gD$. Bezeichnen wir die diesem Drucke entsprechende Verkürzung wieder mit s , so ist

$$P = \frac{gD}{s},$$

mithin

$$C = \sqrt{\frac{g}{s} \frac{P}{P}} = \sqrt{\frac{g}{s}} \dots \dots \dots (1)$$

Diese Formel kann sowohl für tropfbar flüssige als auch für feste Körper zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit benutzt werden. Die Größe s bedeutet dabei jedesmal die Verkürzung (oder Verlängerung), welche eine Schicht von der Länge Eins erfährt, wenn auf sie der Druck (oder der Zug) einer ihrer eigenen Masse gleichen Belastung ausgeübt wird.

Für tropfbare Flüssigkeiten wird s aus ihrer Zusammendrückbarkeit durch den Druck einer Atmosphäre berechnet. Das Wasser wird z. B. durch den Druck einer Atmosphäre um 47,85 Milliontel seines Volumens zusammengedrückt; durch den Druck einer Atmosphäre wird also eine 1 m lange Wassersäule in einer unelastischen Röhre um 47,85 Milliontel Meter verkürzt. Der Druck einer Atmosphäre entspricht aber einem Quecksilberdrucke von 0,76 m oder bei einer Temperatur von 10° C dem Drucke einer Wassersäule von 10,2934 m; eine Wassersäule von 1 m Höhe würde also eine Verkürzung von $\frac{0,00004785}{10,2934}$ oder 0,000 004 648 6 m hervorbringen, und dies ist der Wert von s für Wasser; substituiert man diesen Wert von s in der Formel, so findet man, daß die Geschwindigkeit des Schalles in Wasser von 10° C 1453 m in der Sekunde beträgt.

Die vorstehende Formel kann leicht auf folgende Weise umgeformt werden:

$$v = \sqrt{\frac{9,806 \cdot 0,76 \cdot 13,544 \cdot 1\,000\,000}{\sigma \cdot c}} \dots \dots \dots (2)$$

wo σ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, im Vergleich zum Wasser, und c ihre Zusammendrückbarkeit für 1 Atmosphäre bezeichnet.

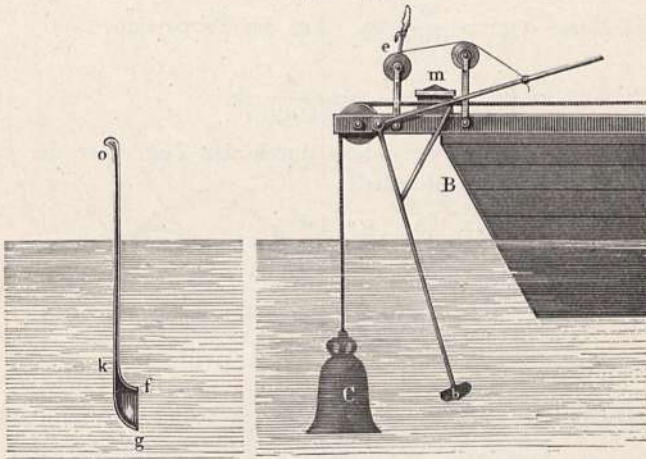
Nach dieser Formel ist die Geschwindigkeit des Schalles in folgenden Flüssigkeiten bei 10° C berechnet:

Name der Flüssigkeiten	Spezifisches Gewicht	Zusammen- drückbarkeit	Geschwindig- keit des Schalles m
Äther	0,712	131,35	1039
Alkohol	0,795	94,95	1157
Terpentinöl	0,870	71,35	1276
Wasser	1,000	47,85	1453
Quecksilber	13,59	3,38	1484
Wasser mit Ammoniak gesättigt. . .	0,9	33,05	1842

Die Zahlen der letzten Kolumne sind alle mit einer Ungewißheit behaftet, welche besonders von der Unsicherheit des Wertes für die Zusammendrückbarkeit abhängt. Nimmt man z. B. für Alkohol den von Oerstedt angegebenen Wert der Zusammendrückbarkeit, so würde sich für die Geschwindigkeit des Schalles 2423 m in der Sekunde ergeben, während man sie nur gleich 1157 m findet, wenn für die Zusammendrückbarkeit des Alkohols der von Colladon und Sturm gefundene Wert in Anwendung gebracht wird.

Das Wasser ist die einzige unter diesen Flüssigkeiten, welche einem direkten Versuche unterworfen worden ist. Fig. 614 erläutert das Verfahren, welches Colladon und Sturm im Jahre 1827 zu diesem Zwecke im Genfer See zur Anwendung brachten. Eine ganz in das Wasser untergetauchte Glocke war an einen Nachen angehängt; sie wurde durch einen Hammer an-

Fig. 614.



geschlagen, dessen Stiel aus dem Wasser hervorragte. Durch Niederdrücken eines Hebels wird der Hammer *b* gegen die Glocke geschlagen und gleichzeitig die Lunte *e* mit dem Pulverhäufchen *m* in Berührung gebracht. Am gegenüberliegenden Ufer des Sees notierte man den Moment, in welchem man den Lichtblitz des entzündeten Pulvers, und denjenigen, in welchem man den im Wasser fortgepflanzten Schall wahrnahm, welcher mit Hilfe des Hörrohres *gfk* beobachtet wurde. — Diese Versuche ergaben für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Wasser 1435 m, was von der berechneten Zahl 1453 nur wenig abweicht¹⁾.

Während bei den Gasen zwischen der Schallgeschwindigkeit im Freien und jener in Röhren kein großer Unterschied besteht, scheint dieses bei Flüssigkeiten nach indirekten Messungen von Werthheim in bedeutendem Grade der Fall zu sein. Er fand beispielsweise für Wasser in Röhren die sehr abweichende Geschwindigkeit $C' = 1173,4$ m. Nach Werthheim wäre überhaupt die „allseitige Schallgeschwindigkeit“ C zu der „einseitigen“ C' in der Beziehung stehend:

$$C = C' \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,2247 C'.$$

¹⁾ Pogg. Ann. 12, 183.

Zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit fester Körper muß die Größe s der Gleichung (1) aus ihrem spezifischen Gewicht σ und ihrem Elastizitätskoeffizienten $\frac{1}{E}$ abgeleitet werden. Die Bedeutung des letzteren wurde im § 106 erörtert. Der Elastizitätskoeffizient $\frac{1}{E}$ bedeutet die vorübergehende Verlängerung (Verkürzung), welche ein elastischer Körper von der Länge Eins und dem Querschnitt Eins erfährt, wenn er dem Zuge (Drucke) durch das Gewicht der Masseneinheit ausgesetzt wird. Der reziproke Wert E heißt Elastizitätsmodulus.

Länge und Verlängerung werden nach Metern, der Querschnitt nach Quadratmillimetern, die Belastung nach Kilogrammen gemessen. Da das Volum eines Stabes von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt = 1 cem ist, so beträgt seine Masse $\sigma g = \frac{\sigma}{1000}$ kg. Aus der Proportion:

$$1 : \frac{1}{E} = \frac{\sigma}{1000} : s$$

findet man die Verlängerung s , welche durch den Zug einer der Stabmasse gleichen Masse hervorgebracht würde:

$$s = \frac{\sigma}{1000 E},$$

mithin

$$C = \sqrt{\frac{1000 g E}{\sigma}} = \sqrt{\frac{9806 E}{\sigma}} \dots \dots \dots (3)$$

Für Stahldraht ist nach Werthheim $\sigma = 7,622$, $\frac{1}{E} = 0,00005788$, woraus sich nach obiger Formel berechnet

$$C = 4714 \text{ m.}$$

Demnach wäre die Schallgeschwindigkeit im Stahldraht 14,2 mal so groß als in Luft, was mit einem indirekt von Werthheim erhaltenen Werte über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Längswellen nämlich 14,96 mal jener in Luft ziemlich übereinstimmt.

Daß die Schallgeschwindigkeit im Eisen bedeutend größer als in Luft ist, hat schon Biot dadurch gezeigt, daß ein auf das Ende einer langen Röhrenleitung aus Gußeisen ausgeführter Schlag am anderen Ende zweimal gehört wird, zuerst infolge Fortpflanzung im Eisen, dann noch einmal infolge Fortpflanzung in der Luft. Man kann ähnliche Versuche auch an Eisenbahnschienen anstellen, obwohl die mangelhafte Verbindung derselben keine genaueren Messungen zuläßt.

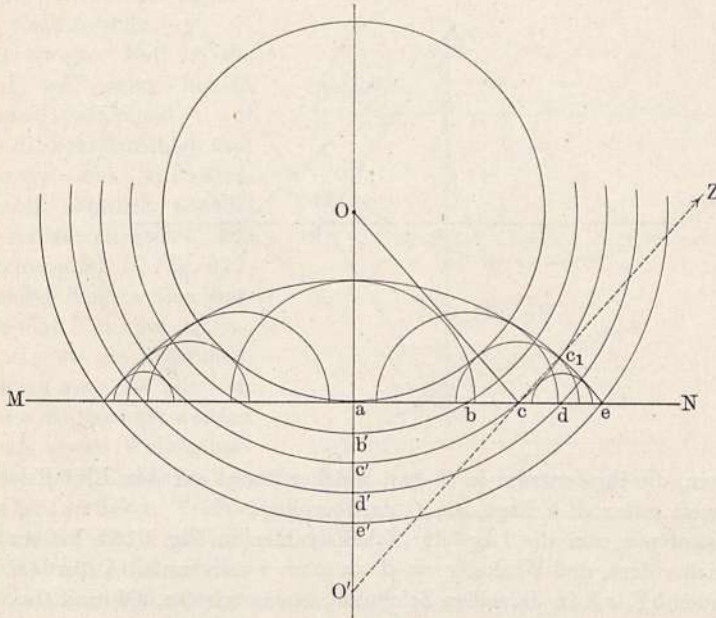
Außer den Longitudinalwellen pflanzen sich in festen, homogenen und amorphen Körpern aber auch noch Transversalwellen fort, und zwar beide mit abweichenden Geschwindigkeiten, deren Größe und Verhältnis von zwei „Konstitutionskonstanten“ abhängt¹⁾. Die obige Formel ist also nur als Annäherungsformel zu betrachten.

¹⁾ G. Lamé, Leçon de l'Elasticité, Paris 1852.

§ 206. Von der Reflexion des Schalles und dem Echo. Wenn eine kugelförmige Schallwelle auf die ebene Trennungsfläche zweier verschiedener Medien, z. B. eine ebene Wand eines festen Körpers, oder auf die ebene Oberfläche einer Flüssigkeit auftrifft, so wird sie mehr oder weniger vollständig reflektiert. Die Gesetze dieser Reflexion können wir auf folgende Weise ableiten.

Es sei O , Fig. 615 a, der Ausgangspunkt einer Wellenbewegung, Oa der Radius der Kugelwelle, welche sich bis zu dem Zeitmoment ausgebildet hat,

Fig. 615 a.

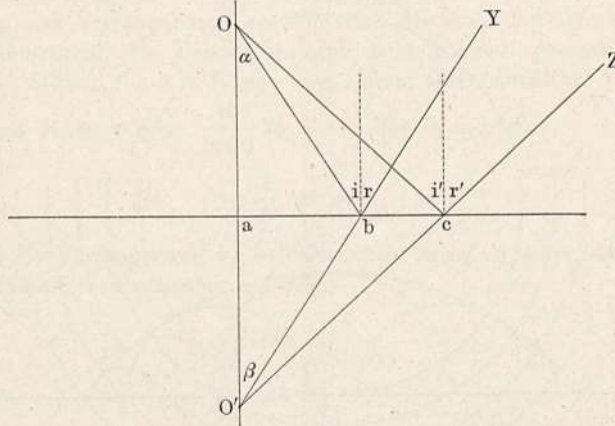


in welchem die Wellenbewegung bis zur reflektierenden Ebene, deren Projektion auf die Zeichnungsebene durch die Gerade MN dargestellt wird, vorgeschritten ist. Wäre diese reflektierende Ebene nicht vorhanden, so würde die Kugelwelle in den folgenden gleich großen Zeiträumen $= \tau$ um die gleichen Strecken $ab', b'c', c'd' \dots = \rho$ gewachsen sein und die Grenzen $b'b, c'c, d'd \dots$ erreicht haben. Am Ende der Zeit 4τ wäre sie bis $e'e$ vorgeschritten. Jeder der Punkte a, b, c, d , wo die Welle an die Wand anschlägt, wird nun zum Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle, die sich im alten Medium kugelförmig ausbreitet. Die allenfalls um dieselben Punkte im neuen Medium entstehenden Wellen bleiben hier außer Betracht. Bis zu dem Momente, wo die primäre Welle den Punkt e erreicht, hat die um a entstandene Elementarwelle die Zeit 4τ zur Verfügung gehabt, sich daher bis zu einer Kugel vom Radius 4ρ entwickelt.

In derselben Zeit sind die Elementarwellen um die Punkte b, c, d bis zu Kugeln von den Radien $3\rho, 2\rho, \rho$ angewachsen. Alle diese elementaren Kugelwellen werden von einer Kugelfläche berührt und eingehüllt, deren Zentrum in O' liegt, wobei $aO' = aO$ ist. Der Radius dieser einhüllenden Kugelfläche ist $O'e = Oe$. Um dies einzusehen, ziehen wir durch irgend

einen der Punkte der Trennungsebene, z. B. durch c , die Geraden Oc und $O'c$. Die Verlängerung der letzteren muß die Elementarwelle um c in einem Punkte c_1 schneiden. Aus der Kongruenz der Dreiecke aOb und $aO'b$ folgt $O'b = Ob$. Nun ist der Abstand von O' bis $c_1 = Oc + 2q$; ebenso groß ist aber auch der Radius $O'e$ der einhüllenden Welle, denn er ist ebenfalls $= O'c + 2q = Oc + 2q$. Dasselbe könnten wir von allen Elementarwellen zeigen, welche um irgend einen Punkt der Trennungsebene sich bilden. Die Resultierende aller dieser Elementarwellen muß demnach die einhüllende

Fig. 615 b.



Welle sein, die ihr Zentrum in O' hat, welcher Punkt auf dem Einfallslot OO' ebenso weit unter MN liegt, als O darüber liegt.

Fassen wir nun die Lage der Schallstrahlen in Fig. 615 b ins Auge, so ergibt sich sofort, daß Winkel $r = \beta = \alpha = i$ sein muß. Außerdem liegen die Geraden bY , cZ in derselben Zeichnungsebene wie Oa , Ob und Oc . Somit ergeben sich folgende Gesetze der Reflexion des Schalles:

1. Die von einer Ebene reflektierte Schallwelle hat eine solche Form und Lage, als ginge sie von einem Punkte aus, der auf dem Einfallslot ebenso weit hinter der reflektierenden Ebene liegt, als der Ausgangspunkt der direkten Welle vor derselben gelegen ist.
2. Die reflektierten Schallstrahlen liegen in derselben Ebene, in welcher die direkten Strahlen und das Einfallslot liegen.
3. Die Reflexionswinkel der Strahlen sind gleich den Einfallswinkeln.

Der Satz 1. läßt sich für Wasserwellen experimentell gut beobachten, wenn man in einen Teich mit ruhig stehendem Wasser, dessen Ufer eine Strecke weit geradlinig begrenzt ist, einen Stein wirft. Auch in einer rechtwinkligen Porzellantasse, die mit Quecksilber gefüllt ist, lassen sich die reflektierten Wellen schön beobachten. Durch Töplers Schlierenmethode endlich lassen sich auch die reflektierten Luftwellen sehr schön wahrnehmen.

Liegt das Erregerzentrum der direkten Welle unendlich weit entfernt, so ist die Wellenoberfläche als Ebene anzusehen, und die Schallstrahlen laufen parallel. Dasselbe gilt für die an einer Ebene reflektierte ebene Welle.

Ist die reflektierende Fläche keine Ebene, so wird die reflektierte Welle in ihrer Form mannigfach verändert. Ein wichtiger Fall ist die Reflexion

an einem Umdrehungsellipsoid, von dessen einem Brennpunkt die Strahlen ausgehen. Sie werden alle nach einmaliger Reflexion im anderen Brennpunkt vereinigt.

Die von F , Fig. 616, ausgehenden Kugelwellen, welche in a_1, a_2, a_3 das Ellipsoid treffen, erzeugen von diesen Punkten ausgehende Kugelwellen, welche die gemeinsame Einhüllende mn besitzen, welche selbst ein zu F konzentrisches Kugelflächenstück ist, das fortschreitend in F' zu einem Punkte verschwindet. In einer elliptischen Tasse voll Quecksilber ist dieses Verhalten experimentell nachweisbar.

Fig. 616.

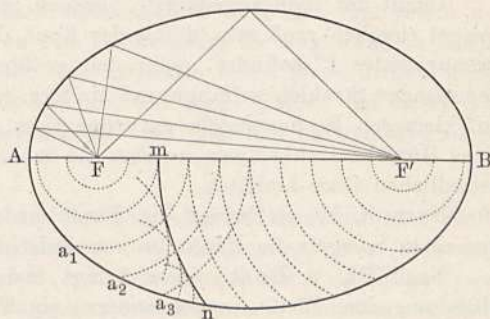


Fig. 617.

Ein zweiter Fall ist die Reflexion an einem hohlen Umdrehungsparaboloid, auf welches die Schallstrahlen vom Brennpunkt aus auftreffen. Sie werden sämtlich parallel mit der Achse reflektiert. Die von Brennpunkt F , Fig. 617, ausgehenden Kugelwellen senden von den Punkten $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$, wo sie auftreffen, Kugelwellen aus, die alle von der Ebene mn berührt werden und so als ebene Wellenoberfläche parallel zur Achse ins Unendliche hinausrücken. Treffen solche Strahlen wieder parallel zur Achse auf ein zweites Paraboloid auf, so werden sie in dessen Brennpunkt vereinigt. Zwei konaxial gegenüberstehende parabolische Spiegel lassen daher die von einem Brennpunkt ausgehenden Strahlen nach zweimaliger Reflexion im anderen Brennpunkt sich sammeln (Fig. 618). Sphärische Hohlfächen von nicht zu

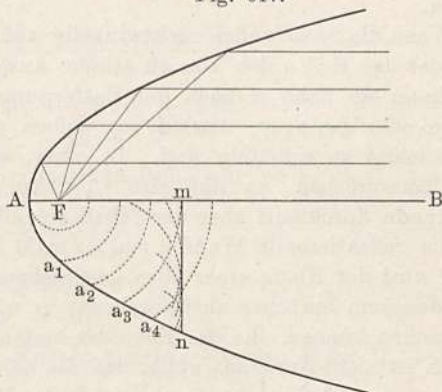
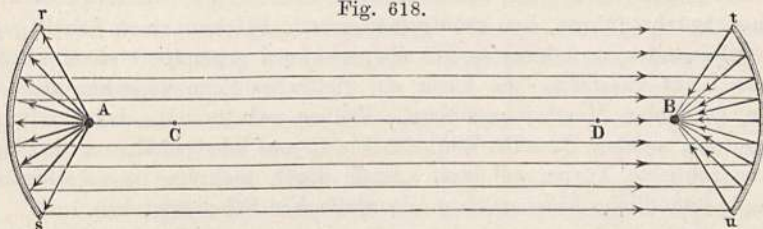


Fig. 618.



großem Öffnungswinkel nähern sich in ihrer Form den Umdrehungsparaboloiden und können daher deren Wirkung nahezu ersetzen. Die Brennpunkte derselben liegen in der Mitte zwischen dem Krümmungsmittelpunkte und dem Scheitel des Hohlspiegels. Bringt man nun in den Brennpunkt F

des einen Hohlspiegels eine Taschenuhr, so hört ein im Brennpunkt F' des anderen befindliches Ohr deutlich das Ticken derselben, denn alle von F ausgehenden Schallstrahlen, welche den Hohlspiegel rs treffen, werden parallel mit der Achse reflektiert, wie es in unserer Figur angedeutet ist; auf den zweiten Spiegel tu treffend, werden sie aber gegen den Brennpunkt F' desselben zurückgeworfen und also daselbst wieder vereinigt.

Entfernt man das Ohr aus dem Brennpunkte F' , so verschwindet der Schall, selbst wenn man sich dem Punkte F bedeutend nähert.

Damit der eben angedeutete Versuch gelinge, müssen die beiden Brennpiegel ziemlich groß sein, damit der Kopf, dessen Ohr sich an der Stelle des Brennpunktes F' befindet, nicht den größten Teil der vom Brennpiegel rs kommenden Strahlen auffange und hindere, nach tu zu gelangen. Wenn man mit kleineren Brennpiegeln experimentiert, muß man bei F' die Mündung eines Hörrohres anbringen, welches die Schallwellen von F' nach dem seitlich befindlichen Ohre hinleitet.

Nach E. Mach bringt die Explosion von Knallsilber im Brennpunkt des einen Spiegels die Explosion von Jodstickstoff im anderen hervor.

Nach Ph. v. Rostowzew bringt man in den einen Brennpunkt die Mündung einer Pfeife, in den anderen ein Kundtsches Manometer.

Aus der Reflexion des Schalles erklärt sich auch die Erscheinung des Echos.

Wenn die Schallwellen rechtwinkelig auf die reflektierende Fläche treffen, so sendet das Echo den Ton zu seinem Ausgangspunkte zurück. In diesem Falle kann ein Echo je nach der Entfernung der reflektierenden Wand eine größere oder geringere Anzahl von Silben unter Bedingungen wiederholen, welche leicht zu ermitteln sind. In einer Sekunde kann man bequem drei Silben aussprechen, so daß also $\frac{1}{3}$ Sekunde auf eine Silbe kommt. In $\frac{1}{3}$ Sekunde durchläuft aber der Schall einen Weg von ungefähr 112 m; wenn also die reflektierende Wand 1 mal, 2 mal, 3 mal . . . n mal 56 m entfernt ist, so wird der Klang einer eben gesprochenen Silbe nach $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$. . . $\frac{n}{3}$ Sekunden zum Sprecher zurückkehren, er wird also 1, 2, 3 . . . n Silben aussprechen können, ehe das Echo der ersten wieder an sein Ohr schlägt.

Es ist nicht durchaus nötig, daß die reflektierende Fläche hart und glatt sei, denn auch unregelmäßige Felswände, Waldrände, Wolken bilden Echo.

Die Erklärung der vielfachen Echos, d. h. solcher, welche dieselbe Silbe mehrmals wiederholen, ist entweder auf das Vorhandensein mehrerer verschieden weit entfernter reflektierender Wände oder auch auf die Erwägung zurückzuführen, daß zwei reflektierende Flächen einen Schall gegenseitig aufeinander zurückwerfen können, wie zwei gegenüberstehende Spiegel sich das Licht zusenden. So kann ein vielfaches Echo zwischen zwei entfernten parallelen Mauern entstehen. Früher gab es nahe bei Verdun ein solches Echo, welches dasselbe Wort 12- bis 13 mal wiederholte; es war durch zwei benachbarte Türme gebildet. Auch durch mehrere in verschiedenem Abstände befindliche Flächen kann ein vielfaches Echo entstehen.

Schallwellen können auch bei wolkenloser Atmosphäre reflektiert und dadurch in ihrer Ausbreitung gestört werden, wenn die Luft aus Schichten verschiedener Temperatur, also ungleicher Dichte, besteht. Dies ist sicherlich, wie Humboldt bemerkt, die Ursache, warum sich der Schall des Nachts weiter verbreitet als bei Tage, selbst mitten in den Wäldern von Amerika,

wo die bei Tage schweigenden Tiere des Nachts die Atmosphäre mit tausend verworrenen Tönen erfüllen.

Professor Tyndall hat einen Apparat konstruiert, mittels welchem man die Reflexion an wärmeren Luftschichten oder an Dämpfen experimentell nachweisen kann.

Durch die Reflexion des Schalles erklären sich auch die Wirkungen des Sprachrohrs und des Hörrohrs.

Auch die Erscheinungen der Brechung und Beugung der Lichtstrahlen hat man an Schallstrahlen nachzuahmen versucht. Es zeigte sich aber, daß die im Verhältnisse zu den Dimensionen der angewandten Körper sehr viel größere Wellenlänge der Schallstrahlen einen wesentlichen Unterschied bedingt, welcher die Analogie mit den Lichtstrahlen bei diesen Versuchen stört oder aufhebt. Dies ist auch bei manchen Reflexionsversuchen der Fall.

§ 207. Einfluß der Dichte des reflektierenden Mediums; Reflexion am festen und am freien Ende. In § 113 wurden unter (3) und (4) für die Geschwindigkeiten V und V_1 , mit welchen sich zwei elastische Kugeln von den Massen M und M_1 bewegen, nachdem sie mit den ursprünglichen Geschwindigkeiten c und c_1 zusammengestoßen sind, die Ausdrücke abgeleitet:

$$V = \frac{(M - M_1)c + 2M_1c_1}{M + M_1}$$

$$V_1 = \frac{(M_1 - M)c_1 + 2Mc}{M + M_1}.$$

Für den Fall, daß die gestoßene Kugel in Ruhe war, ist $c_1 = 0$, also

$$V = \frac{(M - M_1)c}{M + M_1}$$

$$V_1 = \frac{2Mc}{M + M_1}.$$

Sind außerdem die Massen der Kugeln gleich groß, also $M = M_1$, so kommt

$$V = 0$$

$$V_1 = c.$$

Das heißt, die stoßende Kugel kommt zur Ruhe, während die gestoßene mit derselben Geschwindigkeit weiter geht, welche die stoßende hatte.

Ist die Masse der gestoßenen Kugel kleiner, also $M > M_1$, so wird sowohl V als V_1 positiv, beide Kugeln bewegen sich nach dem Stoße in der Richtung desselben.

Ist dagegen die Masse der gestoßenen Kugel die größere, also $M < M_1$, so wird V negativ, und nur V_1 bleibt positiv. Es bewegt sich dann die stoßende Kugel nach dem Stoße rückwärts.

Man kann dieses Rechnungsergebnis leicht experimentell erproben, wenn man zwei Elfenbeinkugeln, einmal von gleicher, dann von ungleicher Größe an Schnüren nebeneinander aufhängt und dann die eine Kugel auf die andere im Bogen niederfallen läßt. Die niederfallende Kugel bleibt nach dem Stoße stehen, oder geht weiter, oder wird zurückgeworfen, je nachdem sie gleich groß, größer oder kleiner ist als die gestoßene.

Um die Schwingungsphasen nach dem Zusammenstoße noch auffallender zu demonstrieren, kann man, nach E. Brücke, eine der beiden Kugeln mit ihren Schnüren an einem Schlitten aufhängen, welcher sich am Gestelle längs einer horizontalen, auf die Schwingungsebene senkrechten Richtung unmittelbar nach dem ersten Anstoße der Kugeln verschieben läßt. Hierdurch wird das wiederholte Anstoßen verhindert, und man sieht deutlich, wie die Kugeln nach dem Stoße in gleicher oder in entgegengesetzter Schwingung begriffen sind, je nachdem die stoßende oder die gestoßene Kugel von größerer Masse ist.

Hängt man eine größere Anzahl gleich großer Kugeln in einer Reihe auf (Fig. 619) und läßt die erste fallen, so kommt sie zur Ruhe und gibt

Fig. 619.

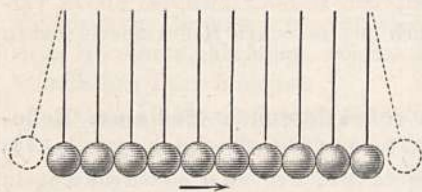
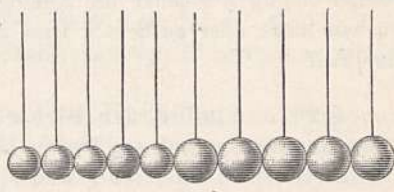


Fig. 620.



ihre Geschwindigkeit an die zweite ab. Diese stößt aber sofort an die dritte, kommt daher ebenfalls zur Ruhe und so fort, so daß also die Geschwindigkeit durch alle Kugeln hindurch in fortwährender Vertauschung bis zur letzten freien Kugel gelangt, welche dann mit derselben Geschwindigkeit fortfliegt, mit welcher die erste gestoßen hat (§ 113).

Anders verläuft aber der Vorgang, wenn wir, wie in Fig. 620 angedeutet ist, an eine Reihe unter sich gleich großer Kugeln kleinerer Masse eine Reihe unter sich gleicher, aber größerer Masse anfügen. Lassen wir die äußerste kleine Kugel niederfallen, so pflanzt sich ihr Stoß bis zur letzten kleinen fort, ohne daß die einzelnen Kugeln nach dem Stoße eine Geschwindigkeit behalten; beim Übergange des Stoßes auf die erste große Kugel wird jedoch die letzte kleine nach rückwärts reflektiert, sie gibt diese negative Geschwindigkeit nach rückwärts an ihre Nachbarkugel ab, und so setzt sich von dem Punkte, wo die kleinen Kugeln an die großen grenzen, nach rückwärts eine Stoßbewegung fort, welche zuletzt die äußerste kleine Kugel hinausfliegen macht, allerdings nur mit einem Bruchteile der Geschwindigkeit, mit welcher sie niederfiel. Nach der anderen Seite setzt sich längs der großen Kugeln ebenfalls die Wirkung des Stoßes fort und macht auch die äußerste große Kugel hinausfliegen.

Denken wir uns nun den ganzen Apparat umgekehrt und wiederholen wir das Experiment in der Weise, daß wir einmal zuerst die äußerste große Kugel fallen lassen, so pflanzt sich zunächst ihr Stoß bis zur letzten großen Kugel fort, ohne daß eine der Kugeln in Bewegung verbliebe. Die letzte große Kugel jedoch kommt durch den Stoß auf die erste kleine nicht zur Ruhe, sondern behält nach dem Stoße noch einen Teil Geschwindigkeit in derselben Richtung bei. Wären die Kugeln untereinander in einer derartigen elastischen Verbindung, daß sie nicht bloß einander drücken, sondern auch ziehen könnten, so würde diesmal die letzte große Kugel einen Zug auf ihre Vorgängerin in der Richtung der vorangegangenen Stoßbewegung ausüben, welcher Zug sich dann ebenfalls nach rückwärts bis zur äußersten

großen Kugel fortpflanzen würde. Es könnte dies dadurch verwirklicht werden, daß man die Kugeln untereinander durch elastische Spiralfedern in Verbindung setzte.

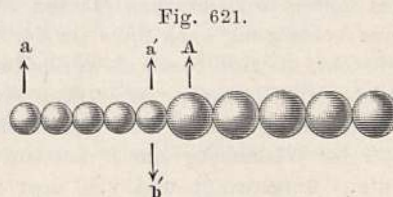
Man kann dann, die beiden Fälle zusammenfassend, sagen, daß von der Übergangsstelle der kleinen zu den großen Kugeln zwei Impulse ausgehen, von denen sich der eine nach vorwärts, der andere nach rückwärts fortpflanzt. Die Art des nach rückwärts gehenden Impulses hängt ab von der relativen Masse der Kugeln. Beim Übergange der ursprünglichen Stoßbewegung von Kugeln kleinerer Masse auf größere wirkt der nach rückwärts gehende Impuls wie ein nach rückwärts ausgeübter Stoß. Beim Übergange von Kugeln größerer Masse auf kleinere dagegen wie ein Zug nach vorwärts, ausgeübt auf die an der Grenze befindliche größere Kugel.

Der in dem ersten Falle nach rückwärts ausgeübte Stoß ist desto stärker, je größer die Masse der größeren Kugeln ist, er ist dagegen gleich Null, wenn die Kugeln sämtlich gleich sind. Denkt man sich die größeren Kugeln unendlich groß, so hat man denselben Fall wie beim Stoße auf eine feste elastische Wand oder den Fall, daß die letzte Kugelreihe festgehalten wird. Der ganze Impuls wird durch Reflexion am festen Ende nach rückwärts gerichtet. Denkt man sich dagegen die zweite Kugelreihe von unendlich kleiner Masse, d. h. ganz fehlend, so hat man eine einfache Kugelreihe mit freiem Ende, der nach rückwärts gehende Impuls wird negativ, d. h. ein Zug in der ursprünglichen Richtung.

Stoß und Zug können als Ursache von Verdichtung und Verdünnung aufgefaßt werden. Man könnte daher sagen, daß bei der Reflexion am festen Ende die vorausgehende Verdichtung einer Welle als solche reflektiert werde, während am freien Ende die ankommende Verdichtung als Verdünnung zurückkehre. Es ist aber zweckmäßiger, weil weniger leicht irreführend, statt Verdichtung und Verdünnung die Richtung (das Zeichen) der Exkursionen bzw. die Schwingungsphase ins Auge zu fassen. Es ergibt sich dann, daß bei der Reflexion am freien Ende die Exkursionsrichtung (die Phase) unverändert bleibt, während bei der Reflexion am festen Ende die Exkursionsrichtung das Zeichen wechselt, bzw. die Phase in die entgegengesetzte verwandelt wird. Man sagt daher im letzteren Falle auch, es gehe bei der Reflexion eine halbe Welle verloren.

Zur experimentellen Bestätigung dieses wichtigen Satzes eignet sich ganz gut die im § 199 beschriebene Wellenmaschine von Weinhold und die daselbst angegebene Vorrichtung von F. Richarz.

Es ist nun nicht schwierig, diese ganze Betrachtungsweise aus der longitudinalen Richtung in die transversale zu übertragen. Denken wir uns wiederum eine Reihe elastisch verbundener Kugeln, Fig. 621, von denen die zweite Gruppe größere Masse besitzt, und stellen wir uns vor, daß die äußerste kleine Kugel einen Impuls in der Richtung des Pfeiles a erleide, der sich dann von Kugel zu Kugel fortpflanzt, bis endlich die letzte kleine Kugel die erste große in Bewegung setzen soll. Während bis dahin jede Kugel zur Ruhe kommt, da sie ihre ganze lebendige Kraft an die gleich große Nachbar-

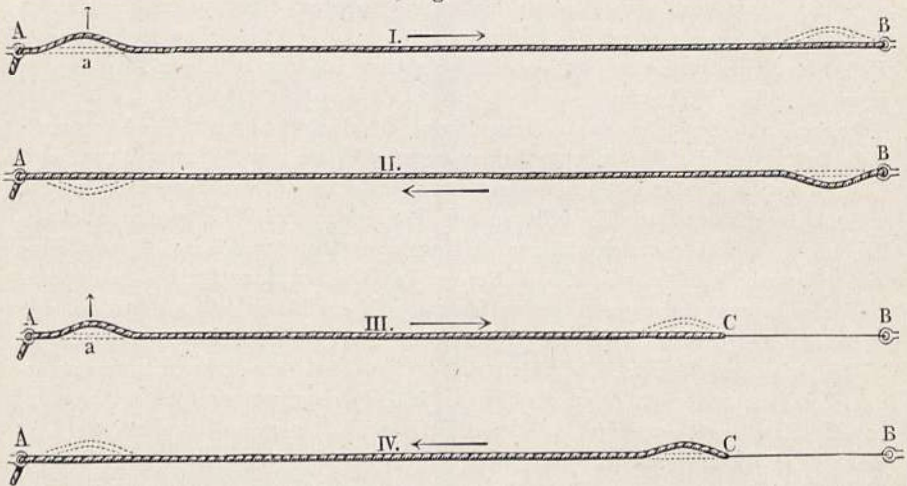


kugel überträgt, ist dies bei der letzten nicht mehr der Fall, sie wird vielmehr in der Richtung nach b' zurückgestoßen und dadurch zum Ausgangspunkte eines kleinen Kugeln nach rückwärts durchlaufenden, nach unten gerichteten Impulses. Gleichzeitig wird sich längs der großen Kugeln ein Impuls nach oben, A , fortpflanzen. Geht jedoch umgekehrt die Bewegung von den großen Kugeln zu den kleinen über, so wird die letzte große Kugel von der kleinen nicht zurückprallen, auch nicht zur Ruhe kommen, sondern ihr nachfolgen und dadurch den Ausgangspunkt eines Impulses von derselben Richtung abgeben, der sich rückwärts durch die Kugelreihe fortpflanzt.

Auch hier kann man von der Annahme der Kugeln größerer Masse oder kleinerer Masse zu den Extremen übergehen, indem man sich einmal die letzte Kugel ganz festgehalten, das andere Mal ganz frei beweglich denkt.

Die experimentelle Bestätigung dieses Falles gelingt ganz gut mit einer Reihe gleich weit abstehender Kugeln aus Holz oder Metall, welche man durch einen Kautschukstrang verbunden hat. Doch läßt sich dies auch schon mit einem gewöhnlichen starken Seile von etwa 6 m Länge zeigen.

Fig. 622.



Zu diesem Zwecke befestigen wir das eine Ende des Seiles an einem festen Haken B , Fig. 622, ziehen das andere Ende durch einen festen Ring und geben ihm durch Anziehen mit der linken Hand eine geeignete Spannung. Hierauf führen wir mittels eines kantigen Schlägels auf den Punkt a des Seiles einen starken raschen Schlag in horizontaler Richtung, wodurch eine Ausbiegung nach links (in der Zeichnung Fig. 622 I. nach oben gerichtet) entsteht, die nun rasch als Wellenberg nach B fortschreitet. Diese Bewegung erfolgt um so rascher, je stärker wir das Seil anspannen. Verfolgen wir nun mit Aufmerksamkeit die weiteren Bewegungen des Seiles, so bemerken wir, daß der Wellenberg von B aus auf die rechte Seite (in der Zeichnung nach unten) überspringt und von dort zum Ausgangspunkte zurückkehrt. Dasselbst springt er wieder auf die linke (obere) Seite zurück und wiederholt von da seinen vorigen Weg noch mehrere Male, bis endlich der Verlauf der Bewegungen undeutlich wird und das Seil zur Ruhe kommt.

Fig. 622 I. zeigt also den Zustand des Seiles am Anfange und Ende des Verlaufes der direkten Welle, Fig. 622 II. dasselbe am Anfange und Ende der reflektierten Bewegung. Statt zu sagen, der Wellenberg springe auf die andere Seite über, drücken wir uns besser so aus, der Wellenberg komme als Wellental zurück, oder die Welle kehre mit entgegengesetztem Zeichen (Phase) zurück. Man sieht ein, daß von *A* nach *B* stets nur ein Wellenberg, von *B* nach *A* stets nur ein Wellental fortschreitet; man hat also das Schema: Berg hin, Tal zurück, Berg hin, Tal zurück usw.

Um diese Reflexion am freien Ende zu zeigen, müssen wir ein frei bewegliches Seilende herstellen, was wir annähernd dadurch erreichen, daß wir dasselbe von *C* (Fig. 622 III.) an als ganz dünne Schnur sich fortsetzen lassen. Verfahren wir dann wie früher, so schreitet der Wellenberg zunächst bis *C* fort und geht dann auf derselben Seite, also ebenfalls als Wellenberg wieder nach *A* zurück (Fig. 622 IV.). Am dortigen festen Ende aber wird er als Tal reflektiert, geht als solches bis *C*, von dort wieder als Tal zurück, um bei *A* wieder als Berg reflektiert zu werden. Diesmal verläuft also die Bewegung nach dem Schema: Berg hin, Berg zurück, Tal hin, Tal zurück usw.

Wir haben es hier ursprünglich nur mit einem Wellenberge, also nur mit der Hälfte einer vollständigen Welle zu tun gehabt. Es ist leicht einzusehen, daß für eine vollständige Welle im wesentlichen dasselbe gilt, da einfach das nachfolgende Wellental alle Bewegungen mit entgegengesetzter Schwingungsrichtung wiederholt.

Statt eines horizontal ausgespannten gewöhnlichen Seiles bedient sich Tyndall eines vertikal hängenden, mit Sand gefüllten Gummischlauches, dessen oberes Ende an der Decke eines 6 bis 10 m hohen Zimmers befestigt ist. Die Füllung mit Sand hat den Zweck, bei gleicher Elastizität die Masse des Schlauches, also auch seine Schwingungsdauer zu vergrößern.

Fassen wir das Vorgetragene zusammen, so können wir bezüglich der Reflexion der Longitudinal- wie der Transversalwellen folgende Sätze aussprechen:

So oft eine Wellenbewegung an die Grenze zweier Medien ungleicher Dichte gelangt, wird dieselbe zum Teil reflektiert, eine vollständige Reflexion tritt an der ganz festen oder ganz freien Grenze des Mediums ein.

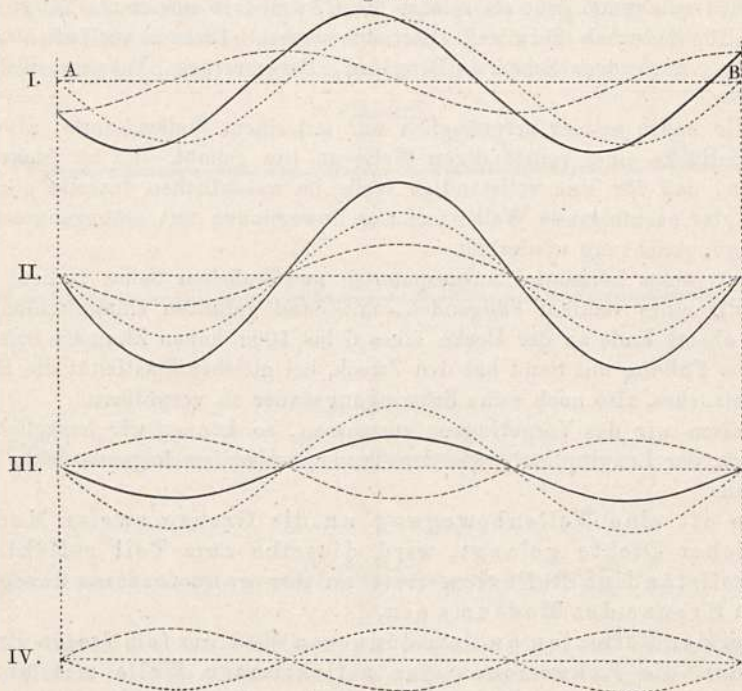
Bei der Reflexion an dem dünneren Medium (am freien Ende) beginnen die Exkursionen der reflektierten Welle mit unveränderter Schwingungsrichtung (mit demselben Zeichen); bei der Reflexion am dichteren Medium (am festen Ende) beginnen die Exkursionen der reflektierten Welle mit entgegengesetzter Schwingungsrichtung (mit entgegengesetztem Zeichen).

Im ersten Falle kehrt also die Wellenbewegung um, ohne eine Verschiebung der Phase oder scheinbare Verzögerung zu erleiden. Im zweiten Falle verwandelt sich die Phase der reflektierten Welle im Momente der Reflexion in die entgegengesetzte oder die Wellenbewegung erleidet scheinbar eine Verschiebung um eine halbe Wellenlänge.

§ 208. Interferenz der Wellen; Prinzip der Koexistenz der kleinen Bewegungen. Wenn in einem elastischen Medium nicht bloß von

einem Punkte, sondern von zweien oder mehreren Punkten Wellenbewegungen ausgehen, so werden dieselben dort, wo sie zusammentreffen, eine resultierende Bewegung hervorrufen. Diesen Vorgang bezeichnet man im allgemeinen mit dem Ausdrucke Interferenz der Wellen. Wollen wir auch hier an die Wasserwellen anknüpfen, so können wir uns vorstellen, daß in einen Teich mit ruhigem Wasserspiegel an zwei entfernten Stellen Steine hineingeworfen werden. Die um die Einfallstellen herum sich bildenden Kreise erweitern sich immer weiter, begegnen sich endlich, durchdringen sich und bringen so Interferenz der Wasserwellen hervor. Die Bewegungen innerhalb der Flächen, in denen sich die Kreise überdecken, erfolgen nach den allgemeinen mechanischen Prinzipien. Die Bewegung jedes Punktes ist die resultierende jener Einzelbewegungen, die der Punkt im betrachteten Augenblicke als Teil der einzelnen Bewegungen besitzen würde. Dadurch werden jedoch die

Fig. 623.



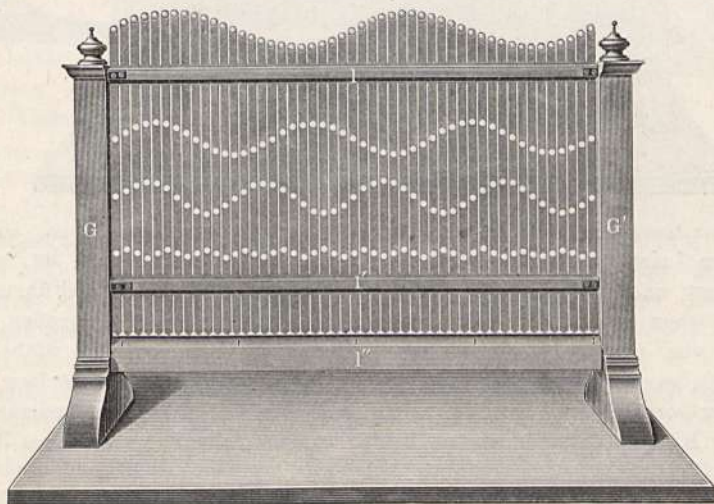
Einzelbewegungen nicht vernichtet, noch wird dadurch die Fortpflanzung oder Ausbreitung der Wellen gestört, vielmehr setzen dieselben nach der Durchkreuzung ihre Wege fort, als ob nichts vorgefallen wäre. Eine Ausnahme hiervon tritt nur im Falle sehr starker Exkursionen ein, wie sie beispielsweise bei den von E. Mach studierten Explosionswellen vorkommen. Das angeführte Prinzip wird gewöhnlich das Prinzip der Koexistenz der kleinen Bewegungen genannt.

Um an der Wasseroberfläche Interferenz zweier Wellenbewegungen hervorzurufen, ist jedoch nicht nötig, zwei Steine hineinzuworfen; da nämlich die an den Uferrand anstoßenden Wellen daselbst reflektiert werden, so begegnen sie alsbald anderen direkten oder ebenfalls reflektierten Wellen,

mit denen sie dann interferieren. Die dabei auftretenden Erscheinungen können sehr kompliziert sein. Um die Interferenzvorgänge zu studieren, müssen wir daher zunächst die einfachsten Fälle in Betrachtung ziehen. Wir beschränken uns daher zunächst auf isochrone Wellen, also Wellen gleicher Wellenlänge, welche längs eines und desselben linearen Mediums zustande kommen. Da ferner, wie eben bemerkt wurde, die Transversalwellen leichter zu übersehen sind als die longitudinalen, so wollen wir die Interferenzvorgänge zuerst an den ersteren studieren und dann die Ergebnisse auch auf die letzteren übertragen.

Denken wir uns also ein horizontal gespanntes Seil und auf dieses irgendwie gleichzeitig zwei Wellenbewegungen gleicher Schwingungsdauer übertragen. Denken wir uns dann das Seil plötzlich in seiner momentanen Lage fixiert und fragen nach der Form, welche dasselbe zeigen wird. *AB*, Fig. 623 I., stelle das Seil in der Ruhelage, die punktierte Sinuslinie die eine Welle, die gestrichelte Sinuslinie die zweite Welle, die ganz ausgezogene Linie die resultierende Wellenlinie vor. Die letztere wird dadurch erhalten, daß man die Ordinaten der komponierenden Wellengänge mit Rücksicht auf ihr Zeichen addiert. Exkursionen nach oben geben also wieder eine solche nach oben von einer Höhe gleich der Summe der einzelnen. Ebenso Exkursionen nach unten. Entgegengesetzte Exkursionen geben eine solche nach

Fig. 624 a.

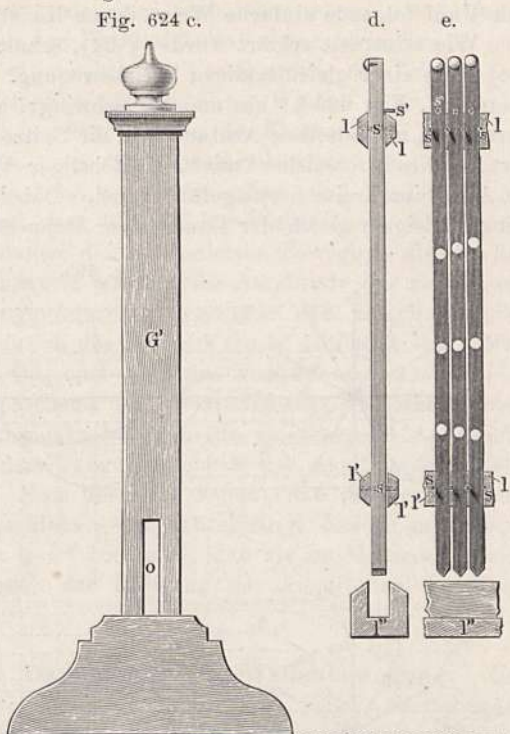


der Richtung der größeren Komponente, und zwar von einer absoluten Höhe gleich der Differenz der Komponenten. In diesem Beispiele haben die Wellen einen Gangunterschied von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge.

Die Fig. 623 II. zeigt das Resultat für den Fall, daß die Wellen ohne Gangunterschied zusammentreffen, Fig. 623 III. den Fall, wo der Gangunterschied genau gleich der halben Wellenlänge ist. Sind außerdem die Amplituden der beiden Wellen gleich groß, so hat dies, wie in Fig. 623 IV. dargestellt, den Erfolg, daß momentan alle Punkte des Seiles sich in der Ruhelage befinden.

Stellung der Schablone, bei welcher durch die Interferenz der beiden Wellenzüge eine Aufhebung derselben eintritt, indem die Knopfreihe in eine gerade Linie sich anordnet. Bei Verschiebung der Schablone um eine halbe Welle tritt eine Verdoppelung der Amplituden ein.

Für die später zu besprechende Interferenz von Wellen ungleicher Wellenlänge dienen die an der Vorderseite der Stäbchen in Form vertiefter Kreise angebrachten weißen Scheibchen, Fig. 624 a, deren oberste Reihe einen Wellenzug aus drei ganzen Wellen mit $\frac{2}{3}$ so großer Wellenlänge, die zweite einen Wellenzug mit vier ganzen Wellen mit halb so großer Wellenlänge, die unterste einen Wellenzug geringerer Amplitude mit 12 der kürzeren Wellen darstellt. Dieselben bleiben bei der Demonstration der Wellen gleicher Wellenlänge außer Beachtung und können eventuell verdeckt werden.



Ebenso enthält der Apparat auf der Rückseite noch besondere Wellenzüge aufgetragen, deren Gestaltung und Anwendung an späterer Stelle beschrieben und erklärt werden soll. Durch die Anwendung weiterer Schablonen mit anderen Amplituden und Wellenlängen können die Versuche noch mannigfaltig modifiziert werden ¹⁾.

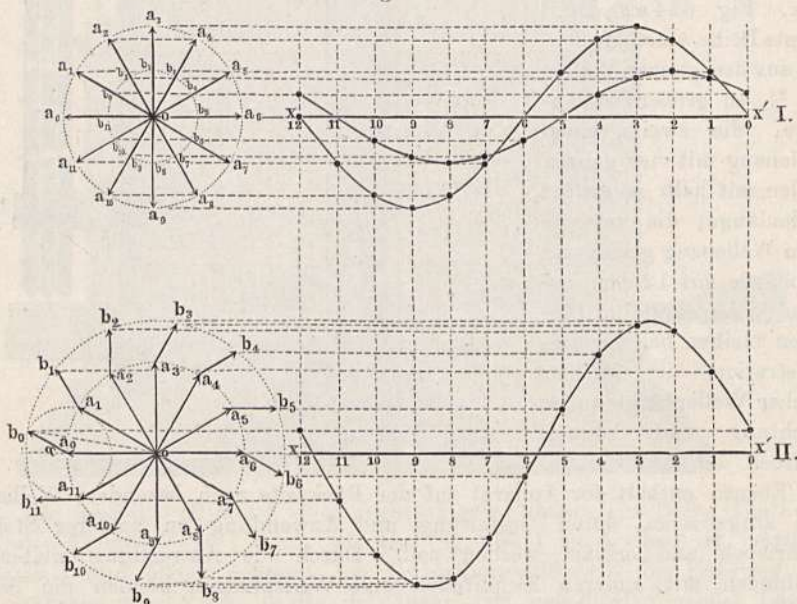
¹⁾ Ein, wenn auch geringfügiger Mangel des Apparates besteht darin, daß derselbe eigentlich nur die Interferenz einer stillstehenden mit einer fortschreitenden Welle, nicht aber die Interferenz zweier sich entgegenschreitender Wellen zeigen läßt. Man erhält daher wohl genau die aufeinander folgenden Formen der daraus hervorgehenden Welle, aber sie erleidet eine Verschiebung. Um dies zu vermeiden, müßte man das ganze Gestell mit gleicher Geschwindigkeit der Schablone entgegenschieben. Es ließe sich das auch durch eine Konstruktion bewerkstelligen, würde aber den Apparat unnötig komplizieren und verteuern. Ein Wellenapparat, der beide Wellen einander entgegenführt, ist um 1880 in Graz von A. Boltzmann gebaut und jüngst von Arth. Boltzmann mit einigen anderen beschrieben worden (Sitzungsber. d. kaiserl. Akad. d. Wiss. in Wien CXIII, Abt. IIa, Dez. 1904). Ein neuerer ist von W. Schmidt 1904 in den Verhandlungen d. deutschen physik. Gesellschaft, VI. Jahrg., beschrieben. Beide Apparate bewirken die Gegenbewegung mittels zweier Zahnstangen mit dazwischen gelagertem Zahnrad.

E. Grimsehl hat einen mit dem oben beschriebenen im Prinzip identischen Apparat angegeben, bei welchem sich mehrere Wellenzüge übereinanderlagern lassen, wogegen auf die Verschiebung der Wellen während ihrer Kombination verzichtet werden muß (Zeitschr. f. physik. u. chem. Unterr. 17, 35 (1904).

Daß durch die Zusammensetzung zweier Sinuskurven gleicher Wellenlänge von beliebiger Amplitude und beliebigem Gangunterschiede immer wieder eine Sinuskurve von derselben Wellenlänge hervorgehen müsse, läßt sich ¹⁾ auf folgende einfache Weise durch Konstruktion zeigen.

Wie seinerzeit erklärt wurde (§ 54), erhält man die Sinuskurve aus der Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung. Ein Punkt, welcher zwischen a_3 und a_9 , Fig. 625 I., hin und her schwingt, hat in jedem Moment von der Geraden $a_0 a_6$ denselben Abstand wie die Spitze eines Zeigers von der Länge der Amplitude, welcher mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um O als Achse im Kreise herumgeführt wird. Dabei muß natürlich die Umlaufzeit des Zeigers gleich der Dauer einer Doppelschwingung sein und die Be-

Fig. 625.



wegung der Zeigerspitze in a_0 beginnen, wenn die Schwingung von O an beginnt. Trägt man die Vertikalabstände, welche die Zeigerspitze nach gleichen Bruchteilen der Umlaufzeit, also nach gleichen Winkelfortschritten erreicht, als Ordinaten auf gleich weit abstehenden Punkten der Abszisse $x'x''$ auf, so erhält man die eine Sinuskurve der Fig. 625 I.

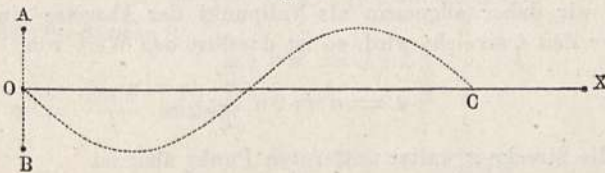
Auf ganz gleiche Weise erhielt man die zweite Sinuskurve der Fig. 625 II., welche sich nur durch kleinere Amplitude und einen Gangunterschied von $\frac{1}{12}$ Wellenlänge von der früheren unterscheidet. Diese beiden Sinuskurven zusammensetzen, heißt jene Kurve aufsuchen, welche durch einen schwingenden Punkt entsteht, welcher, während er die Schwingungen nach der größeren Kurve durchmacht, auch noch zu Schwingungen nach der kleineren verhalten wird. Um dies herzustellen, können wir uns denken, daß sich ein kleinerer Zeiger von der Länge der Amplitude Ob_0 um die Spitze des größeren Zeigers a_0 als Achse im Kreise herumbewegt (Fig. 625 II.). Für isochrone

¹⁾ Nach E. Mach.

Schwingungen müssen wir dabei annehmen, daß beide Zeiger gleichzeitig einen ganzen Umlauf vollenden, wobei ihre Winkellagen relativ zur Abszisse zu nehmen sind. Die relative Lage beider Zeiger zueinander bleibt dann offenbar stets dieselbe, wie wenn sie starr verbunden wären. Dem Gangunterschiede der Wellen, bzw. der Phasendifferenz der Schwingungen entspricht der konstante Winkel φ , welchen die Verlängerung des Zeigers Oa_0 mit dem Zeiger a_0b_0 bildet. In Fig. 625 ist dieser Winkel $\varphi = 30^\circ$, also die Phasendifferenz $= \frac{1}{12}$ angenommen. Da bei der Konstanz des Winkels φ die Spitze des Zeigers b_0 ebenso einen Kreis beschreiben muß wie das Ende einer geraden Verbindungslinie Ob_0 , so erhellt sofort, daß wiederum eine Sinuskurve entstehen muß, und zwar von gleicher Wellenlänge, da ja auch die Umlaufzeit (Schwingungsdauer) der kombinierten Bewegung dieselbe ist. Die Figur läßt auch sofort erkennen, wie sich die Amplitude der zusammengesetzten Welle und ihr Gangunterschied gegenüber den komponierenden Wellen durch einfache Konstruktion des Dreiecks Oa_0b_0 auffinden läßt. Man hat nur mit den Amplituden Oa_2 und a_0b_0 der Komponenten das Dreieck mit dem Außenwinkel φ entsprechend der Phasendifferenz zu konstruieren. Die dritte Seite Ob_0 dieses Dreiecks ist dann die resultierende Amplitude, der Winkel a_0Ob_0 entspricht dem Gangunterschiede der resultierenden Welle mit der ersten Komponente. Man übersieht sofort, daß die resultierende Amplitude von dem Gangunterschiede wesentlich abhängt, daß sie am größten für $\varphi = 0$, am kleinsten für $\varphi = 180$ wird; daß sie im Maximum gleich der Summe, im Minimum gleich der Differenz der Amplituden der Komponenten wird.

§ 209. Mathematische Darstellung der Wellenbewegung. Um die längs eines linearen Mediums, z. B. längs eines Seiles, entstehenden Wellenbewegungen mathematisch darzustellen, hat man Gleichungen zu entwickeln, welche gestatten, die momentanen Exkursionen jedes Punktes, sowie seine momentane Geschwindigkeit für jeden beliebigen Zeitpunkt zu berechnen.

Fig. 626.



Diese Gleichungen gründen sich auf jene der schwingenden Bewegung eines Punktes, auf welchen eine Kraft einwirkt, welche in jedem Moment proportional dem Abstände des Punktes von seiner Ruhelage ist. Diese Bewegungsart, welche harmonische Bewegung oder auch Pendelbewegung genannt wird, haben wir im § 54 untersucht und sind dabei zur Aufstellung der Gleichungen gelangt, die wir, nach einigen Änderungen in der Bezeichnung, nachfolgend wieder aufführen.

Es stelle in Fig. 626 OX den elastischen Körper (das Seil) in seiner Ruhelage vor. Das Ende O werde zu Schwingungen längs AB angeregt, welche sich längs OX fortpflanzen und daselbst die Transversalwelle erzeugen. Es bedeute:

- $a = OA = OB$ die Amplitude,
 y den momentanen Abstand oy des schwingenden Punktes (nach
 aufwärts positiv, nach abwärts negativ gerechnet),
 v_0 die Geschwindigkeit im Punkte O ,
 v " " " " Abstände y ,
 T die Dauer einer Doppelschwingung,
 t die Zeit seit Beginn der Bewegung von O nach aufwärts.

Es gilt dann für die Exkursionen die Gleichung:

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

für die Geschwindigkeiten:

$$v = v_0 \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Bedeutet ferner:

- C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle,
 λ die Wellenlänge,

so besteht nach § 202 der Zusammenhang:

$$\lambda = CT.$$

In einem Abstände x vom Punkte O an nach rechts kommt die Welle an in der Zeit $t = \frac{x}{C}$, zu dieser Zeit beträgt der Wert von y für den Punkt O :

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T} = a \sin 2\pi \frac{x}{CT} = a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Um diesen Betrag von y , nämlich um $a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$, ist daher in bezug auf die Exkursion ein Punkt der Welle einem anderen voraus, welcher um die Strecke x weiter vom Ausgangspunkte entfernt liegt. Um denselben Betrag ist also der letztere im Rückstande.

Nehmen wir daher allgemein als Nullpunkt der Abszisse einen Punkt, welcher in der Zeit t erreicht wird, so ist daselbst der Wert von

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

für den um die Strecke x weiter entfernten Punkt aber ist

$$\left. \begin{aligned} y &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ v &= a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Eine weitere Aufgabe, welche durch Rechnung zu lösen ist, ist folgende. Es seien zwei Wellen gleicher Wellenlänge λ zusammengesetzt, deren Amplituden a und a' sind, welche gegeneinander einen Gangunterschied $= d$ besitzen. Es soll die resultierende Amplitude A und der Gangunterschied der resultierenden Welle D gegenüber einer der beiden komponierenden Wellen bestimmt werden.

Diese Aufgabe könnte folgendermaßen angefaßt werden. Nach (1) ergeben sich für die Exkursionen y und y' die Werte:

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$y' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda} \right)$$

für die Exkursionen Y der kombinierten Welle ist nun die Summe dieser Ausdrücke zu bilden. Diese führt nach einer Reihe von Umformungen auf einen Ausdruck von der Form:

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{D}{\lambda} \right),$$

worin für A zu setzen ist:

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2aa' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}} \dots \dots \dots (2)$$

Zur Ermittlung von D gilt:

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{a'}{A} \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} \dots \dots \dots (3)$$

Statt diesen Weg auszuführen, wollen wir übersichtlicher und einfacher mittels der im § 208 mitgeteilten Konstruktion (Fig. 625 II.) zum Ziele gelangen. Dieselbe läßt unmittelbar erkennen, erstens, daß die resultierende Welle wiederum eine Sinuskurve ist, zweitens, daß die Dreiecksseite Ob_0 gleich der resultierenden Amplitude A ist, endlich, daß der Winkel a_0Ob_0 der Phasendifferenz zwischen der resultierenden Welle und der Welle von der Amplitude Oa_0 entspricht.

Bezeichnen wir also Ob_0 mit A , Oa_0 mit a , a_0b_0 mit a' , den Winkel a_0Ob_0 mit ψ , so folgt aus dem Dreieck nach dem Carnotschen Satze unmittelbar:

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2aa' \cos \varphi}.$$

Aus der Proportion

$$\varphi : 2\pi = d : \lambda$$

folgt aber $\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda}$, mithin:

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2aa' \cos \frac{2\pi d}{\lambda}},$$

wie oben unter (2).

Aus demselben Dreieck folgt:

$$A : a' = \sin \varphi : \sin \psi$$

$$\sin \psi = \frac{a' \sin \varphi}{A} = \frac{a'}{A} \sin \frac{2\pi d}{\lambda}.$$

Aus der Proportion

$$\psi : 2\pi = D : \lambda$$

folgt

$$\psi = \frac{2\pi D}{\lambda},$$

also, indem wir dies oben einsetzen:

$$\sin \frac{2\pi D}{\lambda} = \frac{a'}{A} \sin \frac{2\pi d}{\lambda},$$

wie oben unter (3).

D ist der Gangunterschied zwischen der resultierenden Welle und jener Welle mit der Amplitude a ; der Gangunterschied zwischen der resultierenden und der anderen komponierenden Welle muß daher $d - D$ sein.

Die Formel (2) läßt erkennen, was die Fig. 625 II. sofort übersehen läßt, daß für $\varphi = 0$, d. h. wenn $d = 0$ oder $= n\lambda$ (wo n eine ganze Zahl ist) $A = a + a'$ wird, welches der Maximalwert ist.

Ebenso ergibt sich für $\varphi = 180$:

$$A = a - a';$$

hierbei ist der Gangunterschied d gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\lambda}{2}$.

Sind überdies die beiden Amplituden a und a' gleich groß, so folgt:

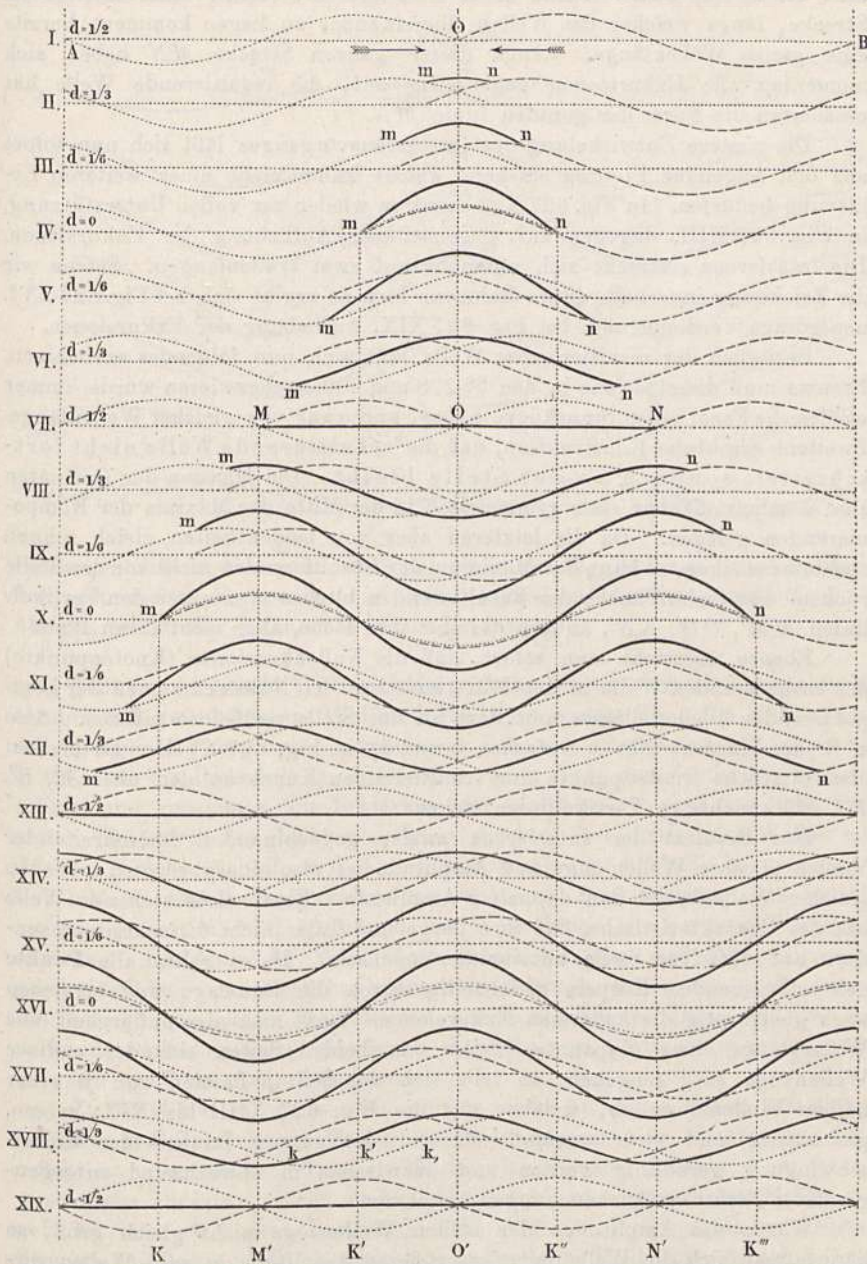
$$A = a - a' = 0.$$

Beträgt bei gleichen Amplituden der Gangunterschied $\frac{1}{4}$ Wellenlänge, so ist $\varphi = 90^\circ$, daher $\psi = 45^\circ = \frac{1}{8} \cdot 360$; mithin ist die resultierende Welle gegen beide komponierenden um einen Gangunterschied von $\frac{1}{8}\lambda$ verschoben.

§ 210. Interferenz sich begegnender Wellen, Bildung stehender Wellen. In den vorangehenden Paragraphen wurde der Fall behandelt, daß zwei Wellen gleicher Wellenlänge zur Interferenz gelangen, welche entweder relativ zueinander nicht fortschreiten, oder von denen wir nur die momentane Lage der resultierenden Welle in Betrachtung ziehen. Gehen also zwei Wellen mit gleicher Geschwindigkeit nach derselben Richtung vor, so behält notwendigerweise die resultierende Welle ihre Gestalt und Amplitude während ihres Fortschreitens bei, da der Gangunterschied konstant bleibt. Bei der Interferenz von Wellen, welche zueinander eine relative Geschwindigkeit haben, also sich begegnen oder überholen, ist der Gangunterschied ein in jedem Augenblicke wechselnder, periodisch veränderlicher. Es muß daher auch die resultierende Wellenform eine periodische Aufeinanderfolge der Formen darstellen, welche aus der Kombination der interferierenden Wellen bei den verschiedenen Gangunterschieden hervorgehen. Um zu zeigen, was hierbei in dem Falle herauskommt, wo sich endlose Wellenzüge gleicher Wellenlänge und gleicher Amplitude begegnen, ist die Konstruktion der Fig. 627 I. bis XIX. ausgeführt. Die punktierte und die gestrichelte Kurve stellen die Komponenten, die ganz ausgezogene Kurve die Resultierende vor. Fig. 627 I. zeigt die beiden Wellen in dem Moment, wo sie im Punkte O zusammentreffen. In diesem Augenblicke ist ihr Gangunterschied $d = \frac{1}{2}\lambda$; denn es würde einer Verschiebung im Sinne ihrer Bewegungsrichtung von einer halben Wellenlänge bedürfen, um die beiden Wellen zur Deckung zu bringen. In Fig. 627 II. sind beide Wellen um je $\frac{1}{12}$ ihrer Wellenlänge über den Punkt O , wo sie sich begegneten, hinweggeschritten; ihr Gangunterschied, früher $= \frac{6}{12}$, hat sich demnach um $\frac{2}{12}$ vermindert, beträgt also jetzt nur mehr $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ einer Wellenlänge. Die durch Addi-

tion der Ordinaten erhaltene Kurve mn stellt die resultierende Form der kombinierten Welle vor. Die folgenden Fig. 627 III., IV., V., VI. und so fort

Fig. 627.



stellen das Resultat der Interferenz in immer späteren Zeitmomenten vor, die um je $1/12$ der Schwingungsdauer voneinander abstehen, wobei also der Gangunterschied sich um je $2/12 \lambda$ verändert. In Fig. 627 IV. ist derselbe

= 0 geworden. Die beiden Komponenten kommen, soweit sie übereinander greifen, zur vollständigen Deckung, es entsteht eine Resultierende von doppelter Amplitude. In den Fig. 627 V., VI. tritt wieder ein Gangunterschied auf, der in Fig. 627 VII. eine halbe Wellenlänge erreicht. Hier beträgt die Strecke, längs welcher die Wellen übereinander zu liegen kommen, bereits eine ganze Wellenlänge. Längs dieser ganzen Strecke MN heben sich momentan alle Exkursionen gegenseitig auf, die resultierende Welle hat momentan die Form der geraden Linie MN .

Die weitere Entwicklung des Interferenzvorganges läßt sich nun sofort aus den folgenden Figuren ersehen, welche kaum mehr einer weiteren Erklärung bedürfen. In Fig. 627 X. kommt es wieder zur vollen Unterstützung, in Fig. 627 XIII. dagegen zur gegenseitigen Aufhebung der Exkursionen. Die Interferenz erstreckt sich nunmehr auf zwei Wellenlängen. Setzen wir die Zeichnung innerhalb dieses Rahmens fort, so ergibt sich bei Fig. 627 XVI. neuerdings Verdoppelung, bei Fig. 627 XIX. Aufhebung der Exkursionen.

Bezüglich der resultierenden Welle läßt sich nun folgendes entnehmen. Erstens muß dieselbe, wie in den §§ 208 und 209 nachgewiesen wurde, immer wieder die Form einer Sinuskurve haben, und zwar von gleicher Wellenlänge. Zweitens ergibt die Konstruktion, daß die resultierende Welle nicht fortschreitet, sondern an der Stelle bleibt. Die Maxima der Ordinaten sind nämlich offenbar stets symmetrisch in der Mitte der Maxima der komponierenden gelegen. Da die letzteren aber von beiden Seiten gleich schnell zusammenrücken, so kann das Maximum der Resultierenden nicht von der Stelle rücken. Sämtliche Bäuche der Resultierenden bleiben also unter den Vertikallinien MM' , OO' , NN' , ändern daselbst ihre Höhe, aber nicht ihren Platz.

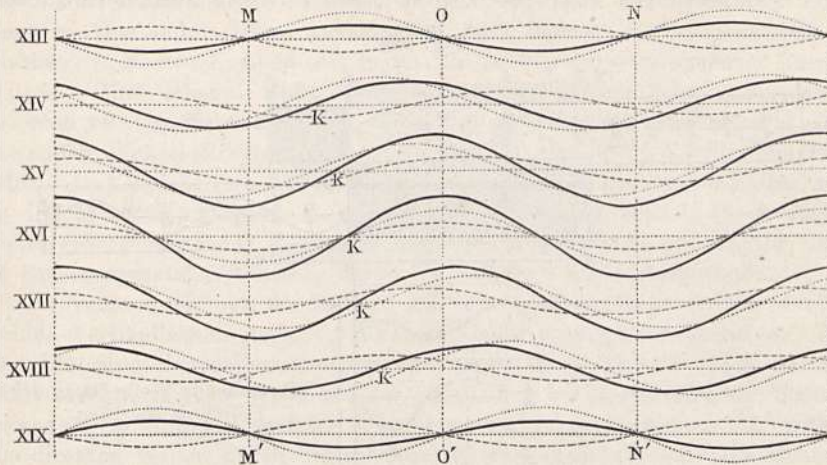
Ebenso übersieht man sofort, daß die Nullexkursionen (Knotenpunkte) der resultierenden Welle in der Mitte zwischen den Nullexkursionen der komponierenden Wellen liegen und dort an der Stelle verbleiben müssen. Also z. B. der Knotenpunkt k' zwischen k und k_1 in Fig. 627 XVIII. Es bleiben also sämtliche Knotenpunkte der resultierenden Kurve an den über K , K' , K'' , K''' errichteten Vertikallinien stehen.

Das Resultat der Interferenz zweier gegeneinander fortschreitender Wellen gleicher Wellenlänge und Amplitude ist also eine stehende Welle gleicher Wellenlänge und doppelter Amplitude. Eine solche stehende Welle hat das Charakteristische, daß ihre Berge und Täler nicht fortschreiten, sondern auf derselben Stelle miteinander wechseln. Dabei gehen alle Punkte des schwingenden Körpers gleichzeitig durch die Ruhelage und erreichen auch gleichzeitig die äußersten Exkursionen. Läßt man also auf irgend eine Weise längs eines gespannten Seiles von beiden Seiten einander endlose Wellenzüge entgegengehen, so teilt sich das Seil in Partien von je einer halben Wellenlänge ab, welche, wie die Fig. 627 XIII. bis XIX. zeigen, gleichzeitig und zwar zweimal während der ganzen Dauer einer Einzelschwingung geradlinig werden und dazwischen in abwechselnd entgegen gesetzter Richtung Ausbauchungen annehmen.

Wären die Amplituden der beiden Wellenzüge nicht gleich groß, so könnte man sich die Welle mit der größeren Amplitude in zwei Wellen zerlegt denken, von denen die erste eine gleiche Amplitude hätte mit der entgegengewegten. Diese beiden würden dann für sich eine stehende Welle abgeben. Der Überschuß der Amplitude der zweiten Welle entspricht

dann einer fortschreitenden Welle. Unter diesen Umständen gehen dann nicht mehr alle Punkte gleichzeitig durch die Ruhelage wie bei der reinen stehenden Welle; sowohl die Bäuche als die Knoten haben eine fortschreitende Bewegung. Die Fig. 628 stellt hierfür ein Beispiel vor. Die

Fig. 628.



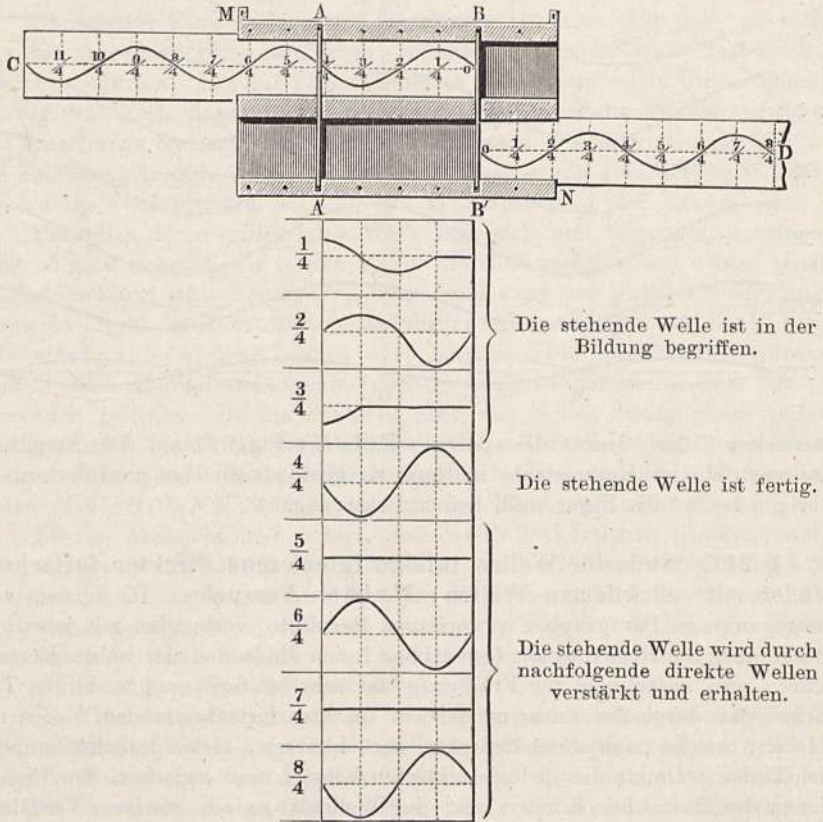
römischen Ziffern deuten die analogen Fälle der Fig. 627 an. Die Amplitude der gestrichelten Komponente ist halb so groß als die der punktierten; im übrigen bedarf die Figur wohl keiner Erklärung.

§ 211. **Stehende Wellen infolge Interferenz direkter fortschreitender mit reflektierten Wellen; Meldes Versuche.** Die in dem vorausgegangenen Paragraphen gewonnenen Resultate, verbunden mit jenen des § 207 über die Reflexion am festen oder freien Ende des elastischen Körpers führen nun zusammen zur Erklärung der sehr häufigen und wichtigen Tatsache, daß durch das Zusammenwirken direkter fortschreitender Wellen mit solchen, welche nach ihrer Reflexion zurückkehren, stehende Schwingungen sich bilden. Damit das jedoch eintreten könne, muß zwischen den Dimensionen des elastischen Körpers und der Wellenlänge ein gewisses Verhältnis obwalten. Da aber die Wellenlänge wiederum von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Schwingungszahl abhängt, so ergeben sich daraus die Bedingungen, unter welchen ein elastischer Körper durch auf ihn einwirkende Schwingungen gegebener Tonhöhe ins Mitschwingen oder in „Resonanz“ versetzt werden kann.

Zunächst soll gezeigt werden, wie an einem an beiden Enden befestigten gespannten Seile stehende Wellen durch Interferenz der direkten mit den reflektierten entstehen können. Hierbei leistet eine einfache Vorrichtung wesentliche Dienste, welche in Fig. 629 in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Größe abgebildet ist. Auf dem Brettchen MN sind zwischen parallelen Leisten Streifen von Pappe (CD) verschiebbar, auf welchen Wellenkurven nebst ihren Abteilungen in Viertelwellen gezeichnet sind. Zwei andere Leisten AA' und BB' können in Abständen gleich Vielfachen von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge vertikal und parallel befestigt werden. In der Fig. 629 stehen sie z. B. eine Wellenlänge

voneinander entfernt. Diese beiden Leisten stellen die Befestigungsstellen des gespannten Seiles vor. Die ganze Vorrichtung wird auf der Wandschreibtabel aufgehängt, so daß unmittelbar darunter die resultierenden Kurven gezeichnet werden können. Der Leser wird es vorteilhaft finden, sich die Wellensysteme (in größerem Maßstabe) auf Papierstreifen zu zeichnen und auf dem Tische unter zwei Linealen, welche die Vertikalleisten vertreten, aneinander zu ver-

Fig. 629.



schieben. Es sind mehrfach auch Vorrichtungen konstruiert worden, bei welchen die Wellenzüge auf Bänder ohne Ende, welche um je zwei Walzen in entgegengesetzter Richtung laufen, aufgetragen sind. Die Länge des schwingenden Körpers wird dabei durch vorgestellte Schirme begrenzt. Benutzt man den unter Fig. 624 beschriebenen Apparat, so sollte man nicht allein die Schablone, sondern auch das Gestell gleichzeitig gegeneinander verschieben, um die resultierend stehende Welle wirklich stillstehend zu erhalten. Die Form der stehenden Welle wird demnach auch erhalten, wenn man das Gestell in Ruhe beläßt, aber die Schablone ums Doppelte verschiebt.

Beginnen wir mit dem Falle, daß die Länge des Seiles gleich der Wellenlänge, so erhalten die Leisten AA' und BB' die in Fig. 629 gezeichnete Lage. Nehmen wir ferner an, beide Enden seien befestigt; der Wellenberg wird also stets als Wellental, Wellental als Wellenberg reflek-

tiert. Die Figur zeigt den Moment, wo die direkte Welle an BB' anstößt. Von hier beginnt die Interferenz; wir finden ihr Resultat in den aufeinander folgenden Zeitpunkten nach $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ usw. Schwingungsdauer, indem wir beide Streifen gegen BB' verschieben, die Bezifferungen $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ usw. an die Innenkante von BB' stellen und dann die algebraische Summe der Exkursionen konstruieren. Dies ist in der Fig. 629 durchgeführt. Zum besseren Verständnis ist es zweckmäßig, noch mehrere Unterabteilungen zu machen, z. B. den Zustand des Seiles für je $\frac{1}{12}$ Schwingungsdauer auszumitteln. Man erkennt leicht, daß nach einer ganzen Schwingungsdauer die zum zweiten Male reflektierte erste Welle mit der gleichzeitig bei A eintretenden zweiten direkten Welle zusammenfällt, also durch dieselbe verstärkt wird. Man ersieht ferner, daß die fertige, stehende Welle an den Enden und in der Mitte ruhig stehende Punkte, d. h. Knotenpunkte, besitzt, durch welche sie in zwei schwingende Hälften zerlegt wird, welche beide gleichzeitig, aber in entgegengesetzter Richtung durch die Ruhelage hindurchschwingen.

Verkürzen wir nun die Distanz AB um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge, so daß also die beiden Vertikalleisten noch $\frac{3}{4}$ Wellenlänge voneinander abstehen. Die Durchführung der obigen Konstruktion ergibt dann, daß die zum zweiten Male reflektierte erste Welle mit der gleichzeitig bei A eintretenden Wellenbewegung in entgegengesetzter Schwingungsrichtung zusammentrifft, mithin die direkten Wellen durch die reflektierten vernichtet werden. Da dies mit jeder folgenden Welle sich wiederholt, so entstehen in diesem Falle gar keine stehenden Wellen.

Nehmen wir jetzt die durch den Abstand AB der Vertikalleisten vorgestellte Seillänge gleich einer halben Wellenlänge (indem wir z. B. die Leiste AA' auf die Mitte zwischen AA' und BB' stellen) und führen dieselbe Konstruktion wie früher durch, so erhalten wir eine Reihe von Zeichnungen, welche wir nicht eigens abzubilden brauchen, da sie vollständig mit denen der rechtsseitigen Hälfte in Fig. 629 übereinstimmen. Die stehende Welle ist diesmal schon nach einer halben Schwingungsdauer fertig; sie bleibt jedoch stets eine halbe Welle, bei welcher nur eine Ausbauchung vorhanden ist, welche abwechselnd als Berg und Tal auftritt und inzwischen momentan die geradlinige Ruhelage annimmt.

Versuchen wir endlich, die Seillänge gleich $\frac{1}{4}$ Wellenlänge zu nehmen, so überzeugen wir uns sofort, daß der bei $\frac{3}{4}$ Wellenlänge eingetretene Fall eintritt, nämlich die zweimal reflektierten und direkten Wellen sich gegenseitig aufheben.

Dehnt man diese Betrachtungen auch auf größere Längen als eine Wellenlänge aus, so gelangt man zu dem allgemeinen Resultat, daß ein an beiden Enden befestigtes Seil (sowie auch eine gespannte Saite) nur dann in stehende Schwingungen versetzt werden kann, wenn die Länge ein gerades Vielfaches einer Viertelwellenlänge, also gleich $\frac{1}{2}$, 1 , $1\frac{1}{2}$, 2 usw. Wellenlängen ist.

Will man die Schwingungsgesetze für ein Seil (einen Stab) ermitteln, von welchem nur ein Ende unverrückbar befestigt, das andere Ende, wie Fig. 623 III und IV darstellt, beweglich ist, so ersetzt man den Streifen D der Fig. 629 durch einen solchen nach Fig. 630, bei welchem die Schwingungsrichtungen entgegengesetzt sind. Man findet dann leicht, daß in diesem Falle stehende Schwingungen nur möglich sind, wenn die Länge des Seiles

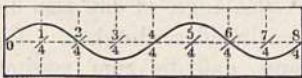
(Stabes) gleich einem ungeraden Multiplum einer Viertelswellenlänge, also gleich $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$ usw. der Wellenlänge ist.

Endlich kann man auch noch den Fall eines an beiden Enden freien elastischen Körpers (z. B. eines in der Mitte eingeklemmten elastischen Stabes) untersuchen, indem man darauf Rücksicht nimmt, daß in diesem Falle an beiden Enden der Wellenberg als solcher und ebenso das Wellental als solches reflektiert werden.

Die experimentelle Bestätigung dieser theoretischen Ergebnisse ist in mannigfacher Weise möglich.

Die Schwingungen des Seiles kann man, wenn beide Enden befestigt sind, dadurch hervorbringen, daß man in einiger Entfernung von der Befestigungsstelle rhythmische Exkursionen erzeugt und die Schwingungszahl so lange ändert, bis sich die stehenden Wellen bilden. Solange die Spannung des Seiles dieselbe bleibt, ist auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

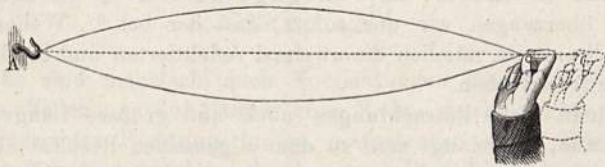
Fig. 630.



dieselbe. Da nun der während einer ganzen Schwingung zurückgelegte Weg der Welle gleich der Wellenlänge ist, so ist diese proportional der Schwingungsdauer, also verkehrt proportional der Schwingungszahl. Durch Erhöhung der Schwingungszahl kann man also die Wellenlänge verkürzen. Man hat es demnach in der Gewalt, die Wellenlänge nach der Seillänge zu richten, doch könnte man auch umgekehrt die Seillänge nach der Wellenlänge richten. Endlich kann man die Wellenlänge auch dadurch modifizieren und der Seillänge anpassen, daß man die Spannung des Seiles ändert. Stärkere Spannung ruft größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, also längere Wellen hervor. Nach allen diesen Methoden ist es möglich, das Seil so in stehende Schwingungen zu versetzen, daß es mit einem Bauche oder mit zwei, drei, vier usw. Bäuchen (halben Wellen) schwingt.

Viel leichter gelingt, wenn das Seil horizontal gespannt ist, dieses Experiment, wenn man den geradlinigen Transversalschwingungen kreisförmige substituiert. Befestigt man das Ende einer langen, weißen, mehrere Millimeter dicken Schnur am Umfange einer rotierenden Scheibe, so daß es

Fig. 631.



Kreise mit etwa 1 dm Radius beschreibt, so kann man leicht stehende Wellen mit zehn und mehr Knotenpunkten erhalten und auch zeigen, wie bei unveränderter Geschwindigkeit durch Vermehrung der Spannung die Anzahl derselben sich vermindert, weil die Wellenlänge sich vergrößert.

Eine andere Art, ein Seil in Transversalschwingungen zu versetzen, ist durch die Fig. 631 genügend angedeutet. Hierbei macht die erregende Hand selbst keine transversale, sondern longitudinale Schwingungen, welche aber transversale Schwingungen des Seiles erzeugen. Dabei ist jedoch der wichtige Umstand zu beachten, daß jeder ganzen Schwingung der Hand nur eine halbe

Schwingung des Seiles entspricht. Die Schwingungszahl des erregenden Körpers muß daher bei dieser Anordnung noch einmal so groß sein als bei der transversalen Anordnung. Die beste und schönste Methode zur Erregung von stehenden Transversalwellen ist die von F. Melde erfundene¹⁾, welche darauf beruht, gespannte Fäden durch die Schwingungen einer Stimmgabel (oder auch einer Glasglocke, einer Saite usw.) anzuregen.

Fig. 632 zeigt einen der nach Meldes Angaben von Schubart in Marburg ausgeführten Apparate zur Anstellung dieser schönen Versuche.

Fig. 632.

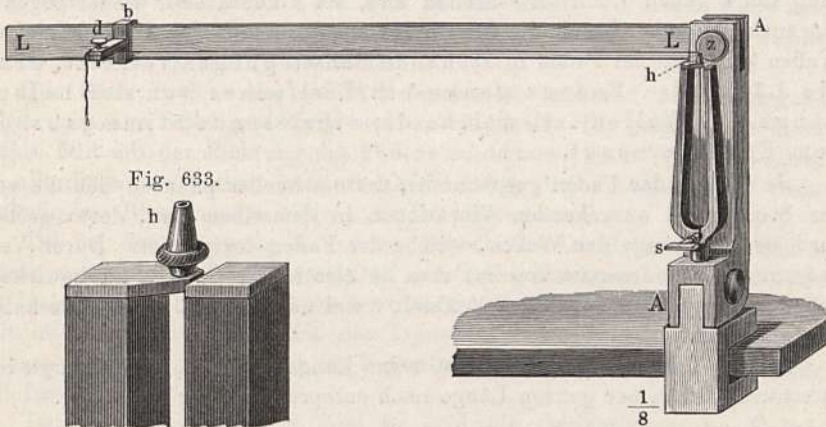
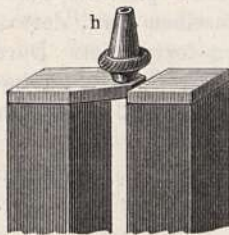


Fig. 633.



Auf einem Holzstück *A*, welches an ein Tischblatt festgeschraubt werden kann, ist eine Stimmgabel angebracht, deren linker Schenkel oben ein Messingplättchen mit einer kleinen Hülse *h* trägt, deren Achse mit der Mittellinie der ganzen Gabel zusammenfällt. Auf dem anderen Schenkel ist ein zweites Messingplättchen aufgeschraubt, welches lediglich dazu dient, das auf dem linken Schenkel aufgeschraubte zu äquilibrieren. In Fig. 633 ist das obere Ende der beiden Schenkel in natürlicher Größe dargestellt.

Durch diese Hülse *h* ist ein Seidenfaden *c* (oder auch eine Violin-e-Saite) gezogen, welcher einerseits in dem Zapfen *s* am unteren Ende der Stimmgabel befestigt, andererseits aber durch einen Spalt des Messingschiebers *b* gezogen ist und hier mittels der kleinen Schraube *d* festgeklemmt werden kann. Durch Umdrehung des Zapfens *s* kann man die Spannung des Fadens nach Belieben vermehren oder vermindern.

Will man die Spannung durch Gewichte regulieren, so läßt sich statt der Klemme *d* eine Rolle mit horizontaler Achse anbringen, über welche der Faden gelegt wird.

Der Messingschieber *b* ist an einer 1 m langen Latte verschiebbar, so daß man den Faden nach Belieben verlängern oder verkürzen kann.

Die Latte *L* selbst ist um den Zapfen *z* drehbar, so daß man den Faden, welcher in unserer Figur eine horizontale Richtung hat, um jeden beliebigen

¹⁾ F. Melde, Pogg. Ann. 109, 192 bis 215, 1859 und 111, 513 bis 540, 1860; eine neuere Zusammenstellung dieser und neuerer Experimente findet sich noch Wiedem. Ann. 21, 452, 1884 und 24, 497, 1885, sowie in Melde, Akustik, Leipzig 1883.

Winkel von der Horizontalen entfernen und auch ganz vertikal stellen kann, wenn man die Latte L aus der horizontalen Lage um 90° dreht.

Auch die Stimmgabel ist um den Zapfen drehbar, mittels dessen sie in das Holzstück A eingeschraubt ist.

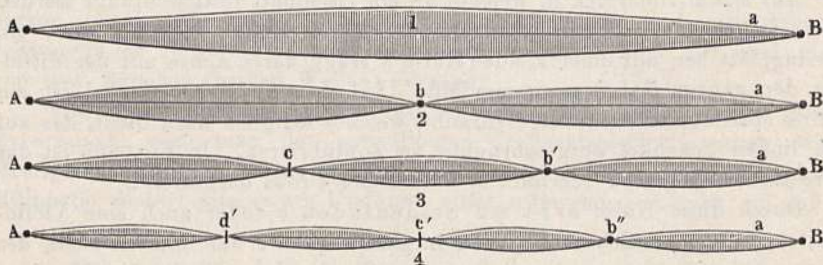
Betrachten wir zunächst die Erscheinungen, welche man an dem Apparate beobachten kann, wenn alles in der Fig. 632 dargestellten Lage ist.

Wird die Stimmgabel zum Tönen gebracht, was am einfachsten durch Anstreichen mit einem Baßgeigen-Fiedelbogen geschieht, so werden durch die Vibrationen der Hülse h Wellen in dem Faden erzeugt, welche in der Richtung von h gegen d hin fortschreiten und, bei d reflektiert, wieder gegen h hin zurücklaufen. Durch die Interferenz der direkten und der reflektierten Wellen wird nun der Faden in stehende Schwingungen versetzt, wenn die Länge des Fadens genau ein Vielfaches von der halben Länge der Wellen ist, welche die vibrierende Stimmgabel in dem Faden erzeugt.

Je stärker der Faden gespannt ist, desto schneller pflanzen sich die von der Stimmgabel ausgehenden Vibrationen in demselben fort, desto größer wird also die Länge der Wellen, welche der Faden fortpflanzt. Durch Veränderung der Fadenspannung hat man es also in der Gewalt, zu bewirken, daß die Länge des Fadens 1 mal, 2 mal, 3 mal usw. so groß ist als die halbe Wellenlänge.

Ist der Faden so gespannt, daß seine Länge gleich $\frac{1}{2}$ Wellenlänge ist, so schwingt er seiner ganzen Länge nach entsprechend der Fig. 634₁.

Fig. 634.



Ist der Faden so gespannt, daß seine Länge gleich $\frac{2}{2}$ Wellenlängen, so schwingt er in der durch Fig. 634₂ dargestellten Weise, d. h. es bildet sich ein Schwingungsknoten in der Mitte des Fadens.

Ist der Faden so gespannt, daß seine Länge gleich ist $\frac{3}{2}$ Wellenlängen, so schwingt er in der durch Fig. 634₃ dargestellten Weise, d. h. es bilden sich zwei Schwingungsknoten und drei Bäuche.

