

Antoni Gronowicz

Podstawy analizy układów kinematycznych



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2003

Wydanie publikacji dofinansowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej i Sportu

Opiniodawcy

Franciszek SIEMIENIAKO
Stanisław WOJCIECH

Opracowanie redakcyjne

Alina KACZAK

Korekta

Hanna JUREK

Projekt okładki

Zofia i Dariusz GODLEWSCY

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-672-1

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 23/2003

Spis treści

WSTĘP	5
1. STRUKTURA UKŁADÓW KINEMATYCZNYCH	7
1.1. Pojęcia podstawowe	7
1.1.1. Człony układów kinematycznych	9
1.1.2. Pary kinematyczne	10
1.1.3. Łańcuch kinematyczny, mechanizm, maszyna	15
1.2. Własności ruchowe	16
1.2.1. Ruchliwość teoretyczna	18
1.2.2. Ruchliwość teoretyczna układów wielokonturowych	21
1.2.3. Geometryczne warunki ruchu	24
1.2.3.1. Ruchliwość lokalna	26
1.2.3.2. Więzy bierne	29
1.2.4. Układy kinematyczne racjonalne	35
2. KONFIGURACJA UKŁADÓW KINEMATYCZNYCH	46
2.1. Wprowadzenie	46
2.2. Względne położenie dwóch członów	47
2.2.1. Współrzędne absolutne – układy płaskie	47
2.2.2. Współrzędne absolutne – układy przestrzenne	50
2.2.3. Współrzędne Denavita–Hartenberga – układy przestrzenne	56
2.3. Wyznaczanie konfiguracji układów płaskich	61
2.3.1. Rozwiązanie graficzno-analityczne	61
2.3.1.1. Metoda bezpośrednia	61
2.3.1.2. Metoda pośrednia – modyfikacji	65
2.3.2. Metody analityczne	67
2.3.2.1. Metoda wektorowa	67
2.3.2.2. Metoda liczb zespolonych	71
2.3.3. Metoda współrzędnych absolutnych	74
2.3.3.1. Równania więzów par kinematycznych	74
2.3.3.2. Równania więzów układów kinematycznych płaskich	80
2.3.4. Rozwiązanie równań nieliniowych	90
2.3.4.1. Algorytm Newtona–Raphsona	91
2.3.4.2. Konfiguracja początkowa i krok analizy	96
2.4. Wyznaczanie konfiguracji układów przestrzennych	100
2.4.1. Układy o strukturze szeregowej	100
2.4.2. Układy zamknięte	105
3. PRĘDKOŚĆ I PRZYSPIESZENIA	110
3.1. Wprowadzenie	110
3.2. Metody graficzne – układy płaskie	111
3.2.1. Środki obrotu chwilowego	111
3.2.2. Układy równoważne kinematycznie	116
3.2.3. Równania wektorowe, plany	118
3.2.4. Układy złożone płaskie	124

3.3. Metody analityczne	129
3.3.1. Ruch we współrzędnych wektorowych – układy płaskie	129
3.3.2. Uporządkowanie macierzowe – układy płaskie	132
3.4. Ruch we współrzędnych absolutnych – układy płaskie	138
3.5. Ruch we współrzędnych DH – układy przestrzenne	146
3.5.1. Układy o strukturze szeregowej	146
3.5.2. Układy o strukturze zamkniętej	156
4. ELEMENTY DYNAMIKI UKŁADÓW KINEMATYCZNYCH	161
4.1. Wprowadzenie	161
4.2. Parametry masowe członu, siły bezwładności	163
4.2.1. Masa członu i masowy moment bezwładności – ruch płaski	163
4.2.2. Tensor bezwładności – ruch przestrzenny	166
4.2.3. Wypadkowa sił bezwładności – ruch płaski	167
4.3. Równowaga kinetostatyczna	169
4.3.1. Siły oddziaływania w parach kinematycznych	169
4.3.2. Statyczna wyznaczalność układów kinematycznych	173
4.3.3. Macierzowy zapis sił	178
4.3.4. Metoda prac przygotowanych	183
4.3.5. Tarcie w parach kinematycznych	191
4.3.6. Tarcie w ujęciu analitycznym	196
4.4. Dynamiczne równania ruchu	202
4.4.1. Równania Newtona–Eulera	202
4.4.2. Zasada zachowania energii kinetycznej	207
4.4.2.1. Modele układów typu R i T	207
4.4.2.2. Redukcja mas	209
4.4.2.3. Redukcja sił	211
4.4.2.4. Analiza ruchu, nierównomierność biegu	213
4.4.3. Równanie Lagrange’a	217
4.4.4. Równania ruchu we współrzędnych absolutnych	226
4.4.4.1. Równanie ruchu członu	226
4.4.4.2. Siła uogólniona	226
4.4.4.3. Równanie ruchu układu wieloczłonowego	231
4.4.4.4. Mnożniki Lagrange’a i siły oddziaływania	236
LITERATURA	249

WSTĘP

W przyrodzie i technice istnieje wielu układów i systemów, w których budowie łatwo wyróżnić przemieszczające się względem siebie elementy składowe. Elementy te połączone w sposób umożliwiający ruch względny tworzą układy kinematyczne. Znajdują się one w maszynach, pojazdach i urządzeniach, wszędzie tam, gdzie jest wymagany ruch elementów wykonawczych. Za przykład niech posłużą układy kostne ssaków i wzorowane na nich roboty i manipulatory, układy zawieszenia kół pojazdów, wysięgniki koparek i ładowarek.

Podstawowe własności układów kinematycznych nie są związane z typem maszyny czy urządzenia. Zarówno w przypadku dłoni człowieka, jak i chwytaka robota rodzaj i zakres możliwych ruchów są zależne od sposobu połączenia elementów składowych oraz od wymiarów geometrycznych. Budowa robota i układu prowadzenia łyżki koparki jest zupełnie odmienna, chociaż ruchowe połączenia elementów mogą być identyczne.

Z ruchem elementów łączą się siły oporów użytecznych lub szkodliwych. W pojazdach są to opory toczenia i opory powietrza, w koparce siły reakcji urabianego gruntu, wioślarz zmagają się z oporem ruchu łodzi. Pokonanie sił oporów wymaga wywołania sił napędzających. W pojazdach są to siły ciśnienia gazów spalanej w silniku mieszanki, w koparce siły napędzające powstają w cylindrach hydraulicznych, siły mięśni wioślarza transformowane są do łopat wiosł.

Przedstawione przykłady układów kinematycznych odznaczają się wieloma różnymi cechami. Różna jest ich budowa oraz rodzaje ruchu elementów. W każdym z przytoczonych układów wystąpią znaczące różnice w wartościach rozwijanych prędkości, przyspieszeń i sił. Są to jednak różnice ilościowe, jednakowe są natomiast zjawiska – opisywane jednakowymi metodami.

Niniejsza książka prezentuje kilka metod analizy układów kinematycznych, ukierunkowanych na zastosowania komputerowe. Rozwój technik komputerowych i dostępność pakietów obliczeń matematycznych dają nowe, znacznie szersze możliwości analizy i projektowania układów kinematycznych. Książka w istocie dotyczy metod opisu ruchu począwszy od własności ruchowych wynikających ze struktury, przez opis ilościowy w sensie kinematyki i dynamiki.

Część pierwsza obejmuje zagadnienia struktury w zakresie pozwalającym na stwierdzenie czy dany zespół elementów, połączonych ze sobą w określony sposób ma moż-

liwość wykonywania ruchu względnego. Wiele uwagi poświęcono strukturalnym i geometrycznym uwarunkowaniom ruchu. Przedstawiono sformalizowane metody modyfikacji struktury układów kinematycznych tak, aby były ruchliwe w każdych warunkach wykonania. Ta część umożliwi zrozumienie istoty struktury w stopniu dającym szansę twórczego podejścia do projektowania nowych, innowacyjnych układów kinematycznych.

W części drugiej przedstawiono metody opisu konfiguracji układów kinematycznych. Tylko bardzo proste układy są łatwe w opisie, większość nie daje się opisać w formie jawnych zależności lub ich uzyskanie wymaga uciążliwych przekształceń złożonych wyrażeń algebraicznych. Między innymi pokazano współcześnie stosowany opis za pomocą tzw. współrzędnych absolutnych. Względnie łatwo formułuje się wtedy stosowne układy równań, rozwiązywane metodami numerycznymi.

Część trzecia obejmuje metody określania prędkości i przyspieszeń. Skuteczne upranie się z opisem konfiguracji sprowadza ten problem do rozwiązywania układów równań liniowych.

Część czwarta to dynamika opisująca związki między ruchem, siłami i parametrami masowymi elementów układów kinematycznych. Zaprezentowano metody dynamiki odwrotnej, często nazywanej kinetostatyką, która zajmuje się opisem stanu sił w znanym ruchu. Opisano zwłaszcza siły oddziaływania między połączonymi ruchowo elementami. Omówiono też reguły opisu sił tarcia w ruchowych połączeniach. Wiele uwagi poświęcono badaniu ruchu układów masowych dla zadanych obciążeń siłami zewnętrznymi. Zaprezentowano metody formułowania różniczkowych równań ruchu, akcentując te, które są zorientowane na obliczenia za pomocą komputera.

Prezentowane metody umożliwiają analizę dowolnych układów płaskich i przestrzennych. Dla lepszego zrozumienia poszczególnych metod zamieszczono wiele przykładów, część z nich uzupełniono wynikami liczbowymi.

Książka jest przeznaczona dla inżynierów praktyków zajmujących się twórczym projektowaniem maszyn i urządzeń. Przedstawiono metody analiz wspomagających współczesne projektowanie układów kinematycznych maszyn, pojazdów i urządzeń. Niniejsza książka powinna też być pomocna dla studentów kierunków: mechanika i budowa maszyn oraz automatyka i robotyka, stanowiąc uzupełnienie wykładów z teorii maszyn i mechanizmów, dynamiki oraz robotyki. Jej efektywne wykorzystanie wymaga znajomości podstaw mechaniki analitycznej oraz rachunku wektorowego i macierzewego w zakresie wykładanym na wydziałach mechanicznych.

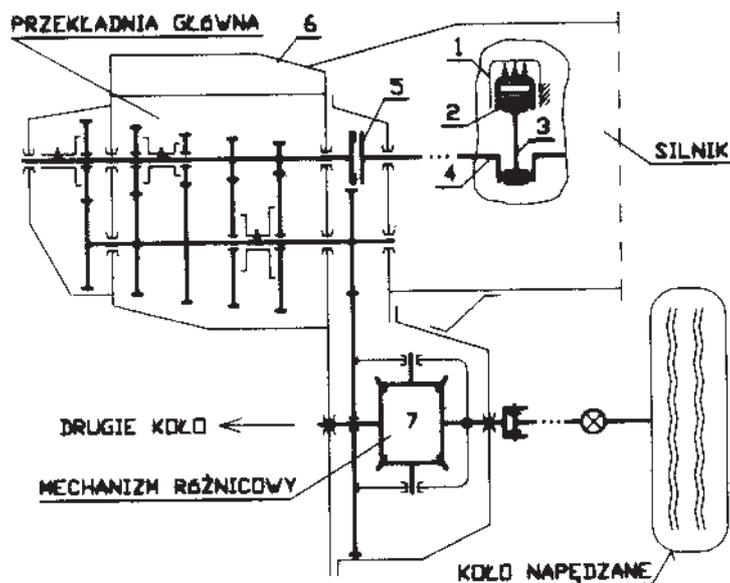
1. STRUKTURA UKŁADÓW KINEMATYCZNYCH

1.1. Pojęcia podstawowe

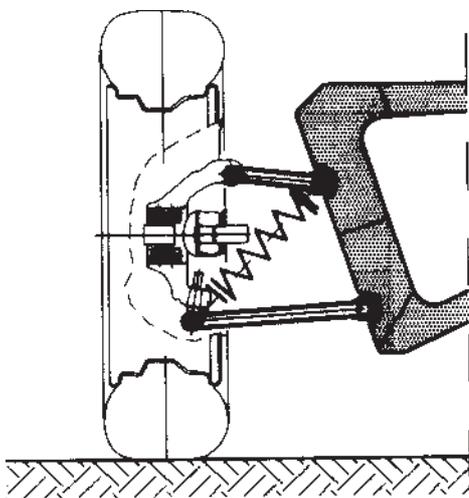
Za układ kinematyczny uważa się powszechnie dowolny zespół elementów (*członów*) połączonych ze sobą (*parami kinematycznymi*) w sposób umożliwiający ich ruch względny, stworzony przez naturę lub człowieka do wypełnienia celowych funkcji.

Układem kinematycznym jest np. układ kostny człowieka, którego człony (kości) są połączone ze sobą przegubami (stawami) i wraz z mięśniami i więzadłami umożliwiają nam chodzenie, bieganie, pokonywanie sił itp. Zbiór układów kinematycznych w różnego rodzaju maszynach, urządzeniach i pojazdach stworzonych przez człowieka jest bardzo liczny i bardzo różnorodny.

Powszechnie użytkowany przez człowieka samochód osobowy składa się z wielu przemieszczających się względem siebie członów. Przykładowy układ napędowy, będący złożonym układem kinematycznym przedstawiono na rysunku 1.1. Ciśnienie gazów



Rys. 1.1. Układ kinematyczny napędu samochodu



Rys. 1.2. Schemat ideowy układu zawieszenia samochodu

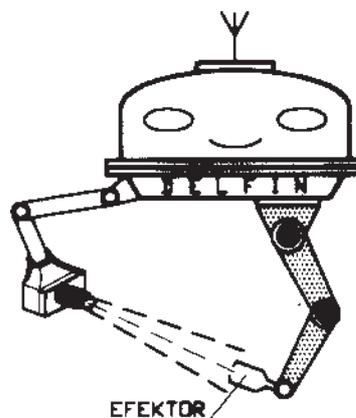
w cylindrze 1 silnika powoduje przemieszczanie się tłoka 2, które jest dalej transformowane przez korbówód 3 do wału korbowego 4, wywołując jego ruch obrotowy. Obrót wału korbowego 4 jest przenoszony przez sprzęgło 5 do skrzyni biegów 6, w której podstawowymi członami są koła zębate, a następnie przez mechanizm różnicowy 7 do kół jezdnych napędzanych. Utrzymywanie przez kierowcę pożądanego kierunku jazdy lub jego zmiana jest realizowana za pomocą kolejnego układu kinematycznego, którego pierwszym elementem jest koło kierownicy, a ostatnimi elementami kierowane koła jezdne. Komfort jazdy po nierównych nawierzchniach wymaga, aby koła jezdne miały możliwość przemieszczania się względem nadwozia samocho-

du, co wymaga kolejnego układu członów, w tym elementów sprężyn i tłumików, które łącznie określa się jako układ zawieszenia (rys. 1.2).

Inną grupą powszechnie znanych urządzeń złożonych z wielu członów połączonych parami kinematycznymi są roboty i manipulatory, stworzone przez człowieka urządzenia w celu wyręczania go w pracach monotonnych, uciążliwych i niebezpiecznych. Spełnianie przez robota pożądanego zadania wymaga ściśle zdefiniowanego prowadzenia jego końcowego członu (często określa się go mianem efektora), którym może być chwytak (dla zadań manipulacyjnych) lub jakieś narzędzie, czy nawet głowica (dla zadań technologicznych). Efektor wykonuje zwykle złożony ruch w przestrzeni, co umożliwia celowe skojarzenie wielu członów w często złożony układ kinematyczny. Przykład robota do prac pod wodą zamieszczono na rys. 1.3. Jedno z jego ramion wyposażono w chwytak, a drugie pełni funkcję pomocniczą, nakierowując układ optyczny w okolice efektoru.

W pralce automatycznej bęben zamocowany w obudowie wraz z silnikiem napędowym również tworzą układ kinematyczny, a jakość rozwiązania przejawia się w zachowaniu pralki w fazach intensywnego wirowania.

Poprzestając na omówionych przykładach odnotujmy, że układy kinematyczne są we wszystkich tych maszynach, pojazdach i urządzeniach, których działanie wymaga transformacji ruchu, zapewnienia przemieszczania elementów wykonawczych według pożądanego charakterystyk, trajek-



Rys. 1.3. Robot pływający

torii itp. Nie są natomiast układami kinematycznymi, skądinąd bardzo złożone, mosty wiszące, maszty stalowe czy wieże, choć wszystkie takie obiekty składają się z wielu elementów, których ruch można łatwo zaobserwować lub nawet odczuć. Są to jednak przemieszczenia w granicach sprężystych odkształceń elementów składowych, nie są natomiast wynikiem celowego ruchowego połączenia elementów.

1.1.1. Człony układów kinematycznych

Na podstawie podanych przykładów można już jednoznacznie zdefiniować pojęcie członu jako elementu układu kinematycznego, który wchodzi w ruchowe połączenia z innymi członami. Jednocześnie łatwo się domyślić, że tak jak wielka jest różnorodność układów kinematycznych, podobnie wielka jest różnorodność członów. Ich podziały, wymieniane w literaturze i przydatne w opisie własności strukturalnych, bazują na różnych kryteriach.

Wyróżnia się na przykład *węzłowość* członu wyrażoną liczbą par kinematycznych, jakie tworzy on z członami sąsiednimi. Przykładowo korbówód silnika spalinowego (rys. 1.1) łączy się z dwoma innymi członami, tłokiem i wałem korbowym, jest więc członem dwuwęzłowym. Ogólnie należy stwierdzić, że im bardziej złożony układ kinematyczny, tym większa węzłowość jego członów.

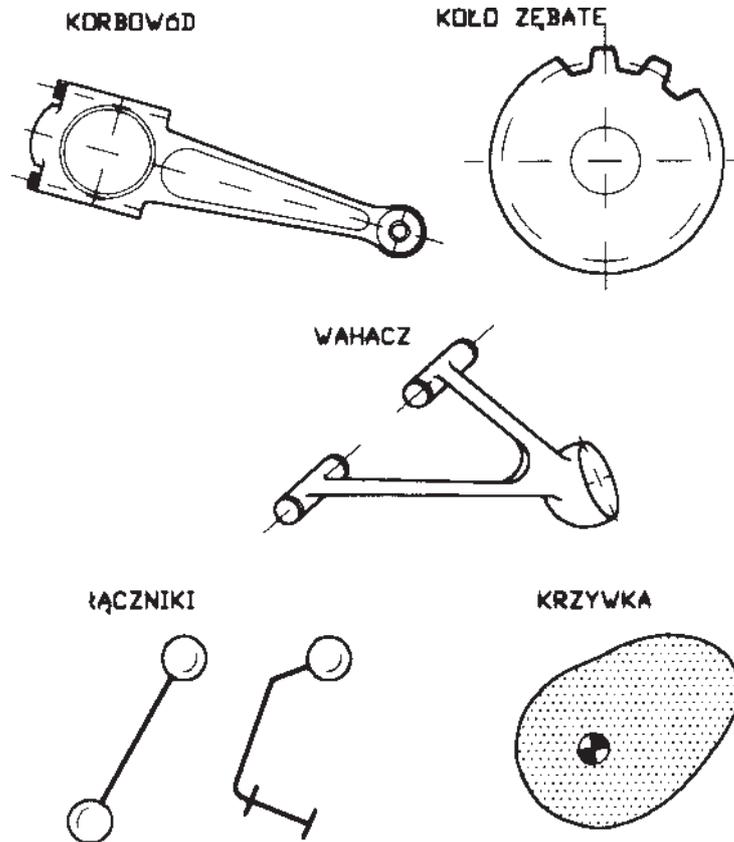
Inny podział członów jest związany z funkcją, jaką pełnią w układzie kinematycznym. W przypadku układu transformującego ruch odbywa się od członu *czynnego* (napędzającego) do członu *biernego* (napędzanego), przy czym człon czynny tylko w najprostszyc układach oddziałuje bezpośrednio na człon bierny, najczęściej natomiast w przekazywaniu ruchu uczestniczą człony *pośredniczące*. W tej klasyfikacji mieści się też *podstawa* układu kinematycznego, inaczej jego korpus (obudowa). Względem tego członu zwykle opisuje się ruch pozostałych.

Wiele maszyn i urządzeń zawiera w swej budowie siłowniki hydrauliczne lub pneumatyczne, a także elementy sprężyste. W hamulcu samochodu dociskanie szczęk do bębna wykonuje się układem kinematycznym, którego jednym z członów pośredniczących w przekazywaniu ruchu jest płyn hamulcowy. W układzie zawieszenia (rys. 1.2) występuje sprężyna, która akumuluje gwałtowne nadwyżki energii kinetycznej. Cechy członów charakteryzuje się przez wprowadzenie ich podziału na człony o strukturze ciał *stałych* i *płynnych* – te ostatnie to człony *cieczowe* lub *gazowe*.

Dominującą grupę członów w rzeczywistych układach stanowią człony nieodkształcalne, jakkolwiek ze względu na własności sprężyste ciał stałych zmieniają one swoje wymiary. Jednak takie zmiany, o charakterze odkształceń sprężystych, są w wielu analizach pomijane. Dla uproszczenia przyjmuje się, że są to człony sztywne, w odróżnieniu od członów podatnych, takich jak np. sprężyny. Pomijanie sprężystych odkształceń członów jest niedopuszczalne w wielu analizach dynamicznych, w szczególności opis drgań towarzyszących pracy układów kinematycznych wymaga uwzględnienia sprężystości materiału, z jakiego są wykonane człony. Przykładowo badanie własności kinematycznych układu korbowego silnika dopuszcza pomijanie faktu zmiany długości korbowodu pod wpływem obciążających go sił. Jednak szczegółowa analiza

naprężeń w poszczególnych jego przekrojach może już wymagać uwzględnienia nawet jego zginania wywołanego siłami masowymi.

Przykłady członów o różnych cechach przedstawiono na rysunku 1.4.



Rys. 1.4. Przykłady członów

1.1.2. Pary kinematyczne

Para kinematyczna to ruchowe połączenie dwóch (para) członów, połączenie dające łączonym członom możliwość wykonywania ruchów względnych. To niezwykle istotny element układu kinematycznego. W sensie kinematycznym ma zapewnić pożądany ruch względny, a jednocześnie musi mieć zdolność przenoszenia sił towarzyszących ruchowi członów. Pary kinematyczne dzieli się według różnych kryteriów, tutaj ograniczymy się do podziału par kinematycznych na dwie grupy:

- według liczby stopni swobody, jaką w danej parze dysponują względem siebie człony ją tworzące – podział na klasy,
- według rodzaju styku tworzących ją członów – podział na pary niższe i wyższe,

Klasy par kinematycznych. Podział na klasy jest bardzo użyteczny ze względu na własności ruchowe układów kinematycznych. Rozpocznijmy ten podział od par kinematycznych, jakie występują w układach płaskich, tj. takich, których człony, w wyniku specyficznych połączeń parami kinematycznymi, poruszają się w płaszczyznach do siebie równoległych. Można wtedy ruch członów rozpatrywać na jednej, wspólnej płaszczyźnie. Względne położenie dwóch członów j oraz k można opisać za pomocą przypisanych im układom współrzędnych prostokątnych (rys. 1.5). Dopóki nie tworzą one pary kinematycznej, dopóty ich względne położenie, przypisanych im układów współrzędnych, opisuje się wektorem:

$$\mathbf{q}_{kj} = \begin{bmatrix} {}^j p_{kx} & {}^j p_{ky} & {}^j \theta_k \end{bmatrix}^T$$

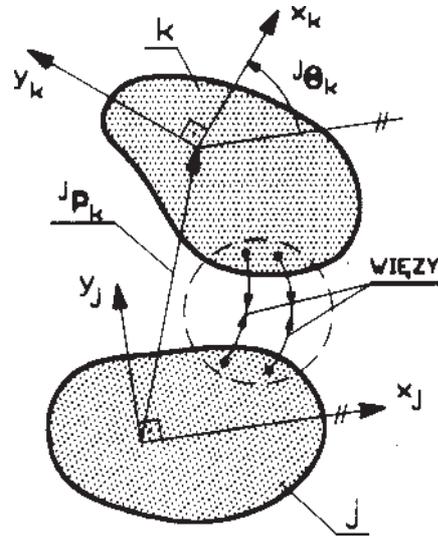
co oznacza, że człon k względem j (i odwrotnie) dysponuje trzema stopniami swobody. Utworzenie pary kinematycznej skutkuje ograniczeniem swobody ruchu względnego, inaczej narzuceniem więzów.

Nie trzeba wykazywać, że dla par układów płaskich liczba więzów musi wynosić dwa lub jeden i wtedy jeden człon względem drugiego dysponuje odpowiednio jednym lub dwoma stopniami swobody ($f_{kj} = 1, 2$). Liczbę dysponowanych względnych stopni swobody przyjęto tutaj¹ jako kryterium podziału na klasy, a numer klasy odpowiada liczbie względnych stopni swobody członów tworzących parę kinematyczną – pary klasy I i II. Przykłady najczęściej występujących par kinematycznych układów płaskich zestawiono na rys. 1.6.

Identyczne rozumowanie dla par kinematycznych układów przestrzennych (ruchy członów nie ograniczają się tutaj do równoległych płaszczyzn) prowadzi do oczywistego wniosku, że tym razem względne położenie dwóch członów j, k wyraża wektor:

$$\mathbf{q}_{kj} = \begin{bmatrix} {}^j p_{kx} & {}^j p_{ky} & {}^j p_{kz} & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$$

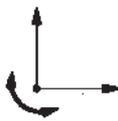
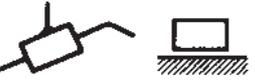
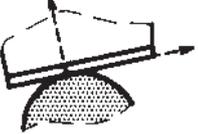
Trzy pierwsze składowe wektora \mathbf{q}_{kj} to współrzędne liniowe, trzy pozostałe – kątowe². Tworząc parę kinematyczną, należy więc wprowadzić więzy w liczbie od pięciu do jednego. W wyniku tego człony j, k w układach przestrzennych mogą mieć wzglę-



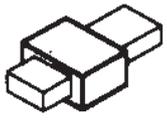
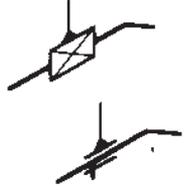
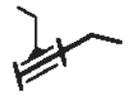
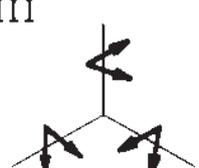
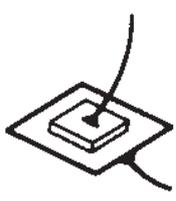
Rys. 1.5. Parametry względnego położenia członów

¹ Można też spotkać podział, gdzie numer klasy odpowiada liczbie nałożonych więzów, np. [22].

² Na przykład kąty Eulera, kąty Bryanta.

KLASA STOPNIE SWOBODY	SCHEMATY PAR KINEMATYCZNYCH	
	IDEOWY	SYMBOL, NAZWA
I 		 R - OBRĘTOWA
I 		 T - POSTĘPOWA
II 		K - KRZYWKOWA
II 		K - KRZYWKOWA
II 		Z - ZAZĘBIENIE
II 		J - JARZMOWA

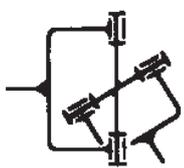
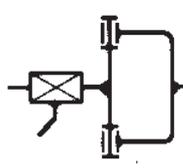
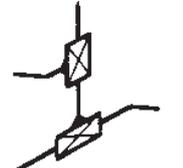
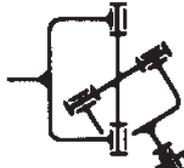
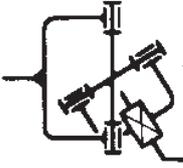
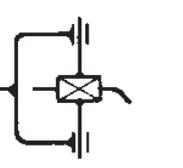
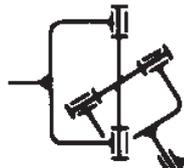
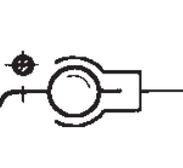
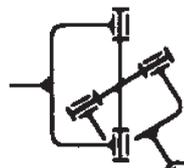
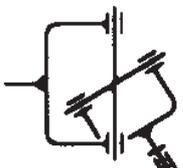
Rys. 1.6. Pary kinematyczne układów płaskich

KLASA STOPNIE SWOBODY	SCHEMATY PAR KINEMAT.		SYMBOL
	IDEOWY	SYMBOL	NAZWA
I 			T POSTĘPOWA
I 			R OBROTOWA
II 			C CYLINDRYCZNA
III 			S SFERYCZNA
III 			P PŁASZCZYZNOWA

Rys. 1.7. Pary kinematyczne układów przestrzennych

dem siebie od jednego do pięciu stopni swobody ($f_{kj} = 1, 2, \dots, 5$), tworząc tym razem pary I, II, III, IV i V klasy. Najczęściej spotykane pary kinematyczne układów przestrzennych zestawiono na rys. 1.7.

Oprócz par kinematycznych zestawionych na rys. 1.7 występują również pary IV i V klasy. Parę IV klasy tworzy np. kula umieszczona w cylindrze, która dysponuje wtedy trzema obrotami (jak para III klasy – sferyczna) i ruchem postępowym wzdłuż osi cylindra. Parę V klasy tworzy skojarzenie kuli z powierzchnią, a względne stopnie swobody to trzy obroty i dwa ruchy translacyjne. W realnych układach pary

KLASA	WĘZŁY KINEMATYCZNE		
II	 2R	 TR	 2T
III	 3R	 2RT	 CT
IV	 2RC	 2C	 CS* ($W_L = 1$)
V	 2RS	 2CR	 SC

Rys. 1.8. Przykłady węzłów kinematycznych – symbole jak na rys. 1.7

kinematyczne IV i V klasy są wykonywane często jako węzły kinematyczne, inaczej łańcuchy członów tworzących z reguły pary niższe. Takie rozwiązania stosuje się też dla innych par niż IV i V klasa – wybrane przykłady węzłów kinematycznych zamieszczono na rysunku 1.8.

Pary kinematyczne niższe i wyższe. Jak już wspomniano, więzom, jakie nakładają na siebie wzajemnie dwa człony tworzące parę kinematyczną towarzyszą siły tych więzów. Zdolność przenoszenia sił zależy od własności materiałów konstrukcyjnych użytych na wykonanie półpar³ i ich cech geometrycznych (ograniczenie wynika z dopuszczalnych nacisków jednostkowych). Już pobieżna analiza par zestawionych na rys. 1.6 i 1.7 wskazuje na istotne różnice związane ze zdolnością do przenoszenia sił w postaci rodzaju styku (kontaktu) członów. Można wyróżnić pary, gdzie człony kontaktują się powierzchniami (np. pary R , T , S – rys. 1.7), które określane są jako pary kinematyczne *niższe* oraz takie, które tworzą styk liniowy lub punktowy (np. pary K , J – rys. 1.6), które określa się jako *wyższe*. Pary niższe mają większą zdolność do przenoszenia sił, a przede wszystkim wykazują się korzystniejszym rozprawdaniem środka smarującego współpracujące powierzchnie. Szczególnie korzystne cechy w tym zakresie wykazuje para obrotowa R . W przypadku natomiast kontaktu liniowego lub punktowego zachodzi zjawisko wyciskania środka smarującego pomiędzy kontaktującymi się półpar.

Podział na pary niższe i wyższe nie jest tak oczywisty, jeśli rozpatruje się kontakt półpar w skali mikro. Dla pary obrotowej R , w której musi wystąpić luz promieniowy, styk powierzchniowy staje się w istocie liniowy, podobnie jest w przypadku par postępowych T . Korzystniejsze cechy par niższych w stosunku do par wyższych sprawiają, że podział ten funkcjonuje w praktyce. Ze względu na wymienione cechy przyjęło się wydzielać grupę układów kinematycznych, których człony tworzą pary niższe, określając je mianem *układów dźwigniowych*.

1.1.3. Łańcuch kinematyczny, mechanizm, maszyna

Przedmiotem niniejszego opracowania są układy kinematyczne. Pojęcie to obejmuje niezwykle szeroką gamę bardzo różnorodnych tworów natury i tych stworzonych przez człowieka charakteryzujących się ruchem względnym elementów składowych. Dla porządku jednak przytoczmy definicje spotykanych w praktyce tworów mieszczących się w grupie układów kinematycznych, takich jak łańcuch kinematyczny, mechanizm i maszyna. W literaturze spotkać można kilka nieco odmiennych definicji. Przytoczymy definicje przyjęte przez IFToMM⁴ [14].

Łańcuch kinematyczny to zespół członów połączonych parami kinematycznymi.

³ „Zakończenie” członu ukształtowane dla utworzenia pary kinematycznej; półparami są np. tuleja i sworzeń w przypadku pary cylindrycznej.

⁴ International Federation of the Theory of Mechanisms and Machines.

Mechanizm to:

- system członów zaprojektowany do przekształcania ruchu jednego lub kilku członów na ruch innych członów,
- łańcuch kinematyczny, którego jeden z członów jest podstawą.

Maszyna jest układem mechanicznym, który wykonuje określoną pracę, na przykład formowanie materiału, z wykorzystaniem przenoszenia i transformacji ruchu oraz sił.

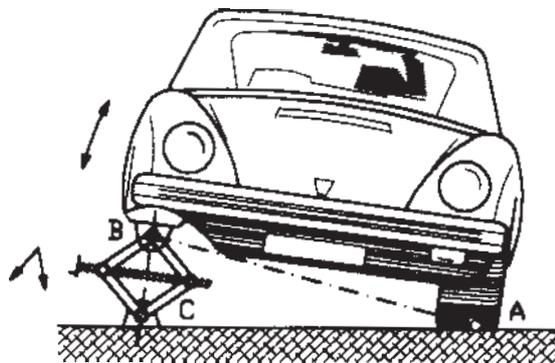
1.2. Własności ruchowe

Podstawowe funkcje wypełniane przez układy kinematyczne są związane z ruchem względnym ich członów. W tym celu są łączone ze sobą parami kinematycznymi. Różnorodność członów i par kinematycznych pociąga za sobą różnorodność układów kinematycznych, o różnych własnościach.

Z codziennych obserwacji wnioskujemy, że niektóre z układów kinematycznych są bardzo proste, a sposób połączenia ich członów nie pozostawia żadnych wątpliwości co do możliwości wykonywania ruchów względnych. Za przykład można tutaj podać nożyce czy przekładnię łańcuchową roweru. Jednak już śrubowy podnośnik samochodowy, niezbędny do wymiany koła, w niektórych wykonaniach okazuje się układem na tyle złożonym, że dopiero praktycznie stwierdzamy możliwość ruchu względnego członów. Z praktyki wnioskujemy, że obrót śruby skutkuje podnoszeniem samochodu. Wtedy wszystkie człony układu kinematycznego złożonego z podnośnika i pojazdu (rys. 1.9) wykonują ściśle określone ruchy. Stwierdzamy więc praktycznie, że:

- sposób połączenia członów układu podnośnik–pojazd daje możliwość ruchu względnego,
- przyłożenie jednego napędu (obrotów śruby) wywołuje jednoznaczny ruch członów.

Łatwa czynność ręcznego wiercenia otworu wymaga odpowiedniego, złożonego ruchu ostrza wiertła. Ruch obrotowy wywołuje współcześnie silnik elektryczny, nato-

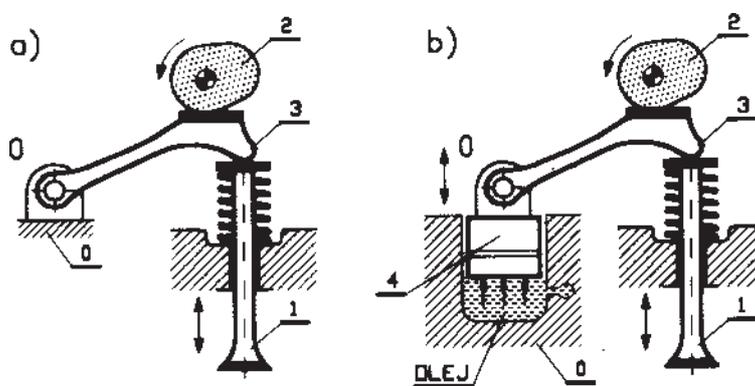


Rys. 1.9. Układ kinematyczny podnośnik – samochód

miast liniowe przemieszczanie wzdłuż osi otworu jest realizowane przez człowieka. Tym razem, nie wchodząc w szczegółową budowę wiertarki, stwierdzamy praktycznie, że:

- wszystkie człony układu kinematycznego wiertarki wykonują ruch,
- jednoznaczny, wymagany ruch ostrza wiertła wymaga dwóch napędów.

Na rysunku 1.10 przedstawiono dwa rozwiązania układu rozrządu silnika spalinyowego. W obu przypadkach ruch grzybka zaworu 1 jest wymuszany za pomocą obrotowej, odpowiednio ukształtowanej, krzywki 2 za pośrednictwem członu 3. Rozwiązanie z rys. 1.10a charakteryzuje się tym, że człon pośredniczący 3 wykonuje ruch wahadłowy wokół stałego punktu obrotu O . Jest to koncepcja klasyczna, wykorzystywana



Rys. 1.10. Schematy układów rozrządu silnika spalinyowego

w silnikach przez dziesięciolecia, a jej niedogodnością jest potrzeba okresowej regulacji luzu zapewniającego poprawną pracę. W tym układzie zatem stwierdzamy możliwość ruchu wszystkich członów, ruch ten jest jednoznaczny przy jednym napędzie – określonemu położeniu krzywki 2 odpowiadają jednoznaczne położenia pozostałych członów. Współczesną koncepcję układu rozrządu przedstawiono na rysunku 1.10b. Człon pośredniczący 3 wykonuje ruch obrotowy względem punktu O , który jest usytuowany na tłoczku 4. Położenie punktu O (tłoczka) jest utrzymywane ciśnieniem oleju z układu smarowania. W konsekwencji takiego rozwiązania jednoznaczne położenie zaworu jest zależne nie tylko od położenia krzywki 2, ale także położenia tłoczka 4. Rozwiązanie to, jakkolwiek bardziej złożone w sensie strukturalnym, uwalnia użytkownika od potrzeby regulacji luzów w układzie rozrządu.

Z analizy podanych przykładowo układów można wysnuć dwa ogólne stwierdzenia:

- człony układu kinematycznego powinny być połączone parami kinematycznymi tak, aby możliwy był ich ruch względny,
- w różnych układach potrzebne są różne liczby napędów niezbędnych do wywołania potrzebnego ruchu.

Możliwość ruchu względnego w połączeniu z liczbą wymaganych napędów są określane jako własności ruchowe układów kinematycznych. Wynikają one w znacznej mie-

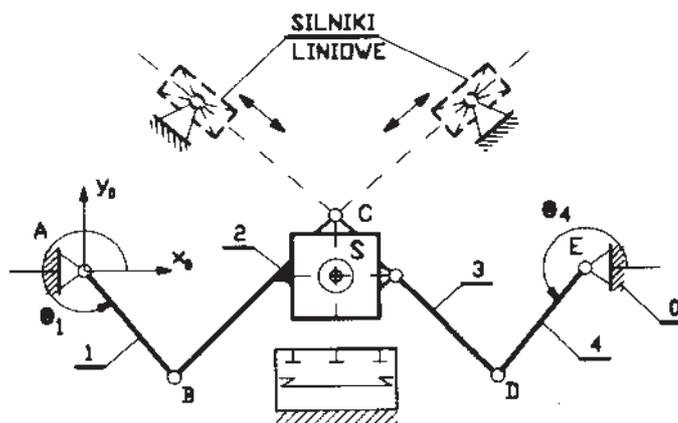
rze ze struktury układu i wiąże się ściśle z liczbą stopni swobody, jaką dysponują człony tworzące pary kinematyczne, przyjętą wcześniej jako kryterium podziału na klasy. Podobnie jak para kinematyczna, również układ kinematyczny dysponuje określoną liczbą stopni swobody, rozumianą jako łączna liczba stopni swobody członów ruchomych w relacji do podstawy. Łatwiejsza interpretacja stopni swobody układu kinematycznego przypisuje im liczbę ograniczeń ruchu, jakie należy narzucić, aby stał się on układem sztywnym. W literaturze przyjęło się określać tę liczbę mianem ruchliwości. Różni się przy tym ruchliwość rzeczywistą, rozumianą jako te stopnie swobody, które stwierdzamy w układzie realnym, w jego modelu lub, dla układów prostych, w sposób intuicyjny, ruchliwość teoretyczną (strukturalną), ruchliwość lokalną oraz więzy bierne.

1.2.1. Ruchliwość teoretyczna

Rozpatrzmy płaski układ kinematyczny robota obróbkowego płaskiego (rys. 1.11), z którego członem 2 jest związany wrzeciennik z elektrowrzecionem [30]. Układ ten pokazuje współczesne tendencje w budowie obrabiarek bazujących na zamkniętych układach kinematycznych, co skutkuje wieloma zaletami w porównaniu z rozwiązaniami konwencjonalnymi, a najważniejsze to duża sztywność i możliwe duże prędkości.

Aby uzyskać możliwość obróbki różnych kształtów, oś elektrowrzeciona powinna być prowadzona po dowolnej trajektorii. Łatwo wykazać, że określone położenie środka S narzędzia (człon 2) uzyskuje się przez zapewnienie ściśle określonego położenia członów 1 i 4 opisanego kątami θ_1 i θ_4 – w praktyce można to zrealizować za pomocą silników liniowych. Człony 1, 2, 3, 4 względem podstawy 0 dysponują łącznie dwoma stopniami swobody, a jednoznaczny ruch wymaga dwóch napędów. W tym przypadku zatem ruchliwość jest równa dwa.

Omówiony układ kinematyczny jest stosunkowo prosty i wystarczy elementarna analiza geometryczna, aby bezbłędnie określić jego ruchliwość. Bardziej kłopotliwa jest



Rys. 1.11. Schemat kinematyczny robota obróbkowego (frezarki) – łańcuch równoległy

analiza układu kinematycznego, nawet płaskiego, złożonego z większej liczby członów. Podobnie stwierdzenie liczby stopni swobody członów układu przestrzennego może nastęrczać wielu kłopotów.

W związku z tym zaistniała potrzeba stworzenia metody formalnego, nie intuicyjnego, określania ruchliwości układu kinematycznego. W praktyce przyjęło się, ze względu na ich prostotę, wykorzystywać do tego celu wzory Grublera–Artobolewskiego, które wiążą w formułę matematyczną ruchliwość teoretyczną W_T , liczby członów ruchomych k oraz par kinematycznych p_i i -tej klasy. Ruchliwość teoretyczna wynika z faktu, że jest ona wyznaczana wyłącznie na podstawie parametrów strukturalnych układów kinematycznych, tj. liczby członów i par kinematycznych poszczególnych klas. Zależności te mają następujące postaci:

- dla układów płaskich

$$W_T = 3k - 2p_1 - p_2 \quad (1.1)$$

- dla układów przestrzennych

$$W_T = 6k - \sum_{i=1}^5 (6-i)p_i \quad (1.2)$$

Interpretacja podanych zależności jest relatywnie prosta. Dla układów płaskich ruchliwość teoretyczna W_T (1.1) wynika z tego, że:

- człony ruchome w liczbie k przed ich połączeniem w układ kinematyczny dysponują łącznie na płaszczyźnie stopniami swobody w liczbie $3k$ (każdy człon swobodny ma na płaszczyźnie 3 stopnie swobody),
- utworzenie par kinematycznych I klasy w liczbie p_1 oznacza, że odbieramy członom ruchomym $2p_1$ stopni swobody (w każdej parze I klasy pozostaje jedna możliwość ruchu),
- utworzenie par kinematycznych II klasy w liczbie p_2 oznacza, że odbieramy członom ruchomym p_2 stopni swobody (w każdej parze II klasy pozostają dwie możliwości ruchu),
- w układach płaskich mogą wystąpić tylko pary kinematyczne I i II klasy, gdyż z trzech stopni swobody można odebrać co najwyżej dwa.

W układach przestrzennych rozumowanie jest identyczne, tylko liczba stopni swobody pojedynczego członu swobodnego wynosi 6, a więc utworzenie każdej z par i -tej klasy oznacza zredukowanie ogólnej liczby $6k$ stopni swobody każdorazowo o $(6-i)p_i$.

Postać wzorów określających ruchliwość teoretyczną można łatwo uogólnić, wprowadzając pojęcie liczby c_w więzów nałożonych na ruch wszystkich członów łańcucha kinematycznego. Dla układu przestrzennego nie wprowadza się żadnych więzów (ruch członów może być dowolny) i wtedy $c_w = 0$, natomiast dla układów płaskich, których człony mogą wykonywać w płaszczyźnie jedynie dwa ruchy translacyjne i obrót względem osi prostopadłej do tej płaszczyzny mamy $c_w = 3$. Takie widzenie ruchu członów tworzących układ kinematyczny umożliwia uwzględnienie także innych układów niż płaskie i przestrzenne [6].

Uogólniony wzór określający ruchliwość strukturalną (teoretyczną) przybierze postać:

$$W_T = (6 - c_w)k - \sum_{i=1}^{5-c_w} (6 - c_w - i)p_i \quad (1.3)$$

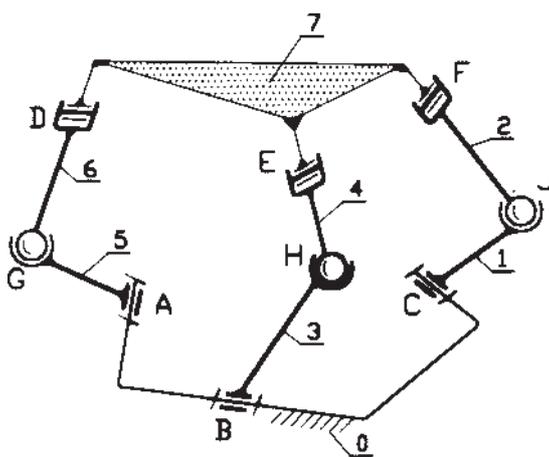
Gdy oznaczymy przez $s_w = 6 - c_w$ liczbę stopni swobody, jaką dysponuje każdy z ruchomych członów układu, wówczas ruchliwość teoretyczna wynosi:

$$W_T = s_w k - \sum_{i=1}^{s_w-1} (s_w - i)p_i \quad (1.4)$$

Podane zależności dają pewien komfort w stwierdzaniu ruchliwości układu kinematycznego, zwłaszcza gdy jest on złożony lub nie dysponujemy wystarczającą wyobraźnią i doświadczeniem. Z analizy układu kinematycznego (rys. 1.11) wynika, że:

- liczba członów ruchomych $k = 4$ – człony 1, 2, 3 i 4,
- wszystkie połączenia członów (A, B, C, D, E) są parami kinematycznymi I klasy, więc $p_1 = 5$,
- pary II klasy nie występują, więc $p_2 = 0$,
- z zależności (1.1) jest więc ruchliwość $W_T = 2$, co potwierdza wcześniejsze ustalenia.

Ocena ruchliwości układu kinematycznego płaskiego według wzoru (1.1) jest wygodna, choć przy niewielkiej wprawie może być dokonywana na drodze intuicyjnej, przez badanie elementarnych cech geometrycznych. Możliwość ruchu łatwo stwierdzić, rozpatrując trajektorie charakterystycznych punktów, a zwłaszcza analizując punkty wspólne członów – środki par kinematycznych. Intuicja w układach płaskich może zawieść dopiero w przypadku układów złożonych z wielu członów. Zupełnie inaczej jest w przypadku układów przestrzennych. Analiza cech geometrycznych wymaga rozpa-



Rys. 1.12. Schemat układu przestrzennego

trywania nie tylko trajektorii punktów, ale często płaszczyzn i powierzchni. Oparcie się na intuicji, a nawet doświadczeniu, może prowadzić do błędnych wniosków. Możliwość formalnego wyznaczenia ruchliwości z zależności (1.2) nie może więc być przeceniona. Można się o tym przekonać na przykładzie stosunkowo prostego układu przestrzennego przedstawionego na rys. 1.12, gdzie:

- liczba członów ruchomych $k = 7$,
- pary kinematyczne: $A \div F$ (I klasy), G, H, J (III klasy), więc $p_1 = 6, p_3 = 3$,

- pary innych klas nie występują, więc $p_2 = p_4 = p_5 = 0$,
- z zależności (1.2) otrzymujemy ruchliwość $W_T = 3$.

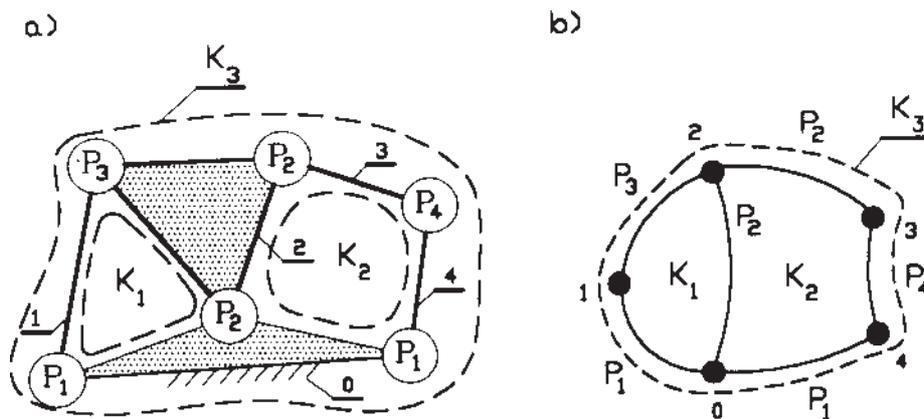
Układ kinematyczny z rysunku 1.12 jest jednym z szerokiej grupy tzw. manipulatorów o strukturze równoległej. Człon 7 może być efektem robota sterowanego trzema napędami (np. silniki elektryczne) wymuszającymi ruch obrotowy członów 1, 3, 5 w parach A, B i C .

1.2.2. Ruchliwość teoretyczna układów wielokonturowych

Przytoczone zależności (1.1)÷(1.4) są ogólne, z zastrzeżeniem, iż odnoszą się do układów, dla których jest znana liczba wspólnych więzów c_w nałożonych na ruchy członów układu. Jest to łatwe do ustalenia w przypadku prostych układów płaskich lub przestrzennych. Jednak złożoność układów kinematycznych sprawia, że nawet w tych grupach obliczona ruchliwość W_T wymaga jeszcze dodatkowej interpretacji. Dotyczy to zwłaszcza układów złożonych, których człony tworzą zamknięte kontury. Może w nich bowiem zaistnieć taka sytuacja, kiedy ruchliwość całego układu wskazuje na możliwość ruchu względnego członów ($W_T > 0$), podczas gdy w pewnych fragmentach układ może być sztywny ($W_T^* = 0$) lub nawet przesztywniony ($W_T^* < 0$).

W sformalizowaniu analizy ruchliwości pomocne jest wprowadzenie pojęcia konturu układu kinematycznego, nawiązującego do pojęcia cykli grafu planarnego [12] – jednej z możliwych prezentacji układu kinematycznego, przydatnej do zapisu struktury układu z wykorzystywaniem komputera.

Na rysunku 1.13 przedstawiono złożony układ kinematyczny w postaci schematu strukturalnego i grafu. W tym ostatnim wierzchołki (punkty) reprezentują człony 0÷5, natomiast krawędzie (łuki) odpowiadają parom kinematycznym P_i . Układ ten charakteryzuje się występowaniem trzech konturów (dwa wewnętrzne K_1 i K_2 oraz jeden zewnętrzny K_3). Z teorii grafów wiadomo, że liczbę konturów wewnętrznych (cykli) wyznacza się na podstawie liczby wierzchołków (tutaj członów) i krawędzi (tutaj par ki-



Rys. 1.13. Układ kinematyczny w formie schematu strukturalnego (a) i grafu (b)

nematycznych). Odnosząc to do wielokonturowego układu kinematycznego, liczbę jego konturów, włącznie z zewnętrznym, określa się według zależności

$$l_k = \sum p_i - k + 1 \quad (1.5)$$

gdzie: $\sum p_i$ – łączna liczba par, k – liczba członów pomniejszona o jeden.

Wiadomo też, że graf można w sposób przejrzysty zapisać w formie macierzy, którą określa się mianem macierzy rozmieszczeń, a która jednoznacznie reprezentuje układ kinematyczny i zawiera następujące informacje:

- który człon, z którym tworzy parę kinematyczną,
- jakiej klasy są poszczególne pary.

Dla układu z rysunku 1.13 macierz ta ma postać:

$$\mathbf{MR} = \begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{c} 0 \\ P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ P_1 \end{array} & \begin{array}{c} P_1 \\ 0 \\ P_3 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} P_2 \\ P_3 \\ 0 \\ P_2 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_2 \\ P_4 \end{array} & \begin{array}{c} P_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Każda z kolumn oraz każdy wiersz macierzy **MR** reprezentuje jeden człon, każdy niezerowy element P_i wskazuje, że między członami u, j utworzono parę kinematyczną i -tej klasy, natomiast zerowy element macierzy **MR** oznacza brak pary kinematycznej. Jeżeli dodatkowo przyjąć umowę, że np. podstawą jest człon o numerze 0, to macierz **MR** reprezentuje strukturę układu w sposób jednoznaczny i może być traktowana na równi ze schematem. Można na tej podstawie wysnuć wnioski o budowie konturów – przykładowo dla układu z rys. 1.13 kontury mają postać:

- kontur K_1 : (człon) 1 – (para) $P_3 - 2 - P_2 - 0 - P_1$,
- kontur K_2 : $2 - P_2 - 3 - P_4 - 4 - P_1 - 0 - P_2$,
- kontur K_3 : $0 - P_1 - 1 - P_3 - 2 - P_2 - 3 - P_4 - 4 - P_1$.

Kontury układu kinematycznego można traktować jako podukłady, z których każdy z osobna powinien mieć strukturę zapewniającą ruch względny. Możliwość ruchu łąstwo stwierdzić, wykorzystując odpowiednią zależność na ruchliwość, którą do celów analizy konturów należy zmodyfikować. Gdy pojedynczy kontur przyjmiemy jako odrębny układ kinematyczny, wówczas możemy na podstawie (1.4) po przekształceniu napisać:

$$W_T^K = s_w k_K - s_w \sum_{i=1}^{s_w-1} p_i + \sum_{i=1}^{s_w-1} i p_i \quad (1.6)$$

W kolejnych zależnościach pomijamy wskaźniki sumowania. Dla pojedynczego konturu, zawierającego $k_K + 1$ członów w myśl (1.5) jest:

$$k_K = \sum p_i - 1 \quad (1.7)$$

co po podstawieniu do (1.6) daje zależność:

$$W_T^K = s_w \sum p_i - s_w - s_w \sum p_i + \sum ip_i \quad (1.8)$$

która po przekształceniu stanowi prostą i dogodną formę wzoru określającego ruchliwość teoretyczną pojedynczego konturu w postaci:

$$W_T^K = \sum ip_i - s_w \quad (1.9)$$

Ruchliwość teoretyczną W_T pojedynczego konturu, a zatem także prostego układu kinematycznego, można obliczyć z zależności:

$$W_T^K = \sum ip_i - 3 \quad (1.10)$$

w przypadku układu płaskiego lub z równania:

$$W_T^K = \sum ip_i - 6 \quad (1.11)$$

w przypadku układu przestrzennego.

Na podstawie podukładów jednokonturowych można tworzyć kolejne podukłady złożone z kilku konturów. Każdy z takich podukładów również musi mieć strukturę zapewniającą możliwość ruchu względnego członów. Zgodnie z prostą intuicją można napisać zależność określającą ruchliwość teoretyczną podukładu złożonego z dwóch sąsiadujących ze sobą konturów, co oznacza istnienie co najmniej jednej wspólnej dla nich pary kinematycznej (przykładowo dla układu z rys. 1.13 w skład konturów K_1 i K_2 wchodzi para P_2 utworzona przez człony 0 i 2). Mamy wtedy [9], [11]:

$$W_T^{K_1K_2} = W_T^{K_1} + W_T^{K_2} - \sum ip_i^{K_1K_2} \quad (1.12)$$

przy czym pierwszy i drugi składnik (1.12) to ruchliwość konturów K_1 i K_2 , a trzeci oznacza liczbę stopni swobody, jaką dysponują człony par wspólnych dla obu konturów. Rozszerzenie zależności (1.12) na większą liczbę konturów podukładu kinematycznego nie nastęrcza już żadnych trudności.

Posługując się zależnością (1.2), dla układu przestrzennego z rys. 1.13, stwierdzamy, że w skali globalnej jego człony tworzą pary umożliwiające ruch względny, gdyż ruchliwość teoretyczna wynosi $W_T = 1$. Jednak analiza w skali konturów prowadzi do wniosków:

- z zależności (1.11) kontur K_1 ma ruchliwość $W_T^{K_1} = 0$,
- z zależności (1.11) kontur K_2 ma ruchliwość $W_T^{K_2} = 3$,
- z zależności (1.12) kontury K_1 i K_2 mają łącznie ruchliwość $W_T^{K_1K_2} = 1$ (jak z zależności (1.2)).

Pierwszy wniosek o możliwości ruchu względnego członów, nasuwający się z wyliczonej ruchliwości teoretycznej W_T , okazał się nieprawdziwy. W istocie człony 0, 1, 2 (rys. 1.13), wchodzące w skład konturu K_1 nie dysponują możliwością ruchu i tworzą podukład sztywny, względem którego mogą się poruszać człony pozostałe 3 i 4. Układom, w których pewne fragmenty tworzą konfigurację sztywną (a nawet przesztynioną) przypisuje się *ruchliwość niepełną* w przeciwieństwie do *ruchliwości zupełnej*, kiedy możliwy jest ruch wszystkich członów.

Podany przykład ilustruje konieczność posługiwania się podłańcuchami, tworzonymi na bazie konturów, w przypadku analizy ruchliwości układów złożonych, wielokonturowych. Jest to szczególnie istotne w syntezie struktur, gdy poszukuje się możliwych rozwiązań układów dla zapewnienia pożądaných funkcji. Można wtedy łatwo eliminować ze zbioru rozwiązań teoretycznie możliwych układy zdegenerowane, które choć teoretycznie możliwe powinny być odrzucone jako nieprzydatne w możliwie wczesnej fazie projektowania. Nie trzeba wykazywać, że syntezę strukturalną, włącznie z weryfikacją otrzymanych rozwiązań, ze względu na wielość możliwych układów dogodnie jest prowadzić za pomocą komputera. Wykorzystuje się wówczas, wprowadzony w tym podrozdziale, zapis układów kinematycznych w postaci macierzy rozmieszczeń [10].

1.2.3. Geometryczne warunki ruchu

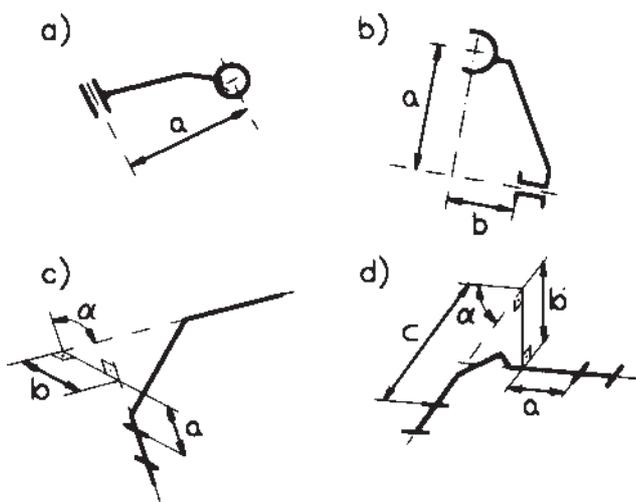
W rozpatrzonych w poprzednim punkcie przykładach każdorazowo stwierdzono, że ruchliwość teoretyczna W_T odpowiada stanowi rzeczywistemu, który można opisywać ruchliwością rzeczywistą W_R . Innymi słowy, w każdym z rozpatrzonych układów W_T i W_R miały jednakowe wartości liczbowe. Wiadomo jednak, że struktura układu kinematycznego ma dominujący, lecz nie jedyny wpływ na własności ruchowe. W związku z tym ruchliwość wyznaczona na podstawie wzorów strukturalnych wymaga każdorazowo weryfikacji. Poprzednio stwierdzono już wystąpienie ruchliwości niepełnej. Inne możliwe i często występujące w układach kinematycznych osobliwe własności ruchowe to wspomniane już wcześniej przypadki ruchliwości lokalnej oraz więzów biernych. Mają one swe źródło w szczególnych własnościach geometrycznych ich członów. Ogólnie można postawić następującą tezę:

Własności ruchowe układu kinematycznego, rozumiane jako możliwość (lub jej brak) wystąpienia ruchu względnego członów układu kinematycznego zależą nie tylko od jego struktury (człony, klasy par kinematycznych), ale również od wymiarów członów. Szczególne wartości wymiarów członów mogą zarówno zapewnić ruch w przypadku układu teoretycznie sztywnego, a nawet przesztynionego ($W_T \leq 0$), jak również spowodować brak możliwości wystąpienia ruchu w przypadku układu teoretycznie ruchliwego ($W_T > 0$).

Do opisanía tych osobliwości ruchowych pomocne jest wprowadzenie pojęcia wymiarów podstawowych członów.

Wymiary podstawowe. Cechy geometryczne członu są opisywane przez wymiary liniowe i kątowe w liczbie tym większej, im bardziej złożone są kształty członów. Wszystkie one są istotne w fazie wykonywania członu, kiedy niezbędne jest podanie ich nominalnych wartości uzupełnionych dopuszczalnymi odchyłkami wykonawczymi. Niektóre spośród wymiarów mają jednak znaczenie szczególne, a ich wartości są istotne we wszystkich fazach projektowania i wytwarzania. Decydują one w pełni o własnościach kinematycznych (trajektorie, prędkości, przyspieszenia), a pośrednio o cechach dynamicznych (siły masowe, siły oddziaływania, tarcie i sprawność). Ze względu na ich dominujący wpływ określa się je mianem wymiarów podstawowych [15]. Stanowią one tę grupę wymiarów członów, które opisują względne położenie półpar kinematycznych, które opisywane są punktami, osiami i powierzchniami. Nie są natomiast podstawowymi wymiary samych półpar. Kilka przykładowych członów z zaznaczeniem ich wymiarów podstawowych zestawiono na rys. 1.14.

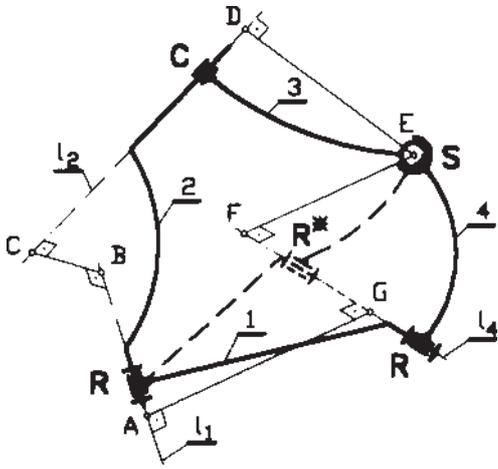
W przypadku członu dwuwęzłowego (rys. 1.14a) z półparami w postaci kuli i tulei ich wzajemne usytuowanie opisuje tylko jeden wymiar a . Dla opisania najbardziej złożonego spośród członów przedstawionych na rys. 1.14 potrzebne są aż cztery wymiary podstawowe (rys.1.14d).



Rys. 1.14. Wymiary podstawowe wybranych członów

W układzie kinematycznym, w określonej jego konfiguracji, wymiary podstawowe członów tworzą przestrzenny wielobok, którego opis jest równoznaczny z opisem jego kinematyki. Na rysunku 1.15 przedstawiono schemat układu przestrzennego $RCSR$ (sekwencja symboli par), zbudowanego z członów przedstawionych na rys. 1.14, którego konfigurację opisuje wielobok przestrzenny $ABCDEFGG$.

Wartości wymiarów liniowych i kątowych wieloboku są funkcją wymiarów podstawowych jego członów. Przykładowo odcinek CB opisuje odległość zwichrowanych



Rys. 1.15. Schemat układu przestrzennego

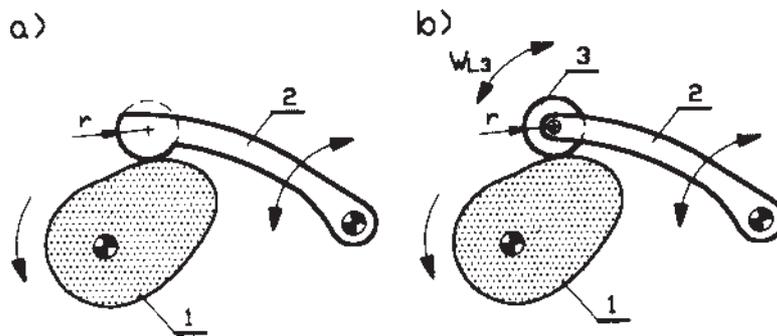
osi półpar członu 2 i odpowiada wprost wymiarowi b członu przedstawionego na rys. 1.14c. Z kolei wymiar FG jest funkcją odpowiednich wymiarów podstawowych członów 1 i 4. Należy przy tym podkreślić, że niektóre z wymiarów układu kinematycznego pozostają nie zmienione, pomimo że są funkcjami wymiarów podstawowych o różnych wartościach. Dla układu z rys. 1.15 w miejsce pary obrotowej R , utworzonej przez człony 1 i 4 można utworzyć parę R^* . Może to być wynikiem zmiany wymiarów podstawowych członów 1 i 4. Jeżeli jednak, pomimo tych zmian, zachowa się niezmiennosc geometryczną wieloboku $ABCDEFG$, to własności kinematyczne układów $RCSR$ i $RCSR^*$ pozostaną nie zmienione.

Dysponując pojęciem wymiarów podstawowych, można wskazać kilka konkretnych przykładów, w których występuje rozbieżność pomiędzy własnościami wynikającymi z ich struktury a stanem faktycznym wynikającym z geometrii.

1.2.3.1. Ruchliwość lokalna

Jako ruchliwość lokalną rozumie się możliwość wykonywania przez człon (czasem grupę członów) takiego ruchu, który nie wpływa na ruch całego układu. Oznacza to inaczej, że w przypadku wystąpienia ruchliwości lokalnej określonego członu może on wykonywać ruch przy unieruchomieniu pozostałych członów układu, włącznie z tymi, które łączą się z nim parami kinematycznymi. Przedstawiono dalej kilka przykładów ruchliwości lokalnej.

Na rysunku 1.16 pokazano dwa mechanizmy krzywkowe płaskie. Pierwszy z nich (rys. 1.16a) składa się z dwóch członów ruchomych, krzywki 1 i popychacza 2. Człon



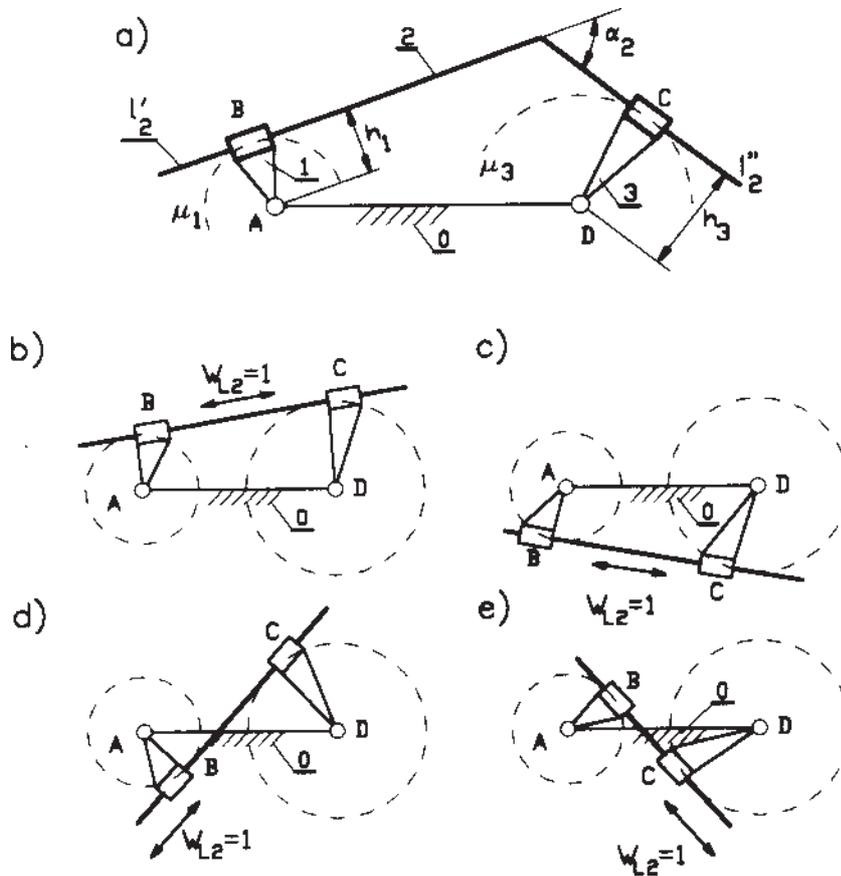
Rys. 1.16. Przykłady mechanizmów krzywkowych

nem napędzającym jest krzywka, której kształt jest dobrany tak, aby uzyskać ruch popychacza według pożądanej charakterystyki kinematycznej. Nie trzeba wykazywać, że ruch popychacza 2 jest określony dla jednego członu czynnego, a więc ruchliwość rzeczywista wynosi jeden ($W_R = 1$) i jest równa ruchliwości teoretycznej ($W_T = 1$), co można potwierdzić korzystając z zależności (1.1). W przypadku układu z rys. 1.16b zdecydowano zamienić tarcie ślizgowe krzywki i popychacza na korzystniejsze tarcie toczne. W tym celu popychacz 2 zakończono krążkiem 3 w taki sposób, aby nie zmieniać charakterystyki ruchu popychacza. Intuicja wskazuje więc również w tym przypadku ruchliwość rzeczywistą równą jeden ($W_R = 1$), gdyż ruch jednego członu czynnego (krzywki 1) wywołuje jednoznaczny ruch członu biernego (popychacza 2). Ruchliwość teoretyczna natomiast obliczona z zależności (1.1) wynosi $W_T = 2$.

Rozbieżność między W_R i W_T jest tutaj wynikiem szczególnej geometrii. Wprowadzony do układu element 3 (krążek) dysponuje możliwością ruchu obrotowego przy nieruchomych członach sąsiednich krzywki 1 i popychacza 2. Taki lokalny ruch, określany mianem ruchliwości lokalnej członu 3 ($W_{L3} = 1$), może wystąpić dlatego że krążek 3 ma kształt kołowy. Lokalny ruch członu, nie wpływający na zasadniczą funkcję układu kinematycznego może być przez projektanta tolerowany. W tym przypadku został nawet wprowadzony celowo dla poprawienia własności eksploatacyjnych (tarcie toczne zamiast ślizgowego). Obliczona ze wzoru (1.1), który nie uwzględnia geometrii, ruchliwość teoretyczna W_T jest poprawna. Nie oddaje jednak stanu rzeczywistego i musi być zweryfikowana. Nietrudno dociec, że w przypadku gdyby człon 3 nie był kołową tarczą, lecz np. eliptyczną, ruchliwość teoretyczna i rzeczywista byłyby sobie równe ($W_T = W_R = 2$), jednoznaczny ruch wymagałby dwóch członów czynnych. Odnotujmy na koniec, że wystąpienie jednej ruchliwości lokalnej krążka 3 skutkuje zmniejszeniem ruchliwości teoretycznej o jeden, ale układ (rys. 1.16) pozostaje ruchliwy.

Płaski układ czteroczłonowy (rys. 1.17a) ma za zadanie transformowanie ruchu obrotowego⁵ pomiędzy członami 1 i 3. Ponieważ człon pośredniczący 2 tworzy z członami 1 i 3 pary postępowe, więc przemieszczenia kątowe 1 i 3 są takie same. Możliwość ruchu łatwo wywnioskować z obserwacji, że osie l'_2 i l''_2 muszą w każdym położeniu układu pozostawać w stałych odległościach h_1 i h_3 odpowiednio od punktów A i D . W sensie geometrycznym oznacza to styczność osi l'_2 i l''_2 do okręgów μ_1 i μ_3 , a to może być zrealizowane na wiele sposobów dopóki osie l'_2 i l''_2 nie pokrywają się ($\alpha_2 \neq 0$). Taka własność wskazuje, że ruch członu 1 będzie transformowany na ruch członu 3. Zupełnie odmienny wniosek wysnujemy dla przypadku szczególnego, kiedy l'_2 i l''_2 pokrywają się ($\alpha_2 = 0$). Sytuacja taka jest dla układów przedstawionych na rys. 1.17b, c, d, e i nietrudno zauważyć, że istnieje tam jedynie możliwość zmontowania układu w czterech konfiguracjach. Po zmontowaniu natomiast mamy do czynienia z usztywnieniem układu, a więc brakiem ruchu. Ruchliwość rzeczywista wynosi tutaj zero ($W_R = 0$) i jest o jeden mniejsza od ruchliwości teoretycznej ($W_T = 1$). Mamy zatem tutaj również do czynienia z układem, w którym nastąpiło zmniejszenie ruchliwości rzeczywistej, ale

⁵ Na takim schemacie oparte jest sprzęgło Oldhama.

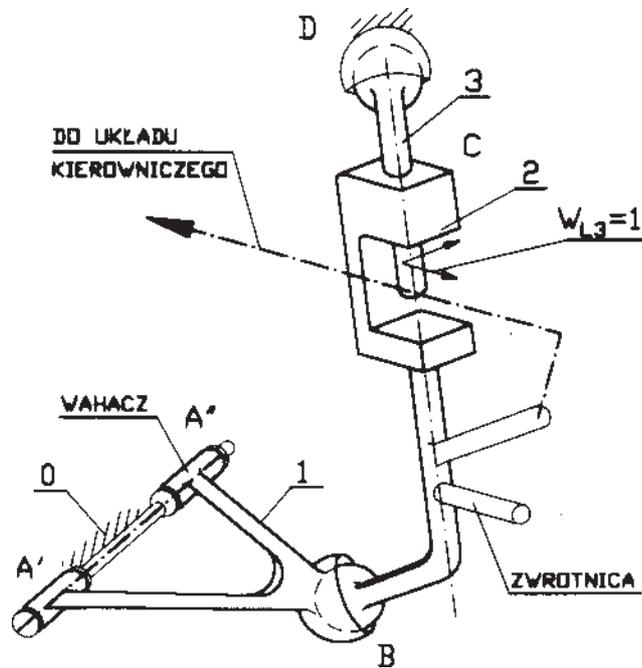


Rys. 1.17. Układ płaski R2TR

tym razem doprowadziło to do jego zablokowania. Człon pośredniczący 2 ma szczególną geometrię (osie l'_2 i l''_2 pokrywają się), co skutkuje jego ruchliwością lokalną ($W_{L2} = 1$).

Przestrzenny układ kinematyczny z rys. 1.18 jest ideowym przedstawieniem powszechnie stosowanego, niezależnego zawieszenia kół samochodów, znanego jako kolumna McPhersona. Zwrotnica 2 takiego układu ma dwa rzeczywiste stopnie swobody ($W_R = 2$), dzięki którym możliwe jest poddawanie się zawieszania przy pokonywaniu nierówności na jezdni (pierwszy stopień swobody) oraz skręcanie pojazdu (drugi stopień swobody). Tymczasem obliczenie ruchliwości ze wzoru (1.2) dla układów przestrzennych⁶ wskazuje, że układ ma trzy stopnie swobody ($W_T = 3$). W tym przypadku obliczona ruchliwość teoretyczna W_T obejmuje ruchliwość lokalną członu 3 ($W_{L3} = 1$). Jest to ruch obrotowy wokół osi pary cylindrycznej C i może wystąpić tylko, gdy oś

⁶ Pary obrotowe A' i A'' potraktowano jako jedną parę I klasy (zdwojenie).



Rys. 1.18. Schemat ideowy kolumny McPhersona

pary C przechodzi przez środek przegubu sferycznego D. Ruchliwość lokalna jest więc tutaj także wynikiem specyficznej geometrii i nie jest przeszkodą w prawidłowym działaniu układu, co więcej człon 3 w takim wykonaniu (z parą cylindryczną) jest korzystniejszy technologicznie.

Na podstawie przytoczonych przykładów stwierdzamy, że w wypadku wystąpienia ruchliwości lokalnej W_L obliczona ruchliwość teoretyczna (strukturalną) W_T nie oddaje stanu faktycznego. Jest to cecha wszystkich układów, a więc w każdym przypadku wystąpienia ruchliwości lokalnej należy wprowadzić poprawkę określającą ruchliwość teoretyczną i rozróżniać ruchliwość rzeczywistą W_R od ruchliwości teoretycznej W_T według zależności:

$$W_R = W_T - W_L \quad (1.13)$$

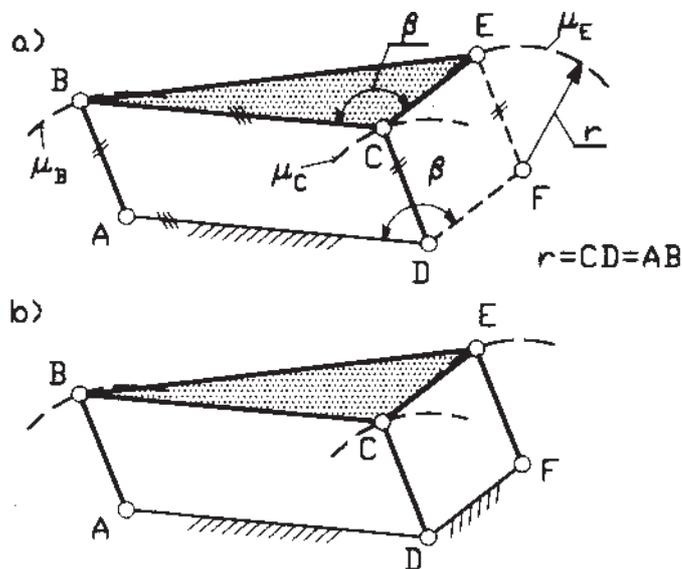
Sprawdzenie poprawności wzoru (1.13) dla omówionych układów z członami dysponującymi ruchliwością lokalną (rys. 1.16, 1.17, 1.18) jest czynnością elementarną i pozostawiamy to czytelnikowi.

1.2.3.2. Więzy bierne

Każdy człon i każda para układu kinematycznego wnosi do układu więzy, tj. ogranicza wzajemne ruchy członów. W sensie geometrycznym oznacza to na przykład ustalenie stałej odległości między punktami dwóch członów, zabranie możliwości ruchu

względnego obrotowego itd. W pewnych warunkach wykonania istnieje możliwość zwielokrotniania niektórych więzów i chociaż w rezultacie uzyskuje się układy strukturalnie sztywne lub nawet przesztywnione, to ruch względny członów jest możliwy. Kilka przykładów takich układów kinematycznych przedstawiono na kolejnych rysunkach.

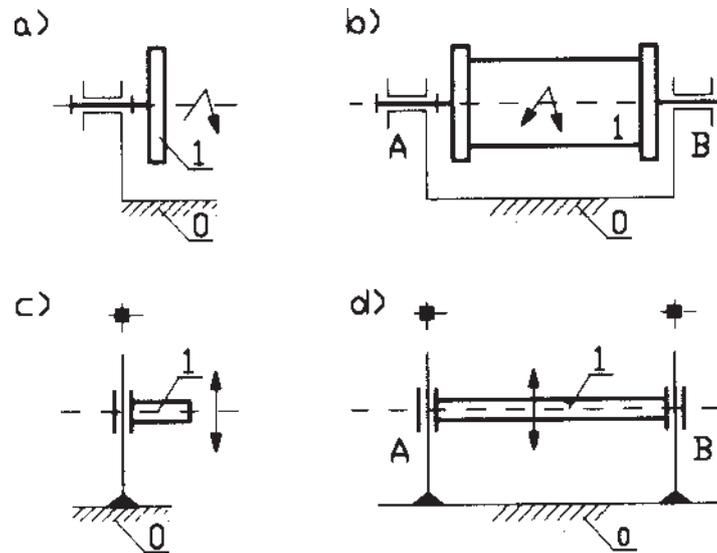
Na rysunku 1.19a pokazano schemat kinematyczny czworoboku przegubowego w wykonaniu szczególnym – wymiary członów dobrano w taki sposób, że czworobok $ABCD$ jest w każdym położeniu równoległobokiem. Łatwo zauważyć, że człon BCE nie wykonuje ruchu obrotowego względem podstawy AD , a trajektorie punktów (środków par) B , C i E są okręgami o jednakowych promieniach. Łatwo też wywnioskować, że środek okręgu μ_E znajduje się w prostym do wyznaczenia punkcie F . Ponieważ



Rys. 1.19. Przegubowy czworobok równoległoboczny

w każdym położeniu układu jest stała odległość między punktami E i F , więc można wprowadzić do układu dodatkowy człon EF o odpowiedniej długości ($EF = AB = CD$). Ten dodatkowy człon (rys. 1.19b) wprowadza do układu więzy bierne – ustala odległość punktów E i F , które już w pierwotnym układzie, dzięki szczególnej geometrii pozostawały w stałej odległości. Ograniczenia zatem wprowadzone przez człon EF są więzami biernymi.

Dodatkowy człon EF zmienia strukturę układu (rys. 1.19b). Jego ruchliwość teoretyczna, obliczona jak dla układów płaskich, wynosi tym razem zero ($W_T = 0$) i wskazuje, że mamy do czynienia z układem strukturalnie sztywnym, chociaż ruchliwość rzeczywista nie uległa zmianie i dalej wynosi jeden ($W_R = 1$). Dla oceny tego stanu wprowadza-



Rys. 1.20. Człony o ruchu obrotowym i postępowym

dza się kolejną poprawkę do wzoru na ruchliwość rzeczywistą układu kinematycznego, który teraz przybiera postać:

$$W_R = W_T - W_L + W_B \quad (1.14)$$

gdzie W_B – liczba więzów biernych.

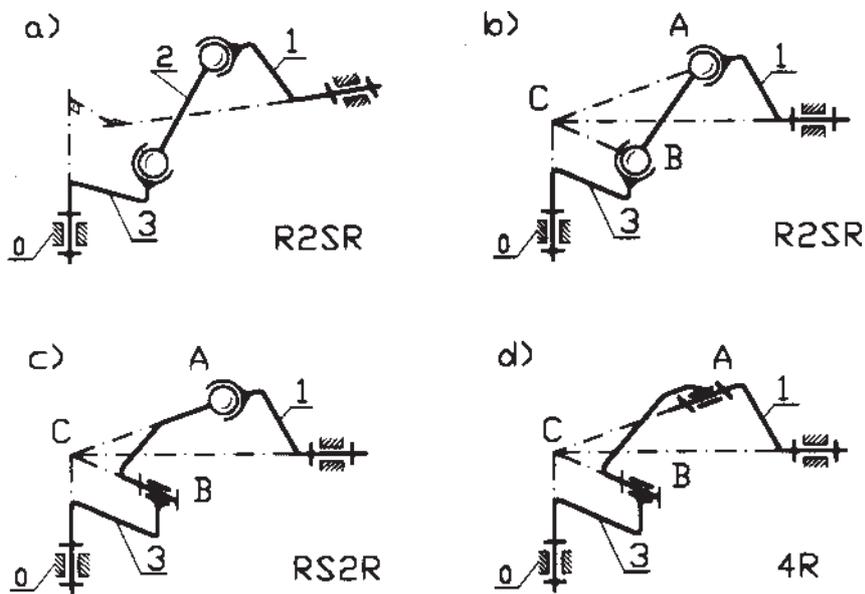
Dla układu kinematycznego z rys. 1.19 na podstawie (1.14) stwierdzamy występowanie więzów biernych w liczbie jeden ($W_B = 1$).

