Das

graphische Rechnen

und

die Graphostatik

in ihrer Anwendung auf

Baukonstruktionen.

Zum Gebrauche

für

Baugewerksmeister, Baugewerksschulen etc.

bearbeitet

von

W. Jeep.

Mit einem Atlas

von 35 Foliotafeln.

Weimar, 1887.

Bernhard Friedrich Voigt.

Vorrede.

Die Ermittelung der in Baukonstruktionen der verschiedensten Art auftretenden oder durch äussere Einflüsse hervorgerufenen Kraftwirkungen auf dem zeichnenden Wege, hat sich seit ihrer ersten Anwendung ziemlich rasch eingebürgert und findet für sich oder in Verbindung mit der Rechnung die weitgehendste Anwendung.

Die Graphostatik ist nicht mehr ausschliesslicher Unterrichtsgegenstand der technischen Hochschulen, sondern findet sich auch an den Mittel- und selbst niederen Schulen als Lehrgegenstand eingeführt und für solche Schulen ist dieselbe von grösster Wichtigkeit. Die Baugewerksschulen, welche ihre Schüler zum grossen Teile aus dem Handwerkerstande erhalten, haben es mit Zöglingen der verschiedensten Vorbildungsgrade zu thun und bei der kurzen Zeit des Unterrichts, bei dem grossen Umfange der Lehrgegenstände ist es gar nicht möglich, die Schüler gleichmässig auszubilden, so dass dieselben mit wenigstens annähernd gleichem Wissen die Anstalten verlassen und die grösste Schwierigkeit verursacht es, in den rechnenden Fächern günstige Erfolge zu erzielen.

Hier tritt nun die Graphostatik als vermittelndes Glied ein. Die Schüler der technischen Mittelschulen erhalten bei weitem den meisten Unterricht in solchen Fächern, in denen das Zeichnen die Hauptsache bildet. Dieselben führen in der darstellenden Geometrie, dem Steinfugenschnitt, dem Konstruktionszeichnen und so weiter sehr schwierige

Konstruktionen aus, ohne dabei irgend erhebliche Anstrengungen zu machen, während es ihnen vielfach unmöglich ist, selbst einfachere Aufgaben auf rechnendem Wege zu lösen.

Durch die Einführung der Graphostatik ist eine Hauptschwierigkeit des rechnenden Unterrichtes, wenn nicht beseitigt, so doch ganz wesentlich eingeschränkt, denn es können die Rechnungen der Statik der Bauwerke auf dem Wege der Konstruktion ausgeführt werden und zwar in sehr vielen Fällen so, dass die Rechnung ganz ausgeschlossen ist.

Für alle diejenigen aber, welche sich die Rechnungsarten in einer solchen Weise anzueignen wissen, dass sie die vorkommenden statischen Rechnungen auszuführen vermögen, bildet die Graphostatik ein einfaches und zuverlässiges Kontrollmittel der ausgeführten Rechnung. Gibt Rechnung und graphische Darstellung gleiche Resultate, so kann die Richtigkeit der Resultate nicht angezweifelt werden, während bei Differenzen von solcher Bedeutung, dass dieselben auf die Endresultate Einfluss auszuüben vermögen, ziemlich leicht aufgefunden und beseitigt werden können.

Die meisten der Graphostatik gewidmeten Werke setzen solche mathematischen und rechnerischen Kenntnisse voraus, dass dieselben für die Schüler der Mittelschulen an vielen Stellen unverständlich sind und dieses auch für die aus solchen Schülern hervorgehenden ausübenden Meister der Fall ist. Es muss aber den Schülern der genannten Schulen daran gelegen sein, ein ihnen vollständig verständliches Buch zu besitzen, welches sie während ihres Schulbesuches zur Unterstützung des Unterrichtes gebrauchen und später bei selbständigem oder beaufsichtigtem Betriebe ihrer Gewerbe als Hilfsbuch benutzen können.

In einem Werke, welches die angegebenen Zwecke erreichen soll, darf unter keinen Umständen mit Rechnungen gearbeitet werden, welche die Grenzen des Unterrichtsplanes des grössten Teiles der Baugewerksschulen überschreiten. Die Erklärung und Behandlung grosser Brücken- und Dachkonstruktion, wie dieselben den Baugewerksmeistern nie oder doch nur in ganz einzelnen Ausnahmefällen zur selbständigen Ausführung übertragen werden, erscheinen als überflüssig und ebenso bleibt die Behandlung grösserer Gewölbe- und Futtermaueranordnungen, welche die Kenntnis der Theorie des Erddruckes und der Gewölbe voraussetzen, als die Grenzen des Werkes überschreitend, ausgeschlossen. Es müssen aber in einem derartigen Werke eine grössere Anzahl von Beispielen angegeben werden, welche dem Benutzer des Werkes, dem es meistens an Zeit fehlt, sich mit langen Untersuchungen und Studien zu befassen, in den Stand setzen, das, was er gebraucht, fertig vorzufinden, oder etwas dem Erforderlichen ähnliches, wonach er sich vollständig richten kann, zu haben.

Nach diesen Grundsätzen hat der Verfasser das folgende Werk zusammengestellt, und hofft damit ein Buch zu liefern, welches den Lehrern und Schülern der technischen Mittelschulen, sowie den Baugewerken willkommen sein wird.

Dasselbe enthält in seinem ersten Abschnitte die erforderlich erscheinenden mathematischen Konstruktionen, d. h. die Konstruktionen, welche zur Ausführung der einfacheren Rechnungsarten benutzt werden können und welche, weil sie einfach sind, als Einführung in die Konstruktionen der graphischen Statik angesehen werden können.

In dem zweiten Abschnitte sind dann anfänglich die Zusammensetzungen und Zerlegungen von Kräften unter den verschiedensten Annahmen und Voraussetzungen gezeigt und dann die Verhältnisse von Balken und Trägern ermittelt und zwar unter der Voraussetzung ganz beliebig wirkender Belastungen. Hieran schliessen sich die Angaben über Kräfteermittelungen in den Teilen von Fachwerken kleineren Umfanges, wozu auch die Hänge- und Sprengwerke in den mannigfachsten Anordnungen kommen. Bei den Fachwerkskonstruktionen ist nur die Behandlung einer grössern Brücke dargestellt, um wenigstens zu zeigen, in welcher Weise man hier zum Ziele gelangen kann.

Bei dem Kapitel der Dachkonstruktionen sind sehr viele verschiedene Anordnungen zur Anschauung gebracht, und ist dieses unter der Annahme geschehen, dass die Konstruktion von Dachwerken für den Baugewerken von der grössten Wichtigkeit ist und ihm mehr als alle andern Konstruktionen vorkommen.

Die Behandlung der Futtermauern und Gewölbe ist an einigen Beispielen gezeigt, ohne hier aber weiter auf den Gegenstand einzugehen.

Der thätigen Verlagsbuchhandlung ist volle Anerkennung über die Ausstattung des Werkes zu zollen. Dieselbe hat keine Kosten gescheut, um demselben ein stattliches Aeussere zu geben und sind namentlich die Tafeln sehr sauber und den Zwecken vollständig entsprechend hergestellt.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Erster Abschnitt.

Graphisches Rechnen.

Zweiter Abschnitt.

Graphostatik.

Erster Abschnitt.

Graphisches Rechnen.

Ebenso wie man Längenmasse durch Linien ausdrücken kann und auszudrücken gewohnt ist, kann man auch jede andere Grösse durch eine Linie darstellen; denn es ist offenbar ganz gleichgültig, ob man die Einheit eines Masses Meter, Zentimeter oder aber Kilogramm, Schock oder sonstwie nennt. Sobald man aber durch eine Einheit, die unter allen Umständen als Linie gedacht werden kann, den Teil eines Gegenstandes oder einer beliebigen Grösse darstellen kann, vermag man auch das Vielfache der Einheit, also die Grösse selbst als Linie zu denken und darzustellen. Es ist dabei ganz gleichgültig, wie lang die Einheit genommen wird. Dieselbe braucht nicht mit den üblichen Längenmassen übereinzustimmen, sondern kann ganz willkürlich und den jedesmal vorliegenden Verhältnissen entsprechend gewählt werden, wobei es ebenfalls gleichgültig ist, ob das Ganze ein Vielfaches oder ein Teil der Einheit ist. Ziemlich selbstverständlich ist es wohl, dass die als Einheit gewählte Länge nicht wirklich ein Teil des Ganzen zu sein braucht. Sollen z. B. 100 kg in einer Linie dargestellt werden, so braucht die Einheit nicht gleich einem Kilogramm zu sein, sondern dieselbe kann 10, 20, 50 etc. Kilogramm genommen werden, so dass also das Ganze, hier die 100 kg gleich dem 10, 5, 2 etc. fachen der Einheit ist, man muss nur alle zusammengehörigen Grössen, ebenso wie ein aus diesen erzieltes Ergebnis mit derselben Einheit messen, sonst sind nie richtige Resultate zu erhalten.

Da es ziemlich klar ist, dass, wenn man geometrische Konstruktionen ausführt, von denen richtige Ergebnisse verlangt werden, in jeder Beziehung die grösste Genauigkeit und Sorgfalt aufgewendet werden muss, so kann es nicht genug hervorgeboben werden, dass geeignete Materialien Anwendung finden müssen und dass man bei der Ausführung der Konstruktion selbst die kleinsten Fehler beseitigt und nicht dadurch unschädlich zu machen sucht, dass man Linien oder Punkte etwas von der eigentlich erforderlichen Lage verrückt. Die an sich unscheinbaren Fehler vergrössern sich im Verfolg der Konstruktion ganz erheblich und im einzelnen Falle unmessbare, ja kaum sichtbare Ungenauigkeiten können zu vollständig verkehrten Resultaten führen.

Zu solchen Konstruktionen, wie dieselben in der Folge erklärt und ausgeführt werden sollen, verwende man ein starkes glattes, jedenfalls nicht gekörntes Zeichenpapier. Dieses legt man glatt auf ein gutes, genau abgerichtetes Zeichenbrett und befestigt dasselbe an den Kanten mittels Heftzwecken oder durch Ankleben, wobei aber unter keinen Umständen ein Anfeuchten des Papiers erfolgen darf, um dasselbe straff auf das Brett aufgespannt zu erhalten. Starkes Papier liegt durch sein Gewicht glatt genug auf dem Brette und erleidet keine Veränderung, wie das im nassen Zustande aufgespannte Papier. Dann verwende man gute und harte Bleifedern, welche eine feine Spitze zulassen, die sich nicht nach Zeichnung einiger Linien abgenutzt hat und gestatten feine und scharfe Linien zu ziehen. Dreiecke und Reissschienen müssen möglichst dünn sein und genaue Kanten und Ecken haben. Diese Materialien aus Gummi hergestellt, werden denjenigen aus Holz immer vorzuziehen sein. Die Zirkel müssen feine runde Spitzen und nicht die meist üblichen reibahlenartig geformten dreikantigen Spitzen haben, mit denen man allerdings im stande ist, sichtbare Merkmale auf dem Papier zu erzeugen, aber nicht vermag, genau einen Punkt zu markieren. Hat man einen Punkt angegeben, den man nicht sofort gebraucht, oder der für die weitere Folge der Konstruktion sicher bezeichnet werden soll, so geschieht dieses nicht dadurch, dass man mit der Bleifeder darüber streicht und einen zwar gut sichtbaren, aber nicht brauchbaren Punkt bildet, sondern man zieht um den zu markierenden Punkt einen kleinen Kranz mit der Bleifeder.

Zum Ausziehen der Figuren mit Tusche hat man nur ganz feine und gleichmässige Linien anzuwenden. Es empfiehlt sich nicht Linien, welche eine besondere Auszeichnung erhalten sollen, stark auszuziehen, sondern es ist besser, wenn man diese mit einer anderen Farbe auszieht, als diejenige der übrigen Figur ist, oder wenn man neben die in der Farbe der Figur ausgezogene Linie eine zweite von anderer Farbe zieht, ohne diese aber bis an die Endpunkte zu verlängern.

Die Linien, durch welche irgend beliebige Grössen dargestellt werden, nennt man S t r e c k e n und demnach die Rechnungen, welche mit den Grössen durch Konstruktion ausgeführt werden, die R e c h n u n g e n m i t S t r e c k e n.

Die Strecken können verschiedene Lagen und Richtungen haben und zwar bezüglich der Lage

1. in einer Ebene parallel zu einander,
2. in einer Ebene zerstreut liegend, also beliebig zu einander,
3. in dem Raume liegend

sein und bezüglich ihrer Richtung nach der einen oder anderen Seite gekehrt sein, je nachdem man sie entstanden betrachtet. Den Anfangspunkt der Strecken bezeichnet man in der Regel durch einen kleinen Kreis und die Richtung durch eine Pfeilspitze, welche man auf der Strecke anträgt und welche nach der Seite zeigen muss, nach welcher hin die Strecke durch Bewegung des Anfangspunktes entstanden gedacht wird. Die Bezeichnung des Anfangspunktes der Strecken unterbleibt in der Regel, wenn die Richtung der Strecke durch die Pfeilspitze angegeben wird.

Man nennt nun die Strecken, welche nach einer Seite hin gerichtet sind und meistens diejenigen von der linken nach der rechten Seite laufenden positive Strecken und diejenigen, welche diesen entgegenstehen, deren Richtung also von rechts nach links geht, negative Strecken. Dass sich positive und negative Strecken ganz oder teilweise aufheben, ist selbstverständlich. Bei den Konstruktionen hat man wohl darauf zu achten, welchen Sinn die Strecke hat, damit nicht Unrichtigkeiten in dem Resultate herbeigeführt werden.

Addition der Strecken.

1. Parallel in der Ebene liegende Strecken.

Die algebraische Summe von zwei oder beliebig vieler in einer Ebene parallel liegenden Strecken findet man sehr einfach, wenn man auf eine gerade Linie, welche parallel zu den einzelnen Strecken gezogen wird, alle vorhandenen oder gegebenen Strecken unter Berücksichtigung ihres positiven oder negativen Wertes abträgt. Es ist hierbei ganz gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Auftragung der Strekken erfolgt. Das Resultat, also die algebraische Summe, wird dann durch die Strecke dargestellt, welche zwischen dem Anfangspunkt der ersten und dem Endpunkt der letzten Strecke liegt.

Soll z. B. die algebraische Summe der Strecke a. b, c, d und e, **Fig. 1, Taf. I,** gefunden werden, so trägt man auf die Linie AB, von einem beliebigen Punkt O anfangend, die Strecke a auf, deren Endpunkt in a_1 liegen wird. Die zweite Strecke b, welche entgegengesetzten Sinn wie a hat, trägt man dann, von a_1 anfangend, in der Richtung auf O zu auf AB und findet den Punkt b_1, an welchen anschliessend man dann die dritte Strecke c in der Richtung nach B abträgt, weil die Strecke c gleichgerichtet mit a ist. Man erhält dadurch den Punkt c_1. Von c_1 anfangend, bringt man dann die vierte Strecke d auf die Linie AB und weil d mit c und a gleiche Richtung hat von c_1 nach B zu. Man findet dadurch den Punkt d_1, von dem aus man dann die letzte Strecke e, welche mit b gleichgerichtet ist, nach A zu abträgt. Man findet als Endpunkt e_1 und hat demnach in $O e_1$ die gesuchte algebraische Summe.

Hat man die einzelnen Strecken nach irgend einem Massstabe aufgetragen, so muss man das Resultat $O e_1$ mit demselben Massstabe messen, um in Zahlen ausgedrückt ein Resultat zu erhalten. Es können natürlich nur Strecken vereinigt werden, welche Grössen derselben Art vorstellen.

An dem Resultate wird nun nichts geändert, wenn man die Strekken in einer anderen Reihenfolge auf AB aufträgt z. B. erst die positiven Strecken a, c und d aneinanderlegt und dann die beiden negativen Strecken b und e zurückmisst, oder sonst eine den Zwecken besser entsprechende Reihenfolge wählt.

2. Zerstreut in der Ebene liegende Strecken.

Soll die algebraische Summe der beiden Strecken a und b, **Fig. 2, Taf. I**, ermittelt werden, so zieht man parallel zu einer derselben z. B. a eine Linie $O a_1$ und macht die Länge derselben gleich der Strecke a. Dann zieht man durch a_1 eine Linie $a_1 b_1$ parallel zu der Strecke b und trägt auf dieser, von a_1 anfangend, die Strecke b ab. Man erhält hierdurch den Punkt b_1. Verbindet man nun O und b_1 durch eine gerade Linie, so stellt diese die algebraische Summe von a und b der Grösse und Lage nach dar. Die Richtung von b_1 ist, dem Zuge der Pfeile in $O a_1$ und $a_1 b_1$ folgend, von b_1 nach O.

Soll die Konstruktion nicht mit der Strecke a, sondern mit b begonnen werden, so macht man $O_1 B_1$ parallel und gleich b, kann dann aber die Strecke a nicht in O_1 an $O_1 B_1$ anschliessen, sondern muss den Anfangspunkt derselben nach B_1 legen, also durch diesen Punkt parallel mit a die Linie $B_1 A_1$ ziehen und gleich a machen. Die Verbindung von A_1 und O_1 ist dann die algebraische Summe, welche mit $O b_1$ gleiche Grösse und Richtung hat.

Sind mehr zerstreut in der Ebene liegende Strecken vorhanden, deren algebraische Summe gefunden werden soll, so bleibt das Versetzen dasselbe. Man trägt die Strecken auf parallel zu ihren gezogenen Linien, so dass die folgende Strecke stets in dem Endpunkt der vorhergehenden beginnt, wobei die Pfeile, welche die Richtung der Strecke angeben, immer fortlaufend, oder wie man sagt, dem Zuge folgend sind.

In **Fig. 3, Taf. I**, ist die algebraische Summe der Strecken a, b, c, d und e auf zwei verschiedene Weisen ermittelt. In der einen ist $O e_1$ in der andern $O_1 B_1$ die verlangte allgebraische Summe.

Bemerkt mag hier noch werden, dass aus der Figur auch die algebraischen Summen verschiedener anderer Strecken entnommen werden können. So hat man z. B. in $O b_1$ die algebraische Summe der Strecken a und b; in $O d_1$ die allgebraische Summe der Strecken a; b; c und d, in $O_1 c_1$ die algebraische Summe der Strecken a, d, e und c u. s. f.

Trifft der Endpunkt der letzten in der Figur eingetragenen Strekken mit dem Anfangspunkte O zusammen, so ist die algebraische Summe gleich Null. Geht aber die letzte Strecke durch den Punkt O ohne hier zu endigen, wie in **Fig. 4, Taf. I**, angegeben, so ist die algebraische Summe der Grösse nach gleich dem Ueberstand $O m$, die Richtung aber von m auf O gehend, weil zur Schliessung des Polygons noch von m nach O eine Linie zu ziehen ist.

Sind zwischen den zerstreut liegenden Strecken auch solche, welche unter sich parallel sind, so kann man entweder, ohne Rücksicht hierauf zu nehmen, aus allen Strecken des Polygon, wie vorher zusammensetzen, oder man ermittelt erst aus den parallelen Strecken die algebraische Summe und fügt diese in das Polygon als selbständige Strecke ein. Ein solcher Fall ist in **Fig. 5, Taf. I**, angegeben.

Es sind in M die Strecken a, b und c, welche parallel sind, einzeln in das Polygon eingetragen und mit den übrigen Strecken d bis h vereinigt. Die gefundene algebraische Summe ist $O h$.

In der Figur M_1 sind aber zuerst die drei parallelen Strecken a, b und c zu einer algebraischen Summe $O_1 c_1$ vereinigt und dann diese, welche von rechts nach links gerichtet ist als einzelne gegebene Strecke in das Polygon eingefügt. Man findet hier $O_0 H_1$ als algebraische Summe aller Strecken und zwar in Richtung und Grösse übereinstimmend mit $O h$.

3. Zerstreut im Raume liegende Strecken.

Es soll hier nur angegeben werden, dass man, um eine oder mehrere Strecken, welche im Raume liegen, bestimmen zu können, dieselben auf zwei vertikal zu einander stehenden Ebenen projezieren muss. In jeder der beiden Projektionsebenen bildet man die Polygone aus den Projektionen der Strecken und ermittelt dann die wirkliche Länge der Schlusslinie, um eine messbare Länge für die algebraische Summe zu erhalten. Die hierzu erforderliche Zeichnung gehört mehr der darstellenden Geometrie an und kann von der Reproduktion um so mehr Abstand genommen werden, da im Raume liegende Strecken ausserhalb des Umfanges des vorliegenden Buches liegen, es also ganz nutzlos sein würde, an einzelnen Stellen diese heranzuziehen.

Subtraktion der Strecken.

Die algebraische Subtraktion wird bekanntlich in eine Addition verwandelt, indem man das Zeichen des Subtrahenten umkehrt. In ganz gleicher Weise wird auch bei der Subtraktion der Strecken verfahren. Man kehrt den Richtungspfeil der einen Strecke um, setzt das Polygon zusammen und nimmt die Schlusslinie dieses als die algebraische Differenz der Strecken.

Soll die Differenz der Streken a und b, **Fig. 6, Taf. I,** ermittelt werden, so trägt man a auf die parallel zu dieser Strecke gezogene Linie $O a_1$, schliesst in $a_1 b_1$ mit b entgegengesetzter Pfeilrichtung diese Strecke an a_1 an und zieht die Schlusslinie $O b_1$ des Polygons, welche die Differenz gibt.

Man verwandelt die positive Strecke b durch Umdrehung der Richtung in eine negative, hat also $O b_1 = a + (- b)$ oder die Klammer aufgelöst $O b_1 = a - b$. Ist b als negative Strecke gegeben, so verwandelt man sie in eine positive und hat dann $O b_1 = a + b$ genau der Rechnung entsprechend.

Addition der Verhältnisse.

Ein beliebiges Verhältnis $\frac{a}{b}$ kann man durch Multiplikation des Zählers und Nenners mit derselben Zahl in ein gleichwertiges anderes umwandeln, kann also $\frac{a}{b} = \frac{m}{R}$ setzen oder auch schreiben $a : m = b : R$. Diese Proportion kann man aber auf eine sehr einfache Weise zeichnen, denn es ist nur nötig, zwei ähnliche Dreiecke darzustellen, in denen a und m sowie b und R gleichliegende Seiten sind.

Zeichnet man daher, **Fig. 7, Taf. I,** zwei rechtwinkelige Achsen OX und OY und trägt, an dem Durchschnittspunkte O dieser beginnend, Ob gleich dem Nenner b auf OX; Oa aber gleich dem Zähler a auf OY ab, so hat man, wenn man ba zieht, in aOb ein rechtwinkeliges Dreieck. Nimmt man dann den Punkt R in OX so an, dass OR gleich dem neugewählten Zähler R wird und zieht durch R eine parallele Linie Rm zu ab, so hat man in mOR ebenfalls ein rechtwinkeliges Dreieck, welches aOb ähnlich ist. Man hat demnach $Oa : Om = Ob : OR$ oder $a : m = b : R$, weshalb m der zu R gehörige Zähler sein muss, wenn das Verhältnis $\frac{m}{R}$ gleichen Wert mit $\frac{a}{b}$ haben soll.

Hierauf gründet sich nun die Addition der Verhältnisse; denn was hier mit einem Verhältnis ausgeführt ist, kann man auch mit einer beliebigen Anzahl solcher vollbringen.

Sind die Verhältnisse:

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f},\ \frac{g}{h} \text{ und } \frac{k}{l}$$

gegeben, die drei ersteren positiv die beiden letzteren aber negativ, so verwandelt man diese nach **Fig. 8, Taf. I,** in gleichwertige andere Verhältnisse mit dem gemeinschaftlichen Nenner R auf folgende Weise:

Auf die vertikale Achse YY_1 trägt man an dem Durchschnittspunkte O dieser mit der horizontalen Achse XX_1 die Zähler a, c und e der positiven Verhältnisse nach oben und die der negativen also g und k nach unten ab. Auf die horizontale Achse trägt man nach derselben Seite von O aus, ob nach rechts oder links ist gleich, die Nenner b, d, f .... und zieht die Linien ab, cd, ef, gh und kl. Dann macht man OR gleich dem angenommenen Nenner R und zieht von R aus parallele Linien zu ab, cd, ef ...., wodurch man die Punkte A, B, C, D, E in YY_1 erhält. Man hat dann nach dem Früheren:

$$\frac{a}{b} = \frac{OA}{R};\ \frac{c}{d} = \frac{OB}{R};\ \frac{e}{f} = \frac{OC}{R};\ \frac{g}{h} = \frac{OD}{R} \text{ und } \frac{k}{l} = \frac{OE}{R},$$

also auch

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \left(-\frac{g}{h}\right) + \left(-\frac{k}{l}\right) = \frac{OA + OB + OC + (-OD) + (-OE)}{R}.$$

Summiert man also nun die Zähler, was einfach, da man es mit nur parallelen Strecken zu thun hat, so hat man das Resultat. Wählt man dann noch den Massstab, nach dem die Figur ausgeführt wird so, dass OR die Einheit ist, so hat man das Resultat in der Strecke, welche sich aus der Addition der Zähler ergibt. Es liegt hierin wohl schon, dass der gemeinschaftliche Nenner R nicht der Generalnenner ist, welcher vorhanden sein muss, wenn die Verhältnisse algebraisch auf gleiche Benennung gebracht werden sollen, sondern es ist ein ganz beliebig angenommener, welcher ebensogut kleiner als grösser sein kann als einer der Einzelnenner der Verhältnisse.

Multiplikation der Strecken.

Jede Multiplikation kann man als eine Proportion darstellen, indem man zu dem Produkte den Faktor 1 zufügt. Man hat $m = a \cdot b$, kann auch schreiben $1 \cdot m = a \cdot b$ und demnach $1 : a = b : m$.

Stellt man also zwei ähnliche Dreiecke dar, welche so beschaffen sind, dass in einem derselben 1 und a als Seiten vorkommen, in dem anderen aber die gleichliegende Seite b und m sind, so ist die Aufgabe der Multiplikation gelöst. Da man die Proportion $1 : a = b : m$ verschiedentlich umstellen kann, für jede Umstellung aber die Konstruktion auszuführen vermag, so ist es klar, dass eine grössere Anzahl von Konstruktionen zum Ziele führt, welche Anzahl aber noch erheblich vergrössert wird, weil die Lage der Strecken, welche zu multiplizieren sind, eine sehr verschiedene sein kann.

Einige Beispiele werden hier die Ausführung der Konstruktion zeigen.

1. Die Strecken können beliebig gelegt werden.

Man trägt, **Fig. 9, Taf. I,** auf eine Linie AM, an A anfangend, die Einheit AB ab und ebenso, bei demselben Punkte beginnend, eine der Strecken z. B. b gleich AD. Man wird hier die grössere der beiden gegebenen Strecken a und b nehmen. In dem Punkte B und D, welche sich in der Linie AM gefunden haben, errichtet man Lote zu AM und trägt auf das in B errichtete Lot die zweite Strecke a gleich BC ab. Dann zieht man die Linie $A\cancel{M}$;N welche in E das Lot DE schneidet. Man hat dann die ähnlichen Dreiecke ABC und ADE und demnach die Proportion $AB : BC = AD : DE$ oder $1 : a = b : m$ also $m = ab$, womit die Aufgabe gelöst ist. Die Einheit AB muss bei dieser Konstruktion so gewählt werden, dass wenigstens eine der beiden gegebenen Strecken a oder b grösser als diese ist, während die zweite kleiner sein kann. Welche von den beiden Strecken die grössere und welche die kleinere ist, ist gleichgültig, denn es ändert sicher dem Ergebnisse nichts, wenn statt b auf die Linie AM die Strecke a gelegt und dann BC statt gleich a gleich b genommen wird.

Sind beide Strecken kleiner als die Einheit, so ist die Konstruktion ebenfalls zu benutzen, man hat jedoch dann, wie **Fig. 9a, Taf. I,** geschehen ist, die Einheit von A bis D abzutragen und die Strecke b dann nur bis B reichend. Man wird demnach auf dem in D errichteten Lote die zweite Strecke a abtragen müssen und in dem Lote BC das Produkt m zu nehmen haben. Man erhält hier die Proportion $b : m = 1 : a$, also $ab = m$.

Eine andere Konstruktion hat man in **Fig. 10, Taf. I.** Es ist $AB = 1$ und $BC = b$ gemacht. In den gefundenen Punkten B und C sind Lote zu AC gezogen und dann von A bis E die Strecke a gleich AE abgetragen. Verlängert man die Linie AE bis man deren Durchschnittspunkt mit CD erhält, so hat man wieder die ähnlichen Dreiecke ABE und ACD und daraus die Proportion $AB : AC = AE : AD$, oder wenn man darin die einfacheren Bezeichnungen der Linien einsetzt $1 : b = a : AD$, weshalb $AD = m = ab$ ist.

Auch diese Konstruktion ist zu benutzen, wenn die Einheit grösser als die Strecke a und b angenommen wird.

An den beiden angegebenen Konstruktionen tritt bezüglich des Resultates keine Aenderung ein, wenn man die Linien BC und DE oder BE und CD nicht lotrecht zu AM stellt, sondern dafür einen anderen Winkel wählt.

So hat man z. B. in **Fig. 11, Taf. I,** AB gleich der Einheit und AD gleich der Strecke a gemacht. Unter beliebige Winkel zieht man zu AD die Linie AE und trägt auf dieser die Strecke $AC = b$ ab, verbindet B und C durch eine gerade Linie und zieht parallel hierzu die Linie DE, so schneidet diese von der AE die Strecke ab, welche das Produkt m darstellt.

Ebenso kann man nach **Fig. 12, Taf. I,** verfahren. Man macht AB gleich 1; AD gleich a, zieht BC beliebig und macht diese Linie gleich der Strecke b, zieht parallel zu BC die Linie DE und legt dann durch die Punkte A und C die Linie AE, welche von DE die als Produkt an a und b anzusetzende Strecke DE abschneidet.

Auch bei diesen Konstruktionen kann die Einheit grösser sein, als die Strecken.

2. Die Strecken haben bestimmte Lagen zu einander.

13. Die beiden Strecken $a = DE$ und $b = AC$ stehen rechtwinkelig zu einander und schneiden sich in dem Punkte B. Eine Verschiebung von AC ist nicht gestattet, dagegen kann DE in der Längenrichtung von AC beliebig verschoben, aber nicht höher oder tiefer gelegt werden.

Man wird in einem solchen Falle die Strecke DE soweit verschieben, dass AB gleich der Einheit wird, durch den Endpunkt von b, also durch C, die Linie FG parallel zu DE ziehen und dann durch A und E die Linie AG und durch A und D diejenige AF legen. Diese beiden Linien begrenzen gehörig verlängert die Linie FG, welche das Produkt darstellt.

Man hat hier Dreieck ABD ähnlich dem Dreieck ACF und auch Dreieck ABE ähnlich dem Dreieck ACG. Hieraus erhält man die Proportion $1 : b = BD : CF$ und

$$1 : b = BE : CG, \text{ woraus sich ergibt}$$
$$1 : b = BD + BE : CF + CG \text{ oder}$$
$$1 : b = DE : FG, \text{ also}$$
$$1 : b = a : m.$$

Die Strecken a und b, **Fig. 14, Taf. I,** stehen lotrecht zu einander und ist eine Verschiebung derselben nicht gestattet.

Ist AG die Strecke a und BD diejenige b, welche sich in dem Punkte B treffen, so macht man AE gleich der Einheit, zieht DE und parallel dazu GF, legt durch A und D die Linie AF und verlängert dieselbe bis zu ihrem Durchschnittspunkte F mit CF. Hierauf zieht man FC lotrecht zu AC also parallel mit BD und verlängert die Linie AG bis dieselbe in C die FC begrenzt.

Man hat hier die ähnlichen Dreiecke AED und AGF und demnach die Proportion

$$AE : AG = ED : GF \text{ oder}$$
$$1 : a = CE : GF \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 1$$

Ferner sind die Dreiecke BDE und CFG ähnlich, weil dieselben ganz von parallel liegenden Linien eingeschlossen sind. Es besteht deshalb auch die Proportion

$$DE : FG = BD : FC \text{ oder}$$
$$DE : FG = b : m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2$$

Vereinigt man nun die Proportion 1 und 2, so erhält man

$$1 : a = b : m,$$

hat also

$$m = a \cdot b = FC.$$

Dieselbe Konstruktion ist auch dann anzuwenden, wenn AG und BD nicht lotrecht zu einander stehen, sondern beliebige Winkel einschliessen, wobei man nur zu berücksichtigen hat, dass BD und CF, sowie DE und FG immer parallel zu einander liegen müssen.

Eine andere für denselben Fall dienende Konstruktion zeigt **Fig. 15, Taf. I.** Es ist daselbst $AB = a$ und $DC = b$. Man zieht durch A und C die Linie AG, macht AE gleich der Einheit, zieht CE und parallel hierzu durch B die Linie BG. Von dem Durchschnittspunkte G der Linien BG und AG zieht man das Lot GF auf AB.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CDE und GFB erhält man die Proportion $DC : DE = GF : BF$ oder

$$b : DE = m : BF \text{ und auch}$$
$$b : m = DE : BF \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 1$$

Ferner hat man die ähnlichen Dreiecke ACD und AGF und deshalb die Proportion $AD : b = AF : m$ oder

$$b : m = AD : AF \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2$$

Aus der Vereinigung der Proportion 1 und 2 findet man dann

$$b : m = AD + DE : AF + BF \text{ oder}$$
$$b : m = 1 : a \qquad \text{hat also}$$
$$m = b \cdot a.$$

Die Strecken $AB = a$ und $CD = b$ schneiden sich in dem Punkte E, **Fig. 16, Taf. I.** Man zieht DF parallel zu AB, macht CF gleich der Einheit, zieht parallel zu CF die Linie AG und lotrecht hierzu GB durch den Punkt B. Dann hat man, weil $\triangle CDF \sim \triangle AGB$ ist, die Proportion

$$CF : CD = AB : BG \text{ oder}$$
$$1 : b = a : m.$$

Schliessen, **Fig. 17, Taf. I,** die Strecken $AB = a$ und $AC = b$ einen spitzen Winkel miteinander ein, so verbindet man die Endpunkte B und C derselben durch eine gerade Linie. Dann trägt man auf die Strecke AB die Einheit, wodurch sich der Punkt E findet. Nun trägt man an E den Winkel $AED = ACB$ und verlängert den Schenkel ED desselben bis man den Durchschnittspunkt D dieses mit der Verlängerung der Strecke AC erhält. Man hat durch diese Konstruktion die ähnlichen Dreiecke AED und ACB gebildet und kann demnach die Proportion

$$AB : AE = AD : AC \text{ oder}$$
$$a : 1 = m : b \text{ bilden,}$$

hat also die Aufgabe gelöst.

Die Uebertragung des Winkels ACB nach E bewirkt man einfach, indem man von A aus mit AB und AC zwei Kreisbogen BG und CF beschreibt und die Linie FG zieht. Parallel zu FG muss dann ED gezogen werden. Man erhält auf diese Weise die Winkel genauer als wenn man die Uebertragung in der gewöhnlichen mathematischen Weise vornimmt.

Die Strecken $AB = a$ und $BC = b$ liegen, **Fig. 18, Taf. I,** auf einer geraden Linie und zwar beide in dem Punkte B beginnend. Man zieht DF lotrecht zu BC durch den Punkt B, trägt von diesem aus in der Richtung nach D die Einheit BD ab, zieht CF lotrecht zu CD und parallel hierzu AE, so muss BE das verlangte Produkt sein; denn es sind FCB und ABE ähnliche Dreiecke, man hat demnach die Proportion

$$AB : BE = BC : BF \text{ oder auch}$$
$$a : m = b : BF \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Dann ist aber auch $\triangle BCF \sim \triangle BCD$, also besteht die Proportion

$$BC : BD = BF : BC$$
$$b : 1 = BF : b \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2$$

Bestimmt man nun aus der Proportion 2 einen Wert für BF, so findet man $BF = b^2$. Diesen in die Proportion 1 eingesetzt, gibt:

$$a : m = b : b^2 \text{ oder}$$
$$a : m = 1 : b, \text{ woraus dann}$$
$$m = a \cdot b.$$

3. Multiplikation von drei Strecken.

Soll das Produkt von drei Strecken gefunden werden, so verwendet man eines der vorher angegebenen Verfahren zweimal oder multipliziert erst zwei Strecken und dann das gefundene Produkt mit der dritten gegebenen Strecke.

Sind z. B. die Strecken a, b und c, **Fig. 19, Taf. I,** zu multiplizieren, so bestimmt man nach dem **Fig. 9** angegebenen Verfahren das Produkt $CE = m$ der Strecken a und b.

Dann macht man EG gleich 1, zieht GF lotrecht zu EC und trägt auf diese Linie die dritte Strecke c. Zieht man nun weiter EH

durch E und F bis zum Durchschnittspunkte mit der Verlängerung von Ac, so ist $CH = m_1$ das Produkt aus m und c, also auch aus a, b und c.

Einfacher ist es, wenn man die Konstruktion so einzurichten sucht, dass man die Einheit nur einmal aufzutragen hat. Es ist dieses **Fig. 20, Taf. I,** dargestellt.

Man bestimmt z. B. nach **Fig. 10, Taf. I,** aus den Strecken a und b das Produkt $m = AE$, **Fig. 20, Taf. I,** überträgt dieses durch einen aus A beschriebenen Kreisbogen ED auf die Linie AD, auf welcher bereits die Einheit und die Strecke a liegen, trägt auf BG die dritte Strecke c ab, zieht DH lotrecht zu AD durch den Punkt D und begrenzt diese Linie in dem Punkte H durch die durch A und G gezogene und gehörig verlängerte Linie AH. Man hat dann in $DH = m_1$ das Produkt $a \cdot b \cdot c$, was sich leicht nachweisen lässt.

Aehnlich kann man auf die verschiedenste Weise drei und auch mehr Strecken miteinander multiplizieren.

Multiplikation der Verhältnisse.

Ist das Produkt zweier Verhältnisse $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ ausgedrückt durch ein anderes Verhältnis z. B. $\frac{m}{m_1}$ zu ermitteln, so verfährt man auf folgende Weise:

Man nimmt zwei rechtwinkelige Achsen XX_1 und YY_1, **Fig. 21, Taf. I,** welche sich in O schneiden. Auf die vertikale Achse trägt man von O beginnend die Zähler a und c der zu multiplizierenden Brüche auf, wodurch man die Punkte A und C findet. Auf die horizontale Achse, ebenfalls von O an, trägt man nach der linken Seite zu 1 die Nenner b und d der Brüche, durch deren Auftragung man die Punkte B und D findet. Dann verbindet man B mit A und D mit C durch gerade Linien, zieht hierzu Parallele, von O ausgehend, welche OH und OG genannt sind.

In OX nimmt man nun einen beliebigen Punkt M_1 in einem Abstand von O, so dass OM_1 gleich m_1 gesetzt wird.

In M_1 errichtet man dann ein Lot M_1N bis dasselbe die OG trifft, trägt die Länge desselben von O auf der horizontalen Achse OX ab, wodurch man den Punkt M_2 erhält und errichtet in diesem ein Lot M_2N_1 bis zur Linie OH reichend. Dieses Lot stellt dann die Grösse m dar.

Die Richtigkeit beweist sich nun einfach:

Es ist $\triangle\, CDO \sim \triangle\, ONM_1$, man hat also die Proportion

$OC : OD = M_1N : OM_1$ oder darin die bekannten Werte gesetzt

$$c : d = M_1N : m_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Es ist auch $\triangle\, ABO \sim \triangle\, OM_2N_1$, woraus die Proportion

$OA : OB = M_2N_1 : OM_2$ oder

$$a : b = m : OM_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2$$

Da aber $OM_2 = M_1N$ ist, so kann man auch schreiben:

$$a:b = m:M_1N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

Bestimmt man nun aus Proportion 3 einen Wert für M_1N, so findet man:

$$M_1N = \frac{bm}{a},$$

den man in Proportion 1 einsetzt, um zu erhalten:

$$c:d = \frac{bm}{a}:m_1.$$

Hieraus erhält man aber:

$$\frac{bmd}{a} = cm_1,$$

oder umgeformt

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{m}{m_1}, \text{ was verlangt war.}$$

In genau derselben Weise verfährt man nun auch, wenn es sich um die Darstellung des Produktes aus einer beliebigen Anzahl von Verhältnissen handelt. Soll z. B. das Produkt:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{g}{h}\cdot\frac{k}{l} = \frac{m}{m_1}$$

gefunden werden, so verfährt man nach **Fig. 22, Taf. II.**

Man trägt auf die vertikale Achse OY die Zähler der Reihe nach auf und auf die horizontale Achse OX_1 die zugehörigen Nenner. Dann verbindet man die Endpunkte der Zähler mit denjenigen der zu diesen gehörigen Nenner, also z. B. a_1 mit b_1, g_1 mit h_1, k_1 mit l_1 u. s. f., ganz gleich wie die Linien fallen. Dann zieht man durch O die parallelen Linien Oa_0, Oc_0, Og_0 . . . ., nimmt A beliebig in OX an, zieht AB lotrecht zu OX bis zum Treffen der Linie Ok_0, macht OB_1 gleich AB, zieht B_1C parallel AB bis zur Linie Og_0, trägt dann B_1C von O auf OX bis C_1 ab und errichtet das Lot C_1D bis zur Linie Oe_0 u. s. f., bis man schliesslich das Lot E_1F zwischen OX und Oa_0 hat. Dieses Lot ist der Zähler m des Produktes, während $OA = m_1$ der Nenner desselben ist.

Der Beweis ist wie vorher. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Ok_1l_1 Ok_1l_1 und OAB, Og_1h_1 und OBC, Oe_1f_1 und OC_1D, Oc_1d_1 und OD_1E, Oa_1b_1 und OE_1F erhält man nacheinander die Proportion:

$$\begin{aligned}
k:l &= AB:m_1 && \ldots\ldots\ldots\ldots && 1\\
g:h &= CB_1:OB_1 = CB_1:AB && \ldots\ldots && 2\\
e:f &= C_1D:OC_1 = C_1D:BC_1 && \ldots\ldots && 3\\
c:d &= D_1E:OD_1 = D_1E:C_1D \text{ und} && \ldots\ldots && 4\\
a:b &= m:OE_1 = m:D_1E && \ldots\ldots && 5
\end{aligned}$$

Aus der Proportion 5 erhält man $\frac{bm}{a} = D_1E$. Setzt man dieses in Proportion 4 ein, so erhält man:

$$\frac{bdm}{ac} = C_1D.$$

Dieses für den bezüglichen Wert in die dritt
setzt, findet man aus dieser:

$$\frac{bdfm}{ace} = B_1C.$$

Setzt man diesen Wert für B_1C in die zweite der fünf aufgestellten Proportionen ein, so findet man für AB die Grösse $\frac{bdfhm}{aceg}$ und wenn man schliesslich dieses in Proportion 1 einsetzt

$$\frac{bdfhlm}{acegk} = m_1,$$

woraus sich dann durch einfache Umformung findet:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{acegk}{bdfhl} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} \cdot \frac{k}{l}.$$

Sind einige von den gegebenen Verhältnissen negativ, so werden die Zähler dieser auf der Achse YY_1 von O nach unten zu also in der Richtung auf Y_1 abgetragen, die Nenner aber auch auf OX_1. Ergibt sich dann schliesslich das Lot, welches m darstellt, unterhalb XX_1 liegend, so ist das Resultat $\frac{m}{m_1}$ auch eine negative Grösse. Es hat also die Multiplikation von Verhältnissen mit verschiedenen Vorzeichen keinerlei Schwierigkeit.

Soll eine Zahl potenziert werden, so kann man solches auf dieselbe Weise ausführen wie die Multiplikation von Verhältnissen, denn man kann die zu potenzierende Zahl mit dem Nenner 1 versehen in ein Verhältnis umwandeln.

Hat man z. B. den Wert p^2 durch Konstruktion darzustellen, so drückt man dieses aus durch

$$\frac{p}{1} \cdot \frac{p}{1} = \frac{m}{m_1}.$$

Zeichnet man nun, wie **Fig. 23, Taf. II,** geschehen, auf die vertikale Achse die Grösse von p auf die horizontale nach der linken Seite zu die Einheit und zieht die Linie AB, parallel dazu OG, nimmt den Punkt H willkürlich in einem Abstande m_1 von O, zieht HW, macht dann $OM = HW$ und zieht MR, so hat man in dieser Linie den Wert m.

Das Dreieck ABO ist dem Dreiecke OWH und auch demjenigen OMR ähnlich. Man hat also die Proportionen:

$$p : 1 = n : m_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1$$

$$p : 1 = m : n_1 = m : n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2$$

Aus der letzteren Proportion erhält man

$\frac{m}{p} = n$ und dieses in die erste eingesetzt, ergibt

$p : 1 = \frac{m}{p} : m_1$ oder $pm_1 = \frac{m}{p}$, woraus dann

$p^2 = \frac{m}{m_1}$ gefunden wird.

Ist ein Verhältnis z. B. $\frac{a}{b}$ zu potenzieren, so bleibt das Verfahren genau dasselbe, es wird nur statt der Einheit AO, **Fig. 23, Taf. II,** der Nenner b des Verhältnisses abgetragen.

Hat man ein negatives Verhältnis zu potenzieren, also mit sich selbst zu multiplizieren, so werden alle geraden Potenzen postiv, die ungeraden dagegen negativ. Um dieses in der Zeichnung auszudrükken, muss die Konstruktion so getroffen werden, dass die ungeraden Potenzen unterhalb der horizontalen Achse zu liegen kommen, die geraden aber darüber.

Man wird demnach dann verfahren, wie solches **Fig. 24, Taf. I,** angegeben ist.

Zu potenzieren ist $-\frac{a}{b}$. Auf die Achse YY_1 trägt man, von dem Durchschnittspunkt O mit der horizontalen Achse beginnend, nach Y und Y_1 zu den Zähler $a = Oa = Oa_1$ ab und macht Ob gleich dem Nenner b des gegebenen Bruches. Man zieht dann die Linien ab und $a_1 b$ und parallel dazu durch O die Linien OM und OM_1. Weiter trägt man nun auf OX die Länge Om_1 gleich dem Zähler, welchen man dem Resultate zu geben beabsichtigt, zieht $m_1 m$ lotrecht zu OX nach unten gerichtet, so dass man einen Durchschnittspunkt mit OM_1 erhält. Es ist dann $-\frac{a}{b} = -\frac{m}{m_1}$, also der gegebene Bruch in einen andern umgewandelt. Nun macht man $Om_2 = m_1 m$, zieht $m_2 m_3$ von OX nach oben gerichtet bis zum Durchschnittspunkt mit OM. Man hat dann in Uebereinstimmung mit **Fig. 23** in $\frac{m_3}{m_1}$ das Quadrat von $-\frac{a}{b}$.

Macht man jetzt $Om_4 = m_2 m_3$, zieht $m_4 m_5$ parallel zu mm_1, so muss $\frac{m_5}{m_1} = -\left(\frac{a}{b}\right)^3$ sein.

In ganz gleicher Weise kann man fortfahren, bis zu jeder beliebigen Potenz.

Etwas an Einfachheit gewinnt die Konstruktion, wenn man dieselbe nach **Fig. 25, Taf. II,** ausführt, welche sich von **Fig. 24** nur dadurch unterscheidet, dass die Linie MOM_1 eine gerade ist und die geraden Potenzen demnach links von YY_1 über XX_1 zu liegen kommen. Bei dieser Figur sind dieselben Bezeichnungen benutzt, wie bei **Fig. 24,** weshalb die dort gegebene Beschreibung auch hier passt.

Division der Strecken.

Die Division von Strecken ist ebenso einfach auszuführen, wie die Multiplikation. Es ist bei der letztern in dem Vorhergehenden aus $m = a \cdot b$ die Proportion $1 : a = b : m$ gebildet und dieser entsprechend die Konstruktion ausgeführt. Bei der Division $m = \frac{a}{b}$ nimmt man zu m wieder den Nenner 1, schreibt also $\frac{m}{1} = \frac{a}{b}$ und erhält demnach die Proportion $m : 1 = a : b$, kann also ohne weiteres den grössten Teil der für die Multiplikation der Strecken angegebene Konstruktion zur Anwendung bringen, hat nur die Einheit und gegebenen Strecken in einer andern Reihenfolge aufzutragen.

In **Fig. 9, Taf. I**, ist z. B. nur erforderlich AB gleich der Strecke a und BC gleich der Einheit zu machen, um aus den Dreiecken ABC und ADE sofort die Proportion $a : b = 1 : m$ zu erhalten.

Division der Verhältnisse.

Hat man die Division zweier Verhältnisse $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ durch ein anderes Verhältnis $\frac{m}{m_1}$ auszudrücken, also den Ausdruck $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{m}{m_1}$ zu konstruieren, so verfährt man nach **Fig. 26, Taf. II**, in folgender Weise:

Man trägt die Zähler der gegebenen Brüche auf OY ab, macht also $Oa = a$ und $Oc = c$, bringt die Nenner derselben auf OX_1, hat demnach $Ob = b$ und $Od = d$ zu machen und die Linien ab und cd zu ziehen.

Den Punkt M nimmt man beliebig in OX_1 an, zieht Mm parallel zu ab und Mm_1 parallel zu cd, wodurch man sofort die ähnlichen Dreiecke Oab und OMm, sowie Ocd und OMm_1 erhält. Aus diesen hat man dann sofort die Proportion:

$$\begin{array}{l|l} Oa : Om = Ob : OM & Oc : Om_1 = Od : OM \\ a : m \;=\; b \;: OM & c \;:\; m_1 \;=\; d \;: OM \end{array}$$

Dividiert man diese beiden Proportionen, so erhält man

$$\frac{a}{c} : \frac{m}{m_1} = \frac{b}{d} : 1 \quad \text{oder} \quad \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{m}{m_1}.$$

Da übrigens jede Division von Brüchen durch einfache Umkehrung des Divisors in eine Multiplikation verwandelt werden kann, so können hier alle die bei der Multiplikation der Verhältnisse angegebenen Konstruktionen sofort zur Anwendung gebracht werden.

Vereinigte Multiplikation und Division.

Handelt es sich darum zwei Strecken a und b zu multiplizieren und das Produkt durch eine dritte c zu dividieren, also den Ausdruck $m = \frac{a \cdot b}{c}$ zu konstruieren, so bildet man aus demselben die Proportion $m : a = b : c$, welche sich von derjenigen $m : a = b : 1$ für die einfache Multiplikation nur dadurch unterscheidet, dass das vierte Glied c statt 1 ist.

Man wird deshalb solche Aufgaben einfach dadurch lösen, dass man eine beliebige der bei der Multiplikation angegebenen Konstruktionen nimmt und nur statt der Einheit die gegebene Strecke c aufträgt.

Stehen z. B. die zu multiplizierenden Strecken a und b gleich AB und DE, **Fig. 27, Taf. II,** lotrecht zu einander, so trägt man von A bis C die dividierende Strecke c ab, zieht EC und parallel hierzu BF. Dann legt man eine Linie AF durch A und E, bis man den Durchschnittspunkt von AF und BF erhält und zieht FG parallel zu DE, so wird man in dieser Linie das Resultat m haben; denn aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AEC und ABF hat man sofort:

$$AC:AB = CE:BF \quad \text{oder} \quad c:a = CE:BF.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CDE und BGF findet sich aber:

$$CE:BF = DE:GF \quad \text{oder} \quad CE:BF = b:m.$$

Aus diesen beiden Proportionen ergibt sich aber sofort die dritte $c:a = b:m$, welche der Anforderung Genüge leistet.

Soll der Ausdruck $m = \frac{a \cdot b \cdot d}{c \cdot g}$ konstruiert werden, so teilt man denselben in $m_1 = \frac{a \cdot b}{c}$ und $m = \frac{m_1 \cdot d}{g}$, nimmt also zwei Konstruktionen vor, welche eventuell in eine Figur zu vereinigen sind, wie dieses z. B. in **Fig. 28, Taf. II,** geschehen ist.

Um zunächst $m_1 = \frac{a \cdot b}{c}$ zu erhalten, macht man $AD = a$; $AB = c$, zieht BF und DG lotrecht zu AD und macht $AF = b$. Hierauf verlängert man AF bis G und hat dann in AG die Strecke m_1; denn es verhält sich $AB:AD = AF:AG$ oder $c:a = b:m_1$, es ist also $m_1 = \frac{a \cdot b}{c}$. Beschreibt man nun mit $AG = m_1$ von A aus einen Bogen GE, überträgt also die Strecke m_1 auf die Linie AE, trägt ausserdem auf AE, von A aus, die Strecke AC gleich dem zweiten Divisor G, errichtet in C und E Lote und macht CH gleich d, so erhält man, wenn man AHK zieht, in EK die Strecke m. Man stellt aus den Dreiecken ACH und AEK, welche ähnlich sind, die Proportion $AC:CH = AE:EK$ oder $g:d = m_1:m$ auf, hat demnach $m = \frac{dm_1}{g}$, was verlangt ist.

Hat man eine Reihe Faktoren zu multiplizieren und nur einen Divisor, soll also z. B. $m = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e}{g}$ konstruiert werden, so kann man dieses auf eine sehr einfache Weise ausführen, wenn man die Aufgaben zerlegt in:

$$m_1 = a \cdot \frac{e}{g}; \quad m_2 = b \cdot \frac{e}{g}; \quad m_3 = c \cdot \frac{e}{g} \quad \text{und} \quad m_4 = d \cdot \frac{e}{g};$$

also einen beliebigen der Faktoren mit dem Divisor als Verhältnis absondert und dieses der Reihe nach mit den übrigen Faktoren multipliziert, wie dieses in **Fig. 29, Taf. II,** geschehen ist.

Auf die horizontale Linie AK ist $AB = a$, $AD = b$, $AF = c$ und so weiter abgetragen, in den Punkten $B, D, F \ldots.$ sind Lote errichtet, dasjenige in $B = BC = g$ gemacht und die Linie AC durch C gezogen. Diese schneidet von den Loten in $D, F, H \ldots.$ Stücke ab, welche $m_1, m_2, m_3 \ldots.$ darstellen.

Um diese dann zu vereinigen und das verlangte m zu erhalten, betrachtet man $m_1, m_2, m_3 \ldots.$ als Verhältnisse mit dem gemeinschaftlichen Nenner 1 und verfährt dann genau nach **Fig. 22, Taf. I.**

Potenzieren der Strecken.

Soll eine Strecke a auf eine beliebige Potenz erhoben werden, so hat man diese Grösse so oft mit sich selbst zu multiplizieren, als der Exponent dieses anzeigt. Man hat also z. B. $m = a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ oder auch $m = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \frac{a}{1}$. Durch diese Umstellung führt man die Aufgabe sofort auf die in dem vorigen Kapitel zu Ende angegebene Konstruktion zurück, welche sich, weil die zu multiplizierenden Faktoren alle gleich sind, etwas einfacher ausführen lässt.

In **Fig. 30, Taf. II,** ist auf eine Linie AM die Einheit AB abgetragen, in dem Endpunkte ein Lot BC errichtet und dann AC gleich a gleich der zu potenzierenden Strecke gemacht. Durch den Kreisbogen CD von A aus beschrieben überträgt man nun die Strecke a auf die Linie AM, wodurch sich der Punkt D findet. Errichtet man dann in D ein Lot und verlängert dieses bis es in E die durch A und C gehende Linie AM_1 trifft, so hat man in AE das Quadrat der gegebenen Strecke a, denn es ist $AB : AD = AC : AE$ oder $1 : a = a : AE$, also $AE = a^2$. Ueberträgt man nun wieder durch einen Bogen EF, aus A beschrieben, a^2 auf AM, errichtet das Lot FG, so muss der Abschnitt AG der Linie AM_1 die dritte Potenz von a sein; denn es ist $AB : AF = AC : AG$, oder $1 : a^2 = a : AG$, also $AG = a^3$. In ganz gleicher Weise fährt man nun fort bis man $AK = a^5$ findet. Sollen noch höhere Potenzen konstruiert werden, so setzt man das Verfahren bis zu der verlangten Stelle fort.

Es ist diese Konstruktion, soweit dieselbe in der Figur angegeben, nur dann zu gebrauchen, wenn die Strecke a, die potenziert werden soll, grösser ist als die Einheit.

Ueberträgt man nun weiter die Einheit AB durch einen Bogen aus A auf die Linie AM_1, so erhält man den Punkt N. Fällt man von diesem aus dann ein Lot auf AM, so hat man in AO den Wert $\frac{1}{a}$; denn es ist $AB : AO = AC : AN$ oder $1 : AO = a : 1$, also AO wie angegeben.

Macht man nun weiter AP gleich AO und zieht PR, so hat man $AO : AR = AN : AP$ oder $\frac{1}{a} : AR = 1 : \frac{1}{a}$ oder $AR = \frac{1}{a^2}$. In gleicher Weise fortgefahren, erhält man dann nacheinander $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$ .....

Ist die Strecke a kleiner als die Einheit, so trägt man diese auf eine Linie AM, **Fig. 31**, **Taf. II**, auf, wodurch sich der Punkt B findet. Dann halbiert man AB in C und beschreibt von C aus mit CA einen Halbkreis. Trägt man nun die zu potenzierende Strecke a als Sehne in den Halbkreis ein, so dass der eine Punkt in A, der andere in D liegt und zieht BD, so ist bei D ein rechter Winkel. Zieht man DE lotrecht zu AM und EF parallel zu BD, also lotrecht zu AM_1, so erhält man die ähnlichen Dreiecke ABD und ADE, hat also die Proportion $AB : AD = AD : AE$ oder $1 : a = a : AE$, also $AE = a^2$.

Fährt man nun fort abwechselnd Lote zu AM und AM_1 zu ziehen, so findet man nacheinander a^3, a^4, a^5 .... und zwar die Potenzen mit ungeraden Exponenten auf der Linie AM_1, diejenigen mit geraden Exponenten aber auf AME.

Zieht man die wechselweise zu AM und AM_1 liegenden Lote auch rechts von DB, also z. B. BH, HG und GJ, so erhält man:

Es ist Dreieck ABD ähnlich dem Dreieck AHB, man hat demnach die Proportion $AB : AD = AH : AB$ oder $1 : a = AH : 1$, also $AH = \frac{1}{a}$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und AHG folgt dann weiter $AB : AG = AD : AH$ oder $1 : AG = a : \frac{1}{a}$, so dass also $AG = \frac{1}{a^2}$ ist. Es ist dann auch weiter $AJ = \frac{1}{a^3}$ und so fort.

Will man diese Konstruktion auch zur Potenzierung von Strecken benutzen, welche grösser als 1 sind, so macht man $AB = 1$ und $AH = a$, zieht AM_1 und HG lotrecht zu AM_1; GJ lotrecht zu AM; JK wieder lotrecht zu AM_1; HC zu AM und so fort. Man hat dann aus ABH und AGH die Proportion $1 : a = a : AG$, also $AG = a^2$. Weiter ist dann $AJ = a^3$, $AK = a^4$ und so fort.

Für jedes Verhältnis zwischen der Einheit und der zu potenzierenden Strecke kann man das **Fig. 32**, **Taf. II**, angegebene Verfahren benutzen.

Auf dem Teil OX_1 der horizontalen Achse XX_1 trägt man die Einheit ab, wodurch sich der Punkt A findet. Dann macht man OB auf der vertikalen Achse gleich der Strecke a und zieht AB. Parallel hierzu legt man durch O die Linie OM, macht OC_1 gleich OB geich 1 und zieht C_1D lotrecht zu OX, dann ist der Abschnitt dieses Lotes zwischen OX und OM gleich dem Quadrate der Strecke a; denn man hat hier die ähnlichen Dreiecke AOB und OC_1D, woraus die Proportion $AO:OB = OC_1 : C_1 D$ folgt. Setzt man in diese die bekannten Grössen ein, so hat man $1:a = a:C_1 D$, also $C_1 D = a^2$.

Macht man nun $OD_1 = C_1 D = a^2$, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AOB und $OD_1 E$ die Proportion $AO : OB = OD_1 : D_1 E$ oder $1:a = a^2 : D_1 E$, also ist $D_1 E = a^3$ und so fort.

Ein anderes Verfahren, ebenfalls für beliebige Strecken anwendbar, ist **Fig. 33** angegeben.

Auf der Achse XX_1 trägt man von O nach A die Einheit ab und auf der Achse YY_1 von O bis B die Strecke a. Zieht man dann AB und lotrecht dazu BC, ferner lotrecht zu BC die Linie CD, dann DE lotrecht zu CD, so erhält man eine Reihe ähnlicher Dreiecke, als ABO, BCO, CDO, $DEO\ldots.$ und deshalb die Proportionen:

$$\begin{array}{llll} AO:OB = OB:OC & \text{oder } 1:a = a\;:OC, & \text{also } OC = a^2, \\ AO:OB = OC:OD & \quad ,, \quad 1:a = a^2:OD, & \quad ,, \quad OD = a^3, \\ AO:OB = OD:OE & \quad ,, \quad 1:a = a^3:OE, & \quad ,, \quad OE = a^4 \end{array}$$

und so weiter.

In OG hat man dann $\frac{1}{a}$, in $OF = \frac{1}{a^2}$ und so fort, wenn man nur immer die Linien AG, $GF\ldots.$ lotrecht an die vorhergehende Linie anschliesst.

Es liegt auf der Hand, dass man, wenn die Strecke a die Einheit beträchtlicher übertrifft, und es sich um Darstellung einer höheren Potenz handelt, eine sehr grosse Figur, sowohl nach dem letzten, wie nach dem vorher angegebenen Verfahren erhält. Es wird sich deshalb in vielen Fällen empfehlen nicht direkt die Potenz der Strecke zu konstruieren, sondern statt dessen $\frac{1}{a^n}$ zu bilden, um dann hieraus den wirklichen Wert a^n zu bestimmen, was sehr leicht thunlich, da es sich nur um Konstruktion der Proportion $1:a^n = m:1$ handelt.

$m^n = \frac{1}{a^n} : 1$

Ausziehen von Wurzeln.

Ohne besondere Hilfsvorrichtungen kann man auf graphischem Wege nur die Quadratwurzeln bequem darstellen.

Soll $m = \sqrt{a}$ gefunden werden, so wandelt man diesen Ausdruck in $m^2 = 1\,a$ oder in die Proportion $1:m = m:a$ um, d. h. man bestimmt die mittlere Proportionale m zu 1 und der gegebenen Strecke a.

Ist die Strecke a kleiner als die Einheit, so verfährt man nach **Fig. 34, Taf. II.** Man macht AB gleich der Einheit, halbiert AB in C und beschreibt aus C über AB einen Halbkreis. Dann macht man AD gleich a, errichtet in D das Lot DC, bis dieses den Umfang des Kreises trifft und zieht AC, so muss diese Linie die verlangte Grösse m sein.

Zieht man zum Beweise noch die Linie CB, so hat man in ABC und ADC ähnliche Dreiecke, aus denen sich die Proportion

$$AB : AC = AC : AD$$
$$1 : m = m : a$$

herleitet.

Oefter ist es bequemer, wenn man die Einheit und die Strecke nebeneinander auf eine gerade Linie legt und dieses namentlich dann, wenn die Strecke a, aus der die Wurzel zu ziehen ist, sehr viel kleiner als die Einheit ausfällt.

Es ist diese Konstruktion in **Fig. 35, Taf. II**, angegeben. AB ist gleich der Einheit, BC gleich der Strecke a. Man halbiert AC und beschreibt aus dem Halbierungspunkt über AC einen Halbkreis, zieht BD lotrecht zu AC bis zum Kreisumfange, so hat man in dieser Linie die verlangte Grösse.

Zieht man noch die Linien AD und DC, so hat man die Proportion $AB : BD = BD : BC$, also

$$1 : m = m : a.$$

Hat man eine grössere Strecke als die Einheit ist, so legt man beide auf eine gerade Linie und zwar an demselben Punkte in dieser beginnend. Es ist also $AB = 1$ und $AC = a$, **Fig. 36, Taf. II**, zu machen. Ueber AC wird wieder ein Halbkreis beschrieben und das Lot BD gezogen. Verbindet man dann die Punkte A und D durch eine gerade Linie, so stellt diese die verlangte Strecke m dar.

Potenzieren und Wurzelausziehen mit der logarithmischen Spirale.

Bei der logarithmischen Spirale bildet der Radiusvektor mit der zugehörigen Tangente einen konstanten Winkel. Hierauf stützt sich der Gebrauch der Kurve für Potenzierungen und Wurzelausziehungen, weil kleine Teile derselben mit den zugehörigen Radiusvektoren als ähnliche Dreiecke betrachtet werden können.

Die aufeinander folgenden Leitstrahlen bilden eine geometrische Progression, vorausgesetzt, dass je zwei benachbarte derselben bei dem Anfangspunkte O gleiche Winkel miteinander einschliessen.

Ist z. B. **Fig. 37, Taf. II**, ad ein Stück einer logarithmischen Spirale, sind die Winkel aOb, bOc, cOd einander gleich und auch diejenigen, welche die Strahlen Oa, Ob, Oc, $Od \ldots$ mit der Kurve selbst einschliessen, so hat man in Oab, Obc, $Ocd \ldots$ ähnliche Dreiecke und wenn man die Halbmesser $Oa = r_0$; $Ob = r_1$; $Oc = r_2$, $Od = r_3 \ldots$ setzt, so müssen die Verhältnisse $\frac{r_1}{r_0}$, $\frac{r_2}{r_1}$, $\frac{r_3}{r_2}$, $\frac{r_4}{r_3} \ldots = k =$ konstant sein. Setzt man nun $r_0 = 1$, so hat man:

$$r_0 = 1\,r_0$$

und erhält aus $\frac{r_1}{r_0} = k \ldots\ldots\ldots\ldots r_1 = k\,r_0$

$$\frac{r_2}{r_1} = k = \frac{r_2}{k\,r_0} \ldots\ldots r_2 = k^2\,r_0$$

$$\frac{r_3}{r_2} = k = \frac{r_3}{k^2\,r_0} \ldots\ldots r_3 = k^3\,r_0$$

$$\frac{r_4}{r_3} = k = \frac{r_4}{k^3\,r_0} \ldots\ldots r_4 = k^4\,r_0$$

Da nun aber $r_0 = 1$ ist, so erhält man $r_1 = k$, $r_2 = k^2 = r_1^2$, $r_3 = k^3 = r_1^3$ und so fort, hat also eine geometrische Progression, welche mit 1 beginnt und deren Exponent $k = r_1$ ist.

Hat man demnach eine Strecke Ob, welche gleich r_1 ist, und die zum Quadrat erhoben werden soll, so ist $Oc = r_2$ das verlangte Quadrat, da nach dem Vorhergehenden $r_2 = r_1^2$ ist. Soll die Strecke $Ob = r_1$ auf eine beliebige Potenz, z. B. auf die 10 erhoben werden, so muss von r_1 aus gerechnet der neunte Halbmesser das Resultat geben.

Soll aus einer Strecke $Oc = r_2$ die Quadratwurzel gezogen werden, so muss diese offenbar in der Strecke r_1 gefunden sein, denn da $r_2 = r_1^2$, also $r_1 = \sqrt{r_2}$ ist, so ist die Richtigkeit dargethan.

Man kann nun ausser zu Potenzierungen die logarithmische Spirale auch zum Multiplizieren und Dividieren benutzen. Dieselbe ersetzt demnach innerhalb gewisser Grenzen die Logarithmentafeln für das graphische Rechnen und ist es jedem, der mehr mit diesem zu thun hat, oder sich öfter damit beschäftigt, anzuraten, sich eine logarithmische Spirale von grösserer Länge und grosser Genauigkeit darzustellen, um dieselbe bei graphischen Rechnungen zur Hand zu haben und benutzen zu können.

Man zeichnet nun die logarithmische Spirale auf eine einfache Weise nach **Fig. 38, Taf. II.**

Ein um O beschriebener Kreis, mit dem Halbmesser $Oa = r_0 = 1$ erzeugt, wird in eine beliebige Anzahl gleicher Teile eingeteilt und nach den Teilpunkten Halbmesser gezogen und über den Umfang hinaus verlängert. Je kleiner man diese Teilung macht, je näher also die Halbmesser bei einander liegen, desto genauer wird die Spirale und desto vorteilhafter ist es für den Gebrauch derselben.

Um die Länge der einzelnen Leitstrahlen nun zu erhalten, verfährt man für die, welche **Fig. 38a** nach der linken Seite von dem Punkte a liegen, auf folgende Weise:

Man zieht eine Linie AB, **Fig. 38b**, beschreibt von A aus einen Kreisbogen CD mit einer Zirkelöffnung gleich $Oa = r_0$, trägt als Sehne in diesen die Länge des Leitstrahles r_1 und zieht die Linien EDA, zwischen dieser und AB zieht man dann der Reihe nach Kreisbogen mit einem Halbmesser gleich der in dem letztgezogenen Bogen liegenden Sehne, also Bogen FG mit Sehne CD, Bogen HJ mit Sehne FG und so fort.

Die Leitstrahlen $r_1, r_2, r_3 \ldots.$ werden dann der Reihe nach gleich den Sehnen $FG, HJ, HL \ldots.$ gemacht und durch die gefundenen Punkte die Kurve gezeichnet.

Um die Teile der Spirale, welche rechts von dem Punkte a in der **Fig. 38a** liegen, zu finden, beschreibt man von a_1, **Fig. 38c**, aus mit $a_1 b_1 = r_0$ einen Bogen $b_1 d_1$ und zieht die Linie $a_1 d_1$. Mit der Sehne $b_1 d_1$* beschreibt man den Bogen $e_1 f_1$, mit der Sehne $e_1 f_1$ den Bogen $g_1 h_1$ und so fort und macht die Halbmesser, welche rechts von dem Punkte a liegen, der Reihe nach den Sehnen $e_1 f_1, g_1 h_1 \ldots.$ gleich und verlängert die Spirale nach den sich ergebenden Punkten.

Für den Gebrauch der logarithmischen Spirale hat man nun die Leitstrahlen nicht nötig, wird dieselben also bei einer für rechnenden Gebrauch bestimmten Spirale nicht mit ausziehen, sondern nach Konstruktion der Spirale beseitigen, damit dieselben nicht störend einwirken.

1. Potenzieren der Strecken mit der logarithmischen Spirale.

Soll eine Strecke a auf eine beliebige z. B. die 5. Potenz erhoben, also a^5 ermittelt werden, wobei es gleich ist, ob a grösser oder kleiner als 1 ist, so schneidet man von O aus mit a und mit der Einheit in die Spirale ein, findet dadurch z. B. die Punkte g und h, so dass also $Og = 1$, $Oh = a$ ist. Zieht man dann die Halbmesser Og und Oh oder markiert nur die Punkte m und n, in denen die Halbmesser den Kreis um O mit Oa beschrieben schneiden würden, trägt die Sehne mn fünfmal in dem Kreise ab, so findet man den Punkt p. Zieht man nach diesem den Halbmesser Op und verlängert denselben bis zur Spirale, also bis w, so ist $Ow = a^5$.

Wäre a kleiner als die Einheit, hätte sich durch das Einschneiden von a in die Spirale der Punkt s gefunden, so hätte man die Sehne mn fünfmal nach der Seite in den Kreis eintragen müssen, nach welcher der Punkt a liegt.

Man ersieht hieraus, dass ein einfacheres Potenzieren, als hier angegeben, gar nicht denkbar ist.

