



Archiwum

8923

m

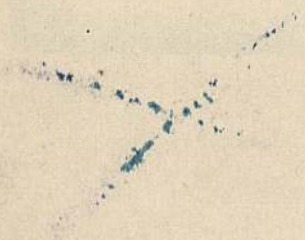
Archiwum



1875

1875

1875



15/2 2500. 989. 57000.

# Die Methode der Festpunkte

zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktionen

mit zahlreichen

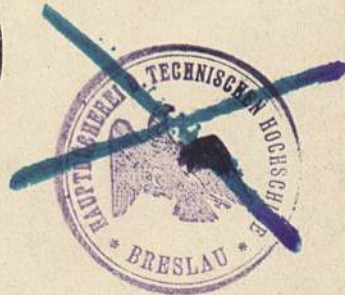
## Beispielen aus der Praxis

insbesondere ausgeführten Eisenbetontragwerken

Von

Dr.-Ing. Ernst Suter

Mit 591 Figuren im Text  
und auf 15 Tafeln



Berlin

Verlag von Julius Springer

1923

1923.246.

PBRK



*Jhr. 1974*



Alle Rechte, insbesondere  
das der Übersetzung in fremde Sprachen,  
vorbehalten.



Dem Andenken

an

Prof. Dr. Wilhelm Ritter

(1847—1906)

gewidmet





## Vorwort.

Das vorliegende Werk bildet die zweite Auflage der im Jahre 1916 im Buchhandel erschienenen Dissertation des Verfassers: „Berechnung des kontinuierlichen Balkens mit veränderlichem Trägheitsmoment auf elastisch drehbaren Pfeilern, sowie Berechnung des mehrfachen Rahmens mit geradem Balken nach der Methode der Festpunkte“. Während in der genannten Arbeit nur die Berechnung des kontinuierlichen Balkens auf senkrecht zu ihm stehenden Säulen gezeigt wurde, so wird im vorliegenden Werk die Berechnung sämtlicher statisch unbestimmter Konstruktionen, insbesondere des allgemeinen Falles mit beliebig gerichteten Stäben, des Stockwerkrahmens mit beliebig gerichteten Stäben und des Rahmens mit bogenförmigen Stäben nach der Methode der Festpunkte behandelt; aus diesem Grunde mußte der Titel des Werkes eine allgemeinere Fassung erhalten.

Die Grundlage aller entwickelten Berechnungsverfahren bilden die Festpunkte (Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, III. Band), die ihrerseits mit Hilfe der Sätze von Mohr abgeleitet sind. Bei allen Ableitungen ist vor allem der Vorstellung durch die geometrische Darstellung der Formänderungen Rechnung getragen, womit dem in der Praxis stehenden Ingenieur am besten gedient ist. Wegen ihrer Übersichtlichkeit ist die Methode der Festpunkte unter den Ingenieuren mit Recht sehr beliebt; nun um so mehr, als die Methode auf alle Tragwerke, seien die Stäbe geradlinig oder bogenförmig, recht- oder schiefwinklig zueinander, in gleicher und einheitlicher Weise angewendet werden kann, wie dies im vorliegenden Werk gezeigt wird.

Das Werk zerfällt in 3 Teile und einen kurzen Anhang.

Der I. Teil entwickelt die Berechnung des Tragwerks mit unverschiebbaren Knotenpunkten, der II. Teil diejenige des Tragwerks mit verschiebbaren Knotenpunkten. Ein Tragwerk mit verschiebbaren Knotenpunkten, seien seine Stäbe geradlinig oder bogenförmig, recht- oder schiefwinklig zueinander, wird zu seiner Berechnung — und zwar nicht nur bei äußerer Belastung, sondern auch bei Temperaturänderung des Baumaterials, Senkung eines Auflagers und Längenänderungen der Stäbe infolge der Normalkräfte — zuerst durch Anbringung gedachter Lager in ein solches mit unverschiebbaren Knotenpunkten verwandelt und nach dem I. Teil behandelt (Rechnungsabschnitt I). In den gedachten Lagern treten sog. Festhaltungskräfte (Reaktionen) auf, welche die Knotenpunkte verhindern, sich zu verschieben. Entfernen wir diese gedachten Lager, so treten die sog. Verschiebungskräfte (umgekehrte Festhaltungskräfte) in Tätigkeit, welche das Tragwerk noch

verschieben und daher zusätzliche innere Kräfte in demselben hervorrufen, die nach dem II. Teil bestimmt werden (Rechnungsabschnitt II). Durch Addition der Momente aus R. I und R. II erhalten wir darauf die endgültigen Momente am Tragwerk und aus ihnen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte.

Der III. Teil enthält 20 Beispiele aus der Praxis, insbesondere ausgeführte Eisenbetontragwerke. Großes Gewicht wurde darauf gelegt, von jeder Konstruktionsgattung ein Beispiel vorzuführen, damit der Ingenieur bei seinen Projektierungsarbeiten für jeden Hauptfall eine Wegleitung besitzt. Die Beispiele sind in der Hauptsache Ausführungen der Akt.-Ges. Wayß & Freytag in Neustadt a. d. Haardt, wo der Verfasser viele Jahre als Obergeringieur tätig war.

Im Anhang sind die im I. und II. Teil abgeleiteten Hauptformeln zusammengestellt, und ferner Tabellen zur raschen Ermittlung der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte des Balkens mit beidseitiger und einseitiger geradliniger und parabolischer Voute, sowie des symmetrischen Parabelbogens mit vom Scheitel zu den Kämpfern zunehmendem Querschnitt enthalten.

Schon beim ersten Blick wird man erkennen, daß das Werk sehr ausführlich gehalten ist und zu seinem Studium keine besonderen Vorkenntnisse verlangt, so daß auch der in Statik weniger Geübte sich mit der Methode der Festpunkte vertraut machen kann.

Baden-Schweiz, im Frühjahr 1921.

Der Verfasser.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	1
Erster Teil.	
<b>Berechnung des Tragwerks mit unverschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte.</b>	
I. Gang der Berechnung am Tragwerk mit nur geradlinigen Stäben . . . . .	11
II. Rechnerische Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmaße . . . . .	19
1. Bezeichnungen . . . . .	19
2. Momentenverlauf . . . . .	22
3. Festpunktabstände a und b . . . . .	23
4. Drehwinkel $\varepsilon^a$ und $\varepsilon^b$ . . . . .	26
5. Verteilungsmaße $\mu$ . . . . .	27
6. Einfache Drehwinkel $\tau$ . . . . .	30
7. Festpunkte und Verteilungsmaße am „offenen“ Tragwerk . . . . .	31
8. Festpunkte und Verteilungsmaße am „einseitig offenen“ Tragwerk . . . . .	33
9. Festpunkte und Verteilungsmaße am „geschlossenen“ Tragwerk . . . . .	36
10. Sonderfälle . . . . .	
a) Der durchlaufende Balken auf frei drehbaren Stützen. . . . .	36
b) Das einfache geschlossene Tragwerk . . . . .	37
c) Der durchlaufende Balken mit unendlich vielen Feldern . . . . .	40
III. Graphische Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmaße . . . . .	40
1. Drittelllinien . . . . .	42
2. Verschränkte Drittelllinien . . . . .	45
3. Linker Festpunkt $J_1$ . . . . .	47
4. Linke Festpunkte $J_2, J_3$ und $J_4$ . . . . .	50
5. Rechte Festpunkte $K_1, K_2, K_3$ und $K_4$ . . . . .	53
6. Konstruktion der Festpunkte der Balkenfelder 1, 2, 3, 4 . . . . .	54
7. Festpunkte J und K an den Pfeilern . . . . .	57
8. Verteilungsmaße am durchlaufenden Balkentragwerk der Fig. 76 . . . . .	61
9. Festpunkte und Verteilungsmaße an allgemeinen Tragwerken . . . . .	66
a) Offenes Tragwerk . . . . .	66
b) Geschlossenes Tragwerk . . . . .	70
10. Sonderfälle . . . . .	71
a) Konstantes, jedoch von Öffnung zu Öffnung sprungweise veränderliches Trägheitsmoment . . . . .	71
b) Konstantes Trägheitsmoment auf die ganze Länge . . . . .	73
IV. Bestimmung von Drehwinkeln und Verschiebungen (Ableitung der Sätze von Mohr) . . . . .	74
1. Drehwinkel $\alpha^a$ und $\alpha^b$ . . . . .	78
2. Drehwinkel $\beta$ . . . . .	80
3. Bestimmung von Verschiebungen an statisch unbestimmten Tragwerken . . . . .	82
4. Annahme der Trägheitsmomente . . . . .	84

	Seite
V. Bestimmung der Momente infolge beliebiger Belastung des Tragwerks . . . . .	84
1. Entwicklung des allgemeinen Ausdruckes für die Kreuzlinienabschnitte . . . . .	85
a) Analytisch . . . . .	85
b) Graphisch . . . . .	88
2. Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment . . . . .	93
a) Einzellast . . . . .	93
b) Gruppe von Einzellasten . . . . .	95
c) Stetige Belastung . . . . .	96
d) Konsolbelastung . . . . .	96
3. Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte bei konstantem Trägheitsmoment (Formeln für die wichtigsten Belastungsfälle) . . . . .	97
a) Einzellast . . . . .	97
b) Gruppe von Einzellasten . . . . .	99
c) Stetige Belastung . . . . .	101
d) Konsolbelastung . . . . .	107
4. Bestimmung der Momentenfläche am ganzen Tragwerk . . . . .	110
a) Graphisch . . . . .	110
b) Rechnerisch . . . . .	112
c) Das Auftragen der Momente . . . . .	113
d) Sonderfall: Der frei aufliegende durchlaufende Balken . . . . .	115
5. Analytische Bestimmung der an einem Knotenpunkt angreifenden Momente . . . . .	116
6. Schlußfolgerungen . . . . .	121
VI. Bestimmung der Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte an einem beliebigen Tragwerk . . . . .	122
1. Querkräfte . . . . .	123
a) Analytisch . . . . .	123
b) Graphisch . . . . .	125
2. Normalkräfte . . . . .	127
3. Fundamentkräfte . . . . .	129
VII. Bestimmung der Festhaltungskraft . . . . .	130
1. Einstöckiger Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben . . . . .	131
a) Erste Lösung . . . . .	131
b) Zweite Lösung . . . . .	134
2. Mehrstöckiger Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben . . . . .	137
3. Rahmenträger mit beliebig gerichteten Stäben . . . . .	139
4. Beispiele (Nr. 1—17) . . . . .	141
VIII. Bestimmung der inneren Kräfte an einem Tragwerk mit bogenförmigen Stäben . . . . .	162
1. Gang der Berechnung . . . . .	162
2. Bestimmung der Festpunkte des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes . . . . .	166
3. Bestimmung der Kämpfermomente infolge beliebiger Belastung des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes . . . . .	168
4. Bestimmung der Drehwinkel $\beta$ , $\alpha^a$ , $\alpha^b$ , $\varphi^a$ und $\varphi^b$ am Zweigelenkbogen . . . . .	170
a) Der unsymmetrische Zweigelenkbogen . . . . .	174
b) Der symmetrische Zweigelenkbogen . . . . .	184
5. Bestimmung der Drehwinkel $\varepsilon^a$ und $\varepsilon^b$ der beiden Widerlager eines bogenförmigen Stabes . . . . .	187
6. Bestimmung der Verteilungsmaße $\mu$ . . . . .	189
7. Bestimmung der einfachen Bogendrehwinkel $\tau$ . . . . .	190

8. Bestimmung der Momente, Normalkräfte und Querkräfte am Tragwerk mit bogenförmigen Stäben . . . . .	191
a) Bogenschub $H$ und Auflagerdrücke $V'$ und $V''$ . . . . .	191
b) Moment, Normalkraft und Querkraft . . . . .	193
Sonderfall: Das symmetrische Brückengewölbe . . . . .	196
9. Bestimmung der Festhaltungskräfte . . . . .	199
10. Sonderfall: Der Bogen wird durch 2 oder mehr geradlinige Stäbe gebildet	201

Zweiter Teil.

**Berechnung des Tragwerks mit verschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte.**

I. Gang der Berechnung . . . . .	202
1. Der einstöckige Rahmen . . . . .	202
a) Rahmen mit parallelen Stützen . . . . .	202
b) Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen . . . . .	208
2. Der mehrstöckige Rahmen . . . . .	213
a) Der mehrstöckige Rahmen mit parallelen Stützen . . . . .	213
b) Der mehrstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen . . . . .	220
Sonderfälle von mehrstöckigen Tragwerken . . . . .	227
3. Der Rahmenträger . . . . .	237
a) Der Rahmenträger mit parallelen Gurtungen . . . . .	237
b) Der Rahmenträger mit beliebig gerichteten Stäben . . . . .	241
4. Das biegungsfeste Fachwerk . . . . .	245
5. Rechnungsproben . . . . .	247
II. Bestimmung der wirklichen Verschiebungen der Knotenpunkte sowie der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung der Stabenden . . . . .	258
1. Der einstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben . . . . .	262
Beispiele (Nr. I—VII) . . . . .	265
2. Der mehrstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben . . . . .	271
Beispiele (Nr. I—VIII) . . . . .	277
3. Der Rahmenträger . . . . .	291
Beispiel . . . . .	296
III. Bestimmung der Momente $M'$ sowie der zugehörigen Erzeugungskraft $Z$ und Festhaltungskräfte $D$ . . . . .	300
1. Momente $M_{(e)}$ im verschobenen Stab . . . . .	300
2. Momente $M_{(e)}$ in allen übrigen Stäben . . . . .	307
3. Momente $M'$ . . . . .	309
4. Erzeugungskraft $Z$ der Momente $M'$ am einstöckigen Rahmen . . . . .	310
5. Erzeugungskraft $Z$ der Momente $M'$ und Festhaltungskräfte $D$ am mehrstöckigen Rahmen . . . . .	311
6. Erzeugungskraft $Z$ der Momente $M'$ und Festhaltungskräfte $D$ am Rahmenträger . . . . .	313
IV. Bestimmung der Momente $M^*$ sowie der Zusatzmomente $M_{\text{ZUS}}$ . . . . .	313
1. Der einstöckige Rahmen (Momente $M^*$ am symmetrischen offenen und geschlossenen Rahmen) . . . . .	313
2. Der mehrstöckige Rahmen (Sätze betr. Determinanten) . . . . .	316
3. Der Rahmenträger . . . . .	339

	Seite
V. Bestimmung der Momente infolge einer Temperaturänderung des Baumaterials . . . . .	339
1. Der einstöckige Rahmen . . . . .	341
2. Der mehrstöckige Rahmen . . . . .	348
3. Der Rahmenträger . . . . .	356
VI. Bestimmung der Momente infolge Senkungen der Auflager . . . . .	357
1. Der einstöckige Rahmen . . . . .	357
2. Der mehrstöckige Rahmen . . . . .	363
3. Der Rahmenträger . . . . .	366
VII. Bestimmung der Momente infolge der durch die Normalkräfte verursachten Längenänderungen der Stäbe . . . . .	366
1. Der einstöckige Rahmen . . . . .	367
2. Der mehrstöckige Rahmen . . . . .	370
3. Der Rahmenträger . . . . .	371
VIII. Bestimmung der inneren Kräfte an einem Tragwerk mit bogenförmigen Stäben und verschiebbaren Knotenpunkten . . . . .	371
1. Gang der Berechnung . . . . .	371
2. Bestimmung der Momente $M'$ sowie der zugehörigen Erzeugungskraft $Z$ und Festhaltungskräfte $D$ . . . . .	375
a) Gegenseitige Verschiebung $\Delta'$ der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie . . . . .	376
b) Gegenseitige Verschiebung $\Delta''$ der Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie . . . . .	380
3. Bestimmung der Momente $M^*$ sowie der Zusatzmomente $M_{Zus}$ . . . . .	384
4. Bestimmung der Momente infolge einer Temperaturänderung des ganzen Tragwerks . . . . .	385
5. Bestimmung der Momente infolge Senkungen der Auflager . . . . .	388
6. Bestimmung der Momente infolge der durch die Normalkräfte verursachten Längenänderungen der Stäbe . . . . .	390

## Dritter Teil.

**Beispiele aus der Praxis, insbesondere ausgeführte Eisenbetontragwerke, berechnet nach der im Ersten und Zweiten Teil entwickelten Methode der Festpunkte.**

1. Kontinuierliche Voutendecke mit vier Öffnungen . . . . .	392
2. Kontinuierliche Balkenbrücke mit drei Öffnungen . . . . .	394
3. Rahmenbrücke mit drei Öffnungen . . . . .	400
4. Unsymmetrischer Rechteckrahmen mit zwei Öffnungen . . . . .	425
5. Wasserhochbehälter . . . . .	455
6. Stützmauer in Verbindung mit einem rechteckigen Kanal . . . . .	460
7. Vordach eines Erzsilos, in letzterem eingespannt . . . . .	467
8. Vordach eines Gebäudes, an letzterem verschiebbar gelagert . . . . .	471
9. Rahmenbinder einer Werkstätte mit schieferm Balken und Kragarm . . . . .	483
10. Zweistöckiger Rahmenbinder eines Erzsilos . . . . .	506
11. Hallenbinder einer Erzbrikettierungsanlage, nach der Seite zweistöckig . . . . .	528
12. Mansarden-Dach über einem Silo . . . . .	560
13. Zweistöckiger Rahmenbinder eines Kühlturmes . . . . .	569
14. Gedeckter Eisenbetonsteg mit Vierendeelträgern als Tragwände . . . . .	580
15. Fachwerk-Kragdach an einem Silo . . . . .	603
16. Rahmenbinder einer Maschinenhalle mit Zugband . . . . .	608
17. Eingespannte Bogenbrücke mit aufgehängter Fahrbahn . . . . .	625

	Seite
18. Bogendach mit Zugband über 2 Öffnungen in biegunsfester Verbindung mit den Säulen . . . . .	647
19. Unsymmetrischer Hallenbinder, bestehend aus bogenförmigen und geradlinigen Stäben . . . . .	676
20. Einflußlinien der inneren Kräfte eines kontinuierlichen Bogens auf elastisch drehbaren Pfeilern . . . . .	697

### Anhang.

I. Zusammenstellung der im Ersten und Zweiten Teil abgeleiteten Hauptformeln . . . . .	718
II. Tabellen zur raschen Ermittlung der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte . . . . .	727
1. Der Balken mit gleicher beidseitiger gerader Voute . . . . .	727
2. Der Balken mit einseitiger gerader Voute . . . . .	728
3. Der Balken mit gleicher beidseitiger parabolischer Voute . . . . .	729
4. Der Balken mit einseitiger parabolischer Voute . . . . .	730
5. Sonderfall: Gleichmäßig verteilte Belastung der unter 1—4 behandelten Balken . . . . .	731
6. Der symmetrische Parabelbogen mit vom Scheitel zu den Kämpfern zunehmendem Querschnitt . . . . .	732





## Einleitung.

Die Methode der Festpunkte, welche in den folgenden Ausführungen erläutert wird, erleichtert die Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen derart, daß man in der Praxis nicht mehr davor zurückzuschrecken braucht, einen mehrstöckigen Rahmen (z. B. denjenigen der Fig. 12c) auf Winddruck zu berechnen, dessen Einfluß bei schmalen und hohen Gebäuden so groß ist, daß er bei der Berechnung eines solchen Tragwerks nicht außer Betracht gelassen werden kann. Man ist mit Hilfe der Methode der virtuellen Verschiebungen (Arbeitsgleichung) und den daraus abgeleiteten sog. Elastizitätsgleichungen wohl in der Lage, zur Berechnung eines statisch unbestimmten Systems ebenso viele lineare Gleichungen anzuschreiben als statisch unbestimmte Größen vorhanden sind (Müller - Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre, § 20), die Auflösung dieser Gleichungen erfordert jedoch schon bei 6facher statischen Unbestimmtheit einen solchen Zeitaufwand, daß sich in der Praxis niemand daran wagen würde, die Berechnung des erwähnten, in Fig. 12c dargestellten Stockwerkrahmens auf Winddruck mit Hilfe dieser Elastizitätsgleichungen durchzuführen.

Bei den von uns betrachteten Konstruktionen liefern von den in einem Querschnitt auftretenden inneren Kräften (Fig. 1) die Biegemomente den Hauptbeitrag zu den Formänderungen, während der Beitrag herrührend von den Normalkräften und den Querkraften nur gering ist. Der Einfluß der Normalkräfte auf die Formänderungen und mithin auf die gesuchten inneren Kräfte kann daher in den meisten Fällen, und derjenige der Schubkräfte überhaupt immer, vernachlässigt werden.

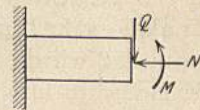


Fig. 1.

Falls jedoch der Einfluß der Normalkräfte berücksichtigt werden soll, so ist dies zusätzlich leicht möglich, wie später gezeigt wird. Wir setzen bei unseren Berechnungen voraus, daß das Material der zu berechnenden Konstruktionen nur solchen Beanspruchungen ausgesetzt ist, welche innerhalb der Elastizitätsgrenze desselben liegen, so daß keine bleibenden Formänderungen auftreten und deshalb die Spannungen proportional den Formänderungen angenommen werden können.

Wir unterscheiden zwei Gattungen von statisch unbestimmten Konstruktionen, nämlich:

1. Tragwerke mit unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten, und
2. Tragwerke mit verschiebbaren Knotenpunkten (Rahmenkonstruktionen).

Ein Tragwerk gehört zur ersten Kategorie, wenn bei der Belastung der Stäbe mit den äußeren Kräften nur Verbiegungen der Stäbe, jedoch keine gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der letzteren stattfinden, und ein Tragwerk gehört zur zweiten Kategorie, wenn bei der Belastung der Stäbe mit den äußeren Kräften nicht nur Verbiegungen der Stäbe, sondern auch gegenseitige Verschiebungen der Endpunkte der letzteren stattfinden; die Stäbe können geradlinig oder bogenförmig sein.

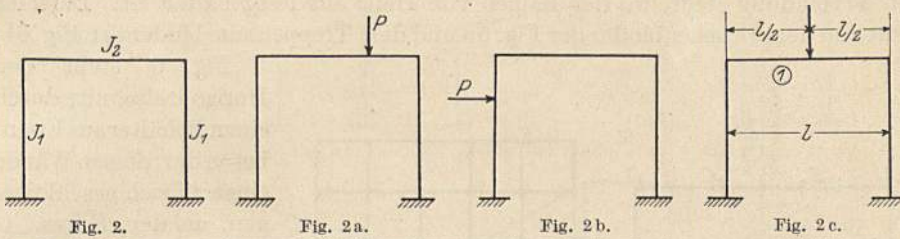
Die Berechnung eines Tragwerkes mit unverschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte ist im Teil I der vorliegenden Arbeit vorgeführt, und zwar für Tragwerke mit nur geradlinigen Stäben (Kap. I bis VII) und für Tragwerke mit bogenförmigen Stäben (Kap. VIII). Die Stäbe des Tragwerks können beliebige Richtung haben und beliebig aneinander gereiht sein, brauchen also nicht etwa rechtwinklig aufeinander zu stehen.

Die Berechnung eines Tragwerkes mit verschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte ist im Teil II erläutert, und zwar für Tragwerke mit nur geradlinigen Stäben (Kap. I—VII) und für Tragwerke mit bogenförmigen Stäben (Kap. VIII). Die Berechnung dieser Tragwerke zerlegen wir in zwei Abschnitte, nämlich in die Rechnungsabschnitte I und II, kurz mit R. I und R. II bezeichnet. Während R. I wird das Tragwerk mit verschiebbaren Knotenpunkten, sei es einstöckig oder mehrstöckig (ein Tragwerk mit bogenförmigen Stäben ist wie ein mehrstöckiges zu behandeln) in ein solches mit unverschiebbaren Knotenpunkten verwandelt; dies geschieht dadurch, daß das Tragwerk in so viel Knotenpunkten durch gedachte Lager unverschiebbar festgehalten wird, daß kein Knotenpunkt desselben eine Verschiebung ausführen kann. Die Anzahl der notwendigen gedachten Lager ergibt den Grad der „Stöckigkeit“ des Tragwerkes. Die Berechnung des Tragwerkes wird dann zunächst für diesen festgehaltenen Zustand durchgeführt, d. h. wie für ein Tragwerk der ersten Kategorie nach den Ableitungen in Teil I. In den gedachten Lagern treten Auflagerdrücke („Reaktionen“) auf, welche wir als Festhaltungskräfte bezeichnen. Der Rechnungsabschnitt II besteht darin, daß wir die während R. I am Tragwerk gedachten Lager entfernen und die Momente infolge der nun auftretenden tatsächlichen Verschiebungen der Knotenpunkte, d. h. die sog. Zusatzmomente, ermitteln. Beim Entfernen der während R. I am Rahmen gedachten Lager tritt an jedem der betreffenden Knotenpunkte die umgekehrt gerichtete Festhaltungskraft, nämlich die sog. Verschiebungskraft („Aktion“) in Tätigkeit, welche, allein am Rahmen wirkend, die tatsächlichen Verschiebungen und die davon herrührenden Zusatzmomente hervorruft. Am einstöckigen Tragwerk gibt es nur eine Verschiebungskraft. Addieren wir zum Schlusse die Momente aus R. I und R. II, so erhalten wir die genau richtigen Momente und die übrigen inneren Kräfte für die Rahmenkonstruktion, wie sie eine Berechnung nach den Elastizitätsgleichungen liefern würde.

Am symmetrischen Rahmen der Fig. 2 tritt z. B. schon bei unsymmetrischer senkrechter Belastung (Fig. 2a) eine Verschiebung des Balkens auf (in Fig. 2a nach links), welche natürlich bei Belastung einer Säule (Fig. 2b) viel größer wird; je größer die Verschiebung, desto größer sind die Zusatzmomente. Bei symmetrischer Belastung (Fig. 2c) des symmetrischen Rahmens der Fig. 2 tritt

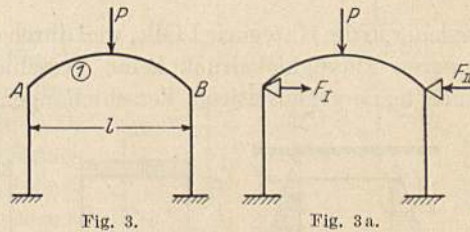
jedoch keine Verschiebung des Balkens auf und daher ergeben sich in diesem Falle auch keine Zusatzmomente.

Am Rahmen der Fig. 3 dagegen, dessen Stab *I* bogenförmig ist, verschieben



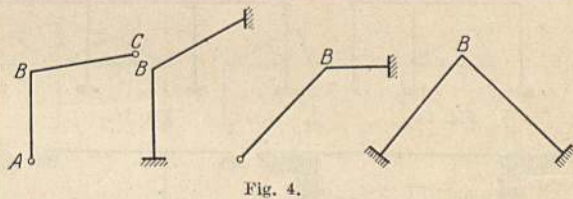
sich auch bei symmetrischer Belastung die Knotenpunkte *A* und *B*, welche daher während R. I (Fig. 3a) beide unverschiebbar festgehalten werden müssen (siehe Kap. VIII).

Im Teil III der vorliegenden Arbeit finden wir Anwendungen der in Teil I und Teil II abgeleiteten Resultate auf Beispiele aus der Praxis, insbesondere auch die Ermittlung der Einflußlinien der inneren Kräfte.

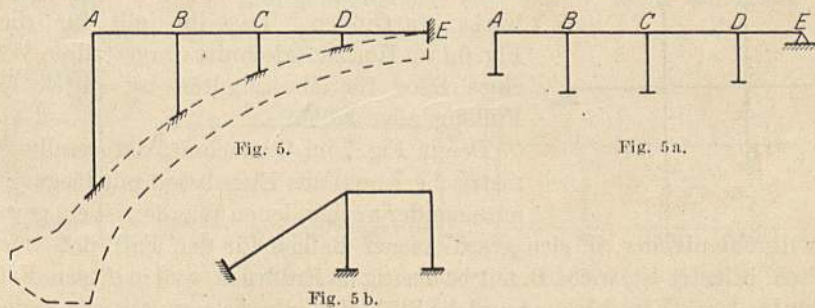


In den Fig. 4—42 haben wir zur Erläuterung der für die Berechnung nach der Methode der Festpunkte bestehenden Unterschiede Beispiele von gebräuchlichen Konstruktionen dargestellt.

Bei allen diesen Tragwerken nehmen wir an, daß ihre Fußpunkte so ausgebildet sind, daß Verschiebungen derselben nicht vorkommen. Bei



dieser Annahme sowie Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte muß bei den Tragwerken der Fig. 4 Knotenpunkt *B* bei jeder beliebigen Belastung des



Stabwerkes in Ruhe bleiben, so daß keine gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe auftreten; diese Tragwerke fallen daher in die Kategorie I.

Der in Fig. 5 dargestellte Fahrbahnträger  $ABCDE$  einer Bogenbrücke, welcher mit den Eisenbetonpfeilern biegungsfest (elastisch drehbar) verbunden ist, fällt ebenfalls in die Kategorie I, weil sein Ende  $E$  mit dem Bogenscheitel in Verbindung steht, wo der Balken von Haus aus festgehalten ist. Dasselbe gilt von dem Brückenbinder der Fig. 5a und dem Treppenhausbinder der Fig. 5b.

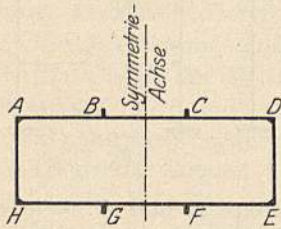


Fig. 6.

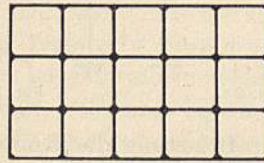


Fig. 6a.

Fig. 6 stellt den Horizontalschnitt durch einen Behälter aus Eisenbeton dar, dessen Wände einen in sich geschlossenen, an den Ecken  $A, D, E, H$  und an den Rippen  $B, C, F, G$  abgestützten biegungsfesten Stabzug bilden,

welcher in die Kategorie I fällt, weil durch die Belastung mit dem überall gleichen inneren Flüssigkeitsdruck keine Verschiebungen der Stützpunkte und daher auch keine gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe des Trag-

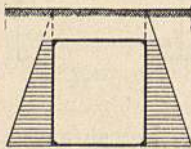


Fig. 7.

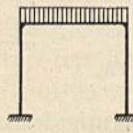


Fig. 7a.

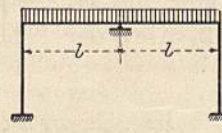


Fig. 7b.

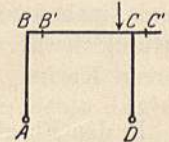


Fig. 7c.

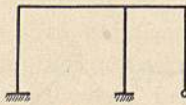


Fig. 7d.

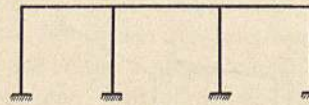


Fig. 7e.

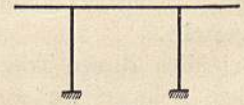


Fig. 7f.

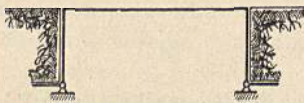


Fig. 7g.

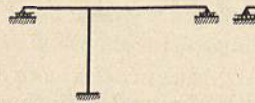


Fig. 7h.

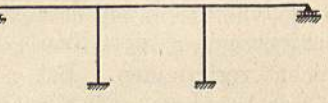


Fig. 7i.

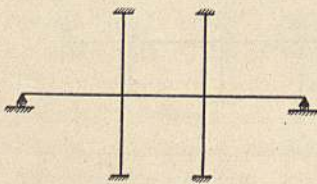


Fig. 7k.

werks stattfinden. Dasselbe gilt für die in Fig. 6a im Horizontalschnitt dargestellten Wände eines Silos für Massengüter bei gleich hoher Füllung aller Zellen.

Der in Fig. 7 im Querschnitt dargestellte symmetrische Kanal aus Eisenbeton mit biegungsfest miteinander verbundenen Wänden ist ein gewöhnlicher durchlaufender, in sich geschlossener Balken für den Fall, daß er symmetrisch belastet ist, wie z. B. mit beidseitigem Erddruck, weil in diesem Fall die Eckpunkte keine Verschiebung und die Stäbe daher keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden. Überhaupt fällt jedes zu einer senkrechten Achse symmetrische Rahmentragwerk in die Kategorie I, wenn es symmetrisch

belastet ist (siehe Fig. 7a und 7b), weil in diesem Falle seine Stäbe keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden; eine Ausnahme hiervon machen nur die in Fig. 13 bis 16 dargestellten, „nach der Seite“ mehrstöckigen

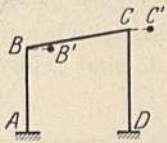


Fig. 8.

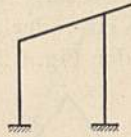


Fig. 8a.

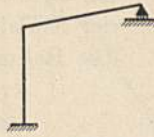


Fig. 8b.

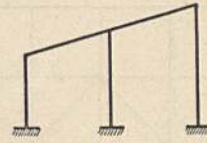


Fig. 8c.

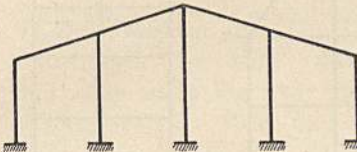


Fig. 8d.

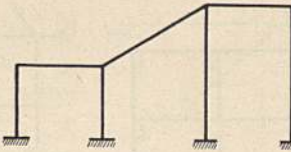


Fig. 8e.

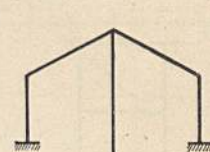


Fig. 8f.

Rahmentragwerke, deren Sonderfälle Fig. 24 bis 31 und die Tragwerke mit bogenförmigen Stäben der Fig. 38 bis 42, welche alle auch bei symmetrischer Ausbildung und symmetrischer Belastung in die Kategorie II fallen. Werden jedoch symmetrische Tragwerke wie z. B. diejenigen der Fig. 7, 7a und 7b unsymmetrisch belastet (siehe z. B. Fig. 7c), so erleiden deren Stäbe gegenseitige Verschiebungen ihrer Endpunkte, und das Stabwerk ist für solche Belastungs-

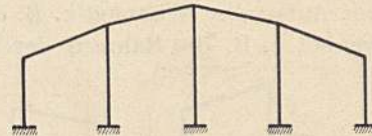


Fig. 8g.

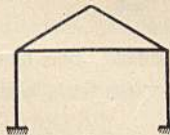


Fig. 9.

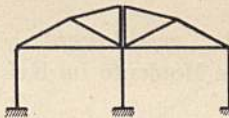


Fig. 9a.

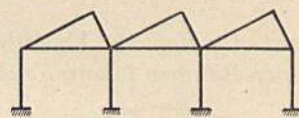


Fig. 9b.

fälle als Rahmentragwerk (Kategorie II) zu betrachten, d. h. es ist außer R. I auch R. II durchzuführen.

In den Fig. 7c bis 23 sind gebräuchliche ein- und mehrstöckige Rahmentragwerke mit gerad-

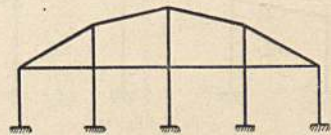


Fig. 9c.

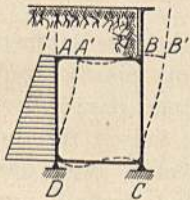


Fig. 10.

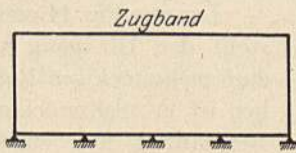


Fig. 10a.

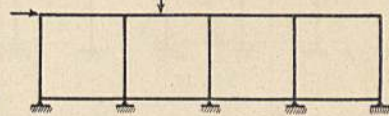


Fig. 10b.

linigen Stäben dargestellt, und zwar sowohl mit gleich-, als auch mit verschieden gerichteten Säulen. Irgendwelche Belastungen, insbesondere horizontale,

rufen an diesen Tragwerken gegenseitige Verschiebungen der Stabenden hervor weshalb dieselben in die Kategorie II fallen.

Im besonderen werden die Rahmen der Fig. 7c bis 8g als „einstöckig“ und je nach der Anzahl der Säulen als ein- oder mehrstielig bezeichnet. Die Rahmen der Fig. 9 bis 9c sind „einstöckig

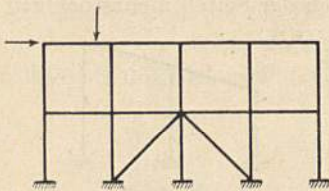


Fig. 11.

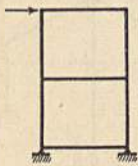


Fig. 12.

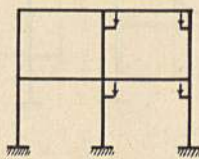


Fig. 12 a.

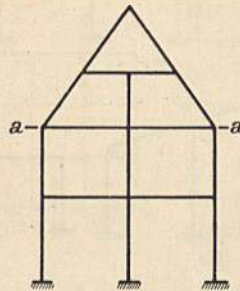


Fig. 12 b.

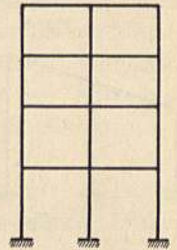


Fig. 12 c.

mit Aufsatz“. Während z. B. die Rahmen der Fig. 7c bis 8g „offen“ sind, werden z. B. die Rahmen der Fig. 9 bis 9c als „einseitig offen“ und z. B.

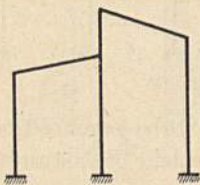


Fig. 13.

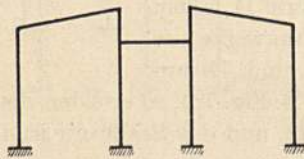


Fig. 13 a.

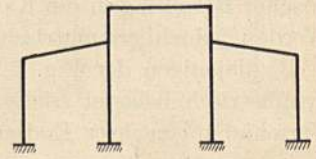


Fig. 13 b.

diejenigen der Fig. 10 bis 10b als „geschlossen“ bezeichnet; bei den geschlossenen Rahmen pflanzen sich die Momente im Kreise herum fort, während

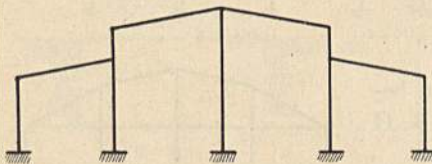


Fig. 14.

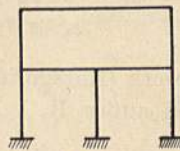


Fig. 15.

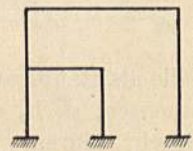


Fig. 15 a.

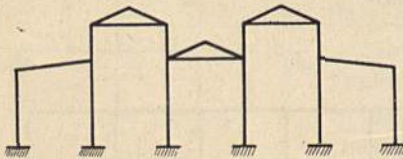


Fig. 16.

sie bei den offenen Rahmen nur in einer Richtung weiterlaufen.

Der aus Fig. 11 ersichtliche Rahmen stellt den Übergang vom einstöckigen zum mehrstöckigen Rahmen dar; äußerlich ist er mehrstöckig, jedoch für die Berechnung nur einstöckig, weil das

untere Stockwerk durch die 2 Streben festgehalten wird und deshalb nur das obere Stockwerk einen frei verschiebbaren Rahmen bildet.

Fig. 12 stellt einen zweistöckigen geschlossenen Rahmen, Fig. 12a einen zweistöckigen einseitig offenen, Fig. 12b einen zweistöckigen Rahmen mit

einem Aufsatz von Schnitt  $a - a$  aufwärts und Fig. 12c einen vierstöckigen einseitig offenen Rahmen dar.

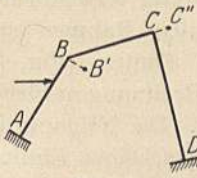


Fig. 17.

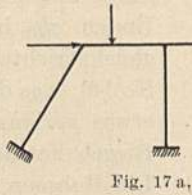


Fig. 17 a,

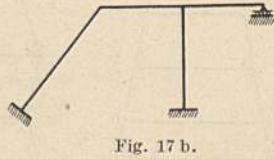


Fig. 17 b.

Die Rahmen der Fig. 13 bis 16 sind „nach der Seite“ mehrstöckig, und zwar stellt Fig. 13 einen zwei-stöckigen, Fig. 13 a und 13 b je einen dreistöckigen, Fig. 14 einen vier-stöckigen, Fig. 15 einen zwei-stöckigen und Fig. 16 einen nach der Seite fünfstöckigen Rahmen mit Aufsätzen auf den 3 „mittleren“ Stockwerken dar.

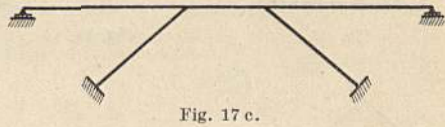


Fig. 17 c.

In den Fig. 17 bis 23 ist eine Gruppe von Rahmen mit verschieden gerichteten Säulen dargestellt, deren Berechnung etwas länger dauert als diejenige der Rahmen mit gleichgerichteten Säulen; erteilt man nämlich dem Riegel  $BC$  der Rahmen von Fig. 7c, 8 und 17 eine gewisse Verschiebung, so sehen wir, daß bei den Rahmen mit gleichgerichteten Säulen (Fig. 7c und 8) die Verbindungslinie der beiden verschobenen Knotenpunkte  $B'$  und  $C'$  parallel geblieben ist zur ursprünglichen Richtung des Stabes  $BC$ , d. h. die Enden des letzteren haben keine gegenseitige

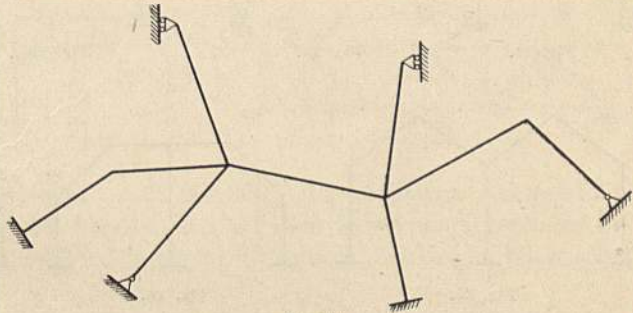


Fig. 18.

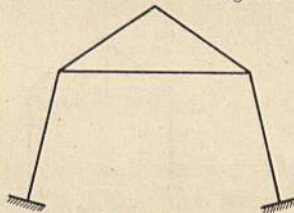


Fig. 19.

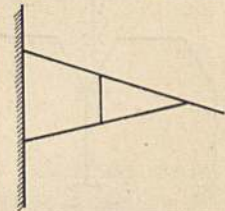


Fig. 20.

Verschiebung erlitten, während beim Rahmen mit verschieden gerichteten Säulen (Fig. 17) sich die Enden des Riegels  $BC$  gegenseitig verschoben

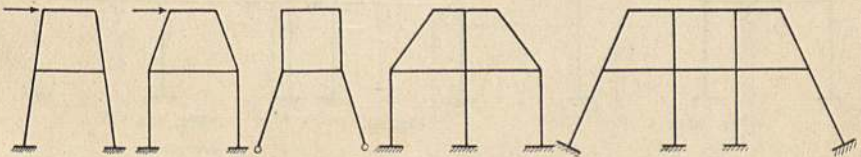


Fig. 21.

Fig. 21 a.

Fig. 21 b.

Fig. 21 c.

Fig. 21 d.

Verschiebung erlitten, während beim Rahmen mit verschieden gerichteten Säulen (Fig. 17) sich die Enden des Riegels  $BC$  gegenseitig verschoben

haben. Aus diesem Grunde ergeben sich bei den Rahmen mit verschieden gerichteten Säulen (Fig. 17 bis 23) bei einer Verschiebung desselben mehr Stäbe mit gegenseitig verschobenen Enden als bei den Rahmen mit gleichgerichteten Säulen (Fig. 7c bis 16), was die Rechnung natürlich etwas verlängert. Die Neigung des Riegels hat dagegen keinen Einfluß. Die Rahmen der Fig. 17 bis 20 sind einstöckig, diejenigen der Fig. 21 bis 23 mehrstöckig.

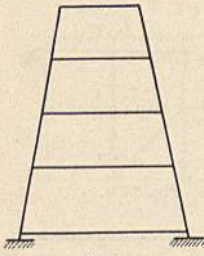


Fig. 22.

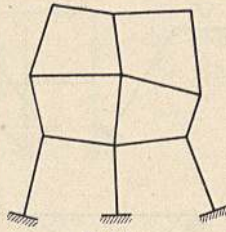


Fig. 23.

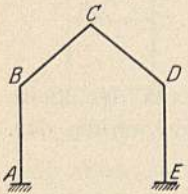


Fig. 24.

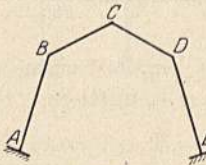


Fig. 25.

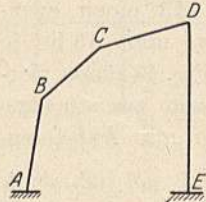


Fig. 25 a.

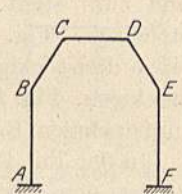


Fig. 26.

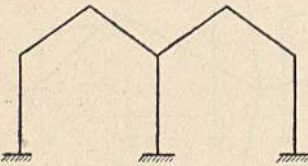


Fig. 27.

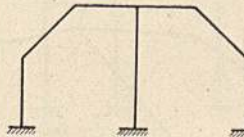


Fig. 28.

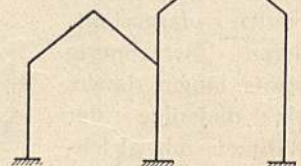


Fig. 28 a.

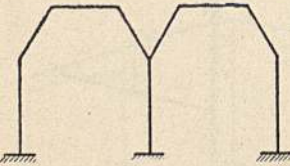


Fig. 29.

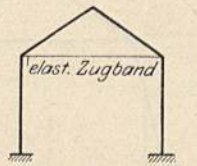


Fig. 30.

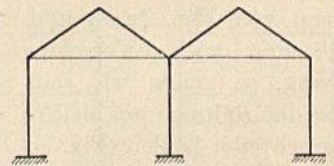


Fig. 30 a.

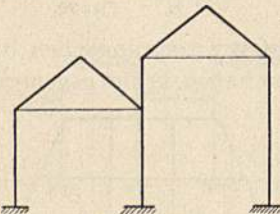


Fig. 30 b.

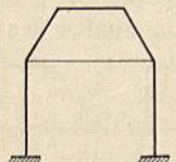


Fig. 31.

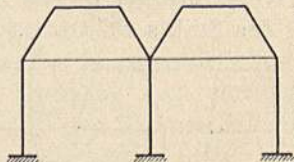


Fig. 31 a.

In den Fig. 24 bis 31 a sind Sonderfälle von „nach der Seite“ mehrstöckigen Rahmen dargestellt, welche ebenfalls in die Kategorie II fallen.

Die Rahmen der Fig. 24, 25 und 25 a sind „nach der Seite“ zweistöckig, weil man zwei ihrer Knotenpunkte, nämlich B und D, während R. I durch je



ein gedachtes Lager unverschiebbar festhalten muß, damit kein Knotenpunkt der Tragwerke eine Verschiebung ausführen kann. Dementsprechend ist der

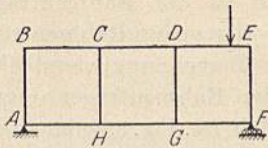


Fig. 32.

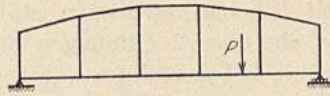


Fig. 32 a.

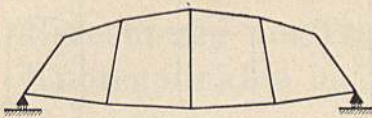


Fig. 33.

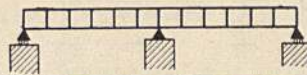


Fig. 34.

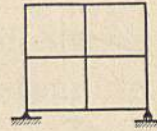


Fig. 35.

Rahmen der Fig. 26 „nach der Seite“ dreistöckig, da man während R. I in drei seiner Knotenpunkte, nämlich in *B*, *D* und *E*, je ein festes Lager anbringen muß. Ferner stellt die Fig. 27 und die Fig. 28 je einen „nach der Seite“ dreistöckigen, Fig. 28a einen „nach der Seite“

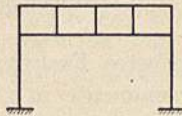


Fig. 36.

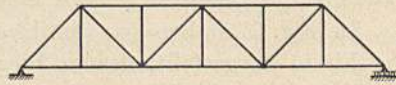


Fig. 37.

vierstöckigen und Fig. 29 einen „nach der Seite“ fünfstöckigen Rahmen dar.

Die Rahmen der Fig. 30 bis 31 a sind bei ihrer Berechnung gleich zu behandeln wie die Rahmen der Fig. 24 bis 29, obwohl sie Zugbänder (elastische)

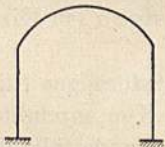


Fig. 38.

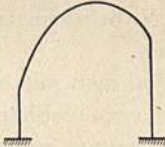


Fig. 38 a.

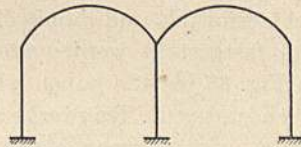


Fig. 38 b.

besitzen. Dementsprechend ist der Rahmen der Fig. 30 „nach der Seite“ zweistöckig, die Rahmen der Fig. 30a und 31 dreistöckig, derjenige der Fig. 30b vierstöckig und der Rahmen der Fig. 31a fünfstöckig.

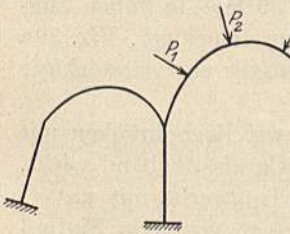


Fig. 38 c.

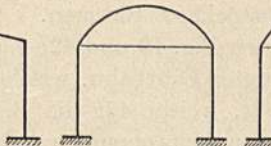


Fig. 39.

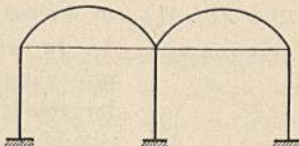


Fig. 39 a.

In den Fig. 32 bis 36 sind sog. Rahmenträger (System Vierendeel) dargestellt, welche nach demselben Prinzip wie mehrstöckige Rahmen zu berechnen sind. Der in Fig. 32 dargestellte einfache Rahmenträger ist wie ein dreistöckiger

Rahmen zu behandeln, da man während R. I an seinen Knotenpunkten *H*, *G* und *E* je ein festes Lager anbringen muß, damit sich kein Knotenpunkt des Tragwerks verschieben kann. Dementsprechend ist der Rahmenträger der Fig. 32a für die Berechnung fünfstöckig, und der allgemeine Rahmenträger der Fig. 33 mit beliebig gerichteten Stäben für die Berechnung vierstöckig. In Fig. 34 ist ein über 2 Öffnungen durchlaufender Rahmenträger dargestellt, welcher wie ein siebenstöckiger Rahmen zu behandeln ist. Fig. 35 zeigt einen Rah-

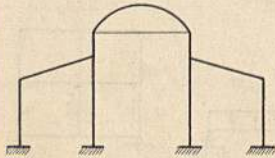


Fig. 40.

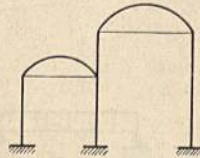


Fig. 41.

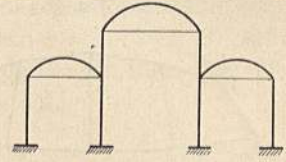


Fig. 41 a.

menträger mit 2 Stockwerken, der wie ein dreistöckiger Rahmen zu berechnen ist.

Der Rahmenträger der Fig. 36 auf elastisch drehbaren Stützen ist wie ein fünfstöckiger Rahmen zu berechnen, da sowohl seine 3 inneren Pfosten als auch seine obere und untere Gurtung während R. I durch je ein festes Lager unverschiebbar festgehalten werden müssen.

In Fig. 37 haben wir ein biegungsfestes Fachwerk, einen Parallelträger aus Eisen, dargestellt, dessen Biegemomente in Gurtungen und Streben, herrührend von der biegungsfesten Knotenpunktausbildung mit Hilfe der Fest-

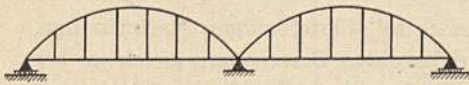


Fig. 42.

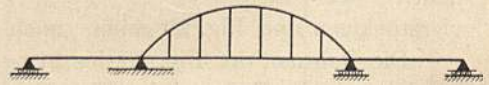


Fig. 42 a.

punkte leicht ermittelt und damit die Nebenspannungen im Eisenschwerkwerk genau festgestellt werden können.

In den Fig. 38 bis 42a haben wir Rahmen mit bogenförmigen Stäben dargestellt, welche unter die Tragwerke mit verschiebbaren Knotenpunkten fallen. Diese Rahmen werden genau gleich berechnet wie die Sonderfälle der mehrstöckigen Rahmen der Fig. 24 bis 31 a, mit dem einzigen Unterschied, daß der bogenförmige Stab eine besondere Behandlung erfährt. Es stellt daher für die Berechnung Fig. 38 und 39 je einen zweistöckigen, und Fig. 38 b und 38 c je einen dreistöckigen Rahmen dar. Die Rahmen der Fig. 39 bis 41a haben Zugbänder, trotzdem ist für die Berechnung Fig. 39 ein zweistöckiger, Fig. 39 a ein dreistöckiger, Fig. 40 ein vierstöckiger, Fig. 41 ebenfalls ein vierstöckiger und Fig. 41 a ein sechsstöckiger Rahmen.

In den Fig. 42 und 42a haben wir zwei Bogenbrücken mit aufgehängter Fahrbahn, welche gleichzeitig als Zugband wirkt, dargestellt, welche für die Berechnung Tragwerke mit unverschiebbaren Knotenpunkten sind, wenn man von dem Einfluß der Verlängerung des Zugbandes absieht.

Zum Schluß zeigt Fig. 42b ein Rohrprofil, welches wie ein einstöckiges Tragwerk, bestehend aus 2 bogenförmigen Stäben, berechnet wird.



Fig. 42 b.

## Erster Teil.

# Berechnung des Tragwerks mit unverschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte.

## I. Gang der Berechnung am Tragwerk mit nur geradlinigen Stäben.

Die Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte eines Tragwerks kann entweder durch ein zur Konstruktion gehöriges festes Auflager am Balken, z. B. am einstöckigen Tragwerk der Fig. 43 bei *E*, bzw. an jedem Stockwerkbalken, z. B. am mehrstöckigen Tragwerk der Fig. 44 bei *C* und *F*, oder durch gedachte Lager an den Balken (vgl. Fig. 45 und 46) bewirkt werden; für die Berechnung

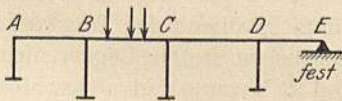


Fig. 43.

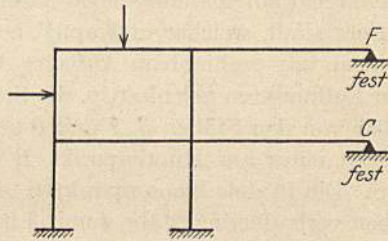


Fig. 44.

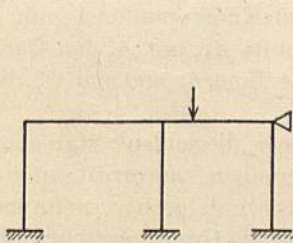


Fig. 45.

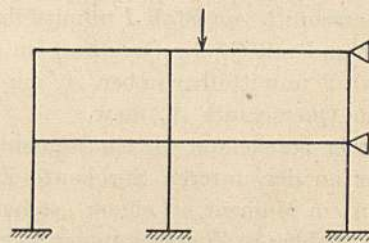


Fig. 46.

ergibt sich daraus kein Unterschied. Ferner ist die Unterscheidung von ein- und mehrstöckigen Tragwerken, wenn deren Knotenpunkte von Haus aus unverschiebbar sind, überflüssig; denn die Berechnung gestaltet sich bei beiden genau gleich. Die Unterscheidung braucht erst gemacht zu werden bei der Bestimmung der sog. Festhaltungskraft, welche in dem festen Balkenaufleger des einstöckigen bzw. in dem festen Auflager an jedem Stockwerkbalken des mehrstöckigen Tragwerks auftritt und eine Verschiebung der Knotenpunkte verhindert (siehe Kap. VII); denn an einem Tragwerk treten ebenso

viele Festhaltungskräfte auf, als dasselbe Stockwerke besitzt. Bei einem Tragwerk mit von Haus aus unverschiebbaren Knotenpunkten benötigen wir die Festhaltungskraft (am einstöckigen) bzw. Festhaltungskräfte (am mehrstöckigen Tragwerk) zur Berechnung der Verankerung der Konstruktion in dem die Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte bewirkenden Lager (am einstöckigen) bzw. Lagern (am mehrstöckigen Tragwerk); bei einem Tragwerk mit von Haus aus verschiebbaren, jedoch zur Berechnung desselben vorübergehend durch gedachte Lager unverschiebbar gemachten Knotenpunkten dagegen benötigen wir die Festhaltungskraft (am einstöckigen) bzw. Festhaltungskräfte (am mehrstöckigen Tragwerk) zur Berechnung der Zusatzmomente, welche zu den Momenten für den vorübergehend festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die genau richtigen Momente am Tragwerk mit verschiebbaren Knotenpunkten zu erhalten (siehe Teil II, Kap. I).

Den Gang der Berechnung erläutern wir

#### am allgemeinen Tragwerk

der Fig. 47 mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner biegungsfesten Stäbe 1 bis 9 mit den Längen  $l_1$  bis  $l_9$ . Den Stäben haben wir absichtlich eine ganz beliebige Lage gegeben, um die Bestimmung der Festpunkte und Momente ganz allgemein zu halten und damit nicht etwa die Meinung besteht, daß die Stäbe senkrecht aufeinander stehen müßten; der Rechteckrahmen (z. B. Fig. 43) ist ein Spezialfall, welcher in Kap. V beschrieben wird. Die Punkte  $E$ ,  $L$ ,  $M$  und  $H$  seien unverschiebbare Auflager des Tragwerks; die Stäbe 2 und 8 sind an ihren Fußpunkten gelenkartig, die Stäbe 9 und 7 fest eingespannt angenommen. Der von den Stäben 3, 1 und 6 gebildete „Balken“ des Tragwerks kann sich wegen eines am Knotenpunkt  $B$  befindlichen festen Lagers nicht verschieben. Die in den Knotenpunkten  $A$  und  $B$  biegungsfest angeschlossenen, nach oben verlaufenden Stäbe 4 und 5 besitzen an ihren oberen Enden  $F$  und  $G$  Rollenlager, die auf senkrechter Bahn beweglich sind. Wir bezeichnen mit  $A_1$  den Querschnitt von Stab 1 unmittelbar neben Knotenpunkt  $A$ , mit  $M_1^A$  das Moment und mit  $Q_1^A$  die Querkraft im Querschnitt  $A_1$ , mit  $A_2$  den Querschnitt von Stab 2 unmittelbar neben  $A$ , mit  $M_2^A$  das Moment und mit  $Q_2^A$  die Querkraft im Querschnitt  $A_2$ , usw.

Ferner bezeichnen wir ein Moment an einem „liegenden“ Stab als positiv, wenn es an der unteren Stabkante Zugspannungen hervorruft, und wir bezeichnen ein Moment an einem „stehenden“ Stab als positiv, wenn es an der rechten Stabkante Zugspannungen hervorruft. Die Grenze zwischen „liegend“ und „stehend“ werde durch die  $45^\circ$  Neigung bestimmt, letztere selbst gelte noch als „liegend“. Die Momentenflächen tragen wir stets an die Zugkanten der einzelnen Stäbe an, und aus diesem Grunde ist es nur zur Ermittlung der Größtwerte der Momente bei verschiedenen Belastungsfällen nötig, die Momente mit positiv und negativ zu bezeichnen, da schon aus der aufgezeichneten Momentenfläche hervorgeht, an welcher Seite Zugspannungen entstehen.

Es sei nur ein Stab, beispielsweise Stab 6, mit den beliebig gerichteten Kräften  $P_1$  und  $P_2$  belastet; da  $P_2$  schiefwinklig zur Stabrichtung angenommen ist, so muß diese Kraft zur Bestimmung der Momente am ganzen Tragwerk

zunächst in die Komponente  $P_2'$  rechtwinklig zur Stabachse und in die Komponente  $P_2''$  in Richtung der Stabachse zerlegt werden, welch' letztere in die Knotenpunkte  $B$  und  $C$  übertragen wird und keine Momente erzeugt.

Zur Bestimmung der Momente und damit der Quer- und Normalkräfte am ganzen Tragwerk — und aus allen dreien ergeben sich die Auflagerkräfte — benützen wir in allen unseren Berechnungen die Festpunkte (Kap. II und III) der einzelnen Stäbe.

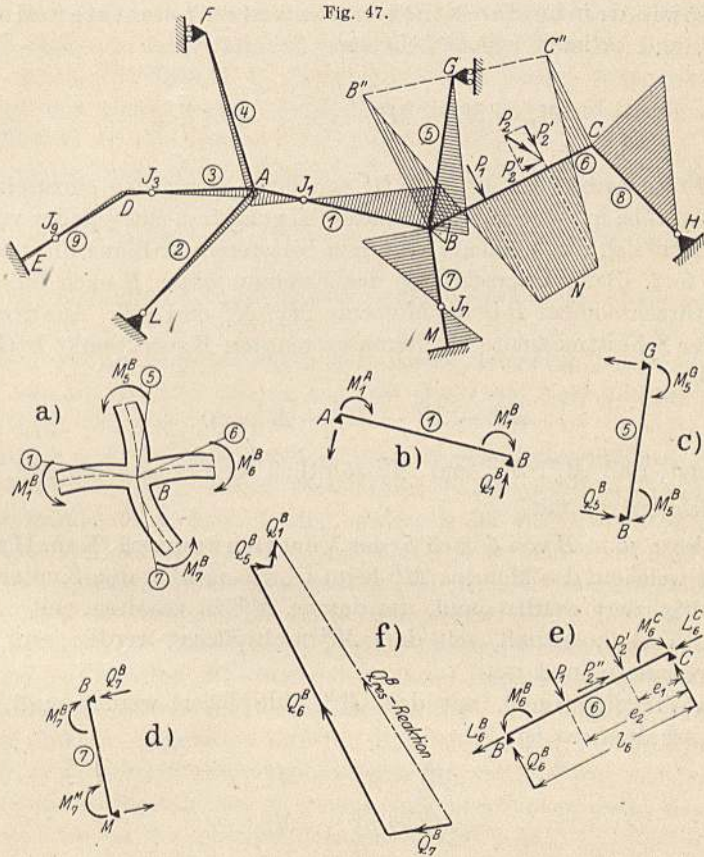


Fig. 47a—f.

Die beiden Festpunkte  $J$  und  $K$  eines elastisch eingespannten geradlinigen Stabes, dessen Enden keine Verschiebungen ausführen, sind die Momentennullpunkte dieses Stabes für den Fall, daß an einem seiner beiden Enden ein Moment eingeleitet wird, und keine anderen Lasten vorhanden sind; diese Punkte haben eine von der äußeren Belastung unabhängige Lage.

Um die Momentenfläche am ganzen Tragwerk zu erhalten, müssen wir natürlich von dem belasteten Stab 6 ausgehen, an welchem wegen seiner elastischen Einspannung in den Knotenpunkten  $B$  und  $C$  an letzteren negative Momente, genannt Stützenmomente, auftreten.

Die beiden Stützenmomente am belasteten Stab ermitteln wir mittels der Festpunkte und der sog. Kreuzlinienabschnitte (nach Kap. V), und

zwar entweder zeichnerisch durch Ziehen von wenigen Geraden oder rechnerisch aus den von diesen Geraden gebildeten Dreiecken, wobei man dann alle Werte mathematisch genau erhält. Sind die beiden Stützenmomente bekannt, so ergibt sich die Momentenfläche am belasteten Stab aus der Zusammensetzung der positiven Momentenfläche  $B''N C''$  des einfachen Balkens auf zwei Stützen ( $M_0$ -Fläche) mit dem negativen Trapez  $BB''C''C$ ; denn die Momente am belasteten geradlinigen Stab sind diejenigen des mit den äußeren Lasten sowie den beiden Stützenmomenten belasteten einfachen Balkens, und es ist in einem beliebigen Schnitt

$$M_x = M_0 + M^B \cdot \frac{l-x}{l} + M^C \cdot \frac{x}{l}, \quad (1)$$

worin die Stützenmomente  $M^B$  und  $M^C$  mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

Da die Stäbe in ihren Knotenpunkten biegungsfest miteinander verbunden sind, pflanzen sich die Momente von dem belasteten Stab aus über das ganze Tragwerk fort. Beim Überschreiten des Knotenpunktes  $B$  nach links spaltet sich das Stützenmoment  $B$  in die Momente  $M_7^B$ ,  $M_1^B$  und  $M_5^B$ . Aus dem Gleichgewicht der Schnittmomente am herausgetrennten Knotenpunkt  $B$  (Fig. 47a) ergibt sich:

$$M_6^B - M_5^B - M_1^B - M_7^B = 0.$$

Daraus folgt, daß  $M_5^B$ ,  $M_1^B$  und  $M_7^B$  sämtlich kleiner sind als  $M_6^B$ .

Bezeichnen wir mit

$\mu_{6-5}^B$  (gelesen  $\mu$  in  $B$  von  $6$  nach  $5$ ) das Verteilungsmaß (Kap. II und III), mit welchem das Moment  $M_6^B$  beim Übergang über den Knotenpunkt  $B$  multipliziert werden muß, um daraus  $M_5^B$  zu erhalten, mit

$\mu_{6-1}^B$  das Verteilungsmaß, mit dem  $M_6^B$  multipliziert werden muß, um  $M_1^B$  zu erhalten, und mit

$\mu_{6-7}^B$  das Verteilungsmaß, mit dem  $M_6^B$  multipliziert werden muß, um  $M_7^B$  zu erhalten, so ist

$$M_5^B = \mu_{6-5}^B \cdot M_6^B,$$

$$M_1^B = \mu_{6-1}^B \cdot M_6^B$$

und

$$M_7^B = \mu_{6-7}^B \cdot M_6^B.$$

Um die Momente  $M_1^B$ ,  $M_5^B$  und  $M_7^B$  über die betreffenden unbelasteten Stäbe weiterzuleiten, brauchen wir nach der Definition der Festpunkte nur eine Gerade vom Endpunkt der betreffenden Momentenordinaten durch den entsprechenden Festpunkt zu legen.

Ziehen wir deshalb vom Endpunkt des in  $B_1$  aufgetragenen Momentes  $M_1^B$  eine Gerade durch den in der Nähe des Knotenpunktes  $A$  gelegenen Festpunkt  $J_1$  des Stabes  $I$ , so schneidet diese Gerade auf der in  $A_1$  errichteten Senkrechten zur Stabrichtung  $I$  das Moment  $M_1^A$  ab, wodurch die Momentenfläche am Stab  $I$  vollkommen bestimmt ist.

In analoger Weise pflanzt sich das Moment  $M_5^B$  über den Stab  $5$  und  $M_7^B$  über den Stab  $7$  weiter.

Das oben gefundene Moment  $M^A$  überträgt sich nun weiter auf die mit Stab  $I$  biegungsfest verbundenen Stäbe  $2$ ,  $3$  und  $4$ , es spaltet sich analog wie  $M_6^B$  bei Knotenpunkt  $B$  in:

$$M_2^A = \mu_{1-2}^A \cdot M_1^A,$$

$$M_3^A = \mu_{1-3}^A \cdot M_1^A$$

und

$$M_4^A = \mu_{1-4}^A \cdot M_1^A.$$

Ziehen wir nun analog wie bei Stab  $I$  von den Endpunkten der an ihrem zugehörigen Stabende aufgetragenen Momente  $M_2^A$ ,  $M_3^A$  und  $M_4^A$  je eine Gerade durch den unteren Festpunkt  $J_2$  des Stabes  $2$ , den linken Festpunkt  $J_3$  des Stabes  $3$  und den oberen Festpunkt  $K_4$  des Stabes  $4$ , so sind damit auch die Momentenflächen an den Stäben  $2$ ,  $3$  und  $4$  bestimmt.

Sind mehrere Stäbe gleichzeitig belastet, so bestimmt man die Momentenflächen der belasteten Stäbe für die Belastung dieser Stäbe getrennt voneinander und addiert darauf die Momente unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens.

Die Hauptsache ist immer die Momentenfläche, denn aus dieser geht alles übrige hervor.

Nachdem wir die Momentenfläche am ganzen Tragwerk bestimmt haben, können wir nun auf Grund derselben auch die Quer- und Normalkräfte an allen Stäben wie folgt ermitteln (Kap. VI):

Wir denken uns alle Stäbe durch an ihren beiden Enden geführte Schnitte aus dem Stabwerk herausgetrennt, wie einfache Balken auf 2 Stützen gelagert und mit den gegebenen äußeren Lasten sowie mit den Stützenmomenten bzw. Einspannmomenten belastet. In den Fig. 47b — e wurden z. B. die Stäbe  $1$ ,  $5$ ,  $6$  und  $7$  in herausgetrenntem Zustand dargestellt. Der einfache Balken  $AB$  (Fig. 47b) ist mit den beiden rechtsdrehenden Stützenmomenten  $M_1^A$  und  $M_1^B$  zu belasten, der einfache Balken  $BG$  (Fig. 47c) mit den beiden rechtsdrehenden Stützenmomenten  $M_5^B$  und  $M_5^G$ , und der einfache Balken  $BM$  (Fig. 47d) mit den rechtsdrehenden Stützenmomenten  $M_7^B$  und  $M_7^M$ . Der einfache Balken  $BC$  (Fig. 47e) ist mit den gegebenen äußeren Kräften  $P_1$  und  $P_2$  sowie mit den entgegengesetzt drehenden Stützenmomenten  $M_6^B$  und  $M_6^C$  zu belasten.

Nun sind die Auflagerdrücke an diesen einfachen Balken gleich den Querkraften an den Enden der betreffenden Stäbe, also z. B.

$$Q_1^B = \frac{M_1^A + M_1^B}{l_1},$$

$$Q_5^B = \frac{M_5^B + M_5^G}{l_5},$$

$$Q_6^B = \frac{P_1 \cdot e_{1/2} + P_2 \cdot e_{2/1} + M_6^B - M_6^C}{l_6},$$

$$Q_7^B = \frac{M_7^B + M_7^M}{l_7}.$$

Diese vier Querkraften stoßen im Knotenpunkt  $B$  zusammen und können daher mit Hilfe des Kräftecks der Fig. 47f zu einer einzigen Kraft  $Q_{\text{res}}^B$  („Reaktion“) zusammengesetzt werden. Dasselbe ist am Knotenpunkt  $A$  der Fall,

wo die Querkräfte  $Q_1^A$ ,  $Q_2^A$ ,  $Q_3^A$  und  $Q_4^A$  sich zu der einzigen Kraft  $Q_{\text{res}}^A$  („Reaktion“) zusammensetzen.

Durch Zerlegung der Kräfte  $Q_{\text{res}}^A$  und  $Q_{\text{res}}^B$  in die anstoßenden Stabrichtungen erhalten wir noch die auf die Knotenpunkte wirkenden Normalkräfte am ganzen Tragwerk, welche in den Stäben entgegengesetzt gerichtet sind, und wir sind nun in der Lage, auch die Auflagerkräfte, d. h. die Resultanten in den Auflagerpunkten, anzugeben. Da wir eine Kraft in der Ebene nur in zwei sich auf dieser Kraft schneidende Richtungen zerlegen können, so verfahren wir in praktischen Fällen in der in Kap. VI angegebenen Weise, um zur Bestimmung der Normalkräfte keine Elastizitätsgleichungen anschreiben zu müssen.

Die beiden Kräfte  $Q_{\text{res}}^A$  und  $Q_{\text{res}}^B$  in den Knotenpunkten  $A$  und  $B$  haben wir aber nicht nur zur Ermittlung der Normalkräfte gebildet, sondern sie interessieren uns hauptsächlich deshalb, weil sie als „Aktionen“ (in umgekehrter Richtung genommen), wie in der Einleitung erwähnt, eine Verschiebung des „Balkens“ des Tragwerkes und damit Zusatz-Momente, -Querkräfte und -Normalkräfte hervorrufen würde, wenn das Tragwerk im Knotenpunkt  $B$  nicht unverschiebbar festgehalten wäre.

Ferner erläutern wir den Gang der Berechnung

#### am geschlossenen Rechteckrahmen

der Fig. 48, dessen oberer Balken (Stab 3) gleichmäßig verteilt belastet ist. Bei der symmetrischen Ausbildung des Tragwerkes und der symmetrischen Belastung verschieben sich die Balken 2 und 3 nicht, so daß das Tragwerk für den gegebenen Belastungsfall wie ein Tragwerk mit unverschiebbaren Knotenpunkten berechnet werden kann, auch wenn die festen Lager an den Knotenpunkten  $D$  und  $F$  nicht vorhanden wären.

An einseitig offenen und geschlossenen Tragwerken sind die Momente entsprechend dem Wesen des endlosen Stabzuges „endlos“, d. h. auch im Kreise herum so lange fortzupflanzen, bis sie verschwindend klein geworden sind. Zum Glück aber wird die Rechnung nicht endlos, da die Momente beim Weiterleiten rasch abnehmen, so daß es meistens gar nicht zum Kreislauf kommt.

Nachdem die Festpunkte und Verteilungsmaße am ganzen Tragwerk der Fig. 48 bestimmt sind, können die beiden Momente  $M_3^E$  und  $M_3^F$  des belasteten Stabes mittels der Kreuzlinienabschnitte (Kap. V) bestimmt und darauf weitergeleitet werden. Es ist bei geschlossenen Konstruktionen zweckmäßig, die Momentenfläche des belasteten Stabes nach deren Ermittlung mit Hilfe der Kreuzlinienabschnitte von der Stabachse aus aufzutragen, d. h. diese Momentenfläche derart zu verschieben, daß ihre Schlußlinie mit der Stabachse zusammenfällt, damit beim Weiterleiten keine Unklarheiten entstehen können.

Wir brauchen der Symmetrie wegen nur das Moment  $M_3^E$  weiterzuleiten, da die Fortpflanzung des Momentes  $M_3^F$  genau das Spiegelbild der Momentenfläche, erhalten durch Weiterleitung von  $M_3^E$ , liefert und darauf die Momente aus den beiden Bildern einfach mit ihren Vorzeichen zu addieren sind.

Zunächst erhalten wir  $M_5^E = M_3^E$ , weil sich in Knotenpunkt  $E$  nur ein Stab anschließt. Durch Ziehen der Schlußlinie  $s_5$  durch den Festpunkt  $J_5$  erhalten



wir  $M_5^C$ . Dieses Moment zweigt sich nun in die beiden „anstoßenden“ Stäbe 2 und 4 ab. Es ist

$$M_4^C = M_5^C \cdot \mu_{5-4}^C,$$

und da aus der Gleichgewichtsbedingung am herausgetrennten Knotenpunkt C (Fig. 48a)

$$M_2^C = M_5^C - M_4^C,$$

so ist

$$M_2^C = (1 - \mu_{5-4}^C) \cdot M_5^C.$$

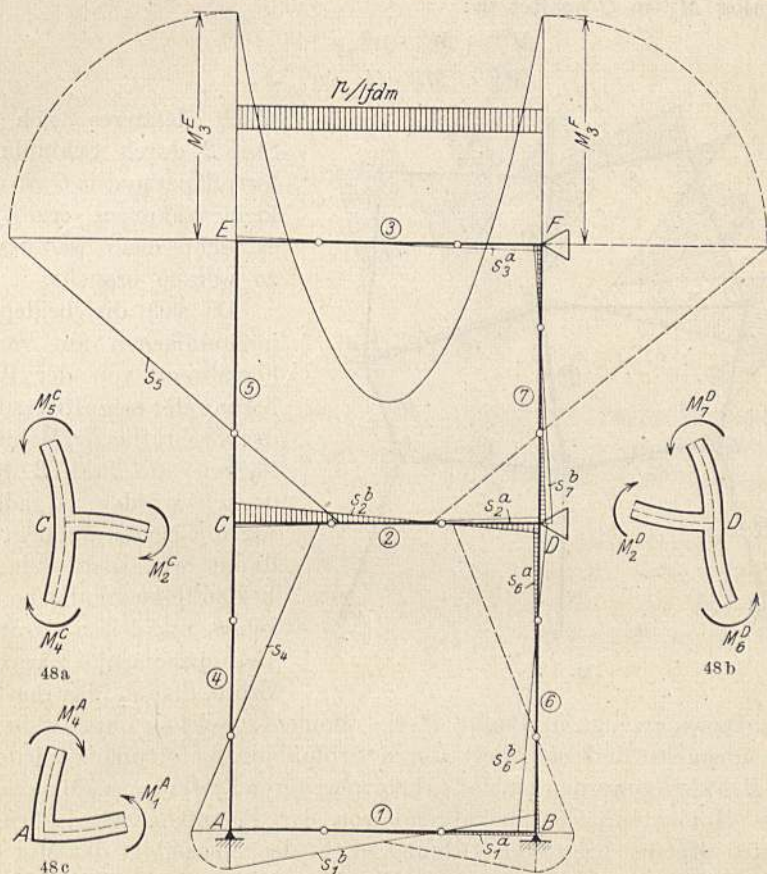


Fig. 48—48c.

Das Moment  $M_2^C$  pflanzt sich über den Stab 2 durch Schlußlinie  $s_2^b$  weiter. Letztere schneidet in D das Moment  $M_2^D$  ab, das sich dort spaltet in:

$$M_6^D = M_2^D \cdot \mu_{2-6}^D$$

und

$$M_7^D = M_2^D \cdot (1 - \mu_{2-6}^D).$$

Das Moment  $M_6^D$  pflanzt sich durch Schlußlinie  $s_6^a$  über Stab 6 weiter, erzeugt in B das Moment  $M_6^B$ , welches in voller Größe in den Stab 1 übergeht, wo es sich durch Schlußlinie  $s_1^a$  weiterleitet und bei A ein Moment  $M_1^A$  ergibt, welches so klein ist, daß es keinen weiteren Einfluß auszuüben vermag.

Bevor wir das Moment  $M_7^D$  weiter verfolgen, leiten wir zunächst das am Knotenpunkt  $C$  erhaltene Zweigmoment  $M_4^C$  weiter. Dieses erzeugt am Stab 4 die durch die Schlußlinie  $s_4$  bestimmte Momentenfläche. Das in Knotenpunkt  $A$  hervorgerufene Moment  $M_4^A$  geht, weil sich nur ein weiterer Stab anschließt, ohne Spaltung (Fig. 48c) in den Stab 1 über, wo es die durch die Schlußlinie  $s_1^b$  begrenzte Momentenfläche ergibt. Das hierdurch in  $B$  erzeugte Moment pflanzt sich ohne weiteres durch Schlußlinie  $s_6^b$  über den Stab 6 fort. Die Schlußlinie  $s_6^b$  der nicht schraffierten Momentenfläche schneidet in  $D$  ein Moment ab, welches sich analog  $M_5^C$  in  $C$  spaltet in:

$$M_7^D = M_6^D \cdot \mu_{6-7}^D$$

und

$$M_2^D = M_6^D \cdot (1 - \mu_{6-7}^D),$$

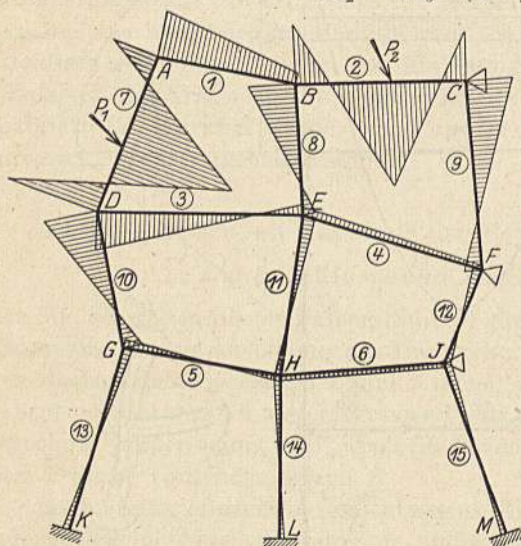


Fig. 49.

welch letzteres sich über Stab 2 durch Schlußlinie  $s_2^a$  fortpflanzt und in  $C$  ein derart kleines Moment ergibt, daß es nicht mehr weitergeleitet zu werden braucht.

Da sich die beiden Momentenflächen am Stab 7, herrührend von der Weiterleitung der schraffierten bzw. der ungeschraffierten Momentenflächen am Stab 2 bzw. 6 decken würden, so addieren wir die beiden Momente  $M_7^D$ , damit wir nicht eine der beiden Momentenflächen übersehen, und leiten darauf das Gesamtmoment vermittels Schlußlinie  $s_7$  über den Stab 7

weiter. Dieses erzeugt in Punkt  $F$  ein Moment, welches ohne weiteres in Stab 3 übergeht und sich dort durch Schlußlinie  $s_3$  fortpflanzt, jedoch in Punkt  $E$  so klein geworden ist, daß es keinen weiteren Einfluß auszuüben vermag.

Die Momentenfläche, herrührend von der Fortpflanzung des Stützenmomentes  $M_3^F$  der belasteten Öffnung, d. h. das Spiegelbild der Momentenfläche herrührend von  $M_3^E$ , wurde in Fig. 48 auf der rechten Hälfte des Tragwerkes gestrichelt eingezeichnet.

Aus dem ganzen Momentenverlauf ersehen wir, daß die Momente beim Weiterleiten tatsächlich sehr schnell abnehmen, was der Berechnungsmethode sehr zugute kommt, wie dies aus den späteren Zahlenbeispielen noch weiter ersichtlich ist.

An dem in Fig. 49 dargestellten

einseitig offenen, allgemeinen Tragwerk

welches an den Knotenpunkten  $C$ ,  $F$  und  $J$  feste Lager besitzt, weshalb seine sämtlichen Knotenpunkte unverschiebbar sind, erhalten wir die Momente infolge der äußeren Lasten  $P_1$  und  $P_2$  bzw. deren rechtwinklig zum belasteten Stab auftreffenden Komponenten  $P_1'$  und  $P_2'$  in analoger Weise wie in Fig. 48 erläutert.

## II. Rechnerische Bestimmung der Festpunkte und der Verteilungsmaße.

Die beiden Festpunkte eines elastisch eingespannten Stabes, dessen Enden keine Verschiebungen ausführen, sind die Momentennullpunkte dieses Stabes für den Fall, daß an einem seiner beiden Enden ein Moment eingeleitet wird und keine äußeren Lasten vorhanden sind. Diese Punkte haben eine von der äußeren Belastung unabhängige Lage.

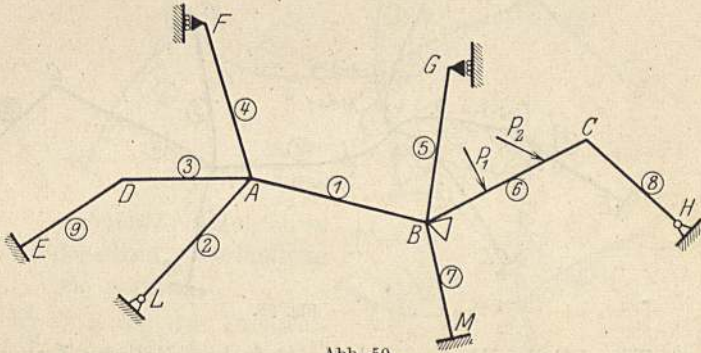


Abb. 50.

Die Verteilungsmaße geben an, welche Anteile von einem Moment, das an einem Knotenpunkt (Stababzweigung) angreift, auf die „anstoßenden“ Stäbe entfallen. Die Summe dieser Zahlen für die anstoßenden Stäbe muß gleich 1 sein (100%).

Zunächst leiten wir die Hauptformeln zur Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmaße an dem allgemeinen durchlaufenden Balkentragwerk der Fig. 50 mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe her und erläutern dann den Rechnungsgang am offenen, einseitig offenen und geschlossenen Tragwerk.

### 1. Bezeichnungen.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein; es sei:

$\alpha_1^{a_0}$  bzw.  $\alpha_1^{b_0}$  (Fig. 51) der Drehwinkel des einfachen Balkens *I* an dem dem Festpunkt- abstand *a* bzw. *b* zunächst gelegenen Knotenpunkt infolge der Belastung mit den äußeren Kräften *P*.

$\alpha_1$  bzw.  $\beta_1$  (Fig. 52) der Drehwinkel des einfachen Balkens *I* infolge der Belastung in *A* mit dem Moment

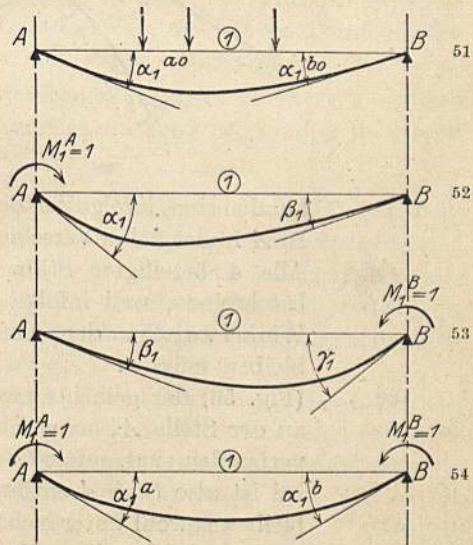


Fig. 51—54.

$M_1^A = 1$  (der Winkel  $\beta$  tritt an dem Auflager auf, wo das Moment nicht eingeleitet wird).

$\gamma_1$  bzw.  $\beta_1$  (Fig. 53) der Drehwinkel des einfachen Balkens  $I$  infolge der Belastung in  $B$  mit  $M_1^B = 1$  (der Winkel  $\beta$  in Fig. 53 ist nach dem Satze von der Gegenseitigkeit der Formänderungen gleich dem Winkel  $\beta$  in Fig. 52).

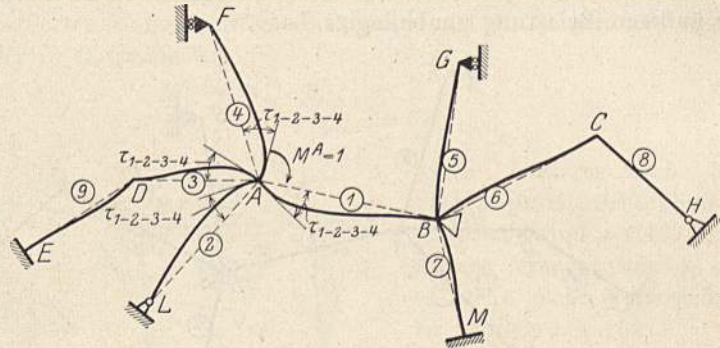


Fig. 55.

$\alpha_1^a$  bzw.  $\alpha_1^b$  (Fig. 54) der Drehwinkel des einfachen Balkens  $I$  an dem dem Festpunktabstand  $a$  bzw.  $b$  zunächst gelegenen Knotenpunkt infolge der gleichzeitigen Belastung  $M_1^A = 1$  und  $M_1^B = 1$ .

$\tau_{1-2-3-4}^A$  (Fig. 55) der gemeinsame gleiche Drehwinkel der Stäbe  $1, 2, 3, 4$  an der Stelle  $A$ , an welcher die Stäbe biegefest miteinander ver-

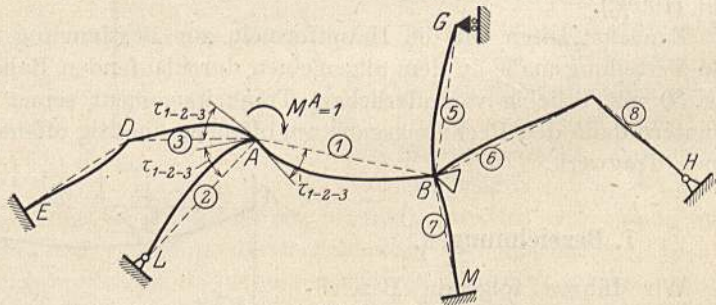


Fig. 56.

bunden sind, infolge der Belastung in  $A$  mit dem Moment  $M^A = 1$ . In  $A$  findet keine Verschiebung, sondern nur eine Drehung statt. Alle 4 beteiligten Stäbe müssen denselben Drehwinkel in  $A$  beschreiben, weil infolge der starren Stabverbindung in  $A$  die Winkel zwischen den einzelnen Stäben bei der Drehung erhalten bleiben müssen.

$\tau_{1-2-3}^A$  (Fig. 56) der gemeinsame gleiche Drehwinkel der Stäbe  $1, 2, 3$  an der Stelle  $A$ , an welcher die Stäbe biegefest miteinander verbunden sind, infolge der Belastung in  $A$  mit  $M^A = 1$ . Hierbei ist also Stab 4 entfernt gedacht, die übrigen Stäbe  $1, 2, 3$  bleiben sowohl unter sich in  $A$ , als auch an ihren anderen Endpunkten in derselben Verbindung wie vorher.

$\tau_{1-2}^A$  (Fig. 57) der gemeinsame gleiche Drehwinkel der Stäbe 1 und 2 an der Stelle  $A$ , an welcher die 2 Stäbe biegungsfest miteinander verbunden sind, infolge der Belastung in  $A$  mit  $M^A = 1$ . Hierbei sind die Stäbe 3 und 4 entfernt gedacht, die übrigen Stäbe 1 und 2 bleiben sowohl unter sich in  $A$  als auch an ihren

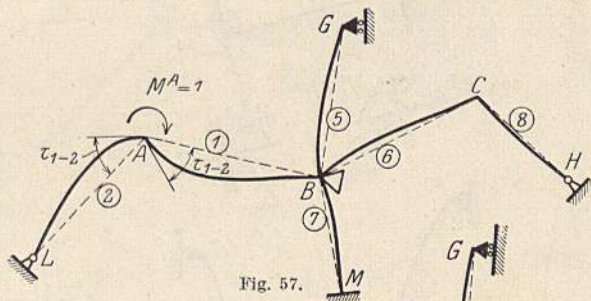


Fig. 57.

anderen Endpunkten in derselben Verbindung wie vorher.

$\tau_1^A$  (Fig. 58) der Drehwinkel des Stabes 1 an der Stelle  $A$  infolge der Belastung  $M^A = 1$  in  $A$ , wobei angenommen ist, daß Stab 1 in einem gedachten Gelenklager in  $A$  frei drehbar gestützt ist und daß an seinem Endpunkt die Verbindung mit der übrigen Konstruktion wie vorher bestehen bleibt.

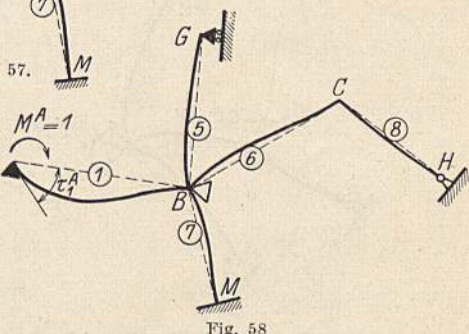


Fig. 58

Ferner bezeichnen wir mit:

$\epsilon_1^a$  allgemein die Drehung desjenigen Widerlagers von Stab 1, welches dem Festpunktabstand  $a$  zunächstgelegen ist (wird benötigt zur Berechnung des Festpunktabstandes  $a$  des Stabes 1) infolge Belastung dieses Widerlagers mit  $M_1^A = 1$ , und analog mit

$\epsilon_1^b$  allgemein die Drehung desjenigen Widerlagers von Stab 1, welches dem Festpunktabstand  $b$  zunächstgelegen ist, infolge Belastung dieses Widerlagers mit  $M_1^B = 1$ .

In Fig. 59 ist die Einspannung des Stabes 1 an seinen beiden Enden schematisch dargestellt; in Fig. 59a ist die elastische Drehung  $\epsilon_1^a$  des dem Stabe 1 zugeordneten, dem Festpunktabstand  $a$  entsprechenden, schematisch dargestellten Widerlagers  $A_1$ , und in Fig. 59b die elastische Drehung  $\epsilon_1^b$  des dem Stabe 1 zugeordneten, dem Festpunktabstand  $b$  entsprechenden, schematisch dargestellten Widerlagers  $B_1$  veranschaulicht.

Das Widerlager des Stabes 1 in  $A$  wird in Wirklichkeit gebildet durch die drei im Knotenpunkt  $A$  biegungsfest verbundenen Stäbe 2, 3, 4 (Fig. 59c) und das Widerlager in  $B$  durch die drei im Knotenpunkt  $B$  biegungsfest verbundenen Stäbe 5, 6, 7 (Fig. 50d). Im vorliegenden Fall ist  $\epsilon_1^a$  (Fig. 50a) gleich  $\tau_{2-3-4}^A$  (Fig. 50c), und  $\epsilon_1^b$  (Fig. 50b) ist gleich  $\tau_{5-6-7}^B$  (Fig. 50d). Wir wollen trotzdem die Bezeichnungen  $\epsilon_1^a$  und  $\epsilon_1^b$  in die meisten späteren Formeln an Stelle

der Drehwinkel  $\tau_{2-3-4}^A$  bzw.  $\tau_{5-6-7}^B$  aufnehmen, weil sie allgemeiner sind und besonders dann zutreffen, wenn das betreffende Stabende nicht an andere Stäbe angeschlossen, sondern in Fundament- oder aufgehendes Mauerwerk eingespannt

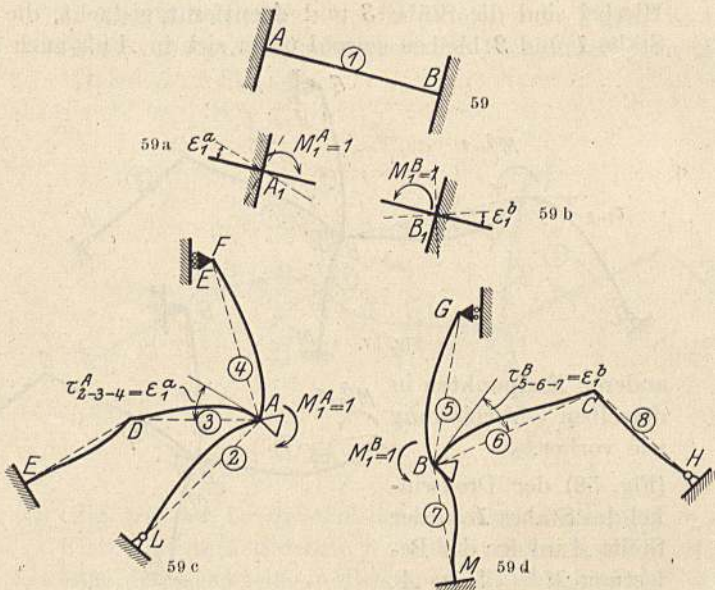


Fig. 59—59 d.

ist.  $\varepsilon_1^a$  bzw.  $\varepsilon_1^b$  kann alle Werte zwischen Null und Unendlich haben, und zwar den Wert Null bei fester Einspannung des Stabendes  $A$  bzw.  $B$ , und den Wert Unendlich bei gelenkartiger (frei drehbarer) Lagerung derselben.

## 2. Momentenverlauf.

Wir nehmen in Fig. 60 die Momentenfläche am ganzen Stabwerk, hervorgerufen durch die Belastung des Stabes 6 mit den Kräften  $P_1$  und  $P_2$  vorläufig als bekannt an, und bemerken nur, daß wir eine schief zur Stabachse gerichtete Kraft  $P_2$  stets in eine Komponente  $P_2'$  in Richtung des belasteten Stabes und in eine Komponente  $P_2''$  rechtwinklig dazu zerlegen und für letztere die Momentenfläche bestimmen.

Wir trennen nun Stab 6 durch in  $B_6$  und  $C_6$  geführte Schnitte heraus und belasten die übrige, noch in  $C$  anschließende Konstruktion (Stab 8, könnte auch ein Fundament sein) mit  $M_6^C$  und die andere, in  $B$  anschließende Konstruktion, bestehend aus den Stäben 1, 2, 3, 5, 6, 7 und 9 mit  $M_6^B$  (Fig. 61).

Das Moment  $M_6^B$  pflanzt sich über die übrige Konstruktion fort und spaltet sich am Knotenpunkt  $B$  in die Stützmomente  $M_1^B$ ,  $M_5^B$  und  $M_7^B$ . Nehmen wir diese Momente vorläufig als bekannt an, so können wir Schnitte in  $B_1$ ,  $B_5$  und  $B_7$  führen, die Stäbe 1, 5, 7 an den Schnittstellen gelenkartig stützen und mit den Momenten  $M_1^B$  bzw.  $M_5^B$  bzw.  $M_7^B$  belasten (Fig. 62, 62a und 62b); dann untersuchen wir, wie sich diese Momente über die Stäbe 1, 5, 7 fort-pflanzen.



In Fig. 63 haben wir die Stäbe 2, 3, 4, welche das Widerlager des Stabes 1 in  $A$  bilden, fortgelassen und dafür die Einspannung des Stabes 1 in  $A$  schematisch dargestellt. Wir führen nun in  $A$  einen Schnitt und stützen den Balken daselbst frei drehbar (Fig. 63a). Infolge der Belastung mit  $M_1^B$  wird dann die in Fig. 63a gezeichnete Durchbiegung des einfachen Balkens erzeugt, wobei die Schnittfläche  $A_1$  am Balken und die entsprechende am Widerlager sich nicht mehr decken, sondern einen gewissen Winkel miteinander bilden. Um die beiden Querschnitte wieder zur Deckung zu bringen, muß offenbar an der

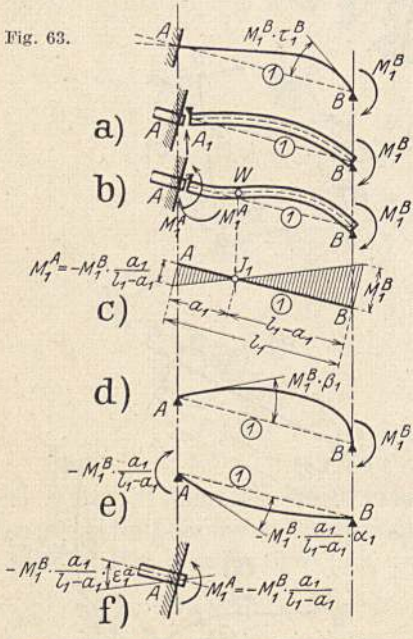


Fig. 63—63 f.

Querschnittsfläche  $A_1$  des Balkens ein rechtsdrehendes Moment angebracht werden, das sog. Einspannmoment (Fig. 63 b). Hierdurch wird der Stab 1 in der Nähe von  $B$  entgegengesetzt durchgebogen als vorher, und es ist hieraus ersichtlich, daß offenbar zwischen  $A$  und  $B$  ein Wendepunkt  $W$  in der elastischen Linie liegen muß, welchem bekanntlich ein Wechsel im Momentenverzeichen entspricht, so daß die Momentenfläche die in Fig. 63c dargestellte Form haben muß. Ist das Einspannmoment sehr klein, also die Einspannung in  $A$  gering, so fällt  $W$  beinahe mit  $A$  zusammen. Mit wachsender Einspannung in  $A$  entfernt  $W$  sich von  $B$  und nimmt seine größte Entfernung von  $A$  bei vollkommener oder fester (nicht elastischer) Einspannung des Stabes 1 im Widerlager  $B$  ein. Wir erkennen, daß  $W$  jedenfalls nahe bei  $A$  liegt und sein

Abstand  $a_1$  von  $A$  dem Einspannungsgrad des Stabes 1 entspricht. Für eine gegebene Einspannung, d. i. Steifigkeit der in  $A$  anschließenden Konstruktion, hat der Wendepunkt  $W$  eine feste, von der äußeren Belastung unabhängige Lage. Wir bezeichnen ihn daher als Festpunkt  $J_1$  des Stabes 1.

In vorliegendem Fall wurde ein Moment  $M_1^B$  in  $B$  eingeleitet und in der Richtung  $\overleftarrow{BA}$  über den Stab 1 fortgepflanzt. Würden wir jedoch in  $A$  ein Moment  $M_1^A$  einleiten und in der Richtung  $\overleftarrow{AB}$  über den Stab 1 weiterleiten, so würde sich analog ein Wendepunkt in der Nähe von  $B$  ausbilden, welchen wir als Festpunkt  $K_1$  des Stabes 1 bezeichnen, und dessen Entfernung  $b_1$  von  $B$  nur von dem Einspannungsgrade des Stabes 1 an seinem Widerlager in  $B$  abhängt.

In ähnlicher Weise erhalten wir z. B. die Abstände  $a_6$  und  $b_6$  der Festpunkte  $J_6$  und  $K_6$  des Stabes 6 in der Nähe von  $B$  resp.  $C$ , die Abstände  $a_7$  und  $b_7$  der Festpunkte  $J_7$  und  $K_7$  des Stabes 7 in der Nähe von  $M$  bzw.  $B$  usw.

Nach Fig. 63c beträgt das Moment in  $A$ :

$$M_1^A = - M_1^B \cdot \frac{a_1}{l_1 - a_1} \tag{2}$$



wenn  $l_1$  die Länge des Stabes  $I$  bedeutet. Dies ist also das Einspannungsmoment, welches in Fig. 63b sowohl an der Querschnittsfläche  $A$  des Balkens wie des Widerlagers, mit dem eingetragenen Drehsinn angebracht werden muß, damit beide wieder zur Deckung kommen. Dann beträgt:

1. Die Drehung des Querschnittes  $A_1$  am Stab  $I$ :

a) durch  $M_1^B$  nach Fig. 63d:  $M_1^B \cdot \beta_1$ ,

b) durch  $M_1^A = -M_1^B \cdot \frac{a_1}{l_1 - a_1}$  nach Fig. 63e:  

$$-M_1^B \cdot \frac{a_1}{l_1 - a_1} \cdot \alpha_1.$$

2. Die Drehung des Querschnittes  $A_1$  am Widerlager  $A$ :

durch  $M_1^A = -M_1^B \cdot \frac{a_1}{l_1 - a_1}$  nach Fig. 63f:  

$$-M_1^B \cdot \frac{a_1}{l_1 - a_1} \cdot \varepsilon_1^a.$$

Da nun die Querschnittsfläche  $A$  am Stab  $I$  und am Widerlager bei ihrer Wiedervereinigung denselben Drehwinkel zurückgelegt haben müssen, oder mit anderen Worten die Summe der zurückgelegten Drehwinkel gleich Null sein muß, so besteht folgende Gleichung:

$$M_1^B \cdot \beta_1 - M_1^B \cdot \frac{a_1}{l_1 - a_1} \cdot \alpha_1 - M_1^B \cdot \frac{a_1}{l_1 - a_1} \cdot \varepsilon_1^a = 0, \quad (3)$$

$$\frac{a_1}{l_1 - a_1} (\alpha_1 + \varepsilon_1^a) = \beta_1 \quad (3a)$$

oder

$$\frac{a_1}{l_1 - a_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \varepsilon_1^a}, \quad (4)$$

woraus folgt:

$$a_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1 + \beta_1 + \varepsilon_1^a}. \quad (5)$$

Setzen wir schließlich, wie aus den Fig. 52, 53 und 54 hervorgeht,

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1^a, \quad (6)$$

so folgt für einen beliebigen geradlinigen Stab die allgemeine Hauptformel

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^a + \varepsilon^a}. \quad (7)$$

Analog erhalten wir für den Festpunktabstand  $b$  die allgemeine Hauptformel:

$$b = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^b + \varepsilon^b}. \quad (8)$$

Die Werte für die in den beiden Hauptformeln (7) und (8) vorkommenden Drehwinkel  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$  und  $\beta$  wurden in Kap. IV für Stäbe mit veränderlichem und konstantem Trägheitsmoment abgeleitet; für Stäbe mit geraden und parabolischen Vouten sind im Anhang Tabellen enthalten.

Am geradlinigen Stab mit konstantem Trägheitsmoment auf seine ganze Länge ist, da in diesem Falle nach Gl. (207a):

$$\alpha^a = \alpha^b = 3\beta:$$

$$a = \frac{l}{3 + \frac{\varepsilon^a}{\beta}} \quad (7a)$$

$$b = \frac{l}{3 + \frac{\varepsilon^b}{\beta}} \quad (8a)$$

#### 4. Drehwinkel $\varepsilon^a$ und $\varepsilon^b$ .

Wir ermitteln nun die in den beiden Hauptformeln (7) und (8) vorkommenden Drehungen  $\varepsilon_1^a$  und  $\varepsilon_1^b$  der Widerlager  $A$  und  $B$ .

Die Ableitung führen wir nur für die Drehung  $\varepsilon_1^a$  durch und nehmen dabei an, daß sich in  $A$ , wie in Fig. 60 gezeichnet, die drei Stäbe 2, 3 und 4 an den Stab  $I$  biegefest anschließen, so daß laut Definition

$$\varepsilon_1^a = \tau_{2-3-4}^A,$$

welcher Drehwinkel also zu bestimmen ist:

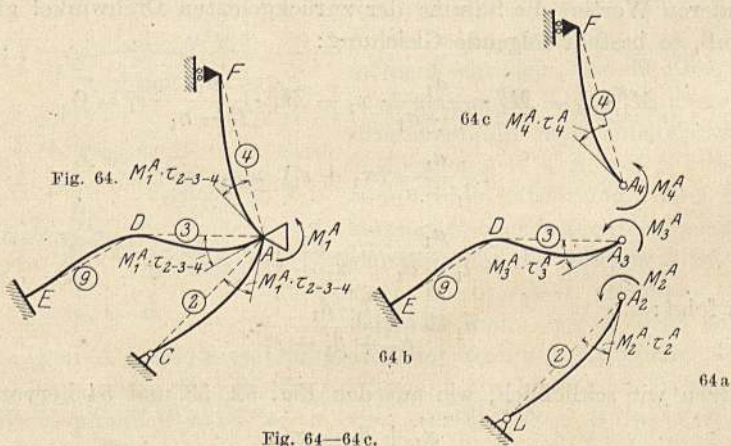


Fig. 64—64c.

Das durch Gl. (1) bestimmte Moment  $M_1^A$  erzeugt in  $A$  an den drei dort biegefest miteinander verbundenen Stäben 2, 3 und 4 den gemeinsamen gleichen Drehwinkel  $M_1^A \cdot \tau_{2-3-4}$  (Fig. 64) und die entsprechenden Stützmomente  $M_2^A$ ,  $M_3^A$  und  $M_4^A$ . Nehmen wir diese Momente vorläufig als bekannt an, so können wir auch Schnitte in  $A_2$ ,  $A_3$  und  $A_4$  führen, die Stäbe 2, 3 und 4 an den Schnittstellen gelenkartig stützen und mit den Momenten  $M_2^A$ ,  $M_3^A$  und  $M_4^A$  belasten. Die hierbei erzeugten Drehwinkel  $M_2^A \cdot \tau_2^A$  (Fig. 64a),  $M_3^A \cdot \tau_3^A$  (Fig. 64b) und  $M_4^A \cdot \tau_4^A$  (Fig. 64c) müssen gleich dem Drehwinkel derselben Stäbe in Fig. 64 sein. Wir erhalten daher die folgenden drei Gleichungen:

$$M_1^A \cdot \tau_{2-3-4}^A = M_2^A \cdot \tau_2^A, \quad (9)$$

$$M_1^A \cdot \tau_{2-3-4}^A = M_3^A \cdot \tau_3^A, \quad (10)$$

$$M_1^A \cdot \tau_{2-3-4}^A = M_4^A \cdot \tau_4^A. \quad (11)$$

Eine vierte Gleichung erhalten wir aus der Bedingung, daß am herausgetrennten Knotenpunkt  $A$  (Fig. 65) die drei Schnittmomente  $M_2^A$ ,  $M_3^A$  und  $M_4^A$  mit dem erzeugenden Moment  $M_1^A$  im Gleichgewicht stehen müssen oder

$$M_1^A = M_2^A + M_3^A + M_4^A. \quad (12)$$

Aus den Gleichungen (9), (10), (11) erhalten wir:

$$M_2^A = M_1^A \cdot \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_2^A}, \quad (13)$$

$$M_3^A = M_1^A \cdot \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_3^A}, \quad (14)$$

$$M_4^A = M_1^A \cdot \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_4^A}. \quad (15)$$

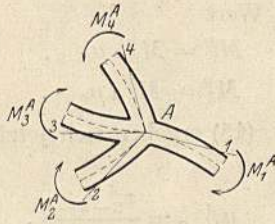


Fig. 65.

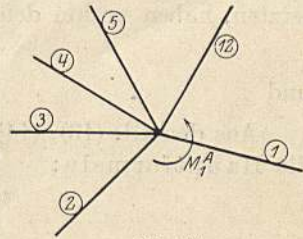


Fig. 66.

Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (12) ergibt sich:

$$M_1^A = M_1^A \cdot \tau_{2-3-4}^A \left( \frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A} \right), \quad (16)$$

woraus die wichtige Beziehung folgt:

$$\tau_{2-3-4}^A = \frac{1}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A}}. \quad (17)$$

Aus Gl. (17) ergibt sich ohne weiteres als Drehwinkel an einem Knotenpunkt  $A$  mit  $1, 2, 3, 4 \dots n$  (Fig. 66) daselbst biegungsfest vereinigten Stäben:

$$\tau_{1-2-3-4 \dots n}^A = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1^A} + \frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{\tau}}. \quad (18)$$

### 5. Verteilungsmaße $\mu$ .

Die Momente  $M_2^A$ ,  $M_3^A$  und  $M_4^A$  sind alle kleiner als  $M_1^A$ , die Koeffizienten von  $M_1^A$  auf den rechten Seiten der Gleichungen (13), (14), (15) sind daher alle kleiner als 1 und ihre Summe muß gleich 1 sein.

Wir bezeichnen diese Koeffizienten als Verteilungsmaße am Knotenpunkt  $A$  für den Übergang des Momentes  $M_1^A$ , weil man das erzeugende Moment  $M_1^A$  nur mit diesen Zahlen zu multiplizieren hat, um die gesuchten Momente  $M_2^A$ ,  $M_3^A$  und  $M_4^A$  zu erhalten. Für diese Verteilungsmaße führen wir allgemein die Bezeichnung  $\mu$  ein und schreiben zur Unterscheidung im vorliegenden Falle:

für den Koeffizienten in Gl. (13):  $\mu_{1-2}^A$  (gelesen  $\mu$  in  $A$  von 1 nach 2),

für den Koeffizienten in Gl. (14):  $\mu_{1-3}^A$ ,

für den Koeffizienten in Gl. (15):  $\mu_{1-4}^A$ ,

womit angedeutet sein soll, daß der Übergang in Knotenpunkt  $A$  stattfindet, und zwar von Stab 1 nach Stab 2 bzw. 3 bzw. 4.

Wir können nun die Gl. (13), (14) und (15) einfacher schreiben und erhalten:

$$M_2^A = M_1^A \cdot \mu_{1-2}^A, \quad (19)$$

$$M_3^A = M_1^A \cdot \mu_{1-3}^A, \quad (20)$$

$$M_4^A = M_1^A \cdot \mu_{1-4}^A, \quad (21)$$

und die Momente  $M_5^B$  und  $B_7^B$ , welche wir oben vorläufig als bekannt voraussetzten, haben mithin den Wert

$$M_5^B = M_6^B \cdot \mu_{6-5}, \quad (22)$$

und 
$$M_7^B = M_6^B \cdot \mu_{6-7}. \quad (23)$$

Aus den Gl. (13), (14), (15) ergeben sich jetzt für die Verteilungsmaße  $\mu$  die Hauptformeln:

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_2^A}, \quad (24)$$

$$\mu_{1-3}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_3^A}, \quad (25)$$

$$\mu_{1-4}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_4^A}, \quad (26)$$

und allgemein:

$$\mu_{1-n}^A = \frac{\tau_{2-3-\dots-n}}{\tau_n} \quad (26a)$$

in welchen der Wert von  $\tau_{2-3-4}^A$  aus Gl. (17) einzusetzen ist.

Hat man zwei der vorstehenden drei Faktoren  $\mu$  bestimmt, so erhält man den dritten auch aus der Ergänzung der Summe der beiden anderen zu 1, d. h. es ist z. B.

$$\mu_{1-4}^A = 1 - (\mu_{1-2}^A + \mu_{1-3}^A). \quad (27)$$

Es sei hervorgehoben, daß die gemeinsamen Drehwinkel  $\varepsilon$ , in vorliegendem Falle  $\tau_{2-3-4}^A$ , schon bei der Bestimmung der Festpunkte ermittelt werden müssen und deshalb zur Einsetzung in obige Hauptformeln für  $\mu$  zur Verfügung stehen.

Um jedoch eine Form für  $\mu$  zu zeigen, die man sich leicht merken kann, setzen wir noch den Wert von  $\tau_{2-3-4}^A$  aus Gl. (17) in obige Hauptformeln ein und erhalten:

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\frac{1}{\tau_2^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A}}, \quad (28)$$

$$\mu_{1-3}^A = \frac{\frac{1}{\tau_3^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A}}, \quad (29)$$

$$\mu_{1-4}^A = \frac{\frac{1}{\tau_4^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A}}. \quad (30)$$

Würden sich im Knotenpunkt  $A$  nicht nur 3, sondern  $n$  Stäbe anschließen (das Widerlager des Stabes  $1$  in  $A$  bildend), so wäre z. B. (Fig. 66)

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\frac{1}{\tau_2^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}}, \quad (31)$$

$$\mu_{1-3}^A = \frac{\frac{1}{\tau_3^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}}, \quad (32)$$

$$\mu_{1-n}^A = \frac{\frac{1}{\tau_n^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}}. \quad (33)$$

Selbstverständlich ist es gleichgültig, ob das Moment  $M_1^A$  in Fig. 66 ein Stützenmoment (wenn Stab  $1$  eine Balkenöffnung ist) oder ein Konsolmoment (wenn Stab  $1$  ein Kragarm ist) darstellt.

Aus der Definition der Winkel  $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$  ergibt sich ohne weiteres, daß z. B. der Wert  $M = \frac{1}{\tau_n}$  gleich ist dem Widerstand, welchen der Stab  $n$  seiner Verdrehung entgegensetzt, und wir nennen das Verhältnis  $\frac{1}{\tau_n}$  daher das „Elastizitätsmaß“ des Stabes  $n$ .

Aus den Formeln (31), (32) und (33) erkennen wir nun die natürliche Beziehung, daß sich das in  $A$  eingeleitete Moment  $M_1^A$  auf die dort biegungsfest angeschlossenen („anstoßenden“) Stäbe  $2, 3 \dots n$  im Verhältnis der Elastizitätsmaße derselben verteilt (daher der Ausdruck „Verteilungsmaße“), d. h. im Nenner des Ausdruckes für  $\mu$  steht immer die Summe der Elastizitätsmaße der Stäbe, in welche sich ein Moment fortpflanzt, und im Zähler das Elastizitätsmaß desjenigen Stabes, dessen Teilmoment man sucht.

In dieser Form kann man sich den Ausdruck für die Verteilungsmaße  $\mu$  am besten merken.

### Sonderfall.

Hat man z. B. in Fig. 67 ein Stützenmoment  $M_1^A$  in nur zwei „anstoßende“ Stäbe  $2$  und  $3$  weiterzuleiten, so ist nach Gl. (17):

$$\tau_{2-3}^A = \frac{1}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A}} \quad (34)$$

und nach Gl. (24):

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\tau_{2-3}^A}{\tau_2^A}. \quad (35)$$

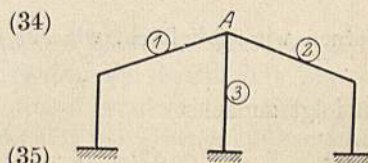


Fig. 67.

Multiplizieren wir Zähler und Nenner von Gl. (34) mit  $\tau_2^A \cdot \tau_3^A$ , so ergibt sich

$$\tau_{2-3}^A = \frac{\tau_2^A \cdot \tau_3^A}{\tau_2^A + \tau_3^A}. \quad (36)$$

Setzen wir diesen Wert in Gl. (35) ein, so erhalten wir

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\tau_3^A}{\tau_2^A + \tau_3^A} \quad (37)$$

und es ist

$$\mu_{1-3}^A = 1 - \mu_{1-2}^A. \quad (38)$$

Wir können also in einfachen Fällen mit zwei „anstoßenden“ Stäben zur Ermittlung des gemeinsamen Drehwinkels und des Verteilungsmaßes die Drehwinkel  $\tau_2^A$  und  $\tau_3^A$  direkt in Formel (36) und (37) einsetzen und brauchen dann die Elastizitätsmaße  $\frac{1}{\tau_1^A}, \frac{1}{\tau_2^A}$  usw. nicht zu bilden. Dies ist aber nur dann zweckmäßig, wenn ein Moment nur auf zwei Stäbe verteilt werden muß.

## 6. Einfache Drehwinkel $\tau$ .

Die in den Formeln für den Wert  $\tau_{1-2-3} \dots \tau_n$  sowie  $\mu_{1-n}$  vorkommenden Drehwinkel  $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$  sind zum Schluß noch zu bestimmen. Die Ableitung folgt nachstehend beispielsweise für den

Drehwinkel  $\tau_1^A$ :

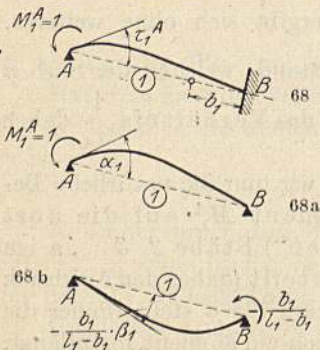


Fig. 68-68 b.

Nach der Definition des Drehwinkels  $\tau_1^A$  bildet sich derselbe, wenn wir (Fig. 68) den in  $B$  elastisch eingespannten, in  $A$  frei drehbar gestützten Stab  $I$  mit  $M_1^A = 1$  belasten. Dann entsteht

in  $B_1$  das Moment  $-\frac{b_1}{l_1 - b_1}$ .

Belasten wir jetzt den einfachen Balken  $I$  am Auflager  $A$  mit  $M_1^A = 1$  und am Auflager  $B$  mit dem Moment  $-\frac{b_1}{l_1 - b_1}$ , so muß durch die Gesamt-

wirkung beider Momente der Drehwinkel  $\tau_1^A$  entstehen.

Durch  $M_1^A = 1$  entsteht (Fig. 68a) der Drehwinkel  $\alpha_1$ ,

durch  $-\frac{b_1}{l_1 - b_1}$  in  $B$  entsteht (Fig. 68b) in  $A$  der Drehwinkel  $-\frac{b_1}{l_1 - b_1} \cdot \beta_1$ .

Es ist mithin:

$$\tau_1^A = \alpha_1 - \frac{b_1}{l_1 - b_1} \cdot \beta_1. \quad (39)$$

Setzen wir schließlich, wie aus den Fig. 52, 53 und 54 hervorgeht,

$$\alpha_1 = \alpha_1^a - \beta_1, \quad (40)$$

so folgt zunächst

$$\tau_1^A = \alpha_1^a - \beta_1 - \frac{b_1}{l_1 - b_1} \cdot \beta_1 = \alpha_1^a - \beta_1 \left(1 + \frac{b_1}{l_1 - b_1}\right) \quad (41)$$

und daraus für einen beliebigen geradlinigen Stab die Hauptformel

$$\tau^A = \alpha^a - \frac{l}{l-b} \cdot \beta. \quad (42)$$

Analog erhalten wir für den Drehwinkel  $\tau^B$  am andern Ende des betreffenden Stabes  $AB$ , falls wir den in  $A$  elastisch eingespannten, in  $B$  frei drehbar gestützten Stab mit  $M^B = 1$  belasten, die Hauptformel

$$\tau^B = \alpha^b - \frac{l}{l-a} \cdot \beta. \quad (43)$$

Die Werte für die in den beiden Hauptformeln (42) und (43) vorkommenden Drehwinkel  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$  und  $\beta$  wurden in Kap. IV für Stäbe mit veränderlichem und konstantem Trägheitsmoment abgeleitet.

Am geradlinigen Stab mit konstantem Trägheitsmoment auf seine ganze Länge ist, da in diesem Falle nach Gl. (207a):  $\alpha^a = \alpha^b = 3\beta$ :

$$\tau^A = \beta \left( 3 - \frac{l}{l-b} \right), \quad (42a)$$

$$\tau^B = \beta \left( 3 - \frac{l}{l-a} \right), \quad (42b)$$

### 7. Festpunkte und Verteilungsmaße am „offenen“ Tragwerk.

Sind für einen bestimmten Stab die Festpunkte  $J$  und  $K$  sowie die Verteilungsmaße  $\mu$  zu bestimmen, so werden zuerst die in den Hauptformeln für  $a$ ,  $b$  und  $\mu$  vorkommenden Drehwinkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  und  $\tau$  nach den Formeln in Kap. IV, welche dort für veränderliches und konstantes Trägheitsmoment

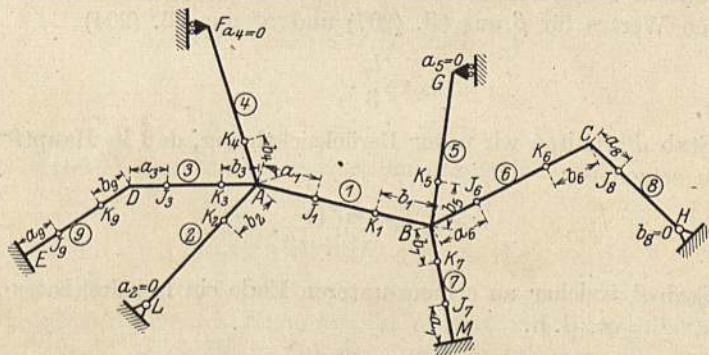


Fig. 69.

eines Stabes angeschrieben sind, ermittelt, und diese Werte in die genannten Hauptformeln eingesetzt.

Da sich die in irgendeinem Stab auftretenden Momente über das ganze Tragwerk fortpflanzen, so müssen an allen Stäben die Festpunkte und an jedem Knotenpunkt die Verteilungsmaße bestimmt werden. Die Frage entsteht nun, an welchem Stab wir bei der Bestimmung der Festpunkte beginnen, d. h. welchen Stabes Festpunkt wir zuerst ermitteln müssen. Beginnen wir

z. B. an dem „offenen“ Tragwerk der Fig. 69 mit dem Stab *I*, so erhalten wir die Festpunktabstände aus:

$$a_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^a + \tau_{2-3-4}^A}, \quad (44)$$

$$b_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^b + \tau_{5-6-7}^B}. \quad (45)$$

In diesen Ausdrücken beziehen sich die Winkel  $\alpha_1^a$ ,  $\alpha_1^b$  und  $\beta_1$  auf den Stab *I*, der Winkel  $\tau_{2-3-4}^A$  auf die links und der Winkel  $\tau_{5-6-7}^B$  auf die rechts anstoßenden Stäbe. Um den Winkel  $\tau_{2-3-4}^A$  und hierzu die Winkel  $\tau_2^A$ ,  $\tau_3^A$  und  $\tau_4^A$  berechnen zu können, benötigen wir jedoch die Festpunktabstände *a* der Stäbe 2, 3 und 4 (der Abstand  $a_4$  wird gleich Null wegen des freien Auflagers in *F*). Und um den Festpunkt  $a_3$  des Stabes 3 bestimmen zu können, brauchen wir den Winkel  $\varepsilon_3^D = \tau_3^D$  und zu letzterem Wert wiederum den Festpunktabstand  $a_9$ . Das Analoge gilt für den Drehwinkel  $\tau_{5-6-7}$ , welcher in dem Ausdruck für  $b_1$  vorkommt. Aus diesem Grunde beginnen wir mit der Bestimmung des am weitesten links gelegenen Festpunktabstandes *a* und schreiten nach rechts fort und analog beginnen wir mit der Bestimmung des am weitesten rechts gelegenen Festpunktabstandes *b* und schreiten nach links fort.

Da der Stab 9 an seinem linken Ende fest eingespannt ist, so ist in Hauptformel (7)  $\varepsilon^a = 0$  zu setzen und es ist

$$a_9 = \frac{l_9 \cdot \beta_9}{\alpha_9^a}. \quad (46)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment des Stabes 9 ist mit Einsetzung des entsprechenden Wertes für  $\beta$  aus Gl. (207) und  $\alpha^a$  aus Gl. (204)

$$a_9 = \frac{l_9}{3}. \quad (47)$$

Für Stab 3 erhalten wir unter Berücksichtigung, daß in Hauptformel (7)  $\varepsilon^a = \tau_3^D$  zu setzen ist:

$$a_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^a + \tau_3^D}. \quad (48)$$

Für Stab 2, welcher an seinem unteren Ende ein frei drehbares Auflager besitzt, ist  $\varepsilon^a = \infty$ , d. h.

$$a_2 = 0. \quad (49)$$

Für Stab 4, dessen linkes Ende frei aufgelagert (Rollenlager) angenommen wurde, ist ebenfalls  $\varepsilon^a = \infty$ , d. h.

$$a_4 = 0.$$

Nun können wir  $a_1$  bestimmen und darauf ( $a_5 = 0$ )  $a_6$ ,  $a_7$  und  $a_8$ .

Analog verfahren wir bei der Bestimmung der Festpunktabstände *b*: Wir beginnen mit  $b_8$ ; wegen des Gelenkes in *H* ist

$$b_8 = 0. \quad (51)$$



Dann berechnen wir  $b_6$ ,  $b_5$  und  $b_7$  und ermitteln darauf  $b_1$ , dann  $b_2$ ,  $b_3$  und  $b_4$  und zuletzt  $b_9$ . Es ist

$$b_6 = \frac{l_6 \cdot \beta_6}{\alpha_6^b + \tau_8^c}, \quad (52)$$

worin  $\tau_8^c = \alpha_8$ , da  $b_8 = 0$ ,

$$b_5 = \frac{l_5 \cdot \beta_5}{\alpha_5^b + \tau_{1-6-7}^B}, \quad (53)$$

$$b_7 = \frac{l_7 \cdot \beta_7}{\alpha_7^b + \tau_{1-5-6}^B}, \quad (54)$$

$$b_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^b + \tau_{5-6-7}^B}, \quad (55)$$

$$b_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^b + \tau_{1-3-4}^A}, \quad (56)$$

$$b_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^b + \tau_{1-2-4}^A}, \quad (57)$$

$$b_4 = \frac{l_4 \cdot \beta_4}{\alpha_4^b + \tau_{1-2-3}^A}, \quad (58)$$

$$b_9 = \frac{l_9 \cdot \beta_9}{\alpha_9^b + \tau_3^D}. \quad (59)$$

Was die Bestimmung der Verteilungsmaße  $\mu$  betrifft, so ist nur noch zu bemerken, daß die Anzahl der zu ermittelnden Verteilungsmaße sich nach den belasteten Stäben richtet. Ist z. B. in Fig. 69 nur Stab 1 belastet, so sind zu bestimmen:

$$\mu_{1-2}, \mu_{1-3},$$

$$\mu_{1-4} = 1 - (\mu_{1-2} + \mu_{1-3})$$

sowie

$$\mu_{1-5}, \mu_{1-6},$$

$$\mu_{1-7} = 1 - (\mu_{1-5} + \mu_{1-6}).$$

Ist auch Stab 3 belastet, so sind noch zu ermitteln:

$$\mu_{3-4}, \mu_{3-1},$$

$$\mu_{3-2} = 1 - (\mu_{3-4} + \mu_{3-1}).$$

Soll ein in einem Stabe durch Belastung erzeugtes oder sonstwie eingeleitetes Moment über einen Knotenpunkt (Punkt mit mehr als einem „anstoßenden“ Stab) fortgepflanzt werden, so müssen eben alle notwendigen Verteilungsmaße bestimmt werden.

### 8. Festpunkte und Verteilungsmaße am „einseitig offenen“ Tragwerk.

Haben wir es nicht mit einem allseitig offenen, sondern mit einem nur einseitig offenen Tragwerk zu tun, wie z. B. in Fig. 70, so beginnen wir auf der offenen Seite des Tragwerks, und zwar mit der Bestimmung der Festpunktabstände  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$ . Um mit der Berechnung fortfahren zu können, müssen wir, weil das Tragwerk oben durch die Stäbe 9 und 10 ge-



und die Festpunktabstände an den Balken 9 und 10 ergeben sich nun zu:

$$a_9 = \frac{l_9 \cdot \beta_9}{\alpha_9^a + \tau_4^a} \tag{68}$$

und nach rechts fortschreitend

$$a_{10} = \frac{l_{10} \cdot \beta_{10}}{\alpha_{10}^a + \tau_{5-9}^H} \tag{69}$$

Ferner

$$b_{10} = \frac{l_{10} \cdot \beta_{10}}{\alpha_{10}^b + \tau_6^L} \tag{70}$$

und nach links fortschreitend

$$b_9 = \frac{l_9 \cdot \beta_9}{\alpha_9^b + \tau_{5-10}^H} \tag{74}$$

Da wir die Festpunktabstände  $b_4$ ,  $b_5$  und  $b_6$  nur geschätzt hatten, so müssen wir nun diese Abstände dadurch kontrollieren, daß wir die Rechnung von oben herunter durchführen unter der Annahme, daß die Festpunktabstände an den Balken 9 und 10 richtig seien. Wurden die Festpunktabstände  $b_4$ ,  $b_5$  und  $b_6$  schlecht geschätzt, so werden sich dieselben bei der Rechnung von oben herunter etwas ändern und eine zweite Rechnung von unten hinauf auf Grund der korrigierten „geschätzten“ Abstände  $b_4$ ,  $b_5$  und  $b_6$  bringt uns dann dem genau richtigen Resultate derart nahe, daß eine weitere Rechnung in den meisten Fällen überflüssig wird.

An Stelle der Festpunktabstände  $b_4$ ,  $b_5$  und  $b_6$  hätten wir auch die Festpunktabstände  $a_7$ ,  $b_7$ ,  $a_8$  und  $b_8$  an den Balken 7 und 8 als „geschätzte“ annehmen und auf Grund dieser die Lage der Festpunkte an den Säulen 4, 5, 6 und an den Balken 9 und 10 berechnen können. Wir hätten dann aber vier Festpunkte schätzen müssen anstatt drei, und es ist klar, daß je mehr Festpunkte als „geschätzte“ eingeführt werden, desto länger dauert die Rechnung, bis ein bestimmter Genauigkeitsgrad in den Festpunktabständen erreicht ist. Theoretisch können alle Festpunkte zuerst geschätzt und dann durch Durchführen der Rechnung allmählich auf den gewünschten Genauigkeitsgrad, d. h. dahin gebracht werden, daß die Werte bei wiederholter Durchrechnung keine Abweichungen mehr zeigen, aber dies wäre Zeitverschwendung.

Wenn alle Festpunkte bekannt sind, werden die erforderlichen Verteilungsmaße  $\mu$  wie früher beschrieben ermittelt.

Es sei noch erwähnt, daß es ganz gleichgültig ist, an welchem Stabende der Festpunktabstand mit  $a$  oder  $b$  bezeichnet wird, denn an einem einseitig offenen oder geschlossenen Tragwerk können nie zuerst alle Festpunktabstände  $a$  und dann alle Abstände  $b$  ermittelt werden. Aus diesem Grunde ist es bei solchen Tragwerken zweckmäßig, die Festpunktabstände nicht mit  $a$  und  $b$ , sondern mit dem kleinen Buchstaben desjenigen Knotenpunktes zu bezeichnen, von dem aus sie gemessen werden (siehe Fig. 70a).

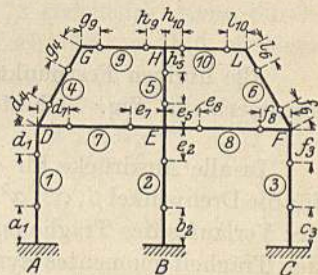


Fig. 70 a.

### 9. Festpunkte und Verteilungsmaße am „geschlossenen“ Tragwerk.

Aus dem einseitig offenen Tragwerk der Fig. 70 wird ein „geschlossenes“ Tragwerk, wenn, wie dies in Fig. 71 dargestellt ist, die Auflagerpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  durch zwei Balken  $11$  und  $12$  miteinander verbunden sind.

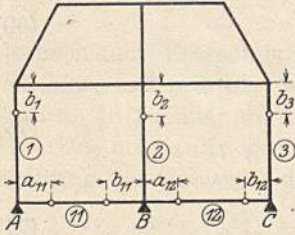


Fig. 71.

In diesem Falle beginnen wir bei der Bestimmung der Festpunkte ebenfalls unten, wir müssen jedoch, da das Tragwerk unten nicht mehr offen ist, auch noch die Festpunktabstände  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_3$  vorläufig schätzen, und zwar zweckmäßig analog dem unter „einseitig offenes Tragwerk“ Gesagten, worauf wir in der Lage sind, die Festpunktabstände an den Balken  $11$  und  $12$  zu berechnen. Es ist

$$a_{11} = \frac{l_{11} \cdot \beta_{11}}{\alpha_{11}^a \cdot \tau_1^A} \quad (72)$$

und nach rechts fortschreitend

$$a_{12} = \frac{l_{12} \cdot \beta_{12}}{\alpha_{12}^a \cdot \tau_{2-11}^B} \quad (73)$$

Ferner ist

$$b_{12} = \frac{l_{12} \cdot \beta_{12}}{\alpha_{12}^b \cdot \tau_3^C} \quad (74)$$

und nach links fortschreitend

$$b_{11} = \frac{l_{11} \cdot \beta_{11}}{\alpha_{11}^b \cdot \tau_{2-12}^B} \quad (75)$$

Alle übrigen Festpunktabstände können wir nun wie am einseitig offenen Tragwerk der Fig. 70 bestimmen.

In alle Ausdrücke für  $a$ ,  $b$  und  $\mu$  sind die in Kap. IV abgeleiteten Werte für die Drehwinkel  $\beta$ ,  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$  und  $\tau$  einzusetzen, und zwar unter Berücksichtigung des Verlaufes des Trägheitsmomentes des betreffenden Stabes. Ist der Verlauf des Trägheitsmomentes symmetrisch zur Stabmitte, so ist  $\alpha^a = \alpha^b$ .

Es sei hiermit noch auf die Zahlenbeispiele am Schlusse verwiesen, in welchen die Lage der Festpunkte und die Verteilungsmaße zahlenmäßig bestimmt wurden.

### 10. Sonderfälle.

#### a) Der durchlaufende Balken auf frei drehbaren Stützen.

In Fig. 72 haben wir einen gewöhnlichen durchlaufenden (kontinuierlichen) Balken dargestellt, welcher an den Auflagern  $B$  und  $C$  einen Knick aufweist. Der durchlaufende Balken ist dadurch gekennzeichnet, daß an jedem Stützpunkt nur ein Stab „anstößt“.

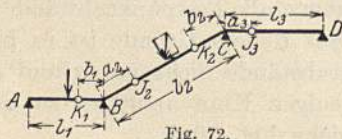


Fig. 72.

Aus diesem Grunde ist der in den Hauptformeln (7) und (8) für die beiden Festpunktabstände eines Stabes vorkommende

Drehwinkel  $\varepsilon$  identisch mit dem einfachen Drehwinkel  $\tau$  an dem betreffenden Stabende und die Festpunktabstände erhalten die Werte:

$$a_1 = 0, \tag{76}$$

$$a_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^a + \tau_1^B}, \tag{77}$$

$$a_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^a + \tau_2^C}, \tag{78}$$

$$b_3 = 0, \tag{79}$$

$$b_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^b + \tau_3^C}, \tag{80}$$

$$b_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^b + \tau_2^B}. \tag{81}$$

In diese Ausdrücke sind die in Kap. IV abgeleiteten Werte für die Drehwinkel  $\beta$ ,  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$  und  $\tau$  einzusetzen, und zwar sind die Werte verschieden, je nachdem das Trägheitsmoment des betreffenden Stabes konstant oder veränderlich ist. Ist ein Stab symmetrisch zu seiner Mitte ausgebildet, so ist  $\alpha^a = \alpha^b$ .

Verteilungsmaße gibt es am durchlaufenden Balken auf frei drehbaren Stützen keine zu bestimmen (sie sind gleich 1), da an jedem Knotenpunkt nur ein Stab anstößt und deshalb das volle Moment in diesen Stab übergeht.

### b) Das einfache geschlossene Tragwerk.

Dieser Fall entsteht, wenn wir, wie aus Fig. 73 ersichtlich, einen durchlaufenden Balken auf frei drehbaren Stützen in sich schließen, so daß wir einen endlosen Stabzug mit beliebig vielen Stäben vor uns haben.

Da wir es mit einem geschlossenen Tragwerk zu tun haben, so müssen wir allgemein, um die Berechnung durchführen zu können, wie bereits an Fig. 70 erläutert, einen Festpunktabstand  $a$  und einen Festpunktabstand  $b$  vorläufig schätzen und dann die Rechnung mit den korrigierten Werten so lange fortsetzen, bis sich keine Abweichung mehr ergibt.

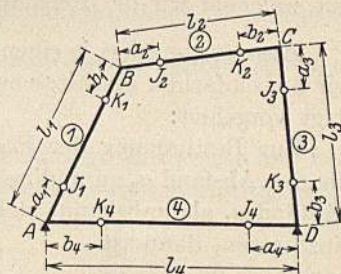


Fig. 73.

Wir schätzen z. B. den Festpunktabstand  $a_1$  und erhalten nun

$$a_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^a + \tau_1^B} \tag{82}$$

( $\tau_1^B$  wird auf Grund des geschätzten Festpunktabstandes  $a_1$  berechnet),

$$a_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^a + \tau_2^C}, \tag{83}$$

$$a_4 = \frac{l_4 \cdot \beta_4}{\alpha_4^a + \tau_3^D}. \tag{84}$$

Weiter im Kreise herum fortschreitend erhalten wir nun für  $a_1$  einen neuen Wert durch Einführung des auf Grund von  $a_4$  zu errechnenden Drehwinkels  $\tau_4^A$  zu:

$$a_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^a + \tau_4^A} \quad (85)$$

und mit diesem neuen Wert von  $a_1$  können wir die obige Rechnung wiederholen, d. h. die Gl. (82), (83) und (84) frisch anschreiben, um dann wieder einen genaueren Wert für  $a_1$  zu erhalten.

Ist die Abweichung von dem vorhergehend erhaltenen Wert noch nicht klein genug, d. h. der gewünschte Genauigkeitsgrad noch nicht erreicht, so kann derselbe durch Wiederholung der Rechnung beliebig gesteigert werden.

Analog gehen wir zur Bestimmung der Festpunktabstände  $b$  vor, indem wir z. B.  $b_4$  vorläufig schätzen und dann in entgegengesetztem Drehsinn des Uhrzeigers so lange fortschreiten, bis der gewünschte Genauigkeitsgrad erreicht ist. Es ist

$$b_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^b + \tau_4^D} \quad (86)$$

( $\tau_4^D$  wird auf Grund des geschätzten Festpunktabstandes  $b_4$  berechnet)

$$b_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^b + \tau_3^C}, \quad (87)$$

$$b_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^b + \tau_2^B}, \quad (88)$$

und hierauf erhalten wir den neuen Wert von  $b_4$  zu:

$$b_4 = \frac{l_4 \cdot \beta_4}{\alpha_4^b + \tau_1^A}, \quad (89)$$

mit welchem wir die Rechnung fortsetzen.

Anstatt zunächst je einen Festpunktabstand  $a$  und  $b$  zu schätzen, können wir am einfachen geschlossenen Rahmen mit beliebig vielen Stäben auch wie folgt vorgehen:

Zur Bestimmung der Festpunktabstände  $a$  schreiben wir den Ausdruck für den Abstand  $a_2$  an und lassen in dem darin einzusetzenden Wert für  $\tau_1^B$  den Abstand  $a_1$  als unbekannt stehen, anstatt dafür einen geschätzten Zahlenwert einzusetzen, dann ist

$$\tau_1^B = Z_1 \cdot a_1 \quad (90)$$

und

$$a_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^a + Z_1 \cdot a_1}, \quad (91)$$

wenn  $Z_1$  der Zahlenwert ist, welcher mit  $a_1$  multipliziert den Drehwinkel  $\tau_1^B$  ergibt.

Im Kreise herum fortschreitend ergibt sich:

$$a_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^a + Z_2 \cdot a_2}, \quad (92)$$

$$a_4 = \frac{l_4 \cdot \beta_4}{\alpha_4^a + Z_3 \cdot a_3} \quad (93)$$

und

$$a_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^a + Z_4 \cdot a_4}. \quad (94)$$

Zur Bestimmung der 4 unbekanntenen Festpunktabstände  $a_1, a_2, a_3$  und  $a_4$  stehen uns nun die 4 Gleichungen (94), (91), (92) und (93) zur Verfügung.

Wir ermitteln nun hieraus den Wert von  $a_1$ , indem wir in Gl. (94) nacheinander die Werte von  $a_4$  aus Gl. (93),  $a_3$  aus Gl. (92) und  $a_2$  aus Gl. (91) einsetzen, und dann eine quadratische Gleichung von der Form

$$A \cdot a_1^2 + B \cdot a_1 + C = 0$$

erhalten, woraus sich der Festpunktabstand  $a_1$  ergibt.

Nachdem nun der genaue Wert von  $a_1$  bekannt ist, kann nach Gl. (91) der Abstand  $a_2$ , darauf nach Gl. (92) der Abstand  $a_3$  und nach Gl. (93) der Abstand  $a_4$  errechnet werden.

In analoger Weise können die Festpunktabstände  $b_1, b_3, b_2$  und  $b_4$  bestimmt werden.

Aus der Bestimmung der Festpunkte am Zahlenbeispiel Nr. 6 erkennt man, daß es bequemer ist, den ersten Festpunkt zu schätzen, als ihn allgemein bei  $n$  Stäben aus einem System von  $n$  Gleichungen zu berechnen.

Sind in einem geschlossenen Stabzug, wie z. B. in dem in Fig. 74 dargestellten Behältergrundriß, von sämtlichen aufeinanderfolgenden Stäben die eine Hälfte gleich der anderen Hälfte, d. h.

- Stab 1 = Stab 5
- „ 2 = „ 6
- „ 3 = „ 7
- „ 4 = „ 8,

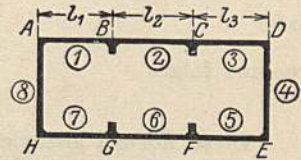


Fig. 74.

so beträgt die Anzahl der zur Bestimmung der Festpunktabstände bei  $n$  Stäben benötigten Gleichungen nur  $\frac{n}{2}$ , aus denen die quadratische Gleichung für den Abstand  $a$  des ersten Stabes hervorgeht.

Ist ein geschlossener Stabzug, wie z. B. der in Fig. 75 dargestellte Behältergrundriß, symmetrisch in bezug auf seine Mitte, sowie gleichzeitig symmetrisch belastet (Flüssigkeitsdruck), so vereinfacht sich die Berechnung der Festpunktabstände wesentlich, indem wir von vornherein wissen, daß die Tangente der elastischen Linie in  $C$  und  $H$  horizontal bleiben muß. Aus diesem Grunde können wir den Behälter in  $C$  und  $H$  als durchgeschnitten und darauf fest eingespannt betrachten, d. h. jede Behälterhälfte wie einen durchlaufenden Balken mit 5 Feldern und voller Einspannung an beiden Enden (siehe Fig. 75 a) berechnen.

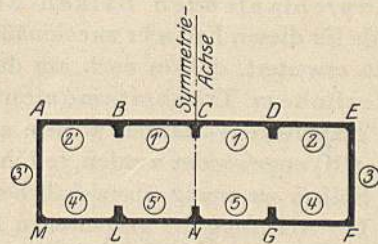


Fig. 75.

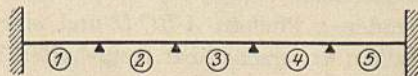


Fig. 75 a.

c) Das einfache geschlossene Tragwerk mit beliebig vielen gleich langen Stäben von konstantem Trägheitsmoment bzw. der durchlaufende Balken mit unendlich vielen Feldern.

Sind in Fig. 73 alle Stäbe einander gleich, d. h.  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$ , so ist  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ .

Setzen wir in die Hauptformel (7) für den Festpunktabstand  $a$  die Werte für die Drehwinkel  $\beta$ ,  $\alpha$  und  $\tau$  für konstantes Trägheitsmoment der Stäbe ein, d. h.

$$\text{nach Gl. (207)} \quad \beta = \frac{l}{6 E J},$$

$$\text{nach Gl. (204)} \quad \alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha} = \frac{l}{2 E J}$$

und nach Gl. (42), nachdem die genannten Werte von  $\alpha^a$  und  $\beta$  darin eingesetzt wurden

$$\tau = \frac{l(2l - 3a)}{6 E J(l - a)},$$

so erhalten wir

$$a = \frac{l}{3 + \frac{2l - 3a}{l - a}} \quad (95)$$

oder

$$6a^2 - 6al + l^2 = 0, \quad (96)$$

woraus folgt:

$$a = b = 0,2113 l. \quad (97)$$

Diese Formel gilt nicht etwa nur für ein gleichseitiges Viereck, sondern ganz allgemein für ein gleichseitiges Vieleck bzw. den unendlich langen durchlaufenden Balken mit gleichen Feldern.

### III. Graphische Bestimmung der Festpunkte und der Verteilungsmaße.

Das von Wilhelm Ritter (Graphische Statik, III. Band) für konstantes Trägheitsmoment angegebene graphische Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte am durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Stützen ist gerade für diesen Fall sehr zweckmäßig und Verfasser hat deshalb das Verfahren dahin erweitert, daß es auch am durchlaufenden Balken mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment aller Stäbe angewendet werden kann. Das graphische Verfahren könnte auch an jedem unsymmetrischen Rahmen (Fig. 104) angewendet werden, es führt jedoch bei nicht in einer Geraden liegenden Stäben zu wenig übersichtlichen Darstellungen.

Der Ableitung der graphischen Bestimmung der Festpunkte legen wir den in Fig. 76 dargestellten durchlaufenden Balken  $ABCDE$  mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment auf vier mit dem Balken biegungsfest verbundenen Pfeilern  $ABCD$  und einer frei drehbaren Stütze  $E$ , an welcher der Balken unverschiebbar festgehalten ist, zugrunde. Der Pfeiler  $A$  ist an seinem Fuße gelenkig gelagert, während die Pfeiler  $B, C$  und  $D$  unten fest eingespannt sind. Es sei nur eine Balkenöffnung, beispielsweise die zweite, mit den Kräften







$P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  belastet, es könnte aber ebensogut ein Pfeiler belastet sein (vgl. Fig. 88). Das Verfahren, welches im folgenden abgeleitet wird, gilt sowohl für die Festpunkte am Balken als auch an den Pfeilern. Zur Herleitung aller Formeln und graphischen Konstruktionen gehen wir von der elastischen Linie des Tragwerkes aus.

Um zur elastischen Linie des durchlaufenden Balkens der Fig. 76 zu gelangen, nehmen wir die von der gegebenen äußeren Belastung herrührende, in Fig. 77 schraffierte Momentenfläche des durchlaufenden Balkens vorläufig als bekannt an, betrachten dieselbe nach Mohr (siehe Ableitung im folgenden Kap. IV) als Belastungsfläche und zeichnen zu dieser ein Seileck, welches die elastische Linie des Balkens darstellt, und zwar führen wir im allgemeinsten Falle als Belastungsfläche die  $\frac{1}{E \cdot J}$  fache (reduzierte) Momentenfläche ein und zeichnen das Krafteck der elastischen Linie mit der Polweite  $H = 1$ . Ist der Elastizitätsmodul  $E$  am ganzen Tragwerk konstant, so bilden wir nur die  $\frac{1}{J}$  fache Momentenfläche und erhalten damit die  $E$ fachen Ordinaten der elastischen Linie.

Im vorliegenden Falle handelt es sich nicht um die wirkliche Form der elastischen Linie, sondern es genügt, dieselbe durch einige wenige Tangenten darzustellen. Das Seileck, welches diese Tangenten bilden, bezeichnen wir kurz als „elastisches Tangenteneck“ und die Tangenten der elastischen Linie an den Stützen als „Stützentangenten“.

Zur Bestimmung des elastischen Tangentenecks (Fig. 78) betrachten wir in Fig. 76 die schraffierte Momentenfläche der belasteten Öffnung  $BC$  als die Differenz zwischen dem positiven Fünfeck  $BGC = F_5$  (in Fig. 76 sind die entsprechenden reduzierten Momentenflächen  $F'_5$  usw. eingetragen) und dem negativen Trapez  $BB''C''C$ , welches wir überdies durch die Diagonalen  $B'C$ ,  $B''C$  und  $B''C'$  in die vier negativen Momentendreiecke  $BB'C = F_3$ ,  $B'B''C = F_4$ ,  $B''CC' = F_7$ ,  $B''C'C'' = F_6$  zerlegen. Es ist hervorzuheben, daß die Zerlegung des negativen Trapezes  $BB''C''C$  derart erfolgt, daß die Pfeilerkopfmomente  $B'B''$  und  $C'C''$  die Höhen von zwei besonderen Dreiecken bilden. Ferner betrachten wir in der Öffnung  $AB$  die schraffierte Momentenfläche  $AA'W_1B'B$ , welche ein überschlagenes Viereck bildet, als die Zusammensetzung des positiven Momentendreiecks  $AA'B' = F_1$  und des negativen Momentendreiecks  $ABB' = F_2$ ; ebenso betrachten wir das schraffierte überschlagene Momentenviereck  $CC'W_3D''D$  der Öffnung  $CD$  als die Zusammensetzung des negativen Momentendreiecks  $CC'D = F_8$  und des positiven Momentendreiecks  $C'DD''$ , welches wir noch durch die Diagonale  $C'D'$  in die zwei Dreiecke  $C'DD'' = F_{10}$  und  $C'D'D' = F_9$  teilen.

Zu den auf vorgenannte Weise entstandenen elf Teilmomentenflächen  $F_1, F_2, \dots, F_{11}$  denken wir uns die  $\frac{1}{E \cdot J}$  fachen, d. h. die entsprechenden reduzierten Momentenflächen  $F'_1 \dots F'_{11}$  gebildet und die Inhalte der letzteren in ihren entsprechenden Schwerpunkten zu den in Fig. 76 eingetragenen Einzelkräften  $F'_1 \dots F'_{11}$  vereinigt (in Fig. 76 sind die Begrenzungslinien der reduzierten Momentenflächen weggelassen); diese Kräfte tragen wir unter Ein-

führung der positiven Flächen als nach unten und der negativen Flächen als nach oben gerichtete Kräfte in dem mit der Polweite  $H = 1$  gezeichneten Krafteck der Fig. 78a zusammen. Das zu letzterem in Fig. 78 gezeichnete Seileck ist das gesuchte elastische Tangenteneck, welches der Bedingung unterworfen ist, daß jede Stützentangente wegen der vorausgesetzten vertikalen Unverschiebbarkeit der Stützpunkte durch den Schnittpunkt von Balken- und Stützenachse gehen muß. Da nun die Ecken des elastischen Tangenteneckes nach Obigem auf den senkrechten Schwerlinien der reduzierten Momentenflächen (Einzelkräfte)  $F'_1 \dots F'_{11}$  liegen, so besteht die nächste Aufgabe darin, die Lage dieser Schwerlinien festzulegen. Von vornherein können wir nur die vertikale Schwerlinie der Fläche  $F'_5$  bestimmen, weil wir deren zugeordnete einfache Momentenfläche  $BGC$  ohne weiteres zu zeichnen vermögen, die übrigen zehn Schwerlinien, welche Momentendreiecken zugeordnet sind und daher „Drittellinien“ genannt werden (obwohl dieselben bei dem vorliegenden allgemeinen Fall nicht im Drittelpunkt der Öffnung liegen), können wir wie folgt ermitteln, auch ohne die Stützhöhen dieser Momentendreiecke, d. h. ohne die Stützenmomente zu kennen.

### 1. Drittellinien.

Bezeichnen wir mit  $d^l$  den Abstand der linken Drittellinie einer Öffnung vom linken Auflager, und mit  $d^r$  den Abstand der rechten Drittellinie vom rechten Auflager dieser Öffnung, ferner mit einem angehängten Zeiger  $1 \dots 4$  die Ordnungszahl der Öffnung, so erhalten wir beispielsweise den

Abstand  $d^l_1$  der linken Drittellinie

in der ersten Öffnung, d. h. den Schwerpunktsabstand  $d^l_1$  der  $\frac{1}{E \cdot J}$  fachen (reduzierten) Momentenfläche  $F'_1$  vom linken Auflager  $A$  aus dem Dreieck  $A_5 A'_5 B_5$  (Fig. 80 oder 76a, letztere ist ein Ausschnitt aus Fig. 80) mit der Stützweite  $l_1$  als Grundlinie und der beliebigen Stützhöhe  $h$  (zweckmäßig  $h = 1$ ) in  $A$  wie folgt:

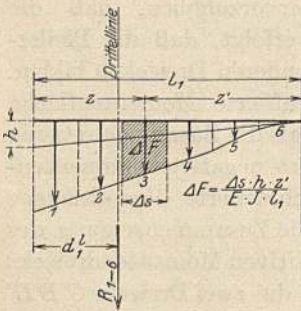


Fig. 76 a.

#### a) Analytisch.

Es sei (Fig. 80 oder 76a)  $AA'_5GB_5$  die dem Momentendreieck  $A_5 A'_5 B_5$  entsprechende  $\frac{1}{E \cdot J}$  fache (reduzierte) Momentenfläche. Wir teilen dieselbe in verhältnismäßig schmale senkrechte Streifen mit der Breite  $\Delta s$ , dem Schwerpunktsabstand  $z$  vom linken und  $z'$  vom rechten Ende der Öffnung  $l_1$ ; der Inhalt  $\Delta F$  eines solchen, in Fig. 80 oder 76a durch Schraffur hervorgehobenen Flächenstreifens („elastisches Gewicht“) beträgt:

$$\Delta F = \frac{\Delta s \cdot h \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1} \tag{98}$$

Dieser Ausdruck für  $\Delta F$  und die folgenden für  $d$  und  $v$  sind nur dann richtig, wenn man die Streifen der reduzierten Momentenfläche so schmal macht, daß der Schwerpunkt derselben in ihrer Mitte  $\left(\frac{\Delta s}{2}\right)$  angenommen werden kann, denn sonst müßte man nach Reduktion der Momentenfläche die Inhalte der Flächenstreifen und deren Schwerpunkte ermitteln, wodurch man neue Werte für die Abstände  $z$  erhielte. Man sieht aber aus den Zahlenbeispielen am Schluß, daß man nur dann die Schwerpunkte nicht in Streifenmitte annehmen darf, wenn man sehr große Streifenbreiten annimmt (Zahlenbeispiel Nr. 1). Auch für die Streifen an den Dreiecksspitzen, z. B.  $\Delta F_7$ , darf trotz Dreiecksform der betreffenden reduzierten Momentenfläche Streifenmitte als Schwerpunkt angenommen werden, da das betreffende elastische Gewicht verhältnismäßig klein ist und dasselbe außerdem noch nahe am Auflager wirkt.

Nach der Schwerpunktslehre erhält man aus dem Moment aller Flächenstreifen in bezug auf die Senkrechte durch  $A$ , wenn wir

$$\frac{\Delta s}{J} = w$$

setzen:

$$d_1^k = \frac{\sum_0^{l_1} \Delta F \cdot z}{\sum_0^{l_1} \Delta F} = \frac{\sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot z'}{\sum_0^{l_1} w \cdot z'} \quad (99)$$

### b) Graphisch.

Trägt man die Kräfte  $\Delta F$  aus Gl. (98) mittels Kraft- und Seileck mit beliebiger Polweite und in beliebigem Kräftemaßstab zusammen (Fig. 80 u. 80a), so erhält man die linke Drittelinie der Öffnung  $l_1$  als Schwerlinie dieser Kräfte. Da es hierbei nicht auf die wirkliche Größe der durch Gl. (98) ausgedrückten Kräfte  $\Delta F$ , sondern nur auf ihr gegenseitiges Verhältnis ankommt, so trägt man diese Kräfte  $\Delta F$  in der einfacheren Form

$$\Delta F = w \cdot \frac{z'}{l_1}$$

auf, weil  $h$  und  $E$  konstant sind; obwohl  $l$  auch konstant ist, <sup>ist</sup> es wegen der späteren Ermittlung der verschränkten Drittelinie zweckmäßig, die Spannweite  $l$  in der Formel mitzuführen.

Das hierbei entstehende Seileck benötigen wir später noch bei der Ermittlung der Kreuzlinienabschnitte (Kap. V), jedoch mit wagerechter Schlußlinie, so daß es zweckmäßig ist, dieses Seileck gleich so zu zeichnen, was wir am einfachsten wie folgt erreichen: Nachdem wir das Seileck zuerst mit beliebiger Polweite und damit beliebiger Richtung der Schlußlinie gezeichnet haben, ziehen wir zu der letzteren eine Parallele durch den Pol, bestimmen den Schnittpunkt derselben mit dem Kräftezuge des Kraftecks, ziehen durch diesen Schnittpunkt eine Wagerechte und tragen auf der letzteren die Polweite ab; dadurch erhalten wir einen neuen Pol, mit welchem nun das endgültige Seileck mit wagerechter Schlußlinie gezeichnet werden kann.

Die Polweite des Kräftecks (Fig. 80a) wählt man zweckmäßig derart, daß man die Endstrahlen des Seilecks (Fig. 80) nicht flacher, sondern eher steiler als die  $45^\circ$ -Neigung erhält wegen des späteren Abgreifens der Abschnitte  $s$ . Was den Kräftemaßstab betrifft, so ist es zweckmäßig, wenn für alle Kräftecke, welche zur Bestimmung der Drittelllinien am ganzen durchlaufenden Balken dienen, wegen Ermittlung der verschränkten Drittelllinien, derselbe Maßstab gewählt wird.

Ist der Balken symmetrisch zu seiner Mitte, so ist

$$d_1^l = d_1^r,$$

und es braucht dann in jeder Öffnung nur die Schwerlinie eines reduzierten Momentendreiecks (mit Spitze am einen oder am andern Ende) bestimmt zu werden; d. h. wenn in Fig. 80  $d_1^l$  ermittelt wurde, wird bei symmetrischem Balken Fig. 83 überflüssig.

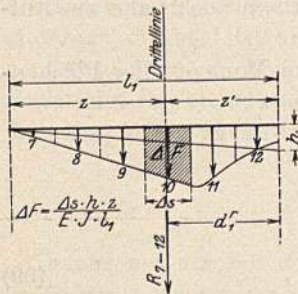


Fig. 76 b.

Den

Abstand  $d_1^{r'}$  der rechten Drittelllinie

der ersten Öffnung (senkrechte Schwerlinie der reduzierten Momentenfläche  $F_2'$ ) vom rechten Auflager  $B$  erhalten wir aus dem Momentendreieck  $A_6 B_6 B_6'$  (Fig. 83 oder 76b) mit der Grundlinie  $l_1$  und der beliebigen Stützhöhe  $h$  (zweckmäßig  $h = 1$ ) in  $B$  auf analoge Weise.

### a) Analytisch.

Es sei (Fig. 83 oder 76b)  $A_6 H B_6' B_6$  die dem Momentendreieck  $A_6 B_6 B_6'$  zugeordnete  $\frac{1}{E \cdot J}$  fache (reduzierte) Momentenfläche. Wir teilen dieselbe wieder in schmale senkrechte Streifen mit der Breite  $\Delta s$ , dem Schwerpunktsabstand  $z$  vom linken und  $z'$  vom rechten Ende der Öffnung  $l_1$ . Der Inhalt  $\Delta F$  eines solchen in Fig. 83 oder 76b schraffierten Flächenstreifens beträgt:

$$\Delta F = \frac{\Delta s \cdot h \cdot z}{E \cdot J \cdot l_1}. \quad (100)$$

Bezüglich Wahl der Breite dieser Streifen gilt das für die linke Drittelllinie Gesagte.

Nach der Schwerpunktslehre erhält man aus dem Momentenstreifen in bezug auf die Senkrechte durch  $B$ , wenn wir wieder  $\frac{\Delta s}{J} = w$  setzen:

$$d_1^r = \frac{\sum_0^{l_1} \Delta F \cdot z'}{\sum_0^{l_1} \Delta F} = \frac{\sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot z'}{\sum_0^{l_1} w \cdot z}. \quad (101)$$

### b) Graphisch.

Trägt man die Kräfte  $\Delta F$  aus Gl. (100) mittels Kraft- und Seileck mit beliebiger Polweite und in beliebigem Kräftemaßstab zusammen (Fig. 83 u. 83a), so erhält man die rechte Drittelllinie der Öffnung  $l_1$  als Schwerlinie dieser Kräfte;

da es hierbei nicht auf die wirkliche Größe der durch Gl. (100) ausgedrückten Kräfte  $\Delta F$ , sondern nur auf ihr gegenseitiges Verhältnis ankommt, so trägt man diese Kräfte  $\Delta F$  in der einfacheren Form:

$$\Delta F = w \cdot \frac{z}{l_1}$$

auf.

Bezüglich Wahl von Polweite und Kräftemaßstab gilt das für die linke Drittellinie Gesagte.

In den übrigen Öffnungen bestimmen wir die Drittellinien ähnlich wie vor.

Da aus den Gleichungen (99) und (101) das Stützenmoment  $h$  ausgeschieden ist, so war es richtig, der Bestimmung der Drittellinien ein Dreieck mit beliebiger Stützhöhe zugrunde zu legen und es folgt weiter, daß die beiden Drittellinien einer Öffnung unabhängig sind von den wirklichen Stützenmomenten und also auch von der Belastung und nur abhängig von den Querschnittsabmessungen und der Stützweite dieser Öffnung.

## 2. Verschränkte Drittellinien.

Wir betrachten jetzt in Fig. 77 die beiden an der Stütze  $B$  zusammenstoßenden Momentendreiecke  $ABB'$  und  $BB'C$  mit der gemeinschaftlichen Höhe  $BB'$  und den beiden zugeordneten reduzierten Momentenflächen  $F'_2$  und  $F'_3$ . Diese senkrechte Schwerlinie  $S^B$  der gemeinsamen

$\frac{1}{E \cdot J}$  fachen (reduzierten) Momentenfläche (Fig. 83 u. 84 oder 76c) geht in der Nähe von  $B$  durch den Schnittpunkt  $B'_2$  der die Kräfte  $F'_2$  und  $F'_3$  in Fig. 78 einschließenden

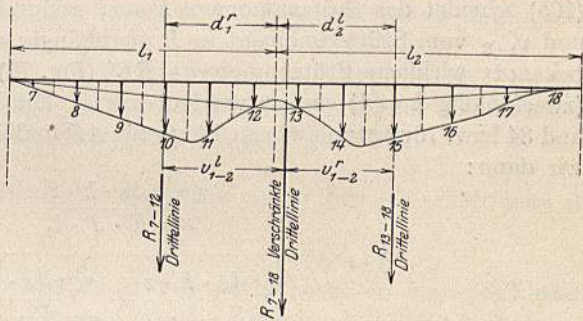


Fig. 76 c.

Seilseiten  $b$  und  $d$ . Die Schwerlinie  $S^B$  nennen wir „verschränkte Drittellinie der Öffnungen  $l_1$  und  $l_2$ “. In gleicher Weise schneiden sich die Seilseiten  $g$  und  $i$ , welche die Kräfte  $F'_7$  und  $F'_8$  einschließen, in der Nähe von  $C$  auf der „verschränkten Drittellinie  $S^C$  der Öffnungen  $l_2$  und  $l_3$ “, und die die Kräfte  $F'_{10}$  und  $F'_{11}$  einschließenden Seilseiten  $k$  und  $m$  auf der „verschränkten Drittellinie  $S^D$  der Öffnungen  $l_3$  und  $l_4$ “.

Um beispielsweise die Lage von  $S^B$  zu bestimmen, verfahren wir in folgender Weise:

### a) Analytisch.

Wir bezeichnen (Fig. 78) den Abstand der den Öffnungen  $l_1$  und  $l_2$  zugeordneten verschränkten Drittellinie  $S^B$  von der nächsten links gelegenen der zweiten Öffnung) mit  $v'_{1-2}$ . Nach der Schwerpunktslehre erhalten wir Drittellinie (rechte Drittellinie der ersten Öffnung) mit  $v^l_{1-2}$  und den Abstand derselben von der nächsten rechts gelegenen Drittellinie (linke Drittellinie

$v_{1-2}^l$  bzw.  $v_{1-2}^r$  aus dem statischen Moment der Kräfte  $F_2'$  und  $F_3'$  in bezug auf die Richtung von  $F_2'$  bzw. auf die Richtung von  $F_3'$ :

$$v_{1-2}^l = \frac{F_3'}{F_2' + F_3'} \cdot (d_1^l + d_2^l), \quad (102)$$

$$v_{1-2}^r = \frac{F_2'}{F_2' + F_3'} \cdot (d_1^r + d_2^r). \quad (103)$$

In den Gl. (102) und (103) ersetzen wir die dem wirklichen Momentendreieck  $AB'C$  (Fig. 77) entsprechende reduzierte Momentenfläche  $F_2' + F_3'$  durch die aus dem Momentendreieck  $A_6B_6'C_6$  (Fig. 83 und 84) mit der beliebigen Stützhöhe  $h$  hergeleitete reduzierte Momentenfläche  $A_6HB_6''JC_6$ ; ebenso ersetzen wir die reduzierte Momentenfläche  $F_2'$  durch die aus dem Momentendreieck  $A_6B_6B_6'$  (Fig. 83 oder 76c) hergeleitete reduzierte Momentenfläche  $A_6HB_6''B_6$ , und die reduzierte Momentenfläche  $F_3'$  durch die aus dem Momentendreieck  $B_6B_6'C_6$  (Fig. 84 oder 76c) hergeleitete reduzierte Momentenfläche  $B_6B_6''JC_6$ . Durch diese Vertauschung ändern die Verhältnisse

$$\frac{F_3'}{F_2' + F_3'} \quad \text{und} \quad \frac{F_2'}{F_2' + F_3'}$$

der Gl. (102) und (103) ihren Wert nicht, denn aus den späteren Gl. (104) und (105) scheidet das Stützenmoment  $h$  aus, wodurch ausgedrückt ist, daß  $v_{1-2}^l$  und  $v_{1-2}^r$  vom Stützenmoment in  $B$  unabhängig sind, und daß daher das unbekannt wirkliche Stützenmoment  $BB'$  (Fig. 77) durch ein beliebig anderes (zweckmäßig  $h = 1$ ) ersetzt werden durfte. Mit Einführung der aus Fig. 83 und 84 bzw. 76c entnommenen Werte für  $\Delta F$  in die Gl. (102) und (103) erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} v_{1-2}^l &= \frac{\sum_0^{l_2} \Delta s \cdot h \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_2} \cdot (d_1^l + d_2^l) \\ &= \frac{\sum_0^{l_1} \Delta s \cdot h \cdot z + \sum_0^{l_2} \Delta s \cdot h \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1 + E \cdot J \cdot l_2} \cdot (d_1^l + d_2^l) \\ &= \frac{\frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'}{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z + \frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'} \cdot (d_1^l + d_2^l). \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} v_{1-2}^r &= \frac{\sum_0^{l_1} \Delta s \cdot h \cdot z}{E \cdot J \cdot l_1} \cdot (d_1^r + d_2^r) \\ &= \frac{\sum_0^{l_1} \Delta s \cdot h \cdot z + \sum_0^{l_2} \Delta s \cdot h \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1 + E \cdot J \cdot l_2} \cdot (d_1^r + d_2^r) \\ &= \frac{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z}{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z + \frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'} \cdot (d_1^r + d_2^r). \end{aligned} \quad (105)$$



## b) Graphisch.

Graphisch erhält man die Lage der verschränkten Drittellinie  $S^B$ , indem man die Schwerlinie der beiden reduzierten Momentenflächen  $A_6HB_6''B_6$  und  $B_6B_6''JC_6$  bestimmt. Da die rechte Drittellinie der ersten Öffnung die Schwerlinie der reduzierten Momentenfläche  $A_6HB_6''B_6$  und die linke Drittellinie der zweiten Öffnung die Schwerlinie der reduzierten Momentenfläche  $B_6B_6''JC_6$  darstellt, so braucht man nur die Resultierende der beiden in den genannten Drittellinien wirkenden Kräfte:

$$R_{1-7} = \sum_8^{14} w \cdot \frac{z}{l_1} \quad \text{und} \quad R_{15-22} = \sum_{15}^{22} w \cdot \frac{z'}{l_2}$$

zu bilden. Dies erfolgte in den Fig. 83 und 84 und 83a und 84a mittels des Kraft- und Seilecks  $p-q$  mit beliebiger, jedoch zur Benützung der wagerechten Linie  $L'M'$  als mittleren Seilstrahl, wagrecht angenommener Polweite und unter der Voraussetzung, daß die Kraftecke der Fig. 83a und 84a in demselben Kräftemaßstab aufgetragen wurden. Die Polweiten der Kraftecke der Fig. 83a und 84a brauchen nicht, wie es in diesen Figuren teilweise der Fall ist, gleich angenommen zu werden, sondern sie werden, wie unter 1. erwähnt, derart gewählt, daß die Endstrahlen der zugehörigen Seilecke nicht flacher als die  $45^\circ$ -Neigung verlaufen, damit die Abschnitte  $s$  möglichst genau abgegriffen werden können.

Ist die Balkenöffnung 1 symmetrisch zu ihrer Mitte, so daß  $R_{8-14} = R_{1-7}$ , so trägt man  $R_{1-7}$  im Abstand  $d_1' = d_1^I$  von  $B_8$  aus ab und bildet darauf, wie oben erwähnt, die Schwerlinie  $R_{8-22}$  (Fig. 83/84).

Die verschränkte Drittellinie in der Nähe von  $C$  bzw.  $D$  erhält man in analoger Weise.

Aus den Gl. (104) und (105), aus welchen die Stützhöhe  $h$  ausgeschieden ist, folgt, daß die verschränkte Drittellinie in der Nähe einer Stütze nur abhängig ist von den Stützweiten und Querschnitten der beiden an die betreffende Stütze anschließenden Öffnungen und nicht abhängig von deren Belastungen.

Mit Hilfe der Drittellinien und der verschränkten Drittellinien leiten wir nun das Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte ab, und zwar zunächst für die linken Festpunkte  $J$ . Wir beginnen mit der Bestimmung des Festpunktes  $J_1$  in der ersten Öffnung links.

3. Linker Festpunkt  $J_1$ .

Bei freier Auflagerung in  $A$  wäre in Fig. 77  $M_1^A = 0$ , also auch die Kraft  $F_1 = 0$ . Dann würde in Fig. 78 die Seilseite  $b$  mit der Seilseite  $a$  zusammenfallen und die Balkenachse in  $A_1$  schneiden. Ist der Balken jedoch in  $A$  eingespannt, wie im vorliegenden Fall, so hat das Tangenteneck wegen der vorhandenen Kraft  $F_1'$  einen Knick in  $R$  und die innere Seilseite  $b$  schneidet die Balkenachse in einem Punkt  $J_1$ , welcher die feste Strecke  $d_1^I$  in die 2 Strecken  $e$  und  $e'$  teilt, welche wie folgt bestimmt werden:



Der hierin vorkommende Drehwinkel  $\tau$  wird nach Kap. II, 6 bestimmt; der Wert für konstantes Trägheitsmoment ist am Schluß des Abschnittes 4 dieses Kapitels angegeben. Den Verhältniswert  $k_1$  erhalten wir wie folgt:

Nach Gl. (108) ist

$$k_1 = \frac{F'_1}{F_1}. \quad (117)$$

Wie aus der folgenden Formel (119) hervorgeht, stehen das unbekannte Momentendreieck  $F_1 = AA'B'$  und die zugeordnete reduzierte Momentenfläche  $F'_1$  in demselben Verhältnis zueinander wie das beliebige Dreieck  $A_5 A'_5 B_5$  (Fig. 80 oder 76a) und die entsprechende reduzierte Momentenfläche  $A_5 A''_5 G B_5$ , daher ist

$$k_1 = \frac{\text{Fläche } A_5 A''_5 G B_5}{\text{Fläche } A_5 A'_5 B_5}. \quad (118)$$

Diesen Wert ermitteln wir entweder graphisch durch Planimetrierung der beiden Flächen oder analytisch aus

$$k_1 = \frac{A_5 A''_5 G B_5}{A_5 A'_5 B_5} = \frac{\sum_0^{l_1} \frac{As \cdot h \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1}}{\frac{h \cdot l_1}{2}} = \frac{2 \cdot \sum_0^{l_1} w \cdot z'}{E \cdot l_1^2}. \quad (119)$$

Aus der Gl. (119) ist das Stützenmoment  $h$  ausgeschieden, d. h. der Wert  $k$  ist unabhängig von der wirklichen Größe des Stützenmomentes  $AA'$ , und es war also richtig,  $k$  aus einem Dreieck mit beliebiger Höhe zu bestimmen.

Aus Gl. (116) sowie aus den Gleichungen zur Bestimmung von  $k_1$  und von  $\tau_5^A$  geht jetzt hervor, daß das Verhältnis  $\frac{e}{e'}$  unabhängig ist von der Belastungsart und nur abhängt von den Abmessungen des Pfeilers  $A$  und des Trägers der ersten Öffnung, d. h. der Punkt  $J_1$  (Fig. 78 oder 76d), welcher die feste Strecke  $d'_1$  in das feste Verhältnis  $\frac{e}{e'}$  teilt, ist ein Festpunkt oder Fixpunkt.

Es ist jetzt noch zu beweisen, daß der Festpunkt  $J_1$  der Fig. 78 oder 76d und der Momentennullpunkt  $W_1$  der Fig. 77 zusammenfallen:

In Fig. 78 oder 76d ist das Produkt der Strecke  $A_1 A'_1$  mit der Polweite  $H=1$  gleich dem statischen Moment der Kraft  $F'_1$  in bezug auf  $A$ , ebenso ist das Produkt der Strecke  $B_1 B'_1$  mit der Polweite  $H=1$  gleich dem statischen Moment der Kraft  $F'_2$  in bezug auf  $B$ . Wir können daher anschreiben:

$$A_1 A'_1 = F'_1 \cdot d'_1 \quad (120)$$

und

$$B_1 B'_1 = F'_2 \cdot d'_1 \quad (121)$$

Daraus folgt durch Division

$$\frac{A_1 A'_1}{B_1 B'_1} = \frac{F'_1 \cdot d'_1}{F'_2 \cdot d'_1} \quad (122)$$

Hierin kommen die den Momentenflächen  $AA'B'$  und  $ABB'$  der Fig. 77 entsprechenden  $\frac{1}{E \cdot J}$  fachen (reduzierten) Momentenflächen  $F'_1$  und  $F'_2$  vor.

Um beispielsweise  $F'_1$  auszudrücken, teilen wir ähnlich wie in Fig. 80 oder 76a die Momentenfläche  $AA'B'$  in senkrechte Streifen von dem Inhalt

$$\frac{\Delta s \cdot AA' \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1}$$

und erhalten:

$$F'_1 = \sum_0^{l_1} \frac{AA' \cdot \Delta s \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1} = \frac{AA'}{E \cdot l_1} \cdot \sum_0^{l_1} w \cdot z', \quad (123)$$

ebenso

$$F'_2 = \sum_0^{l_1} \frac{BB' \cdot \Delta s \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1} = \frac{BB'}{E \cdot l_1} \cdot \sum_0^{l_1} w \cdot z. \quad (124)$$

Die vorstehenden Werte, sowie die Werte von  $d_1^l$  und  $d_1^r$  aus den Gl. (99) und (101) in die Gl. (122) eingesetzt gibt:

$$\frac{A_1 A'_1}{B_1 B'_1} = \frac{\frac{AA'}{E \cdot l_1} \cdot \sum_0^{l_1} w \cdot z' \cdot \frac{\sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot z'}{\sum_0^{l_1} w \cdot z'}}{\frac{BB'}{E \cdot l_1} \cdot \sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot \frac{\sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot z'}{\sum_0^{l_1} w \cdot z}}}. \quad (125)$$

Daraus folgt:

$$\frac{A_1 A'_1}{B_1 B'_1} = \frac{AA'}{BB'}, \quad (126)$$

d. h. in den überschlagenen Vierecken  $AA'W_1B'B$  (Fig. 77) und  $A_1A'_1J_1B'_1B_1$  (Fig. 78 oder 76d) liegen die Punkte  $W_1$  und  $J_1$  auf derselben Senkrechten.

#### 4. Linke Festpunkte $J_2, J_3$ und $J_4$ .

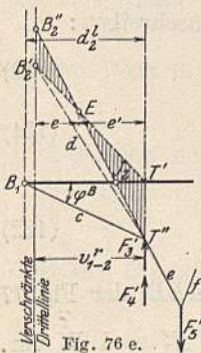
Von den linken Festpunkten der 3 übrigen Öffnungen ermitteln wir noch denjenigen der zweiten Öffnung:

In Fig. 78 oder 76e schneiden die inneren Seilseiten  $b$  und  $e$  die verschränkte

Drittellinie  $S^B$  in den Punkten  $B'_2$  und  $B''_2$ . Die Verbindungslinie von  $B'_2$  mit dem Punkt  $T'$ , in welchem sich Balkenachse und Drittellinie rechts von  $B$  schneiden, trifft die verlängerte Seilseite  $e$  in einem Punkt  $E$ , welcher die feste Strecke  $v_{1-2}^r$  in die zwei Strecken  $e$  und  $e'$  teilt. Aus dem überschlagenen Viereck  $B'_2B''_2ET''T'$  (Fig. 78 oder 76d) folgt:

$$\frac{e}{e'} = \frac{B'_2B''_2}{T'T''}. \quad (127)$$

Die Strecken  $B'_2B''_2$  und  $T'T''$  bestimmen wir wie folgt: Zunächst ist  $B'_2B''_2$  der Abschnitt der die Kraft  $F'_4$



einschließenden Seilseiten  $d$  und  $e$  auf der verschränkten Drittellinie  $S^B$ , deshalb ist das Produkt von  $B'_2 B''_2$  mit der Polweite  $H = 1$  gleich dem statischen Moment der Kraft  $F'_4$  in bezug auf die verschränkte Drittellinie oder

$$B'_2 B''_2 = F'_4 \cdot v'_{1-2}. \quad (128)$$

Ferner ist im Dreieck  $B_1 T' T''$  (Fig. 78 oder 76e)

$$T' T'' = d_2^l \cdot \operatorname{tg} \varphi^B, \quad (129)$$

worin  $\varphi^B$  den Drehwinkel der Balkenachse in  $B$  bedeutet. Weil  $\varphi^B$  sehr klein ist, kann gesetzt werden

$$\operatorname{tg} \varphi^B = \varphi^B, \quad (130)$$

womit nach Gl. (129)

$$T' T'' = d_2^l \cdot \varphi^B. \quad (131)$$

Da nun Balkenachse und Pfeilerachse denselben Drehwinkel  $\varphi^B$  in  $B$  beschreiben, so denken wir uns zur Bestimmung von  $\varphi^B$  einen Schnitt unmittelbar unterhalb der Balkenachse geführt und den vom Balken getrennten Pfeiler am Kopfe in einem Gelenk gelagert und mit dem wirklichen Pfeilerkopfmoment  $M_6^B$  belastet. Es sei  $\tau_6^B$  der Drehwinkel, welcher durch  $M_6^B = 1$  am Kopfe entsteht; dann beträgt der durch  $M_6^B$  selbst hervorgerufene Winkel

$$\varphi^B = M_6^B \cdot \tau_6^B. \quad (132)$$

Diesen Wert in Gl. (131) eingesetzt gibt:

$$T' T'' = d_2^l \cdot M_6^B \cdot \tau_6^B. \quad (133)$$

Dividieren wir jetzt Gl. (128) durch (133), so folgt:

$$\frac{B'_2 B''_2}{T' T''} = \frac{F'_4 \cdot v'_{1-2}}{M_6^B \cdot \tau_6^B \cdot d_2^l}. \quad (134)$$

Setzen wir:

$$F'_4 = k_2 \cdot F_4 = k_2 \cdot \frac{M_6^B \cdot l_2}{2}, \quad (135)$$

so erhalten wir nach Gl. (127) in Verbindung mit Gl. (134):

$$\frac{e}{e'} = k_2 \cdot \frac{M_6^B \cdot l_2 \cdot v'_{1-2}}{2 \cdot M_6^B \cdot \tau_6^B \cdot d_2^l} \quad (136)$$

oder

$$\frac{e}{e'} = k_2 \cdot \frac{l_2}{2 \cdot \tau_6^B} \cdot \frac{v'_{1-2}}{d_2^l}. \quad (137)$$

Darin sind alle Größen bis auf den Faktor  $k_2$  bekannt oder nach vorhergehendem ( $\tau$  nach Kap. II) ermittelbar. Den Faktor:

$$k_2 = \frac{F'_4}{F_4} \quad (137)$$

(nach Gl. 135) ermitteln wir ähnlich wie in der ersten Öffnung an Hand des mit beliebiger Höhe  $h$  gezeichneten Dreiecks  $B_6 B'_6 C_6$  (Fig. 84) und der entsprechend reduzierten Momentenfläche  $B_6 B''_6 J C_6$  zu:

$$k_2 = \frac{\text{Fläche } B_6 B'_6 J C_6}{\text{Fläche } B_6 B''_6 C_6}.$$

Da insbesondere die

Drehwinkel  $\tau$  bei konstantem Trägheitsmoment und Berücksichtigung der starren Strecke  $f$  von Voutenunterkante bis Balkenachse

für am Fuße eingespannte und gelenkig gelagerte Pfeiler sehr häufig gebraucht werden, so leiten wir nachstehend noch die diesbezüglichen Werte ab.

a) Der Pfeiler ist am Fuße eingespannt (Fig. 89).

Setzen wir in der allgemeinen Gl. (43) für den Drehwinkel  $\tau$  an dem Stabende mit dem Festpunktabstand  $b$ , welche lautet:

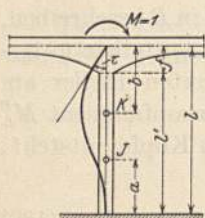


Fig. 89.

$$\tau^B = \alpha^b - \frac{l}{l-a} \cdot \beta,$$

nach Gl. (203): 
$$\alpha^b = \frac{l^2}{2 \cdot l \cdot E \cdot J}$$

und nach Gl. (206): 
$$\beta = \frac{l^2 (l + 2f)}{6 \cdot l^2 \cdot E \cdot J}$$

so ist:

$$\tau = \frac{l^2 (2l' - 3a)}{6l(l-a)E \cdot J}. \quad (138)$$

Kann die starre Strecke  $f$  vernachlässigt werden (bei Endpfeilern, sowie bei Mittelpfeilern mit verhältnismäßig großer Höhe), d. h. ist

$$f = 0,$$

so ist in Gl. (138)  $l' = l$  und  $a = \frac{l}{3}$  zu setzen und wir erhalten für diesen Fall:

$$\tau = \frac{l}{4 \cdot E \cdot J}. \quad (138a)$$

b) Der Pfeiler ist am Fuße gelenkig gelagert (Fig. 90).

In diesem Falle ist der untere Festpunktabstand

$$a = 0$$

und wir erhalten dann aus Gl. (138)

$$\tau = \frac{l^3}{3 \cdot l^2 \cdot E \cdot J}. \quad (139)$$

Kann die starre Strecke  $f$  vernachlässigt werden, so ist in Gl. (139)  $l' = l$  zu setzen und es ist in diesem Falle:

$$\tau = \frac{l}{3 \cdot E \cdot J}. \quad (139a)$$

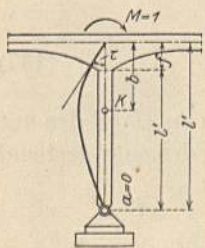


Fig. 90.

Aus den Gleichungen für  $\frac{e}{e'}$ ,  $k_2$  und  $\tau_6^B$  geht hervor, daß das Verhältnis  $\frac{e}{e'}$ , in welches die feste Strecke  $v_{1-2}^i$  geteilt wird, nur von den Abmessungen der ersten und zweiten Öffnung und des zwischen ihnen gelegenen Pfeilers  $B$  abhängt. Die durch Punkt  $E$  gehende Senkrechte, auf welcher sich die Linien  $B_2'T'$  und  $B_2''T''$  schneiden, hat daher eine feste Lage.

Nachdem wir im vorgehenden bewiesen haben, daß die zwei Drittellinien in der Nähe von  $B$ , die verschränkte Drittellinie sowie die Senkrechte durch  $E$  eine feste Lage haben, so liegen die vier Ecken des Vierecks  $UB_2'ET'$  auf vier festen Senkrechten, während drei Seiten durch feste Punkte gehen, nämlich die Seilseite  $b$  durch  $J_1$ , die Seilseite  $c$  durch  $B_1$  und die Gerade  $B_2'E$  durch  $T'$  (Fig. 78). Aus geometrischen Gründen geht dann auch die vierte Seite, nämlich die Seilseite  $e$  durch einen festen Punkt  $J_2$ , welcher mit den drei anderen festen Punkten auf einer Geraden liegt. Deshalb ist  $J_2$  der gesuchte linke Festpunkt der zweiten Öffnung.

Die Festpunkte  $J_3$  und  $J_4$  werden in genau derselben Weise bestimmt wie der Festpunkt  $J_2$ .

### 5. Rechte Festpunkte $K_4$ , $K_3$ , $K_2$ und $K_1$ .

Um die rechten Festpunkte  $K$  in den einzelnen Öffnungen zu bestimmen, gehen wir von der letzten Öffnung rechts aus und schreiten nach links vor; die Bestimmung der Festpunkte  $K$  erfolgt genau in derselben Weise wie diejenige der Festpunkte  $J$ , wenn wir den Balken um  $180^\circ$  aus der Zeichenebene heraus so drehen, daß dessen rechtes Ende nach der linken Seite kommt, d. h. wenn wir dessen Spiegelbild betrachten.

In der vierten Öffnung fällt wegen des frei beweglichen Endauflagers  $E_1$  (Fig. 78) der rechte Festpunkt  $K_4$  mit  $E_1$  zusammen.

In der dritten Öffnung schneidet die innere Seilseite  $i$  die Balkenachse im gesuchten Festpunkt  $K_3$ ; denn wie bei der Stütze  $B$  ergibt sich auch bei der Stütze  $D$  (Fig. 78) ein Viereck  $V''XD_2'Z$ , dessen vier Ecken auf vier festen Senkrechten liegen, nämlich auf den beiden Drittellinien, der verschränkten Drittellinie bei  $D$  sowie auf der festen Senkrechten durch den Schnittpunkt  $X$  der Seilseite  $i$  und der Geraden  $V'D_2'$ ; ferner gehen drei Seiten durch feste Punkte, nämlich die Seilseite  $m$  durch  $E_1$ ,  $l$  durch  $D_1$  und die Gerade  $V'D_2'$  durch  $V'$ . Dann geht auch die Seilseite  $i$  als vierte Seite aus geometrischen Gründen durch einen festen Punkt  $K_3$ , welcher mit den drei anderen festen Punkten auf einer Geraden liegt, d. h.  $K_3$  ist der gesuchte rechte Festpunkt der dritten Öffnung.

Die Senkrechte durch den Schnittpunkt  $X$  der inneren Seilseite  $i$  und der Geraden  $V'D_2'$  teilt die feste Strecke  $v_{3-4}^i$  (Abstand der verschränkten Drittellinie bei  $D$  von der rechten Drittellinie der dritten Öffnung) in die zwei festen Teilstrecken  $e$  und  $e'$ , deren Verhältnis sich analog wie früher ergibt zu:

$$\frac{e}{e'} = k_3 \cdot \frac{l_3}{2 \cdot \tau_8^D} \cdot \frac{v_{3-4}^i}{d_3^r}, \quad (140)$$

worin die Achsendrehung  $\tau_8^D$  am Kopfe der Säule  $D$  genau wie früher  $\tau_8^B$  ermittelt wird, und der Faktor  $k$ , ähnlich wie früher, folgenden Ausdruck hat:

$$k_3 = \frac{\text{Fläche } C_6 W D_6'' D_6}{\text{Fläche } C_6 D_6 D_6'} \quad (141)$$

(Fig. 85).

Man kann nun noch in analoger Weise, wie es für den Festpunkt  $J_1$  und den Momentennullpunkt  $W_1$  geschehen ist, zeigen, daß der Festpunkt  $K_3$  und der Momentennullpunkt  $W_3$  zusammenfallen.

Die Festpunkte  $K_2$  und  $K_1$  werden in genau derselben Weise bestimmt wie  $K_3$ .

## 6. Konstruktion der Festpunkte der Balkenfelder 1, 2, 3, 4.

In Fig. 79 ist die Konstruktion der Festpunkte der Balkenfelder 1, 2, 3, 4 dargestellt.

Man zeichnet zunächst in allen Feldern die Drittellinien und verschränkten Drittellinien und ermittelt die Drehwinkel  $\tau$  an den Köpfen der gegebenenfalls vorhandenen biegungsfest mit dem Balken verbundenen Pfeiler. Wir haben gesehen, daß die Lage der Drittellinien und verschränkten Drittellinien nur von den Balkenabmessungen abhängig ist. Zu ihrer Bestimmung verfährt man deshalb in gleicher Weise sowohl am durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern, als auch mit freier Auflagerung. Die Drehwinkel  $\tau$  berechnen wir allgemein nach Kap. II; für konstantes Trägheitsmoment des Pfeilers sowie Berücksichtigung der starren Strecke  $f$  zwischen Voutenunterkante und Balkenachse sind die Werte in Abschnitt 4 dieses Kapitels angegeben.

Mit der Bestimmung der

### linken Festpunkte $J$

beginnt man in der ersten Öffnung links und schreitet nach rechts fort.

#### a) Erste Öffnung (Endfeld links).

**Fall 1:** Ist der Balken an seinem Ende elastisch eingespannt (Fig. 79), so teilt der Festpunkt  $J_1$  den Abstand  $d_1^l$  im Verhältnis  $\frac{e}{e'}$  der Gl. (116), wobei  $e$  den Abstand des Festpunktes  $J_1$  von  $A$  bedeutet. Der in Gl. (116) vorkommende Faktor  $k$  ist nach Gl. (118) oder (119) zu bestimmen.

Da die Pfeilerköpfe als horizontal unverschiebbar vorausgesetzt sind, kann man zur Bestimmung der Festpunkte alle Endpfeiler in die Verlängerung der Balkenachse hinaufklappen und wie ein Endfeld eines gewöhnlichen durchlaufenden Balkens behandeln, wobei in  $A$  ein frei drehbares Auflager anzunehmen ist und in welchem Falle dann der Ausdruck  $\frac{e}{e'}$  für die Öffnung 1 nicht bestimmt zu werden braucht.

**Fall 2:** Ist der Balken an seinem Ende feste eingespannt (Fig. 91), so ist die Drehung der Endstütze gleich Null, d. h. in Gl. (116) ist  $\tau_5^A = 0$  zu setzen, wodurch  $\frac{e}{e'}$  unendlich wird, und damit  $e' = 0$ , d. h. in diesem Falle rückt  $J_1$  in den Schnittpunkt der Balkenachse mit der linken Drittellinie (Fig. 91 a)



**Fall 3:** Liegt der Balken an seinem Ende frei auf, so ist in Gl. (116)

$\tau_5^A = \infty$  zu setzen; dann ist aber  $\frac{e}{e'} = 0$  und daher  $e = 0$ , d. h. in diesem Falle fällt der Festpunkt  $J_1$  mit dem linken Auflager zusammen.

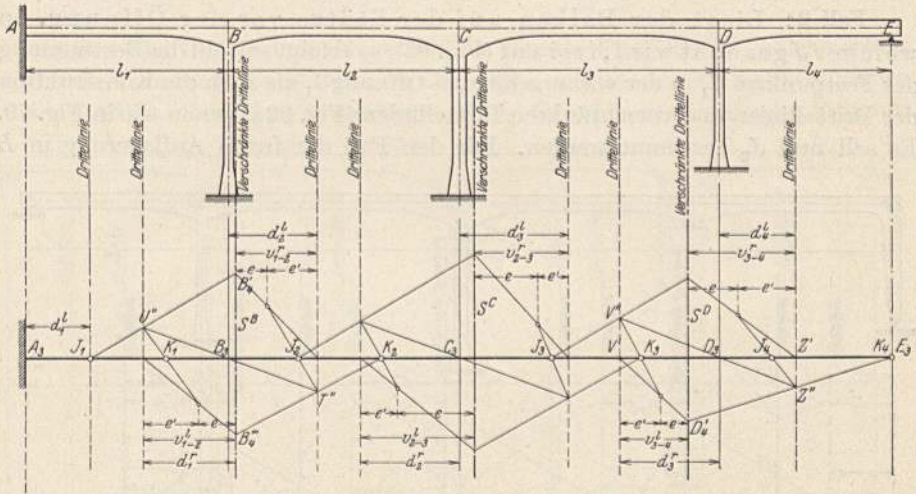


Fig. 91 u. 91 a.

**b) Beliebige Mittelöffnung und letzte Öffnung (Endfeld rechts).**

**Fall 1:** Besteht die Stütze vorder der Öffnung, in welcher  $J$  gesucht wird, aus einem elastisch drehbaren Pfeiler (Fig. 79), so muß zuerst der Festpunkt  $J_1$  in der vorhergehenden Öffnung 1 bestimmt werden.

Dann zieht man von  $J_1$  aus (vgl. Fig. 79) die beliebige Gerade  $J_1 B'_4$ , welche die Drittlinie links von  $B$  in  $U''$  und die verschränkte Drittlinie  $S^B$  bei  $B$  in  $B'_4$  schneidet, verbindet  $B'_4$  mit dem Schnittpunkt  $T'$  der Balkenachse und der Drittlinie rechts von  $B$  und zieht die Gerade  $U'' B_3$ , welche die Drittlinie rechts von  $B$  in  $T''$  schneidet; die Senkrechte, welche die Strecke  $v'_{1-2}$  im Verhältnis  $\frac{e}{e'}$  der Gl. (137) teilt, trifft  $B'_4 T'$  in einem Punkt  $E$ , welchen man mit  $T''$  verbindet; die Gerade  $ET''$  schneidet schließlich die Balkenachse in dem gesuchten Festpunkt  $J_2$ .

Von  $J_2$  ausgehend (Fig. 79) wiederholt man die soeben angegebene Konstruktion und gelangt so zum Festpunkt  $J_3$  der dritten Öffnung, desgleichen erhält man schließlich durch Wiederholung des Verfahrens mit  $J_3$  als Ausgangspunkt  $J_4$  der vierten Öffnung.

Es ist hierbei zu beachten, daß zur Bestimmung der  $J$ -Punkte in allen Öffnungen rechts der ersten das Verhältnis  $\frac{e}{e'}$  stets nach Gl. (137) zu ermitteln ist, in welche man jeweils die Abmessungen derjenigen Öffnung einsetzt, welcher  $J$  angehört und den Drehwinkel  $\tau$  des Pfeilers zwischen der Öffnung mit dem gesuchten Festpunkt  $J$  und der Öffnung unmittelbar links; ferner ist der in Gl. (137) vorkommende Faktor  $k$  nach den Gl. (119) oder (139) zu bestimmen,

in welche man ebenfalls die Abmessungen der Öffnung mit dem gesuchten  $J$ -Punkt einführt. Von den beiden Teilstrecken  $e$  und  $e'$  des Verhältnisses  $\frac{e}{e'}$  geht die Strecke  $e$  immer von der in Betracht kommenden verschränkten Drittellinie aus.

**Fall 2:** Liegt der Balken auf der Stütze vor der Öffnung, in welcher  $J$  gesucht wird, frei auf (Fig. 92), so erfolgt sowohl die Bestimmung des Festpunktes  $J_1$  in der vorhergehenden Öffnung  $l_1$  als auch die Konstruktion der Drittellinien und verschränkten Drittellinien (Fig. 92a) genau wie in Fig. 79. Es soll nun  $J_2$  bestimmt werden. Für den Fall der freien Auflagerung in  $B$

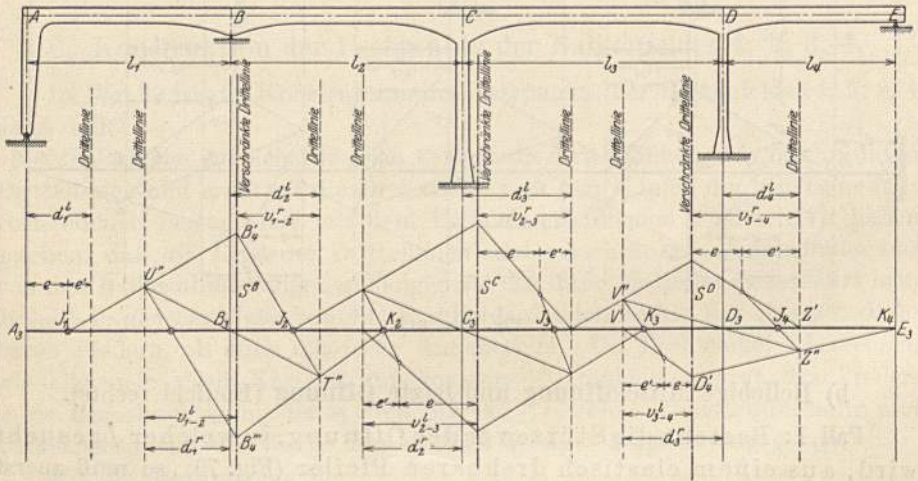


Fig. 92 u. 92 a.