Kolejne przykłady układów o szczególnej geometrii przedstawiono na rys. 1.20. Tarcza 1 (rys. 1.20a) tworzy z podstawą parę kinematyczną obrotową A (sposób łożyskowania zapewnia pożądany ruch obrotowy). Rozwiązanie takie nie zadowala konstruktora w przypadku, kiedy człon 1 jest wirnikiem (rys. 1.20b) o wymiarach i obciążeniach wymagających dodatkowego łożyskowania w parze B . Jeżeli zapewniona jest współosiowość łożysk A i B , to ruch obrotowy wirnika jest możliwy. Dzieje się tak, pomimo że utworzenie pary B wprowadza do układu dodatkowe ograniczenia ruchu (dodatkowe, bo przecież para A już zapewnia wymagany ruch obrotowy), zatem i w tym układzie wprowadzono więzy biernie – zbędne kinematycznie ograniczenia ruchu. Ruchliwość tego układu traktowanego jak przestrzenny wynosi minus trzy ($W_T = -3$), czyli tym razem zgodnie z zależnością (1.14) $W_B = 4$ – wirnik może się obracać, więc $W_R = 1$.

⁷ Sekwencja symboli par kinematycznych od członu czynnego do biernego.

Podobną interpretację łatwo przypisać układom prowadzenia platformy 1 (rysunek 1.20c, d). Pierwszy z nich, w którym prowadnica 0 tworzy z platformą 1 parę postępową jest kinematycznie i strukturalnie poprawny – $W_R = W_T = 1$. Wymagane dla korzystniejszego rozkładu sił zdwojenie pary postępowej przez utworzenie dodatkowo pary B , możliwe przy spełnieniu oczywistych warunków geometrycznych, oznacza również wprowadzenie dodatkowych, zbędnych kinematycznie więzów (ograniczeń ruchu). Zabieg ten również spowoduje zmianę ruchliwości. Tym razem układ z rysunku 1.20d, traktowany jak przestrzenny, ma ruchliwość teoretyczną minus cztery ($W_T = -4$), a więc zgodnie z zależnością (1.14) ma pięć więzów biernych ($W_B = 5$). Wprowadzenie w układzie z rys. 1.20d prowadnic o przekroju kołowym, dogodniejszym technicznie, jakkolwiek obniży stopień przeszytywnienia, to jednak ciągle jego ruchliwość obliczana z (1.2) będzie różna od oczekiwanej i wyniesie minus dwa ($W_T = -2$), chociaż platforma 1 dysponuje możliwością ruchu ($W_R = 1$), więc zgodnie z zależnością (1.14) w układzie pozostaną jeszcze trzy więzy bierne ($W_B = 3$).

Rozbieżności między ruchliwością teoretyczną i rzeczywistą występują także w układach z założeniami przestrzennymi. Przeniesienie ruchu obrotowego między dwoma wałkami, od członu czynnego 1 do biernego 3, których osie są zwichrowane, umożliwia między innymi układ czworoboku przestrzennego $R2SR^7$ (rys. 1.21a). Jego ruchliwość rzeczywista wynosi jeden ($W_R = 1$), teoretyczna natomiast jest równa dwa ($W_T = 2$). Występuje tutaj tolerowana w praktyce ruchliwość lokalna członu pośredniczącego 2



Rys. 1.21. Układ przestrzenny transformacji ruchu obrotowego

($W_{L2} = 1$) – ruch obrotowy członu 2 wokół osi przechodzącej przez środki par sferycznych. W wykonaniu szczególnym tego układu (rys. 1.21b), w którym osie członów 1 i 3 przecinają się, można zaobserwować pewne cechy szczególne. Jak nietrudno zauważyć w tym przypadku w czasie ruchu trójkąt ABC jest geometrycznie niezmienny. Właśność ta umożliwia modyfikację struktury, która nie tylko nie zmieni ruchliwości rzeczywistej, ale nawet nie zmieni charakterystyki kinematycznej w relacji człon czynny 1 – bierny 3.

Nowe ruchliwe układy ($W_R = 1$) uzyskane w wyniku modyfikacji układu $R2SR$ to układy $RS2R$ i $4R$ (rys. 1.21c, d). W każdym z nich nastąpiło zmniejszenie ruchliwości teoretycznej, a więc w każdym występują więzy biernie:

- $W_T = 0$ i $W_B = 1$ dla układu $RS2R$,
- $W_T = -2$ i $W_B = 3$ dla układu $4R$.

Prostota zależności (1.14), wiążącej ruchliwość rzeczywistą W_R , teoretyczną W_T , lokalną W_L i więzy biernie W_B , jest nie do przecenienia. Bardzo ważna dla konstruktora jest niesiona przez nią informacja o występowaniu w układzie dodatkowych, zbędnych kinematycznie ograniczeń ruchu. Jak pokazują przytoczone przykłady występowanie więzów biernych zawsze oznacza konieczność spełnienia geometrycznych warunków ruchu, tj. związków funkcyjnych pomiędzy wymiarami podstawowymi członów.

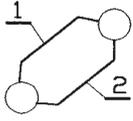
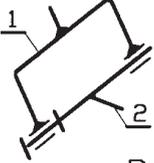
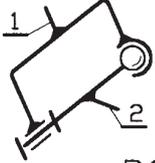
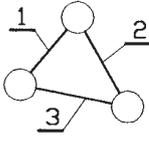
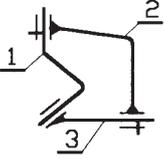
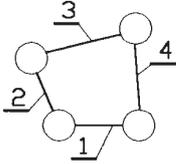
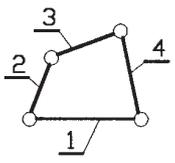
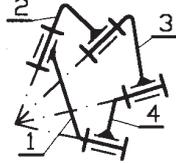
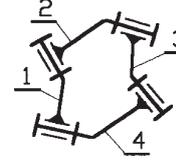
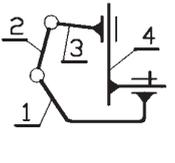
Postać tych warunków może być różna, czasem jest bardzo złożona [8]. Dla omawianych układów sformułujemy je werbalnie:

- dla układu zdwojonego czworoboku (rys. 1.19) wymiary członów muszą zapewniać w każdym położeniu istnienie dwóch równoległoboków $ABCD$ i $CDFE$,
- dla łożyskowania wirnika (rys. 1.20b) trzeba, aby półpary A i B podstawy i wirnika były współosiowe,
- dla platformy (rys. 1.20d) na prowadnicach o przekroju kołowym osie półpar platformy 1 i prowadnic 0 muszą być do siebie równoległe i w jednakowej odległości,
- dla układu $RS2R$ (rys. 1.21c) osie półpar podstawy 0 i członu 3 muszą się przecinać w jednym punkcie, dla układu $4R$ (rys. 1.21d) wymagane jest już przecięcie się w jednym punkcie osi wszystkich par kinematycznych; w tych układach są wymagane też pewne, pominięte tutaj, związki nałożone na wymiary podstawowe liniowe [25].

Przedstawione układy z więzami biernymi raz jeszcze potwierdzają tezę, że o rzeczywistych własnościach ruchowych, o możliwości ruchu względnego członów, oprócz struktury w znacznym stopniu decyduje też geometria. Każdy z układów jednokonturowych (rys. 1.22), których struktura wskazuje na brak możliwości ruchu ($W_T \leq 0$), w szczególnych warunkach wykonania stanie się układem ruchliwym. W literaturze opisano wiele takich układów [1], [9], [29] – kilka z nich zestawiono na rys. 1.23.

LICZBA CZŁONÓW	SCHEMAT OGÓLNY	RUCHLIWOŚĆ TEORETYCZNA (W_T)			
		0	-1	-2	-3
2					
3					
4					
5					
6			CYFRA RZYMSKA WEWNĄTRZ SYMBOLI PAR OZNACZA KLASĘ PARY KINEMATYCZNEJ		

Rys. 1.22. Struktury układów teoretycznie sztywnych i przesztywnionych

SCHEMAT OGÓLNY	SCHEMATY KINEMATYCZNE		
	$W_T = -3$  RC	$W_T = -2$  RS	
	$W_T = -2$  2TC		
	$W_T = -2$  4R-1	$W_T = -2$  4R-2	$W_T = -2$  4R-3
	$W_T = -1$  2RCT		

Rys. 1.23. Schematy układów ruchliwych o szczególnej geometrii

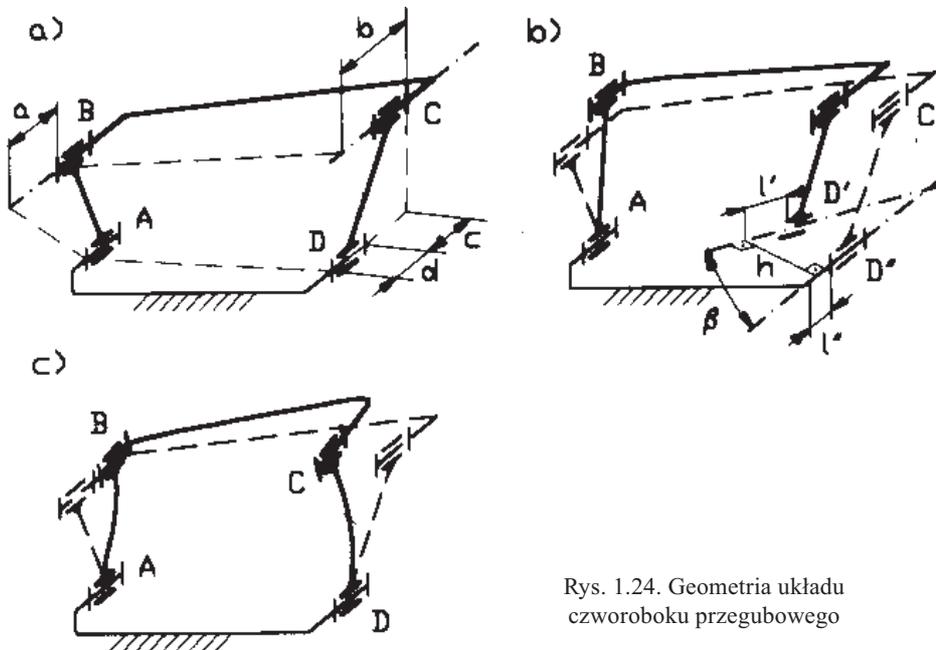
1.2.4. Układy kinematyczne racjonalne

Praktyczna realizacja układu kinematycznego, polegająca na wykonaniu poszczególnych członów, jest nieuchronnie związana z odchyłkami wykonawczymi. Ich wartości są uzależnione od wielu czynników, jak np. stanu technicznego dysponowanego parku maszynowego, poziomu technicznego obsługi, zawsze jednak są nieuniknione.

Szczególnie ważne będą odchyłki wymiarów podstawowych, które decydują o istotnych parametrach układu kinematycznego. Mają one m.in. wpływ na dokładność realizowanych ruchów, trajektorii, położeń, a także na wartości obciążeń. Te ostatnie w wyniku błędów wykonawczych mogą osiągnąć wartości powodujące nawet zniszczenie elementów układu. W układach szybkobieżnych mogą być powodem znacznie większych, od przewidywanych, sił dynamicznych. Efektem niedotrzymania wymiarów nominalnych może być także wejście w strefę samohamowności w tych układach, które pracują w pobliżu położeń martwych.

W przypadku układów z więzami biernymi aspekt dokładności wykonania wymiarów członów nabiera dodatkowego istotnego znaczenia. Nieuniknione odchyłki wykonawcze sprawiają bowiem, że geometryczne warunki ruchu takich układów mogą być spełnione tylko z pewnym przybliżeniem. Oznacza to w praktyce, że jeszcze przed wystąpieniem obciążeń zewnętrznych układu z więzami biernymi w parach kinematycznych pojawiają się dodatkowe siły. Są one wywołane koniecznością „dopasowywania” się członów, oznaczającego w praktyce sprężyste odkształcenie (rozciąganie, zginanie itd).

Wartości tych dodatkowych obciążeń, związane z wartościami odchyłek wykonawczych i sztywnością członów, zmieniają się w zależności od położenia układu. Ich konsekwencją jest przede wszystkim zmniejszona sprawność mechaniczna oraz nadmierne zużycie elementów par kinematycznych. Tym samym mogą nie być osiągnięte zakładane wartości istotnych wskaźników, jak sprawność, żywotność i niezawodność. W drastycznych przypadkach może nawet zachodzić zmęczeniowe (dodatkowe obciążenia zmieniają się cyklicznie) zniszczenie któregoś z członów.



Rys. 1.24. Geometria układu czworoboku przegubowego

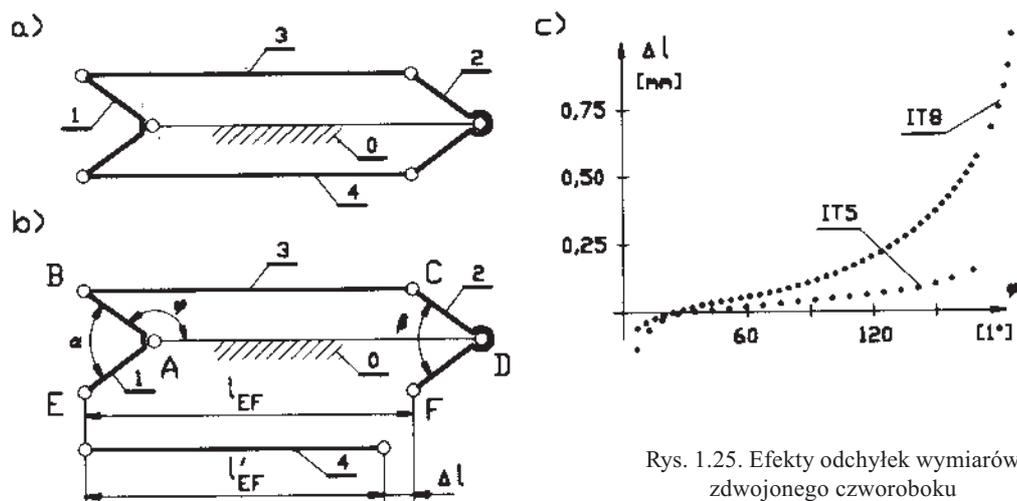
W płaskim czworoboku przegubowym (rys. 1.24a), oprócz oczywistego warunku równoległości osi wszystkich par kinematycznych (tylko wtedy jest to układ płaski), wymagane jest spełnienie zależności:

$$a + b - c - d = 0 \quad (1.15)$$

Sytuacja idealna, tj. przy zerowych odchyłkach wykonawczych, jest przedstawiona na rys. 1.24a. W warunkach rzeczywistych, kiedy człony wykonano z błędami, już w fazie montażu pojawią się trudności. Zakładając montaż par w kolejności A , B , C i w ostatniej kolejności D , utworzenie tej ostatniej okaże się niemożliwe (rys. 1.24b), półpary D' i D'' bowiem będą od siebie „oddalone”, a ich względne położenie może być opisane za pomocą parametrów h , β , l' , l'' . Sytuacja taka będzie występować również przy próbach utworzenia pary D (zamknięcia układu) dla innych położenia członu AB , chociaż wartości parametrów h , β , l' , l'' będą się zmieniać. W wypadku wystąpienia odchyłek montaż ostatniej pary D jest zatem możliwy tylko w przypadku przyłożenia zewnętrznych sił, które spowodują odpowiednie, wymagane dla montażu, odkształcenia członów. Sytuację wynikową obrazuje rys. 1.24c, na którym człony są odkształcone. Nie trzeba dowodzić, że w parach kinematycznych tak zmontowanego „na siłę” układu będą w czasie ruchu występować dodatkowe, cyklicznie zmienne siły, a wywołanie ruchu będzie możliwe po pokonaniu sił tarcia oraz sił odkształcenia sprężystego członów.

Wyznaczenie tych dodatkowych obciążeń jest zagadnieniem złożonym, wymaga stosowania zaawansowanych metod analizy przemieszczeń układów przestrzennych oraz znajomości materiału i postaci konstrukcyjnej członów. Skalę zjawiska obrazuje podany przykład.

W przeniesieniu jednego z napędów robota *IRb* [23] stosuje się równoległoboczny układ (rys. 1.25a), służący do transformacji ruchu obrotowego od członu 1 do członu 2.



Rys. 1.25. Efekty odchyłek wymiarów zdwojonego czworoboku

Układ ten spełni swoją funkcję w sensie kinematycznym także wtedy, gdy pozbawi się go jednego z łączników 3 lub 4. Stosowanie dwóch łączników jest podyktowane korzystniejszym rozkładem sił, powodując jednak, że nawet przy idealnym spełnieniu warunków płaskości (osie wszystkich par równoległe) jest to układ z więzami biernymi, a warunki wystąpienia ruchu to:

$$\begin{aligned} AD &= BC = EF \\ AE &= DF, \quad AB = CD, \quad \alpha = \beta \end{aligned} \quad (1.16)$$

Wykonanie z błędami wymiarów wchodzących w związek (1.16) doprowadzi do sytuacji, że już w czasie montażu, zwłaszcza w jego ostatniej fazie polegającej np. na wmontowaniu łącznika 4, wymagane będzie użycie siły. Wynika to z faktu, że rzeczywista długość l'_{EF} będzie różna od odległości półpar E i F wynikającej z rzeczywistych wymiarów członów 0, 1, 2 i 3. Różnicę tę reprezentuje odchyłka Δl (rys. 1.25b), której wartość zmienia się w funkcji położenia układu.

Przyjmujemy wymiary nominalne:

$$AD = BC = EF = 450 \text{ mm}$$

$$AE = DF = AB = CD = 60 \text{ mm}$$

$$\alpha = \beta = \pi / 2$$

na rys. 1.25c przedstawiono przebieg zmian $\Delta l(\varphi)$ dla dwóch klas dokładności wykonania $IT5$ oraz $IT8$, po założeniu symetrycznego rozkładu tolerancji. Z wykresu widać, że istnieje położenie, w którym $\Delta l = 0$, a montaż w tym położeniu nie wymaga odkształcania członów – jest możliwy bez użycia sił. Jednak w czasie ruchu odchyłka Δl zmienia się co do wartości i znaku. Powoduje to na przemian rozciąganie i ściskanie łącznika 4, wywołując też odkształcenia pozostałych członów. Wartości sił, które temu towarzyszą są zależne od sztywności członów. Zakładając na początek, że odkształceniu podlega wyłącznie człon 4, wykonany ze stalowego pręta o przekroju osiowym 10^{-4} m^2 , jest on obciążony siłą osiową F o wartościach:

$$F \in \langle -2,6, +12,7 \rangle \text{ kN} \quad \text{dla } IT5$$

$$F \in \langle -9,6, +44,6 \rangle \text{ kN} \quad \text{dla } IT8$$

Uzyskane wartości odnoszą się do stosunkowo prostego układu, i wyznaczone zostały dla znacznych uproszczeń, przez co rzeczywiste wartości mogą odbiegać od przytoczonych. W realnym układzie odkształceniom ulegać będą przecież także pozostałe człony, a wartości sił zostaną zmniejszone w wyniku występowania luzów w parach kinematycznych. Jednak już na podstawie analizy tego prostego układu należy stwierdzić, że rzeczywiste układy z więzami biernymi, których człony są wykonywane z nieuniknionymi odchyłkami wymiarów, zawsze będą charakteryzowały się występowaniem w parach kinematycznych dodatkowych sił, nie przewidzianych przez konstruktora wraz ze wszystkimi negatywnymi skutkami.

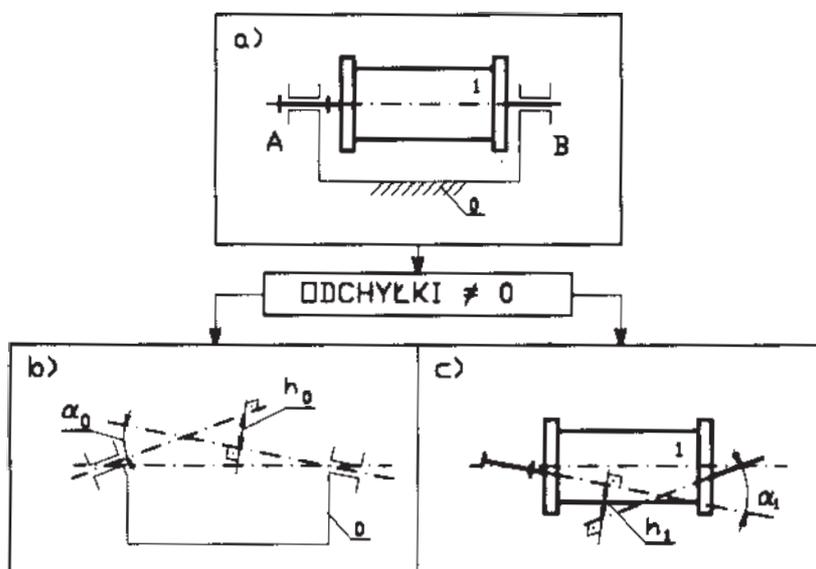
Specyfika układów z więzami biernymi, w szczególności kłopoty techniczne związane z ich montażem i eksploatacją, spowodowała, że nadano im miano *układów nieracjonalnych*. Termin ten wynika wprost z niewłaściwej, nieracjonalnej struktury, skutkującej nadmierną liczbą ograniczeń ruchu – więzów biernych, które są więzami biernymi w przypadku spełnienia określonych warunków geometrycznych nałożonych na wymiary podstawowe członów.

Ogólnie należy stwierdzić, że stosowanie takich układów powinno być ograniczane na rzecz *układów racjonalnych*, bez więzów biernych, w których możliwość ruchu nie jest ograniczona żadnymi warunkami. Przedstawiono dalej wybrane przykłady układów nieracjonalnych, wskazując na geometryczne warunki ruchu oraz pokazano sposoby modyfikacji ich struktury w celu uzyskania rozwiązań racjonalnych.

Zdwojone łożyskowanie wirnika (rys. 1.26a), korzystne ze względu na wielkość sił w parach kinematycznych, wprowadza jak już wiadomo więzy bierne. Oznacza to, że przy wystąpieniu odchyłek wykonawczych już ze zmontowaniem takiego układu będą określone kłopoty. Sytuację taką, z celowo wyolbrzymionymi błędami, przedstawiono na rys. 1.26b, c. W przypadku ogólnym osie półpar podstawy 0 są zwichrowane, a ich względne położenie opisuje odległość h_0 i kąt zwichrowania α_0 . Identycznie wirnik 1, wykonany z odchyłkami, będzie miał osie półpar zwichrowane – odległość h_1 , kąt α_1 .

Wprowadzone cztery wymiary podstawowe, przypisane poszczególnym członom, umożliwiają określenie geometrycznych warunków ruchu w postaci:

$$h_0 = h_1 = 0 \text{ oraz } \alpha_0 = \alpha_1 = 0$$



Rys. 1.26. Odchyłki wymiarów wirnika i podstawy

Kierunek modyfikacji struktury układu, aby uzyskać rozwiązanie racjonalne, a więc bez więzów biernych, wynika wprost z zależności (1.14) i (1.2).

W zmodyfikowanym układzie powinno być:

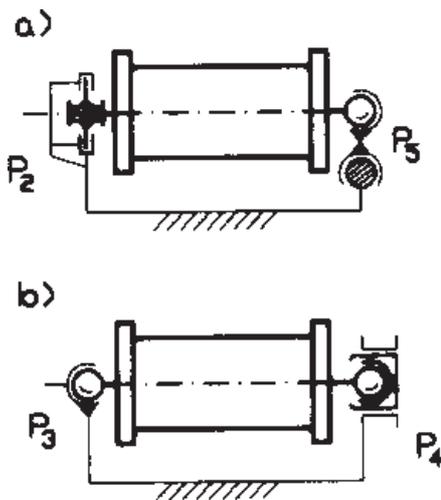
- $W_B = 0$, brak więzów biernych,
- $W_L = 0$, brak ruchliwości lokalnych,
- $\sum p_i = 2$, wirnik powinien tworzyć z podstawą dwie pary kinematyczne,
- $W_R = W_T = 1, k = 1$.

Po rozpisaniu równania (1.2) mamy

W_T	=	$6k$	$-5p_1$	$-4p_2$	$-3p_3$	$-2p_4$	$-1p_5$
1	=	$6 \cdot 1$	$-5 \cdot 0$	$-4 \cdot 1$	$-3 \cdot 0$	$-2 \cdot 0$	$-1 \cdot 1$
1	=	$6 \cdot 1$	$-5 \cdot 0$	$-4 \cdot 0$	$-3 \cdot 1$	$-2 \cdot 1$	$-1 \cdot 0$

W wyniku otrzymaliśmy więc dwa rozwiązania:

- $k = 1, p_2 = 1, p_5 = 1$ (rys. 1.27a),
- $k = 1, p_3 = 1, p_4 = 1$ (rys. 1.27b).

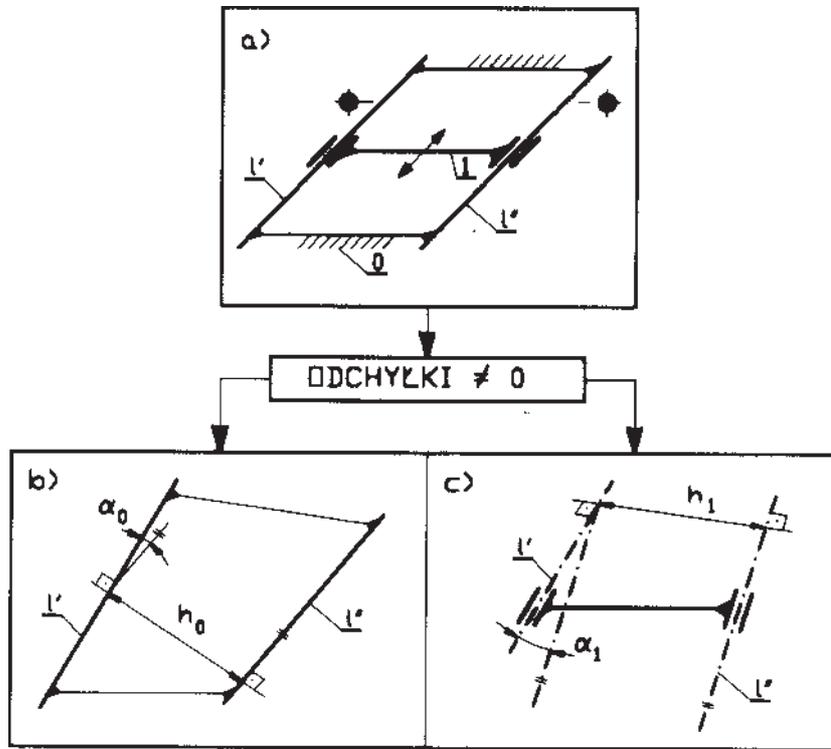


Rys. 1.27. Racjonalne łożyskowanie wirnika

Zwróćmy uwagę, że wynikiem rozważań są klasy par kinematycznych, jakie ma tworzyć wirnik z podstawą. Mogą być one również zrealizowane w postaci węzłów (rys. 1.8), ważne jest tylko, aby w określonym połączeniu zapewnić odpowiednią liczbę stopni swobody. Tak właśnie utworzono propozycje rozwiązań racjonalnych przedstawione na rys. 1.27a, b, z których ostatnie, uzyskane w sposób formalny, jest znanym łożyskowaniem za pomocą dwóch łożysk wahlowych, przy czym jedno daje możliwość przesuwu wzdłużnego.

Wiele maszyn i urządzeń wymaga realizacji ruchu przesuwnego elementu w podstawie. Jedno z możliwych i chętnie stosowanych rozwiązań przedstawiono na rys. 1.28a. Jest to układ z pięcioma więzami biernymi ($W_B = 5$), w którym dwie cylindryczne prowadnice l' i l'' zapewniają możliwość ruchu przesuwnego członu 1, gdy są spełnione warunki geometryczne. Oba człony wykonane z błędami przedstawiono na rys. 1.28b, c, przy takich odchyłkach zmontowanie układu jest niemożliwe. Osie l' i l'' prowadnic podstawy 0 oraz osie l' i l'' półpar członu 1 są odpowiednio względem siebie zwichrowane. Dla poprawnego działania trzeba, aby były spełnione warunki:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0 \quad \text{oraz} \quad h_0 = h_1$$

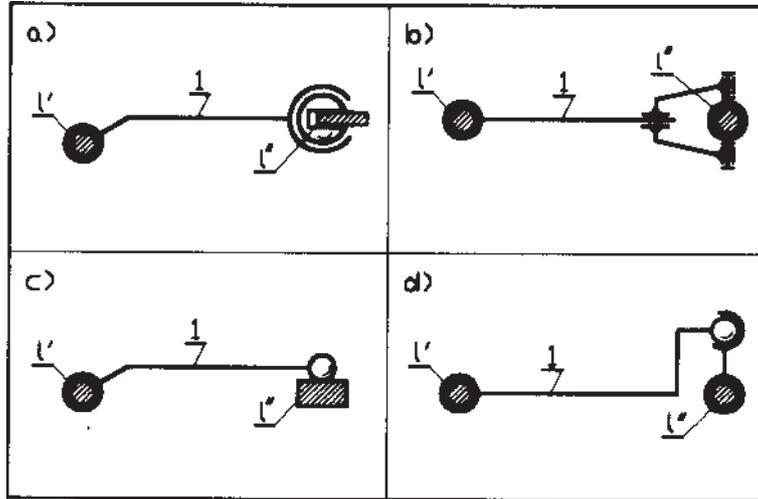


Rys. 1.28. Odchyłki wymiarów elementu przesuwego i prowadnicy

Odchyłki wykonawcze wymiarów występują zawsze, ich wartości zależą od wielu czynników, ale mniejsze odchyłki oznaczają większe koszty. Zabezpieczenie możliwości współpracy obu elementów (rys. 1.28), nawet w warunkach niedokładnego wykonania wymaga modyfikacji w celu uzyskania rozwiązania racjonalnego, bez więzów biernych. Podobne rozważania, jakie przeprowadzono dla poprzedniego układu (rys. 1.26 i 1.27), prowadzą do formalnego zdefiniowania wymaganych klas par kinematycznych. Cztery przykłady rozwiązań racjonalnych przedstawiono na rys. 1.29, gdzie pozostawiono tylko jedną parę cylindryczną, drugie połączenie natomiast zapewnia w każdym ze schematów pięć stopni swobody. Jednak czystą parę piątej klasy, o styku punktowym, zastosowano tylko w rozwiązaniu c, w pozostałych natomiast przypadkach zastosowano węzły, eliminując parę wyższą, o ograniczonych możliwościach przeniesienia sił.

Każdy układ płaski już z definicji zawiera więzy bierne, na ruch członów bowiem nałożone są więzy, które zmuszają je do ruchu w płaszczyźnie, ściślej w płaszczyznach równoległych. Oznacza to w praktyce konieczność zapewnienia równoległości i prostopadłości osi określonych par kinematycznych.

Rozpatrzmy dla przykładu układ czworoboku przegubowego (rys. 1.30a, b). Dla spełnienia warunku płaskości tego układu osie wszystkich par obrotowych muszą być pro-



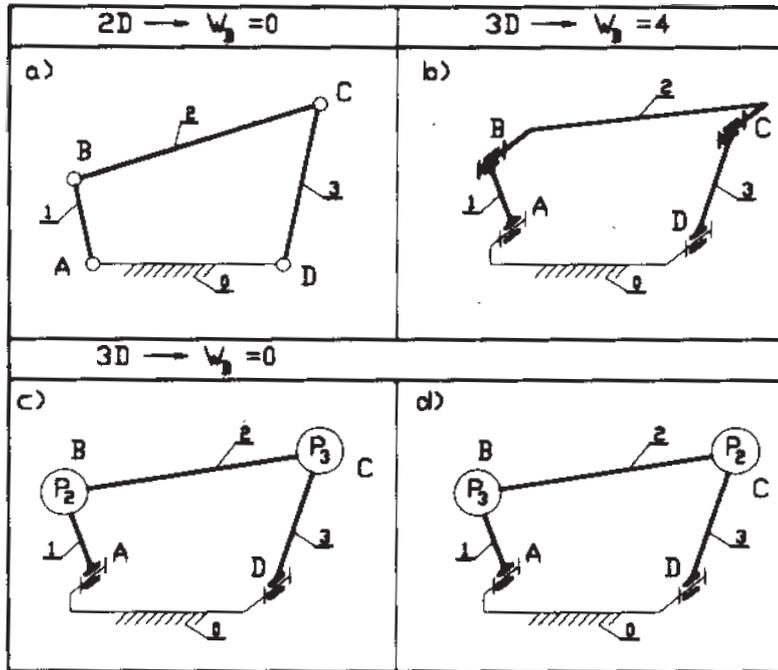
Rys. 1.29. Rozwiązania racjonalne układów, element przesuwny – prowadnica

stopadłe do płaszczyzny ruchu. Oznacza to, że każdemu z członów należy zapewnić równoległość osi półpar⁸. Obecność więzów biernych potwierdza formalne obliczenie ruchliwości teoretycznej ($W_T = -2$) ze wzoru (1.2) dla układów przestrzennych. Wobec tego, że nie występuje tutaj ruchliwość lokalna ($W_L = 0$), zależność (1.14) wskazuje na istnienie trzech więzów biernych ($W_B = 3$).

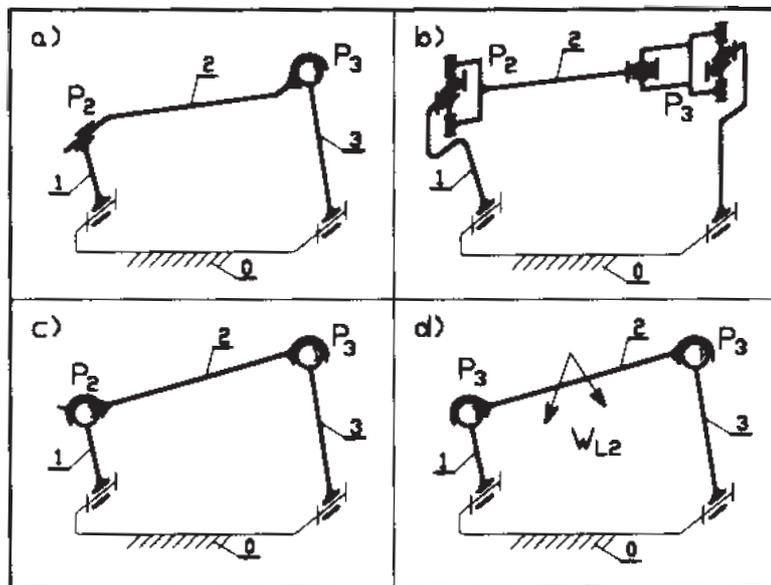
Układy płaskie występują w praktyce masowo, wiele z nich to rozwiązania strukturalnie nieracjonalne. Dla zwartej budowy, z zapewnieniem dużej dokładności wykonania członów, układy płaskie pracują zupełnie poprawnie. W każdej parze kinematycznej występują ponadto luzy, które w istotny sposób mogą zniwelować niekorzystny wpływ ewentualnych niedokładności wykonawczych.

Racjonalność struktury czworoboku przegubowego (rys. 1.30) łatwo uzyskać przez taką modyfikację klas par kinematycznych, aby uzyskać ruchliwość teoretyczną dla układu przestrzennego równą jeden ($W_T = 1$). Pozostawiając bez zmiany pary kinematyczne utworzone przez człony ruchome (1, 3) z podstawą 0, uzyskuje się jednoznaczne klasy pary B i C . Przykładowo, najczęściej używane warianty przedstawiono na rys. 1.30c, d, rozwiązania szczegółowe natomiast, po wstawieniu szczególnych postaci połączeń w parach B, C prezentuje rys. 1.31a, b, c. Układ przedstawiony na rys. 1.31d ma ruchliwość teoretyczną równą dwa, jednak zawiera się w tej liczbie ruchliwość lokalna członu 2 ($W_{L2} = 1$), która nie wpływa na ruch transformowany od członu 1 do 3. Jest to często stosowane rozwiązanie, w którym łącznik 2 czworoboku jest łączony z członami sąsiednimi 1, 3 za pomocą łożysk wahlowych.

⁸ Pomijamy tutaj inne, niezbędne warunki nałożone na wymiary podstawowe członów.

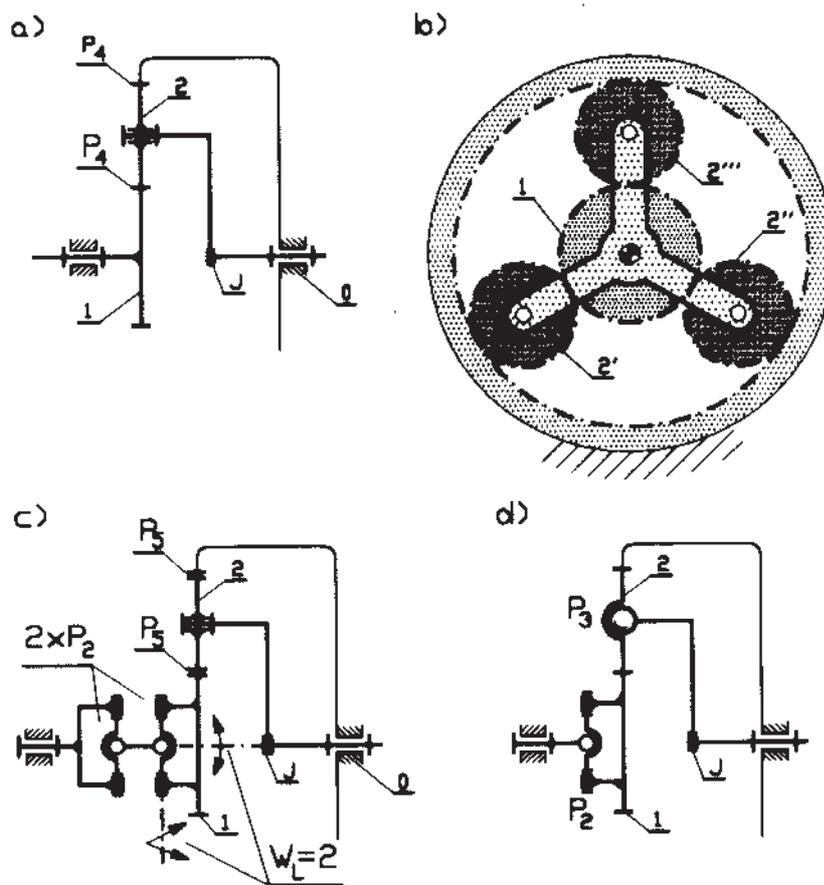


Rys. 1.30. Czworobok przegubowy płaski (a), (b) i struktury racjonalne (c), (d)



Rys. 1.31. Czworobok przegubowy – rozwiązania racjonalne

Jednym z układów kinematycznych umożliwiających redukcję obrotów jest przekładnia obiegowa – mechanizm złożony z kół zębatach, z których niektóre wykonują ruch obiegowy (ich osie przemieszczają się ruchem liniowym) – przedstawiona na rys. 1.32a, b. Składa się ona z koła centralnego 1 (człon czynny) o zazębieniu zewnętrznym, drugiego koła centralnego 0, będącego jednocześnie podstawą oraz trzech kół obiegowych 2 ułożyskowanych w jarzmie J (człon bierny). Dla jednoznacznego przeniesienia ruchu między kołem 1 i jarzmem J wystarczy jedno koło obiegowe. Stosowanie większej liczby tych kół (tutaj trzech) podyktowane jest chęcią zwiększenia momentów, jakie mogą być transformowane przez ten mechanizm. Jednak wprowadzenie do układu większej liczby kół obiegowych jest równoznaczne z wprowadzeniem dodatkowych, zbędnych kinematycznie, więzów biernych. Ruchliwość teoretyczna wynosi tym razem $W_T = -7$, co oznacza, że układ jest przesztyniony, a więc nieracjonalny strukturalnie.



Rys. 1.32. Przekładnia obiegowa – rozwiązania nieracjonalne (a) i racjonalne (c) i (d)

Konsekwencją nieuniknionych odchyłek wykonawczych może być m.in. to, że pożądaný jednoczesny kontakt wszystkich par zazębien nie będzie realizowany. Może to skutkować większymi od zakładanych siłami występującymi w zazębieniach, co w skrajnych przypadkach prowadzi do przedwczesnego zużycia przekładni. Nie trzeba wykazywać, że uniknięcie tych niekorzystnych zjawisk pociąga za sobą konieczność bardzo dużych dokładności wykonania.

Innym środkiem zaradczym może być poszukiwanie dróg modyfikacji struktury układu w kierunku rozwiązania racjonalnego, w którym wyeliminowane zostaną więzy bierne. Dwa przykłady takich rozwiązań przedstawiono na rys. 1.32c, d. Pierwsze z nich charakteryzuje się tym, że zęby kół obiegowych wykonano jako baryłkowe, a koło centralne 1 nie jest łożyskowane sztywno – jego położenie jest ustalane przez zęby kół obiegowych. Przeniesienie ruchu od wału wejściowego odbywa się za pośrednictwem dwóch par II klasy P_2 , które w realnych układach są sprzęgłami zębatymi.

W drugim rozwiązaniu (rys. 1.32d) koła obiegowe 2 mają już zęby proste, ale są łączone z jazdmem J za pomocą łożysk wahliwych (pary sferyczne III klasy P_3), a koło centralne 1 łączy się z wałem wejściowym za pomocą jednego sprzęgła zębatego. Obydwa rozwiązania są racjonalne, co łatwo stwierdzi czytelnik korzystając z wzorów (1.2) i (1.13).

Pokazane tutaj rozwiązania racjonalne przekładni obiegowej należy traktować jako przykładowe. Konstruktorzy stosują wiele jeszcze innych modyfikacji [18], [25], ale wszystkie one zmierzają do całkowitego lub co najmniej częściowego wyeliminowania więzów biernych.

Problematyka racjonalności układów kinematycznych jest doceniana przez konstruktorów praktyków. Często całkiem nieświadomie, opierając się wyłącznie na intuicji, w swoich rozwiązaniach konstruktorzy stosują takie pary kinematyczne (łożyska), które nadają rozwiązaniom cechy racjonalności. Jednak bazowanie wyłącznie na intuicji może być zawodne w przypadku układów złożonych, świadczy o tym wiele realnych układów zawierających więzy bierne. Obserwacja wskazuje na pewną prawidłowość: im bardziej odpowiedzialny i zaawansowany technologicznie układ kinematyczny, tym mniejsze szanse na spotkanie choćby fragmentów rozwiązanych w sposób nieracjonalny.

Nie oznacza to jednak, że stosowanie układów z więzami biernymi jest z definicji błędem konstruktora. Są przypadki, kiedy jest to niezbędne i w pełni uzasadnione, układy z więzami biernymi są też prostsze. Decyzja o ich stosowaniu w praktyce powinna być podjęta ze świadomością potencjalnych kłopotów technologicznych i eksploatacyjnych.

2. KONFIGURACJA UKŁADÓW KINEMATYCZNYCH

2.1. Wprowadzenie

Istotą układu kinematycznego jest ruch członów. W każdej chwili człony zajmują określone położenie względem podstawy, a tym samym również względem siebie. Wszelkie rozważania, zarówno dotyczące kinematyki, jak i dynamiki mają za zadanie odpowiedzieć na pytanie, jakie jest bieżące położenie poszczególnych członów, a więc, jaka jest konfiguracja układu. W kinematyce położenie członów układu jest zależne wyłącznie od wymuszeń kinematycznych, zaniehbuje się natomiast masy członów, siły zewnętrzne bierne i czynne. Te ostatnie są natomiast istotne w rozważaniach dynamicznych. Analiza dynamiczna każdego układu musi być zawsze poprzedzona analizą kinematyczną – nie ma dynamiki bez kinematyki!

Każdy układ kinematyczny złożony z określonej liczby członów połączonych ze sobą różnymi parami kinematycznymi jest określony co do ruchu, jeśli znane są wymuszenia kinematyczne w liczbie równej liczbie stopni swobody¹. Zdecydowana większość mechanizmów to układy o jednym stopniu swobody, oznacza to, że do określenia ich ruchu wystarczy podanie jednego wymuszenia. Przykładowo wymuszeniem kinematycznym układu korbowego silnika spalinowego jest funkcja opisująca przemieszczenie s tłoka w czasie $s = s(t)$, które jednoznacznie opisuje położenie członów tego mechanizmu, jest to bowiem układ o ruchliwości $W = 1$. W powszechnie znanych układach wysięgnikowych ładowarek, których ruchliwość wynosi dwa ($W = 2$) do opisu ruchu łyżki są potrzebne już dwa wymuszenia kinematyczne, na ogół w postaci zmian długości dwóch siłowników w czasie ($s_1 = s_1(t)$ oraz $s_2 = s_2(t)$). Jeszcze więcej wymuszeń jest potrzebnych w analizie mechanizmów robotów. Układy te są tak zbudowane, aby ostatni element (efektor) dysponował kilkoma stopniami swobody.

Opis konfiguracji układu kinematycznego tylko pozornie jest najprostszym zadaniem kinematyki, na ogół nastrocza wielu kłopotów. Tylko bardzo proste układy płaskie lub mechanizmy manipulatorów o strukturze szeregowej są łatwe w opisie, znakomitą większość układów natomiast nie można opisać w formie jawnych zależności lub ich uzy-

¹ Wyjątkiem od tej reguły są układy z więzami biernymi i wtedy przez stopnie swobody należy rozumieć ruchliwość rzeczywistą.

skanie wymaga uciążliwych przekształceń złożonych wyrażeń algebraicznych. Z drugiej strony względnie łatwe jest sformułowanie układów równań algebraicznych nieliniowych wyrażających związki między parametrami kinematycznymi układów. Ich rozwiązanie, dające w wyniku informację o położeniach poszczególnych członów, a tym samym całego układu, można uzyskać za pomocą uniwersalnych programów, korzystając z procedur opartych na metodach numerycznych. Trudności przenoszą się na rozwiązywanie układów równań nieliniowych.

Techniki opisu konfiguracji układu kinematycznego są różne i różne środki są do tego stosowane. Metody graficzne mają nie tylko znaczenie dydaktyczne. W związku z powszechnym stosowaniem programów graficznych uzyskiwane dokładności metod graficznych nie ustępują metodom analitycznym czy numerycznym, a jednocześnie rysunek daje czytelne informacje istotne w projektowaniu. Dysponowanie na schemacie układu wektorem prędkości czy przyspieszenia lub wektorem siły oddziaływania między członami w parze kinematycznej jest ważną informacją dla konstruktora, znacznie czytelniejsza niż dwie liczby: moduł siły i kąt nachylenia wektora siły.

Metody oparte na rysunku mają niestety tę wadę, że są czasochłonne w razie potrzeby wielokrotnego powtórzenia obliczeń w celu porównania wielu rozwiązań, różnych w sensie geometrycznym. Należy wówczas stosować metody analityczne i numeryczne. Dostępne pakiety oprogramowania matematycznego wraz z rozwijanymi w ostatnich latach metodami analizy umożliwiają badanie dowolnych układów bez potrzeby sięgania po drogie, a często niedostępne oprogramowanie specjalistyczne. W przypadku profesjonalnych programów analizy ich poprawne i efektywne wykorzystanie wymaga znajomości metod, na jakich te programy bazują.

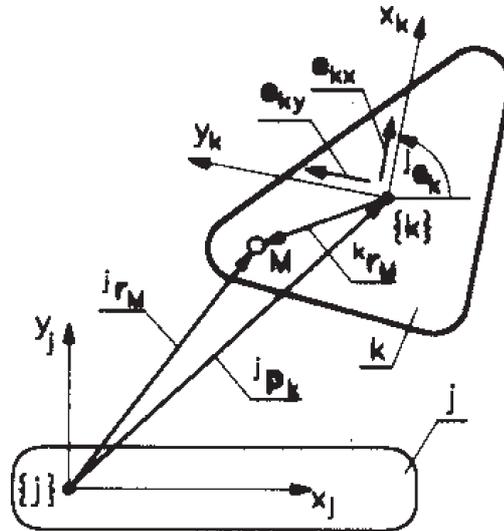
2.2. Względne położenie dwóch członów

2.2.1. Współrzędne absolutne – układy płaskie

Opis konfiguracji układu wieloczłonowego można rozpatrywać jako opis względnego położenia układów współrzędnych lokalnych związanych z poszczególnymi członami – członowi odniesienia (podstawie) przypisuje się tzw. układ globalny. Takie podejście do opisu układu kinematycznego, jakkolwiek skutkuje większą liczbą równań, znakomicie porządkuje i formalizuje modelowanie układów zarówno w zakresie kinematyki, jak i dynamiki.

Na rysunku 2.1 przedstawiono dwa człony j , k układu płaskiego, którym przypisano układy współrzędnych prostokątnych $\{j\}$ oraz $\{k\}$. Na członie k -tym obrano punkt M , którego położenie w układzie $\{k\}$ członu k opisuje wektor ${}^k\mathbf{r}_M$. Ten sam punkt M w układzie $\{j\}$ członu j jest opisany wektorem ${}^j\mathbf{r}_M$. Obydwa wektory opisujące położenie punktu M wraz z wektorem ${}^j\mathbf{p}_k$ opisującym położenie początku układu $\{k\}$ w układzie $\{j\}$ wiąże następujące równanie:

$${}^j\mathbf{r}_M = {}^j\mathbf{R}_k {}^k\mathbf{r}_M + {}^j\mathbf{p}_k \quad (2.1)$$



Rys. 2.1. Współrzędne absolutne układu płaskiego

Pierwszy składnik prawej strony równania (2.1) wynika z konieczności transformowania wektora ${}^k \mathbf{r}_M$ (jego składowe są wyrażone w układzie $\{k\}$) do układu $\{j\}$. W formie macierzowej równanie (2.1) przybiera postać:

$$\begin{bmatrix} {}^j x_M \\ {}^j y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos {}^j \theta_k & -\sin {}^j \theta_k \\ \sin {}^j \theta_k & \cos {}^j \theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^k x_M \\ {}^k y_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^j x_k \\ {}^j y_k \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Występująca w równaniu (2.1) macierz ${}^j \mathbf{R}_k$ w postaci:

$${}^j \mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} {}^j \mathbf{e}_{kx} & {}^j \mathbf{e}_{ky} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos {}^j \theta_k & -\sin {}^j \theta_k \\ \sin {}^j \theta_k & \cos {}^j \theta_k \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

jest tzw. macierzą rotacji, a jej elementy, zestawione w kolumny to wektory jednostkowe (wersory) \mathbf{e}_{kx} , \mathbf{e}_{ky} osi układu $\{k\}$ wyrażone w układzie $\{j\}$:

$${}^j \mathbf{e}_{kx} = \begin{bmatrix} \cos {}^j \theta_k \\ \sin {}^j \theta_k \end{bmatrix} \quad {}^j \mathbf{e}_{ky} = \begin{bmatrix} -\sin {}^j \theta_k \\ \cos {}^j \theta_k \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Należy tutaj odnotować ciekawą własność macierzy rotacji polegającą na tym, że jej odwrócenie jest tożsame transponowaniu:

$${}^j \mathbf{R}_k^{-1} = {}^k \mathbf{R}_j = {}^j \mathbf{R}_k^T = \begin{bmatrix} \cos {}^j \theta_k & \sin {}^j \theta_k \\ -\sin {}^j \theta_k & \cos {}^j \theta_k \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Prawdziwość zależności (2.5) można łatwo potwierdzić, pamiętając że iloczyn macierzy i jej odwrotności daje w wyniku macierz jednostkową:

$${}^j\mathbf{R}_k {}^j\mathbf{R}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \cos {}^j\Theta_k & -\sin {}^j\Theta_k \\ \sin {}^j\Theta_k & \cos {}^j\Theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos {}^j\Theta_k & \sin {}^j\Theta_k \\ -\sin {}^j\Theta_k & \cos {}^j\Theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (2.6)$$

Zależność (2.1) można w prosty sposób przekształcić tak, aby z prawej strony równania zamiast sumy wystąpił iloczyn, co upraszcza zapis układów wieloczłonowych. W tym celu równanie (2.1) należy uzupełnić neutralną równością jedynek, uzyskując w rezultacie:

$${}^j\mathbf{r}_M = {}^j\mathbf{A}_k {}^k\mathbf{r}_M \quad (2.7)$$

gdzie

$${}^j\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{R}_k & {}^j\mathbf{p}_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

a po rozpisaniu:

$$\begin{bmatrix} {}^j x_M \\ {}^j y_M \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos {}^j\Theta_k & -\sin {}^j\Theta_k & {}^j x_k \\ \sin {}^j\Theta_k & \cos {}^j\Theta_k & {}^j y_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^k x_M \\ {}^k y_M \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Jak widać z (2.9), wektory opisujące położenie punktu M w układzie współrzędnych mają teraz trzy składowe, w tym jedną neutralną jedynekę, macierz rotacji ${}^j\mathbf{R}_k$ natomiast wraz z wektorem pozycji ${}^j\mathbf{p}_k$ tworzą teraz macierz transformacji jednorodnej (homogenicznej) ${}^j\mathbf{A}_k$ o postaci:

$${}^j\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \cos {}^j\Theta_k & -\sin {}^j\Theta_k & {}^j x_k \\ \sin {}^j\Theta_k & \cos {}^j\Theta_k & {}^j y_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Elementy macierzy transformacji ${}^j\mathbf{A}_k$ są wyrażone trzema parametrami, które zebrane w wektor:

$${}^j\mathbf{q}_k = [{}^j\mathbf{p}_k^T \quad {}^j\Theta_k]^T = [{}^j x_k \quad {}^j y_k \quad {}^j\Theta_k]^T$$

są określane mianem współrzędnych absolutnych² [3], [5].

² Spotykane jest też określenie współrzędne uogólnione kartezjańskie [13], [26].

Podobnie jak w przypadku czystej rotacji istniała macierz rotacji odwrotnej (zależności (2.5), (2.6)), tak też w przypadku macierzy transformacji jednorodnej istnieje jej forma odwrotna. Jej postać można uzyskać wykorzystując dwa oczywiste spostrzeżenia:

- po odwróceniu podmacierz ${}^j\mathbf{R}_k$ macierzy ${}^j\mathbf{A}_k$ ulegnie prostej transpozycji,
- ponieważ po odwróceniu układ $\{j\}$ ma być wyrażony w układzie $\{k\}$, więc wektor pozycji ${}^j\mathbf{p}_k$ musi zmienić znak, a jego składowe należy teraz wyrazić w układzie $\{k\}$.

Prowadzi to, po wykorzystaniu (2.4) oraz (2.5), do następujących wyrażen:

$${}^k\mathbf{A}_j = {}^j\mathbf{A}_k^{-1} = \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{R}_k^T & -{}^j\mathbf{R}_k^T {}^j\mathbf{p}_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$${}^k\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{R}_k^T & -{}^j\mathbf{e}_{kx}^T {}^j\mathbf{p}_k \\ & -{}^j\mathbf{e}_{ky}^T {}^j\mathbf{p}_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Korzystając z omówionej formy zapisu, można łatwo określać względne położenia dowolnych członów oraz ich punktów, a na ich bazie tworzyć związki algebraiczne, wyrażające więzy wynikające z łączenia członów za pomocą par kinematycznych oraz definiować kinematyczne wymuszenia ruchu.

2.2.2. Współrzędne absolutne – układy przestrzenne

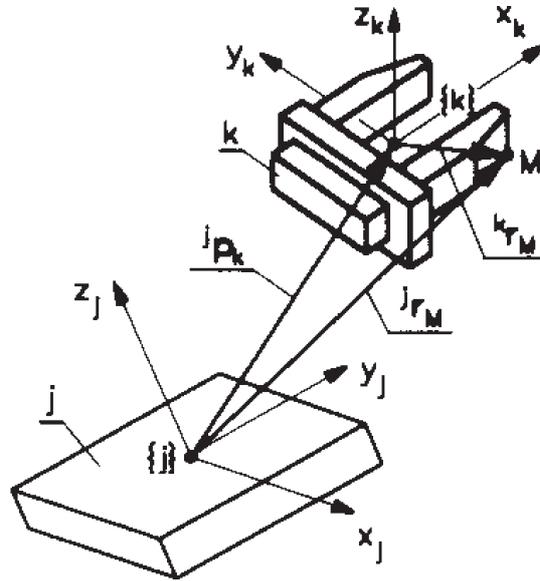
Podobnie jak w przypadku układów płaskich istnieją zależności określające transformowanie współrzędnych punktów członów układów przestrzennych. Na rysunku 2.2 pokazano dwa człony i przypisane im układy współrzędnych prostokątnych $\{j\}$ i $\{k\}$.

Analogicznie do układów płaskich mamy tym razem równanie:

$${}^j\mathbf{r}_M = {}^j\mathbf{R}_k {}^k\mathbf{r}_M + {}^j\mathbf{p}_k \quad (2.13)$$

Macierz rotacji ${}^j\mathbf{R}_k$ w przypadku układu przestrzennego ma wymiar 3×3 , a równanie (2.13) po rozpisaniu do formy macierzowej ma postać:

$$\begin{bmatrix} {}^j x_M \\ {}^j y_M \\ {}^j z_M \end{bmatrix} = {}^j\mathbf{R}_k \begin{bmatrix} {}^k x_M \\ {}^k y_M \\ {}^k z_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^j x_k \\ {}^j y_k \\ {}^j z_k \end{bmatrix} \quad (2.14)$$



Rys. 2.2. Współrzędne absolutne układu przestrzennego

Kolumny macierzy rotacji ${}^j\mathbf{R}_k$ to wektory jednostkowe (wersory) osi układu $\{k\}$ wyrażone w układzie $\{j\}$, a poszczególne elementy tych kolumn to inaczej rzuty wersorów osi układu $\{k\}$ na osie układu $\{j\}$. Ponieważ wersory z definicji mają moduły równe jedności, więc elementy kolumn są wprost kosinusami kierunkowymi [20]. Przykładowo składowe wersora osi x układu $\{k\}$ wyrażone w $\{j\}$ wynoszą:

$${}^j\mathbf{e}_{kx} = \begin{bmatrix} \cos(\angle(x_j, x_k)) \\ \cos(\angle(y_j, x_k)) \\ \cos(\angle(z_j, x_k)) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Jest więc

$${}^j\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{e}_{kx} & {}^j\mathbf{e}_{ky} & {}^j\mathbf{e}_{kz} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Macierz rotacji ${}^j\mathbf{R}_k$ dla układów przestrzennych, podobnie jak w układach płaskich (układy są także ortogonalne), ma prostą formę odwróconą – odwracanie jest tożsame z transponowaniem, a zatem

$${}^k\mathbf{R}_j = {}^j\mathbf{R}_k^{-1} = {}^j\mathbf{R}_k^T = \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{e}_{kx}^T \\ {}^j\mathbf{e}_{ky}^T \\ {}^j\mathbf{e}_{kz}^T \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Spośród dziewięciu elementów macierzy rotacji ${}^j\mathbf{R}_k$ tylko trzy są niezależne. Można się o tym przekonać na podstawie iloczynu:

$${}^k\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{R}_k = \mathbf{I} \Rightarrow \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{e}_{kx}^T \\ {}^j\mathbf{e}_{ky}^T \\ {}^j\mathbf{e}_{kz}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{e}_{kx} & {}^j\mathbf{e}_{ky} & {}^j\mathbf{e}_{kz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Po wykonaniu mnożenia i porównaniu elementów macierzy obu stron równania (2.18) uzyskuje się zależności:

$$\begin{aligned} & \underbrace{({}^j\mathbf{e}_{kx})^T ({}^j\mathbf{e}_{kx})}_{=1} & \underbrace{({}^j\mathbf{e}_{kx})^T ({}^j\mathbf{e}_{ky})}_{=0} & \underbrace{({}^j\mathbf{e}_{kx})^T ({}^j\mathbf{e}_{kz})}_{=0} \\ & \underbrace{({}^j\mathbf{e}_{ky})^T ({}^j\mathbf{e}_{kx})}_{=0} & \underbrace{({}^j\mathbf{e}_{ky})^T ({}^j\mathbf{e}_{ky})}_{=1} & \underbrace{({}^j\mathbf{e}_{ky})^T ({}^j\mathbf{e}_{kz})}_{=0} \\ & \underbrace{({}^j\mathbf{e}_{kz})^T ({}^j\mathbf{e}_{kx})}_{=0} & \underbrace{({}^j\mathbf{e}_{kz})^T ({}^j\mathbf{e}_{ky})}_{=0} & \underbrace{({}^j\mathbf{e}_{kz})^T ({}^j\mathbf{e}_{kz})}_{=1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

W równaniach (2.19) występuje trzykrotne powtórzenie (porównaj jednakowo podkreślone). Dziewięć elementów macierzy rotacji jest zatem powiązanych sześcioma równaniami, a to oznacza, że tylko trzy z nich są niezależne³. Oznacza to, że znajomość trzech elementów macierzy transformacji pozwala obliczyć pozostałe.

Podobnie jak w przypadku układu płaskiego transformacja jednorodna (homogeniczna) realizuje się według zależności:

$${}^j\mathbf{r}_M = {}^j\mathbf{A}_k {}^k\mathbf{r}_M \quad (2.20)$$

Po przedstawieniu w formie macierzowej jest to równanie

$$\begin{bmatrix} {}^jx_M \\ {}^jy_M \\ {}^jz_M \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & {}^j\mathbf{R}_k & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^kx_M \\ {}^ky_M \\ {}^kz_M \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Macierz transformacji jednorodnej, a więc uwzględniającej jednocześnie rotację i translację, ma postać:

$${}^j\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} & {}^j\mathbf{R}_k & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & {}^j\mathbf{e}_{kx} & {}^j\mathbf{e}_{ky} & {}^j\mathbf{e}_{kz} & {}^j\mathbf{p}_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

³ Potwierdza to powszechnie znaną prawdę, że orientację członu w przestrzeni wyznaczają trzy kąty.

Macierz transformacji odwrotnej uzyskuje się podobnie jak dla układu płaskiego:

$${}^k\mathbf{A}_j = {}^j\mathbf{A}_k^{-1} = \begin{bmatrix} & -{}^j\mathbf{e}_{kx}^T {}^j\mathbf{p}_k & & \\ & -{}^j\mathbf{e}_{ky}^T {}^j\mathbf{p}_k & & \\ {}^k\mathbf{R}_j & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Wartości elementów macierzy transformacji ${}^j\mathbf{A}_k$ są tym razem zależne od wielu parametrów, z których oczywiste są jedynie składowe wektora pozycji ${}^j\mathbf{p}_k$. Niestety nie istnieją w tym przypadku niezależne kąty, które mogą posłużyć do łatwego obliczania elementów podmacierzy odpowiedzialnej za rotację. Z tego względu macierz transformacji tworzy się w praktyce w sposób pośredni, np. przez składanie kolejnych transformacji elementarnych – translacji i rotacji wokół poszczególnych osi układu współrzędnych.

Przedstawiona postać macierzy transformacji ${}^j\mathbf{A}_k$ jest ogólna i łatwo z niej można wyprowadzić macierze transformacji elementarnych, a mianowicie:

- translację

$${}^j\mathbf{A}_k(\text{transl: } {}^j\mathbf{p}_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & {}^jx_k \\ 0 & 1 & 0 & {}^jy_k \\ 0 & 0 & 1 & {}^jz_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

- rotację wokół osi x

$${}^j\mathbf{A}_k(\text{rot: } x, \Theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta_x & -\sin \Theta_x & 0 \\ 0 & \sin \Theta_x & \cos \Theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

- rotację wokół osi y

$${}^j\mathbf{A}_k(\text{rot: } y, \Theta_y) = \begin{bmatrix} \cos \Theta_y & 0 & \sin \Theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \Theta_y & 0 & \cos \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

- rotację wokół osi z

$${}^j \mathbf{A}_k(\text{rot} : z, \Theta_z) = \begin{bmatrix} \cos \Theta_z & -\sin \Theta_z & 0 & 0 \\ \sin \Theta_z & \cos \Theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Należy zwrócić tutaj uwagę, że kąty transformacji elementarnych Θ_x , Θ_y , Θ_z są odmierzane zgodnie ze zwrotami poszczególnych osi.

Składanie transformacji elementarnych. Jak już wspomniano, ogólna postać macierzy transformacji ${}^j \mathbf{A}_k$ jest często trudna do zdefiniowania. Jednak można ją określić za pomocą macierzy transformacji elementarnych, względne położenie bowiem dwóch elementów (układów współrzędnych) wynika wprost z kolejnych przemieszczeń elementarnych – translacji i rotacji. Wynikowa macierz transformacji będzie wtedy iloczynem transformacji elementarnych.

PRZYKŁAD 2.1

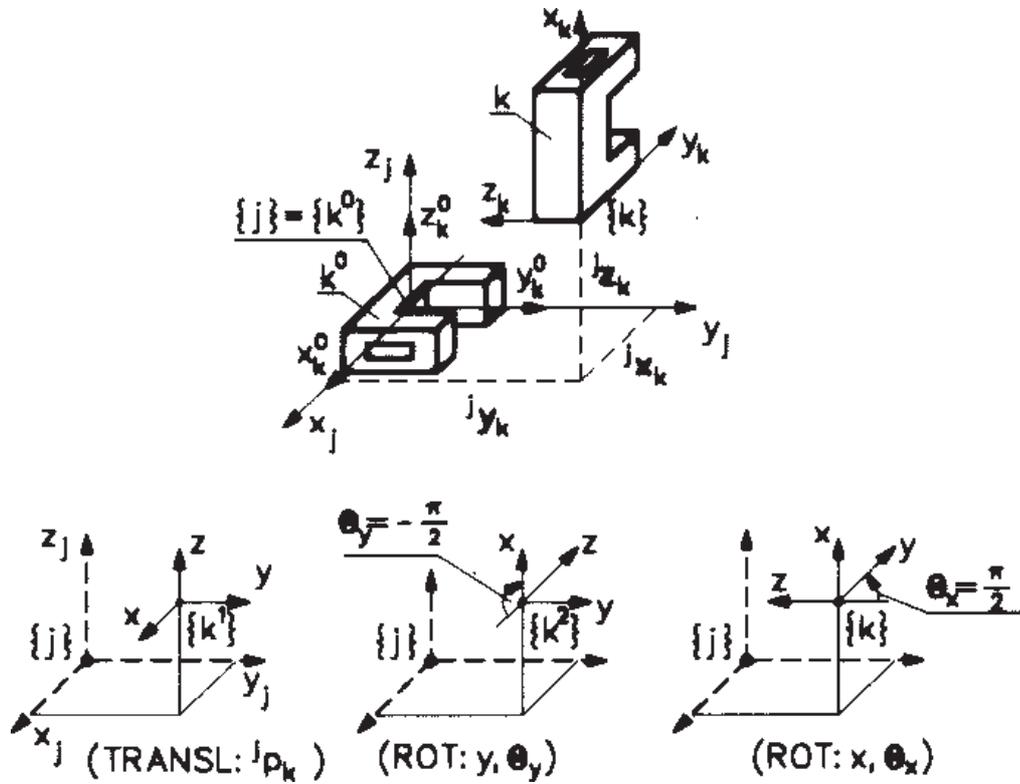
Składanie transformacji elementarnych prześledzimy na przykładzie (rys. 2.3) opisu przemieszczania elementu z położenia k^0 , kiedy osie związanego z nim układu $\{k^0\}$ współrzędnych prostokątnych pokrywają się z osiami układu odniesienia $\{j\}$ do nowego położenia k , uzyskanego w wyniku translacji i dwóch rotacji.

Kolejne przemieszczenia elementarne pokazane na rys. 2.3 składają się na przemieszczenie całkowite, które opisuje macierz:

$$\text{transf} ({}^j \mathbf{A}_k) = (\text{transl} : {}^j \mathbf{p}_k) \left(\text{rot} : y, \Theta_y = -\frac{\pi}{2} \right) \left(\text{rot} : x, \Theta_x = \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.28)$$

Macierz (2.28) łatwo można wyprowadzić przez podstawienie kolejnych macierzy elementarnych (zal. (2.24), (2.25), (2.26)), co daje w rezultacie:

$${}^j \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & {}^j x_k \\ 0 & 1 & 0 & {}^j y_k \\ 0 & 0 & 1 & {}^j z_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rys. 2.3. Składanie transformacji elementarnych

Podstawienie wartości funkcji trygonometrycznych i kolejne mnożenia macierzy

$${}^j\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & jx_k \\ 0 & 1 & 0 & jy_k \\ 0 & 0 & 1 & jz_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^j\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & jx_k \\ 0 & 1 & 0 & jy_k \\ 0 & 0 & 1 & jz_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dają w efekcie postać macierzy transformacji

$${}^j \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & {}^j x_k \\ 0 & 0 & -1 & {}^j y_k \\ 1 & 0 & 0 & {}^j z_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Poprawność (2.29) łatwo potwierdzić wprost z rys. 2.3, pamiętając, że trzy pierwsze elementy pierwszej kolumny to składowe wersora osi x układu $\{k\}$ (wektora jednostkowego na osi x_k) wyrażone składowymi w układzie $\{j\}$. Podobnie w drugiej kolumnie mamy składowe wersora osi y , a w trzeciej kolumnie składowe wersora osi z układu $\{k\}$ wyrażone składowymi w układzie $\{j\}$.

Zgodnie z własnościami iloczynu macierzy⁴ w przypadku składania transformacji elementarnych należy bezwzględnie przestrzegać kolejności poszczególnych przemieszczeń, które są dokonywane w sukcesywnie zmieniających się układach współrzędnych⁵. W omawianym przykładzie (rys. 2.3) mieliśmy:

- translację w układzie bazowym $\{j\}$,
- rotację w układzie przesuniętym $\{k^1\}$,
- rotację w układzie obróconym $\{k^2\}$.

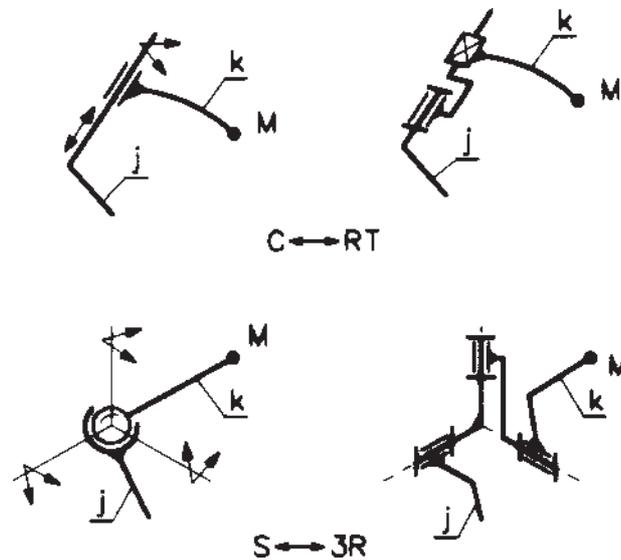
2.2.3. Współrzędne Denavita–Hartenberga – układy przestrzenne

Dużą popularność w opisie układów przestrzennych zdobyła sobie notacja DH⁶, szczególnie chętnie stosowana do opisu układów kinematycznych robotów (manipulatorów), chociaż jej pierwotna prezentacja dotyczyła układów kinematycznych zamkniętych. Dominująca grupa praktycznie wykorzystywanych układów jest zbudowana z członów tworzących przeważnie pary kinematyczne obrotowe R i postępowe T . W wypadku występowania par o większej liczbie stopni swobody można łatwo przekształcać je do węzłów kinematycznych zawierających wyłącznie pary obrotowe i postępowe. Dwa przykłady takich przekształceń, dla pary cylindrycznej C i przegubu sferycznego S , zaprezentowano na rys. 2.4. Już z tych dwóch przykładów widać, że zastąpienie dowolnej pary kinematycznej odpowiednią kombinacją par obrotowych i postępowych nie zmienia własności kinematycznych układu.

⁴ $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

⁵ Składanie transformacji nie jest przemienne, a więc uzyskanie poprawnej transformacji złożonej wymaga zachowania odpowiedniej kolejności transformacji elementarnych oraz dokonywania ich w kolejnych pośrednich układach współrzędnych.

⁶ Po raz pierwszy opublikowana w pracy: Denavit J., Hartenberg R.S.: *A Kinematic Notation for Lower Pairs Mechanisms Based on Matrices*. Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, 1955.



Rys. 2.4. Przekształcenie par C i S w węzły RT i 3R

W układach zawierających wyłącznie pary obrotowe R i postępowe T można poszczególnym członom przypisać lokalne układy współrzędnych kierując się dwiema zasadami:

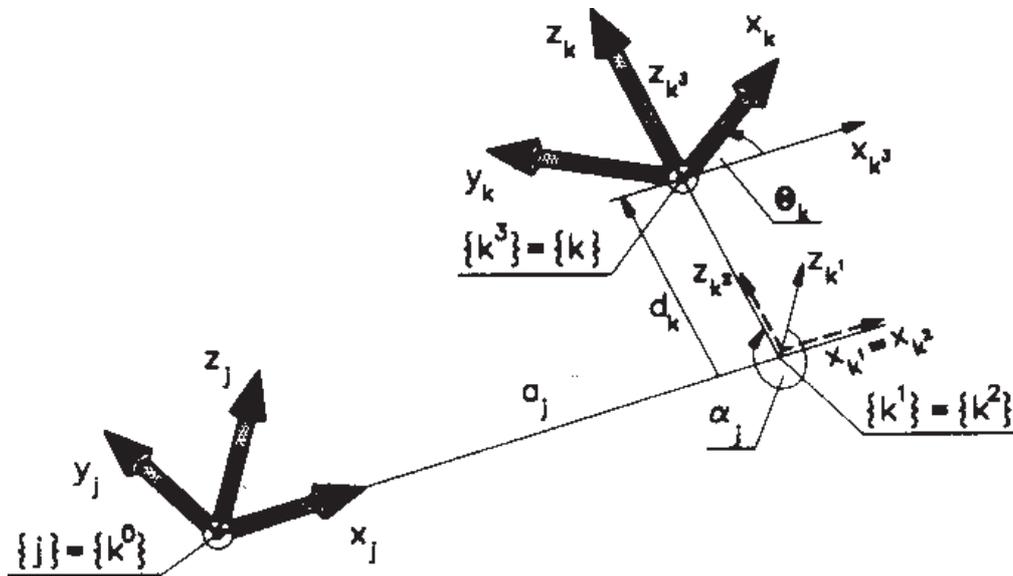
- osie z_j poszczególnych układów są zawsze poprowadzone wzdłuż osi par wyznaczających odpowiednio kierunek przesuwu (dla pary T) lub oś obrotu (dla pary R),
- osie x_j poszczególnych układów są zawsze poprowadzone w taki sposób, aby były prostopadłe do osi z_{j+1} układu kolejnego.

Zgodnie z tymi zasadami na rys. 2.5 pokazano dwa układy współrzędnych $\{j\}$ i $\{k\}$ z zaznaczeniem ich kolejnych przemieszczeń. Jak już pokazano macierz transformacji jA_k między układami $\{j\}$, $\{k\}$ może być uzyskana przez złożenie kolejnych transformacji elementarnych, tak aby przemieścić układ $\{k^0\}$ tożsamy z $\{j\}$ do położenia ostatecznego $\{k\}$ według następującej sekwencji:

$$\text{transf}({}^jA_k) = \text{transl}(x_j : a_j) \cdot \text{rot}(x_j : \alpha_j) \cdot \text{transl}(z_k : d_k) \cdot \text{rot}(z_k : \theta_k) \quad (2.30)$$

Jak nietrudno zauważyć całkowita transformacja będzie zależna od tylko czterech parametrów zaangażowanych w kolejne transformacje elementarne, które wystąpiły w zależności (2.30). Są nimi (rys. 2.5):

- odległość a_j między osiami z_j oraz z_k ,
- kąt α_j zwichrowania osi z_j oraz z_k ,
- odległość d_k początku układu $\{k\}$ od osi x_j mierzona wzdłuż osi z_k ,
- kąt θ_k orientacji osi x_k względem x_j obróconej względem osi z_k .



$$\{j\} = \{k^0\} \xrightarrow[x_j, a_j]{\text{TRANSL}} \{k^1\} \xrightarrow[x_{k^1}, \alpha_j]{\text{ROT}} \{k^2\} \xrightarrow[z_{k^2}, d_k]{\text{TRANSL}} \{k^3\} \xrightarrow[z_{k^3}, \theta_k]{\text{ROT}} \{k\}$$

Rys. 2.5. Układy współrzędnych usytuowane zgodnie z notacją DH

Po podstawieniu poszczególnych macierzy transformacji elementarnych, zgodnie z zależnościami (2.24), (2.25), (2.27) mamy:

$${}^j\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j & 0 \\ 0 & \sin \alpha_j & \cos \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k & 0 & 0 \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a po wykonaniu mnożenia macierzy ${}^j\mathbf{A}_k$ dla notacji DH uzyska następującą postać:

$${}^j\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \cos \Theta_k & -\sin \Theta_k & 0 & a_j \\ \cos \alpha_j \sin \Theta_k & \cos \alpha_j \cos \Theta_k & -\sin \alpha_j & -d_k \sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j \sin \Theta_k & \sin \alpha_j \cos \Theta_k & \cos \alpha_j & d_k \cos \alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Zwróćmy uwagę, że struktura macierzy DH (2.31) jest taka sama jak dla współrzędnych absolutnych. Ostatnia jej kolumna zawiera składowe wektora pozycji ${}^j\mathbf{p}_k$ układu $\{k\}$ w $\{j\}$, a pozostałe elementy to wyrażone pośrednio odpowiednie kosinusy kierunkowe. Kolumna pierwsza, a ściślej jej trzy pierwsze elementy, to składowe wersora osi x_k układu $\{k\}$ wyrażone w układzie $\{j\}$, podobnie kolumna druga i trzecia to kolejno składowe wersorów osi y_k i z_k w układzie $\{j\}$.

Macierz odwrotna powstaje zgodnie z zasadami, o których była mowa w przypadku macierzy transformacji (2.23). Wymagane jest wykonanie dwóch zabiegów, a mianowicie:

- odwrócenie podmacierzy ${}^j\mathbf{R}_k$ macierzy ${}^j\mathbf{A}_k$ odpowiedzialnej za rotację wymaga prostego transponowania,
- ponieważ układ $\{j\}$ ma być wyrażony w układzie $\{k\}$, więc wektor pozycji ${}^j\mathbf{p}_k$ musi zmienić zwrot, a jego składowe należy teraz wyrazić w układzie $\{k\}$, co wymaga jego transformowania, a więc wykonania mnożenia ${}^k\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{p}_k$.

Prowadzi to do następującej zależności:

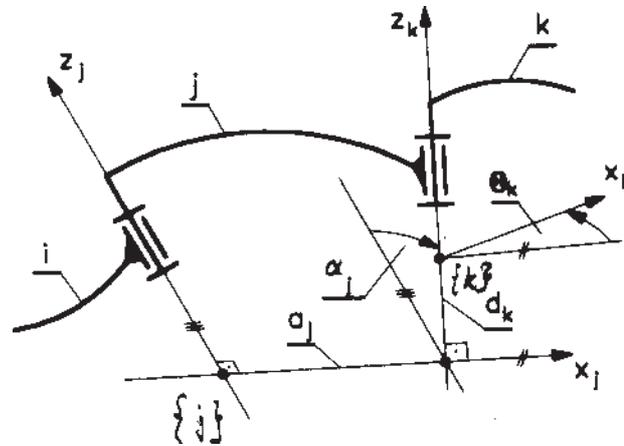
$${}^k\mathbf{A}_j = {}^j\mathbf{A}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_k & \cos \alpha_j \sin \Theta_k & \sin \alpha_j \sin \Theta_k & -a_j \cos \Theta_k \\ -\sin \Theta_k & \cos \alpha_j \cos \Theta_k & \sin \alpha_j \cos \Theta_k & a_j \sin \Theta_k \\ 0 & -\sin \alpha_j & \cos \alpha_j & -d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Cztery parametry, z których można obliczyć poszczególne elementy macierzy DH dogodnie jest zebrać w wektor:

$${}^j\mathbf{A}_k \equiv [a_j \quad \alpha_j \quad \Theta_k \quad d_k]^T \quad (2.33)$$

co porządkuje i ułatwia opis układów wieloczłonowych.

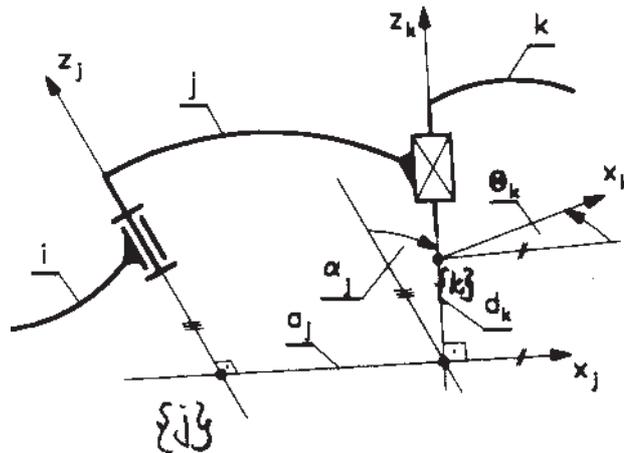
Dysponując macierzą transformacji zgodną z założeniami DH, przeanalizujemy teraz znaczenie geometryczne i kinematyczne poszczególnych parametrów – składowych wektora (2.33). W tym celu członom j, k fragmentu układu kinematycznego przypisujemy układy lokalne $\{j\}, \{k\}$. Na rysunku 2.6 pokazano przypadek, kiedy człony j, k



Rys. 2.6. Układy współrzędnych dla notacji DH – para obrotowa

tworzą parę obrotową, na rys. 2.7 parę postępową. Zgodnie z regułą osie z_j i z_k są poprowadzone wzdłuż osi par kinematycznych, natomiast oś x_j jest prostopadła do osi z_k . Jak nietrudno zauważyć w obu przypadkach (rys. 2.6, 2.7) człon j w sensie geometrycznym może być rozpatrywany jako dwie proste zwichrowane, których odległość (mierzona wzdłuż prostopadłej do tych prostych) ma wartość stałą i jest pierwszym elementem a_j wektora (2.33). Kąt zwichrowania α_j tych osi jest kolejnym parametrem w (2.33) i także ma wartość stałą. Dwa pozostałe parametry należy rozpatrywać oddzielnie dla pary obrotowej i postępowej.

W przypadku pary obrotowej (rys. 2.6) kąt θ_k jest zmienny i wyraża przemieszczenie kątowe w tej parze. Dokładniej kąt θ_k opisuje obrót układu $\{k\}$, związanego



Rys. 2.7. Układy współrzędnych dla notacji DH – para postępowowa

z członem k , precyzyjnie osi x_k względem osi x_j wokół osi z_k , a pomiar kąta Θ_k następuje zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej. Brak przemieszczenia członu k wzdłuż osi z_k wskazuje jednoznacznie, że czwarty parametr zależności (2.33) ma w przypadku pary obrotowej wartość stałą ($d_k = \text{const}$).

W przypadku pary postępowej (rys. 2.7) kąt Θ_k ma wartość stałą, ponieważ konstrukcja tej pary nie umożliwia ruchu obrotowego względem osi z_k . Natomiast możliwe jest tutaj przemieszczenie liniowe członu k względem j wzdłuż osi z_k . Odległość d_k mierzona wzdłuż osi z_k – między osiami x_j i x_k – wyraża przemieszczenie liniowe w parze postępowej. Również tutaj istotny jest znak tego przemieszczenia, dodatni znak d_k oznacza, że od osi x_j do osi x_k przemieszczamy się zgodnie ze zwrotem osi z_k .