Handelt es sich nicht um die Konstruktion oder Auffindung einer Grösse mit positiven Exponenten, sondern ist z. B. $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ aufzusuchen, so trägt man die durch Auftragen der Einheit und der Strecke a gefundene Sehne nach der Seite in dem Kreise um O ab, nach welchem die Einheit liegt. Wäre also durch Einschneiden mit der Einheit in die Spirale der Punkt g, durch dasjenige mit der Strecke a aber der Punkt s gefunden, so würde der zu dieser gehörige Bogen von n aus dreimal über m hinaus in den Kreis getragen, also der Punkt l gefunden, so dass Ok die verlangte Strecke sein würde.

2. Wurzelausziehen aus Strecken mit der logarithmischen Spirale.

Soll $\sqrt[5]{a}$ bestimmt werden, so schneidet man mit der Einheit und a in die Spirale ein, bestimmt den zugehörigen Bogen in dem mit Oa beschriebenen Kreise, teilt diese in fünf gleiche Teile und nimmt den Leitstrahl, welcher dem durch die Einheit bestimmten Punkt zunächst liegt, als die verlangte Wurzel an.

Findet man also z. B. durch Einschneiden mit der Einheit in die Spirale den Punkt h und durch dasjenige mit der Strecke a den Punkt b und ermittelt als zugehörige Punkte in dem Kreise n und d, so teilt man den Bogen nd in fünf gleiche Teile, wodurch sich die Punkte e, f, v und x finden. Der durch x gehende Leitstrahl Oy ist dann die verlangte Wurzel.

3. Pontenzieren und Wurzelausziehen der Verhältnisse mit Hilfe der logarithmischen Spirale.

Hat man nicht einfache Strecken zu potenzieren oder aus diesen die Wurzeln zu ziehen, sondern diese Rechnungsarten an Verhältnissen auszuführen, so staltet man diese nach dem Früheren in solche Verhältnisse um, welche 1 als ~~Zähler~~ Nenner haben, der weggelassen eine einfache Strecke lässt.

Ist z. B. $\left(\frac{m}{m_1}\right)^6$ oder $\sqrt[6]{\frac{m}{m_1}}$ zu konstruieren, so bestimmt zunächst $\frac{m}{m_1} = n$ und sucht dann n^6 oder $\sqrt[6]{n}$ mit Hilfe der Spirale auf. Die Strecke, welche man hierbei als Resultat erhält, kann man leicht, wenn dieses verlangt wird, wieder in ein Verhältnis mit beliebigem Nenner umgestalten.

4. Multiplizieren und Dividieren der Strecken mit Hilfe der logarithmischen Spirale.

Nach der analytischen Geometrie ist die Gleichung der logarithmischen Spirale $r = e^m$, wenn man dieselbe auf die Achse $Oa = 1$ und den Pol O bezieht. Es ist r ein beliebiger Leitstrahl, e die Basis des Logarithmensystems und m der Winkel, welchen der Strahl r mit der Achse Oa an dem Pole O einschliesst. Es ist daher auch $m = \log r$, d. h. es ist der Logarithmus des Leitstrahles gleich dem zugehörigen Winkel am Pol (Polarwinkel).

Um demnach eine beliebige Anzahl von Faktoren miteinander zu multiplizieren, trägt man dieselben in die Spirale als Leitstrahlen ein, bestimmt die Grösse der Polarwinkel durch Kreisbogen von gleichen Halbmessern, legt die gefundenen Winkel zusammen und hat das Produkt in demjenigen Leitstrahl gefunden, welcher mit Oa die Summe der einzelnen Polarwinkel einschliesst.

Bei der Division verfährt man ebenso, hat aber die Polarwinkel zu subtrahieren.

Man ist also im stande auf eine sehr einfache Weise jede einfache und zusammengesetzte Multiplikation und Division aufzulösen, vorausgesetzt, dass die Spirale in gehöriger Länge gezeichnet ist.

Soll z. B. der Ausdruck $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}$ bestimmt werden, so trägt man die Grössen $a_1, a_2, a_3 \ldots.$ als Strahlen in die Spirale ein, bestimmt die Summe m_0 aller zugehörigen Polarwinkel m, verfährt ebenso mit den Divisoren und zieht die Summe m_1 der gefundenen Polarwinkel von m_0 ab, hat also den Polarwinkel des Quotienten $M = m_0 - m_1$ und den Quotienten in dem zu dem Winkel M gehörigen Strahle.

Bestimmung der Flächeninhalte ebener von geraden Linien eingeschlossener Figuren.

1. Flächenbestimmung des Dreiecks.

Den Flächeninhalt eines Dreiecks bestimmt man nach der Formel $F = \frac{bh}{2}$, worin b die Basis und h die Höhe des Dreiecks bezeichnet.

Man hat also, um den Inhalt eines Dreiecks als eine Strecke darzustellen, nur eine Multiplikation zweier Faktoren b und h vorzunehmen und das Produkt durch 2 zu teilen. Man wird also ohne weiteres alle die für die Multiplikation angegebenen Konstruktionen benutzen können, wenn man statt der bei diesen abgetragenen Einheit die zweifache Einheit in die Konstruktion einträgt.

Es werden aber bei den Flächenbestimmungen oft Bedingungen über die Lage des Resultats zu der Fläche selbst gestellt, welche andere als die früher angegebenen Konstruktionen bedingen, weshalb hier noch einige mitgeteilt werden müssen.

a) Die Strecke, welche die Fläche des Dreiecks darstellt, soll lotrecht zu der Basis stehen. **Fig. 39, Taf. II.**

Es ist ABC das gegebene Dreieck und BD die Höhe in demselben. Man macht AE gleich 2, zieht BE und parallel dazu CG, bis man den Punkt G findet, indem sich diese Linie mit der verlängerten Dreiecksseite AB schneidet.

Es verhält sich $AE : AC = BD : GF$ oder

$$2 : b = a : f.$$

Es gilt diese Konstruktion für den Fall, in dem die Basis des Dreiecks grösser als 2 ist. Ist die Basis kleiner als 2, so wird die Figur wie dieses in **Fig. 40, Taf. II,** angegeben ist. In der letztgenannten Figur sind die gleichen Punkte mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie dieses in **Fig. 39** geschehen ist.

b) Die Fläche soll in der Basis oder der Verlängerung dieser liegen. **Fig. 41, Taf. II.**

ABC das gegebene Dreieck. AD lotrecht zu AC wird gleich 2 gemacht, CD gezogen und parallel hierzu durch B die Linie BF gelegt. Man hat $AC:AD = FG:BG$, das ist

$$b : 2 = f : a,$$

weshalb die Strecke FG die Fläche von ABC ist.

c) Die die Fläche des Dreiecks ABC, **Fig. 42, Taf. II,** darstellende Strecke soll lotrecht zu der Basis in einem der Endpunkte dieser stehen.

Man macht AD_1 gleich 2, errichtet in D_1 und C Lote zu AC, macht das in D_1 stehende, also $B_1 D_1$ gleich BD gleich der Höhe des Dreiecks und zieht AG durch B_1, so ist GC die Fläche.

d) Die Flächenstrecke soll in der Seite AB, **Fig. 43, Taf. II,** des Dreiecks liegen. Man nimmt AB als Basis und CD als Höhe des gegebenen Dreiecks ABC und konstruiert nach **Fig. 41.**

Oder man überträgt durch einen Kreisbogen CE, **Fig. 44, Taf. II,** von A aus mit der Basis AC, diese auf die Seite AB, zieht durch den gefundenen Punkt E eine Linie EF parallel zu der Höhe BD, macht $EF = 2$, zieht FA und parallel hierzu DG, so hat man $\triangle AFE \sim \triangle GBD$ und demnach $AE:EF = BG:BD$ oder weil $AE = AC$ ist, auch $AC:EF = BG:BD$. Setzt man hierin die bekannten Werte ein, so erhält man $b:h = BG:2$, weshalb BG die verlangte Länge sein muss. $b:2 = BG:h$

2. Flächenermittelungen der Vierecke.

Sind die Vierecke, deren Flächen bestimmt werden sollen, Parallelogramme, so ist die Ermittellung eine einfache Multiplikation zweier Faktoren; denn wenn a die eine und b die anschliessende Seite des geraden Parallelogramms sind, so hat man die Fläche $F = ba$, also nur die einfache Proportion $1:b = a:F$ zu konstruieren. Ist das Parallelogramm schief, so ist statt a die Höhe h in Rechnung zu stellen und ist dasselbe ein Quadrat von der Seite a, so hat man $F = a^2$.

Man wird demnach einfach zum Ziel kommen, wenn man nach **Fig. 45, Taf. II,** verfährt.

$ABCD$ ist das gegebene Rechteck. Man macht BF gleich der Einheit, zieht FE lotrecht zu AB und trägt auf diesem Lote die Höhe des Parallelogramms ab. Dann zieht man BG durch E und verlängert die Seite AD bis zum Durchschnittspunkt G mit der Linie BG, dann ist AG die verlangte Flächenstrecke; denn es ist $BF:BA = FE:AG$, also $1:b = a:f$.

Ist das Viereck kein Rechteck, sondern ein anderes Parallelogramm wie $ABC_1 D_1$, so bleibt die Konstruktion dieselbe.

Handelt es sich um die Flächenermittelung eines beliebigen Vierecks z. B. $ABCD$, **Fig. 46, Taf. II,** so kommt man am schnellsten zum Ziele, wenn man das Viereck in ein Dreieck verwandelt.

Man zieht, um diesen Zweck zu erreichen, eine Diagonale z. B. BD in dem Viereck, zieht parallel zu derselben durch die Ecke C

eine Linie CE bis dieselbe die Verlängerung von AB in E trifft. Dann zieht man DE und hat in ADE das verlangte Dreieck.

Von dem gegebenen Viereck das Dreieck BCD durch die Diagonale BD abgeschnitten und dafür das Dreieck BDE zu dem Reste des Vierecks zugefügt. Da die beiden Dreiecke BCD und BDE aber gleiche Flächeninhalte haben, weil sie auf der gemeinschaftlichen Grundlinie BD stehen und gleiche Höhe haben, so muss das Viereck $ABCD$ dem Dreieck AED gleich sein.

Den Inhalt dieses Dreiecks zeichnet man nun nach einer der bekannten Methoden.

Ein anderes Verfahren ist in **Fig. 47, Taf. II**, angegeben.

Teilt man das gegebene Viereck $ABCD$ durch die Diagonale AC in zwei Dreiecke, so hat man, wenn man diese Diagonale als Basis der Dreiecke annimmt und mit b bezeichnet, aber h_1 und h_2 die Höhe der Dreiecke ABC und ACD nennt, den Inhalt des Vierecks $f = \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot b$ oder wenn man $h_1 + h_2 = h$ setzt, auch $f = h \cdot \frac{b}{2}$.

Zieht man nun durch D eine Linie EF parallel zu der Diagonale AC und lotrecht zu EF die Linie BE, so muss die letztere gleich h sein. Macht man dann weiter BF gleich 2, zieht AG parallel zu BF und CG lotrecht hierzu durch C, so hat man die ähnlichen Dreiecke BEF und ACG und deshalb die Proportion $BF:BE = AC:CG$ oder $2:b = h:f$, also in CG die Flächenstrecke des Vierecks $ABCD$. $2:h = b:f$

Verwandelt man das Viereck, dessen Fläche bestimmt werden soll in ein Dreieck, dessen Höhe gleich 2 ist, so ist die Flächenstrecke gleich der Basis des konstruierten Dreiecks; denn man hat dann $f = \frac{bh}{2} = b$, weil $h = 2$ ist.

Diese Konstruktion ist in **Fig. 48, Taf. III**, dargestellt. $ABCD$ ist das gegebene Viereck. Man beschreibt von B aus mit einem Halbmesser BG gleich 2 einen Kreisbogen und zieht an diesen von der gegenüberliegenden Ecke A aus die Tangente EAD. Zieht man dann die Diagonale AB in dem Viereck und parallel dazu durch C und D die Linien CE und DF, ferner die Linien BE und BF, so hat man in BEF das Dreieck, welches dem Viereck $ADBC$ gleich ist und welches eine Höhe gleich 2 hat, EF ist die Flächenstrecke.

Soll das Dreieck, in welches das Viereck verwandelt wird, einen bestimmten Winkel haben, so wird man in wenigstens sehr vielen Fällen am raschesten zum Ziele kommen, wenn man das Viereck erst in ein beliebiges Dreieck verwandelt und dieses dann in ein anderes umgestaltet, welches den gestellten Anforderungen entspricht.

Ist z. B. das Viereck ABC, **Fig. 49, Taf. III**, in ein Dreieck zu verwandeln, welches an der Basis bei A einen Winkel von 45 Grad hat, so verwandelt man in der bekannten Weise das Viereck erst in das Dreieck ABE, trägt dann in A an AD einen Winkel FAD von 45 Grad, zieht durch B die parallele Linie BF zu AD und verlängert den Schenkel AF des Winkels FAD bis derselbe die Linie BF trifft. Zieht man dann noch FE, so ist das Dreieck AFE

demjenigen BAE gleich, weil beide die gemeinschaftliche Basis AE und gleiche Höhe haben.

3. Flächen von Polygonen.

Auch die Flächen der Polygone verwandelt man in den meisten Fällen in Dreiecke und bestimmt dann die Fläche dieser. Reguläre Polygone und solche, welche geeignete Formen haben, lassen sich oft einfacher in Parallelogramme verwandeln und bei regulären Polygonen ist dann nur eine Umgestaltung der Hälfte erforderlich, weil die zweite Hälfte der ersten vollständig gleich ist.

Fig. 50, Taf. III, ist das reguläre Sechseck $ABCDEF$ in das Parallelogramm $GBHE$ verwandelt, in dem die Diagonalen AE und BD gezogen, hierzu parallel die Linien FG und CH durch die Ecken F und C des Sechsecks gelegt und dann die Linien EG und BH gezogen sind.

Man kann nun nach einer der Multiplikationskonstruktionen die Flächenstrecke ermitteln. Da aber die Fläche eines Parallelogramms gleich dem Produkte aus Höhe und Basis ist, so hat man, wenn man einen dieser Faktoren gleich der Einheit annehmen kann, sofort in dem zweiten die Flächenstrecke.

Fig. 51, Taf. III, zeigt die Umwandlung des regelmässigen Achtecks $ABC \ldots . H$ in ein Parallelogramm $MNOK$. Es soll das Produkt aus Höhe und Grundlinie dieses in eine Seite des Parallelogramms, also z. B. in ON fallen.

Man macht dann MP gleich der Einheit, zieht PR gleich der Höhe parallel zu ON und zieht die Linie MW durch R. Man verlängert dann MW und ON bis zu dem Durchschnittspunkte W, um in OW die verlangte Flächenstrecke zu haben.

In derselben Weise wird man auch bei unregelmässig begrenzten Flächen verfahren können, wenn dieselben zwei parallele Seiten haben. Fig
Ist z. B. in dem Fünfeck $ABCDE$ die Seite DE parallel der Basis AB, so beseitigt man die Ecke C, indem man BD zieht, hierzu parallel durch C die CK legt und DK zieht. Man schneidet dann das Dreieck CDM von dem Fünfeck $ABCDE$ ab, fügt aber das Dreieck BKM hinzu. Diese beiden Dreiecke sind aber gleichgross; denn es teilt die Diagonale DK das Trapez $BDCK$ in zwei Dreiecke BDC und BDK ein, welche gleichgross sein müssen, weil dieselben die gemeinschaftliche Basis BD haben und ihre Spitzen in der zu BD parallelen Linie CK liegen. Zieht man nun von jedem dieser Dreiecke BDM ab, so müssen gleiche Grössen bleiben, demnach das Dreieck BCM gleich demjenigen BMK sein.

Nachdem man nun die Ecke C beseitigt, also das Fünfeck in ein Viereck $AEDK$ verwandelt hat, ist es nur noch erforderlich die Seite AE in F zu halbieren und durch den Halbierungspunkt die Linie GH parallel zu DK zu legen. Es entstehen dadurch die zwei kongruenten Dreiecke AGF und EFH, von denen man das erstere von der Fläche wegnimmt, das letztere aber zufügt, so dass der Inhalt derselben ungeändert bleibt. Es ist deshalb das Parallelogramm $DKGH$ gleich dem gegebenen Fünfeck $AEDCB$.

Die Verwandlung eines unregelmässigen Polygons, hier eines Fünfecks in ein Dreieck, ist in **Fig. 53, Taf. III**, angegeben.

Das gegebene Fünfeck ist mit $ABCDE$ bezeichnet. Man zieht in demselben die Diagonalen AD und BD parallel zu diesen die Linien EF und CG durch die Ecken E und C des Fünfecks, verlängert die Seite AB dieses, bis man die Durchschnittspunkte F und G mit den Parallelen EF und CG erhält und zieht DF und DG, so ist DFG das verlangte Dreieck.

Von dem Fünfeck $ABCDE$ sind die Dreiecke DEL und CDM durch das angegebene Verfahren abgeschnitten und zu dem Reste die gleichgrossen Dreiecke AFL und BGM zugefügt und hierdurch das Dreieck DFG gebildet.

Hat die gegebene Fläche einspringende Winkel, wie z. B. das Sechseck $ABCDEF$, **Fig. 54, Taf. III**, den Winkel CDE, so bringt dieses keine Aenderung in dem Verfahren, welches bei der Umwandlung der gegebenen Figur in ein Dreieck zu befolgen ist, herbei.

Um aus dem angegebenen Sechseck ein Dreieck von gleicher Grösse zu bilden, zieht man die Diagonale AC, welche, wie hier der Fall ist, teilweise ausserhalb der gegebenen Fläche liegen kann, zieht dazu durch B die parallele BG, verlängert AF bis G und zieht CG.

Man zieht dann die Diagonale CE, welche ganz ausserhalb der Fläche des Sechsecks liegt, dazu parallel DH durch D. Diese Linie trifft die Seite EF des Sechsecks in H. Zieht man demnach die Linie CH, so schneidet man durch diese von der Figur das Dreieck EMH ab und fügt das gleichgrosse CDM zu, so dass der Flächeninhalt des nun entstandenen Vierecks $GCHF$ demjenigen des anfänglich vorhandenen Sechsecks gleich ist. Beseitigt man nun noch in der bekannten Weise die Ecke H, so erhält man das Dreieck GCK als dasjenige, welches das Sechseck seiner Grösse nach ersetzt.

Hat man sehr zusammengesetzte Figuren, so ist die Umwandlung derselben in der bisher benutzten Weise eine sehr unangenehme und zeitraubende Arbeit, welche aber nur dadurch vereinfacht werden kann, dass man alle Hilfslinien nicht auszieht, sondern nur die Durchschnittspunkte, welche weiter benutzt werden müssen, angibt.

Sind dann an die Verwandlungen noch besondere Bedingungen geknüpft, wie z. B. diejenige, dass das entstandene Dreieck einen bestimmten Winkel haben soll, so kann man in der angegebenen Weise die Figur in ein beliebiges Dreieck umwandeln und dann das Dreieck in die verlangte Form überführen, was leicht zu bewerkstelligen ist, da Dreiecke zwischen parallelen Linien mit gleichen Grundflächen gleichen Inhalt haben. Ist aber bei den Anforderungen, welche an das zu bildende Dreieck gestellt werden, auch diejenige, dass dasselbe eine bestimmte Basis haben soll, so ist man genötigt ein anderes Verfahren einzuschlagen, welches hier noch angegeben werden soll.

Die Fläche $ABCDEFGHK$, **Fig. 55, Taf. III**, soll in ein Dreieck verwandelt werden, in welchem der Winkel KAB bleibt und dessen Grundlinie gleich AL ist. Man muss, um diese Aufgabe zu lösen, die Ecken der gegebenen Figur allmählich beseitigen, also nach und nach Figuren bilden, von denen jede folgende eine Ecke oder Seite weniger hat als die vorhergehende, dabei aber die Diagonalen, welche zu dieser Arbeit erforderlich sind, immer so legen, dass dieselben in der Seite AB oder deren Verlängerung endigen, weil es nur in diesem Falle möglich ist, die Seite AB als Seite des Dreiecks zu bekommen, ohne eine nochmalige Neubildung des konstruierten Dreiecks vornehmen zu müssen.

Um also die Ecke C zu beseitigen zieht man die Diagonale BD, die parallele Linie CM und verbindet die Punkte D und M durch DM. Hierdurch hat man die zwei Seiten BC und CD der gegebenen Figur durch die eine DM ersetzt.

Die zweite Diagonale legt man nun so, dass die Punkte M und E durch dieselbe miteinander verbunden werden. Parallel zu EM zieht man dann durch D die BD und ersetzt durch Ziehen der Linien BE die Seiten CD und DM durch die eine BE.

Die dritte Diagonale verbindet die Ecken B und F miteinander. Da es sich jetzt um Beseitigung der Ecke E der Figur handelt, muss man die zu BF parallel zu legende Linie EN durch den Punkt E ziehen. Durch Verbindung von F und N durch die Linie FN beseitigt man wieder eine Seite der Figur.

In dieser Weise fährt man fort, bis man schliesslich das Dreieck AKW erhält, welches der Anforderung, dass der Winkel A in demselben vorhanden, genügt, nicht aber derjenigen, dass die Basis gleich AL sei.

Um dieser zweiten Anforderung zu genügen, betrachtet man das Dreieck AKW nebst der Linie KL noch als ein Polygon, $AWKLK$, von dem noch die Ecke K beseitigt werden muss. Man wird demnach die Diagonale WL ziehen, parallel hierzu die KV legen und dann VL ziehen, um schliesslich in ALV das verlangte Dreieck zu haben.

Graphische Bestimmung der Umfänge und Flächeninhalte der Kreise.

Bekanntlich berechnet man den Umfang eines Kreises aus dem Durchmesser oder Halbmesser desselben nach der Gleichung $U = 2r\pi = d\pi$ und den Flächeninhalt desselben nach der Gleichung $F = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4}$. Durch Umkehrung dieser Gleichungen erhält man dann Formeln, um aus den Umfängen resp. den Flächen die Halbmesser oder Durchmesser berechnen zu können. In allen diesen Formeln kommt die Zahl $\pi = 3{,}1415 \ldots\ldots$, welche sich genau nicht abmessen, deshalb auch nicht als Linie darstellen lässt. Man muss deshalb, um die eben angegebenen Gleichungen zu konstruieren, entweder für π einen Näherungswert einsetzen oder aber auf eine andere Weise zum Ziele zu kommen suchen. Unter den Näherungswerten empfiehlt sich $\frac{22}{7}$ zur Benutzung, weil bei diesem die Ziffern klein sind und der Fehler, welcher bei der Anwendung entsteht, nur gering ist. Unter Einführung dieses Näherungswertes für π erhält man den Umfang des Kreises $U = \frac{22}{7} \cdot d$,

den Flächeninhalt des Kreises $F = \frac{22}{7} \cdot r^2 = \frac{22}{7} \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{11}{14} d^2$.

Diese Ausdrücke lassen sich leicht konstruieren.

Den Umfang U des Kreises erhält man aus dem Durchmesser d, wenn man, **Fig. 56, Taf. III**, AB gleich 7 und $AC = d$ macht. In den Punkten B und C errichtet man Lote, und macht BD gleich 22, so ist CE der Umfang.

Für die Figur ist $d = 10$ und der Massstab der Einheit gleich 2 mm genommen. Man hat also $AB = 14$, $AC = 20$ und BD gleich 44 mm aufzutragen. Die Strecke CE wird gleich 62,8 mm gefunden, weshalb sich ein Umfang von $\frac{62{,}8}{2} = 31{,}4$ mm ergibt.

Soll nun aus dem Durchmesser der Flächeninhalt konstruiert werden, so hat man die Proportion $F : 11 = d^2 : 14$ darzustellen.

Man wird also erst d^2 bilden müssen. Dieses geschieht nach **Fig. 57, Taf. III.** Man macht AC gleich der Einheit, zieht BC lotrecht zu AC und macht AB gleich der gegebenen Grösse d. Dann zieht man BD lotrecht zu AB und findet in AD den Wert d^2; denn man hat die ähnlichen Dreiecke ABC und ABD, aus denen sich die Proportion $AC : AB = AB : AD$ oder $AD = \overline{AB}^2 = d^2$ ergibt.

Macht man dann weiter $AE = 14$ Einheiten, errichtet in D und E Lote zu AE und macht EF, oder wie hier wo das Papier nicht ausreichend war $EF + EG = 11$ Einheiten, zieht AF und AG, so hat man in HK die verlangte Fläche. Es ist:

$AD : AE = HK : GF$ oder $d^2 : 14 = f : 11$, woraus sich

$f = \frac{11\, d^2}{14}$ ergibt.

Soll aus dem gegebenen Umfange U der Durchmesser gefunden werden, so hat man die Proportion $U : 22 = d : 7$ darzustellen, also in derselben Weise zu verfahren, wie dieses **Fig. 56** geschehen ist, nur muss $AB = 22$, $AC = U$ und BD gleich 7 gemacht werden. CE gibt dann d.

Muss man aus der Fläche eines Kreises den Durchmesser dieses bestimmen, so hat man $\sqrt{\frac{14\, F}{11}} = d$ darzustellen. Man wird also erst $\frac{14\, F}{11} = m$ oder die Proportion $14 : 11 = m : F$ konstruieren und dann aus m die Wurzel ziehen.

In **Fig. 58, Taf. III**, ist $AB = 11$, $AC = 14$, $BD = F$ gemacht, es muss deshalb, wenn man ADE durch D und CE parallel zu BD zieht in CE die Grösse m dargestellt sein; denn man hat die Proportion $11 : F = 14 : m$, also $m = \frac{14\, F}{11}$.

Macht man nun $CG = 1$, halbiert CE in F, beschreibt aus diesem Punkte über CE einen Halbkreis, zieht GH lotrecht zu CE und verbindet C und H durch eine gerade Linie, so ist diese $d = \sqrt{m}$.

Nach Ed. Bing lassen sich diese Kreisaufgaben leicht lösen, wenn man sich einen Winkel, dessen Kosinus gleich $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ in einer solchen Weise darstellt, dass die Uebertragung leicht erfolgen kann. Genau ist der Winkel 27 Grad 35 Minuten 49,636 Sekunden und kann deshalb $27^0\,35^5/_6{}'$ für die vorliegenden Zwecke genommen werden. Der Winkel mag 0 genannt sein. Es ist also $\cos 0 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.

Soll nun aus dem Durchmesser der Umfang des Kreises dargestellt werden, so macht man, **Fig. 59, Taf. III**, AB gleich $2d$, legt in A den Winkel 0 an AC und zieht BD lotrecht zu AD. Zieht man dann DE vertikal, macht Winkel ADE gleich Winkel CDE, so hat man in AC den Umfang des Kreises.

Es ist $\frac{AD}{AB} = \cos 0 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ und ebenso ist $\frac{AE}{AD} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. Multipliziert man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$\frac{AE}{AB} = \frac{\pi}{4} \quad \text{oder} \quad 4\,AE = AB \cdot \pi.$$

Da nun aber $AB = 2d$ gemacht ist und $2\,AE = AC$ ist, so hat man auch $2\,AC = 2\,d\pi$ oder $AC = d\pi$, was zu beweisen war.

Soll aus dem Durchmesser des Kreises die Seite des gleichgrossen Quadrates bestimmt werden, so trägt man auf eine beliebige Linie die Länge AB, **Fig. 60, Taf. III**, gleich d auf, legt an diese Linie den Winkel 0 und zieht BC vertikal zu AC, so hat man in AC die verlangte Quadratseite.

Es ist $\frac{AC}{AB} = \cos 0 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ und da $AB = d$ gemacht ist

$$\frac{AC}{d} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}, \quad \text{also} \quad AC = d\sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad \text{oder} \quad \overline{AC}^2 = d^2\,\frac{\pi}{4}.$$

Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

1. Es ist $a = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + e^2}$ darzustellen.

Beseitigt man die Wurzel, so erhält man $a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2$. Diese Gleichung kann man zerlegen in:

$$m^2 = b^2 + c^2$$
$$n^2 = m^2 + d^2$$
$$a^2 = n^2 + e^2.$$

Jeder dieser drei Ausdrücke ist durch ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem m, n und a die Hypotenusen, b und c, m und d, n und e aber die Katheten sind.

Man wird demnach zum Ziele kommen, wenn man, **Fig. 61, Taf. III**, AM und AB rechtwinkelig zu einander zieht, auf AM die Grösse c, auf AB aber diejenige b abträgt und die Punkte B und M verbindet. Es muss dann $BM = m$ sein. Legt man dann BC rechtwinkelig an BM, macht BC gleich der Strecke d und zieht CM, so ist diese Linie gleich n. Zieht man nun nach CD lotrecht zu CM, macht $CD = e$ und zieht DM, so ist dies die verlangte Strecke a.

2. Der Ausdruck $a^2 = db$ soll konstruiert werden. Das Produkt db stellt ein Rechteck dar, welches die Seite d und b hat, während a die Seite eines Quadrates ist. Man hat also die Aufgabe zu lösen, ein Quadrat zu konstruieren, welches einem Rechteck gleich ist.

Zeichnet man, **Fig. 62, Taf. III**, das Rechteck $ABCD$, dessen Seiten AB und AD gleich d und b sind, macht $CH = CD$, beschreibt über CH einen Halbkreis, verlängert die Seite AB des Rechtecks bis E, bis der Durchschnittspunkt dieser Verlängerung mit dem Halbkreise erzielt wird und zieht CE, so ist dieses die Seite des verlangten Quadrates, welches dann in $CEFG$ zu vollenden ist. Der Beweis beruht auf einfachen planimetrischen Sätzen.

Soll a^2 oder a als Strecken dargestellt werden, so führt man nach **Fig. 63, Taf. III**, die Multiplikation von d und b aus, indem man $AB = 1$; $AC = d$ und BD lotrecht zu AC gleich b macht, hierauf AE und CE zieht, so ist $CE = a^2$.

Halbiert man dann CE in H, beschreibt aus H mit $HC = HE$ einen Halbkreis, macht $CF = AB = 1$, zieht FG lotrecht zu CE und ausserdem die Linie CG, so hat man in der letzteren die Seite a.

Fig 64 3. Es ist $\sin^4\alpha$ darzustellen.

An die Linie AC trägt man in C den Winkel α an, zieht CB und AB, so dass bei B ein rechter Winkel entsteht und $AC = 1$ wird. Dann zieht man BD lotrecht zu AC, DE lotrecht zu AB u. s. f. abwechselnd Lote zu AC und AB. Man hat dann in $AD = \sin^2\alpha$; $AE = \sin^3\alpha$ und $AF = \sin^4\alpha$.

4. Man soll $m = \sqrt{a^2 - b^2}$ konstruieren. Es geschieht dieses, indem man getrennt a^2 und b^2 konstruiert, voneinander abzieht und aus der Differenz die Wurzel zieht oder man schreibt statt $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ bestimmt also die Summe und die Differenz zwischen den beiden Strecken a und b, multipliziert die Summe mit der Differenz und zieht aus dem Produkt die Wurzel oder aber man zeichnet $m^2 = a^2 - b^2$ oder $a^2 = m^2 + b^2$, was durch ein rechtwinkeliges Dreieck geschieht, in welchem a die Hypotenuse, b und m aber die Katheten sind. Es ist diese Aufgabe auf die drei angegebenen Weisen in **Fig. 65** gelöst.

Es sind a und b die gegebenen Strecken.

In M ist a^2 dargestellt. $AB = 1, BD \perp AC, AD = a$, $DC \perp AD$, dann ist $AC = a^2$.

b^2 ist in Figur M_1 konstruiert. Es ist $EF = 1$; $FH = b$, durch E und H ein Halbkreis gelegt, dessen Mittelpunkt in EG liegt, dann ist $FG = b^2$.

In M_2 ist $KR = a^2$, und $KL = b^2$, also $LR = a^2 - b^2$. Aus dieser Differenz ist dann in M_3 die Wurzel gezogen, in dem $SU = 1$,

$\cancel{UK} = a^2 - b^2$ gemacht ist und über SV ein Halbkreis beschrieben wurde. UW steht lotrecht zu SV und ist gleich $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Das zweite Verfahren erfordert die Darstellung der Summen $a + b$ und der Differenz $a - b$. Diese sind in N_1 und N_2 angegeben und in N die Multiplikation und das Wurzelausziehen ausgeführt.

Es ist $AB = 1$, $AC = a + b$, $BE \perp AC$, $\cancel{BC} = a - b$. Dann ist AD durch A und E gezogen, CD parallel zu BE gestellt und der Durchschnittspunkt D zwischen CD und AD ermittelt. Es ist CD dann gleich $(a + b)\,(a - b)$.

Ueber CD wird ein Halbkreis beschrieben, $CG = 1$ gemacht, $GF \perp CD$ gezogen und in CF der Wert $\sqrt{a^2 - b^2}$ dargestellt.

Das dritte einfachste Verfahren ist in O angegeben. Ueber $AB = a$ ist ein Halbkreis beschrieben, die Sehne $BC = b$ gemacht, so muss die Sehne AC der verlangte Wert sein.

5. Das Trägheitsmoment eines rechteckigen Querschnitts von $H = 20$ cm Höhe, und $B = 15$ cm Breite ist zu konstruieren. Es ist daher der Ausdruck $T = \frac{BH^3}{12}$ oder die Proportion $T : B = H^3 : 12$ darzustellen.

Man wird hier, einmal um nicht zu grosses Papier nötig zu haben, dann aber auch um bessere Durchschnittspunkte bei den sich kreuzenden Linien zu erhalten und damit das Resultat genauer zu bekommen, nicht die Einheit d. h. nicht den 20. Teil von H, sondern die 10fache Einheit, also die Hälfte von H als Einheit annehmen, oder man wird beim Konstruieren die Einheit so wählen, dass nach dieser gemessen $H = 2$ und $B = 1{,}5$ ist. Selbstverständlich wird man dann auch statt 12 nur 1,2 in der Konstruktion als Divisor annehmen und die Länge der sich ergebenden Strecke 100mal zu nehmen haben; denn man wird, da man bei der Konstruktion von H^3, weil H, ebenso wie die Einheit je 10mal zu klein genommen ist, das Resultat 100mal vergrössern müssen, während die Verkleinerung von B und 12 sich aufheben.

Die Konstruktion ist nun in **Fig. 66, Taf. III**, dargestellt. Als Massstab ist für die Einheit 0,5 mm, also für die zehnfache Einheit 5 mm angenommen. Es ist dann $H = 10$ mm, $B = 7{,}5$ mm und $12 = 6{,}0$ mm zu nehmen.

Auf die Linie AB ist die Einheit $= 5$ mm getragen, wodurch sich der Punkt C gefunden hat. In diesem errichtet man das Lot CD, und bestimmt die Länge dieses dadurch, dass man von A nach D die Strecke $H = 10$ mm trägt. Man beschreibt dann von A aus mit AD einen Kreisbogen, bis zum Durchschnitt mit der Linie AB, errichtet in dem gefundenen Punkt F das Lot FE bis zur Linie AH, beschreibt den Bogen EG von A aus und zieht das Lot GH, so hat man in AH die dritte Potenz von H also H^3.

Ueberträgt man nun der bequemern Zeichnung wegen AH durch den Bogen HH_1 auf die horizontale Linie AB, macht AM gleich dem Divisor 12 also gleich 6 mm und stellt in M und H_1 Lote auf, so wird man in dem Lote $H_1 O$ das Ergebnis finden, wenn man $MN = B = 7{,}5$ mm gemacht und die Linie ANO gezogen hat.

Man misst nun die Strecke $H_1 O$ und findet, dass dieselbe 50 mm ist. Da nun die Masseinheit 0,5 mm ist, hat man diese Strecke gleich 100 mm und demnach den Zahlenwert von $T = 100 \cdot 100 = 10000$.

6. Nicht unter allen Umständen ist es vorteilhaft, gegebene algebraische Ausdrücke ganz durch Konstruktion aufzulösen, sondern es kommen Fälle vor, bei denen die Ermittelung des Resultats viel leichter und rascher bewirkt werden kann, wenn man die Konstruktion durch die Rechnung unterstützt.

Handelt es sich z. B. um Ermittelung des Widerstandsmomentes für einen doppelt Tförmigen Querschnitt, welches lautet
$W = \frac{bh^3 = bh_1^3}{bh}$, so kann man ja getrennt voneinander bh^3 und $b_1 h_1^3$ konstruieren, die erhaltenen Resultate subtrahieren, also den Ausdruck $m = bh^3 - b_1 h^3$ darstellen, worauf man dann nur noch $W = \frac{m}{bh}$ zu konstruieren hat.

Setzt man aber z. B. $h_1 = nh$, so erhält man

$$W = \frac{bh^3 - n^3 h^3 b_1}{bh} = \frac{(b - n^3 b_1)h^2}{b}.$$

Der Klammerwert $b = n^3 b_1$, welcher, wenn derselbe durch Konstruktion bestimmt werden soll, bei ungünstigen Zahlen, viel Mühe verursacht und doch nur schwer ein genaues Resultat ergibt, bestimmt man leicht durch Rechnung und geht erst dann zur Konstruktion über.

Soll genommen werden $b = 10$ cm, $h = 30$ cm, $b_1 = 8$ cm und $h_1 = 25$ cm, so hat man $h_1 = \frac{25}{30} h = \frac{5}{6} h$, erhält also $10 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 8 = 4{,}63$, und verbleibt nur noch $W = \frac{4{,}63 \cdot 30^2}{6}$, was sehr einfach geschehen kann.

7. Ein gegebenes Dreieck von der Basis $b = 4$ cm und der Höhe $h = 10$ cm soll in ein Quadrat von gleichem Flächeninhalte verwandelt werden.

Der Inhalt des gegebenen Dreiecks ist $\frac{bh}{2}$, es muss also die Seite des Quadrates $m = \sqrt{\frac{bh}{2}}$ sein.

Nimmt man für die Ausführung dieses Ausdruckes einen Massstab an, dessen Einheit (1 cm) gleich 2 mm ist, so wird man AB, **Fig. 68, Taf. IV**, gleich der zweifachen Einheit, also gleich 4 mm machen und auf dieselbe Linie $h = 10$ cm, also dem angenommenen Massstabe entsprechend 20 mm tragen, wodurch man den Punkt C findet. In B und C errichtet man Lote, macht AD gleich $b = 8$ mm und zieht ADE, dann ist AE gleich dem Quotienten $\frac{bh}{2}$. Ueberträgt man nun AE durch einen Kreisbogen aus A auf die Linie AC, so erhält man den Punkt F. Die Linie AF halbiert man, beschreibt einen Halbkreis über derselben, verlängert BD bis diese Linie in G den Halbkreis schneidet und zieht AG, so ist in dieser Linie das Resultat zu sehen.

Die Messung dieser Linie ergibt 12,6 mm, weshalb $m = \frac{12{,}6}{2} = 6{,}3$ cm ist.

8. Es soll die Höhe eines Dreiecks bestimmt werden, dessen Flächeninhalt gleich dem **Fig. 67, Taf. III**, angegebenen kreuzförmigen Querschnitt ist, wenn die Basis desselben gleich $2h$ genommen wird.

Der Querschnitt des Kreuzes ist $2bh - b^2 = (2h - b)\,b = m$. Nimmt man $b = 2$ cm, $h = 10$ cm, so ist die Basis des Dreiecks $B = 2h = 20$ cm und die zu ermittelnde Höhe H.

Man hat also $m = \frac{BH}{2} = \frac{2hH}{2} = hH$ und daraus $H = \frac{m}{h}$.

Es muss zuerst der Wert von m ermittelt werden. Nimmt man als Massstab 2 mm gleich 1 cm, so macht man **Fig. 69, Taf. IV**, die Linie $AB = 2h - b$ und auf derselben AC gleich der Einheit, zieht in B und C Lote zu AB, macht AD gleich b und zieht AE durch D, so hat man in AE den Wert von m, d. h. den Flächeninhalt des Kreuzes.

Die Linie AE ist gleich 72 mm, also der Inhalt gleich $\frac{72}{2} = 36$ qcm. Selbstverständlich ist es für die Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, diese Messung vorzunehmen.

Um nun H zu finden, trägt man auf AB, von A beginnend, bis F die Grösse $h = 20$ mm, macht FG gleich der Einheit gleich 2 mm, zieht EF und GK parallel zu AE, dann ist GK die Grösse H. Es ergibt sich für GK die Länge von 7,2 mm, weshalb die Höhe des Dreiecks $H = \frac{7{,}2}{2} = 3{,}6$ cm zu machen ist.

9. $m = \frac{h}{6 \sin 2\alpha}$ ist zu konstruieren, wenn $h = 5$ cm und $\alpha = 15$ Grad ist. Man muss hier die Winkelfunktion erst kennen, wird aber, um nicht zu ungünstige Verhältnisse für die Zeichnung zu erhalten, gleich $6 \sin 2\alpha$ darstellen. Nimmt man die Einheit gleich 5 mm an, so erhält man den angegebenen Ausdruck, wenn man an die Linie AB den Winkel von $2\alpha = 2 \cdot 15 = 30$ Grad anträgt, auf dem Schenkel AC desselben die 6fache Einheit, also $5 \cdot 6 = 30$ mm abmisst und BC lotrecht zu AB durch C zieht. Hierzu **Fig. 70, Taf. IV**.

Man macht dann CE gleich $h = 5 \cdot 5 = 25$ mm, unter beliebigen Winkel zu BC gezogen, und verbindet E mit B durch eine gerade Linie. Dann macht man $CG =$ der Einheit $= 5$ mm, zieht GD parallel zu BE und hat in CD die verlangte Strecke m; denn es ist

$$CG : CB = CD : CE \text{ oder}$$

$$1 : 6 \sin 2\alpha = m : h, \text{ also}$$
$$m = \frac{h}{6 \sin 2\alpha}.$$

Misst man nun m, so findet man, dass diese Linie $8\frac{1}{3}$ mm lang ist, also $m = \frac{8,33}{5} = 1,67$ cm.

10. Die Formel für die Bestimmung des Flächeninhaltes eines regulären Polygons ist

$$F = \frac{ns^2}{4} \operatorname{cotg} \frac{180}{n},$$

worin s die Seite des Polygons und n die Anzahl der Seiten ist.

Soll dieser Ausdruck konstruiert werden und zwar für ein Sechseck mit Seiten von 2 cm Länge, so hat man

$$\frac{180}{n} = \frac{180}{6} = 30 \text{ Grad.}$$

Nimmt man 10 mm als Einheit an, und beginnt mit Bestimmung der Kotangente des Winkels von 30 Grad, so wird man eine horizontale Linie AE, **Fig. 71, Taf. IV**, ziehen, an diese in A den Winkel, hier 30 Grad, dessen Kotangente zu bestimmen ist, antragen. Errichtet man dann in A das Lot AF, macht dieses gleich der angenommenen Einheit und zieht durch F eine horizontale Linie bis diese in G den Schenkel des an A gelegten Winkels trifft, so schneidet die lotrecht zu AE gezogene Linie CG, welche selbstverständlich gleich 1 ist, von AE in AC die Kotangente des Winkels GAC ab.

Macht man nun $AJ = 4$, also gleich der 4fachen Einheit und $AK = n$, zieht CJ und parallel hierzu DK, so hat man die Proportion $AJ : AK = AC : AD$ oder die bekannten Werte eingesetzt $4 : n = \operatorname{cotg} \frac{180}{n} : AD$; es ist demach

$$AD = \frac{n \cdot \operatorname{cotg} \frac{180}{n}}{4} = m.$$

Den Wert von s^2 kann man nun leicht finden, wenn man die Einheit nach AB überträgt, was leicht durch einen mit AF aus A beschriebenen Kreisbogen geschehen kann, in B ein Lot errichtet und AH gleich s macht. Zieht man dann HE lotrecht zu AH, so schneidet dieses Lot in AE von der horizontalen Linie s^2 ab.

Es ist nun noch nötig den in AD ausgedrückten Wert von m mit s^2 zu multiplizieren. Um dieses zu bewerkstelligen überträgt man durch einen Zirkelschlag von A aus $AE = s^2$ auf die Linie AK und findet dadurch den Punkt J. Verbindet man dann J mit B und zieht hierzu parallel durch D die Linie DK, so hat man in AK den Wert von F; denn es ist $AB : AD = AJ : AL$, wofür man auch schreiben kann $1 : m = s^2 : F$, so dass also $F = ms^2$ ist. Setzt man dann für m den oben angegebenen Wert ein, so erhält man $F = \frac{ns^2}{4} \operatorname{cotg} \frac{180}{n}$.

11. Der öfter gebrauchte Ausdruck $x = \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ soll dargestellt werden.

Man macht, um R^3 und R^2 zu finden, AB, **Fig. 72, Taf. IV**, gleich der Einheit, zieht $BC \perp AB$, macht $AC = R$; $CD \perp AC$ und $DE \perp AD$, dann ist $AD = R^2$ und $AE = R^3$.

Macht man dann weiter $AH = r$, $HF \perp AH$, $FG \perp AD$, so hat man in $AF = r^2$ und in $AG = r^3$. Ferner ist $DF = R^2 - r^2$ und wenn man AG nach AC überträgt $CE = R^3 - r^3$.

Trägt man nun auf eine horizontale Linie ad die Einheit und $R^2 - r^2$, wodurch die Punkte b und d gefunden werden, errichtet in diesen Lote, macht be gleich $R^3 - r^3$, zieht ae bis zum Durchschnittspunkte mit Punkt df, so hat man in df den verlangten Wert von x.

12. $a = \sqrt{\frac{m \sin \delta}{\cos \delta_1 \sin \delta_1}}$.

Für die Konstruktion des vorstehenden Ausdrucks ist zu nehmen $m = 1{,}5$, $\delta = 30$ Grad und $\delta_1 = 45$ Grad.

Man ermittelt erst die Funktionen der Winkel. Zu dem Ende trägt man auf eine Linie AB, **Fig. 73, Taf. IV**, die Einheit auf, welche hier zu 30 mm angenommen ist. Trägt man den Winkel $BAC = \delta = 30$ Grad in A an diese Linie an und zieht lotrecht zu dem zweiten Schenkel AC die Linie CB, so dass der Punkt B mit dem Endpunkte der Einheit zusammenfällt, so ist dieses Lot also BC der Sinus des Winkels δ.

Man trägt nun den Winkel δ_1 an AB, zieht lotrecht zu dem Schenkel AD von B aus die Linie BD und hat dann in BD den Sinus und in AD den Kosinus des Winkels $\delta_1 = 45$ Grad.

Die Multiplikation von AD und BD ist in B der Figur ausgeführt.

Auf die Linie EG ist die Einheit und der Sinus des Winkels aufgetragen. In den gefundenen Punkten F und G sind Lote errichtet und GH gleich dem Kosinus des Winkels gemacht; dann ist, wenn man die Linie EH zieht, der Abschnitt FK des Lotes in F das gewünschte Produkt.

Man kann diese Konstruktion, ebenso wie die Bestimmungen der Grössen des Sinus und Kosinus des Winkels δ_1 ersparen, wenn man die gegebene Gleichung etwas umgestaltet.

Es ist: $2 \cos \delta_1 \sin \delta_1 = \sin 2\delta_1$; multipliziert man also Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit 2, so erhält man

$$a = \sqrt{\frac{2m \sin \delta}{\sin 2\delta_1}}.$$

Der Wert $\sin 2\delta_1$ lässt sich, wie dieses in **Fig. 70** auch geschehen, leichter bestimmen als diejenigen der zwei einzelnen Funktionen und die Multiplikation kommt dann in Wegfall. In dem hier angenommenen Spezialfalle ist $2\delta_1 = 90$ Grad, es wird demnach $\sin 2\delta_1 = 1$ und fällt damit der Nenner aus der Rechnung fort.

Es ist jetzt, ohne die letztgegebene Vereinfachung die Auflösung auszuführen.

Man hat also die Grösse m und $\sin \delta$ zu multiplizieren und durch $\cos \delta_1 \sin \delta_1$ zu dividieren. Es geschieht dieses, indem man in C der Figur $MN = m$ macht und auf dieser Linie auch $MO = \sin \delta$ abträgt. In den beiden Punkten O und N errichtet man die Lote OP und NR, macht $OP = \cos \delta_1 \sin \delta_1$, zieht MR durch P und hat dann in NR den Quotienten des Bruches, aus dem man in bekannter Weise die Wurzel zieht und in NS das Resultat gleich 1,23 findet.

Konstruktion eines geradlinigten Transporteurs.

Es kommt öfter vor, dass man Winkel möglichst genau ihrer Grösse nach bestimmen muss. In der Regel verwendet man zu solchen Bestimmungen Transporteure, welche eine Gradteilung auf einem Halbkreise haben, die mehr oder weniger genau ausgeführt, fast nie kleinere Teile enthält, als halbe Grade und deshalb genaue Messungen gar nicht gestattet. Die bessern Transporteure, welche mit Nonius und Lupe eingerichtet sind, welche Messungen jeder Genauigkeit zulassen, sind kostspielig und finden sich wenig verbreitet.

Mit solchen Transporteuren bestimmt man die Grösse des Winkels nach der Länge des zugehörigen Bogens. Sobald man hiervon abgeht und zur Bestimmung der Winkelgrösse nicht den Bogen, sondern die zu diesem gehörige Sehne verwendet, kann man sich mit Leichtigkeit einen Transporteur herstellen, welcher sehr genaue Messungen zulässt, der sehr handlich und bequem zu gebrauchen ist und wohl das, was man gewöhnlich von einem Transporteur fordert, leisten wird.

Ein solcher Transporteur ist in **Fig. 74, Taf. IV,** dargestellt. Auf eine horizontale Linie AB trägt man der Reihe nach, immer von A anfangend, die Grössen 0,872, 1,736, 2,588, 3,420, 4,226, 5,000, 5,736, 6,426, 7,071 cm, wodurch man die Punkte C, D, E, F, G, H, J, K und B findet. Die angegebenen Zahlen sind die Sehnen, welche den Winkeln von 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 und 90 Grad entsprechen, wenn man den Halbmesser des Kreises, in dem die Sehnen zu messen sind, gleich 5 cm annimmt.

Man kann diese Zahlen sehr leicht durch Rechnung, aber auch durch Konstruktion bestimmen. Das letztere Verfahren ist folgendes:

Ein Winkel von 90 Grad wird durch einen Kreisbogen von einem Halbmesser von 5 cm begrenzt, dieser Bogen in 9 gleiche Teile geteilt und durch die Teilpunkte und den Scheitel des rechten Winkels Linien gezogen, welche den rechten Winkel in 9 gleiche Teile zerlegen, von denen jeder 10 Grad ist. Die zu den Winkeln gehörigen Sehnen misst man leicht ab und macht

AC	gleich der	Sehne	des Winkels	von	10	Grad
AD	„	„	„	„	20	„
AE	„	„	„	„	30	„
AF	„	„	„	„	40	„

und so fort.

In den Punkten $A, C, D, E, F \ldots$ bis B, welche man auf diese Weise oder durch Abtragung der oben angegebenen durch die Rechnung bestimmten Zahlen findet, errichtet man Lote, deren Länge man oben durch eine horizontale Linie LM begrenzt. Wie lang man BM wählt, ist gleichgültig. Je länger diese Lote gemacht werden, desto genauere Messungen kann man mit dem Transporteur vornehmen.

Ist dieses geschehen, so teilt man BM in 10 gleiche Teile ein und zieht durch die Teilpunkte Linien parallel zu LM. Die Entfernungen dieser Teillinien kann man nun, den Erfordernissen entsprechend, weiter einteilen, am besten in 3, 6, 12 Teile, so dass jeder Teil einem bestimmten Stücke eines Grades entspricht, also in 60 so teilbar ist, dass der Quotient eine handliche Zahl gibt. Durch diese Teilpunkte zieht man dann ebenfalls horizontale Linien, welche man durch grössere Feinheit oder durch eine andere Farbe vor den früher angegebenen Linien kenntlich macht.

Man zieht nun in den vertikalen Abteilungen der Fläche nach schräge Linien, wie AW, CO, DS und so weiter, wodurch dann der Transporteur vollendet ist, welchem nun Zifferbezeichnungen, wie in der Figur zu ersehen, beigefügt werden, um ihn für den Gebrauch tauglich zu machen.

Werden in einem Winkel von 60 Grad durch einen Kreisbogen, von der Spitze aus beschrieben, die Schenkel begrenzt und in dem Bogen eine Sehne gezogen, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck. Man wird deshalb den Bogen, nach dessen Sehne man den Winkel mit dem geradlinigten Transporteur misst, mit der Länge AH beschreiben, braucht also einen besonderen Massstab zum Abmessen des Halbmessers nicht.

In **Fig. 75, Taf. IV,** sind nun einige Winkel dargestellt, welche mit dem Transporteur gemessen werden sollen.

Mit dem Halbmesser $A_1 M_1 = AH$ (**Fig. 74**) ist der Bogen $M_1 W_1$ beschrieben. Man misst nun die gerade Entfernung der Punkte M_1 und N_1 und sucht diejenige Stelle auf dem Transporteur, an welcher der eine Zirkelfuss eine der schrägen oder vertikalen Linien trifft, welche zwischen AB und LM (**Fig. 74**) gezogen sind, wenn der andere Zirkelfuss in der vertikalen Linie AL (**Fig. 74**) steht. Diese Stelle ist bei ab, weshalb der Winkel $M_1 A_1 H_1 = 21$ Grad und 50 Minuten ist.

Der Winkel $M_1 A_1 O_1$ ergibt sich als ein solcher von 30 Grad, denn wenn man die Sehne $M_1 O_1$ in den Zirkel fasst, den einen Fuss in A stellt, so trifft der andere den Punkt E.

Der Winkel $M_1 A_1 R_1$ ist 45 Grad,
Winkel $M_1 A_1 S_1$ gleich 60 Grad,
Winkel $M_1 A_1 W_1$ gleich 70 Grad 40 Minuten
und so fort.

Zweiter Abschnitt.

Graphostatik.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

Liegen zwei oder mehrere gleichartige Kräfte in einer Ebene und wirken dieselben auf einen Punkt oder auf einen festen Körper ein, so können die Kräfte durch eine einzelne Kraft ersetzt werden, welche genau die Wirkung hervorbringt, in die Einzelkräfte. Es kann ausserdem jede vorhandene Kraft wie verschiedene Einzelkräfte zerteilt oder zerlegt werden, ohne dass durch die Einwirkung derselben eine andere Aeusserung auf den Angriffspunkt oder den Körper hervorgebracht wird als durch die gegebene Kraft. Dann kann man auch ein beliebiges Kräftesystem durch zwei Kräfte ersetzen, also verschiedene Veränderungen in den Kräften vornehmen, wie dieselben gerade geboten erscheinen, ohne dass die Art ihrer Einwirkung auf den Körper, welchen sie ergreifen, geändert wird.

Durch die Kräfte, welche von aussen her auf einen Körper einwirken, werden im Inneren desselben Kraftwirkungen hervorgerufen, welche sich je nach der Beschaffenheit des Körpers in diesem verteilen, deren Bestimmung zu den Hauptaufgaben der Graphostatik gehören, da von diesen Kräften die Stärken der einzelnen Teile des Körpers wesentlich abhängig sind.

Die Kräfte, welche zusammengefügt werden, sind nun ihrer Lage nach verschieden, und sind die Konstruktionen für die Zusammensetzungen nach den Lagen der einzelnen Kräfte mannigfacher Art, aber auch von der Zahl derselben und von der Richtung, nach welcher sie wirkend sind, abhängig.

Man bezeichnet die Kräfte durch gerade Linien, welche in solcher Lage gezogen werden, wie die Richtung der Kräfte ist oder genommen werden soll. Man bezeichnet die Richtung durch eine Pfeilspitze, welche nach der Seite zeigt, nach welcher die Kraft wirkt.

Man misst die Kräfte, welche durch gerade Linien dargestellt sind, mit einem gewöhnlichen Massstabe, indem man der Einheit statt z. B. Millimeter bei dem Längenmasse, die Bezeichnung Kilogramm beilegt.

Hat man also z. B. eine Kraft, welche 5000 kg sein soll und man nimmt die Einheit des Massstabes für 1 kg gleich $^1/_{100}$ mm, so würde diese Kraft durch eine Linie von 50 mm Länge dargestellt werden. Ist eine vorhandene Kraft zu messen, hat man einen Massstab auf dem 1 mm 1000 kg darstellt und ergibt sich bei der Messung der Kraft eine Länge von 36,5 mm, so ist die Kraft 36500 kg.

Wenn es sich um Messung grosser Kräfte handelt, so kann man in der Regel nur sehr kleine Massteile zur Anwendung bringen und es ist deshalb nicht möglich, die Kräfte ganz genau aufzutragen oder abzumessen. Es kann aber auch nicht von Belang sein, ob z. B. eine Kraft, welche wie oben 36500 kg gemessen wird, in Wirklichkeit 36480 oder 36540 kg ist. Die Unterschiede, welche hier auftreten, sind so gering, dass dieselben in keiner Weise irgend einen Einfluss ausüben können.

Selbst wenn die Ungenauigkeit eine grössere wäre und sich in die Hunderte der Zahl erstreckte, würde dieses ohne Belang sein, weil z. B. bei einer Differenz von 100 kg und einer Zugkraft, welche auf Schmiedeeisen einwirkt, dieses etwa nur $^1/_{10}$ qcm im Querschnitt Unterschied herbeiführen würde.

1. Die Kräfte liegen in einer geraden Linie.

Liegen die Kräfte in einer geraden Linie und wirken dieselben nach derselben Seite, also in ein und derselben Richtung, so besteht die Zusammensetzung derselben in dem einfachen Summieren der einzelnen Kräfte, d. h. man legt die zweite Kraft mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der ersten, den Anfangspunkt der dritten an den Endpunkt der zweiten und so fort bis alle vorhandenen Kräfte vereinigt sind.

Wirken die in einer Linie liegenden Kräfte nach entgegengesetzten Seiten, so hat man die nach der einen Seite wirkenden Kräfte als positive, die entgegengesetzt gerichteten aber als negative zu betrachten. Man legt dann die positiven Kräfte in der vorher angegebenen Weise zusammen und misst die negativen davon ab, so dass man schliesslich die Differenz zwischen beiden erhält, welche positiv oder negativ ausfallen kann, je nachdem die erste oder zweite Partie der Kräfte die grössere ist.

Sind die positiven und negativen Kräfte gleich gross, so heben sich dieselben in ihren Wirkungen auf, die Mittelkraft wird gleich Null.

Man kann jede einzelne Kraft als aus einer beliebigen Anzahl von Kräften entstanden denken, die positive oder negative Wirkungen haben, mit der gegebenen Einzelkraft in eine Linie fallen und eine algebraische Summe ergeben, welche der Einzelkraft an Grösse gleich ist. Es ist dabei ganz gleich, an welchem Punkte die Kräfte, welche für die Einzelkraft gesetzt werden, angreifen, wenn die Angriffspunkte nur so fest miteinander verbunden sind, dass eine Veränderung in der Lage derselben unter der Einwirkung der Kräfte ausgeschlossen ist.

2. Die Kräfte liegen in verschiedenen Richtungen und greifen in einem Punkte an.

Wirken auf einen Punkt A, **Fig. 76, Taf. IV**, die Kräfte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ bis P_8 ein, so bildet man aus denselben, um die Mittelkraft zu finden, ein Polygon, indem man die einzelnen Kräfte, immer ihrem Zuge folgend, eine an die andere reiht, bis alle in das Polygon eingetragen sind. Die das Polygon schliessende Seite ist dann ihrer Grösse und Lage nach die Mittelkraft, aber mit entgegengesetzter Pfeilrichtung zu versehen, also algebraisch umzukehren.

Um also aus den gegebenen Kräften das Kräftepolygon zu bilden, legt man, an eine beliebige der Kräfte, also z. B. AP_1 anschliessend, $BC \parallel AP_2$ und macht BC gleich der Kraft $P_2 : CD \parallel AP_3$ gleich $P_3 : DE \# AP_4$ .... bis man mit Einfügung der letzten Seite $HK \# AP_8$ alle vorhandenen Kräfte in dem Polygon untergebracht hat. Die Verbindung AK des Anfangspunktes der Kraft P_1 und des Endpunktes derjenigen P_8 ist dann die Mittelkraft, welcher jedoch die Pfeilrichtung, wie in der Figur geschehen, zu geben ist.

Man kann jede in dem Umfange des Polygons liegende Kraft als die Mittelkraft aller übrigen ansehen, wenn man die das Polygon schliessende Seite AK mit als Kraft betrachtet, hat nur die Pfeilrichtung derselben umzukehren.

Ebenso ist jede Diagonale, welche in dem Polygon gezogen wird, die Mittelkraft aller der Kräfte, welche durch die Diagonale abgeschnitten werden. So ist z. B. die Diagonale BE als Mittelkraft für die Kräfte P_2, P_3 und P_4 anzusehen, aber kann ebensowohl diejenige für die Kräfte P_1, P_5, P_6, P_7, P_8 und R sein. Die Pfeilrichtung ist sich aber in beiden Fällen entgegengesetzt.

Schliesst sich das Kräftepolygon, welches aus einer Reihe von Kräften gebildet wird, d. h. fällt der Endpunkt der letzten Kraft, welche in das Polygon eingetragen wird, in den Anfangspunkt M der ersten Kraft, so hebt sich die Wirkung der Kräfte auf, es stehen dieselben im Gleichgewicht, die Mittelkraft ist also Null.

Wirken auf einen Punkt A nur zwei Kräfte P_1 und P_2 ein, so
78 geht, siehe **Fig.** ~~**77,**~~ **Taf. IV**, das Polygon in ein Dreieck über. Sonst kommen aber Aenderungen gegen die vorigen Angaben nicht vor.

Sind zwei Kräfte für eine einzelne Kraft einzusetzen, so bestimmt man die Verhältnisse nach **Fig. 78, Taf. IV.**

Ist MO die gegebene oder vorhandene Kraft, so zeichnet man den Kräftezug MNO an dieselbe und hat dann in MN und NO die Seitenkräfte, welche man aber beliebig legen kann, wenn nicht besonderen Anforderungen genügt werden soll.

Meistens ist bei solchen Zerlegungen entweder die Richtung beider Seitenkräfte, oder die Grösse und Richtung der einen Kraft oder aber die Richtung der einen und die Grösse der anderen Kraft gegeben oder durch die vorhandenen Verhältnisse bedingt, so dass die Aufgabe eine bestimmtere wird.

Da es für die Bestimmung der zwei Kräfte MN und NO ziemlich gleichgültig ist, ob die gegebene Kraft MO wirklich eine einzelne Kraft ist oder als Mittelkraft verschiedener anderer Kräfte betrachtet werden muss, so kann man allgemeiner sagen, dass für jede beliebige Anzahl Kräfte, welche zu einem Kräftezuge vereinigt sind, zwei Kräfte eingesetzt werden können.

Sind die Kraftrichtungen MN und WV, **Fig. 79, Taf. IV**, bestimmt, so verlängert man diese bis zu ihrem Durchschnittspunkte X und hat dann in VX und MX die Grösse der Kräfte. Dieselben können aber auch ebensogut nach VX_1 und MX_1 fallen, wenn nicht besondere Bestimmungen hierüber vorliegen.

Ist die Richtung MN der einen Kraft und die Grösse P_0 der anderen gegeben, siehe **Fig. 80, Taf. IV**, so schneidet man mit einer Zirkelöffnung $VW = P_0$ von W aus in die gegebene Kraftrichtung MN ein und erhält die Punkte X und X_1. Es kann demnach die Kraft P_0 ebensowohl nach WX als nach WX_1 fallen.

Hat man als gegeben die Richtung MN und Grösse P_0, **Fig. 81, Taf. IV**, einer Kraft zu betrachten, so ist die Richtung und Grösse der zweiten Kraft durch WN bestimmt.

Sind schliesslich die Grössen beider Kräfte gegeben, so beschreibt man mit Zirkelöffnungen, die den Kräften gleich sind, Kreisbogen und legt die Richtungen der Kräfte nach dem Durchschnittspunkte dieser Bogen, siehe **Fig. 82, Taf. IV**.

3. Gleichgewichtszustände bei zerstreut in der Ebene liegenden Kräften.

Liegen, **Fig. 83, Taf. IV**, die Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . P_5 beliebig in der Ebene zerstreut, so kann man je zwei derselben durch Stangen oder sonstige feste Körper verbinden, dass sich aus diesen Verbindungen ein Polygon $ABCDEF$ bildet. Durch die Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . . werden in den Seiten des Polygons Kräfte hervorgerufen, welche, wenn der Gleichgewichtszustand bestehen soll, sich in jeder einzelnen Polygonseite ausgleichen müssen.

Das Polygon, welches so hergestellt wird nennt man das Seil- oder Gelenkpolygon, die Ecken, in denen die Polygonseiten zusammenstossen, die Knoten oder Knotenpunkte; die Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . ., welche auf die Knotenpunkte des Polygons einwirken, die äusseren Kräfte und die Kräfte, welche durch die äusseren Kräfte in den Polygonseiten hervorgerufen werden, die inneren.

Die inneren Kräfte in den Seiten des Polygons können nun offenbar Druck- oder Zugkräfte sein und ist es von Wichtigkeit zu wissen, mit welcher Art von Kräften man es zu thun hat; denn hiervon ist es wesentlich abhängig, in welcher Weise die Seiten des Gelenkpolygons in Anspruch genommen werden und in welchen Stärken dieselben auszuführen sind.

Zerlegt man nun die Kräfte, welche in den Knotenpunkten, d. h. Endpunkten einer Polygonseite, wirkend sind, in je zwei Seitenkräfte, von denen die eine in eben diese Polygonseite fällt, während die zweite die Richtung der anschliessenden Seite des Polygons erhält, so ersieht man aus der Richtung, welche die Seitenkräfte einnehmen, ob die Wirkungen in Bezug auf die Polygonseiten ziehend oder pressend sind.

Die Richtung der inneren Kräfte steht derjenigen der äusseren Kraft entgegen, man wird also in der Polygonseite eine Druckspannung haben, wenn die Pfeilrichtungen, die man in derselben erhält, voneinander abgekehrt sind, während das Entgegensehen der Pfeile die Zugspannung angibt. Es ist dieses also gerade entgegengesetzt wie bei den äusseren Kräften.

Bildet man nun aus den auf ein Gelenkpolygon einwirkenden äusseren Kräften ein Kräftepolygon in derselben Weise, wie dieses vorher bei den in einem Punkte angreifenden Kräften geschehen ist, so hat man auch hier den Gleichgewichtszustand, wenn das Polygon in sich geschlossen ist, wie dieses **Fig. 83, Taf. IV**, geschehen. Findet der Schluss nicht statt, so findet man aus dem Kräftepolygon die Grösse und Lage der Mittelkraft, wie dieses weiter unten angegeben ist.

Zieht man dann NO parallel AB und MO parallel AF, d. h. in dem Kräftepolygone von dem Anfangs- und Endpunkte der Kraft $MN = P_1$ parallele Linien zu den in dem Seilpolygon an den Angriffspunkt der Kraft P_1 treffenden Seiten, so erhält man den Durchschnittspunkt O beider.

Zieht man dann auch zu den übrigen Seiten des Seitpolygons parallele Linien durch den Punkt O, so müssen diese für den Gleichgewichtszustand der inneren Kräfte in die Ecken des Kräftepolygons treffen. Es muss also die OO_1, welche parallel zu BC liegt, in O_1 den Umfang des Kräftepolygons treffen, die OP, parallel zu CD liegend, muss in P eintreffen u. s. f. Der Punkt O heisst der P o l die Linien OM, ON, OO_1 . . . . die P o l s t r a h l e n.

Die Polstrahlen geben die Grösse und Richtung der in den einzelnen Seiten des Seilpolygons auftretenden inneren Kräfte an.

Nimmt man in einem Kräftepolygon, **Fig. 84, Taf. IV**, $ABCDE$ einen beliebigen Pol O an und zieht die Polstrahlen, so kann man zu diesem Kräftepolygon ein Seilpolygon bilden, indem man parallel zu den Polstrahlen Linien zieht, welche sich zu einem Polygon vereinigen. Man macht also ON parallel OA, NM parallel OB, MW parallel OC u. s. w. Die äusseren Kräfte an dem Seitpolygon müssen dann die Richtungen und Grösse der Seiten des Kräftepolygons haben. Hiervon wird in der Folge sehr häufig Gebrauch gemacht werden.

Die Mittelkraft bestimmt man für zerstreut liegende Kräfte, welche nicht im Gleichgewicht stehen, in folgender Weise.

Man denke sich in dem Seilpolygon, **Fig. 85, Taf. V**, die Seite MN entfernt, so wird das Polygon offenbar auch dann noch Bestand haben, wenn man die in den anschliessenden Polygonseiten LM und KN auftretenden Kräfte wirken lässt. Dasselbe gilt auch, wenn man die Seiten LM und KN durchschneidet.

Die Kräfte, welche Q_4 und Q_5 heissen mögen, sind dann selbstverständlich keine inneren Kräfte mehr, sondern werden zu äusseren. Dieselben halten den übrigen auf das Seilpolygon einwirkenden Kräften das Gleichgewicht, es muss also die Mittelkraft für diese gleich der Mittelkraft aus Q_4 und Q_5 sein.

Weil die Kräfte Q_4 und Q_5 in den Richtungen der Seiten LM und KN des Seilpolygons wirkend sind, so muss offenbar ein Punkt in der Richtung der Mittelkraft gefunden werden, wenn man die Polygonseiten bis zum Durchschnittspunkte W verlängert. Es ist dieses ein Satz, der in der Folge sehr häufige Anwendung findet.

Die Grösse und Richtung der Mittelkraft findet man dann weiter aus dem Kräftepolygon, welches in ABC . . . dargestellt ist. Es ist die Mittelkraft für die äusseren Kräfte P_1, P_2, P_3 und $P_6 = AE$.

Da der Pol in einem Kräftepolygon nie grosse Verschiedenheit in seiner Lage haben kann, vielfach aber beliebig bestimmt oder angenommen wird, so ist es jedenfalls nicht ohne Interesse, den Zusammenhang zu kennen, welcher zwischen zwei Seilpolygonen besteht, die für verschieden liegende Pole hergestellt sind. Es ist dieses in **Fig. 86, Taf. V**, geschehen. Die Pole sind mit O und O_1 bezeichnet, die Strahlen nach dem Pol O sind voll ausgezogen und ebenso das zu diesem gehörende Gelenkpolygon, während Strahlen und Polygon für den Pol O_1 nur punktiert sind.

Verlängert man nun zwei gleichbezeichnete Seiten z. B. 4_1 und 4 der beiden Seilpolygone bis zu ihrem Durchschnittspunkte E und legt durch diesen eine Linie AB parallel zu der Verbindungslinie der beiden Pole O und O_1, so schneiden sich in dieser Linie entweder die gleichen Seiten der beiden Seilpolygone selbst, wie z. B. 5_1 und 5 in C, 2_1 und 2 in D, oder es schneiden sich die Verlängerungen solcher Polygonseiten in AB, wie z. B. 3_1 und 3 in E_1, 1_1 und 1 in A.

Da der Pol O eine beliebige Lage haben kann, so kann man denselben auch offenbar in eine Ecke des Kräftepolygons z. B. nach A, **Fig. 87, Taf. V**, legen.