(Fig. 92) ist in Gl. (137)  $\tau_0^B = \infty$  zu setzen; dann ist aber  $\frac{e}{e'} = 0$  und daher  $e = 0$ . Lassen wir nun in der allgemeinen Fig. 79 die in der Strecke  $v_{1-2}^r$  enthaltene Teilstrecke abnehmen, bis sie schließlich gleich Null wird, so fällt in diesem Grenzzustande Punkt  $E$  mit  $B_4'$  zusammen und der Festpunkt  $J_2$ , welcher im allgemeinen Fall von der Geraden  $ET''$  auf der Balkenachse ausgeschnitten wurde, wird dann von der Geraden  $B_4'T''$  ausgeschnitten. Der Festpunkt  $J_2$  wird daher folgendermaßen ermittelt:

Von dem bekannten Festpunkt  $J_1$  aus zieht man (Fig. 92) die beliebige Gerade  $J_1B_4'$ , welche die Drittellinie links von  $B$  in  $U''$  und die verschränkte Drittellinie  $S^B$  bei  $B$  in  $B_4'$  schneidet und zieht die Gerade  $U''B_3$ , welche man bis zu ihrem Schnittpunkt  $T''$  mit der Drittellinie rechts von  $B$  verlängert. Die Verbindungslinie  $B_4'T''$  schneidet dann auf der Balkenachse den gesuchten Festpunkt  $J_2$  aus.

Von  $J_2$  aus wird jetzt  $J_3$  und  $J_4$  auf dieselbe Weise ermittelt wie in dem vorhergehenden Fall 1 (Fig. 79).

Mit der Bestimmung der

### rechten Festpunkte $K$

beginnt man in der letzten Öffnung rechts und schreitet nach links fort. Das

hierbei einzuschlagende Verfahren (Fig. 79, 91 a und 92 a) ist analog demjenigen, welches auf den vorhergehenden Seiten zur Bestimmung der linken Festpunkte  $J$  erläutert wurde. Man kann auch so vorgehen, daß man den Balken aus der Zeichenebene heraus um  $180^\circ$  so dreht, daß dessen rechtes Ende nach der linken Seite kommt; die Festpunkte  $K$  werden dann genau wie die Festpunkte  $J$  bestimmt.

In den Fig. 79, 91 a und 92 a wurde die Gerade  $V''Z''$  bei  $D$ , welche schon bei der Bestimmung der Festpunkte  $J$  gezogen wurde, der Einfachheit halber wieder benützt. Dasselbe gilt von der analogen Geraden an den übrigen Stützen.

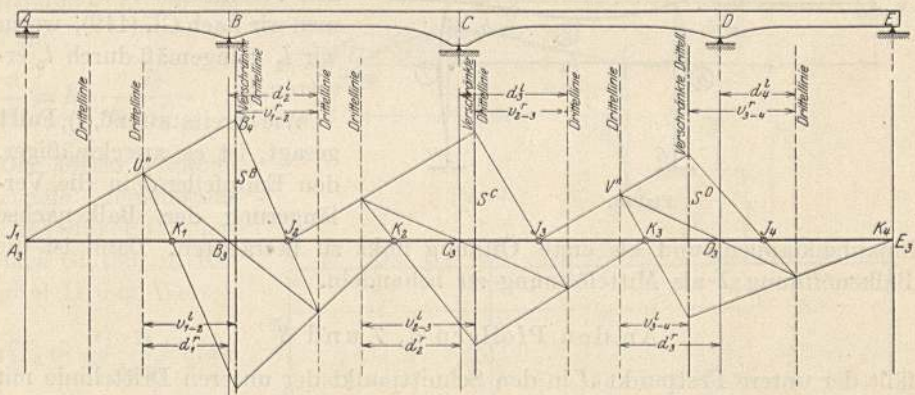


Fig. 93 u. 93 a.

Sonderfall: Liegt der Balken an allen Stützen frei auf, so erhalten wir den gewöhnlichen

durchlaufenden Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment (Fig. 93).

Die in Fig. 93 dargestellte Bestimmung der Festpunkte ist nach dem Vorhergehenden ohne weiteres verständlich.

### 7. Festpunkte $J$ und $K$ an den Pfeilern.

Da die Pfeiler nichts anderes sind wie die Balkenfelder, nämlich Stäbe des durchlaufenden Balkentragwerks der Fig. 76, so werden die beiden Festpunkte an jedem Pfeiler in der nämlichen Weise wie diejenigen einer Balkenöffnung bestimmt. Da ferner jeder der in Fig. 76 vorhandenen Pfeiler nur aus einer Öffnung besteht, so werden die Festpunkte derselben wie an einem Balkenendfeld ermittelt.

#### Am Pfeiler 5

fällt der untere Festpunkt  $J_5$  mit dem Fußgelenk zusammen (vgl. 6, a, Fall 3). Der obere Festpunkt  $K_5$  wird wie der Festpunkt  $J_1$  bestimmt, da er an dem für seine Bestimmung maßgebenden Ende  $A$  elastisch eingespannt ist, nämlich er steht dort in biegungsfester Verbindung mit dem Balkenfeld 1. Daher ist zunächst die obere Drittlinie, d. h. der Abstand  $d_5^l$  nach Gl. (101), worin wir  $l_1$  durch  $l_5$  ersetzen, oder graphisch nach Fig. 83, wenn wir uns dieselbe senkrecht

mit  $B_6$  oben, anstatt wagrecht gezeichnet denken, zu bestimmen und diese Strecke dann nach Gl. (116) im Verhältnis

$$\frac{e}{e'} = k_5 \cdot \frac{l_5}{2 \cdot \tau_1^4} \quad (142)$$

zu teilen. In Gl. (142) bedeutet  $\tau_1^A$  der Drehwinkel in  $A$  infolge  $M_1^A = 1$  (Fig. 94), wenn der Balken dort durchgeschnitten und frei aufgelagert wird; der Ausdruck dafür ist in Kap. II zu finden. Den in Gl. (142) vorkommenden Verhältniswert  $k_5$  bestimmen wir nach Gl. (119), worin wir  $l_1$  sinngemäß durch  $l_5$  ersetzen.

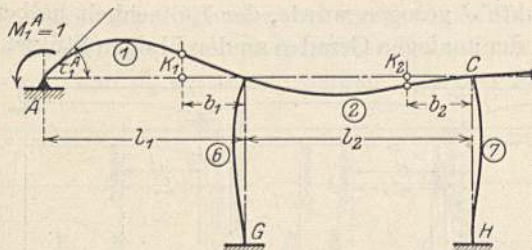


Fig. 94.

Wie bereits unter 6, a), Fall 1 gesagt, ist es zweckmäßiger, den Endpfeiler 5 in die Verlängerung der Balkenachse hinaufzuklappen, und als erste Öffnung links zu betrachten. Dann ist die Balkenöffnung 1 als Mittelöffnung zu behandeln.

#### An den Pfeilern 6, 7 und 8

fällt der untere Festpunkt  $J$  in den Schnittpunkt der unteren Drittellinie mit der Balkenachse [vgl. 6, a), Fall 2], da diese Pfeiler an ihrem Fuße fest eingespannt angenommen sind.

Am Pfeiler 7 z. B. ist der Abstand  $d_7^l$  der unteren Drittellinie vom Pfeilerfuß entweder analytisch nach Gl. (99), worin wir  $l_1$  durch  $l_7$  ersetzen oder graphisch nach Fig. 80 zu bestimmen, wenn wir uns letztere senkrecht, mit  $B_5$  oben, gezeichnet denken. Wegen der starren Strecke  $f_7$  ( $J = \infty$ ) wird die reduzierte Momentenfläche auf die Länge  $f_7$  gleich Null.

Um den oberen Festpunkt  $K_7$  zu erhalten, bestimmen wir zunächst die obere Drittellinie, d. h. den Abstand  $d_7^o$  derselben vom Pfeilerkopf, und zwar entweder analytisch nach Gl. (101) oder graphisch nach Fig. 83, wenn wir uns letztere senkrecht, mit  $B_6$  oben, gezeichnet denken und beim Bilden der reduzierten Momentenfläche das unendlich große Trägheitsmoment der starren Strecke  $f_7$  berücksichtigen. Der Abstand  $d_7^o$  ist nun wieder im Verhältnis  $\frac{e}{e'}$  zu teilen

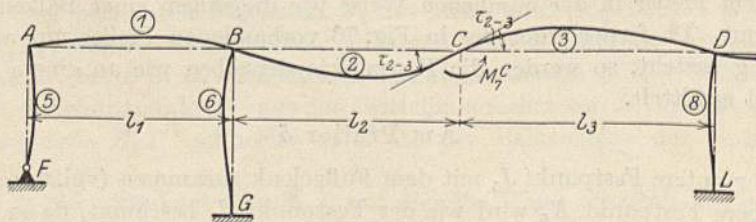


Fig. 95.

Da der Pfeiler 7 oben nicht nur mit einem, sondern mit zwei Stäben (den Balkenfeldern 2 und 3) biegefest verbunden ist, so ist in Gl. (116) für  $\frac{e}{e'}$  der

gemeinsame Drehwinkel  $\tau_{2-3}$  der beiden biegungsfest miteinander verbundenen Stäbe 2 und 3 einzusetzen, welcher entsteht, wenn der Pfeiler an seinem Kopfe vom Balken getrennt, der Balken in  $C$  frei aufgelagert und letzterer in diesem Punkte mit dem Moment  $M_7^C=1$  belastet wird (Fig. 95). Es ist demnach in diesem Falle

$$\frac{e}{e'} = k_7 \cdot \frac{l_7}{2 \cdot \tau_{2-3}^C} \quad (143)$$

Der hierin vorkommende gemeinsame Drehwinkel  $\tau_{2-3}^C$  hat nach Gl. (36) in Kapitel II den Wert

$$\tau_{2-3}^C = \frac{\tau_2^C \cdot \tau_3^C}{\tau_2^C + \tau_3^C}, \quad (144)$$

worin  $\tau_2^C$  und  $\tau_3^C$  die Drehwinkel an dem in  $C$  durchgeschnittenen und an den beiden Schnittflächen gelenkartig gestützten Balken infolge  $M_2^C=1$  bzw.  $M_3^C=1$  (Fig. 96 und 97) bedeuten, deren Werte aus Kap. II hervorgehen. Der Verhältnisswert  $k_7$  wird nach Gl. (119) berechnet, worin  $l_1$  durch  $l_7$  ersetzt wird.

Den oberen Festpunkt  $K_7$  des Pfeilers 7 können wir auch auf folgende Weise bestimmen, wobei wir den gemeinsamen Drehwinkel  $\tau_{2-3}$  nicht zu ermitteln brauchen.

Nachdem wir die Festpunkte  $J$  und  $K$  in allen Balkenöffnungen bestimmt haben, drehen wir, wie aus Fig. 98 ersichtlich, den rechts von  $C$  liegenden Teil

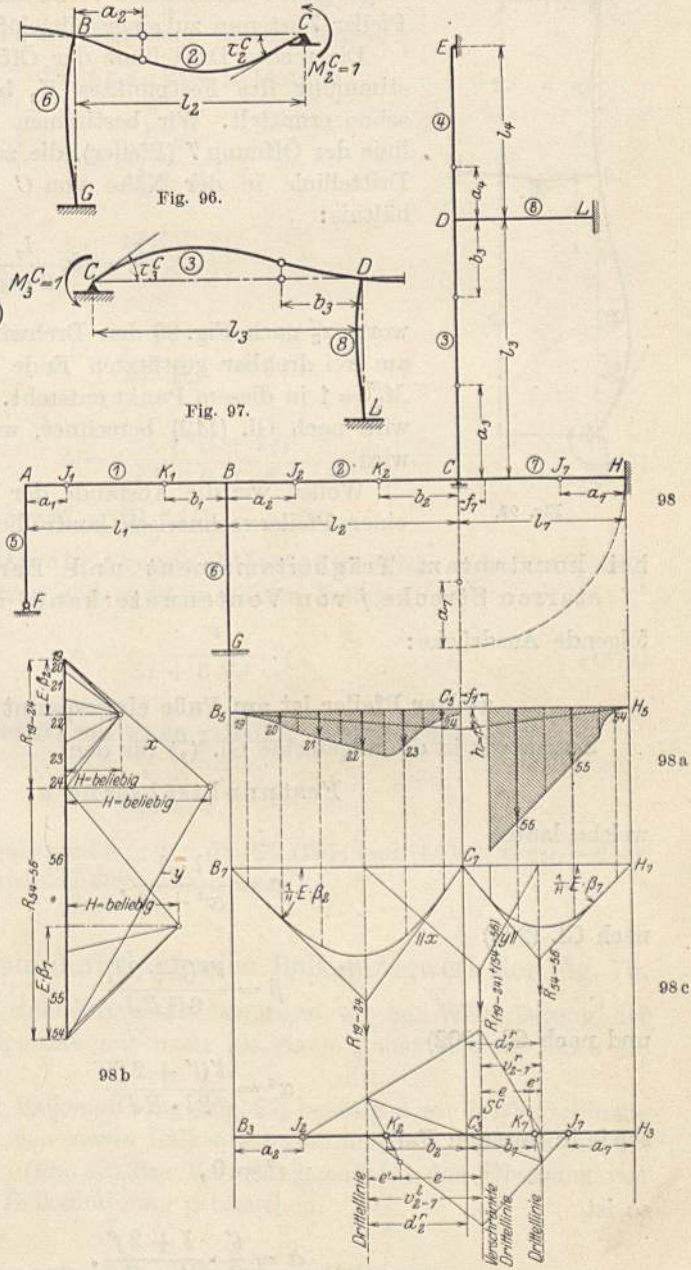


Fig. 98—98c.



so ist in Gl. (146)  $l' = l$  zu setzen, und wir erhalten für diesen Fall

$$a = \frac{l}{3}. \quad (146a)$$

Setzen wir ferner in die allgemeine Gl. (8) für den

Festpunktsabstand  $b$ ,

welche lautet

$$b = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^b + \varepsilon^b},$$

nach Gl. (206)

$$\beta = \frac{l'^2(l + 2f)}{6l^2 EJ}$$

und nach Gl. (203)

$$\alpha^b = \frac{l'^2}{2l \cdot EJ},$$

so ist

$$b = \frac{l'^2(l + 2f)}{3l'^2 + 6 \cdot l \cdot EJ \cdot \varepsilon^b}, \quad (147)$$

z. B. für Pfeiler 7 ist  $\varepsilon^b = \tau_{2-3}^c$  (Gl. 144).

Kann die starre Strecke  $f$  vernachlässigt werden, so ist in Gl. (147)  $l' = l$  und  $f = 0$  zu setzen und es ist in diesem Falle:

$$b = \frac{l^2}{3l + 6EJ \cdot \varepsilon^b}. \quad (147a)$$

### b) Der Pfeiler ist am Fuße gelenkig gelagert (Fig. 90).

Dann ist

$$a = 0,$$

und für den Festpunktsabstand  $b$  gelten die Gl. (147) und (147a), worin jedoch für  $\varepsilon^b$  ein anderer Drehwinkel einzusetzen ist.

## 8. Verteilungsmaße am durchlaufenden Balkentragwerk der Fig. 76.

Wie in Kap. I auseinandergesetzt, benötigen wir zur Weiterleitung der Momente über Knotenpunkte mit mehr als einem „anstoßenden“ Stab die Verteilungsmaße  $\mu$ .

Bei Belastung einer Balkenöffnung (Fig. 77) benötigen wir das Verteilungsmaß für den Übergang von einem Balkenfeld zum anderen, während wir bei Belastung eines Pfeilers (Fig. 88) das Verteilungsmaß für den Übergang von einem Pfeiler zu einer Balkenöffnung gebrauchen.

### a) Übergang von Balkenöffnung zu Balkenöffnung.

In Fig. 77 spaltet sich das durch die Belastung der Balkenöffnung 2 hervorgerufene Stützenmoment  $M_2^B$  beim Überschreiten des Pfeilers nach links in das Balkenmoment  $M_1^B$  und das Pfeilerkopfmoment  $M_6^B$ . Aus dem Gleich-

gewicht der Schnittmomente am herausgetrennten Knotenpunkt  $B$  (Fig. 77a) ergibt sich:

$$M_2^B - M_1^B - M_6^B = 0 \quad (148)$$

oder

$$M_1^B = M_2^B - M_6^B. \quad (148a)$$

Bezeichnen wir mit  $\mu_{2-1}^B$  (gelesen  $\mu$  in  $B$  von 2 nach 1) das Verteilungsmaß, mit welchem das Moment  $M_2^B$  beim Überschreiten der Stütze  $B$  nach links multipliziert werden muß, um daraus  $M_1^B$  zu erhalten, so ergibt sich nach Gl. (148a)

$$M_1^B = BB' = \mu_{2-1}^B \cdot M_2^B = \mu_{2-1}^B \cdot BB'' \quad (149)$$

und nach Gl. (148)

$$M_6^B = (1 - \mu_{2-1}^B) \cdot M_2^B. \quad (149a)$$

Aus Gl. (149) ergibt sich

$$\mu_{2-1}^B = \frac{BB'}{BB''} \quad (\text{Fig. 77}). \quad (150)$$

Um das Verhältnis der vorläufig noch unbekanntenen Größen  $BB'$  und  $BB''$  durch dasjenige von bereits bekannten Konstruktionslinien-Abschnitten allgemein auszudrücken, beachten wir, daß im elastischen Tangenteneck (Fig. 78 oder 99a) das Produkt von  $B_2B_2'$  mit der Polweite  $H = 1$  gleich dem statischen Moment der Kraft  $F_3'$  und daß das Produkt von  $B_2B_2''$  mit der Polweite  $H = 1$  gleich dem statischen Moment der Kraft  $(F_3' + F_4')$  in bezug auf die verschränkte Drittellinie bei  $B$  ist, d. h.

$$B_2B_2' = F_3' \cdot v_{1-2}' \quad (151)$$

und

$$B_2B_2'' = (F_3' + F_4') \cdot v_{1-2}'. \quad (152)$$

Aus den Gl. (151) und (152) folgt durch Division:

$$\frac{B_2B_2'}{B_2B_2''} = \frac{F_3'}{F_3' + F_4'}. \quad (154)$$

Die in Gl. (154) vorkommenden reduzierten Momentenflächen  $F_3'$  und  $(F_3' + F_4')$  der Fig. 77 können wir an Hand der reduzierten Momentenfläche der Fig. 84 ermitteln, wenn wir in der letzteren  $h$  durch die der Fig. 77 entnommenen Momentenordinaten  $BB'$  bzw.  $BB''$  ersetzen. Dann erhalten wir:

$$F_3' = \sum_0^{l_2} \frac{\Delta s \cdot z' \cdot BB'}{E \cdot J \cdot l_2} = \frac{BB'}{E \cdot l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z' \quad (155)$$

und

$$F_3' + F_4' = \sum_0^{l_2} \frac{\Delta s \cdot z' \cdot BB''}{E \cdot J \cdot l_2} = \frac{BB''}{E \cdot l_2} \cdot \sum_0^{l_2} w \cdot z'. \quad (156)$$



Setzen wir die Werte dieser beiden Gleichungen in Gl. (154) ein, so folgt:

$$\frac{B_2 B'_2}{B_2 B''_2} = \frac{\frac{BB'}{l_2} \cdot \sum_0^{l_2} w \cdot z'}{\frac{BB''}{l_2} \cdot \sum_0^{l_2} w \cdot z'} = \frac{BB'}{BB''} = \mu_{2-1}^B. \quad (157)$$

Wir erhalten also

$$\mu_{2-1}^B = \frac{B_2 B'_2}{B_2 B''_2}. \quad (158)$$

Da nun die Konstruktionslinien der Fig. 79 oder 99 b, welche zu den Festpunkten führen, in demselben Verhältnis zueinander stehen wie die entsprechenden Seiten des elastischen Tangentenecks der Fig. 78 oder 99 a, so ist auch:

$$\frac{B_2 B'_2}{B_2 B''_2} = \frac{B_4 B'_4}{B_4 B''_4} \quad (159)$$

und der Wert  $\mu_{2-1}^B$  ergibt sich schließlich zu:

$$\mu_{2-1}^B = \frac{B_4 B'_4}{B_4 B''_4}, \quad (160)$$

d. h. man erhält graphisch  $\mu_{2-1}^B$  aus den Konstruktionslinien der Festpunkte (Fig. 79 oder 99 b) durch Abmessen der Strecken  $B_4 B'_4$  und  $B_4 B''_4$  auf der verschränkten Drittellinie und Einsetzen dieser Strecken in Gl. (160). Dabei ist zu bemerken, daß das Verteilungsmaß  $\mu_{2-1}^B$  beim Überschreiten der Stütze  $B$  nach links aus dem Viereck  $U'' B'_4 E T''$  hervorgeht, welches zur Konstruktion des Festpunktes  $J_2$  rechts von  $B$  führt.

Analog erhält man das Verteilungsmaß  $\mu_{1-2}^B$  beim Überschreiten der Stütze  $B$  nach rechts aus dem Viereck  $T'' B'_4 U'' E' U''$  (Fig. 79), welches zur Konstruktion des Festpunktes  $K_1$  links von  $B$  führt, und zwar ist:

$$\mu_{1-2}^B = \frac{B_4 B'_4'''}{B_4 B''_4'''} \quad (161)$$

An den übrigen elastisch drehbaren Mittelpfeilern  $C$  und  $D$  ergeben sich die Verteilungsmaße beim Überschreiten derselben nach links und rechts in der genau gleichen einfachen Weise aus Fig. 79, in welcher alle nötigen Konstruktionslinien ersichtlich sind.

Liegt der Balken an einer (Fig. 92) Mittelstütze frei auf, beispielsweise in  $B$ , so fällt der Punkt  $E$  (Fig. 78) mit  $B'_2$ , und damit  $B''_2$  ebenfalls mit  $B'_2$  zusammen; dann erhalten wir für diesen Grenzfall:

$$\mu_{2-1}^B = \frac{B_2 B'_2}{B_2 B'_2} = 1, \quad (162)$$

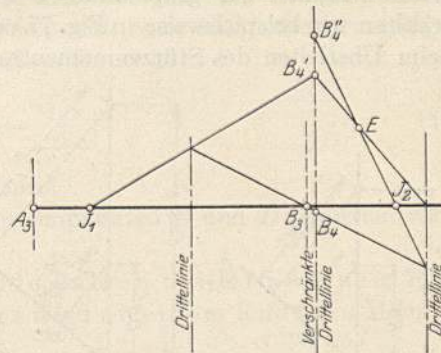


Fig. 99 b.

d. h. die Balkenmomente unmittelbar links und rechts der Auflagersenkrechten durch  $B$  sind einander gleich.

Da die zwei Strecken, als deren Verhältnis die Verteilungsmaße  $\mu$  ausgedrückt sind, sich aus den Konstruktionslinien zur Bestimmung der Festpunkte ergeben, so gilt die vorstehend erläuterte graphische Ermittlung dieser Verteilungsmaße für den durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Stützen mit beliebig veränderlichem, sprungweise veränderlichem und konstantem Trägheitsmoment.

Die Multiplikation des über einen Pfeiler hinweg fortzupflanzenden Stützenmoments mit dem entsprechenden Verteilungsmaß  $\mu$  kann man entweder rechnerisch vornehmen oder auch graphisch wie folgt ausführen:

$\alpha$ ) Wurde  $\mu$  graphisch als Verhältnis von zwei Strecken aus den Konstruktionslinien zur graphischen Bestimmung der Festpunkte ermittelt, so erhalten wir beispielsweise in Fig. 77 oder 99c das Produkt  $\mu_{2-1}^B \cdot BB'' = BB'$  beim Überleiten des Stützenmomentes  $BB''$  über den Pfeiler  $B$  in die linke

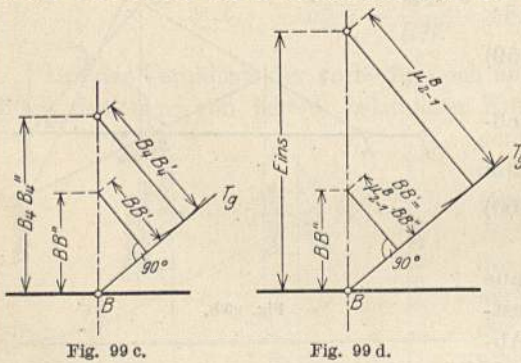


Fig. 99 c.

Fig. 99 d.

Nachbaröffnung, indem wir (siehe Fig. 77 oder 99c) auf der Senkrechten durch  $B$  die der Fig. 79 oder 99b entnommene Strecke  $B_4B_4''$  von  $B$  aus auftragen, aus dem Endpunkt der letzteren als Mittelpunkt mit einem Radius gleich der aus Fig. 79 oder 99b entnommenen Strecke  $B_4B_4'$  einen Kreisbogen schlagen und an letzteren von  $B$  aus eine Tangente ziehen. Tragen wir jetzt auf der

Senkrechten durch  $B$  (Fig. 77 oder 99c) von  $B$  aus die Momentenordinate  $BB''$  auf, so ist das Lot, welches wir vom Endpunkt dieser Strecke auf die vorgenannte Tangente fallen, gleich dem Produkt  $\mu_{2-1}^B \cdot BB''$ .  
 $\beta$ ) Wurde das Verteilungsmaß  $\mu_{2-1}^B$  im vorgenannten Falle des Überschreitens des Pfeilers  $B$  durch das Stützenmoment  $BB''$  rechnerisch als Zahl ermittelt, so trägt man zur Bestimmung des vorbeschriebenen Verwandlungswinkels (Fig. 77 oder 99d) auf der Senkrechten durch  $B$  (siehe Fig. 99d) in beliebigem Maßstabe die Zahl Eins auf, schlägt aus dem Endpunkt dieser Strecke mit der in demselben Maßstab abgegriffenen Zahl  $\mu_{2-1}^B$  als Radius einen Kreisbogen und zieht an letzteren von  $B$  aus eine Tangente; die graphische Multiplikation erfolgt dann wie vorhin unter  $\alpha$ ).

### b) Übergang vom Pfeiler zum Balken.

In Fig. 88 spaltet sich das durch die Belastung des Pfeilers 7 hervorgerufene Pfeilerkopfmoment  $M_7^C$  beim Weiterleiten in den Balken in das Moment  $M_2^C$  links von  $C$  und  $M_3^C$  rechts von  $C$ . Aus dem Gleichgewicht der Schnittmomente am herausgetrennten Knotenpunkt  $C$  (Fig. 88a) ergibt sich:

$$M_7^C - M_2^C - M_3^C = 0 \quad (163)$$

oder

$$M_2^C = M_7^C - M_3^C. \quad (164)$$

Bezeichnen wir mit  $\mu_{7-2}^C$  das Verteilungsmaß, mit welchem das Moment  $M_7^C$  beim Weiterleiten in die Balkenöffnung 2 multipliziert werden muß, um daraus das Moment  $M_2^C$  zu erhalten, so ist nach Gl. (164):

$$M_2^C = \mu_{7-2}^C \cdot M_7^C \tag{165}$$

und

$$M_3^C = (1 - \mu_{7-2}^C) \cdot M_7^C. \tag{166}$$

Hat man den oberen Festpunkt  $K_7$  des Pfeilers 7 graphisch nach Fig. 98 bestimmt, so hat man die verschränkte Drittlinie (Abstand  $v_{2-7}$ ), auf welcher die Abschnitte  $B_4B_4'$  und  $B_4B_4''$  abgegriffen werden können. Es ist dann laut Gl. (160)

$$\mu_{7-2}^C = \frac{B_4B_4'}{B_4B_4''}. \tag{167}$$

Wurde der obere Festpunkt  $K_7$  des Pfeilers 7 mit Hilfe des gemeinsamen Drehwinkels  $\tau_{2-3}^C$  (nach Gl. 143) als Festpunkt eines Endfeldes ermittelt, so berechnet man  $\mu_{7-2}^C$  nach Gl. (35) in Kap. II; es ist

$$\mu_{7-2}^C = \frac{\tau_{2-3}^C}{\tau_2^C}, \tag{168}$$

worin  $\tau_2^C$  den Winkel aus Fig. 96 bedeutet.

Die Verteilungsmaße  $\mu$  an den Knotenpunkten  $B$  und  $D$  ermitteln wir in analoger Weise.

Sonderfall: Der durchlaufende Balken besitzt an einem Ende einen belasteten Ausleger, d. h. es wird an einem Ende ein Moment in die Konstruktion eingeleitet.

Der in Fig. 100 dargestellte durchlaufende Balken  $ABC$  auf den elastisch drehbaren Pfeilern 4 und 5 und der frei drehbaren Stütze  $C$ , an welcher der Balken festgehalten ist, besitzt an seinem linken Ende einen Ausleger  $I$ , auf welchen die beliebige Belastung  $P$  aufgebracht ist. Die Belastung  $P$  erzeugt im Querschnitt unmittelbar links von  $A$  das Kragmoment  $M_1^A$ , welches sich nach rechts über den Balken und die Pfeiler fortpflanzt und dabei die in Fig. 100 gezeichnete Momentenfläche hervorruft. Beim Überschreiten des Pfeilers  $A$

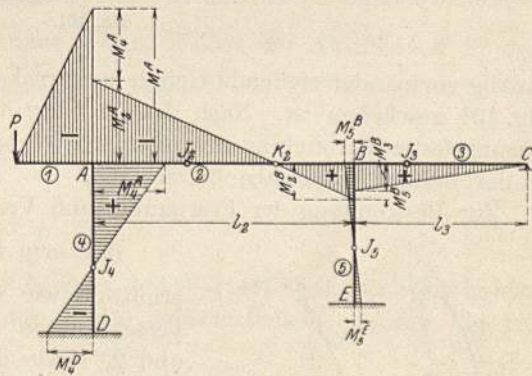


Fig. 100.

nach rechts spaltet sich  $M_1^A$  zunächst in das Stützenmoment unmittelbar rechts von  $A$ :

$$M_2^A = \mu_{1-2}^A \cdot M_1^A$$

und in das Pfeilerkopfmoment

$$M_4^A = (1 - \mu_{1-2}^A) \cdot M_1^A.$$

In diesem Falle ist es nun nicht möglich, den Wert für  $\mu_{1-2}^A$  graphisch zu be-

stimmen, sondern man ist gezwungen,  $\mu_{1-2}^A$  nach Gl. (37) (Kap. II) zu berechnen; es ist

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\tau_4^A}{\tau_2^A + \tau_4^A} \tag{169}$$

Würde der Balken in  $A$  frei aufliegen, so wären die beiden Stützenmomente unmittelbar links und rechts von  $A$  einander gleich.

### 9. Festpunkte und Verteilungsmaße an allgemeinen Tragwerken.

#### a) Offenes Tragwerk.

An dem in Fig. 101 dargestellten allgemeinen Tragwerk mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe (Träger) müssen wir, um die Festpunkte  $J$  und  $K$  und die Verteilungsmaße  $\mu$  graphisch bestimmen zu können, zunächst die unregelmäßig aneinandergereihten Stäbe in zweckmäßig recht-

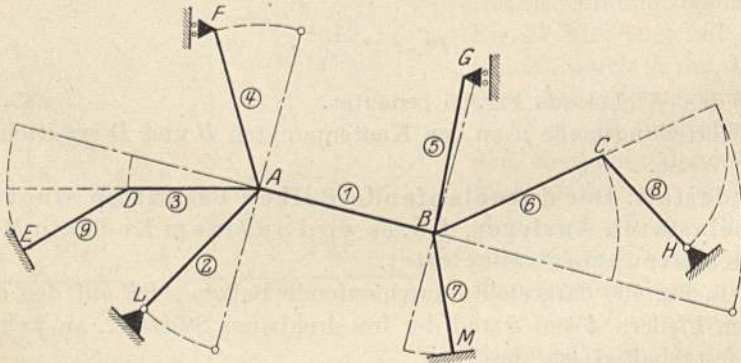


Fig. 101.

winklig zueinander stehende Gerade ausstrecken bzw. umklappen, wie dies in Fig. 101 geschehen ist. Nach diesem Vorgang stehen alle Stäbe wieder in biegebfester Verbindung miteinander wie vorher. In den Punkten  $D$  und  $C$  ist der Balken frei drehbar zu stützen.

Zur Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmaße

#### am Balken $EDABCH$

ermitteln wir zunächst die Drittlinien und verschränkten Drittlinien nach Abschnitt 1 und 2, sowie die Drehwinkel an den vorhandenen, biegebfest mit dem Balken verbundenen Pfeilern. Da sich in Knotenpunkt  $A$  nicht nur ein, sondern zwei Stäbe, nämlich die Pfeiler 2 und 4 anschließen, so ist der gemeinsame Drehwinkel  $\tau_{2-4}^A$  infolge  $M = 1$  in  $A$  (Fig. 102) zu ermitteln, welcher nach Gl. (36) den Wert hat:

$$\tau_{2-4}^A = \frac{\tau_2^A \cdot \tau_4^A}{\tau_2^A + \tau_4^A} \tag{170}$$

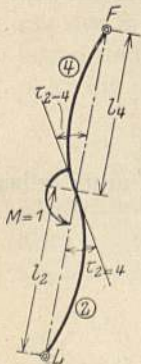


Fig. 102.

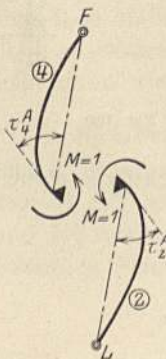


Fig. 102 a.

Die Bedeutung der Winkel  $\tau_2^A$  und  $\tau_4^A$  geht aus Fig. 102a hervor, die Werte derselben werden nach Kap. II berechnet.

Dasselbe gilt für Knotenpunkt  $B$ , wo die beiden Pfeiler 5 und 7 angeschlossen sind und deren gemeinsamer Drehwinkel  $\tau_{5-7}^B$  infolge  $M = 1$  in  $B$  (Fig. 103) den Wert hat:

$$\tau_{5-7}^B = \frac{\tau_5^B \cdot \tau_7^B}{\tau_5^B + \tau_7^B} \quad (171)$$

Die Bedeutung der Winkel  $\tau_5^B$  und  $\tau_7^B$  geht aus Fig. 103a hervor.

Zur Bestimmung der linken Festpunkte  $J$  am ganzen Balken benötigen wir noch die Werte der Verhältnisse  $\frac{e}{e'}$  zum Teilen

der Abstände  $v^r$  in den Balkenöffnungen 1 und 6. Es ist nach Gl. (137):

$$\frac{e}{e'} = k_1 \cdot \frac{l_1}{2 \cdot \tau_{2-4}^A} \cdot \frac{v_{3-1}^r}{d_1^r} \quad (172)$$

und

$$\frac{e}{e'} = k_6 \cdot \frac{l_6}{2 \cdot \tau_{5-7}^B} \cdot \frac{v_{1-6}^r}{d_6^r}, \quad (173)$$

worin die Verhältniszwerte  $k_1$  und  $k_6$  einen der Gl. (139) analogen Wert haben. Darauf können wir die Festpunkte  $J$  am ganzen Balken konstruieren, was in Fig. 104 dargestellt ist.

Zur Bestimmung der rechten Festpunkte  $K$  am ganzen Balken benötigen wir noch die Werte der Verhältnisse  $\frac{e}{e'}$  zum Teilen der Abstände  $v^l$  in den Balkenöffnungen 1 und 3; es ist nach Gl. (140):

$$\frac{e}{e'} = k_1 \cdot \frac{l_1}{2 \cdot \tau_{5-7}^B} \cdot \frac{v_{1-6}^l}{d_1^l}, \quad (174)$$

$$\frac{e}{e'} = k_3 \cdot \frac{l_3}{2 \cdot \tau_{2-4}^A} \cdot \frac{v_{3-1}^l}{d_3^l}, \quad (175)$$

worin die Verhältniszwerte  $k_1$  und  $k_3$  einen der Gl. (141) analogen Wert haben. Darauf können wir die Festpunkte  $K$  am ganzen Balken wie aus Fig. 104 ersichtlich, konstruieren.

Die bei einer

#### Belastung des Balkens 6 (Fig. 60)

benötigten Verteilungsmaße  $\mu_{6-1}$  und  $\mu_{1-3}$  erhalten wir nach Gl. (160) aus Fig. 104 zu:

$$\mu_{6-1} = \frac{B_1 B_1'}{B_1 B_1''}, \quad (176)$$

$$\mu_{1-3} = \frac{A_1 A_1'}{A_1 A_1''}. \quad (177)$$

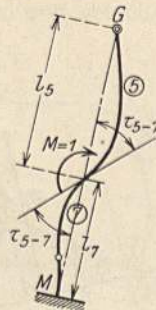


Fig. 103.

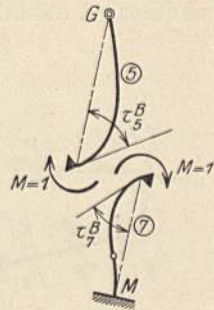


Fig. 103 a.



Zur Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmaße  
am Stabzug  $LAF$  (Pfeiler)

ermitteln wir zunächst wieder die Drittelinien und verschränkten Drittelinien nach Abschnitt 1 und 2 sowie den gemeinsamen Drehwinkel  $\tau_{1-3}^A$  (Fig. 105) infolge  $M = 1$  in  $A$ , welcher nach Gl. (36) den Wert hat:

$$\tau_{1-3}^A = \frac{\tau_1^A \cdot \tau_3^A}{\tau_1^A + \tau_3^A} \quad (182)$$

Die Bedeutung der Winkel  $\tau_1^A$  und  $\tau_3^A$  geht aus Fig. 105a hervor.

Zur Bestimmung des unteren Festpunktes  $K_4$  am Pfeiler 4 berechnen wir noch zum Teilen des Abstandes  $v_{2-4}^r$  das Verhältnis (nach Gl. 137):

$$\frac{e}{e'} = k_2 \cdot \frac{l_4}{2 \cdot \tau_{1-3}^A} \cdot \frac{v_{2-4}^r}{d_4'} \quad (183)$$

worin  $k_2$  einen der Gl. (138) analogen Wert hat.

Darauf können wir, von  $J_2$  (fällt wegen des Fußgelenkes mit  $L$  zusammen) ausgehend, den Festpunkt  $K_4$  konstruieren (Fig. 104a).

Zur Bestimmung des oberen Festpunktes  $K_2$  am Pfeiler 2 benötigen wir noch zum Teilen der Strecke  $v_{2-4}^l$  das Verhältnis [nach Gl. (140)]:

$$\frac{e}{e'} = k_2 \cdot \frac{l_2}{2 \cdot \tau_{1-3}^A} \cdot \frac{v_{2-4}^l}{d_2'} \quad (184)$$

worin  $k_2$  einen der Gl. (141) analogen Wert hat.

Darauf können wir, von  $J_4$  (fällt wegen des freien Auflagers in  $F$  mit  $F$  zusammen) ausgehend, den Festpunkt  $K_2$  konstruieren (Fig. 104a).

Das bei einer

Belastung des Pfeilers 2 (Fig. 106)

benötigte Verteilungsmaß  $\mu_{2-4}$  erhalten wir nach Gl. (161) aus Fig. 104a zu:

$$\mu_{2-4} = \frac{A_2 A_2'''}{A_2 A_2''''} \quad (185)$$

Multiplizieren wir das Moment  $M_2^A$  (Fig. 106) mit  $\mu_{2-4}$ , so erhalten wir das Moment  $M_4^A$ , und der Rest  $(1 - \mu_{2-4}) \cdot M_2^A$  ist gleich dem auf Balkenöffnung 1 und 3 zusammen entfallenden Mo-

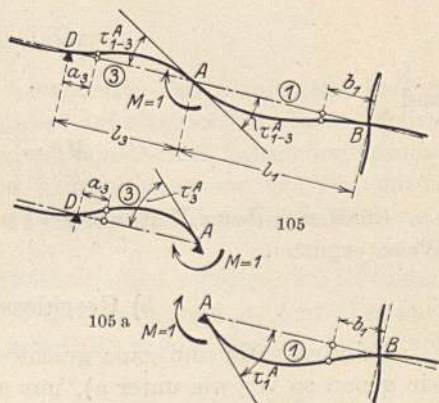


Fig. 105 u. 105a.

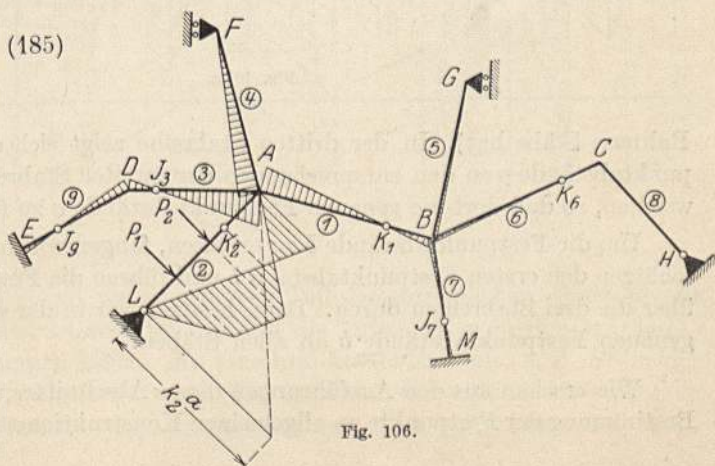


Fig. 106.

ment  $M_{1-3}^A$ , welches wir noch im Verhältnis der Elastizitätsmaße  $\frac{1}{\tau_1^A}$  und  $\frac{1}{\tau_3^A}$  (vgl. Kap. II, 5) auf die beiden Balkenöffnungen 1 und 3 verteilen müssen; es ist nach Gl. (35):

$$M_1^A = \frac{\tau_{1-3}^A}{\tau_1^A} \cdot M_{1-3}^A \quad (186)$$

und

$$M_3^A = \frac{\tau_{1-3}^A}{\tau_3^A} \cdot M_{1-3}^A \quad (187)$$

Für den Stabzug  $MBG$  werden Festpunkte und Verteilungsmaße in analoger Weise ermittelt.

### b) Geschlossenes Tragwerk.

Beim einseitig und ganz geschlossenem Tragwerk (Fig. 70 und 71) gehen wir genau so vor wie unter a), nur müssen wir, wie in Kap. II, 8, 9 und 10 ausgeführt, diejenigen Festpunkte schätzen, die wir wegen der Geschlossenheit des Tragwerkes nicht direkt berechnen können und die Berechnung dann wiederholt durchführen, um den Fehler der Schätzung auszuschalten.

Sonderfall: Der einfache geschlossene Rahmen (Fig. 107).

Für diesen Fall ist die graphische Festpunktbestimmung ganz zweckmäßig. Man wickelt den Rahmen ab und trägt ihn mehrmals (es genügt zwei- bis dreimal) hintereinander auf (siehe Fig. 107a).

Um die Festpunktabstände  $a$  zu erhalten, bestimmt man zunächst die Drittelllinien und verschränkten Drittelllinien in allen Öffnungen. Darauf schätzt man den ersten Festpunktabstand  $a$  und setzt die Festpunktkonstruktionen über alle Öffnungen fort (über zwei- bis dreimal soviel Öffnungen, als der geschlossene

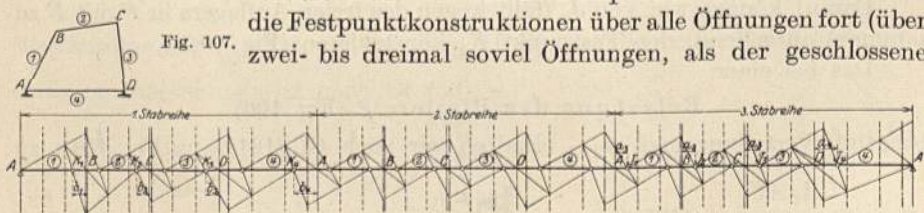


Fig. 107 a.

Rahmen Stäbe hat). In der dritten Stabreihe zeigt sich dann, daß die Festpunktabstände von den entsprechenden der zweiten Stabreihe nicht mehr abweichen, so daß dort die genauen Festpunktabstände  $a$  zu finden sind.

Um die Festpunktabstände  $b$  zu erhalten, fangen wir am anderen Ende an, schätzen den ersten Festpunktabstand  $b$  und führen die Festpunktkonstruktion über die drei Stabreihen durch. Dann besitzen wir in der ersten Stabreihe die genauen Festpunktabstände  $b$  an allen Stäben.

Wie ersehen aus den Ausführungen dieses Abschnittes, daß die graphische Bestimmung der Festpunkte an allgemeinen Konstruktionen nicht so vorteilhaft



ist wie am durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern, daß man also in allgemein gelagerten Fällen das analytische dem graphischen Verfahren vorziehen wird.

### 10. Sonderfälle.

Als Sonderfälle des vorhergehend behandelten durchlaufenden Balkens mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment auf elastisch drehbaren Pfeilern betrachten wir den durchlaufenden Balken mit konstantem, jedoch von Öffnung zu Öffnung sprunghaft veränderlichem Trägheitsmoment und den durchlaufenden Balken mit über seiner ganzen Länge konstantem Trägheitsmoment auf elastisch drehbaren Stützen.

Das einzuschlagende Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte ist in dem eingangs erwähnten Werke von Wilhelm Ritter behandelt, geht aber auch ohne weiteres aus den vorhergehend erläuterten allgemeinen Beziehungen hervor.

#### a) Der Balken hat konstantes, jedoch von Öffnung zu Öffnung sprunghaft veränderliches Trägheitsmoment (Fig. 108).

Wir bezeichnen mit  $J_1$  das konstante Trägheitsmoment der Öffnung  $l_1$ , mit  $J_2$  dasjenige der Öffnung  $l_2$ , usw.

Wir beginnen wie immer mit der Ermittlung der Drittelllinien, verschränkten Drittelllinien und der Drehwinkel  $\tau$  an den gegebenenfalls vorhandenen, mit dem Balken biegungsfest verbundenen Pfeilern.

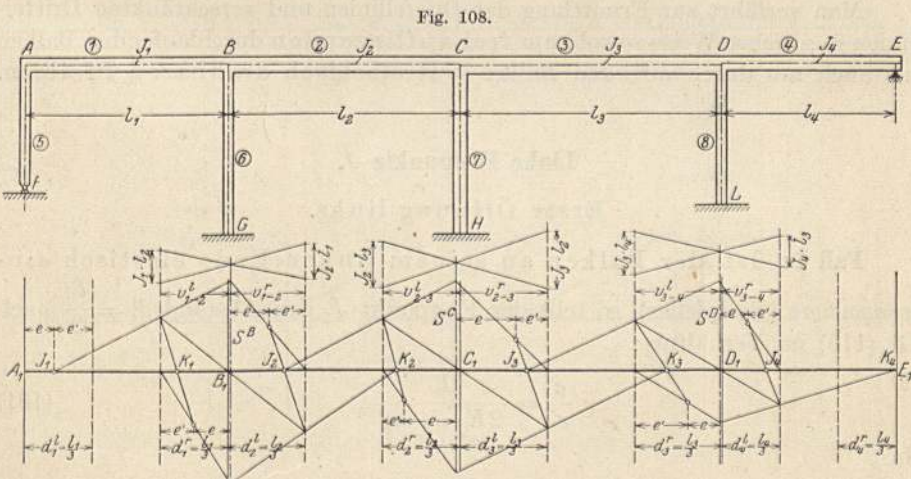


Fig. 108 a.

In diesem Falle sind die reduzierten Teilmomentenflächen Dreiecke mit Spitze in den Auflagersenkrechten, so daß die Drittelllinien in die Drittelpunkte der Öffnungen fallen; die verschränkte Drittellinie, z. B.  $S^B$  in der Nähe der Stütze  $B$  (Fig. 108a) teilt den Abstand der beiden benachbarten Drittelllinien im Verhältnis  $l_2 \cdot J_1 : l_1 \cdot J_2$ , was man sofort einsieht, wenn

man die entsprechenden Werte für  $F'_2$ ,  $F'_3$ ,  $d'_1$  und  $d'_2$  in die Gl. (102) und (103) einsetzt und Gl. (102) durch Gl. (103) dividiert. Es ist dann

$$v'_{1-2} = \frac{l_1 + l_2}{3 \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{J_2}{J_1} \right)}, \quad (188)$$

$$v''_{1-2} = \frac{l_1 + l_2}{3 \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right)} \quad (189)$$

und

$$\frac{v'_{1-2}}{v''_{1-2}} = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{J_1}{J_2}, \quad (190)$$

d. h. die verschränkte Drittellinie rückt gegen die Öffnung mit dem kleineren Trägheitsmoment hin, weil das reduzierte Momentendreieck bei kleinerem Trägheitsmoment größer wird. Die Teilung des Abstandes der beiden benachbarten Drittellinien in dem durch Gl. (190) angegebenen Verhältnis nehmen wir am einfachsten so vor, daß wir auf derjenigen Drittellinie, an welche die Strecke  $v'_{1-2}$  anstößt, das Maß  $J_1 \cdot l_2$  und auf der Richtung der Drittellinie, an welche  $v''_{1-2}$  anstößt,  $J_2 \cdot l_1$  in gleichem Maßstab auftragen und die Endpunkte der beiden Strecken kreuzweise verbinden (vgl. Fig. 108a); die gesuchte verschränkte Drittellinie  $S^B$  geht dann durch den Schnittpunkt dieser beiden sich kreuzenden Linien.

Man verfährt zur Ermittlung der Drittellinien und verschränkten Drittellinien in gleicher Weise sowohl am frei aufliegenden durchlaufenden Balken als auch am durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern.

### Linke Festpunkte $J$ .

#### Erste Öffnung links.

**Fall 1:** Ist der Balken an seinem linken Ende elastisch eingespannt (Endpfeiler), so teilt der Festpunkt  $J_1$  den Abstand  $d'_1 = \frac{l_1}{3}$  nach Gl. (116) im Verhältnis:

$$\frac{e}{e'} = \frac{l_1}{2E \cdot J_1 \cdot \tau_5^A}, \quad (191)$$

da

$$k_1 = \frac{1}{E \cdot J_1}.$$

**Fall 2:** Ist der Balken an seinem linken Ende fest eingespannt, so ist

$$e' = 0,$$

d. h. der Festpunkt  $J_1$  fällt in den ersten Drittelpunkt der Öffnung.

Beliebige Mittelöffnung und letzte Öffnung rechts.

**Fall 1:** Besteht die Stütze vorder der Öffnung, in welcher  $J$  gesucht wird, aus einem elastisch drehbaren Pfeiler, so muß zuerst der Festpunkt  $J$  in der vorhergehenden Öffnung bestimmt werden. Es ist

$$k_2 = \frac{1}{E \cdot J_2} \quad \text{und} \quad d_2 = \frac{l_2}{3}.$$

Diese Werte in Gl. (137) eingesetzt gibt:

$$\frac{e}{e'} = \frac{3 \cdot v_{1-2}^r}{2 E \cdot J_2 \cdot \tau_6^B}. \quad (192)$$

**Fall 2:** Liegt der Balken auf der Stütze vor der Öffnung, in welcher  $J$  gesucht wird, frei auf, so ist

$$e = 0.$$

### Rechte Festpunkte $K$ .

Dreht man den Balken aus der Zeichenebene heraus um  $180^\circ$  so, daß dessen rechtes Ende nach der linken Seite kommt, so werden die rechten Festpunkte  $K$  genau wie die linken Festpunkte  $J$  bestimmt.

**b) Der Balken hat konstantes Trägheitsmoment auf seine ganze Länge (Fig. 109).**

Die reduzierten Teilmomentenflächen sind wieder Dreiecke, so daß die Drittelllinien auch hier in die Drittelpunkte der Öffnungen fallen. Die

Fig. 109.

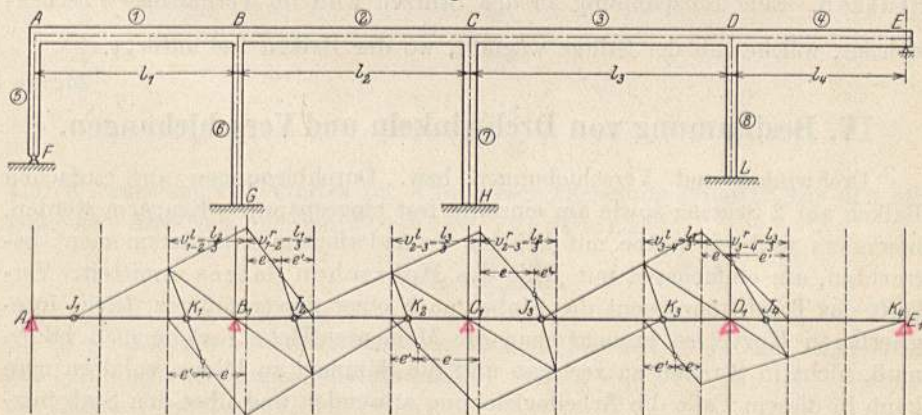


Fig. 109 a.

verschränkten Drittelllinien erhält man durch Vertauschen der Spannweitendritteln (Fig. 109a); es ist:

$$v_{1-2}^l = \frac{l_2}{3} \quad (193)$$

und

$$v_{1-2}^r = \frac{l_1}{3}. \quad (194)$$

**Linke Festpunkte  $J$ .**

Das Verhältnis  $\frac{e}{e'}$  beträgt bei einem an seinem linken Ende elastisch eingespannten Balken (Endpfeiler): für den linken Festpunkt  $J_1$  nach Gl. (116):

$$\frac{e}{e'} = \frac{l_1}{2 \cdot E \cdot J \cdot \tau_5^4}, \quad (195)$$

da

$$k = \frac{1}{E \cdot J}$$

und bei Vorhandensein eines elastisch drehbaren Pfeilers zwischen Öffnung 1 und 2 für den linken Festpunkt  $J_2$  nach Gl. (137):

$$\frac{e}{e'} = \frac{l_1}{2 \cdot E \cdot J \cdot \tau_6^3}, \quad (196)$$

wobei hervorzuheben ist, daß sich im Zähler des Verhältnisses  $\frac{e}{e'}$  für  $J_2$  die Spannweite  $l_1$  vorfindet, da in Gl. (137)  $v'_{1-2} = \frac{l_1}{3}$  einzusetzen war.

Bezüglich der

**rechten Festpunkte  $K$** 

gilt das unter a) Gesagte.

Wie beim allgemeinen Fall erwähnt, ist die Lage der Drittelllinien und verschränkten Drittelllinien dieselbe sowohl am kontinuierlichen Balken auf frei drehbaren als auch am kontinuierlichen Balken auf elastisch drehbaren Stützen. Eine Einspannung an den Stützen wird im Verhältnis  $\frac{e}{e'}$  berücksichtigt, welches an der Stütze wegfällt, wo der Balken frei aufliegt.

**IV. Bestimmung von Drehwinkeln und Verschiebungen.**

Drehwinkel und Verschiebungen bzw. Durchbiegungen am einfachen Balken auf 2 Stützen sowie am einseitig fest eingespannten Kragarm werden, besonders weil wir Stäbe mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment betrachten, am einfachsten mit Hilfe des Mohrschen Satzes ermittelt. Verläuft das Trägheitsmoment des Stabes nach einer gesetzmäßigen, leicht integrierbaren Kurve, so braucht man die Momentenfläche, welche man bilden muß, nicht in Streifen zu zerlegen und die Summen zu bilden, sondern man kann in diesem Falle die Arbeitsgleichung anwenden und über den Stab integrieren. Dieser Fall liegt jedoch selten vor; bei einfachen Belastungsfällen und konstantem Trägheitsmoment läßt man die ganze reduzierte Momentenfläche in ihrem Schwerpunkt wirken. Das Trägheitsmoment von vornherein nach einer integrierbaren Kurve anzunehmen, lohnt sich nicht, vielmehr soll man die Konstruktion in erster Linie nach architektonischen und konstruktiv richtigen Grundsätzen bestimmen. Da die Ermittlung der benötigten Festpunkte im Verhältnis zu der ganzen Berechnung eines Tragwerkes wenig Zeit erfordert, sich aber die ganze Berechnung auf die Festpunkte stützt, so ist es richtiger, wenn man die Festpunkte nicht nur überschlägig oder nach kom-

plizierten Formeln, sondern nach dem genauen Verfahren ermittelt, da man sonst auf unsicherer Grundlage weiterbaut.

Im folgenden wird zunächst der

### allgemeine Mohrsche Satz

und die daraus hervorgehenden besonderen Sätze

für den einfachen Balken und den Kragarm der Vollständigkeit halber abgeleitet.

Es sei  $\Delta s$  die Länge eines Balkenelementes (Fig. 109 b), auf welches das gegebene Biegemoment  $M$  wirke<sup>1)</sup>.

Dann ist die Spannung in der untersten Faser dieses Balkenelementes

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot e, \quad = \frac{\lambda}{\omega}$$

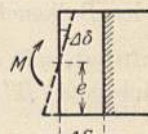


Fig. 109 b.

wenn  $J$  das Trägheitsmoment des Balkenquerschnittes bedeutet.

Unter dem Einfluß von  $\sigma$  verlängert sich die unterste Faser um die Strecke

$$\frac{\sigma}{E} \cdot \Delta s,$$

wenn  $E$  den Elastizitätsmodul des Baumaterials bezeichnet.

Ist  $\Delta \delta$  der Winkel, um den sich der eine Querschnitt in bezug auf den anderen dreht, so ist die Verlängerung der untersten Faser auch gleich

$$e \cdot \Delta \delta$$

(da der Winkel  $\Delta \delta$  sehr klein), daher

$$e \cdot \Delta \delta = \frac{\sigma}{E} \Delta s,$$

woraus

$$\Delta \delta = \frac{\sigma \cdot \Delta s}{e \cdot E}.$$

Durch Einsetzen des Wertes für  $\sigma$  in dieser Gleichung erhalten wir den allgemeinen Ausdruck für den Formänderungswinkel:

$$\Delta \delta = \frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}.$$

Es sei  $AB$  ein belasteter einfacher Balken (Fig. 109 c),  $\Delta s$  die Länge eines in  $C$  befindlichen Balkenelementes und  $M$  das Biegemoment für den Schnitt  $C$ . Trägt man nun (Fig. 109 d) die Größe  $\frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}$  senkrecht auf, und zieht aus ihren

Endpunkten Linien nach einem im Abstände 1 gelegenen Punkte  $O$ , so schließen diese Linien den Winkel  $\Delta \delta$  ein. Zieht man ferner (Fig. 109 e) zwei Linien

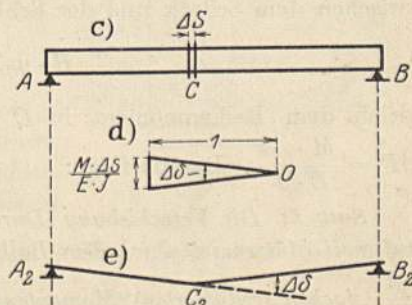


Fig. 109 c, d, e.

<sup>1)</sup> Vgl. Ritter, Anwendungen der Graph. Statik, 3. Bd., S. 2.

$A_2C_2$  und  $C_2B_2$ , die zu den Linien aus O parallel laufen und sich senkrecht unter C schneiden, so stellt  $A_2C_2B_2$  die Form dar, in welche die Balkenachse übergeht, wenn nur das Element bei C elastisch gedacht wird.

Denkt man sich nun den ganzen Balken in Elemente zerlegt und jedes von ihnen elastisch, so wird die Balkenachse ebenso viele Knickungen erleiden, und die Wirkungen dieser Knickungen werden sich alle summieren. Die Form, welche die Balkenachse hierbei annimmt, wird daher gefunden, wenn man für jedes Balkenelement  $\Delta s$  die Größen  $\frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}$  berechnet, wie Kräfte senkrecht

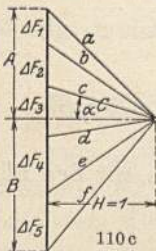
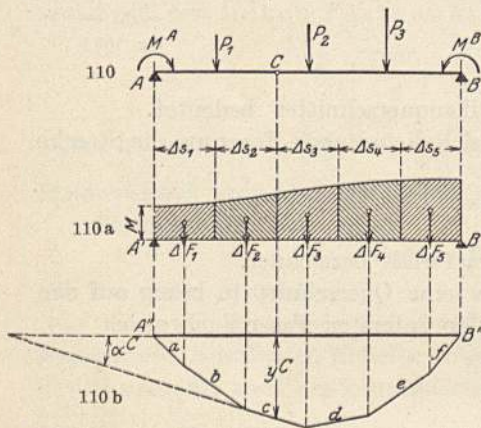


Fig. 110—110c.

mit der Polweite  $H = 1$  das Kräfteck der Fig. 110c und das Seileck der Fig. 110b. Dann ist die Verschiebung (Durchbiegung) in einem beliebigen Balkenpunkt C gleich der Ordinate  $y_C$  zwischen dem Seileck und der Schlußlinie  $A''B''$ ; andererseits ist aber auch

$$H \cdot y_C = 1 \cdot y_C = y_C$$

gleich dem Balkenmoment in C infolge der Belastung mit den Kräften

$$\Delta F = \frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}. \text{ Daraus folgt:}$$

**Satz I:** Die Verschiebung (Durchbiegung) in einem Punkte C eines Balkens auf zwei Stützen ist gleich dem Balkenmoment in diesem Punkte des mit seiner  $\frac{1}{E \cdot J}$  fachen (reduzierten) Momentenfläche belasteten Balkens.

aufträgt, mit dem Punkt O als Pol ein Kräfteck und mit dem letzteren das Vieleck  $A''B''$  als zugehöriges Seileck zeichnet, dessen Ecken senkrecht unter den entsprechenden Elementen liegen. Auf diese Weise gelangen wir zu dem allgemeinen Mohrschen Satze:

*Um die elastische Linie eines Balkens zu erhalten, betrachte man seine Momentenfläche als Belastungsfläche und zeichne zu dieser ein Seileck.*

Wir leiten nun noch die für Durchbiegung und Achsendrehung des einfachen Balkens und des Kragarmes geltenden besonderen Sätze ab:

Zu der in Fig. 110 gegebenen beliebigen äußeren Belastung des einfachen Balkens AB

denken wir uns die zugehörige reduzierte Momentenfläche (Fig. 110a) gebildet, teilen dieselbe in Streifen von der Breite  $\Delta s$  und zeichnen zu den im Schwerpunkt dieser Streifen wirkenden Kräften

$$\Delta F = \frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}$$

Ferner ist in Fig. 110b der Winkel  $\alpha_C$ , den die Seite  $b$  des Seilecks mit der Schlußlinie einschließt, gleich dem Winkel, welchen die Tangente an die elastische Linie in  $C$  mit der ursprünglichen Balkenachse bildet; im Krafteck (Fig. 110c) schließen die entsprechenden Polstrahlen ebenfalls den Winkel  $\alpha_C$  ein und es folgt:

$$Q_C = H \cdot \operatorname{tg} \alpha_C.$$

Durch Einsetzen von  $H = 1$  und  $\operatorname{tg} \alpha_C = \alpha_C$  (da  $\alpha_C$  sehr klein ist) in diesen Ausdruck folgt:

$$Q_C = \alpha_C, \quad \text{d. h.}$$

**Satz II:** Der Drehwinkel (Achsendrehung) in einem Punkte  $C$  eines Balkens auf zwei Stützen ist gleich der Balkenquerkraft in diesem Punkt des mit seiner  $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen (reduzierten) Momentenfläche belasteten Balkens; insbesondere ist also der Drehwinkel am Auflager gleich dem Auflagerdruck des mit seiner reduzierten Momentenfläche belasteten Balkens.

Zu der in Fig. 111 gegebenen beliebigen äußeren Belastung des

#### Kragarmes $AB$

denken wir uns die zugehörige reduzierte Momentenfläche (Fig. 111a) gebildet, teilen dieselbe in Streifen von der Breite  $\Delta s$  und zeichnen zu den im Schwerpunkt dieser Streifen wirkenden Kräften

$$\Delta F = \frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}$$

mit der Polweite  $H = 1$  das Krafteck der Fig. 111c und das Seileck der Fig. 111b. Richten wir es dabei so ein, daß die erste Seileckseite  $a$  wagrecht verläuft und daher die Ordinaten der elastischen Linie von dieser Wagrechten aus gemessen werden, so ist  $y_C$  gleich der Verschiebung des Punktes  $C$  senkrecht zur Balkenachse; andererseits ist  $y_C$  gleich dem statischen Moment  $M$  der zwischen der Einspannungsstelle und dem Punkte  $C$  gelegenen Kräfte  $\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3$  in bezug auf die Verschiebungsrichtung, denn

$$M = H \cdot y_C = 1 \cdot y_C = y_C, \quad \text{d. h.}$$

**Satz III:** Die Verschiebung in einem Punkt  $C$  eines an einem Ende fest eingespannten Kragarmes ist gleich dem statischen Moment

der zwischen der Einspannungsstelle und dem Punkte  $C$  gelegenen  $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen (reduzierten) Momentenfläche in bezug auf den Punkt  $C$ .

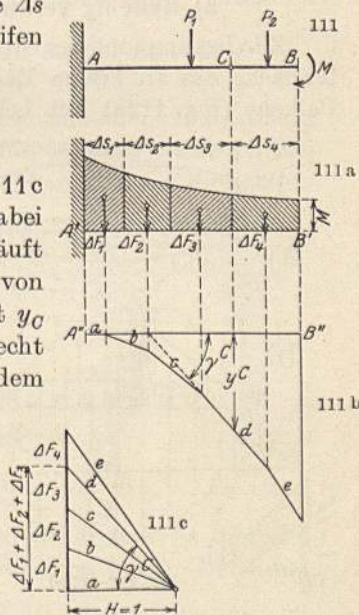


Fig. 111—111 c.

Ferner ist in Fig. 111b der Winkel  $\gamma_C$  der Tangente  $d$  an die elastische Linie in  $C$  gleich dem Winkel zwischen den Polstrahlen  $a$  und  $d$  der Fig. 111c; aus dieser Figur folgt:

$$\text{Strecke } (\Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3) = H \cdot \text{tg} \gamma_C = 1 \cdot \text{tg} \gamma_C,$$

und da  $\gamma_C$  sehr klein, so kann gesetzt werden

$$\text{tg} \gamma_C = \gamma_C,$$

eingesetzt gibt

$$(\Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3) = \gamma_C,$$

worin  $\Delta F_1$ ,  $\Delta F_2$  und  $\Delta F_3$  die Inhalte der Streifen bedeuten, in welche die reduzierte Momentenfläche zerlegt wurde. Daraus folgt:

**Satz IV:** Der Drehwinkel (Achsendrehung) in einem Punkte  $C$  eines an einem Ende fest eingespannten Kragarmes ist gleich dem Inhalt der zwischen der Einspannungsstelle und dem Punkte  $C$  gelegenen  $\frac{1}{E \cdot J}$  fachen (reduzierten) Momentenfläche.

Mit Hilfe dieser Sätze ermitteln wir nun die zur Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmasse (Kap. II und III) benötigten Grundwinkel, nämlich die Drehwinkel  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$  und  $\beta$  und zeigen noch die Anwendung dieser Sätze zur Bestimmung von Verschiebungen an statisch unbestimmten Tragwerken.

## 1. Drehwinkel $\alpha^a$ und $\alpha^b$ .

### a) Beliebig veränderliches Trägheitsmoment (Fig. 112).

Zur Bestimmung der Drehwinkel  $\alpha^a$  und  $\alpha^b$  teilen wir die reduzierte Momentenfläche des an beiden Enden gleichzeitig mit  $M = 1$  belasteten einfachen Balkens (Fig. 112a) mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment in senkrechte Streifen von der Breite  $\Delta s$ ; der Inhalt  $\Delta F$  einer solchen Streifenfläche ist

$$\Delta F = \frac{\Delta s}{EJ}.$$

Setzen wir für  $\Delta F$ , falls  $E$  konstant, vereinfacht

$$w = \frac{\Delta s}{J} \text{ (elastisches Gewicht),} \quad (198)$$

so ist nach Satz II  $E \cdot \alpha^a$  gleich dem Auflagerdruck  $V_1$  und  $E \cdot \alpha^b$  gleich dem Auflagerdruck  $V_2$  des mit den Kräften  $w$  belasteten Balkens mit der Stützweite  $l$  (Fig. 112b), und wir erhalten

Analytisch

$$E \cdot \alpha^a = \frac{1}{l} \sum_0^l w \cdot z' \quad (199)$$

und

$$E \cdot \alpha^b = \frac{1}{l} \sum_0^l w \cdot z. \quad (200)$$

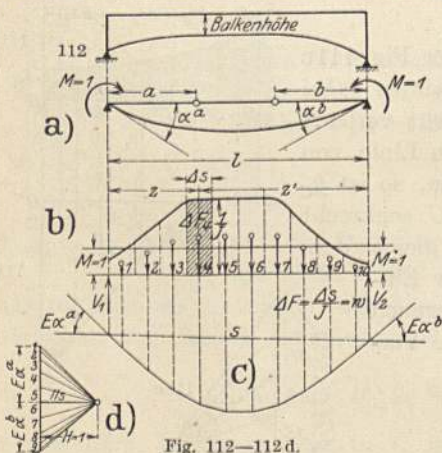


Fig. 112—112d.



Ist der Balken symmetrisch in bezug auf seine Mitte, so ist

$$\alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha}. \quad (201)$$

### Graphisch

ermitteln wir die Drehwinkel  $\alpha^a$  und  $\alpha^b$  nicht durch Zusammensetzung der aus Fig. 112b hervorgehenden elastischen Gewichte, sondern wir entnehmen sie aus den im Falle von beliebig veränderlichem Trägheitsmoment ohnehin zur Bestimmung der Drittelllinien benötigten Seilkurven; aus diesen geht auch der Winkel  $\beta$  hervor.

Diese Seilkurven, wie z. B. in Fig. 80 und 83 gezeichnet, sind nichts anderes als die  $\frac{1}{H} \cdot E$  fachen Biegelinien ( $\frac{1}{H}$  fach, weil die Biegelinien mit beliebiger Polweite  $H$  gezeichnet sind und  $E$  fach, weil im Ausdruck für die elastischen Gewichte der Wert  $E$  fehlt) für die Belastung des einfachen Balkens mit  $M = 1$  am linken (Fig. 80) bzw. rechten (Fig. 83) Ende, und es sind daher in den Fig. 80 und 83 die Winkel  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$  und  $\beta$  zu finden. Die Werte für diese Winkel ergeben sich auch aus den Kräftecken der Fig. 80a und 83a als Auflagerdrücke, und zwar nach Ziehen der Parallelen zur Schlußlinie  $A_7B_7$  bzw.  $A_8B_8$  als entsprechenden Abschnitt auf dem Kräftezug.

Für den im Hochbau am häufigsten vorkommenden

### Balken mit geraden und parabolischen Vouten

sind im Anhang Tabellen über die Drehwinkel  $\alpha^a$  und  $\alpha^b$  unter Annahme verschiedener Voutenlänge, und auch nur einseitiger Anordnung, enthalten.

#### b) Konstantes Trägheitsmoment, jedoch mit starrer Strecke $f$ an einem Ende (Fig. 113).

Dieser Fall tritt bei Mittelpfeilern eines durchlaufenden Balkens auf elastisch drehbaren Pfeilern ein, wo das Stück von Unterkante Voute bis Balkenachse als starr zu betrachten ist; diese starre Strecke  $f$  kann nur bei Endpfeilern sowie dann bei Mittelpfeilern gleich Null gesetzt werden, wenn diese Pfeiler eine verhältnismäßig große Höhe  $l'$  oder im Verhältnis zum Balken ein großes Trägheitsmoment haben. Ein Versuch wird überzeugen, daß die starre Strecke  $f$  auf den Drehwinkel  $\tau$  am Pfeilerkopf einen ziemlich großen Einfluß hat.

In diesem Falle ist das Trägheits-

moment auf der Strecke  $f$  unendlich groß (Fig. 113a) und deshalb ist die reduzierte Momentenfläche auf dieser Strecke gleich Null (Fig. 113b). Der Inhalt der reduzierten Momentenfläche auf der Strecke  $l'$  ist  $F = \frac{l'}{E \cdot J}$ ,

der Schwerpunktsabstand der Kraft  $F$  vom oberen Auflager  $r' = \frac{l'}{2} + f$

und vom unteren Auflager  $r = \frac{l'}{2}$ .

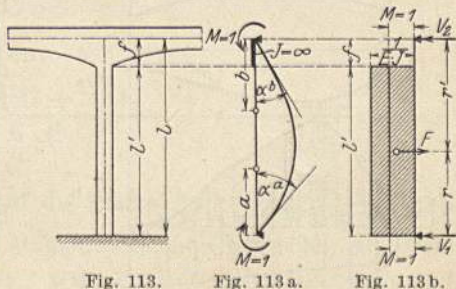


Fig. 113.

Fig. 113 a.

Fig. 113 b.

Nach Satz II ist dann  $\alpha^a$  gleich dem Auflagerdruck  $V_1$  und  $\alpha^b$  gleich dem Auflagerdruck  $V_2$  des mit der Kraft  $F$  belasteten Stabes mit der Stützweite  $l$ . Es ist daher:

$$\alpha^a = \frac{F \cdot r'}{l} \quad \text{und} \quad \alpha^b = \frac{F \cdot r}{l}.$$

Die Werte für  $F$ ,  $r'$  und  $r$  eingesetzt gibt:

$$E \cdot \alpha^a = \frac{V \cdot (V + 2f)}{2 \cdot l \cdot J} \quad (202)$$

und

$$E \cdot \alpha^b = \frac{V^2}{2 \cdot l \cdot J}. \quad (203)$$

c) Konstantes Trägheitsmoment auf die ganze Balkenlänge (Fig. 114).

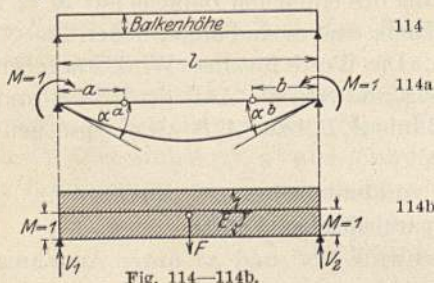


Fig. 114—114b.

In diesem Falle ist die reduzierte Momentenfläche (Fig. 114b) ein Rechteck mit dem Inhalt

$$F = \frac{l}{E \cdot J},$$

und daher ist nach Satz II:

$$E \cdot \alpha^a = E \cdot \alpha^b = E \cdot \bar{\alpha} = \frac{l}{2J}. \quad (204)$$

## 2. Drehwinkel $\beta$ .

a) Beliebig veränderliches Trägheitsmoment (Fig. 115).

Zur Bestimmung des Drehwinkels  $\beta$  teilen wir die reduzierte Momentenfläche des an einem Ende, beispielsweise am linken, mit  $M = 1$  belasteten

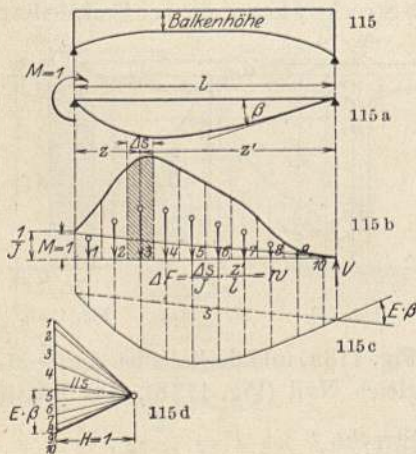


Fig. 115, 115 a—d.

einfachen Balkens (Fig. 115a) mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment in senkrechte Streifen von der Breite  $\Delta s$ ; der Inhalt  $\Delta F$  einer solchen Streifenfläche ist

$$\Delta F = \frac{\Delta s}{E \cdot J} \cdot \frac{z'}{l}.$$

Setzen wir wieder

$$w = \frac{\Delta s}{J},$$

so ist  $E \cdot \beta$  nach Satz II gleich dem Auflagerdruck  $V$  des mit den Kräften  $w$  belasteten Balkens mit der Stützweite  $l$  (Fig. 115b), und wir erhalten

Analytisch

$$E \cdot \beta = \frac{1}{l^2} \sum w \cdot z \cdot z'. \quad (205)$$

## Graphisch

ergibt sich der Winkel  $\beta$ , wie bereits unter 1, a) gesagt, aus der für die linke oder rechte Drittellinie einer Öffnung (z. B. Fig. 80 und 83) gezeichneten Seilkurve oder aus dem zugehörigen Krafteck (z. B. Fig. 80a und 83a).

Für den im Hochbau am häufigsten vorkommenden

**Balken mit geraden und parabolischen Vouten**

sind im Anhang Tabellen über den Drehwinkel  $\beta$  unter Annahme verschiedener Voutenlängen und auch nur einseitiger Anordnung enthalten.

**b) Konstantes Trägheitsmoment, jedoch mit starrer Strecke  $f$  an einem Ende (Fig. 116).**

In diesem Falle ist das Trägheitsmoment auf der Strecke  $f$  unendlich groß (Fig. 116a), und deshalb ist die reduzierte Momentenfläche auf dieser Strecke gleich Null (Fig. 116b). Der Inhalt der reduzierten Momentenfläche auf der Strecke  $l$  ist

$$F = \frac{V(l+f)}{2l \cdot EJ}$$

und dem Schwerpunktsabstand  $r$  der Kraft  $F$  vom unteren Auflager:

$$r = \frac{V}{3} \cdot \frac{l+2f}{l+f}$$

Nach Satz II ist dann  $\beta$  gleich dem Auflagerdruck  $V$  des mit der Kraft  $F$  belasteten Stabes mit der Stützweite  $l$ . Es ist daher:

$$\beta = \frac{F \cdot r}{l}$$

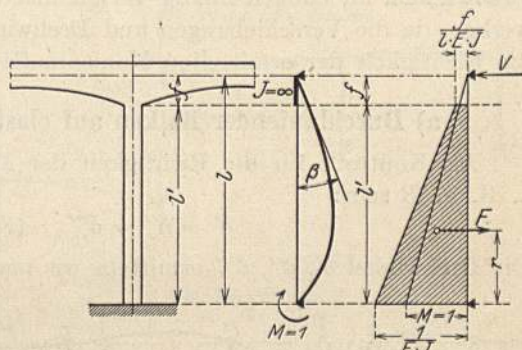


Fig. 116.

Fig. 116a.

Fig. 116b.

Die Werte für  $F$  und  $r$  eingesetzt geben:

$$E \cdot \beta = \frac{V^2(l+2f)}{6 \cdot l^2 \cdot J} \quad (206)$$

**c) Konstantes Trägheitsmoment auf die ganze Balkenlänge (Fig. 117).**

In diesem Falle ist die reduzierte Momentenfläche (Fig. 117b) ein Dreieck mit dem Inhalt

$$F = \frac{l}{2EJ}$$

und daher ist nach Satz II:

$$E \cdot \beta = \frac{l}{6 \cdot J}, \quad (207)$$

d. h. bei konstantem Trägheitsmoment eines Balkens ist

$$\alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha} = 3\beta. \quad (207a)$$

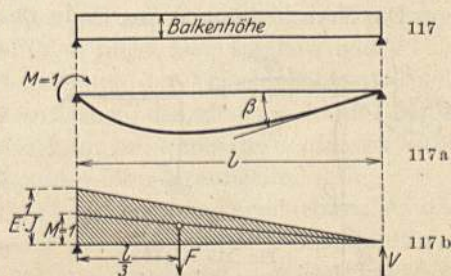


Fig. 117—117b.

### 3. Bestimmung von Verschiebungen an statisch unbestimmten Tragwerken.

Auch an statisch unbestimmten Tragwerken muß zunächst die Momentenfläche infolge der gegebenen äußeren Belastung an allen Stäben ermittelt werden, bevor der Drehwinkel oder die Verschiebung in irgendeinem Punkte bestimmt werden kann. Sind aber die Momente am ganzen Tragwerk bekannt, so können wir jeden Stab des ganzen Tragwerks für sich betrachten und von den Punkten aus, welche in Ruhe geblieben sind oder in welchen wir die Verschiebung bzw. den Drehwinkel von vornherein kennen, mit dem Zeichnen der Biegelinie als Seilkurve zu der reduzierten Momentenfläche als Belastung beginnen oder die entsprechende rechnerische Ermittlung nach den Mohrschen Sätzen vornehmen; wir haben es dann immer nur mit einfachen Balken oder Kragarmen zu tun.

Im folgenden erläutern wir die Bestimmung von Verschiebungen und Drehwinkeln an einigen häufig vorkommenden statisch unbestimmten Tragwerken, da die Verschiebungen und Drehwinkel derselben eine Kontrolle für die Richtigkeit der ermittelten Momentenfläche bilden.

#### a) Durchlaufender Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern.

Als Kontrolle für die Richtigkeit der Momentenfläche der Fig. 87 muß z. B. in  $B$  sein:

$$\delta' = \delta'' = \delta''' \quad (\text{Fig. 118}). \quad (208)$$

Die Drehwinkel  $\delta'$ ,  $\delta''$ ,  $\delta'''$  ermitteln wir nach Satz II, indem wir sowohl die einfachen Balken  $AB$  und  $BC$  als auch  $BG$  mit der zugehörigen reduzierten Momentenfläche aus Fig. 87 belasten und den davon herrührenden Auflagerdruck in  $B$  berechnen.

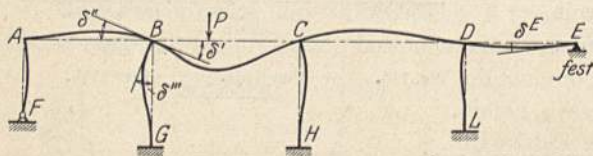


Fig. 118.

Um z. B. den Drehwinkel  $\delta^B$  (Fig. 118) zu erhalten, belasten wir den einfachen Balken  $DE$  mit der aus Fig. 87 hervorgehenden reduzierten Momentenfläche und berechnen nach Satz II den davon herrührenden Auflagerdruck in  $E$ .

#### b) Durchlaufender Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern mit Kragarm.

Die Verschiebung  $\delta$  am Ende des Kragarmes (Fig. 119), wo die Last  $P$  angreift, setzt sich aus 2 Teilen,  $\delta'$  und  $\delta''$ , zusammen, und zwar rührt  $\delta'$  von der Durchbiegung des Balkens  $AB$  und  $\delta''$  von der Durchbiegung des Kragarms her. Es ist

$$\delta' = l_1 \cdot \text{tg } \delta^A,$$

und da  $\delta^A$  ein sehr kleiner Winkel, ist

$$\delta' = l_1 \cdot \delta^A. \quad (209)$$

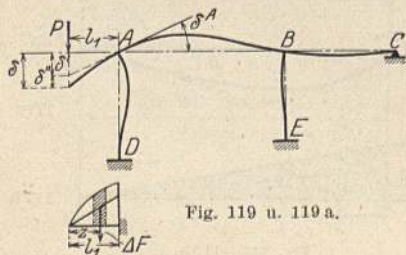


Fig. 119 u. 119 a.

• Den Drehwinkel  $\delta^A$  erhalten wir durch Belasten des einfachen Balkens  $AB$  mit der aus Fig. 100 entnommenen reduzierten Momentenfläche, deren Auflagerdruck in  $A$  nach Satz II gleich  $\delta^A$  ist.

Die Teilverschiebung  $\delta''$  erhalten wir nach Satz III, indem wir das statische Moment der den Kragarm belasteten reduzierten Momentenfläche aus Fig. 100 in bezug auf die Verschiebungsrichtung bilden; es ist (Fig. 119a)

$$\delta'' = \sum_0^{l_1} AF \cdot z. \quad (210)$$

### e) Durchlaufender Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern, von denen sich einer gesenkt hat.

Die Verschiebung  $\delta$  des Pfeilerkopfes  $B$  (Fig. 120) ist von vornherein bekannt; darnach wurde die Momentenfläche am ganzen Tragwerk ermittelt.

Als Kontrolle für die Richtigkeit dieser Momentenfläche muß sich sowohl am Ende des Kragarmes  $BC$  in Fig. 120a als auch am Ende des Kragarmes  $AB$  der Fig. 120 b als Verschiebung des Punktes  $B$  der gleiche Wert  $\delta$  ergeben. An beiden Kragarmen wird  $\delta$  analog wie unter b) ermittelt.

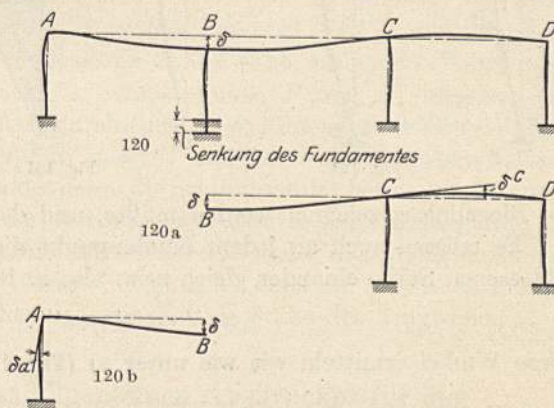


Fig. 120—120 b.

### d) Stockwerkrahmen.

Sowohl bei einer unsymmetrischen senkrechten als bei einer wagrechten Belastung der Säulen des Stockwerkrahmens der Fig. 121 verschiebt sich der untere und obere Riegel.

Als Kontrolle für die Richtigkeit der endgültigen Momentenfläche muß sich ergeben, daß die drei Knotenpunkte am unteren oder am oberen Riegel die gleiche Verschiebung ausführen.

Wenn wir die Biegelinien der drei Säulen zeichnen wollten, so würden wir am Fuß derselben beginnen, da derselbe in Ruhe bleibt. Da wir die wagrechte Verschiebung der Säulen bestimmen wollen, so sind dieselben als Kragarme zu betrachten, welche jedoch an ihren Füßen nicht fest, sondern nachgiebig eingespannt sind, was jedoch auf die Berechnung der Verschiebungen keinen Einfluß hat, da dies ja durch die Momentenflächen, die wir nach deren Reduktion als Belastung auffassen, schon berücksichtigt ist; wären die Säulen am Fuße fest eingespannt, so erhielten wir eine andere Momentenfläche.

Daher ist z. B. an der Säule  $ADG$  (Fig. 121a) die Verschiebung  $\delta^D$  des Punktes  $D$  gleich dem statischen Moment der reduzierten Momentenfläche am Stabe  $AD$  in bezug auf den Punkt  $D$ ; und die Verschiebung  $\delta^G$  des Punktes  $G$

ist gleich dem statischen Moment der reduzierten Momentenfläche an den Stäben  $AD$  und  $DG$  in bezug auf den Punkt  $G$  oder gleich der Verschiebung  $\delta^D$  plus dem statischen Moment der reduzierten Momentenfläche an dem

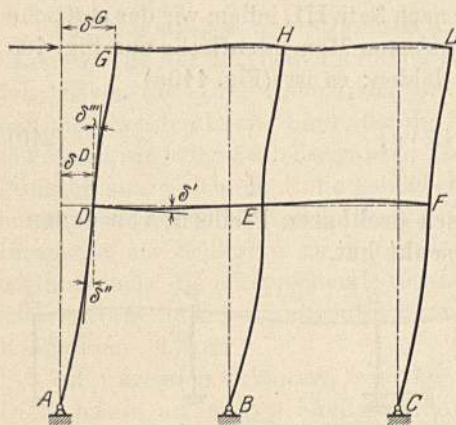


Fig. 121.

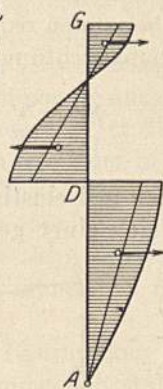


Fig. 121 a.

Stab  $DG$  in bezug auf den Punkt  $G$ . In analoger Weise ermitteln wir die wagrechten Verschiebungen der Knotenpunkte  $E$  und  $H$  sowie  $F$  und  $L$ ; es kommt nur die Momentenfläche an den Säulen in Betracht. Falls man hierüber einen Zweifel hat, so stelle man sich nur vor, in welcher Weise

die Biegelinie gezeichnet werden müßte, und dann hat man sofort Klarheit.

Es müssen auch an jedem Knotenpunkt die Drehwinkel der dort angeschlossenen Stäbe einander gleich sein, also z. B. in Punkt  $D$

$$\delta' = \delta'' = \delta'''.$$

Diese Winkel ermitteln wir wie unter a) (Fig. 118).

#### 4. Annahme der Trägheitsmomente.

Zur Berechnung der Formänderungen von Eisenbetonbauten verwendet man das Trägheitsmoment des vollen Betonquerschnittes (ohne Eiseneinlagen), da man, wie die Versuche gezeigt haben, auf dieser Grundlage der Wirklichkeit am nächsten kommt (siehe Mörsch, Der Eisenbetonbau, 4. Auflage, S. 350 bis 360); ferner wird für den Elastizitätsmodul

$$E = 2\,100\,000 \text{ t/qm}$$

eingeführt.

Die Trägheitsmomente selbst werden auf die Schwerachse des betreffenden Betonquerschnittes bezogen, da man die neutrale Achse noch nicht kennt. Dies hat geringe Bedeutung, da es bei solchen statischen Berechnungen hauptsächlich auf das gegenseitige Verhältnis der Trägheitsmomente des ganzen Tragwerkes ankommt. Als Systemachse wählt man jedoch die Trägermitte.

#### V. Bestimmung der Momente infolge beliebiger Belastung des Tragwerks.

Wir nehmen an, die Festpunkte und Verteilungsmaße am ganzen Tragwerk seien nach den vorgehenden Kapiteln ermittelt; es ist dann, wie wir in Kapitel I gesehen haben, leicht, die gesamte Momentenfläche zu bestimmen, sobald in der belasteten Öffnung die beiden Stützenmomente ermittelt sind, da ja in den unbelasteten Öffnungen die Momentennullpunkte mit den Fest-

punkten zusammenfallen, und man deshalb die Momentenflächen in allen unbelasteten Öffnungen durch Ziehen ihrer Schlußlinien durch die Festpunkte ohne weiteres erhält.

Wir setzen die beiden Stützenmomente in der belasteten Öffnung der Fig. 122 oder 77 vorläufig als bekannt voraus, ziehen die Schlußlinie  $B''C''$ , bestimmen deren Schnittpunkte  $J'$  und  $K'$  mit den Senkrechten zur Balkenachse durch die Festpunkte  $J$  und  $K$ , ziehen die zwei sich kreuzenden und daher Kreuzlinien genannten Geraden  $BJ'$  und  $CK'$  und ermitteln die Strecken  $k^a = BB''$  und  $k^b = CC''$ , welche die Kreuzlinien auf den Auflagersenkrechten (zur Balkenachse) durch  $B$  und  $C$  abschneiden, und welche daher „Kreuzlinienabschnitte“ genannt werden. Gehen wir jetzt den umgekehrten Weg und tragen (Fig. 122 oder 77) die nach irgendeinem Verfahren ermittelten Kreuzlinienabschnitte  $k^a = BB''$  und  $k^b = CC''$  auf den Auflagersenkrechten (zur Balkenachse) durch  $B$  und  $C$  ab, ziehen die Kreuzlinien  $BC''$  und  $CB''$  und bestimmen die Schnittpunkte  $J'$  und  $K'$  derselben mit den Senkrechten (zur Balkenachse) durch  $J$  und  $K$ , so schneidet die Verbindungslinie  $J'K'$  die Stützenmomente  $BB''$  und  $CC''$  auf den Senkrechten (zur Balkenachse) durch  $B$  und  $C$  ab und bildet daher die Schlußlinie der belasteten Öffnung.

Es ist zur Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte ganz gleichgültig, ob der belastete Stab wagrecht, schief oder senkrecht steht, d. h. die Kreuzlinienabschnitte gelten sowohl am belasteten Balken als auch am belasteten Pfeiler, da ja Pfeiler und Balken nichts anderes sind als Stäbe des Tragwerks.

## 1. Entwicklung des allgemeinen Ausdruckes für die Kreuzlinienabschnitte.

Wir leiten nun zunächst den allgemeinen Ausdruck für die Kreuzlinienabschnitte bei beliebiger Belastung und beliebig veränderlichem Trägheitsmoment des belasteten Stabes her, und zwar analytisch und graphisch, und bestimmen nachher die Werte der Kreuzlinienabschnitte für verschiedene Belastungsfälle.

### a) Analytisch.

Der analytischen Ableitung legen wir das allgemeine Tragwerk der Fig. 122 zugrunde, an welchem Stab 6, wie in der früheren Fig. 48, mit den Kräften  $P_1$  und  $P_2$  belastet sei. Da die Kraft  $P_2$  schief zur Stabachse wirkt, so wird sie zunächst in eine Komponente  $P_2'$  in Richtung des belasteten Stabes und in eine Komponente  $P_2''$  rechtwinklig dazu zerlegt; für letztere wird die Momentenfläche bestimmt.

Wir trennen in Fig. 122 den Stab 6 in den Querschnitten  $B_6$  und  $C_6$  von seinen beiden Widerlagern  $B$  und  $C$  — sein Widerlager in  $B$  wird gebildet durch die drei Stäbe 1, 5 und 7, dasjenige in  $C$  durch den Stab 8 — und lagern ihn daselbst frei auf (Fig. 122a). Unter Einwirkung der äußeren Lasten entstehen an den Querschnitten  $B_6$  und  $C_6$  die in Fig. 122a eingetragenen Drehwinkel  $\alpha^{a_0}$  und  $\alpha^{b_0}$ . Um die beiden Schnittflächen  $B_6$  von Widerlager und Stab in  $B$  wieder zu vereinigen, müssen wir am Stab ein linksdrehendes Moment  $M^B$  und am Widerlager das gleich große, aber rechtsdrehende Moment  $M^B$  anbringen (Fig. 122a). Wenn beide Querschnittsflächen wieder zur Deckung

gekommen sind, haben sie hinsichtlich der geraden Balkenachse denselben Drehwinkel beschrieben; dies gibt den Ansatz zu einer Gleichung. Um ferner die beiden Schnittflächen  $C_6$  von Widerlager und Stab in  $C$  wieder zu vereinigen, müssen wir am Stab ein rechtsdrehendes und am Widerlager ein gleich großes,

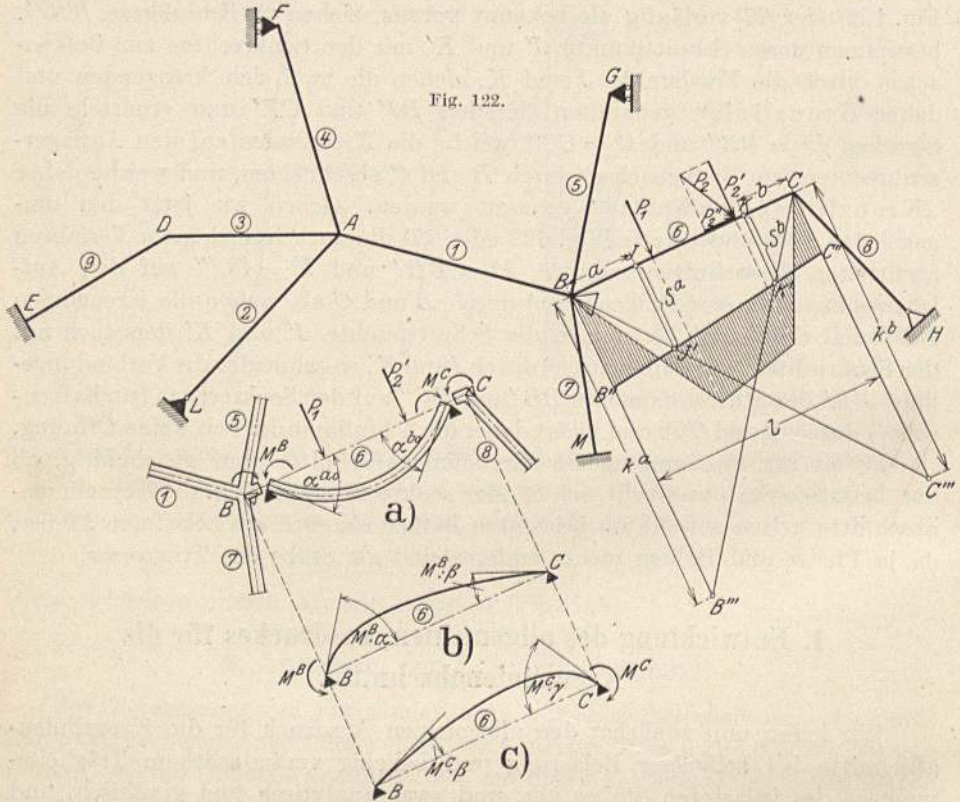


Fig. 122.

Fig. 122—122 c.

aber linksdrehendes Moment  $M^C$  anbringen. Wenn die beiden Querschnittsflächen wieder zur Deckung gekommen sind, haben sie denselben Drehwinkel beschrieben, und wir erhalten hieraus den Ansatz zu einer zweiten Gleichung. Die beschriebenen Drehwinkel betragen unter Berücksichtigung der in Kapitel II eingeführten Bezeichnungen:

1. In  $B_6$ :

- |                   |                         |                           |
|-------------------|-------------------------|---------------------------|
| a) am Stab:       | durch $P_1$ und $P_2$ : | $\alpha^{ao}$             |
|                   | „ $M^B$ (Fig. 122b):    | $M^B \cdot \alpha$        |
|                   | „ $M^C$ (Fig. 122c):    | $M^C \cdot \beta$         |
| b) am Widerlager: | „ $M^B$ :               | $M^B \cdot \varepsilon^a$ |

2. In  $C_6$ :

- |                   |                         |                           |
|-------------------|-------------------------|---------------------------|
| a) am Stab:       | durch $P_1$ und $P_2$ : | $\alpha^{bo}$             |
|                   | „ $M^C$ (Fig. 122c):    | $M^C \cdot \gamma$        |
|                   | „ $M^B$ (Fig. 122b):    | $M^B \cdot \beta$         |
| b) am Widerlager: | „ $M^C$ :               | $M^C \cdot \varepsilon^b$ |



Nach Obigem können wir folgende Gleichungen anschreiben:

$$\alpha^{ao} - M^B \cdot \alpha - M^C \cdot \beta = M^B \cdot \varepsilon^a, \quad (211)$$

$$\alpha^{bo} - M^C \cdot \gamma - M^B \cdot \beta = M^C \cdot \varepsilon^b. \quad (212)$$

Setzen wir in diesen Gleichungen  $M^B$  und  $M^C$  mit ihren Vorzeichen ein, so erhalten wir die

Elastizitätsbedingungen

$$\alpha^{ao} + M^B \cdot \alpha + M^C \cdot \beta + M^B \cdot \varepsilon^a = 0. \quad (213)$$

$$\alpha^{bo} + M^B \cdot \beta + M^C \cdot \gamma + M^C \cdot \varepsilon^b = 0. \quad (214)$$

Diese Gleichungen besagen, daß die beiden Momente  $M^B$  und  $M^C$  so groß und solchen Drehsinn haben müssen, daß die Summe der von ihnen am Stabende  $B_2$  und Widerlager  $B$  bzw. am Stabende  $C_2$  und Widerlager  $C$  hervorgerufenen Drehwinkel je gleich Null wird. Aus diesen beiden Gleichungen könnten wir die beiden Stützenmomente  $M^B$  und  $M^C$  rechnerisch ermitteln, da uns ja die Winkelwerte  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon^a$  und  $\varepsilon^b$  aus den früheren Kapiteln bekannt sind; wir erhalten aus den Gl. (213 und (214):)

$$M^B = \frac{-\alpha^{ao}(\gamma + \varepsilon^b) + \alpha^{bo} \cdot \beta}{(\alpha + \varepsilon^a)(\gamma + \varepsilon^b) - \beta^2} \quad (213a)$$

und

$$M^C = \frac{-\alpha^{bo}(\alpha + \varepsilon^a) + \alpha^{ao} \cdot \beta}{(\alpha + \varepsilon^a)(\gamma + \varepsilon^b) - \beta^2}. \quad (214a)$$

Wir wollen aber die Momente in der belasteten Öffnung nicht nach den Gl. (213a) und (214a) ermitteln, da dies zu umständlich wäre, sondern wir schreiben die Gleichungen (213) und (214) in der Form:

$$M^B(\alpha + \varepsilon^a) + M^C \cdot \beta = -\alpha^{ao}, \quad (215)$$

$$M^C(\gamma + \varepsilon^b) + M^B \cdot \beta = -\alpha^{bo}, \quad (216)$$

dividieren diese Gleichungen durch  $\beta$  und erhalten:

$$M^B \cdot \frac{\alpha + \varepsilon^a}{\beta} + M^C = -\frac{\alpha^{ao}}{\beta}, \quad (217)$$

$$M^C \cdot \frac{\gamma + \varepsilon^b}{\beta} + M^B = -\frac{\alpha^{bo}}{\beta}. \quad (218)$$

Nun ist aber nach Gl. (4):

$$\frac{\alpha + \varepsilon^a}{\beta} = \frac{l - a}{a}, \quad (219)$$

und analog muß sein

$$\frac{\gamma + \varepsilon^b}{\beta} = \frac{l - b}{b}. \quad (220)$$

Setzen wir die Werte der Gl. (219) und (220) in die Gl. (217) und (218) ein, so ergibt sich:

$$M^B \cdot \frac{l - a}{a} + M^C = -\frac{\alpha^{ao}}{\beta} \quad (221)$$

und

$$M^C \cdot \frac{l - b}{b} + M^B = -\frac{\alpha^{bo}}{\beta}. \quad (222)$$

In Fig. 122 ergibt sich aus dem überschlagenen Viereck  $BJ'C'''C''B''$ :

$$M^B \cdot \frac{l-a}{a} = C''C'''$$

und aus dem überschlagenen Viereck  $CK'B'''B''C''$

$$M^C \cdot \frac{l-b}{b} = B''B''',$$

ferner ist

$$M^C = C''C'' \quad \text{und} \quad M^B = B''B''',$$

und deshalb sind die linken Seiten der Gl. (222) und (221) gleich den gesuchten Kreuzlinienabschnitten  $k^a$  und  $k^b$ , d. h.

$$k^a = -\frac{\alpha^{bo}}{\beta}, \quad (223)$$

$$k^b = -\frac{\alpha^{ao}}{\beta}. \quad (224)$$

Der Kreuzlinienabschnitt  $k^a$  bzw.  $k^b$  ist an demjenigen Stabende aufzutragen, an welchem sich der Festpunktabstand  $a$  bzw.  $b$  befindet. Erhalten wir für die auf Grund der Hauptformeln (223) und (224) berechneten Kreuzlinienabschnitte negative Werte, so besagt dies, daß die damit konstruierte Schlußlinie mit der Stabachse und den beiden Auflagersenkrechten ein negatives Momententrapez ( $BB''C''C$  in Fig. 122) begrenzt; ergeben sich aber für die Kreuzlinienabschnitte positive Werte, so wird das genannte Momententrapez positiv, und wird dann nicht um die Stabachse auf die (positiv vorausgesetzte)  $M_0$ -Fläche heruntergeklappt. Letzterer Fall tritt auf bei Konsolbelastung einer Säule (vgl. Abschnitt 2, d und 3, d dieses Kapitels).

Aus Fig. 122 ersehen wir, daß wir auch an Stelle der Kreuzlinienabschnitte die Strecken  $JJ' = S^a$  und  $kk' = S^b$ , welche wir die Schlußliniensenkungen nennen, ermitteln und von  $J$  respektiv  $K$  aus auftragen können.

Aus den ähnlichen Dreiecken  $BCB'''$  und  $KCK'$  bzw.  $BCC'''$  und  $BJJ'$  ergeben sich für die Schlußliniensenkungen die Werte:

$$S^a = \frac{a}{l} \cdot k^b, \quad (225)$$

$$S^b = \frac{b}{l} \cdot k^a. \quad (226)$$

## b) Graphisch.

Der graphischen Ableitung legen wir den durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern der Fig. 76 zugrunde, an welchem die Balkenöffnung 2 mit den Kräften  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  belastet ist. Wir führen die Ableitung nur für den Kreuzlinienabschnitt  $k^a$  durch, diejenige für den Kreuzlinienabschnitt  $k^b$  ist analog.

Zur Bestimmung des Kreuzlinienabschnittes  $k^a$  in der belasteten Öffnung 2 stellen wir die folgenden Beziehungen fest zwischen den Strecken  $BB''$  und  $BB'''$  der Fig. 77 (oder 122d) und den Strecken  $B_1B_1''$  und  $B_1''B_1'''$ , welche in

Fig. 78 (oder 122e) von der Seilseite  $e$  des elastischen Tangentenecks auf der Senkrechten durch  $B$  abgeschnitten werden. Aus dem überschlagenen Viereck  $BB''J_2C''C'''$  der Fig. 77 (oder 122d) folgt:

$$\frac{BB''}{C''C'''} = \frac{a_2}{l_2 - a_2} \quad (227)$$

Ferner erhalten wir aus dem überschlagenen Viereck  $B_1B_1'J_2C_1C_1'''$  der Fig. 78 (oder 122e):

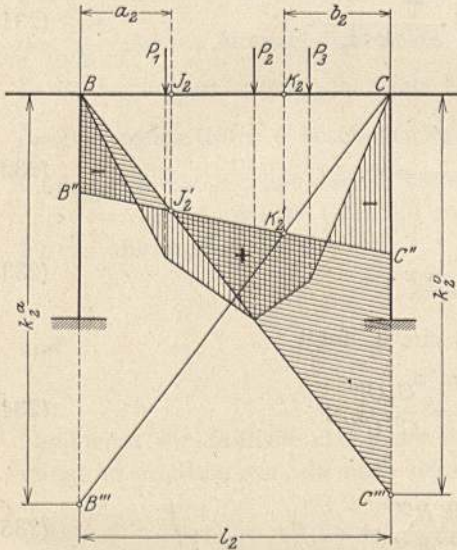


Fig. 122d.

$$\frac{B_1B_1'}{C_1C_1'''} = \frac{a_2}{l_2 - a_2} \quad (227a)$$

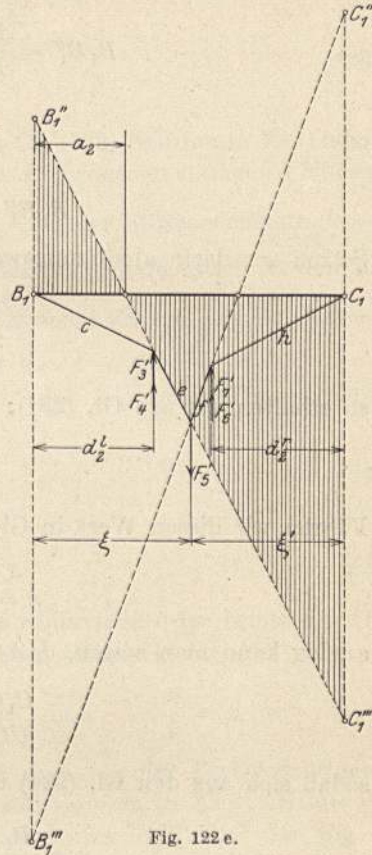


Fig. 122e.

d. h. es ist:

$$\frac{BB''}{C''C'''} = \frac{B_1B_1'}{C_1C_1'''} \quad (228)$$

oder

$$\frac{B_1B_1'}{BB''} = \frac{C_1C_1'''}{C''C'''} \quad (228a)$$

Diese Strecken müssen nun durch bekannte Größen ausgedrückt werden.

In Fig. 78 (oder 122e) ist die mit der Polweite  $H = 1$  multiplizierte Strecke  $B_1B_1'$ , welche durch die zwei von der Kraft ( $F_3'$  und  $F_4'$ ) ausgehenden Seilseiten  $c$  und  $e$  auf der Stützensenkrechten durch  $B$  abgeschnitten wird, gleich dem statischen Moment der Kraft ( $F_3' + F_4'$ ) in bezug auf  $B$ , d. h.

$$B_1B_1' = (F_3' + F_4') \cdot d_2^L \quad (229)$$

Die in dieser Gleichung vorkommende, dem gesuchten Stützenmoment  $BB''$  (Fig. 76) entsprechende reduzierte Momentenfläche ( $F_3' + F_4'$ ) können wir an Hand der Fig. 84 ausdrücken, wenn wir in der letzteren  $h$  durch  $BB''$  ersetzen, wir erhalten:

$$(F_3' + F_4') = \sum_0^{l_2} \frac{\Delta s \cdot z' \cdot BB''}{E \cdot J \cdot l_2} = \frac{BB''}{E \cdot l_2} \cdot \sum_0^{l_2} w \cdot z' \quad (230)$$

Setzen wir in Gl. (229) diesen Wert sowie denjenigen von  $d_2^k$  nach Gl. (99) ein, so folgt:

$$B_1 B_1'' = \frac{B B''}{E \cdot l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z' \cdot \frac{\sum_0^{l_2} w \cdot z \cdot z'}{\sum_0^{l_2} w \cdot z'}$$

oder

$$B_1 B_1'' = B B'' \cdot \frac{\sum_0^{l_2} w \cdot z \cdot z'}{E \cdot l_2} \quad (231)$$

Setzen wir darin abkürzungsweise:

$$\frac{\sum_0^{l_2} w \cdot z \cdot z'}{E \cdot l_2} = \varkappa, \quad (232)$$

so erhalten wir aus Gl. (231):

$$\frac{B_1 B_1''}{B B''} = \varkappa. \quad (233)$$

Führen wir diesen Wert in Gl. (228a) ein, so folgt

$$\varkappa = \frac{B_1 B_1''}{B B''} = \frac{C_1 C_1'''}{C'' C'''}; \quad (234)$$

analog kann man zeigen, daß

$$\frac{C_1 C_1''}{C C''} = \frac{B_1 B_1'''}{B'' B'''} = \varkappa, \quad (235)$$

sodaß sich aus den Gl. (234) und (235) ergibt:

$$\varkappa = \frac{B_1 B_1'' + B_1 B_1'''}{B B'' + B'' B'''} = \frac{B_1'' B_1'''}{k^a}$$

und

$$\varkappa = \frac{C_1 C_1'' + C_1 C_1'''}{C C'' + C'' C'''} = \frac{C_1'' C_1'''}{k^b}$$

und hieraus

$$k^a = \frac{B_1'' B_1'''}{\varkappa}, \quad (236)$$

$$k^b = \frac{C_1'' C_1'''}{\varkappa}. \quad (237)$$

Die Zähler und Nenner der Gl. (236) und (237) haben folgende Bedeutung:

Zähler:

Die Seilseiten  $e$  und  $f$ , welche sich auf der bekannten Kraft  $F_5'$  kreuzen (Fig. 78 oder 122e), schneiden auf der Stützensenkrechten durch  $B$  und  $C$  die Strecken  $B_1'' B_1'''$  und  $C_1'' C_1'''$  ab; das Produkt dieser Strecken mit der Polweite  $H = 1$  ist daher gleich dem statischen Moment der  $\frac{1}{E \cdot J}$  fachen (reduzierten)

Momentenfläche  $F'_5 = BGC$  des einfachen Balkens  $BC$  in bezug auf die beiden Auflager, d. h.

$$B'_1 B''_1''' = F'_5 \cdot \xi \quad (238)$$

und

$$C''_1 C'''_1 = F'_5 \cdot \xi' \quad (239)$$

Nenner:

Aus Fig. 84 erkennt man, daß der durch Gl. (232) bestimmte Wert von  $\alpha$  gleich ist dem auf die Stützensenkrechte durch  $B$  bezogenen statischen Moment des  $\frac{1}{E \cdot J}$ -fachen Momentendreieckes  $B_6 B'_6 C_6$  mit der Stützenordinate  $h = 1$  in  $B$ ; desgleichen erkennt man aus Fig. 81, daß  $\alpha$  ebenfalls gleich ist dem auf die Senkrechte durch  $C$  bezogenen statischen Moment des  $\frac{1}{E \cdot J}$ -fachen Momentendreieckes  $B_5 C_5 C'_5$  mit der Stützenordinate  $h = 1$  in  $C$ .

Jetzt können wir die Gl. (236) und (237) in der folgenden allgemeinen Form anschreiben:

$$k^a = \frac{F'_5 \cdot \xi}{\alpha} \quad (240)$$

und

$$k^b = \frac{F'_5 \cdot \xi'}{\alpha} \quad (241)$$

Dividieren wir Zähler und Nenner durch die Stützweite  $l$  der belasteten Öffnung, so erhalten wir, da nach dem Mohrschen Satze II:

$$\frac{F'_5 \cdot \xi}{l} = \alpha^{bo}, \quad \frac{F'_5 \cdot \xi'}{l} = \alpha^{ao} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{l} = \beta$$

für die gesuchten Kreuzlinienabschnitte  $k^a$  und  $k^b$  unter Berücksichtigung, daß dieselben negatives Vorzeichen haben, weil sie dem in Kap. III aus der Anschauung als negativ erkannten Momententrapez  $BB''C''C$  der Fig. 77 zugeordnet sind, wie unter a) die Hauptformeln

$$k^a = -\frac{\alpha^{bo}}{\beta}, \quad (242)$$

$$k^b = -\frac{\alpha^{ao}}{\beta}. \quad (243)$$

Die in Gl. (242) und (243) vorkommenden

Drehwinkel  $\alpha^{bo}$  und  $\alpha^{ao}$

bestimmen wir bei veränderlichem Trägheitsmoment des belasteten Stabes am einfachsten indirekt mit Hilfe des Satzes von der Gegenseitigkeit der Formänderungen, da wir in diesem Falle die Biegelinien für die Belastung des frei aufliegenden Stabes mit  $M = 1$  an einem Ende benutzen können, welche schon zur Bestimmung der Drittlinien (bei graphischer Festpunktbestimmung) sowie der Drehwinkel  $\alpha^a$  und  $\alpha^b$  (bei analytischer Festpunktbestimmung) aufgezeichnet werden (Fig. 80–86). Nach diesem Satze ist z. B. in Fig. 87 der Drehwinkel  $\alpha^{ao}$  am linken Ende des belasteten frei aufliegenden Stabes infolge der Belastung  $P = 1$  gleich der Durchbiegung  $\delta^a$  im Angriffs-

punkt der Last  $P$  infolge Belastung desselben frei aufliegenden Stabes mit  $M = 1$  an seinem linken Ende (wo sich der Festpunktabstand  $a$  befindet). Das Analoge gilt für  $\alpha^{bo}$ .

Demnach ist allgemein:

$$\alpha^{ao} = \sum P \cdot \delta^a, \quad (244)$$

$$\alpha^{bo} = \sum P \cdot \delta^b. \quad (245)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment und Berücksichtigung der starren Strecke  $f$  sowie durchweg konstantem Trägheitsmoment ermittelt man  $\alpha^{ao}$  und  $\alpha^{bo}$  direkt nach dem Mohrschen Satz II.

Der in den Gl. (242) und (243) vorkommende

Drehwinkel  $\beta$

kann nach Kap. IV rechnerisch oder graphisch ermittelt werden. Bei veränderlichem Trägheitsmoment des Stabes wird er ebenfalls aus den zur Bestimmung der Drittellinien benötigten Biegelinien (Fig. 81 oder 84) gewonnen. Wir erhalten z. B. für Balkenöffnung 2 der Fig. 76 aus Fig. 81:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{t^c}{l},$$

und da  $\beta$  ein sehr kleiner Winkel ist, allgemein:

$$\beta = \frac{t}{l}. \quad (246)$$

Für konstantes Trägheitsmoment und Berücksichtigung der starren Strecke  $f$  sowie durchweg konstantes Trägheitsmoment sind die Werte in Kap. IV zu finden.

Da die Seilkurven der Fig. 81 und 84 mit den elastischen Gewichten  $w = \frac{\Delta s}{J}$  sowie mit beliebiger Polweite  $H$  gezeichnet wurden, so erhalten wir

aus diesen Figuren die  $\frac{1}{H} \cdot E$  fachen Werte der Durchbiegungen und Drehwinkel; dies gilt sowohl für  $\alpha^{ao}$  als auch für  $\beta$ . Da nun die beiden Winkel im Ausdruck für die Kreuzlinienabschnitte im Verhältnis vorkommen, so können wir in die Hauptformeln (242) und (243) ohne weiteres die aus den Fig. 84 und 81 entnommenen Werte von  $\delta^a$ ,  $\delta^b$  und  $\beta = \frac{t}{l}$  einsetzen.

In den Hauptformeln (242) und (243) für die Kreuzlinienabschnitte kommen keine Größen vor, welche Bezug auf die biegungsfeste Verbindung zwischen dem Balken und den Stützen haben. Die Kreuzlinienabschnitte sind deshalb dieselben, sowohl am durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern als auch am frei aufliegenden durchlaufenden Balken.

Da wir die Kreuzlinienabschnitte auf Grund der in Fig. 77 aufgetragenen Ordinaten der Momentenfläche erhielten, so sind dieselben in demjenigen Maßstab aufzutragen, in welchem die Ordinaten der  $M_0$ -Fläche (Momentenfläche des einfachen Balkens) in der belasteten Öffnung aufgetragen wurden.

## 2. Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment.

Wir ermitteln die Kreuzlinienabschnitte für eine Einzellast, eine Gruppe von Einzellasten und für stetige Belastung. Bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment benützen wir, wie schon unter 1. gesagt, zur Bestimmung der Werte für  $\alpha^{ao}$ ,  $\alpha^{bo}$  und  $\beta$  zweckmäßig die Biegelinien für die Belastung  $M = 1$  an einem Ende des frei aufliegenden Balkens (Fig. 81 oder 122f und 84 oder 122g).

Für den im Hochbau am häufigsten vorkommenden **Balken mit geraden u. parabolischen Vouten** sind im Anhang Tabellen über die Kreuzlinienabschnitte  $k^a$  u.  $k^b$  für eine wandernde Last  $P = 1t$ , unter Annahme verschiedener Voutenlängen, und auch nur einseitiger Anordnung, enthalten.

### a) Einzellast.

Das Tragwerk der Fig. 87 sei durch eine einzelne Kraft  $P$  belastet. Dann ist nach den Gl. (244) und (245)

$$\alpha^{ao} = P \cdot \delta^a \quad (247)$$

$$\text{und} \quad \alpha^{bo} = P \cdot \delta^b, \quad (248)$$

wobei  $\delta^a$  aus Fig. 84 (oder 122g) und  $\delta^b$  aus Fig. 81 (oder 122f) zu entnehmen ist.

Ferner ist nach Gl. (246) und Fig. 81 (122f) oder 84 (122g):

$$\beta = \frac{t}{l}. \quad (249)$$

Setzen wir die Werte der Gl. (247), (248) und (249) in die Hauptformeln (242) und (243) ein, so erhalten wir:

$$k^a = -P \cdot \delta^b \cdot \frac{l}{t} \quad (250)$$

$$\text{und} \quad k^b = -P \cdot \delta^a \cdot \frac{l}{t}. \quad (251)$$

Um die Ermittlung der Kreuzlinienabschnitte nach vorstehenden Formeln noch einfacher zu gestalten, bestimmen wir die Strecke  $s^b$ , welche in Fig. 81 (oder 122f) von der durch  $B_7$  gehenden ersten Seilseite und der ebenfalls durch  $B_7$  gehenden Senkrechten (zur Balkenachse) auf der Wagrechten (bzw. Parallelen zur Balkenachse) durch den unteren Endpunkt der Strecke  $\delta^b$  abgeschnitten wird; desgleichen ermitteln wir die analoge Strecke  $s^a$

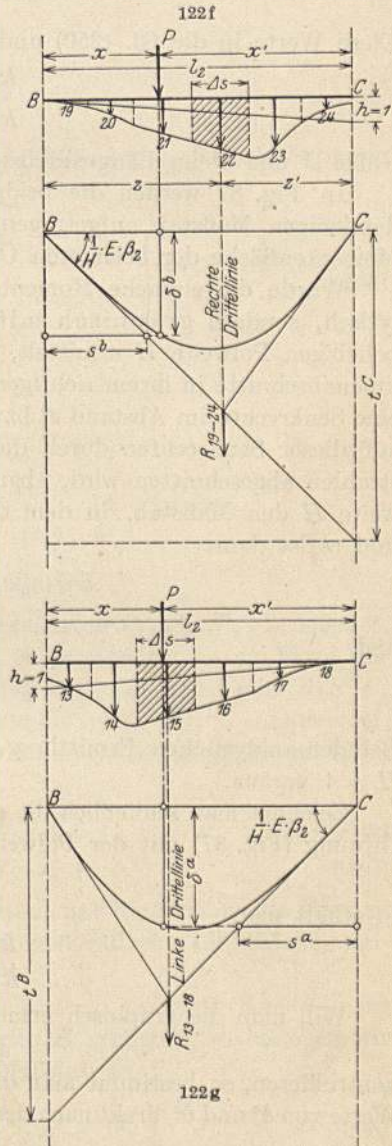


Fig. 122f u. g.

in Fig. 84 (oder 122g). Aus dem Dreieck  $B_7B_9C_9$  in Fig. 81 (oder 122f) ist:

$$s^b = \delta^b \cdot \frac{l}{t},$$

und aus Fig. 84 (oder 122g) ist

$$s^a = \delta^a \cdot \frac{l}{t}.$$

Diese Werte in die Gl. (250) und (251) eingesetzt gibt:

$$k^a = -P \cdot s^b, \quad (250a)$$

$$k^b = -P \cdot s^a, \quad (251a)$$

wobei  $s^b$  und  $s^a$  im Längenmaßstab abzumessen sind.

In Fig. 87 werden die beiden Kreuzlinienabschnitte  $k^a$  und  $k^b$  nun in demjenigen Maßstab aufgetragen, in welchem die Ordinaten der einfachen Momentenfläche der belasteten Öffnung aufgetragen wurden.

Wurde die einfache Momentenfläche der belasteten Öffnung nicht analytisch, sondern graphisch mit Kraft- und Seileck (Fig. 87a) mit der beliebigen Polweite  $H$  ermittelt, so erhalten wir die aufzutragenden Kreuzlinienabschnitte in ihrem richtigen Maßstab, wenn wir im Krafteck (Fig. 87a) eine Senkrechte im Abstand  $s^b$  bzw.  $s^a$  vom Pol ziehen und die Strecke, welche auf dieser Senkrechten durch die beiden, die Kraft  $P$  einschließenden Polstrahlen abgeschnitten wird, abgreifen; denn in diesem Falle bildet die Polweite  $H$  den Maßstab, in dem die einfache Momentenfläche gezeichnet ist, und es ist dann

$$k^a = -\frac{P}{H} \cdot s^b \quad (252)$$

und

$$k^b = -\frac{P}{H} \cdot s^a. \quad (253)$$

Bei der analytischen Ermittlung der  $M_0$ -Momente setzen wir stillschweigend  $H = 1$  voraus.

Zeichnet man schließlich die einfache Momentenfläche  $BGC$  der belasteten Öffnung (Fig. 87) mit der Polweite

$$H = P,$$

so erhält man

$$k^a = -s^b, \quad (252a)$$

$$k^b = -s^a. \quad (253a)$$

Will man die graphisch ermittelten Kreuzlinienabschnitte analytisch

kontrollieren, so bestimmt man die in den Gl. (247) und (248) vorkommenden Werte von  $\delta^a$  und  $\delta^b$  direkt nach dem Mohrschen Satz I; es ist (Fig. 84 oder 122g):

$$\delta^a = \sum_0^l \frac{\Delta F \cdot z \cdot z'}{l},$$

und da nach Gl. (400):

$$\Delta F = \frac{\Delta s}{EJ} \cdot \frac{z'}{l},$$



so ist

$$E \cdot \delta^a = \frac{1}{l^2} \cdot \sum_0^l w \cdot z \cdot z'^2 \quad (254)$$

und analog (Fig. 81 oder 122f):

$$E \cdot \delta^b = \frac{1}{l^2} \cdot \sum_0^l w \cdot z^2 \cdot z' \quad (255)$$

Ferner ist nach Gl. (205):

$$E \cdot \beta = \frac{1}{l^2} \cdot \sum_0^l w \cdot z \cdot z'.$$

Diese Werte in die Hauptformeln (242) und (243) unter Berücksichtigung der Gl. (247) und (248) eingesetzt gibt:

$$k^a = -P \cdot \frac{\sum_0^l w \cdot z^2 \cdot z'}{\sum_0^l w \cdot z \cdot z'} \quad (256)$$

und

$$k^b = -P \cdot \frac{\sum_0^l w \cdot z \cdot z'^2}{\sum_0^l w \cdot z \cdot z'} \quad (257)$$

### b) Gruppe von Einzellasten.

Ist eine Öffnung mit einer Gruppe von Einzellasten  $P_1, P_2, P_3 \dots$  belastet, wie beispielsweise die Öffnung 2 in Fig. 77, so ermittelt man an Hand der elastischen Linien (Biegelinien)  $B_7N'C_7$  der Fig. 81 (oder 122f) und  $B_8N''C_8$  der Fig. 84 (oder 122g) die den einzelnen Kräften  $P_1, P_2, P_3 \dots$  entsprechenden Strecken  $s_1^b, s_2^b, s_3^b \dots$  und  $s_1^a, s_2^a, s_3^a \dots$  und wendet die Gl. (253) und (254) wiederholt an; man erhält dann

$$k^a = -(P_1 \cdot s_1^b + P_2 \cdot s_2^b + P_3 \cdot s_3^b + \dots) \quad (258)$$

$$k^b = -(P_1 \cdot s_1^a + P_2 \cdot s_2^a + P_3 \cdot s_3^a + \dots) \quad (259)$$

Die Strecken  $s$  sind im Längenmaßstab abzumessen und die Summen im gleichen Maßstab wie die Ordinaten der einfachen Momentenfläche ( $M_0$ -Fläche) aufzutragen.

Wurde die einfache Momentenfläche graphisch mittels Kraft- und Seileck (Fig. 77b) mit der beliebigen Polweite  $H$  ermittelt, so erhalten wir analog wie unter a)  $k^a$  und  $k^b$  im richtigen Maßstab aus:

$$k^a = -\left(\frac{P_1}{H} \cdot s_1^b + \frac{P_2}{H} \cdot s_2^b + \frac{P_3}{H} \cdot s_3^b + \dots\right) \quad (260)$$

$$k^b = -\left(\frac{P_1}{H} \cdot s_1^a + \frac{P_2}{H} \cdot s_2^a + \frac{P_3}{H} \cdot s_3^a + \dots\right) \quad (261)$$

Graphisch erhalten wir die einzelnen Summenglieder dieser Gleichung in ihrem richtigen Maßstab analog wie unter a) aus dem Krafteck der Fig. 77b.

### e) Stetige Belastung.

Ist eine Öffnung über der ganzen Stützweite oder einem Teil derselben mit einer stetigen, jedoch von Querschnitt zu Querschnitt verschiedenen Belastung  $p$  pro Längeneinheit belastet, so teilt man die Belastungsstrecke in womöglich gleiche Teile von der Länge  $\Delta s$  und ermittelt die den Einzelkräften  $P = p \cdot \Delta s$  entsprechenden Kreuzlinienabschnitte nach den vorhergehenden Gleichungen.

Dasselbe gilt für gleichmäßig über die ganze Öffnung verteilte Belastung. Bei symmetrisch ausgebildetem Träger ist jedoch wie bei konstantem Trägheitsmoment [siehe Gl. (267)]:  $k^a = k^b = -2f$ .

Ist die belastete Öffnung eine Endöffnung mit elastisch drehbarem Endpfeiler, wie beispielsweise die erste Öffnung links am durchlaufenden Balken der Fig. 76, so sind zwei Festpunkte vorhanden, und es sind deshalb auch zwei Kreuzlinienabschnitte  $k_1^a$  und  $k_1^b$  zu ermitteln; liegt das Balkenende jedoch frei auf, wie in der letzten Öffnung rechts der Fig. 76, so wird zur Konstruktion der Momentenfläche dieser belasteten Öffnung nur der Kreuzlinienabschnitt  $k_2^b$  auf der Senkrechten durch das frei aufliegende Balkenende  $E$  benötigt und der andere Kreuzlinienabschnitt fällt fort.

### d) Konsolbelastung.

Wird zwischen den beiden Enden eines Stabes  $CD$  ein Moment in denselben eingeleitet, wie z. B. in Fig. 123 das Moment  $M$ , so ersetzen wir dasselbe durch ein Kräftepaar  $P$  mit dem Abstand  $e$ , wobei letzterer dem Abstand von Zug- und Druckmittelpunkt der lastübertragenden Konsole entspricht; alsdann haben wir den Fall gleicher, aber entgegengesetzt gerichteter, im Abstand  $e$  auf den Stab  $CD$  wirkender Einzellasten und ermitteln die Kreuzlinienabschnitte für diesen Fall wie unter b) beschrieben, wir müssen jedoch die den beiden Kräften  $P$  entsprechenden Strecken  $s^b$  und  $s^a$  voneinander subtrahieren, da die beiden Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind. Wie aus den Fig. 136b, 137b und 138b ersichtlich, kann diese Differenz positiv oder negativ sein, je nach der Lage des Angriffpunktes des Momentes.

Die von der in Fig. 123 dargestellten Belastung hervorgerufene  $M_0$ -Fläche ist in Fig. 123a dargestellt. Die Auflagerdrücke am frei aufliegenden Balken  $CD$  sind

$$C_0 = -\frac{M}{l} \quad \text{und} \quad D_0 = \frac{M}{l},$$

daher ist das Moment im Schnitt  $E$  und  $E'$

$$M_E = -\frac{M}{l} \cdot z \quad \text{und} \quad M_{E'} = \frac{M}{l} \cdot z',$$

d. h. wir erhalten die  $M_0$ -Flächen in der aus Fig. 123a ersichtlichen Weise durch Auftragen von  $M$  bei  $C$  und  $D$ .

Ist die Höhe der Konsole im Verhältnis zur Stablänge sehr klein, so ist der Abstand

$$e = 0 \quad (\text{Fig. 124});$$

in diesem Falle ergibt sich die aus Fig. 124a ersichtliche  $M_0$ -Fläche, und die Drehwinkel  $\alpha^{a0}$  und  $\alpha^{b0}$  in den Hauptformeln für die Kreuzlinienabschnitte werden dann direkt nach dem Mohrschen Satz II durch Zerlegen der reduzierten  $M_0$ -Fläche in Streifen bestimmt.

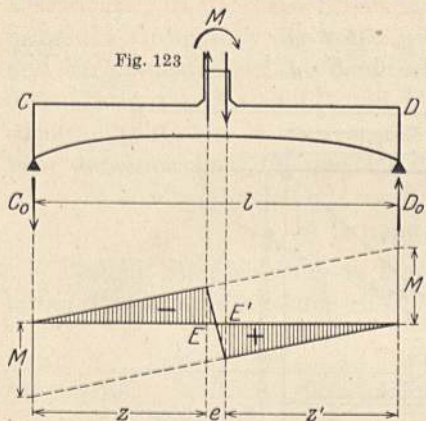


Fig. 123 a

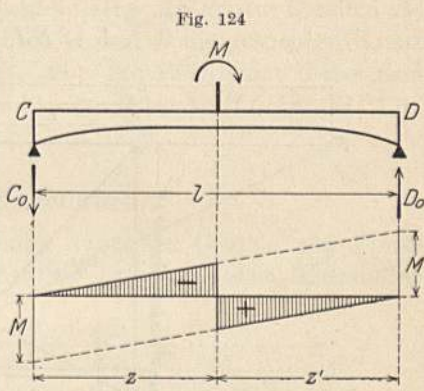


Fig. 124 a

Häufig wird bei belasteten Balkenöffnungen mit veränderlichem Trägheitsmoment der Einfachheit halber die in folgendem Abschnitt erläuterte Konstruktion der Kreuzlinienabschnitte für konstantes Trägheitsmoment vorgenommen; es sei jedoch an dieser Stelle darauf aufmerksam gemacht, daß diese Vereinfachung bei unsymmetrischen Trägern zu ganz unrichtigen Werten führen kann.

### 3. Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte bei konstantem Trägheitsmoment.

Wir ermitteln die Kreuzlinienabschnitte für eine Einzellast, eine Gruppe von Einzellasten, stetige Belastung und Konsolbelastung. Bei durchweg konstantem Trägheitsmoment der belasteten Öffnung bestimmen wir die in den Hauptformeln (242) und 243) für die Kreuzlinienabschnitte vorkommenden Drehwinkel  $\alpha^{a0}$  und  $\alpha^{b0}$  direkt nach dem Mohrschen Satz II. Den Wert für den Drehwinkel  $\beta$  finden wir in Kap. IV, und zwar für durchweg konstantes Trägheitsmoment in Gl. (207).

#### a) Einzellast.

Die Belastung bestehe aus einer Einzellast  $P$  im Abstände  $x$  vom linken und  $x'$  vom rechten Auflager der belasteten Öffnung. Der Momentenfläche  $AGB$  des einfachen Balkens  $AB$  (Fig. 125) entspricht eine  $\frac{1}{EJ}$  fache (reduzierte) Momentenfläche, welche wegen des konstanten Trägheitsmomentes der belasteten Öffnung ebenfalls ein Dreieck mit Spitze auf der Richtung von  $P$  ist. Der Inhalt dieser Fläche beträgt:

$$\frac{y \cdot l}{2 EJ}$$

ihr Schwerpunktsabstand von  $A$

$$\xi = \frac{x+l}{3}$$

und daher nach Satz II der Drehwinkel  $\alpha^{bo}$ :

$$\alpha^{bo} = \frac{1}{l} \cdot \frac{y \cdot l}{2EJ} \cdot \frac{x+l}{3} = \frac{y(x+l)}{6 \cdot E \cdot J}, \quad (262)$$

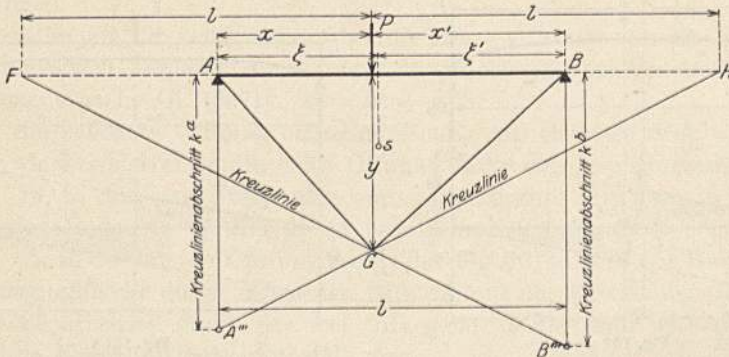


Fig. 125.

desgleichen beträgt der Schwerpunktsabstand von  $B$

$$\xi' = \frac{x'+l}{3}$$

und daher nach Satz II der Drehwinkel  $\alpha^{ao}$ :

$$\alpha^{ao} = \frac{1}{l} \cdot \frac{y \cdot l}{2E \cdot J} \cdot \frac{x'+l}{3} = \frac{y(x'+l)}{6 \cdot E \cdot J}. \quad (263)$$

Ferner ist nach Gl. (207):

$$\beta = \frac{l}{6 \cdot E \cdot J},$$

Diese Werte für  $\alpha^{bo}$ ,  $\alpha^{ao}$  und  $\beta$  in die Hauptformeln (242) und (243) eingesetzt gibt:

$$k^a = - \frac{y(x+l)}{l}, \quad (264)$$

$$k^b = - \frac{y(x'+l)}{l}. \quad (265)$$

In diesen Gleichungen kommt keine Größe vor, welche Bezug hätte auf das Trägheitsmoment der belasteten und der Nachbaröffnungen; deshalb erfolgt die Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte in derselben Weise sowohl am durchlaufenden Balken mit von Öffnung zu Öffnung sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment als auch am durchlaufenden Balken mit durchweg konstantem Trägheitsmoment.

Nach den Gl. (264) und (265) erhalten wir folgende bekannte

Konstruktion der Kreuzlinienabschnitte



Fall 1: Einzellast in Stabmitte (Fig. 126 a).

$$k^a = -\frac{3}{8} P \cdot l = k^b. \quad (265 a)$$

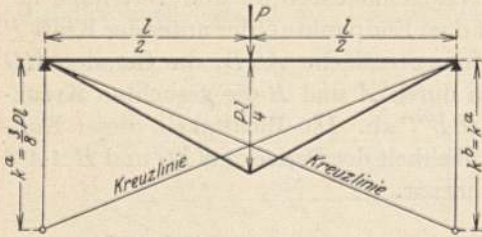


Fig. 126 a.

Fall 2: Zweigleiche Lasten in den Drittelpunkten des Stabes (Fig. 126 b).

$$k^a = -\frac{2}{3} P \cdot l = k^b. \quad (265 b)$$

Fall 3: Dreigleiche Lasten in gleichen Abständen voneinander und von den Auflagern (Fig. 126 c).

$$k^a = -\frac{15}{16} P \cdot l = k^b. \quad (265 c)$$

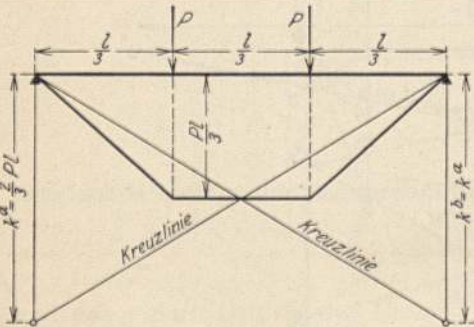


Fig. 126 b.

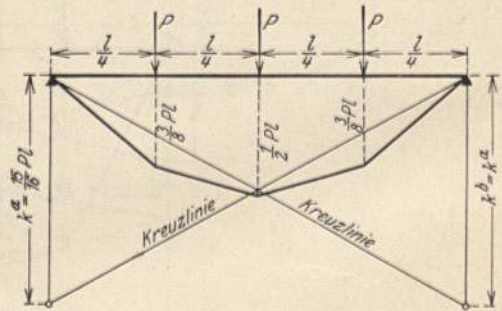


Fig. 126 c.

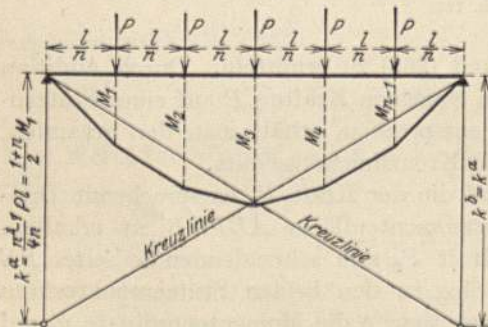


Fig. 126 d.

$$M_1 = (n-1) \frac{P \cdot l}{2n}$$

$$M_2 = (2n-4) \frac{P \cdot l}{2n}$$

$$M_3 = (3n-9) \frac{P \cdot l}{2n}$$

$$M_4 = (4n-16) \frac{P \cdot l}{2n}$$

-----

$$M_k = (n-k) k \frac{P \cdot l}{2n}.$$

$$k^a = -\frac{n^2-1}{4n} P \cdot l = -\frac{1+n}{2} M_1 = k^b. \quad (265 d)$$

Fall 5: Einzellast auf einseitiger Auskrägung des Stabes (Fig. 126 e).

$$k^a = -M_0^A; \quad k^b = -2 M_0^A. \quad (265 e)$$

Fall 6: Gleiche Einzellast auf beidseitiger gleicher Auskrägung des Stabes (Fig. 126 f).

$$k^a = -3 M_0 = k^b. \quad (265 f)$$

**Fall 7:** Verschieden große Einzelast auf beidseitiger gleicher Auskragung des Stabes (Fig. 126 g).

$$k^a = -(M_1 + 2M_2); \quad (265 g)$$

$$k^b = -(M_2 + 2M_1).$$

**Fall 8:** Zwei gleiche Lasten in gleichen Abständen  $a$  von den Auflagern (Fig. 126 h).

$$k^a = -\frac{3 \cdot P \cdot a \cdot (l - a)}{l} = k^b. \quad (265 h)$$

**c) Stetige Belastung.**

Ist die belastete Öffnung über der ganzen Stützweite oder einem Teil derselben mit einer stetigen, jedoch von Querschnitt zu Querschnitt verschiedenen Belastung  $p$  pro Längeneinheit belastet, so teilt man die Belastungsstrecke in womöglich gleiche Teile von der Länge  $\Delta s$  und ermittelt die den Einzelkräften  $P = p \cdot \Delta s$  entsprechenden Kreuzlinienabschnitte wie beim vorhergehenden Belastungsfall.

Im folgenden werden die Werte der Kreuzlinienabschnitte sowie mehrere Ordinaten der zugehörigen einfachen Momentenfläche für verschiedene häufig vorkommende Belastungsfälle angegeben.

**Fall 1:** Gleichmäßig über den ganzen Stab verteilte Belastung  $p$  pro Längeneinheit (Fig. 127).

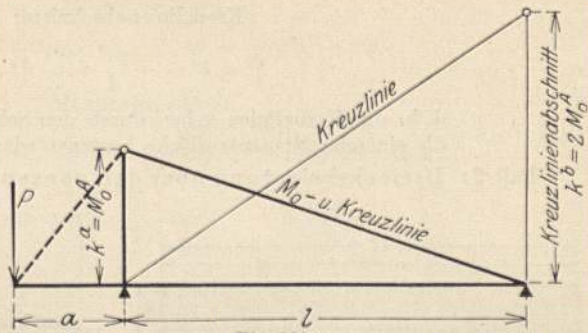


Fig. 126 e.

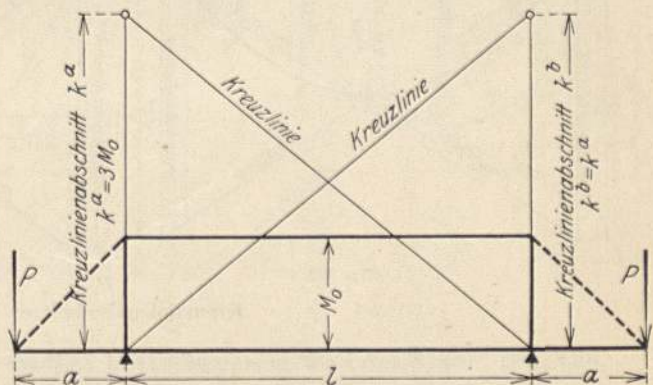


Fig. 126 f.

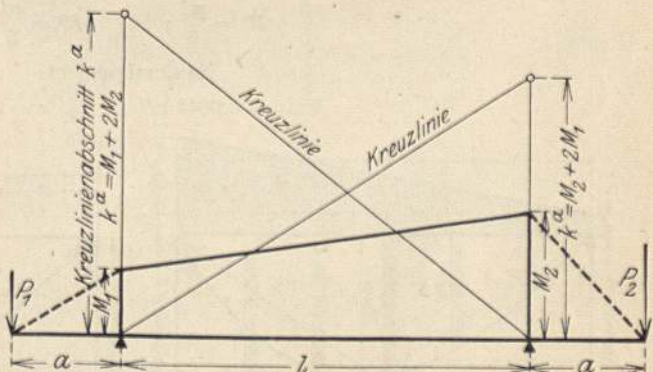


Fig. 126 g.

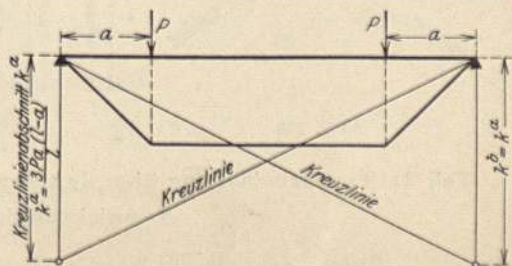


Fig. 126 h.

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = k^b = -\frac{pl^2}{4} = -2f, \quad (266)$$

d. h. die Kreuzlinien gehen durch den Scheitel der Parabel, durch welche die einfache Momentenfläche begrenzt wird.

Fall 2: Dreiecksbelastung über den ganzen Stab (Fig. 128).

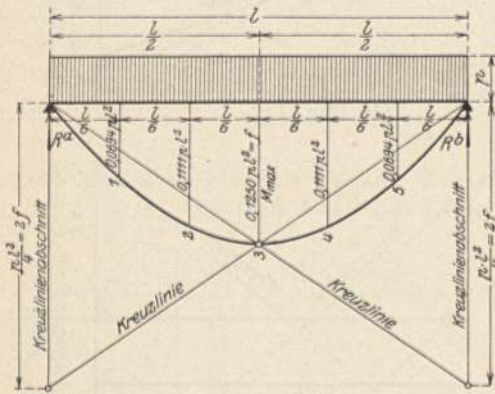


Fig. 127.

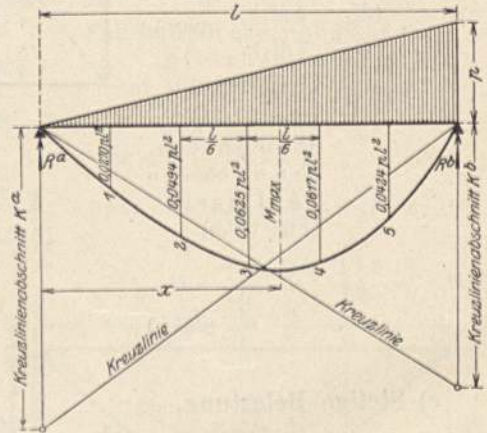


Fig. 128.

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = -\frac{2}{15} pl^2; \quad k^b = -\frac{7}{60} pl^2. \quad (267)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{pl}{6}; \quad R^b = \frac{pl}{3}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = 0,0642 pl^2; \quad x = 0,577 l.$$

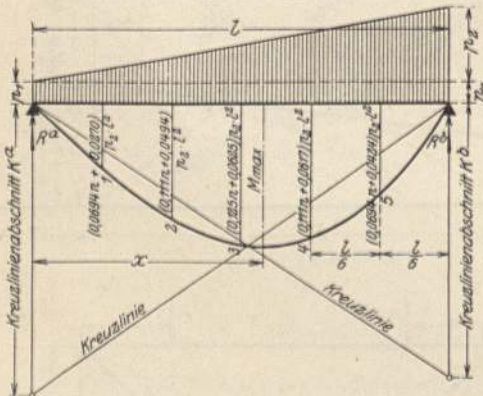


Fig. 129.

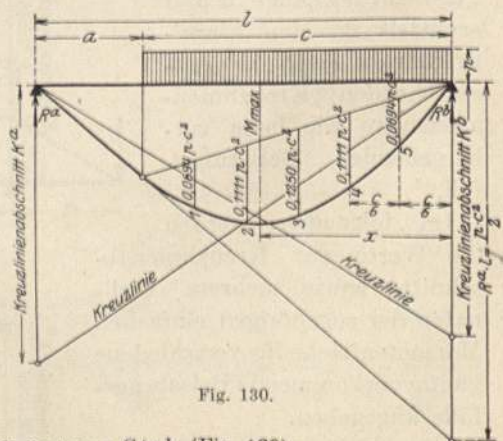


Fig. 130.

Fall 3: Trapezbelastung über den ganzen Stab (Fig. 129).

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = -\frac{l^2}{4} (p_1 + 0,5333 p_2); \quad k^b = -\frac{l^2}{4} (p_1 + 0,4666 p_2). \quad (268)$$



Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{l}{6} (3 p_1 + p_2); \quad R^b = \frac{l}{6} (3 p_1 + 2 p_2).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{p_2 l^2}{6} \cdot m \cdot \left[ \frac{2}{3} - n(m-2) \right]; \quad x = l \cdot m;$$

$$m = \sqrt{n(n+1) + \frac{1}{3}} - n; \quad n = \frac{p_1}{p_2}.$$

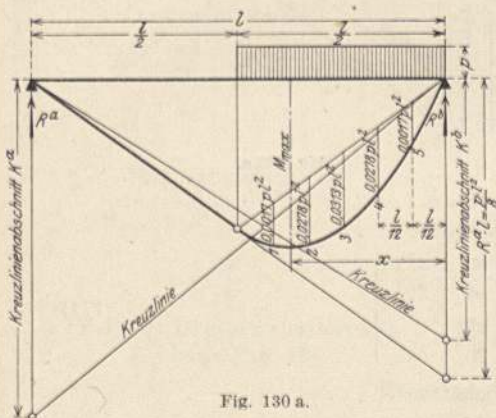


Fig. 130 a.

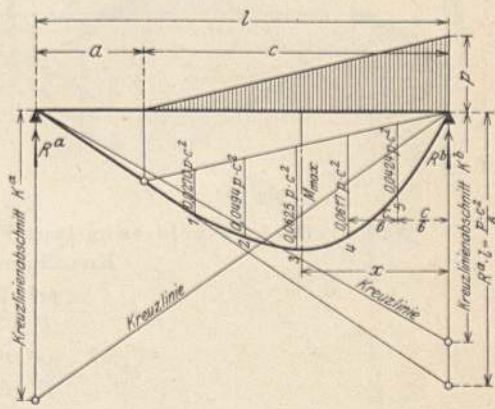


Fig. 131.

Fall 4: Gleichmäßig verteilte Last über einen Teil des Stabes (Fig. 130).

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{p \cdot c^2}{4 l^2} (2l - c)^2 = -2 M_{\max} \\ k^b &= -\frac{p \cdot c^2}{4 l^2} (2l^2 - c^2) \end{aligned} \right\} \quad (269)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{p c^2}{2 l}; \quad R^b = \frac{p c}{l} \left( a + \frac{c}{2} \right).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{R^b \cdot x}{2}; \quad x = \frac{R^b}{p}.$$

Fall 5: Gleichmäßig verteilte Last auf einer Stabhälfte (Fig. 130a).

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = -\frac{9}{64} p l^2 = -2 M_{\max}; \quad k^b = -\frac{7}{64} p l^2. \quad (270)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{p l}{8}; \quad R^b = \frac{3}{8} p l.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{R^b \cdot x}{2}; \quad x = \frac{R^b}{p}.$$

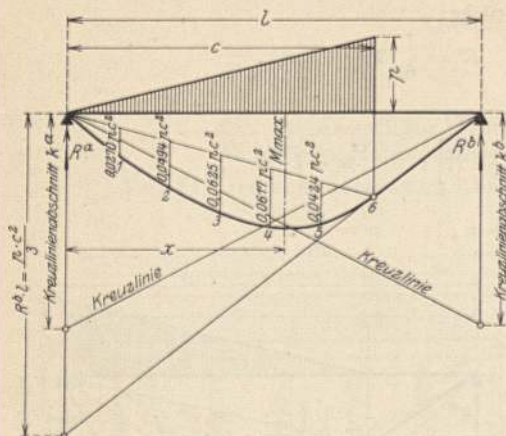


Fig. 132.

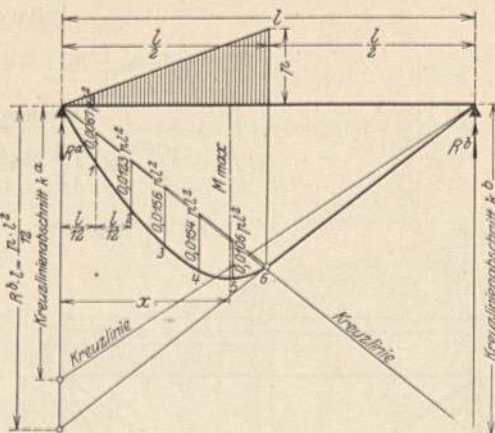


Fig. 132 a.

Fall 6: Dreiecksbelastung laut Fig. 131.

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{pc^2}{l^2} \left( \frac{l^2}{3} - \frac{cl}{4} + \frac{c^2}{20} \right) \\ k^b &= -\frac{pc^2}{l^2} \left( \frac{l^2}{6} - \frac{c^2}{20} \right) \end{aligned} \right\} \quad (271)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{pc^2}{6l}; \quad R^b = \frac{pc}{6l} (3a + 2c).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = R^a \left( a + \frac{2}{3}x \right); \quad x = c \sqrt{\frac{c}{3l}}.$$

Fall 7: Dreiecksbelastung laut Fig. 132.

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{pc^2}{l^2} \left( \frac{l^2}{3} - \frac{c^2}{5} \right) \\ k^b &= -\frac{pc^2}{l^2} \left( \frac{2}{3}l^2 - \frac{3}{4}cl + \frac{c^2}{5} \right) \end{aligned} \right\} \quad (272)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = pc \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{3} \right); \quad R^b = \frac{pc^2}{3l}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{2}{3} R^a \cdot x; \quad x = \sqrt{\frac{2 R^a \cdot c}{p}}.$$

Fall 8: Dreiecksbelastung laut Fig. 132a.

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = -\frac{17}{240} pl^2; \quad k^b = -\frac{41}{480} pl^2. \quad (273)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{pl}{6}; \quad R^b = \frac{pl}{12}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = 0,0454 pl^2; \quad x = 0,408 l.$$

**Fall 9: Gleichmäßig verteilte Streckenlast (Fig. 133).**

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{pc}{4l^2} (a_1 + a_2) (2l^2 - a_1^2 - a_2^2) \\ k^b &= -\frac{pc}{4l^2} (b_1 + b_2) (2l^2 - b_1^2 - b_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (274)$$

bei Symmetrie:

$$k^a = k^b = -\frac{pc}{8l} (3l^2 - c^2).$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{pc}{l} \left( b_1 + \frac{c}{2} \right);$$

$$R^b = \frac{pc}{l} \left( a_1 + \frac{c}{2} \right).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = R^a \left( a_1 + \frac{x}{2} \right);$$

$$x = \frac{R^a}{p}.$$

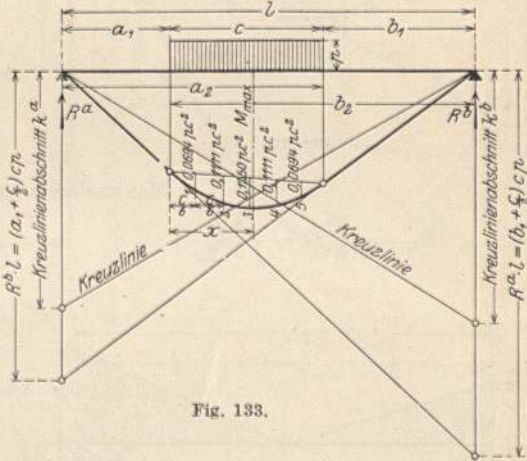


Fig. 133.

**Fall 10: Dreiecksbelastung laut Fig. 134.**

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{p(l + c_1)}{60l} (7l^2 - 3c_1^2) \\ k^b &= -\frac{p(l + c_2)}{60l} (7l^2 - 3c_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (275)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{p}{6} (l + c_2);$$

$$R^b = \frac{p}{6} (l + c_1).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{2}{3} R^a \cdot x;$$

$$x = \sqrt{\frac{2c_1 \cdot R^a}{p}}.$$

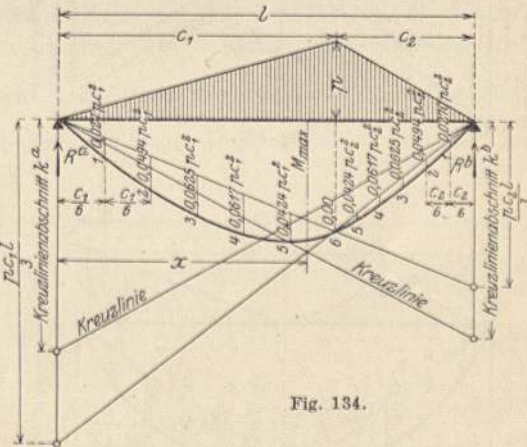


Fig. 134.

**Fall 11: Dreiecksbelastung laut Fig. 134a.**

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = k^b = -\frac{5}{32} pl^2. \quad (276)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = R^b = \frac{pl}{4}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{12}; \quad x = \frac{l}{2}.$$

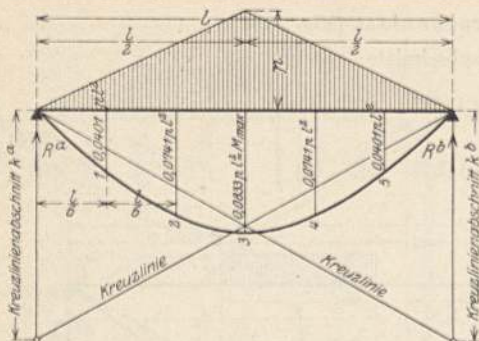


Fig. 134 a.

Fall 12: Dreiecksbelastung laut Fig. 135.

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{l^2}{960} (37 p_1 + 53 p_2) \\ k^b &= -\frac{l^2}{960} (53 p_1 + 37 p_2) \end{aligned} \right\} (277)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{l}{24} (5 p_1 + p_2);$$

$$R^b = \frac{l}{24} (p_1 + 5 p_2).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{R^b}{6} \left( l - \frac{8 x^2}{l + 2 x} \right); \quad x = \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{R^b}{Q_2}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{6 p_2}}$$

Fall 13: Dreiecksbelastung laut Fig. 135 a.

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = k^b = -\frac{3}{32} p l^2. \quad (278)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = R^b = \frac{p l}{4}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{p l^2}{24}; \quad x = \frac{l}{2}.$$

Fall 14: Gleiche Streckenlast an beiden Stabenden (Fig. 135 b).

Kreuzlinienabschnitte:

$$\begin{aligned} k^a = k^b &= -\frac{p \cdot c^2 (3 l - 2 c)}{2 l} \\ &= -M_{\max} \left( \frac{3 l - 2 c}{l} \right). \end{aligned} \quad (278 a)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = R^b = \frac{p c}{2}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{p \cdot c^2}{6}.$$

Fall 15: Parabelförmige Belastung (Fig. 135 c).

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = k^b = -\frac{p \cdot l^2}{5}. \quad (278 b)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = R^b = \frac{p l}{3}.$$

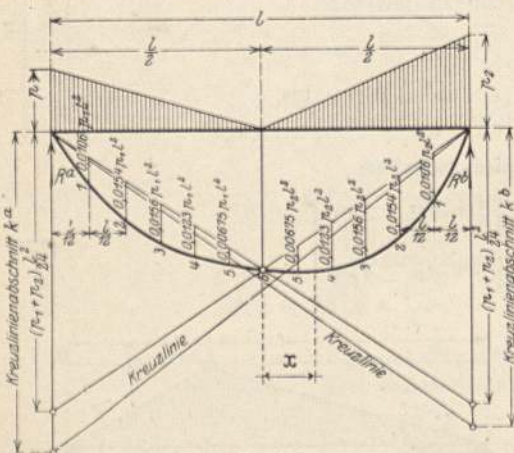


Fig. 135.

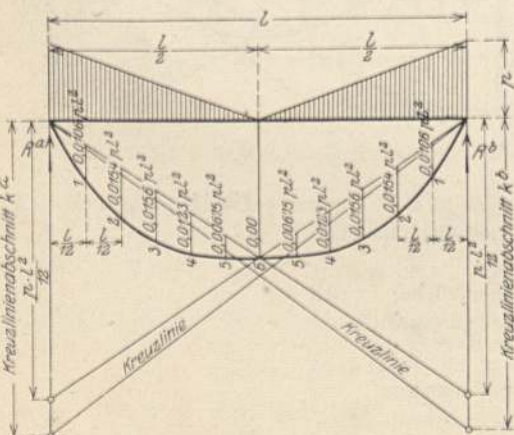


Fig. 135 a.

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{5}{32} p l^2.$$

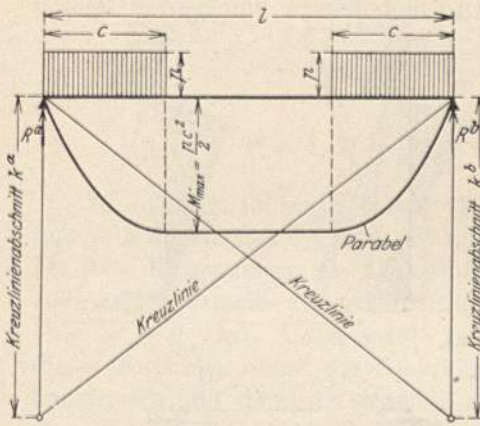


Fig. 135 b.

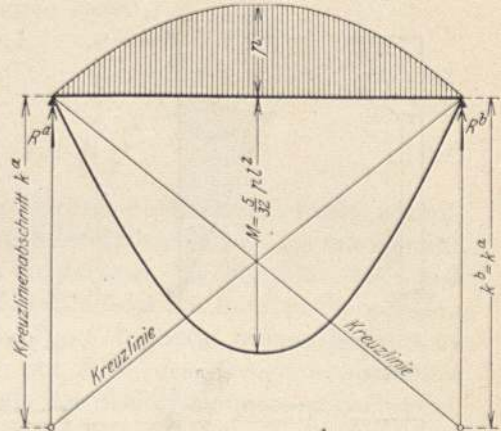


Fig. 135 c.

In einem beliebigen Schnitt:

$$M_x = \frac{pl}{3} x - \frac{px^3}{3l^2} (2l - x).$$

#### d) Konsolbelastung.

Wird zwischen den beiden Enden eines Stabes, z. B. einer Säule, wie in den Fig. 136, 137 und 138 dargestellt, ein Moment  $M$ , herrührend von der Belastung  $Q$ , eingeleitet, so ergeben sich, wie unter 2 d), die in den Fig. 136a bzw. 137a bzw. 138a dargestellten einfachen Momentenflächen ( $M_0$ -Flächen). Wegen des als konstant angenommenen Trägheitsmomentes der belasteten Säule bestehen die  $\frac{1}{E \cdot J}$  fachen (reduzierten) einfachen Momentenflächen wieder aus je 2 Dreiecken, weshalb wir für die Drehwinkel  $\alpha^{bo}$  und  $\alpha^{ao}$  nach Satz II folgende Werte erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha^{bo} &= \frac{+\frac{M \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3} - M \cdot z \cdot \frac{z}{2} - M \cdot \frac{e}{2} \left( z + \frac{e}{3} \right)}{l \cdot E \cdot J} \\ &= \frac{M}{6 E J} \left( 1 - \frac{e^2 + 3z(e+z)}{l} \right) \end{aligned} \quad (279)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{ao} &= \frac{-\frac{M l}{2} \cdot \frac{l}{3} + M \cdot z' \cdot \frac{z'}{2} + M \cdot \frac{e}{2} \left( z' + \frac{e}{3} \right)}{l \cdot E \cdot J} \\ &= \frac{M}{6 \cdot E \cdot J} \left( \frac{e^2 + 3z(e+z)}{l} - 1 \right) \end{aligned} \quad (280)$$

Ferner ist nach Gl. (207):

$$\beta = \frac{l}{6 \cdot E \cdot J}$$

Diese Werte für  $\alpha^{bo}$ ,  $\alpha^{ao}$  und  $\beta$  in die Hauptformeln (242) und (243) eingesetzt gibt:

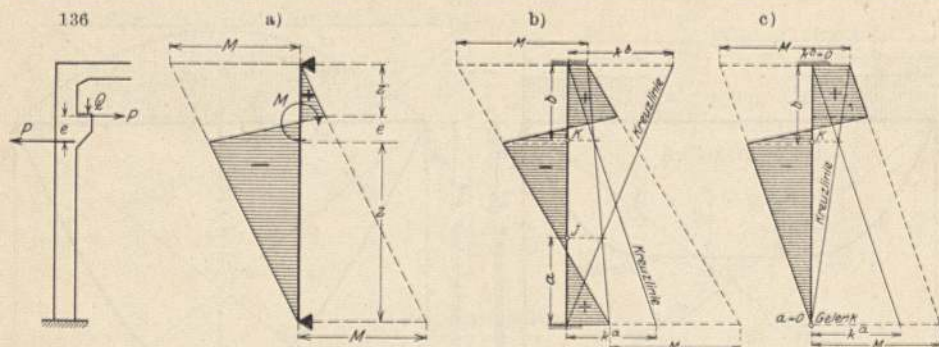


Fig. 136—136c.

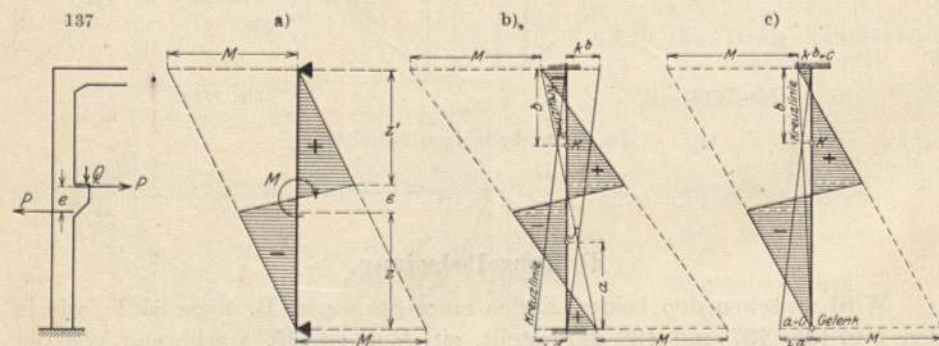


Fig. 137—137c.

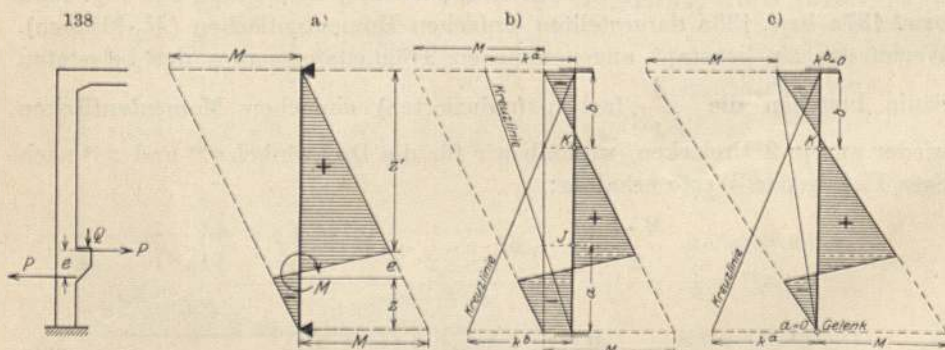


Fig. 138—138c.

$$k^a = -M \left( 1 - \frac{e^2 + 3z(e+z)}{l^2} \right) \quad (281)$$

und

$$\begin{aligned} k^b &= -M \left( \frac{e^2 + 3z'(e+z')}{l^2} - 1 \right) \\ &= +M \left( 1 - \frac{e^2 + 3z'(e+z')}{l^2} \right) \end{aligned} \quad (282)$$

Hierin ist  $M$  mit seinem Vorzeichen (ein rechtsdrehendes Moment positiv) einzusetzen.

Ist die Höhe der Konsole im Verhältnis zur Säulenhöhe sehr klein, so kann der Abstand

$$e = 0$$

gesetzt werden und wir erhalten in diesem Falle:

$$k^a = -M \left( 1 - \frac{3z^2}{l^2} \right) \quad (283)$$

$$k^b = -M \left( \frac{3z^2}{l^2} - 1 \right) = +M \left( 1 - \frac{3z^2}{l^2} \right) \quad (284)$$

In den Fig. 136b, 137b und 138b wurden die Kreuzlinien und Schlußlinien für die aus den Fig. 136, 137 und 138 ersichtliche Höhenlage der Konsole für feste Einspannung des Säulenfußes eingetragen; die Fig. 136c, 137c und 138c zeigen dasselbe für gelenkartige Lagerung des Säulenfußes, in welchem Falle  $k^b = 0$  wird. Dabei wurde wie in Fig. 87b gezeigt (siehe Abschnitt 4c dieses Kapitels) zuerst die Schlußlinie mit Hilfe der Kreuzlinienabschnitte konstruiert und dann die  $M_0$ -Fläche von der Schlußlinie (anstatt Stabachse) aus aufgetragen, so daß die Säulenachse die Trennungslinie für die positiven und negativen Momente bildet; diese Auftragsweise ist bei Konsolbelastung besonders vorteilhaft. Wie aus diesen Figuren ersichtlich, werden die Kreuzlinienabschnitte je nach der Höhenlage der Konsole entweder beide positiv (Fig. 136b), der eine positiv und der andere negativ (Fig. 137b), oder beide negativ (Fig. 138b). Aus dem Vergleich der Fig. 136b mit den Fig. 137b und 138b, sowie der Fig. 136c mit den Fig. 137c und 138c folgt, daß es eine bestimmte Höhenlage der Konsole gibt, für welche sich das Säulenkopfmoment zu Null ergibt. Dieselbe beträgt unter der Annahme, daß  $e = 0$ :

$$\text{für Säule mit Fußespannung: } z = \frac{2}{3} l \quad (285)$$

$$\text{„ „ „ Fußgelenk: } z = \frac{l}{\sqrt{3}}. \quad (286)$$

Soll eine

starre Strecke an einem Ende des belasteten Stabes

(meistens Pfeilers) berücksichtigt werden bei sonst konstantem Trägheitsmoment, so beachten wir, daß in diesem Falle die reduzierte Momentenfläche auf die Länge der starren Strecke gleich Null wird. Die in den Hauptformeln (242) und (243) für die Kreuzlinienabschnitte vorkommenden Drehwinkel  $\alpha^{bo}$  und  $\alpha^{ao}$  bestimmen wir zweckmäßig direkt nach dem Mohrschen Satz II; der Drehwinkel  $\beta$  ist durch Gl. (206) ausgedrückt.

Da nun aber in den Fig. 127 bis 135a nicht nur die Kreuzlinienabschnitte für die meisten vorkommenden Belastungsfälle für durchweg konstantes Trägheitsmoment angegeben, sondern auch die  $M_0$ -Flächen für diese Belastung durch mehrere Punkte der Momentenlinie festgelegt sind, welche natürlich für konstantes und veränderliches Trägheitsmoment dieselben sind, so können wir die Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte bei Berücksichtigung der genannten starren Strecke in der Weise vornehmen, daß wir zunächst die Kreuzlinienabschnitte für durchweg konstantes Trägheitsmoment nach den

Formeln (266) bis (278) ermitteln und darauf den Einfluß der starren Strecke auf die Kreuzlinienabschnitte als Berichtigung dadurch ermitteln, daß wir denjenigen Teil der reduzierten Momentenfläche der Fig. 127 bis 135a, welcher infolge der starren Strecke ( $J = \infty$ ) Null wird, als negative reduzierte Momentenfläche betrachten und hierfür allein die Kreuzlinienabschnitte nach den allgemeinen Hauptformeln bestimmen; diese zur Berichtigung nötige Rechnung gestaltet sich sehr einfach, weil die reduzierte Momentenfläche auf der starren Strecke immer als ein Dreieck angesehen werden darf.

#### 4. Bestimmung der Momentenfläche am ganzen Tragwerk.

In Kap. I wurde der Gang der Rechnung bei der Bestimmung der Momentenfläche an dem allgemeinen offenen Tragwerk der Fig. 48, sowie an dem geschlossenen Tragwerk der Fig. 49 beschrieben.

Mit Rücksicht auf die Wichtigkeit des durchlaufenden Balkens auf elastisch drehbaren Stützen wird noch nachstehend die Bestimmung der Momentenfläche am Tragwerk der Fig. 76, und zwar für Balkenbelastung (Fig. 87) und Pfeilerbelastung (Fig. 88) vorgeführt.

Das in Fig. 76 dargestellte Tragwerk  $ABCDE$  mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner Öffnungen (Stäbe) 1, 2, 3, 4 und seiner Pfeiler (Stäbe) 5, 6, 7, 8 ist ein festgehaltenes Tragwerk, weil es in  $E$  ein festes Lager besitzt; irgendwelche äußeren oder inneren in der Balkenachse wirkenden Kräfte werden dann durch den Balken in das feste Lager geleitet, ohne daß der Balken und mithin auch die Pfeilerköpfe Verschiebungen ausführen.

##### a) Graphisch.

Es sei nur die Öffnung 2 mit der Kraft  $P$  belastet. Die dadurch hervorgerufene Momentenfläche am ganzen Tragwerk ist in Fig. 87 dargestellt. Sie wird dadurch gefunden, daß nach Berechnung der Kreuzlinienabschnitte die beiden Kreuzlinien gezogen und deren Schnittpunkte  $J'_2$  und  $K'_2$  mit den beiden Festpunktsenkrechten bestimmt werden; die Verbindungslinie  $J'_2 K'_2$  ist dann die gesuchte Schlußlinie in der belasteten Öffnung. Darauf werden die beiden Stützenmomente nach Multiplikation mit den entsprechenden Verteilungsmaßen über die übrigen unbelasteten Felder (Balken und Pfeiler) fortgepflanzt.

Beim Überschreiten des Knotenpunktes  $B$  nach links spaltet sich das Moment  $M_2^B$  in  $M_1^B$  und  $M_6^B$ . Es ist

$$\begin{aligned} M_1^B &= \mu_{2-1}^B \cdot M_2^B \\ \text{und} \quad M_6^B &= (1 - \mu_{2-1}^B) \cdot M_2^B. \end{aligned}$$

Diese Momente pflanzen sich über die anschließende Konstruktion fort, und zwar geht nach der Definition der Festpunkte in den unbelasteten Öffnungen die Schlußlinie durch den Festpunkt am anderen Stabende; es besteht kein Unterschied zwischen Balken und Pfeiler, da beides Stäbe des Tragwerkes sind.

Analog erhalten wir beim Übergang des Momentes  $M_2^C$  über den Knotenpunkt  $C$  nach rechts:

$$\begin{aligned} M_3^C &= \mu_{2-3}^C \cdot M_2^C \\ \text{und} \quad M_7^C &= (1 - \mu_{2-3}^C) \cdot M_2^C \end{aligned}$$





Zusatzmomente (Rechnungsabschnitt II) entstehen, welche zu den eben erhaltenen Momenten (Rechnungsabschnitt I) zu addieren wären. Die Zusätze infolge der Balkenbelastung würden gering ausfallen, da das Tragwerk der Fig. 76 vier Pfeiler aufweist (vgl. Teil II) und die Zusätze um so geringer werden, je mehr Pfeiler ein Tragwerk besitzt. Bei Pfeilerbelastung wäre dies jedoch anders; in diesem Falle würden sich die Pfeilerköpfe selbststredend noch verschieben und dadurch Zusatzmomente hervorrufen, welche einen erheblichen Anteil an den endgültigen Momenten haben.

### b) Rechnerisch.

Anstatt die Momentenfläche der Fig. 87 und 88 graphisch, wie unter a) ausgeführt, durch Zeichnen der Schlußlinien in allen Öffnungen zu bestimmen, können wir auch die Stützenmomente an den belasteten und unbelasteten Balken und Pfeilern wie folgt mathematisch genau aus den in den Fig. 87 und 88 durch die graphische Konstruktion der Momentenflächen gebildeten Dreiecken ermitteln, worauf die Momente am ganzen Tragwerk bekannt sind.

Am Tragwerk der Fig. 76 seien alle Festpunktabstände  $a$  und  $b$ , und an den belasteten Balken oder Pfeilern außerdem die Kreuzlinienabschnitte bekannt.

Wir erhalten dann z. B. die beiden Stützenmomente  $M_2^B$  und  $M_2^C$

in der belasteten Öffnung 2 der Fig. 87

wie folgt:

Wir ziehen die beiden Kreuzlinien  $BC''$  und  $CB''$ , bestimmen deren Schnittpunkte  $J_2'$  und  $K_2'$  mit den beiden Festpunktsenkrechten und ziehen die Verbindungslinie  $J_2' B_2'$ , welche auf der Stützensenkrechten durch  $B$  und  $C$  die gesuchten Stützenmomente  $BB'$  und  $CC'$  abschneidet. Die Diagonale  $BC'$  zerlegt die Strecken  $J_2' J_2'$  und  $K_2' K_2'$  in je zwei Teilstrecken, deren Summe wir durch die Ähnlichkeit der Dreiecke  $BCC'$ ,  $B J_2' J_2'$  und  $B K_2' K_2'$ , sowie die Ähnlichkeit der Dreiecke  $C' B B'$ ,  $C' K_2' K_2'$  und  $C J_2' J_2'$  folgendermaßen ausdrücken können:

$$J_2' J_2' = M_2^B \cdot \frac{l_2 - a_2}{l_2} + M_2^C \cdot \frac{a_2}{l_2} \quad (290)$$

$$K_2' K_2' = M_2^B \cdot \frac{b_2}{l_2} + M_2^C \cdot \frac{l_2 - b_2}{l_2} \quad (291)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $BCC''$  und  $B J_2' J_2'$ , sowie der Ähnlichkeit der Dreiecke  $CBB''$  und  $C K_2' K_2'$  folgt:

$$J_2' J_2' = k_2^a \cdot \frac{a_2}{l_2} \quad K_2' K_2' = k_2^b \cdot \frac{b_2}{l_2}$$

Setzen wir diese Werte in die Gl. (290) und (291) ein, so erhalten wir für die belastete Öffnung 2:

$$M^B = \frac{k^b (l - b) - k^a \cdot b}{l (l - a - b)} \cdot a \quad (292)$$

$$M^C = \frac{k^a (l - a) - k^b \cdot a}{l (l - a - b)} \cdot b \quad (293)$$

welche Werte wir auch aus den Gleichungen (213a und 214a) durch Einsetzen der Werte der Gleichungen (219 und 220) und der Gleichungen (223 und 224) erhalten (vgl. Ableitung der Gleichungen 336 und 337 beim bogenförmigen Stab).

Die in die beiden Gleichungen (292 u. 293) einzusetzenden Werte von  $k^a$ ,  $k^b$ ,  $a$  und  $b$  können nach den früheren Kapiteln mathematisch genau berechnet werden.

Ferner erhalten wir z. B. die beiden Stützenmomente  $M_2^C$  und  $M_2^B$

in der unbelasteten Öffnung 2 der Fig. 88

aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke  $CC'J_2$  und  $BB'J_2$  zu:

$$M_2^C = M_2^B \cdot \mu_{7-2}^C \quad (294)$$

$$M_2^B = M_2^C \cdot \frac{a_2}{l_2 - a_2} \quad (295)$$

und z. B. die beiden Stützenmomente  $M_3^C$  und  $M_3^D$

in der unbelasteten Öffnung 3 der Fig. 88

aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke  $CC'K_3$  und  $DD'K_3$  zu:

$$M_3^C = M_3^D \cdot (1 - \mu_{7-3}^C) \quad (296)$$

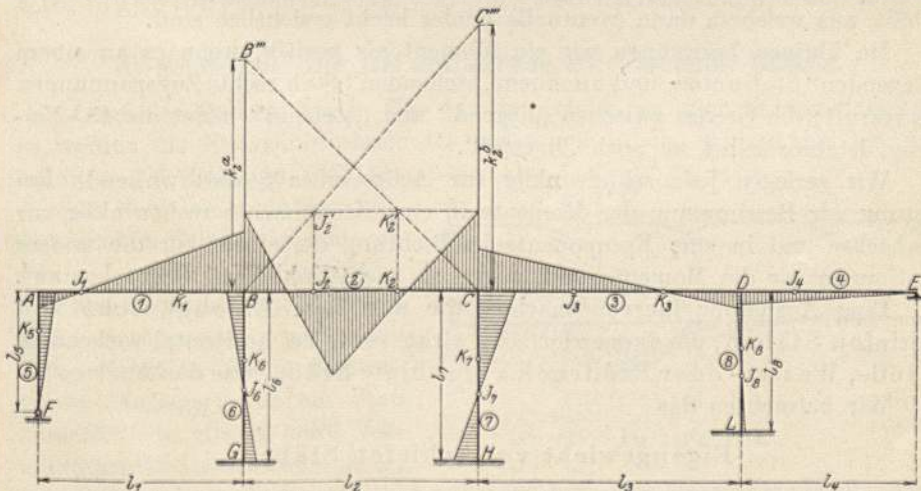
$$M_3^D = M_3^C \cdot \frac{b_3}{l_3 - b_3} \quad (297)$$

Die in den Gl. (294) bis (297) einzusetzenden Werte von  $\mu$ ,  $a$  und  $b$  können nach den früheren Kapiteln mathematisch genau berechnet werden.

### c) Das Auftragen der Momente.

Wie schon in Kap. I erwähnt, tragen wir die Momente grundsätzlich an die Zugseite des Stabes an.

Bei belasteten Stäben ist es jedoch besonders bei verwickelten Belastungsfällen wegen der Konstruktion der Schlußlinie mittels Festpunkte und Kreuz-



ratem Blatt — meist sind die angeführten Belastungsfälle, für welche die nötigen Werte angegeben sind, ausreichend — zeichnet diese entsprechend ihrem Vorzeichen von der Stabachse aus auf, konstruiert mit Hilfe der Festpunktsvertikalen und der Kreuzlinien die Schlußlinie und trägt nun zum Schluß die  $M_0$ -Fläche für den gegebenen Belastungsfall von dieser meist geneigten Geraden aus mit normal zum belasteten Stab gerichteten Ordinaten auf. Dann bildet die Stabachse die Trennungslinie zwischen den positiven und den negativen Momenten. Dieses Verfahren wird mit großem Vorteil beim Auftragen der Einflußlinien für die Momente angewandt.

Hatten wir aber, wie es seither gebräuchlich war, bei der Konstruktion der Schlußlinie in der belasteten Öffnung die  $M_0$ -Fläche zuerst, und zwar von der Stabachse aus abgetragen, so tragen wir die Momentenfläche mit Rücksicht auf bequemes Fortpflanzen derselben in solchen unbelasteten Feldern, welche in einer Geraden mit der belasteten Öffnung liegen, wie z. B. an einem durchlaufenden Balken bei Balkenbelastung, nicht an die Zugseite, sondern wir leiten die beiden Stützenmomente der belasteten Öffnung, welche, wie eben erwähnt, nicht an der Zugseite sitzen, einfach weiter (siehe Fig. 77 und 87). Liegt aber ein unbelasteter Stab, wie z. B. die Pfeiler in Fig. 87 oder die Balkenöffnungen 2 und 3 in Fig. 88 nicht mehr in einer Geraden mit einem belasteten oder unbelasteten Stab, so wird die Momentenfläche, da man sie sowieso nicht mehr ohne weiteres weiterleiten kann, an die Zugseite des Stabes angetragen. Dasselbe gilt von der Momentenfläche am Tragwerk der Fig. 122.

In den Fällen, wo wir die Momentenfläche bei ihrer Konstruktion nicht gleich an die Zugseite der Stäbe bringen, ist es zweckmäßig, dieselbe am Schluß, meistens nur die Grenzwerte für bestimmte ungünstige Belastungsfälle, von der Systemachse aus aufzutragen, damit man ein richtiges Momentenbild erhält, aus welchem dann eventuelle Fehler leicht ersichtlich sind.

Im übrigen bezeichnen wir ein Moment als positiv, wenn es an einem „liegenden“ Stab unten, und an einem „stehenden“ Stab rechts Zugspannungen hervorruft; die Grenze zwischen „liegend“ und „stehend“ bildet die  $45^\circ$ -Neigung, letztere selbst sei noch „liegend“.

Wir zerlegen jede schiefwinklig zur Achse eines Stabes wirkende Belastung zur Bestimmung der Momente in eine Komponente rechtwinklig zur Stabachse und in eine Komponente in Richtung derselben; für die erstere bestimmen wir die Momente und tragen sie rechtwinklig zur Stabachse auf.

Eine Ausnahme hiervon machen wir nur beim Eigengewicht von schiefen Stäben, das immer lotrecht wirkt, sowie bei horizontal wirkendem Wind-, Wasser- oder Erddruck auf schiefe Stäbe, was das Analoge ist.

Wir betrachten das

#### Eigengewicht von schiefen Stäben:

Diese Belastung wirkt immer lotrecht; man zerlegt sie daher zweckmäßig nicht (Fig. 140), ermittelt dagegen die davon herrührende Momentenfläche mit der Projektion der Stützweite auf die Wagrechte (Fig. 140a) und trägt dann die erhaltene Momentenfläche schiefsymmetrisch, d. h. mit senkrechten Ordinaten und in der Stabrichtung gemessenen Abszissen, oder auch normal, an dem schiefen Stab an; in Fig. 140b ist sie schiefsymmetrisch angetragen. Es

ist nämlich in Fig. 140  $G$  das Eigengewicht des Stabes  $AB$  pro laufenden Meter Stab schief gemessen. Dann wirkt auf 1 Meter wagrechte Projektion die Last  $\left(G \cdot \frac{1}{\cos \alpha}\right)$  und damit sowie der Stützweite  $(l \cdot \cos \alpha)$  erhalten wir (Fig. 140a):

$$M_{\max} = \frac{G \cdot l^2}{8} \cdot \cos \alpha. \quad (298)$$

Dasselbe Moment erhalten wir, wenn wir die Last  $G$ , wie im allgemeinen Fall, in  $G'$  und  $G''$  (Fig. 140) zerlegen; dann ist

$$G' = G \cdot \cos \alpha, \quad (299)$$

$$G'' = G \cdot \sin \alpha, \quad (300)$$

welch' letztere keine Momente am Stab erzeugt. Mit der Last  $G'$  nach Gl. (299) und der Stützweite  $l$  erhalten wir nun

$$M_{\max} = \frac{G \cdot l^2}{8} \cdot \cos \alpha,$$

wie in Gl. (298).

Als Kontrolle

für das richtige Auftragen der Momente dient die Bedingung, daß an jedem herausgetrennten Knotenpunkt unter den an den Schnittflächen angebrachten Momenten (entgegengesetzt wie an den herausgetrennten anschließenden Stäben) Gleichgewicht nach Gl. (148) und (163) bestehen muß (Fig. 77 a und 87 a).

#### d) Sonderfall: Der frei aufliegende durchlaufende Balken.

Liegt der Balken, wie in Fig. 141 dargestellt, an allen Stützen frei auf,

so werden die Kreuzlinienabschnitte genau wie in den vorhergehenden Abschnitten [Gl. (242) und (243)] bestimmt. Nachdem keine biegeunfest mit dem Balken verbundenen Pfeiler, welche der Verdrehung der Knotenpunkte auch Widerstand entgegensetzen, vorhanden sind, mithin in jedem Knotenpunkt (Auflager) nur ein Stab „anstößt“, so gibt es keine Verteilungsmaße zu ermitteln, da an

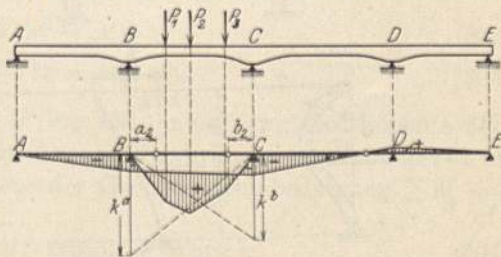


Fig. 141 u. 141 a.

jeder Stütze das volle Moment von einem Stab in den einen anstoßenden Stab übergeht. Danach fällt in der Momentenfläche der Sprung an jeder Stütze weg (siehe Fig. 141 a). In diesem Falle kann man von der belasteten Öffnung ausgehend die Momente ohne weiteres weiterleiten; die Momentenflächen muß man dabei mit ihren Vorzeichen versehen, da sie nicht an die Zugkante der Balkenfelder zu liegen kommen.

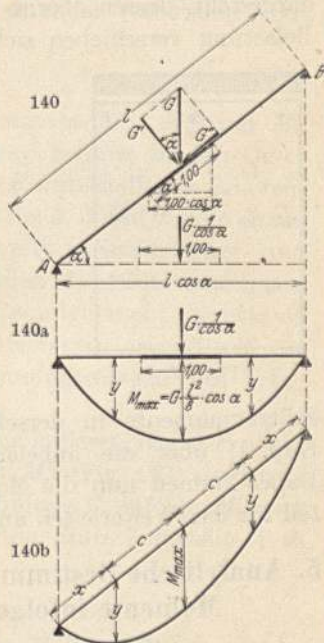


Fig. 140—140b.

In Fig. 142 haben wir einen geschlossenen, vierseitigen, symmetrisch ausgebildeten Rahmen dargestellt, dessen oberer Riegel gleichmäßig verteilt belastet ist. Bei dieser Belastung verschieben sich der Symmetrie halber die Köpfe der Stiele des Rahmens nicht, so daß sie nicht erst festgehalten zu werden brauchen. Die zugehörige Momentenfläche ist aus Fig. 142a ersichtlich; in der belasteten Öffnung wird sie wieder mittels Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte ermittelt und die beiden

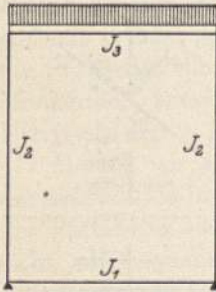


Fig. 142.

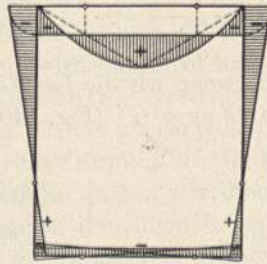


Fig. 142a.

Stützmomente in derselben werden darauf nach links und rechts (vgl. Kap. I) über die unbelasteten Öffnungen im Kreise herum fortgepflanzt. Dabei können nun die Momente in den unbelasteten Öffnungen ohne Nachteil für das Weiterleiten an die Zugkante der Stäbe aufgetragen werden.

### 5. Analytische Bestimmung der an einem Knotenpunkt angreifenden Momente infolge beliebiger Belastung des Tragwerks.

Es ist oft wünschenswert, die an einem Knotenpunkt wirkenden Momente, welche auf Grund der Kreuzlinienabschnitte des belasteten Stabes gefunden

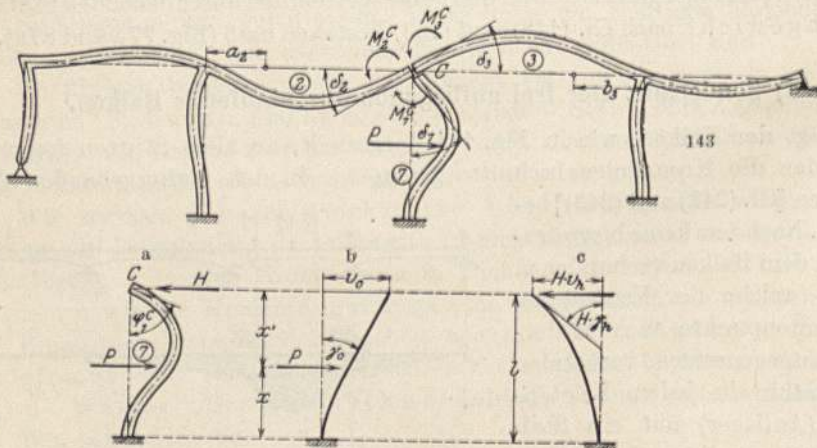


Fig. 143—143 c.

wurden, auf einem anderen Weg zu prüfen, und wir erläutern deshalb im folgenden, die Bestimmung dieser Momente ohne Zuhilfenahme der Kreuzlinienabschnitte am belasteten Stab.

Am Tragwerk der Fig. 88

seien die Momente  $M_2^C$ ,  $M_3^C$  und  $M_1^C$  zu bestimmen, welche durch die Belastung des Stabes, schematisch mit  $P$  angenommen, hervorgerufen werden.

Bei dieser Belastung erleidet das Tragwerk die in Fig. 143 dargestellte Formänderung und die Winkel  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  und  $\delta_7$  müssen einander gleich sein, weil die Stäbe in jedem Knotenpunkt biegeunflexibel mit einander verbunden sind; also muß sein:

$$\delta_7 = \delta_2 \quad \text{und} \quad \delta_7 = \delta_3. \quad (301)$$

Diese Winkel sind nun durch die gesuchten Momente  $M_2^C$ ,  $M_3^C$  und  $M_7^C$  auszudrücken. Wir haben zu diesem Zweck je einen Schnitt in den Querschnitten  $C_2$ ,  $C_3$  und  $C_7$  unmittelbar links, rechts und unterhalb des Knotenpunktes  $C$  geführt, die abgeschnittenen Enden der Stäbe 2, 3 und 7 in je einem festen Gelenk gestützt, von welchem die in dem Schnitt wirkende Quer- und Normalkraft aufgenommen wird, und an diesen Stellen die Stützenmomente  $M_2^C$ ,  $M_3^C$  und  $M_7^C$  der drei durchgeschnittenen Stäbe angebracht, welche so groß sein müssen, daß die Schnittflächen wieder aufeinander passen wie vor der Schnittführung; dann haben wir an dem Spannungszustand des Tragwerks nichts geändert.

Am Querschnitt  $C_7$  (Pfeilerkopf) entsteht von der äußeren Kraft  $P$  allein ein Drehwinkel  $\varphi_7^C$  (Fig. 143a) und von dem Moment  $M_7^C$  (Fig. 143) ein Drehwinkel  $M_7^C \cdot \tau_7^C$ , wenn  $\tau_7^C$  der Drehwinkel des Querschnittes  $C_7$  infolge  $M_7^C = 1$  am unten eingespannten, oben gelenkartig gestützten Stab 7 bedeutet; es ist deshalb:

$$\delta_7 = \varphi_7^C - M_7^C \cdot \tau_7^C.$$

Am Querschnitt  $C_2$  (Fig. 143) entsteht durch das Moment  $M_2^C$  der Drehwinkel

$$\delta_2 = M_2^C \cdot \tau_2^C$$

und am Querschnitt  $C_3$  (Fig. 143) durch das Moment  $M_3^C$  der Drehwinkel

$$\delta_3 = M_3^C \cdot \tau_3^C,$$

wenn  $\tau_2^C$  bzw.  $\tau_3^C$  den Drehwinkel infolge  $M_2^C = 1$  bzw.  $M_3^C = 1$  im Querschnitt  $C_2$  bzw.  $C_3$  bedeutet.

Diese Werte von  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  und  $\delta_7$  in die Gl. (301) eingesetzt gibt:

$$\varphi_7^C - M_7^C \cdot \tau_7^C = M_2^C \cdot \tau_2^C, \quad (302)$$

$$\varphi_7^C - M_7^C \cdot \tau_7^C = M_3^C \cdot \tau_3^C. \quad (303)$$

Am herausgetrennten Knotenpunkt  $C$  (Fig. 88b) müssen wir die Momente  $M_7^C$ ,  $M_2^C$  und  $M_3^C$  mit entgegengesetztem Drehsinn anbringen wie in Fig. 143 an den Querschnitten  $C_7$ ,  $C_2$  und  $C_3$ ; aus der Gleichgewichtsbedingung  $\sum M = 0$  folgt dann:

$$M_7^C = M_2^C + M_3^C \quad (\text{absolute Werte}). \quad (304)$$

Setzen wir in den Gl. (302) und (303) diesen Wert von  $M_7^C$  ein, so erhalten wir:

$$M_2^C \cdot (\tau_7^C + \tau_2^C) + M_3^C \cdot \tau_7^C = \varphi_7^C, \quad (305)$$

$$M_2^C \cdot \tau_7^C + M_3^C (\tau_7^C + \tau_3^C) = \varphi_7^C. \quad (306)$$

Aus Gl. (306) ist

$$M_3^C = \frac{\varphi_7^C - M_2^C \cdot \tau_7^C}{\tau_7^C + \tau_3^C},$$

in Gl. (305) eingesetzt gibt

$$M_2^C (\tau_7^C + \tau_2^C) + \frac{\tau_7^C \cdot \varphi_7^C}{\tau_7^C + \tau_3^C} - \frac{M_2^C \cdot (\tau_7^C)^2}{\tau_7^C + \tau_3^C} = \varphi_7^C$$

oder

$$M_2^C \left( \tau_7^C + \tau_2^C - \frac{(\tau_7^C)^2}{\tau_7^C + \tau_3^C} \right) = \varphi_7^C \left( 1 - \frac{\tau_7^C}{\tau_7^C + \tau_3^C} \right),$$

woraus folgt:

$$M_2^C = \frac{\varphi_7^C \cdot \tau_3^C}{(\tau_7^C + \tau_2^C) (\tau_7^C + \tau_3^C) - (\tau_7^C)^2}$$

oder

$$M_2^C = + \frac{[\varphi_7^C]}{\tau_2^C + \tau_7^C + \frac{\tau_2^C \cdot \tau_7^C}{\tau_3^C}}. \quad (307)$$

Analog erhalten wir

$$M_3^C = - \frac{[\varphi_7^C]}{\tau_3^C + \tau_7^C + \frac{\tau_3^C \cdot \tau_7^C}{\tau_2^C}} \quad (308)$$

und aus der Gleichgewichtsbedingung am Knotenpunkt (Gl. 304) ist

$$M_7^C = [M_3^C] - [M_2^C]. \quad (309)$$

In den vorstehenden Hauptformeln (307) und (308) ist der (in Klammern gesetzte) von der gegebenen Belastung  $P$  abhängige Drehwinkel  $\varphi$  mit seinem Vorzeichen einzuführen, während die nur von den Abmessungen der Konstruktion abhängigen Drehwinkel  $\tau$  mit ihrem absoluten Werte einzusetzen sind; die Vorzeichen der beiden Momente wurden aus der Anschauung (Fig. 143) bestimmt. In den Klammern der rechten Seite von Gl. (309) sind die beiden Momente mit ihren aus den Formeln (307) und (308) hervorgehenden Vorzeichen einzuführen.