2.3. Wyznaczanie konfiguracji układów płaskich

2.3.1. Rozwiązanie graficzno-analityczne

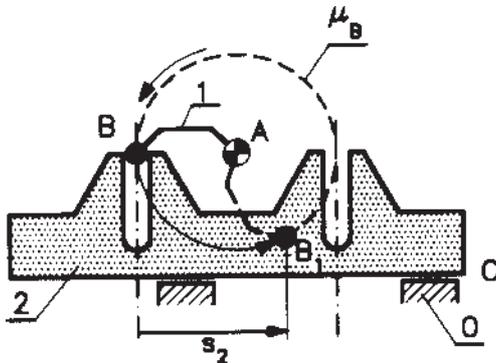
2.3.1.1. Metoda bezpośrednia

Bezpośrednia metoda geometryczna opisu konfiguracji układu kinematycznego stanowi w istocie zapis analityczny kolejnych etapów metody wykreślnej, która polega na znajdowaniu położenia charakterystycznych punktów członów. Położenia tych punktów poszukuje się na ich trajektoriach wynikających z więzów (długości, kątów) narzuconych przez poszczególne człony i pary kinematyczne. Należy podkreślić, że obecnie, gdy konstruktor dysponuje komputerowymi systemami graficznymi, uzyskiwane dokładności metod graficznych nie ustępują metodom analitycznym.

Można z pełną odpowiedzialnością stwierdzić, że wiele zalet rozwiązania graficznego często skłania do ich wykorzystywania w praktyce. Przede wszystkim otrzymany schemat jest najlepszym nośnikiem informacji o własnościach układu kinematycznego związanych z jego konfiguracją. Zasadniczą niedogodnością metod graficznych jest brak możliwości szybkiego uzyskiwania wyników przy jakichkolwiek zmianach wymiarów. Metoda ta może być zatem polecana do analiz jednostkowych oraz, co zostanie uwypuklone w dalszej części, jako pierwsze rozwiązanie przydatne w metodach numerycznych. Dalej przedstawiono przykłady analizy położenia, które wskazują na metodę postępowania.

PRZYKŁAD 2.2

Jako pierwszy rozpatrzmy prosty układ jarmowy (rys. 2.8), w którym człon napędzający 1 obraca się wokół punktu A , w wyniku czego sworzeń B wchodzi okresowo w ruchowe połączenie z członem napędzanym 2, przemieszczając się w odpowiednio ukształtowanej szczelinie. Jak widać z rysunku 2.8 przejście punktu B po trajektorii μ_B



Rys. 2.8. Mechanizm przystankowy – rysowanie położenia

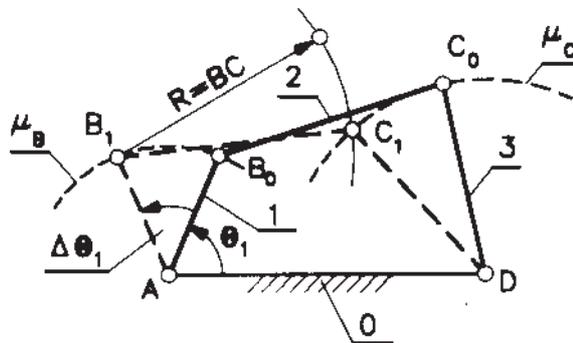
z położenia B do B_1 wywoła przemieszczenie członu 2 o skok s_2 . Zwróćmy uwagę, że po wyjściu sworznia B ze szczeliny członu 2, ten ostatni będzie pozostawał w spoczynku. Układy tego typu noszą miano mechanizmów przystankowych – transformują ciągły ruch członu czynnego na ruch przystankowy członu biernego. Sformułowanie zależności analitycznej wiążącej kąt obrotu członu 1 z przesuwarem członu 2 nie nastęrcza kłopotów.

PRZYKŁAD 2.3

Na rysunku 2.9 przedstawiono czworobok przegubowy w dwóch położeniach z zaznaczeniem konstrukcji graficznej znajdowania tych konfiguracji. Niezbędne czynności graficzne wynikają wprost z cech tego układu. Jest oczywiste, że trajektorią μ_B punktu B jest okrąg, natomiast punktu C łuk μ_C okręgu, co w połączeniu ze stałą długością członu BC umożliwia zakreślenie z punktu B_1 łuku promieniem $R = BC$, ustalając położenie punktu C_1 . Dowolna zmiana wartości kąta θ_1 jednoznacznie ustala położenie punktu B , a to skutkuje zmianą konfiguracji czworoboku.

Sposób postępowania w metodzie geometrycznej omówiony na przykładzie czworoboku przegubowego (rys. 2.9) może stanowić podstawę do wyznaczenia zależności umożliwiających ściśle określanie zmiennych konfiguracyjnych, a zadanie sformułowane jest następująco:

Znaleźć konfigurację układu (rys. 2.10) dla zadanego położenia członu napędzającego AB (kąt θ_1), co w istocie oznacza, po przyjęciu układu odniesienia x_0y_0

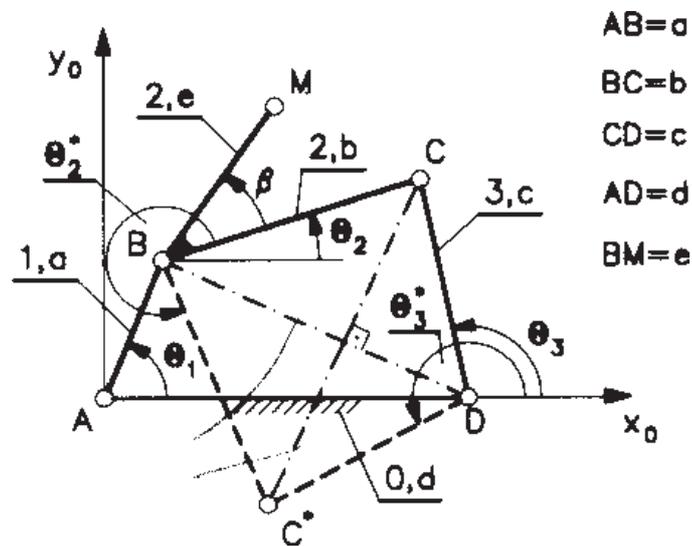


Rys. 2.9. Czworobok przegubowy – rysowanie położenia

związanego z podstawą AD , konieczność zdefiniowania zależności wyrażających orientację członów 2 i 3 (kąty θ_2 i θ_3) oraz położenie punktu M (współrzędne x_M i y_M).

Znane są wymiary członów (rys. 2.10), a zadanie polega na wyprowadzeniu zależności:

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta_2(a, b, c, d, \theta_1), & \theta_3 &= \theta_3(a, b, c, d, \theta_1) \\ x_M &= x_M(a, b, c, d, e, \beta, \theta_1), & y_M &= y_M(a, b, c, d, e, \beta, \theta_1)\end{aligned}$$



Rys. 2.10. Czworobok przegubowy – oznaczenia wymiarów i zmiennych

Po przyjęciu układu odniesienia x_0y_0 (oś odciętych przyjęto wzdłuż wymiaru d podstawy AD) wyznacza się współrzędne punktu B :

$$x_B = a \cos \theta_1 \quad (2.34)$$

$$y_B = a \sin \theta_1 \quad (2.35)$$

Gdy są już umiejscowione punkty B i D , położenie punktu C określa się graficznie, kreśląc do przecięcia dwa okręgi (rys. 2.9) o promieniach b i c – pierwszy z punktu B , drugi z D . Odpowiada to następującym równaniom:

$$b^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \quad (2.36)$$

$$c^2 = (x_C - d)^2 + y_C^2 \quad (2.37)$$

Dalsze postępowanie polega już tylko na wykonywaniu stosownych przekształceń. Po wykonaniu potęgowania prawych stron równań (2.36) i (2.37), po uwzględnieniu (2.34) i (2.35), ich zsumowanie prowadzi do zależności:

$$x_C = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2(x_B - d)} - \frac{2y_B y_C}{2(x_B - d)} = C_1 - \frac{2y_B y_C}{2(x_B - d)} \quad (2.38)$$

Po podstawieniu (2.38) do (2.37) otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$y_C^2 + \left(C_1 - \frac{y_B y_C}{x_B - d} - d \right)^2 - c^2 = 0 \quad (2.39)$$

z którego można wyznaczyć dwie wartości współrzędnej y_C :

$$y_C = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4pq}}{2p} \quad (2.40)$$

gdzie

$$p = \frac{y_B^2}{(x_B - d)^2} + 1, \quad q = (d - C_1)^2 - c^2, \quad s = \frac{2y_B(d - C_1)}{x_B - d}$$

Dwa rozwiązania równania (2.40) wskazują jednoznacznie na dwie możliwe konfiguracje układu – punkty C i C^* oraz odpowiednio kąty Θ_2 i Θ_3 oraz Θ_2^* i Θ_3^* . Dysponując współzrzednymi punktu C (zal. (2.38), (2.40)), wyznaczamy wartości kątów opisujących orientację członów 2 i 3 z zależności:

$$\Theta_2 = \arctg\left(\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}\right) \quad (2.41)$$

$$\Theta_3 = \arctg\left(\frac{y_C}{x_C - d}\right) \quad (2.42)$$

Wyznaczenie współzrzednych punktu M nie stanowi już żadnego kłopotu:

$$x_M = a \cos \Theta_1 + e \cos(\Theta_2 + \beta) \quad (2.43)$$

$$y_M = a \sin \Theta_1 + e \sin(\Theta_2 + \beta) \quad (2.44)$$

Dysponowanie analitycznym opisem położenia układu kinematycznego w postaci funkcji jawnych jest korzystne z wielu względów. Jest to przede wszystkim punkt wyjścia do kolejnych analiz, nie tylko kinematycznych. Z metod analitycznych otrzymuje się wyniki dokładne, a wykorzystanie najprostszego środowiska obliczeń umożliwia wielokrotną analizę dla różnych wariantów wymiarowych.

2.3.1.2. Metoda pośrednia – modyfikacji

W poprzednim układzie (przykład 2.3) graficzne określenie położenia sprowadzało się do prostych operacji kreślenia łuków. W innych przypadkach konieczne będzie wykreślanie stycznych do okręgów, prostych równoległych itp. prostych operacji graficznych. Istnieje wiele układów kinematycznych, dla których rozwiązanie zadania znalezienia konfiguracji jest niemożliwe do wykonania metodą bezpośrednią wykorzystaną w poprzednim układzie. Na ogół w takich przypadkach konieczne są specjalne zabiegi wydzielania części układu, wspomagające wyznaczanie trajektorii itp. Istotę takiego podejścia ilustruje przykład.

PRZYKŁAD 2.4

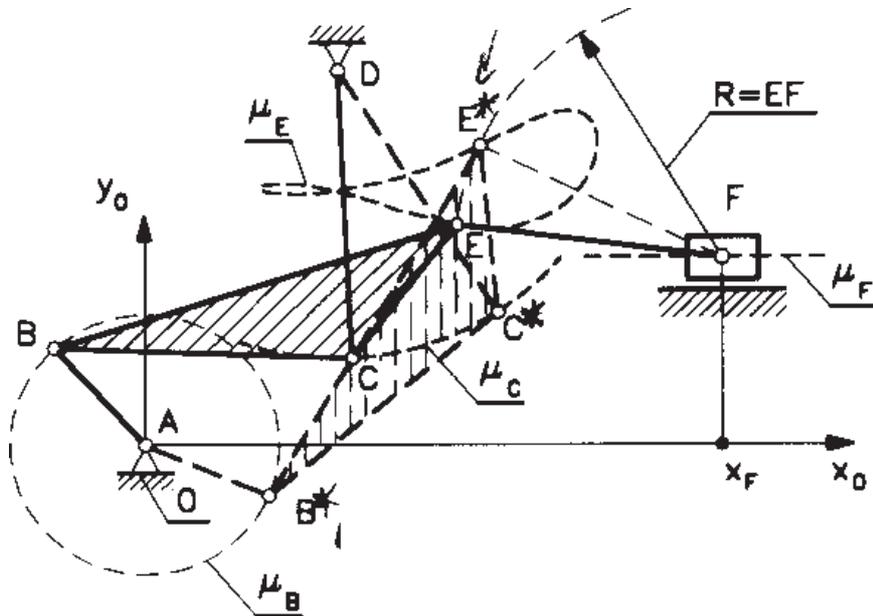
Przykład mechanizmu, dla którego określenie konfiguracji wymaga szczególnych zabiegów pokazano na rys. 2.11. Jest to układ o pięciu członach ruchomych, w którym można wyróżnić czworobok przegubowy $ABCD$ oraz dołączony do niego dwuczłon EF w postaci łącznika i suwaka. Rozpatrzmy oddzielnie dwa przypadki różniące się miejscem przyłożenia napędu. Członem czynnym będzie w jednym przypadku człon AB , w drugim przypadku suwak.

Jeżeli członem czynnym jest człon AB , to konfiguracja układu jest łatwa do określenia, z rys. 2.11 widać, że:

- punkt B porusza się po okręgu μ_B i jego położenie jest znane w przypadku zdefiniowanego ruchu członu AB – środkiem okręgu jest punkt A ,
- trajektoria μ_C punktu C też jest okręgiem, którego środkiem jest punkt D ,
- trajektoria μ_F punktu F jest odcinkiem,
- odległości pomiędzy punktami B, C oraz E, F są ściśle określone.

Podane spostrzeżenia dla znanego położenia punktu B umożliwiają łatwe wyznaczenie kolejno punktów C, E , a następnie punktu F . Wymagane jest wykonanie prostych operacji graficznych z wykorzystaniem ołówka, cyrkla i linijki. Wielokrotne powtórzenie tych operacji pozwala znaleźć m.in. trajektorię μ_E , jak widać krzywą zamkniętą o złożonym kształcie.

Przypadek drugi, kiedy ruch układu jest wymuszany ruchem suwaka, okazuje się bardziej kłopotliwy. Jak widać poprowadzenie z punktu F łuku promieniem $R = EF$ umożliwi rozwiązanie, jeżeli wcześniej znana będzie trajektoria μ_E . Jej wykreślenie wymaga uprzedniego rozłączenia układu w parze kinematycznej E i rysowania kolejnych położenia czworoboku $ABCD$, co nie sprawia żadnego kłopotu. Z rysunku 2.11 widać też, że nawet dysponując trajektorią μ_E pojawia się następny problem. Łuk o promieniu



Rys. 2.11. Układ sześciocłonowy – rysowanie położenia

$R = EF$ i środkiem w F przecina tor μ_E w dwóch punktach E i E^* , co odpowiada dwóm konfiguracjom czworoboku $ABCD$ i AB^*C^*D . Wybór właściwej wymaga więc znajomości „historii ruchu” – informacji o położeniach wcześniejszych.

W zadaniu tym do określenia konfiguracji zastosowano metodę pośrednią, polegającą na wydzieleniu części układu i rozpatrzeniu zadania prostszego (czworoboku $ABCD$). Takie sposoby są często stosowane do znajdowania konfiguracji i szerzej do rozwiązywania zadań kinematyki i noszą nazwę metody modyfikacji [19].

Trudności w graficznym znajdowaniu konfiguracji przekładają się na metody analityczne. W wielu przypadkach może to oznaczać, że znalezienie rozwiązania jawnego jest bardzo kłopotliwe, często niemożliwe. W rozpatrywanym przypadku, gdy znane jest położenie suwaka, znane są współrzędne punktu $F(x_F, y_F)$, rozwiązanie analityczne polega na znalezieniu jawnych wyrażeń na położenie punktu E , co jak w metodzie graficznej wymaga uprzedniego zajęcia się czworobokiem $ABCD$. Wcześniejsze rozważania dotyczące czworoboku (rys. 2.10) wykazują jednoznacznie złożoność wyrażeń określających współrzędne punktu E , a kłopoty potęguje istnienie wielu rozwiązań (dwóch konfiguracji czworoboku $ABCD$ dla założonej wartości θ_1). Załóżmy znajomość tych wyrażeń w postaci:

$$x_E = x_E(\theta_1), \quad y_E = y_E(\theta_1) \quad (2.45)$$

Wtedy należy już tylko rozwiązać następujące równanie:

$$F = (x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 - l_{EF}^2 = 0 \quad (2.46)$$

Złożoność i uciążliwość wymaganych działań algebraicznych zmierzających do znalezienia wyrażenia określającego kąt Θ_1 nie musi już być wykazywana. Można też posłużyć się metodami numerycznymi. Wtedy zadanie może polegać na znalezieniu właściwego pierwiastka funkcji F (2.46), w której występuje tylko jedna zmienna Θ_1 .

2.3.2. Metody analityczne

2.3.2.1. Metoda wektorowa

W metodzie wektorowej opis analityczny uzyskuje się z zapisu wieloboków wektorów utworzonych z odpowiednich wymiarów liniowych członów. Liczba równań wektorowych – zwykle sumowanie wektorów – odpowiada liczbie zamkniętych konturów układu kinematycznego. Po przyjęciu globalnego układu współrzędnych prostokątnych i przypisaniu kolejnym wektorom kątów ich zorientowania względem osi odciętych, równania sumy wektorów rzutuje się na osie układu współrzędnych, czego wynikiem jest układ równań algebraicznych. Tak otrzymany układ równań należy już tylko odpowiednio przekształcać aż do uzyskania wyrażen na zmienne wielkości liniowe i kątowe.

PRZYKŁAD 2.5

Sposób postępowania w metodzie wektorowej przedstawiono na przykładzie czworoboku przegubowego (rys. 2.12), a zadanie sformułowane jest podobnie jak w metodzie geometrycznej:

Znaleźć konfigurację układu dla zadanego położenia członu napędzającego AB (kąt Θ_1), co w istocie oznacza, po przyjęciu układu odniesienia x_0y_0 związanego z podstawą AD konieczność zdefiniowania zależności wyrażających orientację członów 2 i 3 (kąty Θ_2 i Θ_3) oraz położenie punktu M (współrzędne x_M i y_M).

Znane są wymiary członów (rys. 2.12), a zadanie polega na wyprowadzeniu zależności:

$$\Theta_2 = \Theta_2(a, b, c, d, \Theta_1)$$

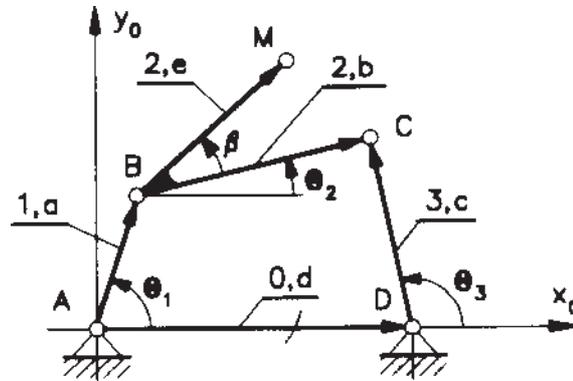
$$\Theta_3 = \Theta_3(a, b, c, d, \Theta_1)$$

$$x_M = x_M(a, b, c, d, e, \beta, \Theta_1)$$

$$y_M = y_M(a, b, c, d, e, \beta, \Theta_1)$$

W układzie czworoboku (rys. 2.12) występuje tylko jeden kontur $ABCD$, który zastąpiony stosownymi wektorami daje jedno równanie wektorowe o postaci:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d} - \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (2.47)$$



Rys. 2.12. Czworobok przegubowy – współrzędne „wektorowe”

Wektory rzutowane na osie x_0 i y_0 dają układ równań:

$$\begin{cases} a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2 - d - c \cos \theta_3 = 0 \\ a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2 - c \sin \theta_3 = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

W zależnościach (2.48) występują dwie niewiadome θ_2 i θ_3 , których wyznaczenie wymaga rutynowych przekształceń. W pierwszej kolejności znajdujemy wyrażenie określające kąt θ_3 . W równaniach (2.48) wyrazy z kątem θ_2 grupujemy po ich lewych stronach i podnosimy obustronnie do kwadratu:

$$\begin{cases} |b \cos \theta_2 = -a \cos \theta_1 + d + c \cos \theta_3|^2 \\ |b \sin \theta_2 = -a \sin \theta_1 + c \sin \theta_3|^2 \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} b^2 \cos^2 \theta_2 = (-a \cos \theta_1 + d + c \cos \theta_3)^2 \\ b^2 \sin^2 \theta_2 = (-a \sin \theta_1 + c \sin \theta_3)^2 \end{cases} \quad (2.49)$$

a po dodaniu obu równań (2.49) stronami mamy:

$$b^2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) = (-a \cos \theta_1 + d + c \cos \theta_3)^2 + (-a \sin \theta_1 + c \sin \theta_3)^2 \quad (2.50)$$

Wykonanie potęgowania, wykorzystanie jedynki trygonometrycznej oraz pogrupowanie składników daje:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 + d^2 - 2ad \cos \theta_1 + 2cd \cos \theta_3 \\ &\quad - 2ac(\sin \theta_1 \sin \theta_3 + \cos \theta_1 \cos \theta_3) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Uproszczenie równania (2.51) polega na pomnożeniu wszystkich składników przez $1/2ac$ oraz wykorzystaniu wyrażenia:

$$(\sin \Theta_1 \sin \Theta_3 + \cos \Theta_1 \cos \Theta_3) = \cos(\Theta_1 - \Theta_3)$$

Wprowadzenie stałych:

$$k_1 = \frac{d}{a}, \quad k_2 = \frac{d}{c}, \quad k_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

prowadzi do zależności:

$$k_1 \cos \Theta_3 - k_2 \cos \Theta_1 + k_3 = \cos(\Theta_1 - \Theta_3) \quad (2.52)$$

określanej w literaturze powszechnie jako równanie Freudensteina, szczególnie użyteczne w syntezie mechanizmu czworoboku przegubowego. W analizie dogodniej jest posłużyć się równaniem o postaci:

$$k_1 \cos \Theta_3 - k_2 \cos \Theta_1 + k_3 = \sin \Theta_1 \sin \Theta_3 + \cos \Theta_1 \cos \Theta_3 \quad (2.53)$$

a w celu jego rozwikłania wykorzystać podstawienie:

$$\sin \Theta_i = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos \Theta_i = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = \operatorname{tg}\left(\frac{\Theta_i}{2}\right) \quad (2.54)$$

Kolejne przekształcenia prowadzą wtedy do równania kwadratowego:

$$C_1 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\Theta_3}{2}\right) + C_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\Theta_3}{2}\right) + C_3 = 0 \quad (2.55)$$

gdzie: $C_1 = \cos \Theta_1 - k_1 - k_2 \cos \Theta_1 + k_3$,
 $C_2 = -2 \sin \Theta_1$,
 $C_3 = k_1 - (k_2 + 1) \cos \Theta_1$.

Dwa pierwiastki równania (2.55) to:

$$\Theta_3 = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{-C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - 4C_1 C_3}}{2C_1}\right) \quad (2.56)$$

Identyczna droga prowadzi do wyprowadzenia zależności określającej kąt Θ_2 . Tym razem z równań (2.48) należy wyeliminować kąt Θ_3 . Przeniesienie składników z kątem Θ_3 na prawą stronę równań i ich podniesienie do kwadratu:

$$\begin{cases} a \cos \Theta_1 + b \cos \Theta_2 - d = c \cos \Theta_3 \\ a \sin \Theta_1 + b \sin \Theta_2 = c \sin \Theta_3 \end{cases}^2$$

daje wyrażenie:

$$(a \cos \Theta_1 + b \cos \Theta_2 - d)^2 + (a \sin \Theta_1 + b \sin \Theta_2)^2 = c^2$$

które już nie zawiera Θ_3 . Wykonując kolejne działania i stosowne przekształcenia, otrzymuje się równanie:

$$k_1 \cos \Theta_2 + k_4 \cos \Theta_1 + k_5 = \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \quad (2.57)$$

w którym dokonano podstawień:

$$k_1 = \frac{d}{a}, \quad k_4 = \frac{d}{b}, \quad k_5 = \frac{c^2 - d^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

Kolejne podstawienie wyrażeń (2.54) do (2.57) prowadzi do równania kwadratowego w postaci:

$$C_4 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\Theta_2}{2} \right) + C_5 \operatorname{tg} \left(\frac{\Theta_2}{2} \right) + C_6 = 0 \quad (2.58)$$

w którym: $C_4 = \cos \Theta_1 - k_1 - k_4 \cos \Theta_1 + k_5$,
 $C_5 = -2 \sin \Theta_1$,
 $C_6 = k_1 + (k_4 - 1) \cos \Theta_1 + k_5$.

Ostatecznie, podobnie jak w przypadku wyrażenia określającego kąt Θ_3 , otrzymano relację dającą dwa rozwiązania:

$$\Theta_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{-C_5 \pm \sqrt{C_5^2 - 4C_4 C_6}}{2C_4} \right) \quad (2.59)$$

Wyznaczenie współrzędnych punktu M wymaga już tylko rzutowania oczywistego równania wektorowego:

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{a} + \mathbf{e}$$

co daje ostatecznie:

$$x_M = a \cos \Theta_1 + e \cos(\Theta_2 + \beta)$$

$$y_M = a \sin \Theta_1 + e \sin(\Theta_2 + \beta)$$

2.3.2.2. Metoda liczb zespolonych

W metodzie tej również wykorzystuje się możliwość zastąpienia układu kinematycznego odpowiednimi łańcuchami wektorów. Wektory zapisuje się za pomocą liczb zespolonych, a otrzymane równania po odpowiednich przekształceniach dają w rezultacie równania algebraiczne. Nie trzeba dowodzić, że takie podejście w efekcie końcowym daje wyniki podobne do uzyskiwanych w metodzie wektorowej.

Jak wiadomo liczba zespolona \mathbf{z} reprezentuje wektor o składowych x, y :

$$\mathbf{z} = x + iy \quad (2.60)$$

a zapisana w notacji geometrycznej (Eulera) ma postać:

$$\mathbf{z} = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (2.61)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$.

Moduł r wektora oblicza się z zależności:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

natomiast jego kierunek opisany jest kątem mierzonym względem osi x i wynosi:

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

W analizie za pomocą liczb zespolonych potrzebne jest jeszcze pojęcie liczby zespolonej sprzężonej, którą definiuje się według zależności:

$$\tilde{\mathbf{z}} = re^{-i\theta} = r(\cos \theta - i \sin \theta) \quad (2.62)$$

oraz elementarne działania w postaci:

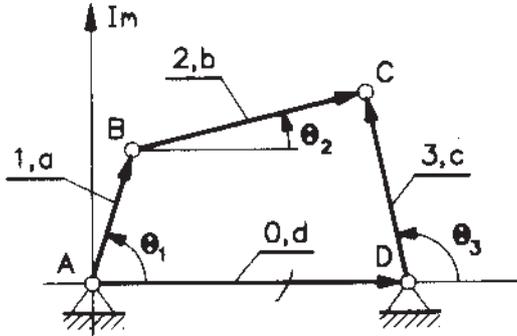
$$\mathbf{z}\tilde{\mathbf{z}} = re^{i\theta} re^{-i\theta} = r^2 \quad (2.63)$$

oraz

$$\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{z}} = re^{i\theta} + re^{-i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) + r(\cos \theta - i \sin \theta) = 2r \cos \theta \quad (2.64)$$

PRZYKŁAD 2.6

Rozpatrzmy czworobok przedstawiony na rysunku 2.13, którego członów ponumerowano podobnie jak w układzie analizowanym metodą wektorową. Identyczne są też oznaczenia długości członów i kąty ich orientacji.



Rys. 2.13. Czworobok przegubowy – współrzędne „zespólone”

Punktem wyjścia jest równanie wektorowe:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d} \quad (2.65)$$

W zapisie za pomocą liczb zespolonych równanie (2.65) ma postać:

$$ae^{i\theta_1} + be^{i\theta_2} = de^{i\theta_0} + ce^{i\theta_3} \quad (2.66)$$

Korzystając z (2.61) po rozdzieleniu części rzeczywistej i urojonej mamy układ równań:

$$\begin{aligned} a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2 &= d + c \cos \theta_3 \\ a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2 &= c \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (2.67)$$

Zastosujemy teraz liczby zespolone sprzężone:

$$\tilde{\mathbf{a}} = ae^{-i\theta_1}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = be^{-i\theta_2}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = ce^{-i\theta_3} \quad (2.68)$$

W celu eliminacji kąta θ_2 trzeba z prawej strony równania (2.65) pozostawić liczbę o kącie orientacji θ_2 , a więc \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} - \mathbf{c} - \mathbf{d} = -\mathbf{b} \quad (2.69)$$

Liczby zespolone sprzężone zestawione w równanie identyczne z (2.69) dają również prawdziwą zależność:

$$\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{c}} - \tilde{\mathbf{d}} = -\tilde{\mathbf{b}} \quad (2.70)$$

Po wymnożeniu stronami równań (2.69) i (2.70) otrzymujemy:

$$(\mathbf{a} - \mathbf{c} - \mathbf{d})(\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{c}} - \tilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{b}\tilde{\mathbf{b}}$$

i kolejno

$$\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{c}\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{d}\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{c}\tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{d}\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{a}\tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{c}\tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{d}\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{b}\tilde{\mathbf{b}}$$

Po podstawieniu (2.63), (2.68) i pogrupowaniu mamy:

$$a^2 + c^2 + d^2 - (dae^{i\theta_1} + dae^{-i\theta_1}) + (cde^{-i\theta_3} + cde^{i\theta_3}) - (ace^{-i(\theta_1-\theta_3)} + ace^{i(\theta_1-\theta_3)}) = b^2$$

a po wykorzystaniu (2.64) uzyskujemy relację:

$$a^2 + c^2 + d^2 - 2ad \cos \theta_1 + 2cd \cos \theta_3 - 2ac \cos(\theta_3 - \theta_1) = b^2 \quad (2.71)$$

Po przekształceniu równania (2.65), tak aby wektor \mathbf{c} znalazł się po prawej stronie, jest możliwe wyeliminowanie kąta Θ_3 . Otrzymamy wtedy:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d} = \mathbf{c} \quad (2.72)$$

i w formie liczb sprzężonych

$$\tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{c}} \quad (2.73)$$

Po wymnożeniu stronami (2.72) i (2.73) jest:

$$\mathbf{a}\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{d}\tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{a}\tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{d}\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{a}\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{b}\tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{d}\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{c}\tilde{\mathbf{c}}$$

a po podstawieniu (2.63), (2.68) i pogrupowaniu uzyskujemy:

$$a^2 + b^2 + d^2 + abe^{i(\theta_2 - \theta_1)} - (dae^{i\theta_1} + dae^{-i\theta_1}) + abe^{i(\theta_1 - \theta_2)} - (dbe^{i\theta_2} + dbe^{-i\theta_2}) = c^2$$

i kolejno

$$a^2 + b^2 + d^2 + (abe^{i(\theta_2 - \theta_1)} + abe^{-i(\theta_2 - \theta_1)}) - (dae^{i\theta_1} + dae^{-i\theta_1}) - (dbe^{i\theta_2} + dbe^{-i\theta_2}) = c^2$$

Zastosowanie (2.64) prowadzi do następującego równania:

$$a^2 + b^2 + d^2 + 2ab \cos(\theta_2 - \theta_1) - 2da \cos \theta_1 - 2db \cos \theta_2 = c^2 \quad (2.74)$$

Otrzymane tutaj zależności są oczywiście tożsame z tymi, które uzyskano metodą wektorową dla układu z rys. 2.12. Można się o tym przekonać, porównując np. zależności (2.71) i (2.51).

Pomimo pozornej identyczności zapisu wektorowego i za pomocą liczb zespolonych, te ostatnie są chętnie i często wykorzystywane zarówno w analizie, jak i w syntezie układów kinematycznych. Popularność tego opisu w analizie wynika, jak się wydaje, z korzystnych własności liczb zespolonych, szczególnie w operacjach różniczkowania i całkowania. Zachodzi bowiem zależność:

$$\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = ie^{i\theta}$$

a gdy kąt Θ jest funkcją czasu mamy:

$$\frac{d}{dt} e^{i\theta(t)} = (ie^{i\theta}) \dot{\theta}$$

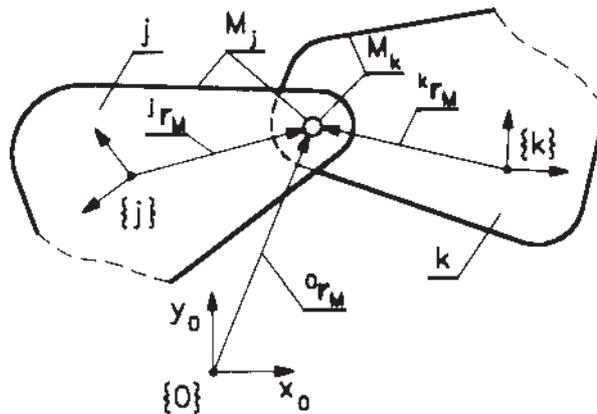
2.3.3. Metoda współrzędnych absolutnych

Współrzędne absolutne stanowią współcześnie jedną z częściej stosowanych koncepcji opisu układów wielocłonowych. Popularność swą zawdzięczają z jednej strony prostocie i łatwości sformalizowania wyprowadzania równań, z drugiej coraz łatwiej dostępnym komputerom.

Sformułowanie równań opisujących układ kinematyczny za pomocą współrzędnych absolutnych wymaga znajomości równań więzów dla poszczególnych par kinematycznych. Poniżej wyprowadzono równania więzów dla najczęściej wykorzystywanych w praktyce układów płaskich.

2.3.3.1. Równania więzów par kinematycznych

Para obrotowa. To najbardziej oczywisty przypadek i dlatego jest rozpatrywany w pierwszej kolejności. Dwa człony j, k (rys. 2.14) mają przygotowane półpary (sworzeń i tuleja), których środki – punkty M_j i M_k – zawsze się pokrywają. Porównując zatem wektory opisujące położenie obydwu punktów w układzie globalnym $\{0\}$, otrzyma się równania więzów pary obrotowej.



Rys. 2.14. Para obrotowa układu płaskiego

Przypisując członom j, k układy lokalne $\{j\}, \{k\}$, w których jest opisane położenie punktów M_k oraz M_j , łatwo można opisać położenie tych punktów w układzie $\{0\}$ ⁷

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_M &= \mathbf{r}_{Mk} = \mathbf{p}_k + \mathbf{A}_k^k \mathbf{r}_M \\ \mathbf{r}_M &= \mathbf{r}_{Mj} = \mathbf{p}_j + \mathbf{A}_j^j \mathbf{r}_M \end{aligned} \quad (2.75)$$

⁷ W kolejnych równaniach pomijane będą stosowane dotychczas oznaczenia – wykładnik przed symbolem – wskazujące, w którym układzie jest wyrażony wektor lub macierz. Taka zasada będzie stosowana, kiedy układem odniesienia będzie układ globalny $\{0\}$, który zawsze ma numer zerowy, np. ${}^0\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_M$.

Na podstawie (2.75) równania więzów dla pary obrotowej mają postać:

- w formie wektorowej:

$$\mathbf{r}_{Mk} - \mathbf{r}_{Mj} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{p}_k + \mathbf{A}_k^k \mathbf{r}_M - \mathbf{p}_j - \mathbf{A}_j^j \mathbf{r}_M = 0 \quad (2.76)$$

- w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_k & -\sin \Theta_k \\ \sin \Theta_k & \cos \Theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^k r_{Mx} \\ {}^k r_{My} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \Theta_j & -\sin \Theta_j \\ \sin \Theta_j & \cos \Theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^j r_{Mx} \\ {}^j r_{My} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.77)$$

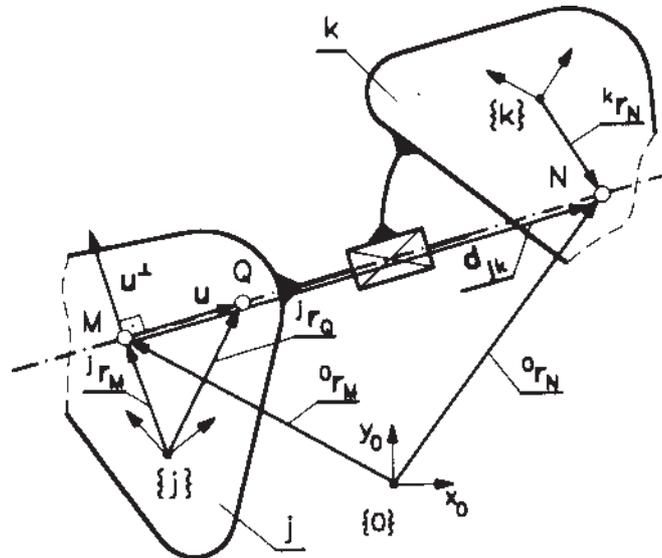
Para postępową. W przypadku pary postępowej człony, które ją tworzą, odbierają sobie wzajemnie dwa stopnie swobody. Na kierunku dopuszczalnego ruchu względnego (rys. 2.15) obieramy dwa punkty M , Q leżące na członie j oraz punkt N leżący na członie k . Punkty te wyznaczają dwa wektory \mathbf{d}_{jk} oraz \mathbf{u} , które umożliwiają sformułowanie równań więzów tej pary.

Przyjmąwszy układy lokalne $\{j\}$ i $\{k\}$ przynależne członom j , k oraz układ globalny $\{0\}$ możemy opisać punkty N , M i Q w układzie globalnym następującymi równaniami:

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_k + \mathbf{A}_k^k \mathbf{r}_N$$

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j^j \mathbf{r}_M$$

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j^j \mathbf{r}_Q$$



Rys. 2.15. Para postępową układu płaskiego

Za pomocą wektorów opisujących położenie punktów N, M, Q można zdefiniować dwa wektory. Pierwszy wektor opisuje przemieszczenie liniowe w parze postępowej i wynosi:

$$\mathbf{d}_{jk} = \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_M \quad (2.78)$$

Drugi wektor opisuje kierunek ruchu względnego i ma postać:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}_j ({}^j \mathbf{r}_Q - {}^j \mathbf{r}_M)$$

Po odwróceniu wektora \mathbf{u} o kąt prosty uzyskuje się:

$$\mathbf{u}^\perp = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_j ({}^j \mathbf{r}_Q - {}^j \mathbf{r}_M) = \mathbf{R}^\perp \mathbf{A}_j ({}^j \mathbf{r}_Q - {}^j \mathbf{r}_M) \quad (2.79)$$

Pierwsze równanie więzów pary przesuwnej wynika wprost z konieczności zapewnienia współliniowości wyprowadzonych z punktu M wektorów \mathbf{d}_{jk} oraz \mathbf{u} i ma postać:

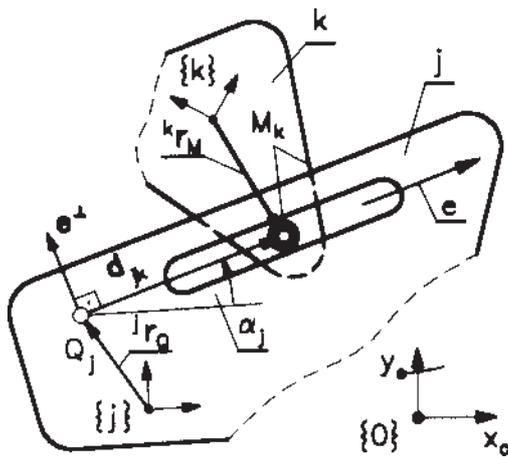
$$\mathbf{d}_{jk} \cdot \mathbf{u}^\perp = 0 \quad (2.80)$$

Drugie równanie musi zapewnić jednakowe przemieszczenie kątowe obu członów:

$$\theta_j - \theta_k - c = 0 \quad (2.81)$$

gdzie $c = \text{const}$.

Równania (2.80) i (2.81) wraz z (2.78) i (2.79) są równaniami więzów pary postępowej.



Rys. 2.16. Para jarzmowa układu płaskiego

Para jarzmowa. Takie połączenie członów powoduje odebranie tylko jednego stopnia swobody. Sworzень członu k (rys. 2.16) opisany punktem M_k musi zawsze pozostawać w szczeliny członu j , która w rozpatrywanym przypadku ma kształt prostoliniowy, a jej kierunek wyznacza wektor \mathbf{e} . Na osi wzdłużnej szczeliny obrano punkt Q_j związany z członem j . Punkt M_k jest środkiem geometrycznym sworznia i należy do członu k .

Wektory opisujące położenie punktów Q_j i M_k w układzie globalnym opisują równania:

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j {}^j \mathbf{r}_Q$$

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_k + \mathbf{A}_k {}^k \mathbf{r}_M$$

Kształt krzywki może być zadawany funkcyjnie lub dyskretnie za pomocą promienia ρ i kąta β . Wtedy położenie punktu P w układzie członu j opisuje wektor:

$${}^j\mathbf{r}_P = \rho \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

co umożliwia wyznaczenie wektora ${}^j\mathbf{t}$ leżącego na stycznej do zarysu krzywki, którego składowe w układzie $\{j\}$ wynoszą [26]:

$${}^j\mathbf{t} = \frac{\partial({}^j\mathbf{r}_P)}{\partial\beta} = \begin{bmatrix} -\rho \sin \beta + \frac{\partial\rho}{\partial\beta} \cos \beta \\ \rho \cos \beta + \frac{\partial\rho}{\partial\beta} \sin \beta \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

a w układzie globalnym

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}_j {}^j\mathbf{t} \quad (2.87)$$

Położenie punktów P i Q w układzie $\{0\}$ opisują wektory:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_P &= \mathbf{p}_j + \mathbf{A}_j {}^j\mathbf{r}_P \\ \mathbf{r}_Q &= \mathbf{p}_k + \mathbf{A}_k {}^k\mathbf{r}_Q \end{aligned}$$

co umożliwia wyznaczenie wektora \mathbf{n}

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q \rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{p}_j + \mathbf{A}_j {}^j\mathbf{r}_P - \mathbf{p}_k - \mathbf{A}_k {}^k\mathbf{r}_Q \quad (2.88)$$

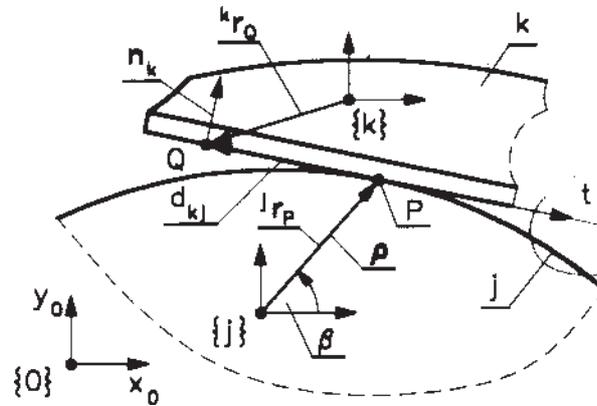
Równania więzów zatem mają ostatecznie postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^T \mathbf{n} - r^2 &= 0 \\ \mathbf{t}^T \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (2.89)$$

Pierwsze z równań (2.89) gwarantuje, że odległość punktów P i Q będzie równa promieniowi r krążka, drugie – promień r (wektor \mathbf{n}) będzie zawsze normalny do zarysu krzywki, tutaj prostopadły do stycznej \mathbf{t} .

Para kinematyczna „krzywka–talerzyk”. Dla tego skojarzenia członów (rys. 2.18), podobnie jak w poprzednim przypadku, oba człony muszą pozostawać w ciągłym kontakcie, a dodatkowo kierunek ślizgu (talerzyka) członu k musi pokrywać się ze styczną \mathbf{t} do zarysu krzywki j .

Obieramy punkt P leżący na członie j i wyznaczający punkt styku obu elementów. Drugi punkt Q obieramy na ślizgu członu k . Z punktu Q wyprowadzamy dwa prostopa-



Rys. 2.18. Para krzywka–popychacz talerzykowy układu płaskiego

dłe wektory \mathbf{n}_k i \mathbf{d}_{kj} , które umożliwiają sformułowanie równania więzów. Podobnie jak w poprzednich przypadkach mamy wektor:

$$\mathbf{d}_{kj} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = \mathbf{p}_k + \mathbf{A}_k^k \mathbf{r}_Q - \mathbf{p}_j + \mathbf{A}_j^j \mathbf{r}_P \quad (2.90)$$

zależny, jak widać, od współrzędnych krzywki i popychacza oraz od kształtu krzywki. Wektor \mathbf{t} wyznaczający kierunek stycznej, opisywany jest podobnie jak dla pary krzywka–krążek (2.86), (2.87). Równania więzów mają tym razem postać:

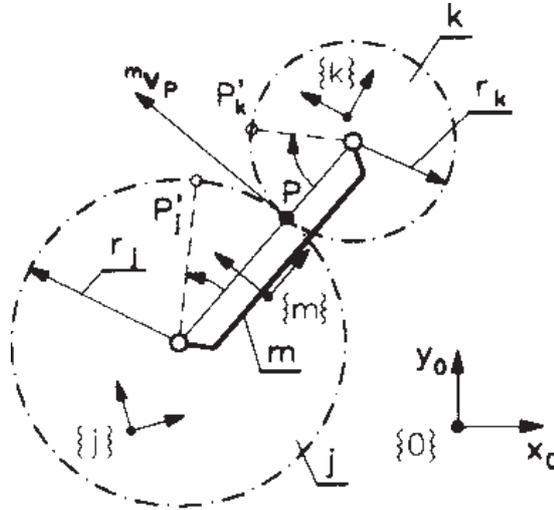
$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{kj}^T \mathbf{n}_k &= 0 \\ \mathbf{t}^T \mathbf{n}_k &= 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

Pierwsze z równań (2.91) gwarantuje kontakt obu elementów, drugie równanie natomiast zapewnia równoległość ślizgu talerzyka do stycznej \mathbf{t} .

Dla opisanych tutaj par kinematycznych „krzywkowych” wyprowadzono po dwa równania więzów, chociaż w obu przypadkach mamy do czynienia z parami klasy drugiej (o dwóch stopniach swobody), co sugeruje istnienie jednego warunku więzów jak to jest w przypadku pary jarzmowej. Zwróćmy jednak uwagę na fakt, że tym razem dochodzi jedna niewiadoma w postaci kąta β opisująca kształt krzywki, którą należy również wyznaczyć przy określaniu konfiguracji układu kinematycznego.

Para kinematyczna „zazębienie”. Dla tego skojarzenia członów (rys. 2.19) zachodzi toczenie się po sobie dwóch kół tocznych, co skutkuje jednakową prędkością liniową punktów P_j i P_k wyznaczających punkt kontaktu P .

Rozpatrując ruch obu kół j i k względem członu m (jarzma), stwierdzamy, że dla zazębienia zewnętrznego (rysunek 2.19) wektory prędkości kątowych mają przeciwne



Rys. 2.19. Para kinematyczna typu zazębienie

znaki, a więc ważne jest równanie wyrażające prędkość liniową punktów P_j i P_k w układzie członu m :

$${}^m v_P = (\omega_j - \omega_m) r_j = -(\omega_k - \omega_m) r_k$$

które zapisane za pomocą pochodnych kątów orientacji członów j, k ma postać:

$$(\dot{\Theta}_j - \dot{\Theta}_m) r_j = -(\dot{\Theta}_k - \dot{\Theta}_m) r_k$$

a po scałkowaniu otrzymuje się następujące równanie więzów pary typu zazębienie:

$$[(\Theta_j - \Theta_{j0}) - (\Theta_m - \Theta_{m0})] r_j + [(\Theta_k - \Theta_{k0}) - (\Theta_m - \Theta_{m0})] r_k = 0 \quad (2.92)$$

przy czym $\Theta_{j0}, \Theta_{k0}, \Theta_{m0}$ to wartości początkowe kątów orientacji odpowiednio członów j, k, m odmierzane w układzie globalnym $\{0\}$.

2.3.3.2. Równania więzów układów kinematycznych płaskich

Przystępując do sformułowania równań opisujących konfigurację układu z zastosowaniem współrzędnych absolutnych, przypomnijmy macierz transformacji (2.10) między dwoma układami $\{j\}$ i $\{k\}$:

$${}^j \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \cos {}^j \Theta_k & -\sin {}^j \Theta_k & {}^j x_k \\ \sin {}^j \Theta_k & \cos {}^j \Theta_k & {}^j y_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jak widać elementy tej macierzy są wyrażone trzema zmiennymi – dwie składowe wektora pozycji i kąt orientacji. W przypadku kiedy odnosić będziemy człon k w relacji do podstawy (zawsze człon o numerze 0), dla uproszczenia zapisu składowe wektora pozycji i orientacji członu k (układu $\{k\}$) względem podstawy 0 (układu $\{0\}$) zbierzemy w wektor, w którym pomijamy wskaźnik 0:

$$\mathbf{q}_k = [x_k \quad y_k \quad \theta_k]^T$$

Podobnie macierz transformacji z układu $\{k\}$ do układu podstawy $\{0\}$ zapiszemy jako:

$${}^0\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k & x_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k & y_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

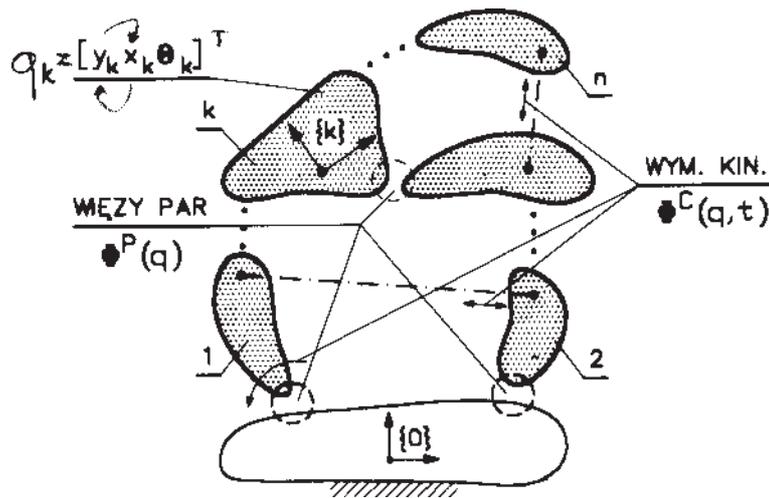
Na podstawie założeń dla układu złożonego z n członów ruchomych wektor opisujący jego konfigurację ma zatem postać:

$$\mathbf{q} = [x_1 \quad y_1 \quad \theta_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \theta_2 \quad \dots \quad x_n \quad y_n \quad \theta_n]^T \quad (2.93)$$

lub krócej

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_n^T]^T \quad (2.94)$$

Wobec takiej umowy łatwo stwierdzamy, że dla jednoznacznego opisanie układu złożonego z n członów ruchomych (rys. 2.20) potrzebna jest znajomość $3n$ współrzęd-



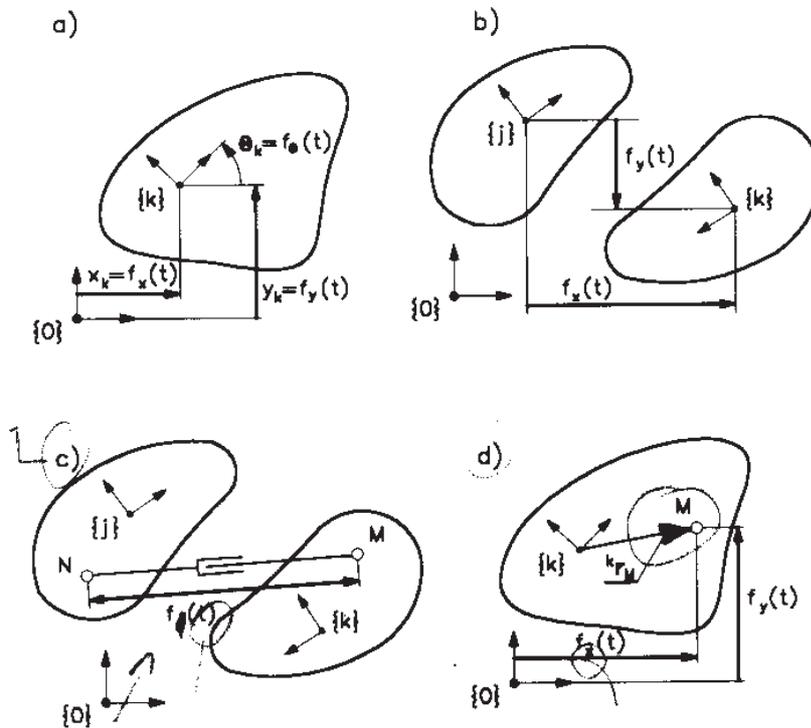
Rys. 2.20. Uogólniony schemat kinematyczny

nych absolutnych, a to oznacza konieczność sformułowania $3n$ równań, które zbierzemy w wektor równań o postaci:

$$\Phi \equiv \begin{bmatrix} \Phi^P(\mathbf{q}) \\ \Phi^C(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix}_{3n \times 1} = 0 \quad (2.95)$$

Pierwsza grupa równań (Φ^P) jest konsekwencją łączenia członów parami kinematycznymi i są to wyprowadzone wcześniej równania więzów par. Druga grupa równań (Φ^C) jest wynikiem znajomości równań opisujących wymuszenia kinematyczne (ruch członów czynnych).

Typy wymuszeń. Wymuszenia kinematyczne mogą być różnego rodzaju. Najogólniej są to zależności zmian wielkości liniowych lub kątowych wyrażonych w funkcji czasu. Inaczej wymuszenia kinematyczne to funkcje zmian niektórych składowych wektora \mathbf{q} (2.93) w czasie lub funkcje wiążące ze sobą składowe wektora \mathbf{q} i czas. Ten ostatni przypadek oznacza np. wymuszanie zmian odległości (siłownik) między dwoma punktami dwóch dowolnych członów lub zależność opisującą zmianę względnej orientacji dwóch dowolnie wybranych członów. Liczba wymuszeń kinematycznych jest tożsama z ruchliwością układu.



Rys. 2.21. Ilustracja najczęstszych wymuszeń

Przyjmijmy, że przez $f(t)$ oznaczamy ogólnie funkcję opisującą zmianę pewnej wielkości liniowej lub kątowej w czasie. Najczęstsze rodzaje wymuszeń dla opisu układu za pomocą współrzędnych absolutnych zestawiono na rys. 2.21. W przypadku kiedy wymuszamy ruch członu k względem podstawy $\{0\}$, zmieniając położenie lub orientację przypisanego mu układu lokalnego $\{k\}$, równania wymuszeń kinematycznych mają postać (rys. 2.21a):

$$\Phi^C \equiv \begin{cases} x_k - f_x(t) = 0 \\ y_k - f_y(t) = 0 \\ \Theta_k - f_\Theta(t) = 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

Dla ruchu względnego dwóch członów j i k , liniowego lub kątowego, równania wymuszeń z wykorzystaniem współrzędnych układów $\{j\}$ oraz $\{k\}$ są opisane zależnościami (rys. 2.21b):

$$\Phi^C \equiv \begin{cases} x_k - x_j - f_x(t) = 0 \\ y_k - y_j - f_y(t) = 0 \\ \Theta_k - \Theta_j - f_\Theta(t) = 0 \end{cases} \quad (2.97)$$

Stosunkowo częsty przypadek (rys. 2.21c) wymuszenia ruchu układu za pomocą zmiany długości siłownika (ogólnie członu zmiennej długości) implikuje równanie w postaci:

$$\Phi^C \equiv (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 - f^2(t) = 0 \quad (2.98)$$

W tym przypadku należy pamiętać, że współrzędne punktów M i N są wyrażone w układzie globalnym $\{0\}$, a więc do ich wyrażenia stosuje się równanie (2.7). Dla punktu M na członie k oraz dla punktu N na członie j otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_M = \mathbf{A}_k^k \mathbf{r}_M &\rightarrow \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} = \mathbf{A}_k \begin{bmatrix} {}^k x_M \\ {}^k y_M \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_N = \mathbf{A}_j^j \mathbf{r}_N &\rightarrow \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \end{bmatrix} = \mathbf{A}_j \begin{bmatrix} {}^j x_N \\ {}^j y_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.99)$$

W niektórych sytuacjach może zachodzić potrzeba wymuszania ruchu układu przez przemieszczanie punktu, np. M przynależnego do członu k (rys. 2.21d). Wtedy, podobnie jak w przypadku członu zmiennej długości (rys. 2.21c), współrzędne punktu M należy transformować do układu $\{0\}$ podstawy według (2.99). Tego typu wymuszenie będzie zatem zapisywane równaniami:

$$\Phi^C \equiv \begin{cases} x_k + {}^k x_M \cos \Theta_k - {}^k y_M \sin \Theta_k - f_x(t) = 0 \\ y_k + {}^k x_M \sin \Theta_k + {}^k y_M \cos \Theta_k - f_y(t) = 0 \end{cases} \quad (2.100)$$

Dla wymuszenia w parze kinematycznej obrotowej utworzonej przez człony j i k względne usytuowanie katowe przypisanych im układów lokalnych $\{j\}$ i $\{k\}$, zmienne w czasie według zależności $f(t)$ oznacza, że równanie więzów ma w tym przypadku postać:

$$\Phi^C \equiv \Theta_k - \Theta_j - f(t) = 0 \quad (2.101)$$

Równanie opisujące wymuszenie kinematyczne członów j i k , tworzących parę postępową łatwo sformułować według rys. 2.15. Przemieszczenie w parze postępowej (ruch względny) opisuje wektor \mathbf{d}_{jk} , którego moduł wyrażony w funkcji czasu daje równanie więzów pary postępowej:

$$\Phi^C \equiv \frac{\mathbf{d}_{jk} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - f(t) = 0 \quad (2.102)$$

Na podstawie równań więzów, wynikających z łączenia członów parami kinematycznymi, w sposób jednolity dla różnych typów układów można łatwo formułować układy równań, które są opisem konfiguracji. Poniżej przedstawiamy szczegółowo wyprowadzenie równań więzów dla wybranych układów kinematycznych.

PRZYKŁAD 2.7

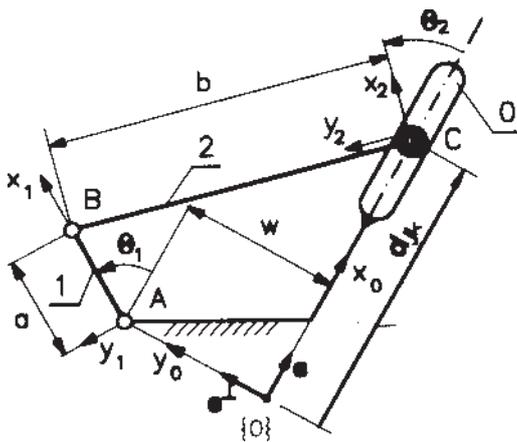
Jako pierwszy rozpatrzmy układ jarzmowy (rys. 2.22). Działanie jego polega na transformowaniu ruchu obrotowego korby 1 na ruch płaski członu 2. Układy lokalne $\{1\}$ i $\{2\}$ przyjęto tutaj w sposób szczególny, aby uzyskać możliwie najprostsze równania więzów.

Z rysunku 2.22 widać, że punkt A (środek geometryczny pary A) w układzie $\{0\}$ związanym z podstawą 0 ma składowe:

$$\mathbf{r}_A = [0 \quad w]^T \quad (2.103)$$

natomiast w układzie $\{1\}$ członu 1 punkt A wyznaczają składowe:

$${}^1 \mathbf{r}_A = [0 \quad 0]^T \quad (2.104)$$



Rys. 2.22. Układ jarzmowy

Na podstawie (2.103) i (2.104) połączenie członów w parę A daje następujące równania więzów:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.105)$$

Punkt B transformowany z członu 1 (układu $\{1\}$) do członu 0 (układu $\{0\}$) ma współrzędne:

$$\mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_1 & -\sin \Theta_1 \\ \sin \Theta_1 & \cos \Theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

Punkt B transformowany z członu 2 do członu 0 opisują współrzędne:

$$\mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_2 & -\sin \Theta_2 \\ \sin \Theta_2 & \cos \Theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

Na podstawie (2.106) i (2.107) para B generuje więzy zapisane równaniami:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \cos \Theta_1 \\ a \sin \Theta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -b \sin \Theta_2 \\ b \cos \Theta_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.108)$$

Para jarzmowa wymusza ruch punktu C w szczelinie o kierunku osi x_0 . Jak widać, na rys. 2.22 punkt C pokrywa się z początkiem układu lokalnego $\{2\}$. Wektor pozycji układu $\{2\}$ opisuje jednocześnie zatem punkt C w układzie $\{0\}$:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{r}_C = [x_2 \quad y_2]^T$$

Postać równania więzów pary jarzmowej C dla tak przyjętego układu lokalnego $\{2\}$ nie wymaga wyprowadzeń. Punkt C będzie zawsze znajdował się w szczelinie (na osi x_0), jeżeli będzie spełnione równanie:

$$y_2 = 0 \quad (2.109)$$

Identyczny wynik uzyska się z zależności (2.84). Mamy bowiem w tym przypadku (rys. 2.22):

$$\mathbf{e}^\perp = [0 \quad 1]^T \quad \mathbf{d}_{jk} = \mathbf{r}_C = [x_2 \quad y_2]^T$$

co ze wzoru (2.84) daje:

$$\mathbf{e}^\perp \cdot \mathbf{d}_{jk} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow y_2 = 0$$

równanie tożsame z (2.109).

Wszystkie więzy par układu jarmowego z rys. 2.22 tworzą układ równań:

$$\Phi^P \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ w - y_1 \\ x_1 + a \cos \theta_1 - x_2 + b \sin \theta_2 \\ y_1 + a \sin \theta_1 - y_2 - b \cos \theta_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.110)$$

Podany przykład wskazuje na pewien automatyzm w układaniu równań więzów, wynikających z kojarzenia członów w pary kinematyczne. Na kolejnym przykładzie pokażemy, że sposób postępowania jest taki sam dla układów zamkniętych i otwartych. Ta cecha sprawia, że współrzędne absolutne chętnie stosuje się w tworzeniu systemów komputerowych analizy układów kinematycznych.

PRZYKŁAD 2.8

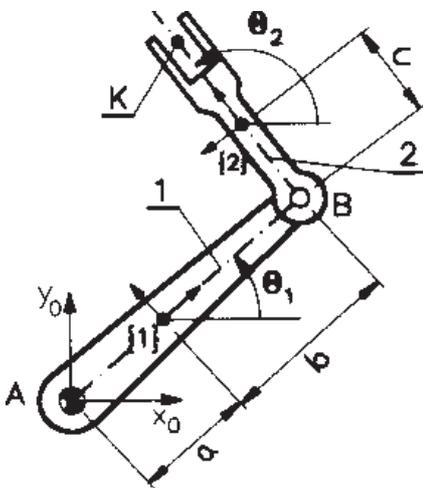
Rozpatrujemy płaski układ manipulatora szeregowego (rys. 2.23), który umożliwi przemieszczanie punktu K efektora 2 (chwyta-ka) po dowolnej trajektorii. Początki układów lokalnych $\{1\}$ i $\{2\}$ umieszczono w środkach mas. Wywołuje to nieco bardziej złożoną postać równań więzów, ale w zamian upraszcza zapis dynamiki.

Równania więzów pary kinematycznej A są oczywiste i przytaczamy je tutaj bez wyjaśnień:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.111)$$

Środek pary kinematycznej B w układzie $\{0\}$ opisują wektory uzyskane przez transformowanie współrzędnych punktów B odpowiednio z układu $\{1\}$ i $\{2\}$:

$$\mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix}$$



Rys. 2.23. Manipulator płaski

Porównanie tych wektorów prowadzi wprost do równań więzów pary kinematycznej B :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_1 & -\sin \Theta_1 \\ \sin \Theta_1 & \cos \Theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \Theta_2 & -\sin \Theta_2 \\ \sin \Theta_2 & \cos \Theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.112)$$

Więzy par układu z rys. 2.23, na podstawie równań (2.111) i (2.112), tworzą układ czterech równań:

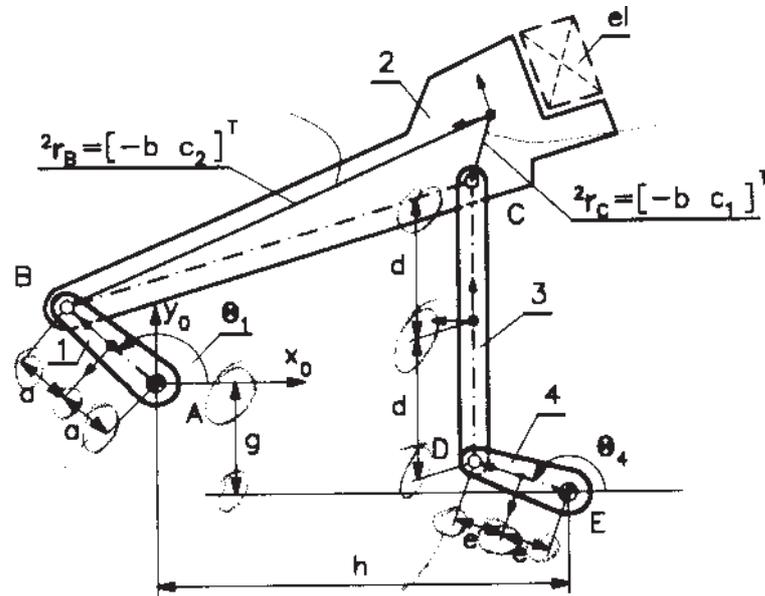
$$\Phi^P \equiv \begin{bmatrix} x_1 - a \cos \Theta_1 \\ y_1 - a \sin \Theta_1 \\ x_1 + a \cos \Theta_1 - x_2 + c \cos \Theta_2 \\ y_1 + a \sin \Theta_1 - x_2 + c \sin \Theta_2 \end{bmatrix} = 0$$

Zapis konfiguracji układów kinematycznych za pomocą współrzędnych absolutnych jest stosunkowo prosty, ale niestety mamy za to zwiększoną liczbę równań. Zwróćmy uwagę, że dla układu złożonego z k członów ruchomych liczba równań więzów wynosi $3k$. Jeżeli w dwóch poprzednich przykładach liczba równań nie robi jeszcze wrażenia, to już w kolejnym przykładzie jest inaczej – pamiętajmy, że mamy do czynienia z równaniami nieliniowymi.

PRZYKŁAD 2.9

Układ płaski, przedstawiony na rys. 2.24, składa się z czterech członów ruchomych i charakteryzuje się dwoma stopniami swobody (ruchliwość $W = 2$). Ruch płaski członu 2 może być wykorzystywany do przemieszczania elementu el po różnych trajektoriach. Dzięki tej własności, wymagającej jednak dwóch członów czynnych, układ nabiera cech elastyczności. Może np. obsługiwać linię automatyczną, w której zachodzi potrzeba zmiany trajektorii przemieszczania elementu el w zależności od zmieniającego się asortymentu produkcji. Pożądany ruch członu 2 można w tym przypadku uzyskać przez zastosowanie do napędu korby 1 konwencjonalnego silnika o stałej prędkości kątowej, natomiast ruch członu 4 wymuszony powinien być za pomocą serwonapędu. Układy takie mieszczą się w szerokiej grupie układów mechatronicznych.

Dla układu z rys. 2.24 w sposób systematyczny, w celu ułatwienia śledzenia kolejnych kroków, wyprowadzono równania więzów poszczególnych par kinematycznych.



Rys. 2.24. Mechatroniczny generator trajektorii

W przypadku pary kinematycznej A prostota równań wynika wprost z przyjętych układów współrzędnych. Układ globalny $\{0\}$ pokrywa się ze środkiem pary A . Podobnie jak w poprzednim przykładzie mamy:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.113)$$

Środek pary B w układzie $\{0\}$ opisują wektory uzyskane przez transformowanie współrzędnych punktów B odpowiednio z układu $\{1\}$ i $\{2\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_B &= \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ c_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Porównanie równań (2.114) daje równania więzów pary B w postaci:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ c_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.115)$$

Środek pary kinematycznej C w układzie $\{0\}$ opisują wektory uzyskane przez transformowanie współrzędnych punktów C odpowiednio z układu $\{2\}$ i $\{3\}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_C &= \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_2 & -\sin \Theta_2 \\ \sin \Theta_2 & \cos \Theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ c_1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_C &= \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_3 & -\sin \Theta_3 \\ \sin \Theta_3 & \cos \Theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.116)$$

Więzy pary C wynikają z porównania (2.116):

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_2 & -\sin \Theta_2 \\ \sin \Theta_2 & \cos \Theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ c_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \Theta_3 & -\sin \Theta_3 \\ \sin \Theta_3 & \cos \Theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.117)$$

Środek pary kinematycznej D w układzie globalnym $\{0\}$ opisują wektory uzyskane przez transformowanie współrzędnych punktów D odpowiednio z układu $\{3\}$ i $\{4\}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_D &= \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_3 & -\sin \Theta_3 \\ \sin \Theta_3 & \cos \Theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_D &= \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_4 & -\sin \Theta_4 \\ \sin \Theta_4 & \cos \Theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.118)$$

Więzy pary D wynikające z porównania (2.118) to:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_3 & -\sin \Theta_3 \\ \sin \Theta_3 & \cos \Theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \Theta_4 & -\sin \Theta_4 \\ \sin \Theta_4 & \cos \Theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.119)$$

Środek pary kinematycznej E w układzie globalnym $\{0\}$ opisuje wektor uzyskany przez transformowanie współrzędnych punktu D z układu $\{4\}$, natomiast współrzędne punktu D w układzie podstawy są oczywiste. Daje to dwa równania w postaci:

$$\mathbf{r}_E = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \Theta_4 & -\sin \Theta_4 \\ \sin \Theta_4 & \cos \Theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_E = \begin{bmatrix} h \\ -g \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

Więzy pary E wynikające z porównania (2.120) mają postać:

$$\begin{bmatrix} h \\ -g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \Theta_4 & -\sin \Theta_4 \\ \sin \Theta_4 & \cos \Theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.121)$$

Łącznie równania więzów par mechatronicznego generatora trajektorii (rys. 2.24) mają postać:

$$\Phi^P \equiv \begin{bmatrix} x_1 + a \cos \Theta_1 \\ y_1 + a \sin \Theta_1 \\ x_1 + a \cos \Theta_1 - x_2 + b \cos \Theta_2 + c_2 \sin \Theta_2 \\ y_1 + a \sin \Theta_1 - y_2 + b \sin \Theta_2 - c_2 \cos \Theta_2 \\ x_2 - b \cos \Theta_2 - c_1 \sin \Theta_2 - x_3 - d \cos \Theta_3 \\ y_2 - b \sin \Theta_2 + c_1 \cos \Theta_2 - y_3 - d \sin \Theta_3 \\ x_3 - d \cos \Theta_3 - x_4 - e \cos \Theta_4 \\ y_3 - d \sin \Theta_3 - y_4 - e \sin \Theta_4 \\ h - x_4 + e \cos \Theta_4 \\ -g - y_4 + e \sin \Theta_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.122)$$

W uzupełnieniu opisu zauważmy, że ruch tego układu wywołują człony czynne 1 i 4. Jeżeli ich przemieszczenia kątowe są wyrażone funkcjami $f_1(t)$ oraz $f_4(t)$, to równania wymuszeń mają postać:

$$\Phi^C \equiv \begin{bmatrix} \Theta_1 - f_1(t) \\ \Theta_4 - f_4(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.123)$$

2.3.4. Rozwiązanie równań nieliniowych

Opis analityczny konfiguracji układu kinematycznego sprowadza się do żmudnych przekształceń równań algebraicznych, aż do uzyskania jawnych zależności określających zmienne wielkości konfiguracyjne kątowe lub liniowe. Znajomość takich zależności jest niezwykle pożądana, zwłaszcza ze względu na uzyskiwane dokładności obliczeń. Trzeba jednak podkreślić, że:

- dla wielu układów uzyskanie zależności jawnych jest niezwykle uciążliwe, a otrzymywany rezultat, teoretycznie zawsze możliwy, w postaci wielomianów wysokich stopni można rozwiązać tylko metodami numerycznymi,
- istnieje wiele układów, zwłaszcza wielokonturowych, dla których brak jest rozwiązania jawnego i wówczas korzystanie z metod numerycznych jest koniecznością.

Wobec wymienionych trudności współczesne metody analizy polegają na sformułowaniu układu równań opisujących konfigurację i następnie ich rozwiązaniu za pomocą metod numerycznych. Równania opisujące konfigurację układu są w zasadzie, poza nielicznymi wyjątkami, równaniami nieliniowymi.

2.3.4.1. Algorytm Newtona–Raphsona

Jedną z powszechnie stosowanych metod w przypadku układów kinematycznych jest metoda Newtona–Raphsona [2]. Metodę zilustrowano dla funkcji jednej zmiennej $f(x)$ – wtedy znana jako metoda Newtona. Jak w każdej metodzie numerycznej, wymagane jest oszacowanie przybliżonej wartości $x^{(1)}$ poszukiwanego pierwiastka x_0 ($f(x_0)=0$).

Niech ta przybliżona (oszacowana) wartość wynosi $x^{(1)}$ (rys. 2.25). Wtedy za pomocą linearyzacji funkcji $f(x)$ w punkcie $x^{(1)}$ można przyjąć, że funkcja w punkcie $x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x$, ma postać:

$$f(x^{(2)}) = f(x^{(1)}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^{(1)}} \Delta x \quad (2.124)$$

Wówczas punkt przecięcia stycznej t z osią odciętych (x), oddalony od $x^{(1)}$ o wartość Δx , wyznacza się z zależności:

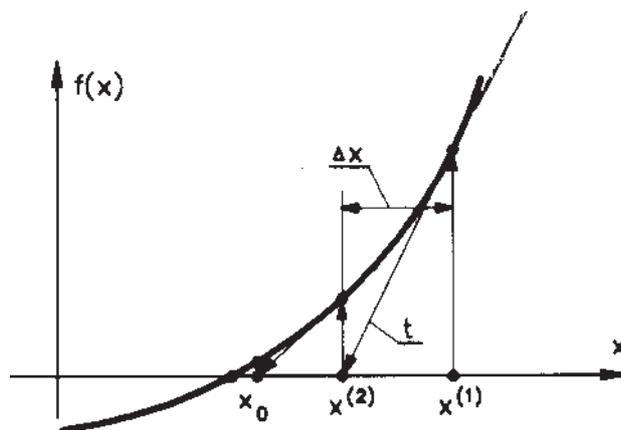
$$0 = f(x^{(1)}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^{(1)}} \Delta x \quad \rightarrow \quad \Delta x = \frac{-f(x^{(1)})}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x^{(1)}}} \quad (2.125)$$

Kolejna wartość pierwiastka $x^{(2)}$ funkcji $f(x)$ wynosi:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x \quad (2.126)$$

Następny krok w omawianej metodzie jest już oczywisty i polega na wyznaczeniu wartości funkcji dla nowej wartości pierwiastka $x^{(2)}$, a ściślej na sprawdzeniu warunku:

$$|f(x^{(2)})| \leq \varepsilon \quad (2.127)$$



Rys. 2.25. Idea metody Newtona–Raphsona

wskazującego, czy otrzymana wartość funkcji jest wystarczająco bliska zera – wartość ε należy przyjmować z umiarem, gdyż przyjęcie zbyt małej wartości może niepotrzebnie zwiększyć liczbę iteracji, a tym samym niepotrzebnie wydłużyć czas obliczeń. Gdy warunek (2.127) nie jest spełniony, należy wykonać kolejną iterację, korzystając z zależności (2.125) i (2.126). Ogólny zatem algorytm znajdowania pierwiastka funkcji $f(x)$ składa się z następujących kroków:

1. Przyjmij $i = 1$, wartość ε .
2. Oszacuj wartość pierwiastka $x^{(1)}$.
3. Podstaw $x^{(i)} = x^{(1)}$.
4. Oblicz Δx z zależności:

$$\Delta x = \frac{-f(x^{(i)})}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x^{(i)}}}$$

5. Oblicz $x^{(i+1)}$ z zależności:

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \Delta x$$

6. Sprawdź warunek (2.127):

$$|f(x^{(i+1)})| \leq \varepsilon$$

7. Jeśli (2.127) jest spełniony, to przyjmij $x_0 = x^{(i+1)}$, jeśli nie, to idź do punktu 8.
8. Podstaw $i = i + 1$, $x^{(i)} = x^{(i+1)}$ i wróć do punktu 4.

Łatwo zauważyć, że dla funkcji mającej wiele rozwiązań niezbędna jest znajomość ich liczby, a wyznaczenie każdego pierwiastka wymaga powtórzenia kolejnych kroków podanego algorytmu. Trzeba też wyraźnie podkreślić, że konieczność szacowania pierwszej wartości rozwiązania może prowadzić do otrzymania rozwiązania niekoniecznie najbliższego oszacowanej wartości. Zilustrowano to na przykładzie rozwiązywania wielomianu trzeciego stopnia, a więc o pierwiastkach łatwych do wyznaczenia według znanych wzorów.

PRZYKŁAD 2.10

Założono, że równanie $f(x)$ ma postać

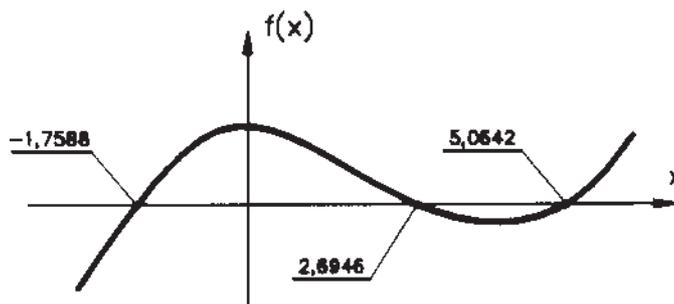
$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 4 = 0 \quad (2.128)$$

Pochodna $f(x)$ to

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - 2x \quad (2.129)$$

Pierwiastki równania (2.128) zestawiono w wektor: $\mathbf{x} = [5,0642 \quad 2,6946 \quad -1,7588]^T$ – wykres funkcji $f(x)$ przedstawiono na rys. 2.26.

Korzystając z zależności (2.125) i (2.126), wyznaczamy pierwiastki równania (2.128), przyjmując kolejno jako wartości początkowe $\mathbf{x} = [2; 0,3; -1]$, a rezultaty otrzymane w kolejnych krokach zestawiamy w tabeli 1.



Rys. 2.26. Wykres funkcji (2.128)

Tabela 1

(i)	$x^{(i)}$	$f(x^{(i)})$	df/dx	Δx	$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \Delta x$
1	2,00000	1,33333	-2,00000	0,66667	2,66667
2	2,66667	0,04938	-1,77778	0,02779	2,69444
3	2,69444	0,00026	-1,75887	0,00015	2,69459
4	2,69459	0,00000	-1,75877	0,00000	2,69459
1	0,30000	3,91450	-0,55500	7,05315	7,35315
2	7,35315	16,19391	12,32812	-1,31357	6,03958
3	6,03958	4,24062	6,15910	-0,68851	5,35107
4	5,35107	0,90308	3,61482	-0,24983	5,10124
5	5,10124	0,10198	2,80884	-0,03631	5,06493
6	5,06493	0,00204	2,69691	-0,00075	5,06418
1	-1,00000	2,83333	2,50000	-1,13333	-2,13333
2	-2,13333	-2,16928	6,54222	0,33158	-1,80175
3	-1,80175	-0,22115	5,22666	0,04231	-1,75944
4	-1,75944	-0,00339	5,06669	0,00067	-1,75877

Należy zwrócić uwagę na wartość pierwiastka $x = 5,06418$, którą uzyskano przy oszacowaniu jego wartości na 0,3. Z wykresu na rys. 2.26 widać wyraźnie, że bliższy wartości 0,3 jest pierwiastek $x = 2,69444$. Powyższy przykład wskazuje, że szacowaniu wartości pierwiastków należy poświęcić należyłą uwagę.

Przytoczone rozważania, i podany przykład, dotyczyły numerycznego znajdowania pierwiastków funkcji jednej zmiennej. Identyczne reguły dotyczą układów równań $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ wielu zmiennych i wtedy dotychczasowy pierwiastek x należy rozumieć jako wektor pierwiastków $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, który jest rozwiązaniem układu n równań nieliniowych, a sposób ten jest znany jako metoda Newtona–Raphsona. Podobnie wektorem staje się poprawka $\Delta\mathbf{x}$, a pochodna funkcji jest teraz macierzą jacobianową $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x}$ [2], [22].

PRZYKŁAD 2.11

Rozpatrzmy układ kinematyczny o ruchliwości dwa (rys. 2.27), którego zadanie polega na przemieszczaniu punktu M po założonej trajektorii μ_M . Kształt trajektorii μ_M zależy od wymuszeń w postaci ruchu obrotowego członu AB , opisanego kątem q_1 i zmiany długości siłownika CD o długości q_2 . Zadanie polega na wyznaczeniu konfiguracji układu, zwłaszcza współrzędnych punktu M , którą zajmie układ dla znanych wartości wymuszeń q_1 i q_2 . Jak łatwo zauważyć, obliczenie wartości współrzędnych x_M i y_M wymaga wcześniejszego wyznaczenia orientacji członu BCM opisanego kątem x_1 .

Stosownie do przyjętych na rys. 2.27 oznaczeń obowiązuje równanie wektorowe:

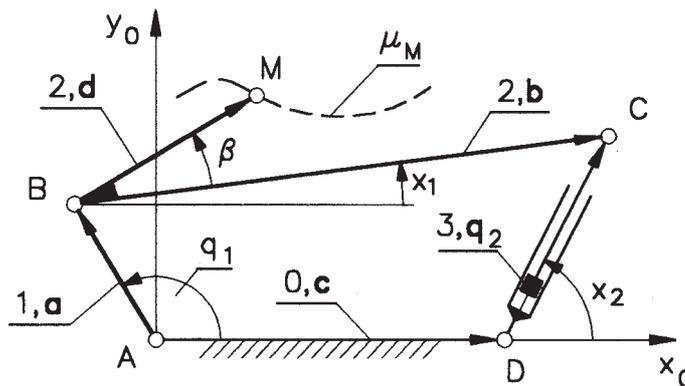
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{q}_2 = \mathbf{0}$$

które skutkuje dwoma równaniami nieliniowymi (rzuty na osie układu współrzędnych) o postaci:

$$\begin{aligned} f_1 &= a \cos q_1 + b \cos x_1 - c - q_2 \cos x_2 = 0 \\ f_2 &= a \sin q_1 + b \sin x_1 - q_2 \sin x_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.130)$$

Dla uogólnienia metody funkcje f_1 i f_2 można zapisać łącznie jako $\mathbf{F} = [f_1 \ f_2]^T$, a w rozpatrywanym układzie jako:

$$\mathbf{F}(q_1, q_2, x_1, x_2) = 0$$



Rys. 2.27. Generator trajektorii o ruchliwości dwa

przy czym, zgodnie z założeniem, jest:

- q_1, q_2 – zmienne niezależne (znane wymuszenia),
- x_1, x_2 – zmienne zależne (niewiadome),

a pozostałe wielkości stanowią stałe.

Analogicznie do zależności (2.124) w przypadku układu równań $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ wielu zmiennych mamy:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i+1)}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(i)}} \Delta \mathbf{x}$$

Poprawkę $\Delta \mathbf{x}$ określa zależność:

$$0 = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(i)}} \Delta \mathbf{x} \rightarrow \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = - \left[\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(i)}} \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (2.131)$$

Poprawka oszacowanego wektora rozwiązania prowadzi do nowej wartości:

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \Delta \mathbf{x} \quad (2.132)$$

Potrzebny w obliczeniach jacobian wyznacza się z zależności:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

W przypadku omawianego przykładu (rys. 2.27) jacobian ma postać:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -b \sin x_1 & q_2 \sin x_2 \\ b \cos x_1 & -q_2 \cos x_2 \end{bmatrix}$$

Zgodnie zatem z (2.131) mamy dalej poprawkę:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = - \left[\begin{bmatrix} -b \sin x_1 & q_2 \sin x_2 \\ b \cos x_1 & -q_2 \cos x_2 \end{bmatrix} \right]_{\mathbf{x}^{(i)}}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}^{(i)}) \\ f_2(\mathbf{x}^{(i)}) \end{bmatrix}$$

i kolejne przybliżenie pierwiastka z zależności (2.132).