Es wird dann die erste Seilpolygonseite nicht bestimmt, weil der Pol O in der Ecke des Kräftepolygons liegt, demnach ein Polstrahl hier nicht gezogen werden kann. Es kann also die Seite des Seilpolygons beliebig gelegt werden. Weil aber der Strahl AO mit der Seite des Kräftepolygons zusammenfällt, also die entsprechende Seite des Seilpolygons in die Kraftrichtung P_1 zu liegen kommt, kann die erste Seite des Seilpolygons überhaupt fortbleiben, weil sie unbelastet ist, weil aus Zerlegung der Kraft P_1 eine Seitenkraft in diese Seite nicht übergehen kann.

Die dann folgenden Polstrahlen BO, BC, BD . . . . fallen dann mit den Diagonalen des Kräftepolygons zusammen, sind also immer die Mittelkräfte zu den vorher liegenden äusseren Kräften und geben die zu den Strahlen parallel gezogene Seite des Seilpolygons die Richtung dieser Mittelkräfte an. Für den letzten Strahl OG, welcher in der Polygonseite der Kräfte liegt, fällt die Seite des Seitpolygons wieder in Kraftrichtung P_7.

Man hat dieses Seilpolygon mit dem Namen Mitteldrucklinie oder Mittelkraftlinie belegt.

Sind zwei Kräfte P_1 und P_2, in der Ebene liegend, gegeben, welche sich gehörig verlängert in einem Punkte schneiden, so kann man auch zu diesen mit Hilfe des Seil- und Kräftepolygons die Mittelkraft bestimmen.

Man zeichnet, **Fig. 88, Taf. V**, das Kräftepolygon, welches hier darin besteht, dass man AB parallel P_1 zieht und auf dieser Linie die Grösse der Kraft abträgt und ebenso BC parallel der Kraftrichtung von P_2 zieht und BC gleich P_2 macht. Verbindet man dann die Punkte A und C durch eine gerade Linie, so schliesst man das Kräftepolygon und hat in AC die Grösse und Richtung der Mittelkraft für P_1 und P_2.

Ausserhalb des Kräftezuges ABC nimmt man einen Pol O an und zieht Polstrahlen nach den Punkten A, B und C.

Zwischen den gegebenen Kraftrichtungen P_1 und P_2 zieht man dann eine parallele Linie zu dem Strahle OB, was in MN geschehen ist. Zieht man dann durch M eine parallele Linie zu dem Strahle AO und durch N eine solche zu CO, so hat man in dem Durchschnittspunkte W beider einen Punkt durch den die Mittelkraft gehen muss. Dieselbe liegt parallel zu AC, geht ausserdem durch den Durchschnittspunkt K der verlängerten Kraftrichtung und dann können durch andere Lage des Punktes M z. B. in M_1 ganz beliebig viele weiteren Punkte wie W_1 gefunden werden.

Ebenso kann man durch veränderte Lage des Poles O z. B. nach O_1 weitere Punkte in der Richtung der Mittelkraft erhalten. Trägt man für den Pol O_1 das Seilpolygon in M an, so findet sich der Durchschnittspunkt der Seiten MW_0 und N_0W_0 des Seilpolygons in W_0.

Nach demselben Verfahren kann man nun auch jede gegebene Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegen, deren Grösse und Richtung entweder beliebig angenommen werden, oder von denen einzelne Stücke bekannt und die unbekannten ermittelt werden sollen.

Ist, **Fig. 89, Taf. V**, AB die Grösse und Richtung einer gegebenen Kraft und soll dieselbe in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine in die Richtung P_2, die andere aber in diejenige P_1 fallen sollen, so zieht man parallel zu AB die MN und trägt auf dieser Linie die Grösse der Kraft AB ab, macht also $MN = AB$.

Dann nimmt man ausserhalb MN in beliebiger Lage einen Punkt O an, den man als Pol benutzt und von diesem die Strahlen OM und ON nach den Endpunkten von MN zieht. Von einem beliebigen Punkte C in der Kraftrichtung AP_1 zieht man dann parallel zu MO die Seite CD des Seilpolygons und parallel zu NO die zweite Seite DE durch den Punkt E. Hierauf schliesst man das Seilpolygon durch die Linie CE und zieht hierzu durch den Pol O eine Parallele OV. Zieht man dann noch MV parallel P_1 und NV parallel P_2, so hat man in MV die Grösse der Kraft P_1 und in NV diejenige von P_2.

Zusammensetzung und Zerlegung paralleler Kräfte.

Sind zwei parallele Kräfte zu einer zu vereinigen, oder was dasselbe heisst zu zwei parallelen Kräften die Mittelkraft zu suchen, so kann man das Verfahren in den meisten Fällen mit Vorteil zur Anwendung bringen, welches in dem vorigen Kapitel zuletzt angegeben ist, um zu zwei divergierenden Kräften die Mittelkraft zu bestimmen.

Die parallelen Kräfte kommen zu zweien und in grösseren und kleineren Gruppen vielfach in der Statik vor und es ist nicht immer ganz einfach die erforderlichen Verhältnisse zu bestimmen. Die Grösse der Mittelkraft muss immer gleich der algebraischen Summe der Seitenkräfte sein, und die Richtung derselben kann nie anders als parallel zu den Einzelkräften werden. Es wird sich deshalb hier vornehmlich darum handeln die Stelle zu bestimmen, an welcher die Mittelkraft angreifen muss, um die gegebenen Seitenkräfte vollständig zu ersetzen.

Handelt es sich darum eine Kraft in zwei parallele Seitenkräfte zu zerlegen, so müssen, wenn die Aufgabe bestimmt sein soll, entweder die Angriffspunkte der Seitenkräfte bekannt sein, oder es muss eine der Seitenkräfte und ihr Angriffspunkt, oder aber eine Seitenkraft und der Angriffspunkt der zweiten gegeben sein, oder willkürlich gewählt werden können.

a) Sind AF und BG die Richtungen der beiden parallelen Kräfte P_1 und P_2, **Fig. 90, Taf. V**, so findet man zu diesen die Mittelkraft, wenn man $MN = P_1$ und $NL = P_2$ auf eine gerade Linie ML so aneinander trägt, dass der Anfangspunkt von P_2 in den Endpunkt von P_1 fällt. Es ist dann MNL der Kräftezug, welcher das Kräftepolygon bildet. Die Mittelkraft R, welche die Kräfte P_1 und P_2 zu ersetzen im stande ist, ist ihrer Grösse nach gleich ML.

Nimmt man nun ausserhalb der ML an beliebiger Stelle O den Pol an und zieht die Polstrahlen MO, NO und LO, und parallel zu der mittleren NO eine Seite CD des Seilpolygons, welche in den Richtungen der Kräfte P_1 und P_2 endigt, zieht zu dem Strahle MO die Seite CE und zu demjenigen LO die Seite DE, so muss der Durchschnittspunkt beider, also E ein Punkt der Mittelkraft R sein, deren Lage man dann hat, wenn man durch E eine Linie parallel zu CF und BG zieht.

Wird der Pol an die linken Seite von ML nach O_1 gelegt, so muss die Kraft P_2 von M nach N und P_1 von N nach L abgetragen werden, sonst bleibt die Konstruktion wie vorher.

Ebenso ändert sich die ganze Anordnung nicht, wenn die Kräfte P_1 und P_2 nicht lotrecht zu AB, **Fig. 91, Taf. V**, stehen, sondern irgend einen anderen Winkel mit dieser Linie einschliessen. In dieser Figur sind für die verschiedenen Punkte und Linien dieselben Bezeichnungen benutzt, wie in **Fig. 90**, weshalb eine nochmalige Beschreibung überflüssig ist.

b) Ist die Mittelkraft $HE = R$, **Fig. 92, Taf. V**, gegeben und sollen aus dieser die Seitenkräfte P_1 und P_2 bestimmt werden, welche in A und B angreifen sollen, so macht man $ML = R$ und zieht von dem beliebigen Pole O nach M und L die Polstrahlen MO und LO. Dann legt man parallel zu LO die Linie DE zwischen den Kraftrichtungen von R und P_2 und parallel zu dem Strahle MO die EC, welche in E beginnen muss und in der Kraftrichtung von P_1 endigt. Man schliesst dann durch die Linie CD das Seilpolygon DEC und zieht parallel zu dieser Schlusslinie durch O den Polstrahl NO, so teilt dieser die ML in die Teile MN und NL, von welchen der erstere die Grösse der in A angreifende Kraft ist, während NL die Grösse der Kraft angibt, welche in B angreifen muss.

Man erreicht denselben Zweck auch nach **Fig. 93, Taf. V.** Es ist CE die gegebene Mittelkraft der Grösse und Richtung nach. Macht man AB gleich CE und zieht von B aus eine gerade Linie nach dem Angriffspunkte F der Kraft P_2, so hat man, wenn man noch BC parallel AF zieht, in DE die Grösse der in A angreifenden Kraft P_1 und in CD diejenige der Kraft P_2.

c) Ist in **Fig. 94, Taf. V,** die Mittelkraft $R = ML$ in der Richtung EH gegeben und soll die Seitenkraft P_1 in G angreifen und eine Grösse gleich MN haben, so findet man die Grösse der zweiten Seitenkraft P_2 sofort in NL der Differenz zwischen R und P_1. Nimmt man nun wieder einen Pol O und zieht die Strahlen MO, NO und LO, legt AE parallel zu dem Strahle MO und AB parallel zu NO, zieht dann durch E noch die EB parallel zu dem dritten Strahle LO, so hat man in B den Punkt des Seilpolygons, durch welchen die Kraft P_2 gehen muss.

d) Soll die Mittelkraft in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, deren Angriffspunkte bekannt sind, so kann man die Lösung der Aufgabe noch etwas vereinfachen, indem man, **Fig. 95, Taf. V,** BD gleich der Mittelkraft R macht, den Punkt D mit A und C den Angriffspunkten der Seitenkräfte verbindet und BE parallel zu AD, EF aber parallel zu AC legt. Man hat dann in BF die in A angreifende Kraft P_1 und in DF die nach C gehörende Seitenkraft.

e) Wirken mehrere und zwar beliebig viele Kräfte, welche unter sich parallel und nach einer Richtung wirkend sind, ein und soll zu diesen die Mittelkraft gefunden werden, so ist die Grösse dieser auch hier gleich der Summe sämtlicher Seitenkräfte und selbstverständlich parallel zu dieser liegend. Die Lage der Mittelkraft bestimmt man auf folgende Weise:

Man trägt, **Fig. 96, Taf. V,** auf eine vertikale Linie ~~AL~~ AK aneinander gereiht alle vorhandenen Seitenkräfte für $P_1, P_2, P_3, \ldots$ bis P_8 auf, wodurch sich die Punkte B, C, D, E, ... bis K finden. Dann nimmt man den Pol O beliebig an und zieht die Polstrahlen AO, BO, CO, DO, ... bis KO. Zu dem Strahl, welcher nach dem Anfangspunkte A der ersten Kraft P_1 gerichtet ist, zieht man eine in der Kraftrichtung von P_1 z. B. in M, der Punkt ist beliebig, beginnende parallele Linie MN, deren Länge vorläufig unbestimmt ist. Dann zieht man parallel zu dem Strahle OB, welcher also den Endpunkt B der ersten Kraft P_1 und den hier liegenden Anfangspunkt der zweiten Kraft P_2 trifft eine Linie, welche in M beginnt und bis zu R, in der Richtung der Kraft P_2 liegend, reicht. In dem Punkte R schliesst man dann eine zu dem Strahle OC parallel liegende Linie an, welche bis zu dem Punkte S, in der Kraftrichtung P_3 liegend, reicht. Dann $ST \parallel OD$, $TU \parallel OE$ u. s. f., bis man zwischen den Kraftrichtungen P_7 und P_8 parallel zu dem Strahle OH die Linie WL gezogen hat. Man findet hierdurch in der letzten Kraftrichtung P_8 den Punkt L, in welchen man nun zum Schlusse des Seitpolygons die Linie LN anschliesst, welche parallel zu dem Strahle OK geht, der an dem Endpunkte der auf AK getragenen letzten Kraft P_8 gezogen ist.

Die Linien MN und LN durchschneiden sich in N und dieses ist ein Punkt in der geforderten Mittelkraft, deren Richtung dann in NX parallel zu P_1, P_2, P_3 .... gefunden ist.

f) Die parallelen, gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3 .... bis P_9, **Fig. 97, Taf. V**, wirken nicht alle nach einer Seite, sondern teilweise abwärts, teilweise aufwärts. Es bleibt auch hier die Grösse der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe der Seitenkräfte und die Richtung parallel zu diesen. Die Lage findet man in ähnlicher Weise wie vorher.

Auf die Linie AB trägt man, um das Kräftepolygon zu bilden, die einzelnen Kräfte P_1, P_2, P_3 ... nacheinander auf, dabei Rücksicht auf die verschieden gerichtete Wirkung nehmend. Die Kräfte P_1 und P_2, deren Wirkungen abwärts gerichtet sind, trägt man von A bis 1 und von 1 bis 2 auf die Linie AB, die Kraft P_3, welche von unten nach oben wirkend ist, also in dieser Beziehung P_1 und P_2 entgegensteht, muss man von 2 bis 3 in der Richtung nach A zu auf AB abtragen. Die Kräfte P_4 und P_5, in demselben Sinne wirkend wie P_1 und P_2, trägt man von 3 bis 4 und von 4 bis 5 nach B zu, also abwärts auf AB, während die Kräfte 6 und 7 wieder nach oben gerichtet von 5 bis 6 und von 6 bis 7 auf der Linie BA abgetragen werden. In gleicher Weise fährt man fort bis man die letzten der vorhandenen Kräfte auf AB abgetragen und dadurch den Punkt 9 gefunden hat.

Die Grösse der Mittelkraft entspricht also dem Stück von A bis 9 der Linie AB.

Man nimmt nun wieder den Pol O an und zieht die Polstrahlen in bekannter Weise.

Zu dem Anfangsstrahle, welcher von O nach A geht, zieht man wieder die Parallele MN und dann zwischen den einzelnen Kraftrichtungen, von N anfangend, die Seiten des Seilpolygons, hier aber nicht der Reihe nach parallel zu den Strahlen, sondern man muss die Seilpolygonseiten zu den Strahlen parallel legen, welche den jedesmaligen Kräften entsprechen.

So kommt z. B. zwischen P_1 und P_2 die Linie LN parallel zu dem Polstrahle $1\,O$, zwischen P_2 und P_3 die LR parallel zu $2\,O$, zwischen P_3 und P_4 die Linie RT parallel zu dem Strahle $3\,O$ u. s. f. bis man die Seite SW des Seilpolygons zwischen den Kraftrichtungen von P_8 und P_9 parallel zu dem Strahle $8\,O$ gezogen hat. Es bleibt nun noch der Strahl $9\,O$ übrig, zu dem man durch W die Parallele WM zieht und so verlängert, bis man den Durchschnittspunkt mit der Seite NM in M erreicht. Es ist dann M ein Punkt in der Richtung der Mittelkraft.

Man hat demnach bei den teilweise entgegengesetzt wirkenden Kräften genau dasselbe Verfahren einzuschlagen, wie bei den Kräften, welche sämtlich nach einer Seite wirkend sind und dabei nur zu beachten, dass die Seiten des Seilpolygons in der erforderlichen Reihenfolge gezogen werden und dass immer der Strahl, welcher nach dem Anfangspunkte der ersten Kraft geht und derjenige, welcher nach dem Endpunkte der letzten Kraft gerichtet ist, die Seiten des Seilpolygons geben, welche der Mittelkraft angehören, es mögen diese Polstrahlen eine Lage haben, welche sie immer wollen.

g) Sind die gegebenen Kräfte in ihrer Grösse, so dass sich ihre Wirkungen aufheben, dass also die Mittelkraft gleich Null wird, so fällt, **Fig. 98, Taf. V**, der Anfangsstrahl AO und der Endstrahl $5\,O$ in eine gerade Linie, man erhält demnach einen Durchschnittspunkt, wie M, **Fig. 97**, in den Seiten des Seilpolygons nicht, sondern die Seiten dieses Polygons laufen parallel zu einander, wie MN und WV. Es findet demnach ein Schluss des Seilpolygons nicht statt und kann deshalb der Gleichgewichtszustand nur dann eintreten, wenn man eine der gegebenen Kräfte verschieben kann, z. B. wenn man die Kraft P_5 nicht in W, sondern in W_1 wirken lässt, d. h. in dem Punkte, in welchem die Verlängerung der Seilpolygonseite MN die Seite VW schneidet.

Statische Momente.

Die Grösse der Kraft, multipliziert mit dem lotrechten Abstande von irgend einem Punkte, ist bekanntlich das statische Moment der Kraft, bezogen auf eben diesen Punkt.

Ist also, **Fig. 99, Taf. VI**, AB eine Kraft P_1 und O ein Punkt, auf welchen das statische Moment dieser Kraft bezogen werden soll, OC aber der lotrechte Abstand der Kraftrichtung AB von dem Punkte O, so ist $\overline{AB} \cdot \overline{OC}$ das statische Moment. Zieht man von O nach den Anfangs- und Endpunkten, also nach A und B, der Kraft P_1 gerade Linien, so bildet man das Dreieck ABO. Der Flächeninhalt dieses ist gleich $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CO}}{2}$, weshalb das statische Moment der Kraft P_1 bezogen auf den Punkt O oder auch auf irgend einen anderen Punkt, gleich dem doppelten Flächeninhalte des Dreiecks ABO ist. Die Lage des Punktes O und der Kraft P_1 ist dabei gleichgültig, wenn nur die Entfernung OC ungeändert bleibt. Verlegt man z. B. die Kraft von AB nach A_1B_1, so ist die angegebene Bedingung ebenfalls vorhanden; denn das Dreieck ABO ist demjenigen A_1B_1O gleich.

Man kann also das statische Moment zu jeder Zeit leicht als eine Fläche darstellen und diese dann nach dem Früheren so umwandeln, dass man das Moment als Linie erhält und einfach aus der Figur abgreifen und messen kann.

Am bequemsten ist es jedenfalls, wenn man die Darstellung so vornehmen kann, dass man das Moment, welches je aus dem Produkt einer Länge und einem Gewichte besteht, als Linie auf einem Massstabe zu messen vermag, ohne Reduktionen oder Rechnungen vornehmen zu müssen.

Dieses ist möglich, wenn man das Dreieck ABO, welches das statische Moment der Kraft P_1 bezogen auf den Punkt O darstellt, so umwandelt, dass ein anderes Dreieck entsteht, welches die Einheit als Grundlinie hat. Es ist dann die Höhe dieses das statische Moment.

Als Massstab kann man sich bei Auftragung der Grundlinie des Längen- oder Kräftemassstabes bedienen und hat dann die Höhe in dem nicht benutzten Massstabe zu messen. Das Produkt aus Basis und Höhe muss aus Länge und Gewicht bestehen, weshalb dem entsprechend die Massstäbe zu wählen sind.

Eine einfache Umwandlung eines Dreiecks in ein anderes ist **Fig. 100, Taf. VI,** angegeben. Es ist AB gleich P_1 die Kraft, O der Momentenpunkt, also ABO das Momentendreieck. Schneidet man nun an einer Ecke dieses Dreiecks z. B. B mit der Einheit, oder einem beliebigen Vielfachen derselben, in die gegenüberliegende Seite ein, so erhält man den Punkt C. Dann zieht man die Linie BC und parallel dazu durch einen andern Eckpunkt als B, also z. B. durch O eine Linie OD. Auf diese, also auch auf BC, fällt man dann von der dritten Dreiecksecke A aus das Lot AE, welches die verlangte Höhe ist.

Zieht man BH und CJ parallel zu AE und dann die Linien AH und AJ, so hat man in AHJ das neue Dreieck. Der Flächeninhalt dieses ist gleich $\frac{\overline{HJ}\cdot\overline{AE}}{2}$ oder $\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AE}}{2}$. Teilt man AE in die Teile AG und GE, so kann man auch schreiben

$$\frac{\overline{BC}\cdot(\overline{AG}+\overline{GE})}{2}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AG}}{2}+\frac{\overline{BC}\cdot\overline{GE}}{2}.$$

Es ist aber $\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AG}}{2}$ der Inhalt des Dreiecks ABC und $\frac{\overline{BC}\cdot\overline{GE}}{2}$ derjenige des Dreiecks BCO, weshalb, da $ABC+BCO$ $=O$ ist, dieses Dreieck auch gleich AHJ sein muss.

Hat man also einen Längenmassstab, auf dem 1 m gleich 2 mm ist und einen Kräftemassstab, auf dem 2 mm gleich 1000 kg sind, macht man die Länge BC gleich 25 m nach dem Längenmassstabe, so hat man jedes Kilogramm gleich 25 mkg für das Mass des Momentes. Findet man also AE gleich 5000 kg, so würde das Moment $5000\cdot 25=125000$ sein. Hätte man BC auf dem Kräftemassstabe gemessen, so würde man 25000 kg gefunden haben und AE gleich 5 m erhalten, also das Moment, der ebenfalls 125000.

Es ist übrigens eine solche Umwandlung nur dann von Wert, wenn man das statische Moment für weitere Verwendung als Strecke dargestellt haben muss, sonst ist es wohl meistens einfacher, wenn man die Kraft und den lotrechten Abstand dieser von dem Punkt O misst und die Zahlen multipliziert.

Sind mehrere Kräfte vorhanden, deren statische Momente auf denselben Punkt bezogen werden, so kann man die Mittelkraft aus den Einzelkräften bestimmen und das statische Moment dieser ermitteln, welches dann der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte gleich ist. Selbstverständlich ist solches Verfahren nur dann zulässig, wenn man nicht die statischen Momente aller oder einiger der Einzelkräfte kennen muss.

Sollen die Momente konstruktiv dargestellt werden und zwar so, dass dieselben alle auf eine gleichmässige Basis bezogen sind, so kann man folgendes von Professor Bauschinger angegebenes Verfahren mit Vorteil anwenden.

An die Anfangspunkte der Kraftrichtungen P_1, P_2 P_3, P_4 ... zieht man Linien parallel zu einander und nach derselben Richtung liegend, welche $P_1 M_1$, $P_2 M_2$, $P_3 M_3$, $P_4 M_4$ ... genannt sind. Diese Linien macht man gleich lang und zwar gleich der Basis der Dreiecke, durch welche die Momente dargestellt werden sollen, welche auch Momentenbasis genannt wird. Man verbindet nun die Punkte K_1 mit P_1, K_2 mit P_2, K_3 mit P_3 und so fort und zieht zu diesen Linien Parallele durch den Punkt O_1, auf welchen die Momente bezogen werden sollen. Diese Parallelen verlängert man soweit, bis sie die zugehörige Kraftrichtung selbst oder in ihrer Verlängerung treffen. Man zieht also $O W_1$ parallel zu $K_1 P_1$ bis zu dem Punkte W_1 in P_1, $O W_2$ parallel zu $K_2 P_2$ bis zum Punkte W_2 in der Verlängerung der Kraftrichtung $M_2 P_2$ liegend, $O W_3$ parallel zu $K_3 P_3$ bis diese Linie die Verlängerung von $M_3 P_3$ in W_3 trifft und so fort bis alle vorhandenen Kräfte verarbeitet sind.

Nun zieht man durch O eine Linie AB parallel zu den Basen $M_1 K_1$, $M_2 K_2$ .... und lotrecht hierzu die Linien $W_1 V_1$, $W_2 V_2$, $W_3 V_3$ .... durch die Punkte W_1, W_2, W_3 ...., deren Lage in der vorher angegebenen Weise bestimmt sind.

Die $W_1 V_1$, $W_2 V_2$, $W_3 V_3$ .... sind dann die Höhen der Dreiecke, welche die statischen Momente darstellen.

Die statischen Momente bestimmen sich mit Hilfe des Seil- und Kräftepolygons ebenfalls und sind für viele Fälle vorteilhafter als die vorher angegebenen Konstruktionsverfahren. Man verfährt dabei nach **Fig. 102, Taf. VI.**

Zu den Kräften P_1, P_2, P_3 .... zeichnet man in bekannter Weise das Kräftepolygon $ABCD$ ...., nimmt in diesen den Pol O_1 an, zieht die Strahlen und bildet nach diesen das Seilpolygon $M M_1 M_2 M_3$ ....

Nun zieht man parallel zu den Richtungen der Kräfte $P_1 P_2 P_3$ .... Linien Om_1, Om_2, $O W_3$ ...., welche sich in dem Punkte O, auf den die Momente bezogen werden, schneiden. Dann verlängert man die Seite des Seilpolygons, bis man mit der eben angegebenen Parallele zu den Kraftrichtungen Durchschnittspunkte erhält und zwar hat man für jede einzelne Kraft die Seiten des Seilpolygons hierzu zu benutzen, welche in der Kraftrichtung selbst zusammentreffen.

Die Parallele zur Kraftrichtung P_1 ist Om_1, die Seite MM_1 des Seilpolygons schneidet Om_1 in m_1 und die Seite $M_1 M_2$ erreicht in ihrer Verlängerung diesen Durchschnitt in W_1. Für die Kraft P_2 hat man die Parallele in Om_2. Diese Linie wird in m_2 von der Verlängerung der Seilpolygonseite $M_1 M_2$ und in W_2 von derjenigen der Seite $M_2 M_3$ geschnitten und so fort.

In den Abschnitten $m_1 W_1$, $m_2 W_2$, $m_3 W_3$ ...., welche man hierbei auf den zu den Kraftrichtungen parallel gezogenen Linien erhält, multipliziert mit dem lotrechten Abstande des Pols von der betreffenden Seite des Kräftepolygons, also für die Kraft P_2 in HO_1, für die Kraft P_3 in GO_1 etc. hat man die statischen Momente der Kräfte bezogen auf den Punkt O.

Zieht man zum Nachweise der Richtigkeit von O lotrecht auf die Kraftrichtungen Linien, also z. B. auf P_2 diejenige OV_2, auf P_3 die Linie OV_3, so hat man die statischen Momente dieser Kräfte gleich $\overline{OV_2} \cdot P_2$, $\overline{OV_3} \cdot P_3$ und so fort.

Es ist nun aber das Dreieck $m_2 M_2 W_2$ dem Dreieck BCO_1, ferner das Dreieck $m_3 M_3 W_3$ dem Dreieck CDO_1 und so weiter ähnlich, weshalb die Proportionen

$$\overline{m_2 W_2} : \overline{BC} = \overline{OV_2} : \overline{HO_1}$$
$$\overline{m_3 W_3} : \overline{CD} = \overline{OV_3} : \overline{GO_1}$$

bestehen müssen. Hieraus erhält man aber die Produkte

$$\overline{m_2 W_2} \cdot \overline{HO_1} = \overline{BC} \cdot \overline{OV_2}$$
$$\overline{m_3 W_3} \cdot \overline{GO_1} = \overline{CD} \cdot \overline{OV_3}.$$

Da nun $\overline{BC} \cdot \overline{OV_2}$, $\overline{CD} \cdot \overline{OV_3}$ etc. die wirklichen Werte der statischen Momente nach der gewöhnlichen Definition sind, so müssen auch die diesen gleichen Produkte die statischen Momente angeben.

Das statische Moment der Mittelkraft für sämtliche gegebenen Kräfte oder einen beliebigen Teil derselben findet man nun auch sehr einfach.

Für die Kräfte P_2, P_3 und P_4 ist die Diagonale BE der Grösse und Richtung nach die Mittelkraft. Zieht man also parallel zu BE durch O die Linie RR und verlängert die Seiten $M_1 M_2$ und $M_4 M_5$ bis man die Durchschnittspunkte S und S_1 mit RR erhält, so ist in dem Abschnitte SS_1, multipliziert mit dem lotrechten Abstande der Linie CE von O_1, das verlangte statische Moment gefunden.

Sind die Richtungen der gegebenen Kräfte, zu denen die statischen Momente gefunden werden sollen, unter sich parallel, so hat man sofort die Anwendung des letzten Satzes und es ist dieses ein Fall, der bei dem Gebrauche der Graphostatik sehr häufig vorkommt und oft angewendet wird.

Die Konstruktion bleibt selbstverständlich dieselbe wie bei Kräften, welche zerstreut liegen, vereinfacht sich aber durch die parallele Lage der Kräfte und dadurch, dass die durch den Punkt, auf den die Momente bezogen werden, zu den Kraftrichtungen zu ziehenden parallelen Linien sämtlich in eine einzige zusammenfallen.

In **Fig. 103, Taf. VI,** ist eine Konstruktion dieser Art für fünf nach einer Richtung wirkende Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ angegeben. Der Punkt, auf welchen die Momente bezogen werden sollen, ist O genannt. Es haben demnach die Kräfte P_1 und P_2 das Bestreben den Punkt O von links nach rechts zu drehen, während die übrigen rechts von O liegende Kräfte ein entgegengesetztes Drehbestreben haben. Es müssen demnach die sich in dieser Weise entgegenwirkenden Kräfte mit entgegengesetztem Vorzeichen in Rechnung gebracht werden und diesem Vorzeichen entsprechend fallen auch die Momente aus. Gewöhnlich bezeichnet man die von links nach rechts drehenden Kräfte als negative, die entgegengesetzt wirkenden aber als positive.

Das Kräftepolygon zeichnet man, wie dieses früher bei parallelen Kräften geschehen, man trägt die Kräfte aneinander gereiht auf eine

Linie $A\,5$, welche parallel mit den Kraftrichtungen gezogen ist und nimmt ausserhalb dieser den Pol O_1 an, zieht die Strahlen $O_1 A$, $1\,O_1$, $2\,O_1 \ldots$ und bildet nach diesen das Seilpolygon.

Durch den Mittelpunkt O der Momente zieht man die Linie $O\,S$ parallel zu den Kraftrichtungen und verlängert die Seiten des Seilpolygons bis man die Durchschnittspunkte mit der Linie $O\,S$ erhält. Es ist dann, wenn der lotrechte Abstand des Poles O_1 von der Kräftelinie $A\,5$ gleich l gesetzt wird, $\overline{m_1 W_1} \,.\, l$ das Moment der Kraft P_1; $\overline{W_1 W_2} \cdot l$ dasjenige von P_2; $\overline{W_2 W_3} \cdot l$ das der Kraft P_3 und so fort. Die algebraische Summe der Abschnitte $m_1 W_1$, $W_1 W_2$, $W_2 W_3 \ldots$ ist gleich $m_1 W_5$ und das Moment der Mittelkraft für die Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$ demnach $\overline{m_2 W_5} \cdot l$.

In **Fig. 104, Taf. VI**, ist dieselbe Konstruktion für Kräfte ausgeführt, welche nicht nach derselben Seite gerichtet sind. Es sind in dieser Figur für die gleichliegenden Stücke dieselben Bezeichnungen benutzt, wie bei **Fig. 103**. Der Abschnitt für die Mittelkraft auf der Linie $O\,S$ ist hier gleich $m_1 W_5$. Die Kräfte P_1, P_3 und P_5 sind linksdrehend und nur P_2 und P_4 rechtsdrehend, also ein bedeutendes Uebergewicht der linksdrehenden oder negativ wirkenden Kräfte vorhanden. Das Moment der Mittelkraft fällt demgemäss auch negativ aus.

Ein anderes Verfahren zur Bestimmung der statischen Momente wird noch bei den Verhältnissen, welche bei auflagernden und belasteten Balken vorkommen, erörtert werden.

Zerlegen paralleler Kräfte in zwei oder mehr Kräfte, welche den gegebenen parallel sind.

In dem Kapitel, in welchem vom Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte mit parallelen Richtungen die Rede gewesen, hat es sich ausschliesslich darum gehandelt eine gegebene Kraft unter bestimmten Bedingungen in zwei Seitenkräfte zu zerlegen. Hier handelt es sich aber darum für eine einzelne oder in einem Kräftesystem vorhandene Kraft zwei andere einzusetzen oder für ein ganzes Kräftesystem zwei Kräfte zu ermitteln, welche dem System das Gleichgewicht halten, aber auch die Kräfte in anderer Weise zu ersetzen oder zu verteilen.

Ist, **Fig. 105, Taf. VI**, P eine Kraft, welche zu einem System anderer Kräfte gehört, die an dem Punkte A, an welchem sie angreift, für die vorliegenden Zwecke nicht zu gebrauchen ist, und soll dieselbe durch zwei Kräfte, welche in B und C angreifen, ersetzt werden, ist ferner $M\,N\,R$ der Teil des Seilpolygons, welcher zu der Kraft P gehört, so trägt man P auf eine ihr parallele Linie $G\,H$, nimmt den Pol O so an, dass die Strahlen $O\,G$ und $O\,H$ den Seiten $M\,N$ und $N\,R$ des Seilpolygons parallel werden, zieht die Kraftrichtungen $B\,P_1$ und $C\,P_2$ durch die gegebenen Punkte B und C und verbindet die Punkte S und W, in denen die durch B und C gehenden Kraftrichtungen die Seiten des Seilpolygons schneiden, durch die Linie $S\,W$. Hierzu parallel zieht man durch O den Strahl $O\,L$, welcher GH in die Teile GL und LH trennt. Man hat dann in GL die Grösse der Kraft P_1 und in LH diejenige von P_2.

Sollen die beiden Kräfte P_1 und P_2, welche P ersetzen, nicht an verschiedenen Seiten der gegebenen Kraft liegen, sondern müssen die Angriffspunkte B und C von P_1 und P_2, siehe **Fig. 106, Taf. VI,** an derselben Seite von P genommen werden, so verlängert man die Seite MN des Seilpolygons bis diese in S die Kraftrichtung P_1 trifft. Dann verbindet man den gefundenen Punkt S mit W, das ist mit demjenigen Punkt, an welchem die Kraftrichtung P_2 die Seite NR des Seilpolygons schneidet.

In dem Kräftepolygon ist $A_1 B_1$ gleich der Kraft P_1, die Strahlen $A_1 O$ und $B_1 O$ parallel zu MN und NR gezogen. Zieht man dann durch O den Strahl $C_1 O$ parallel zu SW, so hat man in $A_1 C_1$ die Grösse der Kraft P_1 und in $C_1 B_1$ die entgegengesetzt wirkende Kraft P_2; denn es ist wohl selbstverständlich, dass in einem solchen Falle nicht beide Kräfte nach einer Seite wirkend sein können.

Bei der letzten Aufgabe kommt man auch zum Ziele, wenn man die Seite MN, **Fig. 107, Taf. VI,** des Seilpolygons bis M_1 in der Richtung der Kraft P_2 liegend, verlängert und dann $M_1 N_1$ zieht. Ist in dem Kräftepolygone M $\cancel{H}L$ die Kraft P und zieht man durch den Pol O den Strahl OG parallel zu $M_1 N_1$, so hat man in $G\cancel{H}$ N die Grösse der Kraft P_2 und in GL diejenige von P_1.

Ist ein beliebiges aus den Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots. P_6$ bestehendes System paralleler Kräfte, **Fig. 108, Taf. VI,** durch zwei Kräfte zu ersetzen, welche rechts und links von P_1 und P_6 ihre Angriffspunkte haben, deren Richtungen aber parallel zu denjenigen von $P_1, P_2, P_3 \ldots.$ liegen, so zeichnet man das Seil- und Kräftepolygon, was nach dem Früheren keinerlei Schwierigkeit hat, wenn man nur bemerkt, dass die erste Polygonseite AB des Seilpolygons parallel zu dem Strahle OM liegen muss und in der Richtung der Kraft P_0, welche links vom System angebracht werden soll, beginnen und bis zur Kraftrichtung P_1 reichen muss und dass die Polygonseite HG, welche parallel zum Strahle OS liegt, in G d. h. in der Richtungslinie der Kraft P_{00} endigen muss, welche rechts von dem gegebenen Kräftesystem eingesetzt werden muss, um den Gleichgewichtszustand herbeizuführen.

Vollendet man dann durch die gerade Linie AG das Seilpolygon und zieht parallel hierzu durch den Pol O den Strahl OW, so teilt dieser die Summe aller Kräfte, das ist die Linie MS in die Teile MW und WS. Es ist dann MW gleich der Kraft P_0 und WS gleich derjenigen P_{00}.

Dasselbe Resultat würde man auch erhalten, wenn man die Mittelkraft zu $P_1, P_2, P_3 \ldots.$ bestimmte, indem man von B parallel zu dem Strahle OM die Linie BV_1 und von H parallel zu demjenigen OS die Linie HV_1 zöge und durch den Durchschnittspunkt V_1 beider die Richtung $V_0 V_1$ der Mittelkraft zöge. Die Verlängerung von BV_1 bis zur Kraftrichtung von P_0 gibt in dieser den Punkt A, während man durch Verlängerung der HV_1 bis G in der Richtung der Kraft P_{00} den Punkt G bestimmte. Die Verbindung von A und G fällt mit der vorher gefundenen Schlusslinie AG des Seilpolygons zusammen, es würde demnach dasselbe Resultat herbeigeführt werden.

Da das letztere Verfahren aber umständlicher, wird man dasselbe nur dann wählen, wenn man zu irgend einem anderen Zwecke auch die Lage der Mittelkraft wissen müsste.

Sollen die Kräfte P_0 und P_{00}, welche dem gegebenen Systeme paralleler Kräfte P_1 bis P_6 das Gleichgewicht halten, nicht ausserhalb dieser Kräfte liegen, sondern z. B. zwischen P_1 und P_2, sowie zwischen P_4 und P_5, **Fig. 109, Taf. VI,** in den Punkten A_1 und B_1 angreifen, so ist man allerdings gezwungen erst aus allen gegebenen Seitenkräften P_1 bis P_6 die Mittelkraft R zu bestimmen, was in bekannter Weise in der Figur geschehen ist. Dann verbindet man nach **Fig. 106** die Punkte, an welchen die Kraftrichtungen von P_0 und P_{00} die Seiten LM und DK schneiden, also M und M_1 durch eine gerade Linie und zieht hierzu parallel durch den Pol O den Strahl OH. Dieser teilt in H die Mittelkraft AG in zwei Teile, von denen der obere, also AH gleich der Kraft P_0, der untere HG aber gleich der Kraft P_{00} ist.

Tritt nun noch der Fall ein, dass die Kräfte P_0 und P_{00} nicht parallel zu den Richtungen der Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ liegen sollen, sondern eine beliebig von diesen abweichende Lage erhalten müssen, so bestimmt man in einer der angegebenen Weisen zuerst die parallelen Kräfte P_0 und P_{00}, fügt dann in den Angriffspunkten derselben zwei gleiche und entgegensetzte Kräfte zu, welche am einfachsten lotrecht zu den Richtungen von P_0 und P_{00} stehen und ermittelt aus diesen vier Kräften dann die Mittelkräfte, welche dem System der gegebenen Kräfte das Gleichgewicht halten.

Bestimmung der Schwerpunkte in Flächen.

Die Aufsuchung der Schwerpunkte in Querschnitten von Balken und anderen Konstruktionsteilen ist oft erforderlich. Bei einfachen und regelmässigen Flächen ist die Lage der Schwerpunkte leicht zu bestimmen und handelt es sich hier nicht darum solche zu ermitteln. In Flächen von ganz oder teilweise unsymmetrischen Querschnitten ist die Bestimmung der Schwerpunkte nicht immer leicht und einfach, wenn derselbe durch Rechnung gefunden werden soll. Es werden deshalb häufig die Querschnitte aus steifem Papier oder dünnem Blech ausgeschnitten und durch Balancieren derselben auf einer Schneide oder einem ausgespannten dünnen Faden die Schwerlinien bestimmt.

Mit Hilfe der bisher angegebenen Verfahrungsarten bei der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte kann man nun auf verhältnismässig einfache Weise die Schwerpunkte der Flächen bestimmen und zwar für die einfachsten wie zusammengesetztesten Querschnitte, gleich ob dieselben zu einer Achse symmetrisch sind oder nicht.

Soll z. B. der Schwerpunkt des **Fig. 110, Taf. VI,** dargestellten Querschnitts einer Eisenbahnschiene ermittelt werden, so teilt man diese durch vertikale Linien in eine Reihe Teile ein, welche der Form des Querschnitts entsprechend gewählt werden können, bei Begrenzungen durch Bogen konvergent laufenden Linien oder unregelmässigen Linien möglichst schmal genommen werden müssen, damit die einzelnen Teile als Rechtecke oder Trapeze betrachtet werden können, und welche über die ganze Ausdehnung des Querschnitts gleiche Breite haben. Man betrachtet dann die mittleren Höhen dieser Teile des Querschnitts als Kräfte. Nimmt man die Teilung nicht so vor, dass alle einzelnen Teile gleiche Breite haben, so kann man dieselben nicht in der angegebenen Weise als Kräfte betrachten, sondern muss dann die Querschnitte der Teile berechnen und die Flächeninhalte als Kräfte einführen, welche dann in den Mitten der einzelnen Teile wirkend gedacht werden. Man hat es dann mit einem System paralleler Kräfte zu thun, zu denen man die Mittelkraft oder den Angriffspunkt der Mittelkraft, denn die Grösse derselben ist ganz gleichgültig, sucht. In der Richtungslinie der Mittelkraft muss selbstverständlich der Schwerpunkt des Querschnitts liegen. Je grösser man die Anzahl der Teile nimmt, in welche man den Querschnitt einteilt, desto genauer wird die Lage des Schwerpunkts gefunden.

In **Fig. 110, Taf. VII**, ist der Schwerpunkt in dem Querschnitte einer Eisenbahnschiene bestimmt. Der Querschnitt ist symmetrisch zu der Achse MN, es muss deshalb der Schwerpunkt in dieser Achse liegen.

Man hat nun den Querschnitt durch Linien lotrecht zu MN, also durch AB, CD, EF, GH.... in schmale Streifen einzuteilen, welche eine solche Breite haben, dass man die Begrenzungslinien AC, CE, EG.... als gerade betrachten kann. Man wird demnach die Teillinien ganz den äusseren Begrenzungen der Fläche entsprechend ziehen, die Teile um so breiter nehmen können, je flacher die Begrenzungskurve ist und Stücke, wie das von L bis K, ohne Einteilung lassen, weil dasselbe ein Rechteck bildet.

Die Teile, welche in **Fig. 110** angenommen sind, sind von links nach rechts mit den fortlaufenden Nummern 1, 2, 3.... bezeichnet. Die Flächen derselben werden als Kräfte in das Kräftepolygon $UVWO$ eingetragen. Dieselben sind mit den gleichen Nummern wie die Teile bezeichnet und dann ist durch Zeichnung des Seilpolygons $abcdR$ der Punkt R, durch welchen die Mittelkraft zu den einzelnen Kräften 1, 2, 3, 4.... geht, gesucht. Die Linie RR, welche die Richtung der Mittelkraft angibt, durchschneidet die Achse MN in S, weshalb in diesem Punkt der Schwerpunkt der Figur liegen muss.

Ist die Fläche, von welcher der Schwerpunkt bestimmt werden soll, einfacher begrenzt, als dieses bei der Eisenbahnschiene der Fall ist, z. B. aus drei Rechtecken wie der doppelt Tförmige Querschnitt **Fig. 111, Taf. VII**, gebildet, so gestaltet sich die Bestimmung des Schwerpunktes selbstverständlich einfacher.

Man bestimmt in den einzelnen Rechtecken, aus welchen der Querschnitt zusammengesetzt ist, die Schwerpunkte S, S_1 und S_2. Zieht durch diese Linien, welche lotrecht zu der Achse GH des Querschnitts liegen, rechnet die Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke aus und betrachtet diese als Kräfte P, P_1 und P_2, welche in den Schwerpunkten wirkend sind. Es ist also $P = \overline{ab} \cdot \overline{ah}$, $P_1 = \overline{cd} \cdot \overline{ce}$ und $P_2 = \overline{hf} \cdot \overline{fg}$.

Dann zeichnet man das Kräftepolygon, indem man auf eine Linie AD parallel zu den durch die Schwerpunkte gezogenen Linien der Reihe nach die Kräfte $P = AB$, $P_1 = BC$ und $P_2 = CD$ aufträgt, den Pol O beliebig annimmt und die Polstrahlen OA, OB.... zieht. Weiter verfährt man dann, wie solches bei der Bestimmung der Mittelkräfte zu parallelen Kräften angegeben ist. Man zieht zu dem Polstrahl OA die in der Kraftrichtung von P beginnende Linie MW, und von M beginnend, zu OB die Parallele MN, während NR parallel zu OC zu ziehen ist. Die schliessende Seite RW des Seilpolygons liegt dann parallel zu OD und durch W geht die Schwerlinie, welche parallel zu den Kraftrichtungen P zu ziehen ist. Der Durchschnittspunkt S_0 dieser mit der Achse GH ist dann der verlangte Querschnitt.

Es mag nun zu dem **Fig. 112, Taf. VII,** angegebenen Querschnitt, welcher zu keiner Achse symmetrisch ist, der Schwerpunkt bestimmt werden.

Um die eine der Schwerlinien WW_1 zu erhalten, verfährt man genau wie bei **Fig. 111** angegeben ist. Es ist deshalb nicht erforderlich hier nochmals das Verfahren anzugeben.

Die lotrecht zu WW_1 liegende Schwerlinie findet man, indem man durch die Schwerpunkte der einzelnen Teile des Querschnitts Linien lotrecht zu WW_1 zieht und dann das Kräftepolygon $A_1 D_1 O_1$ bildet. Da wohl nur ausnahmsweise die Kraftrichtungen P hier in derselben Reihenfolge auftreten wie bei der Aufsuchung der Linie WW_1, so hat man zu beachten, dass man auf $A_1 D_1$ die Kräfte nicht in der Reihenfolge, wie solches auf AD erfolgt ist, aufträgt, sondern in derjenigen Folge, wie dieselben wirklich erscheinen. Man macht also hier $A_1 B_1$ nicht gleich P, sondern gleich P_1; dann $B_1 C_1 = P$ und $C_1 D_1 = P_1$. Nun verfährt man genau wie vorher und findet die zweite Schwerlinie VV_1. Der Durchschnittspunkt S_0 der beiden Linien WW_1 und VV_1 ist dann der verlangte Schwerpunkt der Figur.

Wenn es auch sehr einfach ist, auf die angegebene Weise die Schwerpunkte von Flächen zu bestimmen, so sollen hier doch noch einige andere Querschnitte, wie dieselben öfter vorkommen, angenommen und die Schwerpunkte derselben bestimmt werden.

Handelt es sich z. B. um Erbauung eines Kreuzgewölbes über einen unregelmässigen Raum, so muss der Schlussstein oder der Vereinigungspunkt der Grate über dem Schwerpunkte des Grundrisses liegen. Soll also z. B. über dem **Fig. 113, Taf. VII,** angegebenen unregelmässige Siebenecke ein Gewölbe errichtet werden, so hat man von dieser Figur den Schwerpunkt zu ermitteln.

Man teilt hier wohl am einfachsten die Figur durch Diagonalen AB, BC, CD und CE in Dreiecke ein und bestimmt in diesen die Schwerpunkte, indem man AB, CD und CE halbiert und die Linien KF, CF, BG, DH und FH aus den Ecken der Dreiecke nach den Halbierungspunkten der Diagonalen zieht. Es liegt dann der Schwerpunkt s_1 des Dreiecks ABK um $\frac{\overline{KF}}{3}$ von AB entfernt, der Schwerpunkt s_2 des Dreiecks ABC um $\frac{\overline{CF}}{3}$ von AB und so fort.

Man berechnet nun die Flächeninhalte der einzelnen Dreiecke und setzt die Flächen gleich Kräften ein, nimmt also $f_1 = P_1, f_2 = P_2, f_3 = P_3 \ldots$, zieht durch die in den Dreiecken bestimmten Schwerpunkte horizontale und vertikale Linien, bildet in bekannter Weise die Kräfte- und Seilpolygone und findet die beiden Schwerlinien XX und YY, welche sich in dem Schwerpunkte S der ganzen Figur schneiden.

Selbstverständlich erhält man dasselbe Resultat, wenn man die gegebene Fläche, wie diejenige der Eisenbahnschiene in schmale Streifen einteilt und wie oben angegeben verfährt. Da aber bei einer solchen Konstruktion Teilungen vorzunehmen und Linien mit ihren Durchschnittspunkten zu ziehen sind, wodurch leicht Ungenauigkeiten herbeigeführt werden können, so empfiehlt es sich nach dem angegebenen Verfahren zu konstruieren.

Bei der Bestimmung der Stabilität einer Futtermauer muss man die Lage des Schwerpunktes des Querschnitts derselben kennen. Man bestimmt denselben nach **Fig. 114, Taf. VII**, welche sich ebenso wie **Fig. 115, Taf. VII**, in welcher der Schwerpunkt eines Schornsteinschnitts gesucht ist, nach dem bisher Gesagten von selbst erklären, wenn nur bemerkt wird, dass bei dem Schornsteine nur die eine Hälfte des Schnittes in Betracht gezogen zu werden braucht.

Zuweilen fallen bei den Ermittelungen der Schwerpunkte von Flächen die Schwerlinien der einzelnen Flächenteile so nahe zusammen, dass es schwierig wird zwischen denselben die Seiten der Seilpolygone zu zeichnen und dabei genaue Punkte zum Anschluss der folgenden Polygonseiten zu erhalten. In solchen Fällen ändert man die Reihenfolge, in welcher man die Kräfte in die Kraftpolygone einträgt, ohne in den Resultaten eine Aenderung herbeizuführen, wie dieses in **Fig. 116, Taf. VII**, gezeigt ist.

Handelt es sich um die Bestimmung der Schwerpunkte in Teilen der Kreisfläche, was bei Gewölben vorkommen kann, so kann man ebenfalls das Kräfte- und Seilpolygon zur Anwendung bringen.

Ist z. B. der Schwerpunkt des Kreisausschnittes ABC, **Fig. 117, Taf. VII**, zu ermitteln, so denkt man sich diesen in eine Reihe schmaler Teile CDE zerlegt, welche man ohne Fehler als Dreiecke betrachten kann. Der Schwerpunkt des Dreiecks liegt aber in der nach der Mitte der Basis, hier DE, von der gegenüberliegenden Spitze, hier C, gezogenen Linie in $^1/_3$ der Länge dieser von der Basis abstehend, also in F. Beschreibt man nun durch F von C aus einen Kreisbogen GFH, so müssen in diesem die Schwerpunkte aller solcher Dreiecke liegen.

Man hat also nun nur nötig den Bogen GFH in eine Anzahl gleicher Teile einzuteilen, durch die Teilpunkte $K, L, M \ldots$ die Kraftrichtungslinie zu ziehen und das Kräfte- und Seilpolygon zu bilden, um die nötige Schwerlinie zu erhalten. Da hier die einzelnen Flächenteile, in welche der Kreisausschnitt eingeteilt wird, gleiche Inhalte haben, kann man die Längen WV, VU, UX...., welche man in das Kräftepolygon einträgt, ganz beliebig annehmen, muss aber eine derselben so gross nehmen als die andere.

Man kann in diesem Falle auch einfacher zum Ziele gelangen. Der Schwerpunkt des Kreisausschnittes liegt in einem Abstande $y = \frac{2rs}{3b}$ von dem Mittelpunkte des Kreises entfernt in der Halbierungslinie des Ausschnittes. Es ist deshalb nur erforderlich den angegebenen Ausdruck zu konstruieren, was leicht bewerkstelligt werden kann. Ist **Fig. 118**, **Taf. VII**, $ABDC$ der gegebene Kreisausschnitt, so legt man an den Bogen ABD in B eine Tangente BF und macht diese gleich dem halben Kreisbogen, also gleich $\frac{b}{2}$, teilt den Halbmesser BC in drei gleiche Teile und zieht von C aus durch den B zunächst liegenden Teilpunkte E einen Bogen GEH, verbindet F mit C durch eine gerade Linie, zieht HL parallel BC und LM lotrecht dazu, so muss in M der Schwerpunkt liegen. Man hat hier die ähnlichen Dreiecke CLM und CFB gebildet, also die Proportion $CM : CB = ML : BF$. Hierin ist nun CB gleich dem Halbmesser des Ausschnittes gleich r, ML gleich $^2/_6$ der Sehne AD, also gleich $^1/_3\, s$; denn es ist $ED = \frac{1}{2}\, s$, $CH = \frac{2}{3}\, r$, $CD = r$, es ist also aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CHK und CDE die Proportion $CH : OD = HK : DE$ herzuleiten, für welche man auch schreiben kann $\frac{2}{3}\, r : r = HK = \frac{s}{2}$, woraus man dann $HK = \frac{s}{3} = ML$ erhält.

Setzt man nun in der Proportion $CM : CB = ML : BF$ die bekannten Werte ein, so erhält man $CM : r = \frac{1}{3}\, s : \frac{b}{2}$, also $CM = \frac{2rs}{3b}$ übereinstimmend mit der Forderung.

Ist der Querschnitt **Fig. 119**, **Taf. VII**, ein Ringstück $ABDE$, so werden die Teile, in welche man dasselbe einteilt, Trapeze, vorausgesetzt, dass die Teile so klein genommen werden, dass man die Bogenstücke als gerade Linien betrachten kann.

Bestimmt man dann in einem dieser Trapeze den Schwerpunkt und zieht durch denselben den Bogen GH, so müssen die Schwerpunkte aller Trapeze oder Teile des Ringstückes in diesem Bogen liegen. Man verfährt dann in derselben Weise wie bei **Fig. 117**.

Man kann hier auch nach **Fig. 118**, **Taf. VII**, verfahren, wenn man das Ringstück als die Differenz der beiden Kreisausschnitte BDC und AEC betrachtet und in jedem derselben in der angegebenen Weise den Schwerpunkt bestimmt. Man findet hierdurch die Punkte S_1 und S_2, **Fig. 119**.

Nennt man r den Halbmesser CA des innern Bogens und R denjenigen CB des äusseren Bogens, so kann man die Richtigkeit der

Proportion $S_1 S : S S_2 = r^2 : R^2$ leicht nachweisen. Setzt man $x = \frac{r^2}{R}$, so hat man auch: $S_1 S : S S_2 = x : R$; denn es ist dann $r^2 = xR$. Man wird deshalb die Lage von S finden, wenn man erst $x = \frac{r^2}{R}$ oder $x : r = r : R$ konstruiert. Dieses geschieht aber einfach, wenn man BM und parallel dazu die AN zieht. Man hat dann $\quad AC : BC = CN : CM$, oder

$$r : R = x : r.$$

Zieht man dann $S_1 R = CN = x$ und $S_2 W = R$ lotrecht zu MC und WS durch R, so hat man $SS_1 : SS_2 = x : R$, also die oben gefundene Proportion.

Ist die Fläche nicht durch parallele Kreise begrenzt, sondern in einer der Formen, welche in den **Fig. 120** und **121, Taf. VII,** angegeben sind, so bleibt das Verfahren zur Auffindung des Schwerpunktes dasselbe, nur hat man für die einzelnen Teile, in die man die Flächen zerlegt, die Schwerpunkte und Flächen zu ermitteln, um die Kräfte- und Seilpolygone richtig zeichnen zu können.

Hat man den Schwerpunkt eines beliebigen Linienzuges zu bestimmen, so kann man sich auch dazu des Seilpolygons bedienen. Man nimmt die Linie als eine gewichtige in der vorgeschriebenen Form gebogene Stange an, teilt dieselbe in solche Teile ein, welche als gerade Linien betrachtet werden können. Diese Teile halbiert man, weil in dem Halbierungspunkte der Linie ihr Schwerpunkt liegt, zieht durch diese Punkte die Richtungen der Kräfte, als welche man die Längen der einzelnen Teile annimmt und konstruiert das Seil- und Kräftepolygon, um durch diese die Lage der Mittelkraft und demgemäss auch diejenige der Schwerlinie zu finden. Es ist für den Linienzug AB in **Fig. 122, Taf. VII,** der Schwerpunkt gesucht und die Schwerlinien in MN und WV, also der Schwerpunkt in dem Durchschnittspunkte S beider gefunden.

Bestimmung der zur Berechnung von Balken und Trägern erforderlichen Verhältnisse.

Balken und Träger, welche irgendwelche Belastungen tragen sollen, müssen diesen entsprechend stark hergestellt werden. Um nun die Dimensionen bestimmen zu können, ist es erforderlich verschiedene durch die Belastungen und Auflagerungen der Balken hervorgerufene Verhältnisse kennen zu lernen, namentlich die Pressungen, welche in den Auflagern der Balken auftreten, die durch die äusserlich auf die Balken einwirkenden Kräfte hervorgebrachten inneren Spannungen, die Stelle, an welcher bei einer fortschreitenden Belastung der Bruch des Balkens erfolgen würde und schliesslich das Biegungsmoment des Balkens.

Bei einfachen Belastungen kann man diese Verhältnisse sehr leicht durch Rechnung bestimmen, während bei komplizierteren Belastungen die Rechnungen oft sehr zeitraubend sind und Fehler zulassen, welche nicht, ohne eine nochmalige Rechnung anzustellen, aufgefunden werden können. Es empfiehlt sich deshalb hier ebenso wie bei andern statischen Berechnungen, wenn man nicht allein den konstruktiven Weg einschlagen will, die Rechnung durch die Konstruktion zu kontrollieren. Erhält man auf beide Weisen dieselben Resultate, so ist ein Fehler nicht vorhanden. Treten aber Differenzen ein, so kann man, da die Konstruktion vorhandene Fehler sofort erkennen lässt, diese leicht verbessern oder aber die Rechnung nochmals durchführen, um die Uebereinstimmung der Resultate zu erlangen.

Die Konstruktionen erstrecken sich selten auf nur einen Teil der oben angegebenen zur Berechnung der Dimensionen erforderlichen Daten, sondern meistenteils auf alle Ermittelungen und benutzt man dazu nur eine Zeichnung, welche allerdings bei zusammengesetzteren Verhältnissen etwas kompliziert ausfällt. Hier müssen, wenigstens anfänglich, die verschiedenen Verhältnisse einzeln gesucht werden, um keine zu gemischte Figur zu bekommen, durch die das Verständnis gestört werden könnte.

a) Bestimmung der Auflagerdrücke bei verschiedenen Belastungen und an den Enden aufgelegten Balken.

Wirken **Fig. 123, Taf. VIII**, auf den bei A und B gelagerten Balken AB in C, D, E und F Einzelkräfte d. h. Kräfte ein, von denen man annehmen kann, dass dieselben den Balken nur an einem Punkte treffen, so zeichnet man, um die Drücke zu erhalten, mit denen der Balken die Auflager bei A und B presst, das Kräftepolygon, macht also $MN = P_1$, $NQ = P_2$, $OR = P_3$, $RS = P_4$ so fortfahrend, wenn noch mehr Kräfte vorhanden sind, nimmt den Pol O beliebig an und zieht die Polstrahlen OM, ON.... bis OS. Dann zieht man durch die Auflagerpunkte A und B vertikale Linien, verlängert die Richtungen der Kräfte P und bildet das Seilpolygon, indem man die erste zu OM parallele Seite CD in der Linie AC beginnen lässt, DE parallel zu ON zieht und so fort fährt bis die Parallele zu dem letzten Strahle OS die durch B gehende vertikale Linie in G trifft. Man schliesst nun das Seilpolygon durch die Linie CG und zieht parallel hierzu durch den Pol O den Strahl OW. Dieser teilt die Kraftlinie MS, welche auch die Mittelkraft zu den Kräften P darstellt, in W und es ist dann das obere Stück MW der Druck R in dem Auflager A und der untere Teil WS der Auflagerdruck R_1 in B.

Der Balken AB, **Fig. 124, Taf. VIII**, ist durch Belastungen Q und Q_1 in Anspruch genommen, welche über beliebig lange Teile desselben gleichmässig verteilt sind. Es ist hierbei gleichgültig, an welchen Stellen die Belastungen wirken, ob sie, wie in der Figur, nebeneinander liegen oder getrennt wirkend sind, immer stellt man die Belastungen als Rechtecke dar, und nimmt die Wirkungen derselben in den Schwerpunkten dieser an, welche man dadurch einfach findet, indem man die beiden Diagonalen in den Rechtecken zieht. Die Durchschnittspunkte dieser sind die Schwerpunkte, welche mit S_1 und S_2 bezeichnet sind.

Man zieht nun durch A, B, S_1 und S_2 vertikale Linien, zeichnet wieder das Seil- und Kräftepolygon und zieht die Parallele OW durch den Pol O des Kräftepolygons zu der Schlusslinie MQ des Seilpolygons, so ist AW die Kraft R in A und CW diejenige R_1 in B.

Wirken auf den Balken AB, **Fig. 125, Taf. VIII**, beliebig Einzelkräfte P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 ein und sind ausserdem die auf grössere und kleinere Längen verteilten Belastungen Q_1, Q_2 und Q_3 auf dem Balken befindlich, so hat man folgendes Verfahren einzuschlagen, um die Drücke in den Auflagern zu erhalten.

Die Lasten P_1 und Q_1 wirken nach der in der gemachten Annahme jede für sich ohne in Zusammenhang zu stehen. Die Kraft P_2 liegt gerade in der Kante von Q_2 und P_3 ist innerhalb der Belastung Q_2 wirkend. An Q_2 schliesst sich unmittelbar Q_3 an und innerhalb der Länge, über welche diese Last verteilt ist, wirken P_4 und P_5.

Da innerhalb des Kräftepolygons die einzelnen Kräfte der Reihe nach, wie sie wirkend sind, eingetragen sein müssen, so kann man P_1, Q_1 und P_2 sofort auf die Linie MN tragen. Wollte man nun aber weiter Q_2 und dann P_3 auf die Linie MN tragen, so würde dieses nicht richtig sein, weil P_3 innerhalb der Länge von Q_2 wirkend ist. Man kann deshalb nicht anders zum Ziele kommen, als wenn man Q_2 in zwei Teile einteilt, welche q_1 und q_2 genannt sein mögen, von denen q_1 dasjenige Stück von Q_2 bezeichnet, welches links von dem Angriffspunkte der Kraft P_3 liegt, q_2 aber das Stück, welches rechts von P_3 liegend ist.

Ebenso hat man auch die Belastung Q_3 an denjenigen Stellen, an welchen die Angriffspunkte von P_4 und P_5 sind, zu teilen und das Stück, welches zwischen Q_2 und P_4 liegt, mit q_3, dasjenige, welches zwischen P_4 und P_5 befindlich ist, mit q_4, und schliesslich das Stück rechts von P_5 mit q_5 bezeichnet.

Man trägt nun in dem Kräftepolygon an P_2 nacheinander $q_1, P_3, q_2, q_3, P_4, q_4, P_5$ und q_5 auf, nimmt den Pol O beliebig an, zeichnet die Polstrahlen und parallel dazu, wieder in der durch A gehenden Linie beginnend, die Seite des Seilpolygons und legt parallel zur Schlusslinie GH dieses durch den Pol O den Strahl OW, so hat man in MW den Auflagerdruck in A gleich R und in NW denjenigen ~~in~~ R_1 in B.

Man findet nun auf diese Weise die Auflagerdrücke genau, erhält aber ein Seilpolygon, welches nicht genau ist, und eben nur zur Bestimmung der Auflagerdrücke benutzt werden kann. Soll das Seilpolygon auch andere Zwecke erfüllen, so muss man dasselbe genauer herstellen und hierzu alle über grössere oder kleinere Längen des Balkens verteilte Belastungen in Teile einteilen, welche möglichst klein, sonst aber beliebig angenommen werden können. Für die Konstruktion ist es ziemlich selbstverständlich, wenn man die Teile in jeder einzelnen Belastung gleichgross annimmt.

In **Fig. 124, Taf. VIII**, ist neben dem Seilpolygon, welches zur Bestimmung von R und R_1 benutzt wurde, noch ein zweites gezeichnet, bei dessen Herstellung die Belastung Q ebenso wie Q_1 in vier Teile eingeteilt ist. Man betrachtet die Teile der Belastungen als Einzelkräfte, welche in den Schwerpunkten der Flächen, durch die die Belastungen dargestellt, wirkend sind und zeichnet dann in bekannter Weise das Kräfte- und Seilpolygon.

Aus der Figur ersieht man sofort den Unterschied, welcher zwischen den beiden Seilpolygonen $MNUV$ und $MWXY$ besteht und kann daraus schliessen, dass bei einer andern Benutzung des Seilpolygons als zur Bestimmung der Drücke in den Auflagern der Balken nur eines derselben das richtige sein kann. Je genauer nun Ermittelungen mit Hilfe des Seilpolygons erfolgen sollen, desto kleiner muss man die Einteilung nehmen, welche in den Belastungen Q, Q_1.... angebracht wird.

Wirken, wie bei **Fig. 125, Taf. VIII**, angenommen, innerhalb der verteilten Belastungen Q, noch einzelne Lasten P, so muss man unter allen Umständen in den Richtungen dieser Lasten P, Teile in Q annehmen und dann die sich hierbei ergebenden Stücke der Belastungen Q in weitere kleinere Teile einteilen, also die Stücke der Belastungen Q, in welche diese durch die P zerlegt werden, als einzelne nebeneinander liegende Belastungen ansehen und als solche behandeln.

Ist die Belastung gleichförmig über den ganzen Balken verteilt, **Fig. 126. Taf. VIII**, so ist ja bekannt, dass die Auflagerdrücke gleich und gleich der halben Belastung sein müssen. Das Seilpolygon bildet dann eine gebrochene Linie $MNWS$, welche, wenn man die Teile in der Belastung sehr klein annimmt, in eine Kurve übergeht, welche eine Parabel ist. Man kann demnach in einem solchen Falle das Seilpolygon auch ohne vorherige Zeichnung des Kräftepolygons erhalten, wenn man **Fig. 127, Taf. VIII**, unter dem Balken AB ein Dreieck MNO bildet, in dem MN, die Basis, bestimmt ist, die Schlusslinie des Polygons zu bilden und in dem OL gleich der Grösse $\frac{QL}{4h}$ ist, wenn man die Belastung Q, die Länge des Balkens L und die Entfernung des Pols an der Kräftelinie h nennt.

Teilt man nun die Belastung auf AB, wie dieses auch in **Fig. 125** geschehen, in eine beliebige Anzahl gleicher Teile ein und zieht durch die Schwerpunkte dieser vertikale Linien, so schneiden diese die Dreiecksseiten MO und ON in m, n, p.... w, n, s.... Halbiert man dann die Teile mn, np, pq...., sowie or, rs, sw...., bezeichnet die Halbierungspunkte in der Linie MO, von oben beginnend, mit 1, 2, 3, 4...., die der Dreiecksseite ON aber von unten anfangend mit I, II, III, IV...., so erhält man die Parabel, welche das Seilpolygon nach unten zu begrenzt, wenn man die Linien M1, 1 II, 2 III, 3 IV und 4 IV zieht. Auch hier wird sich die gebrochene Linie, welche man erhält, der Parabel um so mehr nähern, je kleiner man die Teile der Belastung nimmt.

Hat man eine zwar über den Balken oder einzelne Teile desselben verteilte Belastung, ist dielbe aber nicht gleichmässig, sondern in irgend einer andern Weise verteilt, z. B., so, dass man dieselbe wie **Fig. 128, Taf. VIII**, als ein Dreieck ABC darstellen kann, so nimmt man auch hier eine Teilung in einzelne möglichst kleine Teile vor, bestimmt in den Teilen ADG, $DEHG$, $EFJH$.... die Schwerpunkte und von denselben auch die Flächeninhalte, zieht durch die ersteren, ebenso wie durch A und B vertikale Linien, nimmt die Flächeninhalte der einzelnen Teile als Kräfte an und zeichnet dann wie immer das Kräfte- und Seilpolygon und bestimmt durch die Parallele, durch den Pol gezogen, zu der Schlusslinie des Seilpolygons R und R_1.

b) Ermittelung der im Innern des Balkens auftretenden Kräfte.

Durch die äusserlich auf den Balken einwirkenden Kräfte werden im Innern desselben Kräfte hervorgerufen, welche das Bestreben haben, das Gefüge des Balkens zu zerstören und seine Haltbarkeit zu gefährden. Eine Partie dieser Kräfte hat eine vertikale Richtung und um die Bestimmung dieser handelt es sich hier.

Wirken auf den Balken AB, **Fig. 129, Taf. VIII,** die Kräfte P_1 bis P_6 ein, so bestimmt man die Auflagerdrücke R und R_1 nach **Fig. 123, Taf. VIII,** zieht dann durch den Punkt W, welcher die Kraftlinie MN in MW und NW gleich R und R_1 teilt, eine horizontale Linie WW_1, zieht durch M eine ebenso gerichtete Linie Mb, bis dieselbe die Kraftrichtung P_1 trifft. Man hat dann in $abcd$ ein Rechteck von der Höhe $ad = R$ und der Breite gleich dem Abstande des Angriffspunktes der Kraft P_1 von der Auflagerstelle A des Balkens. Durch dieses Rechteck sind die vertikalen Kräfte, welche in dem Balkenteile AC wirkend sind, dargestellt. Man zieht dann durch G den Endpunkt der Kraft P_1 eine horizontale Linie Gf bis zu der Kraftrichtung P_2. In dem Rechtecke $cefg$ sind dann die zwischen C und D wirkenden vertikalen Kräfte dargestellt.

Zieht man weiter durch H die Hi, so hat man in $hikg$ die Darstellung der vertikalen Kräfte zwischen D und F des Balkens AB. In gleicher Weise fährt man fort bis alle die Kräfte verarbeitet sind, welche ganz über dem Punkte W liegen. Der Punkt W liegt nun zwischen K und L, der Länge, welche die Kraft P_4 darstellt. Zieht man demnach, indem man das angegebene Verfahren fortsetzt, durch L eine horizontale Linie, so kommt diese unter WW_1 zu liegen. Es werden deshalb die vertikalen Kräfte zwischen F und S durch das über WW_1 liegende Rechteck $klmn$ und diejenigen zwischen S und X auftretenden Kräfte durch das unter WW_1 liegende Rechteck $npqr$ dargestellt. Man hat also in dem Angriffspunkt der Kraft P_4 eine vertikale und eine negative vertikale Kraft, weil man offenbar den über und unter WW_1 zur Darstellung kommenden vertikalen Kräften entgegengesetzte Vorzeichen geben muss. Man findet dann weiter die vertikalen Kräfte zwischen X und Y in dem Rechtecke $rnts$ und diejenigen zwischen Y und B in $uvwz$ und haben dann alle links von P_4 liegenden vertikalen Kräfte, weil unter WW_1 liegend, negative Vorzeichen.

Es sind also die vertikalen Kräfte immer gleich dem Auflagerdrucke R an der linken Seite des Balkens weniger den auf den Balken einwirkenden äusseren Kräften bis zu dem Punkte, für welchen die vertikalen inneren Kräfte bestimmt werden sollen. Hieraus erklärt es sich auch, dass in dem nach B zu liegenden Balkenstücke die Kräfte negativ werden müssen, weil die Summe der Kräfte P dann grösser wird als R.

Ist die Belastung über den ganzen Balken AB gleichförmig verteilt, **Fig. 130, Taf. VIII**, so ist $R = R_1 = \frac{Q}{2}$, vorausgesetzt, dass die Belastung mit Q bezeichnet wird.

Es ist in diesem Falle offenbar in A die vertikale innere Kraft gleich R und in B gleich R_1, während man in der Mitte des Balkens bei C dieselbe gleich Null erhalten muss. Zieht man demnach WW_1 parallel zu AB und durch C eine vertikal zu AB gerichtete Linie, bis diese WW_1 in N trifft, macht $WM = R$ und $W_1M_1 = R_1$ und zieht die Linie MNW_1, so hat man in dem Dreieck WMN die zwischen A und C auftretenden positiven Kräfte und in demjenigen W_1M_1N die in der Balkenhälfte BC vorkommenden vertikalen Kräfte graphisch gefunden.