Die in den Hauptformeln (307) und (308) vorkommenden Drehwinkel  $\tau$  werden nach Kap. II, 5 ermittelt.

Zur Bestimmung des Drehwinkels  $\varphi$  (Fig. 143a) denken wir uns das Gelenklager im Querschnitt  $C_7$  entfernt und an dessen Stelle den von ihm auf das obere Stabende (Pfeilerkopf) ausgeübten wagrechten Auflagerdruck  $H$  eingeführt. Am unten eingespannten, frei auskragenden Stab 7 lassen wir nun nacheinander die äußere Belastung  $P$  (Fig. 143b) und die wagrechte Kraft  $H$  (Fig. 143c) angreifen; hierbei werde am oberen Stabende durch  $P$  die Verschiebung  $v_0$  und der Drehwinkel  $\gamma_0$  hervorgerufen, während durch die Kraft  $H$  die Verschiebung  $H \cdot v_h$  und der Drehwinkel  $H \cdot \gamma_h$  erzeugt wird, wenn  $v_h$  und  $\gamma_h$  die Verschiebung und der Drehwinkel des Pfeilerkopfes infolge  $H = 1$  bedeutet.  $H$  bestimmen wir aus der Bedingung, daß die durch diese Kraft hervorgerufene Verschiebung  $H \cdot v_h$  des Pfeilerkopfes die Verschiebung  $v_0$  der äußeren Belastung  $P$  rückgängig machen muß; d. h. es muß sein

$$H \cdot v_h + [v_0] = 0,$$

woraus:

$$H = - \frac{[v_0]}{v_h}. \quad (310)$$



Der gesuchte Drehwinkel  $\varphi$  setzt sich jetzt nach den Fig. 143b und 143c wie folgt zusammen:

$$\varphi = H \cdot \gamma_h + [\gamma_0],$$

hierin  $H$  aus Gl. (310) eingesetzt gibt:

$$\varphi = [\gamma_0] - [v_0] \cdot \frac{\gamma_h}{v_h}. \quad (311)$$

Diese Gleichung ergibt stets das richtige Vorzeichen von  $\varphi$ , wenn wir darin  $v_0$  und  $\gamma_0$  mit ihrem Vorzeichen,  $v_h$  und  $\gamma_h$  jedoch mit ihrem absoluten Werte einsetzen. Diese Verschiebungen und Drehwinkel ermitteln wir nach den Mohrschen Sätzen III und IV. Es ist bei durchweg konstantem Trägheitsmoment an einem unten fest eingespannten Stabe:

$$\gamma_h = \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot J}, \quad (312)$$

$$v_h = \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot J} \quad (313)$$

und z. B. für eine Einzellast  $P$  im Abstand  $z$  vom unteren und  $z'$  vom oberen Stabende:

$$\gamma_0 = \frac{P \cdot z^2}{2 \cdot E \cdot J}, \quad (314)$$

$$v_0 = \frac{P \cdot z^2 (2z + 3z')}{6 \cdot E \cdot J}. \quad (315)$$

Man erkennt, daß man bei diesem Verfahren den dem Knotenpunkt mit den gesuchten Momenten benachbarten Festpunktabstand nicht braucht. Auf demselben Wege könnten wir auch bei Balkenbelastung (Fig. 87) z. B. die Momente  $M_3^C$ ,  $M_7^C$  und  $M_2^C$  bestimmen. —

Hat der Stab 7 (Pfeiler) ein Fußgelenk, so gelten dieselben Hauptformeln (307) und (308), nur haben dann die darin vorkommenden Drehwinkel  $\tau$  und  $\varphi$  andere, durch die gelenkartige Lagerung am unteren Stabende bedingte Werte. Der Drehwinkel  $\varphi$  ergibt sich dann durch Belasten eines einfachen Balkens auf 2 Stützen mit den gegebenen äußeren Lasten. —

Es seien ferner:

Am Tragwerk der Fig. 122

die Momente  $M_1^B$ ,  $M_5^B$ ,  $M_7^B$  und  $M_6^B$ , hervorgerufen durch die Lasten  $P_1$  und  $P_2'$  am Stab 6, zu bestimmen.

Bei dieser Belastung erleidet das Tragwerk die in Fig. 144 dargestellte Formänderung und die Winkel  $\delta_6$  und  $\delta_{1-5-7}$  müssen einander gleich sein, d. h.

$$\delta_6 = \delta_1 = \delta_5 = \delta_7. \quad (316)$$

Diese Winkel sind nun zu bestimmen.

Wir haben zu diesem Zweck den belasteten Stab 6 im Querschnitt  $B_6$  (unmittelbar rechts von  $B$ ) durchgeschnitten und das abgeschnittene linke Ende dieses Stabes durch ein festes Auflager gestützt, von welchem die in dem Schnitt wirkende Quer- und Normalkraft aufgenommen wird; wir müssen dann, um den Spannungszustand nicht zu ändern, im Schnitt  $B_6$  des belasteten Stabes

das Moment  $M_6^B$  und am entsprechenden Schnitt  $B_6$  der übrigen Konstruktion das gleiche, aber entgegengesetzt drehende Moment  $M_6^B$  anbringen (Fig. 144).

Am Querschnitt  $B_6$  entsteht nun von der äußeren Last  $P$  allein ein Drehwinkel  $\varphi_6^B$  (Fig. 144a) und von dem Moment  $M_6^B$  (Fig. 144) ein Drehwinkel  $M_6^B \cdot \tau_6^B$ , wenn  $\tau_6^B$  der Drehwinkel des Querschnittes  $B_6$  infolge  $M_6^B = 1$  am

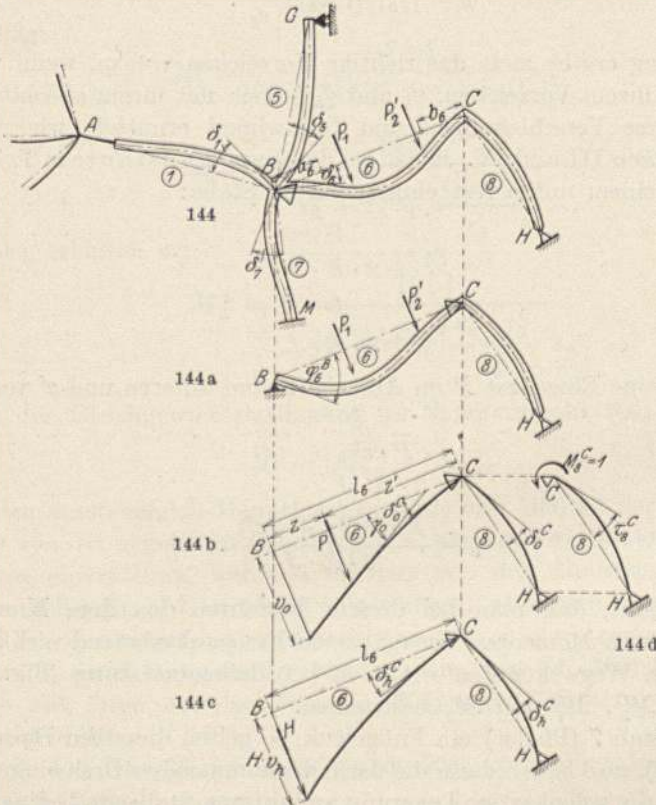


Fig. 144—144d.

einen (rechten) Ende des elastisch eingespannten, am anderen (linken) Ende gelenkartig gestützten Stab 6 bedeutet; es ist deshalb

$$\delta_6 = \varphi_6^B - M_6^B \cdot \tau_6^B.$$

Am Querschnitt  $B_6$  (Fig. 144) des abgeschnittenen Stabwerkes links entsteht durch das Moment  $M_6^B$  der Drehwinkel

$$\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = M_6^B \cdot \tau_{1-5-7}^B,$$

wenn  $\tau_{1-5-7}^B$  nach Fig. 61 der gemeinsame Drehwinkel der biegungsfest miteinander verbundenen Stäbe 1, 5 und 7 bedeutet.

Diese Werte der Drehwinkel  $\delta$  in Gl. (316) eingesetzt gibt:

$$\varphi_6^B - M_6^B \cdot \tau_6^B = M_6^B \cdot \tau_{1-5-7}^B, \quad (317)$$

woraus die Hauptformel folgt:

$$M_6^B = - \frac{[\varphi_6^B]}{\tau_6^B + \tau_{1-5-7}^B}. \quad (318)$$

Die Momente  $M_1^B$ ,  $M_6^B$  und  $M_7^B$  erhalten wir nun nach Kap. II, 4, Gl. (13) bis (15) zu:

$$M_1^B = M_6^B \cdot \mu_{6-1}^B = M_6^B \cdot \frac{\tau_{1-5-7}^B}{\tau_1^B}, \quad (319)$$

$$M_5^B = M_6^B \cdot \mu_{6-5}^B = M_6^B \cdot \frac{\tau_{1-5-7}^B}{\tau_5^B},$$

$$M_7^B = M_6^B \cdot \mu_{6-7}^B = M_6^B \cdot \frac{\tau_{1-5-7}^B}{\tau_7^B}. \quad (321)$$

In Gl. (318) ist der in Klammern gesetzte, von der gegebenen Belastung  $P$  abhängige Drehwinkel  $\varphi_6^B$  mit seinem Vorzeichen, während die nur von den Abmessungen der Konstruktion abhängigen Drehwinkel  $\tau$  mit ihrem Absolutwert einzusetzen sind. Das Vorzeichen des Momentes  $M_6^B$  wurde aus der Anschauung (Fig. 144) bestimmt.

Die Drehwinkel  $\tau$  werden nach Kap. II, 4 u. 5 ermittelt. Für den Drehwinkel  $\varphi$  gilt auch in diesem Falle Gl. (311), es haben jedoch die in derselben vorkommenden Größen  $\gamma_0$ ,  $v_0$  (Fig. 144b),  $\gamma_h$  und  $v_h$  (Fig. 144c) andere, durch die elastische (statt feste) Einspannung in  $C$  bedingte Werte; es ist z. B. bei durchweg konstantem Trägheitsmoment des Stabes  $\delta$ :

$$\gamma_h = \frac{l_6^2}{2 \cdot E \cdot J} + l_6 \cdot \tau_8^C, \quad (322)$$

$$v_h = \frac{l_6^3}{3 \cdot E \cdot J} + l_6^2 \cdot \tau_8^C, \quad (323)$$

(Fig. 144c) und z. B. für eine Einzellast  $P$  im Abstand  $z$  vom linken und  $z'$  vom rechten Ende des Stabes  $\delta$ :

$$\gamma_0 = \frac{P \cdot z^2}{2 \cdot E \cdot J} + P \cdot z \cdot \tau_8^C, \quad (324)$$

$$v_0 = \frac{P \cdot z^2(2z + 3z')}{6 \cdot E \cdot J} + P \cdot z \cdot l_6 \cdot \tau_8^C, \quad (325)$$

wo  $\tau_8^C$  aus Fig. 144d hervorgeht.

Die Hauptformel (318) gilt ganz allgemein, sie könnte deshalb auch am Tragwerk der Fig. 88, wo in jedem Knotenpunkt höchstens 2 Stäbe „anstoßen“, angewendet werden. In diesem Falle (Fig. 143) würden wir zunächst das Moment  $M_7^C$  erhalten und die Momente  $M_2^C$  und  $M_3^C$  darauf mit Hilfe der betreffenden Verteilungsmaße ermitteln.

## 6. Schlußfolgerungen.

a) Das entwickelte Verfahren ist am festgehaltenen Tragwerk genau dasselbe sowohl zur Bestimmung der Momente am Balken als auch am Pfeiler, sowohl am wagrechten als auch am schiefen Stab.

b) Sind mehrere Stäbe eines Tragwerkes belastet, so bestimmt man die Momentenfläche am ganzen Tragwerk für die Belastung eines jeden Stabes getrennt voneinander und addiert darauf die Momentenordinaten unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens.

c) Am festgehaltenen durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern bilden die Schlußlinien der Momentenflächen in den einzelnen Öffnungen nicht mehr, wie beim durchlaufenden Balken mit freier Auflagerung einen geschlossenen Linienzug, sondern das Moment ändert sich sprungweise an den Stützen.

d) Ist am festgehaltenen durchlaufenden Balken mit elastisch drehbaren Pfeilern nur eine Balkenöffnung belastet, so ist in allen links von dieser Öffnung gelegenen *J*-Punkten und in allen rechts davon liegenden *K*-Punkten das Moment gleich Null. Von der belasteten Öffnung ausgehend, nehmen die Stützenmomente nach den beiden Balkenenden hin ihrem absoluten Werte nach ab. Die beiden Stützenmomente der belasteten Öffnung haben gleiches, und die beiden Stützenmomente jeder anderen Öffnung (Balken und Pfeiler) entgegengesetztes Vorzeichen.

e) Am durchlaufenden Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe bewirkt eine Querschnittszunahme gegen die Auflager eines Stabes eine Entlastung seiner Feldmitte; man wird deshalb besonders bei beschränkter Konstruktionshöhe den Querschnitt gegen die Auflager hin gegebenenfalls stark anwachsen lassen.

f) Am durchlaufenden Balken in biegungsfester Verbindung mit den Pfeilern entlasten die Pfeiler den Balken in Feldmitte; deshalb wird man die Pfeiler besonders dann sehr stark machen, wenn für den Balken nur eine beschränkte Konstruktionshöhe zur Verfügung steht. Ist jedoch genügend Konstruktionshöhe vorhanden, so gibt man den Pfeilern aus wirtschaftlichen Gründen ein möglichst kleines Trägheitsmoment, damit nur geringe Momente auf sie entfallen; denn, je größer die Steifigkeit eines Stabes, desto größer ist seine Aufnahmefähigkeit für Biegemomente, und die Steifigkeit eines Stabes wird größer mit wachsendem Trägheitsmoment und abnehmender Länge.

## VI. Bestimmung der Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte an einem beliebigen Tragwerk.

An einem biegungsfesten Stabwerk bestimmen wir die Quer- und Normalkräfte rückwärts aus den vorher ermittelten Biegemomenten. Aus diesem Grunde bestimmen wir die Quer- und Normalkräfte auf dieselbe Weise sowohl an einem Tragwerk mit einem festen Lager (evtl. vorübergehend gedacht), wodurch seine Knotenpunkte unverschiebbar werden, als auch an einem Tragwerk mit verschiebbaren Knotenpunkten, es muß nur die richtige Momentenfläche zugrunde gelegt werden, d. h. falls das Tragwerk nicht gemäß seiner Ausbildung unverschiebbare Knotenpunkte besitzt, wie z. B. dasjenige der Fig. 146, müssen zu der nach dem vorhergehenden Kapitel für vorübergehend unverschiebbar gedachte Knotenpunkte ermittelten Momentenfläche noch die Zusatzmomente, herrührend von der wirklichen Verschiebung der Knotenpunkte, hinzugefügt werden. Wir könnten natürlich auch zuerst die Querkräfte für den festgehaltenen Zustand, d. h. auf Grund der Momentenfläche des Rechnungsabschnittes I, dann noch die Zusatzquerkräfte auf Grund der Zusatzmomentenfläche des Rechnungsabschnittes II ermitteln und zum Schluß beide addieren.

## 1. Querkräfte.

Die Querkraft ist die Resultierende sämtlicher Kräfte (Belastungen und Reaktionen) links von dem betrachteten Stabquerschnitt, und sie wirkt senkrecht zur Stabachse. Am Balken auf 2 Stützen sind die Querkräfte an den Auflagern aus der Gleichgewichtsbedingung ohne weiteres bekannt. Bei statisch unbestimmten Tragwerken reicht jedoch die Gleichgewichtsbedingung zur Bestimmung der Querkräfte an den Stabenden nicht aus, sondern wir erhalten dieselben erst nach Bestimmung der Momentenflächen des betrachteten Stabes.

Nachdem die Momentenfläche am ganzen Tragwerk ermittelt wurde, denken wir uns jeden Stab des Tragwerkes an seinen beiden Enden herausgeschnitten, stützen ihn daselbst in je einem freien Auflager und belasten ihn mit den in den Schnittstellen wirkenden Momenten, d. h. mit den beiden Stützenmomenten des betreffenden Stabes, und zwar mit solchem Drehsinn, daß der Spannungszustand des Stabes unverändert bleibt. Dann erhalten wir die Querkräfte an den Enden jedes Stabes als seine normalen Auflagerdrücke, wenn wir einen belasteten Stab mit der gegebenen Belastung und den bekannten Stützenmomenten und einen unbelasteten Stab nur mit den beiden Stützenmomenten belasten. Nach Ermittlung der beiden Querkräfte an den Enden eines jeden Stabes bestimmen wir die Querkräfte in allen Schnitten bzw. die Querkraftsfläche an allen Stäben eines statisch unbestimmten Tragwerkes genau wie am einfachen Balken als Resultante sämtlicher Kräfte links vom Schnitt.

Die Querkräfte berechnen sich wie folgt:

### a) Analytisch.

Wir betrachten das in Fig. 145 dargestellte allgemeine Tragwerk, mit der aus dieser Figur ersichtlichen bekannten Momentenfläche (in vorliegendem Falle für das in  $B$  gestützte Tragwerk) am ganzen Tragwerk.

Wir denken uns alle Stäbe durch an ihren beiden Enden geführte Schnitte aus dem Tragwerk herausgetrennt, wie einfache Balken auf 2 Stützen gelagert und mit den gegebenen äußeren Kräften sowie mit den Stützenmomenten bzw. Einspannmomenten belastet. In den Fig. 145a bis d wurden z. B. die Stäbe 1, 5, 6 und 7 in herausgetrenntem Zustande dargestellt. Der einfache Balken  $AB$  (Fig. 145b) ist mit den beiden rechtsdrehenden Stützenmomenten  $M_1^A$  und  $M_1^B$  zu belasten, der einfache Balken  $BG$  (Fig. 145c) mit den beiden rechtsdrehenden Stützenmomenten  $M_5^B$  und  $M_5^G$ , und der einfache Balken  $BM$  (Fig. 145d) mit den rechtsdrehenden Stützenmomenten  $M_7^B$  und  $M_7^M$ . Der einfache Balken  $BC$  (Fig. 145a) ist mit den gegebenen äußeren Kräften  $P_1$  und  $P_2$  sowie mit den entgegengesetzt drehenden Stützenmomenten  $M_6^B$  und  $M_6^C$  zu belasten; die schief zur Stabachse wirkende Kraft  $P_2$  wurde bei der Konstruktion der Momentenfläche (Kap. V) in die Komponente  $P_2'$  rechtwinklig zum Stab und in die Komponente  $P_2''$  in Richtung des Stabes zerlegt, welche letztere daher in der Stabachse wirkt und in Richtung des Stabes auf dessen Endpunkte übertragen wird.

Nun sind die normalen Auflagerdrücke an diesen so belastet gedachten einfachen Balken gleich den Querkräften an den Enden der betreffenden Stäbe,



es ist also z. B., wenn  $\mathcal{D}$  den Auflagerdruck an den gedachten einfachen Balken infolge der äußeren Lasten allein bedeutet:

$$Q_6^B = \mathcal{D}_6^B + \frac{M_6^B - M_6^C}{l_6}, \quad (326)$$

worin

$$\mathcal{D}_6^B = \frac{P_1 \cdot e_1 + P_2 \cdot e_2}{l_6},$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1^B &= \frac{M_1^A + M_1^B}{l_1} \\ Q_5^B &= \frac{M_5^B}{l_5} \\ Q_7^B &= \frac{M_7^B + M_7^M}{l_7} \end{aligned} \right\} \quad (327)$$

(da in vorliegendem Falle  $\mathcal{D}_6^B, \mathcal{D}_5^B, \mathcal{D}_7^B$  gleich Null, ferner  $M_5^G = 0$ ).

Eine Querkraft mit positivem Vorzeichen ist an einem liegenden Stab nach oben, an einem stehenden nach rechts gerichtet und hat das Bestreben, den Querschnitt, in welchem die Querkraft angreift, von dem unmittelbar rechts bzw. oberhalb benachbarten Querschnitt abzuscheren.

Wünschen wir die Querkräfte direkt mit ihren Vorzeichen zu erhalten, wenn wir die Momente ebenfalls mit ihren Vorzeichen einsetzen, so gelten bei unbelastetem Stab  $AB$  die Formeln:

Für einen „liegenden“ Stab (Balken):

$$Q^l = \mathcal{D} + \frac{[M^r] - [M^l]}{l}. \quad (326a)$$

Für einen „stehenden“ Stab (Säule):

$$Q^u = \mathcal{D} + \frac{[M^u] - [M^o]}{l}. \quad (327a)$$

## b) Graphisch.

Wir betrachten den in Fig. 146 dargestellten durchlaufenden Balken  $ABCD$  auf zwei frei drehbaren Stützen und zwei biegungsfest mit dem Balken verbundenen Pfeilern mit der in dieser Figur eingezeichneten bekannten Momentenfläche am ganzen Tragwerk. Wir nehmen an, die  $M_0$ -Flächen dieser Momentenfläche seien mit Hilfe der mit gleicher Polweite  $H$  gezeichneten Kraftecke  $NO_1N^B$  und  $N'O_2N''$  (Fig. 146a) aufgetragen worden. Wurden die Ordinaten der  $M_0$ -Flächen rechnerisch ermittelt und unter stillschweigender Annahme einer gewissen Polweite aufgetragen, so zeichnen wir rückwärts ein Krafteck, welches aus der äußeren Belastung und den beiden Endstrahlen (Parallelen zu den Endseiten des die  $M_0$ -Fläche begrenzenden Seilecks) besteht.

Nun denken wir uns alle Stäbe, Balken und Pfeiler des Tragwerkes, wie in Fig. 146b dargestellt, in einfache Balken auf 2 Stützen zerlegt und mit den gegebenen äußeren Lasten sowie mit den Stützenmomenten der betreffenden Stäbe belastet. Dann sind die normalen Auflagerdrücke an diesen Balken gleich den Querkraften an den Enden der betreffenden Stäbe und werden wie folgt erhalten:

a) Belastete Stäbe: Die beiden Auflagerdrücke  $Q_1^A$  und  $Q_1^B$  des gedachten einfachen Balkens der ersten Öffnung werden im Kräfteck  $NO_1N'$  (Fig. 146a) durch die vom Pol  $O_1$  aus gezogene Parallele zur Schlußlinie  $s_1$  auf dem Kräfte-

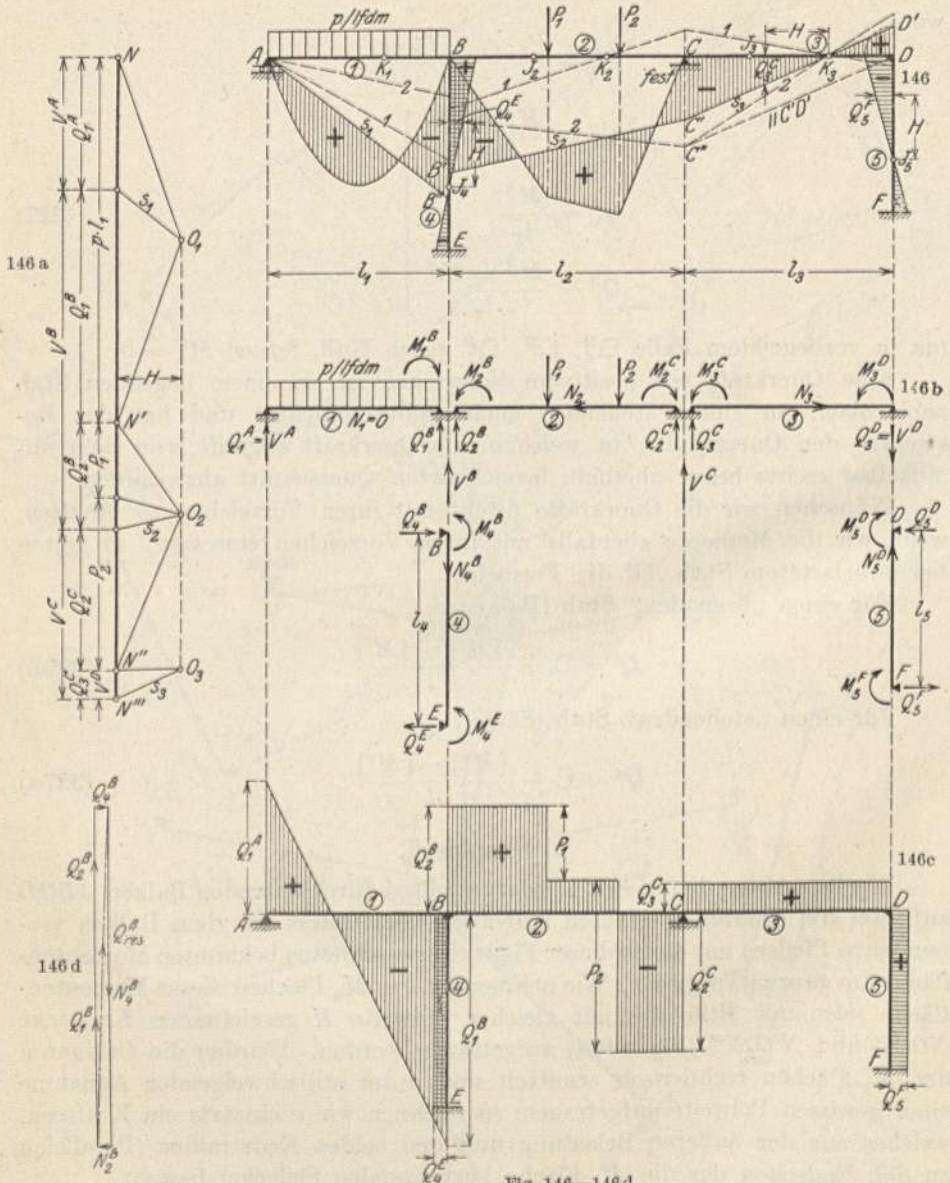


Fig. 146—146d.

zug  $p \cdot l_1$  abgeschnitten; analog werden die Auflagerdrücke  $Q_2^B$  und  $Q_2^C$  im Kräfteck  $N'O_2N''$  durch die von  $O_2$  aus gezogene Parallele zu  $s_2$  auf dem Kräftezug  $P_1P_2$  abgeschnitten.

b) Unbelastete Stäbe: Die beiden Auflagerdrücke  $Q_3^C$  und  $Q_3^D$  des gedachten einfachen Balkens der dritten Öffnung, in welcher keine äußeren Kräfte



vorkommen, sind einander gleich und entgegengesetzt. Es genügt daher  $Q_3^C$  zu ermitteln. Es ist aus der Anschauung

$$Q_3^C = \frac{M_3^C + M_3^D}{l_3}.$$

Setzen wir hierin nach Fig. 146:

$M_3^C = H \cdot CC'$  und  $M_3^D = H \cdot DD'$  ( $H =$  Polweite der Fig. 146a), so folgt:

$$Q_3^C = \frac{H \cdot (CC' + DD')}{l_3}. \quad (328)$$

Diesen Ausdruck können wir im überschlagenen Momentenviereck  $CC'K_3D'D$  (Fig. 146) als Strecke ermitteln: Wir ziehen im Abstände  $H$  (Polweite, im Kräftemaßstab abzutragen) links oder rechts von  $K_3$  eine Senkrechte; dann ist  $Q_3^C$  gleich der im Kräftemaßstab abgegriffenen Strecke, welche auf dieser Vertikalen von der Schlußlinie  $s_3$  und der durch  $K_3$  gehenden Wagrechten abgeschnitten wird; denn, ziehen wir von  $D$  aus die Gerade  $DC''$  parallel zu  $s_3$ , so verhält sich in den ähnlichen Dreiecken  $CC'K_3$  und  $CC''D$

$$Q_3^C : H = (CC' + C'C'') : l_3, \quad \text{wobei} \quad C'C'' = DD'.$$

Diese Konstruktion wird mit Vorteil bei der Auftragung der Einflußlinien der Querkräfte (siehe Beispiel Nr. 2 und 3 im Teil III) verwendet.

Auch im Krafteck (Fig. 146a) können wir  $Q_3^C$  graphisch ermitteln, indem wir vom Punkte  $N''$  aus eine Wagrechte ziehen, auf derselben die Polweite  $H$  abtragen und aus dem so erhaltenen Pol  $O_3$  eine Parallele zur Schlußlinie  $s_3$  ziehen, durch welche  $Q_3^C$  auf der Kraftlinie bestimmt wird. Dadurch ist der Kräftezug (Fig. 146a) so vervollständigt, daß in demselben auch alle Auflagerdrücke des durchlaufenden Balkens gebildet werden können; es ist nämlich

$$\begin{aligned} V^A &= Q_1^A; & V^B &= Q_1^B + Q_2^B; \\ V^C &= Q_2^C + Q_3^C; & V^D &= Q_3^D. \end{aligned}$$

Die Querkräfte an Kopf und Fuß der beiden unbelasteten Pfeiler (Stäbe 4 und 5) erhalten wir in genau derselben Weise wie diejenigen der unbelasteten dritten Öffnung. In Fig. 146b wurden die beiden Pfeiler herausgezeichnet und die Querkräfte an deren Enden können in Fig. 146 im Abstand  $H$  von der Balkenachse abgegriffen werden.

Zum Schluß haben wir in Fig. 146c die Querkraftsfläche der ganzen Konstruktion dargestellt, wobei am Balken (liegenden Stab) positive Querkräfte nach oben und an den Pfeilern (stehende Stäbe) positive Querkräfte nach rechts aufgetragen wurden; mit dem Auftragen wurde beim Balken links und bei den Pfeilern unten angefangen.

## 2. Normalkräfte.

Die Normalkräfte wirken in Richtung der Stabachse und sind in unbelasteten (und gewichtslosen) Stäben auf deren ganze Länge konstant. Da an jedem Knotenpunkt eines biegungsfesten Stabwerkes nicht nur zwischen den Momenten einerseits, sondern auch zwischen den Quer- und Normalkräften andererseits Gleichgewicht bestehen muß, so erhalten wir die Normalkräfte nach

Bestimmung der Querkräfte dadurch, daß an jedem Knotenpunkt die Querkräfte der dort zusammentreffenden Stäbe zu einer Resultierenden  $Q_{\text{res}}$  zusammengesetzt werden, und letztere dann nach den sich in diesem Knotenpunkt schneidenden Stabrichtungen zerlegt wird. Die Knotenpunkte des Tragwerkes können festgehalten oder verschiebbar sein, die Normalkräfte richten sich nur nach den aus der entsprechenden Momentenfläche ermittelten Querkräften.

Betrachten wir z. B. den herausgetrennt gedachten Knotenpunkt  $C$  (Fig. 145f) des

#### Tragwerkes mit beliebig gerichteten Stäben

der Fig. 145 mit der gegebenen Momentenfläche (in vorliegendem Falle für das in  $B$  gestützte Tragwerk). An diesem greifen die Querkräfte  $Q_6^C$  und  $Q_8^C$  in umgekehrter Richtung (als „Aktionen“) als an den herausgeschnitten gedachten Stäben an, und die Normalkräfte  $N_6^C$  und  $N_8^C$ , welche sich durch Zusammensetzen von  $Q_6^C$  und  $Q_8^C$  zu  $Q_{\text{res}}^C$  und Zerlegen der letzteren nach den Richtungen der Stäbe 6 und 8 ergeben, halten den durch die „Aktion“  $Q_{\text{res}}^C$  belasteten Knotenpunkt im Gleichgewicht. Die Kräftezusammensetzung und -zerlegung ist in Fig. 145g vorgenommen. Die in den Stäben 6 und 8 wirkenden Normalkräfte sind „Aktionen“ und den am Knotenpunkt angebrachten Normalkräften entgegengesetzt gerichtet.

In praxi tragen wir nun aber zweckmäßig die Querkräfte so auf, wie wir sie am Stabende ermittelt haben (als „Reaktionen“), welche dann mit den in den Stäben wirkenden Normalkräften  $N_6^C$  und  $N_8^C$  („Aktionen“) im Gleichgewicht stehen, so daß die Pfeilrichtung der Kräfte  $Q_{\text{res}}^C$ ,  $N_6^C$  und  $N_8^C$  im Kräfteplan ebenfalls geschlossen ist (siehe Fig. 145h).

Um die Normalkräfte in den Stäben 1, 6 und 7, welche im Knotenpunkt  $B$  vereinigt sind, zu erhalten (wegen des beweglichen Auflagers in  $G$  ist die Normalkraft im Stab 5 gleich Null), setzen wir die sich in diesem Punkte schneidenden Querkräfte  $Q_1^B$ ,  $Q_5^B$ ,  $Q_6^B$  und  $Q_7^B$  zusammen (Fig. 145i). Nun sollten wir  $Q_{\text{res}}^B$  in die Richtungen der Stäbe 1, 6 und 7 zerlegen, was jedoch nicht möglich ist, da wir eine Kraft in der Ebene nur in zwei sich auf dieser Kraft schneidende Richtungen zerlegen können. Wir müssen deshalb eine von den drei in  $B$  zusammenstoßenden Normalkräften auf andere Weise ermitteln, was uns bei der Normalkraft des Stabes 6 möglich ist. Die Normalkraft  $N_6^B$  erhalten wir aus der mit Hilfe von Fig. 145h ermittelten Normalkraft  $N_6^C$ , wenn wir von  $N_6^C$  die in die Richtung des Stabes 6 fallende Komponente  $P_2''$  der Belastung  $P_2$  abziehen. Nun können wir die zwei noch fehlenden Normalkräfte  $N_1^B$  und  $N_7^B$  bestimmen, indem wir im Kräfteplan der Fig. 145i die „Reaktion“ der Normalkraft  $N_6^B$  mit  $Q_{\text{res}}^B$  zusammensetzen und die daraus hervorgehende Resultierende  $S$  nach den Stabrichtungen 1 und 7 zerlegen und zum Schluß dafür sorgen, daß die Pfeilrichtung der zwei Normalkräfte mit derjenigen der Querkräfte geschlossen ist.

Um die Normalkräfte in den im Knotenpunkt  $A$  verbundenen Stäben zu erhalten, gehen wir analog vor. Wir bestimmen zunächst  $N_3^D$ ; es ist dann  $N_3^A = N_3^D$ . Die Normalkraft im Stab 4 ist gleich Null, da dieser Stab in  $F$  ein bewegliches Auflager besitzt. Durch Zusammensetzung von  $Q_{\text{res}}^A$  mit der

„Reaktion“ der Normalkraft  $N_3^A$  und Zerlegen der hieraus hervorgehenden Resultierenden nach den Stabrichtungen 1 und 2 erhalten wir noch  $N_1^A$  und  $N_2^A$ . Als Probe besteht am frei verschiebbaren Tragwerk die Bedingung  $N_1^A = N_1^B$  und am unverschiebbar festgehaltenen Tragwerk die Bedingung:  $N_1^A = N_1^B - F$ .

Wir ersehen daraus, daß man bei der Bestimmung der Normalkräfte von denjenigen Knotenpunkten ausgehen muß, in welchen sich nicht mehr als 2 Stäbe vereinigen.

An einem

Tragwerk mit rechtwinklig aufeinanderstehenden Stäben,

wie z. B. an demjenigen der Fig. 146, brauchen wir (am Knotenpunkt  $B$  und  $D$ ) die Querkräfte der senkrecht aufeinanderstehenden Stäbe nicht zuerst zu  $Q_{\text{res}}$  zusammensetzen und dann wieder in dieselben Richtungen zu zerlegen (Fig. 146d). Anstatt z. B.  $Q_{\text{res}}^B$  (Resultierende aus  $Q_1^B$ ,  $Q_2^B$  und  $Q_4^B$ ) in die Richtungen der Stäbe 1–2 und 4 zu zerlegen, können wir dies auch mit den einzelnen Querkräften  $Q_1^B$ ,  $Q_2^B$  und  $Q_4^B$  vor deren Zusammensetzung zu  $Q_{\text{res}}^B$  tun; wir sehen dann, daß sowohl  $Q_1^B$  als auch  $Q_2^B$  ganz in die Richtung des Stabes 4, und  $Q_4^B$  ganz in diejenige der Stäbe 1–2 fällt. Da die Normalkraft mit der Querkraft in Gleichgewicht sein muß, so ist nun die Normalkraft im gewichtslosen Stab 4:  $N_4 = (Q_1^B + Q_2^B)$ , und diejenige im Stab 2:  $N_2 = Q_4^B$ , beides Druckkräfte. Die Normalkraft  $N_3$  im Stab 3 ist gleich der „Aktion“ von  $Q_5^D$ , und zwar eine Zugkraft, da das Tragwerk in  $C$  ein festes Lager besitzt; im Stab 1 tritt keine Normalkraft auf, da sein linkes Ende frei verschiebbar gelagert ist. Wir ersehen daraus, daß z. B. die Normalkraft im Balken 2 („Aktion“) in gleicher Richtung wie der von der Säule auf den Balken übertragene Horizontalschub (entgegengesetzte Querkraft, „Aktion“) wirkt.

### 3. Fundamentkräfte.

Wir kennen jetzt die auf das Fundament eines Stabes wirkenden Kräfte.

#### a) Feste Einspannung im Fundament (Fig. 147).

Auf das Fundament wird übertragen (siehe Fig. 147a): das Einspannmoment  $M_7^M$  (mit entgegengesetztem Drehsinn wie in Fig. 145d), die Normalkraft  $N_7^M$  und die Querkraft  $Q_7^M$  (als „Aktion“, also in entgegengesetzter Richtung wie in Fig. 145d). Bilden wir die Resultante  $R$  aus diesen Kräften einschließlich dem Gewicht  $G$  des Fundamentkörpers (Fig. 147b), so erhalten wir die auf der Fundamentsohle wirkende Resultierende; die Resultante  $R'$  der Kräfte  $N_7^M$  und  $Q_7^M$  wird durch das Moment  $M_7^M$  parallel verschoben, und zwar um

$$r = \frac{M_7^M}{R'}$$

Als Kontrolle muß sich ergeben, daß  $R$  durch den Momentennullpunkt  $W$  des Stabes hindurchgeht.

## b) Gelenkartige Lagerung auf dem Fundament (Fig. 148).

Auf das Fundament wird in diesem Falle übertragen (Fig. 148a): Die Normalkraft  $N_8^H$  und die Querkraft  $Q_8^H$  (als „Aktion“). Bilden wir die Resul-

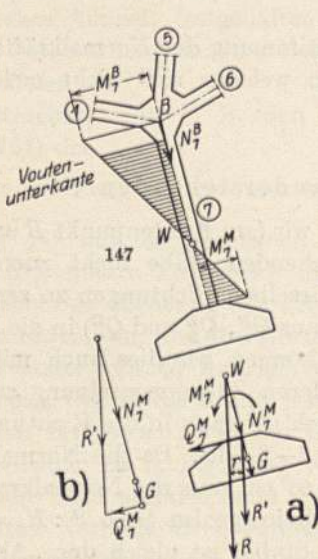


Fig. 147—147 b.

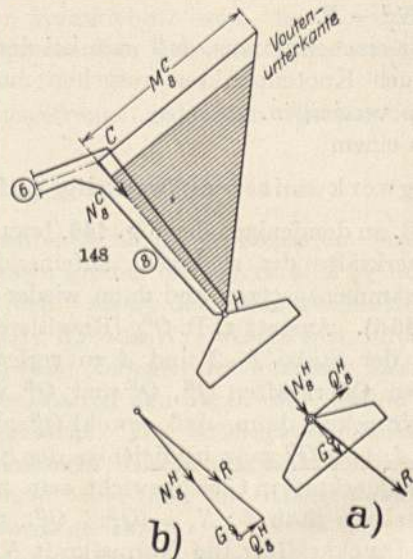


Fig. 148—148 b.

tante aus diesen Kräften einschließlich dem Gewicht  $G$  des Fundamentkörpers (Fig. 148 b), so erhalten wir die auf die Fundamentsohle wirkende Resultierende  $R$ .

## VII. Bestimmung der Festhaltungskraft.

Diejenige innere Kraft, welche in der Lage ist, ein einstöckiges Tragwerk oder an einem mehrstöckigen Tragwerk ein Stockwerk desselben, unverschiebbar festzuhalten, oder das Tragwerk, falls es sich verschoben hatte, in die ursprüngliche Lage zurückzuzuschieben, nennen wir die Festhaltungskraft („Reaktion“).

An einem Tragwerk mit durch die Konstruktion (von Haus aus) bedingten unverschiebbaren Knotenpunkten (siehe z. B. Fig. 76) tritt in dem festen Lager die Festhaltungskraft (Auflagerreaktion) auf, deren Größe wir dort zur Berechnung der erforderlichen Verankerung der Konstruktion in dem festen Lager benötigen.

An einem Tragwerk (ein- oder mehrstöckig) mit durch gedachte Lager bedingten unverschiebbaren Knotenpunkten tritt in diesen Lagern ebenfalls je eine Festhaltungskraft auf, welche wir in umgekehrter Richtung wirkend, nämlich als Verschiebungskraft, zur Berechnung der Zusätze zu den inneren Kräften für den festgehaltenen Zustand benötigen; aus letzterem Grunde fällt der Bestimmung der Festhaltungskraft eine große Wichtigkeit zu.

## 1. Einstöckiger Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben.

Alle Knotenpunkte des in Fig. 149 dargestellten allgemeinen Tragwerks sind unverschiebbar vorausgesetzt, und die in genannter Figur eingetragene Momentenfläche bezieht sich auf diesen Zustand.

Wir suchen nun diejenige innere Kraft, welche die Knotenpunkte des Tragwerkes in ihrer ursprünglichen Lage (wenn keine äußere Belastung auf das Tragwerk einwirkt) gerade unverschiebbar festzuhalten imstande ist.

### a) Erste Lösung.

Zur Bestimmung der Festhaltungskraft denken wir uns alle Stäbe, wie dies in Kap. VI zur Bestimmung der Querkräfte geschehen ist, an ihren Enden durchgeschnitten, in festen Lagern gestützt und mit den in den Schnittstellen wirkenden Kräften belastet (Fig. 149a bis e). Auf die herausgetrennten Knotenpunkte wirken diese Kräfte dann als „Aktionen“. Die Kraft, welche also auf einen herausgetrennt gedachten Knotenpunkt einwirkt, setzt sich zusammen aus den rechtwinklig zu den Stäben wirkenden „Aktionen“ der Querkräfte, gewonnen aus der für das vorübergehend unverschiebbar gedachte Tragwerk ermittelten Momentenfläche (Rechnungsabschnitt I) und den in Richtung der Stäbe wirkenden Komponenten („Aktionen“) von schief zur Stabachse angreifenden äußeren Lasten.

Auf den herausgetrennt gedachten Knotenpunkt  $C$  (Fig. 149f) wirkt die Resultierende  $Q_{\text{res}}^C$  der „Aktionen“ der beiden Querkräfte  $Q_6^C$  und  $Q_8^C$ . Die Kraft, welche diesen Knotenpunkt unter Einwirkung der genannten Kräfte in Ruhe hält, ist die Reaktion von  $Q_{\text{res}}^C$ , welche durch ihre beiden Komponenten  $N_6^C$  und  $N_8^C$  („Reaktionen“) auf den Knotenpunkt wirkt und denselben im Gleichgewicht hält. Die Komponenten  $N_6^C$  und  $N_8^C$  sind nichts anderes als die Normalkräfte am festgehaltenen Tragwerk. Die Kräftezusammensetzung und -zerlegung wurde in Fig. 149g vorgenommen.

Da die äußere Last  $P_2$  schief zur Stabrichtung angreift, so liefert dieselbe eine Komponente  $P_2''$  in Richtung des Stabes  $\mathcal{C}$ , welche auf die an seinen beiden Enden liegenden Knotenpunkte übertragen wird. Die Anteile von  $P_2''$ , welche hierbei auf die Knotenpunkte  $B$  und  $C$  entfallen, stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie die an diesen beiden Knotenpunkten ermittelten Querkräfte; wir erhalten diese Anteile dadurch, daß wir (siehe Fig. 149a) die beiden Querkräfte  $Q_6^B$  und  $Q_6^C$  (als „Aktionen“) auftragen und durch den einen Endpunkt derselben eine Parallele zu  $P_2$  ziehen, worauf die Anteile  $L_6^B$  und  $L_6^C$  von  $P_2''$  auf der Parallelen zur Stabachse durch den anderen Endpunkt abgeschnitten werden. Wir brauchen jedoch diese Verteilung von  $P_2''$  in den meisten Fällen nicht vorzunehmen, sondern berücksichtigen  $P_2''$  getrennt als unzerlegte Kraft, wie dies aus dem Folgenden hervorgeht.

Auf den herausgetrennt gedachten Knotenpunkt  $B$  wirkt die Resultierende  $Q_{\text{res}}^B$  (Fig. 149h) der „Aktionen“ der Querkräfte  $Q_1^B$ ,  $Q_5^B$ ,  $Q_6^B$  und  $Q_7^B$ . Die Kraft, welche diesen Knotenpunkt unter Einwirkung der genannten Kräfte in Ruhe hält, ist die „Reaktion“  $Q_{\text{res}}^B$ . Der ferner auf den Knotenpunkt  $B$  wirkende Anteil  $L_6^B$  der Komponente  $P_2''$  der schiefen äußeren Last  $P_2$  wird gleichzeitig mit  $L_6^C$  später berücksichtigt.

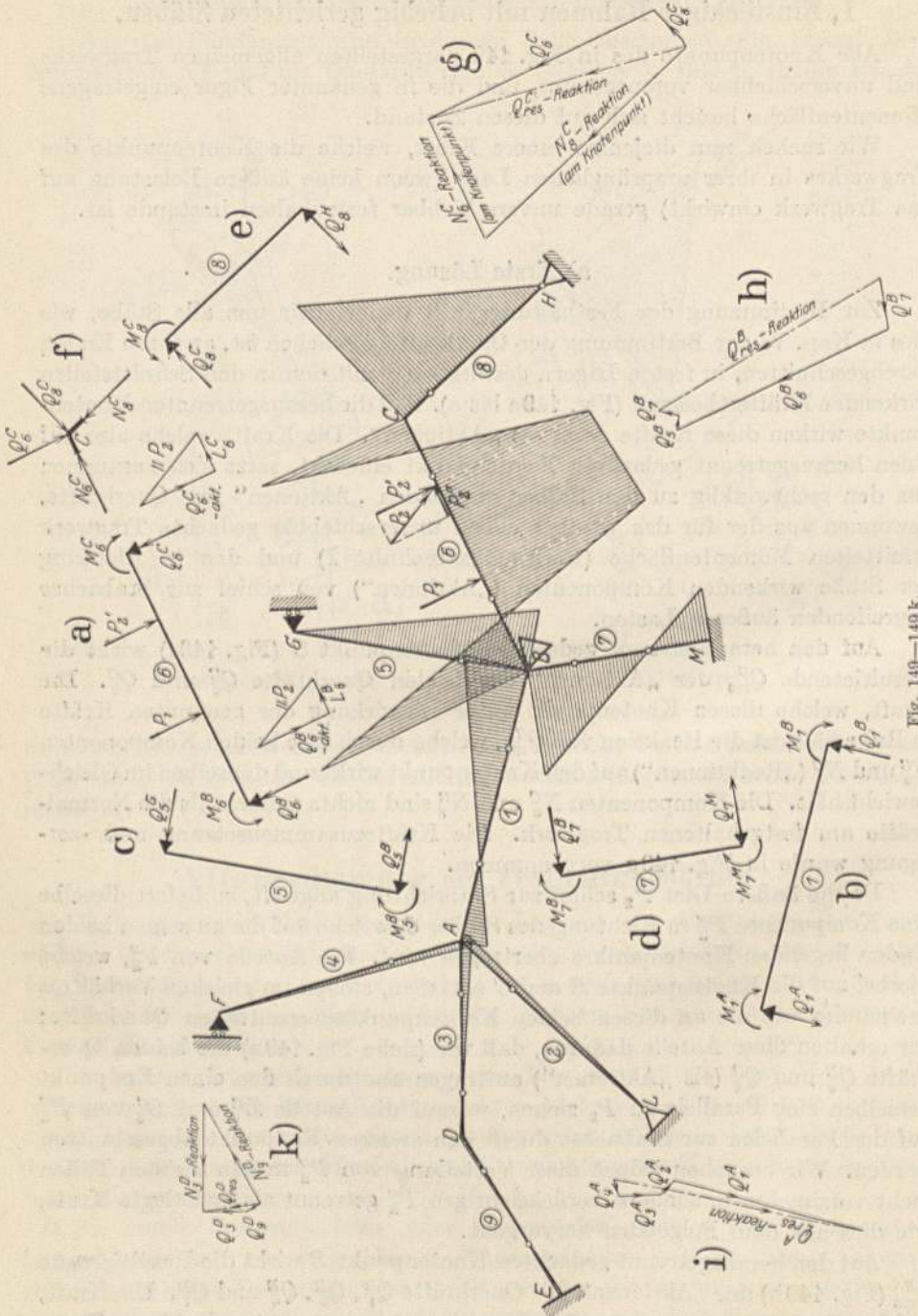


Fig. 140—140 k.

Auf den herausgetrennt gedachten Knotenpunkt D wirkt die Resultierende  $Q_{res}^D$  (Fig. 149 k) der „Aktionen“  $Q_3^D$  und  $Q_9^D$ . Die Kraft, welche diesen Knotenpunkt in Ruhe hält, ist deshalb die „Reaktion“  $Q_{res}^D$ , die durch ihre beiden Kom-

ponenten  $N_3^D$  und  $N_9^D$  („Reaktion“) auf den Knotenpunkt wirkt (Fig. 149 k), welche letztere nichts anderes als die Normalkräfte am festgehaltenen Tragwerk sind.

Wir können jedoch, wie wir später sehen werden, zur weiteren Berechnung des Tragwerkes diese vielen Reaktionen, welche die Unverschiebbarkeit der

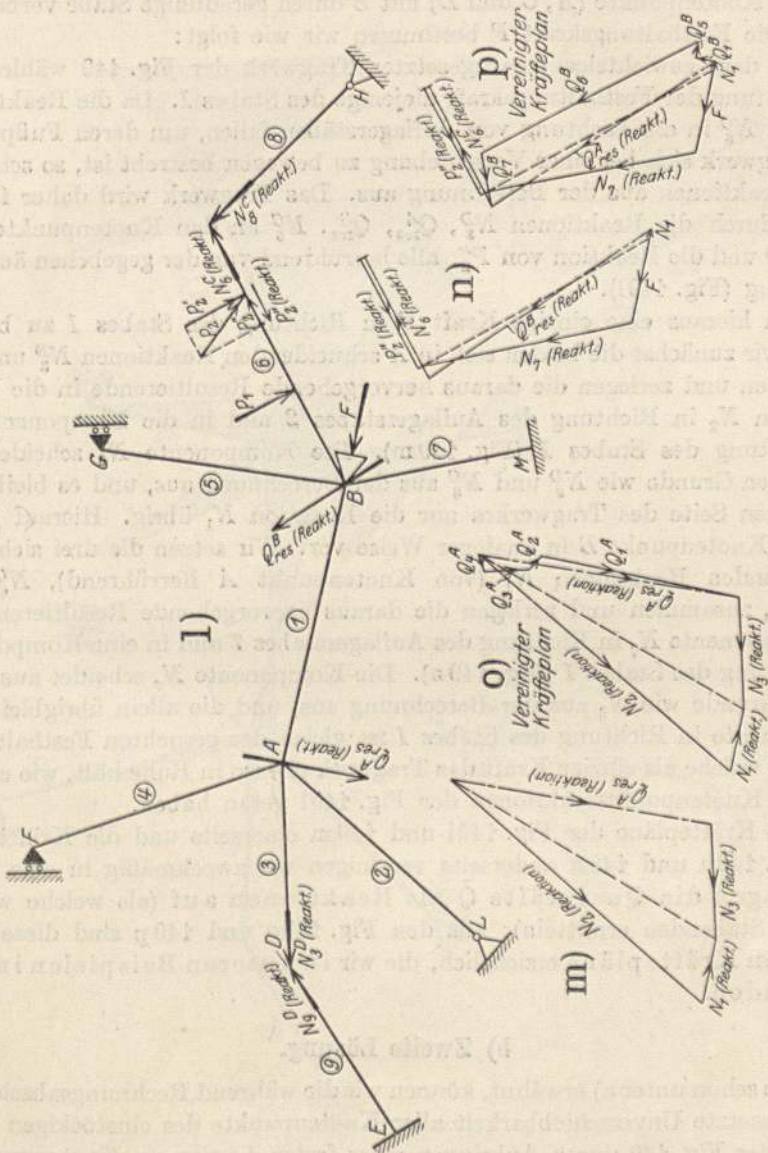


Fig. 149 I—149 P.

einzelnen Knotenpunkte gewährleisten, und die wir in Fig. 149 I herausgezeichnet haben, nicht gebrauchen, müssen dieselben vielmehr durch eine einzige Kraft in einer beliebig gewählten Richtung und an einem beliebigen Knotenpunkt des „Balkens“ wirkend ersetzen, welche die von der äußeren Belastung angestrebte Verschiebung des ganzen Tragwerkes aufhält, und dies ist die sog. Festhaltungskraft. Diese Kraft können wir nun als Reaktion eines an

einem Knotenpunkt, beispielsweise am Knotenpunkt  $B$  (Fig. 149) des „Balkens“ (gebildet durch die Stäbe 1, 3 und 6) des einstöckigen Tragwerkes, gedachten Lagers betrachten, welches die Unverschiebbarkeit aller Knotenpunkte des einstöckigen Tragwerkes bewirkt, weil die übrigen Knotenpunkte ( $A$ ,  $C$  und  $D$ ) mit  $B$  durch geradlinige Stäbe verbunden sind. Die Festhaltungskraft  $F$  bestimmen wir wie folgt:

An dem gewichtslos vorausgesetzten Tragwerk der Fig. 149 wählen wir als Richtung der Festhaltungskraft diejenige des Stabes 1. Da die Reaktionen  $N_3^D$  und  $N_6^C$  in die Richtung von Auflagerstäben fallen, um deren Fußpunkte das Tragwerk sich bei einer Verschiebung zu bewegen bestrebt ist, so scheiden diese Reaktionen aus der Berechnung aus. Das Tragwerk wird daher festgehalten durch die Reaktionen  $N_3^D$ ,  $Q_{\text{res}}^A$ ,  $Q_{\text{res}}^B$ ,  $N_6^C$  an den Knotenpunkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  und die Reaktion von  $P_2'$ , alle herrührend von der gegebenen äußeren Belastung (Fig. 149l).

Um hieraus eine einzige Kraft  $F$  in Richtung des Stabes 1 zu bilden, setzen wir zunächst die beiden sich in  $A$  schneidenden Reaktionen  $N_3^D$  und  $Q_{\text{res}}^A$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponenten  $N_2$  in Richtung des Auflagerstabes 2 und in die Komponente  $N_1$  in Richtung des Stabes 1 (Fig. 149m). Die Komponente  $N_2$  scheidet aus demselben Grunde wie  $N_3^D$  und  $N_6^C$  aus der Berechnung aus, und es bleibt auf der linken Seite des Tragwerkes nur die Reaktion  $N_1$  übrig. Hierauf gehen wir am Knotenpunkt  $B$  in analoger Weise vor. Wir setzen die drei sich in  $B$  schneidenden Reaktionen  $N_1$  (von Knotenpunkt  $A$  herrührend),  $N_6^C$ ,  $P_2'$  und  $Q_{\text{res}}^B$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponente  $N_7$  in Richtung des Auflagerstabes 7 und in eine Komponente in Richtung des Stabes 1 (Fig. 149n). Die Komponente  $N_7$  scheidet aus demselben Grunde wie  $N_2$  aus der Berechnung aus, und die allein übrigbleibende Komponente in Richtung des Stabes 1 ist gleich der gesuchten Festhaltungskraft  $F$ , welche als einzige Kraft das Tragwerk ebenso in Ruhe hält, wie es vorher die Knotenpunktreaktionen der Fig. 149l getan haben.

Die Kräftepläne der Fig. 149i und 149m einerseits und die Kräftepläne der Fig. 149h und 149n andererseits vereinigen wir zweckmäßig in eine Figur und tragen die Querkräfte  $Q$  als Reaktionen auf (als welche wir sie an den Stabenden ermitteln); aus den Fig. 149o und 149p sind diese vereinigten Kräftepläne ersichtlich, die wir in unseren Beispielen immer verwenden.

### b) Zweite Lösung.

Wie schon unter a) erwähnt, können wir die während Rechnungsabschnitt I vorausgesetzte Unverschiebbarkeit aller Knotenpunkte des einstöckigen Tragwerkes der Fig. 149 durch Anbringen eines festen Lagers am Knotenpunkt  $B$  zustande gebracht denken, wodurch Stab 1 und damit wegen der geradlinigen Stabverbindungen alle Knotenpunkte unverschiebbar festgehalten sind. Wir können darauf diejenige Kraft bestimmen, welche den Knotenpunkt  $B$  und damit alle übrigen Knotenpunkte des Tragwerkes zu verschieben bestrebt ist, und die wir als die sog. Verschiebungskraft („Aktion“) bezeichnen; die Festhaltungskraft ist dann die Reaktion davon.



Um die Verschiebungskraft am Knotenpunkt  $B$  des Tragwerkes der Fig. 149q zu ermitteln, denken wir uns alle Knotenpunkte herausgetrennt und mit den Schnittkräften belastet. Auf den Knotenpunkt  $A$  werden dann übertragen (Fig. 149r): die „Aktionen“ der Querkräfte  $Q_1^A$ ,  $Q_2^A$ ,  $Q_3^A$  und  $Q_4^A$

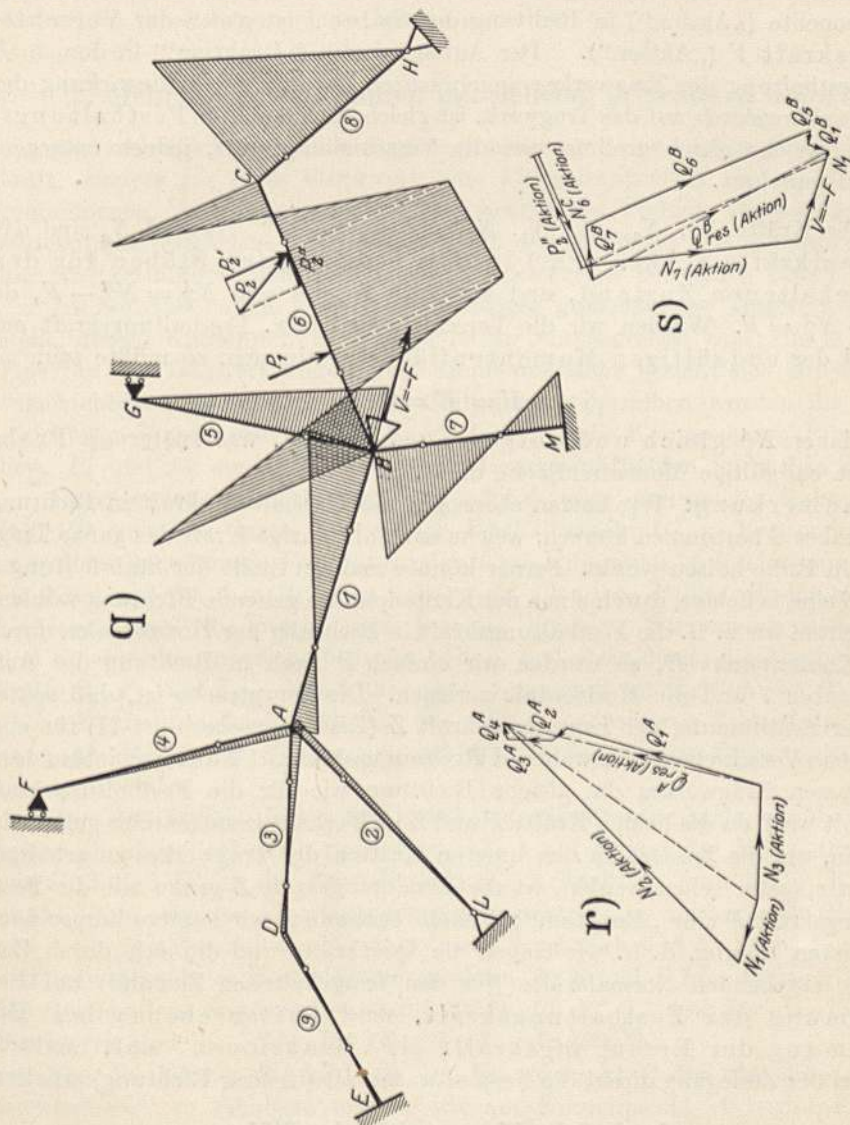


Fig. 149 q—149 s.

sowie die im Stab 3 wirkende Normalkraft  $N_3^B$  (Aktion). Diese Kräfte setzen wir zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponenten  $N_1$  und  $N_2$  (Aktionen). Auf den Knotenpunkt  $B$  werden übertragen (Fig. 149s): die „Aktionen“ der Querkräfte  $Q_1^B$ ,  $Q_5^B$ ,  $Q_6^B$  und  $Q_7^B$ , die Aktion  $P_2''$ , die im Stab 6 wirkende Normalkraft  $N_6^C$  (Aktion) und die vom Knotenpunkt  $A$  herrührende Kraft  $N_1$  (Aktion). Diese Kräfte setzen wir zusammen

und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponente  $N_7$  in Richtung des Auflagerstabes 7 und eine Komponente in Richtung des Stabes 1 („Aktionen“). Da die beiden Komponenten  $N_2$  und  $N_7$  keine Verschiebungen des Stabes 1 und damit des Knotenpunktes  $B$  bewirken können, so scheidet dieselben aus der Berechnung aus, und die allein übrigbleibende Komponente („Aktion“) in Richtung des Stabes 1 ist gleich der Verschiebungskraft  $V$  („Aktion“). Der Auflagerdruck („Reaktion“) in dem in  $B$  zur Festhaltung des Tragwerkes angebrachten Lager, infolge Einwirkung der Verschiebungskraft auf das Tragwerk, ist gleich der gesuchten Festhaltungskraft, welche gleich groß ist wie die Verschiebungskraft, jedoch entgegengesetzt gerichtet.

Die Kräfte  $N_9$ ,  $N_3$ ,  $N_2$ ,  $N_1$ ,  $N_7$ ,  $N_6^B = N_6^C - P_2''$ ,  $N_6^C$  und  $N_8$  sind die Normalkräfte („Aktionen“) in den betreffenden Stäben für den festgehaltenen Zustand, und am Stab 1 muß sein  $N_1^A = N_1^B - F$ , da  $N_1^B - N_1^A = F$ . Würden wir die Verschiebungs- bzw. Festhaltungskraft auf Grund der endgültigen Momentenfläche bestimmen, so müßte sein

$$V = F = 0$$

und daher  $N_1^A$  gleich und entgegengesetzt  $N_1^B$ , was später als Probe für die endgültige Momentenfläche dient.

Anmerkung: Wir hätten ebensogut die Festhaltungskraft in Richtung des Stabes 6 bestimmen können, welche auch als einzige Kraft das ganze Tragwerk in Ruhe halten würde. Ferner könnte man an Stelle der Stabrichtung 1 oder 6 eine beliebige, durch einen der Knotenpunkte gehende Richtung wählen; wüßten wir z. B. die Festhaltungskraft in Richtung der Horizontalen durch den Knotenpunkt  $B$ , so würden wir einfach  $F$  noch in Richtung des Auflagerstabes 7 und die Horizontale zerlegen. Die Hauptsache ist, daß später bei der Bestimmung der Erzeugungskraft  $Z$  (Rechnungsabschnitt II) für eine gegebene Verschiebung des während Rechnungsabschnitt I unverschiebbar festgehaltenen Tragwerkes die gleiche Richtung wie für die Festhaltungskraft gewählt wird, da die beiden Kräfte  $F$  und  $Z$  im Verhältnis zueinander gebraucht werden, um die Zusätze zu den inneren Kräften des Tragwerkes zu erhalten. Wie wir später sehen werden, ist die Erzeugungskraft  $Z$  genau wie die Festhaltungskraft  $F$  eine „Reaktion“; deshalb bestimmen wir letztere immer nach der ersten Lösung, d. h. wir tragen die Querkräfte und die sich durch Zerlegung ergebenden Normalkräfte (für den festgehaltenen Zustand) bei Bestimmung der Festhaltungskraft, und später ebenso bei Bestimmung der Erzeugungskraft, als „Reaktionen“ auf, wodurch wir bei der Zerlegung direkt die Festhaltungskraft (in ihrer Richtung) erhalten.

### Sonderfall: Eigengewicht der Stäbe.

Das Eigengewicht geneigter Stäbe, welches immer senkrecht wirkt, zerlegen wir wie zur Berechnung der zugehörigen  $M_0$ -Fläche auch zur Bestimmung der Festhaltungskraft zweckmäßig nicht und ermitteln an den beiden Enden des geneigten Stabes an Stelle der Querkräfte  $Q$  (Auflagerdrücke normal zur Achse des herausgeschnitten gedachten Stabes) die senkrechten Auflagerdrücke  $A$  an den Enden der herausgeschnitten gedachten geneigten Stäbe, die wir in

der weiteren Rechnung verwenden. Es wäre ein Umweg, wenn wir in diesem Falle zur Bestimmung der Festhaltungskraft die Querkräfte ermitteln und dann im weiteren Verlauf der Rechnung noch die in die Stabrichtung fallende Komponente des Eigengewichtes gesondert berücksichtigen würden; denn in den senkrechten Auflagerdrücken (des herausgeschnitten gedachten geneigten Stabes) ist diese Komponente bereits enthalten.

## 2. Mehrstöckiger Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben.

Am mehrstöckigen Rahmen gibt es nicht nur eine einzige Festhaltungskraft, sondern für jedes Stockwerk eine Festhaltungskraft, da bei einer angenommenen Verschiebung eines Stockwerkes die übrigen Stockwerke Verschiebungen ausführen, welche sich nicht ohne weiteres aus denjenigen des um ein bestimmtes Maß verschobenen Stockwerkes berechnen lassen.

In Fig. 150 haben wir ein dreistöckiges geschlossenes Tragwerk dargestellt, dessen Knotenpunkte unverschiebbar vorausgesetzt sind; die in dieser Figur an das Tragwerk angetragene Momentenfläche bezieht sich auf den unverschiebbaren Zustand, und zur Bestimmung derselben wurden die schief gerichteten Einzellasten  $P_1$  und  $P_2$  wie früher in die Komponenten  $P'_1$  und  $P''_1$  bzw.  $P'_2$  und  $P''_2$  senkrecht und parallel zur betreffenden Stabachse zerlegt.

Es ist einleuchtend, daß es nicht möglich wäre, den ganzen Rahmen der Fig. 150 entweder durch eine einzige Festhaltungskraft am Knotenpunkt  $C$  oder durch eine einzige Festhaltungskraft am Knotenpunkt  $F$  oder eine solche am Knotenpunkt  $J$  in Ruhe zu halten. In allen drei Fällen würden sich die beiden anderen Stockwerke noch bewegen können. Wir müssen daher alle drei Stockwerke unverschiebbar festhalten, und zwar durch die Festhaltungskräfte  $F_I$ ,  $F_{II}$  und  $F_{III}$ . Wie früher unter 1. erwähnt, ist die Wahl der Richtung dieser Festhaltungskräfte beliebig, nur müssen im weiteren Verlauf der Rechnung (im R. II) für die Erzeugungskräfte  $Z$  die gleichen Richtungen angenommen werden.

Zur Bestimmung dieser drei Festhaltungskräfte ermitteln wir die Querkräfte an allen Stäben nach Kap. VI, 1 auf Grund der Momentenfläche aus R. I und bilden die Resultierende  $Q_{\text{res}}$  („Reaktion“) an jedem Knotenpunkt. Nun scheiden wir wieder die Komponenten aus, welche in die Richtung von Auflagerstäben fallen. Für das oberste Stockwerk sind die Stäbe 7, 8 und 9 Auflagerstäbe, da es in den Knotenpunkten  $D$ ,  $E$  und  $F$  sein Auflager findet; für das mittlere Stockwerk sind die Stäbe 10, 11, 12, und für das unterste Stockwerk sind die Stäbe 13, 14 und 15 Auflagerstäbe.

Um die Festhaltungskraft  $F_I$  am Knotenpunkt  $C$  des obersten „Stockwerkbalkens“ zu erhalten, müssen wir am Knotenpunkt  $A$  beginnen. Wir zerlegen die Resultierende  $Q_{\text{res}}^A$  (Fig. 150a) in die Komponenten  $N_7^A$  und  $N_1$  (Reaktionen am Knotenpunkt), von welchen letztere in das Auflager  $D$  dieses Stockwerkes übertragen wird, daher keine Verschiebung desselben hervorrufen kann, und aus diesem Grunde aus der Berechnung für die Festhaltungskraft  $F_I$  ausscheidet. Darauf setzen wir die Resultierende  $Q_{\text{res}}^B$  (Fig. 150b) mit der Komponente  $N_1$  („Reaktion“) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponenten  $N_2^B$  und  $N_8$ , von welchen letztere

wieder keinen Anteil zu der Festhaltungskraft  $F_I$  liefert. Nun wirken in dem Lager am Knotenpunkt  $C$  die „Reaktionen“  $Q_{\text{res}}^C$  und  $N_2^B$  sowie die „Reaktion“ der in die Stabrichtung 2 fallenden Komponente  $P_2''$  der äußeren Kraft  $P_2$

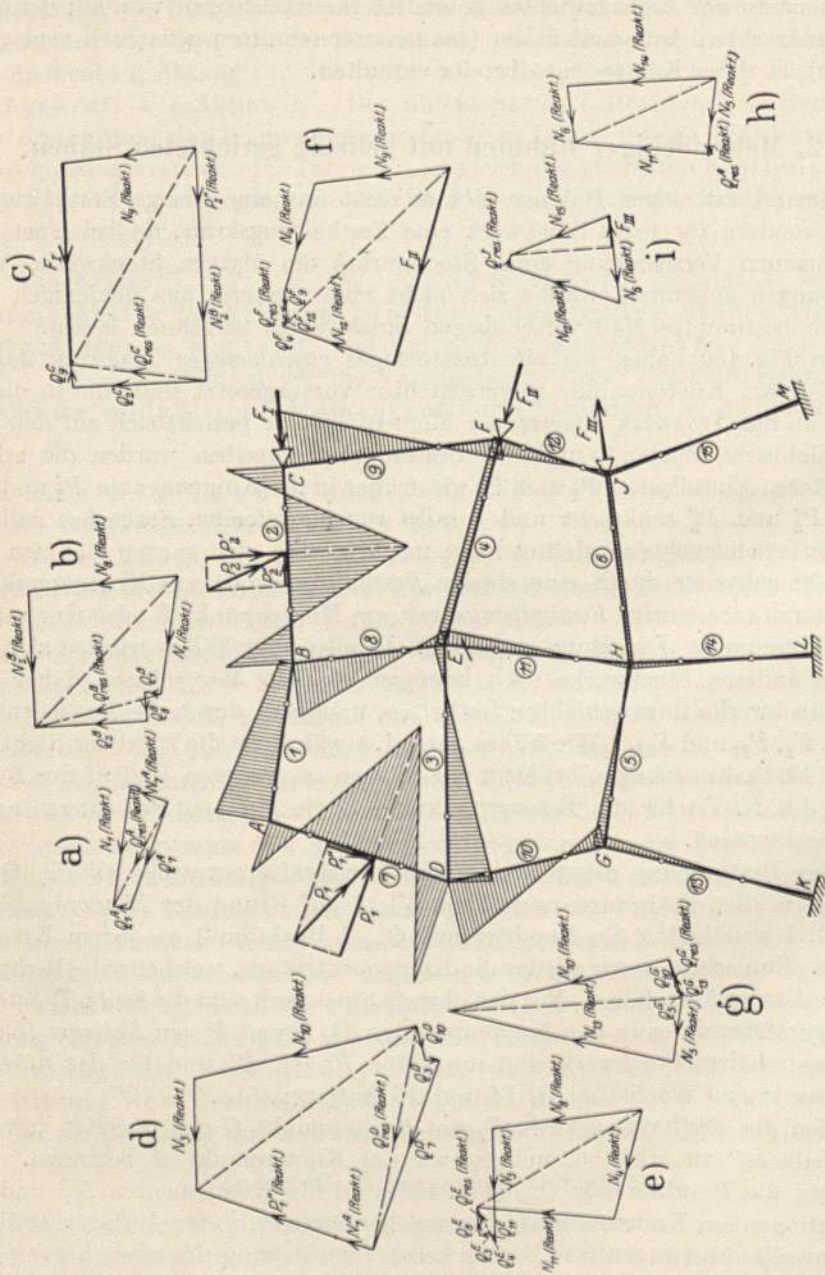


Fig. 150—1501.

(Fig. 150c); setzen wir diese Reaktionen zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Stabrichtungen 2 und 9, so ist die erstere Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft  $F_I$ , während die Komponente  $N_9$  aus der Berechnung derselben ausscheidet.

Um die Festhaltungskraft  $F_{II}$  am Knotenpunkt  $F$  des mittleren „Stockwerkbalkens“ zu erhalten, setzen wir  $Q_{\text{res}}^D$  (Fig. 150d) zunächst mit der durch den Auflagerstab 7 des obersten Stockwerkes auf den Knotenpunkt  $D$  übertragenen, in Fig. 150a bestimmten Komponente  $N_7^A$  ( $N_7^A$  wirkt am Knotenpunkt  $A$  als Reaktion, im Stab 7 als Aktion und am Knotenpunkt  $D$  wieder als Reaktion) sowie mit der „Reaktion“ der in die Stabrichtung 7 fallenden Komponente  $P_1''$  der äußeren Kraft  $P_1$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende (Fig. 150d) in die Komponenten  $N_3$  und  $N_{10}$  (Reaktionen am Knotenpunkt), von denen letztere aus der Berechnung der Festhaltungskraft  $F_{II}$  ausscheidet. Ferner setzen wir  $Q_{\text{res}}^E$  (Fig. 150a) mit der vom Auflagerstab 8 des obersten Stockwerkes auf den Knotenpunkt  $E$  übertragenen, in Fig. 150b bestimmten Komponente  $N_8$  (Reaktion) und mit der vom Stab 3 auf denselben Knotenpunkt übertragenen Komponente  $N_3$  („Reaktion“) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende (Fig. 150e) in die Komponenten  $N_4$  und  $N_{11}$  („Reaktionen“), von denen letztere aus der Berechnung von  $F_{II}$  ausscheidet.

Endlich setzen wir am Knotenpunkt  $F$  die „Reaktionen“  $Q_{\text{res}}^F$ ,  $N_9$  und  $N_4$  zusammen (Fig. 150f) und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Stabrichtungen 4 und 12; dann ist die in die Richtung des Stabes 4 fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{II}$ .

Um schließlich die Festhaltungskraft  $F_{III}$  am Knotenpunkt  $J$  des untersten Stockwerkes zu erhalten, setzen wir  $Q_{\text{res}}^G$  (Fig. 150g) zunächst mit der durch den Auflagerstab 10 des mittleren Stockwerkes auf den Knotenpunkt  $G$  übertragenen, in Fig. 150d bestimmten Komponente  $N_{10}$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende (Fig. 150g) in die Komponenten  $N_5$  und  $N_{13}$  (Reaktionen am Knotenpunkt), von denen letztere aus der Berechnung der Festhaltungskraft  $F_{III}$  ausscheidet. Ferner setzen wir  $Q_{\text{res}}^H$  (Fig. 150h) mit der vom Auflagerstab 11 des mittleren Stockwerkes auf den Knotenpunkt  $H$  übertragenen, in Fig. 150e bestimmten Komponente  $N_{11}$  (Reaktion) und mit der vom Stab 5 auf denselben Knotenpunkt übertragenen Komponente  $N_5$  („Reaktion“) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende (Fig. 150h) in die Komponenten  $N_6$  und  $N_{14}$  („Reaktionen“), von denen letztere aus der Berechnung von  $F_{III}$  ausscheidet. Endlich setzen wir am Knotenpunkt  $J$  die „Reaktionen“  $Q_{\text{res}}^J$ ,  $N_{12}$  und  $N_6$  zusammen (Fig. 150i) und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Stabrichtungen 6 und 15; dann ist die in die Richtung des Stabes 6 fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{III}$ .

Wir ersehen daraus, daß wir zur Bestimmung der Festhaltungskräfte an einem Stockwerkrahmen oben und in den einzelnen Stockwerken an dem vom gedachten Lager am meisten entfernten Knotenpunkt beginnen müssen.

### 3. Rahmenträger mit beliebig gerichteten Stäben.

Wie in Kap. I des Teiles II ausgeführt, ist der Rahmenträger für die Berechnung nichts anderes wie ein mehrstöckiger Rahmen. Der in Fig. 151 dargestellte Rahmenträger muß während R. I in seinen Knotenpunkten  $D$ ,  $H$ ,  $J$  und  $K$  unverschiebbar festgehalten werden, damit sich keiner seiner

Knotenpunkte verschieben kann; die in Fig. 151 an das Tragwerk angetragene Momentenfläche bezieht sich auf den unverschiebbaren Zustand.

Die in den gedachten Lagern an den Knotenpunkten  $D$ ,  $H$ ,  $J$  und  $K$  auftretenden Festhaltungskräfte bestimmen wir analog wie diejenigen am mehrstöckigen Rahmen. Wir ermitteln daher zuerst die Querkräfte an allen Stabenden nach Kap. VI, 1 auf Grund der Momentenfläche aus R. I und bilden

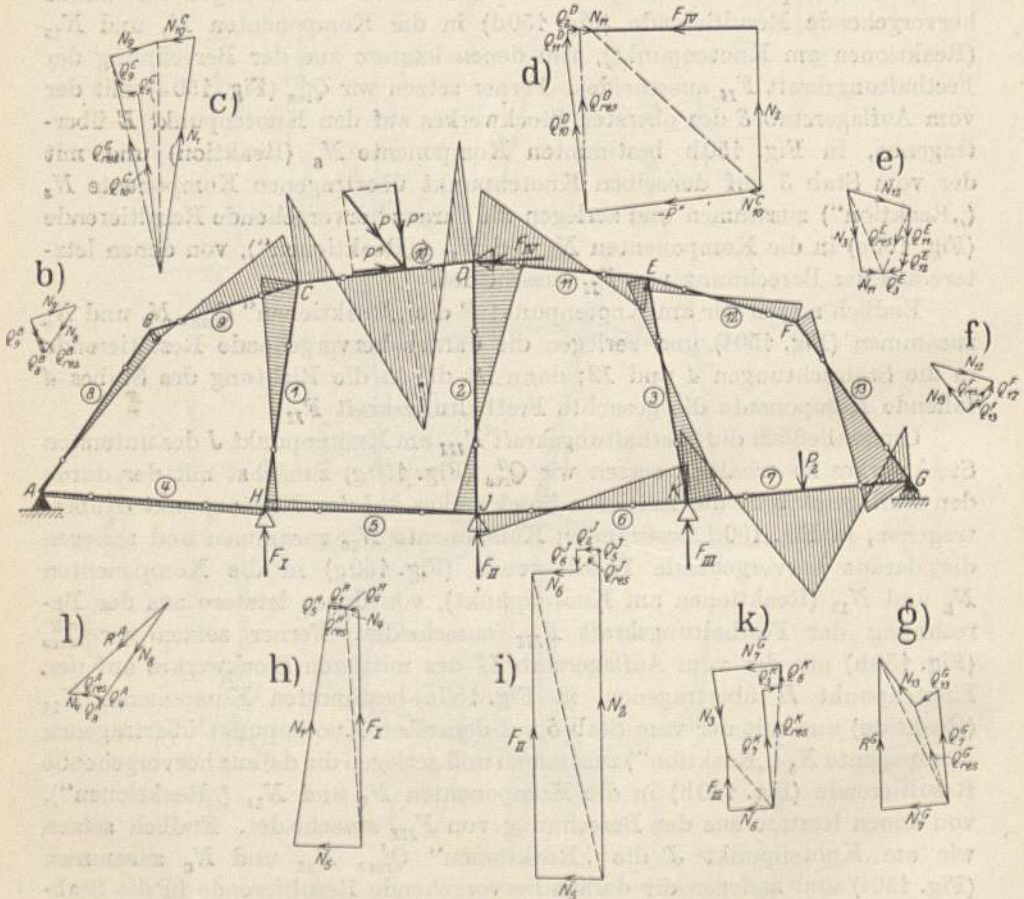


Fig. 151—151 l.

die Resultierende  $Q_{res}$  („Reaktion“) an jedem Knotenpunkt (Fig. 151 b bis k).

Dann müssen wir mit der Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_{IV}$  beginnen. In Fig. 151 b zerlegen wir  $Q_{res}^D$  in  $N_9$  und  $N_8$ , von denen letztere Komponente aus der Berechnung von  $F_{IV}$  ausscheidet. Darauf setzen wir  $Q_{res}^D$  (Fig. 151 c) mit  $N_9$  („Reaktion“) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in  $N_{10}$  und  $N_{11}$ , von denen letztere aus der Berechnung von  $F_{IV}$  ausscheidet. Wir zerlegen ferner in Fig. 151 f  $Q_{res}^D$  in  $N_{12}$  und  $N_{13}$ , von denen letztere aus der Berechnung von  $F_{IV}$  ausscheidet. Hierauf setzen wir in Fig. 151 e  $Q_{res}^D$  mit  $N_{12}$  („Reaktion“) zusammen und zerlegen die daraus

hervorgehende Resultierende  $N_{11}$  in und  $N_3$ , von denen letztere aus der Berechnung von  $F_{IV}$  ausscheidet. Nun setzen wir in Fig. 151d  $Q_{\text{res}}^D$  mit  $N_{11}$ ,  $N_{10}^C$  und der „Reaktion“ der in die Stabrichtung 10 fallenden Komponente  $P_2''$  der äußeren Last  $P_2$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in  $N_2$  und die Horizontale. Dann ist die in die Horizontale fallende Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft  $F_{IV}$ .

Nun bestimmen wir die Festhaltungskraft  $F_{III}$ . In Fig. 151g setzen wir  $Q_{\text{res}}^G$  mit  $N_{13}$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in  $N_7^G$  und die Vertikale, da sich bei  $G$  das bewegliche Lager des Rahmenträgers befindet. Darauf setzen wir in Fig. 151k  $Q_{\text{res}}^K$  mit  $N_7^K = N_7^G$  (da die äußere Kraft  $P_2$  normal zum Stab 7 angreift) und  $N_3$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in  $N_6$  und die Vertikale; dann ist die in die Vertikale fallende Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft  $F_{III}$ .

Die Festhaltungskraft  $F_{II}$  erhalten wir durch Zusammensetzen von  $Q_{\text{res}}^J$  (Fig. 151i) mit  $N_6$  und  $N_2$  und Zerlegen der daraus hervorgehenden Resultierenden in  $N_5$  und die Vertikale; die letztere Komponente ist dann gleich der gesuchten Festhaltungskraft  $F_{II}$ .

Die Festhaltungskraft  $F_I$  ergibt sich in analoger Weise durch Zusammensetzen von  $Q_{\text{res}}^H$  (Fig. 151h) mit  $N_5$  und  $N_1$  und Zerlegen der daraus hervorgehenden Resultierenden in  $N_4$  und die Vertikale; die letztere Komponente ist dann gleich der gesuchten Festhaltungskraft  $F_I$ .

Schließlich erhalten wir nun noch den Auflagedruck  $R^A$  („Reaktion“) in dem festen Lager  $A$  des Rahmenträgers durch Zusammensetzen von  $Q_{\text{res}}^A$  (Fig. 151l) mit  $N_4$  und  $N_8$ .

#### 4. Beispiele.

Im Hinblick auf die wichtige Rolle, welche die Festhaltungskraft bzw. die ihr gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete „Verschiebungskraft“ bei der Berechnung von Rahmentragwerken spielt, wird im folgenden noch die Ermittlung der Festhaltungskraft an mehreren in der Praxis häufig vorkommenden Tragwerken gezeigt.

##### 1. Rechteckrahmen mit 2 Öffnungen (Balkenbelastung, Fig. 152).

Die Balkenöffnung 1 sei mit der beliebig schief gerichteten Kraft  $P$  belastet. Wir zerlegen  $P$  in die Komponente  $P'$  rechtwinklig zur Stabrichtung und in die Komponente  $P''$  in Richtung des Stabes, und ermitteln die in Fig. 152 dargestellte Momentenfläche für die Belastung  $P'$  am ganzen Rahmen unter der Voraussetzung unverschiebbarer Knotenpunkte, bewirkt durch ein gedachtes festes Lager am Knotenpunkt  $C$  (R. I).

Zur Bestimmung der in dem gedachten Lager in  $C$  auftretenden Festhaltungskraft ermitteln wir die Querkräfte an allen Knotenpunkten des Rahmens nach Kap. VI (Fig. 152a), und wir sollten nun nach dem allgemeinen Fall an jedem Knotenpunkt die Resultierende  $Q_{\text{res}}$  derselben bilden. Die Resultierende  $Q_{\text{res}}^A$  am Knotenpunkte  $A$  ist eine durch  $A$  gehende schief gerichtete Kraft, welche sich aus der Zusammensetzung von  $Q_1^A$  und  $Q_3^A$  ergibt; diese schief gerichtete Kraft  $Q_{\text{res}}^A$  ist dann in Richtung des Auflagerstabes 3

und in eine passend gewählte andere Richtung zu zerlegen, als welche wir die Richtung des horizontalen Balkens annehmen. Anstatt aber  $Q_{res}^A$  in die Richtung der Stäbe 3 und 1 zu zerlegen, können wir dies auch mit den einzelnen Querkraften  $Q_1^A$  und  $Q_3^A$  vor deren Zusammensetzung zu  $Q_{res}^A$  tun; wir sehen dann, daß  $Q_1^A$  ganz in die Richtung des senkrechten Auflagerstabes 3 und  $Q_3^A$  ganz in diejenige des wagrechten Balkens 1 fällt; im vorliegenden Falle haben wir also nicht nötig, erst  $Q_1^A$  und  $Q_3^A$  zu  $Q_{res}^A$  zusammenzusetzen und diese dann wieder in dieselben Komponenten zu zerlegen. Die Komponente  $Q_1^A$  kann keine

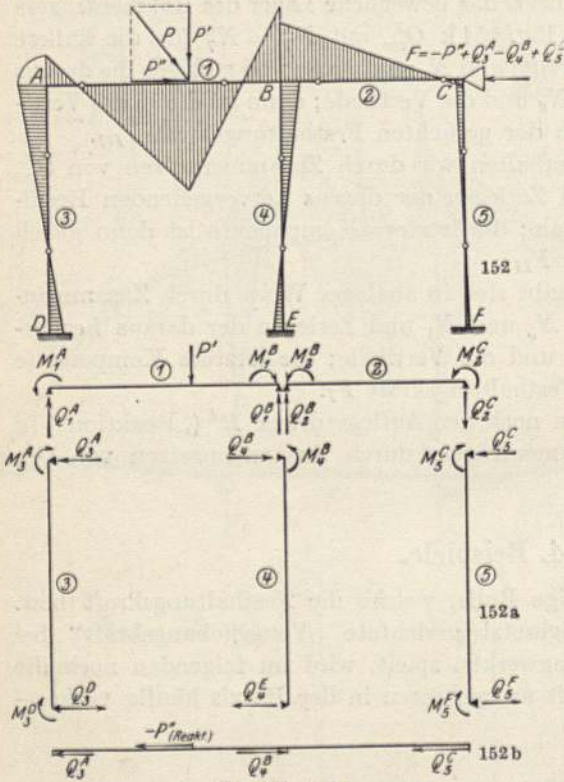


Fig. 152—152 b.

Verschiebung des Rahmens hervorrufen, und deshalb hat sie auch keinen Anteil an der Festhaltungskraft; es bleibt daher als eine Komponente der Festhaltungskraft nur  $Q_3^A$  übrig. Die Reaktion  $Q_5^B$  ist gleich der Resultante der Querkraften  $Q_1^B$ ,  $Q_2^B$  und  $Q_4^B$  (Fig. 152a); auch  $Q_{res}^B$  brauchen wir nicht erst zu bilden, weil deren Komponente  $Q_1^B$  und  $Q_2^B$  in die Richtung des Auflagerstabes 4 fällt und mithin nur  $Q_4^B$  übrigbleibt als eine Komponente der Festhaltungskraft. Ebenso ist von den Komponenten  $Q_2^C$  und  $Q_5^C$  in C nur die letztere eine Komponente der Festhaltungskraft. Es bleibt nun noch die Berücksichtigung der Horizontalkomponente  $P''$  der äußeren Belastung; diese erzeugt in dem gedachten Lager in C eine Reaktion gleich und entgegengesetzt  $P''$  (also  $-P''$ ).

Im gedachten Lager in C wirken also als Komponenten der Festhaltungskraft die Kräfte  $-P''$ ,  $Q_3^A$ ,  $Q_4^B$  und  $Q_5^C$  (Fig. 152b), welche wir zu einer einzigen Kraft, der gesuchten Festhaltungskraft  $F$  zusammensetzen können, weil sie in derselben Geraden laufen. Die drei schief gerichteten Reaktionen in den unverschiebbar vorausgesetzten Knotenpunkten A, B und C, welche die von der äußeren Belastung  $P$  angestrebte Verschiebung des Rahmens aufhalten, haben wir daher durch eine einzige Kraft in Richtung des Balkens mit derselben Wirkung ersetzt.

## 2. Rechteckrahmen mit 2 Öffnungen (Pfeilerbelastung, Fig. 152c).

In Fig. 152c haben wir denselben Rechteckrahmen dargestellt, jedoch mit einer schief gerichteten Kraft  $P$  am Vertikalstab 3. Wir zerlegen  $P$  in eine Komponente  $P'$  rechtwinklig zur Stabrichtung und eine Komponente  $P''$



in Richtung des Stabes; letztere wird durch den Stab auf das Fundament in  $D$  übertragen. Die Momentenfläche für die Belastung  $P'$  (aus R. I) nehmen wir als gegeben an (Fig. 152c), ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Knotenpunkten des Rahmens (Fig. 152d) und erhalten genau wie unter 1.  $Q_3^A$ ,  $Q_4^B$  und  $Q_5^C$  (Fig. 152e) als diejenigen Komponenten der Reaktionen in  $A$ ,  $B$  und  $C$ , welche die von der Kraft  $P'$  angestrebte Verschiebung des Rahmens aufhalten; durch Zusammensetzung dieser 3 Komponenten ergibt sich die gesuchte Festhaltungskraft  $F$ .

### 3. Rechteckrahmen mit nach oben fortgesetzten Säulen (Fig. 153).

Die Balkenöffnung  $I$  sei gleichmäßig verteilt belastet, und die in Fig. 153 angetragene Momentenfläche bezieht sich auf den vorübergehend durch ein gedachtes Lager in  $D$  unverschiebbar festgehaltenen Zustand (Rechnungsabschnitt I). Aus diesen Momenten ermitteln wir die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden (Fig. 153a). Wir brauchen nun wie im

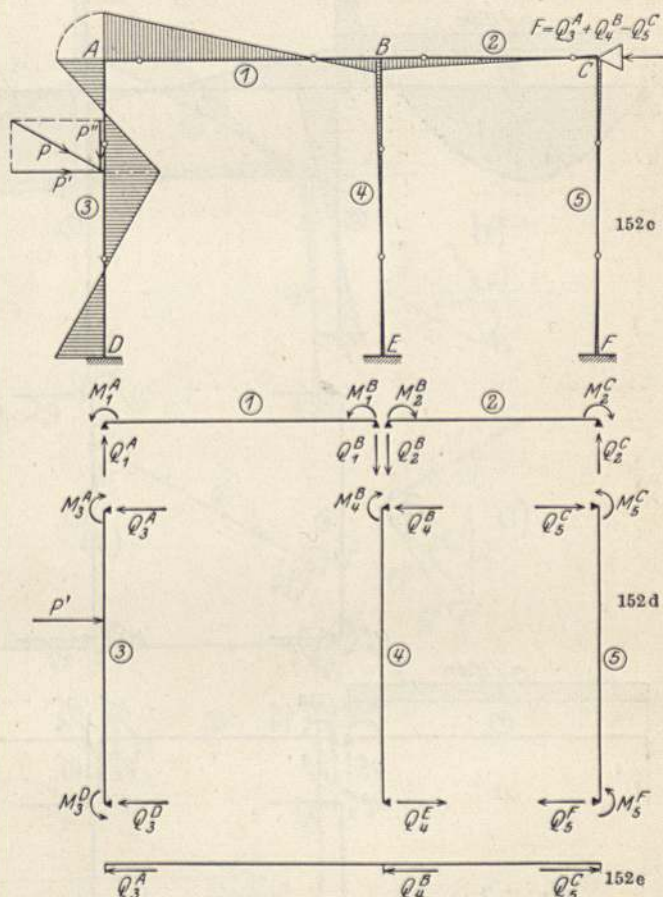


Fig. 152c—152e.

vorhergehenden Beispiel die Querkräfte in den einzelnen Knotenpunkten nicht erst zusammensetzen und dann wieder in ihre Richtungen zu zerlegen, sondern es scheiden alle normal zum Balken angreifenden Querkräfte aus, und die im gedachten festen Lager in  $D$  auftretende Festhaltungskraft setzt sich nur aus den in die Richtung des Balkens fallenden Querkräften zusammen (Fig. 153b). Haben die Stäbe 4, 5, 6 und 7 gleiche Länge und gleiches Trägheitsmoment sowie dieselbe Lagerung an ihren Enden, so wird  $Q_4^B = Q_5^B$  und  $Q_6^B = Q_7^B$  und damit  $F = 0$ , und zwar trotz einseitiger Belastung, so daß in diesem Fall die Momente aus R. I gleich die endgültigen Momente sind.

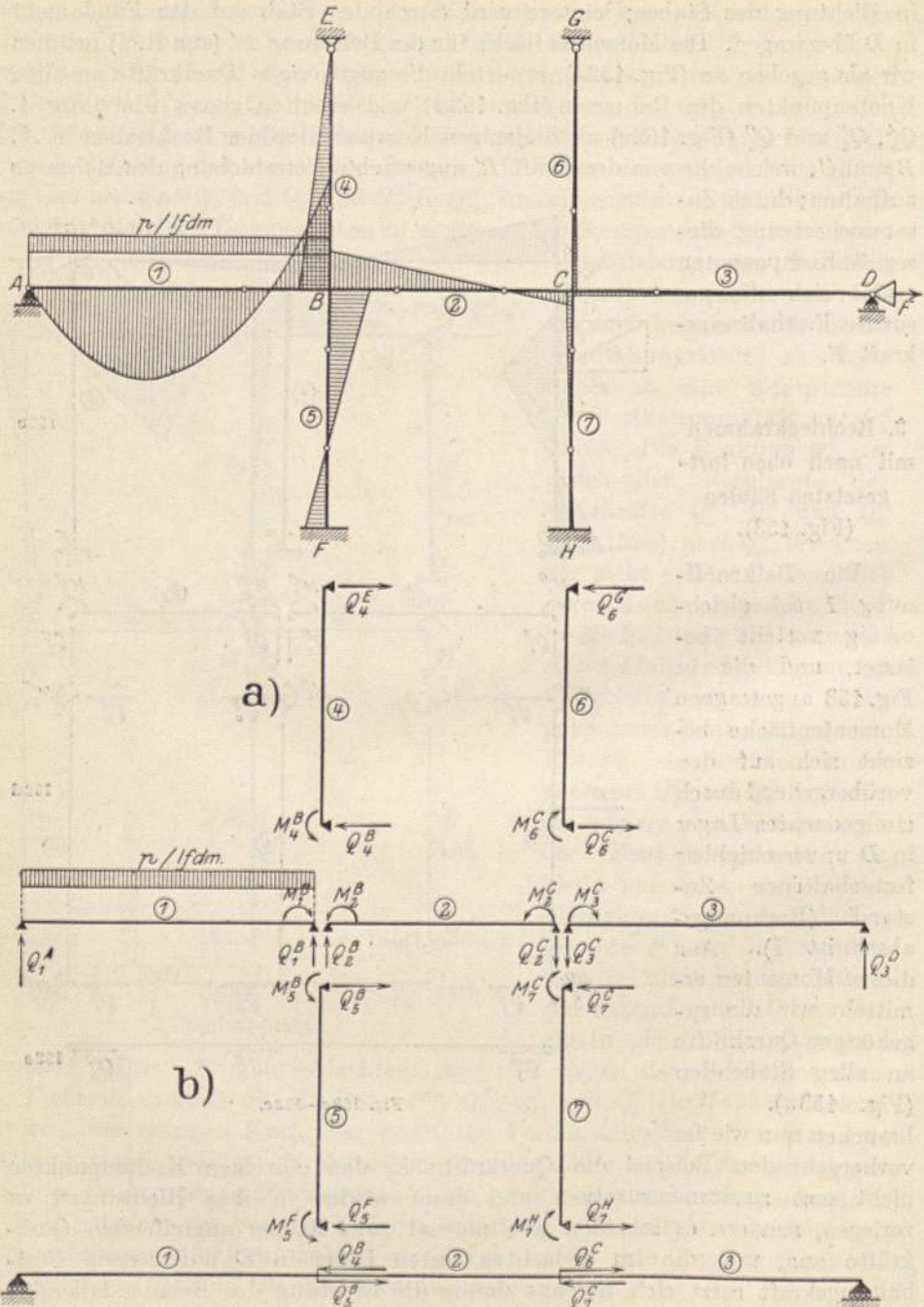


Fig. 153—153 b.

## 4. Rechteckrahmen mit Aufsatz (Fig. 154).

Der Stab 2 des Aufsatzes sei mit einer beliebig gerichteten Kraft  $P$  belastet, welche wir zur Berechnung des Tragwerks in eine Komponente  $P'$  normal zum

Stab 2 und eine Komponente  $P''$  in Richtung desselben zerlegen. Das Tragwerk sei während R. I durch ein festes Lager in  $D$  horizontal unverschiebbar festgehalten (dadurch werden auch die Knotenpunkte  $B$  und  $C$  unverschiebbar gemacht), und die in Fig. 154 angetragenen Momente beziehen sich auf diesen Zustand. Aus diesen Momenten ermitteln wir die zugehörigen Querkräfte an

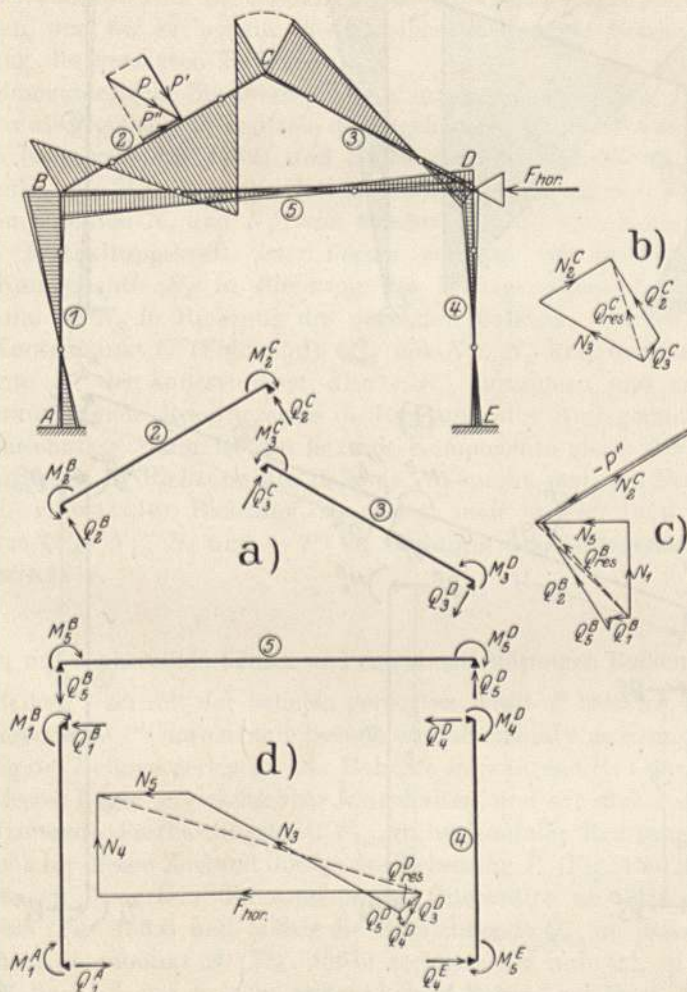


Fig. 154—154 d.

allen Stabenden (Fig. 154a) und setzen dieselben an jedem Knotenpunkt zu  $Q_{res}$  zusammen. In Fig. 154b zerlegen wir nun zunächst  $Q_{res}^C$  in  $N_2^C$  und  $N_3^C$  („Reaktionen“), von welchen letztere im Lager in  $D$  auftritt. Hierauf setzen wir in Fig. 154c  $Q_{res}^B$  mit  $N_2^C$  sowie mit der „Reaktion“ von  $P''$ , also mit  $-P''$ , zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in  $N_5$  und  $N_4$ , von denen erstere am Lager in  $D$  auftritt und letztere aus der Berechnung der Festhaltungskraft ausscheidet. Zum Schluß setzen wir in  $D$  (Fig. 154d)  $Q_{res}^D$  mit  $N_3$  und  $N_5$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende

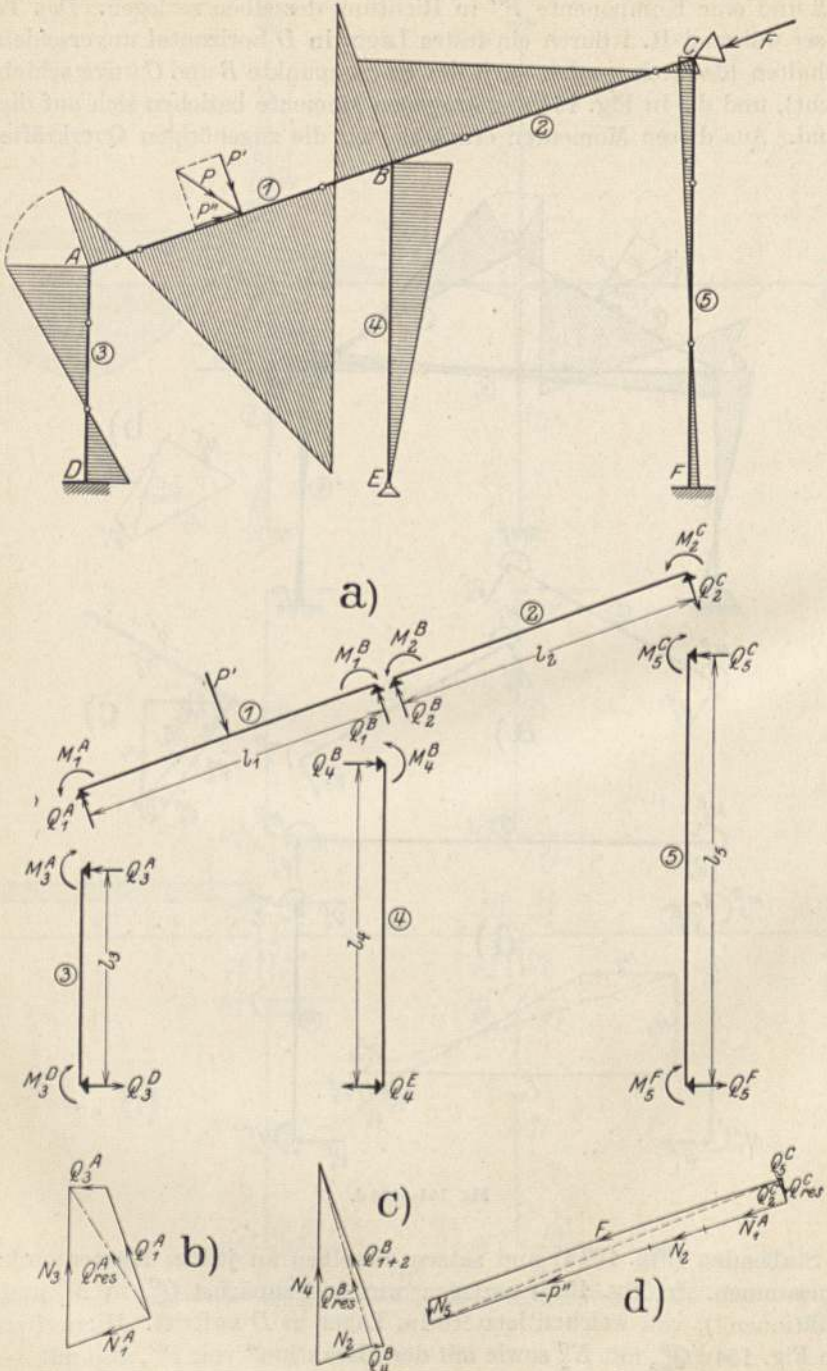


Fig. 155—155 d.

in Richtung des in  $D$  anschließenden Auflagerstabes 4 und die Horizontale; dann ist die letztere Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{hor}$ .

### 5. Rahmen mit senkrechten Säulen und geneigtem Balken (Fig. 155).

Die geneigte Balkenöffnung  $1$  sei mit einer beliebig gerichteten Kraft  $P$  belastet, welche wir, wie immer, in eine Komponente  $P'$  normal zum belasteten Balken und eine Komponente  $P''$  in Richtung des Balkens zerlegen. Der Rahmen sei während R. I durch ein in  $C$  gedachtes festes Lager unverschiebbar festgehalten, und wir suchen die in demselben auftretende Festhaltungskraft in Richtung des geneigten Balkens.

Die Momentenfläche für diesen Zustand infolge der Belastung  $P'$  (Fig. 155) nehmen wir als gegeben an, ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden des Rahmens (Fig. 155a) und bilden die Resultierende  $Q_{\text{res}}$  an jedem Knotenpunkt. Im Knotenpunkt  $A$  (Fig. 155b) zerlegen wir nun zunächst  $Q_{\text{res}}^A$  in die Komponenten  $N_3$  und  $N_1^A$ , von welchen nur  $N_1^A$  eine Komponente der gesuchten Festhaltungskraft ist. Ferner zerlegen wir in Fig. 155c  $Q_{\text{res}}^B$  in die Komponente  $N_4$  in Richtung des Auflagerstabes  $4$ , welche ausscheidet, und in  $N_2$  in Richtung des geneigten Balkens. Schließlich setzen wir im Knotenpunkt  $C$  (Fig. 155d)  $Q_{\text{res}}^C$  mit  $N_1^A$ ,  $N_2$  und der Reaktion der Komponente  $P''$  der äußeren Last, also  $-P''$ , zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes  $5$  und die Balkenrichtung; dann ist die letztere Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft in Richtung des Balkens. Wünscht man die Festhaltungskraft in horizontaler Richtung, so zerlegt man in Fig. 155d die Resultierende aus  $Q_{\text{res}}^C$ ,  $N_1^A$ ,  $N_2$  und  $-P''$  in Richtung des Auflagerstabes  $5$  und die Horizontale.

### 6. Rahmen mit senkrechten Säulen und einem sattelförmigen Balken (Fig. 156).

Der Balken  $1$  sei mit der beliebig geneigten Kraft  $P$  belastet, welche wir in eine Komponente  $P''$  normal zum belasteten Balken und eine Komponente  $P'$  in Richtung des Balkens zerlegen. Der Rahmen sei während R. I durch ein in  $B$  gedachtes festes Lager unverschiebbar festgehalten, und wir suchen die in demselben auftretende Festhaltungskraft  $F_{\text{hor}}$  in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für diesen Zustand infolge der Belastung  $P'$  (Fig. 156) nehmen wir als gegeben an, ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden des Rahmens (Fig. 156a) und bilden die Resultierende  $Q_{\text{res}}$  an jedem Knotenpunkt. Im Knotenpunkt  $A$  (Fig. 156b) zerlegen wir nun  $Q_{\text{res}}^A$  in die Komponenten  $N_3$  und  $N_1^A$ , von welchen erstere keinen Beitrag zur Festhaltungskraft liefert. Ferner zerlegen wir in Knotenpunkt  $C$  (Fig. 156c)  $Q_{\text{res}}^C$  in die Komponenten  $N_5$  und  $N_2$ , von welchen erstere ausscheidet. Die in den Balken  $1$  und  $2$  wirkenden Komponenten  $N_1$  und  $N_2$ , die Resultierende  $Q_{\text{res}}^B$  und die Reaktion  $-P''$  von der äußeren Last herrührend, haben wir in Fig. 154d an die Konstruktion angetragen. Die drei in den Balkenrichtungen  $1$  und  $2$  laufenden Komponenten verschieben wir nun in ihrer Richtung bis zum Knotenpunkt  $B$  und setzen sie dort mit der Resultierenden  $Q_{\text{res}}^B$  zur Resultante  $R^B$  zusammen (Fig. 156e); zerlegen wir nun  $R^B$  in Richtung des Auflagerstabes  $4$  und die Horizontale, so ist letztere Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{\text{hor}}$  in horizontaler Richtung.

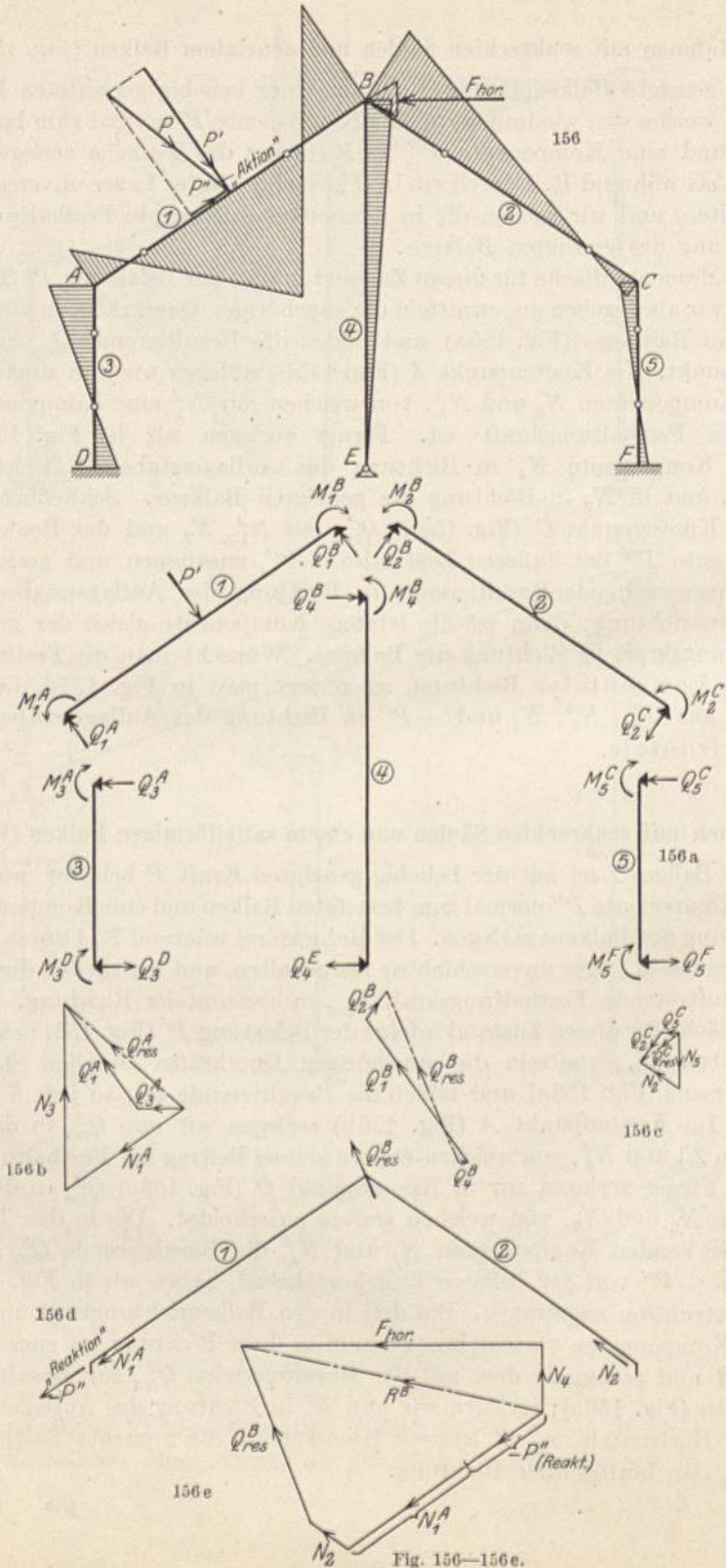


Fig. 156—156e.

Anmerkung betreffend Rahmen mit senkrechten Säulen und geneigtem Balken.

Am Rahmen der Fig. 157 seien für Eigengewicht der Balken 1 und 2 sowohl die senkrechten Auflagerdrücke  $A$  an den Enden dieser Stäbe (vgl. Sonderfall zu Abschnitt 1) als auch die Querkräfte an den Köpfen aller Säulen ermittelt worden (Fig. 157a). Da die inneren Knotenpunkts-

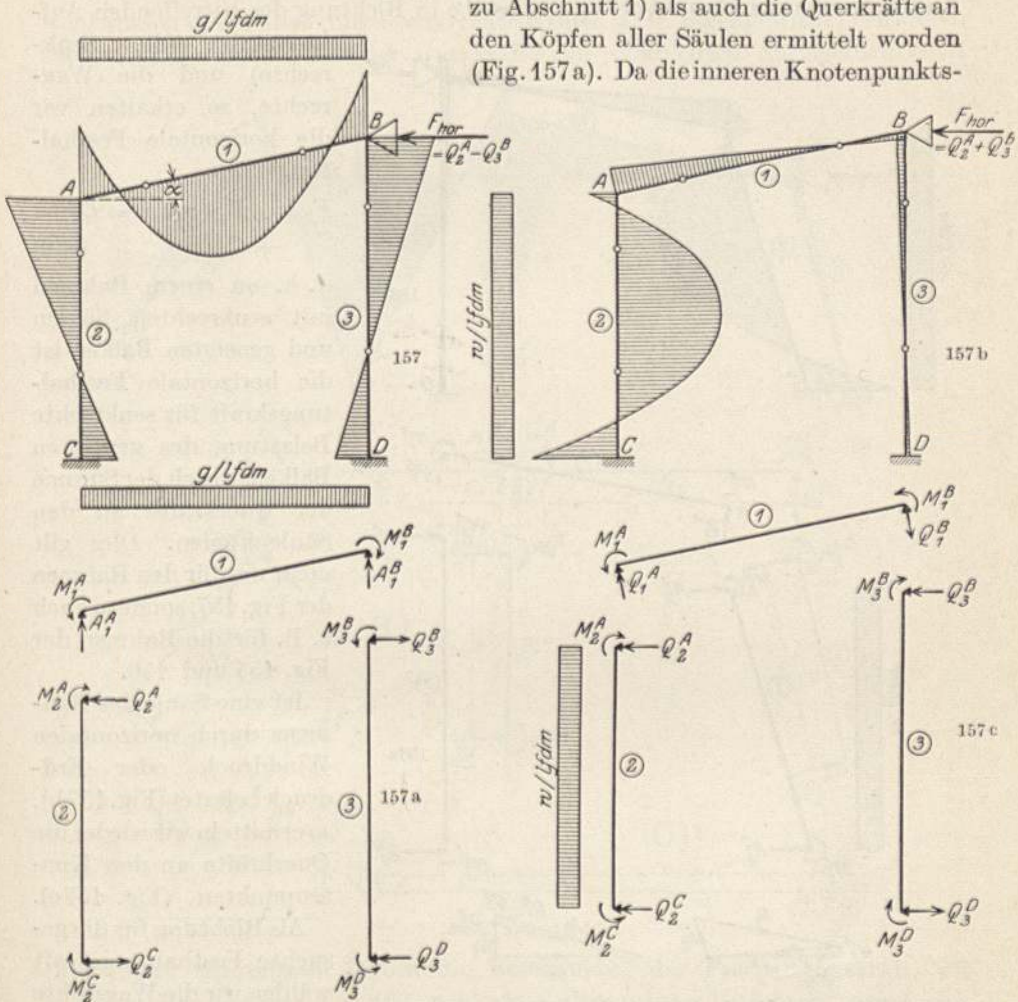


Fig. 157—157 c.

kräfte senkrecht aufeinanderstehen, wählen wir als Richtung der Festhaltungskraft die Wagrechte durch einen der beiden Knotenpunkte. Die senkrechten Kräfte an den Knotenpunkten  $A$  und  $B$  fallen in die betreffenden Auflagerstäbe, scheidet damit aus, und es bleiben nur die wagrechten Kräfte  $Q_2^A$  und  $Q_3^B$  als Komponenten der Festhaltungskraft  $F_{hor}$  übrig. Zerlegen wir nun sowohl  $Q_2^A$  als auch  $Q_3^B$  in den betreffenden Auflagerstab (die Senkrechte) und den unter dem Winkel  $\alpha$  zur Wagrechten geneigten Balken 1, so erhalten wir

$$N_1^A = \frac{Q_2^A}{\cos \alpha} \quad \text{und} \quad N_1^B = \frac{Q_3^B}{\cos \alpha},$$

wodurch wir die Festhaltungskraft  $F_1$  in Richtung des Balkens 1

$$F_1 = N_1^A + N_1^B = \frac{Q_2^A + Q_3^B}{\cos \alpha}$$

erhalten. Verschieben wir nun die Kraft  $F_1$  in ihrer Richtung an einen der beiden Knotenpunkte und zerlegen dieselbe in Richtung des betreffenden Auf-

lagerstabes (die Senkrechte) und die Wagrechte, so erhalten wir die horizontale Festhaltungskraft

$$F_{\text{hor}} = F_1 \cdot \cos \alpha = Q_2^A + Q_3^B, \quad (329)$$

d. h. an einem Rahmen mit senkrechten Säulen und geneigten Balken ist die horizontale Festhaltungskraft für senkrechte Belastung des geneigten Balkens gleich der Summe der Querkräfte an den Säulenköpfen. Dies gilt nicht nur für den Rahmen der Fig. 157, sondern auch z. B. für die Rahmen der Fig. 155 und 156.

Ist eine Säule des Rahmens durch horizontalen Winddruck oder Erdruck belastet (Fig. 157 b), so ermitteln wir wieder die Querkräfte an den Knotenpunkten (Fig. 157 c).

Als Richtung für die gesuchte Festhaltungskraft wählen wir die Wagrechte durch einen Knotenpunkt.

Wir zerlegen die an den

Knotenpunkten angreifenden Querkräfte einzeln in die Senkrechte und Wagrechte, ohne sie zuerst zu  $Q_{\text{res}}$  zusammzusetzen.  $Q_2^A$  und  $Q_3^B$  fallen ganz in die Wagrechte. Die beiden Querkräfte  $Q_1^A$  und  $Q_2^B$  sind gleich und entgegengesetzt, ergeben also auch Horizontalprojektionen, die gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Da an den Knotenpunkten A und B nur wagrechte Kräfte angreifen, so ist die wagrechte Festhaltungskraft nach Gl. (329) einfach gleich der Summe dieser Kräfte; es ist also, da sich die beiden, von den Querkräften am unbelasteten Balken herrührenden wagrechten Komponenten gegenseitig aufheben:

$$F_{\text{hor}} = Q_2^A + Q_3^B. \quad (329a)$$

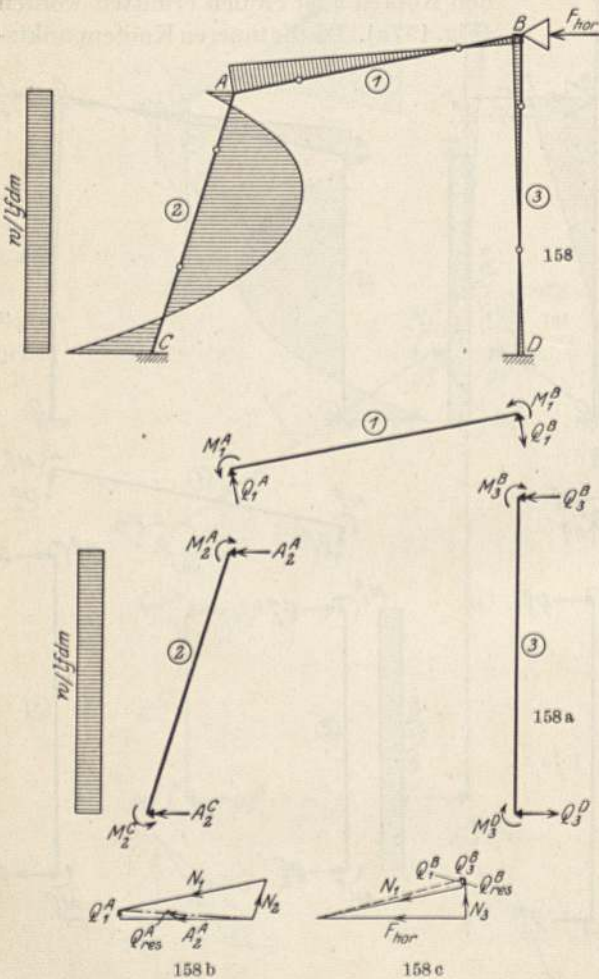


Fig. 158—158 c.



Als Kontrolle muß sein:  $\sum w + Q_2^A + Q_2^C + Q_3^B + Q_3^D = 0$ .

Das Analoge gilt auch z. B. für die Rahmen der Fig. 155 und 156.

Steht die durch horizontalen Winddruck oder Erddruck belastete Säule schief (Fig. 158) anstatt senkrecht, so bestimmen wir an den Enden derselben wohl analog wie an dem durch senkrechte Kräfte (z. B. Eigengewicht) belasteten Balken (Fig. 157) anstelle der Querkräfte die senkrechten Auflagerdrücke  $A$

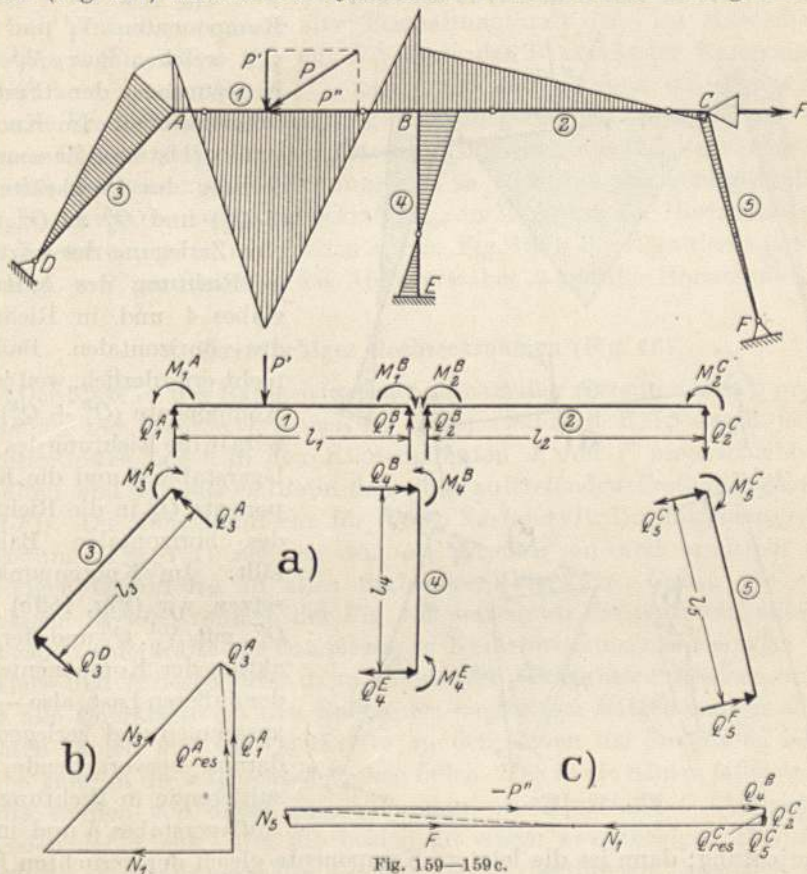


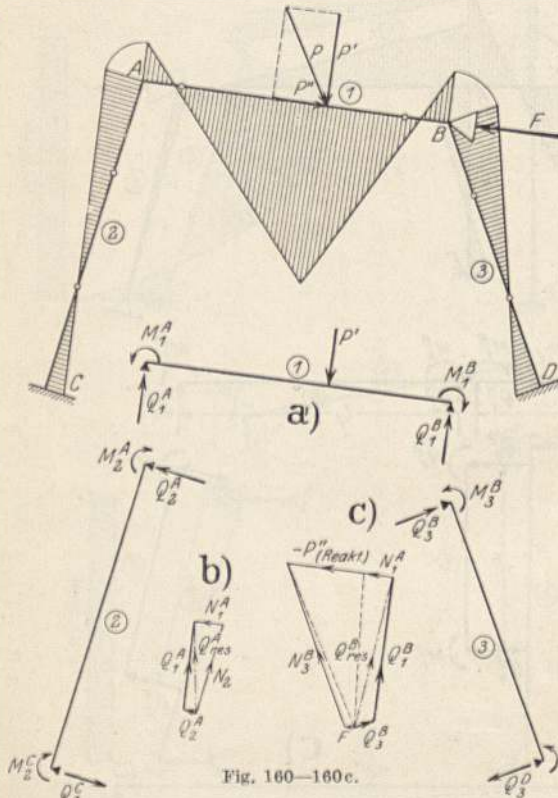
Fig. 159—159c.

(Fig. 158a), wir müssen jedoch die Bestimmung der Festhaltungskraft, wie z. B. am Rahmen der Fig. 160, nach dem allgemeinen Verfahren vornehmen, da die Säulen nicht mehr parallel verlaufen. Wir bilden am Knotenpunkt  $A$  die Resultierende  $Q_{res}^A$  aus  $A_2^A$  und  $Q_1^A$  und zerlegen dieselbe in Richtung des Auflagerstabes 2 und des Balkens (Fig. 158b). Dann setzen wir am Knotenpunkt  $B$   $Q_1^B$  und  $Q_3^B$  zu  $Q_{res}^B$  zusammen (Fig. 158c) und bilden die Resultierende von  $Q_{res}^B$  und der in Fig. 158b bestimmten „Reaktion“  $N_1$ ; durch Zerlegung derselben in Richtung des Auflagerstabes 3 und die Horizontale erhalten wir darauf die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{hor}$ .

### 7. Rahmen mit schiefen Endsäulen und wagrechttem Balken (Fig. 159).

Die Balkenöffnung  $I$  sei mit einer beliebig gerichteten Kraft  $P$  belastet, welche wir wieder in eine Komponente  $P'$  normal zum belasteten Stab und eine

Komponente  $P''$  in Richtung dieses Stabes zerlegen. Der Rahmen sei während R. I durch ein in  $C$  gedachtes, festes Lager unverschiebbar festgehalten und wir suchen die in demselben auftretende Festhaltungskraft in Richtung des Balkens. Die Momentenfläche für diesen Zustand infolge der Belastung  $P'$  (Fig. 159) nehmen wir als gegeben an, ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden des Rahmens (Fig. 159a) und bilden die Resultierende  $Q_{\text{res}}$  an jedem Knotenpunkt. In Knotenpunkt  $A$  zerlegen wir nun  $Q_{\text{res}}^A$  (Fig. 159b) in die



Komponenten  $N_1^A$  und  $N_2$ , von welchen nur  $N_1^A$  eine Komponente der Festhaltungskraft ist. Im Knotenpunkt  $B$  ist eine Zusammensetzung der Querkräfte ( $Q_1^B + Q_2^B$ ) und  $Q_4^B$  zu  $Q_{\text{res}}^B$  und eine Zerlegung der letzteren in Richtung des Auflagerstabes 4 und in Richtung des horizontalen Balkens nicht erforderlich, weil ja die Komponente ( $Q_1^B + Q_2^B$ ) bereits in die Richtung des Auflagerstabes 4 und die Komponente  $Q_4^B$  in die Richtung des horizontalen Balkens fällt. Im Knotenpunkt  $C$  setzen wir (Fig. 159c) nun  $Q_{\text{res}}^C$  mit  $N_1^A$ ,  $Q_4^B$  und der Reaktion der Komponente  $P''$  der äußeren Last, also  $-P''$ , zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 5 und in die

Balkenrichtung; dann ist die letztere Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft in Richtung des Balkens.

Wäre der Rahmen der Fig. 159 durch horizontalen Winddruck auf eine Endsäule belastet, so würden wir diese Belastung analog dem unter Sonderfall zu Abschnitt 1 Gesagten zweckmäßig nicht zerlegen, sondern die Momentenfläche mit der Projektion der Säulenlänge auf die Senkrechte ermitteln und schief-symmetrisch oder rechtwinklig an die Säule antragen. Ferner würden wir dann zur Bestimmung der Festhaltungskraft am Säulenkopf nicht die Querkraft (normal zur Säulenachse), sondern den wagrechten Auflagerdruck  $A$  ermitteln und diesen in der weiteren Berechnung verwenden.

### 8. Rahmen mit schiefen Säulen und geneigtem Balken (Fig. 160).

Der Balken sei mit einer beliebig gerichteten Kraft  $P$  belastet, welche wir wieder in die Komponenten  $P'$  und  $P''$  normal und parallel zum belasteten Stab

zerlegen. Der Rahmen sei während R. I. durch ein in  $B$  gedachtes Lager unverschiebbar festgehalten und wir suchen die in demselben auftretende Festhaltungskraft in Richtung des geneigten Balkens. Die Momentenfläche für diesen Zustand (R. I.) infolge der Belastung  $P'$  (Fig. 160) nehmen wir als gegeben an und ermitteln die zugehörigen Querkräfte an beiden Knotenpunkten des Rahmens (Fig. 160a) und bilden die Resultierenden  $Q_{\text{res}}^A$  und  $Q_{\text{res}}^B$ . Im Knotenpunkt  $A$  zerlegen wir  $Q_{\text{res}}^A$  (Fig. 160b) in die Komponenten  $N_2$  und  $N_1^A$ , von welchen nur  $N_1^A$  eine Komponente der Festhaltungskraft ist. Im Knotenpunkt  $B$  setzen wir (Fig. 160c)  $Q_{\text{res}}^B$  mit  $N_1^A$  sowie der Reaktion der Komponente  $P''$  der äußeren Last, also  $-P''$ , zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 3 und diejenige des geneigten Balkens (Stab I); dann ist die in Richtung des Balkens fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft in Richtung des geneigten Balkens. Wünschen wir die Festhaltungskraft  $F_{\text{hor}}$  in Richtung der Horizontalen durch den Knotenpunkt  $B$ , so zerlegen wir in Fig. 160b die Resultierende aus  $Q_{\text{res}}^B$ ,  $N_1^A$  und  $-P''$  in Richtung des Auflagerstabes 3 und die Horizontale.

### 9. Zweistöckiger Rechteckrahmen (Fig. 161).

Der Stab 10 des Rahmens sei mit gleichmäßig verteilter Last  $p$  pro lfd. m belastet. Der Stockwerkrahmen sei ferner (während R. I.) durch je ein gedachtes festes Lager in den Knotenpunkten  $J$  und  $F$  unverschiebbar festgehalten und wir suchen die in denselben auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I$  und  $F_{II}$ . Die Momentenfläche für diesen Zustand (R. I.) infolge der gegebenen Belastung (Fig. 161) nehmen wir als gegeben an und ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden (Fig. 161). Genau wie am einstöckigen Rechteckrahmen der Fig. 152 setzen wir die senkrecht aufeinander stehenden Querkräfte an den einzelnen Knotenpunkten nicht erst zu  $Q_{\text{res}}$  zusammen und zerlegen diese dann in dieselben Richtungen, sondern wir sehen, daß alle Querkräfte an den Enden der wagrechten Balken ganz in die senkrechten Säulen und die Querkräfte an den Enden der die Säulen bildenden Stäbe ganz in die wagrechten Balken fallen. Die in die Säulen fallenden Querkräfte werden von diesen in die Fundamente  $A$ ,  $B$  und  $C$  übertragen und scheiden daher aus. Um die beiden an einem zweistöckigen Rahmen auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I$  und  $F_{II}$  zu bestimmen, brauchen wir nur die wagrechten Querkräfte („Reaktionen“) der Knotenpunkte, welche in die betreffende Balkenrichtung fallen, zu vereinigen. In der Balkenrichtung 9–10 wirken die Reaktionen  $Q_6^G$ ,  $Q_7^H$  und  $Q_8^J$  (Fig. 161b), welche zusammengesetzt die Festhaltungskraft  $F_I$  ergeben; in der Balkenrichtung 4–5 wirken die Reaktionen  $Q_6^D$ ,  $Q_7^E$ ,  $Q_8^F$  sowie  $Q_1^D$ ,  $Q_2^E$  und  $Q_3^F$  (Fig. 161c), welche zusammengesetzt die Festhaltungskraft  $F_{II}$  ergeben.

### 10. Zweistöckiger unsymmetrischer Jochrahmen (Fig. 162).

Der Stab 3 sei mit einer beliebig gerichteten Kraft  $P$  belastet, welche wir wieder in die Komponenten  $P'$  und  $P''$  normal und parallel zum belasteten Stab zerlegen. Der Rahmen sei (während R. I.) durch je ein gedachtes festes Lager in den Knotenpunkten  $B$  und  $D$  unverschiebbar festgehalten und wir

suchen die in denselben auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I$  und  $F_{II}$ . Die Momentenfläche für diesen Zustand (Fig. 162) infolge der gegebenen Belastung nehmen wir als gegeben an, ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen

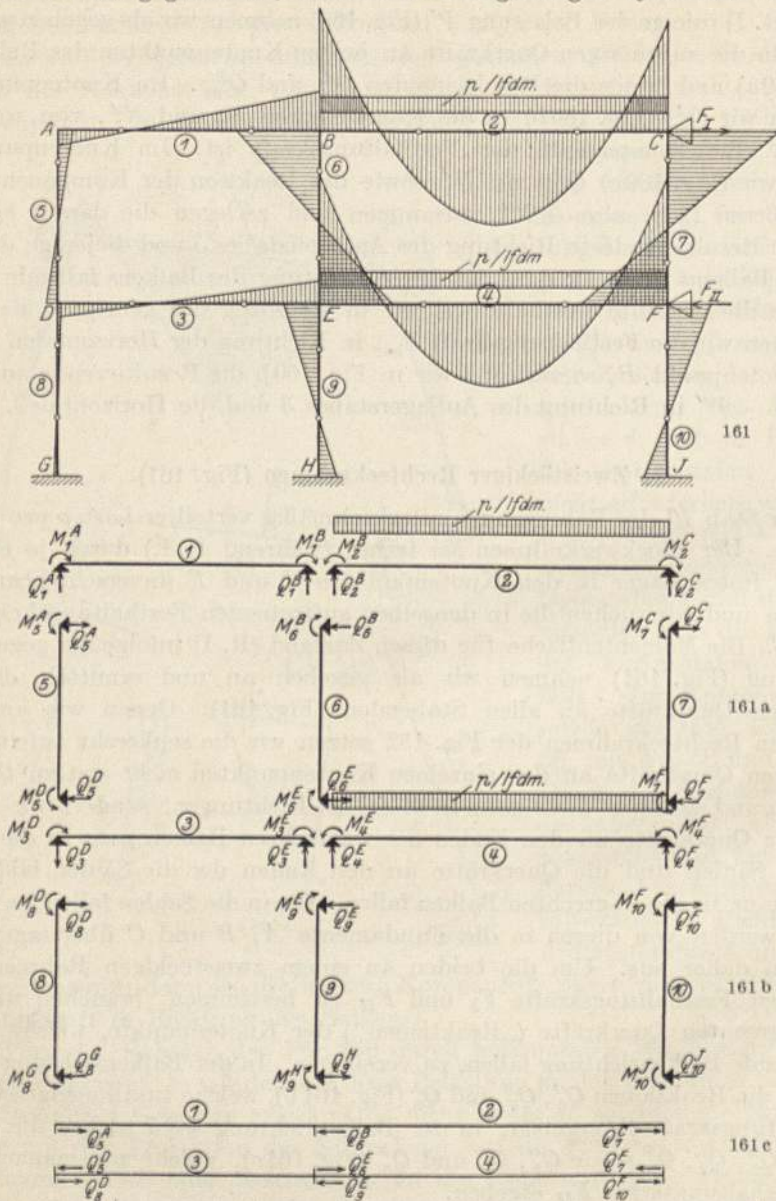


Fig. 161—161 c.

Stabenden und bilden die Resultierende  $Q_{\text{res}}$  an jedem Knotenpunkt. Im Knotenpunkt A zerlegen wir  $Q_{\text{res}}^A$  (Fig. 162a) in die Komponenten  $N_1$  und  $N_3^A$ , von welchen nur  $N_1$  eine Komponente der Festhaltungskraft  $F_I$  ist, während  $N_3^A$  bei der Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_{II}$  in Betracht kommt. Nun setzen wir am Knotenpunkt B  $Q_{\text{res}}^B$  mit  $N_1$  zusammen (Fig. 162b) und zer-

legen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Stabes 4 und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft  $F_I$ . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_{II}$  setzen wir in Fig. 162c  $Q_{res}^C$  mit der in Fig. 162a bestimmten „Reaktion“  $N_3^A$  sowie der „Reaktion“ von  $P''$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponenten  $N_2$  und  $N_5$ , von denen nur  $N_2$  eine Kompo-

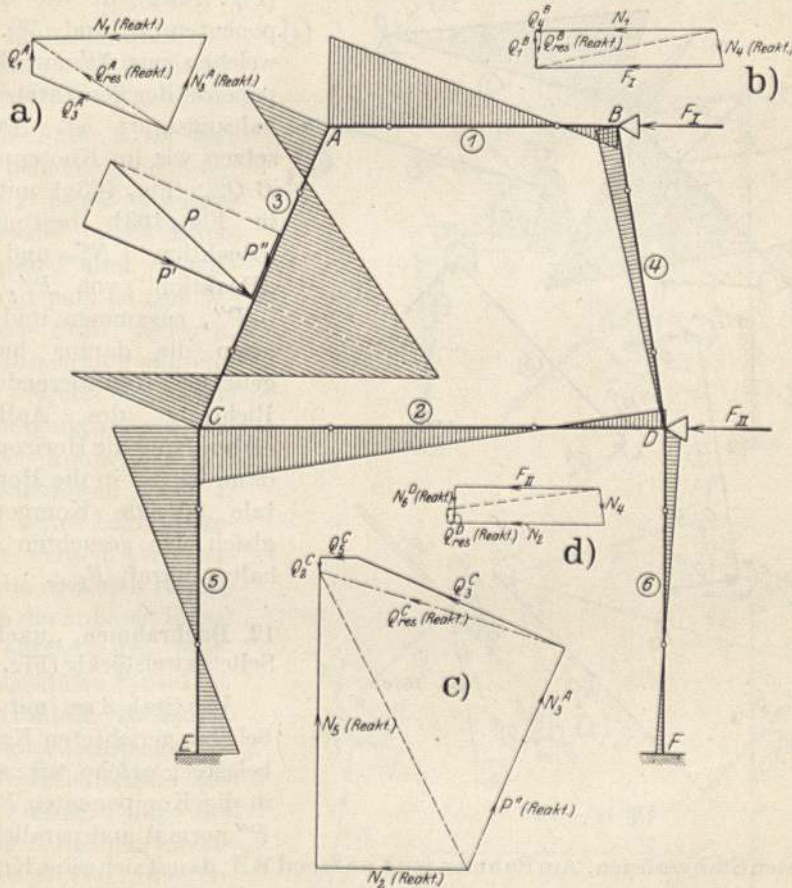


Fig. 162—162 d.

nente der Festhaltungskraft  $F_{II}$  ist. Schließlich setzen wir in Fig. 162d  $Q_{res}^D$  mit der in Fig. 162c bestimmten „Reaktion“  $N_2$  sowie der in Fig. 162b bestimmten „Reaktion“  $N_4$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 6 und die Horizontale; die in die Horizontale fallende Komponente ist dann die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{II}$ .

### 11. Dachrahmen, einstöckig (Fig. 163).

Der Stab 2 sei mit einer beliebig gerichteten Kraft  $P$  belastet, welche wir wieder in die Komponenten  $P'$  und  $P''$  normal und parallel zum belasteten Stab zerlegen. Am Rahmen muß während R. I, damit sich seine Knotenpunkte nicht verschieben können, in B oder C ein festes Lager angebracht werden. Wir

bringen dieses Lager beispielsweise am Knotenpunkt  $B$  an und suchen die in demselben auftretende Festhaltungskraft (Auflagerdruck) in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für diesen Zustand (R. I) infolge der Belastung  $P'$  nehmen wir als gegeben (Fig. 163) an, ermitteln die zugehörigen Querkräfte an den Knotenpunkten  $B$  und  $C$  (Fig. 163a) und bilden die Resultierenden  $Q_{res}^B$  und  $Q_{res}^C$ . Im Knotenpunkt  $C$  zerlegen wir nun  $Q_{res}^C$

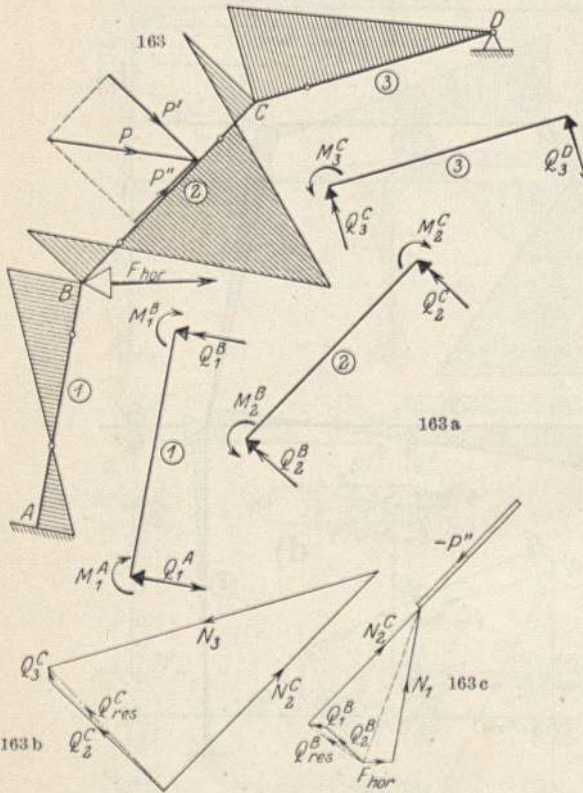


Fig. 163—163 c.

(Fig. 163b) in die Komponenten  $N_3$  und  $N_2^C$ , von welchen nur  $N_2^C$  eine Komponente der gesuchten Festhaltungskraft ist. Darauf setzen wir im Knotenpunkt  $B$   $Q_{res}^B$  (Fig. 163c) mit der in Fig. 163b bestimmten „Reaktion“  $N_2^C$  und der „Reaktion“ von  $P''$ , also  $-P''$ , zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes  $I$  und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft  $F_{hor}$ .

## 12. Dachrahmen, „nach der Seite“ zweistöckig (Fig. 164).

Der Stab 2 sei mit einer beliebig gerichteten Kraft  $P$  belastet, welche wir wieder in die Komponenten  $P'$  und  $P''$  normal und parallel zum

belasteten Stab zerlegen. Am Rahmen muß während R. I, damit sich seine Knotenpunkte nicht verschieben können, in den Knotenpunkten  $B$  und  $D$  je ein festes Lager angebracht werden. Wir suchen nun die in diesen Lagern infolge der äußeren Belastung auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I$  und  $F_{II}$  in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand infolge der Belastung  $P'$  nehmen wir als gegeben an (Fig. 164), ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden (Fig. 164a) und bilden die Resultierende  $Q_{res}$  an jedem Knotenpunkt. Im Knotenpunkt  $C$  zerlegen wir nun  $Q_{res}^C$  (Fig. 164b) in die Komponenten  $N_3$  und  $N_2^C$ , von welchen die erstere eine Komponente von  $F_I$  und letztere eine Komponente von  $F_{II}$  ist. Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_I$  setzen wir in Fig. 164c  $Q_{res}^D$  mit der in Fig. 164b bestimmten „Reaktion“  $N_3$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes  $I$  und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_I$ . Zur

Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_{II}$  setzen wir in Fig. 164d  $Q_{res}^B$  mit der in Fig. 164b bestimmten „Reaktion“  $N_2^C$  sowie der „Reaktion“ von  $P''$  (also nach abwärts gerichtet) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes  $I$  und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft  $F_{II}$ .

### 13. Einfacher Hallenrahmen, „nach der Seite“ zweistöckig (Fig. 165).

Der Stab 2 sei mit einer beliebig gerichteten Kraft  $P$  belastet, welche wir wieder in die Komponenten  $P'$  und  $P''$  normal und parallel zum belasteten Stab zerlegen. Am Rahmen muß während R. I, damit sich seine Knotenpunkte nicht verschieben können, in den Knotenpunkten  $B$  und  $D$  je ein festes Lager angebracht werden. Wir suchen die in diesen Lagern infolge der äußeren Belastung auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I$  und  $F_{II}$  in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand infolge der Belastung  $P'$  nehmen wir als gegeben an (Fig. 165), ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden (Fig. 165a) und bilden die Resultierende  $Q_{res}$  an jedem Knotenpunkt.

In Fig. 165b zerlegen wir darauf  $Q_{res}^C$  in die Komponenten  $N_2^C$  und  $N_3$ , von welchen erstere einen Anteil zu  $F_I$  und letztere einen solchen zu  $F_{II}$  liefert. Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_I$  setzen wir in Fig. 165c  $Q_{res}^D$  mit der in Fig. 165b bestimmten „Reaktion“  $N_2^C$  und der „Reaktion“ von  $P''$  (also nach abwärts gerichtet) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes  $I$  und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_I$ . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_{II}$  setzen wir in Fig. 165d  $Q_{res}^B$  mit der in Fig. 165b bestimmten „Reaktion“  $N_3$  zusammen und

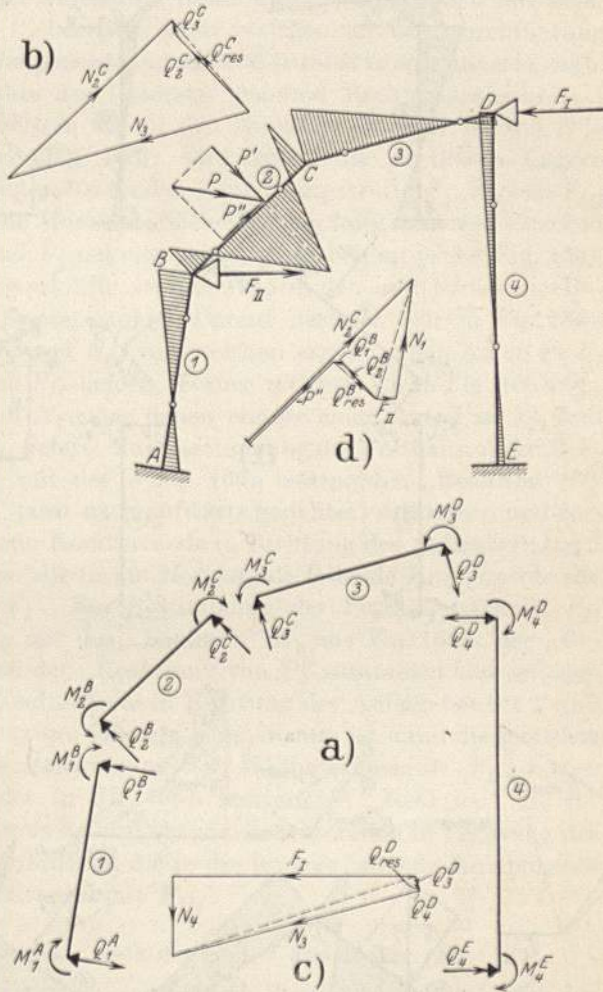


Fig. 164—164d.

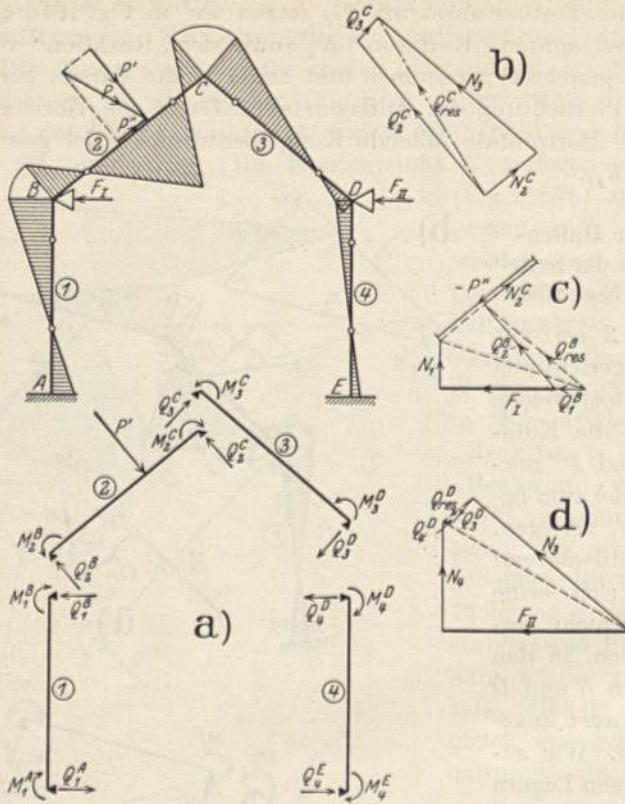


Fig. 165-165 d.

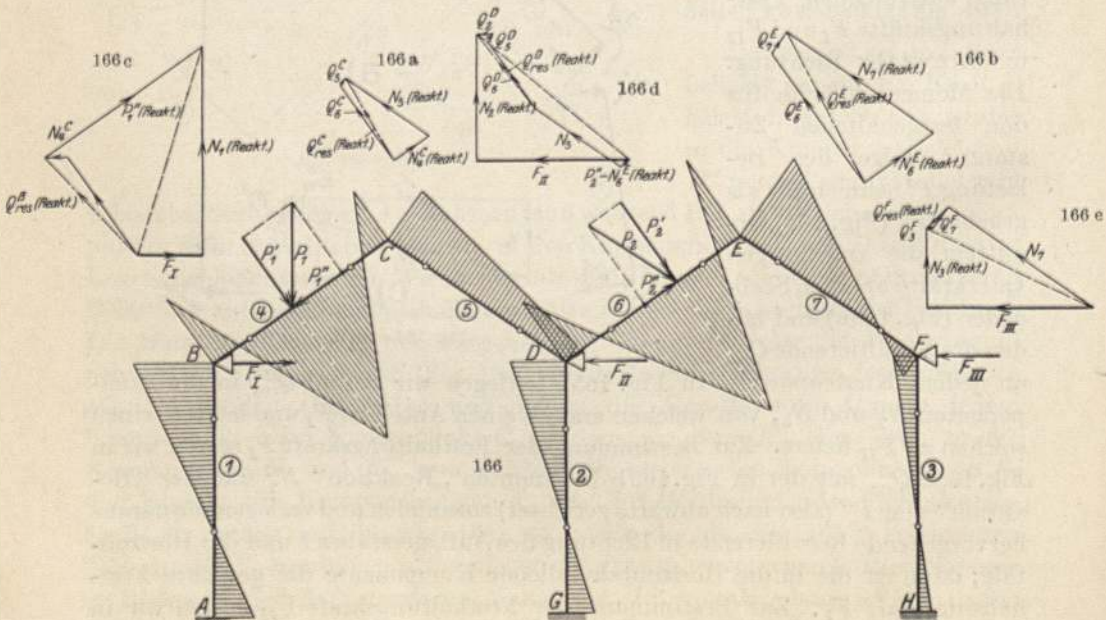


Fig. 166-166 e.



zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 4 und die Horizontale; die in die letztere fallende Komponente ist dann gleich der gesuchten Festhaltungskraft  $F_{II}$ .

#### 14. Doppelter Hallenrahmen, „nach der Seite“ dreistöckig (Fig. 166).

Der Stab 4 sei mit einer vertikalen Kraft  $P_1$  und der Stab 6 mit einer beliebig gerichteten Kraft  $P_2$  belastet; beide zerlegen wir zur Durchführung der Berechnung in je eine Komponente normal und parallel zum belasteten Stab. Damit sich die Knotenpunkte des Rahmens während Rechnungsabschnitt I nicht verschieben können, müssen wir an den Knotenpunkten  $B$ ,  $D$  und  $F$  je ein festes Lager anbringen (Fig. 166); wir suchen die in diesen Lagern infolge der äußeren Belastung auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I$ ,  $F_{II}$  und  $F_{III}$  in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand infolge der Belastung  $P'_1$  und  $P'_2$  nehmen wir als gegeben an (siehe Fig. 166), ermitteln die zugehörigen Querkkräfte an allen Stabenden und bilden die Resultierende  $Q_{\text{res}}$  an jedem Knotenpunkt. Darauf zerlegen wir in Fig. 166a  $Q_{\text{res}}^C$  in die Komponenten  $N_4^C$  und  $N_5$ , von welchen erstere einen Anteil zu  $F_I$  und letztere einen solchen zu  $F_{II}$  liefert. Ferner zerlegen wir in Fig. 166b  $Q_{\text{res}}^E$  in die Komponenten  $N_6^E$  und  $N_7$ , von denen erstere einen Anteil zu  $F_{II}$  und letztere einen solchen zu  $F_{III}$  liefert. Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_I$  setzen wir in Fig. 166c  $Q_{\text{res}}^B$  mit der in Fig. 166a bestimmten „Reaktion“  $N_4^C$  und der „Reaktion“ von  $P'_1$  (also nach aufwärts gerichtet) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 1 und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_I$ . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_{II}$  setzen wir in Fig. 166d  $Q_{\text{res}}^D$  mit der „Reaktion“  $N_5$  aus Fig. 166a, der „Reaktion“  $N_6^E$  aus Fig. 166b und der „Reaktion“ von  $P'_2$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 2 und die Horizontale; die in die letztere fallende Komponente ist dann die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{II}$ . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_{III}$  setzen wir in Fig. 166e  $Q_{\text{res}}^F$  mit der in Fig. 166b bestimmten „Reaktion“  $N_7$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 3 und die Horizontale; die in die letztere fallende Komponente ist dann die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{III}$ .

#### 15. Einfacher Hallenrahmen, „nach der Seite“ dreistöckig (Fig. 167).

Die Stäbe 1 und 2 des Rahmens seien durch horizontalen Winddruck belastet. Damit sich sämtliche Knotenpunkte des Rahmens während Rechnungsabschnitt I nicht verschieben können, müssen wir an den Knotenpunkten  $B$ ,  $D$  und  $E$  je ein festes Lager anbringen (siehe Fig. 167) und wir suchen die in diesen Lagern infolge der äußeren Belastung auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I$ ,  $F_{II}$  und  $F_{III}$  in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand infolge der äußeren Belastung nehmen wir als gegeben an (siehe Fig. 167), ermitteln die zugehörigen Querkkräfte an allen Stabenden (Fig. 167a) und bilden die Resultierende  $Q_{\text{res}}$  an jedem Knotenpunkt. Am Stab 2 zerlegen wir den horizontal angreifenden Winddruck nicht normal und parallel zu ihm, sondern ermitteln an seinen Enden anstelle der Querkkräfte die wagrechten

Auflagerdrücke  $A$  (vgl. Sonderfall im Abschnitt 1), welche wir genau wie sonst die Querkräfte in der weiteren Berechnung verwenden. In Fig. 167b zerlegen wir nun  $Q_{\text{res}}^C$  (Resultierende von  $Q_3^C$  und  $A_2^C$ ) in die Komponenten  $N_2$  und  $N_3$ , von welchen erstere einen Anteil zu  $F_{III}$  und letztere einen solchen zu  $F_I$  liefert. Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_I$  setzen wir in Fig. 167c  $Q_{\text{res}}^D$  mit der in Fig. 167b bestimmten „Reaktion“  $N_3$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Stabes 4 und die Horizontale; dann ist die horizontale Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_I$ . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_{II}$  setzen wir in Fig. 167d  $Q_{\text{res}}^E$  mit der

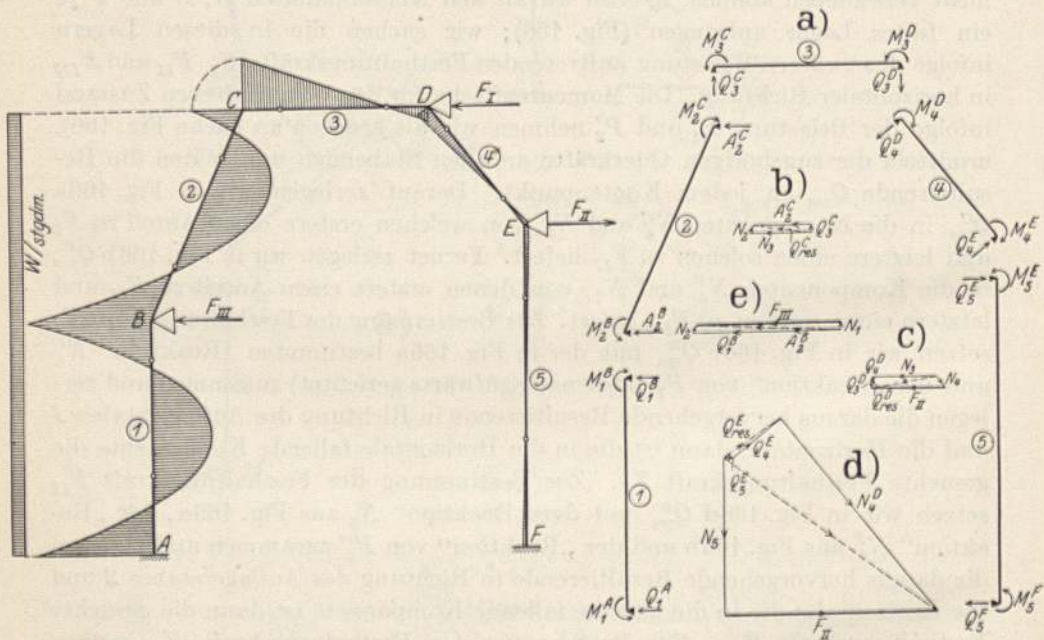


Fig. 167—167 e.

in Fig. 167c bestimmten „Reaktion“  $N_4$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Stabes 5 und die Horizontale; dann ist die horizontale Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{II}$ . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_{III}$  setzen wir in Fig. 167e  $Q_{\text{res}}^B$  mit der in Fig. 167b bestimmten „Reaktion“  $N_2$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Stabes 1 und die Horizontale; dann ist die horizontale Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{III}$ .

### 16. Doppelter Dachrahmen, „nach der Seite“ dreistöckig (Fig. 168).

Der Stab 2 des Rahmens sei mit einer beliebig gerichteten Kraft  $P$  belastet, welche wir wieder in die Komponenten  $P'$  und  $P''$  normal und parallel zum belasteten Stab zerlegen. Damit sich kein Knotenpunkt des Rahmens während Rechnungsabschnitt I verschieben kann, müssen wir an den Knotenpunkten B, E und F je ein festes Lager anbringen (siehe Fig. 168); wir suchen die in

diesen Lagern infolge der äußeren Belastung auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I$ ,  $F_{II}$  und  $F_{III}$  in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand infolge der Belastung  $P'$  nehmen wir als gegeben an (siehe Fig. 168), ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden (Fig. 168a) und bilden die Resultierende  $Q_{res}$  an jedem Knotenpunkt. Darauf zerlegen wir in Fig. 168b  $Q_{res}^C$  in die Komponenten  $N_2^C$  und  $N_3$ , von welchen erstere einen Anteil zu  $F_{II}$  und letztere einen solchen zu  $F_I$  liefert. Die im Knoten-

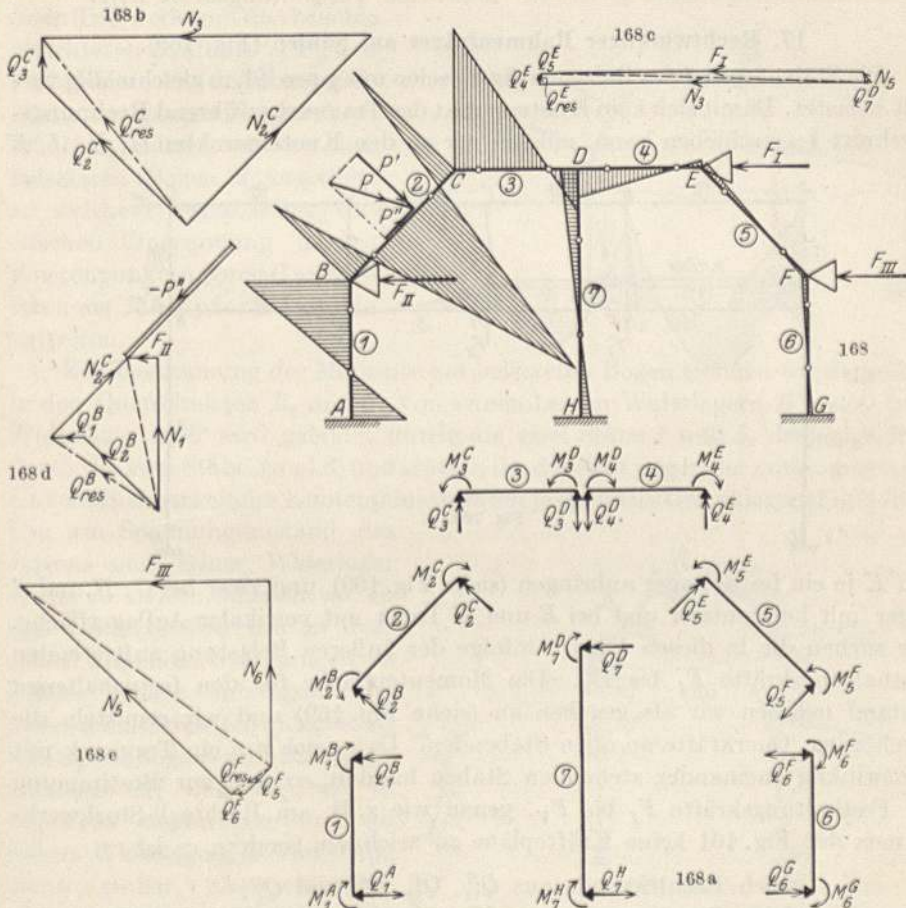


Fig. 168—168 e.

punkt  $D$  angreifenden Querkräfte brauchen wir nicht erst zusammzusetzen und dann nachher in ihre eigenen Richtungen zu zerlegen, sondern wir erkennen, daß  $Q_3^D$  und  $Q_4^D$  ganz in den Auflagerstab 7 fallen und damit ausscheiden und daß  $Q_5^E$  ganz von dem Lager in  $E$  aufgenommen wird. Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_I$  setzen wir daher in Fig. 168c  $Q_{res}^E$  mit der in Fig. 168b bestimmten „Reaktion“  $N_3$  sowie  $Q_7^D$  zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Richtung des Stabes 5 und die Horizontale; dann ist die horizontale Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_I$ . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_{II}$  setzen wir in Fig. 168d  $Q_{res}^B$  mit der

in Fig. 168 b bestimmten „Reaktion“  $N_2^G$  und der „Reaktion“ von  $P''$  (also nach abwärts gerichtet) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes  $I$  und die Horizontale; dann ist die horizontale Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{II}$ . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft  $F_{III}$  setzen wir in Fig. 168 e bestimmten „Reaktion“  $N_5$  zusammen und zerlegen die dadurch erhaltene Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 6 und die Horizontale; es ist dann die horizontale Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft  $F_{III}$ .

### 17. Rechtwinkliger Rahmenträger auf Säulen (Fig. 169).

Die Stäbe 3 und 4 des Rahmenträgers seien mit  $p$  pro lfd. m gleichmäßig verteilt belastet. Damit sich kein Knotenpunkt des Tragwerks während Rechnungsabschnitt I verschieben kann, müssen wir an den Knotenpunkten  $G, H, J, E$

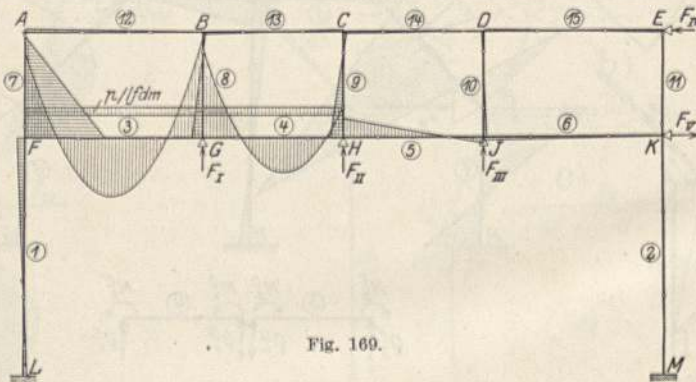


Fig. 169.

und  $K$  je ein festes Lager anbringen (siehe Fig. 169), und zwar bei  $G, H$  und  $J$  Lager mit horizontaler und bei  $E$  und  $K$  Lager mit vertikaler Auflagerfläche. Wir suchen die in diesen Lagern infolge der äußeren Belastung auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I$  bis  $F_V$ . Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand nehmen wir als gegeben an (siehe Fig. 169) und wir ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden. Da es sich um ein Tragwerk mit rechtwinklig zueinander stehenden Stäben handelt, so sind zur Bestimmung der Festhaltungskräfte  $F_I$  bis  $F_V$  genau wie z. B. am Rechteck-Stockwerkrahmen der Fig. 161 keine Kräftepläne zu zeichnen, sondern es ist

- $F_I$  gleich Resultierende aus  $Q_{12}^B, Q_{13}^B, Q_3^G$  und  $Q_4^G$ ;
- $F_{II}$  gleich Resultierende aus  $Q_{13}^C, Q_{14}^C, Q_4^H$  und  $Q_5^H$ ;
- $F_{III}$  gleich Resultierende aus  $Q_{14}^D, Q_{15}^D, Q_5^J$  und  $Q_6^J$ ;
- $F_{IV}$  gleich Resultierende aus  $Q_7^A, Q_8^B, Q_9^C, Q_{10}^D$  und  $Q_{11}^E$ ;
- $F_V$  gleich Resultierende aus  $Q_7^F, Q_1^F, Q_8^G, Q_9^H, Q_{10}^J, Q_{11}^K$  und  $Q_2^K$ .

## VIII. Bestimmung der inneren Kräfte an einem Tragwerk mit bogenförmigen Stäben.

### 1. Gang der Berechnung.

In Fig. 170 haben wir ein Tragwerk dargestellt, welches nicht nur aus geradlinigen, sondern auch aus bogenförmigen Stäben besteht, deren Trägheits-

moment beliebig veränderlich ist. Zunächst setzen wir voraus, daß die Knotenpunkte  $A, B, C, D$  dieses Tragwerkes unverschiebbar festgehalten seien (Rechnungsabschnitt I); die Bestimmung der inneren Zusatzkräfte, welche bei einer Verschiebung dieser Knotenpunkte auftreten (Rechnungsabschnitt II), ist in Kap. VIII des zweiten Teiles vorgeführt.

Der Gang der Berechnung eines solchen Tragwerkes ist im Prinzip derselbe, wie wenn nur geradlinige Stäbe vorhanden wären (Kap. I).

Es sei nur ein Stab, beispielsweise der bogenförmige Stab 2 des gewichtslosen Tragwerkes mit den beliebig gerichteten Kräften  $P_1, P_2$  und  $P_3$  belastet. Um die Momentenfläche am ganzen Tragwerk zu erhalten, müssen wir von dem belasteten Bogen 2 ausgehen, an welchem wegen seiner elastischen Einspannung in den Knotenpunkten  $B$  und  $C$  an letzteren sog. Kämpfermomente auftreten.

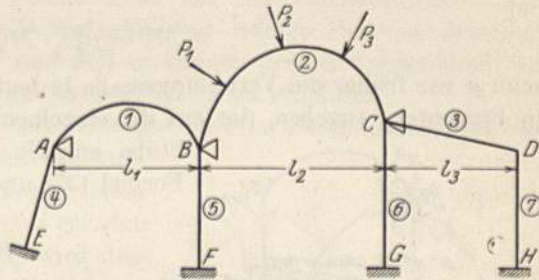


Fig. 170.

Zur Bestimmung der Momente am belasteten Bogen trennen wir denselben in den Querschnitten  $B_2$  und  $C_2$  von seinen beiden Widerlagern  $B$  und  $C$  (sein Widerlager in  $B$  wird gebildet durch die zwei Stäbe 1 und 5, dasjenige in  $C$  durch die zwei Stäbe 3 und 6) und stützen ihn daselbst wegen der vorausgesetzten Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte durch je ein festes Gelenklager (Fig. 170a).

Um am Spannungszustand des Bogens und seiner Widerlager nichts zu ändern, müssen wir an den Schnittstellen die in denselben wirkenden Spannungen als äußere Kräfte anbringen, und zwar an den festen Gelenklagern  $B_2$  und  $C_2$  des Bogens 2 die Kämpfermomente  $M_2^B$  und  $M_2^C$ , wie in Fig. 170a eingetragen, und an seinen Widerlagern  $B$  und  $C$  die gleich großen, aber entgegengesetzt drehenden Momente; die

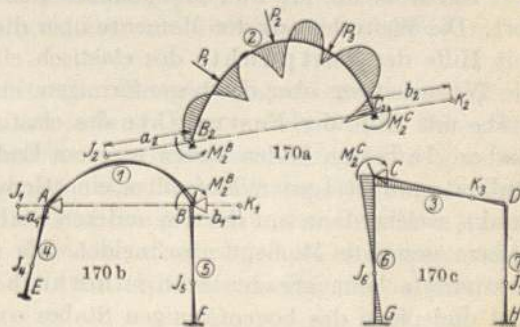


Fig. 170a—c.

Wirkung der in  $B$  und  $C$  auftretenden Kämpferresultierenden auf das Tragwerk brauchen wir vorläufig nicht zu verfolgen, da wir ja die Knotenpunkte  $B$  und  $C$  als unverschiebbar vorausgesetzt haben. Die Kämpferresultierenden werden von den festen Gelenklagern in  $B_2$  und  $C_2$  aufgenommen.

Wir erkennen nun, daß die Momente am belasteten bogenförmigen Stab 2 als diejenigen des Zweigelenkbogens (Fig. 170a) belastet mit den äußeren Lasten  $P_1, P_2, P_3$  sowie mit den Kämpfermomenten  $M_2^B$  und  $M_2^C$  erhalten werden. Am Zweigelenkbogen treten aber sowohl durch die Belastung desselben mit  $P_1, P_2$  und  $P_3$  als auch mit den Kämpfermomenten Bogenschübe (der allgemeine Ausdruck für Horizontalschub) auf, welche bei

der Bestimmung der Momente am Bogen berücksichtigt werden müssen und welche die Berechnung des bogenförmigen Stabes gegenüber derjenigen des geraden Stabes verwickelter gestalten.

Da die Stäbe in ihren Knotenpunkten biegungsfest miteinander verbunden sind, pflanzen sich die Momente von dem belasteten Stab aus über das ganze Tragwerk fort. Das Kämpfermoment  $M_2^B$  (Fig. 170 b) spaltet sich beim Überschreiten des Knotenpunktes  $B$  nach links in die Momente

$$M_1^B = \mu_{2-1}^B \cdot M_2^B$$

und

$$M_5^B = \mu_{2-5}^B \cdot M_2^B,$$

wenn  $\mu$  wie früher die Verteilungsmaße bedeuten, welche den Momentenanteil (in Prozenten) angeben, der auf die einzelnen am Knotenpunkt anstoßenden Stäbe entfällt (siehe Kap. II). Es ist nach Formel (37) und (38)

$$\mu_{2-1}^B = \frac{\tau_5^B}{\tau_1^B + \tau_5^B},$$

$$\mu_{2-5}^B = 1 - \mu_{2-1}^B.$$

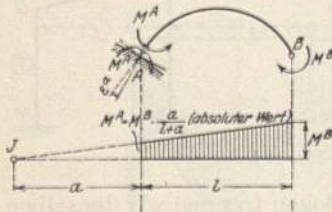


Fig. 170 d.

Der hierin vorkommende Drehwinkel  $\tau_5^B$  des geraden Stabes 5 wird nach Kap. II, 6 bestimmt, während der Drehwinkel  $\tau_1^B$  des Bogens 1 nach der gleichen Formel, in welcher jedoch die am Zweigelenkbogen auftretenden Einheitsdrehwinkel vorkommen, ermittelt wird (siehe Abschnitt 5).

Die Momente  $M_1^B$  und  $M_5^B$  pflanzen sich nun über die unbelasteten Stäbe fort. Die Weiterleitung der Momente über die geraden Stäbe erfolgt wie früher mit Hilfe der Festpunkte des elastisch eingespannten geraden Stabes und die Weiterleitung über die bogenförmigen, an beiden Enden unverschiebbaren Stäbe mit Hilfe der Festpunkte des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes. In beiden Fällen ziehen wir vom Endpunkt des an einem Stabende als Ordinate aufgetragenen Momentes eine Gerade durch den betreffenden Festpunkt, welche dann auf der am anderen Stabende errichteten Ordinate das an diesem gesuchte Moment abschneidet. Es sei aber hervorgehoben, daß die Festpunkte beim geraden Stab innerhalb der Öffnung (positive Abstände) und diejenigen des bogenförmigen Stabes außerhalb der Öffnung (negative Abstände) liegen (vgl. Fig. 170 a, b und c). Es ist also rechnerisch in beiden Fällen

$$M^A = -M^B \cdot \frac{a}{l-a}, \quad (329a)$$

wobei jedoch zu beachten ist, daß der Wert für  $a$  beim elastisch eingespannten bogenförmigen Stab negatives Vorzeichen hat, so daß an letzterem dem absoluten Werte nach:

$$M^A = M^B \cdot \frac{a}{l+a} \quad (\text{vgl. Fig. 170 d}).$$

Während an einem unbelasteten geraden Stab durch die durch den Festpunkt gezogene Gerade der Momentenverlauf am ganzen Stab festgelegt ist,

erhalten wir am unbelasteten bogenförmigen Stab *I* durch die durch den Festpunkt  $J_1$  gezogene Gerade erst das Kämpfermoment am andern Ende des Stabes; der Momentenverlauf am unbelasteten bogenförmigen Stab *I* ergibt sich darauf als derjenige des Zweigelenkbogens belastet mit den Kämpfermomenten  $M_1^A$  und  $M_1^B$ .

Wir erkennen, daß das durch die Kämpferverbindungsline, die Momentenordinaten  $M_1^B$  und  $M_1^A$  sowie die Verbindungsline der letzteren gebildete Momententrapez nichts anderes ist als die Balkenmomentenfläche ( $M_0$ -Fläche) für diesen Belastungszustand, welche noch mit der Momentenfläche herührend vom Bogenschub des Zweigelenkbogens infolge Belasten desselben mit den Kämpfermomenten  $M_1^A$  und  $M_1^B$  zusammen gesetzt werden muß, um die Momentenfläche (Fig. 170 b) am ganzen Stab *I* zu erhalten.

Das Moment  $M_1^A$  wird nun mit Hilfe des unteren Festpunktes über den unbelasteten geraden Stab *4* weitergeleitet.

Die rechts von *C* abgetrennte Konstruktion (Fig. 170 c) besteht nur aus geraden Stäben. Das Kämpfermoment  $M_2^C$  wird deshalb in bekannter Weise unter Benutzung der Festpunkte des geraden Stabes über die unbelasteten Stäbe *3*, *6* und *7* fortgepflanzt.

Sind mehrere Stäbe gleichzeitig belastet, so bestimmt man die Momentenflächen am ganzen Tragwerk für die Belastung dieser Stäbe getrennt voneinander und addiert darauf die Momente unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen; die daraus hervorgehenden totalen Kämpfermomente sind dann der weiteren Berechnung, besonders der Bestimmung des Bogenschubes  $H$  an den bogenförmigen Stäben zugrunde zu legen.

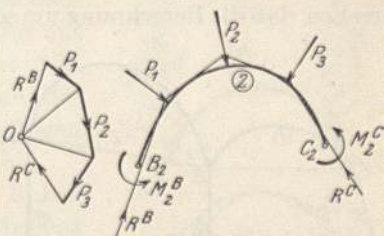


Fig. 170 s.

Um die Quer- und Normalkräfte am belasteten bogenförmigen Stab *2* zu erhalten, zeichnen wir für den mit den äußeren Lasten und den (bei Belastung mehrerer Stäbe totalen) Kämpfermomenten belasteten Zweigelenkbogen die Stützlinie (Fig. 170 e), welche gleichzeitig eine Probe für die Rechnung bildet; am unbelasteten bogenförmigen Stab *I* ist die Stützlinie eine Gerade in einem gewissen Abstand von den beiden Gelenken, sie wird jedoch nicht gebraucht, da es einfacher ist, die inneren Kräfte am unbelasteten Bogen analytisch zu bestimmen.

Die Quer- und Normalkräfte an den geradlinigen Stäben bestimmen wir in bekannter Weise nach Kap. VI.

Zum Schluß ermitteln wir an einem Tragwerk mit verschiebbaren Knotenpunkten, welches in letzteren nur vorübergehend festgehalten gedacht ist, die sog. Festhaltungskräfte, welche alle Knotenpunkte in Ruhe halten. Ein Tragwerk mit bogenförmigen Stäben, wie z. B. dasjenige der Fig. 170 kann nicht durch eine einzige Festhaltungskraft unverschiebbar festgehalten werden, genau wie dies auch beim Stockwerkrahmen (Kap. VII, 2) nicht möglich ist. Wir erhalten eine Festhaltungskraft  $F^A$  im Knotenpunkt *A*, eine Festhaltungskraft  $F^B$  im Knotenpunkt *B* und eine Festhaltungskraft  $F^C$  im Knotenpunkt *C*, welche letztere wegen des geradlinigen Stabes *3* auch den Knotenpunkt *D* in Ruhe hält; diese Festhaltungskräfte werden aus den in den Knotenpunkten

wirkenden Kämpferresultierenden der anschließenden bogenförmigen Stäbe und den Quer- und Normalkräften der anschließenden geraden Stäbe gewonnen.

Sind die Kämpfer der bogenförmigen Stäbe des zu berechnenden Tragwerkes durch elastische Zugbänder miteinander verbunden, so ändert sich der Rechnungsvorgang während R. I nicht. Am Rahmen der Fig. 170 f z. B. müssen während R. I wie am Rahmen der Fig. 170 die Knotenpunkte (Bogenkämpfer)  $A$ ,  $B$  und  $C$  durch je ein festes Lager an denselben unverschiebbar festgehalten werden.

Anmerkung: Der größeren Übersichtlichkeit wegen haben wir den Berechnungsgang des Rahmens der Fig. 170 unter der Voraussetzung vorgeführt, daß der Stab 4 als ein geradliniger und der Stab 1 als ein bogenförmiger Stab betrachtet wird, wodurch wir genötigt sind, während R. I auch am Knotenpunkt  $A$  ein gedachtes festes Lager anzubringen. Aus Teil II werden wir ersehen, daß die Berechnung um so mehr Zeitaufwand erfordert, je mehr Knoten-

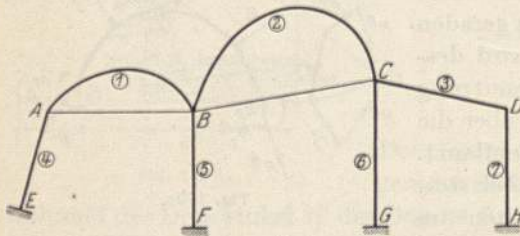


Fig. 170 f.

punkte während R. I mit einem gedachten festen Lager versehen werden müssen. Aus diesem Grunde wäre es auch zweckmäßig, den geraden Stab  $EA$  und den bogenförmigen Stab  $AB$  zusammen als einen unsymmetrischen bogenförmigen Stab zu betrachten, der eben noch ein gerades Stück aufweist,

was aber für die Berechnung nichts zu sagen hat.

Sind die Kämpfer eines bogenförmigen Stabes jedoch durch ein Zugband miteinander verbunden (Fig. 170 f), so muß ein solcher Stab für sich allein betrachtet werden.

## 2. Bestimmung der Festpunkte des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes.

Die beiden Festpunkte eines elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes, dessen Enden keine Verschiebungen ausführen, sind wie beim geraden Stab diejenigen Punkte, in welchen die Verbindungslinie der Kämpfermomente herrührend von einem an einem Stabende eingeleiteten Moment die Kämpferverbindungslinie schneidet.

Wir wissen aus der Anschauung, daß an einem elastisch eingespannten bogenförmigen Stab, an dessen einem Ende ein Moment eingeleitet wird, das dadurch am anderen Ende hervorgerufene Kämpfermoment, im Gegensatz zum geraden Stab, das gleiche Vorzeichen hat; demgemäß muß der Festpunkt, in welchem die Verbindungsgerade der beiden Kämpfermomente die Kämpferverbindungslinie schneidet, im Gegensatz zu demjenigen des elastisch eingespannten geraden Stabes, außerhalb der Öffnung liegen, und ist daher nicht gleichzeitig Momentennullpunkt des Stabes für den genannten Belastungszustand (vgl. Fig. 170 d).

Diese Festpunkte haben eine von der äußeren Belastung unabhängige Lage.



Die Ableitung des Ausdruckes für die Festpunktabstände  $a$  und  $b$  des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes gestaltet sich genau gleich wie diejenige des geraden Stabes (Kap. II, 3).

Bezeichnen wir analog wie bei den Ableitungen für den geraden Stab mit:  $\varphi^a$  bzw.  $\varphi^b$  (Fig. 171 a) den Drehwinkel am linken bzw. rechten Ende des Zweigelenkbogens infolge der äußeren Belastung oder einer Temperaturänderung des Bogens;

$\alpha$  bzw.  $\beta$  (Fig. 171 b) den Drehwinkel am linken bzw. rechten Ende des Zweigelenkbogens infolge Belastung des linken Endes mit dem Moment  $M = 1$  (der Drehwinkel  $\beta$  ist an dem Ende angenommen, wo das Moment nicht eingeleitet wird);

$\beta$  bzw.  $\gamma$  (Fig. 171 c) den Drehwinkel am linken bzw. rechten Ende des Zweigelenkbogens infolge Belastung des rechten Endes mit dem Moment  $M = 1$  (der Winkel  $\beta$  in Fig. 171 c ist nach dem Satze von der Gegenseitigkeit der Formänderungen gleich dem Winkel  $\beta$  in Fig. 171 b);

$\alpha^a$  bzw.  $\alpha^b$  (Fig. 171 d) den Drehwinkel am linken bzw. rechten Ende des Zweigelenkbogens infolge der gleichzeitigen Belastung des linken und des rechten Endes mit dem Moment  $M = 1$ ,

$\varepsilon^a$  bzw.  $\varepsilon^b$  (Fig. 171) die Drehung des Widerlagers  $B$  bzw.  $C$  des bogenförmigen Stabes infolge Belastung des betreffenden Widerlagers mit dem Moment  $M = 1$ ,

so erhalten wir für den Festpunktabstand  $a$  des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes die allgemeine Hauptformel:

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^a + \varepsilon^a}. \tag{330}$$

Analog erhalten wir für den Festpunktabstand  $b$  des bogenförmigen Stabes die allgemeine Hauptformel:

$$b = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^b + \varepsilon^b}. \tag{330 a}$$

Die Werte der hierin vorkommenden Drehwinkel am Zweigelenkbogen werden nach Abschnitt 4 und 5 ermittelt; für symmetrische Parabelbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind diese Drehwinkel im Anhang angegeben.

Aus Fig. 171 c ersehen wir, daß der Drehwinkel  $\beta$  stets negativ ist, so daß die Werte für die Festpunktabstände ebenfalls negativ werden, d. h. von den Kämpfern nach außen abzutragen sind.

Ist der Einspannungsgrad in  $A$  sehr klein, so fällt der Festpunkt  $J$  beinahe mit dem Kämpfer  $A$  zusammen. Mit wachsendem Einspannungsgrad des

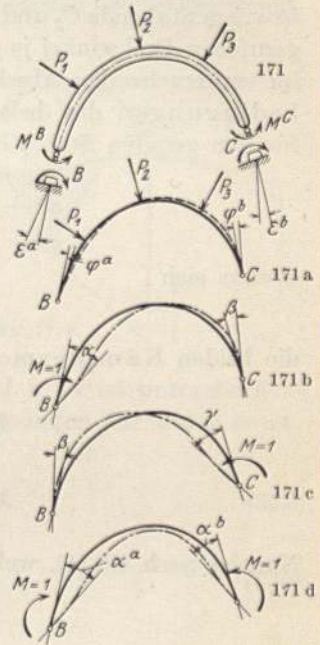


Fig. 171—171 d.

Kämpfers sowie auch mit abnehmendem Pfeilverhältnis  $\frac{f}{l}$  des Bogens entfernt sich der Festpunkt vom Kämpfer.

### 3. Bestimmung der Kämpfermomente infolge beliebiger Belastung des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes.

Zur Bestimmung der beiden Kämpfermomente  $M^B$  und  $M^C$  am bogenförmigen Stab 2 mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment erhalten wir, genau wie in Kap. V, Abschnitt 1 a, für den geraden Stab abgeleitet, aus der Bedingung, daß die Summe der von ihnen am Stabende  $B_2$  und Widerlager  $B$  bzw. am Stabende  $C_2$  und Widerlager  $C$  (Fig. 174) des Zweigelenkbogens hervorgerufenen Drehwinkel je gleich Null sein muß und unter Berücksichtigung der im vorhergehenden Abschnitt eingeführten Bezeichnungen die Elastizitätsbedingungen des belasteten bogenförmigen Stabes, analog denjenigen für den geraden Stab [Gl. (213) und (214)]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^a + M^B \cdot \alpha + M^C \cdot \beta + M^B \cdot \varepsilon^a &= 0 \\ \varphi^b + M^B \cdot \beta + M^C \cdot \gamma + M^C \cdot \varepsilon^b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (331)$$

woraus sich

analytisch

die beiden Kämpfermomente ergeben zu:

$$M^B = \frac{-\varphi^a (\gamma + \varepsilon^b) + \varphi^b \cdot \beta}{(\alpha + \varepsilon^a) \cdot (\gamma + \varepsilon^b) - \beta^2} \quad (332)$$

$$M^C = \frac{-\varphi^b (\alpha + \varepsilon^a) + \varphi^a \cdot \beta}{(\alpha + \varepsilon^a) \cdot (\gamma + \varepsilon^b) - \beta^2} \quad (333)$$

Nun ist nach Gl. (4), welche auch für den bogenförmigen Stab gilt:

$$(\alpha + \varepsilon^a) = \frac{l-a}{a} \cdot \beta$$

und analog muß sein:

$$(\gamma + \varepsilon^b) = \frac{l-b}{b} \cdot \beta;$$

setzen wir diese Werte in die Gl. (332) und (333) ein, so erhalten wir:

$$M^B = \frac{-\varphi^a \cdot \frac{l-b}{b} \cdot \beta + \varphi^b \cdot \beta}{\frac{l-a}{a} \cdot \beta \cdot \frac{l-b}{b} \cdot \beta - \beta^2} = \frac{-\varphi^a \cdot a(l-b) + \varphi^b \cdot a \cdot b}{(l-a)(l-b)\beta - \beta \cdot a \cdot b}$$

oder

$$M^B = \frac{-\varphi^a(l-b) + \varphi^b \cdot b}{l \cdot \beta(l-a-b)} \cdot a \quad (334)$$

und analog:

$$M^C = \frac{-\varphi^b(l-a) + \varphi^a \cdot b}{l \cdot \beta(l-a-b)} \cdot b \quad (335)$$

Setzt man hierin nach den Gl. (339) und (340):

$$-\frac{\varphi^b}{\beta} = k^a \quad \text{und} \quad -\frac{\varphi^a}{\beta} = k^b,$$

so erhalten wir

$$M^B = \frac{k^b(l-b) - k^a \cdot b}{l(l-a-b)} \cdot a \quad (336)$$

$$M^C = \frac{k^a(l-a) - k^b \cdot a}{l(l-a-b)} \cdot b. \quad (337)$$

Durch Einsetzen der im folgenden Abschnitt bestimmten Werte für die einzelnen Drehwinkel in obige Ausdrücke sowie in diejenigen für die Festpunktabstände  $a$  und  $b$  erhalten wir die Kämpfermomente  $M^B$  und  $M^C$ .

### Graphisch

erhalten wir die beiden Kämpfermomente analog wie für den geraden Stab (Kap. V, 1) mit Hilfe der Kreuzlinienabschnitte oder der Schlußliniensenkungen.

Die Ableitung der Ausdrücke derselben für den bogenförmigen

Stab ist genau gleich wie für den geraden Stab, d. h. es ist unter Berücksichtigung der in Abschnitt 2 eingeführten Bezeichnungen für die Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = -\frac{\varphi^b}{\beta} = -\frac{\sum P \cdot \delta^b}{\beta} \quad (339)$$

und

$$k^b = -\frac{\varphi^a}{\beta} = -\frac{\sum P \cdot \delta^a}{\beta} \quad (340)$$

und für die Schlußliniensenkungen:

$$S^a = \frac{a}{l} \cdot k^b \quad (341)$$

$$S^b = \frac{b}{l} \cdot k^a. \quad (342)$$

Die in den Gl. (339) bis (342) vorkommenden Drehwinkel am Zweigelenbogen werden nach dem folgenden Abschnitt 4 ermittelt.

In Fig. 171 e wurden die Kämpfermomente des mit einer Einzelkraft belasteten bogenförmigen Stabes 2 mit Hilfe der Kreuzlinienabschnitte konstruiert; dabei wurde zuerst die Schlußlinie konstruiert und die  $M_0$ -Fläche nachher an diese angehängt.

Haben wir es mit mehreren Lasten oder einer wandernden Last (mehreren Laststellungen derselben) zu tun, so ermitteln wir sowohl bei veränderlichem als auch konstantem Trägheitsmoment des bogenförmigen Stabes die Kreuzlinienabschnitte nicht mit Hilfe von  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$ , sondern auf Grund des Satzes von der Gegenseitigkeit der Formänderungen mit Hilfe der Biegelinie des Zweigelenkbogens für die Belastung  $M = 1$  mt am Stabende, wie

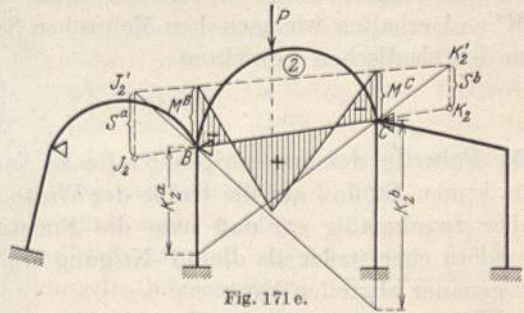


Fig. 171 e.

dies in Abschnitt 2 des Kap. V für den geraden Stab beschrieben wurde (vgl. auch die Zahlenbeispiele Nr. 17, 18 und 20); wir erhalten dann

$$k^a = -\Sigma P \cdot s^b \quad (343)$$

$$k^b = -\Sigma P \cdot s^a \quad (344)$$

Die Werte  $s^a$  gehen aus der Biegelinie für  $M^a = 1$  (am Stabende mit dem Festpunktabstand  $a$ ) und die Werte  $s^b$  aus der Biegelinie für  $M^b = 1$  (am Stabende mit dem Festpunktabstand  $b$ ) hervor; ist der Stab symmetrisch, so ist die Biegelinie für  $M^b = 1$  das Spiegelbild der Biegelinie für  $M^a = 1$ , und wir brauchen daher nur eine Biegelinie zu zeichnen, um sowohl  $s^a$  als auch  $s^b$  zu erhalten.

Die Biegelinie des Zweigelenkbogens beispielsweise für die Belastung  $M^a = 1$  erhalten wir nach dem Mohrschen Satze durch Zeichnen eines Seilecks zu den elastischen Gewichten

$$E \cdot \Delta F = \left( \frac{x}{l} - \frac{B}{2} \cdot y \right) w.$$

Die Polweite des zugehörigen Kräftecks kann beliebig gewählt werden, da sie keinen Einfluß auf die Größe der Werte  $s^a$  und  $s^b$  besitzt; man wählt sie aber zweckmäßig so, daß man die Endstrahlen des Seilecks nicht flacher, sondern eher steiler als die  $45^\circ$ -Neigung erhält, damit man die Werte  $s^a$  und  $s^b$  genauer abgreifen kann.

Für symmetrische Parabelbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind die Kreuzlinienabschnitte  $k^a$  und  $k^b$  für eine wandernde Last  $P = 1$  t im Anhang angegeben.

#### 4. Bestimmung der Drehwinkel $\beta$ , $\alpha^a$ , $\alpha^b$ , $\varphi^a$ und $\varphi^b$ am Zweigelenkbogen.

Um die Drehwinkel am Zweigelenkbogen berechnen zu können, müssen wir zunächst die Größe des für eine gegebene Belastung sowie eine gegebenenfalls eintretende Temperaturänderung am Zweigelenkbogen auftretenden

##### Bogenschubes

ermitteln.

Der Zweigelenkbogen ist einfach statisch unbestimmt, und zwar ist sein Bogenschub, in der Verbindungslinie der beiden Gelenke wirkend, die einzige statisch unbestimmte Größe  $X_a$ . Zur Bestimmung derselben benutzen wir die auf Grund des Gesetzes der virtuellen Verschiebungen abgeleitete Arbeitsgleichung für den Zustand  $X_a = 1$ , wobei wir diese Einheitsbelastung als nach außen gerichtet annehmen, damit die davon herrührenden Momente  $M_a$  positiv werden. Die Arbeitsgleichung lautet (siehe Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre, 3. Aufl., §§ 12 und 14):

$$1 \cdot \delta_a + \Sigma C_a \cdot \Delta c = \int \frac{M \cdot M_a \cdot ds}{EJ} + \int \frac{N \cdot N_a \cdot ds}{EF} + \int N_a \cdot \epsilon \cdot t_0 \cdot ds - \int M_a \epsilon \frac{\Delta t}{h} ds \quad (345)$$

worin:

$\delta_a$  die gegenseitige Verschiebung der Angriffspunkte von  $X_a$  in Richtung von  $X_a = 1$  (d. h.  $\delta_a$  wird positiv in Richtung

von  $X_a = 1$  gerechnet), am statisch unbestimmten System;

$\Delta c$  die Verschiebung des Angriffspunktes der Auflagerkraft  $C_a$  in Richtung von  $C_a$  am statisch unbestimmten System;

$M$  und  $N$  Biegemoment und Normalkraft infolge der wirklichen Belastung am statisch unbestimmten System;  $M$  ist positiv, wenn an der unteren Stabkante Zugspannungen auftreten,  $N$  ist positiv, wenn Druckkraft;

„Eins“ die gedachte Belastung am statisch bestimmten Hauptsystem (einfacher Balken);

$C_a$ ,  $M_a$  und  $N_a$  Auflagerkraft, Moment und Normalkraft infolge der Belastung  $X_a = 1$  am statisch bestimmten Hauptsystem;

$\varepsilon$  der Temperatur-Ausdehnungskoeffizient des Materials, aus dem der bogenförmige Stab besteht; für Beton ist  $\varepsilon = 0,000012$

$\Delta t = t_1 - t_2$  (wobei  $t_1 > t_2$  angenommen) die Differenz zwischen der Temperaturerhöhung der oberen und unteren Querschnittsfaser (Fig. 171 f), welche einerseits einen konstanten Temperaturzuwachs  $t_0$  über die ganze Querschnittsfläche und andererseits eine Drehung des Querschnittes um  $\frac{\Delta t}{h}$ , wenn  $h$  die Querschnittshöhe,

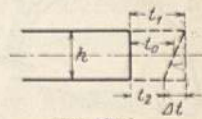


Fig. 171 f.

verursacht;  $\Delta t$  ist positiv, wenn die Temperatur an der oberen Faser größer ist als an der unteren.