Hat man bei der gegenseitigen Stellung der Stimmgabel und des Fadens, wie sie in Fig. 632 dargestellt ist, die Spannung des Fadens so reguliert, daß er seiner ganzen Länge nach schwingt (entsprechend der Fig. 634₁), wenn man die Stimmgabel anstreicht, so ist der Ton des Fadens (welcher namentlich ganz gut hörbar ist, wenn er durch eine Violin- e -Saite gebildet wird) die nächst tiefere Oktav vom Ton der Stimmgabel. Ist also der Gabelton c_1 , so ist der Fadenton unter den angegebenen Umständen c_0 ; die entsprechende Spannung des Fadens wollen wir mit S_1 bezeichnen.

Vermindert man nun die Spannung des Fadens mehr und mehr, so gelangt man endlich zu einer Spannung S_2 , bei welcher sich, wenn man die Stimmgabel anstreicht, ein Knoten in der Mitte des Fadens bildet (Fig. 634₂). Auch unter diesen Umständen ist der Ton des Fadens die nächst niedere Oktav von dem der Stimmgabel; bei der Spannung S_2 würde also der Ton des Fadens, wenn er ohne Schwingungsknoten seiner ganzen Länge nach oszillierte, um zwei Oktaven tiefer sein als der Stimmgabelton.

Zwischen der Spannung S_1 und der Spannung S_2 gibt es eine andere, die wir mit S_a bezeichnen wollen, für welche sich der Faden in der der Fig. 634₃ entsprechenden Weise abteilt, also drei Bäuche bildet. In diesem Falle aber ist die Schwingungsweite des Fadens bei weitem geringer, als man sie bei den Spannungen S_1 und S_2 beobachtet.

Die Bahn, welche der Punkt h beschreibt, während die Stimmgabel vibriert, ist nun nicht geradlinig, sondern elliptisch. Die große Achse dieser Ellipse fällt mit der Richtung des Fadens zusammen, sie ist longitudinal; die allerdings bei weitem kleinere kleine Achse dieser Ellipse steht rechtwinkelig zur Richtung des Fadens, sie ist transversal.

Die bei der Spannung S_1 und S_2 beobachteten Oszillationen des Fadens rühren von dem longitudinalen Anteil der Gabelvibrationen her. Die durch die longitudinale Bewegung von h erzeugten Wellen sind aber nicht allein weit intensiver als die durch die Transversalbewegung von h erzeugten, sondern sie pflanzen sich auch im Faden mit doppelt so großer Geschwindigkeit fort.

Bei den Spannungen S_1 und S_2 sind die Oszillationen des Fadens, welche durch die Longitudinalvibrationen des Punktes h erzeugt werden, so überwiegend, daß gegen sie die Oszillationen verschwinden, welche von den Transversalvibrationen von h herrühren.

Bei der Spannung S_a dagegen können die Longitudinalvibrationen von h keine stehenden Wellen des Fadens erzeugen, weil die Fadenlänge unter diesen Umständen $\frac{3}{4}$ von der Länge der Wellen ist, welche durch die Longitudinalvibrationen von h im Faden erzeugt werden; deshalb aber werden bei der Spannung S_a die stehenden Wellen sichtbar, welche in dem Faden durch die Transversalvibrationen von h erzeugt werden.

Dreht man die Leiste LL aus der in Fig. 632 dargestellten Lage um 90° , so daß der Faden vertikal steht, so sind die Vibrationen von h durchaus transversal zum Faden. Dieser zeigt alsdann

bei der Spannung S_1 2 Bäuche und 1 Knoten						
"	"	"	S_a	3	"	" 2 "
"	"	"	S_2	4	"	" 3 "

Einige sehr schöne, mit größeren Mitteln ausführbare Modifikationen dieses Versuches sind von J. Tyndall angegeben worden¹⁾. Derselbe ersetzte den Faden durch einen Platindraht, der durch einen elektrischen Strom zum Glühen erhitzt wird. Dabei leuchten die Knoten am hellsten, während die Bäuche, weil sie durch die Bewegung stärker abgekühlt werden, weniger hell glühen.

¹⁾ J. Tyndall, Der Schall, deutsche Ausgabe von H. Helmholtz und G. Wiedemann, Braunschweig 1869.

Nach Looser kann die Stimmgabel durch eine elektrische Klingel ersetzt werden, deren Glocke abgeschraubt ist. Der Faden wird an dem Klöppel befestigt. Die Schwingungsweite ist dann größer als bei der Stimmgabel.

Vorleseversuche über Messungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen in gespannten Fäden hat W. Elsässer¹⁾ beschrieben.

§ 212. Stehende Luftwellen; Resonanzröhren. Wie wir im § 198 gezeigt haben, unterscheiden sich die Longitudinalwellen von den Transversalwellen wesentlich dadurch, daß an Stelle der auf die Fortpflanzungsrichtung senkrechten Exkursionen der letzteren solche Exkursionen treten, welche in die Richtung der Fortpflanzung selbst fallen. Wir können daher auch alles das, was wir in den §§ 208 bis 210 in bezug auf die Zusammensetzung und Interferenz zweier Transversalwellen vorgetragen haben, auf die Longitudinalwellen übertragen, indem wir bezüglich der Exkursionen aus der Querrichtung in die Längsrichtung übergehen. Wir erhalten so die Form der resultierenden Longitudinalwellenbewegung aus der entsprechenden Transversalwelle, ohne daß wir nötig hätten, die Addition der Exkursionen nochmals durchzuführen.

Als longitudinal schwingenden Körper können wir uns eine Weinholdsche Spirale (§ 199) oder eine Luftsäule, welche in eine Röhre eingeschlossen ist, vorstellen. Ein geschlossenes Ende dieser Röhre würde dem festgehaltenen Ende der Spirale beziehungsweise dem befestigten Ende eines Seiles entsprechen. Ebenso wäre ein offenes Ende der Röhre analog dem freien Ende der Spirale, beziehungsweise des Seiles oder eines eingespannten elastischen Stabes. Am geschlossenen Ende einer Röhre werden daher Longitudinalwellen so reflektiert, daß sie mit einem Gangunterschiede von einer halben Wellenlänge zurückkehren, während sie vom offenen Ende ohne Gangunterschied zurückkehren (§ 207).

Die Fig. 635 ist nun dazu bestimmt, die korrespondierenden Bewegungen stehender Transversal- und Longitudinalwellen darzustellen.

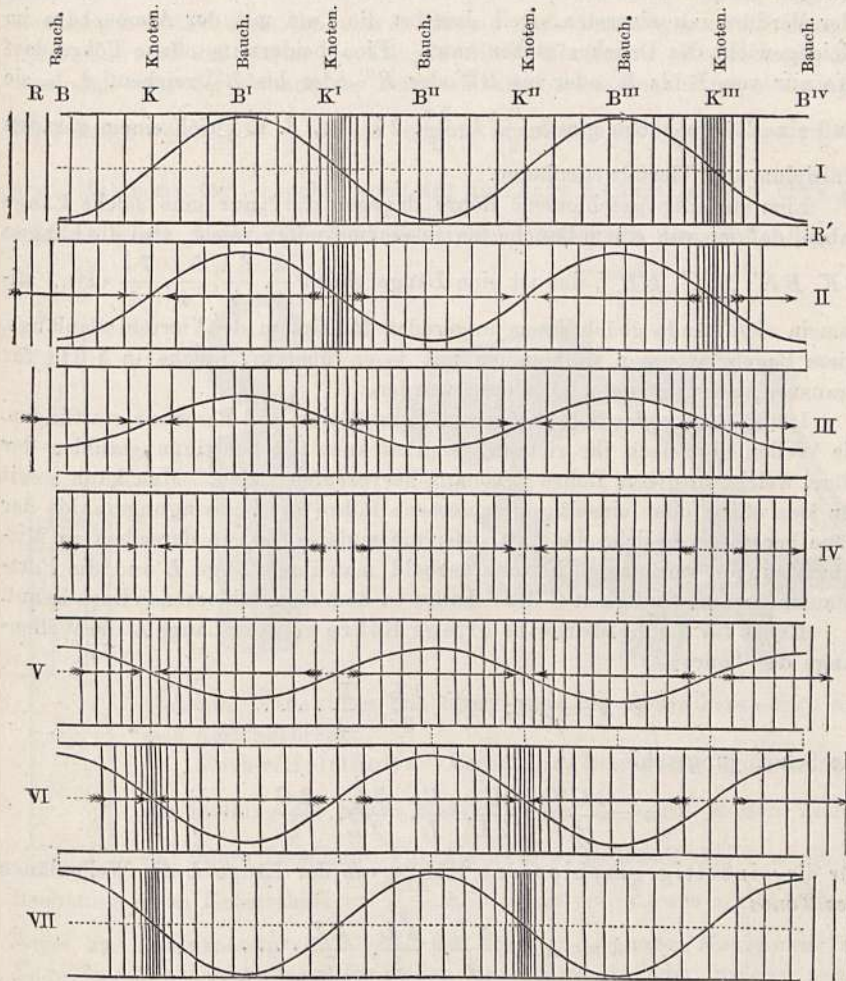
Zu diesem Zwecke sind in das Innere der Röhre RR' sowohl die longitudinal schwingenden Luftschichten in Form von Vertikallinien, als auch die korrespondierende Transversalwelle eingezeichnet. Die Länge der an beiden Enden offenen Röhre ist gleich zwei Wellenlängen. Fig. I. zeigt den Schwingungszustand im Moment einer größten Exkursion. Die momentane Geschwindigkeit aller Teile ist gleich Null. Die Luftschichten zeigen an den Knoten K und K'' eine Verdünnung, an den Knoten K' und K''' eine Verdichtung. Wie es zu diesen kommt, ist leicht einzusehen, wenn man sich die Entstehung der Zeichnung vergegenwärtigt. Fig. IV. zeigt die Röhre im Ruhezustande, die Grenzlinien der Luftschichten haben daselbst überall gleichen Abstand. Verschiebt man nun jede dieser Grenzlinien um ebensoviel nach rechts oder nach links, als die Ordinaten der Kurve in I. nach oben oder nach unten reichen, so resultiert die Verteilung der Luftschichten, wie sie in I. dargestellt ist. Am linksseitigen Ende rücken die Luftschichten über das Röhrenende hinaus, am rechtsseitigen ziehen sie sich vom Ende zurück. Es wird nützlich sein zu bemerken, daß die Größe dieser Exkursionen sehr übertrieben angenommen und in Wirklichkeit viel geringer ist.

¹⁾ Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht 16, 200 (1903).

Die Figuren II, III bis VII zeigen nun den Verlauf der stehenden Schwingungen bis zum Ende einer halben Schwingungsdauer. In II beginnen die Luftmassen von den Knoten, wo die größte Verdichtung herrschte, sich auszubreiten und gegen die anderen Knoten, wo die größte Verdünnung war, sich hinzubewegen.

Auf diesem Wege passieren alle Luftschichten im gleichen Moment ihre Ruhelage (Fig. IV); die Pfeile deuten die Bewegungsrichtung an. In Fig. V

Fig. 635.



ist die Ruhelage überschritten, es beginnt die Verdichtung an den Knoten K und K^II , die Verdünnung an den Knoten K^I und K^III , welche in Fig. VII ihren höchsten Grad erreichen. Von dort wiederholt sich in der zweiten Hälfte der Schwingungsdauer die Reihe der Figuren von unten nach oben mit verkehrter Pfeilrichtung.

Wir machen nochmals darauf aufmerksam, daß Knoten und Bäuche stehen bleiben und daß Verdünnung und Verdichtung durchaus nicht mit

Wellental und Wellenberg (den Bäuchen) korrespondieren, sondern mit aufsteigendem und absteigendem Knoten. Dagegen fallen die Stellen größter Geschwindigkeit der Luft mit den Bäuchen zusammen.

An der Fig. 635 ist nun auch leicht zu übersehen, welche Länge eine offene und eine einseitig geschlossene Röhre bei gegebener Wellenlänge eines Tones haben muß, wenn ihre Luft in stehende Schwingungen geraten, d. h. Resonanz geben soll. Offenbar kann am geschlossenen Ende keine Stelle größter Exkursion, d. h. kein Bauch sein, weil ja die Luft dort sich nicht bewegen kann. Andererseits kann am offenen Ende keine Verdichtung oder Verdünnung eintreten, weil daselbst die Luft mit der Atmosphäre im Gleichgewicht des Druckes stehen muß. Eine beiderseits offene Röhre darf also nur von B bis B' oder bis B'' oder B''' oder bis B^{IV} reichen, d. h. sie muß eine Länge haben gleich $\frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda \dots$, d. h. gleich einem geraden Multiplum der Viertelwellenlänge.

Eine einseitig geschlossene Röhre dagegen darf nur eine solche Länge haben, daß sie von einem Bauche bis zu einem Knoten reicht, also die Längen BK, BK', BK'', BK''' , das ist eine Länge gleich $\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}$ usw., allgemein eine Länge gleich einem ungeraden Multiplum der Viertelwellenlänge. Diese Regeln stimmen vollkommen mit jenen überein, welche in § 211 für Transversalschwingungen abgeleitet wurden.

Ist die Länge der Röhre gegeben, so muß sich, soll Resonanz stattfinden, die Wellenlänge nach ihr richten, folglich auch die Schwingungszahlen der Töne, welche in dieser Röhre Resonanz hervorrufen sollen. Man kann somit für jede offene oder einseitig geschlossene Röhre die Schwingungszahlen der Töne berechnen, welche die Luft (oder ein anderes Gas) in derselben zu Mitschwingungen veranlassen können, sobald man ihre Länge L und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit C des Schalles in dem eingeschlossenen Gase kennt.

Es ist für die beiderseits offene Röhre von der Länge L die Wellenlänge des Tones

$$\lambda = 2L, L, \frac{2L}{3}, \frac{L}{2} \dots$$

die Schwingungszahl

$$n = \frac{C}{\lambda} = \frac{C}{2L}, \frac{C}{L}, \frac{3C}{2L}, \frac{2C}{L} \dots$$

für die einseitig geschlossene Röhre von der Länge L die Wellenlänge des Tones

$$\lambda = 4L, \frac{4L}{3}, \frac{4L}{5}, \frac{4L}{7} \dots$$

die Schwingungszahl

$$n = \frac{C}{\lambda} = \frac{C}{4L}, \frac{3C}{4L}, \frac{5C}{4L}, \frac{7C}{4L} \dots$$

Um das Vorgetragene mit Experimenten zu belegen, gibt es verschiedene Methoden.

Hält man eine eben angeschlagene gewöhnliche Stimmgabel, welche etwa den Ton \bar{a} (a^1) von 435 ganzen Schwingungen per Sekunde gibt,

dessen Wellenlänge in Luft gewöhnlicher Temperatur $\lambda = \frac{340}{435} = 0,7816$ m = rund 78 cm beträgt, über eine beiderseits offene, ungefähr 5 cm weite, unten in Wasser eingetauchte Glasröhre (Fig. 636), so hört man keine Verstärkung des Tones, wenn der wasserleere Teil der Röhre die Länge $\frac{\lambda}{2} = 39$ cm beträgt. Hebt oder senkt man die Röhre, so beginnt die Resonanz und wird am stärksten für die Längen $\frac{\lambda}{4} = 19\frac{1}{2}$ und $\frac{3\lambda}{4} = 58\frac{1}{2}$ cm. Besitzt die Röhre eine vom oberen Ende *a* nach unten gehende Teilung in Centimeter, so kann man die Längen direkt abmessen. Dabei beobachtet man, daß zwar der Abstand der beiden Maxima der Resonanz mit der obigen Rechnung, welche für $\frac{\lambda}{2}$ 39 cm ergibt, übereinstimmt, daß dagegen das erste Maximum für $\frac{\lambda}{4}$ nicht genau auf die Länge 19,5 cm, sondern etwa auf 17,5 cm fällt. Diese Differenz erklärt sich durch den Umstand, daß die

Fig. 636.

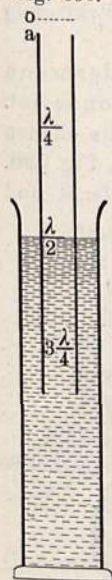


Fig. 637.

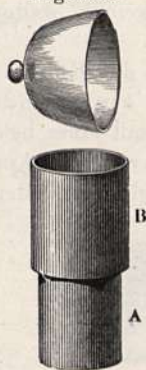
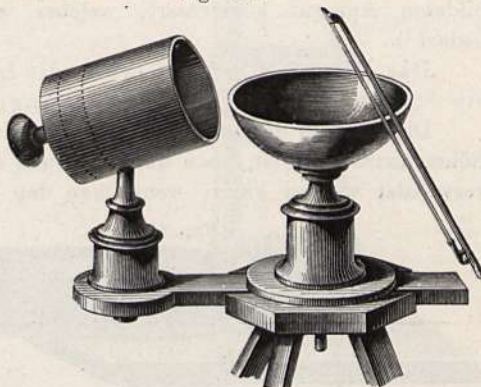


Fig. 638.



stehende Welle über das obere Ende der Röhre heraustritt und sich dort ausbreitet.

Nach v. Helmholtz¹⁾ Berechnung beträgt der Unterschied in der Stellung des ersten Maximums $\frac{\pi}{4} R$, worin *R* den Radius der Röhre bedeutet. Für die 5 cm weite Röhre ergibt somit die Rechnung einen Unterschied = $\frac{3,14}{4} 2,5 = 1,96$ cm; daraus ergibt sich die Regel, zur Ausmittlung von λ nicht den Abstand des ersten Maximums vom Ende, sondern den Abstand der beiden Maxima voneinander, welcher genau $= \frac{\lambda}{2}$ ist, zu messen.

¹⁾ Helmholtz, Vorlesungen III, Akustik, S. 239. Hat die Röhre an der Mündung den Radius *R*, im Innern den Radius *R*₁, so gilt für den Unterschied zwischen der wahren und der reduzierten Röhrenlänge die Beziehung $\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{R_1^2}{R} - \frac{\pi}{4} R$. Für $R = R_1 \sqrt{2}$ verschwindet α , für $R = R_1$ wird $\alpha = \frac{\pi}{4} R$.

Um das Mittönen einer Luftsäule noch weit auffallender zu erhalten, kann man statt der Stimmgabel eine sogenannte Käseglocke und statt der Glasröhre weite Röhren von Pappdeckel anwenden, wie dies in Fig. 637 dargestellt ist. Die Pappröhren haben einen Durchmesser von 12 bis 15 cm; die untere *A* ist am Boden geschlossen; die zweite *B* läßt sich mit einiger Reibung auf und nieder schieben, so daß man die Gesamtlänge der Röhre nach Bedürfnis abändern kann. Die Käseglocke kann einen Durchmesser von 15 bis 20 cm haben.

Um die Glocke zum Tönen zu bringen, hält man sie mit der linken Hand am Knopfe fest und streicht dann den Rand mit einem passenden Fiedelbogen. Dieselbe Glocke wird nun, auf diese Weise behandelt, bald höhere, bald tiefere Töne geben; man muß es aber durch möglichst gleichförmiges und langsames Streichen dahin zu bringen suchen, daß sie ihren tiefsten Ton gibt. Hat man den gewünschten Ton hervorgebracht, so hält man die tönende Glocke über die Pappröhre, wie es die Fig. 637 andeutet, und wird dann, falls die Röhre die richtige Länge hat, ein überraschend kräftiges Anschwellen des Tones wahrnehmen.

Savart hat für diesen Versuch einen besonderen in Fig. 638 abgebildeten Apparat konstruiert, welcher wohl keiner weiteren Erklärung bedarf¹⁾.

Das Mittönen erfolgt, wenn die Länge der Röhre $\frac{1}{4}$ oder wenn sie $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$ usw. von der Wellenlänge des einfallenden Tones ist.

Die Fig. 639 deutet an, wie das Experiment mit einer beiderseits offenen Röhre anzustellen ist, wozu übrigens auch der Savartsche Apparat, Fig. 638, verwendet werden kann, wenn man den beweglichen Boden entfernt und

Fig. 639.



Fig. 640.



dafür eine offene Röhre zur Verlängerung ansetzt. In diesem Falle erfolgt dann das Mittönen, wenn die Länge der Röhre $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2 usw. Wellenlängen des erregenden Tones beträgt.

Um die Luft in einer Röhre, sei es eine offene oder gedeckte, in stehende Schwingungen zu versetzen und sie also zum Selbsttönen zu bringen, ist nicht gerade nötig, einen tönenden Körper vor die Öffnung zu halten, wie dies ja die Orgelpfeifen zeigen. Hier ist es ein am offenen Ende der Röhre vorbeiströmender, an ihren Rändern sich brechender Luftstrom, welcher durch seine Stöße Wellen erzeugt, die, am anderen Ende reflektiert, mit den neu einfallenden interferieren. Wenn auch diese Stöße anfangs nicht ganz regelmäßig sind, so werden sie doch alsbald, wenigstens wenn die Röhre, wie man sagt, gut anspricht, durch den Einfluß der rückkehrenden Wellen reguliert, so daß sich

¹⁾ Hierher gehörige einfache Interferenzversuche hat H. Rebenstorff in der Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 16, 30, 1903 beschrieben.

regelmäßig stehende Schwingungen bilden, durch welche die Luft in der Röhre selbsttönend wird.

Die einfachste Art, die Luft in einer kleineren gedeckten Röhre zum Tönen zu bringen, ist die, daß man sie in vertikaler Richtung vor den Mund hält (das geschlossene Ende nach unten gekehrt, während das offene Ende an die untere Lippe gehalten wird), Fig. 640, und dann schräg gegen den Rand der Röhre bläst.

§ 213. Singende Flammen, analysierender Spiegel, stroboskopische Untersuchungsmethode. Eine andere Methode, um die Luft in einer offenen Röhre zum Tönen zu bringen, ist die, daß man Wasserstoffgas in einem Gefäße erzeugt und es durch eine feine Spitze ausströmen läßt, das

Fig. 641.

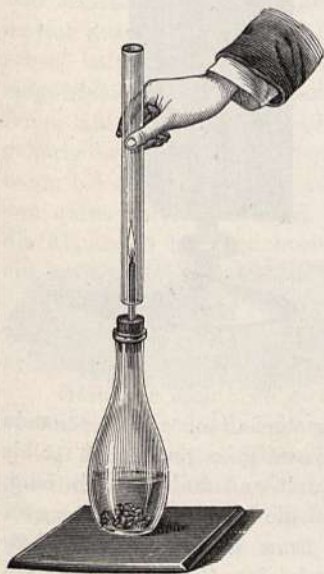
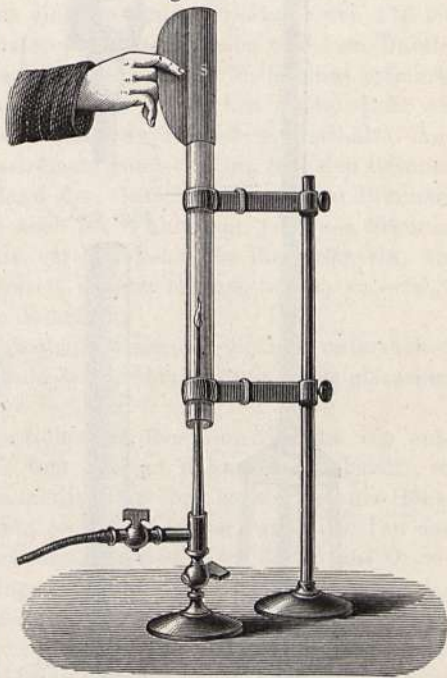


Fig. 642.



Gas anzündet und dann die Glasröhre darüber hält, Fig. 641. Eine solche Vorrichtung führt den Namen „chemische Harmonika“.

Es versteht sich von selbst, daß man statt des Wasserstoffgases zu diesem Versuche auch Leuchtgas oder Acetylen gas anwenden kann, welches seiner helleren Flamme wegen zu den weiter unten beschriebenen Versuchen sogar vorteilhafter ist. Fig. 642 zeigt einen zu diesem Zwecke dienenden Gasbrenner. Das Leuchtgas strömt durch einen Gummischlauch ein und entweicht durch eine verhältnismäßig enge Öffnung am oberen Ende eines ungefähr 20 cm langen Metallrohres, wo das Gas angezündet wird. Über die Flamme wird dann die von einem passenden Stativ getragene Glasröhre herabgeschoben. Bringt man am oberen Ende der Glasröhre einen aus dünnem Blech gefertigten Zylinder *s* an, so wird der Ton tiefer, wenn man *s* in die Höhe schiebt und dadurch die tönende Luftsäule verlängert.

Statt des in Fig. 642 abgebildeten Brenners genügt auch ein 20 bis 30 cm langes, oben mit einer engen Ausströmungsöffnung endendes Glasrohr, dessen unteres Ende in dem das Leuchtgas zuführenden Schlauche steckt. Dieses Glasrohr wird durch ein entsprechendes Stativ in vertikaler

Fig. 643.

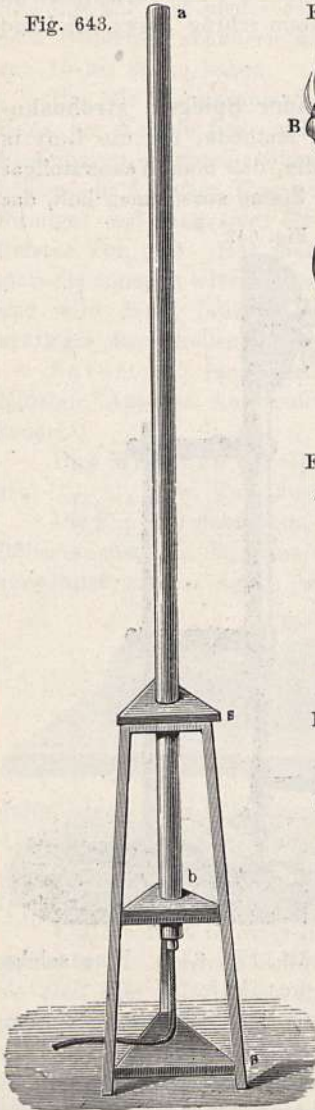


Fig. 644.



Fig. 645.

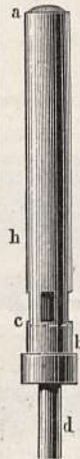
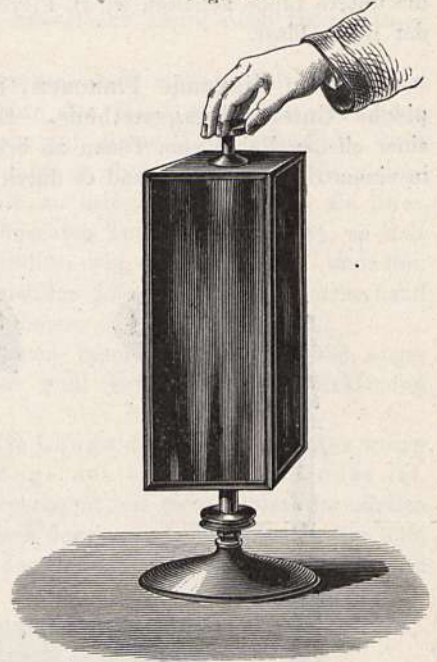


Fig. 646.



Stellung gehalten. Das tönende Rohr nimmt man gewöhnlich 15 bis 30 mm weit und 20 bis 100 cm lang, während die Mündung des Brenners 0,5 bis 1 mm im Durchmesser hat. Die durch einen Hahn regulierbare Größe der Flamme, sowie deren Höhenstellung in der Röhre ist durch Probieren zu ermitteln. Mit Wasserstoff gelingt der Versuch sicherer bei Anwendung sehr kleiner Flammen und Röhren geringerer Dimensionen; Leuchtgas erfordert größere Röhren, die Flamme desselben kommt aber ebenfalls leichter zum Tönen, wenn sie ziemlich klein ist.

Je länger und weiter das Rohr, desto tiefer ist der Ton, desto größer muß aber auch die Flamme werden. Einen tiefen und ungemein kräftigen Ton z. B. gibt eine 4,5 m lange und 0,1 m weite Blechröhre, welche von einem entsprechenden festen Ständer *ss*, Fig. 643, getragen wird. Um die Luft in einer solchen Röhre zum Tönen zu bringen, wendet man Rundbrenner, Fig. 644, von 20 bis 22 Öffnungen an. Hat man Stellung und Größe der

Flamme so reguliert, daß die Röhre ihren Grundton kräftig hören läßt, so braucht man nur die Flamme zu verkleinern, um zu bewirken, daß statt des Grundtones der erste Oberton der Röhre erklingt. Der gleiche Versuch läßt sich natürlich auch mit kleineren Röhren anstellen.

Um aus Blechröhren von 2 bis 3 m Länge und 7 bis 8 cm Weite anhaltende und schöne Orgeltöne hervorzulocken, wendet Rausch¹⁾ einen weiten Bunsenschen Gasbrenner von folgender Einrichtung an. Das 130 mm lange, 17 mm weite Blechrohr *ab*, Fig. 645, steckt auf einer bis zur Höhe *c* hinaufreichenden Verstärkung des Glasrohres *d*, dessen Ausströmungsspitze sich in der Höhe, 90 mm unter *a*, befindet. Etwas oberhalb *c* ist das Rohr *ab* mit vier Öffnungen von 12 mm Höhe und 6 mm Breite versehen, durch welche die zur vollständigen Verbrennung des Leuchtgases nötige Luftmenge einströmt. Oben ist das Rohr *ab* durch eine Drahtnetzkappe geschlossen, welche folgendermaßen hergestellt wird. Aus einem eisernen Drahtnetz von 170 bis 200 Maschen auf den Quadratcentimeter wird eine Scheibe von 4 cm Durchmesser ausgeschnitten, dieselbe ausgeglüht und nun mit Hilfe eines zylindrischen, halbkugelig endigenden Holzstückes von unten her in das Rohr *ab* eingetrieben, an dessen oberem Ende es dann durch Reibung festhält. Anfangs läßt man das Gas reichlich ausströmen, zündet es an, läßt den Brenner gehörig heiß werden und reguliert dann den Gaszufluß durch den Brennerhahn, bis die Flamme nur noch 2 cm hoch ist. Führt man jetzt den Brenner von unten her in das durch ein Stativ vertikal gehaltene Blechrohr ein, bis die Flamme 5 bis 7 cm hoch über dessen unterer Öffnung steht, so erfolgt ein kräftiges Tönen der Luftsäule im Rohre.

Um die Flamme sehen und durch den rotierenden Spiegel untersuchen zu können, hat Rausch das untere Ende des Blechrohres mit einem gläsernen zylindrischen Ansatz von 11 cm Länge versehen.

Hält man eine etwa 30 cm lange Röhre so über eine Flamme von entsprechender Größe, daß dieselbe 7 cm vom unteren Röhrenrande absteht, so erfolgt ein lebhaftes Singen; zieht man die Glasröhre so weit in die Höhe, daß das Singen eben aufhört, so beginnt es alsbald wieder, wenn der Ton der Röhre in der Nähe gesungen oder auf andere Weise, etwa durch eine Orgelpfeife, hervorgebracht wird. Das Singen dauert nun auch fort, wenn der erregende Ton aufgehört hat. Tyndall und Schaffgotsch haben diese Erscheinung unabhängig voneinander beobachtet und näher untersucht.

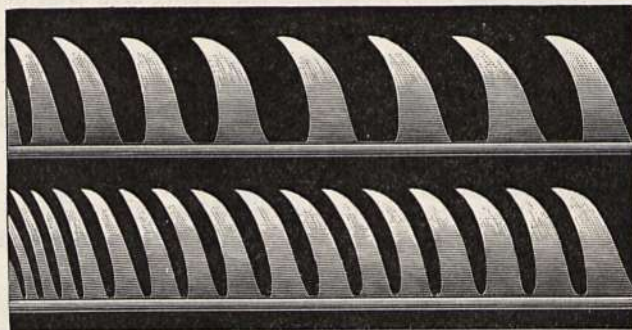
Mit bloßem Auge betrachtet, scheint eine singende Flamme stetig zu brennen, höchstens bemerkt man an derselben eine Verlängerung und ein unruhiges Zittern; daß dieselbe aber successiv aufleuchtet und wieder fast verschwindet, hat bereits Rogers durch eine mit schwarzen und weißen Sektoren bemalte Scheibe bewiesen. Bei rascher Rotation verschwinden die Sektoren im Tageslicht; bei Beleuchtung durch die chemische Harmonika erscheinen jedoch die Sektoren je nach der Geschwindigkeit der Scheibe ruhend oder nach der einen oder anderen Richtung langsam rotierend.

Wenn man die Flamme anblickend den Kopf rasch bewegt oder auch nur die Augenachse rasch dreht, indem man den Blick rasch auf seitwärts gelegene Punkte richtet, so entstehen die im folgenden beschriebenen Flammenbilder auf der Netzhaut.

¹⁾ Pogg. Ann. 127.

Um den Zustand der singenden Flammen zu untersuchen, sind rotierende Spiegel sehr geeignet. Vier gewöhnliche oder besser sog. Platinspiegel, welche die vier vertikalen Seitenwände eines parallelepipedischen Kästchens von 12 bis 15 cm Seitenlänge bilden, sind um eine vertikal stehende Achse leicht und mäßig rasch drehbar. Es bedarf übrigens keiner besonderen Drehvorrichtung, man kann den Spiegelwürfel auf jeder Schwungmaschine anbringen. Bequemer ist in vielen Fällen eine vom Verfasser angewandte Konstruktion, insbesondere dann, wenn auf dem Experimentiertisch nicht mehr hinlänglicher Raum für die Schwungmaschine vorhanden ist, Fig. 646. Der Spiegelkasten ruht mit seinem oberen Teile auf der Spitze eines eisernen zylindrischen Stabes, welcher im schweren Fuße befestigt ist und durch die an den Boden angeschraubte Hülse hindurchgeht. Letztere trägt überdies für den Bedarfsfall einen Schnurlauf, der mit einem abgesondert stehenden Schwungrade in Verbindung gebracht werden kann. Steht eine Flamme in der Röhre ungefähr in gleicher Höhe mit der Mitte der Spiegel, so erscheint sie bei rascher Rotation der Spiegel als ein zusammenhängender Lichtstreifen, solange die Flamme nicht singt, sobald aber die Luftsäule in der Röhre zum Tönen gebracht wird, erblickt man eine Reihe getrennter Flammenbilder, Fig. 647, welche nur unten durch einen blaß-

Fig. 647.



blauen Lichtstreif verbunden sind. Wasserstoffgas ist zu diesem Versuche weniger geeignet, weil seine Flamme gar zu lichtschwach ist. Die im rotierenden Spiegel erscheinenden Flammenbilder rücken einander um so näher, je höher der Ton ist, welchen die Flamme in der Röhre erzeugt und je langsamer der Spiegel rotiert.

Reichert hat den Spiegelapparat in der Fig. 648 dargestellten Form konstruiert, bei welchem nur ein Spiegel in Anwendung kommt, welcher gegen die horizontale Rotationsachse schräg gestellt ist. Die Ebene des Spiegels macht einen Winkel von ungefähr 15° mit der vertikalen Scheibe *ab*. Der Durchmesser des Spiegels beträgt 15 bis 25 cm. Man kann diese Vorrichtung an jedem Rotationsapparat mit horizontaler Umdrehungsachse anbringen. Die Flammenbilder erscheinen auf diesem rotierenden Spiegel als auf einem Kreisbogen liegend, wie es unsere Figur andeutet.

Diese Erscheinung ist die Folge davon, daß die Flamme jedesmal wächst, wenn die Schichten der tönenden Luftsäule sich gegen die Mitte der Röhre

hin bewegen, während die Flammengröße auf ein Minimum herabsinkt, so oft sich die Luftschichten von der Mitte der Röhre wegziehen.

Über die Formveränderungen, welche eine singende Flamme während einer jeden Oszillation erfährt, kann der rotierende Spiegel keine Auskunft geben, weil derselbe in die Breite gezogene und ineinander fließende Bilder liefert, während das Prinzip der stroboskopischen Scheiben, welche in der Lehre vom Licht näher betrachtet werden sollen, wie Plateau (1836) und Doppler (1845) unabhängig voneinander gezeigt haben, ein vorteilhaftes Hilfsmittel bietet, die Oszillationen rasch vibrierender Körper zu analysieren und von Töpler zuerst zur Untersuchung der singenden Flammen angewendet wurde¹⁾.

Die Oszillationen eines tönenden Körpers sind viel zu schnell, als daß wir dieselben mit bloßem Auge verfolgen könnten, die verschiedenen Formen

Fig. 648.

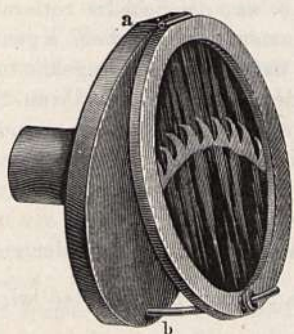
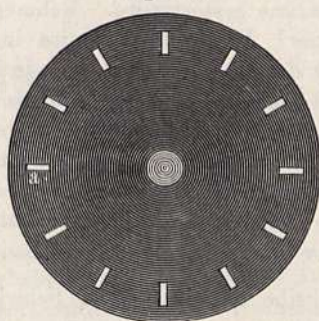


Fig. 649.



z. B., welche eine singende Flamme während einer vollständigen Oszillation durchläuft, vereinigen sich zu einem Totalbilde, in welchem die Form eines einzelnen Momentes vollkommen verschwindet.

Kann man es aber dahin bringen, daß das Auge nur momentan die oszillierende Flamme erblickt, so sieht man deutlich die Gestalt, welche dieselbe in diesem Augenblicke hat. Es läßt sich dies unter anderem mit Hilfe einer Scheibe, Fig. 649, von ungefähr 50 cm Durchmesser erreichen, welche in der Nähe ihres Randes mit einer konzentrischen Reihe einander gleicher und gleich weit voneinander abstehender Schlitze versehen ist und welche in ihrer Ebene mit entsprechender Geschwindigkeit um eine durch ihren Mittelpunkt gehende feste Achse gedreht werden kann. Der Apparat ist so aufgestellt, daß, wenn sich eine Öffnung bei *a* befindet, ein nahe an dieselbe herangebrachtes Auge eine hinter ihr befindliche singende Flamme deutlich sehen kann. Steht die Scheibe still, so sieht man durch den Schlitz bei *a* den Totalindruck aller Phasen (momentanen Zustände) der singenden Flamme; wenn aber die Scheibe rasch rotiert, so sieht man die Flamme immer nur in solchen Momenten, in welchen eine Öffnung vor dem Auge passiert, und zwar sieht man dann diejenige Phase der Flamme, in welcher sie sich eben befindet. In der Regel wird für jede folgende Öffnung, welche das Auge passiert, die Phase der Flamme eine etwas andere sein, und so kommt es denn, daß die Flamme sich zu verändern scheint.

¹⁾ Pogg. Ann. 128.

Nehmen wir zunächst an, die rotierende Scheibe sei mit der singenden Flamme unisono, d. h. die Scheibe drehe sich mit solcher Geschwindigkeit, daß sie, nach Art der Sirene angeblasen (§ 223), den gleichen Ton gebe wie die singende Flamme, so durchläuft die Flamme eine vollständige Vibration in der gleichen Zeit, welche zwischen dem Vorübergange zweier aufeinander folgenden Öffnungen vor dem Auge vergeht. Hat nun die Flamme gerade ihren niedersten Stand erreicht, wenn eine Öffnung das Auge passiert, so wird das gleiche stattfinden, wenn die folgenden Öffnungen der Reihe nach vor dem Auge vorübergehen; man sieht die Flamme stets in ihrer tiefsten Stellung, sie scheint also ruhig in dieser Stellung zu verharren. Wäre die Flamme jedesmal in ihrer höchsten Phase, wenn eine Öffnung das Auge passiert, so würde man dieselbe so sehen, als ob sie ungeändert in ihrer größten Höhe verbliebe.

Die Sache ändert sich aber sogleich, wenn das Unisono zwischen Scheibe und Flamme gestört wird. Nehmen wir z. B. an, die Scheibe rotiere etwas langsamer! Wenn die Flamme in dem Moment, in welchem irgend eine Öffnung das Auge passiert, gerade in ihrem tiefsten Stande angekommen ist, so wird sie ihre nächste Oszillation vollendet und abermals ihren tiefsten Stand erreicht haben, ehe die nächste Öffnung das Auge passiert, und wenn diese Öffnung vor das Auge kommt, ist die Flamme bereits wieder etwas gewachsen; noch mehr ist sie gewachsen, wenn die zweite, die dritte usw. Öffnung vor dem Auge vorübergeht.

Der Gangunterschied zwischen der tönenden Flamme und der rotierenden Scheibe betrage $\frac{1}{n}$ der Schwingungsdauer der Flamme, so wird jede folgende Öffnung die Flamme so weit verändert zeigen, wie es einer Zeit von $\frac{1}{n}$ der ganzen Schwingungsdauer entspricht. Sehen wir in einem bestimmten Moment die Flamme in ihrer niedersten Stellung, so sehen wir sie wieder in derselben in dem Moment, wo das n te Loch das Auge passiert, da die Flamme inzwischen gerade $n + 1$ volle Bewegungen in Wirklichkeit ausgeführt hat. Scheinbar durchläuft sie inzwischen nur einmal die aufeinander folgenden Formen, d. h. sie scheint n mal langsamer zu oszillieren, als sie wirklich oszilliert. Je geringer man also den Gangunterschied zwischen Flamme und Scheibe macht, desto langsamer sieht man die Flamme oszillieren, desto leichter ist es, die verschiedenen Formen zu verfolgen, welche sie in Wirklichkeit ungleich schneller durchläuft.

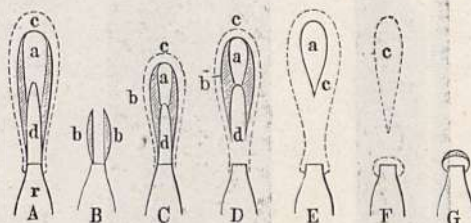
Die Scheibe, mit welcher Töpler experimentierte, hatte 20 Öffnungen und wurde durch ein Uhrwerk gedreht, welches bis zu einem gewissen Grade die Geschwindigkeit der Rotation zu regulieren erlaubte.

Die Ausführung der eben angedeuteten Versuche bedarf aber, wenn sie brauchbare Resultate liefern soll, mancherlei Vorsichtsmaßregeln, namentlich optischer Natur, in betreff deren wir auf die bereits zitierte Originalabhandlung verweisen müssen.

In Fig. 650 zeigt *A* den $2\frac{1}{2}$ mal vergrößerten Durchschnitt einer Leuchtgasflamme, welche aus einer 0,9 mm weiten Brennerspitze hervorbricht und in einem 623 mm langen Rohre singt, wenn dieselbe mit bloßem Auge beobachtet wird. *a* ist die leuchtende Spitze der inneren Flamme; dieselbe geht nach unten in die blaue Zone *bb* über, welche in der Figur schraffiert

angedeutet ist. Der innere Raum *d* ist wahrscheinlich ganz dunkel; endlich ist die ganze Flamme an ihrem äußeren Saume von einer Zone *c* umgeben, welche mit schwachem, rötlichgelbem Lichte schimmert. Die Bilder *B*, *C*, *D*, *E*, *F* und *G* zeigen die Auflösung dieser singenden Flamme durch das Stroboskop. Zu Anfang jeder Schwingung bricht aus der glühenden Brennerspitze *r* nur ein blaues Flämmchen hervor, welches einen oben offenen Zylindermantel bildet. In der zweiten Phase *C* umschließt die Spitze des blauen Teiles bereits die Anfänge des leuchtenden Teiles *a*, und man bemerkt Spuren der äußeren Zone *c*. Bei *D* ist der leuchtende Teil *a* schon deutlich entwickelt, der blaue Teil ist von der Brennermündung losgerissen. In der Phase *E* ist die blaue Zone ganz verschwunden, die helle Spitze *a*, sowie die Hülle *c* haben das Maximum ihrer Größe erreicht. Hierauf verschwindet *a*, und es bleibt nur die Zone *c*, welche als mattes gelbrotes Wölkchen in einiger Entfernung über dem Brenner schwebt, während sich unmittelbar an der Brennerspitze noch ein Restchen von *c* zeigt. Die

Fig. 650.



ganze obere Flammenbild verschwunden ist und nur auf der Ausflußöffnung ein kaum sichtbares Licht lagert, aus welchem sich in der folgenden Schwingung dieselbe Reihenfolge von Erscheinungen entwickelt. — In etwas anderer Weise verläuft die Erscheinung bei Anwendung von Wasserstoffgas.

Nicht bloß innerhalb einer Röhre kann eine Flamme zum Singen gebracht werden; es gibt auch frei brennende singende Flammen. Sie entstehen, wenn ein explosives Gasmisch, z. B. aus Wasserstoff und Luft, aus einer Röhre ausströmt, welche zu enge ist, als daß die Explosionsflamme zurückschlagen könnte. In diesem Falle entsteht der Ton durch eine rasche Aufeinanderfolge von Explosionen.

Die Anzahl der mit singenden Flammen anzustellenden Experimente ist ungemein groß; es ist ganz unmöglich, sie alle hier zu beschreiben, weshalb wir auf die Originalmitteilungen verweisen müssen¹⁾.

Weiter unten werden wir noch weitere Anwendungen des stroboskopischen Prinzips auf akustische Erscheinungen kennen lernen.

§ 214. Orgelpfeifen, manometrische Flammen, Kundtsche Röhren.

Die zweckmäßigste Methode, die Luft in Röhren in den Zustand stehender Schwingungen zu versetzen, ist diejenige, welche man bei den Orgelpfeifen, auch Labialpfeifen genannt, in Anwendung gebracht hat. Die Einrichtung derselben ist aus Fig. 651 und 652 zu ersehen. Man unterscheidet an ihnen den Fuß, den Mund (das Maul) und die Röhre.

In Fig. 651, welche eine Zinnpfeife darstellt, ist der Fuß mit *FF*, die Röhre mit *RR* bezeichnet. Die Röhre hat an ihrem unteren Ende vorn eine Öffnung *ab*, welche der Mund oder das Maul genannt wird. Fuß und Röhre

¹⁾ Meldes Akustik, S. 306; Weinholds Vorschule der Physik, 4. Aufl., S. 250; Rayleigh, Wiedem. Ann., Beibl. B 3, 63; Gruel, Pogg. Ann. 126, 638; H. Rebenstorff, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unters. 15, 274, 280 usw.

sind durch eine dünne Zinnplatte getrennt; zwischen der vorderen Kante dieser Platte, welche den Boden der Schallröhre bildet, und der vorderen Wand

Fig. 651.

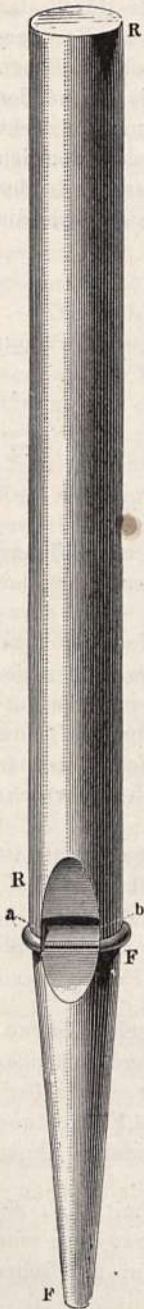
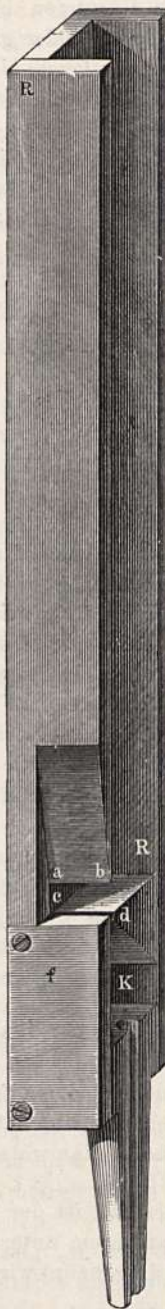


Fig. 652.



des Fußes bleibt eine schmale Spalte, durch welche die unten in den Fuß eingeblasene Luft austritt und, sich an der oberen Kante des Mundes brechend, die Luftsäule in der Röhre *RR* in stehende Schwingungen versetzt.

Die Einrichtung der hölzernen Orgelpfeifen ist aus dem Durchschnitt Fig. 652 zu ersehen. Die in den Fuß eingeblasene Luft dringt aus dem Behälter *K* durch einen schmalen Spalt *cd* hervor und bricht sich an der oberen Kante *ab* des Mundes, von welchem unsere Figur nur die linke Hälfte *abcd* zeigt.

Statt einer förmlichen Orgel kann man sich zu Versuchen mit Orgelpfeifen, seien es nun gedeckte, wie Fig. 651, oder offene, wie Fig. 652, der in Fig. 653 abgebildeten Vorrichtung bedienen. Mit Hilfe des Blasebalges *p* wird die Luft in den Balg *ss* getrieben, aus welchem sie dann durch die anfangs vertikal herab, dann horizontal nach vorn hin gehende Röhre *f* in die Windlade *cc* gelangt. Die obere Fläche dieses Kastens enthält eine Reihe von Löchern, auf welche die vertikalen Löcher des Holzstückes *dd*, von welchem unsere Figur nur einen Teil zeigt, münden. In die Löcher des Holzstückes *dd* wird der Fuß der Pfeifen eingesetzt. Zwischen den Löchern des Brettes *dd* und entsprechenden Löchern der Windlade *cc* befinden sich aber Schieber, welche selbst mit Löchern versehen sind, so daß man nach Belieben den Wind in eine Pfeife kann eintreten lassen, wenn man den entsprechenden Schieber vorzieht, oder den Wind von dieser Pfeife absperrt, wenn man den Schieber zurückschiebt, wie dies durch Fig. 654 noch besser erläutert wird, welche die Einrichtung der Schieber in größerem Maßstabe

darstellt, als die vorige Figur. Der Schieber 1 ist zurückgeschoben, der Schieber 2 ist vorgezogen.

Der Schieber 1 ist zurückgeschoben, der

Eine und dieselbe Pfeife kann mehrere Töne geben. Der tiefste (der Grundton) einer gedeckten Pfeife ist derjenige, dessen Wellenlänge 4mal so groß ist, als die Länge der Röhre; die höheren Töne, welche die Pfeife gibt, sind diejenigen, welche einer 3mal, 5mal usw. kürzeren Wellenlänge

Fig. 653.

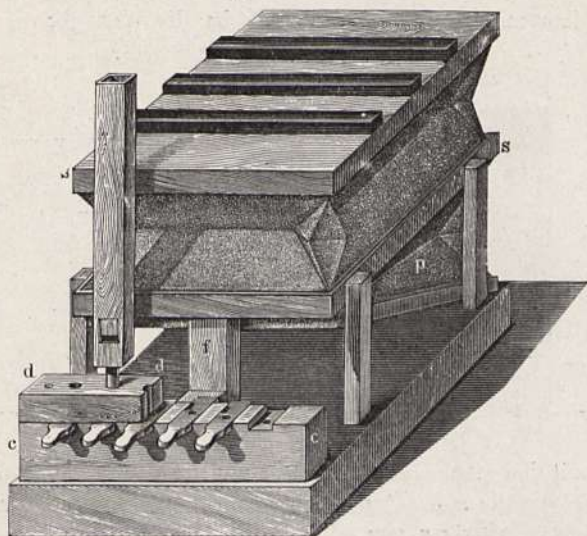
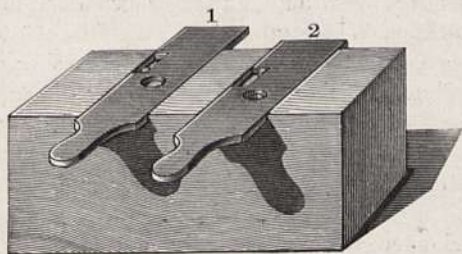


Fig. 655.



Fig. 654.



entsprechen, welche also durch stehende Schwingungen erzeugt werden, welche eine 3mal, 5mal usw. kleinere Oszillationsdauer haben als der tiefste Ton der Pfeife.

Den tiefsten Ton gibt die Pfeife bei schwächerem, die höheren Töne bei stärkerem Anblasen.

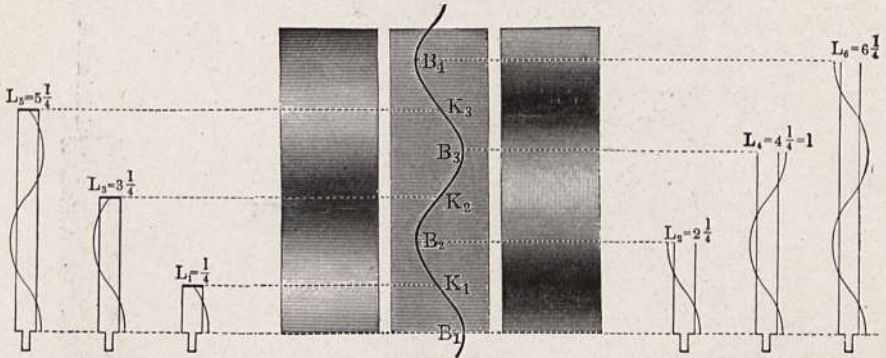
Um Versuche mit gedeckten Pfeifen zu machen, kann man auch sog. Stimmpfeifen, Fig. 655, anwenden. Es sind dies ungefähr 30 cm lange, hölzerne, runde Pfeifen, in welchen ein durch einen Korkstopfen gebildeter, am unteren Ende eines hölzernen Stempels befestigter Kolben auf- und niedergeschoben werden kann, wodurch sich die tönende Luftsäule nach Belieben verlängern oder verkürzen läßt.

Auch eine offene Pfeife gibt mehrere Töne, je nachdem sie durch schwächeren oder stärkeren Wind angeblasen wird. Die Wellenlänge des tiefsten Tones, den sie gibt, des Grundtones, ist doppelt so groß wie die

Pfeifenlänge. Für diesen Grundton bildet sich ein Schwingungsknoten in der Mitte der Röhre. Die Wellenlänge des zweiten Tones der offenen Pfeife ist gleich der Länge der Pfeife selbst und die beiden Schwingungsknoten, welche sich in diesem Falle bilden, sind je um ein Viertel der Röhrenlänge von den Enden entfernt.

Die Fig. 656 gibt eine Übersicht des Verhaltens der gedeckten und der offenen Pfeifen. In dem mittleren Vertikalstreifen ist die Wellenbewegung

Fig. 656.



als Transversalwelle mit den stehenden Bäuchen B und Knoten K angedeutet. Links und rechts davon ist die momentane Dichtenanordnung der Luft durch Schattierung dargestellt. Seitwärts sind die Längen der Pfeifen mit eingezeichneter Transversalwelle angedeutet. Der tiefste Ton, welchen eine Pfeife geben kann, wird, wie erwähnt, ihr Grundton genannt, die anderen Töne, welche sie bei verstärktem Winde gibt, heißen die Obertöne.

Wenn man an verschiedenen Stellen einer Orgelpfeife Löcher macht, die man nach Belieben durch einen Schieber verschließen oder öffnen kann, so kann man zeigen, daß der Ton durchaus nicht geändert wird, wenn man ein Loch öffnet, welches sich an der Stelle eines Bauches befindet, daß jedoch eine Änderung eintritt, wenn ein Loch an einer anderen Stelle geöffnet wird.

Um die Schwingungsknoten der Luftsäule in einer Röhre zu zeigen, wendet Hopkins eine gläserne Röhre an, welche ungefähr 3 cm im Durchmesser hat und welche ungefähr 60 cm lang ist. Die Röhre wird über einer Metallplatte befestigt, welche in gleicher Weise festgeschraubt wird, wie die Platten, welche zur Erzeugung der Klangfiguren dienen. Letztere wird durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen zum Tönen gebracht. Der Ton der Platte muß der Länge der Röhre entsprechen. In der Röhre hängt an einem Faden ein Rähmchen herab, über welches eine zarte Membran gespannt ist, die mit Sand bestreut wird. Dieser Sand bleibt ruhig liegen, wenn das Rähmchen an die Stelle eines Knotens gebracht wird; an allen anderen Stellen dagegen wird er herabgeworfen, was natürlich an der Stelle der Bäuche am stärksten der Fall ist.

Weil man durch Anstreichen einer Metallplatte nicht immer mit Sicherheit den gewünschten Ton erhält, so ist es zweckmäßig, den Versuch so abzuändern, daß man die Glasröhre in den Fuß einer Orgelpfeife, Fig. 657, steckt; man hat auf diese Weise eine oben offene Orgelpfeife von Glas, welche

mit Sicherheit ihren tiefsten Ton und bei verstärktem Winde oder verkleinerter Mundöffnung seine Oktave gibt.

Für den tiefsten Ton der Röhre bleibt der Sand ruhig liegen, wenn sich das Rähmchen in der Mitte der tönenden Luftsäule befindet, wie Fig. 657 andeutet; an der gleichen Stelle kommt aber der Sand sogleich in lebhaftere Bewegung, wenn durch stärkeren Wind die Oktave des Grundtones erzeugt wird, während man in gleicher Weise für diesen höheren Ton die Schwingungsknoten bei *a* und *b* nachweisen kann.

Sehr schön lassen sich die Schwingungsknoten mittels der manometrischen Flammen von König nachweisen. An eine offene Orgelpfeife, welche in Fig. 658 so dargestellt ist, daß ihre horizontalen Dimensionen in $\frac{1}{5}$, die

Fig. 657.



Fig. 658.

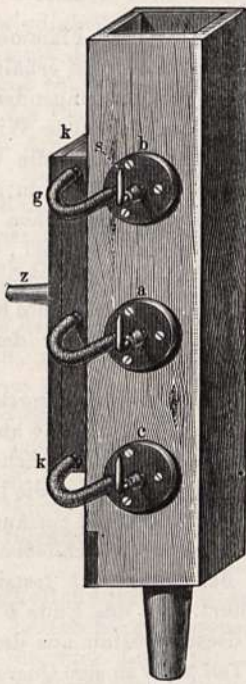
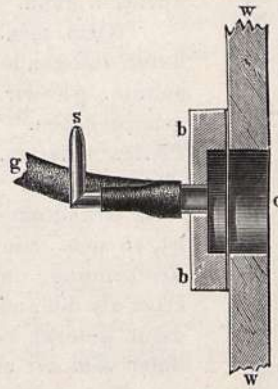


Fig. 659.



vertikalen aber in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Größe aufgetragen sind, ist seitlich ein Kästchen *kk* aufgeschraubt, in welches durch einen an das Röhrrchen *z* anzusteckenden Gummischlauch Leuchtgas einströmt. Aus dem Kästchen *kk* wird dann das Gas durch drei kurze Röhrrchen in die kleinen Holzkästchen *a*, *b* und *c* geleitet,

aus welchen es endlich durch drei kleine Brenner ausströmt. Die Mitte von *a* befindet sich an der Stelle, an welcher sich in der Pfeife ein Schwingungsknoten bildet, wenn sie ihren Grundton gibt. An der Stelle der Schwingungsknoten, welche der Oktav des Grundtones entsprechen, sind die Kästchen *b* und *c* aufgeschraubt. An Stelle dieser Kästchen ist die Wand der Pfeife durchbohrt, die Höhlung des Kästchens aber ist von der Luft in der Röhre durch eine dünne Kautschukplatte getrennt, wie man dies in Fig. 659 sieht, welche ein Gaskästchen samt Brenner in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Größe darstellt. Wenn die Röhre nicht tönt, sind die Flammen der drei Brenner ganz gleich; gibt die Pfeife ihren Grundton, so geraten alle drei Flammen in eine zitternde Bewegung; für die mittlere Flamme ist dies am bedeutendsten, weil sich das mittlere Kästchen an der Stelle eines Schwingungsknotens, also da befindet, wo Verdichtung und Verdünnung

stärker auftreten, als an irgend einer anderen Stelle der Röhre. Hat man den Gaszufluß so geregelt, daß die drei Flämmchen klein genug sind, so löscht die mittlere beim Ertönen des Grundtones aus. Für die Oktav des

Fig. 660.

Grundtones brennt die mittlere Flamme ruhig, weil sie sich an der Stelle eines Bauches befindet, während die beiden anderen, welche jetzt an der Stelle von Knoten stehen, lebhaft erzittern oder selbst ausgelöscht werden.

Der Mund der Pfeife ist auf derselben Seite angebracht, auf welcher das Kästchen *kk* angeschraubt ist. Die gegenüberstehende Wand (in unserer Figur die Wand rechts) ist durchbrochen und durch eine Glasplatte geschlossen, damit man mit diesem Apparate auch den durch Fig. 657 erläuterten Versuch anstellen kann.

Wenn man die manometrischen Flammen tönender Pfeifen durch rotierende Spiegel untersucht, so erhält man ähnliche Resultate, wie wir sie bereits bei den singenden Flammen kennen gelernt haben. Wenn man auf derselben Windlade zwei offene Pfeifen aufsetzt, von welchen die eine die Oktav der anderen gibt und deren jede in ihrer Mitte (also im Schwingungsknoten ihres Grundtones) mit einem manometrischen Kästchen versehen ist, so sieht man im Spiegel die in Fig. 647, S. 616 dargestellte Erscheinung, daß die eine Flammenreihe doppelt so viel Zähne zeigt als die andere, wenn man mittels eines Kautschukröhrchens dafür gesorgt hat, daß sich der Brenner der einen Pfeife nahe unter dem der anderen befindet.

Eine weitere Methode, die Schwingungsknoten in tönenden Luftsäulen sichtbar zu machen, hat Kundt angegeben¹⁾. Um die Luft in einer längeren Röhre in stehende Schwingungen zu versetzen, wird auf der einen Seite derselben die Hälfte einer engeren Glasröhre *ab*, Fig. 660, von ungefähr 1 cm äußerem Durchmesser und 1 m Länge mittels eines wohl schließenden Korkes bei *c*, welcher auf der Mitte der Röhre *ab* festsetzt, in die etwas weitere Röhre *cd* eingeführt. An das Ende *b* der engeren Röhre ist ein Kork angesetzt, dessen Gestalt aus der Figur zu ersehen ist und dessen breiterer Teil zwar in den Querschnitt der weiteren Röhre paßt, sich aber doch ohne Reibung in derselben verschieben läßt. Das andere Ende des Rohres *cd* ist durch einen wohl schließenden Kork *m* abgesperrt, den man mittels des Stäbchens *s* etwas vor- oder zurückschieben kann. Wird der äußere Teil des Rohres *ab* mit einem befeuchteten wollenen Lappen gerieben, so gerät er in Longitudinalschwingungen und läßt infolgedessen einen kräftigen Ton hören. Dabei vibriert der Kork *b* in der Längsrichtung der Röhre und seine Stöße werden in dem weiteren Röhrenstücke Schallwellen erzeugen, welche bei *m* reflektiert werden, so daß sich zwischen *b* und *m* stehende Schwingungen bilden. Befindet sich nun die Röhre in horizontaler Lage und ist auf der ganzen Länge zwischen *b* und *m* ein feiner Staub



¹⁾ Pogg. Ann. 135.

(*Semen Lycopodii*, Kieselerde, am besten Korkstaub) verbreitet, so sammelt er sich in Querlinien¹⁾, welche vorzugsweise in den Bäuchen ausgebildet erscheinen, während in den Knotenpunkten der Staub einfach angehäuft wird oder auch Ringe bildet. Der Abstand zweier aufeinander folgender Bäuche ist gleich einer halben Wellenlänge des Tones in der Luft.

Am regelmäßigsten bilden sich die Staubwellen in bm , wenn die Länge dieses Röhrenstückes möglichst genau ein Vielfaches der zugehörigen Luftwelle ist.

Kundt hat die Röhre cd mit zwei Seitenröhrchen versehen, mittels deren man sie evakuieren und mit einem anderen Gase füllen kann. Je nachdem cd mit anderen Gasen gefüllt ist, ergeben sich verschiedene Werte für die Wellenlänge desselben Tones, also auch verschiedene Werte für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in diesen Gasen. Für Kohlensäure rücken die Maxima der Staubanhäufung näher zusammen, für Leuchtgas und Wasserstoffgas rücken sie weiter auseinander.

Bezeichnen wir die Länge einer Staubwelle für Luft mit 1, so ist dieselbe in dem gleichen Apparate für Kohlensäure 0,8, für Leuchtgas 1,6, für Wasserstoffgas 3,56. Danach ergibt sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Kohlensäure $331 \cdot 0,8 = 265$ m, in Leuchtgas $331 \cdot 1,6 = 530$ m und in Wasserstoffgas $331 \cdot 3,56 = 1178$ m²⁾.

W. Jaeger³⁾ hat die Kundtsche Methode auch zur Messung der Schallgeschwindigkeit in Dämpfen von Äther, Alkohol und Wasser benutzt, um daraus das Verhältnis der spezifischen Wärmen zu berechnen. Er verwendete verkohlten Korkstaub, da dieses Pulver auch in den gesättigten Dämpfen noch gute Staubfiguren liefert.

Interessante Erweiterungen der Kundtschen Klangfiguren sind von Fr. Schaumburg⁴⁾ beschrieben worden, welcher die zylindrischen Röhren durch prismatische und anders geformte ersetzte und statt der longitudinal schwingenden Stäbe auch transversal schwingende Körper, ja sogar die menschliche Stimme substituierte.

§ 215. Dichtigkeitsänderungen in den Knotenpunkten. Die im vorigen Paragraphen besprochenen Versuche beweisen unzweifelhaft, daß in den Knotenpunkten tönender Luftsäulen abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen der Luft stattfinden; sie geben aber keine Auskunft über die Größe dieser Dichtigkeitsänderungen, welche Kundt durch Anwendung von Wassermanometern ermittelt hat⁵⁾.

Setzt man ein Wassermanometer einfach an der Stelle eines Knotenpunktes in die Wand einer tönenden Luftsäule ein, so kann es freilich seinen Stand nicht dauernd ändern, ja es wird nicht einmal in sichtbare Schwankungen geraten, weil Verdichtung und Verdünnung viel zu rasch abwechseln, als daß die Wassersäule denselben folgen könnte. Verbindet man aber nach

¹⁾ Über die Querlinien oder „Rippen“ siehe Dvořák's Mitteilungen in Pogg. Ann. 151, 634 (1874).

²⁾ Man vergleiche auch die Beobachtungen von Dvořák, Wien. Akad. Ber. 72, II, 227 (1875).

³⁾ Wiedem. Ann. 36, 165 (1889).

⁴⁾ Inaugural-Dissertation, Marburg 1889.

⁵⁾ Pogg. Ann. 134.

Kundt das Manometer mit einem Ventil, welches durch einen stärkeren Luftdruck von Seiten der Pfeife her gegen das Manometer gehoben wird, sich also nur in solchen Momenten öffnet, für welche in dem entsprechenden Knotenpunkte eine Verdichtung eintritt, so muß das Manometer steigen, bis seine Höhe dem Dichtigkeitsmaximum der Luft in dem Knotenpunkte entspricht. — Hat man dagegen dem Ventil die entgegengesetzte Lage gegeben, so wird es sich in den Momenten öffnen, in welchen im Knotenpunkte eine Luftverdünnung eintritt, in diesem Falle zeigt es also das Dichtigkeitsminimum der Luft in den Knotenpunkten an.

Als Kundt solche Ventilmanometer am oberen Ende einer gedeckten 30 cm langen gläsernen Orgelpfeife anbrachte, ergab sich bei kräftigem Er-tönen ihres Grundtones im einen Falle ein Steigen, im anderen Falle ein Sinken des Wassermanometers um 20 bis 25 cm. Die Druckdifferenz zwischen dem Maximum der Verdichtung und der Verdünnung am Boden einer etwa 30 cm langen gedeckten Orgelpfeife kann also bei starkem Tönen gegen 60 cm Wasserdruck, also ungefähr $\frac{1}{13}$ Atmosphäre, betragen. Dieses Resultat

zeigt, daß in unseren musikalischen Instrumenten, bei welchen die Luft den tönenden Körper bildet, die Dichtigkeitsänderungen derselben größer sind, als man bisher anzunehmen geneigt war.

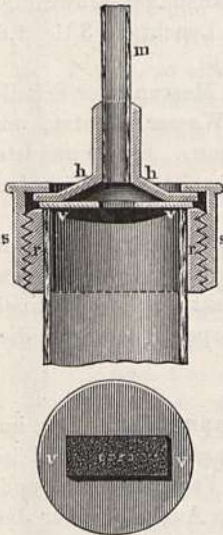
Die Ventilmanometer können auch statt an dem Ende einer gedeckten Pfeife in dem Knoten einer offenen Pfeife angebracht werden; in diesem Falle ergeben sich aber die Druckdifferenzen ungefähr nur halb so groß wie in dem oben betrachteten Falle.

Die Konstruktion der Ventilmanometer, wie sie Kundt am oberen Ende einer gedeckten Pfeife anbrachte, wird durch Fig. 661 erläutert. Auf das Ende der gläsernen Röhre von einer etwas über 30 cm langen Orgelpfeife ist ein Ring *r* von Messing gekittet, dessen obere Endflächen eben abgeschliffen und in dessen Umfang ein Schraubengewinde eingeschnitten ist. Auf den Rand dieses Ringes wird zunächst die Ventilplatte *v* und auf diese ein Messingstück gelegt, welches im Umfange eben und in dessen etwas erhabener Mitte das Manometerrohr *m* eingekittet ist.

Das Messingstück *h* wird samt der Ventilplatte *v* durch die Überfangsschraube *s* auf den Rand des Glasrohres und des Ringes *r* aufgepreßt. In die messingene Ventilplatte *v* ist ein Schlitz von 1 mm Breite und 5 bis 10 mm Länge eingeschnitten und über denselben eine leicht bewegliche Membran gespannt, die an beiden Enden auf die Platte aufgeklebt ist. Das Manometer zeigt das Maximum oder das Minimum des Druckes im Knotenpunkte an, je nachdem die Ventilplatte so gelegt ist, daß sich die Membran auf ihrer oberen oder auf ihrer unteren Seite befindet.

Für die Membranen der Ventile wandte Kundt entweder sehr dünne Kautschukstreifen oder Guttaperchapapier an. Die Spannung der kleinen Membran muß so gewählt sein, daß das Ventil, mit dem Munde angeblasen, einen Ton hören läßt, der nicht allzu weit von dem der Orgelpfeife entfernt ist.

Fig. 661.



Nach V. Dvořák¹⁾, welcher die Versuche von Kundt wiederholt und mit Modifikationen bereichert hat, sind die Angaben des Manometers nicht immer verlässlich, da insbesondere auch die vom Wasser freie Länge der Manometerröhre auf dieselben von Einfluß ist.

V. Dvořák ist es auch gelungen, mittels passend konstruiereten Ventils und Manometers die Druckänderungen in der freien Luft in der Nähe der Pfeife, welche beim Tönen derselben entstehen, nachzuweisen. Näheres hierüber an der zitierten Stelle.

Töpler und Boltzmann wandten zur Bestimmung der Dichtigkeitsänderungen der Luft am Boden einer gedeckten Pfeife eine sehr sinnreiche optische Methode an²⁾, welche darauf beruhte, daß zwei von einer Lichtquelle ausgehende intermittierende Lichtbündel nach dem Fresnel-Aragoschen Prinzip zur Erzeugung des Interferenzphänomens benutzt werden. Läßt man dann das eine Strahlenbündel außerhalb der Pfeife, das andere durch die Pfeife quer hindurchgehen, so wird durch die Dichteänderung der Luft der Gangunterschied der interferierenden Strahlenbündel verändert. Aus den eintretenden Verschiebungen der Interferenzstreifen, welche stroboskopisch verlangsamt erscheinen, kann dann die Dichteänderung der Luft berechnet werden. Nach den Versuchen der genannten Verfasser betrug die Dichtigkeitsänderung am Boden einer quadratischen, 36 cm langen und 5,2 cm weiten Orgelpfeife $\frac{1}{26}$ bis $\frac{1}{23}$ einer Atmosphäre.

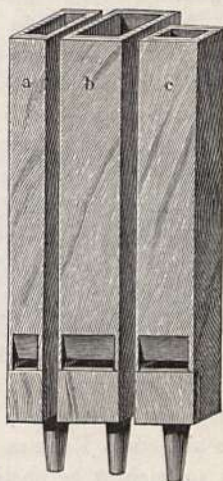
Prof. E. Mach³⁾ modifizierte dieses Verfahren und machte es auch für offene Pfeifen anwendbar. Demselben Autor ist auch die erste stroboskopische Darstellung der Luftschwingungen zu verdanken. A. Raps⁴⁾ bediente sich bei seinen ähnlichen Untersuchungen eines Jaminischen Interferentialrefraktors mit fotografischer Registrierung und erhielt damit sehr schöne Resultate.

§ 216. Einfluß der Form der Pfeifen auf die Tonhöhe. Die aus den vorhergehenden Paragraphen sich ergebende Folgerung, daß die Tonhöhe einer Pfeife nur durch deren Länge bedingt sei, ist nicht unbedingt für alle Gestalten der Pfeife richtig, indem die Tiefe der Pfeife, die Breite des Mundloches usw. von wesentlichem Einfluß auf die Tonhöhe sind. Es geht dies auch schon aus den Bemerkungen des § 212, S. 611, hervor.

Savart hat gezeigt, daß zwei Pfeifen *a* und *b*, Fig. 662, welche gleiche Länge und Tiefe haben, welche aber ungleich breit sind, denselben Ton geben (vorausgesetzt, daß in beiden der Mund die volle Breite der Röhre einnimmt), nur ist der Ton der schmalen Pfeife schwächer.

Wenn aber bei gleicher Höhe und Breite die Tiefe zweier Pfeifen verschieden ist, wie z. B. bei den Pfeifen *b* und *c*, Fig. 662, so ist ihr Ton

Fig. 662.



¹⁾ V. Dvořák, Beobachtungen am Kundtschen Manometer. Wien. Akad. Ber. 68, II, 7 bis 9.

²⁾ Pogg. Ann. 141.

³⁾ Optisch-akustische Versuche, Prag 1873.

⁴⁾ Über Luftschwingungen. Habilitationsschrift, Leipzig 1893.

nicht mehr gleich, er ist höher für die Röhre von geringerer Tiefe, also in unserem Beispiel höher für die Pfeife *c* als für die Pfeife *b*.

Nach Bertsch ist die Tonhöhe zweier Pfeifen gleich, wenn für beide die Summe der Höhe und der doppelten Tiefe dieselbe ist. Demnach müßte eine Pfeife von 20 cm Länge und 2 cm Tiefe denselben Ton geben wie eine andere von 16 cm Länge und 4 cm Tiefe.

Wenn zwei Orgelpfeifen einander ähnlich sind, d. h. wenn die entsprechenden Dimensionen in gleichem Verhältnis stehen, und wenn der Mund bei verhältnismäßiger Größe in beiden die gleiche Stellung hat, so verhalten sich die Schwingungszahlen ihrer Töne umgekehrt wie die entsprechenden Dimensionen. Eine Pfeife *A* gibt z. B. einen Ton, welcher die nächst niedere Oktave des von einer Pfeife *B* gegebenen Tones ist, wenn *A* doppelt so lang, doppelt so breit und doppelt so tief ist als *B*.

Die Größe und Stellung des Mundloches hat einen sehr bedeutenden Einfluß auf die Tonhöhe der Pfeife. Es ist schon bemerkt worden, daß, wenn man die Weite des Mundloches, d. h. die Entfernung der Lippen, vergrößert, die Röhre leichter ihren Grundton gibt; daß sie aber leichter die Obertöne gibt, wenn man das Mundloch enger macht. Einen anderen Einfluß übt die Breite des Mundloches aus. Wenn z. B. in einer quadratischen Röhre das Mundloch die ganze Breite einer Seite hat, so erhält man einen höheren Ton, als wenn man das Mundloch schmaler macht; man kann auf diese Weise den Ton selbst bis zur Septime herunterstimmen, besonders wenn die Röhre fast kubisch ist. Deshalb bringen auch die Orgelbauer zu beiden Seiten des Mundloches kleine Bleiplatten an, welche Ohren genannt werden, und die man durch Biegen etwas nähert oder voneinander entfernt, um die Tonhöhe zu regulieren.

Man weiß schon lange durch oft wiederholte Versuche, daß der Ton eines Hornes und einer Trompete von dem Stoff des Instrumentes und dem Grade der Härtung abhängt; ein Horn z. B., welches im Feuer gehärtet ist, ohne daß man seine Gestalt geändert hat, würde nur gedämpfte Töne geben. Die Orgelbauer kennen auch den Einfluß des Stoffes der Röhren auf die Natur des Tones, und sie versichern, daß man die Beschaffenheit des Zinns an den Metallröhren oder die des Holzes an den Holzröhren nur etwas zu verändern brauche, um das Instrument schlecht zu machen. Diese Beobachtungen sind durch die zahlreichen Versuche bestätigt worden, welche Savart mit Röhren von mehr oder weniger gespanntem Pergament und mehr oder weniger feuchtem Papier angestellt hat; er fand: 1. daß der Ton in quadratischen Röhren, deren Seite 2 cm und deren Höhe 30 cm beträgt, sich um mehr als eine Oktave herunterstimmen läßt, wenn man das Papier, welches die Wände bildet, mehr und mehr anfeuchtet; dieses Papier war auf die festen Kanten des Prismas wie auf einen Rahmen aufgeklebt; 2. daß sich der Ton durch diese Mittel um so leichter herabstimmen läßt, je kürzer die Röhren sind; in kubischen Röhren kann man ihn um mehr als zwei Oktaven herabstimmen; 3. daß man nur einen Teil der Wand aus Papier oder Pergament zu machen braucht, um den Ton herabzustimmen.

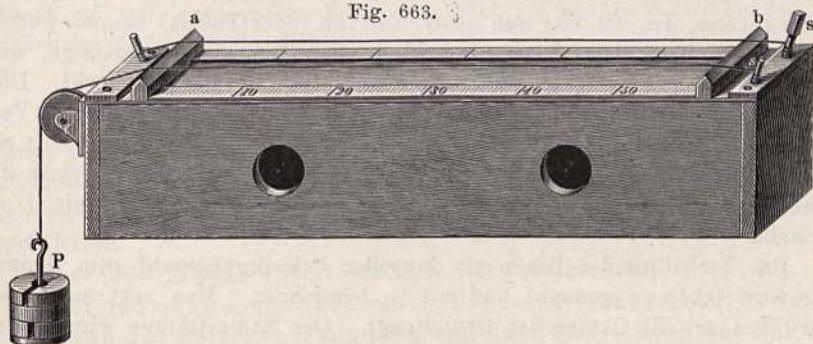
Zweites Kapitel.

Von den Tönen.

§ 217. **Die musikalischen Intervalle.** Die Lehre von den Tönen in bezug auf ihre musikalische Verwendung, sei es in ihrer Aufeinanderfolge (Melodie), sei es in ihrem Zusammenklange (Harmonie), überschreitet das Gebiet der Physik und gehört größtenteils den Gebieten der Physiologie und der theoretischen Musik an. Der Umstand, daß es gelungen ist, manche ästhetische Gesetze auf physikalische Grundlagen zurückzuführen, veranlaßt uns, die Elemente der Lehre von den musikalischen Tönen hier auseinander zu setzen; für ein eingehenderes Studium dieses hoch interessanten Gegenstandes müssen wir auf Spezialwerke verweisen¹⁾.

Nach den Ergebnissen der §§ 211 und 212 sind wir in den Stand gesetzt, Töne verschiedener Höhe, deren relative Schwingungszahlen uns bekannt sind, hervorzurufen. Die Orgelpfeifen würden sich hierzu insofern am besten eignen, als sie, insbesondere die gedeckten Pfeifen, fast ganz reine Töne liefern. Die gespannten Saiten geben, mit den Fingern gezupft oder mit dem Bogen gestrichen, keine isolierte Töne, sondern Klänge, welche außer dem Hauptton noch höhere (Obertöne) enthalten. Da dies jedoch für die nächsten Zwecke nicht stört, dagegen die Verkürzung der Saiten leichter

Fig. 663.



durchführbar ist, als der Übergang von längeren Pfeifen zu kürzeren, so wollen wir die Experimente zur Ableitung der musikalischen Tonstufen (Intervalle) und der Zusammenklänge (Akkorde) an einem Instrumente angestellt denken, welches unter dem Namen Monochord bekannt ist, ob-

¹⁾ z. B. in H. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. E. Mach, Einleitung in die Helmholtzsche Musiktheorie. A. v. Öttingen, Harmoniesystem in dualer Entwicklung.

wohl es gewöhnlich mit mehr als nur einer Saite bespannt ist. Fig. 663 stellt ein Monochord mit zwei Saiten dar.

Die beiden Saiten sind über einem Kasten ausgespannt, der aus vier starken Seitenbrettern besteht, auf welche ein Resonanzboden, d. h. ein ganz dünnes Brett von Tannenholz, geleimt ist, dessen Bedeutung später erläutert werden soll. Die beiden Stege *a* und *b* begrenzen den frei schwingenden Teil der Saiten, die eine derselben wird durch die Gewichte *P* gespannt, die andere durch den Stimmstock *s*.

Um eine der beiden Saiten zu verkürzen, ohne gleichzeitig ihre Spannung zu ändern, bedient man sich des beweglichen Steges (Fig. 664), indem man die Saite zwischen dem Fußstück *ns* und dem Deckel *pr* einklemmt. Die klemmenden Flächen sind mit weichem Leder belegt. Hierdurch wird verhindert, daß sich die Schwingungen auf den nicht benutzten Teil der Saite übertragen.

Fig. 664.



Wir beginnen damit, daß wir die beiden Saiten bei gleicher Länge auf die gleiche Tonhöhe bringen, indem wir die Spannung der einen oder der anderen so lange ändern, bis wir keinen Unterschied der Töne mehr wahrnehmen. Dabei wird freilich vorausgesetzt, daß wir entweder selbst ein hinreichend entwickeltes musikalisches Gehör haben, oder uns durch ein solches unterstützen lassen. Die absolute Höhe des Tones ist dabei ganz gleichgültig. Das Verhältnis der beiden gleichen Töne wird Unisono genannt und durch den Bruch $\frac{1}{1}$ ausgedrückt.

Verkürzen wir nun die eine Saite auf die Hälfte, so muß nach § 211 die Wellenlänge auch auf die Hälfte, mithin die Schwingungszahl auf das Doppelte gebracht werden. Der Ton, den nun die Saite gibt, hat trotz seiner bedeutend größeren Höhe einen auffallend ähnlichen Charakter wie der tiefere der anderen Saite; er ist gewissermaßen eine Wiederholung des letzteren in höherer Tonlage. Auch hat er die Eigenschaft, daß er mit dem tieferen Tone, den wir von nun an Grundton (oder Tonica) nennen wollen, zusammen sich zu einem harmonisch klingenden Tongemisch vereinigt, welches sich als angenehm empfundener Klang (Konsonanz) darstellt. Dies wird am besten dadurch bemerkbar gemacht, daß man durch kleine Verschiebungen des Steges das Tonverhältnis ein wenig ändert. Sofort tritt ein äußerst unangenehmes Tongemisch (Dissonanz) auf, welches wieder in die Konsonanz zurückverwandelt wird, sowie man das Saitenverhältnis 1 : 2 herstellt.

Das Verhältnis des Tones mit doppelter Schwingungszahl zum Grundtone wird Oktave genannt und mit $\frac{2}{1}$ bezeichnet. Man sagt auch, der obere Ton sei die Oktave des Grundtones. Der Name Oktave wird später seine Erklärung finden.

Durch Verschieben des Steges von der Lage, welche der halb so langen Saite bis zu jener, die der ursprünglichen Länge entspricht und wiederholtes gleichzeitiges Anstimmen der beiden Saiten, findet man dann, das zwischen Unisono und Oktave noch mehrere Verhältnisse der Tonhöhen eine Konsonanz liefern, während alle zwischen diesen liegenden Verhältnisse mehr oder weniger ausgesprochene Dissonanzen liefern. Die Konsonanzen treten auf, wenn die Saite auf $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ ihrer Anfangslänge verkürzt ist. Dabei ist die Konsonanz um so vollkommener, je kleiner die Zahlen dieser

Brüche sind, so daß also unter obigen Verhältnissen $\frac{2}{3}$ die beste, $\frac{5}{6}$ die wenigst vollkommene Konsonanz geben. Das Verhältnis $\frac{6}{7}$ gibt bereits eine starke Dissonanz. Die Schwingungszahl des Tones der Saitenlänge $\frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{2}$ mal so groß als jene des Grundtones, dessen Schwingungszahl wir zur Einheit wählen. Das Tonverhältnis $\frac{3}{2}$ wird Quinte genannt. Die Namen der übrigen konsonierenden Tonverhältnisse sind in der folgenden Zusammenstellung enthalten:

Relative Saitenlänge und Schwingungszahl des Grundtones	Relative Saitenlänge des höheren Tones	Relative Schwingungszahl des höheren Tones	Name des Tonverhältnisses (Intervalls)
1	1	1	Unisono
1	$\frac{1}{2}$	2	Oktave
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	Quinte
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	Quarte
1	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$	Sexte
1	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	Große Terz
1	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{5}$	Kleine Terz

Verkürzt man die Saite noch weiter als bis zur Hälfte, so begegnet man noch weiteren konsonierenden Tönen. Bei der Saitenlänge $\frac{1}{3}$ erhält man den Ton mit der relativen Schwingungszahl 3, welcher Duodezime genannt wird und zugleich die Quinte der Oktave des Grundtones ist. Bei der Saitenlänge $\frac{1}{4}$ erhält man die Oktave der Oktave, oder die zweite Oktave (Doppeloktave) des Grundtones mit der relativen Schwingungszahl 4. Solcher Oktaven gibt es also eine ganze Reihe, sie entsprechen einer Reihe von Tönen mit stets verdoppelter Schwingungszahl; d. h. ihre Schwingungszahlen stehen im Verhältnis der Zahlen:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32 \dots$$

Ändert man bei obigen Experimenten Länge oder Spannung der Saite, deren Ton als Grundton gewählt wird, so daß also die absolute Höhe des letzteren verschiedene Werte annimmt, so gelten dennoch für die relativen Schwingungszahlen der zugehörigen konsonierenden Töne dieselben Zahlenverhältnisse.

Aus dieser Tatsache folgt demnach der wichtige Satz:

Der musikalische Wert einer Tonstufe (eines Intervalls) ist nicht von der Differenz, sondern von dem Quotienten der Schwingungszahlen der Töne abhängig.

Wir wollen diesen Fundamentalsatz der Tonlehre noch durch ein Zahlenbeispiel erläutern. Angenommen, eine Saite mache 48 Schwingungen in der Sekunde. Wählen wir diesen Ton als Grundton, so entsprechen seiner Quinte $48 \times \frac{3}{2} = 72$ Schwingungen.

Die Quinte hat also diesmal um 24 Schwingungen mehr als der Grundton. Wählen wir jetzt den Grundton um eine Oktave höher, also zu 96 Schwingungen, so kommen wir keineswegs auf die Quinte dieses Tones, indem wir

wiederum 24 addieren. Der Ton $96 + 24 = 120$ ist vielmehr identisch mit der großen Terz von dem Tone 96. Um die Quinte des neuen Grundtones 96 zu erhalten, müssen wir diese Zahl mit der für die Quinte charakteristischen Verhältniszahl $\frac{3}{2}$ multiplizieren, wodurch wir 144 erhalten. Die neue Quinte hat dann nicht um 24, sondern um 48 Schwingungen mehr als der neue Grundton.

Man kann das auch so ausdrücken: Will man in musikalisch gleichwertigen Tonstufen aufsteigen, so daß also die nacheinander erreichten musikalischen Tonhöhen eine arithmetische Reihe (I. Ordnung) bilden, so müssen die Schwingungszahlen in geometrischer Reihe (I. Ordnung) fortschreiten.

Ein Beispiel bildet die oben angeführte Reihe der Oktaven.

Da die Logarithmen der Glieder einer geometrischen Reihe unter sich eine arithmetische Reihe bilden, so kann man auch sagen: Die musikalischen Werte der Tonhöhen verhalten sich wie die Logarithmen der Schwingungszahlen¹⁾.

§ 218. Die Tonleitern. Unter einer Tonleiter (Skala) versteht man die vollständige Reihe der innerhalb einer Oktave gelegenen, nach der Höhe geordneten Töne, welche in einem Musikwerke gebraucht werden.

Die heute unter den Kulturvölkern gebrauchten Tonleitern sind das Produkt eines über 2000 Jahre dauernden Entwicklungsprozesses, dessen Erörterung in die Geschichte der Musik gehört. Hier mögen die folgenden Bemerkungen genügen.

Die Musik war ursprünglich bis in das 10. Jahrhundert im wesentlichen homophon, das heißt einstimmig. Wirken mehrere Stimmen mit, so hatten sie gleichzeitig dieselbe Tonhöhe, oder unterschieden sich doch nur durch das Intervall einer Oktave. Ein gleichzeitiges Zusammenwirken verschieden hoher Töne, eine Harmonie, gab es nicht, sondern nur ein Fortschreiten nach Tönen verschiedener Höhe, eine Melodie. Dabei wurde anfangs besonderer Wert darauf gelegt, daß die unmittelbar aufeinander folgenden Töne möglichst vollkommene Konsonanz zueinander besaßen. Da dies nach der Oktave am meisten bei der Quinte, welcher das einfache Verhältnis $\frac{3}{2}$ entspricht, der Fall ist, so entstanden die ältesten Tonleitern (bei den Chinesen und Griechen) aus Folgen von Oktaven und Quinten. Gehen wir von einem Grundton 1 um ein Quintenintervall aufwärts und von seiner Oktave 2 um ein Quintenintervall abwärts, so erhalten wir die Tonreihe

$$1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad 2.$$

Dies sind die vier Töne, mit denen die Lyra der Griechen ursprünglich ausgerüstet war. Diese Tonleiter enthält die wichtigsten Intervalle der deklamierenden Rede. Bei einer Frage steigt die Stimme um eine Quart, bei der stärkeren Betonung eines Wortes um eine Quinte; am Schlusse der Rede fällt sie um eine Quinte. Zur musikalischen Begleitung einer Deklamation in gleicher Tonhöhe reichte also diese Tonleiter aus.

¹⁾ Es ist dieser Satz nur ein spezieller Fall des allgemeineren von Fechner aufgestellten „psychophysischen Gesetzes“, nach welchem überhaupt die Empfindungen fortschreiten wie die Logarithmen der Sinnesreize.

Wiederholt man dieses Verfahren, indem man von dem Ton $\frac{3}{2}$ noch einen Quintenschritt nach aufwärts, von dem Ton $\frac{4}{3}$ noch einen solchen abwärts macht, so erhält man die Tonreihe

$$\frac{8}{9} \quad 1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{9}{4}.$$

Die beiden neuen Töne liegen aber außerhalb der Oktave 1 — 2. In solchen Fällen entstand immer das Bedürfnis, diese Töne auch durch ihre Oktaven innerhalb des Intervalls 1 — 2 zu repräsentieren, um, falls die Stimme nicht weit genug in die Höhe oder Tiefe reichte, die unteren oder oberen Oktaven dem beabsichtigten Töne zu substituieren.

Hierdurch erhalten wir innerhalb des Intervalls 1 — 2 die Töne

$$1, \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{16}{9}, \quad 2.$$

Auf dieser Stufe der Entwicklung blieben die Chinesen stehen. Merkwürdigerweise liegt dieselbe Skala auch zahlreichen gälischen (schottischen und irischen) Volksmelodien zugrunde und verleiht denselben ihren eigentümlichen Charakter.

Die Griechen dagegen erweiterten unter Terpander und Pythagoras diese Skala, indem sie noch weitere Quintenschritte hinzufügten.

Gehen wir vom Grundton um eine Quinte hinab und um fünf Quinten hinauf, so erhalten wir

$$\frac{2}{3} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{9}{4} \quad \frac{27}{8} \quad \frac{81}{16} \quad \frac{243}{32}.$$

Ersetzen wir auch hier alle Töne, welche unter 1 und oberhalb 2 fallen durch ihre zwischen 1 und 2 fallenden Oktaven, so bekommen wir

$$\frac{4}{3} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{27}{16} \quad \frac{81}{64} \quad \frac{243}{128}$$

und wenn wir nach der Höhe ordnen und den Ton 2 hinzufügen, die Skala:

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{81}{64} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{27}{16} \quad \frac{243}{128} \quad 2,$$

welche als Pythagoräische Tonleiter bekannt ist und den späteren Skalen bis ins 16. Jahrhundert zur Grundlage gedient hat¹⁾. Aus ihr gingen auch die Skalen des Ambrosianischen und Gregorianischen Kirchengesanges hervor, welche sich in der römischen Kirche erhalten haben.

Nach dem Aufkommen der polyphonen Musik im 10. und 11. Jahrhundert und noch mehr seit der Entwicklung der harmonischen Musik vom 16. Jahrhundert an, konnten die Pythagoräische und die von ihr abstammenden Tonleitern nicht mehr genügen, da ihre Intervalle nur zum Fortschreiten nach einer Melodie, nicht aber zur Konstruktion harmonischer Akkorde geeignet waren. Es mußte also eine wesentliche Umbildung der Skala erfolgen, welche allmählich zur Konstruktion unserer jetzt geltenden beiden Tonleitern, der diatonischen Dur-Skala und Moll-Skala, führte. Von diesen beiden hat sich zuerst die erstere, dann die letztere entwickelt. Ihre jetzige Gestalt ist kaum 200 Jahre alt und ausschließliches Eigentum der germanischen, romanischen, keltischen und slavischen Völker.

Die folgende Zusammenstellung gibt für jede dieser beiden Tonleitern die Namen, Buchstabenzeichen und relativen Schwingungszahlen der Töne, denen noch die Intervalle (Quotienten) der Nachbartöne beigefügt sind.

¹⁾ Eine griechische Tonleiter findet sich merkwürdigerweise noch bei der in Tirol (Zillertal) gebrauchten Holzharmonika (Helmholtz, l. c., S. 443).

Dur-Skala.

Name	Prim	Sekunde	Große Terz	Quart	Quint	Große Sext	Große Septime	Oktave
Zeichen	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>c</i>
Relative Schwingungszahl . . .	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Intervalle		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

Moll-Skala¹⁾.

Name	Prim	Sekunde	Kleine Terz	Quart	Quint	Kleine Sext	Kleine Septime	Oktave
Zeichen	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>es</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>as</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
Relative Schwingungszahl . . .	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	2
Intervalle		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$

Aus dieser Zusammenstellung ist einmal erstens zu ersehen, woher die Namen Oktave, Quinte usw. stammen; es sind einfach die lateinischen Ordnungszahlen für die Glieder dieser Skalen. Ferner erkennt man, wenn man bei der Septime beginnt und statt des *h* der Durskala das *b* der Mollskala restituiert, die ursprüngliche alphabetische Ordnung der Buchstabenbezeichnung der Töne *a, b, c . . .*²⁾.

Beide Skalen haben mit der Pythagoräischen die Anzahl der Stufen, sowie die Höhe von fünf Tönen gemein; in allen drei Skalen sind die Terz, Sext und Septime abweichend.

In der Pythagoräischen Skala kommen zwischen den Nachbartönen die Intervalle $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{256}{243}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{256}{243}$ vor, also zuerst zwei größere Intervalle, dann ein kleineres, dann wieder drei der größeren, dann noch einmal das kleinere. Ähnlich ist die Anordnung in der Durskala, jedoch sind dort zwei unter sich verschiedene größere Intervalle $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$, das kleinere ist $\frac{16}{15}$. In der Mollskala finden sich dieselben Intervalle, jedoch in anderer Verteilung.

Unter den Tönen der Durskala sind alle mit Ausnahme der Sekunde und Septime mit dem Grundton konsonant, in der Mollskala ist es ebenso mit Ausnahme der Sext, welche dissonant ist.