Hat der Balken eine aus Einzelkräften P_1, P_2, P_3 und gleichförmig verteilten Gewichten Q_1, Q_2 bestehende Belastung zu tragen, siehe **Fig. 131, Taf. VIII**, so bestimmt man in bekannter Weise erst R und R_1. Es ist zu dem Ende die Belastung Q_1 in C, D und E geteilt, so dass sich vier Kräfte q_1, q_2, q_3 und q_4 ergeben haben. Ebenso ist Q_2 in den Angriffspunkten der Einzellasten P_2 und P_3 geteilt und ausserdem das Stück links von P_2 in q_5 bis q_7, dasjenige zwischen P_2 und P_3 in q_8 bis q_{11} und schliesslich das Stück rechts von P_3 in drei Teile, welche mit q_{12} bis q_{14} bezeichnet sind.

Durch das Kräfte- und Seilpolygon ist der Punkt W gefunden. Man zieht WW_1 horizontal und durch die Kanten der Teile in Q_1 und Q_2 vertikale Linien, welche mit den Kraftrichtungen der P gehörig verlängert werden.

Man zieht dann horizontale Linien durch:

M bis zur Vertikalen durch A,
H „ „ „ „ C,
K „ „ „ „ D,
L „ „ „ „ E,
N „ „ „ „ F.

und verbindet die gefundenen Punkte durch eine Linie ab. Dann legt man weiter durch S eine horizontale Linie bis zur Kraftrichtung P_1 und verlängert die durch N gehende Linie ebenfalls bis zur Richtung von P_1 oder bis zu der durch G gehenden vertikalen Linie. Man hat dann Sd bis e zu verlängern, welcher Punkt unter der linken Kante von Q_2 liegt. Man zieht dann weiter horizontale Linien durch U, V und X, wodurch man die Punkte f, g und h erhält, von denen h in der Richtung der Kraft P_2 liegt. Man zieht eh und hk vertikal, so dass der Punkt k in gleicher Höhe mit G zu liegen kommt. In derselben Weise fährt man dann fort, bis man schliesslich den Punkt m findet, welcher aus dem Durchschnittspunkte zwischen der Horizontalen durch Z und der Vertikalen durch B sich ergibt. Die schraffierte Figur gibt dann ein Bild der vertikalen Kräfte, welche an der Stelle, an welcher die Umfassungslinie derselben die Horizontale WW_1 schneidet, gleich Null werden. An dieser Stelle gehen dann die positiven Kräfte in die negativen über. Die grösste positive Kraft ist also gleich R, dieselbe liegt in A und die grösste negative vertikale Kraft gleich R_1, welche in B liegt.

c) Die schwächste Stelle des Balkens.

Die schwächste oder gefährlichste Stelle eines Balkens ist offenbar da, wo der Bruch eines Balkens erfolgt oder erfolgen muss, wenn die auf ihn einwirkenden Lasten und Kräfte, in demselben Verhältnis wie dieselben wirklich vorhanden sind, soviel vergrössert werden, dass der Bruch wirklich erfolgt. Diese Stelle liegt aber da, wo die vertikalen, inneren Kräfte gleich Null werden oder wenn eine solche Stelle nicht vorhanden ist, da wo sich für einen Punkt des Trägers gleichzeitig eine positive oder negative innere Vertikalkraft ergibt.

Hat man demnach die vertikalen Kräfte nach dem Vorhergehenden graphisch dargestellt, so liegt die schwächste Stelle des Balkens allemal über dem Punkte, an welchen die äussere Begrenzung der die Vertikalkräfte darstellenden Figur die horizontale Linie WW_1 schneidet.

d) Bestimmung des Biegungsmomentes.

Das Biegungsmoment, statisches Moment der äusseren Kräfte, Angriffsmoment oder welchen Namen man der hier zu ermittelnden Grösse auch geben will, ist die algebraische Summe der Momente sämtlicher auf das Stück eines Balkens einwirkender äusserer Kräfte von dem einen Auflagerpunkte z. B. A, **Fig. 132, Taf. VIII**, an gerechnet, bis zu einer bestimmten Stelle, welche in Betracht gezogen werden soll, z. B. X.

Um das Biegungsmoment für einen solchen Punkt durch Rechnung zu finden, bestimmt man zunächst den Auflagerdruck R in A, denkt sich den Balken bei X abgeschnitten und festgehalten und bestimmt die algebraische Summe der auf das Balkenstück AX einwirkenden Kräfte multipliziert mit ihren Abständen von dem Punkte X. Diese Rechnung hat man für jeden in Betracht zu ziehenden Punkt zu wiederholen, also so oft als man Querschnittsbestimmungen für den Balken vornehmen will. Die grössten Momente ergeben sich für die schwächsten Stellen der Balken.

Auf graphischem Wege kommt man nicht nur viel einfacher zu der Bestimmung der Biegungsmomente als durch Rechnung, sondern erhält auch einen vollständigen Ueberblick über diese Momente für alle Teile des Balkens.

Man zeichnet das Seil- und Kräftepolygon und bestimmt aus denselben die Auflagerdrücke R und R_1. Durchschneidet man dann durch eine durch X gelegte vertikale Linie das Seilpolygon, so werden die beiden Seiten MM_1 und LN von der Schnittlinie getroffen. Verlängert man also diese beiden Seiten bis man ihren Durchschnittspunkt G erhält, so hat man nach dem Vorhergehenden in diesem den Anriffspunkt der Mittelkraft S für alle auf das Balkenstück AX einwirkenden Kräfte. Die Grösse von S ist aber gleich $R - (P_1 + P_2)$, also gleich CW. Zieht man dann GJ lotrecht zu XK, bestimmt also durch diese Linie den lotrechten Abstand des Angriffspunktes G der Mittelkraft S von der Balkenstelle X, so hat man das Biegungsmoment für X

$$B_m = S \cdot \overline{GJ}.$$

Zieht man dann auch durch den Pol O eine Linie DO lotrecht zu AF, so hat man die ähnlichen Dreiecke GJK und CDO, sowie GJH und DWO. Aus den erstern erhält man aber die Proportion:

$GJ:DO = JK:CD$ und aus den letztern diejenige
$GJ:DO = JH:DW$. Aus beiden kann man nun die dritte Proportion bilden:

$GJ:DO = JK - JH:CD - DW$ oder
$GJ:DO = \quad HK \quad : CW.$

Hieraus findet man aber $GJ = \dfrac{\overline{DO} \cdot \overline{HK}}{\overline{CW}}$ oder da $CW = S$ ist auch $GJ = \dfrac{\overline{DO} \cdot \overline{HK}}{S}$.

Setzt man diesen Wert für GJ in die Gleichung für B_m ein, so erhält man

$$B_m = \overline{DO} \cdot \overline{HK},$$

das ist gleich dem Produkte aus dem lotrechten Abstande des Pols O von der Kräftelinie AF und der unter dem betrachteten Schnitte X des Balkens liegenden Höhe des Seilpolygons. Da nun für dasselbe Kräfte- und Seilpolygon OD eine konstante Grösse ist, so geben die Lote in dem Seilpolygon ein Bild der Biegungsmomente für jede beliebige Stelle des Balkens. Man kann also auch ohne die vertikalen Kräfte, welche im Innern des Balkens erzeugt werden, dargestellt zu haben, die schwächste Stelle des Balkens finden, wenn man nur das Seilpolygon gezeichnet hat; denn es muss die schwächste Stelle da liegen, zu welcher in dem Seilpolygon das grösste Lot gehört.

Da nun das Biegungsmoment das Produkt aus einer Kraft und einer Länge ist, so kann man das durch Konstruktion ermittelte Biegungsmoment leicht in Zahlen umsetzen, denn man braucht nur DO nach dem Massstabe, nach welchem die Kräfte aufgetragen wurden und HK nach dem Längenmassstabe, welcher der Zeichnung zu Grunde gelegt ist, auszumessen und beide zu multiplizieren, wobei man HK noch in der Längeneinheit auszudrücken hat, welche man in der weitern Rechnung gebrauchen will, also bei Querschnittsbestimmungen von Balken meist in Zentimetern oder Millimetern.

Will man das Seilpolygon nun in der angegebenen Weise benutzen, so ist es wohl selbstverständlich, dass man dasselbe mit möglichster Genauigkeit herzustellen hat, dass also die Einteilung verteilter Kräfte oder Lasten, wie oben angegeben, möglichst klein genommen werden muss.

Man ersieht aus dem dargestellten Seilpolygon, dass die grössten Höhen immer unter den Angriffspunkten der Kräfte liegen, dass demnach auch der Bruch an einem solchen Angriffspunkte erfolgen muss und zwar in der Regel da, wo die grösste Kraft befindlich ist.

Hat man nicht nur Einzelkräfte, welche den Balken belasten, sondern auch verteilte Belastungen, so wird man, wenn die Einzelkräfte gegen die verteilten Belastungen gerechnet, nicht sehr klein sind, wenn nicht immer, so doch in vielen Fällen die Bruchstelle des Balkens ebenfalls in einer Einzelkraft finden. Uebrigens hat man es bei praktischen Berechnungen fast nie ausschliesslich mit Einzelkräften zu thun, weil das Gewicht des Balkens selbst, eine nicht unwesentliche Belastung ausmacht und fast immer berücksichtigt werden muss. Das Gewicht ist aber eine verteilte Last.

Reduktion von Einzellasten auf eine gleichförmige Belastung.

Vielfach wird von Praktikern bei der Berechnung von Balken, welche durch Einzellasten in Anspruch genommen werden, eine Reduktion dieser vorgenommen und statt der vorhandenen an einzelnen Punkten angreifenden Lasten, eine gleichförmig verteilte Belastung in Rechnung gebracht, welche dieselbe Wirkung hervorbringen soll, wie die Einzellasten und dann nach der gleichförmigen Belastung die Verhältnisse des Balkens bestimmt.

Wie unzulässig ein solches Verfahren ist, ergibt sich sofort aus folgenden Betrachtungen.

Nimmt man an, es wirken auf den Balken AB, **Fig. 133, Taf. VIII**, fünf Einzelkräfte P_1 bis P_5 ein, welche der Einfachheit wegen, gleichgross und symmetrisch über den Balken verteilt sein sollen, so zeichnet man das Kräfte- und Seilpolygon und ersieht aus diesen, dass die Auflagerdrücke R und R_1 gleich sind, und dass das grösste Biegungsmoment in der Mitte des Balkens, also in C, dem Angriffspunkte der Last P_3 liegt.

Für eine gleichförmig verteilte Belastung ist das grösste Biegungsmoment ebenfalls in der Mitte des Balkens und zwar ist dasselbe gleich $B_{\max} = \frac{Q\,l}{8}$, wenn man mit Q die Grösse der gesamten Belastung und mit l die Länge des Balkens zwischen den Auflagern bezeichnet. Man findet also durch Umkehrung dieser Gleichung $Q = \frac{8\,B_{\max}}{l}$.

Nimmt man also z. B. $P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = 4000$ kg und $l = 8$ m an, so würde man aus den gegebenen Belastungen $R = \frac{5 \cdot 4000}{2} = 10000$ kg erhalten und dann das Biegungsmoment für den Punkt C finden:

$$B_{\max} = R\,\frac{l}{2} - \left(P_1 \cdot \frac{l}{3} + P_2 \cdot \frac{l}{6}\right)$$

und weil $P_1 = P_2$ ist, auch:

$$B_{\max} = (R - P)\,\frac{l}{2} = (10000 - 4000)\,4 = 24000\ \text{mkg}.$$

Es würde demnach die gleichförmig verteilte Belastung zu nehmen sein:

$$Q = \frac{8 \cdot 24000}{8} = 24000\ \text{kg}.$$

Zeichnet man nun für diese Belastung in die Figur noch das Seilpolygon ein, dasselbe in dem Punkte M beginnend und mit demselben Abstande des Punktes O von der Kräftelinie GH, so ersieht man, dass die beiden Seilpolygone sich keineswegs decken, sondern dasjenige für die gleichförmige Belastung fast ganz von dem Seilpolygone für die Einzellasten umschlossen wird, also die Biegungsmomente für die meisten Punkte des Balkens bei der angenommenen gleichförmigen Belastung kleiner ausfallen als bei den vorhandenen Einzellasten, weshalb eine solche Reduktion als vollständig unzulässig bezeichnet werden muss. Es hat übrigens bei der einfachen Ermittelung der Biegungsmomente und sonstigen für die Stärkenermittelung von Balken und Trägern erforderlichen Verhältnisse auf graphischem Wege, eine solche Reduktion gar keinen Sinn mehr, weil es eher einfacher als komplizierter ist, die erforderlichen Ermittelungen mit Einzelkräften als mit verteilten Belastungen vorzunehmen.

Anwendung der vorigen Ermittelungen auf einige der Praxis entnommene Anordnungen.

Um zu zeigen, wie man die bisher angegebenen Konstruktionen auf praktische Fälle verwendet, mögen hier einige Beispiele gegeben werden, wie dieselben vielfach bei Ausführung von Bauten vorkommen.

1. Ueber einem Raum von 12 m Länge und 8 m Breite ist die Decke nebst den **Fig. 134, Taf. VIII,** angegebenen Scheidewänden durch Träger zu unterstützen. Die Belastung der Decke soll zu 500 kg pro einen Quadratmeter inklusive des eignen Gewichtes der Decke angenommen werden und ein Quadratmeter der Scheidewände mag 450 kg wiegen. Ueber dem Raume, welcher durch die Wände in einzelne Zimmer eingeteilt wird, liegt das Dach. Die Balkenlage ist durch Hängewerke gestützt, belastet also die Träger, welche zur Unterstützung der Wände und angegebenen Decke benutzt werden, nicht. Auf den Trägern AB und CD sollen die Balken der Balkenlager gestossen werden. Diese Balken liegen hiernach in der Richtung von M nach N. Die Höhe der Scheidewände ist 3 m.

Die Träger GL und PQ, welche volle Wände ohne Durchbrechungen zu stützen haben, welche von der Decke keine Last empfangen, sind gleichförmig belastete Balken, deren Belastung $4 \cdot 3 \cdot 450 = 5400$ kg beträgt. Diese weiter zu betrachten, wird nicht erforderlich sein. Die Wände, welche die Träger LO und JK stützen, haben in ihrer Mitte eine Thüröffnung. Die Dimensionen der Wand, welche von diesen Trägern gestützt werden muss, sind **Fig. 135, Taf. VIII**, angegeben. Von der Decke erhalten dieselben keine Last. Man hat also Träger, welche von den Auflagern her eine über 1,5 m verteilte Belastung zu stützen haben, deren Grösse $\frac{4 \cdot 3 \cdot 450 - 2{,}2 \cdot 1 \cdot 450}{2} =$ rund 2250 kg beträgt.

Man hat also den Balken, welcher **Fig. 136, Taf. VIII,** näher angegeben ist. Als Längenmassstab ist 1 cm als 1 m angenommen und beim Kräftemassstabe 1 mm gleich 100 kg gesetzt.

Die über AC und BD verteilten Belastungen jede von 2250 kg sind in fünf Teile eingeteilt, so dass jeder dieser Teile $\frac{2250}{5} = 450$ kg beträgt.

Man trägt also auf die Linie FG zehnmal die Länge von 4,5 mm $= 450$ kg auf, nimmt den Pol O beliebig an und zieht nach $G, H, J, K \ldots F$ die Polstrahlen. Dann zieht man durch die Schwerpunkte, also Mitten, der einzelnen Belastungsteile vertikale Linien und bildet nach dem Kräftepolygon das Seilpolygon, zieht zu der Schlusslinie MN dieses den Strahl OW und teilt GF in die Teile GW und WF, welche hier gleich sein müssen und die Auflagerdrücke in A und C angeben.

Die Höhe des Seilpolygons ist zwischen C und D gleich. Man hat also hier das grösste Biegungsmoment und der Bruch wird in der Mitte des Balkens erfolgen.

Der lotrechte Abstand des Poles O von der Kräftelinie GF ist 20,6 mm und die Höhe RS des Seilpolygons 8,2 mm, man hat also die Poldistanz nach dem Längenmassstabe gemessen 206 cm und die grösste Höhe des Seilpolygons nach dem Kräftemassstabe 820 kg, daher das Produkt aus beiden

$$B_{\max} = 820 \cdot 206 = 168920 \text{ kgcm}.$$

Die Balken AB und CD, **Fig. 134,** haben nun die auf ihnen stehenden Scheidemauern, **Fig. 137, Taf. VIII**, zu tragen. Aus diesen resultieren die Belastungen A, B, C und D, **Fig. 138, Taf. VIII,** welche der Reihe nach über 0,5, 2,5, 0,5 und 1,5 m Länge verteilt sind und deren Grössen in derselben Reihenfolge sind:

$$\big(0{,}5 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot (3 - 2{,}2)\big) 450 = 855 \text{ kg, abgerundet } 860 \text{ kg},$$
$$\big(2{,}5 \cdot 3 + 1{,}0 \cdot (3 - 2{,}2)\big) 450 = 3735 \text{ „ „ } 3740 \text{ „}$$
$$\big(0{,}5 \cdot 3 + 1{,}0 \cdot (3 - 2{,}2)\big) 450 = 1035 \text{ „ „ } 1040 \text{ „}$$
$$\big(1{,}5 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot (3 - 2{,}2)\big) 450 = 2205 \text{ „ „ } 2210 \text{ „}$$

Als weitere Belastung ist der Druck der Balkenlagen vorhanden. Da die Balken auf den Trägern der Annahme zufolge gestossen sind, ist aus dem Raume $ABWM$ die Hälfte und ebenso aus demjenigen $ACDB$ eine Hälfte des Gewichtes als Belastung für den Träger AB in Rechnung zu stellen. Es hat der Träger AB demnach eine

Fläche von $4 \cdot 8 = 32$ qm zu stützen und da ein Quadratmeter 500 kg wiegt, das Gewicht von $32 \cdot 500 = 16000$ kg. Nimmt man nun an, dass die Balkenlage ausser den Wandbalken, welche nicht in Rechnung kommen, noch neun Balken habe, so ist der Druck, welchen jeder einzelne Balken auf AB ausübt, gleich $\frac{16000}{10} = 1600$ kg.

In der Mitte trifft dann der Träger GH auf AB. Nach oben ist GH mit 5400 kg gleichförmig belastet, es hat also das Auflager bei H einen Druck von $\frac{5400}{2} = 2700$ kg aufzunehmen.

Dann kommt noch von jedem der Träger LO und JP die Hälfte der Belastung, also 2250 kg auf AB.

Es ist demnach die gesamte Belastung, welche AB zu stützen hat, so, wie dieses in der Figur angegeben ist.

Es mag hier noch erwähnt werden, dass, wenn die Belastungen auf den Trägern GH, LO und JK nicht so verteilt wären, dass die Auflager in gleicher Weise beansprucht sein würden, man für den Träger AB diejenige Kraft als Belastung in Rechnung bringen müsste, mit welcher die Querträger die bezüglichen Auflager pressten.

Man zeichnet nun das Kräftepolygon, indem man in bekannter Weise die verteilten Belastungen in Teile zerlegt, so dass jedenfalls durch den Angriffspunkt jeder Einzellast eine Teilung geht.

Die Belastung A kann ungeteilt bleiben, weil dieselbe nur eine geringe Ausdehnung hat. Die Belastung B hat man aber in wenigstens fünf Teile zu zerlegen, weil innerhalb derselben vier Einzelkräfte auftreten. Die Grösse oder das Gewicht dieser einzelnen Teile ist von links beginnend, weil 1 m der Balkenlänge durch B mit $\frac{3740}{2{,}5} =$ rund 1500 kg belastet ist:

$$1500 \cdot 0{,}1 = 150 \text{ kg}$$
$$1500 \cdot 0{,}8 = 1200 \text{ „}$$
$$1500 \cdot 0{,}6 = 900 \text{ „}$$
$$1500 \cdot 0{,}2 = 300 \text{ „}$$
$$1500 \cdot 0{,}8 = 1200 \text{ „}$$

Die Belastung C bleibt wie A ungeteilt und diejenige D muss in M geteilt werden, so dass das Stück links von M gleich 1200 kg und dasjenige rechts von M gleich 1050 kg wird.

Ist das Kräftepolygon vollendet, so schreitet man zur Aufzeichnung des Seilpolygons. Verwendet man denselben Längenmassstab wie bei **Fig. 136, Taf. VIII**, nimmt aber 1 mm gleich 400 kg, so erhält man die **Fig. 139, Taf. VIII**, dargestellte Form und entnimmt demselben eine grösste Höhe von 18,8 mm, welche demnach einem Werte von 7520 kg entspricht, während die Poldistanz 45 mm beträgt, also 450 cm ist. Man hat demnach das grösste Biegungsmoment:

$$B_{\max} = 7520 \cdot 450 = 3384000 \text{ kgcm},$$

und zwar für die Mitte des Balkens. Um sich zu überzeugen, dass die Bruchstelle des Balkens wirklich in der Mitte desselben, also in C

liegt, hat man nur nötig die Figur, welche die vertikalen Kräfte darstellt, zu zeichnen. Man ersieht daraus, dass die Linie $W W_1$, welche durch den Punkt W, in welchem der parallel zu $M M_1$ gezogene Strahl $O W$ die Kräftelinie schneidet, in D von $E F$ durchschnitten wird. D liegt aber unter C, es ist also in C eine negative und eine positive vertikale Kraft wirkend und demnach die Bruchstelle wirklich in C gelegen.

2. Ein Raum von 10 m Quadrat ist durch zwei Sprengwände $L K$ und $M N$ in drei Teile geteilt. Die Wände haben gleichzeitig die höher gelegene Balkenlage gestützt. Es sollen die Sprengwände beseitigt werden und statt derjenigen $L K$ eine massive $1^1/_2$ Stein starke Mauer aufgeführt werden, während eine Trennung des Raumes in der Richtung $M N$ nicht stattfinden soll, **Fig. 140, Taf. IX.**

Man muss deshalb unter der Balkenlage $A B$ Träger anbringen, von denen der in $L K$ liegende stark genug sein muss, um die hier aufzuführende Mauer nebst den beiden Balkenlagen in $C D$ und $A B$ zu stützen und in $M N$ unter der oberen und unteren Balkenlage Träger anordnen, wobei der obere Träger durch zwei Säulen auf den unteren gestützt werden soll, deren Stellung aus der Figur zu ersehen ist.

Die Belastung der Balkenlagen soll für jeden Quadratmeter 800 kg betragen können und ausserdem soll bei W ein Apparat aufgestellt werden, welcher runde Grundfläche von 3,5 m Durchmesser hat, dessen Mitte 2 m von der Umfassungswand des Gebäudes absteht und der im gefüllten Zustande ein Gewicht von 25000 kg hat.

Ausserdem ist noch zu bemerken, dass der Träger $C D$ über den Säulen G und H gestossen werden soll, also aus drei Teilen besteht und dass die Balken der Balkenlagen 1 m voneinander entfernt liegen.

Das Gewicht einer belasteten Balkenlage ist $10 \cdot 10 \cdot 800 =$ 80000 kg, welches von neun Balken und zwei Wandbalken getragen wird, so dass jeder der Balken 8000 kg aufzunehmen hat. Die Balken liegen nun an den Enden auf und sind, wenn dieselben in ihrer ganzen Länge durchgehend sind, zwischen die Endauflagern zweimal unterstützt. Jede dieser Unterstützungen wird demnach mit $^{11}/_{30}$ der Gesamtbelastung gedrückt, so dass jeder Balken der Balkenlage einen Druck von $\frac{11}{30} \cdot 8000 =$ rund 3000 kg ausübt.

Der bei $L K$ anzubringende Träger hat also von der obern Balkenlage $9 \cdot 3000 = 27000$ kg aufzunehmen und hat das Gewicht der Mauer, welche 15,6 cbm Mauerwerk enthält, zu tragen. Nimmt man den Kubikmeter Mauerwerk zu einem Gewichte von 1500 kg, so ist die Mauer 23400 kg schwer und diese mit den obigen 27000 kg, also zusammen 50400 kg bilden für den Träger $L K$ eine gleichförmig verteilte Belastung. Dann hat derselbe noch die neun Balken der unteren Balkenlage zu stützen. Der Träger ist demnach belastet, wie solches **Fig. 141, Taf. IX,** angegeben ist.

Das Trägerstück CE hat nur drei Balken, dasjenige EF und ebenso FD je zwei Balken der oberen Balkenlage zu unterstützen. Das erstere also zusammen 9000 kg, die letzteren jedes 6000 kg.

In die Säule G gehen aus CE und EF $\frac{9000 + 6000}{2} = 7500$ kg über und ausserdem kommt aus dem gerade auf G liegenden Balken 3000 kg auf die Säule, so dass diese 10500 kg zu tragen hat. Rechnet man dazu das eigene Gewicht der Säule, so kann man eine Belastung des Trägers AB durch die Säule G von 11000 kg annehmen. Die Säule H erhält aus den Trägerteilen EF und DF $\frac{6000 + 6000}{2} =$ 6000 kg, ist also, da sich auch direkt ein Balken der Balkenlage auf sie stützt, mit 9000 kg belastet, wofür man unter Berücksichtigung des Säulengewichtes für den Träger AB rund 9500 kg annehmen kann, dann steht auf AB noch der Apparat, wie oben angegeben. Der Träger ist also, wie **Fig. 142, Taf. IX,** zeigt, belastet.

Für den Träger CE ist in **Fig. 143, Taf. IX,** das Kräfte- und Seilpolygon gezeichnet. Als Massstab für die Kräfte ist 1 mm gleich 500 kg genommen und für die Länge 10 mm gleich 1 m.

Man hat den lotrechten Abstand des Pols O von AB gleich 15 mm, also gleich 150 cm und die grösste Höhe des Seilpolygons unter der Mitte des Trägers $C_1 D = 8$ mm, also gleich 4000 kg und daher

$$B_{\max} = 150 \cdot 4000 = 600000 \text{ kgcm}.$$

Für die Träger EF und FD ist **Fig. 144, Taf. IX,** das Biegungsmoment ermittelt. Man hat die Poldistanz 150 cm, die grösste Höhe des Seilpolygons 2000 kg, also:

$$B_{\max} = 150 \cdot 2000 = 300000 \text{ kgcm}.$$

Die Bruchstelle liegt in der Mitte des Trägers, weil zwischen A und B eine gleiche Höhe des Seilpolygons gefunden wird.

In **Fig. 145, Taf. IX,** ist für den Träger, auf welchen die Scheidemauer ruhen soll, das Biegungsmoment ermittelt. Die Bruchstelle dieses Balkens liegt in seiner Mitte, weil eine Last gleichförmig über derselben verteilt ist, die aus der Balkenlage auf den Träger übergehenden Einzelkräfte aber symmetrisch auf den Balken einwirken.

Es mag hier noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass es nicht zulässig ist, die Belastung, welche aus einer Balkenlage auf einen Träger ausgeübt wird, als eine gleichförmig verteilte Last zu betrachten, wenn auch in einem, wie der vorliegende Fall, wo die Balken symmetrisch zur Mitte des Trägers verteilt sind, nur ein unbedeutender Fehler entstehen kann. Bei unsymmetrisch liegenden Balken kann der Fehler aber bedeutend werden, weshalb bei einer solchen Lage der Balken die Annahme einer gleichförmig verteilten Belastung aus der Balkenlage als vollständig falsch bezeichnet werden muss, trotzdem bei statischen Ermittelungen solche Annahmen sehr häufig gemacht werden.

Die gleichförmig verteilte Belastung auf AB wird über den Auflagern der Balken der Balkenlage geteilt, so dass dieselbe in 10 Teile zerfällt, von denen jeder rund 5000 kg ist. Man verfährt dann in der bekannten Weise, indem man auf MM_1, mit der Belastung D beginnend, abwechselnd E und D_1, E_1 und D_2 und so fort aufträgt und dann von dem Pole O die Strahlen zieht.

Man findet den lotrechten Abstand zwischen O und MM_1 gleich 400 cm und die grösste Höhe des Seilpolygons in WW_1 gleich 25000 kg. Das Biegungsmoment ist demnach für die Mitte des Trägers

$$B_{max} = 400 \cdot 25000 = 10000000 \text{ kgcm}.$$

Fällt wie hier das Biegungsmoment so gross aus, dass gewalzte Träger nicht mehr zur Aufnahme der Belastung ausreichen, so muss man entweder zwei oder drei solcher Träger nebeneinander legen oder einen Träger aus Blech hergestellt, zur Anwendung bringen. Soll das erstere geschehen, so hat man, um das Biegungsmoment für den einzelnen Träger zu finden, nur das ermittelte B_{max} durch die Zahl der nebeneinander zu legenden Träger zu dividieren.

Werden zwei Träger nebeneinander zur Anwendung gebracht, so ist es vorteilhaft und sicherer, wenn man die Balken der Balkenlage durchschneidet oder bei Neubauten auf den Träger stösst; denn man kann die Träger ebensowenig wie die Balken so genau legen, dass dieselben gleichmässig in Anspruch genommen werden.

Vollständig richtig würde die Konstruktion in dem vorliegenden Falle nur dann sein, wenn man vier Träger A, B, C und D, siehe **Fig. 147, Taf. IX**, zur Anwendung brächte, von denen die mittelsten B und C ausschliesslich die Mauer mit den darauf liegenden Belastungen trügen, während A und D nur zur Unterstützung der Balkenlager dienten. In diesem Falle würde allerdings der Druck, welchen die Balken auf die Träger ausüben, nicht $^{11}/_{30}$ der Gesamtbelastung des Balkens sein, sondern $^1/_6$ also statt der angenommenen 3000 kg nur $\frac{8000}{6}$ = rund 1400 kg in Rechnung gestellt werden müssen.

So ist es vollständig unrichtig, wenn das Ende eines Balkens C auf zwei nebeneinander liegende Träger A und B, **Fig. 148, Taf. IX**, gestützt wird, ohne dass jeder derselben für sich im stande ist, der ganzen Belastung Widerstand zu leisten; denn es wird nur in äusserst seltenen Fällen zu erreichen sein, dass beide Träger gemeinschaftlich und zu gleichen Teilen die Last aufnehmen. Bei weitem in den meisten Fällen wird sich der Balken C nur auf A oder auf B stützen, oder erst dann beide Träger belasten, nachdem sich der eine durchgebogen hat, also eine möglicher Weise bedeutende Schwächung desselben stattgefunden hat.

Für den Träger, welcher bei MN in der Höhe von AB liegt, ist in **Fig. 146, Taf. IX**, das Biegungsmoment gesucht. Es ist für diese Figur dieselbe Masseinheit benutzt, wie für **Fig. 145**, d. h. es ist 1 mm zu 1000 kg und 1 cm zu 1 m angenommen.

Die Bruchstelle des Trägers AB ist in C ermittelt, d. h. in dem Punkte, in welchem die grösste Einzellast wirkend ist, weil in dem unter C liegenden Punkte G die positiven vertikalen Kräfte in negative übergehen. Für C hat man aber die Höhe des Seilpolygons gleich $W W_1 = 24000$ kg und da O von $M M_1$ um 400 cm absteht, hat man:

$$B_{max} = 24000 \cdot 400 = 9600000 \text{ kgcm.}$$

3. Sehr häufig kommt es bei Neubauten und bei alten Gebäuden vor, dass in den unteren Stockwerken Schaufenster und Eingangsthüre für Läden angeordnet werden müssen. Die hierzu erforderlichen Oeffnungen werden in den meisten Fällen durch Träger aus Eisen bedeckt, wobei zu beachten ist, dass man die einzelnen Träger immer nur von einer zur andern Unterstützung gehen lässt, dieselben also auf den Unterstützungen stösst und nur so vereinige, dass dieselben nicht abgleiten können, sich aber in ihrer Höhenrichtung zu versetzen vermögen. Wird ein Träger über mehrere Unterstützungen fortgeführt, so müssen diese eine genau bestimmte Lage zu einander haben und behalten, was bei einem Gebäude gar nicht zu erreichen ist. Liegt ein Träger z. B. auf drei Unterstützungen auf und senkt sich die mittlere derselben, so hat man nicht mehr einen Balken, welcher auf drei Stützen liegt, sondern einen solchen, welcher nur an zwei Enden aufgelagert ist und so fort.

Es ist hier das **Fig. 149, Taf. IX,** angegebene Haus als Beispiel gewählt.

Die Oeffnung, in welche das Schaufenster und die Eingangsthür kommen sollen, ist AC und hat eine Weite von 5,2 m. Dieselbe ist durch eine Stütze in B getrennt und zwar, so, dass die eine Oeffnung 3,6 m, die andere aber 1,6 m weit wird. Jede dieser Oeffnungen wird durch zwei nebeneinander gelegte Träger E und F überdeckt. Die innern Träger F haben, ausser dem Mauerungswerke und den aus den höheren Stockwerken und dem Dache in dieses übergehenden Lasten die Balkenlage D zu stützen.

Jeder Balken der Balkenlage D drückt auf das Auflager mit 2500 kg, diejenige der Balkenlage G mit 2000 kg und das Dach mit der Dachbalkenlage mit 2400 kg für jedes Gebinde.

Die Lage der Balkenmitten ist in der Figur durch die Striche $a\,a$ bezeichnet und ebenso liegen die Balken im Dache.

Auf den Balken, welche den Raum AA überdecken, liegt ein Mauerpfeiler W, in dem Auflager A anfangend, von 0,5 m Breite. Derselbe ist auf 3,85 m Höhe 0,52 m stark und hat dann auf 3,5 m Höhe 0,38 m Stärke. Rechnet man das Gewicht von 1 cbm Mauerwerk 1600 kg, so ist das Gewicht dieses Pfeilers:

$$0{,}5 \cdot 1600\,(3{,}85 \cdot 0{,}52 + 3{,}5 \cdot 0{,}38) \quad = \text{rund } 2670 \text{ kg.}$$

Hierzu kommt das halbe Gewicht der Fensterüberdeckung M:

$$\frac{1600}{2}\left(1{,}35 \cdot 1{,}1 - \frac{1{,}1 \cdot 3{,}14}{2}\right) \cdot 0{,}52 = \quad \text{„} \quad 1340 \quad \text{„}$$

Latus 4010 kg.

Transport 4010 kg.

Das halbe Gewicht der Fensterbrüstung N, bei 26 cm Stärke:

$\frac{1600}{2} \cdot 1{,}1 \cdot 1 \cdot 0{,}26$ . . . . . . = rund 230 „

Das halbe Gewicht der Fensterüberdeckung O:

$\frac{1600}{2} \cdot 1{,}1 \cdot 0.5 \cdot 0{,}38$ . . . . . . = „ 170 „

Der Druck eines Dachbinders . . . . . . = 2400 „

Der Druck eines Balkens G . . . . . . = 2000 „

8810 kg,

wofür man 9000 kg annehmen kann.

In 1,1 m Entfernung hiervon steht der zweite Mauerpfeiler W_1 von 1,25 m Breite. Das Gewicht dieses ist:

$2670 \cdot 1{,}25 \cdot 2$ . . . . = abgerundet 6680 kg

Dazu ist zu rechnen das Gewicht einer Fensterüberdeckung $M = 2 \cdot 1340$. = „ 2680 „

Das Gewicht einer Fensterbrüstung $N = 230 \cdot 2$ . . . . = „ 460 „

Das Gewicht einer Fensterüberdeckung $O = 170 \cdot 2$ . . . . = „ 340 „

Das Gewicht von zwei Dachbindern und zwei Balken G zusammen $2\,(2400 + 2000)$ . . . . = 8800 „

18960 kg,

wofür man 19000 kg annimmt.

Der äussere Träger E hat dann noch zwischen W und W_1 die Fensterbrüstung P zu tragen und zwischen W_1 und dem Auflager B ein Stück der Brüstung Q.

Das Gewicht der ersteren ist $1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}26 \cdot 1600 =$ rund 500 kg

Das Gewicht der letzteren aber $0{,}75 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}26 \cdot 1600 =$ rund 350 „

Auf dem inneren Träger F stützen sich dann drei Balken der Balkenlage D.

Für den Balken E ist in **Fig. 150, Taf. IX,** das Biegungsmoment, Bruchstelle etc. bestimmt und für denjenigen F in **Fig. 151** derselben Tafel, wobei nur zu bemerken, dass die Gewichte der Pfeiler W und W_1 nebst den darauf drückenden Lasten zur einen Hälfte auf E, zur anderen aber auf F kommen und dass die Massstäbe für die Kräfte 1 mm gleich 500 kg und für die Längen 1 cm gleich 0,5 m sind.

Die Träger zwischen B und C haben einen Pfeiler Mauerwerk W_2 zu stützen, welcher demjenigen W_1 an Breite und Stärke gleich ist. Das Gewicht wird also auch dasselbe sein und betragen:

	rund 10000 kg.
Hierzu hat man zu rechnen die Belastung durch 3 Dachbinder und 3 Balken der Balkenlage G zusammen $3\,(2400 + 2000) =$	13200 „
	23200 kg.

Auf dem äussern Balken steht dann noch ein kleines Stück der Fensterbrüstung Q, dessen Gewicht $500 - 350 = 150$ kg ist, während der innere Träger noch einen Balken der Balkenlage D Unterstützung gewähren muss, also noch durch die Einzellast von 2500 kg beansprucht wird.

Die hierzu gehörigen Ermittelungen sind in **Fig. 152** und **153, Taf. IX,** geschehen. Der Längenmassstab ist wie vorher, der Kräftemassstab aber doppelt so gross genommen, so dass 1 mm 250 kg darstellt.

e) Verhältnisse bei Trägern, welche nur an einer Seite festgehalten sind.

Wird **Fig. 154, Taf. IX,** ein Balken AB, welcher bei A befestigt an dem freien Ende B durch eine Kraft P in Anspruch genommen, so muss derselbe an einem links von A liegenden Punkte, z. B. bei C, befestigt sein. Wird diese Befestigung durch eine Verankerung herbeigeführt, so kann man dieselbe als wirklich an einem Punkte wirkend annehmen, wird dieselbe jedoch durch eine Uebermauerung, welche in A beginnt, bewirkt, so muss man den Punkt C in dem Schwerpunkte der Uebermauerung annehmen.

Man hat also hier eine Kraft P, zu welcher man eine in C angreifende Kraft Q und die zu beiden gehörige Mittelkraft R, welche in A angreift, bestimmen muss.

Man macht MN gleich P, nimmt den Pol O an, zieht die Polstrahlen MO und NO und parallel dazu die Seiten GK und KH des Seilpolygons. Schliesst man dann das letztere durch GH und zieht parallel dazu den Strahl OW, so hat man in MW die Grösse der Kraft Q und in NW diejenige von R.

Die grösste Höhe des Seilpolygons ist in dem Angriffspunkte der Kraft R, es wird also der Bruch des Balkens in A erfolgen. Die Grösse des Biegungsmomentes bestimmt man genau so, wie dieses bei den an beiden Seiten aufliegenden Balken geschehen ist.

Wirken auf den Balken AB mehr als eine Kraft ein, z. B. die Kräfte P_1, P_2 und P_3, **Fig. 155, Taf. IX,** so verfährt man in derselben Weise wie vorher angegeben.

Man macht $MN = P_1$, $NW = P_2$, $WS = P_3$, zieht nach dem Pole O die Strahlen MO, NO, WO und SO, legt parallel zu MO die Seite FK des Seilpolygons zwischen den Kraftrichtungen von P_1 und der durch C gehenden Q, macht weiter KJ parallel NO, JH parallel WO, HG parallel SO, zieht GP und parallel dazu OB_1, so hat man in MB_1 die Kraft Q und in SB_1 diejenige R.

Die vertikalen, inneren Kräfte sind dargestellt durch die Figur $abOKdefhF$, welche in bekannter Weise gefunden wird.

Ist der an einer Seite befestigte Balken gleichförmig belastet oder mit verteilten und Einzellasten versehen, so werden die verteilten Belastungen in entsprechende Teile eingeteilt und in den Schwerpunkten wirkend angenommen, sonst aber an dem Verfahren nichts geändert.

f) Balken, welcher an einer Seite aufgelegt, an der andern aber festgeklemmt ist.

Balken oder Träger, welche an einer Seite festgehalten, an der andern aber aufgelegt sind, gibt es in dem Sinne, wie es für die Biegungstheorie erforderlich, selbständig nicht. Dagegen sind die Endteile von belasteten Balken, welche über mehrere Stützen fortgehen, als an einer Seite aufliegend und an der andern festgehalten zu betrachten.

Ein in dieser Weise gelagerter und dann genügend belasteter Balken nimmt, wie solches **Fig. 156, Taf. X,** angegeben ist, eine doppelte Biegung an. Derselbe ist von A bis C entgegengesetzt als von C bis B gebogen, es muss also eine Stelle in dem Balken liegen, an welcher eine Biegung nicht stattfindet, weil sonst ein Uebergang aus einer in die andere Form nicht denkbar ist. An der Stelle aber, an welcher der Balken eine Biegung nicht erleidet, werden auch seine Fasern nicht verändert, man kann deshalb den Balken als aus zwei Stücken bestehend betrachten, indem man, wenn die Stelle, an welcher eine Biegung nicht stattfindet, bei C liegt, den Balken hier abgeschnitten denkt, das Stück AC als einen Stab ansieht, welcher bei A festgehalten und bei C das Auflager für das Balkenstück CB bildet, welches Stück dann ein an beiden Seiten aufliegender Balken ist.

Die Stelle C liegt bei verschiedenen Beanspruchungen des Balkens verschieden. Bei dem gleichförmig belasteten Balken ist C um $^1/_4$ der Balkenlänge von A abstehend und würde man deshalb diesen Fall, wie **Fig. 157, Taf. X,** angegeben, betrachten können.

Das Balkenstück BC ist $^3/_4$ des ganzen Balkens, ist demnach die ganze Belastung gleich Q, so wird BC mit $^3/_4\,Q$ in Anspruch genommen, also die Auflager bei B und C gleichmässig jedes mit $\frac{3\,Q}{8}$ belastet. Das Balkenstück AC hat dann in C diese $\frac{3\,Q}{8}$ und ausserdem $\frac{Q}{4}$ als gleichförmige Belastung zu tragen.

Es ist demnach leicht zu einem solchen Balken ein Kräfte- und Seilpolygon zu zeichnen.

Man teilt die Belastung, wie immer, in Teile ein. Diese sind in der Figur gleich $^1/_4$ der Gesamtbelastung genommen, weil es sich nicht darum handelt ein genaues Seilpolygon zu erhalten, sondern nur gezeigt werden soll, wie man in dem vorliegenden Falle verfahren kann.

Auf die Linie MN trägt man die Kräfteteile von Q auf, macht also $ML = LK = KJ = JN = \frac{Q}{4}$, macht ferner $NW = \frac{3Q}{8}$ gleich dem Auflagerdrucke in B, nimmt den Pol O und zieht die Polstrahlen.

Dann legt man ab parallel zu ON, af parallel zu OW, bd parallel zu OJ und so fort bis ef parallel zu OL gezogen ist. Man hat dann in $abdef$ das Seilpolygon für das Balkenstück BC.

Da nun auf das Stück AC des Balkens in C die Last $\frac{3Q}{8}$ wirkend ist, muss man LW gleich dieser Last nehmen. Man zieht dann in f anfangend fg parallel OL, gh parallel OM und fi parallel OW, um auch für AC das erforderliche Stück des Seilpolygons zu erhalten. Vollständig kann das Polygon nicht werden, weil der Balken nicht vollständig ist, oder wenn derselbe als Ganzes betrachtet werden soll, links von A eine Verankerung vorhanden sein muss, welche als ein weiterer Kraftpunkt anzusehen ist.

Man erhält nun aber dasselbe Seilpolygon, wenn man nur die in dem Auflager B wirkende Kraft kennt, den Balken aber nicht in zwei Teile geteilt betrachtet. Es ist dieses Seilpolygon ebenfalls in der Figur angegeben und die bezüglichen Eckpunkte mit denselben Buchstaben bezeichnet, welche bei dem vorher erklärten Polygon benutzt wurden.

In derselben Weise kann man nun auch die Seilpolygone für anders belastete Balken ermitteln, welche an einer Seite festgehalten und an der anderen belastet sind. Man muss nur immer vorher den Auflagerdruck in B feststellen. Dieser ist aber für eine einzelne beliebig zwischen A und B angebrachte Kraft P, welche in einem Abstande a von A und in einem solchen b von B angreift unter der Voraussetzung, dass l die ganze Länge des Balkens bezeichnet:

$$R_1 = \frac{Pa^2 (2l + b)}{2l^3}.$$

Wird $a = b = \frac{l}{2}$ gesetzt, wirkt also P in der Mitte des Balkens AB, so hat man

$$R_1 = \frac{5P}{16}.$$

In **Fig. 158, Taf. X,** ist der Fall dargestellt, wo eine Einzelkraft P, in C, der Mitte zwischen A und B angreifend, wirkt. Man macht $MN = P$ und $NL = R_1 = \frac{5P}{16}$, zieht die Polstrahlen OM, OL und ON, legt die Linien ab, ad und bc parallel zu ON, OL und OM und hat dadurch das Seilpolygon dargestellt.

In e ist der Kreuzungspunkt der Polygonseiten $b\,c$ und $a\,d$, es muss also über diesem Punkte die Wendung in den Biegungen des belasteten Balkens AB liegen.

Wirken mehr Kräfte P_1 bis P_4 auf den Balken AB, **Fig. 159, Taf. X,** ein, so muss man, um nach der vorhin angegebenen Gleichung den Auflagerdruck R_1 bestimmen zu können, erst in der früher gezeigten Weise die Mittelkraft S zu den Kräften P suchen. Man misst den Abstand dieser von A und von B, um die in der Gleichung für R_1 vorkommenden Werte a und b zu erhalten und berechnet dann R_1. Dieses trägt man in den Kräfteplan MN von N nach W ein und zeichnet dann, wenn es sich nur um Bestimmung des Momentes in A handelt, das Seilpolygon $m\,n\,q\,p$, indem man als einzige Belastung des Balkens AB die Mittelkraft S annimmt. Soll aber das Seilpolygon genauer bestimmt werden, weil dasselbe auch noch zu anderen als dem vorher angegebenen Zwecke benutzt werden soll, so hat man das Seilpolygon $m_1\,r\,s\,u\,w\,q_1\,p_1$ nach den einzelnen Kräften zu zeichnen. Selbstverständlich muss hierbei die Höhe $p_1\,q_1$ gleich $p\,q$ werden.

g) Der Balken ist an beiden Seiten festgehalten.

Es ist dieses ein Fall, der ebensowenig wie der vorhergehende für sich bestehend, vorkommen kann; denn wird ein Balken mit seinen Enden auf Mauerwerk verankert, oder übermauert, so ist noch lange keine umwandelbare Lage desselben gesichert, weil das Mauerwerk, wenigstens solches gewöhnlicher Art, selbst nicht fest, sondern sehr veränderlich ist. Noch weniger sind Sattelhölzer mit untergesetzten Streben im stande die Enden eines Trägers festzuhalten, wie dasselbe für die Annahme .der Festigkeitstheorie erforderlich ist. Es kommen solche Balken aber als die mittleren Teile von Trägern vor, welche über mehrere Stützen gehen und dabei sind dieselben wesentlich.

Man kann da diese Balken ebenso wie die, welche an einer Seite befestigt und an der andern aufliegen, verschieden gebogen werden, als aus drei Stücken bestehend betrachten.

Die beiden Enden AB und CD, **Fig. 160, Taf. X,** sind dann Balken, welche an ihren Enden in A und D verankert sind, an ihren anderen Enden B und C aber dem Mittelstück EF als Unterstützung dienen.

Befindet sich eine Einzellast in der Mitte des Balkens AD angebracht, so werden die Stücke $AB = CD = {}^1/_4$ der ganzen Balkenlänge, ist dagegen die Belastung über den ganzen Balken gleichförmig verteilt, so sind die Enden AB und CD gleich 0,2113 der Balkenlänge.

Bei dem beliebig belasteten Balken liegen die Punkte B und C selbstverständlich verschieden und lassen sich nicht auf einfache Weise allgemein bestimmen. Wenn die Punkte wissenswert erscheinen, müssen dieselben für jeden einzelnen Fall ermittelt werden.

Die Auflagerdrücke sind bei jeder zur Mitte des Balkens symmetrischen Belastung gleich der Hälfte dieser und werden bei einer beliebigen Belastung in derselben Weise bestimmt, wie dieses bei dem an den Enden aufliegenden Balken geschehen ist. Zur rechnenden Bestimmung hat man den Druck in A gleich $\frac{P b^2 (b + 3 a)}{l^3}$ und denjenigen in D gleich $\frac{P a^2 (a + 3 b)}{l^3}$, wenn P die Einzellast, also auch die Mittelkraft aus verschiedenen einzelnen Kräften ist, b den Abstand des Angriffspunktes der Kraft von D und a denjenigen von A bezeichnet, l aber die freie Länge des Balkens ist.

h) Balken auf mehr als zwei Stützen.

Sind die Balken nicht nur an ihren Enden aufgelegt, sondern auch zwischen diesen noch unterstützt, so treten ganz andere Verhältnisse auf. Es ist dann nicht mehr möglich auf eine einfache Weise die Kraftwirkungen graphisch darzustellen und kommt man hier viel einfacher zum Ziele, wenn man den Weg der Rechnung einschlägt.

Im allgemeinen werden die Balken, welche über mehrere Stützen fortgehen, nicht anzuwenden sein. Eine Materialersparnis, welche massgebend sein könnte, ist nicht vorhanden, dieselbe tritt erst bei grösseren Konstruktionen ein. Die Stützen müssen genau in gleicher Höhe liegen und erhalten werden, was meist nicht erreichbar ist. Ausserdem müssen die Balken auf jeder Unterlage nur an einem Punkte gestützt sein, ein Fall, der ebenfalls gar nicht oder doch nur sehr unvollkommen erreicht werden kann.

Verändern sich die Unterstützungen in ihrer Höhenlage, so kann unter besonderen Umständen, und wenn die Veränderungen innerhalb sehr geringer Grenzen liegen, eine Erhöhung der Tragkraft des Balkens herbeigeführt werden, im entgegengesetzten Falle kann aber auch eine solche Veränderung seiner Tragkraft eintreten, dass die Haltbarkeit gefährdet wird. Es kommen deshalb im Hochbau derartige Träger nur bei den Balkenlagen in den Gebäuden vor und auch hier würde es in vielen Fällen vorteilhafter sein, wenn die Balken auf ihren Unterstützungen gestossen würden. Selbstverständlich gilt dieses nur von einfachen Trägern, bei zusammengesetzten Konstruktionen, bei denen die Balken nicht nur auf Biegung, sondern auch in stärkerer Weise auf Zug in Anspruch genommen werden, muss man, wenn die biegende Wirkung von Kräften nicht auf irgend eine Weise vermieden werden kann, über mehrere Stützen gehende Balken anwenden.

In **Fig. 161, Taf. X**, ist ein auf drei Stützen liegender Balken mit einer gleichmässig verteilten Belastung dargestellt. Man kann in diesem Falle die Verhältnisse noch in der bisher eingeschlagenen Weise ermitteln. Man teilt die Belastung in gleiche oder beliebige Teile, bestimmt in derselben die Schwerpunkte und zieht durch diese, wie durch die Auflager A, C und B vertikale Linien, dann macht man MN gleich der Belastung eines Balkenteiles, bestimmt den Auflagerdruck in A oder B, welcher gleich $^3/_8$ der Belastung eines Balken-feldes ist und macht NW diesem Drucke gleich. Hierauf nimmt man in gleicher Höhe und gleicher Entfernung von MN die Pole O und O_1 an, am einfachsten so, dass O_1, W und O in einer horizontalen Linie liegen. Hierauf zieht man die Polstrahlen, legt mn parallel zu $O_1\,WO$ und zeichnet in gewöhnlicher Weise das Seilpolygon, welches teilweise über, teilweise unter mn zu liegen kommt. Die über mn liegenden Teile geben negative Momente, die übrigen aber positive.

Es sollen hier nun die Formeln zur Berechnung von Trägern auf mehreren Stützen, welche sich nicht überall in den Büchern über Festigkeit befinden, mitgeteilt werden, damit die Berechnung vorkommenden Falls auszuführen ist.

In **Fig. 162, Taf. X,** sind die benutzten Bezeichnungen eingeschrieben.

Es sind die Balkenteile AC und BC gleich oder verschieden lang und mit gleichförmig verteilten Belastungen Q_1 solche, welche nur über Teile der Länge gleichförmig verteilt sind und mit Einzellasten P versehen, also alle vorkommenden Belastungsweisen berücksichtigt.

Ueber den Stützen A und B sind Biegungsmomente nicht vorhanden. Das Moment über der Stütze C findet sich

$$B_m = -\frac{M_0 + M_{00} + M_{000}}{2(l_1 + l_2)},$$

worin man zu setzen hat:

$$M_0 = \frac{Q_0\, l_1^2}{4} + \frac{Q_{00}\, l_2^2}{4},$$

$$M_{00} = \frac{q_1(n_1 + m_1)\,(2\,l_1^2 - (n_1^2 + m_1^2))}{4\,l_1} + \frac{q_2\,(n_2 + m_2)\,(2\,l_2^2 - (n_2^2 + m_2^2))}{4\,l_2},$$

$$M_{000} = \frac{P_1\,L_1\,(l_1^2 - L_1^2) + P_{11}\,L_{11}\,(l_1^2 - L_{11}^2) + P_{111}\,L_{111}\,(l_1^2 - L_{111}^2)}{l_1} + \frac{P_2\,L_2\,(l_2^2 - L_2^2)}{l_2}.$$

Aus dem Balkenteile AC erhält man nun das Biegungsmoment für C auch:

$$B_m{}^1 = Rl - \Big[P_1\,(l_1 - L_1) + P_{11}\,(l_1 - L_{11}) + P_{111}\,(l_1 - L_{111}) + Q_0\,\frac{l_1}{2} + q_1\left(\frac{m_1 - n_1}{2}\right)\Big]$$

und aus dem Balkenstücke BC:

$$B_m^{11} = R_1 l_2 -$$
$$\left[P_2 (l_2 - L_2) + Q_{00} \frac{l_2}{2} + q_2 \left(l_2 - m_2 + \frac{m_2 - n_2}{2}\right)\right].$$

Setzt man dann nacheinander B_m^{1} und B_m^{11} gleich B_m, so kann man die Auflagerdrücke R und R_1 bestimmen. Ist dieses geschehen, so findet man auch den Auflagerdruck R_0 in der mittleren Stütze C aus

$$R_0 = Q_0 + Q_{00} + q_1 + q_2 + P_1 + P_{11} + P_{111} + P_2 - (R + R_1).$$

Man hat dann noch die grössten Biegungsmomente für die Balkenteile AC und BC zu bestimmen, um zu sehen, ob diese grösser oder kleiner ausfallen, als dasjenige über C.

Nimmt man z. B. **Fig. 163, Taf. X,** $AC = l_1 = 5$ m, $BC = l_2 = 4$ m, $Q_0 = 5000$ kg, $Q_{00} = 2000$ kg, $P_1 = 6000$ kg, $L_1 = 1$ m, $P_{11} = 2000$ kg, $L_{11} = 2$ m, $P_2 = 2000$ kg, $L_2 = 2$ m, $q_2 = 3000$ kg und $m_2 = 2$ m, $n_2 = 0{,}5$ m, so erhält man:

$$M_0 = \frac{5000 \cdot 5^2}{4} + \frac{2000 \cdot 4^2}{4} = 31250 + 8990 = 39250,$$

$$M_{00} = \frac{3000\,(2 + 0{,}5)\left(2 \cdot 4^2 - (2^2 + 0{,}5^2)\right)}{4 \cdot 4} = \text{rund } 13010,$$

$$M_{000} = \frac{6000 \cdot 1\,(5^2 - 1^2) + 2000 \cdot 2\,(5^2 - 2^2)}{5} +$$
$$\frac{2000 \cdot 2\,(4^2 - 2^2)}{4} = 45600 + 12000 = 57600.$$

und demnach:

$$B_m = -\frac{39250 + 13010 + 57600}{2\,(5 + 4)} = \text{rund } - 6100 \text{ kgm}.$$

Man findet nun aus:

$$-6100 = R \cdot 5 - \left[6000\,(5 - 1) + 2000\,(5 - 2) + 5000 \cdot \frac{5}{2}\right]$$
$$= 5\,R - 42500,$$
$$R = \frac{42500 - 6100}{5} = 7280 \text{ kg}$$

und aus:

$$-6100 = R_1 \cdot 4 - \left[2000\,(4 - 2) + 2000 \cdot \frac{4}{2} + \right.$$
$$\left. 3000\left(4 - 2 + \frac{2 - 0{,}5}{2}\right)\right] = 4\,R_1 - 16250,$$
$$R_1 = \frac{16250 - 6100}{4} = \text{rund } 2540 \text{ kg}$$

und dann:

$$R_0 = 5000 + 2000 + 6000 + 2000 + 2000 + 3000 -$$
$$(7280 + 2540) = 10180 \text{ kg}.$$

In dem Balkenstücke AC liegt die Bruchstelle, d. h. diejenige Stelle, an welcher die innern vertikalen Kräfte gleich Null werden, offenbar zwischen den Angriffspunkten der Kräfte P_1 und P_{11}. Nennt man den Abstand dieser Stelle von A gleich x, so hat man:

$$R - \left(P_1 + \frac{Q_0}{l_1} \cdot x\right) = 0$$

und findet daraus:

$$7280 - 6000 = \frac{5000}{5} x = 0$$

$$x = \frac{1280}{1000} = 1{,}28 \text{ m.}$$

Denkt man sich nun den Balken in D abgeschnitten, so dass $AD = x$ wird und stellt für den Schnitt D die Momentengleichung auf, so erhält man:

$$B_m{}^0 = xR - P_1(x - L_1) - \frac{Q_0}{l_1} \cdot \frac{x}{2}$$

$$= 1{,}28 \cdot 7280 - 6000\,(1{,}28 - 1) - \frac{5000}{5} \cdot \frac{1{,}28}{2} = 7198 \text{ kgm.}$$

Es ist dieses Moment grösser als dasjenige über C, weshalb man nach diesem den Querschnitt des Balkens bestimmen muss, weil das Moment für das Balkenstück BC, wegen der geringeren Länge und kleineren Belastung kleiner ausfallen muss, ist eine Berechnung desselben überflüssig.

Ist das eine Balkenstück gar nicht belastet, d. h. wirkt auf dasselbe nur das feststehende Gewicht der Decke oder das eigene Gewicht des Balkens ein, so gestaltet sich die Sache etwas anders.

Nimmt man den Balken ACB, **Fig. 164, Taf. X**, welcher durchweg mit einer gleichförmig verteilten Belastung von 1000 kg auf 1 m Länge in Anspruch genommen ist und wirken auf das längere Ende AC desselben zwei Einzelkräfte von 5000 und 2000 kg ein, so hat man:

$$M_0 = \frac{6000 \cdot 6^2}{4} + \frac{3000 \cdot 3^2}{4} = 54000 + 6750 = 60750,$$

$$M_{000} = \frac{5000 \cdot 1{,}5\,(6^2 - 1{,}5^2) + 2000 \cdot 3\,(6^2 - 3^2)}{6} =$$

$$\frac{253125 + 162000}{6} = \text{rund } 69190$$

und demnach

$$B_m = -\frac{M_0 + M_{000}}{2\,(l_1 + l_2)} = -\frac{60750 + 69190}{2\,(6 + 3)} = \text{rund } -7220 \text{ kgm.}$$

Man hat dann auch aus AC:

$$B_m{}^1 = R \cdot 6 - 5000 \cdot 4{,}5 - 2000 \cdot 3 - 6000 \cdot 3 = -7220,$$

also:

$$R = 7750 \text{ kg.}$$

Ferner aus BC:

$$B_m^{11} = R_1\,3 - 3000 \cdot 1{,}5 = -7220,$$

$$R_1 = -907\text{ kg}.$$

Man erhält also in B einen negativen Auflagerdruck, d. h. es muss das Balkenende B von oben her gestützt werden.

Für die Unterstützung C ist dann:

$$R_0 = 6000 + 3000 + 5000 + 2000 - (7750 - 907) = 9{,}57\text{ kg}.$$

Die schwächste Stelle des Balkenteiles AC liegt wieder in einem Abstande x von A zwischen den zwei Einzelkräften. Man hat:

$$7750 - \left(5000 + \frac{6000}{6} \cdot x\right),\ \text{also}\ x = 2{,}75\text{ m}.$$

Das Biegungsmoment für diese Stelle ist:

$$7750 \cdot 2{,}75 - 5000 \cdot (2{,}75 - 1{,}5) - \frac{6000}{6} \cdot \frac{2{,}75}{2} = 13687{,}5\text{ kgm}.$$

Es muss also auch hier der Balken nach diesem Moment bestimmt werden.

Liegt der Balken auf mehr als drei Stützen, so bleibt die Rechnungsweise dieselbe. Man hat nur zu berücksichtigen, dass man für eine Stütze das grösste Moment erhält, wenn die beiden benachbarten Felder vollständig belastet, dann aber nach beiden Seiten hin abwechselnd ein Feld unbelastet und eins belastet ist. Bei gleichförmig verteilten Belastungen liegt das grösste Moment immer über einer Stütze und dieser entsprechend hat man auch die grösste Auflagerreaktion.

Ein Beispiel wird die Rechnungsweise besser darthun.

Ein über vier Stützen gelegter Balken AB, **Fig. 165, Taf. X,** dessen einzelne Felder 4, 3 und 3 m lang sind. Der Balken ist aus dem Gewichte der Decke pro laufenden Meter mit 800 kg belastet und die Nutzlast, welche ebenfalls gleichmässig verteilt sein soll, beträgt pro Meter 300 kg.

Man nimmt bei der Berechnung die Felder AC und CD voll belastet an, während für das letzte Feld BD nur die Belastung aus der Decke in Rechnung zu stellen ist. Wäre das Feld BD grösser als AC, so würde man BD und CD als voll belastet anzunehmen haben, dagegen AC nur mit der festen aus dem Gewicht der Decke resultierenden Last versehen, betrachten. Es ist demnach das Balkenstück AC mit $4\,(800 + 300) = 4000$ kg belastet, während CD die Last von $3\,(800 + 300) = 3300$ kg zu tragen hat und BD mit $3 \cdot 800 = 2400$ kg in Anspruch genommen wird.

Ist dann B_m^0 das Biegungsmoment über der Stütze A, B_m^1 dasjenige über C, B_m^2 das Moment über D und schliesslich B_m^3 das Biegungsmoment über der Stütze ~~A~~, so hat man zwischen den Momenten über A, C und D die Gleichung:

$$4\,B_m^0 + 2\,B_m^1\,(4 + 3) + 3\,B_m^2 + M_0 + M_{00} + M_{000} = 0,$$

welche, da $B_m{}^0 = 0$ ist, und Belastungen, aus denen die Werte M_{00} und M_{000} folgen, nicht vorhanden sind, in:

$$2\,B_m{}^1\,(4+3) + 3\,B_m{}^2 + M_0 = 0$$

übergeht.

Für die Momente über C, D und B hat man dann:

$$3\,B_m{}^1 + 2\,B_m{}^2\,(3+3) + 3\,B_m{}^3 + M_0^1 + M_{00}^1 + M_{000}^1 = 0.$$

Diese Gleichung wird, weil hier $B_m{}^3$, M_{00}^1 und M_{000}^1 gleich Null zu setzen sind:

$$3\,B_m{}^1 + 2\,B_m{}^2\,(3+3) + M_0^1 = 0.$$

Richtet man diese Gleichungen ein, dass dieselben z. B. in Bezug auf $B_m{}^1$ aufgelöst werden können, so erhält man:

$$\begin{aligned} 168\,B_m{}^1 + 36\,B_m{}^2 + 12\,M_0 &= 0 \\ 9\,B_m{}^1 + 36\,B_m{}^2 + 3\,M_0^1 &= 0 \end{aligned}$$

und findet dann:

$$159\,B_m{}^1 = -(12\,M_0 - 3\,M_0^1).$$

Darin ist nun, den angenommenen Verhältnissen entsprechend:

$$M_0 = \frac{3300 \cdot 3^2}{4} + \frac{4400 \cdot 4^2}{4} = 25025 \text{ und}$$

$$M_0^1 = \frac{3300 \cdot 3^2}{4} + \frac{2400 \cdot 3^2}{4} = 12825,$$

also findet sich:

$$B_m{}^1 = -1650 \text{ kgm abgerundet.}$$

Aus irgend einer der früheren Gleichungen, in welchen $B_m{}^1$ und $B_m{}^2$ vorkommen, findet man dann:

$$B_m{}^2 = -656 \text{ kgm.}$$

Für das Balkenstück AC kann man nun auch das Biegungsmoment:

$$4\,R - 2 \cdot 4400 = -1650$$

aufstellen und findet aus dieser Gleichung:

$$R = \text{rund } 1790 \text{ kg.}$$

Betrachtet man nun AD als einen Balken, welcher durch die Kräfte R und R_0, sowie die Belastungen von 4400 und 3300 kg in Anspruch genommen wird, so erhält man die Momentengleichung:

$$7 \cdot 1790 + 3\,R_0 - 4400\,(2+3) - 3300 \cdot 1{,}5 = -656,$$

woraus man dann:

$$R_0 = 4588 \text{ kg}$$

als Auflagerdruck in der Stütze C findet.

In ganz gleicher Weise findet man dann für die Auflagerdrücke in B und D die Werte $R_1 = 981$ kg und $R_{00} = 2741$ kg.

i) Balken mit beweglichen Lasten.

Haben die Balken nicht nur ihr eigenes Gewicht, resp. das eigene Gewicht der Konstruktion zu tragen, sondern werden in der Längerrichtung über den Balken Lasten fortbewegt, welche dann wohl gewöhnlich auf Wagen befindlich sind, so treten andere Verhältnisse auf, als wenn die Belastungen, wie bisher angenommen wurde, unverrückbar auf einem Flecke stehen.

Die beweglichen Lasten nimmt man dann als Einzellasten an, welche in unveränderlicher Lage gegeneinander über den Balken bewegt werden. Man denkt sich also bei einem Wagen die bewegliche Last, bestehend aus dem Gewicht des Wagens mit demjenigen der aufgeladenen Masse und den vorgespannten Pferden, in den Rädern und den Hufen der Pferde vereinigt und nimmt diese als Lastpunkte an; bei einem Eisenbahnzuge sind ebenfalls die Berührungspunkte zwischen den Rädern und den Schienen die Lastpunkte.

Ist ein durch feststehende Lasten P_1, P_2, P_3 .... in Anspruch genommener Balken AB, **Fig. 166, Taf. X**, vorhanden, für diesen die Auflagerreaktionen R und R_1, die Vertikalkräfte und durch das Seilpolygon die Biegungsmomente bestimmt, so braucht man, wenn eine weitere Kraft P_0, welche an einer beliebigen Stelle, z. B. F angreift, hinzukommt, nicht die ganze Figur zu erneuern, sondern man zeichnet das Kräftepolygon $M_1\, O_1\, N_1$ und das Seilpolygon $m_1\, n_1\, l_1$ und ermittelt die Auflagerdrücke, welche diese Kraft P_0 allein in A und B erzeugt. Man findet hier für den Punkt A die Reaktion $M_1\, W_1$ und für B diejenige $W_1\, N_1$ und hat nur zu berücksichtigen, dass man selbstverständlich dieselben Massstäbe benutzt wie bei der ersten Zeichnung und den Pol O, ebensoweit von $W_1\, N_1$ abstehend annimmt, wie der Pol O von MN genommen wurde. Man hat dann die Reaktion in A gleich $MW + M_1\, W_1$ und in B gleich $WN + W_1\, N_1$.

Betrachtet man dann einen beliebigen Punkt, z. B. G, in einem Abstand X von A liegend, so hat man, wenn die Kraft P_0 nicht vorhanden ist, die Höhe des Seilpolygons gleich Y und durch diese Höhe, wie bekannt, das Biegungsmoment für den Punkt G dargestellt. Verlängert man nun die Linie GH bis man die gleichliegende Höhe $KL = Y_1$ des Seilpolygons $m_1\, n_1\, l_1$ erhält, so hat man in dieser das Moment ausgedrückt, welches durch die Kraft P_0 allein entsteht und demnach in $Y + Y_1$ das Moment, welches alle auf AB einwirkenden Kräfte in G hervorbringen.

Es liegt nun auf der Hand, dass sowohl $M_1\, W_1$ wie Y_1 um so grösser werden, je weiter der Angriffspunkt F der Kraft P_0 nach der betrachteten Stelle G des Balkens AB rückt, und dass für diesen Punkt das Moment am grössten wird, wenn P_0 in G angreift. Führt man für den Fall, das P_0 in G angreift, die Zeichnung des Seilpolygons aus, so erhält man die Figur $m_1\, n_0'\, L$ und hat demnach die Höhe $K_1\, L$ als Y_1 zu nehmen, während die aus P_0 in A auftretende Reaktion in $M_1\, W_0$ übergeht.

Die vertikalen Kräfte, welche im Innern des Balkens durch die bewegliche Kraft P_0 hervorgebracht werden, können nun entweder positiv oder negativ sein. Das erstere ist der Fall, wenn der Angriffspunkt F der Kraft P_0 zwischen dem Auflager in B und dem betrachteten Querschnitt G des Balkens liegt. Betrachtet man den Balken AB als einen Hebel, welcher bei B seinen Drehpunkt hat, welcher bei A mit $r = M_1 W_1$ und bei F zwischen B und G liegend mit P_0 belastet ist, so hat man für denselben die Gleichung der statischen Momente:

$$r l = P_0 a,$$

wenn man noch die Länge BF mit a bezeichnet.

Man erhält demnach:

$$r = \frac{P_0 a}{l}$$

und dieses muss die vertikale Kraft V sein, welche von P_0 in dem Querschnitte G hervorgebracht wird. Man hat also auch:

$$V = r = \frac{P_0 a}{l}.$$

Diese Kraft wächst mit a, wird also um so grösser, je näher der Angriffspunkt F von P_0 nach G rückt und ist ein Maximum, wenn F in G fällt.

Tritt nun F über G hinaus nach A zu, liegt also der Angriffspunkt von P_0 in dem kleineren Balkenteile AG, z. B. in F_1, so ist die vertikale Kraft $V = r - P_0$, also auch:

$$V = \frac{P_0 a}{l} - P_0 = P_0 \left(\frac{a - l}{l}\right).$$

Es ist nun $a - l = - AF_1 = - a_1$ und erhält man demnach in diesem Falle:

$$V = - P_0 \frac{a_1}{l},$$

also einen negativen Wert für V. Es wächst auch hier die Grösse der Kraft V mit a_1, erreicht also ihren grössten negativen Wert wieder, wenn F_1 nach G gerückt wird.

Nimmt man nun weiter an, es sei nicht eine einzelne Kraft P_0, welche beweglich auf dem Balken gedacht ist, sondern ein aus mehreren Kräften zusammengesetztes System, also z. B. einen Wagen mit Pferden, ein Eisenbahnzug etc., so wird dieses an der Bestimmung der grössten Vertikalkräfte, sowohl der positiven wie der negativen keine Aenderung herbeiführen. Es wird immer die grösste positive Vertikalkraft dann vorhanden sein, wenn der Wagen auf dem längeren Teile des Balkens steht und bis zu dem betrachteten Querschnitt aufgefahren ist und die grösste negative Vertikalkraft dann gefunden werden, wenn der Wagen bis zu dem Querschnitte aufgefahren, auf dem kürzeren Balkenteile steht.

Die grössten Biegungsmomente erhält man, wenn der Balken ganz belastet ist, und eine der grössten Lasten über dem fraglichen Querschnitte steht.