Współrzędne punktu M w przyjętym układzie współrzędnych, dla wartości zmiennych zależnych x_1 oraz x_2 , wyznacza się z zależności:

$$x_M = a \cos q_1 + d \cos(x_1 + \beta)$$

$$y_M = a \sin q_1 + d \sin(x_1 + \beta)$$

Z podanego przykładu widać, że łatwo tę metodę uogólnić na przypadki układów równań o wielu niewiadomych – zależności (2.131), (2.132), (2.133) są ogólne. Ważny dla praktyki wniosek należy wyciągnąć z analizy zależności (2.131), w której występuje operacja odwracania macierzy jacobianowej. W związku z numerycznymi kłopotami z odwracaniem macierzy równanie (2.131) rozwiązuje się innymi metodami (np. metodą eliminacji Gaussa [2]). Jednak zastosowany zapis wskazuje, że dla pewnych wartości elementów macierzy jacobianowej jej odwrócenie jest niemożliwe. Występuje wtedy, gdy jej wyznacznik jest równy zero. Jak wiadomo macierz o takiej własności określa się mianem macierzy osobliwej. W przypadku realnego układu kinematycznego wystąpienie takiej własności oznacza, że układ przyjął pewną szczególną konfigurację, którą również określa się mianem konfiguracji osobliwej [26].

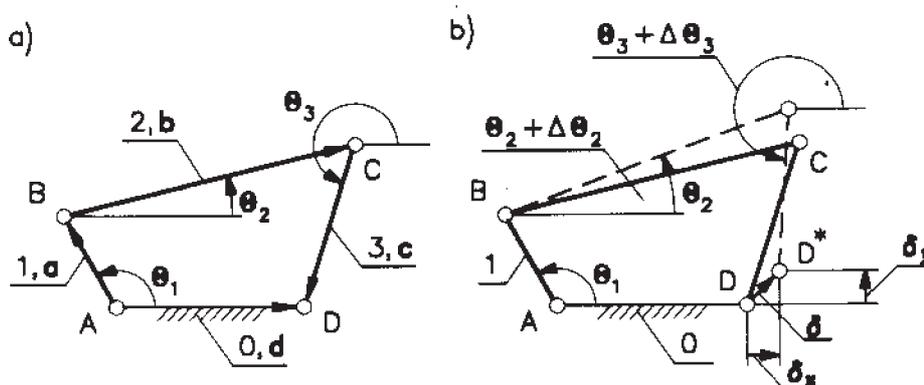
2.3.4.2. Konfiguracja początkowa i krok analizy

W metodach numerycznych rozwiązywania układów równań nieliniowych istotnym problemem jest właściwe oszacowanie wektora rozwiązania początkowego. Dokładność tego szacunku jest tym istotniejsza, im liczniejszy jest układ równań. W większości przypadków praktycznych, kiedy układy liczą trzy, czasem pięć członów ruchomych, oszacowanie wektora początkowego można oprzeć na schemacie układu narysowanym w podziałce. Potrzebne wielkości można wówczas odczytać wprost z rysunku. W wielu sytuacjach ważne będzie obrócenie takiego położenia początkowego układu, aby można było posłużyć się prostymi zależnościami trygonometrycznymi.

Metoda iteracyjna (graficzno-analityczna). Rozwiązanie graficzne można też uściślić bardzo prostą metodą iteracyjną, którą przedstawiono na przykładzie czworoboku przegubowego. Uściślimy wartości zmiennych θ_2 i θ_3 zmierzonych z rysunku wykonanego w podziałce (rys. 2.28). Zmienną niezależną jest kąt θ_1 .

Równanie zamknięcia wieloboku wektorów (rys. 2.28a) w postaci:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (2.134)$$



Rys. 2.28. Układ 4R – kąty poprawne (a) i z odchyłkami (b)

sprowadza się do sumy rzutów na osie globalnego układu współrzędnych $\{0\}$:

$$\begin{aligned} f_1 &= a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2 + c \cos \theta_3 - d = 0 \\ f_2 &= a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2 + c \sin \theta_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.135)$$

Dla dokładnych wartości kątów równania (2.135) są spełnione. Inaczej w przypadku, kiedy zmierzone wartości kątów $\theta_2^{(1)}$ i $\theta_3^{(1)}$ są obciążone odchyłkami, co występuje w przypadku odczytania ich z nawet bardzo starannie sporządzonego rysunku. Wtedy równanie wieloboku wektorowego należy uzupełnić o wektor odchyłek δ :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d} = \delta \quad (2.136)$$

którego składowe są miarą popełnionego błędu w rysunku i pomiarze kątów, a obliczane z zależności:

$$\begin{aligned} f_1 &= a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2^{(1)} + c \cos \theta_3^{(1)} - d = \delta_x \\ f_2 &= a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2^{(1)} + c \sin \theta_3^{(1)} = \delta_y \end{aligned} \quad (2.137)$$

Otrzymane z rysunku wartości kątów $\theta_2^{(1)}$ i $\theta_3^{(1)}$ należy więc skorygować w taki sposób, aby δ_x i δ_y miały wartości zerowe. Nowe zatem poprawione wartości kątów powinny wynosić:

$$\begin{aligned} \theta_2^{(2)} &= \theta_2^{(1)} + \Delta\theta_2 \\ \theta_3^{(2)} &= \theta_3^{(1)} + \Delta\theta_3 \end{aligned} \quad (2.138)$$

co umożliwia obliczenie poprawek $\Delta\theta_2$ i $\Delta\theta_3$ z poniższych równań:

$$\begin{aligned} a \cos \theta_1 + b \cos(\theta_2^{(1)} + \Delta\theta_2) + c \cos(\theta_3^{(1)} + \Delta\theta_3) - d &= 0 \\ a \sin \theta_1 + b \sin(\theta_2^{(1)} + \Delta\theta_2) + c \sin(\theta_3^{(1)} + \Delta\theta_3) &= 0 \end{aligned} \quad (2.139)$$

Korzystamy ze wzorów na sinus i kosinus sumy kątów

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \Delta\theta) &= \cos \theta \cos \Delta\theta - \sin \Delta\theta \sin \theta \\ \sin(\theta + \Delta\theta) &= \sin \theta \cos \Delta\theta + \sin \Delta\theta \cos \theta \end{aligned}$$

a także przyjmijmy dla uproszczenia, że dla małych wartości kątów zachodzi:

$$\sin \Delta\theta \cong \Delta\theta, \quad \cos \Delta\theta \cong 1$$

co skutkuje

$$\begin{aligned}\cos(\Theta + \Delta\Theta) &\cong \cos \Theta - \Delta\Theta \sin \Theta \\ \sin(\Theta + \Delta\Theta) &\cong \sin \Theta + \Delta\Theta \cos \Theta\end{aligned}\quad (2.140)$$

Po podstawieniu (2.140) do (2.139) uzyskuje się zależności:

$$\begin{aligned}a \cos \Theta_1 + b(\cos \Theta_2^{(1)} - \Delta\Theta_2 \sin \Theta_2^{(1)}) + c(\cos \Theta_3^{(1)} - \Delta\Theta_3 \sin \Theta_3^{(1)}) - d &= 0 \\ a \sin \Theta_1 + b(\sin \Theta_2^{(1)} + \Delta\Theta_2 \cos \Theta_2^{(1)}) + c(\sin \Theta_3^{(1)} + \Delta\Theta_3 \cos \Theta_3^{(1)}) &= 0\end{aligned}\quad (2.141)$$

które po uporządkowaniu, zapisane w postaci:

$$\begin{bmatrix} -b \sin \Theta_2^{(1)} & -c \sin \Theta_3^{(1)} \\ b \cos \Theta_2^{(1)} & c \cos \Theta_3^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\Theta_2 \\ \Delta\Theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \cos \Theta_1 - b \cos \Theta_2^{(1)} - c \cos \Theta_3^{(1)} + d \\ -a \sin \Theta_1 - b \sin \Theta_2^{(1)} - c \sin \Theta_3^{(1)} \end{bmatrix}$$

umożliwiają wyznaczenie poprawek $\Delta\Theta_2$ i $\Delta\Theta_3$ według relacji:

$$\begin{bmatrix} \Delta\Theta_2 \\ \Delta\Theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \sin \Theta_2^{(1)} & -c \sin \Theta_3^{(1)} \\ b \cos \Theta_2^{(1)} & c \cos \Theta_3^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a \cos \Theta_1 - b \cos \Theta_2^{(1)} - c \cos \Theta_3^{(1)} + d \\ -a \sin \Theta_1 - b \sin \Theta_2^{(1)} - c \sin \Theta_3^{(1)} \end{bmatrix}\quad (2.142)$$

Poprawione według zależności (2.138) wartości kątów $\Theta_2^{(2)}$ i $\Theta_3^{(2)}$ wstawiamy ponownie do wzorów (2.137), a w razie uzyskania niesatysfakcjonujących wartości odchyłek δ_x i δ_y przeprowadzamy kolejną iterację. Metoda ta jest bardzo efektywna i już w kilku krokach daje wyniki zupełnie wystarczające dla praktyki inżynierskiej.

Metody numeryczne. Posługując się pomocniczo rysunkiem, możliwe jest też wykorzystanie do uściślenia rozwiązania algorytmów optymalizacji – poszukiwania minimum funkcji wielu zmiennych – rozpoczynając od wartości zmierzonych wprost z rysunku. Wtedy dla układu 4R z rys. 2.28 funkcja celu ma postać:

$$F(\Theta_2^{(1)}, \Theta_3^{(1)}) = f_1^2 + f_2^2 \rightarrow \min\quad (2.143)$$

Korzystając ze znanych algorytmów optymalizacji, wartości początkowe kątów $\Theta_2^{(1)}$ i $\Theta_3^{(1)}$ można poprawić stosownie do zakładanego dopuszczalnego błędu.

Problem określenia pierwszej konfiguracji układu kinematycznego jest szczególnie istotny w przypadku wystąpienia dużej liczby równań (niewiadomych), na przykład w przypadku opisu układu za pomocą współrzędnych absolutnych. Wtedy zagrożeniem dla poprawności wyniku może być np. istnienie dwóch, czasem więcej konfiguracji.

Przypomnijmy tutaj wyprowadzone wcześniej równania więzów (2.122), opisujące układ mechatroniczny z rys. 2.24 (przykład 2.9):

$$\Phi^P \equiv \begin{bmatrix} x_1 + a \cos \Theta_1 \\ y_1 + a \sin \Theta_1 \\ x_1 + a \cos \Theta_1 - x_2 + b \cos \Theta_2 + c_2 \sin \Theta_2 \\ y_1 + a \sin \Theta_1 - y_2 + b \sin \Theta_2 - c_2 \cos \Theta_2 \\ x_2 - b \cos \Theta_2 - c_1 \sin \Theta_2 - x_3 - d \cos \Theta_3 \\ y_2 - b \sin \Theta_2 + c_1 \cos \Theta_2 - y_3 - d \sin \Theta_3 \\ x_3 - d \cos \Theta_3 - x_4 - e \cos \Theta_4 \\ y_3 - d \sin \Theta_3 - y_4 - e \sin \Theta_4 \\ h - x_4 + e \cos \Theta_4 \\ -g - y_4 + e \sin \Theta_4 \end{bmatrix} = 0$$

Mamy tutaj układ dziesięciu równań nieliniowych, a wektor \mathbf{q} niewiadomych ma postać:

$$\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \Theta_2 \ \dots \ x_4 \ y_4]^T \quad (2.144)$$

Tym razem minimalizowana funkcja może mieć postać:

$$[\Phi^P(\mathbf{q})]^T \Phi^P(\mathbf{q}) \rightarrow \min \quad (2.145)$$

Jednak dla zapewnienia pożądanego rozwiązania, bliskiego oszacowanemu, a opisanego wektorem startowym $\mathbf{q}^{(1)}$ zaleca się wprowadzać modyfikację (2.145) i minimalizować wyrażenie

$$[\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(1)}]^T [\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(1)}] - [\Phi^P(\mathbf{q})]^T \Phi^P(\mathbf{q}) \rightarrow \min \quad (2.146)$$

Jak widać z funkcji (2.146) jej pierwszy składnik „utrzymuje” rozwiązanie w pobliżu konfiguracji pożądanej, opisaną wektorem $\mathbf{q}^{(1)}$.

Krok analizy. Wyznaczanie konfiguracji w kolejnych chwilach wymaga wielokrotnego stosowania algorytmu rozwiązywania układu równań nieliniowych (np. algorytmu Newtona–Raphsona). W każdym kroku wymagana jest oczywiście znajomość początkowego wektora rozwiązania. W sposób naturalny nasuwa się tutaj pomysł wykorzystania w kolejnym kroku wektora rozwiązania poprzedniego. W wielu prostych układach jest to podejście prawidłowe, dające poprawne wyniki. Zagrożenie co do po-

prawności występuje wtedy, gdy dwie konfiguracje układu są „bliskie” sobie. Taka sytuacja może wystąpić szczególnie w przypadku układów o wielu stopniach swobody.

Podobnie w przypadku rozwiązywania dużej liczby równań nieliniowych algorytm Newtona–Raphsona może wykazywać brak zbieżności. W obu przypadkach, kiedy dwa rozwiązania są bliskie sobie oraz dla dużej liczby równań, pomocne jest wprowadzenie poprawki wynikającej z przyjętego kroku analizy Δt . Korzystając z szeregu Taylora, wektor początkowy w chwili t_{i+1} można wyznaczyć z zależności:

$$\mathbf{q}_{i+1} \cong \mathbf{q}_i + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{q}}_i \quad (2.147)$$

gdzie $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.

Takie podejście nie tylko prowadzi do właściwych wyników, ale także znakomicie skraca czas analizy. Jak widać z zależności (2.147) określanie konfiguracji powinno być prowadzone łącznie z wyznaczaniem prędkości $\dot{\mathbf{q}}$ i przyspieszeń $\ddot{\mathbf{q}}$.

2.4. Wyznaczanie konfiguracji układów przestrzennych

Układy kinematyczne przestrzenne są rzadziej wykorzystywane w praktyce. Najliczniejszą grupę stanowią układy kinematyczne robotów. Ich zespoły mechaniczne – manipulatory – mają najczęściej strukturę szeregową, tworząc tzw. otwarte łańcuchy kinematyczne. W ostatnich latach intensywnie rozwijane są też manipulatory o strukturze równoległej.

Jest oczywiste, że układy przestrzenne, jako zespoły połączonych ze sobą członów dogodnie jest rozpatrywać jako zespół lokalnych układów prostokątnych, przypisanych poszczególnym członom. Wtedy ruch członów można rozpatrywać jako ruch układów współrzędnych. Poniżej przedstawiono metodę opisu konfiguracji układów przestrzennych szeregowych i zamkniętych z wykorzystaniem notacji DH.

2.4.1. Układy o strukturze szeregowej

Jak już wspomniano opis układu przestrzennego polega na przypisaniu kolejnym członom lokalnych układów współrzędnych i rozpatrywaniu ich wzajemnych położeń, prędkości i przyspieszeń.

Zgodnie z regułami opisu według notacji DH poszczególne układy lokalne muszą być usytuowane w sposób szczególny (p. 2.2.3).

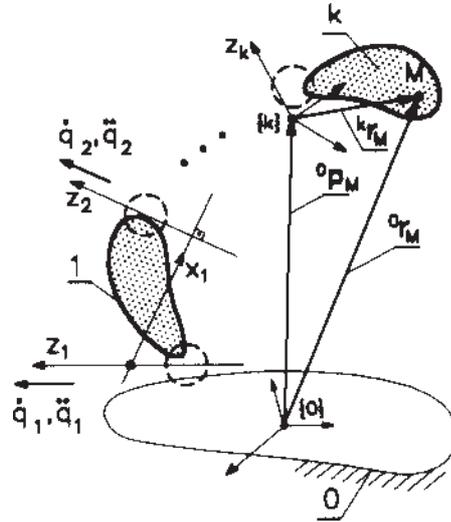
Na rysunku 2.29 przedstawiono uogólniony k -członowy układ przestrzenny o strukturze szeregowej. Dla opisanego położenia członu k względem podstawy 0 potrzebna jest znajomość macierzy transformacji ${}^0\mathbf{A}_k$ o postaci zgodnej z (2.22):

$${}^0\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_k & {}^0\mathbf{p}_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poszczególne elementy tej macierzy są zależne od:

- geometrii członów $0, 1, \dots, k-1$,
- rodzaju par kinematycznych,
- względnego położenia członów tworzących pary kinematyczne.

Jak wiadomo opis układu z wykorzystaniem notacji DH wymaga, aby człony tworzyły pary obrotowe R i/lub postępowe T . Występowanie innych par kinematycznych wymaga ich uprzedniego zastąpienia parami R i T . Po spełnieniu tego warunku kolejnym członom należy przypisać układy lokalne, poczynając od podstawy 0 , której przypisuje się układ nieruchomy $\{0\}$, a kolejnym członom kolejne układy lokalne – ostatniemu układ $\{k\}$ (rys. 2.29).



Rys. 2.29. Układ szeregowy przestrzenny

Dysponując układami lokalnymi, możemy zdefiniować kolejne macierze transformacji ${}^j\mathbf{A}_k$ zgodnie z (2.31), które zawierają informacje o orientacji i pozycji kolejnych członów względem siebie, a po wykonaniu odpowiednich mnożeń macierzy transformacji o orientacji i pozycji kolejnych członów względem podstawy. Człon k (układ $\{k\}$) względem podstawy 0 (układ $\{0\}$) jest opisany macierzą:

$${}^0\mathbf{A}_k = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \dots {}^{k-1}\mathbf{A}_k \quad (2.148)$$

Zależność (2.148) umożliwia ponadto określenie współrzędnych punktu M należącego do członu k w układzie podstawy $\{0\}$ z równania:

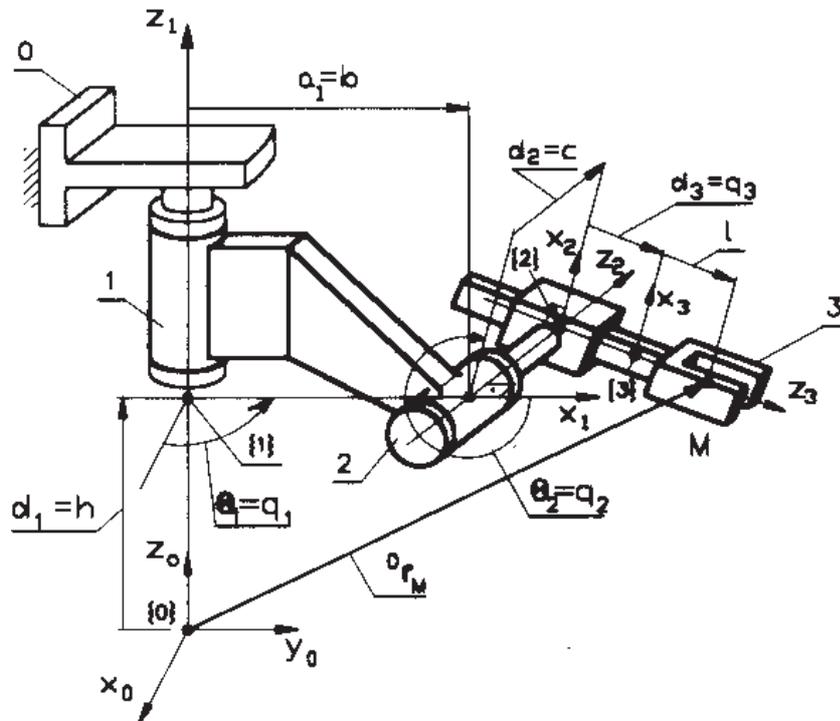
$${}^0\mathbf{r}_M = {}^0\mathbf{A}_k {}^k\mathbf{r}_M \quad (2.149)$$

PRZYKŁAD 2.12

Jako przykład analizy rozpatrzmy układ przestrzennego trójczłonowego manipulatora (rys. 2.30).

Zgodnie z regułami przyjmujemy następujące układy współrzędnych:

- oś z_1 układu $\{1\}$ związanego z członem 1 jest poprowadzona wzdłuż osi pary kinematycznej utworzonej przez człony 0 i 1, podobnie wzdłuż osi kolejnych par prowadzimy osie z_2 i z_3 ,
- oś x_1 ma przecinać oś z_2 i być do niej prostopadła, co wyznacza początek układu $\{1\}$, a tym samym oś y_1 ,



Rys. 2.30. Układ kinematyczny manipulatora

- oś x_2 ma przecinać oś z_3 i być do niej prostopadła, co wyznacza początek układu {2}
- początek układu {3} związanego z członem 3 można przyjąć dowolnie na osi z_3 , podobnie istnieje dowolność w przyjęciu kierunku osi x_3 – tutaj przyjęto x_3 równoległe do osi x_2 , co upraszcza zapis kinematyki,
- układ nieruchomy {0} związany z podstawą można przyjąć dowolnie – tutaj dla prostoty zapisu przyjęto współosiowość z_0 i z_1 .

Przyjmując oznaczenia wielkości geometrycznych jak na rys. 2.30, możemy już zdefiniować parametry DH niezbędne do wyznaczenia poszczególnych elementów macierzy transformacji:

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ \Theta \\ d \end{bmatrix} : {}^0\mathbf{A}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_1 = q_1 \\ d_1 = h \end{bmatrix} {}^1\mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} a_1 = b \\ \frac{3\pi}{2} \\ \Theta_2 = q_2 \\ d_2 = c \end{bmatrix} {}^2\mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} \\ 0 \\ d_3 = q_3 \end{bmatrix} \quad (2.150)$$

Etap ten wymaga szczególnej staranności, poprawne bowiem określenie parametrów DH jest podstawą poprawności wszelkich analiz, których dalsze etapy będą polegały już tylko na przekształceniach algebraicznych. Złożoność otrzymywanych zależności w ogólnym przypadku sprawia, że możliwość weryfikacji, jakkolwiek możliwa, jest jednak bardzo ograniczona.

Poszczególne macierze transformacji, zgodnie z (2.31), mają postać:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.152)$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

Kolejne mnożenia dają macierze transformacji poszczególnych członów do układu podstawy:

$${}^0\mathbf{A}_2 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 & -\sin q_1 & b \cos q_1 - c \sin q_1 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 \sin q_2 & \cos q_1 & b \sin q_1 + c \cos q_1 \\ \sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

$${}^0\mathbf{A}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 = {}^0\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 & -\sin q_1 & b \cos q_1 - c \sin q_1 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 \sin q_2 & \cos q_1 & b \sin q_1 + c \cos q_1 \\ \sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{A}_3 =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & \sin q_1 & -\cos q_1 \sin q_2 & -q_3 \cos q_1 \sin q_2 + b \cos q_1 - c \sin q_1 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 & -\sin q_1 \sin q_2 & -q_3 \sin q_1 \sin q_2 + b \sin q_1 + c \cos q_1 \\ \sin q_2 & 0 & -\cos q_2 & -q_3 \cos q_2 + h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

Współrzędne punktu M w układzie podstawy $\{0\}$ opisuje iloczyn:

$${}^0\mathbf{r}_M = {}^0\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{r}_M =$$

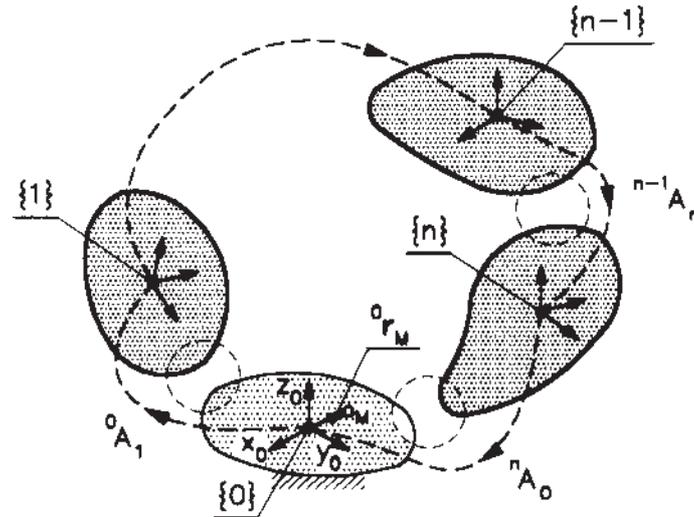
$$= \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & \sin q_1 & -\cos q_1 \sin q_2 & -q_3 \cos q_1 \sin q_2 + b \cos q_1 - c \sin q_1 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 & -\sin q_1 \sin q_2 & -q_3 \sin q_1 \sin q_2 + b \sin q_1 + c \cos q_1 \\ \sin q_2 & 0 & -\cos q_2 & -q_3 \cos q_2 + h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \\ 1 \end{bmatrix}$$

Po wymnożeniu otrzymujemy:

$${}^0\mathbf{r}_M = \begin{bmatrix} -l \cos q_1 \sin q_2 - q_3 \cos q_1 \sin q_2 + b \cos q_1 - c \sin q_1 \\ -l \sin q_1 \sin q_2 - q_3 \sin q_1 \sin q_2 + b \sin q_1 + c \cos q_1 \\ -l \cos q_2 - q_3 \cos q_2 + h \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.156)$$

2.4.2. Układy zamknięte

Na rysunku 2.31 przedstawiono ogólną postać jednokonturowego układu przestrzennego zamkniętego. Kolejnym członom przypisano układy lokalne, na członie 0 obrano punkt M .



Rys. 2.31. Uogólniony jednokonturowy układ zamknięty

Opiszmy współrzędne punktu M w kolejnych układach lokalnych:

- w układzie członu n

$${}^n \mathbf{r}_M = {}^n \mathbf{A}_0 {}^0 \mathbf{r}_M$$

- w układzie członu $n-1$

$${}^{n-1} \mathbf{r}_M = {}^{n-1} \mathbf{A}_n {}^n \mathbf{r}_M = {}^{n-1} \mathbf{A}_n {}^n \mathbf{A}_0 {}^0 \mathbf{r}_M$$

- w układzie członu 1

$${}^1 \mathbf{r}_M = {}^1 \mathbf{A}_2 \dots {}^{n-1} \mathbf{A}_n {}^n \mathbf{A}_0 {}^0 \mathbf{r}_M$$

- w układzie członu 0

$${}^0 \mathbf{r}_M = {}^0 \mathbf{A}_1 {}^1 \mathbf{A}_2 \dots {}^{n-1} \mathbf{A}_n {}^n \mathbf{A}_0 {}^0 \mathbf{r}_M$$

Otrzymana powyżej zależność daje tzw. równanie zamknięcia⁸ konturu układu przestrzennego w postaci

$${}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n {}^n\mathbf{A}_0 = \mathbf{I} \quad (2.157)$$

Równanie (2.157) stanowi podstawę analizy kinematycznej. Jego wykorzystanie w sposób formalny prowadzi do równania macierzowego, które umożliwia zdefiniowanie równań algebraicznych. Równanie (2.157) można też rozwiązywać metodami numerycznymi bez potrzeby dokonywania żmudnego mnożenia macierzy.

PRZYKŁAD 2.13

Jako przykład analizy zamkniętego układu przestrzennego rozpatrzmy układ czteroczołowy o szczególnej geometrii, którego cztery pary obrotowe przecinają się w jednym punkcie (rys. 2.32). Znany jest on w wykonaniu przedstawionym na rysunku jako przegub uniwersalny, a potocznie jako sprzęgło Cardana. Dzięki szczególnej geometrii układ ten ma możliwość transformowania ruchu obrotowego między wałami, których osie przecinają się pod pewnym kątem, przy czym bardzo korzystną cechą tego sprzęgła jest możliwość zmiany kąta β w czasie pracy. To sprawia, że jest ten układ często wykorzystywany w napędach maszyn i pojazdów. Członem czynnym jest wał 1.

Do analizy posłużono się tutaj notacją DH, co wymagało spełnienia obowiązujących w tej metodzie reguł. Osie z_i poszczególnych układów współrzędnych poprowadzono więc wzdłuż osi poszczególnych par kinematycznych, osie x_i są prostopadłe do osi z_{i+1} . Zgodnie z (2.157) dla zamkniętych układów jednokonturowych obowiązuje równanie:

$${}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$$

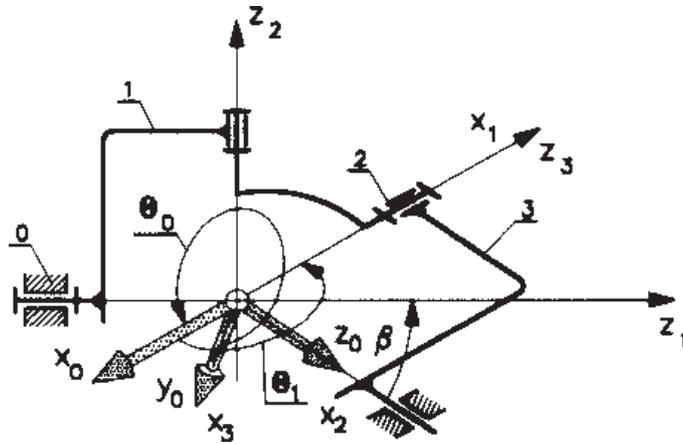
które dla ułatwienia przekształcono do postaci:

$${}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_0 = ({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} \quad (2.158)$$

Wstawienie poszczególnych parametrów DH zestawionych poniżej

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ \Theta \\ d \end{bmatrix} : {}^0\mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \Theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} {}^1\mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} \\ \Theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} {}^2\mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2} \\ \Theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} {}^3\mathbf{A}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ \Theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

⁸ Podobne równanie można uzyskać łatwo dla układów płaskich.



Rys. 2.32. Przegub uniwersalny – sprzęgło Cardana

do ogólnej postaci macierzy DH (2.31) daje w rezultacie następujące macierze transformacji:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ c\beta s\theta_1 & c\beta c\theta_1 & -s\beta & 0 \\ s\beta s\theta_1 & s\beta c\theta_1 & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_3 & -c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} c\theta_0 & -s\theta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie oznaczono: $s\theta_i = \sin \theta_i$, $c\theta_i = \cos \theta_i$.

Kolejne działania na tych macierzach skutkują zależnościami:

$${}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} c\theta_3 c\theta_0 & -c\theta_3 s\theta_0 & s\theta_3 & 0 \\ s\theta_0 & c\theta_0 & 0 & 0 \\ -s\theta_3 c\theta_0 & s\theta_3 s\theta_0 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 c\theta_0 - s\theta_2 s\theta_0 & -c\theta_2 c\theta_3 s\theta_0 - s\theta_2 c\theta_0 & c\theta_2 s\theta_3 & 0 \\ -s\theta_3 c\theta_0 & s\theta_3 s\theta_0 & c\theta_3 & 0 \\ -s\theta_2 c\theta_3 c\theta_0 - c\theta_2 s\theta_0 & s\theta_2 c\theta_3 s\theta_0 - c\theta_2 c\theta_0 & -s\theta_2 s\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

$$({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & c\beta s\theta_1 & s\beta s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\beta c\theta_1 & s\beta c\theta_1 & 0 \\ 0 & -s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

Zgodnie z (2.158) porównanie odpowiednich elementów macierzy (2.159) i (2.160) daje zależności określające kąty opisujące konfigurację układu. Wyrazy 2,3 (wiersz 2, kolumna 3) oraz 1,3 macierzy (2.159) i (2.160) dają równania umożliwiające obliczenie kątów θ_2 i θ_3 dla zadanej wartości θ_1 położenia członu czynnego w postaci:

$$\cos \theta_3 = \sin \beta \cos \theta_1, \quad \cos \theta_2 \sin \theta_3 = \sin \beta \sin \theta_1$$

Porównanie natomiast wyrazów 2,1 i 2,2 macierzy (2.159) i (2.160) daje następujące zależności:

$$-\sin \theta_3 \cos \theta_0 = -\sin \theta_1, \quad \sin \theta_3 \sin \theta_0 = \cos \beta \cos \theta_1$$

które po podzieleniu przez siebie stronami dają zależność wiążącą przemieszczenie kątowe wału napędzanego 3 w funkcji przemieszczenia wału napędzającego 1:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \theta_0} = \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\cos \beta} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_0 = \cos \beta \quad (2.161)$$

Rozwiązanie numeryczne. Pokazane na przykładzie przegubu Cardana wykorzystanie notacji DH doprowadziło w konsekwencji przekształceń do jawnych wyrażeń umożliwiających wyznaczanie przemieszczeń w poszczególnych parach układu. Jednak uzyskanie tych zależności było możliwe dzięki temu, że rozpatrywany układ ma bardzo szczególną geometrię, w której parametry DH mają wartości zerowe ($d_i = 0$) lub szczególne, kiedy sinus lub kosinus kąta α_i wynosi odpowiednio 1, -1 lub 0. W ogólnym przypadku uzyskanie takich jawnych zależności w układach przestrzennych zamkniętych jest trudne, a nawet bywa niemożliwe. Można się wtedy uciec do rozwiązania numerycznego, którego ideę przedstawiono w pracy [8].

Jak nietrudno zauważyć równanie macierzowe:

$${}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n {}^n\mathbf{A}_0 = \mathbf{I} \quad (2.162)$$

będzie spełnione, jeśli znany będzie wektor \mathbf{q}_0 zmiennych parametrów DH. W przypadku gdy przyjmujemy ich wartości z pewnym przybliżeniem, uzyskamy po wymnożeniu macierzy:

$${}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n {}^n\mathbf{A}_0 = \mathbf{H} \neq \mathbf{I} \quad (2.163)$$

Macierz \mathbf{H} będzie tym bliższa macierzy jednostkowej \mathbf{I} , im lepiej oszacujemy wektor rozwiązania \mathbf{q}_0 . Miarą poprawności rozwiązania może być funkcja celu F w postaci:

$$F = \sum_i \sum_j u_{ij}^2 \quad (2.164)$$

gdzie: $u_{ij} = h_{ij}$ dla $i \neq j$
 $u_{ij} = 1 - h_{ij}$ dla $i = j$, (h_{ij} – elementy macierzy \mathbf{H}).

Dla tak sformułowanej funkcji celu jej minimalna wartość równa zero odpowiada wektorowi \mathbf{q} , który spełnia równanie (2.162) i jednoznacznie określa konfigurację układu.

Zadanie minimalizacji funkcji celu (2.164) można rozwiązać jedną z wielu znanych metod programowania nieliniowego. Jedną z nich, którą skutecznie wykorzystano do znajdowania konfiguracji układów kinematycznych przestrzennych [8], jest metoda gradientowa DFP (*Davidon-Fletcher-Powell*) [2]. Podstawową zaletą tej metody, potwierdzoną wieloma eksperymentami numerycznymi, jest przede wszystkim brak konieczności dokładnego określania rozwiązania początkowego w postaci wektora \mathbf{q}_0 , co jest cechą nie do przecenienia w przypadku układów przestrzennych. Metoda DFP wymaga obliczania w kolejnych krokach gradientu \mathbf{G} minimalizowanej funkcji celu F w postaci:

$$\mathbf{G} = \left[\frac{\partial F}{\partial q_1} \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial q_k} \right]^T$$

gdzie q_i – składowe wektora \mathbf{q} . Kłopotliwy zabieg wyznaczania pochodnych można zastąpić wartościami przybliżonymi według zależności:

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{F(q_i + \Delta q_i) - F(q_i)}{\Delta q_i}$$

lub

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{F(q_i + \Delta q_i) - F(q_i - \Delta q_i)}{2\Delta q_i}$$

Dla takiej koncepcji uproszczenia obliczeń wielokrotnie uzyskano praktyczne potwierdzenie, uzyskując wyniki z zadowalającą dokładnością.

3. PRĘDKOŚĆ I PRZYSPIESZENIA

3.1. Wprowadzenie

Gdy znamy wielkości opisujące konfigurację układu kinematycznego, możemy przystąpić do opisu ruchu w zakresie prędkości i przyspieszeń, które definiujemy jako kolejne pochodne przemieszczenia względem czasu. Oczywiście, przemieszczeniu liniowemu $s_K(t)$ punktu K odpowiadają prędkość i przyspieszenie liniowe:

$$v_K = \dot{s}_K = \frac{ds_K}{dt}, \quad a_K = \ddot{s}_K = \frac{dv_K}{dt} = \frac{d^2s_K}{dt^2} \quad (3.1)$$

a przemieszczeniu kątowemu $\Theta_k(t)$, odnoszonemu do członu k , odpowiadają prędkość i przyspieszenieątowe:

$$\omega_k = \dot{\Theta}_k = \frac{d\Theta_k}{dt}, \quad \varepsilon_k = \ddot{\Theta}_k = \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{d^2\Theta_k}{dt^2} \quad (3.2)$$

Na podstawie zależności (3.1) i (3.2) można stwierdzić, że dla znanej konfiguracji układu, opisane jawnymi zależnościami zmienne w czasie przemieszczenia liniowe iątowe, umożliwiają obliczenie ich pierwszych i drugich pochodnych względem czasu, dając kolejno wyrażenia określające prędkość i przyspieszenie. Jednak już w przypadku analizy położeń pokazano, że dla wielu układów znalezienie takich jawnych funkcji jest bardzo kłopotliwe, a czasem nawet niemożliwe. Jak się jednak okaże, jawne zależności nie są niezbędne do wyznaczania prędkości i przyspieszenia. Ponadto, w przeciwieństwie do analizy położeń, gdzie na ogół zachodzi potrzeba rozwiązywania układu równań nieliniowych, w przypadku wyznaczania prędkości i przyspieszenia mamy do czynienia z układami równań liniowych.

Są różne metody wyznaczania parametrów ruchu, wiele z nich wynika wprost z metod opisu konfiguracji. Do wyznaczania prędkości i przyspieszeń wykorzystuje się więc współrzędne wektorowe, liczby zespolone, współrzędne absolutne i inne. Omówione zostaną wybrane z nich, jednak takie, które umożliwiają wykonanie analizy dowolnego układu, płaskiego i przestrzennego. Skróceni zostaną też omówione metody graficzne.

3.2. Metody graficzne – układy płaskie

Pracę inżyniera wspomagają komputery osobiste i wielorakie oprogramowanie, nasa suwa się więc pytanie o zasadność zamieszczania w podręcznikach i programach wykładów metod analizy inżynierskiej opartych na rysunku. Dotyczy to również graficznych metod wyznaczania prędkości i przyspieszeń, dla których kiedyś nie było alternatywy. Metody graficzne wymagają przecież żmudnego, wielokrotnego analizowania układu w kolejnych położeniach, a uzyskiwana dokładność, szczególnie w przypadku przyspieszeń pozostawia wiele do życzenia. W niniejszym opracowaniu zdecydowano jednak zamieścić podstawowe informacje o metodach graficznych w stopniu umożliwiającym rozwiązywanie prostych układów, a argumenty za tym przemawiające to:

- metody graficzne mają niezaprzeczalny walor dydaktyczny i pomagają lepiej zrozumieć ruch członów układu kinematycznego,
- posługiwanie się wektorami prędkości i przyspieszenia znakomicie wspomaga wyjaśnienie nie tylko elementów kinematyki, ale także statyki i dynamiki,
- umiejętność graficznej analizy układu kinematycznego umożliwia zweryfikowanie własnych procedur bazujących na metodach analitycznych, a także poprawności modeli tworzonych z wykorzystaniem profesjonalnych programów analizy układów kinematycznych.

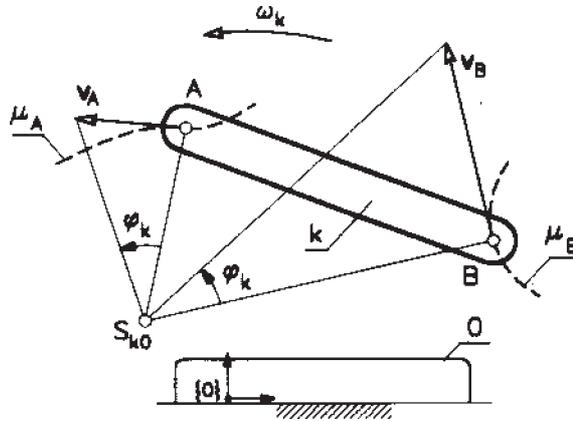
Szczegółowe rozważania analityczne, stanowiące podstawę metod graficznych można znaleźć w wielu podręcznikach mechaniki [24], [27], [28]. Poniżej podano, bez dowodów, tylko te informacje, które są niezbędne do rozwiązywania układów płaskich.

3.2.1. Środki obrotu chwilowego

Człony płaskich układów kinematycznych mogą wykonywać ruch postępowy (wtedy wszystkie punkty mają jednakowe prędkości), ruch obrotowy wokół nieruchomej osi oraz ruch płaski będący złożeniem ruchu postępowego i obrotowego. W tym ostatnim przypadku, dla zrozumienia istoty ruchu, pomocne jest wprowadzenie pojęcia środka obrotu chwilowego.

Ruch płaski członu k w układzie podstawy 0 (rys. 3.1), opisany prędkościami \mathbf{v}_A i \mathbf{v}_B punktów A i B (wektory prędkości są styczne do odpowiednich torów), można przyrównać do ruchu obrotowego wokół punktu S_{k0} , którego położenie znajdujemy na przecięciu prostych prostopadłych do wektorów prędkości \mathbf{v}_A i \mathbf{v}_B poprowadzonych z punktów A i B . Proste prostopadłe są jednocześnie normalnymi do trajektorii μ_A i μ_B . Otrzymany punkt S_{k0} jest środkiem obrotu chwilowego członu k w ruchu względem podstawy 0 . To bardzo przydatny element analizy kinematycznej (i nie tylko). Umożliwia łatwe obliczenie prędkości kątowej członu k ze wzoru:

$$\omega_k = \frac{v_A}{AS_{k0}} = \frac{v_B}{BS_{k0}}, \quad \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.3)$$



Rys. 3.1. Środek obrotu chwilowego

Dla rysunku wykonanego w podziałce wyrażenie określające prędkość kątową ω_k jest w sensie geometrycznym tangensem kąta φ_k , pod jakim ze środka obrotu chwilowego widziane są wektory prędkości:

$$\omega_k = \frac{v_A}{AS_{k0}} = \frac{v_B}{BS_{k0}} = \operatorname{tg} \varphi_k \quad (3.4)$$

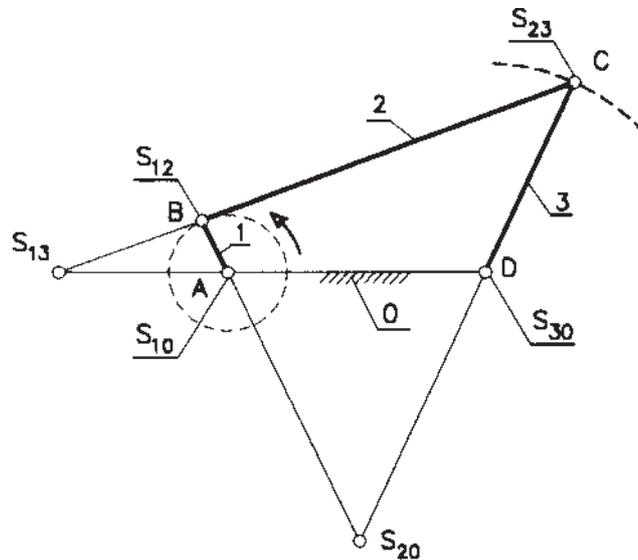
Własność ta ułatwia wykreślenie wektora prędkości każdego innego punktu członu k , który też jest widziany z punktu S_{k0} pod tym samym kątem.

Rozpatrzony przypadek (rys. 3.1) dotyczył ruchu członu k względem nieruchomej podstawy 0, co znakomicie ułatwia analizę. Jednak w układzie kinematycznym sytuacja jest bardziej złożona. Mamy bowiem do czynienia z większą liczbą członów, z których każdy porusza się względem podstawy, ale jednocześnie obserwujemy ruch członów ruchomych względem siebie. Ogólnie liczba środków obrotu i_S wynika z faktu, że każdy człon z każdym pozostaje w ruchu względnym, a zatem w układzie złożonym z n członów, włącznie z podstawą, jest:

$$i_S = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} \quad (3.5)$$

Taka sytuacja występuje już w prostym układzie czworoboku przegubowego (rys. 3.2), w którym zgodnie z (3.5) wyróżniamy sześć środków obrotu – zebrane w tabelicę dla układu z rys. 3.2:

Nrcz.	0	1	2	3	$S_{ij} \equiv S_{ji}$
0	×	S_{01}	S_{02}	S_{03}	
1	×	×	S_{12}	S_{13}	
2	×	×	×	S_{23}	
3	×	×	×	×	



Rys. 3.2. Czworobok przegubowy – środki obrotu chwilowego

Położenie czterech z nich jest oczywiste – tworząc pary obrotowe A, B, C, D fizycznie zmuszono człony 0, 1, 2 i 3 do względnego ruchu obrotowego i odpowiednie środki leżą w środkach geometrycznych par (patrz rys. 3.2). Wobec tego, że ruch członu 2 względem podstawy 0 można rozpatrywać jako ruch punktów B i C , których trajektorie są kołowe, środek obrotu chwilowego S_{20} leży na przecięciu się normalnych do torów punktu B i C , a więc na przedłużeniu członów 1 i 3.

Nieco bardziej kłopotliwe może się wydawać określenie położenia środka obrotu chwilowego S_{13} , który wynika z ruchu względnego członów 1 i 3. Można tutaj, przez analogię do ruchu względnego członu 2 w układzie członu 0, obserwować ruch członu 3 w układzie członu 1, lokując się (jako obserwator) na członie 1. Wtedy okaże się, że przedłużenie kierunków członów 0 i 2 daje na przecięciu położenie S_{13} .

Z analizy schematu układu z rys. 3.2, z naniesionymi środkami obrotu, wynika pewna prawidłowość – po trzy środki obrotu chwilowego leżą na liniach prostych poprowadzonych wzdłuż kolejnych członów:

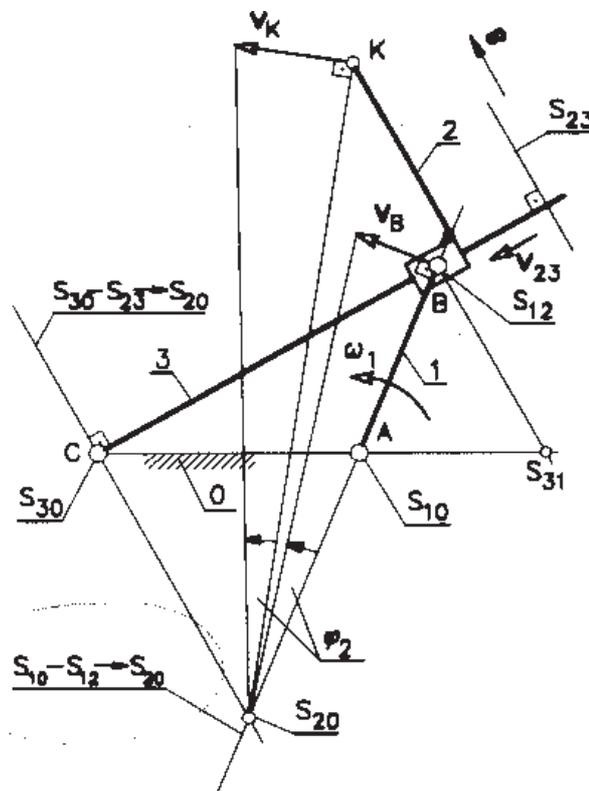
prosta BC :	S_{13}	S_{12}	S_{23}	indeksy $[1, 2, 3]$
prosta AD :	S_{13}	S_{10}	S_{30}	indeksy $[1, 3, 0]$
prosta AB :	S_{12}	S_{10}	S_{20}	indeksy $[1, 2, 0]$
prosta CD :	S_{23}	S_{30}	S_{20}	indeksy $[2, 3, 0]$

Zauważmy, że na każdej prostej leżą po trzy środki obrotu, jakie tworzą ze sobą trzy człony, których numery dla kolejnych prostych zestawiono w nawiasach kwadratowych.

Taka prawidłowość jest w każdym układzie płaskim i znana jako twierdzenie o trzech środkach obrotu¹:

Jeżeli trzy człony k, l, m układu płaskiego znajdują się w ruchu względnym, to występujące wtedy trzy środki obrotu S_{kl}, S_{km}, S_{lm} zawsze leżą na jednej prostej – zatem położenie dwóch z nich wyznacza prostą, na której musi leżeć trzeci.

Podana reguła ułatwia znajdowanie środków obrotu w bardziej złożonych przypadkach, o czym można się przekonać już na przykładzie prostego układu jarzmowego z rys. 3.3. Poszukując prędkości punktu K suwaka 2, dogodnie jest posłużyć się środkiem



Rys. 3.3. Układ jarzmowy – środki obrotu chwilowego

obrotu S_{20} , którego położenie określimy z przecięcia się dwóch prostych poprowadzonych przez inne, których położenie jest oczywiste. Podobnie jak w przypadku układu poprzedniego, w wyniku utworzenia par kinematycznych A, B i C , człony 1 i 0, 1 i 2 oraz 3 i 0 są zmuszone do względnego ruchu obrotowego, tworząc środki S_{10}, S_{12} i S_{30} .

¹ Twierdzenie Aronholdta–Kennedy’ego.

Człony 2 i 3 poruszają się względem siebie ruchem postępowym, co jest wymuszone parą postępową. Prędkość względna \mathbf{v}_{23} w parze postępowej leży na kierunku członu 3, a prostopadła do \mathbf{v}_{23} wyznacza kierunek, na którym w nieskończoności leży środek S_{23} . Posługując się twierdzeniem o trzech środkach obrotu:

$$\left. \begin{array}{l} S_{10} \text{ i } S_{12} \\ S_{30} \text{ i } S_{23} \end{array} \right\} \rightarrow S_{20}$$

znajdujemy zatem S_{20} . Dla znanej prędkości kątowej ω_1 członu 1 wyznaczamy prędkość punktu B :

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{AB}$$

Prędkości punktów B i K , które należą do członu 2, widziane są ze środka S_{20} pod jednakowym kątem φ_2 , co wynika wprost z równań:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{S_{20}B} \\ \mathbf{v}_K = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{S_{20}K} \end{array} \right\} \rightarrow \omega_2 = \frac{v_B}{BS_{20}} = \frac{v_K}{KS_{20}}$$

W uzupełnieniu dla układu z rys. 3.3 znaleziono też środek obrotu S_{31} , kreśląc dwie proste na podstawie twierdzenia o trzech środkach obrotu:

$$\left. \begin{array}{l} S_{30} \text{ i } S_{10} \\ S_{21} \text{ i } S_{23} \end{array} \right\} \rightarrow S_{31}$$

Informacje dotyczące środków obrotu wymagają jeszcze uzupełnienia odnoszącego się do układów z parami wyższymi. Znane powszechnie skojarzenie, w którym występuje toczenie bez poślizgu nie wymaga wyjaśnień – środek obrotu leży w punkcie styku. Odmienna sytuacja jest w przypadku skojarzenia dwóch członów parą wyższą w taki sposób, że w punkcie styku występuje poślizg (rys. 3.4). Wtedy S_{12} leży na prostopadłej do prędkości poślizgu \mathbf{v}_{12} . Ponieważ w wyniku utworzenia par obrotowych położenie środków obrotu S_{10} i S_{20} jest oczywiste, więc z reguły o trzech środkach obrotu mamy drugą prostą:

$$S_{10} \text{ i } S_{20} \rightarrow S_{12}$$

na której również leży S_{12} . Punkt przecięcia tych prostych wyznacza zatem S_{12} jednoznacznie.

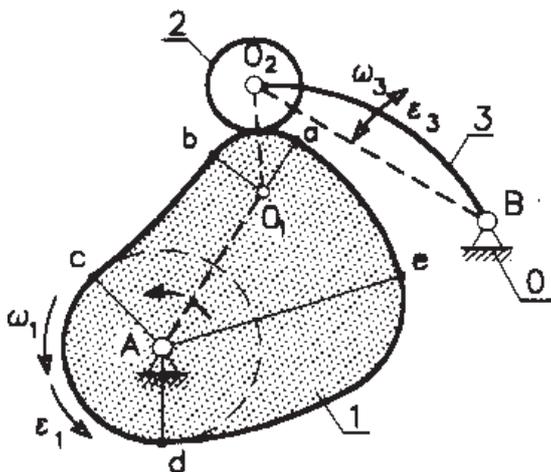
Rys. 3.4. Mechanizm krzywkowy – środki obrotu chwilowego

3.2.2. Układy równoważne kinematycznie

Analiza kinematyczna, z zastosowaniem metod graficznych, opiera się przede wszystkim na równaniach wektorowych wiążących prędkość i przyspieszenie punktów. Równania te są jasne i zrozumiałe dla tych układów, których człony tworzą pary niższe – obrotowe (R) lub postępowe (T). Kiedy człony tworzą parę wyższą, oczywiste są równania wiążące wektor prędkości, natomiast dla przyspieszenia napotykamy trudności interpretacyjne. W związku z tym do celów analizy kinematycznej dogodnie jest posługiwać się układami równoważnymi kinematycznie, które powstają przez zastąpienie par wyższych dodatkowymi członami i parami niższymi. Okazuje się, że taka modyfikacja układu kinematycznego jest możliwa w każdym przypadku i jakkolwiek skutkuje zwiększoną liczbą członów układu, to w zamian procentuje przejrzystością równań określających prędkość i przyspieszenie.

Tworzenie układów równoważnych kinematycznie opiera się na dwóch regułach. Pierwsza dotyczy eliminowania par wyższych i mówi, że w miejsce skojarzenia dwóch członów parą kinematyczną wyższą, utworzoną w układach płaskich przez dwa krzywoliniowe segmenty, można wprowadzić dodatkowy człon dwuwęzłowy, który włączony jest w układ pierwotny parami I klasy R lub T . Jeżeli krzywizny obu segmentów mają skończone wartości, dodatkowy człon z parami obrotowymi łączy środki obu krzywizn. Jeśli jedna z krzywizn ma środek w nieskończoności, to jedna z par jest postępową. Druga z reguł dotyczy możliwości przemieszczania pary kinematycznej postępowej o dowolną wartość, jeżeli tylko zachowamy równoległość kierunku ruchu względnego członów ją tworzących.

Na rysunku 3.5 przedstawiono układ transformujący ciągły ruch obrotowy krzywki 1 na wahadłowy popychacza 3, charakteryzujący się dwoma przystankami. Postój członu biernego 3 jest wtedy, kiedy krążek 2 współpracuje z krzywką 1 na segmentach dc i ae . W położeniu przedstawionym na rys. 3.5 współpraca krzywki i krążka oznacza stałą odległość środków krzywizn O_1 i O_2 . Wyeliminowanie pary wyższej przez zastąpienie jej dodatkowym członem O_1O_2 nie zmienia charakteru ruchu, a ważność tego układu zastępczego rozciąga się na cały segment ab . W tym położeniu zamiast rozpatrywać kinematykę mechanizmu krzywkowego (z parą wyższą 1–2) dogodniej jest prowadzić analizę równoważnego układu dźwigniowego AO_1O_2B . Jeżeli w takim układzie będziemy wymuszać ruch członu AO_1 w sposób tożsamy z ruchem krzywki



Rys. 3.5. Mechanizm krzywkowy $R \rightarrow R$ i układ równoważny kinematycznie

W położeniu przedstawionym na rys. 3.5 współpraca krzywki i krążka oznacza stałą odległość środków krzywizn O_1 i O_2 . Wyeliminowanie pary wyższej przez zastąpienie jej dodatkowym członem O_1O_2 nie zmienia charakteru ruchu, a ważność tego układu zastępczego rozciąga się na cały segment ab . W tym położeniu zamiast rozpatrywać kinematykę mechanizmu krzywkowego (z parą wyższą 1–2) dogodniej jest prowadzić analizę równoważnego układu dźwigniowego AO_1O_2B . Jeżeli w takim układzie będziemy wymuszać ruch członu AO_1 w sposób tożsamy z ruchem krzywki

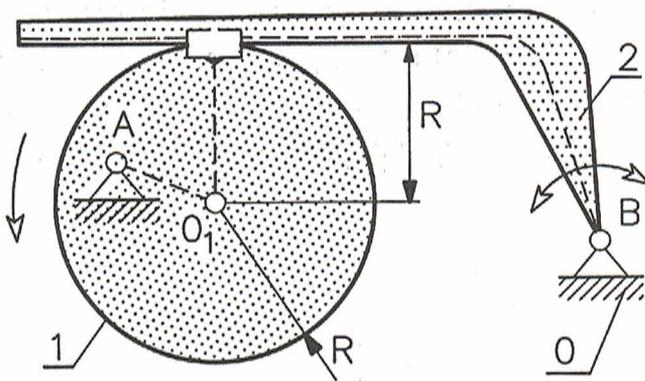
ki 1, to uzyskany ruch członu O_2B jest tożsamy z ruchem popychacza 3 układu rzeczywistego.

Łatwo zauważyć, że na ogół wymiary układu zastępczego będą się zmieniać. Dla układu z rys. 3.5 w fazie kontaktu krzywki i krążka na segmencie ae środek krzywizny krzywki leży w punkcie A i człon AO_1 ma długość zerową, co skutkuje przystankiem popychacza 3.

Przypadek utworzenia pary wyższej z dwóch segmentów, z których jeden ma zarys prostoliniowy (promień krzywizny równy nieskończoność) pokazano na rys. 3.6. Układ równoważny powstaje przez wprowadzenie dodatkowego członu z jedną parą postępową. Prostoliniowy fragment popychacza 2 współpracujący z krzywką 1 pozostaje w każdym położeniu mechanizmu w stałej odległości od środka kołowej tarczy 1 umocowanej w podstawie obrotowo w punkcie A .

Analizę mechanizmu krzywkowego prowadzimy na równoważnym układzie dźwigniowym – na rys. 3.6 naniesiony linią przerywaną.

Na rysunku 3.7 pokazano schemat mechanizmu jarzmowego, którego zadanie polega na przemieszczaniu punktu M po trajektorii μ_M , przy czym ruch układu jest wymuszany obrotem członu 1. Więzy członu 3 nałożone na ruch członu 2 zabezpieczają stałą odległość linii BM od punktu D – środka pary obrotowej utworzonej przez człony 0 i 3.

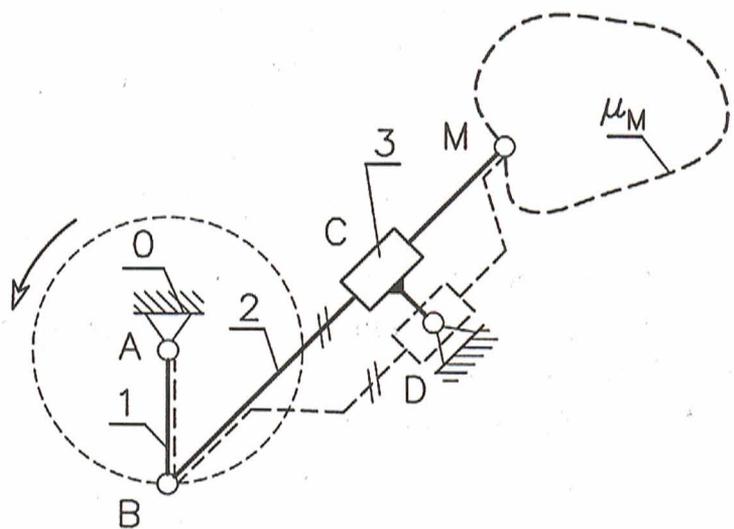


Rys. 3.6. Mechanizm krzywkowy $R \rightarrow R$ i równoważny układ dźwigniowy

Identyczne więzy – stałą odległość linii BM od punktu D – zapewnia układ narysowany linią przerywaną, w którym para postępową została przeniesiona do punktu D z zachowaniem pierwotnego kierunku ruchu względnego członów 2 i 3. Dla więzów nie zmienionych uży-

skany układ będzie realizował identyczną transformację ruchu obrotowego członu 1 na ruch punktu M , a analiza układu zastępczego, zwłaszcza na etapie określania przyspieszenia, jest zdecydowanie prostsza.

Przedstawione reguły eliminowania par kinematycznych wyższych prowadzą każdorazowo do układu dźwigniowego. Nie oznacza to, że analiza kinematyczna układów z parami wyższymi zawsze wymaga takiego zabiegu. Sugerowane tutaj po-



Rys. 3.7. Mechanizm jarzmowy i układ równoważny kinematycznie

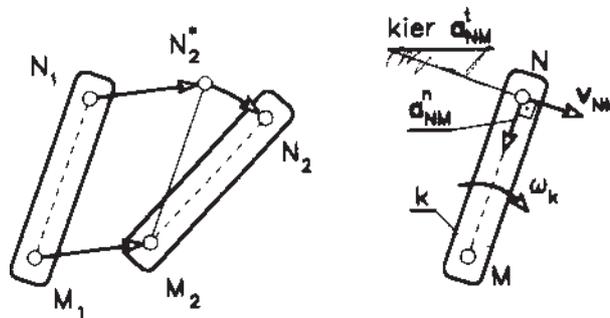
stępowanie należy traktować jako propozycję ułatwienia analizy, a zwłaszcza jednolitego traktowania wszystkich układów jako dźwigniowych. Zwróćmy przy tym uwagę, że czasem w układach zastępczych zostanie wyeliminowany jakiś człon (np. krążek 2 na rys. 3.5), a tym samym pozbawiamy się możliwości analizy jego ruchu. W razie takiej potrzeby przejściowe stosowanie układu zastępczego może mieć funkcję pomocniczą.

3.2.3. Równania wektorowe, plany

Wobec poczynionych sugestii eliminowania par wyższych w układach kinematycznych podlegających analizie kinematycznej przedstawiamy równania wektorowe wiążące prędkość i przyspieszenie punktów członów płaskich układów kinematycznych. Aby zależności takie były prawdziwe, punkty, których one dotyczą, muszą spełniać jeden z warunków:

- obydwie punkty należą do jednego członu,
- punkty należą do dwóch członów tworzących parę postępową² i pokrywają się.

Ruch względny punktów jednego członu. Rozpatrując ruch płaski (rys. 3.8), zwróćmy uwagę, że możemy go rozpatrywać jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego. Tłumaczy to schemat przemieszczania członu MN od położenia M_1N_1 do M_2N_2 . Faza pierwsza to ruch postępowy do położenia $M_2N_2^*$, po której punkt M już zajął swoje położenie M_2 , a druga to ruch obrotowy wokół M_2 , tak aby N_2^* przemieścić do położenia N_2 .



Rys. 3.8. Ruch złożony płaski członu MN

Przechodząc od przemieszczenia do prędkości i przyspieszenia, możemy dla ruchu złożonego płaskiego napisać równania wiążące parametry ruchu punktów M i N jednego członu (rys. 3.8).

- Dla prędkości mamy:

$$\mathbf{v}_N = \mathbf{v}_M + \mathbf{v}_{NM} \quad (3.6)$$

² Istnieją też związki między punktami „w styku” dwóch członów tworzących parę wyższą.

Pierwszy składnik prawej strony równania (3.6) jest konsekwencją ruchu postępowego członu k , drugi jego ruchu obrotowego (obrót punktu N wokół „nieruchomego” punktu M). W tej sytuacji oczywiste jest powiązanie wektora prędkości względnej liniowej \mathbf{v}_{NM} z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}_k$ członu k

$$\mathbf{v}_{NM} = \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{r}_{MN} \quad (3.7)$$

- Dla przyspieszenia mamy:

$$\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_M + \mathbf{a}_{NM} = \mathbf{a}_M + \mathbf{a}_{NM}^n + \mathbf{a}_{NM}^t \quad (3.8)$$

Analogicznie do prędkości drugi składnik prawej strony równania (3.8) jest wynikiem obracania punktu N wokół „nieruchomego” M . Przyspieszenie względne \mathbf{a}_{NM} rozłożone jest na dwie składowe – normalną i styczną³ – powiązane w sposób oczywisty z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}_k$ i przyspieszeniem kątowym $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ zależnościami:

$$\mathbf{a}_{NM}^n = \boldsymbol{\omega}_k \times (\boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{r}_{MN}) = -\omega_k^2 \mathbf{r}_{MN} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{a}_{NM}^t = \boldsymbol{\varepsilon}_k \times \mathbf{r}_{MN} \quad (3.10)$$

Składowa normalna \mathbf{a}_{NM}^n wektora przyspieszenia względnego \mathbf{a}_{NM} jest skierowana od punktu N do M , składowa styczna \mathbf{a}_{NM}^t ma kierunek zgodny z wektorem prędkości względnej \mathbf{v}_{NM} (rys. 3.8).

Ruch względny punktów dwóch członów. W przypadku punktów dwóch członów istnieją analogiczne związki wiążące prędkość i przyspieszenie, przy czym to ostatnie jest uzupełnione o składową przyspieszenia Coriolisa [27]. Dwa przypadki skojarzenia członów j, k parą postępową pokazano na rys. 3.9. W pierwszym przypadku mamy wariant ogólny z prowadnicą łukową (promień $\boldsymbol{\rho}$), w drugim prowadnica jest prostoliniowa. Punkty J i K należą odpowiednio do członów j i k .

Dla pary z prowadnicą łukową i prostoliniową mamy równanie prędkości:

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_J + \mathbf{v}_{KJ} \quad (3.11)$$

Prędkość względna \mathbf{v}_{KJ} jest w obu przypadkach styczna do toru punktu K w układzie prowadnicy j . Zwróćmy uwagę, że w przypadku prowadnicy łukowej mamy do czynienia z ruchem obrotowym członu k względem członu j – człon k obraca się wokół środka krzywizny O_j . Prędkość kątowa ${}^j\boldsymbol{\omega}_k$ członu k w układzie członu j i prędkość względna liniowa \mathbf{v}_{KJ} są powiązane równaniem:

$$\mathbf{v}_{KJ} = {}^j\boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{\rho} \quad (3.12)$$

³ Istnieje tutaj spór z terminologią mechaniki klasycznej, gdzie przyspieszenie styczne i normalne jest przypisywane ruchowi punktu w układzie nieruchomym, natomiast w ruchu względnym operuje się często, choć nie zawsze, przyspieszeniem obrotowym (tutaj styczne) i doosiowym (tutaj normalne).

Zależność wiążącą przyspieszenia dwóch punktów K i J dla prowadnicy łukowej (rys. 3.9) to:

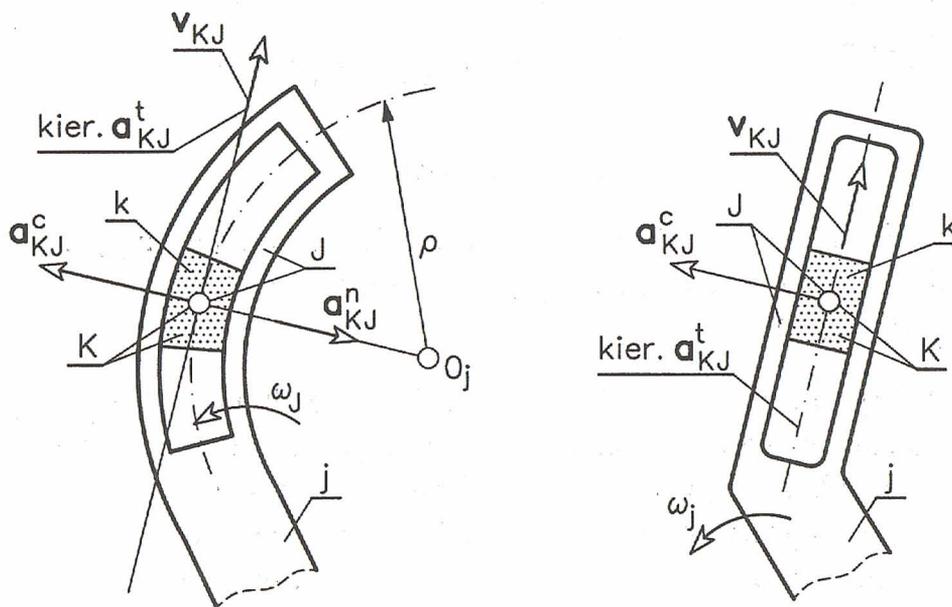
$$\mathbf{a}_K = \mathbf{a}_J + \mathbf{a}_{KJ} = \mathbf{a}_J + \mathbf{a}_{KJ}^n + \mathbf{a}_{KJ}^t + \mathbf{a}_{KJ}^c \quad (3.13)$$

a składową normalną \mathbf{a}_{KJ}^n przyspieszenia względnego \mathbf{a}_{KJ} wyraża równanie:

$$\mathbf{a}_{KJ}^n = {}^j\boldsymbol{\omega}_k \times ({}^j\boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{\rho}) = -{}^j\boldsymbol{\omega}_k^2 \boldsymbol{\rho} \quad (3.14)$$

Ruch obrotowy członu k w układzie członu j łączy się z przyspieszeniem kątowym stycznym ${}^j\boldsymbol{\varepsilon}_k$ powiązaniem z przyspieszeniem względnym stycznym zależnością:

$$\mathbf{a}_{KJ}^t = {}^j\boldsymbol{\varepsilon}_k \times \boldsymbol{\rho} \quad (3.15)$$



Rys. 3.9. Ruch suwaka k w prowadnicy j

Trzecia składowa przyspieszenia względnego \mathbf{a}_{KJ} jest przyspieszeniem Coriolisa, będącego wynikiem obracania się członu j z prędkością kątową unoszenia ω_j i jest obliczane z zależności:

$$\mathbf{a}_{KJ}^c = 2\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{v}_{KJ} \quad (3.16)$$

W przypadku prowadnicy prostoliniowej, najczęściej występującej w układach rzeczywistych, w równaniu określającym przyspieszenie nie występuje składowa normalna przyspieszenia względnego \mathbf{a}_{KJ}^n ($\rho = 0$) i wtedy:

$$\mathbf{a}_K = \mathbf{a}_J + \mathbf{a}_{KJ} = \mathbf{a}_J + \mathbf{a}_{KJ}^t + \mathbf{a}_{KJ}^c \quad (3.17)$$

Plan prędkości i przyspieszeń. Analizę kinematyki metodami graficznymi prowadzi się dla jednego położenia układu, rozwiązując kolejno równania prędkości i przyspieszeń. Rysując wektory prędkości (przyspieszenia) punktów jednego członu w taki sposób, aby ich początki pokrywały się, uzyskujemy tzw. plan prędkości (przyspieszeń) członu wyznaczony przez końce tak poprowadzonych wektorów. W obu przypadkach końce wektorów prędkości (przyspieszenia) punktów wyznaczają figurę geometrycznie podobną do tej, jaką wyznaczają te punkty na członie. To bardzo pożyteczna cecha planu prędkości i przyspieszenia. Mając bowiem wyznaczoną prędkość (przyspieszenie) dwóch punktów jednego członu, możemy bez uciekania się do równań wyznaczyć prędkość (przyspieszenie) każdego innego punktu tego samego członu. Mniej ważną cechą planu prędkości jest to, iż jest on figurą obróconą w stosunku do odpowiadającej jej na członie o kąt prosty w kierunku zgodnym z prędkością kątową.

PRZYKŁAD 3.1

W układzie przedstawionym na rys. 3.10 jest zadany ruch korby AB , ze stałą prędkością kątową ω_1 , co określa prędkość i przyspieszenie członów i ich punktów, które wyznaczymy na podstawie wprowadzonych równań wektorowych. Zadanie rozwiązuje się w określonym położeniu.

Spośród członów układu łącznik 2 wykonuje ruch płaski, który do wyznaczenia prędkości dogodnie jest rozpatrywać jako ruch obrotowy wokół środka obrotu chwilowego S_{20} . Wyznaczenie jego położenia można wesprzeć twierdzeniem o trzech środkach obrotu lub prowadząc proste prostopadłe do oczywistych kierunków prędkości punktów B i C członu 2. Dla znanych wymiarów i zadanego ruchu członu 1 prędkość punktu B wyznacza równanie:

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{AB} \quad (3.18)$$

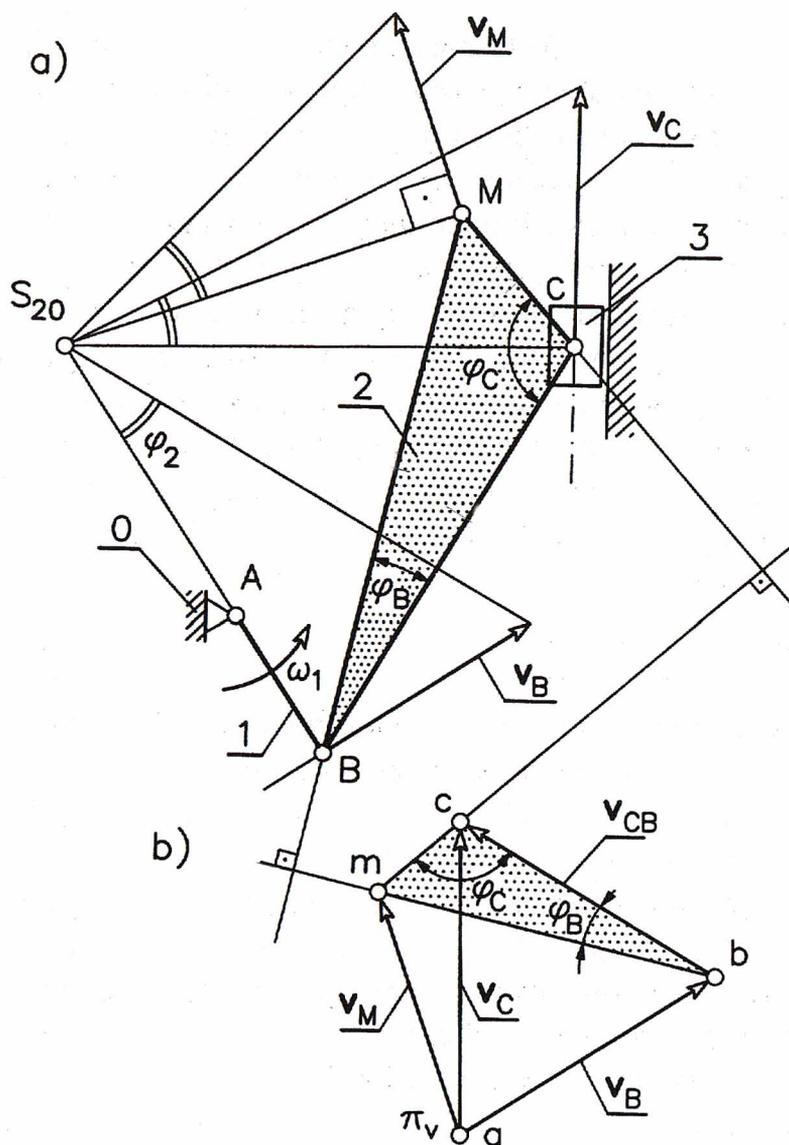
Znając położenie środka S_{20} , korzystając z zasady, że prędkość wszystkich punktów członu 2 w ruchu względem podstawy 0 widziana jest pod tym samym kątem φ_2 , możemy już znaleźć prędkość punktów C i M członu 2. Prędkość punktu C wyznacza też prędkość członu 3 o ruchu postępowym. Prędkość punktów B , C , M członu 2 i jego prędkość kątową są powiązane równaniami:

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{S_{20}B}, \quad \mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{S_{20}C}, \quad \mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{S_{20}M}$$

Inny sposób wyznaczenia prędkości jest oparty na równaniach wektorowych (3.6). Po wyznaczeniu wektora prędkości punktu B (3.18) otrzymujemy równanie:

$$\underline{\mathbf{v}_C} = \underline{\mathbf{v}_B} + \underline{\mathbf{v}_{CB}} \quad (3.19)$$

Gdy znamy wektor \mathbf{v}_B (podwójne podkreślenie) oraz kierunki \mathbf{v}_C oraz \mathbf{v}_{CB} (jedno podkreślenie), graficzne rozwiązanie równania (3.19) jest oczywiste i pokazane na rys. 3.10b – trójkąt π_{vbc} . Wyznaczenie wektora prędkości punktu M jest możliwe teraz na dwa sposoby.



Rys. 3.10. Prędkość układu korbowo-wodzikowego

Sposób pierwszy polega na rozwiązaniu graficznym układu równań wektorowych:

$$\left. \begin{aligned} \underline{v_M} &= \underline{v_B} + \underline{v_{MB}} \\ \underline{v_M} &= \underline{v_C} + \underline{v_{MC}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{v_M} \quad (3.20)$$

Na podstawie poprzednio wykreślonego trójkąta $\pi_v bc$ wystarczy tylko zgodnie z równaniami (3.20) poprowadzić znane kierunki mc i mb prędkości względnych v_{MC} i v_{MB} odpowiednio prostopadłe do boków MC i MB członu 2. Analizując kierunki boków trójkątów bcm i BCM , stwierdzamy, że są one do siebie wzajemnie prostopadłe, a to oznacza ich podobieństwo geometryczne ($\Delta bcm \approx \Delta BCM$). Prostą konsekwencją podobieństwa jest równość kątów φ_B i φ_C figur BCM i bcm . Trójkąt bcm wraz z biegunem π_v tworzą plan prędkości członu BCM . Na schemacie prędkości można wyróżnić też plan prędkości dwóch pozostałych członów układu. Odcinek ab jest więc planem prędkości członu AB (punkt a pokrywa się z π_v , gdyż jego prędkość jest zerowa), nato-

miast planem prędkości członu 3 – suwaka o ruchu postępowym – jest punkt c , gdyż prędkości wszystkich punktów suwaka 3 są jednakowe.

Gdy dysponujemy wektorami prędkości, możemy przystąpić do wyznaczania przyspieszeń. Algorytm postępowania jest dokładnym powtórzeniem kolejnych faz wyznaczania prędkości z wykorzystaniem równań wektorowych rozwiązywanych graficznie⁴. W pierwszym kroku wyznaczamy przyspieszenie punktu B , które ma tylko składową normalną:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t$$

$$\mathbf{a}_B^n = -\omega_1^2 \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{a}_B^t = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \mathbf{r}_{AB} = 0 \quad (\omega_1 = \text{const} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = 0)$$

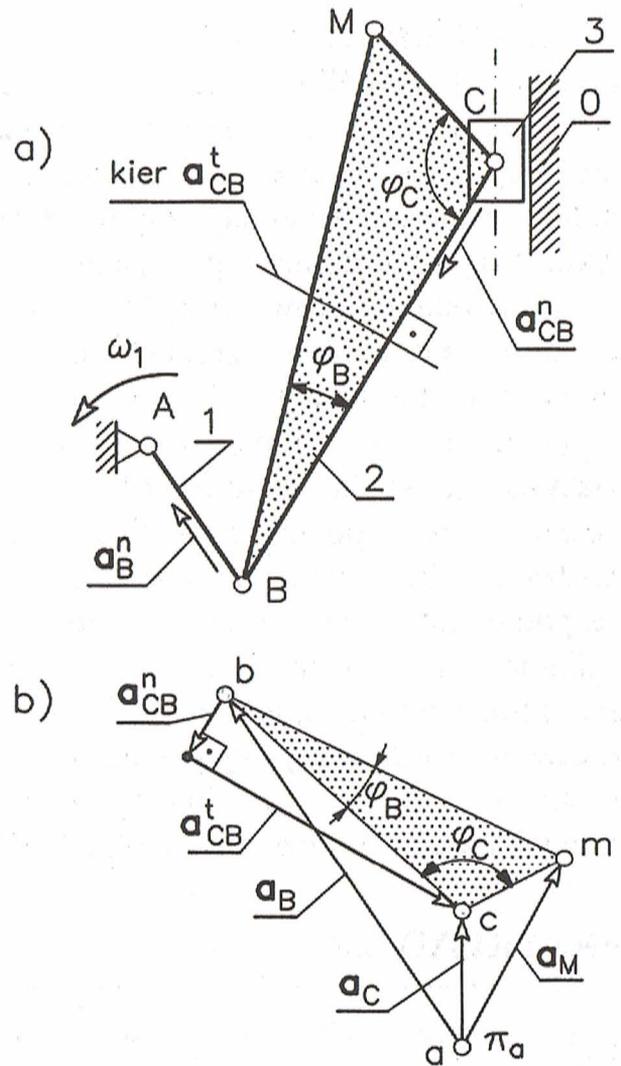
Kolejne równanie wektorowe, podobnie do (3.19), to:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t \quad (3.21)$$

$$\mathbf{a}_{CB}^n = -\omega_2^2 \mathbf{r}_{BC}$$

W równaniu (3.21) dwa wektory są znane (podwójne podkreślenie), dwa pozostałe są znane co do kierunków, więc rozwiązanie graficzne jest możliwe (rys. 3.11b). Po wyznaczeniu planu przyspieszenia członu 2, na razie tylko w formie punktów $\pi_a b c$, dalszą analizę można oprzeć na, zaobserwowanym już w przypadku prędkości, twierdzeniu o podobieństwie planu przyspieszeń i członu. Gdy mamy kąty φ_B i φ_C na członie 2, wówczas można przenieść je na plan przyspieszeń, określić położenie punktu m , a odcinek $\pi_a m$ wyznaczy wektor przyspieszenia punktu M (rys. 3.11b). W uzupełnieniu analizy przyspieszenia zauważmy jeszcze, że przyspieszenie kątowe członu 2 wyznacza równanie:

$$\mathbf{a}_{CB}^t = \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{CB}$$



Rys. 3.11. Przyspieszenie układu korbowo-wodzikowego

⁴ Taka zasada obowiązuje zawsze, jeżeli przy wyznaczaniu prędkości nie posługujemy się środkami obrotu lub innymi sposobami wyznaczania kierunków wektorów prędkości, np. trajektoriami.

3.2.4. Układy złożone płaskie

Przedstawione równania wektorowe prędkości i przyspieszeń, zastosowane w przykładzie 3.1, umożliwiają analizę zdecydowanej większości układów kinematycznych w praktyce. Już w trakcie omawiania topologii zwrócono uwagę na licznosc zbioru możliwych rozwiązań układów kinematycznych. Różne są liczby członów i struktura połączeń parami kinematycznymi. Pośród wielu możliwych układów są takie, które wymagają szczególnego podejścia w analizie prędkości i przyspieszeń prowadzonej z wykorzystaniem równań wektorowych. Ich bezpośrednie wykorzystanie nie prowadzi do rozwiązania, a przeszkodą okazuje się brak wystarczających informacji o kierunkach lub modułach niektórych wektorów.

Istotna jest umiejętność rozpoznawania takich układów. Można się tutaj wesprzeć klasyfikacją według Assura [16]. Nie rozwijając tutaj tego zagadnienia, zwrócimy tylko uwagę, że rozpoznanie takich układów jest jednak stosunkowo proste na etapie sporządzania schematu układu. Jeśli przy graficznym wyznaczaniu konfiguracji układu trzeba pomocniczo wyznaczać trajektorie wybranych punktów lub modyfikować układ, zmieniając jego człon czynny, to z całą pewnością przełoży się to na trudności w analizie prędkości i przyspieszenia. Można przypomnieć układ z rys. 2.11, dla którego wyznaczenie konfiguracji wymagało wykreślenia pomocniczej trajektorii. W klasyfikacji Assura, po założeniu, że człon czynny to suwak (punkt F) układ z rys. 2.11 jest mechanizmem III klasy. Analizę kinematyczną innego układu III rozpatrzono na przykładzie 3.2.