Die Frage nach der Entstehung dieser Skalen ist verschieden beantwortet worden, sicherlich sind sie nicht auf einmal, etwa auf theoretischem

¹⁾ Die hier verzeichnete Mollskala wird insbesondere in absteigender Richtung gebraucht; beim Aufsteigen wird häufig die obere Hälfte der Töne der Durskala entnommen.

²⁾ Die Namen Dur und Moll stammen nicht, wie man meinen möchte, vom Charakter dieser Tonarten, sondern von den beiden Formen des *b*, wofür in der Durskala das eckige *b* (*♮*, *b durum*) in der Mollskala das runde *b* (*♭*, *b molle*) geschrieben wurde. Aus dem ersteren wurde das jetzige *h*.

Wege konstruiert worden, sondern allmählich durch das Bedürfnis der harmonischen Musik entstanden¹⁾).

Nach Chladni kann man sie aus den dreistimmigen Akkorden (Dreiklängen) ableiten. Bevor wir diese Ableitung wiedergeben, müssen wir zuvor einiges über die Akkorde selbst vortragen.

§ 219. Die Akkorde, Ableitung der Dur- und Mollskala. Unter einem Akkord versteht man im allgemeinen das Zusammenklingen zweier oder mehrerer unter sich konsonanter Töne. Die wichtigsten darunter sind die dreistimmigen Akkorde oder Dreiklänge, die Akkorde im engeren Sinne. Von diesen ist hier die Rede.

Um zu einem vorhandenen Grundton zwei Töne zu finden, welche mit ihm einen Dreiklang bilden, haben wir unter den Tönen, welche zu dem Grundton in Konsonanz stehen, zwei solche auszusuchen, welche auch unter sich in Konsonanz stehen, also auch unter sich ein Verhältnis der Schwingungszahlen besitzen, das durch Brüche mit den ganzen Zahlen 1 bis 6 ausdrückbar ist.

Bilden wir also zunächst alle Kombinationen zu drei aus den Tönen 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{5}$, welche an erster Stelle 1 haben. Es sind folgende zehn:

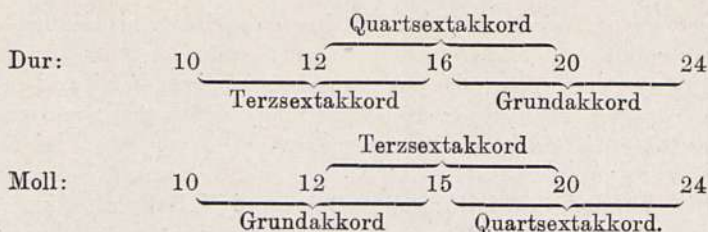
1,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{8}$	Dissonanz
1,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	Konsonanz
1,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{10}$	Dissonanz
1,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	Konsonanz
1,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{4}$	$\frac{16}{15}$	Dissonanz
1,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{5}$	Konsonanz
1,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{6}{5}$	$\frac{10}{9}$	Dissonanz
1,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	Konsonanz
1,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{6}{5}$	$\frac{25}{24}$	Dissonanz
1,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{6}{5}$	$\frac{25}{18}$	Dissonanz

Die in der vierten Kolumne angeschriebenen Verhältnisse zwischen dem zweiten und dritten Tone der betreffenden Kombination lassen erkennen, daß nur vier derselben zu einem wohlklingenden Akkord geeignet sind. Schreiben wir diese vier Akkorde heraus und ersetzen die weniger übersichtlichen Brüche durch ganze Zahlen, die in demselben Verhältnisse stehen, so erhalten wir:

- I. $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 4 : 5 : 6 = 16 : 20 : 24$ Durgrundakkord
(Durdreiklang).
- II. $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2} = 10 : 12 : 15$ Mollgrundakkord
(Molldreiklang).
- III. $1 : \frac{5}{4} : \frac{5}{3} = 12 : 15 : 20$ Mollterzsextakkord
(Mollsextakkord).
- IV. $1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 3 : 4 : 5 = 12 : 16 : 20$ Durquartsextakkord.

Um diese vier Akkorde und noch zwei andere, die aus ihnen durch „Umkehrung“ hervorgehen, herzustellen, benötigt man aber nur zwei Reihen von Tönen, wie das folgende Schema zeigt:

¹⁾ Näheres hierüber in Werken über Geschichte der Musik, z. B. in jenem von A. W. Ambros.



Die beiden noch fehlenden Akkorde sind also:

V. $1 : \frac{6}{5} : \frac{8}{5} = 10 : 12 : 16$ Durterzsextakkord (Dursextakkord).

VI. $1 : \frac{4}{3} : \frac{8}{5} = 15 : 20 : 24$ Mollquartsextakkord.

Unter der Umkehrung eines Akkordes versteht man die Vertauschung des tiefsten Tones desselben mit seiner Oktave. Die etwas unkonsequente Bezeichnung ist aus Obigem zu entnehmen.

Die beiden Grundakkorde, welche als Dur- und Molldreiklang im engeren Sinne bezeichnet werden, bilden den Ausgangspunkt zur Entwicklung der beiden Tonleitern. Ihr charakteristischer Unterschied besteht in der Terz. Für Dur ist die große Terz $\frac{5}{4}$, für Moll die kleine Terz $\frac{6}{5}$ als zweiter Ton vorhanden.

Die Entwicklung der Durskala wäre nun nach Chladni so zu denken:

Man setzt an den Durakkord oben und unten je zwei Töne an von solcher Höhe, daß sie mit ihrem Nachbarton nach unten und oben wiederum je einen Durakkord bilden; nämlich:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \\
 \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & & & & & \frac{15}{8} & \frac{9}{4} \\
 \hline
 \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & | & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{15}{8} & | \frac{9}{4}
 \end{array}$$

(Der Ton 1 wird Tonica, $\frac{3}{2}$ die Oberquint oder Dominante, $\frac{2}{3}$ die Unterquint oder Subdominante genannt.) Aus dieser Kette dreier Durdreiklänge, von denen je zwei einen Ton gemeinsam haben, überträgt man alle Töne, welche außerhalb der Grenzen der Oktave 1 bis 2 liegen, nach entsprechender Verdoppelung bzw. Halbierung in die Oktave hinein. So erhält man die Durskala:

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{15}{8} \quad 2.$$

Ähnlich entsteht die Mollskala nach folgendem Schma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{2} & \\
 \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & & & & & \frac{9}{5} & \frac{9}{4} \\
 \hline
 \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & | & 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{2} & \frac{9}{5} & | \frac{9}{4} \\
 \\
 1 & \frac{9}{8} & \frac{6}{5} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{8}{5} & \frac{9}{5} & 2^1).
 \end{array}$$

¹⁾ Die so theoretisch abgeleitete Mollskala wird in der praktischen Musik nur in absteigender Melodie verwendet. Als „harmonische“ Mollskala ist dafür die folgende im Gebrauch:

$1, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{15}{8}, 2,$
in welcher der Ton $\frac{9}{5}$ durch $\frac{15}{8}$ ersetzt ist. Für aufsteigende Melodie wird auch noch $\frac{9}{5}$ durch $\frac{5}{3}$ ersetzt, so daß die Skala lautet:

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{15}{8} \quad 2.$$

Sie besteht aus der unteren Hälfte der Mollskala und der oberen Hälfte der Durskala. Diese Abänderungen beruhen auf praktischen Gründen, deren Erörterung über den Rahmen unseres Buches hinausgehen würde.

Ist auch diese Entstehung der beiden Skalen vielleicht nicht historisch sicher gestellt, so ist sie doch sehr geeignet, begreiflich zu machen, daß dieselben den Anforderungen der harmonischen Musik sehr entsprechen, da sie aus Akkorden aufgebaut sind.

Das für die Mollskala charakteristische Intervall $\frac{6}{5}$ ist an der Grenze der Konsonanz und wurde in älterer Zeit nicht für zulässig gehalten. Gerade dieser Umstand ist für den musikalischen Charakter der Molltonarten von entscheidendem Einfluß. Nach Helmholtz¹⁾ ist der Charakter beider Systeme folgender: „Das Dursystem ist für alle fertigen in sich klaren Stimmungen gut geeignet, für kräftig entschlossene, wie sanfte oder süße, selbst für trauernde, wenn die Trauer in den Zustand schwärmerischer, weicher Sehnsucht übergegangen ist. Aber es paßt durchaus nicht für unklare, trübe, unfertige Stimmungen, oder für den Ausdruck des Unheimlichen, Wüsten, Rätselhaften oder Mystischen, des Rohen, der künstlerischen Schönheit Widerstrebenden, und gerade für solche brauchen wir das Mollsystem mit seinen verschleierte Wohlklängen, seiner veränderlichen Tonleiter, seinen leicht ausweichenden Modulationen und dem weniger deutlich ins Gehör fallenden Prinzip seines Baues²⁾.“

§ 220. Erweiterung der Tonleiter. Fassen wir nochmals die beiden auf S. 636 angeführten Tonleitern ins Auge, so sehen wir, daß die Intervalle je zweier aufeinander folgender Töne drei verschiedene Werte haben, nämlich:

$$\frac{9}{8}, \quad \frac{10}{9}, \quad \frac{16}{15}.$$

Nun ist

$$\frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$$

und

$$\frac{16}{15} = \frac{10}{9} \cdot \frac{24}{25} = \frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81}.$$

Man pflegt das Intervall $\frac{9}{8}$ einen „großen ganzen Ton“ zu nennen; demnach wäre also beispielsweise der Ton *d* um einen großen ganzen Ton höher als *c*.

Das Intervall $\frac{10}{9}$ wird ein „kleiner ganzer Ton“ genannt. Dieses Intervall unterscheidet sich von dem vorigen um $\frac{80}{81}$ oder um ein „Komma“; das Intervall $\frac{16}{15}$ wird ein „großer halber Ton“, das Intervall $\frac{25}{24}$ ein „kleiner halber Ton“ genannt.

Da $\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24}$, so kann man sagen, das Intervall des kleinen ganzen Tones kann in zwei Intervalle zerlegt werden, wovon das eine der große halbe, das andere der kleine halbe Ton ist.

Diese Bezeichnungsweise ist zwar nicht glücklich gewählt, einmal, weil sie zu der unrichtigen Vorstellung verleiten kann, daß die sogenannten halben Töne wirklich halb so große Tonstufen vorstellen als die ganzen Töne, sowie auch, weil sie zwei verschiedene Einheiten für den „ganzen Ton“ annimmt; da jedoch diese Bezeichnung oft gebraucht wird, mußten wir sie hier auch mitteilen. Es folgen also in den beiden gebräuchlichen Tonleitern die ein-

¹⁾ Lehre von den Tonempfindungen, S. 489.

²⁾ Eine eigenartige Auffassung des Charakters beider Tonarten, sowie ihres Verhältnisses zueinander ist von A. v. Oettingen in seinem Buche „Harmoniesystem in dualer Entwicklung“ entwickelt worden. Danach wäre das Mollsystem gewissermaßen als Spiegelbild des Dursystems aufzufassen.

zelen Töne in wechselnden Intervallen von großen ganzen, kleinen ganzen und großen halben Tönen. Diese Ungleichheit der Tonstufen führt zu gewissen Konsequenzen, die wir jetzt erläutern wollen.

Will man, von irgend einem willkürlich gewählten Tone ausgehend, eine beliebige Melodie hervorbringen, so hat dies keine Schwierigkeit, falls man mit einem musikalischen Instrument versehen ist, welches, wie die menschliche Stimme oder die Violine, innerhalb seines Tonumfanges Töne jeder beliebigen Schwingungszahl hervorzurufen gestattet. Nicht so bei den übrigen Instrumenten, welche nur eine beschränkte Anzahl von Tönen vorausbestimmter Tonhöhe zu entwickeln gestatten, wie z. B. die Orgel, das Klavier, die Guitarre, die Zither sind. Wir wollen dies durch ein Beispiel erläutern. Die allbekannte Melodie zu dem Anfang des Liedes „Was ist des Deutschen Vaterland?“ besteht aus folgender Tonreihe (wobei von der Bezeichnung des Rhythmus abgesehen wird):

Was ist des Deut - schen Va - ter - land?

$$\begin{array}{cccccccc} c & d & e & f & c & a & g & f \\ 1 & \frac{3}{8} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & 1 & \frac{5}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} \dots \dots \dots (1) \end{array}$$

Diese Melodie kann also auf jedem Instrumente gespielt werden, welches die Durtonleiter enthält, wenn man nur mit dem für c bestimmten Tone beginnt. Es würden z. B. die weißen (Unter-)Tasten des Klaviers, welche die Reihe der Durskala enthalten, dazu ausreichen, falls man mit der Taste für c beginnt.

Wollte man nun aber die ganze Melodie um eine Quinte höher spielen, also die Schwingungszahlen sämtlicher Töne im Verhältnis von 2 auf 3 vergrößern, so wäre eine Reihe von Tönen erforderlich, die aus obiger durch Multiplikation mit $\frac{3}{2}$ hervorgeht.

Diese wäre:

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{3}{2} & \frac{27}{16} & \frac{15}{8} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{9}{4} & 2 \dots \dots \dots (2) \\ g & & h & c' & g & e' & d' & c' \end{array}$$

Wie man sieht, sind mit einer Ausnahme alle erforderlichen Töne in der Durtonleiter vorhanden, wenn man die nächst höhere Oktave, deren Töne wir mit $c' d' e' \dots$ bezeichnen, zu Hilfe nimmt. Man könnte also alle erforderlichen Töne auf den weißen Tasten des Klaviers finden, indem man mit der Taste für g beginnt, nur den zweiten nicht, dessen Höhe $\frac{27}{16}$ in der Durtonleiter nicht vorkommt. Nun ist aber $\frac{27}{16} = \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80}$; der Ton $\frac{27}{16}$ unterscheidet sich also von dem Tone $\frac{5}{3}$, das ist von dem a der Durskala nur um das Intervall $\frac{81}{80}$, also um ein Komma, von dem man behauptet, daß es für das Gehör der meisten Menschen als unmerkbar klein nicht in Betracht komme. Lassen wir uns diese Vernachlässigung gefallen, so können wir obige Melodie um eine Quinte höher mittels der Töne

$$g (a) h c' g e' d' c'$$

wiedergeben.

Wollten wir aber z. B. statt um eine Quinte nur um eine Terz in die Höhe gehen, also die Melodie von der Taste für e anfangend spielen, so würden wir selbst mit der Vernachlässigung eines Komma mit den Tönen der Durskala nicht ausreichen, also auf den weißen Tasten des Klaviers die

Melodie nicht unverändert spielen können. Denn multiplizieren wir die Reihe (1) mit $\frac{5}{4}$, so erhalten wir die Tonhöhen:

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{5}{4} & \frac{45}{32} & \frac{25}{16} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{25}{12} & \frac{15}{8} & \frac{5}{3} \\ e & & & a & e & & h & a \end{array}$$

Von diesen Tönen sind aber nur die mit den Buchstaben *e, a, e, h, a* bezeichneten vorhanden. Wir brauchen also drei neue Töne, zu deren Herstellung die schwarzen (Ober-)Tasten des Klaviers bestimmt sind.

Wir wollen nun aber diese Aufgabe allgemein lösen, nämlich alle Töne berechnen, welche wir brauchen, um irgend eine beliebige, im Dursystem komponierte Melodie von jedem der sieben Töne der Skala aus spielen zu können. Wir erhalten die neuen Tonreihen, indem wir die Zahlen der ursprünglichen der Reihe nach mit $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$. . . bis $\frac{15}{8}$ multiplizieren. Die nachfolgende Tabelle enthält die Resultate dieser Rechnung; die neuen, rechteckig eingerahmten Tonreihen sind so untereinander gestellt, daß die gleich hohen Töne senkrecht untereinander liegen. Die über die ursprüngliche Oktave hinaus erhöhten Töne sind nach Halbierung in die entsprechende Stelle dieser Oktave eingesetzt. Die Buchstaben der ersten Kolumne geben den Ton an, von welchem jede neue Skala ausgeht.

Berechnung der relativen Tonhöhen zur Erweiterung der Durskala.

	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>c'</i>	<i>d'</i>	<i>e'</i>	<i>f'</i>	<i>g'</i>	<i>a'</i>
<i>c</i>	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$
<i>d</i>	$\frac{135}{128}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{135}{64}$
<i>e</i>	$\frac{25}{24}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{75}{32}$
<i>f</i>	1	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	2	$\frac{20}{9}$	$\frac{5}{2}$.	.	.
<i>g</i>	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$.	.
<i>a</i>	$\frac{25}{24}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{25}{8}$.
<i>h</i>	$\frac{135}{128}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{225}{128}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{135}{64}$	$\frac{75}{32}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{225}{64}$

Bevor wir die Resultate dieser Tabelle der Besprechung unterziehen, wollen wir noch berechnen, welche Töne wir benötigen, um auch nach dem Mollsystem von den sieben ursprünglichen Tönen aus die Skala reproduzieren zu können. Die Tabelle enthält die Resultate dieser Rechnung; sie ist ganz analog der obigen für das Durssystem abgeleiteten Tabelle ausgeführt.

Berechnung der relativen Tonhöhen zur Erweiterung der Mollskala.

	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>es</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>as</i>	<i>b</i>	<i>c'</i>	<i>d'</i>	<i>es'</i>	<i>f'</i>	<i>g'</i>	<i>as'</i>
<i>c</i>	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	·	·	·	·	·	·
<i>d</i>	$\frac{81}{80}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{81}{40}$	·	·	·	·	·
<i>es</i>	$\frac{24}{25}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{48}{25}$	$\frac{54}{25}$	·	·	·	·
<i>f</i>	1	$\frac{16}{15}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{9}$	2	$\frac{32}{15}$	$\frac{12}{5}$	·	·	·
<i>g</i>	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{9}{5}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{27}{10}$	·	·
<i>as</i>	$\frac{24}{25}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{32}{25}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{48}{25}$	$\frac{32}{15}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{64}{25}$	$\frac{72}{25}$	·
<i>b</i>	$\frac{81}{80}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{81}{50}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{81}{40}$	$\frac{54}{25}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{27}{10}$	$\frac{72}{25}$	$\frac{81}{25}$

Sämtliche auf diese Weise zur Ergänzung der Dur- und Mollskala benötigten Töne sind nun in der folgenden Tabelle der Tonhöhe nach geordnet zusammengestellt.

Diese Tabelle enthält in der ersten Kolumne angegeben, ob der betreffende Ton durch die Erweiterung der Dur- oder der Mollskala oder beider benötigt wird; dann folgt die Vertikalreihe der in den vorigen beiden Tabellen erhaltenen relativen Schwingungszahlen in Bruchform. Die nächste Vertikalreihe enthält dieselben Werte zerlegt in Faktoren, aus denen man die Verhältnisse erkennt, in welchen die neuen Töne zu den ursprünglichen stehen. Man sieht, daß unter diesen Faktoren außer den ursprünglichen Intervallen der Durtonleiter

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2$$

nur noch das Intervall des sogenannten kleinen halben Tones $\frac{25}{24}$ und des Komma $\frac{81}{80}$ neben deren Reziproken vorkommen. Die übrigen Bestandteile der Tabelle sollen im nächsten Paragraphen besprochen werden.

Tonsystem	Relative Schwingungszahlen	und deren Zerlegung in Intervalle	Bezeichnung	Relative Schwingungszahlen in Dezimalbrüchen		
				bei reiner Stimmung	bei gleichschwebend temperierter Stimmung	
Dur, Moll	1	= 1	} c	1,00000	1,00000	
Moll	$\frac{81}{80}$	= 1 $\cdot \frac{81}{80}$				
Dur	$\frac{25}{24}$	= 1 $\cdot \frac{25}{24}$	} \sharp c = cis	1,04166	} 1,05946	
Dur	$\frac{135}{128}$	= 1 $\cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$				
Moll	$\frac{16}{15}$	= $\frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81}$	} \flat d = des	1,08000		
Moll	$\frac{27}{25}$	= $\frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25}$				
Dur	$\frac{10}{9}$	= $\frac{9}{8} \cdot \frac{80}{80}$	} d	1,12500	1,12246	
Dur, Moll	$\frac{9}{8}$	= $\frac{9}{8}$				
Dur	$\frac{75}{64}$	= $\frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24}$	} \sharp d = dis	1,17187	} 1,18921	
Moll	$\frac{6}{5}$	= $\frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25}$				
Dur	$\frac{5}{4}$	= $\frac{5}{4}$	} e	1,25000		1,25992
Dur, Moll	$\frac{81}{64}$	= $\frac{5}{4} \cdot \frac{81}{80}$				
Moll	$\frac{32}{25}$	= $\frac{4}{3} \cdot \frac{24}{25}$	} \flat f = fes	1,28000	} 1,33484	
**	$\frac{125}{96}$	= $\frac{5}{4} \cdot \frac{25}{24}$				
Dur, Moll	$\frac{4}{3}$	= $\frac{4}{3}$	} f	1,33333		
Moll	$\frac{27}{20}$	= $\frac{4}{3} \cdot \frac{81}{80}$				
Dur	$\frac{25}{18}$	= $\frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24}$	} \sharp f = fis	1,38889	} 1,41421	
Dur	$\frac{45}{32}$	= $\frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$				
Moll	$\frac{36}{25}$	= $\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25}$	} \flat g = ges	1,44000		
Dur, Moll	$\frac{3}{2}$	= $\frac{3}{2}$				
Dur	$\frac{25}{16}$	= $\frac{3}{2} \cdot \frac{25}{24}$	} \sharp g = gis	1,56250	} 1,58740	
Moll	$\frac{8}{5}$	= $\frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25}$				
Moll	$\frac{81}{50}$	= $\frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{81}{80}$	} a	1,66667		1,68179
Dur	$\frac{5}{3}$	= $\frac{5}{3}$				
Dur, Moll	$\frac{27}{16}$	= $\frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80}$	} \sharp a = ais	1,73611	} 1,78180	
*	$\frac{125}{72}$	= $\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24}$				
Dur	$\frac{225}{128}$	= $\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$	} b	1,80000		
Moll	$\frac{9}{5}$	= $\frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25}$				
Dur, Moll	$\frac{16}{9}$	= $\frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{81}{80}$	} h	1,87500	} 1,88775	
Dur	$\frac{15}{8}$	= $\frac{15}{8}$				
Moll	$\frac{48}{25}$	= $2 \cdot \frac{24}{25}$	} \flat c = ces	1,92000		
**	$\frac{125}{64}$	= $\frac{15}{8} \cdot \frac{25}{24}$				
Dur, Moll	2	= 2	} c'	2,00000	2,00000	

§ 221. Reduktion der Tonleiter, Temperatur, chromatische Skala.

Die Beibehaltung der sämtlichen 30 Töne innerhalb der Oktave, auf welche wir im vorigen Paragraphen geführt wurden, scheidet an der Schwierigkeit, welche die Herstellung und Handhabung solcher musikalischer Instrumente bereiten würde, auf welchen eine solche Anzahl vorausgebildeter Töne vorhanden wäre¹⁾. Die menschliche Stimme und die Violine würden also keine Reduktion der Tonleiter erfordern, wohl aber z. B. die Orgel, das Klavier, die Harfe usw.

Die praktische Musik erlaubt sich daher nachfolgende Vereinfachungen. Die erste besteht darin, daß man das Komma vernachlässigt. Man setzt also z. B. für den Ton $^{81}_{80}$ den Ton 1, für $1 \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$ den Ton $1 \cdot \frac{25}{24}$ usw. Die Töne, welche so an Stelle der mit Komma behafteten treten, sind mit einer Ausnahme sämtlich zuvor vorhanden; nur der Ton $\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24}$ fehlt und wird daher der Konsequenz wegen eingeschaltet. (In der Tabelle mit * bezeichnet.) Die Tabelle enthält dann noch folgende Kategorien von Tönen: Erstens die ursprünglichen Töne der Durskala, welche mit den Buchstaben *c, d, e, f, g, a, h, c'* bezeichnet werden, dann Töne, welche aus diesen durch Erhöhung um das Intervall $\frac{25}{24}$ entstehen und mit den Bezeichnungen $\sharp c = cis$, $\sharp d = dis$, $\sharp f = fis$ usw. versehen werden, endlich Töne, welche aus den ursprünglichen durch Vertiefung um das Intervall $\frac{24}{25}$ entstehen; diese werden durch die Bezeichnungen $\flat d = des$, $\flat e = es$, $\flat f = fes$ usw. unterschieden. Die Töne $\frac{5}{4} \cdot \frac{25}{24} = \sharp e = eis$ und $\frac{15}{8} \cdot \frac{25}{24} \sharp h = his$ (in der Tabelle mit ** bezeichnet) werden durch obige Ableitung nicht erhalten, sind daher nachträglich eingefügt, um das System der um den Halbton erhöhten und vertieften Haupttöne konsequent zu ergänzen.

Übersichtlich zusammengestellt sind hiernach folgende Töne vorhanden:

Vertiefte Töne	Ursprüngliche Töne der Durskala	Erhöhte Töne
$\flat c = ces$	c	$\sharp c = cis$
$\flat d = des$	d	$\sharp d = dis$
$\flat e = es$	e	$\sharp e = eis$
$\flat f = fes$	f	$\sharp f = fis$
$\flat g = ges$	g	$\sharp g = gis$
$\flat a = as$	a	$\sharp a = ais$
$\flat h = b$	h	$\sharp h = his$
$\flat c' = ces'$	c'	$\sharp c' = cis'$

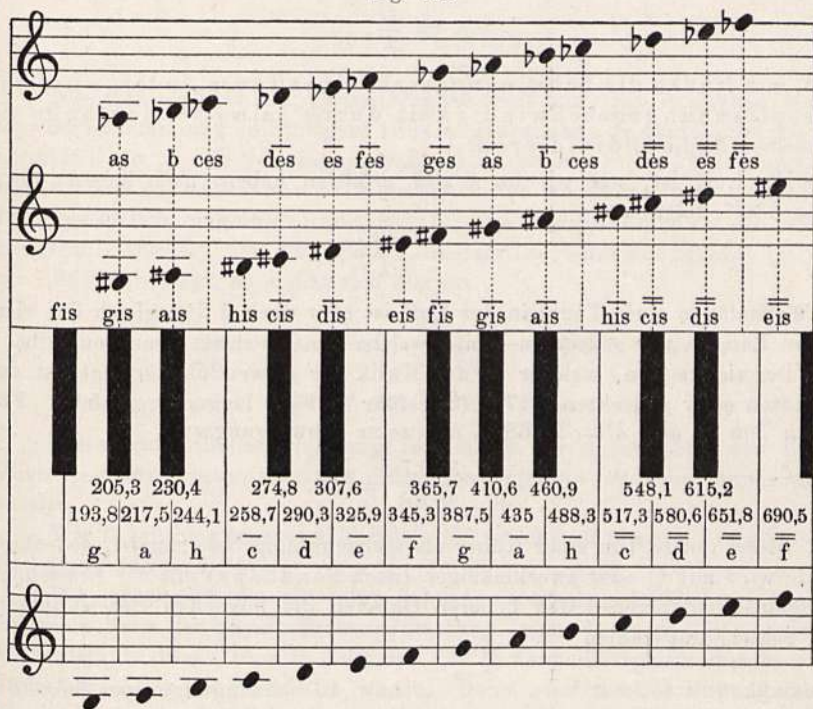
Von diesen Tönen fallen *ces* und *cis'* außerhalb der Oktave. Bezüglich der inkonsequenten Bezeichnung *b* statt *hes* gibt die Anmerkung 2) S. 634 Aufschluß. Die Töne *fes* und *eis*, sowie *ces'* und *his* greifen übereinander, d. h. das um den kleinen Halbton erhöhte *e* (bzw. *h*) ist höher als das ebenso viel vertiefte *f* (bzw. *c'*).

¹⁾ Vorschläge hierfür sind mehrfach (von Helmholtz, Appun u. a.) gemacht und im einzelnen auch mit Erfolg ausgeführt worden.

Inklusive der Oktave besteht demnach das so reduzierte Tonsystem aus 22 Tönen per Oktave, welche hinreichen würden, um, zwar nicht rein, aber doch mit keiner größeren Ungenauigkeit, als die Vernachlässigung eines Komma mit sich bringt, alle Melodien von jedem Tone der Dur- oder Mollskala anfangend spielen zu können.

Aber auch die Zahl von 22 Tönen erschien noch zu groß. Eine weitere ergiebige Reduktion auf nur 13 Töne (inkl. der Oktave) wurde dadurch erzielt, daß man die mehrfachen zwischen den ursprünglichen ganzen Tönen eingeschalteten Zwischentöne durch je einen ersetzte. Demgemäß wird an den betreffenden musikalischen Instrumenten für *cis* und *des*, *dis* und *es*, *e*

Fig. 665.



und *fes*, *eis* und *f*, *fis* und *ges*, *gis* und *as*, *ais* und *b*, *h* und *ces*, *his* und *c'* nur je ein Ton mittlerer Höhe substituiert. Die dadurch entstehenden Unreinheiten der Stimmung werden entweder zugunsten der Quinten auf die anderen Intervalle geschoben (ungleichschwebende Temperatur) oder es werden sämtliche 12 Intervalle der Oktave einander völlig gleich gemacht. (Gleichschwebende Temperatur.) Die Größe eines solchen Intervalles ergibt sich aus der Gleichung

$$i = \sqrt[12]{2} = 1,05946.$$

Die hieraus berechneten relativen Schwingungszahlen bei letzterer Stimmung sind in der letzten Vertikalreihe der Tabelle auf S. 641 aufgeführt und gestatten durch ihre Vergleichung mit den daneben stehenden Zahlen der reinen Stimmung ein Urteil über die Größe ihrer Abweichungen.

Die aus 12 gleichen Intervallen von je einem halben Tone zusammengesetzte Skala wird die chromatische Tonleiter genannt.

Indem wir hier unsere allerdings sehr lückenhaften Mitteilungen über die Tonleitern schließen, fügen wir noch zur Bequemlichkeit derjenigen Leser, welche nicht Musiker von Fach sind, die Bezeichnung der Töne durch die Notenschrift und die Schwingungszahlen und eine schematische Zeichnung der Klaviatur bei, welche das Auffinden der Töne bei Versuchen an Klavier oder Orgel erleichtern soll ¹⁾.

§ 222. Absolute Schwingungszahlen der Töne. Nach Gleichung (1), § 203 ist

$$n = \frac{C}{\lambda},$$

d. h. wir finden die Schwingungszahl eines Tones, indem wir seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch seine Wellenlänge (in demselben Medium) dividieren.

Für Luft ist, wie wir im § 202 erfahren haben (nach Régnault), $C = 330,7$, folglich

$$n = \frac{330,7}{\lambda},$$

die Wellenlänge eines Tones in der Luft ist aber nach § 212 gleich der vierfachen Länge einer gedeckten Pfeife, welche ihn (als ihren Grundton) gibt.

Der tiefste Ton, welcher in der Musik zur Anwendung kommt, ist der Grundton einer gedeckten 5,17 m (ungefähr 16 Fuß) langen Orgelpfeife. Für diesen Ton ist also $\lambda = 20,68$ m, also seine Schwingungszahl

$$n = \frac{330,7}{20,68} = 16.$$

Dieser tiefste Ton einer früher als sechzehnfüßig bezeichneten gedeckten Pfeife wird mit C oder zweckmäßiger (nach Sondhaus) mit c^{-3} bezeichnet. Demgemäß entsprechen den höheren Oktaven die folgenden Bezeichnungen und Schwingungszahlen

Das Subkontra $C = c^{-3}$	hat	16	Schwingungen	per	Sekunde
„ Kontra $C = c^{-2}$	„	32	„	„	„
„ große $C = c^{-1}$	„	64	„	„	„
„ kleine $C = c^0$	„	128	„	„	„
„ eingestrichene $C = c^1$	„	256	„	„	„
„ zweigestrichene $C = c^2$	„	512	„	„	„ usf.

Die hier angegebenen, nach den Potenzen von zwei fortschreitenden Tonhöhen sind von Sauveur vorgeschlagen und von Chladni adoptiert worden. Nach der hier angenommenen Sondhauschen Bezeichnung erhält man die absolute Schwingungszahl irgend eines Tones, indem man sich zu

¹⁾ Ausführlicheres in dem oben zitierten Werke von Helmholtz und anderen musiktheoretischen Werken.

dem Exponenten die Basis 2 denkt und für den Namen des Tones seine Schwingungszahl aus der kleinen Oktave setzt.

So z. B. ist

$$c^3 = c \cdot 2^3 = 128 \cdot 8 = 1024,$$

ebenso findet man

$$a^1 = a \cdot 2^1 = \frac{5}{3} \cdot c \cdot 2 = \frac{5}{3} \cdot 128 \cdot 2 = 426\frac{2}{3}.$$

Man nennt diese Stimmung auch wohl die physikalische. Sie bietet für die Berechnung manche Bequemlichkeit. Nach dieser Stimmung berechnet sich für das sogenannte Stimmgabel-*a* der eingestrichenen Oktave, also a^1 , wie eben gezeigt wurde, die Schwingungszahl

$$256 \cdot \frac{5}{3} = 426\frac{2}{3}.$$

Die von Scheibler vorgeschlagene und auf der deutschen Naturforscherversammlung zu Stuttgart 1834 angenommene deutsche Stimmung normierte für a^1 die Schwingungszahl 440, der ein $c^1 = 264$ entsprechen würde. Die französische Stimmung, durch ein Dekret vom 16. Februar 1859 gesetzlich eingeführt, normiert für das temperierte a^1 die Schwingungszahl 435¹⁾. Da für dieses die relative Schwingungszahl (S. 641) = 1,68179 beträgt, so ergibt sich hieraus

$$\text{für } c^1 \text{ der Wert } \frac{435}{1,68179} = 258,652,$$

$$\text{für } c^{-2} \text{ der Wert } 32,331.$$

Diese französische Stimmung ist am 18. November 1885 von der in Wien tagenden internationalen Stimmtongkonferenz einhellig angenommen worden.

Wir fügen hier noch zwei Tabellen bei, welche oft bequem zu gebrauchen sind (s. S. 646 und 647).

Die erste gibt die absoluten Schwingungszahlen sämtlicher Töne der Durskala nach der physikalischen Stimmung, also für $c^1 = 256$, sowie der Wellenlängen dieser Töne in Luft von 15° C, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit = 340 m angenommen wurde. Dabei sind die Schwingungszahlen, wie in Deutschland üblich, als Doppelschwingungen, die Wellenlängen ebenfalls als vollständig (Verdichtung und Verdünnung umfassend) angenommen.

Die zweite Tabelle enthält die absoluten Schwingungszahlen der temperierten chromatischen Tonleiter nach der internationalen Stimmung $a^1 = 435$ Doppelschwingungen. Dieses sind also die in der praktischen Musik geltenden Schwingungszahlen²⁾.

¹⁾ Die gesetzlich normierte Zahl lautet 870, weil in Frankreich nach einfachen Schwingungen, wie beim Pendel, gerechnet wird.

²⁾ Beim Singen und beim Violinspielen, wo alle Tonhöhen zur Verfügung stehen, bedient man sich der reinen Stimmung, da die temperierte nur jenen Instrumenten angepaßt ist, welche vorgebildete Töne haben, wie Klavier, Orgel usw.

Tabelle

der absoluten Schwingungszahlen der reinen Durscala nach der physikalischen Stimmung (Sauveur-Chladni) gegründet auf $c^1 = 256 = 2^8$ Doppelschwingungen; sowie der Wellenlängen in Luft von 15°C unter Annahme einer Schallgeschwindigkeit $= 340 \text{ m}$.

Bezeichnung		C	D	E	F	G	A	H
der	nach	Ut (Do)	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si
französischen und italienischen Musiker	deutschen und englischen Sondhaus							
$ut_{-2} - si_{-2}$	$c^{-3} - h^{-3}$	16 21,250	18 18,889	20 17,000	$21\frac{1}{3}$ 15,898	24 14,167	$26\frac{2}{3}$ 12,750	30 11,333
$ut_{-1} - si_{-1}$	$c^{-2} - h^{-2}$	32 10,625	36 9,444	40 8,500	$42\frac{2}{3}$ 7,969	48 7,083	$53\frac{1}{3}$ 6,375	60 5,867
$ut_1 - si_1$	$c^{-1} - h^{-1}$	64 5,312	72 4,722	80 4,250	$85\frac{1}{3}$ 3,984	96 3,541	$106\frac{2}{3}$ 3,187	120 2,883
$ut_2 - si_2$	$c^0 - h^0$	128 2,656	144 2,361	160 2,125	$170\frac{2}{3}$ 1,992	192 1,770	$213\frac{1}{3}$ 1,593	240 1,416
$ut_3 - si_3$	$c^1 - h^1$	256 1,328	288 1,180	320 1,062	$341\frac{1}{3}$ 0,996	384 0,885	$426\frac{2}{3}$ 0,796	480 0,708
$ut_4 - si_4$	$c^2 - h^2$	512 0,664	576 0,590	640 0,531	$682\frac{2}{3}$ 0,498	768 0,442	$853\frac{1}{3}$ 0,398	960 0,354
$ut_5 - si_5$	$c^3 - h^3$	1024 0,332	1152 0,295	1280 0,265	$1365\frac{1}{3}$ 0,249	1536 0,221	$1706\frac{2}{3}$ 0,199	1920 0,177
$ut_6 - si_6$	$c^4 - h^4$	2048 0,166	2304 0,147	2560 0,132	$2730\frac{2}{3}$ 0,124	3072 0,110	$3413\frac{1}{3}$ 0,100	3840 0,088

Tabelle
der

absoluten Schwingungszahlen nach der internationalen temperierten Stimmung, gegründet auf $a^1 = 435$ Doppelschwingungen
(870 einfache Schwingungen).

Bezeichnung		Absolute Tonhöhen.											
der	nach	C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A	Ais	H
französi- schen und italienischen Musiker	deut- schen n. eng- lischen haus	Ut(Do)		Ré		Mi	Fa	Sol		La		Si	
$ut_{-2} - si_{-2}$	$c^{-3} - h^{-3}$	16,165	17,127	18,145	19,225	20,368	21,579	22,862	24,221	25,662	27,188	28,804	30,517
$ut_{-1} - si_{-1}$	$c^{-2} - h^{-2}$	32,331	34,254	36,290	38,449	40,735	43,157	45,723	48,442	51,323	54,375	57,600	61,033
$ut_1 - si_1$	$c^{-1} - h^{-1}$	64,663	68,508	72,581	76,898	81,470	86,314	91,447	96,885	102,646	108,750	115,216	122,067
$ut_2 - si_2$	$c^0 - h^0$	129,326	137,016	145,163	153,796	162,940	172,629	182,895	193,770	205,292	217,500	230,433	244,135
$ut_3 - si_3$	$c^1 - h^1$	258,652	274,033	290,327	307,592	325,881	345,259	365,730	387,541	410,585	435	460,866	488,271
$ut_4 - si_4$	$c^2 - h^2$	517,305	548,066	580,655	615,183	651,763	690,519	731,580	775,082	821,171	870	921,733	976,542
$ut_5 - si_5$	$c^3 - h^3$	1034,610	1096,132	1161,310	1230,366	1303,526	1381,038	1463,160	1550,164	1642,342	1740	1843,466	1953,084
$ut_6 - si_6$	$c^4 - h^4$	2069,220	2192,264	2322,620	2460,732	2607,052	2762,076	2926,320	3100,328	3284,684	3480	3686,932	3906,168

¹⁾ Französische und italienische Bezeichnung; beim Singen wird statt Ut, Do gesetzt.

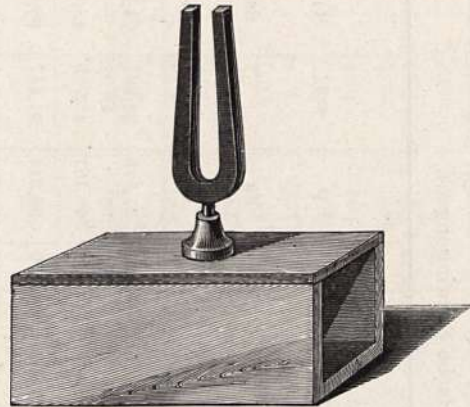
§ 223. **Die Stimmgabel.** Um einen Ton von bestimmter Höhe zu jeder Zeit reproduzieren zu können, denselben also gewissermaßen aufzubewahren, um danach musikalische Instrumente zu stimmen oder die Tonhöhe für die menschliche Stimme anzugeben, bedient man sich der Stimmgabel, und zwar insbesondere der auf a^1 gestimmten Normalstimmgabel von 435 Schwingungen (870 einfachen Schwingungen). Außerdem dient die Stimmgabel zu zahlreichen akustischen Experimenten und ist daher ein wichtiges Hilfsmittel der Experimentalphysik geworden, weshalb wir die Eigenschaften und die Behandlung derselben näher kennen lernen müssen.

Die Stimmgabel wird durch einen gabelförmig gebogenen Metallstab (meist ist sie aus Stahl gefertigt) gebildet, an welchen an der Biegungsstelle ein zum Halten dienendes Metallstäbchen angesetzt ist. Fig. 666 erläutert

Fig. 666.



Fig. 667.



die Art und Weise, wie die Stimmgabel schwingt, wenn sie ihren Grundton gibt.

Während die beiden Zinken gleichzeitig nach außen schwingen, geht der tiefste Punkt ein wenig nach oben; während sich die Zinken nähern, geht der tiefste Punkt nach unten. Der Stiel der Stimmgabel wird demnach in Längsschwingungen versetzt, was man direkt fühlt, wenn man ihn in der Hand hält. Noch deutlicher wird dies wahrgenommen, wenn man den Stiel der schwingenden Gabel ganz lose auf eine Tischplatte aufstützt, wobei durch den rhythmischen Anstoß ein Ton entsteht. Stemmt man den Gabelstiel fest auf die Tischplatte, so wird der Gabelton sehr viel stärker gehört, da er durch die große Fläche der Tischplatte in die Luft übergeführt wird. An zwei Stellen bleibt die Gabel, wie aus Fig. 666 ersichtlich, in Ruhe, dort hat sie also Knotenpunkte.

Um die Stimmgabel ins Tönen zu bringen, faßt man gewöhnlich den Stiel zwischen zwei Finger und schlägt dann eine der Zinken gegen einen festen Körper an. Der Ton, welcher auf diese Weise hervorgebracht wird, ist ungemein schwach; um ihn zu verstärken, setzt man die Stimmgabel mit ihrem Fuße auf einen Resonanzboden auf oder man hält sie über eine Röhre von entsprechender Länge, wie dies bereits im § 212 erwähnt wurde.

Um den Ton der Stimmgabel rein und kräftig zu erhalten, hat Marloye dieselbe auf ein Kästchen von Holz gesetzt, wie man Fig. 667 sieht. Die

Länge dieses nur an einer Seite offenen Kästchens beträgt nahe $\frac{1}{4}$ von der Wellenlänge des Tones, welchen die Stimmgabel gibt, so daß also die Vibrationen der in dem Kästchen eingeschlossenen Luftsäule denselben Ton erzeugen wie die Stimmgabel selbst. Die Vibrationen der Stimmgabel teilen sich deshalb leicht der Luftsäule im Kästchen mit, wodurch dann ein ungleichmäßig kräftiger und reiner Ton entsteht.

Um die Stimmgabel dieses Apparates ins Tönen zu bringen, schlägt man sie entweder mit einem belederten hölzernen Hämmerchen an, oder man zieht zwischen den freien Enden der Gabel einen hölzernen Stab durch, dessen Dicke etwas größer ist als der Abstand der Zinken, oder endlich, man streicht die Stimmgabel mit dem Fiedelbogen an.

Soll das Kästchen möglichst gute Resonanz geben, so muß nicht allein die darin enthaltene Luftsäule, sondern auch das Holz auf den Gabelton abgestimmt sein. Um dies zu prüfen, füllt man das Kästchen mit Baumwolle aus, wodurch die Luft zu tönen verhindert wird, und ruft durch Anklopfen den Holzton hervor. Derselbe kann durch Änderungen der Holzdicke modifiziert werden. Es ist ferner für die Resonanz günstig, wenn der Fuß der Gabel möglichst leicht ist.

Je vollkommener der Einklang zwischen dem Resonanzkasten und der Gabel ist, desto lauter tönt der Apparat, desto früher hört er aber auch zu tönen auf. Soll deshalb die Gabel lange fort tönen, so verstimmt man den Eigenton des Kästchens oder der Gabel.

Der Eigenton des Kästchens wird dadurch vertieft, daß man die Mündung verengt, was am einfachsten durch Anbringung von zwei Leisten aus Kork geschieht, die man an die vertikalen Innenränder des Kästchens anlegt.

Die Tonhöhe der Gabel hängt von ihren Dimensionen, insbesondere von der Dicke der Zinken und der Knotenstellen ab.

Der Ton wird höher, wenn man die Zinken verkürzt oder durch seitliches Abfeilen entlastet; er wird tiefer, wenn man die Zinken durch Ankleben von Wachs, Münzstücken oder durch Anschrauben von Metallschuhen (Laufgewichten) belastet oder wenn man die Gabel in der Nähe der Knotenstellen dünner feilt. Nähert man die Laufgewichte mehr den Zinkenenden, so vertieft dies den Ton, er wird umgekehrt höher, wenn man sie den Knotenstellen nähert. Die Belastungen der beiden Zinken sollen stets gleich groß sein; auch ist es vorteilhaft, die Zinken parallel und genau prismatisch zu fertigen, um die Laufgewichte überall befestigen zu können.

Endlich ist auch die Temperatur der Stimmgabel von Einfluß auf ihre Tonhöhe. Nach den hierüber angestellten, sehr genauen Versuchen von Dr. Rud. König in Paris wird die Schwingungszahl 435, welche einer Normal- a^1 -Gabel bei 15° C zukommt, für jeden Grad Temperaturzunahme um 0,0486 vertieft. Damit also eine solche Gabel ihre Schwingungszahl um eine Einheit vermindere oder erhöhe, müßte ihre Temperatur um $20,58^{\circ}$ C erhöht oder erniedrigt werden. Wie man daraus ersieht, muß bei genauen Tonhöhenmessungen die Temperatur der Gabel wohl berücksichtigt werden. Tut man dies und bewahrt man eine Stimmgabel vor Rost und mechanischer Beschädigung, so behält sie ihre Tonhöhe jahrelang unverändert.

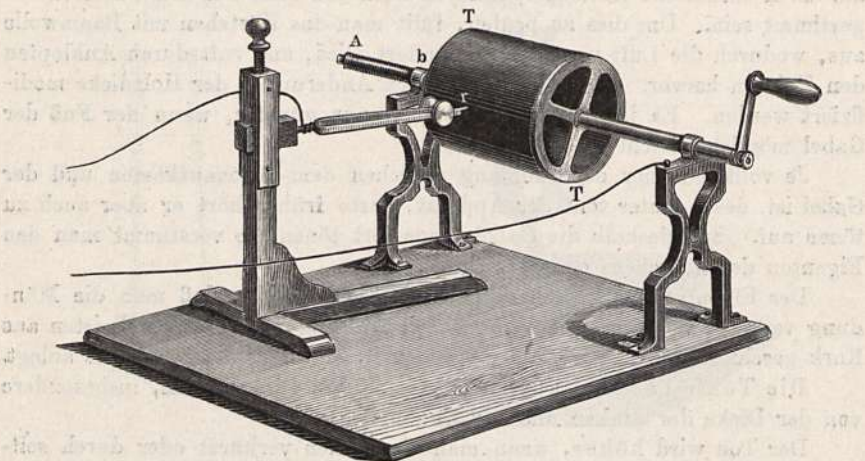
Die am 18. November 1885 in Wien versammelte internationale Stimmtonkonferenz hat festgesetzt, daß eine aus ungehärtetem Gußstahl mit parallelen prismatischen Zinken und glänzend polierter Oberfläche hergestellte

Gabel, welche bei 15°C 435 ganze (870 einfache) Schwingungen ausführt, als Normal- a^1 -Gabel gelten soll.

§ 224. Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne, graphische Methode, Vibrographie. Die Methoden zur Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne zerfallen in drei Gruppen: in graphische, akustische und optische.

Die von Wilh. Weber 1830 erfundene, von Duhamel, König u. a. ausgebildete graphische Methode beruht darauf, daß man an den tonerregenden Körper eine Schreibspitze ansetzt, mit welcher derselbe seine Schwingungen auf einer verschiebbaren Schreibfläche aufzeichnet. Die in gemessener

Fig. 668.



Zeit aufgezeichneten Hin- und Hergänge (Wellen) werden dann direkt gezählt und können auch sonst in bezug auf ihre Form zu wichtigen Untersuchungen dienen. Ein hierzu geeigneter Apparat heißt Tonschreiber, Phonograph, Vibrograph, die erhaltene Zeichnung Tonschrift, Phonautogramm, Vibrogramm.

Als ein Beispiel eines solchen Apparates mag hier jener nach König dienen, welcher in Fig. 668 in ungefähr $\frac{1}{10}$ der natürl. Gr. dargestellt ist.

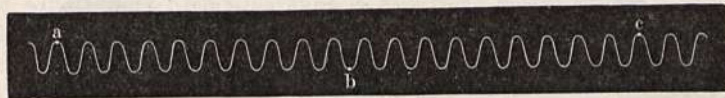
Ein eiserner Stab, welcher an seinem einen Ende bei *A* mit einem durch die Schraubenmutter *b* geführten Schraubengewinde versehen ist, auf der anderen Seite aber mittels einer Kurbel umgedreht werden kann, trägt in seiner Mitte eine messingene Trommel *T*. Auf dieser Trommel wird in einer Weise, daß man ihn leicht wieder wegnehmen kann, ein Papiermantel befestigt und über einer stark rußenden Lampe geschwärzt. (Man erhält eine solche Flamme, indem man ein Gemisch von Olivenöl mit Terpentinöl mittels eines Docthes brennen läßt.) An diese berußte Fläche wird nun zunächst die in einem passenden, durch ein Gewicht zu beschwerenden Stativ befestigte Stimmgabel herangerückt, an deren einem Ende die Schreibspitze *r* befestigt ist.

Wird nun die Stimmgabel durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen in Vibrationen versetzt und dann der Zylinder sogleich mit entsprechender Ge-

schwindigkeit umgedreht, so beschreibt die auf der Stimmgabel befestigte Spitze auf der beruhten Fläche eine Sinuskurve in der Art, wie Fig. 669 zeigt.

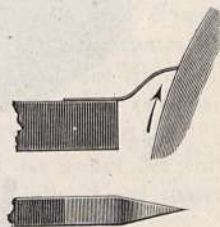
Um zählen zu können, wie viele der Schwingungen in der Sekunde gezeichnet werden, müssen auf derselben Schreibfläche in Zeitabständen von je einer Sekunde Zeichen aufgetragen werden. Man bedient sich hierzu eines Elektromagnets mit beweglichem Anker, welcher alle Sekunden einmal durch

Fig. 669.



einen Stromschluß angezogen wird und dadurch eine zweite Schreibspitze neben der ersteren in Bewegung setzt. Die durch die letztere Schreibspitze eingetragenen Querstriche (Sekundenmarken) begrenzen solche Strecken der daneben gezeichneten Wellenlinie, welche innerhalb einer Sekunde angefertigt wurden. Man hat daher nur die Anzahl der Wellen zwischen zwei aufeinander folgenden Sekunden zu zählen. Noch einfacher ist folgende Methode: Das Schreibspitzchen der Stimmgabel wird gebildet, indem man ein Stückchen von ganz dünnem Messingblech spitzig zuschneidet und dieses schwach gebogen an dem einen Stimmgabelende befestigt, wie Fig. 670 im Grund- und Aufriß zeigt. Nachdem die Stimmgabel an ihre Stelle gerückt ist, wird sie durch einen Kupferdraht mit dem einen, der metallische Träger der Trommel *T* aber mit dem anderen Pole eines Funkeninduktors, dessen Beschreibung erst im dritten Bande folgen kann, in leitende Verbindung gebracht. In die Leitung ist ein Sekundenpendel in der Weise eingeschaltet, daß dasselbe bei jeder Schwingung auf einen Moment den elektrischen Strom schließt, so daß ein Funke, von der Spitze *r* durch das Papier schlagend, daselbst eine feine Marke hinterläßt. Hat man, während die Stimmgabel vibrierte und der Induktionsapparat im Gange war, die Trommel gedreht, so erhält man auf der Sinuskurve eine Reihe von Marken *a, b, c* usw. und kann dann leicht zählen, wieviel Schwingungen die Stimmgabel während einer Oszillation des Pendels macht.

Fig. 670.



Der Apparat, Fig. 668, leidet an dem Übelstande, daß die durch Streichen der schreibenden Gabel erzeugten Vibrationen sehr rasch an Größe abnehmen, so daß man meistens schon nach wenigen Umdrehungen der Trommel still halten und die Gabel von neuem anstreichen muß. Hier nun, wie auch in manchen anderen Fällen, ist es aber erwünscht, die Vibrationen einer Stimmgabel längere Zeit hindurch in unveränderlicher Größe gleichförmig zu erhalten. Helmholtz hat diesem Bedürfnis durch Kombination der Stimmgabeln mit Elektromagneten abgeholfen. Die Figuren 671 und 672 stellen die Helmholtzsche Vorrichtung dar, wie sie König zur Anstellung des in Fig. 668 angedeuteten Versuches ausgeführt hat. *A*, Fig. 671, ist die schreibende Gabel und *r* die Schreibspitze. Vor der einen und hinter der anderen Gabelzinke ist der Pol eines Elektromagnets *E* angebracht, in dessen Umwindungen der Strom durch die Klemmschraube bei *c* eingeführt und

durch die Klemmschraube bei *d* ausgeführt wird. Wenn der Strom geschlossen ist, werden die beiden Gabelzinken durch die Magnetpole auseinander gezogen, sie fahren aber gegeneinander, sobald der Strom unterbrochen wird. — Erfolgen nun Öffnungen und Schließungen des Stromes in gleichem

Fig. 671.

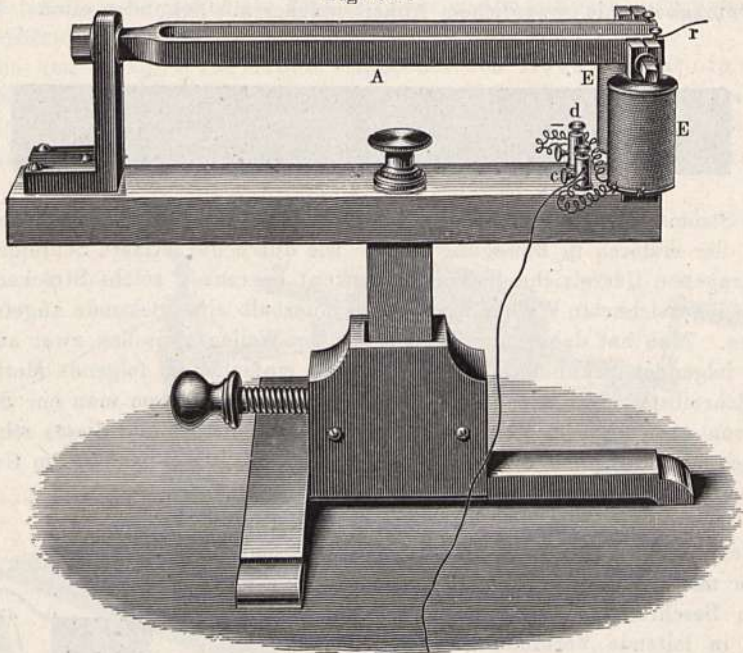
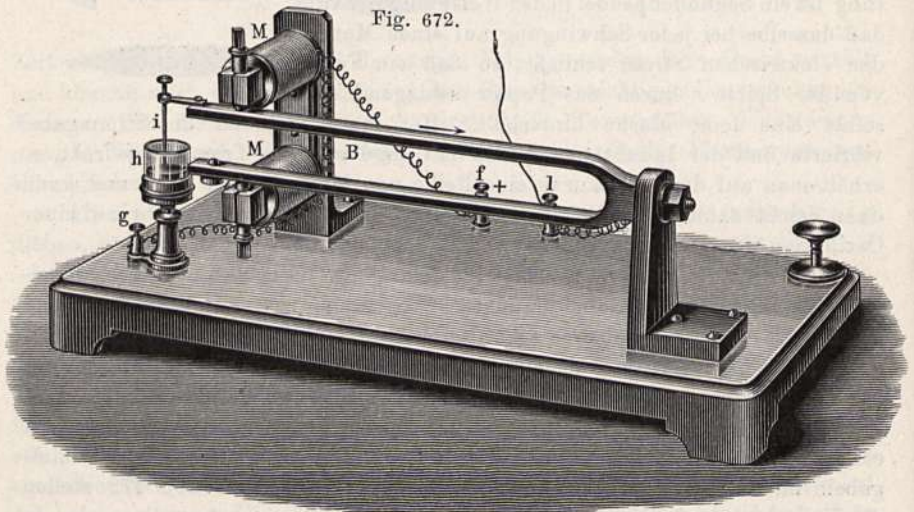


Fig. 672.



Tempo wie die nur vermöge ihrer Elastizität vibrierende Gabel, so wird dieselbe längere Zeit hindurch mit unveränderlicher Intensität vibrieren.

Die abwechselnde Schließung und Unterbrechung des Stromes im Elektromagnet *E* wird durch eine zweite Gabel *B* (die Unterbrechungsgabel),

Fig. 672, bewirkt, welche, in vertikaler Ebene schwingend, gleichfalls mit einem Elektromagnet M versehen ist. Die Gabel B ist entweder unisono mit A , oder ihre Schwingungsdauer ist ein einfaches Multiplum der Schwingungsdauer der anderen. Die obere Zinke der Gabel B trägt ein vertikal herabreichendes Messingstäbchen i , welches unten in eine Platinspitze endigt. Diese Platinspitze taucht in ein Quecksilbernäpfchen h . Der eine, etwa der positive Pol einer Säule von 1 bis 2 Bunsenschen Bechern oder Akkumulatoren wird in die Klemmschraube f , Fig. 672, eingeschraubt. Von f aus durchläuft der Strom die Umwindungen des Elektromagneten M , gelangt aus diesen zur Klemmschraube g und von hier in das Quecksilber des Näpfchens h . Von h geht der Strom durch i und die obere Zinke der Gabel B bis an ihren Befestigungspunkt auf der rechten Seite, dann durch eine Drahtspirale nach der Klemmschraube l , welche durch einen Kupferdraht mit der Klemmschraube c , Fig. 671, verbunden ist. Bei d endlich ist der negative Pol der Säule eingeschraubt.

Sobald der Strom in der angegebenen Richtung zirkuliert, werden die beiden Elektromagnete E und M erregt, die Zinken des Elektromagnets E sowohl wie die von M werden auseinandergezogen und dadurch die Spitze von i aus dem Quecksilber gehoben. Infolgedessen verliert sich der Magnetismus der Eisenkerne von E und M , die Zinken der beiden Gabeln schnellen gegeneinander, und die Spitze von i wird wieder in das Quecksilber eingetaucht, so daß dasselbe Spiel von neuem beginnt und längere Zeit ununterbrochen fort dauert. Dieselbe Vorrichtung, welche den Namen Unterbrechungsgabel führt, dient auch noch zu anderen, später zu beschreibenden Experimenten. Neuestens pflegt man statt des Hufeisenmagnets einen einfachen Elektromagnet anzuwenden, den man so zwischen den Zinken der Stimmgabel befestigt, daß er diesen die Pole zukehrt¹⁾.

Diese Methode läßt also direkt die Schwingungszahl des Tones der verwendeten Stimmgabel bestimmen, aus welcher man dann indirekt auf später zu beschreibende Weise die anderer tönender Körper ableiten kann.

Umgekehrt ist leicht einzusehen, daß derselbe Apparat zur genauen Messung kleiner Zeiträume zu verwenden ist. Man braucht nur durch die nämliche Metallspitze, welche die Sekundenmarken liefert, die Momente des Beginns und des Endes des zu messenden Zeitraumes durch Marken registrieren zu lassen und dann die dazwischen liegenden Schwingungen der Stimmgabelkurve zu zählen. Es ist dabei ganz gleichgültig, ob der bewußte Zylinder schneller oder langsamer gedreht wird.

In dieser Anwendung heißt der Apparat ein Stimmgabelchronograph.

§ 225. Bestimmung der Schwingungszahl durch die Sirene. Eine akustisch-mechanische Methode zur Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne beruht auf der Anwendung der Sirene von Cagniard la Tour. Fig. 673 stellt eine solche dar, wie sie Stöhrer in Dresden in sehr über-

¹⁾ Nach Guillet (Compt. rend. 130, 1002, 1900) können die Schwingungen der Stimmgabel durch den Strom eines Mikrophons, das in kleinem Abstand vor der Mündung des Resonanzkastens gestellt wird, unterhalten werden, wodurch die Quecksilberkontakte ganz vermieden werden, und die zweite Stimmgabel entbehrlich wird. Der Verfasser kann dies bestätigen.

sichtlicher Form konstruiert. *AA* ist eine zylindrische Büchse von Messing, welche mittels des Rohres *BB* luftdicht auf eine Windlade aufgesetzt werden kann.

In der oberen Deckplatte dieser Büchse befindet sich eine Reihe von Löchern, etwa zwölf, welche im Kreise um den Mittelpunkt herumstehen; dicht über dieser Deckplatte aber ist eine Messingscheibe *ss* angebracht, welche, um eine vertikale Achse in Spitzen laufend, möglichst leicht beweglich sein muß, und welche ebenfalls mit zwölf gleich weit voneinander abstehenden Löchern versehen ist, wie Fig. 674 zeigt, welche diese Platte von

Fig. 673.

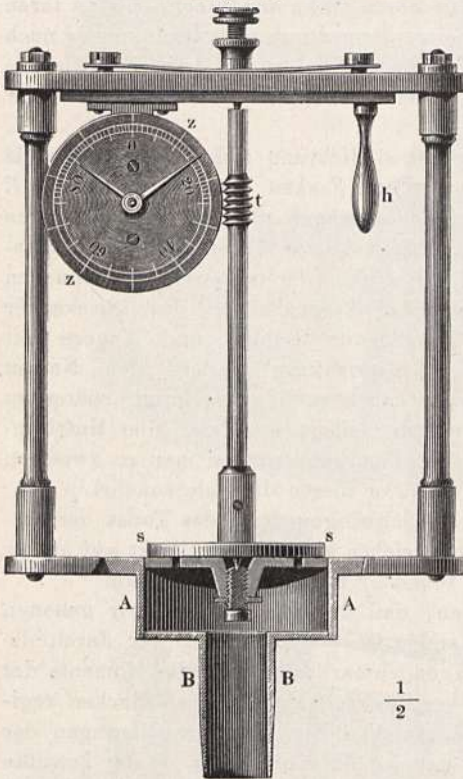


Fig. 674.

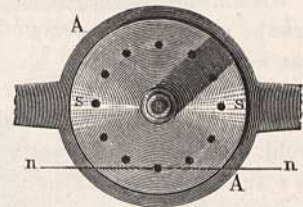
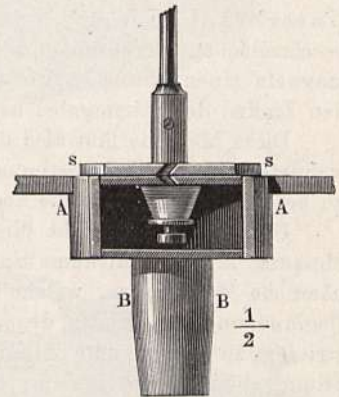


Fig. 675.



oben gesehen darstellt. Je nach der Stellung der beweglichen Platte sind alle zwölf Öffnungen der unteren gleichzeitig geöffnet oder gleichzeitig geschlossen.

Sowohl die Löcher der drehbaren Scheibe *ss* als auch die Löcher der darunter befindlichen Platte sind schräg gestellt, und zwar die der rotierenden Platte *ss* in entgegengesetzter Richtung, wie die der Deckplatte der Büchse, wie man Fig. 675 sieht, welche einen Durchschnitt der Büchse *AA* nach der Linie *nn* der Fig. 674 darstellt. Es ist also klar, daß der Wind, welcher den Löchern der Deckplatte entströmt, gegen die Wände der Löcher der drehbaren Scheibe *ss* anstößt und diese dadurch in eine Rotation versetzt, deren Schnelligkeit von der Stärke des Windes abhängt.

Wird nun aus der Windlade Luft durch das Ansatzrohr *BB* eingeblasen, so beginnt die Scheibe *ss* sich zu drehen, und alsbald läßt sich ein anfangs tiefer

Ton hören, welcher allmählich höher und stärker wird, wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe *ss* zunimmt, und welcher auf einer bestimmten Tonhöhe stehen bleibt, wenn Gleichgewichtszustand eingetreten ist zwischen der beschleunigenden Kraft des ausströmenden Windes und den zu überwindenden Widerständen.

Der Ton entsteht dadurch, daß jedesmal ein Luftstrom durch die Löcher der Scheibe *ss* hervordringt, wenn die Löcher der rotierenden Scheibe gerade über den Löchern der festen sich befinden; bei einer jeden Umdrehung der Scheibe *ss* werden also zwölf solcher Stöße, also auch zwölf Verdichtungsstellen erzeugt werden; man kann daher leicht die Schwingungszahl des durch die Sirene hervorgebrachten Tones berechnen, wenn man weiß, wieviel Umdrehungen die Scheibe *ss* in einer Sekunde macht.

Um die Zahl der in einer gegebenen Zeit gemachten Umdrehungen der Scheibe *ss* zu bestimmen, dient nun ein besonderes Zählerwerk. Hinter dem in 100 gleiche Teile geteilten Zifferblatt *zz*, Fig. 673, befinden sich nämlich zwei Räder, von denen das eine 100, das andere 99 Zähne hat; das erstere führt den großen, das letztere den kleinen Zeiger. Wenn nun der Ton der Sirene eine konstante Höhe erreicht hat, so wird das eben besprochene Zählerwerk mit Hilfe des Griffes *h* etwas nach der rechten Seite gezogen, so daß die Zähne der beiden Räder in die Schraube *t* eingreifen, und nun wird natürlich bei jeder Umdrehung der Scheibe *ss* jedes der gezahnten Räder um einen Zahn fortgeschoben; für je 100 Umdrehungen aber wird der kleine Zeiger um einen Teilstrich mehr hinter dem großen zurückbleiben, so daß man aus der Vermehrung des Abstandes beider Zeiger erfährt, wieviel hundert, und aus der Stellung des großen, wieviel einzelne Umdrehungen noch über diese hinaus in einer gegebenen Zeit gemacht wurden.

Es versteht sich von selbst, daß das Zählerwerk so leicht gehen muß, daß das Einsetzen desselben keinen merklichen Einfluß auf den Gang der Sirene ausübt.

Eine wesentliche Verbesserung hat Stöhrer an seiner Sirene dadurch erzielt, daß er in der rotierenden Scheibe und der darunter befindlichen Platte statt der runden Löcher radial gestellte Schlitz in Anwendung brachte.

Dove hat eine Sirene mit mehreren Löcherreihen konstruiert, welche, sowie die Doppelsirene von H. Helmholtz, erst an späterer Stelle besprochen werden kann.

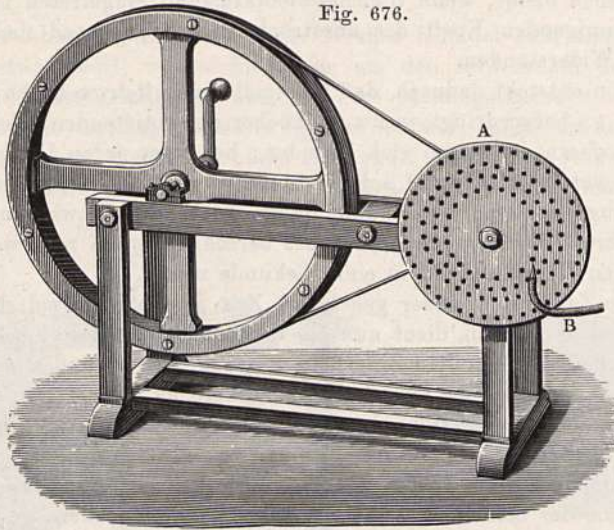
Die Sirene von Cagniard la Tour kann statt durch Luft auch durch einen Strom von Wasser betrieben werden, während der ganze Apparat unter Wasser getaucht ist. Daher stammt auch der Name des Apparates, obwohl seine Töne durchaus nichts Verlockendes haben.

Eine einfachere Form der Sirene, welche wohl nicht zu genauen Messungen der Schwingungszahl, aber zu vielen anderen wichtigen Versuchen dienen kann, ist die Sirene von Seebeck, Fig. 676. Eine Scheibe aus glattem Pappendeckel oder aus Blech, welche 3 bis 4 dcm Durchmesser haben mag, ist an einer Schwungmaschine mit horizontaler Achse zu befestigen und in rasche Rotation zu versetzen. Auf der Scheibe sind konzentrische Reihen gleich weit abstehender Löcher von ungefähr 4 mm Durchmesser eingeschlagen.

Durch ein Kautschukrohr *B*, in welchem ein Röhrchen eingesetzt ist, dessen Mündung etwas enger sein muß als der Durchmesser eines Loches,

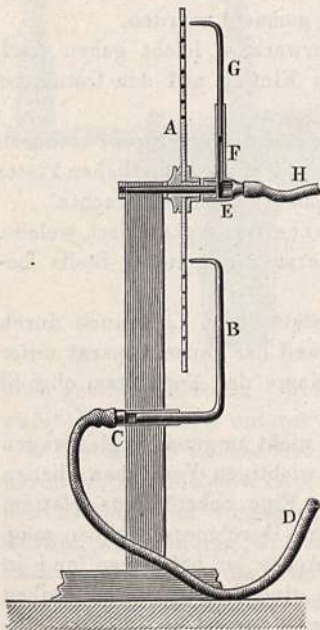
und welche ziemlich dicht an die Ebene der Scheibe hinzuhalten ist, wird nun ein Luftstrom gegen die in Rotation befindliche LÖcherreihe geblasen

Fig. 676.



und dadurch ein Ton erzeugt, dessen Schwingungszahl gleich ist der Anzahl der LÖcher, welche während einer Sekunde vor der Mündung der Röhre *B*

Fig. 677.



passieren, eine Zahl, welche sich ergibt, wenn man ermittelt hat, wieviel Umdrehungen der Scheibe *A* auf eine Umdrehung der Kurbel gehen. Es ist sehr bequem, wenn man das Röhrrchen nicht mit der Hand frei zu halten braucht. Um es derartig zu befestigen, daß es rasch nacheinander auf die verschiedenen LÖcherreihen eingestellt werden kann, empfiehlt sich die vom Verfasser angegebene in Fig. 677 skizzierte Konstruktion.

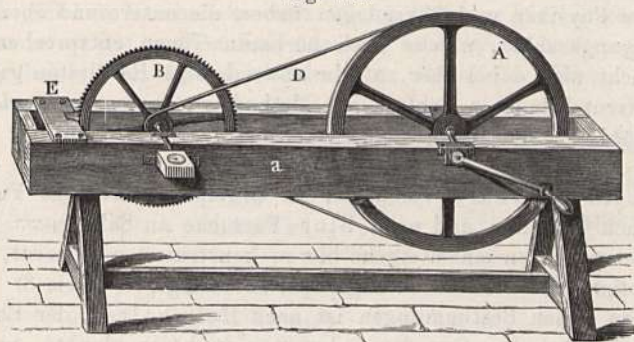
Das Blaserohr *B* ist zweimal rechtwinkelig umgebogen und steckt luftdicht drehbar in dem Rohrstück *C*, welches mit dem Schlauche *D* in Verbindung ist. Für einige später zu beschreibende Experimente ist noch eine zweite Blaseröhre *G* so anzubringen, daß ihre Öffnung auf dem LÖcherkreise selbst konzentrisch verschiebbar ist. Die Röhre *G* ist in einer etwas weiteren Röhre *F* verschiebbar, die Luft wird durch den Schlauch *H* der Kammer *E* zugeführt, welche mittels des sie von rückwärts verschließenden Korkes auf eine konische Verlängerung der Achse aufgesetzt werden kann.

Versieht man die Scheibe mit acht Reihen von Löchern, deren Anzahl der Reihe nach 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48 beträgt, so erhält man beim

Anblasen die C-Dur-Skala. Dreht man dann mit größerer, aber konstanter Geschwindigkeit, so erhält man wiederum die C-Dur-Skala, aber in höherer Tonlage. Daraus folgt neuerdings, daß die Größe des Tonhöhenunterschiedes nicht von der Differenz, sondern vom Verhältnis der Schwingungszahlen abhängt. Dieses Verhältnis, welches gleich dem Verhältnis der Löcherzahl ist, bleibt bei allen Rotationsgeschwindigkeiten der Scheibe dasselbe, daher auch das musikalische Intervall. Gibt man den Löcherreihen die Löcherzahlen 24, 27, 30, 32, 24, 40, 36, 32 und bläst diese in passendem Rhythmus der Reihe nach an, so erhält man die S. 638 angeführte Melodie. Dieselbe bleibt im Charakter ganz unverändert, nur daß ihre absolute Höhe wechselt, sobald man die Geschwindigkeit der Scheibe wechselt. Bläst man gegen eine Löcherreihe, in welcher die Löcher in unregelmäßigen Abständen verteilt sind, so entsteht kein reiner Ton, sondern ein Geräusch.

Statt der mit Löchern versehenen Scheibe kann man sich auch eines gezahnten Rades bedienen, gegen dessen Zähne ein elastischer Körper ge-

Fig. 678.



halten wird. Diese Methode rührt von Savart¹⁾ her, dessen Apparat in Fig. 678 dargestellt ist. *a* ist ein sehr festes Gestell von Eichenholz, welches noch dadurch stabiler gemacht wird, daß man es auf dem Boden befestigt; *A* ist ein Rad von 1,8 m Durchmesser, welches sich um eine sehr starke Achse dreht und durch eine Kurbel in Bewegung gesetzt wird; durch eine Schnur ohne Ende wird die rotierende Bewegung auf ein zweites Rad *B* in der Weise übertragen, daß die Umdrehung der Achse von *B* weit schneller ist als die Umdrehung der Achse des Rades *A*, daß z. B. zehn Umdrehungen des Rades *B* auf eine Umdrehung von *A* kommen. *B* ist ein gezahntes Metallrad, das ungefähr 600 Zähne hat; wenn man die Kante einer Karte dem Stoße der Zähne aussetzt, so kann man leicht 24 000 Stöße in der Sekunde erhalten, wenn *A* vier Umdrehungen in einer Sekunde macht. Man erhält mehr oder weniger Stöße, je nachdem man rascher oder weniger rasch dreht. Der Ton, welchen man auf diese Weise erhält, ist rein und andauernd, seine Höhe hängt von der Schnelligkeit der Umdrehung ab; man kann es also leicht dahin bringen, daß er mit der Stimmgabel im Einklange ist. Der Stoß der Zähne gegen das Plättchen gibt einen Ton, weil es dadurch in Schwingungen versetzt wird; während der Zahn vorübergeht, wird das Plättchen gehoben, geht aber infolge seiner Elastizität zurück, ehe der folgende

¹⁾ Annal. de Phys. et de Chim. T. 44 et 47.

Zahn kommt. So erzeugt jeder vorübergehende Zahn einen Hin- und Her-
gang des Plättchens, also eine Vibration; man hat also nur zu ermitteln, wie-
viel Zähne in einer gegebenen Zeit vorübergehen, um auch die Schwingungs-
zahl des erzeugten Tones zu kennen; zu diesem Zwecke ist an der Achse
des Rades *B* eine Schraube ohne Ende angebracht, welche ganz in ähnlicher
Weise wie bei der Sirene ein Zählerwerk in Bewegung setzt. Savart hat
auf diese Weise bestätigt, daß a^1 440 Schwingungen in der Sekunde macht,
wie man mit der Sirene gefunden hatte.

Die Methode von Scheibler, sowie die optischen Methoden zur Messung
von Schwingungszahlen können erst später beschrieben werden.

§ 226. Grenzen der Hörbarkeit. Die in der Musik gebrauchten
Töne haben Schwingungszahlen, deren Grenzen ungefähr bei 40 und 4000
gelegen sind, also geben sieben Oktaven umfassen.

Jenseits dieser Grenzen nach unten und oben gibt es aber noch Töne,
welche zwar nicht musikalisch verwertbar, aber noch hörbar sind.

Mehrere Physiker und Physiologen haben die untere und obere Grenze
der Schwingungszahlen, welche noch hörbaren Tönen entsprechen, aufzu-
finden versucht, sind dabei aber zu sehr abweichenden Resultaten gekommen,
was seinen Grund teils in Fehlern der Methode, teils in der ungleich weit
gehenden Fähigkeit der Gehörorgane verschiedener Individuen hat.

Untere Grenze. Die Schwingungszahl des tiefsten noch hörbaren
Tones ist nach Sauveurs Versuchen an Orgelpfeifen von 40 Fuß Länge
= $12\frac{1}{2}$, nach Chladni und nach Biot (Versuche an Saiten) = 16, nach
Savarts Versuchen an einem eigens hierzu konstruierten Apparat, bei wel-
chem ein rotierender Stab durch enge Spalten schlägt, = 7 bis 8.

Bei allen diesen Bestimmungen ist nach Helmholtz¹⁾ der Einwurf zu
erheben, daß nebst dem Grundton, den man zu hören glaubte, noch Ober-
töne (Töne mit Schwingungszahlen, welche einfache Multipla der Zahl des
Grundtons sind) mit auftreten, welche man hört und für den Grundton hält,
da eine Schätzung der Tonhöhe in dieser Tiefe sehr schwierig oder unmög-
lich ist.

Es sind daher nur solche Versuche beweisend, welche mit rein pendel-
artig schwingenden Körpern, welche reine Grundtöne ohne Obertöne geben,
angestellt werden.

Helmholtz fand die untere Grenze der Hörbarkeit an Saiten, welche
in der Mitte belastet waren und deshalb keine merklichen Obertöne lieferten,
bei 37 bis 34 Schwingungen in der Sekunde, an großen Stimmgabeln bei 28.

W. Preyer²⁾ fand auf dieselbe Weise noch hörbare Töne bis zu
24 Schwingungen herab. Noch tiefere Töne hörte er an sehr tief gestimmten
Zungenpfeifen, wenn er das Ohr an den Kasten anlegte, nachdem der Wind
unterbrochen worden und die sehr lauten Obertöne ausgeklungen hatten. Er
bestimmte so die untere Grenze zu 15 Schwingungen und gab an, daß sie
für normalhörige Personen zwischen 14 und 24 liege.

Helmholtz erhob aber gegen diese Versuche den Einwand, daß mög-
licherweise von den Zungen aus Longitudinaltöne mit doppelt so großer

¹⁾ Tonempfindungen; IX. Abschnitt.

²⁾ Physiologische Abhandlungen. I. Reihe, I. Heft 1876.

Schwingungszahl auf den Kasten übergehen, und erklärte seine Zweifel für nicht beruhigt, solange nicht durch Schwebungszählungen die Angaben kontrolliert seien.

Somit wäre die anerkannte untere Grenze bei 24 Schwingungen gelegen.

Obere Grenze. Über dieselbe gehen die Angaben, insbesondere die älteren, noch weiter auseinander. Sauveur nahm 6400, Chladni 8192, Wollaston 25000 an. Der letztere machte bereits auf die großen individuellen Verschiedenheiten aufmerksam. Savart erhielt an einem Zahnrade, gegen das eine Karte gehalten wurde, hörbare Töne von 24000 Schwingungen, Despretz erreichte mit kleinen Stimmgabeln 36864 Schwingungen. W. Preyer hörte an einer kolossalen Seebeckschen Sirene des Mechanikers Appun in Hanau bei 24000 Luftstößen noch einen leisen Ton, während andere Personen ihn nicht mehr hörten.

Rudolph König in Paris hat die obere Grenze der Hörbarkeit durch eine Reihe von zehn zylindrischen Stahlstäben nachgewiesen, welche sämtlich gleichen Durchmesser von 20 mm haben. Die Länge der einzelnen Stäbchen ist in der zweiten Kolumne, die nach einem späteren Paragraphen sich ergebende Schwingungszahl derselben ist in der dritten Kolumne der folgenden Tabelle gegeben.

Nummer der Stäbe	Länge der Stäbe in Millimetern	Schwingungszahl	Musikalische Bezeichnung	
1	149	149,0	4096	c^b
2	$149 \sqrt{\frac{4}{5}} = 132,3$		5120	e^b
3	$149 \sqrt{\frac{2}{3}} = 121,7$		6144	g^b
4	$149 \sqrt{\frac{1}{2}} = 105,3$		8192	c^c
5	$149 \sqrt{\frac{4}{10}} = 94,2$		10240	e^c
6	$149 \sqrt{\frac{2}{6}} = 86,0$		12288	g^c
7	$149 \sqrt{\frac{1}{4}} = 74,5$		16384	c^d
8	$149 \sqrt{\frac{4}{20}} = 66,6$		20480	e^d
9	$149 \sqrt{\frac{2}{12}} = 60,9$		24576	g^d
10	$149 \sqrt{\frac{1}{8}} = 52,6$		32768	c^e

Durch Anschlagen mit einem harten Klöppel werden die Stäbe in der Weise in Transversalschwingungen versetzt, daß sich zwei Schwingungsknoten bilden, von denen jeder um $\frac{1}{5}$ der ganzen Stablänge von dem einen Ende des Stabes absteht. An der Stelle dieser Schwingungsknoten sind die Stäbchen mit einer kleinen eingedrehten Rinne versehen, wie Fig. 679 zeigt.

Diese Stäbe werden entweder mit ihren Schwingungsknoten auf Kautschukröhren aufgelegt, welche in konvergierender Richtung auf ein Brett aufgeleimt sind, wie Fig. 679 zeigt, oder sie werden an Schnüren aufgehängt, wie man Fig. 680 sieht, welches letzteres namentlich bei den drei kürzesten Stäbchen geschieht.

Der längste dieser Stäbe gibt, mit dem Klöppel angeschlagen, den Ton c^5 (das fünfgestrichene c , ein Ton, welcher durch 4096 ganze Schwingungen in der Sekunde erzeugt wird, wenn man das eingestrichene a zu 426,66... Schwingungen annimmt). Danach ergibt sich denn die Schwingungszahl

Fig. 679.

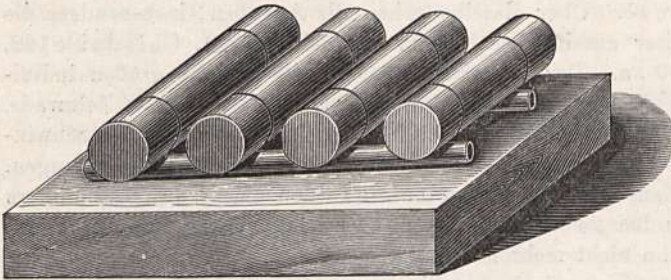
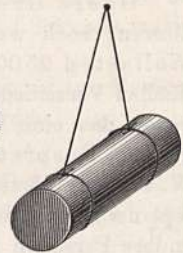


Fig. 680.



der übrigen Stäbe, wie dieselbe in der dritten Vertikalreihe obiger Tabelle steht, während die letzte Vertikalreihe die musikalische Bezeichnung der entsprechenden Töne enthält.

Der Transversalton des Stabes Nr. 1, also das fünfgestrichene c , erklingt so voll und kräftig, daß man das Klappen beim Anschlagen des Hammers kaum wahrnimmt. Bei den folgenden Stäben wird nun das Klappen des Anschlages immer merklicher, während der Transversalton immer schwächer und feiner wird, bis er endlich vollständig verschwindet und nur noch das Klappen hörbar bleibt. Weniger feine Ohren hören kaum noch das g^6 . Für ältere Personen bildet c^7 die Grenze der Hörbarkeit, während selbst die besten Ohren den Ton g^7 (24576 Schwingungen der Sekunde) nicht mehr hören.

Appun glaubte durch kleine Stimmgabeln eine noch höhere Grenze zu erreichen. Er fertigte 31 Stimmgabeln, deren Höhe er von $c^4 = 2048$ an ausgehend bis angeblich $e^8 = 40960$ Schwingungen erreichte. Die letzte Gabel ist nur 13 mm lang, 14 mm breit und hat 3 mm breite Zinken. Diese Gabeln sind von mehreren Gewährsmännern alle gehört worden, während ältere Personen meist schon e^7 nicht mehr hörten. Es ist jedoch von Melde, Stumpf und Meyer u. a. gezeigt worden, daß die von Appun angegebenen Schwingungszahlen von etwa 10000 an unverlässlich und viel zu hoch sind. So lieferte z. B. die Methode mittels der Kundtschen Staubfiguren in naher Übereinstimmung mit der Differenztonmethode für die Gabel Nr. 25 12520 Schwingungen, während Appun 21845 Schwingungen angibt.

Ein anderes Mittel zur Herstellung sehr hoher Töne von bekannter Schwingungszahl ist die Galtonpfeife, welche in Fig. 681 in der von M. Th. Edelmann¹⁾ gegebenen Ausführung in natürlicher Größe abgebildet ist. Fig. 682 gibt eine vergrößerte Darstellung der Teile D und E . Diese Pfeife, welche der Lokomotivpfeife im kleinen nachgebildet ist, hat folgende Einrichtung. Die Pfeife ist als zylindrischer Hohlraum e in dem Körper E enthalten. Ihre Länge kann durch Zurückziehen des Stempels p , was mittels der Schraubenmutter G in meßbarer Weise geschieht, verändert werden.

¹⁾ H. Th. Edelmann, Studien über die Erzeugung sehr hoher Töne vermittelt der Galtonpfeife; Ann. d. Phys., IV. Folge, 2, 469, 1900.

Dem messerscharfen Rande dieses zylindrischen Hohlraumes steht in regulierbarem Abstände (Maulweite) die Röhre *D* gegenüber. In diese ist ein abgestumpfter Konus *k* eingesetzt, der eine kreisförmige Ritze *rr'* frei läßt, welcher die Luft aus dem bei *A* angesetzten Gummiballon durch die spiraligen Rinnen *ss* unter Druck zugeführt wird. Die Regulierung der Maulweite erfolgt durch die Schraubenmutter *B*; die Ablesung derselben am Index *C*. Für jede Pfeifenlänge ist eine bestimmte Maulweite anzuwenden, worüber eine dem Apparat beigegebene Tabelle Anleitung gibt.

Fig. 682.

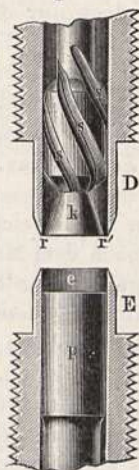
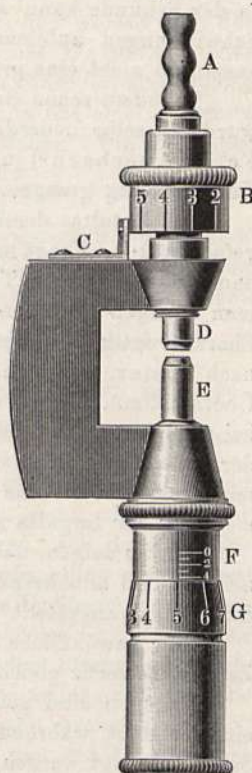


Fig. 681.



Mittels dieser Pfeife lassen sich nach Edelmann Tonhöhen bis über 50 000 Schwingungen in der Sekunde hervorrufen, und es zeigte sich, daß solche Töne noch von einzelnen Personen gehört wurden. Die Messung der Tonhöhe so hoher Töne erfolgt nach F. A. Schulze¹⁾ und Schwendt²⁾ am besten mittels der Kundtschen Staubfiguren in engen Glasröhrchen.

Nach F. A. Schulze³⁾ lassen sich jedoch die stehenden Wellen auch in freier Luft durch Reflexion an einer Tischplatte erzeugen und die Lage der Knoten und Bäuche mittels eines kreisrunden, 1 cm im Durchmesser großen, 0,1 mm dicken, in Korkring gefaßten Glimmerblättchens ausmitteln, auf welches man feinen Sand aufgestreut hat, der an dem Orte der Bäuche aufgewirbelt wird. Das Blättchen wird nicht direkt mit der Hand, sondern mittels eines in den Korkring gesteckten Stieles gehalten. Bei schwacher Tonquelle stellt man auf das Maximum, bei starker auf das Minimum der Erregung ein und erhält so bis auf 1 Proz. genaue Messungen von Tonhöhen, die sogar über die menschliche Hörgrenze hinausgehen.

Das Hören solch hoher Töne ist durchaus kein Vergnügen, sondern vielmehr schmerzhaft. Preyer beschreibt das Gefühl beim Anhören der Töne von *c'* an, „wie wenn von beiden Ohren bis in die Mitte des Kopfes nach aufwärts ein dünner Draht gezogen würde“. Auch Tiere, insbesondere Hunde und Katzen, empfinden hohe Töne schmerzhaft.

Eine mit der Frage nach der kleinsten absoluten Tonhöhe verwandte, aber doch wesentlich verschiedene ist jene nach der kleinsten absoluten Anzahl von Schallimpulsen, welche überhaupt aufeinander folgen müssen,

¹⁾ Wiedem. Ann. 68, 99, 1899.

²⁾ Archiv f. d. ges. Physiol. 75, 346, 1899.

³⁾ Sitzungs-Ber. der Ges. zur Beförd. d. ges. Naturwissensch. zu Marburg, Juni 1902.

damit ein Ton wahrgenommen wird. Da es jedenfalls noch Töne mit 40 Schwingungen in der Sekunde gibt, andererseits in der Musik oft Töne von geringerer Dauer als $\frac{1}{40}$ Sekunde angewendet werden, so würde ein solcher Ton in dieser kurzen Zeit nur einer einzigen Schwingung oder gar nur einem Bruchteile einer solchen entsprechen. Von einer Schwingungszahl in der Sekunde kann aber doch nur die Rede sein, wenn mindestens zwei Schwingungen aufeinander folgen. Es ist aber von vornherein nicht zu sagen, ob nicht eine größere Anzahl erforderlich ist.

Nachdem schon Savart 1830 und Seebeck 1841 diese Frage berührt, wurde dieselbe neuerdings (1877) vom Verfasser¹⁾, sowie von S. Exner²⁾, Felix Auerbach³⁾ und Jos. Kries, endlich von W. Kohlrausch⁴⁾ in Untersuchung gezogen.

Das Resultat derselben fiel abweichend aus, je nachdem die Frage aufgefaßt wurde. Fragt man nach dem Minimum der Anzahl von Schwingungen, damit überhaupt ein Ton gehört werde, so lautet die Antwort: zwei; fragt man dagegen nach dem Minimum dieser Anzahl, wobei der Ton seine volle Charakteristik bezüglich der Tonhöhe angenommen, so lautet die Antwort nach Exner: 17, nach Auerbach: 20. Nach W. Kohlrausch beginnt (in Übereinstimmung mit dem Verfasser) die Wahrnehmung der Tonhöhe schon bei zwei Impulsen. Die Genauigkeit der Tonhöheschätzung steigt aber mit der Anzahl der Impulse bis zur Anzahl 16 derselben; von wo an für ein Ohr mittlerer Feinheit das Auffassungsvermögen der Tonhöhe durch eine Vermehrung der Impulse nicht mehr weiter gesteigert wird.

Um zu zeigen, daß schon zwei Impulse genügen, um einen Ton wahrzunehmen und annähernd dessen Höhe zu schätzen, hat der Verfasser folgendes Experiment angestellt.

Eine gewöhnliche Seebecksche Sirene hat am Umfange nur eine geringe Zahl, z. B. sechs gleich weit abstehende Löcher.

Dagegen sind statt einer Blaseöffnung deren zwei vorhanden, deren eine feststeht, während die andere im Kreise herumgedreht und an beliebiger Stelle befestigt werden kann (Fig. 677, S. 656). Angenommen, die Scheibe mache zehn Umdrehungen in der Sekunde, die Bogendistanz der beiden Blaseöffnungen betrage $\frac{1}{72}$ des ganzen Umfanges, also $\frac{1}{12}$ des Abstandes zweier Löcher. An jeder Blaseöffnung gehen dann 60 Löcher in der Sekunde vorüber, wodurch der sehr tiefe Ton mit der Schwingungszahl 60 entsteht. Außerdem geht aber jedes Loch zehnmal in der Sekunde an beiden Blaseöffnungen nacheinander so rasch vorüber, daß auf jeden durch die erste dieser Öffnungen erzeugten Luftstoß binnen $\frac{1}{720}$ Sekunde ein durch die zweite Öffnung erzeugter Stoß folgt. Es wird also zehnmal in der Sekunde durch je zwei Impulse ein Ton von der Schwingungszahl 720 hervorgerufen. Um diesen Ton neben dem anderen und neben dem Sausen der Scheibe wahrzunehmen, kann man ihn entweder zeitweilig ganz unterbrechen und wiederherstellen, indem man den Luftstrom einer Blaseöffnung unterdrückt und wieder zuführt oder, besser, man ändert während der Rotation rasch den Bogenabstand der beiden Blaseöffnungen. Hierdurch muß offenbar die Ton-

¹⁾ Wiener Akad. Ber. 1877.

²⁾ Pflügers Archiv, Bd. 13.

³⁾ Wiedemanns Ann. 6.

⁴⁾ Ebend. 10.

höhe jenes durch je zwei Impulse hervorgerufenen Tones verändert werden, während der andere Ton auf der Höhe von 60 Schwingungen stehen bleibt. Gerade durch die Veränderung der Tonhöhe wird man auf den gesuchten Ton und seine Höhe aufmerksam.

Eine im wesentlichen nahe übereinstimmende Beobachtung kann man nach Baumgarten unter folgenden Umständen anstellen. Man wähle eine Stelle nahe an einer den Schall reflektierenden Mauer, von wo aus man das einförmige Geräusch eines entfernteren rauschenden Baches, Wasserfalles oder eines Eisenbahnzuges hören kann. Alle die unzähligen Einzelimpulse, welche von der Schallquelle ausgehen, gelangen dann zweimal in das Ohr: das erste Mal direkt, das zweite Mal nach Reflexion an der Mauer. Die Zeitdauer zwischen diesen beiden Impulsen ist gegeben durch $\frac{2s}{C}$, wo s den Abstand des Ohres von der Mauer, C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles = 340 in Metern beträgt. Falls diese Aufeinanderfolge für sich eine Tonwahrnehmung hervorzurufen vermag, so muß die Schwingungszahl derselben = $\frac{C}{2s}$ sein. Bei 1 m Distanz muß man also den Ton 170 hören; um den Ton a^1 der Normalstimmgabel von 435 Schwingungen zu hören, muß man sich auf $\frac{170}{435} = 0,39$ m der Mauer nähern. Diese Töne werden nun unter günstigen Umständen wirklich gehört. Nur die erste Auffindung macht manchmal Schwierigkeiten; sie gelingt am leichtesten, wenn man das Ohr ziemlich rasch der Mauer nähert und es wieder entfernt, weil dann der gesuchte Ton ansteigt und absinkt. Hat man die Beobachtung nur einmal gemacht, so kann man sie auch unter weniger günstigen Bedingungen wiederholen. Beim Vorübergehen an den Bäumen einer Allee, welche einem rauschenden Flusse parallel verläuft, hört man bei jedem Stamme den auf- und absteigenden leisen Ton. Es scheint gar nicht unmöglich, daß derselbe seinerzeit der gläubigen Phantasie als Säufzen der Oreade erschienen ist.

Daß selbst ein einziger Impuls durch die Dauer und die Art des Verlaufes den Eindruck verschiedener Tonhöhe hervorbringen kann, hat bereits Helmholtz erwiesen.