Nimmt man nun mehrere bewegliche Kräfte an, welche sich auf dem Träger bewegen, z. B. zwei Lokomotiven, welche mit den Schornsteinen zusammenstehen und mit den Tendern versehen sind. Es kommt hier nicht ganz genau darauf an, ob die in den Ermittelungen angenommenen Entfernungen und Belastungen der Räder mit den gerade vorhandenen für die Beschwerung des Trägers zu benutzenden Maschinen und Wagen zusammentreffen, oder ob hier Abweichungen stattfinden. Es sind solche Abweichungen gar nicht zu vermeiden, weil die Radstände und Achsendrücke bei Maschinen und Wagen sehr verschieden sind und dann ruhig stehende Räder angenommen werden müssen. Bei der Bewegung ändern sich aber die Achsendrücke immerwährend und keineswegs innerhalb geringer Grenzen.

In **Fig. 167, Taf. X,** sind die Radstände bei den Lokomotiven und Tendern 1,5 m angenommen, der Abstand zwischen der letzten Lokomotivachse und der ersten Achse des Tenders 3,00 m gesetzt und ebenso gross der Abstand der zwei zunächst liegenden Achsen der beiden Lokomotiven genommen.

Das Gewicht, welches auf einem Lokomotivenrade ruht, ist 12000 kg gesetzt und dasjenige eines Tenderrades gleich 8000 kg genommen.

Der Massstab der Längen ist so gewählt, dass 6 mm gleich 1 m sind und der Kräftemassstab ist 1 mm gleich 2000 kg. Die Länge des Balkens ist, so dass die beiden Lokomotiven mit ihren Tendern gerade Platz darauf haben, also gleich 21 m.

Man zeichnet nun zunächst das Kräfte- und Seilpolygon, was in MNO und $a\,b_1\,b_0\,b$ geschehen ist. Die Lage des Pols O ist gleichgültig. Zieht man durch den Pol die Linie $O\,W \parallel$ der Schlusslinie $a\,b$, so hat man in $M\,W$ die vertikale Kraft, welche bei der angenommenen Laststellung in A wirkend ist. Dieselbe ist wie immer gleich der Auflagerreaktion.

Um die grösste vertikale Kraft für irgend einen andern Punkt, z. B. D zu finden, zieht man eine Linie $A_0\,B_0 \parallel A\,B$, macht $A_0\,D_0 = A\,D$ und $A_0\,B_0 = A\,B$, lotet die Punkte A_0 und B_0 auf das Seilpolygon, wodurch sich hier a_0 und b_0 finden. Diese beiden Punkte verbindet man durch eine gerade Linie, zieht parallel dazu durch O die $O\,W_0$ und hat im $M\,W_0$ die gesuchte Kraft, welche man auf das Lot $K\,K$, welches durch den Punkt D geht, trägt, wenn man die Figur der vertikalen Kräfte darstellen will. In gleicher Weise ist noch für den Punkt C die grösste vertikale Kraft $M\,W_1$ gefunden. Es ist $A_1\,C_1 = A\,C$, $A_1\,B_1 = A\,B$ und $O\,W_1 \parallel a_1\,b_1$ gezogen. Diese Kraft trägt man auf die durch C gehende vertikale Linie und findet $l\,l_1$.

Bestimmt man auf diese einfache Weise eine genügende Anzahl solcher Kräfte und macht nach $m\,m_1 = M\,W$, so kann man die erhaltenen Punkte $m_1, k_1, l_1 \ldots$ bis n durch eine Kurve verbinden, um dann in $m\,n\,m_1$ die Darstellung der positiven vertikalen Kräfte zu erhalten.

Die grössten negativen vertikalen Kräfte sind den positiven an den analog liegenden Stellen gleich. Man hat demnach die Kurve $m n_1$ genau so zu zeichnen wie m_1, n; braucht also eine besondere Konstruktion der negativen Kräfte nicht vorzunehmen.

Die grössten Biegungsmomente erhält man nun bei einer vollständigen Belastung des Balkens, wenn eine der grössten Einzellasten gerade an dem fraglichen Querschnitt steht. C

Man hat also in $gh = y$ das Moment für den Punkt O und für die dargestellte Radstellung angegeben. Geht der Zug weiter, dass das Rad 5 nach C kommt, so findet man einfach das Moment für den Punkt C und diese neue Stellung, wenn man $A_2 B_2 = AB$, um das Stück $C C_1$ über A hinaus nach ~~links~~ legt, die Punkte a_2 und b_2 bestimmt und die Schlusslinie des nun gültigen Polygons in $a_2 b_2$ zieht. Man hat dann in $g_1 h_1 = y_1$ das Moment dargestellt, welches kleiner ist, als y. Ebenso werden für C alle andern Momente kleiner, für welche Stellungen diese auch ermittelt werden mögen.

Der Uebersichtlichkeit wegen trägt man die auf diese Weise für verschiedene Punkte des Balkens gefundenen Momente in eine besondere Figur ein.

Den Zahlenwert für die Momente erhält man, wenn man y mit dem lotrechten Abstande des Pols O von der Kräftelinie MN multipliziert, wie solches weiter oben gezeigt ist.

Meist wirken nun die Lasten nicht, wie bisher angenommen, direkt auf den Träger ein, sondern werden auf diesen durch Querträger übertragen. Es ändert sich unter solcher Annahme selbstverständlich die ganze Konstruktion, weil man dann für den Träger nicht mehr die Gewichte, welche in den Rädern wirken, als Kräfte zu betrachten hat, sondern aus diesen erst diejenigen Drücke herleiten muss, welche auf die Querträger einwirken. Diese bilden dann die Belastungen des Trägers.

Ist, **Fig. 168, Taf. X,** AB das Stück eines Trägers und $MOKH$ dasjenige Stück des Seilpolygons, welches durch die Kräfte P_1 und P_2, im Fall diese direkt auf den Träger einwirken, bedingt wird, C, D und E aber drei benachbarte Querträger, welche so liegen, dass P_1 zwischen C und D, P_2 aber zwischen D und E wirkend ist, so hat man P_1 ebensowohl wie P_2 in Seitenkräfte zu zerlegen, deren Angriffspunkte in C, D und E liegen.

Es geschieht dieses in einfacher Weise, wenn man durch C, D und E die vertikalen Linien CF, DG und ES zieht, bis man die Durchschnittspunkte dieser und des Seilpolygons $MOKH$ erhält. Verbindet man dann F mit G und G mit S durch gerade Linien, so hat man in $MFGS$ die den Verhältnissen entsprechende Form des Seilpolygons. Zieht man daher durch den Pol O Linien $O W_0 \parallel FG$ und $O W_{00} \parallel GS$, so erhält man in $M W_0$ die Kraft, welche aus P_1 in den Querträger C übergeht, hat in $W_0 W_{00}$ die aus P_1 und P_2 folgende Belastung des Querträgers D und in $W_{00} N$ die aus P_2 kommende Belastung des Punktes E. Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, dass die auf den Querträgern liegende Bedeckung auf C, D und E gestossen ist, also immer nur von einem Querträger bis zu dem anderen reicht.

In jedem Stücke CD des Trägers AB müssen dann positive und negative Vertikalkräfte auftreten, deren Grösse man leicht bestimmen kann, für welche man aber erst die Wechselstelle, d. h. diejenige Stelle finden muss, in welcher der Uebergang aus den negativen in die positiven Kräfte erfolgt.

Man zieht zu dem Ende eine beliebige Linie Ba, welche in dem rechten Auflager des Trägers beginnt und die Vertikale durch D in b schneidet. Dann zieht man bd horizontal durch b und legt durch d, lotrecht unter C die Ada, so geht durch den Punkt a die vertikale Linie ag, welche die bezügliche Grenze angibt. Alle links von ag liegenden Vertikalkräfte sind dann negative, während die rechts von dieser Linie auftretenden Kräfte positiv werden.

Den Punkt, durch welchen die Scheide zwischen den in CD auftretenden positiven und negativen Kräften liegt, kann man auch, in vielen Fällen wohl einfacher, finden, wenn man BA beliebig zieht, parallel dazu Af zieht und dann die Punkte b und d_1, in welchen die Ba und Af die durch C und D gehenden Vertikalen schneiden, durch eine gerade Linie verbindet. Diese schneidet die AB in der Linie ag.

Zwischen D und E findet man in derselben Weise als Scheidepunkt m und erhält dann in der schraffierten Figur die vertikalen Kräfte dargestellt.

Für einen gleichförmig belasteten Träger AB, **Fig. 169, Taf. X,** wird die Figur der vertikalen Kräfte dann, wie in der Figur angegeben.

Man macht MN gleich der Auflagerreaktion in $A = \frac{Q}{2}$ und $M_1 N_1$ gleich derjenigen in $B = \frac{Q}{2}$, so hat man, wenn Querträger nicht vorhanden sind, in MNL die positiven vertikalen Kräfte der linken und in $M_1 N_1 L$ die negativen vertikalen Kräfte der rechten Trägerhälfte. Zwischen den einzelnen Querträgern A und C beispielsweise, liegt die Scheide zwischen den positiven und negativen Vertikalkräften offenbar in der Mitte des Feldes AC, also bei D. Zieht man daher durch den Punkt D_1, in welchem die durch D gezogene Vertikale die Linie MM_1 schneidet. Zieht man demnach durch D_1 eine horizontale Linie mn, so gibt diese die Begrenzung der zwischen A und C auftretenden vertikalen Kräfte, welche also zwischen A und C kleiner, zwischen D und C aber grösser werden, als bei direkter Belastung des Trägers.

Ermittelung der Kraftwirkungen in Baukonstruktionen.

Nach den vorhergehend gemachten Mitteilungen kann man jede vorhandene Kraft als eine Mittelkraft aus zwei oder mehreren Kräften entstanden denken, also diese Kraft für die einzelnen Kräfte eingesetzt denken und unter bestimmten Verhältnissen auch auffinden. Bestimmt ist die Auffindung von Seitenkräften aus einer Mittelkraft nur dann, wenn die Zahl der ersteren zwei oder drei nicht übersteigt.

Durchschneidet man nun eine Konstruktion an irgend einer Stelle, so dürfen, wenn eine bestimmte Ermittelung der in den durchschnittenen Stäben bestehenden inneren Kräfte erfolgen soll, in dem Schnitte nicht mehr als zwei oder unter besondern Verhältnissen drei mit unbekannten Kräften belastete Stäbe vorhanden sein.

Bei einer guten Konstruktion müssen, wenn man nur die Vereinigungsstellen (Knotenpunkte) der einzelnen Stäbe als belastete Punkte betrachtet, oder, wie es eigentlich sein soll, belastet hat, die inneren Kräfte in den Richtungen der Stangen oder sonstigen Konstruktionsteile wirken, d. h. diese ausschliesslich auf Zug oder Druck in Anspruch nehmen, denn nur in solchem Falle findet eine volle Ausnutzung des Konstruktionsmaterials statt.

Hat man in einem Fachwerke beliebiger Gestalt die innern Kräfte zu bestimmen und aus diesen die Stärken der einzelnen Konstruktionsteile zu ermitteln, so muss man zunächst die vorhandenen äusseren Kräfte, welche auf die einzelnen Knotenpunkte einwirken, kennen, aus diesen dann die Auflagerdrücke bestimmen und nun erst mit der Zerlegung der Kräfte beginnen, wobei man am einfachsten und vorteilhaftesten bei einer der gefundenen Auflagerreaktionen beginnt.

Man fährt dann, der Reihe der Knotenpunkte folgend, fort, immer solche Knotenpunkte aussuchend, in denen nur ein oder zwei Stäbe anschliessen, von denen man die in ihnen auftretenden Kraftwirkungen nicht kennt, bis man schliesslich zu dem letzten Knotenpunkte kommt, welcher über dem Auflager liegt, in welchem man mit der Zerlegung der Kräfte nicht begonnen hat.

Man fügt die Ermittelungen für die einzelnen Knotenpunkte so zusammen, dass man eine zusammenhängende Figur erhält, also immer die in einem Knotenpunkte schon ermittelten in dem folgenden Punkte wieder vorkommenden Kräfte für den letztern benutzt und nicht von neuem aufträgt. Die Figur, welche man erhält und welche sich aus den Kräftepolygonen für die einzelnen Knotenpunkte zusammensetzt, nennt man den Kräfteplan. Die Richtigkeit der Ermittelungen ergibt sich sofort aus der Figur, welche in sich geschlossen sein muss, welche also nur volle Kräftepolygone enthalten darf und bei der die in dem letzten Konstruktionsteile auftretende Kraft in ihrem Anfangs- und Endpunkte sich an die bereits in dem Kräfteplan eingetragenen Kräfte anschliessen muss, ohne an einer dieser Stellen überzustehen oder von den ermittelten Kräften abzuschneiden.

Erhält man nach der Lage der Teile in einer Konstruktion für einen beliebigen Punkt kein geschlossenes Polygon, so ist in diesem Punkte ein Gleichgewicht nicht vorhanden, also die Konstruktion nicht stabil. Man muss in solchem Falle durch Veränderung der Lage der Konstruktionsteile oder durch Einfügung neuer Verbindungsstücke den Gleichgewichtszustand herbeizuführen suchen oder, wenn dieses nicht zulässig erscheint, die ganze Konstruktion einer Aenderung unterziehen.

Alle die Konstruktionsteile, welche ausschliesslich einer Zugwirkung ausgesetzt sind, nennt man Stangen oder Anker, auch Zugbänder, während alle die Teile, welche ausschliesslich gedrückt sind, Streben genannt werden.

Ob nun ein Konstruktionsteil gezogen oder gepresst wird, also eine Stange oder eine Strebe ist, ersieht man leicht, wenn man in die Konstruktionsteile aus dem Kräfteplane die zugehörigen Pfeile einträgt, welche die Kraftrichtung angeben und zwar in der Nähe desjenigen Knotenpunktes, für welchen die Ermittelungen gemacht sind. Weisen diese Pfeile auf den Knotenpunkt, so hat man es mit einer Druckkraft zu thun, zeigen dieselben aber von dem Knotenpunkte ab, so hat man eine Zugwirkung.

Man hat nun noch diejenigen Konstruktionen zu unterscheiden, welche nur Belastungen zu unterstützen haben, die feststehend sind, und dann diejenigen, welche feststehenden und beweglichen Belastungen widerstehen müssen.

Zu den ersteren gehören in der Regel die Konstruktionen des Hochbaues, z. B. Dachkonstruktionen, Hängewerke, verspannte Träger etc. Zu den letztern aber die Brückenkonstruktionen.

Konstruktionen mit nur feststehenden Belastungen. Hochbaukonstruktionen.

Die Belastungen, welche bei Konstruktionen, wie sie im Hochbau vorkommen, auftreten, werden zuweilen auch in stabile und mobile Belastungen getrennt und zu den erstern die Gewichte der eigentlichen Konstruktion, zu den letztern aber die zufälligen Belastungen gerechnet, welche in der Regel ihr Maximum erreichen, wenn eine vollständige Füllung der Räume mit Menschen angenommen wird. Zuweilen findet man diesen Unterschied soweit ausgedehnt, dass der Fussbodenbelag, weil derselbe möglicherweise stellenweise entfernt werden kann, um Erneuerungen unterworfen zu werden, zu den beweglichen Belastungen gerechnet wird.

Es erscheint eine derartige Scheidung der Belastungen ganz überflüssig, weil bei den Hochbaukonstruktionen die Belastungen sowieso weit höher angenommen werden und um allen Zufälligkeiten zu begegnen, weit höher angenommen werden müssen, als dieselben in der Regel sind und weil auch nicht einmal annähernd zu bestimmen ist, in welcher Weise sich die mobilen Belastungen innerhalb eines Gebäudes verteilen können. Setzt man aber, wie es nicht anders möglich, in den Räumen der Gebäude gleichmässige Belastungen voraus, so ist es offenbar gleichgültig, ob diese Belastungen aus dem Gewichte der Konstruktion oder aus aufgebrachten Lasten bestehen.

Hat man z. B. Kornspeicher oder Kaufmannsmagazine, in denen jedenfalls die ungleichmässigsten Belastungen vorkommen können, so ist es vollständig unmöglich für alle denkbaren Veränderungen in den Belastungen Ermittelungen anzustellen. Man nimmt eine überall gleichmässige Beschüttung mit Korn oder Belastung mit Waren an und untersucht vielleicht noch den Fall, wo eine nur einseitige Belastung erfolgt, also vielleicht nur die eine Hälfte des Gebäudes belastet ist.

Anders verhält es sich in Werkstätten und Fabriken, wo einzelne bedeutende Belastungen durch Maschinen und Apparate vorkommen, welche dann aber einen bestimmten Platz erhalten, also auch als feststehend zu betrachten sind. Soll eine Verstellung solcher Gewichte stattfinden, so hat man dann auch die Unterstützungen, für den Fall solche besonders angeordnet sind, mit zu verrücken.

Die Belastungen, welche für Gebäude angenommen werden, sind, mit Ausnahme der Belastung der Dachwerke, welche weiter unten mitgeteilt sind, für einen Quadratmeter folgende:

Balkenlage mit Dielung ohne Staken	280 kg
Gestreckte Windelböden mit Lehmestrich	450 „
Halbe Windelböden mit Dielung und Verschalung in Wohngebäuden	500 „
Dieselben in Tanzsälen	750 „
Dieselben ohne Schalung in Werkstätten	760 „
Ganze Windelböden in Wohngebäuden mit Dielung und Schalung	580 „
Gewölbte Decken, $^1/_2$ Stein stark zwischen eisernen Trägern mit Füllung und Dielung	750 „
Dieselben $^1/_4$ Stein stark	550 „
Balkenlage mit Dielung in Salzmagazinen, Mehllagern und Kornspeichern	800 bis 850 „
Dieselbe in Woll-, Lumpen- etc. Speichern	750 „

a) Kraftwirkungen in Hängewerken.

Werden die Hängewerke so angeordnet oder benutzt, dass der horizontale Balken (Thramen) nur als Verbandstück des Hängewerkes zu betrachten ist, so ist die Konstruktion eine sehr einfache und die richtige. In vielen Fällen werden aber diese Balken gleichzeitig mit biegenden Belastungen in Anspruch genommen und dann ist die Konstruktion, obgleich nicht richtig, eine kompliziertere, weil dann eine ausschliessliche Belastung der Knotenpunkte nicht stattfindet.

1. Der einfache Hängebock mit einer Hängesäule.

Ist, **Fig. 170, Taf. XI**, AB ein Balken, welcher in A und B aufgelagert ist und der in der Mitte zwischen den Unterstützungen durch eine Kraft P in Anspruch genommen wird, welche so gross ist, dass der Balken ohne eine mittlere Unterstützung dieser nicht Widerstand entgegensetzen kann, so kann die Unterstützung entweder durch untergestellte Säulen erfolgen, muss aber, wenn der unter dem Balken liegende Raum nicht durch Säulen oder andere Konstruktionsteile beengt werden soll oder darf, von oben her erfolgen und dann ist die Anwendung des Hängewerkes das einfachste Auskunftsmittel.

Der Balken AB wird in C, dem Angriffspunkte der Kraft P mit der Hängesäule CD verbunden und diese durch die Streben AD und BD gehalten.

Man ermittelt durch das Kräftepolygon $MLNO$ und das Seilpolygon mnl die Auflagerdrücke R und R_1, welche hier gleich $\frac{P}{2}$ sein müssen.

In dem Punkte A wirkt dann $R = \frac{P}{2}$ und ausserdem schliessen sich an dieser Stelle die Hölzer AD und AC an den Punkt A an. Um die Kräfte zu finden, welche in den Hölzern wirkend sind, muss man $\frac{P}{2}$ in zwei Seitenkräfte zerlegen, welche in die Richtungen von AD und AC fallen. Es geschieht dieses einfach, wenn man auf eine vertikale Linie al, von a anfangend, die Kraft $\frac{P}{2}$ abträgt. Hierdurch findet man den Punkt b. Man zieht nun durch a die Linie ac parallel mit dem Balken AC und diejenige bc parallel zu AD.

Misst man dann die Längen der Linien ac und bc nach dem Massstabe, nach dem man ab aufgetragen hat, so hat man die beiden Kräfte, welche in AC und AD wirkend sind.

$R = \frac{P}{2}$ ist von unten nach oben wirkend, trägt man demnach in die Linie ab einen nach a zu gerichteten Pfeil ein, so muss dem Zuge folgend der Pfeil in ac auf c und in bc auf b weisen. Ueberträgt man dann in derselben Richtung die Pfeile auf AC und AD und zwar in der Nähe des Punktes A in die Konstruktion, so erhält man denjenigen in AC von A abweisend, hat also in AC eine Zugkraft, während derjenige in AD auf den Punkt A zeigt, also eine Druckkraft angibt.

Der Knotenpunkt A ist hiermit erledigt. Man wendet sich nun entweder zu dem Punkte D oder zu C. Welchen dieser beiden Punkte man zuerst in Behandlung nimmt ist gleichgültig, denn man hat in beiden zwei unbekannte Kräfte zu bestimmen. In dem Punkte D wirkt die bekannte Kraft bc in der Richtung der Strebe AD. Betrachtet man demnach diese Kraft als eine auf den Punkt D einwirkende Einzelkraft, welcher durch zwei andere in den Richtungen von BD und CD wirkenden Kräften das Gleichgewicht gehalten werden muss, so findet man diese sehr einfach, indem man durch den einen Endpunkt c der bekannten Kraft bc eine lotrechte Linie cd zieht, welche parallel zu der lotrechten Hängesäule CD ist, und durch den zweiten Endpunkt b der bc eine Linie bd parallel zu BD legt. Man hat dann in cd die Grösse der Kraft, welche die Hängesäule CD in Anspruch nimmt und in bd diejenige, welche in die Strebe BD übergeht.

Da sich die in AD wirkende Kraft als eine Druckkraft erwiesen hat, muss man für den Punkt D die Pfeilrichtung in AD so eintragen, dass die Spitze auf D zu gerichtet ist. Trägt man dann diesem entsprechend in bc einen Pfeil ein und dem Zuge dieses folgend auch in cd und db, so findet man, wenn man solche wieder in der Nähe des Punktes D in BD und CD einzeichnet, den erstern auf D, den letztern von D abweisend. Es muss deshalb in CD eine Zug- und BD aber eine Druckkraft wirkend sein.

Nun zu dem Punkte C übergehend, findet man, dass man daselbst drei bekannte Kräfte hat und zwar die beiden innern, welche in AC und CD wirkend sind und welche in den Linien ac und cd gefunden wurden und die äussere Kraft P. Als unbekannte Kraft hat man nur die in die Richtung von CB fallende Kraft. Macht man daher $be = \frac{P}{2}$, so dass ae gleich P wird, so hat man in ea, ac und cd die drei bekannten Kräfte zusammenliegend und in ed die Schlusslinie für das für den Punkt C gültige Polygon. Die Linie ed muss demnach, wenn die Zeichnung richtig ist, parallel mit CB liegen und die in dieses Holz fallende Kraft ihrer Grösse nach darstellen. Man findet dann durch Eintragung der Pfeilrichtungen in der vorher angegebenen Weise, dass ed eine Zugkraft ist.

Der letzte Knotenpunkt der Konstruktion ist nun B. Derselbe liegt über dem Auflager und sind in demselben nur bekannte Kräfte wirkend, welche in bd und ed, sowie in be dargestellt sind. Da diese drei Linien eine geschlossene Figur bilden, ist die Richtigkeit der Zeichnung dargethan.

Liegt der Punkt C, in welchem die Kraft P angreift, nicht in der Mitte zwischen A und B, siehe **Fig. 171**, **Taf. XI**, so ändert sich das Verfahren bei der Aufsuchung der in die einzelnen Verbandstücke fallenden Kräfte gegen das vorige in keiner Weise.

In der Figur sind die gleichliegenden Punkte mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie in **Fig. 170**, so dass eine nochmalige Beschreibung des einschlagenden Verfahrens überflüssig erscheint.

Ist nun das Hängewerk, **Fig. 172**, **Taf. XI**, nicht nur in dem Punkte C durch die Kraft P in Anspruch genommen, sondern wirkt auf dasselbe auch in D noch eine äussere Kraft P_1 auf dasselbe ein, so hat man die Auflagerreaktionen in A und B gleichgross und zwar gleich $\frac{P + P_1}{2}$, wenn der Punkt C in der Mitte zwischen A und B liegt. In einem andern Falle hat man R und R_1 durch das Kräfte- und Seilpolygon zu bestimmen.

Man macht $af = R$, zieht ab und bf parallel zu AC und AD, zieht bd parallel CD, macht $ae = P$ und zieht de parallel BC, so ist diese Linie die Kraft 3 und bd diejenige 4. Dann macht man fc gleich P_1, zieht cd parallel BD, um in dieser Linie die Kraft 5 zu erhalten, welche die Strebe BD belastet.

2. Hängewerke mit zwei Hängesäulen.

Ist der Balken AB so lang oder so stark belastet, dass derselbe zwei Zwischenunterstützungen haben muss, welche in C und D in gleichen Abständen von A und B, **Fig. 173, Taf. XI**, angebracht sind, so hat man, wenn die Belastungen in C und D unter sich gleich und gleich P sind, die Reaktionen in A und B ebenfalls gleich P.

In dem Punkte A wirkt demnach die Reaktion $R = P$ und die in AE und AC durch die Reaktionen hervorgebrachten innern Kräfte, deren Grösse man erhält, wenn man ab gleich R macht und ad sowie bd parallel zu AC und AE zieht.

Zu dem Punkte E übergehend, hat man die bekannte Kraft bd in AE wirkend und muss aus derselben die beiden Kräfte, welche in EF und CE fallen, ermitteln. Es geschieht dieses, indem man de lotrecht und be horizontal zieht. In dem Punkte C sind die Kräfte in AC und CE bekannt und in ad und de dargestellt, ebenso wirkt in C die bekannte äussere Belastung P, welche gleich ab ist. Es muss also die Kraft für CD, welche unbekannt ist, in der horizontalen Linie be, welche die Punkte b und e verbindet, gefunden sein. Es ist hiermit die Hälfte des Kräftepolygons gezeichnet und da das Hängewerk symmetrisch geformt und belastet ist, braucht man das bisher gezeichnete nur zu kopieren, um den vollständigen Plan zu erhalten, dessen weitere Zeichnung aber gar nicht erforderlich ist.

Sind die Kräfte, welche in den Punkten C und D angreifen, nicht gleich, sondern wirkt in C die Kraft P_1 und in D diejenige P_2, so ist die Ermittelung der Kräfte nicht ganz so einfach. Es ist übrigens dann auch gleichgültig, ob die Punkte C und D gleichweit von A und B abstehen, oder ob dieselben anders verteilt sind. In **Fig. 174, Taf. XI**, ist ein solches Hängewerk dargestellt.

Man hat hier zuerst die Auflagerreaktionen R und R_1 zu bestimmen, was durch Zeichnung des Kräftepolygons $MLNO$ und des Seilpolygons $klmn$ geschieht. Man findet daraus $MW = R$ und $NW = R_1$.

Für die Ermittelung der Kräfte, welche in AE und BC fallen, macht man $ab = R$, zieht ad parallel AC und bd parallel zu AE und hat in den Längen der Linien ab und bd die verlangten Kräfte.

In dem Punkte C wirkt dann ad und P. Bestimmen muss man die in CE und CD fallenden Kräfte. Man wird also ah gleich $P_1 = ML$ machen, hf horizontal und df vertikal ziehen. Es ist dann hf die Kraft für CD und df diejenige für CE.

In dem Punkte E wirken nun die bekannten Kräfte bd und df, aus welchen die in den Spannriegel EF übergehende Kraft zu bestimmen ist. Da EF horizontal liegt, die Endpunkte b und f der bekannten Kräfte aber durch eine horizontale Linie nicht verbunden werden können, so ist der Gleichgewichtszustand nur dann zu erreichen, wenn man den Spannriegel aus seiner horizontalen Lage EF in eine solche EF_1 bringt, welche parallel zu der Verbindung bf der Punkte b und f des Kräftepolygons ist, oder wenn man, wie weiter unten gezeigt werden soll, neue Konstruktionsteile einfügt.

In dem Punkte D wirkt nun P_2 gleich he, dann in CD die Kraft hf, man erhält also die Kräfte, welche in DF_1 und DB wirken, indem man fg und eg vertikal und horizontal durch f und e zieht.

Die Strebe FB kann nun selbstverständlich die angenommene Lage nicht behalten, sondern muss die Hängesäule in F_1 treffen. Man hat also bf und fg als bekannte Kräfte und findet daraus bg als diejenige Kraft, welche in die Strebe F_1B übergeht, weshalb diese auch der Linie bg parallel gelegt werden muss. In dem Auflagerpunkte B wirken dann die Kräfte bg, eg und $R_1 = be$, welche die geschlossene Figur bge bilden.

Der schrägliegende Spannriegel sieht schlecht aus und ist auch aus verschiedenen anderen Gründen nicht überall anwendbar und ist man deshalb genötigt in vielen, vielleicht den meisten Fällen, andere Hilfsmittel anzuwenden, um die ungleichen Kraftwirkungen aufzunehmen.

Eines der einfachsten und besten Mittel hierzu ist das **Fig. 175, Taf. XI**, angegebene, woselbst in das rechteckige Feld zwischen den Hängesäulen, dem Spannriegel und dem Thramen noch eine Strebe DE eingestellt ist.

Man ermittelt zunächst R und R_1, macht dann $ab = R$, zieht ae und be parallel zu AC und AE und hat in diesen Linien die Kräfte, welche den Thramen in AC und die Strebe AE belasten.

Den Punkt E kann man nun nicht vornehmen, weil in demselben vier Kräfte wirkend sind, von denen nur eine bekannt, also eine unbestimmte Aufgabe zu lösen wäre. Man muss sich daher erst zu dem Punkte C wenden. Hier hat man die Kraft 2, in AC wirkend, und die äussere Kraft ac gleich P_1 und findet dazu in Cf die Kraft 4, welche in CD, dem mittleren Stück des Thramens wirkend ist und diejenige ef gleich 3, welche von der Hängesäule CE aufgenommen wird. Durch die letztere Kraft 3 kommt man nun in die Lage, die in E wirkenden Kräfte zu bestimmen; denn man hat daselbst jetzt die Kräfte 1 und 3 als bekannte und braucht nur zwei Kräfte zu finden. Die Kraft 1 ist in dem Kräfteplane durch die Linie be und diejenige 3 durch die Linie ef dargestellt; schliesst man deshalb in f eine Linie parallel zu DE und in b eine horizontale bg an, so hat man die Kräfte 5 und 6, welche in dem Spannriegel EF und der Strebe DE auftreten.

Für den Knotenpunkt D trägt man dann von c bis d die Belastung P_2 in den Kräfteplan ein und zieht durch d die horizontale Linie dk, bis dieselbe von der vertikalen durch g gezogenen Linie gk in k geschnitten wird. Man hat dann für den Punkt D das Kräftepolygon $cfgkd$, dessen Seiten aus den mit 4, 6, 7 und 8 bezeichneten Kräften, welche in den Balkenteilen CD, DE, DF und DB wirkend sind, bestehen.

Es fehlt nun nur noch die Kraft, welche die Strebe BF belastet. Diese erhält man, wenn man zu den Kräften 5 und 7, welche in bg und gk dargestellt sind, die Linie bk parallel zu BF zieht. Für den letzten Punkt B ist dann das Kräftepolygon bkd, worin bd die Reaktion R_1 ist.

Das Hängewerk, **Fig. 176, Taf. XI**, ist symmetrisch zur Mittellinie gebildet und belastet, die Belastungen aber nicht bloss unten an den Hängesäulen wirkend, sondern auch oben auf den Hängesäulen Belastungen angebracht.

Sind die unteren Belastungen P und P, die oberen aber P_1 und P_1, so hat man die Auflagerreaktionen $R = R_1 = P + P_1$.

Um die in den einzelnen Teilen des Hängewerkes unter der angegebenen Belastung auftretenden Kräfte zu erhalten, beginnt man, wie bisher immer geschehen, damit, dass man die Reaktion in A gleich ab in die Kräfte 1 und 2 zerlegt, welche in die Strebe AE und den

Thramen AC fallen und die man in bc und ac dargestellt hat, wenn bc parallel zu AE und ac parallel zu AC durch die Endpunkte a und b der Auflagerreaktion gezogen werden.

Wendet man sich dann zu dem Punkte C, in welchem die Hängesäule CE den Thramen AB erfasst und in welchem Punkte die eine der Kräfte P wirkend ist, so muss man im Anschluss an die Kraft 2 gleich ac die Belastung P auf der vertikalen Linie ag abtragen, also ae gleich P machen. Zieht man dann übereinstimmend mit den Lagen der Verbandstücke CE und CL in dem Kräfteplane durch c die vertikale Linie cd und durch e die horizontal gerichtete Linie ed, so stellen diese beiden Linien die Kräfte 4 und 5 dar.

In dem Punkte E kennt man nun die innern Kräfte 1 und 4, sowie die äussere Kraft P_1, während nur die in EF wirkende Kraft 3 unbekannt ist. Man macht $be = P_1$ und findet, dass der Endpunkt e in den Anfangspunkt der Linie ed fällt, welche die Kraft 5 darstellt. Da diese Linie in d, dem Endpunkte der Kraft 4 schliesst, so muss dieselbe die gesuchte Kraft 3 darstellen, diese also gleich derjenigen 5 sein.

Für den Punkt D hat man das Kräftepolygon in $degf$, einem Rechtecke, in dem die Seite eg gleich P, ed gleich 5 ist und dann df gleich der Kraft 6, in der Hängesäule DF wirkend, und gf gleich 7 gleich der Kraft für das Thramenstück DB sein muss.

Macht man dann $eh = P_1$ gleich der äussern in F wirkenden Kraft und zieht die Linie hf parallel zu der Strebe BF, so muss diese Linie, bei richtiger Konstruktion, den Punkt f treffen. Man hat dann in hf die Kraft 8 für die Strebe BF. Ist dann noch gh gleich der Auflagerreaktion in P, so ist das Kräftepolygon für den Punkt B in dem Dreieck ghf dargesellt.

Sind die vier Kräfte, welche auf das Hängewerk einwirken, nicht gleichmässig verteilt, sondern wird jeder der ergriffenen Punkte durch eine andere Belastung in Anspruch genommen, welche P_1, P_2, P_3 und P_4 heissen mögen, so muss man **Fig. 177, Taf. XI**, erst die Auflagerreaktion durch Zeichnung des Seil- und Kräftepolygons ermitteln.

Man macht ML gleich $P_1 + P_2$, weil diese beiden Kräfte in derselben vertikalen Richtung wirkend sind und LN gleich den Kräften P_3 und P_4, zieht die Polstrahlen OM, OL und ON und bildet nach diesen das Seilpolygon $MOKH$. Zu der Schlusslinie MH zieht man OW parallel und hat dann, wie immer, $MW = R$ und $WN = R_1$.

Um dem Hängewerke Stabilität zu geben, sind zwischen den Hängesäulen CE und DF, dem Spannriegel EF und dem Thramen AB die Kreuzstreben DE und CF eingesetzt, welche sich in G kreuzen.

Man macht nun $ab = R$, zieht bc parallel AE und ac parallel AC, um in den beiden Linien die Kräfte 1 und 2 zu erhalten, welche in den genannten Verbandstücken wirkend sind. Man macht dann bh gleich P_2, zieht he horizontal und ce vertikal und hat dann in der ersteren Linie die Kraft 5, welche in den Spannriegel EF fällt und in ce diejenige 4, welche die Hängesäule CE belastet. Die Strebe

DE erhält eine Belastung nicht, kann also wegbleiben, weil dieselbe zur Haltbarkeit der Konstruktion nichts beiträgt.

Für den Punkt C hat man das Kräftepolygon $akdec$ und entnimmt aus demselben kd als Kraft 3 für das mittlere Stück CD des Thramens und de als Belastung der Strebe CF. Man fährt dann in bekannter Weise fort den Kräfteplan zu zeichnen, und mag nur noch bemerkt werden, dass $kg = P_3$, $hl = P_4$ und $gl = R_1$ ist.

Ist das zweisäulige Hängewerk, wie dieses **Fig. 178, Taf. XI**, angegeben ist, konstruiert und durch die ungleich grossen Kräfte P_1 bis P_4 in den Punkten C, D, E und F belastet, so bestimmt man zuerst wieder die Auflagerreaktion R und R_1 durch das Kräftepolygon $MLNO$ und das Seilpolygon $HOKJ$ und findet $MW = R$ und $WN = R_1$.

Man hat nun in dem Punkte A nur die bekannte Kraft R, während daselbst drei unbekannte innere Kräfte ermittelt werden sollen, welche in die Richtungen der Streben AE, AF und den horizontalen Balken AC fallen. Es ist also nicht möglich diese Kräfte ohne weiteres zu ermitteln, sondern man muss dazu noch irgend welche nähern Angaben haben, welche eine bestimmte Auflösung dieser Aufgabe herbeizuführen vermögen.

Der Punkt E wird offenbar durch die äussern Kräfte P_1 und P_2 in Anspruch genommen. P_1 wirkt an dem untern Ende der Hängesäule CE und wird durch diese nach E übertragen, während die Kraft P_2 direkt in E wirkend ist. Da diese beiden Kräfte vollständig von den Streben AE und BE aufgenommen werden, kann man leicht die in AE fallende Seitenkraft ermitteln und hat dann nur noch die in AF und AC auftretenden Kräfte für den Punkt A zu bestimmen.

Man macht $ak = R$, $kf = P_1 + P_2$, zieht $ke \parallel AE$ und $fe \parallel BE$, so hat man in ke die Kraft, welche in die Strebe AE übergeht. Zieht man dann eb parallel AG und ab horizontal, so hat man die Kräfte 1 und 3 für die Strebe AG und das Thramenstück AC. Für den Punkt C erhält man das Rechteck $abch$, worin ah gleich der Kraft P_1 zu machen ist. In dem Punkt G, zu dem man nun übergehen muss, wirken vier Kräfte, von denen je zwei und zwei gleich sein müssen. Es ist dieser Punkt nur deshalb in den Kräfteplan einzutragen, damit sich die einzelnen Kräfte in eine solche Lage geben, dass die Anschlüsse für die weiteren Ermittelungen erreicht werden können. Man hat für den Punkt G das Parallelogramm $bcle$.

In dem Knotenpunkte E wirkt nun P_2 und ausserdem die bereits ermittelten Kräfte 2 und 8. Macht man daher $ki = P_2$, so muss die Linie il, parallel zu EB gezogen, die Punkte i und l treffen. In der Linie il hat man dann die Kraft 9 für das Strebenstück EV.

In dem Punkte V wirken die Kräfte 7 und 9. Für dieselben hat man die gleichen Kräfte 11 und 10 zu setzen. Es geschieht dieses durch Zeichnung des Parallelogramms $ilcd$.

Macht man dann $hp = P_3$, zieht pn und cn, so hat man die Kräfte 13 und 12 für BD und DU.

Für die Punkte U, F und B sind besondere Bemerkungen nicht mehr zu machen.

Das horizontale Holz EF ist unbelastet, dasselbe dient nur zur Verbindung und eventuellen Anbringung von Querverbänden. Dasselbe kann bei niedriger Konstruktion wegbleiben.

3. Hängewerke mit mehr als zwei Hängesäulen.

Die Anordnungen der Hängewerke, welche mehr als zwei Hängesäulen haben, sind sehr mannigfaltig. Ueber vier bis höchstens fünf Hängesäulen in einem Hängewerke anzuwenden, ist nicht ratsam, es empfehlen sich für Spannungen, welche mehr Hängesäulen erfordern würden, die Fachwerksträger mehr als die Hängewerke.

In den folgenden Figuren sind einige Hängewerke mit mehreren Hängesäulen für symmetrische und unsymmetrische Belastung angegeben und die Kräftepläne dazu gezeichnet.

Fig. 179, Taf. XI, ist ein dreisäuliges Hängewerk, bei welchem die mittelste Hängesäule durch zwei Streben gehalten wird, welche sich neben den seitlichen Säulen in den Thramen setzen. Der in I angegebene Kräfteplan ist für den Fall, dass die Hängesäulen alle die gleiche Belastung zu stützen haben, während die Kräftepläne II und III für eine ungleichmässige Belastung der Hängesäulen gezeichnet sind.

Nach dem Plane II findet sich für das linke Stük des Spannriegels EFG eine kleinere Kraft 4 als für die rechte Seite desselben, woselbst die Kraft 10 gefunden wird. Es kann hierdurch die Stabilität des Hängewerkes beeinträchtigt werden, weshalb man gut thut, die beiden Teile des Spannriegels gleich zu belasten und den Ueberdruck des einen durch eine Strebe GD auf den Thramen zu übertragen. Für diesen Fall ergibt sich der Kräfteplan III.

Das **Fig. 180, Taf. XI**, dargestellte Hängewerk hat, wenn es gleichmässig belastet ist, den Kräfteplan I.

Man macht $ab = \frac{P}{2}$ gleich der halben Belastung der mittleren Hängesäule, zieht bc horizontal, macht ad gleich der Auflagerreaktion und zieht $dc \parallel$ der Strebe AF und ce parallel derjenigen AG und legt ae horizontal. Dann hat man die Kräfte 1, 2 und 3. Hat man dann für den Punkt C das Kräftepolygon $aefg$ gezeichnet, worin ag gleich der äusseren auf C wirkende Kraft ist, so zeichnet man für den Punkt K, in welchem die Strebe AG sich mit der Hängesäule CF schneidet, die in dem Parallelogramm $efhc$ die Seiten bildenden Kräfte und fährt dann in der gewöhnlichen Weise fort.

Ist das Hängewerk aber ungleichmässig belastet und hat man durch Kräfte- und Seilpolygon die Auflagerreaktion ermittelt, so zeichnet man den Kräfteplan II in derselben Weise wie I gezeichnet wurde, findet aber dabei, dass der Spannriegel FGH nicht horizontal liegen kann, sondern parallel zu mn gelegt werden muss, und dass die Strebe BH in die Lage BH_1 kommen muss, weil dieselbe, um den Gleichgewichtszustand herbeizuführen, parallel zu mp sein muss.

Ist ein solches Hängewerk nicht nur in den Punkten C, D und E, sondern auch in F, G und H belastet und zwar in C und E mit P_1 gleich 5000 kg, in D mit P_2 gleich 3000 kg, in F und H mit P_3 je gleich 1500 kg und in dem Punkte G mit P_4 gleich 1000 kg.

Es ist demnach eine Gesamtbelastung von 17000 kg vorhanden und demnach die Auflagerreaktion $\frac{17000}{2} = 8500$ kg. In dem Kräfteplane III ist die Verteilung der Kräfte vorgenommen und dabei ein Massstab zu Grunde gelegt, nach welchem 250 kg gleich 1 mm sind. Ausserdem sind die Kreuzungspunkte K und L nicht als Knotenpunkt in den Kräfteplan einzutragen, wodurch dieser etwas vereinfacht wird.

Man macht ab gleich der Reaktion R, zieht bd parallel AG und trägt auf ab von b aus P_2 und P_4 ab, wodurch man den Punkt c findet. Durch diesen legt man eine Parallele zu BG, so hat man in bd die Kraft 1, welche die Strebe AG belastet. Diese findet man gleich 18,5 mm, hat demnach die Kraft 1 gleich $18{,}5 \cdot 250 = 4625$ kg.

Durch den Punkt d wird dann eine Parallele df zu AF gezogen und durch a die horizontale Linie af gelegt. Man hat dann in df den Druck 2, welcher die Strebe AF in Anspruch nimmt und in af den Zug 3, welcher in den Thramen AB übergeht. Man findet bei der Messung $df = 37$ mm und $af = 43$ mm, hat also die Kraft 2 gleich $37 \cdot 250 = 9250$ kg und diejenige 3 gleich $43 \cdot 250 = 10750$ kg.

Für den Punkt C macht man ag gleich P, zieht fh vertikal und gh horizontal, findet also die Belastung 4 für die Hängesäule CF gleich P_1 und den Zug 5 in dem Thramenteile CD gleich demjenigen in AC. In dem Punkte F hat man die bekannten Kräfte 2, 5 und P_3, macht man also in der Verlängerung von fh die hl gleich P_3, so muss dl den Druck 8 für den Spannriegel FG geben. Man misst dl gleich 25,8 mm, hat demnach die Kraft 8 gleich $25{,}8 \cdot 25 =$ 6450 kg.

Geht man nun zu dem Knotenpunkte D über, so hat man in diesem P_2 wirkend. Man macht also gm gleich P_2 im Anschluss an die bekannte Kraft 5 gleich gh, zieht die horizontalen und vertikalen Linien mn und hn und erhält die Kraft 10 für DE gleich derjenigen 3 und die Kraft hn für DG gleich P_2.

Macht man nun, um die um den Punkt G liegenden Kräfte zu erhalten, lo gleich der Kraft 9 plus P_4 und zieht op horizontal, bp aber parallel zu BG, so hat man in op die Kraft 12 für den Spannriegel GH gleich derjenigen 8 und in bp die Kraft 11 für die Strebe BG gleich der Kraft 1, welche in der Strebe AG wirkend ist.

Man hat hiermit alle erforderlichen Kräfte gefunden, braucht also den Kräfteplan nicht weiter zu zeichnen, und zwar so lange nicht, wie die Belastung der Konstruktion eine zur Mittellinie symmetrische ist.

Eine andere Hängewerkskonstruktion, welche namentlich bei der Anordnung von Dachwerken öfter benutzt wird, ist **Fig. 181, Taf. XI**, angegeben.

Es ist angenommen, dass die Punkte C, D, E, F, G und H belastet sind zwar der Reihe nach mit P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6.

Man hat, weil die Belastung eine ungleichmässige, durch Zeichnung des Kräfte- und Seilpolygons die Auflagerreaktionen in A und B zu bestimmen und findet die ersten gleich MW, die letzten aber gleich WK.

Ist dieses geschehen, so wird $ab = MW = R$ gemacht und die Linien bc und ac durch b und a gezogen und zwar parallel zu AF und AC. Man hat dann die Kräfte 1 und 2, welche in den genannten Teilen des Hängewerkes auftreten.

Für den Punkt F kann die Zerlegung der Kräfte noch nicht erfolgen, weil hier drei unbekannte Kräfte sind. Man muss deshalb vorab den Punkt C nehmen. Dies geschieht, indem man an gleich P_1 macht, die nd horizontal und cd vertikal zieht. Es ist dann $nd = 3$ die Kraft für CD und cd gleich 4 diejenige für CF. Jetzt hat man in dem Punkte F nur noch zwei unbekannte Kräfte, welche in die Richtungen der Streben FD und FG fallen. Man findet dieselben, wenn man bk gleich P_4 gleich der in F wirkenden äusseren Kraft macht und dann ke und de parallel FG und DF zieht.

In dem Punkte G wirkt der Belastungsteil P_5. Macht man daher $km = P_5$ und zieht mf parallel zu GH und ef vertikal, so hat man die Kräfte 7 und 8, welche GH und GD belasten.

Man kann nun den Punkt D in Betracht nehmen, in welchem zusammen fünf innere und eine äussere Kraft thätig sind. Hiervon sind bekannt 3, 5, 8 und P_2, also nur zwei innere Kräfte ihrer Grösse nach unbekannt. Es sind dieses diejenigen, welche in die Teile DH und DE fallen. Diese Kräfte findet man, wenn man nl gleich P_2 macht, lg horizontal und $gf \parallel DH$ zieht.

Man macht dann noch ma gleich P_6, $lr = P_3$ und zieht rh horizontal, gh vertikal und ah parallel BH, um die noch fehlenden Kräfte zu erhalten.

Für ein Hängewerk mit fünf Hängesäulen und gleichmässige nur in dem Thramen liegende Belastung ist in **Fig. 182, Taf. XI**, noch der Kräfteplan gezeichnet. Derselbe ist ohne besondere Vorkommnisse darstellbar, es ist deshalb überflüssig dazu noch eine Beschreibung zu geben.

Hängewerke wie **Fig. 183, Taf. XI**, angegeben, haben nur dann Standfähigkeit, wenn die Streben GH und JK bestimmte Lagen zu den Streben AG und BK, sowie einen etwa vorkommenden Spannriegel HJ haben. Für andere als die erforderlichen Richtungen dieser Teile ist ein Gleichgewichtszustand der Konstruktion nicht zu erzielen und demnach auch das Hängewerk nicht zu gebrauchen.

Man trägt für die Punkte A und C die Kräftepolygone in den Kräfteplan ein und findet daraus die Kräfte 1, 2, 3 und 4. In dem Punkt G wirkt nun die Kraft 1 gleich ab, sowie 4 gleich bd. Es muss diesen beiden Kräften durch die in die Strebe GH fallende Kraft das Gleichgewicht gehalten werden. Dieses kann aber nur durch eine Kraft geschehen, welche in die Richtung der Linie ad fällt, d. h. die Richtung der Mittelkraft zu ab und bd. Man muss deshalb die Strebe GH in der Richtung GH_1 parallel zu ad legen.

Grosse Haltbarkeit kann ein solches Hängewerk nicht haben, weil eine Veränderung desselben durch Setzen oder andere nicht zu vermeidende Vorkommnisse die Stabilität gefährden kann.

b) Wirkungen der Kräfte in Sprengwerken.

1. Sprengwerke mit einer Unterstützung für den Thramen.

Ein einfaches Sprengwerk, bei welchem der horizontale Balken AC in seiner Mitte B von den Streben BD und BE gestützt wird, ist **Fig. 184, Taf. XI,** angegeben. Die Belastung ist in B befindlich. Man hat demnach nur die Drücke zu ermitteln, welche in die Streben übergehen und die horizontal gerichteten Schübe und vertikalen Pressungen in den Widerlagern D und E der Streben.

Da der horizontale Balken AC hier kein Konstruktionsteil, sondern der gehaltene Teil ist, kommt derselbe auch nicht weiter in Betracht. Die Auflagerreaktionen R und R_1, welche in dem angenommenen Falle gleich gross und gleich $\frac{P}{2}$ sind, wenn P die Grösse der Belastung in B bezeichnet, treten daher auch nicht in A und C, sondern in D und E auf.

Macht man daher bc gleich R, zieht $bd \parallel$ der Strebe BD und ad horizontal, so hat man in bd die Pressung der Strebe und in bd den horizontalen Schub auf das Widerlager D. Der vertikale Druck an dieser Stelle kann nur gleich R sein.

In dem Punkte B wirkt nun P. Macht man daher ac gleich P und zieht $ad \parallel BE$, so ist dieses der Druck in der Strebe BE. Der horizontale und vertikale Druck in E ist gleich demjenigen in D.

Um nun zu sehen, welche Kräfte drückend und welche ziehend wirkend sind, zeichnet man wie bei dem Hängewerke die Pfeilrichtungen in den Kräfteplan und den Konstruktionsriss des Sprengwerks ein.

Die Reaktion in D wirkt aufwärts, es ist also in die Strecke bc ein nach oben gerichteter Pfeil einzuzeichnen und der Weisung dieses folgend in bd ein solcher, welcher von links nach rechts zeigt und schliesslich in dc ein auf c gerichteter Pfeil. Trägt man übereinstimmend mit diesen Pfeilen auch solche in die Konstruktion ein, so findet man, dass dieselben sowohl in 2 als auch in 3 auf den Punkt D und in 1 und 4 auf den Punkt E gerichtet sind. Es sind deshalb lauter Druckkräfte vorhanden.

Befindet sich die Belastung P nicht in der Mitte zwischen A und C, sondern in einem beliebigen Punkt B, **Fig. 185, Taf. XI,** so hat man durch Zeichnung des Kräftepolygons MLO und des Seilpolygons mnl die Reaktionen $R = MW$ und $R_1 = WL$ zu bestimmen. Man macht dann $ab = R$, $ad \parallel Bd$, bd horizontal, $ac = P$ und zieht dc. Zu dieser Linie parallel hat man dann die Strebe BE zu legen, weil nur in diesem Falle das Gleichgewicht unter den in den Teilen des Sprengwerkes wirkenden Kräften herbeigeführt wird.

Der horizontale Balken AC wird bei diesen Sprengwerken aus den Konstruktionsteilen nicht belastet, weil derselbe nicht zu der Konstruktion gehört. Es ist dieses auch bei allen anderen Sprengwerken, bei denen entweder Strebe gegen Strebe gestellt ist oder zwischen den Streben unter dem horizontalen Balken ein Spannriegel befindlich ist. Nur wenn mehr Streben vorhanden und diese direkt in den horizontalen Balken eingesetzt sind, also ein Spannriegel nicht angeordnet wird, sind die horizontalen Balken zwischen den Streben auf Druck in Anspruch genommen.

2. Sprengwerke mit zwei Unterstützungen für den horizontalen Balken.

Ein Sprengwerk mit zwei Streben EC und FD und einem zwischen diesen liegenden Spannriegel CD ist **Fig. 186, Taf. XII,** dargestellt. Sind hierbei die Punkte C und D gleichmässig belastet, so ergibt sich der Kräfteplan, wie derselbe in I gezeichnet ist.

Man macht $ab = bc$ gleich den Reaktionen in E und F, also gleich P, zieht $ad \parallel CE$ und $db \parallel CD$, um in der ersteren Linie die Kraft 1 in der Strebe CF, in db aber den horizontalen Druck 2 gegen das Widerlager in E zu erhalten. Die Linie db stellt dann auch die Kraft dar, welche in den Spannriegel CD übergeht und mit 3 bezeichnet ist, denn für den Punkt C ist das Kräftepolygon das Dreieck abd, in welchem ab gleich der Belastung P, ad gleich der Strebenkraft 1 und die Schlusslinie bd die Kraft 3 für den Spannriegel ist. Für den Punkt D erhält man dann in abd ein kongruentes Dreieck bcd, in welchem dc die Strebenkraft 4 für die Strebe DF ist. Der Druck in F liegt wieder in der Linie bd.

Ist das Sprengwerk ungleich belastet und zwar in C mit der Kraft P_1 gleich ML und in D mit derjenigen P_2 gleich LN, so bestimmt man in der gewöhnlichen Weise die Auflagerreaktionen MW und WN und zeichnet dann den Kräfteplan nach II.

Es ist daselbst $a_1 b_1 = MW$ gleich der Reaktion in E, $a_1 d_1 \parallel CE$ gleich der Kraft 1 für genannte Strebe, $b_1 d_1$ horizontal gibt den Widerlagsdruck 2. Man macht dann $a_1 e_1$ gleich P_1 und findet für den Punkt C das Kräftepolygon $a_1 e_1 d_1$. Man muss deshalb den Spannriegel CD nach CD_1 parallel zu $e_1 d_1$ legen, um den Gleichgewichtszustand herbeizuführen.

Macht man dann weiter $e_1 c_1$ gleich P_2, zieht $d_1 c$, so muss parallel hierzu die Strebe DF gelegt werden, also diese die Richtung $D_1 F$ bekommen.

Für den Punkt F hat man dann das Polygon $b_1 c_1 d_1$, worin $b_1 c = WN = R_1$ sein muss.

Es folgt aus der schrägen Lage des Spannriegels für eine ungleiche Belastung der Konstruktion, dass sich solche Sprengwerke nur ganz ausnahmsweise eignen, um ungleichmässig belastet zu werden. Viel geeigneter für solche Zwecke sind Sprengwerke, welche in der **Fig. 187, Taf. XII,** angegebenen Weise konstruiert sind, bei denen Spannriegel nicht vorkommen, sondern die Streben gegeneinandertreten.

Die Belastung der Punkte C ist $P_1 = ML$ und D gleich $P_2 = LN$. Man bestimmt die Reaktionen in $E = MW = R$ und in $F = WN = R_1$ durch Zeichnung des Seil- und Kräftepolygons und dann die aus P_1 nach CE und CF übergehenden Drücke, indem man ab gleich P_1 macht und $ag \parallel CE$, $bg \parallel CF$ zieht.

Hat man hierdurch ag gleich der Kraft 2 für die Strebe CE gefunden, so zieht man durch g die $ge \parallel DE$ und ec horizontal, zeichnet also in $aceg$ das Kräftepolygon für den Punkt E. Es ist ce der horizontale Widerlagsdruck, eg aber der Druck 1, welcher von der Strebe DE aufgenommen werden muss.

Da in dem Punkte C die Last P_1 wirkt, so hat man $ab = P_1$ zu machen und dann bg, welche Linie $\parallel CF$ gezogen wurde, als den Druck 4 zu nehmen. In dem Kreuzungspunkte G der Streben DE und CF wirken nun die vier Kräfte, welche paarweise unter sich gleich sind, die man aber trotzdem durch Zeichnung des Parallelogramms $bgef$ darstellt, um die Kräfte in die für die weitere Darstellung des Kräfteplanes erforderliche Lage zu bringen.

In dem Punkte D sind nun die Kräfte 5, P_2 und 7 wirkend, von denen man die ersten beiden kennt und die letztere in der Linie fd findet, wenn man $bd = P_2$ macht und $df \parallel DF$ zieht. Für den Punkt F ist dann das Kräftepolygon $cefd$, woraus noch ce gleich dem horizontalen Drucke in F entnommen wird.

Sind die belasteten Punkte C und D gleichmässig in Anspruch genommen, so ändert sich die Figur des Kräfteplanes dadurch, dass c in der Mitte zwischen a und d liegt und die Punkte b und c zusammenfallen. Das Verfahren zur Auffindung der einzelnen Kräfte bleibt aber dasselbe.

3. Sprengwerke mit mehr als zwei Unterstützungen für den horizontalen Balken.

Ein Sprengwerk mit drei belasteten Punkten C, D und E ist **Fig. 188, Taf. XII,** angegeben. Aus dem oben angegebenen Grunde, weil nämlich zwischen den Streben CF und EG ein Spannriegel CE liegt, eignet sich das Sprengwerk nicht für unsymmetrische Belastung. Es ist deshalb in D diese gleich P_2 angenommen, während in C und E die Lasten P_1 wirkend sind.

Man hat als Auflagerreaktionen in F und G daher $R = R_1 = P_1 + \frac{P_2}{2}$.

Macht man $ab = P_1$ und $bc = \frac{P_2}{2}$, so ist $ac = R$. Zieht man dann bf horizontal und $af \parallel CF$, so hat man in der ersten Linie die Belastung des Spannriegels, in der letzteren aber den Strebendruck in CF. Zieht man dann weiter $fg \parallel DF$ und cg horizontal, so ist fg der Druck in der Strebe DF, die Linie cg stellt aber den horizontalen Widerlagsdruck in F dar. Es ist hiermit die Hälfte des Kräfteplanes dargestellt. Der symmetrischen Belastung wegen, ist die zweite Hälfte genau ebenso.

In **Fig. 189, Taf. XII**, ist ein ebensolches Hängewerk angegeben, bei dem jedoch die Streben nicht in gemeinschaftlichen Punkten das Widerlager treffen, sondern getrennt auf dieses stossen. Eigentlich ist dies immer der Fall, denn man muss alle diejenigen Linien, durch welche man die einzelnen Verbandstücke darstellt, als Mittellinien der Hölzer nehmen und es sind die Fusspunkte zweier zusammenstossender Streben immer um die Holzstärken voneinander entfernt.

Man hat hier nun an jeder Seite des Sprengwerkes zwei Auflagerreaktionen, die eine in F aus der Belastung in C folgend, die andere in G, welche durch die Belastung in D herbeigeführt wird. Man hat also zwei vollständig getrennte Sprengwerke, welche ineinander gelegt sind und gemeinschaftlich die Unterstützung des Balkens AB bewirken. Es lassen sich wenigstens nur, wenn man die Konstruktion in solcher Weise betrachtet, die auf die einzelnen Teile fallenden Kräfte ermitteln, oder man müsste die Belastungen in einer andern, vielleicht noch weniger zutreffenden Weise auf die Punkte C, D und E verteilt, annehmen.

Man hat also in den Punkten C und E die gleichgrossen Kräfte P_1 wirkend und in D diejenige P_2.

Den Kräfteplan erhält man, wenn man $ab = P_1$, $af \parallel CD$, $bf \parallel CD$ macht. Es ist dann af die Kraft 1 und bf gleich 2 und 3, d. i. gleich der Horizontalkraft im Widerlager und dem Drucke in dem Spannriegel.

Macht man dann $bc = cd = \frac{P_2}{2}$, zieht $fh \parallel DG$, $hg \parallel DK$ und $gd \parallel DE$, so hat man die Kräfte 4 und 7 für die Streben DG und DK in den Linien fh und gh. Verbindet man dann die Punkte f und g durch eine vertikale Linie und zieht hkc horizontal, so hat man in hk die Kräfte 5 und 9, welche die Widerlager in G und K in horizontaler Richtung in Anspruch nehmen und in fk und gk die vertikalen Drücke in denselben.

Man hat nun noch, um den Kräfteplan zu vollenden, $de = P_1$ zu machen und $ge \parallel EH$ zu ziehen.

Ein Sprengwerk mit vierfach unterstütztem Balken, bei dem zwischen je zwei Streben ein Spannriegel liegt, zeigt **Fig. 190, Taf. XII.** Der Kräfteplan ist einfach und erklärt sich von selbst.

Ein anderes Sprengwerk für denselben Zweck zeigt **Fig. 191, Taf. XII.** Es sind hierbei jedoch von jeder Seite drei Streben angeordnet und nur ein Spannriegel vorhanden, weshalb die Darstellung des Kräfteplanes etwas umständlicher wird.

Die Belastung in C und F ist P_1, diejenige in D und E gleich P_2.

Die Auflagerreaktionen sind demnach $R = R_1 = P_1 + P_2$.

Man macht $ab = P_1$, $bc = P_2$, zieht bf horizontal $ch \parallel DH$, $bh \parallel DG$ und $af \parallel CG$, so hat man in af die Grösse der Kraft, welche aus P_1 in die Strebe CG übergeht und in bh und ch die beiden Kräfte, welche aus P_2 für die Streben DG und DH resultieren. Ueberträgt man nun den Punkt b durch eine horizontale Linie nach g und zieht $fg \parallel bh$ und durch g eine Parallele ig zu EG, so dass die Linie ic horizontal, so ist:

ic die Kraft 4, welche horizontal ins Widerlager übergeht,
ig „ „ 1 für die Strebe EG,
gf „ „ 2 „ „ „ DG und wie schon angegeben
af „ „ 3 „ „ „ CG. Ausserdem hat man in
bf „ „ 5 „ den Spannriegel CD.

In dem Punkte D wirkt nun die äussere Kraft P_2, ferner die bekannten inneren Kräfte 2 und 5, man muss die in die Strebe DH und das Spannriegelstück DE fallenden Kräfte bestimmen, welche mit 6 und 7 bezeichnet sind. Zieht man $gk = 6 \parallel DH$ und $ck = 7 \parallel DE$, so hat man in $bfgkc$ das Polygon für den Punkt D.

Die zweite Hälfte des Kräfteplanes ist der ersten gleich.

c) Kraftwirkungen in zusammengesetzten Hänge- und Sprengwerken.

Unter zusammengesetzten Hänge- und Sprengwerken werden gewöhnlich Konstruktionen verstanden, welche eine Vereinigung von Hänge- und Sprengwerken bilden und so beschaffen sind, dass die Streben des Hängewerkes den horizontalen Balken kreuzen und sich unter diesem auf das Widerlager setzen, oder welche wirklich aus getrennten Hänge- und Sprengwerken bestehen, die zur Unterstütung des horizontalen Balkens benutzt werden, jede Konstruktion für sich einen Teil der belasteten Punkte stützt.

Besondere Vorteile bieten solche Konstruktionen nicht. Dieselben gestatten eine geringere Höhe der Hängesäulen, brauchen aber unter dem horizontalen Balken entsprechende Höhe, um die Streben der Sprengwerke anbringen zu können.

Eine der einfachsten hierher gehörigen Konstruktionen zeigt **Fig. 192, Taf. XII.**

Der Balken AB wird in C und D von den Hängesäulen CE und DF gefasst, und die Streben EG und FH in K und L mit dem horizontalen Balken AB gekreuzt und in G und H auf den Widerlagern gestützt. Bei gleicher Höhe der Hängesäulen mit einem einfachen Hängewerke erhält man demnach hier erheblich steiler stehende Streben. Man kann aber die Punkte K und L auch als belastete Punkte betrachten. Dieselben sind dann durch die aufgebrachte Belastung und als Widerlager der Streben des Hängewerkes in Anspruch genommen und die Strebenstücke GK und HL nebst dem zwischen diesen liegenden Balkenteile KL sind dann als selbständiges Sprengwerk anzusehen.

In I ist der Kräfteplan für den Fall gezeichnet, wo die Punkte K und L nicht durch äusserste Kräfte in Anspruch genommen werden.

Es ist $ab = bc = P$ gleich der Belastung in C oder D.

Die Reaktionen in G und H sind ebenfalls gleich P.

Macht man also ab gleich P, zieht ad parallel der Strebe EK und bd horizontal, so hat man die Kraft, welche die Strebe EK gleichmässig von oben bis unten in Anspruch nimmt, gleich $ad = 1$ und den Widerlagsdruck gleich $bd = 2$.

In dem Punkte C wirkt P. Diese Kraft geht, ohne irgend welche Abgabe in die Hängesäule über, weshalb ab gleich dem Hängesäulenzuge 3 ist. Man findet dann weiter, dass die Kraft 4, welche den Spannriegel belastet, gleich 2 ist. Es ist damit wieder über die Hälfte des Kräfteplanes gezeichnet, also die Vollendung durch Kopieren des bisherigen zu bewerkstelligen.

Sind die Punkte K und L belastete Punkte, so gilt der Kräfteplan II.

Es ist $ab = de = P_1$ gleich den Belastungen von K und L, $bc = cd = P_2$ gleich den Kräften, welche in C und D wirken.

Die Reaktionen in den Stützpunkten G und H sind $R = R_1 = P_1 + P_2$. Macht man also $ac = R$, zieht $ag \parallel GK$ und eg horizontal, so ist ag die Strebenkraft 1 und eg der Druck 2 in G.

Für den Punkt K macht man $ab = P_1$, zieht bh horizontal, so hat man in dieser Linie den Druck 8, welcher in KC auftritt und schneidet von der Kraft 1 das Stück gh ab, welches den Strebendruck $1a$ in dem oberen Teile EK der Strebe EG angibt.

In dem Punkt C wirkt nun die äussere Kraft $P_2 = bc$, die bekannte innere Kraft $8 = bh$, zu bestimmen sind 3 und 9 für die Hängesäule und das Balkenstück CD. Diese erhält man in hk und ck, wenn man erstere Linie vertikal zieht.

Um alle Kräfte zu kennen, fehlt nur noch die Kraft 4 für den Spannriegel EF. Diese ist durch die Linie kk von eg abgeschnitten und in gk gefunden.

Eine etwas wunderbare Anordnung einer Vereinigung zwischen Hänge- und Sprengwerken ist **Fig. 193, Taf. XII**, angegeben. Es ist dieses eine Konstruktion, welche mehrfach mitgeteilt ist, und welche deshalb hier auch aufgenommen wurde.

Die Streben des Hängewerkes $KGHL$ kreuzen in E und F den horizontalen Balken AB. Es ist dieses also die in **Fig. 192** betrachtete Figur. In den Punkten K und L sind dann aber noch Streben KC und LD angeordnet, welche den Balken AB in den Punkten C und D treffen, also gerade da stützen, wo derselbe schon durch das Hängewerk Unterstützung erhalten hat.

Betrachtet man nun das Hängewerk als die eigentliche tragende Konstruktion, so sind die Streben CK und DL unbelastet und deshalb überflüssig. Sieht man die Sache aber so an, dass die Streben CK und DL nur der Sicherheit wegen angeordnet sind, also dann tragen sollen, wenn das Hängewerk sich setzt oder durch irgend welche Vorkommnisse seine Tragkraft einbüsst, so müssen die genannten Streben die ganze Belastung aufzunehmen im stande sein.

Für einen solchen Fall erhält man für das Hängewerk einen Kräfteplan, wie der vorher angegeben und wie derselbe hier in $aceg$ gezeichnet ist, wobei angenommen wurde, dass die Punkte E, C, D und F Belastungen zu stützen haben.

Die Kräfte, welche dann in die Streben CK und DL übergehen, erhält man, wenn man $hl \parallel CK$ und $lf \parallel DL$ zieht in eben diesen Linien.

Die Drücke, welche bei Gebrauch des Hängewerkes in die Widerlager übergehen, sind gleich cg, diejenigen aber, welche aus den Streben CK und DL für die Widerlager in horizontaler Richtung resultieren, gleich lk. Man wird deshalb die Widerlager so einzurichten haben, dass dieselben die grössern dieser Kräfte aufzunehmen vermögen.

Fig. 194, Taf. XII, zeigt eine Anordnung, bei welcher jede der beiden Hängesäulen DH und EK durch zwei Streben gehalten wird, welche von den gemeinschaftlichen Punkten L und M ausgehen.

Es ist diese Anordnung als eine äusserst solide zu bezeichnen, welche in der dargestellten oder ähnlicher Form wohl Nachahmung verdient.

Bei Zeichnung des Kräfteplanes ist angenommen, dass der Punkt C mit $ab = P_1$, derjenige D mit $bc = P_2$, der Punkt E ebenfalls mit $P_2 = ed$ und schliesslich F mit $P_1 = de$ belastet ist.

Man muss, weil in L drei unbekannte Kräfte aus der Reaktion $R = P_1 + P_2$ hergeleitet werden müssen, zuerst eine dieser Kräfte bestimmen oder in ein bestimmtes Verhältnis zu einer der anderen Kräfte bringen. Das erstere ist leicht möglich, wenn man die in D wirkende Belastung P_2 in zwei Seitenkräfte zerlegt, welche in die Richtungen der Streben HL und HM fallen; denn diese müssen die auf die Hängesäule HD kommende Kraft, welche gleich P_2 sein muss, ganz aufnehmen.

Zieht man demnach durch b eine Linie $bm \parallel HL$ und durch c eine solche $cm \parallel HM$, so hat man, da $bc = P_2$ ist, die angegebene Zerlegung bewirkt.

Man wird nun durch a eine Linie $ak \parallel HL$ zu legen haben und diese in k durch eine horizontale Linie mk begrenzen, welche man durch den vorher gefundenen Punkt m legt; dann $kh \parallel KL$ ziehen und ch horizontal legen. Es ist dann:

ak die Druckkraft für die Strebe CL,
kh „ „ „ „ „ KL und
ch „ „ der Widerlager in L.

In dem Punkte C wirkt die äussere Kraft $P_1 = ab$. Zieht man demnach bl horizontal oder parallel zu CD, so muss diese Linie die Kraft 4 darstellen, welche CD belastet und der Abschnitt lk, welchen die Linie bl von ak abschneidet, die Kraft 5, welche das obere Strebenstück CH in Anspruch nimmt.

Aus dem Rechtecke $blnc$, in welchem bl die Kraft 4, bc aber die Belastung P_2 des Punktes D darstellt, erhält man die Kraft $ln = 7$ für die Hängesäule DH und diejenige $cn = 8$ für das Balkenstück DE.

Es ist nun in dem Punkte H die Kraft 5 und diejenige 7 bekannt. Es schliessen sich hier die Hölzer HK und HM an. Die Kräfte, welche in diesen wirken, müssen denjenigen 5 und 7 das Gleichgewicht halten. Man findet, dass eine Linie, welche in dem Kräfteplane die Endpunkte k und n der Kräfte 5 und 7 verbindet, also kn parallel zu HM ist, dass also diese Strebe eine Kraft 6 aufzunehmen hat, welche durch kn ausgedrückt ist, und dass für den Balken HK eine Kraft nicht bleibt. Es ist der Balken HK deshalb kein Konstruktionsteil. Derselbe kann fortbleiben, weil ihm nur der obere Anschluss der Konstruktion zufällt und derselbe möglicherweise benutzt werden kann, um an ihm Querverbände anzubringen.