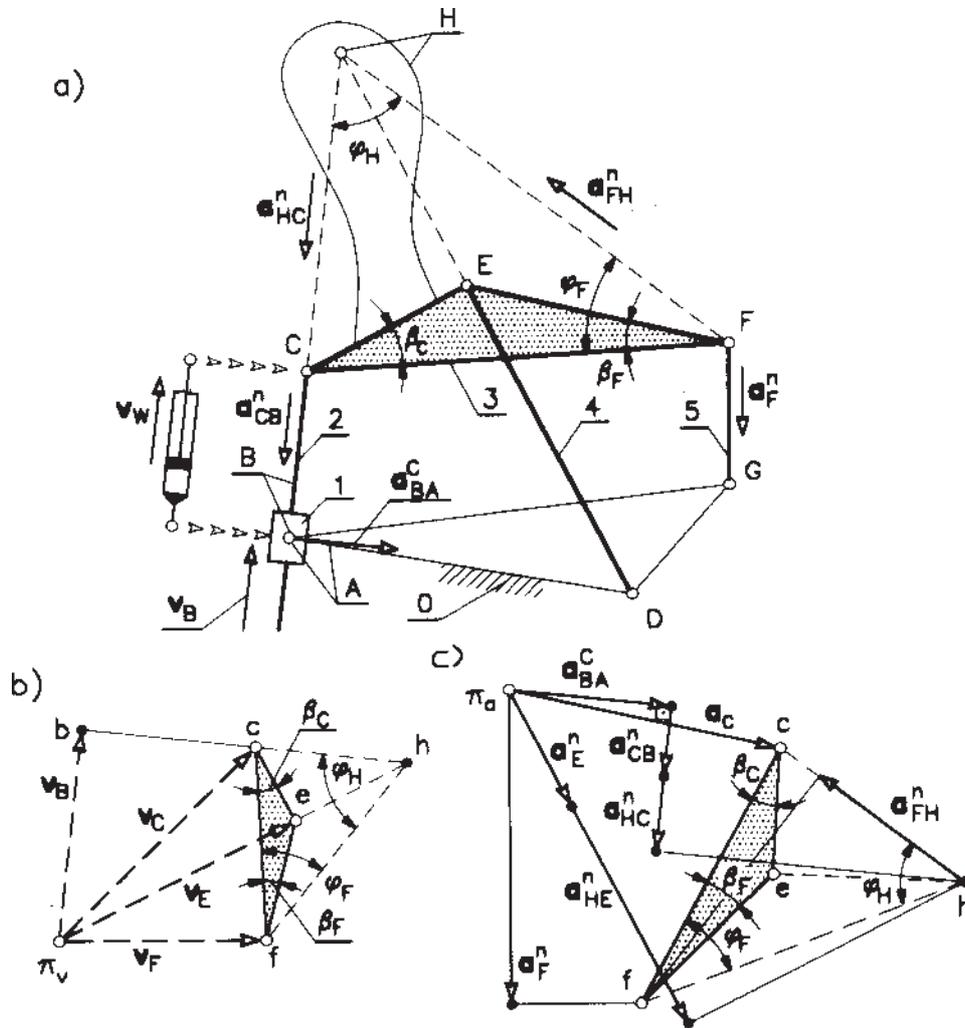
PRZYKŁAD 3.2

Na rysunku 3.12 przedstawiono schemat układu, którego człon 3 (CEF) wykonuje ruch płaski, ograniczony stałymi odległościami punktów E i D oraz F i G . Członem czynnym jest siłownik AC , ogólnie człon zmiennej długości. Już narysowanie tego układu dla znanej długości siłownika wymaga szczególnych zabiegów. Tutaj odnotujmy tylko, że w każdym położeniu punkty C , E , F członu 3 muszą znajdować się na łukach, przy czym łuk, na którym znajduje się punkt C zmienia swój promień. W przykładzie będziemy rozpatrywać prędkość i przyspieszenia po założeniu prędkości \mathbf{v}_w , z jaką siłownik zmienia swoją długość.

Przed przystąpieniem do analizy zauważmy, że w miejsce siłownika można wprowadzić człony 1 i 2, uzyskując układ równoważny kinematycznie. Człon 1 reprezentuje cylinder, człon 2 tłok z tłoczyskiem. Taka modyfikacja znakomicie ułatwia analizę, umożliwiając bezpośrednie korzystanie z wprowadzonych reguł formułowania równań wektorowych.

Zauważmy, że prędkość wysuwu \mathbf{v}_w w zmodyfikowanym układzie jest prędkością względną \mathbf{v}_{BA} w parze postępowej suwak 1 – człon 2, a ściślej prędkością \mathbf{v}_B punktu B , co wykazują równania:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} \\ \mathbf{v}_A = \mathbf{0} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{BA} \quad (3.22)$$



Rys. 3.12. Prędkość i przyspieszenie układu III klasy (wg Assura)

Dysponując prędkością v_B , możemy zapisać tylko jedno równanie:

$$v_C = \underline{v_B} + \underline{v_{CB}} \quad (3.23)$$

którego rozwiązanie wymaga znajomości kierunku wektora prędkości v_C , ponieważ jedyną informacją o wektorze v_{CB} to jego kierunek prostopadły do BC . Znalazienie kierunku prędkości v_C nie jest szczególnie kłopotliwe, jeśli odwołać się do środków obrotu chwilowego – tutaj pomocny byłby środek S_{30} . Można też pomocniczo wykreślić fragment trajektorii punktu C , do której styczna wyznacza kierunek v_C . Podejmiemy jednak zadanie analizy prędkości, nie posługując się ani środkiem obrotu ani trajektorią, gdyż takie rozwiązanie oznacza wyznaczenie „ścieżki” analizy przyspieszeń.

Przyjmijmy, że na członie 3, w nieokreślonym jeszcze położeniu, znajduje się punkt H , wtedy można napisać następujące równania:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_H = \mathbf{v}_C + \underline{\mathbf{v}_{HC}} \\ \mathbf{v}_C = \underline{\mathbf{v}_B} + \underline{\mathbf{v}_{CB}} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{v}_H = \underline{\mathbf{v}_B} + \underline{\mathbf{v}_{CB}} + \underline{\mathbf{v}_{HC}} \quad (3.24)$$

Z prawej strony równania (3.24) występują dwie prędkości względne \mathbf{v}_{CB} i \mathbf{v}_{HC} , których kierunki są prostopadłe do odcinków CB i HC . Dotychczas zakładano jedynie, że punkt H leży na członie 3, teraz umiejscowimy go w takim miejscu, aby wektory \mathbf{v}_{CB} i \mathbf{v}_{HC} miały jednakowy kierunek. Nie trzeba wykazywać, że będzie to spełnione, jeżeli punkt H będzie leżał na przedłużeniu odcinka AC . Wtedy otrzymamy:

$$\mathbf{v}_H = \underline{\mathbf{v}_B} + \overline{\underline{\mathbf{v}_{CB}} + \underline{\mathbf{v}_{HC}}} \quad (3.25)$$

Z drugiej strony, idąc od punktu E do H mamy:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_H = \mathbf{v}_E + \underline{\mathbf{v}_{HE}} \\ \mathbf{v}_E = \underline{\mathbf{v}_D} + \underline{\mathbf{v}_{ED}} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{v}_H = \underline{\mathbf{v}_D} + \underline{\mathbf{v}_{ED}} + \underline{\mathbf{v}_{HE}} \quad (3.26)$$

a obierając punkt H na kierunku DE wektory \mathbf{v}_{ED} i \mathbf{v}_{HE} również będą miały wspólny kierunek:

$$\mathbf{v}_H = \underline{\mathbf{v}_D} + \overline{\underline{\mathbf{v}_{ED}} + \underline{\mathbf{v}_{HE}}} \quad (3.27)$$

Wnioskujemy zatem, że obierając położenie punktu H na członie 3 na przecięciu kierunków AC i ED sumy wektorów prędkości względnych:

$$\overline{\underline{\mathbf{v}_{CB}} + \underline{\mathbf{v}_{HC}}} \quad \text{oraz} \quad \overline{\underline{\mathbf{v}_{ED}} + \underline{\mathbf{v}_{HE}}}$$

umożliwiają wyznaczenie pomocniczo prędkości punktu H z układu równań:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_H = \underline{\mathbf{v}_B} + \overline{\underline{\mathbf{v}_{CB}} + \underline{\mathbf{v}_{HC}}} \\ \mathbf{v}_H = \underline{\mathbf{v}_D} + \overline{\underline{\mathbf{v}_{ED}} + \underline{\mathbf{v}_{HE}}} \end{cases} \quad (3.28)$$

Wychodząc od znanego wektora \mathbf{v}_B rozwiązanie graficzne (rys. 3.12b) prowadzi do trójkąta $\pi_v bh$. Zwróćmy uwagę, że nieznanne są prędkości względne równań (3.28), a znamy tylko ich sumy. Ponieważ punkty H i F należą do członu 3, więc jest uprawnione kolejne równanie w postaci:

$$\underline{\mathbf{v}_F} = \underline{\mathbf{v}_H} + \underline{\mathbf{v}_{FH}} \quad (3.29)$$

którego rozwiązanie daje na planie prędkości (rys. 3.12b) wektor \mathbf{v}_F . Znana jest więc teraz figura $\pi_v b h f$, która jest podstawą do znalezienia punktów e, c – końców wektorów prędkości \mathbf{v}_E i \mathbf{v}_C . Można je znaleźć z zasady podobieństwa członu i jego planu, korzystając ze znanych kątów φ_H i φ_F , a następnie β_C i β_F lub posługując się równaniami:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_E = \underline{\mathbf{v}_F} + \underline{\mathbf{v}_{EF}} \\ \mathbf{v}_E = \underline{\mathbf{v}_H} + \underline{\mathbf{v}_{EH}} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{v}_E \quad \text{oraz} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_C = \underline{\mathbf{v}_H} + \underline{\mathbf{v}_{CH}} \\ \mathbf{v}_C = \underline{\mathbf{v}_F} + \underline{\mathbf{v}_{CF}} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{v}_C \quad (3.30)$$

Prędkości kątowe poszczególnych członów wynikają z oczywistych związków

$$\mathbf{v}_E = \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{r}_{DE} \quad \mathbf{v}_F = \boldsymbol{\omega}_5 \times \mathbf{r}_{GF}$$

oraz

$$\mathbf{v}_{CB} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{BC} \quad \mathbf{v}_{FH} = \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_{HF}$$

Wyznaczenie przyspieszeń wymaga podobnej jak dla prędkości drogi postępowania. W tym celu zapisano kolejne równania, których graficzne rozwiązanie przedstawiono na rysunku 3.12c. Załóżmy stałą prędkość wysuwu siłownika $\mathbf{v}_w = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{BA} = \text{const}$. Związek przyspieszeń punktów A i B w parze postępowej według (3.17) to:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^C \\ \mathbf{a}_A = 0 \\ \mathbf{v}_{BA} = \text{const} \rightarrow \mathbf{a}_{BA}^t = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{BA}^C = 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{BA} \quad (3.31)$$

Równanie wiążące przyspieszenia punktów B, C członu 2, analogicznie do (3.23) na podstawie (3.8) to:

$$\mathbf{a}_C = \underline{\mathbf{a}_B} + \underline{\mathbf{a}_{CB}^n} + \underline{\mathbf{a}_{CB}^t} \quad (3.32)$$

Rozwiązanie graficzne tego równania, podobnie jak równania (3.23) w analizie prędkości, nie jest możliwe, gdyż brak jest informacji o przyspieszeniu punktu C . Korzystając jednak z wprowadzonego pomocniczo punktu H otrzymujemy równania:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_H = \mathbf{a}_C + \underline{\mathbf{a}_{HC}^n} + \underline{\mathbf{a}_{HC}^t} \\ \mathbf{a}_C = \underline{\mathbf{a}_B} + \underline{\mathbf{a}_{CB}^n} + \underline{\mathbf{a}_{CB}^t} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{a}_H = \underline{\mathbf{a}_B} + \underline{\mathbf{a}_{CB}^n} + \underline{\mathbf{a}_{HC}^n} + \overline{\mathbf{a}_{HC}^t} + \underline{\mathbf{a}_{CB}^t} \quad (3.33)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_H = \mathbf{a}_E + \underline{\mathbf{a}_{HE}^n} + \underline{\mathbf{a}_{HE}^t} \\ \mathbf{a}_E = \underline{\mathbf{a}_E} + \underline{\mathbf{a}_E^t} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{a}_H = \underline{\mathbf{a}_{ED}^n} + \underline{\mathbf{a}_{HE}^n} + \overline{\mathbf{a}_{HE}^t} + \underline{\mathbf{a}_E^t} \quad (3.34)$$

Zwróćmy uwagę, że podobnie jak prędkość względną (3.28) również sumę dwóch wektorów względnego przyspieszenia styczynego:

$$\overline{\mathbf{a}'_{HC} + \mathbf{a}'_{CB}} \quad \text{oraz} \quad \overline{\mathbf{a}'_{HE} + \mathbf{a}'_E}$$

można przejściowo traktować jako dwa wektory. Dzięki temu możliwe jest graficzne rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_H = \underline{\mathbf{a}_B} + \underline{\mathbf{a}_{CB}^n} + \underline{\mathbf{a}_{HC}^n} + \overline{\mathbf{a}'_{HC}} + \overline{\mathbf{a}'_{CB}} \\ \mathbf{a}_H = \underline{\mathbf{a}_E} + \underline{\mathbf{a}_{HE}^n} + \underline{\mathbf{a}'_{HE}} + \underline{\mathbf{a}'_E} \end{cases} \quad (3.35)$$

Występujące w (3.35) przyspieszenie normalne oblicza się z zależności (3.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{CB}^n &= -\omega_2^2 \mathbf{r}_{BC} & \mathbf{a}_{HC}^n &= -\omega_3^2 \mathbf{r}_{CH} \\ \mathbf{a}_E^n &= -\omega_4^2 \mathbf{r}_{DE} & \mathbf{a}_{HE}^n &= -\omega_3^2 \mathbf{r}_{EH} \end{aligned}$$

Otrzymane rozwiązanie graficzne równania (3.35) daje w wyniku wektor przyspieszenia punktu H – na planie odcinek $\pi_a h$ (rys. 3.12c). Kolejne równanie wiąże przyspieszenia punktów F i H :

$$\underline{\mathbf{a}_F^n} + \underline{\mathbf{a}'_F} = \underline{\mathbf{a}_H} + \underline{\mathbf{a}_{FH}^n} + \underline{\mathbf{a}'_{FH}} \quad (3.36)$$

a składowe normalne oblicza się ze wzorów:

$$\mathbf{a}_F^n = -\omega_5^2 \mathbf{r}_{GF} \quad \mathbf{a}_{FH}^n = -\omega_3^2 \mathbf{r}_{HF}$$

Po wyznaczeniu przyspieszenia punktu F – mały punkt f na planie wyznacza koniec wektora \mathbf{a}_F , z zasady podobieństwa wykreślamy odcinki fc pod kątem φ_F i hc pod kątem φ_H . Znalezione w ten sposób punkt c , który wyznacza koniec wektora \mathbf{a}_C . Sposób wyznaczenia na planie punktu e jest również oczywisty wobec podobieństwa trójkątów CEF i cef – determinują go kąty β_C i β_F . W ostatniej fazie wyznaczamy przyspieszenia kątowe poszczególnych członów, które wynikają z oczywistych związków:

$$\mathbf{a}'_E = \boldsymbol{\varepsilon}_4 \times \mathbf{r}_{DE} \quad \mathbf{a}'_F = \boldsymbol{\varepsilon}_5 \times \mathbf{r}_{GF}$$

oraz

$$\mathbf{a}'_{CB} = \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{BC} \quad \mathbf{a}'_{FH} = \boldsymbol{\varepsilon}_3 \times \mathbf{r}_{HF} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_2$$

3.3. Metody analityczne

Metody analityczne wyznaczania prędkości i przyspieszeń, liniowych i kątowych, bazują na równaniach opisujących konfigurację układu kinematycznego, przy czym możliwe jest wykorzystanie wszystkich dostępnych form zapisu konfiguracji. W przypadku układów płaskich najczęstszym sposobem jest opis za pomocą współrzędnych wektorowych. To najbardziej inżynierskie podejście, w mniejszym stopniu wykorzystuje się liczby zespolone, które koncepcyjnie są tożsame z zapisem wektorowym. Kiedy dysponujemy systemowym oprogramowaniem do rozwiązywania różnego rodzaju zagadnień matematycznych, popularność zdobywa zapis we współrzędnych absolutnych. Jakkolwiek cechuje go większa liczba równań, to jednak trud włożony w analizę kinematyczną zwraca się prostotą opisu dynamiki. W przypadku układów przestrzennych dużą popularność zyskała notacja Denavita–Hartenberga (DH), zwłaszcza do zapisu układów kinematycznych robotów. W niniejszej pracy zaprezentowano zapis kinematyki z użyciem wspomnianych współrzędnych wektorowych, absolutnych oraz w notacji DH.

3.3.1. Ruch we współrzędnych wektorowych – układy płaskie

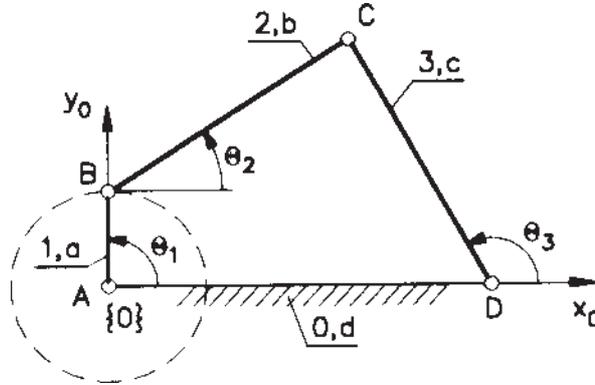
Jak już pokazano w przypadku opisu konfiguracji zapis wektorowy wymaga zastąpienia członów układu kinematycznego łańcuchem wektorów, które skutkują równaniami wektorowymi, a w konsekwencji rzutowania wektorów na osie globalnego układu współrzędnych, układem równań algebraicznych. Jedne wektory mają stałe moduły, inne zmieniają się co do kierunku i modułu. Wyznaczenie ich pochodnych względem czasu prowadzi do układu równań wiążących prędkości, a po kolejnym różniczkowaniu przyspieszeń. Od strony metodologicznej sposób postępowania jest oczywisty. Pochodna przemieszczenia liniowego jest prędkością liniową, kąтового – prędkością kątową. Podobnie z przyspieszeniami. Podane przykłady powinny przybliżyć czytelnikowi sposób postępowania i ułatwić adaptację do analizy innych układów.

PRZYKŁAD 3.3

Jako pierwszy rozpatrzmy układ czworoboku przegubowego (rys. 3.13), którego konfigurację opisano w przykładzie 2.5.

Dla wieloboku wektorowego utworzonego z członów układu równanie wektorowe (2.47) w wyniku rzutowania na osie układu globalnego $\{0\}$ skutkuje układem równań algebraicznych (2.48), ponownie przytoczonych:

$$\begin{aligned} a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2 - d - c \cos \theta_3 &= 0 \\ a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2 - c \sin \theta_3 &= 0 \end{aligned}$$



Rys. 3.13. Czworobok przegubowy – dane do analizy kinematycznej

W równaniach tych stałe są długości członów (moduły wektorów a , b , c , d), natomiast wszystkie kąty Θ_i są zmienne w czasie. Różniczkowanie (2.48) względem czasu daje układ równań wiążących prędkości kątowe poszczególnych członów w postaci:

$$\begin{aligned} -a\dot{\Theta}_1 \sin \Theta_1 - b\dot{\Theta}_2 \sin \Theta_2 + c\dot{\Theta}_3 \sin \Theta_3 &= 0 \\ a\dot{\Theta}_1 \cos \Theta_1 + b\dot{\Theta}_2 \cos \Theta_2 - c\dot{\Theta}_3 \cos \Theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Rozpatrywany układ ma ruchliwość jeden, a więc jego ruch będzie jednoznaczny przy znanym ruchu jednego z członów. Przyjmijmy, że elementem napędzającym jest człon 1 – znana jest funkcja $\Theta_1(t)$ opisująca zmianę położenia członu 1 w czasie. Rozwiązanie układu równań (3.37) względem prędkości kątowych członów 2 i 3 wymaga uporządkowania do postaci:

$$\begin{bmatrix} -a \sin \Theta_1 \\ a \cos \Theta_1 \end{bmatrix} \dot{\Theta}_1 + \begin{bmatrix} -b \sin \Theta_2 & c \sin \Theta_3 \\ b \cos \Theta_2 & -c \cos \Theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_2 \\ \dot{\Theta}_3 \end{bmatrix} = 0$$

a po przekształceniu otrzymuje się wyrażenie na prędkość kątową członów 2 i 3:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta}_2 \\ \dot{\Theta}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -b \sin \Theta_2 & c \sin \Theta_3 \\ b \cos \Theta_2 & -c \cos \Theta_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a \sin \Theta_1 \\ a \cos \Theta_1 \end{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \quad (3.38)$$

Różniczkując (3.37) względem czasu t , otrzymujemy:

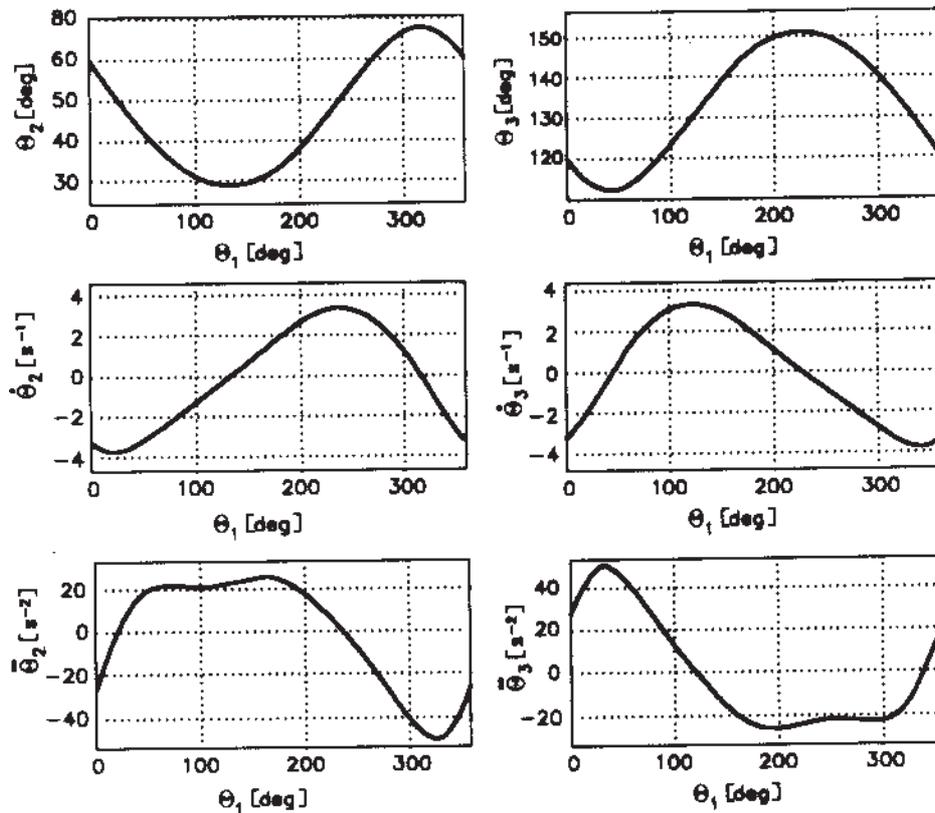
$$\begin{aligned} -a\ddot{\Theta}_1 \sin \Theta_1 - a\dot{\Theta}_1^2 \cos \Theta_1 - b\ddot{\Theta}_2 \sin \Theta_2 - b\dot{\Theta}_2^2 \cos \Theta_2 + c\ddot{\Theta}_3 \sin \Theta_3 + c\dot{\Theta}_3^2 \cos \Theta_3 &= 0 \\ a\ddot{\Theta}_1 \cos \Theta_1 - a\dot{\Theta}_1^2 \sin \Theta_1 + b\ddot{\Theta}_2 \cos \Theta_2 - b\dot{\Theta}_2^2 \sin \Theta_2 - c\ddot{\Theta}_3 \cos \Theta_3 + c\dot{\Theta}_3^2 \sin \Theta_3 &= 0 \end{aligned}$$

a po uporządkowaniu:

$$\begin{bmatrix} -a \sin \theta_1 & -a \cos \theta_1 \\ a \cos \theta_1 & -a \sin \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b \sin \theta_2 & c \sin \theta_3 \\ b \cos \theta_2 & -c \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b \cos \theta_2 & c \cos \theta_3 \\ -b \sin \theta_2 & c \sin \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix} = 0$$

i przekształceniu otrzymuje się wyrażenia określające przyspieszenie kątowe członów 2 i 3 w postaci:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \sin \theta_2 & c \sin \theta_3 \\ b \cos \theta_2 & -c \cos \theta_3 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} b \cos \theta_2 & -c \cos \theta_3 \\ b \sin \theta_2 & -c \sin \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \sin \theta_1 & a \cos \theta_1 \\ -a \cos \theta_1 & a \sin \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \right) \quad (3.39)$$



Rys. 3.14. Wyniki analizy układu z rys. 3.13 – ruch członów 2 i 3

Korzystając z (2.48), (3.38) i (3.39), wykonujemy przykładowe obliczenia dla układu z rys. 3.13, których wyniki przedstawiono na rys. 3.14.

Przyjęto następujące dane:

- wymiary [m]: $a = 0,2$; $b = c = 0,6$; $d = 0,8$,
- wartości początkowe kątów: $\Theta_1 = \pi/2$; $\Theta_2 = \pi/3$; $\Theta_3 = 2\pi/3$,
- prędkość kątowa członu 1: $\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}$.

3.3.2. Uporządkowanie macierzowe – układy płaskie

Rozpatrzony układ był stosunkowo prosty – do opisu kinematyki wystarczyły dwa równania, ruch był określony przy jednym napędzie. W praktyce występują również układy bardziej złożone, w których występuje więcej zmiennych, a więc wymagające też większej liczby równań. Ich pozyskiwanie jest możliwe przez zastąpienie układu kinematycznego wielobokami wektorowymi. W takich przypadkach dogodnie jest uporządkować procedurę wyznaczania prędkości i przyspieszeń, korzystając ze znanych form zapisu macierzowego.

Jeżeli mamy do czynienia z układami o ruchu zdeterminowanym, to liczba równań algebraicznych do opisu kinematyki musi odpowiadać liczbie niewiadomych. Ogólnie więc, dla m zmiennych niewiadomych będziemy w stanie zapisać m równań o następującej postaci:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(w_1, \dots, w_k, q_1, \dots, q_n, x_1, \dots, x_m) = 0 \\ f_2 &= f_2(w_1, \dots, w_k, q_1, \dots, q_n, x_1, \dots, x_m) = 0 \\ &\dots \\ f_m &= f_m(w_1, \dots, w_k, q_1, \dots, q_n, x_1, \dots, x_m) = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Równania te można zapisać w postaci wektorowej:

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0 \quad (3.41)$$

gdzie: \mathbf{w} – wektor wymiarów członów (liniowych i kątowych),

\mathbf{q} – wektor znanych współrzędnych wektorowych (zmiennie niezależne, napędy),

\mathbf{x} – wektor nieznanymi współrzędnych wektorowych (zmiennie zależne).

Ponieważ zmiennie współrzędne wektorowe są funkcjami czasu:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$$

więc zróżniczkowanie (3.41) względem czasu daje równanie prędkości:

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.42)$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1 \quad \dots \quad \dot{x}_m]^T$$

$$\mathbf{B} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dots \quad \dot{q}_n]^T$$

równanie prędkości (3.42) możemy wówczas zapisać następująco:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \quad (3.43)$$

Wektor prędkości zależnych określa równanie:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \quad (3.44)$$

Wyznaczenie niewiadomych przyspieszeń:

$$\ddot{\mathbf{x}} = [\ddot{x}_1 \quad \dots \quad \ddot{x}_m]^T$$

wymaga znajomości wektora przyspieszeń niezależnych (przyspieszenia członów czynnych):

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1 \quad \dots \quad \ddot{q}_n]^T$$

Po zróźniczkowaniu równań (3.43) względem czasu t otrzymuje się zależność:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} \quad (3.45)$$

która skutkuje następującym równaniem określającym przyspieszenie zmiennych zależnych:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}(-\dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}) \quad (3.46)$$

gdzie [4]:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d}{dt} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dots & \dot{a}_{1m} \\ \dots & & & \\ \dot{a}_{m1} & \dot{a}_{m2} & \dots & \dot{a}_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\dot{a}_{ij} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \dot{x}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \frac{d}{dt} \mathbf{B} = - \begin{bmatrix} \dot{b}_{11} & \dot{b}_{12} & \dots & \dot{b}_{1m} \\ \dots & & & \\ \dot{b}_{m1} & \dot{b}_{m2} & \dots & \dot{b}_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\dot{b}_{ij} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial x_k} \dot{x}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k$$

Otrzymane równania macierzowe (3.44), (3.46) w stosunku do zależności otrzymanych wprost z równań opisujących konfigurację, mają tylko wartość porządkującą. Ich forma jest przystosowana do łatwej implementacji w dowolnym pakiecie obliczeń matematycznych.

PRZYKŁAD 3.4

Jako przykład rozpatrzmy układ płaski o dwóch stopniach swobody przeznaczony do realizacji dowolnej trajektorii punktu M (rys. 3.15). Mechanizm ten był już rozpatrywany w poprzednim rozdziale, gdzie opisano jego konfigurację.

Otrzymane równania, powtórzone tutaj dla wygody czytelnika, wynikają wprost z równania wektorowego:

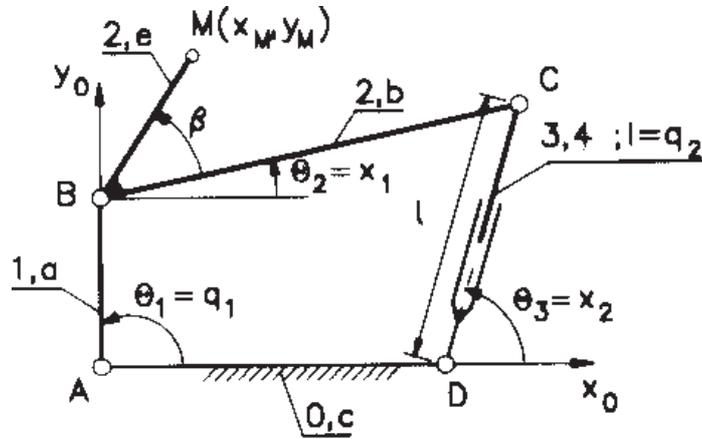
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{q}_2 = \mathbf{0}$$

które skutkuje dwoma równaniami nieliniowymi (rzuty na osie układu współrzędnych) o postaci:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos q_1 + b \cos x_1 - c - q_2 \cos x_2 \\ a \sin q_1 + b \sin x_1 - q_2 \sin x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

W rozpatrywanym układzie, obok stałych a, b, c , wyróżnimy:

- q_1, q_2 – zmienne niezależne (znane wymuszenia),
- x_1, x_2 – zmienne zależne (niewiadome).



Rys. 3.15. Generator trajektorii o dwóch stopniach swobody

Sformułowanie równania prędkości (3.43) wymaga określenia macierzy **A** i **B**, które w tym przypadku mają postać:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -b \sin x_1 & q_2 \sin x_2 \\ b \cos x_1 & -q_2 \cos x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = -\begin{bmatrix} -a \sin q_1 & -\cos x_2 \\ a \cos q_1 & -\sin x_2 \end{bmatrix}$$

Pochodne zmiennych zależnych i niezależnych względem czasu to odpowiednie prędkości zebrane w wektory:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2]^T \quad \dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T$$

Równanie prędkości ma więc postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \sin x_1 & q_2 \sin x_2 \\ b \cos x_1 & -q_2 \cos x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \sin q_1 & \cos x_2 \\ -a \cos q_1 & \sin x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Do wyznaczenia przyspieszeń (3.45) wymagane są kolejne pochodne, a mianowicie:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d}{dt} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\dot{x}_1 b \cos x_1 & \dot{q}_2 \sin x_2 + \dot{x}_2 q_2 \cos x_2 \\ -\dot{x}_1 b \sin x_1 & -\dot{q}_2 \cos x_2 + \dot{x}_2 q_2 \sin x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \frac{d}{dt} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 a \cos q_1 & -\dot{x}_2 \sin x_2 \\ \dot{q}_1 a \sin q_1 & \dot{x}_2 \cos x_2 \end{bmatrix}$$

Przyspieszenie zmiennych zależnych \mathbf{x} i niezależnych \mathbf{q} :

$$\ddot{\mathbf{x}} = [\ddot{x}_1 \quad \ddot{x}_2]^T \quad \ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2]^T$$

Ostateczna forma równania przyspieszenia ma postać:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -b \sin x_1 & q_2 \sin x_2 \\ b \cos x_1 & -q_2 \cos x_2 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ - \begin{bmatrix} -\dot{x}_1 b \cos x_1 & \dot{q}_2 \sin x_2 + \dot{x}_2 q_2 \cos x_2 \\ -\dot{x}_1 b \sin x_1 & -\dot{q}_2 \cos x_2 + \dot{x}_2 q_2 \sin x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \dot{q}_1 a \cos q_1 & -\dot{x}_2 \sin x_2 \\ \dot{q}_1 a \sin q_1 & \dot{x}_2 \cos x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \sin q_1 & \cos x_2 \\ -a \cos q_1 & \sin x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.48) \end{aligned}$$

Dla analizy układu z rys. 3.15 przyjęto dane (wymiary liniowe w [m]):

- wymiary: $a = 0,2$; $b = 0,5$; $c = 0,4$; $d = 0,2$; $\beta = \pi/4$;
- ruch członów czynnych:
 - obrót członu 1:

$$q_1 = \Theta_{10} + \Delta\Theta_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right); \quad \Theta_{10} = \frac{\pi}{2}; \quad \Delta\Theta_1 = \frac{5\pi}{18}$$

- wydłużanie siłownika 3,4:

$$q_2 = q_{20} + \Delta q_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right); \quad q_{20} = 0,32; \quad \Delta q_2 = 0,08$$

- wartości początkowe zmiennych zależnych: $x_1 = 12\pi/180$; $x_2 = 74\pi/180$,
- czas jednego cyklu $T = 10$ s.

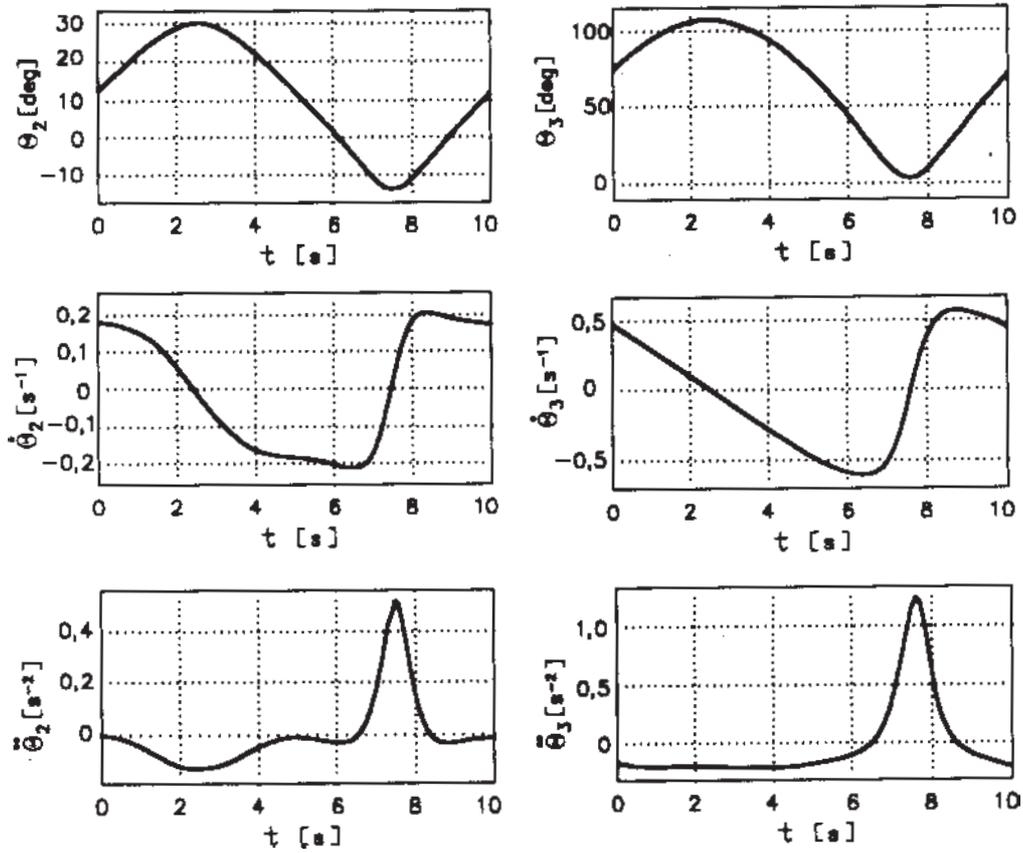
Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3.16.

Wyznaczenie parametrów ruchu punktu M jest oparte na równaniu wektorowym

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{a} + \mathbf{e}$$

które daje wyrażenia określające położenie punktu M

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos q_1 + e \cos(x_1 + \beta) \\ a \sin q_1 + e \sin(x_1 + \beta) \end{bmatrix}$$



Rys. 3.16. Wyniki analizy układu z rys. 3.15 – ruch członów 2 oraz 3, 4

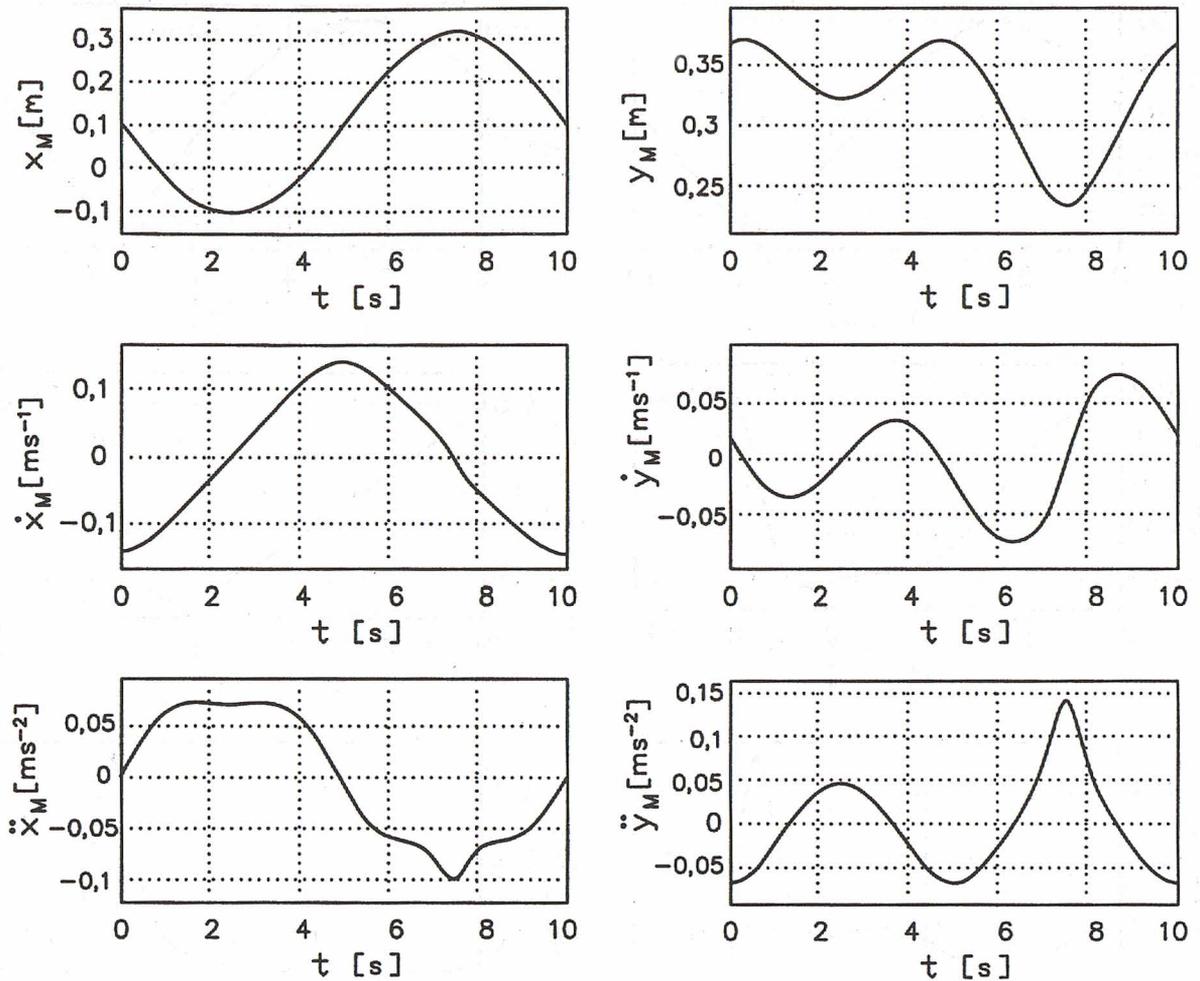
jego prędkość

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\dot{q}_1 \sin q_1 - e\dot{x}_1 \sin(x_1 + \beta) \\ a\dot{q}_1 \cos q_1 + e\dot{x}_1 \cos(x_1 + \beta) \end{bmatrix}$$

i przyspieszenie

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\ddot{q}_1 \sin q_1 - a\dot{q}_1^2 \cos q_1 - e\ddot{x}_1 \sin(x_1 + \beta) - e\dot{x}_1^2 \cos(x_1 + \beta) \\ a\ddot{q}_1 \cos q_1 - a\dot{q}_1^2 \sin q_1 + e\ddot{x}_1 \cos(x_1 + \beta) - e\dot{x}_1^2 \sin(x_1 + \beta) \end{bmatrix}$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3.17.



Rys. 3.17. Wyniki analizy układu z rys. 3.15 – ruch punktu M

3.4. Ruch we współrzędnych absolutnych – układy płaskie

Jak już stwierdzono dla jednoznacznego opisanie układu złożonego z k członów ruchomych potrzebna jest znajomość $3k$ parametrów, a to oznacza konieczność sformułowania $3k$ równań, które tworzą wektor równań w postaci:

$$\Phi \equiv \begin{bmatrix} \Phi^P(\mathbf{q}) \\ \Phi^C(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.49)$$

Pierwsza grupa równań Φ^P jest wynikiem łączenia członów parami kinematycznymi, druga grupa równań Φ^C opisuje wymuszenia kinematyczne – ruch członów czynnych (napędzających). Równanie (3.49) jest podstawą do znalezienia konfiguracji układu opisywanej wektorem:

$$\mathbf{q} = [x_1 \quad y_1 \quad \theta_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \theta_2 \quad \dots \quad x_k \quad y_k \quad \theta_k]^T$$

lub krócej

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_k^T]^T$$

gdzie $\mathbf{q}_i^T = [x_i \quad y_i \quad \theta_i]$

Po założeniu znajomości konfiguracji układu kinematycznego wyznaczenie prędkości:

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x}_1 \quad \dot{y}_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{y}_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dots \quad \dot{x}_k \quad \dot{y}_k \quad \dot{\theta}_k]^T \quad (3.50)$$

i przyspieszenia

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{x}_1 \quad \ddot{y}_1 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{x}_2 \quad \ddot{y}_2 \quad \ddot{\theta}_2 \quad \dots \quad \ddot{x}_k \quad \ddot{y}_k \quad \ddot{\theta}_k]^T \quad (3.51)$$

nie stanowi już problemu i wymaga jedynie operacji różniczkowania równania (3.49) względem czasu, co daje:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = 0$$

lub krócej

$$\Phi_t + \Phi_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.52)$$

gdzie

$$\Phi_t = \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial t} \right]^T \quad (3.53)$$

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_{3k}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial q_{3k}} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Wyrażenie określające prędkość ma więc postać:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\Phi_q^{-1} \Phi_t \quad (3.55)$$

Kolejna pochodna równania prędkości względem czasu prowadzi do równania określającego przyspieszenie. Z równania prędkości (3.52), przekształconego do postaci:

$$\Phi_q \dot{\mathbf{q}} = -\Phi_t$$

otrzymamy po obliczeniu pochodnej

$$(\Phi_{qq}\dot{\mathbf{q}} + \Phi_{qt})\dot{\mathbf{q}} + \Phi_q\ddot{\mathbf{q}} = -\Phi_{tq}\dot{\mathbf{q}} - \Phi_{tt} \quad (3.56)$$

gdzie

$$\Phi_{qq} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \Phi_q \quad \Phi_{qt} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_q \quad \Phi_{tq} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \Phi_t$$

Ponieważ jednak

$$\Phi_{qq}\dot{\mathbf{q}} = (\Phi_q\dot{\mathbf{q}})_q$$

oraz

$$\Phi_{qt} = \Phi_{tq}$$

więc ostateczna postać równania określającego przyspieszenia ma postać:

$$\Phi_q\ddot{\mathbf{q}} = -(\Phi_q\dot{\mathbf{q}})_q\dot{\mathbf{q}} - 2\Phi_{qt}\dot{\mathbf{q}} - \Phi_{tt} = \mathbf{a} \quad (3.57)$$

Po przekształceniu otrzymamy

$$\ddot{\mathbf{q}} = \Phi_q^{-1}[-(\Phi_q\dot{\mathbf{q}})_q\dot{\mathbf{q}} - 2\Phi_{qt}\dot{\mathbf{q}} - \Phi_{tt}] = \Phi_q^{-1}\mathbf{a} \quad (3.58)$$

Dla dowolnego członu mamy więc jednoznaczny opis ruchu w postaci prędkości i przyspieszenia początku układu lokalnego $\{i\}$ oraz prędkości i przyspieszenia kąto-
wego tworzących łącznie wektory:

$$\dot{\mathbf{q}}_i = [\dot{x}_i \quad \dot{y}_i \quad \dot{\theta}_i]^T$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = [\ddot{x}_i \quad \ddot{y}_i \quad \ddot{\theta}_i]^T$$

Wyznaczenie prędkości i przyspieszenia dowolnego punktu M członu i wymaga obli-
czenia pochodnych wektora położenia punktu M członu i w układzie globalnym $\{0\}$

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{R}_i {}^i\mathbf{r}_M + \mathbf{p}_i$$

co daje

$$\dot{\mathbf{r}}_M = \dot{\mathbf{R}}_i {}^i\mathbf{r}_M + \dot{\mathbf{p}}_i \quad (3.59)$$

Pochodna macierzy rotacji \mathbf{R}_i ma postać:

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} = \dot{\theta}_i \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & -\cos \theta_i \\ \cos \theta_i & -\sin \theta_i \end{bmatrix} = \dot{\theta}_i \mathbf{B}_i$$

więc skrócone równanie prędkości punktu M ma postać:

$$\dot{\mathbf{r}}_M = \dot{\Theta}_i \mathbf{B}_i^i \mathbf{r}_M + \dot{\mathbf{p}}_i \quad (3.60)$$

Równanie określające przyspieszenie punktu M w układzie globalnym $\{0\}$ wynika z równania określającego prędkość (3.60):

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \ddot{\Theta}_i \mathbf{B}_i^i \mathbf{r}_M + \dot{\Theta}_i \dot{\mathbf{B}}_i^i \mathbf{r}_M + \ddot{\mathbf{p}}_i \quad (3.61)$$

Ponieważ

$$\dot{\mathbf{B}}_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -\sin \Theta_i & -\cos \Theta_i \\ \cos \Theta_i & -\sin \Theta_i \end{bmatrix} = \dot{\Theta}_i \begin{bmatrix} -\cos \Theta_i & \sin \Theta_i \\ -\sin \Theta_i & -\cos \Theta_i \end{bmatrix} = -\dot{\Theta}_i \mathbf{R}_i$$

więc przyspieszenie punktu M wyraża równanie:

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \ddot{\Theta}_i \mathbf{B}_i^i \mathbf{r}_M - \dot{\Theta}_i^2 \mathbf{R}_i^i \mathbf{r}_M + \ddot{\mathbf{p}}_i \quad (3.62)$$

Identyczne relacje otrzymano się z równania określającego macierz \mathbf{A}_i transformacji jednorodnej (2.9), gdzie wektor współrzędnych punktu ma trzecią składową równą jeden. Położenie punktu M w układzie podstawy $\{0\}$ opisuje równanie:

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{A}_i^i \mathbf{r}_M$$

które po wyznaczeniu pochodnej daje zależność określającą prędkość:

$$\dot{\mathbf{r}}_M = \dot{\mathbf{A}}_i^i \mathbf{r}_M \quad (3.63)$$

gdzie

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -\dot{\Theta}_i \sin \Theta_i & -\dot{\Theta}_i \cos \Theta_i & \dot{x}_i \\ \dot{\Theta}_i \cos \Theta_i & -\dot{\Theta}_i \sin \Theta_i & \dot{y}_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podobnie przyspieszenie punktu M wyznacza równanie:

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \ddot{\mathbf{A}}_i^i \mathbf{r}_M \quad (3.64)$$

gdzie

$$\ddot{\mathbf{A}}_i = \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} -\ddot{\Theta}_i \sin \Theta_i - \dot{\Theta}_i^2 \cos \Theta_i & -\ddot{\Theta}_i \cos \Theta_i + \dot{\Theta}_i^2 \sin \Theta_i & \ddot{x}_i \\ \ddot{\Theta}_i \cos \Theta_i - \dot{\Theta}_i^2 \sin \Theta_i & -\ddot{\Theta}_i \sin \Theta_i - \dot{\Theta}_i^2 \cos \Theta_i & \ddot{y}_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD 3.5

Na rysunku 3.18 przedstawiono schemat układu jarmowego, w którym układy lokalne $\{1\}$ i $\{2\}$ związane z członami 1 i 2 mają początki w odpowiednich środkach mas. Spełnienie tego warunku skutkuje uproszczeniem równań dynamiki.

Zgodnie z przyjętymi regułami równania więzów par zapisane w postaci funkcji wektora Φ^P (3.49) mają następującą postać:

$$\Phi^P \equiv \begin{bmatrix} x_1 - a \cos \Theta_1 \\ y_1 - w - a \sin \Theta_1 \\ x_1 + b \cos \Theta_1 - x_2 - c \cos \Theta_2 \\ y_1 + b \sin \Theta_1 - y_2 - c \sin \Theta_2 \\ y_2 - d \sin \Theta_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.65)$$

Dwa pierwsze równania (3.65) wynikają z połączenia A członu 1 z podstawą 0, dwa kolejne reprezentują więzy pary kinematycznej obrotowej B , a równanie ostatnie wymusza położenie punktu C (sworznia) na osi x_0 (w szczelinie). Załóżmy dalej, że członem napędzającym jest korba 1, która porusza się ze stałą prędkością kątową ω_1 . Wobec tego równanie wymuszeń, opisujące kąt Θ_1 odmierzany od wartości początkowej Θ_{1p} w czasie t , dla rozpatrywanego układu ma postać:

$$\Phi^C(q, t) \equiv [\Theta_1 - \Theta_{1p} - \omega_1 t] = 0 \quad (3.66)$$

Równania zatem więzów dla układu z rys. 3.18 o znanym ruchu członu 1:

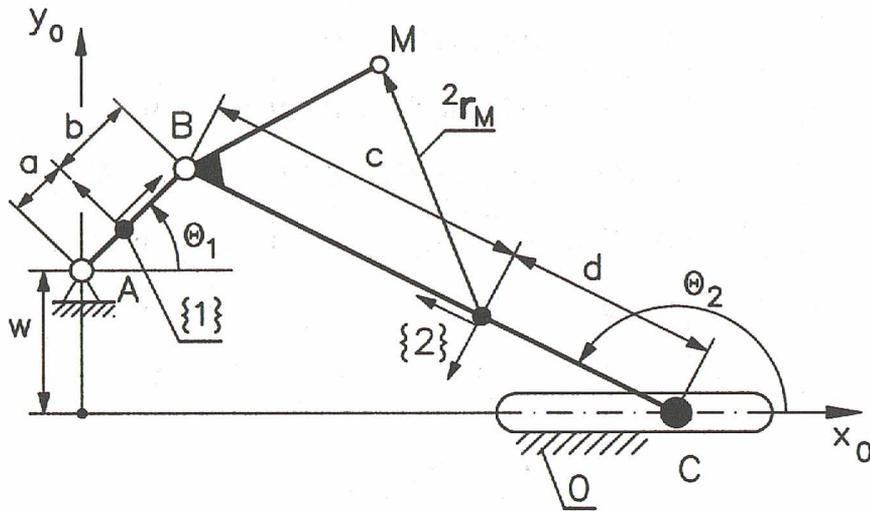
$$\Phi \equiv \begin{bmatrix} x_1 - a \cos \Theta_1 \\ y_1 - w - a \sin \Theta_1 \\ x_1 + b \cos \Theta_1 - x_2 - c \cos \Theta_2 \\ y_1 + b \sin \Theta_1 - y_2 - c \sin \Theta_2 \\ y_2 - d \sin \Theta_2 \\ \Theta_1 - \Theta_{1p} - \omega_1 t \end{bmatrix} = 0 \quad (3.67)$$

Konfiguracja układu jest opisana za pomocą wektora współrzędnych absolutnych:

$$\mathbf{q} = [x_1 \quad y_1 \quad \Theta_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \Theta_2]^T$$

W tej sytuacji składowe równania prędkości (3.55):

$$\dot{\mathbf{q}} = -\Phi_q^{-1} \Phi_t$$



Rys. 3.18. Układ jarmowy

mają zgodnie z (3.53) i (3.54) postać:

$$\Phi_t = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\omega_1]^T$$

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \sin \Theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \cos \Theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b \sin \Theta_1 & -1 & 0 & c \sin \Theta_2 \\ 0 & 1 & b \cos \Theta_1 & 0 & -1 & -c \cos \Theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -d \cos \Theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Występujące w równaniu przyspieszenia (3.58):

$$\ddot{\mathbf{q}} = \Phi_q^{-1} [(\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2\Phi_{qr} \dot{\mathbf{q}} - \Phi_n]$$

odpowiednie pochodne i składniki to

$$\Phi_q \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 + a\dot{\Theta}_1 \sin \Theta_1 \\ \dot{y}_1 - a\dot{\Theta}_1 \cos \Theta_1 \\ \dot{x}_1 - b\dot{\Theta}_1 \sin \Theta_1 - \dot{x}_2 + c\dot{\Theta}_2 \sin \Theta_2 \\ \dot{y}_1 + b\dot{\Theta}_1 \cos \Theta_1 - \dot{y}_2 - c\dot{\Theta}_2 \cos \Theta_2 \\ \dot{y}_2 - d\dot{\Theta}_2 \cos \Theta_2 \\ \dot{\Theta}_1 \end{bmatrix}$$

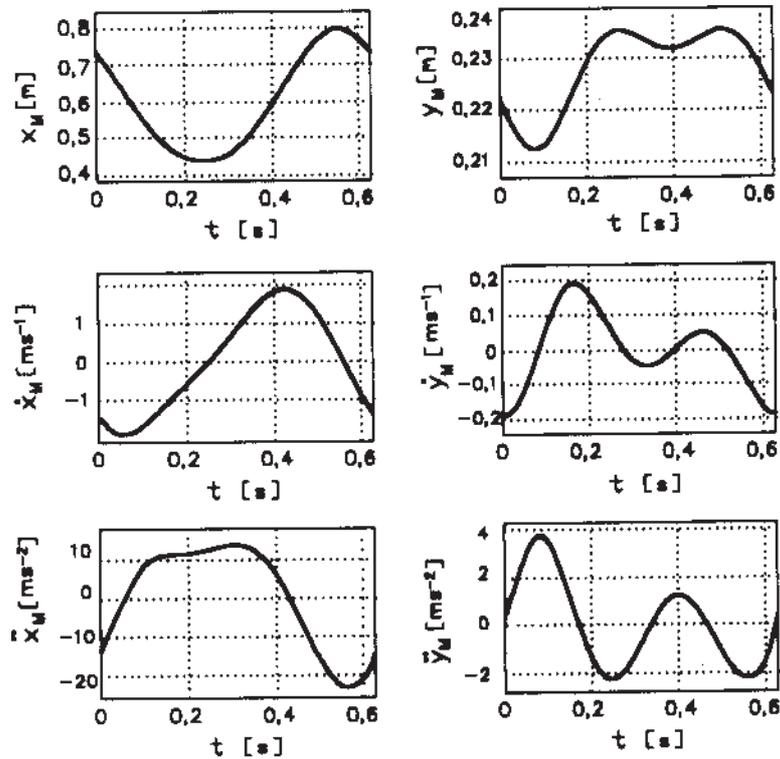
$$(\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 & 0 & 0 & c\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & -b\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 & 0 & 0 & c\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{qt} = \Phi_{tt} = 0$$

Prędkość i przyspieszenie punktu M członu 2 w układzie globalnym $\{0\}$ opisują równania (3.60) i (3.62):

$$\dot{\mathbf{r}}_M = \dot{\theta}_2 \mathbf{B}_2^2 \mathbf{r}_M + \dot{\mathbf{p}}_2$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \ddot{\theta}_2 \mathbf{B}_2^2 \mathbf{r}_M - \dot{\theta}_2^2 \mathbf{R}_2^2 \mathbf{r}_M + \ddot{\mathbf{p}}_2$$



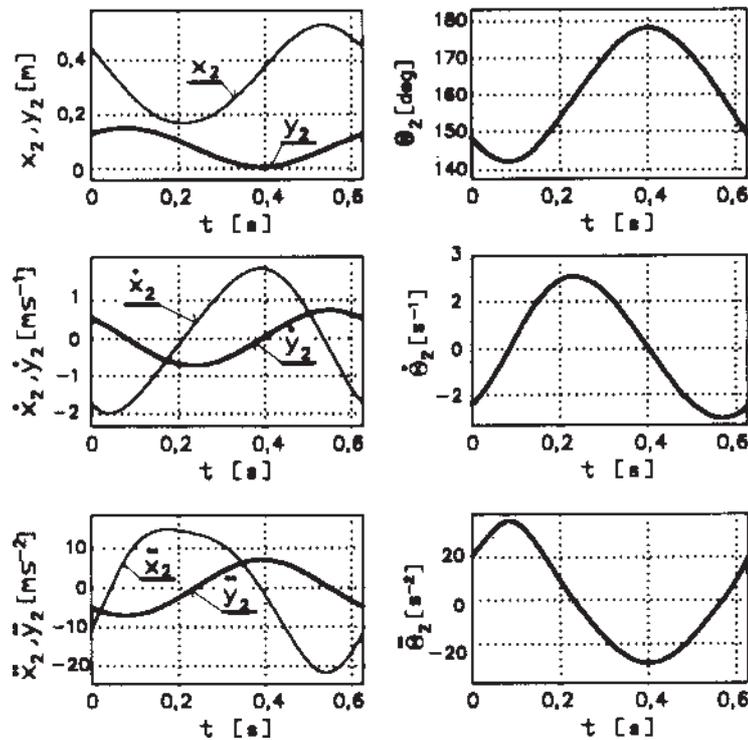
Rys. 3.19. Wyniki analizy układu z rys. 3.18 – ruch punktu M

Wyprowadzone zależności wykorzystano do analizy przykładowego układu jarzmo-
wego (rys. 3.18), przyjmując następujące dane (wymiary liniowe w [m]):

- wymiary: $a = 0,07$; $b = 0,11$; $c = 0,37$; $d = 0,25$; $w = 0,2$; ${}^2\mathbf{r}_M = [0,23 \ -0,2]^T$,
- ruch członu czynnego 1: $\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}$,
- wektor opisujący konfigurację początkową układu (z rysunku)

$$\mathbf{q}_0 = [0,05 \ 0,25 \ \pi/4 \ 0,44 \ 0,13 \ 15\pi/18]^T$$

Na rysunkach 3.19 i 3.20 przedstawiono przebiegi wybranych parametrów położenia, prędkości i przyspieszenia punktu M oraz członu BC . W kolejnych krokach $i+1$ analizy przyjmowano, że konfiguracją początkową jest ta, która została wyznaczona w kroku i -tym.



Rys. 3.20. Wyniki analizy układu z rys. 3.18 – ruch członu CB

oś z_k jest wyznaczona przez kierunek ruchu względnego (oś pary R lub T). Względne położenie członów opisuje macierz (2.31):

$${}^j\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{R}_k & {}^j\mathbf{p}_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_k & -\sin \Theta_k & 0 & a_j \\ \cos \alpha_j \sin \Theta_k & \cos \alpha_j \cos \Theta_k & -\sin \alpha_j & -d_k \sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j \sin \Theta_k & \sin \alpha_j \cos \Theta_k & \cos \alpha_j & d_k \cos \alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W zależności od typu pary kinematycznej zmianę położenia członu k względem j opisuje kąt Θ_k dla pary obrotowej R lub odcinek d_k dla pary postępowej T , natomiast prędkość względną członu k w relacji do j opisuje prędkość w postaci:

$$\dot{q}_k = \begin{cases} \omega_{k,j} = \dot{\Theta}_k & - \text{ dla pary } R \\ v_{k,j} = \dot{d}_k & - \text{ dla pary } T \end{cases} \quad (3.68)$$

Założmy znajomość ruchu członu j (wektora prędkości liniowej \mathbf{v}_j i kątowej $\boldsymbol{\omega}_j$) oraz odpowiedniej prędkości względnej i określmy na ich podstawie prędkości członu k w układzie podstawy. Wprost z rysunku 3.21 piszemy oczywiste równanie wektorowe w układzie globalnym $\{0\}$:

$${}^0\mathbf{p}_k = {}^0\mathbf{p}_j + {}^0({}^j\mathbf{p}_k) = {}^0\mathbf{p}_j + {}^0\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{p}_k \quad (3.69)$$

przy czym składowe wektora ${}^j\mathbf{p}_k$ są elementami czwartej kolumny macierzy transformacji ${}^j\mathbf{A}_k$ (2.31):

$${}^j\mathbf{p}_k = [a_j \quad -d_k \sin \alpha_j \quad d_k \cos \alpha_j]^T \quad (3.70)$$

Wiadomo, że odległość a_j i kąt α_j są w każdym przypadku stałymi, a odcinek d_k ma wartość stałą dla pary R i zmienną dla pary T . To rozróżnienie skutkuje różnymi zależnościami określającymi prędkość dla par obrotowych i postępowych.

Prędkość – para obrotowa R . W takim przypadku prędkość liniowa początku układu lokalnego jest wynikiem różniczkowania zależności wektorowej (3.69) i wynosi:

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_k = {}^0\dot{\mathbf{p}}_j + {}^0\dot{\mathbf{R}}_j {}^j\mathbf{p}_k \quad (3.71)$$

gdzie ${}^j\mathbf{p}_k = \text{const.}$

Pochodna macierzy rotacji jest zrozumiała, jeśli przypomnieć, że jej kolumny są wektorami jednostkowymi:

$${}^0\mathbf{R}_j = [{}^0\mathbf{e}_{jx} \quad {}^0\mathbf{e}_{jy} \quad {}^0\mathbf{e}_{jz}]$$

co zgodnie z definicją pochodnej wektora o stałym module daje zależność:

$$\begin{aligned} {}^0\dot{\mathbf{R}}_j &= \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{R}_j) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} {}^0\mathbf{e}_{jx} & \frac{d}{dt} {}^0\mathbf{e}_{jy} & \frac{d}{dt} {}^0\mathbf{e}_{jz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times {}^0\mathbf{e}_{jx} & {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times {}^0\mathbf{e}_{jy} & {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times {}^0\mathbf{e}_{jz} \end{bmatrix} = {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times {}^0\mathbf{R}_j \end{aligned} \quad (3.72)$$

Wobec tego równanie prędkości liniowych (3.71) ma teraz postać:

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_k = {}^0\dot{\mathbf{p}}_j + {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{p}_k) \quad (3.73)$$

Prędkość kątowna $\boldsymbol{\omega}_k$ członu k jest natomiast sumą wektorową prędkości kątowych członu j w układzie podstawy $\boldsymbol{\omega}_j$ i prędkości względnej $\boldsymbol{\omega}_{k,j}$ w parze obrotowej. Zwróćmy uwagę, że prędkość względna $\boldsymbol{\omega}_{k,j}$ jest mierzona wzdłuż osi z_k , a więc jej wyrażenie w układzie podstawy wymaga transformacji z układu $\{k\}$ do podstawy $\{0\}$ za pomocą macierzy rotacji ${}^0\mathbf{R}_k$. W rezultacie otrzymujemy:

$$\dot{q}_k = {}^k\omega_{k,j} \rightarrow {}^0\boldsymbol{\omega}_k = {}^0\boldsymbol{\omega}_j + {}^0\mathbf{R}_k \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_k \end{bmatrix}^T \quad (3.74)$$

lub w formie skróconej:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_k = {}^0\boldsymbol{\omega}_j + {}^0\mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k \quad \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.75)$$

Prędkość – para postępową T . W tym przypadku różniczkowanie zależności (3.69) po uwzględnieniu (3.72) daje równanie:

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_k = {}^0\dot{\mathbf{p}}_j + {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{p}_k) + {}^0\mathbf{R}_j {}^j\dot{\mathbf{p}}_k \quad (3.76)$$

Dla tej pary, inaczej niż dla obrotowej, wektor ${}^j\mathbf{p}_k$ (3.70), opisujący pozycję $\{k\}$ w $\{j\}$, jest zmienny, a jego pochodna wynosi:

$${}^j\dot{\mathbf{p}}_k = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a_j \\ -d_k \sin \alpha_j \\ d_k \cos \alpha_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha_j \\ \cos \alpha_j \end{bmatrix} \dot{q}_k$$

ponieważ $d_k = q_k$, $a_j = \text{const}$, $\alpha_j = \text{const}$.

Dla uproszczenia zapisu zauważmy, że istnieje relacja:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha_j \\ \cos \alpha_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_k & -\sin \Theta_k & 0 \\ \cos \alpha_j \sin \Theta_k & \cos \alpha_j \cos \Theta_k & -\sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j \sin \Theta_k & \sin \alpha_j \cos \Theta_k & \cos \alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^j \mathbf{R}_k \mathbf{e}_z$$

co oznacza dalej, że ostatni składnik równania (3.76) wynosi

$${}^0 \mathbf{R}_j {}^j \dot{\mathbf{p}}_k = {}^0 \mathbf{R}_j {}^j \mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k = {}^0 \mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k \quad (3.77)$$

Ostatecznie równanie prędkości liniowych dla pary postępowej ma postać:

$${}^0 \dot{\mathbf{p}}_k = {}^0 \dot{\mathbf{p}}_j + {}^0 \boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0 \mathbf{R}_j {}^j \mathbf{p}_k) + {}^0 \mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k \quad (3.78)$$

Ponieważ w parze postępowej T mamy tylko ruch względny postępowy, więc prędkości kątowe są w tym przypadku jednakowe

$$\boldsymbol{\omega}_{k,j} = 0 \rightarrow {}^0 \boldsymbol{\omega}_k = {}^0 \boldsymbol{\omega}_j \quad (3.79)$$

Gdy znamy zależność określającą prędkość, można, korzystając z identycznej reguły składania ruchów, wyprowadzić równania na przyspieszenia. Również dla przyspieszeń niezbędne jest oddzielne rozpatrzenie par obrotowych i postępowych.

Przyspieszenie – para obrotowa R . W takim przypadku przyspieszenie liniowe początku układu lokalnego jest wynikiem różniczkowania wyrażenia (3.73) określającego prędkość

$${}^0 \dot{\mathbf{p}}_k = {}^0 \dot{\mathbf{p}}_j + {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times ({}^0 \mathbf{R}_j {}^j \mathbf{p}_k) + {}^0 \boldsymbol{\omega}_k \times ({}^0 \mathbf{R}_j {}^j \mathbf{p}_k)$$

co po wykorzystaniu (3.72) daje:

$${}^0 \ddot{\mathbf{p}}_k = {}^0 \ddot{\mathbf{p}}_j + {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times ({}^0 \mathbf{R}_j {}^j \mathbf{p}_k) + {}^0 \boldsymbol{\omega}_j \times [{}^0 \boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0 \mathbf{R}_j {}^j \mathbf{p}_k)] \quad (3.80)$$

Przyspieszenie kątowe jest wynikiem różniczkowania (3.75) i wyraża się równaniem:

$${}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_k = {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + {}^0 \dot{\mathbf{R}}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k + {}^0 \mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \ddot{q}_k$$

Po uwzględnieniu (3.72) równanie przyspieszeń kątowych ma postać:

$${}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_k = {}^0 \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + {}^0 \boldsymbol{\omega}_k \times ({}^0 \mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k) + {}^0 \mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \ddot{q}_k \quad (3.81)$$

Przyspieszenie – para postępową T . W tym przypadku różniczkowanie zależności (3.78) po uwzględnieniu (3.72) daje:

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_k &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_j + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times ({}^0\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{p}_k) + {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times [{}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{p}_k)] + {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\mathbf{R}_j {}^j\dot{\mathbf{p}}_k) \\ &\quad + {}^0\dot{\mathbf{R}}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k + {}^0\mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \ddot{q}_k \end{aligned} \quad (3.82)$$

Występująca w czwartym wyrazie prawej strony równania (3.82) pochodna wektora ${}^j\mathbf{p}_k$ pozycji $\{k\}$ w $\{j\}$ zgodnie z (3.77) przekształca ten wyraz do postaci:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\mathbf{R}_j {}^j\dot{\mathbf{p}}_k) = {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k) = {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k) \quad (3.83)$$

Zależność określająca natomiast pochodną macierzy rotacji ${}^0\mathbf{R}_k$ zgodnie z (3.72) wyraża równanie:

$${}^0\dot{\mathbf{R}}_k = {}^0\boldsymbol{\omega}_k \times {}^0\mathbf{R}_k = {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times {}^0\mathbf{R}_k$$

ponieważ ${}^0\boldsymbol{\omega}_k = {}^0\boldsymbol{\omega}_j$.

Wobec tego piąty wyraz (3.82) przekształca się do postaci:

$${}^0\dot{\mathbf{R}}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k = {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k)$$

i jest tożsamy z czwartym wyrazem. W rezultacie poczynionych przekształceń równanie przyspieszenia liniowego dla pary postępowej ma postać:

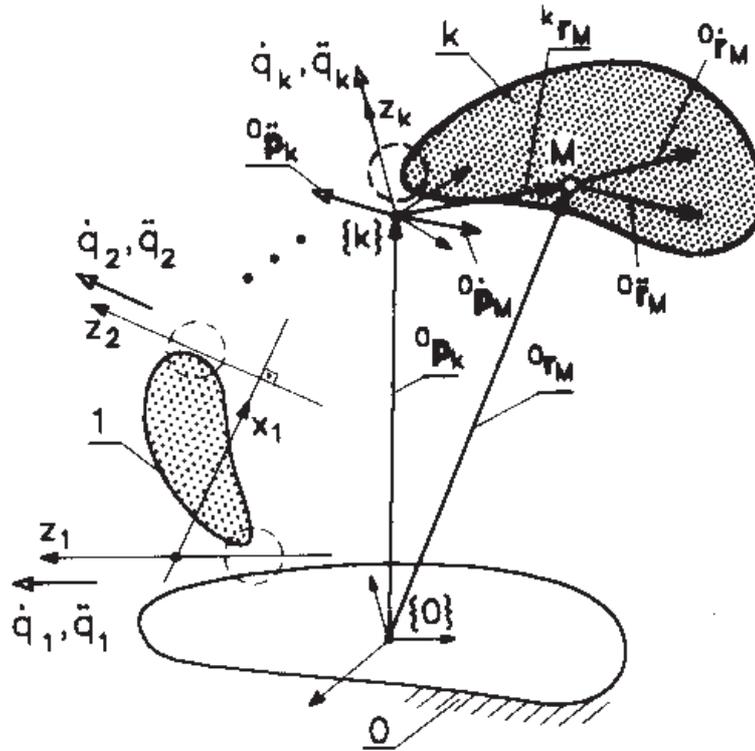
$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_k &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_j + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times ({}^0\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{p}_k) + {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times [{}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{p}_k)] \\ &\quad + 2{}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \dot{q}_k) + {}^0\mathbf{R}_k \mathbf{e}_z \ddot{q}_k \end{aligned} \quad (3.84)$$

Przyspieszenia kątowe członów j oraz k są jednakowe, co wynika wprost z równania (3.79):

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{k,j} = 0 \rightarrow {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_k = {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \quad (3.85)$$

Prędkość i przyspieszenie punktu M na członie k -tym. Gdy mamy prędkość i przyspieszenia członu k (prędkość i przyspieszenie liniowe początku układu $\{k\}$ oraz prędkość i przyspieszenia kątowe członu k), wówczas można wprost napisać równanie prędkości i przyspieszenia punktu M na członie k , przy czym położenie punktu M w układzie $\{k\}$ opisuje wektor ${}^k\mathbf{r}_M$ (rys. 3.22). Analogicznie do zależności (3.69), (3.73) i (3.80) mamy zatem równanie położenia:

$${}^0\mathbf{r}_M = {}^0\mathbf{p}_k + {}^0\mathbf{R}_k {}^k\mathbf{r}_M \quad (3.86)$$



Rys. 3.22. Układ szeregowy – prędkość i przyspieszenie punktu M

prędkości

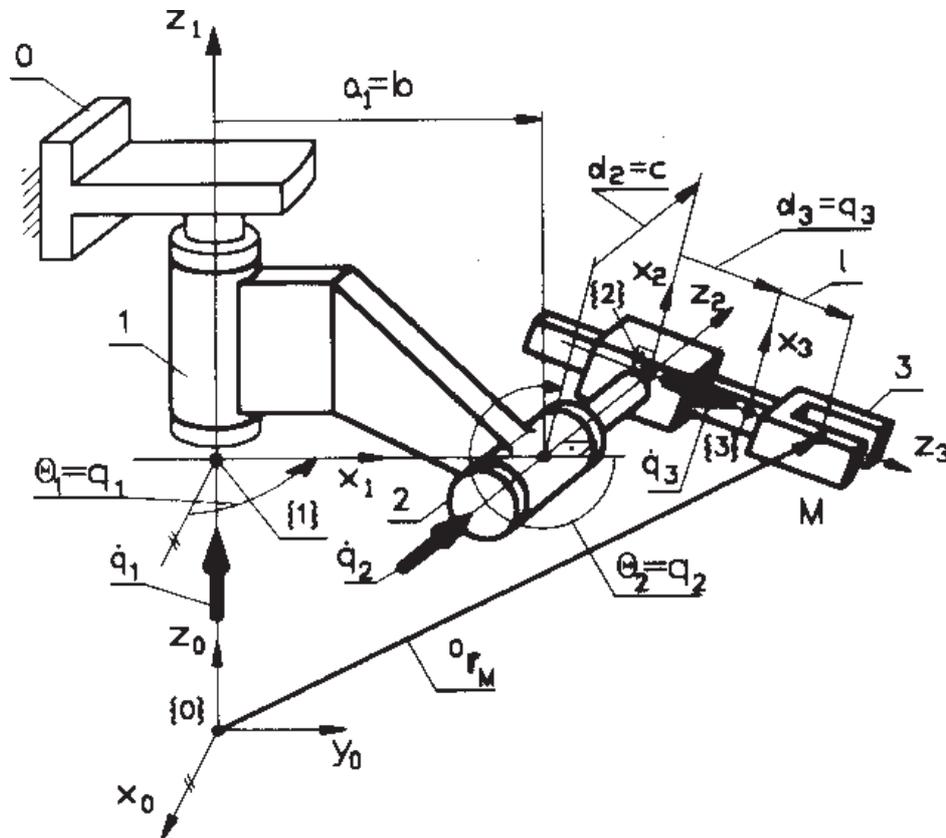
$${}^0\dot{\mathbf{r}}_M = {}^0\dot{\mathbf{p}}_k + {}^0\boldsymbol{\omega}_k \times ({}^0\mathbf{R}_k {}^k\mathbf{r}_M) \quad (3.87)$$

i przyspieszenia

$${}^0\ddot{\mathbf{r}}_M = {}^0\ddot{\mathbf{p}}_k + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_k \times ({}^0\mathbf{R}_k {}^k\mathbf{r}_M) + {}^0\boldsymbol{\omega}_k \times [{}^0\boldsymbol{\omega}_k \times ({}^0\mathbf{R}_k {}^k\mathbf{r}_M)] \quad (3.88)$$

PRZYKŁAD 3.6

Jako przykład zastosowania wyrażeń określających prędkość dla układu o strukturze szeregowej będziemy kontynuować analizę układu manipulatora (przykład 2.12). Wykorzystamy tutaj wyprowadzone związki opisujące konfigurację układu. Analizowany układ przedstawiono ponownie dla wygody czytelnika na rys. 3.23, z zaznaczeniem wektorów prędkości w parach kinematycznych.



Rys. 3.23. Manipulator o strukturze szeregowej

Oprócz znanych wymiarów członów dysponujemy teraz prędkościami względnymi w poszczególnych parach kinematycznych zebranych w wektor

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]^T$$

oraz macierzami transformacji ${}^0\mathbf{A}_1$, ${}^0\mathbf{A}_2$, ${}^0\mathbf{A}_3$ oraz ${}^1\mathbf{A}_2$, ${}^2\mathbf{A}_3$, z których wykorzystamy odpowiednie podmacierze ${}^j\mathbf{R}_k$, opisujące rotację i wektory pozycji ${}^j\mathbf{p}_k$. Znany jest też wektor ${}^3\mathbf{r}_M$ opisujący położenie punktu M w układzie członu 3.

Człon 1 wykonuje względem podstawy ruch obrotowy. Prędkość kątowna tego ruchu z uwagi na szczególnie dobrane układy współrzędnych $\{0\}$ i $\{1\}$ jest oczywista. Jednak dla formalności na podstawie (3.73) napiszemy:

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_1 = {}^0\dot{\mathbf{p}}_0 + {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \times ({}^0\mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{p}_1) = 0 \quad (3.89)$$

a na podstawie (3.75), po wykorzystaniu (2.150):

$${}^0\boldsymbol{\omega}_1 = {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{R}_1\mathbf{e}_z\dot{q}_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Prędkość początku układu {2} członu 2 według (3.73) wynosi:

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_2 = {}^0\dot{\mathbf{p}}_1 + {}^0\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{p}_2) \quad (3.91)$$

Korzystając z (2.150) i (2.151) mamy zatem:

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_2 = 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.92)$$

a po wykonaniu kolejnego mnożenia jest

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b \cos q_1 - c \sin q_1 \\ b \sin q_1 + c \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 (b \sin q_1 + c \cos q_1) \\ -\dot{q}_1 (b \cos q_1 - c \sin q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Na podstawie (3.75) mamy wyrażenie określające prędkość kątową członu 2 w postaci:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_2 = {}^0\boldsymbol{\omega}_1 + {}^0\mathbf{R}_2\mathbf{e}_z\dot{q}_2 \quad (3.94)$$

Po zastosowaniu (2.154) równanie (3.94) otrzymuje postać:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin q_1 \\ \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_2 = \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 \sin q_1 \\ \dot{q}_2 \cos q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Człon 3 wykonuje względem członu 2 ruch postępowy. Zgodnie z (3.76) mamy więc wyrażenie określające prędkość liniową w postaci:

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_3 = {}^0\dot{\mathbf{p}}_2 + {}^0\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^0\mathbf{R}_2{}^2\mathbf{p}_3) + {}^0\mathbf{R}_3\mathbf{e}_z\dot{q}_3 \quad (3.96)$$

Znalezienie prawej strony wyrażenia (3.96) wymaga korzystania ze wzorów (2.153), (2.154) i (2.155) i wykonania kolejnych mnożeń:

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p}_3 &= \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 & -\sin q_1 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 \sin q_2 & \cos q_1 \\ \sin q_2 & -\cos q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -q_3 \cos q_1 \sin q_2 \\ -q_3 \sin q_1 \sin q_2 \\ -q_3 \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (3.97)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p}_3) &= \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 \sin q_1 \\ \dot{q}_2 \cos q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -q_3 \cos q_1 \sin q_2 \\ -q_3 \sin q_1 \sin q_2 \\ -q_3 \cos q_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 q_3 \cos q_1 \cos q_2 + \dot{q}_1 q_3 \sin q_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 q_3 \sin q_1 \cos q_2 + \dot{q}_1 q_3 \cos q_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 q_3 \sin q_1 \sin q_1 \sin q_2 + \dot{q}_2 q_3 \cos q_1 \cos q_1 \sin q_2 \end{bmatrix} \quad (3.98)
 \end{aligned}$$

$${}^0\mathbf{R}_3 \mathbf{e}_z \dot{q}_3 = \begin{bmatrix} -\dot{q}_3 \cos q_1 \sin q_2 \\ -\dot{q}_3 \sin q_1 \sin q_2 \\ -\dot{q}_3 \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Ostatecznie z zależności (3.93), (3.98) i (3.99) mamy:

$$\begin{aligned}
 {}^0\dot{\mathbf{p}}_3 &= \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 (b \sin q_1 + c \cos q_1) \\ -\dot{q}_1 (b \cos q_1 - c \sin q_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 q_3 \cos q_1 \cos q_2 + \dot{q}_1 q_3 \sin q_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 q_3 \sin q_1 \cos q_2 + \dot{q}_1 q_3 \cos q_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 q_3 \sin q_2 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -\dot{q}_3 \cos q_1 \sin q_2 \\ -\dot{q}_3 \sin q_1 \sin q_2 \\ -\dot{q}_3 \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

Ponieważ człony 2 i 3 nie wykonują względem siebie ruchu obrotowego, mamy:

$$\boldsymbol{\omega}_{3,2} = 0 \rightarrow {}^0\boldsymbol{\omega}_3 = {}^0\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 \sin q_1 \\ \dot{q}_2 \cos q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Prędkość punktu M określamy na podstawie zależności (3.87):

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_M = {}^0\dot{\mathbf{p}}_3 + {}^0\boldsymbol{\omega}_3 \times ({}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{r}_M) \quad (3.102)$$

Pierwszy składnik (3.102) jest już określony równaniem (3.100), a drugi wyznaczono następująco:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{r}_M &= \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & \sin q_1 & -\cos q_1 \sin q_2 \\ \sin q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 & -\sin q_1 \sin q_2 \\ \sin q_2 & 0 & -\cos q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l \cos q_1 \sin q_2 \\ -l \sin q_1 \sin q_2 \\ -l \cos q_2 \end{bmatrix} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_3 \times ({}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{r}_M) &= \\ &= \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 \sin q_1 \\ \dot{q}_2 \cos q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l \cos q_1 \sin q_2 \\ -l \sin q_1 \sin q_2 \\ -l \cos q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 l \cos q_1 \cos q_2 + \dot{q}_1 l \sin q_1 \sin q_2 \\ -\dot{q}_2 l \sin q_1 \cos q_2 - \dot{q}_1 l \cos q_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 l \sin q_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.103)$$

Na podstawie (3.102) i (3.103) mamy:

$$\begin{aligned} {}^0\dot{\mathbf{r}}_M &= \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 (b \sin q_1 + c \cos q_1) \\ -\dot{q}_1 (b \cos q_1 - c \sin q_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 q_3 \cos q_1 \cos q_2 + \dot{q}_1 q_3 \sin q_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 q_3 \sin q_1 \cos q_2 + \dot{q}_1 q_3 \cos q_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 q_3 \sin q_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\dot{q}_3 \cos q_1 \sin q_2 \\ -\dot{q}_3 \sin q_1 \sin q_2 \\ -\dot{q}_3 \cos q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 l \cos q_1 \cos q_2 + \dot{q}_1 l \sin q_1 \sin q_2 \\ -\dot{q}_2 l \sin q_1 \cos q_2 - \dot{q}_1 l \cos q_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 l \sin q_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Poprawność (3.104) może być zweryfikowana przez różniczkowanie względem czasu trzech pierwszych wierszy macierzy (2.155) opisującej położenie punktu M w układzie podstawy $\{0\}$.