Der Knall einer Gewehr kapsel, eines Gewehres, einer Kanone unterscheidet sich durch die Höhe. Schlägt man mit den hohlen Handflächen zusammen, entsteht ein Geräusch von tiefer (dumpfer) Tonlage, es erhöht sich dieselbe, wenn man dabei die Handflächen eben ausstreckt. Der Knall einer mit Wasserstoff und Luft gefüllten Seifenblase klingt desto tiefer, je größer sie ist. Offenbar wird die Wellenlänge, also auch die Schwingungsdauer desto größer ausfallen, je längere Zeit die Explosion in Anspruch nimmt¹⁾.

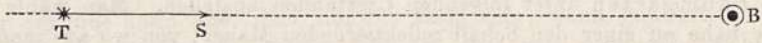
§ 227. Einfluß der Bewegung auf die Höhe des wahrgenommenen Tones. Doppler hat zuerst in seiner 1842 zu Prag erschienenen Schrift: „Das farbige Licht der Doppelsterne usw.“ darauf hingewiesen, daß die Höhe des wahrgenommenen Tones eine andere sein müsse, wenn Beobachter und

¹⁾ Man vergleiche die Abhandlung von E. Brücke: „Über die Wahrnehmung der Geräusche“. Wiener Akad. Ber. 90, B., 3. Abt., S. 199 (1885).

Tonquelle sich rasch einander nähern oder voneinander entfernen, als wenn sie in unveränderter Entfernung voneinander bleiben.

In Fig. 683 stelle *B* den ruhigen Beobachter, *T* aber die Tonquelle dar, welche sich mit solcher Geschwindigkeit gegen den Beobachter hin bewegt,

Fig. 683.



daß sie in einer Sekunde den Weg $TS = a$ zurücklegt. Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles mit c , so ist die Zeit, welche der Schall braucht, um den Weg TS zurückzulegen, gleich $\frac{a}{c}$. Von dem Moment an, in welchem die durch den tönenden Körper bei *T* erzeugte Verdichtungswelle in *B* anlangt, bis zu dem Moment, in welchem *B* von der Schallwelle erreicht wird, welche der tönende Körper in dem Augenblicke erzeugt,

in welchem er den Punkt *S* passiert, vergeht eine Zeit von $\left(1 - \frac{a}{c}\right)$ Sekunden.

Während nun der tönende Körper von *T* bis *S* fortschreitet, also während einer Sekunde, macht derselbe z Vibrationen, und die dadurch erzeugten Schallwellen schlagen innerhalb $\left(1 - \frac{a}{c}\right)$ Sekunden an das Ohr des Beob-

achters in *B*, während einer Sekunde wird also derselbe von $z' = \frac{z}{1 - \frac{a}{c}}$

Vibrationen getroffen werden. Während also der tönende Körper einen objektiven Ton von der Schwingungszahl z erzeugt, vernimmt der Beobachter in *B* einen subjektiven Ton, welcher der Schwingungszahl

$$z' = \frac{z}{1 - \frac{a}{c}} \dots \dots \dots (1)$$

entspricht. Unter den bezeichneten Umständen ist also der subjektive Ton höher als der objektive. Für den Fall, daß sich der tönende Körper mit der Geschwindigkeit des Schalles nähert, daß also $a = c$, ergibt sich aus Gl. (1) der Wert $z' = \infty$, der Beobachter würde also gewissermaßen einen Ton von unendlicher Schwingungszahl wahrnehmen müssen, alle Schallwellen, welche der tönende Körper auf dem Wege von *T* nach *S* erzeugt, würden gleichzeitig an das Ohr des Beobachters in *B* anschlagen.

Für den Fall, daß der tönende Körper sich von dem ruhenden Beobachter entfernt, geht Gleichung (1) über in

$$z'' = \frac{z}{1 + \frac{a}{c}} \dots \dots \dots (1a)$$

z'' ist also kleiner als z , der subjektive Ton, welchen der Beobachter wahrnimmt, ist also tiefer als der objektive. Wenn in diesem Falle $a = c$ wäre, so würde $z'' = \frac{z}{2}$, der ruhende Beobachter würde die nächst tiefere Oktave des Tones hören, welchen der tönende Körper erzeugt.

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn der tönende Körper im fortpflanzenden Medium ruhig bleibt, während der Beobachter

Tonerhöhung oder Erniedrigung den obigen Formeln entsprechend ungefähr einen kleinen halben Ton. Eine genaue Bestimmung der Differenz zwischen dem objektiven und dem subjektiven Tone wird übrigens durch das Geräusch der schnell fahrenden Lokomotive sehr erschwert¹⁾.

Fährt die Lokomotive gegen die Fassade eines Tunnels, so hört der Mitfahrende den von der Wand reflektierten Ton der Signalpfeife höher als den direkten. Fahren zwei Züge sich begegnend rasch aneinander vorüber, so hört der Mitfahrende die Signalpfeife des anderen Zuges zuerst in höherer Tonlage, welche im Momente der Begegnung rasch in tiefere übergeht.

E. Mach²⁾ hat ein Versuchsverfahren angegeben, welches hierher gehörige Beobachtungen einfacher und sicherer anzustellen gestattet.

Eine hohle Holzleiste von nahe 4 m Länge ist um eine durch ihre Mitte gehende vertikale Achse drehbar und trägt an einem Ende ein Zungenpfeifchen (Stimmton a^1). Die hohle Achse steckt in einer weiteren Röhre mit Seitenrohr und angesetztem Kautschukschlauch, so daß man durch letzteres dem Pfeifchen Luft zuführen kann, während das letztere in horizontalem Kreise herumgedreht wird. Bei einer Rotationsdauer von 0,6 bis 0,7 Sekunden ist dann sehr deutlich zu bemerken, wie der Ton des Pfeifchens bei der Entfernung vom Beobachter sinkt, bei der Annäherung steigt, und zwar genau so viel, als die Rechnung verlangt.

Damit jedoch das Experiment gut gelinge, muß es im Freien ausgeführt werden, da in geschlossenen Räumen durch Einnischung der von den Wänden reflektierten Töne Störungen eintreten. Außerdem soll die Bewegung nahe dem Boden und parallel zu demselben erfolgen. Statt des Pfeifchens kann auch eine Stimmgabel mit Resonanzkästchen benutzt werden.

Ein ebenfalls hierher gehöriges Experiment mit zwei gleichgestimmten Stimmgabeln hat König angegeben; wir können dasselbe aber erst später nach Erklärung der „Schwebungen“ mitteilen.

Einen Apparat zur Erläuterung des Dopplerschen Prinzips hat W. Elsässer³⁾ angegeben. Auf einem sich fortbewegenden Papierstreifen schreibt eine Stimmgabel Schwingungen und zugleich in einiger Entfernung ein Pendel Zeitmarken. Nähert man die Stimmgabel dem Pendel oder umgekehrt, so vermehrt sich die Anzahl der aufgezeichneten Schwingungen zwischen zwei Zeitmarken.

¹⁾ Pogg. Ann. 66.

²⁾ Wiener Akad. Ber. 41 (1860), dann insbesondere 77 (1878).

³⁾ Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht 14, 16 (1901).

Drittes Kapitel.

Von den tönenden Körpern.

§ 228. **Methoden zur Untersuchung schwingender Körper; Stroboskopie.** Da Wellenbewegungen und Töne durch stehend schwingende Körper hervorgerufen werden, so konnten wir in den beiden vorigen Kapiteln nicht die beiden ersten behandeln, ohne zugleich von den schwingenden Körpern selbst zu sprechen. Wir kommen aber jetzt ausführlicher auf diese letzteren zurück. Bei der Untersuchung der Schwingung tönender Körper können verschiedene Fragen zu beantworten sein. Die Zahl der Schwingungen (Tonhöhe), der zeitliche Verlauf derselben, die Form der Schwingungsbahnen der einzelnen Punkte, die Formen des schwingenden Körpers in verschiedenen Phasen, die Abteilung des ganzen Körpers in einzelne für sich schwingende Teile, die Lage der Knotenpunkte und Knotenlinien usw.

Da der Verlauf der Schwingungen in der Regel zu rasch ist, um direkt messend beobachtet zu werden, so empfiehlt sich hier die auch sonst (z. B. beim freien Fall) angewendete Methode, die zu untersuchenden Bewegungen mit anderen bereits bekannten von vergleichbarer Geschwindigkeit so zu kombinieren, daß eine der Beobachtung zugängliche resultierende Bewegung entsteht. Aus dieser Resultierenden und der einen bekannten Komponente schließt man dann auf die andere noch unbekannt Komponente.

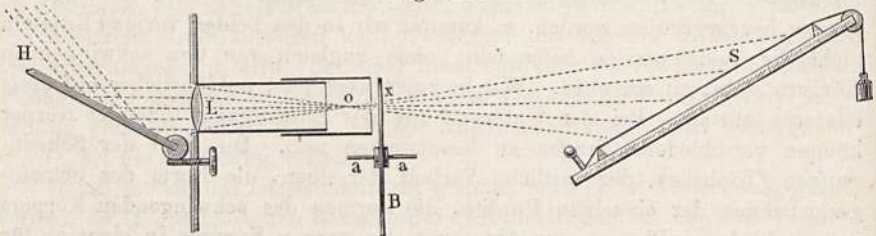
Auf diesem Prinzip beruht die bereits beschriebene graphische Methode (§ 224), bei welcher die Schwingungen der Stimmgabel, mit der fortschreitenden Bewegung der Schreibfläche kombiniert, die Sinuskurve liefern. Ebenso beruht hierauf die Benutzung des rotierenden Spiegels zur Analyse der singenden Flammen und der Königschen Flammenzeiger. In diesen beiden, wie in vielen anderen Fällen, ist die mit der zu untersuchenden Bewegung kombinierte Komponente eine senkrecht auf jene gerichtete geradlinige und gleichförmige Bewegung. Wir werden bald eine von Lissajous stammende Methode kennen lernen, bei welcher die mit der ursprünglichen Bewegung kombinierte eine pendelartige Bewegung ist. Eine verwandte, aber doch eigentümliche Methode endlich ist die stroboskopische, von welcher wir das Theoretische und ein Beispiel der Anwendung bereits im § 213 bei den singenden Flammen erörtert haben. Wir wollen hier noch einige andere Anwendungen beschreiben und uns dabei an die Darstellung von E. Mach¹⁾ halten, dem wir die Mehrzahl dieser Methoden verdanken.

¹⁾ E. Mach, Optisch-akustische Versuche, Prag 1873, S. 63. Dasselbst findet sich auch eine eingehende Darstellung der historischen Entwicklung dieser Methode.

Bei der ursprünglichen von Plateau herrührenden Form der stroboskopischen Methode wird der Anblick des schwingenden Körpers dadurch dem Auge periodisch entzogen, daß die zwischen den Spalten der rotierenden Scheibe befindlichen Teile als Diaphragmen vor das Auge treten. Eine sehr schätzenswerte Vervollkommnung erzielte Töpler¹⁾ dadurch, daß er nach einem schon 1845 von Doppler²⁾ gemachten Vorschlage, mittels der rotierenden Scheibe den schwingenden Körper (eine schwingende Saite) intermittierend beleuchtete. Einen weiteren Fortschritt erzielte Mach, indem er die nur schwierig und unvollkommen regulierbare rotierende Scheibe durch einen mittels elektromagnetischer Stimmgabel hergestellten Lichtunterbrecher ersetzte.

In Fig. 685 ist das von Töpler angewendete Verfahren dargestellt. *H* ist der Spiegel eines gewöhnlichen Heliostaten, welcher den Sonnenstrahlen

Fig. 685.



eine horizontale Richtung gibt. Die Linse *L* erzeugt in *o* ein kleines Sonnenbild, von welchem aus die Strahlen in das verfinsterte Beobachtungslokal divergieren.

Die rotierende Scheibe *B* wird so aufgestellt, daß der Konus von Sonnenstrahlen gerade durch eine oben bei *x* vorübergehende Öffnung fallen kann. Alles Nebenlicht wird durch passende Schirme abgehalten. Setzt man die Scheibe in Rotation, so erscheint von einer gewissen Geschwindigkeit an der austretende Strahlenkegel konstant. Betrachtet man bei dieser Beleuchtung einen tönenden Körper, z. B. die Saite *S*, welche mit der Lochscheibe nahezu gleich gestimmt ist, so kann man die Schwingungen mit der größten Deutlichkeit und Bequemlichkeit beobachten, wobei man noch den Vorteil hat, daß mehrere Personen zugleich an dem Experiment teilnehmen können.

Die eben beschriebene Versuchsweise leidet an dem Übelstande, daß es schwer hält, die Umdrehungsgeschwindigkeit der stroboskopischen Scheibe in entsprechender Weise zu regulieren³⁾, es war also wünschenswert, die intermittierende Beleuchtung durch ein Stroboskop mit fixer Tonhöhe herzustellen und nach diesem den zu untersuchenden Körper zu stimmen. Dies gelang zuerst Professor Mach (Optisch-akustische Versuche) durch Anwendung einer Helmholtz'schen Unterbrechungsstimmgabel von großer Exkursionsweite an Stelle der rotierenden Scheibe. Auch Töpler und Boltzmann

¹⁾ Pogg. Ann. 78.

²⁾ Abh. d. königl. böhm. Ges. d. Wissensch., V. Folge, 3. Bd., S. 779 (Doppler hat daselbst auch schon die Verbindung der stroboskopischen Scheibe mit Fernrohr, Mikroskop und Sirene vorgeschlagen).

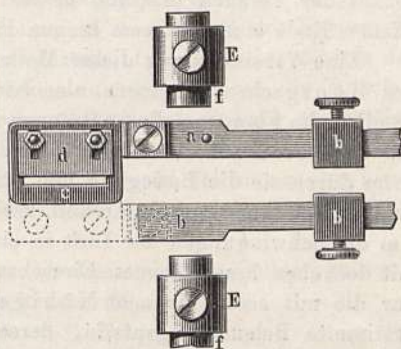
³⁾ Durch die neuerer Zeit konstruierten kleinen Elektromotoren mit regulierbarem Widerstande gelingt dies ziemlich gut.

haben sich unabhängig derselben Methode bedient¹⁾. Eine eingehendere Besprechung der Helmholtzschen Unterbrechungsgabel folgt an späterer Stelle.

Der Apparat unterscheidet sich dann von dem in Fig. 685 abgebildeten nur dadurch, daß an Stelle der rotierenden Scheibe eine elektromagnetisch vibrierende Stimmgabel gesetzt wird, deren beide Zinken mit leichten Blechschirmen aus Aluminium versehen sind, in welchen sich je ein schmaler horizontaler Schlitz befindet. Die Ebene der Blechschirme, welche sich überdecken, fällt mit der vertikalen Schwingungsebene der horizontal gestellten Gabel zusammen.

Fig. 686 zeigt die Zinken einer solchen Stimmgabel in ihrer Ausrüstung mit den Blechschirmen nach Töpler und Boltzmann. Auf das Zinkenende *a* ist ein Schuh fest aufgeschraubt, welcher ein sehr leichtes Blechrähmchen *c* mit rechteckiger Öffnung trägt. Auf dieses kann die dünne Blechplatte *d* in verschiedener Höhe angeschraubt werden, je nach der Breite, die man der Spalte geben will. Am anderen Stimmgabelende ist eine ganz analoge Vorrichtung in umgekehrter Lage angebracht. *EE* sind die mit verstellbaren Fortsätzen *ff* versehenen Pole des Elektromagneten, *bb* die Laufgewichte zum Verstimmen der Gabel. Die obere Gabelzinke trägt bei *a* den (in der Zeichnung fortgelassenen) Draht zur Stromunterbrechung, welcher in einen Quecksilbernafp taucht.

Fig. 686.



Die beiden Spalten müssen sich in der Ruhelage gerade überdecken, weil dann die Zeitintervalle zwischen zwei Lichtdurchtritten genau gleich lang werden. Offenbar ist die Anzahl der Lichtintermittenzen gleich der Anzahl einfacher Schwingungen der Gabel, also doppelt so groß wie die nach Doppelschwingungen gerechnete Schwingungszahl der Gabel. Der zu untersuchende schwingende Körper muß also nahe auf die obere Oktave der Unterbrechungsgabel abgestimmt sein. Ist er auf die Tonhöhe der letzteren gestimmt, so erscheint er doppelt.

Weniger zweckmäßig, aber doch ausführbar ist es, die Gabel so einzurichten, daß der Lichtdurchtritt mit der äußersten Exkursion der Gabel zusammenfällt, wo dann der zu untersuchende Körper nahe auf denselben Ton wie die Gabel gestimmt sein muß. Der Nachteil dieser Einrichtung besteht in der relativ langen Dauer des Lichtdurchtrittes. Bei den Versuchen von Töpler und Boltzmann war die Spaltbreite = 1 mm, die Amplitude der Schwingungen = 3 mm, die Zeitdauer des Lichtdurchtrittes = $\frac{1}{9}$ der halben Schwingungsdauer der Gabel, also = $\frac{1}{3}$ der Dauer der Dunkelheit.

Um nach dieser Methode die Schwingungen der Luft in einer Pfeife sichtbar zu machen, verfuhr E. Mach in folgender Weise. Das Sonnenlicht wird nach dem Durchgange durch das Stimmgabeldiaphragma durch eine

¹⁾ Pogg. Ann. 141.

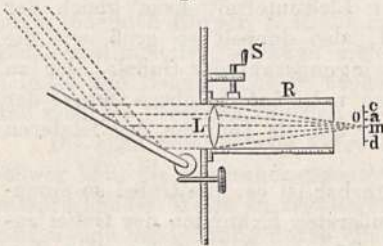
Linse nahe parallelstrahlig gemacht und der Länge nach durch eine horizontal liegende, nahe auf die Gabel gestimmte Orgelpfeife geführt.

Die Pfeife ist in der Mitte an Stelle der Knotenfläche durch eine schlaff gespannte Membran abgeteilt, was den Ton nicht merklich beeinflusst, aber den Luftzug verhindert. Die vertikalen Wände der Pfeife von der Membran bis zum offenen Ende sind aus Glas, der übrige Teil aus Holz. An der inneren oberen Wand der Pfeife zwischen Öffnung und Membran ist ein dünner Platindraht ausgespannt mit den nötigen Zuleitungen, um denselben mittels eines galvanischen Stromes erhitzen zu können. Benetzt man diesen Draht mit konzentrierter Schwefelsäure, so zieht sich diese in eine Anzahl gleich verteilter Tröpfchen zusammen. Beim Erwärmen sinken die Dämpfe dieser Säuretröpfchen in Gestalt feiner Dampflinien vertikal, also quer durch die Pfeife herab und bilden so die Marken, welche stroboskopisch schwingen, sobald der Versuch in Gang gesetzt wird. Die Exkursionen betragen am offenen Ende einer 125 cm langen Pfeife 4 mm.

Eine Vereinfachung dieser Methode erzielte E. Mach durch Anwendung des Königschen Brenners als intermittierende Lichtquelle. Macht man nämlich die Flammen dieser Brenner recht klein, so leuchten sie fast momentan periodisch auf, wenn sie durch eine Pfeife erregt werden. Man kann dann durch sie die Bewegung von Stimmgabeln, Saiten, Membranen, welche nahe auf die Pfeife gestimmt sind, recht gut stroboskopisch sichtbar machen¹⁾. Um die Schwingungen der Luft in einer Pfeife zu zeigen, legt man dieselbe, mit den oben beschriebenen Einrichtungen versehen, horizontal etwas höher vor die mit sechs bis acht Königschen Brennern versehene, nahe gleichgestimmte Beleuchtungspfeife, deren Flammen man durch das Glas der ersten Pfeife anblickt. Im finsternen Zimmer sieht man dann recht schön die Schwingungen der durch die Schwefelsäure gebildeten Dampflinien.

Eine weitere von E. Mach als stroboskopische Selbstregulierung bekannt gemachte Verbesserung der Methode beruht auf folgendem Prinzip.

Fig. 687.



Die Linse *L* des Apparates Fig. 685 samt der sie tragenden Röhre *R* wird an dem Fensterladen in der aus Fig. 687 ersichtlichen Weise mittels einer Schraube *S* von großer Ganghöhe mit Kurbel auf und ab verschiebbar eingerichtet. Die Öffnung von *R* und das Sonnenbildchen *o* steigt dann ebenfalls auf und nieder. Vor der Öffnung von *R* wird die früher beschriebene

Unterbrechungsgabel, welche aber diesmal nur mit einem Spaltschirm versehen sein darf, aufgestellt. *cd* stelle die Bahn der Spalte dieses Schirmes dar, *m* sei die Lage derselben in dem Moment, wo die Gabel ihre Ruhelage passiert. Läßt man die Schraube *S* unberührt und wirft das ins Zimmer durch die Spalte eintretende Licht mittels eines Planspiegels auf die Unterbrechungsgabel zurück, so scheint letztere trotz ihrer Schwingungen vollständig ruhig zu stehen, da sie stets nur in dem Moment beleuchtet, also sichtbar wird, wo sie die Ruhelage passiert. Hebt man nun mittels der

¹⁾ Durch Anwendung von Acetylgas erhält man lichtstärkere Flammen.

Schraube das Sonnenbildchen *o* in die Lage *a*, so wird die Gabel immer in jenen Momenten beleuchtet, wo ihre Spalte die Lage *a* angenommen hat. Indem man also die Schraube auf und ab bewegt, bewegt sich auch die Gabel mit beliebiger Langsamkeit auf und ab, sie bleibt stehen, sobald man die Schraube stehen läßt. Letztere ist mit einer Teilung am Kopfe versehen, welche gestattet, die Schwingungen der Gabel in beliebige Bruchteile zu teilen.

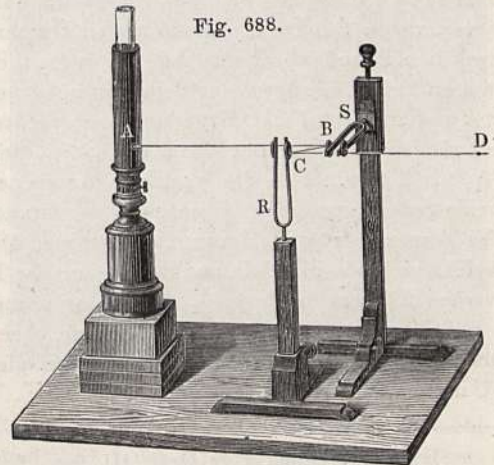
Ebenso wie die Bewegung der Unterbrechungsgabel selbst können auf diese Weise die Bewegungen solcher Körper untersucht werden, welche durch die Unterbrechungsgabel erregt werden. Bringt man z. B. die Mündung einer gläsernen Resonanzröhre mit Rauchflocken vor die Gabel, so bewegen sich die Flocken, sobald man die Schraube bewegt. Besonders schön ist der Versuch mit einem nach Melde schwingenden Faden (§ 211), den man durch die Unterbrechungsgabel selbst erregt. Findet zwischen der intermittierend beleuchteten Gabel und dem durch sie erregten Körper ein Phasenunterschied statt, so sind im allgemeinen zwei Lagen des Körpers zugleich sichtbar. Ist nämlich die Linse so gestellt, daß die Lichtspalte in dem Moment das Licht durchläßt, in welchem die Stimmgabel die Ruhelage passiert, so hat der schwingende Körper diese Ruhelage bald schon überschritten, bald noch nicht erreicht. Er muß daher in diesen beiden Lagen erscheinen. Ähnlich verhält es sich bei den anderen Stellungen der Linse; nur den Stellungen größter Exkursion der Gabel entsprechen einfache Bilder des Körpers.

Bezüglich weiterer Methoden der stroboskopischen Selbstregulierung verweisen wir auf die oben zitierte Originalschrift.

§ 229. Optische Methode mittels der Figuren von Lissajous.

Diese Methode zur Untersuchung der Schwingungen eines Körpers beruht auf der Kombination der Schwingungen mit solchen, welche senkrecht darauf gerichtet nach dem Pendelgesetz erfolgen. Als letztere werden in der Regel die Schwingungen einer Stimmgabel benutzt. Wir wollen zuerst zeigen, wie das Experiment ausgeführt wird, um die Schwingungen zweier Stimmgabeln miteinander zu kombinieren. In Fig. 688 sei *R* eine auf einem festen Stativ befestigte Stimmgabel, deren Schenkel, in einer Vertikalebene liegend, kleine Spiegel tragen. In der Nähe dieser ersten ist eine zweite Stimmgabel *S*, welche in gleicher Weise mit kleinen Spiegeln versehen ist, so aufgestellt, daß die Ebene ihrer Schenkel eine horizontale ist.

Die gegenseitige Stellung der beiden Stimmgabeln ist so angeordnet, daß ein vom Lichtpunkte *A* ausgehender Lichtstrahl, welcher den kleinen



Spiegel *B* trifft, nach dem Spiegel *C* der anderen Stimmgabel und von diesem endlich in der Richtung nach *D* reflektiert wird.

Ein in der Richtung des zum zweiten Male reflektierten Strahles etwa bei *D* befindliches Auge sieht das Bild des Lichtpunktes *A*, welches ruhig steht, solange die beiden Stimmgabeln nicht vibrieren.

Wird aber die Stimmgabel *R* angeschlagen oder mit dem Fiedelbogen gestrichen, während *S* in Ruhe bleibt, so verlängert sich das Bild des Lichtpunktes zu einem vertikalen Lichtstreifen. Vibriert dagegen die Stimmgabel *S* allein, während *R* in Ruhe bleibt, so erscheint das Bild des Lichtpunktes zu einer horizontalen Linie verlängert.

Wenn aber beide Stimmgabeln gleichzeitig vibrieren, so kombinieren sich die horizontale und die vertikale Bewegung des Lichtpunktes in der Weise, daß derselbe eine Kurve beschreibt, deren Gestalt von dem akustischen Intervall der beiden Stimmgabeln und von dem Phasenunterschiede ihrer Vibrationen abhängt.

Diese Kurven führen den Namen Lissajous', der durch ihre Einführung ¹⁾ nicht allein die Physik mit einem reizend schönen Experiment, sondern überdies mit einem Hilfsmittel bereichert hat, dessen vorzügliche und vielseitige Verwendbarkeit wir alsbald kennen lernen werden.

Gehen wir vorerst daran, diese Kurven zu konstruieren. Wir nehmen dabei zunächst an, daß die Amplituden der beiden senkrecht aufeinander stehenden Schwingungen gleich groß seien.

Wir ziehen (Fig. 689) einen Kreis, dessen beide Durchmesser *AB* und *CD* die Bahnen der komponierenden Schwingungen nach Richtung und Größe vorstellen. Wir teilen sodann den Umfang des Kreises in eine Anzahl, z. B. 24, gleicher Teile und ziehen durch die Teilpunkte mit den Durchmessern parallele Hilfslinien, die sich in $12 \times 12 = 144$ Punkten schneiden. Nach dem im § 54 abgeleiteten Gesetze stellen dann die mit 0, 1, 2, 3 . . . bis 23 bezeichneten Punkte des horizontalen Durchmessers die Orte vor, welche ein zwischen *A* und *B* schwingender Körper in den aufeinander folgenden gleich langen Zeitabschnitten der Schwingungsdauer erreicht. Wenn wir die Bewegung z. B. von der Mitte aus nach rechts ins Auge fassen, so käme der schwingende Körper nach dem ersten $\frac{1}{24}$ der Schwingungsdauer bis 1, nach $\frac{2}{24}$ bis 2 usw. Für die vertikale Komponente gilt dasselbe. Finden nun beide Schwingungen zugleich statt, so brauchen wir nur nach den Gesetzen des Bewegungsparallelogramms diejenigen Durchschnittspunkte aufzusuchen, welche sich als die Bahnpunkte des in der Richtung der Resultierenden bewegten Körpers nach je $\frac{1}{24}$ der Schwingungsdauer ergeben ²⁾.

Als ersten Fall betrachten wir den, bei welchem die Schwingungsdauer beider Komponenten dieselbe ist, was bei gleicher Tonhöhe der Stimmgabeln (Unisono) der Fall sein muß.

¹⁾ Ann. de chim. et de phys., III. Ser., T. 41.

²⁾ Um nicht bei jeder einzelnen zu zeichnenden Kurve diese Konstruktion neu ausführen zu müssen, bedient sich der Verfasser beim Unterricht einer Schreiftafel, auf welche die Durchschnittspunkte ohne die störenden Hilfslinien dauernd gemalt sind (Fig. 690 ohne die Diagonalen). Auch der Leser wird zweckmäßig dieses durch eigene Konstruktion in größerem Maßstabe erhaltene Punktsystem mittels Durchstechens mit einer Nadel vervielfältigen, um die den verschiedenen Fällen entsprechenden Figuren leicht und schnell zeichnen zu können.

Beginnt dabei jede der beiden Bewegungen mit derselben Phase, oder ist, wie man sich auszudrücken pflegt, die Phasendifferenz $= 0$, so ist die Konstruktion der resultierenden Kurve eine besonders einfache, da letztere eine gerade Linie wird. Lassen wir z. B. die horizontale Schwingung von der Mitte beginnend nach rechts gehen, die vertikale, ebenfalls daselbst beginnend, nach aufwärts, so erhalten wir als Punkte der resultierenden Bahn nach $\frac{1}{24}$, $\frac{2}{24}$, $\frac{3}{24}$ usw. der Schwingungsdauer, die in Fig. 690 mit 1, 2, 3 usw. bezeichneten Punkte, deren Verbindungslinie mit der Diagonale des ganzen Quadrates zusammenfällt. Die Schwingung erfolgt also diesmal in einer in sich zurückkehrenden schief gelegenen geraden Linie.

Ist die Phasendifferenz $= \frac{1}{2}$, d. h. beginnt die eine Schwingung erst, nachdem die andere bereits halb vollendet ist, so erhält man ebenfalls eine gerade Linie, welche aber die in Fig. 690 punktiert gezeichnete Lage hat. Die Bewegung nach aufwärts ist in diesem Falle bis zur Mitte zurückgekehrt und gibt mit der in diesem Moment beginnenden Rechtsbewegung die rechts abwärts gerichtete Diagonale als Resultierende.

Nehmen wir jetzt die Phasendifferenz $= \frac{1}{4}$. Die Bewegung nach aufwärts sei bis zum Punkte C, Fig. 689, vorgerückt und nun erst beginne die Bewegung nach rechts. Indem sich dieselbe mit der gleichzeitig beginnenden Bewegung nach abwärts kombiniert, erreicht sie nach $\frac{1}{24}$ Schwingungsdauer den Punkt 1 des Kreisbogens, nach weiteren gleichen Bruchteilen der Schwingungsdauer die Punkte 2, 3, 4, 5, endlich den Punkt 6, wo nun die Rechtsbewegung in eine Linksbewegung übergeht, während die Abwärtsbewegung fort dauert. So erhalten wir die Punkte 7, 8, 9, 10, 11 und 12. Nun geht die Abwärtsbewegung in Aufwärtsbewegung über, während die Linksbewegung fort dauert. Es entsteht also auf diese

Fig. 689.

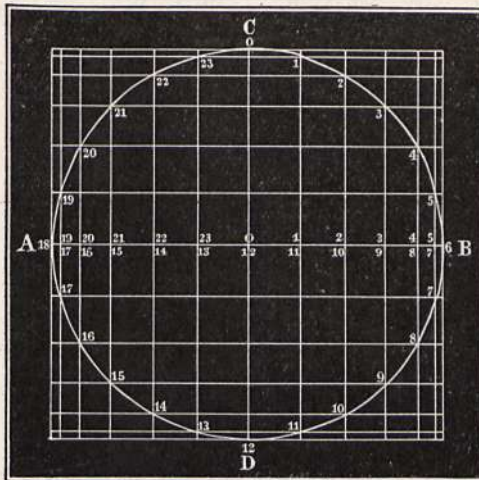
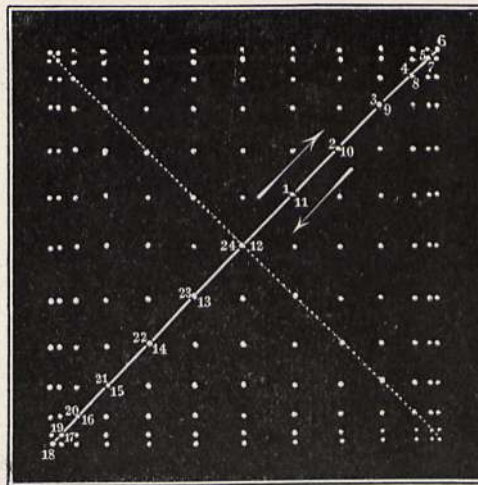


Fig. 690.



Weise ein Kreis, und zwar derselbe, der in Fig. 689 zur Konstruktion des Punktsystems gedient hat.

Ist die Phasendifferenz $= \frac{3}{4}$, so entsteht derselbe Kreis, jedoch wird er in entgegengesetzter Richtung durchlaufen.

Nehmen wir jetzt die Phasendifferenz $= \frac{1}{8} = \frac{3}{24}$. Lassen wir also (Fig. 691) die vertikale Bewegung von der Mitte um drei Intervalle

Fig. 691.

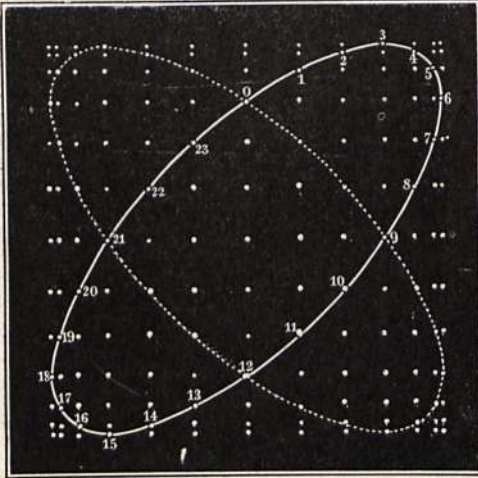
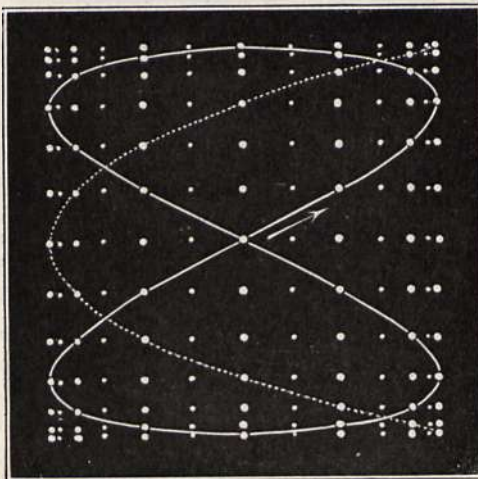


Fig. 692.



nach aufwärts vorgerückt sein und bezeichnen den dortigen Punkt, wo die horizontale Bewegung nach rechts beginnt, mit 0, so finden wir, indem wir stets den Diagonalen folgen, die Punkte 1, 2, 3, 4 . . . , bis wir wieder zum Punkte 0 gelangen. Wir erhalten so eine Ellipse. Dieselbe Ellipse, jedoch in umgekehrter Richtung durchlaufend, finden wir für die Phasendifferenz $= \frac{7}{8}$ oder $\frac{21}{24}$. Den Phasendifferenzen $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{8}$ endlich entspricht die punktiert gezeichnete Ellipse, welche das Spiegelbild der vorigen ist.

Allen übrigen Phasendifferenzen entsprechen ebenfalls mehr oder weniger exzentrische Ellipsen, wie man sich leicht überzeugen kann, indem man z. B. mit den Phasendifferenzen $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$ usw. die obige Konstruktion durchführt. Man kann daher sagen, die Lissajousche Figur für das Unisono ist im allgemeinen eine Ellipse, welche für die Phasendifferenz 0 und $\frac{1}{2}$ in gerade Linien, für $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ in einen Kreis übergeht.

Wären die beiden Amplituden nicht gleich groß, so würden die Figuren in die Länge gezogen, also auch der Kreis als Ellipse erscheinen. Geht man von der Phasendifferenz $= 0$ allmählich zu größeren Phasendifferenzen über, so geht die gerade Linie zuerst in eine sehr exzentrische Ellipse über, die sich immer mehr dem Kreise nähert, dann Kreis wird, hierauf in eine Ellipse entgegengesetzter Lage und endlich in eine Gerade sich verwandelt; aus dieser geht eine stark exzentrische Ellipse mit entgegengesetzter Rotationsrichtung hervor, die ihrerseits sich zum Kreise erweitert

und dann wieder zur ursprünglichen Geraden zusammenfällt. Die in Fig. 695 gegebene übersichtliche Zusammenstellung der wichtigsten Lissajous'schen Kurven zeigt in der ersten Horizontalreihe die Aufeinanderfolge dieser Verwandlungen. Hierbei ist zu bemerken, daß zuerst die Reihe der Figuren von links nach rechts, sodann dieselbe Reihe von rechts nach links, jedoch umgekehrt rotierend auftritt.

Konstruieren wir nun die Kurven, welche entstehen, wenn die eine — z. B. die horizontal schwingende — Stimmgabel auf die Oktave der anderen gestimmt ist. Ihre Schwingungen sind dann doppelt so schnell. Machen wir wiederum die vereinfachende Annahme gleicher Amplituden, so können wir das vorhin gebrauchte Punktsystem auch hier benutzen, indem wir in horizontaler Richtung stets um zwei Punkte weiter springen, während wir in vertikaler nur um einen Punkt auf- oder absteigen. Wir brauchen also nur von den Punkten einer Horizontalreihe alle geradzahligten unberücksichtigt zu lassen (in Fig. 692 sind diese Punkte kleiner gezeichnet) und können dann wieder einfach den Diagonalen nachgehen, indem wir jedesmal die Richtung wechseln, so oft wir an den Rand kommen.

In der Fig. 692 sieht man zwei solcher Kurven gezeichnet. Die ausgezogene, nach Art einer 8 gestaltete Kurve entsteht in der durch den Pfeil angegebenen Richtung bei den Phasendifferenzen 0 und $\frac{1}{2}$ (der größeren, vertikalen Schwingungsdauer), in entgegengesetzter Richtung bei den Phasendifferenzen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$. Die in sich selbst zurückkehrende gestrichelte Kurve entsteht bei den Phasendifferenzen $\frac{1}{8}$ und $\frac{5}{8}$. Für die dazwischen liegenden Phasendifferenzen erhält man Figuren, welche eine mehr oder weniger verschobene 8 vorstellen. Außerdem entstehen bei den Phasendifferenzen $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{8}$, die den Spiegelbildern der gestrichelten Kurve entsprechenden Figuren. Die Reihenfolge der Figuren, welche bei allmählich veränderter

Fig. 693.

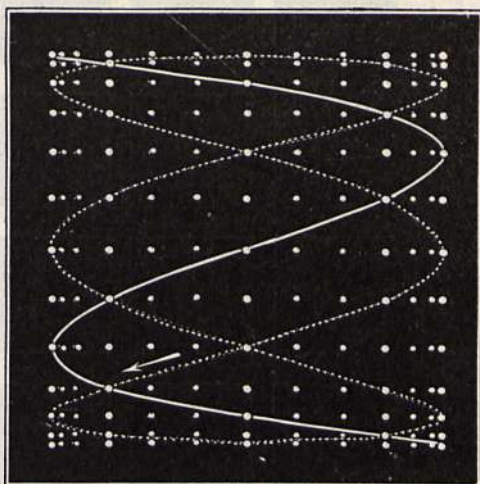
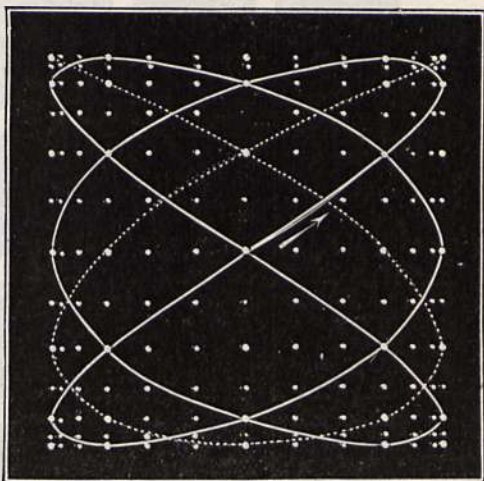


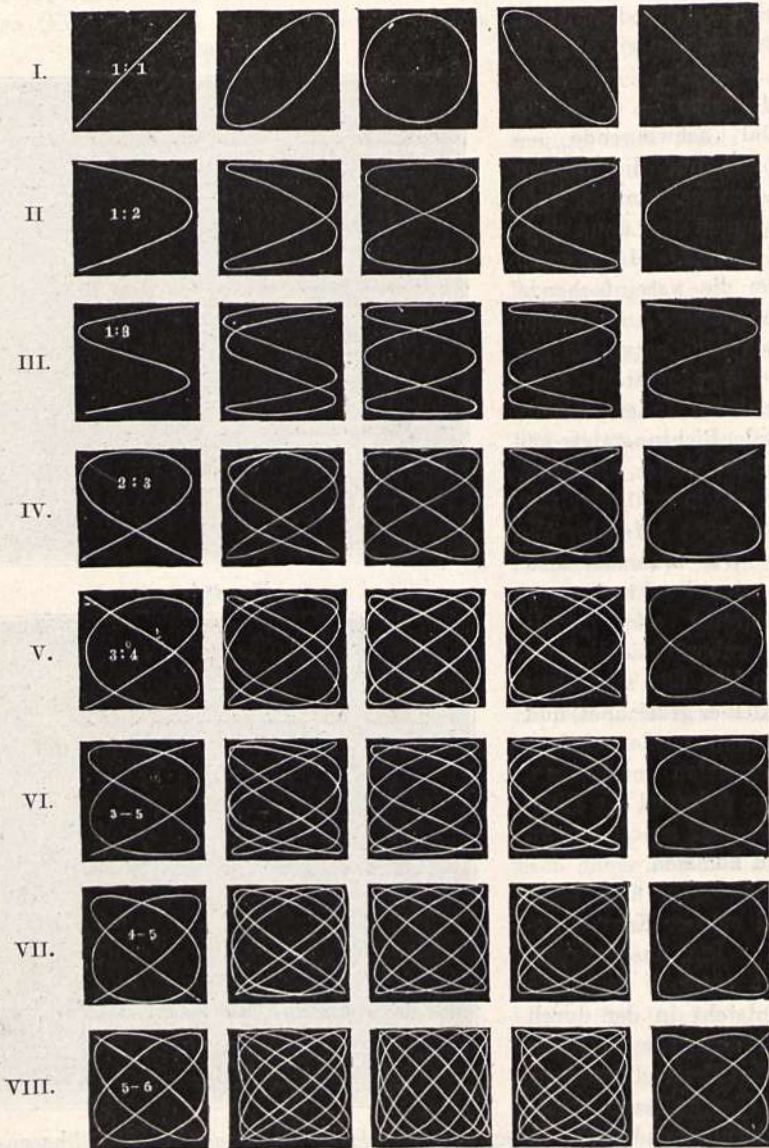
Fig. 694.



Phasendifferenz entstehen, ist in der zweiten Reihe der Fig. 695 zusammengestellt.

Schwingt die horizontale Gabel dreimal so schnell als die vertikale, so gibt sie die sogenannte Duodecime oder Quinte der Oktave

Fig. 695.



von dem Tone der anderen Stimmgabel. Die zugehörige Lissajoussche Figur ist in Fig. 693 konstruiert. Von den horizontalen Punkten ist nur jeder dritte berücksichtigt. Es ergibt sich dann die Konstruktion von selbst, indem man die aufeinander folgenden Diagonalen zeichnet. Zu einer genauen Zeichnung liegen dann freilich die Punkte zu weit voneinander

und wäre ein Punktsystem mit mehreren Punkten erforderlich, wie man es erhält, indem man den ursprünglichen Kreis, Fig. 689, statt in 24 in 48 oder noch mehr Bogenstücke einteilt. Die ausgezogene Linie entspricht den Phasendifferenzen 0 , $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Ihr Spiegelbild entsteht bei den Phasendifferenzen $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$ und $\frac{5}{6}$ (auch hier sind darunter Bruchteile der Schwingungsdauer für die vertikale Komponente verstanden). Die symmetrische, gestrichelt gezeichnete Figur entsteht in der Richtung des Pfeiles bei den Phasenunterschieden: $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$ und $\frac{9}{12}$, in entgegengesetzter Richtung bei den Phasenunterschieden: $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{11}{12}$. Die ganze Reihenfolge der Figuren für zunehmende Unterschiede der Phasen ist wiederum aus Fig. 695 dritte Reihe ersichtlich.

In Fig. 694 ist die dem Intervall $2:3$, der Quinte, zugehörige Kurve abgeleitet. Von den vertikalen Punktreihen sind je ein Punkt, von den horizontalen je zwei Punkte übersprungen, so daß die Anzahl der gleichzeitig zurückgelegten Wegstücke im Verhältnis $2:3$ stehen. Auch hier und noch mehr bei den komplizierteren Figuren der Intervalle $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ usw. stellt sich das Bedürfnis einer größeren Anzahl von Punkten ein, da sonst die Verbindungslinien derselben nicht gut gezeichnet werden können. Die ausgezogene Figur entsteht bei den Phasendifferenzen 0 , $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{6}$ in der Richtung des Pfeiles, bei den Phasendifferenzen $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{6}$ in entgegengesetzter Richtung. Die gestrichelte Figur entsteht bei den Phasendifferenzen $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{12}$; ihr Spiegelbild bei den Phasendifferenzen $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{11}{12}$. Die ganze Reihenfolge der Figuren für zunehmende Phasendifferenzen findet sich Fig. 695 vierte Reihe abgebildet. Die übrigen Reihen stellen die den Intervallen $3:4$, $3:5$, $4:5$, $5:6$ entsprechenden Figuren dar, deren Ableitung nach den oben durchgeführten Beispielen keine Schwierigkeiten bereiten wird.

§ 230. Experimentelle Darstellung der Figuren von Lissajous, drehende Bewegung derselben; Vibrationsmikroskop, Kaleidophon.

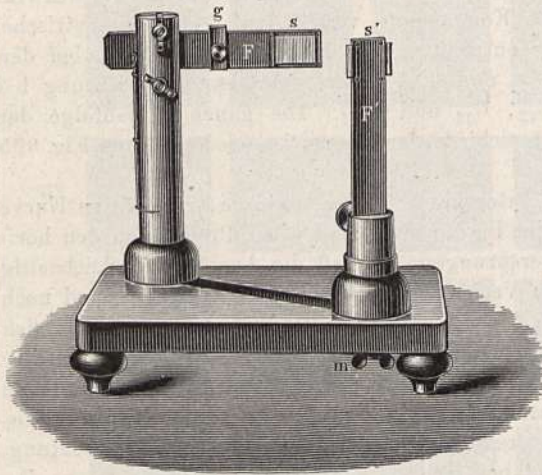
Um die Lissajousschen Figuren nach der in Fig. 688 dargestellten Methode hervorzubringen, bedient man sich gewöhnlich eines von König in Paris gelieferten vorzüglichen Apparates, dessen Stimmgabeln solche Dimensionen haben, daß sie große und lange anhaltende Vibrationen machen. Die Schenkel derselben besitzen bis zu 22 cm Länge, 5 mm Dicke und 10 mm Breite. Man beobachtet die Figuren entweder mittels eines Fernrohres, oder projiziert sie mittels einer Konvexlinse an eine weiße Wand, so daß sie einem ganzen Auditorium zugleich sichtbar werden. Sollen die Figuren hierbei ganz rein und scharf erscheinen, so müssen Stahlspiegel verwendet werden, welche aber den Apparat sehr verteuern.

Statt des Königschen Apparates kann man sich zu Demonstrationsversuchen auch einer sehr einfachen vom Verfasser konstruierten Vorrichtung bedienen, bei welcher die Stimmgabeln durch federnde Stahlstreifen ersetzt sind. Als Spiegel können rückwärts geschwärzte Spiegelglasscheibchen dienen.

Dieselbe ist in Fig. 696 abgebildet. F und F' sind die schwingenden Federn, s und s' die beiden Spiegel. Die Säulen, welche die Federn tragen, sind drehbar und können längs des schiefen Schlitzes im Fußbrett einander genähert und mittels der Flügelschrauben m befestigt werden. Die Schwingungsdauer der Federn wird entweder durch Anbringung oder Verschiebung von Laufgewichten g oder (bei der horizontalen Feder) durch Ver-

stellen derselben im Einschnitt der Tragsäule reguliert. Man beobachtet auch hier entweder direkt oder mittels Projektion an eine Wand, welche bei heller Lichtquelle keinerlei Schwierigkeit bietet. Klopft man mit einem harten Gegenstand auf die Mitte der Federn, so entstehen schön gekräuselte

Fig. 696.



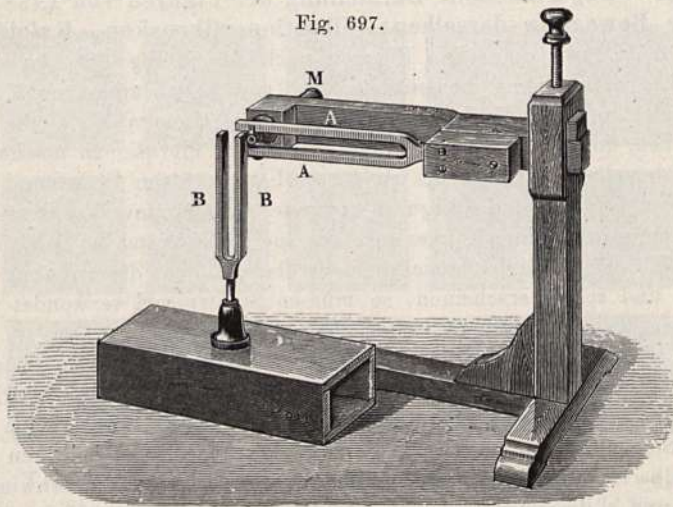
Figuren, welche von den Obertönen herrühren, die durch die Unterabteilung der Stahlstreifen in mehrere schwingende Partien momentan hervorgerufen werden.

Eine andere Methode der optischen Zusammensetzung zweier senkrecht aufeinander stattfindender Schwingungen ist bei dem Komparator von Lissajous, welcher in der von H. Helmholtz vervollkommenen Konstruktion auch Vibrationsmikroskop genannt wird, in

Anwendung gebracht. Dieser Apparat dient zunächst dazu, die Schwingungsdauer einer Stimmgabel mit der einer Normalstimmgabel von bekannter Tonhöhe aufs genaueste zu vergleichen.

Die Normalstimmgabel *A*, Fig. 697, ist in einem passenden Stativ so angebracht, daß ihre beiden Schenkel in einer Vertikalebene liegen und

Fig. 697.



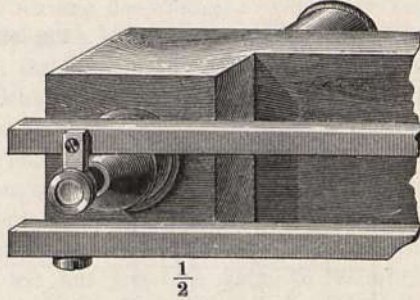
ihre Schwingungen in dieser Vertikalebene in der Richtung von oben nach unten vor sich gehen. — Der obere Schenkel der Normalstimmgabel trägt das Objektiv eines schwach vergrößernden Mikroskops, während an dem

anderen Schenkel ein entsprechendes Gegengewicht angebracht ist. Die Stimmgabel ist so adjustiert, daß sie mit dem Objektiv und dem Gegengewicht belastet einen bestimmten Ton gibt, also eine bestimmte Anzahl von Schwingungen in der Sekunde macht.

In Fig. 698 ist der vordere Teil der Stimmgabel *A* samt dem daran angeschraubten Objektiv in größerem Maßstabe dargestellt.

Vor der Normalgabel *A* wird nun die zu prüfende Stimmgabel *B*, etwa auf einem Resonanzkästchen befestigt, aufgestellt, und zwar so, daß die Vibrationsrichtung ihrer Schenkel horizontal, also rechtwinklig ist zu der Vibrationsrichtung der Stimmgabel *A*. Auf dem oberen Ende des einen Schenkels, welcher gerade vor dem Objektiv *o* stehen muß, ist auf irgend eine Weise¹⁾ ein Punkt markiert, den wir *p* nennen wollen.

Fig. 698.



Das Rohr des Mikroskops, dessen Objektiv an die Stimmgabel *A* angeschraubt ist, steckt hinter diesem Objektiv in dem Stativ, wie man in Fig. 697 und noch deutlicher in Fig. 698 sieht. Dieses Mikroskop unterscheidet sich von einem gewöhnlichen nur dadurch, daß das Objektiv nicht an der Mikroskopröhre, sondern dicht vor derselben an der Stimmgabel befestigt ist.

Durch das Okular bei *M* in das Mikroskop hineinschauend, sieht man nun das Bild des markierten Punktes *p*, welcher ruhig steht, wenn keine der Stimmgabeln vibriert. Oszilliert die Stimmgabel *A* allein, so beschreibt der Punkt *p* eine vertikale Linie; vibriert die Stimmgabel *B* allein, so beschreibt er eine horizontale Linie, wenn aber endlich beide Stimmgabeln vibrieren, so beschreibt *p* eine Kurve, deren Gestalt von dem Intervall der Stimmgabeln abhängt.

Nehmen wir z. B. an, die Stimmgabeln seien auf Unisono gestimmt, so muß der Punkt *p* eine der auf Fig. 695, erste Reihe, verzeichneten Kurven zu beschreiben scheinen.

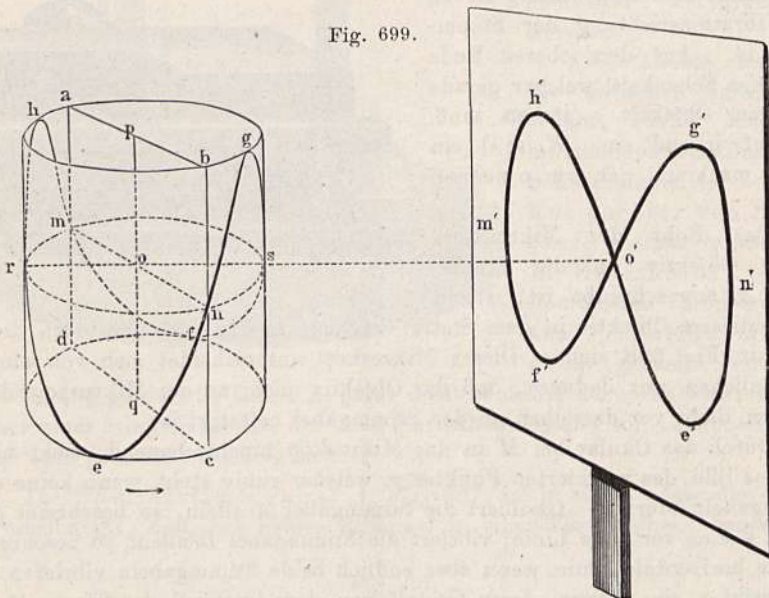
Welche von diesen Figuren, z. B. ob Ellipse oder ob gerade Linie, beschrieben wird, das hängt von dem vorhandenen Phasenunterschiede ab. Da man schwer imstande ist, die Bewegung beider Gabeln absolut gleichzeitig beginnen zu lassen, so wird im allgemeinen bei jedesmaligem neuen Ingangsetzen eine andere Ellipse entstehen, welche aber dann, eine absolut gleiche Tonhöhe vorausgesetzt, so lange andauert, als die Gabeln ungestört fortschwingen. Ist aber die Stimmung keine absolut richtige, so eilt allmählich die eine Gabel der anderen voraus, es entsteht ein immer größerer Phasenunterschied und es entstehen deshalb der Reihe nach die diesen verschiedenen Phasenunterschieden entsprechenden Figuren, welche allmählich ineinander übergehen. Dabei beobachtet man überdies als auffallende Erscheinung, daß die Figuren sich um eine in der Bildebene liegende Achse zu

¹⁾ Man bestaubt die geschwärzte Fläche mit Stärkemehl, deren Körnchen weiße Punkte darstellen.

dreuen scheinen. Dasselbe zeigt sich auch bei den anderen Entstehungsweisen dieser Figuren. Wie diese Täuschung entsteht, kann auf folgende Weise erklärt werden.

Man denke sich, Fig. 699, einen weißen Schirm, in sehr große Entfernung davon ein Licht und dazwischen die mit dem Schirme parallele Ebene $abcd$ gestellt. In dieser Ebene werde ein Punkt o zu horizontalen und vertikalen Schwingungen nach den Amplituden mn und pq veranlaßt. Die vertikalen Schwingungen erfolgen beispielsweise doppelt so schnell als die hori-

Fig. 699.



zontalen. Der Schatten, der dann bei der Phasendifferenz $= 0$ auf dem Schirme entworfen wird, hat die gezeichnete Gestalt, nämlich dieselbe, wie die vom schwingenden Punkte beschriebene Figur. Jetzt denken wir uns denselben Punkt mit derselben vertikalen Bewegung von o nach r übertragen und statt der horizontalen längs mon erfolgenden Schwingungsbewegung eine gleichförmige Bewegung auf dem Kreise $rnsmr$ ausführen; es muß dann eine kombinierte Bewegung auf der Zylinderfläche, nämlich $rengsfmhr$, entstehen. Da nun aber die gleichförmige Bewegung längs der Peripherie des Kreises, auf den Durchmesser projiziert, die schwingende Bewegung gibt (§ 54), so muß sie auch, auf den Schirm projiziert, dieselbe geben. Das heißt, ein längs $mrns$ gleichförmig bewegter Punkt gibt einen zwischen m' und n' hin und her schwingenden Schatten. Hat er außerdem eine vertikal schwingende Bewegung, so erzeugt der Schatten die Lissajoussche Figur. Wickeln wir jetzt die Zylinderfläche ab, so enthält dieselbe eine Kurve eingezeichnet, welche entsteht, wenn ein Punkt längs der Abszissenachse gleichförmig, längs der Ordinatenachse schwingend sich bewegt. Es ist dies die § 54 abgeleitete und S. 167 gezeichnete Schwingungskurve, und zwar werden zwei Wellenlängen derselben längs der abgewickelten Peripherie aufgetragen sein. Die auf dem Schirme entstehende Figur ist

also als Schatten einer auf der Zylinderfläche aufgewickelten Schwingungskurve zu betrachten.

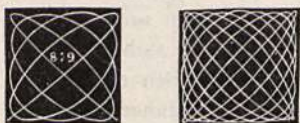
In der Zeichnung ist angenommen, daß die vertikale und die horizontale Bewegung gleichzeitig von o bzw. r ausgehen. Es liegt deshalb der Durchschnittspunkt der Schwingungskurve und des Halbkreises mnr (der aufgewickelten Abszissenachse) in der Verlängerung von $o'o$. Um eine Phasendifferenz hervorzurufen, müßten wir die Zeichnung der Schwingungskurve auf dem Zylinder etwas aus ihrer Lage drehen, oder wenn wir uns die Zeichnung fest denken, müßten wir den Zylinder samt Zeichnung etwas um seine Achse drehen. Geschieht dies in der Richtung des Pfeiles, so rückt der Teil hre der Kurve mehr nach vorn, ihre Schatten $h'o'e'$ mehr nach rechts; dagegen der Teil gsf mehr nach hinten, ihr Schatten $g'o'f'$ mehr nach links. Die Projektion dieser so verschobenen Schwingungskurve auf die Ebene $abcd$, also auch ihr Schatten auf dem Schirme, muß daher die entsprechende Lissajoussche Figur für eine vorhandene Phasendifferenz geben. Dreht sich der Zylinder langsam, so entsteht auch langsam die Reihe der Figuren, welche der langsam zunehmenden Phasendifferenz entsprechen, wie sie Figur 695, zweite Reihe (nur sind die Figuren dort in der Papierebene um 90° verdreht gezeichnet) aufgeführt sind. Denken wir uns jetzt ein Auge an Stelle des schattenwerfenden Lichtes, so verstehen wir leicht, daß die sich drehende Schwingungskurve des durchsichtig gedachten Zylinders demselben ebenso erscheint wie der entsprechende Schatten. Umgekehrt wird daher auch die Reihe der Lissajousschen Figuren für die zunehmende Phasendifferenz dem Auge ebenso erscheinen wie die sich drehende Schwingungskurve. Es läßt sich dies einfach zeigen, indem man auf einen Glaszylinder eine aus schwarzem Papier ausgeschnittene Schwingungskurve aufklebt, welche, wie die Kurve $rengsfmhr$ in Fig. 699, sich um den Zylinder herumlegt. Blickt man aus einiger Distanz gegen den Zylinder, während man ihn um die Achse dreht, so erhält man einen Anblick, welcher der sich scheinbar drehenden Lissajousschen Figur gleicht. Auch mit Drahtfiguren kann diese Drehung gezeigt werden.

Dasselbe gilt nun auch beim Anblick der Kurven des Vibrationsmikroskops, sowie überall, wo wir Lissajoussche Figuren entstehen sehen. Zeigen dieselben eine drehende Bewegung, so deutet dies auf eine sich allmählich ändernde Phasendifferenz und mittelbar auf ein nicht genau hergestelltes Verhältnis der Schwingungsdauer. Sollten z. B. zwei Stimmgabeln unisono gestimmt sein, hat aber in Wirklichkeit die eine die Schwingungszahl 440, die andere 440,1, so eilt die letztere der ersteren pro Sekunde um $\frac{1}{10}$ Schwingung voraus, in 10 Sekunden vollführt sich also die ganze Reihe der Phasendifferenzen; die entsprechende Lissajoussche Figur wird daher binnen 10 Sekunden sich einmal drehen. Angenommen, man beobachte an diesen Gabeln ein anderes Mal, daß die Lissajoussche Figur in der Minute eine Drehung vollende, so weiß man, daß auf $440 \times 60 = 26400$ Schwingungen der einen Gabel 26401 Schwingungen der anderen Gabel kommen, daß also ihr Intervall $= \frac{26401}{26400} = 1,000038$ sei. Hieraus ersieht man, wie außerordentlich empfindlich dieses Verfahren zur Vergleichung der Tonhöhe sein müsse. Man begreift auch, daß es viel schwieriger ist, ruhig stehende Figuren zu erhalten, als drehende. Es genügt die geringste Belastung mit einem Stückchen Wachs, um erstere zum Drehen zu bringen.

Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, wollen wir noch untersuchen, welche Wirkung durch eine beträchtliche Verstimmung eines reinen Intervalls hervorgebracht wird. Die Fig. 700 zeigt die zwei verschiedenen Phasendifferenzen entsprechenden Lissajousschen Kurven für das Intervall $8 : 9$. Sowie wir dieses Verhältnis einerseits als das reine Intervall $\frac{8}{9}$,

andererseits als das beträchtlich verstimmte Intervall $\frac{1}{1}$, also als stark verstimmtes Unisono auffassen können, so läßt die Fig. 700 zwei Auffassungen zu. Einmal betrachten wir die ganze Figur als eine einzige, geschlossene Kurve, welche vollkommen ruhig steht. Anderenfalls betrachten wir sie als eine Reihe von sich rasch ändernden Ellipsen, welche in der für ein verstimmtes Unisono abgeleiteten Weise rasch bald durch die Formen des Kreises, bald durch die der schrägen Geraden hindurch ineinander übergehen. Man braucht nur den Linien der Fig. 700 langsam nachzugehen, um dies aufzufinden. Natürlich ist keine der einzelnen Ellipsen in sich geschlossen, weil jede während ihres Entstehens sich bereits verändert. Auch sind es

Fig. 700.



selbstverständlich keine genauen Ellipsen. Ob dem Auge eine solche durch einen schwingenden Körper wirklich hervorgebrachte (nicht bloß abgebildete) Kurve in der einen oder der anderen Weise erscheint, hängt von der Zeitdauer ab, innerhalb welcher die 8 bzw. 9 Schwingungen zustande kommen. Ist diese nicht länger als die Nachwirkung auf die Netzhaut des Auges, so wird dasselbe die ganze Kurve auf einmal und ruhig stehend erblicken, also die Figur des reinen Intervalls $\frac{8}{9}$ sehen. Dauert die Nachwirkung auf der Netzhaut aber nur während eines Bruchteils der Zeit, innerhalb welcher die ganze Figur zustande kommt, so sieht das Auge nur die sehr rasche Aufeinanderfolge der einzelnen Ellipsen, es nimmt also die mit rasch vergrößerter Phasendifferenz zustande kommenden Figuren des gestörten Intervalls $\frac{1}{1}$ wahr, wodurch ein unruhiges, schwer erkennbares Bild entsteht.

Das Vibrationsmikroskop unterscheidet sich vom Lissajousschen Komparator durch einen elektromagnetischen Apparat, der die Schwingungen der das Objektiv tragenden Gabel beliebig lange fortzusetzen gestattet.

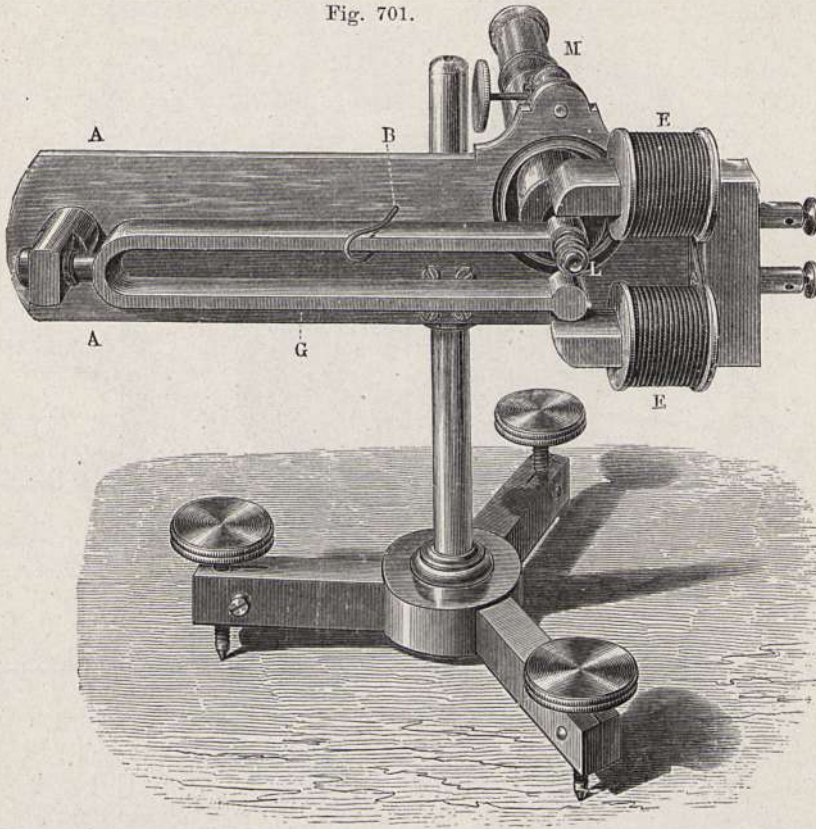
Fig. 701 zeigt eine Abbildung des Helmholtz'schen Apparates, welcher nach dem früheren keiner weiteren Erklärung bedarf.

Eine verwandte Art, die Figuren von Lissajous zu reproduzieren, beruht auf der Anwendung sich senkrecht kreuzender schwingender Spalten. Fig. 702 zeigt einen Apparat, den der Verfasser zu diesem Zwecke angegeben. *S* ist ein schweres eisernes Prisma, an dessen abgeschrägten Enden schwingende Stahlstreifen befestigt sind, deren Enden zwei leichte Metallschirme mit feinen Spalten tragen.

Bringt man die Stahlstreifen zum Schwingen, so beschreibt der Durchkreuzungspunkt der Spalten eine Lissajoussche Figur, welche um 45° geneigt erscheint. Mittels eines Laufgewichtes *L* können die Figuren geändert werden. Sie lassen sich leicht auf einen Schirm projizieren.

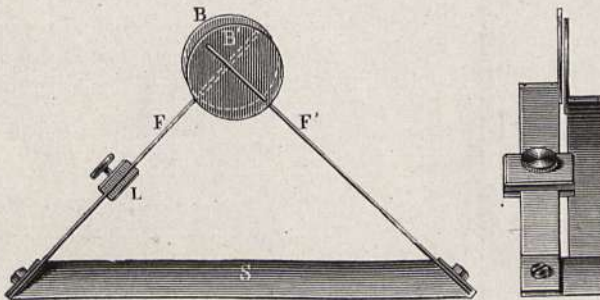
Fig. 703 stellt ferner einen Apparat vor, den der Verfasser konstruiert hat, um auf analoge Weise zwei beliebige Schwingungsarten senkrecht zu

Fig. 701.



kombinieren. In den Überzug der beiden geschwärzten Glasscheiben S und S' sind durchsichtige Kurven eingerissen, welche sich in der Zeichnung wie

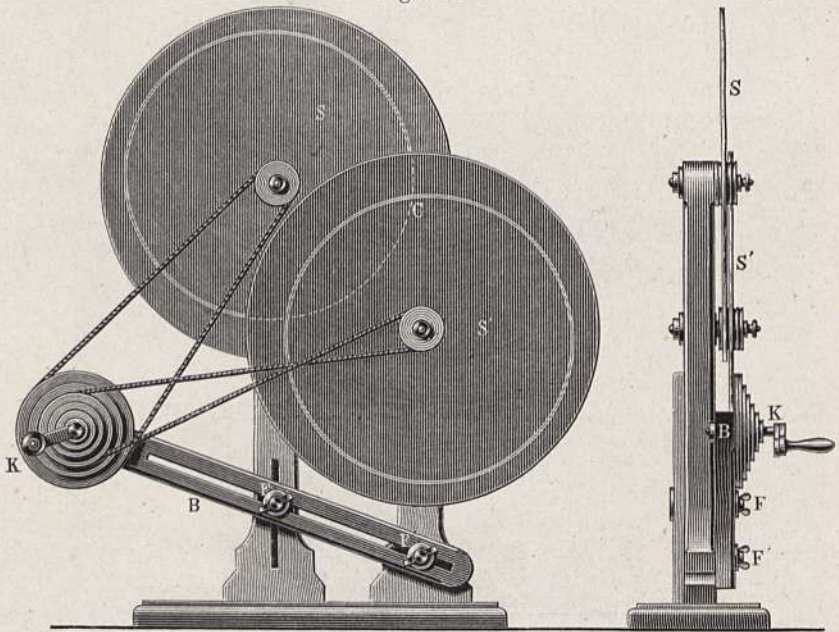
Fig. 702.



exzentrische Kreise darstellen, in Wirklichkeit aber Schwingungskurven sind von denen je eine Wellenlänge auf der Peripherie eines mit der Achse konzentrischen Kreises aufgetragen wurde. Steht die Scheibe S unbewegt und rotiert S' , so schwingt der Lichtpunkt C auf und ab; steht S' und rotiert S ,

so schwingt er horizontal; rotieren beide Scheiben, so beschreibt er eine Lissajoussche Figur, deren Gattung von dem Verhältnis der Rotations-

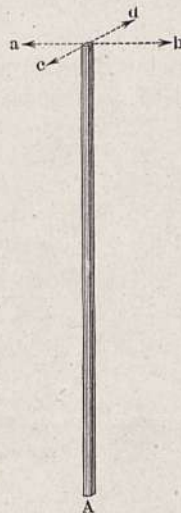
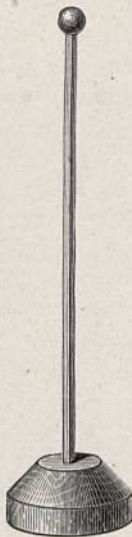
Fig. 703.



geschwindigkeiten beider Scheiben abhängt. Der Anblick der Kurbelscheibe *K* mit den verschiedenen Schnurläufen und des Befestigungsmechanismus *B*

Fig. 704.

Fig. 705.



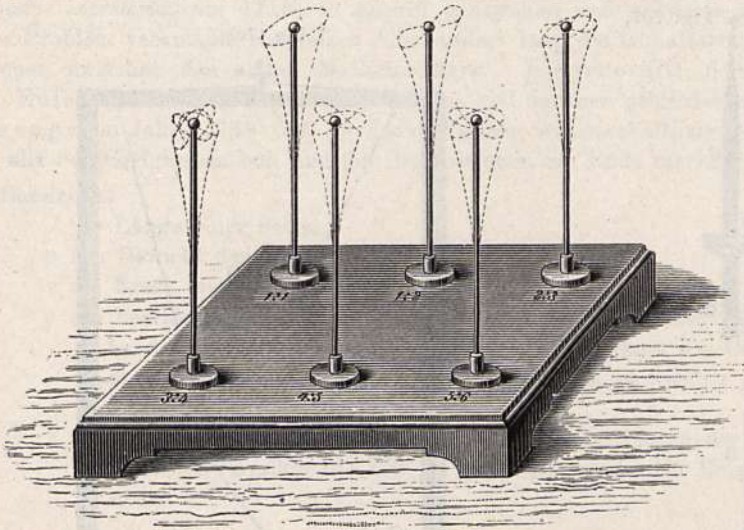
wird genügen, um zu verstehen, wie die verschiedenen Verhältnisse hervorgerufen werden. Die Phasendifferenzen lassen sich durch verschiedene Spannung der Schnüre herstellen. Dieser Apparat ist jedoch nicht eigentlich zur Herstellung der gewöhnlichen Figuren von Lissajous bestimmt, wozu einfachere Mittel ausreichen, als vielmehr zur künstlichen Zusammensetzung beliebiger anderer Schwingungsformen, wie z. B. pendelartiger Schwingungen mit Saitenschwingungen, worauf wir später zurückkommen werden¹⁾.

Eine besonders einfache Methode zur Erzeugung der in Rede stehenden Figuren endlich ist jene mittels des Kaleidophons von Wheatstone, Fig. 704. Ein elastisches Stäbchen von rektangulärer Form, welches am unteren Ende *A*, Fig. 705, festgeklemmt ist, kann sowohl in der Richtung

¹⁾ Einen ähnlichen Apparat hat Stöhrer konstruiert.

ab als auch in der Richtung *cd* vibrieren, je nachdem man es nach der einen oder nach der anderen dieser beiden Richtungen aus seiner Gleichgewichtslage bringt. Ist aber die Dicke des Stäbchens nach der Richtung *ab* nicht gleich der Dicke desselben nach der Richtung *cd*, so wird die Vibrationsgeschwindigkeit des Stäbchens in der Ebene *Aab* verschieden sein von der Vibrationsgeschwindigkeit in der Ebene *Acd*. Wird das Stäbchen nach einer Rich-

Fig. 706.



tung aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, welche mit keiner der eben genannten Ebenen zusammenfällt, so vibriert es in der Weise, daß sein oberes Ende eine Kurve beschreibt, deren Gestalt abhängt von dem Verhältnis der Dicke des Stäbchens in der Richtung *ab* zu der Dicke in der Richtung *cd*. Um die durch die Kurve beschriebene Figur sichtbar zu machen, brachte Wheatstone einen glänzenden Metallknopf an.

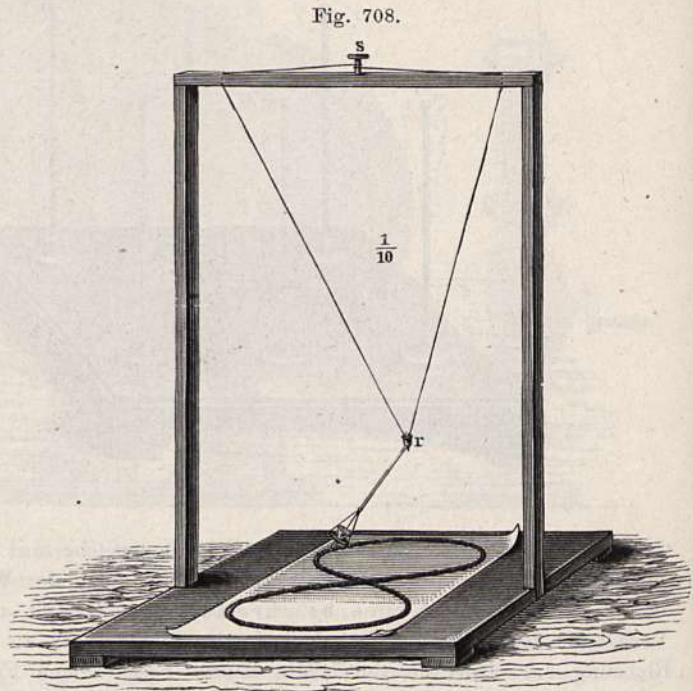
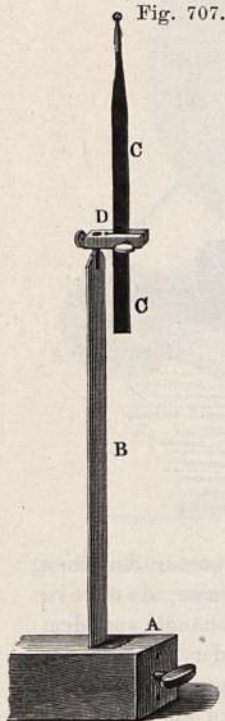
Fig. 706 zeigt die Abbildung einer Zusammenstellung von sechs Kaleidophonen auf einer schweren Fußplatte von R. König.

Als eine Vervollkommnung dieses Apparates ist das von Lippich und fast gleichzeitig von Melde konstruierte Universalkaleidophon zu bezeichnen, welches in Fig. 707 dargestellt ist. In einen Holtzklotz *A*, welcher in passender Weise an einem Tische befestigt ist, ist eine Messingfeder *B* eingeklemmt, welche ungefähr $1\frac{1}{2}$ mm dick und gegen 40 cm lang ist. Oben trägt die Feder *B* eine Messingklammer *D*, in welcher oben ein glänzendes Knöpfchen tragende Stahlfeder *C* steckt. Je nachdem man die Stahlfeder *C* mehr hinauf- oder herunterzieht, kann man es erreichen, daß ihre Schwingungsdauer gleich oder daß sie $\frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{2}$ usw. von der Schwingungsdauer der Feder *B* ist. Statt des glänzenden Knöpfchens kann man auch nach J. Tollinger eine glimmende Sprengkohle mit Wachs ankleben, welche im Dunkeln die erwähnten Kurven besonders schön erscheinen läßt. Auch kann ein Spiegelchen aufgesetzt werden, durch welches ein Bündel Lichtstrahlen gegen eine weiße Wand reflektiert wird, wo dann die Kurve erscheint. Melde hat seinen Apparat auch für schiefwinkelige

Kombination eingerichtet und hierzu einen Atlas mit zahlreichen Figuren publiziert ¹⁾.

Wolf befestigte die Spiegel an den schwingenden Zungen von Zungenpfeifen, so daß dieselben beliebig lange in Bewegung erhalten werden können, indem man die Pfeifen anbläst.

Am einfachsten gelangt man zu einer mechanischen Hervorbringung der besprochenen Figuren mittels geeigneter Pendelvorrichtungen. Für den



Fall gleicher Schwingungsdauer beider Komponenten genügt das einfache Fadenpendel, dessen Kugel in Ellipsen schwingt, die in eine gerade Linie oder einen Kreis übergehen können. Für die übrigen Verhältniszahlen eignet sich recht gut ein Apparat von der Form Fig. 708, bei welchem die Figuren durch den aus dem Trichter ausfließenden Sand aufgezeichnet werden. Durch Verschiebung des die Schnüre zusammenfassenden Röhrchens *r*, sowie durch entsprechendes Drehen der Schraube *s* lassen sich die verschiedenen Intervalle herstellen.

Vollkommeneres leisten die von Eisenlohr, Mos, Knoblauch konstruierten Pendelapparate. Der letztere zeichnet die entstehenden Kurven mit Tinte auf Papier und gestattet auch schiefwinkelige Zusammensetzungen.

§ 231. Schwingungen gespannter Saiten, Obertöne. Die Gesetze der Vibrationen gespannter Saiten sind zuerst von Mersenne (1588 bis 1648) experimentell begründet worden. Um zu untersuchen, wie die Schwin-

¹⁾ Melde, Lehre von den Schwingungskurven.

gungszahl einer Saite von ihrer Länge und ihrer Spannung abhängt, experimentierte er mit Saiten, welche lang genug waren, um ihre Schwingungen zählen zu können, und kam so zu dem wichtigen Satz, daß die Schwingungszahl einer Saite bei unveränderter Spannung ihrer Länge, bei unveränderter Länge aber der Quadratwurzel aus der Spannung umgekehrt proportional sei. Die mathematische Entwicklung des Problems der schwingenden Saiten wurde zuerst von Taylor (*Methodus incrementorum* 1716) in Angriff genommen und teilweise gelöst. Dieses Problem veranlaßte ein halbes Jahrhundert lang die lebhaftesten Diskussionen zwischen den ersten Mathematikern. J. Bernouilli, d'Alembert, Euler und Daniel Bernouilli hatten viel darüber geschrieben, als Lagrange im Jahre 1759 fast zu Anfang seiner wissenschaftlichen Laufbahn alle Schwierigkeiten hob und den Diskussionen ein Ende machte.

Bezeichnet

- l die Länge einer Saite,
- p das Gewicht derselben,
- s die Kraft, welche sie spannt,
- g die beschleunigende Kraft der Schwere (also 981, wenn man das Centimeter zur Längeneinheit nimmt, wobei dann das Gramm zur Gewichtseinheit genommen werden muß, in welcher p und s auszudrücken sind),
- t die Schwingungsdauer der Saite (nach der Bezeichnung der französischen Physiker die Zeit für einen Hingang oder Hergang), so ist

$$t = \sqrt{\frac{p \cdot l}{g \cdot s}}$$

Bezeichnet φ das spezifische Gewicht der Substanz, aus welcher die Saite verfertigt ist, r aber den Halbmesser derselben, so ist $p = \pi r^2 l \varphi$, also auch:

$$t = r \cdot l \sqrt{\frac{\pi \cdot \varphi}{g \cdot s}}$$

Bezeichnet ferner z die Anzahl der Schwingungen, welche die Saite in einer Sekunde vollendet, so ist $zt = 1$ oder $z = \frac{1}{t}$, folglich auch:

$$z = \frac{1}{r \cdot l} \sqrt{\frac{g \cdot s}{\pi \cdot \varphi}}$$

Das durch diese Formel, deren Ableitung ohne höhere Mathematik nicht wohl möglich ist, ausgesprochene Gesetz heißt in Worten ausgedrückt:

1. Die Schwingungszahl einer Saite verhält sich umgekehrt wie ihre Länge, d. h. wenn eine Saite auf irgend ein Instrument, wie eine Violine, eine Gitarre usw., aufgespannt ist und in einer gegebenen Zeit eine bestimmte Anzahl von Schwingungen macht, so macht sie in derselben Zeit 2 mal, 3 mal, 4 mal usw. so viel Schwingungen, wenn man bei unveränderter Spannung nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ usw. der ganzen Länge schwingen läßt; sie würde $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ mal so schnell schwingen, wenn man nur $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ der ganzen Länge schwingen ließe.

2. Die Zahl der Schwingungen einer Saite ist der Quadratwurzel aus den spannenden Gewichten proportional, d. h. wenn das Gewicht, welches die Saite spannt, 4 mal, 9 mal, 16 mal so groß gemacht wird, während ihre Länge unverändert bleibt, so wird die Anzahl der Schwingungen 2 mal, 3 mal, 4 mal so groß.

3. Die Schwingungszahlen verschiedener Saiten derselben Materie verhalten sich umgekehrt wie ihre Dicke. Wenn man z. B. zwei Stahlsaiten von gleicher Länge nimmt, deren Durchmesser sich wie 1 zu 2 verhalten, so wird die dünnere bei gleicher Spannung in derselben Zeit doppelt so viel Schwingungen machen als die dickere. Für Darmsaiten ist dieses Gesetz wohl nicht immer genau wahr, weil sie nicht immer ganz gleichartig sind.

4. Die Schwingungszahlen von Saiten verschiedener Materien verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln ihrer spezifischen Gewichte. Wenn z. B. eine Saite von Kupfer, deren spezifisches Gewicht 9 ist, und eine Darmsaite, deren spezifisches Gewicht 1 ist, gleiche Länge und gleichen Durchmesser haben, und wenn beide durch gleiche Gewichte gespannt sind, so schwingt die Kupfersaite dreimal langsamer als die Darmsaite.

Es versteht sich von selbst, daß diese Gesetze nur für solche Saiten gelten, die ihrer ganzen Dicke und Länge nach homogen sind, daß sie also nicht unmittelbar auf Darmsaiten, welche mit Metallfäden übersponnen sind, angewandt werden können. Die metallische Hülle ist hier eine träge Masse, welche durch die Elastizität der Saite in Bewegung gesetzt werden muß und welche die Schwingungsdauer vergrößert ¹⁾.

Um die wichtigsten Gesetze der Oszillationen gespannter Saiten und ihrer Töne durch den Versuch nachzuweisen, bedient man sich des im § 217 beschriebenen Monochordes ²⁾.

Prüfen wir zuerst den Zusammenhang, welcher zwischen der Spannung der Saite und der Tonhöhe besteht. Wenn für ein Gewicht von 1000 g, welches an den Haken *P*, Fig. 709, gehängt wird, die Saite einen bestimmten Ton gibt, den wir mit *c* bezeichnen wollen, so muß man

das Gewicht 1562,5 anhängen, um die große Terz,
„ „ 2250 „ „ Quint,
„ „ 4000 „ „ Oktav

von *c* zu erhalten. Nun verhalten sich aber die Zahlen 1000 : 1562,5 : 2250 : 4000 zueinander wie $1 : \frac{25}{16} : \frac{9}{4} : 4$, oder wie die Quadrate von 1,

$\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$, 2, wodurch der Satz unter Nr. 2 bewiesen ist.

Die Ausführung dieses Versuches bietet dadurch einige Schwierigkeit, daß es schon eines ziemlich bedeutenden Gewichtes bedarf, um selbst mit

¹⁾ Über die Schwingungen von Saiten veränderlicher Dichte liegt eine theoretische Arbeit von M. Radakovic (Monatshefte f. Mathematik u. Physik V) vor, welche auch die frühere Literatur über diesen Gegenstand angeführt enthält.

²⁾ E. Grimsehl empfiehlt zu derartigen Schulversuchen eine 60 m lange, durch einen Flaschenzug gespannte Stahlsaite, deren Spannung durch eine Federwaage gemessen wird. Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 15, 200 (1902).

einer dünnen Saite einen einigermaßen klangvollen Ton zu erhalten, so daß es unter Umständen nicht geraten erscheint, das vierfache Gewicht anzuwenden, um die Oktav des ursprünglichen Tones zu erhalten. Es genügt aber zu zeigen, daß man durch Anwendung eines $\frac{25}{16}$ mal oder eines $\frac{9}{4}$ mal

Fig. 709.



so großen Gewichtes die große Terz oder die Quinte des ursprünglichen Tones erhält. Auch eignet sich zu diesem Versuch eine Darmsaite besser als eine Stahlsaite.

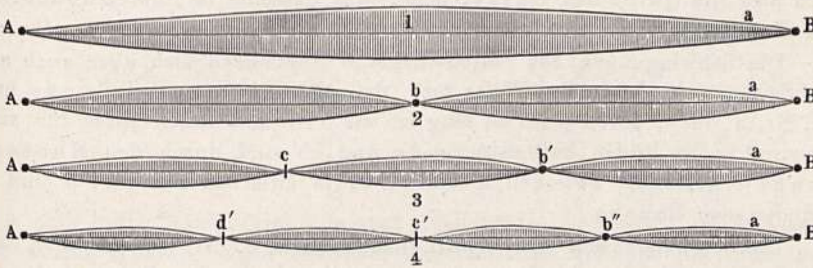
Das Gesetz unter Nr. 2 haben wir bereits durch die im § 217 aufgeführten Versuche erwiesen. Von dem Grundton, welchen die Saite gibt, wenn man sie ihrer ganzen Länge nach schwingen läßt, erhält man:

die große Terz, wenn der freischwingende Teil	$\frac{4}{5}$,
die Quint,	" " " " $\frac{2}{3}$,
die Oktav,	" " " " $\frac{1}{2}$

der ganzen Saitenlänge beträgt ¹⁾.

Nach der oben gegebenen Taylorschen Formel ist die Tonhöhe proportional der Quadratwurzel aus dem Verhältnis der Spannung zur Länge. Daraus folgt, daß für eine elastische Saite, deren Gesamtlänge proportional

Fig. 710.



dem spannenden Gewicht ist, die Tonhöhe sich mit stärkerer Spannung nicht ändern kann. Dieses Resultat ist durch V. v. Lang ²⁾ an Kautschukfäden innerhalb gewisser Grenzen bestätigt worden; auch das Verhältnis zwischen den Tonhöhen der Transversalschwingungen zu den Longitudinalschwingungen ergab sich der Theorie entsprechend.

Wenn man die Saite an irgend einem Punkt sanft mit dem Finger oder mit der Faser einer Feder berührt, so ist freilich die freie Bewegung des

¹⁾ Ein für genaue Versuche bestimmtes Monochord beschreibt Weber im 15. Bande (1829) von Pogg. Ann.

²⁾ Wien. Akad. Ber., math. Klasse, Bd. 107 (1898) und Bd. 108 (1899).

berührten Punktes verhindert, aber die Vibrationen des rechts vom berührten Punkt liegenden Saitenstückes pflanzen sich auf das links liegende fort und umgekehrt.

In Fig. 710 stelle Nr. 1 den Schwingungszustand einer Saite dar, welche zwischen den festen Punkten A und B ausgespannt und, bei a mit dem Fiedelbogen gestrichen, ihrer ganzen Länge nach schwingt, also ihren Grundton gibt.

Wenn man aber nun die Mitte der Saite bei b sanft mit einem Finger oder auch mit der Fahne einer Vogelfeder berührt und dann bei a streicht, so kann jetzt die Saite nicht mehr ihrer ganzen Länge nach schwingen, weil der Punkt b sich nicht bewegen kann. Zunächst schwingt die gestrichene Hälfte bB für sich; sie gibt aber die Oktav des Grundtones, weil bei gleicher Spannung die Länge der Saite auf $\frac{1}{2}$ reduziert ist.

Wenn aber das Saitenstück bB schwingt, so teilen sich seine Schwingungen auch der anderen Saitenhälfte bA mit, welche nun gleichfalls doppelt so viele Schwingungen in der Sekunde macht, als wenn die Saite AB ihrer ganzen Länge nach vibrierte. Man kann die Schwingungen des Saitenstückes bA leicht dem Auge sichtbar machen, wenn man kleine Papierreiter, d. h. kleine Papierstückchen, aufsetzt, welche so gebogen sind, wie es Fig. 711 in natürlicher Größe darstellt. Alle die zwischen A und b aufgesetzten Reiter geraten in hüpfende Bewegung, sobald die Saite bei a gestrichen wird, und werden abgeworfen, wenn die Schwingungen lebhaft genug sind.



Fig. 711.

Wird die Saite AB , Fig. 710, mit dem Finger oder der Federfahne in einem Punkte b' , Nr. 3, angehalten, welcher um $\frac{1}{3}$ der Saitenlänge AB von B absteht, so wird, wenn man bei a streicht, das dreimal kürzere Saitenstück $b'B$ auch dreimal schneller schwingen als die ganze Saite AB , man wird also die Quint der Oktav, oder, was dasselbe ist, die Duodecime des Grundtones von AB hören.

Die Schwingungen des Saitenstückes $b'B$ pflanzen sich aber auch auf das Saitenstück $b'A$ in der Weise fort, daß sich Ab' in zwei Teile, Ac und cb' , Nr. 3, teilt, deren jedes so lang ist wie bB , und deren jedes für sich schwingt. Die beiden Saitenstücke Ac und cb' sind durch den Knotenpunkt c getrennt; zwischen A und c , sowie zwischen c und b' , b' und B befinden sich Bäuche.

Das Vorhandensein des Schwingungsknotens c , Nr. 3, läßt sich mit Papierreitern leicht nachweisen, wenn man eine Reihe derselben zwischen b' und A aufsetzt und dann bei a streicht; der bei c bleibt ruhig sitzen, während die anderen abgeworfen werden oder doch lebhaft tanzen.

Hält man den Finger oder die Federfahne an einen Punkt b'' , Nr. 4, welcher um $\frac{1}{4}$ der ganzen Saitenlänge von B entfernt ist, so teilt sich die bei a mit dem Fiedelbogen gestrichene Saite in vier gleiche Teile, deren jeder für sich schwingt und deren jeder von dem benachbarten durch einen Schwingungsknoten getrennt ist, es bilden sich also drei Schwingungsknoten, b'' , c' und d' , und vier Bäuche, wie Nr. 4 der Figur zeigt. Man hört nun die zweite Oktav des Grundtones, da jeder Teil der Saite, also Ad' , $d'c'$, $c'b''$ und $b''B$ viermal schneller schwingt als die ganze Saite AB .

Hielte man den Finger an eine Stelle b''' , welche um $\frac{1}{5}$ der Saitenlänge von B entfernt ist, so würde durch Streichen bei a ein Ton entstehen, dessen Schwingungen fünfmal schneller sind als die des Grundtones, man würde also die große Terz der zweiten Oktav des Grundtones hören, während die Saite durch vier Schwingungsknoten in fünf Bäuche geteilt wird.

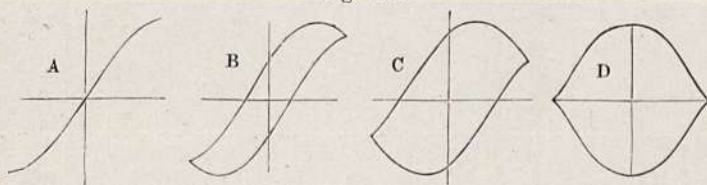
Die Töne, welche zweimal, dreimal, viermal, fünfmal usw. so viel Schwingungen in der Sekunde machen als der Grundton, werden die Obertöne dieses Grundtones genannt. Wenn also die Saite schwingt, wie in Nr. 2, Nr. 3 und Nr. 4 der Figur angedeutet ist, so hört man ihren ersten, ihren zweiten, ihren dritten Oberton.

Das gleichzeitige Vorhandensein dieser Obertöne hat nicht allein Einfluß auf den Klang der Saite, sondern ist auch im Zusammenhange mit dem zeitlichen Verlaufe der Schwingungsbewegung, welche demgemäß sehr von jener Form abweicht, welche wir bei der Stimmgabel beobachten können und welche wir als pendelartige oder harmonische Schwingungsart bezeichnet haben.

Dies läßt sich am besten mittels des Vibrationsmikroskops nachweisen. Will man mit diesem die Vibrationen einer Violinsaite untersuchen, so wird die Violine vor dem Apparat, Fig. 701, S. 683, so befestigt, daß die fragliche Saite in vertikaler Richtung gerade vor die Mitte des Objektivs L zu stehen kommt. Um ein Pünktchen auf der Saite zu markieren, welches durch das Mikroskop beobachtet werden soll, wird die betreffende Stelle der Saite mit Tinte geschwärzt, wenn sie trocken geworden ist, mit Klebwachs eingerieben und dann etwas Stärkemehl darauf gepulvert, wovon einige Körnchen haften bleiben, von denen dann eines durch das Mikroskop beobachtet wird, während Stimmgabel und Saite vibrieren.

Vibriert die Stimmgabel allein, so erscheint das beobachtete weiße Pünktchen als eine vertikale Linie; vibriert die Saite allein, so erscheint es

Fig. 712.



als eine horizontale Linie; vibrieren aber beide gleichzeitig, so beobachtet man eine Kurve, welche von dem musikalischen Intervall der Stimmgabel und der Saite abhängt.