Wegen der vorausgesetzten Unverschiebbarkeit der Kämpfer ist nun

$$\delta_a = 0$$

und daher

$$\sum C_a \cdot \Delta c = L_a = \int \frac{M M_a ds}{EJ} + \int \frac{N N_a ds}{EF} + \int N_a \varepsilon t_0 ds - \int M_a \varepsilon \frac{\Delta t}{h} ds \quad (346)$$

hierin bedeutet  $L_a$  die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand  $X_a = 1$ ; auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt das erste Glied den Einfluß der Momente, das zweite denjenigen der Normalkräfte und die beiden letzten Glieder den Einfluß einer ungleichmäßigen Temperaturerhöhung der oberen und unteren Faser dar.

Ist die Temperaturerhöhung für alle Punkte eines Stabquerschnittes konstant und gleich  $t$ , welches der am häufigsten vorkommende Fall ist, so ist in Gl. (346)

$$\Delta t = 0 \quad \text{und} \quad t_0 = t$$

zu setzen; dann erhalten wir unter Berücksichtigung, daß wegen der vorausgesetzten Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte auch

$$L_a = 0$$

$$0 = \int \frac{M M_a ds}{EJ} + \int \frac{N N_a ds}{EF} + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds. \quad (347)$$

In die Gl. (347) sind nun an Stelle der unbekanntenen Momente  $M$  und  $N$  des statisch unbestimmten Systems die Werte

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} M &= M_o - M_a \cdot X_a \\ N &= N_o - N_a \cdot X_a \end{aligned} \right\} \quad (348)$$

des statisch bestimmten Hauptsystems zu setzen, worin  $M_o$  und  $N_o$  Moment und Normalkraft am statisch bestimmten Hauptsystem (einfacher Balken) sind, wenn dasselbe nur mit den gegebenen Kräften belastet ist, also gleichzeitig  $X_a = 0$ .

Setzen wir diese Werte (Gl. 348) in Gl. (347) ein, so folgt:

$$0 = \int \frac{M_o M_a ds}{EJ} + \int \frac{N_o N_a ds}{EF} - X_a \left[ \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \int \frac{N_a^2 ds}{EF} \right] + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds \quad (349)$$

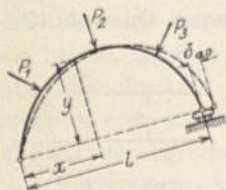


Fig. 172.

worin  $M_o$  und  $N_o$  Moment und Normalkraft infolge der gegebenen Belastung,  $M_a$  und  $N_a$  Moment und Normalkraft infolge der Belastung  $X_a = -1$ , alle vier am statisch bestimmten Hauptsystem, bedeuten.

In dieser Gleichung ist nun

$$\int \frac{M_o M_a ds}{EJ} + \int \frac{N_o N_a ds}{EF} = \delta_{ao} \quad (350)$$

wenn  $\delta_{ao}$  die gegenseitige Verschiebung der Gelenke in Richtung von  $X_a = -1$  und infolge der gegebenen äußeren Belastung am statisch bestimmten Hauptsystem (einfacher Balken), dessen eines Auflager in Richtung der Kämpferverbindungsline beweglich ist (Fig. 172);

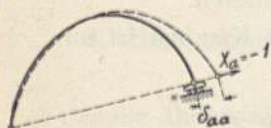


Fig. 173.

$$\int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \int \frac{N_a^2 ds}{EF} = \delta_{aa}, \quad (351)$$

wenn  $\delta_{aa}$  die gegenseitige Verschiebung der Gelenke in Richtung von  $X_a = -1$  und infolge von  $X_a = -1$  am statisch bestimmten Hauptsystem (Fig. 173)

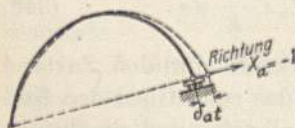


Fig. 174.

$$\int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds = \delta_{at}, \quad (352)$$

wenn  $\delta_{at}$  die gegenseitige Verschiebung der Gelenke in Richtung von  $X_a = -1$  und infolge einer Temperaturerhöhung um  $t^\circ$  (Fig. 174).

Diese Ausdrücke in Gl. (349) eingesetzt ergibt die Elastizitätsgleichung zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größe  $X_a$ :

$$0 = \delta_{ao} - X_a \cdot \delta_{aa} + \delta_{at}, \quad (353)$$

woraus sich der Horizontalschub des Zweigelenkbogens infolge der äußeren Lasten allein ergibt zu:

$$X_a = \frac{\delta_{ao}}{\delta_{aa}} \quad (354)$$

und infolge einer Temperaturerhöhung des Zweigelenkbogens um  $t^0$  gegenüber der Herstellungstemperatur

$$X_a = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}} \quad (355)$$

In diese Gl. (354) und (355) sind also die aus den Gl. (350), (351) und (352) erhaltenen Werte für  $\delta_{a0}$ ,  $\delta_{aa}$  und  $\delta_{at}$  einzusetzen, um den Bogenschub am Zweigelenkbogen infolge der gegebenen Belastung und evtl. Temperaturänderung zu erhalten.

Die

### Drehwinkel

am Zweigelenkbogen für eine gegebene Belastung ermitteln wir ebenfalls mit Hilfe der Arbeitsgleichung (siehe Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre, 3. Aufl., §§ 12 und 15); sie lautet:

$$1 \cdot \tau_m + \bar{L} = \int \frac{M \bar{M} ds}{EJ} + \int \frac{N \bar{N} ds}{EF} + \int \bar{N} \varepsilon t_0 ds - \int \bar{M} \varepsilon \cdot \frac{\Delta t}{h} ds \quad (356)$$

worin

$\tau_m$  der gesuchte Drehwinkel, um welchen sich die im Punkte  $m$  an die Stabachse gelegte Tangente bei der Formänderung des statisch unbestimmten Systems dreht;

$M$  und  $N$  Biegemoment und Normalkraft infolge der wirklichen Belastung am statisch unbestimmten System;

$\bar{M}$  und  $\bar{N}$  Biegemoment und Normalkraft für irgendeinen Querschnitt des auf irgendeine Weise statisch bestimmt gemachten Systems, falls auf letzteres ein im Punkte  $m$  angreifendes Kräftepaar wirkt, dessen Moment  $\mathfrak{M}_m = 1$  ist;

$\bar{L}$  die virtuelle Arbeit der gleichzeitig mit  $\bar{M}$  und  $\bar{N}$  infolge der gedachten Belastung  $\mathfrak{M}_m = 1$  am statisch bestimmt gemachten System entstehenden Auflagerkräfte  $\bar{C}$ ;

$\varepsilon$ ,  $t_0$  und  $\frac{\Delta t}{h}$  sich auf eine Temperaturerhöhung des Stabes beziehen und dieselbe Bedeutung haben wie in Gl. (345).

Wegen der vorausgesetzten Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte ist wieder

$$\bar{L} = 0;$$

ist ferner die Temperaturerhöhung für alle Punkte eines Stabquerschnittes konstant und gleich  $t$ , so ist in Gl. (356) wieder

$$\Delta t = 0 \quad \text{und} \quad t_0 = t$$

zu setzen, und wir erhalten:

$$\tau_m = \int \frac{M \cdot \bar{M} \cdot ds}{EJ} + \int \frac{N \cdot \bar{N} \cdot ds}{EF} + \int \bar{N} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds. \quad (357)$$

In diese Gleichung sind nun die nach Gl. (348) ermittelten Werte von  $M$  und  $N$  des statisch unbestimmten Systems einzusetzen.

Da wir beliebig veränderliches Trägheitsmoment des bogenförmigen Stabes angenommen haben, können wir die Integrale der Gl. (349) und (357) nicht

auflösen und dieselben sind näherungsweise zu bestimmen. Man teilt den Bogen in beliebige Teile ein von der Länge  $\Delta s$ , wobei man die Angriffspunkte großer konzentrierter Lasten mit Teilpunkten zusammenfallen läßt, rechnet dann die elastischen Gewichte  $w = \frac{\Delta s}{J}$  für die Mitten der Teile aus und addiert darauf einfach die Produkte  $M_o \cdot M_a \cdot w$ , usw., wobei sich dann alle Größen auf die Mitten der Bogenstücke beziehen; daher setzen wir an Stelle des Integralzeichens das Summenzeichen.

Für die Bogenschübe und die Drehwinkel leiten wir im folgenden noch geschlossene Ausdrücke ab, und zwar für den unsymmetrischen und den symmetrischen Zweigelenkbogen. Der größeren Übersichtlichkeit wegen bezeichnen wir die Kämpfer des zu untersuchenden Bogens allgemein mit  $A$  und  $B$ .

### a) Der unsymmetrische Zweigelenkbogen.

Wir berechnen wieder zunächst die

Bogenschübe am Zweigelenkbogen

für die verschiedenen Belastungen desselben.

Bogenschub  $B_{(M^A=1)}$

für die Belastung des Zweigelenkbogens mit  $M^A = l$  (Fig. 175).

Der in Gl. (354) vorkommende Wert  $\delta_{ao}$  ist nach Gl. (350):

$$\delta_{ao} = \sum_0^l M_o \cdot M_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_o \cdot N_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (358)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen nach Fig. 175a und 175b:

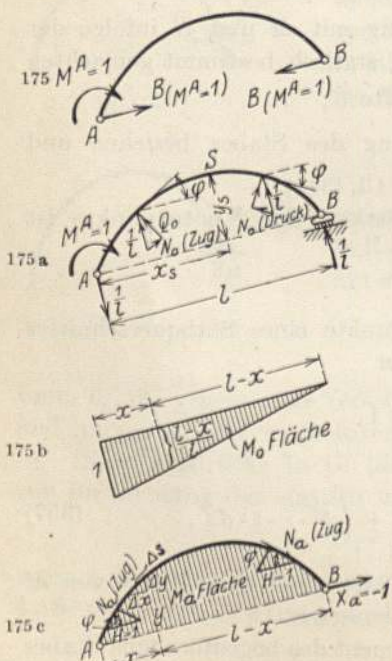


Fig. 175—175 c.

$$\left. \begin{aligned} M_o &= \frac{l-x}{l} \\ N_o &= + \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s \\ N_o &= - \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l \end{aligned} \right\} \quad (359)$$

und nach Fig. 175c:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= y \\ N_a &= + 1 \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (360)$$

Zu den Vorzeichen der Werte für  $N_o$  und  $N_a$  sei bemerkt, daß eine Zugkraft im Bogen denselben zu verlängern bestrebt ist und daher einen positiven Beitrag zu der in Richtung von  $X_a = 1$  als positiv angenommenen Verschiebung  $\delta_{ao}$  liefert.

Es ist nun:

$$\delta_{ao} = \sum_0^l y \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{\Delta s}{EJ} + \sum_0^{x_s} \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{EF} - \sum_{x_s}^l \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{EF} \quad (361)$$



Die Summationen der von den Normalkräften herrührenden Glieder sind wie aus Fig. 175a hervorgeht, links und rechts vom Scheitel getrennt durchzuführen, da die Normalkraft  $N_o$  im Scheitel ihr Vorzeichen wechselt.

Die Winkelfunktionen  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  können wir durch die bekannten Lamellenlängen  $\Delta s$  und deren Projektionen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  auf die  $x$ - und  $y$ -Achse ersetzen. Es ist nach Fig. 175c:

$$\sin \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta s} \quad \text{und} \quad \cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s},$$

ferner ist

$$\Delta y = \sqrt{\Delta s^2 - \Delta x^2}$$

und daher

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{\Delta s^2 - \Delta x^2}}{\Delta s} \quad (362)$$

Es ist nun:

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{\Delta x \sqrt{\Delta s^2 - \Delta x^2}}{\Delta s^2} = \frac{\Delta x}{\Delta s} \sqrt{1 - \frac{\Delta x^2}{\Delta s^2}}. \quad (363)$$

Diesen Wert in Gl. (361) eingesetzt, gibt

$$\begin{aligned} \delta_{ao} = & \frac{1}{l} \sum_0^l y(l-x) \frac{\Delta x}{E \cdot J} + \frac{1}{l} \sum_0^{x_s} \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \\ & - \frac{1}{l} \sum_{x_s}^l \frac{\Delta x}{\Delta s} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \end{aligned} \quad (364)$$

Der in Gl. (354) vorkommende Wert  $\delta_{aa}$  ist nach Gl. (351):

$$\delta_{aa} = \sum_0^l M_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (365)$$

Setzen wir die Werte von  $M_a$  und  $N_a$  aus den Gl. (360) in diese Gleichung ein, so erhalten wir

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (366)$$

und da  $\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s}$ :

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (367)$$

Nun ist nach Gl. (354):

$$X_a = \frac{\delta_{ao}}{\delta_{aa}} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\sum_0^l y(l-x) \frac{\Delta s}{J} + \sum_0^{x_s} \frac{\Delta x}{\Delta s} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2} \cdot \frac{\Delta s}{F} - \sum_{x_s}^l \frac{\Delta x}{\Delta s} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2} \cdot \frac{\Delta s}{F}}{\sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{F}} \quad (368)$$

Setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta s}{J} &= w \\ \frac{\Delta s}{F} &= v \\ \frac{\Delta x}{\Delta s} &= \xi \end{aligned} \right\} \quad (369)$$

so erhalten wir den Bogenschub  $B_{(M^A=1)}$  am unsymmetrischen Zweigelenkbogen zu

$$B_{(M^A=1)} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\sum_0^l y (l-x) \cdot w + \sum_0^{x_s} \xi \sqrt{1-\xi^2} \cdot v - \sum_{x_s}^l \xi \sqrt{1-\xi^2} \cdot v}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v} \quad (370)$$

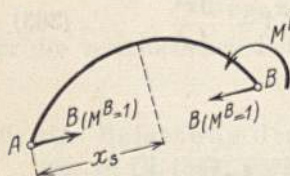


Fig. 176.

Bogenschub  $B_{(M^B=1)}$  für die Belastung des Zweigelenkbogens mit

$$M^B = 1 \text{ (Fig. 176).}$$

Den Bogenschub  $B_{(M^B=1)}$  infolge  $M^B = 1$  erhalten wir analog wie den Bogenschub  $B_{(M^A=1)}$ . Er geht auch ohne weiteres aus Gl. (370) hervor, wenn wir in derselben  $(l-x)$  durch  $x$  ersetzen und das Vorzeichen der beiden von den Normalkräften herrührenden Glieder im Zähler umkehren; es ist dann der Bogenschub  $B_{(M^B=1)}$  am unsymmetrischen Zweigelenkbogen

$$B_{(M^B=1)} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\sum_0^l x \cdot y \cdot w - \sum_0^{x_s} \xi \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot v + \sum_{x_s}^l \xi \sqrt{1-\xi^2} \cdot v}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v} \quad (371)$$

Bogenschub  $B$  für die gleichzeitige Belastung des Zweigelenkbogens mit  $M^A = 1$  und  $M^B = 1$  (Fig. 177).

Der in Gl. (354) vorkommende Wert  $\delta_{ao}$  ist nach Gl. (350):

$$\delta_{ao} = \sum_0^l M_o \cdot M_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_o \cdot N_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (372)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen:  
nach Fig. 177a und 177b:

$$\left. \begin{aligned} M_o &= 1 \\ N_a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

und nach Fig. 177c:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= y \\ N_a &= +1 \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (374)$$

Bezüglich des Vorzeichens des Wertes von  $N_a$  gilt das für den Wert  $N_a$  der Gl. (360) Gesagte.

Es ist nun:

$$\delta_{ao} = \sum_0^l y \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + 0. \quad (375)$$

Der in Gl. (354) vorkommende Wert von  $\delta_{aa}$  ist nach Gl. (351):

$$\delta_{aa} = \sum_0^l M_a^2 \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_a^2 \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (376)$$

Setzen wir die Werte von  $M_a$  und  $N_a$  aus den Gl. (374) in diese Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (377)$$

und da

$$\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s};$$

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left( \frac{\Delta x}{\Delta s} \right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (378)$$

Nun ist nach Gl. (354):

$$X_a = \frac{\delta_{ao}}{\delta_{aa}} = \frac{\sum_0^l y \cdot \frac{\Delta s}{J}}{\sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{J} + \sum_0^l \left( \frac{\Delta x}{\Delta s} \right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{F}} \quad (379)$$

und mit den Bezeichnungen der Gl. (369):

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi$$

folgt der Bogenschub  $B$  am unsymmetrischen Zweigelenkbogen:

$$B = \frac{\sum_0^l y \cdot w}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v}. \quad (380)$$

Dieser Wert ergibt sich auch direkt durch Addition der Gl. (370) und (371).

Wie wir aus Gl. (380) ersehen, verschwindet bei gleichzeitiger Belastung des Zweigelenkbogens mit  $M^A = 1$  und  $M^B = 1$  im Zähler der Einfluß der Normalkräfte.

Ferner erkennen wir aus den Gl. (370), (371) und (380) für die Bogenschübe  $B_{(M^A=1)}$ ,  $B_{(M^B=1)}$  und  $B$ , daß diese Größen unabhängig von der äußeren Belastung und nur abhängig von den Abmessungen des bogenförmigen Stabes sind.

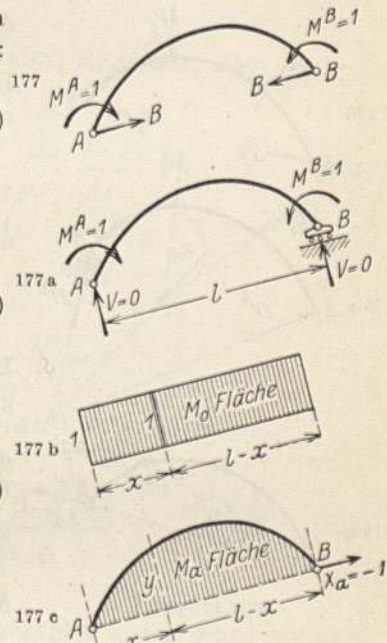


Fig. 177—177 c.

Bogenschub  $\mathfrak{S}$  für die Belastung des Zweigelenkbogens mit den gegebenen äußeren Lasten sowie für eine gleichmäßige Temperaturerhöhung des Zweigelenkbogens um  $t^\circ$  (Fig. 178).

Nach Gl. (354) ist

$$\mathfrak{S} = \frac{\delta_{ao}}{\delta_{aa}} \quad (381)$$

und nach Gl. (355)

$$\mathfrak{S}_t = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}} \quad (381a)$$

Der hierin vorkommende Wert von  $\delta_{ao}$  ist nach Gl. (350):

$$\delta_{ao} = \sum_0^l M_o \cdot M_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_o \cdot N_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (382)$$

In diese Gleichung ist einzusetzen:  
nach Fig. 178a:

$$\left. \begin{aligned} M_o &= M_o \\ N_o &= N_o \end{aligned} \right\} \quad (383)$$

und nach Fig. 178b:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= y \\ N_a &= +1 \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (384)$$

Bezüglich des Vorzeichens des Wertes von  $N_a$  gilt das für den Wert  $N_a$  der Gl. (360) Gesagte:

$$\delta_{ao} = \sum_0^l M_o \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_o \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (385)$$

und da  $\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s}$ :

$$\delta_{ao} = \sum_0^l M_o \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} - \sum_0^l N_o \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (386)$$

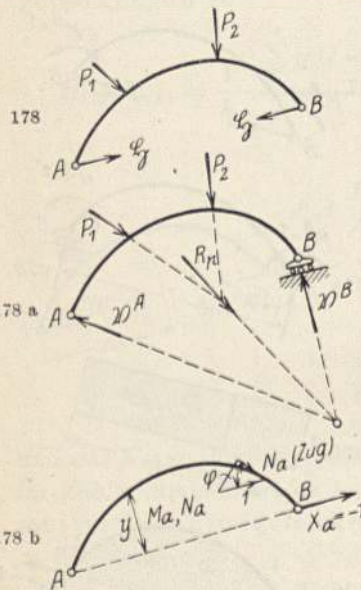


Fig. 178—178b.

Der in Gl. (384) vorkommende Wert von  $\delta_{aa}$  ist nach Gl. (351):

$$\delta_{aa} = \sum_0^l M_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (387)$$

Setzen wir die Werte von  $M_a$  und  $N_a$  aus den Gln. (384) in diese Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (388)$$

und da  $\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s}$ :

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left( \frac{\Delta x}{\Delta s} \right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (389)$$

Der in Gl. (381a) vorkommende, von der Temperaturänderung herrührende Wert von  $\delta_{at}$  ist nach Gl. (352):

$$\delta_{at} = \varepsilon \cdot t \cdot \sum_0^l N_a \cdot \Delta s \quad (390)$$

hierin den Wert von  $N_a$  aus Gl. (384) eingesetzt gibt

$$\delta_{at} = \varepsilon \cdot t \cdot \sum_0^l \cos \varphi \cdot \Delta s \quad (391)$$

für eine Temperaturerhöhung; für eine Temperaturerniedrigung wäre das Vorzeichen negativ.

Da  $\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s}$ , so ist

$$\delta_{at} = \varepsilon \cdot t \cdot \sum_0^l \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \Delta s = \varepsilon \cdot t \cdot l. \quad (392)$$

Die Werte der Gln. (386) und (389) in die Gl. (381) eingesetzt, gibt:

$$\mathfrak{S} = \frac{\sum_0^l M_o \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{J} + \sum_0^l N_o \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}}{\sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}}, \quad (393)$$

und mit den Bezeichnungen der Gln. (369):

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi$$

folgt der Bogenschub  $\mathfrak{S}$  infolge der äußeren Lasten allein:

$$\mathfrak{S} = \frac{\sum_0^l M_o \cdot y \cdot w + \sum_0^l N_o \cdot \xi \cdot v}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v}. \quad (394)$$

In dieser Gleichung kann das zweite Glied im Zähler wegen seines geringen Einflusses meistens vernachlässigt werden.

Haben wir es mit mehreren Lasten oder einer wandernden Last (mehreren Laststellungen derselben) zu tun, so ermitteln wir die dadurch am Zweigelenbogen hervorgerufenen Bogenschübe  $\mathfrak{S}$  zweckmäßig mit Hilfe der Einflußlinie für denselben. Diese erhalten wir am einfachsten graphisch auf Grund des Satzes von der Gegenseitigkeit der Formänderungen, indem wir die Biegelinie für den Zustand  $\mathfrak{S} = -1$  zeichnen, welche sich nach dem Mohrschen Satze als Seileck, mit beliebiger Polweite zu den elastischen Gewichten

$$E \cdot \Delta F = y \cdot w$$

gezeichnet, ergibt. Sind  $\eta$  die im Längenmaßstab gemessenen Ordinaten der mit der Polweite  $H$  gezeichneten Biegelinie ( $\delta_{ao}$ ), so ist der Bogenschub  $\mathfrak{S}$  für eine gegebene Einzellast  $P$ :

$$\mathfrak{S} = \frac{\delta_{ao}}{\delta_{aa}} = \frac{P \cdot H \cdot \eta}{\sum_0^l y^2 w}. \quad (394a)$$

Der Bogenschub  $\mathfrak{S}^t$  infolge einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um  $t^0$  allein beträgt:

$$\mathfrak{S}^t = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}} = \frac{E \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v} \quad (395)$$

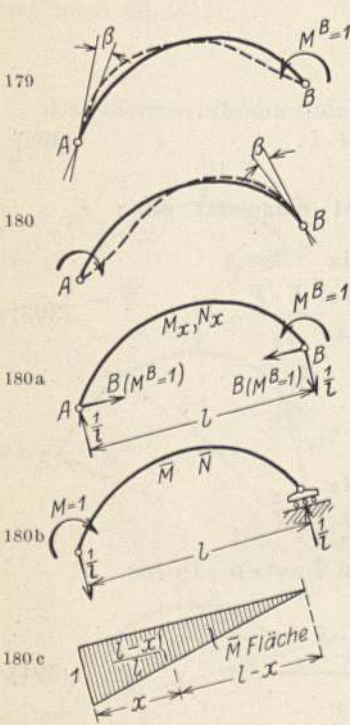


Fig. 179, 180—180c.

Für eine Temperaturerniedrigung um  $t^0$  gegenüber der Herstellungstemperatur des Tragwerkes ist der Horizontalschub  $\mathfrak{S}^t$  gleich groß, jedoch entgegengesetzt gerichtet.

Aus den Gl. (370), (371), (380), (394) und (395) für die Bogenschübe  $B_{(M^A=1)}$ ,  $B_{(M^B=1)}$ ,  $B$ ,  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}^t$  ersehen wir, daß dieselben den gleichen Nenner haben, was für die Berechnung des bogenförmigen Stabes von Vorteil ist.

Nach Ermittlung der benötigten Bogenschübe erhalten wir nun die

Drehwinkel  $\beta$ ,  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$ ,  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$  am unsymmetrischen Zweigelenkbogen mit Hilfe der Arbeitsgleichung wie folgt:

Der Drehwinkel  $\beta$  infolge der Belastung des Zweigelenkbogens mit  $M^A = 1$  oder  $M^B = 1$  (Fig. 179 und 180).

Nach Gl. (357) ist

$$\beta = \sum_0^l M \cdot \bar{M} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N \cdot \bar{N} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (396)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen: nach Gl. (348) und Fig. 180a:

$$\begin{aligned} M &= M_o - M_a \cdot X_a, \\ N &= N_o - N_a \cdot X_a. \end{aligned}$$

Mit den Werten von  $M_o$ ,  $N_o$ ,  $M_a$  und  $N_a$  aus den Gl. (359) und (360) und  $X_a = B_{(M^A=1)}$  folgt:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{l-x}{l} - B_{(M^A=1)} \cdot y \\ N &= + \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi - B_{(M^A=1)} \cdot \cos \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s \\ &= - \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi - B_{(M^A=1)} \cdot \cos \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l \end{aligned} \right\} \quad (397)$$

Ferner ist nach Fig. 180b und 180c:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= \frac{x}{l} \\ \bar{N} &= - \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s \\ &= + \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l \end{aligned} \right\} \quad (398)$$

Bezüglich des Vorzeichens der Werte von  $\bar{N}$  gilt das für den Wert  $N_o$  der Gl. (359) Gesagte.

Die Werte der Gln. (397) und (398) in Gl. (396) eingesetzt gibt:

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_0^l \left( \frac{l-x}{l} - B_{(M^A=1)} \cdot y \right) \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} \\ &+ \sum_0^{x_s} \left( \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi - B_{(M^A=1)} \cdot \cos \varphi \right) \left( -\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \right) \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \\ &+ \sum_{x_s}^l \left( -\frac{1}{l} \sin \varphi - B_{(M^A=1)} \cdot \cos \varphi \right) \left( \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \right) \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} E \cdot \beta &= \frac{1}{l^2} \sum_0^l x(l-x) \cdot \frac{\Delta s}{J} - \frac{1}{l} \sum_0^l x \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{J} - \frac{1}{l^2} \sum_0^l \sin^2 \varphi \cdot \frac{\Delta s}{F} \\ &+ \frac{1}{l} \cdot B_{(M^A=1)} \left[ \sum_0^{x_s} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \frac{\Delta s}{F} - \sum_{x_s}^l \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{F} \right] \end{aligned}$$

oder mit den Bezeichnungen der Gln. (369):

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi,$$

sowie unter Berücksichtigung, daß nach den Gln. (362) und (363):

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{\Delta s^2 - \Delta x^2}{\Delta s^2} = 1 - \left( \frac{\Delta x}{\Delta s} \right)^2 = 1 - \xi^2, \\ \sin \varphi &= \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{und da} \quad \cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi, \\ \sin \varphi \cdot \cos \varphi &= \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}, \end{aligned}$$

ergibt sich der Drehwinkel  $\beta$  am unsymmetrischen Zweigelenkbogen:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \beta &= \underbrace{\frac{1}{l^2} \sum_0^l x(l-x) \cdot w - \frac{1}{l} \cdot B_{(M^A=1)} \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w}_{\text{Einfluß der Momente.}} \\ &- \underbrace{\frac{1}{l^2} \sum_0^l (1 - \xi^2) \cdot v + \frac{1}{l} \cdot B_{(M^A=1)} \left[ \sum_0^{x_s} \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v - \sum_{x_s}^l \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v \right]}_{\text{Einfluß der Normalkräfte.}} \end{aligned} \right\} \quad (399)$$

Die Drehwinkel  $\alpha^a$  und  $\alpha^b$  infolge der gleichzeitigen Belastung des Zweigelenkbogens mit  $M^A = 1$  und  $M^B = 1$  (Fig. 181).

Nach Gl. (357) ist:

$$\alpha^a = \sum_0^l M \cdot \bar{M} \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N \cdot \bar{N} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (400)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen:

nach Gl. (348) und Fig. 181a:

$$\begin{aligned} M &= M_o - M_a \cdot X_a, \\ N &= N_o - N_a \cdot X_a. \end{aligned}$$

Mit den Werten von  $M_o$ ,  $N_o$ ,  $M_a$  und  $N_a$  aus den Gln. (373) und (374) und  $X_a = B$  folgt:

$$\left. \begin{aligned} M &= l - B \cdot y \\ N &= B \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (401)$$

Ferner ist nach Fig. 181 b und 181 c:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= \frac{l-x}{l} \\ \bar{N} &= +\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s \\ &= -\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l \end{aligned} \right\} \quad (402)$$

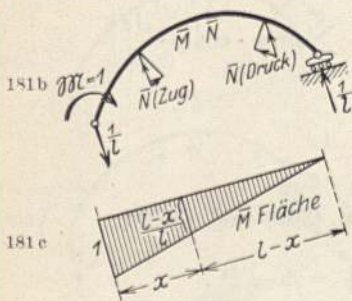
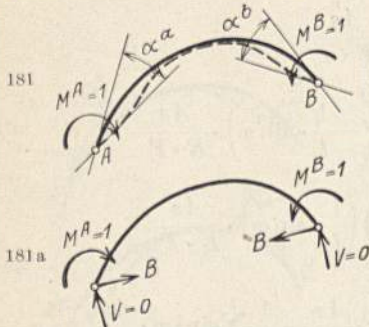


Fig. 181—181c.

Bezüglich des Vorzeichens der Werte von  $\bar{N}$  gilt das für den Wert  $N_o$  der Gl. (359) Gesagte:

Die Werte der Gln. (401) und (402) in Gl. (400) eingesetzt gibt:

$$\begin{aligned} \alpha^a &= \sum_0^l (1 - B \cdot y) \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} \\ &+ \sum_0^{x_s} B \cdot \cos \varphi \left( \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \right) \frac{\Delta s}{E \cdot F} \\ &- \sum_{x_s}^l B \cdot \cos \varphi \left( \frac{1}{l} \sin \varphi \right) \frac{\Delta s}{E \cdot F} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} E \cdot \alpha^a &= \frac{1}{l} \sum_0^l (l-x) \cdot \frac{\Delta s}{J} - \frac{1}{l} \cdot B \cdot \sum_0^l (l-x) \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \\ &+ \frac{1}{l} \cdot B \left[ \sum_0^{x_s} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{F} - \sum_{x_s}^l \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{F} \right] \end{aligned}$$

oder mit den Bezeichnungen der Gl. (369):

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi,$$

sowie unter Berücksichtigung, daß nach Gl. (363):

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2},$$

ergibt sich der Drehwinkel  $\alpha^a$  am unsymmetrischen Zweigelenkbogen zu:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \alpha^a &= \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l (l-x) w - \frac{1}{l} \cdot B \cdot \sum_0^l (l-x) y \cdot w \\ &+ \frac{1}{l} \cdot B \cdot \left[ \sum_0^{x_s} \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v - \sum_{x_s}^l \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v \right] \end{aligned} \right\} \quad (403)$$



Analog ergibt sich der Drehwinkel  $\alpha^b$  am unsymmetrischen Zweigelenkbogen zu:

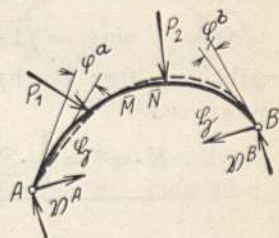
$$\left. \begin{aligned} E \cdot \alpha^b &= \frac{1}{l} \sum_0^l x \cdot w - \frac{1}{l} \cdot B \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w \\ &- \frac{1}{l} \cdot B \cdot \left[ \sum_0^{x_s} \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v - \sum_{x_s}^l \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v \right] \end{aligned} \right\} \quad (404)$$

das Minuszeichen vor dem von den Normalkräften herrührenden Glied kommt daher, weil für den Zustand  $\mathfrak{M} = 1$  am rechten Ende:

$$\bar{N} = -\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s,$$

$$\bar{N} = +\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l.$$

Die Drehwinkel  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$  infolge der äußeren Belastung des Zweigelenkbogens (Fig. 182).



Nach Gl. (357) ist:

$$\varphi^a = \sum_0^l M \cdot \bar{M} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N \cdot \bar{N} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (407)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen: nach Gl. (348) und Fig. 182:

$$M = M_o - M_a \cdot X_a,$$

$$N = N_o - N_a \cdot X_a.$$

Mit den Werten von  $M_o$ ,  $N_o$ ,  $M_a$  und  $N_a$  aus den Gln. (383) und (384) und  $X_a = \xi$  folgt:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_o - \xi \cdot y \\ N &= N_o - \xi \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (408)$$

Ferner ist nach Fig. 182a und 182b:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= \frac{l-x}{l} \\ \bar{N} &= +\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s \\ \bar{N} &= -\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l \end{aligned} \right\} \quad (409)$$

Bezüglich des Vorzeichens der Werte von  $\bar{N}$  gilt das für den Wert  $N_o$  der Gl. (359) Gesagte.

Die Werte der Gln. (408) und (409) in Gl. (407) eingesetzt gibt:

$$\begin{aligned} \varphi^a &= \sum_0^l (M_o - \xi \cdot y) \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^{x_s} (N_o - \xi \cdot \cos \varphi) \left( \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \right) \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \\ &- \sum_{x_s}^l (N_o - \xi \cdot \cos \varphi) \left( -\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \right) \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}; \end{aligned}$$

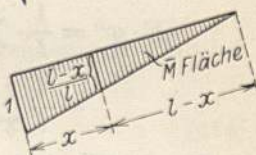
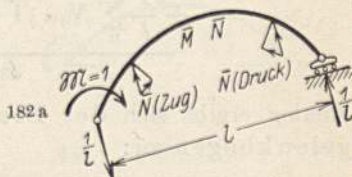


Fig. 182—182b.

oder

$$E \cdot \varphi^a = \frac{1}{l} \sum_0^l M_o (l-x) \cdot \frac{\Delta s}{J} - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l y (l-x) \frac{\Delta s}{J} + \frac{1}{l} \sum_0^l N_o \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}$$

oder mit den Bezeichnungen der Gl. (369):

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{E \cdot F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi$$

und unter Berücksichtigung, daß nach den Gln. (362) und (363):

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{und} \quad \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2},$$

ergibt sich der Drehwinkel  $\varphi^a$  am unsymmetrischen Zweigelenkbogen zu:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \varphi^a = & \underbrace{\frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_o (l-x) \cdot w - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l y (l-x) \cdot w}_{\text{Einfluß der Momente.}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{l} \sum_0^l N_o \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v - \frac{1}{l} \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l \xi \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v}_{\text{Einfluß der Normalkräfte.}} \end{aligned} \right\} \quad (410)$$

Analog ergibt sich der Drehwinkel  $\varphi^b$  am unsymmetrischen Zweigelenkbogen zu:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \varphi^b = & \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_o \cdot x \cdot w - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w \\ & - \frac{1}{l} \sum_0^l N_o \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v + \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l \xi \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v \end{aligned} \right\} \quad (411)$$

Um die Winkel  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$  am unsymmetrischen Zweigelenkbogen infolge einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um  $t^\theta$  zu erhalten, setzen wir in den Gln. (410) und (411) den Wert von  $\mathfrak{H}^t$  aus Gl. (395) ein.

### b) Der symmetrische Zweigelenkbogen.

Der symmetrische Zweigelenkbogen kommt in der Praxis am meisten vor, er bildet einen Sonderfall des unsymmetrischen Zweigelenkbogens.

Um die gesuchten Drehwinkel am symmetrischen Zweigelenkbogen bestimmen zu können, berechnen wir wieder zunächst die Bogenschübe.

Bei Symmetrie fällt sowohl in Gl. (370) für den Bogenschub  $B_{(M^A=1)}$  (Fig. 183) infolge  $M^A = 1$ , als auch in Gl. (371) für den Bogenschub  $B_{(M^B=1)}$  (Fig. 184) infolge  $M^B = 1$  am Zweigelenkbogen das zweite und dritte Glied im Zähler, herrührend von den Normalkräften, weg, da die Werte der beiden Summen  $\sum_0^{x_s}$  und  $\sum_{x_s}^l$  gleich groß werden; ferner ist bei Symmetrie

$$\sum_0^l x \cdot y \cdot w = \sum_0^l (l-x) \cdot y \cdot w \quad (411 a)$$

und da das statische Moment der einzelnen Kräfte ( $yw$ ) gleich dem statischen Moment ihrer Resultierenden, so ist bei Symmetrie:

$$\sum_0^l xyw = \sum_0^l (l-x)y \cdot w = \frac{l}{2} \sum_0^l yw. \quad (411b)$$

Berücksichtigen wir nun noch, daß wir am symmetrischen Bogen die Summierung bloß über den halben Bogen vorzunehmen brauchen, da bei Symmetrie

$$\sum_0^l = 2 \cdot \sum_0^{l/2},$$

so folgt für Symmetrie:

$$B_{(M^A=1)} = B_{(M^B=1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_0^{l/2} y \cdot w}{\sum_0^{l/2} y^2 \cdot w + \sum_0^{l/2} \xi^2 \cdot v} \quad (412)$$

Der Ausdruck der Gl. (380) für den Bogenschub  $B$  (Fig. 185) am Zweigelenkbogen bleibt bei Symmetrie derselbe, nur brauchen wir bloß über den halben Bogen zu summieren; es ist:

$$B = \frac{\sum_0^{l/2} y \cdot w}{\sum_0^{l/2} y^2 \cdot w + \sum_0^{l/2} \xi^2 \cdot v}, \quad (413)$$

worin

$$w = \frac{\Delta s}{J}, \quad v = \frac{\Delta s}{F}, \quad \xi = \frac{\Delta x}{\Delta s}.$$

Beim Vergleich der beiden Gln. (412) und (413) erkennen wir, daß bei Symmetrie:

$$B_{(M^A=1)} = B_{(M^B=1)} = \frac{1}{2} B, \quad (414)$$

was sich auch ohne weiteres aus dem Gesetz der Superposition ergibt.

Der Ausdruck der Gl. (394) für den Bogenschub  $\mathfrak{S}$  (Fig. 186) am Zweigelenkbogen infolge der äußeren Lasten bleibt bei Symmetrie derselbe; es ist

$$\mathfrak{S} = \frac{\sum_0^l M_o \cdot y \cdot w + \sum_0^l N_o \cdot \xi \cdot v}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v}. \quad (415)$$

Haben wir es mit mehreren Lasten oder einer wandernden Last (mehreren Laststellungen derselben) zu tun, so ermitteln wir die dadurch am Zweigelenkbogen hervorgerufenen Bogenschübe  $\mathfrak{S}$  wieder, wie schon unter a) beim unsymmetrischen Zweigelenkbogen nach Gl. (394) beschrieben, zweckmäßig mit Hilfe der Einflußlinie (Biegelinie für den Zustand  $\mathfrak{S} = -1$ ) für denselben.

Für symmetrische Parabelbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind der Bogenschub  $B$  sowie die Ordinaten der Einflußlinie für den Bogenschub  $\mathfrak{S}$  im Anhang angegeben.

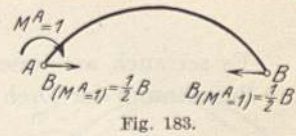


Fig. 183.

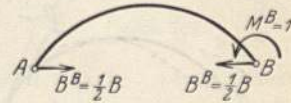


Fig. 184.



Fig. 185.

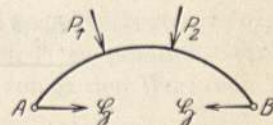


Fig. 186.

Der Ausdruck der Gl. (395) für den Bogenschub  $\mathfrak{S}^t$  am Zweigelenbogen infolge einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um  $t^0$  bleibt bei Symmetrie ebenfalls derselbe; es ist

$$\mathfrak{S}^t = \frac{E \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v} \quad (416)$$

Es sei auch an dieser Stelle hervorgehoben, daß die Ausdrücke für alle zur Berechnung der Drehwinkel am Zweigelenbogen benötigten Bogenschübe den gleichen Nenner haben.

Nach Ermittlung dieser Bogenschübe erhalten wir nun die

Drehwinkel  $\beta$ ,  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$ ,  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$ , am symmetrischen Zweigelenbogen wie folgt:

Der Drehwinkel  $\beta$

infolge  $M^A = 1$  oder  $M^B = 1$  am symmetrischen Zweigelenbogen (Fig. 187 und 188) ergibt sich aus Gl. (399), wenn wir berücksichtigen, daß

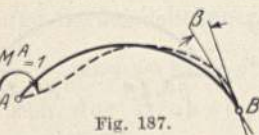


Fig. 187.



Fig. 188.

1. das letzte Glied derselben wegfällt, da die Werte der beiden Summen

$$\sum_0^l \frac{x_i}{l} \quad \text{und} \quad \sum_0^l \frac{l}{x_i}$$

2. nach Gl. (414)  $B_{(M^A=1)} = \frac{1}{2} B$ ,

3. nach Gl. (411b)  $\sum_0^l xyw = \frac{l}{2} \sum_0^l yw$ ,

4. bei Symmetrie die Summierung nur über den halben Bogen zu erfolgen braucht.

Daher ist bei Symmetrie:

$$E \cdot \beta = \underbrace{\frac{2}{l^2} \cdot \sum_0^{l/2} x(l-x) \cdot w - \frac{B}{2} \cdot \sum_0^{l/2} y \cdot w}_{\text{Einfluß der Momente.}} - \underbrace{\frac{2}{l^2} \cdot \sum_0^{l/2} (1 - \xi^2) \cdot v}_{\text{Einfluß der Normalkräfte.}} \quad (417)$$

Die Drehwinkel  $\alpha^a$  und  $\alpha^b$

infolge  $M^A = 1$  und gleichzeitig  $M^B = 1$  am symmetrischen Zweigelenbogen (Fig. 189) ergeben sich aus den Gln. (403) und (404), wenn wir berücksichtigen, daß

1. die zweite Zeile (Einfluß der Normalkräfte) wegfällt,

2. der Symmetrie wegen  $\sum_0^l (l-x) \cdot w = \sum_0^l x \cdot w$ ,

3. nach dem Satz vom statischen Moment

$$\sum_0^l x \cdot w = \frac{l}{2} \sum_0^l w \quad \text{und} \quad \sum_0^l x \cdot y \cdot w = \frac{l}{2} \cdot \sum_0^l y \cdot w ,$$

4. bei Symmetrie die Summierung nur über den halben Bogen zu erfolgen braucht.

Daher ist bei Symmetrie:

$$\alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha}$$

und

$$E \cdot \bar{\alpha} = \sum_0^{l/2} w - B \cdot \sum_0^{l/2} y \cdot w . \quad (418)$$



Fig. 189.

Für symmetrische Parabolbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind die Drehwinkel  $\bar{\alpha}$  und  $\beta$  im Anhang angegeben.

Die Drehwinkel  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$

infolge der äußeren Belastung des symmetrischen Zweigelenkbogens (Fig. 190) ergeben sich aus den Gln. (410) und (411), wenn wir berücksichtigen, daß deren drittes und viertes Glied (Einfluß der Normalkräfte) Null wird, da die Werte

$\sum_0^l \sin \varphi$  und  $\sum_0^l \sin \varphi \cdot \cos \varphi$  bei Symmetrie Null werden (weil jedem Bogenelement  $\Delta s$  auf der linken Bogenhälfte mit positivem  $\sin \varphi$  ein gleiches rechts mit negativem  $\sin \varphi$  entspricht) und daß nach Gl. (411 b)

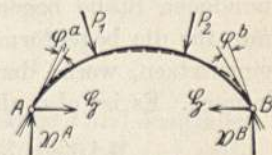


Fig. 190.

$$\sum_0^l x y w = \frac{l}{2} \sum_0^l y w ;$$

es ist daher bei Symmetrie:

$$E \cdot \varphi^a = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_o (l - x) \cdot w - \frac{\mathfrak{S}}{2} \sum_0^l y w , \quad (420)$$

$$E \cdot \varphi^b = \frac{1}{l} \sum_0^l M_o \cdot x \cdot w - \frac{\mathfrak{S}}{2} \sum_0^l y w . \quad (421)$$

Um die Winkel  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$  am symmetrischen Zweigelenkbogen infolge einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um  $t^0$  zu erhalten, setzen wir in den Gln. (420) und (421)  $M_o = 0$  und anstelle von  $\mathfrak{S}$  den Wert von  $\mathfrak{S}^t$  aus Gl. (395) ein.

### 5. Bestimmung der Drehwinkel $\varepsilon^a$ und $\varepsilon^b$ der beiden Widerlager eines bogenförmigen Stabes.

In den Hauptformeln (330) und (330a) für die Festpunktabstände kommen nicht nur die im vorhergehenden Abschnitt ermittelten Drehwinkel des Zweigelenkbogens, sondern auch die Drehwinkel  $\varepsilon^a$  und  $\varepsilon^b$  der Widerlager eines bogenförmigen Stabes vor, welche wir nachstehend bestimmen:

Bezeichnen wir, wie in Kap. II, mit

$\tau_{1-2-3-\dots n}^4$  (Fig. 191) den gemeinsamen gleichen Drehwinkel der Stäbe 1, 2, 3 . . . n, welche gerade oder bogenförmig sein können, an

der Stelle  $A$ , an welcher die Stäbe biegefest miteinander verbunden sind, infolge der Belastung in  $A$  mit dem Moment  $M^A = 1$ ; (Fig. 192 und 193) den (einfachen) Drehwinkel des geraden oder bogenförmigen Stabes  $n$  an der Stelle  $A$  infolge der Belastung

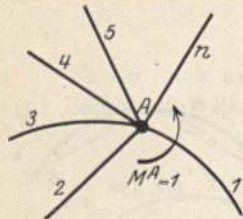


Fig. 191.

$M^A = 1$  in  $A$ , unter der Voraussetzung, daß Stab  $n$  in  $A$  in einem Gelenklager frei drehbar gestützt ist und daß an seinem Endpunkt die Verbindung mit der übrigen Konstruktion wie vorher bestehen bleibt, dann ist (siehe Fig. 194) laut Definition z. B. am linken Widerlager  $B$  des Stabes 2:

$$\epsilon_2^A = \tau_{1-5}^B.$$

In Kap. II, 4 wurde der Wert des gemeinsamen gleichen Drehwinkels der an einem Knotenpunkt  $A$  biegefest miteinander verbundenen geraden Stäbe infolge Belastung dieses Knotenpunktes mit  $M^A = 1$ , bestimmt. Da nun, wie aus Gl. (18) ersichtlich, dieser Wert nur abhängig ist von den einfachen Drehwinkeln  $\tau$ , so ist diese Gleichung auch gültig, wenn einzelne oder auch alle der in  $A$  verbundenen Stäbe bogenförmig sind; in diesem Falle brauchen wir in Gl. (18) nur für die bogenförmigen Stäbe die Drehwinkel  $\tau$  nach Gl. (441) oder (442) einzusetzen, worin der Bogenschub der bogenförmigen Stäbe zur Geltung kommt. Es ist also allgemein:

$$\tau_{1-2-3 \dots n}^A = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1^A} + \frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{\tau}} \quad (422)$$

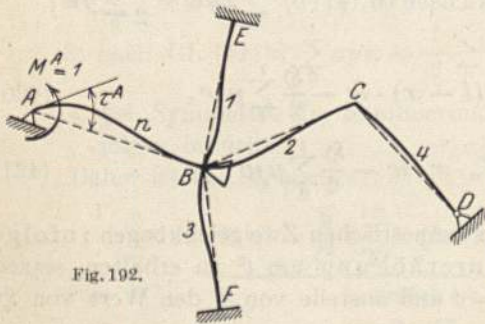


Fig. 192.

und im besonderen für das linke Widerlager  $B$  des bogenförmigen Stabes 2:

$$\epsilon_2^A = \tau_{1-5}^B = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1^B} + \frac{1}{\tau_5^B}}, \quad (423)$$

worin  $\tau_1^B$  nach Gl. (442) und  $\tau_5^B$  nach Gl. (43) einzusetzen ist; die beiden Gln. (442) und (443) sind identisch, nur sind in dieselben die dem

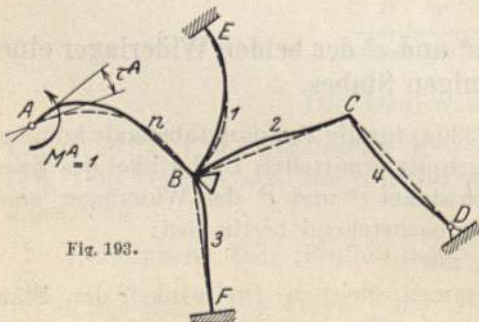


Fig. 193.

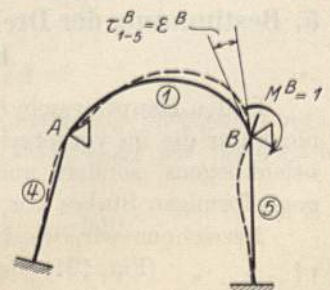


Fig. 194.

bogenförmigen bzw. gradlinigen Stab entsprechenden Werte für Festpunkt-  
abstand und Drehwinkel einzusetzen.

Da das Widerlager  $B$  nur aus 2 Stäben besteht, so wenden wir, wie in  
Kap. II unter Sonderfall zu Abschnitt 5 ausgeführt, zweckmäßig die ausmulti-  
plizierte Form des Ausdrucks für  $\tau_{1-5}^B$ , an, und zwar:

$$\tau_{1-5}^B = \frac{\tau_1^B \cdot \tau_5^B}{\tau_1^B + \tau_5^B}. \quad (424)$$

Für den Drehwinkel

$$\epsilon_2^b = \tau_{3-6}^C$$

(Fig. 170c) gelten die Gln. (422), (423) und (424) ebenfalls.

## 6. Bestimmung der Verteilungsmaße $\mu$ .

Die Kämpfermomente  $M_2^B$  und  $M_2^C$  (Fig. 170a), welche wir nach den vor-  
hergehenden Abschnitten bestimmt haben, pflanzen sich über die links (Fig. 170b)  
und rechts (Fig. 170c) anschließende Konstruktion weiter.

Das Moment  $M_2^B$  spaltet sich beim Übergang über den Knotenpunkt  $B$  in  
die 2 Momente

$$M_1^B = M_2^B \cdot \mu_{2-1}^B$$

und

$$M_5^B = M_2^B \cdot \mu_{2-5}^B,$$

wenn die Faktoren  $\mu$  die Anteile angeben, welche auf die Stäbe 1 und 5 entfallen.

Sind in einem Knotenpunkt  $A$ , auf welchen ein Moment  $M = 1$  wirkt,  
 $n$  Stäbe vereinigt, welche geradlinig oder bogenförmig sein können (Fig. 191),  
so geben die sog. Verteilungsmaße  $\mu$  die Momentenanteile an, welche auf die  
einzelnen Stäbe entfallen.

Die in Kap. II, 5 abgeleiteten Hauptformeln (24 bis 26) gelten nicht nur  
für einen Knotenpunkt, gebildet durch lauter geradlinige Stäbe, sondern auch  
für „anstoßende“ bogenförmige Stäbe, wenn wir in diese Hauptformeln für die  
gebogenen Stäbe den einfachen Drehwinkel  $\tau$  nach Gl. (441) oder (442) ein-  
setzen; es ist also allgemein:

$$\mu_{1-n}^A = \frac{\tau_{2-3\dots n}^A}{\tau_n^A} \quad (425)$$

(lies  $\mu$  von Stab 1 nach Stab  $n$ )

worin  $\tau_{2-3\dots n}^A$  nach Gl. (422) den Wert hat:

$$\tau_{2-3\dots n}^A = \frac{1}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}}. \quad (426)$$

Setzen wir diesen Wert in Gl. (425) ein, so erhalten wir die schon durch  
die Gln. (31 bis 33) ausgedrückte Form der Verteilungsmaße  $\mu$ :

$$\mu_{1-n}^A = \frac{\frac{1}{\tau_n^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}}, \quad (427)$$

welche besagt, daß sich das am Knotenpunkt  $A$  angreifende Moment im Verhältnis der Elastizitätsmaße  $\frac{1}{\tau}$  der dort anstoßenden Stäbe  $2, 3 \dots n$  auf dieselben verteilt.

Im besonderen ist nun für den Knotenpunkt  $B$  (Fig. 170 b):

$$\mu_{2-1}^B = \frac{\tau_{1-5}^B}{\tau_1^B} = \frac{\frac{1}{\tau_1^B}}{\frac{1}{\tau_1^B} + \frac{1}{\tau_5^B}} \quad (428)$$

oder ausmultipliziert (vgl. Kap. II, 5 Sonderfall),

$$\mu_{2-1}^B = \frac{\tau_5^B}{\tau_1^B + \tau_5^B}, \quad (429)$$

worin  $\tau_1^B$  nach Gl. (442) und  $\tau_5^B$  (da Stab 5 geradlinig) nach Gl. (43) einzusetzen ist. Ferner ist

$$\mu_{2-5}^B = 1 - \mu_{2-1}^B. \quad (430)$$

Das Moment  $M_2^C$  spaltet sich beim Übergang über den Knotenpunkt  $C$  in die beiden Momente

$$M_3^C = M_2^C \cdot \mu_{2-3}^C$$

und

$$M_6^C = M_2^C \cdot \mu_{2-6}^C,$$

worin die Verteilungsmaße  $\mu_{2-3}^C$  und  $\mu_{2-6}^C$  die Werte haben:

$$\mu_{2-3}^C = \frac{\tau_6^C}{\tau_3^C + \tau_6^C} \quad (431)$$

und

$$\mu_{2-6}^C = 1 - \mu_{2-3}^C. \quad (432)$$

Nachdem wir die Momente  $M_1^B$ ,  $M_5^B$ ,  $M_3^C$  und  $M_6^C$  (Fig. 170 b und 170 c) bestimmt haben, können wir dieselben mit Hilfe der Festpunkte über die in  $B$  und  $C$  anschließenden Stäbe weiterleiten.

## 7. Bestimmung der einfachen Bogendrehwinkel $\tau$ .

Nach der Definition des einfachen Drehwinkels  $\tau^A$  (siehe Abschnitt 5) bildet sich derselbe, wenn wir (Fig. 195) den in  $B$  elastisch eingespannten, in  $A$  in einem festen Gelenk gestützten beliebigen bogenförmigen Stab  $AB$  mit dem Moment  $M^A = 1$  belasten.

Die Ableitung des Ausdruckes für den einfachen Drehwinkel  $\tau$  am bogenförmigen Stab gestaltet sich genau gleich (vgl. Fig. 196—198) wie diejenige am geraden Stab (Kap. II, 6).

Unter Berücksichtigung der in Abschnitt 2 dieses Kapitels eingeführten Bezeichnungen erhalten wir für den Bogendrehwinkel  $\tau^A$  eines beliebigen bogenförmigen Stabes die Hauptformel:

$$\tau^A = \alpha^a - \frac{l}{l-b} \cdot \beta. \quad (441)$$



Analog ergibt sich der Bogendrehwinkel  $\tau^B$  am anderen Ende des bogenförmigen Stabes  $AB$ , falls wir den in  $A$  elastisch eingespannten, in  $B$  in einem festen Gelenk gestützten Bogen mit  $M^B = 1$  belasten, zu :

$$\tau^B = \alpha^b - \frac{l}{l-a} \cdot \beta, \quad (442)$$

die Werte der in den Hauptformeln (441) und (442) vorkommenden Drehwinkel  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$  und  $\beta$  am Zweigelenkbogen werden nach Abschnitt 4 und die Festpunktabstände  $a$  und  $b$  (negative Werte) nach Abschnitt 2 dieses Kapitels ermittelt.

### 8. Bestimmung der Momente, Normalkräfte und Querkräfte am Tragwerk mit bogenförmigen Stäben infolge beliebiger Belastung.

Um die in den bogenförmigen Stäben eines Tragwerkes, z. B. desjenigen der Fig. 170, wirkenden inneren Kräfte aus Rechnungsabschnitt I (unter der Voraussetzung unverschiebbar festgehaltener Knotenpunkte) angeben zu können, müssen wir zunächst die in den Kämpferverbindungsstellen der elastisch eingespannten Bogen wirkenden resultierenden Bogenschübe  $H$ , sowie die an den Kämpfern derselben wirkenden resultierenden Auflagerdrücke  $V^i$  und  $V^r$  berechnen.

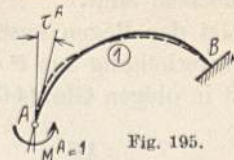


Fig. 195.

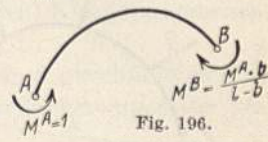


Fig. 196.

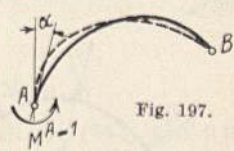


Fig. 197.

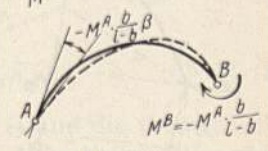


Fig. 198.

#### a) Bogenschub $H$ und Auflagerdrücke $V^i$ und $V^r$ .

Am belasteten Bogen (z. B. Stab 2).

ist der Bogenschub  $H$  identisch mit dem resultierenden Bogenschub am Zweigelenkbogen (Fig. 199) unter Einwirkung der gegebenen äußeren Lasten sowie der beiden (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente  $M^B$  und  $M^C$ . Dementsprechend setzt sich der Bogenschub  $H$  zusammen aus (Fig. 200, 201, 202) dem für den Zweigelenkbogen im Abschnitt 3 berechneten Horizontalschub  $\mathfrak{H}$  und den Bogenschüben am Zweigelenkbogen herrührend von den beiden Kämpfermomenten, welche sich durch Multiplikation des Bogenschubes  $B_{(M^B=1)}$  für  $M^B = 1$  mit  $M^B$  und des Bogenschubes  $B_{(M^C=1)}$  für  $M^C = 1$  mit  $M^C$  ergeben; d. h. es ist für den unsymmetrischen belasteten Bogen:

$$H = \mathfrak{H} + M^B \cdot B_{(M^B=1)} + M^C \cdot B_{(M^C=1)}, \quad (443)$$

worin  $B_{(M^B=1)}$  nach Gl. (370)  $B_{(M^C=1)}$  nach Gl. (371) und die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente  $M^B$  und  $M^C$  mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind; und für den symmetrischen belasteten Bogen:

(da nach Gl. (414) bei Symmetrie  $B_{(M^B=1)} = B_{(M^C=1)} = \frac{1}{2} B$ ):

$$H = \mathfrak{H} + \frac{1}{2} B (M^B + M^C), \quad (444)$$

worin  $B$  den Wert der Gl. (413) besitzt und die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente  $M^B$  und  $M^C$  wieder mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

Ist der Bogen anstatt der äußeren Belastung einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um  $t^0$  gegenüber seiner Herstellungstemperatur unterworfen, so ist in obigen Gln. (443) und (444) an Stelle von  $\xi$  der Wert  $\xi^t$  aus Gl. (395) einzusetzen.

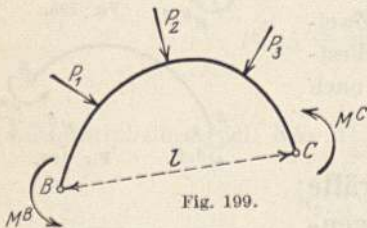


Fig. 199.

Die Auflagerdrücke  $V^l$  und  $V^r$  am belasteten Bogen sind identisch mit den resultierenden Auflagerdrücken am Zweigelenkbogen (Fig. 199) unter Einwirkung der gegebenen äußeren Lasten sowie der beiden (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente  $M^B$  und  $M^C$ .

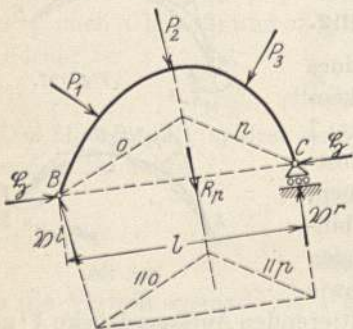


Fig. 200.

Dementsprechend erhalten wir den Auflagerdruck  $V_2^B$  durch Zusammensetzen des bei schiefgerichteten Lasten (und Annahme des einfachen Balkens mit Rollenlager am rechten Ende als statisch bestimmtes Hauptsystem) ebenfalls schief gerichteten Auflagerdruckes  $\mathfrak{A}_2^B$  (Fig. 200) infolge der äußeren Belastung mit dem Auflagerdruck  $\mathfrak{A}_2^B$  am einfachen Balken herrührend von den beiden Kämpfermomenten (Fig. 201 und 202), welcher sich ergibt zu:

$$\mathfrak{A}_2^B = -\frac{1}{l}(M^B - M^C), \quad (445)$$

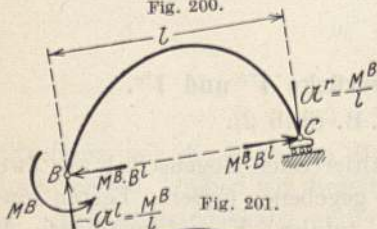


Fig. 201.

worin die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente  $M^B$  und  $M^C$  mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind; ein nach oben (senkrecht zur Kämpferverbindungsline) gerichteter Auflagerdruck wird dann positiv.

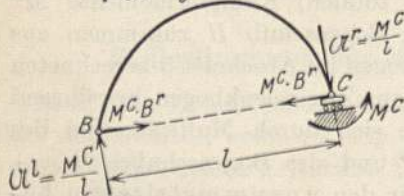


Fig. 202.

Den Auflagerdruck  $V_2^C$  erhalten wir auf analoge Weise durch Zusammensetzen des Auflagerdruckes  $\mathfrak{A}_2^C$  (Fig. 200) infolge der äußeren Belastung am einfachen Balken mit dem Auflagerdruck  $\mathfrak{A}_2^C$  herrührend von den beiden Kämpfermomenten (Fig. 201 und 202), welcher sich ergibt zu:

$$\mathfrak{A}_2^C = +\frac{1}{l}(M^B - M^C), \quad (446)$$

worin wieder die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente  $M^B$  und  $M^C$  mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

Liegen die Kämpfer des belasteten Bogens gleich hoch und ist die Belastung desselben senkrecht gerichtet, so sind alle Auflagerdrücke senkrecht gerichtet und es ist:

$$V_2^B = \mathfrak{S}_2^B - \frac{1}{l} (M^B - M^C), \quad (447)$$

$$V_2^C = \mathfrak{S}_2^C + \frac{1}{l} (M^B - M^C), \quad (448)$$

worin wieder die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente  $M^B$  und  $M^C$  mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

Ist der Bogen anstatt der äußeren Belastung einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um  $t^0$  gegenüber seiner Herstellungstemperatur unterworfen, so ist  $\mathfrak{S}^B = 0$  und  $\mathfrak{S}^C = 0$  und

$$\left. \begin{aligned} V_t^B &= \mathfrak{U}^B \\ V_t^C &= \mathfrak{U}^C \end{aligned} \right\} \quad (449)$$

Am unbelasteten Bogen (z. B. Stab 1)

ist  $\mathfrak{S} = 0$  und der Bogenschub  $H$  ist deshalb nach Gl. (443) am unsymmetrischen unbelasteten Bogen:

$$H = M^A \cdot B_{(M^A=1)} + M^B \cdot B_{(M^B=1)}, \quad (450)$$

worin  $B_{(M^A=1)}$  nach Gl. (370),  $B_{(M^B=1)}$  nach Gl. (374) und die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente  $M^B$  und  $M^C$  mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind, und nach Gl. (444) für den symmetrischen unbelasteten Bogen:

$$H = \frac{1}{2} B (M^A + M^B). \quad (451)$$

Desgleichen ist am unbelasteten Bogen  $\mathfrak{S}^A = 0$  und  $\mathfrak{S}^B = 0$ , so daß die Auflagerdrücke  $V_1^A$  und  $V_1^B$  sich nach Gl. (445) und (446) ergeben zu:

$$\left. \begin{aligned} V_1^A &= -\frac{1}{l} (M^A - M^B) \\ V_1^B &= +\frac{1}{l} (M^A - M^B) \end{aligned} \right\} \quad (452)$$

welche senkrecht zur Kämpferverbindungsline gerichtet sind.

### b) Moment, Normalkraft und Querkraft

aus Rechnungsabschnitt I am belasteten Bogen (z. B. Stab 2) erhalten wir am einfachsten

graphisch

durch Zeichnen der Stützlinie, ausgehend von einer der beiden Kämpferresultierenden  $R$ , was gleichzeitig eine Rechnungsprobe bildet.

Die Größe der Kämpferresultierenden  $R^B$  erhalten wir durch Zusammensetzung von  $H$  und  $V_2^B$  und letztere ist die Resultante aus  $\mathfrak{S}_2^B$  und  $\mathfrak{U}_2^B$  (Fig. 203 und 203a). Die Lage von  $R^B$  erhalten wir durch Zusammensetzung dieser Kraft mit dem (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermoment  $M^B$ ;

der Abstand  $r$  der Resultierenden  $R^B$  vom Kämpfer  $B$  ergibt sich aus der Gleichung

$$R^B \cdot r = M^B \quad \text{zu} \quad r = \frac{M^B}{R^B}. \quad (453)$$

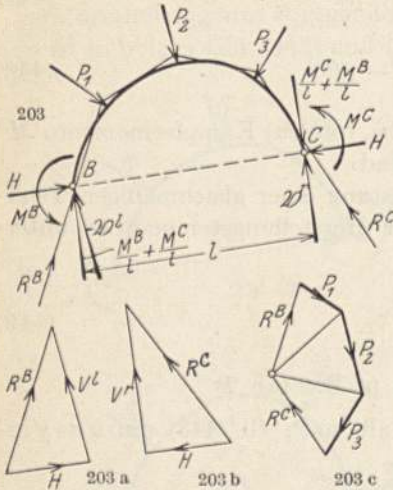


Fig. 203—203 c.

$R^B$  ist also Tangente an einem um den Knotenpunkt  $B$  mit dem Radius  $r$  beschriebenen Kreis, wobei die Drehrichtung von  $M^B$  angibt, auf welcher Seite die Tangente an den Kreis zu legen ist.

In analoger Weise erhalten wir die Kämpfer resultierende  $R^C$  (Fig. 203 und 203 b).

Tragen wir nun von einem beliebigen Pol  $O$  ausgehend die Kräfte  $R^B, P_1, P_2, P_3$  und  $R^C$  fortlaufend auf (Fig. 203 c), so muß sich der Kräftezug schließen, da diese Kräfte miteinander im Gleichgewicht sein müssen, was eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung bildet. Durch Vervollständigung des Seilecks in Fig. 203 durch Ziehen der Parallelen zu den zwischen  $P_1$  und  $P_2$  einerseits, sowie zwischen  $P_2$  und  $P_3$  andererseits

liegenden Polstrahlen im Kräfteck (Fig. 203 c) erhalten wir die gesuchte Stützlinie des an beiden Kämpfern elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes 2 des Tragwerkes der Fig. 170, welche bei der vorliegenden Belastung eine Drucklinie ist und die wir in Fig. 204 herausgezeichnet haben.

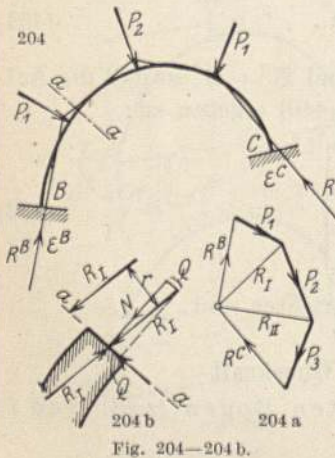


Fig. 204—204 b.

Nun erhalten wir das Moment, die Normalkraft und die Querkraft in einem beliebigen Schnitt  $a - a$  des Bogens aus Fig. 204 b. Auf den Schnitt  $a - a$  wirkt in einem gewissen Abstand die Resultierende  $R_I$ ; die Größe und Richtung derselben ergibt sich aus dem Kräfteck der Fig. 204 a, die Lage derselben ist durch die Stützlinie in Fig. 204 gegeben. Bringen wir im Schwerpunkt des Querschnittes  $a - a$  zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $R_I$  an, so ist das im Schnitt  $a - a$  wirkende Biegemoment  $M$  durch das Kräftepaar  $R_I$  mit dem Abstand  $r$  bestimmt (Fig. 204 b), d. h.

$$M = R_I \cdot r. \quad (454)$$

Zerlegen wir die übriggebliebene Kraft  $R_I$  im Schwerpunkt des Querschnittes senkrecht und parallel zum Schnitt  $a - a$ , so ist  $N$  die Normalkraft und  $Q$  die Querkraft im Schnitt  $a - a$ ;  $N$  ist im vorliegenden Fall eine Druckkraft und  $Q$  will den oberen Querschnitt vom unteren nach unten abscheren.

Es sei noch erwähnt, daß wir genau dieselben inneren Kräfte am belasteten Bogen erhalten haben würden, wenn wir am einfachen Balken (statisch be-

stimmtes Hauptsystem) das linke Auflager als beweglich und das rechte als festes Gelenk angenommen hätten.

Bei senkrechter Belastung (Fig. 205) eines elastisch eingespannten Bogens mit gleich hochliegenden Kämpfern kann man Moment und Normalkraft in einem beliebigen Querschnitt des Bogens auch

analytisch ermitteln.

Das Biegemoment in einem Querschnitt im Abstand  $x$  (Fig. 205 a) vom linken Kämpfer ist:

$$M_x = M_o + M^B \cdot \frac{l-x}{l} + M^C \cdot \frac{x}{l} - H \cdot y, \quad (455)$$

wenn  $M_o$  das Moment im Schnitt  $x$  am frei aufliegenden Balken (statisch bestimmtes Hauptsystem) infolge der äußeren Lasten bedeutet und worin die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente  $M^B$  und  $M^C$  mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

Die Normalkraft in einem Schnitt mit dem Abstand  $x$  vom linken Kämpfer ist:

$$N_x = (V_2^B - \sum_0^x P) \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi. \quad (456)$$

Die Querkraft in einem Schnitt mit dem Abstand  $x$  vom linken Kämpfer ist:

$$Q_x = (V_2^B - \sum_0^x P) \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi. \quad (457)$$

Am unbelasteten Bogen (z. B. Stab I)

erhalten wir Moment, Normalkraft und Querkraft am einfachsten analytisch; sie sind die inneren Kräfte am Zweigelenkbogen (Fig. 206), belastet durch die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente  $M^A$  und  $M^B$  sowie die Reaktionen  $H$  und  $V$ . Der Bogenschub  $H$  wird nach Gl. (450), die Auflagerdrücke  $V^A$  und  $V^B$  nach Gl. (452) ermittelt. Nun berechnen sich Moment, Normalkraft und Querkraft nach den Gln. (455), (456) und (457), wenn wir darin

$M_o = 0$  und  $\sum_0^x P = 0$  setzen.

Die Stützlinie am unbelasteten Bogen läßt sich natürlich auch zeichnen, sie ist eine schiefe Gerade, welche nach Gl. (453)

$$\begin{aligned} \text{im Abstand } r^A &= \frac{M^A}{R^A} \text{ vom Kämpfer A} \\ \text{und im Abstand } r^B &= \frac{M^B}{R^B} \text{ vom Kämpfer B} \end{aligned}$$

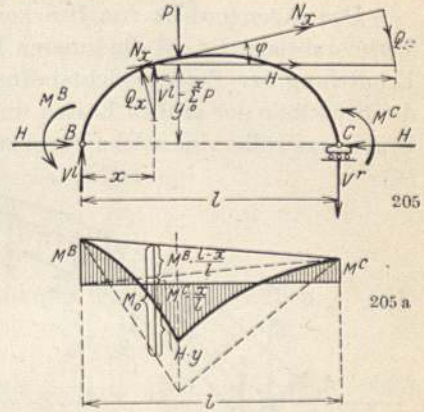


Fig. 205, 205 a.

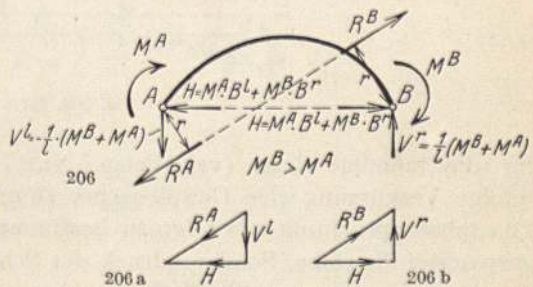


Fig. 206-206 b.

verläuft und deren Größe durch Zusammensetzen von  $H$  und  $V$  an jedem Kämpfer (Fig. 206a und b) erhalten wird.

### Sonderfall: Das symmetrische Brückengewölbe.

Das Eigengewicht von Brückengewölben ist so groß, daß der Einfluß der Verkehrsbelastung auf die inneren Kräfte desselben zurücktritt. Ferner ist die Ermittlung der Eigengewichtsbeanspruchung mit Hilfe der Einflußlinien oder der Stützlinie der großen Lasten wegen ungenau. Daher empfiehlt es sich, dem Brückengewölbe eine solche Form zu geben, daß seine Achse mit einer Stützlinie

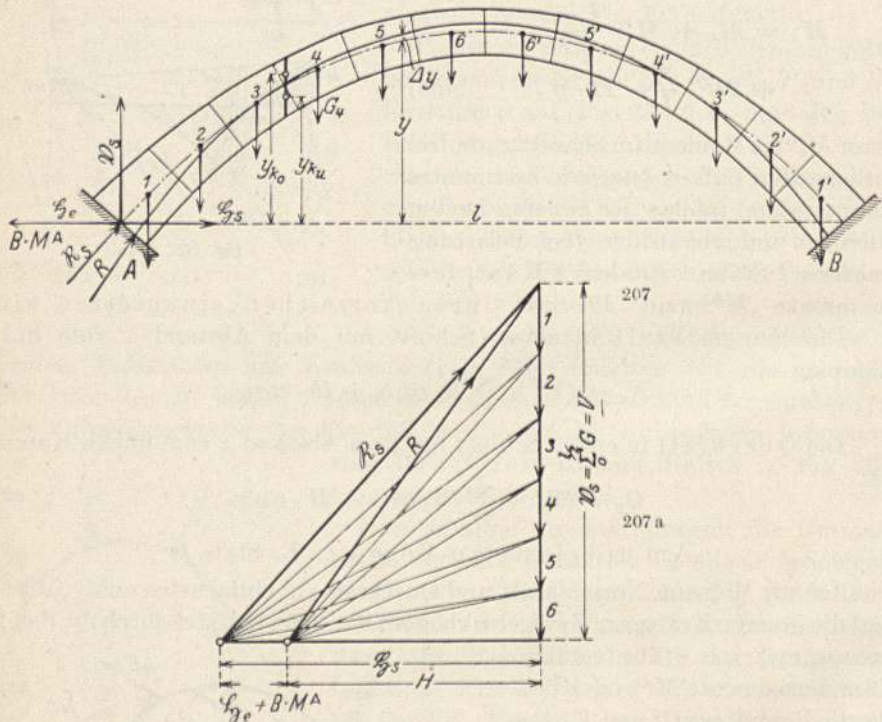


Fig. 207, 207 a.

für die ständige Last (vgl. Beisp. Nr. 17) zusammenfällt, und die noch infolge Verkürzung der Gewölbeachse durch die Normalkräfte entstehende Zusatzbeanspruchung wie folgt zu bestimmen (vgl. Mörsch, Berechnung eingespannter Gewölbe, Sonderabdruck der Schweiz. Bauzeitung 1906):

Es seien  $\mathfrak{H}_e$  und  $\mathfrak{B}_e$  die wagrechte und senkrechte Komponente der Kämpferresultierenden  $\mathfrak{R}_e$  (Fig. 207), welche bei der mit der Bogenachse zusammenfallenden Stützlinie für die ständige Last am von seinen Widerlagern getrennten und in zwei festen Gelenken gestützten Gewölbe entsteht. Da der Bogen sich aber unter dem Einfluß der Normalkräfte verkürzt, während der Abstand  $l$  der beiden Kämpfer unverändert bleibt, so kann  $\mathfrak{H}_e$  nicht der richtige Bogenschub (am Zweigelenkbogen) sein, sondern er vermindert sich um den Bogenschub  $\mathfrak{H}_e$ , dessen Größe wir wie folgt erhalten:

Nach Gl. (355) ist der statisch unbestimmte Bogenschub  $X_a$ :

$$X_a = \frac{\delta_{ao}}{\delta_{aa}}. \quad (458)$$

Der hierin vorkommende Wert von  $\delta_{ao}$  ist nach Gl. (350):

$$\delta_{ao} = \sum_0^l M_o \cdot M_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_o N_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (459)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen:

$$\left. \begin{array}{l} M_o = 0 \\ N_o = N_s \end{array} \right\} \text{ infolge der äußeren Belastung} \quad (460)$$

und nach Fig. 207:

$$\left. \begin{array}{l} M_a = y \\ N_a = -1 \cdot \cos \varphi \end{array} \right\} \text{ infolge der Belastung } X_a = 1 \text{ nach außen.} \quad (461)$$

Es ist nun:

$$\delta_{ao} = - \sum_0^l N_s \cdot \cos \varphi \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (462)$$

Da wir vorausgesetzt haben, die Stützlinie falle mit der Bogenachse zusammen, so ist aus dem Krafteck der Fig. 207a:

$$N_s \cdot \cos \varphi = \mathfrak{S}_s$$

eingesetzt gibt:

$$\delta_{ao} = - \mathfrak{S}_s \cdot \sum_0^l \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (463)$$

Der in Gl. (355) vorkommende Wert von  $\delta_{aa}$  ist nach Gl. (351)

$$\delta_{aa} = \sum_0^l M_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (464)$$

Setzen wir die Werte von  $M_a$  und  $N_a$  aus den Gln. (461) in diese Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (465)$$

und da  $\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s}$ :

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left( \frac{\Delta x}{\Delta s} \right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (466)$$

Nun ist nach Gl. (458)

$$X_a = \frac{\delta_{ao}}{\delta_{aa}} = - \frac{\mathfrak{S}_s \cdot \sum_0^l \frac{\Delta s}{F}}{\sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{J} + \sum_0^l \left( \frac{\Delta x}{\Delta s} \right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{F}} \quad (467)$$

oder mit den früheren Bezeichnungen:

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \varepsilon$$

und unter Berücksichtigung, daß wir bei Symmetrie nur über den halben Bogen zu summieren brauchen, folgt der Ergänzungsbogenschub  $\mathfrak{S}_e$  zu:

$$\mathfrak{S}_e = - \frac{\mathfrak{S}_s \cdot \sum_0^{l/2} v}{\sum_0^{l/2} y^2 \cdot w + \sum_0^{l/2} \xi^2 \cdot v}. \quad (468)$$

Da  $\mathfrak{S}_e$  als Ergänzungskraft klein ist, kann das zweite Glied im Nenner gegenüber dem viel größeren ersten Glied vernachlässigt werden. Wir möchten jedoch darauf hinweisen, daß der Nenner der Gl. (468) derselbe ist wie derjenige des Ausdruckes für den Bogenschub  $B$  und man deshalb den Nenner obiger Gleichung nicht mehr neu aufzustellen braucht.

Die Randspannungen am Zweigelenkbogen infolge ständiger Last ergeben sich als Summe der gleichmäßig verteilten Druckspannungen von der mit der Achse zusammenfallenden Stützlinie und der von  $\mathfrak{S}_e$  erzeugten Biegungsbeanspruchung. Da  $\mathfrak{S}_e$  negativ ist, so wirkt diese Kraft nach außen und erzeugt positive Biegemomente, d. h. Druckspannungen im Gewölberücken.

Nun erhalten wir die Drehwinkel  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$  der Kämpfertangenten infolge der ständigen Last, welche wir zur Bestimmung der Kämpfermomente des elastisch eingespannten symmetrischen Gewölbes benötigen, aus den Gln. (420 und 421), wenn wir darin  $M_0 = 0$  und  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_e$  setzen, zu:

$$E \cdot \varphi^a = - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{S}_e \cdot \sum_0^l y(l-x)w, \quad (469)$$

$$E \cdot \varphi^b = - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{S}_e \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w. \quad (470)$$

Nun ist aber bei symmetrischem Bogen und daher symmetrischem Eigengewicht

$$\varphi^a = \varphi^b = \varphi;$$

beachten wir ferner, daß bei Symmetrie nach Gl. (411 b)

$$\sum_0^l y(l-x) \cdot w = \sum_0^l x \cdot y \cdot w = \frac{l}{2} \sum_0^l y \cdot w,$$

und daß wir bei Symmetrie nur über den halben Bogen zu summieren brauchen, so erhalten wir:

$$E \cdot \varphi = \mathfrak{S}_e \cdot \sum_0^{l/2} y \cdot w. \quad (471)$$

Die in dem nach der Stützlinie für Eigengewicht geformten Bogen infolge der Verkürzung der Bogenachse durch die Normalkräfte hervorgerufenen Kämpfermomente erhalten wir nun durch Einsetzen des Wertes von  $\varphi$  in Gl. (334) oder (335). Es ist

$$M^l = M^r = \frac{-\varphi(l-a) + \varphi \cdot a}{l \cdot \beta(l-2a)} = \frac{-\varphi(l-2a)}{l \cdot \beta(l-2a)} = \frac{-\varphi \cdot a}{l \cdot \beta}. \quad (472)$$

Nun ist aber am fest eingespannten symmetrischen Bogen nach Gl. (7):

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha} \quad (\text{da dann } \alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha} \quad \text{und} \quad \varepsilon^a = 0),$$



daher

$$M^l = M^r = \frac{-\varphi}{\alpha}. \quad (473)$$

Den Wert von  $\varphi$  aus Gl. (471) eingesetzt gibt:

$$M^l = M^r = \frac{\mathfrak{S}_e}{E \cdot \alpha} \cdot \sum_0^{l/2} y \cdot w. \quad (474)$$

Der am eingespannten symmetrischen Bogen infolge Eigengewicht auftretende endgültige Bogenschub  $H$  ist nach Gl. (444) unter Berücksichtigung, daß

$$\begin{aligned} M^l &= M^r = M \\ H &= \mathfrak{S}_s + \mathfrak{S}_e + B \cdot M, \end{aligned} \quad (475)$$

worin alle Größen mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind (ein nach innen gerichteter Bogenschub ist positiv).

Ferner ist am eingespannten symmetrischen Bogen infolge Eigengewicht nach den Gleichungen (447) und (448):

$$V^l = V^r = \mathfrak{S}_s. \quad (475a)$$

Schließlich ist das Moment in einem beliebigen Schnitt des symmetrischen eingespannten Gewölbes unter Berücksichtigung, daß  $M^l = M^r = M$

$$M_x = M_0 + M - H \cdot y, \quad (476)$$

worin das nach Gl. (475) berechnete  $H$  einzusetzen ist, oder einfacher:

$$M_x = M - (\mathfrak{S}_e + B \cdot M) y, \quad (477)$$

da für jeden Schnitt des nach der Stützlinie für eine gegebene Belastung geformten Bogens:  $M_0 - \mathfrak{S}_s \cdot y = 0$ , indem die von der Stützlinie = Bogenachse (Seileck mit Polweite  $\mathfrak{S}_s$  gezeichnet) und der Kämpferverbindungsline eingeschlossene Fläche die  $M_0$ -Fläche darstellt, so daß für jeden Schnitt:

$$M_0 = \mathfrak{S}_s \cdot y. \quad (478)$$

Die Abweichung  $\Delta y$  (siehe Fig. 207) der Stützlinie für Eigengewicht infolge  $\mathfrak{S}_e$  beträgt:

$$\Delta y = \frac{M_x}{H}. \quad (479)$$

## 9. Bestimmung der Festhaltungskräfte.

Ein Tragwerk mit bogenförmigen Stäben, dessen Knotenpunkte verschiebbar sind, kann genau wie ein Stockwerkrahmen nicht durch eine einzige Festhaltungskraft in Ruhe gehalten werden.

Zum Beispiel am Tragwerk der Fig. 170 müssen wir an den Knotenpunkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  je eine Festhaltungskraft anbringen, damit das ganze Tragwerk unverschiebbar festgehalten und dadurch die Voraussetzung für den Rechnungsabschnitt I erfüllt ist.

Zur Bestimmung dieser Festhaltungskräfte  $F^A$ ,  $F^B$  und  $F^C$  denken wir uns alle Stäbe an den Knotenpunkten durchgeschnitten, deren Enden wegen der vorausgesetzten Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte in festen Gelenklagern gestützt und mit den in den Schnittstellen wirkenden inneren Kräften (Reaktionen) belastet (Fig. 208). Auf die herausgetrennten Knotenpunkte wirken diese Kräfte dann als „Aktionen“, während die Festhaltungskraft als „Reaktion“ am Knotenpunkt diesen „Aktionen“ das Gleichgewicht hält. Deshalb verwenden wir auch am Tragwerk mit bogenförmigen Stäben zur

Bestimmung der Festhaltungskräfte, wie im Kap. VII, 1 a) erwähnt, der Einfachheit halber die „Reaktionen“ an den Stäben.

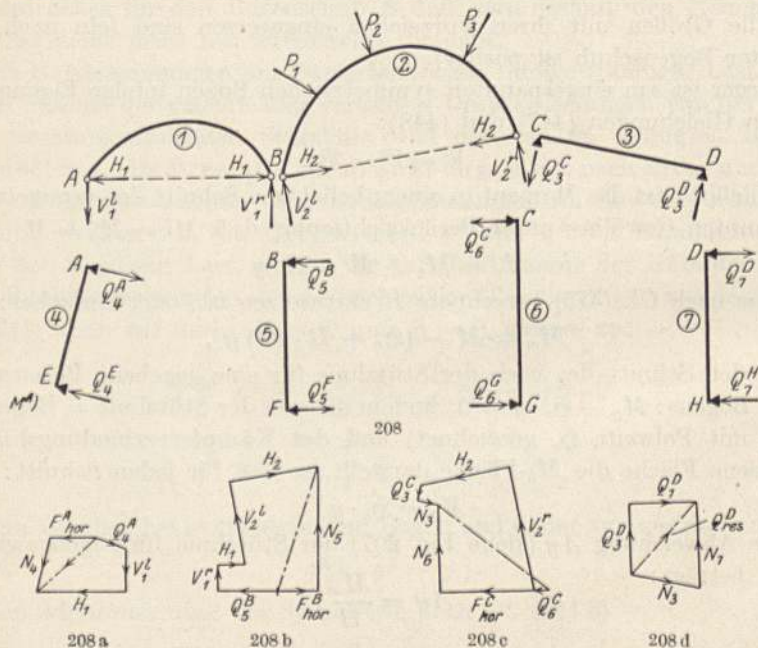
Am Knotenpunkt  $A$  (Fig. 208) wirken die Reaktionen:

$H_1$  der Bogenschub am unbelasteten Bogen  $I$  nach Gl. (450).

$Q_4^A$  herrührend von Stab  $4$ ,

$V_1^A$  der linke Auflagerdruck des unbelasteten Bogens  $I$  bei freier Auflagerung.

Setzen wir diese Kräfte zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes  $4$  und die Horizontale (Fig. 208a),



so ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{\text{hor}}^A$  am Knotenpunkt  $A$ , da die in den Stab  $4$  fallende Komponente  $N_4$ , die Normalkraft des Stabes  $4$  auf den Knotenpunkt  $A$  aus Rechnungsabschnitt I, weder verschieben noch festhalten kann und daher ausscheidet.

Am Knotenpunkt  $B$  (Fig. 208) wirken die Reaktionen:

$Q_5^B$  herrührend von Stab  $5$ ,

$V_1^C$  der rechte Auflagerdruck des unbelasteten Bogens  $I$  bei freier Auflagerung,

$H_1$  der Bogenschub am unbelasteten Bogen  $I$  nach Gl. (450),

$V_2^B$  der linke Auflagerdruck des belasteten Bogens  $2$  bei freier Auflagerung,

$H_2$  der Bogenschub am belasteten Bogen  $2$  nach Gl. (443).

Setzen wir diese Kräfte zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes  $5$  und die Horizontale (Fig. 208b), so ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{\text{hor}}^B$  am Knotenpunkt  $B$ .

Am Knotenpunkt  $C$  (Fig. 208) wirken die Reaktionen:

$Q_6^C$  herrührend von Stab 6,

$V_2^C$  der rechte Auflagerdruck des belasteten Bogens 2 bei freier Auflagerung,

$H_2$  der Bogenschub am belasteten Bogen 2 nach Gl. (443),

$Q_3^C$  herrührend vom geraden Stab 3.

Ferner wirkt am Knotenpunkt  $C$ , da derselbe mit dem Knotenpunkt  $D$  durch einen geraden Stab verbunden ist, die aus Fig. 208d hervorgehende Komponente  $N_3$  von  $Q_{res}^D$  ( $N_3$  wirkt am Knotenpunkt  $D$  als „Reaktion“, im Stab 3 als „Aktion“ und am Knotenpunkt  $C$  wieder als „Reaktion“).

Setzen wir diese 5 Kräfte zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Richtung des Auflagerstabes 6 und die Horizontale (Fig. 208c), so ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft  $F_{hor}^C$ , welche die Knotenpunkte  $C$  und  $D$  in Ruhe hält.

## 10. Sonderfall: Der Bogen wird durch zwei oder mehr geradlinige Stäbe gebildet.

Den in Fig. 209 dargestellten Rahmen könnte man auch nach dem vorhergehenden berechnen, indem man den Stabzug 2—3 als bogenförmigen Stab betrachtet. Dies ist jedoch, wie in Teil II, Kap. I, Sonderfälle, ausgeführt,

nicht zweckmäßig, sondern dieser Rahmen wird einfacher als „nach der Seite“ mehrstöckiger Rahmen berechnet.

Da nun dieser Rahmen während R. I in den Knotenpunkten  $B$  und  $D$  unverschiebbar festgehalten werden muß, damit alle seine Knotenpunkte keine Verschiebungen ausführen können, so ist er wie ein zweistöckiger Rahmen zu behandeln.

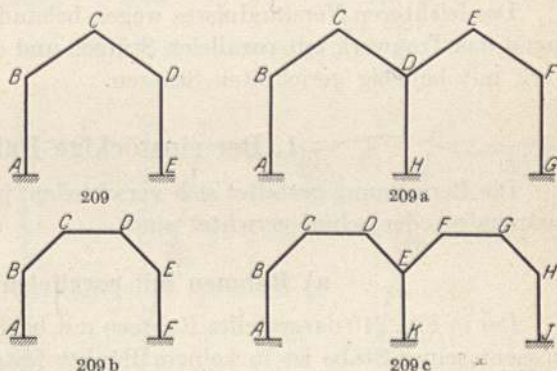


Fig. 209—209 c.

Ist der Rahmen mehrfach (Fig. 209a), so muß er während R. I in den Knotenpunkten  $A$ ,  $C$  und  $E$  unverschiebbar festgehalten werden und ist daher wie ein dreistöckiger Rahmen zu berechnen.

Das Analoge gilt für die Rahmen der Fig. 209 b und c, bei welchen jedoch außer der Säulenköpfe noch die oberen Stäbe 1, bzw. 1 und 2, während R. I unverschiebbar festzuhalten sind, so daß der Rahmen der Fig. 209 b wie ein dreistöckiger und der Rahmen der Fig. 209 c wie ein fünfstöckiger Rahmen zu berechnen ist.

Wegen weiterer ähnlicher Konstruktionsformen, welche zweckmäßig nach dem Verfahren für Rahmen mit nur geradlinigen Stäben berechnet werden, sei hiermit auf Teil II, Kap. I, Sonderfälle, verwiesen.

## Zweiter Teil.

# Berechnung des Tragwerkes mit verschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte.

## I. Gang der Berechnung.

Wir unterscheiden vier verschiedene Gattungen von Tragwerken mit verschiebbaren Knotenpunkten und geradlinigen Stäben, und zwar:

1. der einstöckige Rahmen,
2. der mehrstöckige Rahmen,
3. der Rahmenträger (Vierendeelträger) und
4. das biegungsfeste Fachwerk,

deren Berechnung nach der Methode der Festpunkte wir nachstehend erläutern.

Des leichteren Verständnisses wegen behandeln wir ausnahmsweise jeweils zuerst das Tragwerk mit parallelen Stützen und dann erst das allgemeine Tragwerk mit beliebig gerichteten Stützen.

### I. Der einstöckige Rahmen.

Die Berechnung gestaltet sich verschieden, je nachdem die Stützen parallel zueinander oder schief gerichtet sind.

#### a) Rahmen mit parallelen Stützen.

Der in Fig. 210 dargestellte Rahmen mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe ist in keinem Punkte festgehalten, d. h. er besitzt verschiebbare Knotenpunkte; irgendwelche äußeren oder inneren wagrechten Kräfte sind imstande, dem Balken und damit auch den Pfeilerköpfen (Knotenpunkten) wagrechte Verschiebungen zu erteilen, deren Größe von der Steifigkeit der Stäbe und ihrer Einspannung abhängt. Die Balkenöffnung  $I$  sei mit der beliebig gerichteten Kraft  $P$  belastet.

Wir teilen den Gang der Berechnung des Rahmens in folgende zwei getrennte Hauptabschnitte ein:

#### Rechnungsabschnitt I.

Während des R. I nehmen wir an, die Verschiebbarkeit des Balkens sei vorübergehend durch gedachte Lager an den Knotenpunkten aufgehoben (Fig. 210a), welche jedoch die elastische Drehbarkeit der Knotenpunkte nicht behindern. Der Rahmen geht dann in ein Tragwerk mit unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten über, dessen Berechnung wir im „Ersten Teil“ durchgeführt haben. Wir bestimmen also zuerst die Festpunkte an allen Stäben, dann

mit Hilfe der Kreuzlinienabschnitte und Verteilungsmaße die Momente am ganzen Tragwerk infolge der gegebenen äußeren Belastung und zum Schluß aus den Momenten die Festhaltungskraft, welche gerade imstande ist, die Knotenpunkte des Rahmens in ihrer ursprünglichen Lage zu halten.

### Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen jetzt die während des R. I an den Knotenpunkten gedachten Lager, und dadurch auch die Festhaltungskraft, welche den Balken des Rahmens und damit auch alle Knotenpunkte während des R. I unverschiebbar festhielt.

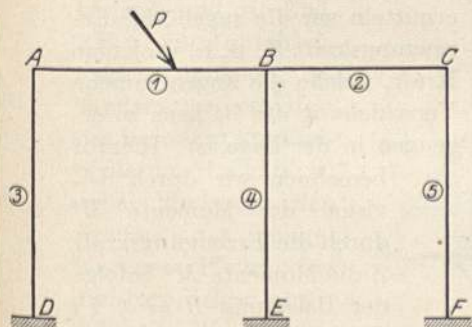


Fig. 210

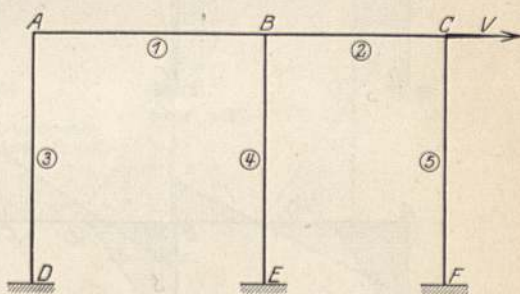


Fig. 210b

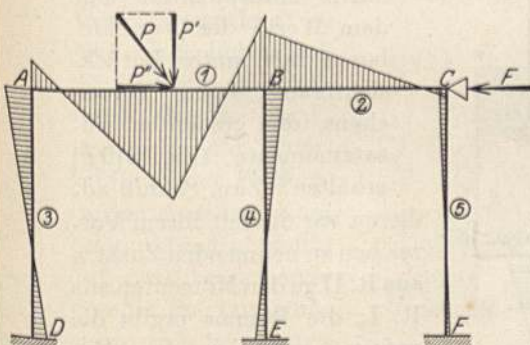


Fig. 210a

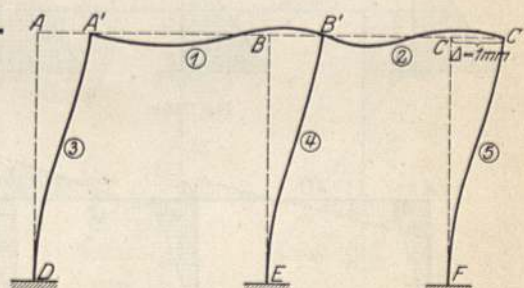


Fig. 210c

Hierauf tritt die der Festhaltungskraft („Reaktion“) gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Verschiebungskraft („Aktion“) in Tätigkeit (Fig. 210b), welche dem Balken des Rahmens und damit sämtlichen Knotenpunkten eine wagrechte Verschiebung  $\Delta$  genau wie eine äußere, den Rahmen belastende Horizontalkraft erteilt, und daher am ganzen Rahmen Momente hervorruft, welche wir als Zusätze bezeichnen.

Um diese Zusätze zu erhalten, bestimmen wir zunächst die Momente  $M'$  für eine gegebene Verschiebung, z. B.  $\Delta = 1 \text{ mm}$ , des Balkens und damit sämtlicher Pfeilerköpfe (Fig. 210c) in Richtung der Kraft  $H = +1 \text{ t}$  (von links nach rechts, Fig. 210f). Durch diese Verschiebung erleiden bei parallelen Pfeilern nur diese eine „gegenseitige Verschiebung der Stabenden“, welche überdies bei allen Pfeilern gleich groß ist, während die Enden der den Balken bildenden Stäbe in

der Balkenrichtung verbleiben (Fig. 210d). Wir müssen also, um die Momente  $M'$  zu erhalten, für alle Pfeiler (für alle Stäbe, deren Enden sich gegenseitig verschieben) die Momente an beiden Enden, herrührend von ihrer gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung, nach den allgemeinen Gln. (515) und (520) berechnen (siehe

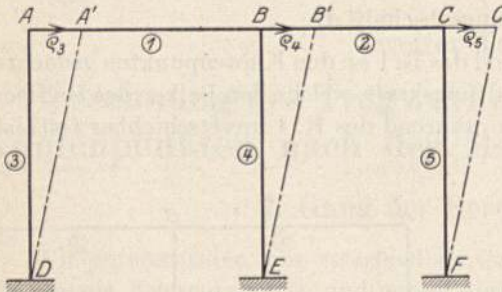


Fig. 210 d

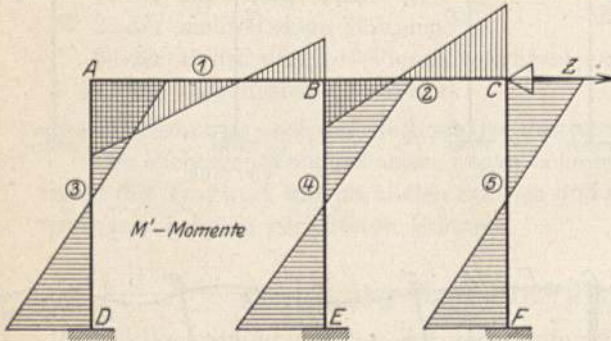


Fig. 210 e

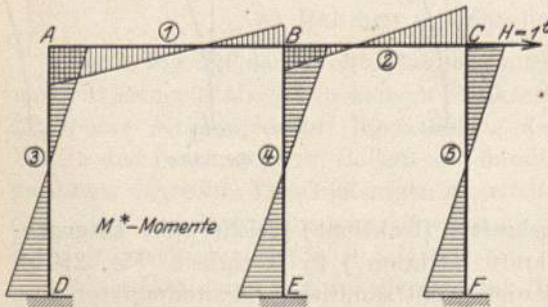


Fig. 210 f.

diese Kräfte zweckmäßig erst aus der resultierenden Momentenfläche.

Die vorstehend beschriebene Berechnungsweise des Rahmens mit senkrechten Stützen ist nicht nur bei beliebiger ruhender Balken- oder Pfeilerbelastung vorteilhaft, sondern eignet sich in gleich guter Weise zur Berechnung des Rahmens für wandernde Lasten nach dem Verfahren der Einflußlinien. Hierbei setzen die Ordinaten irgendeiner Einflußlinie (Mo-

Teil II, Kap. III), diese Momente über das ganze Tragwerk mittels der Festpunkte und Verteilungsmaße weiterleiten und zum Schluß mit ihren Vorzeichen addieren. Aus den Momenten  $M'$  (Fig. 210e) ermitteln wir die zugehörige Erzeugungskraft  $Z$ , d. h. diejenige Kraft, welche die angenommene Verschiebung des Balkens zu erzeugen in der Lage ist. Hierauf

berechnen wir durch Division der Momente  $M'$  durch die Erzeugungskraft  $Z$  die Momente  $M^*$  infolge der Belastung  $H = +1t$  (Fig. 210f), aus welcher wir durch Multiplikation mit dem Werte der Verschiebungskraft, unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens, die gesuchten Zusatzmomente (Fig. 210g)

erhalten. Zum Schluß addieren wir die mit ihrem Vorzeichen zu nehmenden Zusätze aus R. II zu den Momenten aus R. I; die Summe ergibt die genauen resultierenden Momente aus., welche am Rahmen infolge der gegebenen äußeren Lasten entstehen (Fig. 210h).

Da die Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte aus den Momenten hervorgehen, so ermitteln wir

ment, Querkraft, Auflagerdruck usw.) sich aus einem nach R. I und einem nach R. II zu ermittelnden Anteil zusammen; der letztere Anteil einer jeden Einflußlinie wird in einfacher Weise aus der Einflußlinie der Verschiebungskraft („Aktion“) und der  $M^*$ -Momentenfläche des Rahmens ermittelt. Die Konstruktion der Einflußlinien ist im Beispiel Nr. 3 (Teil III) zu finden.

Da man den Rahmen während des R. I als vorübergehend an seinen Knotenpunkten festgehalten betrachtet, kann man bei Bestimmung der Momente aus R. I die Endpfeiler in

die Verlängerung der Balkenachse hinaufklappen und wie Endfelder eines durchlaufenden Balkens behandeln, was besonders bei belasteten Endpfeilern vorteilhaft ist; dabei sind an den Köpfen der aufgeklappten Pfeiler frei drehbare Lager anzunehmen. Ergibt sich die Festhaltungs- bzw. Verschiebungskraft zu Null, d. h. heben sich die in die Balkenrichtung fallenden Reaktionen (obere Querkräfte an den Pfeilern) in den einzelnen Knotenpunkten gegenseitig auf, was bei symmetrischer Tragkonstruktion und symmetrischer Belastung zu-

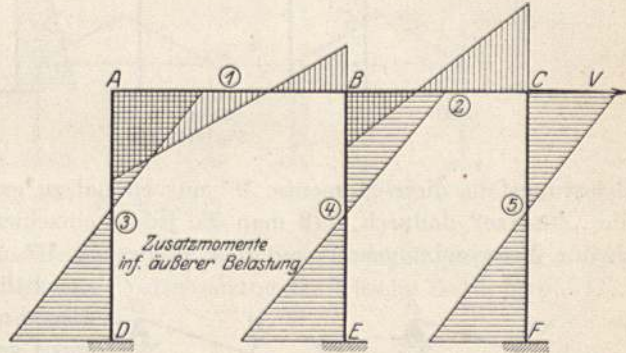


Fig. 210g

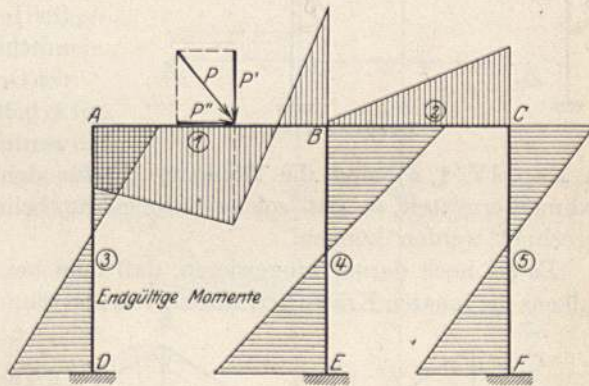
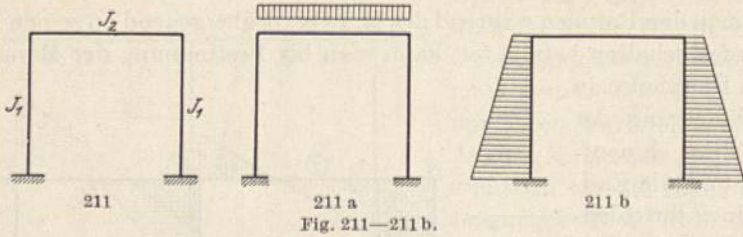


Fig. 210h.

trifft, so treten am Rahmen keine „Zusätze“ auf, und R. I liefert schon die endgültigen Momente und übrigen inneren Kräfte. Man erhält z. B. am Rahmen der Fig. 211 sowohl für gleichmäßig verteilte Belastung des Balkens auf seine ganze Länge (Fig. 211 a) als auch für gleichzeitige Belastung der beiden Pfeiler mit gleich großem Erd- oder Wasserdruck (Fig. 211 b) durch Aufklappen der Pfeiler in die Verlängerung der Balkenachse und Durchführung der Berechnung wie für einen an beiden Enden eingespannten durchlaufenden Balken mit drei Öffnungen genau dieselben Momente und übrigen inneren Kräfte, wie sie eine Berechnung nach den Elastizitätsgleichungen liefern würde. Dasselbe gilt z. B. für den einstieligen Rahmen der Fig. 212 (Vordach eines Gebäudes), der in B ein festes Lager besitzt, und zwar für beliebige Balken- und Pfeilerbelastung, da die im Balken auftretende Festhaltungs- bzw. Verschiebungskraft vom festen Balkenauflager aufgenommen wird, weshalb keine zusätzlichen Momente usw. auftreten.

Die Grundlage für die Ermittlung der „Zusätze“ aus R. II bilden die Momente  $M^*$  infolge einer äußeren, in Balkenachse angreifenden Horizontalkraft  $H = 1 t$ . Da die Momente  $M^*$  allein abhängig sind von den Abmessungen des Rahmens, so hat man bei der Berechnung eines Rahmens für mehrere



Belastungsfälle diese Momente  $M^*$  nur einmal zu ermitteln, und man erhält die „Zusätze“ dadurch, daß man die jedem einzelnen Belastungsfall entsprechende Verschiebungskraft mit den Momenten  $M^*$  multipliziert. Hieraus ist ersichtlich, daß die vorliegende Berechnungsmethode des Rahmens gegenüber derjenigen nach den Elastizitätsgleichungen, wo für jeden Belastungsfall die Ermittlung der statisch unbestimmten Größen, eine sehr zeitraubende Arbeit, von neuem vorgenommen werden muß, sehr vorteilhaft ist.

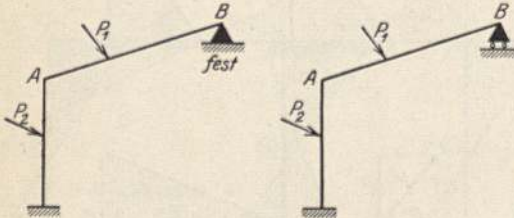


Fig. 212 u. 212 a.

In Kap. IV, 1, a) sind die Momente  $M^*$  für den einfachen symmetrischen Rahmen ermittelt, so daß solche Rahmen für beliebige Belastung sehr rasch berechnet werden können.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man bei senkrechter Belastung des Balkens die inneren Kräfte herrührend von den Säulenkopfverschiebungen, d. h.

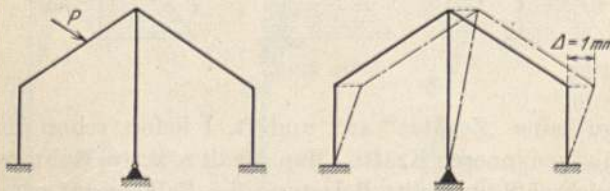


Fig. 213 u. 213 a.

die Zusätze, erst bei Rahmen mit vier und mehr Pfeilern vernachlässigen kann, bei vier Pfeilern auch nur dann, wenn das Tragwerk nicht unsymmetrisch ist. Die größten Zusätze für senkrechte Belastung treten bei einem durchlaufenden Balken mit zwei ungleich großen Öffnungen auf, dessen Enden frei drehbar sind und dessen Mittelstütze aus einem mit dem Balken biegungsfest verbundenen Pfeiler besteht; hier erreichen die Zusätze (bei senkrechter Belastung) Werte bis zu einem Drittel der inneren Kräfte, die man ohne Berücksichtigung der Säulenkopfverschiebungen erhält.

Was die Momente, herrührend von einer Temperaturänderung des Tragwerkes gegenüber der Herstellungstemperatur, oder einer Stützensenkung, oder der Längenänderung der Stäbe infolge der in denselben wir-



kenden Normalkräfte, wodurch Knotenpunktverschiebungen eintreten, betrifft, so können dieselben nach Kap. V bzw. VI bzw. VII ermittelt und entsprechend ihren Vorzeichen zu den von der äußeren Belastung hervorgerufenen Momenten addiert werden.

Der in Fig. 213 dargestellte Rahmen mit parallelen Pfeilern und beliebig geneigtem Balken wird in gleicher Weise berechnet wie der Rahmen mit wag-

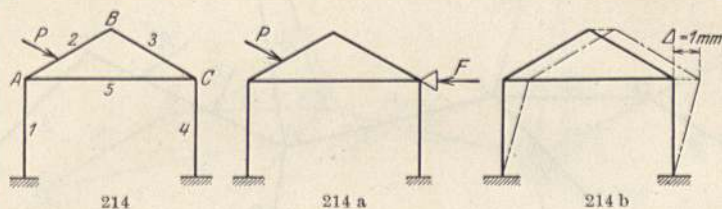


Fig. 214—214 b.

rechtem Balken; der Unterschied liegt nur in der sich etwas länger gestaltenden Bestimmung der Festhaltungs- bzw. Verschiebungskraft (siehe Teil I, Kap. VII). Wenn die Pfeiler parallel sind, so ergibt sich wieder nur für die letzteren eine gegenseitige Verschiebung der Stabenden (Fig. 213a), die Balkenstäbe können beliebig gerichtet sein, sie verschieben sich nur parallel.

Dasselbe gilt für den in Fig. 212a dargestellten einstieligen Rahmen mit geneigtem Balken und horizontal laufendem Rollenlager an einem Ende.

In Fig. 214 wurde ein einstöckiges Tragwerk mit Aufsätzen dargestellt; Stab 5 ist biegungsfest ausgebildet. Die Berechnung dieses Rahmens gestaltet sich analog derjenigen des Rahmens der Fig. 210. Die Bestimmung der Festhaltungs- bzw. Verschiebungskraft wurde in Teil I, Kap. VII gezeigt. Bei der Verschiebung des Balkens (Stab 5) um eine beliebige Strecke  $\Delta$  (Fig. 214b) erleiden nur die beiden Säulen gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, da diese Säulen, welche den Balken stützen, parallel zueinander sind.

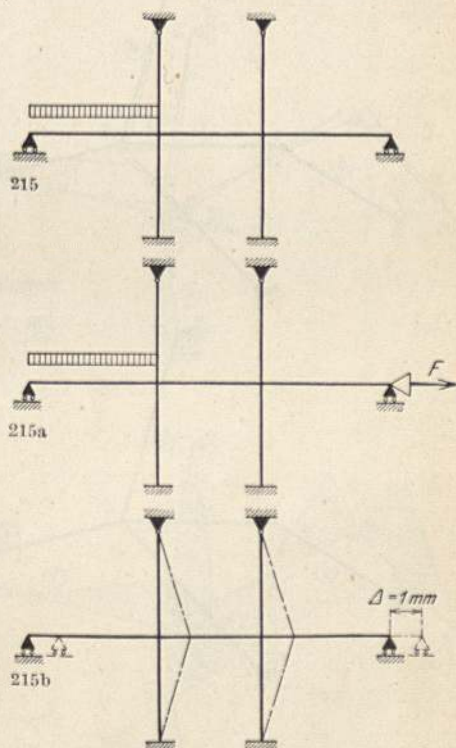


Fig. 215—215b.

In Fig. 215 wurde ein Rahmen dargestellt, wie er bei Berechnung von Silozellenwänden (als Grundriß) vorkommt. Die Berechnung dieses Rahmens gestaltet sich analog wie diejenige des Rahmens der Fig. 210. Die Bestimmung der Festhaltungs- (Fig. 215a) bzw. Verschiebungskraft wurde in Teil I, Kap. VII

gezeigt. Bei der Verschiebung des Balkens (Fig. 215 b) um eine gegebene Strecke erleiden nur die vier Säulen gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, während die Enden der den Balken bildenden Stäbe in der Balkenrichtung verbleiben.

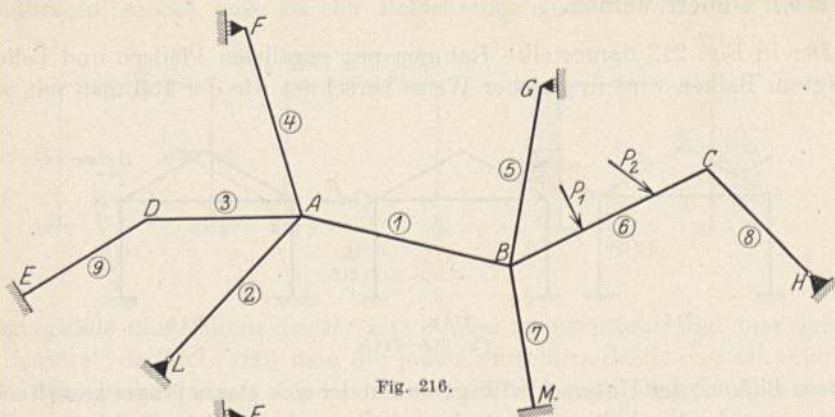


Fig. 216.

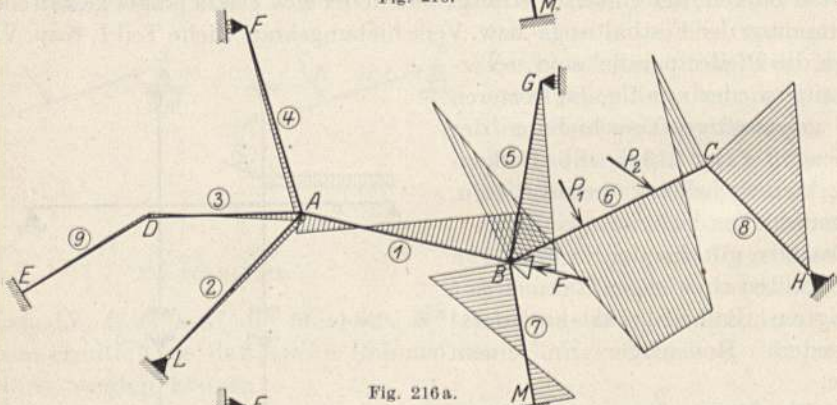


Fig. 216 a.

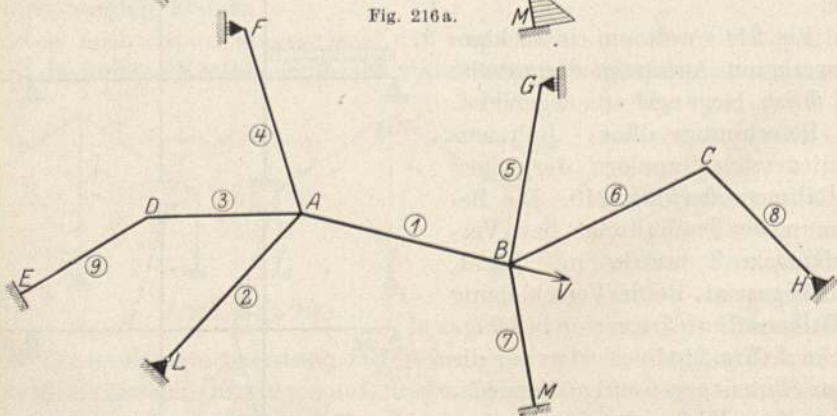


Fig. 216 b

### b) Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen.

Die Berechnung des in Fig. 216 dargestellten allgemeinen einstöckigen Rahmens mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe teilen wir wieder in R. I und R. II; es sei nur der Stab 6 mit den Kräften  $P_1$  und  $P_2$  belastet.

Rechnungsabschnitt I

liefert uns die Momente und übrigen inneren Kräfte für den Fall, daß die Knotenpunkte vorübergehend unverschiebbar festgehalten sind, was wir in

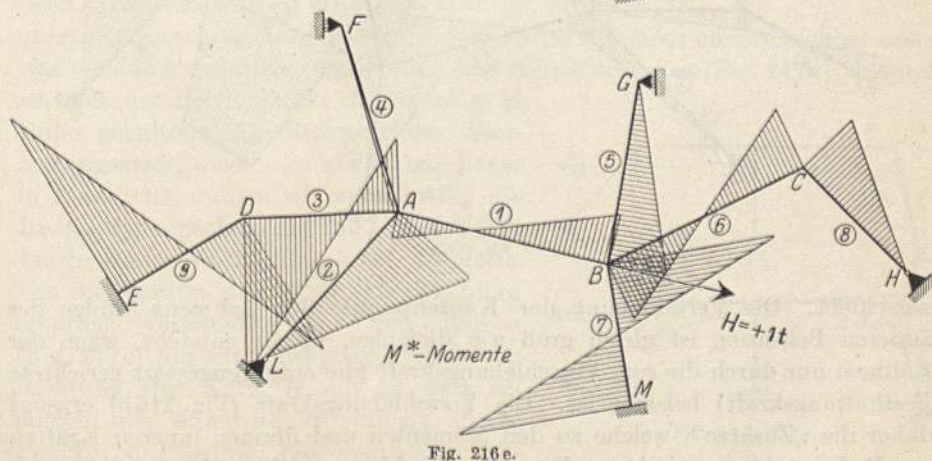
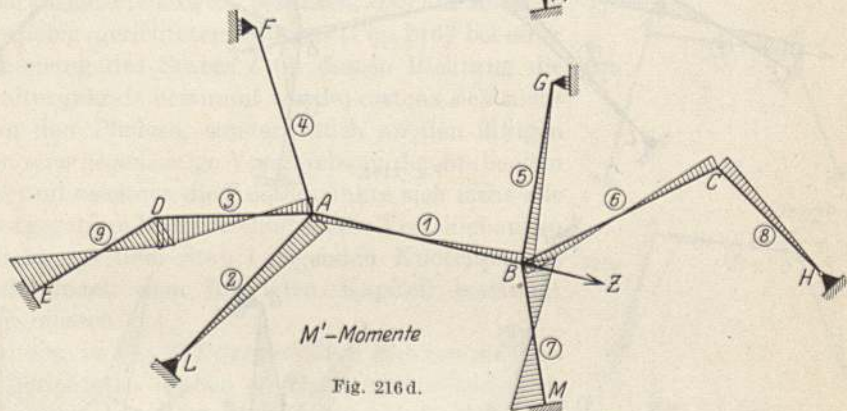
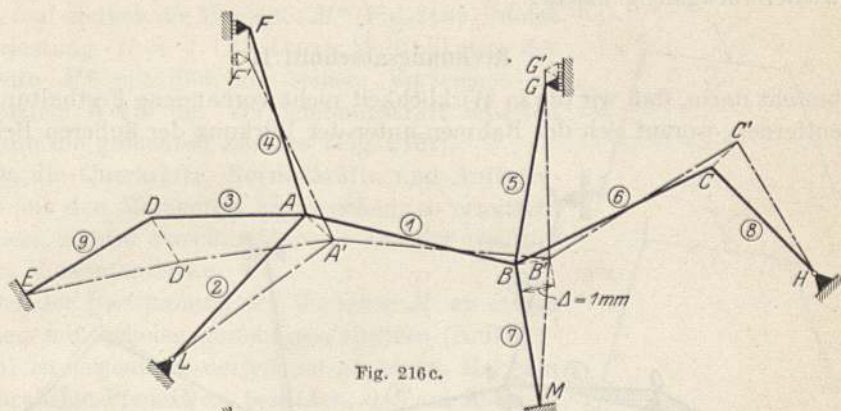


Fig. 216a durch ein Lager in *B* in Richtung des Stabes *1* angedeutet haben; diese Momente (Fig. 216a) werden nach dem „Ersten Teil“ ermittelt. Aus den Momentenflächen für den festgehaltenen Zustand bestimmen wir noch nach

Kap. VII, 1 des „Ersten Teiles“ die Festhaltungskraft, welche eine Verschiebung der Knotenpunkte unter Einwirkung der äußeren Belastung verhindert, oder, falls die Verschiebung der Knotenpunkte schon eingetreten ist, dieselbe wieder rückgängig macht.

### Rechnungsabschnitt II

besteht darin, daß wir die in Wirklichkeit nicht vorhandene Festhaltungskraft entfernen, worauf sich der Rahmen unter der Wirkung der äußeren Belastung

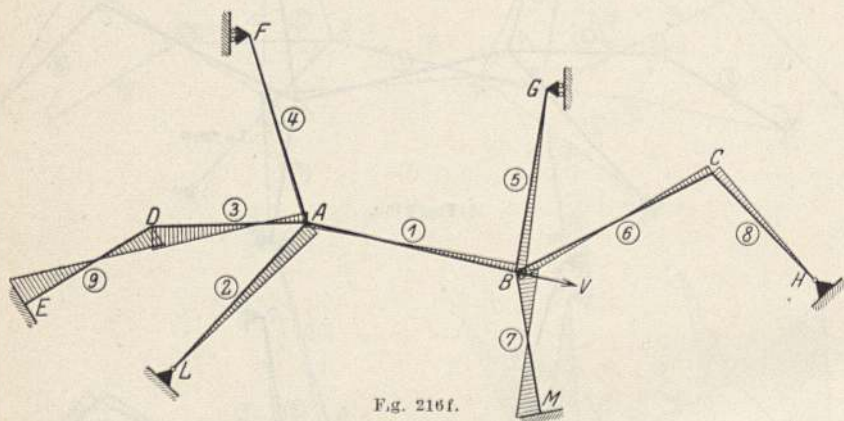


Fig. 216f.

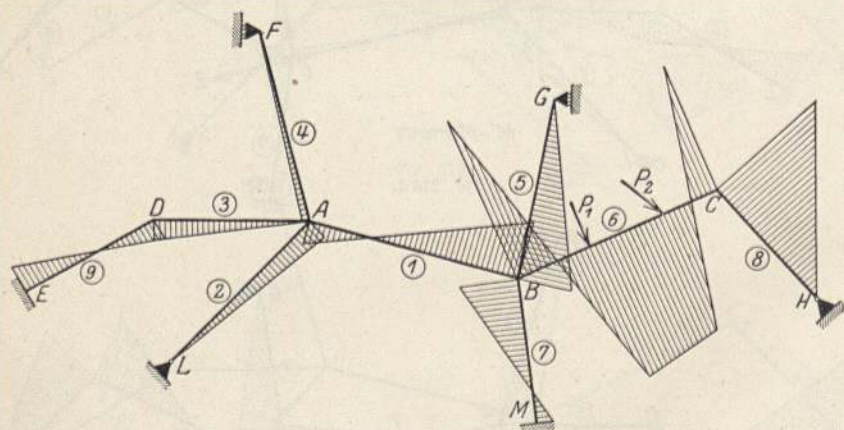


Fig. 216g.

verschiebt. Die Verschiebung der Knotenpunkte des Rahmens infolge der äußeren Belastung ist gleich groß wie diejenige, welche entsteht, wenn der Rahmen nur durch die sog. Verschiebungskraft (die entgegengesetzt gerichtete Festhaltungskraft) belastet ist. Die Verschiebungskraft (Fig. 216b) erzeugt daher die „Zusätze“, welche zu den Momenten und übrigen inneren Kräften aus R. I zu addieren sind, um die wirklichen Momente (Fig. 216g) und übrigen inneren Kräfte am Rahmen zu erhalten.

Um die Zusätze zu erhalten, bestimmen wir zunächst die Momente  $M'$  für eine gegebene Verschiebung, z. B.  $\Delta = 1$  mm, des Stabes  $I$  in Richtung der

Kraft  $H = +1t$  (von links nach rechts, Fig. 216e), darauf die zu den Momenten  $M'$  (Fig. 216d) gehörige Erzeugungskraft  $Z$ , d. h. diejenige Kraft, welche die angenommene Verschiebung des Balkens und damit die Momente  $M'$  erzeugt, und endlich die Momente  $M^*$  (Fig. 216e) infolge der Belastung  $H = +1t$ . Durch Multiplikation der Momente  $M^*$  mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der Verschiebungskraft erhalten wir dann die gesuchten Zusätze (Fig. 216f).

Da die Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte aus den Momenten hervorgehen, so ermitteln wir diese Kräfte zweckmäßig erst aus der resultierenden Momentenfläche.

Bei der Bestimmung der Momente  $M'$  an einem Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen (Auflagerstäben) ist gegenüber derjenigen an einem Rahmen mit parallelen Pfeilern zu beachten, daß am Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen (Fig. 216) bei einer Verschiebung des Stabes  $I$  (in dessen Richtung die Festhaltungskraft bestimmt wurde) erstens sich nicht nur an den Pfeilern, sondern auch an den übrigen Stäben eine gegenseitige Verschiebung der Stabenden ergibt, und zweitens die Knotenpunkte sich nicht alle um das gegebene Maß verschieben, die Verschiebungen der nicht auf dem Stab  $I$  liegenden Knotenpunkte vielmehr (nach dem folgenden Kapitel) bestimmt werden müssen.

An dem in Fig. 217 dargestellten Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben ist der Gang der Rechnung noch besser erkennbar. R. I liefert uns die Momente unter der Annahme, daß die Knotenpunkte des Rahmens unverschiebbar seien, was wir durch Anbringen eines festen Lagers in  $B$  erreichen (Fig. 217a); dadurch ist auch der Knotenpunkt  $A$  von selbst in Ruhe gehalten.

Als Richtung der Festhaltungskraft, welche im gedachten Lager in  $B$  auftritt, wählen wir zweckmäßig die Richtung des Stabes  $I$ ; in Teil I, Kap. VII, 4 wurde diese Festhaltungskraft ermittelt. Um die Zusätze aus R. II (Fig. 217b) zu erhalten, verschieben wir den Balken (Fig. 217c) um eine beliebige Strecke in Richtung der Kraft  $H = +1t$  und ermitteln die Momente  $M'$  infolge dieser Verschiebung sowie die zugehörige Erzeugungskraft  $Z$  derselben in Richtung des Stabes  $I$ . Durch eine Verschiebung des Balkens erleiden sämtliche Stäbe gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, daher müssen wir für jeden Stab die da von herrührenden Momente nach Kap. III, 1 ermitteln, dieselben weiterleiten und darauf mit ihren Vorzeichen addieren, um

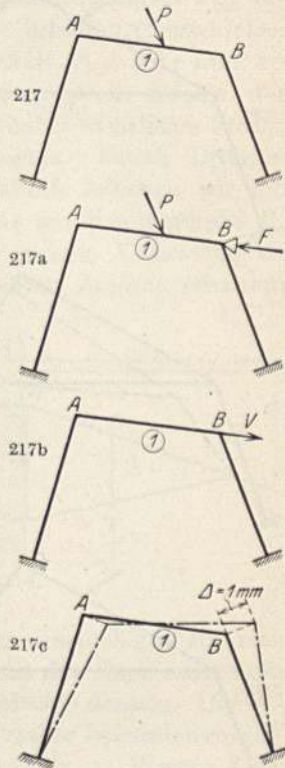


Fig. 217—217 c.

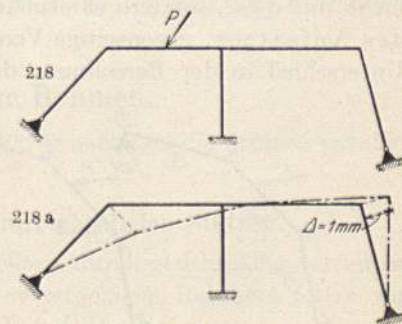


Fig. 218 u. 218 a.

die Momente  $M'$  zu erhalten. Durch Division der Momente  $M'$  durch den Wert der Erzeugungskraft  $Z$  erhalten wir die Momente  $M^*$  infolge der Kraft  $H = +1t$  in Richtung des Balkens, aus welchen wir durch Multiplikation mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Wert (falls die Verschiebungskraft nach links gerichtet ist, hat ihr Wert das negative Vorzeichen) der Verschiebungskraft die gesuchten Zusätze erhalten. Durch Addition der Momente aus R. I und R. II unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen erhalten wir die endgültigen Momente und aus diesen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) am Rahmen.

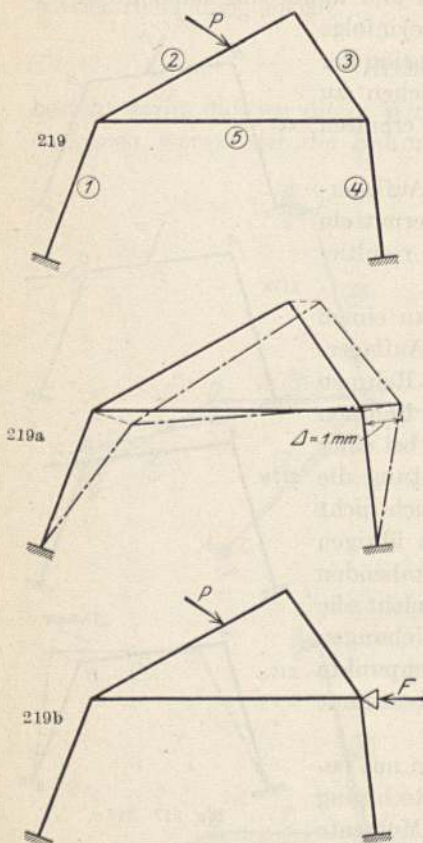


Fig. 219—219b.

Der Rahmen der Fig. 218 wird in analoger Weise berechnet. Durch eine Verschiebung des Balkens erleiden ebenfalls sämtliche Stäbe gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden (Fig. 218a).

In Fig. 219 wurde ein einstöckiger Rahmen mit Aufsatz dargestellt, dessen Säulen beliebig gerichtet sind; Stab 5 ist biegungsfest vorausgesetzt. Dieser Rahmen wird in analoger Weise wie derjenige der Fig. 217 berechnet. Die Bestimmung der Festhaltungskraft  $F$  (Fig. 219a) erfolgt in analoger Weise wie am Rahmen der Fig. 214. Bei der Verschiebung des Balkens (Stabes 5) um eine beliebige Strecke  $\Delta$  (Fig. 219b) erleiden der beliebig gerichteten Säulen wegen

nicht nur diese, sondern sämtliche Stäbe des Rahmens, also auch die Stäbe des Aufsatzes, gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden; darin besteht der Unterschied in der Berechnung der Rahmen der Fig. 214 und 219.

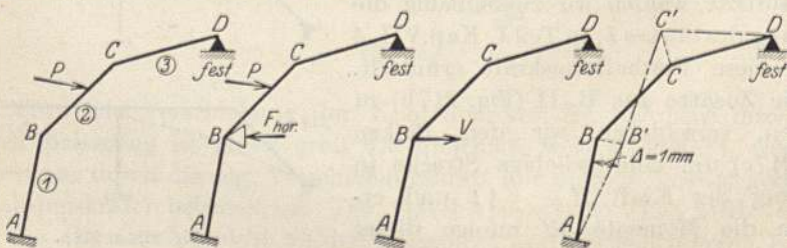


Fig. 220—220 c.

Der in Fig. 220 dargestellte Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben ist auch einstöckig wie der Rahmen der Fig. 217 und wird in analoger Weise berechnet. Um die Momente aus R. I zu erhalten, denken wir uns den Rahmen

durch ein festes Lager im Knotenpunkt  $B$  unverschiebbar festgehalten (Fig. 220a); dadurch ist auch der Knotenpunkt  $C$  von selbst in Ruhe gehalten, da das Tragwerk in  $D$  ein festes Auflager besitzt. Als Richtung der Festhaltungskraft, welche im gedachten Lager in  $B$  auftritt, wählen wir zweckmäßig die wagrechte Richtung; im Teil I, Kap. VII, 4 wurde diese Festhaltungskraft  $F_{\text{hor}}$  ermittelt. Um die Zusätze aus R. II (Fig. 220b) zu erhalten, verschieben wir den Knotenpunkt  $B$  (Fig. 220c) im Sinne der Kraft  $H = +1t$  und ermitteln die Momente  $M'$  infolge dieser Verschiebung, d. h. infolge der davon herrührenden gegenseitigen Verschiebung der Enden sämtlicher Stäbe, sowie die wagrechte Erzeugungskraft  $Z$  dieser Momente. Durch Division der Momente  $M'$  durch den Wert der Erzeugungskraft erhalten wir die Momente  $M^*$  infolge der wagrechten Kraft  $H = +1t$  am Knotenpunkt  $B$ , aus welchen wir durch Multiplikation mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Wert der Verschiebungskraft die gesuchten Zusätze erhalten. Durch Addition der Momente aus R. I und R. II mit ihren Vorzeichen erhalten wir die endgültigen Momente und hieraus die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) am Rahmen.

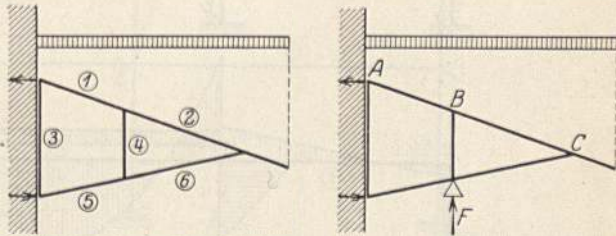


Fig. 221 u. 221 a.

Das in Fig. 221 dargestellte Kragdach stellt einen einstöckigen Rahmen mit Aufsatz dar, was wir sofort erkennen, wenn wir uns das Dach aufgestellt (um  $90^\circ$  im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers gedreht) denken. Die Berechnung desselben bietet gegenüber derjenigen der vorher behandelten einstöckigen Rahmen nichts Neues; während R. I müssen wir am Pfosten 4 ein gedachtes Lager anbringen (Fig. 221a), der Knotenpunkt  $C$  des Aufsatzes ist dann auch unverschiebbar, da die Stäbe 2 und 6 ein Dreieck bilden, dessen Grundstab unverschiebbar ist. Die Berücksichtigung des Einflusses der Verkürzung der Stäbe infolge der in denselben wirkenden Normalkräfte kann nach Kap. VII dieses Teiles zusätzlich erfolgen.

## 2. Der mehrstöckige Rahmen.

Die Berechnung gestaltet sich verschieden, je nachdem die Stützen parallel zueinander oder schief gerichtet sind.

### a) Der mehrstöckige Rahmen mit parallelen Stützen.

Die Berechnung des in Fig. 222 dargestellten, durch gleichmäßig verteilten wagrecht wirkenden Winddruck belasteten zweistöckigen Rahmens teilen wir wieder in die beiden Rechnungsabschnitte I und II ein:

#### Rechnungsabschnitt I.

Während des R. I nehmen wir an, die Verschiebbarkeit der Balken I und II sei vorübergehend durch gedachte Lager an den Enden derselben (Fig. 222a)

aufgehoben; durch diese Lager werden auch die anderen auf dem betreffenden Balken liegenden Knotenpunkte von selbst unverschiebbar festgehalten. Der Rahmen geht dann in ein Tragwerk mit unverschiebbaren Knotenpunkten über,

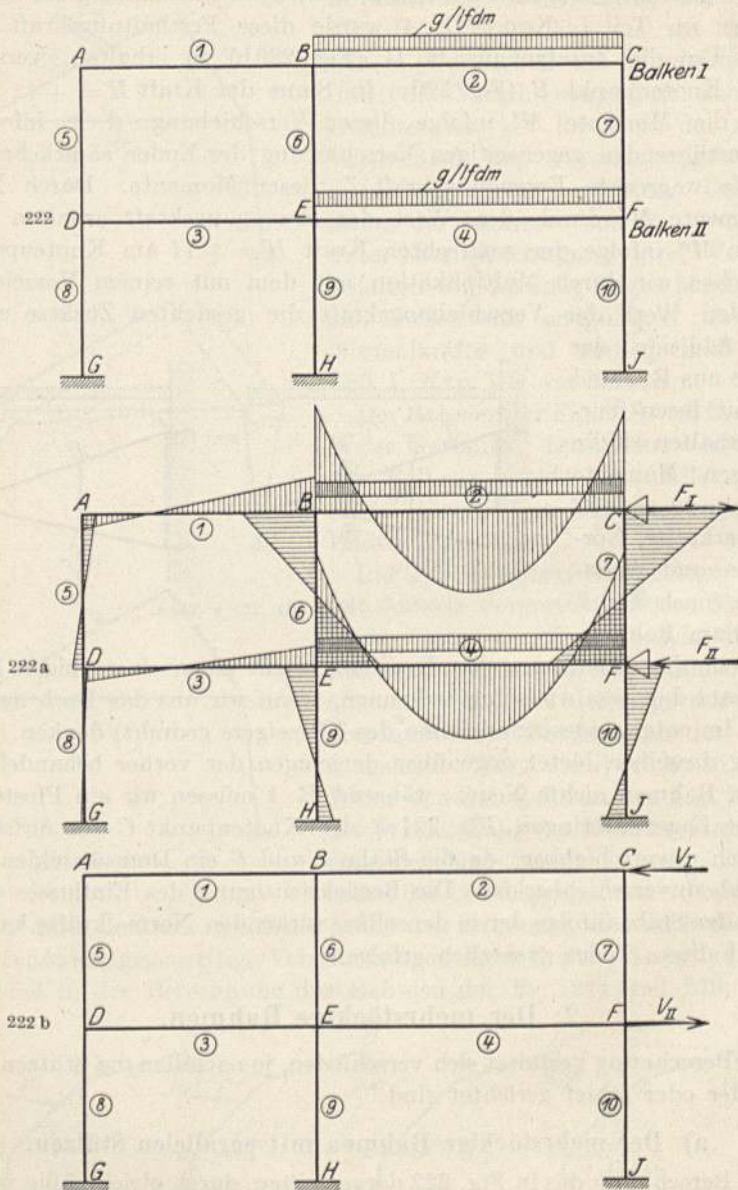


Fig. 222—222 b.

dessen Berechnung wir im „Ersten Teil“ vorgeführt haben. Demgemäß ermitteln wir auf Grund der Festpunkte, Kreuzlinienabschnitte und Verteilungsmaße die Momente an allen Stäben und daraus die Festhaltungskräfte der beiden Stockwerke.



## Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen nun die während des R. I an den Enden der Balken I und II gedachten Lager und damit die darin wirkenden Festhaltungskräfte. Hierauf treten die den Festhaltungskräften („Reaktionen“) gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Verschiebungskräfte („Aktionen“) in Tätigkeit (Fig. 222b), welche den Rahmen, d. h. die einzelnen Stockwerksbalken desselben noch verschieben und dadurch am ganzen Rahmen Zusatzmomente hervorrufen. Aus den Zusatzmomenten könnte man auch die Zusätze zu den Quer- und Normalkräften aus R. I ermitteln; da jedoch für die Dimensionierung nur die end-

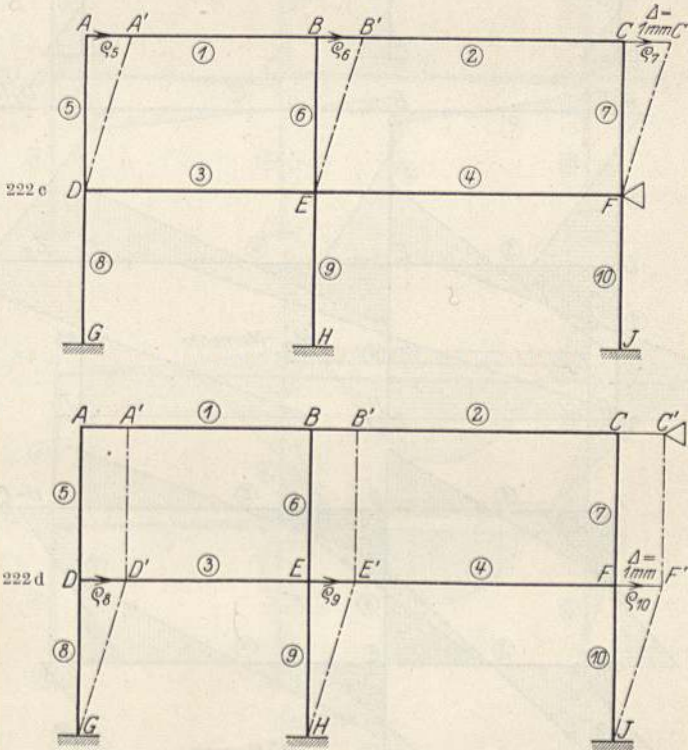
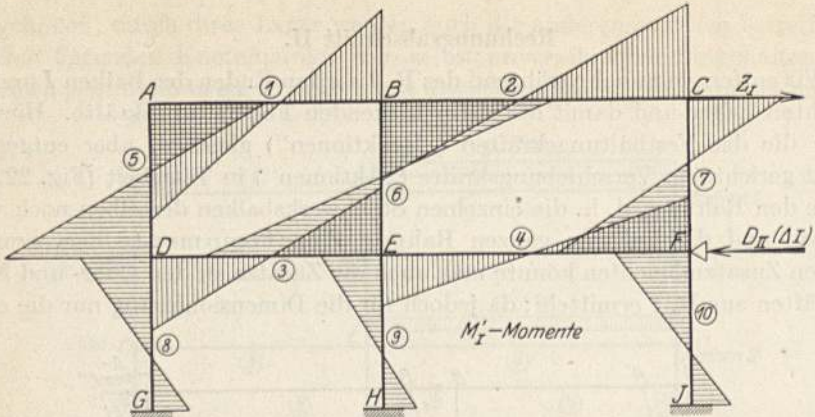


Fig. 222 c u. d.

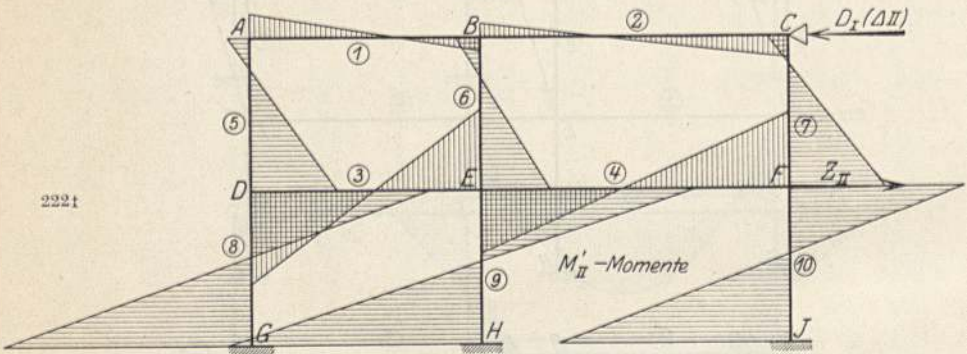
gültigen Quer- und Normalkräfte benötigt werden, so addiert man zuerst die Momente aus R. I und R. II und bestimmt erst hierauf die endgültigen Quer- und Normalkräfte.

Um die Zusatzmomente zu erhalten, ermitteln wir den Einfluß der Verschiebungskräfte  $V_I$  und  $V_{II}$  getrennt voneinander und bestimmen demgemäß die beiden Momentenbilder  $M_I^*$  und  $M_{II}^*$  am Rahmen (Fig. 222g und h) infolge der an den einzelnen Stockwerksbalken angreifenden Last  $H = +1 t$ . Diese brauchen wir dann nur mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft zu multiplizieren, und darauf die beiden daraus hervorgehenden Momentenbilder für  $V_I$  und  $V_{II}$  zu addieren.

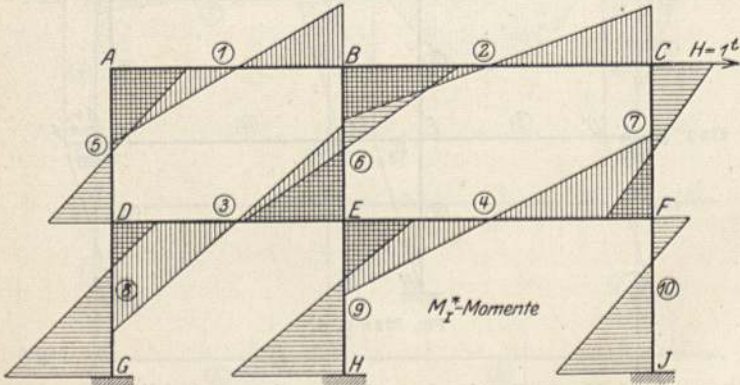
222 e



222 f



222 g



222 h

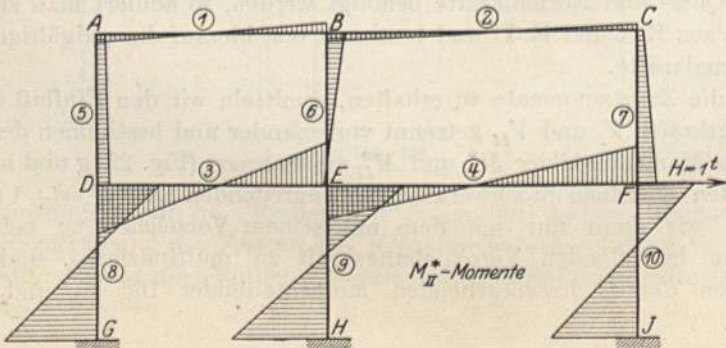


Fig. 222 e—222 h.

Die  $M^*$ -Momente am Stockwerkrahmen mit parallelen Säulen erhalten wir nach Teil II, Kap. IV, 2 in der Weise, daß wir die einzelnen Stockwerkbalken um eine gegebene Strecke, z. B.  $\Delta = 1$  mm, nacheinander verschieben (Fig. 222c und d), während wir, um die Festpunkte zur Weiterleitung der Momente benutzen zu können, die darunter liegenden Stockwerkbalken unverschiebbar festgehalten und die darüber liegenden derart mitverschoben denken, daß ihre

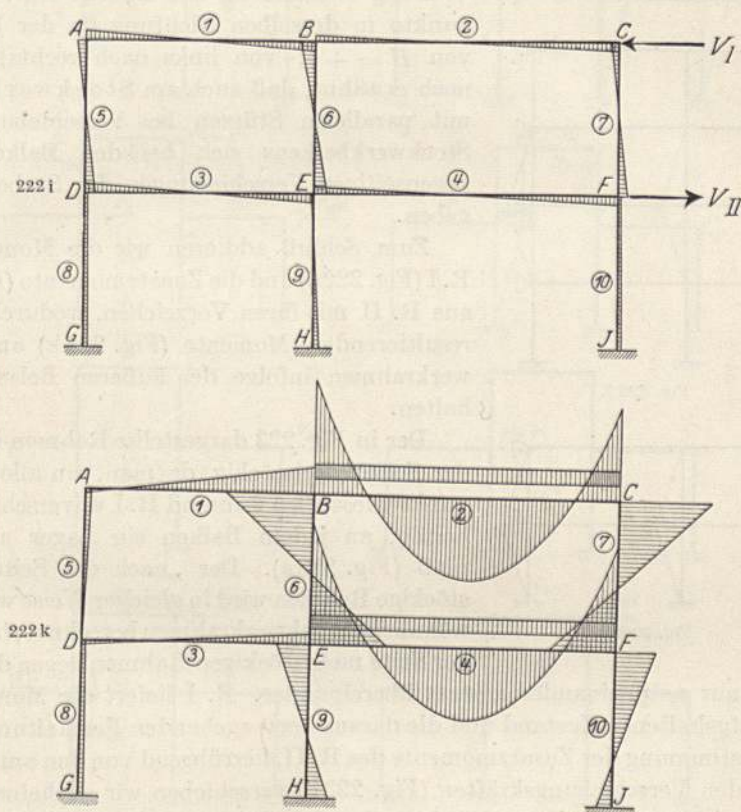


Fig. 222i u. k.

Knotenpunkte senkrecht über denjenigen des verschobenen Stockwerks bleiben; damit dieser Zustand erhalten bleibe, müssen wir nach beendiger Verschiebung auch an den über dem verschobenen Stockwerk liegenden Stockwerkbalken ein Lager und damit eine Festhaltungskraft  $F$  anbringen. Wir könnten die über dem verschobenen Stockwerkbalken liegenden Stockwerkbalken auch (wie die evtl. darunter liegenden Stockwerkbalken) unverschiebbar festhalten, es würde aber dann, wie aus Fig. 222l und 222m ersichtlich, nicht nur die Stützen des unmittelbar unter dem verschobenen Stockwerkbalken liegenden Stockwerks, sondern auch die Stützen des unmittelbar darüberliegenden Stockwerkes gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden erleiden, wodurch an beiden Enden weitere Momente entstehen würden, deren Berechnung und Weiterleitung erforderlich wäre.



und durch Multiplikation derselben mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der

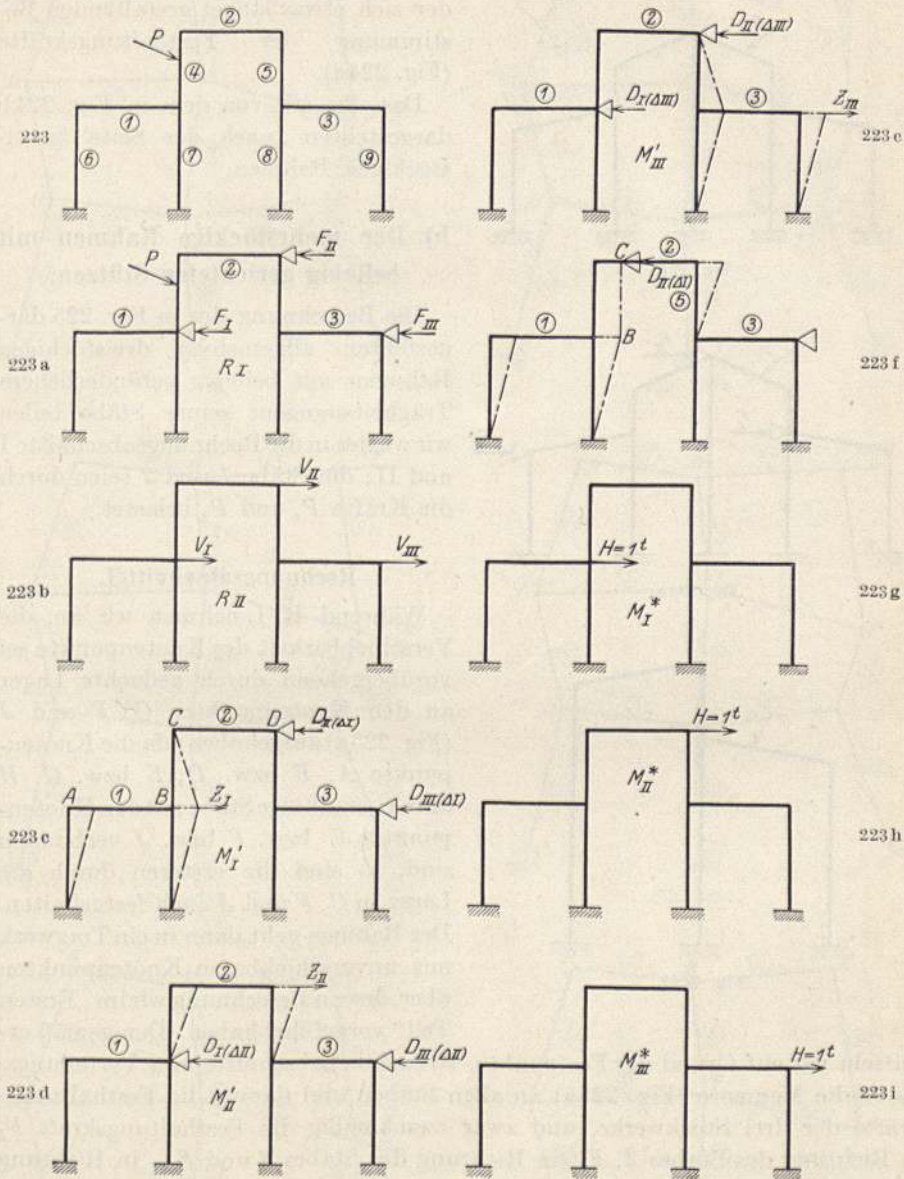


Fig. 223—2231.

daraus hervorgehenden Momente die gesuchten Zusatzmomente. Durch Addition der Momente aus R. I und R. II erhalten wir die endgültigen Momente, aus denen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen. —

Der in Fig. 224 dargestellte Rahmen ist „nach der Seite“ dreistöckig und wird in gleicher Weise berechnet wie der Stockwerkrahmen mit wagrechtem Balken; der Unterschied liegt nur in der sich etwas länger gestaltenden Bestimmung der Festhaltungskräfte (Fig. 224 a).

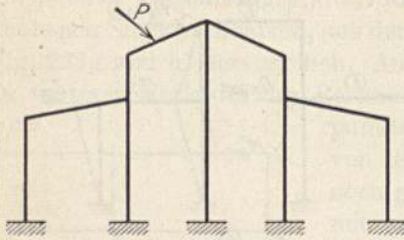


Fig. 224.

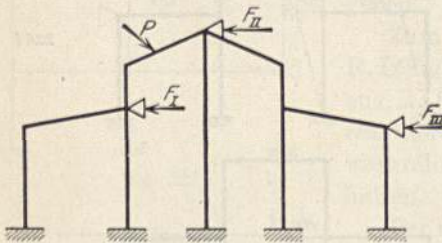


Fig. 224 a.

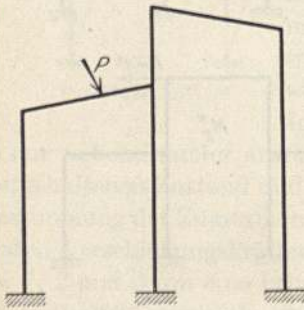


Fig. 224 b.

Dasselbe gilt von dem in Fig. 224 b dargestellten „nach der Seite“ zwei-stöckigen Rahmen.

### b) Der mehrstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen.

Die Berechnung des in Fig. 225 dargestellten allgemeinen dreistöckigen Rahmens mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe teilen wir wieder in die Rechnungsabschnitte I und II; die Stäbe 1 und 2 seien durch die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  belastet.

#### Rechnungsabschnitt I.

Während R. I nehmen wir an, die Verschiebbarkeit der Knotenpunkte sei vorübergehend durch gedachte Lager an den Knotenpunkten  $C$ ,  $F$  und  $J$  (Fig. 225 a) aufgehoben; da die Knotenpunkte  $A$ ,  $B$  bzw.  $D$ ,  $E$  bzw.  $G$ ,  $H$  durch geradlinige Stäbe mit den Knotenpunkten  $C$  bzw.  $F$  bzw.  $J$  verbunden sind, so sind die ersteren durch die Lager in  $C$ ,  $F$  und  $J$  auch festgehalten. Der Rahmen geht dann in ein Tragwerk mit unverschiebbaren Knotenpunkten über, dessen Berechnung wir im „Ersten Teil“ vorgeführt haben. Demgemäß er-

mitteln wir auf Grund der Festpunkte, Kreuzlinienabschnitte und Verteilungsmaße die Momente (Fig. 225 a) an allen Stäben und daraus die Festhaltungskräfte der drei Stockwerke, und zwar zweckmäßig die Festhaltungskraft  $F_I$  in Richtung des Stabes 2,  $F_{II}$  in Richtung des Stabes 4 und  $F_{III}$  in Richtung des Stabes 6 (siehe Teil I, Kap. VII, 2).

#### Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen nun die während des R. I an den Knotenpunkten  $C$ ,  $F$  und  $J$  gedachten Lager, worauf die den Festhaltungskräften gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Verschiebungskräfte in Tätigkeit treten (Fig. 225 b),

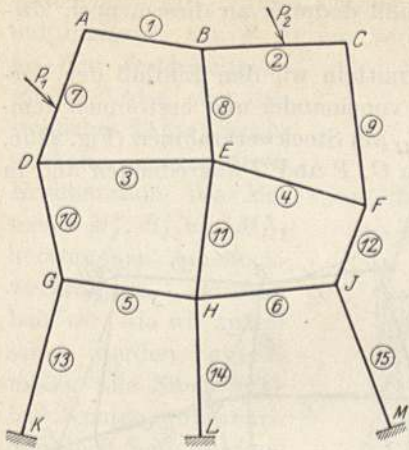


Fig. 225.

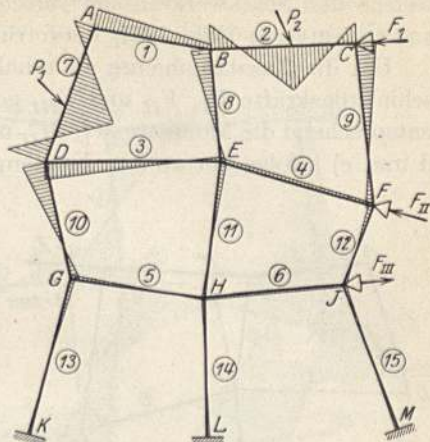


Fig. 225 a.

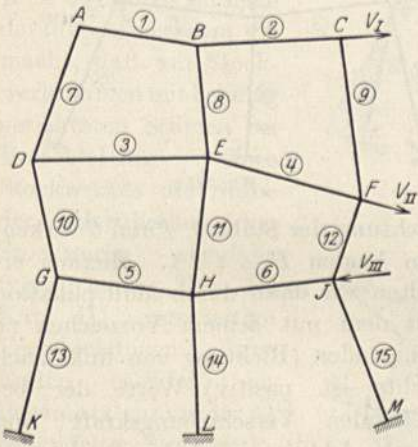


Fig. 225 b.

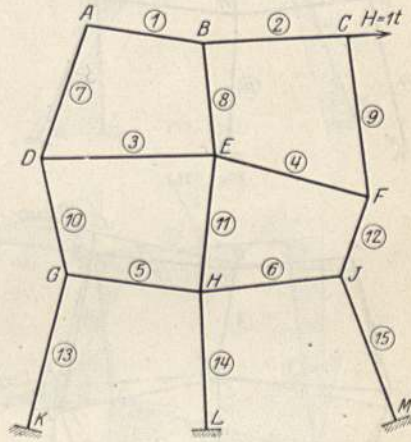


Fig. 225 c.

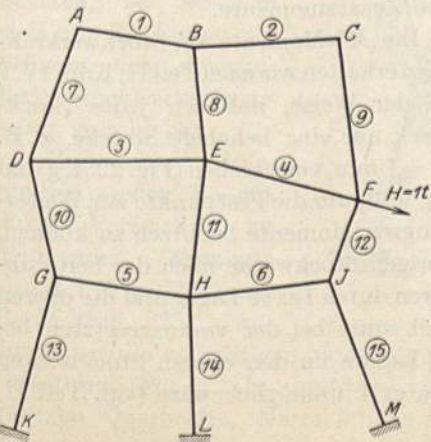


Fig. 225 d.

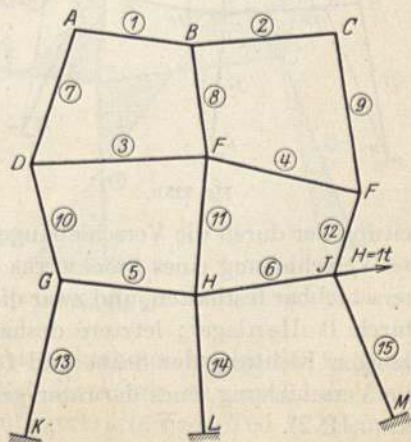


Fig. 225 e.

welche den Stockwerkrahmen verschieben und dadurch an diesem noch Zusatzmomente (Fig. 225i) hervorrufen.

Um die Zusatzmomente zu erhalten, ermitteln wir den Einfluß der Verschiebungskräfte  $V_I$ ,  $V_{II}$  und  $V_{III}$  getrennt voneinander und bestimmen dementsprechend die Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$  am Stockwerkrahmen (Fig. 225c, d und e) in Folge der an den Knotenpunkten  $C$ ,  $F$  und  $J$  angreifenden und in

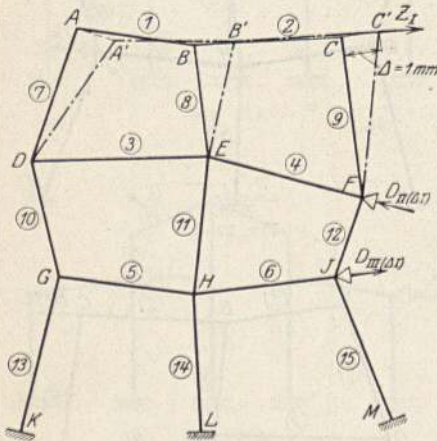


Fig. 225 f.

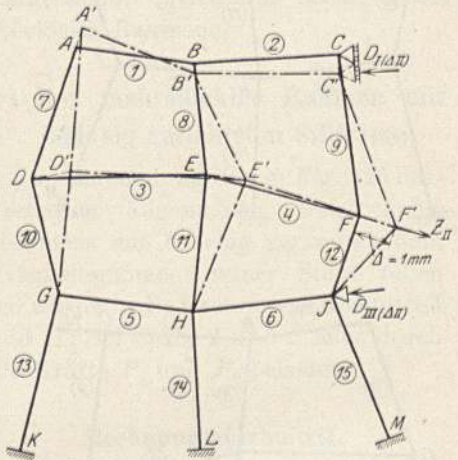


Fig. 225 g.

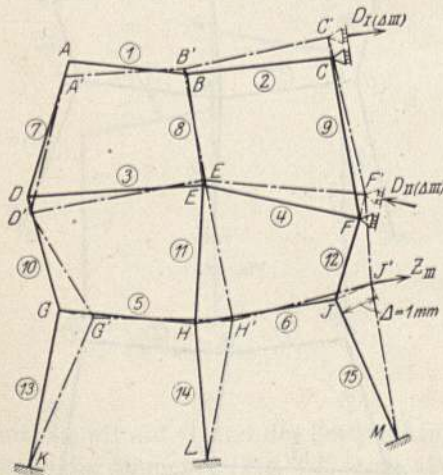


Fig. 225 h.

Richtung der Stäbe 2, 4 und 6 wirkenden Lasten  $H = +1 t$ . Hieraus erhalten wir dann durch Multiplikation mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden (Richtung von links nach rechts ist positiv) Werte der betreffenden Verschiebungskraft und durch Addition der daraus hervorgehenden Momente für  $V_I$ ,  $V_{II}$  und  $V_{III}$  die Zusatzmomente.

Die  $M^*$ -Momente am Stockwerkrahmen erhalten wir nach Teil II, Kap. IV, 2 in der Weise, daß wir jedes Stockwerk um eine beliebige Strecke, z. B.  $A = 1 mm$ , verschieben (Fig. 225 f, g und h), und, um die Festpunkte zur Weiter-

leitung der durch die Verschiebungen erzeugten Momente benützen zu können, bei Verschiebung eines Stockwerks die übrigen Stockwerke nach der Seite unverschiebbar festhalten, und zwar die unteren durch feste Lager und die oberen durch Rollenlager; letztere deshalb, weil sonst bei der vorausgesetzten beliebigen Richtung der Stäbe und festen Lagern an den oberen Stockwerken die Verschiebung eines darunter gelegenen evtl. unmöglich wäre (vgl. Teil II, Kap. II, 2).

Diese Verschiebungszustände liefern drei  $M'$ -Momentenbilder mit je einer





Der in Fig. 226 dargestellte, durch Winddruck belastete dreistöckige Rahmen mit geneigten Ständern wird in analoger Weise wie der allgemeine Stockwerkrahmen der Fig. 225 berechnet. Aus R. I erhalten wir die Momente für den Fall, daß die Knotenpunkte unverschiebbar sind, was dann zutrifft,

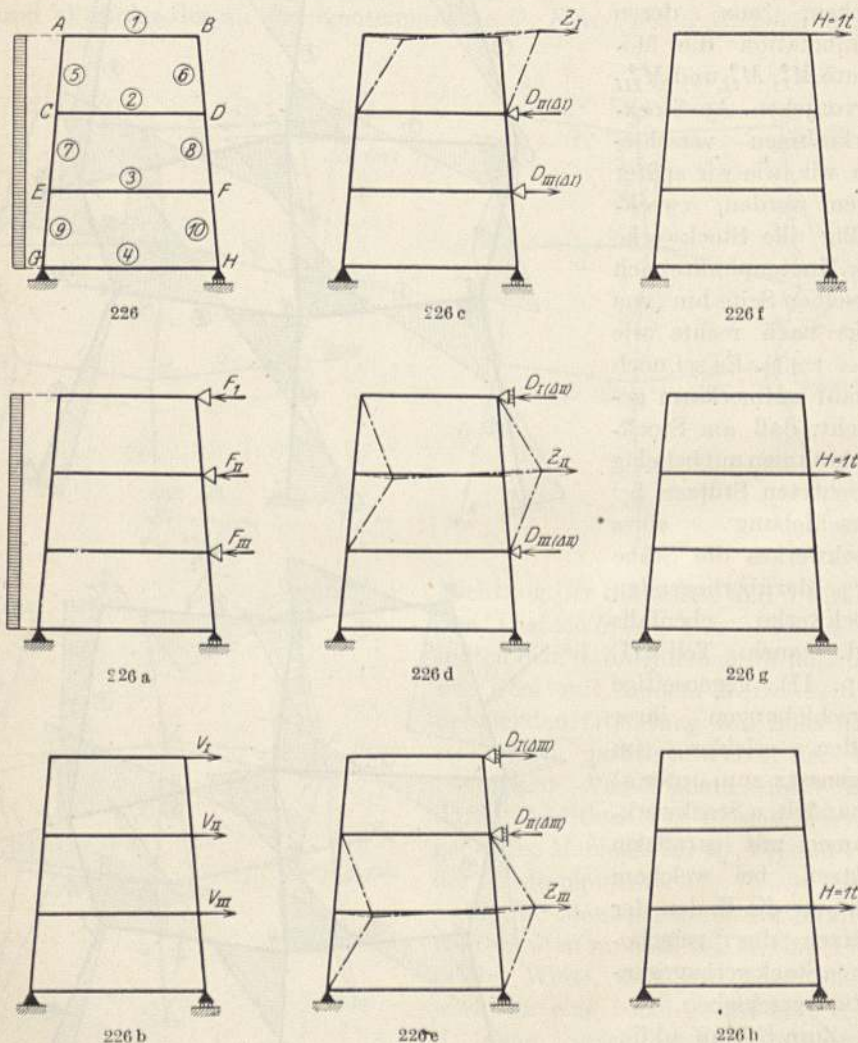


Fig. 226—226 h.

wenn wir an den Enden der Balken 1, 2 und 3 feste Lager anbringen (Fig. 226 a); in diesen entstehen dann die Festhaltungskräfte („Reaktionen“), welche das System in seiner ursprünglichen Lage in Ruhe halten.

Nehmen wir diese Lager weg, so treten die umgekehrt gerichteten Festhaltungskräfte, die sog. Verschiebungskräfte („Aktionen“) in Tätigkeit (Fig. 226 b), welche, allein am System wirkend, die Zusatzmomente hervorrufen, die wir aus R. II wie folgt erhalten:

Wir bestimmen den Einfluß der drei Verschiebungskräfte  $V_I$ ,  $V_{II}$  und  $V_{III}$  getrennt voneinander und ermitteln dementsprechend die Momente  $M^*$  (Fig. 226 f, g und h), welche am frei verschiebbaren (nicht festgehaltenen) Stockwerkrahmen durch die an den einzelnen Stockwerkbalken wirkende Last  $H = +1 t$  entstehen. Durch Multiplikation der  $M^*$ -Momente mit dem mit seinem Vorzeichen zunehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft erhalten wir die Momente, herrührend von den einzelnen Verschiebungskräften, und durch Addition derselben die Zusatzmomente am Stockwerkrahmen, welche zu den Momenten aus R. I zu addieren sind, um die endgültigen Momente und daraus die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte am Stockwerkrahmen infolge der äußeren Belastung zu erhalten.

Die Momente  $M^*$  ihrerseits erhalten wir nach Teil II, Kap. IV, 2 wieder indirekt aus den Momenten  $M'$  für eine gegebene Verschiebung, beispielsweise  $\Delta = 1 \text{ mm}$ , eines jeden Stockwerks (Fig. 226 c, d, e), unter Festhaltung der unteren und oberen Stockwerke (letztere durch Roll-lager); dabei benötigen wir noch die aus den Momenten  $M'$  sich ergebenden zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  in Richtung der Festhaltungskräfte des R. I, sowie die bei der Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte  $D$ . Bei einer Verschiebung irgendeines Stockwerkbalkens erleiden der geeigneten Ständer wegen sämtliche über dem verschobenen Stockwerk liegenden Stäbe gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden. Für alle diese Stäbe sind die Momente an beiden Enden, herrührend von ihrer gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung nach den allgemeinen Gln. (515) und (520) zu berechnen, über das ganze Tragwerk mittels der Festpunkte und Verteilungsmaße weiterzuleiten und zum Schluß mit ihren Vorzeichen zu addieren, wodurch wir die Momente  $M'$  für die Verschiebung des betreffenden Stockwerkbalkens erhalten. —

Der Rahmen der Fig. 227 ist zweistöckig, da man, um seine Knotenpunkte in Ruhe zu halten, am Balken 1 und 2 je ein Lager anbringen muß (Fig. 227 a).

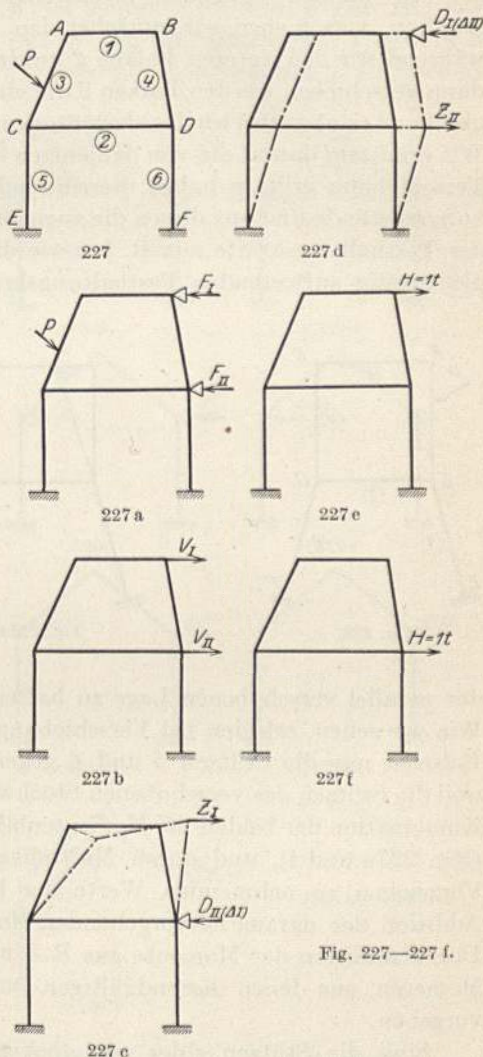


Fig. 227—227 f.

Die Stützen des unteren Stockwerks sind parallel zueinander, während diejenigen des oberen beliebig gerichtet sind. R. I liefert wieder die Momente für den festgehaltenen Zustand sowie die daraus hervorgehenden beiden Festhaltungskräfte  $F_I$  und  $F_{II}$ . Um die Zusatzmomente aus R. II herrührend von den am Rahmen wirkenden Verschiebungskräften  $V_I$  und  $V_{II}$  (Fig. 227 b) zu erhalten, verschieben wir zunächst den Balken 1 um eine beliebige Strecke, während wir den unteren Balken 2 unverschiebbar festhalten (Fig. 227 c), und dann verschieben wir den Balken 2 um eine beliebige Strecke (braucht nicht die gleiche zu sein), wobei wir das obere Stockwerk parallel mitverschieben (Fig. 227 d). Wir ermitteln darauf die von denjenigen Stäben, deren Enden eine gegenseitige Verschiebung erlitten haben, herrührenden Momente  $M'$  für beide Verschiebungszustände und aus diesen die zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  in Richtung der Festhaltungskräfte aus R. I sowie die bei der betreffenden Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte  $D$ ; um das obere Stockwerk in

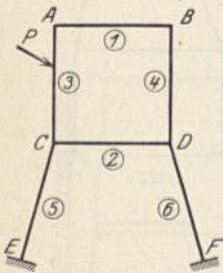


Fig. 228.

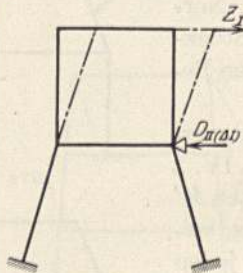


Fig. 228 a.

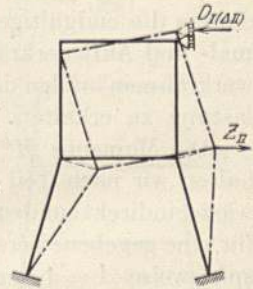


Fig. 228 b.

der parallel verschobenen Lage zu halten, ist auch eine Kraft  $D$  erforderlich. Wie wir sehen, erleiden bei Verschiebung des unteren Stockwerkes am ganzen Rahmen nur die Stützen 5 und 6 gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, weil die Stützen des verschobenen Stockwerkes parallel zueinander sind. Durch Kombination der beiden  $M'$ -Momentenbilder erhalten wir nun die Momente  $M^*$  (Fig. 227 e und f), und durch Multiplikation derselben mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente die gesuchten Zusatzmomente. Durch Addition der Momente aus R. I und R. II erhalten wir die endgültigen Momente, aus denen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen. —

Sind die Stützen eines zweistöckigen Rahmens im unteren Stockwerk beliebig gerichtet und im oberen Stockwerk parallel zueinander, wie aus Fig. 228 ersichtlich, so ist der Berechnungsgang analog wie für den Rahmen der Fig. 227. Zu beachten ist, daß wir an diesem Rahmen gegenüber demjenigen der Fig. 227 andere Verschiebungsbilder erhalten. Verschieben wir den Balken 1 unter Festhaltung des unteren Stockwerkes (Fig. 228 a), so erleiden nur die beiden Stützen des oberen Stockwerkes eine gegenseitige Verschiebung ihrer Enden; verschieben wir aber den Balken 2 nach Anbringung eines Rollenslagers am Balken 1 (Fig. 228 b), so erleiden sämtliche Stäbe des Rahmens gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden.

**Sonderfälle von mehrstöckigen Tragwerken.**

**Fall I:** Wie schon in Kap. VIII, 10 ausgeführt, wird das Tragwerk der Fig. 229, dessen Stäbe 2 und 3 zusammen einen „Bogen“ mit den Kämpfern *B* und *D* bilden, zweckmäßig als „nach der Seite“ mehrstöckiges Tragwerk mit geradlinigen Stäben berechnet. Das in Fig. 229 dargestellte Tragwerk ist „nach der Seite“ zweistöckig, da man sowohl am Knotenpunkt *B* als auch am Knotenpunkt *D* ein Lager anbringen muß (Fig. 229a), um sämtliche Knotenpunkte unverschiebbar zu halten; der Knotenpunkt *C* ist dann auch unverschiebbar, da er durch die beiden Stäbe 2 und 3 mit den durch die gedachten Lager festgehaltenen Knotenpunkten verbunden ist.

R. I liefert wieder die Momente für den festgehaltenen Zustand, und aus diesen bestimmen wir nach Teil I, Kap. VII, 2 die beiden in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte, für welche wir die wagrechte Richtung wählen. Wir entfernen darauf die gedachten Lager und gehen damit zum R. II über: nun treten die Verschiebungskräfte (entgegengesetzte Festhaltungskräfte) am Rahmen in Tätigkeit, welche

Zusatzmomente hervorrufen (Fig. 229b). Um diese Zusatzmomente zu erhalten, bestimmen wir zunächst die Momente  $M'$  für eine gegebene Verschiebung, beispielsweise  $\Delta = 1$  mm, eines jeden der beiden in R. I durch gedachte Lager in wagrechter Richtung gestützten Knotenpunkte, wobei jeweils der andere noch festgehalten wird (Fig. 229c und d); bei Verschiebung des Knotenpunktes *B* erleiden die Stäbe 1, 2 und 3, bei Verschiebung des Knotenpunktes *D* die Stäbe 2, 3 und 4 gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, wodurch Momente an diesen Stäben verursacht werden, die wir nach den Gln. (515) und (520) bestimmen, mittels der Festpunkte und Verteilungsmaße weiterleiten und darauf addieren.

Aus den Momenten  $M'$  berechnen wir die zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  in Richtung der Festhaltungskräfte des R. I und die bei der Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte  $D$ . Nun erhalten wir durch Kombination der beiden  $M'$ -Momentenbilder die Momente  $M^*$  infolge der Belastung  $H = +1t$

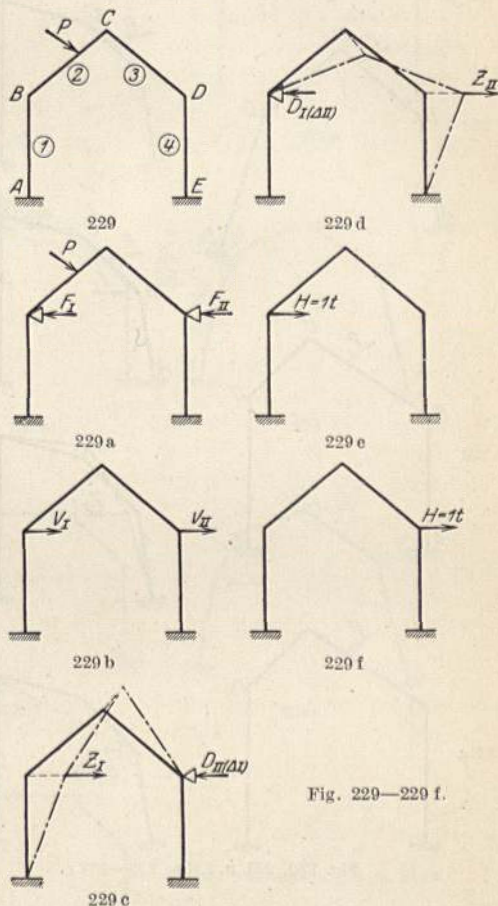


Fig. 229—229 f.

in  $B$  bzw.  $H = +1t$  in  $D$  am nirgends festgehaltenen Rahmen (Fig. 229e und f), und durch Multiplikation derselben mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente erhalten wir die gesuchten Zusatzmomente; zur leichteren Berechnung der Momente  $M^*$  ist es zweckmäßig, die beiden Verschiebungen der im R. I durch gedachte Lager gestützten Knotenpunkte in derselben

Richtung vorzunehmen (in Richtung der Kräfte  $H = +1t$ , von links nach rechts).

Durch Addition der Momente aus R. I und R. II mit ihren Vorzeichen erhalten wir die endgültigen Momente, aus welchen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen. —

Besitzt der betrachtete Rahmen nicht parallele, sondern beliebig gerichtete Ständer (Fig. 230), so ändert sich der vorstehend geschilderte Gang der Berechnung nicht. —

Liegen die Knotenpunkte  $B$  und  $D$  nicht in gleicher Höhe (Fig. 231), wodurch das Tragwerk unsymmetrisch wird, so ändert sich der Gang der Berechnung ebenfalls nicht, auch nicht, wenn die Ständer beliebig gerichtet sind; die beiden Festhaltungskräfte (Fig. 231a) liegen naturgemäß auf verschiedener Höhe.

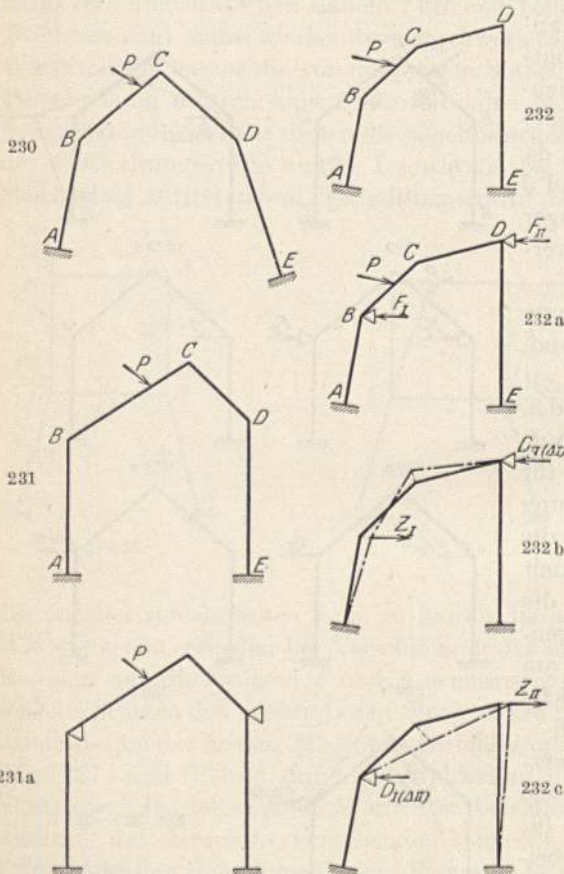


Fig. 230, 231 u. 231 a, 232—232 c.

Der Rahmen der Fig. 232 ist ebenfalls zweistöckig, und, um denselben in Ruhe zu halten, müssen wir uns an den Knotenpunkten  $B$  und  $D$  je ein Lager denken (Fig. 232a). Der Gang der Berechnung dieses Rahmens gestaltet sich genau gleich wie derjenige des Rahmens der Fig. 229. Die bei einer Verschiebung der Knotenpunkte  $B$  und  $D$  um eine gegebene Strecke hervorgerufenen Verschiebungen der übrigen Knotenpunkte gehen aus Fig. 232b und c hervor. —

Das in Fig. 233 dargestellte Tragwerk wird wie ein dreistöckiger Rahmen berechnet, da man, um dasselbe in Ruhe zu halten, an den Knotenpunkten  $B$ ,  $D$  und  $E$  je ein Lager anbringen muß (Fig. 233a); der Knotenpunkt  $C$  ist dann auch unverschiebbar, da er durch die beiden Stäbe 2 und 3 mit den durch die

gedachten Lager festgehaltenen Knotenpunkten verbunden ist. Der Gang der Berechnung dieses Tragwerkes gestaltet sich analog demjenigen des zwei-stöckigen Rahmens der Fig. 229. R. I liefert die Momente bei unverschieb-  
baren Knotenpunkten sowie die Festhaltungskräfte  $F_I$ ,  $F_{II}$  und  $F_{III}$  (nach Teil I,

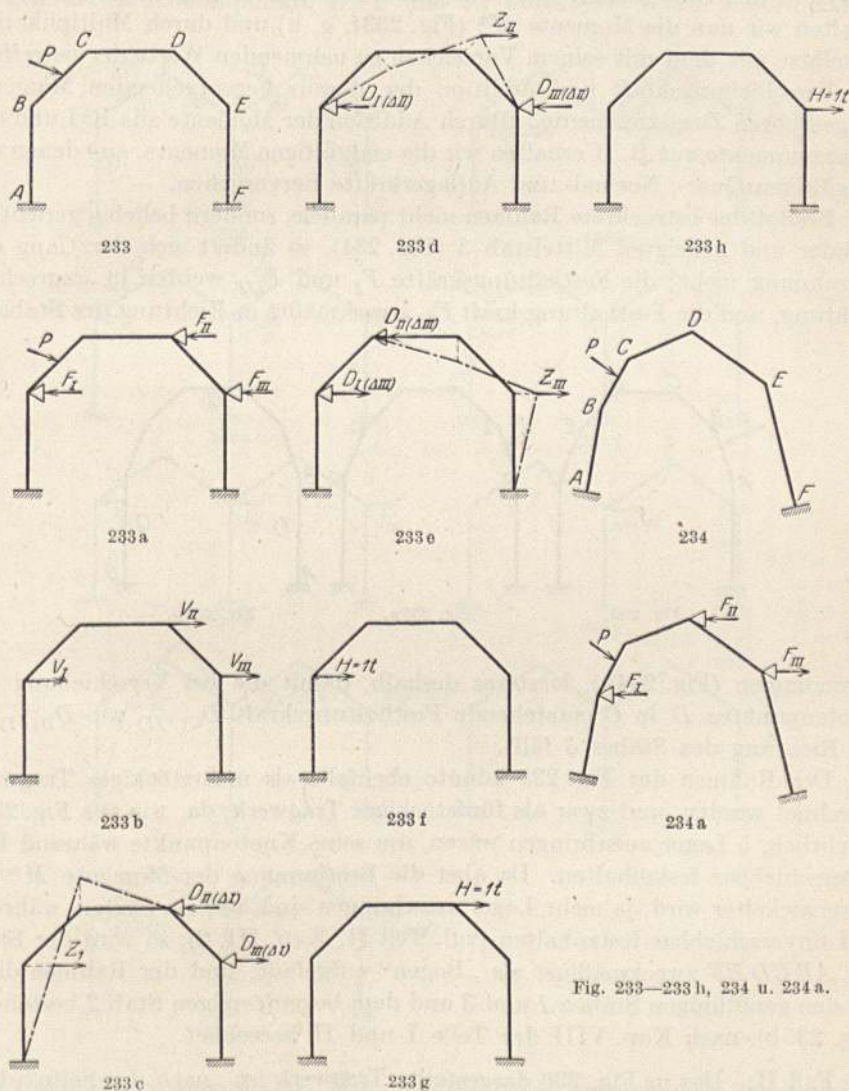


Fig. 233—233 h, 234 u. 234 a.

Kap. VII, 2). Zur Bestimmung der Zusatzmomente des R. II, herrührend von den am Rahmen wirkenden Verschiebungskräften (Fig. 233 b), verschieben wir nacheinander den Knotenpunkt B, den Stab 3 und den Knotenpunkt E um eine beliebige Strecke, beispielsweise  $\Delta = 1$  mm, ermitteln jeweils die davon herrührenden Momente  $M'$  und aus diesen die zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  in Richtung der Festhaltungskräfte aus R. I sowie die bei der betreffenden Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte  $D$  (Fig. 233 c, d und e).

Bei der Verschiebung des Knotenpunktes  $E$  halten wir nicht den Knotenpunkt  $D$ , sondern den nächstvorhergehenden, den Knotenpunkt  $C$ , unverschiebbar fest, weil sonst gar keine Verschiebung von  $D$  möglich wäre; dies hat auf die Berechnung keinen Einfluß, da die dabei auftretende Festhaltungskraft  $D_{II(AIII)}$  wie  $D_{II(AI)}$  in den Stab 3 fällt. Durch Kombination der drei  $M'$ -Momentenbilder erhalten wir nun die Momente  $M^*$  (Fig. 233f, g, h) und durch Multiplikation derselben mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente die gesuchten Zusatzmomente. Durch Addition der Momente aus R. I und der Zusatzmomente aus R. II erhalten wir die endgültigen Momente, aus denen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen. —

Besitzt der betrachtete Rahmen nicht parallele, sondern beliebig gerichtete Ständer und geneigten Mittelstab 3 (Fig. 234), so ändert sich der Gang der Berechnung nicht; die Festhaltungskräfte  $F_I$  und  $F_{III}$  werden in wagrechter Richtung, und die Festhaltungskraft  $F_{II}$  zweckmäßig in Richtung des Stabes 3

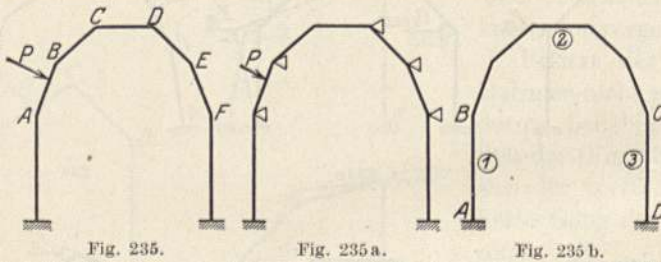


Fig. 235.

Fig. 235 a.

Fig. 235 b.

angenommen (Fig. 234a), letzteres deshalb, damit die bei Verschiebung des Knotenpunktes  $D$  in  $C$  entstehende Festhaltungskraft  $D_{C(AII)}$  wie  $D_{D(AI)}$  in die Richtung des Stabes 3 fällt.

Der Rahmen der Fig. 235 könnte ebenfalls als mehrstöckiges Tragwerk berechnet werden, und zwar als fünfstöckiges Tragwerk, da, wie aus Fig. 235a ersichtlich, 5 Lager anzubringen wären, um seine Knotenpunkte während R. I unverschiebbar festzuhalten. Da aber die Bestimmung der Momente  $M^*$  um so verwickelter wird, je mehr Lager anzubringen sind, um ein System während R. I unverschiebbar festzuhalten (vgl. Teil II, Kap. III, 2), so wird der Stabzug  $ABCD EF$  zweckmäßiger als „Bogen“ aufgefaßt, und der Rahmen dann aus den geradlinigen Stäben 1 und 3 und dem bogenförmigen Stab 2 bestehend (Fig. 235b), nach Kap. VIII der Teile I und II berechnet.

**Fall II:** Das in Fig. 236 dargestellte Tragwerk ist „nach der Seite“ dreistöckig, da man an den Knotenpunkten  $B$ ,  $D$  und  $F$  gedachte Lager anbringen muß, um sämtliche Knotenpunkte unverschiebbar zu halten; die Knotenpunkte  $C$  und  $E$  sind dann auch unverschiebbar, da sie durch die Stäbe 2 und 3 bzw. 4 und 5 mit den durch die gedachten Lager festgehaltenen Knotenpunkten verbunden sind. Der Gang der Berechnung dieses Tragwerkes gestaltet sich analog demjenigen des zweistöckigen Rahmens der Fig. 229. R. I liefert die Momente für den festgehaltenen Zustand (Fig. 236a), und aus diesen bestimmen wir nach Teil I, Kap. VII, 2 die drei Festhaltungskräfte  $F_I$ ,  $F_{II}$  und  $F_{III}$ , für



welche wir die wagrechte Richtung wählen. Um die Zusatzmomente des R. II, herrührend von den am Rahmen wirkenden Verschiebungs Kräften (Fig. 236 b), zu erhalten, bestimmen wir die Momente  $M'$  für eine gegebene Verschiebung, beispielsweise  $\Delta = 1$  mm, eines jeden der drei im R. I durch gedachte Lager festgehaltenen Knotenpunkte  $B$ ,  $D$  und  $F$ , wobei jeweils die andern beiden

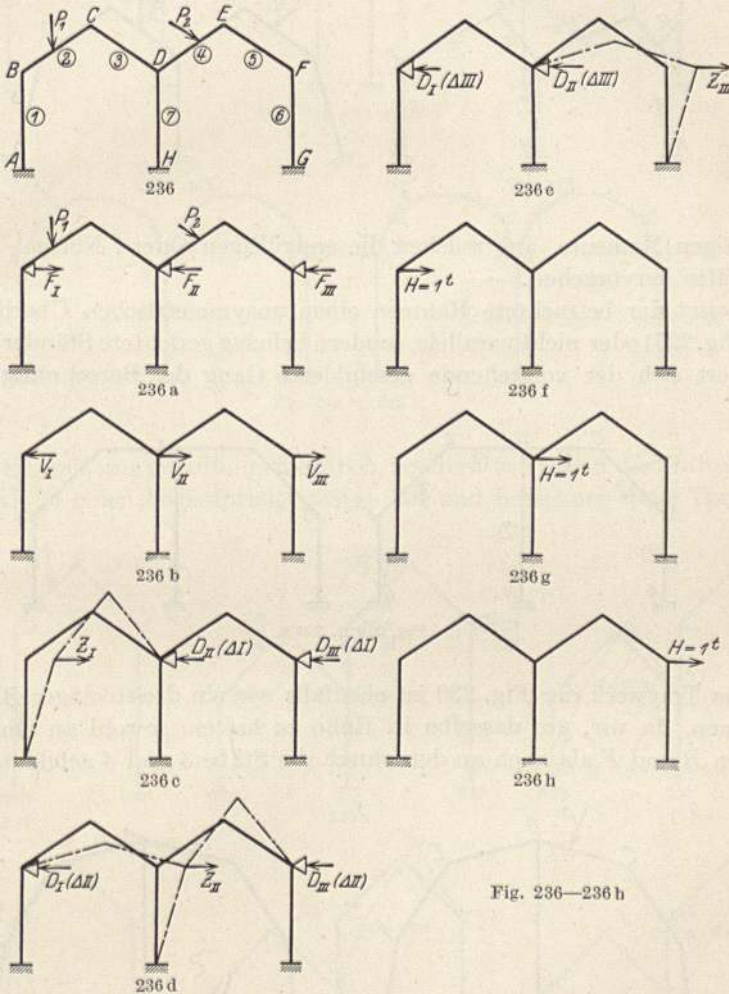


Fig. 236—236 h

noch festgehalten werden (Fig. 236 c, d und e); bei Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  erleiden die Stäbe 1, 2 und 3, bei Verschiebung des Knotenpunktes  $D$  die Stäbe 2, 3, 4, 5 und 7, und bei Verschiebung des Knotenpunktes  $F$  die Stäbe 4, 5 und 6 gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, wodurch Momente an diesen Stäben verursacht werden, die wir nach den Gln. (515) und (520) bestimmen, mittels Festpunkte und Verteilungsmaße weiterleiten und darauf addieren. Aus den Momenten  $M'$  berechnen wir die zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  in Richtung der Festhaltungskräfte aus R. I und die bei der betreffenden Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte  $D$ . Darauf erhalten

wir durch Kombination der drei  $M'$ -Momentenbilder die Momente  $M^*$  (Fig. 236f, g und h), und durch Multiplikation derselben mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente ergeben sich die gesuchten Zusatzmomente.

Durch Addition der Momente aus R. I und R. II erhalten wir wieder die

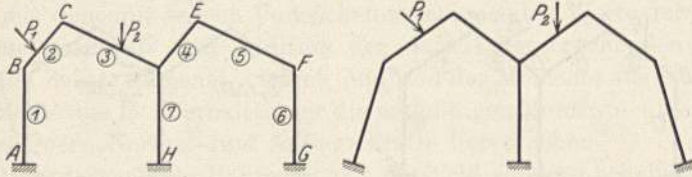


Fig. 237.

Fig. 238.

endgültigen Momente, aus welchen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen. —

Besitzt der betrachtete Rahmen einen unsymmetrischen Überbau (Sägedach, Fig. 237) oder nicht parallele, sondern beliebig gerichtete Ständer (Fig. 238), so ändert sich der vorstehende geschilderte Gang der Berechnung nicht. —

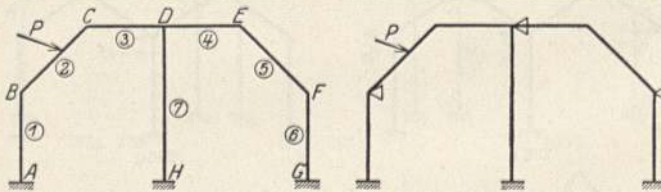


Fig. 239 u. 239 a.

Das Tragwerk der Fig. 239 ist ebenfalls wie ein dreistöckiger Rahmen zu berechnen, da wir, um dasselbe in Ruhe zu halten, sowohl an den Knotenpunkten  $B$  und  $F$  als auch an dem durch die Stäbe 3 und 4 gebildeten Balken

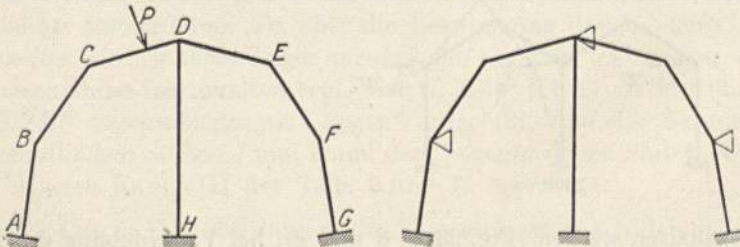


Fig. 240 u. 240 a.

je ein Lager anbringen müssen (Fig. 239 a). Der Gang der Berechnung gestaltet sich analog demjenigen des Rahmens der Fig. 236; wir brauchen uns nur die Stäbe 3 und 4 nach oben in die Wagrechte gedreht und verkürzt und die mittlere Stütze entsprechend verlängert zu denken.

Dasselbe gilt vom Tragwerk der Fig. 240, an welchem wir während R. I in den Knotenpunkten  $B$ ,  $D$  und  $F$  ein Lager anbringen müssen (Fig. 240 a).

Das Tragwerk der Fig. 241 und erst recht dasjenige der Fig. 242 berechnen wir wegen der vielen in R. I anzubringenden Lager (Fig. 241 a und 242 a) und der dadurch länger werdenden Bestimmung der  $M^*$ -Momente zweckmäßig nicht

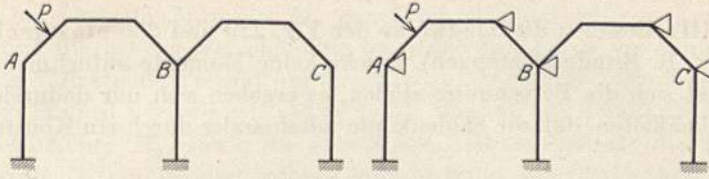


Fig. 241 u. 241 a.