3.5.2. Układy o strukturze zamkniętej

W punkcie 2.4.2 omówiono reguły opisu konfiguracji układu zamkniętego przestrzennego z wykorzystaniem współrzędnych DH. Otrzymane tam ogólne równanie (2.157) zamknięcia jednokonturowego układu kinematycznego

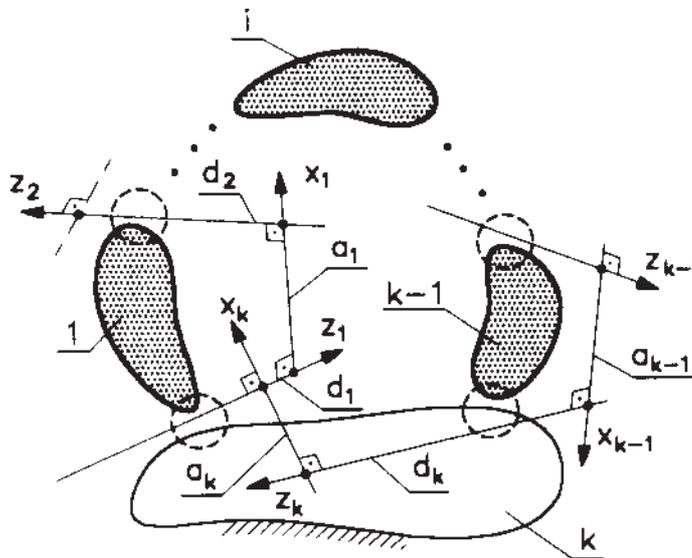
$${}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n {}^n\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$$

może stanowić podstawę do ilościowej analizy kinematycznej – wyznaczenia prędkości i przyspieszeń. Dla przypomnienia przytaczamy ogólną postać macierzy transformacji (2.31):

$${}^j\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \cos \Theta_k & -\sin \Theta_k & 0 & a_j \\ \cos \alpha_j \sin \Theta_k & \cos \alpha_j \cos \Theta_k & -\sin \alpha_j & -d_k \sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j \sin \Theta_k & \sin \alpha_j \cos \Theta_k & \cos \alpha_j & d_k \cos \alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy, że człon odniesienia ma numer k (regułą w tym opracowaniu jest, że człon odniesienia – podstawa – ma numer 0). Ponadto pominiemy górne indeksy macierzy transformacji. Wobec takiej umowy równanie zamkniętego układu kinematycznego opisuje zależność (tożsama z (2.157)):

$$\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i \dots \mathbf{A}_k = \mathbf{I} \quad (3.105)$$



Rys. 3.24. Układ 3D uogólniony z parametrami DH

Wyznaczenie pochodnej równania (3.105) względem czasu prowadzi do oczywistej zależności:

$$\dot{\mathbf{A}}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k + \dots + \mathbf{A}_1 \dots \dot{\mathbf{A}}_i \dots \mathbf{A}_k + \dots + \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \dot{\mathbf{A}}_k = 0 \quad (3.106)$$

Występujące w równaniu pochodne macierzy transformacji są zależne od tego, jaką parę kinematyczną reprezentują. Ogólnie jest:

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{A}_i \quad (3.107)$$

lecz dla pary \mathbf{R} (zmienna $\Theta_i(t)$) mamy:

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_i^{(R)} \dot{\Theta}_i \quad (3.108)$$

Macierz $\mathbf{Q}_i^{(R)}$ to operator różniczkowania dla pary obrotowej R w postaci:

$$\mathbf{Q}_i^{(R)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

Podobnie jest w przypadku pary postępowej T (zmienna $d_i(t)$):

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_i^{(T)} \dot{d}_i \quad (3.110)$$

a operator różniczkowania dla pary postępowej T ma tym razem postać:

$$\mathbf{Q}_i^{(T)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Ogólnie więc, przyjmując jednakowy symbol zmiennej q_i dla każdej macierzy transformacji, otrzymujemy:

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_i \dot{q}_i \quad (3.112)$$

Przy takiej umowie zależność (3.106) przyjmuje postać:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k \dot{q}_1 + \dots + \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_i \dots \mathbf{A}_k \dot{q}_i + \dots + \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k \mathbf{Q}_k \dot{q}_k = 0 \quad (3.113)$$

lub po wykonaniu mnożenia macierzy dla kolejnych prędkości otrzymamy:

$$\mathbf{B}_1 \dot{q}_1 + \mathbf{B}_2 \dot{q}_2 + \dots + \mathbf{B}_i \dot{q}_i + \dots + \mathbf{B}_k \dot{q}_k = 0 \quad (3.114)$$

Założmy, że mamy do czynienia z układem zamkniętym o ruchliwości jeden, a członem czynnym jest element o numerze 1. Wtedy zmienna q_1 i jej pochodne determinują ruch układu. W tej sytuacji obliczane zmienne zależne to:

$$\mathbf{q}_Z = [q_2 \dots q_i \dots q_k]^T \quad (3.115)$$

a równanie prędkości (3.114) przyjmuje postać:

$$\mathbf{B}_2 \dot{q}_2 + \dots + \mathbf{B}_i \dot{q}_i + \dots + \mathbf{B}_k \dot{q}_k = -\mathbf{B}_1 \dot{q}_1 \quad (3.116)$$

Macierze \mathbf{B}_i mają wymiar 4×4 , dysponujemy więc formalnie szesnastoma równaniami, z których należy wyznaczyć co najwyżej 6 niewiadomych. Cztery spośród 16 równań są trywialne i wynikają z porównania wyrazów ostatnich wierszy. Jednoznaczne rozwiązanie natomiast uzyskamy z sześciu równań powstałych z porównania wyrazów macierzy leżących powyżej głównej przekątnej. Forma macierzowa tych sześciu równań to

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_Z = \mathbf{C}_V \dot{q}_1 \quad (3.117)$$

gdzie:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{2,12} & \dots & b_{i,12} & \dots & b_{k,12} \\ b_{2,13} & \dots & b_{i,13} & \dots & b_{k,13} \\ b_{2,14} & \dots & b_{i,14} & \dots & b_{k,14} \\ b_{2,23} & \dots & b_{i,23} & \dots & b_{k,23} \\ b_{2,24} & \dots & b_{i,24} & \dots & b_{k,24} \\ b_{2,34} & \dots & b_{i,34} & \dots & b_{k,34} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_n = [b_{n,j}] \quad (3.118)$$

$$\mathbf{C}_V = -[b_{1,12} \quad b_{1,13} \quad b_{1,14} \quad b_{1,23} \quad b_{1,24} \quad b_{1,34}]^T \quad (3.119)$$

Wobec tego prędkość oblicza się z zależności:

$$\dot{\mathbf{q}}_Z = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}_V \dot{q}_1 \quad (3.120)$$

W przypadkach szczególnych, kiedy mamy do czynienia z układem z więzami biernymi, liczba członów k może być mniejsza niż 7. Tak jest w przypadku przegubu uniwersalnego Cardana (rys. 2.32). Wtedy liczba członów, a więc także liczba niewiadomych jest mniejsza i wykorzystanie równania (3.102) wymaga jego przekształcenia do postaci:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_Z = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_V \dot{q}_1$$

co umożliwia wyznaczenie prędkości z zależności:

$$\dot{\mathbf{q}}_Z = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_V \dot{q}_1 \quad (3.121)$$

Kolejne zróżniczkowanie równania prędkości (3.114) daje równanie wyjściowe dla wyznaczania przyspieszenia w postaci:

$$\dot{\mathbf{B}}_1 \dot{q}_1 + \mathbf{B}_1 \ddot{q}_1 + \dot{\mathbf{B}}_2 \dot{q}_2 + \mathbf{B}_2 \ddot{q}_2 + \dots + \dot{\mathbf{B}}_i \dot{q}_i + \mathbf{B}_i \ddot{q}_i + \dots + \dot{\mathbf{B}}_k \dot{q}_k + \mathbf{B}_k \ddot{q}_k = 0 \quad (3.122)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}_i &= \frac{d}{dt} (\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_i \dots \mathbf{A}_k) = \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{Q}}_i \dots \mathbf{A}_k \dot{q}_1 + \dots \\ &+ \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{Q}}_i \mathbf{Q}_i \dots \mathbf{A}_k \dot{q}_i + \dots + \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_i \dots \mathbf{A}_k \dot{\mathbf{Q}}_k \dot{q}_k = \sum_{j=1}^k \mathbf{D}_i^{(j)} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (3.123)$$

natomiast

$$\mathbf{D}_i^{(j)} = \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_i \dots \mathbf{A}_j \dot{\mathbf{Q}}_j \dots \mathbf{A}_k$$

Wobec (3.123) po uproszczeniu mamy:

$$\dot{\mathbf{B}}_i \dot{q}_i = \mathbf{D}_i^{(1)} \dot{q}_1 \dot{q}_i + \dots + \mathbf{D}_i^{(i)} \dot{q}_i \dot{q}_i + \dots + \mathbf{D}_i^{(k)} \dot{q}_k \dot{q}_i = \sum_{j=1}^k \mathbf{D}_i^{(j)} \dot{q}_j \dot{q}_i \quad (3.124)$$

Grupując w równaniu (3.122) wyrazy z nieznanymi przyspieszeniami z lewej strony, po wykorzystaniu (3.124) otrzymujemy:

$$\mathbf{B}_2 \ddot{q}_2 + \dots + \mathbf{B}_i \ddot{q}_i + \dots + \mathbf{B}_k \ddot{q}_k = -\mathbf{B}_1 \ddot{q}_1 + \mathbf{D} \quad (3.125)$$

gdzie

$$\mathbf{D} = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \mathbf{D}_i^{(j)} \dot{q}_j \dot{q}_i$$

Zauważmy, że lewa strona równania (3.125), podobnie jak w przypadku prędkości (3.116), po wykorzystaniu sześciu równań powstałych z porównania wyrazów macierzy leżących powyżej głównej przekątnej (3.118) ma postać:

$$\mathbf{B}_2 \ddot{q}_2 + \dots + \mathbf{B}_i \ddot{q}_i + \dots + \mathbf{B}_k \ddot{q}_k = \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}}_Z \quad (3.126)$$

Prawa strona (3.125) natomiast jest znana i zależy od konfiguracji układu, określonego już wcześniej wektora prędkości oraz przyspieszenia w parze czynnej (członu głównego 1), a mianowicie od:

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \dots \dot{q}_i \dots \dot{q}_k]^T \quad \text{oraz} \quad \ddot{q}_1$$

Pierwszy wyraz prawej strony (3.125) jest iloczynem macierzy \mathbf{B}_1 oraz przyspieszenia członu czynnego, przy czym macierz \mathbf{B}_1 jest tożsama z macierzą, jaka wystąpiła w równaniu prędkości (3.116). Po uporządkowaniu i pogrupowaniu wyrazów z prawej strony równanie przyspieszenia można doprowadzić do postaci:

$$\mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}}_Z = \mathbf{C}_V \ddot{q}_1 + \mathbf{D}_A \quad (3.127)$$

przy czym macierz kolumnowa \mathbf{D}_A zawiera elementy macierzy \mathbf{D} leżące powyżej głównej przekątnej i ma strukturę podobną jak wektor \mathbf{C}_V (3.119), a mianowicie:

$$\mathbf{D}_A = -[d_{12} \quad d_{13} \quad d_{14} \quad d_{23} \quad d_{24} \quad d_{34}]^T$$

W przypadku gdy $k < 7$, wyznaczenie wektora przyspieszeń zależnych wymaga przekształcenia (3.127) do postaci podobnej jak (3.121)

$$\ddot{\mathbf{q}}_Z = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{C}_V \ddot{q}_1 + \mathbf{D}_A) \quad (3.128)$$

Należy podkreślić, że wyprowadzone równania odnoszą się wyłącznie do układów zamkniętych jednokonturowych, w których występują tylko pary obrotowe i/lub postępowe. Układy złożone przestrzenne wymagają innego podejścia.

4. ELEMENTY DYNAMIKI UKŁADÓW KINEMATYCZNYCH

4.1. Wprowadzenie

W poprzednich rozdziałach rozpatrzono ruch członów układów kinematycznych, nie interesując się przyczynami tego ruchu. W kinematyce zakładano ruch członu (członów) czynnego, co skutkowało określonym ruchem pozostałych. Tymczasem z ruchem członów nierozzerwalnie są związane opory użyteczne (siły bierne), opory tarcia itd. W układzie napędowym pojazdu są to opory toczenia i opory powietrza. W układzie kinematycznym koparki siły oporu wynikają z reakcji urabianego gruntu itd. Pokonanie sił biernych wymaga, aby do układu dostarczyć energię z zewnątrz w postaci sił czynnych przyłożonych do przemieszczających się członów czynnych. W pojazdach są to siły wynikające z ciśnienia spalanej w cylindrze silnika mieszanki, we wspomnianej koparce siły oporu są transformowane do cylindrów hydraulicznych układu wysięgnika.

Oprócz sił czynnych i biernych występują jeszcze opory tarcia wynikające z przemieszczania względem siebie członów tworzących pary kinematyczne – między członami występują siły oddziaływania. Przemieszczanie środków mas członów w pewnych fazach przeciwstawia się, w innych pomaga ruchowi. Niezwykle istotny udział ilościowy w układach kinematycznych mają siły wynikające z tego, że w rzeczywistości mamy przecież do czynienia z przemieszczaniem się członów masowych. Przyspieszenie liniowe środków mas skutkuje więc siłą bezwładności, przyspieszenie kątowe momentem bezwładności.

Dynamika układów kinematycznych to rozległa dyscyplina zajmująca się opisywaniem związków między „ilością” ruchu ($\mathbf{q}(t)$), siłami wywołującymi ten ruch (siły czynne (\mathbf{F}_C)) i siłami oporu (siły bierne (\mathbf{F}_B), siły tarcia (\mathbf{F}_μ)), masami członów wraz z ich rozłożeniem na członach ($\tilde{\mathbf{M}}$), czasem (t) i geometrią członów (\mathbf{w}). Opisanie takiej zależności w postaci funkcji:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{F}_C, \mathbf{F}_B, \mathbf{F}_\mu, \tilde{\mathbf{M}}, t, \mathbf{w}) = 0$$

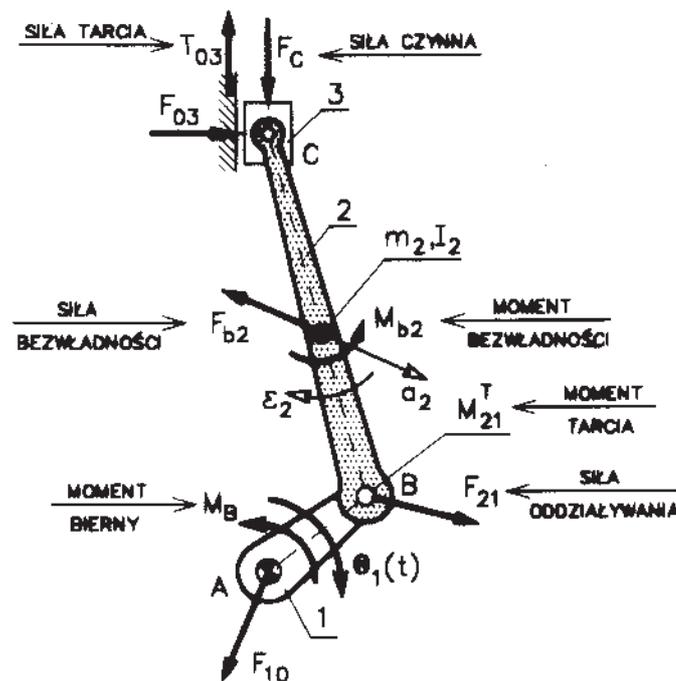
umożliwia uzyskanie odpowiedzi na dwa podstawowe pytania, w sposób naturalny związane z ruchem układu kinematycznego:

- jaki jest ruch układu dla znanych sił czynnych \mathbf{F}_C i biernych \mathbf{F}_B ?
- jaka siła czynna \mathbf{F}_C jest potrzebna, aby wywołać oczekiwany ruch $\mathbf{q}(t)$?

Dział zajmujący się poszukiwaniem odpowiedzi na pierwsze pytanie jest określany *dynamiką prostą*, na drugie *dynamiką odwrotną*, często *kinetostatyką*. Oprócz tych podstawowych pytań w dynamice interesujemy się też siłami oddziaływania w parach kinematycznych, niezbędnymi do konstrukcyjnego kształtowania elementów par i członów. Istotne w praktyce są też zagadnienia tarcia w parach kinematycznych skutkujące nie tylko stratami, ale również ograniczeniem możliwych zakresów ruchu – w wyniku tarcia położenia martwe przechodzą w strefy położenia martwych itp.

Za przykład ilustrujący istotę analiz dynamicznych niech posłuży układ korbowy silnika spalinowego (rys. 4.1). Jego funkcja kinematyczna polega na transformacji ruchu liniowego tłoka 3 na ruch obrotowy korby 1. Obrotowi korby 1 (wał silnika) przeciwstawia się moment bierny M_B . Jego pokonanie zapewnia siła czynna F_C działająca na tłok 3.

Przekazywanie siły F_C łączy się z oddziaływaniem sił F_{jk} w parach kinematycznych. Ich wartości są zależne nie tylko od siły F_C i momentu M_B . Muszą one uwzględniać przemieszczanie się masowych członów (m_k, I_k), wywołujące siły bezwładności F_{bk} od przyspieszenia liniowego i momenty bezwładności M_{bk} od ruchu obrotowego.



Rys. 4.1. Układ korbowy silnika spalinowego

Wartości sił bezwładności mogą w wielu przypadkach być znaczące. Przykładowo dla układu korbowego z rys. 4.1 siła bezwładności F_{b2} korbowodu może osiągać wartość rzędu 10 kN, a moment bezwładności około 1 kN·m (podane wartości dotyczą danych: $AB = 0,2$ m, $m_2 = 0,2$ kg, $I_2 = 0,01$ kg·m², $\omega_1 = 500$ s⁻¹). W niektórych układach, jak np. mechanizmy krzywkowe, siły bezwładności mogą być jedynym realnym obciążeniem, natomiast opory ruchu mogą być pomijalnie małe. Wobec przytoczonych przykładów należy stwierdzić, że siły masowe stanowią bardzo znaczące obciążenie układów kinematycznych, a ewentualne ich pominięcie powinno być zawsze poprzedzone szczegółową analizą. Wzajemne oddziaływanie członów siłami F_{jk} skutkuje siłami T_{jk} lub momentami M_{jk}^T tarcia (rys. 4.1) i może istotnie zaburzyć układ sił, jaki występuje przy założeniu braku tarcia.

Zjawiska towarzyszące ruchowi masowych układów kinematycznych, szczególnie dynamiki prostej, są opisywane równaniami różniczkowymi. Ich rozwiązanie jest na ogół kłopotliwe, a w postaci jawnej możliwe tylko w przypadkach najprostszych. Obecnie do rozwiązywania równań różniczkowych dynamiki aplikuje się i intensywnie rozwija różnorodne metody numeryczne. Trzeba jednak podkreślić, że modele dynamiki ciągłe są jeszcze niedoskonałe, a otrzymywane wyniki nierzadko odbiegają od realnych, uzyskiwanych z pomiarów. Składa się na to wiele czynników, a najważniejsze wynikają z niedoskonałości modeli tarcia, trudności w modelowaniu luzów w parach kinematycznych czy podatności członów.

Wiele zaawansowanych problemów dynamiki, takich jak numeryczne metody rozwiązywania równań ruchu [7], [26], badania układów zawierających człony podatne i uwzględniające tarcie [31], [32] wykracza poza ramy tego opracowania. Zostaną tutaj omówione jedynie wybrane zagadnienia dynamiki o istotnym znaczeniu praktycznym.

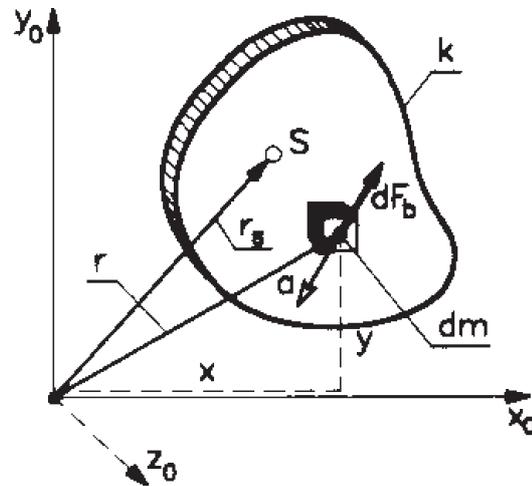
4.2. Parametry masowe członu, siły bezwładności

4.2.1. Masa członu i masowy moment bezwładności – ruch płaski

W ruchu płaskim wszystkie punkty członu poruszają się po torach równoległych do pewnej płaszczyzny. Podczas ruchu pojedynczego elementu masowego (rys. 4.2) dm z przyspieszeniem \mathbf{a} należy uwzględnić związaną z tym elementarną siłę bezwładności $d\mathbf{F}_b$. Dla wielu mas elementarnych składających się na człon oznacza to obciążenie członu polem elementarnych sił masowych. Dla równowagi globalnej członu pole sił elementarnych zastępuje się siłą i momentem bezwładności. Ich wyznaczenie wymaga znajomości parametrów masowych członu, tj. położenia środka masy S na członie, masy m członu i masowego momentu bezwładności I . Ostatni parametr niesie informacje o rozłożeniu masy na członie.

Położenie środka masy S opisuje się według zależności (rys. 4.2):

$$x_S = \frac{1}{m} \int x dm, \quad y_S = \frac{1}{m} \int y dm$$



Rys. 4.2. Człon układu płaskiego – parametry masowe

korzystając z pojęcia momentów statycznych [27], natomiast masowy moment bezwładności względem osi z_0 obliczany jest z równania:

$$I_Z = \int_m (x^2 + y^2) dm$$

Przesuwanie osi odniesienia równoległe do z_0 , np. do środka masy, wywołuje zmianę masowego momentu bezwładności według relacji¹:

$$I_Z = I_S + m(x_S^2 + y_S^2) \quad (4.1)$$

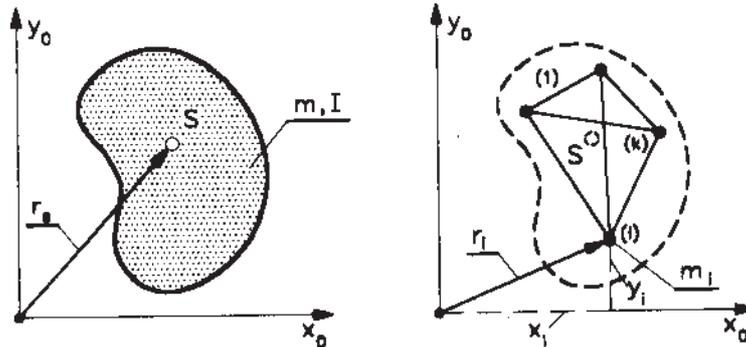
Podane zależności mają przede wszystkim znaczenie definicyjne. Ich praktyczne wykorzystanie jest ograniczone do członów o bardzo prostych kształtach (dla elementarnych figur i brył można posłużyć się gotowymi wzorami). Bardzo pomocne są współczesne środowiska graficzne wspomagające projektowanie, które są standardowo wyposażone w moduły wyznaczania środka masy i momentów bezwładności dowolnie złożonych elementów – wystarczy dysponować rysunkiem, ściślej modelami bryłowymi członów. W przeciwnym przypadku należy wspomóc się pomiarem – np. metodą wahała fizycznego, metodą drgań skrętnych [20].

Masy skupione. W pewnych przypadkach dogodnie jest, zamiast posługiwać się członem o ciągłym rozkładzie masy (parametry m , I_S), zamodelować człon układem mas skupionych połączonych ze sobą bezmasowymi prętami. Uzyskuje się wtedy korzyść na prostocie równań dynamiki, co jest np. wykorzystywane w opisie warunków wyważania układów kinematycznych. Zastąpienie członu układem mas skupionych jest

¹ Twierdzenie Steinera–Eulera.

możliwe, jeżeli są spełnione oczywiste warunki dynamicznej ekwiwalentności członu i modelu w postaci (rys. 4.3):

- masy członu i modelu są jednakowe,
- środki mas członu i modelu pokrywają się,
- masowe momenty bezwładności członu i modelu są jednakowe.



Rys. 4.3. Człon i równoważny układ mas skupionych

Wymienione warunki, dla modelu k -masowego, przełożone na równania przyjmują postać:

$$\sum_1^k m_i = m \quad (4.2a)$$

$$\sum_1^k m_i x_i = m x_S \quad (4.2b)$$

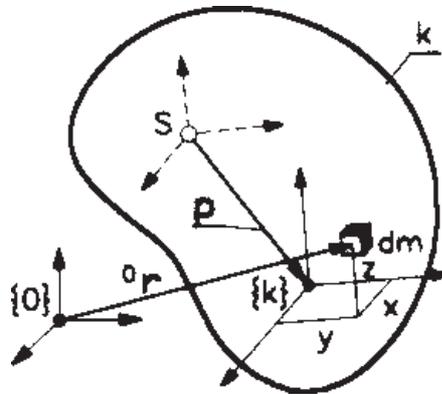
$$\sum_1^k m_i y_i = m y_S \quad (4.2c)$$

$$\sum_1^k m_i (x_i^2 + y_i^2) = m(x_S^2 + y_S^2) + I_S \quad (4.2d)$$

Układ k -mas skupionych jest opisywany liczbą $3k$ parametrów (x_i, y_i, m_i) , co w związku z dysponowaniem czterema równaniami (4.2) oznacza, że spośród $3k$ parametrów można dowolnie przyjmować p parametrów, przy czym $p = 3k - 4$. Daje to np. swobodę w wyborze umiejscowienia mas w takich punktach, które są łatwe w opisie ruchu. Dysponując modelem mas skupionych w analizie dynamicznej, będziemy interesować się już tylko przyspieszeniami punktów-mas, pomijając przyspieszenie ruchu obrotowego.

4.2.2. Tensor bezwładności – ruch przestrzenny

Rozpatrzony przypadek odnosił się do ruchu płaskiego. Parametry masowe wystarczyło opisać tylko dwiema wielkościami, masą i masowym momentem bezwładności. Bardziej złożona jest sytuacja ruchu ogólnego w przestrzeni. Wtedy oprócz masy m jej rozłożenie opisuje tensor (macierz) bezwładności. Jego postać jest podobnie jak w przypadku ruchu płaskiego zależna od układu odniesienia. Łatwo zauważyć (rys. 4.4), że definiowanie rozkładu masy członu k w układzie odniesienia $\{0\}$ oznacza ciągłą zmianę wektora ${}^0\mathbf{r}$ w czasie ruchu członu, co musi skutkować ciągłą zmianą wartości momentów bezwładności. Pokonanie tej niedogodności polega na definiowaniu parametrów rozłożenia masy członu k w jego lokalnym układzie współrzędnych $\{k\}$. W takim



Rys. 4.4. Człon w 3D i układ w środku masy S i przesunięty

przypadku w czasie ruchu członu wartości elementów macierzy bezwładności nie ulegają zmianie, co znacznie upraszcza obliczenia. Macierz bezwładności ma postać:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

gdzie:

- momenty bezwładności

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm,$$

- momenty dewiacji

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_m xy dm, \quad I_{xz} = I_{zx} = -\int_m xz dm, \quad I_{yz} = I_{zy} = -\int_m yz dm$$

Wartości elementów macierzy bezwładności (4.3) są zależne od położenia układu współrzędnych. Staje się ona diagonalną przez szczególne usytuowanie układu współrzędnych, takie aby momenty dewiacyjne miały wartości zerowe – osie xyz są wtedy nazywane głównymi osiami bezwładności. Jeśli dodatkowo początek takiego układu umieścić w środku masy członu, mówimy o głównych centralnych osiach bezwładności [24].

Przesunięcia i obroty osi układu lokalnego skutkują zmianą wartości elementów tensora bezwładności. Przydatna w praktyce, w opisie dynamiki układów przestrzennych, translacja układu współrzędnych od środka masy S do dowolnego punktu o wektor $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T$ skutkuje zmianą elementów tensora bezwładności (4.3) według zależności:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Sxx} \\ I_{Syy} \\ I_{Szz} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} p_y^2 + p_z^2 \\ p_x^2 + p_z^2 \\ p_x^2 + p_y^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_{xy} \\ I_{xz} \\ I_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Sxy} \\ I_{Sxz} \\ I_{Syz} \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} p_x p_y \\ p_x p_z \\ p_y p_z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

gdzie I_S odnosi się do układu lokalnego o początku w środku masy S .

4.2.3. Wypadkowa sił bezwładności – ruch płaski

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona działanie wypadkową \mathbf{F} sił zewnętrznych na człon o masie m wywołuje ruch jego środka masy S z przyspieszeniem \mathbf{a} według równania:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (4.5)$$

Dla elementu obrotowego o masowym momencie bezwładności I_S (względem osi przechodzącej przez środek masy S) moment \mathbf{M} (od sił zewnętrznych liczony względem środka masy S) wywołuje natomiast ruch obrotowy z przyspieszeniem kątowym zgodnie z równaniem:

$$\mathbf{M} = I_S \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.6)$$

Przekształcenie równań (4.5) i (4.6) do postaci²:

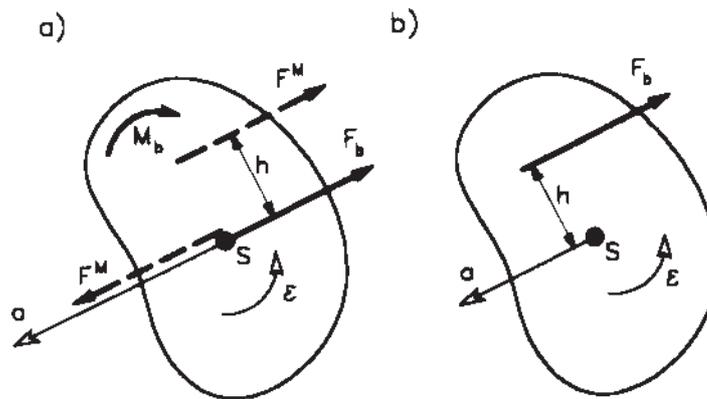
$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \leftrightarrow \mathbf{F} + \mathbf{F}_b = 0 \quad \mathbf{M} - I_S \boldsymbol{\epsilon} = 0 \leftrightarrow \mathbf{M} + \mathbf{M}_b = 0 \quad (4.7)$$

sprowadza zagadnienie dynamiczne do quasi-statycznego, a iloczyny masy m i przyspieszenia \mathbf{a} oraz masowego momentu bezwładności I_S i przyspieszenia kąowego $\boldsymbol{\epsilon}$ są nazywane odpowiednio siłą \mathbf{F}_b i momentem \mathbf{M}_b bezwładności. Dzięki temu przykładając do ruchomego członu siłę/moment bezwładności, problem dynamiczny może być rozwiązywany metodami statyki.

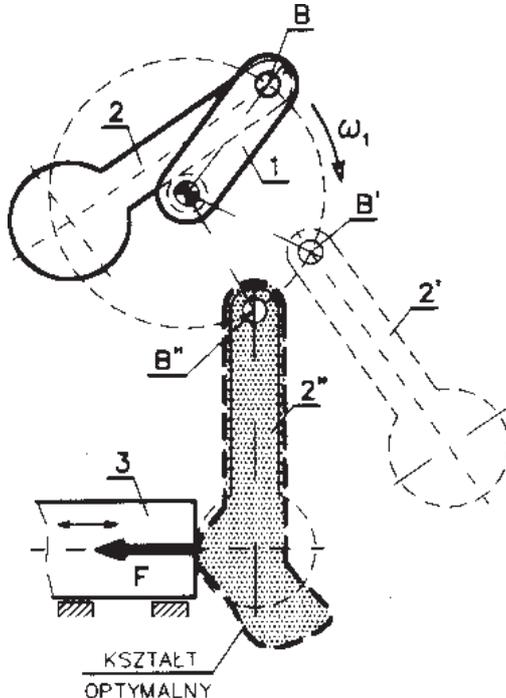
² L. d'Alembert (1717–1783)

Na rysunku 4.5a przedstawiono siłę i moment bezwładności członu w ruchu płaskim. Jeżeli zastąpić moment M_b parą sił $F^M - F^M$ o ramieniu h , a następnie przyjąć, że siły F^M mają moduły jak F_b , to wynikiem działania siły i momentu bezwładności jest tylko jedna wypadkowa sił bezwładności (rys. 4.5b) przesunięta względem środka masy o wielkość h liczoną z zależności:

$$h = \frac{M_b}{F^M} = \frac{M_b}{F_b} = \frac{I_S \varepsilon}{ma} \quad (4.8)$$



Rys. 4.5. Siła i moment bezwładności (a) oraz wypadkowa sił bezwładności (b)



Rys. 4.6. Bijak strzeptywacza elektrofiltrów

Na podstawie rozpatrzonego ruchu płaskiego łatwo można przejść do ruchu obrotowego czy postępowego. Reguły postępowania są identyczne, a przypadek ruchu postępowego upraszcza się – brak obrotu oznacza, że $M_b = 0$.

Posługiwanie się pojęciem wypadkowej sił bezwładności znakomicie ułatwia interpretację zjawisk dynamicznych. Jako przykład niech posłuży układ strzeptywacza zastosowany do usuwania pyłów z elektrod zbiorczych elektrofiltrów. Pomijając szczegóły budowy (rys. 4.6) wzbudzenie drgań elektrod uzyskuje się przez cykliczne uderzenia bijaka 2 w belkę 3, podwieszoną na pionowych elektrodach – ruch belki 3 jest poziomy. Ciągłe obracanie korby 1 z prędkością kątową ω_1 powoduje wynoszenie w górę bijaka 2, który w pewnym położeniu punk-

tu B rozpoczyna spadek i w końcowej fazie – położenie 2'' – uderza w belkę 3 z siłą F . Dalszy obrót korby 1 ponownie wynosi bijak 2 i cykl się powtarza.

Siła F jest oczywiście wynikiem powstania sił masowych w związku z gwałtownym zahamowaniem ruchu bijaka, co skutkuje dużym przyspieszeniem. Jest oczywiste, że najlepszą skuteczność urządzenie uzyska wtedy, gdy siła F będzie maksymalna. Oznacza to, że bijak powinien być tak ukształtowany, aby siła F była wypadkową sił bezwładności. Zwróćmy uwagę, że powyższy warunek zapewnia jednocześnie minimalizację siły oddziaływania w parze B , co przyczynia się do zwiększenia żywotności układu. Wymienione warunki spełnia optymalny kształt bijaka [21], zmieniony w stosunku do stosowanego kształtu cylindrycznego, pokazany na rys. 4.6.

Na zakończenie rozważań o siłach masowych zwróćmy uwagę, że dla rozważań prowadzonych metodami analitycznymi redukcja sił bezwładności do jednej wypadkowej nie daje istotnych korzyści. W układach płaskich posługujemy się najczęściej składowymi zarówno sił, jak i parametrów ruchu, a to skutkuje składowymi sił bezwładności.

4.3. Równowaga kinetostaticzna

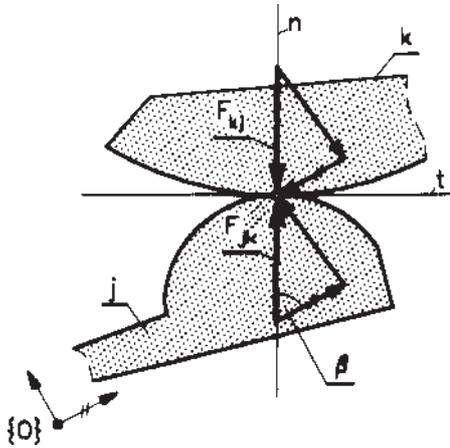
Jednym z podstawowych zadań dynamiki jest określanie wartości sił zewnętrznych, na ogół czynnych, potrzebnych do utrzymania równowagi układu obciążonego siłami biernymi w zdefiniowanym ruchu. Wymaga to oczywiście uwzględnienia sił masowych wynikających z ruchu poszczególnych członów, które w tej analizie traktuje się jak siły zewnętrzne. Znajomość sił czynnych jest niezbędna w doborze napędów.

Kolejnym zadaniem analizy kinetostaticznej jest określanie sił oddziaływania w parach kinematycznych. Ich znajomość jest konieczna w obliczeniach konstrukcyjnych członów i par – wymiarowanie przekrojów członów z warunków wytrzymałościowych, dobór i obliczenia sprawdzające łożysk itp. W związku z przemieszczaniem się elementów par kinematycznych niezbędna jest w tej analizie umiejętność uwzględnienia tarcia, które w niektórych sytuacjach może istotnie zniekształcić obraz uzyskany z analizy pomijającej tarcie.

Istnieje wiele metod rozwiązywania tak postawionych zadań, jednak wszystkie oparte są na oczywistym spostrzeżeniu, że równowaga całego układu oznacza też równowagę każdego członu, a także dowolnie wydzielonej grupy członów. Tok analizy opiera się na rozwiązywaniu równań równowagi odpowiednich sił i momentów.

4.3.1. Siły oddziaływania w parach kinematycznych

Para wyższa – krzywkowa. Na rysunku 4.7 przedstawiono skojarzenie dwóch powierzchni krzywoliniowych. Brak tarcia oznacza, że przemieszczanie się członów względem siebie wzdłuż stycznej t nie napotyka żadnych oporów. Ruch względny członów j



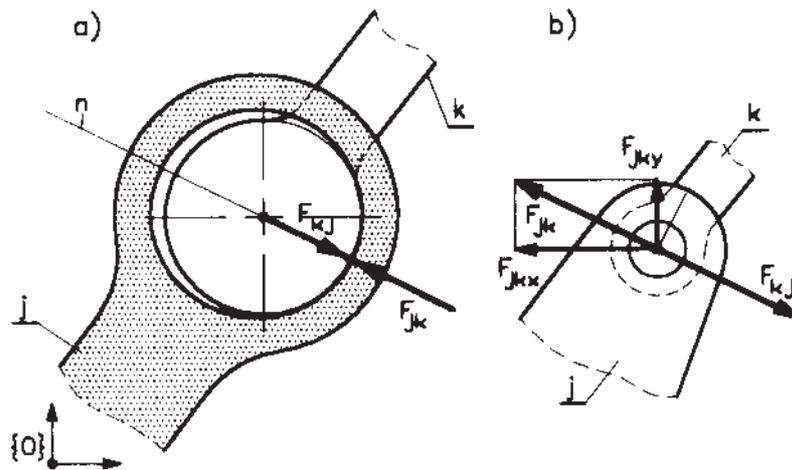
Rys. 4.7. Para krzywkowa, siły

oraz k w kierunku normalnej n jest natomiast zabroniony, co oznacza, że w kierunku n nie ma przemieszczenia.

- siłą \mathbf{F}_{jk} oddziałuje człon j na człon k ,
 - siłą \mathbf{F}_{kj} oddziałuje człon k na człon j ,
- przy czym $\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}$.

Gdy znana jest geometria członów, wówczas siła oddziaływania w każdej parze wyższej (tj. parze II klasy) jest określona co do punktu styku i kierunku działania (kąt β) – nieznanym jest tylko jej moduł.

Para obrotowa. Rozpatrując parę obrotową w powiększeniu (rys. 4.8a), stwierdzamy, że w istocie czop członu k w skojarzeniu z pa-

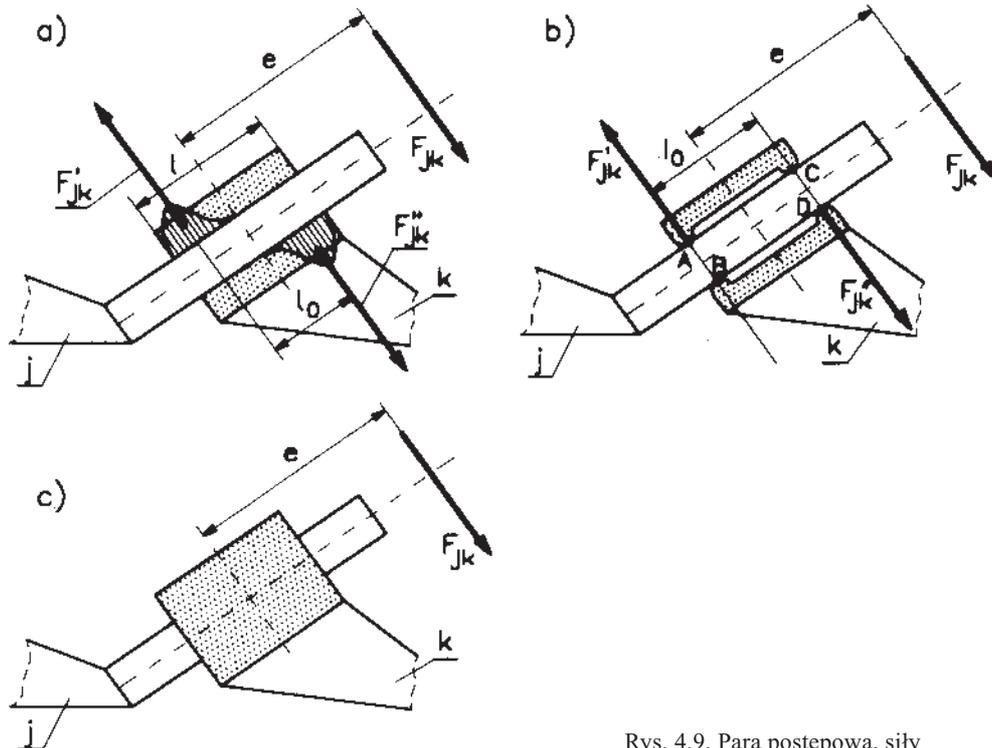


Rys. 4.8. Para obrotowa, siły

newką członu j tworzą parę wyższą, jak na rys. 4.7. Wobec tego siły \mathbf{F}_{jk} i \mathbf{F}_{kj} oddziaływania członów na siebie wzajemnie również leżą na kierunku normalnej do obu okręgów wyprowadzonej w punkcie styku. Niestety punkt styku czopa i panewki nie jest znany. Jest on zależny od stanu obciążenia członów j i k .

Zwróćmy jednak uwagę, że zawsze, bez względu na obciążenia, siła oddziaływania w parze obrotowej przechodzi przez jej środek geometryczny. Można zatem siłę w parze obrotowej przenieść do jej środka geometrycznego, co uwalnia nas od wnikania w szczegóły rozwiązania konstrukcyjnego. Rozbicie siły \mathbf{F}_{jk} na dwie składowe F_{jkx} i F_{jky} (rys. 4.8b) informuje, że tym razem wektor siły oddziaływania w parze obrotowej wnosi dwie niewiadome – znany jest punkt jej przyłożenia (środek pary).

Para postępową. Parę taką tworzy prowadnica j oraz przesuwany się po niej suwak k (rys. 4.9a). Rozpatrując szczegółowo współpracujące elementy, stwierdzamy, że w wyniku obciążenia na powierzchniach styku występują naciski, których rozkład jest zależny m.in. od sztywności prowadnicy i suwaka. Określenie rzeczywistego stanu sił oddziaływania w takiej parze wymaga każdorazowo złożonej analizy stanu naprężeń, np. metodą elementów skończonych.



Rys. 4.9. Para postępową, siły

Do celów praktycznych modeluje się tę parę, bazując na możliwości zastąpienia pola sił nacisków siłami skupionymi F'_{jk} i F''_{jk} . Oznacza to wprowadzenie modelu (rys. 4.9b), w którym suwak ma możliwość kontaktu z prowadnicą w punktach A, B, C, D . Na podstawie doświadczenia przyjmuje się, że rozstaw sił F'_{jk} i F''_{jk} , a właściwie rozstaw punktów styku na suwaku wynosi $l_o = 2l/3$ lub $3l/4$.

Wprowadzony model zapewnia odwzorowanie układu sił, jaki występuje w realnej parze, a w każdym punkcie styku sytuacja siłowa odpowiada tej, jaka występuje w parze wyższej (rys. 4.7). Nie oznacza to, że człony tworzące tę parę zastępczą kontaktują się ze sobą jednocześnie w czterech punktach. Na ogół będą się stykać w dwóch spośród czterech punktów A, B, C, D , a w przypadku szczególnym nawet w jednym. Ostatni przypadek będzie wtedy, gdy $F'_{jk} = 0$ lub $F''_{jk} = 0$.

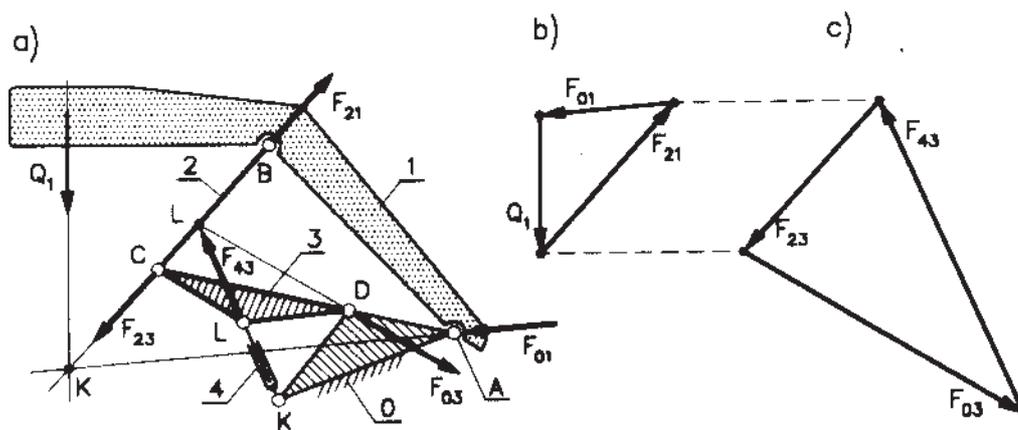
Zwróćmy uwagę na to, że jakkolwiek o punktach styku będą decydować zwroty sił, to linie ich działania są zawsze niezmiennie – jedna siła F'_{jk} działa na linii wyznaczo-

nej przez punkty A i B , druga \mathbf{F}_{jk}'' na linii wyznaczonej przez punkty C i D . Dla zwrotów sił \mathbf{F}_{jk}' i \mathbf{F}_{jk}'' przyjętych na rys. 4.9b jest oczywiste, że suwak z prowadnicą kontaktuje się w A i D .

Zarówno w parze realnej (rys. 4.9a), jak i w modelowej (rys. 4.9b) można mówić o wypadkowej sile oddziaływania \mathbf{F}_{jk} , której linia działania jest zawsze prostopadła do osi prowadnicy i zdefiniowana np. odległością e mierzoną od środka suwaka. Dla równowagi globalnej wygodnie jest posługiwać się wyłącznie całkowitą siłą oddziaływania w parze postępowej. Wtedy niewiadomymi są moduł siły i ramię e – rys. 4.9c.

PRZYKŁAD 4.1

Dla przedstawionych informacji o siłach oddziaływania w parach rozpatrzmy równowagę przykładowego układu (rys. 4.10a). Zakładamy na tyle powolny ruch układu, że możliwe jest pominięcie sił bezwładności. Jedyne obciążenie stanowi więc ciężar Q_1 członu 1, który jest równoważony siłą \mathbf{F}_{43} w siłowniku 4. Warunki równowagi i siły oddziaływania określimy drogą graficznego rozwiązywania równań wektorowych sił.



Rys. 4.10. Rozkład sił w układzie płaskim

Znana siła Q_1 sugeruje na początek rozpatrzenie równowagi członu 1, co wymaga spełnienia następującego równania:

$$\underline{Q_1} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{01} = 0 \quad (4.9)$$

Siły \mathbf{F}_{21} i \mathbf{F}_{01} w parach obrotowych są znane jedynie co do punktu przyłożenia (środki par A i B), a to nie wystarcza do rozwiązania równania (4.9). Każda z par członu 1 wprowadza po dwie niewiadome, a równań równowagi członu w układzie płaskim mamy do dyspozycji trzy (dwie sumy sił i suma momentów). Podobnie cztery niewiadome

wprowadza człon 2 – po dwie w parach C i D . Jednak wobec braku obciążeń zewnętrznych członu 2, poza siłami w parach, równanie równowagi w postaci:

$$\mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{12} = 0 \quad (4.10)$$

prorowadzi do oczywistego wniosku, że siły \mathbf{F}_{32} i \mathbf{F}_{12} muszą leżeć na jednej prostej, którą wyznaczają środki geometryczne par kinematycznych C i B . Podobny wniosek wynika z analizy sił zewnętrznych siłownika 4, który może być rozważany jak człon dwuwęzłowy – siły zewnętrzne siłownika leżą na linii MN .

Znany kierunek, a nawet linia działania siły \mathbf{F}_{12} , a więc także siły \mathbf{F}_{21} pozwala wrócić do równania (4.9). Ponieważ geometrycznym warunkiem równowagi trzech sił obciążających element jest ich przecinanie się w jednym punkcie (zapewnia to zerowy moment od tych sił), linia działania trzeciej siły \mathbf{F}_{01} równania (4.9) musi przechodzić przez punkt K . Umożliwia to rozwiązanie równania (4.9), co pokazano na rys. 4.10b.

Rozpatrując teraz równowagę członu 3, stwierdzamy, że równanie równowagi sił zewnętrznych

$$\underline{\underline{\mathbf{F}_{23}}} + \mathbf{F}_{43} + \mathbf{F}_{03} = 0 \quad (4.11)$$

będzie spełnione pod warunkiem ich przecinania się w punkcie L , stąd linia działania siły \mathbf{F}_{03} i graficzne rozwiązanie na rys. 4.10c. Znajomość siły \mathbf{F}_{23} wynika wprost z równania (4.10) i trzeciej zasady dynamiki Newtona $\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}$.

Równowagę układu z rys. 4.10a określono na podstawie analizy równowagi poszczególnych członów. Było to możliwe wobec szczególnego, w istocie uproszczonego, stanu obciążeń zewnętrznych nie uwzględniającego sił bezwładności ani nawet ciężarów członów 2 i 3.

4.3.2. Statyczna wyznaczalność układów kinematycznych

Uproszczenie, które umożliwiło proste rozwiązanie równowagi układu z rys. 4.10, a polegające na pominięciu sił masowych, w przypadku wielu innych układów jest niedopuszczalne. Tak będzie w przypadku układów szybkobieżnych. Przykładowo pominięcie siły bezwładności korbowodu silnika spalinowego oznacza inny, w stosunku do realnego stan obciążeń łożysk, w mechanizmach krzywkowych często siły masowe są jedynymi, które obciążają układ. Z drugiej strony, w wielu układach, nawet o powolnym ruchu, błędem jest pominięcie sił ciężkości. Przykładem może być tutaj zespół członów wysięgnika koparki albo żurawia wypadowego.

W takich sytuacjach, kiedy analiza równowagi poszczególnych członów nie prowadzi do określenia stanu równowagi, należy sięgać po większe, kilkuczłonowe fragmenty układów. Z układu należy wydzielać te fragmenty, których rozwiązanie jest możliwe

za pomocą metod statyki. Noszą one nazwę grup statycznie wyznaczalnych. Sformalizowanie sposobu wydzielenia takich grup wynika wprost z konieczności zapewnienia jednakowej liczby możliwych do ułożenia równań statyki i liczby niewiadomych.

Dla każdego członu układu płaskiego można ułożyć dwa równania sumy sił ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$) oraz równanie momentów ($\Sigma M = 0$), co dla zespołu u członowego oznacza dysponowanie liczbą $3u$ równań. Z drugiej strony wiadomo, że:

- każda para kinematyczna II klasy wnosi 1 niewiadomą – znana jest linia działania wektora siły, nieznaną moduł (rys. 4.7),
- każda para I klasy wnosi 2 niewiadome – dla pary obrotowej (R) znany jest punkt przyłożenia, nieznaną obie składowe; dla postępowej (T) nieznaną jest moduł i linia działania (rys. 4.8 i 4.9).

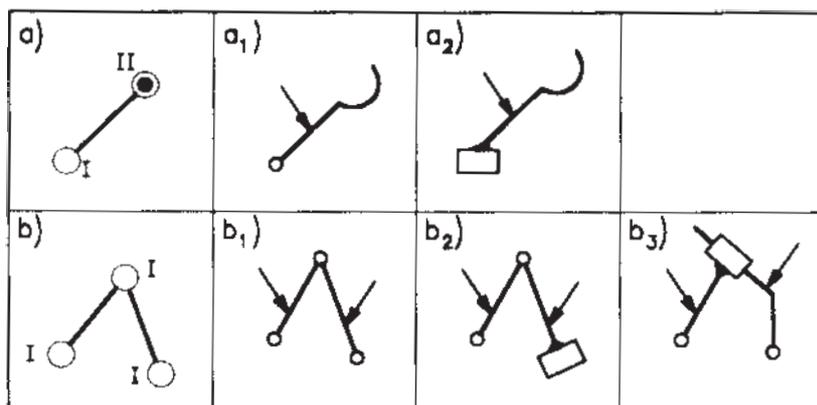
Wnioskujemy zatem, że łącznie jest:

Grupa statycznie wyznaczalna:	Liczba niewiadomych	=	Liczba równań	(4.12)
	$2p_1 + p_2$	=	$3u$	

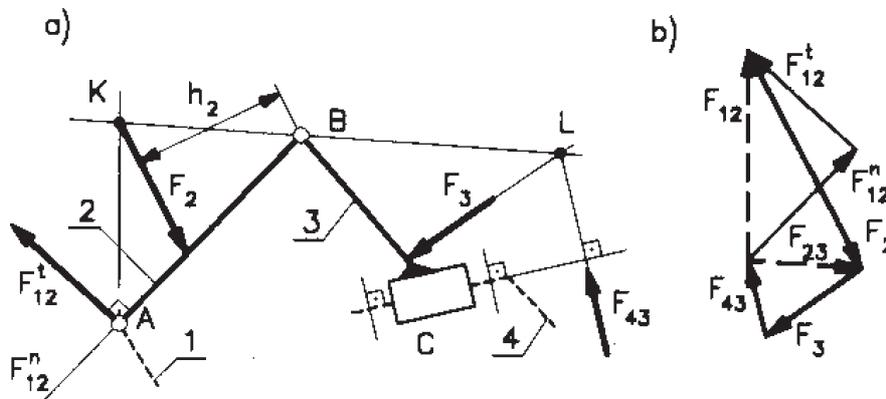
Podany warunek (4.12) statycznej wyznaczalności wskazuje na możliwość zestawienia grup statycznie wyznaczalnych dla kolejno przyjmowanych wartości liczby członów u . Najprostsze grupy zestawiono na rys. 4.11.

Liczba możliwych grup, dla uzasadnionej praktycznie liczby członów u , jest skończona, a dla każdej z nich istnieje prosta procedura określania warunków równowagi [16] – tutaj pokazujemy tylko przykładowe, uzupełnione rozwiązaniem graficznym.

Dla grupy RRT (rys. 4.12) przyjmujemy obciążenie członów 2 i 3 siłami F_2 i F_3 , które reprezentują wypadkowe siły zewnętrznych, siły bezwładności i siły ciężkości. Sposób rozwiązania polega na rozłożeniu nieznaną siły F_{12} na dwie składowe – styczną



Rys. 4.11. Przykłady grup statycznie wyznaczalnych – układy płaskie



Rys. 4.12. Układ sił w grupie statycznie wyznaczalnej RRT

i normalną – prostopadle i wzdłuż członu AB . Takie podejście umożliwia wyznaczenie składowej stycznej z równania momentów dla członu 2 względem punktu B

$$\sum M_2^B = 0 \rightarrow F_2 h_2 - F_{12}^t \cdot AB = 0 \rightarrow F_{12}^t = \frac{F_2 h_2}{AB} \quad (4.13)$$

a wtedy równanie równowagi sił zewnętrznych grupy członów 2 i 3

$$\underline{\underline{\mathbf{F}_{12}^n}} + \underline{\underline{\mathbf{F}_{12}^t}} + \underline{\underline{\mathbf{F}_2}} + \underline{\underline{\mathbf{F}_3}} + \underline{\underline{\mathbf{F}_{43}}} = 0 \quad (4.14)$$

jest już rozwiązywalne³, co pokazano na rys. 4.12b.

Ponieważ każdy z członów grupy także ma być w równowadze, więc równania

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{32} = 0$$

$$\mathbf{F}_{43} + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{23} = 0$$

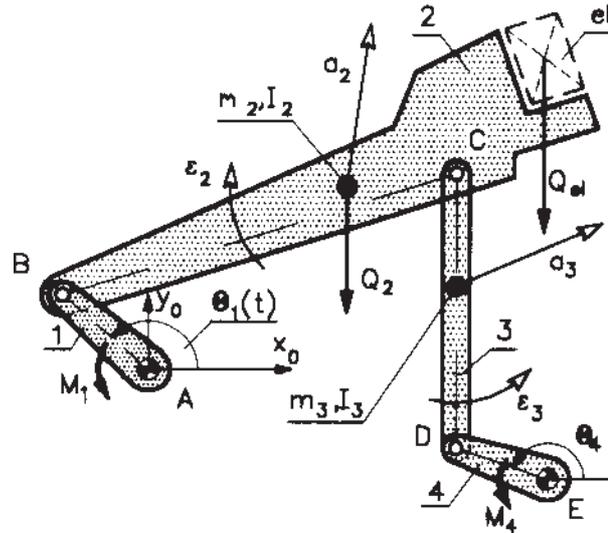
jednoznacznie wskazują na konieczność przecinania się w jednym punkcie wypadkowej sił zewnętrznych członu 2 (punkt K) i w drugim dla członu 3 (punkt L). Konsekwencją jest jednoznacznie ustalona linia działania siły \mathbf{F}_{43} .

Poprzestajemy na opisanej procedurze rozwiązywania grupy 2RT, odnotujemy, że nie należy tego sposobu, jak i innych, traktować jako jedynie możliwy. Są to procedury, które w sposób najprostszy prowadzą do rozwiązania, a w każdym przypadku należy się kierować regułami statyki.

³ Wektory dwukrotnie podkreślone są znane, jednokrotnie znane co do kierunku.

PRZYKŁAD 4.2

Rozpatrzmy układ z rys. 4.13, w którym należy określić siły i momenty stanu równowagi, a zwłaszcza momenty napędowe M_1 i M_4 oraz siły oddziaływania w parach. Dla członu 2 obciążenie stanowią siły Q_2 i Q_{el} oraz siła i moment bezwładności. Dla członu 3 pominiemy siłę ciężkości, natomiast uwzględnimy siły masowe.



Rys. 4.13. Przykład układu mechatronicznego

Równanie równowagi sił członu 2 w postaci:

$$\underline{Q_2} + \underline{Q_{el}} + \underline{F_{b2}} + \underline{F_{12}} + \underline{F_{32}} = 0 \quad (4.15)$$

nie znajdzie rozwiązania wobec czterech niewiadomych wnoszonych przez siły w parach obrotowych B i C. Identyczny wniosek wynika z analizy równania równowagi sił członu 3

$$\underline{F_{b3}} + \underline{F_{23}} + \underline{F_{43}} = 0 \quad (4.16)$$

Niezbędne jest wydzielenie grupy statycznie wyznaczalnej. W tym przypadku jest to dwuczłon BCD (człony 2, 3), który przedstawiono na rys. 4.14a. Człon 2 jest obciążony znaną siłą F_2 , która jest sumą wektorową

$$\underline{F_2} = \underline{Q_2} + \underline{Q_{el}} + \underline{F_{b2}} \quad (4.17)$$

przy czym siła F_{b2} jest wypadkową sił bezwładności członu 2 (uwzględnia moment bezwładności M_{b2}). W przypadku członu 3 uwzględnia się tylko wypadkową sił bezwładności F_{b3} , zakładając, że ciężar jest pomijalny.

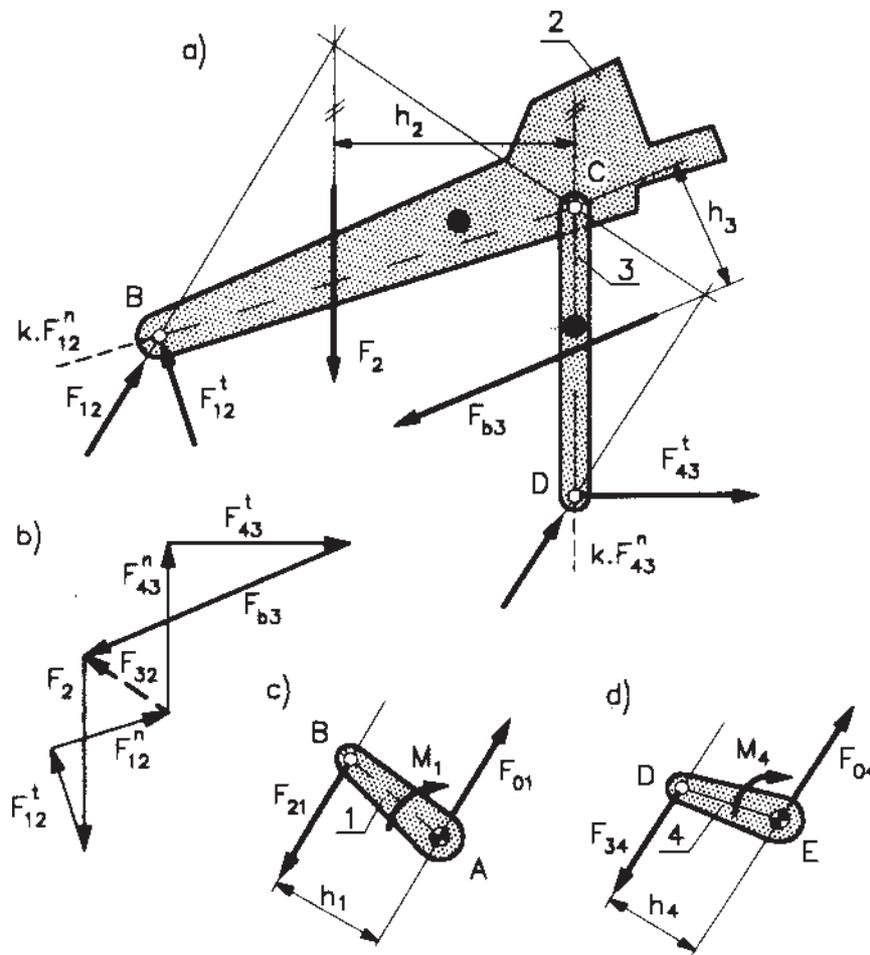
Rozwiązanie dwuczłonu z trzema parami obrotowymi opiera się na odpowiednim rozłożeniu zewnętrznych sił grupy \mathbf{F}_{12} i \mathbf{F}_{43} w parach B, D na składowe styczne i normalne – rys. 4.14a. Wtedy suma wektorowa sił zewnętrznych to

$$\sum \mathbf{F} = 0 \rightarrow \underline{\mathbf{F}_{12}^n} + \underline{\mathbf{F}_{12}^t} + \underline{\mathbf{F}_2} + \underline{\mathbf{F}_{b2}} + \underline{\mathbf{F}_{43}^t} + \underline{\mathbf{F}_{43}^n} = 0 \quad (4.18)$$

Wektory dwukrotnie podkreślone są łatwe do określenia, dla członów 2 i 3 bowiem słuszne są równania momentów względem środka pary C w postaci:

$$\sum M_2^C = 0 \rightarrow F_2 h_2 - F_{12}^t BC = 0 \rightarrow F_{12}^t = \frac{F_2 h_2}{BC}$$

$$\sum M_3^C = 0 \rightarrow -F_{b3} h_3 + F_{43}^t DC = 0 \rightarrow F_{43}^t = \frac{F_{b3} h_3}{DC}$$



Rys. 4.14. Rozwiązanie układu z rys. 4.13

W równaniach powyższych uwidacznia się sens rozbicia sił \mathbf{F}_{12} i \mathbf{F}_{43} na składowe wzdłuż i prostopadle do członów 2 i 3 – składowe normalne nie wchodzą do równań momentów.

Graficzne rozwiązanie równania (4.18) przedstawiono na rys. 4.14b. Dodatkowo znaleziono siłę oddziaływania \mathbf{F}_{32} w wewnętrznej parze C i rozwiązano równanie wyrażające sumę sił zewnętrznych dla członu 2

$$\sum \mathbf{F} = 0 \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{F}_2}} + \underline{\underline{\mathbf{F}_{12}}} + \mathbf{F}_{32} = 0$$

Pełne rozwiązanie układu wymaga jeszcze wyznaczenia wartości sił w parach kinematycznych A i E oraz momentów M_1 i M_4 potrzebnych do realizacji ruchu według funkcji $\Theta_1(t)$ i $\Theta_4(t)$. Uzyskuje się to przez rozpatrzenie równowagi członów 1 i 4, wychodząc od znanych już sił $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ oraz $\mathbf{F}_{43} = -\mathbf{F}_{34}$ i rozwiązując oczywiste równania sił i momentów:

- dla członu 1 (rys. 4.14c)

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{01} = 0, \quad F_{21}h_1 - M_1 = 0$$

- dla członu 4 (rys. 4.14d)

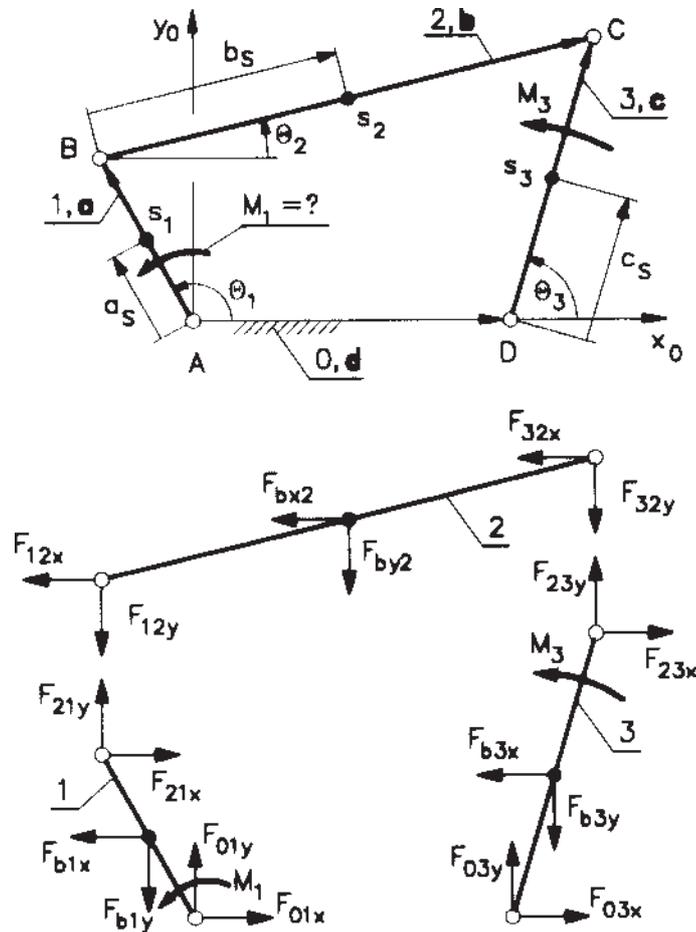
$$\mathbf{F}_{34} + \mathbf{F}_{04} = 0, \quad F_{34}h_4 - M_4 = 0$$

4.3.3. Macierzowy zapis sił

Przedstawione sposoby oparte na rozwiązywaniu kolejnych członów lub grup statycznie wyznaczalnych mogą być również prowadzone metodami analitycznymi. Łatwo wykazać, że każdy układ poprawny strukturalnie, bez więzów biernych, jest statycznie wyznaczalny. Wobec tego możliwe jest też jednoczesne rozwiązywanie całego układu przez napisanie równań równowagi wszystkich członów i łączne ich rozwiązanie. W takich sytuacjach jest wskazane macierzowe uporządkowanie układu równań najbardziej dogodnie do zastosowań komputerowych.

PRZYKŁAD 4.3

Dany jest układ czworoboku przegubowego (rys. 4.15a) o znanych parametrach masowych m_i , I_i . Ruch jest opisany funkcją zmiany kąta $\Theta_1(t)$, a obciążenie zewnętrzne stanowi moment M_3 . Należy określić siły oddziaływania w parach kinematycznych oraz zewnętrzny moment równoważący M_1 . Ciężar członów pomijamy.



Rys. 4.15. Układ sił w czworoboku

Równania równowagi zostaną napisane dla poszczególnych członów i uporządkowane do zapisu macierzowego. Na początek przypomnijmy zapis momentu \mathbf{M} siły \mathbf{F} działającej na ramieniu \mathbf{r} :

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{M} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \rightarrow M = r_x F_y - r_y F_x$$

Równania równowagi dla członu 1 to sumy sił:

$$\begin{aligned} F_{01x} + F_{21x} + F_{b1x} &= 0 \\ F_{01y} + F_{21y} + F_{b1y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

i momentów względem środka masy S_1 członu 1

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_{b_1} + (-\mathbf{a}_S) \times \mathbf{F}_{01} + (\mathbf{a} - \mathbf{a}_S) \times \mathbf{F}_{21} = 0$$

co daje

$$\begin{aligned} M_1 + M_{b_1} + [-(F_{01y}a_S \cos \Theta_1) + (F_{01x}a_S \sin \Theta_1)] \\ + [(a - a_S) \cos \Theta_1 F_{21y} - (a - a_S) \sin \Theta_1 F_{21x}] = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

gdzie: $M_{b_1} = -I_1 \varepsilon_1 = -I_1 \ddot{\Theta}_1$.

Dla członu 2 suma sił daje równania

$$\begin{aligned} F_{12x} + F_{32x} + F_{b2x} = 0 & \leftrightarrow -F_{21x} - F_{23x} + F_{b2x} = 0 \\ F_{12y} + F_{32y} + F_{b2y} = 0 & \leftrightarrow -F_{21y} - F_{23y} + F_{b2y} = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

a suma momentów względem środka masy S_2

$$\mathbf{M}_{b_2} + (-\mathbf{b}_S) \times \mathbf{F}_{12} + (\mathbf{b} - \mathbf{b}_S) \times \mathbf{F}_{32} = 0$$

i dalej

$$\begin{aligned} M_{b_2} + [-(-F_{21y}b_S \cos \Theta_2 + F_{21x}b_S \sin \Theta_2)] \\ + [-F_{23y}(b - b_S) \cos \Theta_2 + F_{23x}(b - b_S) \sin \Theta_2] = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

gdzie: $M_{b_2} = -I_2 \varepsilon_2 = -I_2 \ddot{\Theta}_2$.

Równowaga członu 3 daje równania sił

$$\begin{aligned} F_{03x} + F_{23x} + F_{b3x} = 0 \\ F_{03y} + F_{23y} + F_{b3y} = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

i momentów względem środka masy S_3

$$\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_{b_3} + (-\mathbf{c}_S) \times \mathbf{F}_{03} + (\mathbf{c} - \mathbf{c}_S) \times \mathbf{F}_{23} = 0$$

a następnie

$$M_3 + M_{b3} + \left[- (F_{03y} c_S \cos \Theta_3 - F_{03x} c_S \sin \Theta_3) \right] + \left[F_{23y} (c - c_S) \cos \Theta_3 - F_{23x} (c - c_S) \sin \Theta_3 \right] = 0 \quad (4.24)$$

gdzie: $M_{b3} = -I_3 \varepsilon_3 = -I_3 \ddot{\Theta}_3$.

Uzyskane dziewięć równań (4.19)÷(4.24) przekształcamy w taki sposób, aby z lewej strony pozostawić jedynie wielkości znane, tj. siły i momenty bezwładności oraz znane obciążenie zewnętrzne w postaci momentu M_3 . Uzyskujemy wtedy w wyniku równania:

$$F_{b1x} = -F_{01x} - F_{21x} \quad (4.25)$$

$$F_{b1y} = -F_{01y} - F_{21y} \quad (4.26)$$

$$M_{b1} = -M_1 + F_{01y} a_S \cos \Theta_1 - F_{01x} a_S \sin \Theta_1 - F_{21y} (a - a_S) \cos \Theta_1 + F_{21x} (a - a_S) \sin \Theta_1 \quad (4.27)$$

$$F_{b2x} = F_{21x} + F_{23x} \quad (4.28)$$

$$F_{b2y} = F_{21y} + F_{23y} \quad (4.29)$$

$$M_{b2} = -F_{21y} b_S \cos \Theta_2 + F_{21x} b_S \sin \Theta_2 + F_{23y} (b - b_S) \cos \Theta_2 - F_{23x} (b - b_S) \sin \Theta_2 \quad (4.30)$$

$$F_{b3x} = -F_{03x} - F_{23x} \quad (4.31)$$

$$F_{b3y} = -F_{03y} - F_{23y} \quad (4.32)$$

$$M_{b3} + M_3 = F_{03y} c_S \cos \Theta_3 - F_{03x} c_S \sin \Theta_3 - F_{23y} (c - c_S) \cos \Theta_3 + F_{23x} (c - c_S) \sin \Theta_3 \quad (4.33)$$

Równania równowagi (4.25÷4.33) zapisane w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} F_{b1x} \\ F_{b1y} \\ M_{b1} \\ F_{b2x} \\ F_{b2y} \\ M_{b2} \\ F_{b3x} \\ F_{b3y} \\ M_3 + M_{b3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -a_S \sin \Theta_1 & a_S \cos \Theta_1 & -1 & (a - a_S) \sin \Theta_1 & -(a - a_S) \cos \Theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b_S \sin \Theta_2 & -b_S \cos \Theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(b - b_S) \sin \Theta_2 & (b - b_S) \cos \Theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ (c - c_S) \sin \Theta_3 & -(c - c_S) \cos \Theta_3 & -c_S \sin \Theta_3 & c_S \cos \Theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{01x} \\ F_{01y} \\ M_1 \\ F_{21x} \\ F_{21y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{03x} \\ F_{03y} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

W formie skrótowej mamy zatem

$$\mathbf{F}_{zn} = \mathbf{G} \mathbf{F}_x \quad (4.35)$$

gdzie: \mathbf{F}_{zn} – wektor sił znanych (siły masowe i obciążenie zewnętrzne M_4),
 \mathbf{G} – macierz współczynników znanych dla znanej konfiguracji układu,
 \mathbf{F}_x – wektor sił określanych (siły oddziaływania w parach, moment M_1).

Rozwiązanie równania (4.35) nie stanowi już problemu, dla formalności zapiszmy

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_{zn} \quad (4.36)$$

4.3.4. Metoda prac przygotowanych

Prace przygotowane (wirtualne) są efektywnym narzędziem analizy sił w sensie statycznym i quasi-statycznym, kiedy siły bezwładności, wynikające ze znanego ruchu, potraktować jak siły zewnętrzne. Jak wiadomo praca siły \mathbf{F} na przesunięciu s jest dana iloczynem skalarnym

$$L = \int_s \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_s F(\cos \beta) ds$$

gdzie kąt β jest mierzony między siłą \mathbf{F} i przemieszczeniem $d\mathbf{s}$ w płaszczyźnie utworzonej przez te wektory.

Podobnie praca wykonana przez moment \mathbf{M} na drodze kątowej Θ dana jest równaniem:

$$L = \int_{\Theta} \mathbf{M} \cdot d\Theta = \int_{\Theta} M(\cos \gamma) d\Theta$$

gdzie kąt γ jest wyznaczony przez wektor \mathbf{M} i oś obrotu chwilowego.

Praca przygotowana (wirtualna) δL odnoszona jest natomiast do tzw. przemieszczeń przygotowanych δr i $\delta \Theta$, a stosowne wyrażenia to

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = F(\cos \beta) \delta s$$

$$\delta L = \mathbf{M} \cdot \delta \Theta = M(\cos \gamma) \delta \Theta$$

Zasada prac wirtualnych mówi, że:

Układ kinematyczny, w określonej konfiguracji (położeniu), znajduje się w równowadze statycznej lub quasi-statycznej, jeżeli suma prac przygotowanych wykonana przez siły i momenty zewnętrzne, w tym również przez siły i momenty masowe, na odpowiadających im przemieszczeniach przygotowanych jest równa zero.

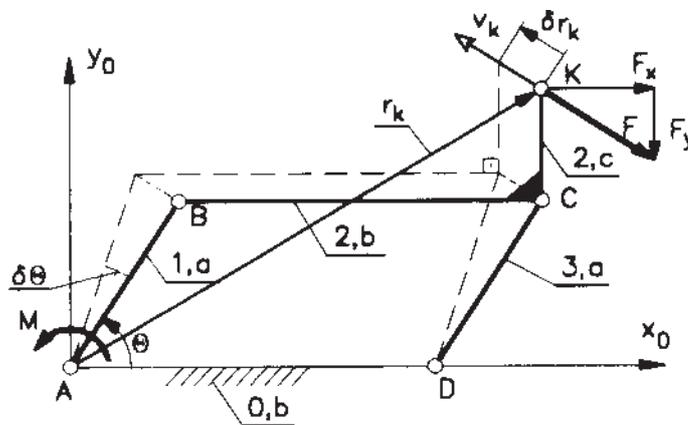
Zapisujemy to równaniem

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k + \sum_j \mathbf{M}_j \cdot \delta \Theta_j = 0 \quad (4.37)$$

w którym w wektorach sił mieszczą się siły zewnętrzne i siły masowe. W formie macierzowej dla układów płaskich mamy

$$\sum_k \left([\delta r_{kx} \quad \delta r_{ky}] \begin{bmatrix} F_{kx} \\ F_{ky} \end{bmatrix} \right) + \sum_j (\delta \Theta_j M_j) = 0 \quad (4.38)$$

Przemieszczenie przygotowane jest w istocie wielkością wirtualną (pomyślaną), która nie występuje w rzeczywistości. Dla przybliżenia tego pojęcia rozpatrzmy prosty układ płaski czworoboku przegubowego w odmianie równoległobocznej (rys. 4.16) i przyjmijmy, że jego konfiguracja jest „zamrożona”, po czym dokonajmy nieskończenie małego przemieszczenia $\delta\theta$ członem AB , co będzie skutkowało przemieszczeniem punktów B, C, K . Opisując położenie punktu K w układzie podstawy $\{0\}$ wektorem \mathbf{r}_K , jego przemieszczenie wirtualne wyznacza $\delta\mathbf{r}_K$. Zwróćmy uwagę, że te elementarne przemieszczenia realizują się na kierunkach wektorów prędkości, jakie mogą wystąpić w „zamrożonym” położeniu układu. W układzie z rys. 4.16 jest to spostrzeżenie oczywiste, dodatkowo z uwagi na szczególną geometrię układu przemieszczenia wirtualne punktów



Rys. 4.16. Czworobok równoległoboczny – przemieszczenia wirtualne

tów B, C, K są jednakowe jak ich prędkości. Taki wniosek rozciąga się na wszystkie układy kinematyczne – przemieszczenia wirtualne realizują się na kierunkach odpowiednich prędkości liniowych i kątowych. W każdym jednak układzie ich wartości są ze sobą powiązane.

W sensie matematycznym przemieszczenia wirtualne są wariacjami funkcji [24], a ich wyznaczanie jest tożsame z różniczkowaniem. Ponieważ rozpatrujemy układ zamrożony, więc czas jest stałą ($t = \text{const}$), natomiast zmiennymi są wszystkie wielkości geometryczne (kinematyczne), które zmieniają się w czasie ruchu układu. Ogólnie więc mamy dla funkcji w postaci jawnej:

$$z = z(x, y, t) \xrightarrow{t=\text{const}} \delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y \quad (4.39)$$

i w postaci uwikłanej

$$f(x, y, z, t) = 0 \xrightarrow{t=\text{const}} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \quad (4.40)$$

Powracając do układu z rys. 4.16, bez trudu opisujemy położenie punktu K w układzie $\{0\}$ podstawy

$$x_K = a \cos \Theta + b$$

$$y_K = a \sin \Theta + c$$

co w oczywisty sposób (4.39) prowadzi do zależności

$$\begin{aligned} \delta x_K &= -a(\sin \Theta) \delta \Theta \\ \delta y_K &= a(\cos \Theta) \delta \Theta \end{aligned} \quad (4.41)$$

Dla tego układu zgodnie z (4.38) mamy

$$\begin{bmatrix} -a(\sin \Theta) \delta \Theta & a(\cos \Theta) \delta \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} + \delta \Theta \cdot M = 0 \quad (4.42)$$

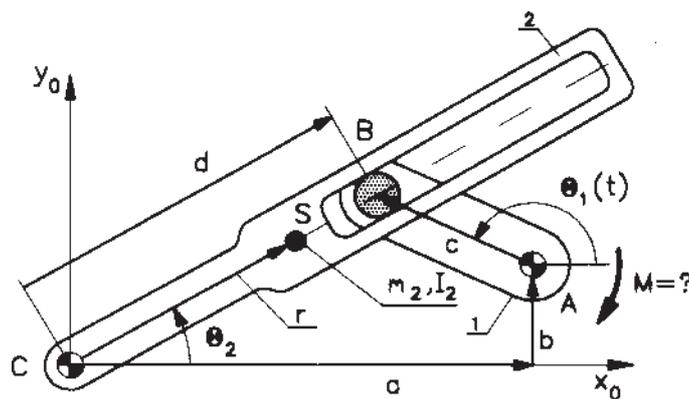
co po przekształceniach daje wyrażenie na moment w postaci

$$M = a(\sin \Theta) F_x - a(\cos \Theta) F_y$$

Układ z rys. 4.16 jest bardzo prosty, natomiast na ogół mamy do czynienia z układami złożonymi, gdzie określanie równań przemieszczeń i w ślad za tym przemieszczeń wirtualnych, jest bardziej kłopotliwe. Przekonuje o tym kolejny przykład.

PRZYKŁAD 4.4

Dla ilustracji metody prac przygotowanych rozpatrzmy układ jarzmowy (rys. 4.17), w którym poszukujemy wartość momentu M na członie 1, potrzebnego dla zrównoważenia sił bezwładności i ciężaru członu 2. Masę m_1 członu 1 pomijamy.