Nehmen wir z. B. an, die Saite sei unisono mit der Stimmgabel, so müßte eine der auf S. 676, Fig. 695, erste Reihe, dargestellten Figuren erscheinen, wenn die Vibrationen der Saite nach demselben Gesetz vor sich gingen wie die Schwingungen der Stimmgabel. Für den Fall, daß die Mitte der Saitenlänge dem Mikroskopobjektiv gegenübersteht und daß die Saite mit dem Violinbogen gestrichen wird, erscheinen aber die Fig. 712 abgebildeten Figuren, und zwar tritt Fig. 712A statt der schiefen Geraden, Fig. 712B und C statt der Ellipsen, Fig. 712D statt des Kreises auf. Aus dieser veränderten Form der Lichtkurven kann man aber auf die Schwingungsform der Saite schließen.

Es läßt sich leicht durch Konstruktion der Beweis liefern, daß gerade diese Figuren entstehen, wenn ein Punkt in vertikaler Richtung nach dem Pendelgesetz und zugleich in horizontaler Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit hin und her schwingt. Zu diesem Zwecke konstruieren wir ein Punktsystem, ähnlich dem der Fig. 690, S. 673, jedoch mit dem Unterschiede, daß die horizontalen Abstände der Punkte einander gleich gemacht werden.

Fig. 713.

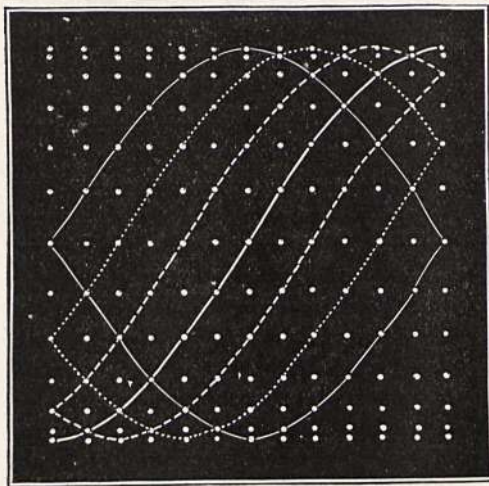
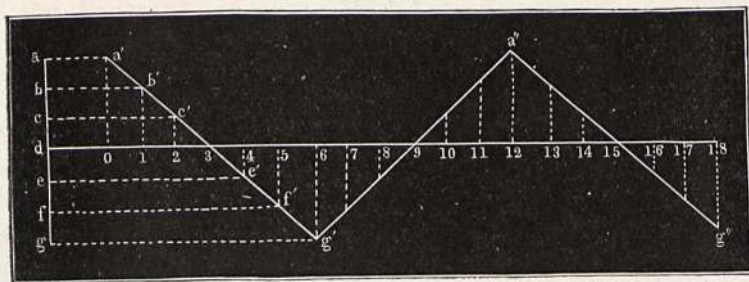


Fig. 713 zeigt ein solches Punktsystem. Indem wir nun ganz nach den im § 229 abgeleiteten Konstruktionsregeln verfahren, erhalten wir für die Phasendifferenz $= 0, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}$ die in Fig. 713 gezeichneten Kurven, welche mit den wirklich beobachteten der Fig. 712 übereinstimmen. Daraus müssen wir schließen, daß die Schwingungen der Violinsaite nicht nach dem Pendelgesetz, sondern mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgen. Wenn wir daher

für diese Schwingungsform die zugehörige Schwingungskurve analog der im § 54, S. 143 gezeichneten Schwingungskurve eines pendelartig schwingenden Körpers zeichnen wollen, so wird dieselbe die in Fig. 714 ab-

Fig. 714.



geleitete Form $a' g' a'' g''$ erhalten, wie aus der von selbst verständlichen Konstruktion unmittelbar hervorgeht. Um dieses Resultat auch auf synthetischem Wege durch ein Experiment zu demonstrieren, kann man sich des vom Verfasser konstruierten Apparates, Fig. 703, S. 684, bedienen. Man ersetzt zu diesem Zwecke eine der beiden Scheiben durch eine andere, auf welcher statt der Pendelkurve die Schwingungskurve $a' g' a''$ längs eines konzentrischen Kreises aufgetragen ist. Man erhält dann beim gleich schnellen Drehen beider Scheiben die Kurven der Fig. 712.

Recht einfach ist auch folgende Weise der Untersuchung. Man läßt zwei Saiten welche über Kreuz aufgespannt sind, in Ebenen schwingen,

welche zu den beiden Saiten parallel sind. Es entsteht dann eine Figur, welche jener von Lissajous verwandt ist, aus welcher sich auf das Schwingungsgesetz zurückschließen läßt. Ein Punkt, welcher zu zwei rechtwinkelig aufeinander gerichteten Schwingungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit gezwungen wird, beschreibt bei Unisono je nach der Phasendifferenz ein Quadrat oder ein Rechteck, bei der Oktave eine aus zwei Vierecken bestehende Acht usf., wie sie sich leicht entwickeln läßt, wenn man in Fig. 713 die vertikalen Punktreihen ebenso anordnet wie die horizontalen. Die überkreuzten Saiten repräsentieren zwar nicht einen einzigen derartigen schwingenden Punkt, geben aber eine Figur, welche sich leicht deuten läßt. Man hat übrigens gar nicht nötig, die Saiten über Kreuz zu spannen. Man kann zwischen die parallel gespannten Saiten ein Spiegelchen derart unter 45° aufstellen, daß man in einem Fernrohr die vordere Saite direkt horizontal und die rückwärtige als vertikales Spiegelbild erblickt. Ogden N. Rood¹⁾ hat auf analoge Weise die Schwingungen von Stäben, Platten, Glocken und Membranen studiert.

Wir kommen auf die Deutung der Schwingungskurve der Fig. 714, sowie auf ihren Zusammenhang mit der Klangfarbe an geeigneter Stelle nochmals ausführlicher zurück.

§ 232. Transversalschwingungen elastischer Stäbe. Unter elastischen Stäben verstehen wir feste Körper von solcher Form, daß ihre Länge sehr bedeutend ist im Vergleich zu ihrer Breite und Dicke, welche aber doch noch breit und dick genug sind, um ihnen die Biegsamkeit der Saiten zu benehmen, so daß also solche Stäbe ohne weiteres schon Elastizität genug haben, um zu vibrieren und zu tönen, und nicht erst einer Spannung bedürfen, wie die Saiten.

Ein solcher Stab kann, wie eine gespannte Saite, mehrere Töne geben, je nachdem sich mehr oder weniger Knotenlinien in demselben bilden.

Die Beziehung der Schwingungszahl eines Stabes und seiner Dimensionen ist durch die Formel

$$z = C \frac{e}{l^2} \sqrt{\frac{gK}{s}} \dots \dots \dots (1)$$

ausgedrückt, in welcher z die Schwingungszahl, l die Länge des Stabes, e dessen Dicke in der Richtung der Schwingungen und C einen konstanten Faktor bezeichnet, welcher von der Art abhängt, in welcher der Stab unterstützt oder eingeklemmt ist, sowie auch von der Anzahl der Schwingungsknoten, durch welche er sich abteilt. Es bezeichnet ferner g die beschleunigende Kraft der Schwere, K den Elastizitätsmodulus und s das spezifische Gewicht der Substanz, aus welcher der Stab gefertigt ist.

Nach der Gleichung (1) ist also die Schwingungszahl eines Stabes

1. direkt proportional der Dicke,
2. umgekehrt proportional dem Quadrat der Länge,
3. direkt proportional der Quadratwurzel aus dem Elastizitätsmodulus,
4. umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem spezifischen Gewichte der Substanz.

¹⁾ Pogg. Ann. 154, 604.

Von der Breite des Stabes ist die Schwingungszahl unabhängig.

Den tiefsten Ton, dessen ein Stab überhaupt fähig ist, gibt er, wenn sich seiner ganzen Länge nach kein Schwingungsknoten bildet, wie es der Fall ist, wenn das eine Ende desselben auf zweckmäßige Weise eingeklemmt wird.

Bei einem elastischen Streifen, welcher eingeklemmt ist, wie Fig. 715 zeigt, und welcher langsam genug schwingt, um seine einzelnen Schwingungen zählen zu können, läßt sich ganz direkt die Richtigkeit der Gleichung (1) in

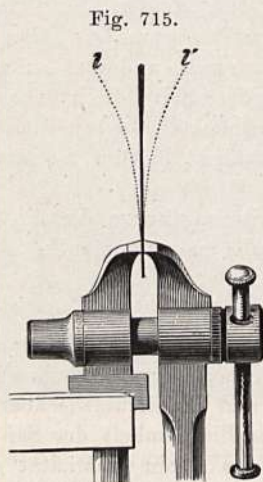


Fig. 715.

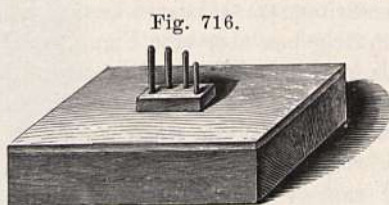


Fig. 716.

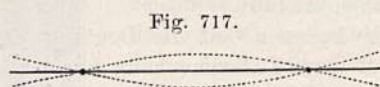


Fig. 717.

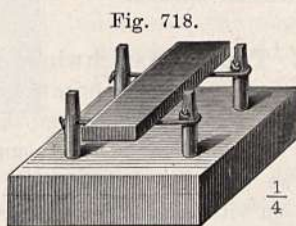


Fig. 718.

Beziehung auf die Länge nachweisen. Macht z. B. ein so eingeklemmter 1 m langer Streifen 40 Schwingungen in 30 Sekunden, so wird er, auf 75 cm verkürzt, 71 Schwingungen in der gleichen Zeit machen, woraus sich leicht ergibt, daß die Schwingungszahlen sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der schwingenden Längen.

Je bedeutender die Dicke des Stabes im Vergleich zu seiner Länge wird, desto mehr nimmt die Zahl der Schwingungen zu, so daß man sie alsbald nicht mehr einzeln verfolgen und zählen kann; alsdann aber hat man an der Tonhöhe ein Mittel, die Richtigkeit des obigen Gesetzes zu kontrollieren.

Auf einem Resonanzboden seien vier Stahlstäbchen von gleicher Dicke befestigt, wie es Fig. 716 zeigt, deren Längen sich verhalten wie

$$1 : \sqrt{\frac{4}{5}} : \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{1}{2}},$$

so wird, mit dem Fiedelbogen gestrichen, das zweite Stäbchen die große Terz, das dritte die Quint und das vierte die Oktav desjenigen Tones geben, welchen man von dem ersten erhält.

Wenn die beiden Enden eines Stabes frei schwingen sollen, so hängt die Schwingungszahl davon ab, welche Stellen desselben festgehalten oder unterstützt sind. Ist der Stab nur in der Mitte seiner Länge befestigt, so ist sein Grundton derselbe wie der eines sonst gleichen Stabes von halber Länge, welcher an dem einen Ende befestigt ist.

Wenn sich in einem an beiden Enden frei schwingenden Stabe zwei Schwingungsknoten bilden, so liegt jeder derselben um $\frac{1}{5}$ der gesamten Stablänge von dem entsprechenden Stabende ab, so daß der Zwischenraum zwischen den beiden Schwingungsknoten $\frac{3}{5}$ der gesamten Stablänge beträgt, wie dies Fig. 717 andeutet. Man erhält diese Schwingungsart unter anderem, wenn man den Stab in einem der Schwingungsknoten zwischen zwei Fingern festhält und ihn mit einem Holzhammer in der Mitte seiner Länge anschlägt, oder auch, wenn man ihn, wie Fig. 718 andeutet, auf zwei Schnüre legt,

Fig. 719.

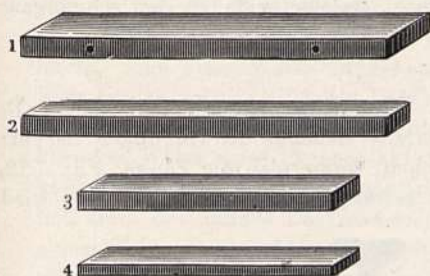


Fig. 720.

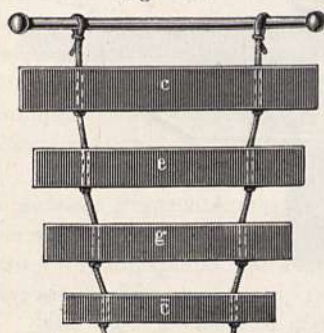
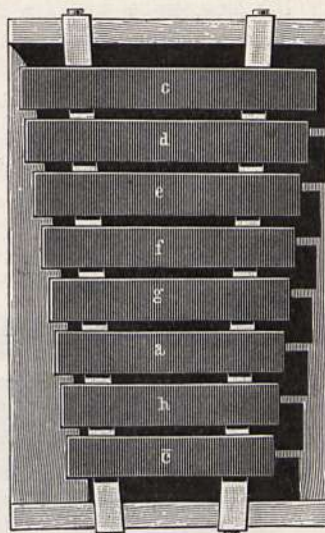


Fig. 721.



welche ungefähr um $\frac{3}{5}$ der Stablänge voneinander abstehen, und dann die Mitte oder das eine Stabende mit dem Holzhammer schlägt.

An so unterstützten Stäben ist es nun auch leicht, die Richtigkeit der Gleichung (1) S. 693 nachzuweisen.

Zwei Stahlstäbe, 1 und 2, Fig. 719, geben gleichen Ton, weil sie gleiche Länge und gleiche Dicke haben, obgleich 2 viel schmaler ist als 1.

Der Stab 3 gibt die Oktav der Stäbe 1 und 2, weil bei gleicher Dicke seine Länge $\sqrt{\frac{1}{2}}$, also 0,707 mal kleiner ist.

Da bei gleicher Länge der Stab 4 nur halb so dick ist wie 3, so gibt 4 die nächst tiefere Oktav von 3, der Stab 4 hat also gleiche Tonhöhe mit 1 und 2.

Obgleich die Breite des Stabes ohne Einfluß auf die Tonhöhe ist, so ist sie doch von wesentlichem Einfluß für die Stärke und Reinheit des Tones.

Bezeichnen wir mit l die Länge eines Stabes, welcher ungefähr die Gestalt des Stabes 2, Fig. 719, hat, so muß ein Stab derselben Substanz bei gleicher Dicke die Länge $l\sqrt{\frac{4}{5}} = l \cdot 0,89$ oder die Länge $l\sqrt{\frac{2}{3}} = l \cdot 0,816$ haben, wenn er die große Terz oder die Quint des ersteren Stabes geben soll.

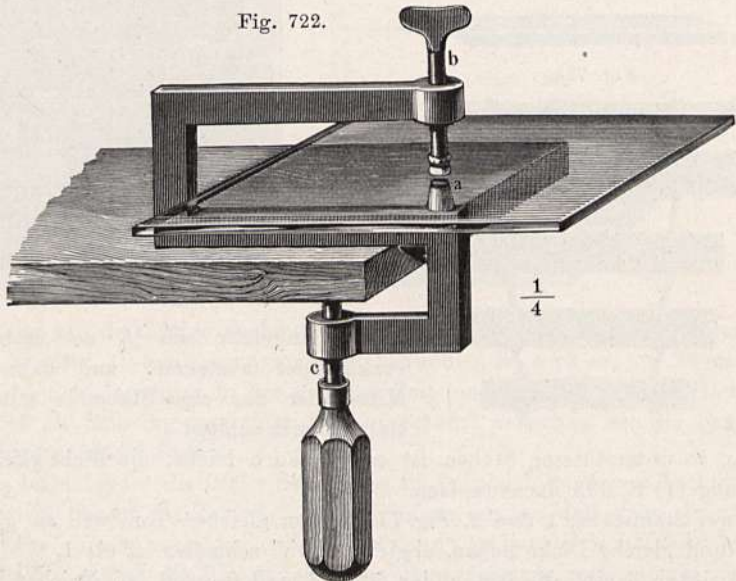
Will man mehrere harmonische Metallstäbe der eben besprochenen Art in einem Apparate vereinigen, so kann man jeden Stab an der Stelle der Schwingungsknoten parallel mit den Breitekanten durchbohren, wie beim Stabe 1, Fig. 719, angedeutet ist, und sie dann mittels durchgezogener Schnüre zusammenfassen, Fig. 720, oder man kann die Stäbe auf konvergierenden gespannten Bändern aufleimen, wie man Fig. 721 sieht.

Nach Art der Fig. 721 ist das *Lignum psalterium* aus Holzstäben und die Glasharmonika aus Glasplatten konstruiert, welche mit Korkhämmern geschlagen werden.

Die Stimmgabel und das Kaleidophon, welche beide zu den schwingenden Stäben gehören, wurden bereits an früherer Stelle abgehandelt ¹⁾.

§ 233. Schwingende Platten, Klangfiguren von Chladni. In Platten, Glocken usw. lassen sich ebenfalls stehende Schwingungen hervorbringen. Um Platten vibrieren zu machen, kann man die Zange, Fig. 722, anwenden, welche aber selbst sehr gut befestigt sein muß. Die Platte wird

Fig. 722.



zwischen den Zylinder *a* und die Schraube *b* gebracht, welche beide mit einem Stückchen Kork oder Leder endigen. Wenn die Platte gehörig festgeschraubt ist, kann man die Vibrationen durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen hervorbringen.

¹⁾ Wir machen an dieser Stelle auf eine Monographie von Robert Hartmann-Kempf „Über den Einfluß der Amplitude auf Tonhöhe und Dekrement von Stimmgabeln und zungenförmigen Stahlfedern“, Inauguraldissertation, Frankfurt a. M. 1903, aufmerksam, welche das genannte Thema mit großer Ausführlichkeit und unter Beibringung prachtvoll ausgeführter photographischer Tafeln der von den schwingenden Körpern aufgezeichneten Vibrogramme behandelt. Leider gestattet das umfangreiche Werk keinen Auszug. Die Arbeit ist insbesondere auch für die Theorie der elektromagnetisch betriebenen Stimmgabel von Wichtigkeit.

Man kann auf diese Weise Platten von Holz, Glas, Metall usw. in Schwingungen versetzen, sie mögen nun dreieckig, viereckig, rund oder elliptisch usw. sein. Die vibrierenden Platten erzeugen ebenso wie die vibrierenden Saiten Töne, welche bald höher, bald tiefer sind. Man beobachtet ferner, daß sich die Platte für jeden dieser Töne in schwingende Teile abteilt, welche durch Ruhelinien oder Knotenlinien getrennt sind. Im allgemeinen wird die Ausdehnung der schwingenden Teile um so kleiner, die Knotenlinien also um so zahlreicher, je höher der Ton wird.

Um die Existenz dieser Knotenlinien nachzuweisen, streut man auf die obere Fläche der Tafel feinen trockenen Sand, welcher während des Tönens in die Höhe hüpfet und niederfällt und sich endlich an den Knotenlinien anhäuft. Auf diese Weise entstehen die sogenannten Klangfiguren, deren Erfinder Chladni (1756 bis 1827) ist.

Savart hat ein sinnreiches Mittel ausgedacht, um auf eine vollständig korrekte Weise diese Figuren aufzubewahren, die man doch nur sehr schwer kopieren könnte, wenn sie kompliziert und verwickelt sind. Er wandte nämlich statt des Sandes Lackmus an, welches mit Gummi pulverisiert und zu einem Teige angemacht, getrocknet, von neuem pulverisiert und durchgeseiht wird, um Körnchen von passender Dicke zu erhalten. Wenn dieses farbige und hygroskopische Pulver auf der Platte sich in den Knotenlinien angesammelt hat, so reicht es hin, auf die Platte ein mit etwas Gummiwasser befeuchtetes Blatt Papier zu legen, um die Figur durch einen leichten Druck auf denselben zu fixieren. Auf diese Weise ist es Savart gelungen, mehrere hundert solcher Figuren derselben Platte zu sammeln, welche verschiedenen Tönen entsprechen.

Mit derselben Platte lassen sich, wie schon bemerkt, eine Menge verschiedener Figuren erzeugen, je nachdem man mit dem Bogen stärker oder schwächer, schneller oder langsamer streicht, oder je nachdem man den Unterstützungspunkt der Platte verändert und an verschiedenen Stellen des Randes streicht.

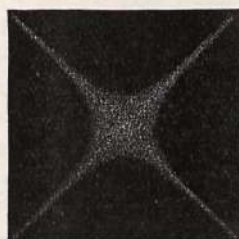
Die Fig. 723 bis 726 stellen vier bei zentraler Einspannung (d. h. wenn die Platte gerade in ihrem Mittelpunkte von der Zange, Fig. 722, fest-

Fig. 723.



a b

Fig. 724.



a b

Fig. 725.



a a b

gehalten wird) erhaltene Klangfiguren dar, welche entstehen, wenn man an den mit *a* bezeichneten Stellen des Randes einen Finger anlegt und dann an der durch *b* bezeichneten Stelle mit dem Fiedelbogen streicht.

Die Fig. 727 bis 731 stellen einige der unendlich mannigfaltigen Klangfiguren dar, welche bei exzentrischer Einspannung erhalten werden, und zwar ist die Stelle, welche gerade von der Zange, Fig. 722, festgehalten wird, als

ein ganz weißer Punkt dargestellt. Die Stelle des Randes, welche mit dem Fiedelbogen anzustreichen ist, ist auch hier mit *b*, die mit dem Finger anzuhaltende durch *a* bezeichnet. Um die Fig. 731 sicher zu erhalten, muß man noch bei *c* einen Finger aufsetzen.

Nicht alle Glasplatten von gleicher Größe und Gestalt geben bei gleichem Verfahren genau dieselbe Figur, sondern es kommen Abweichungen vor,

Fig. 726.

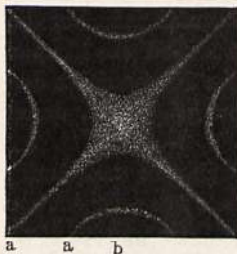


Fig. 727.

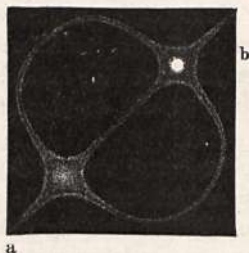


Fig. 728.



welche man als Varietäten desselben Grundtypus bezeichnen kann. So sind die Fig. 728 und 729 Klangfiguren, die bei gleichem Verfahren mit zwei verschiedenen, aber gleich großen Glasplatten erhalten wurden. Häufig beobachtet man auch mehr oder weniger bedeutende Abweichungen vom regel-

Fig. 729.



Fig. 730.

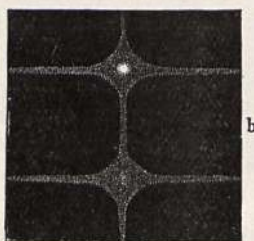
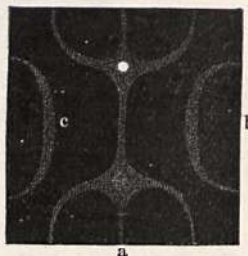


Fig. 731.



mäßigen Verlauf der Klangfiguren, was durch Ungleichförmigkeiten in der Masse der Glasplatten zu erklären ist.

Dreieckige und vieleckige Platten geben ähnliche Erscheinungen.

Kreisförmige Platten geben auch unzählige Töne, und jedem derselben entspricht auch eine besondere Figur. Man unterscheidet diametrale, konzentrische und gemischte Systeme.

Das diametrale System ist nur aus Durchmessern zusammengesetzt, wie Fig. 732 und 733, und teilt den Umfang in eine gerade Anzahl von Teilen.

Man erhält solche Figuren, wenn man die Platte in ihrem Mittelpunkt einspannt und am Rande streicht. Die Fig. 732 erhält man, wenn man mit dem Finger einen Punkt des Randes berührt, welcher 45° von der Stelle absteht, an welcher man streicht. Um die Fig. 733 zu erhalten, muß man zwei Punkte des Randes berühren, welche um 45° voneinander abstehen, und an einer Stelle streichen, welche $22\frac{1}{2}^\circ$ von dem einen dieser Punkte entfernt ist.

An Metallscheiben von 3 bis 4 cm Durchmesser beobachtet man oft 36 bis 40 Abteilungen am Umfange. Es ist leicht einzusehen, warum bei

dieser Teilungsart durch Radien stets eine gerade Anzahl von gleichen Abteilungen entstehen muß; denn 1. ist klar, daß die Schwingungen aller Abteilungen im Einklange sein müssen, d. h. sie müssen alle in gleicher Zeit gleichviel Schwingungen machen, und da sie gleiche Länge haben, so muß

Fig. 732.

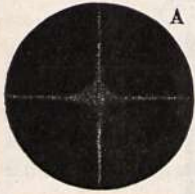


Fig. 733.



Fig. 734.

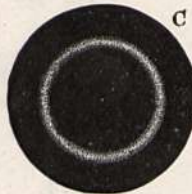
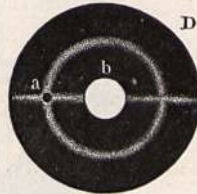


Fig. 735.



auch ihre Ausdehnung dieselbe sein; 2. müssen die nebeneinander liegenden Abteilungen entgegengesetzte Bewegungen haben, und dies wäre bei einer ungeraden Anzahl von Abteilungen nicht möglich.

Um konzentrische Knotenlinien zu erhalten, wovon Fig. 734 die einfachste Form zeigt, muß die Platte vom Mittelpunkte aus in Schwingungen versetzt werden, was am besten dadurch bewerkstelligt werden kann, daß man aus der Mitte ein Stück herauschneidet, wie Fig. 735 andeutet, welches groß genug ist, um mit einem Fiedelbogen hineinzukommen. Nachdem nun diese Platte exzentrisch in die Schraubklemme, Fig. 722, S. 696, eingespannt worden ist, wird eine beliebige Stelle des inneren Randes mit dem Fiedelbogen gestrichen. Ist z. B. der Punkt *a*, Fig. 735, eingeklemmt, so entsteht die hier abgebildete Figur, wenn man bei *b* streicht.

Um ringförmige Knotenlinien zu erzeugen, kann man sich auch einer Metallplatte bedienen, in deren Mitte ein ungefähr 4 mm dicker und ungefähr 1 m langer Stahlstab eingesteckt und eingelötet ist. Wenn man den Stab in der Mitte seiner Länge zwischen zwei Fingern der linken Hand festhält und am oberen Ende dann mit den Fingern der anderen Hand, zwischen denen man vorher etwas Kolophonium zerrieben hat, herabstreicht, wie Fig. 736 andeutet, so gibt der Stahlstab seinen Längston, und der auf die Platte gestreute Sand ordnet sich dabei zu mehreren konzentrischen Ringen.

R. Schulze¹⁾ hat auf diese Weise über 500 verschiedene Klangfiguren erhalten, die sich durch Schärfe und Schönheit auszeichnen.

Dieser Versuch läßt sich auch dahin abändern, daß man eine Glas- oder Metallplatte in der Fig. 737 und 738 anschaulich gemachten Weise auf dem oberen Ende eines gegen 7 dm langen, 4 bis 6 mm dicken, unten in einen Holzklotz eingeleimten Holzstäbchens befestigt und dieses durch Streichen mit dem Finger zum Tönen bringt.

Das gemischte System von Knotenlinien besteht aus diametralen Linien, welche mehr oder weniger gebogen, und Kreisen, die ebenfalls mehr oder weniger verändert sind. Um solche Figuren zu erhalten, ist immer einige Geschicklichkeit nötig; das Prinzip besteht darin, mit den Fingern auf mehrere der Punkte zu drücken, durch welche die Knotenlinien gehen sollen. In Fig. 739 sind mehrere solcher zusammengesetzten Klangfiguren zusammengestellt.

¹⁾ Neue Klangfiguren, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterr. 13, 277 (1900).

Savart hat ebenfalls die Klangfiguren runder Platten studiert und hat z. B. gefunden, daß die diametralen Linien sich nicht bis zur Mitte fortplanzen, wenn ihre Anzahl etwas groß wird. Nach Strehlke sind überhaupt alle Knotenlinien gekrümmt, die scheinbar geraden Linien in manchen dieser Figuren sind nur Zweige hyperbolischer Kurven.

Fig. 736.

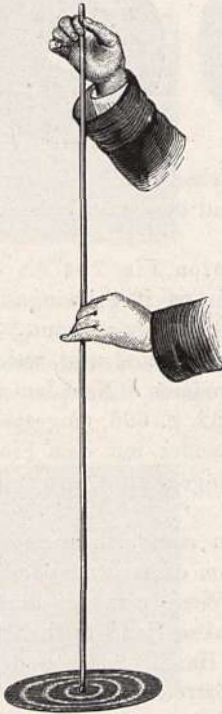


Fig. 737.



Fig. 738.

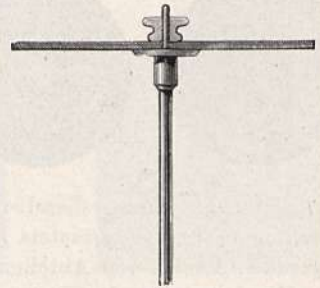
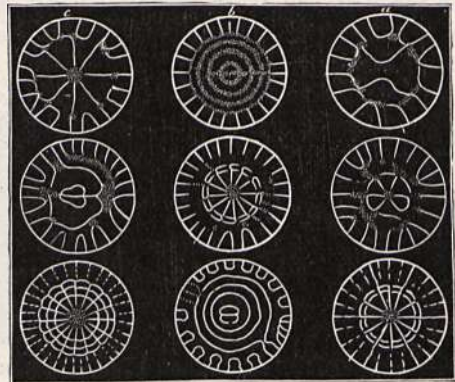


Fig. 739.



Eine merkwürdige, von Savart aufgefundenene Tatsache ist die Verückung der Knotenlinien. Wenn man eine sorgfältig gearbeitete Messingplatte von ungefähr 4 dem Durchmesser und 2 bis 3 mm Dicke in der Weise befestigt, wie man Fig. 740 sieht und, nachdem man *Semen lycopodii*, welches weit leichter ist als Sand, darauf gestreut hat, mit einem Fiedelbogen am Rande streicht, so beobachtet man für gewisse tiefe und volle Töne, welche einer diametralen Figur von 4, 6 oder 8 Strahlen entsprechen, daß die Knotenlinien nicht fest bleiben; sie erleiden eine entschiedene Oszillationsbewegung, und wenn man mit der Bewegung des Fiedelbogens fortfährt, gelangt man selbst dahin, ihnen eine kontinuierliche Rotationsbewegung zu erteilen, so daß das Pulver eine Art Wirbel bildet, welcher in einer bestimmten Entfernung vom Umfange der Scheibe, dem er parallel bleibt, die Ebene der Scheibe durchläuft. Savart erklärt diese interessante Erscheinung auf folgende Weise: In den Scheiben, sie mögen noch so gut gearbeitet sein, ist die Elastizität nicht nach allen Richtungen dieselbe; es gibt zwei Durchmesser, von welchen einer der größten, ein anderer der kleinsten Elastizität

entspricht. Wenn man nun mit dem Fiedelbogen an einer solchen Stelle anstreicht, daß die Knotenlinien auf diese Durchmesser fallen, so bleiben die Knotenlinien unbeweglich; wenn man aber an einem anderen Punkte anstreicht, so sind die Bewegungen, welche der Fiedelbogen an dem Rande der Scheibe hervorbringt, unsymmetrisch, und die Knotenlinien, welche sich bilden, haben ein Bestreben, in die erste Lage zurückzukehren, und deshalb oszillieren sie um diese Lage, oder sie drehen sich kontinuierlich, wenn die hinlänglich großen Exkursionen der Scheibe ihnen eine hinreichende Amplitude geben, damit sie ihre Ruhelage verlassen können.

Fig. 740.

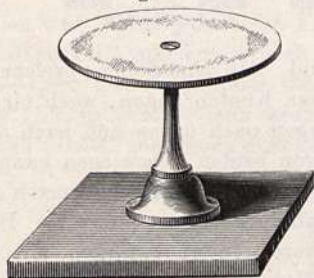
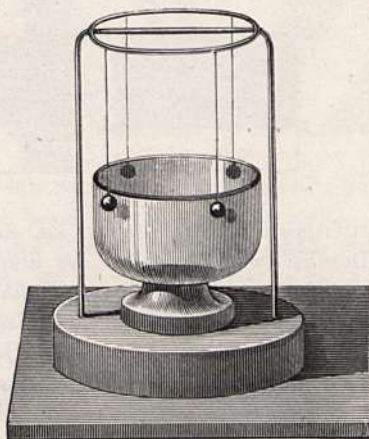


Fig. 741.



Faraday hat dann aber durch Versuche unter dem Rezipienten der Luftpumpe gezeigt, daß die vom Lycopodiumpulver oder ähnlichen leichten Massen gebildeten Figuren durch Luftströmungen entstehen und vollständig ausbleiben, wenn man die Luft ausschließt.

Der in Fig. 741 abgebildete Apparat dient dazu, die Schwingungen einer Glasglocke zu demonstrieren. Beim Streichen mit dem Fiedelbogen teilt sich die Glocke in vier Quadranten, welche durch Knotenlinien getrennt sind. Berühren die herabhängenden leichten Kügelchen aus Holundermark die Glocke an den Stellen der Knoten, so bleiben sie ruhig. Sie kommen in lebhaftere Bewegung, wenn sie sich in der Mitte zwischen zwei Knotenlinien berühren.

§ 234. Theorie der Klangfiguren. Wir verdanken Wheatstone¹⁾ die erste in der Hauptsache befriedigende Erklärung der Chladnischen Klangfiguren. Dieselbe beruht auf der Annahme, daß sich auf der Platte zwei (oder auch vier) Systeme von Schwingungen, deren Knotenlinien sich durchkreuzen, zu einem resultierenden Schwingungssystem vereinigen.

Nehmen wir als einfachsten Fall jenen der quadratischen Platte. Fassen wir dieselbe als einen Stab auf, welcher in der Weise zum Schwingen gebracht werde, daß sich, wie in Fig. 742, Knotenlinien nach *ab* und *cd* und wie in Fig. 744 nach *ef* und *gh* ausbilden, während die dazwischen liegenden Felder nach entgegengesetzten Richtungen schwingen. Wir können uns denken, daß in einem gegebenen Moment die schattierten Stellen nach aufwärts, die nicht schattierten nach abwärts in Bewegung seien. Wirken nun

¹⁾ Philos. Transact. 1833.

die Anregungen zu beiden Schwingungssystemen in einer und derselben Platte zusammen, so wird man das resultierende Schwingungssystem ableiten können, indem man sich die Fig. 742 und 744 übereinander gelegt denkt, wie es in Fig. 743 ausgeführt erscheint. Dabei ist fürs erste sicher, daß die doppelt schattierten Stellen entgegengesetzt mit jenen schwingen, wo keine

Fig. 742.

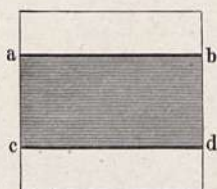


Fig. 743.

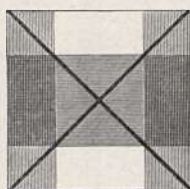
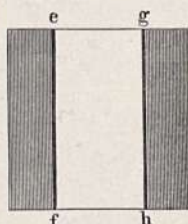


Fig. 744.



Schattierung hintrifft. Ferner ist einleuchtend, daß jene Stellen, welche an den Durchschnittpunkten der ursprünglichen Knoten liegen, auch hier in Ruhe bleiben werden. Da ferner die Richtungen nach unten und nach oben durchaus gleichwertig sind und daher keine von beiden überwiegen kann, so werden die Knotenlinien zwischen den Grenzen der doppelt schattierten und der hell gebliebenen Felder symmetrisch hindurchgehen müssen. Diese Schlüsse lassen uns einsehen, daß die resultierenden Knotenlinien mit den beiden Diagonalen des Quadrates zusammenfallen müssen.

Für den anderen Fall, daß in beiden ursprünglichen Schwingungssystemen die mittleren Felder gleiche Schwingungsrichtung hatten, wie in

Fig. 745.

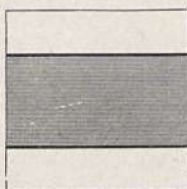


Fig. 746.

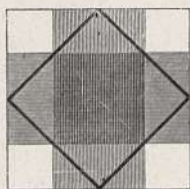


Fig. 747.

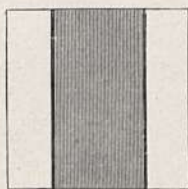


Fig. 745 und 747 angedeutet ist, führt eine ganz ähnliche Betrachtungsweise zu der resultierenden Fig. 746. Die Knotenlinien haben in diesem Falle die Lage von Geraden, welche die Mitten der benachbarten Quadratseiten verbinden.

In ähnlicher Weise hat Wheatstone komponierende Schwingungen mit Knotenlinien von verschiedener Anzahl und von verschiedener Neigung gegen die Seiten der Platten zusammengesetzt und dadurch eine Anzahl von 47 Chladnischen Figuren erklärt. Wir müssen uns aus Raummangel versagen, hierauf näher einzugehen. Dagegen gibt es noch eine Anzahl von Chladnischen Figuren, nämlich alle mit krummen Knotenlinien, welche sich nur durch Übereinanderlagerung von vier einfachen Figuren ableiten lassen.

Es seien als Beispiel die vier schwingenden Platten in Fig. 748, 749, 750, 751 mit den ursprünglichen Knotenlinien gegeben, und es sollen wiederum die schattierten Felder jene Punkte der Platte darstellen, welche gleichzeitig momentan nach aufwärts schwingen. Durch Übereinanderlegung von Fig. 748

und 749, sowie von Fig. 750 und 751 entstehen zunächst die Fig. 752 und 754. Zeichnet man in diese nach den oben entwickelten Grundsätzen die resultierenden Knotenlinien ein, so erhält man hierfür Gerade, welche parallel den Quadratseiten verlaufen. Die Fig. 755 und 757 stellen die nämlichen Knoten-

Fig. 748.

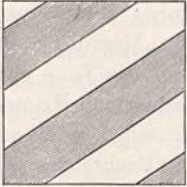


Fig. 749.

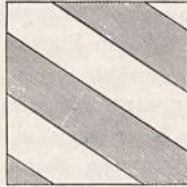


Fig. 750.

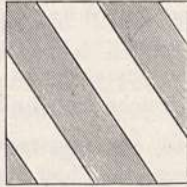
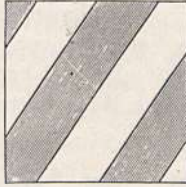


Fig. 751.



linien dar, wobei jedoch die Felder so mit Schattierung ausgefüllt sind, daß wiederum die momentan nach aufwärts bewegten dunkel erscheinen.

Legt man nun diese beiden Figuren übereinander, so erhält man die Fig. 756, in welcher man wiederum nach denselben Grundsätzen die Knotenlinien erhält, von denen eine die Gerade nach der Diagonale des Quadrates, die

Fig. 752.



Fig. 753.

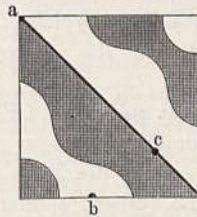
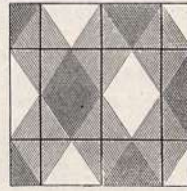


Fig. 754.



übrigen aber Kurven sind. Fig. 753 stellt den resultierenden Schwingungszustand der Platte vor; *c* ist der Befestigungspunkt, bei *b* wird der Bogen, bei *a* der Finger angesetzt. Siehe auch Fig. 729, S. 698.

Es ist einleuchtend, daß auf diese Weise kein ganz genaues Resultat zu erhalten ist und daß man zur Erzielung eines solchen die Größe der

Fig. 755.

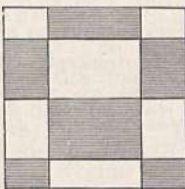


Fig. 756.

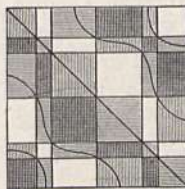
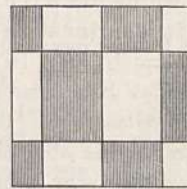


Fig. 757.



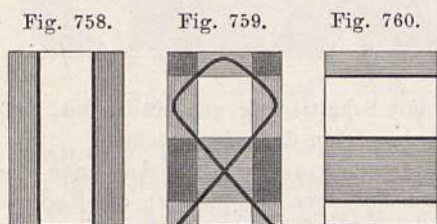
komponierenden Elongationen für jeden Punkt der Platte berücksichtigen müßte.

Die Erklärungsweise von Wheatstone wird unterstützt durch die früheren Versuche der Gebrüder Weber¹⁾, welche durch Interferenz von Flüssigkeitwellen in quadratischen Gefäßen dieselben Ruhelinien erhalten

¹⁾ Wellenlehre, 1825, S. 474.

hatten. Ferner sprechen für dieselbe die Versuche Savarts¹⁾ mit ungleichartig elastischen Platten, sowie jene von Wheatstone mit rechteckigen Holzplatten, an denen nur dann die Klangfigur mit Diagonalen sich ausbildet, wenn die Seiten des Rechtecks sich wie die Größen der Elastizitätsachsen verhalten, da nur dann die Töne der kombinierenden Schwingungen gleiche Höhe haben.

Eine Erweiterung der Wheatstoneschen Theorie wurde dann durch die Versuche von R. König²⁾ mit rechteckigen Platten von Messing angebahnt, bei welchen die Dimensionen so gewählt waren, daß die Töne nahe gleiche Höhe hatten, welche entstanden, wenn sich die Platte nach Knoten-



linien parallel zur einen oder zur anderen Seite des Rechtecks abteilte. Dabei war jedoch die Anzahl der Knotenlinien nach beiden Richtungen verschieden. Die Fig. 758, 759, 760 geben hierfür ein Beispiel. Die Platte Fig. 758 gibt in drei Teilen schwingend nahe denselben Ton wie die Platte Fig. 760, wie sie in vier Abteilungen schwingt. Ihre Kombination Fig. 759 führt zu der daselbst eingetragenen Knotenlinie, welche, wie auch in anderen Fällen, wesentlich analoge Form hat wie die demselben Zahlenverhältnis entsprechende Lissajoussche Figur.

Noch nicht erklärt ist die bei Stäben und Platten dieser Art konstatierte Tatsache, daß der Ton der Kombinationsfigur und diese selbst am reinsten und leichtesten sich ausbildet, wenn die Töne der komponierenden Schwingungen nicht genau im Unisono stehen, sondern ein Intervall eines starken ganzen Tones bilden. Strehlke³⁾ hat ferner bei genauerer Untersuchung der Figuren nachgewiesen, daß die Knotenlinien der quadratischen Platten stets krumme Linien seien und daß sich dieselben nie durchschneiden. Eine vollständige mathematische Theorie der Figuren für quadratische und rechteckige Platten fehlt bis jetzt. Dagegen hat Kirchhoff⁴⁾ eine solche für kreisförmige Platten ausgearbeitet, nachdem er eine ältere von Poisson als nicht ganz richtig erkannt hatte. Durch sehr sorgfältige Messungen von Strehlke wurde die Kirchhoffsche Theorie bestätigt. So z. B. berechnete Kirchhoff unter Annahme des Verhältnisses der Querkontraktion zur Längendilatation $\mu = \frac{1}{3}$ (s. § 107), den Durchmesser des Knotenkreises in Fig. 734 zu 0,6794 des Scheibendurchmessers, Strehlke fand an einer sorgfältig gearbeiteten Glasscheibe 0,6792 und 0,6782. Etwas weniger gut stimmen die aus der Theorie abgeleiteten Tonhöhen, deren Beziehung zur Anzahl der Knotenlinien eine sehr komplizierte ist.

§ 235. Longitudinalschwingungen der Saiten und Stäbe. Wir haben bisher nur die Querschwingungen der Saiten und Stäbe betrachtet; dieselben können aber auch, wie Chladni zuerst entdeckt hat, ihrer Länge

¹⁾ Pogg. Ann. 16.

²⁾ Pogg. Ann. 122, 238.

³⁾ Pogg. Ann. 4, 18, 27.

⁴⁾ Crelles Journ. f. Math. 40.

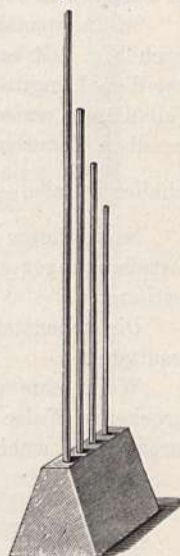
nach schwingen, ganz ähnlich wie eine in einer Röhre eingeschlossene Luftsäule. Solche Längenschwingungen kann man dadurch erzielen, daß man eine gespannte Saite unter sehr spitzem Winkel mit einem Fiedelbogen streicht oder eine Glasröhre mit nassen Fingern oder einem nassen Tuche der Länge nach reibt.

Nimmt man z. B. eine Glasröhre von 2 m Länge, welche einen Durchmesser von 2 bis 3 cm hat, und hält man sie in der Mitte mit einer Hand fest, während man die eine Hälfte mit einem in der anderen Hand gehaltenen nassen Tuche reibt, so wird man einen Ton hören, den man mit einiger Geschicklichkeit leicht rein und voll erhalten kann¹⁾. Die Schwingungen, welche man auf diese Weise erzeugt, sind offenbar Longitudalschwingungen. Durch schnelleres Reiben und stärkeren Druck kann man außer dem Grundton des Stabes auch noch höhere Töne erzeugen. Die Schwingungen können dabei leicht so sehr gesteigert werden, daß die stärkste Glasröhre in viele Stücke zerbricht.

Man erhält dieselben Resultate mit langen zylindrischen und prismatischen vollen Glasstäben, mit Röhren und Stäben von Holz und Metall; bei den letzteren wendet man aber statt des nassen Tuches ein mit Harz bestreutes Tuch an.

Zur Hervorbringung von Longitudalschwingungen hölzerner Stäbe kann man den Apparat Fig. 761 anwenden. In einem Holzklötz von entsprechender Größe sind mehrere Holzstäbchen von ungefähr 6 mm Dicke eingeleimt. Streicht man diese Stäbchen von oben nach unten fahrend zwischen zwei Fingern, mit denen man vorher etwas Kolophonium gerieben hat, so entstehen reine, volle Töne. Gesetzt, die Länge der Stäbchen verhielte sich wie 30:24:20:15, so geben sie den Grundton, seine große Terz, seine Quint und seine Oktav.

Fig. 761.



Die Longitudalschwingungen eines Stabes sind im wesentlichen den Vibrationen der Luftsäulen in Pfeifen ganz analog, d. h. die einzelnen Querschichten oszillieren in der Richtung der Längsachse des Stabes hin und her. Der Longitudinalton eines Stabes ist demnach zunächst von seiner Länge abhängig. Die Schwingungszahlen zweier Stäbe desselben Materials verhalten sich verkehrt wie ihre Längen. Man kann sich davon leicht mit Hilfe des Apparates Fig. 761 überzeugen.

Stäbe, welche in der Mitte festgehalten, an beiden Enden aber frei sind, verhalten sich wie offene Pfeifen; Stäbe dagegen, welche an einem Ende befestigt sind, wie die in Fig. 761, verhalten sich wie gedeckte Pfeifen.

Wie die Tonhöhe der Pfeifen von dem Querschnitte derselben nicht ganz unabhängig ist, so verhält es sich auch mit den Längenschwingungen von Stäben. Von zwei Stäben derselben Holzart, welche gleiche Länge, aber ungleichen Durchmesser haben, gibt der dickere einen etwas höheren Ton.

¹⁾ Einen hierzu geeigneten Apparat hat R. König angegeben.

Wenn ein Stab denselben Ton durch longitudinale und transversale Erregung zu geben vermag, so treten die Längen- und Querschwingungen immer gleichzeitig auf, man mag den Stab longitudinal oder transversal in Schwingungen versetzen. Diese von Terquem entdeckte Tatsache dient auch zur Erklärung der eigentümlichen Anordnung der Knotenlinien an Stäben mit quadratischem Querschnitt, welche von Savart beobachtet und von Seebeck zuerst richtig gedeutet worden sind. Demnach ist es also nicht möglich, in einem Körper, welcher nach zwei verschiedenen Schwingungsarten in nahe gleicher Tonhöhe zu schwingen vermag, einen dieser Töne isoliert hervorzurufen.

Da die Longitudinalschwingungen von Stäben, deren eines Ende vollkommen festgeklemmt ist, wie in Fig. 761, ganz den Gesetzen der stehenden Schwingungen in Röhren eingeschlossener Luftsäulen folgen, so ist auch die Länge eines solchen Stabes $\frac{1}{4}$ der Wellenlänge, mit welcher sich sein Grundton in dem Medium des Stabes fortpflanzen würde.

Dies gibt ein sehr einfaches Mittel an die Hand, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in irgend einem festen Stoffe experimentell zu bestimmen. Man mache nur aus diesem Stoffe einen Stab, den man mit seinem einen Ende festklemmt, um ihn dann in Longitudinalschwingungen zu versetzen. Es verhält sich dann die Länge des Stabes zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in seinem Material wie die Länge einer gedeckten Pfeife, welche denselben Ton gibt, zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Luft.

So findet man z. B., daß ein 1 m langer Stab von Erlenholz, in der durch Fig. 761 erläuterten Weise befestigt, einen Longitudinalton gibt, welcher dem Longitudinalton einer 7 cm langen gedeckten Pfeife gleich ist. Die Wellenlänge eines Tones in Erlenholz verhält sich demnach zur Wellenlänge desselben Tones in Luft wie 1 zu 0,07, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist also $\frac{100}{7} = 14,3$ mal größer für Erlenholz als für Luft.

Nach dieser Methode haben Chladni sowohl wie auch Savart die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in verschiedenen festen Körpern bestimmt.

Die nebenstehende Tabelle enthält einige der von Chladni erhaltenen Resultate.

Wenn eine ungefähr 1 m lange, 2 cm weite, nach der in § 214 besprochenen Weise mit Lykpodium oder Korkstaub versehene, an jedem Ende durch einen wohl passenden Kork geschlossene Glasröhre *ab*, Fig. 762, in

Fig. 762.



horizontaler Lage in ihrer Mitte festgeklemmt und durch Reiben mit einem befeuchteten wollenen Lappen zum Tönen gebracht wird, so bilden sich in der Röhre ähnliche Staubfiguren, wie wir sie bereits in § 214 kennen lernten. Diese Staubfiguren rühren von stehenden Luftwellen her, welche dadurch entstehen, daß die geschlossenen Enden der Röhre bei der abwechselnden Verlängerung und Verkürzung derselben die eingeschlossene Luft abwechselnd ausdehnen und verdichten und sie auf diese Weise in stehende Schwingungen

Name der Substanzen	Geschwindigkeit, verglichen mit Schallgeschwindigkeit in der Luft
Fischbein	$6\frac{2}{3}$
Zinn	$7\frac{1}{2}$
Silber	9
Nußbaumholz	$10\frac{2}{3}$
Messing	$10\frac{2}{3}$
Eichenholz	$10\frac{2}{3}$
Kupfer	12
Ahornholz	$12\frac{1}{3}$
Akazienholz	$14\frac{2}{5}$
Ebenholz	$14\frac{2}{5}$
Erlenholz	$14\frac{2}{5}$
Lindenholz	15
Glas	$16\frac{2}{3}$
Eisen oder Stahl	$16\frac{2}{3}$
Tannenholz	18

Fig. 763.



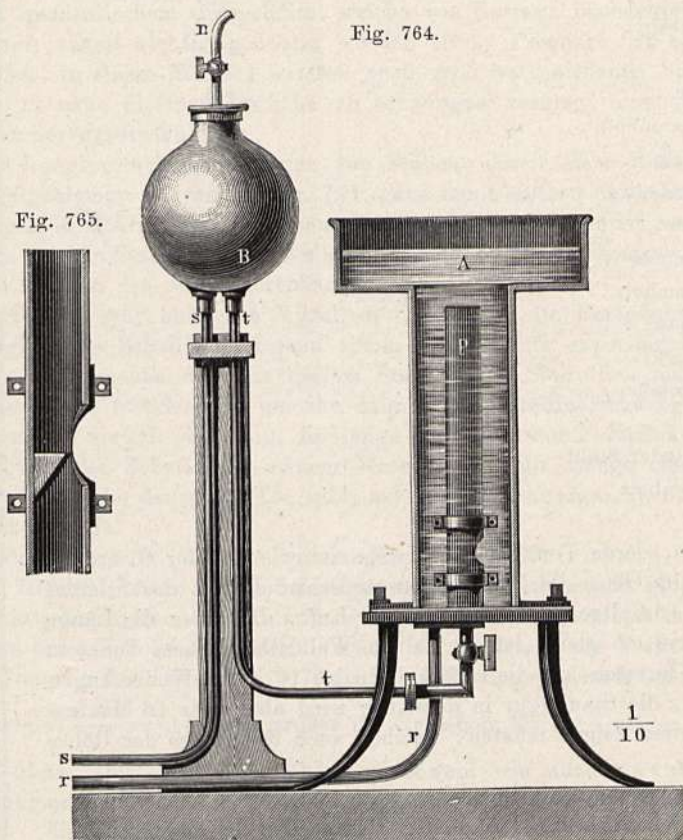
versetzen, deren Ton genau derselbe ist wie der der Glasröhre. Da nun im Glase die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles beinahe 16mal so groß ist als in der Luft, da ferner die Länge des Rohres ab gleich ist der halben Wellenlänge ihres Tones in Glas, so müssen auf die Luftsäule in ab 16 halbe Wellenlängen kommen, die Staubfigur in derselben wird also stets 16 Maxima und Minima zeigen müssen, welches auch die Länge der Röhre sein mag.

Bringt man statt Luft ein anderes Gas in die Röhre ab , so ändert sich auch die Länge der Staubwellen in derselben; sie wird 20, wenn die Röhre mit Kohlensäure, sie wird 10, wenn sie mit Leuchtgas gefüllt ist.

Der Apparat Fig. 763, den wir bereits in § 214 kennen lernten, gestattet nun auch, auf eine sehr einfache Weise die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Luft mit der verschiedener fester Stoffe zu vergleichen. Man hat nur die Glasröhre ab durch einen gleich langen Stab des fraglichen Körpers zu ersetzen und den Versuch in der bekannten Weise zu wiederholen; die Länge der Staubwellen ändert sich, je nachdem man für ab einen anderen Stab einsetzt. Die halbe Länge einer Staubwelle wird $\frac{1}{12} ab$ sein, wenn ab ein Stab von Kupfer, sie wird $\frac{1}{18} ab$ sein, wenn der Stab ab aus Tannenholz besteht.

Hier dürfte wohl der geeignetste Ort für die Bemerkung sein, daß Wasser den Schall nicht allein zu leiten imstande ist, sondern daß es unter Umständen auch als tönender Körper fungieren kann. Die Sirene ertönt

auch, wenn sie vollständig unter Wasser getaucht ist und einen Strom von Wasser durch die Öffnungen hindurchtreibt, wie es bei den gewöhnlichen Sirenen mit der Luft geschieht. Wertheim hat förmliche Wasserpfeifen konstruiert, d. h. Pfeifen, in welchen eine Wassersäule ebenso in tönende Schwingungen versetzt wird wie die Luftsäule in gewöhnlichen Pfeifen¹⁾.



Die ganz mit Wasser gefüllte, offene oder gedeckte Pfeife *p*, Fig. 764, befindet sich in einem 52 cm hohen, mit Wasser gefüllten Gefäße *A*. Mittels einer Druckpumpe wird beim Aufziehen des Kolbens durch das Rohr *r* Wasser aus dem Gefäße *A* herausgesaugt, beim Niedergange des Kolbens aber wird es durch das Rohr *s* in den Windkessel *B* hineingepreßt, aus welchem es durch den Druck der komprimierten Luft durch die Röhre *t* in den Fuß der Pfeife *p* getrieben wird. Die Röhre *n* führt zu einem Manometer.

Fig. 765 stellt das Mundstück der Pfeife *p* in größerem Maßstabe dar.

Dieser Versuch beweist, daß die Wassersäule in *p* ganz in ähnlicher Weise vibriert wie eine Luftsäule.

Die interessanten Erscheinungen, welche ein schwingender Glasstab im Polarisationsapparat zeigt, sowie die einschlägigen Versuche von A. Kundt und von E. Mach können erst in der Optik besprochen werden.

¹⁾ Annal. d. Chim. et de Phys., 3. Ser., T. 23.

§ 236. Die Zungenpfeifen. Wenn ein Luftstrom durch eine Öffnung hervordringt, welche durch die Vibrationen eines elastischen Körpers in regelmäßigen Intervallen geschlossen und wieder geöffnet wird, so entsteht ein Ton ganz in der Weise, welche wir bei der Sirene kennen lernten. Bei jedem Freiwerden der Öffnung nämlich entsteht ein Luftstoß, welcher eine Verdichtung erzeugt. Solche Instrumente nun, durch welche nach diesem Prinzip Töne erzeugt werden, nennt man Zungenwerke.

Eine der einfachsten Formen der Zungenpfeifen ist in Fig. 766 dargestellt. Von einem bei *A* offenen Messingrohr ist durch einen schrägen Schnitt ein Stück ab-

geschnitten und auf die Schnittfläche die Messingplatte *b c f g* aufgelötet; außerdem ist aber das Messingrohr durch die Messingstücke *b d c* und *f h g* auf der rechten Seite vollständig geschlossen, so daß man einen Hohlraum hat, welcher einerseits geschlossen, bei *A* aber offen ist.

Aus der Messingplatte *b f g c* ist oben eine rektanguläre Öffnung *o s t* ausgeschnitten und über derselben ein federnder Metallstreifen, eine sogenannte Zunge, angebracht, welche nur um sehr wenig kürzer und schmaler ist als die Öffnung *o s t*. In ihrer Ruhelage steht das freie Ende der Zunge ein wenig in die Höhe, etwas niedergedrückt paßt sie aber fast ganz genau in dieselbe hinein, so daß bei dieser Lage die Öffnung durch die Zunge geschlossen ist.

Wenn man die Zunge auf irgend eine Weise, etwa mittels des Fingernagels, ein wenig aus ihrer Gleichgewichtslage herausbiegt und dann losläßt, so hört man einen ganz schwachen, klanglosen, sehr bald wieder verschwindenden Ton; in dieser Weise könnten also die Schwingungen des federnden Metallstreifens nicht für musikalische Zwecke verwendet werden. Um mittels der Zunge kräftige Töne zu erzeugen, wird nun über die rechte Seite des bereits besprochenen Messingrohres ein zweites Rohr *m n* geschoben, welches in unserer Figur nur durch Punktierung angedeutet ist, so daß nun ein zweiter, bei *B* offener Hohlraum gebildet wird, welcher nur durch die Öffnung *o s t* mit dem bei *A* mündenden in Verbindung steht. — Wird nun bei *B* Luft eingeblasen, so wird dadurch die Vibration der Zunge eingeleitet. So oft infolge dieser Vibration die Öffnung *o s t* teilweise frei wird, dringt ein Luftstrom durch dieselbe und aus der Mündung *A* hervor, um sogleich wieder unterbrochen zu werden, wenn die Öffnung *o s t* durch die vibrierende Spalte wieder geschlossen wird.

Fig. 766.

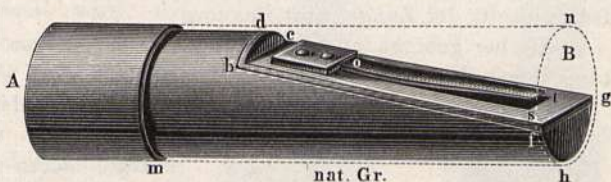
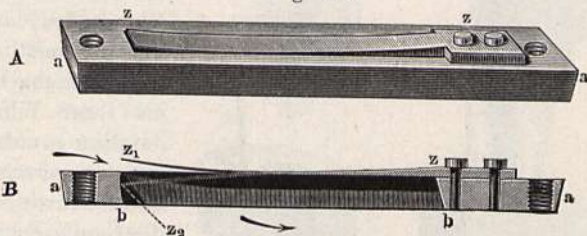


Fig. 767.



Es sind also nicht die Vibrationen der Zunge selbst, welche die Schallwellen erzeugen, vielmehr dienen diese Vibrationen nur dazu, den aus *ost* hervorquellenden Luftstrom zu regulieren und ihn in regelmäßigen Zwischenräumen zu unterbrechen. So viele Schwingungen die federnde Zunge in der Sekunde macht, so viele Wellen treten der Reihe nach bei *A* aus dem Rohre hervor.

In der Regel ist an das Rohr bei *A* noch ein kleiner Schallbecher, bei *B* aber ein entsprechendes Mundstück angesetzt.

Fig. 767 zeigt die Form der Zunge, wie sie gewöhnlich zur Konstruktion der Mundharmonika, der Blasbalgharmonika und der Physharmonika verwendet werden, und zwar zeigt *A* eine perspektivische Ansicht, *B* den Durchschnitt der Zunge samt Fassung.

Hierher gehören auch die Zungenwerke unserer Orgeln, deren Einrichtung durch Fig. 768 und Fig. 769 erläutert wird. In dem durchbohrten

Fig. 768.

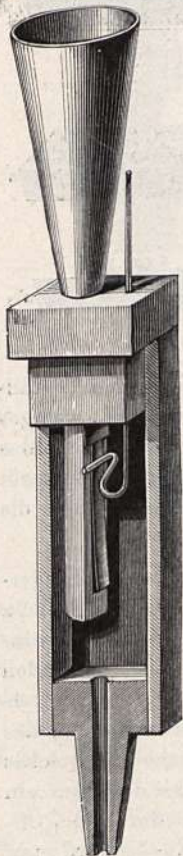
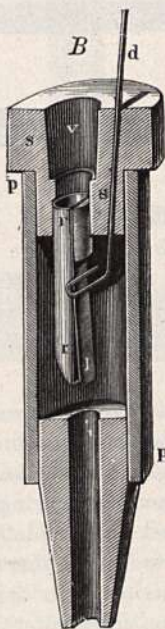


Fig. 769.



hölzernen Stopfen *s*, Fig. 769, ist unten eine Rinne *r* von Messingblech befestigt, deren Querschnitt ungefähr einen Halbkreis bildet, und welche den Namen Canile führt. Oben ist diese Rinne offen, unten ist sie geschlossen, und ihre seitliche Öffnung wird durch die elastische Platte *l* bedeckt, welche bei ihrer Vibration auf die Ränder der Rinne aufschlagend dieselbe vollständig verschließt und dann wieder zurückschwingend einen Luftstrom in die Canile eintreten läßt.

Dieser Stopfen *s* mit der Canile *r* und der Zunge *l* wird nun in das kurze Rohr *pp* eingesetzt, in welches man von unten her den Wind einblasen kann. Sobald dies geschieht, beginnt die Zunge *l* zu vibrieren, es wird also in den durch die Zunge bedingten Intervallen ein Luftstrom aus dem Inneren der Röhre *p* durch die Canile und die Höhlung *v* hervordringen, um dann sogleich wieder unterbrochen zu werden. Durch dieses stoßweise Vordringen des Luftstromes wird nun der Ton erzeugt, zu dessen Verstärkung man noch ein kegelförmiges Rohr, den Schallbecher, aufsetzt, wie man es in Fig. 768 sieht.

Solche Zungen, welche, wie die in Fig. 766 und Fig. 767 dargestellten, etwas kleiner sind als die zugehörige Öffnung, so also, daß sie mit den Rändern derselben nicht in Berührung kommen, nennt man durchschlagende Zungen, im Gegensatz zu den aufschlagenden, welche, wie die Zunge Fig. 769, bei jeder Oszillation auf den Rahmen schlagen. Die

aufschlagenden Zungen werden ihres rasselnden Tones wegen selten mehr gebraucht.

Durch Aufziehen oder Niederdrücken des Stimmdrahtes *d*, dessen unteres horizontal gebogenes Ende die Zunge gegen die Canile andrückt, kann man die Länge des vibrierenden Teiles der Zunge vergrößern oder verkleinern und dadurch die Tonhöhe abändern.

Wenn gar kein Schallbecher oder doch nur eine kurze Röhre auf das Zungenwerk aufgesetzt ist, so hängt die Schwingungsgeschwindigkeit der Zunge, also der Ton, den sie gibt, von ihrer Elastizität und von ihren Dimensionen ab; wenn aber eine lange Röhre aufgesetzt wird, so modifiziert diese den Ton wesentlich; die Bewegung der Zunge hängt dann mehr von der Bewegung der in der langen Pfeife hin und her laufenden Luftwellen als von ihrer eigenen Elastizität ab; sie wird also eigentlich mehr geschwungen, als sie selbst schwingt.

W. Weber hat über diesen Gegenstand eine Reihe ausführlicher Versuche angestellt¹⁾. Fig. 770 und Fig. 771 stellen seinen Apparat in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Größe dar, und zwar Fig. 770 im Durchschnitt, Fig. 771 in perspektivischer Ansicht. Der schraffierte Teil *AB* ist aus Messing verfertigt, *ba* ist die vibrierende Zunge. Bei *B* können hölzerne Röhren von beliebiger Länge angesteckt werden, wie man aus den Figuren ersieht, wo sie nur durch Konturen angegeben sind.

Diese Vorrichtung wird nun mittels des konischen Zapfens *NN* in eine entsprechende Öffnung einer Windlade so eingesetzt, daß *A* nach unten, die hölzerne Ansatzröhre *BC* aber nach oben steht.

Als in den Apparat, Fig. 770, eine 0,48 mm dicke Messingzunge eingesetzt war und in die Windlade Luft eingepreßt wurde, erhielt Weber ohne Ansatz eines Holzrohres den Ton *g*¹. Als nun aber der Reihe nach Holzröhren von verschiedener Länge aufgesetzt wurden, erhielt er die folgenden Töne, wenn die Gesamtlänge der mittönenden Luftsäule die nachstehenden, in Millimetern ausgedrückten Werte hatte:

<i>g</i> ¹	92 mm	<i>c</i> ¹	290 mm
<i>fis</i> ¹	178 "	<i>ais</i>	331 "
<i>f</i> ¹	202 "	<i>g</i>	394 "
<i>d</i> ¹	252 "	<i>g</i> ¹	439 "

¹⁾ Pogg. Ann. 14, 16 und 17.

Fig. 770.

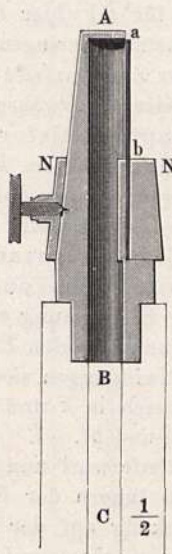
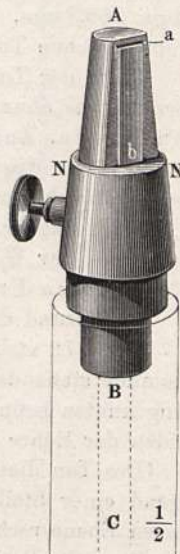


Fig. 771.



Kurze Ansatzröhren bringen also keine merkliche Veränderung der Tonhöhe hervor; bei allmählicher Verlängerung der Röhre wird aber der Ton tiefer, und zwar bis zur nächst niederen Oktave des Anfangstones, um dann für eine bestimmte Länge l (im vorliegenden Falle 440,6 mm) wieder auf den Ton zurückzuspringen, welchen die Zunge für sich allein gibt.

Die Länge l (hier 440,6 mm) ist die Länge einer offenen Pfeife, deren Grundton unisono ist mit dem Tone, welcher der Schwingungszahl der nur unter dem Einflusse ihrer Elastizität vibrierenden Zunge entspricht.

Eine Verlängerung der Röhre über die Länge l hinaus macht, daß der Ton abermals tiefer wird, und zwar in unserem Falle bis d^1 für die Röhrenlänge 866,3 mm, um für $2l$ (hier 881,2 mm) zum zweiten Male auf den ursprünglichen Ton zurückzuspringen.

Kurz, der Ton der Zungenpfeife ist für die Röhrenlängen l , $2l$, $3l$ usw. derselbe wie ohne Ansatzrohr, während jede andere Länge der Ansatzröhre den Ton der Zungenpfeife tiefer macht, wenn sie durch Einblasen von Luft in die Windlade zum Tönen gebracht wird, wie es bei den eben besprochenen Versuchen der Fall war.

Wird dagegen die Zungenpfeife dadurch zum Tönen gebracht, daß die Luft aus der Windlade ausgesaugt wird, so hat das Ansetzen von Röhren eine Erhöhung des Tones zur Folge.

Der Grund dieser Erscheinung ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Fig. 772 stelle eine an beiden Enden offene Röhre dar, welche eine im Zustande stehender Schwingungen sich befindliche Luftsäule enthält. Schwingungsknoten befinden sich in k und k' , Bäuche dagegen in b und an den Enden der Röhre in b' und b'' .

Der Ton dieser Pfeife wird nun keinerlei Änderung erfahren, wenn an irgend einer Stelle im Innern der Röhre ein Scheibchen angebracht wäre, dessen Ebene rechtwinkelig auf der Röhrenachse steht und welches genau dieselben Oszillationen machte, welche einer an dieser Stelle befindlichen Luftschicht infolge des Tönens der in der Röhre eingeschlossenen Luftsäule zukommen. An die Stelle dieses Scheibchens könnte aber auch ohne merkliche Änderung eine in gleicher Weise oszillierende Zunge eingesetzt werden.

Es sei nun eine solche Zunge in der Röhre Fig. 772 bei z zwischen dem Schwingungsknoten k' und dem Bauche angebracht, welche so eingerichtet ist, daß sie die Verbindung zwischen dem oberen und unteren Teile der Röhre absperrt, während sie aus ihrer Gleichgewichtslage nach oben (also in Beziehung auf den oberen Teil der Röhre nach innen) entfernt ist, daß dagegen die Verbindung zwischen der Luft im oberen und unteren Teile der Röhre hergestellt ist, während die Zunge nach unten (bzw. nach außen) gebogen ist.

Die Zunge z wird sich aber von ihrer Gleichgewichtslage nach unten (außen) bewegen müssen, während die benachbarten Luftschichten infolge der stehenden Wellen in der Röhre gleichfalls von einer nach unten gerichteten Bewegung affiziert sind, während sich also beim Knoten k eine Luftverdichtung bildet. Während der äußeren Schwingung der Zunge ist es offenbar einerlei, ob die Luft unmittelbar über z mit der bei k' verdichteten Luft im unteren Teile der Röhre $b' b''$ oder mit der gleich verdichteten Luft in der Windlade, W , Fig. 773, kommuniziert; während der inneren Schwingung der

Zunge aber ist die Verbindung zwischen dem unteren Teile des Röhrenstückes $z b'$ mit dem unter z befindlichen Raume ohnehin unterbrochen, es ist also in dieser Periode gleichgültig, ob sich unterhalb z das Röhrenstück $z b''$ oder die Windlade befindet.

Man kann also, ohne in den Vibrationen der Zunge und der Luftschichten in dem Röhrenstücke $z b'$ etwas zu ändern, das Röhrenstück $z b''$

Fig. 772.

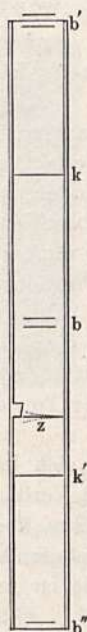


Fig. 773.

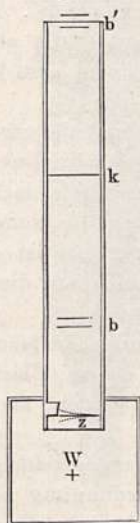


Fig. 774.

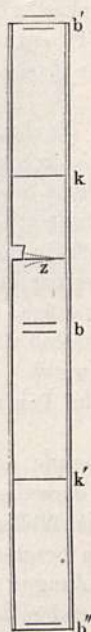
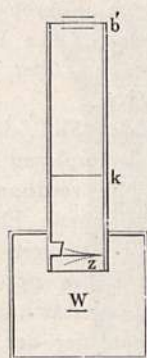


Fig. 775.



mit einer Windlade vertauschen, welche entsprechend verdichtete Luft enthält.

Aus diesem Raisonement ergibt sich nun auch, daß in einer Zungenpfeife, welche auf einer Windlade mit verdichteter Luft aufgesetzt wird, sich in der Röhre über der Zunge zunächst ein Bauch, und erst jenseits des Bauches ein Knoten bilden kann.

Betrachten wir aber nun den Einfluß, welchen die abwechselnde Verdichtung und Verdünnung der Luft am Fuße der Röhre $z b'$ auf die Schwingungen der Zunge ausüben muß.

Während der inneren Schwingung der Zunge ist die untere Endabteilung der Luftsäule $z b'$ verdünnt, und sie beschleunigt die Platte nach innen, während dieselbe durch ihre eigene Elastizität nach außen beschleunigt ist. Während der äußeren Schwingung der Zunge ist dagegen die untere Endabteilung der Luftsäule $z b'$ verdichtet und sie beschleunigt die Platte nach außen, während dieselbe durch ihre eigene Elastizität eine Beschleunigung nach innen erleidet.

Der Einfluß der schwingenden Luftsäule hält also immer einem Teile der elastischen Kraft der Zunge das Gleichgewicht, sie wird also langsamer schwingen, der Ton der Zungenpfeife wird also tiefer sein, als der Ton der isoliert schwingenden Zunge.

Denken wir uns dagegen die Zunge in der Röhre $b'b''$, Fig. 774, zwischen dem Knoten k und dem Bauche b eingesetzt, so ist klar, daß die äußere (nach unten gerichtete) Schwingung der Zunge z mit einer Verdünnung der Luft zwischen b und k zusammenfallen muß. Während also die Zunge z so steht, daß der obere Teil $z'b'$ der Röhre mit dem unteren $z'b''$ kommuniziert, ist die Luft unmittelbar über und unter z verdünnt; man kann also, ohne die Schwingungen in dem Röhrenstücke $z'b''$ zu beeinflussen, statt des unteren Röhrenstückes $z'b''$ eine Windlade W , Fig. 775, ansetzen, welche verdünnte Luft enthält; in diesem Falle aber muß sich in der Röhre zunächst über der Zunge ein Knoten und erst jenseits desselben ein Bauch bilden.

Für den Fall, daß die Luft in der Windlade verdünnt wird, ist also während der äußeren Schwingung der Zunge das untere Ende der Luftsäule $z'b'$, Fig. 775, verdünnt und beschleunigt die Platte nach innen, während sie durch ihre eigene Elastizität nach derselben Richtung beschleunigt wird. Während der inneren Schwingung der Zunge aber ist die Luft im unteren Ende der Röhre $z'b'$ verdichtet, und beschleunigt die Platte gleich ihrer eigenen Elastizität nach außen.

Da also hier der Einfluß der schwingenden Luftsäule stets in gleichem Sinne auf die Zunge wirkt, wie deren eigene Elastizität, so muß sie schneller schwingen, ihr Ton muß höher werden, als der Ton der isoliert schwingenden Platte.

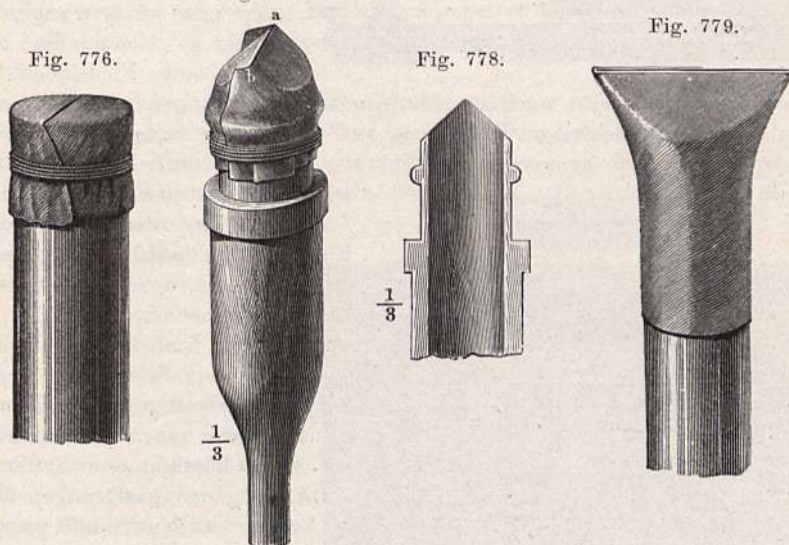
Wenn die Zunge gerade an der Stelle eines Bauches sich befindet, so findet unmittelbar über derselben weder Verdünnung noch Verdichtung der Luft statt, die stehenden Wellen der Luftsäule in der Röhre üben also in diesem Falle weder einen beschleunigenden noch einen verzögernden Einfluß auf die Vibrationen der Zungen aus, der Ton der Luftsäule ist unisono mit dem der isoliert schwingenden Zunge.

§ 237. Die Labial- oder Lippenpfeifen. Eine zweite Art der Zungenwerke wird durch membranöse elastische Platten gebildet, welche die beiden Lippen eines schmalen Spaltes bilden und welche durch ihre Oszillationen den Spalt abwechselnd öffnen und schließen. Joh. Müller konstruierte membranöse Zungenpfeifen in der durch Fig. 776 erläuterten Weise, indem er auf ein rechtwinkelig zur Achse abgeschnittenes Rohr zwei Lappen von vulkanisiertem Kautschuk so aufband, daß nur ein schmaler Spalt zwischen ihnen frei blieb. Noch besser als diese sprechen solche membranöse Zungenpfeifen an, wie sie in Fig. 777 dargestellt sind. Das obere Ende des hölzernen Rohres, in welches unten die Luft eingeblasen wird, ist von zwei Seiten schräg abgeschnitten, wie man Fig. 778 sieht, so daß zwei ungefähr rechtwinkelige Spitzen zwischen den beiden schrägen Schnittflächen stehen bleiben. Über die beiden Abdachungsflächen werden alsdann mit leichter Spannung Streifen von Kautschuk so gelegt, daß sie einen schmalen Spalt zwischen sich lassen, und endlich mit einem Faden festgebunden.

Sehr leicht läßt sich eine membranöse Zungenpfeife auch in folgender Weise herrichten: von einer Röhre dünnen vulkanisierten Kautschuks, welche 1 bis 2 cm weit ist, schneide man ein 4 bis 5 cm langes Stück ab und befestige es am Ende eines Glasrohres von entsprechender Weite, wie man Fig. 779 sieht. Wenn man nun die Kautschukröhre an ihrem oberen Ende

an zwei gegenüberliegenden Punkten faßt und auseinanderzieht, so bildet sich eine Ritze, wie sie unsere Figur zeigt, deren Ränder von Kautschuk sind, und wenn man dann unten in das Rohr hineinbläst, so erhält man einen Ton, der um so höher wird, je stärker die beiden Lippen angespannt

Fig. 777.



werden. Man kann dabei ganz deutlich die Vibrationen der beiden Kautschuklippen sehen, welche die Ritze bilden.

§ 238. Mitteilungen der Schallschwingungen zwischen festen, flüssigen und gasförmigen Körpern. Wenn mehrere feste Körper untereinander zu einem ganzen verbunden sind, so verbreiten sich die von einem Teile dieses Systems ausgehenden Vibrationen mit der größten Leichtigkeit als fortschreitende Wellen über die ganze Masse; an der Grenze angekommen, gehen nun aber die Wellen nur teilweise in das angrenzende Mittel, einen luftförmigen oder flüssigen Körper, über, teilweise werden sie reflektiert und durch die Interferenz der reflektierten Wellen mit den neu ankommenden bilden sich in den einzelnen Teilen des festen Systems stehende Schwingungen. Ein solches System bildet ein ganzes, welches sich, wenn ein Punkt in Schwingungen versetzt wird, wie ein einzelner fester Körper in einzelne schwingende Teile abteilt, die durch Schwingungsknoten getrennt sind. Jeder einzelne Teil verliert gewissermaßen seine Individualität; seine Verbindung mit den benachbarten Stücken hindert ihn, so zu schwingen, wie es geschehen würde, wenn er allein wäre.

Savart hat viele Versuche über diesen Gegenstand gemacht; er hat seine Apparate auf mancherlei Weise abgeändert, um zu zeigen, daß sich die Vibrationen wirklich über ein ganzes System von Platten, Streifen, Glocken, Saiten usw. verbreiten. Unter den Resultaten, die in seiner Abhandlung¹⁾ niedergelegt sind, wollen wir folgendes Beispiel hervorheben, welches den

¹⁾ Ann. de Phys. et de Chim. T. 25.

Vorteil hat, zugleich den Einfluß nachzuweisen, welchen die Richtung der Bewegung auf die Bildung der Schwingungsknoten hat. Eine Holzplatte *a*, Fig. 780, ist an dem einen Ende befestigt, an dem anderen aber durch eine

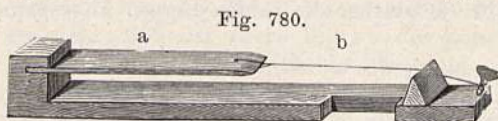


Fig. 780.

Saite *b* gespannt, und diese kann durch einen Schlüssel mehr oder weniger angezogen werden. Sobald die Saite durch einen Fiedelbogen ange-

gestrichen wird, gerät auch die Platte *a* in Schwingungen. Für denselben Ton sind die Knotenlinien, welche sie auf der oberen Seite zeigt, von der Schiefe des Fiedelbogens oder der Richtung abhängig, in welcher die Platte schwingt, wie man in Fig. 781 bis



Fig. 781.

784 sieht, wo die entsprechende Richtung, in welcher der Fiedelbogen streicht, durch einen kleinen Pfeil bezeichnet ist.



Fig. 782.

Während sich die Schallwellen leicht über ein System von festen Körpern verbreiten, gehen sie nicht so leicht von einem festen Körper auf einen flüssigen, noch weniger leicht auf einen gasförmigen über; so kommt es denn, daß mancher



Fig. 783.



Fig. 784.

ziemlich stark vibrierende feste Körper doch nur einen ganz schwachen Ton hören läßt, nur weil er seine Schwingungen der Luft nicht gehörig mitteilen kann. Dies ist z. B. teilweise die Ursache, warum die Stimmgabel, stark angeschlagen und frei in der Luft gehalten, doch nur einen ganz schwachen Ton hören läßt.

Um den Ton eines solchen Körpers zu verstärken, muß man die Mitteilung seiner Schwingungen an die Luft durch Resonanz, d. h. dadurch befördern, daß man die stehenden Schwingungen des tönenden Körpers noch auf einen anderen zu übertragen sucht. Ein Mittel dazu haben wir schon kennen gelernt, die schwach tönenden, aber doch stark vibrierenden Körper vor eine Röhre von entsprechender Länge zu halten, und so die Luftmasse in derselben zum Mittönen zu bringen.

Ein zweites Mittel, den Ton zu verstärken, besteht darin, den tönenden Körper mit einem anderen, leicht in Schwingungen zu versetzenden festen Körper von verhältnismäßig großer Oberfläche in Berührung zu bringen. Es bilden sich dann auf diesem, wie schon erwähnt wurde, ebenfalls stehende Schallschwingungen, und diese teilen sich, der großen Oberfläche des mit-tönenden (resonierenden) Körpers wegen, der Luft leichter mit. Setzt man z. B. die stark angeschlagene, aber in freier Luft schwach tönende Stimmgabel auf einen Kasten von dünnem, elastischem Holze, so hört man den Ton ungleich stärker. Darauf beruht die Anwendung des Resonanzbodens in verschiedenen musikalischen Instrumenten. Bei Flöten, Orgelpfeifen usw. ist kein Resonanzboden nötig, weil hier die stehenden Schwingungen einer Luftmasse den Ton geben und diese sich ganz leicht der umgebenden Luft mitteilen.

So wie Vibrationen fester Körper Schallwellen in der Luft erzeugen, so können auch umgekehrt Schallwellen, die, sich in der Luft verbreitend, einen

festen Körper treffen, diesen zum Vibrieren bringen. So sieht man z. B. die Saite eines Instrumentes in Schwingungen geraten, wenn sie von den Schallwellen des Tones, welchen sie selbst gibt, oder eines seiner harmonischen Töne getroffen wird; so erzittern die Fensterscheiben heftig unter dem Einflusse gewisser Töne der Stimme oder des Knalles einer Kanone. Ein Trinkglas, welches an seinem Boden frei gehalten wird, kann durch kräftiges Ansingen in der Höhe seines Eigentones zum Zerspringen gebracht werden.

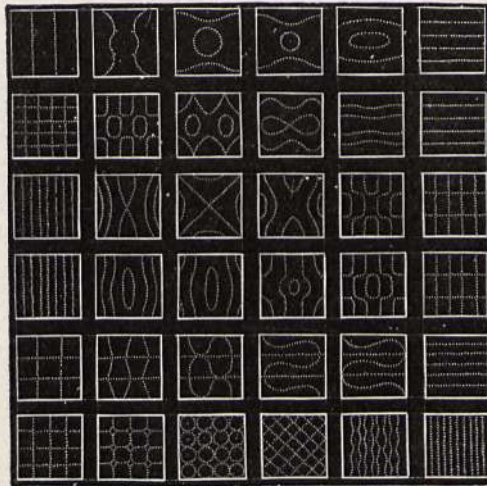
Leicht in Schwingungen zu versetzende Körper teilen sich, wenn sie durch Schallwellen, welche sie treffen, in Vibrationen versetzt werden, durch Knotenlinien auf ähnliche Weise in einzelne vibrierende Abteilungen, wie dies auch bei selbsttönenden Körpern der Fall ist. Savart, welcher diese Erscheinungen ganz besonders studiert hat, befestigte Membranen von Papier, Pergament oder Goldschlägerhaut, indem er ihre Ränder auf einen Holzrahmen oder über die Öffnung einer Glasglocke klebte; sie wurden mehr oder weniger befeuchtet, um ihnen eine größere oder geringere Spannung zu erteilen. Um sie in Schwingungen zu versetzen, näherte er eine schwingende Stimmgabel oder eine Orgelpfeife, deren Ton voll und andauernd war. Sobald der Ton sich hören läßt, vibriert die Membran gerade so, als ob sie direkt wäre erschüttert

worden; die Sandkörnchen, welche sie bedecken, springen auf der Oberfläche umher, um sich in den Knotenlinien anzuhäufen. Die Figuren, welche man erhält, sind äußerst mannigfaltig und hängen von der Spannung der Membran und der Höhe der Töne ab, welche sie treffen.

In Fig. 785 ist eine Reihe solcher an quadratischen Membranen beobachteter Knotenlinien dargestellt. Savart hat beobachtet, daß, wenn man durch irgend einen Ton eine bestimmte Figur erzeugt hat, dieselbe allmählich in andere übergeht, wenn der Ton höher und höher wird. In unserer Figur enthält jede Horizontalreihe eine Reihe solcher aufeinander folgender Modifikationen.

Eine neuere ausführliche Untersuchung über Klangfiguren auf gespannten Membranen und auf Glasplatten, welche mittels Tonübertragung hervorgerufen werden, ist von K. Antolik in Arad¹⁾ veröffentlicht worden. Der Verfasser faßt seine Ergebnisse in 26 Sätzen zusammen, unter denen wir hervorheben: Die Membranen verhalten sich wie ein System von unendlich vielen Saiten, welche in zwei zueinander senkrecht stehenden Richtungen

Fig. 785.



¹⁾ Math. und Naturw. Ber. aus Ungarn 8 (1890).

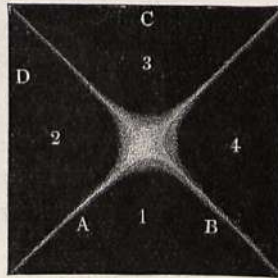
schwingen. Es treten im allgemeinen zugleich Transversal- und Longitudinalschwingungen auf. Je höher die Töne sind, desto mehr treten die Transversalschwingungen in den Hintergrund. Die letzteren machen den aufgestreuten Sand heftig in die Höhe springen, die Longitudinalschwingungen bewirken ein sanftes Gleiten desselben. Bei Klangfiguren, welche durch Longitudinalschwingungen erzeugt werden, scheinen die Dimensionen der Figuren und Wellenlängen unabhängig zu sein von der Spannung, Größe und Gestalt der Membran und von ihrer Belastung. Dagegen hat letztere großen Einfluß auf die Transversalschwingungen. Die Klangfiguren der festen Platten unterscheiden sich von denen der Membranen insbesondere dadurch, daß sie weniger ausgebildet sind als die letzteren.

Viertes Kapitel.

Von dem Zusammenwirken der Töne.

§ 239. **Interferenz isochroner Schallwellen.** Schon im § 208 haben wir das Resultat des Zusammenwirkens oder der Interferenz von Wellenzügen gleicher Wellenlänge, wie sie durch isochrone Schwingungen entstehen, abgeleitet. Seitdem sind wir mit experimentellen Hilfsmitteln ausgerüstet worden, welche uns gestatten, die damals erhaltenen theoretischen Folgerungen durch Versuche zu bestätigen. Wenn zwei Wellenzüge in derselben Fortpflanzungsrichtung zusammentreffen, addieren sich ihre Exkursionen mit Rücksicht auf das Zeichen. Ist demnach ihr Gangunterschied ein ungerades Multiplum der halben Wellenlänge, so vernichten sich Wellen gleicher Amplituden; ist ihr Gangunterschied = Null oder ein gerades Multiplum der halben Wellenlänge, so erhält man eine resultierende Welle doppelter Amplitude. Es muß daher unter Umständen gelingen, durch Zusammenwirken zweier Töne deren Intensität zu vermindern oder zu steigern. Zu diesem Zwecke dienen folgende Versuche: Eine quadratische Platte, wie sie zu den Klangfiguren Chladnis dient, wird so eingespannt und zum Tönen gebracht, daß die Klangfigur, Fig. 786, entsteht. Hierauf wird ein Röhrensystem aus Holz oder Pappe von der in Fig. 787 abgebildeten Form, dessen obere Mündung *a* mit einer Membran verschlossen ist, mit den unteren gabelförmigen Enden in kurzem Abstände über die Klangplatte gehalten, so daß die beiden Röhrenmündungen abwechselnd über zwei gleich schwingende Felder 1 und 3, 2 und 4, dann über zwei entgegengesetzt schwingende Felder, 1 und 2, 3 und 4 zu stehen kommen. Im ersten Falle wird Sand, den man auf die Membran gestreut hat, lebhaft bewegt, im zweiten Falle bleibt er ruhig liegen.

Fig. 786.



Am klarsten und entschiedensten zeigt sich die Interferenz der Schallwellen, wenn man einen Ton in eine Röhre eintreten läßt, welche in eine zwei Zimmer trennende Wand eingemauert ist und die sich im Inneren der Wand in zwei alsbald sich wieder vereinigende Kanäle teilt. Wenn die Differenz der Wege gerade $\frac{1}{2}$ Wellenlänge des einfallenden Tones beträgt, so müssen sich die aus den beiden Kanälen kommenden Schallwellen bei ihrem Zusammentreffen aufheben. Wenn also in dem einen Zimmer der richtige

Ton in die Röhre eintritt, so wird man im anderen nichts hören, wenn beide Kanäle offen sind, während der Ton sogleich wieder erscheint, wenn einer der Kanäle verschlossen wird.

Die Idee dieses Versuches rührt ursprünglich von Herschel her, aber erst Nörrenberg hat nach diesem Prinzip einen Apparat konstruiert, welcher genügende Resultate liefert.

Fig. 788 stellt eine Nörrenbergsche Interferenzröhre im horizontalen Durchschnitt dar. Der ganze Apparat ist in eine Wand eingemauert,

Fig. 787.

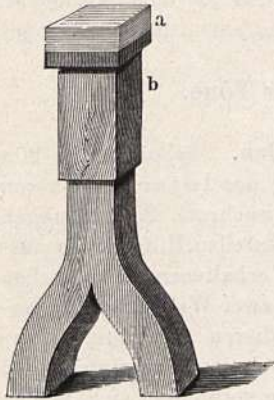
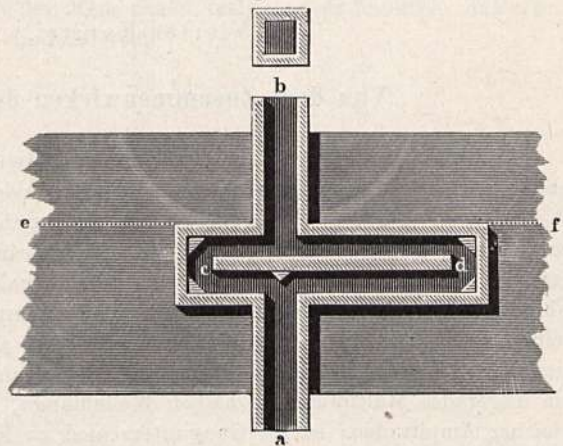
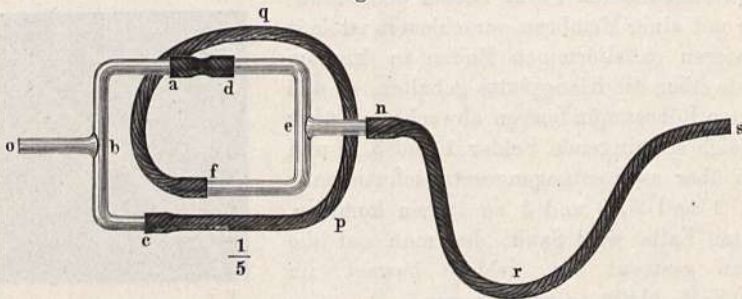


Fig. 788.



welche zwei Zimmer trennt, so daß die Luft der beiden Zimmer nur durch die Kanäle des Apparates in Verbindung steht. Die Dimensionen des Apparates sind derart, daß der Weg von *a* über *d* nach *b* um 30 cm länger ist, als der Weg von *a* über *c* nach *d*. Läßt man daher bei *a* einen Ton von 60 cm Wellenlänge, wie ihn eine 30 cm lange offene Pfeife bei mäßigem Anblasen gibt, eintreten, so beträgt der Gangunterschied gerade eine halbe

Fig. 789.



Wellenlänge und ist daher im anderen Zimmer fast nichts zu hören. Dagegen wird der Ton hörbar, wenn man bei *c* einen Schieber einschiebt, welcher einen der beiden Kanäle absperrt. Bläst man die Pfeife stärker an, so gibt sie ihren ersten Oberton mit der Wellenlänge = 30 cm, welcher dann auch bei offenem Schieber im anderen Zimmer stark gehört wird.

Fig. 789 stellt einen von Quincke konstruierten Apparat dar, welcher bestimmt ist, das Stimmgabel- a^1 (von 435 Schwingungen in der Sekunde)

auszulöschen. Die Enden zweier gabelförmig gebogenen Glasröhren *obac* und *nedf* sind einerseits durch den kurzen Kautschukschlauch *ad*, andererseits durch den ungefähr 39 cm langen Kautschukschlauch *cpqf* verbunden, so daß die Differenz der Wege *edab* und *efqpcb* gleich ist der halben Wellenlänge des Tones a^1 in der Luft. Das eine Ende *o* des Apparates wird mittels eines kurzen Kautschukrohres in den Gehörgang des einen Ohres eingesetzt, während das andere Ohr verstopft wird.

Läßt man nun den Klang einer entsprechenden Stimmgabel durch das offene Ende *s* des langen Kautschukschlauches *srn* in den Apparat eintreten, so hört man den Ton a^1 nicht, wohl aber die mitklingende Oktav a^2 , während a^1 sogleich kräftig ertönt, wenn man den Gummischlauch *cpqf* mit den Fingern zudrückt.

Kundt wendete seine Staubfiguren an, um die Interferenz isochroner Schall-schwingungen sichtbar zu machen. Durch Reiben der Glasröhre *ab*, Fig. 790, wird dieselbe zum Tönen gebracht und erzeugt in dem weiteren Röhrenstücke *ca* Luftwellen, welche durch die bekannten Staubfiguren sichtbar werden. Bei *c* treten die Luftwellen in einen Doppelkanal von Blech und ziehen zur Hälfte über *g*, zur Hälfte über *f* nach *h*, um hier in das bei *k* verschlossene Glasrohr einzutreten. In *hk* werden nun ebenfalls Staubwellen erzeugt, sobald der Gangunterschied der von beiden Seiten her bei *h* zusammentreffenden Schallstrahlen gleich 0 oder gleich einem ganzen Vielfachen einer halben Wellenlänge ist. Wenn der Apparat so gestellt ist, wie die Fig. 790 zeigt, so ist der Weg von *c* über *g* nach *h* ebenso groß, wie der Weg von *c* über *f* nach *h*, der Gangunterschied ist 0 und in *hk* bilden sich die Staubwellen.