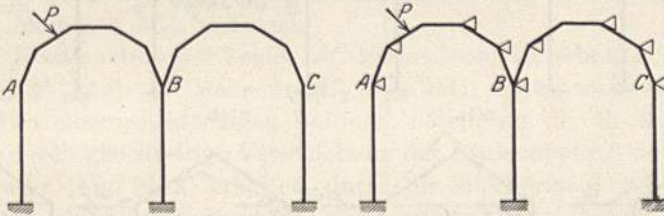


Fig. 242 u. 242 a.

als Tragwerk mit nur geradlinigen Stäben, sondern wir fassen die Stabzüge  $AB$  und  $BC$  als je einen bogenförmigen Stab auf und berechnen diese Tragwerke

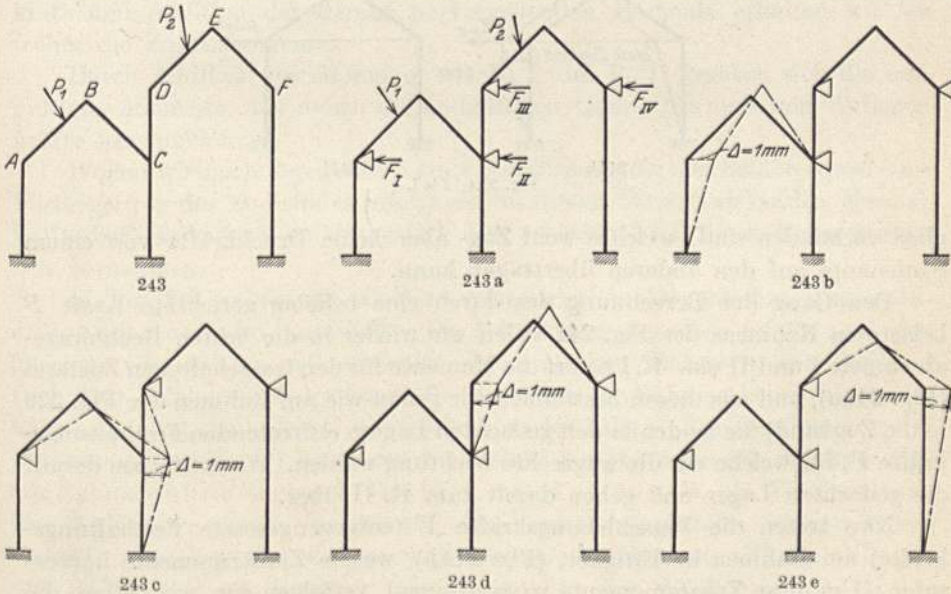


Fig. 243—243 e.

als solche, bestehend aus 3 geradlinigen und 2 bogenförmigen Stäben  $AB$  und  $BC$  nach Kap. VIII der Teile I und II. —

Das in Fig. 243 dargestellte Tragwerk wird wie ein vierstöckiger Rahmen berechnet, da man, um dasselbe in Ruhe zu halten, an den 4 Knotenpunkten

$A, C, D$  und  $F$  je ein Lager anbringen muß (Fig. 243a). Die Berechnung gestaltet sich analog derjenigen des Tragwerkes der Fig. 236. Die in R. II zur Bestimmung der Zusatzmomente benötigten Verschiebungsbilder haben wir in den Fig. 243b, c, d und e dargestellt. —

**Fall III:** Besitzen die Tragwerke der Fig. 229 und 236 elastische Zugbänder (z. B. Rundeisenstangen), welche keine Momente aufnehmen können, so gestaltet sich die Berechnung analog, es ergeben sich nur dadurch gewisse Eigentümlichkeiten, daß die Säulenköpfe miteinander durch ein Konstruktions-

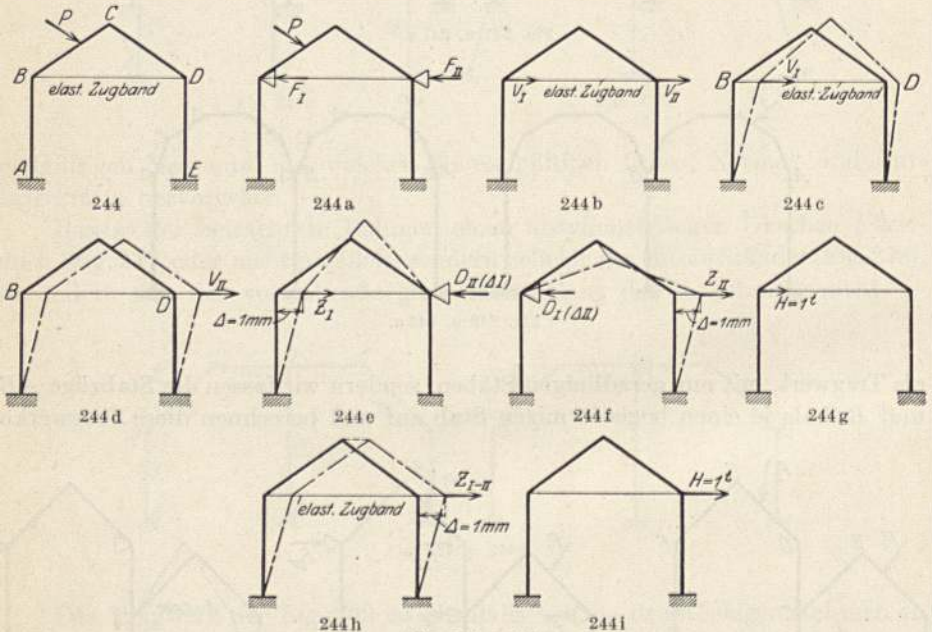


Fig. 244-244i.

glied verbunden sind, welches wohl Zug- aber keine Druckkräfte von einem Säulenkopf auf den anderen übertragen kann.

Den Gang der Berechnung des durch eine beliebig gerichtete Kraft  $P$  belasteten Rahmens der Fig. 244 teilen wir wieder in die beiden Rechnungsabschnitte I und II ein. R. I liefert die Momente für den festgehaltenen Zustand (Fig. 244a), und aus diesen bestimmen wir genau wie am Rahmen der Fig. 229 (ohne Zugband) die beiden in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte  $F$ , für welche wir die wagrechte Richtung wählen. Wir entfernen darauf die gedachten Lager und gehen damit zum R. II über.

Nun treten die Verschiebungskräfte  $V$  (entgegengesetzte Festhaltungskräfte) am Rahmen in Tätigkeit (Fig. 244b), welche Zusatzmomente hervorrufen. Um diese Zusatzmomente zu bestimmen, verfolgen wir, wie früher, die Wirkung der beiden Verschiebungskräfte getrennt voneinander. Wir erkennen aus den Fig. 244c und d, daß sich durch die alleinige Wirkung der Verschiebungskraft  $V_I$  der Säulenkopf  $D$  sich weniger als der Säulenkopf  $B$  verschiebt, während sich bei alleiniger Wirkung der Verschiebungskraft  $V_{II}$  des Zugbandes wegen beide Säulenköpfe  $B$  und  $D$  um gleichviel verschieben. Um nun die

Momente  $M^*$ , welche durch die Belastung des Säulenkopfes  $B$  bzw.  $D$  mit  $H = 1 t$  (Fig. 244g bzw. i) hervorgerufen werden, zu erhalten, verschieben wir zunächst (Fig. 244e) den Säulenkopf  $B$  um eine beliebige Strecke, z. B.  $\Delta = 1 mm$ , während wir den anderen Säulenkopf  $D$  unverschiebbar festhalten, und ermitteln die davon herrührenden Momente  $M'_I$ , aus denen wir die zugehörige Erzeugungskraft  $Z_I$  und die bei der Verschiebung im gedachten Lager am Säulenkopf  $D$  gleichzeitig auftretende Festhaltungskraft  $D_{II(\Delta I)}$  berechnen. Die Momente  $M^*_I$  (Fig. 244g) können wir, wie wir später sehen werden, nur ermitteln, wenn wir auch die Momente  $M'_{II}$  sowie die zugehörige Erzeugungskraft  $Z_{II}$  und Festhaltungskraft  $D_{I(\Delta II)}$  kennen infolge Verschiebung des Säulenkopfes  $D$  und gleichzeitiger Festhaltung des anderen Säulenkopfes  $B$ , d. h. also unter der Annahme, daß das Zugband nicht vorhanden sei (Fig. 244f); daher werden noch diese Momente  $M'_{II}$  bestimmt.

Durch Kombination der beiden  $M'$ -Momentenbilder erhalten wir die Momente  $M^*_I$  (Fig. 244g). Die Momente  $M^*_{II}$  (Fig. 244i) ergeben sich des Zugbandes wegen wie an einem einstöckigen Rahmen, indem wir die Momente  $M'_{I-II}$ , welche wir durch gleichzeitige Verschiebung der Säulenköpfe  $B$  und  $D$  um die gleiche Strecke (Fig. 244h) erhalten, durch die zugehörige Verschiebung der beiden Säulenköpfe dividieren; bei gleichzeitiger Verschiebung der beiden Säulenköpfe erleiden bei parallelen Säulen nur die letzteren gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, während bei schiefen Säulen dies auch noch bei den Dachstäben der Fall ist. Durch Multiplikation der  $M^*$ -Momente mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente erhalten wir wie früher die Zusatzmomente.

Durch Addition der Momente aus R. I und R. II ergeben sich die endgültigen Momente, aus denen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen.

Wollen wir noch den Einfluß einer Verkürzung der Dachstäbe sowie einer Verlängerung des Zugbandes infolge der in diesen Stäben wirkenden Normalkräfte berücksichtigen, so können wir dies nach Kap. VII dieses Teiles zusätzlich vornehmen. —

In Fig. 245 haben wir einen unsymmetrischen Doppelrahmen mit elastischem Zugband dargestellt. Die Berechnung desselben erfolgt nach den gleichen Grundsätzen wie diejenige des einfachen Rahmens mit Zugband (Fig. 244). Während R. I müssen wir, wie wenn der Rahmen keine Zugbänder hätte, alle drei Säulenköpfe unverschiebbar festhalten. Zur Bestimmung der Zusatzmomente (R. II) benötigen wir erstens die Momente  $M^*_I$ ,  $M^*_{II}$  und  $M^*_{III}$  am Rahmen ohne Zugband (Fig. 245a, b und c), da z. B. bei Windbelastung die Zugbänder schlaff werden und die Verschiebungskräfte wie an einem Rahmen ohne Zugband wirken, und zweitens die Momente  $M^*_{I-II}$ ,  $M^*_{II-III}$  und  $M^*_{I-III}$  am Rahmen mit Zugbänder (Fig. 245d, e und f), da bei gewissen Belastungsfällen die Verschiebungskräfte so wirken, daß infolge der Zugbänder mehrere Säulenköpfe gleichzeitig verschoben werden; der Zugbänder wegen ergibt sich für die an ein und demselben Knotenpunkt von links nach rechts und die von rechts nach links gerichtete Kraft  $H = 1 t$  eine verschiedene Momentenfläche. Zur Bestimmung der genannten  $M^*$ -Momente be-

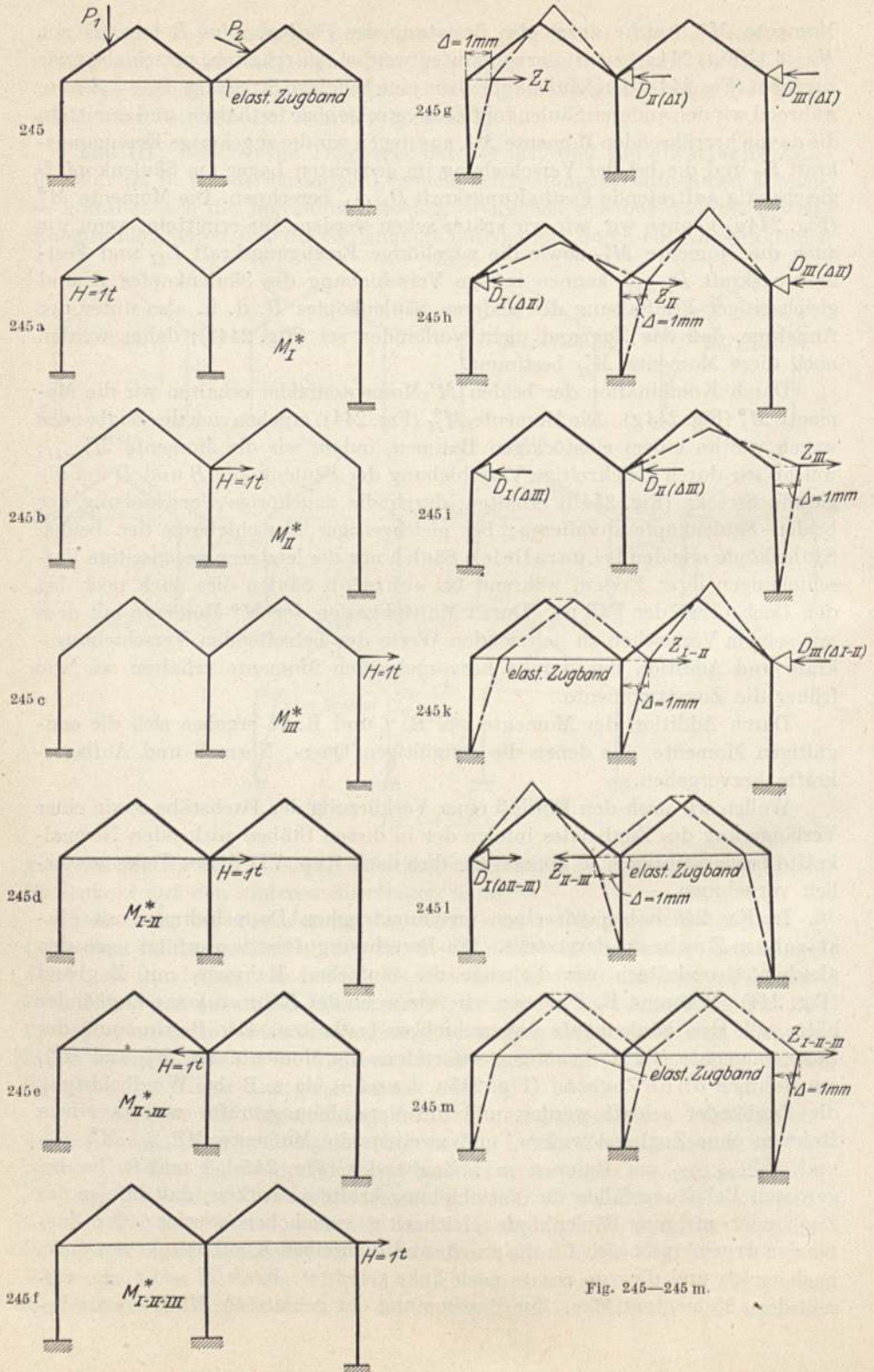


Fig. 245—245 m.

nötigen wir die  $M'$ -Momentenflächen für die verschiedenen Verschiebungszustände; und zwar brauchen wir:

1. zur Bestimmung der  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$ -Momente wie am Rahmen ohne Zugbänder (Fall II) die  $M'$ -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  und Festhaltungskräfte  $D$  für die in den Fig. 245 g, h und i dargestellten Verschiebungszustände;
2. zur Bestimmung der  $M_{I-II}^*$ -Momente (Fig. 245 d) die  $M'$ -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  und Festhaltungskräfte  $D$  für die in den Fig. 245 k und i dargestellten Verschiebungszustände;
3. zur Bestimmung der  $M_{II-III}^*$ -Momente (Fig. 245 e) die  $M'$ -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  und Festhaltungskräfte  $D$  für die in den Fig. 245 l und g dargestellten Verschiebungszustände, und
4. zur Bestimmung der  $M_{I-II-III}^*$ -Momente (Fig. 245 f) die  $M'$ -Momente und die zugehörige Erzeugungskraft  $Z_{I-II-III}$  für den in Fig. 245 m dargestellten Verschiebungszustand.

Die  $M_{I-II-III}^*$ -Momentenfläche ergibt sich nach Kap. IV, 1 dieses Teiles durch Division der  $M'$ -Momentenfläche für Fig. 245 m durch die zugehörige Erzeugungskraft  $Z_{I-II-III}$ ; für jede der übrigen zu bestimmenden  $M^*$ -Momentenflächen ergibt sich nach Kap. IV, 2 dieses Teiles ein Gleichungssystem mit ebenso vielen Gleichungen als nach obigem Verschiebungszustände benötigt werden. Der übrige Rechnungsgang gestaltet sich analog wie für den Rahmen ohne Zugbänder.

### 3. Der Rahmenträger.

(Vierendeel-Träger.)

Der Rahmenträger kann ebenfalls nach der Methode der Festpunkte berechnet werden, und zwar nach dem gleichen Prinzip wie der mehrstöckige Rahmen; der Rahmenträger ist nichts anderes wie ein „liegender“ Stockwerkrahmen. Bisher konnte der Rahmenträger mit mehr als 2—3 Feldern nur näherungsweise berechnet werden. Die nachfolgende Berechnung nach der Methode der Festpunkte liefert jedoch genau richtige Ergebnisse, wie sie eine Berechnung nach den Elastizitätsgleichungen liefern würde, die aber wegen der sehr hohen Zahl von statisch unbestimmten Größen praktisch undurchführbar ist.

Die Berechnung gestaltet sich verschieden, je nachdem die Gurtungen des Rahmenträgers parallel oder in gebrochener Linie (geknickt) verlaufen.

#### a) Der Rahmenträger mit parallelen Gurtungen.

Der in Fig. 246 dargestellte

Rahmenträger über eine Öffnung

ist 12fach statisch unbestimmt; seine Berechnung nach den Elastizitätsgleichungen würde die Auflösung eines Systems von 12 Gleichungen mit 12 Unbekannten erfordern.

Die Berechnung des Rahmenträgers nach der Methode der Festpunkte teilen wir wieder in die beiden Rechnungsabschnitte I und II ein.

## Rechnungsabschnitt I.

Während des R. I nehmen wir an, die Pfosten des Rahmenträgers seien vorübergehend durch gedächte Lager an denselben in senkrechter Richtung und die obere Gurtung desselben in wagrechter Richtung unverschiebbar festgehalten (Fig. 246a). Der Rahmenträger geht dann in ein Tragwerk mit unver-

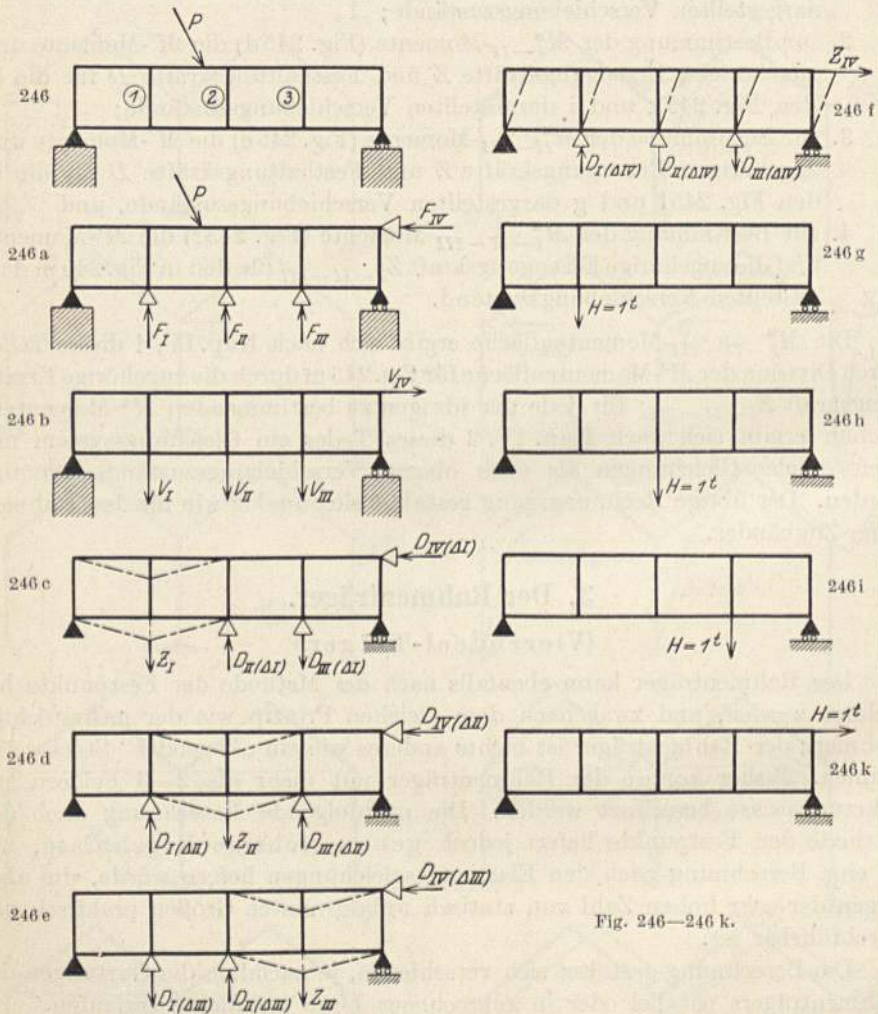


Fig. 246—246 k.

schiebbaren Knotenpunkten über, dessen Berechnung im Teil I vorgeführt wurde. Demgemäß ermitteln wir auf Grund der Festpunkte, Kreuzlinienabschnitte und Verteilungsmaße die Momente an allen Stäben und daraus die drei senkrechten Festhaltungskräfte  $F_I$ ,  $F_{II}$  und  $F_{III}$  sowie die wagrechte Festhaltungskraft  $F_{IV}$  nach Teil I, Kap. VII, 3.

## Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen nun die während des R. I an den Pfosten und der oberen Gurtung gedachten Lager, worauf die den Festhaltungskräften gleichen, aber



entgegengesetzt gerichteten Verschiebungskräfte in Tätigkeit treten (Fig. 246 b), welche den Rahmenträger verschieben und dadurch an diesem noch Zusatzmomente hervorrufen.

Um diese Zusatzmomente zu erhalten, ermitteln wir die Wirkung der einzelnen Verschiebungskräfte  $V_I, V_{II}, V_{III}$  und  $V_{IV}$  getrennt voneinander und bestimmen dementsprechend die Momente  $M_I^*, M_{II}^*, M_{III}^*$  und  $M_{IV}^*$  am frei verschiebbaren Rahmenträger (Fig. 246 g, h, i und k) infolge der an den einzelnen Pfosten und der oberen Gurtung in Richtung derselben angreifenden Last  $H = 1 t$ . Durch Multiplikation der  $M^*$ -Momente mit dem Werte der betreffenden Ver-

schiebungskraft erhalten wir die Momente herrührend von den einzelnen Verschiebungskräften, und durch Addition derselben die Zusatzmomente am Rahmenträger.

Die  $M^*$ -Momente am Rahmenträger erhalten wir nach Teil II, Kap. IV, 3 in der Weise, daß wir sowohl die einzelnen Pfosten als auch die obere Gurtung desselben nacheinander um eine gegebene Strecke, beispiels-

weise  $\Delta = 1 \text{ mm}$ , verschieben (Fig. 246 c, d, e, f), während wir, um die Festpunkte zur Weiterleitung der durch die Verschiebung in den Stäben erzeugten Momente benutzen zu können, die nicht verschobenen Stäbe unverschiebbar festhalten. Dadurch erhalten wir vier  $M^*$ -Momentenbilder mit je einer Erzeugungskraft  $Z$  am verschobenen Stab und drei bei der Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräften  $D$  an den festgehaltenen Stäben, aus deren Kombination nach Teil II, Kap. IV, 3 die Momente  $M_I^*, M_{II}^*, M_{III}^*$  und  $M_{IV}^*$  hervorgehen.

Zum Schluß addieren wir die Momente aus R. I und R. II mit ihren Vorzeichen, wodurch wir die endgültigen Momente und daraus die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte am Rahmenträger infolge der äußeren Belastung erhalten. —

In Fig. 247 haben wir einen über zwei Öffnungen durchlaufenden Rahmenträger

dargestellt, welcher 36fach statisch unbestimmt ist.

Die Berechnung desselben gestaltet sich analog wie diejenige des Rahmenträgers mit einer Öffnung. R. I liefert die Momente für den festgehaltenen

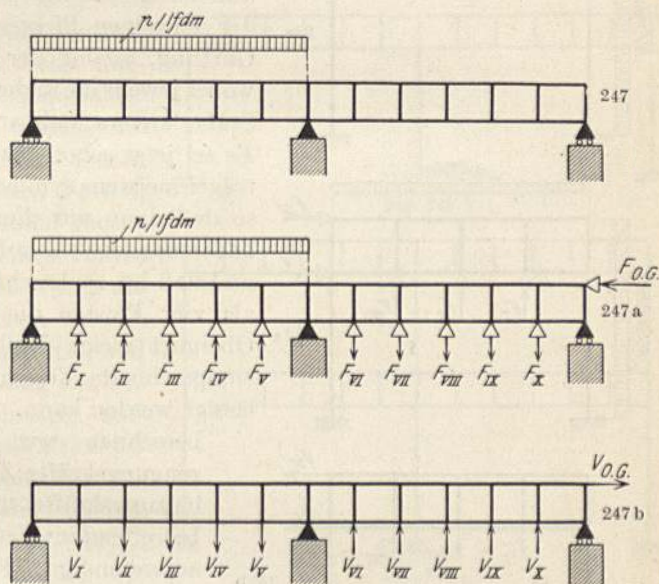


Fig. 247—247 b.

Zustand (Fig. 247a), wobei die Pfosten in senkrechter und die obere Gurtung in wagrechter Richtung unverschiebbar gedacht sind; und aus diesen Momenten erhalten wir nach Teil I, Kap. VII, 3 die Festhaltungskräfte  $F$  in den in Fig. 247a angedeuteten gedachten Lagern, durch welche Druck- und Zugkräfte aufgenommen werden können. Um die Zusatzmomente des R. II, herrührend von

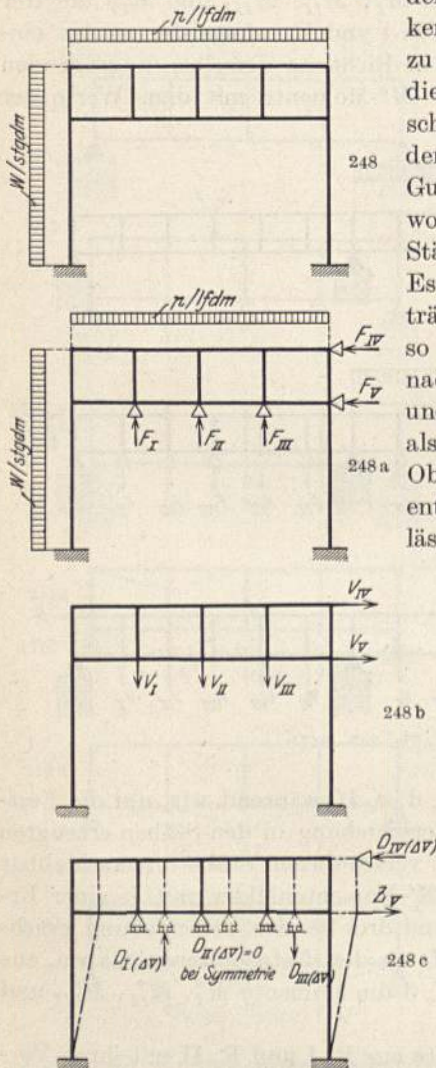


Fig. 248—248 c.

den am durchlaufenden Rahmenträger wirkenden Verschiebungskräften  $V$  (Fig. 247b), zu erhalten, bestimmen wir wieder zunächst die Momente  $M'$  für eine gegebene Verschiebung, beispielsweise  $\Delta = 1$  mm, sowohl der einzelnen Pfosten als auch der oberen Gurtung, analog der Fig. 246c, d, e und f, wobei jeweils die anderen, nicht verschobenen Stäbe unverschiebbar festgehalten bleiben. Es sei jetzt schon erwähnt, daß die Rahmenträger meistens symmetrisch ausgebildet sind, so daß dann nur die Stäbe 1, 2, 3, 4 und 5 nacheinander verschoben zu werden brauchen, und daß bei senkrechter Belastung und mehr als vier Pfosten die Festhaltungskraft am Obergurt gleich Null wird, so daß die ihr entsprechende Verschiebungskraft vernachlässigt werden kann. Aus den Momenten  $M'$  berechnen wir die zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  in Richtung der Festhaltungskräfte aus R. I und die bei der betreffenden Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte  $D$ . Darauf erhalten wir durch Kombination der  $M'$ -Momentenbilder nach Teil II, Kap. IV, 3 die Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  usw. infolge der an den einzelnen Pfosten bzw. der oberen Gurtung des nirgends festgehaltenen Rahmenträgers wirkenden Last  $H = 1 t$ , und durch Multiplikation derselben mit dem Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente ergeben sich die gesuchten Zusatzmomente.

Durch Addition der Momente aus R. I und R. II erhalten wir die endgültigen Momente am durchlaufenden Rahmenträger der Fig. 247, aus welchen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen. —

Ist der Rahmenträger nicht frei aufgelagert, sondern in biegunsfester Verbindung mit Säulen, wie z. B. in Fig. 248 dargestellt, so gestaltet sich die Berechnung analog wie diejenige des frei aufliegenden Rahmenträgers (Fig. 246), es ist jedoch während R. I noch ein Lager an der unteren Gurtung anzubringen

(Fig. 248a), weil diese sonst nicht (wie in Fig. 246 durch das feste Auflager) unverschiebbar ist. Rechnungsabschnitt I liefert wieder die Momente für den festgehaltenen Zustand, aus denen wir die in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte berechnen. Um die Zusatzmomente des R. II, herrührend von den am Rahmenträger wirkenden Verschiebungskräften  $V$  (Fig. 248b) zu erhalten, müssen wir außer den Pfosten 1, 2 und 3 und der oberen Gurtung (Fig. 246c, d, e, f) auch die untere Gurtung um eine beliebige Strecke verschieben (Fig. 248c), wobei wir die Lager 1, 2 und 3, die in wagrechter Richtung beweglich sind, belassen und die obere Gurtung parallel mitverschieben; dabei muß aber trotzdem an der oberen Gurtung eine Kraft  $D_{IV(ΔV)}$  angebracht werden,

um die Knotenpunkte dieser Gurtung senkrecht über denjenigen der unteren Gurtung zu halten, die Parallelverschiebung der oberen Gurtung ergibt aber den Vorteil, daß nur die beiden Säulen gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden erleiden. Daraus ergeben sich die Momente  $M'_V$ , aus denen wir die zugehörige Erzeugungskraft  $Z_V$  und die bei der Verschiebung der unteren Gurtung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte  $D$  berechnen. Durch Kombination der fünf  $M'$ -Momentenbilder ergeben sich die Momente  $M^*_I, M^*_II, M^*_III, M^*_IV$  und  $M^*_V$ , aus welchen wir durch Multiplikation mit dem

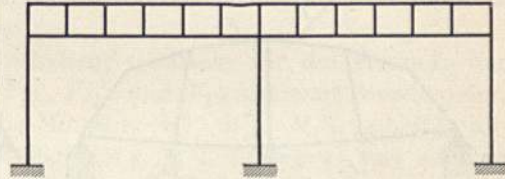


Fig. 249.

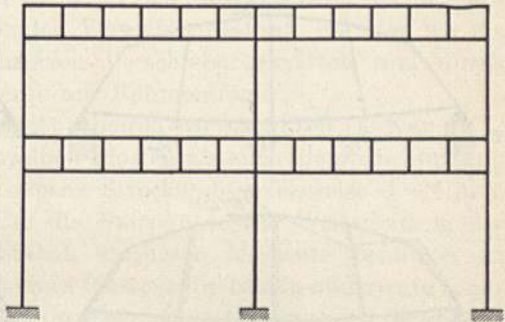


Fig. 250.

Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente die gesuchten Zusatzmomente erhalten. Durch Addition der Momente aus R. I und R. II gelangen wir wieder zu den endgültigen Momenten und daraus zu den endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräften am Rahmenträger. —

Der durchlaufende Rahmenträger auf elastisch drehbaren Stützen (Fig. 249), sowie der Stockwerkrahmen, dessen Balken aus Rahmenträgern bestehen (Fig. 250), werden in analoger Weise berechnet. Die Berechnung liefert die genau richtigen Momente, Quer- und Normalkräfte, so daß man in der Lage ist, diese Tragwerke richtig zu armieren, d. h. die Eiseneinlagen so einzulegen, daß keine Risse entstehen, wie dies bei den meisten bis jetzt ausgeführten Vierendeel-Trägern leider der Fall ist. —

### b) Der Rahmenträger mit beliebig gerichteten Stäben.

Der in Fig. 251 dargestellte, durch eine beliebig gerichtete Kraft  $P$  belastete Rahmenträger wird analog wie der mehrstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen berechnet; den Gang der Berechnung teilen wir wieder in die beiden Rechnungsabschnitte I und II ein.

## Rechnungsabschnitt I.

Während des R. I nehmen wir an, die Pfosten des Rahmenträgers seien vorübergehend durch gedachte Lager an denselben in senkrechter Richtung

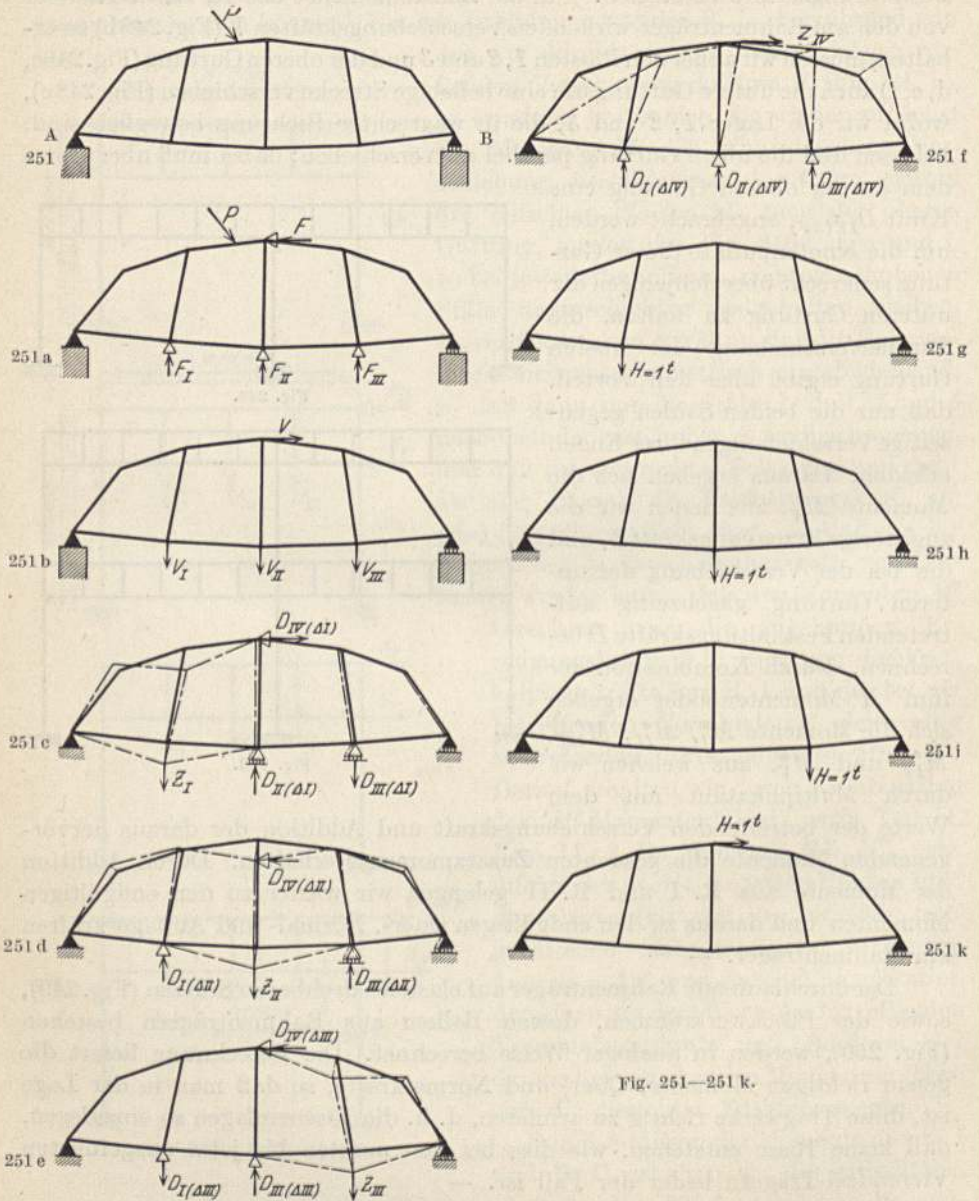


Fig. 251—251 k.

und die obere Gurtung desselben in wagrechter Richtung unverschiebbar festgehalten (Fig. 251 a); die untere Gurtung wird durch das feste Auflager in A unverschiebbar festgehalten. Der Rahmenträger geht dann in ein Tragwerk mit unverschiebbaren Knotenpunkten über, dessen Berechnung im Teil I durchgeführt wurde. Demgemäß ermitteln wir auf Grund der Festpunkte, Kreuz-

linienabschnitte und Verteilungsmaße die Momente an allen Stäben und daraus nach Teil I, Kap. VII, 3 die drei senkrechten Festhaltungskräfte  $F_I$ ,  $F_{II}$  und  $F_{III}$  sowie die wagrechte Festhaltungskraft  $F_{IV}$ ; für die Festhaltungskräfte  $F_I$  und  $F_{III}$  könnten wir ebensogut die Richtung der Stäbe 1 und 3 wählen.

### Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen nun die während des R. I an den Pfosten und der oberen Gurtung gedachten Lager, worauf die den Festhaltungskräften gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Verschiebungskräfte in Tätigkeit treten (Fig. 251 b), welche Verschiebungen der Knotenpunkte des Rahmenträgers und dadurch noch Zusatzmomente hervorrufen.

Um diese Zusatzmomente zu erhalten, ermitteln wir die Wirkung der einzelnen Verschiebungskräfte  $V_I$ ,  $V_{II}$ ,  $V_{III}$  und  $V_{IV}$  getrennt voneinander, und bestimmen dementsprechend die Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$ ,  $M_{III}^*$  und  $M_{IV}^*$  am frei verschiebbaren Rahmenträger (Fig. 251 g, h, i, k) infolge der an den einzelnen Pfosten und an der oberen Gurtung in Richtung der Festhaltungskräfte des R. I angreifenden Last  $H = 1t$ . Durch Multiplikation der  $M^*$ -Momente mit dem Werte der betreffenden Verschiebungskraft erhalten wir die Momente herrührend von den einzelnen Verschiebungskräften und durch Addition derselben die Zusatzmomente am Rahmenträger.

Die  $M^*$ -Momente am Rahmenträger erhalten wir nach Teil II, Kap. IV, 3 in der Weise, daß wir sowohl die einzelnen Pfosten als auch die obere Gurtung desselben nacheinander um eine gegebene Strecke, beispielsweise  $\Delta = 1$  mm, verschieben (Fig. 251 c, d, e, f). Um die Festpunkte zur Weiterleitung der durch die Verschiebung in den Stäben erzeugten Momente benutzen zu können, halten wir bei Verschiebung eines Pfostens die beiden anderen in senkrechter Richtung unverschiebbar fest (in wagrechter Richtung ist die untere Gurtung durch das feste Auflager  $A$  gehalten, die übrigen Knotenpunkte des Untergurtes müssen sich in wagrechter Richtung verschieben können, da sonst eine Verschiebung eines Knotenpunktes des Untergurtes nicht möglich wäre), während von der oberen Gurtung derjenige Knotenpunkt, an dem in R. I das feste Lager angenommen wurde, bei der Verschiebung senkrecht über dem darunterliegenden Knotenpunkt der unteren Gurtung bleiben soll. Wir erkennen aus den Fig. 251 c, d und e, daß bei Verschiebung der einzelnen Pfosten jeweils alle Stäbe, mit Ausnahme von zwei Stäben des Untergurtes, gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden erleiden. Bei Verschiebung des Obergurtes (des Knotenpunktes  $C$ , welcher im R. I festgehalten wurde) erleiden nur die Pfosten und die Obergurtstäbe gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden (siehe Fig. 251 f). Durch diese vier Verschiebungen erhalten wir 4  $M^*$ -Momentenbilder mit je einer Erzeugungskraft  $Z$  (in Richtung der in demselben Punkte angreifenden Festhaltungskraft aus R. I) am verschobenen und drei bei der Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräften  $D$  an den durch gedachte Lager festgehaltenen Knotenpunkten, aus deren Kombination nach Teil II, Kap. IV, 3 die Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$ ,  $M_{III}^*$  und  $M_{IV}^*$  hervorgehen.

Zum Schluß addieren wir die Momente aus R. I und R. II mit ihren Vorzeichen, wodurch wir die endgültigen Momente, und daraus die endgültigen

Quer-, Normal- und Auflagerkräfte am Rahmenträger infolge der äußeren Belastung erhalten. —

Die Berechnung des in Fig. 252 dargestellten über 2 Öffnungen durchlaufenden Rahmenträgers mit beliebig gerichteten Stäben gestaltet sich analog wie diejenige des Rahmenträgers der Fig. 251; durch das mittlere Auflager wird der über demselben liegende Pfosten dauernd (anstatt vorübergehend wie die in den Öffnungen liegenden Pfosten) in senkrechter Richtung unverschiebbar festgehalten.

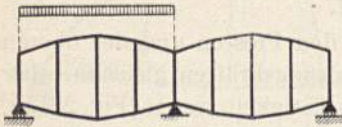


Fig. 252.

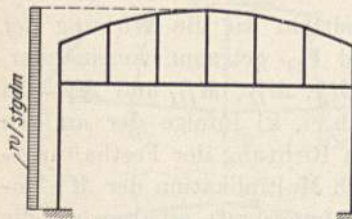


Fig. 253.

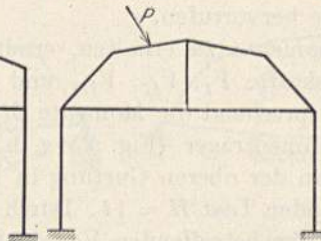
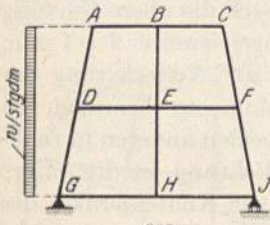


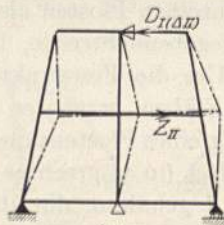
Fig. 254.

Berechnung analog wie diejenige des frei aufliegenden Rahmenträgers (Fig. 251), es ist jedoch während R. I noch ein Lager an der unteren Gurtung anzubringen, weil diese sonst nicht unverschiebbar festgehalten ist

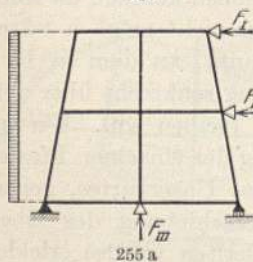
(vgl. die Berechnung des Rahmenträgers der Fig. 248).



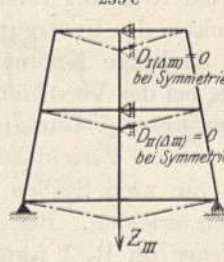
255



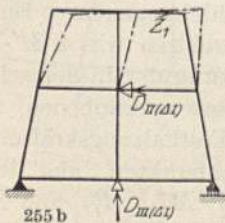
255 c



255 a



255 d



255 b

Fig. 255—255 d.

Ständers III (in senkrechter Richtung). Dann verschieben wir den Balken II unter Festhaltung des Ständers III (in senkrechter Richtung und des Balkens II

Der zweistöckige Rahmenträger der Fig. 255 wird ebenfalls analog wie der gewöhnliche Rahmenträger der Fig. 251 berechnet, es ist jedoch wie beim Rahmenträger der Fig. 253 während R. I sowohl am Balken I als auch am Balken II ein Lager anzubringen, damit der ganze Aufbau horizontal unverschiebbar festgehalten ist; wir haben also im R. I im ganzen drei Festhaltungskräfte (Fig. 255 a) zu bestimmen. Um im R. II zu den Momenten  $M^*$  zu gelangen, verschieben wir, genau wie unter 2, b) dieses Kapitels erläutert, zunächst den Balken I (Fig. 255 b) unter Festhaltung des Balkens II (in wagrechter Richtung) und des

(in wagrechter Richtung) (Fig. 255c); das Lager am Balken *I* braucht kein Rollenlager zu sein, weil der Ständer *III* eine senkrecht zur Verschiebungsrichtung des Balkens *II* stehende Gerade bildet. Zum Schluß verschieben wir noch den Ständer *III* um eine beliebige Strecke, wobei wir sowohl das untere als auch das obere Stockwerk so mitgehen lassen, daß die Knotenpunkte *C* und *E* senkrecht über dem verschobenen Knotenpunkt *H* bleiben (Fig. 255d). Aus diesen Verschiebungszuständen erhalten wir die Momente  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$ , aus denen wir dann die zugehörigen Erzeugungskräfte *Z* sowie die bei der betreffenden Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte *D* berechnen können. Aus den Fig. 255 b, c und d erkennen wir, daß bei Verschiebung des Balkens *I* alle Stäbe des oberen Stockwerkes, bei Verschiebung des Balkens *II* alle Ständer-Stäbe, und bei Verschiebung des Ständers *III* alle Balken-Stäbe des Tragwerkes gegenseitig Verschiebungen ihrer Enden erleiden.

#### 4. Das biegungsfeste Fachwerk.

Nach der Methode der Festpunkte ist es auch möglich, die Biegemomente in den Stäben eines Fachwerkes zu ermitteln, dessen Stäbe in den Knotenpunkten nicht gelenkartig, sondern biegungsfest miteinander verbunden sind. Besonders sei darauf hingewiesen, daß man nach vorliegender Methode mit Leichtigkeit die Nebenspannungen in Eisenfachwerken, herrührend von der biegungsfesten Verbindung der Stäbe in den Knotenpunkten infolge Vernietung derselben mit den Knotenblechen nicht nur näherungsweise, wie dies bisher erfolgte, sondern genau nachweisen kann.

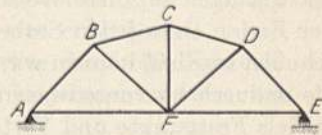


Fig. 256.

Die Berechnung des in Fig. 256 dargestellten biegungsfesten Fachwerkes (Dachbinder) gestaltet sich wie folgt:

Da das Stabwerk aus lauter Dreiecken besteht, so sind alle Knotenpunkte unverschiebbar (wenn wir, wie immer, zunächst von den Knotenpunktverschiebungen infolge durch die Normalkräfte bewirkter Längenänderung der Stäbe absehen), und wir erhalten nur einen R. I. Da nun aber bei einem Fachwerk nicht die Momente, sondern die Normalkräfte den Hauptteil der Spannungen in den Stäben verursachen, so dürfen die Knotenpunktverschiebungen infolge Längenänderung der Stäbe, hervorgerufen durch die Normalkräfte, nicht ohne weiteres vernachlässigt werden.

Nachdem wir die Festpunkte an allen Stäben und die Verteilungsmasse an allen Knotenpunkten bestimmt haben, ermitteln wir in bekannter Weise (nach Teil I) die Momentenfläche am ganzen Tragwerk (mit unverschiebbaren Knotenpunkten) infolge der äußeren Belastung, sowie die Normalkräfte (nach Teil I, Kap. VI) in allen Stäben. Um die Momente am biegungsfesten Fachwerk infolge der Normalkräfte, d. h. herrührend von einer Längenänderung der Stäbe und dadurch verursachten Verschiebung der Knotenpunkte, zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Längenänderungen aller Stäbe nach der Gleichung:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}, \quad (480)$$

wenn

- $N$  die Normalkraft in irgendeinem Stabe,
- $l$  die anfängliche Länge des Stabes,
- $E$  der Elastizitätsmodul des Baumaterials und
- $F$  der Querschnitt des Stabes,

und zeichnen darauf einen Williot'schen Verschiebungsplan (siehe Müller-Breslau, Die graphische Statik, II, 1, S. 57; 1903), wodurch wir die von den Längenänderungen der Stäbe herrührenden wirklichen Knotenpunktverschiebungen erhalten. Der Williot'sche Verschiebungsplan liefert die Knotenpunktverschiebungen für den Fall, daß die Stäbe an den Knotenpunkten gelenkig anschließen; der Einfluß der biegungsfesten Knotenpunktverbindung auf die Größe dieser Verschiebungen ist jedoch so gering, daß er vernachlässigt werden kann, es genügt, zu wissen, daß die Knotenpunktverschiebungen bei biegungsfester Verbindung der Stäbe um ein geringes Maß kleiner sind als bei gelenkigem Anschluß an die Knotenpunkte.

Nun bilden wir die Projektionen jeder Knotenpunktverschiebung auf die Normalen zu den in dem betreffenden Knotenpunkt vereinigten Stäben, und gelangen auf diese Weise zu der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung der Enden eines jeden Stabes. Für jeden Stab, dessen Enden gegenseitig verschoben wurden, können wir alsdann nach den allgemeinen Gln. (515) und (520) die dadurch hervorgerufenen Momente an beiden Enden berechnen, dieselben mittels Festpunkte und Verteilungsmaße über das ganze Tragwerk weiterleiten und zum Schluß die Momentenflächen herrührend von allen Stäben, deren Enden gegenseitig verschoben wurden, addieren; die daraus hervorgehende Momentenfläche stellt den Einfluß der Normalkräfte dar.

Wirkt die äußere Belastung nicht auf die Gurtungsstäbe, sondern direkt auf die Knotenpunkte des Fachwerkes, wie dies bei Eisenkonstruktionen meistens der Fall ist (zur Vermeidung von Biegung in den Fachwerkstäben), so wird mit diesen Knotenpunktlasten und den Auflagerreaktionen ein Cremona-plan gezeichnet, woraus die Normalkräfte (Stabkräfte) in allen Stäben hervorgehen. Hierauf wird der Einfluß der Normalkräfte bzw. der davon herrührenden Längenänderung der Stäbe und dadurch verursachten Verschiebung der Knotenpunkte, wie vorstehend beschrieben, bestimmt.

Handelt es sich darum, die Spannungen in den Stäben, herrührend von einer über den Stabquerschnitt gleichmäßig verteilten Temperaturänderung um  $t^\circ$  gegenüber der Herstellungstemperatur, zu ermitteln, so bestimmen wir für jeden Stab die davon herrührende Verlängerung bzw. Verkürzung nach der Gleichung

$$\Delta l = E \cdot t \cdot l,$$

worin

- $t$  die für alle Punkte des Stabes gleiche Temperaturänderung,
- $E$  der Temperaturexpansionskoeffizient des Baumaterials bei einer Temperaturänderung um  $1^\circ \text{C}$ ,
- $l$  die anfängliche Stablänge,

und zeichnen hiermit einen Williot'schen Verschiebungsplan, aus welchem die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, und damit die gegenseitigen



rechtwinkligen Verschiebungen aller Stabenden hervorgehen, welche wegen der biegungsfesten Knotenpunktverbindung Momente am ganzen Tragwerk verursachen, die in bekannter Weise ermittelt werden.

### 5. Rechnungsproben.

Der Vorteil der Berechnung eines Tragwerkes nach der Methode der Festpunkte gegenüber derjenigen nach den Elastizitätsgleichungen besteht u. a. darin, daß man die Berechnung von Stufe zu Stufe leicht nachprüfen kann, weil sie sich aus mehreren Teilen zusammensetzt, deren jeder für sich abgeschlossen ist, d. h. von welchen jeder die Momentenfläche für einen bestimmten Belastungszustand des Tragwerkes liefert.

Zur Berechnung eines Tragwerkes nach der Methode der Festpunkte müssen die Momente für folgende Belastungszustände ermittelt werden:

- a) Belastung des vorübergehend durch gedachte Lager unverschiebbar gemachten Tragwerkes durch die äußere Belastung, wodurch die Momente des R. I entstehen;
- b) Belastung des Tragwerkes durch die zu dem betreffenden Verschiebungszustand gehörige Erzeugungskraft unter Belassung der übrigen gedachten Lager, wodurch die  $M'$ - Momente entstehen;
- c) Belastung des frei verschiebbaren Tragwerkes durch die Kraft  $H = 1t$  an den Stellen, wo die gedachten Lager angebracht waren, wodurch die  $M^*$ - Momente entstehen;
- d) Belastung des frei verschiebbaren Tragwerkes durch sämtliche Verschiebungskräfte  $V$  gleichzeitig, wodurch die Zusatzmomente entstehen;
- e) Belastung des frei verschiebbaren Tragwerkes durch die äußere Belastung, wodurch die endgültigen Momente entstehen.

Bestimmen wir nun für jeden Belastungszustand aus den für denselben mit Hilfe der Festpunkte ermittelten Momenten die Quer- und Normalkräfte an den Knotenpunkten und in den Stäben, und aus diesen die Auflagerreaktionen (nach Teil I, Kap. VI) — die bei Belastungszustand a) und b) vorkommenden Festhaltungskräfte sind auch nichts anderes als Auflagerreaktionen, und zwar in den gedachten Lagern —, so müssen als

#### Hauptprobe.

geltend für alle Belastungszustände, die äußeren Kräfte mit den Auflagerreaktionen im Gleichgewicht stehen, d. h. es müssen die analytischen und graphischen Bedingungen des Gleichgewichts von Kräften in derselben Ebene erfüllt sein:

Die drei analytischen notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen sind ausgedrückt in dem

*Satz: Zum Gleichgewichte von Kräften in einer Ebene ist erforderlich, daß die Summe ihrer Projektionen auf zwei zueinander senkrechte Achsen der Ebene gleich Null sei und daß die Summe ihrer statischen Momente in bezug auf einen beliebigen Pol in der Ebene verschwinde, d. h. es muß bestehen:*

$$\left. \begin{aligned} \sum(P \cdot \cos \alpha) &= 0 \\ \sum(P \cdot \sin \alpha) &= 0 \\ \sum(P \cdot a) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (481)$$

Die ersten beiden Gleichungen heißen die Projektionsgleichungen, die letzte die Momentengleichung.

Die beiden Projektionsachsen brauchen nicht aufeinander senkrecht zu stehen, dürfen aber nicht zueinander parallel sein.

Die drei genannten Gleichgewichtsbedingungen können auch in besonderen Fällen mit Vorteil durch drei andere ersetzt werden. So kann man z. B. eine Projektionsgleichung und zwei Momentengleichungen benutzen, welche sich auf verschiedene Pole beziehen, d. h. ein System

$$\left. \begin{aligned} \sum (P \cdot \cos \alpha) &= 0 \\ \sum (P \cdot a) &= 0 \\ \sum (P \cdot b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (482)$$

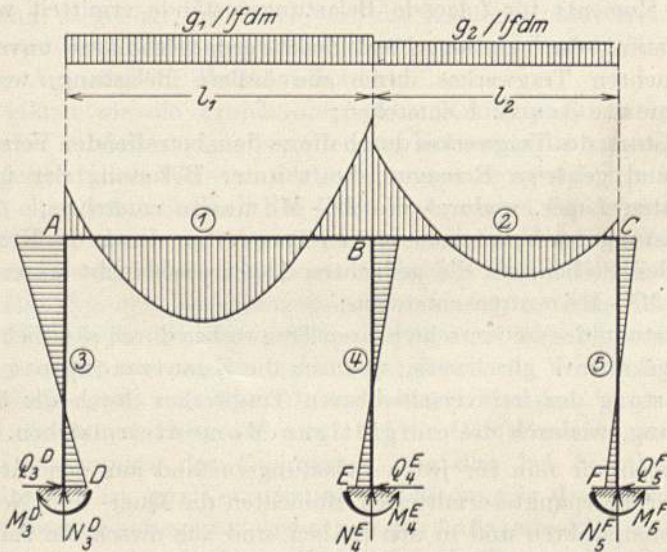


Fig. 257.

Doch darf die Verbindungslinie der beiden Pole nicht zu der Projektionsachse senkrecht sein, weil das Kräftesystem sich in diesem Falle auf eine in der Verbindungslinie liegende Resultierende reduzieren könnte, und somit die genannten Bedingungen erfüllt wären, ohne daß Gleichgewicht bestehen würde.

Schließlich kann man die Gleichgewichtsbedingungen durch drei Momentengleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sum (P \cdot a) &= 0 \\ \sum (P \cdot b) &= 0 \\ \sum (P \cdot c) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (483)$$

darstellen, welche sich auf Pole beziehen, die nicht in einer geraden Linie liegen dürfen.

Die graphische Gleichgewichtsbedingung erfordert, daß der von der äußeren Belastung und den Auflagerreaktionen gebildete Kräftezug sowie die Pfeilrichtung desselben geschlossen ist. Von den Seilstrahlen zu diesem

Krafteck wird ein Seileck gebildet, welches die sog. Stützlinie für den betreffenden Belastungsfall ist, und diese muß natürlich die Stäbe des Tragwerkes in den Momentennullpunkten schneiden.

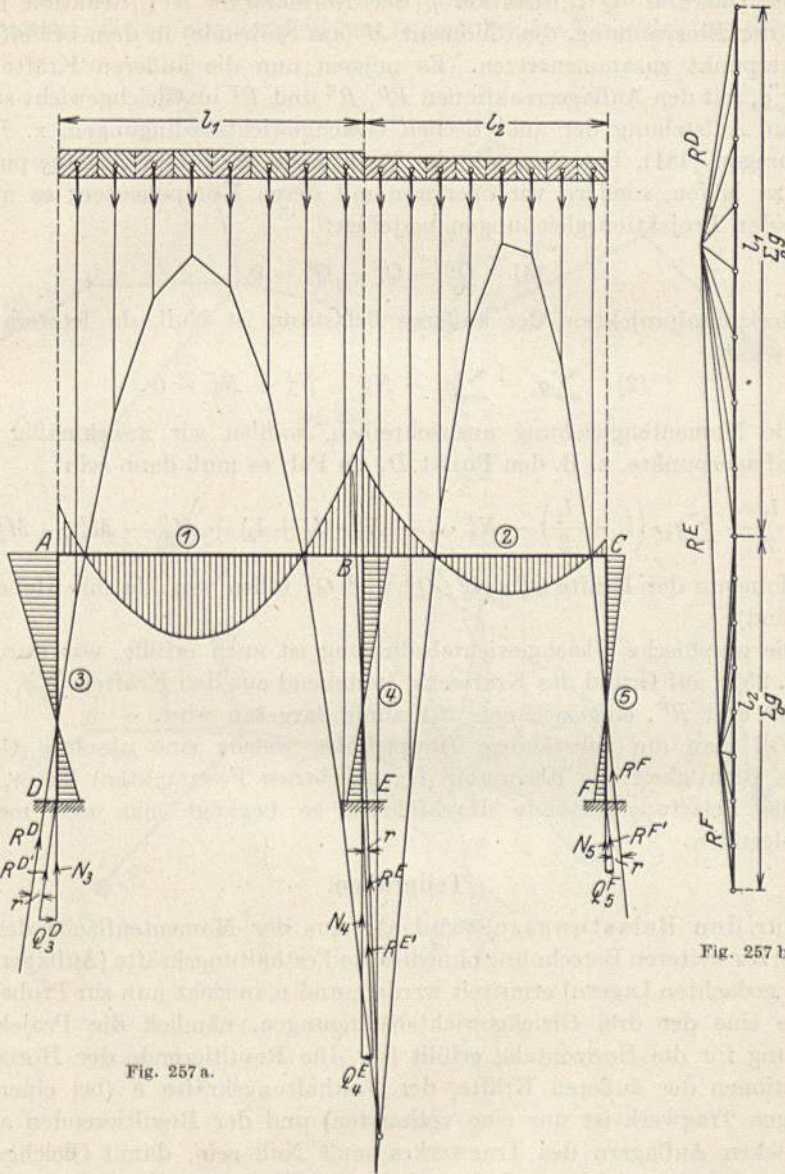


Fig. 257 a.

Fig. 257 b.

Die Anwendung der Hauptprobe sei nachstehend an einem einfachen Beispiel für den Belastungszustand e) (endgültige Momente) gezeigt.

Der Balken des Rahmens der Fig. 257 sei durch eine gleichmäßig verteilte Last  $g_1$  und  $g_2$  pro lfd. m belastet; die Stäbe des Rahmens setzen wir im übrigen gewichtslos voraus.

Die in den Fig. 257 und 257a dargestellte Momentenfläche sei die endgültige am frei verschiebbaren Rahmen. Aus den Momenten ermitteln wir nach Teil I, Kap. VI, 3 die Auflagerreaktionen in  $D$ ,  $E$  und  $F$ , welche sich aus der Querkraft  $Q$  („Reaktion“), der Normalkraft  $N$  („Reaktion“) und, wegen der Einspannung, dem Moment  $M$  (am Stabende) in dem betreffenden Auflagerpunkt zusammensetzen. Es müssen nun die äußeren Kräfte  $\sum g_1$  und  $\sum g_2$  mit den Auflagerreaktionen  $R^D$ ,  $R^E$  und  $R^F$  im Gleichgewicht stehen.

Zur Aufstellung der analytischen Gleichgewichtsbedingungen, z. B. der Gleichungen (481), brauchen wir die Reaktionen  $R$  in den Auflagerpunkten nicht zu bilden, sondern wir operieren mit deren Komponenten; es müssen die beiden Projektionsgleichungen bestehen:

$$(1) \quad Q_3^D - Q_4^E - Q_5^F = 0$$

(die Horizontalprojektion der äußeren Belastung ist Null, da letztere senkrecht wirkt)

$$(2) \quad \sum g_1 - \sum g_2 - N_3^D - N_4^E - N_5^F = 0.$$

Um die Momentengleichung anzuschreiben, wählen wir zweckmäßig einen der Auflagerpunkte, z. B. den Punkt  $D$ , als Pol; es muß dann sein:

$$\sum g_1 \cdot \frac{l_1}{2} + \sum g_2 \cdot \left( l_1 + \frac{l_2}{2} \right) - N_4^E \cdot l_1 - N_5^F \cdot (l_1 + l_2) + M_3^D - M_4^E - M_5^F = 0$$

(die Momente der Kräfte  $Q_3^D$ ,  $N_3^D$ ,  $Q_4^E$  und  $Q_5^F$  fallen weg, da ihre Hebelarme Null sind).

Die graphische Gleichgewichtsbedingung ist auch erfüllt, was durch die in Fig. 257a auf Grund des Kräftecks, bestehend aus den Kräften  $\sum g_1$ ,  $\sum g_2$ ,  $R^D$ ,  $R^E$  und  $R^F$ , eingezeichnete Stützlinie dargetan wird. —

Will man die vollständige Hauptprobe, welche eine absolute Gewähr für die Richtigkeit der Rechnung (bei gegebenen Festpunkten) bietet, nicht für alle Belastungszustände durchführen, so begnügt man sich meistens mit folgenden

### Teilproben.

Für den Belastungszustand a): Aus der Momentenfläche des R. I. müssen zur weiteren Berechnung ohnedies die Festhaltungskräfte (Auflagerkräfte in den gedachten Lagern) ermittelt werden, und man sieht nun zur Probe nach, ob die eine der drei Gleichgewichtsbedingungen, nämlich die Projektionsgleichung für die Horizontale, erfüllt ist. Die Resultierende der Horizontalprojektionen der äußeren Kräfte, der Festhaltungskräfte  $F$  (bei einem einstöckigen Tragwerk ist nur eine vorhanden) und der Resultierenden an den natürlichen Auflagern des Tragwerkes muß Null sein, damit Gleichgewicht besteht.

An den Tragwerken der Fig. 258 (einstöckig) und 259 (dreistöckig), für welche in Fig. 258a bzw. 259a die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand dargestellt ist, wurden die Horizontalprojektionen der genannten Kräfte konstruiert; an Stelle der Horizontalprojektionen der Resultierenden an den Auflagerpunkten wurden diejenigen der Komponenten  $Q$  und  $N$  derselben gebildet.

Für den Belastungszustand b): Aus der  $M'$ -Momentenfläche für die Verschiebung desjenigen Stabes oder Knotenpunktes, an welchem während R. I ein Lager gedacht ist, muß zur weiteren Berechnung die zugehörige Erzeugungskraft  $Z$  (als äußere Belastung aufzufassen) sowie (bei mehrstöckigen Tragwerken) die an den verbliebenen Lagern bei der Verschiebung gleichzeitig

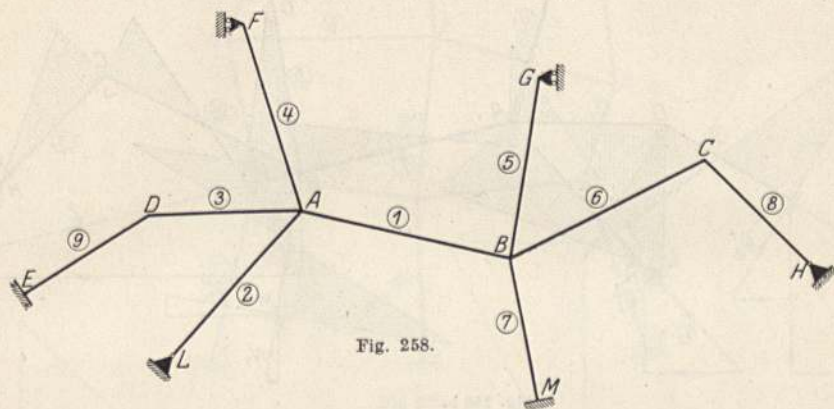


Fig. 258.

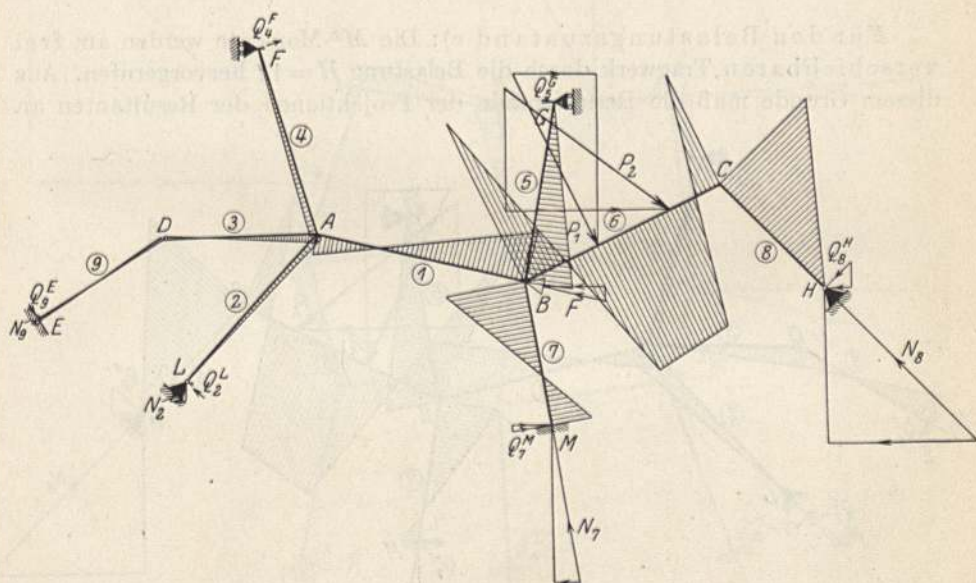


Fig. 258 a.

auf tretenden Festhaltungskräfte  $D$  (Auflagerkräfte in den gedachten Lagern) ermittelt werden. Man sieht nun zur Probe wieder nach, ob die eine der drei Gleichgewichtsbedingungen, nämlich die Projektionsgleichung für die Horizontale erfüllt ist. Die Resultierende der Horizontalprojektionen der Erzeugungskraft  $Z$ , der Festhaltungskräfte  $D$  und der Resultierenden an den natürlichen Auflagern des Tragwerkes muß Null sein, damit Gleichgewicht besteht.

In Fig. 258 b wurde diese Probe als Beispiel für den allgemeinen einstöckigen Rahmen, und in den Fig. 259 b, c und d für den allgemeinen Stockwerksrahmen durchgeführt.

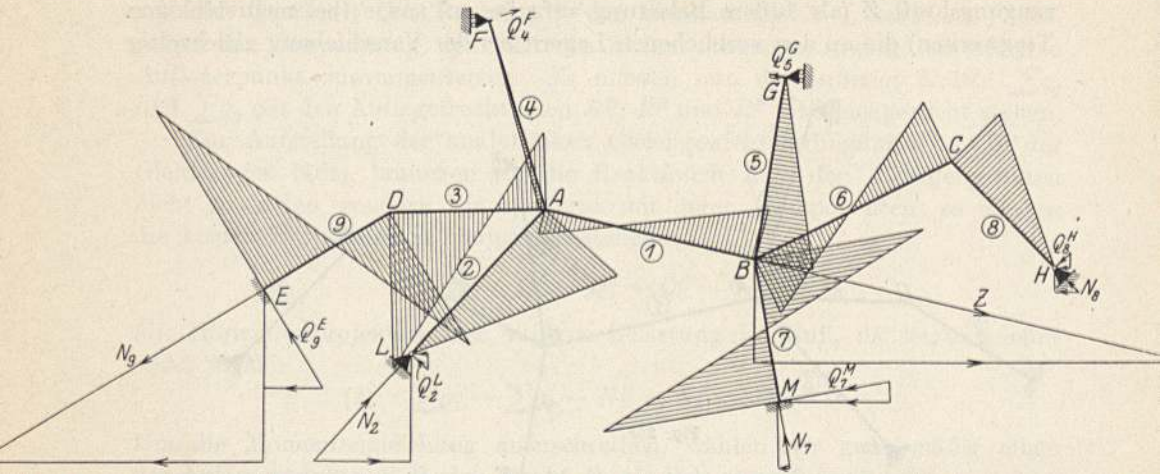


Fig. 258 b.

Für den Belastungszustand c): Die  $M^*$ -Momente werden am frei verschiebbaren Tragwerk durch die Belastung  $H = 1 t$  hervorgerufen. Aus diesem Grunde muß die Resultierende der Projektionen der Resultanten an

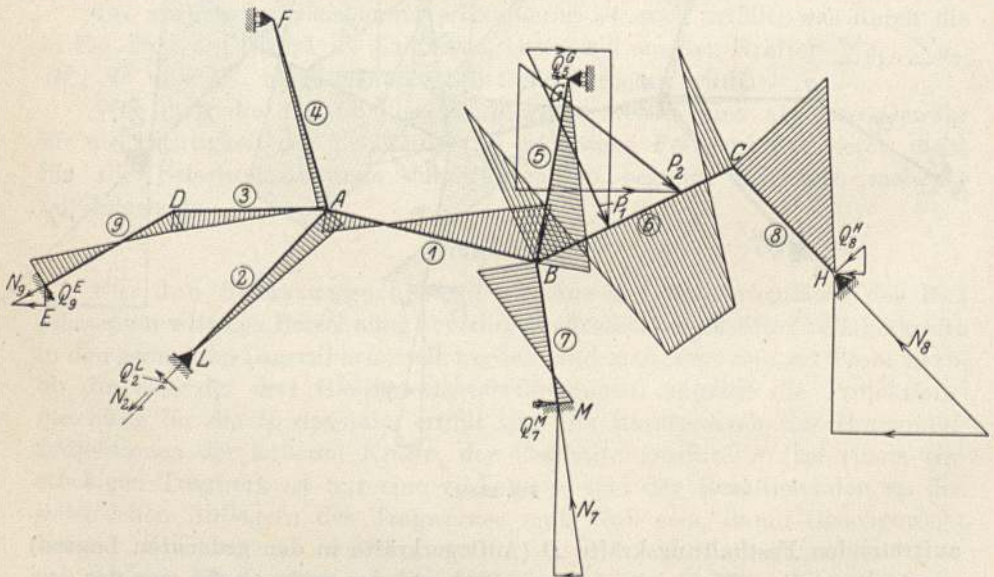


Fig. 258 c.

den Auflagern des Tragwerkes (d. h. der Projektionen der Quer- und Normalkräfte [„Reaktionen“] in den Auflagern) auf die Richtung von  $H = 1 t$  gleich und entgegengesetzt der äußeren Last  $H = 1 t$  sein; ferner muß die Resultierende der Projektionen der Quer- und Normalkräfte an den Enden

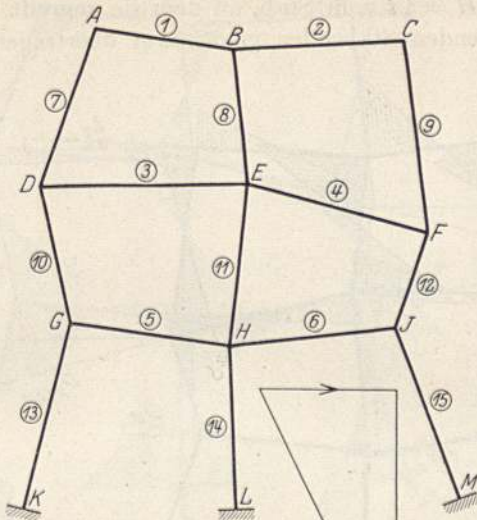


Fig 259.

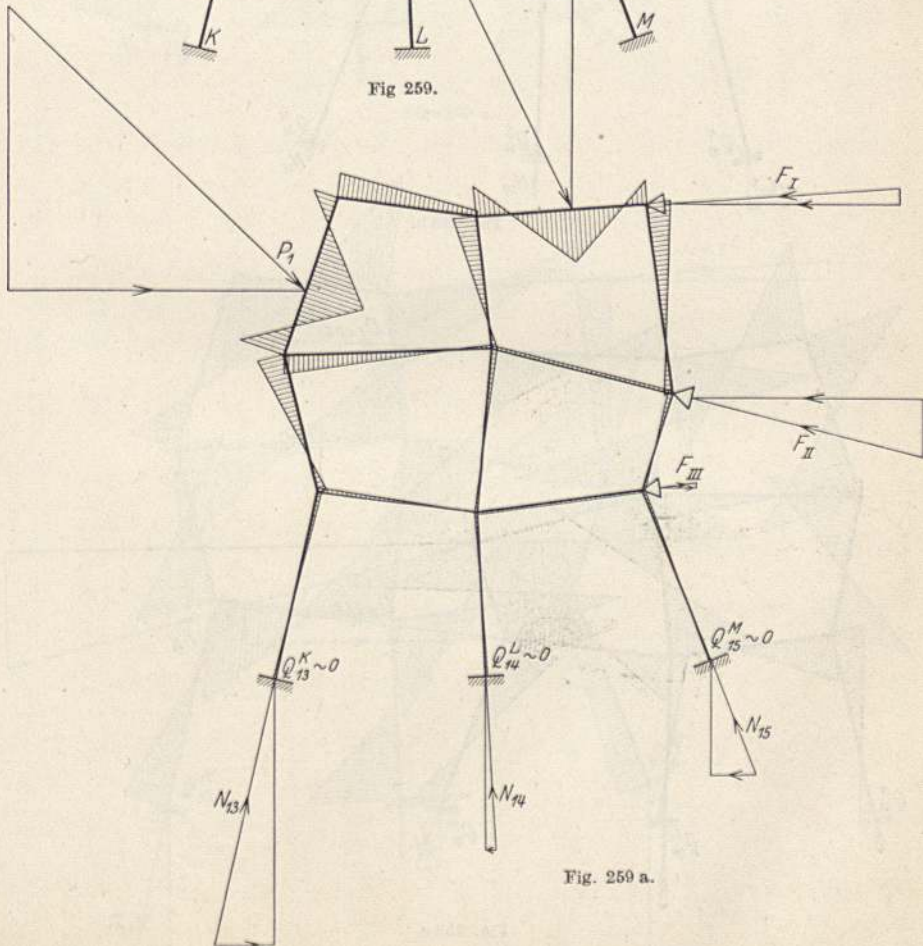


Fig. 259 a.

der Stäbe, welche sich an den Stab mit der Last  $H = 1 t$  anschließen, auf die Richtung von  $H = 1 t$  nach Größe und Richtung gleich dieser Kraft

sein, da ja die Kraft  $H = 1 t$  vom Stab, an dem sie angreift, auf die sich an diesen Stab anschließenden Stabenden gemeinsam übertragen wird. Besitzt

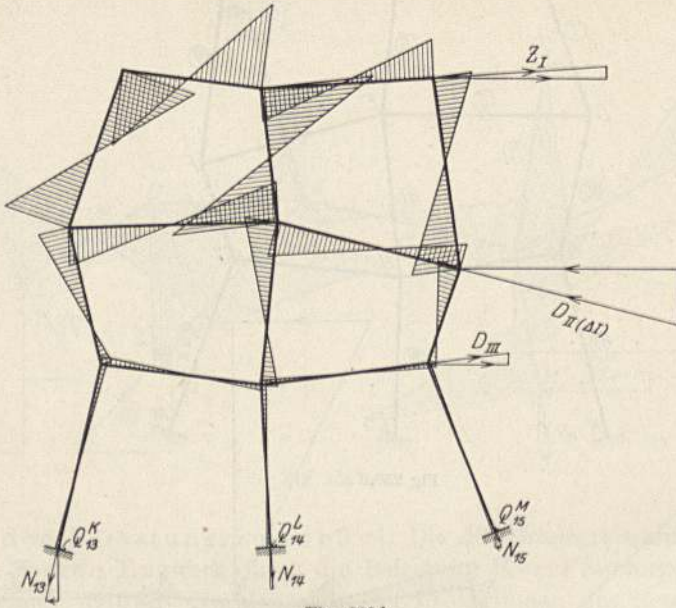


Fig. 259 b.

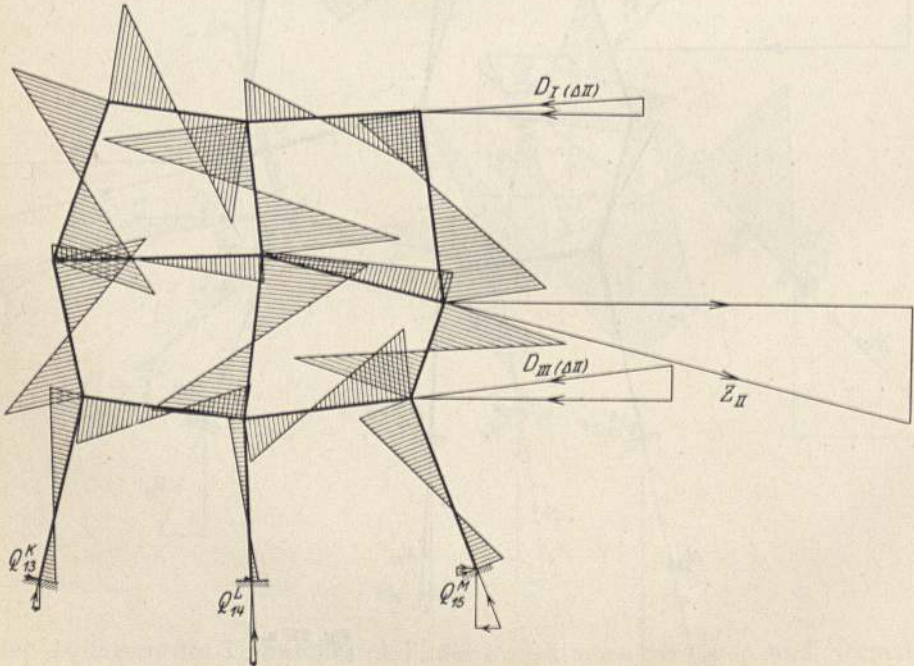


Fig. 259 c.

das Tragwerk mehrere Stockwerke, so muß außerdem die Resultierende der Projektionen der Quer- und Normalkräfte an den Enden der Stäbe, welche



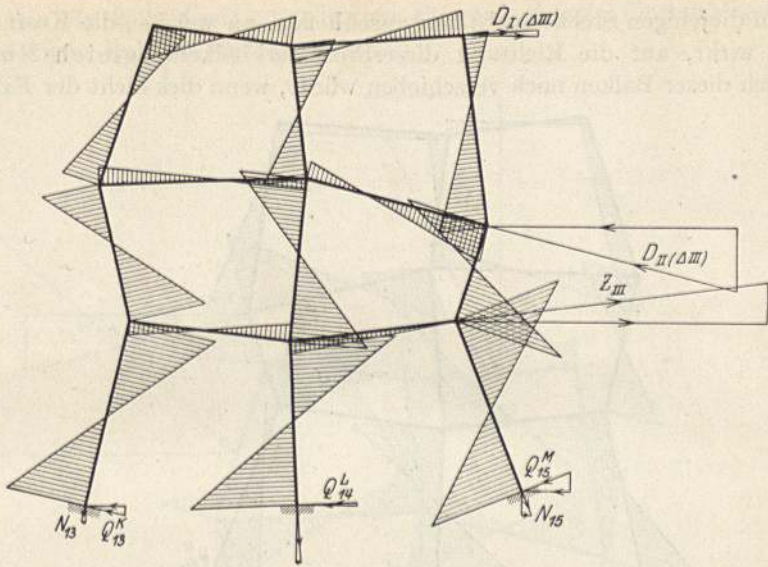


Fig. 259 d.

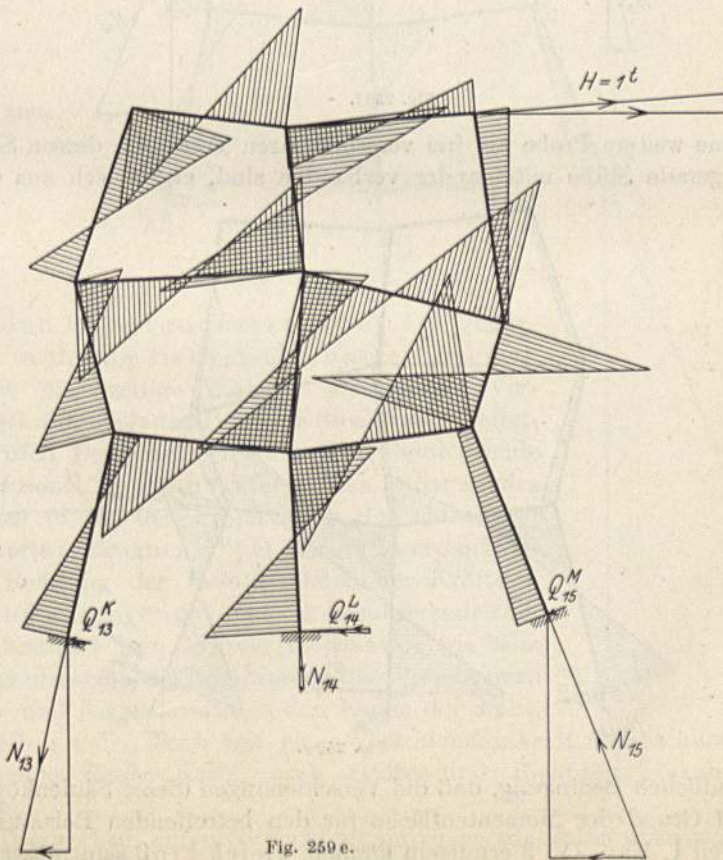


Fig. 259 e.

sich an diejenigen Stockwerkbalken anschließen, an welchen die Kraft  $H = 1 t$  nicht wirkt, auf die Richtung dieses Stockwerkbalkens, gleich Null sein, weil sich dieser Balken noch verschieben würde, wenn dies nicht der Fall wäre.

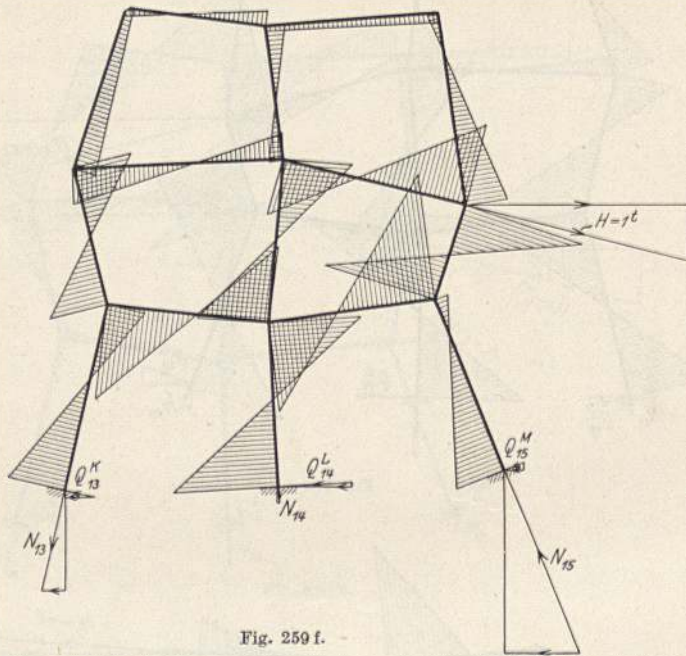


Fig. 259 f.

Eine weitere Probe am frei verschiebbaren Tragwerk, dessen Säulenköpfe durch gerade Stäbe miteinander verbunden sind, ergibt sich aus der selbst-

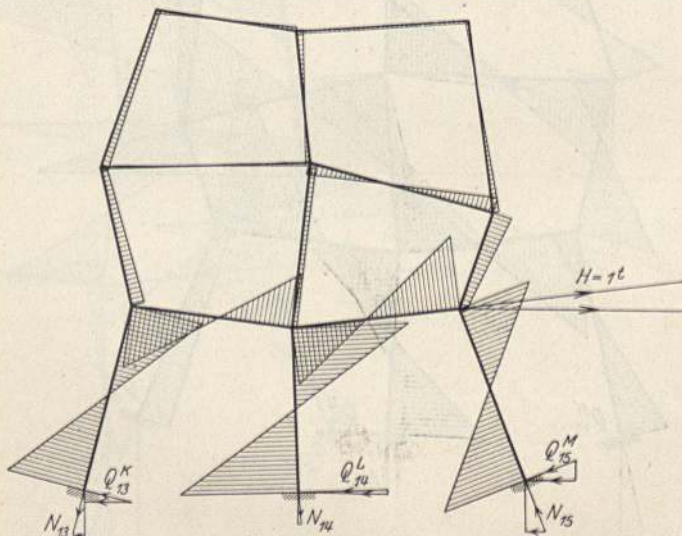


Fig. 259 g.

verständlichen Bedingung, daß die Verschiebungen dieser Säulenköpfe, welche wir auf Grund der Momentenfläche für den betreffenden Belastungszustand nach Teil I, Kap. IV, 3 ermitteln können, gleich groß sein müssen.

In den Fig. 259 e, f und g wurde diese Probe als Beispiel für den allgemeinen mehrstöckigen Rahmen durchgeführt.

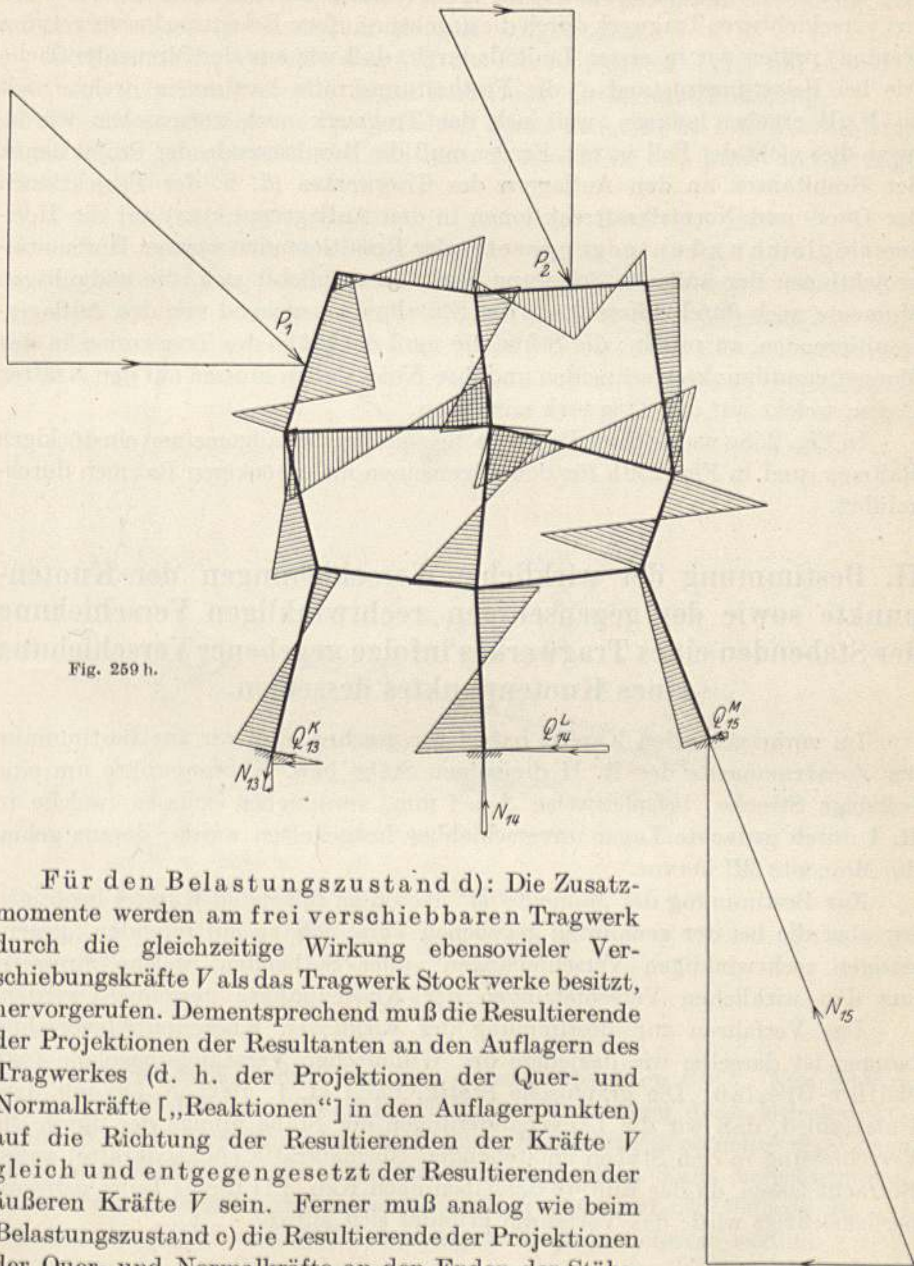


Fig. 259 h.

Für den Belastungszustand d): Die Zusatzmomente werden am frei verschiebbaren Tragwerk durch die gleichzeitige Wirkung ebensoviele Verschiebungskräfte  $V$  als das Tragwerk Stockwerke besitzt, hervorgerufen. Dementsprechend muß die Resultierende der Projektionen der Resultanten an den Auflagern des Tragwerkes (d. h. der Projektionen der Quer- und Normalkräfte [„Reaktionen“] in den Auflagerpunkten) auf die Richtung der Resultierenden der Kräfte  $V$  gleich und entgegengesetzt der Resultierenden der äußeren Kräfte  $V$  sein. Ferner muß analog wie beim Belastungszustand c) die Resultierende der Projektionen der Quer- und Normalkräfte an den Enden der Stäbe, welche sich an den Stab mit einer Verschiebungskraft  $V$  anschließen, auf die Richtung dieser Kraft, nach Größe und Richtung gleich dieser Kraft sein.

An Tragwerken, deren Säulenköpfe durch gerade Stäbe miteinander verbunden sind, Methode der Festpunkte.

bunden sind, ergibt sich wieder die Probe, daß die Verschiebungen der Säulenköpfe gleich groß sein müssen.

Für den Belastungszustand e): Die endgültigen Momente, welche am frei verschiebbaren Tragwerk durch die gegebene äußere Belastung hervorgerufen werden, prüfen wir in erster Linie dadurch, daß wir aus der Momentenfläche wie bei Belastungszustand a) die Festhaltungskräfte bestimmen, welche sich zu Null ergeben müssen, weil sich das Tragwerk noch verschieben würde, wenn dies nicht der Fall wäre. Ferner muß die Resultierende der Projektionen der Resultanten an den Auflagern des Tragwerkes (d. h. der Projektionen der Quer- und Normalkraftreaktionen in den Auflagerpunkten) auf die Horizontale gleich und entgegengesetzt der Resultierenden aus den Horizontalprojektionen der äußeren Belastung sein. Es empfiehlt sich, die endgültigen Momente noch durch Einzeichnen der Stützlinie, ausgehend von den Auflagerresultierenden, zu prüfen; die Stützlinie muß die Stäbe des Tragwerkes in den Momentennullpunkten schneiden und ihre Knickstellen müssen auf den Kräften liegen, welche auf das Tragwerk einwirken.

In Fig. 258c wurde diese Probe als Beispiel für den allgemeinen einstöckigen Rahmen, und in Fig. 259h für den allgemeinen mehrstöckigen Rahmen durchgeführt.

## II. Bestimmung der wirklichen Verschiebungen der Knotenpunkte sowie der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung der Stabenden eines Tragwerkes infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes desselben.

Im vorhergehenden Kapitel haben wir gesehen, daß wir zur Bestimmung der Zusatzmomente des R. II diejenigen Stäbe bzw. Knotenpunkte um eine beliebige Strecke, beispielsweise  $\Delta = 1$  mm, verschieben müssen, welche in R. I durch gedachte Lager unverschiebbar festgehalten waren; daraus gehen die Momente  $M'$  hervor.

Zur Bestimmung der Momente  $M'$  nach dem folgenden Kapitel benötigen wir aber die bei der genannten gegebenen Verschiebung auftretenden „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ aller Stabenden, welche ihrerseits aus den wirklichen Verschiebungen der Knotenpunkte gewonnen werden.

Das Verfahren zur Bestimmung der wirklichen Knotenpunktverschiebungen ist dasselbe wie dasjenige der Williot'schen Verschiebungspläne (vgl. Müller-Breslau, Die graphische Statik, Band II, 1, 1903, S. 58) mit dem Unterschied, daß wir die Längenänderungen der Stäbe infolge der durch die Verschiebung in den Stäben entstehenden Normalkräfte (Achskräfte) außer Betracht lassen, da der Einfluß derselben nach Kap. VII dieses Teiles getrennt berücksichtigt wird; das Verfahren gründet sich auf die

### Aufgabe:

Der Knotenpunkt  $C$  (Fig. 260) sei mit den Knotenpunkten  $A$  und  $B$  durch zwei Stäbe 1 und 2 verbunden, welche in  $A$  und  $B$  eingespannt oder gelenkig gelagert sein können; die Knotenpunkte  $A$  und  $B$  (oder nur einer davon) sollen sich in die neuen Lagen  $A'$  und  $B'$  verschieben, wobei wir die

Annahme machen, daß die Verschiebungen  $AA'$  und  $BB'$  im Verhältnis zu den Längen der Stäbe 1 und 2 verschwindend klein seien, was bei elastischen Knotenpunktverschiebungen stets der Fall ist; in Fig. 260 wurden dieselben in verzerrem Maßstab aufgetragen.

Gesucht ist die Verschiebung  $CC'$  des Knotenpunktes  $C$  (der mit  $A$  und  $B$  nicht auf derselben Geraden liegen darf) nach Größe und Richtung.

Um die neue Lage von  $C$  zu erhalten, denkt man sich bei  $C$  die Verbindung beider Stäbe gelöst, verschiebt den Stab 1 parallel zu sich selbst in die Lage

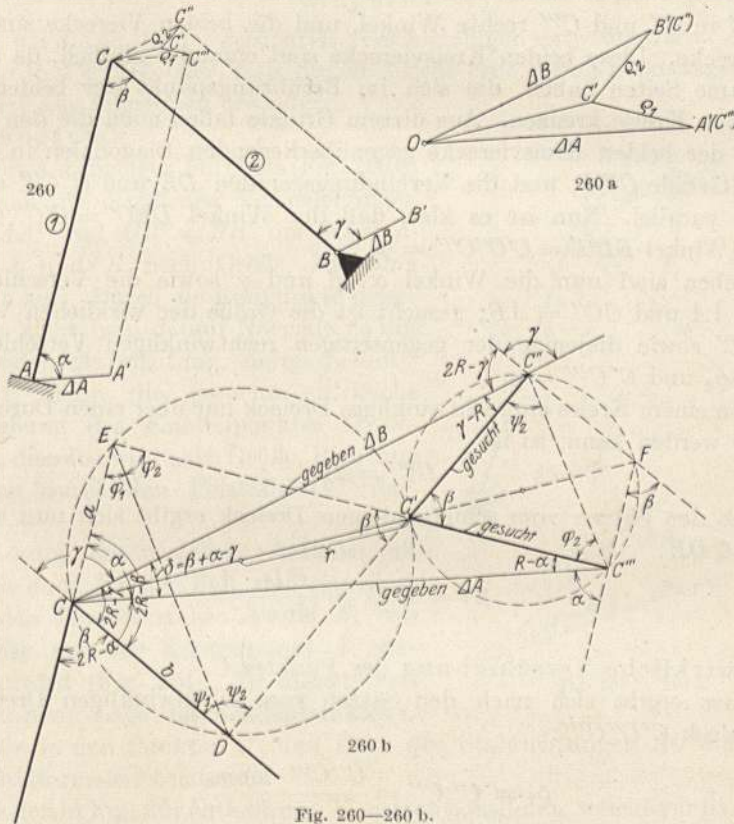


Fig. 260—260 b.

$A'C''$  und den Stab 2 parallel zu sich selbst in die Lage  $B'C''$ . Nun schlägt man mit den Stablängen  $AC$  und  $BC$  als Radius Kreisbögen, deren Mittelpunkte  $A'$  und  $B'$  sind. Der Schnittpunkt  $C''$  dieser Bögen ist die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes  $C$ . In dem hier vorausgesetzten Falle verschwindend kleiner Verschiebungen dürfen die Kreisbögen  $C''C'$  und  $C'''C'$  durch die auf den Geraden  $A'C''$  und  $B'C''$  errichteten Normalen ersetzt werden.

Aus den in Fig. 260 enthaltenen Konstruktionslinien bzw. den von ihnen gebildeten Dreiecken können wir nun die Größe der wirklichen Verschiebung des Knotenpunktes  $C$ , sowie der „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung“ der Endpunkte der Stäbe 1 und 2, welche wir im folgenden Kapitel benötigen,

analytisch

bestimmen, wodurch wir die gesuchten Verschiebungen mathematisch genau erhalten.

In Fig. 260a haben wir die Konstruktionslinien, welche zur Bestimmung der neuen Lage des Knotenpunktes  $C$  gedient haben, größer herausgezeichnet; dabei haben wir die Gerade  $C'''C'$  bis zu ihrem Schnitt mit der Stabrichtung 1, die Gerade  $C''C'$  bis zu ihrem Schnitt mit Stab 2 und die Gerade  $A'C'''$  bis zu ihrem Schnitt mit der Geraden  $B'C''$  verlängert. Da die Gerade  $C'C'''$  gemäß Annahme normal zur Stabrichtung 1 und die Gerade  $C'C''$  normal zur Stabrichtung 2 ist, so besitzt das Viereck  $CDC'E$  in  $D$  und  $E$ , und das Viereck  $CC''FC''$  in  $C''$  und  $C'''$  rechte Winkel, und die beiden Vierecke sind daher Kreisvierecke. Diese beiden Kreisvierecke sind einander ähnlich, da sie zwei gemeinsame Seiten haben, die sich im Berührungspunkt der beiden umgeschriebenen Kreise kreuzen. Aus diesem Grunde fallen auch die den rechten Winkeln der beiden Kreisvierecke gegenüberliegenden Diagonalen in ein und dieselbe Gerade  $CC'F$ , und die Verbindungsgeraden  $DE$  und  $C''C'''$  sind zueinander parallel. Nun ist es klar, daß der Winkel  $DEC' = C'C'''C'' = \varphi_2$  und der Winkel  $EDC' = C'C''C''' = \psi_2$ .

Gegeben sind nun die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sowie die Verschiebungen  $CC''' = \Delta A$  und  $CC'' = \Delta B$ ; gesucht ist die Größe der wirklichen Verschiebung  $CC'$  sowie diejenige der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen  $C'C'' = \varrho_2$  und  $C'C''' = \varrho_1$ .

Da in einem Kreise ein rechtwinkliges Dreieck nur über einen Durchmesser errichtet werden kann, so ist

$$CC' = 2r.$$

Nach den Sätzen vom schiefwinkligen Dreieck ergibt sich nun aus dem Dreieck  $CDE$ :

$$2r = CC' = \frac{CD}{\sin \varphi_1} \quad (485)$$

für die wirkliche Verschiebung des Punktes  $C$ .

Ferner ergibt sich nach den Sätzen vom schiefwinkligen Dreieck aus dem Dreieck  $C'C''C'''$ :

$$\varrho_2 = C'C'' = \frac{C''C''' \cdot \sin \varphi_2}{\sin \beta}, \quad (485a)$$

$$\varrho_1 = C'C''' = \frac{C''C''' \cdot \sin \psi_2}{\sin \beta} \quad (485b)$$

für die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ der Endpunkte der Stäbe 1 und 2.

Die in den Gln. (485), (485a) und (485b) vorkommenden Werte von  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\psi_2$  erhalten wir nach den Sätzen vom schiefwinkligen Dreieck aus:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{ctg} \varphi_2 = \frac{CD \cdot \sin(2R - \beta)}{CE - CD \cdot \cos(2R - \beta)} = \frac{CD \cdot \sin \beta}{CE - CD \cdot \cos \beta}, \quad (486)$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \operatorname{ctg} \psi_2 = \frac{CE \cdot \sin(2R - \beta)}{CD - CE \cdot \cos(2R - \beta)} = \frac{CE \cdot \sin \beta}{CD - CE \cdot \cos \beta}, \quad (486a)$$



die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_2$  ist, sowie die Größe der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung  $C''C' = \varrho_1$ .

Im rechtwinkligen Dreieck  $CC'C''$  ist:

$$\varrho_2 \cdot \sin \beta = CC'' ,$$

nun ist aber im rechtwinkligen Dreieck  $CC''C'''$ :

$$CC''' = AA \cdot \cos \alpha ,$$

also ist

$$\varrho_2 = \frac{AA \cdot \cos \alpha}{\sin \beta} \quad (487)$$

für die wirkliche Verschiebung des Punktes  $C$  und gleichzeitig  $\varrho_2$ .

Um  $\varrho_1$  zu erhalten, verlängern wir die gegebene Strecke  $AA'$  bis zum Schnitt mit Stab 2, mit welchem dieselbe den Winkel  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$  einschließt; alsdann findet sich dieser Winkel  $\gamma$  auch am Punkte  $C$  zwischen der Richtung von  $AA$  und dem Stab 2. Nun fallen wir noch aus dem Punkte  $C''$  das Lot  $C''C_2$  auf den Stab 2 und aus dem Punkte  $C'$  das Lot  $C'C_1$  auf die vorgenannte Strecke  $C''C_2$ . Dann ist  $C''C_2 \parallel C'C$  und  $C'C_1 \parallel CC_2$  und daher

$$C'C_1 = CC_2 . \quad (488)$$

Im rechtwinkligen Dreieck  $C'C''C_1$  ist nun:

$$C'C_1 = \varrho_1 \cdot \sin \beta$$

und im rechtwinkligen Dreieck  $CC''C_2$ :

$$CC_2 = AA \cdot \cos \gamma ,$$

so daß nach Gl. (488):

$$\varrho_1 = \frac{AA \cdot \cos \gamma}{\sin \beta} . \quad (489)$$

### Graphisch

erhalten wir die Größe der gesuchten Verschiebungen entweder durch Abgreifen derselben in Fig. 261 oder, falls dieselbe nicht groß genug aufgetragen wurde, vergrößert aus einem besonderen Verschiebungsplan (Fig. 261a).

## 1. Der einstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben.

An dem allgemeinen Tragwerk der Fig. 262 müssen wir laut dem vorhergehenden Kapitel zur Bestimmung der Zusatzmomente (R. II) den während R. I festgehaltenen Knotenpunkt  $B$  und damit den „Balken“ des einstöckigen Tragwerkes, welcher durch die Stäbe 1, 3 und 6 gebildet wird, um eine beliebige Strecke, beispielsweise  $\Delta = 1$  mm, verschieben, wodurch die Momente  $M'$  entstehen. Wir wählen die Strecke im Verhältnis zu den Stablängen des Tragwerkes verschwindend klein, damit wir das zur Lösung der vorhergehenden Aufgabe verwendete Verfahren (Ersetzen der Kreisbögen durch die Normalen) benützen können. Wir verschieben also den Knotenpunkt  $B$  (Fig. 262a) um das gegebene Maß und tragen dieses in demselben rechtwinklig zu Stab 7 auf, letzteres deshalb, weil sich der Knotenpunkt  $B$  bei seiner Verschiebung auf einem Kreisbogen um den unverschiebbar vorausgesetzten Auflagerpunkt  $M$  bzw. wegen der im Verhältnis zu den Stablängen



des Tragwerkes verschwindend klein angenommenen Verschiebung auf einer Normalen zum Stab 7 bewegt. Durch die Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  nach  $B'$  gelangen auch die übrigen Knotenpunkte  $A$ ,  $C$  und  $D$  sowie die beiden

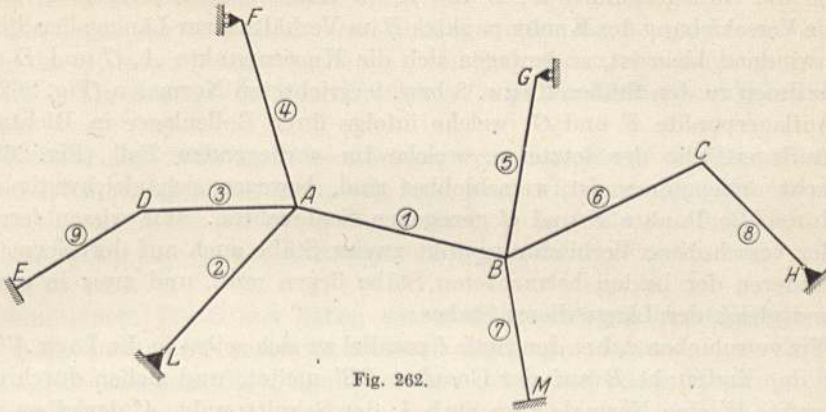


Fig. 262.

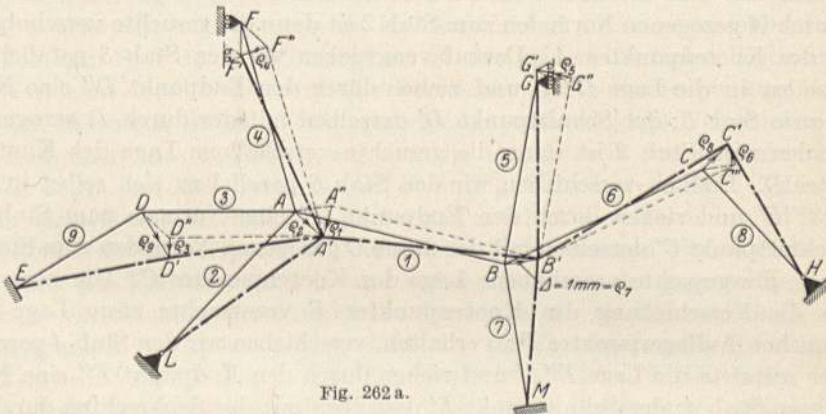


Fig. 262 a.

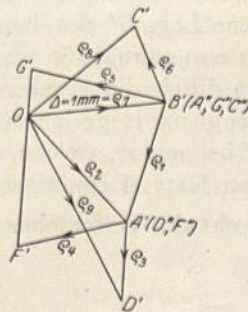


Fig. 262 b.

verschiebbaren Auflagerpunkte  $F$  und  $G$  in neue Lagen, und wir erkennen aus Fig. 262a, daß wir die vorstehende Aufgabe wiederholt zu lösen haben, und zwar für den Fall, daß die Verschiebung des Fußpunktes des einen Stabes Null ist. Aus den gegebenen Verschiebungen der Punkte  $L$  und  $B$  (diejenige

von  $L$  ist Null) erhalten wir die Verschiebung des Knotenpunktes  $A$ ; aus der nunmehr gegebenen Verschiebung des Punktes  $A$  und derjenigen des Punktes  $E$  (gleich Null) ergibt sich die Verschiebung des Punktes  $D$ ; usw.

Da die Auflagerpunkte  $E$ ,  $L$  und  $H$  unverschiebbar vorausgesetzt sind, und die Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  im Verhältnis zur Länge aller Stäbe verschwindend klein ist, so bewegen sich die Knotenpunkte  $A$ ,  $C$  und  $D$  auf den in ihnen zu den Stäben 2 bzw. 8 bzw. 9 errichteten Normalen (Fig. 262a). Die Auflagerpunkte  $F$  und  $G$ , welche infolge ihrer Rollenlager in Richtung der Auflagerfläche der letzteren, welche im vorliegenden Fall (Fig. 262a) senkrecht angenommen ist, verschiebbar sind, bewegen sich gleichzeitig auf den durch die Punkte  $F$  und  $G$  gezogenen Senkrechten. Wir wissen ferner, daß der verschobene Verbindungspunkt zweier Stäbe auch auf der Normalen zum anderen der beiden betrachteten Stäbe liegen muß, und zwar in einem Abstand gleich der Länge dieses Stabes.

Wir verschieben daher den Stab 1 parallel zu sich selbst in die Lage  $A''B'$ , wobei der Endpunkt  $B$  auf der Geraden  $BB'$  gleitet, und ziehen durch den Endpunkt  $A''$  eine Normale zum Stab 1; der Schnittpunkt  $A'$  derselben mit der durch  $A$  gezogenen Normalen zum Stab 2 ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes  $A$ . Darauf verschieben wir den Stab 3 parallel zu sich selbst in die Lage  $D''A'$  und ziehen durch den Endpunkt  $D''$  eine Normale zum Stab 3; der Schnittpunkt  $D'$  derselben mit der durch  $D$  gezogenen Normalen zum Stab 9 ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes  $D$ . Endlich verschieben wir den Stab 6 parallel zu sich selbst in die Lage  $C''B'$  und ziehen durch den Endpunkt  $C''$  eine Normale zum Stab 6; der Schnittpunkt  $C'$  derselben mit der durch  $C$  gezogenen Normalen zum Stab 8 ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes  $C$ . Um noch die durch die Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  verursachte neue Lage des beweglichen Auflagerpunktes  $F$  zu erhalten, verschieben wir den Stab 4 parallel zu sich selbst in die Lage  $F''A'$  und ziehen durch den Endpunkt  $F''$  eine Normale zum Stab 4; der Schnittpunkt  $F'$  derselben mit der Senkrechten durch  $F$  ist dann die gesuchte verschobene Lage des Auflagerpunktes  $F$ . Analog erhält man auch die verschobene Lage  $G'$  des beweglichen Auflagerpunktes  $G$ .

Aus der Fig. 262a gehen nun sowohl die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, hervorgerufen durch die gegebene Verschiebung des Knotenpunktes  $B$ , als auch die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte aller Stäbe hervor, welche wir zur Berechnung der  $M'$ -Momente nach dem folgenden Kapitel benötigen: Es ist die Strecke:

$A''A' = \varrho_1$	die gegenseitige rechtwkl. Verschiebung der Endpunkte des Stabes 1	
$AA' = \varrho_2$	„ „ „ „ „ „ „ „	2
$D''D' = \varrho_3$	„ „ „ „ „ „ „ „	3
$F''F' = \varrho_4$	„ „ „ „ „ „ „ „	4
$G''G' = \varrho_5$	„ „ „ „ „ „ „ „	5
$C''C' = \varrho_6$	„ „ „ „ „ „ „ „	6
$BB' = \varrho_7$	„ „ „ „ „ „ „ „	7
$CC' = \varrho_8$	„ „ „ „ „ „ „ „	8
$DD' = \varrho_9$	„ „ „ „ „ „ „ „	9

Die in der Fig. 262a an den Strecken  $\rho$  eingetragenen Pfeilrichtungen beziehen sich auf eine Regel betreffend des Drehsinnes bzw. Vorzeichens der davon herrührenden Momente an beiden Stabenden, deren Berechnung im folgenden Kapitel gezeigt wird.

Die Größe der wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte sowie diejenige der Strecken  $\rho$  kann leicht mathematisch genau, wie eingangs gezeigt, aus den in Fig. 262a enthaltenen Dreiecken (an jedem Knotenpunkt) berechnet werden.

Aus der Fig. 262a kann man ferner, wenn man sie groß genug zeichnet, die Strecken  $\rho$  abgreifen, andernfalls muß man, wie durch Fig. 260 und 260b dargestellt, die in Fig. 262a enthaltenen Dreiecke in größerem Maßstab herauszeichnen, wobei man sie der Linienersparnis wegen aneinanderreicht. Aus Fig. 262b ist dies zu ersehen:

Von einem Pol  $O$  aus haben wir zunächst die gegebene Verschiebung  $A = 1$  mm in einem bestimmten Maßstab abgetragen; darauf ziehen wir durch  $O$  eine Normale zum Stab 2, auf welcher der verschobene Knotenpunkt  $A$  in erster Linie liegen muß, und durch den Punkt  $B'$  eine Normale zum anderen Stab, welcher mit dem ersteren im Knotenpunkt  $A$  zusammengeschlossen ist, nämlich zum Stab 1; der Schnittpunkt  $A'$  der beiden Normalen begrenzt auf der Normalen durch  $O$  die wirkliche Verschiebung des Knotenpunktes  $A$  und auf der Normalen durch  $B'$  die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\rho_1$  der Endpunkte des Stabes 1, was aus der Ähnlichkeit des Dreiecks  $OA'B'$  in Fig. 262b und des Dreiecks  $AA'B'$  in Fig. 262a hervorgeht. Ziehen wir ferner durch  $O$  eine Normale zum Stab 9 und durch  $A'$  eine Normale zum Stab 3, so begrenzt der Schnittpunkt  $D'$  derselben auf der ersteren die wirkliche Verschiebung des Knotenpunktes  $D$  und auf der letzteren die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes 3. Machen wir dies für alle Knotenpunkte, so stellen in Fig. 262b die von  $O$  ausgehenden Strecken die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, welche für diejenigen Stäbe, deren Auflagerpunkte unverschiebbar, gleichzeitig gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen sind, und die übrigen Strecken, welche die Endpunkte der wirklichen Verschiebungen miteinander verbinden, die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe des Tragwerkes dar.

In Fig. 262a haben wir der besseren Übersicht halber strichpunktiert die Stäbe in ihrer neuen Lage eingetragen, wobei jedoch deren Formänderungen herrührend von den infolge der Knotenpunktverschiebungen in denselben auftretenden Momenten nicht dargestellt haben.

Das Verfahren wird im folgenden noch an einigen einfachen Beispielen gezeigt.

### Beispiele.

#### Beispiel I: Der Rechteckrahmen (Fig. 263).

Der Knotenpunkt  $C$  werde um die gegebene Strecke  $A = 1$  mm verschoben. Dann verschieben sich, weil alle Säulen parallel zueinander sind, die Knotenpunkte  $A$  und  $B$  ebenfalls um 1 mm in derselben Richtung wie Knotenpunkt  $A$  (rechtwinklig zu der Säulenrichtung), so daß sich die Stäbe 1 und 2 nur in ihrer eigenen Richtung verschieben und daher keine gegen-

seitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden. Die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 3, 4 und 5 sind alle gleich

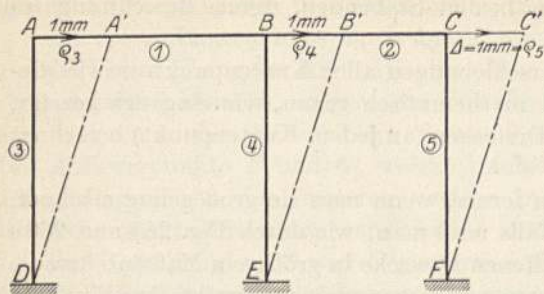


Fig. 263.

groß, nämlich  $\rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = 1 \text{ mm}$ , auch wenn die Säulen ungleich lang sind. Dasselbe gilt für den Fall, daß an Stelle des Knotenpunktes C der Knotenpunkt A oder B um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben wird.

Wird am Rechteckrahmen der Fig. 264 z. B. Knotenpunkt D um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben, so gilt genau dasselbe wie für den Rahmen der Fig. 263; die Stäbe 1, 2 und 3 verschieben sich nur in ihrer eigenen Richtung

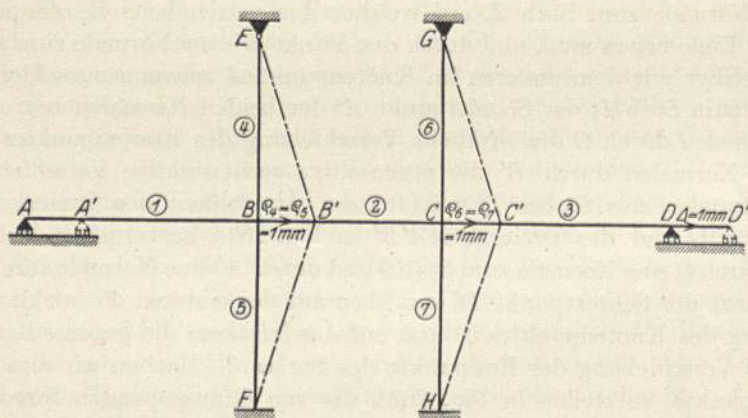


Fig. 264.

und erleiden daher keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte. Die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 4, 5, 6 und 7

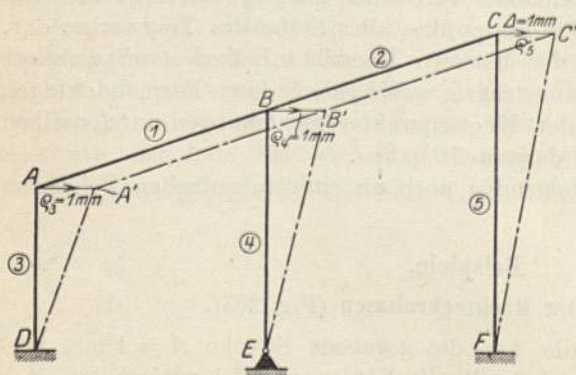


Fig. 265.

sind alle gleich groß, und zwar gleich der gegebenen Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$ , auch wenn die Säulen (die senkrechten Stäbe) ungleich lang sind.

**Beispiel II: Rahmen mit senkrechten Säulen und geneigtem Balken (Fig. 265).**

Der Knotenpunkt C werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben. Dann verschieben sich, weil alle Säulen (Stäbe, welche zum

Drehpunkt führen) parallel zueinander sind, die Knotenpunkte A und B ebenfalls um 1 mm in derselben Richtung wie Knotenpunkt A (rechtwinklig zu der

Säulenrichtung), so daß sich die Stäbe 1 und 2 nur parallel zu sich selbst verschieben und keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden. Die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 3, 4 und 5 sind alle gleich groß, nämlich  $\varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5 = 1 \text{ mm}$ , auch wenn die Säulen ungleich lang sind. Dasselbe gilt für den Fall, daß an Stelle des Knotenpunktes  $C$  der Knotenpunkt  $A$  oder  $B$  um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben wird.

Ist der Balken, wie in Fig. 266, sattelförmig, so gilt genau dasselbe wie für den Rahmen der Fig. 265; die Stäbe 1 und 2 verschieben sich z. B. bei gegebener Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  ebenfalls nur parallel zu sich selbst und erleiden deshalb keine gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen ihrer Endpunkte.

Genau dasselbe gilt für den einstielligen Rahmen der Fig. 267 mit geneigtem Balken und horizontal laufendem Rollenlager an einem Ende.

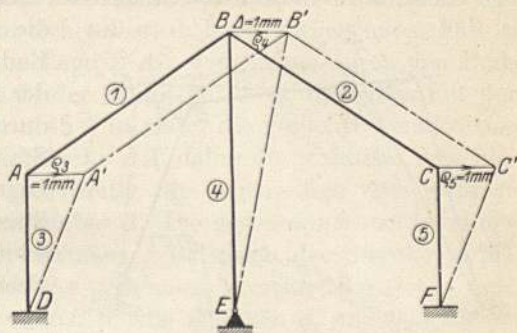


Fig. 266.

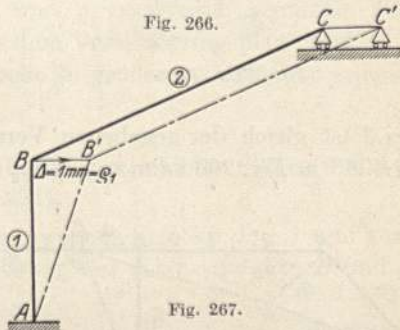


Fig. 267.

### Beispiel III: Rechteckrahmen mit Aufsatz (Fig. 268).

Wird am Rechteckrahmen mit biegungsfestem Balken (Stab 5) und Aufsatz (Stäbe 2 und 3) z. B. der Knotenpunkt  $D$  um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben, so gilt genau dasselbe wie für den Rahmen der Fig. 265. Der Stab 5 verschiebt sich nur in seiner eigenen Richtung, und die Stäbe 2 und 3 des Aufsatzes werden dabei parallel mitverschoben, so daß die Stäbe 2, 3 und 5 keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden. Die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 1 und 4 sind gleich groß, und zwar gleich der gegebenen Verschiebung  $\Delta = 1 \text{ mm}$ , auch wenn diese Stäbe ungleiche Länge haben. Anders verhält es sich, wenn die beiden Säulen nicht parallel zueinander sind (siehe Beispiel VI).

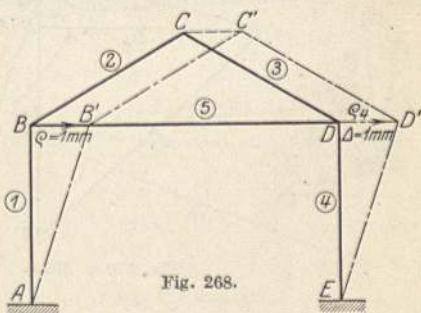


Fig. 268.

### Beispiel IV: Der einfache Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben (Fig. 269).

Der Knotenpunkt  $B$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben. Gesucht ist die wirkliche Verschiebung des Knotenpunktes  $A$  sowie die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe.

Die Lösung erfolgt genau nach dem am allgemeinen Tragwerk der Fig. 262 erläuterten Verfahren. Die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1 \text{ mm}$  tragen wir von Punkt  $B$  aus rechtwinklig zum Stab 3, um dessen Fußpunkt das Tragwerk sich dreht, auf. Darauf verschieben wir den Stab 1 parallel zu sich selbst in die Lage  $A''B'$  und ziehen durch den Endpunkt  $A''$  eine Normale zum Stab 1; der Schnittpunkt  $A'$  derselben mit der durch  $A$  gezogenen Normalen zum Stab 2 ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes  $A$  und die Strecke  $AA'$  daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_2$  der Endpunkte des Stabes 2. Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_1$  der Endpunkte des Stabes 1 ist gleich der

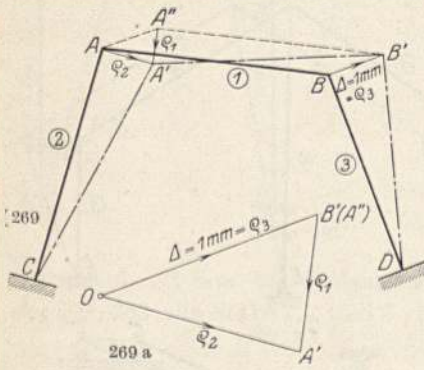


Fig. 269 u. 269 a.

Stabes 3 ist gleich der gegebenen Verschiebung  $\Delta = 1 \text{ mm}$ . Aus dem Dreieck  $AA'A''$  in Fig. 269 kann sowohl  $\varrho_2$  als auch  $\varrho_1$  analytisch ermittelt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus der Vergrößerung des Dreiecks  $AA'A''$  (Fig. 269 a).

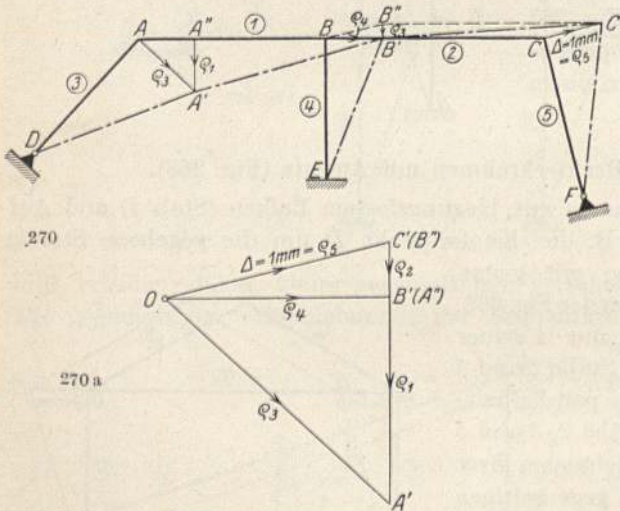


Fig. 270 u. 270 a.

**Beispiel V: Rahmen mit schiefen Endsäulen und wagrechttem Balken (Fig. 270).**

Der Knotenpunkt  $C$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben. Gesucht ist die wirkliche Verschiebung der Knotenpunkte  $A$  und  $B$  sowie die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe.

Die Lösung erfolgt wieder genau nach dem am allgemeinen Tragwerk der Fig. 262 erläuterten Verfahren. Die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1 \text{ mm}$  tragen wir von Punkt  $C$  aus rechtwinklig zum Stab 5, um dessen Fußpunkt das Tragwerk sich dreht, auf. Darauf schieben wir den Stab 2 parallel zu sich selbst in die Lage  $B''C'$  und ziehen durch den Endpunkt  $B''$  eine Normale zum Stab 2; der Schnittpunkt  $B'$  derselben mit der durch  $B$  gezogenen Normalen zum Stab 4, welche mit der Balkenrichtung zusammenfällt, ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes  $B$  und die Strecke  $BB'$  daher

die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_4$  der Endpunkte des Stabes 4; die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_2$  der Endpunkte des Stabes 2 ist gleich der Strecke  $B''B'$ . Um die neue Lage des Knotenpunktes  $A$  zu erhalten, verschieben wir den Stab 1 parallel zu sich selbst, d. h. in vorliegendem Fall in seiner eigenen Richtung, in die neue Lage  $B'A''$ , und ziehen durch den Endpunkt  $A''$  eine Normale zum Stab 1; der Schnittpunkt  $A'$  derselben mit der durch  $A$  gezogenen Normalen zum Stab 3 ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes  $A$  und die Strecke  $AA'$  daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_3$  der Endpunkte des Stabes 3. Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_1$  der Endpunkte des Stabes 1 ist gleich der Strecke  $A''A'$ , und diejenige des Stabes 5 ist gleich der gegebenen Verschiebung  $\Delta = 1$  mm. In Fig. 270 können aus dem Dreieck  $BB'B''$  die Strecken  $\varrho_4$  und  $\varrho_2$  und aus dem Dreieck  $AA'A''$  die Strecken  $\varrho_3$  und  $\varrho_1$  analytisch ermittelt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus dem Verschiebungsplan der Fig. 270a, in welchem die beiden genannten Dreiecke in größerem Maßstabe aneinander gereiht sind.

**Beispiel VI: Der einfache Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben und Aufsatz (Fig. 271).**

Der Knotenpunkt  $D$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm verschoben. Gesucht ist die wirkliche Verschiebung der Knotenpunkte  $B$  und  $C$  sowie die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen aller Stäbe.

Die Lösung erfolgt wieder genau nach dem am allgemeinen Tragwerk der Fig. 262 bzw. an der diesem vorhergehenden grundlegenden Aufgabe erläuterten Verfahren. Die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1$  mm tragen wir vom Stab  $D$  aus rechtwinklig zum Stab 4, um dessen Fußpunkt das Tragwerk sich dreht, auf. Darauf verschieben wir den Stab 5 parallel zu sich selbst in die Lage  $D'B''$  und ziehen durch den Endpunkt  $B''$  eine Normale zum Stab 5; der Schnittpunkt  $B'$  derselben mit der durch  $B$  gezogenen

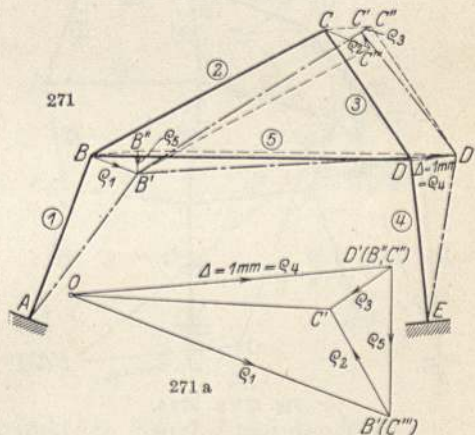


Fig. 271 u. 271 a.

Normalen zum Stab 1 ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes  $B$  und die Strecke  $BB'$  daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_1$  der Endpunkte des Stabes 1; die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_5$  des Stabes 5 ist gleich der Strecke  $B''B'$ . Um die neue Lage des Knotenpunktes  $C$  zu erhalten, müssen wir beachten, daß beide Fußpunkte ( $B$  und  $D$ ) der beiden in  $C$  verbundenen Stäbe 2 und 3 Verschiebungen erlitten haben, welche beide bekannt





Strecke  $C''C'$ , und diejenige der Endpunkte des Stabes 1 gleich der gegebenen Verschiebung  $\Delta = 1 \text{ mm}$ . Aus dem Dreieck  $CC'C''$  in Fig. 273 kann sowohl  $\varrho_3$  als auch  $\varrho_2$  analytisch ermittelt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus der Vergrößerung des Dreiecks  $CC'C''$  (Verschiebungsplan, Fig. 273a).

## 2. Der mehrstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben.

Am allgemeinen mehrstöckigen Tragwerk (Fig. 274) müssen wir zur Bestimmung der Zusatzmomente (R. II) laut dem vorhergehenden Kapitel

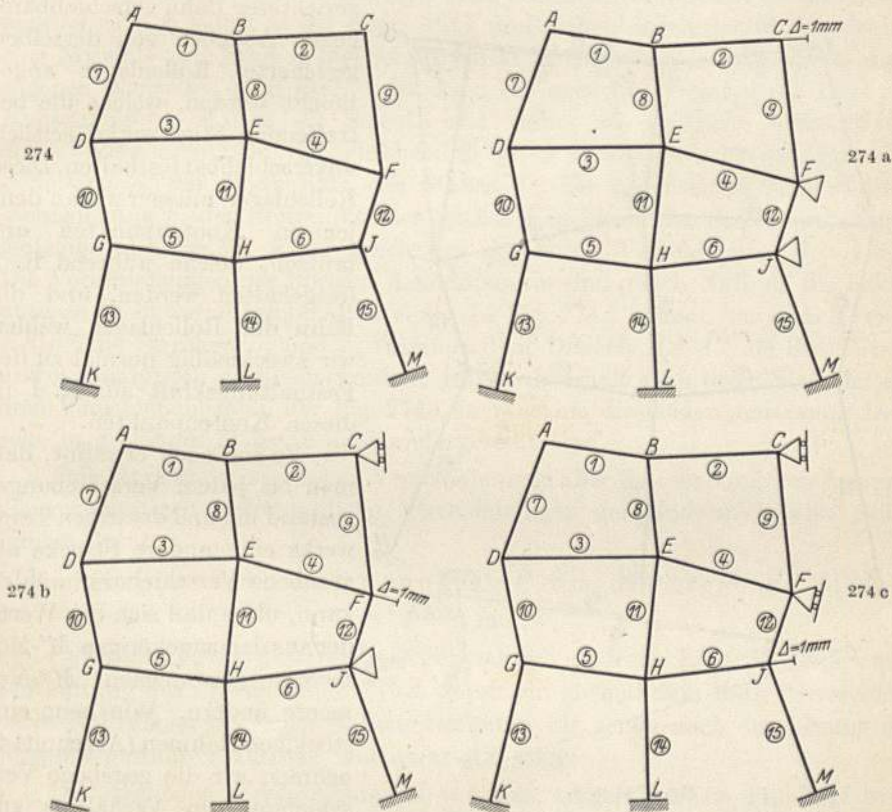


Fig. 274—274 c.

die während R. I festgehaltenen Knotenpunkte  $C$ ,  $F$  und  $J$  und damit die einzelnen „Stockwerkbalken“, welche im obersten Stockwerk durch die Stäbe 1 und 2, im mittleren durch die Stäbe 3 und 4 und im untersten durch die Stäbe 5 und 6 gebildet werden, nacheinander um eine beliebige Strecke, beispielsweise  $\Delta = 1 \text{ mm}$ , verschieben, wobei wir die „Stockwerkbalken“ unterhalb des verschobenen durch ein festes Lager und diejenigen oberhalb des verschobenen durch ein Rollenlager, beweglich normal zur Richtung der in R. I bestimmten Festhaltungskraft des betreffenden Stockwerkes, unverschiebbar festhalten; hierdurch entstehen die der Verschiebung der einzelnen Stockwerke entsprechenden Momente  $M'$ .

In den Fig. 274a, b und c wurden die 3 Verschiebungszustände für den allgemeinen Stockwerkrahmen der Fig. 274 dargestellt, welche man auch als Belastungszustände betrachten kann, wenn man von der die gegebene Verschiebung hervorrufenden Erzeugungskraft  $Z$  ausgeht.

Beim Stockwerkrahmen mit beliebig gerichteten Stäben können die Stockwerke oberhalb des verschobenen nicht vollständig festgehalten werden, da die gegebene Verschiebung sonst gegebenenfalls gar nicht möglich wäre (in einem Dreieck mit festen Fußpunkten kann der Scheitelpunkt nicht verschoben werden); aus diesem Grunde müssen an diesem Stockwerkbalken auf beliebig

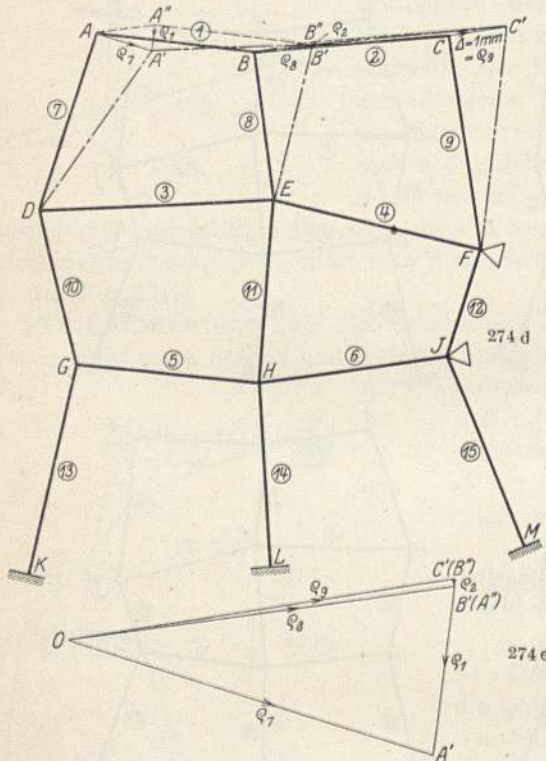


Fig. 274d u. e.

gerichteter Bahn verschiebbare, gegen Abheben von derselben gesicherte Rollenlager angebracht werden, welche die betreffenden Stockwerke seitlich unverschiebbar festhalten. Diese Rollenlager müssen wir an diejenigen Knotenpunkten anbringen, welche während R. I festgehalten werden, und die Bahn der Rollenlager wählen wir zweckmäßig normal zu der Festhaltungskraft aus R. I in diesen Knotenpunkten.

Es sei noch erwähnt, daß man bei jedem Verschiebungszustand ein und desselben Tragwerks eine andere Strecke als gegebene Verschiebung wählen kann, ohne daß sich die Werte der aus den zugehörigen  $M'$ -Momenten gewonnenen  $M^*$ -Momente ändern. Wie beim einstöckigen Rahmen (Abschnitt 1) nehmen wir die gegebene Verschiebung im Verhältnis zur

Länge aller Stäbe des Tragwerks verschwindend klein an, so daß wir an Stelle der Kreisbögen die Normalen zu den Stabrichtungen verwenden dürfen.

**Fall I:** Um die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte und daraus die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe infolge der

Verschiebung des Knotenpunktes  $C$  um die gegebene Strecke

$$\Delta = 1 \text{ mm}$$

unter Festhaltung der unteren Stockwerke, zu erhalten, verfahren wir genau wie beim einstöckigen Rahmen der Fig. 262, und zwar wie folgt:

Die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1 \text{ mm}$  tragen wir in Fig. 274d vom Punkt  $C$  aus rechtwinklig zum Stab 9, um dessen Fußpunkt dieser Stab sich

dreht (da Knotenpunkt  $F$  durch das gedachte Lager in demselben während dieses Verschiebungszustandes unverschiebbar festgehalten ist), auf. Darauf verschieben wir Stab 2 parallel zu sich selbst in die Lage  $C'B''$  und ziehen durch den Endpunkt  $B''$  eine Normale zum Stab 2; der Schnittpunkt  $B'$  derselben mit der durch  $B$  gezogenen Normalen zum Stab 8 ist dann die gesuchte neue Lage des Punktes  $B$  und die Strecke  $BB'$  daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_8$  der Endpunkte des Stabes 8. Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_2$  der Endpunkte des Stabes 2 ist gleich der Strecke  $B'B'$ . Um die neue Lage des Knotenpunktes  $A$  zu erhalten, verschieben wir den Stab 1 parallel zu sich selbst in die Lage  $B'A''$  und ziehen durch den Endpunkt  $A''$  eine Normale zum Stab 1; der Schnittpunkt  $A'$  derselben mit der durch  $A$  gezogenen Normalen zum Stab 7 ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes  $A$  und die Strecke  $AA'$  daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_7$  der Endpunkte des Stabes 7. Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_1$  der Endpunkte des Stabes 1 ist gleich der Strecke  $A'A'$  und diejenige des Stabes 9 ist gleich der gegebenen Verschiebung  $\Delta = 1$  mm. Die Verschiebungen der übrigen Knotenpunkte sind gleich Null, da die beiden unteren Stockwerke festgehalten sind. In Fig. 274d können aus dem Dreieck  $BB'B''$  die Strecken  $\varrho_8$  und  $\varrho_2$  und aus dem Dreieck  $AA'A''$  die Strecken  $\varrho_7$  und  $\varrho_1$  analytisch ermittelt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus dem Verschiebungsplan der Fig. 274e, in welchem die beiden genannten Dreiecke in größerem Maßstab aneinandergereiht sind.

**Fall II:** Um die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte und daraus die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe infolge der

Verschiebung des Knotenpunktes  $F$  um die gegebene Strecke

$$\Delta = 1 \text{ mm}$$

unter Festhaltung des unteren Stockwerks durch ein festes Lager in  $J$  und unter Festhaltung des oberen Stockwerkes durch ein normal zum Stab 2 verschiebbares Rollenlager in  $C$  zu erhalten, verfahren wir genau nach der Lösung der eingangs gestellten Aufgabe, und zwar wie folgt:

Die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1$  mm tragen wir in Fig. 274f vom Punkt  $F$  aus rechtwinklig zum Stab 12 auf. Darauf verschieben wir Stab 4 parallel zu sich selbst in die Lage  $E''F'$  und ziehen durch den Endpunkt  $E''$  eine Normale zum Stab 4; der Schnittpunkt derselben mit der durch  $E$  gezogenen Normalen zum Stab 11 ist dann die gesuchte neue Lage des Punktes  $E$  und die Strecke  $EE'$  daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_{11}$  der Endpunkte des Stabes 11. Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_4$  der Endpunkte des Stabes 4 ist gleich der Strecke  $E''E'$ . Um die neue Lage des Knotenpunktes  $D$  zu erhalten, verschieben wir den Stab 3 parallel zu sich selbst in die Lage  $E'D''$  und ziehen durch den Endpunkt  $D''$  eine Normale zum Stab 3; der Schnittpunkt  $D'$  derselben mit der durch  $D$  gezogenen Normalen zum Stab 10 ist dann die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes  $D$  und die Strecke  $DD'$  da-

her die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_{10}$  der Endpunkte des Stabes 10. Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes 3 ist gleich der Strecke  $D'D'$  und diejenige des Stabes 12 ist gleich der gegebenen Verschiebung  $\Delta = 1 \text{ mm}$ .

Nun können wir auf Grund der bekannten Verschiebungen der Knotenpunkte  $D, E$  und  $F$  diejenigen der Knotenpunkte  $A, B$  und  $C$  bestimmen; da

wir in  $C$  ein Rollenlager angebracht haben, welches nur eine Verschiebung von  $C$  normal zur Stabrichtung 2 zuläßt, so können wir von  $F'$  ausgehend zunächst die neue Lage des Punktes  $C$  konstruieren und dann nach links fortschreiten. Diese Bestimmung gestaltet sich wie folgt:

Wir verschieben den Stab 9 parallel zu sich selbst in die Lage  $F'C''$ . Darauf ziehen wir durch den Endpunkt  $C''$  eine Normale zum Stab 9 und durch den Knotenpunkt  $C$  eine Parallele zur Bahnrichtung des Rollenlagers in  $C$  (d. h. eine Normale zum Stab 2); der Schnittpunkt  $C'$  dieser beiden Normalen ist dann die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes  $C$  und die Strecke  $CC'$  daher die wirkliche Verschiebung des Knotenpunktes  $C$ . Ferner ist die Strecke  $C''C' = \varrho_9$  die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes 9. Von der neuen Lage  $C'$  des Knotenpunktes  $C$

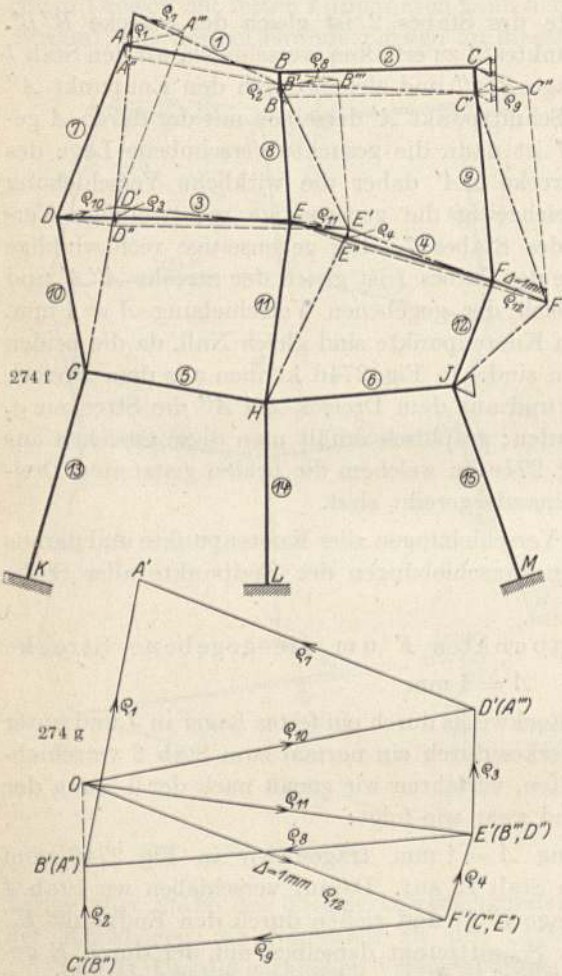


Fig. 274 f u. g.

aus können wir nun auch die Verschiebungen der beiden Knotenpunkte  $B$  und  $A$ , die auf demselben „Stockwerkbalken“ liegen, in gleicher Weise wie folgt bestimmen:

Wir verschieben den Stab 2 parallel zu sich selbst in die Lage  $C'B''$  und den Stab 8 parallel zu sich selbst in die Lage  $E'B'''$ . Darauf ziehen wir durch den Endpunkt  $B''$  eine Normale zum Stab 2 und durch den Endpunkt  $B'''$  eine Normale zum Stab 8; der Schnittpunkt  $B'$  dieser beiden Normalen ist dann

die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes  $B$  und die Strecke  $BB'$  daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes. Ferner ist die Strecke  $B''B' = \varrho_2$  die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes 2 und die Strecke  $B'''B'$  die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_8$  der Endpunkte des Stabes 8. Nun verschieben wir noch den Stab 1 parallel zu sich selbst in die Lage  $B'A''$  und den Stab 7 parallel zu sich selbst in die Lage  $D'A'''$ . Darauf ziehen wir durch den Endpunkt  $A''$  eine Normale zum Stab 1 und durch den Endpunkt  $A'''$  eine Normale zum Stab 7; der Schnittpunkt  $A'$  dieser beiden Normalen ist dann die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes  $A$  und die Strecke  $AA'$  daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes. Ferner ist die Strecke  $A''A' = \varrho_1$  die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes 1 und die Strecke  $A'''A'$  die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_7$  der Endpunkte des Stabes 7.

Die Verschiebungen der Knotenpunkte des untersten „Stockwerkbalkens“ sind gleich Null, da derselbe gemäß Voraussetzung unverschiebbar festgehalten ist.

Aus den in Fig. 274f an jedem verschobenen Knotenpunkt ersichtlichen Dreiecken kann die betreffende Strecke  $\varrho$  analytisch bestimmt werden; graphisch erhält man diese Strecke aus dem Verschiebungsplan der Fig. 274g, welcher nichts anderes ist als eine Aneinanderreihung der genannten Dreiecke aus Fig. 274f in größerem Maßstabe.

**Fall III:** Um die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte und daraus die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe infolge der

Verschiebung des Knotenpunktes  $J$  um die gegebene Strecke  
 $A = 1 \text{ mm}$

unter Festhaltung der beiden oberen Stockwerke durch Rollenlager, zu erhalten, verfahren wir wieder genau nach der Lösung der eingangs gestellten Aufgabe, und analog wie beim vorhergehenden Fall:

Die gegebene Verschiebung  $A = 1 \text{ mm}$  tragen wir in Fig. 274h vom Punkt  $J$  aus rechtwinklig auf und verfahren zur Bestimmung der Verschiebungen der Knotenpunkte  $H$  und  $G$  in der gleichen Weise wie in Fig. 274d bei Bestimmung der Verschiebungen der Knotenpunkte  $B$  und  $A$  infolge gegebener Verschiebung des Punktes  $C$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } GG' &= \varrho_{13} \\ \text{„ „ } HH' &= \varrho_{11} \\ \text{„ „ } H''H' &= \varrho_6 \\ \text{„ „ } JJ' &= \varrho_{15} = 1 \text{ mm} \\ \text{„ „ } G''G' &= \varrho_5. \end{aligned}$$

Nun können wir in Fig. 274h auf Grund der bekannten Verschiebungen der Knotenpunkte  $G$ ,  $H$  und  $J$  diejenigen der Knotenpunkte  $F$ ,  $E$  und  $D$  bestimmen; da der Knotenpunkt  $F$  in Richtung des Stabes 4 unverschiebbar ist und sich nur senkrecht zu demselben verschieben kann, so können wir von  $J'$  aus  $F'$  konstruieren, und dann nach links weiterschreiten. Die Verschiebungen der Knotenpunkte  $D$ ,  $E$  und  $F$  und die davon herrührenden gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe des be-

treffenden Stockwerks erhalten wir in der gleichen Weise wie diejenigen der Knotenpunkte  $C$ ,  $B$  und  $A$  in Fig. 274f infolge gegebener Verschiebung des Punktes  $F$ . Dann ist:

- die Strecke  $D'''D' = \varrho_{10}$
- „ „  $E'''E' = \varrho_{11}$
- „ „  $F'''F' = \varrho_{12}$
- „ „  $D''D' = \varrho_3$
- „ „  $E''E' = \varrho_4$ .

Die Verschiebungen der Knotenpunkte  $C$ ,  $B$  und  $A$  des obersten Stockwerks können wir nun in der gleichen Weise wie diejenigen der Knotenpunkte  $F$ ,  $E$  und  $D$  in Fig. 274h auf Grund der nun bekannten Verschiebungen der letzteren bestimmen, da der Knotenpunkt  $C$  in Richtung des Stabes 2 auch unverschiebbar ist und sich nur senkrecht zu demselben verschieben kann, so daß wir von  $F'$  aus  $C'$  konstruieren und dann nach links fortschreiten können. Als gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe des obersten Stockwerkes erhalten wir:

- die Strecke  $A'''A' = \varrho_7$
- „ „  $B'''B' = \varrho_8$
- „ „  $C'''C' = \varrho_9$
- „ „  $A''A' = \varrho_1$
- „ „  $B''B' = \varrho_2$ .

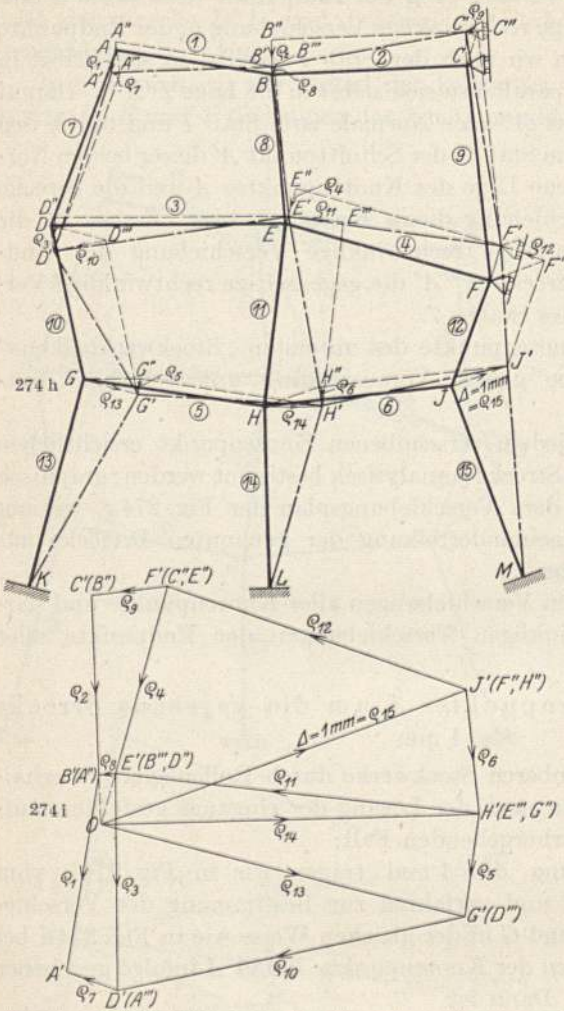


Fig. 274 h u. 274 i.

Aus den in Fig. 274h an jedem verschobenen Knotenpunkt ersichtlichen Dreiecken kann die betreffende Strecke  $\varrho$  analytisch bestimmt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus dem Verschiebungsplan der Fig. 274i, welcher nichts anderes ist als eine Aneinanderreihung der genannten Dreiecke aus Fig. 274h in größerem Maßstab.

Die in den Fig. 274d bis i an den Strecken  $\varrho$  eingetragenen Pfeilrichtungen beziehen sich auf eine Regel betreffend des Drehsinns bzw. Vorzeichens der davon herrührenden Momente an beiden Stabenden, deren Berechnung im folgenden Kapitel gezeigt wird.

In den Fig. 274d, f und h haben wir der besseren Übersicht halber noch strichpunktiert die Stäbe in ihrer verschobenen Lage eingetragen, wobei wir

jedoch deren Formänderungen herrührend von den infolge der Knotenpunktverschiebungen in denselben auftretenden Momenten nicht dargestellt haben.

Das Verfahren wird im folgenden noch an einigen einfacheren Beispielen gezeigt.

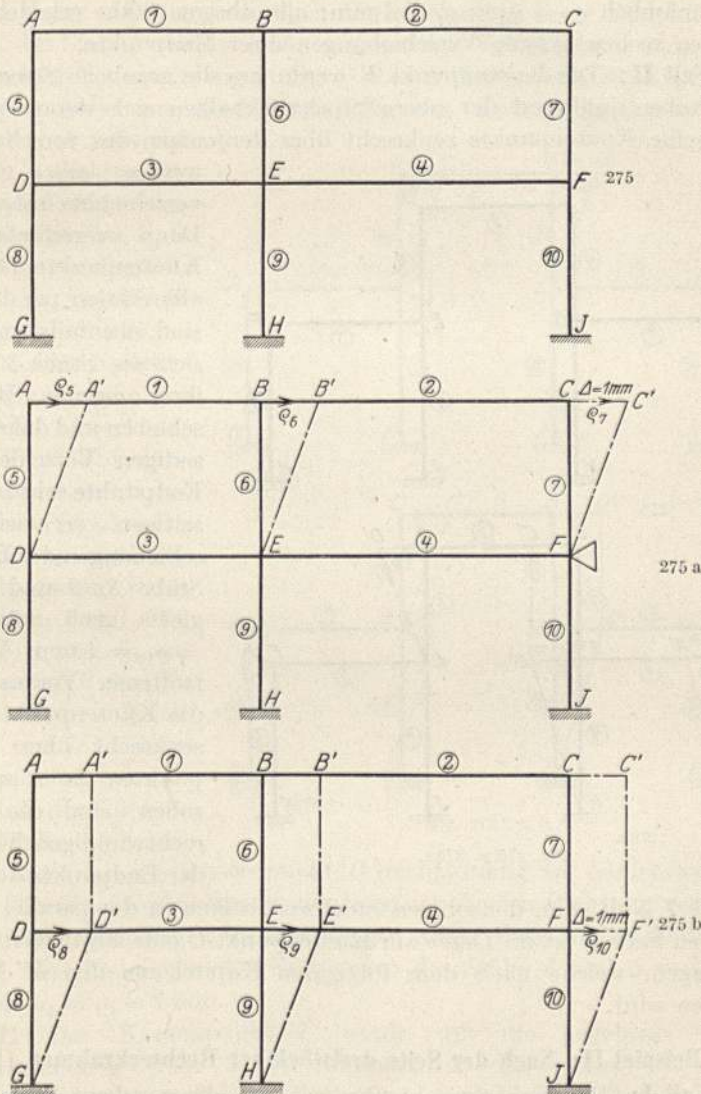


Fig. 275—275 b.

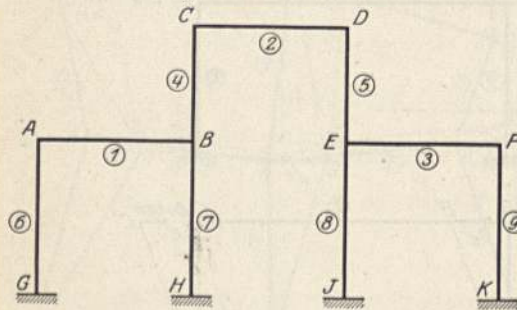
### Beispiele.

**Beispiel I:** Der zweistöckige Rechteckrahmen. (Fig. 275).

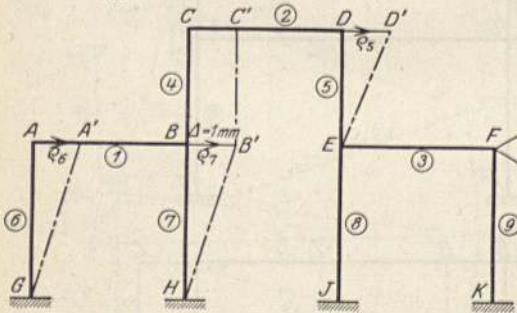
**Fall I:** Der Knotenpunkt C (Fig. 275a) werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben, während der untere Stockwerkbalken unverschiebbar festgehalten ist. Dann verschieben sich, weil alle Säulen parallel zueinander sind, die Knotenpunkte A und B ebenfalls um 1 mm in derselben Richtung

wie Knotenpunkt  $C$  (rechtwinklig zur Säulenrichtung), so daß sich die Stäbe 1 und 2 nur in ihrer eigenen Richtung verschieben und daher keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden. Die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 5, 6 und 7 sind alle gleich groß, nämlich  $\varrho_5 = \varrho_6 = \varrho_7 = 1$  mm; alle übrigen Stäbe erleiden keine gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen ihrer Endpunkte.

**Fall II:** Der Knotenpunkt  $F$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm verschoben, während der obere Stockwerkbalken sich derart mitverschiebe, daß seine Knotenpunkte senkrecht über denjenigen des verschobenen Stockwerkes bleiben, und dann unverschiebbar festgehalten werde.



276



276 a

Fig. 276 u. 276 a.

Dann verschieben sich die Knotenpunkte  $D$  und  $E$ , weil alle Säulen parallel zueinander sind, ebenfalls um 1 mm, so daß sich die Stäbe 3 und 4 nur in ihrer eigenen Richtung verschieben und daher keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden. Die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 8, 9 und 10 sind alle gleich groß, nämlich  $\varrho_8 = \varrho_9 = \varrho_{10} = 1$  mm. Wegen der getroffenen Voraussetzung, daß die Knotenpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  senkrecht über den Knotenpunkten  $D$ ,  $E$  und  $F$  bleiben sollen, sind die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 1, 2, 5,

6 und 7 Null. Um den oberen Stockwerkbalken in der parallel verschobenen Lage zu halten, ist im Lager am Knotenpunkt  $C$  eine Festhaltungskraft  $D$  anzubringen, welche nach dem folgenden Kapitel aus den  $M'$ -Momenten gewonnen wird.

**Beispiel II: Nach der Seite dreistöckiger Rechteckrahmen (Fig. 276).**

**Fall I:** Der Knotenpunkt  $B$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm verschoben (Fig. 276a), während der danebenliegende Stockwerkbalken 2 parallel mitverschoben und der wiederum weiter rechts daneben liegende Stockwerkbalken 3 unverschiebbar festgehalten sei. Wie schon im vorhergehenden Kapitel erwähnt, könnte man auch den Stockwerkbalken 2 während der Verschiebung des Knotenpunktes  $A$  unverschiebbar festhalten, es würde aber dann auch der Stab 4 gegenseitige Verschiebungen seiner Endpunkte erleiden, wodurch auch an diesem Stab Momente entstehen würden, die weiterzuleiten wären.



Infolge der Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  verschieben sich die Knotenpunkte  $A$ ,  $C$  und  $D$ , weil alle Ständer parallel zueinander sind, ebenfalls um 1 mm in derselben Richtung wie Knotenpunkt  $B$  (rechtwinklig zur Säulenrichtung), so daß sich die Balken 1 und 2 nur in ihrer eigenen Richtung verschieben und daher keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden; auch der Stab 4 erleidet keine gegenseitige Verschiebung seiner Endpunkte, da ja laut Voraussetzung Punkt  $C$  über  $B$  bleiben soll, was aber natürlich nur durch Anbringen einer Kraft, der sog. Festhaltungskraft  $D$  am Stockwerkbalken 2, erreicht werden kann. Die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Säulen 6, 7 und 5 sind alle gleich groß, nämlich gleich der gegebenen Verschiebung  $\Delta = 1$  mm.

**Fall II:** Der Knotenpunkt  $D$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm verschoben (Fig. 276 b), während die links und rechts danebenliegenden Stockwerkbalken 1 und 3 unverschiebbar festgehalten seien. Dann verschiebt sich, weil die beiden Stäbe 4 und 5, um deren Fußpunkte ( $B$  und  $E$ , welche festgehalten sind) sich die Punkte  $C$  und  $D$  bei ihrer Verschiebung drehen, parallel zueinander sind, der Knotenpunkt  $C$  ebenfalls um 1 mm

in derselben Richtung wie Knotenpunkt  $D$  (rechtwinklig zur Säulenrichtung), so daß sich der Stockwerkbalken 2 nur in seiner eigenen Richtung verschiebt und daher keine gegenseitigen Verschiebungen seiner Endpunkte erleidet. Die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 4 und 5 sind gleich groß, nämlich  $\varrho_4 = \varrho_5 = 1$  mm.

**Fall III:** Der Knotenpunkt  $F$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm verschoben (Fig. 276 c), während der danebenliegende Stockwerkbalken 2 parallel mitverschoben wird und der wiederum weiter links daneben liegende Stockwerkbalken 1 unverschiebbar festgehalten ist. Dann verschieben sich die Knotenpunkte  $E$ ,  $C$  und  $D$  ebenfalls um 1 mm in gleicher Richtung wie  $F$ , so daß die Balken 2 und 3 keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden; auch der Stab 5 erleidet keine gegenseitigen Verschiebungen seiner Endpunkte, da ja laut Voraussetzung Punkt  $D$  über  $E$  bleiben soll. Die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Säulen 4, 8 und 9 sind alle gleich groß, nämlich  $\varrho_4 = \varrho_8 = \varrho_9 = 1$  mm.

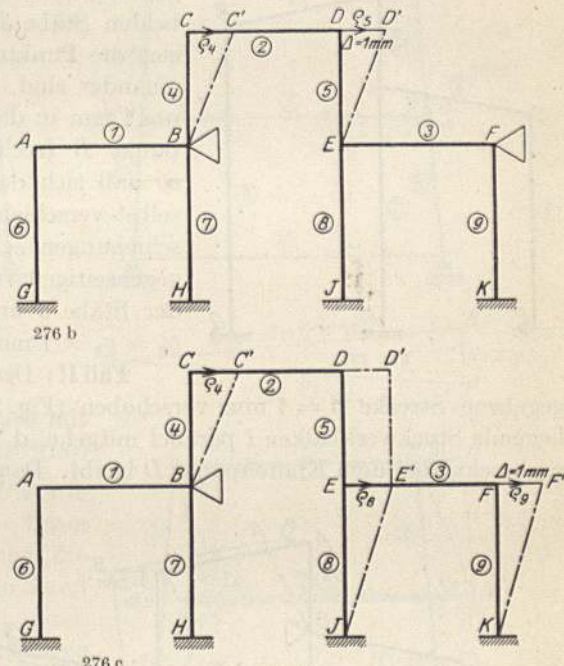


Fig. 276 b u. c.

Das Verfahren bleibt genau dasselbe, wenn die Stockwerkbalken 1 und 3 anstatt in gleicher, in verschiedener Höhe liegen.

**Beispiel III: Nach der Seite zweistöckiger Rahmen mit senkrechten Säulen und geneigten Balken (Fig. 277).**

**Fall I:** Der Knotenpunkt  $B$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm verschoben (Fig. 277a), während der danebenliegende Balken 2 des (nach der Seite) zweiten Stockwerkes unverschiebbar festgehalten sei. Dann verschiebt sich, weil die beiden Stäbe 3 und 6, um deren Fußpunkte sich die Punkte  $A$  und  $B$  drehen, parallel zueinander sind, der Knotenpunkt  $A$  ebenfalls um 1 mm in derselben Richtung wie Knotenpunkt  $B$  (rechtwinklig zur Säulenrichtung), so daß sich der Stab 1 nur parallel zu sich selbst verschiebt und keine gegenseitigen Verschiebungen seiner Endpunkte erleidet. Die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 3 und 6 sind gleich groß, nämlich  $\varrho_3 = \varrho_6 = 1$  mm.

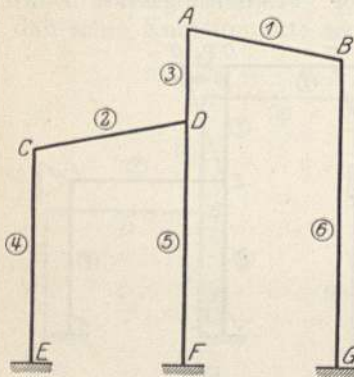


Fig. 277.

**Fall II:** Der Knotenpunkt  $D$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm verschoben (Fig. 277b), während der danebenliegende Stockwerkbalken 1 parallel mitgehe, d. h. so, daß der Knotenpunkt  $A$  senkrecht über dem Knotenpunkt  $D$  bleibt. Dann verschieben sich die Knoten-

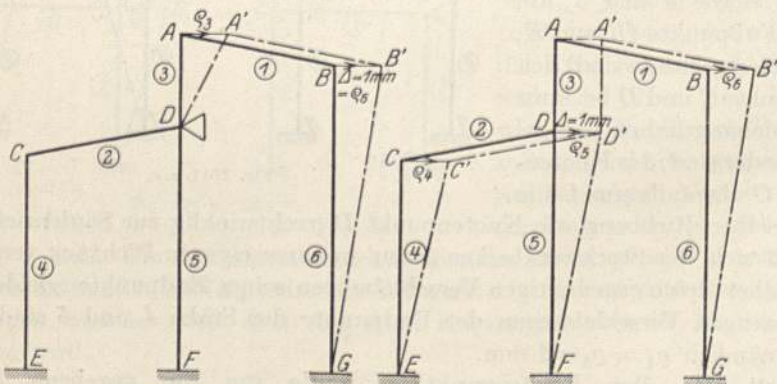
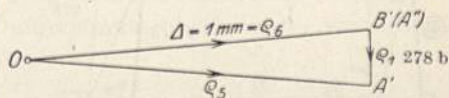
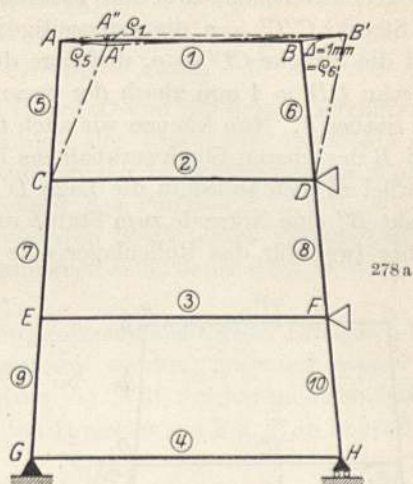
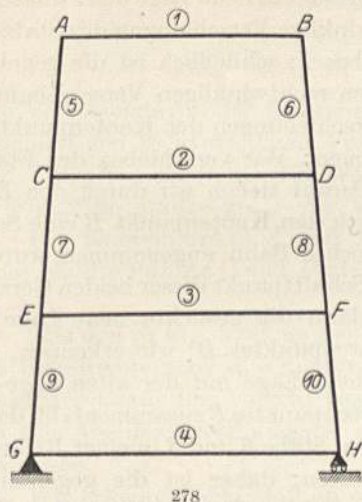


Fig. 277 a

Fig. 277 b

punkte  $C$ ,  $A$  und  $B$ , weil alle Säulen parallel zueinander sind, ebenfalls um 1 mm in derselben Richtung wie Knotenpunkt  $D$  (rechtwinklig zur Säulenrichtung), so daß sich die Balken 2 und 1 nur parallel zu sich selbst verschieben und keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden; auch der Stab 3 erleidet keine gegenseitige Verschiebung seiner Endpunkte, da ja laut Voraussetzung Punkt  $A$  über  $D$  bleiben soll. Die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Säulen 4, 5 und 6 sind alle gleich groß, nämlich der gegebenen Verschiebung  $\Delta = 1$  mm. Dasselbe gilt für den Fall,

daß an Stelle des Knotenpunktes  $D$  der Knotenpunkt  $C$  um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben wird.



**Beispiel IV:** Dreistöckiger Rahmen mit schief durchlaufenden Säulen (Fig. 278).

**Fall I:** Der Knotenpunkt  $B$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben (Fig. 278a), während die beiden unteren Stockwerkbalken 2 und 3 unverschiebbar festgehalten sind. Dann bestimmen sich die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe wie in Beispiel IV des einstöckigen Rahmens; Fig. 278b zeigt den zugehörigen Verschiebungsplan.

**Fall II:** Der Knotenpunkt  $D$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben (Fig. 278c), während der untere Stockwerkbalken 3 unverschiebbar festgehalten und der obere Stockwerkbalken 1 durch ein Rollenlager mit senkrechter Bahn in  $B$  horizontal unverschiebbar festgehalten wird.

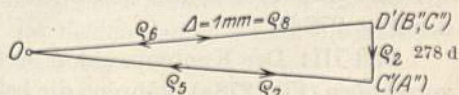
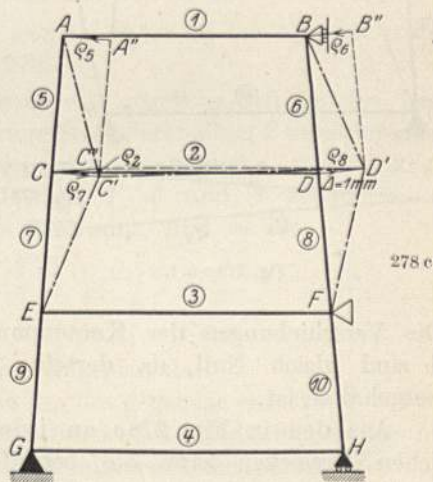


Fig. 278—278 d.

Die Lösung erfolgt nach dem am allgemeinen mehrstöckigen Tragwerk der Fig. 274 erläuterten Verfahren: Zunächst bestimmen wir die Verschiebungen des Knotenpunktes  $C$ , indem wir in bekannter Weise die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1 \text{ mm}$  von  $D$  aus rechtwinklig zum Stab 8 auftragen, den Stab 2

parallel zu sich selbst in die Lage  $C''D'$  verschieben und durch den Endpunkt  $C''$  eine Normale zum Stab 2 ziehen; der Schnittpunkt  $C'$  derselben mit der durch  $C$  gezogenen Normalen zum Stab 7 ist dann die gesuchte neue Lage des Punktes  $C$ , die Strecke  $C''C' = \varrho_2$  die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung des Stabes 2, und die Strecke  $CC' = \varrho_7$  diejenige des Stabes 7; schließlich ist die gegebene Strecke  $DD' = 1$  mm gleich der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung  $\varrho_8$  des Stabes 8. Nun können wir auch die Verschiebungen der Knotenpunkte  $A$  und  $B$  des oberen Stockwerkbalkens bestimmen: Wir verschieben den Stab 6 parallel zu sich selbst in die Lage  $D'B''$ . Darauf ziehen wir durch den Endpunkt  $B''$  eine Normale zum Stab 6 und durch den Knotenpunkt  $B$  eine Senkrechte (weil für das Rollenlager eine senkrechte Bahn angenommen wurde);

der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist dann die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes  $B$ ; wir erkennen, daß die neue Lage mit der alten Lage des Knotenpunktes  $B$  zusammenfällt, da die beiden Stäbe 6 und 8 in einer Richtung verlaufen; daher ist die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes 6 gleich der gegebenen Verschiebung  $\Delta = 1$  mm. Vom Punkt  $B = B'$  ausgehend, können wir nun auch die Verschiebung des auf demselben Stockwerkbalken liegenden Knotenpunktes  $A$  in gleicher Weise bestimmen; es fällt auch  $A'$  mit  $A$  zusammen, so daß der Stab 1 in seiner ursprünglichen Lage verblieben ist; es ist dann:

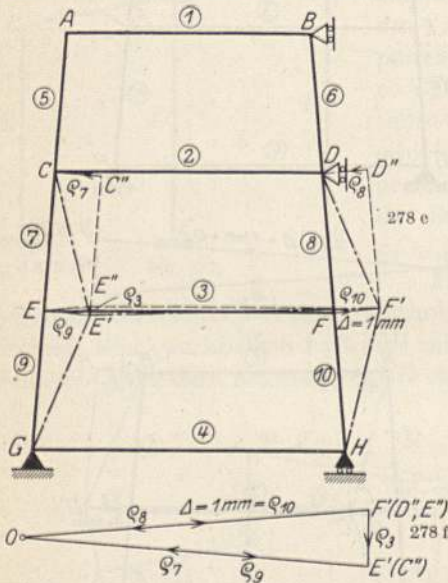


Fig. 278 e u. f.

- die Strecke  $\varrho_1 = 0$ ,
- „ „  $\varrho_6 = \varrho_8 = 1$  mm,
- „ „  $\varrho_5 = \varrho_7$ .

Die Verschiebungen der Knotenpunkte  $E$  und  $F$  des Stockwerkbalkens 3 sind gleich Null, da derselbe gemäß Voraussetzung unverschiebbar festgehalten ist.

Aus den in Fig. 278c an jedem verschobenen Knotenpunkt ersichtlichen Dreiecken kann die betreffende Strecke  $\varrho$  analytisch bestimmt werden; graphisch erhält man diese Strecke aus dem Verschiebungsplan der Fig. 278d.

**Fall III:** Der Knotenpunkt  $F$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm verschoben (Fig. 278e), während die beiden darüberliegenden Stockwerkbalken 1 und 2 durch auf senkrechter Bahn bewegliche Rollenlager in  $B$  und  $D$  horizontal unverschiebbar festgehalten werden. Die Lösung erfolgt nach dem am allgemeinen mehrstöckigen Tragwerk der Fig. 274 erläuterten Verfahren.

Die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1$  mm tragen wir in Fig. 278e vom Punkt  $F$  aus rechtwinklig auf und verfahren zur Bestimmung der Verschiebungen des Knotenpunktes  $E$  in der gleichen Weise wie in Fig. 278c bei Bestimmung der

Verschiebungen des Knotenpunktes  $C$  infolge gegebener Verschiebung des Punktes  $D$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } E''E' &= \varrho_3, \\ \text{,, ,, } EE' &= \varrho_9, \\ \text{,, ,, } FF' &= \varrho_{10} = 1 \text{ mm} \end{aligned}$$

Die Verschiebungen der Knotenpunkte  $C$  und  $D$  und die davon herrührenden gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 2, 7 und 8 erhalten wir in gleicher Weise wie diejenigen der Knotenpunkte  $A$  und  $B$  in Fig. 278c infolge gegebener Verschiebung des Punktes  $D$ .

Die Knotenpunkte  $A$  und  $B$  des obersten Stockwerkes verschieben sich nicht, da die Punkte  $C$  und  $D$  in Ruhe geblieben sind; daher ist  $\varrho_5 = 0$ ,  $\varrho_6 = 0$ ,  $\varrho_1 = 0$ .

Aus den in Fig. 278e an den Knotenpunkten ersichtlichen Dreiecken kann die betreffende Strecke  $\varrho$  analytisch bestimmt werden; graphisch erhält man diese Strecke aus dem Verschiebungsplan der Fig. 278f, welcher nichts anderes ist als eine Aneinanderreihung der genannten Dreiecke aus Fig. 278e in größerem Maßstabe.

Wir erkennen also, daß an einem Tragwerk mit Säulen, die von unten bis oben dieselbe Richtung haben, alle Knotenpunkte oberhalb des verschobenen Stockwerkbalkens in Ruhe bleiben.

#### Beispiel V: Der zweistöckige Joehrahmen (Fig. 279 und 280).

a) Säulen im unteren Stockwerk senkrecht und im oberen schief (Fig. 279).

**Fall I:** Der Knotenpunkt  $B$  werde um die gegebene Strecke  $A = 1$  mm verschoben (Fig. 279a), während der untere Stockwerkbalken 2 unverschiebbar festgehalten ist. In Fig. 279a wurden die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 1, 3 und 4 genau wie in Beispiel IV des einstöckigen Rahmens bestimmt, und es ist

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } A''A' &= \varrho_1, \\ \text{,, ,, } AA' &= \varrho_3, \\ \text{,, ,, } BB' &= \varrho_4 = 1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Fig. 279b stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

**Fall II:** Der Knotenpunkt  $D$  werde um die gegebene Strecke  $A = 1$  mm verschoben (Fig. 279c), während das obere Stockwerk (da die Säulen darunter zueinander parallel sind) zunächst parallel mitverschoben werden kann und dann erst durch ein Lager im Knotenpunkt  $B$  unverschiebbar festgehalten wird. Dann erleiden am ganzen Rahmen nur die beiden Säulen 5 und 6 gegenseitige Verschiebungen ihrer Endpunkte, und zwar ist

$$\varrho_5 = \varrho_6 = 1 \text{ mm.}$$

Anders verhält es sich, wenn

b) Säulen im oberen Stockwerk senkrecht und im unteren Stockwerk schief (Fig. 280).

**Fall I:** Der Knotenpunkt  $B$  werde um die gegebene Strecke  $A = 1$  mm verschoben (Fig. 280a), während der untere Stockwerkbalken 2 unverschiebbar

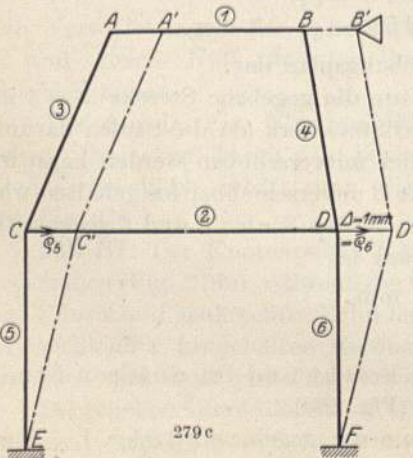
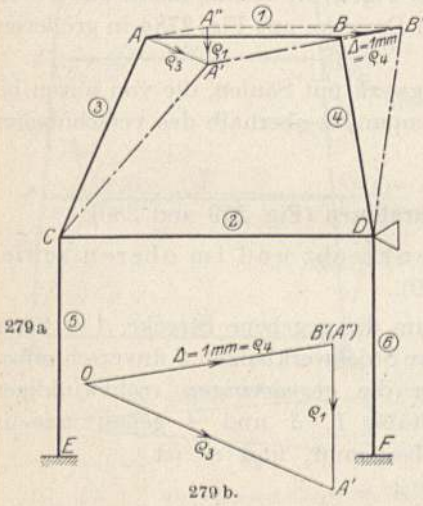
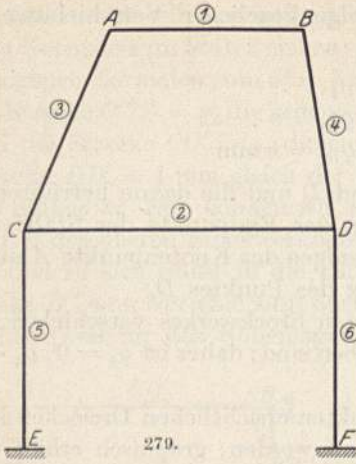


Fig. 279—279 c.

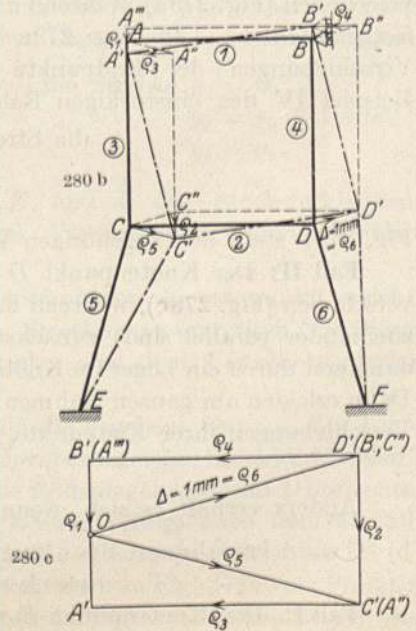
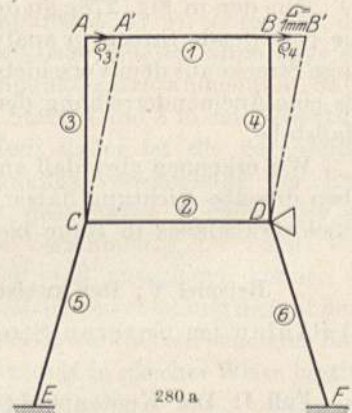
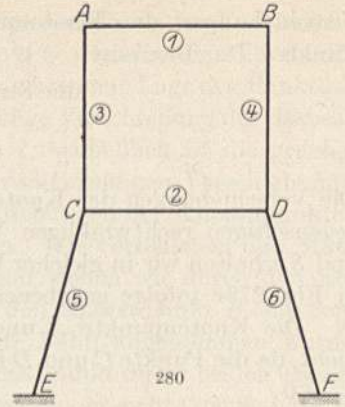


Fig. 280—280 c.

festgehalten wird. Dann verschiebt sich der Knotenpunkt  $A$  wie am einstöckigen Rechteckrahmen ebenfalls um 1 mm, d. h.

$$q_3 = q_4 = 1 \text{ mm.}$$

**Fall II:** Der Knotenpunkt  $D$  werde um die gegebene Strecke  $A = 1$  mm verschoben (Fig. 280 b), während das obere Stockwerk durch ein auf senkrechter Bahn laufendes Rollenlager in  $B$  horizontal unverschiebbar festgehalten wird. Die Verschiebung des Knotenpunktes  $C$  erhalten wir in bekannter Weise (genau wie diejenige des Punktes  $A$  im Beispiel IV des Abschnittes 1), und es ist

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } C''C' &= q_2, \\ \text{,, ,, } CC' &= q_5, \\ \text{,, ,, } DD' &= q_6 = 1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Auf Grund der gegebenen Verschiebung des Punktes  $D$  und der nunmehr bekannten Verschiebung des Punktes  $C$  erhalten wir in gleicher Weise wie in Fig. 274 h des allgemeinen mehrstöckigen Rahmens die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Stäbe 1, 3 und 4 des oberen Stockwerkes; es ist

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } A''A' &= q_3, \\ \text{,, ,, } A'''A' &= q_1, \\ \text{,, ,, } B''B' &= q_4. \end{aligned}$$

Es erleiden also alle Stäbe gegenseitige Verschiebungen ihrer Endpunkte. Die Strecken  $q$  können aus Fig. 280 b analytisch bestimmt oder aus dem zugehörigen Verschiebungsplan der Fig. 280 c graphisch erhalten werden.

### Beispiel VI: Hallenrahmen mit einer Öffnung und zwei Dachstäben (Fig. 281).

**Fall I:** Der Knotenpunkt  $B$  werde um die gegebene Strecke  $A = 1$  mm verschoben (Fig. 281 a), während der Knotenpunkt  $D$  unverschiebbar festgehalten wird.

Wir tragen die gegebene Verschiebung, wie immer, rechtwinklig zum Stab 1 auf und bestimmen in Fig. 281 a die Verschiebung des Knotenpunktes  $C$  in bekannter Weise, genau nach dem Beispiel VII des vorhergehenden Abschnittes; dann ist:

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } C''C' &= q_2, \\ \text{,, ,, } CC' &= q_3, \\ \text{,, ,, } BB' &= q_1 = 1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Da Knotenpunkt  $D$  festgehalten, ist  $q_4 = 0$ , Fig. 281 b stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

**Fall II:** Der Knotenpunkt  $D$  werde um die gegebene Strecke  $A = 1$  mm verschoben (Fig. 281 c), während der Knotenpunkt  $B$  unverschiebbar festgehalten wird.

Die Verschiebung des Knotenpunktes  $C$  bestimmt sich analog wie in Fig. 281 a, der Knotenpunkt rückt nur nach unten anstatt nach oben; es ist in Fig. 281 c:

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } C'C &= q_2, \\ \text{,, ,, } C''C' &= q_3, \\ \text{,, ,, } DD' &= q_4 = 1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

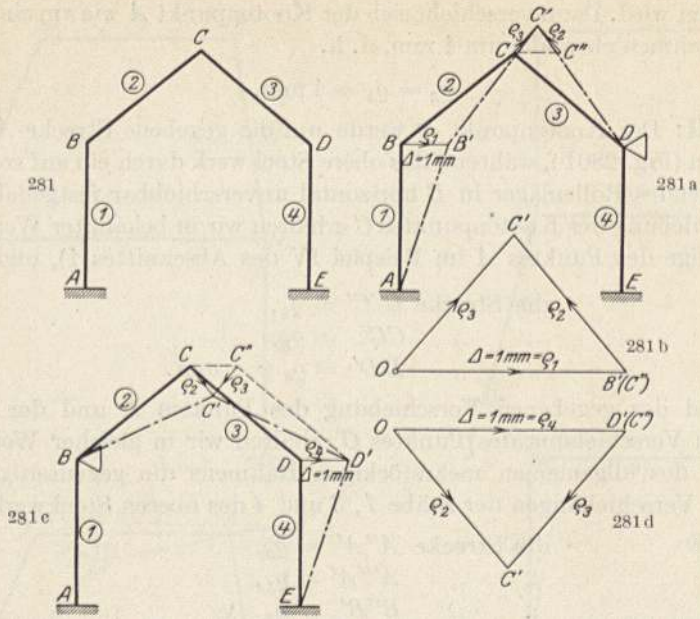


Fig. 281—281 d.

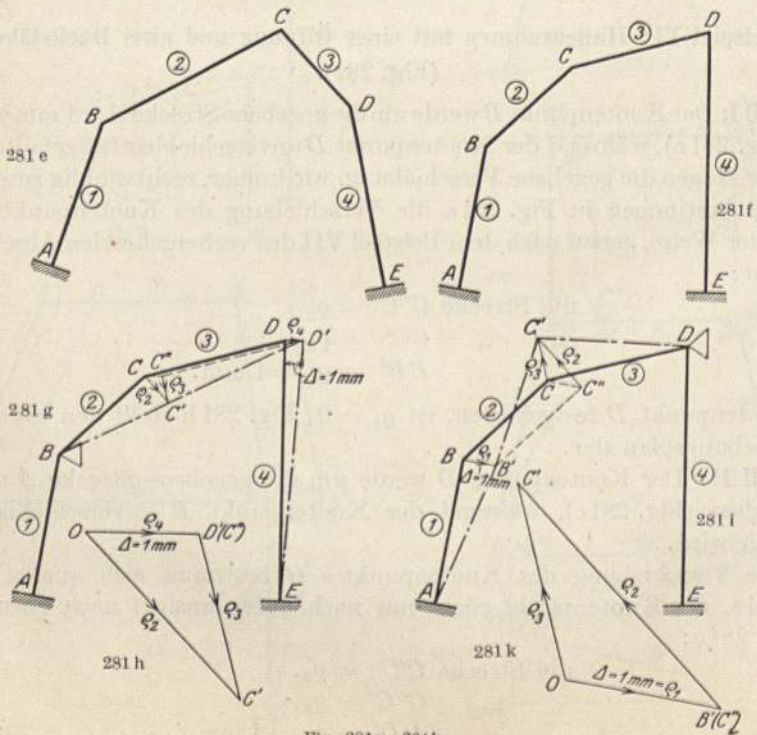


Fig. 281e—281k.



Da Knotenpunkt  $B$  festgehalten, ist  $\varrho_1 = 0$ . Fig. 281d stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

Die Bestimmung der gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe bleibt genau dieselbe, wenn die Stäbe des Tragwerkes auch eine beliebige andere Richtung haben, wie z. B. in den Fig. 281e und 281f dargestellt.

In den Fig. 281g und h wurde die Verschiebung des Knotenpunktes  $C$  infolge gegebener Verschiebung  $A = 1$  mm des Knotenpunktes  $D$  bei unverschiebbar festgehaltenem Knotenpunkt  $B$  und die daraus hervorgehenden gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 2 und 3 bestimmt; es ist

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } C''C' &= \varrho_3, \\ \text{,, ,, } CC' &= \varrho_2, \text{ und} \\ \text{,, ,, } DD' &= \varrho_1 = 1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Die Fig. 281h und i zeigen die Bestimmung der Verschiebung des Knotenpunktes  $C$  infolge gegebener Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  bei unverschiebbar festgehaltenem Knotenpunkt  $D$  und die daraus hervorgehenden gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 2 und 3; es ist

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } C''C' &= \varrho_2, \\ \text{,, ,, } CC' &= \varrho_3, \text{ und} \\ \text{,, ,, } BB' &= \varrho_1 = 1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

### Beispiel VII. Hallenrahmen mit einer Öffnung und 3 Dachstäben (Fig. 282).

**Fall I:** Der Knotenpunkt  $B$  werde um die gegebene Strecke  $A = 1$  mm verschoben (Fig. 282a), während die Punkte  $D$  und  $E$  unverschiebbar festgehalten sind. Die Bestimmung der Verschiebung des Knotenpunktes  $C$  gestaltet sich wie diejenige des Punktes  $C$  in Fig. 273, und es ist

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } C''C' &= \varrho_2, \\ \text{,, ,, } CC' &= \varrho_3, \\ \text{,, ,, } BB' &= \varrho_1. \end{aligned}$$

Fig. 282b stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

**Fall II:** Der Knotenpunkt  $C$  werde um die gegebene Strecke  $A = 1$  mm verschoben (Fig. 282e), während die Knotenpunkte  $B$  und  $E$  unverschiebbar festgehalten sind. Die Bestimmung der Verschiebung des Knotenpunktes  $D$  gestaltet sich ebenfalls wie diejenige des Punktes  $C$  in Fig. 273, und es ist:

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } D''D' &= \varrho_3, \\ \text{,, ,, } DD' &= \varrho_4, \text{ und} \\ \text{,, ,, } CC' &= \varrho_2 = 1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Fig. 282d stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

**Fall III:** Der Knotenpunkt  $E$  werde um die gegebene Strecke  $A = 1$  mm verschoben (Fig. 282e), während die Knotenpunkte  $B$  und  $C$  unverschiebbar

festgehalten sind. Die Bestimmung der Verschiebung des Knotenpunktes  $D$  gestaltet sich wiederum wie diejenige des Punktes  $C$  in Fig. 273, und es ist:

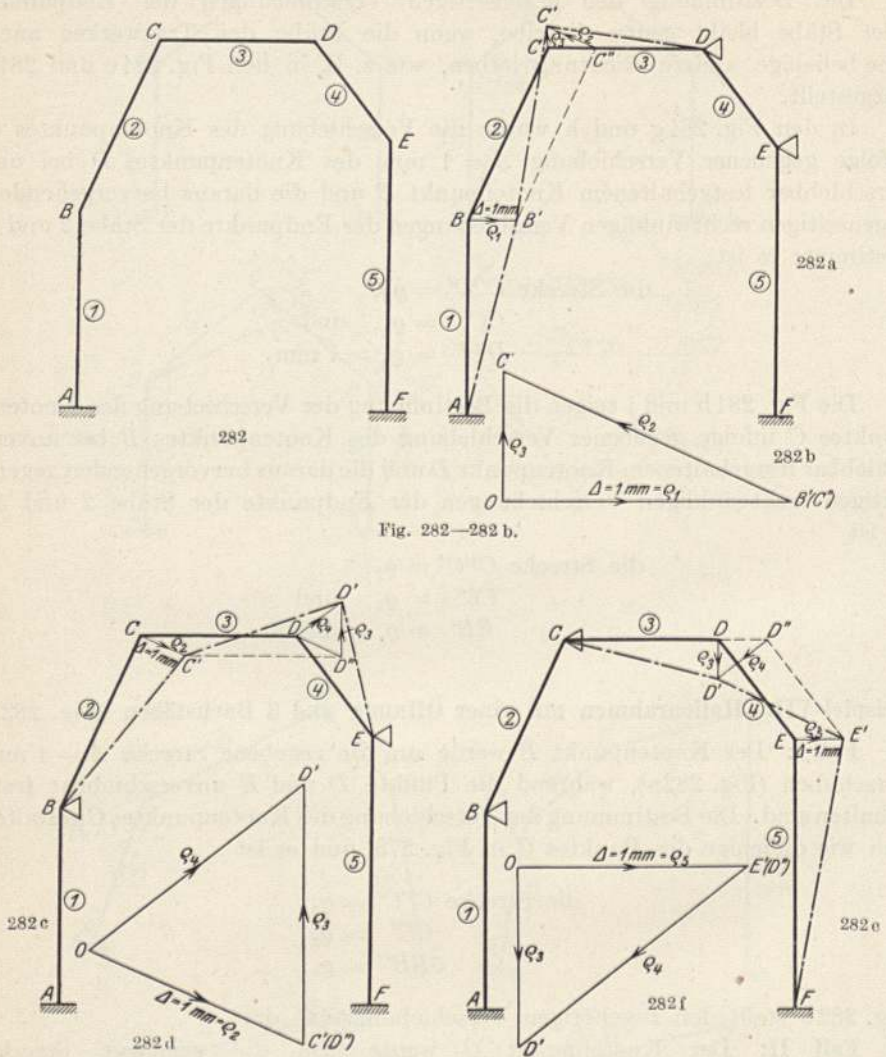


Fig. 282—282 b.

Fig. 282 c—282 f.

die Strecke  $DD' = q_3$ ,  
 „ „  $D'D' = q_4$ ,  
 „ „  $EE' = q_5 = 1 \text{ mm}$ .

Fig. 282f stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

**Beispiel VIII. Hallenrahmen mit 2 Öffnungen und 2 Dachstäben in jeder Öffnung (Fig. 283).**

**Fall I:** Der Knotenpunkt  $B$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  verschoben (Fig. 283a), während die Knotenpunkte  $D$  und  $F$  unverschiebbar

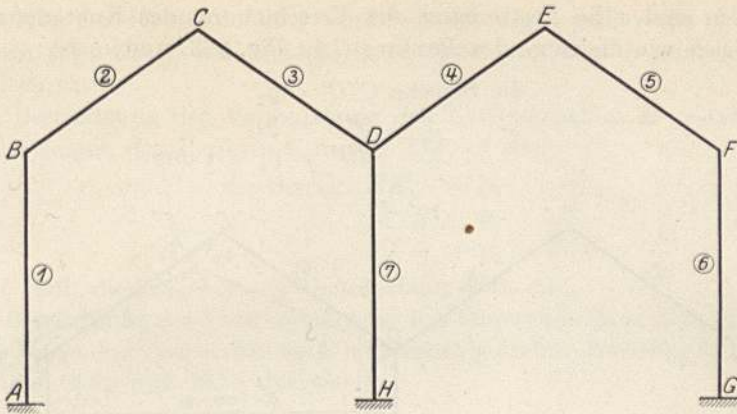


Fig. 283.

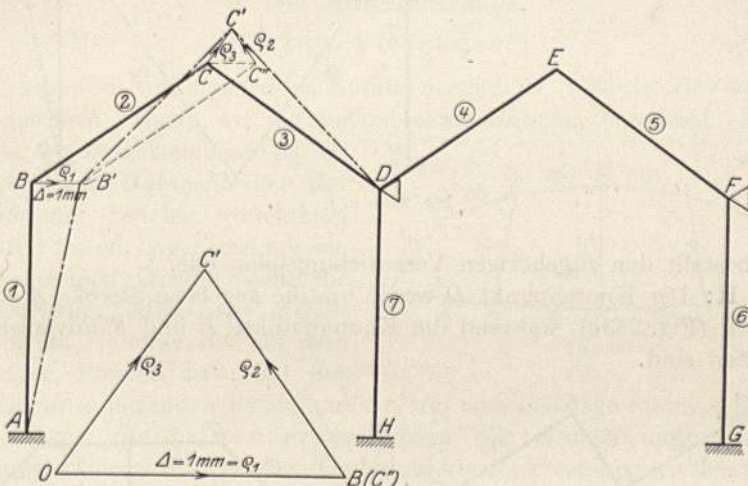


Fig. 283 a u. b.

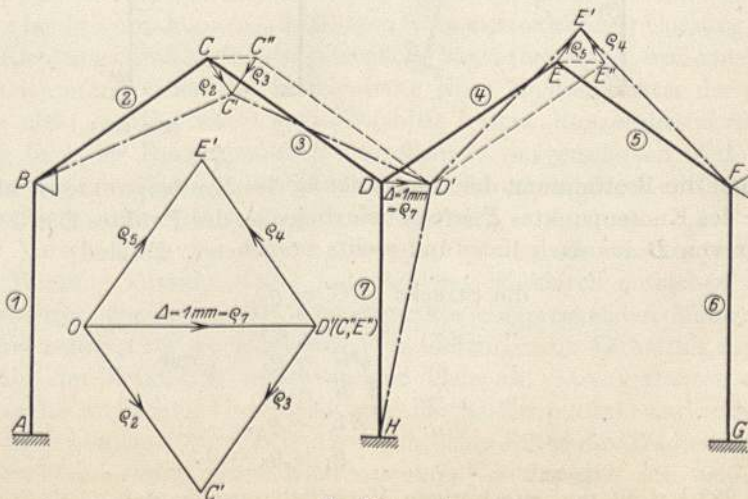


Fig. 283c u. d.

festgehalten sind. Die Bestimmung der Verschiebung des Knotenpunktes  $C$  gestaltet sich wie diejenige des Punktes  $C$  in Fig. 273, und es ist:

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } C''C' &= \varrho_2, \\ \text{,, ,, } CC' &= \varrho_3, \\ \text{,, ,, } BB' &= \varrho_1 = 1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

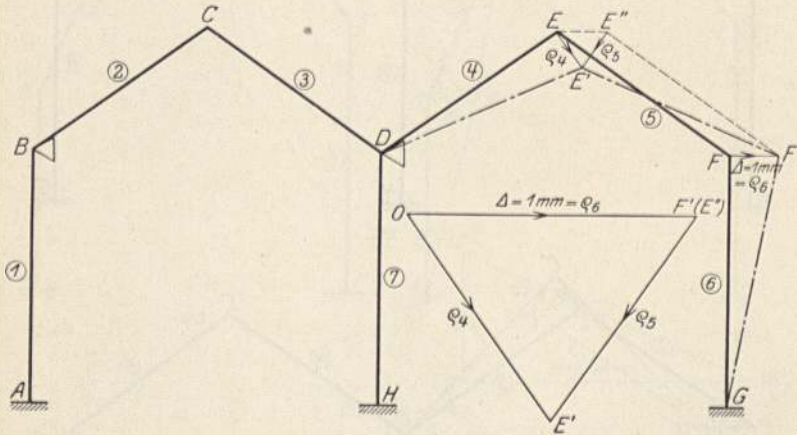


Fig. 283 e u. f.