Für den Punkt G, in welchem sich die Streben KL und HM kreuzen, erhält man als Kräftepolygon das Parallelogramm $khgn$, welches nur zu zeichnen ist, um die Kräfte 1 und 6 in eine solche Lage zu bringen, wie sie für die weitere Zeichnung des Kräfteplanes erforderlich ist. Diese ist aber überhaupt nicht mehr erforderlich, weil die rechts von der vertikalen Mittellinie liegenden Verbandstücke ebenso belastet sind, wie die links befindlichen.

Eine der vorigen gleiche Anordnung zeigt **Fig. 195, Taf. XII.** Es sind hier aber die Hängesäulen KD und LG so gestellt, dass die Punkte C, E, F und H, in welche die vier Streben der horizontalen Balken schneiden, zu beiden Seiten der Fusspunkte D und G der Hängesäulen liegen und den Balken AB so stützen, dass diese Punkte als Lastpunkte angenommen werden können.

Bei Zeichnung des Kräfteplanes ist vorausgesetzt, dass die Punkte C und H mit $ab = fg = P_1$, die Punkte D und G mit $bc = ef = P_2$ und die Punkte E und F mit $cd = de = P_3$ in Anspruch genommen werden. Bei der Darstellung des Kräfteplanes verfährt man genau in derselben Weise, wie dieses vorher angegeben ist. Der Plan erscheint nur etwas zusammengesetzter, weil die belasteten Punkte mehr sind.

Eine für alle Fälle, d. h. gleiche und ungleiche Belastungen, zu gebrauchende Konstruktion zeigt **Fig. 196, Taf. XII**, für welche auch unter verschiedenen Annahmen drei Kräftepläne auf der **Taf. XII** angegeben sind.

Der Plan I ist für den Fall gezeichnet, dass auf dem Balken AE zwei einsäulige Hängewerke ALC und LME stehen und der Punkt C, in welchen die Streben CL und CM den Balken AE treffen, durch die Streben CH und CK unterstützt ist. An Belastungen sind in B und D diejenigen P_1 vorausgesetzt, welche in ad und hm dargestellt sind und für den Punkt C die Belastung $dh = P_2$.

Die Reaktion in A ist gleich $\frac{1}{2} P_1$. Man macht also ae gleich dieser Reaktion, zieht $eb \parallel AL$ und $ab \parallel AB$, so hat man in diesen Linien die Kräfte $1a$ und 2. Für den Punkt L hat man dann die Kraft $1a$ durch zwei in die Richtungen der Strebe LC und der Hängesäule LB fallende Kräfte im Gleichgewicht zu halten. Man wird demnach durch den Endpunkt e der Kraft be eine Linie parallel zu CL legen, was in $ec = 5$ geschehen ist und durch b eine vertikale Linie bc ziehen, welche dann die Kraft 3 für die Hängesäule gibt. Für den Punkt B erhält man dann aus 2, 3 und P_1, d. h. den bekannten Kräften und der unbekannten 4, das Rechteck $abcd$ und findet daraus, dass die Kraft 4 derjenigen 2 gleich ist.

In dem Punkte C wirken nun die bekannten Kräfte 5, 4 und P_2 und die noch unbekannten 8, 11, 6 und 7. Es ist hier also eine Aufgabe zu lösen, dessen Auflösung nur unter gewissen Verhältnissen möglich ist, d. h. man muss erst einige der unbekannten Grössen zu bestimmen suchen, was ohne grossse Schwierigkeit möglich ist.

Bei der gleichförmigen Belastung der Punkte B und D und der gleichen Lage der Streben LC und MC muss einmal die Kraft 8 gleich derjenigen 5 sein, dann aber noch die horizontale Kraft 11 gleich der 4. Dieses vorausgesetzt hat man nur noch die unbekannten Kräfte 6 und 7, welche sich nun bestimmen lassen, wenn man aus den Kräften 4, 5, 6, 7, 8, 11 und P_2 eine geschlossene Figur bildet, was in $dcefkih$ geschehen ist.

Man kann aber auch zum Ziele kommen, wenn man erst den Punkt H betrachtet, ehe man zu dem Punkte C schreitet.

Die Reaktion in H muss gleich $\frac{P_2}{2} + \frac{P_1}{2}$ sein. Der erste Teil dieses Ausdruckes folgt aus der in C angebrachten Belastung P_2, der andere aber aus dem Hängewerke ALC, welches in B mit P_1 belastet ist. Die Streben AL und CL haben gleiche Neigung, die Reaktion in A ist demnach dem vertikalen Druck in C gleich, also gleich der Hälfte der Belastung P_1, welche in B angebracht ist. Man hat nun in dem Kräfteplane $ed = \frac{1}{2} P_1$ und $dh = P_2$. Halbiert man also dh in g, zieht gf horizontal und $ef \parallel CH$, so hat man in cf die Kraft 6 und in gf den horizontalen von dem Widerlager aufzunehmenden Druck 13.

In dem Kräfteplane II ist nun die Konstruktion des Hänge- und Sprengwerkes in der Weise geändert, dass die Streben AL und EM wegfallen und dafür Streben LH und MK gesetzt sind, welche mit den Streben CH und CK die gleichen Fusspunkte H und K haben, also den Balken AE kreuzen und zwar in G und F. Diese Kreuzungspunkte sind jedoch nicht als Lastpunkte angenommen, was aber geschehen kann.

Macht man $ab = P_1$ und zieht $ac \parallel LH$ und $bc \parallel LC$, so erhält man in diesen beiden Linien die Kräfte 1 und 5, welche in die Streben HL und CL übergehen.

Die Reaktion in H muss nun gleich $P_1 + \frac{1}{2} P_2$ sein. Ist also $bf = P_2$ und diese Länge in e halbiert, so ist $be = \frac{1}{2} P_2$, also ae die Reaktion. Zieht man demnach $cd \parallel CH$ und de horizontal, so hat man für den Punkt H das Kräftepolygon $acde$ und nimmt daraus die Kräfte:

$ac =$ 1 für die Strebe LH,
$cd =$ 6 „ „ „ LH,
$ed =$ 13 „ das Widerlager in H.

Ausserdem ist vorher schon die Kraft 5 gefunden, welche gleich bc ist.

Aus 1 und 5 resultiert nun die Kraft $ab = 3 = P_1$ gleich der Belastung der Hängesäule BL.

In dem Punkte C sind nun die bekannten Kräfte 5, 6 und P_2 und die unbekannten 8 und 7 in Betracht zu ziehen. Der horizontale Balken AE ist unbelastet, weil die Strebe LH ihren Druck nach H überträgt und die Drücke der Streben LC und MC sich aufheben, ohne in den Balken AE überzugehen. Man hat demnach für den Punkt C das Kräftepolygon $bcdgf$ und entnimmt daraus $gd = 7$ und $gf = 8$.

Bei Zeichnung des Kräfteplanes III ist nun angenommen, dass die Streben AL und EM nicht vorhanden, dass die Punkte B mit P_1, C mit P_2 und D mit P_3 in Anspruch genommen sind, dass also eine ungleichmässige Belastung stattfindet. Man bestimmt durch Kräfte- und Seilpolygon die Reaktionen $R = M_1 W$ für H und $WN = R_1$ für K, macht $ae = R$, $ab = P_1$, zieht $ac \parallel LH$ und $bc \parallel LC$, um die Kraft $1 = ac$ für die Strebe LH zu erhalten. Dann zieht man $ed \parallel CH$ und ed horizontal und hat in cd die Kraft 6 für die Strebe CH und in ed den Druck 13. Die Kräfte, welchen die Hängesäulen widerstehen müssen, sind $ab = 3 = P_1$ und $fh = 10 = P_3$. Die Strebe LC ist mit $5 = cb$ und diejenige MC mit $8 = fg$ in Anspruch genommen. Für die Streben CK und MK findet man dann die Drücke $dg = 7$ und $gh = g$.

Sollte der Schluss des Kräfteplanes nicht erfolgen, so hat man, wenn Zeichenfehler nicht vorliegen, die Streben CK und MK in solche Richtungen zu bringen, dass der erforderliche Schluss der Figur des Kräfteplanes erfolgt.

Fig. 179, Taf. XII, ist ein Hängewerk $MKLN$, dessen Streben MK und LN den horizontalen Balken AB schneiden und ein Sprengwerk $MEFN$ zur Unterstützung der Lasten vereinigt. Beide Konstruktionen sind getrennt zu betrachten. Das Hängewerk ist in D und G, das Sprengwerk aber in E und F belastet. Die Belastungen müssen gleichmässig sein. Es gehört hierzu der Kräfteplan I. Sind die Punkte C und H, in welchen die Streben des Hängewerkes den Balken AB schneiden, auch noch Lastpunkte, so wird der Kräfteplan, wie dieses in II angegeben ist.

Eine ähnliche Konstruktion ist nach **Fig. 198, Taf. XII,** angegeben. Es setzen sich die Streben des Hängewerkes hier jedoch in die Enden des Balkens AB ein, so dass dieser als Konstruktionsteil anzusehen ist. Der Kräfteplan ist beigefügt.

d) Verteilung der Kräfte in verspannten Trägern.

Die verspannten Träger, auch Spannwerk, armierter Balken und so weiter genannt, unterscheiden sich von den Hängewerken dadurch, dass die tragende Konstruktion unter dem Balken angebracht ist und demnach die auftretenden Kräfte die umgekehrten werden. Was bei den Hängewerken Streben und Spannriegel sind, werden bei den verspannten Trägern Zugstangen und die Hängesäulen gehen in Streben über. Ebenso erleidet der horizontale Balken keine Zug-, sondern eine Druckwirkung.

Es bilden die verspannten Träger eine beliebte Konstruktion und haben vor Hänge- und Sprengwerke eine geringe Konstruktionshöhe voraus, auch kann man bereits gelegte Balken, welche sich als zu schwach erweisen, in den meisten Fällen leicht durch eine Verspannung nach Art dieser Träger absteifen und tragfähig machen.

Die Anordnungen der verspannten Träger sind sehr mannigfacher Art und finden sich für grosse Balkenlängen ausgeführt. Es wird aber vielfach als Norm angegeben, dass verspannte Träger mit mehr als vier oder fünf Streben, also ebensoviel Unterstützungen für den horizontalen Balken die grösste zulässige Grenze sei, wodurch dann allerdings der Ausdehnung in der Anwendung dieser Träger eine nicht sehr weite Grenze gesetzt ist.

Bei der Anordnung muss man, sobald ungleichmässige Belastungen des Trägers vorkommen können, immer aus den Stangen und Streben Dreiecke bilden. Bei gleichmässigen Belastungen sind Rechtecke zulässig, aber keineswegs zu empfehlen.

Fig. 199, Taf. XII, ist der abzusprengende Balken AB genannt. In der Mitte steht unter diesem die Strebe CD, deren Ende D durch die Zugstangen AD und BD gehalten wird. Die Belastung P liegt in C. Die Reaktionen in den Auflagern A und B sind demnach $R = R_1 = \frac{P}{2}$.

Man erhält den Kräfteplan einfach, wenn man $ab = R$ macht und die Linien ad und bd parallel zu AC und AD zieht. Macht man dann auch $bc = \frac{P}{2}$, also $ac = P$, zieht ce horizontal und de vertikal, so hat man in $aced$ das Kräftepolygon für den Punkt C, also in de die Kraft, welche in CD übergeht und in ce diejenige, welche vom dem Balkenende BC aufgenommen werden muss. Zieht man dann $be \parallel BD$, so ist bde das Polygon für den Punkt D und bce dasjenige für die Auflagerstelle B.

Um nun zu sehen, welche Kräfte pressend und welche ziehend wirkend sind, trägt man in ab einen nach oben gerichteten Pfeil, weil die Reaktion in A aufwärts wirkend gedacht werden muss. Im Anschlusse hieran hat man dann die Pfeilrichtung in ad von rechts nach links und in db von d nach b gerichtet. Trägt man diese Pfeilrichtungen in den Konstruktionsriss ein, so erhält man in AC einen solchen auf A gerichteten, hat hier also eine Druckkraft, während in AD, woselbst der Pfeil von A abweisend ist, eine Zugkraft auftritt.

Es muss also der Pfeil für den Punkt D in der Stange AD ebenfalls von D abweisen in der Richtung auf A zu. Trägt man dementsprechend den Pfeil in bd ein und folgt in dem Dreieck bde, welches das Kräftepolygon für den Punkt D darstellt, dem Zuge dieser Pfeilrichtung, so weist derselbe in de abwärts, also in CD auf den Punkt D und in eb auf b, also in DB auf B zu, weshalb man in CD eine Druck-, in DB aber eine Zugwirkung hat.

Verfährt man dann in dem Rechtecke $aced$, welches für den Punkt C gezeichnet wurde, ebenso, kehrt also den Pfeil in AC auf C, also in ad auf a zu, so erhält man in de einen aufwärts weisenden Pfeil, in ce einen solchen, welcher auf den Punkt e zeigt und in ac muss die Richtung des Pfeiles abwärts sein. Man findet demnach, dass in CB und CD Druckkräfte wirkend sind.

Ist die Belastung nicht in der Mitte zwischen A und B, sondern an einem beliebigen Punkte C, stellt man dann die Strebe CD unter diesen Punkt, so muss man nach **Fig. 200, Taf. XII**, die Auflagerreaktion durch Kräfte- und Seilpolygon bestimmen. Man findet für den Punkt A diese Reaktion $R = MW$ und für den Punkt B gleich $R_1 = WN$.

Die Zeichnung des Kräfteplanes ändert sich dann nur dadurch, dass der Punkt b nicht in der Mitte zwischen a und c zu liegen kommt, sondern dass, wie selbstverständlich, $ab = MW$ und $bc = WN$ gemacht werden muss.

Sind in dem zu unterstützenden oder abzusteifenden Balken zwei belastete Punkte C und D, **Fig. 201, Taf. XII**, so hat man, für den Fall die beiden Belastungen gleichgross sind und auch stets in gleicher Grösse verbleiben, unter C und D die Streben CE und DF zu stellen und die Zugstangen AE, EF und FB anzuordnen. Man hat dann in $CEFD$ ein Rechteck, welches sich bei einer eintretenden Vergrösserung oder Verschiebung der einen Belastung sofort verändern und die Konstruktion gefährden würde.

Unter der Annahme, dass also in C eine Kraft P und in D eine ebensolche wirkend ist, erhält man den Kräfteplan I.

Die Auflagerreaktionen sind $R = R_1 = P$. Man macht also $ab = bc = R = R_1 = P$, zieht $ad \parallel AC$; $bd \parallel AE$ und hat die beiden Kräfte 2 und 1, von denen die erstere das Balkenstück AC, die letztere die Stange AE belastet. Für den Punkt C erhält man dann das Rechteck $abed$ und für E das Dreieck bed als Kräftepolygon und entnimmt diesem die Kraft $3 = de$ für die Strebe CE, $eb = 4$ für das Balkenstück CD und ebenfalls gleich 8 für die Stange EF. Hiermit ist mehr als die Hälfte der Kräfte ermittelt, also die Auflösung vollendet, da, um den Kräfteplan vollständig zu erhalten, nur das Kopieren des bisher gezeichneten erforderlich ist.

Sind die Belastungen in C und D nun nicht gleichgross, sondern wirkt in C die Last $P_1 = ML$ und in D diejenige $P_2 = LN$, so bestimmt man die Auflagerreaktionen für die Punkte A und B in der bekannten mehrfach angegebenen Weise und findet für den Punkt A die Reaktion $R = MW$ und für B diejenige $R_1 = WN$.

Man zeichnet nun nach II den Kräfteplan. Macht $ad = P_1$, $ab = MW$, $dc = P_2$ und demnach $bc = WN$. Hierauf zieht man $af \parallel AC$, $bf \parallel AE$, $fe \parallel CE$ und muss dann, um für den Punkt E ein geschlossenes Kräftepolygon zu erhalten, die Punkte e und b durch eine Linie verbinden, welche nicht parallel zu EF liegt. Soll demnach die Konstruktion haltbar oder im Gleichgewichte sein, so muss man die Stange EF verlegen und in eine Lage EF_1 bringen, welche parallel zu eb ist.

Zieht man dann weiter $eg \parallel DF_1$, $gc \parallel DB$, $ed \parallel CD$, so muss die Stange BF eine Richtung erhalten, welche der Verbindung der Punkte b und g parallel liegt, also nach F_1B fallen. Es ergibt sich demnach für die Figur CDF_1E ein Trapez, welches ebenso zweifelhaften Halt gewährt, wie das Rechteck $CDFE$. Bei einer nur geringen Veränderung einer der Kräfte P_1 oder P_2 werden die Auflagerreaktionen andere, es fällt also der Punkt b an eine andere Stelle und demzufolge erhalten eb und bg andere Lagen, weshalb dann für EF_1B der Gleichgewichtszustand nicht mehr vorhanden sein kann.

Es ist deshalb bedeutend vorzuziehen das Rechteck $CEFB$ zu lassen und dasselbe durch eine Diagonale CF in zwei Dreiecke zu teilen. Der Kräfteplan nimmt in solchem Falle die in III angegebene Form an.

Für den Punkt A erhält man das Kräftepolygon ace,
„ „ „ E „ „ „ „ ecf,
„ „ „ C muss man nun aus den Kräften 2, 3, P_1, 4 und 9, von denen die beiden letzten unbekannt sind, das Kräftepolygon bilden. Man hat demnach im Anschluss an die Linien ae, ef und ab die $bg \parallel CD$ und $fg \parallel CF$ zu ziehen, und hat dann in bg die gesuchte Kraft 4, in fg aber diejenige 9.

Die Kraft P_1 wirkt abwärts, man hat also in ab einen auf b gerichteten Pfeil zu zeichnen, wenn man wissen will, in welcher Weise die Kraft 9 wirkend ist. Im Anschluss an diesen Pfeil ist dann derjenige in bg auf g, der in gf auf f, der Pfeil in fe auf e und in ea auf a zu gekehrt. Trägt man nun diese Pfeilrichtungen in den Konstruktionsriss ein, so findet man, dass in AC, CD und CE Druckkräfte wirkend sind, in CF aber eine Zugkraft wirkt.

Sind die Kräfte P_1 und P_2 nun nicht genau bestimmt, sondern können Aenderungen derselben vorkommen, so ist es zweckmässig, wenn man auch eine Stange von D nach E anordnet, welche sich dann mit CF kreuzt.

Einer Konstruktion, welche zu ihrer Anbringung einer grossen Höhe bedarf, sonst aber sehr zweckmässig ist, ist in **Fig. 202, Taf. XII,** angegeben.

Unter dem Balken AB stehen die Streben CE und DE, welche sich in dem Punkte E vereinigen, in welchem auch die Stangen AE und BE angreifen. Bei diesem Träger ist es gleichgültig, ob die in C und D wirkenden Belastungen gleich oder ungleich sind, der Gleichgewichtszustand muss immer erzielt werden und selbst dann ist der Träger zu gebrauchen, wenn z. B. der Punkt C unbelastet, der Punkt D dagegen die ganze Belastung aufzunehmen hat.

Für eine gleichmässige Belastung der Punkte C und D gilt der Kräfteplan I und für eine Belastung des Punktes C mit $P_1 = ML$ und einer solchen in D von $P_2 = LN$ der Plan II. Für den Fall der Punkt C gar nicht, sondern nur D durch eine Kraft in Anspruch genommen ist, ist der Kräfteplan **Fig. 203, Taf. XIII,** dargestellt.

Zu **Fig. 202, Taf. XII,** wird eine Erklärung nicht erforderlich sein.

Bei der Belastung nur eines Punktes D des Trägers ABE, **Fig. 203, Taf. XIII,** macht man MN gleich dieser Belastung, zieht durch A, B und den belasteten Punkt D vertikale Linien, zeichnet das Seilpolygon mnl und teilt durch $OW \parallel mn$ die Last MN in die Teile $R = MW$ und $R_1 = WN$. Man macht nun $ab = MW$, zieht $be \parallel AE$ und $ae \parallel AC$, erhält hierdurch die Kräfte 1 und 2. In dem Punkte C wirkt nun die bekannte Kraft 2 und Kräfte, welche in CD und CE übergehen, sind unbekannte. Da AC und CD in eine gerade Linie fallen, kann man aus Linien, welche parallel zu AC, CD und CE liegen, eine geschlossene Figur nicht bilden. Es muss deshalb die Kraft 2, welche für AC gefunden ist, auch in CD übergehen und

CE unbelastet sein. Für den Punkt C bildet man dann die Figur bed, indem man, von e und b der eb anschliessend, $ed \parallel DE$ und $bd \parallel BE$ zieht. Man erhält hierdurch die Kräfte 4 und 5. Macht man dann ac gleich der Belastung in D, zieht dc horizontal oder parallel zu BD, so erhält man die Kraft 6, welche das Balkenstück BD beansprucht. Für den Auflagerpunkt B hat man dann das Dreieck bcd als Kräftepolygon, in welchem bd und cd die vorher ermittelten Kräfte 5 und 6 sind, bc aber gleich WN sein muss.

Der Träger, **Fig. 204, Taf. XIII**, ist in C und D gleichmässig belastet. Die Stützen CE und DF werden durch je zwei Stangen AE und BE, sowie AF und BF gehalten. Die Stangen AF und BE kreuzen sich in G.

Man muss hier zuerst die Kräfte, welche in die Stangen AE und BE oder AF und BF fallen, ermitteln, weil in dem Punkte A, in welchem man, nach dem bisher angewendeten Verfahren, die Zeichnung des Kräfteplanes zu beginnen hat, drei unbekannte Kräfte und zwar die mit 1, 2 und 3 bezeichneten zu bestimmen sind, während nur die Reaktion bekannt ist.

Macht man nun ab gleich der Reaktion in A, also in dem vorliegenden Falle gleich der Belastung eines der Punkte C oder D, zieht durch a eine Linie $ac \parallel BF$ und durch b diejenige $bc \parallel AF$, so sind in den Linien ac und bc die Kräfte gefunden, welche in die Stangen BF und AF übergehen; denn es sind die Seitenkräfte zu der in D angebrachten Belastung. Da nun eine der drei Kräfte, welche für den Punkt A bestimmt werden müssen, bekannt ist, so kann die weitere Auflösung der Anforderung in der gewöhnlichen Weise erfolgen.

Hat man dann die Punkte A, C und E behandelt, d. h. für diese Punkte die sich ergebenden Polygone in den Kräfteplan eingezeichnet, so geht man nicht zu einem der Punkte D oder F über, sondern nimmt erst den Punkt G, in welchem sich die flach liegenden Stangen kreuzen. Für diesen Punkt erhält man das Parallelogramm $bcde$, findet dadurch neue Kräfte nicht, sondern legt nur die in den Stangen auftretenden Kräfte in eine solche Lage in den Kräfteplan, dass die weitere Zeichnung desselben erfolgen kann.

Fig. 205, Taf. XIII, ist der Balken AB auch an zwei Punkten C und D unterstützt, an jedem dieser Punkte aber zwei Stützen angebracht, von denen CE und DG vertikal, CF und DF aber so geneigt stehen, dass sie sich in dem Punkte F treffen. Die Stangen AE, EF, FG und GB verbinden die unteren Enden der Stützen mit den Enden A und B des horizontalen Balkens.

Für diesen Träger sind unter Annahme verschiedener Belastungen drei Kräftepläne gezeichnet.

Der Plan I setzt voraus, dass die Punkte C und D gleichstark in Anspruch genommen werden. Es ist hierbei, ebensowenig wie bei Plan II, welcher für verschiedene Belastungen der Punkte C und D gezeichnet ist, etwas besonderes zu bemerken, die Pläne werden ganz in der bisher benutzten Weise dargestellt.

Bei dem Plane III ist vorausgesetzt, dass nur der Punkt D eine Belastung hat, während C unbelastet bleibt. Auch hier zeichnet sich der Kräfteplan leicht in der bisherigen Weise. Durch Einzeichnung der Pfeile, um zu sehen, welche Teile der Konstruktion gedrückt und welche gezogen sind, findet man, dass die Stütze CF die Zugwirkung 5 auszuhalten hat, dieselbe muss deshalb dieser Beanspruchung entsprechend befestigt werden.

Einen verspannten Träger mit dreifach unterstütztem horizontalen Balken zeigt **Fig. 206, Taf. XIII.** Zu bemerken ist hierbei, dass die Kräfte 1 und 6 für die Stangenenden AG und GH, welche in ab und ac dargestellt sind, in eine Linie fallen, wenn AGH eine gerade Linie ist. Sind die Stangen AG und GH nicht in einer Richtung, sondern in G gebrochen, wie dieses in AGH_1 angegeben ist, so gelten in dem Kräfteplane die punktierten Linien und die mit a bezeichneten Nummern. Bei einer gleichmässigen Belastung der drei gestützten Punkte des Balkens AB kann man die Stangenenden GH_1 leicht so legen, dass die Stangen GM unbelastet sind. Bei Zeichnung des Kräfteplanes sind verschiedene Kräfte für die einzelnen belasteten Punkte von AB angenommen, wodurch der Kräfteplan die unsymmetrische Gestalt erhalten hat.

Fig. 207, Taf. XIII, ist noch ein zwischen den Auflagern achtmal unterstützter verspannter Träger mit seinem Kräfteplane für eine zur mittleren Achse des Trägers symmetrischen Belastung dargestellt. Es werden dies wohl die grössten ausgeführten derartigen Träger sein, welche aber in solchem Umfange nur bei Dachkonstruktionen vorkommen.

f) Fachwerkskonstruktionen.

Unter Fachwerksträgern versteht man Tragkonstruktionen, welche aus zwei Längsbalken, die durch eine zwischenliegende aus Streben und Stangen bestehende Anordnung in einer bestimmten Lage voneinander gehalten werden, so dass das Ganze eine Tragkonstruktion bildet. Die Längsbalken heissen Gurtungen, die gedrückten Zwischenteile Streben und die gezogenen Stangen oder Anker.

Es gibt verschiedene Systeme von Fachwerkskonstruktionen, die meist nach den Namen der ersten Konstrukteure benannt sind, auf deren Erklärung hier nicht eingegangen werden kann und die auch wenig zur Sache thun.

1. An einer Seite festgehaltene, beliebig durch feststehende Belastungen in Anspruch genommene Fachwerke.

Das einfachste Fachwerk, welches überhaupt denkbar ist, ist **Fig. 208, Taf. XIII**, dargestellt. Der horizontale Balken AB ist bei A befestigt, z. B. in der Mauer MN verankert. Das Ende B desselben wird durch eine Strebe BC gestützt, die ebenfalls in der Mauer MN ihren Halt findet. In B ist die Belastung P angebracht, welche übrigens nicht lotrecht zu AB, sondern in ganz beliebiger Richtung stehen und wirken kann.

Um für diese Konstruktion den Kräfteplan zu erhalten, zieht man $ab \parallel$ der Kraftrichtung P, $bd \parallel AB$ und $ad \parallel BC$. Man hat dann in bd die Kraft 2 für AB und in ad diejenige 1 für BC.

Damit man sich überzeugt, dass BC wirklich eine Strebe ist, zeichnet man in ab die Pfeilrichtung von oben nach unten ein und erhält dann in dem Zuge dieses Pfeiles in bd die Spitze auf d und in ad auf a zu gerichtet. Man hat also, wenn man die Pfeile in denselben Richtungen in den Konstruktionsriss einträgt, in BC den Pfeil auf B gerichtet, also eine Druckkraft, während der in AB befindliche Pfeil von dem Punkt B abweist, also eine Zugkraft angibt.

Die Befestigungsstelle bei C hat dann in der Richtung der Strebe BC der Kraft 1 Widerstand zu leisten, während die Befestigung bei A mit einer Kraft gleich 2 gezogen wird.

Kehrt man, wie **Fig. 209**, **Taf. XIII**, geschehen, die Konstruktion um, legt den horizontalen Balken AB nach unten und hält das Ende B durch eine bei C befestigte Stange BC, so bleibt auch der Kräfteplan derselbe, nur dem vorigen entgegengesetzt.

Ist der Balken AB länger, oder wird aus irgend einem andern Grunde bedingt, dass die Strebe eine wie **Fig. 210, Taf. XIII**, angegebene gebrochene Form BCD erhalten muss, so muss man von dem Knicke C der Strebe aus eine Verbindung mit AB herbeiführen, welche dann am besten in A selbst mit AB zusammentrifft.

Um hier die Kräfte, welche in den einzelnen Teilen auftreten, zu erhalten, macht man $ab = P$ gleich der in B wirkenden Belastung, zieht, um die Kräfte 1 und 2 zu erhalten, welche in BC und AB wirkend sind, $ac \parallel BC$ und $bc \parallel AB$. Für den Punkt C hat man aus Linien ac, dann $cd \parallel AC$ und $ad \parallel CD$ das in sich geschlossene Dreieck acd zu bilden, welchem man dann die Kräfte 3 und 4 entnehmen kann. Es bleibt nun noch der Punkt A. In diesen wirken in den Richtungen von AB und AC die Kräfte $2 = bc$ und $3 = cd$. Man hat demnach den Gesamtdruck, welcher in A auf die Befestigung ausgeübt wird, in Grösse und Richtung, wenn man b und d durch eine gerade Linie verbindet, welche dann die Mittelkraft zu den Kräften 2 und 3 ist. Diese zerlegt sich aber in $ed = 8$ und $be = 7$, von denen die erstere vertikal und die andere horizontal ist. Diesen beiden Kräften hat demnach die Befestigungsstelle A zu widerstehen.

In der Befestigungsstelle D wirkt nur die Kraft $4 = ad$. Es muss also die Unterstützung in dem genannten Punkte so beschaffen sein, dass sie in der Richtung von CD die Kraft 4 aufnehmen kann. Soll diese Kraft aber in andere Richtungen, z. B. in eine vertikale und horizontale zerlegt werden, so zieht man df horizontal durch d und hat dann in dieser Linie die in D auftretende horizontale Kraft 5 und in $af = 6$ die zugehörige vertikale Kraft.

Durch entsprechende Einzeichnung der Pfeile in den Kräfteplan und Konstruktionsriss findet man dann, dass AB und AC gezogen, BC und CD aber gedrückt sind.

Steht der Punkt B_1 soweit von A ab, dass eine mehrfache Verbindung zwischen AB_1 der obern Gurtung und CD_1 der untern Gurtung stattfinden muss, um eine sichere Lage für diese Teile zu erhalten, so erfolgt diese durch Streben und Stangen, welche zwischen beide gebracht werden. Dieselben sind **Fig. 211, Taf. XIII**, so gestellt, dass je zwei derselben gleichschenklige Dreiecke mit den anschliessenden Gurtungen bilden.

Ist nun diese Konstruktion nur in dem Punkte B durch eine einfache Last P in Anspruch genommen, so erhält man den unter I gezeichneten Kräfteplan, welcher einfach ist und sich wohl von selbst erklärt, wozu nur noch bemerkt werden mag, dass alle in die obere Gurtung AB fallenden Kräfte in der Linie be liegen, dass die Kraft $2 = bc$, $6 = bd$, $10 = be$ ist, dass die Kräfte der unteren Gurtung in ah liegen und ebenfalls immer von dem Punkte a aus zu messen sind, dass ferner der Punkt A auf die Befestigung nur eine horizontale Kraft gleich $be = 10$ ausübt und dass man die horizontale und vertikale Kraft für den Punkt C erhält, wenn man eh vertikal zieht und ag bis zum Durchschnittspunkte h mit eh verlängert. Es ist dann ah die Kraft 13 und eh die Kraft 12.

Sind ausser dem Endpunke B noch die Punkte F und E der oberen Gurtung belastet und zwar der Reihe nach mit P_1, P_2 und P_3, so erhält man für den Kräfteplan die Figur II.

Man macht $ab = P_1$ gleich der äusseren Kraft in B, zieht $be \parallel BF$, $ae \parallel BD$ und hat die Kräfte 1 und 2.

Für Punkt D ist $ah \parallel DG$, $eh \parallel DF$, gefundene Kräfte 3 und 4,
„ „ F „ $ef \parallel FE$, $fh \parallel FG$, „ „ 5 „ 6,
$bc = P_2$,
„ „ G „ $ak \parallel DC$, $fk \parallel GE$, „ „ 7 und 8,
„ „ E „ $dg \parallel AB$, $gk \parallel CE$, „ „ 9 „ 10,
$cd = P_3$,
„ „ C „ $gl \parallel AC$, $lk \parallel CD$, „ „ 12 „ 13.

Sind nun nicht nur die Punkte B, F und E der oberen Gurtung mit den Kräften P_1, P_2 und P_3 belastet, sondern sind auch die Punkte D und G der unteren Gurtung mit P_0 und P_{00} in Anspruch genommen, so ergibt sich der Kräfteplan III. Beim Zeichnen dieses Kräfteplanes hat man zu berücksichtigen, dass $ab = P_1$ gemacht ist, dass dann die in der oberen Gurtung des Trägers wirkenden Kräfte P_2, $P_3 \ldots$ von b nach d zu, also nach unten hin, auf der Linie fd abzutragen sind, während die Kräfte P_0, $P_{00} \ldots$, welche in der untern Gurtung wirken, von a aus nach oben, also in der Richtung auf f gemessen werden müssen.

Stehen die Stangen und Streben CE, EG, $GF \ldots$ nicht wie in der Figur, sondern sind dieselben ganz beliebig angeordnet, so ändert solches wohl die Gestalt der Kräftepläne, nicht aber das Verfahren in der Herstellung derselben.

Ebenso bleibt das Verfahren bei Zeichnung der Kräftepläne ungeändert, wenn die Gurtungen nicht parallel zu einander liegen, sondern beliebige Formen haben. So sind z. B. bei den **Fig. 212 u. 213, Taf. XII**, die unteren Gurtungen, in den **Fig. 214 u. 215, Taf. XIII**, aber die oberen Gurtungen nicht horizontal, sondern beliebig gelegt. Die letzteren beiden Anordnungen sind als Dächer für Perrons zu benutzen.

2. Fachwerke auf zwei Unterstützungen.

Liegen die Fachwerke an ihren Enden auf Unterstützungen, so sind die Gurtungen, dieselben mögen eine Form haben welche sie wollen, am meisten in Anspruch genommen, wenn die Balken über ihre ganze Länge mit der grössten Belastung versehen sind. Die oberen Gurtungen haben nur Druckspannungen aufzunehmen, während die unteren Gurtungen nur auf Zug in Anspruch genommen werden.

Die Streben und Stangen zwischen den Gurtungen erreichen dann ihre grössten Druck- und Zugspannungen, wenn der Balken bis zu dem Felde, in welchem die Spannungen bestimmt werden sollen, an seiner längeren Seite voll belastet, an der kürzeren Seite aber unbelastet ist.

Ergeben sich für eine Stange Druckspannungen oder für eine Strebe Zugkräfte, so muss man durch Verlegen dieser Teile oder durch Einschaltung neuer Verbandstücke die in verkehrter Weise beanspruchten Teile entlasten, oder die Wirkungen in einer für die vorhandenen Verbandstücken entsprechenden Weise umzuändern suchen. Ist dieses nicht möglich, sondern haben einzelne Teile abwechselnd Zug- und Druckwirkungen aufzunehmen, so müssen ihre Querschnitte dieser Beanspruchung entsprechend gewählt werden, und die Befestigungen in solcher Weise erfolgen, dass dieselben im stande sind, sowohl dem Zuge als dem Drucke Widerstand leisten zu können.

Fachwerke mit nur feststehenden Belastungen.

Haben die Fachwerke nur feststehende Belastungen zu tragen oder sind dieselben gleichmässig über ihre ganze Länge belastet, wie solches bei kleinen Strassenbrücken beispielsweise angenommen wird, woselbst in der Regel ein Menschengedränge als die grösste vorkommende Belastung gilt, so kann man die in den Gurtungen und den Verbandstücken zwischen diesen auftretenden Kräfte leicht durch einen Kräfteplan und unter Umständen auch auf noch einfachere Weise bestimmen.

Ist z. B. der Träger, **Fig. 216, Taf. XIV**, mit den parallelen Gurtungen AB und CD und nach dem Systeme des rechtwinkeligen Dreiecks gebildet, in der oberen Gurtung, also in den Punkten $E, F, G, H \ldots$ mit einer gleichen Kraft P in Anspruch genommen, so hat man, wenn die Anzahl der belasteten Knotenpunkte n ist, wobei die Punkte C und D aber nicht mit zu berücksichtigen sind, die Auflagerreaktionen in A und B gleichgross und gleich $\frac{n \cdot P}{2}$. Die in den Punkten C und D enthaltenden Belastungen sind je gleich $\frac{P}{2}$. Diese gehen direkt in die Unterstützungen bei A und B über, haben also auf die Reaktionen keinen Einfluss.

Macht man demnach ab gleich der Auflagerreaktion in A, zieht ac parallel zu AE und bc parallel AE_1, so hat man in diesen beiden Linien die in die genannten Verbandstücke fallenden Kräfte. Die Reaktion ab wirkt von unten nach oben, es muss also der Pfeil in ac von a auf c gerichtet sein und in bc ein solcher eingezeichnet werden, welcher von c in der Richtung auf b liegt. Man hat deshalb in AE eine Druckwirkung und in AE_1 eine solche, welche ziehend ist.

In dem Punkte E wirkt nun die Kraft $1 = ac$ und die äussere Belastung $P = ag$. Zieht man daher durch g eine horizontale Linie gd und durch c eine vertikale cd, so müssen diese beiden Linien die Kräfte 3 und 4 darstellen, welche in EF und EE_1 übergehen.

Der Pfeil in ac war auf c zu gerichtet. Man muss denselben, um für den Punkt E die in den anschliessenden Teilen befindlichen Kräfte auf ihre Zug- und Druckwirkung zu untersuchen, umkehren, also auf a zu richten. Es entfällt dann in die Linie gd ein auf d zu gerichteter Pfeil und in der Vertikalen dc ein solcher, dessen Spitze auf c zeigt. Man hat demnach für EF eine pressende, für EE_1 aber eine ziehende Kraft.

Für den Punkt E_1 erhält man dann als Kräftepolygon die Figur $bcdeb$, es ist also de die Kraft 5, welche von der Strebe E_1F aufzunehmen ist, und be gibt die Zugkraft, welche in das Gurtungsstück E_1F übergeht.

Man erhält in dieser Weise fortfahrend und immer abwechselnd einen Knotenpunkt der unteren und dann einen solchen der oberen Gurtung in Betracht ziehend, ohne jede Schwierigkeit den Kräfteplan und ersieht daraus, dass die Kräfte in den Gurtungen von dem Auflager nach der Mitte zu an Grösse zunehmen, diejenigen in den Streben und Stangen zwischen den Gurtungen aber von dem Auflager nach der Trägermitte immer kleiner ausfallen. Die mittlere vertikale Stange LL_1 bleibt unbelastet, denn man hat für den Punkt L das Kräftepolygon $hklmnh$, in welchem ein Platz für eine in LL_1 übergehende Kraft nicht ist.

Ist nicht die obere, sondern die untere Gurtung belastet, sind also die äusseren Kräfte in E_1, F_1, G_1, H_1 .... wirkend, so findet man den Kräfteplan in derselben Weise. Derselbe ist zur Hälfte in II angegeben. Bei dieser Belastungsweise ist die mittlere Stange LL_1 mit einer Kraft $qr = 25$, welche ihrer Grösse nach gleich P ist, in Anspruch genommen. Im übrigen bleiben aber alle Kräfte ihren Grössen und Richtungen nach dieselben, wie bei dem in der oberen Gurtung belasteten Balken.

Man kann nun die Kraftwirkungen auch auf die Weise bestimmen, dass man das Kräftepolygon MNO, bei dem der Pol O von der Kräftelinie MN um die zweifache Höhe AC des Trägers absteht, zeichnet und diesem entsprechend das Seilpolygon bildet. Man hat dann in den Loten, welche man in dem letztern Polygon zieht, die Kräfte, welche in den Gurtungen auftreten und ist beispielsweise

st gleich der halben Belastung der Gurtungsteile AE_1 und EF,
uv " " " " " " E_1F_1 " EG,
wx " " " " " " F_1G_1 " GH
und so fort.

Zieht man dann $MS \parallel BC_1$, $NS \parallel AE$, so hat man in diesen Linien die Kräfte für die Streben BC_1 und AE, vorausgesetzt, dass SW_0 eine horizontale durch W_0 gehende Linie ist. W_0 ist der Punkt, welcher durch Zeichnung der Linie OW_0 parallel zu der Schlusslinie des Seilpolygons gefunden wird. Ist dann $MT = NV = P$, so hat man in TU und VU, welche Linien parallel zu den Richtungen der Streben, also auch parallel zu MO und NO liegen, die Kräfte für die Streben D_1E_0 und E_1F.

Zieht man die Linien parallel zu den Streben und immer durch die Endpunkte der Kräfte P in MN gehend, weiter, so erhält man nacheinander die Kraftwirkungen für alle Streben.

Die Stangen sind dann mit den auf MN liegenden Kräften belastet. Es sind $MW_0 = NW_0$ die Reaktionen in A und B. $TW_0 = VW_0$ die Kräfte für die Stange C_1D und E_1E, $WW_0 = VY$ die Kräfte für die Stangen E_0F_0 und FF_1 und so fort.

Es ist dieser Träger für die Ausführung unzweckmässig, weil bei demselben die Streben in diagonaler Richtung liegen, die Stangen dagegen vertikal stehen, die ersteren also länger sind als die letztern. Man wird deshalb gut thun, solchen Trägern die Form **Fig. 217, Taf. XIV**, zu geben, woselbst die Diagonalen die gezogenen, die Vertikalen aber die gepressten Teile sind.

In der Figur ist der Kräfteplan I für die Belastung der oberen Gurtung gültig und derjenige II für eine gleichmässige Belastung der unteren Gurtung. Man ersieht, dass die Kräftepläne von den vorhergehenden ihrer Form nach nicht abweichend sind. Es ist aber die mittlere Strebe EF, dann mit $gh = P$ in Anspruch genommen, wenn die Belastung in der oberen Gurtung liegt, während diese Strebe unbelastet ist, wenn die untere Gurtung belastet ist.

In **Fig. 218, Taf. XIV**, ist ein Träger AB angegeben, welcher nicht nur durch eine gleichförmig verteilte Belastung, für jeden Knotenpunkt der oberen Gurtung P, sondern auch durch die über grössere Längen verteilten Lasten Q_0 und Q_{00} und durch zwei Einzelkräfte P_1 und P_2 in Anspruch genommen ist. Die Belastungen liegen sämtlich in der obern Gurtung CD.

Man teilt hier zunächst die Belastungen Q_0 und Q_{00} in Teile, so dass die Teillinien immer in der Mitte der Trägerfelder liegen. Die Teile sind mit $q_1, q_2, q_3 \ldots$ bis q_9 bezeichnet. Die Teile q_1 und q_9 dieser Belastungen gehen in die Unterstützungen A und B direkt oder durch die Streben AC und BD über, haben auf die Konstruktion daher keinen Einfluss.

Man hat nun das Kräftepolygon zu zeichnen.

In dem Punkte E wirkt P und q_2, man macht also MR diesen Kräften gleich. Ebenso ist in F, da $q_3 = q_2$ ist, dieselbe Belastung vorhanden, weshalb $RS = MR$ zu machen ist. In dem Punkte G

sind nun P, P_1 und q_4 wirkend, welche Kräfte durch ST dargestellt sind. Der Knotenpunkt H ist nur durch P in Anspruch genommen, man macht deshalb $TU = P$. UV ist gleich $P + q_5$ gleich der Belastung des Punktes K, dann folgt für den Knotenpunkt L die Belastung $VX = P + P_2 + q_6$ und nun noch für die Punkte M und N die gleichen Beanspruchungen $XY = YN = P + q_7 = P + q_8$.

Man nimmt nun den Pol O_1 beliebig an, zeichnet das Seilpolygon und findet dann die Reaktion in A gleich MW und diejenige in B gleich WN.

Man zeichnet nun den Kräfteplan genau in der vorher angegebenen Weise und wie dieses in der Figur geschehen ist. Es zeigt sich dabei nichts Auffallendes, die Kräfte in den Gurtungen und den Streben und Stangen fallen an der rechten Trägerseite, d. i. in der stärker belasteten Hälfte grösser aus als an der linken Seite, was selbstverständlich ist.

Ist der Träger AB, **Fig. 219, Taf. XIV**, nur in einzelnen, dem einen Auflager zunächst liegenden Punkte stärker belastet, als in den übrigen, ist also z. B. die Belastung aller Knotenpunkte von C bis F mit P, die rechts von F liegenden aber mit $P + P_1$ belastet, so ermittelt man durch Kräfte- und Seilpolygon die Auflagerreaktionen MW und WN und zeichnet den Kräfteplan. Man findet hier, dass in dem Felde $EFHG$ die Stange GF gedrückt wird. Man muss deshalb in diesem Felde die Stange EH anordnen, welche dann mit der Kraft 21 auf Zug in Anspruch genommen wird. Es ist dieses ein Fall, der wohl zu berücksichtigen ist, und der bei längern Trägern, bei welchen nur wenig Knotenpunkte der einen Hälfte stärker belastet sind, als die übrigen, für mehrere Felder eintreten kann. Soll diese Umlegung der Stangen nicht erfolgen, z. B. aus Rücksichten auf das Aussehen, so müssen die dann als gedrückt auftretenden Diagonalen als Streben behandelt werden.

In **Fig. 220, Taf. XIV**, ist ein Träger mit parallelen Gurtungen dargestellt, welcher nach dem System des gleichschenkligen Dreiecks gebildet ist. Der mit I bezeichnete Kräfteplan ist für eine gleichmässige Belastung der obern Gurtung und der Plan II für den Fall, in welchem die Knotenpunkte E und F stärker belastet sind, als die übrigen.

Für die gleichmässige Belastung sind die Pfeilrichtungen in den Konstruktionsriss eingetragen. Es ergibt sich hieraus, dass die beiden mittleren Diagonalen gedrückt sind, während dann an der linken Trägerhälfte die von links nach rechts geneigten Diagonalen Druckwirkungen aufzunehmen haben, während die übrigen gezogen sind. In der rechten Trägerhälfte ist das Umgekehrte der Fall. Sind die Gurtungen nicht parallel, sondern beide oder nur eine derselben gebogen, so bleibt das Verfahren genau dasselbe, so lange nur feststehende Belastungen vorhanden sind. Es ist ein solcher Träger, welcher ganz beliebig geformt ist, in **Fig. 221, Taf. XIV**, angegeben, von weiteren Ausführungen solcher Konstruktionen aber Abstand genommen, weil dieselben wohl nur sehr selten an Stellen zur Anwendung gebracht werden, an welchen es sich nur um Unterstützungen feststehender Belastungen handelt.

In der angegebenen Fig. 221 ist angenommen, dass der Träger bei A und B aufliegt, dass sowohl die obere wie die untere Gurtung gebogen ist und dass alle Knotenpunkte belastet sind, dass also sowohl in den oberen als unteren Gurtungen äussere Kräfte auf den Träger einwirken.

Man zeichnet nun zuerst das Kräftepolygon und trägt dabei die Kräfte P der Reihe nach wie sie auf den Träger einwirken, auf der Linie $M_0 N_0$ ab. Man hat also nicht erst die Kräfte der einen und dann der andern Gurtung zu nehmen.

Weil P_1 zunächst an A liegt, ist mit dieser Kraft zu beginnen. Es folgen dann P_2 und P_3 gemeinschaftlich, weil diese beiden Kräfte in einer vertikalen Linie DJ liegen; dann folgen aus demselben Grunde $P_4 + F_5$, $P_6 + P_7$, $P_8 + P_9$, hierauf weiter für sich P_{10}, schliesslich aber gemeinschaftlich $P_{11} + P_{12}$. Den Pol nimmt man beliebig an, zieht die Polstrahlen, zeichnet das Seilpolygon und parallel zu der Schlusslinie dieses den Strahl OW, so ist $M_0 W$ die Reaktion in A und WN_0 die in B, also vollständig übereinstimmend mit dem bisherigen Verfahren.

Der Kräfteplan ist in der Figur in dreimal so grossem Massstabe gezeichnet, als die übrigen Teile der Figur. Man hat zu beachten, dass die Kräfte, welche in der unteren Gurtung wirkend sind, von unten nach oben aufgetragen werden, also wenn ab die Reaktion in A ist, von b in der Richtung nach a, während die in der oberen Gurtung wirkenden Kräfte von a in der Richtung auf b abgetragen werden. Im übrigen verfährt man bei der Herstellung des Kräfteplanes genau in der immer eingeschlagenen Weise. Für die Stücke GM und GN ergeben sich Kräfte nicht. Es können demnach diese beiden Stücke fortbleiben, wenn dieselben nicht aus dem Grunde beibehalten werden sollen, dass eine möglicherweise durch irgend welche Zufälligkeiten herbeigeführte Veränderung der Kräfte P_1 die Teile GM und GN belasten kann.

Konstruktionen mit feststehenden und beweglichen Belastungen (Brückenkonstruktionen).

Bei Brückenkonstruktionen, welche für Strassenverkehr benutzt werden sollen, nimmt man meist als die feststehende Belastung das eigene Gewicht der Konstruktion selbst und der Brückenbahn, als veränderliche Belastung aber Menschengedränge an und rechnet dafür 400 bis 500 kg für jeden Quadratmeter Brückenfläche.

Da aber bei dem Transporte schwer geladener Wagen eine ganz andere Beanspruchung der Brückenkonstruktion herbeigeführt wird, als durch Menschengedränge, so muss man sich immer von dem Einflusse, den solche Wagen auf die Brücke ausüben, überzeugen, und wenn man für einzelne Konstruktionsteile stärkere Beanspruchungen findet, als diese bei dem Gewichte des Menschengedränges entstehen, nach denselben die Dimensionen solcher Teile bestimmen.

Bei Eisenbahnbrücken hat man eine aus zwei oder drei Maschinen und schwersten bis zur zulässigen Grenze beladener Güterwagen bestehenden Zug auf der Brücke fahrend anzunehmen.

Hänge- und Sprengwerke kommen jetzt wohl nur noch bei untergeordneten Strassenbrücken zur Benutzung, während bessere Strassenbrükken und Eisenbahnbrücken mit Fachwerkträgern und erstere auch mit verspannten Trägern ganz aus Eisen konstruiert versehen werden. Es sind deshalb die Hänge- und Sprengwerke, welche vor noch nicht langer Zeit bei den Brückenkonstruktionen eine Hauptrolle spielten, jetzt sehr nebensächlich und das auch wohl mit vollem Rechte, weil die dem Wetter unausgesetzt unterworfenen Holzkonstruktionen bedeutender Reparaturkosten bedürfen und nur eine geringe Dauer haben. Aus diesem Grunde werden auch schon seit längerer Zeit die Eisenkonstruktionen, und namentlich auch verspannte Träger, vielfach zu kleineren Strassenbrücken, welche in gering benutzten Strassen liegen und wenig Bedeutung haben, benutzt.

a) Hänge- und Sprengwerke.

Der Vollständigkeit wegen müssen einige Holzkonstruktionen, welche nach Art der Hänge- und Sprengwerke ausgeführt sind, Mitteilung finden. Es sind hierzu zwei Hängewerke, das eine mit zwei, das andere mit drei Hängesäulen benutzt. Sprengwerke und die vereinigten Hänge- und Sprengwerke werden genau in derselben Weise behandelt, so dass die Vorführung auch solcher Anordnungen überflüssig erscheint.

Fig. 222, Taf. XV, ist das zweisäulige Hängewerk dargestellt.

Die Spannung AB ist 16,5 m und diese durch die Punkte C und D, in welchen die Hängesäulen CE und DF den Balken AB fassen, in drei gleiche Teile eingeteilt, so dass also $AC = CD = DB = 5{,}5$ m ist. Die Streben AE und BF stehen unter 45 Grad geneigt. Der Massstab, in welchem der Konstruktionsriss ausgeführt ist, ist so gewählt, dass 5 mm 1 m darstellen. Als Massstab für die Kräfte ist 1 mm gleich 500 kg genommen.

Die Belastung, welche für die Punkte C und D aus dem Gewichte der Konstruktion folgt, soll 4000 kg genommen werden und die durch Menschengedränge herbeigeführte Belastung soll auf die Punkte C und D reduziert ebenfalls 4000 kg betragen.

Man hat nun um die Spannungen, welche in den einzelnen Teilen auftreten, mehrere Kräftepläne zu zeichnen, welche verschiedenen Belastungen entsprechen, die so anzunehmen sind, dass dieselben möglicherweise eintreten können.

Zunächst hat man einen Kräfteplan zu entwerfen, welcher für die Annahme der unbelasteten Brücke Gültigkeit hat. Es sind dann also die Kraftwirkungen in C und D zu je 4000 kg anzunehmen. Man findet hierbei die kleinsten Kräfte für die einzelnen Hölzer. Der Plan ist unter I angegeben.

Man hat dann in II den Kräfteplan für die vollständig belastete Brücke. Es ist C gleich D mit 8000 kg in Anspruch genommen. Man entnimmt diesem Plane die grössten Beanspruchungen der Konstruktionsteile des Hängewerkes.

Wie aus dem Früheren bekannt, sind die Streben CF und DE bei diesen Belastungen unbelastet, also überflüssig, und es finden sich viele ausgeführte Brücken, bei denen die Streben überhaupt fehlen.

Nimmt man nun jedoch den Fall an, dass die mobile Belastung, also das Menschengedränge nur die halbe Brücke füllt, so wird, wenn die belastete Hälfte die von B ausgehende ist, der Punkt D mit 8000 kg, derjenige C aber nur mit 4000 kg in Anspruch genommen sein.

Man ermittelt durch das Kräfte- und Seilpolygon III die Auflagerreaktionen in A und B und zeichnet den Kräfteplan III, in welchem sich für die Strebe CF die Kraft $mn = 5$ findet, die übrigen Kräfte liegen zwischen denjenigen, welche durch die Kräftepläne I und II gefunden sind, haben also für die Konstruktion des Hängewerkes kein Interesse.

Es ist nun noch der Fall zu untersuchen, ob die Kraft 5 bei den gemachten Annahmen die grösste ist, oder ob diese bei einer andern Belastungsweise, z. B. wenn die mobile Belastung sich bis zu dem Punkte C erstreckt, grösser wird. Man hat dann in C einen Belastungsteil von 6000 kg und in D einen solchen von 8000 kg wirkend. Man erhält für diese Belastungsweise das Kräfte- und Seilpolygon IV und den mit derselben Zahl bezeichneten Kräfteplan, woraus sich alle Kräfte kleiner ergaben als in den Plänen II und III, weshalb diese Ermittelungen für die Konstruktion des Hängewerkes überflüssig sind.

Soll nun die Brücke in einer Strasse Platz finden, in welcher so schwere Wagen fahren, dass von diesen auf einen der Punkte C oder D mehr als 4000 kg ausgeübt werden, so hat man noch zu untersuchen, welche Kräfte durch einen über die Brücke gehenden Wagen herbeigeführt werden. Es ist dieses hier unterlassen, dafür aber bei dem folgenden Beispiele ausgeführt.

Selbstverständlich ist dann auch eine Strebe DE anzuordnen, welche dann eine Kraft aufzunehmen hat, wenn der Punkt C mit 8000 kg, D aber nur mit 4000 kg belastet ist.

Man entnimmt nun den Kräfteplänen:

Die Kraft	1	im Maximum	=	11300 kg,	im Minimum	=	5650	kg,
„ „	2	„ „	=	8000 „	„ „	=	4000	„
„ „	3	„ „	=	8000 „	„ „	=	4000	„
„ „	5	„ „	=	1900 „	„ „	=	0	„

Die übrigen Kräfte sind den angegebenen gleich.

Das dreisäulige Hängewerk ist nach **Fig. 223, Taf. XV**, konstruiert.

Die Massstäbe sind wie bei der vorigen Konstruktion.

Die Spannweite $AB = 16$ m ist durch die Fusspunkte der Hängesäulen, also durch C, D und E in vier gleiche Teile eingeteilt.

Die Belastung jedes dieser Punkte aus der Konstruktion beträgt 3000 kg, aus einem dichten Menschengedränge aber 6000 kg.

Für die leere Brücke, welche also nur ihr eigenes Gewicht zu tragen hat, erhält man den Kräfteplan I. Für die vollbelastete Brücke, wenn also die ganze Brücke mit Menschen angefüllt und jeder der Punkte C, D und E mit 9000 kg in Anspruch genommen wird, erhält man den Kräfteplan II.

Es sollen nun aber auch Wagen auf der Brücke verkehren, welche, wie VI angegeben, belasten. Der Radstand ist 4 m, die Belastung durch die Räder 5000 kg. Der Schwerpunkt A_1 des ersten Pferdepaares ist von dem Rade B_1 um 4 m abstehend und der Schwerpunkt C_1 des anderen Pferdepaares steht von A_1 um 3,5 m ab.

Steht also der Wagen so auf der Brücke, dass die Räder in C und D sind, so ist, einschliesslich des Brückengewichtes, jeder dieser Punkte mit $3000 + 5000 = 8000$ kg in Anspruch genommen. In dem Punkte E ist dann der Schwerpunkt des ersten Pferdepaares, während derjenige des zweiten Pferdepaares zwischen E und B und zwar 0,5 m von B abstehend ist. Man muss deshalb das Gewicht dieses Paares Pferde auf die Punkte E und B verteilen, was in VI durch Zeichnung des Kräfte- und Seilpolygons geschehen ist. Es kommen hiernach nach E nur 100 kg, während 900 kg auf B entfallen. Der Punkt E ist demnach mit $3000 + 1000 + 100 = 4100$ kg belastet.

Für diese Weise der Beanspruchung des Hängewerkes erhält man den Kräfteplan III.

Rückt der Wagen dann fort, bis die Räder in D und E stehen, so hat man jeden dieser Punkte mit $3000 + 5000 = 8000$ kg, C aber nur mit 3000 kg in Anspruch genommen. Es gilt dann der Kräfteplan IV.

Ist dann der Wagen soweit über die Brücke gerückt, dass die Räder in E und B stehen, so findet man die Kräfte für die einzelnen Teile der Konstruktion aus dem Plane V. Es wirkt dann in E die Last von 8000, in jedem der Punkte C und D aber nur eine solche von 3000 kg.

Man findet also auch hier die grössten und kleinsten Beanspruchungen der einzelnen Teile des Hängewerkes aus den Kräfteplänen I und II, d. h. für den Fall wo die Brücke unbelastet ist oder über ihre ganze Länge die grösste Belastung aufzunehmen hat; denn auch für den Fall, dass man eine Verteilung von Menschen über nur einen Teil der Brücke annimmt, können grössere oder kleinere Kräfte als die Pläne I und II liefern, nicht gefunden werden.

Man entnimmt nun den Kräfteplänen I und II folgende Werte für die Beanspruchungen der Teile des Hängewerkes:

Kraft	1	für	Strebe AF	im	Maximum	= 27000 kg
„	7	„	„ FG	„	„	= 18000 „
„	2	„	Balkenteil AC	„	„	= 23400 „
„	4	„	Strebe FD	„	„	= 9000 „
„	3	„	Hängesäule CF	„	„	= 9000 „
„	5	„	„ GD	„	„	= 18000 „

und im Minimum die Kraft 1 = 9000 kg

„	„	7	= 6000 „
„	„	2	= 7800 „
„	„	4	= 3000 „
„	„	3	= 3000 „
„	„	5	= 6000 „

b) Verspannte Träger.

Als Beispiel ist hier der Träger **Fig. 224, Taf. XV**, angenommen.

Der Kräfteplan I gilt für den unbelasteten Träger. Das eigene Gewicht ist für jeden der Knotenpunkte C, D, E, F gleich 3000 kg.

Der Kräfteplan II setzt voraus, dass die ganze Brücke mit Menschen angefüllt ist und dass auf jeden der vorher genannten Punkte 9000 kg Belastung einschliesslich des eigenen Brückengewichtes entfallen.

Aus diesen beiden Kräfteplänen ersieht man, dass bei gleichförmig über alle Knotenpunkte verteilter Belastung nur der horizontale Balken AB, die Stangen $AGHKLB$ und die vertikalen Verbindungen CG, DH, EK und FL in Anspruch genommen werden, alle Diagonalstangen aber unbelastet sind.

In dem Kräfteplane III sind die Punkte D, E und F durch Ansammlung von Menschen mit 6000 kg und durch das eigene Gewicht der Konstruktion mit 3000 kg, also zusammen mit 9000 kg belastet, während C nur mit 3000 kg in Anspruch genommen wird.

Bei dieser unsymmetrischen Belastung findet man, dass die Stangen EL, DK auf Zug in Anspruch genommen werden, dass aber DG mit einer Druckwirkung $6 = c_1\, d_1$ belastet wird. Man muss deshalb in das Feld $CDHG$ die Stange CH einfügen, welche dann die Zugkraft $a_1\, b_1 = 22$ aufzunehmen hat. Die Kraft 4 ist dann gleich $g_1\, b_1$, diejenige 5 aber nur gleich $f_1\, a_1$ und die Kräfte 3 und 7 für die vertikalen Streben gleich $a_1\, e_1$ und $b_1\, h_1$.

Bei dem Kräfteplane IV ist die Hälfte des Balkens, also die Knotenpunkte C und D, nur mit dem Gewichte der Brückenkonstruktion, also mit 3000 kg belastet, während die beiden andern Knotenpunkte E und F noch die Menschenansammlungen zu tragen haben, demnach mit 9000 kg in Anspruch genommen werden.

Der Kräfteplan V gilt dann für den Fall, in welchem nur F mit 9000 kg, die Punkte C, D und E aber jeder mit 3000 kg in Anspruch genommen sind.

Diese Kräftepläne zeigen nichts Neues.

Würde nun die Brücke nur von Wagen befahren, deren grösster Raddruck 6000 kg, das Gewicht, welches für einen Knotenpunkt und Menschengedränge entstehend, angenommen ist, so würde man aus den Plänen I und II die kleinsten und grössten Kräfte für die Teile des Balkens AB, sowie für diejenigen der Zugstangen $AGHKLB$ abnehmen. Ausserdem hat man in diesen Plänen die kleinsten und grössten Belastungen für die Streben CG und FL, welche in 3 und 18 zur Darstellung gekommen sind.

Aus dem Kräfteplane III entnimmt man die grössten Kräfte für die Streben DH und EK in 7 und 14, sowie für die Stange CH in 22. Aus dem Plane IV die grösste Kraft 10 für die Stange DK und aus dem Kräfteplane V die Maximalkraft 16 für die Stange EL.

Man hat dann in den Kräfteplänen I bis V alles, was zur Bestimmung der Querschnittsdimensionen der einzelnen Teile des Trägers erforderlich ist.

Sollen nun aber Wagen über die Brücke geführt werden, welche so schwer sind, dass aus ihnen für die einzelnen Knotenpunkte Belastungen resultieren, welche grösser als 6000 kg sind, so sind die Kräftepläne III bis V überflüssig, statt dessen aber Kräftepläne zu zeichnen, welche für die grösseren Belastungen der Knotenpunkte Gültigkeit haben.

Zwei dieser Pläne sind in VI und VII dargestellt.

Bei dem Kräfteplane VI ist angenommen, dass die Hinterräder des Wagens gerade in D stehen, während die Vorderräder E_1 bei einem Radstande von 4,5 m zwischen D und E befindlich sind. Jedes der Räder übt einen Druck von 10000 kg aus. Der Wagen ist mit drei Pferdepaaren bespannt, von denen jedes zu 1000 kg angenommen wird. Das erste steht zwischen E und F bei F_1 in einem Abstande von 4 m von E_1. Das zweite Paar Pferde steht in B, das dritte ausserhalb der Brücke in B_1.

Für den Punkt D hat man nun eine Belastung von

10000 kg aus dem in D stehenden Wagenrade,
2500 „ „ „ Drucke des Wagenrades E_1, welcher in ml gefunden ist,
3000 „ aus dem Gewichte der Brückenkonstruktion.

Es ist demnach der Punkt D zusammen mit 15500 kg in Anspruch genommen.

Der Punkt E hat aufzunehmen:

7500 kg gleich ln aus dem Rade E_1 folgend,
160 „ aus den bei F_1 stehenden Pferden,
3000 „ aus dem Gewichte der Brücke.

Es hat demnach der Knotenpunkt E im ganzen 10660 kg aufzunehmen.

Der Punkt F hat dann 3000 kg aus der Konstruktion und 840 kg von dem Pferdepaare, welches bei F_1 steht, aufzunehmen, während der Knotenpunkt C nur mit 3000 kg belastet ist.

Man ersieht aus diesem Plane, dass die Stangen CH, EH und FK für die angenommene Belastung erforderlich sind, weil DG, EL und DK Druckwirkungen aufzunehmen haben würden, welche für DG und EL in dem Plane in bc und hk auch angegeben sind.

Der Kräfteplan VII gilt für den Fall, in welchem der Wagen so verschoben gedacht ist, dass das Hinterrad von D nach C kommt. Es steht dann das Vorderrad E_1 in E_0, das erste Pferdepaar in M und das zweite Paar Pferde in N.

Der Punkt C hat in diesem Falle 13000 kg zu stützen. Für den Punkt D findet man aus den bei E_0 und M stehenden Lasten von 10000 und 1000 kg den Teil $wx = 7500$ kg, und hat demnach die volle Belastung dieses Punktes gleich 10500 kg.

Der Knotenpunkt E ist mit 3500 kg $= xz$ und 3000 kg aus dem Gewichte der Konstruktion belastet und auf den Punkt F entfallen 3160 kg.

Man müsste nun, um für alle Verhältnisse, welche eintreten können, Kräftepläne zu haben, noch zwei zeichnen und zwar für die Fälle, in denen die Last D in E und dann in F steht. Da diese Pläne aber in keiner Weise etwas Neues zu zeigen vermögen, sind dieselben überflüssig.

c) Fachwerke.

Träger mit parallelen Gurtungen.

Auf **Taf. XVI** ist in **Fig. 225** ein aus acht Feldern bestehendes Fachwerk mit parallelen Gurtungen dargestellt. Die untere Gurtung AB ist belastet und zwar durch einen Eisenbahnzug von zwei Maschinen mit den zugehörigen Tendern und daran befindlichen Güterwagen. Der Träger ist 24 m lang angenommen, also jedes Feld $\frac{24}{8} = 3$ m. Der Längenmassstab ist 5 mm = 1 m, der Kräftemassstab 1 mm = 3000 kg.

Der Radstand der Lokomotiven und Tender ist 1,5 m, die Entfernung der letzten Lokomotivräder von den ersten Tenderrädern 3 m und ebenso die Entfernung zwischen Tender und Güterwagen angenommen. Steht also eines der Räder des Zuges in einem Knotenpunkte des Fachwerkes, so steht in jedem andern Knotenpunkte ebenfalls ein Rad und die nicht in die Knotenpunkte fallenden Räder stehen in der Mitte der Felder. Die Gewichte der Lokomotivräder sind zu 13 Tonnen = 13000 kg, die Tenderräder zu 8 Tonnen und die der Güterwagen, bei denen der Radstand 3. m ist, zu 9 Tonnen angenommen. Aus der Konstruktion ist jeder Knotenpunkt mit 6000 kg belastet.

Steht nun der Zug so auf die Brücke gefahren, dass das erste Rad a_1 in dem Auflager A steht, so muss, der angenommenen Massen zufolge, das erste Rad a_1 des Güterwagens in den andern Auflager B stehen. Man hat dann die Belastung der Knotenpunkte C, F und G je 19500 kg und diejenigen der Punkte D, E, H und K je 12000 kg, weshalb die gesamte Belastung des Trägers $3 \cdot 19500 + 4 \cdot 12000 + 7 \cdot 6000 = 148500$ kg ist. Für diesen Fall ist der Kräfteplan I gezeichnet.

Rückt der Zug soweit zurück, dass das Rad a_1 in den Knotenpunkt C kommt, so hat man die Belastungen von C und D, ebenso wie diejenigen von G und H gleich 19500 kg und die Last, welche in die Knotenpunkte E, F und K übergeht, gleich 12000 kg. Es ist in diesem Falle die gesamte Belastung des Trägers $4 \cdot 19500 + 3 \cdot 12000 + 7 \cdot 6000 = 156000$ kg, also grösser als vorher. Für diesen Fall gilt der Kräfteplan II.

Man ersieht, wie dieses auch aus der Belastung folgt, dass der Plan II grössere Kräfte für die Gurtungen und demnach auch für die Streben und Stangen zwischen den Gurtungen liefert, als der Kräfteplan I. Man braucht demnach den Plan I überhaupt nur in solchem Falle zu zeichnen, wenn die gesamte Belastung des Trägers bei den für I geltenden Annahmen grösser ist, als bei den für den Kräfteplan II gemachten Bedingungen. Ausserdem liefert der Kräfteplan II die Maximalwerte für die Belastungen der Strebe CC_1 und der Stange A_1C.

Das Rad a_1 rückt nun nach D. Es ist dann die Belastung von D und E gleich 25500 kg, diejenige von F und G gleich 18000 kg, die Belastung des Punktes K wieder 25500 kg und diejenige von C nur 6000 kg. Für diesen Fall gilt der Kräfteplan III, aus dem man die Maximalbelastungen 5 und 7 für die Stange C_1D und die Strebe DD_1 entnimmt.

Für den Kräfteplan IV steht das Rad a_1 in E und für diejenige V in F. Man entnimmt diesen Plänen die grössten Belastungen der Stangen D_1E und E_1F und der Strebe EE_1 und findet, dass FF_1 hier, wie in den früheren Plänen, unbelastet ist.

Die weiteren Kräftepläne sind nun nach einem doppelt so grossen Kräftemassstabe gezeichnet. Es ist also für diese 1 mm gleich 1500 kg.

Aus dem Kräfteplan VI folgt, dass die Stange G_1F eine Druckbelastung erhält, dass also in dem Felde FGG_1F_1 gekreuzte Stangen angeordnet werden müssen. Es ist dann F_1G mit bd in Anspruch genommen und für die Strebe FF_1 findet sich die Belastung ab. Es sind ab ebensowohl wie bd Maximalwerte.

Die Kräftepläne VII und VIII, für welche das Rad a_1 in H und K angenommen ist, geben, solange überhaupt mobile Last auf der Brücke ist, die kleinsten Werte der Kräfte 22, 24, 26 und 28. Es fallen diese aber bei unbelasteter Brücke, d. h. wenn diese nur ihr eigenes Gewicht zu tragen hat, noch kleiner aus, wie dieses der Kräfteplan IX zeigt, welchen man auch die kleinsten Gurtungsspannungen zu entnehmen hat.

Durchaus erforderlich ist, um alle Verhältnisse kennen zu lernen, in dem angenommenen Falle die Zeichnung des Kräfteplanes II, dann diejenige der Pläne III bis VI wenigstens soweit, bis man die aus denselben zu entnehmenden Maximalwerte der Kräfte aufgetragen hat und dann der Plan IX.

Man kann nun diese Weise der Ermmittelung der Kräfte, welche in der Regel wohl keine Anwendung findet, und jedenfalls für längere Träger als ganz unbrauchbar bezeichnet werden muss, wesentlich vereinfachen, wenn man die Kräfte- und Seilpolygone, um die Auflagerdrücke zu finden, in der **Fig. 226, Taf. XVI**, angegebenen Weise zeichnete.