Das Röhrenstück *cfh* ist aber kein zusammenhängendes Ganzes, sondern das Röhrenstück *nfo* ist bei *n* und bei *o* in die Röhrenstücke *ho* und *cn* ein-

Fig. 790.

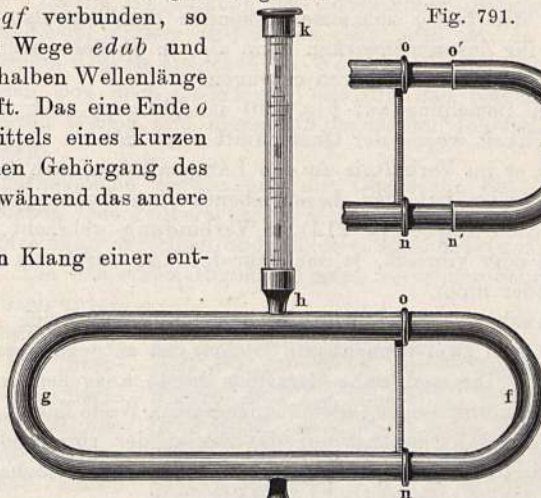


Fig. 791.

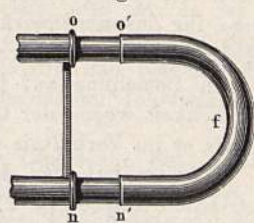


Fig. 792.

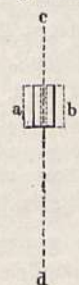
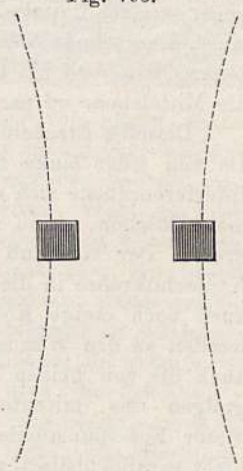


Fig. 793.



gesteckt, so daß man es ausziehen kann, wie die Fig. 791 erläutert. Ist ofn so weit ausgezogen, daß $oo' + nn' = \frac{1}{2}$ Wellenlänge ist (deren Größe sich mittels der Staubfiguren leicht bestimmen läßt), so beträgt der Gangunterschied der bei g zusammentreffenden Schallstrahlen gleichfalls $\frac{1}{2}$ Wellenlänge, ihr Zusammenwirken kann also in gh keine stehende Luftwellen, keine regelmäßigen Staubfiguren erzeugen.

In Beziehung auf Fig. 790 ist übrigens noch zu bemerken, daß der Deutlichkeit wegen der Querschnitt aller Röhren doppelt so groß gezeichnet ist, als er im Verhältnis zu den Längendimensionen sein sollte.

König hat den beschriebenen Interferenzapparat mit einer manometrischen Kapsel (§ 214) in Verbindung gebracht, deren Flamme ruhig brennt oder vibriert, je nachdem der Ton durch die Interferenz unterdrückt wird oder nicht.

Auch an der Seebeckschen Sirene läßt sich die Interferenz zeigen, indem man zwei benachbarte Löcher von entgegengesetzter Seite gleichzeitig anbläst. Die von nahe derselben Stelle ausgehenden Schallwellen, welche einen Gangunterschied gleich einer halben Welle haben, schwächen sich gegenseitig, so daß man fast nur das Sausen der rotierenden Scheibe hört. Dies tritt nicht ein, wenn man die benachbarten Löcher von derselben Seite gleichzeitig anbläst.

Versetzt man einen Stab mit rechteckigem Querschnitt, den man an zwei Knotenstellen aufgehängt hat, durch Streichen mit einem Violinbogen in Schwingungen, so wird stets gleichzeitig auf einer Seite des Stabes die Luft verdichtet und auf der anderen Seite verdünnt. Es müssen daher von den beiden Seiten des Stabes Wellen mit einem Gangunterschiede einer halben Wellenlänge ausgehen, welche zur Interferenz gelangen. Dies wurde denn auch von W. Weber und später von Kiessling¹⁾ nachgewiesen. Stellt Fig. 792 die Endfläche des Stabes, die ganz ausgezogenen Linien seine Ruhelage, die gestrichelten Linien seine Exkursionen vor, so sind a und b die Ausgangsstellen der Wellen. Jeder Punkt der durch die Gerade cd dargestellten Ebene ist von jenen gleich weit entfernt, erhält also gleiche entgegengesetzte Impulse. Verstopft man sich ein Ohr, steckt in das andere einen Kautschukschlauch und führt die offene Mündung dieses Schlauches senkrecht auf cd hin und her, so verschwindet der Ton jedesmal, so oft man die Mittelebene cd passiert.

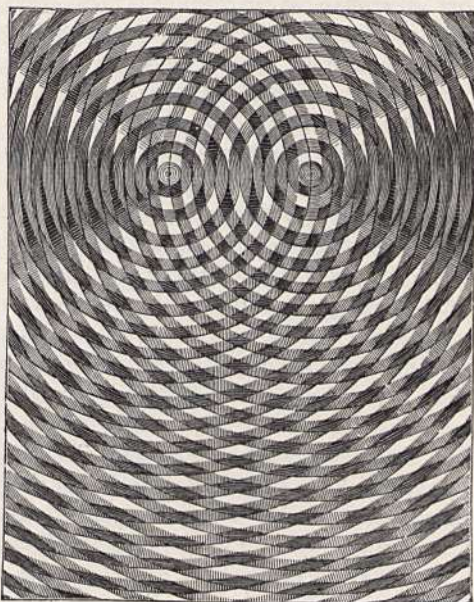
Dieselbe Erscheinung tritt auch an den Zinken einer Stimmgabel auf. Da von jeder Zinke nach beiden Seiten der Schwingungsebene eine solche Interferenzenebene sich erstreckt, so muß auch der Ton der Stimmgabel viermal erlöschen, wenn man sie in der Nähe des Ohres einmal um ihre Achse dreht. Der Ton muß am stärksten auftreten, wenn man die Mündung der Kautschukröhre in die Symmetrieebene der Gabel bringt. Dabei treten aber auch noch einige Komplikationen auf. Die Schallwellen der einen Zinke werden an den Wänden der anderen reflektiert und außerdem interferieren auch die von beiden Zinken ausgehenden Impulse untereinander. Wir begnügen uns, mitzuteilen, daß nach Kiesslings Untersuchungen infolge dieser Nebenumstände die von den Zinken ausgehenden Interferenzenebenen nicht parallel bleiben, sondern hyperbolisch gekrümmt sind und zwar sich nach

¹⁾ Pogg. Ann. 130.

außen voneinander entfernen (Fig. 793, a. S. 721). Bedeckt man die eine Zinke durch eine Glasröhre, so tritt an der anderen die Interferenzebene wiederum in normaler Lage auf. Da die Wellenlänge des Tones einer Stimmgabel im Verhältnis zum Abstände der Zinken gewöhnlich sehr groß ist, so ist die Interferenz der von beiden Zinken ausgehenden Wellen in Luft nicht gut zu zeigen. Dagegen lassen sich nach Lommel¹⁾ die von den beiden Zinken in Quecksilber erregten Wellen und deren Interferenz auf folgende Weise stroboskopisch darstellen:

Zwei gleiche Wellensysteme werden auf der Oberfläche des in einer flachen Schale befindlichen Quecksilbers erregt durch eine Stimmgabel, an deren Zinken, die Fortsetzung derselben bildend, zwei Eisendrähte mit Klebwachs befestigt sind. Die mit einem Resonanzkasten versehene Stimmgabel wird, mit den Zinken nach unten, von einem Stativ festgehalten, so daß die Spitzen der Eisendrähte ein wenig in das Quecksilber eintauchen. Die Stimmgabel wird mittels einer zweiten, gleichgestimmten Gabel durch Resonanz zum Schwingen gebracht, um andere als die gewünschten Wellen, welche beim direkten Anstreichen oder Anschlagen unvermeidlich entstehen würden, auszuschließen. Das vom Heliostaten oder der elektrischen Lampe kommende Lichtbündel wird durch eine Linse auf dem Rande einer vertikalen, um ihre horizontale Achse drehbaren Metallscheibe konzentriert, welche längs ihrem Rande von einer Anzahl gleichweit absteheuder Löcher durchbohrt ist. Der

Fig. 794.



aus einem dieser Löcher austretende Lichtkegel wird von einem ebenen Spiegel unter einem Winkel von etwa 45° auf die Quecksilberoberfläche reflektiert, und das reelle, vergrößerte Bild der letzteren mittels einer geeigneten Linse auf einem vertikalen Schirme entworfen. Steht die Lochscheibe still, so sieht man auf dem Schirme die Wellenringe selbst nicht, weil dieselben zu rasch aufeinander folgen; man sieht aber ein System abwechselnd hellerer und dunklerer homofokaler Hyperbeln, deren gemeinsame Brennpunkte mit den Eintauchungsstellen der Drahtspitzen zusammenfallen; die helleren Hyperbeln sind die Orte aller Punkte, in welchen die beiden Wellensysteme sich aufheben. Dreht man aber die Scheibe, so werden in der dadurch bewirkten intermittierenden Beleuchtung auch die Wellenringe selbst sichtbar, und man findet leicht eine solche Drehungsgeschwindigkeit, bei welcher die Wellen still zu stehen scheinen.

¹⁾ Wiedem. Ann. 26.

Die Fig. 794 gibt eine Darstellung der Erscheinung. Dreht man die Scheibe etwas zu langsam oder etwas zu rasch, so scheinen sich die Wellenringe nach außen oder nach innen zu bewegen. Bei diesem Versuche würde die rotierende Scheibe vorteilhaft durch eine Machsche Stimmgabel (§ 228) ersetzt werden.

§ 240. Abweichungen vom Prinzip der Koexistenz kleiner Bewegungen; Machs Untersuchung der Funkenwellen. Die im vorausgehenden Paragraphen beschriebenen Versuche beruhen auf dem früher (§ 208) mitgeteilten Prinzip der Koexistenz der kleinen Bewegungen, welchem gemäß sich die durch die komponierenden Wellen hervorgebrachten kleinen Verschiebungen algebraisch addieren. Man kann dies (bei Transversalwellen) auch so ausdrücken, daß sich die Wellen übereinander lagern. Fallen ihre Fortpflanzungsrichtungen nicht zusammen, sondern durchkreuzen sie sich, so schreiten die Wellen ungestört übereinander hinweg, ohne sich gegenseitig zu stören. Dort, wo Teile des Körpers, der die Wellenbewegungen fortpflanzt, von beiden Wellen zugleich bewegt werden, legen sich die Berge und Täler der einen Welle über die Berge und Täler der anderen Welle, wodurch freilich daselbst die Wellenform modifiziert wird. Aber diese Modifikation schreitet nicht mit den Wellen fort. Haben sie den Kreuzungspunkt überschritten, so haben sie auch die ursprüngliche Form wieder erlangt. Man kann sich hiervon ein ungefähres Bild verschaffen, wenn man sich vorstellt, daß zwei flache Bänder aus biegsamem Stoffe, von denen jedes aus allmählich dicker und wieder dünner werdenden Stücken besteht, übers Kreuz aufeinander gelegt und dann ihrer Länge nach fortgeschleift werden. An der Durchkreuzungsstelle wird sich die Oberfläche, je nachdem gerade zwei dicke oder zwei dünne Stellen oder eine dicke und eine dünne Stelle zusammentreffen, zu doppelter Höhe erheben oder niedersenken oder eine mittlere Höhe einnehmen, während die einzelnen Bänder nach wie vor ihre ursprüngliche wellige Oberfläche behalten. Dabei darf man freilich nicht vergessen, daß bei diesen Bändern auch der materielle Inhalt der Wellen fortschreitet, was bei den wirklichen Wellen nicht der Fall ist.

Dieses Prinzip gilt aber streng genommen nur für Wellen mit unendlich kleinen Amplituden. Bei den Wellen mit Amplituden endlicher, aber doch relativ mäßiger Größe, wie sie in der Regel vorkommen, sind die Abweichungen von dem Prinzip der Koexistenz meistens geringfügig, so daß sie nicht merklich hervortreten. Dagegen sind sie nicht mehr zu vernachlässigen bei Wellen, welche durch sehr heftige Schallerregungen entstehen, wie z. B. bei Explosionen und elektrischen Funken.

Wir haben bereits im § 201 mitgeteilt, daß nach Regnaults Messungen die Schallwellen einer Kanone in der Nähe derselben eine größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben und erst nach ihrer Ausbreitung, wodurch die Intensität geschwächt, also die Amplitude verkleinert wird, einen nahezu konstanten Minimalwert der Geschwindigkeit annehmen. Daraus folgt, daß, wenn man diese Wellen rückgängig machen würde, so daß sie sich gegen die Kanonenmündung hin wieder vereinigen, mit der dadurch wachsenden Intensität der Schwingungen auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wieder zunehmen müßte. Durch Interferenz zweier isochroner Wellen kann also unter Umständen nicht allein eine Welle mit größerer Amplitude ent-

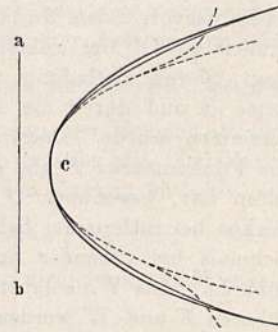
stehen, sondern dieselbe kann auch eine größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen, was durch das Prinzip der Übereinanderlagerung allein nicht zu erklären ist.

Wir können diesen Gegenstand hier nicht theoretisch näher begründen, sondern müssen uns auf experimentellen Nachweis beschränken.

Einen solchen liefern die zahlreichen, sehr interessanten Interferenzerscheinungen, welche E. Mach¹⁾ an den Schallwellen beobachtet hat, die durch Explosionen oder durch elektrische Funken hervorgerufen werden. Die Beobachtungsmethode gründete sich im Anschluß an K. Antolik²⁾ auf die Figur, welche eine schwach berußte Glasplatte zeigt, wenn man sie der Einwirkung der in nächster Nähe überspringenden Funken aussetzt. Die Erschütterung fegt den Ruß an gewissen Stellen weg und häuft ihn an anderen an, so daß derselbe eine analoge Rolle spielt, wie der Lykopodiumstaub in den Kundtschen Röhren oder der Sand auf den Klangfiguren.

Um wenigstens ein Beispiel anzuführen, wollen wir die Erscheinung beschreiben, welche man erhält, wenn man auf der berußten Glasplatte gleichzeitig einen elektrischen Funken auf der geradlinigen Bahn *ab*, Fig. 795, und einen anderen durch eine punktförmige (sehr kurze geradlinige) Bahn *c* überspringen läßt. Es geht dann von *ab* als Achse eine Zylinderwelle, von *c* als Mittelpunkt eine Kugelwelle aus. Die Gesamtheit der Durchschnittspunkte der beiden Wellen bildet die Interferenzfläche. Betrachtet man den Vorgang nur so weit, als er in der Ebene *abc* stattfindet, so schreitet von *ab* aus eine geradlinige, von *c* aus eine kreisförmige Welle fort. Da nun be-

Fig. 795.



kanntlich alle Punkte, die gleich weit von *ab* wie von *c* entfernt sind, eine Parabel bilden, deren Direktrix *ab*, deren Brennpunkt *c* ist, so muß die Interferenzlinie eben die Form dieser Parabel haben. In der Tat stimmt nun die im Ruß entstehende Figur mit derselben nahe überein, insbesondere, wenn man die Glasplatte unbedeckt läßt. Bedeckt man sie aber mit einer zweiten Platte, wodurch die Intensität der Schallwellen, insbesondere der von *ab* ausgehenden, gesteigert werden muß, so bemerkt man nicht allein, daß die beiden Parabeläste etwas nach einwärts abweichen, sondern es zeigen sich dieselben in je zwei Äste gespalten, so daß eine V-artige Ausbreitung derselben erfolgt. In der Fig. 795 zeigt die dickere Linie die theoretische Parabel, die dünnere die Interferenzlinie bei unbedeckter, die punktierte, gespaltene jene bei bedeckter Platte.

Offenbar muß die um *c* entwickelte Welle bei ihrer Ausbreitung rascher geschwächt werden als die von *ab* ausgehende. Die erstere wird daher rascher an Fortpflanzungsgeschwindigkeit abnehmen und deshalb müssen die gleichzeitig erreichten Punkte, welche die Interferenzlinie bilden, näher an *c* liegen als die Punkte der theoretischen Parabel. Die V-artige Ausbreitung

¹⁾ Mach und Wosyka, Wien. Akad. Ber., Bd. 72 (1875); Rosicky, Bd. 73 (1876); Mach und Sommer, Bd. 75 (1877); Mach, Tumlriz und Kögler, Bd. 77 (1878); Mach, Bd. 77, S. 819 (1878).

²⁾ Pogg. Ann. 1875.

aber erklärt Mach auf folgende Weise. Wo sich die beiden Wellen unter hinlänglich spitzem Winkel ihrer Fortpflanzungsrichtungen treffen, da entsteht eine neue Welle von größerer Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche gewissermaßen als Welle in der Welle selbständig mit ihrem Geschwindigkeitsüberschuß fortschreitet. Die beiden Zweige des Parabelastes entstehen durch die Interferenz dieser neuen Welle mit den früheren.

Mit diesen Erscheinungen, deren nähere Beschreibung und Deutung in den zitierten Originalabhandlungen nachzulesen ist, steht die außergewöhnlich große Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Funkenwellen und deren rasche Abnahme mit der Ausbreitung im engsten Zusammenhang. Wir haben auf diese bereits im § 201 hingewiesen und wollen hier nur noch eine der sinnreichen Methoden beschreiben, nach welchen Mach diese Geschwindigkeiten innerhalb der Distanzen von wenigen Centimetern gemessen hat.

Eine Messingscheibe von 17 cm Durchmesser lief auf einer horizontalen Achse in Spitzen und wurde durch ein großes massives Schwungrad mittels Schnurlauf in rasche Rotation versetzt. Die eine Seite der Scheibe war mit einer schwachen, gleichmäßigen Rußschicht überzogen. Nahe am Rande wurden dieser beruhten Kreisfläche ein Metallstift S und diametral gegenüber die Mündung C eines Holzkanales genähert. Diese Mündung war durch ein dünnes Plättchen mit einer kleinen runden Öffnung von 1 mm Durchmesser geschlossen. Am rückwärtigen geschlossenen Ende des Holzkanales waren zwei Elektroden eingesetzt, zwischen denen ein elektrischer Funke überschlagen konnte. Die von diesem Funken ausgehende Schallwelle bringt bei ihrer Ankunft an der Scheibe auf der Rußschicht eine kleine runde Marke hervor, indem durch den mechanischen Druck der Luft der Ruß komprimiert wird. Der elektrische Funke wurde durch eine Leidenerflasche erzeugt, deren Entladung auf dem Wege über die rotierende Scheibe zur Spitze S und durch die Elektroden des Kanales zurück zur Flasche vorgenommen wurde. Dadurch entsteht nun zuerst gegenüber der Spitze S eine Funkenmarke F und etwas später, nachdem die Welle den Kanal durchlaufen hat, gegenüber C eine Wellenmarke W . Hat man diese beiden Marken bei rotierender Scheibe erhalten, so erzeugt man nachher dieselben nochmals bei ruhender Scheibe etwas weiter rückwärts in der Nähe der früheren. Die Winkelabstände dieser neuen Marken F'' und W' von den früheren F und W werden dann mittels eines Goniometers gemessen. Die Differenz dieser Winkelabstände $WW' - FF' = w$ gibt dann, wie eine einfache Überlegung lehrt, die Drehung der Scheibe für denselben Zeitraum, den die Funkenwelle braucht, um den Kanal zu durchlaufen.

Bei Machs Versuchen war die Umdrehungszahl der Scheibe 63,05 pro Sekunde, also die Winkelgeschwindigkeit $= 22698^\circ$, die Zeit, in welcher ein Kanal von der Länge l durchlaufen wird, ist also $\frac{w}{22698}$ und die mittlere Geschwindigkeit der Funkenwelle gleich:

$$v = \frac{22698}{w} l.$$

Bei einem solchen Versuche war $l = 80$ mm, $w = 2^\circ 24' = 2,07^\circ$, woraus

$$v = \frac{22698 \cdot 0,08}{2,4} = 756,6 \text{ m}$$

folgt.

Erst bei einer Kanallänge von 1 m wurde die gewöhnliche Schallgeschwindigkeit nahe erreicht.

Wir haben noch zu zeigen, wie Mach die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe bestimmte. Seine Methode beruhte auf der optischen Vergleichung mit einer Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl. Die nicht berußte Seite der Scheibe trug auf schwarzem Grunde zwei glänzende Kurven von beistehender Form (Fig. 796). Es sind archimedische Spiralen. Bedeckt man die Scheibe mit einem Schirm, in welchen ein Spalt nach Richtung des horizontalen Durchmessers geschnitten ist, so durchläuft der glänzende Durchschnittspunkt der Spirale mit dem Spalt den letzteren mit gleichförmiger Geschwindigkeit vom Zentrum gegen die Peripherie und zwar während einer halben Rotation. Während der zweiten Hälfte tritt die zweite Spirale in derselben Weise auf. Betrachtet man nun die Scheibe im Spiegel einer vertikal schwingenden Stimmgabel, deren ganze Schwingungsdauer gleich der Zeitdauer einer halben Scheibenrotation ist, so erscheint der glänzende Punkt in eine vollständige Sinuswelle ausgezogen. Bleibt dieselbe ruhig stehen, so wissen wir, daß obiges Geschwindigkeitsverhältnis genau eingehalten ist. Laufen dagegen per Sekunde p solcher Sinuswellen vom Zentrum zur Peripherie, so ist $\frac{n+p}{2}$ die Zahl der Scheibenrotationen per Sekunde, wenn n die Schwingungszahl der Stimmgabel ist. Indem man den Moment abpaßt, wo bei allmählich gesteigerter Geschwindigkeit der Scheibe die Sinuskurve ruhig zu stehen kommt, und in diesem Moment den Funken entladet, ist man sicher, daß gleichzeitig die Umlaufszahl $= \frac{n}{2}$ war.

Fig. 796.



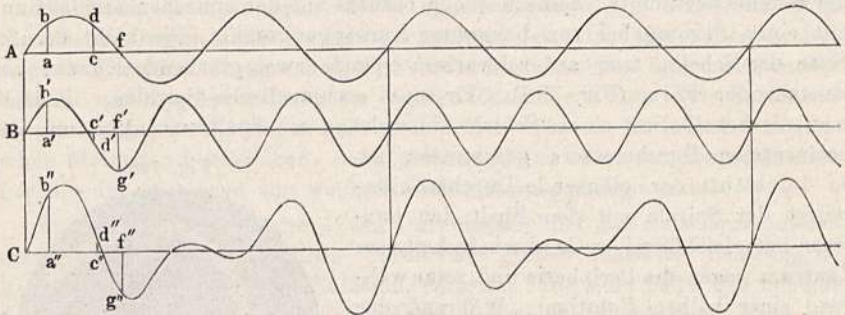
Diese Methode gestattet offenbar eine vielfache Anwendung zur Messung sehr kleiner Zeiträume.

§ 241. Zusammensetzung von Wellen ungleicher Wellenlänge, Fouriers Theorem. Treffen zwei Wellenzüge ungleicher Wellenlänge längs der gleichen Fortpflanzungsrichtung zusammen, so gilt für die Aufsuchung der resultierenden Wellenform, abgesehen von den im vorhergegangenen Paragraphen angeführten Abweichungen, dasselbe Prinzip der Übereinanderlagerung, wie für isochrone Wellen.

Unter dem Einfluß beider komponierenden Wellen wird nämlich der Abstand jedes Teilchens des fortplanzenden elastischen Mediums von seiner Ruhelage gleich der algebraischen Summe der Abstände, welche durch die einzelnen Wellen hervorgebracht würden. Es seien z. B. A und B , Fig. 797, die Schwingungskurven eines Tones und seiner Quint, so ergibt sich als Resultat des Zusammenwirkens dieser beiden Wellensysteme eine Wellenbewegung, deren Schwingungskurve durch C , Fig. 797, dargestellt ist.

Jede Ordinate der Kurve C ist die algebraische Summe der Ordinaten der Kurven A und B , welche derselben Abszisse angehören; so ist z. B. die Ordinate $a''b''$ gleich $ab + a'b'$; ferner ist $c'd'' = cd - c'd'$, weil $c'd'$ von der Abszissenachse nach unten gekehrt ist, während cd die entgegengesetzte Lage hat. Die nach unten gerichtete Ordinate $f''g''$ ist

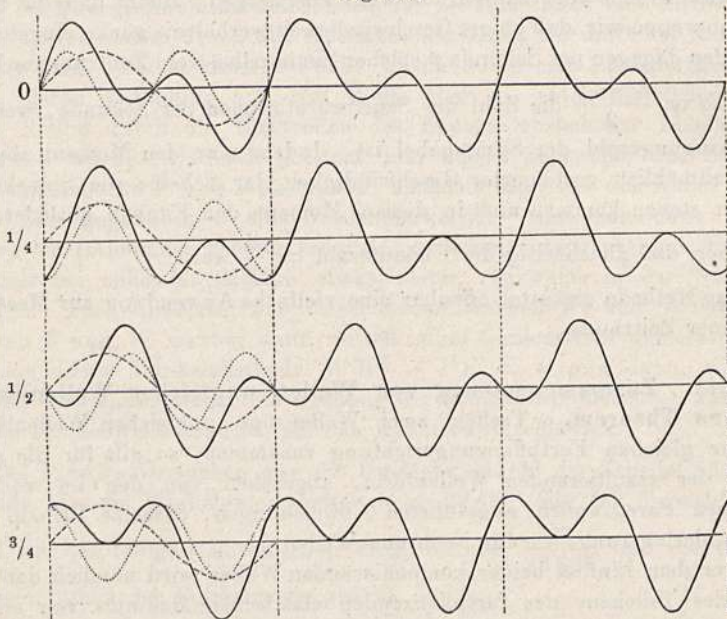
Fig. 797.



gleich $f'g'$, weil die dem Abszissenpunkte f entsprechende Ordinate der Kurve A gleich Null ist.

In Fig. 798 ist die Zusammensetzung zweier Wellen gleicher Amplitude, deren Wellenlängen sich wie 2:1 verhalten, für die Gangunterschiede $= 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ der Länge der größeren Welle dargestellt. Man sieht, daß die

Fig. 798.



resultierende Wellenform sehr von dem Gangunterschiede der Wellen, also von der Phasendifferenz der sie erregenden Schwingungen abhängt.

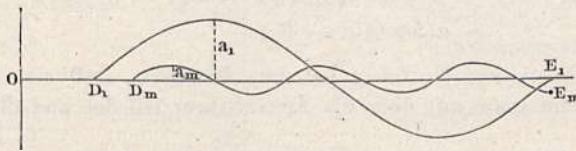
Statt diese Zeichnungen anzufertigen, was immer zeitraubend ist, bedient man sich mit Vorteil des im § 208 beschriebenen Apparates. Die

Fig. 624b, S. 592 zeigt in der obersten Kurve die Zusammensetzung des Grundtones mit der Quinte, in der zweiten Kurve mit der Oktave, in der untersten Kurve mit dem sechsten Oberton.

Da außer dem Unterschied in der Wellenlänge und dem Gangunterschied auch noch eine Ungleichheit der Amplituden stattfinden kann, so befreit man, daß die resultierenden Wellen von unendlich großer Mannigfaltigkeit der Form sein können.

Mag eine Welle aber was immer für eine Form haben, so läßt sich dieselbe doch stets als die Resultierende einer Reihe von Sinuswellen darstellen, welche dem Grundtone von derselben Wellenlänge und seinen Obertönen angehören.

Fig. 799.



Wir wollen diesen wichtigen Satz in mathematischer Form ausdrücken. Die Gleichung einer Sinuswelle, Fig. 799, $D_1 E_1$, deren Amplitude = a_1 und deren Wellenlänge = λ_1 , ist gegeben durch

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{x}{\lambda_1}.$$

Wenn der Anfangspunkt der Welle um die Strecke D_1 nach rechts liegt:

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{x - D_1}{\lambda_1} = a_1 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} x - \frac{2\pi D_1}{\lambda_1} \right) \quad \dots (1)$$

Für eine zweite Welle, Fig. 799, $D_m E_m$, deren Amplitude = a_m , deren Wellenlänge $\lambda_m = \frac{\lambda_1}{m}$, welche also dem Oberton mit der m fachen Schwingungszahl entspricht, gilt, wenn ihr Anfang um D_m nach rechts verschoben ist

$$y_m = a_m \sin 2\pi \frac{x - D_m}{\lambda_m} = a_m \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_m} \cdot mx - \frac{2\pi D_m}{\lambda_m} \right) \quad \dots (2)$$

Wählen wir den Abszissenmaßstab so, daß $\lambda_1 = 2\pi$ wird, so ist $\frac{2\pi}{\lambda_1} = 1$ zu setzen; bezeichnen wir ferner die Phasendifferenzen $\frac{2\pi D_1}{\lambda_1}$

und $\frac{2\pi D_m}{\lambda_m}$ mit ϑ_1 und ϑ_m , so lauten die Gleichungen (1) und (2):

$$y_1 = a_1 \sin(x - \vartheta_1) \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$y_m = a_m \sin(mx - \vartheta_m) \quad \dots \dots \dots (4)$$

Nun denken wir uns eine Reihe von Sinuskurven von der Art, daß ihre Wellenlängen nacheinander die Reihe

$$\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{4} \quad \dots \dots$$

bilden; ihre Amplituden seien

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots \dots$$

Die Schwingungszahlen der Töne, denen diese Wellen angehören, bilden die Reihe

$$n \quad 2n \quad 3n \quad 4n \quad . \quad . \quad . \quad .$$

den Ton n nennt man den Grundton, die übrigen die Obertöne. Sind endlich die Gangunterschiede dieser Wellen gegenüber dem Anfangspunkt gleich

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4 \quad . \quad . \quad . \quad .$$

so wird, wenn man sich diese sämtlichen Wellen zu einer resultierenden Welle zusammengesetzt denkt, wenn also sämtliche Ordinaten für jeden Abszissenpunkt algebraisch addiert werden, die Gleichung der resultierenden Kurve lauten:

$$Y = a_1 \sin(x - \vartheta_1) + a_2 \sin(2x - \vartheta_2) + a_3 \sin(3x - \vartheta_3) \\ + a_4 \sin(4x - \vartheta_4) + \dots$$

Der Mathematiker Fourier hat nun bewiesen, daß sich durch diese Gleichung, wenn man nur über die Anzahl ihrer Glieder und die Werte der Größen

$$a_1, a_2, a_3 \dots \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \dots$$

unbeschränkt verfügen kann, jede beliebige periodische Kurve darstellen lasse; daß ferner jede solche Kurve nur auf eine einzige Weise durch eine Gleichung aus solchen Gliedern dargestellt werden könne¹⁾. Daraus folgt also, daß jede beliebige Kurve, wenn sie nur die eine Eigenschaft hat, daß sie sich in lauter unter sich kongruente Stücke (Wellen) von der Abszissenlänge λ zerlegen läßt, aufgebaut werden kann durch Übereinanderlagerung einer Reihe, und zwar nur dieser einen Reihe von Sinuskurven, deren Wellenlängen gleich $\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \dots$ sind, deren Amplituden a_1, a_2, a_3 und Gangunterschiede $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ von Fall zu Fall aus der gegebenen Kurve berechnet werden können²⁾.

§ 242. Obertöne, Teiltöne. Nach dem im vorigen Paragraphen Vorgetragenen spielen bei den zusammengesetzten Schwingungen die Obertöne eines Grundtones eine hervorragend wichtige Rolle. Wir müssen bezüglich derselben und ihrer Bezeichnung noch einige Bemerkungen beifügen.

Sind für eine Reihe von Tönen die Schwingungszahlen

$$n \quad 2n \quad 3n \quad 4n \quad . \quad . \quad . \quad mn$$

so nennt man, wie bereits bemerkt, n den gemeinschaftlichen Grundton, die übrigen seine (harmonischen) Obertöne. Die ganze Reihe heißt eine Reihe harmonischer Töne. Damit ist natürlich nicht gemeint, daß alle diese Töne miteinander harmonisch klingen, d. h. Konsonanz geben. Der

¹⁾ Der Fouriersche Satz, mitgeteilt vom Entdecker in seiner *Théorie analytique de la chaleur*, Paris 1822, ist bei verschiedenen physikalischen Problemen von Wichtigkeit. Nach Thomson und Tait kann er in folgenden Worten ausgedrückt werden: „Eine zusammengesetzte harmonische Funktion, mit einer hinzugefügten Konstanten, kann zur mathematischen Darstellung einer jeden beliebigen periodischen Funktion und folglich auch einer jeden beliebigen anderen Funktion zwischen bestimmten Werten der Veränderlichen gebraucht werden.“

²⁾ Nach der „Methode der unbestimmten Koeffizienten“.

Ton $6n$ und der Ton $7n$ z. B. stehen miteinander in Dissonanz. Das Wort harmonisch ist hier lediglich eine konventionelle Bezeichnung für die Töne mit Schwingungszahlen, welche ganze Multipla der Schwingungszahl des gewählten Grundtones sind.

Insofern nun diese Obertöne als Bestandteile eines Tongemisches, d. i. eines Klanges auftreten, heißt man sie auch Partialtöne oder Teiltöne des Tongemisches oder Klanges. Der erste Partial- oder Teilton eines Klanges ist dann sein Grundton selbst, der gewöhnlich der stärkste ist. Der erste Oberton wäre demnach der zweite Partialton usf.

Die harmonischen Obertöne von c als Grundton (mit 128 Schwingungen per Sekunde) sind also:

1. Oberton	= c^1	. . .	mit 256 Schwingungen	(Oktave)
2. "	= g^1	. . .	" 384	" (Duodezime)
3. "	= c^2	. . .	" 512	" (Doppeloktave)
4. "	= e^2	. . .	" 640	" (Terz der Doppeloktave)
5. "	= g^2	. . .	" 768	" (Quint der Doppeloktave)
6. "	= b^2	. . .	" 896	"
7. "	= c^3	. . .	" 1024	"
8. "	= d^3	. . .	" 1152	"
9. "	= e^3	. . .	" 1280	" usw.

Außer den harmonischen Obertönen können aber in einem Tongemisch, selbst in einem solchen, welches von einem einzigen schwingenden Körper ausgeht, auch unharmonische Obertöne enthalten sein, weil sich die Körper manchmal, ja in der Mehrzahl der Fälle, in schwingende Teile abteilen, welche nicht genau den Schwingungszahlen der harmonischen Obertöne gemäß schwingen. Dem Fourierschen Theorem gemäß können aber dann diese Töne zusammen keinen einheitlichen Klang von konstanter Klangfarbe geben. Die Klangfarbe muß vielmehr von Welle zu Welle des Grundtones wechseln, was sich auch durch die wechselnde Form der entsprechenden Tonschriften bestätigt, welche sich nicht in kongruente Teile von der Wellenlänge des Grundtones zerlegen läßt. So z. B. gibt die Stimmgabel, insbesondere wenn sie schwache Zinken hat und mit einem harten Körper angeschlagen wird, solche unharmonische Töne, ebenso Klangplatten, Glocken usw.

Bei den Orgelpfeifen und den Saiten sollten die Obertöne der einfachen Theorie nach harmonische sein. Dies ist aber insbesondere bei ersteren nicht streng der Fall. Die wirklichen Obertöne der Orgelpfeifen sind stets etwas höher als die berechneten Obertöne, so zwar, daß der achte Oberton fast mit dem neunten berechneten zusammenfällt. Bei den Saiten aus Metall ist die Abweichung gering, bei Darmsaiten oft sehr beträchtlich.

König¹⁾ hat vorgeschlagen, den Namen Teiltöne für diese unharmonischen Obertöne allein zu gebrauchen, weil sie stets nur durch die Schwingungen von Teilen des Körpers entstehen, während die harmonischen Obertöne durch die Zerlegung der Schwingungsform des als Ganzes schwingenden Körpers entstehen und deshalb streng den Multiplen der Schwingungszahl des Grundtones entsprechen. Wir möchten aber gegen

¹⁾ „Bemerkungen über die Klangfarbe“, Wied. Ann. 14, 369 (1881).

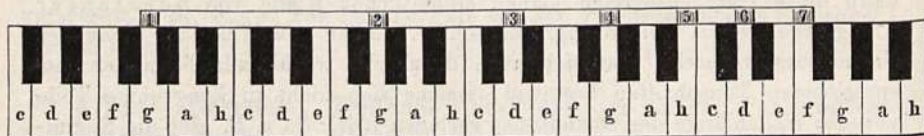
diese Nomenklatur den Einwand erheben, daß die harmonischen Obertöne doch auch als Teiltöne aufzufassen sind. Eine gestrichene Violine saite beispielsweise schwingt zwar als Ganzes, insofern alle ihre Punkte gleichzeitig durch die Ruhelage gehen, trotzdem kann man sich vorstellen, daß ihre Form aus jener, welche dem Grundton entsprechen würde, durch die Darüberlagerung der für sich schwingenden Teile der Saite entstanden ist. Da überdies der Name Partialton oder Teilton bereits allgemein in der Bedeutung als Oberton (Grundton als erster Partialton mit eingeschlossen) gebräuchlich ist, so wollen wir ihn künftig auch in dieser Bedeutung verwenden und für Teilton im Sinne Königs die bestimmtere Bezeichnung unharmonischer Oberton gebrauchen.

Das Vorhandensein von Obertönen in den meisten Klängen der musikalischen Instrumente ist für Besitzer eines feinen Gehörs ohne besondere Hilfsmittel nachzuweisen. Am Pianoforte lassen sich diesbezüglich leicht folgende Versuche anstellen.

Man schlage z. B. die Taste c^{-2} ($= C$) an und halte den Ton längere Zeit, bis er verklingt; man wird dann neben dem Grundton noch leise die Töne $c^{-1} g^{-1} e^0 e^0 g^0 b^0 c^1 d^1$ ($= C, G, c, e, g, b, \bar{c}, \bar{d}$) hören. Es ist aber oft nötig, die Aufmerksamkeit auf jenen Ton zu lenken, den man hören soll, was am besten dadurch geschieht, daß man ihn leise und auf ganz kurze Zeit auf seiner eigenen Taste ertönen läßt. Nach dem Erlöschen desselben hört man ihn dann im Klange des Grundtones leichter als vorher.

Um diese Versuche auf andere Grundtöne auszudehnen und die zugehörigen Obertöne schnell aufzufinden, ist es recht bequem, sich einer von E. Mach angegebenen Methode zu bedienen. Man fertigt sich das Bild einer Klaviatur, Fig. 800, welche sich von den üblichen Klaviaturen nur dadurch

Fig. 800.



unterscheidet, daß die weißen und schwarzen Tasten am rückwärtigen Rande gleich breit gemacht sind, wodurch die Breiten der weißen Tasten am vorderen Rande zwar ungleich werden, aber ein Vorteil für die Einfachheit der Darstellung gewonnen wird.

Schreitet man auf dieser Klaviatur um gleiche Abstände von links nach rechts, so schreitet auch die musikalische Tonhöhe um gleiche Intervalle fort, während die Schwingungszahlen in geometrischer Reihe fortschreiten¹⁾. Wir können demgemäß Rechnungsoperationen, die an Schwingungszahlen durch Multiplikation oder Division vorzunehmen wären, auf der Klaviatur durch Addition oder Subtraktion vornehmen, d. h. durch Vorrücken um gleiche Abstände nach rechts oder links in Ausführung bringen, so etwa wie bei einem logarithmischen Rechenschieber. Daraus folgt nun auch, daß der Abstand eines Obertones von seinem Grundton auf der Klaviatur immer der-

¹⁾ Dabei wird eine Stimmung nach gleichschwebender Temperatur vorausgesetzt, deren Abweichung von der reinen hier vernachlässigt werden muß.

selbe bleibt, wenn wir den Grundton beliebig wählen. Der erste Oberton wird immer um 12 Tasten, der zweite um 19, der dritte um 24 Tasten weiter nach rechts hin liegen als der Grundton, von dem man ausgehen will.

Fertigt man sich demnach eine Leiste, welche, wie in der Figur angedeutet, am oberen Rande der Klaviatur verschoben werden kann und an den Stellen der Obertöne mit schwarzen Feldern bemalt ist, so braucht man nur das unterste mit 1 bezeichnete Feld auf den gewählten Grundton einzustellen, um sofort die ersten sechs Obertöne aufzufinden. Diese Vorrichtung wird uns später noch einmal gute Dienste leisten.

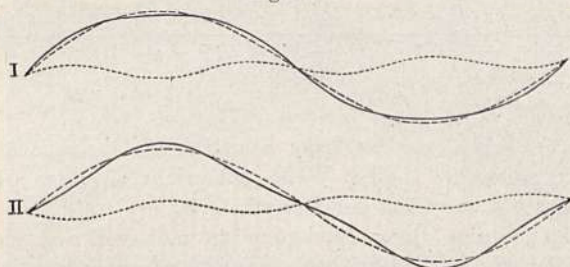
§ 243. Beispiele für die Zusammensetzung ungleich langer Wellen, Saitenschwingungen. Da wir den mathematischen Beweis des Fourierschen Theorems hier nicht ausführen können, so wollen wir dafür an einigen Beispielen zeigen, daß sich wirklich durch Übereinanderlagerung von Sinuskurven die verschiedenartigsten Wellenformen herstellen lassen.

Ein besonders interessantes Beispiel ist die Welle von der Gleichung:

$$y = a \cdot \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x + \frac{a}{25} \sin 5x - \frac{a}{49} \sin 7x \dots \quad (1)$$

in welcher die Glieder abwechselnd positives und negatives Zeichen haben, die Amplituden verkehrt wie die Quadrate der ungeraden Zahlen, die Abszissen

Fig. 801.



wie die ungeraden Zahlen selbst wachsen. Diese Welle entspricht also einem Klange, der neben dem Grundtone nur die ungeradzahligten Partialtöne mit abnehmender Stärke enthält.

In Fig. 801 I sind die beiden Wellen $y = a \sin x$ und $y = \frac{a}{9} \sin 3x$, die erstere gestrichelt, die zweite punktiert gezeichnet, und zwar mit dem Gangunterschiede Null. Die ganz ausgezogene Kurve entspricht der resultierenden Welle

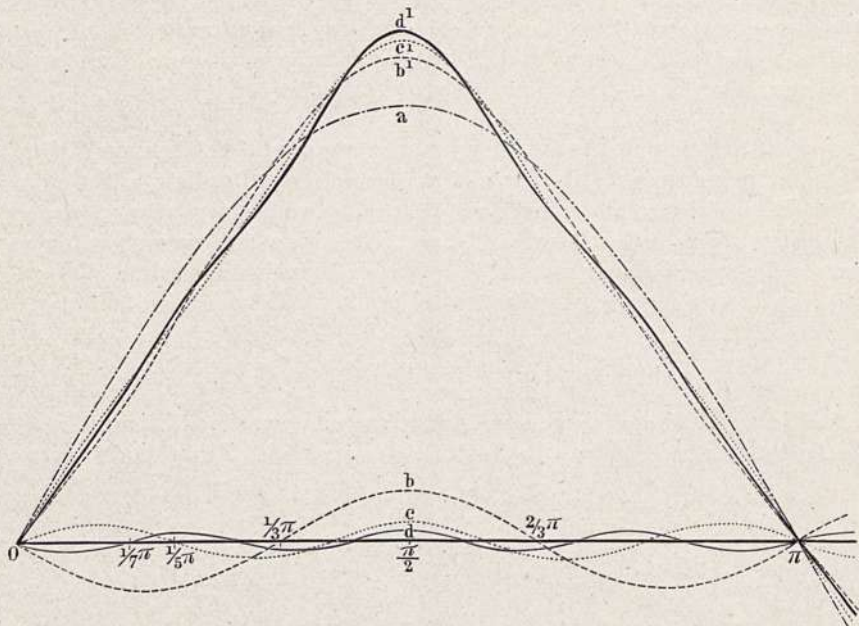
$$y = a \sin x + \frac{a}{9} \sin 3x.$$

In Fig. 801 II dagegen ist die kleinere Welle um eine halbe Wellenlänge verschoben. Ihre Gleichung ist daher $y = \frac{a}{9} \sin(3x - \pi) = -\frac{a}{9} \sin 3x$. Die resultierende ganz ausgezogene Kurve entspricht also der Gleichung

$$y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x;$$

fährt man in dieser Weise fort, indem man nach und nach immer mehr Wellen, welche den höheren Gliedern der Gleichung (1) entsprechen, übereinander aufbaut, so erhält man eine Welle, deren Berge und Täler sich immer mehr der Form geradliniger gleichschenkeliger Dreiecke nähern.

Fig. 802.



Die Fig. 802 zeigt eine derartige Konstruktion bis zum 4. Gliede fortgesetzt, die resultierende (halbe) Welle entspricht also der Gleichung (1). Sie nähert sich schon merklich der Dreiecksform.

Da die Anfertigung dieser Zeichnung zu mühevoll und zu zeitraubend ist, um sie während der Unterrichtsstunde vorzunehmen, es aber doch wünschenswert ist, den allmählichen Aufbau der Welle zu beobachten, so empfiehlt sich eine mechanische Zusammensetzung, welche sich mittels des vom Verfasser konstruierten Apparates, Fig. 803, bewerkstelligen läßt¹⁾. Derselbe bildet die Rückseite des bereits in § 208, Fig. 624 beschriebenen Apparates.

Auf den Stäbchen ist zunächst mit weißer Farbe eine halbe Sinuswelle aufgemalt, welche der Gleichung $y = a \sin x$ entspricht. Oberhalb derselben ist mit roter Farbe die Welle

$$y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x$$

¹⁾ Auch L. Boltzmann hat einen hierzu bestimmten Apparat konstruiert, welcher von Arth. Boltzmann in den Wien. Akad. Ber. 113, Abt. IIa, 1904, beschrieben ist.

Ferner findet sich ein derartiger Apparat beschrieben von Leop. Kann in der Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht 15, 18 (1902), welcher beliebig viele Wellen zu superponieren gestattet. Ein zweiter, daselbst nur angedeuteter Apparat gestattet außerdem die Verschiebung der Partialwellen, während die resultierende Welle ersichtlich gemacht wird.

noch weiter oben mit gelber Farbe die Welle

$$y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x + \frac{a}{25} \sin 5x$$

aufgemalt.

Zum Apparate gehören noch drei Schablonen, welche

die Welle $y = \frac{a}{9} \sin 3x$ in roter Farbe,

„ „ $y = \frac{a}{25} \sin 5x$ in gelber Farbe,

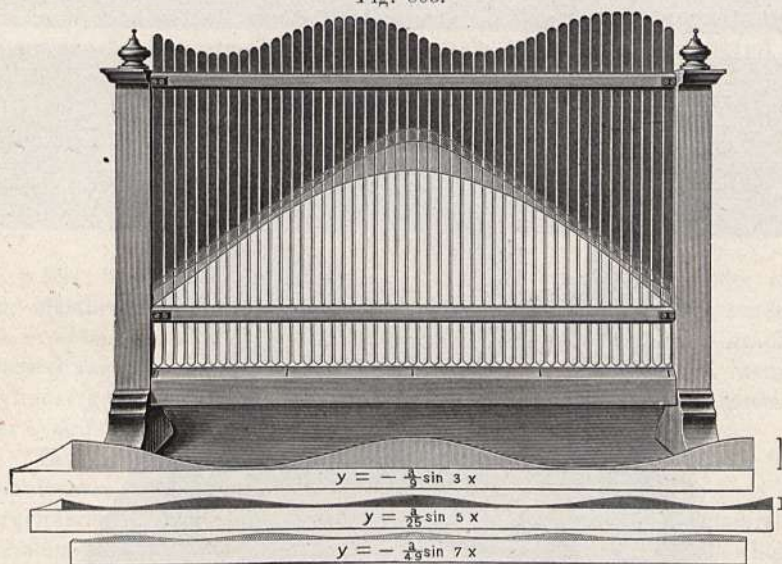
„ „ $y = \frac{a}{49} \sin 7x$ in grüner Farbe

darstellen.

Man schiebt zuerst die rote Schablone unter die Stäbchen, so daß ein Wellenberg in die Mitte kommt. Die weiße Fläche ändert ihre Begrenzung, indem ihr Rand jetzt Welle $y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x$ darstellt.

Man zeigt mittels einer Kopie aus Karton, daß diese Welle mit jener roten übereinstimmt, welche sich auf den Stäbchen ohne untergeschobene

Fig. 803.



Schablone zeigt. Nun nimmt man diese zum Ausgang und schiebt die gelbe Schablone unter, und zwar wieder mit einem Berg in der Mitte. Jetzt zeigt die rote Fläche die Welle

$$y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x + \frac{a}{25} \sin 5x.$$

Man zeigt wieder, daß dieselbe identisch ist mit der Welle, welche die gelbe Fläche der Stäbchen ohne untergeschobene Schablone zeigt. Indem man jetzt diese zum Ausgang wählt und die letzte (grüne) Schablone mit

einem Berg bis zur Mitte einschiebt, erhält man als Grenzlinie der gelben Fläche die Welle

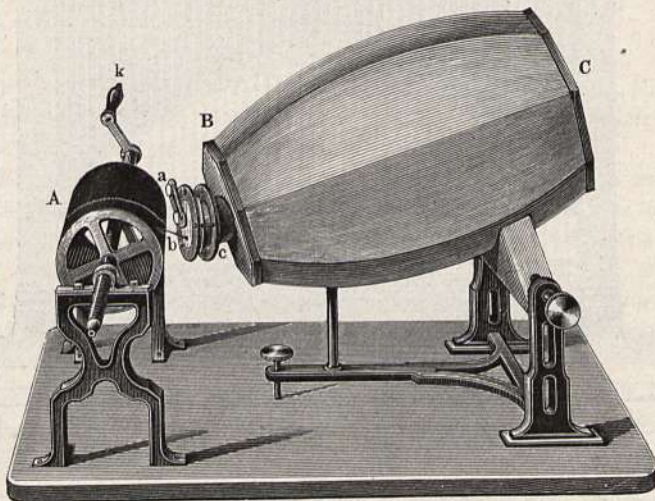
$$y = a \sin x - \frac{a}{9} \sin 3x + \frac{a}{25} \sin 5x - \frac{a}{49} \sin 7x,$$

an der nun gezeigt werden kann, daß sie sich der Dreiecksform mehr nähert als die früheren. Bei der Fortsetzung des Verfahrens würden sich auf die abgerundete Spitze immer mehr kleinere Wellenberge auftürmen und sie zu einer vollständigen Spitze ergänzen, während die Krümmungen der Saiten immer mehr zu geraden Linien ausgeglichen werden. Diese Demonstration gibt eine Vorstellung, wie so das unerwartete Resultat zustande kommt. Der strenge Beweis folgt aus dem Theorem von Fourier.

Die in Rede stehende Schwingungsform stimmt mit jener überein, welche eine in ihrer Mitte gestrichene Saite zeigt. Im § 229 haben wir bereits die optische Methode beschrieben, deren sich v. Helmholtz bedient hat, um dies nachzuweisen. In den beiden nächstfolgenden Paragraphen werden wir noch einige andere Methoden und deren Resultate mitteilen, welche das Wissenswerte über diesen Gegenstand ergänzen.

§ 244. Anwendung der graphischen und optischen Methode zur Darstellung und Untersuchung zusammengesetzter Schwingungen; Phonautograph. Daß sich die zusammengesetzten Wellen auch durch die Luft fortpflanzen und andere elastische Körper in entsprechend zusammen-

Fig. 804.



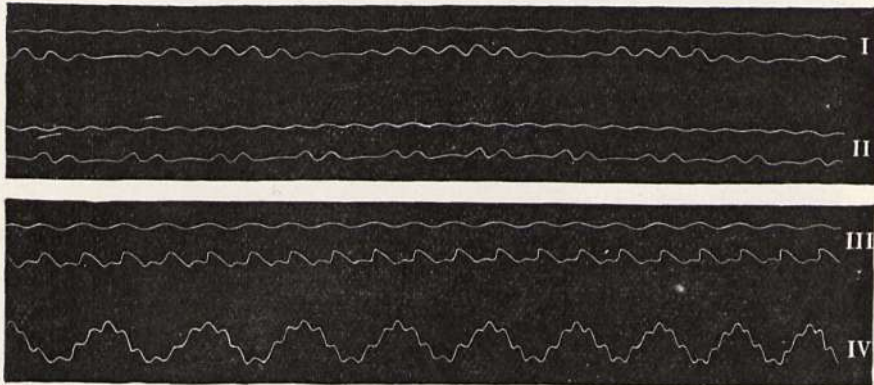
gesetzte Schwingungen versetzen können, läßt sich mit Hilfe des Phonautographen von Scott und König dartun, welcher in Fig. 804 dargestellt ist. Ein ungefähr 50 cm langes hohles Ellipsoid von Gips oder Metall ist bei *C* offen, am anderen Ende bei *B* aber ist es durch einen festen Boden bedeckt, in dessen Mitte ein kurzes messingenes, an seiner Außenseite durch eine elastische Membran von Goldschlägerhaut oder Kautschuk geschlossenes Rohr eingesetzt ist. Auf dieser Membran, deren Spannung nach Bedürfnis ab-

geändert werden kann, ist ein leichtes steifes Stielchen *b* aufgekittet. Das verschiebbare Stäbchen *a*, welches mit seinem einen Ende auf die Membran drückt, muß so gestellt werden, daß sich das Stielchen *b* während der Vibrationen der Membran auf einem Bauche derselben und nicht auf einem Knoten befindet.

Diese Vorrichtung hat, wie man sieht, eine entfernte Ähnlichkeit mit dem Ohr; die Membran repräsentiert das Trommelfell, während das Ellipsoid dem Gehörgange entspricht. — Wenn nun die Wellen irgend eines Tones bei *C* eintreten, so wird die Membran samt dem Stifchen in Schwingungen versetzt, welche unisono mit dem einfallenden Tone sind; wenn aber gleichzeitig die Schallwellen zweier Töne bei *C* einfallen, werden die Vibrationen der Membran der Kombination der beiden Wellensysteme entsprechen.

Der eben besprochene Apparat wird nun, wie Fig. 804 zeigt, an den mit berußtem Papier überzogenen Zylinder *A* herangerückt, welchen wir bereits

Fig. 805.



in § 224, S. 650 kennen lernten (das Stielchen *b* steht aber weder normal zur Membran, noch normal zum Zylinder, wie die Fig. 804 zeigt, sondern es ist in entsprechender Weise schräg gestellt), und man erhält eine graphische Darstellung der von der Membran ausgeführten Oszillationen, wenn der Zylinder gedreht wird, während die Membran unter dem Einfluß bestimmter, bei *C* einfallender Töne vibriert.

In Fig. 805 sind die unteren Kurven in Nr. I, II und III die Kopien von Kurven, welche mit dem Apparat geschrieben wurden, als zwei durch Orgelpfeifen erzeugte Töne gleichzeitig bei *C* einfielen. Nr. I entspricht der Kombination des Grundtones mit einem um einen ganzen Ton ($\frac{2}{3}$) höheren. Nr. II entspricht der Kombination des Grundtones mit der Quint und Nr. III der Kombination des Grundtones mit seiner Oktav. Die obere Kurve jeder Abteilung ist gleichzeitig direkt durch eine Stimmgabel geschrieben, welche unisono war mit dem tieferen der beiden bei *C* einfallenden Pfeifentöne.

Nr. IV ist ohne Vermittelung der Membran des Scottschen Phonautographen erhalten; es zeigt die Schwingungen einer Stimmgabel, deren Grundton stark von einem Oberton begleitet war.

Hier sind es die Kombinationskurven von II und III, welche uns näher interessieren. In der unteren Kurve Nr. II erkennt man leicht alle charakteristischen Eigenschaften der theoretisch konstruierten Kurve *C* (Fig. 797,

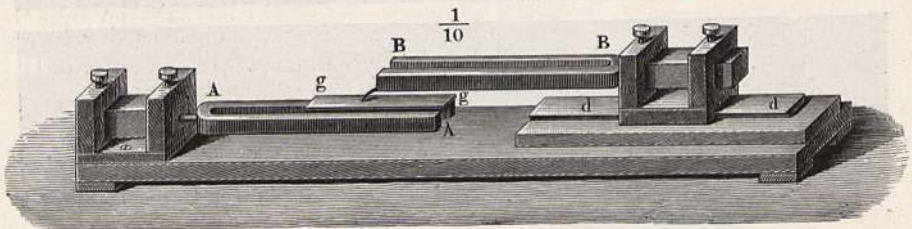
S. 728), d. h., daß sich nach je zwei Schwingungen des Grundtones stets dieselbe Form der Kombinationskurve wiederholt.

So stimmt auch die Kurve Nr. III, Fig. 805, welche von dem Phonautographen unter gleichzeitigem Ertönen des Grundtones und seiner Oktav geschrieben wurde, im wesentlichen mit der theoretischen Kurve, Fig. 798, überein. Nach jeder Schwingung des Grundtones wiederholt sich die gleiche Form der Kombinationskurve.

Was hier von den Vibrationen eines Luftteilchens gesagt ist, welches gleichzeitig durch die Schallwellen zweier oder mehrerer Töne affiziert wird, gilt auch von den Vibrationen eines materiellen Punktes, welcher einem tönenden Körper angehört, der gleichzeitig neben seinem Grundton auch noch einen oder mehrere Obertöne hören läßt, wie dies z. B. auch durch die auf die rotierende Trommel geschriebene Schwingungskurve Nr. IV, Fig. 805, erläutert wird, welche die Vibrationen des äußersten Endes einer Stimmgabel darstellt, die neben dem Grundton auch noch den siebenten Partialton hören läßt. In diesem Falle kann das Ohr ebenso leicht den Oberton neben dem Grundton hören, wie das Auge in der Schwingungskurve Nr. IV, Fig. 805, die Vibrationen des Obertones verfolgen kann.

Während der Phonautograph dazu bestimmt ist, die auf ihn aus der Luft eindringenden zusammengesetzten Wellen aufzuzeichnen, ist das folgende

Fig. 806.



Verfahren dazu bestimmt, solche Zeichnungen auf mechanischem Wege zu erzeugen, ohne daß die komponierenden Wellen in der Luft zur Kombination gelangen. Man läßt die schwingende Zinke einer Stimmgabel auf einer schwingenden Schreibfläche, welche von der Zinke einer anderen Gabel getragen wird, schreiben. Fig. 806 zeigt einen dazu geeigneten Apparat. Er besteht aus zwei großen Stimmgabeln *A* und *B*, von welchen die erstere feststeht, während die letztere in einem Schlitten befestigt ist, dem das Brettchen *d* in der Weise zur Führung dient, daß die Stimmgabel *B* parallel über die Stimmgabel *A* weggezogen werden kann. Die feste Stimmgabel trägt einen schmalen Streif *g* von dünnem Spiegelglas, welcher berußt wird, oder auf welchem noch besser ein berußter Streifen Glanzpapiers befestigt ist. An dem einen Arme der Stimmgabel *B* ist in der früher beschriebenen Weise ein Schreibfederchen in der Weise befestigt, daß es auf der berußten Fläche seine Spur zurückläßt, wenn die Stimmgabel *B* über das Brettchen *d* abgezogen wird.

Die Fig. 807 zeigt eine Anzahl auf diese Weise (von König) erhaltener Kurven. Das Verhältnis der Schwingungszahlen ist daneben verzeichnet. Man wird unter denselben mehrere der früher abgeleiteten Kurven wieder erkennen. Bei der zweiten Kurve von oben ist das Verhältnis 1 : 2 nicht

genau eingehalten. Infolgedessen ändert sich im Verlaufe derselben der Gangunterschied und deshalb auch allmählich die Form der Wellen, was

Fig. 807.

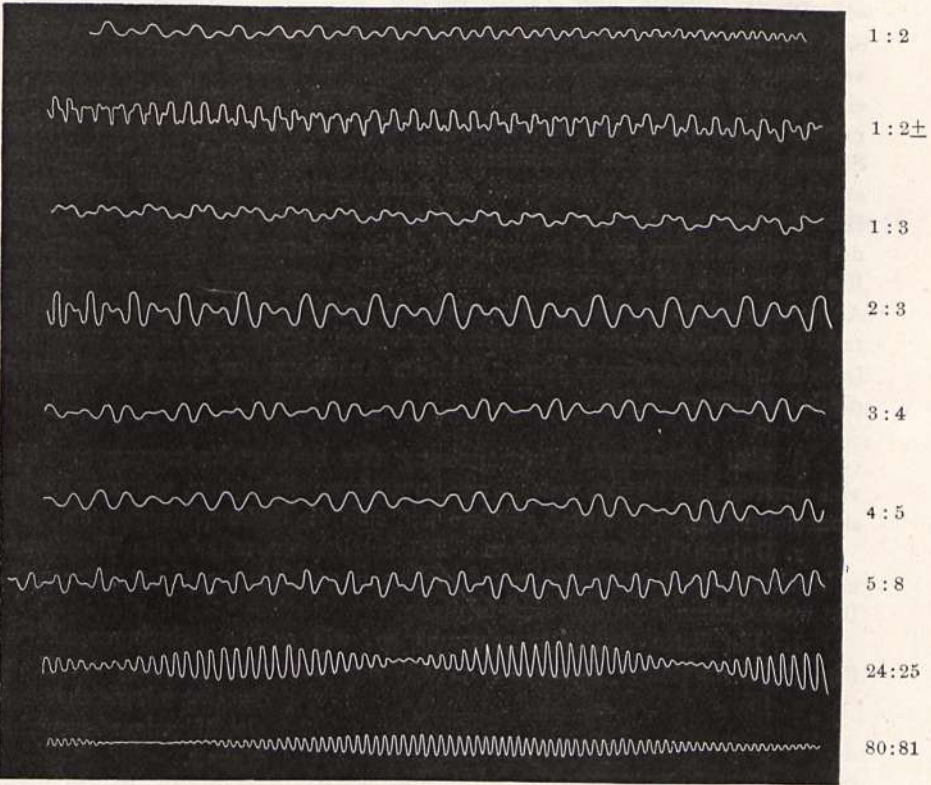
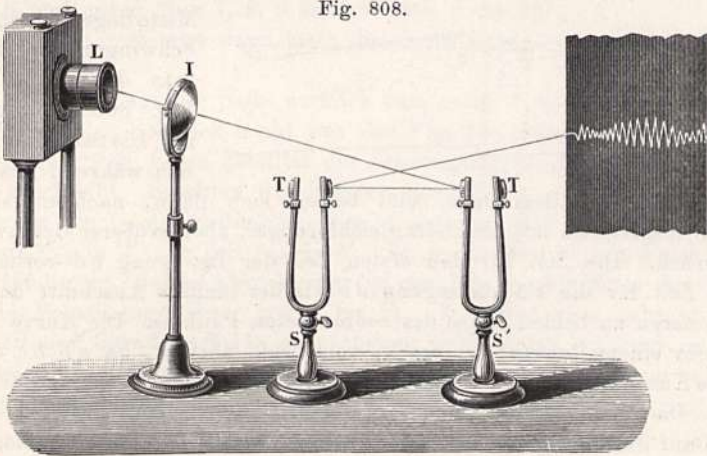


Fig. 808.



unter Hinweis auf die frühere Figur 798, S. 728, keiner weiteren Erklärung bedarf.

Auch die optische Methode kann benutzt werden, um ähnlich wie bei der Zusammensetzung rechtwinkelig aufeinander stattfindender Schwingungen diesmal die parallel stattfindenden Schwingungen zu kombinieren.

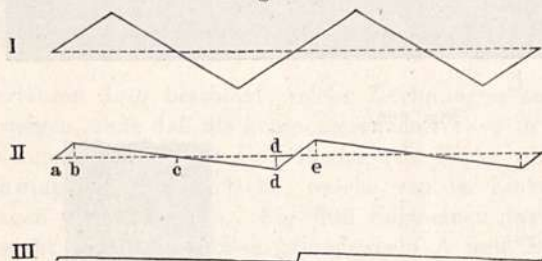
Die Fig. 808 zeigt die hierzu dienliche Versuchsanordnung. Das durch eine Öffnung L der Lampe ausgehende Strahlenbündel wird durch die Konvexlinse J etwas konvergent gemacht, so daß auf einem entfernten Schirme ein scharfes Bild der Öffnung entsteht. Bevor das Strahlenbündel dahin gelangt, wird es in der ersichtlichen Weise von den Spiegeln der beiden Stimmgabeln T und T' reflektiert. Wird nur eine Gabel zum Schwingen gebracht, so wird der Lichtpunkt zu einer vertikalen Lichtlinie verlängert. Dieselbe wird zu einer horizontalen Sinuskurve ausgezogen, wenn man statt des Schirmes einen um eine vertikale Achse rotierenden Spiegel anwendet. Einfacher noch ist es, die Stimmgabel T selbst ein wenig um eine vertikale Achse zu drehen. Schwingt nun auch die zweite Gabel, so wird die Amplitude des schwingenden Lichtpunktes periodisch veränderlich, außer wenn die Gabeln unisono gestimmt sind. Bei dem Ausziehen zur Kurve erhält man die kombinierten Wellen.

§ 245. Genauere Untersuchung der Saitenschwingungen. Ein viel untersuchtes Objekt, welches zur Anwendung zahlreicher, mitunter höchst sinnreicher Methoden Anlaß gegeben hat, sind die Saitenschwingungen.

v. Helmholtz hat, wie oben § 231 beschrieben, mittels des Vibrationsmikroskops die Gesetze der mit dem Bogen gestrichenen Saite untersucht. Die wesentlichen Resultate sind folgende:

1. Die Mitte der Saite schwingt so, wie es die Schwingungskurve Fig. 809 I darstellt. Demgemäß erfolgt der Hin- und Hergang der Saite

Fig. 809.



daselbst mit gleicher und gleichförmiger Geschwindigkeit.

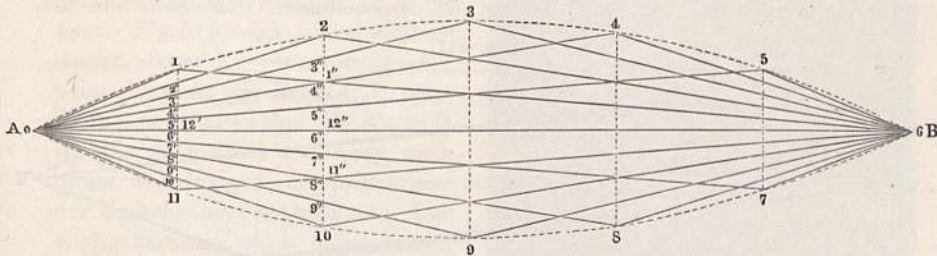
2. Die Punkte der Saite, die nicht in der Mitte liegen, beschreiben Schwingungen, deren Gesetz durch die Kurve Fig. 809 II dargestellt ist. Die Saite folgt nämlich während des Streichens gleichförmig dem Bogen und bewegt sich dann, nachdem sie sich plötzlich losgerissen, mit ebenfalls gleichförmiger, aber größerer Geschwindigkeit zurück. Die Zeit für den ersten Teil der Bewegung bd verhält sich zu der Zeit für die Rückbewegung de wie der längere Abschnitt der Saite zum kürzeren zu beiden Seiten des beobachteten Punktes. Die Kurve II z. B. entspricht einem Punkte, der um $\frac{1}{6}$ vom Ende absteht, da $ab:bc = 1:5$ ist. Die Kurve III dagegen entspricht einem Punkte nahe dem Ende der Saite.

3. Die Stelle, wo der Bogen angreift, ist von verhältnismäßig geringem Einfluß auf die Bewegung der Saite. Der Umstand, daß jene Obertöne ausfallen müssen, welche an der gestrichenen Stelle Knoten haben würden, hat jedoch zur Folge, daß die Kurven feine Kräuselungen zeigen, wenn man einen Punkt der Saite beobachtet, der zwischen zwei solchen Knoten liegt.

4. Die Form der schwingenden Saite¹⁾ muß sich demnach in folgender Weise darstellen lassen:

Es sei AB , Fig. 810, die Ruhelage der Saite, welche sie während jeder Schwingung zweimal mit allen Punkten gleichzeitig durchschreitet. Die Senkrechte 3 — 9 stellt die (im Verhältnis übertrieben groß gezeichnete

Fig. 810.



doppelte) Amplitude der Saitenmitte dar. Wir teilen diese sowie die Saitenlänge in sechs gleiche Teile und denken uns die ganze Schwingungsdauer in 12 Zeitabschnitte abgeteilt. Dann ist die Form der Saite, wenn sie zur Zeit 0 die Ruhelage nach aufwärts passiert hat, zur Zeit $\frac{1}{12}$ der Schwingungsdauer gleich der gebrochenen Linie $A1B$, dann so fort hat sie

zur Zeit $\frac{2}{12}$	die Form	$A2B$
" "	" "	$A3B$
" "	" "	$A4B$
" "	" "	$A5B$
" "	" "	$A6B$
" "	" "	$A7B$ und so fort.

Man kann sich also vorstellen, daß zwischen A und B der Fußpunkt einer Ordinate mit gleichförmiger Bewegung hin und her gehe, während sich das andere Ende der Ordinate auf der Kurve (Parabelbogen) $A, 1, 2, 3 \dots$ nach B und unten über $7, 8, 9$ zurück nach A bewege.

Die Saite verbindet dann stets dieses Ordinatenende mit den Enden A und B .

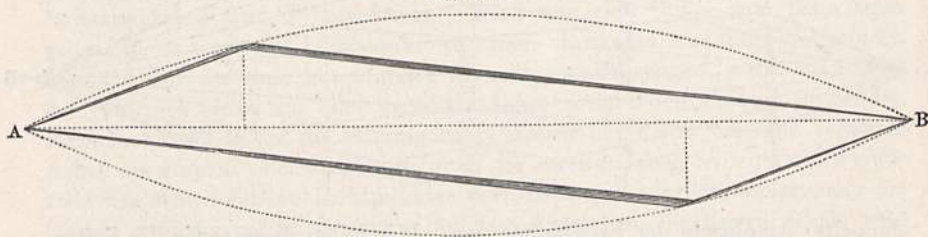
Daß diese Lage der Saite wirklich dem unter 1 und 2 angegebenen Gesetze entspricht, läßt sich leicht aus der Fig. 810 ablesen. Man sieht, daß die Saitenmitte in jedem Zwölftel der Schwingungsdauer genau gleich lange Wege beschreibt. Beachten wir dagegen einen Punkt der Saite, welcher beispielsweise um $\frac{1}{6}$ der Saitenlänge von A absteht! Zur Zeit $\frac{1}{12}$ ist er in 1, zur Zeit $\frac{2}{12}$ in 2', zur Zeit $\frac{3}{12}$ in 3', und so wandert er mit gleichförmiger Geschwindigkeit, welche aber kleiner ist als jene in der Mitte der Saite, in $\frac{10}{12}$ der Schwingungsdauer von 1 bis 11. Von dort aber geht er als Bestandteil der Geraden $B11$ im nächsten Zwölftel bis 12' und im letzten Zwölftel bis 1. Er macht also in einem Sechstel der Schwingungsdauer nach aufwärts denselben Weg, welchen er in $\frac{5}{6}$ dieser Zeit nach abwärts zurück-

¹⁾ Nicht zu verwechseln mit der „Schwingungsform eines Saitenpunktes“, unter welcher man das graphisch dargestellte Gesetz versteht, nach welchem die Elongationen mit der Zeit sich ändern (Schwingungskurve Fig. 809).

legt. Seine Geschwindigkeiten beim Auf- und Niedergange verhalten sich also wie 1:5, nämlich wie die Abstände nach *A* und nach *B*.

Der experimentelle Nachweis dieser Gesetze erfolgt am elegantesten durch die schon oben (§ 228) beschriebene stroboskopische Methode von Mach. Die durch eine elektromagnetisch schwingende Stimmgabel gleicher Tonhöhe zweimal während der Schwingungsdauer beleuchtete Saite erscheint während des Streichens wie Fig. 811. Dabei ist angenommen, daß man, um die

Fig. 811.



Amplitude vergrößert erscheinen zu lassen, den Schatten der Saite schief auf einen Schirm projiziert habe. Bei kleinem Phasenunterschiede vollführt dann die Saite langsam dieselbe Bewegung, welche sie in Wirklichkeit schnell ausführt¹⁾.

Bei dicken und deshalb steifen Saiten zeigten die Beobachtungsergebnisse von Neumann²⁾ merkbare Abweichungen von der Theorie.

Bei den durch Anschlag oder Zupfen zum Tönen gebrachten Saiten hängt, wie v. Helmholtz nachgewiesen hat, die Zusammensetzung des Klanges sowohl von der Anschlagstelle, als von der Dauer des Anschlages, sowie von der materiellen Beschaffenheit und Breite des Körpers (Hammers, Zitherringes) ab, durch den der Anschlag oder das Zupfen (Reißen) geschieht.

Durch Anschlag an einer bestimmten Stelle der Saite werden nämlich alle jene Obertöne beseitigt, welche daselbst Knoten hätten.

Eine sehr schöne und eingehende Untersuchung der Bewegung gestrichener und gezupfter Saiten verdanken wir O. Krigar-Menzel und A. Raps³⁾. Die Autoren ließen die Saite vor einer senkrecht dazu gestellten schmalen Spalte schwingen, beleuchteten dieselbe durch die Spalte hindurch und erzeugten durch eine Linse ein Bild der Erscheinung auf einem photographischen Papier, welches mit konstanter Geschwindigkeit parallel zur Saite bewegt wurde. Sie erhielten so nach dem Hervorrufen und Fixieren sehr schöne Schwingungskurven, hell auf schwarzem Grunde, aus denen die Gesetze dieser Schwingungen direkt abzulesen waren. Diesbezüglich müssen wir auf die Originalarbeit und die derselben beigegebenen Tafeln verweisen.

Nach A. Samojloff lassen sich die Schwingungskurven der Violin-saiten sehr schön dadurch sichtbar machen, daß man am Stege der Violine ein kleines Spiegelchen, dessen Ebene senkrecht auf den Ebenen des Steges und der Violindecke steht, befestigt. Der Steg mit dem „Balken“ und dem

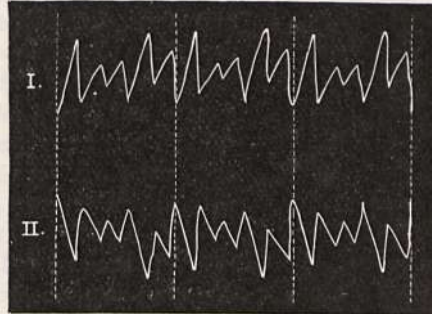
¹⁾ Quincke hat für die stroboskopische Trommel Zeichnungen gefertigt, welche diese Saitenschwingungen darstellen.

²⁾ Wiener Akad. Ber. 61, 2. Abt., 1870, S. 89.

³⁾ Sitzungsber. der Berliner Akademie 1891 und 1893.

„Stimmstock“ bilden in Verbindung mit der Violindecke ein schwingendes System, das durch die Saite in Mitschwingung gerät. Man läßt nun, wie bereits im § 244, Fig. 808, gezeigt ist, ein schmales, durch eine Linse konvergent gemachtes Lichtbündel zuerst auf das Spiegelchen und dann auf einen rotierenden Spiegel, Fig. 646 oder 648 (S. 614, 617), fallen, und erhält auf dem Schirm die Wellenkurven projiziert. Fig. 812 zeigt je drei Wellenlängen dieser Kurven, von denen I beim Hingang des Bogens, II beim Rückgang erhalten sind. Die Kurve II ist das Spiegelbild von oben nach unten der Kurve I, entspricht also der Umkehrung der Ordinaten. Der Klangcharakter wird dabei (einen guten Violinspieler vorausgesetzt) nicht geändert¹⁾.

Fig. 812.



Beim Fortepiano ist die Anschlagstelle bei $\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{9}$ der Saitenlänge, wodurch die Obertöne 7 bis 9 entfallen, also gerade jene noch relativ starken Obertöne, welche zum Durdreiklang nicht passen. Anschlag in der Mitte der Saite verhindert die geradzahligen Obertöne und verursacht deshalb einen hohlen, näselnden Klang. Anschlag sehr nahe am Ende der Saite begünstigt das Hervortreten sehr hoher Obertöne und erzeugt einen leeren, klimpernden Klang. Schlägt man mit hartem, scharfkantigem Hammer, so tritt dies in noch höherem Grade ein, besonders wenn die Berührung mit der Saite nur kurz dauert. Die Theorie ergibt, daß diejenigen Obertöne begünstigt werden, deren halbe Schwingungsdauer nahe gleich ist der Zeit, während welcher der Hammer anliegt, daß dagegen jene verschwinden, deren halbe Schwingungsdauer 3, 5, 7... mal so groß ist. Da nun diese Zeit von der Weichheit und Elastizität der Hammerbekleidung wesentlich abhängt, so erklärt sich der große Einfluß der letzteren auf den schönen Klang des Fortepiano. Ältere Instrumente fangen an zu klimpern, weil die Filzbedeckung allmählich härter wird. Ausführlicheres hierüber in v. Helmholtz' Tonempfindungen.

§ 246. Schwebungen oder Stöße, Königs Stoßtöne. Wenn zwei einander sehr nahe stehende, aber doch nicht ganz isochrone Töne unser Ohr treffen, so vernehmen wir ein periodisch abwechselndes Anschwellen und Nachlassen des Tones, welches man das Schweben der Töne nennt. Scheibler hat für diese Erscheinung die Bezeichnung „Stöße“ (*battement*) eingeführt.

Man hört diese Stöße sehr deutlich, wenn man gleichzeitig zwei Orgelpfeifen tönen läßt, welche sehr nahe unisono gestimmt sind. Auch mit zwei Stimmgabeln, welche einer reinen Konsonanz sehr nahe stehen, lassen sich die Stöße deutlich wahrnehmen. Besonders geeignet zur Nachweisung der Stöße sind solche Stimmgabeln, welche in der Fig. 667, S. 648 dargestellten Weise auf Resonanzkästchen aufgesetzt sind. Hat man zwei solcher Stimmgabeln, welche vollkommen unisono sind, nebeneinander gestellt, so braucht

¹⁾ Vgl. damit S. Hermanns Versuche, § 254.

man nur die eine mit etwas Wachs zu beschweren, um die Stöße sehr deutlich hörbar zu machen, wenn beide Stimmgabeln durch Anstreichen mit dem Fiedelbogen gleichzeitig zum Tönen gebracht werden.

Der Grund dieser Erscheinung ist leicht einzusehen. Wenn in einem bestimmten Momente durch beide Töne gleichzeitig eine Verdichtung hervorgerufen wird, so wird dies Zusammenfallen bald aufhören, und nach einiger Zeit wird gleichzeitig eine Verdünnung der einen Tonwelle mit einer Verdichtung der anderen stattfinden. Wenn aber die Verdichtungen der einen Welle gerade mit denen der anderen zusammenfallen, so verstärken sie sich gegenseitig; sie heben sich aber gegenseitig auf, wenn die Verdichtungen der einen mit den Verdünnungen der anderen zusammentreffen.

Wie bald Verdichtung mit Verdichtung und Verdünnung mit Verdünnung und dann wieder Verdichtung mit Verdünnung zusammentreffen, wenn zwei nicht ganz isochrone Töne zusammenwirken, kann man sich durch zwei nicht ganz isochron schwingende Pendel recht anschaulich machen; am deutlichsten ergibt sich aber das abwechselnde Anschwellen und Abnehmen des Tones durch graphische Darstellung. In Fig. 813 sollen die beiden schwach gezogenen Kurven die als transversal gezeichneten Wellen der beiden nicht gleich hohen Töne darstellen. Summiert man die Ordinaten der beiden Kurven, so erhält man für jeden Moment die Größe der Amplituden, mit welchen beide Wellen zusammen das Ohr affizieren; auf diese Weise ist die stark gezogene Kurve konstruiert; bei *a, b, c, f, g* und *h* werden durch das Zusammenwirken beider Wellen größere Amplituden, also ein Anschwellen des Tones, hervorgebracht.

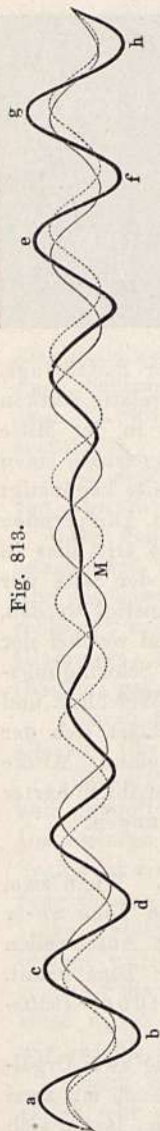
Auch dies läßt sich mittels des vom Verfasser konstruierten Apparates, Fig. 624 a demonstrieren, indem man eine demselben beigegebene Wellenschablone einschiebt, welche auf die ganze Länge etwa $13\frac{1}{2}$ Wellen enthält. Da die Anzahl der auf den Stäbchen aufgetragenen Wellen 12 beträgt, so entsprechen die beiden Wellen dem Intervall $12:13,5 = 8:9$, und man erhält eine der Fig. 813 ähnliche Kurve, deren Maxima und Minima sich rasch verschieben, wenn man den Gangunterschied allmählich ändert.

Schon Sauveur hat die Stöße angewandt, um die absolute Schwingungszahl der Töne zu ermitteln. Er zählte nämlich die Stöße, welche zwei tiefe Töne miteinander geben, von denen der eine um einen kleinen halben Ton höher war als der andere. Macht der eine dieser Töne $n = 24 m$ Schwingungen in der Sekunde, so ist $25 m$ die Schwingungszahl des anderen; und wenn p die beobachtete Anzahl der Stöße ist, so ergibt sich

$$25 m - 24 m = p \text{ oder } m = p, n = 24 p.$$

Nehmen wir z. B. an, man habe beobachtet, daß die Töne f^{-1} (*F*) und f_{is}^{-1} (*Fis*) in 10 Sekunden 36 Stöße miteinander machen, so ist $p = m = 3,6$,

Fig. 813.



also die Schwingungszahl n von f^{-1} gleich $24.3,6 = 86,4$. Demnach wäre die Schwingungszahl von c^{-1} gleich $64,8$; es wären ferner $259,2$ und 432 die Schwingungszahlen der Töne c^1 und a^1 .

In anderer Weise hat Scheibler die Stöße benutzt, um die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen. Er stellte zwei Stimmgabeln her, von denen die eine genau eine Oktave tiefer war als die andere, so daß also $2n$ die Schwingungszahl der letzteren war, wenn man mit n die Schwingungszahl der ersteren bezeichnet. Alsdann verfertigte er $p - 1$ weitere Stimmgabeln, deren Töne zwischen jenen lagen, und zwar so, daß jede folgende mit der vorhergehenden 4 Stöße in der Sekunde machte. Daraus ergibt sich nun:

$$2n = n + 4p \text{ oder } n = 4p.$$

Beträgt z. B. die Zahl der Stimmgabeln, welche man zwischen a^0 und a^1 einschalten muß, wenn jede folgende mit der vorhergehenden 4 Stöße geben soll, 54 , so ist $p = 55$, $n = 4.55 = 220$, also die Schwingungszahl von $a^1 = 440$.

Die Ausführbarkeit dieser allerdings etwas mühsamen Methode beruht darauf, daß das Ohr für die Reinheit der Oktaven ganz besonders empfindlich ist.

Die Scheiblersche Methode wird übrigens in neuerer Zeit in Verbindung mit der optischen Methode gebraucht und ist dann von der subjektiven Beurteilung der Reinheit des Oktavenintervalls unabhängig.

Eine andere Anwendung der Stöße ist die zur Demonstration des Dopplerschen Prinzips, das wir im § 227 vorgetragen haben.

Stellt man zwei Stimmgabeln mit Resonanzkästen, welche genau unisono gestimmt sind, in einiger Entfernung voneinander auf und bewegt sich, während sie beide tönen, von der einen Gabel gegen die andere, so hört man sofort Stöße, da scheinbar die Tonhöhe der Gabel, der man sich nähert, ebensoviel steigt, als die andere sinkt. Bleibt der Beobachter stehen, und wird dagegen die eine Gabel demselben genähert oder entfernt, so treten ebenfalls Schwebungen auf, deren Anzahl aber, wie leicht erklärlich, nur halb so groß ist wie im vorigen Falle.

Nimmt man eine Stimmgabel mit dicken Zinken, welche einen recht kräftigen und hohen Ton (über 2000 Schwingungen per Sekunde) gibt, und bewegt dieselbe, nahe der Zimmerwand stehend, senkrecht gegen dieselbe hin und zurück, so hört man ebenfalls sehr deutliche Schwebungen zwischen dem direkten und dem reflektierten Tone.

Um die Schwebungen dem Auge sichtbar zu machen, kann man die oben beschriebene optische Methode mittels der Spiegel tragenden Stimmgabeln anwenden.

Auch mittels zweier nahe gleich gestimmter Orgelpfeifen lassen sich die Schwebungen sichtbar darstellen, indem man ein und denselben Gasstrom nacheinander durch die manometrischen Kapseln beider Pfeifen zu einem gemeinsamen Brenner führt (siehe § 214). Im rotierenden Spiegel zeigt sich dann eine Reihe Flammenbilder von ab- und zunehmender Höhe.

Je näher die beiden Töne einander liegen, desto langsamer folgen die Stöße, so daß man sie bequem zählen kann. Macht der eine Ton in jeder Sekunde 3, 4, 5 usw. Schwingungen mehr als der andere, so werden 3, 4, 5

Stöße in der Sekunde entstehen; die Anzahl der Stöße ist gleich der Anzahl der Schwingungen, welche der eine Ton in jeder Sekunde mehr macht als der andere. Wenn aber die Töne mehr und mehr ungleich werden, so werden die Stöße schneller und schneller, bis sie endlich nicht mehr als getrennte Eindrücke wahrgenommen werden können.

Solange die Schwebungen (Stöße) langsam genug sind, um ohne Schwierigkeit gezählt zu werden, machen sie auf das Ohr durchaus keinen unangenehmen Eindruck. Wenn aber die Differenz der beiden Töne bis zu einem Halbton wächst, so wächst die Zahl der Schwebungen bis zu 20 oder 30 in der Sekunde; es bleibt dann dem Ohre immer noch der Eindruck getrennter Tonstöße, wenn man sie auch nicht mehr einzeln wahrnehmen oder zählen kann, aber der Gesamteindruck wird wirr. Wir werden weiter unten zeigen, wie v. Helmholtz auf diesem Umstande eine Theorie der Konsonanz und Dissonanz der Intervalle aufgebaut hat.

R. König, der leider vor einigen Jahren in Paris verstorbene Fabrikant ausgezeichnete akustischer Apparate, hat in seiner Abhandlung „Über den Zusammenklang zweier Töne ¹⁾“ Beobachtungen veröffentlicht, aus denen er den Schluß zog, daß Stöße nicht nur dann entstehen, wenn zwei Töne miteinander nahe im Einklang sind, sondern auch dann, wenn sie miteinander nahe ein harmonisches Intervall bilden, d. h. wenn die Schwingungszahl des einen Tones nahe ein ganzes Vielfaches der Schwingungszahl des anderen ist. König experimentierte mit einer Reihe von 56 Stimmgabeln, von denen die ersten fünf 130 kg wogen. Er hatte so Töne von 64 bis zu 4096 Schwingungen zur Verfügung, von denen die tiefsten noch durch Resonanzröhren verstärkt wurden.

Läßt man zu dem Tone 64 einen ebensolchen ertönen, dessen Schwingungszahl man allmählich erhöht, so entstehen zunächst die gewöhnlichen Schwebungen oder Stöße, deren Zahl m gleich der Differenz $n' - n$ der Schwingungszahlen der primären Töne ist. Sobald $n' = 78$ geworden, so gehen die Stöße, deren Zahl nun $78 - 64 = 14$ geworden, in ein „Rollen“ über, welches bis $n' = 86$ (22 Stöße) immer schneller wird, ohne seinen Charakter zu verlieren. Darauf folgt ein lautes verworrenes „Rasseln“, welches bei $n' = 108$ (44 Stöße) wieder in ein Rollen übergeht, welches langsamer wird, bis man wieder die einzelnen Stöße zählen kann, nämlich bei $n' = 118$ 10 Stöße, bei $n' = 119$ 9 Stöße usf., bis bei $n' = 128$ dieselben gänzlich verschwinden.

König nennt diese letzteren Stöße die oberen Stöße, die früheren dagegen untere Stöße. Bezeichnen wir die Anzahl der letzteren mit m , die der oberen mit m' , so ist die Anzahl der unteren Stöße

$$m = n' - n,$$

die Anzahl der oberen Stöße

$$m' = 1n - n'.$$

Allein damit sind noch nicht alle Stöße erschöpft, welche der Grundton 64 geben kann; denn geht man nun mit n' über die Oktave 128 hinaus, so treten wiederum Stöße auf, welche König wiederum untere nennt. Bei $n' = 140$ (12 Stöße) beginnt wieder ein Rollen, bei $n' = 148$ (20 Stöße) ein Rasseln,

¹⁾ Pogg. Ann. 157, 177 (1876).

geben miteinander Stöße und Stoßtöne zweiter Ordnung oder sekundäre Stöße und Stoßtöne.

Dazu sind nicht mehr als zwei primäre Töne erforderlich. Zum Beispiel lasse man den Ton $n = 256$ und seine Quint $n' = 384$ zusammenwirken, dann ist

$$\begin{array}{l} \text{der untere Stoßton} \dots\dots\dots m = n' - n = 384 - 256 = 128 \\ \text{„ obere} \quad \quad \quad \dots\dots\dots m' = 2n - n' = 512 - 384 = 128 \end{array}$$

Wir brauchen also m und m' , die jetzt im unisono sind, nur ein wenig zu verstimmen, damit sie Stöße geben. Nehmen wir also zu $n = 256$ ein $n' = 385$, so wird

$$\begin{array}{r} m = 385 - 256 = 129 \\ m' = 512 - 385 = 127 \\ \hline m - m' \qquad \qquad = 2 \end{array}$$

Es erfolgen demnach zwei sekundäre Stöße pro Sekunde. Man findet so allgemein, daß, so oft der höhere Ton n' von der Reinheit der Intervalle um eine Schwingung abweicht, bei den Intervallen $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$. . . je zwei, bei den Intervallen $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{7}$. . . und $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{8}$. . . je drei, bei den Intervallen $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{9}$. . . und $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{11}$. . . je vier Stöße entstehen.

Wird die Anzahl dieser sekundären Stöße hinlänglich groß, so bilden sie nach König einen sekundären Stoßton. Dies wurde in zwei Fällen beobachtet, so z. B. wenn der Ton 2048 mit dem Tone 2816 zusammenklingt. Man hört laut $m = 768$ und $m' = 1280$ und noch deutlich $m' - m = 512$.

Auf einen Einwand von H. v. Helmholtz, daß die Stöße der harmonischen Intervalle darauf zurückzuführen seien, daß der tiefere Ton n einen Oberton von nahe gleicher Höhe mit dem höheren Tone n' in seinem Klange enthalte, und daß so der höhere primäre Ton mit dem nahe gleich hohen Oberton des anderen primären Tones die Stöße verursache, hat König¹⁾ erwidert, daß seine Stimmgabeln die betreffenden Obertöne gar nicht hören ließen. Einem anderen Einwand, daß die betreffenden Obertöne erst im Ohr durch Einwirkung der starken primären Töne entstehen könnten, begegnete König mit dem Hinweise, daß die Stöße auch bei schwachen Tönen auftreten, daß ferner der Oberton, welcher die Stöße veranlassen sollte, gehört werden müßte, da der Ton einer Hilfsgabel, welcher an Stelle des Obertones die Stöße in derselben Stärke hervorruft, sehr deutlich gehört werde. Wir müssen bezüglich der weiteren Experimente von König auf die zitierte Originalabhandlung verweisen²⁾.

Die Fig. 813 ergibt, daß durch Kombination zweier Sinuswellen, welche Tönen von n und n' Schwingungen pro Sekunde entsprechen, eine Kurve mit periodisch an- und abschwellender Amplitude entsteht, welcher ein ebensolches periodisches An- und Abschwollen der Tonstärke entspricht. Die Größe der Periode ist $n - n'$. Daraus folgt, daß umgekehrt ein Klang, bei welchem die Stärke sich nach demselben Gesetze periodisch ändert, vom Ohr als Zu-

¹⁾ „Über den Ursprung der Stöße und Stoßtöne bei harmonischem Intervall“ Wiedem. Ann. 12, 335 (1881).

²⁾ Dieselbe enthält auch die Beschreibung der „Wellensirene“, bei welcher statt der Löcherreihen wellenförmige Scheibenränder vor radial gestellten spaltförmigen Blaseöffnungen vorbeigeführt werden.

sammenklingen zweier Töne wahrgenommen werden muß. Es läßt sich dies nach A. u. L. Weinhold¹⁾ auf folgende Weise experimentell bestätigen. Man befestigt auf der Achse der Schwungmaschine den Stiel einer Stimmgabel von 435 Schwingungen und gibt dann 20 Umdrehungen pro Sekunde. Nach § 239 erhält ein seitwärts stehendes Ohr bei jeder Umdrehung 4 Maxima und Minima zu hören, also 80 Maxima pro Sekunde. Eine solche Zahl von Schwebungen entsteht durch zwei Töne von $435 - 40 = 395$ und $435 + 40 = 475$ Schwingungen; diese zwei Töne, die nahezu im Intervall einer kleinen Terz 5 : 6 zueinander stehen, werden in der Tat gehört und lassen sich insbesondere auch durch Resonatoren nachweisen. Die Autoren vergleichen diese Erscheinung mit dem Zeemannschen Phänomen (Zerlegung der Natriumlinie in zwei durch Einwirkung eines magnetischen Feldes).

§ 247. Die mehrstimmigen Sirenen von Dove und v. Helmholtz.

Zur Anstellung von Interferenzversuchen verschiedener Art sind von besonderem Werte die mehrstimmige Sirene von Dove²⁾ und die mehrstimmige Doppelsirene von v. Helmholtz³⁾.

Nachdem schon früher Savart, Opelt und Seebeck mehrstimmige Sirenen teils durch Anbringung mehrerer Räder auf einer Achse, teils mehrerer Löcherreihen auf einer Scheibe konstruiert hatten, übertrug Dove

Fig. 814.

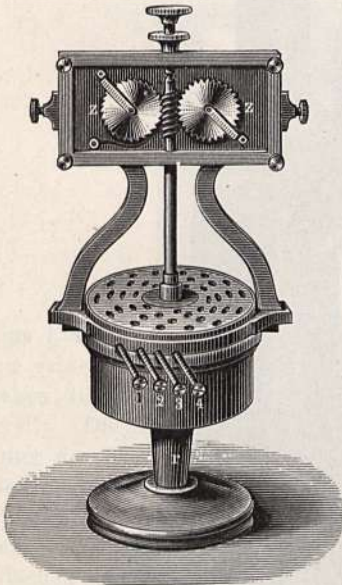
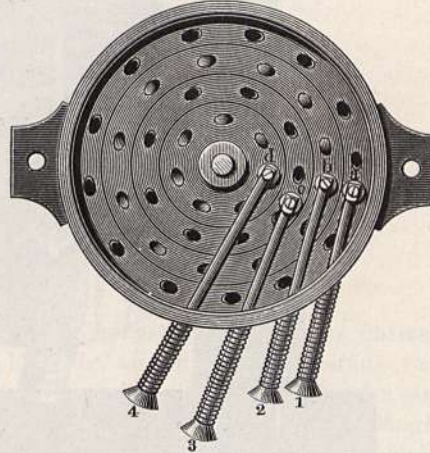


Fig. 815.



diese Erweiterung auf die Sirene von Cagniard la Tour (§ 225). Die Dovesche Sirene ist in Fig. 814 abgebildet, Fig. 815 zeigt die innere Einrichtung der konzentrischen Ringe mit den verschiedenen Löcherreihen.