Fig. 283 b stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

**Fall II:** Der Knotenpunkt  $D$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm verschoben (Fig. 283 c), während die Knotenpunkte  $B$  und  $F$  unverschiebbar festgehalten sind.

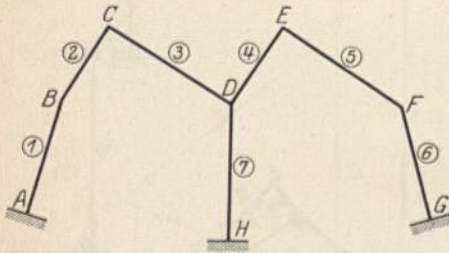


Fig. 283 g.

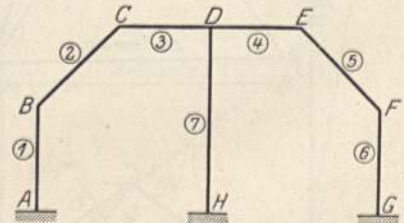


Fig. 283 h.

Sowohl die Bestimmung der Verschiebung des Knotenpunktes  $C$  als auch diejenige des Knotenpunktes  $E$  erfolgt wie diejenige des Punktes  $C$  in Fig. 273, und zwar von  $D$  aus nach links und rechts vorgehend. Es sind

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } CC' &= \varrho_2, \\ \text{,, ,, } C''C' &= \varrho_3, \\ \text{,, ,, } DD' &= \varrho_7 = 1 \text{ mm,} \\ \text{,, ,, } E'E' &= \varrho_1, \\ \text{,, ,, } EE' &= \varrho_5, \end{aligned}$$

ferner ist

$$\varrho_1 = \varrho_6 = 0.$$

Fig. 283 d stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

**Fall III:** Der Knotenpunkt  $F$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm verschoben (Fig. 283e), während die Knotenpunkte  $B$  und  $D$  unverschiebbar festgehalten sind.

Die Bestimmung der Verschiebung des Knotenpunktes  $E$  gestaltet sich analog derjenigen des Punktes  $C$  in Fig. 273; es sind:

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } EE' &= \varrho_4, \\ \text{,, ,, } E''E' &= \varrho_5, \\ \text{,, ,, } FF' &= \varrho_6 = 1 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Fig. 283f stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

Die Bestimmung der Verschiebung der Knotenpunkte bleibt genau dieselbe, wenn die Stäbe des Tragwerkes auch eine beliebig andere Richtung haben, wie z. B. in Fig. 283g und 283h dargestellt.

### 3. Der Rahmenträger.

(System Vierendeel.)

Wie schon im vorhergehenden Kapitel ausgeführt, wird der Rahmenträger nach demselben Prinzip wie der mehrstöckige Rahmen berechnet. Zur Bestimmung der Zusatzmomente (R. II)

am allgemeinen Rahmenträger der Fig. 284 mit beliebig gerichteten Stäben und festem Lager in  $A$  müssen wir die einzelnen Pfosten sowie die obere Gurtung, oder, was gleichbedeutend ist, je einen der auf dem betreffenden Pfosten bzw. auf der

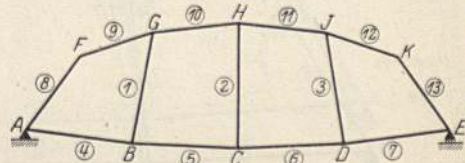


Fig. 284.

oberen Gurtung liegenden Knotenpunkte, um eine beliebige Strecke, beispielsweise  $\Delta = 1$  mm, nacheinander verschieben. Wir verschieben zweckmäßig die auf der unteren Gurtung liegenden Knotenpunkte der Pfosten, sowie den Knotenpunkt  $H$  der oberen Gurtung. Bei Verschiebung eines Knotenpunktes der unteren Gurtung werden, um die Festpunkte zur Weiterleitung der davon herrührenden Momente benutzen zu können, alle übrigen Knotenpunkte dieser Gurtung in senkrechter Richtung durch horizontal bewegliche Lager (beweglich, weil sonst bei beliebig gerichteten Stäben die Verschiebung eines Knotenpunktes der unteren Gurtung nicht möglich wäre) unverschiebbar festgehalten, während die obere Gurtung bzw. der Knotenpunkt  $H$  derselben so mitverschoben wird, daß er senkrecht über dem Knotenpunkt  $C$  verbleibt und darauf durch ein festes Lager in jenem Punkt unverschiebbar festgehalten wird.

Bei Verschiebung der oberen Gurtung werden alle Knotenpunkte der unteren Gurtung unverschiebbar festgehalten. Hierdurch entstehen die den Verschiebungen der genannten Knotenpunkte entsprechenden Momente  $M'$ . Wie früher nehmen wir die gegebenen Verschiebungen im Verhältnis zur Länge aller Stäbe des Tragwerkes verschwindend klein an. Das Verfahren zur Bestimmung der wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, sowie der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen sämtlicher Stäbe des Tragwerkes infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes ist dasselbe wie beim mehrstöckigen Rahmen, und zwar:

**Fall I:** Der Knotenpunkt  $B$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm nach unten verschoben (Fig. 284a), während die Knotenpunkte  $C$  und  $D$  durch auf wagrechter Bahn bewegliche Lager in senkrechter Richtung unverschiebbar festgehalten werden und der Knotenpunkt  $H$  der oberen Gurtung so mitverschoben wird, daß er senkrecht über der neuen Lage des Knotenpunktes  $C$  bleibt und dann festgehalten wird. Dann bestimmen wir die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen aller Stäbe wie folgt:

Die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1$  mm tragen wir in Fig. 284a im Punkt  $B$  rechtwinklig zum Stab 4 auf, an dessen linkem Ende sich das feste Auflager des Rahmenträgers befindet und um welches sich der Knotenpunkt  $B$  bei seiner Verschiebung dreht. Zunächst bestimmen wir die dadurch verursachten Verschiebungen der übrigen Knotenpunkte der unteren Gurtung.

Wir verschieben den Stab 5 parallel zu sich selbst in die Lage  $B'C''$  und ziehen durch den Endpunkt  $C''$  eine Normale zum Stab 5; der Schnitt-

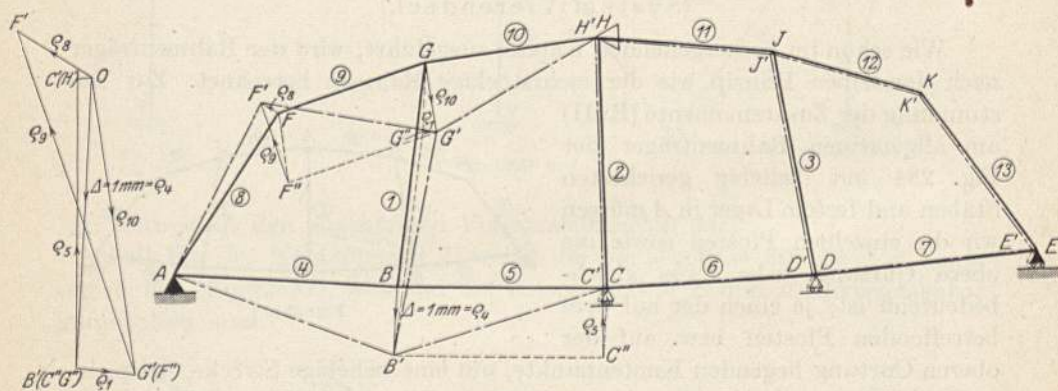


Fig. 284 b.

Fig. 284 a.

punkt  $C'$  derselben mit der Wagrechten durch  $C$  (weil das Lager bei  $C$  auf wagrechter Bahn beweglich ist) ist dann die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes  $C$ , und die Strecke  $CC'$  daher die wirkliche Verschiebung dieses Punktes. Ferner ist die Strecke  $C''C' = q_5$  die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung des Stabes 5; diejenige des Stabes 4 ist gleich der gegebenen Verschiebung  $\Delta = 1$  mm. Um die neue Lage des Knotenpunktes  $D$  zu erhalten, verschieben wir den Stab 6 parallel zu sich selbst in die Lage  $C'D'$ . Da sich sowohl der Knotenpunkt  $C$  als auch der Knotenpunkt  $D$  nur horizontal verschieben kann, so ist der Endpunkt  $D'$  die neue Lage des Punktes  $D$  und die Strecke  $DD'$  daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes; da der Stab 6 nur eine Parallelverschiebung vollzogen hat, haben die Endpunkte desselben keine gegenseitige Verschiebung erlitten, d. h.  $q_6 = 0$ . Was wir soeben für den Knotenpunkt  $D$  und den Stab 6 gesagt haben, gilt auch für den Knotenpunkt  $E$  und den Stab 7, d. h.  $q_7 = 0$ .

Nun bestimmen wir auf Grund der wirklichen Verschiebungen der Untergurts-Knotenpunkte, sowie der vorgeschriebenen Lage des Knotenpunktes  $H$  der oberen Gurtung diejenigen der Obergurts-Knotenpunkte, und zwar zuerst die Verschiebung des mit dem festen Lager in  $H'$  verbundenen Knotenpunktes  $G$ .

Wir verschieben zu diesem Zweck den Stab *I* parallel zu sich selbst in die Lage  $B'G''$  (Fig. 284 a) und ziehen durch den Endpunkt  $G''$  eine Normale zum Stab *I*; der Schnittpunkt  $G'$  derselben mit der durch  $G$  gezogenen Normalen zum Stab *10* ist dann die gesuchte neue Lage des Punktes  $G$  und die Strecke  $GG'$  daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitigerechthwinklige Verschiebung  $\varrho_{10}$  der Endpunkte des Stabes *10*; die Strecke  $G''G'$  ist gleich der gegenseitigen rechthwinkligen Verschiebung der Endpunkte des Stabes *I*.

Um die neue Lage des Knotenpunktes  $F$  zu erhalten, verschieben wir den Stab *9* parallel zu sich selbst in die Lage  $G'F''$  und ziehen durch den Endpunkt  $F''$  eine Normale zum Stab *9*; der Schnittpunkt  $F'$  derselben mit der durch  $F$  gezogenen Normalen zum Stab *8* ist dann die gesuchte neue Lage des Punktes  $F$  und die Strecke  $FF'$  daher die wirkliche Verschiebung des Knotenpunktes  $F$  und gleichzeitig die gegenseitige rechthwinklige Verschiebung  $\varrho_8$  der

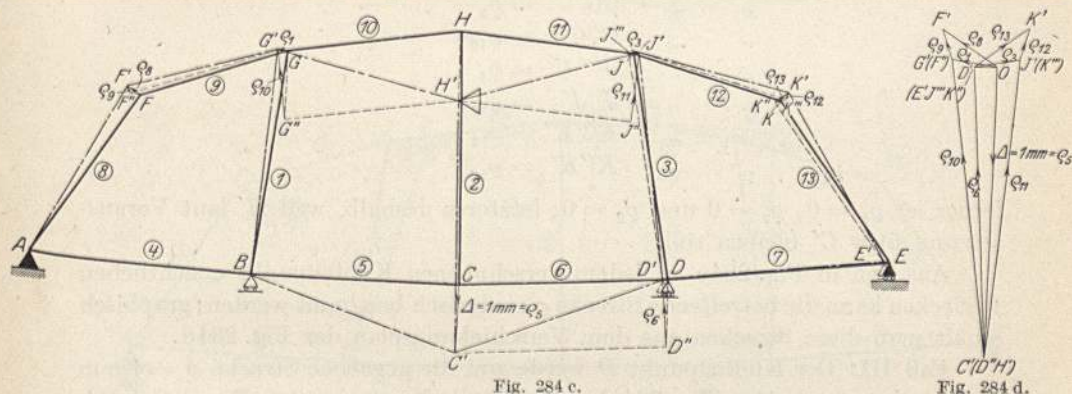


Fig. 284 c.

Fig. 284 d.

Endpunkte des Stabes *8*. Ferner ist die Strecke  $F''F' = \varrho_9$  die gegenseitige rechthwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes *9*.

Da der Knotenpunkt  $H$  sich laut Voraussetzung so verschieben soll, daß er senkrecht über  $C'$  verbleibt, so hat sich die rechte Hälfte des Rahmenträgers bei der gegebenen Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  nur parallel zu sich selbst verschoben und die Stäbe *2*, *3*, *6*, *7*, *11*, *12* und *13* erleiden daher keine gegenseitigen rechthwinkligen Verschiebungen ihrer Endpunkte.

Aus den in Fig. 284 a an jedem verschobenen Knotenpunkt ersichtlichen Dreiecken kann die betreffende Strecke  $\varrho$  analytisch bestimmt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus dem Verschiebungsplan der Fig. 284 b, welcher wieder nichts anderes ist als eine Aneinanderreihung der genannten Dreiecke aus Fig. 284 a in größerem Maßstab.

**Fall II:** Der Knotenpunkt  $C$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm nach unten verschoben (Fig. 284 c), während die Knotenpunkte  $B$  und  $D$  durch auf wagrechter Bahn bewegliche, gegen Abheben gesicherte Lager (bei  $B$  kann auch ein festes Lager gedacht werden) in senkrechter Richtung unverschiebbar festgehalten und der Knotenpunkt  $H$  der oberen Gurtung so mitverschoben wird, daß er senkrecht über der neuen Lage des Knotenpunktes  $C$  bleibt und dann festgehalten wird.

Die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1$  mm tragen wir in Fig. 284 c im Punkt  $C$  rechthwinklig zum Stab *5* auf, weil sich dieser Knotenpunkt bei seiner Ver-

schiebung um den Punkt  $B$  dreht, da letzterer durch den geraden Stab  $4$  mit dem festen Auflager des Rahmenträgers verbunden ist. Zunächst bestimmen wir wie bei Fall I die durch die Verschiebung  $CC'$  verursachten Verschiebungen der Knotenpunkte  $D$  und  $E$ , darauf auf Grund der bekannten Verschiebungen der Knotenpunkte der unteren Gurtung diejenigen der oberen Gurtung. Dabei beginnen wir mit der Bestimmung der Verschiebung der dem in seiner neuen Lage  $H'$  festgehaltenen Knotenpunkt  $H$  benachbarten Knotenpunkte  $G$  und  $J$  der oberen Gurtung. Das Verfahren ist genau dasselbe wie bei Fall I bzw. der Lösung der zu Beginn dieses Kapitels gestellten allgemeinen Aufgabe.

Es ist	die Strecke $CC'$	$= \varrho_5 = 1 \text{ mm}$
	„ „ $D''D'$	$= \varrho_6$
	„ „ $FF'$	$= \varrho_8$
	„ „ $F''F'$	$= \varrho_9$
	„ „ $GG'$	$= \varrho_1$
	„ „ $G''G'$	$= \varrho_{10}$
	„ „ $J'''J'$	$= \varrho_3$
	„ „ $J''J'$	$= \varrho_{11}$
	„ „ $K'''K'$	$= \varrho_{12}$
	„ „ $K''K'$	$= \varrho_{13}$

ferner ist  $\varrho_4 = 0$ ,  $\varrho_7 = 0$  und  $\varrho_2 = 0$ ; letzteres deshalb, weil  $H'$  laut Voraussetzung über  $C'$  bleiben soll.

Aus den in Fig. 284c an jedem verschobenen Knotenpunkt ersichtlichen Dreiecken kann die betreffende Strecke  $\varrho$  analytisch bestimmt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus dem Verschiebungsplan der Fig. 284d.

**Fall III:** Der Knotenpunkt  $D$  werde um die gegebene Strecke  $A = 1 \text{ mm}$  nach unten verschoben (Fig. 284e), während die Knotenpunkte  $B$  und  $C$  durch auf wagrechter Bahn bewegliche, gegen Abheben gesicherte Lager (bei Fall III können in  $B$  und  $C$  auch feste Lager gedacht werden) in senkrechter Richtung unverschiebbar festgehalten und der Knotenpunkt  $H$  der oberen Gurtung senkrecht über dem Knotenpunkt  $C$  festgehalten wird.

Die gegebene Verschiebung  $A = 1 \text{ mm}$  tragen wir in Fig. 284e im Punkt  $D$  rechtwinklig zum Stab  $6$  auf, weil sich dieser Knotenpunkt bei seiner Verschiebung um den Punkt  $C$  dreht, da dieser dank seiner durch die geradlinigen Stäbe  $4$  und  $5$  hergestellten Verbindung mit dem festen Auflager des Rahmenträgers (und seines gegen Abheben gesicherten beweglichen Lagers) in jeder Richtung unverschiebbar ist. Zunächst bestimmen wir wie bei den vorhergehenden beiden Fällen die durch die Verschiebung  $DD'$  verursachte Verschiebung des Knotenpunktes  $E$  und darauf diejenigen der Knotenpunkte der oberen Gurtung, wobei wir mit dem Knotenpunkt  $H$  beginnen. Das Verfahren ist genau dasselbe wie in den vorhergehenden Fällen, und wir erhalten

	die Strecke $DD'$	$= \varrho_6 = 1 \text{ mm}$
	„ „ $E''E'$	$= \varrho_7$
	„ „ $J''J'$	$= \varrho_3$
	„ „ $JJ'$	$= \varrho_{11}$
	„ „ $K'''K'$	$= \varrho_{12}$
	„ „ $K''K'$	$= \varrho_{13}$



Die übrigen Stäbe erleiden keine gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen ihrer Endpunkte, da die Knotenpunkte der linken Hälfte des Rahmenträgers in Ruhe bleiben.

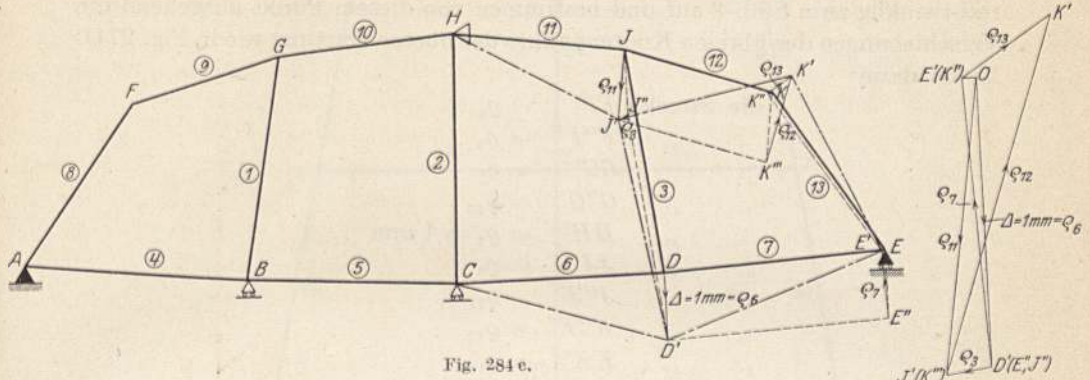


Fig. 284 e.

Fig. 284 f.

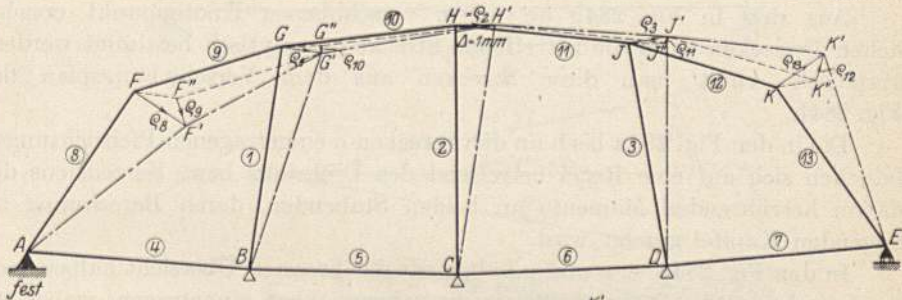


Fig. 284 g.

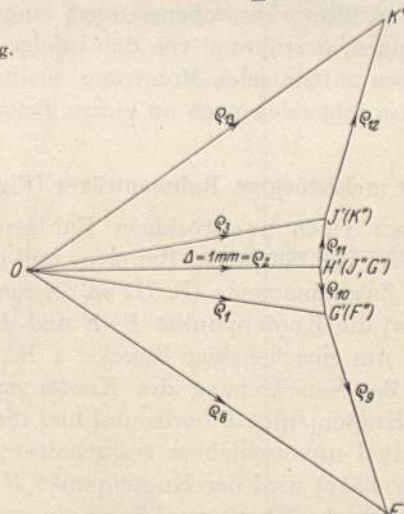


Fig. 284 h.

Aus den in Fig. 284 e an jedem verschobenen Knotenpunkt ersichtlichen Dreiecken kann die betreffende Strecke  $q$  analytisch bestimmt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus dem Verschiebungsplan der Fig. 284 f.

**Fall IV:** Der Knotenpunkt  $H$  werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1 \text{ mm}$  nach rechts (wird als positiv angenommen) verschoben

(Fig. 284g), während alle Knotenpunkte der unteren Gurtung unverschiebbar festgehalten sind.

Die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1$  mm tragen wir in Fig. 284g im Punkt  $H$  rechtwinklig zum Stab 2 auf und bestimmen von diesem Punkt ausgehend die Verschiebungen der übrigen Knotenpunkte der oberen Gurtung wie in Fig. 274f. Es ist dann

die Strecke	$FF'$	$= \varrho_8$
„	„	$F''F'$ $= \varrho_9$
„	„	$GG'$ $= \varrho_1$
„	„	$G''G'$ $= \varrho_{10}$
„	„	$HH'$ $= \varrho_2 = 1$ mm
„	„	$JJ'$ $= \varrho_3$
„	„	$J''J'$ $= \varrho_{11}$
„	„	$K''K'$ $= \varrho_{12}$
„	„	$KK'$ $= \varrho_{13}$

ferner ist  $\varrho_4 = \varrho_5 = \varrho_6 = \varrho_7 = 0$ .

Aus den in Fig. 284g an jedem verschobenen Knotenpunkt ersichtlichen Dreiecken kann die betreffende Strecke  $\varrho$  analytisch bestimmt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus dem Verschiebungsplan der Fig. 284h.

Die in den Fig. 284a bis h an den Strecken  $\varrho$  eingetragenen Pfeilrichtungen beziehen sich auf eine Regel betreffend des Drehsinns bzw. Vorzeichens der davon herrührenden Momente an beiden Stabenden, deren Berechnung im folgenden Kapitel gezeigt wird.

In den Fig. 284a, c, e und g haben wir der besseren Übersicht halber noch strichpunktiert die Stäbe in ihrer verschobenen Lage eingetragen, wobei wir jedoch deren Formänderungen, herrührend von den infolge der Knotenpunktverschiebungen in denselben auftretenden Momenten, nicht dargestellt haben.

Das Verfahren wird im folgenden noch an einem Beispiel gezeigt.

#### Beispiel: Der mehrstöckige Rahmenträger (Fig. 285).

In Fig. 285 haben wir einen zweistöckigen Rahmenträger dargestellt, welcher eine Vereinigung des mehrstöckigen Rahmens und des Rahmenträgers ist. Zur Bestimmung der Zusatzmomente (R. II) an diesem Tragwerk müssen wir laut Kap. I (Fig. 255a) die Knotenpunkte  $B$ ,  $E$  und  $H$ , welche während R. I festgehalten wurden, um eine beliebige Strecke, z. B.  $\Delta = 1$  mm, nacheinander verschieben. Bei Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  wird der untere Balken 3—4 bzw. Knotenpunkt  $E$  horizontal und die Säule 8—11 bzw. der Knotenpunkt  $H$  vertikal unverschiebbar festgehalten; bei Verschiebung des Knotenpunktes  $E$  (Fig. 285e) wird der Knotenpunkt  $H$  vertikal durch ein festes Lager und der Knotenpunkt  $B$  horizontal durch ein senkrecht bewegliches Rollenlager unverschiebbar festgehalten; bei Verschiebung des Knotenpunktes  $H$  nach unten (Fig. 285e) werden die Knotenpunkte  $B$  und  $E$  durch je ein in senkrechter Richtung bewegliches Rollenlager horizontal unverschiebbar festgehalten. Hierdurch entstehen die entsprechenden Momente  $M'$ .

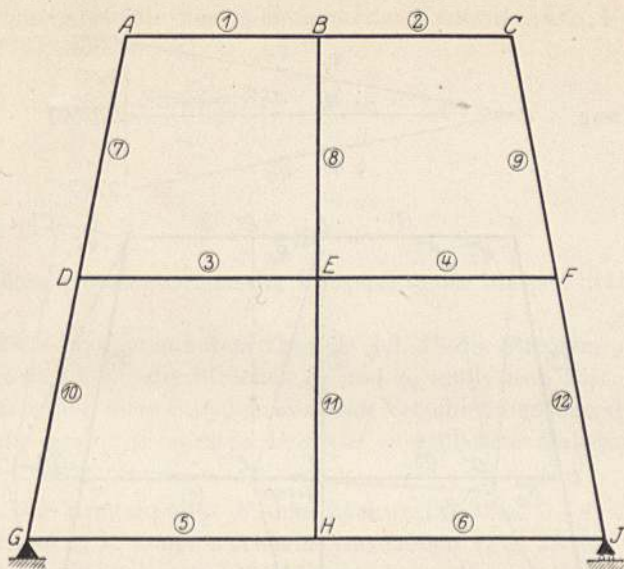


Fig. 285.

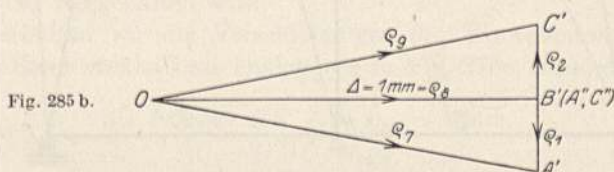


Fig. 285 b.

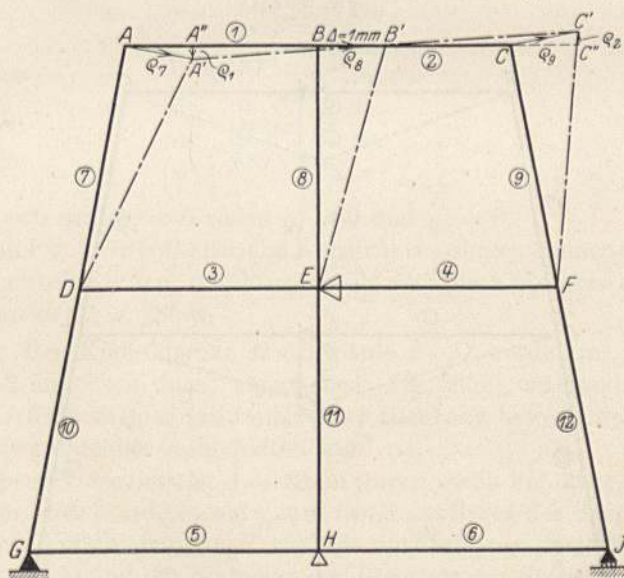


Fig. 285 a.

**Fall I:** Der Knotenpunkt  $B$  des Stockwerkbalkens 1–2 werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1\text{ mm}$  nach rechts verschoben (Fig. 285a), während die Knotenpunkte  $E$  und  $H$  unverschiebbar festgehalten sind,

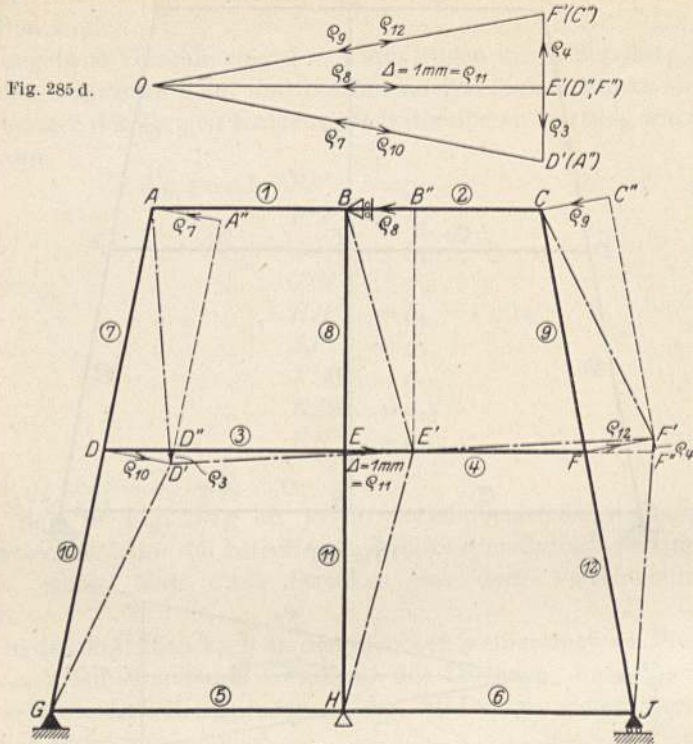


Fig. 285 c.

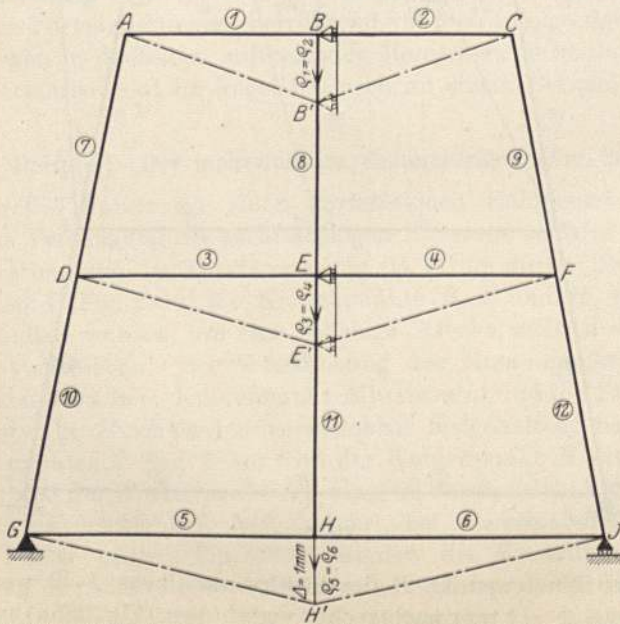


Fig. 285 e.

Dann erhalten wir die Verschiebungen der Knotenpunkte  $A$  und  $C$  analog wie in Fig. 274f, und es ist:

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } BB' &= \varrho_8 = 1 \text{ mm} \\ \text{,, ,, } A''A' &= \varrho_1 \\ \text{,, ,, } AA' &= \varrho_7 \\ \text{,, ,, } C''C' &= \varrho_2 \\ \text{,, ,, } CC' &= \varrho_9, \end{aligned}$$

die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der übrigen Stäbe sind gleich Null.

In Fig. 285a können aus dem Dreieck  $AA'A''$  die Strecken  $\varrho_1$  und  $\varrho_7$  und aus dem Dreieck  $CC'C''$  die Strecken  $\varrho_2$  und  $\varrho_9$  analytisch bestimmt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus dem Verschiebungsplan der Fig. 285b, in welchem die beiden genannten Dreiecke in größerem Maßstab aneinander gereiht sind.

**Fall II:** Der Knotenpunkt  $E$  des Stockwerkbalkens 3–4 werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm seitwärts verschoben (Fig. 285c), während der Knotenpunkt  $H$  vertikal unverschiebbar und der Knotenpunkt  $B$  horizontal unverschiebbar festgehalten wird.

Dann erhalten wir die Verschiebungen der Knotenpunkte des unteren und oberen Stockwerkbalkens analog wie in Fig. 278c, und es ist

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } EE' &= \varrho_{11} = 1 \text{ mm} \\ \text{,, ,, } D''D' &= \varrho_3 \\ \text{,, ,, } DD' &= \varrho_{10} \\ \text{,, ,, } F''F' &= \varrho_4 \\ \text{,, ,, } FF' &= \varrho_{12} \\ \text{,, ,, } A''A &= \varrho_7 \\ \text{,, ,, } B''B &= \varrho_8 \\ \text{,, ,, } C''C &= \varrho_9, \end{aligned}$$

ferner ist  $\varrho_5 = 0$  und  $\varrho_6 = 0$  sowie  $\varrho_1 = 0$  und  $\varrho_2 = 0$ .

Aus den in Fig. 285c enthaltenen Konstruktionslinien können die Strecken  $\varrho$  analytisch ermittelt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus dem Verschiebungsplan der Fig. 285d.

**Fall III:** Der Knotenpunkt  $H$  der Säule 8–11 werde um die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm nach unten verschoben (Fig. 285e), während die Knotenpunkte  $B$  und  $E$  durch je ein in senkrechter Richtung bewegliches Rollenlager horizontal unverschiebbar festgehalten werden.

Die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1$  mm tragen wir in Fig. 285e im Punkte  $H$  senkrecht zum Stab 5 auf, welcher zum festen Auflager des Tragwerks führt. Da die gegebene Verschiebung im Verhältnis zur Stablänge verschwindend klein angenommen wurde und der Stab 6 in der Richtung des Stabes 5 liegt, so verschiebt sich das bewegliche Lager am Knotenpunkt  $J$  nicht und die Strecke  $HH' = 1$  mm ist daher gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte der Stäbe 5 und 6. Bei der Verschiebung des Punktes  $H$  nach  $H'$  bewegt sich  $E$  nach  $E'$  und  $B$  nach  $B'$ , während sowohl die Punkte  $D$  und  $F$ ,

als auch die Punkte  $A$  und  $C$  in Ruhe bleiben, da die Stäbe 3 und 4, sowie 1 und 2 je in eine Horizontale fallen. Es ist daher

$$\begin{aligned} \varrho_3 &= \varrho_4 = 1 \text{ mm} \\ \varrho_1 &= \varrho_2 = 1 \text{ mm}, \end{aligned}$$

während die Stäbe 7, 8, 9, 10, 11 und 12 keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden.

### III. Bestimmung der Momente $M'$ infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes sowie der zugehörigen Erzeugungskraft $Z$ und Festhaltungskräfte $D$ .

Nachdem wir die Verschiebungen aller Knotenpunkte eines Tragwerkes bzw. die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes desselben kennen, d. h. nach dem vorhergehenden Kapitel ermittelt haben, sind wir in der Lage, die davon hervorgerufenen Momente  $M'$  am ganzen Tragwerk, beispielsweise an demjenigen der Fig. 288, wie folgt zu bestimmen:

Wir behandeln die einzelnen Stäbe getrennt voneinander, betrachten daher zunächst einen einzelnen Stab, z. B. den Stab  $AB$  und ermitteln die Momente  $M_{(\varrho)}$ , welche durch die Verschiebungen  $AA'$  und  $BB'$  bzw. die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho$  der beiden Endpunkte dieses Stabes erzeugt werden, und zwar einerseits im Stabe  $AB$  selbst und andererseits in allen übrigen Stäben des Tragwerkes. Darauf ermitteln wir auf dieselbe Weise die Momente  $M_{(\varrho)}$  infolge der Verschiebungen der beiden Endpunkte des zweiten, sodann des dritten, vierten usw. und endlich des letzten Stabes. Zum Schluß addieren wir die so erhaltenen Momente  $M_{(\varrho)}$  in jedem Stabe und erhalten dadurch die Momente  $M'$  infolge der gleichzeitigen Verschiebung aller Knotenpunkte des Tragwerkes. Die zugehörigen Quer- und Normalkräfte erhalten wir auf Grund der Momente nach Kap. VI des ersten Teiles.

Es sei noch hervorgehoben, daß wir nicht einzelne Knotenpunktverschiebungen, sondern stets paarweise die Verschiebungen der beiden Endpunkte eines Stabes betrachten, von denen wir zur Einsetzung in die nachfolgend abgeleiteten Hauptformeln (515) und (520) im besonderen die Summe  $\varrho$  ihrer beiden Komponenten rechtwinklig zur Stabrichtung benötigen, die wir wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt ermitteln.

#### 1. Momente $M_{(\varrho)}$ , welche durch die Verschiebungen $AA'$ und $BB'$ der Endpunkte des Stabes $AB$ in diesem Stabe selbst entstehen.

In Fig. 288 haben wir die Formänderungen dargestellt, welche am ganzen Tragwerk durch die gleichzeitige Verschiebung aller Knotenpunkte desselben entstehen, während die Lage der Stäbe vor der Verschiebung ihrer Endpunkte in dünneren Linien eingetragen ist.

Wie wir aus Teil I wissen, kennen wir den Momentenverlauf am ganzen Stab, sobald die beiden Stützenmomente bekannt sind; da der betrachtete Stab wohl an seinen Enden verschoben, nicht aber durch äußere Kräfte belastet ist, so wird die Momentenfläche dieses Stabes begrenzt durch seine Achse und die

Verbindungsgerade der Endpunkte der beiden von der Stabachse aus entsprechend ihren Vorzeichen aufgetragenen Stützenmomente.

Um nun die beiden

Stützenmomente  $M^A$  und  $M^B$

zu ermitteln, welche durch die Verschiebungen  $AA'$  und  $BB'$  im Stabe  $AB$  selbst entstehen, untersuchen wir, wie dieser Stab aus seiner ursprünglichen spannungslosen Lage  $AB$  (Fig. 288) in die endgültige verschobene Lage  $A'B'$

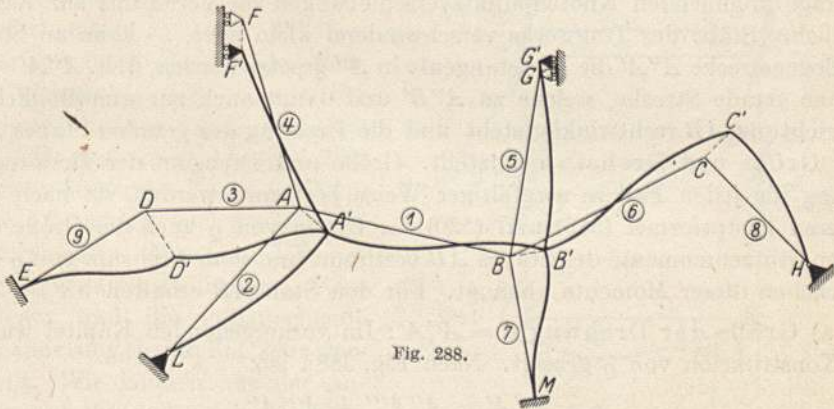


Fig. 288.

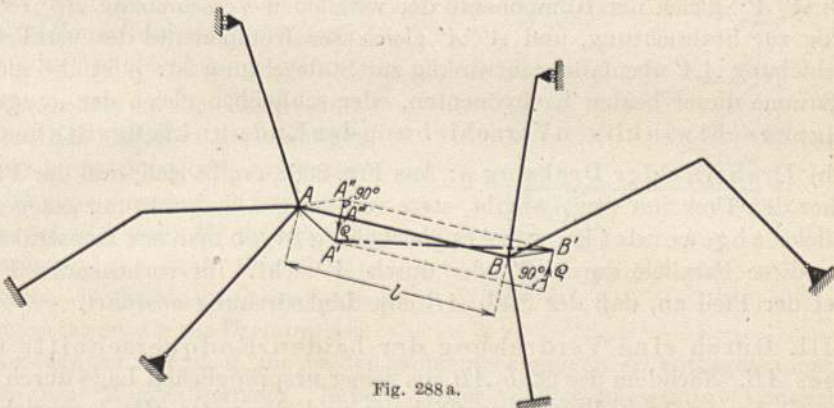


Fig. 288 a.

kommt. Zu diesem Zwecke halten wir alle Knotenpunkte des Tragwerks in ihrer in Fig. 288 dargestellten Endlage frei drehbar, aber unverschiebbar fest und trennen dann den Stab  $A'B'$  durch 2 dicht an seinen Endpunkten geführte Schnitte heraus, wodurch der Stab  $A'B'$  wieder in die frühere spannungslose gerade Form übergeht, wie in Fig. 288a dargestellt, während im übrigen Stabsystem derjenige Teil der gesamten Formänderung verschwindet, welcher speziell der Verschiebung  $AA'$  und  $BB'$  der Endpunkte des Stabes  $AB$  entspricht. Aus der ursprünglichen, ebenfalls in Fig. 288a dargestellten Lage  $AB$  gelangt nun dieser Stab durch folgende Zwischenstufen in die endgültige Lage  $A'B'$  der Fig. 288:

I. Durch eine Parallelverschiebung des geraden Stabes  $AB$  (Fig. 288a) in die Lage  $A'B'$ , wobei der Endpunkt  $B$  auf der Geraden  $BB'$  gleitet.

II. Durch eine Drehung des geraden Stabes: Wir drehen den parallel verschobenen Stab  $A''B'$  (Fig. 288a) um seinen Endpunkt  $B'$  so, bis  $A''$  nach  $A'$  gelangt. Hierbei beschreibt Endpunkt  $A''$  einen Kreisbogen  $A''A'$  um  $B'$  als Zentrum, und zwar eine Linksdrehung, wie aus Fig. 288a hervorgeht. Weil nun nach der im vorhergehenden Kapitel gemachten Voraussetzung die in Frage kommenden Knotenpunktverschiebungen im Verhältnis zur Länge sämtlicher Stäbe des Tragwerkes verschwindend klein sind, so kann an Stelle der Bogenstrecke  $A''A'$  die Kreistangente in  $A''$  gesetzt werden, d. h.  $A''A' = \varrho$  ist eine gerade Strecke, welche zu  $A''B'$  und damit auch zur ursprünglichen Stabrichtung  $AB$  rechtwinklig steht und die Drehung des geraden Stabes  $AB$  nach Größe und Drehsinn darstellt. Größe und Drehsinn der Drehung  $\varrho$  müssen für jeden Fall in sorgfältiger Weise bestimmt werden, da nach der späteren Hauptformel (515) und (520) die Größe von  $\varrho$  auch die Größe der beiden Stützenmomente des Stabes  $AB$  bestimmt und vom Drehsinn von  $\varrho$  das Vorzeichen dieser Momente abhängt. Für den Stab  $AB$  erhalten wir

a) Größe der Drehung  $\varrho = A''A'$ : Im vorhergehenden Kapitel wurde die Konstruktion von  $\varrho$  gezeigt. Nach Fig. 288a ist:

$$\varrho = A''A' = A''A''' + A'''A',$$

worin  $A''A'''$  gleich der Komponente der wirklichen Verschiebung  $BB'$  rechtwinklig zur Stabrichtung, und  $A'''A'$  gleich der Komponente der wirklichen Verschiebung  $AA'$  ebenfalls rechtwinklig zur Stabrichtung ist.  $\varrho$  ist also gleich der Summe dieser beiden Komponenten, oder schließlich gleich der „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung der Endpunkte des Stabes  $I''$ “.

b) Drehsinn der Drehung  $\varrho$ : Aus Fig. 288a ergibt sich, daß der Pfeil, welcher den Drehsinn von  $\varrho$  angibt, stets von der zur Stabrichtung gezogenen Parallelen abgewendet ist, wobei es gleichgültig ist, ob man zur Konstruktion von  $\varrho$  diese Parallele durch  $B'$  oder durch  $A'$  zieht. Im vorliegenden Falle deutet der Pfeil an, daß der Stab  $AB$  eine Linksdrehung ausführt.

III. Durch eine Verdrehung der beiden Endquerschnitte des Stabes  $AB$ . Nachdem der Stab  $AB$  aus seiner ursprünglichen Lage durch die unter (I) beschriebene Parallelverschiebung und die unter (II) beschriebene Drehung des geraden Stabes in die geradlinige Richtung  $A'B'$  übergeführt worden ist (Fig. 288a), bleibt noch übrig, den Endquerschnitt  $A'$  (Fig. 289 und 289a) durch ein Stützenmoment  $M^A$  und den Endquerschnitt  $B'$  durch ein Stützenmoment  $M^B$  so zu verdrehen, daß die vor der Schnittführung bestandene Vereinigung mit der übrigen Rahmenkonstruktion, d. h. die elastische Einspannung des Stabes an der übrigen Konstruktion wieder hergestellt wird, wodurch die in Fig. 288 dargestellte Formänderung (Verbiegung) des Stabes zustande kommt. Der unmittelbar nach der vollzogenen Parallelverschiebung und Drehung des geraden Stabes bestehende Zustand ist in Fig. 289 und der Zustand nach der vollendeten Wiedervereinigung mit der übrigen Rahmenkonstruktion in Fig. 289a dargestellt; in beiden Fig. 289 und 289a ist die übrige



Rahmenkonstruktion schematisch durch je ein elastisch drehbares Widerlager in  $A'$  und  $B'$  dargestellt.

Die gesuchten Stützenmomente (Einspannmomente)  $M^A$  und  $M^B$  erhalten wir nun nach Drehsinn und Größe in folgender Weise:

a) Der Drehsinn der Stützenmomente  $M^A$  und  $M^B$  geht rein mechanisch aus der Anschauung hervor. Aus Fig. 289 erkennen wir nämlich, daß wir zur Wiedervereinigung der beiden klaffenden Querschnitte in  $A'$  ein rechtsdrehendes Moment  $M^A$  am Stab  $AB$  und ein gleich großes, aber linksdrehendes Moment  $M^A$  am Widerlager daselbst anbringen müssen; gleichzeitig müssen wir zur Wiedervereinigung der beiden klaffenden Querschnitte in  $B'$  (Fig. 289) ein rechtsdrehendes Moment  $M^B$  am Stabe  $AB$  und ein gleich großes, aber linksdrehendes Moment  $M^B$  am Widerlager daselbst anbringen. Diese Momente und die entsprechende Formänderung sind in Fig. 289a dargestellt. Wir können aus der Anschauung folgende Regel aufstellen, welche nicht im Stiche läßt, möge der betreffende Stab wagrecht, senkrecht oder beliebig geneigt sein:

Die beiden an den Enden eines Stabes  $AB$  infolge gegenseitiger Verschiebung derselben auftretenden Stützenmomente (Einspannmomente)  $M^A$  und  $M^B$  haben am herausgetrennten Stab (Fig. 289a) denselben Drehsinn, welcher entgegengesetzt ist wie die Drehung des

geraden Stabes  $AB$ , d. h. die beiden Momente erzeugen an entgegengesetzten Stabkanten Zugspannungen, haben daher entgegengesetztes Vorzeichen (Fig 290), und aus der Pfeilrichtung der Drehung  $\varrho$  ergibt sich die Zugkante (an welcher das Moment aufzutragen ist) am Knotenpunkt, um den sich die Drehung  $\varrho$  vollzieht. Am anderen Ende des Stabes ist dann das Moment auf der entgegengesetzten Stabkante aufzutragen.

Diese Regel macht es überflüssig, den nachfolgend entwickelten Hauptformeln für  $M^A$  und  $M^B$  ein Vorzeichen beizugeben.

b) Die Größe der Stützenmomente (Einspannmomente)  $M^A$  und  $M^B$  erhalten wir folgendermaßen aus den Drehwinkeln, welche die Stabendquerschnitte  $A_1$  und  $B_1$  beschreiben, wobei wir eine Rechtsdrehung als positiv und eine Linksdrehung als negativ einführen:

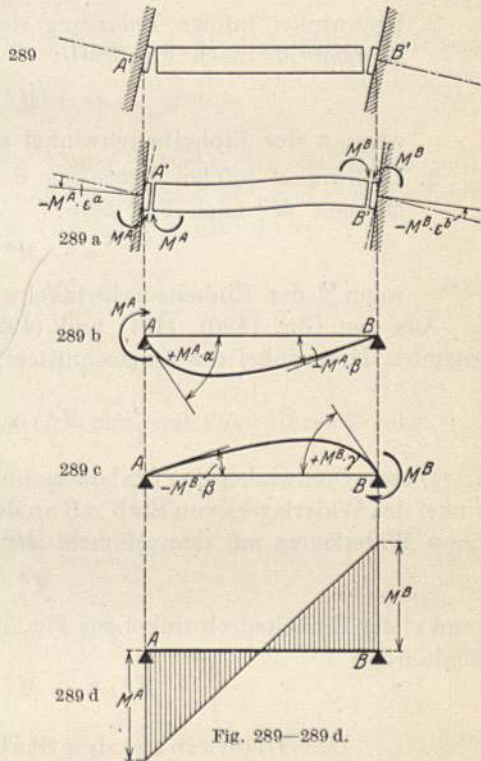


Fig. 289—289 d.

Der Drehwinkel des Stabendquerschnittes  $A_1$ 

setzt sich zusammen aus dem

1. Drehwinkel infolge der Drehung des Stabes aus der Lage  $A''B'$  (Fig. 288a) in die Lage  $A'B'$ :

$$= -\frac{\varrho}{l} \quad (490)$$

(da dieser Winkel sehr klein, kann an Stelle des Tangens der Winkel selbst gesetzt werden).

2. Drehwinkel infolge Belastung des einfachen Balkens  $AB$  mit dem Moment  $M^A$  nach Fig. 289b:

$$= +M^A \cdot \alpha, \quad (491)$$

wenn  $\alpha$  der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 52 ist.

3. Drehwinkel infolge Belastung des einfachen Balkens  $AB$  mit dem Moment  $M^B$  nach Fig. 289c:

$$= -M^B \cdot \beta, \quad (492)$$

wenn  $\beta$  der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 52 ist.

Aus den Gln. (490), (491) und (492) erhalten wir durch Addition den gesamten Drehwinkel des Querschnittes  $A_1$  zu:

$$\Sigma 4: \quad -\frac{\varrho}{l} + M^A \cdot \alpha - M^B \cdot \beta. \quad (493)$$

Dieser Drehwinkel des Stabquerschnittes  $A_1$  muß gleich sein dem Drehwinkel des Widerlagers von Stab  $AB$  an der Einspannstelle  $A$  infolge Belastung dieses Widerlagers mit dem Moment  $M^A$  (Fig. 289a), nämlich:

$$-M^A \cdot \varepsilon^a, \quad (494)$$

wenn  $\varepsilon^a$  der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 59a ist, woraus wir folgende Gleichung erhalten:

$$-\frac{\varrho}{l} + M^A \cdot \alpha - M^B \cdot \beta = -M^A \cdot \varepsilon^a. \quad (495)$$

Der Drehwinkel des Stabendquerschnittes  $B_1$ 

setzt sich zusammen aus dem

1. Drehwinkel infolge der Drehung des Stabes aus der Lage  $A''B'$  (Fig. 288a) in die Lage  $A'B'$ :

$$= -\frac{\varrho}{l}; \quad (496)$$

2. Drehwinkel infolge Belastung des einfachen Balkens  $AB$  mit dem Moment  $M^A$  nach Fig. 289b:

$$= -M^A \cdot \beta, \quad (497)$$

wenn  $\beta$  der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 52 ist.

3. Drehwinkel infolge Belastung des einfachen Balkens  $AB$  mit dem Moment  $M^B$  nach Fig. 289c:

$$= +M^B \cdot \gamma, \quad (498)$$

wenn  $\gamma$  der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 53 ist.

Aus den Gl. (496), (497) und (498) erhalten wir durch Addition den gesamten Drehwinkel des Stabendquerschnittes  $B_1$  zu:

$$-\frac{Q}{l} - M^A \cdot \beta + M^B \cdot \gamma. \quad (499)$$

Dieser Drehwinkel des Stabendquerschnittes  $B_1$  muß gleich sein dem Drehwinkel des Widerlagers von Stab  $AB$  an der Einspannstelle  $B$  infolge Belastung dieses Widerlagers mit dem Moment  $M^B$  (Fig. 289a), nämlich:

$$-M^B \cdot \varepsilon^b, \quad (500)$$

wenn  $\varepsilon^b$  der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 59b ist, worauf wir folgende Gleichung erhalten:

$$-\frac{Q}{l} - M^A \cdot \beta + M^B \cdot \gamma = -M^B \cdot \varepsilon^b. \quad (501)$$

Durch Auflösen des Systems der beiden Gleichungen (495) und (501) erhalten wir nun die gesuchten Stützenmomente  $M^A$  und  $M^B$ , und zwar wie folgt:

Durch Ordnen gehen diese beiden Gleichungen über in:

$$M^A(\alpha + \varepsilon^a) - M^B \cdot \beta = \frac{Q}{l}, \quad (502)$$

$$-M^A \cdot \beta + M^B(\gamma + \varepsilon^b) = \frac{Q}{l}. \quad (503)$$

Durch Division beider Seiten von Gl. (502) und (503) durch  $\beta$  folgt:

$$M^A \cdot \frac{\alpha + \varepsilon^a}{\beta} - M^B = \frac{Q}{l \cdot \beta}, \quad (504)$$

$$-M^A + M^B \cdot \frac{\gamma + \varepsilon^b}{\beta} = \frac{Q}{l \cdot \beta}. \quad (505)$$

Nun ist nach Gl. (4)

$$\frac{\alpha + \varepsilon^a}{\beta} = \frac{l - a}{a}, \quad (506)$$

und analog muß sein:

$$\frac{\gamma + \varepsilon^b}{\beta} = \frac{l - b}{b}. \quad (507)$$

Setzen wir den Wert von Gl. (506) in Gl. (504) und den Wert von Gl. (507) in Gl. (505) ein, so erhalten wir:

$$M^A \cdot \frac{l - a}{a} - M^B = \frac{Q}{l \cdot \beta}, \quad (508)$$

$$-M^A + M^B \cdot \frac{l - b}{b} = \frac{Q}{l \cdot \beta}. \quad (509)$$

Um  $M^B$  zu eliminieren, multiplizieren wir Gl. (508) mit  $\frac{l - b}{b}$  und schreiben Gl. (509) unverändert wieder an; es folgt:

$$M^A \cdot \frac{l - a}{a} \cdot \frac{l - b}{b} - M^B \cdot \frac{l - b}{b} = \frac{Q}{l \cdot \beta} \cdot \frac{l - b}{b}, \quad (510)$$

$$-M^A + M^B \cdot \frac{l - b}{b} = \frac{Q}{l \cdot \beta}. \quad (511)$$

Nun addieren wir die Gln. (510) und (511) und erhalten:

$$M^A \left( \frac{l-a}{a} \cdot \frac{l-b}{b} - 1 \right) = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \left( \frac{l-b}{b} + 1 \right), \quad (512)$$

woraus folgt:

$$M^A \cdot \frac{l^2 - al - bl + ab - ab}{ab} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \cdot \frac{l-b+b}{b} \quad (513)$$

oder:

$$M^A \cdot \frac{l(l-a-b)}{a \cdot b} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \cdot \frac{l}{b}. \quad (514)$$

Nach Multiplikation beider Seiten mit  $\frac{b}{l}$  ergibt sich  $M^A$  zu:

$$M^A = \frac{\varrho}{l \cdot \beta (l-a-b)} \cdot a. \quad (515)$$

Um ferner den gesuchten Wert von  $M^B$  zu erhalten, setzen wir in Gl. (509) den Wert von  $M^A$  aus Hauptformel (515) ein; wir erhalten:

$$-\frac{\varrho}{l \cdot \beta} \cdot \frac{a}{(l-a-b)} + M^B \cdot \frac{l-b}{b} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \quad (516)$$

oder:

$$M^B \cdot \frac{l-b}{b} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \left( 1 + \frac{a}{l-a-b} \right) \quad (517)$$

oder:

$$M^B \cdot \frac{l-b}{b} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \cdot \frac{l-a-b+a}{l-a-b}. \quad (518)$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit  $\frac{b}{l-b}$ , so folgt schließlich:

$$M^B = \frac{\varrho}{l \cdot \beta (l-a-b)} \cdot b. \quad (520)$$

Aus den Gleichungen (515) und (520) ersehen wir, daß der Faktor von  $a$  bzw.  $b$  derselbe und für einen gegebenen Stab konstant ist; daher ist

$$\left. \begin{aligned} M^A &= k \cdot a \\ M^B &= k \cdot b \end{aligned} \right\} \quad (521)$$

worin

$$k = \frac{\varrho}{l \cdot \beta (l-a-b)} \quad (522)$$

und  $a$  und  $b$  die beiden Festpunktabstände des betrachteten Stabes sind.

Aus den Gleichungen (515) und (520) ersehen wir ferner, daß die Stützenmomente eines Stabes, dessen Enden verschoben wurden, proportional der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung  $\varrho$  der Endpunkte dieses Stabes sind, so daß also durch eine Parallelverschiebung des Stabes keine Momente in demselben hervorgerufen werden.

In bezug auf den Drehsinn der Stützenmomente  $M^A$  und  $M^B$  gilt die vorstehend gegebene Regel. Für den Fall, daß man mit Vorzeichen arbeiten will,

sei erwähnt, daß dann vor die rechte Seite der Gleichung (515) das „Minus“- und vor die rechte Seite der Gleichung (520) das „Plus“-Zeichen zu setzen ist, und daß von allen auf der rechten Seite dieser Gleichungen vorkommenden Größen nur die Drehung  $\varrho$  ein Vorzeichen erhält, und zwar „Plus“ bei Rechtsdrehung und „Minus“ bei Linksdrehung. Die Gleichungen (515) und (520) ergeben dann die Stützenmomente in den Stabendquerschnitten mit positivem Vorzeichen, wenn diese Momente an den Endquerschnitten des herausgetrennten Stabes rechts (im Sinne des Uhrzeigers) drehen; erhalten wir für die Momente jedoch ein negatives Vorzeichen, so drehen dieselben an den Endquerschnitten des herausgetrennten Stabes links herum (entgegengesetzt dem Uhrzeiger).

Trägt man nun die beiden errechneten Stützenmomente als Ordinaten an den beiden Stäbenden (Fig. 289d) auf, und zwar jeweils an der Zugkante, und verbindet die beiden Endpunkte dieser Ordinaten geradlinig, so erhält man in raschester Weise die Momentenfläche am ganzen Stab. Eine vorhergehende Bestimmung des Momentennullpunktes ist überflüssig; der Abstand desselben von einem Stäbende kann jedoch leicht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke (Fig. 289e) berechnet werden. Ziehen wir  $BA''$  parallel  $A'B'$ , so verhält sich in den beiden ähnlichen Dreiecken  $AA'W$  und  $AA''B$ :

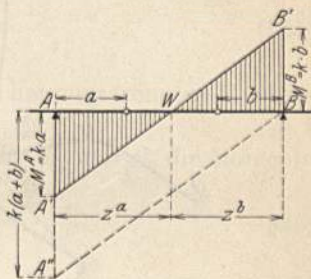


Fig. 289 e.

$$z^a : l = k \cdot a : k(a + b),$$

woraus

$$z^a = \frac{a \cdot l}{a + b}; \quad (522 a)$$

analog erhält man:

$$z^b = \frac{b \cdot l}{a + b}. \quad (522 b)$$

## 2. Momente $M_{(\varrho)}$ , welche durch die Verschiebungen $AA'$ und $BB'$ der Endpunkte des Stabes $AB$ in allen übrigen Stäben des Tragwerkes entstehen.

Nach Ermittlung der Momente  $M^A$  und  $M^B$  mittels der Hauptformeln (515) und (520) in den Endquerschnitten desjenigen Stabes  $AB$ , dessen gegenseitige rechtwinklige Endpunktverschiebung  $\varrho$  betrachtet wurde, verbleibt jetzt noch die Bestimmung der Momente in allen übrigen Stäben infolge dieser Verschiebung  $\varrho$ .

Nachdem die Formänderungen des Tragwerkes infolge der Verschiebung  $\varrho$  des Stabes  $AB$  vollendet sind und die Momente  $M^A$  und  $M^B$  in den Endquerschnitten desselben sich ausgebildet haben, können wir diesen Stab herausgeschnitten denken und seine Widerlager  $A$  und  $B$  mit den Stützenmomenten (Einspannmomenten)  $M^A$  und  $M^B$  belasten (Fig. 290). Da alle Knotenpunkte des Tragwerkes in ihren Endlagen in Ruhe sind und sich nicht mehr verschieben,

so kann das Tragwerk nach vollzogener Verschiebung als in seinen Knotenpunkten unverschiebbar, jedoch frei drehbar festgehalten betrachtet werden, und die Momente  $M^A$  und  $M^B$  pflanzen sich daher genau wie im Teil I, Kap. II vorgeführt, über die übrigen Stäbe des Tragwerkes fort.

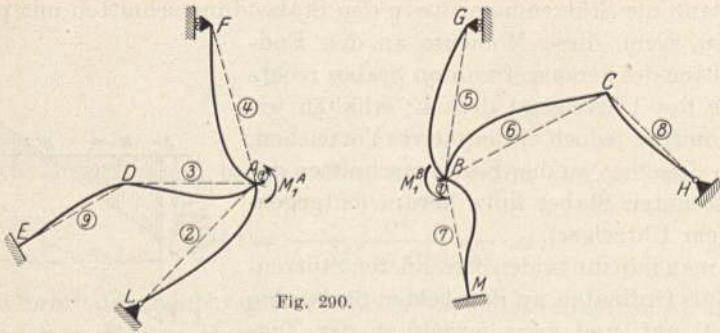


Fig. 200.

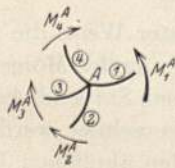


Fig. 201.

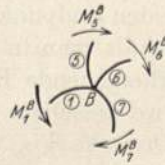


Fig. 201 a.

Durch die Belastung der Widerlager  $A$  und  $B$  des Stabes  $I$  mit den Momenten  $M_1^A$  und  $M_1^B$  entsteht die in Fig. 290 dargestellte Formänderung des Tragwerkes; da wir nur die infolge der Verschiebung der Knotenpunkte  $A$  und  $B$

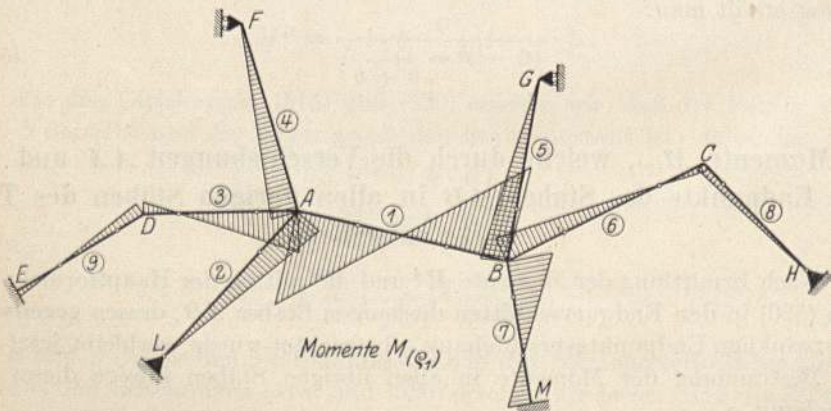


Fig. 292.

im Stab  $I$  auftretenden Momente und die sich von diesem Stab aus über die übrige Konstruktion fortpflanzenden Momente betrachten, so haben wir in Fig. 290 der Einfachheit halber die ursprüngliche (unverschobene) Lage der übrigen Stäbe zugrunde gelegt.

Das Moment  $M_1^A$  erzeugt in den Querschnitten  $A_2, A_3, A_4$  die Momente

$$M_2^A = \mu_{1-2}^A \cdot M_1^A, \quad \text{worin} \quad \mu_{1-2}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_2^A}, \quad (523)$$

$$M_3^A = \mu_{1-3}^A \cdot M_1^A, \quad \text{worin} \quad \mu_{1-3}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_3^A}, \quad (524)$$

$$M_4^A = \mu_{1-4}^A \cdot M_1^A, \quad \text{worin} \quad \mu_{1-4}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_4^A}, \quad (525)$$

deren Drehsinn aus der Gleichgewichtsbedingung am herausgetrennten Knotenpunkt  $A$  (Fig. 291) hervorgeht.

Das Moment  $M_1^B$  erzeugt in den Querschnitten  $B_5, B_6$  und  $B_7$  die Momente

$$M_5^B = \mu_{1-5}^B \cdot M_1^B, \quad \text{worin} \quad \mu_{1-5}^B = \frac{\tau_{5-6-7}^B}{\tau_5^B}, \quad (526)$$

$$M_6^B = \mu_{1-6}^B \cdot M_1^B, \quad \text{worin} \quad \mu_{1-6}^B = \frac{\tau_{5-6-7}^B}{\tau_6^B}, \quad (527)$$

$$M_7^B = \mu_{1-7}^B \cdot M_1^B, \quad \text{worin} \quad \mu_{1-7}^B = \frac{\tau_{5-6-7}^B}{\tau_7^B}, \quad (528)$$

deren Drehsinn aus der Gleichgewichtsbedingung am herausgetrennten Knotenpunkt  $B$  (Fig. 291 a) hervorgeht.

Diese Momente tragen wir in den betreffenden Querschnitten als Ordinaten rechtwinklig zur Stabrichtung auf (stets an die Zugkante) und verbinden den Ordinatenendpunkt mit dem Festpunkt in der Nähe des anderen Stabendes (Fig. 292), wodurch sich die Momente  $M_{(e_1)}$  an den Stäben 2, 3, 4, 5, 6 und 7 ergeben. Die auf diese Weise erhaltenen Momente  $M_3^D$  und  $M_6^C$  pflanzen wir in bekannter Weise noch über den betreffenden anschließenden Stab fort, so daß wir nun die  $M_{(e_1)}$ -Momente am ganzen Tragwerk besitzen.

### 3. Momente $M'$ , welche durch die gleichzeitige Verschiebung aller Knotenpunkte am ganzen Tragwerk entstehen.

Auf dieselbe Weise wie in den vorhergehenden Abschnitten 1 und 2 für den Stab 1 beschrieben, ermitteln wir nacheinander die Momente  $M_{(e_2)}, M_{(e_3)}, M_{(e_4)}, M_{(e_5)}, M_{(e_6)}, M_{(e_7)}, M_{(e_8)}, M_{(e_9)}$  in allen Stäben des Tragwerkes infolge der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen  $q_2, q_3, \dots, q_9$ . Zum Schluß addieren wir die so erhaltenen neun Teilmomentenflächen  $M_{(e_1)}, M_{(e_2)}, \dots, M_{(e_9)}$  in jedem Stab, wodurch wir die  $M'$ -Momentenfläche am ganzen Tragwerk infolge gegebener Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  und infolgedessen gleichzeitig hervorgerufener Verschiebung aller übrigen Knotenpunkte erhalten, welche in Fig. 293 dargestellt ist.

Die Bestimmung der  $M'$ -Momente haben wir der Einfachheit halber am allgemeinen einstöckigen Tragwerk gezeigt. Sowohl am mehrstöckigen Rahmen als auch am Rahmenträger gestaltet sich die Bestimmung der  $M'$ -Momente genau gleich, nachdem alle Verschiebungen  $q$  nach dem im vorhergehenden Kapitel gezeigten Verfahren bestimmt wurden.

#### 4. Erzeugungskraft $Z$ der Momente $M'$ am einstöckigen Rahmen.

Nachdem wir die Momente  $M'$  am allgemeinen einstöckigen Tragwerk der Fig. 293 infolge einer gegebenen Verschiebung, z. B.  $\Delta = 1$  mm, des während R. I festgehaltenen Knotenpunktes oder anschließenden Stabes nach dem Vorhergehenden berechnet haben, bestimmen wir nun, um zu den Momenten  $M^*$  zu gelangen, diejenige Kraft, in Richtung der Verschiebungskraft bzw. der umgekehrten Festhaltungskraft des R. I, welche die gegebene Verschiebung zu erzeugen imstande ist, und dies ist die sog. Erzeugungskraft  $Z$ .

Zur Bestimmung der Erzeugungskraft  $Z$  stellen wir folgende Betrachtung an:

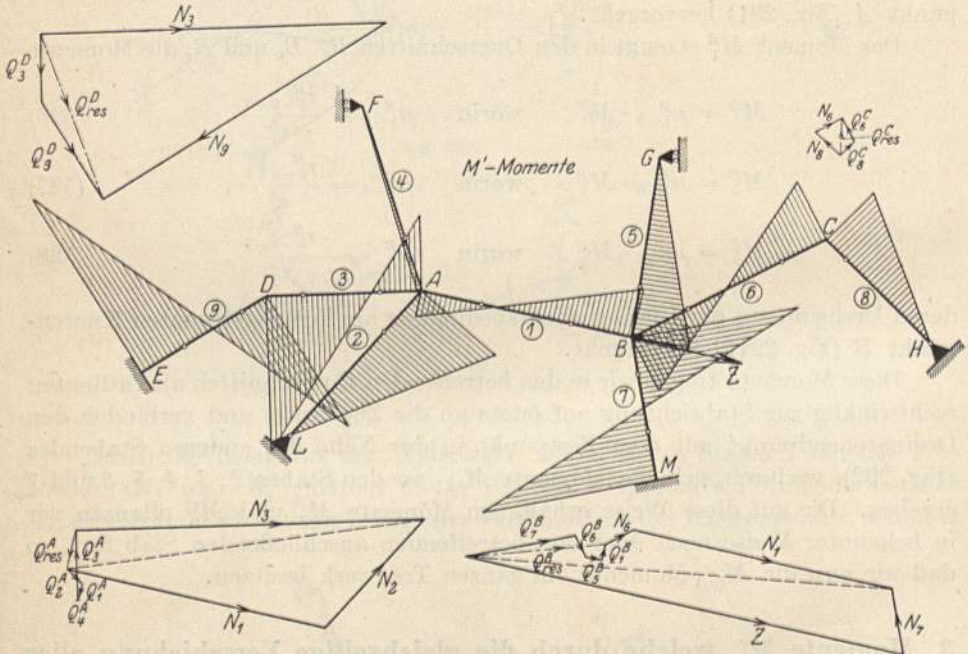


Fig. 293.

Nach vollzogener Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  bzw. des Stabes  $I$  des Tragwerkes der Fig. 293 muß an verschobenen Knotenpunkt bzw. an dem an diesen anschließenden Stab ein gedachtes Lager angebracht werden, damit sich das ganze Tragwerk nicht wieder in seine ursprüngliche Lage zurückverschiebt. Und der in diesem Lager auftretende Auflagerdruck („Reaktion“) ist nun nichts anderes als die zu den Momenten  $M'$  gehörige Erzeugungskraft  $Z$ .

Wir erkennen, daß die Aufgabe der Bestimmung der Erzeugungskraft  $Z$  auf diejenige der Bestimmung der Festhaltungskraft  $F$  (Teil I, Kap. VII) zurückgeführt ist, mit dem die Berechnung vereinfachenden Unterschied, daß bei der Bestimmung der Erzeugungskraft  $Z$  keine äußeren Belastungen zu berücksichtigen sind.

Die Bestimmung der Erzeugungskraft  $Z$  am einstöckigen Tragwerk gestaltet sich daher genau gleich wie diejenige der Festhaltungskraft  $F$  am einstöckigen Tragwerk, welche in Kap. VII, Abschnitt 1 des Teiles I ausführlich behandelt wurde, so daß es sich erübrigt, an dieser Stelle nochmals darauf einzugehen.



### 5. Erzeugungskraft $Z$ der Momente $M'$ und Festhaltungskräfte $D$ am mehrstöckigen Rahmen.

Wie in Kap. I dieses Teiles ausgeführt, benötigen wir zur Bestimmung der Momente  $M^*$  am mehrstöckigen Tragwerk die Momente  $M'$  für so viele Verschiebungszustände, als das Tragwerk Stockwerke besitzt.

Am allgemeinen dreistöckigen Tragwerk der Fig. 294 zum Beispiel müssen wir die Momente  $M'_I$  (Fig. 294a),  $M'_{II}$  (Fig. 294b) und  $M'_{III}$  (Fig. 294c) für die in Fig. 274f bzw. 274h bzw. 274k dargestellten Verschiebungszustände ermitteln, wobei jeweils ein „Stockwerkbalken“ verschoben wird, während die darunterliegenden „Stockwerkbalken“ durch feste oder Rollenlager und die darüberliegenden „Stockwerkbalken“ durch Rollenlager unverschiebbar festgehalten werden.

Um die Momente  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  nach dem folgenden Kapitel bestimmen zu können, benötigen wir aber wie am einstöckigen Rahmen die zu den Momenten  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  gehörigen Erzeugungskräfte  $Z_I$  bzw.  $Z_{II}$  bzw.  $Z_{III}$  in Richtung der

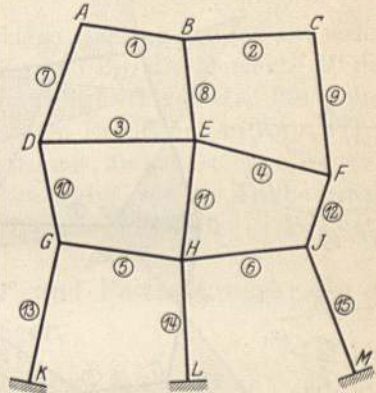


Fig. 294.

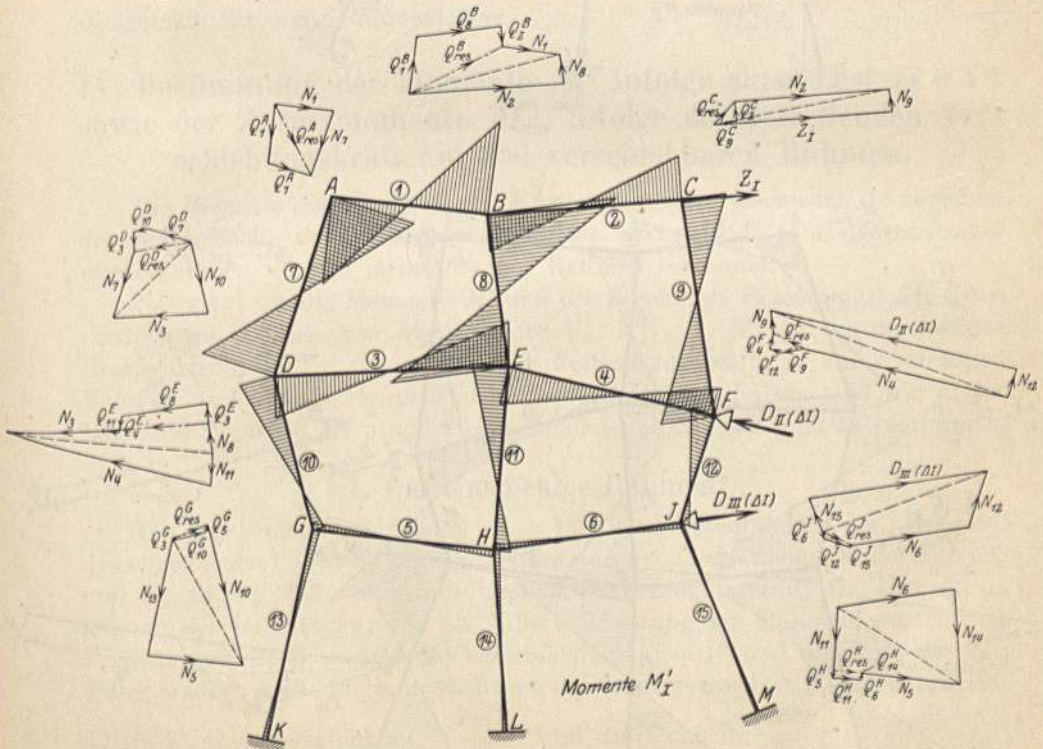


Fig. 294 a.

Die zu den Knotenpunkten  $G$ ,  $H$  u.  $J$  gehörigen Kräftepläne sind in doppelt so großem Maßstab als die übrigen aufgetragen.

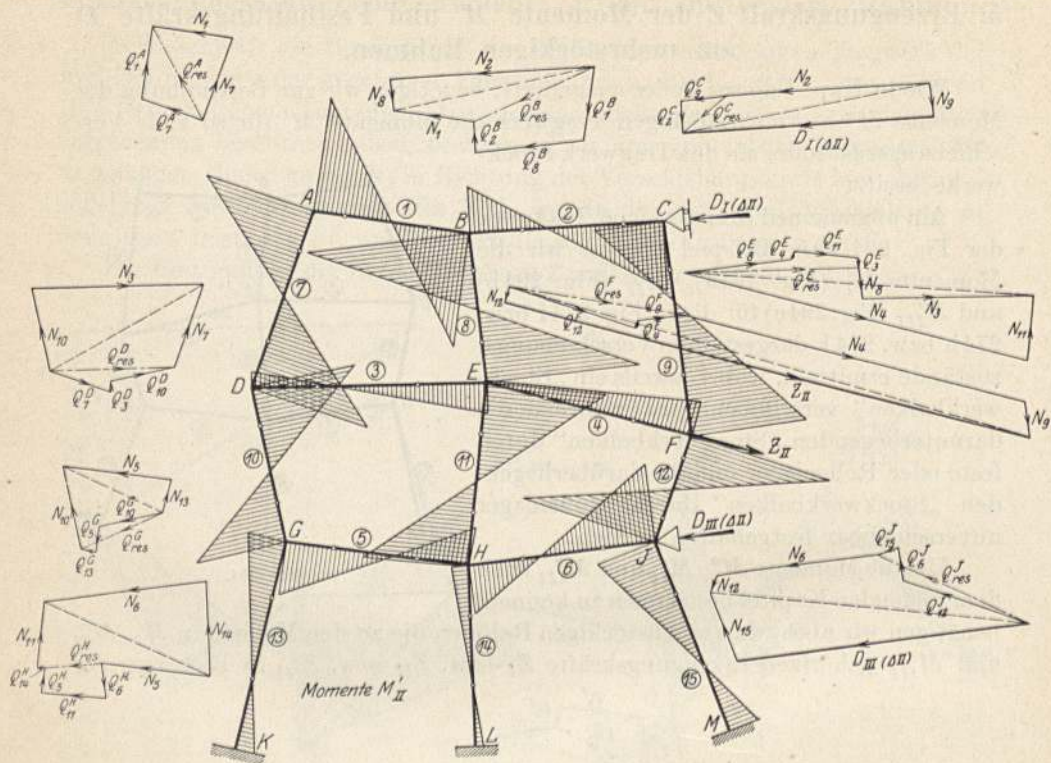


Fig. 204 b.

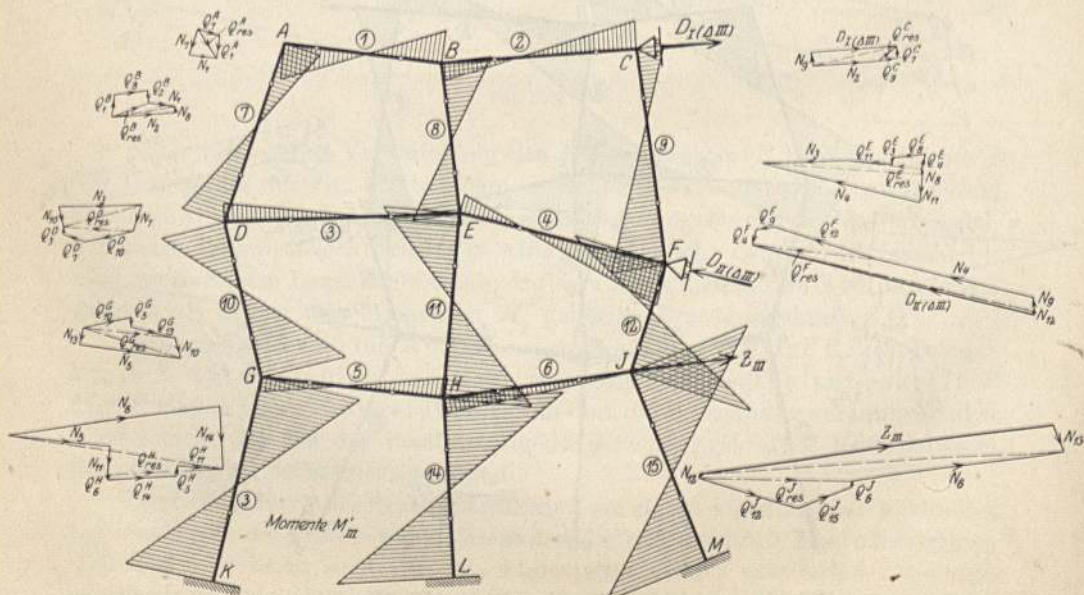


Fig. 204 c.

Festhaltungskraft  $F$  aus R. I an dem betreffenden Stockwerkbalken. Außerdem müssen wir noch für jeden Verschiebungszustand diejenigen Kräfte ermitteln, welche bei Wirkung der Erzeugungskraft gleichzeitig an den übrigen Stockwerkbalken, die gemäß Voraussetzung durch feste bzw. Rollenlager unverschiebbar festgehalten werden, auftreten; diese Kräfte sind die sog. Festhaltungskräfte  $D$  des R. II.

Aus demselben Grunde wie beim einstöckigen Rahmen werden am mehrstöckigen Rahmen die Erzeugungskräfte  $Z_I, Z_{II}$  und  $Z_{III}$  der Momente  $M'$  des betreffenden Verschiebungszustandes genau gleich (Fig. 294a, 294b und 294c) wie die Festhaltungskräfte  $F$  des R. I, deren Ermittlung in Kap. VII, 2 des Teiles I ausführlich behandelt wurde, bestimmt; ferner ist ohne weiteres klar, daß die Festhaltungskräfte  $D$  auch genau gleich wie die Festhaltungskräfte  $F$  des R. I erhalten werden.

## 6. Erzeugungskraft $Z$ der Momente $M'$ und Festhaltungskräfte $D$ am Rahmenträger.

Da die Berechnung des beispielsweise in Fig. 295 dargestellten Rahmenträgers sich analog wie diejenige des mehrstöckigen Rahmens gestaltet, so gilt das unter 5 Gesagte auch sinngemäß für den Rahmenträger.

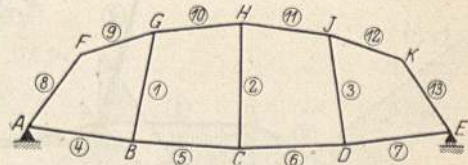


Fig. 295.

## IV. Bestimmung der Momente $M^*$ infolge einer Last $H = 1 \text{ t}$ sowie der Zusatzmomente $M_{\text{zus}}$ infolge der betreffenden Verschiebungskraft am frei verschiebbaren Rahmen.

Die Bestimmung der Momente  $M^*$  gestaltet sich verschieden, je nachdem der Rahmen ein- oder mehrstöckig ist; die Momente  $M^*$  am Rahmenträger werden analog wie am mehrstöckigen Rahmen berechnet.

Nachdem wir die Momente  $M'$  und die zugehörige Erzeugungskraft  $Z$  am einstöckigen Rahmen bzw. die Momente  $M'_I, M'_{II}, \dots M'_n$  und die zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z_I, Z_{II} \dots Z_n$  und Festhaltungskräfte  $D$  am  $n$ -stöckigen Rahmen nach dem vorhergehenden Kapitel ermittelt haben, sind wir in der Lage, die Momente  $M^*$  an dem betreffenden Rahmen wie folgt zu bestimmen.

### 1. Der einstöckige Rahmen\*).

Der gegebenen Verschiebung „ $\Delta = 1$ “ eines Knotenpunktes des „Balkens“ des allgemeinen Rahmens der Fig. 296 entsprechen die Momente  $M'$  der Fig. 293 und die in Fig. 293a ermittelte zugehörige Erzeugungskraft  $Z$ . Umgekehrt können wir jetzt sagen: Die als äußere Belastung am Rahmen angebrachte Erzeugungskraft  $Z$  erzeugt die Verschiebung „ $\Delta = 1$ “ und die Momente  $M'$ ; daher erzeugt eine äußere, in Richtung der Erzeugungskraft  $Z$  wirkende Kraft „ $H = 1$ “ eine Verschiebung „ $\Delta = 1$ “ und die Momente  $\frac{M'}{Z}$ .

\*) Vgl. Dr.-Ing. Max Ritter: Der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen, Schweiz. Bauzeitung, Band 57, Heft 4.

Nachdem wir also die Momente  $M'$  am Rahmen infolge der Verschiebung „ $\Delta = 1$ “ ermittelt haben, erhalten wir durch Multiplikation derselben mit dem Faktor  $\frac{1}{Z}$  die gesuchten Momente  $M^*$  am einstöckigen Rahmen, welche wir in Fig. 296 dargestellt haben d. h.

$$M^* = \frac{M'}{Z} \quad (529)$$

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Momente  $M^*$  nur abhängig von den Abmessungen eines Rahmens sind, und daher für einen gegebenen Rahmen feste Werte haben; diese Tatsache vereinfacht die Berechnung eines Rahmens für mehrere Belastungsfälle wesentlich.

Die Zusatzmomente  $M_{\text{zus}}$  für jeden Belastungsfall erhalten wir durch Multiplikation der Momente  $M^*$  mit der betreffenden Verschiebungskraft  $V$ ,

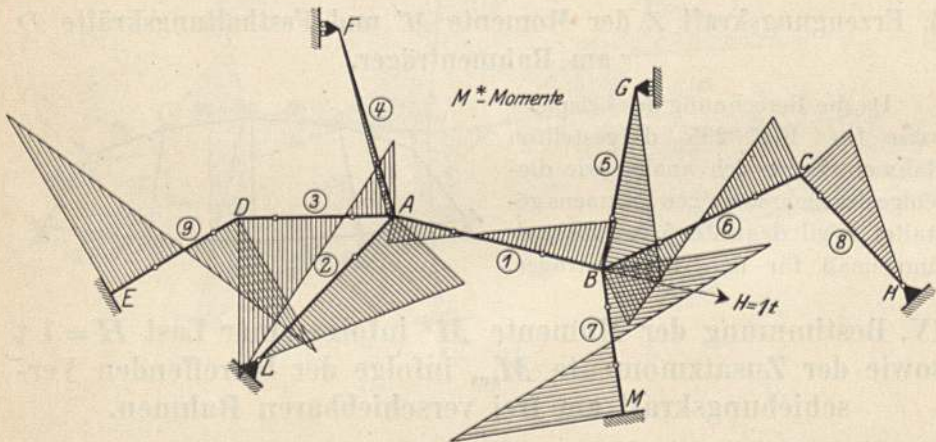


Fig. 296.

Die  $M^*$ -Momente sind 5 mal kleiner aufgetragen als die  $M'$ -Momente (Fig. 293).

welche gleich und entgegengesetzt ist der aus R. I gewonnenen Festhaltungskraft  $F$  für den betreffenden Belastungsfall; d. h. es ist am einstöckigen Rahmen

$$M_{\text{zus}} = V \cdot M^* \quad (529a)$$

worin  $V$  mit seinem Vorzeichen (von links nach rechts gerichtet positiv) einzusetzen ist.

Nachstehend seien noch die Werte der

Momente  $M^*$  am einfachen symmetrischen Rahmen mit geradem Balken

angegeben. Das Trägheitsmoment  $J_b$  des Balkens mit der Stützweite  $l$  sei konstant; beide Pfeiler haben gleiche Höhe  $h$  sowie gleiches konstantes Trägheitsmoment  $J_s$ , und die starre Strecke  $f$  der Pfeilerhöhe wird vernachlässigt. Ferner setzen wir:

$$\frac{J_b}{J_s} = n.$$

Am einfachen Rahmen mit Einspannung an den Pfeilerfüßen (Fig. 297)

ist:

$$M_1^{A*} = M_3^{D*} = -\frac{h(l + 3hn)}{2(l + 6hn)}, \quad (530)$$

$$M_2^{B*} = M_1^{C*} = +\frac{3h^2n}{2(l + 6hn)}, \quad (531)$$

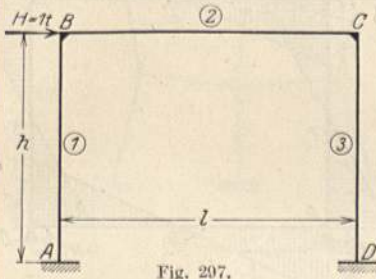


Fig. 297.

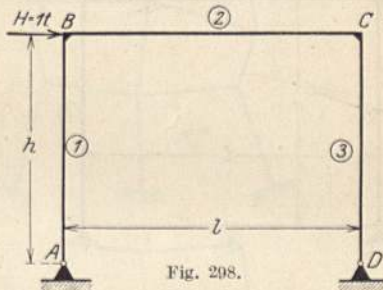


Fig. 298.

$$M_2^{C*} = -\frac{3h^2n}{2(l + 6hn)}, \quad (532)$$

$$M_3^{C*} = +\frac{3h^2n}{2(l + 6hn)}. \quad (533)$$

In Fig. 297a wurden diese Momente aufgetragen.

Am einfachen Rahmen mit Fußgelenken (Fig. 298)

ist:

$$M_1^{A*} = M_3^{D*} = 0, \quad (534)$$

$$M_2^{B*} = M_1^{C*} = +\frac{h}{2}, \quad (535)$$

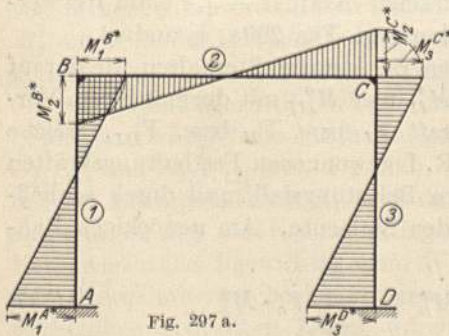


Fig. 297 a.

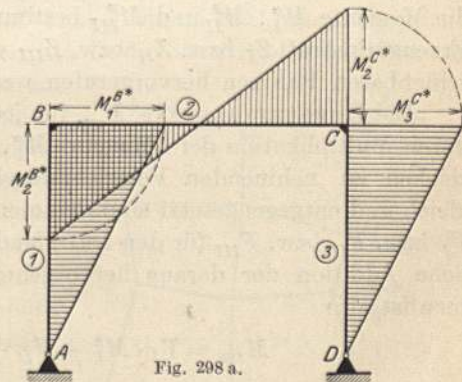


Fig. 298 a.

$$M_2^{C*} = -\frac{h}{2}, \quad (536)$$

$$M_3^{C*} = +\frac{h}{2}. \quad (536a)$$

In Fig. 298a wurden diese Momente aufgetragen.

Am symmetrischen geschlossenem Rahmen (Fig. 298b) sind alle Eckmomente ihrem absoluten Werte nach gleich

$$\frac{h}{4}$$

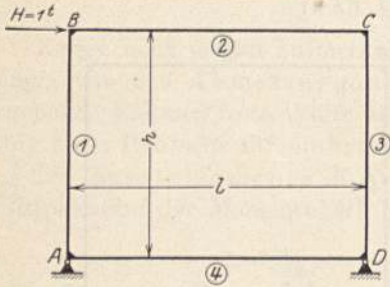


Fig. 298 b.

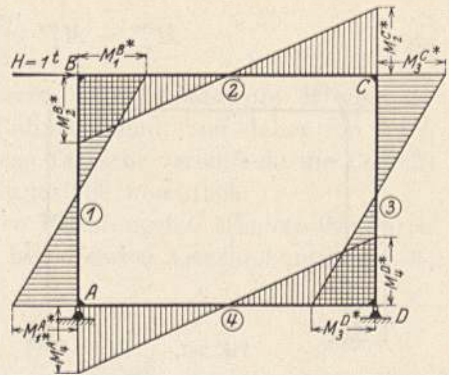


Fig. 298 c.

und die Vorzeichen der einzelnen Eckmomente gehen aus der in Fig. 298 c aufgetragenen Momentenfläche hervor.

## 2. Der mehrstöckige Rahmen.

Da die Zusatzmomente am mehrstöckigen Rahmen, wie in Kap. I dieses Teiles ausgeführt wurde, durch ebensoviele Verschiebungskräfte  $V$  hervorgerufen werden, als Stockwerke vorhanden sind, so müssen wir zur Bestimmung derselben auch ebensoviele Momentenflächen  $M^*$  ermitteln.

Am allgemeinen mehrstöckigen Rahmen der Fig. 299 müssen wir daher die Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$  bestimmen, welche durch die in Richtung der Erzeugungskraft  $Z_I$  bzw.  $Z_{II}$  bzw.  $Z_{III}$  wirkende Kraft  $H = +1t$  am frei verschiebbaren Rahmen hervorgerufen werden (vgl. Fig. 299a, b und c).

Die Zusatzmomente  $M_{\text{zus}}$  für jeden Belastungsfall erhalten wir darauf durch Multiplikation der Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$  mit der mit ihrem Vorzeichen zu nehmenden Verschiebungskraft  $V_I$  bzw.  $V_{II}$  bzw.  $V_{III}$ , welche gleich und entgegengesetzt sind den aus R. I gewonnenen Festhaltungskräften  $F_I$  bzw.  $F_{II}$  bzw.  $F_{III}$  für den betreffenden Belastungsfall, und durch schließliche Addition der daraus hervorgehenden Momente. Am  $n$ -stöckigen Rahmen ist also

$$M_{\text{zus}} = V_I \cdot M_I^* + V_{II} \cdot M_{II}^* + \dots + V_n \cdot M_n^* , \quad (537)$$

worin  $V_I, V_{II} \dots V_n$  mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind (von links nach rechts gerichtet positiv).

Während wir beim einstöckigen Rahmen die Momente  $M'$  infolge der Verschiebung „ $\Delta = 1$ “ des „Balkens“ nur durch die zugehörige Erzeugungskraft  $Z$  zu dividieren brauchen, um die Momente  $M^*$  zu erhalten, gestaltet sich die Bestimmung der letzteren am mehrstöckigen Rahmen bedeutend verwickelter.

a) Bestimmung der Momente  $M_I^*$ .

Zur Bestimmung der Momente  $M_I^*$  verschieben wir, wie beim einstöckigen Rahmen, zunächst den „Stockwerkbalken“ I, an welchem die Last  $H = 1 \text{ t}$

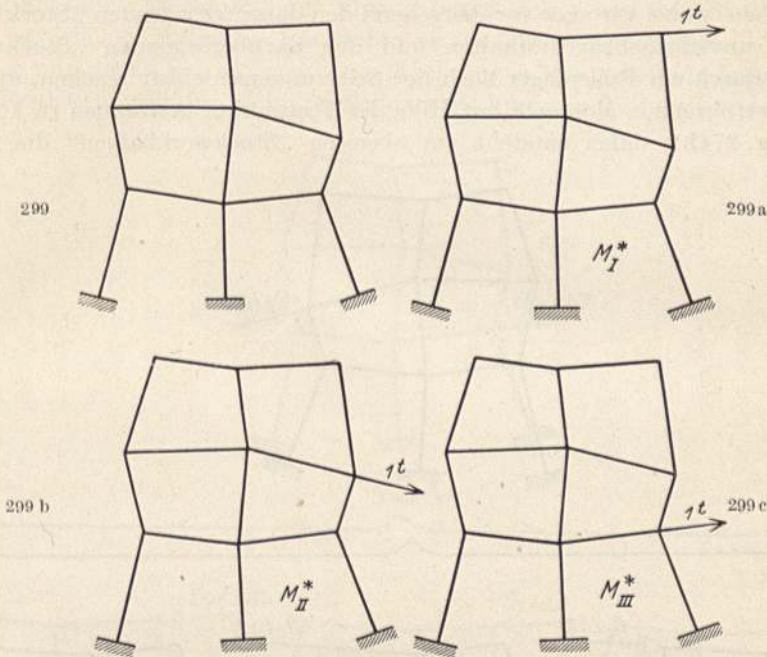


Fig. 299—299 c.

angreift, oder, was gleichbedeutend ist, einen auf demselben liegenden Knotenpunkt, um eine gegebene Strecke, beispielsweise  $\Delta I = 1 \text{ mm}$ , wobei wir aber die darunterliegenden „Stockwerkbalken“ analog wie im Rechnungsabschnitt I vorübergehend unverschiebbar festhalten, um die davon herrührenden Momente  $M_I^*$  mit Hilfe der Festpunkte bestimmen zu können (vgl. Fig. 274f); dabei entstehen in den gedachten Lagern an den beiden unteren „Stockwerkbalken“ die Festhaltungskräfte  $D_{II(\Delta I)}$  und  $D_{III(\Delta I)}$  (vgl. Fig. 300), welche mit der Erzeugungskraft  $Z_I$  und den Reaktionen an den natürlichen Auflagern des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den beiden unteren Stockwerkbalken gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte  $D$  in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten  $M_I^*$  aus Verschiebungszustand I

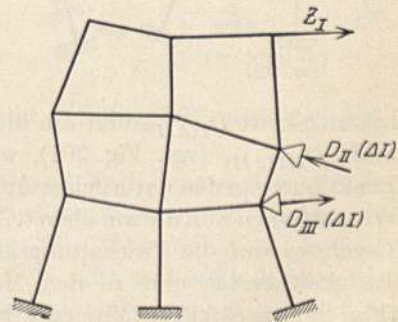


Fig. 300.

(Fig. 300) zusätzliche Momente hervorrufen. Die Momente  $M_I^*$  setzen sich also aus den Momenten für die in den Fig. 300, 300a und 300b dargestellten Belastungszustände zusammen.

Um aber die Momente für den in Fig. 300a dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den mittleren „Stockwerkbalken“, oder, was gleichbedeutend ist, einen auf demselben liegenden Knotenpunkt, an welchem die Belastung angreift, wieder zunächst um eine gegebene Strecke, z. B.  $\Delta = 1$  mm, verschieben, wobei wir aber vorübergehend den darunterliegenden „Stockwerkbalken“ unverschiebbar festhalten und den darüberliegenden „Stockwerkbalken“ durch ein Rollenlager nach der Seite unverschiebbar machen, um die davon herrührenden Momente mit Hilfe der Festpunkte bestimmen zu können (vgl. Fig. 274h); dabei entsteht am obersten „Stockwerkbalken“ die Fest-

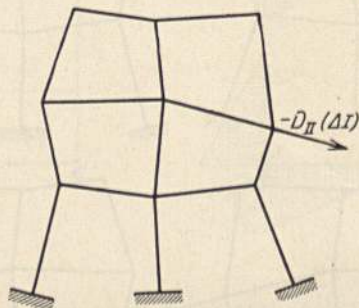


Fig. 300 a.

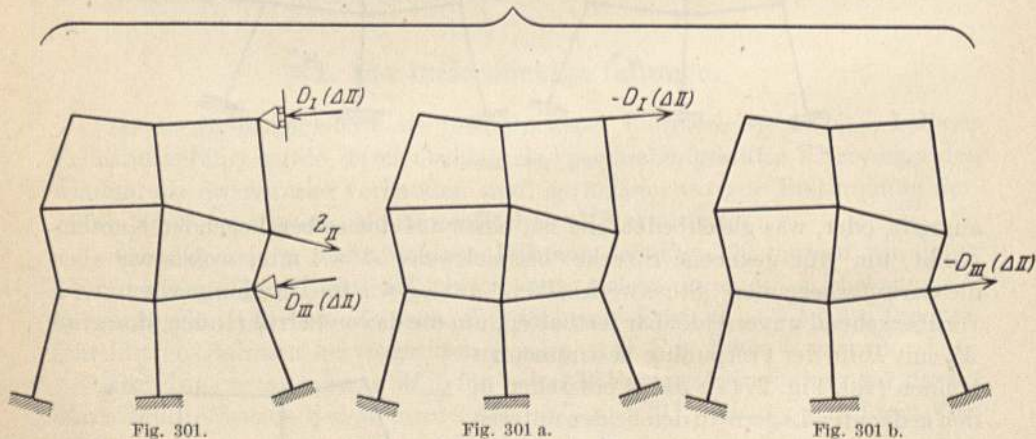


Fig. 301.

Fig. 301 a.

Fig. 301 b.

haltungskraft  $D_I(\Delta II)$ , und am untersten „Stockwerkbalken“ die Festhaltungskraft  $D_{III}(\Delta II)$  (vgl. Fig. 301), welche mit der Erzeugungskraft  $Z_{II}$  und den Reaktionen an den natürlichen Auflagern des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die am obersten und untersten „Stockwerkbalken“ gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte  $D$  wieder in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten  $M'_{II}$  aus Verschiebungszustand  $II$  (Fig. 301) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 301 a und b).

Um ferner die Momente für den in Fig. 300 b dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den untersten „Stockwerkbalken“, an welchem die Belastung angreift, oder was gleichbedeutend ist, einen auf demselben liegenden Knotenpunkt, wieder zunächst um eine gegebene Strecke, z. B.  $\Delta = 1$  mm, verschieben, wobei wir aber die beiden darüberliegenden „Stockwerkbalken“



durch Rollenlager nach der Seite unverschiebbar gestalten, um die davon herührenden Momente mit Hilfe der Festpunkte bestimmen zu können (Fig. 274 k); dann sind an den beiden festgehaltenen „Stockwerkbalken“ nach Wegnahme der Rollenlager die Festhaltungskräfte  $D_{I(\Delta III)}$  und  $D_{II(\Delta III)}$  anzubringen (vgl. Fig. 302), welche mit der Erzeugungskraft  $Z_{III}$  und den Reaktionen an den natürlichen Auflagern des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den beiden oberen Stockwerkbalken gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte  $D$  in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu

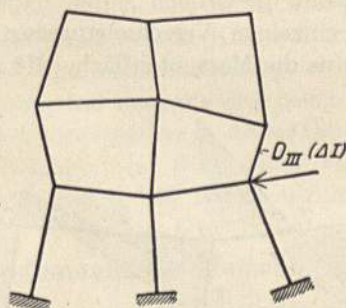


Fig. 300 b.

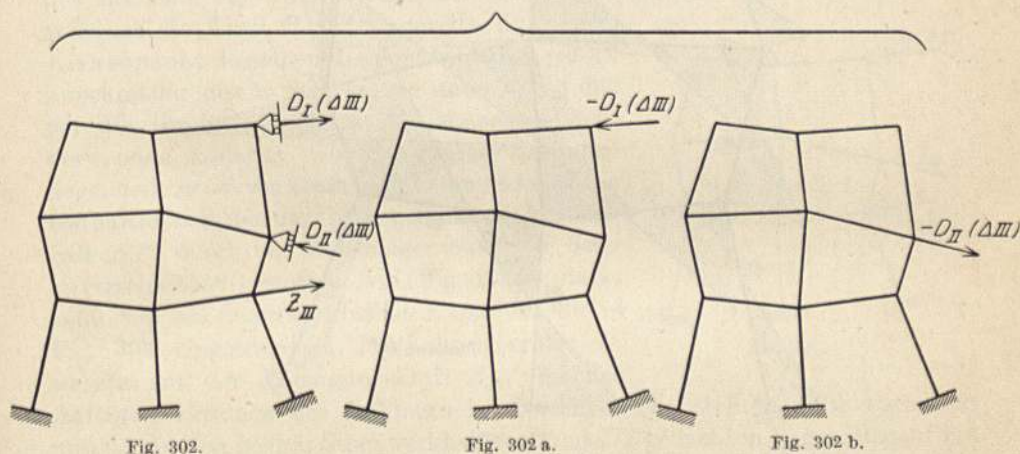


Fig. 302.

Fig. 302 a.

Fig. 302 b.

den Momenten  $M'_{III}$  aus Verschiebungszustand  $III$  (Fig. 302) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 302a und b).

Wir haben nun von den in Fig. 300, 300a und 300b dargestellten drei Belastungszuständen, welche zusammen die gesuchten Momente  $M^*_I$  liefern, den Zustand der Fig. 300a durch die in den Fig. 301, 301a und 301b, und den Zustand der Fig. 300b durch die in den Fig. 302, 302a und 302b dargestellten Belastungszustände ersetzt. Aus diesen letzteren Figuren ersehen wir, daß der Zustand der Fig. 301a wieder durch die Zustände der Fig. 300, 300a und 300b, der Zustand der Fig. 301b durch die Zustände der Fig. 302, 302a und 302b, der Zustand der Fig. 302a wieder durch die Zustände der Fig. 300, 300a und 300b und der Zustand der Fig. 302b durch die Zustände der Fig. 301, 301a und 301b ersetzt werden kann.

Wir erkennen daraus, daß die Gleichung für das Moment  $M_I^*$  in irgendeinem Querschnitt des Rahmens die Form hat:

$$M_I^* = X_{I(I)} \cdot M'_I + X_{II(I)} \cdot M'_{II} + X_{III(I)} \cdot M'_{III}, \quad (538)$$

worin  $X_{I(I)}$ ,  $X_{II(I)}$  und  $X_{III(I)}$  die unbekanntnen Maßzahlen der zu den einzelnen Verschiebungszuständen gehörigen Momente  $M'$  bei Bestimmung der Momente  $M_I^*$  sind, die nun zu bestimmen sind.

Aus obiger Hauptgleichung für das Moment  $M_I^*$  in irgendeinem Rahmenquerschnitt geht hervor, daß die Größen  $X$  den Maßstab angeben, in welchem die Momente  $M'$  der einzelnen Verschiebungszustände übereinandergelegt werden müssen, um daraus die Momentenfläche  $M^*$  zu erhalten. Würden wir

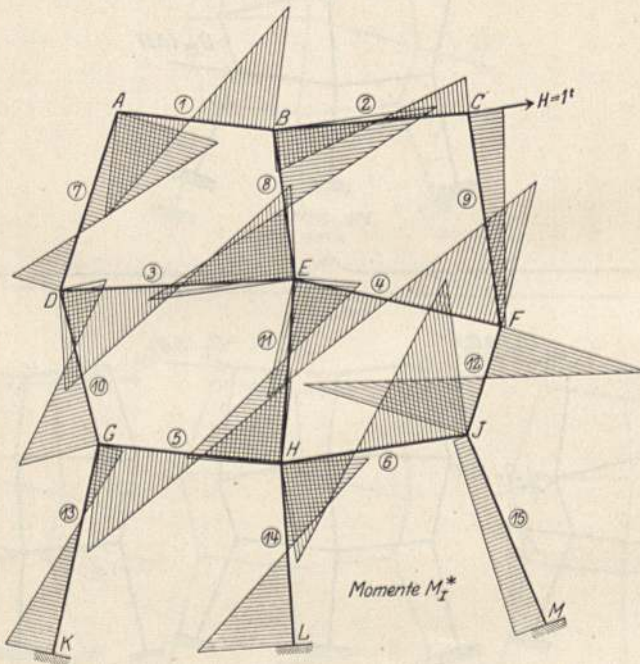


Fig. 302 c.

in vorliegendem Falle die Momentenflächen  $M'_I$  (Fig. 300),  $M'_{II}$  (Fig. 301) und  $M'_{III}$  (Fig. 302) in gleichem Maßstab übereinanderlegen, d. h. algebraisch addieren, so würden sich auch die in diesen Figuren eingetragenen Kräfte an den einzelnen „Stockwerkträgern“ addieren. Nun wissen wir aber aus Kap. V, 5 (Rechnungsproben), daß die aus den Momenten für den frei verschiebbaren Rahmen infolge  $H = 1 \text{ t}$  am Balken I gewonnene Reaktion eines gedachten Lagers

am „Stockwerkträger“, an welchem die Kraft  $H = 1 \text{ t}$  angreift, gleich dieser Kraft, und

an jedem Stockwerkträger, an welchem die Kraft  $H = 1 \text{ t}$  nicht angreift, gleich Null sein muß.

Daraus ergeben sich nun zur Ermittlung der drei Maßzahlen  $X_{I(I)}$ ,  $X_{II(I)}$  und  $X_{III(I)}$  zur Bestimmung der Momente  $M_I^*$  die drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X_{I(I)} \cdot Z_I &+ X_{II(I)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(I)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 1 \\ X_{I(I)} \cdot D_{II(\Delta I)} + X_{II(I)} \cdot Z_{II} &+ X_{III(I)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 0 \\ X_{I(I)} \cdot D_{III(\Delta I)} + X_{II(I)} \cdot D_{III(\Delta II)} + X_{III(I)} \cdot Z_{III} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (539)$$

Es sei noch erwähnt, daß die Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$ , aus denen sich die Kräfte  $Z$  und  $D$  ergeben, auf Grund von verschiedenen großen Verschiebungen ermittelt sein können; die Hauptsache ist, daß sich bei den einzelnen Verschiebungszuständen (Fig. 300, 301 und 302) die Kräfte  $Z$  und  $D$  mit den Reaktionen in den Auflagerpunkten des Rahmens im Gleichgewicht befinden. Es sei aber darauf aufmerksam gemacht, daß man die gegebenen Verschiebungen zweckmäßig bei allen Verschiebungszuständen in derselben Richtung annimmt, weil sonst beim Anschreiben der Gln. (539) leicht Vorzeichenverwechslungen vorkommen können. Die Momente  $M_I^*$  haben wir in Fig. 302c dargestellt.

### b) Bestimmung der Momente $M_{II}^*$ .

Die Bestimmung der Momente  $M_{II}^*$  gestaltet sich analog wie diejenige der Momente  $M_I^*$ . Wir verschieben zunächst den „Stockwerkbalken II“, an welchem die Kraft  $H = 1 \text{ t}$  angreift, d. h. einen Knotenpunkt desselben um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleiche Strecke wie unter a) (so daß wir die bereits ermittelte  $M_{II}^*$ -Momentenfläche verwenden können), wobei wir den darunterliegenden „Stockwerkbalken III“ unverschiebbar festhalten und den darüberliegenden „Stockwerkbalken I“ durch ein Rollenlager nach der Seite unverschiebbar gestalten (vgl. Fig. 274h); dabei entstehen am Stockwerkbalken I und III die in Fig. 303 eingetragenen Festhaltungskräfte  $D$ , welche mit der Erzeugungskraft  $Z_{II}$  und den

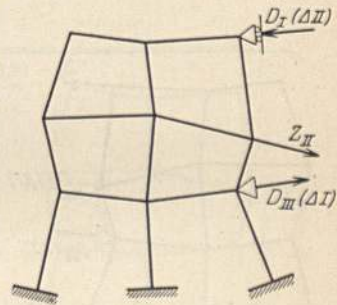


Fig. 303.

Auflagerreaktionen des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den beiden Stockwerkbalken I und III gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte  $D$  in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten  $M_{II}^*$  aus Verschiebungszustand II (Fig. 303) zusätzliche Momente hervorrufen. Die Momente  $M_{II}^*$  setzen sich also aus den Momenten für die in den Fig. 303, 303a und 303b dargestellten Belastungszustände zusammen.

Um aber die Momente für den in Fig. 303a dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den Stockwerkbalken I bzw. einen Knotenpunkt desselben, wieder zunächst um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleiche Strecke wie unter a) verschieben, wobei wir die beiden darunterliegenden Stockwerkbalken II und III unverschiebbar festhalten (vgl. Fig. 274f); dabei entstehen an diesen beiden Stockwerkbalken die in Fig. 304 eingetragenen Festhaltungskräfte  $D$ , welche mit der Erzeugungskraft  $Z_I$  und den Auflagerreaktionen des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den Stockwerkbalken II und III gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte  $D$

wieder in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten  $M'_I$  aus Verschiebungszustand *I* (Fig. 304) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 304a und b).

Um ferner die Momente für den in Fig. 303b dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den Stockwerkbalken *III*, an welchem die Belastung angreift, bzw. einen Knotenpunkt desselben, um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleiche Strecke wie unter a), verschieben, wobei wir die beiden darüberliegenden Stockwerkbalken *I* und *II* durch Rollenlager nach der Seite unverschiebbar gestalten (vgl. Fig. 274k); dann sind an den beiden festgehaltenen Stockwerkbalken nach Wegnahme der Rollenlager die in Fig. 305

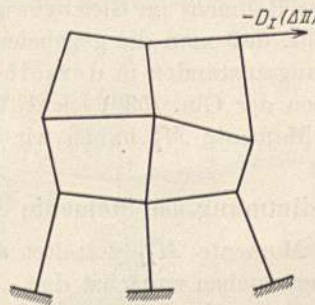


Fig. 303 a.

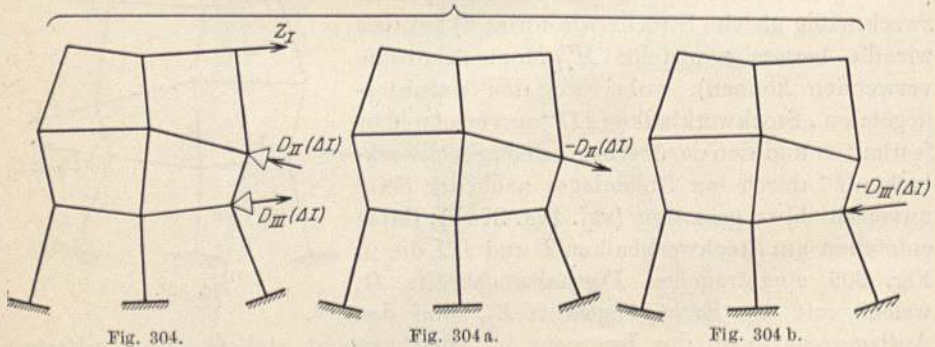


Fig. 304.

Fig. 304 a.

Fig. 304 b.

eingetragenen Festhaltungskräfte  $D$  anzubringen, welche mit der Erzeugungskraft  $Z_{III}$  und den Auflagerreaktionen des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den Stockwerkbalken *I* und *II* gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte  $D$  in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten  $M'_{III}$  aus Verschiebungszustand *III* (Fig. 305) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 305a und b).

Wir erkennen, daß die Momente  $M''_{II}$  wie die Momente  $M'_I$  sich aus den Momenten  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  für die Verschiebungszustände *I*, *II* und *III* zusammensetzen, und daß die Gleichung für das Moment  $M''_{II}$  in irgend-einem Querschnitt des Rahmens daher ebenfalls die Form hat:

$$M''_{II} = X_{I(II)} \cdot M'_I + X_{II(II)} \cdot M'_{II} + X_{III(II)} \cdot M'_{III}, \quad (540)$$

worin  $X_{I(II)}$ ,  $X_{II(II)}$  und  $X_{III(II)}$  andere Maßzahlen als diejenigen in Gl. (538) bedeuten.

Die Größen  $X$  geben wieder den Maßstab an, in welchem die Momentenflächen  $M_I$ ,  $M_{II}$  und  $M_{III}$  übereinandergelegt werden müssen. Da laut Kap. V, 5 die aus den Momenten für den frei verschiebbaren Rahmen infolge  $H = 1$  t am Balken  $II$  gewonnene Reaktion eines gedachten Lagers

am Stockwerkbalken, an welchem die Kraft  $H = 1$  t angreift, gleich dieser Kraft, und

an jedem Stockwerkbalken, an welchem die Kraft  $H = 1$  t nicht angreift, gleich Null sein muß,

so ergeben sich zur Ermittlung der drei Maßzahlen  $X_{I(II)}$ ,  $X_{II(II)}$  und  $X_{III(II)}$  zur Bestimmung der Momente  $M_{II}^*$  die 3 Gleichungen:

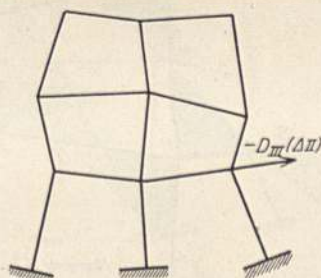


Fig. 303 b.

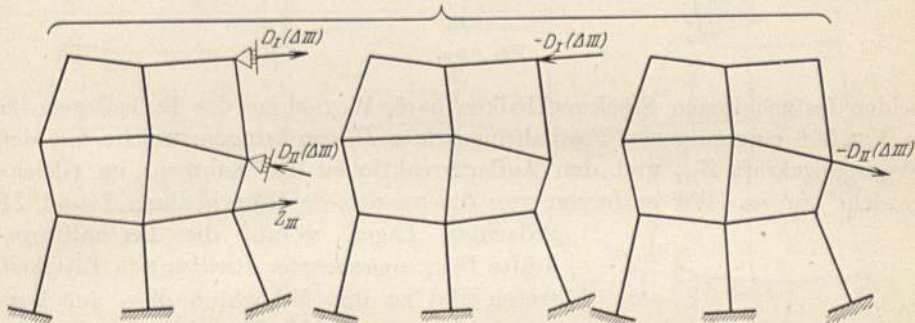


Fig. 305.

Fig. 305 a.

Fig. 305 b.

$$\left. \begin{aligned} X_{I(II)} \cdot Z_I &+ X_{II(II)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(II)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 0 \\ X_{I(II)} \cdot D_{II(\Delta I)} + X_{II(II)} \cdot Z_{II} &+ X_{III(II)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 1 \\ X_{I(II)} \cdot D_{III(\Delta I)} + X_{II(II)} \cdot D_{III(\Delta II)} &+ X_{III(II)} \cdot Z_{III} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (541)$$

In diesem System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten sind die linken Seiten genau gleich wie im System der Gln. (539), was die Auflösung derselben vereinfacht; dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß als  $M'$ -Momentenflächen dieselben verwendet werden, wie bei Bestimmung der Momente  $M_I^*$ . Die Momente  $M_{II}^*$  haben wir in Fig. 305 c dargestellt.

### e) Bestimmung der Momente $M_{III}^*$ .

Die Bestimmung der Momente  $M_{III}^*$  gestaltet sich analog wie diejenige der Momente  $M_I^*$  und  $M_{II}^*$ . Wir verschieben zunächst den Stockwerkbalken  $III$ , an welchem die Kraft  $H = 1$  t angreift, bzw. einen Knotenpunkt desselben,

um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleiche Strecke wie unter a) (so daß wir die bereits ermittelte  $M'_{III}$ -Momentenfläche verwenden können), wobei wir die beiden darüberliegenden Stockwerkbalken *I* und *II* durch Rollenlager nach der Seite unverschiebbar festhalten (vgl. Fig. 274k); dann sind an den

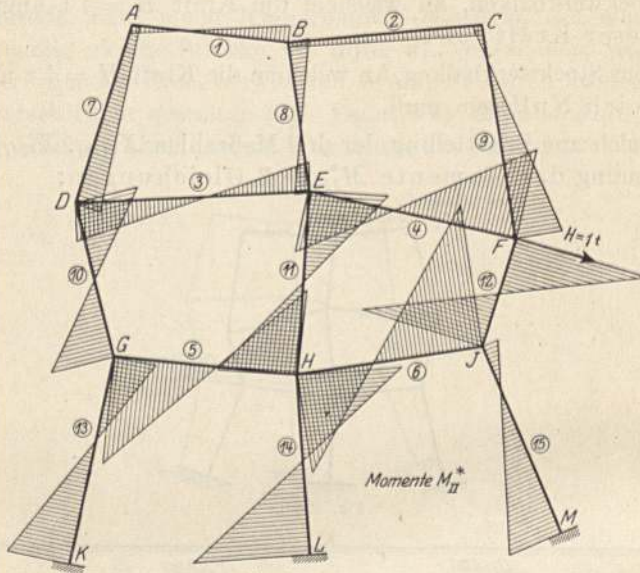


Fig. 305 c.

beiden festgehaltenen Stockwerkbalken nach Wegnahme der Rollenlager die in Fig. 306 eingetragenen Festhaltungskräfte  $D$  anzubringen, welche mit der Erzeugungskraft  $Z_{III}$  und den Auflagerreaktionen des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den Stockwerkbalken *I* und *II*

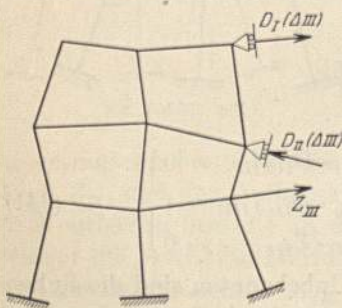


Fig. 306.

gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte  $D$  in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten  $M'_{III}$  aus Verschiebungszustand *III* (Fig. 306) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 306a und b). Die Momente  $M^*_{III}$  setzen sich also aus den Momenten für die in den Fig. 306, 306a und 306b dargestellten Belastungszustände zusammen.

Um aber die Momente für den in Fig. 306a dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den Stockwerkbalken *I* bzw. einen Knotenpunkt desselben wieder zunächst um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleiche Strecke wie unter a) verschieben, wobei wir die beiden darunterliegenden Stockwerkbalken *II* und *III* unverschiebbar festhalten (vgl. Fig. 274f); dabei entstehen an diesen beiden Stockwerkbalken die in Fig. 307 eingetragenen Festhaltungskräfte  $D$ , welche mit der Erzeugungskraft  $Z_I$  und den Auflagerreaktionen des Rahmens im Gleichgewicht stehen: Wir entfernen nun die an den Stockwerkbalken *II* und *III* gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte  $D$  wieder in umgekehrter Richtung in

Tätigkeit treten und zu den Momenten  $M'_I$  aus Verschiebungszustand  $I$  (Fig. 307) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 307a und b).

Um ferner die Momente für den in Fig. 306b dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den Stockwerkbalken  $II$ , an welchem die Belastung angreift, bzw. einen Knotenpunkt desselben, um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleich groß wie unter a) gewählte Strecke verschieben, wobei wir den darunterliegenden Stockwerkbalken  $III$  unverschiebbar festhalten, und den darüberliegenden Stockwerkbalken  $I$  durch ein Rollenlager nach der Seite unverschiebbar machen (vgl. Fig. 274h); dabei entstehen am Stockwerk-

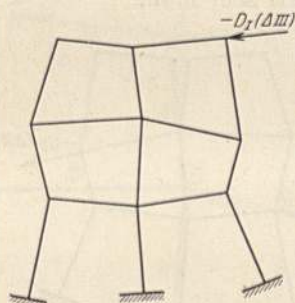


Fig. 306 a.

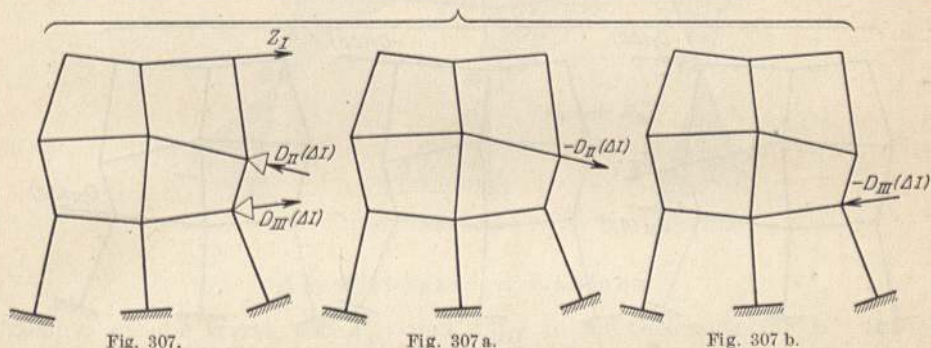


Fig. 307.

Fig. 307 a.

Fig. 307 b.

balken  $I$  und  $III$  die in Fig. 308 eingetragenen Festhaltungskräfte  $D$ , welche mit der Erzeugungskraft  $Z_{II}$  und den Auflagerreaktionen des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den beiden Stockwerkbalken  $I$  und  $III$  gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte  $D$  in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten, und zu den Momenten  $M'_{II}$  aus Verschiebungszustand  $II$  (Fig. 308) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 308a und b).

Wir erkennen nun, daß die Momente  $M^*_{III}$  wie die Momente  $M'_I$  und  $M^*_{II}$  sich aus den Momenten  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  für die Verschiebungszustände  $I$ ,  $II$  und  $III$  zusammensetzen, und daß die Gleichung für das Moment  $M^*_{III}$  in irgendeinem Querschnitt des Rahmens daher ebenfalls die Form hat:

$$M^*_{III} = X_{I(III)} \cdot M'_I + X_{II(III)} \cdot M'_{II} + X_{III(III)} \cdot M'_{III}, \quad (542)$$

worin  $X_{I(III)}$ ,  $X_{II(III)}$  und  $X_{III(III)}$  jedoch wieder andere Maßzahlen als diejenigen in Gl. (538) und (540) sind.

Die Größen  $X$  geben wieder den Maßstab an, in welchem die Momentenflächen  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  übereinandergelegt werden müssen. Da laut Kap. V, 5 die aus den Momenten für den frei verschiebbaren Rahmen infolge  $H = 1$  t am Balken *III* gewonnene Reaktion eines gedachten Lagers

am Stockwerkbalken, an welchem die Kraft  $H = 1$  t angreift, gleich dieser Kraft, und

an jedem Stockwerkbalken, an welchem die Kraft  $H = 1$  t nicht angreift, gleich Null sein muß,

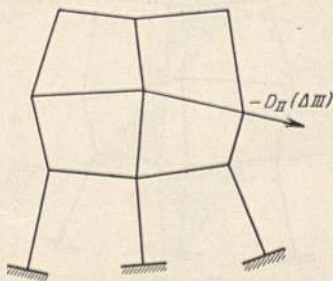


Fig. 306 b.

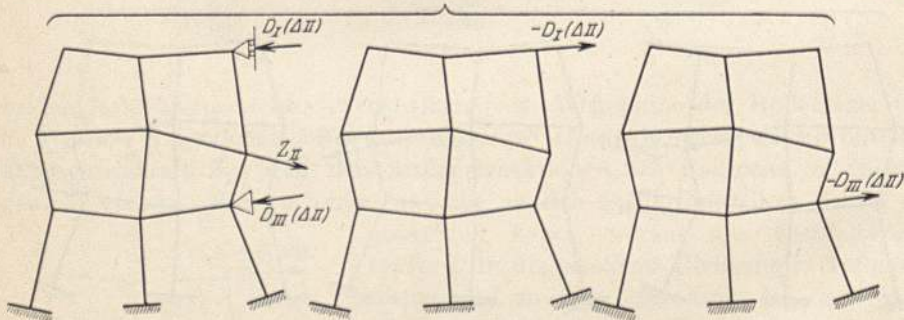


Fig. 308.

Fig. 308 a.

Fig. 308 b.

so ergeben sich zur Ermittlung der drei Maßzahlen  $X_{I(III)}$ ,  $X_{II(III)}$  und  $X_{III(III)}$  zur Bestimmung der Momente  $M'_{III}$ , welche wir in Fig. 308 c dargestellt haben, die 3 Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X_{I(III)} \cdot Z_I &+ X_{II(III)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(III)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 0 \\ X_{I(III)} \cdot D_{II(\Delta I)} + X_{II(III)} \cdot Z_{II} &+ X_{III(III)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 0 \\ X_{I(III)} \cdot D_{III(\Delta I)} + X_{II(III)} \cdot D_{III(\Delta II)} &+ X_{III(III)} \cdot Z_{III} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (543)$$

In diesem System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten sind die linken Seiten wieder gleich wie in den beiden Gleichungssystemen (539) und (541), was die Auflösung derselben vereinfacht; dabei ist natürlich wieder vorausgesetzt, daß als  $M'$ -Momentenflächen dieselben verwendet werden wie bei Bestimmung der Momente  $M'_I$  und  $M'_{II}$ .



Wir können daher die 3 Gleichungssysteme (539), (541) und (543) in folgender abgekürzter Form schreiben:

			Zur Bestimmung von		
			$M_I^*$	$M_{II}^*$	$M_{III}^*$
$X_I \cdot Z_I$	$+ X_{II} \cdot D_{I(\Delta II)}$	$+ X_{III} \cdot D_{I(\Delta III)}$	= 1	0	0
$X_I \cdot D_{II(\Delta I)}$	$+ X_{II} \cdot Z_{II}$	$+ X_{III} \cdot D_{II(\Delta III)}$	= 0	1	0
$X_I \cdot D_{III(\Delta I)}$	$+ X_{II} \cdot D_{III(\Delta II)}$	$+ X_{III} \cdot Z_{III}$	= 0	0	1

Bezüglich der Vorzeichen gilt das beim  $n$ -stöckigen Rahmen Gesagte. —

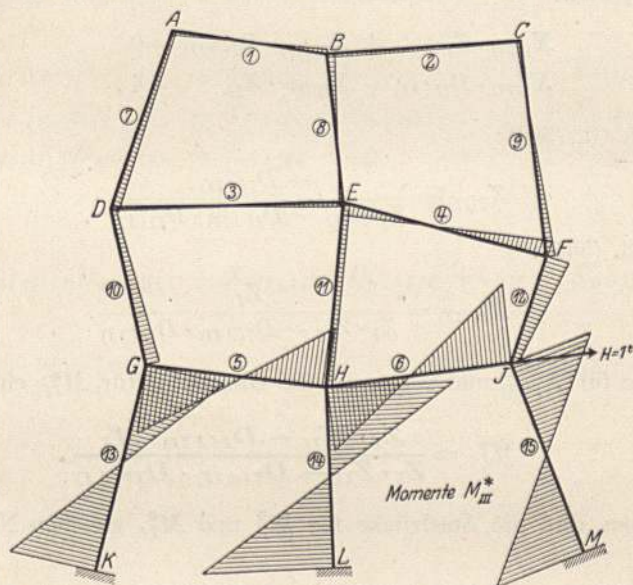


Fig. 308 c.

### Am 2-stöckigen Rahmen

können wir die Werte von  $X_{I(I)}$  und  $X_{II(I)}$  in die Gleichung für  $M_I^*$  sowie  $X_{I(II)}$  und  $X_{II(II)}$  in die Gleichung für  $M_{II}^*$  einsetzen, wodurch wir geschlossene Ausdrücke für  $M_I^*$  und  $M_{II}^*$  an zweistöckigen Rahmen erhalten.

Nach Gl. (538) ist:

$$M_I^* = X_{I(I)} \cdot M_I' + X_{II(I)} \cdot M_{II}'.$$

Die beiden Maßzahlen  $X_{I(I)}$  und  $X_{II(I)}$  erhalten wir nach Gl. (539) aus dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} X_{I(I)} \cdot Z_I + X_{II(I)} \cdot D_{I(\Delta II)} &= 1, \\ X_{I(I)} \cdot D_{II(\Delta I)} + X_{II(I)} \cdot Z_{II} &= 0, \end{aligned}$$

woraus nach Gl. (554)

$$X_{I(I)} = \frac{Z_{II}}{Z_I \cdot Z_{II} - D_{I(\Delta II)} \cdot D_{II(\Delta I)}},$$

und nach Gl. (555):

$$X_{II(I)} = \frac{-D_{II(\Delta I)}}{Z_I \cdot Z_{II} - D_{I(\Delta II)} \cdot D_{II(\Delta I)}}.$$





**Größen  $D$ :** Der erste Index  $I, II \dots n$  deutet an, daß die betreffende Festhaltungskraft  $D$  in dem gedachten Lager am I., II., ...  $n$ -ten Stockwerk auftritt. Der zweite, in Klammer gesetzte Index  $\Delta I, \Delta II, \dots \Delta n$  deutet an, daß die betreffende Festhaltungskraft  $D$  sich auf den Verschiebungszustand  $I, II, \dots n$  bezieht, d. h. aus der Momentenfläche  $M'_I, M'_{II} \dots M'_n$  gewonnen wurde.

Was die Vorzeichen der Größen  $Z$  und  $D$  betrifft, so gilt folgendes:

Wir bezeichnen die von links nach rechts verlaufende Richtung der gegebenen Kraft  $H = 1 \text{ t}$ , welche die betreffenden Momente  $M^*$  hervorruft, als positiv. Dann ist laut Kap. V, 5 (Rechnungsproben) die aus den betreffenden Momenten  $M^*$  gewonnene Reaktion eines gedachten Lagers am durch  $H = 1 \text{ t}$  belasteten Stockwerkbalken, welches denselben nach Wegnahme dieser Belastung in Ruhe hält, ebenfalls positiv, also auf der rechten Seite der betreffenden Gleichung mit  $+1$  einzusetzen. An den unbelasteten Stockwerkbalken muß die aus denselben Momenten gewonnene Reaktion eines an ihnen angebrachten gedachten Lagers gleich Null sein. Damit auf der rechten Seite der betreffenden Gleichung in allen Gleichungssystemen der Wert  $+1$  erscheint, lassen wir zweckmäßig an allen Stockwerkbalken die Kraft  $H = 1 \text{ t}$  in der gleichen Richtung angreifen, und zwar der Einfachheit halber von links nach rechts.

Eine Verschiebung eines Stockwerkbalkens in Richtung der auf den Rahmen wirkenden Kräfte  $H = 1 \text{ t}$  betrachten wir naturgemäß ebenfalls als positiv, und es ist einleuchtend, daß wir, um bei Aufstellung der Gleichungssysteme keine Vorzeichenumkehrungen vornehmen zu müssen, zweckmäßig jeden Stockwerkbalken in derselben Richtung verschieben, und zwar in der Richtung der auf den Rahmen wirkenden Kräfte  $H = 1 \text{ t}$ .

Entsprechend der Vorzeichenannahme für die Richtung der Kraft  $H = 1 \text{ t}$ , bezeichnen wir die Reaktionen  $Z$  und  $D$  als positiv, wenn sie von links nach rechts gerichtet sind, und diese Kräfte sind mit ihren Vorzeichen in die Gleichungssysteme einzusetzen.

Es ist selbstverständlich, daß man allen Gleichungssystemen dieselben Momentenflächen  $M'_I, M'_{II} \dots M'_n$  zugrunde legt.

Die aus den  $n$  Gleichungssystemen gewonnenen Maßzahlen  $X$  werden mit ihren Vorzeichen in die Gleichungen für  $M^*_I, M^*_{II}, \dots M^*_n$  eingesetzt.

An mehrstöckigen Rahmen, die in Kap. I, 2 dieses Teiles unter Sonderfälle aufgeführt wurden, vertreten die Stelle der Stockwerkbalken bzw. je einer daraufliegenden Knotenpunktes diejenigen Knotenpunkte, welche während Rechnungsabschnitt I festgehalten werden müssen, und es gilt dabei für diese alles, was für die Stockwerkbalken bzw. je einen daraufliegenden Knotenpunkt des gewöhnlichen Stockwerkrahmens gesagt wurde. —

In obigen  $n$  Systemen von  $n$  Gleichungen mit  $n$  Unbekannten  $X$  (Maßzahlen) haben letztere gleiche Koeffizienten  $Z$  und  $D$ , was die Auflösung der  $n$  Systeme vereinfacht. Ferner ist in jedem Gleichungssystem das Absolutglied

einer Gleichung gleich 1, und dasjenige aller übrigen Gleichungen gleich Null; und zwar ist

im I. System (für  $M_I^*$ ) das Absolutglied der I. Gl. gleich eins  
 „ II. „ (für  $M_{II}^*$ ) „ „ „ II. „ „ „ „  
 „ III. „ (für  $M_{III}^*$ ) „ „ „ III. „ „ „ „  
 . . . . .  
 . . . . .  
 „  $n^{\text{ten}}$  „ (für  $M_n^*$ ) „ „ „  $n^{\text{ten}}$  „ „ „ „

Zur Berechnung eines mehrstöckigen Rahmens haben wir ebensoviele Gleichungssysteme mit ebensovielen Unbekannten aufzulösen, als Stockwerke vorhanden sind, da wir die Momentenflächen  $M^*$  für ebensoviele Belastungszustände  $H = 1 \text{ t}$  des frei verschiebbaren Rahmens benötigen. Eine Ausnahme machen nur die „nach der Seite“ mehrstöckigen Rahmen mit Zugbändern, bei welchen mehr  $M^*$ -Momente zu bestimmen, dafür z. T. Systeme mit weniger Gleichungen aufzulösen sind (vgl. Rahmen der Fig. 245).

### Die Auflösung

der  $n$  Systeme von  $n$  linearen Gleichungen mit  $n$  Unbekannten kann als bekannt vorausgesetzt werden; da das vorliegende Werk jedoch vor allem dem in der Praxis stehenden Ingenieur dienen soll, so werden folgende Hinweise gegeben (vgl. Foerster, Taschenbuch für Bauingenieure, 2. Aufl., S. 47–49).

Die Auflösung kann erfolgen

- a) mittels Determinanten oder
- b) mittels Elimination oder
- c) auf graphischem Wege (siehe Mehmke, Leitfaden zum Graphischen Rechnen, 1915).

Das gebräuchlichste Verfahren ist dasjenige der

### Determinanten.

Um z. B. ein System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

aufzulösen, bildet man zuerst die Nennerdeterminante  $N$ , welche für  $x$ ,  $y$  und  $z$  dieselbe ist, aus den Koeffizienten der Glieder mit Unbekannten in der Reihenfolge, wie sie in der Gleichung stehen, also

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = N \quad (550)$$

Die Zählerdeterminanten erhält man dadurch, daß man in der Nennerdeterminante die  $a$ , die  $b$  oder die  $c$  durch  $d$  ersetzt, je nachdem es sich

um die Berechnung der Zählerdeterminante für  $x$ , für  $y$  oder für  $z$  handelt. Dann ist:

$$x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : N \quad (551)$$

$$y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} : N \quad (552)$$

$$z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} : N \quad (553)$$

Der Wert einer Determinante wird meistens nach dem allgemeinen Satz über die Auflösung von Determinanten durch fortgesetzte Zerlegung in Unterdeterminanten berechnet; es lautet dieser

**Satz:** Eine  $n$ -reihige Determinante ist die algebraische Summe von  $n$  Produkten, deren erste Faktoren die  $n$  Elemente einer beliebigen wagrechten oder senkrechten Reihe, und deren zweite Faktoren die  $n$  Unterdeterminanten von  $(n - 1)$  Reihen, für deren Bildung aus der ursprünglichen Determinante je die beiden Reihen zu streichen sind, in welcher der erste Faktor steht; die Produkte sind abwechselungsweise positiv und negativ zu nehmen.

Es ist daher:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &\text{oder} = c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 & a_2 \\ c_3 & d_3 & a_3 \\ c_4 & d_4 & a_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 & b_2 \\ d_3 & c_3 & b_3 \\ d_4 & c_4 & b_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \\ &\text{oder} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 & d_3 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_4 & c_4 & d_4 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ferner hat man folgende

**Nebensätze:** 1°. Bei Vertauschung einer Zeile (wagrechte Reihe) und einer Kolonne (senkrechte Reihe) ändert die Determinante ihren Wert nicht,

$$\text{also: } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2°. Bei Vertauschung zweier paralleler Reihen (wagrechte oder senkrechte) behält die Determinante denselben absoluten Wert, ändert aber ihr Vorzeichen,

$$\text{z. B. } \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 c_1 b_1 \\ a_2 c_2 b_2 \\ a_3 c_3 b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 b_3 c_3 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix}$$

3°. Multipliziert man alle Elemente einer Reihe mit demselben Faktor, so wird dadurch die Determinante selbst mit diesem Faktor multipliziert,

$$\text{z. B. } \begin{vmatrix} -6 & -8 & -3 \\ -12 & -16 & 0 \\ -12 & -29 & -5 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -8 & -3 \\ 2 & -16 & 0 \\ 2 & -29 & -5 \end{vmatrix}$$

4°. Ändert man die Vorzeichen sämtlicher Elemente irgendeiner Reihe, so behält die Determinante denselben absoluten Wert, ändert aber ihre Vorzeichen,

$$\text{z. B. } -6 \begin{vmatrix} 1 & -8 & -3 \\ 2 & -16 & 0 \\ 2 & -29 & -5 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & 16 & 0 \\ 2 & 29 & -5 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 16 & 0 \\ 2 & 29 & 5 \end{vmatrix}$$

Es sei nun auf folgende

#### Reduktions-Sätze

(Schlömilch, Handbuch der Mathematik, 2. Aufl., I. Bd., Erstes Buch, § 39) aufmerksam gemacht, mit deren Hilfe die Berechnung des Wertes einer Determinante sich ganz bedeutend vereinfacht.

1°. Sind alle Elemente einer Reihe (Zeile oder Kolonne) mit Ausnahme eines einzigen gleich Null, so reduziert sich die Determinante auf das Produkt dieses einen Elementes mit der zu ihm gehörigen Unterdeterminante.

$$\text{So ist z. B. } \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{ebenso } \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ 0 & b_2 c_2 \\ 0 & b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} \quad (553a)$$

2°. Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man in dem System der Elemente an Stelle jedes Gliedes einer beliebigen Reihe (Zeile oder Kolonne) die Summe desselben Gliedes und des Produktes des entsprechenden Gliedes einer parallelen Reihe mit demselben beliebigen Faktor setzt.

Also z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ (a_2 + k \cdot a_1) & (b_2 + k \cdot b_1) & (c_2 + k \cdot c_1) \\ (a_3 + m \cdot a_1) & (b_3 + m \cdot b_1) & (c_3 + m \cdot c_1) \end{vmatrix} \quad (553b)$$

Wählen wir nun die Werte  $k$  und  $m$  derart, daß

$$a_2 + k \cdot a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 + m \cdot a_1 = 0,$$

also

$$k = -\frac{a_2}{a_1} \quad \text{und} \quad m = -\frac{a_3}{a_1},$$

so reduzieren wir damit die Determinante auf diejenige der Gl. (553a), auf welche wir den Reduktionssatz 1 anwenden können und erhalten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & (b_2 + k \cdot b_1) & (c_2 + k \cdot c_1) \\ 0 & (b_3 + m \cdot b_1) & (c_3 + m \cdot c_1) \end{vmatrix} = a_1 \{ (b_2 + k \cdot b_1) (c_3 + m \cdot c_1) - (b_3 + m \cdot b_1) (c_2 + k \cdot c_1) \} \quad (553c)$$

Diese Beziehung verwendet man zweckmäßig beim Auflösen von Gleichungen mittels der Determinanten; an Stelle der Zeilen können auch die Kolonnen mit dem beliebigen Faktor multipliziert werden.

Um beispielsweise die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 3 & 11 & 6 \\ 4 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

zu berechnen, kann man die erste Zeile der Reihe nach mit  $-2$ ,  $-3$  und  $-4$  multiplizieren und dann entsprechend zu der zweiten, dritten und vierten Kolonne addieren; die Faktoren schreiben wir zweckmäßig in die Flucht derjenigen Reihe, zu welcher das Produkt addiert werden soll. Man erhält dann

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & 3 \\ 0 & -12 & -16 & 0 \\ 0 & -12 & -29 & -5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -6 & -8 & -3 \\ -12 & -16 & 0 \\ -12 & -29 & -5 \end{vmatrix} - 2$$

Multipliziert man jetzt die erste Zeile der neuen Determinante mit  $-2$  und addiert das Produkt zu der zweiten und dritten Zeile, so erhält man

$$\begin{vmatrix} -6 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & +6 \\ 0 & -13 & +1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 0 & +6 \\ -13 & +1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 6 \cdot 13 = -468.$$

Da in der Praxis an mehrstöckigen Tragwerken (auch „nach der Seite“ mehrstöckig) vor allem 2-, 3-, 4- und 5stöckige Rahmen vorkommen, so werden im folgenden noch die Werte der Unbekannten (Maßzahlen) für die zur Berechnung der  $M^*$ -Momente an diesen Rahmen anzuschreibenden

2	Systeme	von	2	Gleichungen	mit	2	Unbekannten,
3	„	„	3	„	„	3	„
4	„	„	4	„	„	4	„
5	„	„	5	„	„	5	„

in geschlossenen Ausdrücken angegeben.



a) 2 Systeme von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 y_1 &= 1 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 1.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_2 + b_1 y_2 &= 0 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{System 2.}$$

Lösung:

$$x_1 = \frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}; \quad y_1 = \frac{-a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (554)$$

$$x_2 = \frac{-b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}; \quad y_2 = \frac{a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (555)$$

b) 3 Systeme von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 &= 1 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 &= 0 \\ a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 1.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 &= 0 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 &= 1 \\ a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 2.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 z_3 &= 0 \\ a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2 z_3 &= 0 \\ a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{System 3.}$$

Lösung:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{X_1}{N}, & y_1 &= \frac{Y_1}{N}, & z_1 &= \frac{Z_1}{N} \\ x_2 &= \frac{X_2}{N}, & y_2 &= \frac{Y_2}{N}, & z_2 &= \frac{Z_2}{N} \\ x_3 &= \frac{X_3}{N}, & y_3 &= \frac{Y_3}{N}, & z_3 &= \frac{Z_3}{N} \end{aligned} \right\} \quad (556)$$

worin:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= +(b_2 c_2 - b_3 c_2) \\ Y_1 &= -(a_2 c_3 - a_3 c_2) \\ Z_1 &= +(a_2 b_3 - a_3 b_2) \end{aligned} \right\} \quad (557)$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= -(b_1 c_3 - b_3 c_1) \\ Y_2 &= +(a_1 c_3 - a_3 c_1) \\ Z_2 &= -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \end{aligned} \right\} \quad (558)$$

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= +(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ Y_3 &= -(a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ Z_3 &= +(a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned} \right\} \quad (559)$$

$$\left. \begin{aligned} N &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \\ &= b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 \\ &= c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + c_3 Z_3 \\ &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \end{aligned} \right\} \quad (560)$$

c) 4 Systeme von 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten.

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1 v_1 &= 1 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 + d_2 v_1 &= 0 \\ a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 + d_3 v_1 &= 0 \\ a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4 v_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 1.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_1 v_2 &= 0 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 + d_2 v_2 &= 1 \\ a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 + d_3 v_2 &= 0 \\ a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4 v_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 2.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 z_3 + d_1 v_3 &= 0 \\ a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2 z_3 + d_2 v_3 &= 0 \\ a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3 + d_3 v_3 &= 1 \\ a_4 x_3 + b_4 y_3 + c_4 z_3 + d_4 v_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 3.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_4 + b_1 y_4 + c_1 z_4 + d_1 v_4 &= 0 \\ a_2 x_4 + b_2 y_4 + c_2 z_4 + d_2 v_4 &= 0 \\ a_3 x_4 + b_3 y_4 + c_3 z_4 + d_3 v_4 &= 0 \\ a_4 x_4 + b_4 y_4 + c_4 z_4 + d_4 v_4 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{System 4.}$$

Lösung:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{X_1}{N}, & y_1 &= \frac{Y_1}{N}, & z_1 &= \frac{Z_1}{N}, & v_1 &= \frac{V_1}{N} \\ x_2 &= \frac{X_2}{N}, & y_2 &= \frac{Y_2}{N}, & z_2 &= \frac{Z_2}{N}, & v_2 &= \frac{V_2}{N} \\ x_3 &= \frac{X_3}{N}, & y_3 &= \frac{Y_3}{N}, & z_3 &= \frac{Z_3}{N}, & v_3 &= \frac{V_3}{N} \\ x_4 &= \frac{X_4}{N}, & y_4 &= \frac{Y_4}{N}, & z_4 &= \frac{Z_4}{N}, & v_4 &= \frac{V_4}{N} \end{aligned} \right\} \quad (561)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= +b_2 \underbrace{(c_3 d_4 - c_4 d_3)}_{=k_2} - b_3 \underbrace{(c_2 d_4 - c_4 d_2)}_{=k_3} + b_4 \underbrace{(c_2 d_3 - c_3 d_2)}_{=k_4} \\ Y_1 &= -a_2 k_2 + a_3 \cdot k_3 - a_4 \cdot k_4 \\ Z_1 &= +d_2 \underbrace{(a_3 b_4 - a_4 b_3)}_{=m_2} - d_3 \underbrace{(a_2 b_4 - a_4 b_2)}_{=m_3} + d_4 \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{=m_4} \\ V_1 &= -c_2 \cdot m_2 + c_3 \cdot m_3 - c_4 \cdot m_4 \end{aligned} \right\} \quad (562)$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= -b_1 \underbrace{(c_3 d_4 - c_4 d_3)}_{=n_1=k_2} + b_3 \underbrace{(c_1 d_4 - c_4 d_1)}_{=n_3} - b_4 \underbrace{(c_1 d_3 - c_3 d_1)}_{=n_4} \\ Y_2 &= +a_1 \cdot n_1 - a_3 \cdot n_3 + a_4 \cdot n_4 \\ Z_2 &= -d_1 \underbrace{(a_3 b_4 - a_4 b_3)}_{=p_1} + d_3 \underbrace{(a_1 b_4 - a_4 b_1)}_{=p_3} - d_4 \underbrace{(a_1 b_3 - a_3 b_1)}_{=p_4} \\ V_2 &= +c_1 \cdot p_1 - c_3 \cdot p_3 + c_4 \cdot p_4 \end{aligned} \right\} \quad (563)$$

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= +b_1 \underbrace{(c_2 d_4 - c_4 d_2)}_{=q_1=k_2} - b_2 \underbrace{(c_1 d_4 - c_4 d_1)}_{=q_2=n_3} + b_4 \underbrace{(c_1 d_2 - c_2 d_1)}_{=q_4} \\ Y_3 &= -a_1 \cdot q_1 + a_2 \cdot q_2 - a_4 \cdot q_4 \\ Z_3 &= +d_1 \underbrace{(a_2 b_4 - a_4 b_2)}_{=r_1} - d_2 \underbrace{(a_1 b_4 - a_4 b_1)}_{=r_2} + d_4 \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{=r_4} \\ V_3 &= -c_1 \cdot r_1 + c_2 \cdot r_2 - c_4 \cdot r_4 \end{aligned} \right\} \quad (564)$$

$$\left. \begin{aligned} X_4 &= -b_1 \underbrace{(c_2 d_3 - c_3 d_2)}_{=s_1} + b_2 \underbrace{(c_1 d_3 - c_3 d_1)}_{=s_2} - b_3 \underbrace{(c_1 d_2 - c_2 d_1)}_{=s_3=q_4} \\ Y_4 &= +a_1 \cdot s_1 - a_2 \cdot s_2 + a_3 \cdot s_3 \\ Z_4 &= -d_1 \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{=t_1} + d_2 \underbrace{(a_1 b_3 - a_3 b_1)}_{=t_2} - d_3 \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{=t_3} \\ V_4 &= +c_1 \cdot t_1 - c_2 \cdot t_2 + c_3 \cdot t_3 \end{aligned} \right\} \quad (565)$$

$$\left. \begin{aligned}
 N &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4; \\
 &= b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 + b_4 Y_4; \\
 &= c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + c_3 Z_3 + c_4 Z_4; \\
 &= d_1 V_1 + d_2 V_2 + d_3 V_3 + d_4 V_4; \\
 &= a_1 (b_2 \cdot k_2 - b_3 \cdot k_3 + b_4 \cdot k_4) \\
 &\quad - a_2 (b_1 \cdot n_1 - b_3 \cdot n_3 + b_4 \cdot n_4) \\
 &\quad + a_3 (b_1 \cdot q_1 - b_2 \cdot q_2 + b_4 \cdot q_4) \\
 &\quad - a_4 (b_1 \cdot s_1 - b_2 \cdot s_2 + b_3 \cdot s_3).
 \end{aligned} \right\} \quad (566)$$

d) 5 Systeme von 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten.

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1 v_1 + e_1 w_1 &= 1 \\
 a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 + d_2 v_1 + e_2 w_1 &= 0 \\
 a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 + d_3 v_1 + e_3 w_1 &= 0 \\
 a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4 v_1 + e_4 w_1 &= 0 \\
 a_5 x_1 + b_5 y_1 + c_5 z_1 + d_5 v_1 + e_5 w_1 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad \text{System 1.}$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_1 v_2 + e_1 w_2 &= 0 \\
 a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 + d_2 v_2 + e_2 w_2 &= 1 \\
 a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 + d_3 v_2 + e_3 w_2 &= 0 \\
 a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4 v_2 + e_4 w_2 &= 0 \\
 a_5 x_2 + b_5 y_2 + c_5 z_2 + d_5 v_2 + e_5 w_2 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad \text{System 2.}$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 z_3 + d_1 v_3 + e_1 w_3 &= 0 \\
 a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2 z_3 + d_2 v_3 + e_2 w_3 &= 0 \\
 a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3 + d_3 v_3 + e_3 w_3 &= 1 \\
 a_4 x_3 + b_4 y_3 + c_4 z_3 + d_4 v_3 + e_4 w_3 &= 0 \\
 a_5 x_3 + b_5 y_3 + c_5 z_3 + d_5 v_3 + e_5 w_3 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad \text{System 3.}$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 x_4 + b_1 y_4 + c_1 z_4 + d_1 v_4 + e_1 w_4 &= 0 \\
 a_2 x_4 + b_2 y_4 + c_2 z_4 + d_2 v_4 + e_2 w_4 &= 0 \\
 a_3 x_4 + b_3 y_4 + c_3 z_4 + d_3 v_4 + e_3 w_4 &= 0 \\
 a_4 x_4 + b_4 y_4 + c_4 z_4 + d_4 v_4 + e_4 w_4 &= 1 \\
 a_5 x_4 + b_5 y_4 + c_5 z_4 + d_5 v_4 + e_5 w_4 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad \text{System 4.}$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 x_5 + b_1 y_5 + c_1 z_5 + d_1 v_5 + e_1 w_5 &= 0 \\
 a_2 x_5 + b_2 y_5 + c_2 z_5 + d_2 v_5 + e_2 w_5 &= 0 \\
 a_3 x_5 + b_3 y_5 + c_3 z_5 + d_3 v_5 + e_3 w_5 &= 0 \\
 a_4 x_5 + b_4 y_5 + c_4 z_5 + d_4 v_5 + e_4 w_5 &= 0 \\
 a_5 x_5 + b_5 y_5 + c_5 z_5 + d_5 v_5 + e_5 w_5 &= 1
 \end{aligned} \right\} \quad \text{System 5.}$$

Lösung:

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 &= \frac{X_1}{N}, & y_1 &= \frac{Y_1}{N}, & z_1 &= \frac{Z_1}{N}, & v_1 &= \frac{V_1}{N}, & w_1 &= \frac{W_1}{N} \\
 x_2 &= \frac{X_2}{N}, & y_2 &= \frac{Y_2}{N}, & z_2 &= \frac{Z_2}{N}, & v_2 &= \frac{V_2}{N}, & w_2 &= \frac{W_2}{N} \\
 x_3 &= \frac{X_3}{N}, & y_3 &= \frac{Y_3}{N}, & z_3 &= \frac{Z_3}{N}, & v_3 &= \frac{V_3}{N}, & w_3 &= \frac{W_3}{N} \\
 x_4 &= \frac{X_4}{N}, & y_4 &= \frac{Y_4}{N}, & z_4 &= \frac{Z_4}{N}, & v_4 &= \frac{V_4}{N}, & w_4 &= \frac{W_4}{N} \\
 x_5 &= \frac{X_5}{N}, & y_5 &= \frac{Y_5}{N}, & z_5 &= \frac{Z_5}{N}, & v_5 &= \frac{V_5}{N}, & w_5 &= \frac{W_5}{N}
 \end{aligned} \right\} \quad (567)$$

hierin ist einzusetzen:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= +b_2 C_1 - b_3 C_2 + b_4 C_3 - b_5 C_4 \\ Y_1 &= -a_2 C_1 + a_3 C_2 - a_4 C_3 + a_5 C_4 \\ Z_1 &= +a_2 C_5 - a_3 C_6 + a_4 C_7 - a_5 C_8 \\ V_1 &= -a_2 C_9 + a_3 C_{10} - a_4 C_{11} + a_5 C_{12} \\ W_1 &= +a_2 C_{13} - a_3 C_{14} + a_4 C_{15} - a_5 C_{16} \end{aligned} \right\} \text{System 1.} \quad (568)$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= -b_1 C_1 + b_3 C_{17} - b_4 C_{18} + b_5 C_{19} \\ Y_2 &= +a_1 C_1 - a_3 C_{17} + a_4 C_{18} - a_5 C_{19} \\ Z_2 &= -a_1 C_5 + a_3 C_{20} - a_4 C_{21} + a_5 C_{22} \\ V_2 &= +a_1 C_9 - a_3 C_{23} + a_4 C_{24} - a_5 C_{25} \\ W_2 &= -a_1 C_{13} + a_3 C_{26} - a_4 C_{27} + a_5 C_{28} \end{aligned} \right\} \text{System 2.} \quad (569)$$

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= +b_1 C_2 - b_2 C_{17} + b_4 C_{29} - b_5 C_{30} \\ Y_3 &= -a_1 C_2 + a_2 C_{17} - a_4 C_{29} + a_5 C_{30} \\ Z_3 &= +a_1 C_6 - a_2 C_{20} + a_4 C_{31} - a_5 C_{32} \\ V_3 &= -a_1 C_{10} + a_2 C_{23} - a_4 C_{33} + a_5 C_{34} \\ W_3 &= +a_1 C_{14} - a_2 C_{26} + a_4 C_{35} - a_5 C_{36} \end{aligned} \right\} \text{System 3.} \quad (570)$$

$$\left. \begin{aligned} X_4 &= -b_1 C_3 + b_2 C_{37} - b_3 C_{38} + b_5 C_{39} \\ Y_4 &= +a_1 C_3 - a_2 C_{37} + a_3 C_{38} - a_5 C_{39} \\ Z_4 &= -a_1 C_7 + a_2 C_{21} - a_3 C_{31} + a_5 C_{40} \\ V_4 &= +a_1 C_{11} - a_2 C_{24} + a_3 C_{33} - a_5 C_{41} \\ W_4 &= -a_1 C_{15} + a_2 C_{27} - a_3 C_{35} + a_5 C_{42} \end{aligned} \right\} \text{System 4.} \quad (571)$$

$$\left. \begin{aligned} X_5 &= +b_1 C_4 - b_2 C_{43} + b_3 C_{44} - b_4 C_{45} \\ Y_5 &= -a_1 C_4 + a_2 C_{43} - a_3 C_{44} + b_4 C_{45} \\ Z_5 &= +a_1 C_8 - a_2 C_{22} + a_3 C_{32} - a_4 C_{40} \\ V_5 &= -a_1 C_{12} + a_2 C_{25} - a_3 C_{34} + a_5 C_{41} \\ W_5 &= +a_1 C_{16} - a_2 C_{28} + a_3 C_{36} - a_5 C_{42} \end{aligned} \right\} \text{System 5.} \quad (572)$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= b_1 c_2 - b_2 c_1 & k_{11} &= d_1 e_2 - d_2 e_1 \\ k_2 &= b_1 c_3 - b_3 c_1 & k_{12} &= d_1 e_3 - d_3 e_1 \\ k_3 &= b_1 c_4 - b_4 c_1 & k_{13} &= d_1 e_4 - d_4 e_1 \\ k_4 &= b_1 c_5 - b_5 c_1 & k_{14} &= d_1 e_5 - d_5 e_1 \\ k_5 &= b_2 c_3 - b_3 c_2 & k_{15} &= d_2 e_3 - d_3 e_2 \\ k_6 &= b_2 c_4 - b_4 c_2 & k_{16} &= d_2 e_4 - d_4 e_2 \\ k_7 &= b_2 c_5 - b_5 c_2 & k_{17} &= d_2 e_5 - d_5 e_2 \\ k_8 &= b_3 c_4 - b_4 c_3 & k_{18} &= d_3 e_4 - d_4 e_3 \\ k_9 &= b_3 c_5 - b_5 c_3 & k_{19} &= d_3 e_5 - d_5 e_3 \\ k_{10} &= b_4 c_5 - b_5 c_4 & k_{20} &= d_4 e_5 - d_5 e_4 \end{aligned} \right\} \quad (573)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= c_3 k_{20} - c_4 k_{19} + c_5 k_{18} & C_{16} &= d_2 k_8 - d_3 k_6 + d_4 k_5 & C_{31} &= b_1 k_{17} - b_2 k_{14} + b_5 k_{11} \\ C_2 &= c_2 k_{20} - c_4 k_{17} + c_5 k_{16} & C_{17} &= c_1 k_{20} - c_4 k_{14} + c_5 k_{13} & C_{32} &= b_1 k_{16} - b_2 k_{13} + b_4 k_{11} \\ C_3 &= c_2 k_{19} - c_3 k_{17} + c_5 k_{15} & C_{18} &= c_1 k_{19} - c_3 k_{14} + c_5 k_{12} & C_{33} &= e_1 k_7 - e_2 k_4 + e_5 k_1 \\ C_4 &= c_2 k_{18} - c_3 k_{16} + c_4 k_{15} & C_{19} &= c_1 k_{18} - c_3 k_{13} + c_4 k_{12} & C_{34} &= e_1 k_6 - e_2 k_3 + e_4 k_1 \\ C_5 &= b_3 k_{20} - b_4 k_{19} + b_5 k_{18} & C_{20} &= b_1 k_{20} - b_4 k_{14} + b_5 k_{13} & C_{35} &= d_1 k_7 - d_2 k_4 + d_5 k_1 \\ C_6 &= b_2 k_{20} - b_4 k_{17} + b_5 k_{16} & C_{21} &= b_1 k_{19} - b_3 k_{14} + b_5 k_{12} & C_{36} &= d_1 k_6 - d_2 k_3 + d_4 k_1 \\ C_7 &= b_2 k_{19} - b_3 k_{17} + b_5 k_{15} & C_{22} &= b_1 k_{18} - b_3 k_{13} + b_4 k_{12} & C_{37} &= c_1 k_{19} - c_3 k_{14} + c_5 k_{12} \\ C_8 &= b_2 k_{18} - b_3 k_{16} + b_4 k_{15} & C_{23} &= e_1 k_{10} - e_4 k_4 + e_5 k_3 & C_{38} &= c_1 k_{17} - c_2 k_{14} + c_5 k_{11} \\ C_9 &= e_3 k_{10} - e_4 k_9 + e_5 k_8 & C_{24} &= e_1 k_9 - e_3 k_4 + e_5 k_2 & C_{39} &= c_1 k_{15} - c_2 k_{12} + c_3 k_{11} \\ C_{10} &= e_2 k_{10} - e_4 k_7 + e_5 k_6 & C_{25} &= e_1 k_8 - e_3 k_3 + e_4 k_2 & C_{40} &= b_1 k_{15} - b_2 k_{12} + b_3 k_{11} \\ C_{11} &= e_2 k_9 - e_3 k_7 + e_5 k_5 & C_{26} &= d_1 k_{10} - d_4 k_4 + d_5 k_3 & C_{41} &= e_1 k_5 - e_2 k_2 + e_3 k_1 \\ C_{12} &= e_2 k_8 - e_3 k_6 + e_4 k_5 & C_{27} &= d_1 k_9 - d_3 k_4 + d_5 k_2 & C_{42} &= d_1 k_5 - d_2 k_2 + d_3 k_1 \\ C_{13} &= d_3 k_{10} - d_4 k_9 + d_5 k_8 & C_{28} &= d_1 k_8 - d_3 k_3 + d_4 k_2 & C_{43} &= c_1 k_{18} - c_2 k_{13} + c_4 k_{12} \\ C_{14} &= d_2 k_{10} - d_4 k_7 + d_5 k_6 & C_{29} &= c_1 k_{17} - c_2 k_{14} + c_5 k_{11} & C_{44} &= c_1 k_{16} - c_2 k_{13} + c_4 k_{11} \\ C_{15} &= d_2 k_9 - d_3 k_7 + d_5 k_5 & C_{30} &= c_1 k_{16} - c_2 k_{13} + c_4 k_{11} & C_{45} &= c_1 k_{15} - c_2 k_{12} + c_3 k_{11} \end{aligned} \right\} \quad (573a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 N &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 ; \\
 &= b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 + b_4 Y_4 + b_5 Y_5 ; \\
 &= c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + c_3 Z_3 + c_4 Z_4 + c_5 Z_5 ; \\
 &= d_1 V_1 + d_2 V_2 + d_3 V_3 + d_4 V_4 + d_5 V_5 ; \\
 &= e_1 W_1 + e_2 W_2 + e_3 W_3 + e_4 W_4 + e_5 W_5 .
 \end{aligned} \right\} \quad (574)$$

### 3. Der Rahmenträger.

Da der Rahmenträger, wie in Kap. I dieses Teiles ausgeführt, für die Berechnung nichts anderes ist wie ein mehrstöckiger Rahmen, so werden die Momente  $M^*$  des Rahmenträgers analog wie im vorhergehenden Abschnitt für den mehrstöckigen Rahmen beschrieben, ermittelt.

Der allgemeine Rahmenträger der Fig. 309 z. B. ist für die Berechnung ein vierstöckiger Rahmen, da an demselben während Rechnungsabschnitt I vier gedachte Lager (Fig. 309a) angebracht werden müssen, um sämtliche Knotenpunkte vorübergehend unverschiebbar festzuhalten. Es sind daher zur Bestimmung der Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$ ,  $M_{III}^*$  und  $M_{IV}^*$  4 Systeme von 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten aufzulösen, deren Koeffizienten sich aus den Momentenflächen  $M'_I$ ,  $M'_{II}$ ,  $M'_{III}$  und  $M'_{IV}$  ergeben, welche für die in den Fig. 284a, 284c, 284e und 284g dargestellten Verschiebungsbilder bestimmt werden.

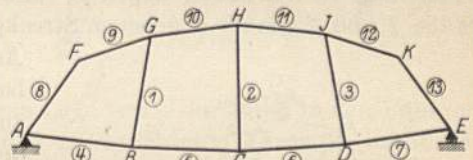


Fig. 309.

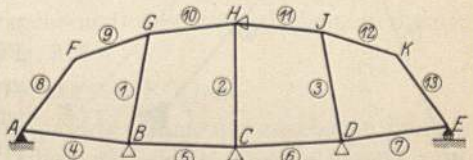


Fig. 309 a.

Die Zusatzmomente  $M_{zus}$  für jeden Belastungsfall erhalten wir darauf durch Multiplikation der Momente  $M^*$  mit der betreffenden Verschiebungskraft  $V$  und Addition der daraus hervorgehenden Momente. —

### V. Bestimmung der Momente infolge einer Temperaturänderung des Baumaterials.

Ändert sich die Temperatur des Baumaterials eines Tragwerkes gegenüber der Herstellungstemperatur, so ändern sich die Längen der einzelnen Stäbe desselben und wir untersuchen nun den Einfluß dieser Längenänderungen auf die Spannungen des Tragwerkes.

Bei einer gleichmäßigen Erwärmung um  $t^\circ$  verlängert sich ein Stab von der Länge  $l$  um

$$\Delta l = \alpha \cdot t \cdot l \quad (575)$$

wenn  $\alpha$  der Wärmeausdehnungskoeffizient des betreffenden Baumaterials; es ist für Eisenbeton:

$$\alpha = 0,000012.$$

Wird der Stab um  $t^\circ$  abgekühlt, so verkürzt er sich um dasselbe Maß.

Durch die Längenänderungen, welche jeder Stab bei einer Temperaturänderung erleidet, verschieben sich alle Knotenpunkte des Tragwerkes, und

durch diese Verschiebungen bzw. die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ der Enden aller Stäbe (Teil II, Kap. II) entstehen die gesuchten „Temperaturmomente“ am ganzen Tragwerk.

Das Verfahren zur Bestimmung dieser Knotenpunktverschiebungen ist genau dasselbe wie dasjenige der Williot'schen Verschiebungspläne (vgl. Müller-Breslau, Die graphische Statik, Bd. II, 1, 1903, S. 58), wenn wir an Stelle der Längenänderungen der Stäbe infolge der Normalkräfte diejenigen infolge der Temperaturänderung setzen. Das Verfahren gründet sich auf die

### Aufgabe:

Der Knotenpunkt  $C$  (Fig. 310) sei mit den Knotenpunkten  $A$  und  $B$  durch zwei Stäbe 1 und 2 verbunden, welche in  $A$  und  $B$  eingespannt oder gelenkig gelagert sein können. Die Knotenpunkte  $A$  und  $B$  (oder nur einer davon) sollen sich in die neuen Lagen  $A'$  und  $B'$  verschieben und die Längen der Stäbe 1 und 2 um die gegebenen Strecken  $\Delta 1$  und  $\Delta 2$  ändern, wobei wir die

Annahme machen, daß die Verschiebungen  $AA'$  und  $BB'$  und die Längenänderungen  $\Delta 1$  und  $\Delta 2$  im Verhältnis zu den Längen der Stäbe 1 und 2 verschwindend klein seien, was bei Verschiebungen und Längenänderungen infolge Temperaturänderung stets der Fall ist; in Fig. 310 wurden dieselben in vergrößertem Maßstab aufgetragen. Gesucht ist die Verschiebung  $CC'$  des Knotenpunktes  $C$  (der mit  $A$  und  $B$  nicht in derselben Geraden liegen darf) nach Größe und Richtung.

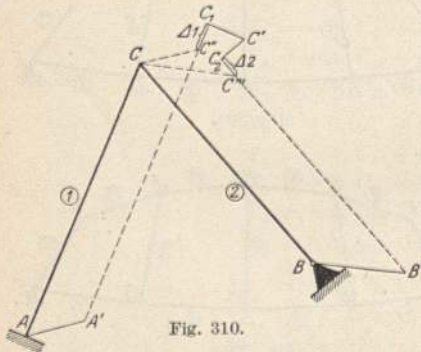


Fig. 310.

Um die neue Lage von  $C$  zu erhalten, denkt man sich bei  $C$  die Verbindung beider Stäbe gelöst, verschiebt den Stab 1 parallel zu sich selbst in die Lage  $A'C''$  und den Stab 2 parallel zu sich selbst in die Lage  $B'C'''$ . Bei einer Temperaturerhöhung sind  $\Delta 1$  und  $\Delta 2$  Verlängerungen; man verlängert daher  $A'C''$  um  $C''C_1 = \Delta 1$  und  $B'C'''$  um  $C'''C_2 = \Delta 2$ . Nun schlägt man mit den Stäblängen  $A'C_1$  und  $B'C_2$  als Radius Kreisbögen, deren Mittelpunkte  $A'$  und  $B'$  sind. Der Schnittpunkt  $C'$  dieser Bögen ist die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes  $C$ . Da die angenommenen Verschiebungen verschwindend klein sind, dürfen die Kreisbögen  $C_1C'$  und  $C_2C'$  durch die auf den Geraden  $A'C_1$  und  $B'C_2$  errichteten Normalen ersetzt werden.

Da die Temperaturmomente im Vergleich zu denjenigen infolge der äußeren Belastung gering sind, so hat es keinen Zweck, einen besonderen Verschiebungsplan zu zeichnen, sondern man kann die Knotenpunktverschiebungen bzw. die zur weiteren Berechnung benötigten „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ der Endpunkte der Stäbe in Fig. 310 direkt abgreifen.

Die Lösung gilt selbstverständlich auch für den Fall, daß nur einer der beiden Knotenpunkte  $A$  und  $B$ , beispielsweise nur  $A$ , verschoben wird (Fig. 311). In diesem Falle wird die neue Lage des Knotenpunktes  $C$  durch die in den

Punkten  $C_1$  und  $C_2$  zu den Stabrichtungen  $AC$  und  $BC$  errichteten Normalen bestimmt.

Ferner gilt die Lösung auch für den Fall, daß die Knotenpunkte  $A$  und  $B$  nicht verschoben werden und nur Längenänderungen der beiden Stäbe 1 und 2 eintreten (Fig. 312). Dann wird die neue Lage von  $C$  durch die in den Punkten  $C_1$  und  $C_2$  zu den Stabrichtungen  $AC$  und  $BC$  errichteten Normalen bestimmt.

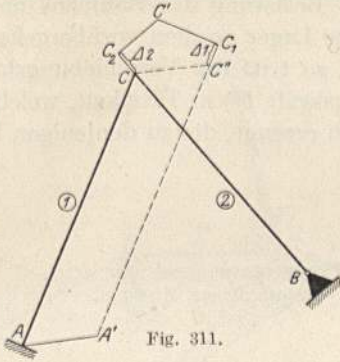


Fig. 311.

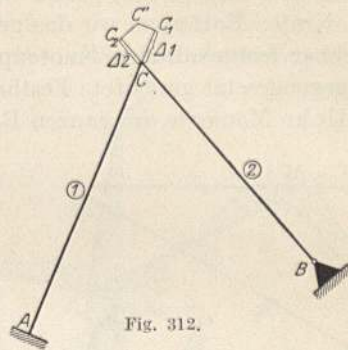


Fig. 312.

eintreten (Fig. 312). Dann wird die neue Lage von  $C$  durch die in den Punkten  $C_1$  und  $C_2$  zu den Stabrichtungen  $AC$  und  $BC$  errichteten Normalen bestimmt.

### 1. Der einstöckige Rahmen.

Wir betrachten zunächst den allgemeinen, unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen der Fig. 313

mit beliebig gerichteten Stäben.

Um die Verschiebungen aller Knotenpunkte infolge der gegebenen Längenänderungen der Stäbe zu bestimmen, sollten wir wissen, von welchem Punkte

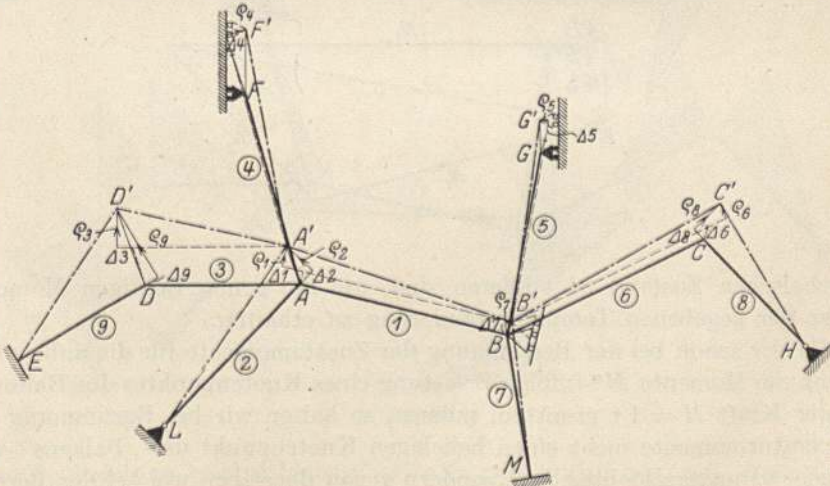


Fig. 313.

des „Balkens“ die Verschiebungen ausgehen; dies können wir jedoch am unsymmetrischen und in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen nicht von vornherein angeben und wir müssen daher einen Knotenpunkt des „Balkens“ vorübergehend unverschiebbar festhalten, d. h. vorübergehend als

denjenigen Punkt betrachten, welcher bei der vorausgesetzten Temperatur- und damit Längenänderung aller Stäbe in Ruhe bleibt. In dem an diesem Knotenpunkt gedachten Lager wird dann aber, wenn dieser nicht zufällig mit dem in Wirklichkeit in Ruhe bleibenden Punkt zusammenfällt, eine Festhaltungskraft  $F^t$  entstehen, genau wie bei Belastung des Rahmens mit einer äußeren Kraft. Entfernen wir das gedachte Lager an dem vorübergehend unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkt, so tritt die Verschiebungskraft  $V^t$  (die entgegengesetzt gerichtete Festhaltungskraft  $F^t$ ) in Tätigkeit, welche noch zusätzliche Momente am ganzen Rahmen erzeugt, die zu denjenigen für den

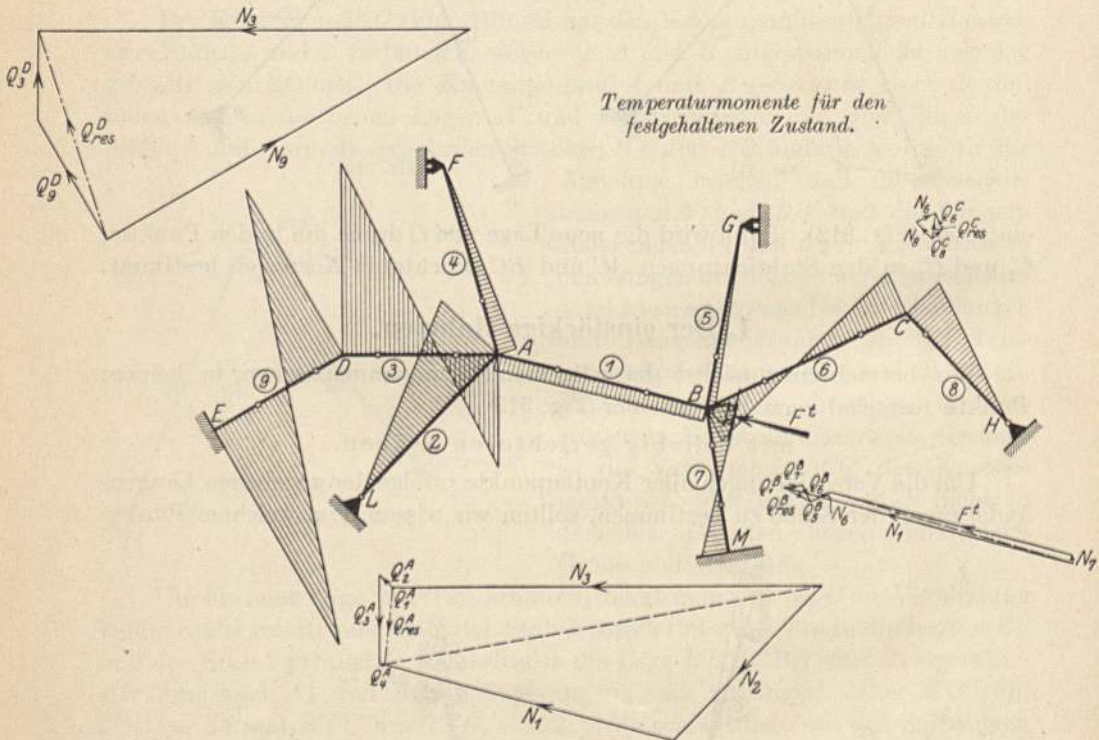


Fig. 313 a.

festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die genau richtigen Momente infolge der gegebenen Temperaturänderung zu erhalten.

Da wir schon bei der Bestimmung der Zusatzmomente für die äußere Belastung die Momente  $M^*$  infolge Belastung eines Knotenpunktes des Rahmens mit der Kraft  $H = 1 \text{ t}$  ermitteln müssen, so halten wir bei Bestimmung der Temperaturmomente nicht einen beliebigen Knotenpunkt des „Balkens“ vorübergehend unverschiebbar fest, sondern genau denselben wie bei der Berechnung der Momente herrührend von der äußeren Belastung, nämlich am vorliegenden Rahmen den Knotenpunkt  $B$ .

Nachdem wir die Verlängerung aller Stäbe infolge einer gegebenen Temperaturerhöhung derselben nach Gl. (575) berechnet haben, bestimmen wir nun in Fig. 313 von  $B$  ausgehend die Verschiebung aller Knotenpunkte durch



wiederholte Anwendung des eingangs gezeigten Verfahrens. Die Bestimmung gestaltet sich ähnlich wie diejenige infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes in Kap. II, 1 dieses Teiles, weshalb sich weitere Erläuterungen erübrigen. Es sei nur erwähnt, daß wir den Knotenpunkt *B* nicht in seiner ursprünglichen Lage unverschiebbar festhalten, sondern erst, nachdem der Auflagerstab 7

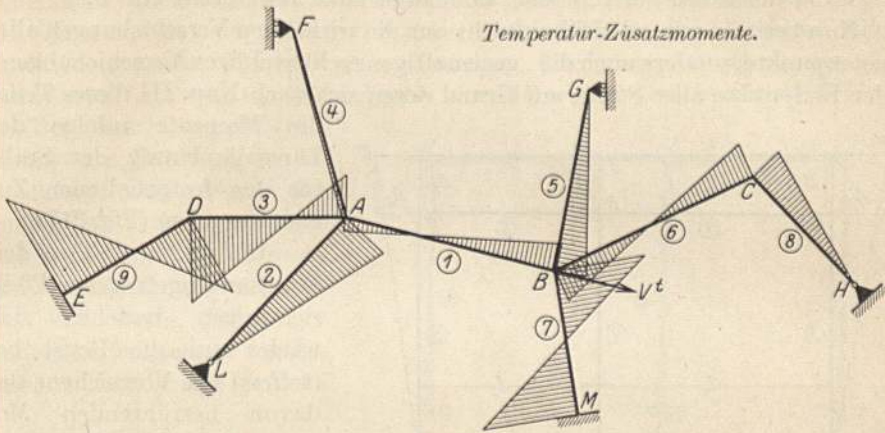


Fig. 313 b.

seine Länge geändert hat. Dies hat jedoch nichts zu sagen, da unseren Zwecken schon gedient ist, wenn wir für die Lage des festgehaltenen Knotenpunktes *B* eine gewisse Annahme treffen. Wir können also vorschreiben, der Punkt *B* solle sich bei Ausdehnung des Stabes 7 in Richtung des letzteren, oder auf

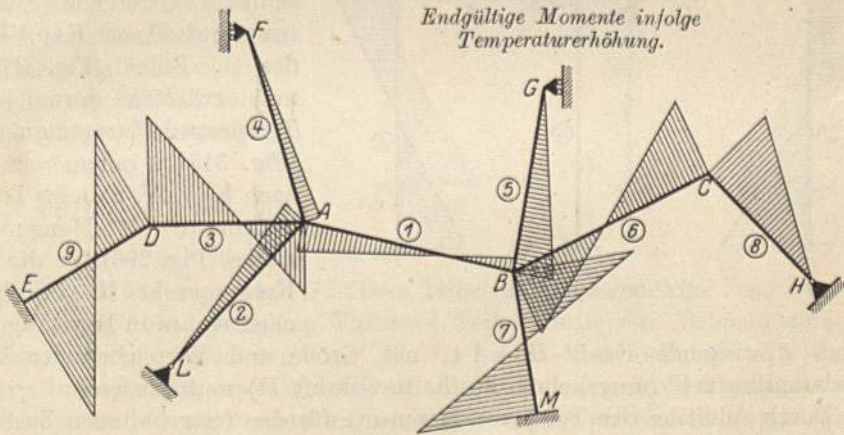


Fig. 313 c.

einer Senkrechten, oder auf einer Normalen zum Stab 1 bewegen. Am anschaulichsten ist es, die letztgenannte Annahme zu machen, und zwar dadurch, daß wir als gedachtes Lager am Knotenpunkt *B* ein Rollenlager anbringen, welches sich bei Ausdehnung des Stabes 7 auf seiner Bahn, normal zum Stab 1, bewegt und gegen Abheben von derselben gesichert gedacht ist. Hätten wir für die Lage des Punktes *B* etwas anderes vorgeschrieben, so entstünden andere Mo-



hat, erst die Knotenpunktverschiebungen zu konstruieren. Wenn die Stützen gleich lang sind, so ist außerdem eine gleichmäßige Temperaturänderung derselben ohne Einfluß auf die Temperaturmomente.

Um die Temperaturmomente am Rahmen der Fig. 314 zu bestimmen, halten wir den Knotenpunkt  $B$  durch ein normal zum Balken bewegliches Rollenlager vorübergehend unverschiebbar fest. Wir könnten ebensogut den Knotenpunkt  $A$  oder  $C$  wählen, wir würden jedoch dann stark verschieden große Momente am Rahmen (für den festgehaltenen Zustand) erhalten, was die Genauigkeit der Berechnung nachteilig beeinflusst

Bei einer Temperaturerhöhung des Rahmens um  $t^\circ$  verschiebt sich dann der Knotenpunkt  $A$  (unter Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte, welcher nach Kap. VII dieses Teiles gesondert berücksichtigt werden kann) nach links um die Strecke

$$\Delta 1 = -\alpha \cdot t \cdot l_1$$

und der Knotenpunkt  $C$  nach rechts um die Strecke:

$$\Delta 2 = +\alpha \cdot t \cdot l_2.$$

Da die Säulen des Rahmens gleich lang sind, so dehnen sich dieselben alle um das gleiche Maß nach oben und es treten am Rahmen nur die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“

$$e_3 = \Delta 1 \quad \text{und} \quad e_5 = \Delta 2$$

auf, für welche wir die Mo-

mente (Fig. 314a) nach Kap. III dieses Teiles und die zugehörige Festhaltungskraft  $F^t$  (Fig. 314a) nach Kap. VII des I. Teiles bestimmen. Bringen wir jetzt die umgekehrte Festhaltungskraft  $F^t$ , d. h. die Verschiebungskraft  $V^t$ , als äußere, in Balkenachse wirkende Kraft an, so entstehen durch diese Belastung die Temperatur-Zusatzmomente (Fig. 314b), welche wir einfach durch Multiplikation der  $M^*$ -Momentenfläche dieses Rahmens mit Größe und Vorzeichen von  $V^t$  erhalten.

Durch Addition der Temperaturmomente für den festgehaltenen Zustand und der Temperatur-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Temperaturmomente (Fig. 314c) und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Temperaturänderung. Ist aber z. B. die rechte Säule (Stab 5) länger als die beiden übrigen (Fig. 314d), so erleidet nicht nur die Säule 3 und die Säule 5, sondern auch noch

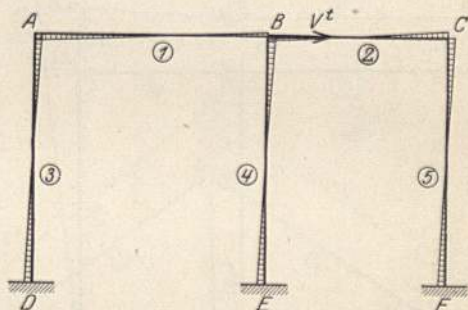


Fig. 314 b.

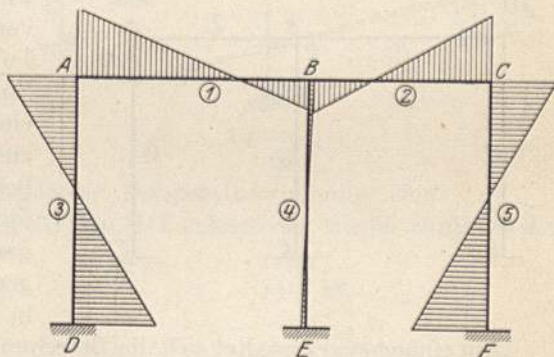


Fig. 314 c.

der Balken 2 eine gegenseitige Verschiebung seiner Endpunkte; die weitere Berechnung gestaltet sich analog wie beschrieben.

Wünschen wir am Rahmen der Fig. 314 den Punkt des Balkens zu kennen, welcher bei der gegebenen Temperaturerhöhung in Ruhe bleibt, so gehen wir wie folgt vor:

Wir bringen die aus den Momenten für den festgehaltenen Zustand ermittelte Kraft  $V^t$  am Rahmen als äußere Kraft an und berechnen die dadurch hervorgerufene Verschiebung  $\lambda$  des Balkens; diese ist eine Rechtsverschiebung und gleich

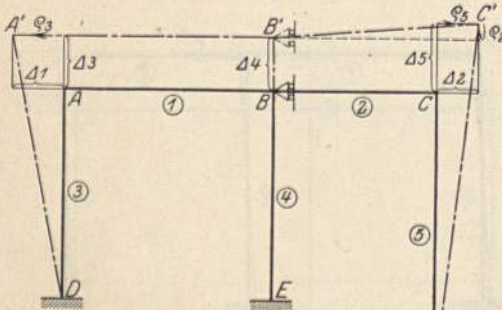


Fig. 314 d.

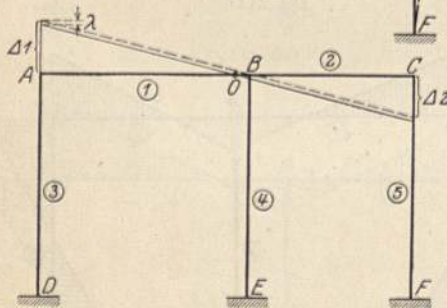


Fig. 314 e.

$$\lambda = \frac{\Delta = 1''}{Z} \cdot V^t.$$

Da wir zuerst angenommen haben,  $B$  bleibe in Ruhe und nun infolge der Verschiebungskraft  $V^t$  noch eine Rechtsverschiebung dazukommt, so muß der wirkliche Ruhepunkt links von  $B$  liegen, und zwar in einem Abstand  $x$  von  $B$ , welchen wir dadurch erhalten, daß wir im Diagramm der Temperaturverschiebungen bei festgehaltenem Punkt  $B$  (vgl. Fig. 314 e) die Strecke  $\lambda$  nach abwärts tragen und eine Parallele zur Diagrammlinie ziehen; letztere ist dann die wirkliche Diagrammlinie, und der von ihr auf der Balkenachse herausgeschnittene Punkt  $O$  bleibt bei der gegebenen Temperaturerhöhung in Ruhe. —

Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der Temperaturmomente am symmetrischen Rahmen, wenn symmetrisch gelegene Stäbe die gleiche Temperaturänderung erleiden, und am festgehaltenen Rahmen für beliebige Temperaturänderungen seiner Stäbe,

weil an diesen Rahmen — z. B. Fig. 315, 316, 317, 318 — keine Temperatur-Zusatzmomente zu bestimmen sind, und zwar deshalb, weil man bei beiden Konstruktionstypen den Punkt kennt, von welchem die Verschiebungen ausgehen bzw. welcher bei der Temperaturänderung keine seitliche Bewegung ausführt.

Am symmetrischen Rahmen der Fig. 315 hat man also einfach die Momente herrührend von den Verschiebungen:

$$e_2 = \frac{\Delta l}{2} = -\alpha \cdot t \cdot \frac{l}{2}; \quad e_3 = \frac{\Delta l}{2} = +\alpha \cdot t \cdot \frac{l}{2}$$

nach Kap. III dieses Teiles zu bestimmen, um damit die endgültigen Momente für eine gegebene Temperaturerhöhung zu besitzen.

Am symmetrischen Rahmen der Fig. 316 müssen wir zunächst die der vorausgesetzten Temperaturerhöhung entsprechende neue Lage des Knotenpunktes  $A$ , welche der Symmetrie wegen gleich derjenigen des Knotenpunktes  $C$  ist, bestimmen (siehe Fig. 316). Hierauf kennen wir die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe, nämlich

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= A_2 A', \\ \varrho_2 &= C_2 C', \\ \varrho_3 &= A_1 A', \\ \varrho_4 &= 0, \\ \varrho_5 &= C_1 C' \end{aligned}$$

und bestimmen nach Kap. III dieses Teiles die zugehörigen Momente, welche die endgültigen Momente für die gegebene Temperaturerhöhung sind.

Am symmetrischen Rahmen der Fig. 317 müssen wir wieder zunächst die

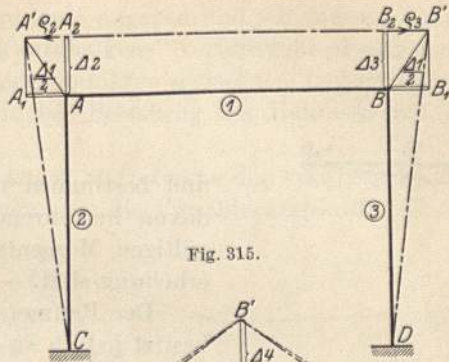


Fig. 315.

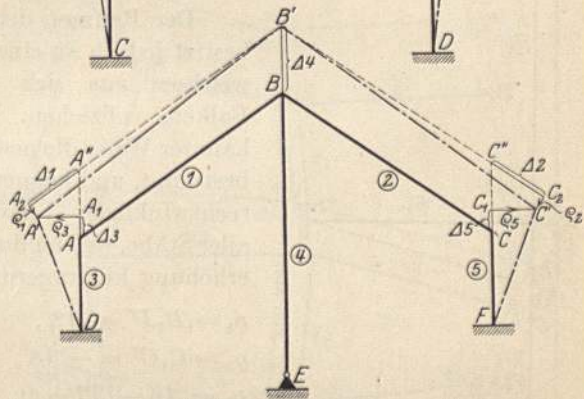


Fig. 316.

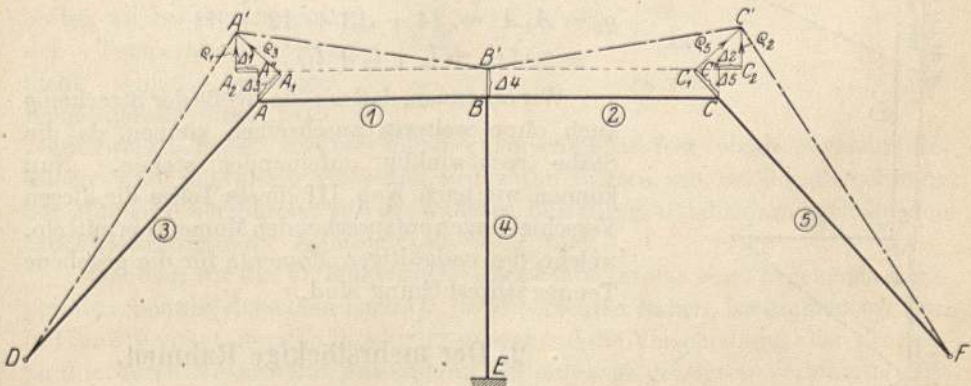


Fig. 317.

der vorausgesetzten Temperaturerhöhung entsprechende neue Lage des Knotenpunktes  $A$ , welche der Symmetrie wegen gleich derjenigen des Knotenpunktes  $C$  ist, bestimmen (siehe Fig. 317).

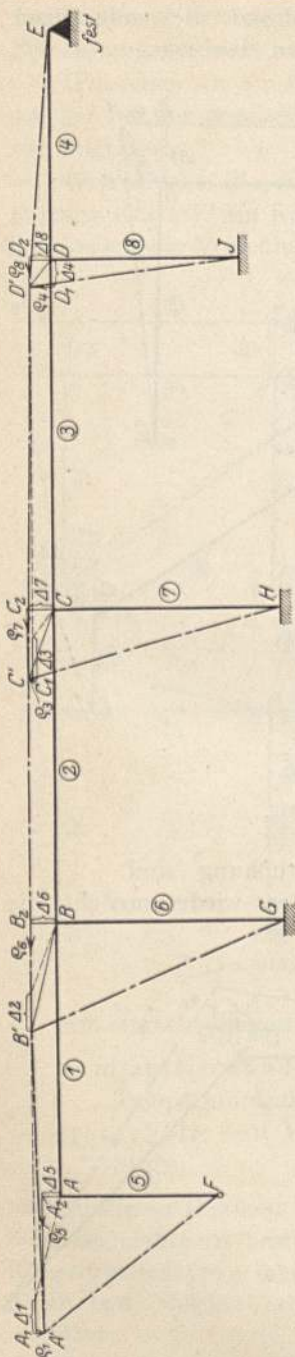


Fig. 318.

Hierauf kennen wir die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen aller Stäbe, nämlich

$$\varrho_1 = A_2 A',$$

$$\varrho_2 = C_2 C',$$

$$\varrho_3 = A_1 A',$$

$$\varrho_4 = 0,$$

$$\varrho_5 = C_1 C'$$

und bestimmen nach Kap. III dieses Teiles die davon herrührenden Momente, welche die endgültigen Momente für die gegebene Temperaturerhöhung sind. —

Der Rahmen der Fig. 318 ist unsymmetrisch, besitzt jedoch an einem Ende ein festes Lager, von welchem aus sich die Längenänderungen des Balkens vollziehen. In Fig. 318 haben wir in bekannter Weise die neuen Lagen aller Knotenpunkte bestimmt, und kennen nun auch die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ der Endpunkte aller Stäbe, welche durch die gegebene Temperaturerhöhung hervorgerufen werden; es ist:

$$\varrho_4 = D_1 D' = \Delta 8,$$

$$\varrho_3 = C_1 C' = -\Delta 8,$$

$$\varrho_2 = \Delta 6 - \Delta 7 = 0,$$

$$\varrho_1 = A_1 A' = \Delta 6 - \Delta 5,$$

$$\varrho_8 = D_2 D' = \Delta 4 = \alpha \cdot t \cdot l_4,$$

$$\varrho_7 = C_2 C' = \Delta 4 + \Delta 3 = \alpha \cdot t (l_4 + l_3),$$

$$\varrho_6 = B_2 B' = \Delta 4 + \Delta 3 + \Delta 2 = \alpha \cdot t (l_4 + l_3 + l_2),$$

$$\begin{aligned} \varrho_5 &= A_2 A' = \Delta 4 + \Delta 3 + \Delta 2 + \Delta 1 \\ &= \alpha \cdot t (l_4 + l_3 + l_2 + l_1). \end{aligned}$$

Wir erkennen, daß wir die Größe der Strecken  $\varrho$  auch ohne weiteres anschreiben können, da die Stäbe rechtwinklig aufeinander stehen. Nun können wir nach Kap. III dieses Teiles die diesen Verschiebungen entsprechenden Momente ermitteln, welche die endgültigen Momente für die gegebene Temperaturerhöhung sind.

## 2. Der mehrstöckige Rahmen.

Wir betrachten zunächst den allgemeinen, unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen der Fig. 319 mit beliebig gerichteten Stäben.