Rys. 4.17. Mechanizm jarzmowy

Członem czynnym jest korba AB , której ruch opisuje kąt $\Theta_1(t)$. W określonym czasie układ zajmuje ściśle określoną konfigurację, a wszystkie prędkości i przyspieszenia traktujemy jako znane. Siły masowe i ciężar członu 2 wyrażają zależności:

$$\begin{bmatrix} F_{bx} \\ F_{by} \\ M_b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_S \\ \ddot{y}_S \\ \ddot{\Theta}_2 \end{bmatrix} \quad G = -m_2 g \quad (4.43)$$

Suma prac przygotowanych sił zewnętrznych wyraża się równaniem:

$$\begin{bmatrix} \delta x_S & \delta y_S & \delta \Theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{bx} \\ F_{by} + G \\ M_b \end{bmatrix} - \delta \Theta_1 M = 0 \quad (4.44)$$

Jak widać z rysunku współrzędne środka S masy członu 2 opisują współrzędne:

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \Theta_2 \\ r \sin \Theta_2 \end{bmatrix}$$

a ich wariacje to

$$\begin{bmatrix} \delta x_S \\ \delta y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \sin \Theta_2 \\ r \cos \Theta_2 \end{bmatrix} \delta \Theta_2 \quad (4.45)$$

Po podstawieniu (4.45) do (4.44) równanie prac przygotowanych ma postać:

$$\left[-F_{bx} r \sin \Theta_2 + (F_{by} + G) r \cos \Theta_2 + M_b \right] \delta \Theta_2 - \delta \Theta_1 M = 0$$

co po przekształceniu daje równanie na moment M :

$$M = \left[-F_{bx} r \sin \Theta_2 + (F_{by} + G) r \cos \Theta_2 + M_b \right] k_\Theta \quad (4.46)$$

gdzie $k_\Theta = \frac{\delta \Theta_2}{\delta \Theta_1}$,

a po wstawieniu wyrażen z (4.43) mamy:

$$M = \left[m_2 \ddot{x}_S r \sin \Theta_2 - m_2 (\ddot{y}_S + g) r \cos \Theta_2 - I_2 \ddot{\Theta}_2 \right] k_\Theta \quad (4.47)$$

Aby wyznaczyć współczynnik k_Θ , należy rozpatrzyć równania konfiguracji układu. Wielobok wektorów daje równania:

$$\mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = 0 \rightarrow \begin{cases} d \cos \Theta_2 - a - c \cos \Theta_1 = 0 \\ d \sin \Theta_2 - b - c \sin \Theta_1 = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Po zróżniczkowaniu, zgodnie z (4.40), mamy tutaj:

$$\begin{aligned} \delta d \cos \Theta_2 - d \delta \Theta_2 \sin \Theta_2 + c \delta \Theta_1 \sin \Theta_1 &= 0 \\ \delta d \sin \Theta_2 + d \delta \Theta_2 \cos \Theta_2 - c \delta \Theta_1 \cos \Theta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

a po elementarnych przekształceniach i uproszczeniu otrzyma się:

$$\begin{aligned} k_d \cos \Theta_2 - k_\Theta d \sin \Theta_2 + c \sin \Theta_1 &= 0 \\ k_d \sin \Theta_2 + k_\Theta d \cos \Theta_2 - c \cos \Theta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

gdzie $k_d = \frac{\delta d}{\delta \Theta_1}$.

Rozwiązanie układu równań liniowych (4.50) – dla przypomnienia rozpatrujemy układ „zamrożony”, w którym wszystkie zmienne (tutaj Θ_1 , Θ_2 , d) mają określone wartości – nie sprawia już kłopotu. Dla zastosowań numerycznych dogodna jest np. postać:

$$\begin{bmatrix} k_d \\ k_\Theta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos \Theta_2 & -d \sin \Theta_2 \\ \sin \Theta_2 & d \cos \Theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c \sin \Theta_1 \\ -c \cos \Theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Po wyznaczeniu k_Θ wracamy do równania (4.47) i wyznaczamy wartość momentu M .

W tych przypadkach, kiedy chcemy uniknąć żmudnych przekształceń, a zwłaszcza gdy analiza sił została poprzedzona analizą kinematyczną i dysponujemy na przykład planem prędkości, można się uciec do tzw. metody dźwigni Żukowskiego [16], opartej na zerowaniu się mocy sił zewnętrznych.

Przyjmijmy dla uproszczenia, że przy określeniu równowagi „zewnętrznej” w miejsce momentów zewnętrznych, w tym momentów bezwładności, będziemy posługiwać się równoważnymi parami sił. Prowadzi to do uproszczenia zależności (4.37) do postaci:

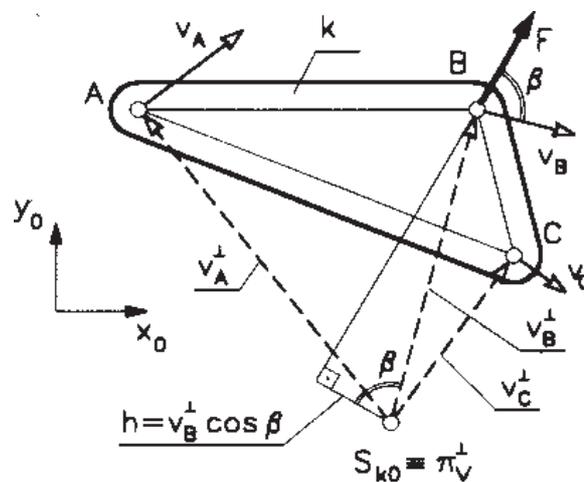
$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad (4.52)$$

którą po podzieleniu przez elementarny czas t przekształcamy do postaci:

$$\sum_k \mathbf{F}_k \frac{\delta \mathbf{r}_k}{\delta t} = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k = \sum_k F_k v_k \cos(\angle(F_k, \mathbf{v}_k)) = 0 \quad (4.53)$$

Otrzymaliśmy zatem warunek równowagi (4.53) w postaci sumy iloczynów mocy sił skupionych działających na człony układu.

Rozpatrzmy człon k (rys. 4.18) w ruchu płaskim zastąpionym obrotem wokół środka obrotu S_{k0} , z którego wyprowadzamy wektory prędkości obróconych w stosunku do rzeczywistych o kąt prosty. Wielkości rysunkowe prędkości obróconych narysowano w takiej podziałce, aby ich końce wypadły odpowiednio w punktach A, B, C .



Rys. 4.18. Człon w ruchu płaskim – moc siły skupionej F

Elementarna analiza geometryczna pokazuje, że

$$F v \cos(F, v) = F v \cos \beta = F h \quad (4.54)$$

Wobec tego warunek równowagi kinetostatycznej układu, sprowadzony do zerowania się sumy mocy od sił zewnętrznych, można zapisać jako sumę momentów sił przyłożonych do odpowiednich punktów planu prędkości obróconych względem bieguna tego planu:

$$\sum_k F_k v_k \cos(F_k, \mathbf{v}_k) = 0 \Leftrightarrow \sum_k F_k \cdot h_k = 0 \quad (4.55)$$

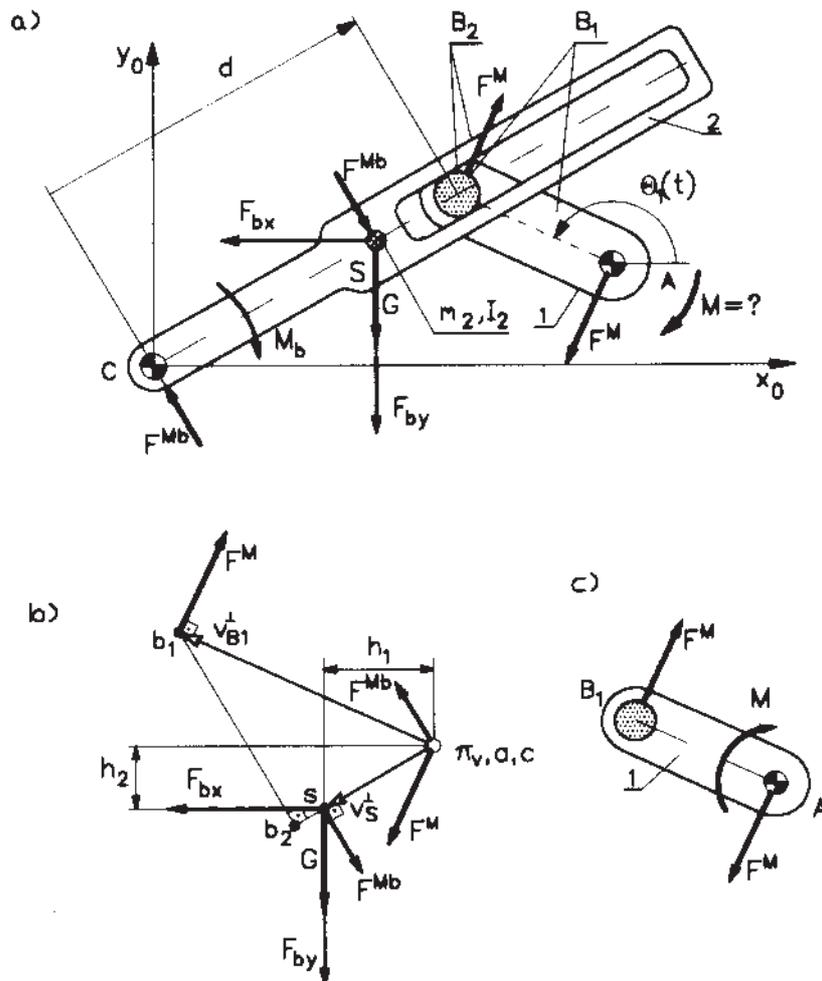
Sposób postępowania zilustrowano poniższym układem, identycznym z wykorzystanym do ilustracji metody analitycznej (przykład 4.4).

PRZYKŁAD 4.5

Analizowany układ kinematyczny (rys. 4.19a), narysowany w podziale, uzupełniono siłami, które przyłożono do poszczególnych członów. Określenie sił bezwładności wymaga, pomijanego tutaj, wyznaczenia odpowiednich przyspieszeń.

Wartości sił masowych obliczamy jak w przykładzie 4.4 według (4.43), natomiast moment bezwładności M_b członu 2 oraz poszukiwany moment M zastępujemy parami sił:

$$M_b = CS \cdot F^{Mb} \quad M = AB_1 \cdot F^M \quad (4.56)$$



Rys. 4.19. Układ jarmowy, dźwignia Żukowskiego

Wszystkie siły przykładamy do członów w odpowiednich punktach – siły F^{M_b} w punktach C i S , siły F^M w punktach A i B_1 , składowe siły bezwładności w środku masy S (rys. 4.19a). Dla znanego ruchu członu 1 obrócony plan prędkości obróconych (\mathbf{v}^\perp) (rys. 4.19b) powstaje z rozwiązania oczywistego równania:

$$\mathbf{v}_{B_2}^\perp = \mathbf{v}_{B_1}^\perp + \mathbf{v}_{B_2B_1}^\perp$$

Z podobieństwa planu i członu mamy:

$$\frac{CS}{CB_2} = \frac{cs}{cb_2} \rightarrow cs = \frac{CS}{CB_2} cb_2$$

co daje punkt s – koniec wektora obróconej prędkości punktu S .

Po narysowaniu planu obróconych prędkości (rys. 4.19b) w odpowiednich punktach – końcach wektorów prędkości tych punktów – przykładamy wszystkie siły obciążające układ.

Równanie momentów:

$$\sum M^{\pi_v} = 0 \rightarrow cs \cdot F^{M_b} - h_2 F_{bx} + h_1 (F_{by} + G) - ab_1 \cdot F^M = 0 \quad (4.57)$$

daje po przekształceniu wyrażenie na wyznaczenie siły F^M reprezentującej poszukiwany moment M :

$$F^M = \frac{1}{ab_1} [cs \cdot F^{M_b} - h_2 F_{bx} + h_1 (F_{by} + G)] \quad (4.58)$$

Ostatnia faza to określenie wartości momentu M z równania (4.56) (rys. 4.19c).

Uważna analiza przykładu 4.5 skłania do następujących uwag o charakterze ogólnym. W równaniu równowagi (4.57) wystąpiły dwa składniki, iloczyny ramion i sił:

$$cs \cdot F^{M_b} = M_b^* \quad ab_1 \cdot F^M = M^* \quad (4.59)$$

Zwróćmy uwagę, że porównanie równań (4.56) i (4.59) daje odpowiednio:

$$\left. \begin{array}{l} M_b^* = cs \cdot F^{M_b} \\ M_b = CS \cdot F^{M_b} \end{array} \right\} \rightarrow M_b^* = M_b \frac{cs}{CS} \quad (4.60)$$

oraz

$$\left. \begin{array}{l} M^* = ab_1 \cdot F^M \\ M = AB_1 \cdot F^M \end{array} \right\} \rightarrow M^* = M \frac{ab_1}{AB_1} \quad (4.61)$$

Prowadzi to do wniosku, że zamiast rozkładania momentów na pary sił, można operować momentami M^* przykładanymi wprost do planu prędkości obróconych po ich przeliczeniu (4.60) uwzględniającym podziałkę planu. Mogą tutaj jednak wystąpić różnice w znakach momentów, o czym łatwo można się przekonać, rysując plan obrócony w stosunku do aktualnego o 180° .

Kolejna istotna uwaga to możliwość obracania sił i przykładania ich w odpowiednich punktach planu rzeczywistego. Jest oczywiste, że wszystkie siły należy obracać w jednym kierunku. Zwróćmy też uwagę, że w analizie statycznej (pomijamy wtedy siły bezwładności), kiedy nie dysponujemy opisem ruchu, należy założyć ruch w dowolnym kierunku, przyjmując za człon czynny ten, który umożliwi najprostszy sposób rozwiązania.

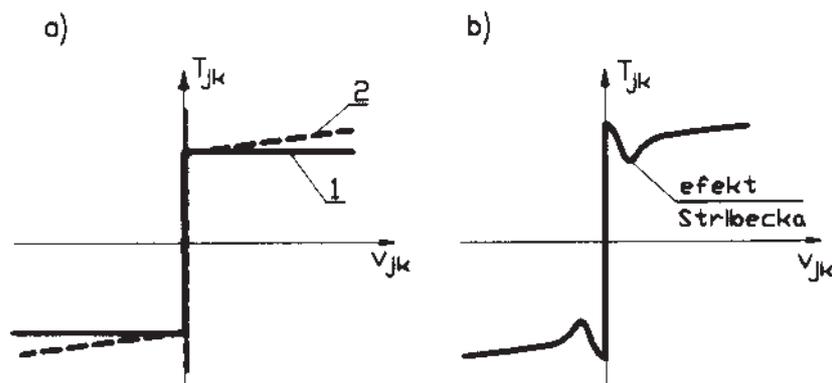
4.3.5. Tarcie w parach kinematycznych

Fakt kontaktu i towarzyszącego mu oddziaływaniu siłowego w połączeniu z ruchem względnym (poślizgiem) dwóch elementów tworzących parę kinematyczną skutkuje w układach rzeczywistych występowaniem sił tarcia, które w wielu przypadkach muszą być uwzględnione w analizie dynamicznej układu.

Podstawą informacji o tarciu jest współczynnik tarcia μ , wyrażony ilorazem siły tarcia T do siły normalnej N , którego wartość zależy od wielu czynników. Najistotniejsze z nich to rodzaj stykających się powierzchni, prędkość poślizgu i nacisk jednostkowy. Czynniki dodatkowe to stan powierzchni, ich smarowanie, temperatura i inne.

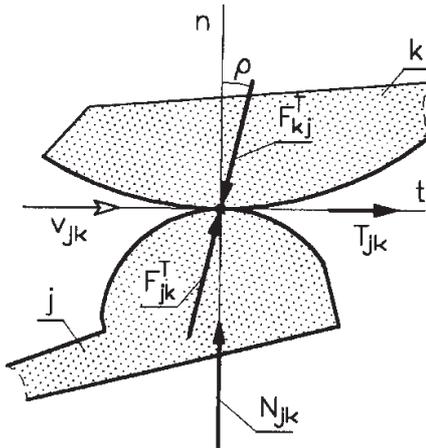
Na rysunku 4.20 przedstawiono przebiegi siły tarcia T_{jk} tylko w funkcji prędkości poślizgu v_{jk} . Najprostszy i najbardziej rozpowszechniony jest model tarcia Coulomba–Amontosa (rys. 4.20a – prosta 1) [22]. Model ten rozwinięto przez wprowadzenie tarcia statycznego i wiskotycznego (rys. 4.20a – prosta 2). Współczesne zaawansowane metody opisu zjawisk tarcia bazują na modelu Coulomba–Morina–Striebecka (rys. 4.20b).

Modelowanie tarcia w parach kinematycznych jest ogólnie trudne. Szczególnie frapujące badawczo jest określanie tarcia w fazach przejścia od spoczynku do poślizgu.



Rys. 4.20. Przebiegi siły tarcia w funkcji prędkości poślizgu

Występuje to w parach kinematycznych wielu układów, gdzie w czasie ruchu prędkość względna zmienia znak. W niniejszym opracowaniu przyjmuje się, że współczynnik tarcia w każdej fazie ruchu układu jest znany. Występowanie tarcia, co oczywiste, stwarza nową sytuację w rozkładzie sił oddziaływania w parach kinematycznych.



Rys. 4.21. Para krzywkowa – siły oddziaływania z tarcie

Para wyższa – krzywkowa. W rzeczywistej parze wyższej (rys. 4.21) w wyniku poślizgu z prędkością v_{jk} pojawia się siła tarcia T_{jk} , co skutkuje odchyleniem całkowitej siły oddziaływania z tarcie F_{jk}^T o kąt tarcia ρ , przy czym:

$$\mu = \frac{T}{N}, \quad \rho = \operatorname{arctg} \mu$$

Relacja pomiędzy składowymi i całkowitą siłą tarcia jest oczywista

$$F_{jk}^T = \sqrt{N_{jk}^2 + T_{jk}^2} = N_{jk} \sqrt{1 + \mu^2} \quad (4.62)$$

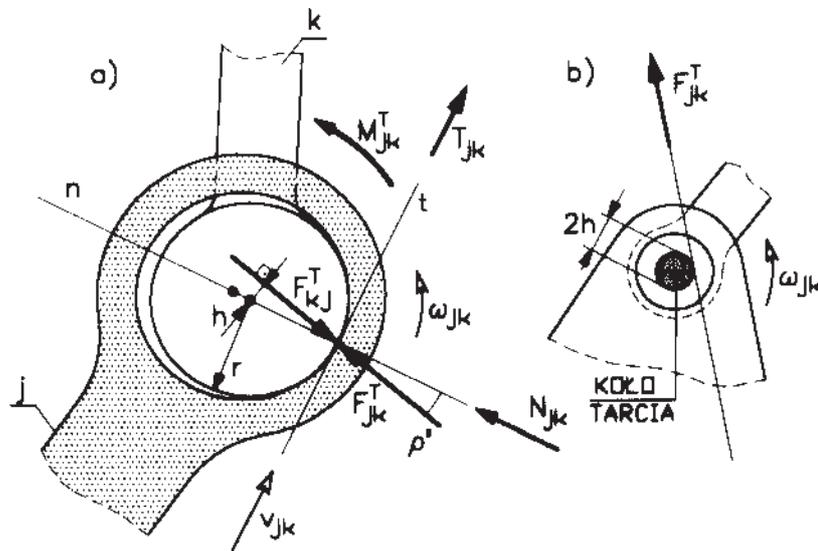
Należy tutaj (rys. 4.21) zwrócić uwagę na zgodność zwrotów prędkości poślizgu v_{jk} i siły tarcia T_{jk} . Ta reguła tylko pozornie mija się z powszechnie znaną zasadą o przeciwstawianiu się tarcia ruchowi. W przypadku układów kinematycznych, gdzie w parach mamy do czynienia z ruchem względnym przemieszczających się względem podstawy elementów, indeksowanie wektorów prędkości i siły tarcia jest ze wszech miar polecane.

Para obrotowa. Układ sił z tarcie w parze wyższej łatwo przenieść na parę obrotową i postępową. Układ sił w parze obrotowej przedstawiono na rys. 4.22. Podobnie jak w parze wyższej całkowita siła uwzględniająca tarcie jest odchylona od normalnej o kąt tarcia ρ' , który uwzględnia fakt kontaktu powierzchni cylindrycznych o niemal jednakowych średnicach. Wartość współczynnika tarcia μ' w parach obrotowych jest skorygowana w stosunku do μ według zależności:

- $\mu' = 1,27\mu$ dla par dotartych,
- $\mu' = 1,57\mu$ dla par niedotartych.

Rozpatrywanie każdorazowo pary obrotowej w skali mikro jest niewygodne. Zwróćmy uwagę, że w wyniku tarcia pojawia się moment tarcia M^T , który można wyrazić na dwa sposoby (rys. 4.22):

$$M_{jk}^T = hF_{jk}^T = rT_{jk} \quad (4.63)$$



Rys. 4.22. Para obrotowa – siły oddziaływania z tarcie

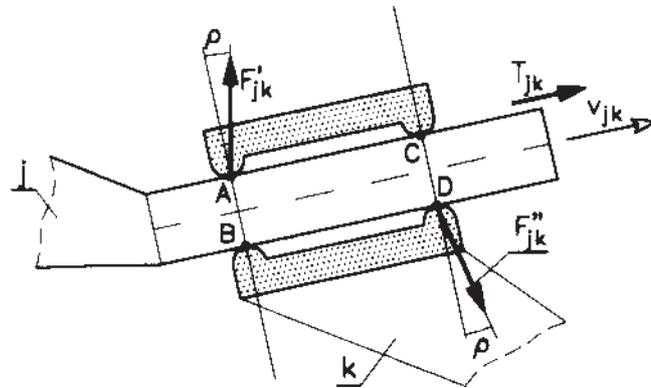
Ramię h całkowitej siły z tarcie, po wykorzystaniu (4.62), określa zależność:

$$h = \frac{r T_{jk}}{F_{jk}^T} = \frac{r N_{jk} \mu'}{N_{jk} \sqrt{1 + (\mu')^2}} \rightarrow h \cong r \mu' \quad (4.64)$$

bardzo użyteczna w zastosowaniach praktycznych. Wynika z niej, że siła z tarcie F_{jk}^T w parze obrotowej jest zawsze oddalona od środka czopa o ramię h , a ogólniej jest styczna do tzw. koła tarcia o promieniu h . Uzupełniająca informacja mówi (rys. 4.22), że całkowita siła z uwzględnieniem tarcia F_{jk}^T tworzy względem środka czopa moment tarcia M_{jk}^T , którego zwrot jest zgodny ze zwrotem prędkości kątowej ω_{jk} .

Para postępową. Siły oddziaływania w parze postępowej modelowej z uwzględnieniem tarcia są prostą konsekwencją sytuacji w parze wyższej, co dla przykładowego ruchu względnego zilustrowano na rys. 4.23.

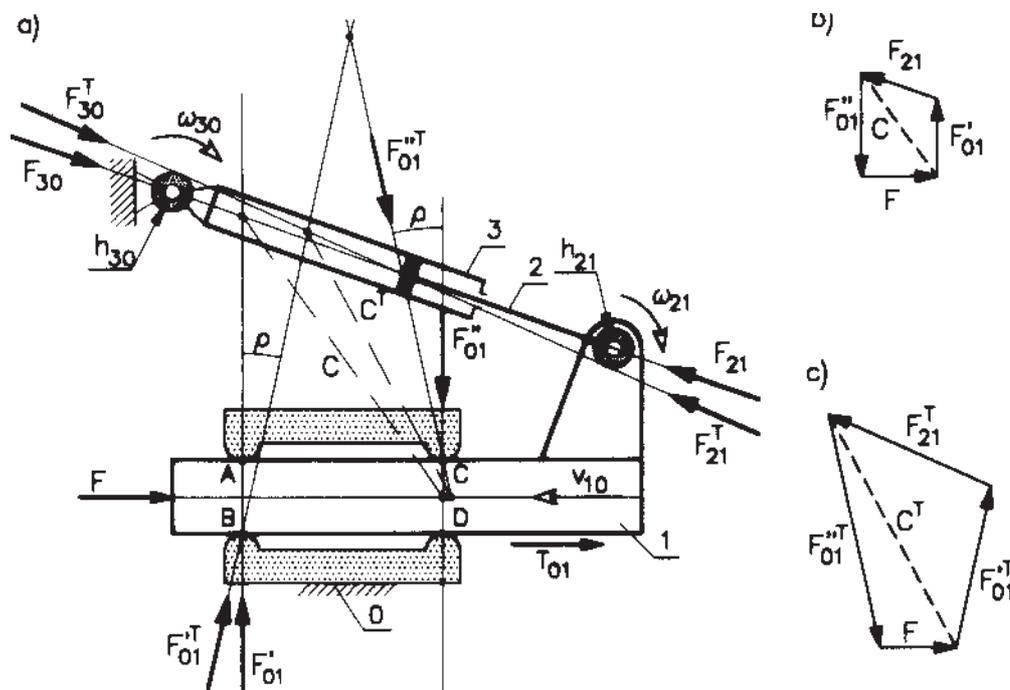
Analiza równowagi układów z uwzględnieniem tarcia również wymaga rozpatrywania równowagi poszczególnych członów i dowolnie wydzielonych fragmentów układów. Bardziej kłopotliwe jest wtedy wyznaczanie linii działania sił z tarcie i zawsze, nawet w analizie pomijającej siły bezwładności niezbędna jest znajomość ruchu. Wobec tych trudności zaleca się, aby określanie sił z tarcie poprzedzić analizą bez tarcia. Sposób postępowania zilustrujemy przykładem.



Rys. 4.23. Para postępową – siły oddziaływania z tarcie

PRZYKŁAD 4.6

W układzie z rys. 4.24a siłownik 2–3 wymusza ruch członu 1. Siła w siłowniku musi pokonać opór zewnętrzny w postaci siły F oraz opory tarcia w parach kinematycznych. Zakładamy znajomość kąta tarcia w parze postępowej 0–1 oraz promieni h_{21} i h_{30} kół tarcia.



Rys. 4.24. Analiza sił z uwzględnieniem tarcia

W pierwszym etapie poszukujemy warunków równowagi bez tarcia. Dla członu 1 wymagane jest spełnienie równania równowagi sił w postaci:

$$\underline{\mathbf{F}} + \underline{\mathbf{F}}'_{01} + \underline{\mathbf{F}}''_{01} + \underline{\mathbf{F}}_{21} = 0 \quad (4.65)$$

Rozwiązanie równania (4.65) jest możliwe, ponieważ znany jest wektor siły zewnętrznej \mathbf{F} oraz linie działania pozostałych sił: \mathbf{F}_{21} działa w osi siłownika, \mathbf{F}'_{01} i \mathbf{F}''_{01} wzdłuż linii wyznaczonych punktami A, B oraz C, D . Rozwiązanie graficzne, wykorzystujące prostą Culmanna c , przedstawiono na rys. 4.24b. Siła \mathbf{F}_{21} jest oczywiście siłą, jaką należy wywołać za pomocą siłownika 2–3, wektor siły \mathbf{F}_{30} jest przeciwny do \mathbf{F}_{21} .

Wyznaczenie sił oddziaływania \mathbf{F}'_{01} i \mathbf{F}''_{01} między podstawą 0 i członem 1 pozwala już na jednoznaczne określenie punktów styku obu członów – tutaj człony 0 i 1 kontaktują się w punktach B i C . Ponieważ założono wymuszenie ruchu siłownikiem, więc zwrot wektora \mathbf{v}_{10} jest oczywisty. Do ustalenia styczności sił w parach obrotowych potrzebna jest znajomość zwrotów wektorów względnych prędkości kątowych $\boldsymbol{\omega}_{21}$ i $\boldsymbol{\omega}_{30}$ w parach 2–1 i 3–0. W tym układzie można to ustalić intuicyjnie, rozpatrując myślowo kolejne położenie układu. Skracanie się siłownika spowoduje przesunięcie środka pary 1–2 w lewo. Siłownik zajmie położenie bardziej zbliżone do pionu, a więc obraca się w prawo i taki jest zwrot prędkości kątowych $\boldsymbol{\omega}_{21}$ i $\boldsymbol{\omega}_{30}$, gdyż:

$$\boldsymbol{\omega}_{21} = \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1 \xrightarrow{\omega_1=0} \boldsymbol{\omega}_{21} = \boldsymbol{\omega}_2$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}_{30} = \boldsymbol{\omega}_3$,

Ustalenie linii działania sił $\mathbf{F}'_{01}{}^T$ i $\mathbf{F}''_{01}{}^T$ polega na założeniu, że siły normalne \mathbf{N}'_{01} i \mathbf{N}''_{01} mają zwroty jak siły \mathbf{F}'_{01} i \mathbf{F}''_{01} bez tarcia. Po dodaniu sił normalnych \mathbf{N}'_{01} i \mathbf{N}''_{01} i sił tarcia \mathbf{T}_{01} kierunek odchylenia sił z tarcie jest określony jednoznacznie. Styczność sił z tarcie w parach obrotowych wynika ze zgodności zwrotów wektorów momentów tarcia i odpowiednich prędkości kątowych. W parze 2–1 siła $\mathbf{F}_{21}{}^T$ daje moment o zwrocie zgodnym z prędkością ω_{21} , w parze 3–0 również mamy zgodność siły $\mathbf{F}_{30}{}^T$ z prędkością ω_{30} .

Po ustaleniu linii działania sił z tarcie możliwe jest rozwiązanie równowagi członu 1, które dla przypadku z tarcie ma postać:

$$\underline{\mathbf{F}} + \underline{\mathbf{F}}'_{01}{}^T + \underline{\mathbf{F}}''_{01}{}^T + \underline{\mathbf{F}}_{21}{}^T = 0$$

Wielobok sił z tarcie przedstawiono na rys. 4.24c. Na obu planach sił (b) i (c) celowo dobrano identyczne długości wektora zadanej siły \mathbf{F} . Dzięki temu można stwierdzić jak znacznie, zarówno w sensie modułów, jak i kierunków, zmieniły się siły po uwzględnieniu tarcia.

4.3.6. Tarcie w ujęciu analitycznym

Przedstawione reguły określania sił z uwzględnieniem tarcia w parach kinematycznych, zilustrowane przykładem, wskazują jednoznacznie na złożoność zagadnienia. Nawet rozwiązanie wspierane metodami graficznymi wymaga rozpatrzenia różnych wariantów styczności sił do kół tarcia w parach obrotowych, kierunków odchylenia w parach wyższych i postępowych.

Analityczny opis równowagi kinetostatycznej z uwzględnieniem tarcia napotyka te same problemy jak rozwiązanie graficzne. Natomiast podejście uproszczone, w którym przyjmuje się, że siły bez tarcia są składowymi normalnymi sił z tarcieciem w wielu przypadkach jest błędne i dokładność uzyskiwanych wyników jest niezadowalająca. Takie uproszczone podejście, nawet dla układów wyłącznie z parami obrotowymi, często nie nadaje się do opisu pełnego cyklu pracy. Jest to szczególnie istotne w pobliżu tzw. położeń martwych, gdzie uzyskiwane rozbieżności w zasadzie dyskwalifikują takie podejście. Obecność par kinematycznych postępowych trudności te potęguje.

To powoduje, że w praktyce inżynierskiej, w wielu układach wpływ tarcia jest pomijany. Projektant kierując się intuicją i doświadczeniem dba tylko o staranny dobór łożysk, a przede wszystkim o zagwarantowanie stosownej, „bezpiecznej” odległości od położeń, w których występuje zagrożenie zablokowania mechanizmu.

Para krzywkowa. W parze krzywkowej (rys. 4.25) w punkcie styku siła normalna N_{jk} wywołuje siłę tarcia T_{jk} . Rozpatrując składowe siły normalnej i siły tarcia w globalnym układzie odniesienia stwierdzamy, że ponieważ znany jest kierunek siły normalnej – kąt β – poszczególne jej składowe wynoszą

$$\begin{bmatrix} N_{jkx} \\ N_{jky} \end{bmatrix} = N_{jk} \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Każda ze składowych siły normalnej skutkuje w wyniku wystąpienia tarcia składowymi siłami tarcia na kierunkach osi układu globalnego $\{0\}$, przy czym

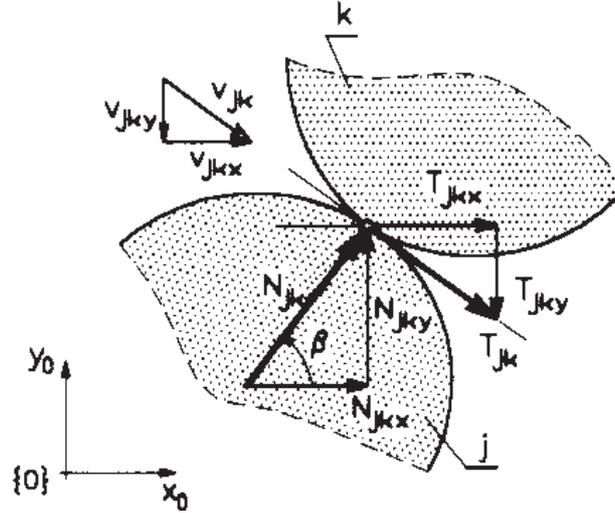
$$T_{jkx} = \text{sign}(v_{jkx}) \mu |N_{jk} \sin \beta| \quad (4.67)$$

oraz

$$T_{jky} = \text{sign}(v_{jky}) \mu |N_{jk} \cos \beta| \quad (4.68)$$

Łącznie więc mamy składowe siły oddziaływania z tarcieciem w postaci:

$$\begin{bmatrix} F_{jkx}^T \\ F_{jky}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{jkx} \\ N_{jky} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{jkx} \\ T_{jky} \end{bmatrix}$$



Rys. 4.25. Siły tarcia w parze krzywkowej

co po wykorzystaniu (4.67) i (4.68) daje wyrażenie:

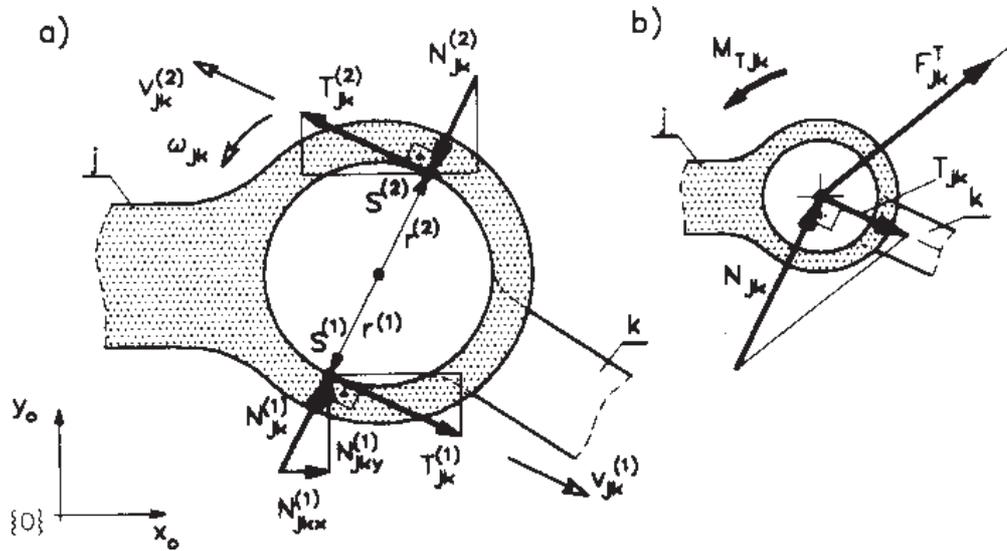
$$\begin{bmatrix} F_{jkx}^T \\ F_{jky}^T \end{bmatrix} = N_{jk} \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \text{sign}(v_{jkx}) |N_{jk} \sin \beta| \\ \text{sign}(v_{jky}) |N_{jk} \cos \beta| \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Zauważmy, że oddziaływanie w parze wyższej krzywkowej, podobnie jak to było bez uwzględnienia tarcia, opisuje tylko jeden parametr, tym razem w postaci modułu siły normalnej N_{jk} . Co oczywiste widać też, że rozpatrywanie sił tarcia musi być zintegrowane z opisem kinematyki, gdyż w każdym położeniu niezbędna jest znajomość składowych prędkości v_{jkx} i v_{jky} . Ten najprostszy przypadek kojarzenia członów układów płaskich zostanie wykorzystany dalej do analizy sił tarcia w parach obrotowej i postępowej.

Para obrotowa. W parze obrotowej (rys. 4.26a) w każdej chwili ustala się jeden z punktów styku $S^{(1)}$ lub $S^{(2)}$, panewki i czopa o promieniu r , w zależności od układu sił. W każdym z potencjalnie możliwych punktów styku oddziaływanie siłą N_{jk} na kierunku normalnym do kontaktujących się powierzchni można sprowadzić do dwóch składowych N_{jkx} i N_{jky} w globalnym układzie współrzędnych $\{0\}$.

Każda ze składowych siły normalnej skutkuje w wyniku wystąpienia tarcia składowymi siłami tarcia na kierunkach osi układu globalnego $\{0\}$, przy czym

$$T_{jkx}^{(i)} = \text{sign}(v_{jkx}^{(i)}) \mu' |N_{jky}^{(i)}| \quad (4.70)$$



Rys. 4.26. Siły tarcia w parze obrotowej

oraz

$$T_{jk_y}^{(i)} = \text{sign}(v_{jk_y}^{(i)}) \mu' |N_{jk_x}^{(i)}| \quad (4.71)$$

Z kinematyki wiadomo, że prędkość poślizgu w punkcie styku wynosi:

$$\mathbf{v}_{jk}^{(i)} = \boldsymbol{\omega}_{jk} \times \mathbf{r}^{(i)}$$

co po rozpisaniu daje:

$$\begin{bmatrix} v_{jk_x}^{(i)} \\ v_{jk_y}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_y^{(i)} \omega_{jk} \\ r_x^{(i)} \omega_{jk} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Po wykorzystaniu (4.72) siły tarcia wyrażone są dalej równaniami:

$$T_{jk_x}^{(i)} = \text{sign}(-r_y^{(i)} \omega_{jk}) \mu' |N_{jk_y}^{(i)}| \quad (4.73)$$

oraz

$$T_{jk_y}^{(i)} = \text{sign}(r_x^{(i)} \omega_{jk}) \mu' |N_{jk_x}^{(i)}| \quad (4.74)$$

Zwróćmy uwagę, że zarówno dla punktu styku $S^{(1)}$, jak i $S^{(2)}$ wektory sił normalnych i promieni mają przeciwne znaki, a mianowicie:

$$\text{sign}(N_{jkx}^{(i)}) = -\text{sign}(r_x^{(i)}) \quad \text{sign}(N_{jky}^{(i)}) = -\text{sign}(r_y^{(i)})$$

Wobec powyższego z (4.73) i (4.74) mamy

$$T_{jkx}^{(i)} = \text{sign}(N_{jky}^{(i)} \omega_{jk}) \mu' |N_{jky}^{(i)}| \quad (4.75)$$

oraz

$$T_{jky}^{(i)} = \text{sign}(-N_{jkx}^{(i)} \omega_{jk}) \mu' |N_{jkx}^{(i)}| \quad (4.76)$$

Bez względu na punkt styku zależności na składowe siły tarcia są identyczne, co pozwala na pominięcie wykładnika (i) w kolejnych równaniach

$$T_{jkx} = \text{sign}(\omega_{jk}) \mu' N_{jky}$$

oraz

$$T_{jky} = -\text{sign}(\omega_{jk}) \mu' N_{jkx}$$

Dla uproszczenia analizy dogodnie jest zredukować obie siły normalne N_{jk} oraz siłę tarcia T_{jk} do środka geometrycznego pary kinematycznej, wprowadzając uzupełniający moment M_{Tjk} od siły tarcia względem środka pary kinematycznej. Taka modyfikacja upraszcza równania równowagi członów. Łącznie dla pary obrotowej mamy zatem z uwzględnieniem tarcia (rys. 4.26b):

- siłę działającą w środku pary kinematycznej o składowych

$$\begin{bmatrix} F_{jkx}^T \\ F_{jky}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{jkx} \\ N_{jky} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{jkx} \\ T_{jky} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{jkx} \\ N_{jky} \end{bmatrix} + \text{sign}(\omega_{jk}) \mu' \begin{bmatrix} N_{jky} \\ -N_{jkx} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

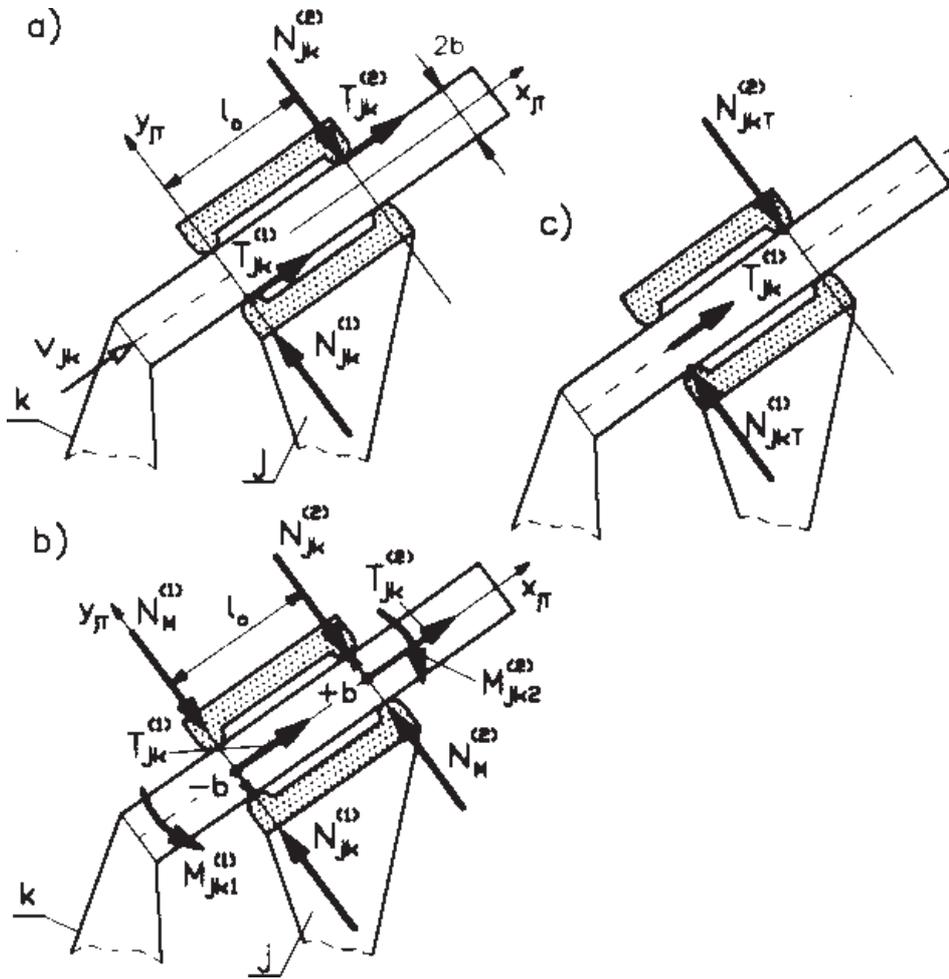
- moment tarcia

$$M_{Tjk} = \text{sign}(\omega_{jk}) \mu' r \sqrt{N_{jkx}^2 + N_{jky}^2} \quad (4.78)$$

Sytuację siłową w parze obrotowej jednoznacznie opisują ostatecznie dwie składowe siły normalnej N_{jkx} i N_{jky} . Niezbędna jest też znajomość ruchu względnego – prędkość kątowa ω_{jk} .

Para postępową. W parze postępowej T uwzględnienie tarcia wiąże się z bezwzględną koniecznością zamodelowania pary do postaci zastępczej (rys. 4.27a) i dysponowania wymiarami konstrukcyjnymi l_o i b oraz współczynnikiem tarcia μ , a także wektorem prędkości względnej \mathbf{v}_{jk} .

Dla rozpatrzenia sił oddziaływania dogodnie jest posłużyć się układem lokalnym $\{jT\}$ pary postępowej T , który jest przypisany członowi j , a jego osie zorientowane są jak na rys. 4.27a – oś x_{jT} wyznacza kierunek ruchu względnego i pokrywa się z osią geo-



Rys. 4.27. Siły tarcia w parze postępowej

metryczną parę, oś y_{kT} jest poprowadzona wzdłuż jednej z linii działania sił normalnych N_{jk} . W układzie $\{jT\}$ prędkości względnej v_{jk} o zwrocie zgodnym z osią x_{jT} przypisuje się znak dodatni, podobnie dodatnie siły N_{jk} i T_{jk} mają zwroty zgodne odpowiednio z osiami y_{jT} i x_{jT} . Przyjmując podane ustalenia, sprowadzimy siły oddziaływania w parze postępowej do dwóch sił normalnych N_{jk} i siły tarcia T_{jk} , wszystkie odniesione do układu $\{jT\}$.

W wypadku wystąpienia ruchu względnego w punktach styku członów j, k pojawiają się siły tarcia, których wartości wyznacza się z zależności:

$$T_{jk}^{(1)} = \text{sign}(v_{jk}) \mu |N_{jk}^{(1)}| \quad T_{jk}^{(2)} = \text{sign}(v_{jk}) \mu |N_{jk}^{(2)}| \quad (4.79)$$

Siły te można przenieść do osi pary kinematycznej (oś x_{jT}), wprowadzając dwa dodatkowe momenty M_{jk} liczone względem początku układu $\{jT\}$ (rys. 4.27b). Po przyjęciu dodatkowo, że człon o numerze j jest członem „zewnątrznym” obejmującym człon k , dodatnia siła normalna oznacza styk w punkcie poniżej osi x_{jT} i siła T_{jk} daje moment na ramieniu $-b$. Siła normalna ujemna oznacza natomiast styk powyżej osi x_{jT} i wtedy siła tarcia działa na ramieniu $+b$. Momenty obu sił tarcia (4.79) formalnie wyrażone równaniami:

$$M_{jk}^{(1)} = \text{sign}(v_{jk}) \mu b |N_{jk}^{(1)}|, \quad M_{jk}^{(2)} = \text{sign}(v_{jk}) \mu b |N_{jk}^{(2)}|$$

można w tej sytuacji zapisać jako

$$M_{jk}^{(1)} = \text{sign}(v_{jk}) \mu b N_{jk}^{(1)}, \quad M_{jk}^{(2)} = \text{sign}(v_{jk}) \mu b N_{jk}^{(2)} \quad (4.80)$$

Po takiej redukcji zauważmy dalej, że dla globalnej równowagi możliwe jest zastąpienie sumy momentów

$$M_{jk} = M_{jk}^{(1)} + M_{jk}^{(2)} \quad (4.81)$$

parą sił N_M działających na liniach działania sił normalnych N_{jk} , przy czym

$$N_M^{(1)} = -\frac{M_{jk}}{l_o}, \quad N_M^{(2)} = \frac{M_{jk}}{l_o} \quad (4.82)$$

Łącznie mamy dla pary postępowej z uwzględnieniem tarcia:

- na kierunkach normalnych do ruchu względnego dwie siły

$$\begin{bmatrix} N_{jkT}^{(1)} \\ N_{jkT}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{jk}^{(1)} \\ N_{jk}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_M^{(1)} \\ N_M^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{jk}^{(1)} \\ N_{jk}^{(2)} \end{bmatrix} + \text{sign}(v_{jk}) \mu b \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{jk}^{(1)} \\ N_{jk}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

- na kierunku ruchu względnego działa siła

$$T_{jk} = \text{sign}(v_{jk}) \mu (|N_{jk}^{(1)}| + |N_{jk}^{(2)}|) \quad (4.84)$$

Zwróćmy uwagę, że podobnie jak w przypadku sił oddziaływania bez tarcia mamy dla pary postępowej dwie niewiadome siły normalne N_{jk} . Należy jednak podkreślić, że siły normalne wyrażone zależnością (4.83) nie są realnymi siłami w parze postępowej, a jedynie ułatwiają opis równowagi układów z uwzględnieniem tarcia. Określenie sił rzeczywistych wymaga procedury odwrotnej.

Wyprowadzone zależności dla par kinematycznych układów płaskich pozwalają na określanie warunków równowagi kinetostatycznej z uwzględnieniem tarcia. Podobnie jak w analizie uproszczonej, z pominięciem tarcia, wystarczy posługiwać się wyłącznie prawami statyki. Jest oczywiste, że konieczna jest znajomość ruchu, a uzyskiwane wyniki są na tyle dokładne, na ile dokładnie jesteśmy w stanie określić współczynniki tarcia.

4.4. Dynamiczne równania ruchu

W ostatnich dziesięcioleciach nastąpił intensywny rozwój metod opisu ruchu układów kinematycznych pod działaniem znanych sił. Metody te, bazujące na prawach mechaniki analitycznej, rozwinęły się w związku z postępem w technikach komputerowych. Metody analityczne, których złożoność dla układów wieloczłonowych wymuszała stosowanie bardzo uproszczonych modeli, są wypierane przez metody numeryczne. Umożliwiają one znaczne poszerzenie możliwego zakresu badań dynamiki, np. badanie stanów przejściowych, uwzględnianie podatności członów itd. Przystosowane do metod numerycznych sformułowania dynamiki umożliwiają tworzenie coraz bardziej szczegółowych modeli. Na ich bazie powstały komercyjne komputerowe systemy analizy układów kinematycznych.

Dostępne na rynku oprogramowania środowiska obliczeń matematycznych stwarzają dziś szansę na tworzenie własnych modeli analizy dynamicznej i rozszerzenie zakresu analiz pomocnych w projektowaniu układów kinematycznych. Wymaga to, podobnie jak efektywne wykorzystywanie systemów komercyjnych, znajomości współczesnych metod opisu dynamiki. Podstawowe z nich, z pominięciem wyprowadzeń, przedstawiono w sposób syntetyczny w niniejszej pracy. Czytelnik zainteresowany podstawami może sięgnąć po dostępne opracowania mechaniki analitycznej [23], [27], [28].

4.4.1. Równania Newtona–Eulera

Ruch płaski. Dal przyjętych składowych wypadkowej sił zewnętrznych (F_x, F_y) i momentu (M) względem środka masy S oraz składowych przyspieszenia liniowego (a_x, a_y) i przyspieszenia kąowego ε równanie dynamiki Newtona–Eulera dla ruchu płaskiego członu o parametrach masowych (m, I_S) ma postać:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Ruch ogólny (przestrzenny). Przyjmijmy, że macierz bezwładności (4.3), oznaczona teraz \mathbf{I}_S , jest odniesiona do układu lokalnego $\{j\}$ członu j , a dodatkowo początek ukła-

du $\{j\}$ pokrywa się ze środkiem masy ($S \equiv O_j$). Wtedy dla ruchu obrotowego moment M_S sił zewnętrznych działających na człon j względem układu lokalnego powiązany jest z parametrami ruchu $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ równaniem Eulera [33]:

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{I}_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega}) \quad (4.86)$$

które po wykorzystaniu operatora iloczynu wektorowego przyjmuje formę macierzową:

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{I}_S \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega} \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Występujące w równaniach (4.86) i (4.87) parametry ruchu $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ są wektorami o składowych wyrażonych w układzie lokalnym $\{j\}$:

$$\boldsymbol{\omega} = {}^j \boldsymbol{\omega} = [{}^j \omega_x \quad {}^j \omega_y \quad {}^j \omega_z]^T \quad \boldsymbol{\varepsilon} = {}^j \boldsymbol{\varepsilon} = [{}^j \varepsilon_x \quad {}^j \varepsilon_y \quad {}^j \varepsilon_z]^T \quad (4.88)$$

Jak widać istnieje tutaj wyraźna różnica pomiędzy opisem ruchu obrotowego członów układów płaskich i przestrzennych. Niezmienne jest natomiast równanie Newtona opisujące ruch liniowy środka masy. Analogicznie do (4.85) równania Newtona–Eulera dla ruchu ogólnego członu w przestrzeni przyjmują postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\mathbf{E}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{F} = [F_x & F_y & F_z]^T \\ \mathbf{a} = [a_x & a_y & a_z]^T \end{matrix} \quad (4.89)$$

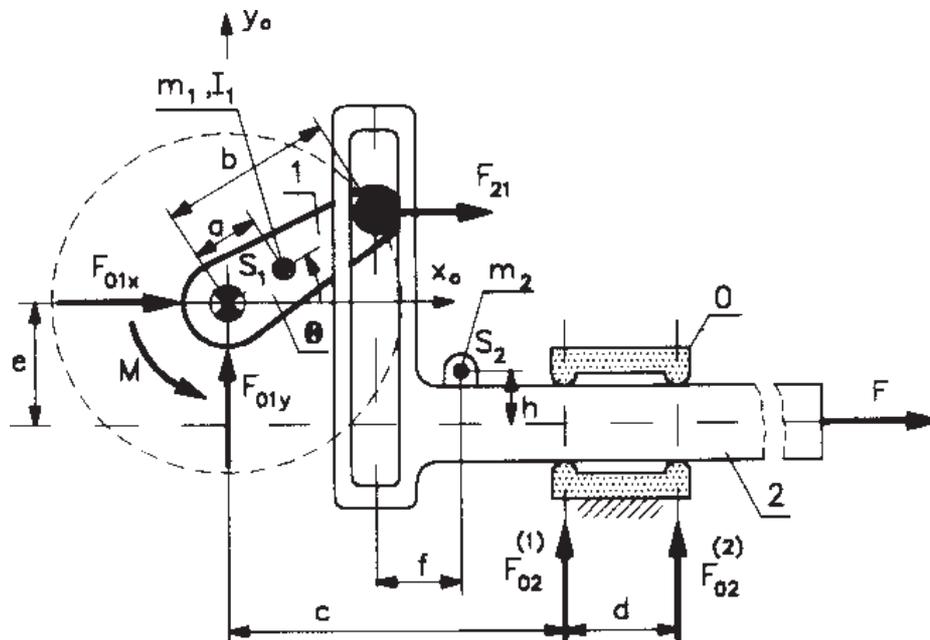
gdzie \mathbf{E}_3 jest macierzą jednostkową 3×3 .

Podane równania, w połączeniu z zasadą d'Alemberta, stanowią jasną koncepcyjnie podstawę równań dynamiki układów wieloczłonowych. Zauważmy jednak, że równania (4.85) lub (4.89) odnoszą się do pojedynczych członów. Oznacza to, że łączna liczba równań dynamiki dla układu kinematycznego jest znaczna i stanowi wielokrotność liczby członów. W układach zawierających k członów ruchomych dysponujemy liczbą $3k$ równań dla płaskich i $6k$ dla układów przestrzennych. Kolejną istotną niedogodnością jest to, że w równaniach dynamiki występują nieznane siły oddziaływania w parach kinematycznych.

Pomimo tych niedogodności metoda Newtona–Eulera zyskała popularność szczególnie w badaniu dynamiki manipulatorów. Sposób postępowania ilustruje przykład.

PRZYKŁAD 4.7

Dla transformacji ciągłego ruchu obrotowego na ruch posuwisto-zwrotny można zastosować mechanizm jarzmowy przedstawiony na rys. 4.28. Wymiary układu naniesiono na rysunku, znane są masy m_1, m_2 i masowy moment bezwładności I_1 . Zakładając znane położenie układu oraz siły zewnętrzne w postaci momentu czynnego M i siły oporu F (zawsze przeciwnie skierowanej do prędkości członu 2), należy sformułować równanie ruchu układu, posługując się metodą Newtona–Eulera. Należy sformułować procedurę określania przyspieszenia kąтового członu 1, którego całkowanie doprowadzi do wyznaczania ruchu układu.



Rys. 4.28. Mechanizm jarzmowy

W pierwszym etapie określamy związki kinematyczne. Współrzędne środka masy S_1 członu 1 opisują równania:

$$\begin{bmatrix} x_{S_1} \\ y_{S_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

które po zróżniczkowaniu dają prędkość i przyspieszenie:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{S_1} \\ \dot{y}_{S_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \dot{\theta} \sin \theta \\ a \dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \ddot{x}_{S_1} \\ \ddot{y}_{S_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \ddot{\theta} \sin \theta - a \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ a \ddot{\theta} \cos \theta - a \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Człon 2 porusza się tylko w kierunku osi odciętych, a ruch środka masy S_2 opisują równania położenia, prędkości i przyspieszenia w postaci:

$$x_{S_2} = b \cos \Theta + f \quad (4.92)$$

$$\dot{x}_{S_2} = -b \dot{\Theta} \sin \Theta, \quad \ddot{x}_{S_2} = -b \ddot{\Theta} \sin \Theta - b \dot{\Theta}^2 \cos \Theta \quad (4.93)$$

W drugim etapie sformułujemy równania ruchu dla obu członów. Dla członu 1 mamy równanie ruchu środka masy w kierunkach osi prostopadłych x i y :

$$F_{01x} + F_{21} = m_1 (-a \ddot{\Theta} \sin \Theta - a \dot{\Theta}^2 \cos \Theta) \quad (4.94)$$

$$F_{01y} - m_1 g = m_1 (a \ddot{\Theta} \cos \Theta - a \dot{\Theta}^2 \sin \Theta) \quad (4.95)$$

oraz równanie ruchu obrotowego:

$$\left(- \begin{bmatrix} a \cos \Theta \\ a \sin \Theta \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} F_{01x} \\ F_{01y} \end{bmatrix} - F_{21} (b - a) \sin \Theta + M = I_1 \ddot{\Theta}$$

które po rozpisaniu iloczynu wektorowego daje:

$$F_{01x} a \sin \Theta - F_{01y} a \cos \Theta - F_{21} (b - a) \sin \Theta + M = I_1 \ddot{\Theta} \quad (4.96)$$

Dla członu 2 również dysponujemy trzema równaniami w postaci:

$$-F_{21} + F = m_2 (-b \ddot{\Theta} \sin \Theta - b \dot{\Theta}^2 \cos \Theta) \quad F = -\text{sign}(v_2) F_0 \quad (4.97)$$

$$F_{02}^{(1)} + F_{02}^{(2)} - m_2 g = 0 \quad (4.98)$$

$$F_{21} [(e - h) + b \sin \Theta] + Fh + F_{02}^{(1)} (c - f - b \cos \Theta) + F_{02}^{(2)} (c + d - f - b \cos \Theta) = 0 \quad (4.99)$$

Otrzymany układ sześciu równań zawiera tyleż niewiadomych, z których jedną jest przyspieszenie kątowe członu 1.

Analizowany mechanizm jest stosunkowo prosty i kolejne przekształcenia doprowadzą do uzyskania pożądanego równania na przyspieszenie kątowe $\ddot{\Theta}$ członu 1. Poniżej przedstawimy jednak zalecany sposób wykorzystujący macierzowe uporządkowanie układu równań. W tym celu po lewej stronie równań (4.94)÷(4.99) należy pozostawić wielkości znane, a z prawej wszystkie składniki zawierające niewiadome.

Prowadzi to do równania macierzowego w postaci:

$$\mathbf{F}_{zn} = \mathbf{G}\mathbf{F}_x \quad (4.100)$$

gdzie: \mathbf{F}_{zn} – wektor sił znanych – siły masowe i obciążenia zewnętrzne,

\mathbf{G} – macierz, której elementy zawierają parametry masowe i geometryczne,

\mathbf{F}_x – jest wektorem wielkości nieznanymi.

Poszczególne macierze przedstawiono poniżej:

$$\mathbf{F}_{zn} = [m_1 a \dot{\Theta}^2 \cos \Theta \quad -m_1 g + m_1 a \dot{\Theta}^2 \sin \Theta \quad M \quad F + m_2 b \dot{\Theta}^2 \cos \Theta \quad m_2 g \quad Fh]^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -m_1 a \sin \Theta \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & m_1 a \cos \Theta \\ -a \sin \Theta & a \cos \Theta & (b-a) \sin \Theta & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -m_2 b \sin \Theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(e-h) - b \sin \Theta & g_{64} & g_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

$$g_{64} = -c + f + b \cos \Theta \quad g_{65} = -c - d + f + b \cos \Theta$$

$$\mathbf{F}_x = [F_{01x} \quad F_{01y} \quad F_{21} \quad F_{02}^{(1)} \quad F_{02}^{(2)} \quad \ddot{\Theta}]^T$$

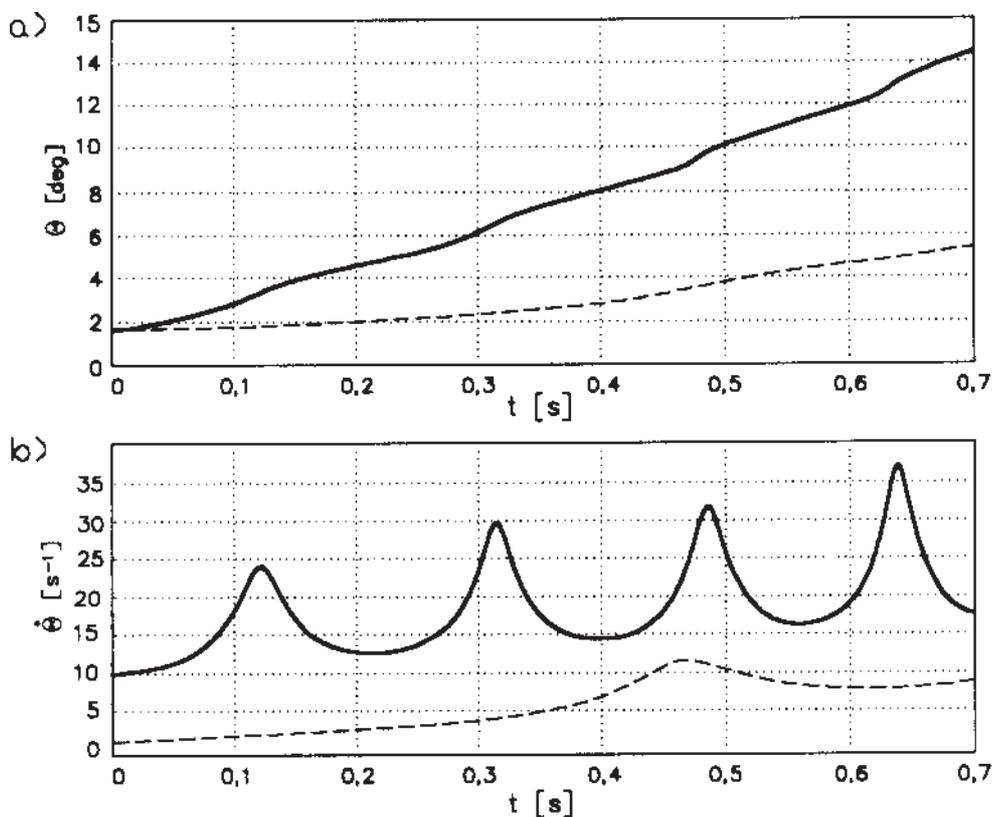
Zwróćmy uwagę, że elementy wektora wielkości nieznanymi \mathbf{F}_x to siły oddziaływania w parach kinematycznych oraz przyspieszenie kątowne członu 1. Rozwiązanie równania macierzowego (4.100) otrzymuje się w sposób oczywisty według zależności:

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_{zn} \quad (4.101)$$

Ostatnim elementem wektora \mathbf{F}_x jest przyspieszenie kątowne $\ddot{\Theta}$ członu 1. Takie podejście pozwala na wyznaczanie ruchu, np. metodą numeryczną Rungego–Kuty [2].

Wyprowadzone zależności posłużyły do wykonania przykładowego badania ruchu układu z rys. 4.28. Do obliczeń przyjęto:

- parametry geometryczne [m]: $a = f = 0,1$; $b = 0,3$; $c = 0,45$; $d = h = 0,05$; $e = 0,15$;
- parametry masowe [kg], [kg·m²]: $m_1 = 1$; $m_2 = 5$; $I_1 = 0,1$;
- siła oporu $F = 2 \text{sign}(v_2)$ [N],
- moment czynny: $M = 4$ [N·m],
- położenie początkowe: $\Theta = \pi/2$,
- prędkość początkowa: $\dot{\Theta}_p = 1$ i 10 [s⁻¹].



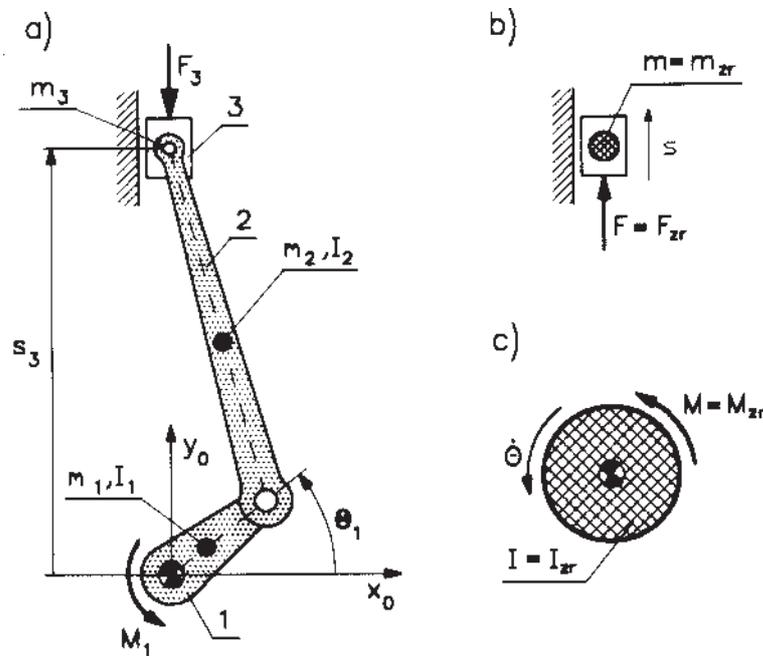
Rys. 4.29. Wyniki symulacji układu jarmowego
($\dot{\theta}_p = 1 \text{ s}^{-1}$ – linia przerywana, $\dot{\theta}_p = 10 \text{ s}^{-1}$ – linia ciągła)

Wyniki całkowania dla dwóch wariantów prędkości początkowej układu przedstawiono na rys. 4.29.

4.4.2. Zasada zachowania energii kinetycznej

4.4.2.1. Modele układów typu R i T

Zdecydowana większość układów wieloczłonowych spotykanych w praktyce ma ruchliwość równą jeden. Badanie ruchu takich układów poprzez analizę ruchu wielu członów dogodnie jest sprowadzić do badania ruchu tylko jednego członu. Jak wiadomo znajomość ruchu jednego członu układu o ruchliwości jeden jest równoznaczna ze znajomością ruchu członów pozostałych. Realizuje się to przez zastąpienie układu modelem jednoczłonowym, który jest jednym z członów układu, tzw. członem redukcji.

Rys. 4.30. Układ kinematyczny i modele dynamiczne typu R i T

Na rysunku 4.30a pokazano schemat układu korbowego, w którym wszystkie człony są masowe, a obciążenie zewnętrzne stanowią siła F_3 oraz moment M_1 . Stan ruchu tego układu w każdej chwili może być opisany, np. ruchem korby 1 lub suwaka 3. Przeprowadzenie takiej analizy, sprowadzonej do analizy ruchu jednego członu, wymaga zastąpienia układu modelem dynamicznym. W przypadku układu z rys. 4.30 rolę taką może pełnić np. suwak 3 lub korba 1. W pierwszym przypadku (rys. 4.30b) mamy do czynienia z modelem o ruchu postępowym (typ T), w drugim (rys. 4.30c) z modelem o ruchu obrotowym (typ R). Człon reprezentatywny dla badania ruchu układu, tutaj suwak 3 lub korba 1, określany jest mianem członu redukcji.

Aby uzyskać model dynamiczny układu, należy przypisać mu pewną bezwładność w postaci masy zredukowanej m_{zr} dla modelu o ruchu postępowym (rys. 4.30b) i zredukowanego masowego momentu bezwładności I_{zr} dla modelu o ruchu obrotowym (rys. 4.30c). Obciążenie zewnętrzne określa siła zredukowana $F_{zr} = F$ lub moment zredukowany $M_{zr} = M$ odpowiednio dla ruchu postępowego i obrotowego.

Równania ruchu dla obu przypadków wynikają z zasady zachowania energii, która dla układów kinematycznych mówi, że w określonym przedziale czasu praca δL sił zewnętrznych wywołuje zmianę energii kinetycznej δE . Sprowadza się to do ogólnego równania:

$$\delta L = \delta E$$

które prowadzi wprost do różniczkowych równań ruchu o postaci:

- dla modelu o ruchu postępowym (rys. 4.30b)

$$Fds = d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \quad v = \frac{ds}{dt} \quad (4.102)$$

- dla modelu o ruchu obrotowym (rys. 4.32c)

$$Md\Theta = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right), \quad \omega = \frac{d\Theta}{dt} \quad (4.103)$$

Dla przejrzystości analizy siłę i moment zredukowany często dzieli się na wielkości czynne (F_C, M_C) i bierne (F_{Bzr}, M_{Bzr}), powiązane zależnościami:

$$F = F_{zr} = F_{Czr} - F_{Bzr} \quad M = M_{zr} = M_{Czr} - M_{Bzr} \quad (4.104)$$

Przed przystąpieniem do analizy równań ruchu (4.102), (4.103) określimy reguły adekwatności układu i modelu, przypisując im odpowiednie parametry masowe i siły zewnętrzne.

4.4.2.2. Redukcja mas

Redukcję parametrów masowych poszczególnych członów wykonuje się, porównując ze sobą energie kinetyczne układu i modelu. Energia kinetyczna układu składającego się z k członów ruchomych jest sumą energii kinetycznych poszczególnych członów. Dla ruchu płaskiego i -tego członu należy zsumować ruch postępowy środka masy z prędkością v_i oraz ruch obrotowy z prędkością ω_i , co daje:

$$E_i = \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{I_i \omega_i^2}{2} \quad (4.105)$$

a dla całego układu

$$E = \sum_{i=1}^k E_i = \sum_{i=1}^k \left(\frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{I_i \omega_i^2}{2} \right) \quad (4.106)$$

Dla modelu energia kinetyczna E_m wyraża się równaniem:

- dla modelu o ruchu postępowym (rys. 4.30b)

$$E_m = \frac{mv^2}{2} \quad (4.107)$$

- dla modelu o ruchu obrotowym (rys. 4.30c)

$$E_m = \frac{I\omega^2}{2} \quad (4.108)$$

Z porównania równań (4.106), (4.107) oraz (4.106), (4.108) otrzymamy po przekształceniach:

- dla modelu o ruchu postępowym (rys. 4.30b)

$$m = m_{zr} = \sum_{i=1}^k \left[m_i \left(\frac{v_i}{v} \right)^2 + I_i \left(\frac{\omega_i}{v} \right)^2 \right] \quad (4.109)$$

- dla modelu o ruchu obrotowym (rys. 4.30c):

$$I = I_{zr} = \sum_{i=1}^k \left[m_i \left(\frac{v_i}{\omega} \right)^2 + I_i \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right] \quad (4.110)$$

Odwołując się do układu z rys. 4.30, zastąpionego modelem o ruchu obrotowym, a więc sprowadzając badanie układu do analizy ruchu korby 1, wyrażenie na całkowitą energię kinetyczną jest sumą energii poszczególnych członów:

$$E = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \right) + \left(\frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \right) + \left(\frac{1}{2} m_3 v_3^2 \right) \quad (4.111)$$

gdzie v_i – prędkości środków mas poszczególnych członów, a ostatni składnik wyraża energię kinetyczną suwaka 3, który wykonuje ruch postępowy.

Z porównania (4.108) i (4.111) otrzymuje się:

$$I_{zr} = I = m_1 \left(\frac{v_1}{\omega} \right)^2 + I_1 + m_2 \left(\frac{v_2}{\omega} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 + m_3 \left(\frac{v_3}{\omega} \right)^2 \quad (4.112)$$

gdzie: $\Theta = \Theta_1$, $\omega = \omega_1$.

W zależności (4.112) parametry masowe m_i , I_i są mnożone przez kwadraty ilorazów odpowiednich prędkości. Z analizy kinematycznej wiadomo, że ilorazy te, w związku z liniową zależnością prędkości są zależne wyłącznie od położenia układu, nie zależą natomiast od wartości prędkości. Oznacza to, że zredukowany masowy moment bezwładności zależy od położenia układu – w układzie z rys. 4.30 mamy $I_{zr} = I_{zr}(m_i, I_i, \Theta)$.

W przypadku zastępowania układu korbowego z rys. 4.30 modelem o ruchu postępowym, czyli suwakiem 3, otrzymamy z porównania (4.107) i (4.111) zależność:

$$m_{zr} = m = m_1 \left(\frac{v_1}{v} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\omega_1}{v} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_2}{v} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\omega_2}{v} \right)^2 + m_3 \quad (4.113)$$

gdzie $v = v_3$.

Również w tym przypadku obserwujemy zmienność wartości masy zredukowanej w funkcji położenia układu, $m_{zr} = m_{zr}(m_i, I_i, s)$.

Zmienność zredukowanego momentu bezwładności I_{zr} (zredukowanej masy m_{zr}) nie jest cechą wszystkich układów kinematycznych, a jedynie tych, w których obserwujemy zmienne przełożenia. Jednak w wypadku występowania zmienności I_{zr} , m_{zr} , w sposób istotny wpływa to na trudności w rozwiązywaniu równań ruchu (4.102) i (4.103).

4.4.2.3. Redukcja sił

Kolejną wielkością istotną dla ruchu modelu dynamicznego jest siła zredukowana $F_{zr} = F$ i moment zredukowany $M_{zr} = M$ odpowiednio dla ruchu postępowego i obrotowego. Wartości tych sił można określać dwiema metodami. Pierwsza korzysta z zasady prac przygotowanych, w myśl której suma prac przygotowanych od sił zewnętrznych jest równa pracy przygotowanej zredukowanej siły $F = F_{zr}$ lub momentu $M = M_{zr}$. Zgodnie z definicją prac przygotowanych, dla układów płaskich, mamy zatem z jednej strony sumy:

$$\sum \delta L = \sum \delta \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i + \sum M_i \delta \Theta_i \quad (4.114)$$

a z drugiej – prace przygotowane siły zredukowanej i momentu zredukowanego:

$$\delta L_{zr} = \delta s F, \quad \delta L_{zr} = M \delta \Theta \quad (4.115)$$

Porównanie wartości prac przygotowanych

$$\sum \delta L = \delta L_{zr} \quad (4.116)$$

daje po przekształceniach:

- dla modelu o ruchu postępowym (rys. 4.30b):

$$F = F_{zr} = \frac{1}{\delta s} \left(\sum \delta \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i + \sum M_i \delta \Theta_i \right) \quad (4.117)$$

- dla modelu o ruchu obrotowym (rys. 4.30c):

$$M = M_{zr} = \frac{1}{\delta \Theta} \left(\sum \delta \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i + \sum M_i \delta \Theta_i \right) \quad (4.118)$$

Dla układu z rysunku 4.30 suma prac przygotowanych od sił zewnętrznych wyraża się równaniem:

$$\sum \delta L = F_3 \delta s_3 + M_1 \delta \Theta_1$$

które po wykorzystaniu (4.116)(4.118) daje:

- dla modelu o ruchu postępowym (rys. 4.30b):

$$F = F_{zr} = F_3 + M_1 \frac{\delta \Theta_1}{\delta s}$$

gdzie $\delta s = \delta s_3$.

- dla modelu o ruchu obrotowym (rys. 4.30c):

$$M = M_{zr} = M_1 + F_3 \frac{\delta s_3}{\delta \Theta}$$

gdzie $\delta \Theta = \delta \Theta_1$.

Drugi sposób określania zredukowanej siły i momentu wynika wprost z zasady prac przygotowanych sprowadzonej do zasady równości mocy rozwijanej przez siły zewnętrzne i odpowiednią wielkość zredukowaną. Podobnie jak w przypadku prac przygotowanych mamy teraz z jednej strony od sił zewnętrznych sumy:

$$\sum N = \sum \delta \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i + \sum M_i \omega_i \quad (4.119)$$

a z drugiej moce rozwijane przez siłę zredukowaną i moment zredukowany

$$N_{zr} = Fv, \quad N_{zr} = M\omega \quad (4.120)$$

Porównanie wartości mocy

$$\sum N = N_{zr} \quad (4.121)$$

daje po przekształceniach:

- dla modelu o ruchu postępowym:

$$F = F_{zr} = \frac{1}{v} \left(\sum \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i + \sum M_i \omega_i \right) \quad (4.122)$$

- dla modelu o ruchu obrotowym:

$$M = M_{zr} = \frac{1}{\omega} \left(\sum \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i + \sum M_i \omega_i \right) \quad (4.123)$$

Dla układu z rysunku 4.30 suma mocy rozwijanych przez siły zewnętrzne daje równanie:

$$\sum N = F_3 v_3 + M_1 \omega_1$$

które po wykorzystaniu (4.121)(4.123) daje:

- dla modelu o ruchu postępowym (rys. 4.30b):

$$F = F_{zr} = F_3 + M_1 \frac{\omega_1}{v} \quad (4.124)$$

gdzie $v = v_3$.

- dla modelu o ruchu obrotowym (rys. 4.30c):

$$M = M_{zr} = M_1 + F_3 \frac{V_3}{\omega} \quad (4.125)$$

gdzie $\omega = \omega_1$.

Z analizy równań (4.124) i (4.125) wynika podobny wniosek do tego, który sformułowano po interpretacji zależności (4.112) i (4.113) na zredukowane wielkości masowe. Również siła i moment zredukowany na ogół są zależne od położenia układu. Stanowi to realne utrudnienie w całkowaniu równań ruchu, które dodatkowo pogłębia fakt częstej zależności sił od prędkości. Przykładem tego jest np. zmienność momentu napędowego silnika elektrycznego w funkcji prędkości. Od prędkości zależą też często siły oporu użytecznego – np. siły skrawania, siły oporu powietrza, siły tarcia itd.

4.4.2.4. Analiza ruchu, nierównomierność biegu

Przytoczone wnioski o występującej na ogół zmienności zredukowanych parametrów masowych (m_{zr}, I_{zr}), zmienności zredukowanej siły (F_{zr}) i momentu (M_{zr}) stanowią istotne utrudnienie w praktycznym wykorzystaniu równań ruchu (4.102) i (4.103). Jawne rozwiązanie równań można uzyskać tylko w przypadkach bardzo prostych. Dla analizy układów złożonych z pomocą przychodzi coraz łatwiej dostępne gotowe procedury numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych.

Dalsze rozważania przeprowadzimy już tylko dla modelu o ruchu obrotowym (rys. 4.30c). Taki model ma powszechne zastosowanie, co wynika z faktu dominującej roli napędu obrotowego, przeważnie w postaci silnika elektrycznego – wtedy cały układ kinematyczny redukuje się najczęściej do wału silnika. Podobieństwo analizy obu modeli jest oczywiste i wszystkie wnioski dla modelu obrotowego łatwo można przenieść na model o ruchu postępowym.

Po założeniu, że moment zredukowany M i zredukowany masowy moment bezwładności I są funkcjami położenia, dla modelu obrotowego otrzymamy:

$$M(\Theta) = \frac{d}{d\Theta} \left(\frac{I\omega^2}{2} \right) = I\omega \frac{d\omega}{d\Theta} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dI}{d\Theta} \quad (4.126)$$

a po kolejnych przekształceniach

$$M(\Theta) = I \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dI}{d\Theta} \quad (4.127)$$

Równanie (4.127) jest rozwinięciem równania Eulera dla ruchu obrotowego, które uwzględnia zmienność bezwładności układu – drugi składnik prawej strony równania (4.127).

Powróćmy jeszcze do równania ruchu w postaci (4.103), rozkładając moment M na część reprezentującą siły czynne M_{Czr} i siły bierne M_{Bzr} , co daje:

$$(M_{Czr} - M_{Bzr})d\Theta = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) \quad (4.128)$$

W wyniku całkowania (4.128) od pewnej wartości początkowej Θ_p do końcowej Θ_k otrzymamy równanie:

$$\int_{\Theta_p}^{\Theta_k} (M_{Czr} - M_{Bzr})d\Theta = \left(\frac{I_k\omega_k^2}{2}\right) - \left(\frac{I_p\omega_p^2}{2}\right) \quad (4.129)$$

w którym I_p , ω_p oraz I_k , ω_k opisują zredukowany moment bezwładności i prędkość kątową w położeniach opisanych kątami Θ_p i Θ_k . Dla znanych przebiegów $M_{Czr}(\Theta)$ i $M_{Bzr}(\Theta)$ oraz wartości zredukowanych momentów I_p oraz I_k z równania (4.129) można wyznaczyć prędkość końcową ω_k badanego przedziału:

$$\omega_k^2 = \frac{I_p}{I_k}\omega_p^2 + \frac{2}{I_k} \int_{\Theta_p}^{\Theta_k} (M_{Czr} - M_{Bzr})d\Theta$$

Pobieżna analiza ruchu wskazuje, że w ogólnym przypadku wykorzystanie równania ruchu (4.128) możliwe jest tylko drogą numerycznego całkowania. Ten rodzaj równań spełnił na pewnym etapie rozwoju pożyteczną rolę w analizie ruchu z wykorzystaniem technik wykreślnych [16], obecnie metoda ta jest rzadko stosowana.

Po pewnych uproszczeniach równanie ruchu (4.129) w sposób zwarty i przejrzysty wykorzystuje się natomiast do opisanego zjawiska tzw. nierównomierności biegu. W wielu maszynach i urządzeniach z napędem o ruchu obrotowym, nawet w ruchu ustalonym, obserwujemy zmienność prędkości kątowej członu napędzającego – np. wału silnika. Jest to spowodowane właśnie zmiennością bezwładności układu, a ściślej zmiennością zredukowanego momentu bezwładności, co zachodzi zwłaszcza w układach, w których występuje przemieszczanie się środków mas i zmienność przełożeń kinematycznych.

Drugim, jeszcze bardziej istotnym czynnikiem powodującym zmienność prędkości kątowej jest obserwowana na ogół zmienność sił biernych, a czasem i czynnych. Siły bierne są często zmienne ze swej natury. Tak jest np. w układach sprężarek, prasach, trakach do przecinania bloków skalnych. Zmienność sił czynnych jest oczywista w silnikach spalinowych, gdzie siła czynna napędzająca tłok ma charakter impulsowy. Zjawisko nierównomiernego biegu jest niekorzystne, gdyż zmienna prędkość często pogarsza jakość realizowanego procesu technologicznego, a zawsze jego konsekwencją są obciążenia dynamiczne i ich niekorzystne skutki (drżania, hałas).

Jako miarę nierównomierności przyjęło się używać współczynnika δ definiowanego na podstawie wartości ekstremalnych ω_{\max} i ω_{\min} odniesionych do wartości średniej ω_{sr} , według zależności:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{sr}}} \quad (4.130)$$

W rozważaniach praktycznych przyjmuje się, że

$$\omega_{\text{sr}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \quad (4.131)$$

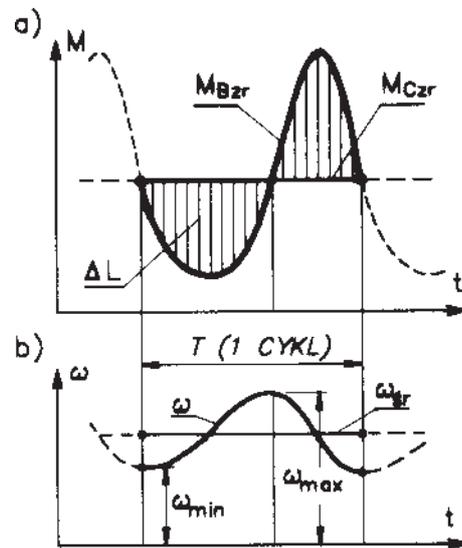
Spśród sposobów eliminowania lub ograniczenia niekorzystnego zjawiska nierównomiernego biegu [16], [22] najbardziej rozpowszechniony polega na sztucznym zwiększeniu bezwładności układu, dzięki czemu staje się on mniej wrażliwy na wspomniane zmienności sił czynnych i biernych. Technika ta znana jest jako wyrównywanie biegu za pomocą koła zamachowego. Jego wielkość, a ściślej jego moment bezwładności I_{KZ} można wyznaczyć z równania ruchu w postaci (4.129):

$$\int_{\Theta_p}^{\Theta_k} (M_{Czr} - M_{Bzr}) d\Theta = \left(\frac{I_k \omega_k^2}{2} \right) - \left(\frac{I_p \omega_p^2}{2} \right)$$

Przyjmijmy następujące założenia:

- rozpatrujemy ruch ustalony o znanej prędkości średniej ω_{sr} ,
- przebiegi momentów zredukowanych $M_{Czr}(\Theta)$ i $M_{Bzr}(\Theta)$ są znane,
- zmienność zredukowanego momentu bezwładności jest pomijalna, tj. $I = \text{const}$.