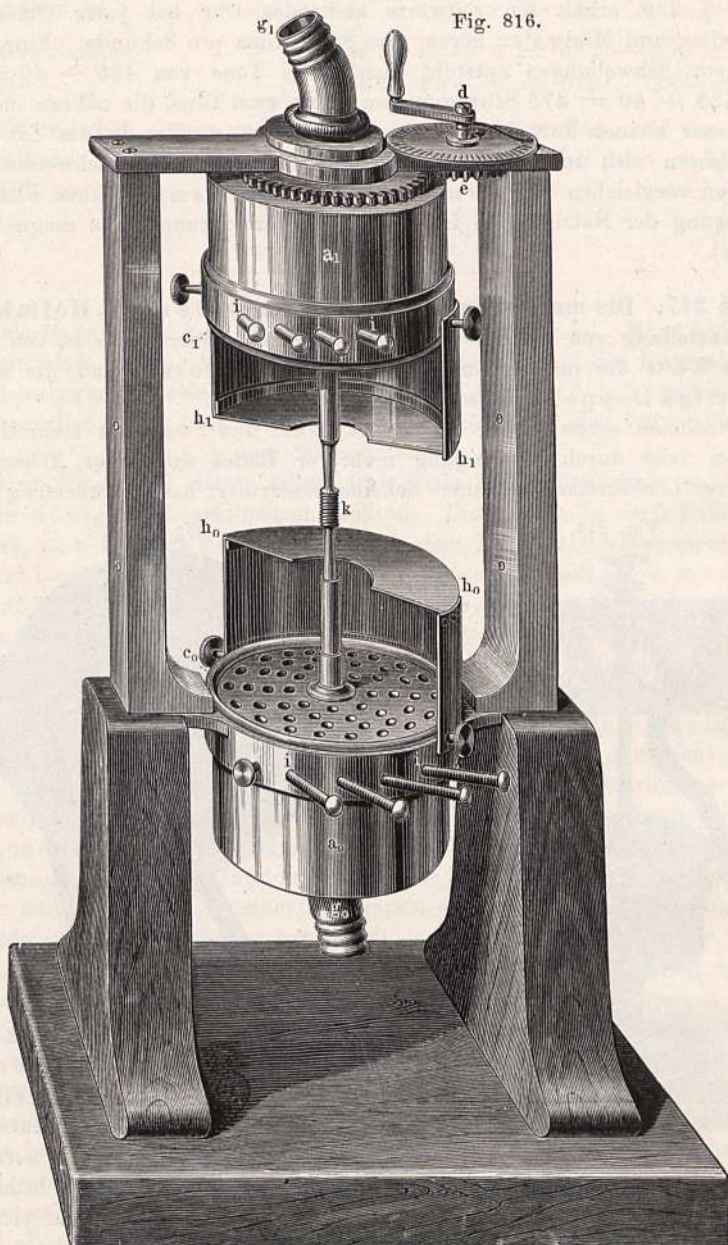
Die zum Rotieren bestimmte Scheibe, sowie die darunter befindliche fixe Platte, welche den Deckel des Windkastens bildet, haben auf vier kon-

¹⁾ Ein akustisches Analogon zum Zeemannschen Phänomen; Zeitschr. für phys. u. chem. Unterr. 17, 92 (1904).

²⁾ Poggend. Ann. 82 (1851).

³⁾ Tonempfindungen, S. 241, 4. Aufl., S. 269.

zentrischen Kreisen von innen nach außen 8, 10, 12 und 16 Löcher, welche wie bei der Sirene von Cagniard la Tour schief gebohrt sind, so zwar, daß sich die Bohrungen rechtwinkelig treffen. Unterhalb des fixen Deckels befinden sich vier konzentrische Ringe, Fig. 815 *a, b, c, d*, welche genau an-



einander schließen und mittels daran gekuppelter Messingstifte 1, 2, 3, 4 in ihrer Ebene drehbar sind. Die Führung für den innersten Ring nach innen bildet eine am Deckel befestigte Scheibe, die Führung für den äußersten

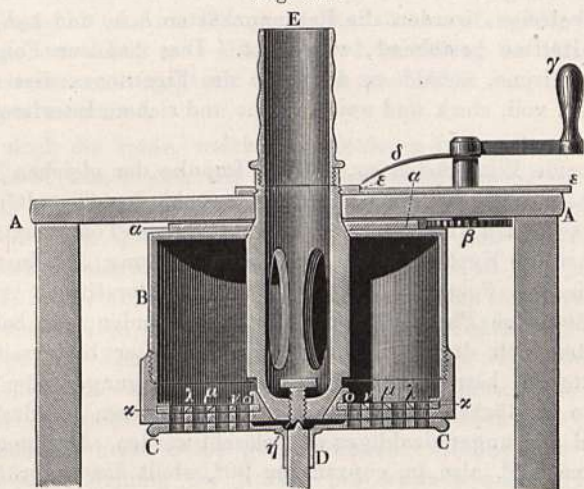
Ring nach außen bildet der feste Rand des Deckels. Die Bohrung dieser vier Ringe stimmt in Zahl und Richtung der Löcher genau mit jener des darüber befindlichen Deckels überein.

Die Messingstifte 1, 2, 3, 4 sind außerhalb mit Spiralfedern und inwendig mit Anschlagzapfen versehen, welche bewirken, daß dieselben für gewöhnlich eine solche Lage annehmen, daß dadurch die zugehörige Löcherreihe verschlossen bleibt. Drückt man aber auf einen Stift, so wird dadurch der zugehörige Ring so weit gedreht, daß seine Löcherreihe geöffnet wird.

Man kann daher nach Belieben einen oder mehrere der vier Töne der Sirene allein oder zugleich anstimmen.

Die Doppelsirene von v. Helmholtz, Fig. 816, ist durch Zusammensetzung zweier Dovescher Sirenen a_0 und a_1 entstanden, welche die rotierende Achse k gemeinsam haben und einander die Deckplatten zukehren. Das Zählwerk (in der Figur weggelassen) ist an die Schraube bei k anzusetzen; der Wind wird bei g_0 und g_1 zugeführt. Außerdem ist aber noch

Fig. 817.



eine Einrichtung getroffen, um den oberen Windkasten a_1 gegen den unteren um seine Achse zu drehen. Zu dem Ende ist er mit einem Zahnrade versehen, in welches das kleinere, mit einer Kurbel d versehene Zahnrad e eingreift. Die Achse des Kastens a_1 , um die es sich dreht, ist eine Verlängerung des oberen Windrohres g . Fig. 817 zeigt einen Vertikalschnitt durch den oberen Kasten, aus welchem die innere Einrichtung zu ersehen ist. Das Windrohr E ist fest in den Querbalken des Gestelles AA eingefügt und verlängert sich nach innen in einen hohlen Zylinder mit konisch zugeschnittenen Flächen an den Enden, auf denen entsprechende konische Aushöhlungen im Boden und Deckel des Kastens gleiten, so daß sich der letztere frei um das Windrohr drehen kann. α zeigt den Querschnitt des Zahnrades, welches am Kasten festsetzt, β das kleinere Zahnrad, γ die Kurbel, δ einen Zeiger, der an einer Randteilung ϵ die Drehungswinkel ablesen läßt.

Die rotierende Achse, deren oberes Ende D in Fig. 817 sichtbar ist, läuft auf feinen Spitzen in kegelförmigen Pfannen, deren obere mittels der Schraube η etwas verstellbar ist. CC ist die an die Achse D befestigte,

rotierende Scheibe, $\kappa\lambda$, $\lambda\mu$, $\mu\nu$, $\nu\sigma$ sind die vier konzentrischen Ringe, welche mit schräg abgeschnittenen Rändern wie die Ringe einer Herdplatte übereinander greifen. Die übrige Einrichtung ist wie bei der Doveschen Sirene. Die untere rotierende Scheibe hat vier Reihen mit 8, 10, 12, 18, die obere mit 9, 12, 15, 16 Löchern. Bezeichnen wir den Ton, der bei Öffnung der acht Löcher entsteht, mit c , so gibt die untere Scheibe die Töne c , e , g , d' , die obere Scheibe die Töne d , g , h , c' .

Man kann demnach die Intervalle: Unisono, Oktave, Quinte, Quart, große Terz, kleine Terz, ganzer Ton, halber Ton hervorbringen, und zwar die Mehrzahl derselben in doppelter Weise, nämlich entweder an einer der Scheiben allein oder derart, daß der eine Ton an der einen, der andere Ton an der anderen Scheibe entsteht.

Mit diesem Instrumente läßt sich eine große Anzahl wichtiger Experimente anstellen, die sich zum Teil auf schon Vorgetragenes beziehen, zum Teil erst im nächsten Paragraphen besprochen werden.

Um den Klang der Sirene von den darin vorhandenen Obertönen annähernd zu befreien, werden die Resonanzkästen h_0h_0 und h_1h_1 , Fig. 816, aus je zwei Hälften bestehend, aufgesetzt. Dies hat zur Folge, daß der Grundton der Sirene, sobald er die Höhe des Eigentones dieser Resonanzkästen erreicht, voll, stark und weich ertönt und sich zu Interferenzversuchen besser eignet.

Stehen beide Windkästen so, daß die Impulse der gleichen Töne gleichzeitig entstehen, also die Phasendifferenz sowohl der Grundtöne als ihrer Obertöne genau gleich Null wird, so werden alle diese Töne verstärkt. Dreht man dann aber die Kurbel um 45° , was eine Drehung des Kastens um $\frac{1}{24}$ der Peripherie zur Folge hat, so wird beim beiderseitigen Anblasen der Zwölfreihe eine Phasendifferenz $= \frac{1}{2}$ stattfinden; die beiden Grundtöne vernichten sich dann. Die Phasendifferenz der beiderseitigen ersten Obertöne (Oktaven) beträgt aber zwei halbe Schwingungen oder eine ganze; diese Obertöne verstärken sich daher so wie alle anderen geradzahliges Obertöne, während alle ungeradzahliges ausgelöscht werden. Drehung der Kurbel um noch einmal 45° , also im ganzen um 90° , stellt den ursprünglichen Zustand wieder her. Dreht man die Kurbel einmal ganz herum, so wird viermal der Grundton mit den geradzahliges Obertönen verstärkt, dazwischen viermal geschwächt und statt dessen die Oktave und die übrigen ungeradzahliges Obertöne verstärkt. Der erste Oberton (die Oktave) für sich allein (etwa mit Resonator) beobachtet, wird achtmal verstärkt und wieder geschwächt, die Duodezime zwölfmal usf.

Um die Erscheinung der Stöße oder Schwebungen zu produzieren, muß man den einen Ton ein wenig verstimmen. Man erreicht dies einfach, indem man die Kurbel langsam, aber konstant dreht. Ist dabei die Rotationsrichtung des oberen Windkastens übereinstimmend mit der rotierenden Scheibe, so wird der Ton vertieft, bei entgegengesetzter Richtung erhöht. So oft die Kurbel um 90° gedreht wird, sinkt oder steigt die Anzahl der Schwingungen um eine, weil die zugehörige Drehung des Kastens dem zwölften Teile der Peripherie, also dem Abstand zweier Löcher entspricht. Es müssen demnach während jeder Umdrehung der Kurbel vier Schwebungen entstehen, ganz im Einklang mit der Regel, daß die Anzahl der Schwebungen gleich der Differenz der Schwingungszahlen.

Die subjektive Tonstärke wächst mit der Anzahl der Schwingungen oder der Tonhöhe, wenn auch der Aufwand an lebendiger Kraft zur Hervorbringung der Töne gleich groß ist. Dies zeigt sich an der Sirene sehr auffallend. Unterhält man nämlich den Luftstrom ganz konstant, so ist der Ton anfangs, solange er tief ist, ziemlich schwach, nimmt mit der Höhe immer mehr an Intensität zu und wird bei etwa 880 Schwingungen unerträglich stark. Dabei ist die Zunahme am Anfang am raschesten. Daraus folgt, daß bei tiefer Tonlage in zusammengesetzten Klängen die Obertöne für unser Ohr überwiegen können. Auch dies läßt sich an der Doppelsirene (mit den Zwölflöcherreihen) leicht zeigen, da man durch die Schwebungen stets feststellen kann, welchen Ton man hört. Man weiß nämlich, daß eine Kurbelumdrehung 4 Schwebungen des Grundtones, 8 Schwebungen des ersten, 12 Schwebungen des zweiten Obertones usw. verursacht. Läßt man nun die Scheiben langsamer als gewöhnlich laufen, indem man sie durch eine mit Öl benetzte Stahlfeder bremst, so hört man bei steigender Geschwindigkeit zuerst 12, dann 8, dann erst 4 Schwebungen während einer Kurbeldrehung. Trotzdem bemerkt man am Klange nicht, daß im Anfang der Grundton fehlt. Es zeigt dies, wie leicht man sich bei der Ermittlung der unteren Tongrenze irren kann, wenn man nicht die Obertöne ausschließt oder die Probe mit den Schwebungen vornimmt.

Aber auch die Stöße, welche bei größeren Intervallen durch die Obertöne auftreten, lassen sich mit der Doppelsirene demonstrieren. Man läßt z. B. an der oberen Scheibe 12, an der unteren 18 Löcher wirken, das Intervall ist 2 : 3, also Quinte. Dieselbe ertönt rein und ohne Stöße, solange man die Kurbel unberührt läßt, dreht man sie aber, so gibt jede Umdrehung derselben 12 Stöße, woraus folgt, daß dieselben durch Interferenz des zweiten Obertones des tieferen mit dem ersten Oberton des höheren Tones entstehen. Angenommen, der Ton der Zwölflöcherreihe betrage 220, der der Achtzehnlöcherreihe also 330 Schwingungen. Der zweite Oberton des ersten beträgt daher 660, der erste Oberton des zweiten ebenfalls 660 Schwingungen, welche zusammen keine Stöße geben können. Erhöht man aber den Ton 220 durch eine Drehung der Kurbel pro Sekunde auf 224, so wird sein zweiter Oberton $3 \times 224 = 672$, welcher mit dem Ton 660 eine Anzahl von $672 - 660 = 12$ Schwebungen geben muß.

§ 248. Kombinationstöne. Wenn zwei musikalische Töne von verschiedener Höhe gleichzeitig, kräftig und gleichmäßig anhaltend erklingen, so hört man häufig noch andere Töne mit, deren Tonhöhe von dem Intervall der beiden primären Töne abhängt. Diese unter dem Namen der Kombinationstöne bekannten Töne sind 1740 zuerst von Sorge entdeckt und später durch Tartini, nach welchem sie auch die Tartinischen Töne genannt werden, allgemeiner bekannt geworden.

Die Schwingungszahl eines Kombinationstones ist gleich der Anzahl von Stößen, welche die beiden primären Töne miteinander geben, sie ist also gleich der Differenz der Schwingungszahlen der primären Töne, weshalb v. Helmholtz sie auch Differenztöne nennt.

So hört man die nächst tiefere Oktav eines Tones mit, wenn gleichzeitig noch seine Quinte erklingt.

Bei gleichzeitigem Ertönen von Grundton und Quart hört man die tiefere Duodezime des Grundtones mit.

Grundton und große Terz geben einen Kombinationston, welcher um zwei Oktaven tiefer ist als der Grundton usw. Es geben also:

$$\begin{array}{rcll}
 c^2 & \text{und } g^2 & \text{den Kombinationston } c^1 & \\
 c^2 & \text{ " } f^2 & \text{ " } & f^0 \\
 c^2 & \text{ " } e^2 & \text{ " } & c^0.
 \end{array}$$

Thomas Young versuchte die Kombinationstöne auf die bereits im vorigen Paragraphen besprochenen Schwebungen zurückzuführen, indem er annahm, daß der Gesamteindruck der Stöße, welche zu schnell sind, um einzeln unterschieden zu werden, als ein eigener Ton hörbar werde. In der Tat stimmt die Schwingungszahl des Differenztones mit der Zahl der Stöße überein.

Diese Erklärung der Kombinationstöne ist aber, wie v. Helmholtz in seinem mehrmals angeführten Werke gezeigt hat, nicht haltbar. Zunächst haben wir bereits im vorigen Paragraphen erfahren, daß unter Umständen eine namhafte Anzahl von Stößen in der Sekunde erfolgen kann, welche nicht als Kombinationston wahrgenommen werden, sondern nur die Dissonanz der beiden gleichzeitig erklingenden Töne zur Folge haben. Dann aber ist die Vernehmbarkeit der Kombinationstöne auch nicht allein von dem Intervall und der Stärke der beiden primären Töne, sondern wesentlich auch von ihrer Entstehungsweise abhängig. Die Bedingung für ihre Erzeugung ist, daß dieselbe Luftmasse von beiden Tönen in heftige Erschütterung versetzt wird. Dies geschieht am stärksten in Doves mehrstimmiger Sirene oder in der v. Helmholtzschen Sirene, und zwar in letzterer dann, wenn die primären Töne beide an derselben Scheibe hervorgerufen werden. Die Luft im Windkasten ist verdichtet, so oft die Löcher geschlossen sind; wenn sie geöffnet werden, stürzt ein großer Teil derselben ins Freie, es tritt eine beträchtliche Druckverminderung ein. So gerät die Luft im Windkasten in heftige Schwingungen. Werden zwei Löcherreihen angeblasen, so entstehen solche Schwingungen in der Luftmasse des Windkastens beiden Tönen entsprechend, und durch jede Reihe von Öffnungen wird nicht ein gleichmäßig zufließender Luftstrom entleert, sondern ein Luftstrom, welcher durch den anderen Ton schon in Schwingungen versetzt ist. Die Kombinationstöne, welche unter diesen Umständen sehr stark sind, existieren hier schon objektiv in der Luftmasse.

Ähnlich wie bei der Sirene sind die Verhältnisse bei der Physharmonika und dem im nächsten Paragraphen zu besprechenden Obertöne-Apparat von Appun; auch hier sind die Kombinationstöne objektiv vorhanden und sehr deutlich, wenn auch nicht so stark wie bei der Sirene.

Wenn dagegen die Erregungsstellen der beiden Töne ganz voneinander getrennt sind und keinen mechanischen Zusammenhang miteinander haben, wenn also z. B. zwei Singstimmen oder zwei Violinen die Töne angeben, so sind die Kombinationstöne äußerst schwach und nur durch sehr geübte Ohren wahrnehmbar.

Außer den eben besprochenen Differenztönen gibt es, wie v. Helmholtz zuerst theoretisch abgeleitet und dann experimentell nachgewiesen hat, noch eine zweite Art von Kombinationstönen, welche er Summations-

töne nannte und deren Schwingungszahl der Summe der Schwingungszahlen der kombinierenden Töne entspricht. Die Summationstöne, welche übrigens

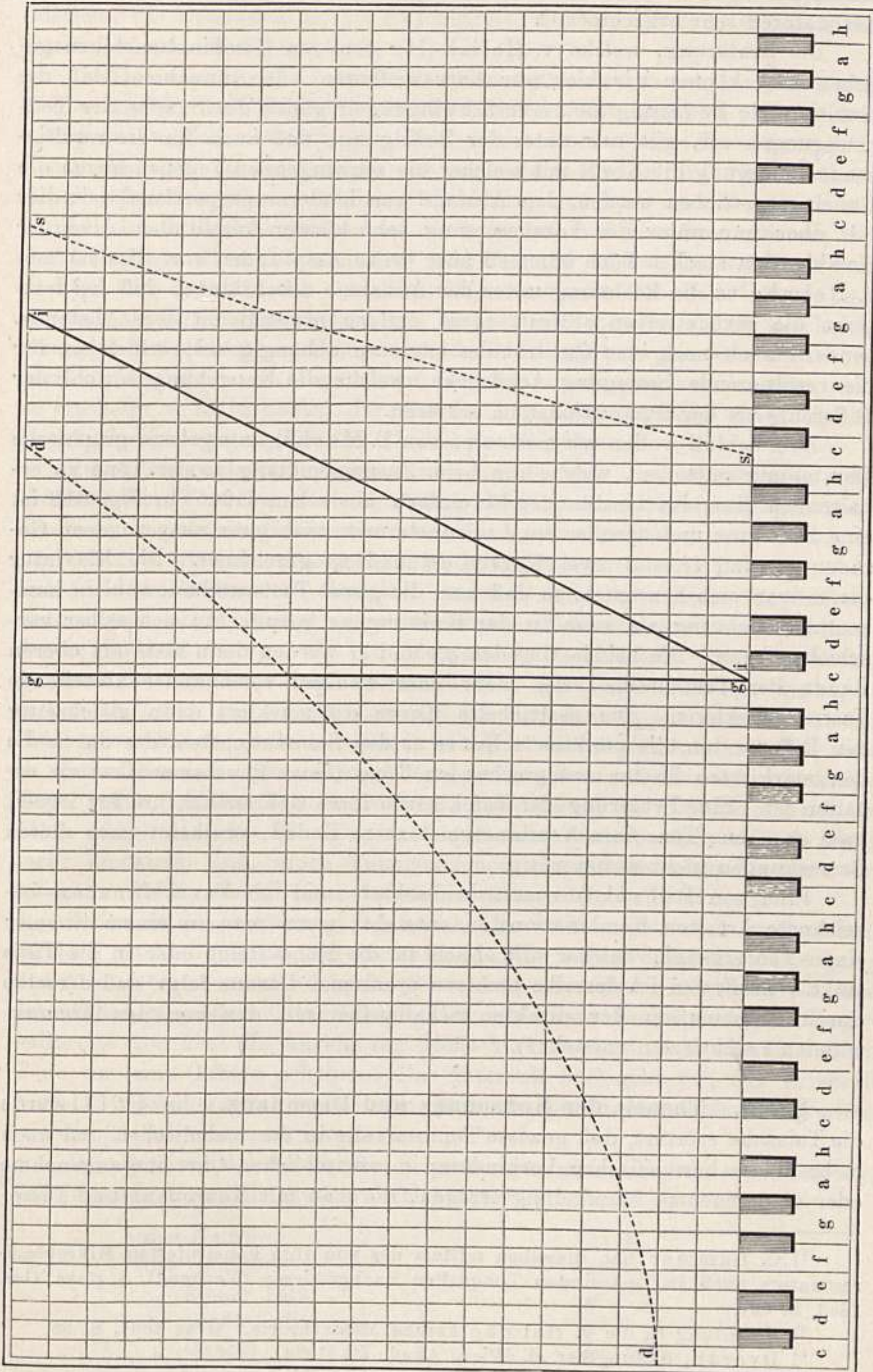


Fig. 818.

nur bei scharfen Klängen mit starken Obertönen vorkommen, sind ungleich schwieriger wahrnehmbar als die Differenztöne; ihre Beobachtung am Obertöneapparat läßt sich aber mit Anwendung der weiter unten zu besprechenden Resonatoren sehr erleichtern ¹⁾.

Die Erklärung, welche v. Helmholtz von den Kombinationstönen gegeben hat, können wir hier nur kurz andeuten. Die Annahme, daß die resultierende Bewegung mehrerer Schwingungen gleich der Summe der Teilbewegungen sei, gilt nur unter der Bedingung, daß auch für die resultierende Bewegung die Kraft, mit welcher die schwingenden Teilchen gegen die Ruhelage getrieben werden, dem Abstand von letzterer proportional sei; dies gilt aber nur unter der Voraussetzung sehr kleiner Amplituden. Bei der Kombination starker Töne kommen aber große Amplituden vor. Indem nun v. Helmholtz die Rechnung unter der Annahme durchführte, daß bei letzteren die zurücktreibende Kraft nicht einfach proportional dem Abstände, sondern auch noch vom Quadrat des letzteren abhängig sei, erhielt er für die resultierende Bewegung Ausdrücke, welche die Entstehung sowohl der Differenz- als der Summationstöne erklären.

Zum Schluß wollen wir noch eine von E. Mach ²⁾ angegebene graphische Darstellung mitteilen, welche die beim Zusammenklang zweier Töne zu erhaltenden Kombinationstöne recht einfach übersehen läßt. In Fig. 818 ist eine Klaviatur und darüber ein Liniennetz mit zwei ganz ausgezogenen Geraden *gg* und *ii* und zwei Kurven *dd* und *ss* gezeichnet. Die Klaviatur denke man sich beweglich, so daß man die ganze Tastenreihe sowohl in horizontaler Richtung als auch in der Richtung *gg* parallel zu sich selber verschieben kann. Die beiden Geraden *gg* und *ii* werden dann stets am oberen Rande der Tastenreihe zwei mehr oder weniger voneinander abstehende Tasten markieren. Die gestrichelte Kurve *dd* markiert dann gleichzeitig den Differenzton, die punktierte Kurve *ss* den Summationston, der durch die den markierten Tasten entsprechenden Töne (einer Physharmonika) zu erhalten ist. Eine Erklärung der Tafel, sowie ihres Gebrauches, um für irgend zwei gegebene Töne ihre Kombinationstöne zu finden, erscheint nach diesen Bemerkungen nicht weiter nötig.

Eine von Dvorák ³⁾ zuerst beobachtete und als Variationston bezeichnete Art von Kombinationston entsteht, wenn man in einem Zimmer einen Ton erzeugt, welcher allmählich in die Höhe steigt oder in die Tiefe sinkt. Im Freien ist derselbe nicht zu erhalten. Daraus folgt, daß derselbe durch Kombination der direkten Schallwellen mit den von den Zimmerwänden reflektierten entsteht ⁴⁾.

§ 249. Theorie der Konsonanz und Dissonanz. Im § 217 wurde die Tatsache erörtert, daß gewisse Tonintervalle in der melodischen und noch mehr in der harmonischen Verbindung im menschlichen Ohr eine angenehme oder unangenehme Empfindung erregen, die man mit Konsonanz und Disso-

¹⁾ O. Lummer hat dieselben mittels des von ihm konstruierten Mikrophonresonators auch bei getrennten Tonquellen nachgewiesen (Verhandl. d. phys. Ges. 1886, S. 66).

²⁾ Einleitung in die v. Helmholtzsche Musiktheorie. Graz 1867, S. 58.

³⁾ Dvorák, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 70 (1874).

⁴⁾ Haberditzel, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 77 (1878).

nanz bezeichnet hat. Schon Pythagoras suchte diese Tatsache mit dem Zahlenverhältnis der Saitenlängen in eine mystische Verbindung zu bringen. Euklides definierte die Konsonanz zweier Töne als die Fähigkeit, sich zu mischen, die Dissonanz als die Unfähigkeit, sich zu mischen, wodurch eine rauhe Gesamtwirkung entstehe.

Leibniz suchte die Ursache der Konsonanz sich zu erklären, indem er sich vorstellte, daß die Seele unbewußt die Schwingungszahlen zähle und an den einfachen Zahlenverhältnissen eine geheime (unbewußte) Freude empfinde. Einer ähnlichen Vorstellung gab sich sogar noch Euler hin. Einen wesentlichen Schritt zu einer wirklichen Erklärung machten erst Rameau und d'Alembert, welche beobachtet hatten, daß der Grundton meistens von den Obertönen Oktave, Duodezime und Terz der Oktave begleitet sei, und deshalb die Hinzufügung derselben Töne zu einem Grundton als naturgemäß ansahen. Smith Robert endlich führte zuerst (1749) die Erklärung der Konsonanz und Dissonanz auf die Schwebungen der Obertöne zurück. Da aber sein Buch nicht beachtet, und vergessen worden war, so erscheint v. Helmholtz, der dieselbe Theorie unabhängig fand, als der Begründer der heute geltenden Theorie der Harmonie.

Im § 246 haben wir auseinandergesetzt, daß die Schwebungen oder Stöße zweier Töne von nahe gleicher Tonhöhe einen sehr unangenehmen Eindruck in unserem Gehör verursachen, sobald deren Zahl etwa 30 bis 40 pro Sekunde erreicht. Das fortwährende Intermittieren eines Tones ist nämlich für den Gehörnerven dasselbe, was ein flackerndes Licht für den Gesichtsnerven ist; er bringt wie dieses einen viel anstrengenderen, ermüden- deren Eindruck hervor als ein gleichmäßig andauernder Ton von selbst größerer Stärke. Dem Ton h^1 kommen 495, dem Ton c^2 528 Schwingungen ($a^1 = 440$) zu. Die Differenz beträgt 33, und dies ist auch die Anzahl der Stöße pro Sekunde, welche demnach erklärt, warum das Intervall $h^1 c^2$ eine so starke Dissonanz gibt. Vergrößern wir das Intervall bis auf eine kleine Terz, indem wir den Ton h^1 bis auf a^1 erniedrigen, so wird die Anzahl der Stöße $528 - 440 = 88$. Diese erfolgen nun schon so rasch, daß sie nicht mehr imstande sind, einen unangenehmen intermittierenden Eindruck zu machen. Es ist deshalb auch keine Dissonanz mehr zu bemerken.

Indes ist die Steigerung der Anzahl der Stöße nicht allein maßgebend, sondern auch die Größe des Intervalles. Wir haben durch den Übergang von $h^1 c^2$ auf $a^1 c^2$ nicht allein die Stoßanzahl, sondern auch die Breite des Intervalles vergrößert. Wir können aber auch unter Beibehaltung der Intervallbreite von $h^1 c^2$ die Anzahl der Stöße vermehren, indem wir die beiden Töne um eine Oktave erhöhen. Das Intervall $h^2 c^3$ gibt 66, das Intervall $h^3 c^4$ 132 Schwebungen, welche eher noch unangenehmer empfunden werden wie die 33 Schwebungen von $h^1 c^2$.

Behalten wir die Anzahl der Schwebungen gleich 33 bei, so finden wir, daß folgende Intervalle diese Anzahl hervorrufen:

der Halbton	$h^1 c^2$
die Ganztöne	$c^1 d^1$ und $d^1 e^1$
„ kleine Terz	$e^0 g^0$
„ große Terz	$c^0 e^0$
„ Quarte	$g^{-1} c^0$
„ Quinte	$c^{-1} g^{-1}$

Hinge nun die Dissonanz von der Stoßanzahl allein ab, so müßten die obigen Intervalle sämtlich Dissonanz geben, was aber nur bei den beiden ersten der Fall ist.

v. Helmholtz erklärt diesen Einfluß des Intervalles durch die Annahme, daß zwei Töne nur dann merklich empfundene Schwebungen geben können, wenn sie nahe genug aneinander liegen, um im Ohre die nämlichen Nervenfasern zu affizieren.

Damit zwei einfache Töne miteinander Dissonanz geben, müssen dieselben also einmal zueinander in einem Intervall stehen, welches nicht über einen Ton hinausgeht, und außerdem miteinander 30 bis 40 Schwebungen geben. Innerhalb der in der Musik am meisten gebrauchten Oktaven entsprechen diesen Bedingungen insbesondere sämtliche Halbtonintervalle.

Bei den mit Obertönen ausgerüsteten Klängen kommen nun aber auch die Schwebungen zwischen den Obertönen und den Grundtönen, sowie die der Obertöne unter sich mit in Betracht. Dabei sind ganz besonders die unteren Obertöne (bis etwa zum sechsten) maßgebend, weil sie durch ihre Intensität hervorragen. Konsonanz werden also diejenigen Intervalle geben, deren Grundtöne keine oder nur wenige oder doch nur schwache Obertöne von solcher Höhe enthalten, daß dieselben nur einen halben Ton voneinander abstehen. Um zu übersehen, welche Intervalle aus diesem Grunde konsonant oder dissonant werden, bedienen wir uns wiederum der von E. Mach angewendeten Darstellungsmethode, welche wir in § 242 kennen lernten. In Fig. 819 ist eine Klaviatur abgebildet; darüber seien zwei Stäbe verschiebbar, auf denen die Lage der Partialtöne durch dunkle Felder dargestellt ist. Die eingeschriebenen Zahlen entsprechen den Ordnungszahlen der Partialtöne. Beläßt man nun das untere Stäbchen immer an derselben Stelle, so daß sein erster Partialton (Grundton) mit *c* zusammenfällt, und schiebt hierauf nach und nach das obere Stäbchen immer weiter nach rechts, so daß sein erster Partialton (Grundton) nach und nach auf alle Töne der chromatischen Skala zu liegen kommt, so sieht man sofort, welche relative Lage die übrigen Partialtöne zueinander einnehmen. Man kann demnach vorausbestimmen, ob das Anschlagen der Taste *c* mit irgend einer anderen Taste eine Konsonanz oder Dissonanz hervorbringen wird.

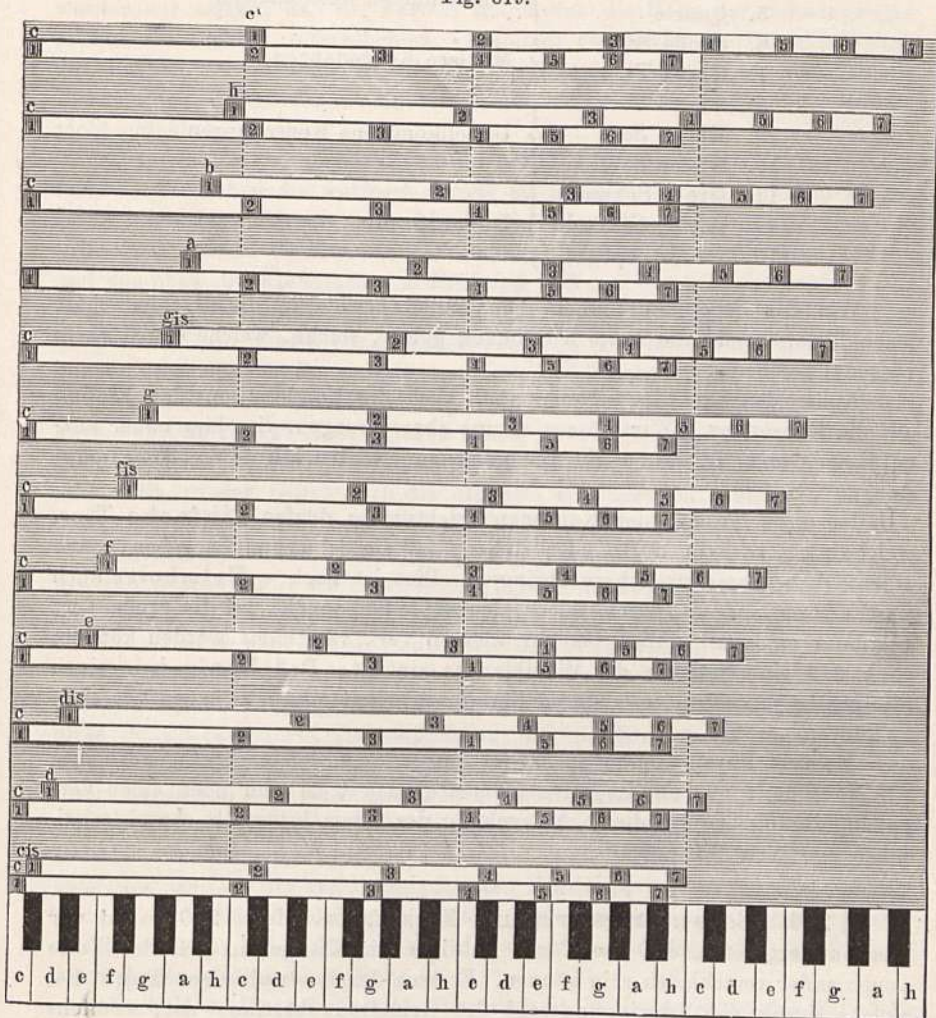
So z. B. ersieht man, daß, wenn das untere Stäbchen auf *c* und das obere auf dessen Oktav gestellt wird (in der Fig. 819 ist dieser Fall an oberster Stelle gezeichnet), jeder der sieben ersten Partialtöne des höheren Tones mit einem solchen des tieferen zusammenfällt. (Man hat sich das untere Stäbchen bis zum 14. Partialton verlängert zu denken.) Die Oktave ist deshalb ein absolut konsonantes Intervall.

Ganz im Gegensatz dazu sehen wir, daß beim Intervall *c cis* (zu unterst gezeichnet) alle Partialtöne des einen Tones mit allen gleich bezifferten des anderen in den Abstand eines halben Tones zu stehen kommen, was eine besonders starke Dissonanz geben muß.

Betrachten wir die Stellung für das Intervall *cg* (Quinte), so sehen wir zunächst den ersten Partialton des höheren Tones so weit abstehend vom zweiten des tieferen und diesen wiederum so weit abstehend vom zweiten des höheren, daß hieraus keine störenden Schwebungen entstehen können. Der zweite oben und der dritte unten fallen ganz zusammen, ebenso der vierte oben mit dem sechsten unten. Nur der dritte oben steht mit dem

vierten und fünften unten im Ganztonintervall. Dasselbe gibt aber überhaupt weniger Dissonanz als das Halbtonintervall, und außerdem haben diese Partialtöne nur mehr geringe Intensität. Die Quinte muß daher ebenfalls

Fig. 819.



eine ziemlich vollkommene Konsonanz geben, wenn auch nicht eine so vollständige wie die Oktave.

In dieser Weise fortschließend, führt uns das Schema der Fig. 819 zur Aufstellung nachfolgender Rangesordnung der Intervalle in bezug auf den Grad ihrer Konsonanz, wobei wir auch noch die Duodezime und Dopploktave eingereicht haben (S. 760):

Die kleine Septime würde zwar für sich allein eher eine bessere Konsonanz geben als die kleine Sext, aber im Akkord verursacht sie lauter Dissonanzen und wird deshalb in der heutigen Musik nicht zu den Konsonanzen gerechnet.

1. Oktave	}	Absolute Konsonanzen
2. Duodezime		
3. Doppeloktave		
4. Quinte	}	Vollkommene Konsonanzen
5. Quarte		
6. Große Sext	}	Mittlere Konsonanzen
7. Große Terz		
8. Kleine Terz		
9. Kleine Sext	}	Unvollkommene Konsonanzen
10. Kleine Septime		
11. Große Sekunde		
12. Kleine Sekunde	}	Dissonanzen
13. Große Septime		

Wie das Schema erkennen läßt, fallen gerade in die Nachbarschaft jener Töne, welche die beste Konsonanz geben, solche, welche die stärkste Dissonanz geben.

Außer den Obertönen haben aber auch die Kombinationstöne Einfluß auf die Konsonanz. Wir müssen es uns aber versagen, dies hier näher auszuführen, und verweisen diesbezüglich auf v. Helmholtz' „Tonempfindungen“, S. 325.

Ist diese Theorie der Konsonanz richtig, so dürfen einfache Töne, welche nicht so nahe aneinander stehen, daß sie Schwebungen geben, keine eigentlichen Dissonanzen hervorbringen. Dies ist nach v. Helmholtz auch der Fall; er fand, daß zwei gedeckte Orgelpfeifen, welche auf die große Terz gestimmt sind, allmählich bis zur kleinen Terz verstimmt werden können, ohne daß eine Störung des Wohlklanges eintritt. Daß König bei seinen Stimmgabelversuchen zu anderen Resultaten gekommen ist, haben wir oben (§ 246) mitgeteilt.

Mehrere Physiker¹⁾ haben darauf hingewiesen, daß nach obiger Theorie die Konsonanz nur auf negative Momente basiert sei und noch einer Vervollständigung bedürfe durch Aufsuchung des jedem Intervalle charakteristischen positiven Momentes²⁾.

§ 250. Schwingungsform und Klangfarbe. Im § 200 haben wir auseinandergesetzt, daß die Töne, richtiger die Klänge, in dreierlei Weise voneinander verschieden sein können. Erstens durch verschiedene Tonhöhe, welche durch die Schwingungszahl des Grundtons bestimmt ist; zweitens durch die Tonstärke, welche von der Amplitude der Schwingungen abhängt, drittens durch die Klangfarbe. Was unter der letzteren zu verstehen ist, können wir uns folgendermaßen klar legen. Wenn wir nacheinander den Ton der Normalstimmgabel a^1 mit 435 einfachen Schwingungen, dann die Taste für a^1 auf dem Klavier anstimmen und dann etwa noch dieselbe Note singen oder auf einer Trompete erklingen lassen, wenn wir ferner diese

¹⁾ E. Mach, Zur Theorie des Gehörorgans. Wiener Akad. Ber. 1863. — A. v. Oettingen, Harmoniesystem in dualer Entwicklung, S. 30.

²⁾ Vgl. auch: E. Mach, „Zur Analyse der Tonempfindungen“. Wiener Akad. Ber. 92, 2. Abt. (1885).

sämtlichen Tonquellen in ihrer Stärke so modifizieren, daß keine die andere überwiegt, so sind wir dennoch sofort imstande, diese Klänge voneinander zu unterscheiden. Sie haben einen wesentlich verschiedenen Charakter oder, wie man zu sagen pflegt, eine verschiedene Klangfarbe. In der Optik werden wir zeigen, daß die Farben sich durch die Höhe der Schwingungszahlen des Lichtes unterscheiden. Demnach entspricht die Verschiedenheit der Farben der Verschiedenheit der Tonhöhe und erscheint deshalb die Bezeichnung Klangfarbe zur Charakteristik verschiedener gleich hoher Klänge nicht glücklich gewählt.

Was ist nun der physikalische Grund für die Verschiedenheit der Klangfarbe? Wir haben die Antwort darauf an mehreren Orten angedeutet. Es ist das Mitvorhandensein von Obertönen neben dem Grundton, wobei die Intensitäten dieser Obertöne in der mannigfaltigsten Weise auftreten können und demnach die Klangfarbe modifizieren. Wenn nämlich ein geübtes Ohr genau und aufmerksam einen Klang untersucht, welcher von einem tönenden Körper herrührt, dessen Oszillationen nicht dem Gesetze der Pendelschwingungen folgen, so ergibt sich die merkwürdige Tatsache, daß dasselbe außer dem Grundton noch eine Reihe von Obertönen dieses Grundtones mithört; kurz, das Ohr zerlegt einen solchen Klang in eine Reihe von Partialtönen, deren tiefster, nach dessen Tonhöhe wir die Tonhöhe des ganzen Klanges beurteilen, in der Regel auch der stärkste ist; oder mit anderen Worten: das menschliche Ohr empfindet nach einem zuerst von G. S. Ohm aufgestellten Satze nur eine pendelartige Schwingung der Luft als einfachen Ton, und es zerlegt jede andere periodische Luftbewegung in eine Reihe von pendelartigen Schwingungen, welche als eine Reihe einfacher Töne empfunden werden.

Da aber nun die Anwesenheit der Obertöne und ihre Intensität wesentlich von der Schwingungsform abhängt, so könnte man veranlaßt sein, direkt diese Schwingungsform als maßgebend für die Klangfarbe zu betrachten. Sicherlich wird dieselbe Schwingungsform immer dieselbe Klangfarbe zur Folge haben; ob aber auch umgekehrt dieselbe Klangfarbe immer durch dieselbe Schwingungsform entsteht, hängt davon ab, ob die Phasendifferenz zwischen den Schwingungen der Obertöne einen Einfluß auf die Klangfarbe hat. Da das Ohr die zusammengesetzten Schwingungen in einzelne Schwingungen nach dem Pendelgesetz auflöst und gewissermaßen getrennt wahrnimmt, so ist es jedenfalls denkbar, daß die Phasendifferenz ohne Einfluß auf die wahrgenommene Klangfarbe ist.

Nach H. v. Helmholtz ist dies auch in Wirklichkeit so der Fall. Er schloß dies aus Versuchen mit seinem Vokalapparat, den wir weiter unten beschreiben werden.

Nach R. König¹⁾ dagegen wäre die Phasendifferenz ebenfalls von merklichem Einflusse. Um dies zu zeigen, konstruierte König eine Wellensirene mit mehreren den Obertönen entsprechenden Scheiben, welche so eingerichtet war, daß die relativen Intensitäten der Obertöne, sowie die Phasendifferenzen derselben, letztere um $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ geändert werden konnten. Eine andere Versuchsreihe wurde mit einer Wellensirene angestellt, deren Wellen selbst den zusammengesetzten Schwingungskurven glichen, wobei die den ver-

¹⁾ Bemerkungen über die Klangfarbe. Wiedem. Ann. 14, 374.

schiedenen Phasendifferenzen entsprechenden Kurven nebeneinander in bezug auf ihre Klangfarbe verglichen werden konnten. Indem wir in bezug auf die Ausführung dieser interessanten Experimente und der dazu gebrauchten sinnreichen Apparate auf die zitierte Originalabhandlung verweisen, führen wir hier das Resultat an, welches König aus seinen Versuchen gezogen hat. Er fand, daß die Komposition einer Anzahl harmonischer Töne, welche sowohl der geradzahigen als der ungeradzahigen Reihe angehören, ganz unabhängig von der relativen Intensität dieser Töne immer den stärksten und schärfsten Klang bei der Phasenkoinzidenz von $\frac{1}{4}$ ihrer Wellenlängen erzeuge, dagegen den schwächsten und sanftesten bei der Phasenkoinzidenz von $\frac{3}{4}$ ihrer Wellenlängen. Die Klänge bei den Phasendifferenzen 0 und $\frac{1}{2}$ stehen sowohl, was ihre Intensität als auch was ihre Schärfe anlangt, immer zwischen beiden.

Bei der Komposition von nur ungeradzahigen Obertönen erhält man bei den Phasendifferenzen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ (wobei die Schwingungskurve gleiche Form hat) einen gleichen Klang, ebenso bei den Phasendifferenzen 0 und $\frac{1}{2}$, doch ist der Klang im letzteren Falle weniger stark und scharf als im ersten Falle.

Groß ist übrigens der Einfluß der Phasendifferenz auf keinen Fall. König vergleicht die dadurch hervorgerufenen Unterschiede mit dem Unterschiede im Klange verschiedener Instrumente gleicher Gattung oder mit dem Unterschied gleicher Vokale, welche von verschiedenen Stimmen gesungen werden.

Sollten sich die Königschen Versuche bestätigen und vor dem Einwande sicher sein, daß die angewendeten Töne selbst nicht frei von Obertönen waren, so würde daraus folgen, daß die ursprüngliche Ansicht die richtige sei, welcher gemäß die Klangfarbe von der Schwingungsform also nicht bloß von der Ordnungszahl und relativen Intensität der vorhandenen Obertöne, sondern auch von der Phasendifferenz abhängt¹⁾.

§ 251. Klanganalyse, Resonatoren. In seinem mehrfach zitierten Werke über die Lehre von den Tonempfindungen hat v. Helmholtz verschiedene Methoden beschrieben, mit Hilfe deren man die Klänge der meisten musikalischen Instrumente in ihre Partialtöne zerlegen oder, mit anderen Worten, mit Hilfe deren man die in einem musikalischen Klang enthaltenen Obertöne auch einem ungeübten Ohre wahrnehmbar machen kann.

Zunächst ist zu bemerken, daß man in der Regel den 3ten, den 5ten, den 7ten usw., also die ungeradzahigen Partialtöne, leichter hört als die geradzahigen, also leichter als den 2ten, den 4ten usw. So hört man die den Grundton c^0 begleitenden Partialtöne g^1 und e^2 leichter als c^1 und c^2 .

Will man anfangen, Obertöne zu beobachten, so lasse man unmittelbar vor dem Klange, welcher analysiert werden soll, ganz schwach diejenige Note erklingen, welche man aufsuchen will. Sehr geeignet sind zu diesen Versuchen das Klavier und die Physharmonika, welche beide ziemlich starke Obertöne geben.

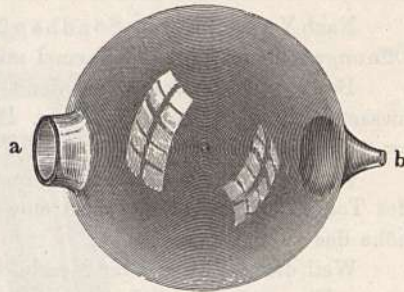
Man schlage z. B. auf einem Klavier zuerst g^1 an, und indem man die Taste verläßt, so daß deren Saiten nicht mehr fortklingen können, gleich darauf kräftig die Note c^0 , so wird man den Ton g^1 noch aus dem Klange c^0

¹⁾ Es ist dies keine physikalische, sondern eine physiologische Frage, weshalb wir hier auf dieselbe nicht weiter eingehen. Man vergleiche die Untersuchungen von L. Hermann in Pfügers Archiv 56, 467, sowie die Bemerkungen am Schlusse des § 254.

heraushören, und zwar besonders während des Verklingens desselben. Ebenso, wenn man zuerst den fünften Partialton e^2 und dann c^0 anschlägt. Der 7te und 9te Partialton sind auf den Klavieren neuerer Konstruktion meist schwach oder gar nicht vorhanden.

Noch geeigneter als das eben beschriebene Verfahren am Klavier ist es, an irgend einem Saiteninstrumente, Klavier, Monochord oder Violine, den Ton, welchen man zu hören wünscht, erst als Flageolettton der Saite hervorzubringen, indem man sie anschlägt oder streicht, während man einen Knotenpunkt des entsprechenden Tones auf der Saite mit einem Finger oder mit den Haaren eines Malerpinsels berührt. Will man also den 3ten, den 5ten Partialton hören, so hat man einen Punkt zu berühren, welcher um $\frac{1}{3}$, um $\frac{1}{5}$ der Saitenlänge vom einen Ende der Saite entfernt ist. Indem man nun die Saite zum Tönen bringt, bald mit Berührung des Knotenpunktes, bald ohne solche Berührung, bekommt man bald den gesuchten Oberton allein als Flageolettton, bald die ganze Klangmasse der Saite zu hören und erkennt daran verhältnismäßig leicht, daß der betreffende Oberton darin enthalten ist.

Fig. 820.



Schwerer als an Saiteninstrumenten und an der Physharmonika sind die Obertöne der meisten Blasinstrumente und der menschlichen Stimme wahrzunehmen.

Das sicherste und bequemste Mittel, um die Wahrnehmung von Obertönen zu vermitteln, sind die von v. Helmholtz angegebenen Resonatoren (Mitzklinger). Es sind dies gläserne oder messingene Hohlkugeln von der in Fig. 820 dargestellten Form. Die eine Öffnung *a* hat scharf abgeschnittene Ränder, die andere ist trichterartig und so geformt, daß man sie in das Ohr einsetzen kann.

Die in einem solchen Resonator eingeschlossene Luftmasse wird wie die Luftsäule in einer einerseits offenen, andererseits geschlossenen Röhre (siehe § 212) nur dann in den Zustand kräftiger stehender Schwingungen versetzt, wenn durch die Öffnung *a* die Schallwellen eines bestimmten, den Dimensionen der Kugel entsprechenden Tones einfallen, den wir den Eigenton der Kugel nennen wollen. In der folgenden Tabelle sind die Dimensionen solcher Kugeln angegeben, welche den in der ersten Vertikalreihe angegebenen Eigentönen entsprechen.

Tonhöhe	Durchmesser der Kugel mm	Durchmesser der Öffnung mm	Volumen des Hohlraumes ccm
g^0	154	35,5	1773
c^1	130	30,2	1053
e^1	115	30,0	546
g^1	79	18,5	235
c^2	70	20,5	162

Eine Verengung der Öffnung a hat eine Vertiefung des Eigentones des Resonators zur Folge.

Nach H. v. Helmholtz ergibt sich für die Tonhöhe eines Resonators, wenn dessen Öffnung verhältnismäßig eng ist, die theoretische Formel:

$$n = \frac{C\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi^5} \sqrt{2V}},$$

worin C die Schallgeschwindigkeit, σ die Fläche der kreisförmigen Öffnung und V das Volum des Hohlraumes beträgt.

Setzt man C für mittlere Temperatur = 340 m, so erhält man:

$$n = 57484 \sqrt[4]{\frac{\sigma}{V^2}} \frac{\text{mm}}{\text{sec}}.$$

Nach Versuchen von Sondhauß paßt für Kugeln mit nicht ganz kleinen Öffnungen besser dieselbe Formel mit dem Koeffizienten 52400.

Beträgt der Durchmesser der Öffnung zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ vom Durchmesser der Kugel, so ist nach v. Helmholtz' Versuchen jener Koeffizient = 47000 zu setzen.

Die Resonatoren mit enger Öffnung geben eine bedeutendere Verstärkung des Tones, erfordern aber auch eine genauere Übereinstimmung mit der Tonhöhe des zu hörenden Tones.

Weil die aus Glas oder Messingblech gefertigten kugelförmigen Resonatoren, Fig. 820, ziemlich kostspielig sind, hat Schubring mit Erfolg versucht, solche aus zylindrischen Pappröhren ungefähr von

Fig. 821.



der Form Fig. 821 herzustellen, welche noch den Vorteil bieten, daß sich nach § 212 ihr Eigenton sehr einfach berechnen läßt, da die Länge der gedeckten Röhre nahezu $\frac{1}{4}$ von der Wellenlänge ihres Eigentones ist. In den Boden, welcher die untere Öffnung der Röhre verschließt, ist ein Glasröhrchen eingesetzt, welches in den Gehörgang des einen Ohres gesteckt wird, während man das andere zuhält. Das Röhrchen kann aber auch ganz wegbleiben, so daß man nur den Boden des Rohres mit seiner zentralen Öffnung auf die Ohrmuschel aufdrückt.

Für alle Töne von c^1 aufwärts sind die Röhren oben offen. Der Resonator für c^1 (256 Schwingungen in 1 Sekunde) ist 33 cm lang und 6 cm weit, der für g^1 ist 22 cm lang und 4,6 cm weit usw. Für tiefere Töne würden die zylindrischen Resonatoren unbequemere Dimensionen annehmen, wenn sie oben offen blieben; sie werden kürzer, wenn man sie durch einen Deckel mit zentraler Öffnung schließt. Der Resonator für c^0 (128 Schwingungen) ist 38,5 cm lang und 14 cm weit, während im Deckel, der ihn oben schließt, eine zentrale Öffnung von 4,5 cm Durchmesser angebracht ist.

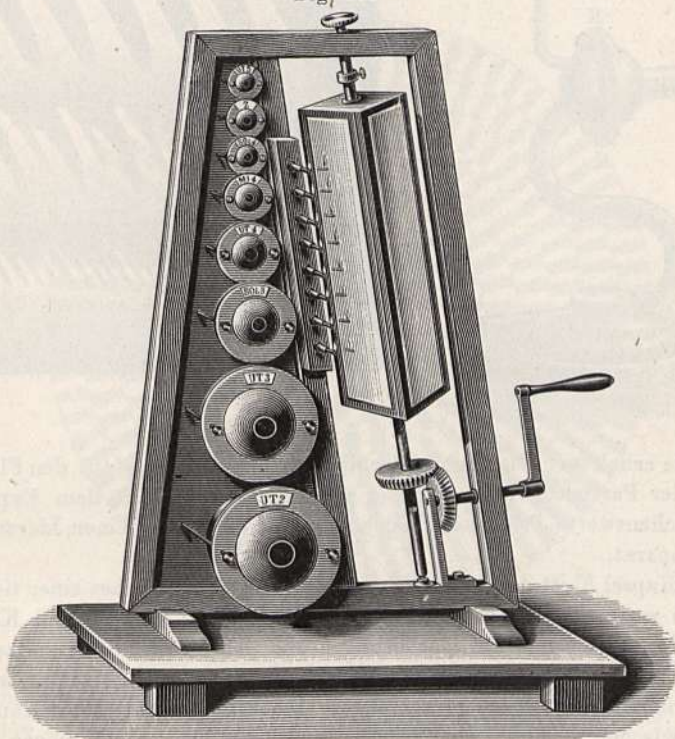
Diese zylindrischen Resonatoren können auch von veränderlicher Stimmung angefertigt werden, indem man zwei Röhren ineinander verschiebbar macht.

Appun in Hanau fertigt kegelförmige Resonatoren von Zinkblech, dieselben sind für die meisten Verwendungen brauchbar. Sie verstärken aber auch alle harmonischen Obertöne ihres Grundtones.

Hat man sich das eine Ohr verstopft und setzt man dann an das andere einen solchen Resonator, so hört man die meisten Töne, welche in der Umgebung hervorgebracht werden, viel gedämpfter als sonst; wird dagegen der Eigenton des Resonators angegeben, so schmettert er mit gewaltiger Stärke ins Ohr hinein. Hält man z. B. einen Resonator vor das Ohr, dessen Eigenton g^1 ist, so hört man denselben sehr deutlich, wenn c^0 auf dem Klavier angeschlagen oder auf der Violine gespielt wird, während man diesen Ton gar nicht oder doch nur sehr schwach hört, wenn das c^0 von einer weiten gedeckten Orgelpfeife herrührt. Ebensovienig hört man, den entsprechenden Resonator ans Ohr haltend, den Ton g^1 , wenn auf dem Klavier der Ton d^0 angeschlagen wird, weil g^1 kein Oberton von d^0 ist.

Zum Nachweis der Obertöne ist kein musikalisches Instrument geeigneter als eine Zungenpfeife. Eine solche vom Grundton c^0 , welche, in einem

Fig. 822.



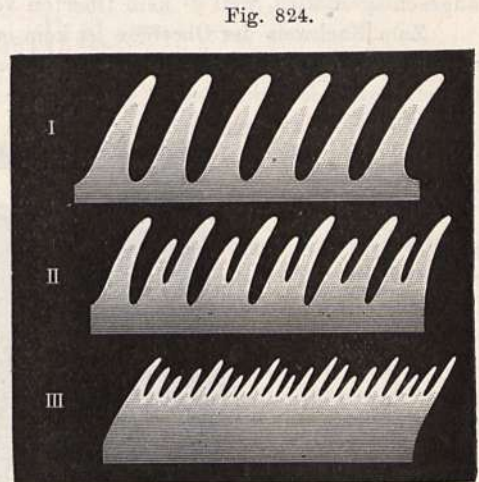
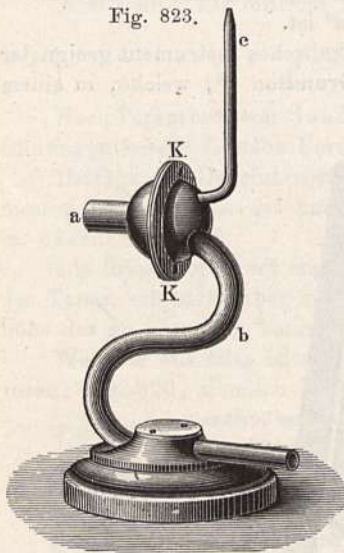
Kästchen eingeschlossen mit einem Schallbecher versehen, auf eine Windlade aufgesetzt ist, gibt einen ungemein kräftigen, an Obertönen reichen Klang, dessen Teiltöne sich mit den entsprechenden Resonatoren leicht bis zum 16ten und 20sten wahrnehmen lassen.

Ein Apparat, bei welchem die Obertöne nicht mittels des Gehörs, sondern durch das Gesicht wahrgenommen werden können, ist von R. König mit Hilfe der manometrischen Flammen konstruiert worden¹⁾. Derselbe besteht,

¹⁾ Die manometrische Kapsel wurde von König 1864 erfunden. Ann. der Physik 146, 161.

wie Fig. 822 zeigt, aus einer Reihe von Resonatoren, deren jeder mit einer manometrischen Kapsel in Verbindung steht.

Sämtliche manometrische Flammen werden durch ein und denselben rotierenden Spiegel beobachtet. Trifft ein Klang, z. B. eines Vokals, die Resonatoren, so wird der Lichtstreif derjenigen Flammen, deren Resonatoren ihren Eigenton in dem Tongemische finden, vom rotierenden Spiegel in einzelne Flammenbilder aufgelöst. Man hat mehrfach versucht, dieses Experiment dahin zu vereinfachen, daß man nur eine einzige manometrische Kapsel mit einer Flamme der Wirkung des Klanges aussetzte. Wirklich



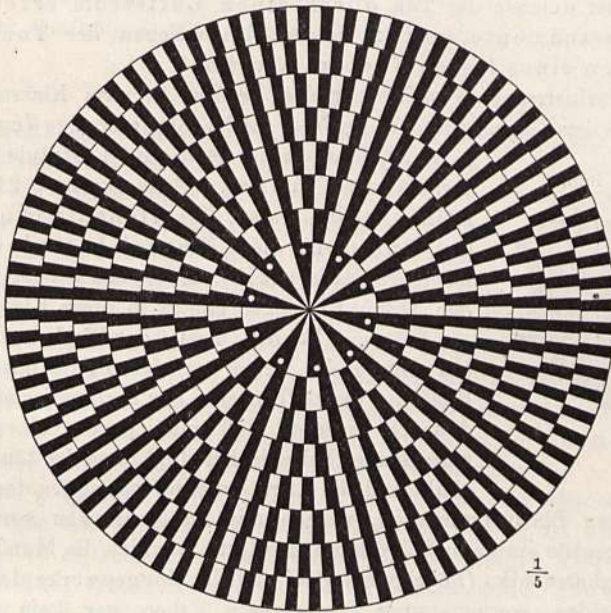
zeigen die erhaltenen Flammenbilder die Zusammensetzung aus den Flammenbildern der Partialtöne, doch ist es noch nicht gelungen, dem Experiment die wünschenswerte Präzision zu geben. Fig. 823 zeigt einen hierzu geeigneten Apparat.

Die Kapsel *K* ist durch ein dünnes Glimmerblatt (welches einer tierischen Membran wegen der Unveränderlichkeit vorzuziehen ist) in zwei Kammern geteilt, deren eine mit der Gasleitung *b* und der Ausströmungsspitze *c*, die andere mit dem Schallzuleitungsrohr *a* kommuniziert. Letzteres wird mit einem Trichter (Schallbecher) versehen. Die Einschaltung eines Kautschukrohres zwischen *a* und dem Trichter empfiehlt sich nicht wegen der zu starken Dämpfung des Schalles. Zündet man das bei *c* ausströmende Gas an und beobachtet die Flamme in einem rotierenden Spiegel, während die Schallwellen eines einfachen Tones durch *a* eintreten, so erhält man Flammenbilder von der in Fig. 824 I abgebildeten Form; ist der Grundton von seiner Oktave begleitet, so erhält man die Form Fig. 824 II, sind mehrere Obertöne vorhanden, Fig. 824 III. Störend ist bei dieser Methode, daß die Membran sowohl als der Hohlraum vor derselben, ja auch der Schallbecher ihre besonderen Eigentöne haben, welche sie verstärken. Es muß daher jeder solcher Apparat einen speziellen Einfluß auf die erhaltenen Flammenbilder ausüben. Wir kommen auf diese Bilder bei der Vokalanalyse zurück.

Die Verbindung des v. Helmholtz'schen Resonators mit der Königschen manometrischen Kapsel leidet an dem Übelstande zu geringer Empfindlichkeit. O. Lummer¹⁾ hat eine empfindliche objektive Klanganalyse auf die Kombination des Resonators mit einer Kautschukmembran und einem Mikrophon gegründet. Ist die Membran genau auf den Resonator abgestimmt, so gelingt es mittels dieser Anordnung, die objektive Existenz der Summationstöne eines Harmoniums nachzuweisen. Dabei ist es sehr vorteilhaft, daß das mit dem Mikrophon verbundene Telephon in einem anderen Raume sich befinden kann, wo man durch das direkte Hören des Grundtones nicht gestört wird.

In sehr schöner Weise läßt sich die Klanganalyse mit Hilfe der manometrischen Kapsel in Verbindung mit einer stroboskopischen Scheibe nach A. Samojloff²⁾ ausführen. Diese Scheibe, Fig. 825, ist aus einem Karton

Fig. 825.



von 40 cm Durchmesser geschnitten und enthält acht konzentrische Ringe bestehend aus abwechselnd schwarzen und weißen Feldern, deren Zahl von der Mitte nach dem Umfange im Verhältnis der Partialtöne 1, 2, 3 ... stehen. Der innerste Ring besitzt 10 schwarze und 10 weiße Felder, der äußerste je 80. In die innerste Reihe der schwarzen Felder ist überdies je ein Loch geschnitten, so daß die Scheibe auch als Lochsirene benutzt werden kann.

Die Beleuchtung der Scheibe geschieht mittels der Flamme des Apparates Fig. 823, jedoch unter Anwendung von Acetylgas statt des gewöhnlichen Leuchtgases, welches letztere zu geringe Lichtstärke hat und den Unterschied

¹⁾ Verhandlungen der phys. Ges. zu Berlin 1886, S. 66.

²⁾ Zwei akustische Demonstrationen: Zeitschrift f. Psychologie u. Physiologie der Sinnesorgane 36, 440.

der Helligkeit beim Steigen und Sinken der Flamme weniger deutlich hervortreten läßt¹⁾).

Man läßt die Scheibe, am besten mittels eines Elektromotors, in gleichmäßige Rotation gelangen und erzeugt durch Anblasen der Lochreihe einen Ton. Dann erzeugt man vor dem Trichter der manometrischen Kapsel einen Klang von derselben Höhe, z. B. die Reihe der Vokale. Jene Ringfelder, welche einem in dem Klange enthaltenen Obertone entsprechen, scheinen dann stillzustehen, während die übrigen eine graue Mischfarbe zeigen. Dieser einfache Apparat ersetzt den kostspieligen von König, Fig. 822, und eignet sich für ein großes Auditorium.

§ 252. Die musikalischen Instrumente und ihre Klangfarbe. Die Methoden der Klanganalyse können auf die verschiedenen musikalischen Instrumente angewendet werden, welche in zwei Hauptabteilungen zerfallen, 1. solche, bei welchen der Ton durch einen Luftstrom erzeugt wird, die Blasinstrumente, und 2. solche, bei welchen der Ton von den Vibrationen eines festen Körpers herrührt.

Die Blasinstrumente selbst zerfallen wieder in zwei Klassen. In die erste Klasse der Blasinstrumente gehören solche röhrenförmige Vorrichtungen,

Fig. 826.



in welchen die eingeschlossene Luftsäule ganz nach den Gesetzen vibriert, welche wir in § 212 und 214 kennen lernten, also die offenen und gedeckten Orgelpfeifen, das Flageolett und die Flöte. Auch die Rohrpfife, die Synchron oder Pansflöte der Alten, Fig. 826, gehört in diese Klasse.

Während bei der Orgel jeder Pfeife nur ein Grundton entspricht, wird bei der Flöte mit demselben Rohr die ganze Tonreihe der chromatischen Tonleiter dadurch erzeugt, daß man durch Öffnen der entsprechenden Seitenlöcher die Länge der tönenden Luftsäule und die Lage der Schwingungsknoten verändert.

Von den Blasinstrumenten, welche mit Zungenwerken versehen sind, haben wir bereits einige in § 236 kennen gelernt, nämlich die Mundharmonika, die Blasbalgharmonika (Physharmonika) und die Zungenwerke der Orgeln.

Die beiden erstgenannten Instrumente haben gar kein Ansatzrohr, während der Schallbecher oder das Ansatzrohr der Orgelzungenwerke nur den Zweck hat, den Ton zu verstärken, ohne daß dadurch die Vibrationsgeschwindigkeit der Zunge wesentlich alteriert wird.

Ganz anders verhält es sich mit solchen Instrumenten, deren Zunge aus sehr leicht beweglichem Material (meist aus dünnen Blättchen von italienischem Rohr) gebildet, sich den Schwingungen der Luftsäule akkommodiert, welche in dem Ansatzrohr zum Tönen gebracht wird. Hierher gehört die Oboe, das Fagott, die Klarinette usw. Das Mundstück der Klarinette wird durch ein vorn schneidenförmig verdünntes, aufschlagendes Rohrblatt gebildet, während das Mundstück des Fagotts und der Oboe aus zwei Rohrblättchen besteht, deren obere schwach gewölbte Enden eine feine Spalte bilden.

¹⁾ Acetylen gas kann man sich leicht in einem Kippschen Entwickler aus Calciumcarbid und Wasser erzeugen und in einem kleineren Glasgasometer ansammeln.

Bei der Posaune, dem Horn und der Trompete treten die Lippen des Musikers an die Stelle der beiden Rohrblätter des Oboemundstücks. Das kessel- oder trichterförmige Mundstück des Instrumentes wird so gegen den Mund gepreßt, daß die vorderen häutigen Teile der Lippen nur noch einen engen Spalt für den Durchgang der Luft lassen. Die Ränder der Lippen geraten beim Anblasen selbst in Oszillationen, durch welche ein stoßweises Hervorquellen der Anblaseluft bewirkt wird.

Das mehr oder weniger gebogene oder gewundene Rohr dieser Instrumente ist, den Schallbecher abgerechnet, sehr eng im Verhältnis zu seiner Länge, so daß es nie seinen Grundton, sondern nur eine Reihe von Obertönen desselben geben kann.

Bezeichnen wir die Schwingungszahl des Grundtones mit 1, so sind die Schwingungszahlen für seine Obertöne

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \text{ usw.}$$

Für ein dreifüßiges offenes Rohr ist der Grundton b^{-1} , seine Obertöne sind also

$$b^0, f^1, b^1, d^2, f^2, gis^2, b^2, c^3, d^3.$$

Eine dreifüßige Trompete gibt aber als ihren tiefsten Ton f^1 , also den zweiten Oberton, die Duodezime des ihrer Länge entsprechenden Grundtones. Auf diesen Ton folgen dann bei unveränderter Länge des Rohres, bei entsprechend verstärktem Anblasen, die weiteren Töne b^1, d^2, f^2 usw., welche den Namen der Naturtöne führen. Erst vom achten Oberton an befolgen dieselben die Tonreihe der diatonischen Tonleiter. Um die größeren Intervalle der tieferen Naturtöne auszufüllen und auch für diese tieferen Tonlagen die nötigen Zwischentöne zu erhalten, hat man an diesen Instrumenten verschiedene Vorrichtungen (Züge, Klappen usw.) angebracht, durch welche man die Länge des Rohres entsprechend abändern kann. Auch durch teilweises Verschließen der erweiterten Mündung durch Einführen der Faust sucht man die gewünschte Erniedrigung der Tonhöhe zu erreichen.

Die Töne gespannter Saiten finden in der Musik eine ebenso vielfache als mannigfache Anwendung. Die Oberfläche der Saiten ist aber viel zu gering, als daß sie selbst bei den lebhaftesten Vibrationen kräftige Schallwellen in der Luft erzeugen könnten, es ist deshalb nötig, die Vibrationen der Saite auf einen leicht beweglichen festen Körper von größerer Oberfläche zu übertragen, weshalb denn auch der Resonanzboden, wenn auch in sehr verschiedener Gestalt, bei allen Saiteninstrumenten in Anwendung gebracht wird.

Die wesentlichsten Unterschiede unter den Saiteninstrumenten sind durch die Art und Weise bedingt, wie die Saiten in Oszillationen versetzt werden; bei dem Klavier geschieht dies durch Anschlag, bei der Gitarre und der Harfe durch Zupfen, bei der Violine, dem Violoncello und der Baßgeige geschieht es durch Streichen mit dem Fiedelbogen, weshalb diese letzteren Instrumente auch Streichinstrumente genannt werden.

Metallene Platten und Glocken haben für sich selbst schon eine hinlängliche Oberfläche, um kräftige Schallwellen in der Luft zu erzeugen. Als selbständige musikalische Instrumente werden sie aber kaum gebraucht, während sie im Orchester verbunden mit anderen Instrumenten von trefflicher Wirkung sind.

Über die Zusammensetzung der Klänge der verschiedenen Instrumente ist das Wissenswerteste folgendes:

Einfache Töne, also Klänge ohne Obertöne, werden am einfachsten hervorgebracht, wenn man eine angeschlagene Stimmgabel vor die Mündung einer Resonanzröhre von entsprechender Länge hält. Diese Töne sind ungemein weich und frei von allem Scharfen und Rauhen.

Die Klänge der Flöte stehen den einfachen Tönen ziemlich nahe, indem sie nur wenige und schwache Obertöne haben.

Weite gedeckte Pfeifen geben, namentlich wenn sie schwach angeblasen werden, den Grundton fast ganz rein; engere lassen neben dem Grundton auch noch die Duodezime (Quint der Oktav) hören, weshalb sie auch Quintaten genannt werden.

Bei weiten, offenen Orgelpfeifen ist die Oktav des Grundtones noch ziemlich deutlich, die Duodezime schon sehr schwach. Engere offene Pfeifen der Orgel lassen dagegen, namentlich wenn sie stark angeblasen werden, eine Reihe von Obertönen hören, welche den Grundton kräftig begleiten, was dem Klange den schärferen geigenähnlichen Charakter gibt (Geigenprinzipal).

Die weiteren Orgelpfeifen, welche auch bei stärkerem Anblasen nicht in einen Oberton überspringen, und welche den Grundton voll und rein geben, werden Prinzipalstimmen genannt.

Wo es darauf ankommt, ein Register von scharf durchdringender Klangfarbe anzuwenden, wie es z. B. nötig ist, um den Gesang der Gemeinde zu begleiten, genügen die Prinzipalregister nicht, weil ihr Ton zu mild, zu arm an Obertönen ist. Geigenregister und Quintaten genügen nicht, weil ihr Ton zwar schärfer, aber auch schwächer ist. Bei solchen Gelegenheiten wird das Mixturregister angewandt, in welchem jede Taste mit mehreren Pfeifen verbunden ist, die sie gleichzeitig öffnet, von denen die eine den Grundton, die anderen aber die ersten Obertöne desselben (meist Oktav und Duodezime) geben. — Die Klänge der meisten musikalischen Instrumente hat man sich nun in ähnlicher Weise zusammengesetzt zu denken.

Über die Klänge der Saiten wurde bereits im § 231 und 243 Näheres mitgeteilt. Bei gut konstruierten Klavieren sind die Partialtöne bis zum 6ten sehr kräftig, während der 7te und 9te, deren Mitklingen die Harmonie der übrigen beeinträchtigen würde, ganz fehlen oder doch sehr schwach sind.

Solche Saiten, welche im Verhältnis zu ihrer Länge sehr dünn sind, geben, in entsprechender Weise angeschlagen, leicht viele hohe Obertöne. Diese vielen hohen Obertöne aber, welche einander in der Skala sehr nahe liegen, veranlassen ein eigentümlich unharmonisches Geräusch, welches wir mit dem Worte Klimpfern zu bezeichnen pflegen.

Im Klange der Streichinstrumente ist der Grundton verhältnismäßig kräftiger als beim Klavier; die ersten Obertöne sind schwächer, die höheren aber vom 6ten bis zum 10ten dagegen viel deutlicher und verursachen die Schärfe des Klanges der Streichinstrumente.

Geschlagene Metallstäbe und Metallplatten der Art, wie wir sie im § 232 betrachtet haben, lassen neben dem Grundton eine Reihe sehr hoher unharmonischer Obertöne anhaltend und im gleichmäßigen Flusse mitklingen, und davon scheint die Eigentümlichkeit herzurühren, welche man als metallische Klangfarbe, als Metallklang bezeichnet.

Der Klang der Glocken ist ebenfalls von unharmonischen Obertönen begleitet, welche aber nicht so nahe beisammen liegen wie bei den ebenen Platten.

Wenn eine Glocke nicht ganz symmetrisch in Beziehung auf ihre Achse ist, wenn z. B. die Wand an einer Stelle des Umfanges etwas dicker ist als an anderen, so gibt die Glocke beim Anschlag im allgemeinen zwei wenig voneinander verschiedene Töne, welche miteinander Schwebungen geben.

Außer den Unterschieden der Klangfarbe bieten aber die Klänge verschiedener Instrumente auch noch andere Eigentümlichkeiten, welche einerseits davon abhängen, wie die Töne ansetzen, verlaufen und aufhören, andererseits aber auch durch Geräusche bedingt sind, welche mit der Erzeugungsweise der Töne zusammenhängen. So hört man bei den durch einen Luftstrom unterhaltenen Klängen der Blasinstrumente meistens noch ein Sausen und Zischen der Luft, die sich an den scharfen Rändern der Anblaseöffnung bricht. Bei den mit dem Violinbogen gestrichenen Saiten hört man ziemlich viel Reibegeräusch usw.

Was die Klangfarbe der Zungenpfeifen anlangt, so ist das Ansatzrohr von wesentlichem Einfluß auf dieselbe. Freie Zungen, d. h. solche, welche ohne Ansatzrohr angeblasen werden, haben, da sie die Luftstöße sehr abgerissen, diskontinuierlich hervortreten lassen, einen scharfen, schneidenden, knarrenden Klang, und man hört in der Tat mit bewaffnetem oder unbewaffnetem Ohre eine lange Reihe von Obertönen bis zum 16ten, ja selbst bis zum 20sten. Die Stärke der Obertöne, welche eine Zunge ohne Ansatzrohr gibt, hängt aber ab von ihrer Beschaffenheit, ihrer Stellung zum Rahmen usw.

Durch Ansatzröhren wird der Klang der Zungen wesentlich verändert, indem diejenigen Obertöne außerordentlich verstärkt werden und aus der Klangmasse vortreten, welche den Eigentönen des Ansatzrohres entsprechen.

Als z. B. v. Helmholtz über eine Messingzunge, wie sie in Orgeln gebraucht werden, und welche b^0 gab, eine seiner größeren Resonanzkugeln als Ansatzrohr aufsetzte, welche gleichfalls auf b^0 abgestimmt war, erhielt er bei starkem Druck im Blasebalg einen vollen, starken und weichen Klang, dem fast alle Obertöne fehlten.

Als wesentlichste Resultate der Untersuchungen über Klangfarbe stellt v. Helmholtz folgendes zusammen:

1. Einfache Töne, wie Stimmgabeln mit Resonanzröhren, und weite gedeckte Pfeifen klingen weich und angenehm ohne alle Rauigkeit, aber unkräftig und in der Tiefe dumpf.

2. Klänge, welche von einer Reihe niederer Partialtöne, etwa bis zum 6ten hinauf, in mäßiger Stärke begleitet sind, sind klangvoller, musikalischer. Sie haben, mit den einfachen Tönen verglichen, etwas Reicheres und Prächtigeres. Hierher gehören die Klänge des Klaviers, der offenen Orgelpfeifen usw.

3. Wenn nur ungeradzahlige Partialtöne da sind, wie bei engen gedeckten Pfeifen, den in der Mitte geschlagenen Klaviersaiten, den Klarinetten usw., so bekommt der Klang einen hohlen, und bei größerer Zahl von Obertönen einen näselnden Charakter.

4. Wenn die höheren Obertöne jenseits des 6ten und 7ten sehr deutlich sind, so wird der Klang scharf und rau. Bei geringerer Stärke beeinträchtigen die hohen Obertöne die musikalische Brauchbarkeit nicht, sie sind

im Gegenteil günstig für den Charakter und die Ausdrucksfähigkeit der Musik. Von der Art sind die Klänge der Streichinstrumente, die meisten Zungenpfeifen, die Physharmonika usw. Solche Klänge, bei welchen die hohen Obertöne ganz besonders stark sind, wie bei den Blechinstrumenten, erhalten dadurch etwas ungemein Durchdringendes.

§ 253. Das menschliche Stimmorgan. Das Stimmorgan ist aus mehreren Teilen zusammengesetzt, welche ohne anatomische Betrachtung nicht vollständig studiert werden können, wir müssen uns daher hier darauf beschränken, im allgemeinen die Anordnung der Teile kennen zu lernen, welche am direktesten zur Hervorbringung der Stimme mitwirken.

Es ist bekannt, daß die Luftröhre eine Röhre ist, welche auf der einen Seite mit dem Schlunde, auf der anderen in den Lungen endigt. Ihre wesentlichste Funktion ist, die Luft durchzulassen, sei es nun beim Ein- oder beim Ausatmen; sie ist fast zylindrisch und aus knorpeligen Ringen zusammengesetzt, welche durch biegsame häutige Ringe verbunden sind. Am unteren Ende teilt sie sich in zwei Röhren, die Bronchien, von denen die eine rechts, die andere links geht. Jeder dieser Äste verzweigt sich weiter nach allen Seiten hin in das Gewebe der Lunge. Das obere Ende der Luftröhre wird durch den Kehlkopf gebildet, welcher vorzugsweise das Stimmorgan ist.

Der Kehlkopf besteht aus vier Knorpeln, welche häufig in späterem Alter verknöchern, nämlich dem Ringknorpel (*Cartilago cricoidea*), dem Schildknorpel (*Cartilago thyreoides*) und den beiden Gießkannenknorpeln (*Cartilagine arytaenoideae*). Diese Knorpel sind unter sich und mit dem obersten Ringe der Luftröhre verbunden und können durch verschiedene Muskeln auf das mannigfaltigste bewegt werden. Die innere Wand des Kehlkopfes bildet eine Verlängerung der Luftröhre, die immer enger wird, bis zuletzt nur eine von vorn nach hinten gerichtete Spalte, die Stimmritze (*Glottis*), übrig bleibt. Die Ränder dieser Stimmritze sind durch die Stimmbänder gebildet. Nach vorn hin sind diese Stimmbänder an den Schildknorpel, am entgegengesetzten Ende aber ist das eine Stimmband an dem einen, das andere Stimmband an dem anderen Gießkannenknorpel angewachsen, so daß, je nachdem die Knorpel durch die entsprechenden Muskeln mehr genähert oder entfernt werden, die Stimmbänder mehr oder weniger gespannt sind und die Stimmritze weiter oder enger wird. Die Stimmbänder selbst bestehen aus einem sehr elastischen Gewebe.

Über den Lippen der Stimmritze befinden sich zwei sackartige Höhlungen, die eine auf der rechten, die andere auf der linken Seite, welche sich 17 bis 20 mm weit seitwärts erstrecken; es sind dies die *Ventriculi Morgagni*. Die oberen Ränder dieser Ventrikel bilden gleichsam eine zweite Stimmritze, welche 11 bis 13 mm über der anderen liegt. Die obere Stimmritze kann durch den Kehldeckel (*Epiglottis*), welcher eine fast dreieckige Platte mit knorpeliger Grundlage ist, verdeckt werden; dieser Kehldeckel ist mit der einen Seite nach vorn hin angewachsen und verhindert, wenn er beim Schlucken sich über den Kehlkopfeingang legt, daß Speisen und Getränke in die Luftröhre geraten können, indem diese über den Kehldeckel hinweg in den Schlund gelangen.

Der Bau des Kehlkopfes wird durch die Figuren 827 und 828 deutlicher werden.

Fig. 827 stellt die vordere Hälfte des durch einen senkrechten Schnitt getheilten Kehlkopfes, und zwar von rückwärts gesehen, dar.

Fig. 827.

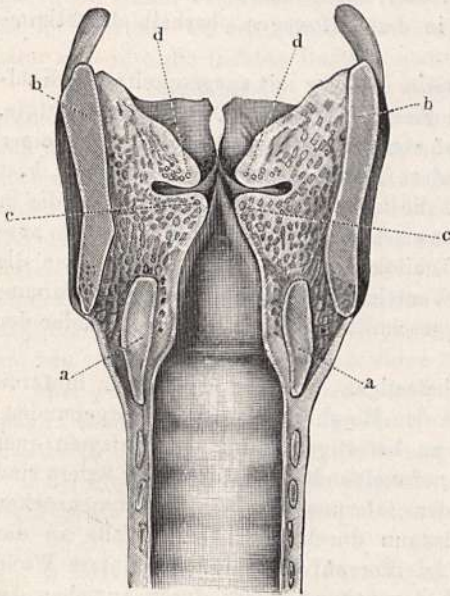


Fig. 828.

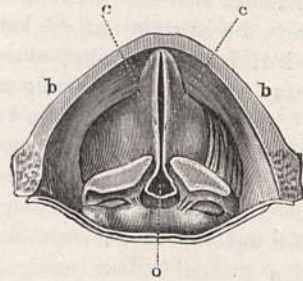
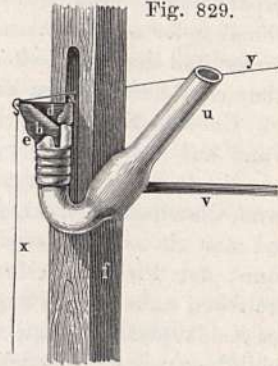


Fig. 829.



Es ist:

- a der Durchschnitt durch den Ringknorpel,
- b der Durchschnitt durch den Schildknorpel,
- c der Durchschnitt durch die unteren Stimmbänder,
- d der Durchschnitt durch die oberen Stimmbänder.

Zwischen den unteren und oberen Stimmbändern sieht man in Fig. 827 deutlich die *Ventriculi Morgagni*. Ferner ersieht man aus dieser Figur, wie sich die Luftröhre gegen die unteren Stimmbänder hin verengt. Fig. 828 zeigt die Stimmritze von oben gesehen.

Schon Ferrein¹⁾ hat durch treffliche Versuche, die auch von anderen bestätigt wurden, gezeigt, daß die Stimmbänder in gewisser Beziehung mit gespannten Saiten zu vergleichen seien; Biot und Cagniard de la Tour ersetzten die Stimmbänder durch elastische Membranen von Kautschuk, die sie über eine Röhre spannten; doch reichten diese Versuche noch nicht hin, um eine vollkommene Parallele zwischen diesen Zungenwerken und dem Stimmorgan zu begründen. Erst Johannes Müller hat es durch seine klassischen Untersuchungen über diesen Gegenstand²⁾ außer Zweifel gesetzt,

¹⁾ Mém. de l'acad. des sciences 1741.

²⁾ Handbuch der Physiologie des Menschen, zweiten Bandes erste Abteilung; und: Über die Kompensation der physischen Kräfte am menschlichen Stimmorgan.

daß die Bildung von Tönen im Kehlkopfe der in membranösen Zungenpfeifen ganz analog ist, welche wir bereits in § 237 kennen lernten.

Sowohl Beobachtungen an lebenden Menschen und Tieren, als auch Versuche an ausgeschnittenen Kehlköpfen menschlicher Leichen zeigen, daß die Töne in der Stimmritze und weder über noch unter ihr gebildet werden. Befindet sich eine Öffnung in der Luftröhre (also unter der Stimmritze), so hört die Stimme auf, sie kehrt aber wieder, sobald diese Öffnung verschlossen wird; hingegen bringt eine Öffnung in den Luftwegen oberhalb der Stimmritze eine solche Wirkung nicht hervor.

Die entscheidendsten Versuche stellte Müller mit ausgeschnittenen Kehlköpfen an, die er auf eine passende Weise auf einem Brettchen befestigte. Fig. 829 stellt einen solchen Kehlkopf von der Seite gesehen dar. *a* ist einer der Cartilagine arytaenoideae (der andere liegt hinter dem gezeichneten), *b* ist der untere Teil des Schildknorpels, *d* die innere Haut des Kehlkopfes, die in den Stimmbändern endigt, welche zwischen den Knorpeln *a* und *b* angespannt sind. Der obere Teil des Schildknorpels bis zu der Stelle, wo die Stimmbänder angewachsen sind, die Ventriculi Morgagni, die oberen Stimmbänder und der Kehldeckel sind weggeschnitten, damit man die Ränder der Stimmritze besser sehen kann.

Um den Kehlkopf gehörig zu befestigen, wird er mit seiner hinteren Wand auf das Brettchen gelegt und der Ringknorpel darauf festgebunden; um die Cartilagine arytaenoideae zu befestigen, wird ein Pfriemen quer durch dieselben gesteckt, so daß sie nebeneinander auf demselben fixiert sind und man sie nach Belieben voneinander entfernen oder dicht zusammenrücken kann; der Pfriemen selbst wird alsdann durch Schnüre ebenfalls an das Brettchen unbeweglich angezogen. Ist nun auf diese Art die hintere Wand des Kehlkopfes befestigt, so läßt sich den Stimmbändern durch Anziehen des Schildknorpels jede beliebige Spannung geben. Mit so präparierten Kehlköpfen machte Müller eine Menge von Versuchen; wir können hier nur die wichtigsten seiner Resultate hervorheben.

Die unteren Stimmbänder geben bei enger Stimmritze volle und reine Töne beim Anspruch durch Blasen von der Luftröhre aus; diese Töne kommen denen der menschlichen Stimme sehr nahe; sie unterscheiden sich von denen, welche man erhält, wenn die Ventriculi Morgagni, die oberen Stimmbänder und der Kehldeckel noch vorhanden sind, nur durch ihre geringere Stärke, indem diese Teile, wenn sie vorhanden sind, stark mitschwingen und resonieren; die Ventriculi Morgagni haben offenbar nur den Zweck, die Stimmbänder von außen frei zu machen.

Bei gleicher Spannung der Stimmbänder hat die größere oder geringere Enge der Stimmritze keinen wesentlichen Einfluß auf die Höhe des Tones, nur spricht bei weiter Stimmritze der Ton schwerer an und ist weniger klangvoll.

Im Leben geschieht die Spannung der Stimmbänder hauptsächlich dadurch, daß die Musculi crico-thyreoidei den Schildknorpel gegen den Ringknorpel herabziehen, was an unserem Präparate dadurch nachgeahmt werden kann, daß man in dem Schildknorpel mittels eines Hakens eine Schnur *x* befestigt und diese mit Gewichten belastet. Indem Müller diese Gewichte von 8 bis 647 g vermehrte, konnte er alle Töne zwischen *ais*⁰ und *dis*³, also ungefähr 2¹/₂ Oktaven, hervorbringen.

Wenn auch der Faden x nicht durch Gewichte belastet ist, so sind doch die Stimmbänder noch nicht völlig abgespannt; um eine stärkere Abspannung und noch tiefere Töne zu erhalten, bringt man eine Schnur y , Fig. 829, an, welche über eine Rolle gehend mit den Gewichten belastet wird, um dadurch den Schildknorpel gegen die Cartilagine arytaenoideae zu ziehen, wodurch die Wirkung des Musculus thyreo-arytaenoideus nachgeahmt wird. Bei einem solchen Versuche erhielt Müller durch ein Gewicht von 5,25 g den Ton dis^1 , durch Vermehrung des Gewichtes bis zu 66,5 g konnte der Ton bis h^{-1} vertieft werden; durch eine solche Anspannung der Stimmbänder kann man also die tiefsten Baßtöne der Bruststimme hervorbringen.

Daß die Stimmbänder bei den Brusttönen schlaff, bei den Falsettönen gespannt sind, ist von Liskovius zuerst entdeckt worden; indessen läßt sich bei einem gewissen Grade der Abspannung bei verschiedenem Anspruche sowohl ein Brustton als ein Falsetton hervorbringen. Bei den Falsettönen schwingt aber nicht, wie bei den Flageolettönen der Saiten, ein aliquoter Teil der Länge der Stimmbänder; der wesentliche Unterschied beider Register besteht darin, daß bei den Falsettönen bloß die feinen Ränder der Stimmbänder, bei den Brusttönen die ganzen Stimmbänder lebhaft und mit großen Exkursionen schwingen. Diese Tatsache ist zuerst von Lehfeldt beobachtet worden. Der Falsetton erfolgt leichter bei ganz schwachem Blasen.

Bei großer Abspannung sind die Stimmbänder nicht allein ganz ungespannt, sondern im Zustande der Ruhe auch runzelig und faltig; sie erhalten erst durch das Blasen die zum Schwingen nötige Tension.

Bei gleicher Spannung der Stimmbänder läßt sich durch stärkeres Blasen der Ton oft bis zu einer Quinte und mehr in die Höhe treiben.

§ 254. Stimmorgane der Tiere. Bei den Säugetieren sind die Stimmorgane im wesentlichen ebenso konstruiert wie beim Menschen; auch bei ihnen wird der Ton durch die unteren Stimmbänder erzeugt, ja bei den Wiederkäuern fehlen die Ventriculi Morgagni und die oberen Stimmbänder sogar ganz. Bei den Affen sind die resonierenden Teile des Stimmorgans sehr eigentümlich; so findet sich z. B. beim Orang-Utan, dem Mandrill und dem Pavian ein häutiger Sack unter dem Zungenbeine. Am größten ist dieser resonierende Apparat bei den Heulaffen der Neuen Welt.

Die Stimme der Amphibien entsteht wie bei den Säugetieren im Kehlkopfe; sowohl die Frösche als auch die Krokodile haben Stimmbänder. Beim männlichen Frosche treten beim Tongeben zugleich häutige Säcke am Halse nach außen, welche zur Verstärkung des Tones dienen. Bei den Fröschen fehlt die Luftröhre; die Bronchien gehen sogleich aus dem Kehlkopfe hervor.

Bei den Vögeln befindet sich das Stimmorgan nicht am oberen, sondern am unteren Ende der Luftröhre, nämlich da, wo sie sich in die Bronchien teilt; Cuvier zeigte, daß eine Amsel, eine Elster, eine Ente nach Durchschneidung der Luftröhre noch zu schreien vermögen. Die anatomische Untersuchung bestätigt dieses Resultat, denn man findet am oberen Ende der Luftröhre nur eine Verengerung, eine Spalte, welche keineswegs zur Erzeugung von Tönen geeignet ist, während man am unteren Ende einen wunderbar eingerichteten, zur Hervorbringung einer großen Reihe hoher und tiefer Töne geeigneten Apparat findet; doch ist es nicht möglich, davon eine Idee zu geben, ohne zu sehr in anatomische Einzelheiten einzugehen.

Auch unter den Fischen, welche sonst sprichwörtlich als stumm gelten, gibt es mehrere Arten, welche Töne oder wenigstens Geräusche hervorbringen, so z. B. der bekannte Schlammpeizger, welcher ein feines hohes Quieken von sich gibt, wenn man ihn aus dem Wasser herausnimmt. Er bringt dasselbe durch Saugbewegungen der Lippen hervor. Andere Gattungen, wie z. B. die Knurrhähne (*Trigla gurnardus*), bringen ein knurrendes Geräusch hervor, über dessen Entstehungsweise man noch nicht im reinen ist. Eine förmliche unterseeische Musik, die aus 40 m Tiefe noch bis zur Oberfläche des Meeres dringt, erzeugen die Umberfische (*Sciaenoidei*).

Als tonerzeugendes Organ wird bei diesen wie den vorhin erwähnten Gattungen die Schwimmblase vermutet.

Die Insekten endlich besitzen außerordentlich zahlreiche und verschiedenartige Mittel zur Erzeugung von Stimmen oder Geräuschen, auf deren Einzelheiten wir natürlich hier nicht eingehen können¹⁾.

§ 255. Klangfarbe der menschlichen Sprachlaute. Die Sprachlaute des Menschen werden gewöhnlich in Vokale und Konsonanten eingeteilt. Die ersteren sind wirkliche Klänge, welche beliebig lange klingen können und deshalb den betonten Teil der Silbe bilden. Die Konsonanten sind fast sämtlich nur Geräusche von kurzer Dauer, geeignet, den Vokal einzurahmen. Wir beschäftigen uns hier nur mit den Vokalen.

Wie so oft, so wurden auch in diesem Gebiet vor längerer Zeit von einzelnen Forschern wichtige, der Wahrheit mehr oder weniger nahe kommende Entdeckungen gemacht, die dann wieder in Vergessenheit gerieten²⁾.

Daß in den Vokalen Töne verschiedener Höhe enthalten seien, hat schon W. v. Kempelen (um 1780) entdeckt. Auch gelang es ihm schon, durch Verbindung einer aufschlagenden Zunge mit geeigneten Hohlräumen Vokale künstlich nachzuahmen; ja er konstruierte sogar eine förmliche Sprechmaschine, welche später von Faber verbessert unter dessen Namen in den größeren Städten Deutschlands gezeigt wurde³⁾. Chr. Gottl. Kratzenstein gab sich um dieselbe Zeit mit ähnlichen Versuchen ab, wobei er die erste durchschlagende Zunge konstruierte, kam aber der richtigen Erklärung der Vokale nicht nahe. Dies gelang erst Robert Willis⁴⁾ 1830, welcher teils auf demselben Wege, teils mittels Zahnräder, gegen deren Zähne schwingende Federn anschlugen, Klänge ähnlich den Vokalen erzeugte und die letzteren durch das Zusammenwirken „primärer und sekundärer Pulsationen“ erklärte. Die Aufeinanderfolge der Zähne lieferte die „primären Pulsationen“ (den Grundton), die Eigenschwingungen der Feder die „sekundären Pulsationen“ (den Oberton). In der Zungenpfeife liefert die Zunge die primären, die Ansatzröhre die sekundären Schwingungen.