Um die Verschiebungen aller Knotenpunkte infolge der gegebenen Längenänderungen der Stäbe zu bestimmen, sollten wir wissen, von welchem Punkte



sondern durch Rollenlager (welche gegen Abheben von ihrer Bahn gesichert gedacht sind) stützen, damit sich alle Stäbe ausdehnen können; die Bahn eines jeden Rollenlagers wird der größeren Anschaulichkeit wegen normal zur Richtung der betreffenden

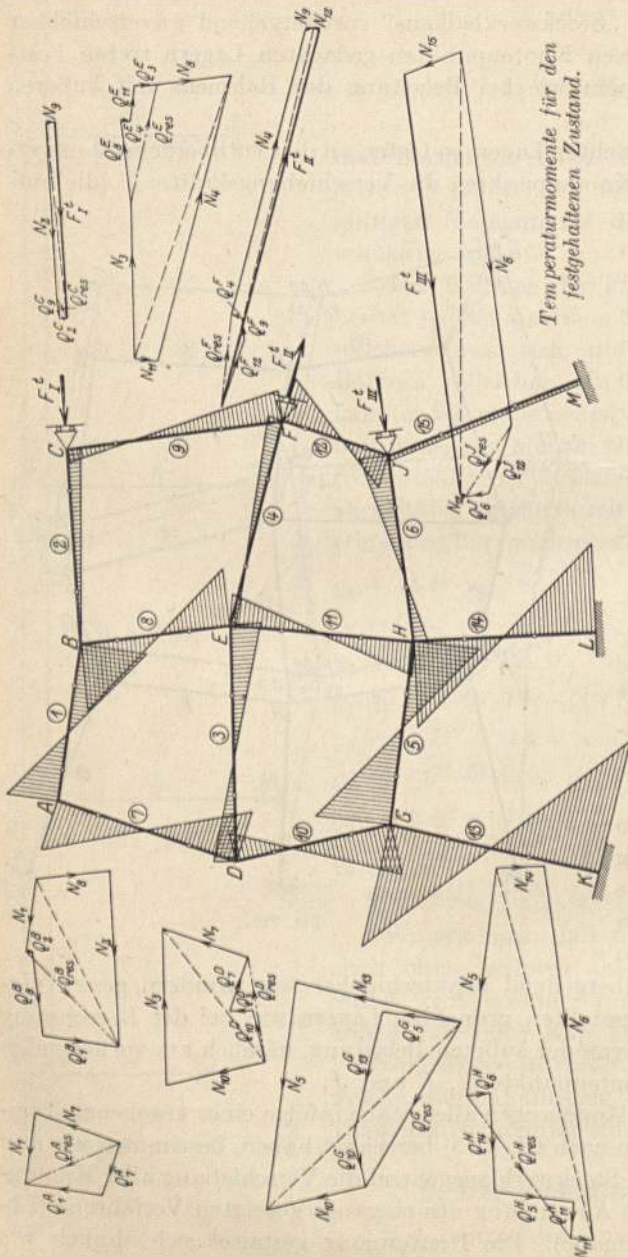


Fig. 319 a.

gesuchten Festhaltungskraft (Reaktion im Lager) gewählt. In Fig. 319 haben wir der besseren Übersicht halber strichpunktiert die Stäbe in ihrer neuen Lage eingetragen, wobei jedoch deren Formänderungen herrührend von den infolge der Knotenpunktverschiebungen in denselben auftretenden Momenten nicht dargestellt haben.

Nun besitzen wir, wie in Kap. II, nicht nur die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, sondern auch die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“  $\rho$  der Endpunkte aller Stäbe, auf Grund deren wir nach Kap. III dieses Teiles die Momente infolge der Längenänderungen der Stäbe für den festgehaltenen Zustand bestimmen können; diese Momente haben wir in Fig. 319a dargestellt.

Die in Fig. 319 an den Strecken  $\rho$  eingetragenen Pfeilrichtungen beziehen sich wieder auf die Regel betreffend des Vorzeichens der davon herrührenden Momente an beiden Stabenden.

Aus den Temperaturmomenten für den festgehaltenen Zustand (Fig. 319a)



bestimmen wir nun die in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte  $F'_I$ ,  $F'_{II}$  und  $F'_{III}$  nach Kap. VII, 2 des I. Teiles (siehe Fig. 319a) und erhalten darauf die Temperatur-Zusatzmomente (Fig. 319b), indem wir die

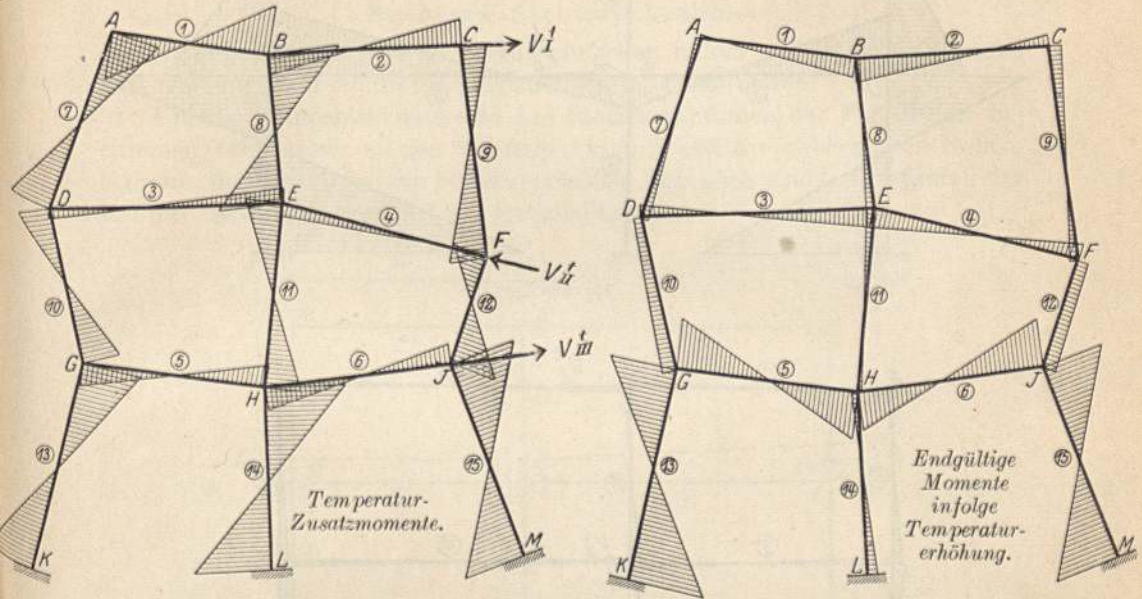


Fig. 319 b.

Fig. 319 c.

nach Kap. IV, 2 dieses Teiles bestimmten  $M^*_I$ -,  $M^*_{II}$ - und  $M^*_{III}$ -Momente (Fig. 302d, 305d, 308d) für die im Knotenpunkt C bzw. F bzw. J von links

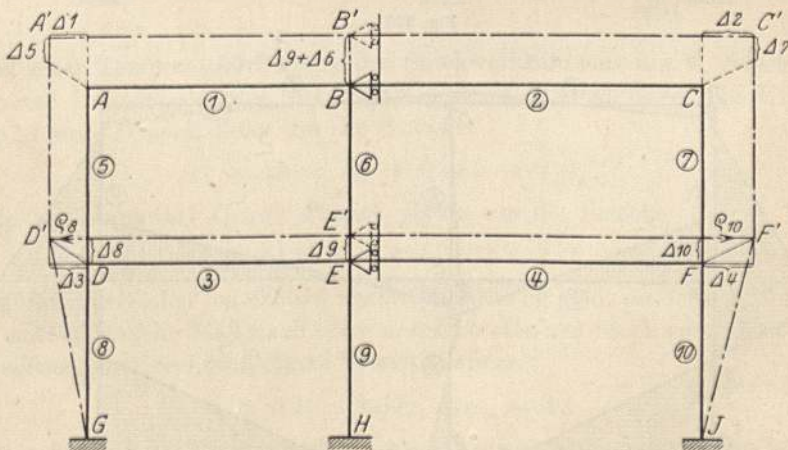


Fig. 320.

nach rechts in Richtung des anschließenden Balkenstabes 2 bzw. 4 bzw. 6 wirkende Kraft  $H = 1$  t mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft  $V'_I$  bzw.  $V'_{II}$  bzw.  $V'_{III}$  multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momente addieren.

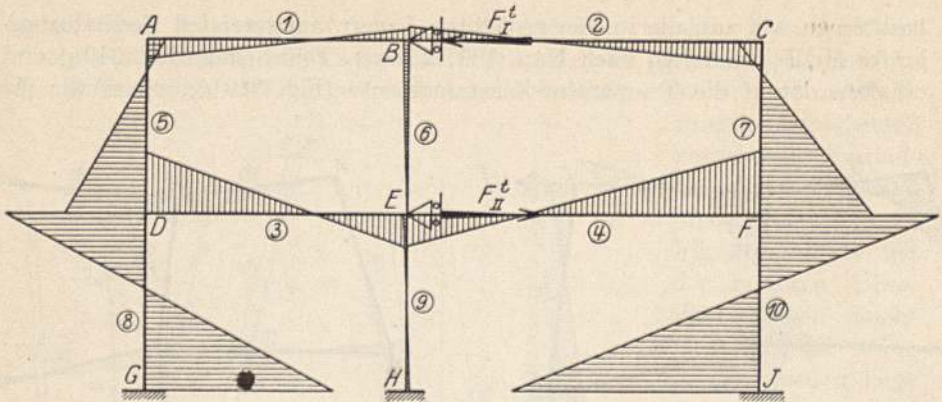


Fig. 320 a.

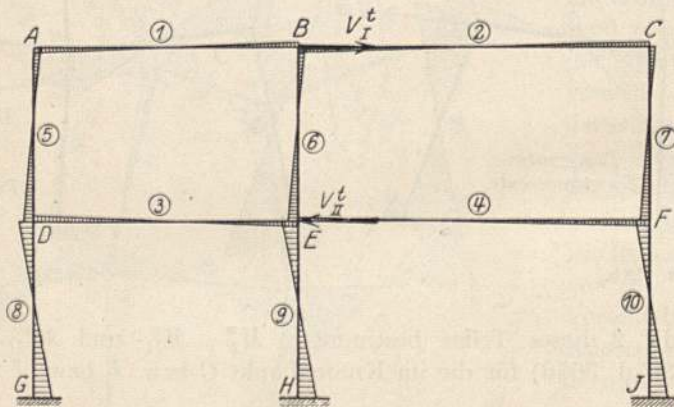


Fig. 320 b.

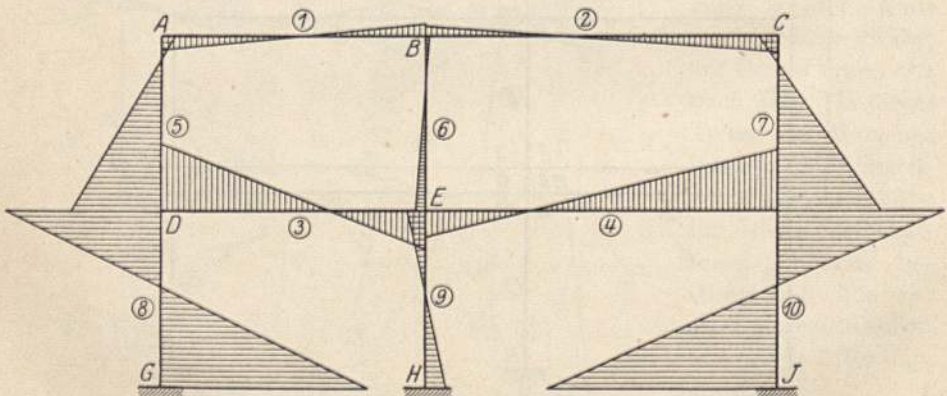


Fig. 320 c.

Durch Addition der Temperaturmomente für den festgehaltenen Zustand und der Temperatur-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Temperaturmomente (Fig. 319 c) und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte

und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Temperaturänderung.

Die Bestimmung der Temperaturmomente am unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen

### Rechteck-Stockwerkrahmen

der Fig. 320 gestaltet sich bedeutend einfacher, indem man dabei nicht nötig hat, erst die Knotenpunktverschiebungen zu konstruieren.

Um die Temperaturmomente am Stockwerkrahmen der Fig. 320 zu bestimmen, bringen wir an den Knotenpunkten  $B$  und  $E$  vorübergehend Rollenlager an, die normal zu den Stockwerkbalken beweglich sind und wodurch der Rahmen seitlich unverschiebbar festgehalten ist.

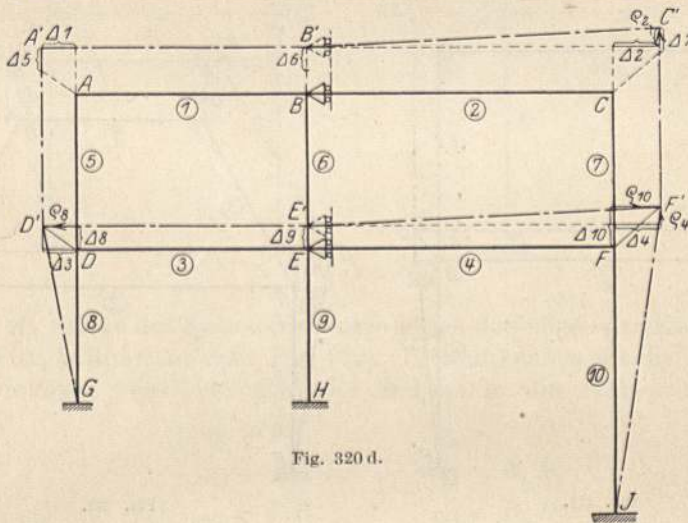


Fig. 320 d.

Bei einer Temperaturerhöhung des Stockwerkrahmens um  $t^\circ$  verschieben sich (unter Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte) die Knotenpunkte  $A$  und  $D$  nach links um die Strecke

$$\Delta 1 = \Delta 3 = -\alpha \cdot t \cdot l_1 = -\alpha \cdot t \cdot l_3,$$

und die Knotenpunkte  $C$  und  $F$  nach rechts um die Strecke

$$\Delta 2 = \Delta 4 = +\alpha \cdot t \cdot l_2 = +\alpha \cdot t \cdot l_4.$$

Da die drei Säulen jedes Stockwerkes gleich lang sind, so dehnen sich dieselben um das gleiche Maß nach oben und es treten am Stockwerkrahmen nur die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“

$$q_8 = \Delta 2 \quad \text{und} \quad q_{10} = \Delta 4$$

auf, für welche wir die Momente nach Kap. III dieses Teiles und die zugehörigen Festhaltungskräfte nach Kap. VII, 2 des I. Teiles bestimmen (Fig. 320a). Bringen wir jetzt die Verschiebungskräfte  $V'_I$  und  $V'_{II}$  (umgekehrte Festhaltungskräfte  $F'_I$  bzw.  $F'_{II}$ ) als äußere, in Balkenachse wirkenden Kräfte an, so entstehen durch diese Belastung die Temperatur-Zusatzmomente (Fig. 320b), welche wir durch Multiplikation der  $M^*_I$ - und  $M^*_{II}$ -Momente mit Größe und

Vorzeichen von  $V_I^t$  bzw.  $V_{II}^t$  und Addition der daraus hervorgehenden Momente erhalten.

Durch Addition der Temperaturmomente für den festgehaltenen Zustand und der Temperatur-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Temperaturmomente (Fig. 320c) und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI, 2) für die gegebene Temperaturänderung.

Ist z. B. die rechte Säule des unteren Stockwerkes (Stab 10) länger als die beiden anderen (Fig. 320d), so erleiden nicht nur die Stäbe 8 und 10, sondern

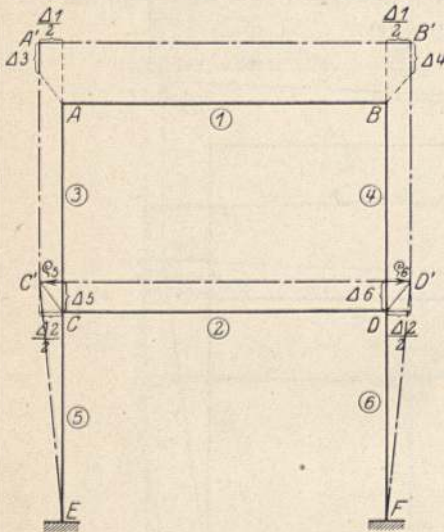


Fig. 321.

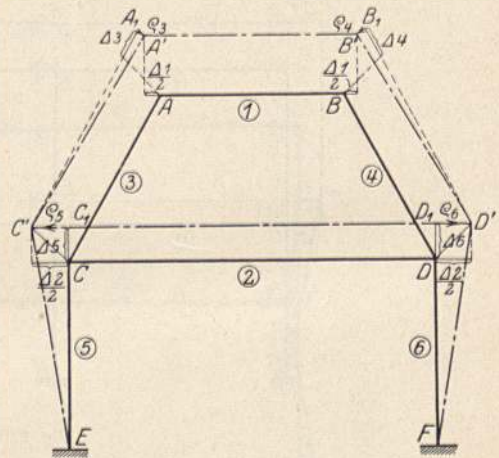


Fig. 322.

auch die Stäbe 2 und 4 gegenseitige Verschiebungen ihrer Endpunkte; der weitere Gang der Berechnung ist analog wie oben beschrieben.

Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der Temperaturmomente am symmetrischen Stockwerkrahmen,

weil an diesem Rahmen — z. B. Fig. 321 und 322 — keine Temperatur-Zusatzmomente zu bestimmen sind, und zwar deshalb nicht, weil man bei beiden Konstruktionstypen den Punkt kennt, von welchem die Verschiebungen ausgehen, bzw. welcher bei der Temperaturänderung keine seitliche Bewegung ausführt; eine Ausnahme machen die „nach der Seite“ mehrstöckigen Rahmen, wie z. B. Fig. 323 und 324.

Am symmetrischen Stockwerkrahmen der Fig. 321 hat man also einfach die Momente herrührend von den Verschiebungen:

$$Q_5 = \frac{\Delta 2}{2} \quad \text{und} \quad Q_6 = \frac{\Delta 2}{2}$$

nach Kap. III zu bestimmen, und hat damit die endgültigen Momente für eine gegebene Temperaturerhöhung.

Am symmetrischen Rahmen der Fig. 322 müssen wir zunächst die der vorausgesetzten Temperaturerhöhung entsprechende neue Lage der Knotenpunkte

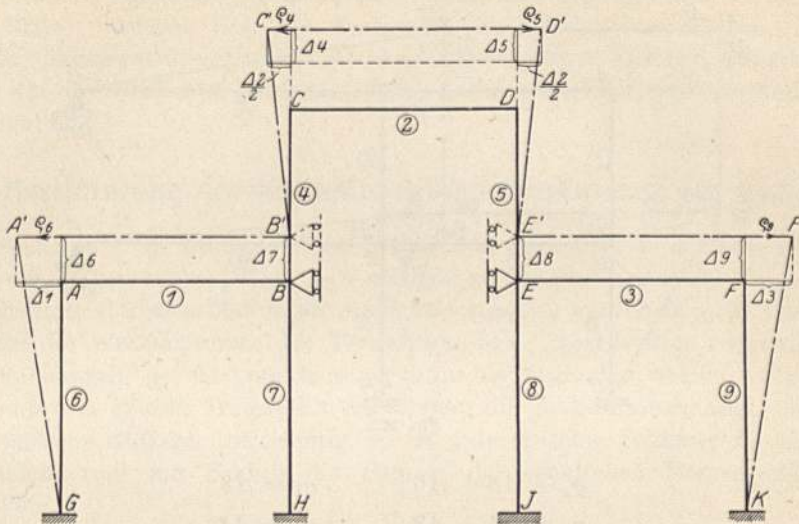


Fig. 323.

$C$  und  $A$ , welche der Symmetrie wegen gleich derjenigen der Knotenpunkte  $D$  und  $B$  ist, bestimmen (siehe Fig. 322). Hierauf kennen wir die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ der Endpunkte aller Stäbe, nämlich:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 0; & \varrho_2 &= 0 \\ \varrho_3 &= A_1 A'; & \varrho_4 &= B_1 B' \\ \varrho_5 &= C_1 C'; & \varrho_6 &= D_1 D' \end{aligned}$$

und bestimmen nach Kap. III dieses Teiles die zugehörigen Momente, welche die endgültigen Momente für die gegebene Temperaturerhöhung sind.

Am symmetrischen, „nach der Seite“ mehrstöckigen Rahmen der Fig. 323 müssen wir zur Berechnung der Temperaturmomente trotz der Symmetrie die Stockwerkbalken 1 und 3 vorübergehend horizontal unverschiebbar festhalten und darauf zu den Momenten für diesen Zustand die Zusatzmomente herrührend von den allein auf den Rahmen wirkenden beiden Verschiebungskräften  $V'_I$  und  $V'_{II}$  addieren.

Dasselbe gilt für den symmetrischen Rahmen der Fig. 324 (Sonderfälle der Stockwerkrahmen). —

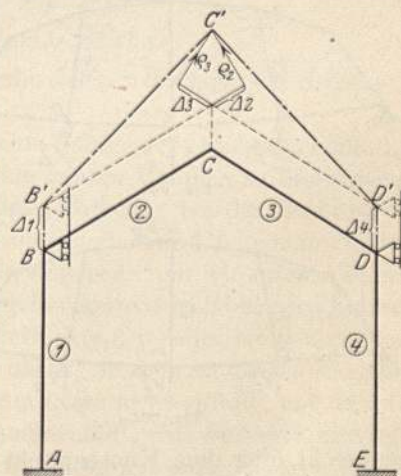


Fig. 324.

Ist ein mehrstöckiger Rahmen an jedem Stockwerkbalken von Haus aus festgehalten, wie z. B. derjenige in Fig. 325, so ist er für die Berechnung kein

Stockwerkrahmen mehr, er wird dann vielmehr genau wie ein einstöckiger Rahmen behandelt. Die Momente herrührend von den Verschiebungen

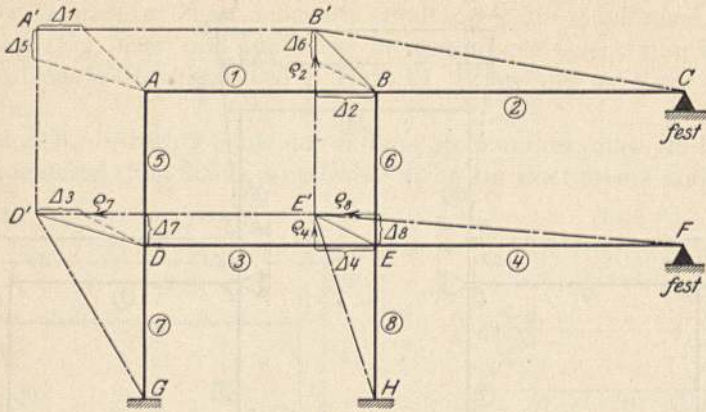


Fig. 325.

$$Q_2 + \Delta 8 + \Delta 6; \quad Q_4 = \Delta 8$$

$$Q_7 = \Delta 4 + \Delta 3; \quad Q_8 = \Delta 4$$

sind dann die endgültigen Momente für die gegebene Temperaturerhöhung.

### 3. Der Rahmenträger.

Da der Rahmenträger, wie in Kap. I dieses Teiles ausgeführt, für die Berechnung nichts anderes ist als ein mehrstöckiger Rahmen, so werden die Momente infolge einer gegebenen Temperaturänderung analog wie im vorhergehenden Abschnitt für den mehrstöckigen Rahmen beschrieben, ermittelt.

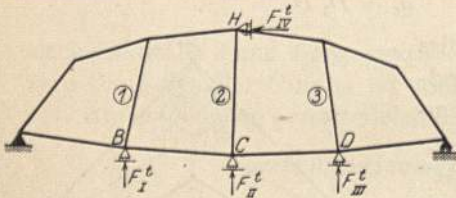


Fig. 326.

Da wir z. B. am Rahmenträger der Fig. 326 nicht von vornherein wissen, wieviel sich die Knotenpunkte B, C und D bei der Temperaturänderung senken, so müssen wir diese Punkte vorübergehend vertikal unverschiebbar festhalten (durch Rollenlager mit horizontaler Bahn) und für den Knotenpunkt H der oberen Gurtung vorschreiben, daß er bei der Ausdehnung der Stäbe (bzw. Verkürzung bei Temperaturerniedrigung)

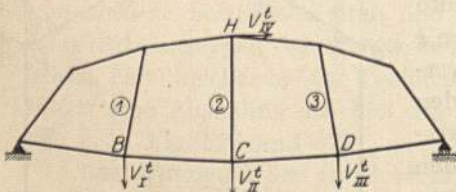


Fig. 326 a.

senkrecht über dem Knotenpunkt C bleibe, sich aber in senkrechter Richtung bewegen könne; ist die Konstruktion vollkommen symmetrisch, so wird sich die obere Gurtung von selbst so einstellen, ohne daß die Anbringung einer Kraft  $F'_{IV}$  nötig wird. Bei unsymmetrischer Ausbildung (auch wenn nur symmetrisch liegende Stäbe nicht dasselbe Trägheitsmoment haben) treten bei

diesem Zustand vier Festhaltungskräfte  $F'$  auf, welche in Wirklichkeit den Wert Null haben sollen. Daher müssen wir den Rahmenträger noch mit den vier Verschiebungskräften  $V'$  (entgegengesetzte Festhaltungskräfte  $F'$ ) belasten (Fig. 326a), wodurch sich die Temperatur-Zusatzmomente ergeben, welche zu den Temperaturmomenten für den festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die wirklichen Momente infolge der gegebenen Temperaturänderung zu erhalten.

## VI. Bestimmung der Momente infolge Senkungen der Auflager.

Senkt sich ein Auflager eines Tragwerkes gegenüber seiner planmäßigen Lage um ein gegebenes, jedoch im Verhältnis zu den Stablängen des Tragwerkes verschwindend kleines Maß in beliebiger Richtung, so werden dadurch Verschiebungen der Knotenpunkte des Tragwerkes bzw. „gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen“ der Endpunkte seiner Stäbe hervorgerufen, welche, wie immer, Momente am ganzen Tragwerk verursachen, die zu bestimmen sind. Senken sich mehrere Auflager gleichzeitig, so ist jede einzelne Senkung für sich zu behandeln und am Schluß die Summe der erhaltenen Momentenflächen zu bilden.

Das Verfahren zur Bestimmung der Knotenpunktverschiebungen infolge der gegebenen Senkung eines Auflagers ist genau dasselbe wie dasjenige, welches wir in Kap. II dieses Teiles zur Bestimmung der Knotenpunktverschiebungen infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes benützt haben, da ja eine Senkung auch eine gegebene Verschiebung eines Stabendpunktes ist.

### 1. Der einstöckige Rahmen.

Wir betrachten zunächst wieder den allgemeinen, unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen der Fig. 327

mit beliebig gerichteten Stäben

und nehmen an, das Auflager  $L$  derselben habe sich um die gegebene Strecke  $\Delta$  in senkrechter Richtung gesenkt.

Um die Verschiebungen aller Knotenpunkte infolge der gegebenen Senkung und die dadurch hervorgerufenen Momente am ganzen Rahmen zu bestimmen, sollten wir wieder wissen, welcher Punkt des „Balkens“ bei der Senkung in Ruhe bleibt; dies können wir jedoch am unsymmetrischen und in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen nicht von vornherein angeben, und wir müssen daher einen Knotenpunkt des „Balkens“ vorübergehend unverschiebbar festhalten, d. h. vorübergehend als denjenigen Punkt betrachten, welcher bei der vorausgesetzten Senkung des Auflagers  $L$  in Ruhe bleibt. In dem an diesem Knotenpunkt gedachten Lager wird dann aber, wenn dieser nicht zufällig mit dem in Wirklichkeit in Ruhe bleibenden Punkt zusammenfällt, eine Festhaltungskraft  $F^*$  entstehen, genau wie bei Belastung des Rahmens mit einer äußeren Kraft. Entfernen wir das gedachte Lager an dem vorübergehend unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkt, so tritt die Verschiebungskraft  $V^*$  (die entgegengesetzt gerichtete Festhaltungskraft  $F^*$ ) in Tätigkeit, welche noch zusätzliche Momente am ganzen Rahmen erzeugt, die zu denjenigen für den festgehaltenen

Zustand zu addieren sind, um die genau richtigen Momente infolge der gegebenen Senkung zu erhalten.

Da wir schon bei der Bestimmung der Zusatzmomente für die äußere Belastung die Momente  $M^*$  infolge Belastung eines Knotenpunktes des „Balkens“ mit der Kraft  $H = 1\text{ t}$  ermitteln müssen, so halten wir bei Bestimmung der Momente infolge gegebener Senkung nicht einen beliebigen Knotenpunkt des „Balkens“ vorübergehend unverschiebbar fest, sondern genau denselben

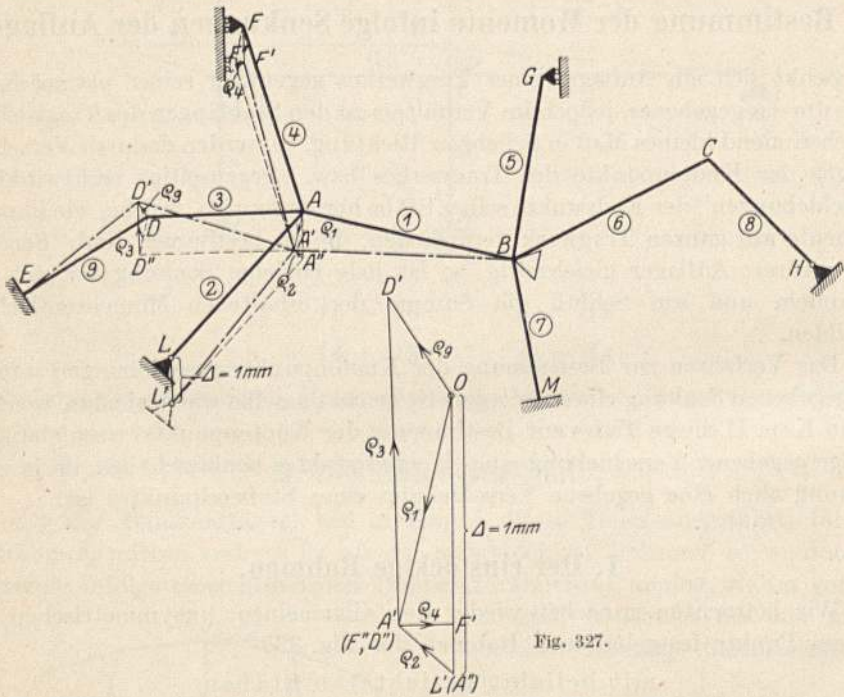


Fig. 327.

wie bei der Berechnung der Momente herrührend von der äußeren Belastung, nämlich am vorliegenden Rahmen den Knotenpunkt B.

Würde sich an Stelle des Auflagers L das Auflager M senken, so wäre als gedachtes Lager, womit der „Balken“ des Rahmens vorübergehend seitlich unverschiebbar festgehalten wird, am Knotenpunkt B nicht ein festes, sondern wie im vorhergehenden Kapitel ein Rollenlager anzubringen, mit zweckmäßig normal zum Stab 1 gerichteter Bahn, weil sich sonst das Auflager M gar nicht voraussetzungsgemäß senken könnte.

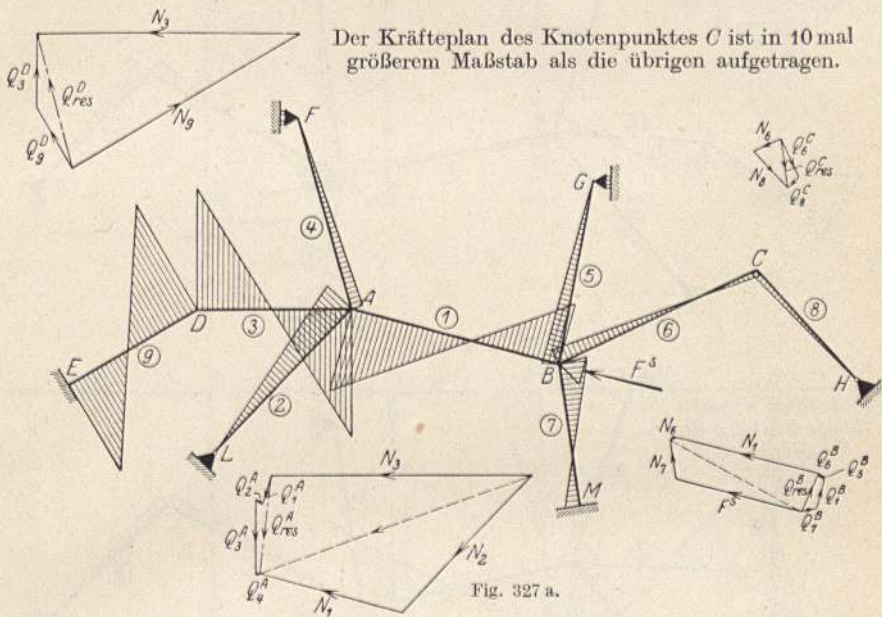
In Fig. 327 bestimmen wir nun von L' und B ausgehend die neue Lage A' des Punktes A, von dieser und dem Auflager E ausgehend die neue Lage D' des Knotenpunktes D und endlich von A' ausgehend die neue Lage F' des beweglichen Auflagers F. Der Knotenpunkt C und das bewegliche Auflager G bleiben in Ruhe, da sich in B das gedachte feste Lager befindet. Die Konstruktion der neuen Lagen der einzelnen Knotenpunkte erfolgt genau wie diejenige infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes in Kap. II, 4 dieses Teiles, weshalb sich weitere Erläuterungen erübrigen. In Fig. 327 haben wir der besseren



Übersicht halber strichpunktiert die Stäbe in ihrer neuen Lage eingetragen, wobei wir jedoch deren Formänderungen herrührend von den infolge der Knotenpunktverschiebungen in denselben auftretenden Momenten nicht dargestellt haben.

Nun besitzen wir nicht nur die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, sondern auch die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“  $\varrho$  der Endpunkte aller Stäbe, auf Grund deren sich nach Kap. III dieses Teiles die Momente infolge der gegebenen Senkung für den festgehaltenen Zustand ergeben (Fig. 327a).

Momente infolge Senkung des Auflagers  $L$  für den festgehaltenen Zustand.



Die in Fig. 327 an den Strecken  $\varrho$  eingetragenen Pfeilrichtungen beziehen sich wieder auf die Regel, betreffend des Vorzeichens der davon herrührenden Momente an beiden Stabenden.

Aus den „Senkungsmomenten“ für den festgehaltenen Zustand (Fig. 327a) bestimmen wir nun die im gedachten Lager am Knotenpunkt  $B$  auftretende Festhaltungskraft  $F^s$  nach Kap. VII, 1 des I. Teiles (Fig. 327a) und erhalten darauf die Senkungs-Zusatzmomente (Fig. 327b), indem wir die nach Kap. IV, 1 dieses Teiles bestimmte  $M^*$ -Momentenfläche (Fig. 296) für die im Knotenpunkt  $B$  von links nach rechts in Richtung des Stabes  $I$  wirkende Kraft  $H = 1$  t mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft  $V^s$  (umgekehrte Festhaltungskraft  $F^s$ ) multiplizieren.

Durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente erhalten wir nun die endgültigen Momente (Fig. 327c) und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Senkung des Auflagers  $L$ .

Die Bestimmung der Momente infolge gegebener Senkung eines Auflagers am unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen

### Rechteckrahmen

der Fig. 328 gestaltet sich bedeutend einfacher, indem man dabei nicht nötig hat, erst die Knotenpunktverschiebungen zu konstruieren.

Um die Momente infolge der Senkung  $\Delta$  des Auflagers  $E$  des Rahmens der Fig. 328 zu bestimmen, gehen wir analog vor, wie am allgemeinen Rahmen

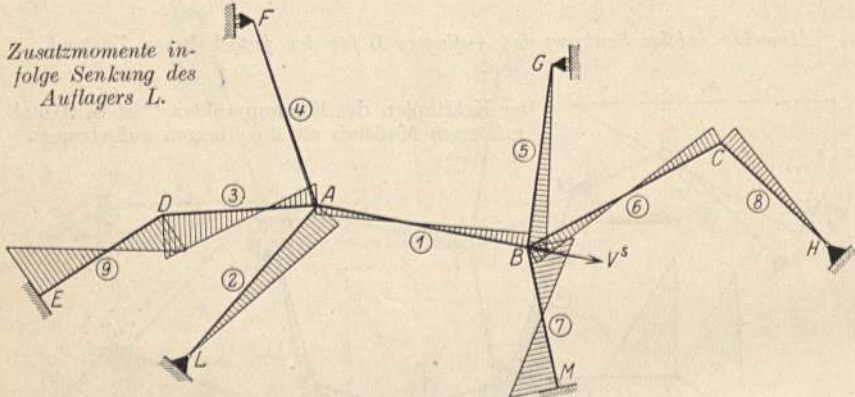


Fig. 327 b.

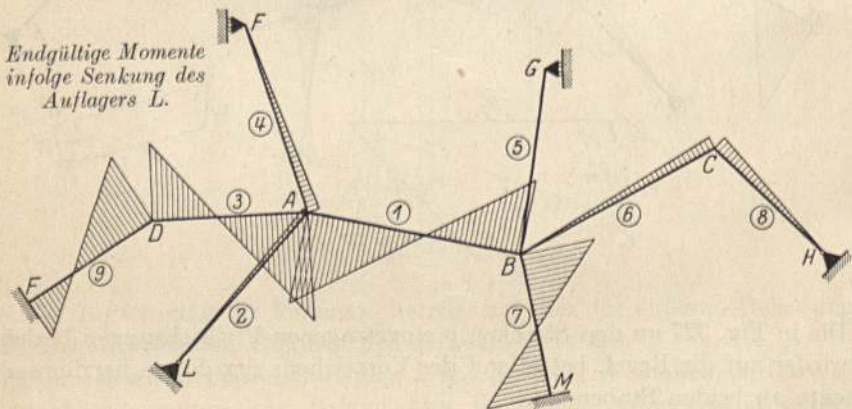


Fig. 327 c.

der Fig. 327 beschrieben. Wir halten zunächst den Balken, oder was gleichbedeutend ist, den Knotenpunkt  $C$  horizontal unverschiebbar fest. Tritt die Senkung  $\Delta$  (senkrecht angenommen) des Auflagerpunktes  $E$  dann ein, so senkt sich der Knotenpunkt  $B$  um gleichviel senkrecht nach unten, während die Knotenpunkte  $A$  und  $C$  in ihrer ursprünglichen Lage verbleiben (und zwar deshalb, weil die Senkung des Punktes  $B$  normal zum Balken  $1-2$  erfolgt und die Senkung des Auflagerpunktes  $F$  im Verhältnis zu den Stablängen des Tragwerkes verschwindend klein angenommen wurde), und es treten am festgehaltenen Rahmen nur die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“

$$e_1 = \Delta \quad \text{und} \quad e_2 = \Delta$$

auf, für welche wir die Momente (Fig. 328a) nach Kap. III dieses Teiles und die zugehörige Festhaltungskraft  $F$  nach Kap. VII des I. Teiles bestimmen. Bringen wir jetzt die umgekehrte Festhaltungskraft  $F^s$ , d. h. die Verschiebungskraft  $V^s$  als äußere, in Balkenachse wirkende Kraft an, so entstehen durch diese Belastung die Senkungs-Zusatzmomente (Fig. 328b), welche wir einfach durch Multiplikation der  $M^*$ -Momentenfläche dieses Rahmens mit Größe und Vorzeichen von  $V^s$  erhalten.

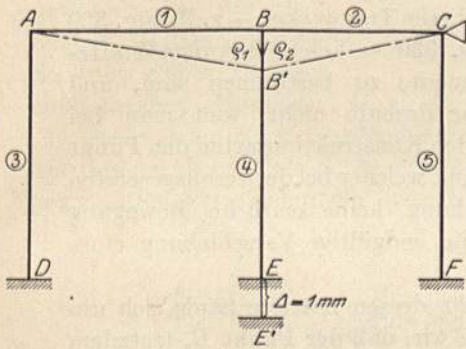


Fig. 328.

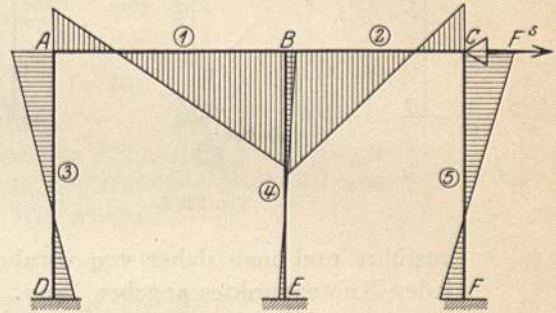


Fig. 328 a.

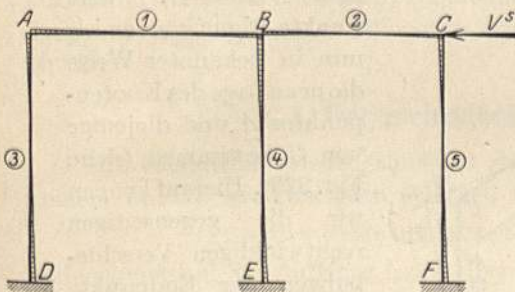


Fig. 328 b.

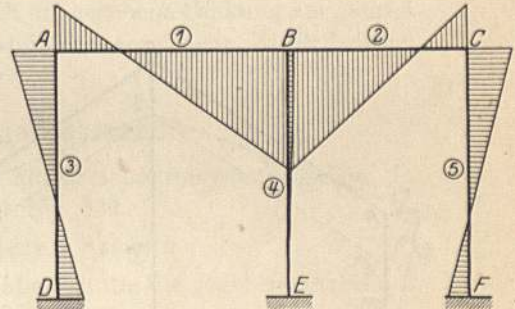


Fig. 328 c.

Durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Momente (Fig. 328c) und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Senkung des Auflagerpunktes  $E$ . — Es sei noch erwähnt, daß bei Senkung eines Endauflagers größere Zusatzmomente entstehen als bei Senkung eines mittleren Auflagers.

Hat sich der Auflagerpunkt  $E$  nicht in senkrechter, sondern in beliebiger Richtung gesenkt (Fig. 328d), so erleiden nicht nur die Stäbe 1 und 2, sondern auch noch die Säule 4 eine gegenseitige Verschiebung ihrer Endpunkte. Wegen des gedachten Lagers in  $C$  ist die Verschiebung des Punktes  $B$  trotzdem senkrecht und gleich der Projektion der gegebenen Senkung auf die Senkrechte; die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Säule 4 ist gleich der Projektion der gegebenen Senkung auf die Wagrechte. Die Berechnung gestaltet sich im übrigen analog wie für die Senkung in senkrechter Richtung beschrieben.

Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der Momente infolge gegebener Senkung

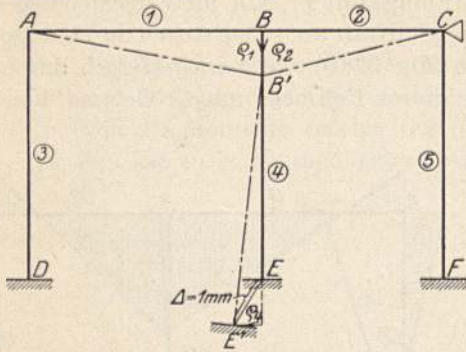


Fig. 328 d.

austüht und man daher von vornherein die endgültige Verschiebung eines jeden Knotenpunktes angeben kann.

Am symmetrischen Rahmen der Fig. 329, dessen mittlere Säule sich um die Strecke  $\Delta$  senkrecht gesenkt habe, wissen wir, daß der Punkt  $B$ , trotzdem an keinem der drei Knotenpunkte  $A, B, C$  ein Lager angebracht wurde, sich nicht seitlich, sondern nur senkrecht nach unten verschiebt, und zwar um das

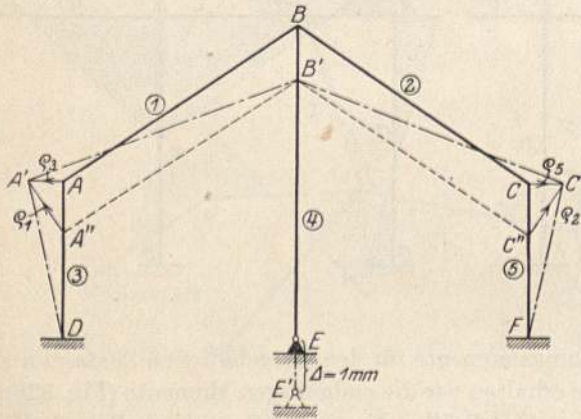


Fig. 329.

Maß  $BB' = \Delta$ . Vom Punkte  $B'$  aus können wir nun in bekannter Weise die neue Lage des Knotenpunktes  $A$  und diejenige von  $C$  bestimmen (siehe Fig. 329). Hierauf kennen wir die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe, nämlich

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= A''A', \\ \varrho_2 &= C''C', \\ \varrho_3 &= AA', \\ \varrho_4 &= 0, \\ \varrho_5 &= CC' \end{aligned}$$

und bestimmen nach Kap. III dieses Teiles die zugehörigen Momente, welche die endgültigen Momente für die gegebene Senkung sind.

Das Tragwerk der Fig. 330 ist unsymmetrisch, besitzt jedoch an einem Ende ein festes Lager, weshalb das Tragwerk bei Senkung einer Säule keine seitlichen Bewegungen ausführen kann und mithin auch keine Zusatzmomente auftreten können.

Senkt sich z. B. Säule 6 um das Maß  $\Delta$  in senkrechter Richtung, so verschiebt sich Knotenpunkt  $B$  um dasselbe Maß senkrecht nach unten und die Stäbe 1 und 2 erleiden dadurch gegenseitige Verschiebungen ihrer Endpunkte,

auf Grund deren wir nach Kap. III die durch die gegebene Senkung am ganzen Tragwerk hervorgerufenen Momente ermitteln können.

### Spezialfall: Der durchlaufende Balken.

Nach denselben Grundsätzen ermitteln wir auch die an einem gewöhnlichen durchlaufenden Balken infolge Senkung seiner Auflager entstehenden Momente.

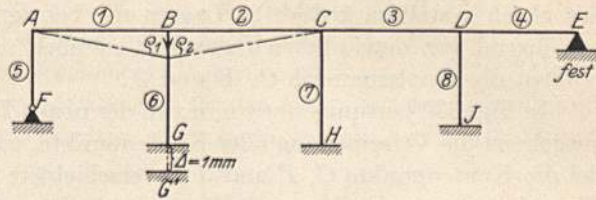


Fig. 330.

Senkt sich am durchlaufenden Balken der Fig. 331 z. B. dessen Auflager B um das gegebene Maß  $\Delta$ , so erleiden die Balkenöffnungen (Stäbe) 1 und 2 gegenseitig Verschiebungen ihrer Enden. Wir erhalten

$$Q_1 = \Delta, \quad Q_2 = \Delta, \quad Q_3 = 0$$



Fig. 331.

auf Grund deren wir nach Kap. III die durch die gegebene Senkung am ganzen Tragwerk hervorgerufenen Momente ermitteln können (siehe Zahlenbeispiel Nr. 2).

## 2. Der mehrstöckige Rahmen.

Wir betrachten wieder zunächst den allgemeinen unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen der Fig. 332

mit beliebig gerichteten Stäben

und nehmen an, das Auflager L desselben habe sich um die gegebene Strecke  $\Delta$  in senkrechter Richtung gesenkt.

Da wir wieder nicht wissen, welcher Punkt der einzelnen „Stockwerkbalken“ bei der gegebenen Senkung in Ruhe bleibt, so müssen wir zur Bestimmung der dadurch hervorgerufenen Momente am ganzen Rahmen wie im vorhergehenden Kapitel einen Knotenpunkt eines jeden „Stockwerkbalkens“ vorübergehend nach der Seite unverschiebbar festhalten. In den an diesen Knotenpunkten gedachten Lagern treten Festhaltungskräfte  $F^s$  auf, genau wie bei Belastung des Rahmens mit äußeren Kräften. Entfernen wir die gedachten Lager, so treten an den vorübergehend unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten die Verschiebungskräfte  $V^s$  (die entgegengesetzt gerichteten Festhaltungskräfte  $F^s$ ) in Tätigkeit, welche noch zusätzliche Momente am ganzen Stockwerkrahmen erzeugen, die zu denjenigen für den festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die genau richtigen Momente infolge der gegebenen Senkung zu erhalten.

Da wir schon bei der Bestimmung der Zusatzmomente für die äußere Belastung die Momente  $M^*$  infolge Belastung der einzelnen „Stockwerkbalken“

mit der Kraft  $H = 1 \text{ t}$  ermitteln müssen, so halten wir bei Bestimmung der Senkungsmomente nicht einen beliebigen Knotenpunkt eines jeden „Stockwerkbalkens“ vorübergehend unverschiebbar fest, sondern genau dieselben und mit gleich gestellten gedachten Lagern wie bei der Berechnung der Momente herrührend von der äußeren Belastung, nämlich am vorliegenden Stockwerkrahmen die Knotenpunkte  $C$ ,  $F$  und  $J$ .

In Fig. 332 bestimmen wir nun von der neuen Lage des Auflagerpunktes  $L'$  ausgehend die Verschiebung aller Knotenpunkte, wie in Kap. II, 2 gezeigt, wobei die Knotenpunkte  $C$ ,  $F$  und  $J$  unverschiebbar festgehalten sind; in dieser Figur haben wir der besseren Übersicht halber strichpunktiert die Stäbe in

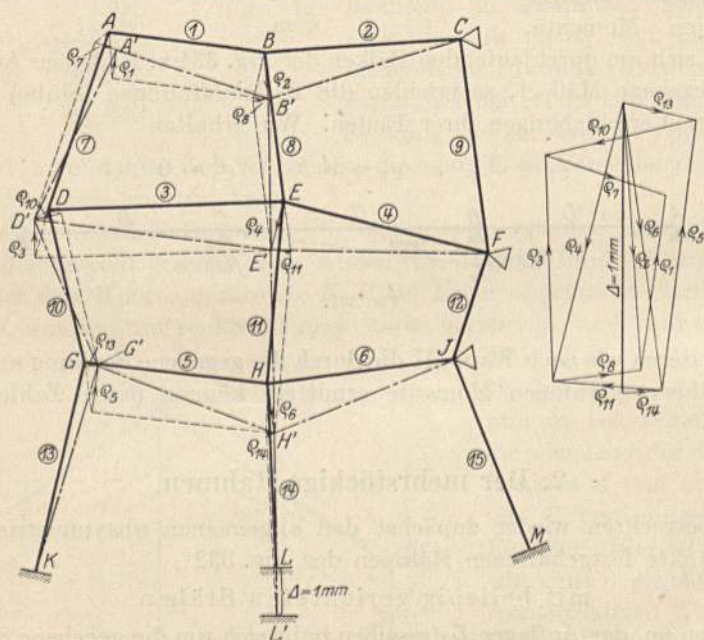


Fig. 332.

ihrer neuen Lage eingetragen, wobei wir jedoch deren Formänderungen nicht dargestellt haben.

Würde sich an Stelle des Auflagers  $L$  das Auflager  $M$  senken, so wären an Stelle der gedachten festen Lager bei  $C$ ,  $F$  und  $J$  Rollenlager mit zweckmäßig normal zu den anschließenden Balkenstäben gerichteter Bahn, anzubringen, weil sich sonst das Auflager  $M$  gar nicht voraussetzungsgemäß senken könnte.

Nun besitzen wir die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“  $q$  der Endpunkte aller Stäbe, auf Grund deren wir nach Kap. III dieses Teiles die Momente infolge der gegebenen Senkung für den festgehaltenen Zustand in bekannter Weise bestimmen können. Die in Fig. 332 an den Strecken  $q$  eingetragenen Pfeilrichtungen beziehen sich wieder auf die Regel betreffend des Vorzeichens der davon herrührenden Momente an beiden Stabenden.

Aus den Senkungsmomenten für den festgehaltenen Zustand bestimmen wir darauf die in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I^*$ ,  $F_{II}^*$  und  $F_{III}^*$  nach Kap. VII, 2 des ersten Teiles und erhalten hiernach die

Senkungs-Zusatzmomente, indem wir die nach Kap. IV, 2 dieses Teiles bestimmten  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$ -Momente (Fig. 302 c, 305 c, 308 c) für die im Knotenpunkt  $C$ , bzw.  $F$ , bzw.  $J$  von links nach rechts in Richtung des anschließenden Balkenstabes 2, bzw. 4, bzw. 6 wirkende Kraft  $H = 1 t$  mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft  $V_I^s$ , bzw.  $V_{II}^s$ , bzw.  $V_{III}^s$  multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momente addieren.

Durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente erhalten wir nun die endgültigen Momente und

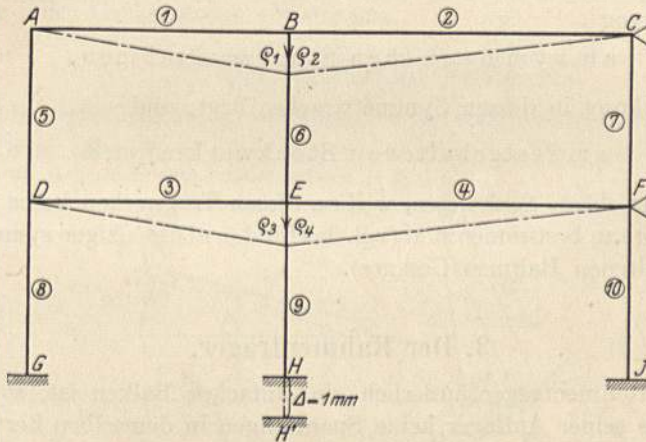


Fig. 333.

aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Senkung des Auflagerpunktes  $L$ .

Die Bestimmung der Momente infolge gegebener Senkung eines Auflagers am unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen

### Rechteckrahmen

der Fig. 333 gestaltet sich bedeutend einfacher, indem man dabei nicht nötig hat, erst die Knotenpunktverschiebungen zu konstruieren.

Um die Momente infolge der senkrechten Senkung  $\Delta$  des Auflagers  $H$  des Rahmens der Fig. 333 zu bestimmen, müssen wir an den Knotenpunkten  $C$  und  $F$  vorübergehend feste Lager anbringen, wodurch der Rahmen seitlich unverschiebbar festgehalten wird. Infolge der gegebenen Senkung des Auflagerpunktes  $H$  senken sich die Knotenpunkte  $E$  und  $B$  ebenfalls um das Maß  $\Delta$ , während die übrigen Knotenpunkte in ihrer ursprünglichen Lage verbleiben. Es treten daher am festgehaltenen Stockwerkrahmen nur die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  und  $\varphi_4$  auf, welche alle gleich der gegebenen Senkung  $\Delta$  sind, und für welche wir die Momente nach Kap. III dieses Teiles und die zugehörigen Festhaltungskräfte  $F_I^s$  und  $F_{II}^s$  nach Kap. VII, 2 des I. Teiles bestimmen. Bringen wir jetzt die Verschiebungskräfte  $V_I^s$  und  $V_{II}^s$  (umgekehrte Festhaltungskräfte  $F_I^s$  bzw.  $F_{II}^s$ ) als äußere, in Balkenachse wirkende Kräfte an, so entstehen durch diese Belastung die Senkungs-Zusatz-

momente, welche wir durch Multiplikation der  $M_I^*$ - und  $M_{II}^*$ -Momente mit Größe und Vorzeichen von  $V_I^s$  bzw.  $V_{II}^s$  und Addition der daraus hervorgehenden Momente erhalten.

Durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Momente und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Senkung des Auflagerpunktes  $H$ .

Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der Momente infolge gegebener Senkung

am symmetrischen Stockwerkrahmen,

wenn die Senkung in dessen Symmetrieachse liegt, und

am festgehaltenen Stockwerkrahmen

für beliebig gerichtete Senkungen, weil an diesen Tragwerken keine Senkungs-Zusatzmomente zu bestimmen sind (vgl. das für den einstöckigen symmetrischen oder festgehaltenen Rahmen Gesagte).

### 3. Der Rahmenträger.

Da der Rahmenträger äußerlich ein einfacher Balken ist, so ruft eine Senkung eines seiner Auflager keine Spannungen in demselben hervor.

Was die durchlaufenden Rahmenträger betrifft, so werden die Momente infolge einer Senkung eines seiner Auflager nach den für den mehrstöckigen Rahmen geltenden Grundsätzen ermittelt.

## VII. Bestimmung der Momente infolge der durch die Normalkräfte verursachten Längenänderungen der Stäbe.

Infolge der in den Stäben eines Tragwerkes auftretenden Normalkräfte (Achskräfte) ändern sich die Längen der einzelnen Stäbe um

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}, \quad (576)$$

wenn

- $N$  die Normalkraft in irgendeinem Stabe,
- $l$  die anfängliche Länge dieses Stabes,
- $E$  der Elastizitätsmodul des Baumaterials, und
- $F$  der Querschnitt des Stabes,

und zwar verkürzt sich der Stab, wenn  $N$  eine Druckkraft, und er verlängert sich, wenn  $N$  eine Zugkraft ist.

Durch diese Längenänderungen verschieben sich die Knotenpunkte des Tragwerkes, und durch diese Verschiebungen bzw. die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ der Endpunkte aller Stäbe (T. II, Kap. II) entstehen die gesuchten Momente infolge der Normalkräfte am ganzen Tragwerk.



Wir erkennen, daß die Momente infolge der durch die Normalkräfte verursachten Längenänderung der Stäbe genau gleich bestimmt werden wie die Momente infolge der durch eine Temperaturänderung des Baumaterials (Kap. V dieses Teiles) hervorgerufenen Längenänderung der Stäbe.

An Stelle der nach Gl. (575) für eine Temperaturänderung berechneten  $\Delta l$  treten die nach obiger Gl. (576) bestimmten Werte von  $\Delta l$ ; nur ist zu beachten, daß letzterer am einen Stab eine Verkürzung und am anderen eine Verlängerung ist, je nachdem die Normalkraft in dem betreffenden Stab eine Druck- oder Zugkraft ist. Dementsprechend ist  $\Delta l$  dann im Verschiebungsplan als Verkürzung oder Verlängerung abzutragen.

### 1. Der einstöckige Rahmen.

Wir betrachten als Beispiel den allgemeinen einstöckigen Rahmen der Fig. 334.

Die Kräftepläne der Knotenpunkte  $A$  und  $D$  sind in 5 mal größerem Maßstab aufgetragen als diejenigen der Knotenpunkte  $B$  und  $C$ .

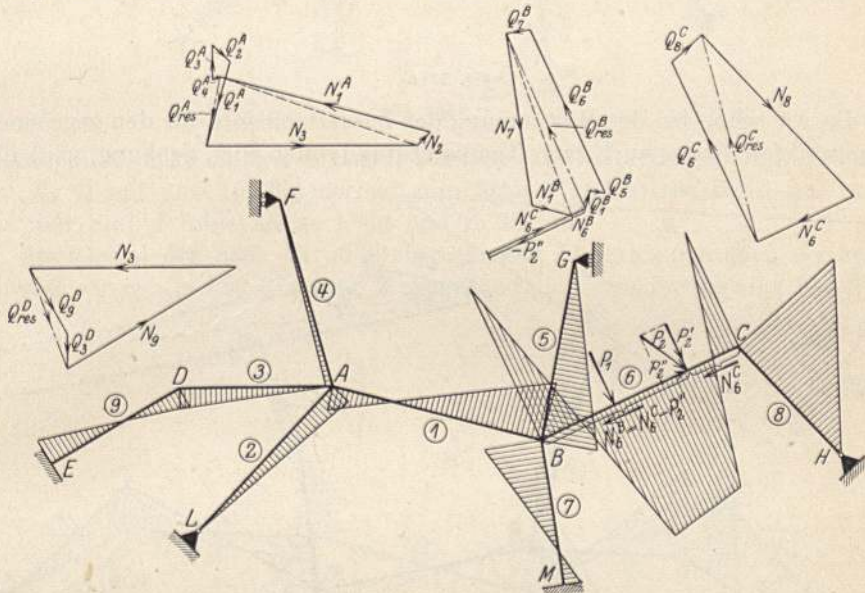


Fig. 334.

Nachdem wir die endgültige Momentenfläche für den betreffenden Belastungsfall (kann auch eine Temperaturänderung oder Senkung sein) nach den vorhergehenden Kapiteln bestimmt und aus dieser die zugehörigen Normalkräfte nach Kap. VI des I. Teiles ermittelt haben (siehe Fig. 334), berechnen wir für jeden Stab die dadurch hervorgerufene Längsänderung  $\Delta l$  desselben nach Gl. (576). Da wir nicht wissen, welcher Punkt des Rahmens bei den durch die Längenänderung  $\Delta l$  der Stäbe hervorgerufenen Verschiebungen sämtlicher Knotenpunkte in Ruhe bleibt, so können wir die wirklichen Verschiebungen der Knotenpunkte nicht angeben. Wir müssen daher, wie im vorhergehenden Kapitel, den „Balken“ des Rahmens vorübergehend in einem Knotenpunkte seitlich unverschiebbar festhalten und danach die für den festgehaltenen Zustand erhaltenen Momente durch Addition der Zusatzmomente, her-

vorgerufen durch Belastung des Rahmens mit der Verschiebungskraft  $V^N$  (umgekehrte Festhaltungskraft  $F^N$  in dem vorübergehend festgehaltenen Knotenpunkt) in die endgültigen Momente überführen.

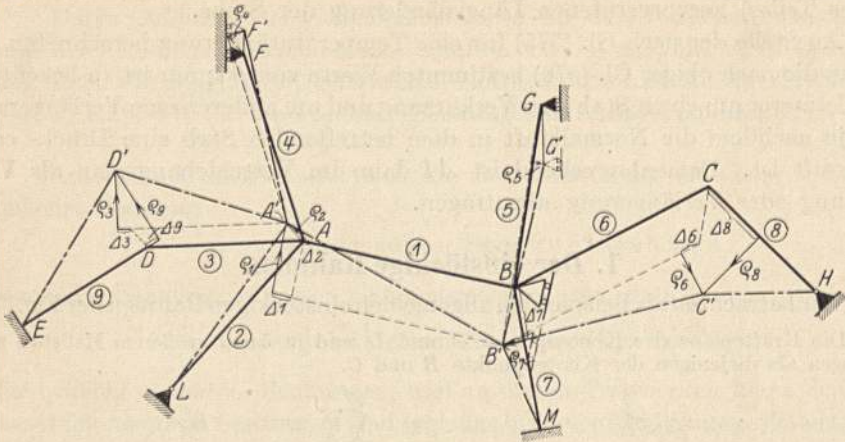


Fig. 334 a.

Da wir schon bei der Bestimmung der Zusatzmomente für den gegebenen Belastungsfall (kann auch eine Temperaturänderung oder Senkung sein) die

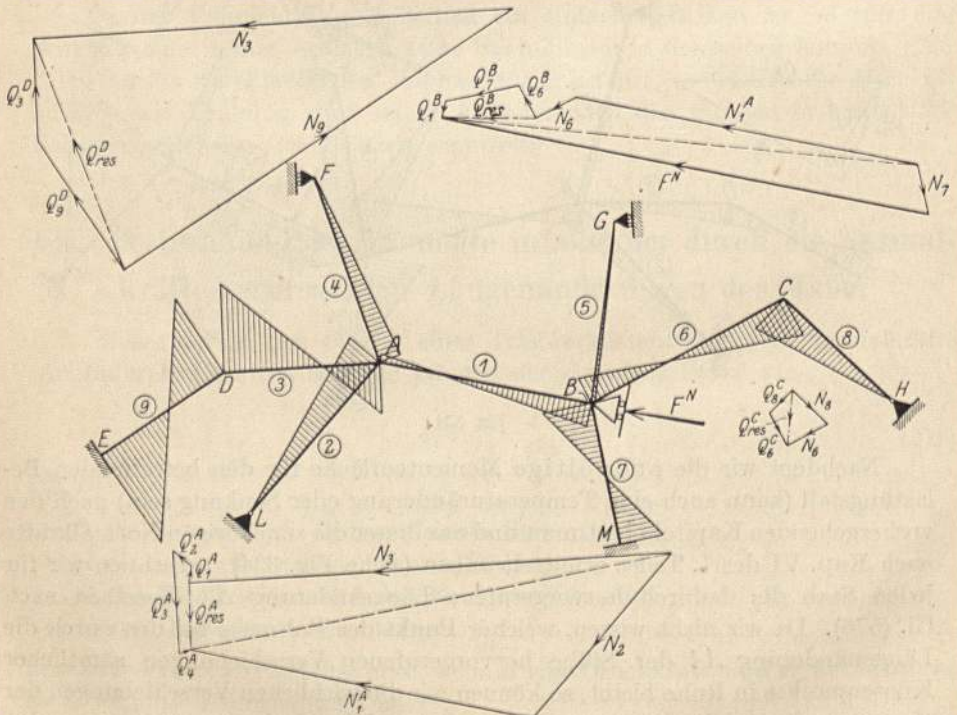


Fig. 334 b.

Momente  $M^*$  infolge Belastung eines Knotenpunktes des Rahmens mit der Kraft  $H = 1 \text{ t}$  ermitteln müssen, so halten wir bei Bestimmung der Momente

infolge der Normalkräfte nicht einen beliebigen Knotenpunkt des „Balkens“ vorübergehend unverschiebbar fest, sondern genau denselben wie bei der Berechnung der Momente für den gegebenen Belastungsfall, nämlich am vorliegenden Rahmen den Knotenpunkt  $B$ . Außerdem bringen wir an diesem

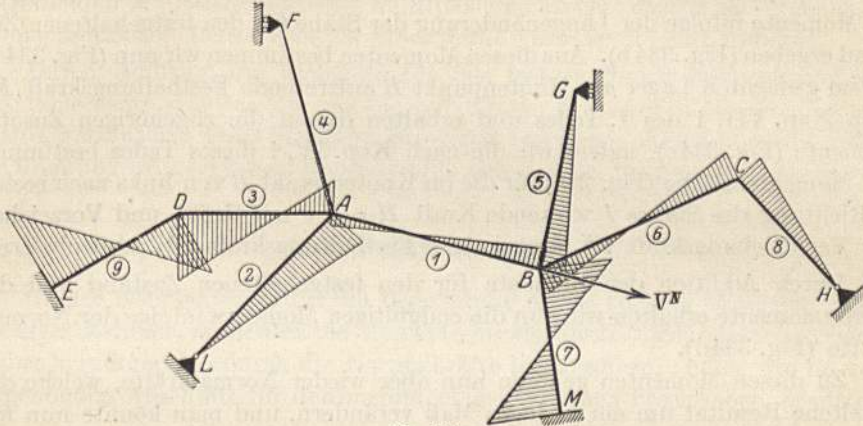


Fig. 334 c.

Knotenpunkt nicht ein festes Lager, sondern ein Rollenlager (vgl. Teil II, Kap. V, 1) mit zweckmäßig normal zum Stab 1 gerichteter Bahn an, weil sonst der Stab 7 seine Länge nicht ändern könnte.

Auf Grund der nach Gl. (576) berechneten Längenänderungen  $\Delta l$  konstruieren wir nun in Fig. 334a von  $B$  ausgehend die Verschiebung aller Knoten-

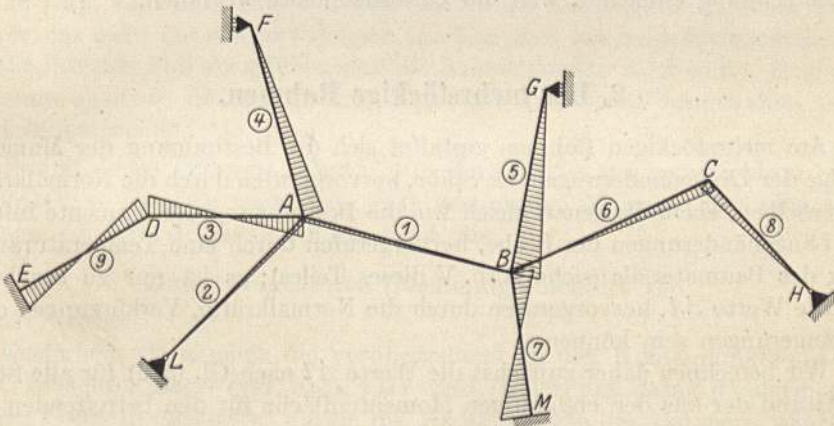


Fig. 334 d.

punkte analog wie dies im vorhergehenden Kapitel geschehen ist; in jenem Kapitel waren nur Verlängerungen, hier sind Verlängerungen und Verkürzungen abzutragen, was zu beachten ist. Da in den Stäben 4 und 5 wegen der beweglichen Lager in  $F$  und  $G$  keine Normalkräfte auftreten, so erleiden dieselben keine Längenänderungen.

Die verschobene Lage der einzelnen Stäbe wurde in Fig. 334a strichpunktirt eingetragen, wobei der Einfachheit halber deren Formänderung herrührend

von den infolge der Knotenpunktverschiebungen in denselben auftretenden Momenten nicht dargestellt wurde.

Nun besitzen wir, wie früher, nicht nur die Verschiebungen aller Knotenpunkte, sondern auch die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“  $\varrho$  der Endpunkte aller Stäbe, auf Grund deren sich nach Kap. III dieses Teiles die Momente infolge der Längenänderung der Stäbe für den festgehaltenen Zustand ergeben (Fig. 334b). Aus diesen Momenten bestimmen wir nun (Fig. 334b) die im gedachten Lager am Knotenpunkt  $B$  auftretende Festhaltungskraft  $F^N$  nach Kap. VII, 1 des I. Teiles und erhalten darauf die zugehörigen Zusatzmomente (Fig. 334c), indem wir die nach Kap. IV, 1 dieses Teiles bestimmte  $M^*$ -Momentenfläche (Fig. 296) für die im Knotenpunkt  $B$  von links nach rechts in Richtung des Stabes  $I$  wirkende Kraft  $H = 1 \text{ t}$  mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft  $V^N$  (umgekehrte Festhaltungskraft  $F^N$ ) multiplizieren.

Durch Addition der Momente für den festgehaltenen Zustand und der Zusatzmomente erhalten wir nun die endgültigen Momente infolge der Normalkräfte (Fig. 334d).

Zu diesen Momenten gehören nun aber wieder Normalkräfte, welche das erhaltene Resultat um ein geringes Maß verändern, und man könnte nun mit den berechtigten Normalkräften die Berechnung wiederholen. Dies ist jedoch praktisch nicht nötig, da die Momente infolge der Normalkräfte im Vergleich zu den übrigen Momenten überhaupt gering sind.

Bei in einem Punkte festgehaltenen Tragwerken sowie bei symmetrischen Tragwerken, welche symmetrisch belastet sind, gestaltet sich die Berechnung einfacher, weil die Zusatzmomente wegfallen.

## 2. Der mehrstöckige Rahmen.

Am mehrstöckigen Rahmen gestaltet sich die Bestimmung der Momente infolge der Längenänderungen der Stäbe, hervorgerufen durch die Normalkräfte in denselben, ebenfalls genau gleich wie die Bestimmung der Momente infolge der Längenänderungen der Stäbe, hervorgerufen durch eine Temperaturänderung des Baumaterials (siehe Kap. V dieses Teiles); es ist nur zu beachten, daß die Werte  $\Delta l$ , hervorgerufen durch die Normalkräfte, Verkürzungen oder Verlängerungen sein können.

Wir berechnen daher zunächst die Werte  $\Delta l$  nach Gl. (576) für alle Stäbe auf Grund der aus der endgültigen Momentenfläche für den betreffenden Belastungsfall hervorgehenden Normalkräfte. Darauf konstruieren wir wieder von den an den einzelnen Stockwerkbalken angebrachten Rollenlagern ausgehend die durch die Längenänderungen  $\Delta l$  verursachten Verschiebungen aller Knotenpunkte, wobei wir auch die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“  $\varrho$  der Endpunkte aller Stäbe erhalten. Mittels der Verschiebungen  $\varrho$  bestimmen wir nach Kap. III dieses Teiles die Momentenfläche am ganzen Stockwerkrahmen für den festgehaltenen Zustand und konstruieren aus letzterer nach Kap. VII, 2 des I. Teiles die zugehörige Festhaltungskraft  $F^N$  an jedem gedachten Rollenlager.

Entfernen wir die gedachten Rollenlager an den Stockwerkbalken, so treten die den Festhaltungskräften  $F^N$  entgegengesetzt gleichen Verschiebungskräfte  $V^N$  in Tätigkeit, welche am ganzen Rahmen noch Zusatzmomente hervorrufen. Diese werden dadurch erhalten, daß wir die Verschiebungskräfte  $V^N$  mit der betreffenden  $M^*$ -Momentenfläche multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momentenflächen (ebensoviel als Stockwerke vorhanden sind) addieren.

Durch Addition der Momente für den festgehaltenen Zustand und der Zusatzmomente erhalten wir nun die endgültigen Momente infolge der Normalkräfte, welche nicht mehr korrigiert zu werden brauchen, obwohl durch dieselben die ursprünglich gegebenen Normalkräfte sich um ein geringes Maß verändern.

### 3. Der Rahmenträger.

Da der Rahmenträger für die Berechnung nichts anderes ist als ein mehrstöckiger Rahmen, so werden die Momente infolge der Längenänderungen seiner Stäbe, hervorgerufen durch die Normalkräfte in denselben, analog wie im vorhergehenden Abschnitt für den mehrstöckigen Rahmen beschrieben, ermittelt.

## VIII. Bestimmung der inneren Kräfte an einem Tragwerk mit bogenförmigen Stäben und verschiebbaren Knotenpunkten.

### 1. Gang der Berechnung.

In Kap. VIII des „Ersten Teiles“ haben wir die Berechnung eines Tragwerkes, das nicht nur aus geradlinigen, sondern auch aus bogenförmigen Stäben besteht, für den Fall vorgeführt, daß die Knotenpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  (und mit letzterem auch  $D$ ) durch gedachte Lager unverschiebbar festgehalten seien (Rechnungsabschnitt I).

Besitzt dieses Tragwerk (Fig. 335) in Wirklichkeit frei verschiebbare Knotenpunkte, so sind die nach Kap. VIII bestimmten Momente nicht die endgültigen, sondern sie müssen noch durch die

Zusatzmomente (Rechnungsabschnitt II)

ergänzt werden.

Entfernen wir nämlich die vorübergehend an den Knotenpunkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  gedachten Lager (vgl. Kap. VIII des I. Teiles) und damit die darin wirkenden Festhaltungskräfte, welche die Knotenpunkte des Rahmens während Rechnungsabschnitt I in Ruhe hielten (Fig. 335a), so treten die den Festhaltungskräften („Reaktionen“) gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Verschiebungskräfte („Aktionen“) in Tätigkeit (Fig. 335b), welche den Rahmen, d. h. die einzelnen Knotenpunkte desselben, noch verschieben und dadurch am ganzen Rahmen Zusatzmomente hervorrufen. Man könnte nun auch die Quer- und Normalkräfte für diesen Belastungszustand (Fig. 335b) bestimmen und diese dann zu denjenigen aus Rechnungsabschnitt I addieren; da jedoch für die Dimensionierung nur die endgültigen Quer- und Normalkräfte in Betracht kommen, so bestimmen wir sowohl an den bogenförmigen als an den

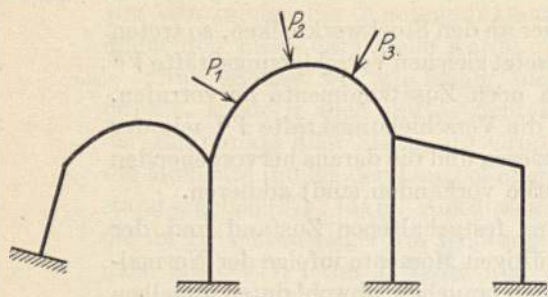


Fig. 335.

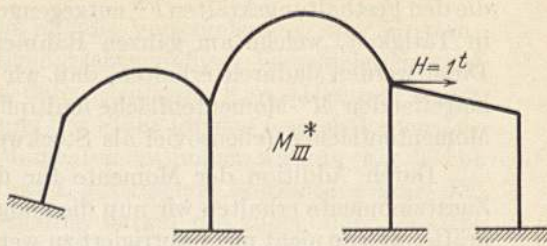


Fig. 335 e.

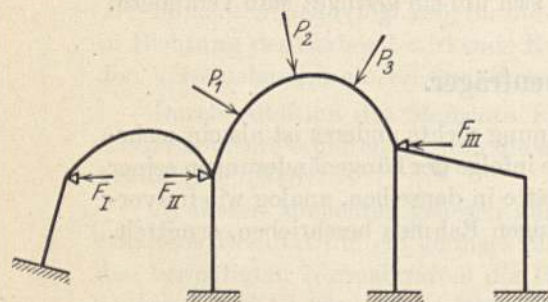


Fig. 335 a.

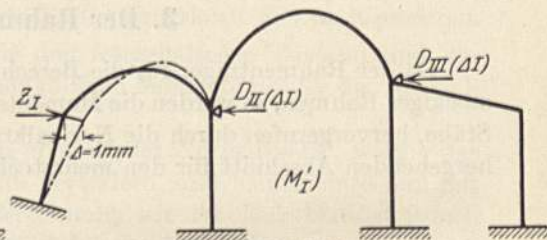


Fig. 335 f.

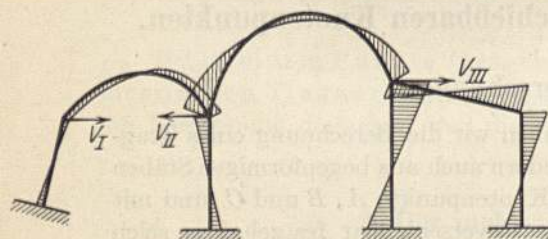


Fig. 335 b.

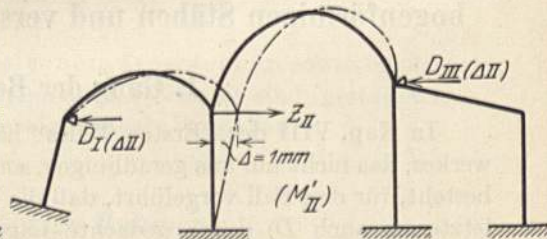


Fig. 335 g.

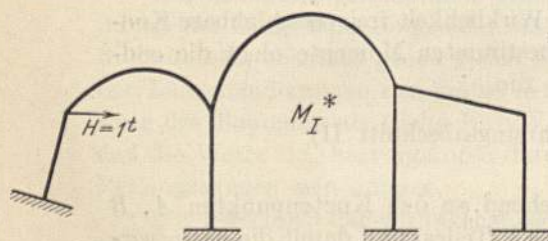


Fig. 335 c.

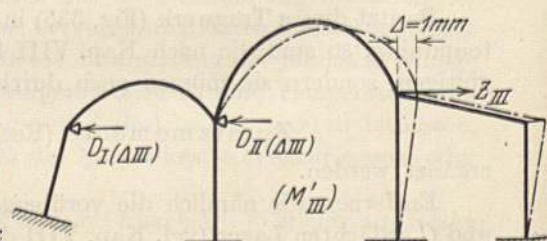


Fig. 335 h.

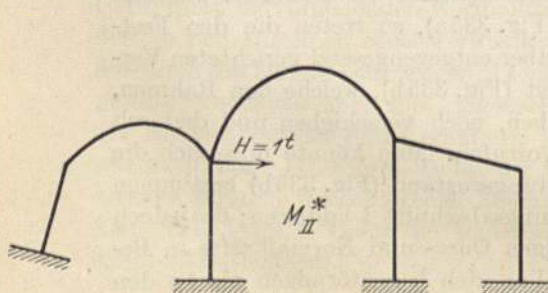


Fig. 335 d.

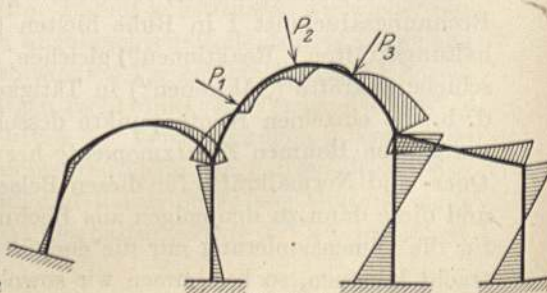


Fig. 335 i.

geradlinigen Stäben zuerst die endgültigen Momente, und erst hierauf die endgültigen Quer- und Normalkräfte.

Um die Zusatzmomente zu erhalten, ermitteln wir den Einfluß der Verschiebungskräfte  $V_I$ ,  $V_{II}$  und  $V_{III}$  getrennt voneinander und bestimmen demgemäß die drei Momentenflächen  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$  am frei verschiebbaren Rahmen (Fig. 335 c, d und e) infolge der an den Knotenpunkten  $A$  bzw.  $B$  bzw.  $C$  angreifenden Lasten  $H = 1$  t. Hieraus erhalten wir dann durch Multiplikation mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und durch Addition der daraus hervorgehenden Momente für  $V_I$ ,  $V_{II}$  und  $V_{III}$  die Zusatzmomente (Fig. 335 b).

Wir erkennen, daß ein Tragwerk mit bogenförmigen Stäben und verschiebbaren Knotenpunkten in gleicher Weise berechnet wird wie ein mehrstöckiger Rahmen, insbesondere wie ein „nach der Seite“ mehrstöckiger Rahmen (vgl. Teil II, Kap. I, 2 Sonderfälle).

Die  $M^*$ -Momente des Rahmens erhalten wir daher in der Weise, daß wir jeden, während R: I festgehaltenen Knotenpunkt um eine beliebige Strecke, z. B.  $\Delta = 1$  mm (von links nach rechts) verschieben (Fig. 335 f, g und h), jeweils aber nur einen dieser Punkte verschieben und die beiden übrigen gleichzeitig unverrückbar festhalten. Diese Verschiebungszustände liefern drei  $M'$ -Momentenflächen mit je einer Erzeugungskraft  $Z$ , in Richtung der in demselben Punkte angreifenden Festhaltungskraft aus R. I, am verschobenen, und zwei Festhaltungskräfte  $D$  an den festgehaltenen Knotenpunkten, aus deren Kombination die Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$  hervorgehen.

Zum Schluß addieren wir die mit ihrem Vorzeichen zu nehmenden Momente aus R. I und R. II, wodurch wir die endgültigen Momente (Fig. 335 i) infolge der gegebenen äußeren Belastung erhalten.

Die endgültigen Quer- und Normalkräfte an den bogenförmigen Stäben erhalten wir aus der Stützlinie (vgl. Teil I, Kap. VIII) für den betreffenden Belastungsfall, nachdem dieselbe auf Grund des endgültigen Bogenschubes  $H$ , den endgültigen Auflagerkräften  $V$  an den beiden Kämpfern sowie der endgültigen Kämpfermomente gezeichnet wurde. An den geraden Stäben erhalten wir die endgültigen Quer- und Normalkräfte in bekannter Weise aus den endgültigen Momenten nach Teil I, Kap. VI.

Sind die Kämpfer der bogenförmigen Stäbe des zu berechnenden Tragwerkes durch elastische Zugbänder miteinander verbunden (siehe z. B. Fig. 336), so bleibt R. I, wie in Teil I, Kap. VIII, 1 erwähnt, genau gleich wie beim Rahmen der Fig. 335. Zur Bestimmung der Zusatzmomente des R. II benötigen wir, wie für den „nach der Seite“ mehrstöckigen Rahmen der Fig. 245 (vgl. Teil II, Kap. I, 2 Sonderfälle) beschrieben, erstens die Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$  am Rahmen ohne Zugband (Fig. 336 a, b und c) und zweitens die Momente  $M_{I-II}^*$ ,  $M_{II-III}^*$  und  $M_{I-II-III}^*$  am Rahmen mit Zugband (Fig. 336 g, i und l); der Zugbänder wegen ergibt sich für die am gleichen Knotenpunkt von links nach rechts und die von rechts nach links gerichtete Kraft  $H = 1$  t eine verschiedene Momentenfläche. Zur Bestimmung der genannten  $M^*$ -Momentenflächen benötigen wir wieder die  $M'$ -Momentenflächen für die verschiedenen Verschiebungszustände, und zwar brauchen wir:

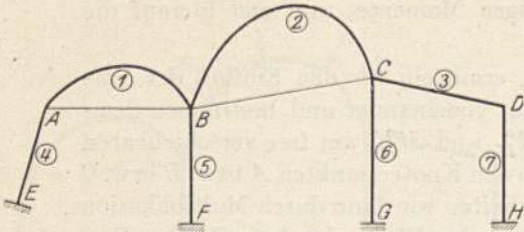


Fig. 336.

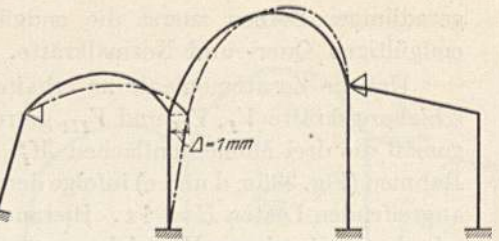


Fig. 336 e.

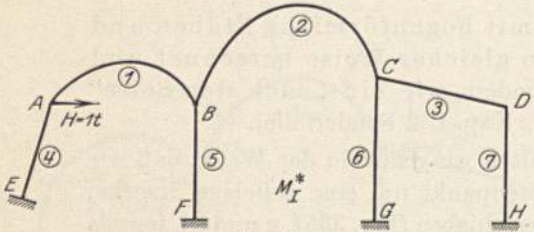


Fig. 336 a.

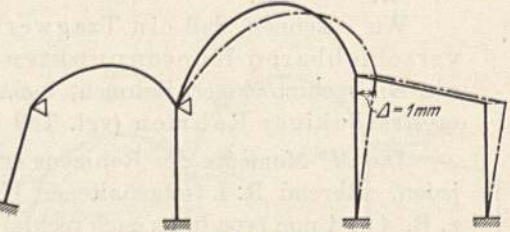


Fig. 336 f.

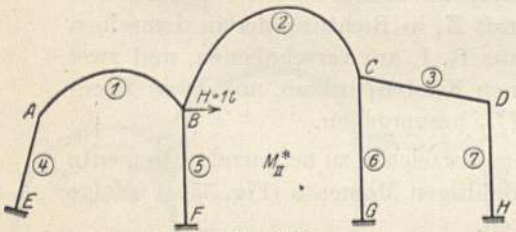


Fig. 336 b.

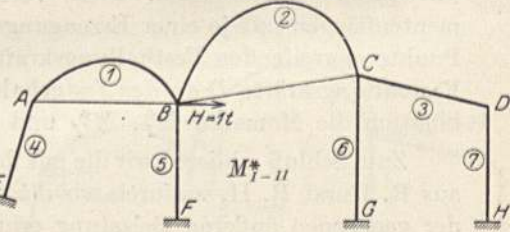


Fig. 336 g.

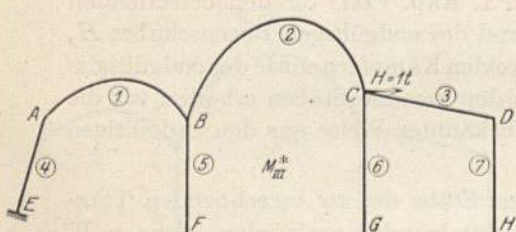


Fig. 336 c.

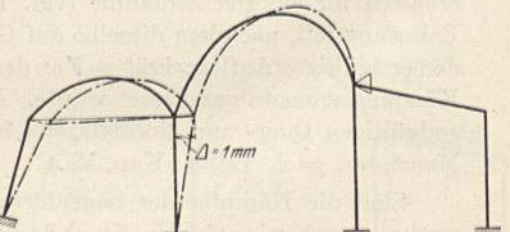


Fig. 336 h.

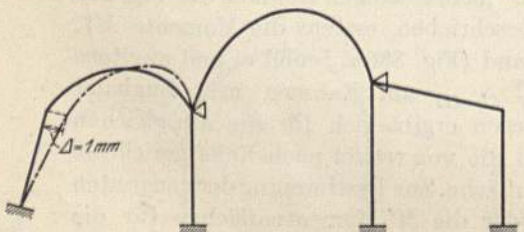


Fig. 336 d.

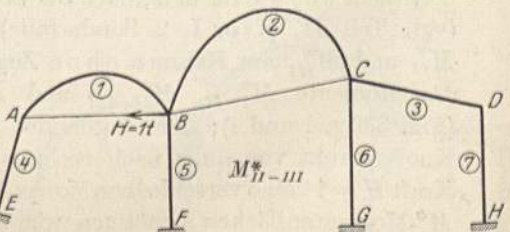


Fig. 336 i.



1. zur Bestimmung der  $M_{I}^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$ -Momente wie am Rahmen ohne Zugbänder die  $M'$ -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  und Festhaltungskräfte  $D$  für die in den Fig. 336 d, e und f dargestellten Verschiebungszustände;
2. zur Bestimmung der  $M_{I-II}^*$ -Momente (Fig. 336 g) die  $M'$ -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  und Festhaltungskräfte  $D$  für die in den Fig. 336 h und f dargestellten Verschiebungszustände,

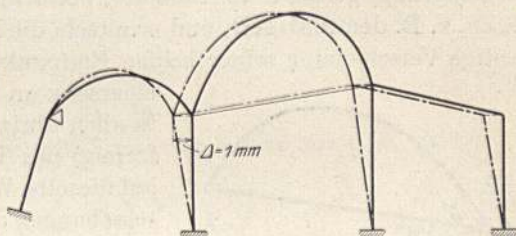


Fig. 336 k.

3. zur Bestimmung der  $M_{II-III}^*$ -Momente (Fig. 336 i) die  $M'$ -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  und Festhaltungskräfte  $D$  für die in den Fig. 336 k u. d dargestellten Verschiebungszustände; und

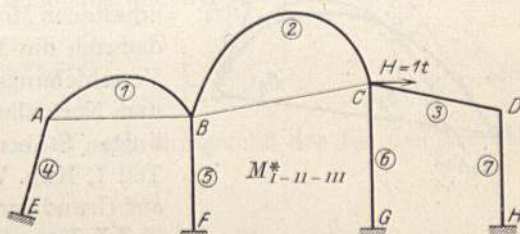


Fig. 336 l.

4. zur Bestimmung der  $M_{I-II-III}^*$ -Momente (Fig. 336 l) die  $M'$ -Momente und die zugehörige Erzeugungskraft  $Z_{I-II-III}$  für den in Fig. 336 m dargestellten Verschiebungszustand.

Die  $M_{I-II-III}^*$ -Momentenfläche ergibt sich nach Kap. IV, 1 dieses Teiles durch Division der  $M'$ -Momentenfläche für den Verschiebungszustand der Fig. 336 m durch die zugehörige Erzeugungskraft  $Z_{I-II-III}$ , und für jede der übrigen zu bestimmenden  $M^*$ -Momentenflächen ergibt sich nach Teil II, Kap. IV ein Gleichungssystem mit ebensovielen Gleichungen, als nach obigem Verschiebungszustände benötigt werden. — Der übrige Rechnungsgang gestaltet sich analog wie für den Rahmen ohne Zugbänder.

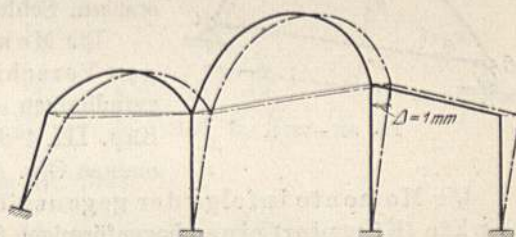


Fig. 336 m.

## 2. Bestimmung der Momente $M$ infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes, sowie der zugehörigen Erzeugungskraft $Z$ und Festhaltungskräfte $D$ .

Wie im vorhergehenden Kapitel erläutert, benötigen wir zur Berechnung der Zusatzmomente am allgemeinen Tragwerk mit bogenförmigen Stäben

(Fig. 335) die Momente  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  für die drei in den Fig. 335f, g, h dargestellten Verschiebungszustände.

Um diese

### Momente $M'$

zu bestimmen, gehen wir genau so vor wie am Rahmen mit nur geradlinigen Stäben (Teil II, Kap. III). Wir behandeln die einzelnen Stäbe (geradlinig oder bogenförmig) getrennt voneinander, betrachten daher zunächst einen einzelnen Stab, z. B. den Stab  $AB$ , und ermitteln die Momente, welche durch die gegenseitige Verschiebung seiner beiden Endpunkte (Kämpfer) entstehen, und zwar einerseits im Stabe  $AB$  selbst und andererseits in allen übrigen Stäben (geradlinig oder bogenförmig) des Tragwerkes. Darauf ermitteln wir auf dieselbe Weise die Momente infolge der Verschiebungen der beiden Endpunkte des zweiten, sodann des dritten, vierten usw. und endlich des letzten Stabes. Zum Schluß addieren wir die so erhaltenen Momente in jedem Stabe und erhalten dadurch die Momente  $M'$  für den betrachteten Verschiebungszustand. Die zugehörigen Quer- und Normalkräfte erhalten wir an den geradlinigen Stäben auf Grund der Momente nach Teil I, Kap. VI, an den bogenförmigen Stäben auf Grund der Momente und Bogenschübe nach Teil I, Kap. VIII; wir bestimmen jedoch, wie bereits erwähnt, die Quer- und Normalkräfte erst am Schluß für R. I und R. II zusammen.

Die Momente infolge der gegenseitigen Verschiebung der Endpunkte eines geradlinigen Stabes bestimmen wir nach Kap. III, 1 dieses Teiles, d. h. nach den allgemeinen Gl. (515) und (520).

Die Momente infolge der gegenseitigen Verschiebung der Endpunkte (Kämpfer) eines bogenförmigen Stabes bestimmen wir wie folgt:

Die gegebene beliebige Verschiebung  $\Delta$  eines Endpunktes des herausgetrennten und an jedem Ende in einem festen Gelenk gestützten bogenförmigen Stabes, d. h. des Zweigelenkbogens (Fig. 337) zerlegen wir in die Richtung der Kämpferverbindungsline und normal zu dieser, und ermitteln die Momente für die beiden Verschiebungskomponenten  $\Delta'$  und  $\Delta''$  getrennt voneinander.

#### a) Gegenseitige Verschiebung $\Delta'$ der Kämpfer des Zweigelenkbogens in Richtung ihrer Verbindungslinie.

Verschieben wir den Kämpfer  $B$  des unsymmetrischen Zweigelenkbogens der Fig. 337a mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment um die gegebene Strecke  $\Delta$  (bei einer Verkleinerung des Kämpferabstandes positiv angenommen) in Richtung der Kämpferverbindungsline, so entstehen dadurch bei elastischer Einspannung Kämpfermomente, die wir aus den allgemeinen Gl. (332) und

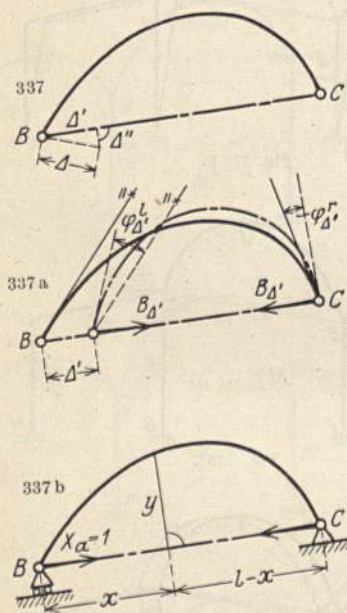


Fig. 337-337 b.

(333) erhalten, wenn wir darin für  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$  die Werte der durch die Verschiebung hervorgerufenen Drehwinkel an den Kämpfern des Zweigelenkbogens einsetzen. Um nun die Größen  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$  zu erhalten, müssen wir den an Stelle von  $\xi$  in die Gln. (410) und (411) einzusetzenden Bogenschub  $B_{A'}$  bestimmen, welcher bei der gegebenen gegenseitigen Verschiebung der Kämpfer auftritt. Mit den Abkürzungen der Gln. (350) und (351) muß die Gleichung bestehen:

$$A' = \delta_{ao} + X_a \cdot \delta_{aa},$$

da keine äußere Belastung vorhanden, so ist  $\delta_{ao} = 0$  und daher

$$X_a = B_{A'} = \frac{A'}{\delta_{aa}}. \quad (580)$$

Der in dieser Gleichung vorkommende Wert von  $\delta_{aa}$  ist nach Gl. (351):

$$\delta_{aa} = \sum_0^l M_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}, \quad (581)$$

worin  $M_a$  und  $N_a$  sich auf den Zustand  $X_a = 1$  (die Kraft wird in Richtung und im Sinne der gegebenen Verschiebung angenommen) beziehen; es ist nach Fig. 337 b:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= -y \\ N_a &= +1 \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (582)$$

Bezüglich des Vorzeichens von  $N_a$  gilt sinngemäß das für den Wert  $N_a$  der Gl. (360) Gesagte.

Es ist nun

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (583)$$

und da

$$\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s}$$

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left( \frac{\Delta x}{\Delta s} \right)^2 \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (584)$$

oder mit den Bezeichnungen der Gl. (369)

$$\frac{\Delta s}{J} = w; \quad \frac{\Delta s}{F} = v \quad \text{und} \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi,$$

$$\delta_{aa} = \frac{1}{E} \left( \sum_0^l y^2 w + \sum_0^l \xi^2 v \right). \quad (585)$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. (580) erhalten wir für den Bogenschub  $B_{A'}$  am unsymmetrischen und symmetrischen Zweigelenkbogen:

$$B_{A'} = \frac{E \cdot A'}{\sum_0^l y^2 w + \sum_0^l \xi^2 v}, \quad (586)$$

worin die Verschiebung  $A'$  mit ihrem Vorzeichen einzusetzen ist; sie ist positiv für ein Zusammendrücken und negativ für ein Auseinanderziehen des Bogens angenommen.

Es sei wieder hervorgehoben, daß am Zweigelenkbogen mit ungleich hohen Kämpfern die Abszissen  $x$  parallel zur Kämpferverbindungsline und die Ordinaten  $y$  normal dazu zu messen sind.

Setzen wir nun obigen Wert von  $B_{A'}$  in die Gln. (410) und (411) an Stelle des Wertes  $\xi$  ein, so erhalten wir, unter Berücksichtigung, daß  $M_0 = 0$  und  $N_0 = 0$ , für die Drehwinkel  $\varphi_{A'}^a$  und  $\varphi_{A'}^b$  am unsymmetrischen Zweigelenkbogen:

$$E \cdot \varphi_{A'}^a = -\frac{1}{l} B_{A'} \left( \sum_0^l y (l-x) w + \sum_0^l \xi \sqrt{1-\xi^2} \cdot v \right) \quad (587)$$

$$E \cdot \varphi_{A'}^b = -\frac{1}{l} B_{A'} \left( \sum_0^l x y w - \sum_0^l \xi \sqrt{1-\xi^2} \cdot v \right). \quad (588)$$

Vernachlässigen wir die von den Normalkräften herrührenden Glieder, was nur bei sehr flachen Bögen nicht zulässig ist, so ist nach Gl. (370)

$$\sum_0^l y (l-x) w = l \cdot B_{(M^A=1)} \cdot \sum_0^l y^2 w,$$

und da nach Gl. (586)

$$\sum_0^l y^2 w = \frac{E \cdot A'}{B_{A'}},$$

so ist

$$\sum_0^l y (l-x) w = \frac{l \cdot E \cdot A' \cdot B_{(M^A=1)}}{B_{A'}};$$

analog ist

$$\sum_0^l x y w = l \cdot B_{(M^B=1)} \cdot \sum_0^l y^2 w = \frac{l \cdot E \cdot A' \cdot B_{(M^B=1)}}{B_{A'}},$$

so daß mit diesen Werten am unsymmetrischen Zweigelenkbogen:

$$\varphi_{A'}^a = -A' \cdot B_{(M^A=1)} \quad (587a)$$

$$\varphi_{A'}^b = -A' \cdot B_{(M^B=1)} \quad (588a)$$

Durch Einsetzen des Wertes von  $B_{A'}$  aus Gl. (586) an Stelle von  $\xi$  in den Gln. (420) und (421) und unter Berücksichtigung, daß  $M_0 = 0$ , erhalten wir die Drehwinkel  $\varphi_{A'}^a$  und  $\varphi_{A'}^b$  am symmetrischen Zweigelenkbogen zu:

$$E \cdot \varphi_{A'}^a = E \cdot \varphi_{A'}^b = E \cdot \varphi_{A'} = -\frac{1}{l} B_{A'} \cdot \sum_0^l x y w. \quad (589)$$

Vernachlässigen wir wieder die von den Normalkräften herrührenden Glieder, was nur bei sehr flachen Bögen nicht zulässig ist, so erhalten wir nach den Gln. (587a) und (588a) unter Berücksichtigung von Gl. (414):

$$\varphi_{A'}^a = \varphi_{A'}^b = \varphi_{A'} = -A' \cdot \frac{B}{2}. \quad (589a)$$

Durch Einsetzen der Werte  $\varphi_{A'}^a$  und  $\varphi_{A'}^b$  an Stelle der Größen  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$  (herrührend von der äußeren Belastung) in die Gln. (334) und (335) erhalten

wir die zugehörigen Kämpfermomente am unsymmetrischen Bogen aus:

$$M_{A'}^B = \frac{-\varphi_{A'}^a (l-b) + \varphi_{A'}^b \cdot b}{l \cdot \beta (l-a-b)} \cdot a \quad (590)$$

$$M_{A'}^C = \frac{-\varphi_{A'}^a (l-a) + \varphi_{A'}^b \cdot b}{l \cdot \beta (l-a-b)} \cdot b \quad (591)$$

Vernachlässigen wir den Einfluß der Normalkräfte auf die Drehwinkel, was nur bei sehr flachen Bögen nicht zulässig ist, so erhalten wir durch Einsetzen der Werte von  $\varphi_{A'}^a$  und  $\varphi_{A'}^b$  aus den Gln. (587a) und (588a) in obige Gln. am unsymmetrischen Bogen:

$$\begin{aligned} M_{A'}^B &= \frac{A' [B_{(M^A=1)} (l-b) - B_{(M^B=1)} \cdot b]}{l \cdot \beta (l-a-b)} \cdot a \quad (590) \\ &= \frac{A' [B_{(M^A=1)} \cdot l - (B_{(M^A=1)} + B_{(M^B=1)}) \cdot b]}{l \cdot \beta (l-a-b)} \cdot a \end{aligned}$$

oder, da laut Definition:

$$\begin{aligned} B_{(M^A=1)} + B_{(M^B=1)} &= B \\ M_{A'}^B &= \frac{(B_{(M^A=1)} \cdot l - B \cdot b) \cdot A'}{l \cdot \beta (l-a-b)} \cdot a, \quad (590a) \end{aligned}$$

analog folgt

$$M_{A'}^C = \frac{(B_{(M^B=1)} \cdot l - B \cdot a) \cdot A'}{l \cdot \beta (l-a-b)} \cdot b. \quad (591a)$$

Die Kämpfermomente am symmetrischen Bogen ergeben sich, da dann  $\varphi_{A'}^a = \varphi_{A'}^b = \varphi_{A'}$  zu:

$$M_{A'}^B = \frac{-\varphi_{A'} (l-2b) \cdot a}{l \cdot \beta (l-a-b)} \quad (592)$$

$$M_{A'}^C = \frac{-\varphi_{A'} (l-2a) \cdot b}{l \cdot \beta (l-a-b)}. \quad (593)$$

Vernachlässigen wir den Einfluß der Normalkräfte auf die Drehwinkel, was nur bei sehr flachen Bögen nicht zulässig ist, so erhalten wir durch Einsetzen des Wertes von  $\varphi_{A'}$  aus Gl. (589a) in obige Gln. am symmetrischen Bogen:

$$M_{A'}^B = \frac{B \left( \frac{l}{2} - b \right) \cdot A' \cdot a}{l \cdot \beta (l-a-b)} \quad (592a)$$

$$M_{A'}^C = \frac{B \left( \frac{l}{2} - a \right) \cdot A' \cdot b}{l \cdot \beta (l-a-b)} \quad (593a)$$

Der Gesamtbogenschub  $H_{A'}$  infolge der gegenseitigen Verschiebung der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie erhalten wir durch Einsetzen von

$B_{A'}$  an Stelle von  $\xi$  in Gl. (443),

am unsymmetrischen Bogen zu:

$$H_{A'} = B_{A'} + M_{A'}^B \cdot B_{(M^B=1)} + M_{A'}^C \cdot B_{(M^C=1)} \quad (594)$$

und durch Einsetzen von  $B_{A'}$  an Stelle von  $\xi$  in Gl. (444)

am symmetrischen Bogen zu:

$$H_{A'} = B_{A'} + \frac{1}{2} B (M_{A'}^B + M_{A'}^C). \quad (595)$$

Da keine äußere Belastung vorhanden ist, so ergeben sich die Auflagerdrücke  $V_{A'}^B$  und  $V_{A'}^C$ , ohne weiteres aus Gl. (445) und (446) zu:

$$V_{A'}^B = -\frac{1}{l} (M_{A'}^B - M_{A'}^C) \quad (596)$$

und

$$V_{A'}^C = +\frac{1}{l} (M_{A'}^B - M_{A'}^C), \quad (597)$$

worin die Momente  $M_{A'}^B$  und  $M_{A'}^C$  mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind; ein nach oben (senkrecht zur Kämpferverbindungsline) gerichteter Auflagerdruck wird dann positiv.

Das Moment in einem beliebigen Querschnitt des Bogens  $BC$  ergibt sich nun nach Gl. (455), wenn wir darin  $M_0 = 0$  setzen, zu:

$$M_x = M_{A'}^B \cdot \frac{l-x}{l} + M_{A'}^C \cdot \frac{x}{l} - H_{A'} \cdot y \quad (598)$$

worin die Kämpfermomente  $M_{A'}^B$  und  $M_{A'}^C$  mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind; am Bogen mit ungleich hohen Kämpfern sind wieder die Abszissen  $x$  parallel zur Kämpferverbindungsline und die Ordinaten  $y$  normal dazu zu messen.

### b) Gegenseitige Verschiebung $A'$ der Kämpfer des Zweigelenkbogens normal zu ihrer Verbindungslinie.

Verschieben wir den Kämpfer  $B$  des unsymmetrischen (oder symmetrischen) Zweigelenkbogens der Fig. 338 mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment um die gegebene Strecke  $A''$  (sehr klein im Verhältnis zur Spannweite  $l$ ) normal zur Verbindungslinie der beiden Kämpfer, so entstehen am Zweigelenkbogen keine Formänderungen.

Die Drehwinkel der Kämpfertangenten sind

$$\varphi_{A''}^a = -\varphi_{A''}^b = \operatorname{tg} \frac{A''}{l} = \frac{A''}{l} \quad (599)$$

(da  $\varphi_{A''}^a$  und  $\varphi_{A''}^b$  sehr kleine Winkel) und die Kämpfermomente ergeben sich daher durch Einsetzen dieses Wertes an Stelle von  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$  in die Gln. (334) und (335) sowohl am unsymmetrischen als auch am symmetrischen Bogen zu:

$$M_{A'}^B = \frac{A'' \cdot a}{l \cdot \beta (l - a - b)} \quad (600)$$

$$M_{A'}^C = \frac{A'' \cdot b}{l \cdot \beta (l - a - b)} \quad (601)$$

Wir erkennen, daß die Ausdrücke für die Momente an den Enden eines bogenförmigen und eines geradlinigen Stabes für eine Verschiebung  $A''$  resp.  $\varrho$  normal zur Verbindungslinie der Endpunkte genau die gleichen

sind. Ferner haben die Gleichungen für die Kämpfermomente infolge  $A'$  und  $A''$  den gleichen Nenner.

Der Gesamtbogenschub  $H_{A''}$  infolge der gegenseitigen Verschiebung der Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie ist

am unsymmetrischen Bogen:

$$H_{A''} = M_{A''}^B \cdot B_{(M^B=1)} + M_{A''}^C \cdot B_{(M^C=1)} \quad (602)$$

und am symmetrischen Bogen:

$$H_{A''} = \frac{1}{2} B (M_{A''}^B + M_{A''}^C). \quad (602a)$$

Da keine äußere Belastung vorhanden ist, so ergeben sich die

Auflagerdrücke  $V_{A''}^B$  und  $V_{A''}^C$  zu:

$$V_{A''}^B = -\frac{1}{l} (M_{A''}^B - M_{A''}^C), \quad (603)$$

$$V_{A''}^C = +\frac{1}{l} (M_{A''}^B - M_{A''}^C), \quad (603a)$$

worin die Momente mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind; ein nach oben (senkrecht zur Kämpferverbindungslinie) gerichteter Auflagerdruck wird dann positiv.

Das Moment in einem beliebigen Querschnitt des Bogens ergibt sich nun nach Gl. (598), wenn wir darin die Kämpfermomente aus den Gln. (600) und (601) und die Gesamtbogenkraft aus Gl. (602) einsetzen, d. h.

$$M_x = M_{A''}^B \cdot \frac{l-x}{l} + M_{A''}^C \cdot \frac{x}{l} - H_{A''} \cdot y. \quad (604)$$

Wir erhalten also die Momente für die in den Fig. 335 f, g und h dargestellten Verschiebungszustände, welche wir zur Berechnung des Rahmens der Fig. 335 benötigen, wie folgt:

#### Verschiebungszustand I:

Der Knotenpunkt  $A$ , welcher während R. I unverschiebbar festgehalten wurde, ist um eine beliebige Strecke, z. B.  $\Delta = 1$  mm (von links nach rechts) zu verschieben (Fig. 339), während die beiden Knotenpunkte  $B$  und  $C$  gleichzeitig unverschiebbar festgehalten werden.

Die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm tragen wir vom Punkt  $A$  aus rechtwinklig zum Stab 4 auf, da sich der Knotenpunkt  $A$  bei seiner Verschiebung auf einem Kreisbogen um den unverschiebbar vorausgesetzten Auflagerpunkt  $E$  bzw. wegen der im Verhältnis zu den Stablängen des Tragwerkes verschwindend klein angenommenen Verschiebung auf einer Normalen zum Stab 4 bewegt. Ziehen wir nun die Verbindungslinie  $AB$  der beiden Kämpfer des bogenförmigen Stabes 1 und fällen vom Punkt  $A'$  (neue Lage des Knotenpunktes  $A$ ) aus ein Lot auf diese Kämpferverbindungslinie, so erkennen wir, daß die Momente  $M_I'$  hervorgerufen werden durch:

1. die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_4$  der Endpunkte des Stabes 4,

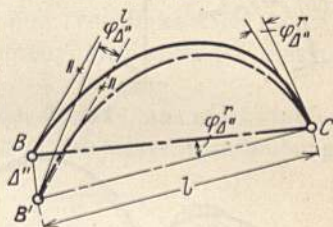


Fig. 338.

2. die gegenseitige Verschiebung  $\Delta' = AA''$  der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 1 in Richtung ihrer Verbindungslinie, und
3. die gegenseitige Verschiebung  $\Delta'' = A'A''$  der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 1 normal zu ihrer Verbindungslinie.

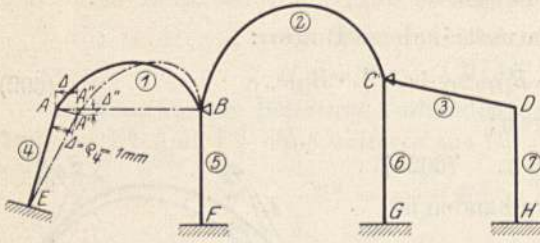


Fig. 339.

Die Momentenflächen, herrührend von den drei genannten Ursachen, werden nach den vorhergehend abgeleiteten Gleichungen getrennt ermittelt; die Summe derselben ist die gesuchte  $M'_I$ -Momentenfläche (Fig. 339 a).

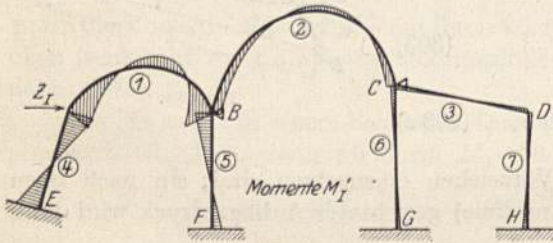


Fig. 339 a.

Verschiebungszustand II:

Der Knotenpunkt B, welcher während R. I unverschiebbar festgehalten wurde, ist um eine beliebige Strecke, z. B.  $\Delta = 1$  mm (von links nach rechts) zu verschieben (Fig. 340), während die beiden Knotenpunkte A und C gleichzeitig unverschiebbar festgehalten werden.

Die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm tragen wir vom Punkt B aus rechtwinklig zum Stab 5, um dessen Fußpunkt sich der Punkt B bei seiner Verschiebung dreht, auf. Ziehen wir nun die Verbindungslinie BC der beiden Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 und fällen vom Punkt B' aus ein Lot auf diese Kämpferverbindungsline, so erkennen wir, daß die Momente  $M''_{II}$  hervorgerufen werden durch:

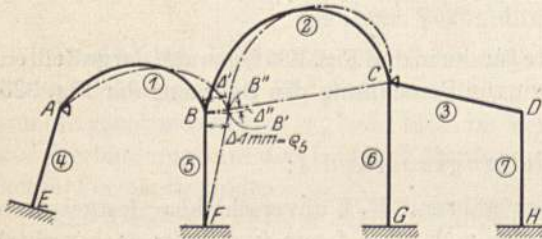


Fig. 340.

Die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm tragen wir vom Punkt B aus rechtwinklig zum Stab 5, um dessen Fußpunkt sich der Punkt B bei seiner Verschiebung dreht, auf. Ziehen wir nun die Verbindungslinie BC der beiden Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 und fällen vom Punkt B' aus ein Lot auf diese Kämpferverbindungsline, so erkennen wir, daß die Momente  $M''_{II}$  hervorgerufen werden durch:

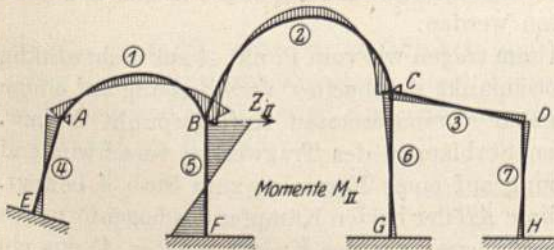


Fig. 340 a.

1. die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_5$  der Endpunkte des Stabes 5,
2. die gegenseitige Verschiebung  $\Delta = \Delta' = 1$  mm ( $\Delta'' = 0$ ) der

- Kämpfer des bogenförmigen Stabes 1 in Richtung ihrer Verbindungslinie;
3. die gegenseitige Verschiebung  $\Delta' = BB''$  der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 in Richtung ihrer Verbindungslinie, und



4. die gegenseitige Verschiebung  $A'' = B'B''$  der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 normal zu ihrer Verbindungslinie.

Die Momentenflächen, herrührend von den vier genannten Ursachen, werden nach den vorhergehend abgeleiteten Gleichungen getrennt ermittelt; die Summe derselben ist die gesuchte  $M'_{III}$ -Momentenfläche (Fig. 340a).

### Verschiebungszustand III:

Der Knotenpunkt  $C$ , welcher während R. I unverschiebbar festgehalten wurde, ist um eine beliebige Strecke, z. B.  $\Delta = 1$  mm (von links nach rechts) zu verschieben (Fig. 341), während die beiden Knotenpunkte  $A$  und  $B$  gleichzeitig unverschiebbar festgehalten werden.

Die gegebene Strecke  $\Delta = 1$  mm tragen wir vom Punkt  $C$  aus rechtwinklig zum Stab 6, um dessen Fußpunkt sich der Punkt  $C$  bei seiner Verschiebung dreht, auf. Dann verschiebt sich der Knotenpunkt  $D$  gleichzeitig um 1 mm wagrecht, da er mit  $C$  durch einen geradlinigen Stab verbunden und die Säule 7 parallel zur Säule 6 ist; der Stab 3 verschiebt sich daher parallel zu sich selbst, und seine Endpunkte verschieben sich gegenseitig nicht. Ziehen wir nun die Verbindungslinie  $BC$  der beiden Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 und fällen vom Punkt  $C'$  aus ein Lot auf die Verlängerung dieser Kämpferverbindungslinie bei  $C$ , so erkennen wir, daß die Momente  $M'_{III}$  hervorgerufen werden durch

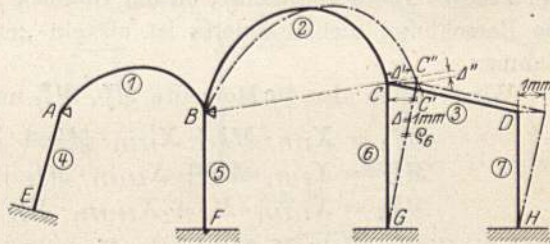


Fig. 341.

daß die Momente  $M'_{III}$  hervorgerufen werden durch

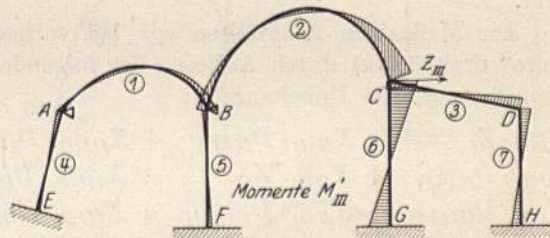


Fig. 342.

1. die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_6$  der Endpunkte des Stabes 6,
2. die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_7$  der Endpunkte des Stabes 7,
3. die gegenseitige Verschiebung  $A' = CC''$  der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 in Richtung ihrer Verbindungslinie,
4. die gegenseitige Verschiebung  $A'' = C'C''$  der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 normal zu ihrer Verbindungslinie.

Die Momentenflächen infolge der genannten vier Ursachen werden nach den vorhergehend abgeleiteten Gleichungen getrennt ermittelt; die Summe derselben ist die gesuchte  $M'_{III}$ -Momentenfläche (Fig. 342).

Die Bestimmung der zu den einzelnen Verschiebungszuständen gehörigen

### Erzeugungskraft $Z$ und Festhaltungskräfte $D$

in Richtung der Festhaltungskräfte  $F$  aus R. I an dem betreffenden Knotenpunkt, welche wir wie beim mehrstöckigen Rahmen (Teil II, Kap. III, 5) zur Berechnung der  $M^*$ -Momente benötigen, gestaltet sich genau gleich (Fig. 339a, 340a und 342) wie diejenige der Festhaltungskräfte  $F$  des Rechnungsabschnittes I (vgl. Teil I, Kap. VIII, 9).

### 3. Bestimmung der Momente $M^*$ infolge einer Last $H = 1 \text{ t}$ sowie der Zusatzmomente $M_{\text{zus}}$ am frei verschiebbaren Rahmen.

Nachdem wir die Momente  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  sowie die zugehörigen Erzeugungskräfte  $Z$  und Festhaltungskräfte  $D$  bestimmt haben, sind wir in der Lage, die  $M^*$ -Momente zu ermitteln, und zwar genau gleich, wie in Kap. IV, 2 dieses Teiles vorgeführt, da ein Rahmen mit bogenförmigen Stäben für die Berechnung nichts anderes ist als ein „nach der Seite“ mehrstöckiger Rahmen.

Wir erhalten also die Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$  aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} M_I^* &= X_{I(I)} \cdot M'_I + X_{II(I)} \cdot M'_{II} + X_{III(I)} \cdot M'_{III} \\ M_{II}^* &= X_{I(II)} \cdot M'_I + X_{II(II)} \cdot M'_{II} + X_{III(II)} \cdot M'_{III} \\ M_{III}^* &= X_{I(III)} \cdot M'_I + X_{II(III)} \cdot M'_{II} + X_{III(III)} \cdot M'_{III} \end{aligned} \right\} \quad (605)$$

worin die Größen  $X$  die Maßzahlen der Momente  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  sind, welche angeben, in welchem Verhältnis diese Momentenflächen übereinander zu legen sind.

Die Maßzahlen  $X$  erhalten wir bei vorliegendem Tragwerk („nach der Seite“ dreistöckig) durch Auflösen der folgenden drei Systeme von drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\left. \begin{aligned} X_{I(I)} \cdot Z_I &+ X_{II(I)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(I)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 1 \\ X_{I(I)} \cdot D_{II(\Delta I)} &+ X_{II(I)} \cdot Z_{II} + X_{III(I)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 0 \\ X_{I(I)} \cdot D_{III(\Delta I)} &+ X_{II(I)} \cdot D_{III(\Delta II)} + X_{III(I)} \cdot Z_{III} = 0 \end{aligned} \right\} \text{I. System (für } M_I^*) \quad (606)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{I(II)} \cdot Z_I &+ X_{II(II)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(II)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 0 \\ X_{I(II)} \cdot D_{II(\Delta I)} &+ X_{II(II)} \cdot Z_{II} + X_{III(II)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 1 \\ X_{I(II)} \cdot D_{III(\Delta I)} &+ X_{II(II)} \cdot D_{III(\Delta II)} + X_{III(II)} \cdot Z_{III} = 0 \end{aligned} \right\} \text{II. System (für } M_{II}^*) \quad (607)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{I(III)} \cdot Z_I &+ X_{II(III)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(III)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 0 \\ X_{I(III)} \cdot D_{II(\Delta I)} &+ X_{II(III)} \cdot Z_{II} + X_{III(III)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 0 \\ X_{I(III)} \cdot D_{III(\Delta I)} &+ X_{II(III)} \cdot D_{III(\Delta II)} + X_{III(III)} \cdot Z_{III} = 1 \end{aligned} \right\} \text{III. System (für } M_{III}^*) \quad (608)$$

worin die Größen  $Z$  und  $D$  die zu den Momenten  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  gehörigen Erzeugungs- und Festhaltungskräfte sind (Fig. 343, 343a und 343b).

Die auf diese Weise erhaltenen Momente  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$  sind in Fig. 344, 345 und 346 dargestellt.

An einem Rahmen mit bogenförmigen Stäben, zu dessen Berechnung während R. I zwei Lager angebracht werden müssen, d. h. an einem

„nach der Seite“ 2-stöckigen Rahmen

erhalten wir die  $M^*$ -Momente nach den in Kap. IV, 2 dieses Teiles abgeleiteten Gl. (544) und (545).

Die zu den  $M^*$ -Momenten gehörigen

### Gesamtbogenschübe $H^*$

setzen sich, genau wie die Momente  $M^*$  aus den Momenten  $M'$ , aus den zu letzteren gehörigen Bogenschüben  $H_{\Delta}$  im Verhältnis der Maßzahlen  $X$  zusammen. Es ist daher bei vorliegendem Tragwerk für jeden Bogen desselben:

$$\left. \begin{aligned} H_I^* &= X_{I(I)} \cdot H_{\Delta I} + X_{II(I)} \cdot H_{\Delta II} + X_{III(I)} \cdot H_{\Delta III} \\ H_{II}^* &= X_{I(II)} \cdot H_{\Delta I} + X_{II(II)} \cdot H_{\Delta II} + X_{III(II)} \cdot H_{\Delta III} \\ H_{III}^* &= X_{I(III)} \cdot H_{\Delta I} + X_{II(III)} \cdot H_{\Delta II} + X_{III(III)} \cdot H_{\Delta III} \end{aligned} \right\} \quad (609)$$

worin  $H_{\Delta I}$ ,  $H_{\Delta II}$ ,  $H_{\Delta III}$  die den Momenten  $M'_I$  bzw.  $M'_{II}$  bzw.  $M'_{III}$  entsprechenden Bogenschübe bedeuten.

Die Zusatzmomente  $M_{\text{zus}}$  für jeden Belastungsfall erhalten wir nun wie an einem mehrstöckigen Rahmen durch Multiplikation der Momente  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der Verschiebungskraft  $V_I$  bzw.  $V_{II}$  bzw.  $V_{III}$  für den betreffenden Belastungsfall und Addition der daraus hervorgehenden Momente, d. h.

$$M_{\text{zus}} = V_I \cdot M'_I + V_{II} \cdot M'_{II} + V_{III} \cdot M'_{III}. \quad (610)$$

Die zu den Zusatzmomenten gehörigen Gesamtbogenschübe  $H_{\text{zus}}$  ergeben sich für jeden Bogen aus der Gl.

$$H_{\text{zus}} = V_I \cdot H_I^* + V_{II} \cdot H_{II}^* + V_{III} \cdot H_{III}^*. \quad (611)$$

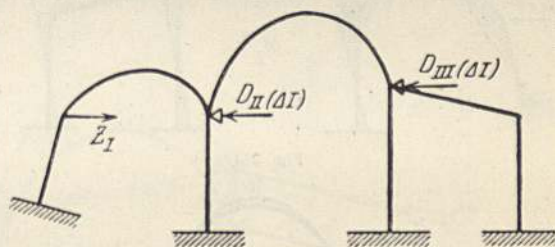


Fig. 343.

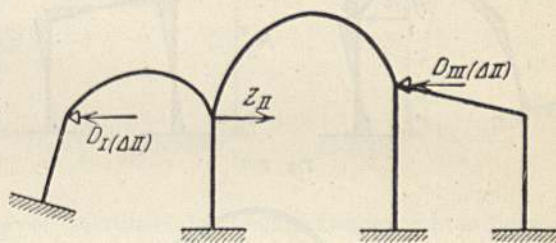


Fig. 343 a.

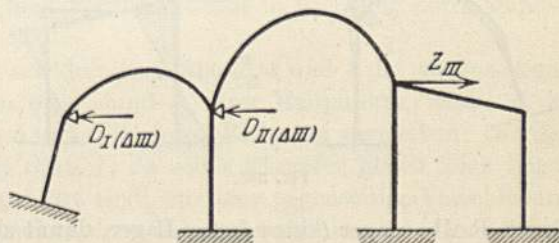


Fig. 343 b.

## 4. Bestimmung der Momente infolge einer Temperaturänderung des ganzen Tragwerkes.

Durch die Längenänderungen, welche jeder Stab (gerader und bogenförmiger) des allgemeinen Rahmens der Fig. 335 bei der Änderung seines Wärme-

grades gegenüber der Herstellungstemperatur erleidet, und die dadurch hervorgerufenen Knotenpunktverschiebungen, entstehen die gesuchten „Temperaturmomente“. Sie setzen sich zusammen aus:

- den Momenten, welche durch die Veränderung der Bogenachse bei Temperaturänderung der bogenförmigen Stäbe allein, unter Voraussetzung unverschiebbarer Kämpfer, am ganzen Rahmen entstehen,
- den Momenten, welche durch die Knotenpunktverschiebungen bei Temperaturänderung der geraden Stäbe allein, unter Voraussetzung horizontal unverschiebbarer Knotenpunkte *A*, *B* und *C*, am ganzen Rahmen hervorgerufen werden, und

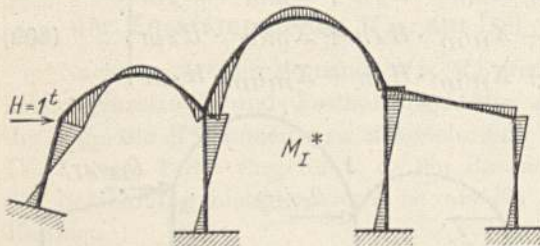


Fig. 344.

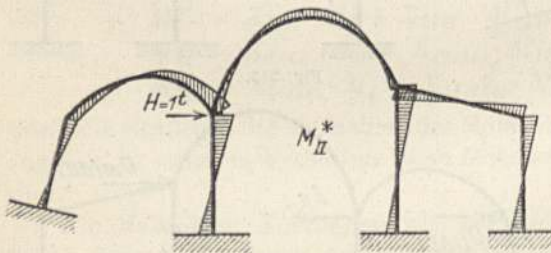


Fig. 345.

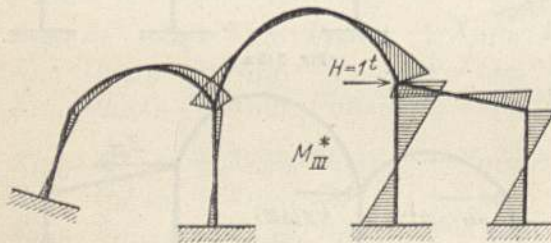


Fig. 346.

- den Temperatur-Zusatzmomenten, welche durch die in den vorübergehend horizontal unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten wirkenden Verschiebungskräfte  $V^t$  am frei verschiebbaren Rahmen erzeugt werden.

Um die Temperaturmomente am allgemeinen Rahmen der Fig. 335 nach der Methode der Festpunkte zu bestimmen, halten wir, wie am mehrstöckigen Rahmen (Teil II, Kap. V, 2) diejenigen Knotenpunkte, welche während R. I (bei Bestimmung der Momente infolge der äußeren Belastung) unverschiebbar festgehalten wurden, nämlich die Knotenpunkte *A*, *B* und *C*, vorübergehend

durch Rollenlager (keine festen Lager, damit sich die Säulen verlängern bzw. verkürzen können) horizontal unverschiebbar fest. In den an diesen Knotenpunkten gedachten Lagern treten dann Festhaltungskräfte  $F^t$  auf, genau wie bei Belastung des Rahmens mit äußeren Kräften. Entfernen wir die gedachten Lager, so treten an den vorübergehend horizontal unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten die Verschiebungskräfte  $V^t$  (die entgegengesetzt gerichteten Festhaltungskräfte  $F^t$ ) in Tätigkeit, welche noch zusätzliche Momente am ganzen Rahmen erzeugen, die zu denjenigen für den festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die genau richtigen Momente infolge der gegebenen Temperaturänderung zu erhalten.



infolge der gegenseitigen Verschiebungen  $\Delta'_2$  und  $\Delta''_2$  am Bogen 2 nach Abschnitt 2, a) und b) dieses Kapitels; durch Addition dieser Teilmomente erhalten wir die unter b) genannten Momente.

Addieren wir nun die beiden Momentenflächen, nämlich diejenige infolge der Ausdehnung der bogenförmigen Stäbe und diejenige infolge der Ausdehnung der geraden Stäbe, so erhalten wir die Momentenfläche für den angenommenen festgehaltenen Zustand. Aus diesen Momenten bestimmen wir noch die in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte  $F'_I$ ,  $F'_{II}$  und  $F'_{III}$  nach Kap. VIII, 9 des I. Teiles.

Nun erhalten wir die unter c) genannten Temperatur-Zusatzmomente, indem wir die nach dem vorhergehenden Abschnitt bestimmten  $M^*_I$ ,  $M^*_{II}$ - und  $M^*_{III}$ -Momente mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft  $V'_I$  bzw.  $V'_{II}$  bzw.  $V'_{III}$  multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momente addieren.

Zum Schluß erhalten wir durch Addition der Temperaturmomente für den festgehaltenen Zustand und der Temperatur-Zusatzmomente die endgültigen Temperaturmomente.

## 5. Bestimmung der Momente infolge Senkungen der Auflager.

Senkt sich ein Auflager des allgemeinen Tragwerkes der Fig. 348 um ein gegebenes, jedoch im Verhältnis zu den Stablängen des Tragwerkes verschwindend kleines Maß  $\Delta$  in beliebiger Richtung, so werden dadurch Verschiebungen der Knotenpunkte des Tragwerkes bzw. „gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen“ der Endpunkte der geraden Stäbe sowie gegenseitige Verschiebungen der Kämpfer der bogenförmigen Stäbe in Richtung der Kämpferverbindungsline und normal dazu, hervorgerufen, welche Momente am ganzen Tragwerk erzeugen, die zu bestimmen sind. Senken sich mehrere Auflager gleichzeitig, so ist jede einzelne Senkung für sich zu behandeln und am Schluß die Summe der erhaltenen Momentenflächen zu bilden.

Um die Momente infolge Senkung des Auflagerpunktes  $F$  des allgemeinen Rahmens der Fig. 348 um die Strecke  $\Delta$ , beispielsweise in senkrechter Richtung, zu bestimmen, halten wir, wie am mehrstöckigen Rahmen (Teil II, Kap. VI, 2) diejenigen Knotenpunkte, die schon während R. I unverschiebbar festgehalten wurden und für welche wir bereits die  $M^*$ -Momente (infolge  $H = 1$  t in dem betreffenden Knotenpunkt) bestimmt haben, nämlich die Knotenpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  vorübergehend durch gedachte Lager an denselben horizontal unverschiebbar fest, da wir wieder nicht wissen, von welchem Punkt des Rahmens aus sich die Verschiebungen der Knotenpunkte infolge der Senkung vollziehen. Am Knotenpunkt  $B$  müssen wir ein Rollenlager (auf senkrechter Bahn beweglich) anbringen, weil sonst die vorausgesetzte Senkung nicht stattfinden könnte (siehe Fig. 348). In den an diesen Knotenpunkten gedachten Lagern treten Festhaltungskräfte  $F^*$  auf, genau wie bei Belastung des Rahmens mit äußeren Kräften. Entfernen wir diese Lager, so treten an den vorübergehend horizontal unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten die Verschiebungskräfte  $V^*$  (die entgegengesetzt gerichteten Festhaltungskräfte  $F^*$ ) in Tätigkeit, welche noch zusätzliche Momente am ganzen Rahmen erzeugen, die zu denjenigen für

den festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die genau richtigen Momente infolge der gegebenen Senkung zu erhalten.

In Fig. 348 bestimmen wir nun die Verschiebungen der Knotenpunkte infolge der gegebenen Senkung. Da die Senkung  $\Delta$  des Auflagerpunktes  $F$  in Richtung des anschließenden Stabes 5 erfolgt, so verschiebt sich der Punkt  $B$  um dasselbe Maß, und zwar senkrecht nach unten, da das an diesem Punkt gedachte Rollenlager in senkrechter Richtung beweglich ist. Dabei senkt sich nun der Bogen 1 einseitig an seinem Kämpfer  $B$  um das Maß  $\Delta_1'$ , da sein anderer Kämpfer wegen des dort gedachten festen Lagers in Ruhe bleibt, und Bogen 1 erleidet daher eine gegenseitige Verschiebung  $\Delta_1''$  seiner Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie von der Größe der gegebenen Senkung  $\Delta$ . Der Bogen 2 senkt sich ebenfalls einseitig an seinem linken Kämpfer  $B$  um das Maß  $\Delta$  in

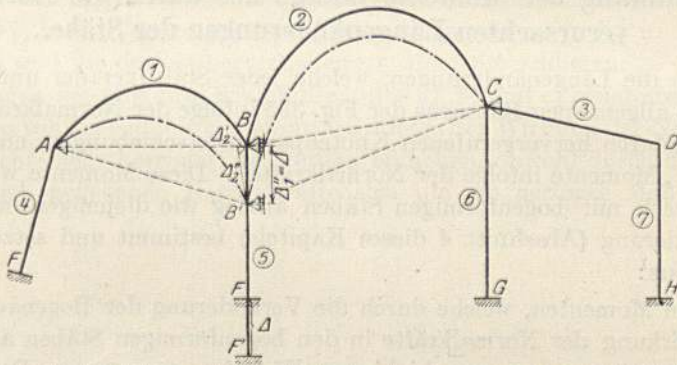


Fig. 348.

senkrechter Richtung, da sein rechter Kämpfer wegen des dort gedachten festen Lagers in Ruhe bleibt. Da jedoch die Kämpfer des Bogens 2 ungleich hoch liegen, so erleidet derselbe durch die Senkung des Kämpfers  $B$  nach  $B'$  sowohl eine gegenseitige Verschiebung  $\Delta_2'$  seiner Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie als auch eine gegenseitige Verschiebung  $\Delta_2''$  normal zur Kämpferverbindungslinie, welche wir durch Zerlegung der Senkung  $BB' = \Delta$  in der Richtung der Kämpferverbindungslinie  $BC$  und normal zu dieser erhalten (siehe Fig. 348). Die dadurch am ganzen Rahmen hervorgerufenen Momente erhalten wir in bekannter Weise, und zwar sowohl diejenigen infolge der gegenseitigen Verschiebungen  $\Delta_1''$  am Bogen 1 als auch jene infolge  $\Delta_2'$  und  $\Delta_2''$  am Bogen 2 nach Abschnitt 2, a) und b) dieses Kapitels; die sich durch Addition dieser Teilmomentenflächen ergebende Momentenfläche ist diejenige für den festgehaltenen Zustand. Aus diesen Momenten bestimmen wir noch die in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I^s$ ,  $F_{II}^s$  und  $F_{III}^s$  nach Kap. VIII, 9 des I. Teiles.

Nun erhalten wir die Senkungs-Zusatzmomente, indem wir die nach Abschnitt 3 dieses Kapitels bestimmten  $M_I^*$ ,  $M_{II}^*$  und  $M_{III}^*$ -Momente mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft  $V_I^s$  bzw.  $V_{II}^s$  bzw.  $V_{III}^s$  multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momente addieren.

Zum Schluß erhalten wir durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente die endgültigen Momente infolge der gegebenen Senkung des Auflagerpunktes  $F$ . Die zugehörigen Querkkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte an den bogenförmigen Stäben ergeben sich nach Kap. VIII, 8 des I. Teiles aus der Stützlinie, diejenige an den geradlinigen Stäben nach Kap. VI des I. Teiles.

Erfolgt die gegebene Senkung nicht in senkrechter, sondern in beliebiger anderer Richtung (vgl. Fig. 328d), so erleidet außerdem Stab 5 eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\rho_5$  seiner Endpunkte, und die Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  ist dann nicht mehr gleich der gegebenen Senkung, sondern gleich der Projektion derselben auf die Senkrechte (da Punkt  $B$  senkrecht geführt ist).

## 6. Bestimmung der Momente infolge der durch die Normalkräfte verursachten Längenänderungen der Stäbe.

Durch die Längenänderungen, welche jeder Stab (gerader und bogenförmiger) des allgemeinen Rahmens der Fig. 335 infolge der Normalkräfte erleidet und die dadurch hervorgerufenen Knotenpunktverschiebungen, entstehen die gesuchten „Momente infolge der Normalkräfte“. Diese Momente werden auch am Tragwerk mit bogenförmigen Stäben analog wie diejenigen infolge Temperaturänderung (Abschnitt 4 dieses Kapitels) bestimmt und setzen sich zusammen aus:

- a) den Momenten, welche durch die Veränderung der Bogenachse infolge Wirkung der Normalkräfte in den bogenförmigen Stäben allein, unter Voraussetzung unverschiebbarer Kämpfer, am ganzen Rahmen entstehen;
- b) den Momenten, welche durch die Knotenpunktverschiebungen infolge Wirkung der Normalkräfte in den geraden Stäben allein, unter Voraussetzung horizontal unverschiebbarer Knotenpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  (durch gedachte Rollenlager mit vertikaler Bahn), am ganzen Rahmen hervorgerufen werden, und
- c) den Zusatzmomenten (infolge Wirkung der Normalkräfte), welche durch die in den vorübergehend horizontal unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten wirkenden Verschiebungskräfte  $V^N$  (umgekehrte Festhaltungskräfte  $F^N$ ) am frei verschiebbaren Rahmen erzeugt werden.

Die unter a) genannten Momente sind verhältnismäßig sehr gering und werden, falls man sie zu berücksichtigen wünscht, schon bei der Bestimmung der Momente für die betreffende äußere Belastung, unter Voraussetzung horizontal unverschiebbarer Säulenköpfe (siehe drittes und viertes Glied der Formeln in Teil I, Kap. VIII) mitberechnet.

Zur Ermittlung der unter b) genannten Momente konstruieren wir zunächst wie in Abschnitt 4 dieses Kapitels die Verschiebungen der einzelnen Knotenpunkte unter der Voraussetzung senkrecht geführter Knotenpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ ; hierbei ist zu beachten, daß die nach Gl. (576) zu berechnenden Längenänderungen der geraden Stäbe Verlängerungen oder Verkürzungen sein können und dementsprechend abzutragen sind. Dadurch erhalten wir für die geraden Stäbe



die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen  $\varrho$  ihrer Endpunkte und für die bogenförmigen Stäbe die gegenseitigen Verschiebungen  $\Delta'$  und  $\Delta''$  ihrer Kämpfer in Richtung der Kämpferverbindungslinie und normal dazu. Die durch die Verschiebungen  $\varrho$  erzeugten Momente berechnen wir nach Kap. III dieses Teiles, und diejenigen infolge der gegenseitigen Verschiebungen  $\Delta'$  und  $\Delta''$  der Kämpfer der bogenförmigen Stäbe nach Abschnitt 2, a) und b) dieses Kapitels; durch Addition dieser Teilmomente erhalten wir die unter b) genannten Momente.

Durch Addition der unter a) und b) genannten Momente erhalten wir die Momente für den festgehaltenen Zustand, aus welchen wir die in den gedachten Lagern an den Knotenpunkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  auftretenden Festhaltungskräfte  $F_I^N$ ,  $F_{II}^N$  bzw.  $F_{III}^N$  nach Kap. VIII, 9 des ersten Teiles bestimmen.

Die unter c) genannten Zusatzmomente infolge Wirkung der Normalkräfte erhalten wir nun, indem wir die nach Abschnitt 3 dieses Kapitels bestimmten  $M_I^*$ -,  $M_{II}^*$ - und  $M_{III}^*$ -Momente mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft  $V_I^N$  bzw.  $V_{II}^N$  bzw.  $V_{III}^N$  (umgekehrte Festhaltungskräfte  $F_I^N$ ,  $F_{II}^N$  und  $F_{III}^N$ ) multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momente addieren.

Addieren wir nun zum Schluß die unter a), b) und c) genannten Momente, so erhalten wir die endgültigen Momente infolge der Wirkung der Normalkräfte, welche nicht mehr korrigiert zu werden brauchen, obwohl durch dieselben die ursprünglich gegebenen Normalkräfte sich um ein geringes Maß verändern.

### Dritter Teil.

## Beispiele aus der Praxis, insbesondere ausgeführte Eisenbetontragwerke, berechnet nach der im Ersten u. Zweiten Teil entwickelten Methode der Festpunkte.

Die im folgenden an Tragwerken aus Eisenbeton gezeigten Verfahren gelten selbstverständlich genau gleich für Eisenkonstruktionen.

Zur Erleichterung des Nachschlagens der einzelnen Hauptformeln sind diese im Anhang zusammengestellt; ferner finden sich dort Tabellen zur raschen Ermittlung der Festpunktabstände und Kreuzlinienabschnitte für Balken mit geraden und parabolischen Vouten und für symmetrische Parabel-Bögen mit vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunehmendem Querschnitt.

Bei allen Beispielen ist die Ermittlung der Momente, Quer- und Normalkräfte vorgeführt, während die Bestimmung der Querschnittsabmessungen nicht aufgenommen wurde; für Konstruktionsteile aus Eisenbeton erfolgt die Querschnittsbemessung am einfachsten mit Hilfe der in „Mörsch, Der Eisenbetonbau“ enthaltenen Formeln und Tabellen.

### Beispiel 1.

#### Kontinuierliche Voutendecke mit vier Öffnungen.

Es soll in diesem, aus Fig. 350 ersichtlichen Beispiel gezeigt werden, daß man weitgespannte Eisenbetondecken (Dachdecken) mit geringer Mühe unter Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes berechnen kann, wobei

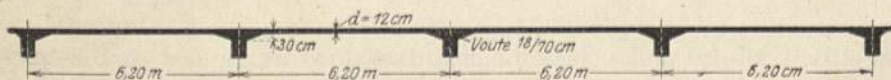


Fig. 349.

man nicht nur eine richtige Eisenverteilung, sondern auch Ersparnisse an Eisen einlagen erzielt, indem durch die Vouten am Anschluß an die Träger die Momente in Feldmitte vermindert werden; die vergrößerten Momente an den Stützen können wegen des stärkeren Querschnitts dort leicht ohne Mehraufwand an Eisen aufgenommen werden.

Die Ermittlung der Festpunkte erfolgte graphisch nach Kap. III, und diejenige der Momentenfläche nach Kap. V des ersten Teiles; als Trägheits-

Fig. 350

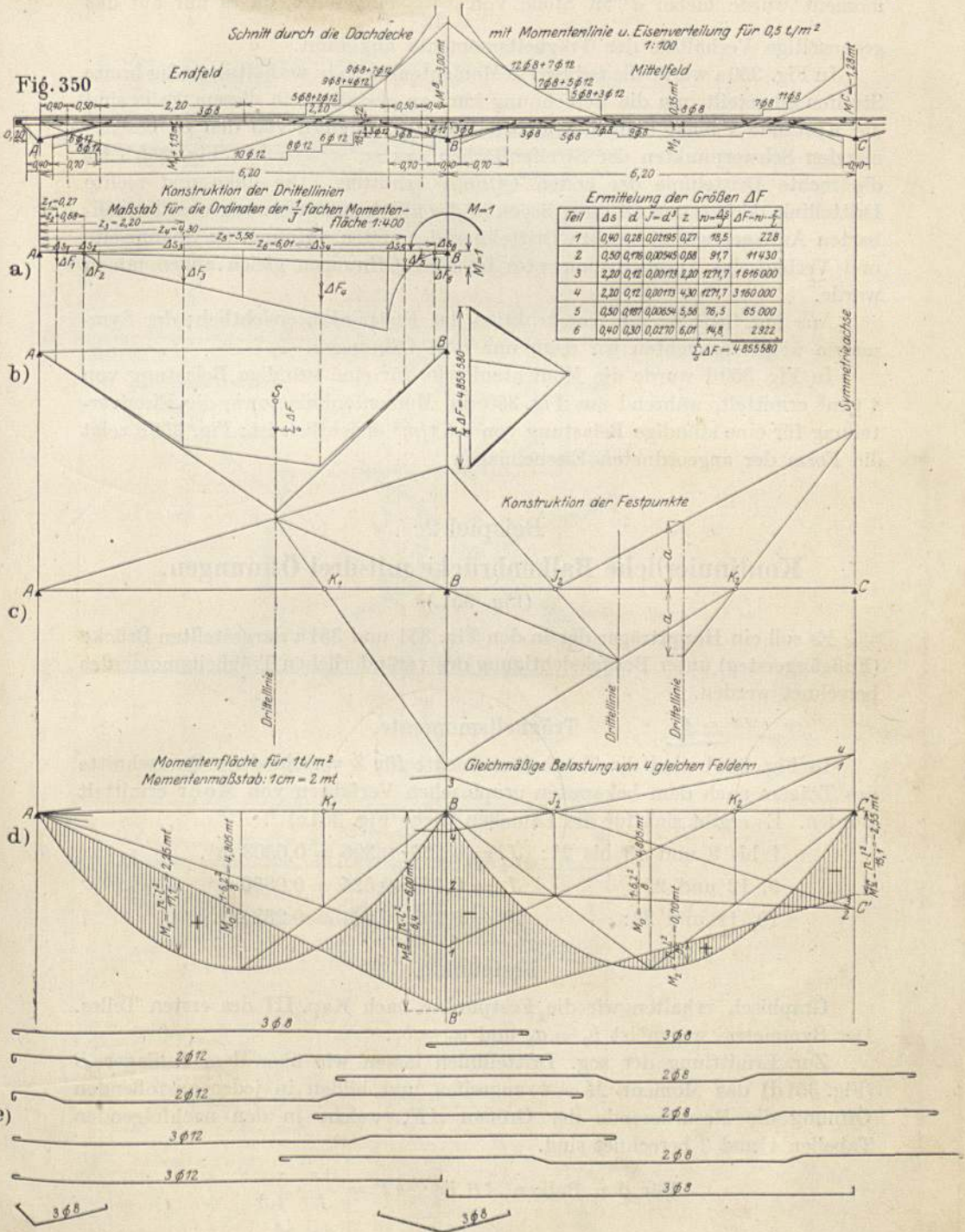


Fig. 350.

moment wurde hierbei  $d^3$  an Stelle von  $\frac{1 \cdot d^3}{12}$  eingeführt, da es nur auf das gegenseitige Verhältnis der Trägheitsmomente ankommt.

In Fig. 350a wurde die reduzierte Momentenfläche in verhältnismäßig breite Streifen eingeteilt, um die Berechnung kurz zu gestalten; in diesem Falle sind die Abstände  $z$  nicht einfach von Streifenmitte, sondern von den zu bestimmenden Schwerpunkten der Streifenflächen aus zu messen. In Fig. 350b ist die rechte Drittellinie der ersten Öffnung ermittelt. Die linke und rechte Drittellinie der zweiten Öffnung liegen in der gleichen Entfernung vom benachbarten Auflager wie die rechte Drittellinie der ersten Öffnung, da Spannweite und Verlauf des Trägheitsmomentes in allen Öffnungen gleich angenommen wurde.

Aus Fig. 350c ist die Konstruktion der Festpunkte ersichtlich; der Symmetrie wegen brauchten wir dazu nur zwei Öffnungen.

In Fig. 350d wurde die Momentenfläche für eine ständige Belastung von  $1 \text{ t/m}^2$  ermittelt, während aus Fig. 350 die Momentenlinie sowie die Eisenverteilung für eine ständige Belastung von  $0,5 \text{ t/m}^2$  ersichtlich ist; Fig. 350e zeigt die Form der angeordneten Eiseneinlagen.

## Beispiel 2.

### Kontinuierliche Balkenbrücke mit drei Öffnungen.

(Fig. 351.)

Es soll ein Hauptträger der in den Fig. 351 und 351a dargestellten Brücke (Fußgängersteg) unter Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes berechnet werden.

(Aufg. II *und* *III*)

#### Trägheitsmomente.

In Fig. 351b sind die Trägheitsmomente für 3 verschiedene Querschnitte des Trägers nach dem bekannten graphischen Verfahren von Mohr ermittelt worden. Es ergibt sich für die Lamellen (siehe Fig. 351c):

$$1 \text{ bis } 8 \text{ und } 13 \text{ bis } 21: J_1 = 0,127 \cdot 0,396 = 0,0503 \text{ m}^4,$$

$$9, 12 \text{ und } 22: J_2 = 0,163 \cdot 0,525 = 0,0856 \text{ m}^4,$$

$$10, 11 \text{ und } 23: J_3 = 0,253 \cdot 0,941 = 0,238 \text{ m}^4.$$

#### Festpunkte.

Graphisch erhalten wir die Festpunkte nach Kap. III des ersten Teiles. Der Symmetrie wegen ist  $b_2 = a_2$  und  $a_3 = b_1$ .

Zur Ermittlung der sog. Drittellinien lassen wir über dem Auflager  $B$  (Fig. 351d) das Moment  $M = 1$  angreifen und bilden in jeder anstoßenden Öffnung die Resultierende der Größen  $\Delta F$ , welche in den nachfolgenden Tabellen 1 und 2 berechnet sind.

$$\text{Für den Balken } AB \text{ ist: } \Delta F = \frac{\Delta s}{J} \cdot \frac{z}{l},$$

$$\text{„ „ „ } BC \text{ „ } \Delta F = \frac{\Delta s}{J} \cdot \frac{z'}{l}.$$

Fig. 351.

Längsschnitt durch die Balkenbrücke

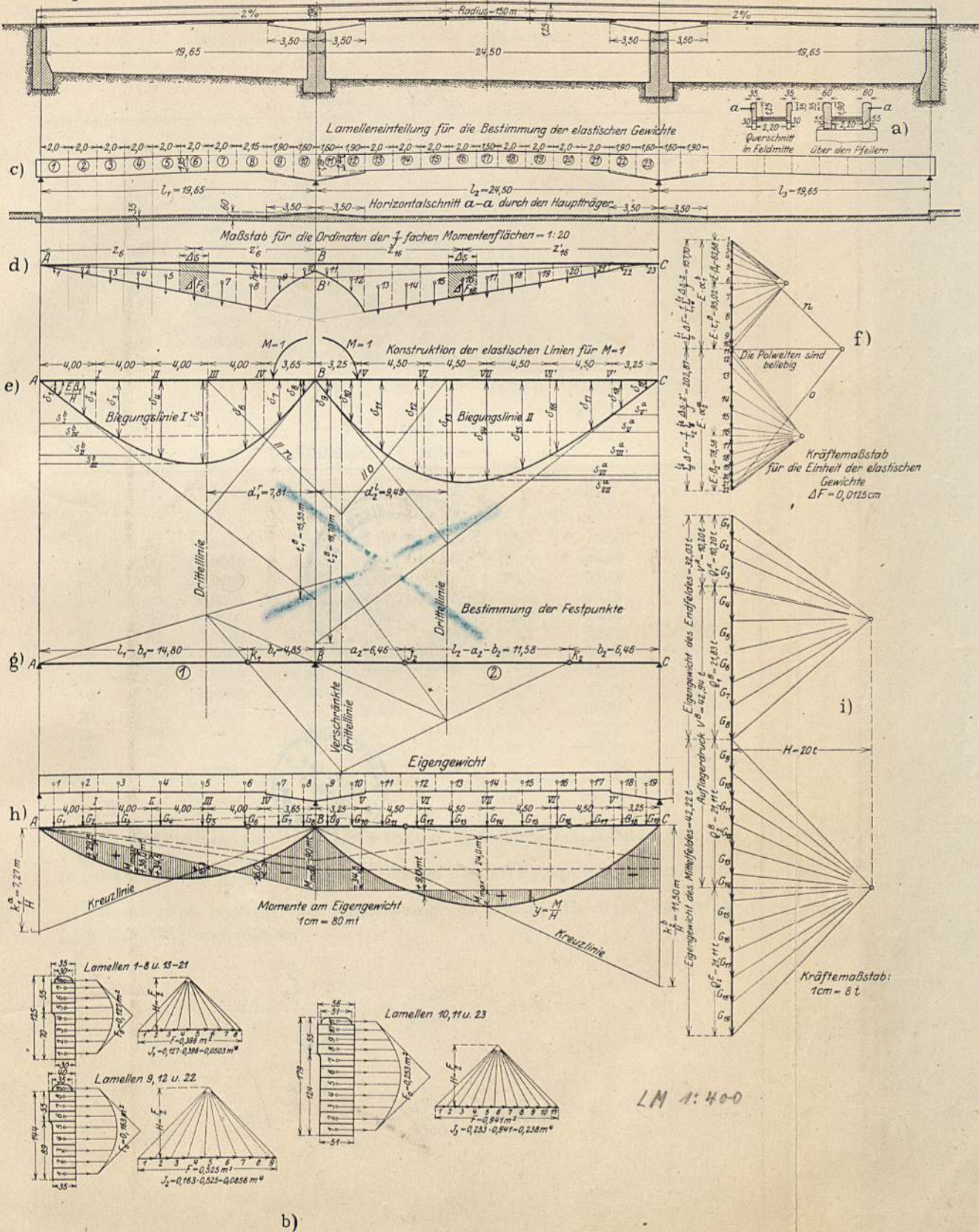


Fig. 351.

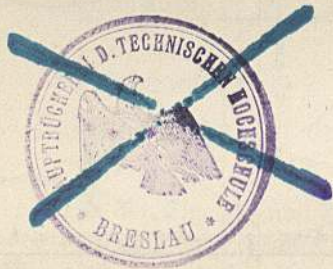


Tabelle 1.  
Endfeld  $l_1 = 19,65$  m.

Lamelle	$\Delta s$	$J$	$z$	$z'$	$w = \frac{\Delta s}{J}$	$w \cdot z$	$\Delta F = \frac{w \cdot z}{l_1}$	$w \cdot z \cdot z'$
1	2,00	0,0503	1,00	18,65	39,76	39,76	2,02	742
2	2,00	0,0503	3,00	16,65	39,76	119,28	6,07	1986
3	2,00	0,0503	5,00	14,65	39,76	198,80	10,12	2912
4	2,00	0,0503	7,00	12,65	39,76	278,32	14,16	3520
5	2,00	0,0503	9,00	10,65	39,76	357,84	18,21	3810
6	2,00	0,0503	11,00	8,65	39,76	437,36	22,26	3784
7	2,00	0,0503	13,00	6,65	39,76	516,88	26,30	3438
8	2,15	0,0503	15,075	4,575	42,74	644,20	32,79	2948
9	1,90	0,0856	17,10	2,55	22,20	379,70	19,32	968
10	1,60	0,2380	18,85	0,80	6,72	126,70	6,45	101
						3098,84	157,70	24209

Tabelle 2.

Mittelfeld  $l_2 = 24,50$  m.

Lamelle	$\Delta s$	$J$	$z$	$z'$	$w = \frac{\Delta s}{J}$	$w \cdot z'$	$\Delta F = \frac{w \cdot z'}{l_2}$	$w \cdot z' \cdot z$
11	1,60	0,2380	0,80	23,70	6,72	159,3	6,50	127
12	1,90	0,0856	2,55	21,95	22,20	487,0	19,89	1242
13	2,00	0,0503	4,50	20,00	39,76	795,2	32,46	3578
14	2,00	0,0503	6,50	18,00	39,76	715,5	29,21	4650
15	2,00	0,0503	8,50	16,00	39,76	636,0	25,97	5408
16	2,00	0,0503	10,50	14,00	39,76	556,2	22,72	5900
17	1,50	0,0503	12,25	12,25	39,76	365,0	14,91	4472
18	2,00	0,0503	14,00	10,50	39,76	417,3	17,04	5840
19	2,00	0,0503	16,00	8,50	39,76	338,0	13,79	5405
20	2,00	0,0503	18,00	6,50	39,76	258,4	10,55	4650
21	2,00	0,0503	20,00	4,50	39,76	179,0	7,30	3580
22	1,90	0,0856	21,95	2,55	22,20	101,4	2,31	2226
23	1,60	0,2380	23,70	0,80	6,72	31,8	0,22	754
						5040,1	202,87	47832

Zur Ermittlung der sog. verschränkten Drittellinie bei  $B$  bilden wir die Resultierende aus  $\sum_0^{l_1} \Delta F$  und  $\sum_0^{l_2} \Delta F$ , was in Fig. 351 e graphisch geschehen ist.

Rechnerisch ergeben sich die Abstände  $d_1^r$  und  $d_2^l$  der Drittellinien nach Gl. (101) und (99) zu

$$d_1^r = \frac{\sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot z'}{\sum_0^{l_1} w \cdot z} = \frac{24209}{3098,8} = 7,81 \text{ m.}$$

$$d_2^l = \frac{\sum_0^{l_2} w \cdot z' \cdot z}{\sum_0^{l_2} w \cdot z'} = \frac{47832}{5040,1} = 9,49 \text{ m.}$$

Aus Symmetriegründen ist

$$d_2^r = d_2^l \quad \text{und} \quad d_3^i = d_1^r ;$$

ferner ergeben sich die Abstände der verschränkten Drittellinie zu:

$$v_{1-2}^i = \frac{\frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'}{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z + \frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'} (d_1^r + d_2^l) = \frac{1}{24,50} \cdot 5040,1 \cdot (7,81 + 9,49) = 9,80 \text{ m,}$$

$$v_{1-2}^r = \frac{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z}{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z + \frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'} (d_1^r + d_2^l) = \frac{1}{19,65} \cdot 3098,84 \cdot (7,81 + 9,49) = 7,50 \text{ m.}$$

Als Kontrolle muß sich ergeben:

$$v_{1-2}^r + v_{1-2}^i = d_1^r + d_2^l,$$

oder

$$9,80 + 7,50 = 7,81 + 9,49.$$

Aus Symmetriegründen ist

$$v_{2-3}^l = v_{1-2}^r \quad \text{und} \quad v_{2-3}^r = v_{1-2}^i.$$

Nun können wir die Festpunkte in bekannter Weise konstruieren (siehe Fig. 351f); die Festpunkte  $J$  und  $K$  liegen symmetrisch, weil der Träger symmetrisch ausgebildet ist.

Um die Festpunkte zur Probe rechnerisch zu erhalten, bestimmen wir die Auflagerwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  als Auflagerdrücke der reduzierten Momentenflächenstreifen  $\Delta F$ . Diese Auflagerdrücke ergeben sich nach Fig. 351f zu:

$$E \cdot \alpha_1^b = \sum_0^{l_1} \Delta F = 157,70 \frac{1}{\text{m}^3},$$

$$E \cdot \alpha_2^a = \sum_0^{l_2} \Delta F = 202,87 \frac{1}{\text{m}^3},$$

$$E \cdot \beta_1 = \frac{d_1^r}{l_1} \cdot \sum_0^{l_1} \Delta F = \frac{7,81}{19,65} \cdot 157,70 = 62,68 \frac{1}{\text{m}^3},$$

$$E \cdot \beta_2 = \frac{d_2^l}{l_2} \cdot \sum_0^{l_2} \Delta F = \frac{9,49}{24,50} \cdot 202,87 = 78,58 \frac{1}{\text{m}^3}.$$

Ferner ist:

$$E \cdot \varepsilon_2^a = E \cdot \tau_1^b = \sum_0^{l_1} \Delta F - E \cdot \beta_1 = 157,70 - 62,68 = 95,02 \frac{1}{\text{m}^3},$$

daher Festpunktabstand

$$a_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^a + \varepsilon_2^a} = \frac{24,50 \cdot 78,58}{202,87 + 95,02} = 6,46 \text{ m.}$$

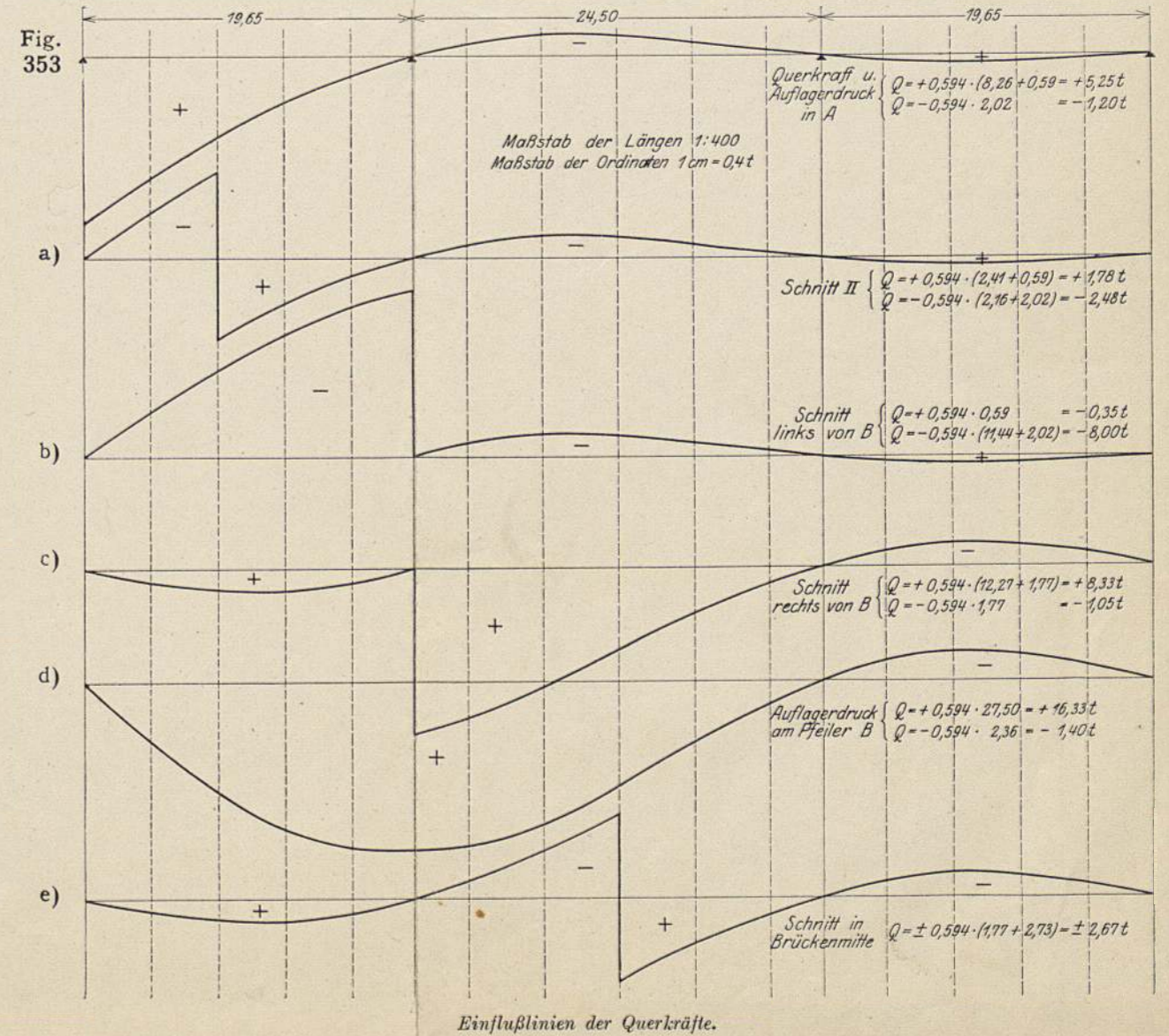
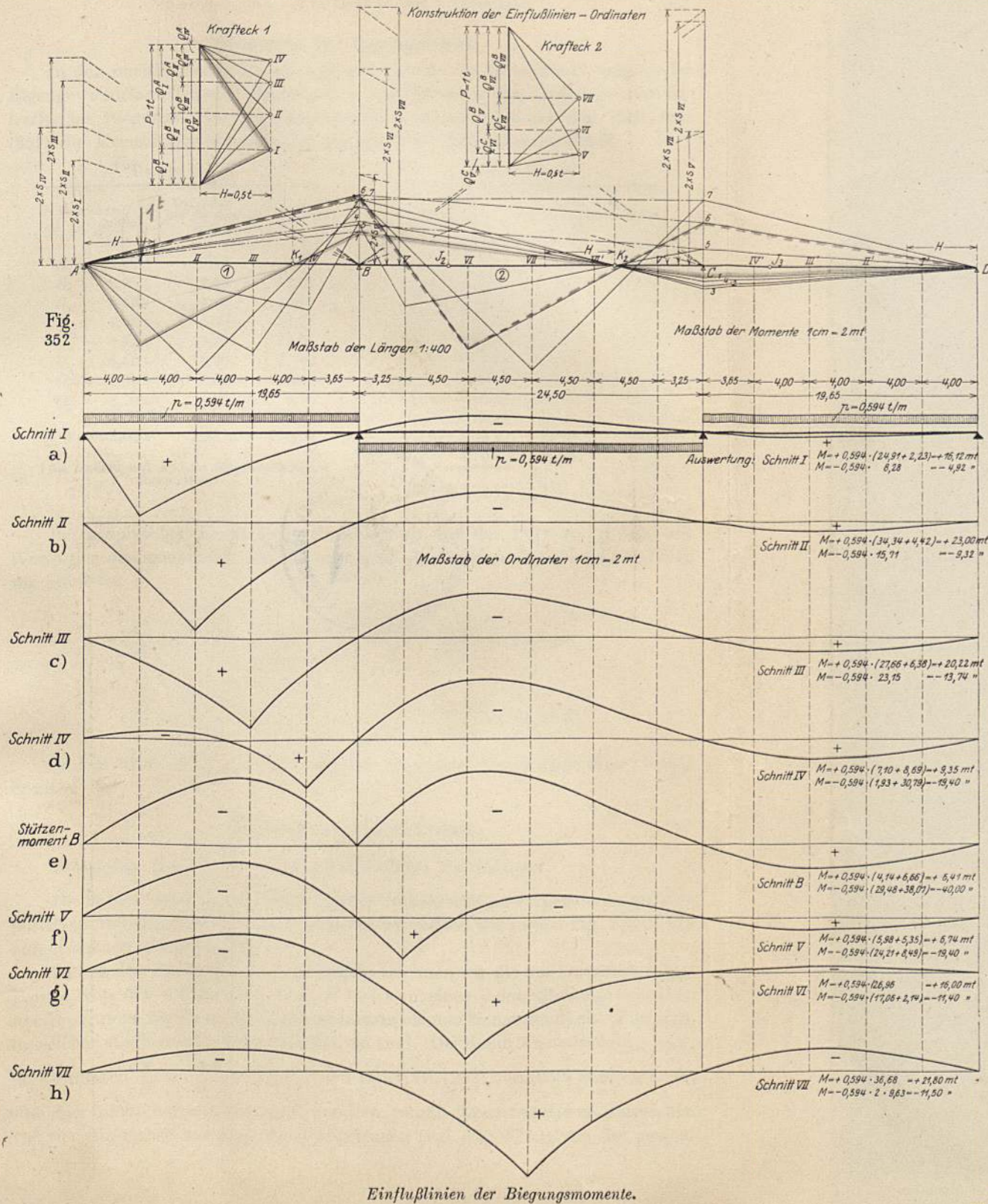
Ferner ist:

$$E \cdot \varepsilon_1^b = E \cdot \tau_2^a = E \left( \alpha_1^b - \frac{l_2}{l_2 - a_2} \cdot \beta_2 \right) = 202,87 - \frac{24,50}{18,04} \cdot 78,58 = 96,05 \frac{1}{\text{m}^3},$$

daher Festpunktabstand

$$b_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^b + \varepsilon_1^b} = \frac{19,65 \cdot 62,68}{157,70 + 96,05} = 4,85 \text{ m.}$$







### Momente aus Eigengewicht.

In den nachfolgenden Tabellen 3 und 3a sind die Gewichte  $G_1$  bis  $G_{19}$  der Eigengewichtslamellen der Öffnungen I und II sowie die Ordinaten der betreffenden Biegungslinien enthalten, mittels derer wir nach den Gln. (250) und (251) die Kreuzlinienabschnitte für die gegebene Belastung ermitteln.

Tabelle 3.

Gewichte $G$ d. I. Öffnung	Ordinaten $\delta$ der Biegungs- linie I	$G \cdot \delta$
$G_1 = 3,17$ t	0,86	2,72
$G_2 = 2,95$ t	2,45	7,22
$G_3 = 4,42$ t	4,10	18,12
$G_4 = 4,42$ t	5,50	24,26
$G_5 = 4,42$ t	5,90	26,05
$G_6 = 4,42$ t	4,90	21,62
$G_7 = 3,53$ t	2,95	10,40
$G_8 = 4,70$ t	1,00	4,70

$$\sum G = 32,03 \text{ t} \quad \sum_0^{l_1} G \cdot \delta = 115,09$$

(Die Ordinaten  $\delta$  sind im Längenmaßstab abgemessen.)

Tabelle 3a.

Gewichte $G$ d. II. Öffnung	Ordinaten $\delta$ der Biegungs- linie II	$G \cdot \delta$
$G_9 = 4,70$ t	1,05	4,94
$G_{10} = 3,53$ t	3,00	10,59
$G_{11} = 3,68$ t	5,05	18,59
$G_{12} = 3,68$ t	6,52	24,00
$G_{13} = 3,68$ t	7,16	26,35
$G_{14} = 3,68$ t	7,05	25,93
$G_{15} = 3,68$ t	6,30	23,16
$G_{16} = 3,68$ t	5,10	18,76
$G_{17} = 3,68$ t	3,55	13,06
$G_{18} = 3,53$ t	2,00	7,06
$G_{19} = 4,70$ t	0,65	3,06

$$\sum G = 42,22 \text{ t} \quad \sum_0^{l_2} G \cdot \delta = 175,50$$

Bei graphischer Ermittlung der Momente mit der Polweite  $H$  sind die Werte der obengenannten Gleichungen noch durch  $H$  zu dividieren, wodurch wir erhalten:

$$\frac{k_1^a}{H} = \frac{\sum_0^{l_1} G \cdot \delta}{H} \cdot \frac{l_1}{l_1^B} = \frac{k_3^b}{H} = \frac{115,09}{H} \cdot \frac{19,65}{15,55} = 7,27 \text{ m,}$$

$$\frac{k_2^b}{H} = \frac{\sum_0^{l_2} G \cdot \delta}{H} \cdot \frac{l_2}{l_2^B} = \frac{k_2^a}{H} = \frac{175,50}{20} \cdot \frac{24,50}{18,70} = 11,50 \text{ m.}$$

In Fig. 351 h wurden die Momente aus Eigengewicht mit Hilfe dieser Werte ermittelt.

### Momente aus Verkehrslast.

$$\text{Belastung: } p = \frac{2,20}{2} \cdot 0,540 = 0,594 \text{ t/lfdm Hauptträger.}$$

Die in den einzelnen Schnitten von der Verkehrslast hervorgerufenen größten positiven und negativen Momente erhalten wir mittels der in den Fig. 352a bis h aufgetragenen Einflußlinien.

Um zu den Einflußlinien zu gelangen, zeichnen wir die am kontinuierlichen Balken von der wandernden Last  $P = 1$  t in einer jeden Stellung derselben hervorgerufene, über alle Öffnungen sich erstreckende Momentenfläche (Fig. 352), in welcher alle Einflußordinaten enthalten sind. Die Kreuzlinienabschnitte bzw.

die Ordinaten  $\frac{k}{H} = \frac{1 \cdot s}{H}$  der Last  $P = 1$  t [den Gl. (252) und (253) entsprechend] sind hier nicht heruntergeklappt, sondern gemäß ihren negativen Vorzeichen von der Stabachse aus nach oben abgetragen (vgl. Fig. 87 b); von der gewon-

nenen Schlußlinie aus ist die Momentenfläche dann nach unten angetragen worden, so daß die Stabachse die Trennungslinie zwischen der positiven und negativen Momentenfläche bildet und sämtliche Momentenordinaten (Einflußordinaten) von der Stabachse aus gemessen werden.

Die Ordinaten der Einflußlinie des Biegemomentes für einen Schnitt finden wir als die auf der Senkrechten durch diesen Schnitt abgegriffenen Ordinaten sämtlicher, den einzelnen Laststellungen in allen Öffnungen entsprechenden Momentenflächen; diese Abschnitte werden in denjenigen Laststellungen aufgetragen, aus deren zugehöriger Momentenfläche sie gewonnen wurden.

In folgender Tabelle 4 sind nun die durch Auswertung der genannten Einflußlinien erhaltenen positiven und negativen Verkehrsmomente für die einzelnen Schnitte eingetragen, und daraus wurden unter Berücksichtigung der Eigengewichtsmomente die Grenzwerte der Momente erhalten.

Tabelle 4.

Schnitt	Momente aus				Grenzwerte der Momente	
	Eigengewicht		Verkehr		maxim.	minim.
	positiv	negativ	positiv	negativ		
<i>I</i>	+ 29,50		+ 16,12	- 4,92	<b>+ 45,62</b>	+ 24,58
<i>II</i>	+ 34,50		+ 23,00	- 9,32	<b>+ 57,50</b>	+ 25,18
<i>III</i>	+ 16,30		+ 20,22	- 13,74	<b>+ 36,52</b>	+ 2,56
<i>IV</i>		- 26,00	+ 9,35	- 19,40	- 16,65	<b>- 45,40</b>
<i>B</i>		- 90,00	+ 6,41	- 40,00	- 83,59	<b>- 130,00</b>
<i>V</i>		- 34,50	+ 6,74	- 19,40	- 27,76	<b>- 53,90</b>
<i>VI</i>	+ 9,00		+ 16,00	- 11,40	<b>+ 25,00</b>	- 2,40
<i>VII</i>	+ 24,00		+ 21,80	- 11,50	<b>+ 45,80</b>	+ 12,50

Die fett gedruckten Werte sind für die Dimensionierung maßgebend.

### Querkräfte aus Eigengewicht.

In Fig. 351i sind die Querkräfte infolge Eigenlast graphisch durch Ziehen der Parallelen zu den Schlußlinien der Momentenflächen der Fig. 352h ermittelt worden (nach Kap. VI, 1, b des ersten Teiles); es ergab sich

$$\text{im Endfeld: } Q_1^A = + 10,20 \text{ t; } Q_1^B = - 21,83 \text{ t;}$$

$$\text{im Mittelfeld: } Q_2^B = + 21,11 \text{ t; } Q_2^C = - 21,11 \text{ t.}$$

### Querkräfte aus Verkehrslast.

Die in den einzelnen Schnitten von der Verkehrslast hervorgerufenen größten positiven und negativen Querkräfte erhalten wir mittels der in den Fig. 353 bis 353e aufgetragenen Einflußlinien.

Die Ordinaten der Einflußlinie der Querkraft für einen Schnitt in der belasteten Öffnung finden wir aus dem Kräftepolygon, mit dem die den einzelnen Laststellungen entsprechenden einfachen Momentenflächen in dieser Öffnung gezeichnet wurden, und in welchem die Ordinaten durch die Parallelen zu den den einzelnen Laststellungen entsprechenden Schlußlinien auf der Last  $P = 1 \text{ t}$  abgeschnitten werden (Krafteck 1 und 2 oberhalb Fig. 352); die Ordinaten der Einflußlinie der Querkraft für einen Schnitt in einer unbe-

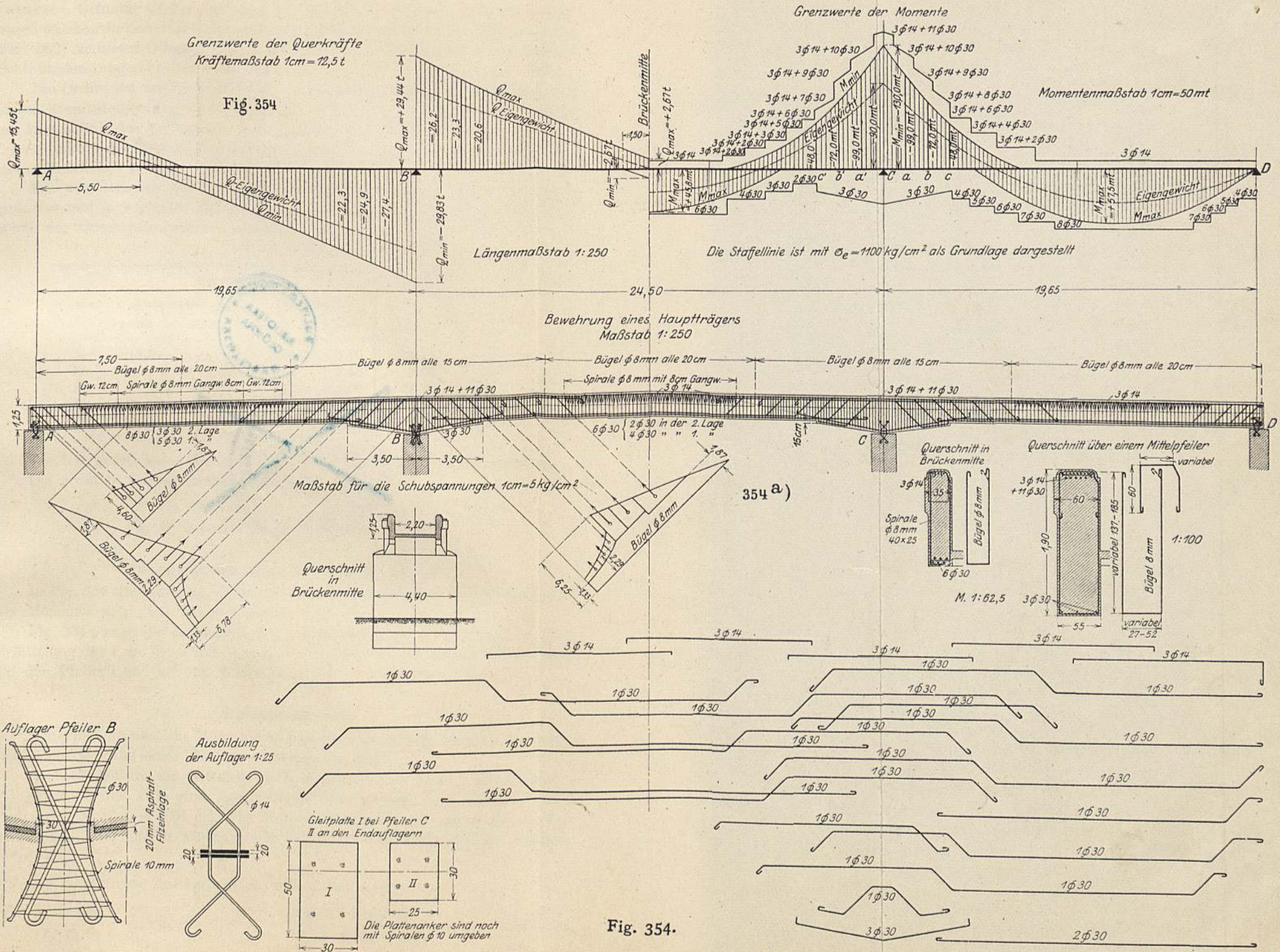


Fig. 354.



lasteten Öffnung werden auf einer im Abstand  $H$  (Polweite) vom Festpunkt, durch welchen die den einzelnen Laststellungen entsprechenden Schlußlinien (siehe Fig. 352) in dieser Öffnung gehen, gezogenen Vertikalen von den genannten Schlußlinien abgeschnitten (vgl. Kap. VI, Abschn. 1, b des ersten Teiles).

Die Ordinaten der Einflußlinie des Auflagerdrucks an einer Endstütze sind identisch mit denjenigen der Einflußlinie der Querkraft daselbst; die Ordinaten der Einflußlinie des Auflagerdrucks an einer Mittelstütze sind gleich der Summe der Ordinaten der Einflußlinien für die Querkräfte unmittelbar links und rechts dieser Stütze.

Die aus den Fig. 353 bis 353e ersichtlichen Einflußlinien wurden ausgewertet und in folgender Tabelle 5 eingetragen, in welcher darauf die Grenzwerte der Querkräfte gebildet wurden.

Tabelle 5.

Schnitt	Querkräfte aus				Grenzwerte der Querkräfte	
	Eigengewicht		Verkehrslast		maxim.	minim.
	positiv	negativ	positiv	negativ		
<i>A</i>	+ 10,20		+ 5,25	- 1,20	+ <b>15,45</b>	+ 9,00
<i>II</i>		- 2,86	+ 1,78	- 2,48	- 1,08	- <b>5,34</b>
<i>B'</i>		- 21,83	+ 0,35	- 8,00	- 21,48	- <b>29,83</b>
<i>B''</i>	+ 21,11		+ 8,33	- 1,05	+ <b>29,44</b>	+ 20,06
<i>VII</i>	+ 0,00	- 0,00	+ 2,67	- 2,67	+ <b>2,67</b>	- <b>2,67</b>

Die fett gedruckten Werte sind für die Dimensionierung maßgebend.  
Die größten Auflagerdrücke betragen:

in *A*: 15,45 t,

in *B*: 29,83 + 29,44 = 59,27 t.

### Grenzwerte der Momente und Querkräfte.

In Fig. 354 sind links die Grenzwerte der Querkräfte, rechts die Grenzwerte der Momente nebst der Eisenverteilung aufgetragen.

Fig. 354a zeigt die Armierung des Hauptträgers, die Schubdiagramme zur Ermittlung der Lage der abgebogenen Eisen sowie die Ausbildung der Auflager auf den Pfeilern und an den Widerlagern.

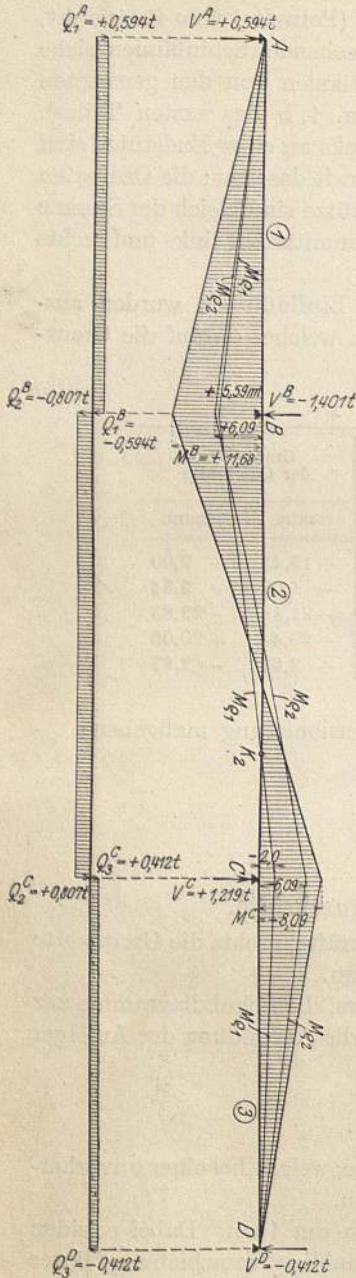
### Stützensenkung.

Wir ermitteln noch die Momente und Querkräfte, welche bei einer unvorhergesehenen Senkung eines Pfeilers auftreten würden.

Wir nehmen an, die Mittelstütze *B* senke sich um 1 cm. Dabei erleiden die Balken 1 und 2 je eine „gegenseitige rechtwinklige Verschiebung“ ihrer Enden um  $\varrho_1 = \varrho_2 = 0,01$  m. Die Momente infolge dieser gegenseitigen Verschiebungen  $\varrho$  ermitteln wir nach den Gln. (515) und (520) und wir erhalten: infolge  $\varrho_1$ :

$$M_1^A = 0, \text{ weil freies Auflager in } A, \text{ und daher } a_1 = 0,$$

$$M_1^B = \frac{\varrho_1}{l_1 \cdot \beta_1 (l_1 - b_1)} \cdot b_1 \text{ (da } a_1 = 0) = \frac{0,01 \cdot 2100000}{19,65 \cdot 62,68 \cdot 14,80} \cdot 4,85 = + 5,59 \text{ mt.}$$



Momente und Querkräfte infolge Senkung der Stütze B um 1 cm.

Fig. 355 u. 355 a.

elastischen Einspannung des Balkens (Stäbe 1 bis 3) in den Pfeilern (Stäbe 4 und 5) berechnet werden; der Balken ist an seinen beiden Enden horizontal verschiebbar gelagert.

Das Moment  $M_1^B$  leiten wir nach links zum Balkenende A und nach rechts durch den Festpunkt  $K_2$  zum Balkenende D (siehe Fig. 355).

Infolge  $Q_2$ :

$$M_2^B = \frac{Q_2}{l_2 \cdot \beta_2 (l_2 - a_2 - b_2)} \cdot a_2 = \frac{0,01 \cdot 2100000}{24,50 \cdot 78,58 \cdot 11,58} \cdot 6,46 = + 6,09 \text{ mt.}$$

$$M_2^C = - M_2^B = - 6,09 \text{ mt.}$$

Diese Momente leiten wir ebenfalls nach den beiden Balkenenden weiter.

Addieren wir nun die Teilmomentenflächen, so erhalten wir als Gesamtmomente (Fig. 355):

$$\text{an der Stütze B: } M^B = + 11,68 \text{ mt,}$$

$$\text{an der Stütze C: } M^C = - 8,09 \text{ mt.}$$

Die Querkräfte (Fig. 355 a) infolge der vorausgesetzten Stützensenkung betragen:

$$Q_1^A = + \frac{11,68}{19,65} = + 0,594; \quad Q_1^B = - 0,594 \text{ t;}$$

$$Q_2^B = \frac{M_2^C - M_2^B}{l_2} = \frac{- 8,09 - 11,68}{24,50} = - 0,807 \text{ t;}$$

$$Q_2^C = + 0,807 \text{ t;}$$

$$Q_3^C = - \frac{- 8,09}{19,65} = + 0,412 \text{ t;}$$

$$Q_3^D = - 0,412 \text{ t}$$

und die Auflagerdrücke:

$$V^A = Q_1^A = + 0,594 \text{ t (nach oben gerichtet),}$$

$$V^B = Q_1^B + Q_2^B = - 0,594 - 0,807 = - 1,401 \text{ t (nach unten gerichtet),}$$

$$V^C = Q_2^C + Q_3^C = + 0,807 + 0,412 = + 1,219 \text{ t,}$$

$$V^D = Q_3^D = - 0,412 \text{ t.}$$

### Beispiel 3.

#### Rahmenbrücke mit drei Öffnungen.

Ein Hauptträger (Binder) der in Fig. 356 und 356 a im Längs- und Querschnitt dargestellten Brücke aus Eisenbeton soll unter Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes sowie der



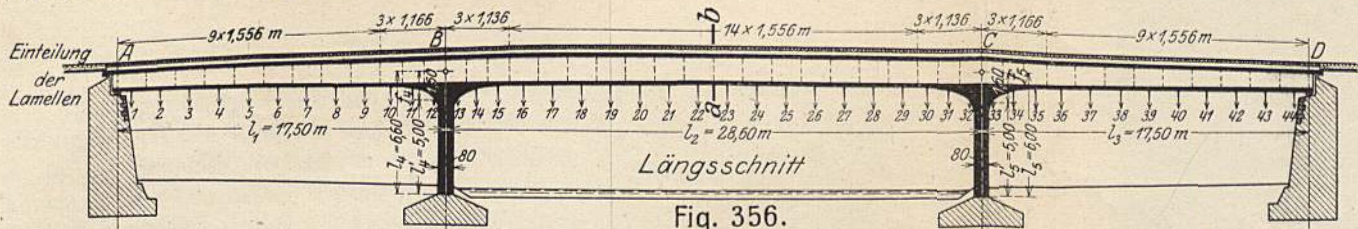


Fig. 356.

Konstruktion der elast. Linien für  $M=1$

Längenmaßstab 1:400

Maßstab für die Ordinaten der  $\frac{1}{2}$  fachen Momentenfläche: 5 mm = 1 Einheit

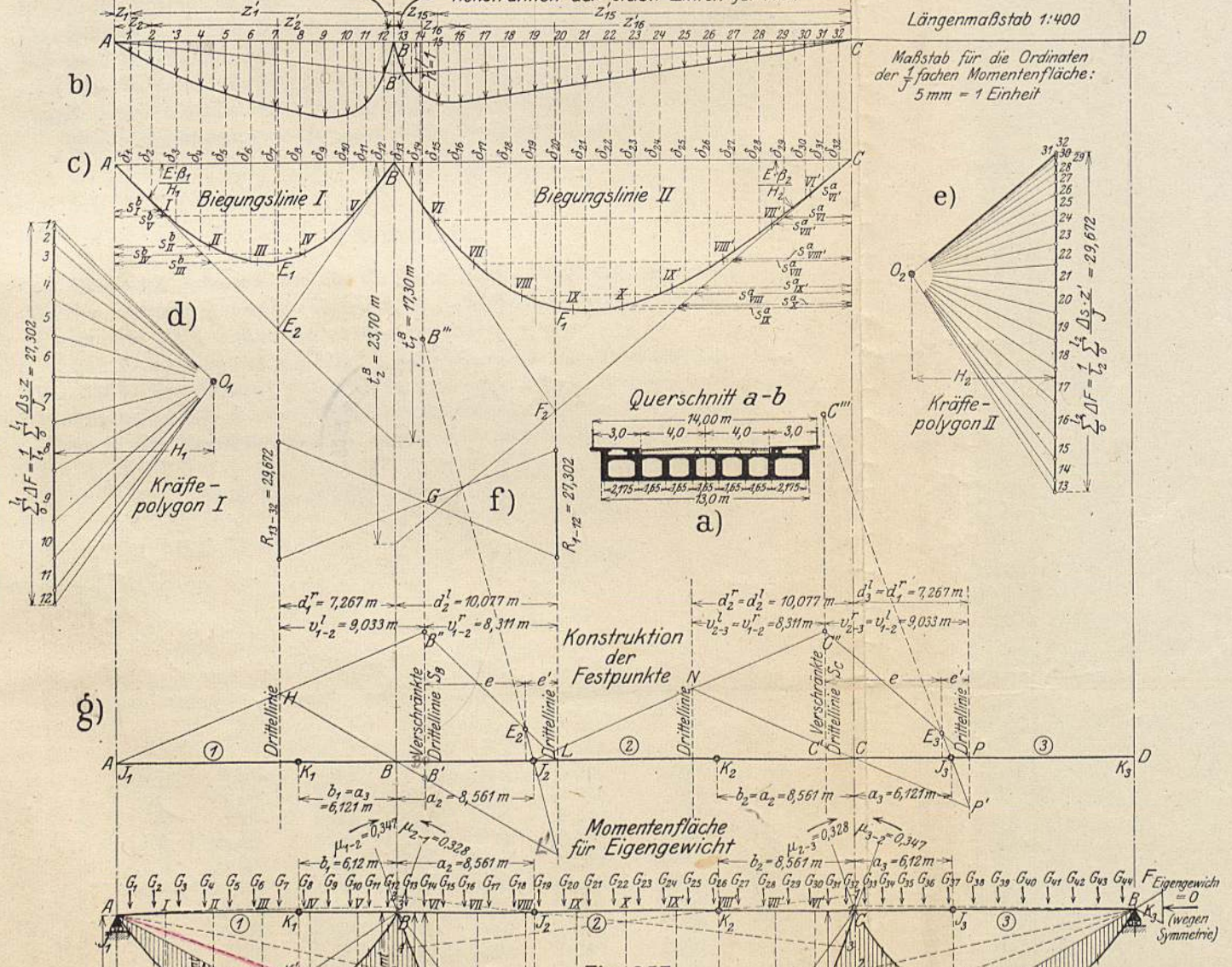


Fig. 357.

1cm = 80 mt

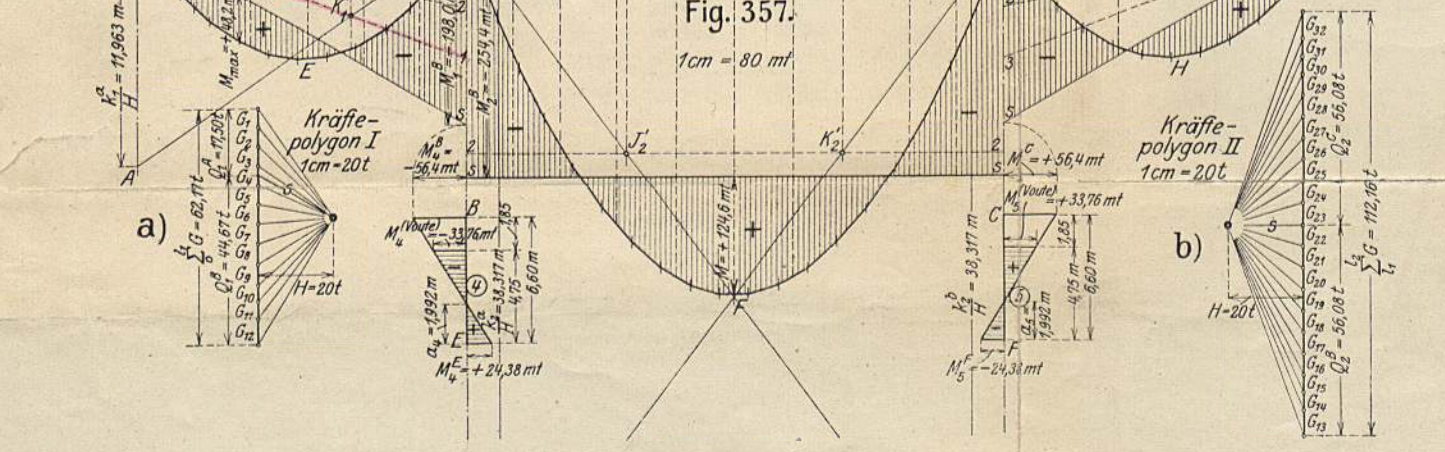
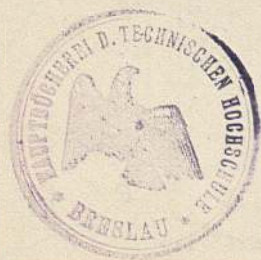


Fig. 356—357.



### Trägheitsmomente.

Aus Fig. 356 ist ersichtlich, daß die Balkenhöhe in den beiden Seitenöffnungen von den Enden  $A$  und  $D$  nach den Pfeilern stark zunimmt, während sie in der Mittelöffnung auf der Strecke zwischen den beiden Voutenanfängen konstant ist. Die beiden Pfeiler haben auf der Strecke  $l' = 5,00$  m zwischen Einspannungsquerschnitt am Fuß und Voutenanfang am Kopfe eine konstante Stärke von  $0,80$  m, während auf der Strecke  $f = 1,60$  m zwischen Voutenanfang und Schnittpunkt von Balken- und Pfeilerachse das Trägheitsmoment unendlich groß eingeführt wird.

Die Trägheitsmomente der Balkenquerschnitte in der Mitte der in Fig. 356 eingetragenen Lamellen sind aus den nachfolgenden Tabellen I und II ersichtlich.

Das Trägheitsmoment der homogenen Pfeilerquerschnitte beträgt

$$J_4 = J_5 = 0,0704 \text{ m}^4.$$

### Festpunkte.

Graphisch erhalten wir die Festpunkte nach Kap. III des ersten Teiles. Der Symmetrie wegen ist  $b_2 = a_2$  und  $b_1 = a_3$ , so daß nur die Festpunktabstände  $a$  (Festpunkte  $J$ ) bestimmt zu werden brauchen.

Zur Ermittlung der sog. Drittelllinien lassen wir über dem Auflager  $B$  (Fig. 356 b) das Moment  $M = 1$  angreifen und bilden in jeder anstoßenden Öffnung (graphisch mit beliebiger Polweite) die Resultierende der Größen  $\Delta F$ , welche in den nachfolgenden Tabellen I und II berechnet sind.

$$\text{Für den Balken } AB \text{ ist: } \Delta F = \frac{\Delta s}{J} \cdot \frac{z}{l},$$

$$\text{,, ,, ,, } BC \text{ ,, : } \Delta F = \frac{\Delta s}{J} \cdot \frac{z'}{l}.$$

Tabelle I.

Endfeld  $l_1 = 17,50$  m.

Lamelle	$\Delta s$	$J$	$z$	$z'$	$w = \frac{\Delta s}{J}$	$w \cdot z$	$\Delta F = \frac{w \cdot z}{l_1}$	$w \cdot z \cdot z'$
1	1,556	0,173	0,776	16,724	8,994	6,997	0,399	117,018
2	1,556	0,188	2,332	15,168	8,277	19,302	1,103	292,773
3	1,556	0,205	3,888	13,612	7,590	29,510	1,686	401,690
4	1,556	0,222	5,444	12,056	7,009	38,157	2,180	460,021
5	1,556	0,240	7,000	10,500	6,483	45,381	2,593	476,500
6	1,556	0,259	8,556	8,944	6,007	51,396	2,936	459,686
7	1,556	0,278	10,112	7,388	5,597	56,597	3,234	418,139
8	1,556	0,298	11,668	5,832	5,222	60,930	3,482	355,344
9	1,556	0,319	13,224	4,276	4,878	64,507	3,686	275,832
10	1,166	0,369	14,585	2,915	3,159	46,074	2,633	134,306
11	1,166	0,457	15,751	1,749	2,551	40,181	2,296	70,277
12	1,166	1,050	16,917	0,583	1,110	18,778	1,073	10,948
						477,810	27,302	3472,534

Tabelle II.