Man trägt auf die Linie MN die Kräfte auf, welche in den einzelnen Stellungen des Zuges auf die Knotenpunkte entfallen und zwar von der rechten nach der linken Seite zu. Zieht man dann die Strahlen von dem gefundenen Punkte nach dem Pole O und dazu zur Bildung des Seilpolygons die Parallelen zwischen den Kraftrichtungen, so findet man die Auflagerreaktionen in A und B leicht für die verschiedenen Belastungsweisen der Knotenpunkte des Fachwerks.

Steht das Rad a_1 des Zuges in B, so ist a_1b_1 die Schlusslinie des zugehörigen Seilpolygons, MW_1 der Auflagerdruck in B und W_1N_1 derjenige in A. Ferner ist a_2b_2 die Schlusslinie für den Fall, dass das a_1 in B steht. Man hat dann die Reaktionen in B und A gleich M_2W_2 und W_2N_2 und so fort.

Nimmt man dann den lotrechten Abstand des Poles O von MN gleich der zweifachen Höhe des Trägers, so hat man, siehe weiter oben, in den Höhen des Seilpolygons die halben Spannungen in den Gurtungen, kann also dann die grössten und kleinsten Gurtungsspannungen leicht ausmessen.

Bedeutend einfacher ist das Verfahren, welches **Fig. 227, Taf. XVII,** angegeben ist.

Der Träger $ABCD$, welcher bei A und B gelagert ist, soll in seiner unteren Gurtung AB durch einen aus drei Maschinen mit ihren Tendern gebildeten Zuge belastet werden. Die Gewichte und Radstände sind in der Figur angegeben, aber ebenso angenommen, wie bei der vorigen Konstruktion. Damit die Achsen nicht mit den Knotenpunkten der Konstruktion des Trägers zusammenfallen, ist die Spannung des letzteren gleich 30,6 m angenommen.

Der Längenmassstab ist so genommen, dass 1 m = 5 mm ist und der Kräftemassstab so, dass 1 mm = 1000 kg ist.

Das eigene Gewicht des Trägers resp. der Brücke ist so angenommen, dass jeder Knotenpunkt mit 6000 kg in Anspruch genommen wird.

Man trägt nun auf eine vertikale Linie $A_1 B_1$, an der linken Seite des Trägers beginnend, die beweglichen Lasten in der Reihenfolge, wie dieselben stehen, auf, nimmt einen Pol O_1, beliebig liegend, und zieht die Polstrahlen.

Denkt man sich nun den Träger von rechts nach links verschieblich und die Last, welche durch den Eisenbahnzug hervorgebracht wird, feststehend, so kann man den Träger in solche Stellungen bringen, dass das erste oder auch jedes beliebige andere Rad in einem bestimmten Knotenpunkte liegt. Rückt man z. B. den Träger so, dass der Punkt D nach D_1 kommt, so wird das Rad 1 in E stehen und so fort.

Man hat dann auch immer die Belastung, welche auf den Träger einwirkt. Wird der Träger um ein Feld nach links geschoben, also D nach D_1 gerückt, so ist die Belastung 14 die letzte auf dem Träger liegende.

Man bestimmt nun zu den bei verschiedenen Stellungen des Trägers auf diesen liegenden Belastungen, das eigene Gewicht bleibt dabei unberücksichtigt, die Mittelkräfte, was einfach nach dem gezeichneten Kräftepolygon $A_1\,C_1\,B_1$ geschehen kann, indem man durch die Belastungen vertikale Linien und zwischen diesen die Parallelen zu den Strahlen des Kräftepolygons zieht, wie solches ja bekannt ist.

Man findet dann, wenn die Last 1 in E_1 steht, den Punkt a als einen in der Mittelkraft liegenden.

Steht die Kraft 1 in F_1, so ist b ein Punkt der Mittelkraft,
„ „ „ 1 in G_1, „ c „ „ „ „
„ „ „ 1 in H_1, „ d „ „ „ „
„ „ „ 1 in J_1, „ e „ „ „ „
„ „ „ 1 in K_1, „ f „ „ „ „
„ „ „ 1 in L_1, „ g „ „ „ „

Nun trägt man auf eine vertikale Linie MN von N bis N_1 die in den Knotenpunkten $E_1, F_1, G_1 \ldots.$ wirkenden aus dem eigenen Gewicht der Brücke resultierenden Belastungen, halbiert NN_1 in N_0, zieht $N_0\,O$ und macht diese Linie gleich der doppelten Trägerhöhe, so ist O der Pol des Kräftepolygons.

Zieht man nun die Polstrahlen und parallel zu diesen zwischen den durch A, E_1, F_1, $G_1 \ldots.$ gelegten vertikalen Linien, zu diesen Parallele, so erhält man in $mnopq$ einen Teil des Seilpolygons.

Macht man nun MN_0 gleich $A_1\,B_1$ gleich der beweglichen Belastung des Trägers, wenn die Kraft 1 in E_1 steht, zieht den Polstrahl OM, parallel zu dem Strahle ON_1 die qr und parallel zu OM die $a_2\,s$, so hat man in m den Anfangspunkt und in s den Endpunkt der Begrenzung des Seilpolygons. Zieht man demnach die Schlusslinie ms dieses und parallel dazu durch O die OW_1, so hat man in MN den Punkt W_1 gefunden. Durch diesen legt man $W_1\,V_1$ horizontal und zieht $V_1\,N$ parallel zu AE, so hat man in NV_1 die für AE resultierende Kraft für die angenommene Belastung.

Den Punkt a_2 findet man, wenn man a, das ist der Punkt, durch welchen die Mittelkraft für die mobile Belastung, welche hier angenommen ist, um $aa_1 = AF_1$ nach rechts verlegt und dann a_1 auf die Linie qr lotet.

Rückt man nun den Träger AB so, dass der Punkt D nach D_2 kommt, dass also die Last 1 über F_1 steht, so wirken von der mobilen Belastung noch die Kräfte 1 bis 12 auf den Träger ein. Macht man demnach $M_1\,N_1$ gleich $A_1\,C$, bestimmt den Punkt b_2 dadurch, dass man b nach b_2 legt, indem man $bb_1 = AF_1$ macht und b_1 auf die Linie qr überträgt und zieht parallel zu dem Polstrahle OM_1 die Linie $b_2\,s_1$, so schliesst sich das Seilpolygon für diesen Fall durch ms_1. Parallel hierzu ist OW_2 gezogen. Legt man nun durch W_2 eine horizontale Linie und zieht $6\,V_2$ parallel zu FE_1, so gibt diese Linie die Kraft, welche unter den angenommenen Belastungsverhältnissen in FE_1 auftritt.

Rückt nun der Punkt D nach D_3, so fallen von der rechten Seite, die Belastungen über 11 numeriert, ausserhalb des Auflagers bei B, wirken also auf den Träger nicht mehr ein. Man hat deshalb die gesamte auf den Träger noch ruhende mobile Belastung gleich $A_1\,C_2$. Man macht deshalb $M_2\,N_1$ gleich $A_1\,C_2$, macht cc_1 gleich AG_1 und überträgt c_1 nach c_2 auf qr. Man hat dann $c_2\,s_2$ parallel zu dem Strahl OM_2 zu ziehen, schliesst das Seilpolygon durch ms_2 und zieht den Strahl OW_3 parallel zu ms_2. Legt man dann $W_3\,V_3$ horizontal durch W_3, zieht $5\,V_3$, so ist dieses die Kraft für GF_1.

In gleicher Weise fährt man fort, um die Kräfte für die übrigen Diagonalen zu erhalten und findet $4\,V_4$ für HG_1, $3\,V_5$ für das Feld $H\,J\,J_1\,H_1$. Da diese Kraft von links nach rechts ansteigend ist, muss in das Feld eine Diagonale $J\,H_1$ eingefügt werden.

Der Strahl OW_6 fällt mit demjenigen $O\,2$ zusammen. Es ist deshalb die Kraft für JK_1 gleich Null. Die Kräfte $1\,V_6$ für KL_1 und $N_1\,V_7$ für BL haben dann wieder die Richtungen, wie die Streben in dem Konstruktionsrisse.

Die vertikalen Kräfte für die Stange EE_1, FF_1, GG_1 .... hat man dann in 7 W_1, 6 W_2, 5 W_3 ....

Man kann also in dieser Weise leicht für jede Belastung die Kräfte für die Vertikalen und Diagonalen finden.

Soll z. B. nicht 1 in E_1 stehen, sondern die zweite mit 2 bezeichnete Achse, so hat man auf den Träger nicht nur die Kräfte 1 bis 14, sondern auch noch die Kraft 15 einwirkend. Man hat dann xy parallel $B_1 Q_1$ zu legen und ya_0 parallel $B_0 O_1$ zu ziehen, um in a_0 einen Punkt der Mittelkraft zu den auf den Träger wirkenden Kräften 1 bis 15 zu erhalten. Man legt nun den Punkt a_0 um das Stück $2E$ nach rechts und bestimmt a_{00} auf qr. Macht man dann $M_0 N_1$ gleich $A_1 B_0$, zieht $a_{00} s_0$ parallel OM_0 und OW_0 parallel ms_0, so hat man in 7 W_0 die zu der Belastung gehörige vertikale Kraft für EE_1 und in 7 V_0 die Diagonalkraft für AE. Es sind dieses dann auch die Maximalkräfte.

Die Grösse der halben Maximal-Gurtungskräfte entnimmt man dann dem Seilpolygon $m_1 n_1 p_1 q_1$, während die Minimalkräfte für die Gurtungen aus dem Polygon $mnopqm$ zu entnehmen sind.

Das wohl einfachste und auch gewöhnlich angewendete Verfahren zur Ermittelung der Kräfte in den Teilen von Fachwerksträgern ist in **Fig. 228, Taf. XVIII,** angegeben.

Der Träger $ABB_1 A_1$ ist bei A und B aufgelegt und in der unteren Gurtung belastet. Das Gewicht der Konstruktion ist zu 1670 kg für den laufenden Meter angenommen. Die Spannung des Trägers ist 36,6 m, die Länge eines Feldes demnach $\frac{33,6}{8} = 4,2$ m. Die Diagonalstangen stehen unter 60 Grad gegen den Horizont geneigt, die Höhe des Trägers ist 7,30 m. Der Konstruktionsriss ist nach einem Massstabe, dessen Einheit 5 mm = 1 m ist, aufgetragen.

Die mobile Last, welche den Träger beansprucht, besteht aus mehreren zusammengekuppelten Lokomotiven mit ihren Tendern. Die Achsen der ersteren sind mit α, diejenigen der Tender aber mit β bezeichnet. Die Radstände sind zu 1,5 m angenommen und die Entfernung des letzten Rades von dem ersten des folgenden Wagens zu 3,00 m. Die Drücke der Lokomotivräder betragen je 12000 kg, während die Tenderräder einen Druck von 8000 kg ausüben. Die Kräfte sind nach dem Massstabe 1 mm gleich 1000 kg aufgetragen.

Es ist nun ein Kräfte- und Seilpolygon zu zeichnen für eine Belastung, also einen Zug, welcher länger ist als der Träger, ohne dabei aber auf das eigene Gewicht des Trägers Rücksicht zu nehmen. Es ist angenommen, dass die Lokomotiven mit ihren Tendern auf dem Träger stehen, so dass das vorderste Lokomotivrad in A befindlich ist. Dann ist rechts vom Träger das vordere Rad einer folgenden Lokomotive und links eine solche angenommen, welche mit dem Schornstein der ersten auf dem Träger stehenden Maschine entgegensteht, so dass man hier sechs grösste Lasten zusammen hat.

Die Kräftelinie 0 bis 22 ist in X_1 halbiert und $X_1 O_1$ lotrecht zu derselben gezogen. Auf dieser Linie nimmt man in einem Abstande gleich der zweifachen Trägerhöhe den Pol O_1 und zieht die

Polstrahlen, nach denen man dann das Seilpolygon in bekannter Weise darstellt.

Zieht man nun die horizontale Linie MM_1, so kann man auf derselben leicht die Länge des Trägers, von einem beliebigen Punkte beginnend, abtragen, also die Trägerlänge unter der feststehend gedachten mobilen Belastung verrücken und dadurch leicht die grössten Höhen der Seilpolygone für verschiedene Laststellungen finden, wie solches oben gezeigt ist.

Um z. B. für den Punkt C des Trägers den grössten Wert von y der Höhe des Seilpolygons zu erhalten, denkt man sich den Endpunkt A des Trägers nach S verschoben. Es ist dann SS_0 die Länge des Trägers und VV die Schlusslinie des Seilpolygons, dessen Höhe man gleich y_{11} findet. Stellt man dann die Belastung 5 in C auf, so fällt A über U, es ist UU_0 die Trägerlänge und II II die Schlusslinie des zugehörigen Seilpolygones, also y_1 die Höhe dieses. Stellt man dann noch den Träger so unter die Belastung, dass das Rad 6 in C steht, so fällt der Punkt A über V, der Punkt B über V_0, man hat in I I die schliessende Linie des Seilpolygons und in y die sich für die angenommenen Verhältnisse ergebende Höhe. Weitere Stellungen für den Punkt C kann man mit derselben Leichtigkeit darstellen, wenn man sich überzeugen will, dass sich für keine Verhältnisse eine grössere Höhe ergibt als y_1, diese also massgebend ist.

In gleicher Weise findet man die grössten Werte von y für die übrigen Punkte des Trägers und sind in der Figur noch für die Punkte D, E und F die Grössen von y ermittelt, also für die linke Häfte des Trägers bestimmt. Da sich dieselben Werte für die rechte Trägerhälfte ergeben müssen, so ist mit den geschehenen Ermittelungen den Anforderungen Genüge geleistet.

Die gefundenen Werte von y sind nun an die horizontale Linie ab in a, e_0, d und c_0 angetragen und dadurch die Punkte f_1, e_1, d_1 und c_1 gefunden, welche in der geschehenen Weise durch Linien verbunden werden, um eine Kurve zu erhalten, welche den Namen Momentenkurve hat.

Um nun auch die Werte von y für die feststehende Belastung des Trägers, das ist für das eigene Gewicht desselben zu erhalten, zeichnet man das Kräftepolygon XYO. Es ist auf XY die Belastung getragen und der Pol O wie bei dem Kräftepolygon für die mobile Belastung genommen, dass also XO gleich $X_1 O_1$ ist. Man erhält dann hierzu das Seilpolygon $abcdef$ und hat dann in cc_1 die halbe Gurtungskraft Y_1 für die Teile AC und $A_1 C_1$ der Gurtung, in ff_1 dieselbe Y_4 für $E_1 F_1$ und so fort. Die Gurtungskräfte für den Träger, wenn derselbe keine mobile Belastung zu tragen hat, sind bezeichnet durch $cc_0 = y^1 \dots af = y^4$. Man kann also aus der dargestellten Figur $af_1 d_1 bdf$ nicht nur die grössten, sondern auch die kleinsten Gurtungsspannungen entnehmen.

Um nun die Spannungen in den vertikalen und diagonalen Verbindungen der Gurtungen zu erhalten, schlägt man folgendes Verfahren ein.

Man zeichnet die Kurve $O_0 mn$, indem man durch die einzelnen Kräfte α und β der mobilen Last vertikale Linien zieht und zwischen diesen parallel Linien zu den Strahlen $20\,O_0$, $19\,O_0$, $18\,O_0$, $17\,O_0$ .... $4\,O_0$ zieht. Ferner macht man $A_0 B_0 = C_0 O_0$ gleich der Auflagerreaktion, welche durch die feststehende Belastung des Trägers hervorgebracht wird, und dann die Linie $B_0 C_0$ zieht. Man hat dann in $A_0 B_0 L_1$ und $C_0 O_0 L_1$ die vertikalen Kräfte für den Fall dargestellt, dass die Belastung eine gleichförmig verteilte ist. Dieses ist aber nicht der Fall, wenigstens nicht für die gesamte Belastung, sondern der grösste Teil dieser wirkt durch Querträger, welche in den Knotenpunkten A, C, D .... des Trägers angebracht sind, auf diese ein. Um demnach die durch die feststehende Belastung hervorgebrachten vertikalen Kräfte zu erhalten, hat man durch die Mitten der Trägerfelder, also durch die Mitte zwischen A und C, zwischen C und D etc. vertikale Linien zu ziehen, bis diese die $B_0 C_0$ in D_0, E_0 .... treffen. Dann legt man durch die gefundenen Punkte horizontale Linien $F_0 G_0$, $H_0 K_0$ .... und erhält dann die Begrenzung der Figur, welche die vertikalen Kräfte darstellt.

Es ist nun, um die Deutlichkeit nicht zu beeinträchtigen, die Kurve $O_0 m n$ und die Begrenzungsfigur der vorher bestimmten vertikalen Kräfte in $O_0 B_0 F_0$ nochmals gezeichnet.

Man zieht nun durch die Knotenpunkte A, C, D, E .... des Trägers vertikale Linien, bis diese die Kurve $O_0 B_0$ treffen und verlängert dieselbe bis zu der Begrenzung der Figur, welche die vertikalen Kräfte darstellt, wenn diese Begrenzung unterhalb der Kurve $O_0 B_0$ liegt.

Zieht man nun $Y_0 a_0$, $W_0 a_1$, $g_0 g$ .... parallel zu den Diagonalen des Trägers, so erhält man in diesen Linien, bis zu den Horizontalen, welche durch Z_0, p_0, r_0 .... gezogen werden, die Kräfte, welche die Diagonalen beanspruchen. Es sind dieses in verschiedenen Feldern eines Trägers die grössten Beanspruchungen der Diagonalen, können aber in andern Feldern grösser werden, wenn man die mobile Belastung nicht in dem betrachteten Knotenpunkte des Trägers aufhörend denkt, sondern ein Rad über den Knotenpunkt hinaus, auf der sonst unbelasteten Trägerhälfte stehend, annimmt.

Für den Knotenpunkt F hat man z. B., wenn die Last 4 in F steht, $W_0 a_1$ als Kraft in der Diagonale $E_1 F$. Steht nun aber nicht die Last 4, sondern 5 in F, so zieht man durch das Rad 4 eine vertikale Linie, welche die Kurve $O_0 B_0$ in q_0 trifft.

Ist dann p das Gewicht des Rades 4, l die Länge eines Trägerfeldes und l_1 der Radstand, so hat man den Druck, welchen dieses Rad auf den Knotenpunkt F ausübt, gleich $p_1 = \frac{p\,l_1}{l}$. Est ist nun $W_0 f_0 = l$, $W_0 d_0 = l_1$, macht man demnach $f_0 e_0 = p$, so muss $d_0 b_0 = p_1$ sein, denn es ist $W_0 d_0 : W_0 f_0 = d_0 b_0 : f_0 e_0$ oder $l_1 : l = p : p_1$.

Zieht man dann durch b_0 eine Linie parallel zu der Diagonale $E_1 F$ und durch q_0 eine Horizontale, so hat man in $b_0 b_1$ die diesem Falle entsprechende Diagonalkraft und findet, dass dieselbe kleiner ist, als $W_0 a_1$, also die letzt angegebene Kraft die Maximalkraft ist.

Verfährt man in dem Felde $D_1 E_1, F, E$ ebenso, so findet man, dass die Kraft $g q_0$ kleiner ist als $g_1 g_{00}$, dass also hier die Maximalkraft dann gefunden wird, wenn das Rad 5 in dem Knotenpunkte E steht. Ebenso ist es in den Feldern, welche links von E liegen, vorausgesetzt, dass der Zug von der rechten Seite auf den Träger fährt und die Achse 4 die vorderste Achse desselben ist.

Für das Trägerfeld $F_1 G_1 GF$ erhält man eine von rechts nach links ansteigende Diagonalkraft $Y_0 a_0$, es muss demnach in diesem Falle eine von G nach F gehende Diagonale angewendet werden, also hier gekreuzte Stangen vorhanden sein.

Die Kräfte in den vertikalen Verbindungen der Gurtungen hat man dann in den Loten, welche von den Fusspunkten der Diagonalkräfte bis an die Kurve $O_0 B_0$ gezogen werden, also $W_0 p_0$, $G_{00} s_0$ ....

Man kann also hier ohne erhebliche Mühe für alle möglichen Verhältnisse die vertikalen und diagonalen Kräfte finden.

Zahlenbeispiel.

Es soll hier, um die Anwendung auf die Berechnung einer vollständigen Brücke zu zeigen, die Konstruktion für eine solche ausgeführt werden und wird angenommen, dass die Spannung 48 m betrage, dass die Brücke hier eine eingeleisige Eisenbahn sei und 4 m Breite habe.

Gibt man dem Fachwerke 6 m = $^1/_8$ der Spannweite zur Höhe, so wird dasselbe die **Fig. 229, Taf. XIX**, angegebene Gestalt erhalten, soweit nicht durch die folgende Konstruktion Aenderungen erforderlich werden.

Die Brückenbahn wird durch Querträger gestützt, welche sich in den unteren Knotenpunkten an die Fachwerke anschliessen, welche also, da das Fachwerk 12 Felder hat, in Entfernungen von 4 m voneinander liegen. Das Gleise liegt in der Mitte der Brücke, es sind also die Belastungen der Querträger bei einer Gleisweite von 1,435 m von den Auflagern d. h. den Befestigungsstellen an den Gitterträgern 1,283 m entfernt.

Stehen die Räder einer Lokomotive, wie **Fig. 230, Taf. XIX**, angegeben, so wirkt das mittlere b direkt auf den Querträger A, während von denen a und c je $\frac{2,5 \cdot 12000}{4} = 7500$ kg auf diesen Träger kommen, derselbe also aus einer Schiene mit 27000 kg in Anspruch genommen wird, wenn vorausgesetzt wird, dass der Plattenbelag vom Querträger zu Querträger reicht.

Stehen die Räder, wie dieses **Fig. 231, Taf. XIX**, angegeben, so kommt auf den Träger A die ganze Last des Rades c und von den Rädern a und b das Gewicht $\frac{(1+2,5)\,12000}{4} = 10500$ kg. Es ist deshalb der Träger nur mit 22500 kg aus einer Lokomotivseite in Anspruch genommen. Hierzu kommt dann noch von dem ersten Tenderrad d die Belastung $\frac{8000 \cdot 1}{4} = 2000$ kg, also die ganze Belastung 24500 kg oder weniger als vorher.

Es ist daher die Maximalbelastung eines Querträgers wie **Fig. 232, Taf. XIX**, angegeben ist, wobei das eigene Gewicht der Brückenbahn und des Querträgers zu 4000 kg angenommen ist.

Da die Räder der Lokomotiven und Wagen jetzt nicht mehr direkt auf den Träger einwirken, sondern diese Einwirkung durch die Querträger herbeigeführt wird, so treten auch ganz andere Verhältnisse auf, da man nur 11 Querträger hat, welche in Betracht kommen, so sind die Hauptträger nur mit 11 beweglichen Einzellasten versehen, welche allerdings unter Umständen ganz erheblichen Wechseln unterworfen sein können.

In dem vorliegenden Falle ist die Belastung des Querträgers 1 gleich 27000 kg, diejenige der Träger 2 und 3 je 16500 kg, und dann weiter die Belastungen der Querträger 4, 7 und 10 je 27000 kg und die der übrigen, also 5, 6, 8, 9 und 11 je 16500 kg für den Fall der Zug, welcher aus Lokomotiven mit ihren Tendern besteht, so auf die Brücke aufgefahren ist, wie dieses **Fig. 233, Taf. XIX**, angibt. Die mit *a* bezeichneten Rädersätze sind diejenigen der Lokomotiven und ist der Druck eines jeden dieses 12000 kg gesetzt, während die mit *b* bezeichneten Rädersätze den Tendern angehören und jedes zu 8000 kg Gewicht angenommen ist.

Die Wirkungen der Raddrücke auf die Querträger kann man, wie in der Figur geschehen, durch Konstruktion bestimmen, wird aber ebenso leicht durch Rechnung zum Ziele kommen.

Gibt man dem Zuge auf der Brücke eine andere Stellung, lässt z. B. das Rad 1 auf den Querträger 1 gehen, so erhält man für den Träger 1 die Belastung gleich 24500 kg, für 2 diejenige von 18500 kg und für den Querträger 3 eine solche von 17000 kg. Es sind demnach bei einer solchen Stellung die Belastungen der Querträger 2 und 3 und diesen folgend von 5 und 6, von 8 und 9 und von 11 grösser als bei der vorher angenommenen Stellung, dagegen die Belastungen der Querträger 1, 4, 7 und 10 kleiner. Da es nun bei Ermittelung der grössten Spannungen in den Teilen der Hauptträger um grösste Belastung der in Betracht zu ziehenden Knotenpunkte handelt, so wird für die Ermittelungen die erst genommene Stellung des Zuges massgebend sein.

In **Fig. 235, Taf. XX**, sind nun die grössten Werte von Y ermittell und diese gefunden:

$$\begin{array}{rlrl}
Y_1 = & 38000\,\text{kg}, & \text{also } 2\,Y_1 = & 76000\,\text{kg}, \\
Y_2 = & 68000 \;\text{„} & \text{„} \quad 2\,Y_2 = & 136000 \;\text{„} \\
Y_3 = & 90000 \;\text{„} & \text{„} \quad 2\,Y_3 = & 180000 \;\text{„} \\
Y_4 = & 108000 \;\text{„} & \text{„} \quad 2\,Y_4 = & 216000 \;\text{„} \\
Y_5 = & 118000 \;\text{„} & \text{„} \quad 2\,Y_5 = & 236000 \;\text{„} \\
Y_6 = & 120000 \;\text{„} & \text{„} \quad 2\,Y_6 = & 240000 \;\text{„}
\end{array}$$

Aus dem eigenen Gewichte der Brücke, zu $800 + 30\,l = 800 + 30 \cdot 48 = 2240$ kg für den laufenden Meter angenommen, erhält man für jeden Knotenpunkt die stete Belastung von $4 \cdot 2240 = 8960$ oder rund 9000 kg. Durch Zeichnung des Kräfte- und Seilpolygons mit einer Poldistanz gleich der zweifachen Trägerhöhe, erhält man dann die Werte von Y_0 und zwar:

$$
\begin{aligned}
Y_0^1 &= 16500\text{ kg}, & \text{also}\quad 2\,Y_0^1 &= 33000\text{ kg},\\
Y_0^2 &= 30000\ „ & „\quad 2\,Y_0^2 &= 60000\ „\\
Y_0^3 &= 40500\ „ & „\quad 2\,Y_0^3 &= 81000\ „\\
Y_0^4 &= 48000\ „ & „\quad 2\,Y_0^4 &= 96000\ „\\
Y_0^5 &= 52500\ „ & „\quad 2\,Y_0^5 &= 105000\ „\\
Y_0^6 &= 54000\ „ & „\quad 2\,Y_0^6 &= 108000\ „
\end{aligned}
$$

Dieses sind gleichzeitig die kleinsten Spannungen in den Gurtungen.

Man hat demnach die gesamten Gurtungsspannungen:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= 2\,Y_1 + 2\,Y_0^1 = 109000\text{ kg},\\
Y_2 &= 2\,Y_2 + 2\,Y_0^2 = 196000\ „\\
Y_3 &= 2\,Y_3 + 2\,Y_0^3 = 261000\ „\\
Y_4 &= 2\,Y_4 + 2\,Y_0^4 = 312000\ „\\
Y_5 &= 2\,Y_5 + 2\,Y_0^5 = 341000\ „\\
Y_6 &= 2\,Y_6 + 2\,Y_0^6 = 348000\ „
\end{aligned}
$$

Kaum nötig zu bemerken wird es sein, dass die Werte von Y_0 nicht genau richtig sind, weil nicht die ganze unbewegliche Belastung durch die Querträger auf die Hauptträger übertragen wird, sondern die Gewichte der letztern, wenigstens teilweise eine wirklich gleichmässig verteilte Belastung bilden. Die herbeigeführte Ungenauigkeit ist aber nicht von Belang und kann um so mehr vernachlässigt werden, da die Brücken meist für Belastungen konstruiert werden, wie dieselben wohl nie auf dieselben kommen, wenn nicht bei Versuchen.

Auf **Taf. XXI, Fig. 234 u. 236**, sind die Beanspruchungen der vertikalen und diagonalen Verbindungen zwischen den Gurtungen bestimmt.

Träger mit gebogenen Gurtungen.

Die Träger deren Gurtungen sich einer Kurve anschliessen, der Ausführung wegen aber polygonal gemacht werden, sind vielfach im Gebrauch. Dieselben haben entweder nur eine gebogene Gurtung oder aber, dieses meist nur bei den grössten Konstruktionen, es sind beide Gurtungen gebogen.

Diese Konstruktionen bedingen gegen Träger mit parallelen Gurtungen Materialersparnisse, die aber meist nur bei grösseren Ausführungen von Belang sind und werden deshalb derartige Träger fast ausschliesslich für Brückenausführungen benutzt und kommen im Hochbau nur sehr selten zur Anwendung.

Die gewöhnlichsten Anordnungen, welche hierher gehören, sind:

1. Die parabolischen Träger. Fig. 237, Taf. XIX.

Die untere Gurtung ist horizontal, die obere nach einer Parabel geformt. Die Vertikalen sind bei gleichmässiger Belastung des Trägers gleichstark in Anspruch genommen, die Diagonalen aber unbelastet. Bei beweglichen Belastungen müssen in allen Feldern kreuzweise liegende Diagonalen zur Anwendung gebracht werden.

Man konstruiert den Träger einfach, indem man die Belastung AB in soviel Teile einteilt als der Träger vertikale Verbindungen zwischen den Gurtungen hat, auf der mittleren dieser Verbindungen die grösste Höhe WW_1 des Trägers abträgt und dann $W_1P \parallel CD$, $PR \parallel CE$, $RT \parallel CF$, $TN \parallel CG$ legt, oder indem man die Höhen WW_1, PP_1, RR_1, TT_1 nach der Gleichung der Parabel $h = \frac{4Hx(l-x)}{l^2}$ bestimmt, worin zu setzen ist:

l die Spannweite des Trägers, H die mittlere Höhe des Trägers und x der Abstand des Punktes für den die Trägerhöhe bestimmt werden soll, von dem Auflager aus gemessen ist.

Zwischen H und l besteht gewöhnlich ein gerades Verhältnis, in welchem Falle sich dann die Gleichung noch vereinfacht. Wird z. B. $\frac{H}{l} = \frac{1}{8}$ genommen, so hat man:

$$h = \frac{x(l-x)}{2l}.$$

2. Halbparabelträger. **Fig. 238, Taf. XIX.**

Der mit dem Namen Halbparabelträger belegte Balken unterscheidet sich von dem vorigen nur dadurch, dass die obere und untere Gurtung an den Auflagern nicht miteinander vereinigt sind, sondern dass hier zwischen denselben eine vertikale Stütze angeordnet wird.

Dieser Träger bedarf in den den Auflagern zunächst liegenden Feldern nur einfache Diagonalen, während in den Mittelfeldern gekreuzte Diagonalen erforderlich sind, wenn nicht abwechselnd Druck- und Zugwirkungen in ihnen auftreten sollen.

3. Elliptische Träger. **Fig. 239, Taf. XIX.**

Diese Träger unterscheiden sich in ihrer Form von den parabolischen Trägern nur durch die Form ihrer oberen Gurtung, welche nach einer Ellipse geformt ist. Die Träger gebrauchen in den Endfeldern nur einfache Diagonalen.

4. Schwedler-Träger. **Fig. 240, Taf. XIX.**

Der von Schwedler konstruierte Träger, welcher vielfach benutzt wird, hat mit dem elliptischen und Halbparabelträger das gemein, dass nur in den mittleren Feldern gekreuzte Diagonalen erforderlich sind. Die untere Gurtung ist horizontal, die obere in der Mitte ebenfalls horizontal an den Enden, über einigen Trägerfeldern an jedem Auflager aber polygonal.

Die Höhen der vertikalen Streben macht man, an dem Auflager anfangend,

$$h = \frac{gh_0}{l}\left(\sqrt{1+\frac{q}{g}}+1\right)^2 \frac{x(l-x)}{gl+qx}.$$

Der Wert von h wird im Maximum für

$$x_0 = \frac{g\,l}{q}\left(\sqrt{1+\frac{g}{q}} - 1\right)^2,$$

von welcher Stelle an die obere Gurtung dann horizontal wird.

Es ist zu setzen für:

l die Länge des Trägers, x die Entfernung der betrachteten Vertikalen von dem Auflager ausgerechnet, h_0 das grösste Verhältnis zwischen der Höhe und Länge des Trägers vielfach $h_0 = \frac{l}{8}$ gesetzt, g das Eigengewicht des Trägers und q die mobile Belastung, beide für 1 m Länge gerechnet.

5. Paulysche Träger.

Zu erwähnen sind dann als Träger mit zwei parabolischen Gurtungen noch die Paulyschen Träger, welche auch mehrfache Anwendung gefunden haben. Dieselben müssen in allen Feldern gekreuzte Diagonalen haben.

Um die Kraftwirkungen in Trägern mit gebogenen Gurtungen zu erhalten, wird man bei kleineren Trägern am einfachsten und schnellsten zum Ziele kommen, wenn man nach **Fig. 241, Taf. XXII,** für verschiedene Belastungsweisen die Kräftepläne zeichnet.

Es ist bei der Figur als überflüssig angenommen, die Belastungen, wie dieselben aus der mobilen Belastung auf die einzelnen Knotenpunkte entfallen, nochmals darzustellen. Es ist vielmehr als ständige Last eines Knotenpunktes 4500 kg und als mobile Belastung für einen solchen 6000 kg angenommen.

Der Träger hat 24 m Spannweite, die Vertikalen liegen 3 m voneinander entfernt, die obere Gurtung wird nach einer Parabel geformt, die Höhe des Trägers zu $^1/_8$ der Länge angenommen und hat man deshalb die Höhe der Vertikalen

$$h = \frac{x\,(l - x)}{2\,l},$$

worin nacheinander zu setzen ist:

$$x = 3 = 6 = 9 = 12.$$

Man hat demnach:

$$h = \frac{3\,(24 - ^3)}{2 \cdot 24} = 1{,}31 \text{ m},$$

$$h = \frac{6\,(24 - ^6)}{2 \cdot 24} = 2{,}25 \;\text{„}$$

$$h = \frac{3\,(24 - ^9)}{2 \cdot 24} = 2{,}81 \;\text{„}$$

$$h = \frac{12\,(24 - ^{12})}{2 \cdot 24} = 3{,}00 \;\text{„}$$

Man zeichnet nun die Kräftepläne I und II, welche die grössten und kleinsten Gurtungsspannungen angeben. Dann zeichnet man das Kräftepolygon AB mit dem Pol O und zwar in der Weise, dass man zunächst die sieben Knotenpunkte des Trägers nur mit 4500 kg, dann aber mit 9500 kg belastet denkt.

Nach dem Kräfteplane zeichnet man dann das Seilpolygon $abdefg$ für die Annahme, dass der Träger seine Länge doppelt hätte.

Zieht man nun die Schlusslinie M_1 und den Strahl M_1^0, so hat man in Bh und hF die Auflagerreaktionen in W und W_1 für den Fall, dass die Knotenpunkte des Trägers sämtlich mit 9500 kg belastet sind.

Die Schlusslinie M_2 um ein Trägerfeld nach links gerückt, schliesst das Seilpolygon für den Fall, wo der erste Knotenpunkt von W aus gerechnet nur mit 4500 kg in Anspruch genommen ist, während alle übrigen 9500 kg stützen. Parallel zu M_2 ist der Strahl M_2^0 gezogen, man hat also für den angegebenen Belastungsfall in Ci die Reaktion in W_1 und in iG diejenige in W.

Man rückt nun wieder ein Feld links, zieht die Linie M_3, und schliesst durch diese das Seilpolygon, welches für den Fall Gültigkeit hat, wo die zwei W zunächstliegenden Punkte von der mobilen Belastung nichts aufzunehmen haben. Der parallele Polstrahl M_3^0 teilt DH in K, so dass DK die Reaktion in W_1 und KH diejenige in W darstellt.

In gleicher Weise fährt man fort, bis man für alle vorkommenden Fälle die Auflagerreaktion bestimmt hat.

Es müssen dann die Kräftepläne gezeichnet werden.

Der Plan III für den Fall, wo nur der Knotenpunkt W_0 ohne Teil der mobilen Belastung ist, ist ganz gezeichnet. Da dieser und die folgenden Kräftepläne aber nur den Zweck haben die grössten Belastungen der Diagonalen zu erhalten, so ist es nur nötig die Pläne soweit zu zeichnen, bis man den Zweck erreicht hat.

Es ist die Darstellung der Kräftepläne in dem erforderlichen Umfange auf der Tafel vorgenommen und entnimmt man dem Plane I, wie schon angegeben, die grössten Gurtungsspannungen und die grössten Belastungen der Vertikalen. Aus dem Plane II erhält man die kleinsten Gurtungsspannungen, aus dem Kräfteplane III findet man die grösste Beanspruchung der Diagonale 24, aus Plan IV diejenige der Diagonale 20, dann aus Plan V die grösste Zugkraft für die Diagonalstange 17, aus Plan VI diejenige für die Stange 12 und endlich aus dem Kräfteplan VII die grösste Beanspruchung der Stange 6.

Zeichnet man die Kräftepläne vollständig, so überzeugt man sich durch den richtigen Schluss derselben von der Richtigkeit der Konstruktion und derjenigen der Resultate.

Man vereinfacht übrigens die Arbeit ganz wesentlich, wenn man sämtliche Kräftepläne ineinander zeichnet und dieselben so legt, dass die Punkte M zusammenfallen. Man hat dann nur einmal die Parallele zu der parabolischen Gurtung zu ziehen, vermeidet also auch Ungenauigkeiten bei solchem Verfahren.

Für Träger von grösserer Ausdehnung muss man ein Verfahren zur Anwendung bringen, welches demjenigen entspricht, das auf **Taf. XX** und **XXI** für den Parallelträger dargestellt ist. Von einer Reproduktion eines solchen ist hier jedoch Abstand genommen, weil dasselbe die Zwecke dieses Werkes überschreiten würde.

Dachwerke.

Die Dächer werden auf verschiedene Weisen in Anspruch genommen und zwar einmal durch das Gewicht der Bedeckung selbst, dann durch sich auf der Dachfläche ablagernden Schnee und durch den Druck des Windes, welcher auf die Dachfläche trifft. Ausserdem kommen noch sehr viele Fälle vor, in denen Balkenlagen in dem Dache Unterstützung finden, so dass die Dächer wohl in den meisten Fällen die am stärksten belasteten Teile der Gebäude sind.

Gewöhnlich wird angenommen, dass die Belastung über das ganze Dach gleichmässig verteilt ist. Offenbar ist dieses nicht genau, denn wenn auch das Gewicht der Dachfläche selbst eine gleichmässig verteilte Last bildet und sich nicht verändert, so ist eine Belastung durch Schnee, die einen nicht unbeträchtlichen Teil der Gesamtbelastung ausmachen kann, in vielen Fällen eine durchaus nicht gleichmässig verteilte, weil sich auf einzelnen Stellen der Dachfläche Schneeansammlungen bilden können, während andere Stellen davon frei bleiben, so z. B. beim Tauen des Schnees und Metall- oder Schieferdachungen lagern sich grosse Partien Schnee vor den Traufen, also den unteren Teilen der Dachflächen ab, während die oberen Teile der Flächen ganz ohne Schnee sind; durch den Wind werden Schneemassen gegen Giebelmauern und so weiter getrieben und belasten hier das Dach erheblich, während andere Stellen ganz ohne Schneebelastung bleiben oder doch geringer in Anspruch genommen werden.

Der Wind trifft meistens nur eine Seite des Daches, belastet diese also in ziemlich erheblicher Weise, während die andere Seite desselben unbelastet bleibt, so dass also ziemlich bedeutende Unregelmässigkeiten in der Belastung des Daches eintreten können.

Wenn auf solche ungleichmässige Belastungen vielfach, ja in der Regel, nicht Rücksicht genommen wird, so liegt der Grund wohl darin, dass die aus Holz hergestellten Dachwerke sehr selten einer Berechnung unterzogen werden, sondern in althergebrachter Weise ausgeführt, oft Holz- oder überhaupt Materialverschwendungen zeigen, wie dieselben nicht vorkommen sollten. Oft ergeben allerdings die Berechnungen Dimensionen für die Hölzer, welche vollständig unausführbar sind, welche, um überhaupt in den erforderlichen Verband mit den übrigen Hölzern gebracht zu werden, bedeutend stärker sein müssen, als die Rechnung solche ergeben hat, daraus folgt aber nicht, dass man dann auch andere Hölzer stärker zu machen hat, als nötig ist. An vielen Stellen kommen auch solche Teile vor, bei denen die Verwendung von Holz überhaupt unzweckmässig erscheint.

So werden z. B. Hängesäulen in Hängewerken aus Holz hergestellt, obgleich es bekannt ist, dass nur der kleinste Teil derselben tragender Querschnitt ist, während die Hauptholzmasse nur vorhanden ist, um den Verband herbeizuführen. Ausserdem ist dann noch zur Herstellung des Verbandes in ziemlich bedeutendem Umfange Eisen zur Anwendung zu bringen, aus welchem allein, wohl in den meisten Fällen, Hängesäulen aus Eisen gebildet werden können, die an Sicherheit demjenigen aus Holz bedeutend vorzuziehen sind und fast immer auch andere Vorteile mit sich bringen.

Ungefähr dasselbe gilt von den horizontalen Balken unter den Hängewerken und vielen andern nur auf Zug in Anspruch genommenen Teilen.

Hat man die Berechnung ausgeführt, weiss also die Kräfte, welche in den einzelnen Teilen auftreten, so kann man eine rationelle Materialverteilung und eine zweckmässige Verwendung verschiedener Materialien herbeiführen und dadurch sich und anderen grossen Nutzen schaffen.

Man darf bei solchen Berechnungen allerdings nie ausser acht lassen, dass das Holz ein sehr ungleichmässiges und verschiedenartiges Baumaterial ist, dass bei dem Zurichten der Bäume zu Balken ein grosser Teil der Fasern abgeschnitten oder zerstört wird, welche, wenigstens bei ziehenden Beanspruchungen nicht als tragend in Rechnung gebracht werden können, dass Aeste und Risse die Tragkraft der Hölzer verringern und dass selbst Hölzer gleicher Beschaffenheit verschiedene Tragkräfte haben können, weil es selbst von Einfluss ist, an welchen Stellen die Bäume gewachsen sind.

Oft mag man ja auch nicht im stande sein, Hölzer in solchen Dimensionen, wie sie gerade erforderlich sind, zu beschaffen. Denn es stehen nicht immer Bäume von solchen Dimensionen zur Verfügung, um aus denselben mit Vorteil Balken schneiden zu können. Sehr viel werden junge Bäume zu Zimmerwerken benutzt, diese durch Beschlagen in eine ungefähr balkenartige Gestalt gebracht und dann zur Herstellung des Zimmerwerkes benutzt. Es ist dieses ein Verfahren, welches unter keinen Umständen zu billigen ist und welches zu den kolossalsten Holzverschwendungen führen muss.

Ermittelung der Kräfte in Dachwerken, welche eine gleichförmige Belastung zu tragen haben.

Setzt man voraus, dass die Dächer sowohl von aussen her, als auch von der innern Seite gleichmässig belastet sind, so kann man die Kraftwirkungen in den einzelnen Teilen des tragenden Zimmerwerkes sehr leicht durch Zeichnung eines Kräfteplanes ermitteln, und dann nach den gefundenen Resultaten die Dimensionen der Hölzer und Eisen, welche zur Verwendung kommen müssen, bestimmen.

a) Dachwerke aus Holz, bei denen Eisen nur als Nebenmaterial vorkommt.

Dachstühle mit reinen Hängewerken als tragende Konstruktion.

Bei den in Wohnhäusern, Werkstätten etc. zur Benutzung kommenden Dachstühlen, müssen durch diese oft die darunter liegenden Balkenlagen an einem oder mehreren Punkten Unterstützung erhalten. In solchen Fällen kann man nur Hängewerke als diejenigen Konstruktionen anwenden, welche den Zwecken entsprechend sind. Aber auch, wenn Balkenlagen nicht zu unterstützen sind, sondern es sich nur um Tragung des Daches selbst handelt, sind die Hängewerke solide und oft zur Anwendung gebrachte Konstruktionen, weil sie einen soliden, gegen Verschiebungen vollständig gesicherten Verband geben, der nicht bei allen anderen, auch zulässigen Dachkonstruktionen erzielt werden kann.

Fig. 242, Taf. XXIII, ist ein Dachstuhl angegeben, welcher eine so geringe Spannung hat, dass die Sparren ED und FD zwischen ihren Endauflagern, weiterer Unterstützungen nicht bedürfen, der Balken AC aber in seiner Mitte bei B gestützt werden muss.

Die Belastung der Sparren, welche sich ausschliesslich auf die Endpunkte D und E verteilt, und zwar zu gleichen Teilen, besteht aus:

1. der Belastung durch das eigene Gewicht der Dachfläche,
2. der Belastung durch abgelagerten Schnee,
3. der Belastung durch den Wind, welcher die Dachfläche trifft.

Die erstere Belastung, von der Beschaffenheit des Deckmaterials wesentlich abhängig und innerhalb sehr grosser Grenzen schwankend, ist eine nicht veränderliche Last, während die beiden anderen aus Schnee resultierenden Belastungen, als mobile Lasten anzusehen sind, ebenfalls sehr schwankend sind und unter Umständen ganz beträchtliche Grössen erreichen können.

Man denkt aber nicht die Dachfläche ED selbst, sondern deren horizontale Projektion, also AB belastet.

Als eine vierte Belastung kommt dann das aus der Balkenlage AC hervorgehende auf den Punkt B entfallende Gewicht in Betracht, und dieses ist, wenn die Balken der Balkenlage als an den Enden A und C aufliegend, in der Mitte bei B aber gestützt angesehen werden, gleich $^5/_8$ des Gewichtes der Decke und der auf diese kommenden Belastung.

Nennt man die Belastung des Sparrens ED gleich P, so ist der Punkt D mit $\frac{P}{2}$ aus jeder Dachseite, also im ganzen mit P belastet, während die Belastungen der Punkte E und F jede gleich $\frac{P}{2}$ mit der Konstruktion nichts zu thun haben, sondern direkt in die Unterstützungen übergehen. Ist dann Q die Belastung der Balkenlage nebst dem eigenen Gewichte der Decke, so ist in B ein Gewicht von $^5/_8\ Q$ vorhanden. Auch hier gehen die Drücke, welche in den Endauflagern A und C der Balken auftreten, ohne auf die Dachkonstruktion Einfluss zu haben, in die Unterstützungen über.

Die Auflagerreaktionen sind demnach $\frac{P}{2} + \frac{5\,Q}{16}$, und wenn man P in P_1 und P_2 zerlegt, und mit P_1 die Belastung aus dem Gewichte der Dachfläche, mit P_2 aber diejenige aus Schnee und Wind folgende Belastung bezeichnet, so hat man, wenn ebenso Q in Q_1 und Q_2 geteilt wird, die Auflagerreaktionen für das Dach ohne Einfluss der mobilen Lasten $\frac{P_1}{2} + \frac{5\,Q_1}{16}$.

Die Kräftepläne sind der Form nach für beide Fälle gleich und unterscheiden sich nur bezüglich ihrer Grösse.

Man macht $a\,d$ gleich der Auflagerreaktion in A, zieht $a\,g$ parallel der Strebe $A\,D$, $d\,g$ aber horizontal, und hat in der ersten Linie die Druckkraft, welche von der Strebe $A\,D$ aufgenommen werden muss, während $d\,g$ die in den Balken $A\,B$ übergehende Zugkraft ist. Für den Punkt B findet man, wenn man $b\,d$ gleich $\frac{5\,Q_1}{8}$ oder $\frac{5\,Q}{8}$ macht, das Rechteck $b\,d\,g\,f$ als Kräftepolygon und entnimmt demselben $g\,f$ als den Zug 4, welcher in die Hängesäule $B\,D$ übergeht und $b\,f$ gleich dem Zuge 3 für das Balkenstück $B\,C$. Macht man dann $a\,e$ gleich $\frac{P}{2}$ oder $\frac{P_1}{2}$, je nachdem man auf die mobile Belastung Rücksicht nimmt oder nicht und zieht $e\,f \parallel C\,D$, so ist diese Linie, welche mit ihrem Endpunkte in f treffen muss, der Druck der Strebe $C\,D$.

Von den zwei hier gezeichneten Kräfteplänen entspricht der mit M bezeichnete dem Falle, in welchem eine mobile Belastung nicht vorhanden, derjenige M_1 aber dem Falle, in welchem die feststehende und bewegliche Belastung berücksichtigt ist. Man entnimmt demnach dem erstern Plane die kleinsten, dem andern aber die grössten Kräfte, welche in den einzelnen Teilen wirkend sind.

Ist der Balken $A\,C$ gleichzeitig Thramen des Hängewerkes und Balken der Balkenlage, so muss derselbe so stark gemacht werden, dass er der biegenden und ziehenden Kraft widerstehen kann.

Sind die Spannungen der Dächer so gross, dass die Sparren eine Unterstützung zwischen den Endauflagern nötig haben, aber die Verhältnisse so, dass der Balken $A\,C$, **Fig. 243, Taf. XXIII**, nur der einen Unterstützung bei B bedarf, so können die Pfetten bei E und F, welche die mittlere Unterstützung der Sparren herbeiführen, nicht einfach auf die Streben $A\,D$ und $C\,D$ gelegt werden, sondern es müssen die Punkte E und F so gehalten sein, dass eine Durchbiegung der Streben nicht möglich ist. Dieses ist in der Figur durch die Gegenstreben $E\,K$ und $F\,K$ herbeigeführt, die sich bei K in die Hängesäule einsetzen.

Ist P_1 die Belastung eines Sparrens und a die Anzahl der Sparren, welche auf einen Binder entfallen, so hat man die Belastung der Pfetten bei G, E und D aus einer Dachseite $P = aP_1$. Von dieser Belastung kommen auf E, das ist die mittlere Pfette, gleich an welcher Stelle zwischen G und D dieselbe liegt, $^5/_8\,P$ und auf die Pfetten G und D je $^5/_{16}\,P$. Man hat also die Punkte E und F mit $^5/_8\,P$, den Punkt D aber mit $^3/_8\,P$ belastet. Ist dann die Belastung des Punktes B aus der Balkenlage, wie oben, $^5/_8\,Q$, so hat man die Auflagerreaktionen R und R_1 gleich $\frac{^5/_8\,P + {}^3/_8\,P + {}^5/_8\,Q}{2} = \frac{P}{2} + \frac{5\,Q}{16}$.

Macht man demnach af gleich der Reaktion in A, zieht $ak \parallel AE$ und fk horizontal, so sind dieses die Kräfte 1 und 2 für AE und AB. Man trägt dann von f bis b die Belastung $^5/_8\,Q$, welche in B wirkt, auf, zieht bh horizontal und hk vertikal, so hat man in erster Linie die Kraft 6 für das Balkenstück BC und in hk die Kraft 5 für das untere Ende BK der Hängesäule. Werden die Streben EK und FK nicht in die Hängesäule, sondern dicht neben dieser in den Balken AC gestellt, so ist die Kraft 5 nicht vorhanden.

Nun hat man $ad = {}^5/_8\,P$ zu machen, das ist gleich der in E wirkenden äusseren Kraft, zieht $kl \parallel EK$ und $dl \parallel ED$, so ist die Linie kl die Kraft, welche in EK übergeht, während dl die in dem oberen Strebenteil DE auftretende Kraft 4 darstellt.

Für den Punkt K findet man nun als Kräftepolygon das Trapez $hikl$, in welchem $hi \parallel FK$ liegt und il vertikal gezogen ist. Die Linie il ist die Kraft 7, welche die Hängesäule zwischen K und D aufzunehmen hat. In der Spitze D des Daches muss dann aus $4 = dl$, $7 = il$, $de = {}^3/_8\,P$, das ist den bekannten Kräften und $9 = ei$ der Kraft, welche in DF übergeht, eine geschlossene Figur gebildet werden. Es sind dann mehr als die Hälfte der Kräfte dargestellt, so dass das Weitere des Kräfteplanes nur zur Vervollständigung dieses zu zeichnen ist, ohne noch neues zu zeigen.

Werden die Punkte E und F, **Fig. 244, Taf. XXIII,** nicht durch Gegenstreben, wie bei dem letzten Dache, gestützt, sondern durch einen Kehlbalken EF, so gestaltet sich der Kräfteplan wie in A angegeben ist. Die Kräfte, welche in den Kehlbalken übergehen, sind $kl = 5$ und $hi = 8$.

Ist der Kehlbalken EF auch noch in einer Balkenlage liegend und mit P_0 in Anspruch genommen. so ist in dem Punkt K die Kraft $^5/_8\,P_0$, in E und F aber je $^3/_{16}\,P_0$ wirkend, so dass die gesamten in E und F auftretenden äusseren Kräfte gleich $^3/_{16}\,P_0 + {}^5/_8\,P$ sind. Die Auflagerreaktionen in A und C sind dann $R = R_1 = \frac{P}{2} + \frac{5\,Q}{16} + \frac{P_0}{2}$. Der Kräfteplan erhält die in der Figur mit B bezeichnete Gestalt.

Für ein Dach mit zwei Hängesäulen, **Fig. 245, Taf. XXIII,** ist der Kräfteplan, unter der Annahme, dass die Punkte B und C gleichmässig belastet sind und gleichweit von A und D abstehen, gezeichnet.

Aus der Gesamtbelastung q für AB, q_1 für BC und q_2 für CD, kommt auf den Punkt B, genau genug, $^5/_8\, q + ^1/_2\, q_1$ und auf den Punkt C entsprechend $^5/_8\, q_2 + ^1/_2\, q_1$. Die Punkte E und F sind mit $^5/_8\, P$ und G mit $^3/_8\, P$ in Anspruch genommen, wenn P die Belastung einer Dachseite ist.

Ist der Spannriegel noch mit P_0 in Anspruch genommen, so vergrössern sich die Kräfte in E und F, ebenso wie die Reaktion in A und D um je $\frac{P_0}{2}$. Die Form des Kräfteplanes ändert sich dadurch nicht.

Müssen die Sparren noch eine weitere Unterstützung erhalten, wie dieses **Fig. 246, Taf. XXIII,** durch die Gegenstreben EL und KM geschehen ist, so müssen die Punkte L und M, in welchen die Gegenstreben die Hängesäulen BF und CH treffen, durch einen horizontalen Balken LM vor Ausweichen geschützt werden.

Dieser Schutz kann auch, wie **Fig. 247, Taf. XXIII,** angegeben, durch ein Andreaskreuz FM, HL erfolgen. Die Kräftepläne entwikkeln sich einfach und erhalten die in den Figuren angegebenen Formen.

Ein paar grössere Dachwerke, bei denen die tragenden Konstruktionen Hängewerke sind, sind in den **Fig. 248 u. 249, Taf. XXIII,** dargestellt. Bei der genauen Bezeichnungsweise, welche in den Figuren angewendet ist, lassen sich die Kräftepläne leicht für die verschiedensten Verhältnisse nachbilden.

Dachstühle mit Sprengwerken.

Die Dächer, bei welchen die Dachflächen durch Sprengwerke unterstützt werden, kommen meistens nur bei Hallen, Reitbahnen und ähnlichen Bauwerken vor, weil dieselben ganz ungeeignet sind, ausser den Dachflächen noch irgend welche Lasten zu tragen. Es sind auch nur wenige solcher Konstruktionen vorhanden und diese lassen sich meist auf die **Fig. 250, Taf. XXIII,** angegebene Konstruktion zurückführen.

Man hat hier das Sprengwerk $ACDF$ zur Unterstütung des Sparrens BE und $KGFD$, welches den Sparren EH in G und F stützt. Die Sparren BE und EH sind keine Konstruktionsteile, sondern die Teile welche gestützt werden. Sind zwischen C und D, sowie zwischen F und G Spannriegel nicht angebracht, sondern die Streben direkt mit den Sparren verbunden, so sind allerdings die Stücke dieser, welche zwischen den genannten Punkten liegen, zur Konstruktion gehörig und durch diese auch belastet.

Wirken in C, D, F und G je eine Kraft P, so hat man die Reaktionen in A und K gleich $2P$.

Macht man demnach $ab = 2P$, $ae = be = P$, zieht $ed \parallel BE$ und bd horizontal, so hat man in diesen Linien die Kräfte 3 und 4, welche von dem Spannriegel CD und der Strebe DF aufzunehmen sind. Verbindet man dann a mit d durch eine Linie, so muss diese die Kraft 1 vorstellen, welche in die Strebe AC übergeht und man muss deshalb diese Strebe der Linie ad parallel legen. In bd hat man dann auch die ziehende Kraft 2, welche von der Verbindung AK aufgenommen werden muss. BL und HM sind Hölzer, welche ausschliesslich das Ausweichen der Sparren bei B und H verhindern sollen.

Dachstühle mit vereinigten Hänge- und Sprengwerken zur Unterstützung der Dachfläche.

Viel häufiger als einfache Sprengwerke zu Dachstühlen benutzt werden, finden Vereinigungen aus Hänge- und Sprengwerken Anwendung. Diese sind in den verschiedensten Zusammensetzungen im Gebrauch und werden sowohl zur Ueberdeckung von Wohnhäusern als auch zu solchen von Hallen und so weiter gebraucht.

Fig. 251, Taf. XXIV, ist eine einfache Konstruktion dargestellt. Das zweisäulige Hängewerk hat Streben BE und DF, welche den horizontalen Balken AC schneiden und sich in B und D gegen die Umfassungsmauer des Gebäudes stellen.

Belastet wird die Konstruktion in G und H durch die Lasten Q, in E und F durch P und in der Spitze durch P_1. Die Reaktionen in den Auflagern sind demnach $R = R_1 = Q + P + \frac{P_1}{2}$.

Offenbar ist es, dass hier der horizontale Balken AC aus der Hängewerkskonstruktion keinerlei Beanspruchung resultiert, sondern dass derselbe nur dazu erforderlich ist, um die Konstruktion vor Schwankungen zu schützen und das Ausweichen der Sparren AK und CK zu verhindern.

Ebenso ist es einleuchtend, dass die Hängesäulen EG und FH nur durch die Belastungen Q und Q in Anspruch genommen werden, dass andere Kräfte auf diese nicht einwirken, und dass man deshalb die Angriffspunkte von Q nach E und F verlegen kann.

Es ist demnach der Kräfteplan ein sehr einfacher. Macht man $ab = bd$ gleich den Reaktionen in B und D, so erhält man die Strebenkräfte 1 und 3, wenn man ae und $de \parallel$ zu BE und DF zieht. Legt man dann durch b eine horizontale Linie, welche die ae und de in dem Durchschnittspunkte e treffen muss, so hat man in dieser die horizontale Kraft 2, welche den Spannriegel EF in Anspruch nimmt und welche das Bestreben hat die Punkte B und D, in welchen die Streben des Hängewerkes aufgestellt sind, zum seitlichen Ausweichen zu bringen.

Ist P_0 die gesamte Belastung eines Sparrens, so ist die Grösse des Sparrenschubes $S = \frac{P_0}{\sin \alpha}$ und die horizontale Kraft, welche in den Balken AC übergeht, gleich $H = P_0 \operatorname{cotg} \alpha$, wenn α den Neigungswinkel des Sparrens gegen den Horizont bezeichnet.

In **Fig. 252, Taf. XXIV,** ist angenommen, dass die Enden AM und BO so lang seien, dass dieselben nochmals in L und S Unterstützung erhalten müssen. Diese wird, ohne an der Konstruktion sonstige Aenderungen vorzunehmen, durch die Streben LW und SV herbeigeführt, welche mit den Streben MW und OV dieselben Fusspunkte W und V haben. Die Punkte D und G, in welchen die Streben LW und SV den horizontalen Balken AB schneiden, sind als Stützpunkte für den letztern angenommen und mit Q_1 belastet, während die Belastungen der unteren Enden E und F der Hängesäulen EM und OF je mit Q_2 in Anspruch genommen sind.

Der horizontale Balken AB wird hier wieder durch die in diese Richtung fallende Seitenkraft des Sparrenschubs auf Zug in Anspruch genommen. Dieser Kraft entgegen wirkt aber eine aus Q_1 resultierende Druckkraft, so dass in dem vorliegenden Falle das Balkenstück DK weniger in Anspruch genommen ist, als die Enden AD und BG, eventuell auch nur einer Druckkraft zu widerstehen hat, was in dem Falle sein wird, in dem die aus Q_1 hervorgehende Druckkraft grösser ist als die aus dem Sparrenschube entstehende horizontale Zugkraft.

Die Hängesäulen werden hier auch nur durch Q_2 belastet.

In dem Punkte M wirken die Belastungen Q_2, q_1 und P_2. Diese sind in ab auf die Linie ad getragen. Zieht man nun die horizontale Linien bf und $af \parallel MW$, so hat man in dieser Linie die Kraft 1, welche von der Strebe MW aufgenommen werden muss. Zieht man dann $fg \parallel LW$, so ist das Stück dieser Linie, welches durch die Horizontale, die durch d gezogen, abgeschnitten wird, die Kraft 2 für die Strebe LW. Die horizontale Linie dg gibt die Kraft an, welche in W wirkend von der Mauer des Gebäudes, das durch das Dach bedeckt wird, aufzunehmen ist.

Macht man nun de gleich Q_1, gleich der in D wirkenden Kraft, zieht eh horizontal und gh vertikal, macht also auch $gh = Q_1$, so hat man in hk die Kraft 4, welche den Balken AB zwischen D und G belastet und in fk die Kraft 5, welche von dem Strebenende LD aufzunehmen ist. Zieht man dann fl noch vertikal, so hat man in dem Abschnitte kl eine horizontale Kraft, welche in dem Punkte L auftritt und von der Verbindung der Strebe an dieser Stelle aufgenommen werden muss.

Die horizontale Linie bf ist demnach gleich der Belastung 6 des Spannriegels MO.

Die Kraft P_3, welche in der Spitze N des Daches wirkend ist, belastet die Konstruktion des Hängewerkes nur dann, wenn bei M und O feste Verbindungen ausgeführt sind, was in der Regel nicht geschieht.

Häufiger als die **Fig. 252** angegebene Konstruktion ist die **Fig. 253, Taf. XXIV**, dargestellte. Beide unterscheiden sich nur dadurch, dass die Streben AK und BM des Hängewerkes sich nicht in C und D gegen die Umfassungsmauern des Gebäudes stellen, sondern sich in A und B in den Balken AB setzen. Es wird die Konstruktion des Daches hierdurch eine wesentlich sichere und auch einfachere.

Die Kräfte P_1, welche in L wirkt und Q_1, welche in G angebracht ist, belasten ausschliesslich die Strebe CL und beeinflussen die Hängewerkskonstruktion nur dadurch, dass in G eine in den Balken AB übergehende horizontale Kraft auftritt. Sonst sind die Kräfte P_1 und Q_1 ausschliesslich von der Strebe CL gestützt. Der Kräfteplan ist für die rechte Dachhälfte gezeichnet.

Auf die vertikale Linie ag trägt man von a bis d die Kräfte P_1 und Q_1, zieht $cr \parallel DN$ und ar horizontal, so hat man die Kräfte 1 und 2, welche von dem Strebenende DH und der Umfassungsmauer aufgenommen werden müssen.

Man macht nun cg gleich der Reaktion in B, das heisst gleich der Reaktion, welche aus den auf das Dach einwirkenden Kräften mit Ausnahme der P_1 und Q_1 resultiert und zieht $gm \parallel BM$ und cm horizontal. Man hat dann in der Linie gm die Kraft 3 für die Strebe BM und in cm die Kraft 4, welche das Stück BH des horizontalen Balkens AB beansprucht.

Bestimmt man nun den Punkt b dadurch, dass man von a bis b die Kraft Q_1 abträgt, zieht bn horizontal und nm parallel DN, so erhält man die Kräfte $on = 6$ für das Balkenstück HF und $nn = 7$ für das Strebenende HN.

Trägt man nun von b bis d die Kraft Q_2, welche in F wirkt, auf, zieht dl horizontal und op, sowie nl vertikal, so hat man in pl die Kraft 8 für das Balkenstück EF und in nl die Belastung 9 der Hängesäule MF.

Macht man dann weiter gf gleich P_1 gleich dem in N wirkenden Teil der Dachbelastung, zieht fh horizontal und $nh \parallel BM$, so ist diese Linie die Belastung des Strebenteiles NM, welche mit 10 bezeichnet ist, und fh die in N wirkende horizontale Kraft, wie bei der vorigen Konstruktion angegeben, die von der Verbindung bei N aufgenommen werden muss.

Man verlängert dann die Linie nl bis k, so dass lk gleich q_1 wird, macht fe gleich P_2 und zieht die Linie ek, so hat man, wenn man noch hi vertikal zieht, in ik die Spannriegelkraft 11, welche von MK aufgenommen werden muss.

Fig. 254, Taf. XXIV, zeigt eine ähnliche Konstruktion für ein Dach mit grösserer Spannweite. Das Hängewerk hat hier drei Hängesäulen DM, EO und FU und die Sparren sind nochmals in N und S gestützt und unter diese Punkte die Gegenstreben NW und SW gestellt.

Nimmt man hier wieder an, dass die Kräfte P_1 und Q_1 allein von der Strebe LH gehalten werden, so hat man die Auflagerreaktion in A gleich $R = P_2 + P_3 + Q_2 + \frac{P_4 + Q_3}{2}$. Macht man demnach ag gleich dieser Reaktion und zieht $ar \parallel AO$ und $gr \parallel AB$, so erhält man die Kräfte 4 und 5 für das Strebenstück AL und das Stück AC des Balkens AB.

Es wird dann $gh = P_1$ und $hi = Q_1$ gemacht, $gk \parallel LH$ und ik horizontal gezogen, dann ist gh die Belastung der Strebe CH und ik die Kraft 2, welche von der Umfassungsmauer aufgenommen werden muss. Man zieht dann hs horizontal und $rs \parallel LH$, so hat man in $ls = 6$ die Kraft für CD und in sr diejenige 7 für das Strebenstück CL.

Für den Punkt L hat man nun $ab = P_1$ zu machen, cb horizontal und $cs \parallel AM$ zu ziehen und erhält dann in

cb die in L horizontal wirkende Kraft,
cs die Kraft 8 für das Strebenstück LM.

Nun macht man $lm = Q_2$, $mg = Q_3$, zieht die Linien st und yu horizontal und tv horizontal, so hat man

$mt = 9$ gleich der Kraft für das Balkenstück DE.
$yu = 16$ „ „ „ „ „ „ EF,
$ts = 10$ „ „ „ „ die Hängesäule DM,
$tu = 16$ „ „ „ „ „ „ WE.

Man geht jetzt zu dem Punkte M über. In diesem wirken die Kräfte P_2, q_1, $10 = st$, $8 = sc$, welche sämtlich bekannt sind und in dem Kräfteplane in den angegebenen Linien und in $cd = P_2 + q_1$ angegeben sind und dann die noch unbekannten Kräfte 12 und 13. Diese findet man, wenn man die Linie $dn \parallel AO$ legt in dn und in nt.

Man macht $de = P_3$, zieht $no \parallel NW$ und $oe \parallel AO$, so hat man für den Punkt N in $deon$ das Kräftepolygon und in eo die Kraft 15 für das Strebenstück NO und in $no = 14$ die Belastung der Gegenstrebe NW.

Es bleiben nun noch die Punkte O und W in Betracht zu ziehen. Man kann W nicht nehmen, weil in diesem Punkte drei unbekannte Kräfte 18, 20 und 21 auftreten, muss sich also zuerst zu dem Punkte O wenden. In diesem Punkte wirken $eo = 15$, $P_4 = ef$. Zieht man $fx \parallel OS$ und $ox \parallel OW$, so hat man die Kräfte 19 und 18 und nach Bestimmung der Kraft 18 in dem Punkte W und nach 20 und 21 unbekannt. Diese findet man in xv und vw, wenn man die erstere Linie $\parallel SW$, die letztere $\parallel UW$ zieht und $uv = q_2$ macht, denn man muss für den Punkt W aus den Kräften 12, 14, 18, 20, 21, 17 und q_2 eine geschlossene Figur bilden, was in $tuoxwv$ geschehen ist.

Von diesen Dachwerken ist in **Fig. 255, Taf. XXIV**, noch ein solches dargestellt, bei dem das Hängewerk und Sprengwerk vollständig ausgebildet sind. Es ist $AGBD$ das Hängewerk mit einer Hängesäule DG, welches die Spitze des Daches und die Mitte der Balken AB und FH unterstützt, oder die Belastungen, welche auf diesen Punkt entfallen, also Q_1, q_1 und P_2 tragen muss und das Sprengwerk ist $KFHL$, welches die Punkte F und H, also die Belastungen q, P_1, q, P_1, sowie diejenige Q und Q in C und E trägt.

Der Kräfteplan, der sich hier ergibt, lässt sich einfach, wie in der Figur geschehen, darstellen.

Die Auflagerreaktion für das Sprengwerk ist $R_0 = Q + q + P_1$ und diejenige für das Hängwerk $R = \frac{Q_1 + q_1 + P_2}{2}$.

Macht man also $ac = R_0$ und $eg = R$, zieht $cl \parallel LH$, $gr \parallel BG$, al und cv horizontal, so hat man in:

$cl = 1$ die Kraft für das Strebenstück LE,
$gr = 4$ „ „ „ „ „ BH,
$cr = 3$ „ „ „ „ Balkenstück BE und
$al = 2$ „ horizontale Kraft, welche in L von der Mauer aufgenommen werden muss.

Zieht man nun durch l eine vertikale Linie, macht $lm = Q$, zieht mp horizontal und $pr \parallel LH$, so erhält man in mp die Kraft 6 für das Balkenstück DE und in pr die Kraft 5 für die Strebe EH.

Wird dann $P_1 + q$ von g nach e auf der vertikalen Linie ah abgetragen und $eo \parallel BG$ gezogen, so hat man für den Punkt H die Figur $egrpo$ und demnach in $eo = 8$ die Kraft für das Ende GH der Strebe BG und in op die Kraft 7, welche von dem Spannriegel HM des Sprengwerkes aufgenommen werden muss.

Die Kraft Q_1 trägt man von m nach n ab, zieht durch n die horizontale Linie ns und durch p die Vertikale ps, so hat man in der Linie ns die Kraft 10 für das Balkenstück CD und in ps die Zugkraft 9 für die Hängesäule DM. Da nun in dem Punkte M vertikal abwärts wirkend die Kraft $9 = ps$ gefunden ist und in demselben Punkte auch q_1 abwärkts wirkt, so muss man in die Verlängerung von ps, also von s nach v die q_1 abtragen und hat dann, wenn man vw horizontal und no vertikal zieht, die Spannriegelkraft 13 und die Hängesäulenkraft 11 gefunden.

Ist dann de gleich P_2, so muss die Verbindung der Punkte d und u die Kraft 12 für FG ergeben und demnach auch parallel zu dieser Strebe liegen.

Für den Punkt F erhält man dann die Figur $bduvt$ als Kräftepolygon, in welcher $bd = P_1 + q$ gemacht ist, und aus der man $uv = 13$ als Kraft für MF und vt als solche für CF entnimmt.