¹⁾ Landois, Tierstimmen, Freiburg i. B. 1874; Haller in der Zeitschrift „Der zoologische Garten“ 15 (1874); Grützner, Physiologie der Stimme und der Sprache, 5. Kap. (II. Teil des Handb. d. Physiologie von L. Hermann).

²⁾ Eine ziemlich ausführliche Darstellung dieser älteren Entdeckungen, sowie der ganzen hier abzuhandelnden Materie ist von P. Grützner in seiner Physiologie der Stimme und der Sprache, welche den 2. Teil des I. Bandes des Handbuchs der Physiologie von L. Hermann bildet, gegeben.

³⁾ Näheres darüber außer bei Kempelen im Kadmus von F. K. du Bois-Reymond, S. 129, Berlin 1862.

⁴⁾ Pogg. Ann. 24, 397 (1832).

Noch näher der Wahrheit kam Wheatstone 1837, welcher die „multiple Resonanz“ der Hohlräume, d. h. das Gesetz entdeckte, daß ein Resonator auch auf die Obertöne des Eigentones in Mitschwingungen geraten kann. Er zeigte auch bereits mittels Stimmgabeln, daß die Mundhöhle bei bestimmten Stellungen auf bestimmte Töne abgestimmt sei und daß bei den Vokalen ein Oberton im Verhältnis zum Grundton stärker hervortrete als bei anderen Klängen.

Im Jahre 1854 veröffentlichte Graßmann¹⁾ die Grundzüge einer Vokaltheorie, welche nicht die verdiente Beachtung gefunden hat. In derselben ist bestimmt ausgesprochen, daß die Vokale dadurch entstehen, daß durch die Schwingungen der Stimmbänder auch die Luft der Mundhöhle in Mitschwingungen versetzt wird und die dadurch entwickelten leisen harmonischen Obertöne sich dem Grundton der Stimmbänder beimischen. Graßmann bediente sich zur Analyse der Vokalklänge nur seines feinen Gehörs. „Ein aufmerksames Ohr hört leicht beim Übergange von *u* durch *ü* zum *i* eine Reihe leiser harmonischer Nebentöne (Obertöne), welche von c^2 bis c^5 fortschreiten können, und welche man bei denselben Mundstellungen auch für sich hervorbringen kann. Beim Vokal *a* klingt eine ganze Reihe der harmonischen Töne mit, welche das Ohr in der Regel noch bis zur vierten Oktave des Grundtones wahrnehmen kann.“

Graßmann hat dann später²⁾ seine Theorie weiter ausgeführt. Ihre wesentlichen Punkte sind folgende. Die Vokale zerfallen in drei Gruppen, deren erster die Reihe *U*, *Ü* und *J*, deren zweiter nur das *A*, deren dritter *O*, *Ö* und *E* angehören.

Die Gruppe *U*, *Ü*, *J* ist dadurch charakterisiert, daß außer dem Grundton immer nur ein Oberton mitklingt, welcher beim *U* stets zwischen c^1 und c^3 , beim *Ü* zwischen c^3 und e^4 , beim *J* von e^4 aufwärts liegt. Das folgende Schema stellt dies dar:

c^0	c^1	g^2	e^2	g^2	l^2	c^3	\bar{a}^3	e^2	g^3	l^3	h^3	c^4	cis^4	\bar{a}^4	dis^4	e^4	f^4	g^4	gis^4	...					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	...
<u>U</u>											<u>Ü</u>					<u>J</u>								

Wenn man also in der Tonhöhe c^0 ein *U* singt, wird mittels der Stimmbänder der Grundton c^0 mit allen seinen Obertönen hervorgebracht und gleichzeitig dem Munde eine solche Form und Öffnung gegeben, daß die Mundhöhle auf einen der Töne c^1 , g^1 bis c^3 Resonanz gibt. Die Formel des *U* wäre also dann $c^0 + c^1$ oder $c^0 + g^1$ oder $c^0 + c^2$, d. h. es gibt für den Grundton c^0 eine ganze Reihe von *U*, welche desto dumpfer klingen, je tiefer, desto heller, je höher der eine Oberton ist, welcher dem Grundton beigemischt wird. Dasselbe gilt dann für *Ü* und für *J*, nur daß die Reihe der Obertöne, aus welcher der charakteristische Oberton genommen werden muß, höher liegt, wie das Schema andeutet.

Wird statt des Grundtones c^0 etwa c^1 gewählt, so enthält derselbe nur mehr die Partialtöne, welche früher die geradzahlgigen waren, nämlich:

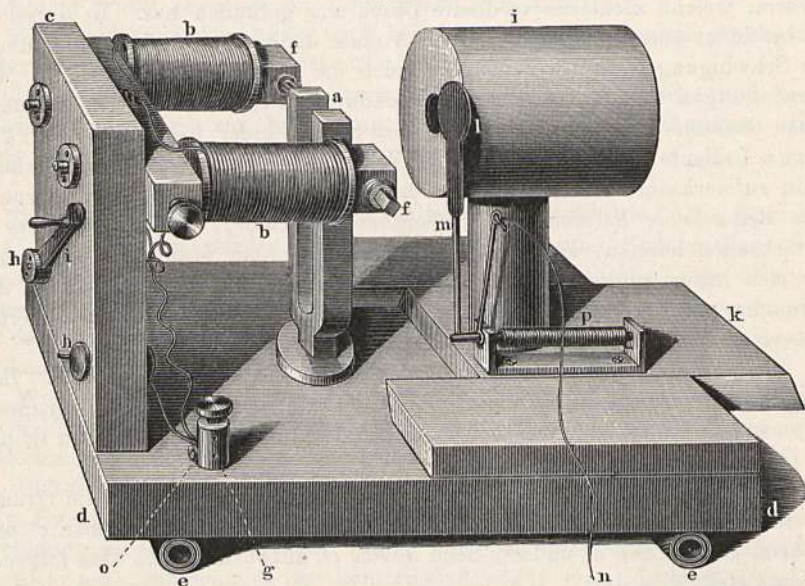
c^1	c^2	g^2	c^3	e^3	g^3	l^3	c^4	\bar{a}^4	e^4	usw.
<u>U</u>						<u>Ü</u>				

1) Programm des Stettiner Gymnasiums 1854.

2) Wiedem. Ann. 1, 606 (1877).

Auf den Grundton c^1 gesungene U bestehen daher alle aus c^1 und einem der nämlichen (absolut genommen gleich hohen) Obertöne wie früher, also einem solchen zwischen c^1 und c^3 . Die \ddot{U} bestehen wiederum aus c^1 und einem der Obertöne zwischen c^3 und c^4 , die J aus c^1 und einem der Obertöne oberhalb c^4 . Ist zu einem Grundton der erforderliche Oberton nicht vorhanden, so treten die beiden benachbarten Töne für ihn ein, und zwar im Verhältnis zu ihrer Nähe, dabei wird der Klang aber ein wenig verändert.

Fig. 830.



Im Gegensatz zur Gruppe U , \ddot{U} , J wird das A gebildet durch das Vorhandensein der ersten 8 bis 10 Obertöne des Grundtones in annähernd gleicher Stärke, wobei nur deren relative Höhe konstant bleibt.

Die Vokale O , \ddot{O} und E sind nach Graßmann Mittelstufen zwischen U und A , \ddot{U} und a , J und a . Die Obertöne des O z. B. liegen von dem charakteristischen Ton des U , dem c^1 , halb so weit entfernt als die Obertöne des A .

v. Helmholtz¹⁾ veröffentlichte 1859 seine wichtigen Versuche über die Vokalklänge, welche dann in seinem oft zitierten Werke: „Zur Lehre von den Tonempfindungen“ 1863 vervollständigt erschienen. Auch nach v. Helmholtz entstehen die Vokale dadurch, daß aus der Klangmasse, welche von den Stimmbändern ausgeht, gewisse Obertöne durch die Höhlungen des Mundes verstärkt, die übrigen geschwächt werden. Das Unterscheidende der Vokalklänge von den Klängen der anderen Instrumente liegt nach v. Helmholtz darin, daß die Stärke ihrer Obertöne nicht nur von der Ordnungszahl, sondern überwiegend von deren absoluter Tonhöhe abhängt.

v. Helmholtz bediente sich der folgenden Methoden. Er untersuchte die Resonanztöne der Mundhöhle durch vorgehaltene Stimmgabeln, die Vokal-

¹⁾ Gelehrte Anzeigen d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 1859.

klänge mittels seiner Resonatoren und stellte endlich künstliche Vokale her durch gleichzeitiges Ertönenlassen von Stimmgabeln verschiedener Höhe, welche mit Resonanzröhren versehen waren. Die Fig. 830 zeigt die Anordnung einer solchen Stimmgabel. Dieselbe ist zwischen den Polen des Elektromagneten bb aufgestellt, welcher letztere durch den intermittierenden Strom einer Unterbrechungsgabel intermittierend magnetisiert wird und dadurch die Stimmgabel in a im Schwingen erhält. Ihr Ton wird aber erst dadurch laut hörbar, daß er in der Röhre i Resonanz findet, welche eintritt, sobald der Deckel vor der Mündung der Resonanzröhre entfernt wird, wozu der Mechanismus mp dient. Der Schieber k gestattet Annäherung oder Entfernung der Resonanzröhre. Acht bis zwölf solcher Gabeln von den Tonhöhen:

$$b^{-1}, b^0, f^1, b^1, d, f^2, as^2, b^2, d^3, f^3, as^3, b^3$$

konnten auf diese Weise gleichzeitig durch die nämliche Unterbrechungsgabel, deren Tonhöhe $= b^{-1} = 120$ Schwingungen pro Sekunde betrug, im Schwingen erhalten werden. Mit diesem Apparat gelang es v. Helmholtz, mehrere Vokale künstlich nachzubilden.

Es entstand:

Mit dem Grundton b^{-1} :

Ein dumpfes U durch die Gabel b^{-1} allein.

Ein dem U ähnlicher Vokalklang durch b^{-1} mit b (schwach) und f^1 (schwach).

Ein schönes O durch b^{-1} (gedämpft), b^0 (schwach), b^1 (stark), f^1 (schwach), d'' (schwach).

Ein \tilde{A} durch b^{-1} , b^0 (schwach), f^1 (schwach), d^2 (stark), f^2 (stark), as^2 (stark), b^2 (stark).

Mit dem Grundton b :

U durch b^0 allein.

O durch b^0 (mäßig), b^1 (stark), f'' (schwächer).

A durch b^0 , b^1 und f^2 mäßig stark, b^2 und d^3 kräftig.

\tilde{A} durch b^0 , b^1 und f^2 stärker, b^2 schwächer, d^3 und f^3 möglichst stark.

E durch b^0 und b^1 (mäßig stark), f^3 , a^3 , b^3 (möglichst stark).

Die Nachahmung des E gelang minder gut, die des J gar nicht, weil die höheren Obertöne fehlten.

Mittels desselben Stimmgabelapparates hat v. Helmholtz auch Versuche angestellt über den Einfluß der Phasendifferenz der einzelnen Teiltöne auf die Klangfarbe. Die Phase kann nämlich durch geringe Änderung der Stimmung der Resonanzröhren bis zu $\frac{1}{4}$, durch Umkehrung der Stromrichtung um $\frac{1}{2}$ verändert werden. Das Resultat war ein negatives, d. h. die Phasendifferenz zeigte sich ohne Einfluß auf die Klangfarbe (vgl. § 250).

Gegen die v. Helmholtzsche Ansicht, daß bei den Vokalklängen die absolute Höhe der charakteristischen Obertöne maßgebend sei, sind mehrfach Einwendungen erhoben worden¹⁾. Eine neuere von F. Auerbach²⁾

¹⁾ v. Quanten, Pogg. Ann. 154 (1875); Schnebeli, Arch. d. sc. phys. et nat. I, p. 149 (1879).

²⁾ Wiedem. Ann., Ergänz.-Bd. 8, S. 177 (1876).

in v. Helmholtz' Laboratorium ausgeführte Untersuchung hat denn auch ergeben, daß beim Vokalklang sowohl die absolute Höhe, als auch die relative Höhe der Obertöne in Betracht komme. Hierdurch wird freilich die Vokaltheorie eine sehr komplizierte.

Dies, sowie der Umstand, daß die behandelte Frage noch immer Gegenstand der Kontroverse ist¹⁾, endlich die Erwägung, daß dieselbe eigentlich mehr den Physiologen und Sprachforscher als den Physiker angeht, welcher letztere nur die Methoden der Untersuchung beizustellen hatte, veranlaßt uns, diesen Gegenstand mit dem Hinweis auf die betreffende Literatur abzuschließen²⁾.

In experimenteller Beziehung wäre noch zu erwähnen, daß v. Helmholtz auch dadurch künstliche Vokale erhielt, daß er auf eine Zungenpfeife, welche b^1 gab, Hohlräume mit wechselndem Eigenton aufsetzte. Eine auf b^0 abgestimmte Resonanzkugel gab ein U , eine auf b^1 abgestimmte ein O ; ein geschlossenes A wurde erhalten mit der Kugel b^2 , ein scharfes A mit der Kugel d^3 . Auch ist es v. Helmholtz gelungen, mit derselben Zungenpfeife die Vokale A , E und J hervorzubringen, indem er gläserne Hohlkugeln aufsetzte, in deren äußere Öffnung noch ein 6 bis 10 cm langes Glasröhrchen eingefügt war, um die doppelte Resonanz der Mundhöhle bei diesen Vokalen nachzuahmen. Zu solchen Versuchen ist der Apparat Fig. 768, S. 709 zu verwenden.

Nimmt man den Schallbecher ab und setzt statt dessen die zu einem Hohlraum zusammengelegten Hände auf, so kann man durch Formänderung und durch Erweiterung der Öffnung derselben den Übergang der Vokale ineinander ziemlich deutlich demonstrieren. Der Klang geht von U durch O in A über, wenn man die Hände allmählich weiter öffnet. Schließt und öffnet man die Mündung der Pfeife mit der flachen Hand, so hört man ein „Papa“, tut man dasselbe mit den etwas abstehenden Fingern, so erfolgt ein „Mama“.

Zur Vokalanalyse ist auch der Phonautograph, und zwar von Schnebeli benutzt worden. Endlich kann auch der in Fig. 823, S. 766 abgebildete Apparat mit manometrischer Kapsel dazu benutzt werden, wenigstens als Vorleseexperiment den Unterschied in der Zusammensetzung der Vokalklänge zu demonstrieren. Je mehr Obertöne der in den Trichter des Apparates gesungene Vokal enthält, desto mehr Spitzen zeigt das im rotierenden Spiegel beobachtete Flammenbild. Die Fig. 824 I, II, III entsprechen den Vokalen U , O , A .

Als ein weiteres interessantes Vorleseexperiment, welches mit der Vokalanalyse in Beziehung steht, mag endlich noch Tyndalls Vokalflamme³⁾ erwähnt werden. Wenn man Leuchtgas aus einem Kautschuksack durch ein weites, nirgends verengtes Rohr einem zylindrischen Brenner von kleinem, kreisförmigem Querschnitt zuführt und anzündet, so erhält man bei hinlänglichem Druck eine 50 bis 60 cm hohe schmale Flamme von der Fig. 831 I dargestellten Form.

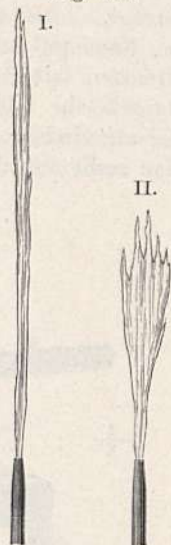
¹⁾ Man vergleiche die Arbeit von J. Lahr in Wiedem. Ann. 27, 94, welche die Graßmannsche Vokaltheorie aufrecht hält und durch neue Versuche zu bestätigen sucht.

²⁾ Dieselbe findet sich in der oben zitierten Physiologie der Stimme und Sprache von Grützner zusammengestellt.

³⁾ Tyndall, Der Schall, deutsche Ausgabe von H. v. Helmholtz und G. Wiedemann, S. 287.

Ver mehrt man die Belastung des Kautschuksackes, so fängt endlich die Flamme zu rauschen an und wird gleichzeitig kürzer. Die größte Belastung, bei welcher diese Veränderung eben noch nicht eintritt, ist für die Versuche die geeignetste. Bei passenden Dimensionen des Brenners und unter Bedingungen, die man nicht ganz in seiner Gewalt hat und ausprobieren muß, gelingt es, eine sensible Flamme zu erhalten, welche gegen tiefere Töne ganz unempfindlich ist, dagegen beim Erklängen hoher Töne sofort bis zur Form Fig. 831 II zusammenknickt. Spricht man in der Nachbarschaft der Flamme den Vokal *U* oder *O*, so rührt sich die Flamme nicht oder nur wenig, bei *a*, *e*, *i* knickt sie aber auffallend zusammen. Dasselbe erfolgt beim Zischen, beim Schütteln eines Schlüsselbundes, beim Zerreißen von Papier, kurz bei Geräuschen, welche die passenden hohen Töne enthalten, um die der Vibration schon nahestehende Flamme vollends in Schwingungen zu versetzen.

Fig. 831.



§ 256. Der Phonograph von Edison. Dieser höchst interessante Apparat, eine Erfindung des Amerikaners Thomas A. Edison, welcher Ende 1877 bekannt wurde, löst, wie sein Name sagt, für den Schall dieselbe Aufgabe wie der Photographenapparat für das Licht. Er fixiert erhaltene Schalleindrücke, welche dann zu beliebiger Zeit und beliebig oft reproduziert werden können.

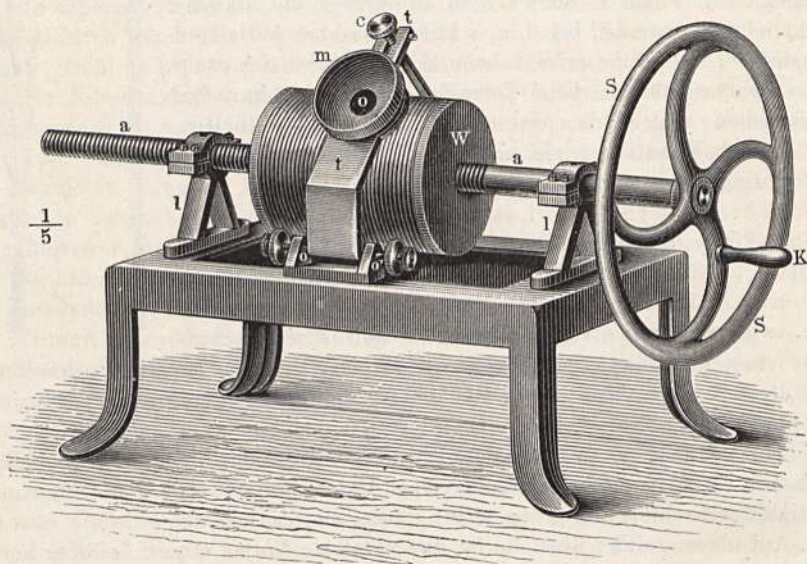
Fig. 832 (a. f. S.) zeigt einen solchen Phonographen in der ursprünglichen einfachen Ausführung in perspektivischer Darstellung, Fig. 833 (S. 783) einen Vertikaldurchschnitt durch die wichtigsten Teile desselben.

Auf einem soliden Gestelle ist die metallene Walze *w* mittels ihrer horizontalen Achse *aa* in den Lagern *ll* drehbar. Sowohl die Walze als die Achse sind mit Schraubenwindungen gleicher Ganghöhe versehen. Das linksseitige Achsenlager bildet die Schraubenmutter für das Gewinde auf der Achse. Dreht man das Schwungrad *SS* an der Kurbel *K*, so wird die Walze bei jeder Rotation gleichzeitig um einen Schraubengang in der Achsenrichtung verschoben. Das Mundstück *m* ist eine trichterförmige Dose von Messing, welche in dem starken messingenen Träger *tt* mittels des Zwischenstückes *rr* (Fig. 833) durch Schraubengewinde befestigt werden kann. Die Basis des Mundstückes *m* ist mit einer zentralen, kreisförmigen Öffnung *o* versehen, der Boden des Zwischenstückes *rr* ist durch eine dünne Glimmerplatte *nn* (oder durch eine dünne Metallplatte oder auch eine tierische Membran) verschlossen. Auf die Mitte der Glimmerplatte ist an der Unterseite eine kleine Metallplatte mit zentraler Spitze aufgekittet, gegen welche das Ende der Stahlfeder *f* angedrückt wird. Diese Feder trägt selbst wiederum eine abgerundete Stahlspitze *g*, welche gegen die Mitte einer Schraubenrinne der Walze *W* gerichtet ist.

Der Träger *t* ist aufzuklappen, wobei er um die Spitzen der Schrauben *oo'* gedreht wird. Diese Schrauben gestatten auch eine Verschiebung des Trägers parallel der Walze und eine Feststellung der so eingestellten Lage mittels Gegenschrauben. Die Schraube *c* mit der Anschlagstelle *d* hat den

Zweck, das Mundstück in die richtige Entfernung von der Walze zu stellen. Die Walze wird mit einem Blatt Stanniol von ungefähr 0,05 mm Dicke überzogen. Man schneidet dasselbe um 1 cm länger, als der Umfang der Walze beträgt, so daß es an den Enden etwas übergreift, befestigt den übergreifenden Rand mit konzentriertem Schellackfirnis und sorgt durch Andrücken und Streichen mit Baumwollebauschen, daß das Stanniolblatt eine recht glatte Mantelfläche bildet. Der übergreifende Rand muß so liegen, daß er beim Vorwärtsdrehen der Walze nicht vom Stahlstift *g* abgestreift werden kann. Man stellt nun die Walze so, daß der Stahlstift am Anfange des Schrauben-

Fig. 832.



gewindes steht, korrigiert, wenn nötig, die Schrauben *oo'* so, daß der Stahlstift *g* genau auf die Mitte einer Schraubenrinne trifft, und stellt endlich die Schraube *c* so ein, daß derselbe Stahlstift beim Drehen der Walze eine seichte Rinne ins Stanniol eindrückt. Der Apparat ist dann zum Versuche fertig. Gibt man nun der Walze eine gleichförmige Umdrehungsgeschwindigkeit (ungefähr zwei Umgänge pro Sekunde) und spricht währenddessen laut in das Mundstück, wobei man sich möglichst nähert, so übertragen sich die Luftschwingungen auf die Glimmerplatte und weiterhin auf den Stift *g*, welcher infolgedessen in das Stanniolblatt punktförmige Vertiefungen eindrückt, die man sofort mit freiem Auge sehen kann. Um nun die gesprochenen Worte zu reproduzieren, klappt man den Teil *t* zurück, dreht dann die Walze in die Anfangsstellung zurück, bringt die Dose mit dem Stift genau in die frühere Lage, setzt zur Verstärkung noch einen Schalltrichter aus Pappe *PP* auf und dreht die Kurbel mit möglichst derselben Geschwindigkeit wie das erste Mal. Die gesprochenen Worte müssen, wenn der Versuch gut geleitet ist, so laut und so deutlich reproduziert werden, daß sie von einem ganzen Auditorium gehört und auch von solchen Personen verstanden werden, welche nicht wußten, was früher in den Apparat gesprochen wurde. Damit dies gelinge, ist insbesondere darauf zu achten,

Der Phonograph schreibt seine Schrift als Relief, während der Phonautograph in der Ebene der Schreibfläche schreibt. Beim zweiten Drehen der Walze gleitet der Stift über das Relief, muß daher dessen Erhöhungen und Vertiefungen in derselben Reihenfolge nachgehen, also dieselben Schwingungen wiederum durchmachen, welche er vollbrachte, als er die Eindrücke in die Walzenmasse machte. Es muß daher auch die Membran und mit ihr die Luft oberhalb derselben die nämlichen Schwingungen, also auch dieselben Töne, wenn auch mit geringerer Intensität reproduzieren.

Weitere Versuche sind folgende:

Man gibt der Walze beim Reproduzieren eine geringere oder größere Geschwindigkeit. Die Worte wiederholen sich dann nicht nur langsamer oder rascher, sondern sämtliche Tonhöhen werden niedriger oder höher. Man hat deshalb versucht, durch dieses Experiment die Frage zu entscheiden, ob beim Vokalklange die absolute oder die relative Höhe der Partialtöne in Betracht komme. Haben die charakteristischen Obertöne eine konstante absolute Höhe, so müssen sich die Vokale nicht bloß in der Tonhöhe, sondern im Klangcharakter ändern, sobald man schneller oder langsamer dreht als während des Sprechens. Sind aber die charakteristischen Töne der Vokale von konstanter relativer Höhe, so müssen auch die vom Apparat reproduzierten Vokale ihren Charakter behalten. Das Experiment gibt aber keinen Ausschlag zur ausschließlichen Geltung der einen oder anderen Ansicht. Wohl nähert sich z. B. der Vokal *A* beim langsamen Drehen etwas dem *O*, beim schnelleren Drehen dem *Ä*; *Ü* geht beim langsameren Drehen in *U*, beim schnelleren Drehen in *J* über.

Dies zeigt, daß sowohl das absolute als das relative Moment den Vokalklang beeinflusst.

Ein zweiter Versuch besteht darin, daß man die beschriebene Stanniolfläche ablöst und dann wieder auflegt. Geschieht dies mit der nötigen Genauigkeit und ist das Stanniol nicht zu dünn und nicht zu sehr verletzt worden, so gelingt die Reproduktion. Es wäre also immerhin möglich, auf diese Weise die gesprochenen Worte zu stereotypieren, zu versenden und an irgend einem anderen Orte und zu irgend einer Zeit an einem genau gleich konstruierten Apparat zu reproduzieren. Sicher gelingt dies mit den Walzen oder Platten aus Wachsmasse oder den galvanoplastischen Kopien derselben.

Ein dritter Versuch zeigt, daß eine mehrmalige Reproduktion möglich ist, jedoch mit allmählich abnehmender Deutlichkeit, weil das Stanniol allmählich seine Form verliert. Dagegen haben die galvanoplastischen Platten genügende Widerstandsfähigkeit.

Bei einem vierten Versuch kann man über eine geschriebene Stelle der Walze nochmals schreiben. Sie reproduziert dann, allerdings minder deutlich, beide Wortreihen zugleich, als wären sie zugleich gesprochen worden.

Setzt man den Schalltrichter auf, so werden die Eindrücke stärker, aber der Umstand, daß die Eigentöne des Schalltrichters gegenüber den anderen Tönen verstärkt werden, stört etwas die Deutlichkeit.

Außer den Sprechlauten wird auch Gesang, Pfeifen, Trompeten usw. reproduziert. Dabei ist aber noch wichtiger als bei jenen, daß die ursprüngliche Geschwindigkeit beibehalten werde, da sonst die Änderungen der Tonhöhe störend werden. Am besten wird lautes Lachen, Nachahmung von Hundegebell, Hahnenschrei usw. wiedergegeben.

Die gebrauchten Stanniolblätter können nach sorgfältigem Glätten wohl wieder benutzt werden, aber nicht mit gleich gutem Erfolg. Die Stahlspitze wird nach längerem Gebrauch durch Abschleifen scharfkantig und muß dann wiederum abgerundet werden, da sie sonst das Stanniol aufreißt.

Mehrere Physiker, so Alfred M. Mayer¹⁾, Jenkin und Ewing in Edinburgh²⁾ und jüngstens J. Lahr³⁾, haben das Profil der Stanniol-eindrücke durch Fühlhebelapparate vergrößert abgezeichnet. Die erhaltenen Kurven dienen dann zu Studien über die Zusammensetzung des Vokalklanges, indem dieselben nach dem Fourierschen Theorem in eine Reihe von Sinuskurven zerlegt und so die Ordnungszahlen und Intensitäten der Partialtöne ermittelt wurden. J. Lahr findet in den erhaltenen Resultaten eine Bestätigung der Graßmannschen Vokaltheorie.

L. Hermann⁴⁾ hat den Phonographen benutzt, um die Frage nach dem Einfluß der Phase auf die Klangempfindung zu lösen. Er ließ zu diesem Behufe einen Vokal auf die Walze einwirken und reproduzierte denselben, indem er die Walze in entgegengesetzter Richtung zurückdrehte. Dadurch wird offenbar die Abszisse der Wellenkurve umgekehrt, also auch sämtliche Phasen aller Teiltöne. Durch eine besondere Vorrichtung kann man auch die Phonographenmembran veranlassen, sämtliche Schwingungen in entgegengesetzter Richtung zu reproduzieren, wodurch die sämtlichen Ordinaten der Kurve umgekehrt werden. Der Vokalcharakter bleibt hierbei derselbe⁵⁾. Damit ist bewiesen, daß die gleichzeitige Änderung aller Phasen, also die vollständige Umwandlung der Vokalcurve in ihr Spiegelbild keinen Einfluß auf den Klang hat. Es folgt jedoch daraus noch nicht, daß auch eine relative Verschiebung der Phasen der Partialtöne, welche eine vollständige Änderung der Wellenform zur Folge hat, keinen Einfluß auf den Klang hat.

§ 257. Das Gehörorgan besteht aus drei Hauptteilen, dem äußeren Ohre, welches durch die Ohrmuschel und den Gehörgang gebildet wird; der Trommelhöhle, welche von dem Gehörgang durch das Trommelfell getrennt ist, und dem Labyrinth. Das Labyrinth zerfällt in das knöcherne und das häutige. Ersteres besteht aus einer Reihe komplizierter, untereinander kommunizierender, von Knochensubstanz begrenzter Hohlräume, in welchem das häutige Labyrinth mit der Endausbreitung der Gehörnerven eingeschlossen ist. Das häutige Labyrinth hat im allgemeinen dünne, membranöse Wandungen und ist von einer Flüssigkeit, der Endolymphe, erfüllt. Es liegt nur teilweise direkt an den Wandungen des knöchernen Labyrinthes; im übrigen ist es durch einen von einer Flüssigkeit, der Perilymphe, erfüllten Zwischenraum von diesem getrennt. Um auf den Gehörnerven wirken zu können, müssen die Schallvibrationen der ganz von Knochen umgebenen Flüssigkeit im Labyrinth mitgeteilt werden; dies wird durch zwei Öffnungen des knöchernen Labyrinthes vermittelt, sie heißen das ovale und das runde Fenster; beide sind mit einem zarten Häutchen überspannt; auf die Mem-

¹⁾ Nature 17, 469 (1878).

²⁾ Trans. Roy. Soc. Edinb. 28, 1.

³⁾ Wiedem. Ann. 27, 94 (1886).

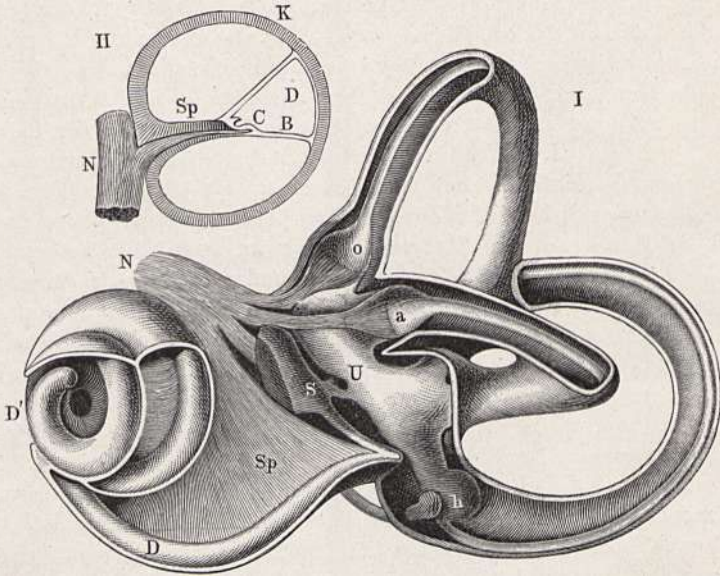
⁴⁾ Pflügers Archiv 56, 467.

⁵⁾ Vgl. A. Samojloffs Versuch mit der Violine, § 243.

bran des ovalen Fensters ist ein Knöchelchen aufgewachsen, welches Steigbügel genannt und von welchem sogleich näher die Rede sein wird.

Die Fig. 834 I¹⁾ stellt das linke knöcherner Labyrinth in ungefähr fünf-fach vergrößertem Maßstabe zum Teil geöffnet dar, so daß man das ein-

Fig. 834.



geschlossene häutige Labyrinth sehen kann. Es besteht aus drei Hauptteilen, der Schnecke, dem Vorhof und den drei halbkreisförmigen Kanälen oder Bogengängen.

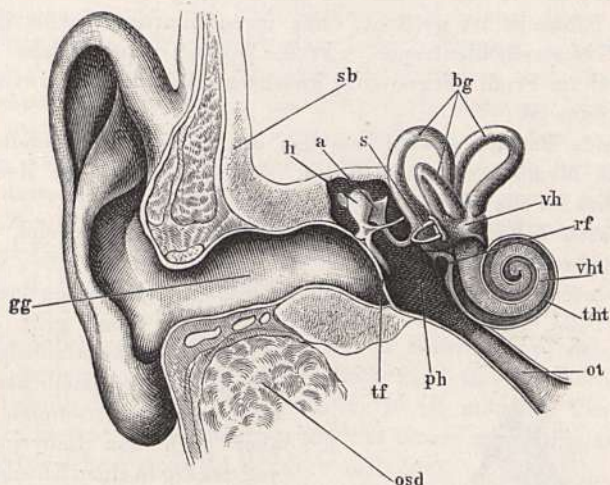
Der akustische Nerv findet seine Endausbreitung an sechs getrennten Stellen der Innenfläche des häutigen Labyrinthes. Je eine fleckenförmige an den beiden Säckchen des Vorhofes (sacculus *s* und utriculus *u*) und je eine leistenförmige an den sogenannten Ampullen, das sind flaschenförmige Erweiterungen am Beginn der häutigen Bogengänge (*o*, *a*, *h*). Die größte Masse der Fasern des Gehörnerven geht aber in die Achse der knöchernen Schnecke, um von dort aus die ganze Länge des häutigen Schneckenkanals (*D*, *D'*) mit Nervenendigungen zu versorgen.

Der häutige Schneckenkanal (*D*) erscheint im Querschnitt eines Schneckenanges dreieckig, wie Fig. 834 II zeigt. Seine äußere Wand ist mit der äußeren Wand der knöchernen Schnecke (*K*) verwachsen, seine innere und seine untere Wand sind frei. Dort, wo aber die innere und untere Wand zusammentreffen, sind beide an ein knöchernes Spiralblatt angewachsen, welches um die Achse der knöchernen Schnecke läuft und in das Innere des knöchernen Schneckenanges hineinragt (*Sp* I und II). In diesem Knochenblatt gehen nun die Fasern des Schneckenerven nach außen, um auf die innere Fläche der unteren Wand des häutigen Schneckenkanales zu gelangen, wo sie in einem sehr komplizierten Apparate, dem Cortischen Organ (*II*, *C*), ihr Ende finden. Die untere Wand des häutigen Schneckenkanales ist als

¹⁾ Ich verdanke diese treffliche Abbildung meinem Freunde V. v. Ebner.

Träger der Nervenenden von größter Wichtigkeit; sie bildet die direkte Fortsetzung des knöchernen Spiralblattes (*Sp*) und wird als Basilmembran (*II, B*) bezeichnet. Dieselbe besteht in der Hauptsache aus dicht gedrängten, radiär gespannten Fasern oder Saiten. Die Saiten sind nach Hensen wahrscheinlich für bestimmte Töne abgestimmt und erregen durch Mitschwingen die auf ihnen liegenden Nervenenden. Daß in der Schnecke ein Apparat

Fig. 835.



enthalten sein müsse, welcher nach dem Prinzip des Mitschwingens fungiert, hat zuerst v. Helmholtz ausgesprochen. Da die Basilmembran von unten nach oben breiter, beziehungsweise die Saiten derselben von unten nach oben länger werden, müssen die hohen Töne von der Basis, die tiefen von der Spitze der Schnecke aufgenommen werden. Die Basilmembran ist nach Hensen beiläufig 33,5 mm lang, ihre Breite wächst von der Basis zur Schneckenspitze von 0,041 bis 0,495 mm.

Die Nervenendstellen an den Säckchen und Ampullen sind vermöge ihrer anatomischen Einrichtungen zur Klanganalyse wohl nicht geeignet. Auf den Nervenendstellen der Säckchen, nicht aber auf jenen der Ampullen, befinden sich — in eine gallertige Masse eingeschlossen — kleine Kristalle aus kohlen-saurem Kalk, der sogenannte Ohrsand. Es ist möglich, daß alle diese Nervenendstellen Geräuschempfindungen vermitteln, da sie zur Klanganalyse nicht geeignet erscheinen.

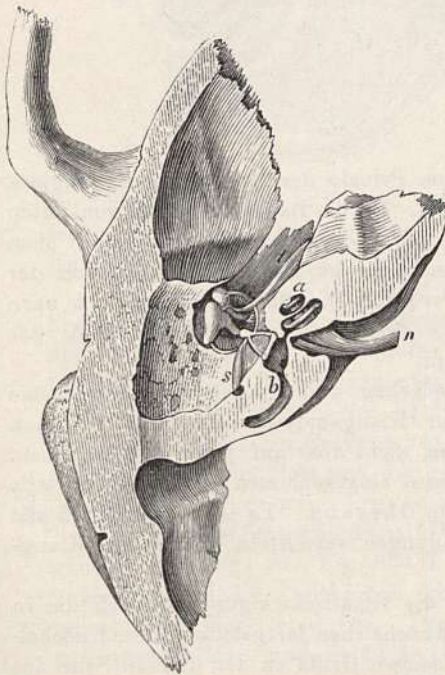
Zu dem Labyrinth werden nun die Schallschwingungen durch die in der Trommelhöhle befindlichen kleinen Knöchelchen fortgeleitet; diese Knöchelchen sind der Hammer, welcher mit seinem Griffe an der inneren Seite des Trommelfelles angewachsen ist; an den Hammer setzt sich der Amboß an, und mit diesem hängt durch das linsenförmige Knöchelchen des Sylvius der Steigbügel zusammen, dessen Tritt gerade das ovale Fenster verschließt. Aus der von Thomé entnommenen Übersichtsfigur, Fig. 835, in welcher der Deutlichkeit wegen die inneren Teile des Ohres unverhältnismäßig groß gezeichnet sind, ist ungefähr die gegenseitige Lage aller dieser Teile zu ersehen. *gg* ist der Gehörgang, welcher die Schall-

wellen von der Ohrmuschel zum Trommelfell führt. Das Trommelfell *tf* trennt die Trommelhöhle *ph* von dem Gehörgange. Durch die Ohrtrumpete *ot* steht die Trommelhöhle mit der Mundhöhle in Verbindung, so daß die Luft in der Trommelhöhle stets mit der äußeren sich ins Gleichgewicht stellen kann. *h* ist der Hammer, welcher einerseits an das Trommelfell angewachsen, mit seinem anderen Ende aber an den Amboß *a* angesetzt ist. *s* ist der Steigbügel, welcher, wie man sieht, das ovale Fenster verschließt, *rf* ist das runde Fenster; *vh* ist der Vorhof des Labyrinthes, *bg* sind die drei Bogengänge. Die Schnecke ist geöffnet, ohne ihren häutigen Inhalt dargestellt; *tht* ist die Trommelhöhlentreppe, *vht* die Vorhofftreppe, welche durch das (in Fig. 834 II im Profil dargestellte) knöcherne Spiralblatt teilweise von der ersteren getrennt ist.

Das runde Fenster sowohl wie das ovale sind, wie bereits bemerkt wurde, durch Membranen verschlossen. Auf der Mitte der Membran des ovalen Fensters ist die Platte des Steigbügels angewachsen.

Die inneren Teile des Gehörorganes sind nicht so freiliegend, wie es aus Fig. 835 etwa scheinen möchte; hier ist die knöcherne Hülle, welche das Labyrinth einschließt, der Deutlichkeit wegen ganz weggelassen.

Fig. 836.



Der Gehörgang selbst geht durch den Knochen des Schläfenbeines *sb* hindurch, die Trommelhöhle ist ringsum von Knochenwänden umgeben; aber auch das Labyrinth ist so vollständig in einen Knochen, welcher seiner Härte wegen den Namen des Felsenbeines trägt, eingewachsen, daß man es nur mit Mühe bloßlegen kann. Um eine richtige Vorstellung davon zu geben, wie die einzelnen Teile des Gehörganges in die Knochenmasse eingewachsen sind, ist in Fig. 836 ein wirklicher anatomischer Horizontaldurchschnitt desselben von der linken Schädelhälfte in natürlicher Größe, von oben gesehen, dargestellt. *a* ist der Durchschnitt der Schnecke, *b* einer der halbzirkelförmigen Kanäle, *n* der akustische Nerv, *t* das Trommelfell; auch der Hammer, Amboß und der Steigbügel sind in Fig. 836 deutlich zu erkennen.

Die Ohrmuschel dient dazu, die Schallwellen aufzunehmen und durch den Gehörgang zum Trommelfelle hinzuleiten; dadurch nun wird das Trommelfell in Vibrationen versetzt, die durch die Gehörknöchelchen zum Labyrinth geleitet werden. Durch einen Muskel (Fig. 836, *l*) kann das Trommelfell mehr oder weniger gespannt und nach innen gezogen, durch einen anderen Muskel (*s*, Fig. 836) kann der Steigbügel bewegt, dadurch aber auch natürlich die Intensität der Mitteilung des Schalles modifiziert werden.

Was die Funktionen des runden Fensters betrifft, so war man früher der Ansicht, daß es bestimmt sei, solche Schallwellungen aufzunehmen und der Schnecke zuzuführen, welche sich von dem Trommelfell auf die Luft in der Trommelhöhle fortgepflanzt haben. Eduard Weber hat aber gezeigt, daß diese Ansicht irrig sei. Nach ihm ist die *Fenestra rotunda* eine Gegenöffnung des Labyrinthes, welche dazu dient, die Mitteilungen der Bewegungen des Steigbügels an das Labyrinthwasser möglich zu machen. Wenn die Höhle des Labyrinthes nur eine Öffnung, das ovale Fenster, hätte, so könnten die Bewegungen des auf der verschließenden Membran dieser Öffnung befestigten Steigbügels nur dadurch dem Labyrinthwasser mitgeteilt werden, daß diese fast inkompressible Flüssigkeit komprimiert und dilatiert würde, was die schwachen Bewegungen des Steigbügels nicht zu leisten imstande sind. Die Stöße des Steigbügels werden vielmehr von dem ovalen Fenster zum runden Fenster durch das Labyrinthwasser hindurch fortgepflanzt und setzen die dasselbe verschließende Membran in entsprechende Schwingungen. Indem die Membranen des ovalen und des runden Fensters synchronisch hin und her schwingen, wird das zwischen ihnen befindliche Labyrinthwasser mechanisch, d. h. ohne Verdichtungs- und Verdünnungswellen, hin und her bewegt und mit ihnen die Nervenendapparate des häutigen Labyrinthes.

Das Wesentlichste am Gehörorgan ist der Gehörnerv; daher kann das Trommelfell verletzt und die Reihe der Gehörknöchelchen unterbrochen sein, ohne daß deshalb das Gehör ganz aufhört; ja bei manchen Tieren, wie bei den Krebsen, besteht das Gehörorgan nur aus einem mit Flüssigkeit gefüllten Bläschen, auf welchem sich der Hörnerv ausbreitet.

Säckchen und Bogengänge finden sich bei allen Wirbeltieren in guter Ausbildung, dagegen bleibt die Schnecke bei den Fischen ganz rudimentär und erreicht auch bei den Amphibien und den meisten Reptilien nur eine geringe Entwicklung.

Die Kette der Gehörknöchelchen des Menschen und der Säugetiere ist bei Vögeln und Reptilien durch ein einziges Knochenstäbchen, welches vom Trommelfell bis zum ovalen Fenster reicht, ersetzt.

Daß das Trommelfell in der Tat ganz dieselbe Rolle spielt wie die elastische Membran des Phonautographen, Fig. 804, d. h., daß sie ganz nach den in § 244 besprochenen Prinzipien durch die in den Gehörgang eintretenden Schallwellen in Vibrationen versetzt wird, geht auch daraus hervor, daß Politzer ganz ähnliche Zeichnungen, wie die in Fig. 805 dargestellten, einfach dadurch hervorbrachte, daß er den Scottschen Phonautographen ohne weiteres durch das Gehörorgan ersetzte. Das schreibende Stielchen war entweder auf dem Hammer, oder auf dem Amboß, oder endlich an der unteren Fläche des Steigbügels befestigt; die Töne wurden durch Orgelpfeifen erzeugt und im Ohre durch einen v. Helmholtz'schen Resonator verstärkt.

Daß das Gehörorgan sowie das Gesichtsorgan doppelt vorhanden, ist für die Physiologie von größter Bedeutung. Die beiden Ohren leisten nämlich viel mehr als das Doppelte eines Ohres. Professor A. Steinhauser¹⁾ hat nachgewiesen, daß durch das doppelte Vorhandensein des Gehörorgans, sowie insbesondere durch die Winkelstellung der Ohrmuscheln und die dadurch

¹⁾ Die Theorie des binauralen Hörens, Wien 1877.

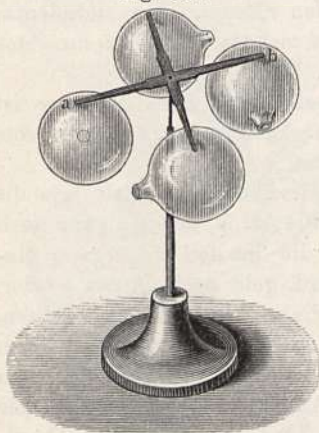
bedingten Intensitätsunterschiede der Schallempfindungen in den beiden Ohren es ermöglicht wird, Richtungswahrnehmungen zu machen, welche mit einem einzigen Ohre unmöglich wären. Der genannte Autor hat auch einen Apparat, Homophon genannt, konstruiert, welcher zum experimentellen Nachweise dieser Entdeckung geeignet ist. Derselbe besteht aus einer Vorrichtung, um in beiden Ohren gleichzeitig verschieden intensive, aber sonst gleichartige Schallempfindungen hervorzurufen, wodurch subjektive Täuschungen über die Schallrichtung veranlaßt werden, welche mit den Täuschungen des Stereoskops, welche wir in der Optik kennen lernen werden, eine gewisse Analogie besitzen.

§ 258. Akustische Bewegungerscheinungen. Daß durch die Wellen, welche von einer Schallquelle ausgehen, andere Körper in Schwingungen versetzt werden können, worauf eben deren Resonanz beruht, haben wir bereits erfahren. Daß durch sehr heftige Wellenbewegungen, z. B. durch einen Kanonenschuß oder eine Explosion, mechanische Wirkungen, Zertrümmerung von Glasscheiben usw. hervorgebracht werden, ist allbekannt. Weniger bekannt dagegen sind eine Anzahl von Versuchen mehrerer Physiker ¹⁾, durch welche mittels Schallwellen kontinuierliche Bewegungen, z. B. fort-dauernde Rotationen, bewirkt werden.

Wir wollen hier nur einige Beispiele beschreiben, welche Dvořák ²⁾ mitgeteilt hat.

Hängt man vor die offene Mündung einer Kundtschen Röhre (§ 214) an zwei Fäden eine beiderseits offene Glasröhre, welche auf den Ton der

Fig. 837.



Kundtschen Röhre abgestimmt ist, so auf, daß die Achsen beider Röhren zusammenfallen, so wird das Röhrrchen beim Tönen heftig abgestoßen. Dieselbe Erscheinung tritt auch bei einer einerseits geschlossenen Glasröhre auf, wo aber die Wirkung nicht so frappant ist wie bei der beiderseits offenen Röhre, welche keinen Angriffspunkt darzubieten scheint. Der Versuch kann auch mit einem Stimmgabelresonanzkästchen angestellt werden, vor dem man einen aus Papier gefertigten zylindrischen Resonator an Fäden aufhängt.

Wenn man das oben erwähnte Glasröhrrchen genügend verstimmt, so wird es angezogen statt abgestoßen. In großer Nähe der Kundtschen Röhre sowie bei sehr starkem Tönen wird es aber auch dann abgestoßen.

Um eine kontinuierliche Rotation hervorzubringen, befestigte Dvořák vier leichte gläserne Resonatoren von 44 mm Durchmesser und 4 mm Öffnung an einem leichten Holzkreuz, Fig. 837, von der Größe $ab = 85$ mm in der Weise, daß die Mündungen horizontal und tangential gleich gerichtet waren.

¹⁾ Lord Rayleigh, A. M. Mayer, E. Mach, A. Haberditzel, Dvořák.

²⁾ Wien. Akad. Ber. 72 (1875).

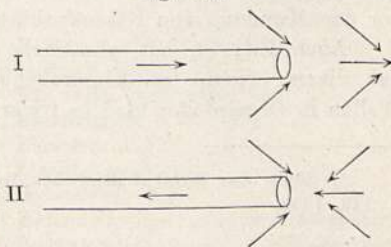
Das Holzkreuz ruhte auf einer Spitze. Dieser Apparat kann bis auf 40 cm Abstand vom Resonanzkasten einer Stimmgabel vom Ton g^1 (392 Schwingungen) noch in Rotation versetzt werden. Jeder Resonator wird dabei stets in der Richtung seiner Achse abgestoßen, so daß die Kraft gegen seine Mündung gerichtet scheint. Es kann deshalb der Apparat auch mit einem einzigen Resonator rotieren.

Außer diesen Versuchen sind noch viele andere beschrieben, welche noch nicht alle erklärt sind. Die Erklärung der obigen beruht auf folgenden Erwägungen. Wenn ein Resonator tönt, so treten an seiner Mündung die Luftmassen aus und ein. Beim Austreten der Luftmassen findet eine Reaktionswirkung statt, welche jener am Segnerschen Wasserrade analog ist, beim Einsaugen der Luft würde diese Reaktionswirkung wieder durch entgegengesetzte Aktion aufgehoben werden, wenn diese der Aktion beim Austritt an Größe gleich wäre. Gerade dies ist aber nicht der Fall.

Um dies einzusehen, denken wir uns den Fall einer Kanone, welche infolge des Schusses einen Rückstoß erleidet. Was würde nun geschehen, wenn umgekehrt das Geschöß durch Verdünnung der Luft im Rohr von der Mündung aus zurückgesaugt würde? Das Geschöß würde nur ein wenig nach vorn bewegt, käme aber sofort zur Ruhe, da das Geschöß seine nach einwärts erlangte Geschwindigkeit an das Geschütz abgeben würde. Könnte das Geschöß durch das Rohr hindurchfliegen und seine Bewegung nach rückwärts fortsetzen, so wäre die Wirkung ein Vorstoß analog dem Rückstoß infolge des Schusses. Dies hat schon Guericke mit seiner Verdünnungswindbüchse gezeigt.

Man braucht nur das Gesetz der Erhaltung des Schwerpunktes in Anwendung zu bringen, um dies zu verstehen. Geschütz und Kugel haben einen gemeinsamen Schwerpunkt, welcher unverrückt bleibt, wenn nicht äußere Kräfte einwirken. Wäre also keine Bodenreibung usw., so würde nach dem Schusse die Kugel nach vorn und das Geschütz nach rückwärts fortgehen, so daß der gemeinschaftliche Schwerpunkt unverrückt bliebe. Denken wir uns aber jetzt die Kugel an die Mündung des evakuierten Rohres gehalten und den Luftdruck auf dieses System wirkend, so werden Geschütz und Kugel sich mit Geschwindigkeiten, welche verkehrt wie ihre Massen sich verhalten, gegeneinander bewegen und durch unelastischen Stoß zur Ruhe kommen.

Fig. 838.



Ganz ähnlich verhält es sich bei einem Segnerschen Rade passender Konstruktion, wenn man an dem Zuführungsrohre desselben abwechselnd bläst oder saugt. Das Blasen treibt das Rad, das Saugen nicht (oder doch nur im ersten Moment). Befestigt man daher am Zuführungsrohr einen Kautschukballen, den man abwechselnd drückt und sich wieder ausdehnen läßt, so kommt das Rad in dauernde Rotation. Der Kautschukballen kann aber nach Mach auch durch eine mit einer Membran versehene tönende Pfeife ersetzt werden.

Die Anwendung auf die Resonatoren ergibt sich demnach von selbst. Der Rückstoß beim Austritt der Luft wird nicht durch einen gleichen Vorstoß beim Eintritt derselben ausgeglichen, daher eine andauernde Rückwärtswirkung resultieren muß.

Um die Erscheinungen an der beiderseits offenen Resonanzröhre begreiflich zu machen, müssen wir überdies an das Phänomen des aerostatischen Paradoxons erinnern (§ 188).

Hält man eine Glasröhre mit der Mündung in eine Flamme oder Rauchwolke, so kann man sich überzeugen, daß die Bewegungen der Luftmassen vor der Mündung beim Blasen und Saugen nicht genau in entgegengesetzter Weise vor sich gehen.

Beim Blasen wird die Luft, wie Fig. 838 I zeigt, in der Achsenrichtung fortgestoßen und zugleich von seitwärts angesaugt. Beim Saugen wird die Luft von allen Seiten angesaugt, Fig. 838 II. Es kann daher auch die Resultierende der beiden Wirkungen nicht gleich Null sein. Denkt man sich jetzt eine beiderseits offene Resonanzröhre, welche an beiden Enden Luft ein- und austreten läßt, während sie tönt, so könnte, wenn die Schallbewegung an beiden Mündungen gleich intensiv wäre, durch die symmetrische Wirkung der beiderseitigen Resultierenden keine Bewegung der Röhre bewirkt werden. Diese Gleichheit ist aber eben nicht vorhanden, wenn die Röhre mit der einen Mündung der Schallquelle näher ist als mit der anderen, folglich wird es in diesem Falle zu einer Bewegung der Röhre in der Achsenrichtung kommen müssen.

Auf analoge Weise müssen auch die Rotationen der sogenannten Schallradiometer Dvořáks ihre Erklärung finden. Es sind dies um ihre vertikale Achse rotierende, mit leichten vertikal stehenden Flügeln aus Karton versehene Rädchen, bei welchen die Flügel mit konischen, also nach beiden Seiten unsymmetrisch gestalteten Löchern bedeckt sind. Dieselben rotieren vor der Mündung von Resonanzkästen.

Auch Edison hat akustische Rotationsapparate gebaut. B. Davis¹⁾ hat dieses Prinzip zur Untersuchung der Knoten und Bäuche stehender Wellen in Orgelpfeifen und in freier Luft angewendet.

¹⁾ Siehe das Referat hierüber in Zeitschr. f. Instrumentenkunde, Bd. XXII, S. 129, 1902.



NAMEN- UND SACHREGISTER.

A.

Abplattung der Erde 303.
 Achse, freie 317.
 Adhäsion 336.
 Äther 15.
 Aggregatzustand 18.
 Airy, Dichte der Erde 308.
 Akkorde 629, 635.
 d'Alembert, Konsonanz 757.
 " Maß der Kraft 233.
 " Zeitvergleichung 13.
 Alkoholometer 389.
 Althans, Reaktionsrad 407.
 Amagat, Gesetz von Boyle 469.
 Amplitude 161.
 Amsler, Planimeter 68.
 Aneroid 445.
 Anisotrop 14.
 Appun, Hörgrenze 659.
 Aräometer 387.
 Arago, Vakuummessung 441, 495.
 " Gesetz von Boyle 456, 468.
 Arbeit 231, 235.
 Archimedes, Prinzip 366.
 Aristoteles, Gewicht der Luft 416.
 Arlandes, Marquis v., Luftballon 536.
 Arzberger, Wasserluftpumpe 510.
 Atmosphärendruck 426.
 Atomgewicht 32.
 Atomtheorie 30.
 Atwood, Fallmaschine 118.
 d'Aubuisson, Ausflußmenge 525, 529.
 Auerbach, F., Minimum, der Schall-
 impulse 662.
 " Vokaltheorie 779.
 Ausdehnung (Raumerfüllung) 15.
 Ausflußmenge 400.
 Avogadro, Volumgesetz 415.

B.

Babinet, Hahn 477.
 Bäume 559.
 Baille, Dichte der Erde 308.

Barie (Druckeinheit) 427.
 Barometer 425.
 " Konstruktion 427, 430.
 Barometerprobe 472.
 Basilmembran 787.
 Baumé, Aräometer 388.
 Baumgarten, Reflexöne 663.
 Beck, Aräometer 388.
 Beharrungsvermögen 17.
 Bernoulli, D., Schiffsschraube 542.
 Beschleunigung 102.
 Bessel, Pendelreduktion 301.
 Bessel-Hagen, Quecksilberluftpumpe
 492.
 Beweglichkeit 17.
 Bewegung 12.
 Bewegungen, Einteilung der 100.
 " fortschreitende u. drehende
 178.
 " harmonische oder schwin-
 gende 159, 164.
 Bewegungsgesetze Newtons 106.
 Bewegungsgröße 231.
 Bianchi, Luftpumpe 479.
 Blasebalg 518.
 Blaserohr 531.
 Blechlehre 47.
 Bodendruck 362.
 Bohnenberger, Präzessionsapparat 318.
 Boltzmann, A. u. L., Wellenmaschine
 593.
 Boltzmann, L., Dichte der Luft in
 Pfeifen 627.
 " stroboskopische Me-
 thoden 669.
 Bosscha, J., Schallgeschwindigkeit 570.
 Bourdon, Aneroid 445.
 Boyle, Gasgesetz 452, 467.
 Brachydiagonale 25.
 Bremsdynamometer 352.
 Briefwage 332.
 Brücke, E., Stoßapparat 586.
 Brückenwage 224.
 Brunnen, intermittierender 422.
 Buff, Ausströmen von Gasen 525, 529.
 Bumerang 322.

Bunsen, Ausflußgeschwindigkeit der Gase 526, 527.
 „ Wasserluftpumpe 508.

C.

Cagniard la Tour, Elastizität 332.
 „ „ „ Sirene 653.
 Cartesianischer Taucher 371.
 Cartesius, Bewegungsgröße 232.
 Cartier, Aräometer 388.
 Cavendish, Lotablenkung 308.
 Charles, Gasgesetz 457.
 „ Luftballon 536.
 Chladni, Klangfiguren 696.
 „ Tonleiter 636.
 Chronographen 85 bis 86.
 Chronometer 82.
 Clement u. Desormes, aerostatisches Paradoxon 529.
 Colladon u. Sturm, Schallgeschwindigkeit 579.
 Colloidsubstanz 19.
 Coriolis, lebende Kraft 232.
 Cornu, Dichte der Erde 308.
 Corti, Gehörorgan 786.
 Crookes, Quecksilberluftpumpe 506.
 Crova, Wellenmaschine 566.
 Cuvier, Stimmorgan der Vögel 775.

D.

Dampfstrahlpumpe 531.
 Dasymeter 533.
 Davis, B., Orgelpfeifen 792.
 Deleuil, Luftpumpe 481.
 Densimeter 386.
 Dezimalwage 225.
 Dichte 98, 374.
 Dichte der Erdmasse 307.
 Dieterici, Pneumatometer 461.
 Differentialflaschenzug 255.
 „ -schraube 271.
 „ -wellrad 254.
 Differenztöne 753.
 Dimensionen 112.
 Dissonanz 630.
 Doppler, Prinzip 663.
 „ stroboskopische Methode 617.
 Dove, Sirene 749.
 Drehachsen, konjugierte 286.
 Drehpaar 185.
 Dreiklang 635.
 Drillbohrer 271.
 Druck 344.
 Drucklibelle 462.
 Druckpumpe 424.
 Duhamel, stabiles Schwimmen 373.
 Duodezime 631.
 Dur-Skala 633, 634, 636.

Dvořák, akustische Bewegungen 790.
 „ Schallmanometer 627.
 „ Schall im Vakuum 551.
 „ Schallradiometer 792.
 „ Variationston 756.
 Dynamometer 332.
 Dyne, Kräfteinheit 235.

E.

Ebene, schiefe 133, 262.
 Echo 584.
 Edelmann, M. Th., Galtonpfeife 660.
 „ Pneumanometer 461.
 Edison, Phonograph 781.
 Effekt (Leistung) 237.
 Eigenton des Resonators 763.
 Eisenlohr, Pendelapparat 686.
 Elastizität 325.
 Elastizitätsgrenze 329.
 „ -koeffizient 327.
 „ -modulus 327.
 Element 32.
 Elsässer, W., Apparat für Dopplers Prinzip 666.
 Energie 242.
 Erg (Arbeitseinheit) 236.
 Euklides, Theorie der Konsonanz 757.
 Euler, Theorie der Konsonanz 757.
 Exner, S., Minimum der Schallimpulse 662.
 Expansivkraft 414.
 Exzentrik 267.

F.

Faber, Sprechmaschine 776.
 Fall, freier 114.
 „ durch die Sehne 135.
 „ über die schiefe Ebene 133.
 Fallmaschine 114.
 Fallrinne 134.
 Fallschirm 540.
 Faraday, aerostatisches Paradoxon 530.
 „ Klangfiguren 701.
 Federwage 330.
 Fehler, mittlerer u. wahrscheinlicher 67.
 Festigkeit 326, 334.
 Feuerspritze 514.
 Flächenmaße 40.
 „ -messung 68.
 Flammen, manometrische 619, 623.
 „ singende 613, 619.
 Flaschenzug 252.
 Fledermaus, künstliche 544.
 Fleuß, Ölluftpumpe 483.
 Flieger 543.
 Fliehkraft 150.
 Flüssigkeitszerstäuber 532.
 Fortin, Barometer 434.

Foucault, Pendelversuch 313.
 Fourneyron, Turbine 407.
 Friktionsrollen 348.
 Fühlhebel 45.
 „ , Komparator 50.
 Fühlniveau-Sphärometer 49.

G.

Galilei, G., freier Fall 114.
 „ Fallrinne 134.
 „ Fall durch die Sehne 135.
 „ Gewicht der Luft 416.
 „ Horror vacui 424.
 „ Pendelgesetze 169.
 „ Pendeluhr 311.
 Galtonpfeife 860.
 Gasbehälter 515.
 Gase, Verzeichnis der 416.
 „ Ausströmen der 523.
 Gasometer 515.
 Gassäcke 517.
 Gay-Lussac, Ballonfahrt 536.
 „ Barometer 438.
 „ Gesetz 457.
 „ Volumeter 384.
 Gebläse 518.
 Gefäßbarometer 433.
 Gefäßheberbarometer 439.
 Gefäße, kommunizierende 360.
 Gehörorgan 785.
 Geigenprinzipal 770.
 Geißler, Quecksilberpumpe 486.
 Geräusch 547, 567.
 Gerykpumpe 483.
 Geschwindigkeit 101.
 Geschwindigkeit des Schalles 568, 572,
 576, 579, 580.
 Geschwindigkeitspolygon 125.
 Gewicht, Gewichtssätze 96.
 „ spezifisches 374.
 Gewichtsaräometer 383.
 Giftheber 421.
 Gill, Rob., Ölluftpumpe 483.
 Gingham, Quecksilberluftpumpe 496.
 Glasfeder (Kundt) 505.
 Glasharmonika 696.
 Gleichgewicht aufgehängter Körper 194.
 „ aufgestellter Körper 197.
 „ schwebender und schwim-
 mender Körper 370.
 Gleitmaschine 262.
 Glockengasometer 516.
 Glycerinbarometer 449.
 Gravitation 18, 113.
 Gravitationskonstante 309.
 Graßmann, Hahn 479.
 „ Vokaltheorie 777.
 S'Gravesande, Elastizität 327.
 Grenzen der Hörbarkeit 658.

Grimsehl, Saitenschwingungen 688.
 Groth, Kristall 19.
 Grützen, Vokaltheorie 776.
 Grundstoffe 15, 32.
 Guericke, Otto v. 481.
 Guillet, Stimmgabel 653.
 Gyroskop 318.

H.

Haberdtzel, Variationstöne 756.
 Härte 326.
 Hagenbach, Wasserluftpumpe 509.
 Hahnluftpumpe 478.
 Harmonie 629.
 Harmonika, chemische 613.
 Hartmann-Kempff, Stimmgabelschwin-
 gungen 696.
 Helmholtz, H. v., physik. Methode 519.
 „ Doppelsirene 751.
 „ elektromagn. Stimm-
 gabel 651.
 „ Gaswirbel 533.
 „ Grenze der Hörbar-
 keit 658.
 „ Klangfarbe 771.
 „ Kombinationstöne
 754.
 „ Konsonanztheorie
 756, 757.
 „ Resonanzröhren 611.
 „ Resonatoren 763.
 „ Schallgeschwindig-
 keit 570.
 „ Tonartencharakter
 637.
 „ Tonhöhe einzelner
 Impulse 663.
 „ Vibrationsmikroskop
 678, 682.
 „ Vokaltheorie 778.
 Hebel 259.
 Heber 420.
 Heberbarometer 435.
 Helmholtz, F. R., Schwere 305, 307.
 Hemiedrie 27.
 Hermann, Einfluß der Phase auf den
 Klang 785.
 Heronsball 512.
 Heronsbrunnen 513.
 Hertz, Spannkraft des Quecksilbers 505.
 Heterotrop 14.
 Höfler, A., Wellenmaschine 564, 592.
 Hörrohr 585.
 Homogen 14.
 Hookes, Elastizitätsgesetz 328.
 „ Radbarometer 449.
 Hopkins, Schwingungsknoten in Pfeifen
 622.
 Horizontallängenkomparator 51.

Horizont, künstlicher 91.
 Huygens, Chr., Barometer 448.
 „ Pendeluhr 311.
 „ Zykloidenpendel 176.
 Hydraulische Presse 356.
 Hydraulischer Widder 409.
 Hydrometer von Alexander 392.

I.

Impuls 232.
 Injektor 531.
 Instrumente, musikalische 768.
 Intervalle 629.
 Isotrop 14.

J.

Jaeger, W., Schallgeschwindigkeit 625.
 Jolly, Federwage 330.
 „ Schwermessung mit Wage 306.
 Joule (Einheit der Energie) 235.

K.

Kahl, Schallgeschwindigkeit 571.
 Kahlbaum, Quecksilberluftpumpe 498.
 Kaleidophon 684.
 Kapillardepression 432, 442.
 Kapillarröhren, Ausfluß durch 405.
 Kathetometer 54.
 Kaufmann, W., Quecksilberluftpumpe 501.
 Kautschukgebläse 518.
 Keil 262.
 Kempelen, W. v., Vokaltheorie 776.
 Kilogramm 97.
 Kilogrammter 235.
 Kirchhoff, physikalische Methode 9.
 „ Schallgeschwindigkeit 570.
 „ Theorie d. Klangfiguren 704.
 Kirpitschhoff, Gesetz von Boyle 471.
 Klang 547, 568.
 Klanganalyse 762.
 Klangfarbe und Schwingungsform 760.
 „ der musikal. Instrumente 768.
 „ der Sprachlaute 776.
 Klangfiguren 696.
 „ Theorie 701.
 Kniepresse 272.
 Knoblauch, Pendelapparat 686.
 Knotenlinien 697.
 Knotenpunkte 559.
 Koch, Ausströmen von Gasen 525.
 König, R., manometrische Flammen 623.
 „ Grenzen der Hörbarkeit 659.
 „ Phasendifferenz 761.
 „ Resonatoren mit Flammen-
 zeigern 765.
 „ Schallgeschwindigkeit 570.

König, R., Einfluß der Temperatur auf
 die Stimmgabel 649.
 „ Stoßtöne 746.
 Körting, Wassergebläse 532.
 Koexistenz der kleinen Bewegungen 589.
 Kohlrausch, Fr., Pneumatometer 450,
 461.
 Kohlrausch, W., Minimum der Schall-
 impulse 662.
 Kombinationstöne 753.
 Komponenten 124.
 Kompressionspumpe 511.
 Konsonanz 630.
 „ und Dissonanz, Theorie 756.
 Kopp, H., Volumenometer 464.
 Kräfte, Einteilung derselben 108.
 Kräftepaare 184.
 Kraft 106.
 Kraftantrieb 231.
 Kraft, lebendige 231, 239.
 Kratzenstein, Vokaltheorie 776.
 Kravogl, Quecksilberluftpumpe 490.
 Krigar-Menzel, Saitenschwingungen
 740.
 Krigar-Menzel, Schwere 307.
 Kristall, Kristallisation 19.
 Kristallographie 21.
 Kristalloidsubstanz 19.
 Kristallsysteme 21.
 Kundt, Glasfedern 505.
 „ Manometer 625.
 „ Röhren 624.
 „ Schallgeschwindigkeit 570.

L.

Laboulaye, Maschinen 245.
 Labyrinth 788.
 Längeneinheit 37.
 „ -maße 40.
 „ -teilmaschine 64.
 Lagrange, Saiten 687.
 Lahr, J., Vokaltheorie 785.
 Landois, Tierstimmen 776.
 Lang, V. v., Schwingungen von Kaut-
 schukfäden 689.
 Laplace, Pendelreduktion 301.
 „ Schallgeschwindigkeit 574.
 „ Schwere 303.
 Lehmann, Kristalle 19, 20.
 Leibnitz, lebendige Kraft 232.
 „ Theorie der Konsonanz 757.
 Leistung (Effekt) 237.
 Leitstrahl 147.
 McLeod, Vakuummesser 504.
 Leonardo da Vinci, Perpetuum mo-
 bile 275.
 Leslie, Schall im Vakuum 550.
 Libelle 72.
 Lignum psalterium 696.

Lippich, Universalkaleidophon 685.
 Lissajous, Figuren 671, 676, 679.
 „ Komparator 678.
 Liter 95.
 Longitudinalschwingungen 704.
 Luft als Motor 521.
 Luftballon 535.
 Luftdruck 416.
 „ berechnet aus Barometerstand
 445.
 „ Wirkung auf menschlichen
 Körper 450.
 Luftpumpe 471.
 Lummer, O., Mikrophonresonator 756,
 765.

M.

Mach, E., Begriff der Kraft 107.
 „ Dopplers Prinzip 666.
 „ Methode der Physik 9.
 „ Pendelapparat 173.
 „ Schema der Konsonanz 758,
 759.
 „ stroboskopische Methoden 627,
 668 bis 670.
 „ Schallgeschwindigkeit 571.
 „ Tafel der Kombinationstöne
 755, 756.
 „ Wellenmaschine 563.
 Mälzel, Metronom 312.
 Magdeburger Halbkugeln 481.
 Makrodiagonale 25.
 Manometer 458.
 Mariotte, Flasche 396.
 „ Gesetz 452.
 Marloye, Stimmgabelkasten 648.
 Maschinen 245.
 „ konstruktive Elemente der 273.
 Maskelyne, Pendelablenkung 308.
 Masse, Begriff 92.
 „ dynamisches Maß der 109.
 Masseneinheit 94.
 Maxwell, J. Cl., wissenschaftl. Appa-
 rate 6.
 Mayer, J. R., Methode der Physik 9.
 „ Erhaltung d. Energie 243.
 Megabarie 427.
 Melde, Fadenwellen 605.
 „ Universalkaleidophon 685.
 Melodie 629.
 Mendelejeff, spez. Gew. d. Alkohols 389.
 „ Boyles Gesetz 471.
 Meniskushöhe im Barometer 432.
 Mersenne, Saitenschwingungen 686.
 „ Schallgeschwindigkeit 568.
 „ Tonhöhe 567.
 Messen, Messung 36.
 Metazentrum 373.
 Metallbarometer 445.

Meterkilogramm 235.
 Metrisches System 37.
 Metronom 312.
 Mikrometerschraube 44, 47.
 Mikrophonresonator 765.
 Mil (Milliliter) 544.
 Mittagsverbesserung 91.
 Mixturregister 770.
 Mohr, Wage 377.
 Moll 569.
 Mollskala 633, 634.
 Monochord 629.
 Montgolfier, Ballon 535.
 „ Stoßheber 409.
 Mos, Pendelapparat 686.
 Müller, Joh., menschl. Stimmorgan 773.
 Muschenbrock, Festigkeit 335.

N.

Naturtöne 769.
 Neesen, Quecksilberpumpe 492.
 Neumann, C., Trägheitsgesetz 107.
 Newton, Bewegungsgesetze 106.
 „ Gravitationsgesetz 113.
 „ Pendelreduktion 300.
 „ Pendelversuche 170.
 „ Schallgeschwindigkeit 547, 572.
 Nicholson, Aräometer 383.
 Niveauprüfer 75.
 Niveauschichten 358.
 Nonius 42.

O.

Oberfläche, freie, der Flüssigkeit 358.
 Obertöne 691.
 Oettingen, A. v., Harmoniesystem 637.
 Ohr 787.
 Oktave 630.
 Orgelpfeifen 619, 622, 627.

P.

Palmer, Mikrometer 47.
 Pansflöte 768.
 Paradoxon, aërostatiches 529.
 „ hydrostatiches 362.
 Parallelogramm der Beschleunigung 126.
 „ „ Geschwindigkeit 122.
 „ „ Kräfte 127.
 Pascal, Luftdruck 425.
 Peltonrad 408.
 Pendel, einfaches 167.
 „ physisches 285.
 „ angewendet zur Schweremessung
 292.
 Pendelgesetze Galileis 169.
 „ Ableitung 173.
 Pendellänge, reduzierte 285.

Pendeluhr 311.
 Pepy, Gasometer 515.
 Perpetuum mobile 274.
 Pfaunder, L., Apparat für Seitenab-
 weichung rotierender
 Geschosse 321.
 „ Bumerang 323.
 „ Apparate für Lissa-
 jous-Figuren 667, 682,
 684.
 „ Minimum der Schall-
 impulse 662.
 „ Spannkraft des Queck-
 silbers 505.
 „ mechan. Reinigung des
 Quecksilbers 428.
 „ Wellenmaschinen 565,
 592, 735.
 Phasen, Phasendifferenz 161.
 „ Einfluß auf Klangfarbe 761.
 Phonograph 650.
 Phonograph 781.
 Phronomie 100.
 Physik, Aufgabe der 2.
 „ Einteilung 10.
 „ Methode 6.
 Pilatre de Rozier, Ballonfahrt 535.
 Pitotsche Röhre 412.
 Planimeter 68.
 Plastizität 325.
 Plateau, stroboskop. Methode 617, 668.
 Platten, schwingende 696.
 Pneumatische Post 521.
 Pneumatometer 462.
 Pogendorff, Präzession 318.
 „ Quecksilberluftpumpe
 491.
 „ Spiegelablesung 45.
 „ Wage 226.
 Poisseuille, Ausfluß aus Kapillaren 405.
 Poisson, Zeitdefinition 13.
 „ Elastizität 322.
 Porosität 17.
 Potenzflaschenzug 252.
 Pouillet, Druckapparat 467.
 Preyer, W., Grenze der Hörbarkeit 658,
 661.
 Prinzipalstimmen 770.
 Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit
 251.
 Pronys Zaum 352.
 Pycnometer 380.
 Pythagoras, Intervalle 567.
 „ Konsonanz 757.
 „ Tonleiter 633.

Q.

Quarte 631.
 Quecksilberdampftension 444.

Quecksilberdestillation 429.
 Quecksilberluftpumpe 484.
 „ nach Geißler 485.
 „ „ Töppler 492.
 „ „ Pogendorff
 491.
 „ „ Kravogl 490.
 „ „ Schuller 492.
 „ „ Sprengel 485
 und 496.
 „ „ Schantel-Kahl-
 baum 498.
 „ „ Kaufmann 501.
 Quecksilberreinigung 427.
 Quintaten 770.
 Quinte 631.

R.

Räderwerke 255.
 Radakovic, Saitenschwingungen 688.
 Radius vector 147.
 Rameau, Theorie der Konsonanz 757.
 Rampe 262.
 Raps, A., stroboskop. Untersuchungen 627.
 „ Saitenschwingungen 740.
 Rauchringe 532.
 Raum 11.
 Rausch, singende Flammen 615.
 Reaktion ausström. Flüssigkeiten 406.
 Realsche Presse 365.
 Reduktion der Wägungen 533.
 Reflexion der Wellen 585.
 Reibung, gleitende 343.
 „ wälzende 346.
 „ Nutzen der 349.
 Reibungswiderstand von Flüssigkeiten 404.
 Reichert, Blaserohr 531.
 „ rotierender Spiegel 616.
 Régnault, V., Gesetz von Boyle 456,
 459, 468.
 „ Schallgeschwindigkeit 569.
 „ Volumenometer 466.
 Resonanz 601.
 Resonanzboden 630, 769.
 „ -röhren 608.
 Resonatoren 763.
 Ressel, Jos., Schiffsschraube 542.
 Resultierende 124.
 Reuleaux, Maschine 245.
 „ kinematische Kette 273.
 Reversionspendel 290.
 Richarz, F., Wellenmaschine 562.
 „ Schwere 307.
 „ „ „
 Röntgen, W. C., Pneumatometer 461.
 Rohrpost 521.
 Rolle 247.
 Rollen (als Bewegung) 282.
 Rotationsapparate 257.
 „ -gebläse 520.

Rotierende Körper 316.
 " Geschosse 320.
 Le Roux, Schallgeschwindigkeit 569.

S.

Saitenschwingungen 686, 740.
 Samojloffs Saitenschwingungen 740.
 " Resonatorscheibe 767.
 Saugpumpe 422.
 Saussure, Schall 550.
 Sauveur, absolute Tonhöhe 644.
 " " Stöße 744.
 Savart, Klangfiguren 697, 700.
 " Kontraktion des Strahles 401.
 " Minimum der Schallimpulse 662.
 " Pfeifen 627.
 " Resonanzapparat 612.
 " Zahnsirene 657.
 Say, Volumenometer 463.
 Schaffgotsch, singende Flammen 615.
 Schaik, van, Wellenmaschine 562.
 Schall 547.
 Schallempfindung 567.
 " -fortpflanzung 550.
 " -radiometer 792.
 " -reflexion 581.
 " -wellen 551, 556.
 Schantel, Quecksilberluftpumpe 498.
 Schaumburg, Fr., Klangfiguren in
 Röhren 625.
 Scheibler, Stimmung 645.
 " Stöße 745.
 Schiffsschraube 542.
 Schleuder 155.
 Schmidt, A., Wassermotor 408.
 " W., Wellenmaschine 593.
 Schneckenrad 258.
 Schnellwage 224.
 Schraube 268, 269.
 " ohne Ende 272.
 Schraubenpresse 270.
 " dampfer 542.
 " -winde 269.
 Schublehre 46.
 Schubring, Resonator 764.
 Schuller, Quecksilberluftpumpe 492.
 Schulze, F. A., Grenze d. Hörbarkeit 661.
 " Schallgeschwindigkeit 570.
 " R., Klangfiguren 699.
 Schwebungen 743.
 Schwere 18, 113.
 Schwerebeschleunigung 302, 315.
 Schwerpunkt 190.
 Schwingungsdauer 161.
 " -form 760.
 " -kurve 167.
 " -punkt 285.
 " -zahl 161, 641, 644, 650.
 Schwingmaschine 151.

Seebeck, Minimum d. Schallimpulse 662.
 " Sirene 655.
 Segner, Wasserrad 407.
 Seitendruck 365.
 Senguerd, Hahn 475.
 Senklot 72.
 Sexte 631.
 Sicherheitsröhre 458.
 Silbermann, Luftpumpe 512.
 Sirene von Cagniard la Tour 653.
 " " Savart 657.
 " " Seebeck 655.
 " mehrstimmige, von Dove und
 v. Helmholtz 749.
 Skalenröhre 384.
 Smith, Rob., Konsonanztheorie 757.
 Sondhaus, Tonbezeichnung 644.
 " Resonatorformel 764.
 Sorge, Kombinationstöne 753.
 Spannkraft 414.
 Spezifisches Gewicht 98, 374, 376.
 " " Tabelle 393.
 Spiegel, rotierender 616.
 Spiralfeder 543.
 Sprachrohr 585.
 Sprengel, Pyknometer 380.
 " Quecksilberluftpumpe 485, 496.
 Spritzflasche 512.
 Sprödigkeit 326.
 Stäbe, schwingende 693.
 Standfestigkeit 197.
 Stechheber 420.
 Stefan, J., Adhäsion 337.
 Stehaufmännchen 198.
 Steinhauser, binaurales Hören 789.
 Stereometer 463.
 Sterneck, v., Pendelapparat 302.
 Stevens, Schiffsschraube 542.
 Stevin, schiefe Ebene 275.
 Stimmgabel 648.
 " elektromagnetische 651.
 " , Chronograph 653.
 Stimmorgan der Menschen 772.
 " " Tiere 775.
 Stimmung, Arten derselben 645.
 Stöße 743.
 Stokes, Schall im Vakuum 551.
 Stoß 337.
 " elastischer 340.
 " unelastischer 338.
 Stoßheber 409.
 Stoßtöne 743.
 Strehlke, Klangfiguren 700, 704.
 Streichinstrumente 769.
 Stroboskopie 617, 667.
 Summationstöne 754.

T.

Tantalusbecher 421.
 Tartini, Kombinationstöne 753.

Taylor's Formel über Saiten 687.
 Teilbarkeit 15.
 Temperatur, musikalische 643.
 Terpander, Tonleiter 633.
 Terz 631.
 Theodolit 76.
 Thiesen, M., Manometer 459.
 " Schwere 307.
 Toepler, A., Dichte der Luft in Pfeifen 627.
 " Drucklibelle 462.
 " Quecksilberluftpumpe 492.
 " stroboskop. Methode 668.
 Ton 547, 629.
 Tonhöhe 567.
 Tonleiter 632.
 " Erweiterung 637.
 " Reduktion 642.
 " chromatische 642.
 " diatonische 633.
 " pythagoräische 633.
 Torricelli, Gewicht der Luft 416.
 " Versuch 424, 425.
 " Ausflußtheorem 394.
 Torsionselastizität 333.
 " -kraft 334.
 Trägheit 17.
 Trägheitsmoment 277.
 " Berechnung 278.
 " experimentelle Bestimmung 281, 290.
 Tralles Alkoholometer 350.
 Transversalschwingungen 693.
 Travers, Kitt 508.
 Trommelfelhöhle 785.
 Tumlirz, Schallgeschwindigkeit 571.
 Turbinen 407.
 Tyndall, Reflexion des Schalles 585.
 " " der Seilwellen 589.
 " singende Flammen 615.
 " Vokalflamme 780.

U.

Uhren 81.
 Unabhängigkeitsprinzip 122.
 Undurchdringlichkeit 15.
 Unterbrechungsgabel 653.

V.

Vakuummesser 504.
 Vakuumpfen 507.
 Variationston 756.
 Ventilatoren 520.
 Ventilluftpumpe 473.
 Ventilmanometer 626.
 Vernier 42.
 Vertikalkomparator 57.
 Vexierbecher 421.

Vibrographie 650.
 Vidi, Aneroid 446.
 Virtuelle Geschwindigkeit 251.
 Viviani, Torricellis Versuch 424.
 Vokale, künstliche 779.
 Vokalflamme 780.
 Volumenometer 463.
 Volumeter 384.
 Volummasse 40.
 Volummessung 71.

W.

Wage, verschiedene Arten 222 bis 224.
 " hydrostatische 376.
 " Mohrsche 377.
 " Poggendorffsche 226.
 " Empfindlichkeit 204.
 " Richtigkeit 199.
 " Konstruktion u. Rektifikation 210.
 " Gebrauch 218.
 Waltenhofen, A. v., Quecksilberluftpumpe 503.
 Wasserluftpumpe 508.
 Wassermotoren 407.
 Wasserpumpe 422.
 Wassertrommelgebläse 508, 510.
 Wasserwage 361.
 Waßmuth, Schallgeschwindigkeit 575.
 Watt (Einheit der Leistung) 237.
 Weber, Gebrüder, Luftdruck 450.
 " W., Vibrographie 650.
 Weinhold, A. u. L., akustisches Analogon des Zeemann-Effektes 749.
 Weinhold, A. F., Quecksilberdestillator 429.
 " Quecksilberluftpumpe 496.
 " Wellenmaschine 561.
 Wellen 551.
 " Wasserwellen 552.
 " Seilwellen 555.
 " Luftwellen 556.
 " transversale u. longitudinale 559.
 " stehende 598, 608.
 " Reflexion 585.
 " Interferenz 589.
 Wellenbewegung 595.
 Wellenlänge 555.
 Wellenmaschinen 560.
 Wellrad 254.
 Welter, Sicherheitsröhre 458.
 Werthheim, Elastizität 327.
 " Kontraktion beim Dehnen 333.
 Weston, Differentialflaschenzug 255.
 Wheatstone, Kaleidophon 684.
 " Klangfiguren 701.
 " Vokaltheorie 777.
 " Wellenmaschine 564.

Widerstand der Flüssigkeiten u. Gase 539.
 Wild, v., Barometerfüllung 431.
 " Sphärometer 49.
 Willis, Rob., Vokaltheorie 776.
 Windbüchse 511.
 Windflügel 539.
 Windkessel 514.
 Windmesser 520.
 Windmühlen 523.
 Winkelbeschleunigung 275.
 Winkelgeschwindigkeit 275.
 Winkelmessung 71.
 Wirbelbewegung in Flüssigkeiten 412.
 " " Gasen 532.
 Wollaston, Platindraht 16.
 Woltmann, Strommesser 412.
 Wucht (lebende Kraft) 239.
 Wurfbewegung 137.

Y.

Young, Th., Kombinationstöne 754, 756.

Z.

Zeemanns Phänomen 749.
 Zehender, L., Quecksilberluftpumpe
 498.
 Zeit 12.
 Zeiteinheit, Zeitmessung 79, 84, 86.
 Zentralbewegung 145.
 Zentrifugalgebläse 521.
 Zentrifugalkraft 150.
 Zentrifugapendel 155.
 Zerlegung von Geschwindigkeiten und
 Kräften 130.
 Zirkulationsheber 498.
 Zulkowski, Wasserluftpumpe 510.
 Zusammensetzung von Komponenten 181,
 188.
 Zykloidenpendel 176.
 Zylindergebläse 519.
 Zylinder, bergauflaufender 198.



Verbesserungen.

Seite 304 u. 305 ist in den Formeln (5), (8) und (10a) statt $\cos^2 \varphi$ zu lesen $\cos 2 \varphi$.
Seite 445, Zeile 22 ist ebenfalls statt $\cos^2 \varphi$ zu lesen $\cos 2 \varphi$.



Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Hermann von Helmholtz

von Leo Koenigsberger.

Erster Band. Mit drei Bildnissen. gr. 8. Preis geh. 8 *M.*, geb. in Leinwand 10 *M.*, geb. in Halbfranz 12 *M.*

Zweiter Band. Mit zwei Bildnissen. gr. 8. Preis geh. 8 *M.*, geb. in Leinwand 10 *M.*, geb. in Halbfranz 12 *M.*

Dritter Band. Mit vier Bildnissen und einem Brieffacsimile. gr. 8. Preis geh. 4 *M.*, geb. in Leinwand 5 *M.*, geb. in Halbfranz 7 *M.*

Dr. J. Frick's

Physikalische Technik

oder Anleitung zu Experimentalvorträgen sowie zur Selbsterstellung einfacher Demonstrationsapparate.

Siebente vollkommen umgearbeitete und stark vermehrte Auflage
von **Dr. Otto Lehmann,**

Professor der Physik an der technischen Hochschule in Karlsruhe.

In zwei Bänden. Lexikon-Format.

Erster Band. Mit 3908 in den Text eingedruckten Abbildungen und einem Bildnis des Verfassers. Preis geh. 40 *M.*, geb. in Hlbfz. 44 *M.*

(Zweiter Band in Vorbereitung.)

Physikalisches Praktikum.

Von **Eilhard Wiedemann** und **Hermann Ebert.**

Fünfte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 366 Abbildungen.

gr. 8. Preis geh. 10 *M.*, geb. 11 *M.*

Vorträge und Reden

von **Hermann von Helmholtz.**

Fünfte Auflage. Mit dem Bildnis des Verfassers und zahlreichen Holzstichen.

Zwei Bände. gr. 8. Preis à Band geh. 8 *M.*, geb. 9,50 *M.*

Die Lehre von den Tonempfindungen

als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik.

Von **Hermann von Helmholtz.**

Fünfte Ausgabe. Mit dem Bildnis des Verfassers und 66 eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Preis geh. 12 *M.*, geb. 14 *M.*

Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik.

Nach Riemann's Vorlesungen in vierter Auflage
neu bearbeitet von

Heinrich Weber,

Professor der Mathematik an der Universität Strassburg.

Zwei Bände. Mit in den Text eingedruckten Abbildungen. gr. 8.
Preis à Band geh. 10 *M.*, geb. 11,60 *M.*

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Vorlesungen über Experimentalphysik.

Von **August Kundt**,

weiland Professor an der Universität Berlin.

Herausgegeben von **Karl Scheel**.

Mit dem Bildnis Kundts, 534 Abbildungen und einer farbigen Spektraltafel.
gr. 8. Preis geh. 15 *M.*, geb. in Halbfranz 17,50 *M.*

Sichtbare und unsichtbare Bewegungen.

Vorträge,

auf Einladung des Vorstandes des Departements Leiden der Maatschappij tot nut van 't Algemeen im Februar und März 1901

gehalten von

H. A. Lorentz.

Unter Mitwirkung des Verfassers aus dem Holländischen übersetzt von

G. Siebert.

Mit 40 Abbildungen. gr. 8. Preis geh. 3 *M.*, geb. 3,80 *M.*

Wellenlehre und Schall.

Von **W. C. L. van Schaik.**

Autorisirte deutsche Ausgabe bearbeitet von

Professor Dr. Hugo Fenkner.

Mit 176 in den Text eingedruckten Abbildungen.

gr. 8. Preis geh. 8 *M.*, geb. 9 *M.*

Ad. Wernicke's Lehrbuch der Mechanik

in elementarer Darstellung mit Anwendungen und Übungen
aus den **Gebieten der Physik und Technik.**

In zwei Teilen. gr. 8.

Erster Teil. Mechanik fester Körper. Von Prof. Dr. **Alex. Wernicke.**
Vierte völlig umgearbeitete Auflage. Mit eingedruckten Abbildungen.

Erste Abteilung. **Einleitung. — Phoronomie. — Lehre vom materiellen Punkte.** Preis geh. 4 *M.*, geb. 4,60 *M.*

Zweite Abteilung. **Statik und Kinetik des starren Körpers.** Preis geh. 6 *M.*, geb. 6,60 *M.*

Dritte (Schluß-) Abteilung. **Statik und Kinetik elastisch-fester Körper (Lehre von der Elastizität und Festigkeit).** Preis geh. 10 *M.*, geb. 11 *M.*

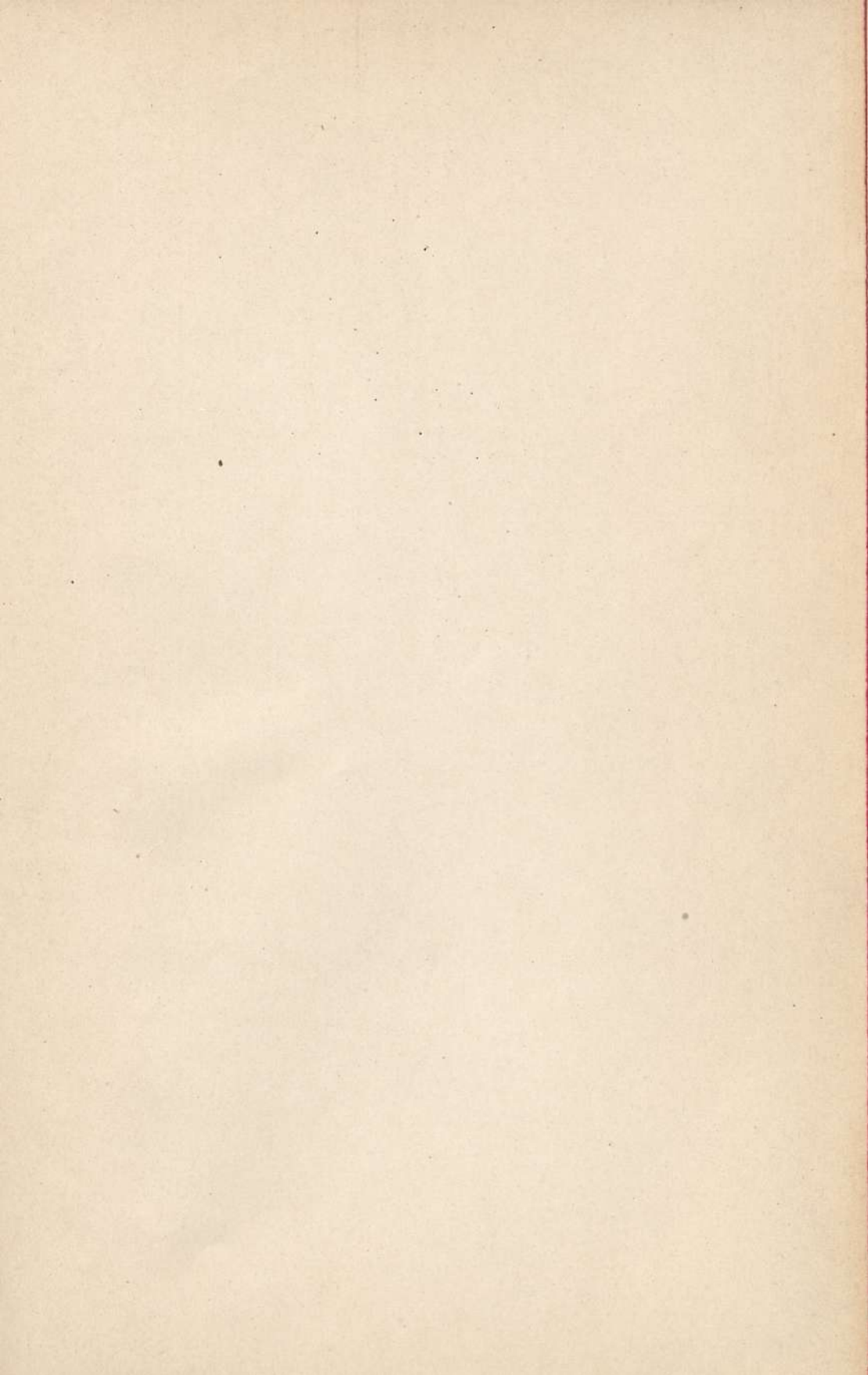
Zweiter Teil. Flüssigkeiten und Gase. Von Dozent **Richard Vater.**
Dritte völlig umgearbeitete Auflage. Mit 234 eingedruckten Abbildungen. Preis geh. 5 *M.*, geb. 5,60 *M.*

Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden

von **Dr. Otto Biermann,**

o. ö. Professor der Mathematik an der deutschen technischen Hochschule in Brünn.

Mit 35 eingedruckten Abbildungen. gr. 8. Preis geh. 8 *M.*, geb. 8,80 *M.*



Faint, illegible text at the top of the page, possibly a title or introductory paragraph.

Second block of faint, illegible text, appearing to be a list or a series of short paragraphs.

Third block of faint, illegible text, continuing the list or series of paragraphs.

Fourth block of faint, illegible text, possibly a longer paragraph or a detailed list item.

Fifth block of faint, illegible text, appearing to be a concluding paragraph or a signature block.

Final block of faint, illegible text at the bottom of the page.