Już pobieżna analiza wskazuje, że dla znanych przebiegów momentów $M_{Czr}(\Theta)$ i $M_{Bzr}(\Theta)$ (rys. 4.31a) łatwo przewidzieć zmienność prędkości kątowej (rys. 4.31b). W pierwszej fazie pojedynczego cyklu ruchu ustalonego obserwujemy przewagę momentu czynnego M_{Czr} nad momentem biernym M_{Bzr} . Dla stałej wartości masowego momentu bezwładności I musi to oznaczać zwiększenie prędkości kątowej spowodowane nadwyżką pracy ΔL . W drugiej fazie cyklu widać natomiast nadwyżkę momentu biernego, co skutkuje spadkiem



Rys. 4.31. Momenty zredukowane (a) i prędkość kątowa ruchu ustalonego (b)

prędkości kątowej. Jest oczywiste, że największa wartość pracy sił zredukowanych:

$$\Delta L = \int_{\Theta_p}^{\Theta_k} (M_{Czr} - M_{Bzr}) d\Theta \quad (4.132)$$

spowoduje zmianę energii kinetycznej od minimalnej do maksymalnej. Dla założonej stałej bezwładności układu ($I = \text{const}$) oznacza to, że położeniom opisanym kątami Θ_p i Θ_k muszą odpowiadać ekstremalne prędkości kątowe:

$$\omega_p = \omega_{\min}, \quad \omega_k = \omega_{\max} \quad (4.133)$$

Wynikająca z (4.133) modyfikacja równania (4.129) daje:

$$\Delta L = \frac{1}{2} I (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) \quad (4.134)$$

Korzystając z równań (4.130) i (4.131) mamy:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{sr}}} \rightarrow \omega_{\max} - \omega_{\min} = \delta \omega_{\text{sr}} \\ \omega_{\text{sr}} &= \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \rightarrow \omega_{\max} + \omega_{\min} = 2\omega_{\text{sr}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = 2\delta \omega_{\text{sr}}^2 \quad (4.135)$$

co prowadzi do zależności

$$\Delta L = I \delta \omega_{\text{sr}}^2 \rightarrow \delta = \frac{\Delta L}{I \omega_{\text{sr}}^2} \quad (4.136)$$

Równanie (4.136) umożliwia określenie współczynnika nierównomierności δ . W wypadku konieczności jego zmniejszenia do wartości pożądanej $\delta' < \delta$, z równania (4.136) widać, że można to uzyskać przez zwiększenie momentu bezwładności I . Wymaga to dodania do układu koła zamachowego o momencie bezwładności I_{KZ} , którego wartość na podstawie (4.136) wynosi:

$$\delta' = \frac{\Delta L}{(I + I_{KZ}) \omega_{\text{sr}}^2} \rightarrow I_{KZ} = \frac{\Delta L}{\delta' \omega_{\text{sr}}^2} - I \quad (4.137)$$

Koło zamachowe pełni rolę mechanicznego akumulatora energii. Akumuluje ją w tych fazach ruchu, kiedy siły czynne przeważają nad biernymi i zwiększają prędkość układu i oddaje w fazach przewagi sił biernych, kiedy układ ma tendencję do zmniejszenia prędkości. Uważna analiza równania (4.137) wskazuje wprost na jeszcze inną możliwość zmniejszenia współczynnika nierównomierności przez wpływanie na zmniejszenie pracy ΔL [16].

4.4.3. Równanie Lagrange'a

Z rozważań strukturalnych i kinematycznych wiadomo, że minimalna liczba parametrów opisujących ruch układu jest równa jego ruchliwości. Parametry te przyjęło się nazywać współrzędnymi uogólnionymi. Przykładowo ruch układu korbosuwu (rys. 4.30) można opisać kątem położenia korby, ale też np. przemieszczeniem suwaka – każda z tych zmiennych może być współrzędną uogólnioną. Jednoznaczny opis położenia efektora (np. chwytaka) robota wymaga podania większej liczby współrzędnych uogólnionych. Dla robota uniwersalnego obsługującego przestrzeń ruch efektora opisuje na ogół sześć współrzędnych uogólnionych.

Koncepcję współrzędnych uogólnionych wykorzystuje metoda zaproponowana przez Lagrange'a⁴ najczęściej spotykana w postaci układu s równań Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (4.138)$$

W równaniu (4.138) E oznacza energię kinetyczną układu, a każdej z s współrzędnych uogólnionych q_k przypisuje się siłę uogólnioną Q_k . Z siły Q_k można wydzielić część Q_{kp} pochodzącą od sił potencjalnych i część Q_{kz} pochodzącą od sił pozostałych. Ponieważ w takim przypadku pierwsza z sił wyrażona jest równaniem:

$$Q_{kp} = - \frac{\partial P}{\partial q_k}$$

gdzie P jest energią potencjalną układu, kolejną więc postacią równania (4.138) jest:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} + \frac{\partial P}{\partial q_k} = Q_{kz} \quad (4.139)$$

Jest to często spotykana i wykorzystywana forma równania Lagrange'a II rodzaju. Czasem jest ona upraszczana do postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{kz} \quad (4.140)$$

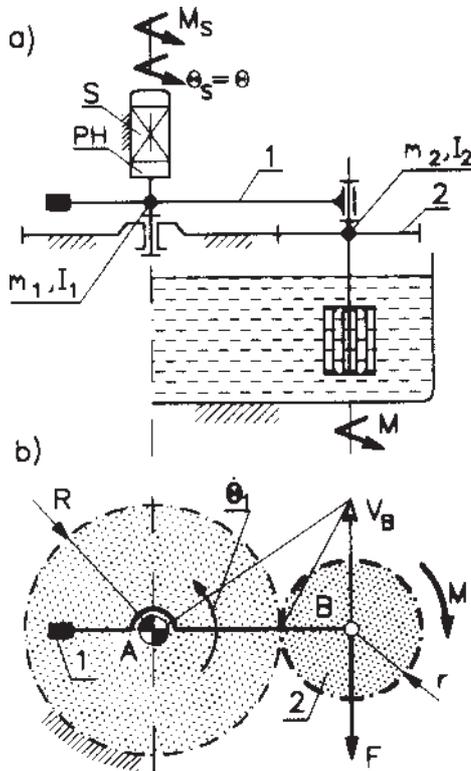
po wprowadzeniu tzw. potencjału kinetycznego L w postaci:

$$L = E - P \quad (4.141)$$

Aplikację tej metody do sformułowania równań ruchu wybranych układów przedstawiono w przykładach 4.8 i 4.9.

⁴ Ludwik Lagrange (1736–1813); *Mecanique Analytique*, 1788.

PRZYKŁAD 4.8



Rys. 4.32. Układ kinematyczny mieszadła

Wykorzystajmy równanie (4.139) do analizy ruchu układu mechanicznego mieszadła zamocowanego na kole obiegowym 2 przekładni planetarnej (rysunek 4.32). Drugie koło przekładni (centralne) jest nieruchome. Koło obiegowe 2 jest napędzane jarzmem 1, którego ruch jest wymuszany silnikiem S i zblokowaną z nim przekładnią harmoniczną PH.

Elementy układu poruszają się w płaszczyźnie poziomej, masowe momenty bezwładności elementów przekładni harmonicznego są uwzględnione w momencie bezwładności silnika I_S oraz w momencie I_1 bezwładności jarzma 1. Dane geometryczne i umiejscowienie środków mas przedstawiono na rysunku 4.32.

Za opory ruchu przyjęto stałą siłę F oporu ruchu liniowego i stały moment oporu M ruchu obrotowego mieszadła wokół własnej osi. Określmy ruch układu po skokowo włączonym napięciu U zasilania silnika prądu stałego, którego moment napędowy wyrażony jest równaniem:

$$M_S = M_0 - k\dot{\Theta}_S, \quad U = \text{const} \quad (4.142)$$

Układ ma jeden stopień swobody – jako współrzędną uogólnioną przyjmujemy kąt $\Theta = \Theta_S$ obrotu wału silnika – ruch układu opisywany jednym równaniem o postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \Theta} + \frac{\partial P}{\partial \Theta} = Q_z \quad (4.143)$$

gdzie: E, P – odpowiednio energia kinetyczna, potencjalna,

Q_z – siła na kierunku współrzędnej uogólnionej (reprezentuje wszystkie siły zewnętrzne).

Rozpatrzmy na początek zależności kinematyczne. Prędkość jarzma 1 określa relacja:

$$\dot{\Theta}_1 = \dot{\Theta} i_H \quad (4.144)$$

gdzie i_H – przełożenie przekładni harmonicznego PH.

Ponieważ środek obrotu koła 2 względem podstawy 0 leży w punkcie styku obu kół, oczywista jest relacja:

$$v_B = \dot{\Theta}_1 (R + r) = \dot{\Theta}_2 r$$

co daje po uwzględnieniu (4.144):

$$\dot{\Theta}_2 = \dot{\Theta}_1 \frac{R + r}{r} = \dot{\Theta} \frac{R + r}{r} i_H \quad (4.145)$$

Energia kinetyczna całego układu jest sumą energii kinetycznych poszczególnych członów:

$$E = E_S + E_1 + E_2$$

a więc

$$E = \left(\frac{1}{2} I_S \dot{\Theta}^2 \right) + \left(\frac{1}{2} I_1 \dot{\Theta}_1^2 \right) + \left(\frac{1}{2} I_2 \dot{\Theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_B^2 \right) \quad (4.146)$$

Po uwzględnieniu zależności kinematycznych (4.145) oraz wyrażenia na moment bezwładności tarczy (dla koła 2):

energia kinetyczna członu 2 jest wyrażona równaniem:

$$E_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} m_2 r^2 \left(\dot{\Theta} \frac{R + r}{r} i_H \right)^2 + m_2 (\dot{\Theta} i_H (R + r))^2 \right]$$

i dalej

$$E_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} m_2 (R + r)^2 i_H^2 \right] \dot{\Theta}^2 \quad (4.147)$$

Po podstawieniu i uporządkowaniu otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{2} \left[I_S + I_1 i_H^2 + \frac{3}{2} m_2 (R + r)^2 i_H^2 \right] \dot{\Theta}^2 \quad (4.148)$$

a po kolejnym podstawieniu:

$$I_Z = I_S + I_1 i_H^2 + \frac{3}{2} m_2 (R + r)^2 i_H^2 \quad (4.149)$$

mamy

$$E = \frac{1}{2} I_Z \dot{\Theta}^2 \quad (4.150)$$

Wyznaczenie siły uogólnionej Q_z opieramy na równości prac wirtualnych. Mamy zatem

$$\delta L = M_S \delta\Theta - M \delta\Theta_2 - F(R+r)\delta\Theta_1 \quad (4.151)$$

oraz

$$\delta L = Q_z \delta\Theta \quad (4.152)$$

Przemieszczenia wirtualne otrzymujemy z zależności kinematycznych (4.144) i (4.145):

$$\delta\Theta_1 = \delta\Theta i_H, \quad \delta\Theta_2 = \delta\Theta \frac{R+r}{r} i_H \quad (4.153)$$

Z porównania relacji (4.151) i (4.152) oraz po wstawieniu wyrażenia (4.142) na moment silnika otrzymujemy wyrażenie na siłę uogólnioną:

$$Q_z = M_0 - k\dot{\Theta} - M \frac{R+r}{r} i_H - F(R+r)i_H \quad (4.154)$$

co zapisujemy krótko

$$Q_z = A - k\dot{\Theta} \quad (4.155)$$

gdzie

$$A = M_0 - M \frac{R+r}{r} i_H - F(R+r)i_H \quad (4.156)$$

Kolejne pochodne potrzebne do sformułowania równania Lagrange'a wynoszą:

$$\frac{\partial}{\partial\Theta} E = \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\frac{1}{2} I_Z \dot{\Theta}^2 \right) = I_Z \dot{\Theta} \quad (4.157a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\Theta}} \right) = I_Z \ddot{\Theta} \quad (4.157b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial\Theta} = 0 \quad (4.157c)$$

Energia potencjalna P jest pomijana, ponieważ założono pracę układu w płaszczyźnie poziomej, co daje:

$$\frac{\partial P}{\partial \Theta} = 0 \quad (4.157d)$$

Podstawienie (4.155) i (4.157) do (4.143) daje:

$$I_Z \ddot{\Theta} = A - k\dot{\Theta} \quad (4.158)$$

a po przekształceniu otrzymamy:

$$I_Z \frac{d\dot{\Theta}}{A - k\dot{\Theta}} = dt \quad (4.159)$$

Całkowanie zależności (4.159) prowadzi do równania:

$$-\frac{1}{k} I_Z \ln(A - k\dot{\Theta}) = t + C \quad (4.160)$$

Stała całkowania C wynosi:

$$t = 0 \rightarrow \dot{\Theta} = 0 \rightarrow -\frac{1}{k} I_Z \ln A = C$$

i równanie (4.160) przyjmuje postać:

$$-\frac{1}{k} I_Z \ln(A - k\dot{\Theta}) = t - \frac{1}{k} I_Z \ln A \quad (4.161)$$

Kolejne przekształcenia (4.161) dają:

$$-\frac{I_Z}{k} [\ln(A - k\dot{\Theta}) - \ln A] = t$$

$$\ln\left(1 - \frac{k\dot{\Theta}}{A}\right) = -\frac{k}{I_Z} t = -ut$$

$$1 - \frac{k\dot{\Theta}}{A} = e^{-ut}$$

W wyniku końcowym równanie prędkości kątowej silnika ma postać:

$$\dot{\Theta} = \frac{A}{k} (1 - e^{-ut}) \quad (4.162)$$

Po wstawieniu zależności (4.156) na stałą A otrzymamy

$$\dot{\Theta} = \frac{1}{k} \left(M_0 - M \frac{R+r}{r} i_H - F(R+r) i_H \right) (1 - e^{-ut})$$

Podana zależność pokazuje przyrost prędkości, która teoretycznie ustali się po upływie czasu t . W praktyce już po niewielkim czasie, zwykle ułamkach sekundy, osiągnana jest prędkość ruchu ustalonego ($t = \infty$) wyrażona zależnością

$$\dot{\Theta} = \frac{1}{k} \left(M_0 - M \frac{R+r}{r} i_H - F(R+r) i_H \right)$$

Rozpatrzony w przykładzie 4.8 układ charakteryzuje się względnie prostą budową, dzięki czemu proste są zależności kinematyczne niezbędne do wyprowadzenia równań energii kinetycznej i siły uogólnionej. Z kinematyki wiadomo, że w wielu przypadkach równania te są złożone, często trudne do przedstawienia w postaci jawnej. Dodatkowym ułatwieniem był fakt, że człony układu przemieszczają się w płaszczyźnie poziomej, co zwolniło nas z zajmowania się energią potencjalną. Jest to cecha szczególna, rzadko występująca w praktyce.

Złożoność opisu kinematyki stanowi istotne ograniczenie stosowania równań Lagrange'a do analizy układów kinematycznych. Wyjątkiem od tej zasady są układy otwarte, o budowie szeregowej, często wykorzystywane w robotach. Prosty układ manipulatora płaskiego o strukturze szeregowej, pokazujący jedynie technikę wyprowadzania równań ruchu, rozpatrzono jako kolejny przykład.

PRZYKŁAD 4.9

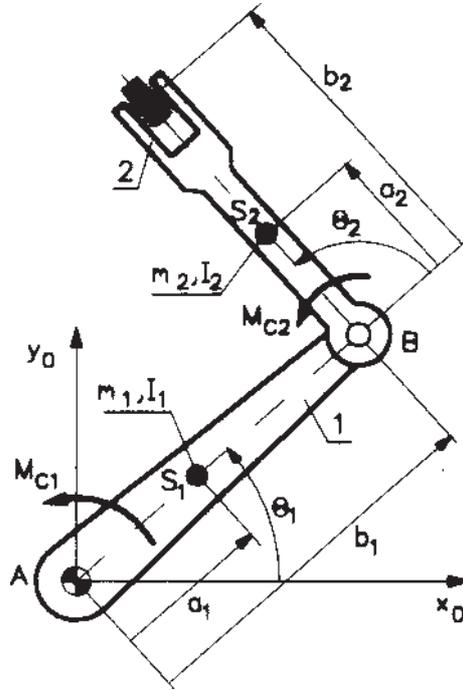
Rozpatrzmy układ płaskiego manipulatora o dwóch stopniach swobody (rys. 4.33). Każdy z członów ma zdefiniowane parametry masowe (masy m_1 i m_2 oraz masowe momenty bezwładności I_1 i I_2). Należy wyprowadzić zależności opisujące ruch układu dla znanych momentów napędowych M_{C1} i M_{C2} .

Jest oczywiste, że dla układu o dwóch stopniach swobody opisanie ruchu wymaga dwóch równań Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Theta_i} = Q_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.163)$$

Zależności opisujące energię kinetyczną E i potencjalną P członu 1:

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 a_1^2 \dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\Theta}_1^2, \quad P_1 = m_1 g a_1 \sin \Theta_1 \quad (4.164)$$



Rys. 4.33. Manipulator płaski dwuczłonowy

Dla członu 2 wyznaczenie energii poprzedzamy analizą kinematyczną w celu opisanego ruchu środka masy członu 2. Współrzędne środka masy członu 2 wyrażone są równaniami:

$$\mathbf{r}_{S2} = \begin{bmatrix} x_{S2} \\ y_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \cos \Theta_1 + a_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) \\ b_1 \sin \Theta_1 + a_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) \end{bmatrix}$$

a jego prędkości

$$\dot{\mathbf{r}}_{S2} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{S2} \\ \dot{y}_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\Theta}_1 b_1 \sin \Theta_1 - (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) \\ \dot{\Theta}_1 b_1 \cos \Theta_1 + (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) \end{bmatrix} \quad (4.165)$$

Energia kinetyczna i potencjalna członu 2 wyrażona jest równaniami:

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_{S2}^T \dot{\mathbf{r}}_{S2} + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2)^2 \quad (4.166)$$

$$P_2 = m_2 g (b_1 \sin \Theta_1 + a_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2)) \quad (4.167)$$

Dla uproszczenia zapisu dokonujemy podstawień:

$$\begin{aligned}\sin \Theta_i &= S_i & \sin(\Theta_1 + \Theta_2) &= S_{12} \\ \cos \Theta_i &= C_i & \cos(\Theta_1 + \Theta_2) &= C_{12}\end{aligned}$$

Występujący w (4.166) kwadrat prędkości środka masy członu 2 znajdujemy z iloczynu skalarnego:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_{S_2}^T \dot{\mathbf{r}}_{S_2} &= \left[-\dot{\Theta}_1 b_1 \sin \Theta_1 - (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) \right]^2 \\ &+ \left[\dot{\Theta}_1 b_1 \cos \Theta_1 + (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) \right]^2 \\ \dot{\mathbf{r}}_{S_2}^T \dot{\mathbf{r}}_{S_2} &= (\dot{\Theta}_1 b_1)^2 + (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2)^2 a_2^2 + 2\dot{\Theta}_1 (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2 b_1 (S_1 S_{12} + C_1 C_{12})\end{aligned}$$

Po wykorzystaniu relacji na sinus i kosinus sumy kątów:

$$S_1 S_{12} + C_1 C_{12} = C_2$$

mamy

$$\dot{\mathbf{r}}_{S_2}^T \dot{\mathbf{r}}_{S_2} = (\dot{\Theta}_1 b_1)^2 + (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2)^2 a_2^2 + 2\dot{\Theta}_1 (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2 b_1 C_2 \quad (4.168)$$

Po wstawieniu (4.168) do (4.166) otrzymamy energię kinetyczną członu 2:

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{\Theta}_1 b_1)^2 + (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2)^2 a_2^2 + 2\dot{\Theta}_1 (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2 b_1 C_2 \right] + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2)^2 \quad (4.169)$$

Uproszczona relacja na energię potencjalną członu 2 ma postać:

$$P_2 = m_2 g (b_1 S_1 + a_2 S_{12}) \quad (4.170)$$

Potencjał kinetyczny L (4.141) dla tego układu, na podstawie (4.164), (4.169) i (4.170) wynosi:

$$L = E_1 + E_2 - P_1 - P_2$$

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} m_1 a_1^2 \dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{\Theta}_1 b_1)^2 + (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2)^2 a_2^2 + 2\dot{\Theta}_1 (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2 b_1 C_2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} I_2 (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2)^2 - m_1 g a_1 S_1 - m_2 g (b_1 S_1 + a_2 S_{12})\end{aligned} \quad (4.171)$$

Kolejne pochodne (4.171) to:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_1} = m_1 a_1^2 \dot{\Theta}_1 + I_1 \dot{\Theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 [2 \dot{\Theta}_1 b_1^2 + (2 \dot{\Theta}_1 + 2 \dot{\Theta}_2) a_2^2 \\ + 2(2 \dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2 b_1 C_2] + I_2 (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) \end{aligned} \quad (4.172a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_1} \right) = m_1 a_1^2 \ddot{\Theta}_1 + I_1 \ddot{\Theta}_1 + m_2 [\ddot{\Theta}_1 b_1^2 + (\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2) a_2^2 + (2 \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2) a_2 b_1 C_2 \\ - \dot{\Theta}_2 (2 \dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2 b_1 S_2] + I_2 (\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2) \end{aligned} \quad (4.172b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_2} = m_2 [(\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2^2 + \dot{\Theta}_1 a_2 b_1 C_2] + I_2 (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) \quad (4.172c)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_2} \right) = m_2 [(\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2) a_2^2 + \ddot{\Theta}_1 a_2 b_1 C_2 - \dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 a_2 b_1 S_2] + I_2 (\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2) \quad (4.172d)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta_1} = -m_1 g a_1 C_1 - m_2 g (b_1 C_1 + a_2 C_{12}) \quad (4.172e)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta_2} = -m_2 \dot{\Theta}_1 (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) a_2 b_1 S_2 - m_2 g a_2 C_{12} \quad (4.172f)$$

Po podstawieniu (4.172) do (4.163) otrzymujemy równania ruchu członów 1 i 2:

$$\begin{aligned} [m_1 a_1^2 + I_1 + m_2 (b_1^2 + a_2^2 + 2 a_2 b_1 C_2) + I_2] \ddot{\Theta}_1 \\ + [m_2 (a_2^2 + a_2 b_1 C_2) + I_2] \ddot{\Theta}_2 - m_2 a_2 b_1 S_2 \dot{\Theta}_2^2 - 2 m_2 a_2 b_1 S_2 \dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 \\ + m_1 g a_1 C_1 + m_2 g (b_1 C_1 + a_2 C_{12}) = M_{C1} \end{aligned}$$

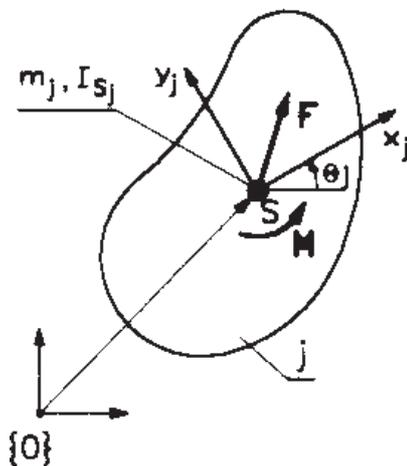
$$\begin{aligned} [m_2 a_2^2 + m_2 a_2 b_1 C_2 + I_2] \ddot{\Theta}_1 + [m_2 a_2^2 + I_2] \ddot{\Theta}_2 + m_2 a_2 b_1 S_2 \dot{\Theta}_1^2 \\ + m_2 g a_2 C_{12} = M_{C2} \end{aligned}$$

Równania Lagrange'a, jedne z najczęściej stosowanych w opisie zjawisk dynamicznych, okazują się niestety mało efektywne do opisu złożonych układów o strukturze zamkniętej. Wymagają żmudnego wyprowadzania równań opisujących energię kinetyczną i ich różniczkowania, a algorytmizacja tych zabiegów jest trudna. Skłoniło to wielu badaczy do odchodzenia od równań Lagrange'a i sięgania po inne metody mechaniki klasycznej, lepiej ukierunkowane na zastosowania komputerowe [3], [7], [13].

4.4.4. Równania ruchu we współrzędnych absolutnych

4.4.4.1. Równanie ruchu członu

Ruch członu układu kinematycznego może odbywać się tylko zgodnie z więzami narzuconymi przez inne człony i pary kinematyczne. Musi to znaleźć odzwierciedlenie w równaniach ruchu. Załóżmy (rys. 4.34), że ze środkiem S masy m członu j pokrywa się początek układu lokalnego $\{j\}$. Do początku układu lokalnego $\{j\}$ odniesione są też wypadkowa sił \mathbf{F} i wypadkowy moment M obciążeń zewnętrznych, włącznie z siłami w parach kinematycznych i siłami grawitacji.



Rys. 4.34. Człon układu kinematycznego

Ogólne równanie mechaniki dla ruchu płaskiego ma wtedy postać:

$$\delta \mathbf{p}_j^T [m_j \ddot{\mathbf{p}}_j - \mathbf{F}] + \delta \Theta_j [I_{Sj} \ddot{\Theta}_j - M] = 0 \quad (4.173)$$

i jest rozszerzeniem zasady d'Alemberta interpretowanej jako „suma prac przygotowanych nierównoważonych sił i momentów bezwładności jest równa zero”.

4.4.4.2. Siła uogólniona

Równanie ruchu (4.173) można zapisać w zwartej formie:

$$\delta \mathbf{q}_j^T [\tilde{\mathbf{M}}_j \ddot{\mathbf{q}}_j - \mathbf{Q}_j] = 0 \quad (4.174)$$

Wektor przemieszczeń przygotowanych ma postać:

$$\delta \mathbf{q}_j^T = [\delta x_j \quad \delta y_j \quad \delta \Theta_j]$$

4.4. Dynamiczne równania ruchu

natomiast parametry masowe ujmujemy macierz:

$$\tilde{\mathbf{M}}_j = \begin{bmatrix} m_j & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 \\ 0 & 0 & I_{Sj} \end{bmatrix} \quad (4.175)$$

Wektor \mathbf{Q} jest siłą uogólnioną o składowych:

$$\mathbf{Q}_j = [Q_{jx} \quad Q_{jy} \quad Q_{jM}]^T \quad (4.176)$$

który można wyznaczyć na podstawie równości prac przygotowanych sił zewnętrznych F , M i uogólnionych Q . Mamy zatem:

$$\delta L = \delta \mathbf{p}_j^T F + \delta \Theta_j M, \quad \delta L = \delta \mathbf{q}_j^T \mathbf{Q}_j$$

co w wyniku porównania daje:

$$\begin{bmatrix} \delta x_j & \delta y_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix} + \delta \Theta_j M_j = \begin{bmatrix} \delta x_j & \delta y_j & \delta \Theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{jx} \\ Q_{jy} \\ Q_{jM} \end{bmatrix} \quad (4.177)$$

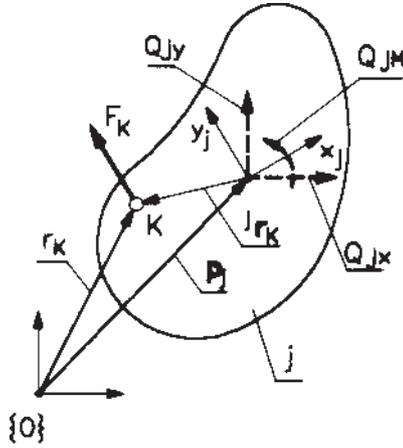
Równanie ruchu ma więc postać:

$$\begin{bmatrix} \delta x_j & \delta y_j & \delta \Theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_j & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 \\ 0 & 0 & I_{Sj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_j \\ \ddot{y}_j \\ \ddot{\Theta}_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{jx} \\ Q_{jy} \\ Q_{jM} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.178)$$

Zwróćmy uwagę, że jeśli ruch członu j jest swobodny, bez żadnych więzów, czyli δx_j , δy_j , i $\delta \Theta_j$ mogą być dowolne, to (4.178) jest równoważne równaniom Newtona–Eulera:

$$\begin{bmatrix} m_j & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 \\ 0 & 0 & I_{Sj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_j \\ \ddot{y}_j \\ \ddot{\Theta}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xj} \\ Q_{yj} \\ Q_{Nj} \end{bmatrix}$$

Napisanie równań wszystkich członów układu kinematycznego wymaga znajomości przypisanych im sił uogólnionych. Tutaj opisano kilka najczęściej spotykanych przypadków.



Rys. 4.35. Redukcja siły zewnętrznej do uogólnionej

Siła uogólniona od siły zewnętrznej. Na rysunku 4.35 pokazano człon obciążony siłą zewnętrzną \mathbf{F}_K . Załóżmy, co występuje najczęściej, że jej składowe są wyrażone w układzie globalnym $\{0\}$. Wychodząc z zasady równości prac przygotowanych, mamy równanie:

$$\delta L = \delta \mathbf{q}_j^T \mathbf{Q} = \delta \mathbf{r}_K^T \mathbf{F}_K \quad (4.179)$$

Gdy znamy wyrażenie (2.7) na wektor opisujący punkt zaczepienia siły \mathbf{F}_K

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{p}_j + \mathbf{R}_j {}^j \mathbf{r}_K$$

gdzie \mathbf{R}_j dane równaniem (2.3),

łatwo uzyskamy równanie przemieszczeń przygotowanych

$$\delta \mathbf{r}_K = \delta \mathbf{p}_j + \delta \Theta_j \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_j} \mathbf{A}_j \right) {}^j \mathbf{r}_K = \delta \mathbf{p}_j + \delta \Theta_j \mathbf{B}_j {}^j \mathbf{r}_K \quad (4.180)$$

gdzie \mathbf{B}_j dane równaniem (3.60).

Po podstawieniu (4.180) do (4.179) otrzymujemy

$$\delta L = \delta \mathbf{r}_K^T \mathbf{F}_K = \left(\delta \mathbf{p}_j + \delta \Theta_j \mathbf{B}_j {}^j \mathbf{r}_K \right)^T \mathbf{F}_K = \delta \mathbf{p}_j^T \mathbf{F}_K + \delta \Theta_j {}^j \mathbf{r}_K^T \mathbf{B}_j^T \mathbf{F}_K = \delta \mathbf{q}_j^T \mathbf{Q}$$

a następnie wyrażenie na siłę uogólnioną, zastępującą działanie siły F_K

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_K \\ {}^j \mathbf{r}_K^T \mathbf{B}_j^T \mathbf{F}_K \end{bmatrix} \quad (4.181)$$

Jeżeli siła F_K jest zadana składowymi w układzie lokalnym, to jest wymagana jej transformacja do układu globalnego oczywistym równaniem:

$$\mathbf{F}_K = \mathbf{R}_j {}^j \mathbf{F}_K \quad (4.182)$$

i wstawienie (4.182) wprost do równania (4.181) daje

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_j {}^j \mathbf{F}_K \\ {}^j \mathbf{r}_K^T \mathbf{B}_j^T (\mathbf{R}_j {}^j \mathbf{F}_K) \end{bmatrix} \quad (4.183)$$

Siła uogólniona od wymuszenia siłowego (STS liniowy). W układach kinematycznych mogą wystąpić elementy o zmiennej długości (rys. 4.36) w postaci sprężyny, elementu tłumiącego i siłownika (STS). Sztywność sprężyny wynosi k , współczynnik tłumienia c , a siłownik rozwija siłę F będącą w najogólniejszym przypadku funkcją długości l , prędkości \dot{l} i czasu t . Ogólnie siła wzdłużna elementu STS zmiennej długości wynosi:

$$f = k(l - l_0) + c\dot{l} + F(l, \dot{l}, t) \quad (4.184)$$

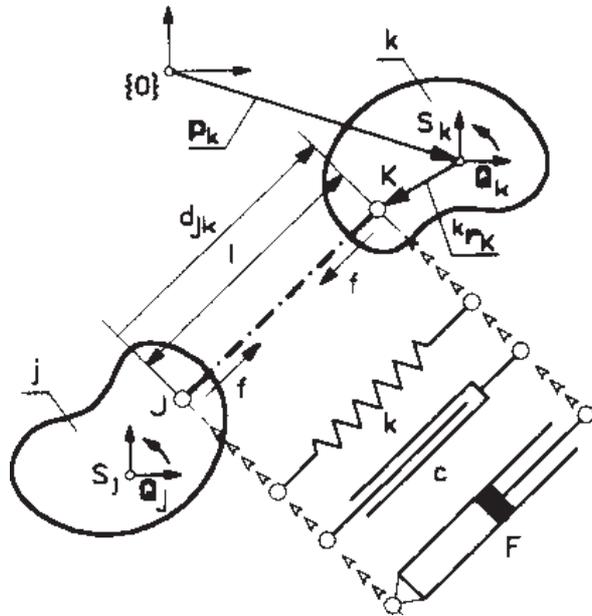
W zależności (4.184) mogą wystąpić wszystkie trzy składniki, dwa lub jeden. Konsekwencją działania siły f są odpowiednie siły uogólnione Q_j i Q_k na członach j i k . Siły te można wyznaczyć za pomocą równości prac przygotowanych, a przytoczone tutaj kolejne kroki traktujemy jako jeszcze jeden przykład zastosowania tej interesującej i efektywnej metody analizy sił.

Praca przygotowana od siły w elemencie o zmiennej długości wyraża się iloczynem:

$$\delta L = -f \delta l \quad (4.185)$$

Znak minus odpowiada sytuacji, kiedy siła f jest „ściągnającą” – usiłuje zbliżyć do siebie punkty J, K członów j i k – a jej wartość f^+ jest wtedy dodatnia. Wykorzystując współrzędne absolutne członów, wektor \mathbf{d}_{jk} opisuje zależność:

$$\mathbf{d}_{jk} = \mathbf{p}_k + \mathbf{R}_k {}^k\mathbf{r}_K - \mathbf{p}_j - \mathbf{R}_j {}^j\mathbf{r}_J \quad (4.186)$$



Rys. 4.36. Wymuszenie siłowe – STS liniowy

która wyznacza długość l równaniem:

$$l^2 = \mathbf{d}_{jk}^T \mathbf{d}_{jk} \quad (4.187)$$

Po zróżniczkowaniu (4.187) względem czasu otrzymamy:

$$2l\dot{l} = 2\mathbf{d}_{jk}^T \dot{\mathbf{d}}_{jk} \rightarrow \dot{l} = \frac{1}{l} \mathbf{d}_{jk}^T \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_k + \mathbf{R}_k^k \mathbf{r}_K - \mathbf{p}_j - \mathbf{R}_j^j \mathbf{r}_J)$$

co wprost daje zależność na przemieszczenie przygotowane δl :

$$\delta l = \frac{1}{l} \mathbf{d}_{jk}^T (\delta \mathbf{p}_k + \delta \Theta_k \mathbf{B}_k^k \mathbf{r}_K - \delta \mathbf{p}_j - \delta \Theta_j \mathbf{B}_j^j \mathbf{r}_J) \quad (4.188)$$

Macierze \mathbf{B}_j i \mathbf{B}_k są pochodnymi macierzy rotacji względem odpowiadającego kąta orientacji Θ_j i Θ_k (patrz zal. (3.60)). Z drugiej strony praca przygotowana sił uogólnionych \mathbf{Q}_j i \mathbf{Q}_k wynosi:

$$\delta L = \delta \mathbf{q}_j^T \mathbf{Q}_j + \delta \mathbf{q}_k^T \mathbf{Q}_k \quad (4.189)$$

Z porównania (4.185) i (4.189), po wykorzystaniu (4.188) i uporządkowaniu otrzymuje się

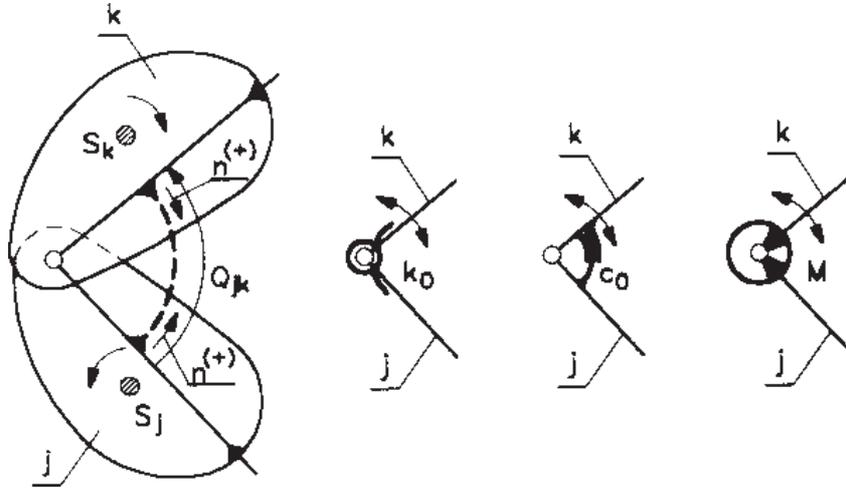
$$\mathbf{Q}_j = \left(\frac{f}{l} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{jk} \\ \mathbf{d}_{jk}^T \mathbf{B}_j^j \mathbf{r}_J \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_k = - \left(\frac{f}{l} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{jk} \\ \mathbf{d}_{jk}^T \mathbf{B}_k^k \mathbf{r}_K \end{bmatrix} \quad (4.190)$$

Siła uogólniona od wymuszenia momentowego (STS kątowy). Ideę takiego napędu ilustruje rysunek 4.37. Moment względny n może pochodzić od sprężyny o sztywności k_O , tłumienia o współczynniku c_O i od siłownika kąтового rozwijającego moment M , zależny od kąta Θ_{jk} , prędkości kątovej $\dot{\Theta}_{jk}$ i czasu t . Łącznie moment n rozwijany przez STS kątowy wyraża równanie:

$$n = k_O (\Theta_{jk} - \Theta_0) + c_O \dot{\Theta}_{jk} + M(\Theta_{jk}, \dot{\Theta}_{jk}, t) \quad (4.191)$$

Moment n skutkuje siłami uogólnionymi na członach j , k , również obliczanymi z zależności wynikających z porównania prac przygotowanych, a tutaj podanymi bez wyprowadzenia:

$$\mathbf{Q}_j = [0 \quad 0 \quad n]^T, \quad \mathbf{Q}_k = -[0 \quad 0 \quad n]^T \quad (4.192)$$



Rys. 4.37. Wymuszenie momentowe – STS kątowny

4.4.4.3. Równanie ruchu układu wielocłonowego

Na podstawie równań ruchu jednego członu możemy sformułować równania ruchu dla układu k członów, powiązanych parami kinematycznymi. Na początek zakładamy, że siły uogólnione Q reprezentują wszystkie obciążenia, łącznie z siłami w parach. Punktem wyjścia jest zerowa wartość sumy prac przygotowanych sił zewnętrznych dla wszystkich członów, co według (4.174) zapisujemy jako:

$$\sum_{i=1}^k \delta \mathbf{q}_i^T [\tilde{\mathbf{M}}_i \ddot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{Q}_i] = 0 \quad (4.193)$$

gdzie: $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2^T \dots \mathbf{q}_k^T]^T$ – wektor współrzędnych absolutnych,
 $\tilde{\mathbf{M}} = \text{diag} [\tilde{\mathbf{M}}_1 \quad \tilde{\mathbf{M}}_2 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{M}}_k]$ – macierz parametrów masowych,
 $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2^T \dots \mathbf{Q}_k^T]^T$ – wektor sił uogólnionych.

Rozdzielmy w siłach uogólnionych część pochodzącą od sił zewnętrznych Q^Z i część od sił w parach kinematycznych Q^P , czyli

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^Z + \mathbf{Q}_i^P \quad (4.194)$$

Po takim rozróżnieniu równanie (4.193) ma postać:

$$\sum_{i=1}^k \delta \mathbf{q}_i^T [\tilde{\mathbf{M}}_i \ddot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{Q}^Z] - \sum_{i=1}^k \delta \mathbf{q}_i^T \mathbf{Q}_i^P = 0 \quad (4.195)$$

Drugi składnik równania (4.195) ma wartość zerową. Jest to bowiem suma prac przygotowanych sił oddziaływania w parach kinematycznych. W każdej parze kinematycznej działają dwie siły oddziaływania – siła F_{jk} oraz $F_{kj} = -F_{jk}$. Ponieważ przemieszczenia przygotowane dla obu tych sił są jednakowe, więc prace przygotowane mają przeciwne znaki, a więc prace przygotowane sił wewnętrznych (oddziaływania, reakcji) zerują się. Równanie (4.195) można więc zapisać w postaci:

$$\delta \mathbf{q}^T [\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}^Z] = 0 \quad (4.196)$$

którego rozwiązanie wymaga znajomości wektora przemieszczeń przygotowanych. Zgodnie z rozważaniami w rozdz. 2 wektor funkcji więzów Φ dla określonej konfiguracji układu (czas t jest stałą) daje równanie:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = 0 \rightarrow \Phi_q \delta \mathbf{q} = 0$$

Ruch układu wielocłonowego można więc opisać równaniami wariacyjnymi o postaci:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{q}^T [\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}^Z] = 0 \\ \Phi_q \delta \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (4.197)$$

PRZYKŁAD 4.10

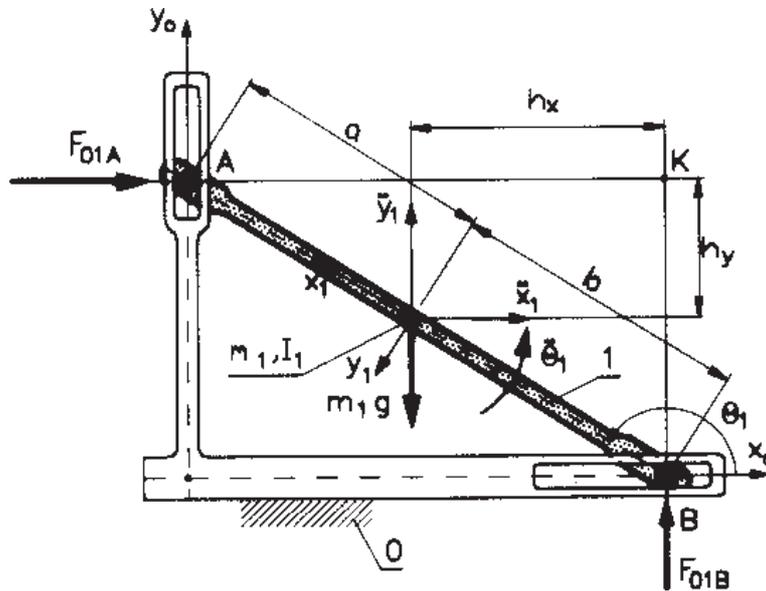
Na podstawie wariacyjnych równań dynamiki, z zastosowaniem współrzędnych absolutnych, wyprowadzimy równanie ruchu bardzo prostego układu – jeden człon ruchomy (rys. 4.38). Oczywiście, taki sposób opisu stosowany do tego układu nie jest celowy. Równanie ruchu można znacznie prościej zapisać innymi metodami. Załączony przykład ma umożliwić zrozumienie istoty metody i fizyczną interpretację równań.

Do opisu ruchu korzystamy z układu równań (4.197):

$$\begin{cases} \delta \mathbf{q}^T [\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}^Z] = 0 \\ \Phi_q \delta \mathbf{q} = 0 \end{cases}$$

Występujące w nich macierze mas, wektor przyspieszeń i wektor sił zewnętrznych to:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix}$$



Rys. 4.38. Prosty układ dwuczłonowy

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{x}_1 \quad \ddot{y}_1 \quad \ddot{\Theta}_1]^T$$

$$\mathbf{Q}^Z = [0 \quad -m_1 g \quad 0]^T$$

Dla wyprowadzenia równań więzów niezbędne jest określenie współrzędnych punktów A i B w układzie podstawy 0 . Ich postać to:

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + a \cos \Theta_1 \\ y_1 + a \sin \Theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - b \cos \Theta_1 \\ y_1 - b \sin \Theta_1 \end{bmatrix}$$

Jak widać z rysunku punkt A musi się zawsze znajdować na osi y_0 , punkt B natomiast zawsze na osi x_0 , co można określić dwoma równaniami więzów w postaci:

$$\Phi \equiv \begin{bmatrix} x_A \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + a \cos \Theta_1 \\ y_1 - b \sin \Theta_1 \end{bmatrix} = 0$$

Ich różniczkowanie względem zmiennych absolutnych \mathbf{q} daje:

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \sin \Theta_1 \\ 0 & 1 & -b \cos \Theta_1 \end{bmatrix}$$

Korzystając z podanych zależności, otrzymujemy:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\delta x_1 \quad \delta y_1 \quad \delta \Theta_1] \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\Theta}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \sin \Theta_1 \\ 0 & 1 & -b \cos \Theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta \Theta_1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} = 0$$

a po wymnożeniu uzyskujemy układ trzech równań:

$$\begin{aligned} \delta x_1 m_1 \ddot{x}_1 + \delta y_1 (m_1 \ddot{y}_1 + m_1 g) + \delta \Theta_1 I_1 \ddot{\Theta}_1 &= 0 \\ \delta x_1 - \delta \Theta_1 a \sin \Theta_1 &= 0 \\ \delta y_1 - \delta \Theta_1 b \cos \Theta_1 &= 0 \end{aligned}$$

Ich elementarne przekształcenia prowadzą do równania ruchu w postaci:

$$m_1 \ddot{x}_1 (a \sin \Theta_1) + (m_1 \ddot{y}_1 + m_1 g) (b \cos \Theta_1) + I_1 \ddot{\Theta}_1 = 0$$

Z rysunku 4.38 wynika, że:

$$(a \sin \Theta_1) = h_y, \quad (b \cos \Theta_1) = h_x$$

co sprowadza równanie ruchu do postaci:

$$m_1 \ddot{x}_1 h_y + (m_1 \ddot{y}_1 + m_1 g) h_x + I_1 \ddot{\Theta}_1 = 0$$

Otrzymane równanie ruchu jest w istocie równaniem równowagi momentów względem punktu K (rys. 4.38), który leży na przecięciu linii działania sił F_{01A} i F_{01B} oddziaływania podstawy 0 na człon 1. Dzięki temu siły te nie występują w otrzymanym równaniu ruchu.

Równania (4.197) są rzadko stosowane w praktyce. Stanowią one natomiast podstawę do wyprowadzenia kolejnej formy równań ruchu dla układów wieloczłonowych. Uzyskuje się ją przez wprowadzenie tzw. mnożników Lagrange'a $\boldsymbol{\lambda}$ [13], [26]:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}^Z \quad (4.198)$$

Zależność (4.198) jest sumowaniem sił działających na poszczególne człony, zredukowanych do środków mas, a mianowicie:

- $\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}$ – wektor sił bezwładności,
- $\boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda}$ – wektor sił (zredukowanych) w parach kinematycznych,
- \mathbf{Q}^Z – wektory sił (zredukowanych) zewnętrznych.

Należy jeszcze zwrócić uwagę, że wszystkie te siły są przyłożone w środku mas poszczególnych członów, gdzie również mają swój początek układy lokalne członów. Możliwość rozwiązania równania (4.198) wymaga uzupełnienia go o dodatkowe, wynikające z kinematyki, równanie przyspieszeń (3.57):

$$\boldsymbol{\Phi}_q \ddot{\mathbf{q}} = -(\boldsymbol{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2\boldsymbol{\Phi}_{qt} \dot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\Phi}_{tt} \equiv \mathbf{a}$$

Do opisu ruchu układów wieloczłonowych stosuje się zatem równanie ruchu w postaci:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}} & \boldsymbol{\Phi}_q^T \\ \boldsymbol{\Phi}_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^Z \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (4.199)$$

Układ równań (4.199) umożliwia rozwiązywanie dwóch typowych zadań dynamiki:

- określenie warunków równowagi kinetostatycznej – sił czynnych potrzebnych do realizacji zakładanego ruchu oraz sił oddziaływania w parach kinematycznych przy znanych siłach zewnętrznych (biernych),
- określenie ruchu układu dla znanych sił zewnętrznych – czynnych i biernych.

Zadanie kinetostatyki sprowadza się do rozwiązania równania:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}^Z$$

względem wektora $\boldsymbol{\lambda}$, co wymaga elementarnego przekształcenia do postaci::

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\Phi}_q^T)^{-1} [\mathbf{Q}^Z - \tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}] \quad (4.200)$$

lub po wykorzystaniu równania przyspieszeń (3.57):

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\Phi}_q^T)^{-1} [\mathbf{Q}^Z - \tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\Phi}_q^{-1} \mathbf{a})] \quad (4.201)$$

Zadanie kinetostatyki dotyczy ruchu zdeterminowanego, kiedy liczba równań tworzących wektor Φ równań więzów jest równa liczbie współrzędnych absolutnych (liczbie elementów wektora \mathbf{q}), a to oznacza, że macierz Φ_q jest kwadratowa.

Bardziej złożone jest natomiast określanie ruchu układu dla znanych obciążeń zewnętrznych. Wtedy w równaniach (4.199) niewiadomymi są:

- wektor przyspieszeń $\ddot{\mathbf{q}}$,
- wektor mnożników $\boldsymbol{\lambda}$.

Formalne rozwiązanie jest stosunkowo proste i wymaga kilku przekształceń. Pierwsze z równań (4.199) umożliwia wyznaczenie wektora przyspieszeń według relacji

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}^Z \tilde{\mathbf{M}}^{-1} + \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} \quad (4.202)$$

Po podstawieniu (4.202) do (3.57) mamy równanie

$$\Phi_q \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}^Z - \Phi_q \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{a} \quad (4.203)$$

z którego można już wyznaczyć wektor mnożników Lagrange'a

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\Phi_q \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \Phi_q^T \right)^{-1} \left(\Phi_q \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}^Z - \mathbf{a} \right) \quad (4.204)$$

Po wyznaczeniu wektora mnożników $\boldsymbol{\lambda}$ można skorzystać z równania (4.202) i całkować wyrażenie określające przyspieszenie. Można też pominąć wektor $\boldsymbol{\lambda}$ i podstawić (4.204) do (4.202), a następnie scałkować równanie:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}^Z - \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \Phi_q^T \left(\Phi_q \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \Phi_q^T \right)^{-1} \left(\Phi_q \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}^Z - \mathbf{a} \right) \quad (4.205)$$

Całkowanie równania (4.205) wymaga stosowania specjalnych metod. Wynika to z tego, że mamy tutaj do czynienia z dużym wymiarowo układem równań różniczkowo-algebraicznych. Zagrożenie wiążące się z całkowaniem (4.205) polega na tym, że w konsekwencji wielu kroków obserwuje się zjawisko „naruszania więzów”. Oznacza to w praktyce, że uzyskany w n -tym kroku całkowania wektor konfiguracji \mathbf{q} nie spełnia warunków więzów Φ . Problemy całkowania tego typu równań są przedmiotem wielu badań, nie tylko dla poprawienia efektywności numerycznej profesjonalnych układów analizy wieloczołonowych układów kinematycznych [3], [5].

4.4.4.4. Mnożniki Lagrange'a i siły oddziaływania

W równaniu ruchu (4.198) występują mnożniki Lagrange'a zestawione w wektor $\boldsymbol{\lambda}$. Zwróćmy uwagę, że są to wielkości ściśle powiązane z siłami oddziaływania w parach kinematycznych, co potwierdza równanie napisane dla członu k :

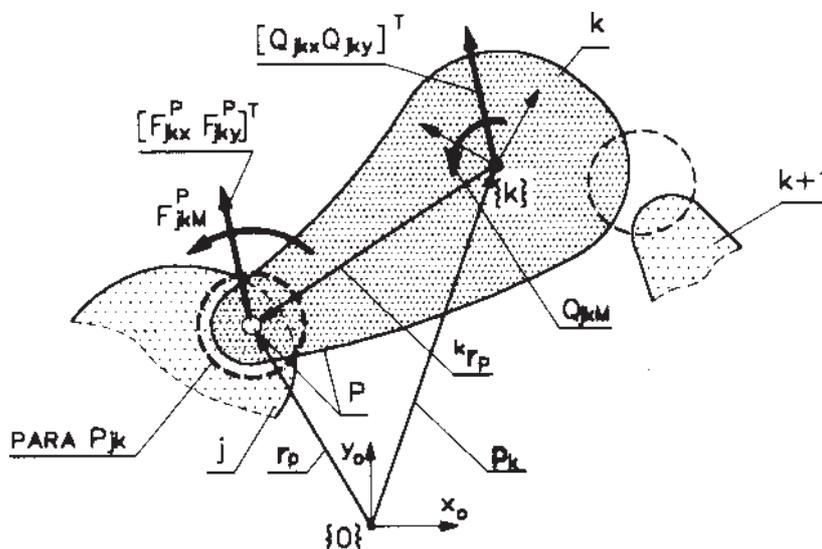
$$\mathbf{M}_k \ddot{\mathbf{q}}_k = \mathbf{Q}_k^Z - \dots - \left(\Phi_{q(jk)}^T \lambda_{(jk)} \right)_{\text{par}(jk)} - \dots \quad (4.206)$$

Pierwszy wyraz prawej strony tego równania jest wektorem sił zewnętrznych uogólnionych (zredukowanych do początku układu lokalnego $\{k\}$). Jako siły zewnętrzne rozumie się wszystkie siły, z wyjątkiem sił oddziaływania w parach kinematycznych, jakimi na człon k działają człony tworzące z nim pary kinematyczne. Ostatnie, kolejne składniki (4.206), są wynikiem więzów par i należy je rozumieć jako siły występujące w parach kinematycznych, także zredukowane do początku układu lokalnego $\{k\}$ (środka masy członu k).

Zapiszemy równanie (4.206) w innej postaci:

$$\mathbf{M}_k \ddot{\mathbf{q}}_k = \mathbf{Q}_k^Z + \dots + \mathbf{Q}_{jk} + \dots \quad (4.207)$$

gdzie \mathbf{Q}_{jk} – wektor sił więzów pary kinematycznej jk (rys. 4.39).



Rys. 4.39. Człon układu i siły w parze kinematycznej P_{jk}

Po przejściu do składowych wektora siły uogólnionej \mathbf{Q}_{jk} mamy:

$$\mathbf{Q}_{jk} = \begin{bmatrix} Q_{jkx} \\ Q_{jky} \\ Q_{jkM} \end{bmatrix} = -\Phi_{q(jk)}^T \boldsymbol{\lambda}_{(jk)} \quad (4.208)$$

Jak już wspomniano wektor \mathbf{Q}_{jk} określa siły, jakimi człon j oddziałuje na człon k – są to siły zewnętrzne dla członu k . Można zatem na podstawie znajomości wektora sił \mathbf{Q}_{jk} określać realne siły oddziaływania w parze kinematycznej, odnosząc je do dowolnie obranego punktu P na członie k .

Zbierzmy te siły w wektor \mathbf{F}_{jk}^P (siły składowe na kierunku osi x_0 i y_0 układu globalnego $\{0\}$ oraz moment):

$$\mathbf{F}_{jk}^P = \begin{bmatrix} F_{jkx}^P & F_{jky}^P & F_{jkM}^P \end{bmatrix}^T \quad (4.209)$$

Do określenia relacji między wektorami \mathbf{F}_{jk}^P oraz \mathbf{Q}_{jk} posłużymy się pracami przygotowanymi od obu sił, które powinny być sobie równe. Mamy zatem:

$$\delta \mathbf{r}_P^T \begin{bmatrix} F_{jkx}^P \\ F_{jky}^P \end{bmatrix} + \delta \Theta_k F_{jkM}^P = \delta \mathbf{p}_k^T \begin{bmatrix} Q_{jkx} \\ Q_{jky} \end{bmatrix} + \delta \Theta_k Q_{jkM} \quad (4.210)$$

Z zależności geometrycznych (rys. 4.39) w układzie $\{0\}$ mamy:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{p}_k + \mathbf{R}_k^k \mathbf{r}_P$$

co po przekształceniu daje:

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_P - \mathbf{R}_k^k \mathbf{r}_P$$

i związek przemieszczeń przygotowanych w postaci:

$$\delta \mathbf{p}_k = \delta \mathbf{r}_P - \delta \Theta_k \mathbf{B}_k^k \mathbf{r}_P \quad (4.211)$$

gdzie \mathbf{B}_k jak w (3.60).

Korzystając z (4.211) równanie (4.210) przekształcamy do postaci:

$$\delta \mathbf{r}_P^T \begin{bmatrix} F_{jkx}^P \\ F_{jky}^P \end{bmatrix} + \delta \Theta_k F_{jkM}^P = \delta \mathbf{r}_P^T \begin{bmatrix} Q_{jkx} \\ Q_{jky} \end{bmatrix} - \delta \Theta_k {}^k \mathbf{r}_P^T \mathbf{B}_k^T \begin{bmatrix} Q_{jkx} \\ Q_{jky} \end{bmatrix} + \delta \Theta_k Q_{jkM}$$

z czego składowe wektora sił oddziaływania w parze jk odniesione do punktu P leżącego na członie k wynoszą:

$$\begin{bmatrix} F_{jkx}^P \\ F_{jky}^P \\ F_{jkM}^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{jkx} \\ Q_{jky} \\ Q_{jkM} - {}^k \mathbf{r}_P^T \mathbf{B}_k^T \begin{bmatrix} Q_{jkx} \\ Q_{jky} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.212)$$

Dla przybliżenia sposobu postępowania rozpatrzmy układ z rys. 4.38, dla którego określimy siły oddziaływania podstawy 0 na człon 1 w parze B . Ponieważ dla tego układu jest (przykład 4.10):

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \sin \Theta_1 \\ 0 & 1 & -b \cos \Theta_1 \end{bmatrix}$$

więc dla członu 1 równanie (4.207) ma postać:

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_1^Z + \mathbf{Q}_{01A} + \mathbf{Q}_{01B}$$

a po rozpisaniu:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ & m_1 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\Theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \sin \Theta_1 \end{bmatrix} \lambda_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -b \cos \Theta_1 \end{bmatrix} \lambda_2$$

Mnożnik λ_1 wynika z więzów w parze A , natomiast λ_2 jest konsekwencją więzów w parze B . Korzystając z (4.208) mamy w tym przypadku dla pary B :

$$\mathbf{Q}_{01B} = \begin{bmatrix} Q_{01x} \\ Q_{01y} \\ Q_{01M} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -b \cos \Theta_1 \end{bmatrix} \lambda_2$$

Pomocnicze wielkości do napisania równania (4.212):

$${}^1 \mathbf{r}_B^T = [-b \ 0]$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -\sin \Theta_1 & -\cos \Theta_1 \\ \cos \Theta_1 & -\sin \Theta_1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}_1^T = \begin{bmatrix} -\sin \Theta_1 & \cos \Theta_1 \\ -\cos \Theta_1 & -\sin \Theta_1 \end{bmatrix}$$

co daje (4.212) w postaci:

$$\begin{bmatrix} F_{01x}^B \\ F_{01y}^B \\ F_{01M}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_2 \\ b \lambda_2 \cos \Theta_1 - [-b \ 0] \begin{bmatrix} -\sin \Theta_1 & \cos \Theta_1 \\ -\cos \Theta_1 & -\sin \Theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

a po wykonaniu mnożenia mamy:

$$\begin{bmatrix} F_{01x}^B \\ F_{01y}^B \\ F_{01M}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

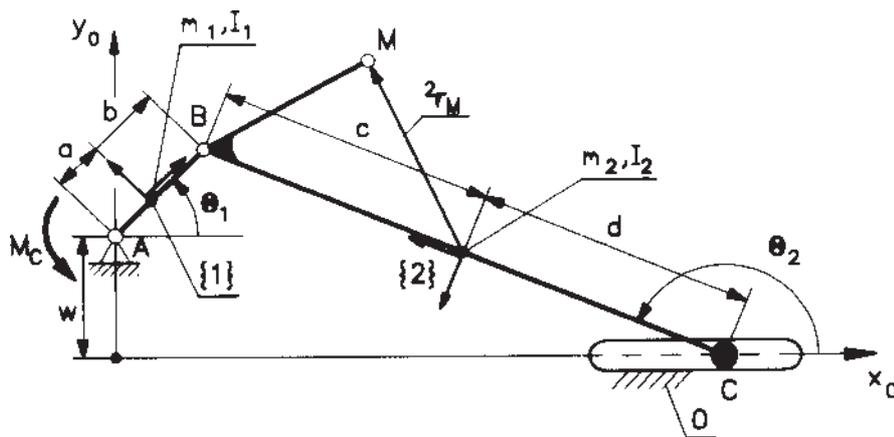
Jak należało oczekiwać – w parze B więzy uniemożliwiają ruch sworznia (punktu B) w kierunku pionowym – mnożnik λ_2 przekłada się na siłę oddziaływania podstawy 0 na człon 1, która z definicji ma zawsze kierunek pionowy (kierunek osi y_0), przy czym $F_{01}^B = -\lambda_2$.

PRZYKŁAD 4.11

Na podstawie równań dynamiki opisanych za pomocą współrzędnych absolutnych przeprowadzona zostanie analiza dynamiczna układu jarzmowego (rys. 4.40). Układ ten był już analizowany w rozdz. 3 (przykład 3.5) i niektóre z wyprowadzonych wtedy równań posłużą nam w analizie dynamicznej. Tutaj rozwiążemy dwa zadania dynamiki:

1. Dla zadanego ruchu układu określimy przebieg momentu czynnego M_C niezbędnego do realizacji tego ruchu. Dodatkowo wyznaczone zostaną przebiegi sił oddziaływania w parach kinematycznych.
2. Dla zadanego momentu czynnego M_C wyznaczony zostanie ruch układu.

W obydwu zadaniach znane są wymiary członów i ich parametry masowe.



Rys. 4.40. Układ jarzmowy

Zadanie 1. W rozwiązaniu zadania 1 posłużymy się równaniem:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \lambda = \mathbf{Q}^Z$$

Z analizy kinematycznej (przykład 3.5) znane są równania więzów (3.67):

$$\Phi \equiv \begin{bmatrix} \Phi^P(\mathbf{q}) \\ \Phi^C(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - a \cos \Theta_1 \\ y_1 - w - a \sin \Theta_1 \\ x_1 + b \cos \Theta_1 - x_2 - c \cos \Theta_2 \\ y_1 + b \sin \Theta_1 - y_2 - c \sin \Theta_2 \\ y_2 - d \sin \Theta_2 \\ \Theta_1 - \Theta_{1p} - \omega_1 t \end{bmatrix} = 0$$

Ostatnie równanie wektora Φ opisuje wymuszenie kinematyczne, a ściślej wartość kąta Θ_1 odmierzanego od wartości początkowej Θ_{1p} w funkcji czasu t . W wyniku analizy kinematycznej dysponujemy trzema wektorami położeń \mathbf{q} , prędkości $\dot{\mathbf{q}}$ i przyspieszenia $\ddot{\mathbf{q}}$ – ostatni z nich przytaczamy poniżej:

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{x}_1 \quad \ddot{y}_1 \quad \ddot{\Theta}_1 \quad \ddot{x}_2 \quad \ddot{y}_2 \quad \ddot{\Theta}_2]^T$$

Transponowana macierz Jacobiego tego układu ma postać:

$$\Phi_q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a \sin \Theta_1 & -a \cos \Theta_1 & -b \sin \Theta_1 & b \cos \Theta_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \sin \Theta_2 & -c \cos \Theta_2 & -d \cos \Theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz mas:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

Wektor obciążeń zewnętrznych to wyłącznie siły ciężkości członów 1 i 2 działające na kierunku osi y_0 układu globalnego $\{0\}$ zapisane w kolejności odpowiadającej elementom wektora \mathbf{q} :

$$\mathbf{Q}^Z = [0 \quad -m_1 g \quad 0 \quad 0 \quad -m_2 g \quad 0]^T$$

Wektor mnożników Lagrange'a to:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5 \quad \lambda_6]^T$$

Każdy z mnożników λ_i reprezentuje siłę więzów korespondującą z równaniami więzów Φ . W rozpatrywanym układzie są to:

- λ_1, λ_2 – składowe siły w parze kinematycznej A odpowiadające dwóm pierwszym równaniom wektora Φ ,
- λ_3, λ_4 – składowe siły oddziaływania w parze B odpowiadające równaniom więzów pary B – równanie trzecie i czwarte wektora Φ ,
- λ_5 – siła oddziaływania w parze C – odpowiada równaniu piątemu,
- λ_6 – moment M_C niezbędny do wywołania pożądanego ruchu członu 1 z zakładaną prędkością kątową ω_1 – koresponduje z ostatnim, szóstym równaniem wektora więzów Φ .

Na podstawie powyższych zależności (4.198) można wyznaczyć wektor mnożników $\boldsymbol{\lambda}$ z równania (4.200):

$$\boldsymbol{\lambda} = (\Phi_q^T)^{-1} (\mathbf{Q}^Z - \tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}})$$

Znając wektor mnożników $\boldsymbol{\lambda}$, możemy już określić siły oddziaływania w parach kinematycznych. Rozpatrzmy tylko siły w parze B , które powiązane z mnożnikami λ_3 i λ_4 , są konsekwencją więzów zapisanych trzecim i czwartym równaniem wektora więzów Φ . Dla członu 2 równanie (4.207) ma postać:

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{Q}_2^Z + \mathbf{Q}_{12B} + \mathbf{Q}_{02C}$$

Po rozpisaniu mamy:

$$\begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ & m_2 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\Theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ c \sin \Theta_2 & -c \cos \Theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -d \cos \Theta_2 \end{bmatrix} \lambda_5$$

Zgodnie z (4.208) (dla pary kinematycznej B) mamy:

$$\mathbf{Q}_{12B} = \begin{bmatrix} Q_{12x} \\ Q_{12y} \\ Q_{12M} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ c \sin \Theta_2 & -c \cos \Theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ -c\lambda_3 \sin \Theta_2 + c\lambda_4 \cos \Theta_2 \end{bmatrix}$$

Korzystając z (4.212) mamy równanie:

$$\begin{bmatrix} F_{12x}^B \\ F_{12y}^B \\ F_{12M}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ (-c\lambda_3 \sin \Theta_2 + c\lambda_4 \cos \Theta_2) - {}^2\mathbf{r}_B^T \mathbf{B}_2^T \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Z porównania trzech wierszy mamy

$$F_{12M}^B = (-c\lambda_3 \sin \Theta_2 + c\lambda_4 \cos \Theta_2) - [c \quad 0] \begin{bmatrix} -\sin \Theta_2 & \cos \Theta_2 \\ -\cos \Theta_2 & -\sin \Theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$$

a po wykonaniu mnożenia, zgodnie z oczekiwaniem, uzyskujemy ostatecznie:

$$\begin{bmatrix} F_{12x}^B \\ F_{12y}^B \\ F_{12M}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bez szczegółowego wyprowadzenia zapiszmy siły oddziaływania członu 0 na 2 w parze kinematycznej C :

$$\begin{bmatrix} F_{02x}^C \\ F_{02y}^C \\ F_{02M}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dla członu 1 równanie (4.207) ma postać:

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{Q}_1^Z + \mathbf{Q}_{01A} + \mathbf{Q}_{21B}$$

Po rozpisaniu mamy:

$$\mathbf{Q}_{01A} = \begin{bmatrix} Q_{01x} \\ Q_{01y} \\ Q_{01M} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a \sin \Theta_1 & -a \cos \Theta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ -a\lambda_1 \sin \Theta_1 + a\lambda_2 \cos \Theta_1 - \lambda_6 \end{bmatrix}$$

Korzystając z (4.212) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} F_{01x}^A \\ F_{01y}^A \\ F_{01M}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ (-a\lambda_1 \sin \Theta_1 + a\lambda_2 \cos \Theta_1 - \lambda_6) {}^{-1}\mathbf{r}_A^T \mathbf{B}_1^T \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Ponieważ zgodnie z rysunkiem 4.40 jest

$${}^1\mathbf{r}_A^T = [-a \ 0], \quad \mathbf{B}_1^T = \begin{bmatrix} -\sin \Theta_1 & \cos \Theta_1 \\ -\cos \Theta_1 & -\sin \Theta_1 \end{bmatrix}$$

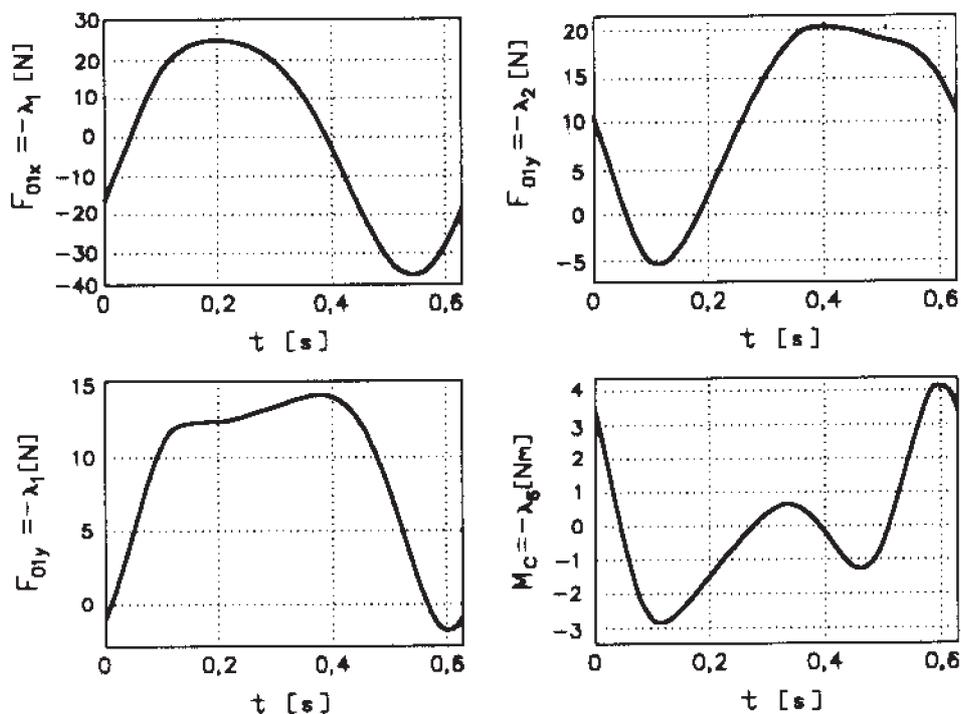
więc po wykonaniu mnożenia otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} F_{01x}^A \\ F_{01y}^A \\ F_{01M}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ -\lambda_6 \end{bmatrix}, \quad F_{01M}^A = M_C$$

Na podstawie wyprowadzonych zależności dokonano analizy kinetostatycznej układu z rys. 4.40, przyjmując następujące dane:

- wymiary jak w analizie kinematycznej (przykład 3.5),
- prędkość kątowa członu 1 $\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}$,
- parametry masowe: $m_1 = 0,6 \text{ kg}$, $m_2 = 1,45 \text{ kg}$, $I_1 = 0,004 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $I_2 = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Wyniki analizy przedstawiono na rysunku 4.41.

Rys. 4.41. Układ jaramowy – wykres sił w parach A , C oraz moment czynny M_C

Zadanie 2. Do określenia jest ruch układu w postaci przebiegów prędkości $\dot{\mathbf{q}}(t)$ i przemieszczenia $\mathbf{q}(t)$ dla znanych wektorów stanu początkowego \mathbf{q}_0 i $\dot{\mathbf{q}}_0$. Znany jest ponadto moment czynny M_C oraz jak w zadaniu 1 wektor obciążeń zewnętrznych \mathbf{Q}^Z .

Rozwiązanie tak postawionego zadania wymaga już wykorzystania układu równań (4.199):

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^Z \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

Należy tutaj zwrócić uwagę, że w tym przypadku, inaczej niż w zadaniu 1, równania więzów wynikają wyłącznie z połączenia członów parami kinematycznymi – brak jest wymuszenia kinematycznego. Mamy zatem (3.65) równania więzów par:

$$\Phi = \Phi^P \equiv \begin{bmatrix} x_1 - a \cos \Theta_1 \\ y_1 - w - a \sin \Theta_1 \\ x_1 + b \cos \Theta_1 - x_2 - c \cos \Theta_2 \\ y_1 + b \sin \Theta_1 - y_2 - c \sin \Theta_2 \\ y_2 - d \sin \Theta_2 \end{bmatrix} = 0$$

W związku z tym inna niż w zadaniu 1 będzie też postać macierzy Jacobiego:

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \sin \Theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \cos \Theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b \sin \Theta_1 & -1 & 0 & c \sin \Theta_2 \\ 0 & 1 & b \cos \Theta_1 & 0 & -1 & -c \cos \Theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -d \cos \Theta_2 \end{bmatrix}$$

i jej transpozycja

$$\Phi_q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a \sin \Theta_1 & -a \cos \Theta_1 & -b \sin \Theta_1 & b \cos \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & c \sin \Theta_2 & -c \cos \Theta_2 & -d \cos \Theta_2 \end{bmatrix}$$

Wykorzystując znane z kinematyki wyrażenie na przyspieszenie (3.57)

$$\mathbf{a} = -(\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2\Phi_{qt} \dot{\mathbf{q}} - \Phi_{tt}$$

możemy już wyznaczyć wektor mnożników $\boldsymbol{\lambda}$ (4.204)

$$\boldsymbol{\lambda} = (\Phi_q \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \Phi_q^T)^{-1} (\Phi_q \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}^Z - \mathbf{a})$$

i zależność na przyspieszenie (4.205)

$$\ddot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}^Z - \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \Phi_q^T (\Phi_q \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \Phi_q^T)^{-1} (\Phi_q \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}^Z - \mathbf{a})$$

Całkowanie ostatniego równania daje w wyniku wektor prędkości $\dot{\mathbf{q}}$ i wektor opisujący konfigurację układu \mathbf{q} .

Analizę ruchu przeprowadzono dla danych geometrycznych i masowych jak w zadaniu 1, przyjmując dodatkowo:

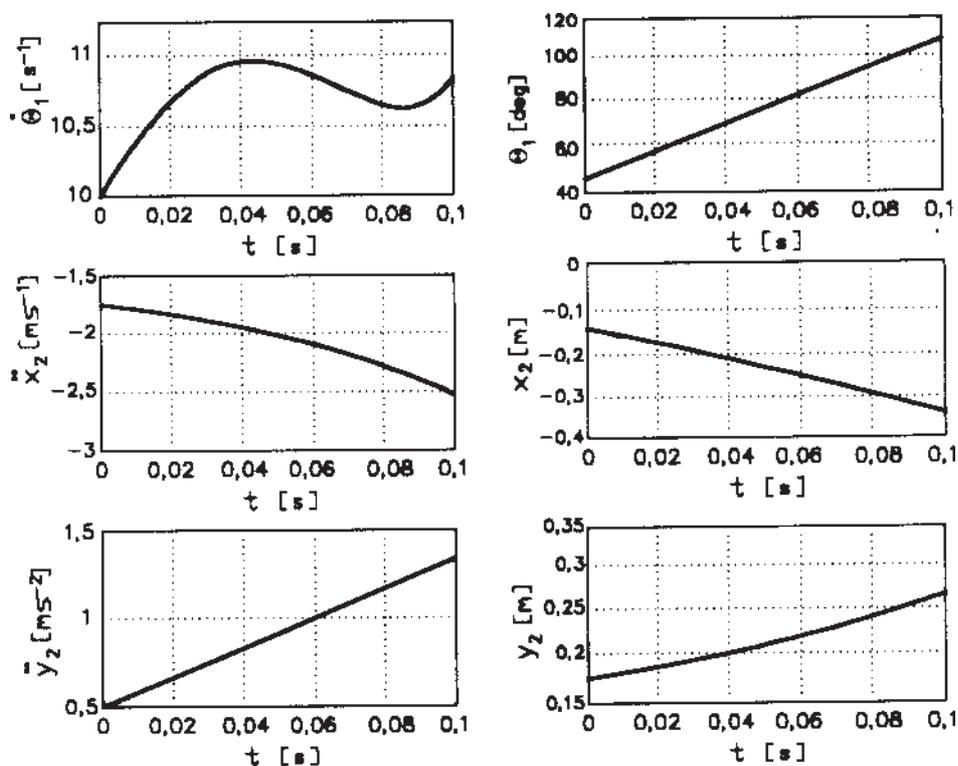
- moment czynny zmieniający się według zależności: $M_C = 3 - 5t$, N·m,
- położenie początkowe układu opisane wektorem (w jednostkach układu SI):

$$\mathbf{q}_0 = [0,049 \quad 0,249 \quad \pi/4 \quad 0,441 \quad 0,132 \quad 148\pi/180]^T$$

- prędkość kątowna członu 1 $\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}$,
- wektor prędkości początkowych (w jednostkach układu SI):

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = [-0,49 \quad 0,49 \quad 10 \quad -1,745 \quad 0,513 \quad -2,417]^T$$

Wielkości opisujące ruch w chwili początkowej przyjęto z analizy kinematycznej (przykład 3.5), moment czynny natomiast odwzorowuje, z pewnym przybliżeniem, przebieg momentu, jaki jest niezbędny do utrzymania ruchu członu 1 ze stałą prędkością $\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}$. Jak widać z rys. 4.41 w pierwszej fazie ($t = 0 \div 0,1 \text{ s}$) ma on charakter liniowy. Wyniki analizy zestawiono w formie wykresów na rys. 4.42.



Rys. 4.42. Układ jarmowy – parametry ruchu dla zadanego momentu czynnego M_C

Metoda opisu dynamiki układu kinematycznego, oparta na współrzędnych absolutnych (pozycja i orientacja układu lokalnego członu), charakteryzuje się dużą liczbą równań. Konsekwencją tego jest duży wymiarowo układ równań różniczkowo-algebraicznych. Pojęciowo są to równania dynamiczne członów z uwzględnieniem obciążeń wynikających z par kinematycznych (sił oddziaływania) oraz więzów par kinematycznych.

Duża liczba równań, co jest niewątpliwie wadą, procentuje w zamian wieloma korzyściami, z których najważniejsze to:

- równania ruchu są klasycznymi równaniami Newtona–Eulera dla poszczególnych członów z uwzględnieniem sił w parach kinematycznych,
- równania więzów par wyrażone są tylko za pomocą współrzędnych absolutnych członów tworzących daną parę, co umożliwia tworzenie biblioteki par i przypisanych im równań,
- metoda jest jednakowa dla układów o strukturze zamkniętej (wszelkie mechanizmy), otwartej (manipulatory) i mieszanej,
- w wyniku rozwiązania równań ruchu uzyskuje się jednocześnie wielkości opisujące ruch oraz siły w parach kinematycznych (mnożniki Lagrange’a).

Metoda nadaje się zwłaszcza do zastosowań komputerowych, jej cechy sprawiają, że możliwe jest tworzenie uniwersalnych algorytmów ułatwiających modelowanie różnorodnych układów kinematycznych – na takiej metodzie oparty jest np. system DADS [13].

LITERATURA

- [1] BAKER J. E., *The Bennet, Goldberg and Myard Linkages – in Perspective*. Mechanism and Machine Theory, Vol. 14, 1979.
- [2] BJÖRCK A., DAHLQUIST G., *Metody numeryczne*. PWN, Warszawa 1987.
- [3] BLAJER W., *Metody dynamiki układów wielocłonowych*. Wydawnictwa Politechniki Radomskiej. Radom 1998.
- [4] FICHTENHOLZ G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, Warszawa 1997.
- [5] FRĄCZEK J., *Modelowanie mechanizmów przestrzennych metoda układów wielocłonowych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Prace Naukowe – Mechanika, Z. 196. Warszawa 2002.
- [6] FREUDENSTEIN F., ALIZADE R., *On the Degree of Freedom of Mechanisms With Variable General Constraints*. Trans. ASME, Journal of Mech. Eng., 1975.
- [7] GARCIA DE JALON J., BAYO E., *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*. Springer-Verlag 1994.
- [8] GRONOWICZ A., *Identyfikacja mechanizmów dźwigniowych z więzami biernymi*, Prace Nauk. Inst. Konstr. i Eksp. Maszyn PWr., Wrocław 1992.
- [9] GRONOWICZ A., *Związki pomiędzy strukturą i własnościami ruchowymi łańcuchów kinematycznych*. Komunikat Inst. Konstr. i Eksp. Maszyn PWr. Nr 350, Wrocław 1978 (praca doktorska).
- [10] GRONOWICZ A., MILLER S., *Mechanizmy*. Oficyna Wydawnicza PWr., Wrocław 1997.
- [11] GRONOWICZ A., *Identifizierungsmethode der Zwanglaufbedingungen von kinematischen Ketten*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 16/1981.
- [12] HARARY F., *Teoria grafów*. Moskwa 1971 (w jęz. rosyjskim).
- [13] HAUG E.J., *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*. Allyn and Bacon. Boston, 1989.
- [14] Mechanism and Machine Theory, Pergamon Press, Vol. 26, No. 5, 1991.
- [15] MILER S., GRONOWICZ A., *Wymiary podstawowe elementem oceny struktury układów kinematycznych*. Archiwum Budowy Maszyn, z. 2/1982.
- [16] MILLER S. *Teoria maszyn i mechanizmów. Analiza układów kinematycznych*, Oficyna Wydawnicza PWr., Wrocław, 1996.
- [17] MILLER S., *Układy kinematyczne. Podstawy projektowania*. WNT, Warszawa, 1988.
- [18] MILLER L., WILK A., *Zębate przekładnie obiegowe*. PWN, Warszawa, 1996.
- [19] MŁYŃNARSKI T., *Uogólniona metoda analityczna analizy kinematycznej mechanizmów płaskich*. Wydawnictwa Politechniki Krakowskiej, Monografia 165, Kraków 1994.
- [20] MORECKI A., KNAPCZYK J., KĘDZIOR K., *Teoria mechanizmów i manipulatorów*. WNT, Warszawa, 2002.

- [21] NOWAK A., *Optymalizacja parametrów geometrycznych bijaka oraz analiza przyspieszeń elektrod zbiorczych elektrofiltru*. Filia Politechniki Łódzkiej, Bielsko-Biała, 2000 (praca doktorska).
- [22] OŁĘDZKI A., *Podstawy teorii maszyn i mechanizmów*. WNT, Warszawa, 1987.
- [23] OLSZEWSKI M (red), *Manipulatory i roboty przemysłowe*. WNT, Warszawa, 1985.
- [24] OSIŃSKI Z., *Mechanika ogólna*. Wyd. II, PWN, Warszawa, 1997.
- [25] RESHETOV L., *Self-aligning Mechanisms*. Mir Publishers, Moscow, 1982.
- [26] SHABANA A.A., *Computational Dynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [27] SKALMIERSKI B., *Mechanika*. PWN, Warszawa, 1977.
- [28] STRZAŁKO J., GRABSKI J., *Wstęp do mechaniki analitycznej*. Wyd. Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1997.
- [29] WALDRON K. J., *A Study of Overconstrained Linkage Geometry by Solution of Closure Equation*. Mechanism and Machine Theory, Vol. 8, 1973.
- [30] WECK M., GIESLER M., *Dyna-M – Ein neues Werkzeugmaschinenkonzept auf Basis ebener Koppelkinematiken*. Chemnitzer Parallelstruktur-Seminar, Chemnitz, 1998.
- [31] WOJCIECH S., *Dynamic Analysis of Manipulators with Flexible Links*. Archiwum Budowy Maszyn, Vol. XXXVII, No. 3, 1990, 169–187.
- [32] WOJCIECH S., *Dynamic Analysis of Manipulators with Consideration of Dry Friction*. Computers&Structures. Vol. 57, No. 6, 1995, 1045–1050
- [33] YOSHIKAWA T., *Foundations of Robotics. Analysis and Control*. MIT Press, 1990.