Die weitere Fortführung des Kräfteplanes ist nicht erforderlich, soll dieselbe aber erfolgen, so ist sie einfach und nur noch zu bemerken, dass die Kraft 10, welche in ns gefunden wurde, nach vk verlegt werden muss, um den Anschluss derselben an die übrigen um den Punkt C liegenden Kräfte zu erhalten.

b) Dachbinder aus Eisen, oder aus Holz und Eisen.

Dachbinder, bei denen nicht ausschliesslich Holz zur Verwendung kommt, sind auf verschiedene Weisen konstruiert, aber doch nicht so mannigfaltig wie die ganz aus Holz bestehenden Stühle.

Es werden solche Binder entweder ganz aus Eisen konstruiert oder auch oft so, dass die Streben, Sparren, Pfetten etc. aus Holz, die Stangen und Verbindungen dieser mit den Holzteilen aber aus Eisen hergestellt werden.

Der einfachste Binder dieser Art ist **Fig. 256**, **Taf. XXIV**, angegeben. Die Sparren AB und CB sind nur an ihren Enden A, B und C unterstützt. Dieselben sind also stark genug, um die auf sie kommende Belastung zu tragen, und die ganze Konstruktion besteht demnach aus einer Stange AC, welche das Ausweichen der Sparren-enden A und C zu verhindern hat. Meistens befindet sich in solchen Dächern noch eine vertikale Stange BD. Diese bildet kein Konstruktionsglied, sondern dient nur dazu die Stange AC vor Durchbiegung zu schützen.

Die Belastung P eines Sparrens verteilt sich auf A und B resp. C und B, so dass jeder dieser Punkte $\frac{P}{2}$, also der Punkt B im ganzen P Belastung hat.

Um den Kräfteplan zu erhalten, macht man $ab = \frac{P}{2}$, zieht bd horizontal und ad parallel zu AB, um in der ersten Linie die die Stange AC beanspruchende Kraft 2, in ad aber die Kraft 1 für den Sparren AB zu erhalten.

In dem Punkt B hat man im Anschluss an $ad = 1$ die äussere Kraft P anzutragen, macht also ac gleich P und zieht $cd \parallel CB$. Es stellt diese Linie dann die Kraft 3 dar.

Um nun zu sehen, welche Kräfte Zug- und welche Druckwirkungen ausüben, trägt man in ab den nach oben gerichteten Pfeil, so zeigt, im Anschluss hieran, der in ad kommende Pfeil auf d zu und der in bd ist auf b gerichtet. Man hat also in der ersteren Kraft eine Druckkraft, in der letzteren aber eine Zugkraft.

Liegt die Stange AC nicht horizontal, sondern ist dieselbe, wie **Fig. 257, Taf. XXIV**, angibt, gebrochen, ~~und~~ die beiden Teile AD und CD nach oben gerichtet. Man erhält hier den Kräfteplan, wenn man $ae \parallel AB$ und $be \parallel AD$ macht, nachdem auf ab die Reaktion in A gleich $\frac{P}{2}$ aufgetragen ist. Macht man dann $ac = P$, gleich der äusseren Belastung des Punktes B, zieht $cd \parallel BC$ und de vertikal, so hat man in diesen Linien die Kräfte 1, 2, 3 und 4, welche die Teile AB, AD, BC und BD belasten. Zieht man dann noch $bd \parallel CD$, so hat man in dieser Linie die Kraft 5 für die Stange CD und den Plan vollendet.

Unter sonst gleichen Verhältnissen werden die Kräfte 1 und 2 grösser als bei dem vorigen Dachstuhle, es fallen diese Stücke also stärker aus, und ausserdem ist die vertikale Stange BD belastet. Der Vorteil, welcher erzielt wird, liegt aber ausschliesslich darin, dass der Punkt D höher kommt, und muss in jedem einzelnen Falle beurteilt werden, ob dieser die nicht unbedeutende Mehrverwendung an Material wünschenswert erscheinen lässt.

Gibt man dem Dache die **Fig. 258, Taf. XXIV**, angegebene Gestalt, legt also den Punkt D unter die horizontale Linie, so fallen unter sonst gleichen Verhältnissen die Kräfte geringer aus. Es wird aber die in der Vertikalen DB auftretende Kraft hier Druck, während dieselbe bei dem vorigen Dache gezogen ist.

Genügt die Unterstützung an den Enden des Sparrens nicht, sondern müssen dieselben noch eine zwischenliegende Unterstützung erhalten, so ist die einfachste Konstruktion die, welche **Fig. 259, Taf. XXV**, angegeben ist.

Die Sparren AB und CB sind in E und F durch die Streben ED und FD, welche sich in D mit der Stange BD und den nach A und C führenden Stangen AD und CD vereinigen, gestützt.

Ob die Punkte E und F in den Mitten zwischen AB und CB oder an einer anderen Stelle liegen, ist gleich, immer wird man die Belastung derselben $^5/_8\,P$ finden, wenn man, wie oben, P die Gesamtbelastung eines Sparrens nennt und diese als gleichförmig verteilt, annimmt. In der Spitze B des Daches tritt die Kraft $^3/_8\,P$, aus jeder Dachseite $^3/_{16}\,P$ auf, wenn die Punkte E und F die Sparren halbieren, sonst nur $^3/_8$ des Belastungsteiles, welcher auf BE oder BF entfällt.

Nimmt man E in der Mitte zwischen A und B an, so ist die Reaktion in A gleich $^{13}/_{16}\,P$.

Man macht also $ac = {}^{13}/_{16}\,P$, zieht $ag \parallel AE$ und $gc \parallel AD$, so hat man die Kräfte 1 und 2. In dem Punkte E wirkt dann 1 gleich ag, $^5/_8\,P = ab$, $3 = bf \parallel BE$ und $4 = gf \parallel ED$.

Macht man dann $bd = {}^3/_8\,P$ gleich der äusseren Belastung des Punktes B, so erhält man die Kraft 6, wenn man $dh \parallel BF$ zieht und diejenige 5, wenn man hf vertikal legt. Es sind damit alle Kräfte gefunden; denn es ist $1 = 7$, $4 = 8$ und $2 = 9$.

Man findet nun auch leicht in bekannter Weise, dass die Kräfte 1, 3, 6, 7, 4 und 8 pressende, 2, 5 und 9 aber ziehende Kräfte sind.

Diese Konstruktion ändert sich auch dadurch, dass der Punkt D über die horizontale Linie gelegt wird, wie dieses **Fig. 260, Taf. XXV**, zeigt, oder unter dieselben wie bei **Fig. 261, Taf. XXV.**

Auch mit zwei Unterstützungen für jeden Sparren findet man solche Konstruktionen, wie **Fig. 262, Taf. XXV**, zeigt.

Der einfache Polonceaudachstuhl, welcher vielfach zur Anwendung gebracht wird, ist **Fig. 263, Taf. XXV**, in drei verschiedenen Anordnungen dargestellt, von welchem die letztere, mit III bezeichnet, namentlich für ganz flache Dächer benutzt wird, während I dann am Platze ist, wenn es sich um Erzielung eines hohen Dachraumes handelt oder Gewölbe überdeckt werden sollen.

Die Kräftepläne sind einfach und bedürfen keiner weiteren Erklärung.

Zwei Polonceaudächer mit zweimal zwischen den Endauflagern gestützten Sparren, zeigen die **Fig. 264** und **265** auf **Taf. XXV, XXVI**, eine solche mit dreifach gestützten Sparren **Fig. 266, Taf. XXVI**, und eine zusammengesetztere **Fig. 267, Taf. XXVI.**

Die Kräftepläne für diese Dachbinder sind in den Figuren angegeben. Dieselben sind, da die zur Unterstützung benutzten Träger früher angegeben wurden, leicht verständlich.

Eine andere Art der Dachbinder, unter dem Namen englisches Dach bekannt, ist **Fig. 268, Taf. XXVI**, mit dem zugehörigen Kräfteplane dargestellt und zwar in seiner einfachsten Form.

Können die Stangen AC nicht in einer horizontalen Linie liegen, sondern müssen dieselben die Lage ADC, **Fig. 269** oder **270, Taf. XXVI** und **XXVII**, haben, so müssen die Stangen BD angeordnet werden.

Dieselben Dächer mit mehrfach unterstützten Sparren zeigen noch die **Fig. 271, 272** und **273, Taf. XXVII.**

Sind die Streben und Stangen, welche zur Unterstützung der Sparren angeordnet werden, ganz beliebig gestellt, z. B. wie in **Fig. 274, Taf. XXVII**, so ändert dieses an der Anfertigung des Kräfteplanes nichts.

Ebensowenig tritt eine Aenderung bei der Zeichnung des Kräfteplanes ein, wenn die Sparren nicht gerade Linien bilden, sondern sich als gebrochene Linie darstellen, die sich irgend einer Kurve anschliessen oder auch beliebig biegen. Solche Binder kommen unter Dächern mit gebogenen Dachflächen zur Benutzung. **Fig. 275, Taf. XXVII**, gibt hierzu ein Beispiel.

Die Dachfläche ist bei dieser Figur beliebig geformt angenommen. Gibt man derselben die Parabelform, so ist nur die untere horizontale Verbindung der Endpunkte des Bogens, der Bogen selbst und die vertikalen Verbindungen beider belastet, während alle Diagonalen unbelastet bleiben, also überflüssig sind.

In dieser Beziehung ist es gleichgültig, ob die Belastung in der horizontalen, unteren Gurtung liegt oder ob die Knotenpunkte des Bogens belastet werden und tritt auch dann kein Unterschied ein, wenn sowohl die horizontale als gebogene Verbindung der Auflager belastet ist.

Für diese drei verschiedenen Belastungsweisen sind die Kräftepläne der **Fig. 276, Taf. XXVIII**, gezeichnet und zwar ist der Plan I für den Fall, für welchen die untere Gurtung belastet ist.

Man hat hierin auch eine Konstruktion des parabolischen Bogens für eine beliebig anzunehmende Belastung der horizontalen Verbindung; denn wenn man $ab = bc = ed = \ldots = P$ gleich der Belastung der Punkte $K, L, M, N \ldots$ macht, die horizontalen Linien ah, be, ik, $dl \ldots$ zieht und dann die Punkte $h, i, k, l \ldots$ mit d durch gerade Linien verbindet und parallel dazu der Reihe nach die Linien AB, BC, CD, $DE \ldots$ zieht, welche immer von einer Vertikalen bis zu der folgenden reichen, so muss die entstehende Figur $ABCDE \ldots$ aus immer in einer Parabel liegenden Sehnen zusammengesetzte sein. Es kann hierbei ab beliebig angenommen werden, also die Grösse des in AH auftretenden Zuges beliebig bestimmt sein. Selbstverständlich wird die Parabel um so höher, je kleiner ah bei gleicher Belastung genommen wird.

*) Ist nur ein Teil der Knotenpunkte des Daches belastet, so treten wesentlich andere Verhältnisse auf.

So ist z. B. in **Fig. 277, Taf. XXVIII**, der Kräfteplan für den Fall dargestellt, dass nur die eine Trägerhälfte in der oberen Gurtung eine Belastung zu tragen hat, die obere Gurtung in allen übrigen Punkten aber unbelastet bleibt, ebenso wie die untere Gurtung eine Be-

*) Der Kräfteplan II gilt für den Fall, dass die Belastung in den Knotenpunkten des Bogens liegt, dieselbe aber gleichmässig ist und der Plan III ist für die Annahme gezeichnet, dass sowohl die obere als auch die untere Gurtung in allen Knotenpunkten gleichmässig in Anspruch genommen ist.

lastung nicht aufzunehmen hat. Es ist hierbei das eigene Gewicht der Konstruktion nicht berücksichtigt.

Man findet bei der angenommenen Belastung, dass in den einzelnen Feldern des Dachträgers Diagonalstangen, welche von links nach rechts ansteigen, erforderlich sind, welche einer Zugwirkung ausgesetzt werden, während die Vertikalen gedrückt sind. Selbstverständlich müssen die Diagonalen von rechts nach links ansteigend sein, wenn die Belastung nicht in der linken, sondern in der rechten Dachhälfte liegt, woraus folgt, dass bei einer vorzunehmenden wechselnden Belastung in allen Feldern sich kreuzende Diagonalen erforderlich werden.

Fig. 278, Taf. XXVIII, ist für die Annahme gezeichnet, dass die obere Gurtung in der linken Hälfte, die untere aber ganz belastet ist und zwar beliebig, so dass die Kräfte, welche auf die einzelnen Knotenpunkte einwirken, nicht gleichgross sind.

Man erhält in einem solchen Falle nicht immer nach derselben Seite gerichtete Diagonalen, wenn diese nur Zugkräfte aufnehmen sollen, sondern muss sie der Richtung der Kräfte entsprechend legen. So hat man in dem vorliegenden Falle in dem zweiten Felde von der linken Seite gerechnet, eine nach links steigende Diagonale. Sollte dieselbe, wie diejenigen in den folgenden Feldern liegen, die Diagonalstangen rechts steigend sein, so würde sie gedrückt werden. Parallel zu der Diagonale $3a$ liegt diejenige $15a$.

Sind Gewölbe zu überdecken, so werden öfter Binder zur Anwendung gebracht, welche gebrochene, obere und untere Gurtungen haben. Solche Binder werden mit dem Namen Sichelträger belegt. Es sind solche Dächer in den **Fig. 279** und **280, Taf. XXIX**, dargestellt.

Für das Dach **Fig. 279** sind zwei Kraftepläne gezeichnet, welche für verschiedene Lagen der Diagonalen in den Feldern $ABCD$ und $A_1 D_1 B_1 C_1$ gelten. Für den Fall diese Diagonalen in der Richtung AC resp. $A_1 B_1$ liegen, ergibt sich der Kräfteplan I. Die Diagonalen werden dann bei der angenommenen Belastung gezogen. Liegen die Diagonalen in den Richtungen BD und $C_1 D_1$, so gilt der Plan II. Die Diagonalen haben dann Druckwirkungnn aufzunehmen.

Oefter werden auch Dachkonstruktionen zur Anwendung gebracht, bei denen ein Fachwerksträger die tragende Konstruktion bildet.

Fig. 281, Taf. XXIX, ist ein Fachwerksträger mit parallelen Gurtungen benutzt. Es ist das Dach einer Halle, welches ausserhalb der Unterstützungen A und B noch Perrons zu überdecken hat. Solche Dachkonstruktionen kommen meist nur dann vor, wenn die Dächer flach sind, so dass die vertikalen Balken, welche die Pfetten mit dem Träger verbinden, ohne besondere Unterstützungen Sicherheit gewähren, also nur kurz ausfallen.

In I und II sind die Anfänge der Kräftepläne für den Fall, dass alle Diagonalen in den ausgezogenen Linien liegen und für den, in welchen nur in dem ersten Felde rechts von A eine Diagonale in der gezogenen Linie, in dem folgenden Felde aber eine solche nach der punktiert angegebenen Linie liegt.

In Figur III ist dann der Kräfteplan für den Fall, in welchem die zwischen A und B liegenden Diagonalen den punktierten Linien folgen, vollständig gezeichnet.

Die beiden ersten Fälle erscheinen schon aus dem Grunde nicht zweckmässig, weil die über A stehende Vertikale eine im Verhältnis zu den übrigen Diagonalen sehr grosse Kraft aufzunehmen hat, diese Vertikale also bedeutende Dimensionen erhalten muss, welche oft der soliden Verbindung der einzelnen Teile hinderlich werden kann.

Sind die Gurtungen des Fachwerksträgers nicht parallel, sondern folgt die obere der Richtung des Sparrens, so erhält man die **Fig. 282, Taf. XXIX,** dargestellte Form für den Dachbinder.

Auch in einem solchen Falle zeichnet sich der Kräfteplan leicht.

In **Fig. 283, Taf. XXIX**, ist dann noch, um auch die Behandlung dieser zu zeigen, ein Pultdach, welches durch Hängewerkskonstruktionen gestützt ist, dargestellt. Die Belastungen, sowohl des Sparrens als auch des Balkens AB sind für die einzelnen Knotenpunkte ungleichmässig angenommen, weshalb nicht die anfänglich dargestellte Form der Konstruktion benutzt werden kann, sondern die sich aus dem Kräfteplane ergebende Lage der Verbandsstücke, welche durch punktierte Linien vermerkt ist, genommen werden muss.

Bei allen diesen Dächern ändert sich das Verfahren in der Herstellung des Kräfteplanes nur wenig, wenn man nur einzelne Knotenpunkte belastet nimmt, die übrigen aber unbelastet lässt, oder wenn man für die Knotenpunkte ganz verschiedene Belastungen einführt.

Kräfte in Dachwerken bei einseitigem Winddruck.

Nimmt man dagegen das Dach unter seinem Gewichte und einer Schneedecke gleichmässig belastet an und denkt dann auf die eine Seite desselben einen stärkeren Windstrom gerichtet, so ist bei sonst hierzu geeigneten Konstruktionen, d. h. solche, welche als eine zusammenhängende Masse bildend, betrachtet werden können, ein Verschieben des Daches möglich und muss man, wenn solche Fälle eintreten können, hierauf Rücksicht nehmen.

Wie gross man eine Belastung durch den Wind annimmt, hängt von der Lage und Beschaffenheit des Daches ab, in der Regel wird dieselbe 100 bis 120 kg für einen Quadratmeter hoch genug genommen sein, zumal, wenn man berücksichtigt, dass die vorherrschenden Stürme selten im Winter stattfinden, d. h. dann, wenn das Dach mit Schnee belastet ist.

Die Windströmung geht nicht horizontal, sondern ist gegen die horizontale Linie geneigt. Dieser Neigungswinkel kann als konstant zu 10 Grad angenommen werden.

Ist **Fig. 284, Taf. XXX**, AB die Dachneigung, CD die horizontale Linie, $DOW = 10$ Grad, so wird WW die Richtung des Windes sein. Macht man demnach OW_1 gleich dem Winddrucke für 1 qm Dachfläche, so zerlegt man diesen in OM und ON, von denen

OM lotrecht zu AB steht, während ON in die Richtung der Sparren fällt.

Macht man dann AB gleich der Länge des Sparrens, oder gleich derjenigen der Dachfläche, nimmt an, dass die Sparren 1 m voneinander entfernt liegen, so erhält man den Druck, welcher aus der Windpressung lotrecht zum Sparren steht, auf einen Sparren, indem man den Winkel BAE gleich OW_1M macht und den Schenkel AE soweit verlängert, dass das aus B auf diesen gefällte Lot denselben in E trifft. Man hat dann in BE die Grösse des verlangten Druckes; denn man hat in OW_1M und BAE ähnliche Dreiecke, also die Proportion $OM : OW_1 = BE : AB$.

Diesen Winddruck hat man dann mit der Anzahl der Sparren zu multiplizieren, welche von einem Dachbinder gestützt werden.

Ist nun **Fig. 285, Taf. XXX,** $ABCD$ der Binder, für welchen unter Berücksichtung des Winddruckes die Kräfte bestimmt werden sollen, welche die einzelnen Teile desselben aufzunehmen haben, so kann man dabei verschiedene Annahmen machen.

Der Binder kann in A und D mit den Unterstützungen fest verbunden sein und diese solche Beschaffenheit haben, dass sie gleichmässig die schiebende Kraft des Windes aufnehmen können, oder es können diese Unterstützungen solche Beschaffenheit haben, dass sie ungleich grosse Teile der Horizontalen aus dem Winddruck resultierenden Kraft aufnehmen können, oder schliesslich, dieselben sind so beschaffen, dass nur eine Unterstützung diese horizontale Kraft aufnehmen muss.

Das letztere wird wohl in den meisten Fällen anzunehmen sein, weil, wenn auch die Umfassungsmauern des Gebäudes geeignet sind dem Winddrucke Widerstand leisten zu können, das Dach nicht an beiden Auflagern mit den Umfassungsmauern verbunden wird, sondern an einer Seite beweglich gemacht werden muss, um den Ausdehnungen und Zusammenziehungen des Konstruktionsmaterials folgen zu können.

In der Figur ist angenommen, dass in A eine lose Unterstützung des Dachbinders stattfindet, dass in D aber eine Befestigung desselben bewirkt ist.

Es kann dann in A nur eine vertikale Reaktion stattfinden.

Nimmt man nun an, die Dachseite AB sei nur durch das eigene Gewicht und den Schnee in Anspruch genommen, die Dachseite BD aber auch durch den Wind, so hat man in dem Punkte E, wenn $2P$ die Belastung einer Dachseite aus dem Gewichte der Konstruktion, $2S$ diejenige aus einer auf dem Dache liegenden Lage Schneees ist, die vertikale Belastung $P+S$ wirkend. In dem Punkte B_1 der Spitze des Daches wirkt aus der Dachseite AB die ebenfalls vertikale Belastung $\frac{P+S}{2}$ und derselbe Teil der Belastung tritt auch in A auf.

An der zweiten Dachseite, welche ausser durch $2(P+S)$ noch durch $2W_0$ in Anspruch genommen ist, welche Belastung lotrecht zu BD steht, und von der in F der Teil W_0 in B und D aber je

$W_{00} = \frac{W_0}{2}$ angreift, hat man in F aus W_0 und $P + S$ die Mittelkraft W_m durch Zeichnung des Kräftepolygons zu ermitteln.

Verlängert man dann die Richtungen von $P + S$ in E und von W_m in F wirkend bis zu ihrem Durchschnittspunkte G, so muss dieser Punkt in der Richtung der Mittelkraft zu den in F und E wirkenden äussern Kräften liegen.

Zieht man dann ab parallel FG, bc parallel EG, macht ab gleich $2\,W_m$ und $bc = 2\,(P + S)$ und zieht ac, so gibt diese Linie die Richtung der Mittelkraft, welche durch G geht, an.

Verlängert man dann GH über G hinaus, bis man den Durchschnittspunkt K dieser Linie mit einer durch A gezogenen vertikalen Linie AK erhält, so gibt die Linie KD die Richtung des Auflagerdrucks in D an.

Zieht man dann ad parallel zu. KD und verlängert bc bis d, so hat man in ad den gesamten Auflagerdruck in D und in cd denjenigen in A.

In dem Punkte D erhält man aus $W_{00} = \frac{W_0}{2}$ und aus $\frac{P + S}{2}$ der Mittelkraft M_1. Macht man demnach ae gleich M_1, so hat man in eb die Grösse der Auflagerreaktion in D.

In der Spitze B des Daches erhält man aus W_{00} und $\frac{P + S}{2}$ eine Mittelkraft M_1, welche sich dann mit der Kraft $\frac{P + S}{2}$ aus der Dachseite AB zu der Mittelkraft M_0 vereinigt.

Macht man dann $bg = \frac{P + S}{2}$, zieht gf parallel BM_0, so kann man zur Darstellung des Kräfteplanes schreiten, welcher einfach darzustellen ist und die Kraftwirkungen für die einzelnen Teile ergibt.

Um dann die kleinsten Kräfte, welche in den Konstruktionsteilen des Binders wirken, zu finden, zeichnet man den Kräfteplan II. Für denselben ist die Belastung des Daches nur durch das eigene Gewicht angenommen, also weder Schneedruck noch Windstoss berücksichtigt.

Nimmt man nun an, dass die Belastung durch den Wind nicht auf der Dachseite BD, sondern auf AB stattfindet, so erhält man aus W_0 und $P + S$ die Mittelkraft W_n und findet durch Verlängerung dieser und der vertikalen in F wirkenden Kraft $P + S$ den Durchschnittspunkt G_1 als Punkt in der Mittelkraft zu W_n und $P + S$. Macht man dann $a_1\,b_1$ parallel $G_1\,W_n$ und $a_1\,c_1$ vertikal, trägt auf $a_1\,b$, von a_1 anfangend, W_n und auf $a_1\,c$, an demselben Punkte beginnend, $P + S$ ab, so erhält man in $b_1\,c_1$ die Richtung der durch G_1 gehenden Mittelkraft. Diese verlängert man, bis man den Durchschnittspunkt K_1 derselben mit der durch A gehenden vertikalen Linie erhält und zieht dann, um die Richtung des Auflagerdrucks in D zu erhalten, die Linie $K_1\,D$.

Vielfach schlägt man das **Taf. XXXI** angegebene Verfahren für Dächer, bei denen ein einseitiger Winddruck berücksichtigt werden soll, ein, welches den Vorteil hat, dass man die Durchschnittspunkte K und K_1 der vorigen Konstruktion nicht zu bestimmen braucht, was namentlich bei flachen Dächern, bei denen diese Punkte sehr weit abfallen, von Vorteil ist.

Man zeichnet, um die kleinsten in den Teilen des Binders auftretenden Kräfte zu erhalten, einen Kräfteplan IV, bei denen als Belastung des Daches nur das eigene Gewicht desselben angenommen ist. Darauf wird der Plan I dargestellt, bei dem ausser dem Gewichte des Daches noch eine gleichmässig verteilte Belastung durch Schnee vorausgesetzt ist.

Als dritter Kräfteplan wird der mit II bezeichnete Plan dargestellt, bei dem von dem Gewichte des Daches und einer Schneebelastung abgesehen ist und nur eine Beanspruchung der einen Dachseite und zwar derjenigen BC angenommen ist.

Die Knotenpunkte D, E und F sind jeder mit W belastet, diejenigen C und B aber jeder mit $\frac{W}{2}$. Man hat also die ganze Belastung der Dachfläche BC gleich $4\,W = W_0$. Diese Belastung steht lotrecht zu BC.

Das Dach ist bei B befestigt, bei A aber beweglich gelagert, weshalb in A nur ein vertikaler Druck stattfinden kann. Man zieht durch A die vertikale Linie AM und verlängert die Richtung W_0 bis zum Durchschnittspunkte M in der Linie AM. Zieht man dann BM, so gibt diese Linie die Richtung des Auflagerdruckes an.

Man zieht ac parallel der Kraftrichtung W_0, legt durch a eine vertikale Linie und durch c eine solche parallel zu BM, so hat man in ab die Reaktion R für den Punkt A, in bc aber die Grösse des Auflagerdruckes. Macht man dann $cd = \frac{W}{2}$ und zieht bd, so hat man in dieser Linie die Reaktion R_1 in dem Punkte B.

Zieht man nun ag parallel AC und bg horizontal oder parallel mit AG, so hat man die Kräfte 25 und 24, welche in AK und AL wirkend sind. Diese Kräfte bleiben auf der ganzen Länge der Teile AC und AG dieselben, weil in diesen Teilen äussere Kräfte nicht mehr vorhanden sind, welche eine Aenderung hervorbringen könnten. Die Verbindungen zwischen AC und AG bleiben unbelastet.

Für die Teile der rechten Binderhälfte findet man dann die Kräfte in der bekanten Weise.

Um demnach die grössten auf die Konstruktionsteile wirkenden Kräfte zu erhalten, hat man die aus den Plänen I und II gefundenen Kräfte zu addieren.

Man zeichnet nun noch den Kräfteplan III, welcher für den Fall Gültigkeit hat, dass die Dachseite AC dem Winde ausgesetzt ist, BC aber unbelastet bleibt, um aus diesen und dem Plane II diejenigen Kräfte entnehmen zu können, welche die Teile des Dachbinders am stärksten in Anspruch nehmen.

Der gesamte auf AC kommende Winddurck ist gleich W_0^1. Die Richtung verlängert man bis zum Durchschnitte N mit der durch A

gehenden vertikalen Linie AN und zieht NB, so gibt, genau wie vorher, diese Linie die Richtung des Auflagerdruckes in B an.

Man legt nun $a_1 c_1$ parallel der Richtung von W_0^1, zieht $a_1 b_1$ parallel zu AN und $b_1 c_1$ parallel zu BN, so hat man in der letzteren Linie die Reaktion in B. Macht man dann $a_1 d_1$ gleich $\frac{W_1}{2}$ und zieht $b_1 d_1$, so hat man in $d_1 c_1$ den Teil der Windpressung W_0^1, welcher für die Ermittelung der inneren Kräfte in den Teilen des Binders in Betracht kommt.

Weil die Richtung von BN in die Lage des Sparrens BC fällt, so muss die in diesem auftretende Kraft gleich $b_1 c_1$ sein, während die horizontale Stange BG unbelastet bleibt. Ebenso haben die Verbandstücke zwischen BC und BG keinerlei Kräfte aufzunehmen.

Die übrigen Kräfte findet man dann in der bekannten Weise.

Fällt die Linie BN nicht in die Richtung des Sparrens BC, sondern liegt, wie **Fig. 287, Taf. XXXI**, die Richtung des Auflagerdrukkes B in BM, also ausserhalb des Sparrens BC, so bleibt das Verfahren zur Ermittelung der innern Kräfte dasselbe, wie vorher, man erhält jedoch dann aus bc die Kräfte 1 und 2 gleich den Linien cd und bd, welche parallel zu BG und BD gezogen sind. Da in dem hier angenommenen Binder die Punkte A und B nicht durch eine gerade Stange, sondern durch die nicht in gerader Linie liegenden Stangen BD, DE und AE verbunden sind, so muss sich aus 2 gleich bd eine Kraft $bf = 6$ und eine solche $df = 5$ ergeben, welche in die Stangen DE und DC übergehen. Es bleibt deshalb in diesem Falle nur das Stück DG unbelastet.

Futtermauern.

Handelt es sich darum, die Stärke der Futtermauern auf graphischem Wege zu bestimmen, so hat man die Drucklinie zu konstruieren und dann die Mauerstärke so zu wählen, dass die gefundene Drucklinie überall in dem mittleren Drittel der Mauer liegt. Die Form der Mauer ist dabei ziemlich gleichgültig. Dieselbe kann an einer oder beiden Seiten der Form der Drucklinie folgen, oder einen beliebigen geradlinigt begrenzten Querschnitt haben.

Wesentlich hängt die Form der Drucklinie von der Art der Hinterfüllung ab. Je kleiner der natürliche Böschungswinkel des hinter die Mauer gefüllten Materials ist, desto grösser wird selbstverständlich der Druck, welchem die Mauer Widerstand zu leisten hat.

Bezeichnet man mit R den aus der Hinterfüllung auf die Mauer ausgeübten Druck für eine Längeneinheit, h die ganze Höhe der Mauer, m das Gewicht der Kubikeinheit des Hinterfüllungsmaterials und ϱ den Böschungswinkel der Erdart, welche die Hinterfüllung ausmacht, so hat man

$$R = \tfrac{1}{2} h^2 m \operatorname{tang}^2 \left(45 - \frac{\varrho}{2}\right).$$

Dieser Wert geht z. B. für trockene Dammerde, für welche ϱ nach Heinzerling gleich 27 Grad ist, über in:

$$R = {}^1/_8\, h^2\, m.$$

Man kann also diesen Druck sehr einfach durch ein rechtwinkliges Dreieck ABC, **Fig. 288, Taf. XXXII**, darstellen, dessen Höhe gleich h und dessen Basis $\frac{h}{4}$ ist.

Ist die Hinterfüllung der Mauer an ihrer oberen Seite noch durch eine Aufschüttung belastet und ist der Böschungswinkel der Aufschüttung der natürliche Lagerungswinkel des Materials und dieses mit dem Hinterfüllungsmateriale gleich, so hat man, wenn die Höhe der Auffüllung grösser ist als die Höhe der Hinterfüllung wieder für Dammerde:

$$R = \frac{h^2}{4} m.$$

Ist **Fig. 289, Taf. XXXII,** AB die Mauer, so hat man in Uebereinstimmung mit **Fig. 288** den Druck der Hinterfüllung dargestellt durch das Dreieck CDE mit der Basis $DE = \frac{h}{4}$. Zieht man dann CF horizontal durch die obere Begrenzungsfläche der Mauer, macht den Winkel $FCG = \varrho$ und zieht GH horizontal, so ist CGH die Begrenzung der Auffüllung von der Höhe h_1. Legt man dann DF parallel zu CG bis diese Linie die durch G gezogene vertikale Linie GK in K trifft, so ist dann $GK = h$. Man macht nun KL horizontal und gleich $\frac{h_1}{4}$, zieht GL, so hat man in dem Dreieck GKL den Druck der Aufschüttung gegen die Mauer. Macht man demnach $EM = KL = \frac{h_1}{4}$ und zieht CM, so ist das Dreieck CEM gleich demjenigen GKL und man hat in CDM den gesamten gegen die Mauer wirkenden Druck.

Ist die Aufschüttung unter sonst gleichen Annahmen kleiner als die Höhe der Mauer, so gestaltet sich die Konstruktion, wie **Fig. 290, Taf. XXXII,** angegeben ist.

Man zeichnet das Dreieck ABC mit einer Höhe gleich h und der Basis gleich $\frac{h}{4}$, hat also in demselben wieder den Druck der Hinterfüllung gegen die Mauer dargestellt.

Stellt nun ADE die Begrenzung der Hinterfüllung dar, so zieht man AH horizontal und DG vertikal, hat also in der letzten Linie die Höhe h_1 der Auffüllung. Macht man dann weiter $GH = \frac{h_1}{4}$ und vollendet durch DH das Dreieck DGH, so stellt dieses den Druck der Aufschüttung gegen die Mauer dar. Wird nun GJ parallel DA gezogen, so gibt die horizontale Linie JL, durch J gelegt, die Basis des Dreiecks, welches an ABC gelegt werden muss, um den

Gesamtdruck gegen die Mauer zu erhalten. Macht man also $UL = \frac{h_1}{4} = GH$ und zieht AL, so ist $ALKCB$ die Darstellung des gesamten Druckes R. Den Angriffspunkt dieses erhält man, wenn man in den Dreiecken ABC und AKL die Schwerpunkte M und M_1 bestimmt, die Flächeninhalte H und H_1 ermittelt, durch M und M_1 horizontale Linien zieht und auf eine ebenfalls horizontale Linie ad die Grössen H und H_1 trägt.

Dann nimmt man e beliebig ausserhalb ad an, zieht ae und parallel dazu NO, be nebst der Parallelen NP und schliesslich de, sowie PR hierzu parallel. Dann ist W ein Punkt in der horizontalen Linie WW_1, in welcher die Druckwirkung erfolgt.

Es kann nun noch die Aufschüttung AE durch eine Böschung begrenzt sein, welche einen kleineren Winkel hat, als der natürliche Böschungswinkel des Materials ist. In einem solchen Falle verfährt man nach **Fig. 291, Taf. XXXII.**

FBK ist gleich ϱ, FAD gleich der Böschung der Aufschüttung, also kleiner als ϱ. AG horizontal, FD vertikal, DH parallel mit BF, $GF = \frac{DF}{4} = CK$, HJ horizontal, dann ist CJK das Dreieck des Druckes der Auffüllung. Den Angriffspunkt der Kraft R bestimmt man in derselben Weise wie vorher angegeben.

Es kann nun noch der Fall eintreten, dass die Hinterfüllung einer Mauer auf eine andere Weise belastet wird, als durch eine Erdaufschüttung. In einem solchen Falle reduziert man das Gewicht der Belastung auf das Gewicht der Hinterfüllungsmasse und findet z. B. die Höhe $h_1 = AB$, **Fig. 292, Taf. XXXII.** Man macht dann $BE = \frac{h_1}{4}$ und $CD = \frac{h + h_1}{4}$, zieht AD und hat in dem Dreiecke ACD die Darstellung des Druckes.

Hat man nun eine Futtermauer $ABCD$, **Fig. 293, Taf. XXXII,** und in EFG das Dreieck des Erddruckes, so teilt man, um die Drucklinie in der Mauer zu bestimmen, beide, der Höhe nach, in eine beliebige Anzahl am bequemsten gleich hoher horizontaler Stücken. In den Teilen des Dreieckes EFG bestimmt man die Schwerpunkte S, $S_1, S_2, S_3 \ldots$ und zieht durch dieselben bis zu einer vertikalen Linie HJ in dem Mauerquerschnitte, oben $\frac{1}{3}$ der Breite AB von dem Rücken BC der Mauer abstehend, horizontale Linien, wodurch man die Punkte $M, M_1, M_2, M_3 \ldots$ findet.

Hierauf bestimmt man die Querschnitte der Teile der Mauer und des Erddruckdreieckes, welche durch die horizontalen Schnitte entstanden sind und nimmt die sich ergebenden Flächen als Kräfte.

Nennt man den Querschnitt des obersten Mauerteils P, denjenigen des Dreieckes E aber H, die Querschnitte der folgenden Mauerteile $P_1, P_2, P_3, P_4 \ldots$ und diejenigen der Trapeze $KLNO$, $WORO \ldots H_1, H_2, H_3, H_4 \ldots$ und vereinigt dieselben zu Mittelkräften $R, R_1, R_2, R_3, R_4 \ldots$, so kann man auch R und R_1 zu

W, W und R_2 zu W_1, W_1 und R_3 zu W_2, W_2 und R_4 zu W_3 und so weiter vereinigen.

Zieht man nun durch M eine Linie parallel zu R und durch M_1 eine solche parallel zu R_1, verlängert beide bis zu ihrem Durchschnittspunkte U und zieht durch diesen eine Linie parallel zu W, so hat man in dem Durchschnittspunkte a zwischen MU und 1 einen Punkt in der Drucklinie. Einen zweiten Punkt in dieser Linie erhält man aus dem Durchschnittspunkte der Parallele zu W und der Schnittlinie 2, also in b.

Weiter zieht man durch M_2 eine parallele Linie $M_2 V$ zu R_2, bis man den Durchschnittspunkt dieser mit UV erhält. Durch V legt man dann eine Linie parallel zu W_2 und ermittelt den Durchschnittspunkt d dieser mit der Schnittlinie 3, um einen dritten Punkt der Drucklinie in der Mauer zu erhalten.

In gleicher Weise fährt man fort und bestimmt nacheinander die Punkte e, f, g, h und k.

Zu demselben Resultate kommt man auch, wenn man nach **Fig. 295, Taf. XXXIII**, verfährt.

Die Mauer und das Erddruckdreieck sind wie bei der vorigen Figur eingeteilt und in den einzelnen Teilen die Schwerpunkte bestimmt. Aus den Gewichten dieser Teile ist dann ebenfalls übereinstimmend mit vorher der Kräfteplan gebildet und dann durch die Punkte M, M_1, M_2, M_3 und so fort, in welchen die Horizontalen durch die Schwerpunkte der Teile des Erddruckdreieckes gezogenen Linien eine vertikale Linie HK in der Mauer schneiden, Parallele zu $W, W_1, W_2, W_3, W_4 \ldots$ gezogen.

Man nimmt dann einen Pol O beliebig an, zieht nach den Punkten, in denen die Kräfte W zusammenstossen, Polstrahlen und bildet hiernach das Seilpolygon $ABCDEFGJL$.

Dann verlängert man die Seiten dieses Polygons bis dieselben eine Linie PQ treffen, welche parallel zu dem Strahle OS gezogen ist. Hierdurch erhält man die Punkte a, b, c, d, e, f, g und h.

Zieht man nun durch a eine Linie am bis zum Durchschnittspunkte mit dem Schnitte 1 parallel zu W, dann durch b eine Parallele zu R, bis man in h den Durchschnitt mit 2 erhält, durch c die Linie co parallel zu R_1 bis zum Schnitte o mit 3 und so fort, bis man durch h die Linie ht parallel zu R_6 gezogen und den Durchschnittspunkt t mit der Grundlinie 8 der Mauer erhalten hat, so hat man in m, n, o, p, q, r, s und t Punkte in der Drucklinie.

Da das hier gefundene Resultat genau übereinstimmend mit dem vorhergehenden ist, so ist es ausschliesslich von den Ansichten des Konstrukteurs abhängig, welches Verfahren derselbe einschlagen will.

Ist die Mauer an der Rückseite nicht vertikal, sondern wie ABC, **Fig. 296, Taf. XXXIII,** zeigt, gebrochen hergestellt, so ergibt sich selbstverständlich eine andere Figur als ein einfaches Dreieck für den Erddruck.

Für die hintere vertikale Mauer ist der Erddruck durch das Dreieck EFG, in welchem FG gleich $\frac{CD}{4}$ ist, dargestellt. Zieht man durch B eine horizontale Linie BL, welche das Dreieck EFG in dasjenige EHK und das Trapez $HKGF$ zerteilt, so hat man HM gleich AD zu machen, die Linie KM zu ziehen und die Länge KM von H bis L abzutragen. Zieht man dann EL, so gibt das Dreieck EHL den Erddruck für den oberen Teil AB der Mauer an, und in KM hat man die Richtung des Erddruckes für diesen Mauerteil. Wird diese Neigung gegen das Lot zu AB grösser als der natürliche Böschungswinkel des Aufschüttematerials, so ändert man die Neigung des Erddruckes, so dass man den Neigungswinkel dieses mit dem Lote zu AB gleich dem natürlichen Böschungswinkel annimmt.

Man zieht jetzt durch die Schwerpunkte $S, S_1, S_2, S_3 \ldots.$ der Teile der Figur des Erddruckes horizontale Linien, bis dieselben die hintere Begrenzung ABC der Mauer treffen. Durch die hier gefundenen Punkte $N, N_1, N_2, N_3 \ldots.$ legt man parallel zu der Richtung des Erddruckes Linien, bis man die Durchschnittspunkte a, b, c, d, M_5, M_6 mit den Vertikalen, welche durch die Schwerpunkte $M, M_1, M_2, M_3 \ldots.$ gezogen sind, erhält.

Durch die so gefundenen Punkte zieht man dann parallele Linien zu den Kraftrichtungen $W, W_1, W_2, W_3, W_4 \ldots.$, welche man durch den Kräfteplan findet und verfährt dann genau, wie vorher angegeben, wodurch man die Punkte $m, m_1, m_2, m_3, m_4 \ldots.$ als Punkte der Drucklinie findet.

Diese Konstruktionen sind dann vorzüglich am Platze, wenn man Mauern herstellen will, welche sich der Drucklinie möglichst anschliessen. Selbstverständlich muss man, wenn gegen die angenommene Form der Mauer wesentliche Aenderungen eintreten, wodurch die Gewichte der Mauerteile andere werden oder die Erddruckskala sich ändert, die nötigen Korrektionen vornehmen, eventuell auch eine zweite Konstruktion ausführen.

In den meisten vorkommenden Fällen kann man sich des einfacheren Verfahrens, welches **Fig. 297, Taf. XXXIV**, angegeben ist, bedienen. Man zeichnet die Figur ABC des Erddrucks wie bekannt, und teilt die Mauer ebenso wie das Erddruckdreieck durch horizontale Linien in Teile ein, nimmt aber nicht, wie dieses bisher geschehen, die Gewichte oder Flächen der einzelnen Teile als Kräfte an, sondern rechnet immer von der oberen Kante AD an, setzt also $DEGF, DELK \ldots.$, sowie $AHJ, ANO \ldots.$ als Kräfte.

Die erstere trägt man auf eine vertikale Linie ab, die andere auf die Horizontale ad und vereinigt je zwei derselben zu einer Mittelkraft, welche nacheinander mit $W, W_1, W_2, W_3 \ldots.$ bezeichnet sind.

Man bestimmt nun in den Dreiecken $AHJ, ANO \ldots.$ die Schwerpunkte, zieht durch dieselbe horizontale Linien bis zu der PQ und legt durch die hier gefundenen Punkte $M, M_1, M_2, M_3, M_4 \ldots.$ Parallele zu $W, W_1, W_2, W_3, W_4 \ldots.$, so hat man in den Durchschnittspunkten dieser mit den Schnittlinien $1, 2, 3, 4, 5 \ldots.$, also in $g, h, k, l, m, n \ldots.$ Punkte der gesuchten Drucklinie.

In **Fig. 298, Taf. XXXIV**, ist nach demselben Prinzip die Drucklinie für eine Mauer bestimmt, welche auf der Hinterfüllung noch eine Belastung zu tragen hat.

In vielen Fällen genügt es, wenn man bei einfach gestalteten Mauern nur die Punkte der Drucklinie für die untersten Fugen der Mauer bestimmt, weil dieses die ungünstigsten Stellen sind und die Mauern, je höher hinauf, immer mehr überflüssiges Material enthalten.

Man verfährt dann in der **Fig. 299, Taf. XXXII**, angegebenen Weise.

Von dem Mauerteile $ABGK$ bestimmt man die vertikale Mittellinie oder bei trapezförmigem Querschnitt den Schwerpunkt und zieht durch diesen die vertikale Schwerlinie. In dem Erddruckdreieck BGH für den Mauerteil $ABGK$ bestimmt man den Schwerpunkt S und zieht durch diesen eine horizontale Linie SK. In dem gefundenen Punkte K nimmt man das Mauergewicht und den Erddruck wirkend an und vereinigt beide zu einer Mittelkraft R, deren Grösse und Richtung man findet, wenn man ab gleich dem Mauergewichte, bc aber gleich dem Erddruck macht und ac zieht. Trägt man dann die Richtung R von K aus in die Figur ein, so findet man in dem Durchschnitte M dieser mit der Figur GK einen Punkt der Drucklinie der Mauer.

Bestimmt man nun das Gewicht des Mauerstückes $DEFG$, denkt dasselbe in K angreifend und vereinigt es mit R zu der Mittelkraft W, dessen Grösse und Richtung man findet, wenn man cd gleich dem Gewichte des Mauerstückes macht und ad zieht, so erhält man den Punkt N, wenn man durch den Schwerpunkt S_1 des Erddrucktrapezes $CDGH$ eine horizontale Linie bis zur Richtung der Kraft W zieht.

Macht man nun de gleich dem Gewichte des Trapezes $CDGH$ und zieht ae, so hat man in S_0 die Mittelkraft aus de und W. Zieht man daher parallel zu S_0 die Linie NM_1, so muss M_1 auch ein Punkt der Drucklinie sein, mit dessen Auffindung dann die Arbeit beendigt ist.

Ziemlich selbstverständlich ist es, dass bei solchen Konstruktionen die mannigfachsten Variationen vorkommen müssen; denn die Theorie des Erddrucks beruht auf verschiedenen Hypothesen, deren Richtigkeit noch nicht erwiesen zu sein scheint und auf deren Grund mancherlei Theorien aufgestellt sind, die ziemlich wesentlich voneinander abweichen. Es kommt deshalb sehr viel darauf an, welche dieser Theorien man zu Grunde legt.

Dient die Futtermauer zur Unterstützung von Belastungen, wie dieses z. B. bei den Landpfeilern der Brücken der Fall ist, so hat man die als vertikale Kräfte auftretenden Belastungen in den Kräfteplänen zuerst abzutragen, also z. B. bei **Fig. 295, Taf. XXXIII**, über dem Punkte S. Die übrige Konstruktion erleidet keine Aenderung durch solche Belastungen.

Gewölbe.

Um in einem Gewölbe die Drucklinie bestimmen zu können, muss man das Gewicht dieses, der Widerlager, der Uebermauerung und etwaige Belastung durch Erdaufschüttungen, Gebäude, bewegliche Lasten, kurz alle auf das Gewölbe einwirkenden Gewichte bestimmen und auf ein Mass reduzieren, d. h. annehmen, dass die sämtlichen Belastungen aus demselben Material bestehend sind und die Höhe an verschiedenen Stellen ermitteln, um die Begrenzungslinie auftragen zu können. Es ist ja klar, dass durch dieses Verfahren an dem Resultate nichts geändert werden kann, dass aber die Konstruktion der Drucklinie dadurch wesentlich vereinfacht wird. Vielfach wird die Reduktion so vorgenommen, dass man das Gewicht der Aufschüttung als dasjenige annimmt, auf welches man die übrigen zurückführt.

Nennt man h die Höhe der Mauerung, d. h. die Höhe des Gewölbes nebst der Uebermauerung dieses an einer beliebigen Stelle und h_1 die Höhe der über dieser Stelle befindlichen Auffüllung, ist ferner g das Gewicht der Raumeinheit des Mauerwerkes und g_1 dasjenige der Erdmasse, so hat man offenbar die Gleichung

$$H g_1 = h g,$$

worin H die Höhe derjenigen Erdmasse ist, welche dem Gewichte des Mauerwerks gleich ist.

Soll die Erdmasse auf das Gewicht des Mauerwerkes reduziert werden, so hat man die Höhe:

$$H_1 = \frac{h_1 g_1}{g}.$$

In gleicher Weise reduziert man auch die übrigen Belastungen, welche auf das Gewölbe kommen, z. B. bei Brückengewölben die über die Brü.ke gehenden Wagen, Eisenbahnzüge, Menschen etc.

In vielen Fällen wird das Gewicht der Aufschüttung, des Mauerwerkes, des Gewölbes und der Uebermauerung so wenig voneinander verschieden sein, dass man dasselbe als gleich annehmen kann, dann also nur nötig hat die mobile Belastung auf dieses Gewicht zu reduzieren.

Ist $ABCD$, **Fig. 300, Taf. XXXV**, ein beliebiges Tonnengewölbe, welches von dem Mittelpunkte E aus beschrieben ist und welches über seine ganze Länge gleiche Stärke hat, sind ferner $GHJK$ und $KLMB$ die Widerlagspfeiler GN und KO die Uebermauerungen und PQ die Begrenzungslinien der auf die Masse des Gewölbes reduzierten Aufschüttung und sonstigen Belastungen, so teilt man das Gewölbe nebst den Widerlagern, also die Fläche $HPQLMBAJ$ in eine beliebige Anzahl gleichbreiter vertikaler Streifen, denen man eine möglichst kleine Breite gibt, die jedenfalls so sein muss, dass man die entstehenden Teile als Trapeze betrachten kann. Von diesen Teilen bestimmt man die Flächeninhalte und die Schwerpunkte und ist es hierfür ein Vorteil, wenn man die Teile so schmal genommen hat, dass man ohne einen nennenswerten Fehler statt der Flächen die mittleren Höhen derselben einsetzen kann und die Schwerpunkte in den Mitten anzunehmen vermag. Rücksicht auf eine Fugenlage wird hierbei nicht genommen.

Auf eine vertikale Linie ab trägt man nun die Höhen oder Flächeninhalte der Teile nach einem beliebig zu wählenden Massstabe ab, welcher, da die hier abgetragenen Längen, Kräfte darstellen, mit dem Massstabe, nach dem das Gewölbe gezeichnet ist, nichts gemein hat.

Ausserhalb der Linie ab nimmt man den Punkt k als Pol und zieht die Polstrahlen ka, kd, ke, kf, kg....

Der Pol k muss vor der Mitte von ab liegen, so dass der Strahl ki horizontal zu liegen kommt und ausserdem muss die Länge ki gleich dem horizontalen Schub genommen werden, welcher in dem Scheitel des Gewölbes stattfindet.

Nach einer ziemlich allgemein angewendeten Gleichung bestimmt man diesen Schub $H = rh$, worin r der Krümmungshalbmesser des Gewölbes im Scheitel und h die Höhe ist, welche die Belastung über dem Scheitel des Gewölbes hat, nachdem die Reduktion auf ein Material vorgenommen ist.

Man zieht nun in den Teilen, in welche das Gewölbe geteilt wurde, die vertikalen Schwerlinien und bildet innerhalb des Gewölbes und der Widerlager aus Parallelen zu den Polstrahlen des Kräftepolygons zwischen den Schwerlinien des Polygons $RSTUVWX$, welches man in der Mitte bei U beginnt und den Punkt W so annimmt, dass derselbe innerhalb des mittleren Drittels der Bogenstärke möglichst weit nach oben liegt.

Die so erhaltene polygone Linie ist die Stützlinie des Gewölbes und der Widerlager.

Es handelt sich nun um die Bestimmung der Lage der Fugen. Hierzu ist **Fig. 301, Taf. XXXV**, gezeichnet.

Die äussere und innere Begrenzung des Bogens ist durch die Linien ab und cd dargestellt. AB ist die vertikale Linie, welche von Mitte des Gewölbes aus gerechnet, den zweiten Teil von der linken Seite begrenzt. Diese Linie schneidet in E den äusseren Bogen ab des Gewölbes. Zieht man nun EG in der Richtung des Radius, so kann man die Linie EH nicht als Fuge annehmen, weil diese nicht der Belastung von AB bis zur Mitte des Gewölbes entsprechend sein würde, sondern dabei ein Fehler eintreten würde, dessen Grösse durch das Dreieck BHE dargestellt ist.

Halbiert man nun BH in M, zieht AM und parallel hierzu BW, so hat man in W den Punkt der Fuge, welcher in dem äusseren Begrenzungsbogen des Gewölbes liegt. Zieht man demnach WK in der Richtung auf den Halbmesser des Bogens, so hat man in WW_1 die gesuchte Fuge, welche man ohne Schwierigkeit für jede Stelle des Gewölbes finden kann.

Das Gewölbe ist nur standfähig gegen Kippen oder Drehen, wenn die Stützlinie überall in dem mittleren Drittel des Bogens liegt.

Zieht man zu der Fuge eine lotrechte Linie AB, **Fig. 302, Taf. XXXV**, und findet, dass der Winkel, welchen diese Linie mit der bezüglichen Seite BD der Stützlinie einschliesst, kleiner ist als 30 Grad, d. h. kleiner als der Reibungswinkel zwischen dem Material aus dem das Gewölbe hergestellt ist, so kann auch ein Verschieben der Steine in den Fugen nicht stattfinden.

Selbstverständlich ist das Gewölbe um so stabiler, je mehr sich die Stützlinie der Achse desselben nähert und je näher der Winkel ABD bei Null liegt.

Ist das Gewölbe bestimmt eine Brücke zu stützen, so ist dasselbe nur dann gleichmässig belastet, wenn die grössten Lasten, für die die Brücke bestimmt ist, über die ganze Ausdehnung verteilt sind, oder wenn eine mobile Belastung gar nicht vorhanden ist. In dem ersten Falle erhält man offenbar eine andere Drucklinie als im letzten. Ist nun aber die Brücke z. B. nur auf einer Hälfte eines Gewölbes durch die bewegliche Belastung in Anspruch genommen, so muss sich notwendig wieder eine andere Drucklinie ergeben als in den vorher angegebenen Fällen, welche dann aber auch unsymmetrisch zu der Mittellinie des Gewölbes ist. Im ganzen sind aber die Abweichungen nur gering, weil die mobile Belastung in den allermeisten Fällen nur gering im Verhältnis zu der ständigen Last ist. Aus diesem Grunde wird auch häufig mit der Bestimmung der stärksten Beanspruchung des Gewölbes durch die mobile Belastung nicht so sorgfältig verfahren, wie bei andern Konstruktionen und gewöhnlich nur der Fall betrachtet, in welchem die eine Hälfte des Gewölbes ganz, die andere aber nur durch die feststehenden Lasten in Anspruch genommen ist.

Das Verfahren zur Auffindung der Drucklinie ist genau dasselbe wie solches vorher angegeben und für jede der beiden Gewölbehälften getrennt auszuführen.

Darstellung von Konstruktionsrissen.

Man kann die graphische Darstellungsweise nun auch benutzen, um für verschiedene Verhältnisse Konstruktionsrisse darzustellen, aus denen man die Masse einzelner Dimensionen sofort entnehmen kann.

Es ist z. B. eine vielfach angewendete praktische Regel zur Bestimmung der Balkenstärken in Gebäuden, dass man bei einer Entfernung der Balken von etwa 1 m die Höhe derselben gleich $16 + 2l$ nimmt, worin l die Länge der Balken in Metern bezeichnet. Die Breite der Balken wird dann 2,5 cm schmäler genommen als die gefundene Höhe.

Zieht man eine Linie AB, **Fig. 303, Taf. XXXV**, und trägt auf dieselbe eine beliebige gleiche Teilung, z. B. $A\,5$, $5\,4$, $4\,3$, ..., von welcher jeder Teil einen Meter darstellt und versieht diese Hauptteilung dann noch mit einer Unterabteilung, welche die angegebenen Teile in je 2, 4, 5 oder 10 Teile zerlegt, welche dann entsprechende Unterabteilungen der Meter angibt, zieht in den Teilpunkten sowie in A und B Linien lotrecht zu AB, macht AC gleich einer Länge, welche 16 cm entspricht und trägt von C nach E auf dieses Lot eine Länge gleich $2\,l$, wobei l die grösste Länge, für welche der Riss benutzt werden soll, in der Figur $l = 6$ m, also $2\,l = CE = 12$ cm und zieht die Linien CD parallel zu AB und ED, so schneidet die letztere Linie von den in den Teilpunkten der AB errichteten Loten, die entsprechenden Balkenhöhen ab. Macht man dann EF gleich 2,5 cm und zieht die Linie FG parallel zu ED, so schneidet diese von den Loten die Balkenbreiten ab. Man kann demnach einem solchen Plan ohne Umstände die Höhen und Breiten der Balken für beliebige Längen entnehmen und dieses noch erleichtern, wenn man bei den verschiedenen Loten die Höhen einschreibt.

Der Massstab für die Lote ist vollständig unabhängig von demjenigen, nach welchem die Längen auf AB getragen wurden.

Soll für eine Verbindung, wie dieselbe **Fig. 304**, **Taf. XXXV**, angegeben ist, ein Konstruktionsriss dargestellt werden, so führt man diesen aus, wie solches in **Fig. 305**, **Taf. XXXV**, geschehen ist.

Man zieht eine horizontale Linie GH und lotrecht zu derselben an einem beliebigen Punkte A die AB. Auf dieses Lot trägt man nach einem beliebigen Massstabe die grösste Balkenhöhe AB auf, für welche der Konstruktionsriss Verwendung finden soll, macht dann AD gleich $3h = 3\overline{AB}$, AC gleich $\frac{h}{6}$, AE gleich $\frac{h}{8}$ und AF gleich $\frac{h}{4}$, zieht die Linien BD, BC, BE und BF und hat dann den Riss vollendet, wenn man nicht der Bequemlichkeit wegen noch in AB eine Teilung anbringen und durch die Teilpunkte zu GH parallele Linien ziehen will.

Sollen nun z. B. für eine Verbindung bei Balken von 25 cm Höhe die Verhältnisse dem Konstruktionsrisse entnommen werden, so misst man nach dem Massstabe, nach welchem der Riss dargestellt ist, auf AB von B aus die Länge von 25 cm ab, wodurch der Punkt M gefunden werden muss. Zieht man dann durch M eine Linie OMN parallel GH, so misst man auf dieser die Verhältnisse ab, denn es ist $MO = 3\,BM$, $MP = \frac{BM}{6}$ und so fort.

Dass man von solchen Plänen erst dann wirklich erhebliche Vorteile hat, wenn dieselben für zusammengesetztere Konstruktionen dargestellt werden, bedarf wohl keiner weitern Erwähnung.

Man kann sich nun auch ohne erhebliche Mühe Tafeln herstellen, welche die Berechnung von Trägern erleichtern und unter besondern Verhältnissen ganz überflüssig machen.

Eine derartige Tafel, die man aber für jeden beliebigen Querschnitt der Balken und jedes Material anfertigen kann, ist für Flacheisen in **Fig. 306**, **Taf. XXXV**, angegeben. Es ist dabei angenommen, dass die Eisen an den Enden aufliegend sind und gleichförmig über ihre Länge belastet werden. Auch diese Annahme kann man bei der Herstellung solcher Tafeln ganz beliebig ändern und auch in derselben Weise derartige Tafeln für Säulen der verschiedensten Querschnitte darstellen.

Für den Balken, welcher an den Enden aufliegt und gleichförmig über seine Länge belastet ist, hat man die Gleichung

$$Q = \frac{8\,bh^2\,K}{6\,L},$$

wenn Q die gleichförmig verteilte Belastung in Kilogrammen, b die Breite, h die Höhe und L die Länge des Balkens in Zentimetern und K den Sicherheitskoeffizienten, welcher für die Tabelle angenommen werden soll, bezeichnet.

In dieser Gleichung ist für Balken von gleichem Querschnitt $\frac{8\,b h^2 K}{6}$ eine konstante Zahl.

Setzt man z. B. $K = 1000$, $b = \frac{h}{5}$, $h = 10$ cm, so erhält man:

$$\frac{8\,\frac{10^3}{5}\cdot 1000}{6} = \text{rund } 270000,$$

hat demnach

$$Q = \frac{270000}{L}\ \text{kg},$$

welcher Ausdruck in

$$Q = \frac{2700}{L}\ \text{kg}$$

übergeht, wenn man L in Metern in Rechnung stellt.

Es ist nun klar, dass Q bei einer Zunahme von L fällt und mit einer Abnahme der Länge grösser wird und kann man ohne Mühe für verschiedene Werte von L die Grössen von Q bestimmen. Man erhält z. B. für:

$$\begin{array}{ll} L = 1\ \text{m} & Q_1 = 2700\ \text{kg} \\ L = 2\ \text{„} & Q_2 = 1350\ \text{„} \\ L = 3\ \text{„} & Q_3 = 900\ \text{„} \\ L = 4\ \text{„} & Q_4 = 675\ \text{„} \\ L = 5\ \text{„} & Q_5 = 540\ \text{„} \end{array}$$

und so fort.

Bestimmt man nun die Differenzen der aufeinander folgenden Werte von Q, also

$$\begin{array}{l} Q_1 - Q_2 = 2700 - 1350 = 1350\ \text{kg} \\ Q_2 - Q_3 = 1350 - 900 = 450\ \text{„} \\ Q_3 - Q_4 = 900 - 675 = 225\ \text{„} \\ Q_4 - Q_5 = 675 - 540 = 135\ \text{„} \end{array}$$

und so fort,

so hat man zwischen diesen Zahlen die Verhältnisse:

1350 : 450 : 225 : 135 oder einfacher und abgerundet
63 : 21 : 10,5 : 6,3.

Trägt man nun auf eine horizontale Linie AB von einem beliebigen Punkte z. B. M anfangend, Theile MO, ON, NP, PQ und so fort auf, welche in dem berechneten Verhältnis zu einander stehen, zieht zu AB durch die gefundenen Punkte Lote, so kann man offenbar eine gerade schräg laufende Linie finden, welche die Lote so abschneidet, dass die Längen derselben die Tragkräfte darstellen, welche den zugehörigen Werten von L entsprechen.

Für das vorher in Rechnung gestellte Eisen ist die Tragkraft bei 5 m Länge zu 540 kg und für 2 m Länge 1350 kg gefunden. Trägt man demnach auf die in Q stehende Vertikale nach irgend einem Massstabe 540 kg auf und auf die vertikale Linie, welche durch N gezogen wurde, 1350 kg nach demselben Massstabe, verbindet die erhaltenen Punkte C und D durch eine gerade Linie, so muss dieses die verlangte Linie sein, welche die Lote in der erforderlichen Weise abschneidet.

Um das Messen der Lote nicht nötig zu haben, sondern die Tragkräfte gleich ablesen zu können, teilt man die vertikale Höhe der Tafel in solche Teile ein, welche dem Kräftemassstabe entsprechen und gestatten die Länge der Lote mit der genügenden Genauigkeit ablesen zu können.

Zwischen den angegebenen Teilen der Linie AB, welche nur Stablängen, welche mit ganzen Metern abschliessen, sind nur noch Unterabteilungen anzubringen, welche aber nicht dadurch herbeigeführt werden können, dass man die Hauptteile, also z. B. das Stück NO in gleiche Teile einteilt, sondern man muss diese Unterabteilungen in derselben Weise bestimmen, wie die Hauptteile bestimmt wurden.

Um links des Punktes N noch Teile zu erhalten, also die Tragkräfte aus der Tafel abnehmen zu können, für Stäbe, welche kürzer als 2 m sind, hat man das Stück MN, welches zwischen dem Lote für 1 und 2 m Stablänge liegt, einzuteilen, z. B. in 10 Teile, so dass man von 10 zu 10 cm Stablänge die Tragkräfte in der Tafel hat.

Die Tragkraft für 1 m Länge war zu 2700 kg angenommen. Man hat demnach dieselbe für:

$$1{,}1 \text{ m Länge } q_1 = \frac{2700}{1{,}1} = 2460 \text{ kg.}$$

$$1{,}2 \text{ „ „ } q_2 = \frac{2700}{1{,}2} = 2250 \text{ „}$$

$$1{,}3 \text{ „ „ } q_3 = \frac{2700}{1{,}3} = 2080 \text{ „}$$

$$1{,}4 \text{ „ „ } q_4 = \frac{2700}{1{,}4} = 1930 \text{ „}$$

$$1{,}5 \text{ „ „ } q_5 = \frac{2700}{1{,}5} = 1800 \text{ „}$$

$$1{,}6 \text{ „ „ } q_6 = \frac{2700}{1{,}6} = 1690 \text{ „}$$

$$1{,}7 \text{ „ „ } q_7 = \frac{2700}{1{,}7} = 1590 \text{ „}$$

$$1{,}8 \text{ „ „ } q_8 = \frac{2700}{1{,}8} = 1500 \text{ „}$$

$$1{,}9 \text{ „ „ } q_9 = \frac{2700}{1{,}9} = 1420 \text{ „}$$

$$2{,}0 \text{ „ „ } q_{10} = \frac{2700}{2{,}0} = 1350 \text{ „}$$

Man hat dann:

$$
\begin{aligned}
q_0 - q_1 &= 2700 - 2460 = 240 \text{ kg} \\
q_1 - q_2 &= 2460 - 2250 = 210 \text{ „} \\
q_2 - q_3 &= 2250 - 2080 = 170 \text{ „} \\
q_3 - q_4 &= 2080 - 1930 = 150 \text{ „} \\
q_4 - q_5 &= 1930 - 1800 = 130 \text{ „} \\
q_5 - q_6 &= 1800 - 1690 = 110 \text{ „} \\
q_6 - q_7 &= 1690 - 1590 = 100 \text{ „} \\
q_7 - q_8 &= 1590 - 1500 = 90 \text{ „} \\
q_8 - q_9 &= 1500 - 1420 = 80 \text{ „} \\
q_9 - q_{10} &= 1420 - 1350 = 70 \text{ „}
\end{aligned}
$$

Das Verhältnis zwischen den von M bis N anzubringenden Teilen ist demnach:

$$24:21:17:15:13:11:10:9:8:7,$$

wonach man die Einteilung zu bewerkstelligen hat.

In gleicher Weise führt man dann auch die Unterabteilungen in den andern Feldern aus. Es mag hier noch bemerkt werden, dass man diese Einteilung nur einmal auszuführen braucht, dass dieselbe für alle derartige Tafeln die gleiche bleibt, ganz gleich welchen Querschnitt die Stäbe haben und welche Werte man für K in Rechnung stellt.

Die Grösse von K hat nur Einfluss auf die sich ergebende Tragkraft, man kann aber für verschiedene K dieselbe Tabelle benutzen. Ist z. B. $K = 1000$, wie bei der Einteilung der Tafel angenommen ist und sollen die Tragkräfte der Balken für $K = 1200$ bestimmt werden, so müssen die Werte von Q selbstverständlich grösser ausfallen und zwar in dem Verhältnis von $1000:1200$, weshalb man die der Tafel entnommene Tragkraft mit 1,2 zu multiplizieren hat.

In gleicher Weise würde die Tragkraft 0,8 derjenigen der Tafel sein, wenn statt $K = 1000$ nur $K = 800$ gesetzt würde.

Um nun für andere als den bisher genommenen Querschnitt die Linien in die Tafel eintragen zu können, welche die Lote so abschneiden, dass diese die Tragkräfte angeben, hat man für zwei Längen diese zu berechnen, auf den bezüglichen Loten abzutragen und durch eine gerade Linie zu verbinden, welche dann gehörig verlängert werden muss.

Ist z. B. $h = 12$ cm und $b = 4$ cm, so hat man:

$$\frac{8\,b\,h^2\,K}{6} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 144 \cdot 1000}{6} = 768000;$$

also $$Q = \frac{7680}{2} = 3840 \text{ kg}, \text{ wenn } L = 2 \text{ m}$$

und $$Q = \frac{7680}{4} = 1920 \text{ „} \quad \text{„} \quad L = 4 \text{ „}$$

genommen wird. Macht man demnach $PE = 1920$ kg und $NF = 3840$ kg und zieht die Linie GH durch die Punkte F und E, so hat man in dieser Linie die Begrenzung der Lote, welche die Tragkräfte für verschiedene Längen des Stabes angeben.

In gleicher Weise sind noch einige Linien in die Tafel eingezeichnet, welche ganz beliebig vermehrt werden kann und allen Anforderungen, welche gestellt werden, zu entsprechen vermag.

Es ist nun noch erforderlich zu zeigen, in welcher Weise man eine solche Tafel auch benutzen kann, um die Tragkräfte für Balken, welche in anderer Weise, als angenommen, belastet und befestigt sind, zu bestimmen.

Ist der Balken an einer Seite befestigt und gleichförmig über seine Länge belastet, so hat man für denselben

$$q = \frac{2\, b h^2 K}{6 L},$$

während für den Balken, aufgelagert und belastet, wie bei der Herstellung der Tafel angenommen, die Tragkraft:

$$Q = \frac{8\, b h^2 K}{6 L}$$

ist. Man hat demnach bei gleichen Grössen für h, b, K und L: $q = \frac{Q}{4}$, braucht demnach nur die der Tafel entnommenen Tragkräfte durch 4 zu teilen, um diejenigen für die einseitig belasteten Balken zu erhalten.

Nimmt man für den Balken, welcher an den Enden frei aufliegt und in Abständen l_1 und l_2 von den Auflagern durch eine Einzellast P in Anspruch genommen wird, die Formel

$$P = \frac{L}{l_1\, l_2} \cdot \frac{b\, h^2 K}{6}$$

an, so erhält man sofort:

$$P = \frac{L Q}{8\, l_1\, l_2}.$$

Auf solche Weise kann man die Berechnungen mit Hilfe der angegebenen Tafeln auf ein einfaches Mass zurückführen und hat demnach von denselben grosse Vorteile.

Man kann eine derartige Tafel auch benutzen, um zu sehen wie lang ein Balken sein kann um eine bestimmte Last tragen zu können. Man nimmt in solchem Falle die gegebene Belastung in der vertikalen Reihe und zieht horizontal über die Tafel fort bis man zu der dem vorhandenen oder gewählten Querschnitte entsprechenden schrägen Linie kommt. Unter diesem Punkte ist dann die gesuchte Länge angegeben.

Ebenso kann man die Tafel auch benutzen, um für gegebene Verhältnisse den vorteilhaftesten Balken auszuwählen, was sehr einfach auszuführen ist, da man ein Bild aller in Frage kommenden Balken hat und sofort ersehen kann, bei welchem der geringste Materialverbrauch stattfindet, welcher also die billigste Unterstützung gestattet.

Handelt es sich um die Herstellung solcher Tafeln für Säulen oder Stützen, welche in ihrer Längenrichtung belastet sind, so ändert sich das Verfahren wenig. Man muss sich dabei zunächst schlüssig machen, welche der verschiedenen für diesen Fall angegebenen Formeln man in Benutzung nehmen will.

Nimmt man z. B. für die Säule, welche an einer Seite festgehalten, an der freien Seite aber belastet ist, die Formel

$$P = \frac{\pi^2 E T}{4 l^2}$$

an, in welcher:

P die Grösse der Belastung in Kilogrammen,

E der Elastizitätsmodul geteilt durch den Sicherheitskoeffizienten,

T das Trägheitsmoment des Querschnittes auf diejenige Achse bezogen, bei welcher sich der kleinste Wert für dasselbe ergibt und

l die Länge der Säule bezeichnet, so hat man

$$\frac{\pi^2 E T}{4} = m$$

als konstante Zahl, solange Material und Querschnitt des Stabes ungeändert bleiben und demnach

$$P = \frac{m}{l^2}.$$

Man hat also hier die konstante Zahl m mit l^2 zu dividieren, während dieses bei der Biegungsfestigkeit nur mit l geschehen ist. Das weitere Verfahren bleibt aber dasselbe.