Mittelfeld  $l_2 = 28,60$  m.

Lamelle	$\Delta s$ m	$J$ m <sup>4</sup>	$z$	$z'$	$w = \frac{\Delta s}{J}$	$w \cdot z'$	$\Delta F = \frac{w \cdot z'}{l_2}$	$w \cdot z' \cdot z$
13	1,136	1,080	0,457	28,143	1,054	29,663	1,037	13,556
14	1,136	0,590	1,595	27,005	1,928	52,066	1,820	83,045
15	1,136	0,507	2,733	25,867	2,244	58,046	2,030	158,640
16	1,556	0,447	4,080	24,520	3,481	85,354	2,984	348,244
17	1,556	0,447	5,636	22,964	3,481	79,938	2,795	450,531
18	1,556	0,447	7,192	21,408	3,481	74,521	2,606	535,955
19	1,556	0,447	8,748	19,852	3,481	69,105	2,416	604,531
20	1,556	0,447	10,404	18,196	3,481	63,340	2,215	658,989
21	1,556	0,447	11,960	16,640	3,481	57,924	2,025	692,771
22	1,556	0,447	13,516	15,084	3,481	52,507	1,836	709,685
23	1,556	0,447	15,072	13,528	3,481	47,090	1,646	709,740
24	1,556	0,447	16,628	11,972	3,481	41,675	1,457	692,972
25	1,556	0,447	18,184	10,416	3,481	36,258	1,268	659,315
26	1,556	0,447	19,740	8,860	3,481	30,842	1,078	608,821
27	1,556	0,447	21,296	7,304	3,481	25,425	0,889	541,451
28	1,556	0,447	22,852	5,748	3,481	20,009	0,700	457,246
29	1,556	0,447	24,408	4,192	3,481	14,592	0,510	356,162
30	1,136	0,507	25,755	2,845	2,244	6,384	0,223	164,420
31	1,136	0,590	26,893	1,707	1,928	3,291	0,115	88,505
32	1,136	1,080	28,032	0,568	1,054	0,600	0,021	16,819
						848,630	29,672	8551,398

Zur Ermittlung der sog. verschränkten Drittelinie  $S^B$  bei  $B$  bilden wir die Resultierende aus  $\sum_0^{l_1} \Delta F$  und  $\sum_0^{l_2} \Delta F$ , was in Fig. 356f graphisch, und zwar wie folgt geschehen ist: Auf der linken Drittelinie tragen wir  $\sum_0^{l_1} \Delta F$  und auf der rechten Drittelinie  $\sum_0^{l_2} \Delta F$  im gleichen Maßstabe auf; die verschränkte Drittelinie  $S^B$  geht dann durch den Schnittpunkt  $G$  der Linien, welche die Endpunkte der Kräfte  $\sum_0^{l_1} \Delta F = R_{1-12}$  und  $\sum_0^{l_2} \Delta F = R_{13-32}$  kreuzweise verbinden.

Die Lage der verschränkten Drittelinie  $S^C$  bei  $C$  ergibt sich aus der Bedingung, daß  $S^B$  und  $S^C$  symmetrisch zur Balkenmitte liegen müssen.

Rechnerisch ergeben sich die Abstände  $d_1^r$  und  $d_2^i$  der Drittelinien nach Gl. (101) und (99) zu

$$d_1^r = \frac{\sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot z'}{\sum_0^{l_1} w \cdot z} = \frac{3472,534}{477,810} = 7,267 \text{ m,}$$

$$d_2^i = \frac{\sum_0^{l_2} w \cdot z' \cdot z}{\sum_0^{l_2} w \cdot z'} = \frac{8551,398}{848,630} = 10,077 \text{ m.}$$

Aus Symmetriegründen ist

$$d_2^r = d_2^l \quad \text{und} \quad d_3^l = d_1^r;$$

ferner ergeben sich die Abstände der verschränkten Drittellinie zu

$$\begin{aligned} v_{1-2}^l &= \frac{\frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'}{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z + \frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'} (d_1^r + d_2^l) \\ &= \frac{\frac{1}{28,60} \cdot 848,630}{\frac{1}{17,50} \cdot 477,810 + \frac{1}{28,60} \cdot 848,630} (7,267 + 10,077) = 9,033 \text{ m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{1-2}^r &= \frac{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z}{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z + \frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'} (d_1^r + d_2^l) \\ &= \frac{\frac{1}{17,50} \cdot 477,810}{\frac{1}{17,50} \cdot 477,810 + \frac{1}{28,60} \cdot 848,630} (7,267 + 10,077) = 8,311 \text{ m}. \end{aligned}$$

Als Kontrolle muß sich ergeben

$$v_{1-2}^l + v_{1-2}^r = d_1^r + d_2^l$$

oder

$$9,033 + 8,311 = 7,267 + 10,077.$$

Aus Symmetriegründen ist

$$v_{2-3}^l = v_{1-2}^r \quad \text{und} \quad v_{2-3}^r = v_{1-2}^l.$$

Nun können wir die Festpunkte des Balkens in bekannter Weise konstruieren (siehe Fig. 356g), wobei wir jedoch beachten müssen, daß sich der Balken in *B* und *C* in biegungsfester Verbindung mit einem Pfeiler befindet.

Der Festpunkt  $J_1$  fällt wegen der freien Auflagerung der Balkenenden mit *A* zusammen.

Zur Bestimmung von  $J_2$  verbinden wir  $J_1$  mit dem beliebigen Punkte  $B''$  der verschränkten Drittellinie  $S^B$ , ziehen die Geraden  $HBL'$  und  $B''L$  und bestimmen auf der letzteren den Schnittpunkt  $E_2$  mit derjenigen Vertikalen, welche die Strecke  $v_{1-2}^r$  im Verhältnis  $\frac{e}{e'}$  der Formel (137):

$$\frac{e}{e'} = k_2 \cdot \frac{l_2}{2 \cdot \tau_4^B} \cdot \frac{v_{1-2}^r}{d_2^l}$$

teilt, worin nach Gl. (119):

$$E \cdot k_2 = \frac{2 \cdot \sum_0^{l_2} w \cdot z'}{l_2^2} = \frac{2 \cdot 848,630}{28,60^2} = 2,075;$$

ferner ist nach Gl. (138):

$$E \cdot \tau_4^B = \frac{l_4^2 (2l_4 - 3a_4)}{6 \cdot l_4 (l_4 - a_4) \cdot J_4},$$

worin  $a_4$  nach Formel (146):

$$a_4 = \frac{l_4}{3} \cdot \frac{l_4 + 2f_4}{l_4 + 2f_4} = \frac{5,00}{3} \cdot \frac{6,60 + 2 \cdot 1,60}{5,00 + 2 \cdot 1,60} = 1,992 \text{ m},$$

also

$$E \cdot \tau_4^B = \frac{5,00^2 (2 \cdot 5,00 - 3 \cdot 1,992)}{6 \cdot 6,60 (6,60 - 1,992) \cdot 0,0704} = 7,8315.$$

Setzen wir die Werte von  $k$  und  $\tau_4^B$  sowie die früher ermittelten Werte von  $d_2^l$  und  $v_{1-2}^r$  in die Formel für  $\frac{e}{e'}$  ein, so folgt:

$$\frac{e}{e'} = 2,075 \cdot \frac{28,60}{2 \cdot 7,8315} \cdot \frac{8,311}{10,077} = 3,125.$$

Nachdem Punkt  $E_2$  ermittelt ist, erhalten wir  $J_2$  als Schnittpunkt der Geraden  $E_2L'$  und der Balkenachse.

Zur Bestimmung des Festpunktes  $J_3$  ziehen wir von  $J_2$  aus eine beliebig gerichtete Gerade, welche die verschränkte Dritttellinie im Punkte  $C''$  schneidet, zeichnen ferner die Geraden  $NCP'$  und  $C''P$  und bestimmen auf der letzteren den Schnittpunkt  $E_3$  mit derjenigen Vertikalen, welche die Strecke  $v_{2-3}^r$  im Verhältnis  $\frac{e}{e'}$  nach Formel (137):

$$\frac{e}{e'} = k_3 \cdot \frac{l_3}{2 \cdot \tau_5^C} \cdot \frac{v_{2-3}^r}{d_3^l}$$

teilt, worin nach Gl. (119):

$$E \cdot k_3 = \frac{2 \cdot \sum_0^{l_3} w \cdot z'}{l_3^2} = \frac{2 \cdot 477,810}{17,50^2} = 3,120$$

$$\left(\text{da } \sum_0^{l_3} w \cdot z' = \sum_0^{l_3} w \cdot z \text{ wegen der Symmetrie};\right)$$

ferner ist

$$E \cdot \tau_5^C = E \cdot \tau_4^B = 7,8315.$$

Setzen wir die Werte von  $k_3$  und  $\tau_5^C$  sowie die früher ermittelten Werte von  $v_{2-3}^r = v_{1-2}^l$  und  $d_3^l = d_1^l$  in die Formel für  $\frac{e}{e'}$  ein, so folgt:

$$\frac{e}{e'} = 3,120 \cdot \frac{17,50}{2 \cdot 7,8315} \cdot \frac{9,033}{7,267} = 4,333.$$

Nachdem  $E_3$  ermittelt ist, erhalten wir den gesuchten Festpunkt  $J_3$  als Schnittpunkt der Geraden  $E_3P'$  und der Balkenachse.

Nach Ermittlung der linken Festpunkte  $J$  des Balkens kennen wir auch die Lage der rechten Festpunkte  $K$ , denn es ist aus Symmetriegründen:

$$\begin{aligned} b_3 &= a_1 = 0, \\ b_2 &= a_2 = 8,561 \text{ m}, \\ b_1 &= a_3 = 6,121 \text{ m}. \end{aligned}$$

Der Abstand des unteren Festpunktes  $J_4$  des Pfeilers  $B$  (Stab 4) vom Pfeilerfuß wurde oben nach Gl. (146) berechnet zu:

$$a_4 = 1,992 \text{ m.}$$

Der Abstand des oberen Festpunktes  $K_4$  des Pfeilers  $B$  vom Knotenpunkt  $B$  ergibt sich nach Gl. (147) zu:

$$b_4 = \frac{\bar{l}_4^2 (l_4 + 2f_4)}{3 \cdot \bar{l}_4^2 + 6 \cdot l_4 \cdot E \cdot J \cdot \varepsilon_4^b},$$

worin nach Gl. (36):

$$\varepsilon_4^b = \tau_{1-2}^B = \frac{\tau_1^B \cdot \tau_2^B}{\tau_1^B + \tau_2^B}.$$

Nun ist nach Gl. (43):

$$\tau_1^B = \alpha_1^b - \frac{l_1}{l_1 - a_1} \cdot \beta_1,$$

worin nach Gl. (200):

$$E \cdot \alpha_1^b = \frac{1}{l_1} \cdot \sum_0^{l_1} w \cdot z = \sum_0^{l_1} \Delta F = 27,302$$

und nach Gl. (205):

$$E \cdot \beta_1 = \frac{1}{l_1^2} \sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot z' = \frac{3472,534}{17,50^2} = 11,339,$$

daher

$$E \cdot \tau_1^B = 27,302 - \frac{17,50}{17,50 - 0} \cdot 11,339 = 15,964.$$

Und nach Gl. (42):

$$\tau_2^B = \alpha_2^g - \frac{l_2}{l_2 - b_2} \cdot \beta_2,$$

worin nach Gl. (199):

$$E \cdot \alpha_2^g = \frac{1}{l_2} \cdot \sum_0^{l_2} w \cdot z' = \sum_0^{l_2} \Delta F = 29,672$$

und nach Gl. (205):

$$E \cdot \beta_2 = \frac{1}{l_2^2} \cdot \sum_0^{l_2} w \cdot z \cdot z' = \frac{8551,398}{28,60^2} = 10,454,$$

daher

$$E \cdot \tau_2^B = 29,672 - \frac{28,60}{28,60 - 8,561} \cdot 10,454 = 14,752.$$

Setzen wir die Werte von  $\tau_1^B$  und  $\tau_2^B$  in die Formel für  $\varepsilon_4^b$  ein, so erhalten wir

$$E \cdot \varepsilon_4^b = \frac{15,964 \cdot 14,752}{15,964 + 14,752} = 7,667.$$

Diesen Wert in die Gl. für  $b_4$  eingesetzt, gibt:

$$b_4 = \frac{5,00^2 (6,60 + 2 \cdot 1,60)}{3 \cdot 5,00^2 + 6 \cdot 6,60 \cdot 7,667 \cdot 0,0704} = 2,542 \text{ m.}$$

Aus Symmetriegründen ist

$$a_5 = a_4 \quad \text{und} \quad b_5 = b_4.$$

Zur Probe erhalten wir die Festpunktabstände des Balkens rechnerisch nach Hauptformel (7). Es ist

$$a_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^a + \varepsilon_2^a},$$

worin nach Gl. (36):

$$\varepsilon_2^a = \tau_{1-4}^B = \frac{\tau_1^B \cdot \tau_4^B}{\tau_1^B + \tau_4^B}.$$

Nach obigem war:

$$E \cdot \tau_1^B = 15,964 \quad \text{und} \quad E \cdot \tau_4^B = 7,8315,$$

daher ist

$$\varepsilon_2^a = \frac{15,964 \cdot 7,8315}{15,964 + 7,8315} = 5,254$$

und also

$$a_2 = \frac{28,60 \cdot 10,454}{29,672 + 5,254} = 8,561 \text{ m.}$$

Ferner ist

$$a_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^a + \varepsilon_3^a},$$

worin aus Symmetriegründen:

$$\beta_3 = \beta_1, \quad \alpha_3^a = \alpha_1^b, \\ \varepsilon_3^a = \varepsilon_1^b = \tau_{2-4}^B = \frac{\tau_2^B \cdot \tau_4^B}{\tau_2^B + \tau_4^B} = \frac{14,752 \cdot 7,8315}{14,752 + 7,8315} = 5,115,$$

daher ist

$$a_3 = \frac{17,50 \cdot 11,339}{27,302 + 5,115} = 6,121 \text{ m.}$$

### Verteilungsmaße.

Graphisch erhalten wir die Verteilungsmaße  $\mu$  nach Kap. III, 8 des ersten Teiles aus den Konstruktionslinien zur Bestimmung der Festpunkte (Fig. 356g) durch Abmessen der Strecken  $B'B''$ ,  $B'B'''$ ,  $C'C''$  und  $C'C'''$  in beliebigem Maßstabe und Einsetzen derselben in Formel (160):

$$\mu_{2-1}^B = \frac{B'B''}{B'B'''} = \frac{9,00}{27,45} = 0,328$$

und

$$\mu_{3-2}^C = \frac{C'C''}{C'C'''} = \frac{7,15}{20,60} = 0,347.$$

Analytisch erhalten wir die Verteilungsmaße nach Kap. II, 5 des ersten Teiles mit Hilfe der bereits ermittelten Zahlenwerte von  $\tau_1^B$ ,  $\tau_2^C = \tau_2^B$  und  $\tau_4^B = \tau_5^C$  nach Formel (37) zu:

$$\mu_{2-1}^B = \frac{\tau_4^B}{\tau_1^B + \tau_4^B} = \frac{7,8315}{15,964 + 7,8315} = 0,328$$



$$\text{und} \quad \mu_{3-2}^C = \frac{\tau_5^C}{\tau_2^C + \tau_5^C} = \frac{7,8315}{14,752 + 7,8315} = 0,347.$$

Aus Symmetriegründen ist:

$$\mu_{1-2}^B = \mu_{3-2}^C = 0,347$$

und

$$\mu_{2-3}^C = \mu_{2-1}^B = 0,328.$$

## I. Eigengewicht.

### 1. Momente aus Eigengewicht.

Der Gang der Rechnung teilt sich, wie in Kap. I des zweiten Teiles erläutert, in zwei Abschnitte.

#### Rechnungsabschnitt I:

Der Rahmen wird durch ein gedachtes Lager in  $D$  vorübergehend festgehalten; darauf werden die Momente für die Eigenlast nach Kap. V des ersten Teiles ermittelt.

In den nachfolgenden Tabellen III und IIIa sind die Gewichte  $G_1$  bis  $G_{32}$  der Eigengewichtslamellen der Öffnungen I und II sowie die Ordinaten der betreffenden Biegelinien für  $M = 1$  enthalten, mittels deren wir nach den Gl. (250) und (251) die Kreuzlinienabschnitte für die gegebene Belastung ermitteln.

Tabelle III.  
I. Öffnung

La- melle Nr.	Gewichte $G$ der Lamelle	Ordinaten $\delta$ der Biegungs- linie I	$G \cdot \delta$
	$t$		
1	4,93	0,70	3,45
2	4,90	2,20	10,77
3	5,05	3,65	18,43
4	5,11	4,70	24,01
5	5,17	5,50	28,43
6	5,23	6,00	31,37
7	5,29	6,05	32,00
8	5,35	5,70	30,49
9	5,41	4,80	25,96
10	4,23	3,60	15,23
11	4,59	2,30	10,55
12	6,83	0,85	5,81
		$\sum_0^{l_1} G \cdot \delta = 236,50$	

(Die Ordinaten  $\delta$  sind im Längenmaßstab abgemessen.)

Tabelle IIIa.  
II. Öffnung

La- melle Nr.	Gewichte $G$ der Lamelle	Ordinaten $\delta$ der Biegungs- linie II	$G \cdot \delta$
13	6,79	0,95	6,45
14	4,81	2,55	12,26
15	4,43	3,95	17,50
16	5,72	5,50	31,47
17	5,72	6,90	39,48
18	5,72	7,90	45,20
19	5,72	8,63	49,38
20	5,72	9,05	51,78
21	5,72	9,20	52,64
22	5,72	9,10	52,07
23	5,72	8,75	50,07
24	5,72	8,20	46,92
25	5,72	7,53	43,09
26	5,72	6,65	38,05
27	5,72	5,65	32,33
28	5,72	4,60	26,32
29	5,72	3,40	19,45
30	4,43	2,35	10,41
31	4,81	1,40	6,73
32	6,79	0,50	3,39

$$\sum_0^{l_2} G \cdot \delta = 634,99$$

Bei graphischer Ermittlung der Momente mit der Polweite  $H$  sind die Werte der Gl. (250) und (251) noch durch  $H$  zu dividieren, wodurch wir erhalten:

$$\frac{k_1^a}{H} = \frac{\sum_0^{l_1} G \cdot \delta}{H} \cdot \frac{l_1}{l_1^B} = \frac{k_3^b}{H} = \frac{236,50}{20} \cdot \frac{17,50}{17,30} = 11,96 \text{ m,}$$

$$\frac{k_2^b}{H} = \frac{\sum_0^{l_2} G \cdot \delta}{H} \cdot \frac{l_2}{l_2^B} = \frac{k_5^c}{H} = \frac{634,99}{20} \cdot \frac{28,60}{23,70} = 38,32 \text{ m.}$$

Nun können diese Strecken im Längenmaßstab in Fig. 357 angetragen und die Momente aus Eigengewicht ermittelt werden, wobei zu beachten ist, daß die Momente an den Stützen vor dem Weiterleiten mit dem betreffenden Verteilungsmaß  $\mu$  zu multiplizieren sind, was graphisch mittels Verwandlungswinkel oder rechnerisch erfolgen kann. Die Momentenfläche an den Pfeilern (unbelastete Stäbe) erhalten wir durch Weiterleiten der Pfeilerkopfmomente durch die unteren Festpunkte  $J_4$  bzw.  $J_5$  der Pfeiler.

Zum Schluß ermitteln wir die im gedachten Lager bei  $D$  auftretende Festhaltungskraft  $F$  („Reaktion“); es ist nach Kap. VII des ersten Teiles:

$$F = Q_4^B + Q_5^C.$$

Nach Kap. VI, 1 des ersten Teiles ist:

$$Q_4^B = \frac{M_4^B - M_4^F}{l_4} = \frac{-56,40 - 24,38}{6,60} = -12,24 \text{ t (nach links gerichtet),}$$

$$Q_5^C = \frac{M_5^C - M_5^F}{l_5} = \frac{+56,40 + 24,38}{6,60} = +12,24 \text{ t (nach rechts gerichtet).}$$

daher

$$F = -12,24 + 12,24 = 0.$$

## Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen das während R. I am Balken angenommene Lager und ermitteln die Zusätze infolge der Verschiebungskraft  $V$  (umgekehrte Festhaltungskraft). Da dieselbe nun aber Null ist, so sind auch die Zusätze Null, was übrigens beim symmetrisch ausgebildeten und symmetrisch belasteten Rahmen selbstverständlich ist; daraus folgt, daß die endgültigen inneren Kräfte am Rahmen infolge Eigengewicht gleich denjenigen sind, welche sich aus R. I ergeben.

### 2. Querkräfte aus Eigengewicht.

In Fig. 357a und b sind die Querkräfte am Balken infolge Eigenlast graphisch durch Ziehen der Parallelen zu den Schlußlinien der Momentenflächen der Fig. 357 ermittelt worden (nach Kap. VI, 1, b des ersten Teiles); es ergab sich

$$\begin{array}{ll} \text{im Endfeld: } Q_1^A = +17,50 \text{ t; } & Q_1^B = -44,67 \text{ t,} \\ \text{im Mittelfeld: } Q_2^B = +56,08 \text{ t; } & Q_2^C = -56,08 \text{ t.} \end{array}$$

An den Pfeilern ergibt sich rechnerisch:

$$\begin{array}{ll} \text{am Pfeiler B: } Q_4^B = -12,24 \text{ t; } & Q_4^F = +12,24 \text{ t,} \\ \text{am Pfeiler C: } Q_5^C = +12,24 \text{ t; } & Q_5^F = -12,24 \text{ t.} \end{array}$$

## 3. Normalkräfte aus Eigengewicht.

Die beiden Querkräfte  $Q_4^B$  und  $Q_5^C$  an den Pfeilerköpfen („Reaktionen“) sind nach auswärts gerichtet, daher ist die Normalkraft („Aktion“) im Stab 2 eine Druckkraft und zwar,

$$N_2 = 12,24 \text{ t.}$$

Ferner ist

$$N_1 = 0 \quad \text{und} \quad N_3 = 0,$$

da die Stäbe 1 und 3 an einem Ende ein bewegliches Auflager besitzen.

Die Normalkraft am Kopfe der Pfeiler  $B$  und  $C$  beträgt:

$$N_4^B = Q_1^B + Q_2^B = 100,75 \text{ t} \quad \text{bzw.} \quad N_5^C = Q_2^C + Q_3^C = 100,75 \text{ t,}$$

und zwar ist sie eine Druckkraft.

Im Fußquerschnitt dieser Pfeiler beträgt die Normalkraft (Druckkraft):

$$N_4^B = N_4^B + \text{Gewicht des Pfeilerschaftes} = 100,75 + 16,4 = 117,15 \text{ t}$$

und

$$N_5^C = 117,15 \text{ t.}$$

## 4. Auflagerdrücke aus Eigengewicht an den Balkenenden.

In den beiden Auflagern an den Balkenenden ist der Auflagerdruck

$$V^A = Q_1^A = 17,50 \text{ t,}$$

$$V^D = Q_3^D = 17,50 \text{ t.}$$

## II. Verkehrslast.

Als Verkehrsbelastung wird eingeführt:

ein Wagenzug mit einem auf 13,00 m Länge gleichmäßig verteilten Gewicht  $p_w = 1,95 \text{ t}$  pro lfdm Träger, sowie vor und hinter demselben ein Menschengedränge von  $p_m = 1,00 \text{ t}$  pro lfdm Träger,

oder

ein Wagenzug mit einem auf 8,00 m Länge gleichmäßig verteilten Gewicht  $p_w = 1,85 \text{ t}$  pro lfdm Träger, sowie vor und hinter demselben ein Menschengedränge von  $p_m = 1,00 \text{ t}$  pro lfdm Träger,

oder

ein Wagenzug mit einem auf 5,50 m Länge gleichmäßig verteilten Gewicht  $p_w = 1,53 \text{ t}$  pro lfdm Träger, sowie vor und hinter demselben ein Menschengedränge von  $p_m = 1,00 \text{ t}$  pro lfdm Träger.

Die in den einzelnen Schnitten von der Verkehrslast hervorgerufenen größten positiven und negativen Momente und Querkräfte erhalten wir mittels der in Fig. 363 aufgetragenen Einflußlinien.

## Rechnungsabschnitt I.

Wir nehmen an, der Balken des Rahmens sei vorübergehend durch ein gedachtes Lager in  $D$  horizontal unverschiebbar festgehalten, für welchen Zustand die gestrichelten Einflußlinien der Fig. 363 aufgetragen wurden.

Um zu diesen Einflußlinien zu gelangen, zeichnen wir die am festgehaltenen Rahmen von der wandernden Last  $P = 1,0 \text{ t}$  in einer jeden Stellung derselben

hervorgerufene, über alle Öffnungen sich erstreckende Momentenfläche (Fig. 358), die sog. Zustandsfläche, in welcher alle Einflußordinaten enthalten sind. Hierbei ist zu beachten, daß die Momente an den Pfeilern  $B$  und  $C$  beim Überschreiten der letzteren mit den entsprechenden Verteilungsmaßen  $\mu$  zu multiplizieren sind; die Pfeiler sind unbelastete Stäbe des Rahmens. Die Kreuzlinienabschnitte zu den Zustandsflächen, bzw. die Ordinaten  $\frac{k}{H} = \frac{1 \cdot s}{H}$  der Last  $P = 1 \text{ t}$  [den Gl. (252) und (253) entsprechend] sind hier, wie im vorhergehenden Beispiel, nicht heruntergeklappt, sondern gemäß ihren negativen Vorzeichen von der Stabachse aus nach oben abgetragen (vgl. Fig. 358); von der gewonnenen Schlußlinie aus ist die Momentenfläche dann nach unten angetragen worden, so daß die Stabachse die Trennungslinie zwischen der positiven und negativen Momentenfläche bildet und sämtliche Momentenordinaten (Einflußordinaten) von der Stabachse aus gemessen werden. Wäre der Rahmen unsymmetrisch, so müßte zur Bestimmung des linken Kreuzlinienabschnittes  $k_2^a$  an Stelle der aus dem Momentendreieck  $BB'C$  (Fig. 356 b) abgeleiteten Biegelinie II eine andere Biegelinie benutzt werden, welche aus einem Momentendreieck mit der Grundlinie  $l_2$  und einer Höhe  $h = 1$  in  $C$  herzuleiten wäre; im vorliegenden Falle des symmetrischen Rahmens jedoch können wir  $k_2^a$  ebenfalls mittels Biegelinie II erhalten, indem wir überlegen, daß der gesuchte linke Kreuzlinienabschnitt für  $P = 1,0 \text{ t}$  z. B. im Schnitt  $VIII$  gleich sein muß dem rechten Kreuzlinienabschnitt für  $P = 1,0 \text{ t}$  im Schnitt  $VIII'$ , d. h. es muß sein für Laststellung  $VIII$ :

$$k_2^a = s_{VIII}^a \cdot \frac{P}{H} = 2 \cdot s_{VIII}'^a$$

(da  $P = 1 \text{ t}$  und  $H = 1/2 \text{ t}$ ).

Die Ordinaten der Einflußlinie des Biegemomentes für einen Schnitt finden wir als die auf der Senkrechten durch diesen Schnitt abgegriffenen Ordinaten sämtlicher den einzelnen Laststellungen (Belastungsfälle) in allen Öffnungen entsprechenden Momentenflächen; diese Abschnitte werden in denjenigen Laststellungen aufgetragen, aus deren zugehöriger Momentenfläche sie gewonnen wurden. Die Ordinaten der Einflußlinie der Querkraft für einen Schnitt an einem belasteten Stab finden wir aus dem Kräftepolygon, mit dem die den einzelnen Laststellungen entsprechenden einfachen Momentenflächen an diesem Stab gezeichnet wurden und in welchem die Ordinaten durch die Parallelen zu den den einzelnen Laststellungen entsprechenden Schlußlinien auf der Last  $P = 1 \text{ t}$  abgeschnitten werden (Fig. 358 c und d); die Ordinaten der Einflußlinie der Querkraft für einen Schnitt an einem unbelasteten Stab werden auf einer im Abstand  $H$  (Polweite) vom Festpunkt, durch welchen die den einzelnen Laststellungen entsprechenden Schlußlinien an diesem Stab gehen, gezogenen Senkrechten von den genannten Schlußlinien abgeschnitten (vgl. Teil I, Kap. VI, Abschn. 1, b). Die Ordinaten der Einflußlinie des Auflagerdruckes an einer Mittelstütze sind gleich der Summe der Ordinaten der Einflußlinien für die Querkräfte unmittelbar links und rechts dieser Stütze.

In jeder Stellung der wandernden Last  $P = 1 \text{ t}$  tritt in dem während des R. I in  $D$  angenommenen festen Lager eine Festhaltungskraft  $F$  auf, welche

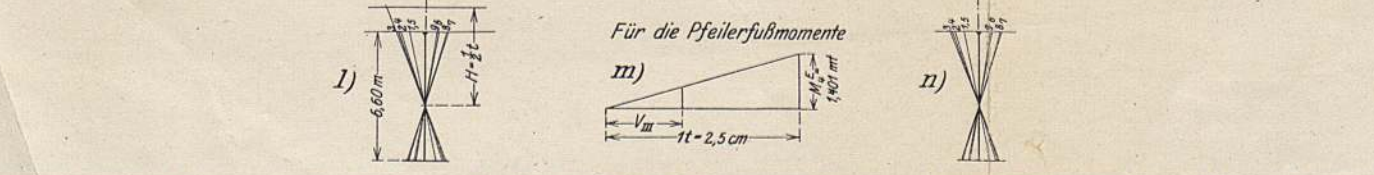
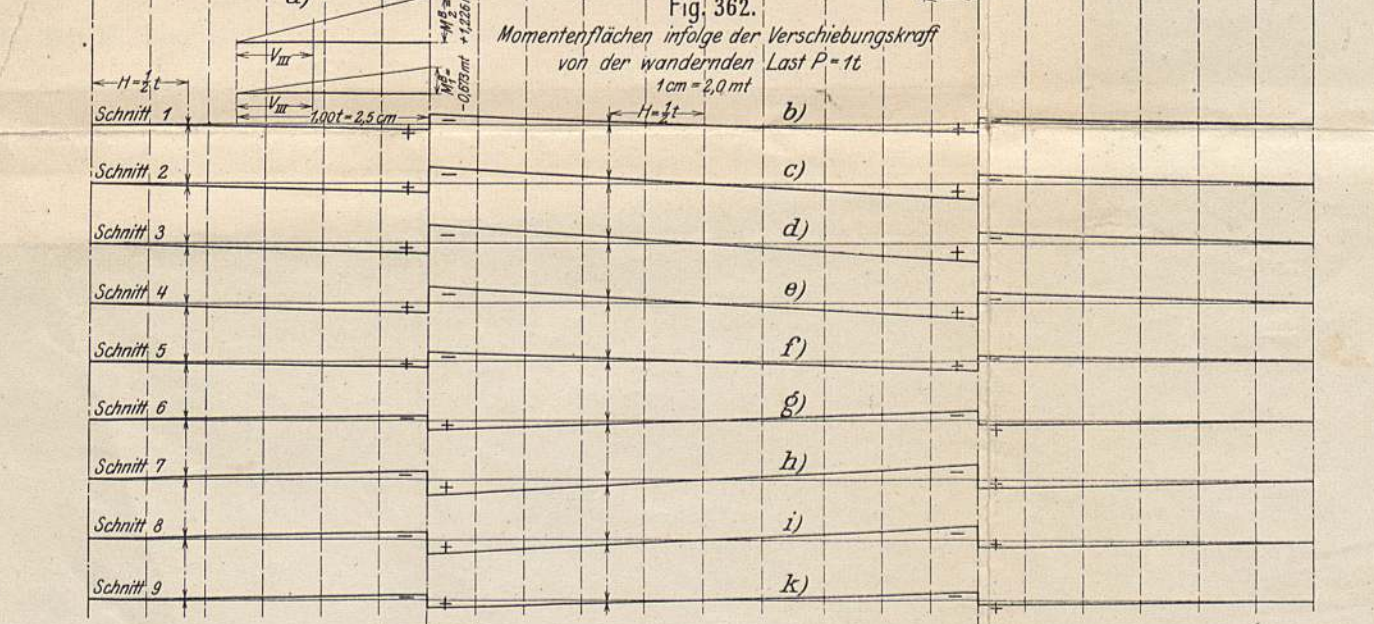
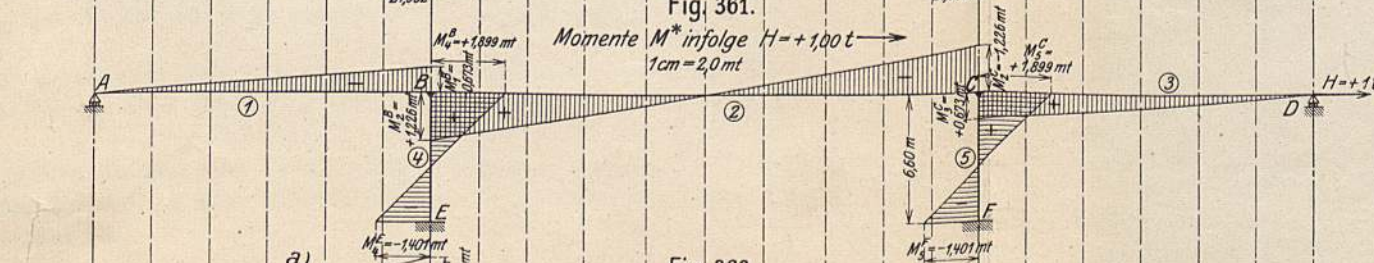
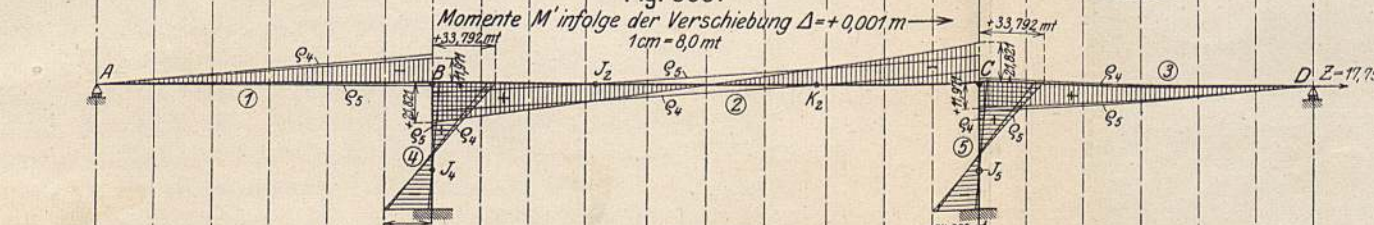
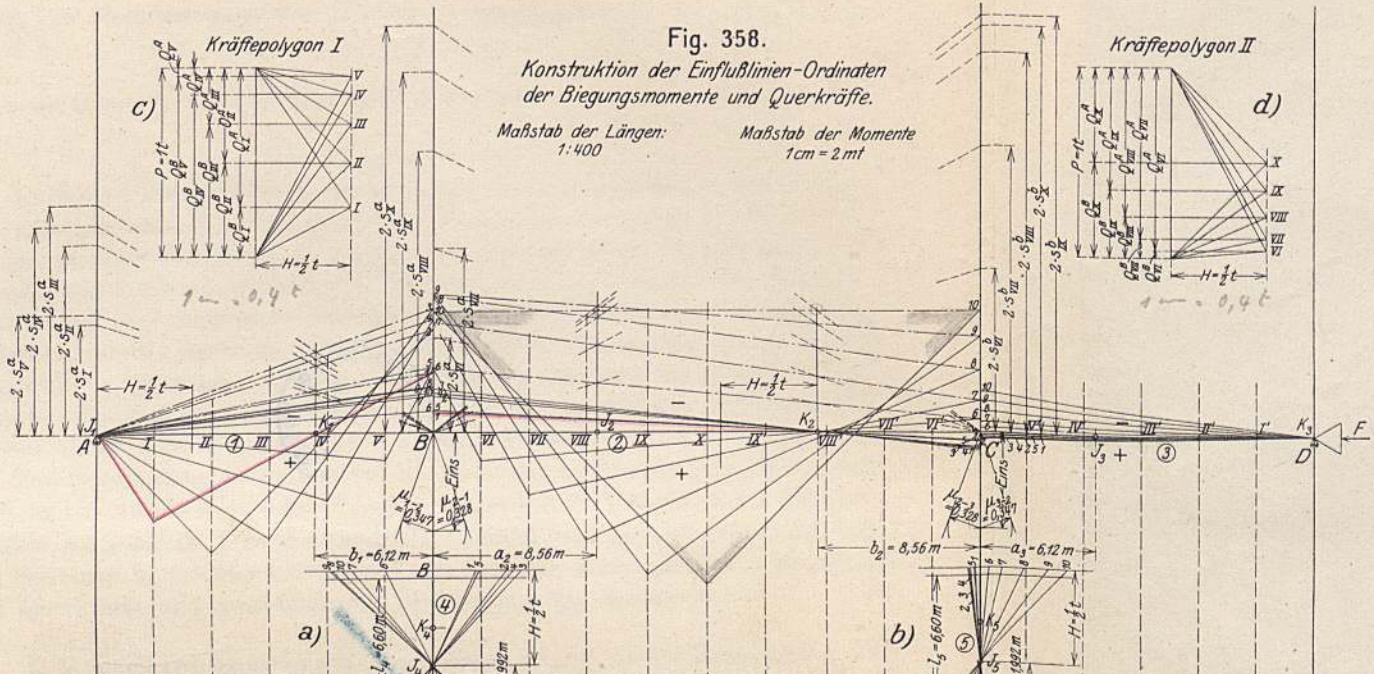


Fig. 358—362.

Nach den Hauptformeln (515) und (520) entstehen infolge  $q_4$  an den Enden des Stabes 4 die Momente

$$M_4^E = \frac{q_4}{l_4 \cdot \beta_4 (l_4 - a_4 - b_4)} \cdot a_4$$

$$M_4^B = \frac{q_4}{l_4 \cdot \beta_4 (l_4 - a_4 - b_4)} \cdot b_4$$

Nun ist nach Gl. (206):

$$E \cdot \beta_4 = \frac{\bar{l}_4^2 (l_4 + 2f_4)}{6 \cdot l_4^2 \cdot J_4} = \frac{5,00^2 (6,60 + 2 \cdot 1,60)}{6 \cdot 6,60^2 \cdot 0,0704} = 13,315$$

und daher mit  $E = 2\,100\,000 \text{ t/m}^2$ :

$$M_4^E = - \frac{2\,100\,000 \cdot 0,001}{6,60 \cdot 13,315 (6,60 - 1,992 - 2,542)} \cdot 1,992 = - 23,034 \text{ mt,}$$

$$M_4^B = + \frac{2\,100\,000 \cdot 0,001}{6,60 \cdot 13,315 (6,60 - 1,992 - 2,542)} \cdot 2,542 = + 29,402 \text{ mt.}$$

Aus Symmetriegründen entstehen infolge  $q_5$  an den Enden des Stabes 5 die gleichen Momente wie am Stab 4, also

$$M_5^E = - 23,034 \text{ mt} \quad \text{und} \quad M_5^B = + 29,402 \text{ mt.}$$

Diese Momente wurden in Fig. 360 aufgetragen und über die anschließenden Stäbe mittels Festpunkte und Verteilungsmaße weitergeleitet.

Es ist nach Gl. (37):

$$\mu_{4-2}^B = \frac{\tau_1^B}{\tau_2^B + \tau_1^B} = \frac{15,964}{14,752 + 15,964} = 0,520$$

und nach Gl. (38):

$$\mu_{4-1}^B = (1 - \mu_{4-2}^B) = 0,480.$$

Durch Addition der beiden Teilmomentenflächen für  $q_4$  und  $q_5$  erhalten wir darauf die in Fig. 360 schraffierte  $M'$ -Momentenfläche, aus welcher wir schließlich die zugehörige Erzeugungskraft  $Z$  nach Teil II, Kap. III, 4 genau wie die Festhaltungskraft des R. I gewinnen; es ist

$$Z = (Q_4^B + Q_5^C) = 2 \left( \frac{33,792 + 24,932}{6,60} \right) = 17,796 \text{ t.}$$

Würde man diese in Balkenachse wirkende innere Kraft als äußere Belastung am Rahmen anbringen, so würde diese Belastung umgekehrt die Verschiebung  $\Delta = + 0,001 \text{ m}$  und die der letzteren entsprechenden  $M'$ -Momente hervorrufen; daraus folgt, daß durch die äußere Belastung  $H = + 1,00 \text{ t}$  Momente  $M^*$  am Rahmen entstehen, welche aus den  $M'$ -Momenten durch Division mit 17,796 hervorgehen (vgl. Teil II, Kap. IV, 1). Die  $M^*$ -Momente infolge  $H = 1,00 \text{ t}$  sind in Fig. 361 aufgetragen worden.

3. Momente und Querkräfte am Rahmen, welche von den, den Stellungen I bis IX der wandernden Last  $P = 1,00 \text{ t}$  entsprechenden, Verschiebungskräften  $V$  hervorgerufen werden.

Steht beispielsweise die wandernde Last  $P = 1 \text{ t}$  im Schnitt III, so wirkt am Balken eine nach links gerichtete Verschiebungskraft  $V_{III}$  („Aktion“), deren

Fig. 363.  
Einflußlinien der Biegemomente.

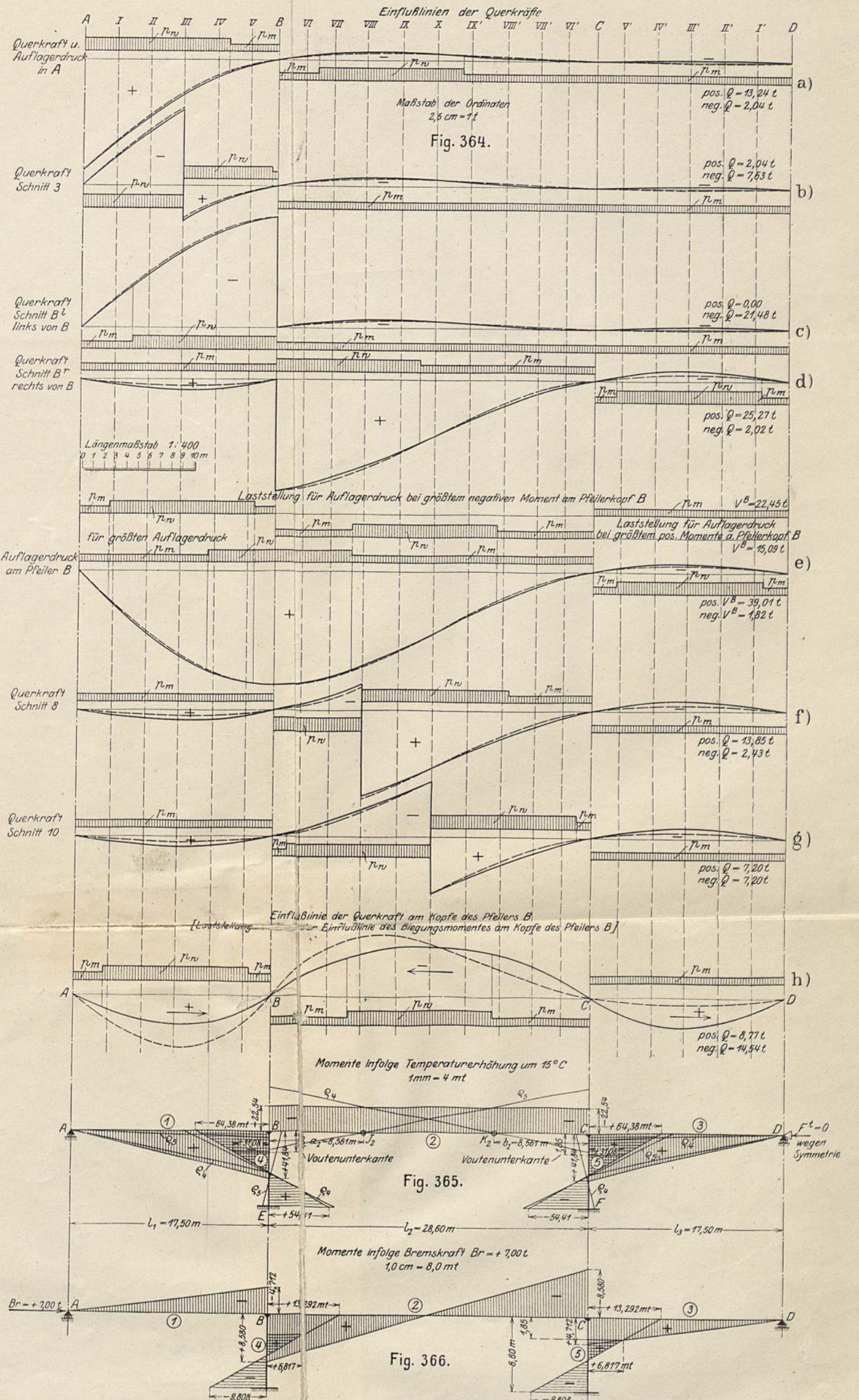
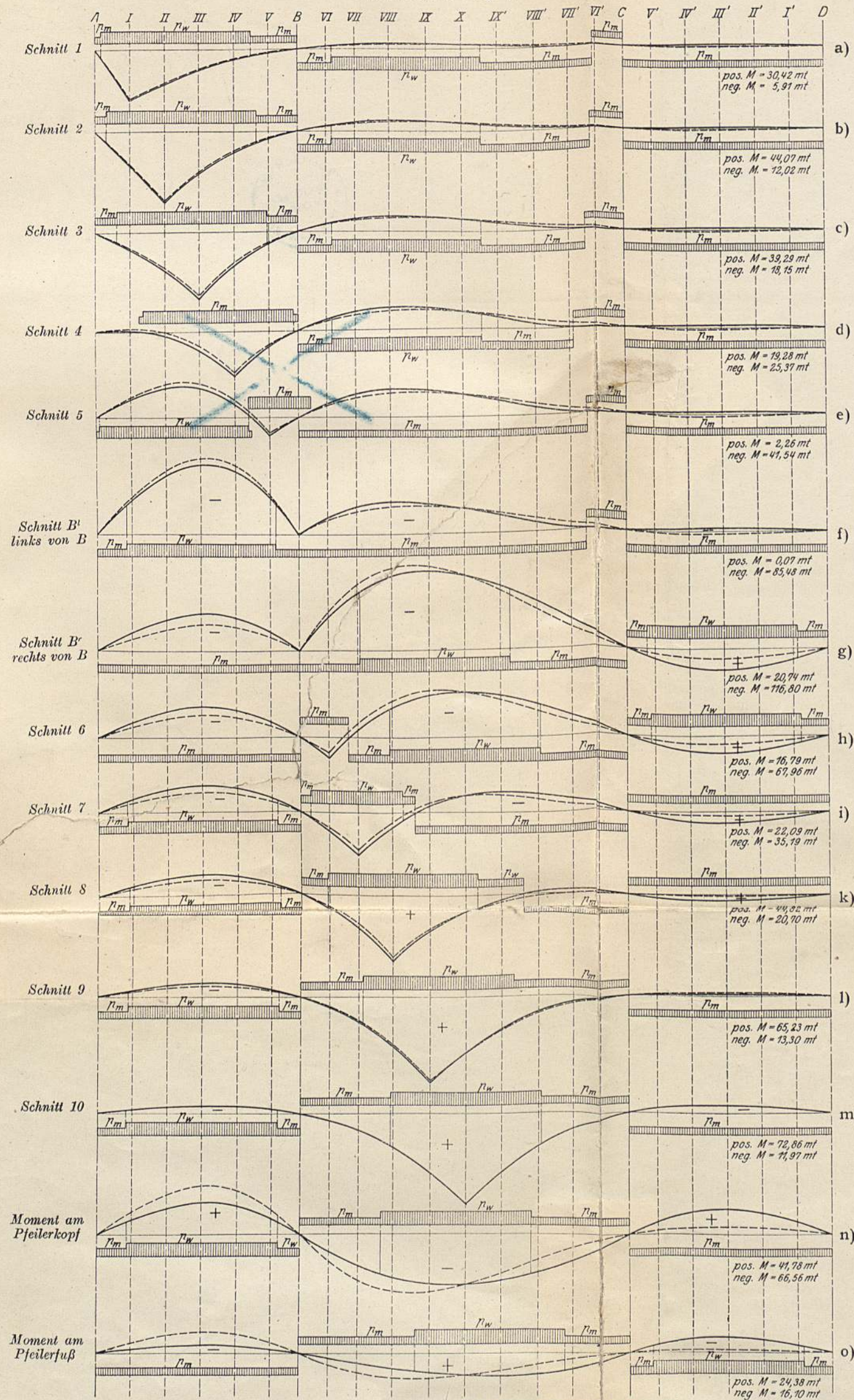
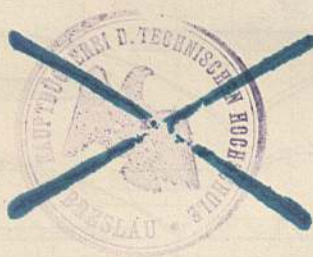


Fig. 363—366.





Größe aus der Einflußlinie der Fig. 359 erhalten wird, indem man daselbst die Ordinate  $III$  mit dem Maßstab dieser Figur mißt; um die durch  $V_{III}$  hervorgerufene in Fig. 362d, l und m dargestellte Momentenfläche am Rahmen zu erhalten, hat man nur nötig, die Ordinaten der  $M^*$ -Momentenfläche der Fig. 361 mit  $V_{III}$  zu multiplizieren. Diese Multiplikation wurde in einfacher Weise graphisch mittels der in den Fig. 362a und m dargestellten Reduktionswinkel vorgenommen. Während die Momente am Balken für jede Laststellung in einer besonderen Figur (362b bis k) — wegen dem leichteren Abgreifen der Ordinaten — aufgetragen wurden, konnten die Momentenflächen an den Pfeilern in je einer Figur (362l und n) vereinigt werden.

Um die zugehörigen Querkräfte zu erhalten, belasten wir die an ihren Enden durchgeschnitten gedachten Balken der ersten und zweiten Öffnung sowie einen an seinen Enden durchgeschnitten gedachten Pfeiler mit den aus den Fig. 362b bis n hervorgehenden Stützenmomenten und ermitteln die entsprechenden Auflagerdrücke; wir erhalten die letzteren, indem wir (Fig. 362b bis n) in der ersten Öffnung von  $A$  aus, in der zweiten Öffnung von der Mitte aus und am Pfeiler vom Momentennullpunkt aus im Abstände  $H = \frac{1}{2}t$  (Polweite der den einzelnen Laststellungen entsprechenden Momentenflächen, Fig. 358) eine Normale zum Stab ziehen und die Momentenordinaten auf der letzteren mit dem Kräftemaßstab messen, in welchem die Polweite  $H$  aufgetragen wurde (vgl. Teil I, Kap. VI, 1, b).

4. Zusätze zu den im Rechnungsabschnitt I ermittelten, in den Fig. 363 a bis o und 364 a bis h gestrichelt dargestellten Einflußlinien der Biegemomente, Querkräfte und Auflagerdrücke.

Diese Zusätze sind eine Folge der Verschiebungskräfte  $V$ , welche in den einzelnen Stellungen der wandernden Last  $1t$  im Balken wirken und durch die Einflußlinie der Fig. 359 dargestellt sind. Da nun die Ordinaten der linken Hälfte dieser Einflußlinie entgegengesetzt gleich sind den Ordinaten der rechten Hälfte, so können wir uns darauf beschränken, die Zusätze auf der linken Hälfte der einzelnen Einflußlinien zu ermitteln und die Zusätze auf der rechten Hälfte entgegengesetzt gleich zu nehmen. In den Fig. 363a bis o und 364a bis h bedeuten die voll ausgezogenen Kurven die Einflußlinien mit Berücksichtigung der Zusätze.

a) Zusätze zu den Einflußlinien der Biegemomente.

Beispielsweise erhält man die Zusätze zu den Ordinaten der in Fig. 363d gestrichelt gezeichneten Einflußlinie des Biegemomentes im Schnitt  $IV$  aus den in Fig. 362 dargestellten Momentenflächen, und zwar ist der Zusatz im Schnitt  $I$  gleich der im Schnitt  $IV$  der Fig. 362b abgegriffenen Momentenordinate, der Zusatz im Schnitt  $II$  gleich der im Schnitt  $IV$  der Fig. 362c abgegriffenen Momentenordinate, und so weiter in allen übrigen Schnitten der linken Hälfte.

Ferner betrachten wir noch die Zusätze zu den Ordinaten der in Fig. 363n gestrichelt dargestellten Einflußlinie des Biegemomentes am Pfeilerkopf  $B$ : Im Schnitt  $I$  ist die Zusatzordinate gleich der am Pfeilerkopf der Fig. 362l

von der Schlußlinie *I* abgeschnittenen Momentenordinate, welche gleich ist der Summe der Momentenordinaten  $M_1^B$  und  $M_2^B$  in Fig. 362b (weil  $M_4^B = [+M_1^B] - [-M_2^B]$ ); im Schnitt *II* ist der Zusatz gleich der am Pfeilerkopf *B* der Fig. 362l von der Schlußlinie *2* abgeschnittenen Momentenordinate, und so weiter in allen übrigen Schnitten der linken Hälfte.

Die Zusätze zu den Ordinaten der in Fig. 363o gestrichelt dargestellten Einflußlinie des Biegemomentes am Pfeiler *E* erhalten wir in analoger Weise aus Fig. 362l.

b) Zusätze zu den Einflußlinien der Querkräfte.

Die Zusätze zu den Ordinaten *I* bis *IX* der in Fig. 364a gestrichelt dargestellten Einflußlinie der Querkraft in *A* sind gleich den Auflagerdrücken, welche auf die vorher unter 3. beschriebene Weise am linken Ende des einfachen Balkens *AB* erhalten werden. Beispielsweise ist der Zusatz im Schnitt *I* gleich der in der Momentenfläche (Fig. 362b) abgegriffenen Momentenordinate im Abstände *H* von *A*, der Zusatz im Schnitt *II* gleich der in der Momentenfläche der Fig. 362c abgegriffenen Momentenordinate im Abstände *H* von *A*, usw.

Die Zusätze zu den gestrichelt dargestellten Einflußlinien der Querkräfte in den Schnitten *III* und *B'* (Fig. 364b und c) sind gleich den vorhergehend behandelten Zusätzen zu der Einflußlinie der Querkraft in *A*.

Die Zusätze zu den gestrichelt dargestellten Einflußlinien der Querkräfte in den Schnitten *B''*, *VIII* und *X* (Fig. 364d, f und g) sind gleich den Auflagerdrücken, welche auf die vorher unter 3. beschriebene Weise am linken Ende des einfachen Balkens *BC* erhalten werden. Beispielsweise ist der Zusatz im Schnitt *I* aller drei Einflußlinien (weil in unbelasteten Öffnungen die Querkraft über die ganze Öffnung konstant ist) gleich der in der Momentenfläche der Fig. 362b abgegriffenen Momentenordinate im Abstände *H* von der Trägermitte, der Zusatz im Schnitt *II* aller drei Einflußlinien gleich der in der Momentenfläche der Fig. 362c abgegriffenen Momentenordinate im Abstände *H* von der Trägermitte, usw.

Die Zusätze zu der gestrichelt dargestellten Einflußlinie der Querkraft am Kopfe des Pfeilers *B* (Fig. 364h) sind gleich den Auflagerdrücken, welche auf die vorher unter 3. beschriebene Weise am oberen Ende des einfachen Balkens *BE* erhalten werden. Beispielsweise ist der Zusatz im Schnitt *III* gleich der in Fig. 362l von der Schlußlinie *3* auf der Normalen zum Pfeiler im Abstände *H* von *A* (im Kräftemaßstab) abgeschnittenen Momentenordinate, usw. Als Kontrolle für richtiges Konstruieren muß die endgültige, voll ausgezogene Einflußlinie für  $Q_4^B$  eine symmetrisch zur Trägermitte verlaufende Kurve ergeben.

Die Einflußlinie für die Querkraft am Pfeilerfuß ist entgegengesetzt gleich wie diejenige für die Querkraft am Pfeilerkopf.

c) Zusätze zu den Einflußlinien der Auflagerdrücke.

Die Zusätze zu den Ordinaten der Einflußlinie des Auflagerdruckes in *A* sind identisch mit denjenigen zu den Ordinaten der Einflußlinie für die Querkraft daselbst.

Die Zusätze zu den Ordinaten *I* bis *IX* der in Fig. 364e gestrichelt dargestellten Einflußlinie des Auflagerdruckes in *B* sind jeweils gleich der algebraischen Summe der beiden Auflagerdrücke, welche auf die vorher unter 3.

beschriebene Weise am rechten Ende des einfachen Balkens  $AB$  und am linken Ende des einfachen Balkens  $BC$  erhalten werden. Beispielsweise ist der Zusatz im Schnitt  $I$  gleich der algebraischen Summe der beiden Momentenordinaten, welche in der Momentenfläche der Fig. 362b im Abstände  $H$  von  $A$  und im Abstände  $H$  von der Trägermitte abgegriffen werden; ebenso ist der Zusatz im Schnitt  $II$  gleich der algebraischen Summe der beiden Momentenordinaten, welche in der Momentenfläche der Fig. 362c im Abstände  $H$  von  $A$  und im Abstände  $H$  von der Trägermitte abgegriffen werden, usw.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß sowohl die Ordinaten der Einflußlinien des R. I als auch die vorhin ermittelten Zusätze zu denselben, leicht mathematisch genau aus den in den graphischen Konstruktionen enthaltenen Dreiecken berechnet werden können.

Nachdem alle Einflußlinien auf die vorhergehend beschriebene Weise konstruiert sind, können wir die am Rahmen durch die Verkehrsbelastung hervorgerufenen resultierenden Momente, Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerdrücke ermitteln. Zu diesem Zweck haben wir den jeweils ungünstigsten der drei eingangs beschriebenen Verkehrslastenzüge in der ungünstigsten Stellung über den endgültigen, voll ausgezogenen Einflußlinien aufgestellt und die letzteren ausgewertet. Das Ergebnis der Auswertung ist jeweils neben der betreffenden Einflußlinie vermerkt.

### III. Temperaturänderung um $t = \pm 15^\circ \text{C}$ .

Nachstehend ermitteln wir die inneren Kräfte am Rahmen infolge Temperaturerhöhung um  $t = 15^\circ \text{C}$ ; die inneren Kräfte infolge Temperaturerniedrigung haben dann dieselbe Größe, jedoch entgegengesetztes Vorzeichen.

Infolge der symmetrischen Ausbildung der Brücke bleibt die Mitte der Mittelöffnung bei Temperaturänderung in Ruhe; unter Annahme eines Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha = 0,000012$  verschiebt sich daher bei einer Temperaturerhöhung von  $t = 15^\circ$  der Pfeilerkopf  $C$  um

$$\Delta C = +\alpha \cdot t \cdot \frac{l_3}{2} = +0,000012 \cdot 15 \cdot 14,30 = +0,002574 \text{ m}$$

und der Pfeilerkopf  $B$  um:

$$\Delta B = -\Delta C = -0,002574 \text{ m,}$$

wodurch die Stäbe 4 und 5 (Pfeiler) gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden, und zwar ist

$$\varrho_4 = \Delta B = 0,002574 \text{ m (von rechts nach links gerichtet),}$$

$$\varrho_5 = \Delta C = 0,002574 \text{ m (von links nach rechts gerichtet).}$$

#### 1. Momente.

Die Momente infolge dieser gegenseitigen Verschiebungen  $\varrho$  ermitteln wir nach den Gl. (515) und (520) und wir erhalten: infolge  $\varrho_4$ :

$$\begin{aligned} M_4^E &= \frac{\varrho_4}{l_4 \cdot \beta_4 (l_4 - a_4 - b_4)} \cdot a_4 = k \cdot a_4 \\ &= \frac{0,002574 \cdot 2100000}{6,60 \cdot 13,315 (6,60 - 1,992 - 2,542)} \cdot 1,992 = +59,290 \text{ mt.} \\ M_4^B &= k \cdot b_4 = 29,764 \cdot 2,542 = -75,681 \text{ mt.} \end{aligned}$$

Das Moment  $M_4^B$  spaltet sich am Knotenpunkt  $B$  in

$$M_2^B = \mu_{4-2}^B \cdot M_4^B = 0,520 \cdot 75,681 = - 39,354 \text{ mt,}$$

$$M_1^B = (1 - \mu_{4-2}^B) M_4^B = 0,480 \cdot 75,681 = + 36,327 \text{ mt.}$$

Das Moment  $M_2^B$  pflanzen wir nach rechts mittels des Festpunktes  $K_2$  und des Verteilungsmaßes  $\mu_{2-3}^C = 0,328$  fort; es ergibt sich:

$$M_2^C = - M_2^B \cdot \frac{b_2}{l_2 - b_2} = + 16,813 \text{ mt,}$$

$$M_3^C = \mu_{2-3}^C \cdot M_2^C = 0,328 \cdot 16,813 = + 5,515 \text{ mt,}$$

$$M_5^C = (1 - \mu_{2-3}^C) M_2^C = (1 - 0,328) 16,813 = - 11,298 \text{ mt.}$$

Endlich leiten wir noch das Moment  $M_5^C$  durch den Festpunkt  $J_5$  zum Pfeilerfuß; es ist

$$M_5^F = - M_5^C \cdot \frac{a_5}{l_5 - a_5} = + 4,884 \text{ mt,}$$

infolge  $\varrho_5$ :

Aus Symmetriegründen sind diese Momente die spiegelbildlich gleichen wie diejenigen infolge  $\varrho_4$ .

Addieren wir nun die Teilmomentenflächen infolge  $\varrho_4$  und  $\varrho_5$ , so erhalten wir die in Fig. 365 schraffierte Gesamtmomentenfläche infolge einer Temperaturerhöhung des Rahmens gegenüber der Herstellungstemperatur um  $15^\circ$ . Da der Rahmen symmetrisch ist, so wird die Festhaltungskraft  $F^N = 0$ , weshalb keine Zusatzmomente auftreten und die Momentenfläche der Fig. 365 die endgültigen Temperaturmomente darstellt.

## 2. Querkräfte.

Nach Teil I, Kap. VI, 1 ist die Querkraft infolge der gegebenen Temperaturerhöhung:

in allen Querschnitten der ersten und dritten Öffnung

$$Q_1 = Q_3 = \frac{41,842}{17,50} = + 2,39 \text{ t,}$$

in allen Querschnitten der zweiten Öffnung

$$Q_2 = 0,$$

in allen Querschnitten des Pfeilers  $B$ :

$$Q_4 = \frac{64,383 + 54,406}{6,60} = + 18,00 \text{ t,}$$

in allen Querschnitten des Pfeilers  $C$ :

$$Q_5 = - 18,00 \text{ t.}$$

## 3. Normalkräfte.

Nach Teil I, Kap. VI, 2 ist die Normalkraft infolge der gegebenen Temperaturerhöhung:

in allen Querschnitten der ersten und dritten Öffnung:

$$N_1 = N_3 = 0,$$

da an deren Enden bewegliche Lager sind;

in allen Querschnitten der Mittelöffnung:

$$N_2 = -Q_4 = -Q_5 = 18,00 \text{ t (Druckkraft);}$$

in allen Querschnitten der beiden Pfeiler:

$$N_4 = N_5 = 2,39 \text{ t (Zugkraft).}$$

#### 4. Auflagerdrücke an den Balkenenden.

Es ist in *A*:

$$V^A = Q_1 = 2,39 \text{ t,}$$

und in *D*:

$$V^D = Q_3 = 2,39 \text{ t.}$$

### IV. Bremskraft der Verkehrsbelastung.

Werden die auf der Brücke verkehrenden schweren Elektromotorwagen mit Anhängewagen während der Fahrt von links nach rechts gebremst, so entsteht eine in der Balkenachse wirkende, nach rechts gerichtete Bremskraft:

$$Br = + 7,00 \text{ t;}$$

bei der Fahrt von rechts nach links entsteht dagegen eine nach links gerichtete Bremskraft

$$Br = - 7,00 \text{ t.}$$

Nachstehend ermitteln wir die inneren Kräfte am Rahmen infolge  $Br = + 7,00 \text{ t}$ ; die inneren Kräfte infolge  $Br = - 7,00 \text{ t}$  haben dann gleiche Größe, jedoch entgegengesetztes Vorzeichen.

#### 1. Momente.

Wir erhalten die in Fig. 366 eingetragenen Momente infolge  $Br = + 7,00 \text{ t}$ , indem wir die in Fig. 361 dargestellten Momente infolge  $H = + 1,00 \text{ t}$  mit 7,00 multiplizieren.

#### 2. Querkräfte.

Nach Teil I, Kap. VI, 1 ist die Querkraft infolge der gegebenen Bremskraft: in allen Querschnitten der ersten und dritten Öffnung:

$$Q_1 = Q_3 = \frac{-4,712}{17,50} = -0,27 \text{ t,}$$

in allen Querschnitten der zweiten Öffnung:

$$Q_2 = \frac{-8,580 - 8,580}{28,60} = -0,60 \text{ t,}$$

in allen Querschnitten der Pfeiler *B* und *C*:

$$Q_4 = Q_5 = \frac{-13,292 - 9,808}{6,60} = -3,50 \text{ t.}$$

#### 3. Normalkräfte.

Die Normalkräfte in den Balken sind verschieden, je nachdem die Bremskraft im Punkte *A*, *B*, *C* oder *D* angreift, und zwar ermitteln wir dieselben

dadurch, daß wir jeweils auf das Balkenstück links des betrachteten Schnittes die Gleichgewichtsbedingung  $\sum H = 0$  anwenden.

a) Die Bremskraft  $Br = + 7,00$  t greift in  $A$  an; dann entsteht in allen Querschnitten der ersten Öffnung eine axiale Druckkraft

$$N_1 = Br = 7,00 \text{ t,}$$

in allen Querschnitten der Mittelöffnung eine axiale Druckkraft

$$N_2 = Br + Q_4^B = 7,00 - 3,50 = 3,50 \text{ t,}$$

und in allen Querschnitten der dritten Öffnung:

$$N_3 = Br + Q_4^B + Q_5^B = 7,00 - 3,50 - 3,50 = 0.$$

b) Die Bremskraft  $Br = + 7,00$  t greift in  $B$  an; dann entsteht in allen Querschnitten der Mittelöffnung eine axiale Druckkraft

$$N_2 = 7,00 - 3,50 = 3,50 \text{ t,}$$

während in allen Querschnitten der ersten und dritten Öffnung die Normalkraft Null ist.

c) Die Bremskraft  $Br = + 7,00$  t greift in  $C$  an; dann entsteht in allen Querschnitten der Mittelöffnung eine axiale Zugkraft

$$N_2 = - 3,50 \text{ t,}$$

während in allen Querschnitten der ersten und dritten Öffnung die Normalkraft Null ist.

d) Die Bremskraft  $Br = + 7,00$  t greift in  $D$  an; dann entsteht in allen Querschnitten der ersten Öffnung

$$N_1 = 0,$$

in allen Querschnitten der zweiten Öffnung eine axiale Zugkraft

$$N_2 = 3,50 \text{ t,}$$

und in allen Querschnitten der dritten Öffnung eine axiale Zugkraft

$$N_3 = 7,00 \text{ t.}$$

Die Normalkraft im Pfeiler  $B$  ist in allen Querschnitten eine axiale Zugkraft

$$N_4 = - (Q_1^B + Q_2^B) = - (0,27 - 0,60) = 0,33 \text{ t,}$$

und die Normalkraft im Pfeiler  $C$  ist

in allen Querschnitten eine axiale Druckkraft

$$N_5 = - (Q_2^C + Q_3^C) = - (0,60 - 0,27) = - 0,33 \text{ t.}$$

## V. Grenzwerte der inneren Kräfte.

Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten die von den einzelnen Belastungsfällen hervorgerufenen inneren Kräfte bestimmt worden sind, stellen wir dieselben tabellarisch und graphisch zusammen und ermitteln die Grenzwerte, welche der Querschnittsberechnung zugrunde zu legen sind.

Grenzwerte der Momente und Eisenverteilung am Balken.

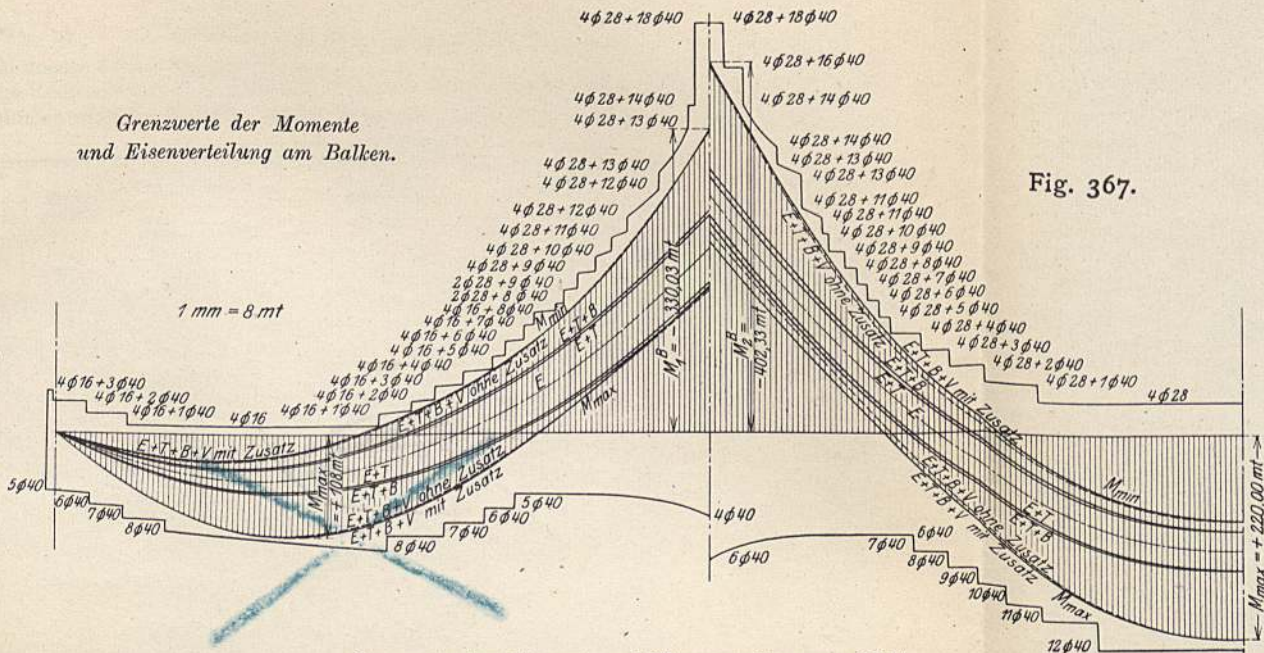


Fig. 367.

Grenzwerte der Momente und Eisenverteilung am Pfeiler.

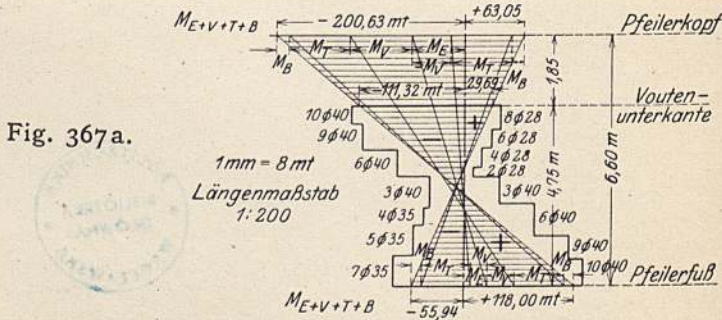


Fig. 367a.

Grenzwerte der Querkräfte am Balken.

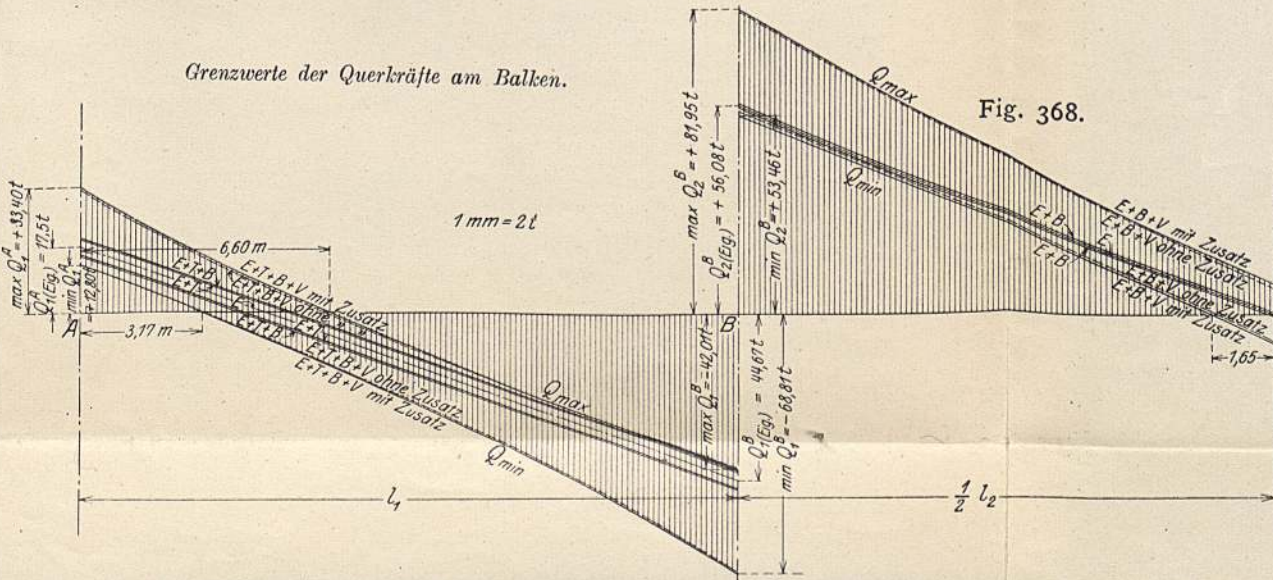


Fig. 368.

Grenzwerte der Querkräfte am Pfeiler B und Untersuchung seines Fundamentes.

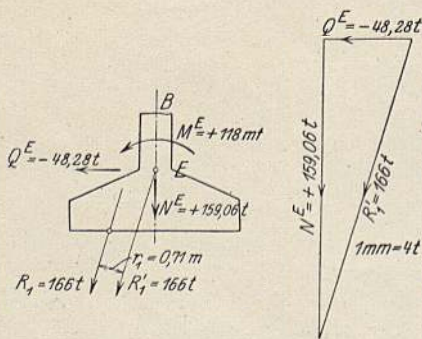


Fig. 369.

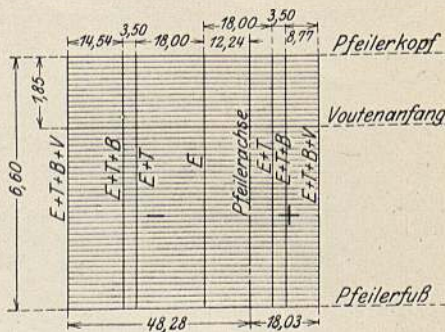


Fig. 368a.

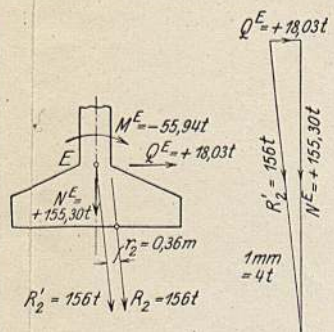


Fig. 369a.

Fig. 367—369.

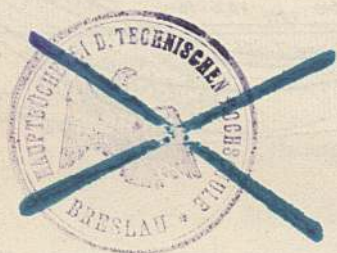




Tabelle IV.  
Zusammenstellung der Momente am Balken.

Die Momente infolge Eigengewicht wurden aus der Momentenfläche Fig. 357, die Momente infolge Verkehrslast aus den Einflußlinien, die Momente infolge Temperaturänderungen aus der Momentenfläche Fig. 365, und die Momente infolge Bremskraft aus der Momentenfläche Fig. 366 übertragen.

Schnitt	Eigen- gewicht mt	Verkehrsbelastung		Temperatur- änderungen		Bremskraft		Grenzwerte	
		max. mt	min. mt	t = +15° mt	t = -15° mt	B <sub>r</sub> = +7,00 t mt	B <sub>r</sub> = -7,00 t mt	max. mt	min. mt
I	+ 39,00	+30,42	- 5,91	+ 7,17	- 7,17	-0,81	+0,81	+ 77,40	+ 25,11
II	+ 48,00	+44,07	- 12,02	+14,34	-14,34	-1,61	+1,61	+108,02	+ 20,03
III	+ 28,00	+39,29	- 18,15	+21,51	-21,51	-2,42	+2,42	+ 91,22	- 14,08
IV	- 23,00	+19,28	- 25,37	+28,68	-28,68	-3,23	+3,23	+ 28,19	- 80,28
V	-105,00	+ 2,26	- 41,54	+35,85	-35,85	-4,04	+4,04	- 62,85	-186,43
B <sup>i</sup>	-198,00	+ 0,07	- 85,48	+41,84	-41,84	-4,71	+4,71	-151,38	-330,03
B <sup>r</sup>	-254,40	+20,74	-116,80	-22,54	+22,54	+ 8,58	- 8,58	-202,54	-402,33
VI	-132,00	+16,79	- 67,96	-22,54	+22,54	+7,08	-7,08	- 85,58	-229,58
VII	- 35,00	+22,09	- 35,19	-22,54	+22,54	+5,58	-5,58	+ 15,21	- 98,21
VIII	+ 51,00	+44,82	- 20,70	-22,54	+22,54	+3,78	-3,78	+122,14	+ 3,98
IX	+106,00	+65,23	- 13,30	-22,54	+22,54	+1,89	-1,89	+195,66	+ 68,27
X	+124,60	+72,86	- 11,97	-22,54	+22,54	0,00	0,00	+220,00	+ 90,09

Tabelle V.  
Zusammenstellung der Querkräfte am Balken.

Schnitt	Eigen- gewicht t	Verkehrsbelastung		Temperatur- änderungen		Bremskraft		Grenzwerte	
		max. t	min. t	t = +15° t	t = -15° t	B <sub>r</sub> = +7,00 t t	B <sub>r</sub> = -7,00 t t	max. t	min. t
A	+17,50	+13,24	- 2,04	+2,39	- 2,39	-0,27	+0,27	+33,40	+12,80
III	-14,50	+ 2,04	- 7,63	+2,39	- 2,39	-0,27	+0,27	- 9,80	-24,79
B <sup>i</sup>	-44,67	0,00	-21,48	+2,39	- 2,39	-0,27	+0,27	-42,01	-68,81
B <sup>r</sup>	+56,08	+25,27	- 2,02	0,00	0,00	-0,60	+0,60	+81,95	+53,46
VIII	+23,20	+13,85	- 2,43	0,00	0,00	-0,60	+0,60	+37,65	+20,17
X	0,00	+ 7,20	- 7,20	0,00	0,00	-0,60	+0,60	+ 7,80	- 7,80

Tabelle VI.  
Axiale Normalkräfte am Balken.

(Eine Druckkraft wird als positiv, eine Zugkraft als negativ eingeführt.)

Öffnung	Eigen- gewicht t	Verkehrsbelastung		Temperatur- änderungen		Bremskraft		Grenzwerte	
		max. t	min. t	t = +15° t	t = -15° t	B <sub>r</sub> = +7,00 t t	B <sub>r</sub> = -7,00 t t	max. t	min. t
l <sub>1</sub>	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	+7,00	-7,00	+ 7,00	- 7,00
l <sub>2</sub>	+12,24	+14,54	-8,77	+18,00	-18,00	+3,50	+3,50	+48,28	-18,23
						-3,50	-3,50		

Tabelle VII.  
Auflagerdrücke am Balken.

Eigengewicht	Verkehrsbelastung		Temperatur- änderungen		Bremskraft		Grenzwerte	
	max. t	min. t	t = +15° t	t = -15° t	B <sub>r</sub> = +7,00 t t	B <sub>r</sub> = -7,00 t t	max. t	min. t
V <sup>A</sup> = + 17,50	+13,24	-2,04	+2,39	- 2,39	-0,27	+0,27	+ 33,40	+12,80
V <sup>B</sup> = +100,75	+39,01	-1,82	-2,39	+ 2,39	-0,33	+0,33	+142,48	+96,21

Tabelle VIII.

**Momente, Querkräfte und Normalkräfte, welche einander am Pfeiler B entsprechen.**

Ein Moment wird als positiv eingeführt, wenn es an der rechten, und als negativ, wenn es an der linken Pfeilerkante Zug erzeugt; eine nach rechts gerichtete Querkraft wird als positiv, und eine nach links gerichtete Querkraft als negativ eingeführt; eine Normalkraft wird als positiv eingeführt, wenn sie Druck, und als negativ, wenn sie Zug erzeugt.

		Eigen- gewicht	Verkehrsbelastung		Temperatur- änderungen		Bremskraft		Grenzwerte	
			max.	min.	t = +15°	t = -15°	B <sub>r</sub> = +7,00 t	B <sub>r</sub> = -7,00 t	max.	min.
Pfeiler- kopf	Moment . mt	- 56,40	-66,56	+41,78	-64,38	+64,38	+13,29	-13,29	-200,63	+ 63,05
	Querkraft t	- 12,24	-14,54	+ 8,77	-18,00	+18,00	+ 3,50	- 3,50	- 48,28	+ 18,03
	Normalkr. t	+100,75	+22,45	+15,09	- 2,39	+ 2,39	- 0,33	+ 0,33	+125,92	+117,81
Vouten- anfang	Moment . mt	- 33,76	-39,66	+25,55	-31,08	+31,08	+ 6,82	- 6,82	-111,32	+ 29,69
	Querkraft t	- 12,24	-14,54	+ 8,77	-18,00	+18,00	+ 3,50	- 3,50	- 48,28	+ 18,03
	Normalkr. t	+100,75	+22,45	+15,09	- 2,39	+ 2,39	- 0,33	+ 0,33	+125,92	+117,81
Pfeiler- fuß	Moment . mt	+ 24,38	-16,10	+29,40	+54,41	-54,41	- 9,81	+ 9,81	- 55,94	+118,00
	Querkraft t	- 12,24	+ 8,77	-14,54	-18,00	+18,00	+ 3,50	- 3,50	+ 18,03	- 48,28
	Normalkr. t	+117,15	+15,09	+22,45	- 2,39	+ 2,39	- 0,33	+ 0,33	+134,30	+138,06

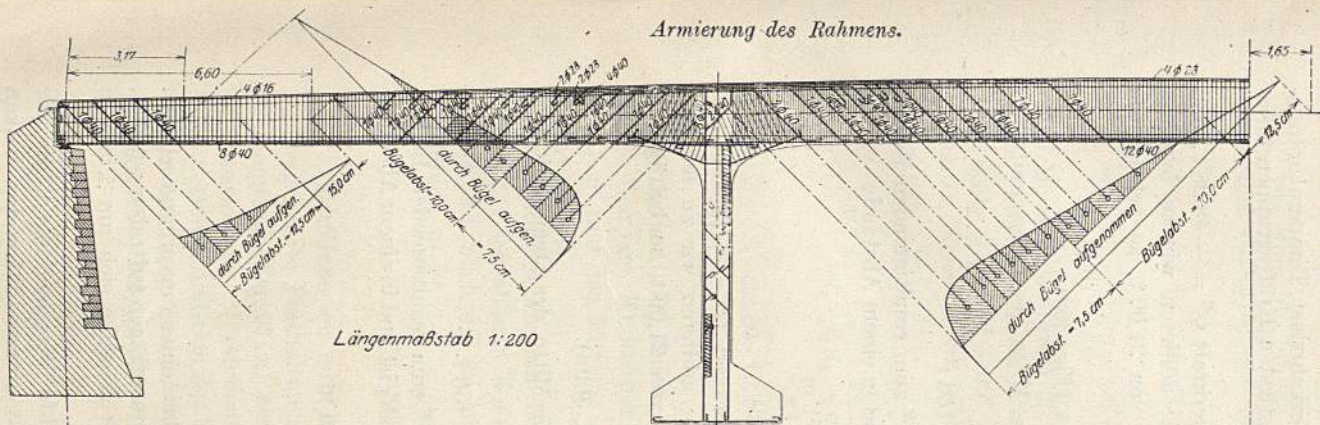
Anmerkung: Für die Berechnung der Pfeilerquerschnitte kommen nur die Momente, Querkräfte und Normalkräfte zwischen Voutenanfang und Pfeilerfuß in Betracht.

In Fig. 367 wurden die Momente der Tabelle IV in den Schnitten I bis X aufgetragen und schließlich die Kurven der Maximal- und Minimalmomente konstruiert. In dieser Figur bedeutet die strichpunktierte, mit E bezeichnete Linie die Momentenlinie infolge Eigengewicht, die mit E + T bezeichnete Linie die Momentenlinie infolge Eigengewicht + Temperatur, die mit E + T + B bezeichnete Linie die Momentenlinie infolge Eigengewicht + Temperatur + Bremskraft, und schließlich die voll ausgezogene sowie auch die gestrichelte mit E + T + B + V bezeichnete Linie die Momentenlinie infolge Eigengewicht + Temperatur + Bremskraft + Verkehrslast. Zwischen der voll ausgezogenen und der gestrichelten mit E + T + B + V bezeichneten Kurve besteht folgender Unterschied: Die voll ausgezogene Kurve wurde durch Auswerten der voll ausgezogenen Einflußlinien der Biegemomente erhalten, also unter Berücksichtigung des R. I und der aus R. II sich ergebenden Zusätze, während die gestrichelte Kurve durch Auswerten der gestrichelt dargestellten Einflußlinien der Biegemomente erhalten wurde, d. h. unter alleiniger Berücksichtigung des R. I. Ferner wurden in Fig. 367a die in Tabelle VIII enthaltenen Momente am Pfeiler B aufgetragen.

In Fig. 368 sind die in Tabelle V enthaltenen Querkräfte am Balken, und in Fig. 368a die in Tabelle VIII enthaltenen Querkräfte am Pfeiler B dargestellt, wobei die eingetragenen abgekürzten Bezeichnungen E, T, B und V die vorhergehend erklärte Bedeutung haben.

In Fig. 370 ist die Armierung des Rahmens dargestellt nebst den Schubdiagrammen, welche zur Bestimmung der Lage der abgebogenen Eisen dienen; in Fig. 367 und 367a wurde die zugehörige Staffellinie eingetragen.

Armierung des Rahmens.



Längenmaßstab 1:200

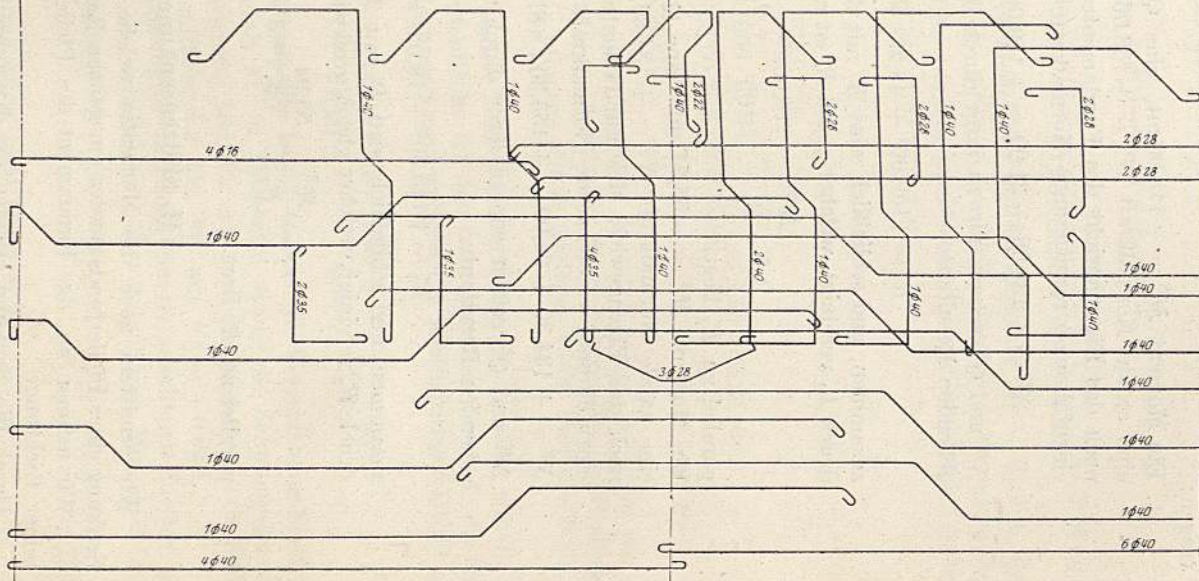


Fig. 370.

Rahmenbrücke mit 3 Öffnungen.

## VI. Untersuchung der Bodenfuge von Pfeiler B.

Im Einspannquerschnitt  $E$  zwischen Säule und Fundament werden auf das letztere nach Tabelle VIII infolge Eigengewicht, Verkehrslast, Temperaturänderungen und Bremskraft die zwei folgenden ungünstigsten Kräftegruppen übertragen:

1. Ein Moment  $M^E = +118,00$  mt, eine Querkraft  $Q^E = -48,28$  t, und eine axiale Normalkraft  $N^E = +138,06$  t; addieren wir zu letzterer noch das Eigengewicht des Fundamentes von 21,00 t, so beträgt die einzuführende resultierende Normalkraft

$$N^E = +138,06 + 21,00 = +159,06 \text{ t (Fig. 369).}$$

$N^E$  und  $Q^E$  setzen wir zu ihrer durch die Mitte des Querschnittes  $E$  gehenden Resultante

$$R'_1 = \sqrt{159,06^2 + 48,28^2} = 166 \text{ t}$$

zusammen, und schließlich wird  $R'_1$  mit  $M^E$  zum resultierenden Bodendruck  $R_1$  vereinigt, welcher gleich  $R'_1$  ist und in einem Abstände

$$r_1 = \frac{M^E}{R'_1} = \frac{118,00}{166} = 0,71 \text{ m}$$

parallel zu  $R'_1$  liegt.

2. Ein Moment  $M^E = -55,94$  mt, eine Querkraft  $Q^E = +18,03$  t, und eine axiale Normalkraft  $N^E = +134,30$  t; addieren wir zu letzterer noch das Eigengewicht des Fundamentes von 21,00 t, so beträgt die einzuführende resultierende Normalkraft

$$N^E = +134,30 + 21,00 = +155,30 \text{ t (Fig. 369a).}$$

$N^E$  und  $Q^E$  setzen wir zu ihrer durch die Mitte des Querschnittes  $E$  gehenden Resultante

$$R'_2 = \sqrt{155,30^2 + 18,03^2} = 156 \text{ t}$$

zusammen, und schließlich wird  $R'_2$  mit  $M^E$  zum resultierenden Bodendruck  $R_2$  vereinigt, welcher gleich groß wie  $R'_2$  ist und in einem Abstände

$$r_2 = \frac{M^E}{R'_2} = \frac{55,94}{156} = 0,36 \text{ m}$$

parallel zu  $R'_2$  liegt.

## VII. Stützensenkung.

Wir ermitteln noch die Momente, welche bei einer unvorhergesehenen Senkung eines Pfeilerfundamentes am ganzen Rahmenträger auftreten würden.

Wir nehmen an, das Fundament des Pfeilers  $B$  senke sich um 1 mm in seiner Richtung.

Durch die Senkung erleiden die Knotenpunkte Verschiebungen, die wir aber nicht zum vornherein angeben können. Wir müssen daher den Balken zunächst horizontal unverschiebbar festhalten (vgl. Teil II, Kap. VI) und die Momente für diesen Zustand (R. I) bestimmen (siehe Fig. 371). Bei festgehaltenem Balken senkt sich der Knotenpunkt  $B$  gleichviel wie das Fundament des

Pfeilers  $B$  und es treten dadurch am festgehaltenen Rahmen nur die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“

$$\varrho_1 = 1 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \varrho_2 = 1 \text{ mm}$$

auf. Die Momente infolge dieser gegenseitigen Verschiebungen  $\varrho$  ermitteln wir nach den Gl. (515) und (520) und wir erhalten:

infolge  $\varrho_1$ :

$$M_1^A = 0, \text{ weil in } A \text{ ein freies Auflager und daher } a_1 = 0,$$

$$M_1^B = \frac{\varrho_1}{l_1 \cdot \beta_1 (l_1 - b_1)} \cdot b_1 \text{ (da } a_1 = 0) = \frac{2\,100\,000 \cdot 0,001}{17,50 \cdot 11,273 (17,50 - 6,12)} = 5,73 \text{ mt.}$$

Die Momentenordinate  $M_1^B$  verbinden wir mit der Ordinate  $M_1^A = 0$ , d. h. mit dem Punkte  $A$ ; ferner leiten wir  $M_1^B$  über den Pfeiler  $B$  sowie nach rechts über die Stäbe 2, 3 und 5 mit Hilfe von Festpunkten und Verteilungsmaßen in bekannter Weise weiter (siehe Fig. 371);

infolge  $\varrho_2$ :

$$\begin{aligned} M_2^B &= \frac{\varrho_2}{l_2 \cdot \beta_2 (l_2 - a_2 - b_2)} \cdot a_2 \\ &= \frac{2\,100\,000 \cdot 0,001}{28,60 \cdot 10,454 (28,60 - 8,56 - 8,56)} \cdot 8,56 = 5,24 \text{ mt,} \end{aligned}$$

$$M_2^C = -M_2^B = -5,24 \text{ mt.}$$

Das Moment  $M_2^B$  leiten wir über die Stäbe 1 und 4 weiter, nachdem wir es mit den am Knotenpunkt  $B$  maßgebenden Verteilungsmaßen multipliziert haben, und das Moment  $M_2^C$  pflanzen wir in analoger Weise über die Stäbe 3 und 5 fort.

Addieren wir nun die beiden Teilmomentenflächen, so erhalten wir die in Fig. 371 schraffierte Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand, aus welcher wir noch die im gedachten Lager auftretende Festhaltungskraft  $F^s$  gewinnen; es ist

$$F^s = Q_4^B + Q_5^C = \frac{4,00 + 1,75}{6,60} - \frac{0,25 + 0,10}{6,60} = 0,82 \text{ t.}$$

Entfernen wir nun das gedachte Lager, so tritt die Verschiebungskraft  $V^s$  (umgekehrte Festhaltungskraft  $F^s$ ) in Tätigkeit, welche die Senkungs-Zusatzmomente (Fig. 371 a) hervorruft; letztere erhalten wir einfach durch Multiplikation der  $M^*$ -Momentenfläche der Fig. 361 mit  $V^s = -0,82 \text{ t}$ .

Durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Momente (siehe Fig. 371 b) infolge der vorausgesetzten Senkung.

### Anmerkung zum Beispiel 3.

In den Fig. 367 und 368 sind die resultierenden Momente und Querkräfte an der zu berechnenden Rahmenbrücke einmal voll und einmal gestrichelt ausgezogen worden. Die erstere Darstellung entspricht der tatsächlich hier vor-

Momente infolge Senkung des Pfeilers B um 0,001 m.  
Momente des R. I.

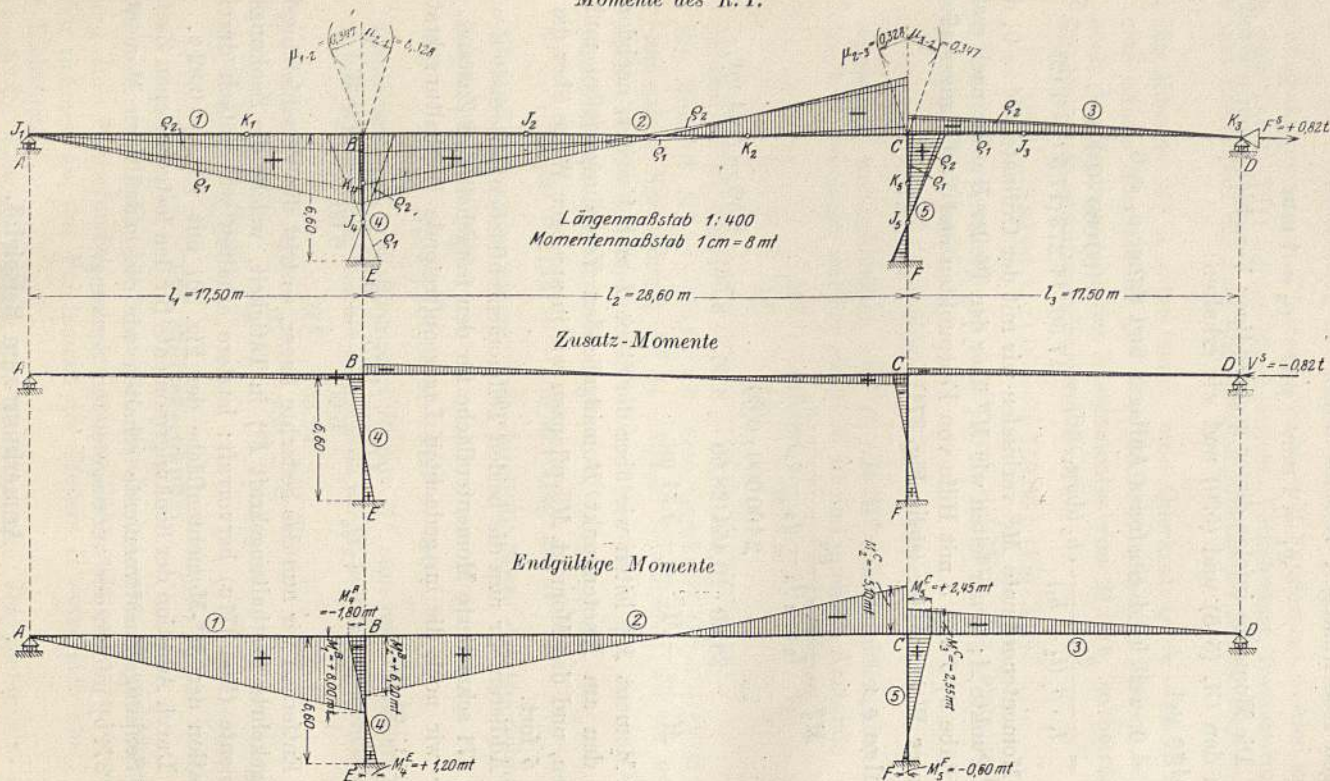


Fig. 371. 371a u. 371b.

liegenden Annahme, daß der Brückenträger einen Rahmen bildet, dessen Balken in keinem Punkte festgelagert ist, während die letztere Darstellung der nicht zutreffenden Annahme entspricht, daß wir es mit einem kontinuierlichen Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern mit horizontal unverschieblichen Pfeilerköpfen zu tun haben. Wie aus den Fig. 367 und 368 ersichtlich, sind die unter beiden Annahmen gerechneten resultierenden Momente und Querkräfte jedoch nur wenig voneinander verschieden; dies kommt daher, daß im vorliegenden Falle die Berechnung der vom Eigengewicht herrührenden inneren Kräfte wegen der symmetrischen Ausbildung des Trägers keiner Zusatzrechnung bedurfte (R. II fiel fort), daß wegen der massigen Konstruktion der Einfluß des Eigengewichtes überwiegend war, und daß wegen der gleichmäßigen Verteilung der Verkehrsbelastung die positiven und negativen Zusätze, welche man durch Auswerten der voll ausgezogenen (gegenüber den gestrichelt ausgezogenen) Einflußlinien erhielt, sich symmetriehalber vielfach gegenseitig aufgehoben haben. Wir können daher aus diesem Vergleich den Schluß ziehen, daß wir bei schweren symmetrischen Rahmenbrücken die Berechnung der durch Verkehrslast hervorgerufenen inneren Kräfte genügend genau unter der Annahme durchführen können, daß der Balken des Rahmens in einem Punkte festgelagert ist, wobei dann der R. II fortfällt und die gestrichelt dargestellten Einflußlinien zugrunde gelegt werden.

Ist jedoch der zu berechnende Rahmenträger unsymmetrisch und die Verkehrsbelastung nicht gleichmäßig verteilt, sondern aus einer Reihe schwerer, voneinander sehr verschiedener Einzellasten zusammengesetzt, so empfiehlt es sich, den unter der Annahme der horizontalen Unverschieblichkeit der Pfeilerköpfe durchgeführten R. I sowohl für Eigengewicht wie für Verkehrsbelastung durch den R. II zu ergänzen, wobei die Berechnung der von der Verkehrslast herrührenden inneren Kräfte mittels des in diesem Beispiel beschriebenen Einflußlinienverfahrens erfolgt; die in diesem Beispiel vorgeführte Ermittlung der Zusätze zu den Einflußlinien erfordert wenig Zeit und liefert genau dieselben Einflußlinien, welche man durch eine nach den allgemeinen Elastizitätsgleichungen durchgeführte, aber bedeutend umständlichere Rechnung erhalten würde.

#### Beispiel 4.

### Unsymmetrischer Rechteckrahmen mit zwei Öffnungen.

Es soll ein Binder der in Fig. 372 dargestellten Halle für Eigengewicht und Schneelast, Kranbelastung, sowie für Temperaturänderungen berechnet werden. Die Größe dieser Lasten ist aus Fig. 372 ersichtlich.

Die Resultate dieses Beispiels wurden durch eine Berechnung nach den allgemeinen Elastizitätsgleichungen nachgeprüft. Aus diesem Grunde mußten insbesondere die Festpunktabstände und Verteilungsmaße analytisch ermittelt werden, um sie mathematisch genau zu erhalten; ferner wurden aus demselben Grunde die genauen Werte aller Eckmomente mit Hilfe der in den graphischen Konstruktionen enthaltenen Dreiecke berechnet. Man hätte diese Werte jedoch ebensogut wie beim vorhergehenden Beispiel graphisch ermitteln können.

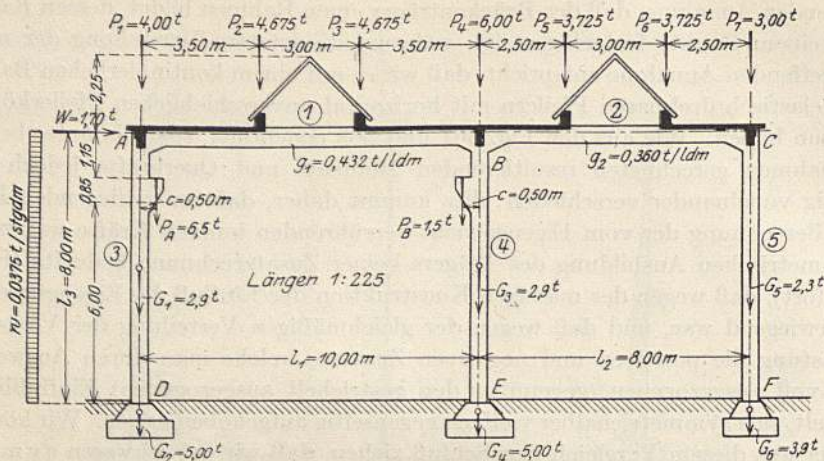


Fig. 372.

### Trägheitsmomente.

Der Balken habe innerhalb jeder Öffnung konstantes, jedoch von Öffnung zu Öffnung sprunghaft veränderliches Trägheitsmoment; es ist

$$J_1 = 0,0054 \text{ m}^4 \quad \text{und} \quad J_2 = 0,003125 \text{ m}^4.$$

Die Säulen haben konstantes Trägheitsmoment, und es wird  $f = 0$  angenommen; es ist

$$J_3 = J_4 = 0,003125 \text{ m}^4 \quad \text{und} \quad J_5 = 0,0016 \text{ m}^4.$$

Alle Säulen sind an ihren Füßen fest eingespannt vorausgesetzt.

### Festpunkte.

Die Abstände der unteren Festpunkte der 3 Säulen sind

$$a_3 = a_4 = a_5 = \frac{8,00}{3} = 2,667 \text{ m.}$$

Von  $a_3$  ausgehend erhalten wir  $a_1$ . Nach Gl. (7) ist:

$$a_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^a + \varepsilon_1^a},$$

hierin ist nach Gl. (207):

$$E \cdot \beta_1 = \frac{l_1}{6J_1} = \frac{10,00}{6 \cdot 0,0054} = 308,63,$$

und nach Gl. (204):

$$E \cdot \alpha_1^a = E \cdot \alpha_1^b = \frac{l_1}{2J_1} = \frac{10,00}{2 \cdot 0,0054} = 925,89.$$

Ferner ist

$$\varepsilon_1^a = \tau_3^A$$

und nach Gl. (138a):

$$E \cdot \tau_3^A = \frac{l_3}{4J_3} = \frac{8,00}{4 \cdot 0,003125} = 640,00.$$



Diese Werte in die Gleichung für  $a_1$  eingesetzt gibt:

$$\alpha_1 = \frac{10,00 \cdot 308,63}{925,89 + 640,00} = 1,971 \text{ m.}$$

Von  $a_1$  ausgehend erhalten wir  $a_2$ . Nach Gl. (7) ist:

$$a_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^a + \varepsilon_2^a},$$

hierin ist nach Gl. (207):

$$E \cdot \beta_2 = \frac{l_2}{6 \cdot J_2} = \frac{8,00}{6 \cdot 0,003125} = 426,67,$$

und nach Gl. (204):

$$E \cdot \alpha_2^a = E \cdot \alpha_2^b = \frac{l_2}{2 \cdot J_2} = \frac{8,00}{2 \cdot 0,003125} = 1280,01.$$

Ferner ist

$$\varepsilon_2^a = \tau_{1-4}^B$$

und nach Gl. (36):

$$E \cdot \tau_{1-4}^B = \frac{\tau_1^B \cdot \tau_4^B}{\tau_1^B + \tau_4^B},$$

worin nach Gl. (42b):

$$E \cdot \tau_1^B = \beta_1 \left( 3 - \frac{l_1}{l_1 - a_1} \right) = 308,63 \left( 3 - \frac{10,00}{10,00 - 1,971} \right) = 541,518$$

und nach Gl. (138a):

$$E \cdot \tau_4^B = \frac{l_4}{4 \cdot J_3} = \frac{8,00}{4 \cdot 0,003125} = 640,00,$$

also

$$E \cdot \tau_{1-4}^B = \frac{541,52 \cdot 640,00}{541,52 + 640,00} = 293,33.$$

Diese Werte in die Gleichung für  $a_2$  eingesetzt gibt:

$$\alpha_2 = \frac{8,00 \cdot 426,67}{1280,01 + 293,33} = 2,169 \text{ m.}$$

Von  $a_2$  ausgehend erhalten wir  $b_5$ . Nach Gl. (8) ist:

$$b_5 = \frac{l_5 \cdot \beta_5}{\alpha_5^b + \varepsilon_5^b},$$

hierin ist nach Gl. (207):

$$E \cdot \beta_5 = \frac{l_5}{6 \cdot J_5} = \frac{8,00}{6 \cdot 0,0016} = 833,33,$$

und nach Gl. (204):

$$E \cdot \alpha_5^b = \frac{l_5}{2 \cdot J_5} = \frac{8,00}{2 \cdot 0,0016} = 2500,00.$$

Ferner ist

$$\varepsilon_5^b = \tau_2^C$$

und nach Gl. (42b):

$$E \cdot \tau_2^C = \beta_2 \left( 3 - \frac{l_2}{l_2 - a_2} \right) = 426,67 \left( 3 - \frac{8,00}{8,00 - 2,169} \right) = 694,57.$$

Diese Werte in die Gleichung für  $b_5$  eingesetzt gibt:

$$b_5 = \frac{8,00 \cdot 833,33}{2500,00 + 694,57} = 2,087 \text{ m.}$$

Von  $a_5$  aus nach links schreitend erhalten wir  $b_2$ . Nach Gl. (8) ist:

$$b_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^b + \varepsilon_2^b},$$

hierin ist nach früherem:

$$E \cdot \beta_2 = 426,67 \quad \text{und} \quad E \cdot \alpha_2^b = 1280,01.$$

Ferner ist

$$\varepsilon_2^b = \tau_5^C$$

und nach Gl. (138a):

$$E \cdot \tau_5^C = \frac{l_5}{4 \cdot J_5} = \frac{8,00}{4 \cdot 0,0016} = 1250,00.$$

Diese Werte in die Gleichung für  $b_2$  eingesetzt gibt:

$$b_2 = \frac{8,00 \cdot 426,67}{1280,01 + 1250,00} = 1,349 \text{ m.}$$

Von  $b_2$  ausgehend erhalten wir  $b_1$ . Nach Gl. (8) ist:

$$b_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^b + \varepsilon_1^b},$$

hierin ist nach früherem:

$$E \cdot \beta_1 = 308,63 \quad \text{und} \quad E \cdot \alpha_1^b = 925,89.$$

Ferner ist

$$\varepsilon_1^b = \tau_{2-4}^B$$

und nach Gl. (36):

$$E \cdot \tau_{2-4}^B = \frac{\tau_2^B \cdot \tau_4^B}{\tau_2^B + \tau_4^B},$$

worin nach Gl. (42a):

$$E \cdot \tau_2^B = \beta_2 \left( 3 - \frac{l_2}{l_2 - b_2} \right) = 426,67 \left( 3 - \frac{8,00}{8,00 - 1,349} \right) = 766,78$$

und nach früherem

$$E \cdot \tau_4^B = 640,00,$$

also

$$E \cdot \tau_{2-4}^B = \frac{766,78 \cdot 640,00}{766,78 + 640,00} = 348,84.$$

Diese Werte in die Gleichung für  $b_1$  eingesetzt gibt:

$$b_1 = \frac{10,00 \cdot 308,63}{925,89 + 348,84} = 2,421 \text{ m.}$$

Von  $b_1$  ausgehend erhalten wir  $b_3$ . Nach Gl. (8) ist:

$$b_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^b + \varepsilon_3^b},$$

hierin ist nach Gl. (207):

$$E \cdot \beta_3 = \frac{l_3}{6 \cdot J_3} = \frac{8,00}{6 \cdot 0,003125} = 426,67,$$

und nach Gl. (204):

$$E \cdot \alpha_3^b = \frac{l_3}{2 \cdot J_3} = \frac{8,00}{2 \cdot 0,003125} = 1280,01.$$

Ferner ist

$$\varepsilon_3^b = \tau_1^A$$

und nach Gl. (42a):

$$E \cdot \tau_1^A = \beta_1 \left( 3 - \frac{l_1}{l_1 - b_1} \right) = 308,63 \left( 3 - \frac{10,00}{10,00 - 2,421} \right) = 518,68.$$

Diese Werte in die Gleichung für  $b_3$  eingesetzt gibt:

$$b_3 = \frac{8,00 \cdot 426,67}{1280,01 + 518,68} = 1,898 \text{ m.}$$

Schließlich erhalten wir noch von  $a_1$  und  $b_2$  ausgehend den Festpunktsabstand  $b_4$ . Nach Gl. (8) ist:

$$b_4 = \frac{l_4 \cdot \beta_4}{\alpha_4^b + \varepsilon_4^b},$$

hierin ist, da  $J_3 = J_4$ :

$$E \cdot \beta_4 = E \cdot \beta_3 = 426,67 \quad \text{und} \quad E \cdot \alpha_4^b = E \cdot \alpha_3^b = 1280,01.$$

Ferner ist

$$\varepsilon_4^b = \tau_{1-2}^B$$

und nach Gl. (36):

$$\tau_{1-2}^B = \frac{\tau_1^B \cdot \tau_2^B}{\tau_1^B + \tau_2^B},$$

worin nach früherem

$$E \cdot \tau_1^B = 541,52 \quad \text{und} \quad E \cdot \tau_2^B = 766,78,$$

also

$$E \cdot \tau_{1-2}^B = \frac{541,52 \cdot 766,78}{541,52 + 766,78} = 317,38.$$

Diese Werte in die Gleichung für  $b_4$  eingesetzt gibt:

$$b_4 = \frac{8,00 \cdot 426,67}{1280,01 + 317,38} = 2,137 \text{ m.}$$

### Verteilungsmaße.

Nach Gl. (37) ist

$$\mu_{1-2}^B = \frac{\tau_4^B}{\tau_2^B + \tau_4^B} = \frac{640,00}{766,78 + 640,00} = 0,455,$$

$$\mu_{2-1}^B = \frac{\tau_4^B}{\tau_1^B + \tau_4^B} = \frac{640,00}{541,52 + 640,00} = 0,542,$$

$$\mu_{4-1} = \frac{\tau_2^B}{\tau_1^B + \tau_2^B} = \frac{766,78}{541,52 + 766,78} = 0,586,$$

$$\mu_{4-2} = (1 - \mu_{4-1}) = 0,414.$$



Stützenmoment  $BB'' = M_{2(g_1)}^B$ , sowie das Säulenkopfmoment  $M_{4(g_1)}^B$  als Differenz der beiden Momente  $M_{1(g_1)}^B$  und  $M_{2(g_1)}^B$ , und durch Verbinden des Endpunktes  $B''$  mit dem Festpunkt  $K_2$  die der Belastung  $g_1$  entsprechende Schlußlinie in der zweiten Öffnung, welche auf der Auflagersenkrechten durch  $C$  das Stützenmoment  $M_2^C$  abschneidet. Die Säulenkopfmomente  $M_3^A$  und  $M_5^D$  sind gleich den Momenten an den Enden der anstoßenden Balken. Verbinden wir nun die Endpunkte der Säulenkopfmomentenordinaten mit den unteren Säulenfestpunkten, so schneiden diese Verbindungsgeraden an den Säulenfüßen die Säulenfußmomente ab. Nun besitzen wir die Momentenfläche am ganzen Rahmen infolge der Belastung  $g_1$ , deren Schlußlinien wir an allen Stäben mit der Ziffer 1 versehen haben.

Auf dieselbe Weise konstruieren wir die der Belastung  $g_2$  entsprechende einfache Momentenparabel  $BSC$  mit der Pfeilhöhe

$$f_2 = \frac{g_2 l_2^2}{8} = \frac{0,360 \cdot 8,00^2}{8} = 2,88 \text{ mt}$$

und die mit der Ziffer 2 bezeichneten Schlußlinien am ganzen Rahmen.

Schließlich erhalten wir durch Addition der beiden Teilmomentenflächen die Momentenfläche infolge  $g_1$  und  $g_2$  für den festgehaltenen Zustand.

Diese in Fig. 373 durchgeführte graphische Ermittlung der Momente würde für die Praxis vollkommen genügen; nachstehend wollen wir jedoch auch noch die rein rechnerische Ermittlung der Momente an allen Stäben durchführen:

Nach Gl. (292) ist für einen gleichmäßig belasteten symmetrischen Träger, an welchem

$$k^a = k^b = \frac{gl^2}{8},$$

$$M^A = \frac{gl}{4} \cdot \frac{a(l-2b)}{l-a-b},$$

$$M^B = \frac{gl}{4} \cdot \frac{b(l-2a)}{l-a-b};$$

daher ist:

infolge  $g_1$ :

$$M_{1(g_1)}^A = -\frac{0,432 \cdot 10,00}{4} \cdot \frac{1,971(10,00 - 2 \cdot 1,971)}{10,00 - 1,971 - 2,421} = -1,958 \text{ mt} = M_{3(g_1)}^A,$$

$$M_{1(g_1)}^B = -\frac{0,432 \cdot 10,00}{4} \cdot \frac{2,421(10,00 - 2 \cdot 1,971)}{10,00 - 1,971 - 2,421} = -2,825 \text{ mt},$$

$$M_{2(g_1)}^B = \mu_{1-2}^B \cdot M_{1(g_1)}^B = -0,455 \cdot 2,825 = -1,285 \text{ mt},$$

$$M_{4(g_1)}^B = (1 - \mu_{1-2}^B) M_{1(g_1)}^B = (1 - 0,455) 2,825 = 1,540 \text{ mt},$$

$$M_{2(g_1)}^C = -\frac{b_2}{l_2 - b_2} \cdot M_{2(g_1)}^B = +0,203 \cdot 1,285 = +0,261 \text{ mt},$$

$$M_{5(g_1)}^C = -0,261 \text{ mt}.$$

Da an jeder Säule der Festpunkt im unteren Drittelpunkt liegt, so betragen

die Säulenfußmomente die Hälfte der betreffenden Säulenkopfmomente; daher ist:

$$M_{3(g_1)}^D = + \frac{1,958}{2} = +0,979 \text{ mt,}$$

$$M_{4(g_1)}^E = - \frac{1,540}{2} = -0,770 \text{ mt,}$$

$$M_{5(g_1)}^F = + \frac{0,261}{2} = +0,130 \text{ mt;}$$

infolge  $g_2$ :

$$M_{2(g_2)}^B = - \frac{0,360 \cdot 8,00}{4} \cdot \frac{2,169(8,00 - 2 \cdot 1,349)}{8,00 - 2,169 - 1,349} = -1,848 \text{ mt,}$$

$$M_{2(g_2)}^C = - \frac{0,360 \cdot 8,00}{4} \cdot \frac{1,349(8,00 - 2 \cdot 2,169)}{8,00 - 2,169 - 1,349} = -0,793 \text{ mt.}$$

$$M_{5(g_2)}^C = +0,793 \text{ mt,}$$

$$M_{1(g_2)}^B = \mu_{2-1}^B \cdot M_{2(g_2)}^B = -0,542 \cdot 1,848 = -1,001 \text{ mt,}$$

$$M_{4(g_2)}^B = (1 - \mu_{2-1}^B) M_{2(g_2)}^B = -(1 - 0,542) 1,848 = -0,847 \text{ mt,}$$

$$M_{1(g_2)}^A = - \frac{a_1}{l_1 - a_1} \cdot M_{1(g_1)}^B = +0,245 \cdot 1,001 = +0,246 \text{ mt} = M_{3(g_2)}^A.$$

Da an jeder Säule der Festpunkt im unteren Drittelpunkt liegt, so betragen die Säulenfußmomente die Hälfte der betreffenden Säulenkopfmomente; daher ist:

$$M_{3(g_2)}^D = - \frac{0,246}{2} = -0,123 \text{ mt,}$$

$$M_{4(g_2)}^E = + \frac{0,847}{2} = +0,423 \text{ mt,}$$

$$M_{5(g_2)}^F = - \frac{0,793}{2} = -0,396 \text{ mt.}$$

Aus den vorhergehenden Momenten erhalten wir nun durch Addition:

$$M_{1(g_1+g_2)}^A = -1,712 \text{ mt,}$$

$$M_{1(g_1+g_2)}^B = -3,826 \text{ mt,}$$

$$M_{2(g_1+g_2)}^B = -3,133 \text{ mt,}$$

$$M_{2(g_1+g_2)}^C = -0,533 \text{ mt,}$$

$$M_{3(g_1+g_2)}^A = -1,712 \text{ mt,}$$

$$M_{4(g_1+g_2)}^B = +0,693 \text{ mt,}$$

$$M_{5(g_1+g_2)}^C = +0,533 \text{ mt.}$$

$$M_{3(g_1+g_2)}^D = +0,856 \text{ mt,}$$

$$M_{4(g_1+g_2)}^E = -0,346 \text{ mt,}$$

$$M_{5(g_1+g_2)}^F = -0,266 \text{ mt.}$$

Die im gedachten Lager bei C während R. I auftretende Festhaltungs-

kraft  $F$  ist gleich der Resultierenden aus den 3 Querkräften an den Säulenköpfen, d. h.

$$F = Q_3^A + Q_4^B + Q_5^C.$$

Nun ist

$$Q_3^A = \frac{M_3^A - M_3^D}{l_3} = \frac{-1,712 - 0,856}{8,00} = -0,3210 \text{ t,}$$

$$Q_4^B = \frac{M_4^B - M_4^E}{l_4} = \frac{+0,693 + 0,346}{8,00} = +0,1299 \text{ t,}$$

$$Q_5^C = \frac{M_5^C - M_5^F}{l_5} = \frac{+0,533 + 0,266}{8,00} = +0,0999 \text{ t,}$$

$$\text{daher } F = -0,0912 \text{ t.}$$

### Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen das während des R. I am Balken gedachte Lager und ermitteln die Zusätze infolge Belasten des Rahmens mit der äußeren, nach rechts gerichteten, in Balkenachse wirkenden Verschiebungskraft

$$V = -F = +0,0912 \text{ t.}$$

Zu dem Zweck bestimmen wir die Momente  $M^*$  infolge der äußeren nach rechts gerichteten, in Balkenachse wirkenden Kraft  $H = +1,00 \text{ t}$  und multiplizieren dieselben dann mit der nach Größe und Vorzeichen einzuführenden Kraft  $V = +0,0912 \text{ t}$ . Die Momente  $M^*$  erhalten wir nach Teil II, Kap. IV, 1 indirekt aus den Momenten  $M'$ , welche am Rahmen durch die gleichzeitige horizontale Verschiebung sämtlicher Pfeilerköpfe um  $\Delta = 1,00 \text{ cm}$  nach rechts entstehen, und welche daher zuerst ermittelt werden.

a) Ermittlung der Momente  $M'$  sowie der zugehörigen Erzeugungskraft  $Z$ .

Durch die gegebene Verschiebung  $\Delta = 1 \text{ cm}$  des Balkens erleiden die 3 Säulen (Stäbe 3, 4 und 5) „gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen“ ihrer Endpunkte, und zwar ist

$$\varrho_3 = 1 \text{ cm,} \quad \varrho_4 = 1 \text{ cm} \quad \text{und} \quad \varrho_5 = 1 \text{ cm}$$

(siehe Teil II, Kap. III).

Die Momente infolge dieser gegenseitigen Verschiebungen  $\varrho$  ermitteln wir nach den Gl. (515) und (520) und wir erhalten:

infolge  $\varrho_3$ :

$$M_3^D = \frac{\varrho_3}{l_3 \cdot \beta_3 (l_3 - a_3 - b_3)} \cdot a_3 = k \cdot a_3 = \frac{0,01 \cdot 2100000}{8,00 \cdot 426,67 (8,00 - 2,667 - 1,898)} \cdot 2,667 = 1,791 \cdot 2,667 = -4,777 \text{ mt,}$$

$$M_3^A = k \cdot b_3 = 1,791 \cdot 1,898 = +3,399 \text{ mt.}$$

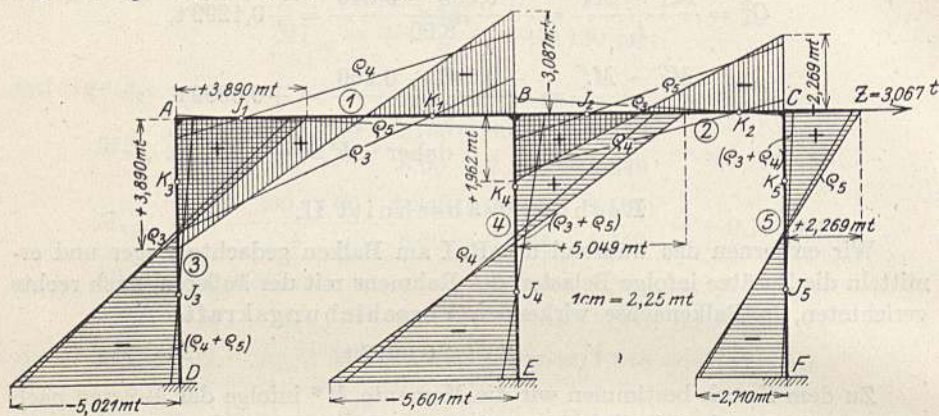
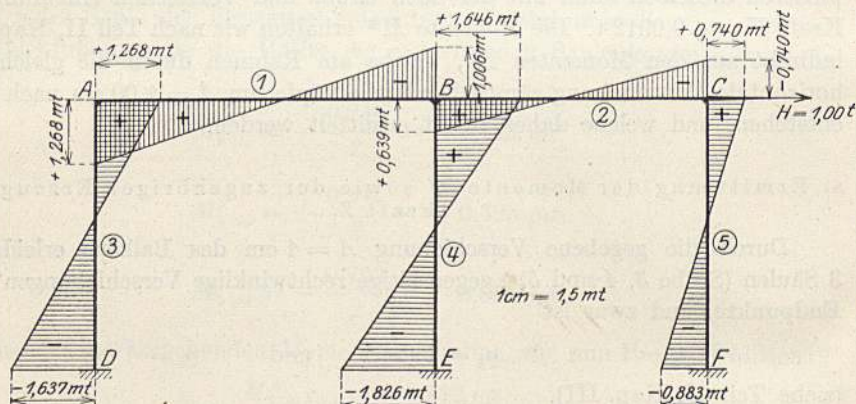
Die Vorzeichen dieser beiden Momente ergeben sich aus der Anschauung gemäß der in Teil II, Kap. III, 1 angegebenen Regel.

Die beiden Momente sind in Fig. 374 aufgetragen; das letztere wurde mittels des Festpunktes  $K_1$ , der Verteilungsmaße  $\mu_{1-2}^B$  und  $(1 - \mu_{1-2}^B)$  sowie der

Festpunkte  $J_4, K_2$  und  $J_5$  nach rechts über den Rahmen fortgeplant; die entsprechende Momentenlinie ist an allen Stäben mit  $Q_3$  bezeichnet; infolge  $Q_4$ :

$$M_4^F = \frac{Q_4}{l_4 \cdot \beta_4 (l_4 - a_4 - b_4)} \cdot a_4 = k \cdot a_4 = \frac{0,01 \cdot 2100000}{8,00 \cdot 426,67 (8,00 - 2,667 - 2,137)} \cdot 2,667 = 1,925 \cdot 2,667 = -5,134 \text{ mt},$$

$$M_4^B = k \cdot b_4 = 1,925 \cdot 2,137 = +4,114 \text{ mt}.$$

Fig. 374. Momente  $M'$ .Fig. 375. Momente  $M^*$ .

Die beiden Momente sind in Fig. 374 aufgetragen; das letztere wurde mittels des Verteilungsmaßes  $\mu_{4-1}^B$  und der Festpunkte  $J_1$  und  $J_3$  nach links sowie mittels des Verteilungsmaßes  $\mu_{4-2}^B = (1 - \mu_{4-1}^B)$  und der Festpunkte  $K_2$  und  $J_5$  nach rechts weitergeleitet; die entsprechende Momentenlinie ist an allen Stäben mit  $Q_4$  bezeichnet; infolge  $Q_5$ :

$$M_5^F = \frac{Q_5}{l_5 \cdot \beta_5 (l_5 - a_5 - b_5)} \cdot a_5 = k \cdot a_5 = \frac{0,01 \cdot 2100000}{8,00 \cdot 833,33 (8,00 - 2,667 - 2,087)} \cdot 2,667 = 0,970 \cdot 2,667 = -2,587 \text{ mt},$$

$$M_5^C = k \cdot b_5 = 0,970 \cdot 2,087 = +2,024 \text{ mt}.$$



Die beiden Momente sind in Fig. 374 aufgetragen; das letztere wurde mittels des Festpunktes  $J_1$ , der Verteilungsmaße  $\mu_{2-1}^B$  und  $(1 - \mu_{2-1}^B)$  sowie der Festpunkte  $J_4$ ,  $J_1$  und  $J_3$  nach links über den Rahmen fortgepflanzt; die entsprechende Momentenlinie ist an allen Stäben mit  $Q_5$  bezeichnet.

Durch Addition der drei Teilmomentenflächen für  $Q_3$ ,  $Q_4$  und  $Q_5$  erhalten wir nun die in Fig. 374 schraffierte  $M'$ -Momentenfläche, aus welcher wir schließlich die zugehörige Erzeugungskraft  $Z$  nach Teil II, Kap. III, 4 genau wie die Festhaltungskraft des R. I gewinnen; es ist

$$Z = (Q_3^A + Q_4^B + Q_5^C) = 1,114 + 1,331 + 0,623 = 3,068 \text{ t.}$$

b) Ermittlung der Momente  $M^*$ .

Die Momente  $M^*$  infolge der Belastung  $H = 1,00 \text{ t}$  erhalten wir nun nach Teil II, Kap. IV, 1, indem wir die Momente  $M'$  (Fig. 374) durch ihre Erzeugungskraft  $Z = 3,068$  dividieren; die  $M^*$ -Momente sind in Fig. 375 aufgetragen worden.

c) Zusatzmomente des R. II.

Die gesuchten Zusatzmomente infolge Belasten des Rahmens mit der nach rechts gerichteten Verschiebungskraft  $V = +0,0912 \text{ t}$  erhalten wir nun durch Multiplikation der  $M^*$ -Momente mit der Zahl 0,0912; diese Zusatzmomente der Belastung  $(g_1 + g_2)$  wurden in Fig. 376 dargestellt.

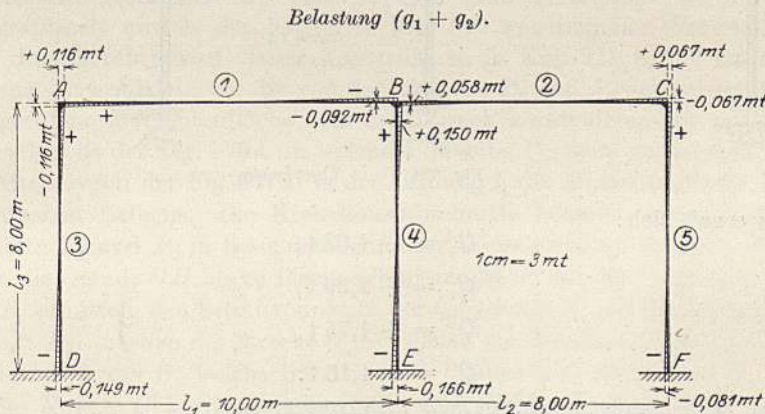


Fig. 376. Zusatzmomente.

Durch Addition der Momente aus R. I und R. II ergeben sich nun die endgültigen, vom Belastungsfall  $(g_1 + g_2)$  am Rahmen hervorgerufenen Momente, welche in Fig. 377 dargestellt sind.

2. Querkräfte.

Mit Hilfe der Fig. 377 und 377a wurden die Querkräfte am belasteten Balken (Stäbe 1 und 2) laut Teil I, Kap. VI, 1 graphisch ermittelt.

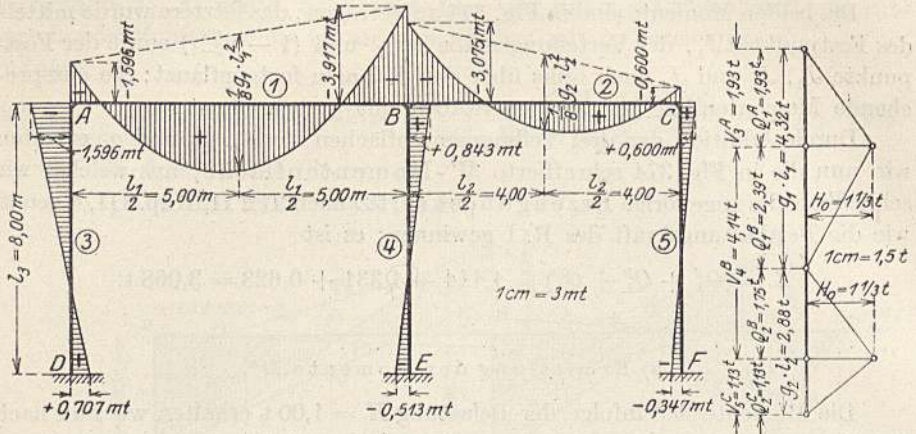


Fig. 377. Endgültige Momente.

Fig. 377 a.

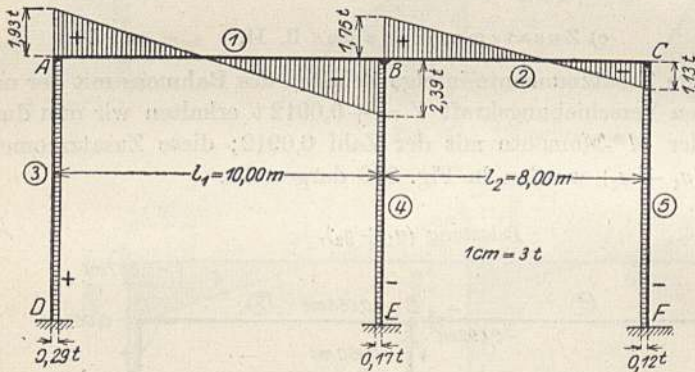


Fig. 378. Querkräfte

Es ergab sich:

$$Q_1^A = +1,93 \text{ t,}$$

$$Q_1^B = +2,39 \text{ t,}$$

$$Q_2^B = +1,75 \text{ t,}$$

$$Q_2^C = +1,13 \text{ t.}$$

Die Querkräfte an den Säulen (unbelastete Stäbe 3, 4 und 5) sind auf deren ganze Höhe konstant und ergeben sich zu:

$$Q_3^D = \frac{M_3^D - M_3^A}{l_3} = \frac{+0,707 + 1,596}{8,00} = +0,29 \text{ t,}$$

$$Q_4^E = \frac{M_4^E - M_4^B}{l_4} = \frac{-0,513 - 0,843}{8,00} = -0,17 \text{ t,}$$

$$Q_5^F = \frac{M_5^F - M_5^C}{l_5} = \frac{-0,347 - 0,600}{8,00} = -0,12 \text{ t.}$$

Die Querkräfte am ganzen Rahmen infolge der Belastung ( $g_1 + g_2$ ) wurden in Fig. 378 aufgetragen.

## 3. Normalkräfte.

Infolge der Belastung ( $g_1 + g_2$ ) entstehen folgende Normalkräfte (vgl. Teil I, Kap. VI, 2):

$$N_1 = -Q_3^A = 0,29 \text{ t (Druckkraft),}$$

$$N_2 = -Q_5^C = 0,12 \text{ t (Druckkraft),}$$

$$N_3 = -Q_1^A = 1,93 \text{ t (Druckkraft),}$$

$$N_4 = -(Q_1^B + Q_2^B) = 4,14 \text{ t (Druckkraft).}$$

$$N_5 = -Q_2^C = 1,13 \text{ t (Druckkraft).}$$

 B. Einzellasten  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_5$  und  $P_6$ .

## 1. Momente.

Die Berechnung wird nach Teil II, Kap. I, 1<sub>a</sub> durchgeführt.

## Rechnungsabschnitt I.

(Fig. 379.)

Wir halten den Balken durch ein in  $C$  gedachtes festes Lager vorübergehend horizontal unverschiebbar fest.

Die graphische Konstruktion der Momentenfläche erfolgt nach Teil I, Kap. V, wobei die Multiplikation des über die Mittelsäule hinweg fortzupflanzenden Momentes  $M_1^B$  bzw.  $M_2^B$  mit dem Verteilungsmaß  $\mu_{1-2}^B$  bzw.  $\mu_{2-1}^B$  graphisch mittels der beiden in Fig. 379 angetragenen Verwandlungswinkel durchgeführt wird, deren Konstruktion in Kap. III, 8, a,  $\beta$  erklärt ist.

Zunächst ermitteln wir die von den Kräften  $P_2$  und  $P_3$  am ganzen Balken hervorgerufene Momentenfläche. Zu dem Zweck konstruieren wir mittels des Kräftepolygons der Fig. 379a (in welchem dieselbe Polweite zu nehmen ist wie im Kräftepolygon der Fig. 377a) in der Öffnung  $l_1$  die Momentenfläche  $ABGH$  des einfachen Balkens. Die Kreuzlinienabschnitte können wegen Symmetrie der Kräfte  $P_2$  und  $P_3$  in besonders einfacher Weise erhalten werden: Wir verlängern die Gerade  $GH$  bis zu ihrem Schnittpunkt  $H'$  mit der Stützenvertikalen durch  $B$ , ermitteln den Schnittpunkt  $G'$  der Geraden  $AH'$  mit der Verlängerung der Kraft  $P_2$ , machen die Strecke  $G''G'''$  gleich der Strecke  $G'G$  und verbinden die Punkte  $R$  und  $S$ , welche im Abstände  $l_1$  links und rechts von  $P_2$  liegen, mit dem Punkte  $G'''$ ; die Geraden  $SG'''$  und  $RG'''$  schneiden dann auf den Vertikalen durch  $A$  und  $B$  die der Kraft  $P_2$  zugeordneten Kreuzlinienabschnitte  $AA'$  und  $BB'$  ab. Wegen Symmetrie ist ohne weitere Konstruktion der Kreuzlinienabschnitt der Kraft  $P_3$  auf der Senkrechten durch  $A$  gleich der Strecke  $BB'$ , und der Kreuzlinienabschnitt auf der Senkrechten durch  $B$  gleich der Strecke  $AA'$ ; machen wir daher die Strecke  $A'A''$  gleich der Strecke  $BB'$ , und die Strecke  $B'B''$  gleich der Strecke  $AA'$ , so bilden die beiden gleichen Strecken  $AA''$  und  $BB''$  die Kreuzlinienabschnitte der Kräfte  $P_2$  und  $P_3$ . Ziehen wir jetzt die beiden Kreuzlinien  $AB''$  und  $BA''$ , und ermitteln die Schnittpunkte  $J_1$  und  $K_1$  derselben mit den Festpunktsvertikalen, so erhalten wir in der mit der Ziffer 1 bezeichneten Verbindungslinie  $J_1 K_1$  die den Kräften  $P_2$  und  $P_3$  entsprechende Schlußlinie der ersten Öffnung, welche auf den Auflagersenk-

rechten durch  $A$  und  $B$  die Stützenmomente  $M_1^A$  und  $M_1^B$  abschneidet; durch graphische Multiplikation des Momentes  $M_1^B$  mit dem Verteilungsmaß  $\mu_{1-2}^B$  erhalten wir das Stützenmoment  $M_2^B$  und durch Verbinden dieser Momentenordinate mit dem Festpunkt  $K_2$  die der Belastung  $(P_2 + P_3)$  entsprechende Schlußlinie in der zweiten Öffnung, welche auf der Auflagersenkrechten durch  $C$  das Stützenmoment  $M_2^C$  abschneidet. Die Säulenkopfmomente  $M_3^A$  und  $M_5^C$  sind gleich den Momenten an den Enden der anstoßenden Balken, und das Säulenkopfmoment  $M_4^B$  ist gleich dem mit dem Verteilungsmaß  $(1 - \mu_{1-2}^B)$  multiplizierten Moment  $M_1^B$ . Verbinden wir nun die Endpunkte der Säulenkopfmomentenordinaten mit den unteren Säulenfestpunkten, so schneiden diese Verbindungsgeraden an den Säulenfüßen die Säulenfußmomente ab. Nun besitzen wir die Momentenfläche am ganzen Rahmen infolge der Belastung  $(P_2 + P_3)$ , deren Schlußlinien wir an allen Stäben mit der Ziffer 1 versehen haben.

Auf dieselbe Weise konstruieren wir die den Kräften  $P_5$  und  $P_6$  entsprechende einfache Balkenmomentenfläche  $BCLM$ , die Kreuzlinienabschnitte  $BB'''$  und  $CC''$ , die Kreuzlinien  $BC''$  und  $CB'''$  der zweiten Öffnung und die mit der Ziffer 2 bezeichneten Schlußlinien am ganzen Rahmen.

Schließlich erhalten wir durch Addition der beiden Teilmomentenflächen die Momentenfläche infolge  $(P_5 + P_6)$  für den festgehaltenen Zustand (siehe Fig. 379).

Die im gedachten Lager bei  $C$  während R. I auftretende Festhaltungskraft  $F$  ist gleich der Resultierenden aus den 3 Querkräften an den Säulenköpfen, d. h.

$$F = Q_3^A + Q_4^B + Q_5^C.$$

Nun ist

$$Q_3^A = \frac{M_3^A - M_3^D}{l_3} = \frac{-4,965 - 2,482}{8,00} = -0,931 \text{ t,}$$

$$Q_4^B = \frac{M_4^B - M_4^E}{l_4} = \frac{+1,725 + 0,862}{8,00} = +0,323 \text{ t,}$$

$$Q_5^C = \frac{M_5^C - M_5^F}{l_5} = \frac{+1,876 + 0,938}{8,00} = +0,352 \text{ t,}$$

$$\text{daher } F = -0,256 \text{ t.}$$

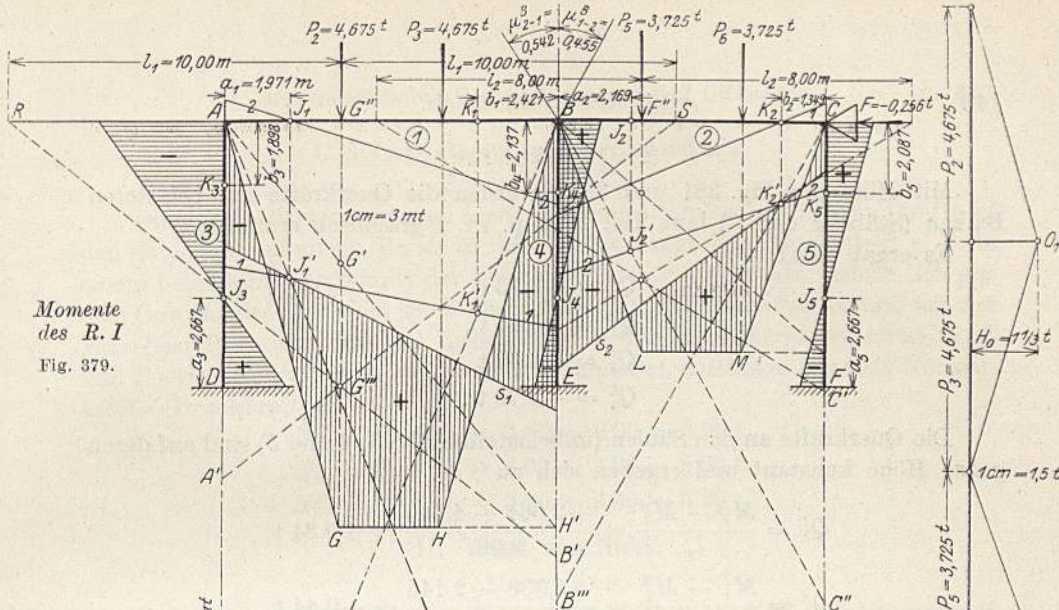
#### Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen das während R. I am Balken (bei  $C$ ) gedachte Lager und ermitteln die Zusätze infolge Belasten des Rahmens mit der äußeren, nach rechts gerichteten, in Balkenachse wirkenden Verschiebungskraft

$$V = -F = +0,256 \text{ t.}$$

Diese Zusätze erhalten wir durch Multiplizieren der bereits ermittelten  $M^*$ -Momente (siehe Fig. 375) infolge  $H = +1,00 \text{ t}$  mit der Zahl 0,256; die Zusatzmomente der Belastung  $P_2, P_3, P_5$  und  $P_6$  wurden in Fig. 380 dargestellt.

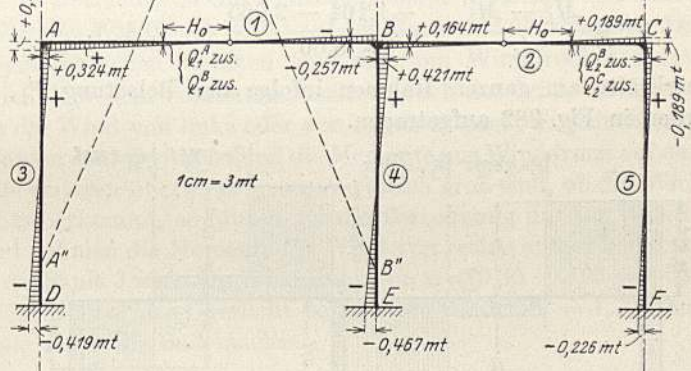
Durch Addition der Momente aus R. I und R. II ergeben sich nun die endgültigen, von der Belastung  $P_2, P_3, P_5$  und  $P_6$  am Rahmen hervorgerufenen Momente, welche in Fig. 381 dargestellt sind.



Momente des R. I  
Fig. 379.

Fig. 379 a.

Zusatz-Momente  
Fig. 380.



Endgültige Momente  
Fig. 381.

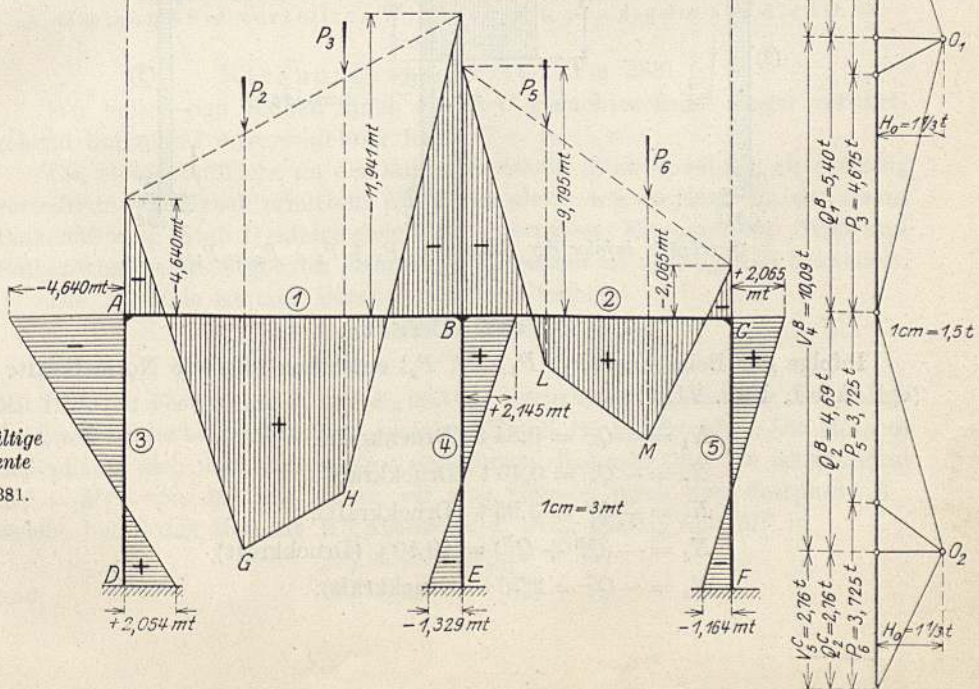


Fig. 381a.

## 2. Querkräfte.

Mit Hilfe der Fig. 381 und 381a wurden die Querkräfte am belasteten Balken (Stäbe 1 und 2) laut Teil I, Kap. VI, 1 graphisch ermittelt.

Es ergab sich:

$$Q_1^A = +3,95 \text{ t},$$

$$Q_1^B = +5,41 \text{ t},$$

$$Q_2^B = +4,69 \text{ t},$$

$$Q_2^C = +2,76 \text{ t}.$$

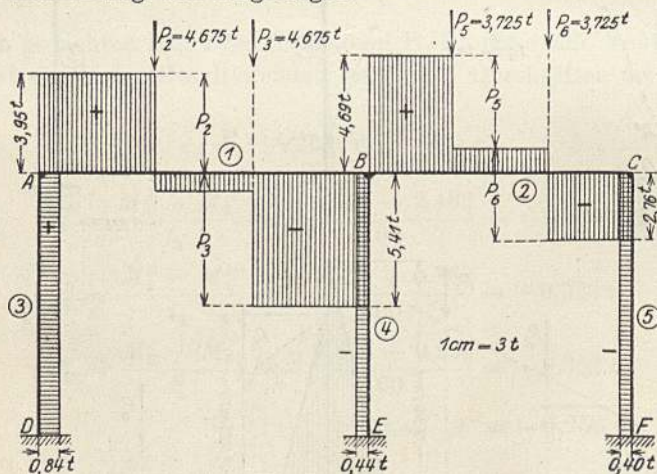
Die Querkräfte an den Säulen (unbelastete Stäbe 3, 4 und 5) sind auf deren ganze Höhe konstant und ergeben sich zu

$$Q_3^D = \frac{M_3^D - M_3^A}{l_3} = \frac{+2,064 + 4,640}{8,00} = +0,84 \text{ t},$$

$$Q_4^E = \frac{M_4^E - M_4^B}{l_4} = \frac{-1,330 - 2,145}{8,00} = -0,44 \text{ t},$$

$$Q_5^F = \frac{M_5^F - M_5^C}{l_5} = \frac{-1,164 - 2,065}{8,00} = -0,40 \text{ t}.$$

Die Querkräfte am ganzen Rahmen infolge der Belastung  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_5$  und  $P_6$  wurden in Fig. 382 aufgetragen.



Querkräfte infolge der Belastung ( $P_2 + P_3 + P_5 + P_6$ ).

Fig. 382.

## 3. Normalkräfte.

Infolge der Belastung ( $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_5$ ,  $P_6$ ) entstehen folgende Normalkräfte (vgl. Teil I, Kap. VI, 2):

$$N_1 = -Q_3^A = 0,84 \text{ t (Druckkraft)},$$

$$N_2 = -Q_5^F = 0,40 \text{ t (Druckkraft)},$$

$$N_3 = -Q_1^A = 3,95 \text{ t (Druckkraft)},$$

$$N_4 = -(Q_1^B + Q_2^B) = 10,10 \text{ t (Druckkraft)},$$

$$N_5 = -Q_2^C = 2,76 \text{ t (Druckkraft)}.$$

C. Einzellasten  $P_1$ ,  $P_4$  und  $P_7$ 

(siehe Fig. 372).

Diese Einzellasten erzeugen keine Momente, sondern nur Normalkräfte in den Säulenquerschnitten, da sie in ihren Achsen angreifen; so entsteht z. B. in einem beliebigen Querschnitt der Mittelsäule eine Normalkraft, welche sich aus dem Gewicht des über dem Querschnitt befindlichen Säulenschaftes und aus der Einzellast  $P_4$  zusammensetzt. Insbesondere in den Einspannquerschnitten  $D$ ,  $E$  und  $F$  zwischen den Säulen und ihren Fundamenten entstehen folgende Normalkräfte (Druckkräfte):

$$N_3^D = P_1 + G_1 = 4,00 + 2,90 = 6,90 \text{ t.}$$

$$N_4^E = P_4 + G_3 = 6,00 + 2,90 = 8,90 \text{ t.}$$

$$N_5^F = P_7 + G_5 = 3,00 + 2,30 = 5,30 \text{ t.}$$

## II. Wind von links.

## 1. Momente.

Es kommt nur Winddruck auf den Binder selbst von 0,30 m Breite und das Oberlicht in Betracht, da die Umfassungsmauer zwischen den Bindern den auf sie entfallenden Winddruck selbst auf den Baugrund übertragen. Am vorliegenden unsymmetrischen Rahmen sind die vom Winddruck erzeugten inneren Kräfte nicht nur dem Vorzeichen, sondern auch der Größe nach verschieden, je nachdem der Wind von links oder von rechts kommt; da jedoch der Winddruck auf die Säulen sehr gering ist und die Momente aus Winddruck auf das Oberlicht, welche die ersteren überwiegen, sowieso gleich groß sind, ob der Wind von links oder rechts herkommt, so führen wir die Berechnung nur für Wind von links durch und nehmen die Momente für Wind von rechts entgegengesetzt gleich an.

Auf die Säule 3 wirkt ein Winddruck von  $w = 0,30 \cdot 0,125 = 0,0375 \text{ t/stgdm}$ . Der Winddruck auf das Oberlicht beträgt pro Binder  $W = 1,70 \text{ t}$  und wirkt als horizontale Kraft in Balkenachse.

 A. Gleichmäßig verteilter Winddruck  $w$  pro stgdm auf die linke Endsäule.

## Rechnungsabschnitt I (Fig. 383).

Wir halten den Balken durch ein in  $C$  gedachtes festes Lager vorübergehend horizontal unverschiebbar fest.

Die Momentenfläche an der linken Endsäule (Stab 3) infolge gleichmäßig verteiltem Winddruck ermitteln wir genau gleich wie diejenige an der ertens Balkenöffnung (Stab 1) infolge gleichmäßig verteiltem Eigengewicht. Säule und Balken sind beides Stäbe des Rahmens und werden als solche gleich behandelt.

Die  $M_0$ -Linie ist eine Parabel mit der Pfeilhöhe

$$f_3 = \frac{w \cdot l_3^2}{8} = \frac{0,0375 \cdot 8,00^2}{8} = 0,30 \text{ mt.}$$

Mit Hilfe der Festpunkte  $J_3$  und  $K_3$  und der Kreuzlinien erhalten wir die Schlußlinie, welche die beiden Stützenmomente  $M_3^D$  und  $M_3^A$  abschneidet. Das Moment  $M_3^A$  pflanzt sich nach rechts über den ganzen Rahmen fort: Es ist zunächst  $M_1^A = M_3^A$ ; von  $M_1^A$  aus ziehen wir eine Gerade durch den Festpunkt  $K_1$ , welche bei  $B$  das Moment  $M_1^B$  abschneidet. Nun spaltet sich  $M_1^B$  in

$$M_2^B = M_1^B \cdot \mu_{1-2}^B$$

und

$$M_4^B = M_1^B (1 - \mu_{1-2}^B).$$

Von  $M_1^B$  aus ziehen wir eine Gerade durch den Festpunkt  $J_4$ , welche in  $E$  das Säulenfußmoment  $M_4^E$  abschneidet. Ferner ziehen wir von  $M_2^B$  aus eine Gerade durch den Festpunkt  $K_2$  und erhalten als Abschnitt bei  $C$  das Moment  $M_2^C$ . Endlich ist das Säulenkopfmoment  $M_5^C$  gleich  $M_2^C$  und durch geradlinige Verbindung dieses Momentes mit dem Festpunkt  $J_5$  erhalten wir als Abschnitt bei  $F$  das Säulenfußmoment  $M_5^F$  (siehe Fig. 383).

Die im gedachten Lager bei  $C$  während R. I auftretende Festhaltungskraft  $F$  ist wieder gleich der Resultierenden aus den 3 Querkraften an den Säulenköpfen, d. h.

$$F = Q_3^A + Q_4^B + Q_5^C.$$

Nun ist aber:

$$Q_3^A = \varnothing + \frac{M_3^A - M_3^D}{l_3} = -\frac{0,0375 \cdot 8,00}{2} + \frac{-0,022 + 0,048}{8,00} = -0,1470 \text{ t,}$$

$$Q_4^B = \frac{M_4^B - M_4^E}{l_4} = \frac{-0,0035 - 0,002}{8,00} = -0,0007 \text{ t,}$$

$$Q_5^C = \frac{M_5^C - M_5^F}{l_5} = \frac{+0,001 + 0,0005}{8,00} = +0,0002 \text{ t,}$$

daher  $F = -0,1475 \text{ t.}$

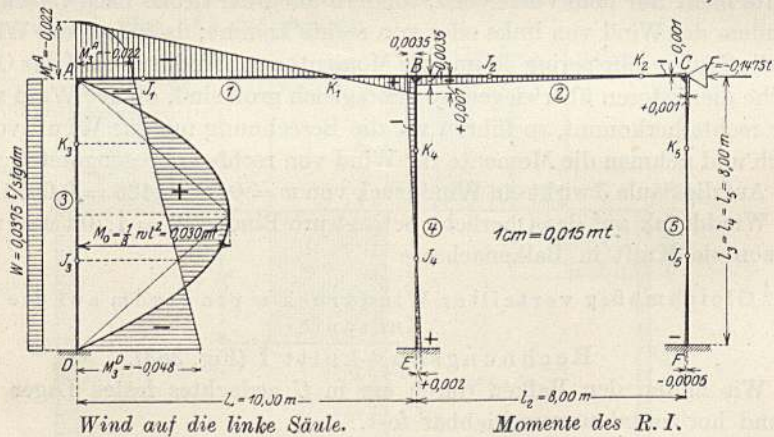


Fig. 383.

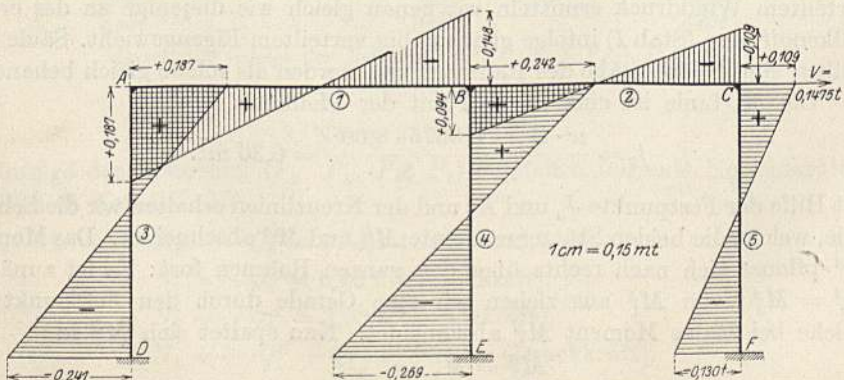


Fig. 384.

Zusatzmomente.



Rechnungsabschnitt II.

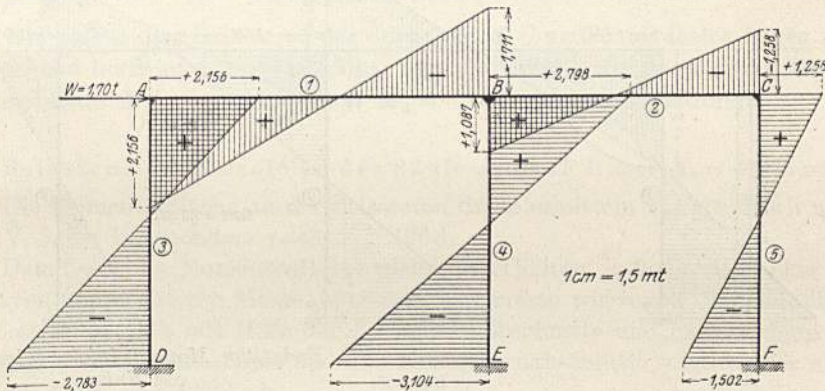
Wir entfernen das während R. I am Balken (bei C) gedachte Lager und ermitteln die Zusätze infolge Belasten des Rahmens mit der äußeren, nach rechts gerichteten, in Balkenachse wirkenden Verschiebungskraft

$$V = -F = +0,1475 \text{ t.}$$

Diese Zusätze erhalten wir durch Multiplizieren der bereits ermittelten  $M^*$ -Momente (siehe Fig. 375) infolge  $H = +1,00 \text{ t}$  mit der Zahl 0,1475; die Zusatzmomente der Belastung  $w$  wurden in Fig. 384 dargestellt.

B. Winddruck  $W$  auf das Oberlicht, als Einzellast in Balkenachse angreifend.

Die Momente infolge  $W = 1,70 \text{ t}$  erhalten wir durch Multiplizieren der durch  $H = +1,00 \text{ t}$  hervorgerufenen Momente  $M^*$  (siehe Fig. 375) mit der Zahl 1,70; diese Momente wurden in Fig. 385 aufgetragen. Für diesen Belastungsfall gibt es also keinen R. I.



Wind auf das Oberlicht.

Fig. 385.

Durch Addition der Momente aus A, R. I und R. II, sowie aus B ergeben sich nun die endgültigen, von der Belastung: Wind von links am Rahmen hervorgerufenen Momente, welche in Fig. 386 dargestellt sind.

2. Querkräfte.

Die Querkräfte am ganzen Rahmen werden nach Teil I, Kap. VI, 1 ermittelt.

Am belasteten Stab 3 (linke Endsäule) ergibt sich:

$$Q_3^D = \frac{w \cdot l_3}{2} + \frac{M_3^D - M_3^A}{l_3} = -\frac{0,0375 \cdot 8,00}{2} + \frac{-3,072 - 2,321}{8,00} = -0,824 \text{ t,}$$

$$Q_3^A = \frac{w \cdot l_3}{2} + \frac{M_3^A - M_3^D}{l_3} = -\frac{0,0375 \cdot 8,00}{2} + \frac{2,321 + 3,072}{8,00} = 0,524 \text{ t.}$$

Am unbelasteten Stab 4 (Mittelsäule) ist die Querkraft auf die ganze Stabhöhe konstant und ergibt sich zu:

$$Q_4^E = \frac{M_4^E - M_4^B}{l_4} = \frac{-3,371 - 3,036}{8,00} = -0,801 \text{ t.}$$

Am unbelasteten Stab 5 (rechte Endsäule) ist die Querkraft ebenfalls konstant und ergibt sich zu:

$$Q_5^F = \frac{M_5^F - M_5^C}{l_5} = \frac{-1,632 - 1,368}{8,00} = -0,375 \text{ t.}$$

Am unbelasteten Stab 1 (linke Öffnung) ist die Querkraft ebenfalls konstant und ergibt sich zu:

$$Q_1^A = \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = \frac{-1,852 - 2,321}{10,00} = -0,417 \text{ t.}$$

Am unbelasteten Stab 2 (rechte Öffnung) ist die Querkraft ebenfalls konstant und ergibt sich zu:

$$Q_2^B = \frac{M_2^C - M_2^B}{l_2} = \frac{-1,368 - 1,184}{8,00} = -0,319 \text{ t.}$$

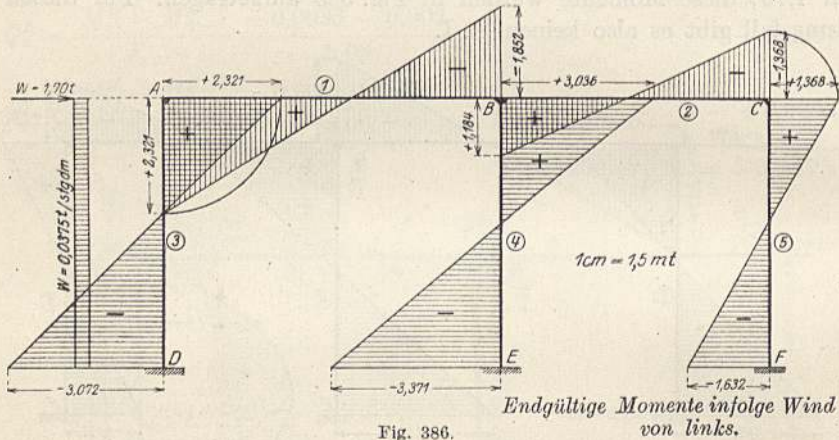


Fig. 386.

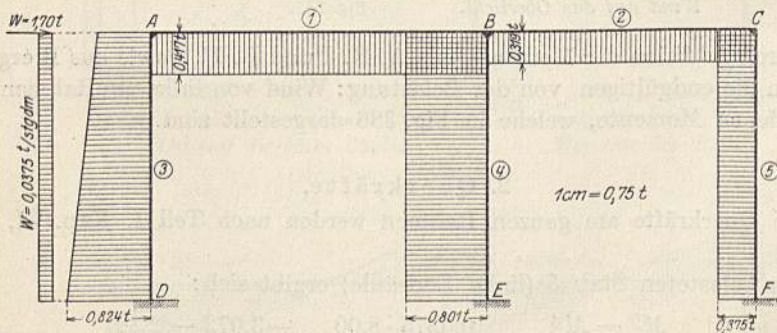


Fig. 387.

Diese Querkräfte wurden in Fig. 387 aufgetragen.

### 3. Normalkräfte.

Infolge Wind von links entstehen folgende Normalkräfte (vgl. Teil I, Kap. VI, 2):

$$N_1 = -Q_5^C - Q_4^B = 0,375 + 0,801 = 1,176 \text{ t (Druckkraft),}$$

$$N_2 = -Q_5^C = 0,375 \text{ t (Druckkraft),}$$

$$N_3 = -Q_1^A = 0,417 \text{ t (Zugkraft),}$$

$$N_4 = -Q_1^B - Q_2^B = 0,417 - 0,319 = 0,098 \text{ t (Druckkraft),}$$

$$N_5 = -Q_2^C = 0,319 \text{ t (Druckkraft).}$$

### III. Kranlast in der linken Öffnung.

Die Auflagerdrücke  $P_A = 6,5 \text{ t}$  und  $P_B = 1,5 \text{ t}$  des in der Öffnung  $l_1$  stehenden Laufkranes (siehe Fig. 388) erzeugen je gleich große Normalkräfte in den Säulen  $A$  und  $B$  sowie Konsolmomente  $M_3 = +3,25 \text{ mt}$  und  $M_4 = -0,75 \text{ mt}$ , welche als äußere Belastung der Konsole einzuführen sind.

#### 1. Momente.

#### Rechnungsabschnitt I.

(Fig. 388.)

Wir halten den Balken wieder durch ein in  $C$  gedachtes festes Lager vorübergehend horizontal unverschiebbar fest und führen die Berechnung für die Lastmomente  $M_3 = +3,25 \text{ mt}$  und  $M_4 = -0,75 \text{ mt}$  getrennt durch.

a) Belasten der Konsole an der Säule  $A$  (Stab 3) mit  $M_3 = +3,25 \text{ mt}$ .

Die Momentenfläche an der belasteten Säule ermitteln wir graphisch nach Kap. V, 3, d), insbesondere nach Fig. 136 d).

Damit wir die Momentenfläche gleich so erhalten, daß die Stabachse die positiven und negativen Momente trennt, bestimmen wir zuerst die Schlußlinie am belasteten Stab mit Hilfe der Kreuzlinienabschnitte und hängen dann die  $M_0$ -Fläche an die Schlußlinie an. Die Kreuzlinienabschnitte erhalten wir nach den Gl. (281) und (282) zu:

$$\begin{aligned} k_3^a &= -M_3 \left( 1 - \frac{e^2 + 3z(e+z)}{l^2} \right) \\ &= -3,25 \left( 1 - \frac{0,85^2 + 3 \cdot 6,00(0,85 + 6,00)}{8,00^2} \right) = +3,05 \text{ mt,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3^b &= -M_3 \left( \frac{e^2 + 3z'(e+z')}{l^2} - 1 \right) \\ &= -3,25 \left( \frac{0,85^2 + 3 \cdot 1,15(0,85 + 1,15)}{8,00^2} - 1 \right) = +2,86 \text{ mt.} \end{aligned}$$

An die mittels dieser Kreuzlinienabschnitte in Fig. 388 erhaltene Schlußlinie tragen wir unten  $M_3 = 3,25 \text{ mt}$  nach rechts, oben dasselbe nach links auf und verbinden die Endpunkte dieser Momentenordinaten mit dem anderen Stabende. Bringen wir nun die durch den Zug- und Druckmittelpunkt der Konsole gezogenen Wagrechten zum Schnitt mit diesen Verbindungsgeraden, so erhalten wir durch geradlinige Verbindung der beiden Schnittpunkte die in Fig. 388 schraffierte Momentenfläche des belasteten Stabes 3.

Das Moment  $M_3^A$  ist nun mit Hilfe der Festpunkte und Verteilungsmaße nach rechts weiterzuleiten (siehe Fig. 388).

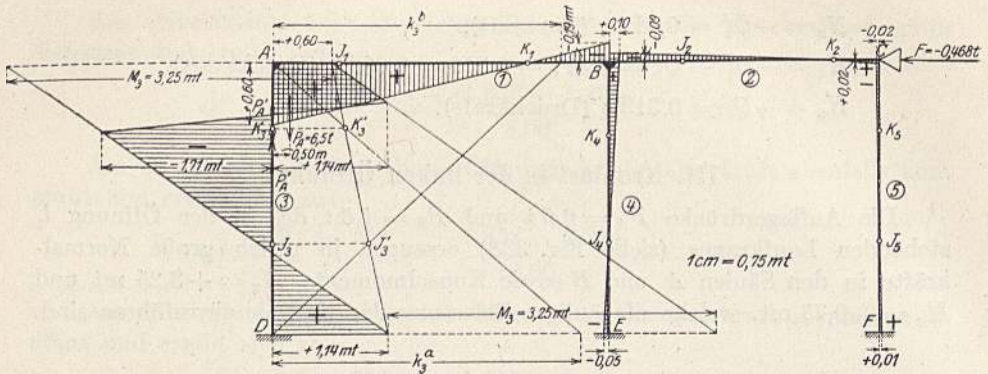


Fig. 388.

Kranbelastung der linken Säule.  
Momente des R. I.

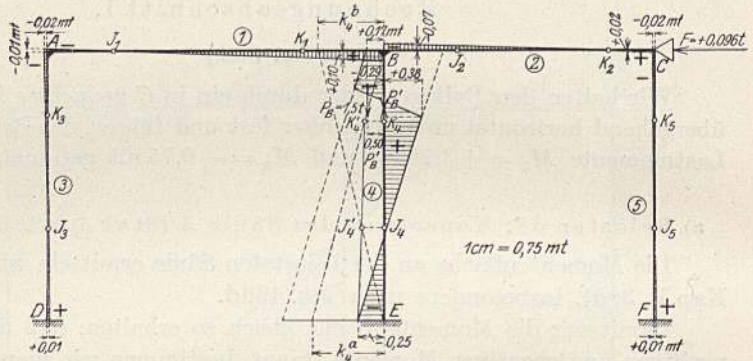


Fig. 389.

Kranbelastung der Mittelsäule.  
Momente des R. I.

Die im gedachten Lager bei C während R. I auftretende Festhaltungskraft  $F$  ist gleich der Resultierenden aus den 3 Querkraften an den Säulenköpfen, d. h.

$$F = Q_3^A + Q_4^B + Q_5^C.$$

Nun ist aber

$$Q_3^A = Q + \frac{M_3^A - M_3^D}{l_3} = -\frac{3,25}{8,00} + \frac{0,60 - 1,14}{8,00} = -0,483 \text{ t},$$

$$Q_4^B = \frac{M_4^B - M_4^E}{l_4} = \frac{0,10 + 0,05}{8,00} = +0,019 \text{ t},$$

$$Q_5^C = \frac{M_5^C - M_5^F}{l_5} = \frac{-0,02 - 0,01}{8,00} = -0,004 \text{ t},$$

$$\text{daher } F = \underline{\underline{-0,468 \text{ t}}}.$$

b) Belasten der Konsole an der Säule B (Stab 4) mit  $M_4 = -0,75 \text{ mt}$ .

Zur Bestimmung der Momentenfläche verfahren wir analog wie unter a). Die Kreuzlinienabschnitte sind proportional den unter a) für die Belastung  $M_3 = +3,25 \text{ mt}$  gefundenen; es ist

$$k_4^a = +3,05 \left( \frac{-0,75}{+3,25} \right) = -0,705 \text{ mt},$$

$$k_4^b = +2,86 \left( \frac{-0,75}{+3,25} \right) = -0,660 \text{ mt}.$$

An die mittels dieser Kreuzlinienabschnitte in Fig. 389 erhaltene Schlußlinie tragen wir analog wie unter a) die  $M_0$ -Fläche an und erhalten die in Fig. 389 schraffierte Momentenfläche des belasteten Stabes 4.

Das Moment  $M_4^B$  ist nun mit Hilfe der Festpunkte und Verteilungsmaße nach links und rechts weiterzuleiten (siehe Fig. 389).

Die im gedachten Lager bei C während R. I auftretende Festhaltungskraft  $F$  ist wieder gleich der Resultierenden aus den 3 Querkräften an den Säulenköpfen. Es ist

$$Q_3^A = \frac{M_3^A - M_3^D}{l_3} = \frac{-0,02 - 0,01}{8,00} = -0,004 \text{ t,}$$

$$Q_4^B = \varnothing + \frac{M_4^B - M_4^E}{l_4} = +\frac{0,75}{8,00} + \frac{-0,17 + 0,25}{8,00} = +0,104 \text{ t,}$$

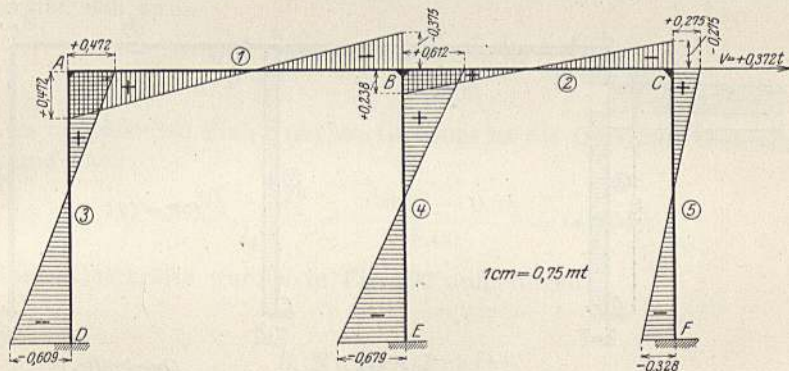
$$Q_5^C = \frac{M_5^C - M_5^F}{l_5} = \frac{-0,02 - 0,01}{8,00} = -0,004 \text{ t,}$$

daher  $F = +0,096 \text{ t.}$

c) Gleichzeitiges Belasten der beiden Konsolen mit  $M_3 = +3,25 \text{ mt}$  und  $M_4 = -0,75 \text{ mt}$ .

Die diesbezügliche Momentenfläche erhalten wir durch Addieren der unter a) und b) gefundenen Momentenordinaten mit ihren Vorzeichen; die zugehörige Festhaltungskraft hat die Größe:

$$F_{\text{tot.}} = -0,468 + 0,096 = -0,372 \text{ t.}$$



Zusatzmomente infolge Kranbelastung.  
Fig. 390.

### Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen das während R. I am Balken (bei C) gedachte Lager und ermitteln die Zusätze infolge Belasten des Rahmens mit der äußeren, nach rechts gerichteten, in Balkenachse wirkenden Verschiebungskraft

$$V = -F = +0,372 \text{ t.}$$

Diese Zusätze erhalten wir durch Multiplizieren der bereits ermittelten  $M^*$ -Momente (siehe Fig. 375) infolge  $H = +1,00 \text{ t}$  mit der Zahl 0,372; diese Zusatzmomente der Kranbelastung wurden in Fig. 390 dargestellt.

Durch Addition der Momente aus R. I (Fig. 388 und 389) und der sog. Zusatzmomente (Fig. 390) ergeben sich nun die endgültigen von der Kranbelastung am Rahmen hervorgerufenen Momente, welche in Fig. 391 dargestellt sind.

## 2. Querkräfte.

Die Querkräfte am ganzen Rahmen werden nach Teil I, Kap. VI, 1 ermittelt.

Der Stab 3 (linke Endsäule) ist durch das Konsolmoment  $M_3 = + 3,25$  mt belastet, welches durch das Kräftepaar

$$P_3 = \frac{3,25}{0,85} = 3,82 \text{ t}$$

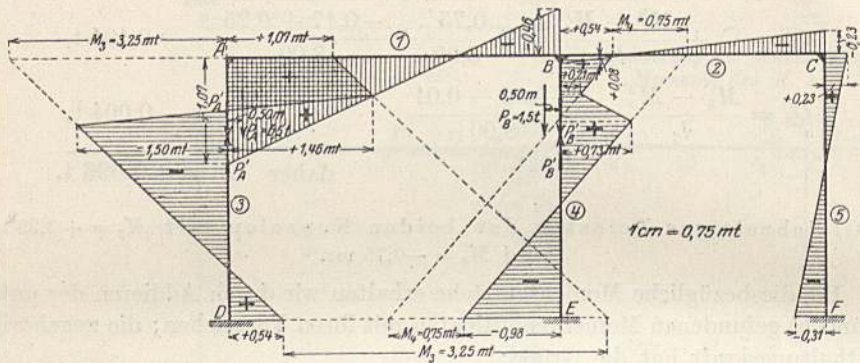


Fig. 391.

Endgültige Momente infolge  
Kranbelastung.

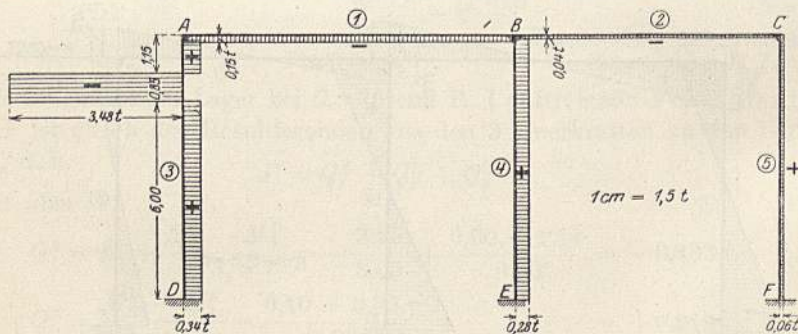


Fig. 392.

Querkräfte.

(worin 0,85 den Abstand von Zug- und Druckmittelpunkt der Konsole bedeutet) auf den Stab 3 übertragen wird; daher ist die Querkraft am belasteten Stab 3: in allen Querschnitten unterhalb Konsoldruckmittelpunkt:

$$Q_3^D = + \frac{M_3}{l_3} + \frac{M_3^D - M_3^A}{l_3} = + \frac{3,25}{8,00} + \frac{0,54 - 1,07}{8,00} = + 0,34 \text{ t}$$

in allen Querschnitten zwischen Konsol-Zug- und Druckmittelpunkt:

$$Q_3 = Q_3^D - P = 0,34 - 3,82 = - 3,48 \text{ t,}$$

in allen Querschnitten oberhalb Konsolzugmittelpunkt:

$$Q_3^A = - \frac{M_3}{l_3} + \frac{M_3^A - M_3^D}{l_3} = - \frac{3,25}{8,00} + \frac{1,07 - 0,54}{8,00} = - 0,34 \text{ t.}$$

Der Stab 4 (Mittelsäule) ist durch das Konsolmoment  $M_4 = -0,75$  mt belastet, welches durch das Kräftepaar

$$P_4 = \frac{0,75}{0,85} = 0,88 \text{ t}$$

auf den Stab 4 übertragen wird; daher ist die Querkraft am belasteten Stab 4: in allen Querschnitten unterhalb Konsoldruckmittelpunkt:

$$Q_4^E = -\frac{M_4}{l_4} + \frac{M_4^E - M_4^B}{l_4} = -\frac{0,75}{8,00} + \frac{-0,98 - 0,54}{8,00} = -0,28 \text{ t};$$

in allen Querschnitten zwischen Konsol-Zug- und Druckmittelpunkt:

$$Q_4 = Q_4^E + P_4 = -0,28 + 0,88 = +0,60 \text{ t};$$

in allen Querschnitten oberhalb Konsolzugmittelpunkt:

$$Q_4^B = +\frac{M_4}{l_4} + \frac{M_4^B - M_4^E}{8,00} = +\frac{0,75}{8,00} + \frac{0,54 + 0,98}{8,00} = +0,28 \text{ t}.$$

Am unbelasteten Stab 5 (rechte Endsäule) ist die Querkraft auf die ganze Stabhöhe konstant und zwar:

$$Q_5^F = \frac{M_5^F - M_5^C}{l_5} = \frac{-0,31 - 0,23}{8,00} = -0,06 \text{ t}.$$

Am unbelasteten Stab 1 (linke Öffnung) ist die Querkraft ebenfalls konstant und ergibt sich zu:

$$Q_1^A = \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = \frac{-0,46 - 1,07}{10,00} = -0,15 \text{ t}.$$

Am unbelasteten Stab 2 (rechte Öffnung) ist die Querkraft ebenfalls konstant und zwar:

$$Q_2^B = \frac{M_2^C - M_2^B}{l_2} = \frac{-0,23 - 0,08}{8,00} = -0,04 \text{ t}.$$

Diese Querkräfte wurden in Fig. 392 aufgetragen.

### 3. Normalkräfte.

Infolge der gegebenen Kranbelastung entstehen folgende Normalkräfte (vgl. Teil I, Kap. VI, 2):

$$N_1 = -Q_3^A = 0,34 \text{ t (Druckkraft),}$$

$$N_2 = -Q_5^C = 0,06 \text{ t (Druckkraft),}$$

$$N_3^A = -Q_1^A = 0,15 \text{ t (Druckkraft),}$$

$$N_3^D = N_3^A + P_4' = 6,65 \text{ t (Druckkraft),}$$

$$N_4^B = -Q_1^B - Q_2^B = 0,15 - 0,04 = 0,11 \text{ t (Druckkraft),}$$

$$N_4^E = N_4^B + P_4' = 0,11 + 1,50 = 1,61 \text{ (Druckkraft),}$$

$$N_5 = -Q_2^C = 0,04 \text{ t (Druckkraft).}$$

IV. Temperaturänderung um  $t = 15^\circ$ .

Nachstehend ermitteln wir die inneren Kräfte am Rahmen infolge Temperaturerhöhung um  $t = 15^\circ \text{C}$ ; die inneren Kräfte infolge Temperaturerniedrigung haben dann dieselbe Größe, jedoch entgegengesetztes Vorzeichen.

## 1. Momente.

## Rechnungsabschnitt I.

Da der Rahmen unsymmetrisch ist, kann der Balkenpunkt, welcher bei Temperaturänderungen in Ruhe bleibt, nicht von vornherein angegeben werden; deshalb müssen wir (vgl. Teil II, Kap. V, 1) den Balken, z. B. Knotenpunkt  $B$ , vorübergehend horizontal unverschiebbar festhalten. Unter Annahme eines Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha = 0,000012$  verschiebt sich daher bei einer Temperaturerhöhung von  $t = 15^\circ$ :

der Knotenpunkt  $A$  um:

$$\Delta A = -\alpha \cdot t^\circ \cdot l_1 = -0,000012 \cdot 15 \cdot 10,00 = -0,0018 \text{ m,}$$

und der Knotenpunkt  $C$  um:

$$\Delta C = +\alpha \cdot t^\circ \cdot l_2 = +0,000012 \cdot 15 \cdot 8,00 = +0,00144 \text{ m,}$$

wodurch die Stäbe 3 und 5 (Pfeiler) gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden, und zwar ist:

$$\varrho_3 = \Delta A = 0,0018 \text{ m (von rechts nach links),}$$

$$\varrho_5 = \Delta C = 0,00144 \text{ m (von links nach rechts).}$$

Die Stäbe 1 und 2 (Balken) erleiden keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte, weil die Säulen gleich lang sind und sich daher alle um gleich viel ausdehnen, so daß sich die Stäbe 1 und 2 nur parallel verschieben.

Die Momente infolge dieser gegenseitigen Verschiebungen  $\varrho$  ermitteln wir nach den Gl. (515) und (520) und wir erhalten infolge  $\varrho_3$ :

$$\begin{aligned} M_3^D &= \frac{\varrho_3}{l_3 \cdot \beta_3 (l_3 - a_3 - b_3)} \cdot a_3 = k \cdot a_3 \\ &= \frac{0,0018 \cdot 2100000}{8,00 \cdot 426,67 (8,00 - 2,667 - 1,898)} \cdot 2,667 = 0,322 \cdot 2,667 = +0,860 \text{ mt,} \end{aligned}$$

$$M_3^A = k \cdot b_3 = 0,322 \cdot 1,898 = -0,611 \text{ mt.}$$

Die Vorzeichen dieser beiden Momente ergeben sich aus der Anschauung gemäß der in Teil II, Kap. IV, 1 angegebenen Regel.

Die beiden Momente sind in Fig. 393 aufgetragen; das letztere wurde darauf nach rechts über den Rahmen fortgepflanzt; die entsprechende Momentenlinie ist an allen Stäben mit  $\varrho_3$  bezeichnet.

infolge  $\varrho_5$ :

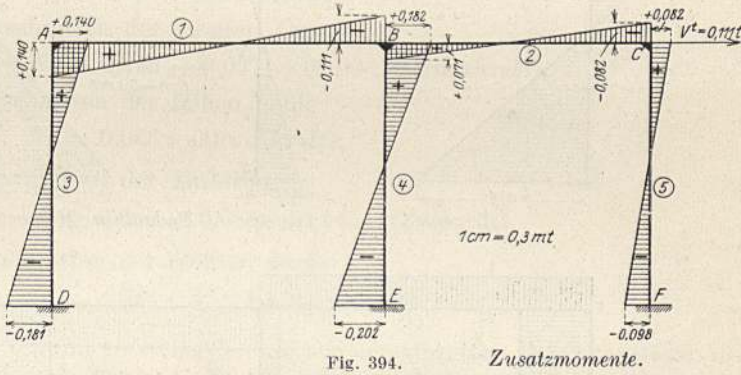
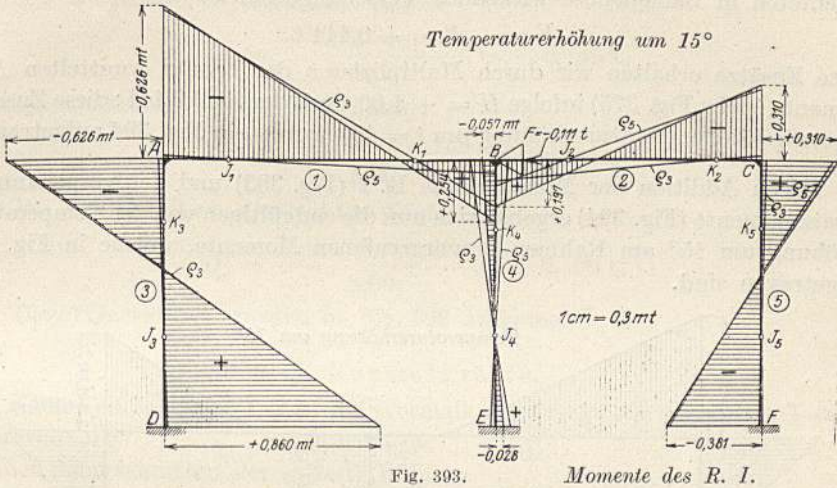
$$\begin{aligned} M_5^F &= \frac{\varrho_5}{l_5 \cdot \beta_5 (l_5 - a_5 - b_5)} \cdot a_5 = k \cdot a_5 \\ &= \frac{0,00144 \cdot 2100000}{8,00 \cdot 833,33 (8,00 - 2,667 - 2,087)} \cdot 2,667 = 0,14 \cdot 2,667 = -0,373 \text{ mt,} \end{aligned}$$

$$M_5^C = k \cdot b_5 = 0,14 \cdot 2,087 = +0,292 \text{ mt.}$$

Die Vorzeichen dieser beiden Momente ergeben sich wieder aus der Anschauung.



Die beiden Momente sind in Fig. 393 aufgetragen; das letztere wurde nach links über den Rahmen weitergeleitet; die entsprechende Momentenlinie ist an allen Stäben mit  $\varrho_3$  bezeichnet.



Durch Addition der beiden Teilmomentenflächen für  $\varrho_3$  und  $\varrho_5$  erhalten wir die in Fig. 393 schraffierte Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand, aus welcher wir die Festhaltungskraft  $F^t$  gewinnen; es ist:

$$F^t = Q_3^A + Q_4^B + Q_5^C$$

und

$$Q_3^A = \frac{M_3^A - M_3^D}{l_3} = \frac{-0,626 - 0,867}{8,00} = -0,186 \text{ t,}$$

$$Q_4^B = \frac{M_4^B - M_4^F}{l_4} = \frac{-0,0568 - 0,0284}{8,00} = -0,011 \text{ t.}$$

$$Q_5^C = \frac{M_5^C - M_5^F}{l_5} = \frac{+0,310 + 0,381}{8,00} = +0,086 \text{ t.}$$

daher  $F^t = -0,111 \text{ t.}$

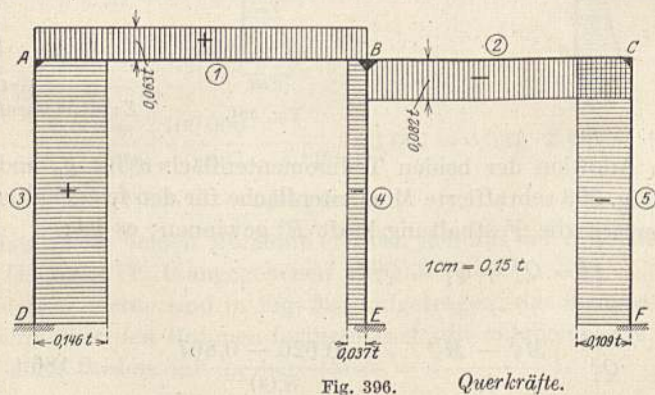
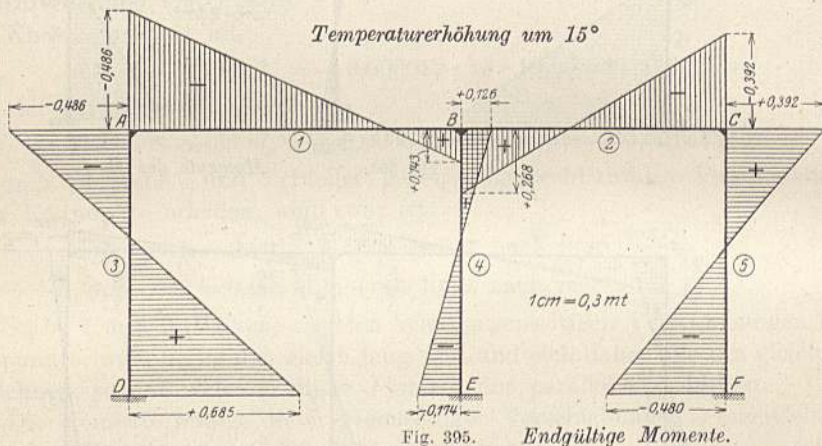
## Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen das während R. I am Balken (bei  $B$ ) gedachte Lager und ermitteln die Zusätze infolge Belasten des Rahmens mit der äußeren, nach rechts gerichteten in Balkenachse wirkenden Verschiebungskraft

$$V = -F = +0,111 \text{ t.}$$

Diese Zusätze erhalten wir durch Multiplizieren der bereits ermittelten  $M^*$ -Momente (siehe Fig. 375) infolge  $H = +1,00 \text{ t}$  mit der Zahl  $0,111$ ; diese Zusatzmomente für Temperaturerhöhung um  $t = 15^\circ$  wurden in Fig. 394 aufgetragen.

Durch Addition der Momente aus R. I (Fig. 393) und der vorgenannten Zusatzmomente (Fig. 394) ergeben sich nun die endgültigen von der Temperaturerhöhung um  $15^\circ$  am Rahmen hervorgerufenen Momente, welche in Fig. 395 aufgetragen sind.



## 2. Querkräfte.

Nach Teil I, Kap. VI, 1 ist die Querkraft infolge der gegebenen Temperaturerhöhung:

in allen Querschnitten der ersten Öffnung:

$$Q_1^A = \frac{0,143 + 0,486}{10,00} = +0,063 \text{ t,}$$

in allen Querschnitten der zweiten Öffnung:

$$Q_2^B = \frac{-0,392 - 0,268}{8,00} = -0,082 \text{ t,}$$

in allen Querschnitten der linken Säule:

$$Q_3^D = \frac{+0,685 + 0,486}{8,00} = +0,146 \text{ t,}$$

in allen Querschnitten der Mittelsäule:

$$Q_4^F = \frac{-0,174 - 0,126}{8,00} = -0,037 \text{ t,}$$

in allen Querschnitten der rechten Säule:

$$Q_5^F = \frac{-0,479 - 0,392}{8,00} = -0,109 \text{ t.}$$

Diese Querkräfte wurden in Fig. 396 aufgetragen.

### 3. Normalkräfte.

Nach Teil I, Kap. VI, 2 ist die Normalkraft infolge der gegebenen Temperaturerhöhung:

in allen Querschnitten der ersten Öffnung:

$$N_1 = 0,146 \text{ t (Druckkraft),}$$

in allen Querschnitten der zweiten Öffnung:

$$N_2 = 0,146 - 0,037 = 0,109 \text{ t (Druckkraft),}$$

in allen Querschnitten der linken Säule:

$$N_3 = 0,063 \text{ t (Druckkraft),}$$

in allen Querschnitten der Mittelsäule:

$$N_4 = 0,063 + 0,082 = 0,145 \text{ t (Zugkraft),}$$

in allen Querschnitten der rechten Säule:

$$N_5 = 0,082 \text{ t (Druckkraft).}$$

Nachdem nun im vorstehenden die von den einzelnen Belastungsfällen hervorgerufenen inneren Kräfte bestimmt worden sind, können wir dieselben tabellarisch und graphisch zusammenstellen und die Grenzwerte ermitteln, welche der Querschnittsberechnung zugrunde zu legen sind, wie dies im vorhergehenden sowie in den folgenden Beispielen geschehen ist; außerdem sind wir dann in der Lage, die Resultierenden an den Fundamenten nach Teil I, Kap. VI, 3 zu konstruieren.

Es soll zum Schluß noch untersucht werden, welche Momente am Rahmen auftreten, falls sich das Fundament der linken Säule um ein bestimmtes Maß senkt.

### V. Stützensenkung.

Wir nehmen an, das Fundament der linken Säule (Stab 3) senke sich um 1 cm in Richtung der letzteren.

Durch die Senkung erleiden die Knotenpunkte Verschiebungen, die wir aber nicht zum Vornherein angeben können. Wir müssen daher den Balken

zunächst horizontal unverschiebbar festhalten (vgl. Teil II, Kap. VI) und die Momente für diesen Zustand (R. I) bestimmen (siehe Fig. 397); bei festgehaltenem Rahmen tritt dann nur die „gegenseitige rechtwinklige Verschiebung

$$\rho_1 = 1 \text{ cm}$$

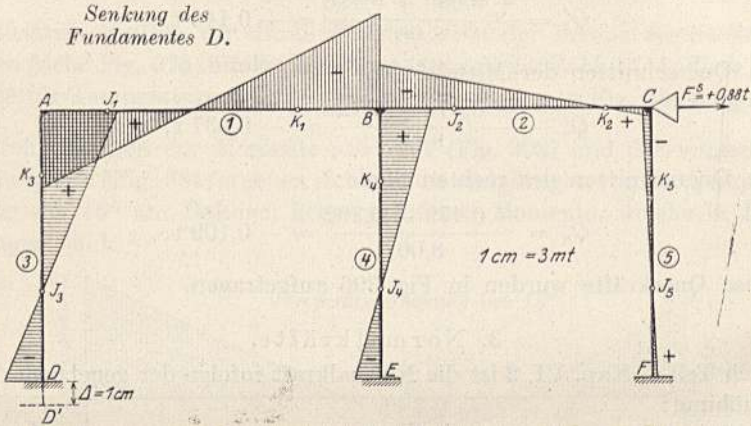


Fig. 397. Momente des R. I.

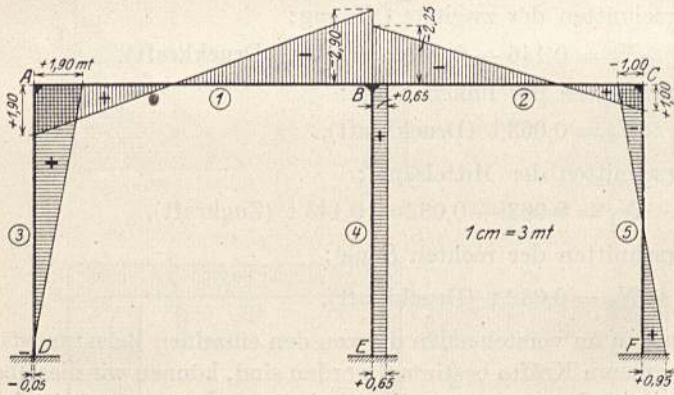


Fig. 398. Zusatzmomente.

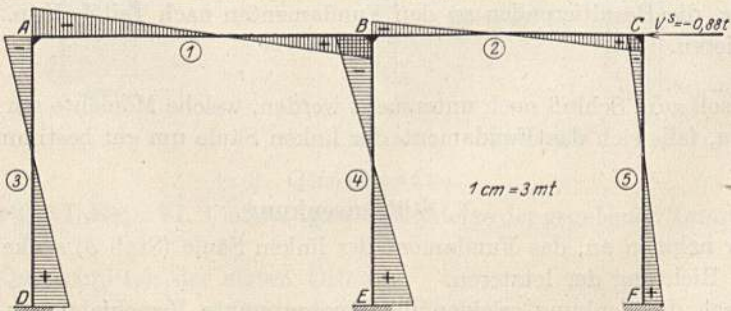


Fig. 399. Endgültige Momente.

auf, wodurch sich nach den Gl. (515) und (520) folgende Momente an den Enden des Stabes  $I$  ergeben:

$$M_1^A = \frac{Q_1}{l_1 \cdot \beta_1 (l_1 - a_1 - b_1)} \cdot a_1 = k \cdot a_1$$

$$= \frac{0,01 \cdot 2\,100\,000}{10,00 \cdot 308,63 (10,00 - 1,97 - 2,42)} \cdot 1,97 = 1,55 \cdot 1,97 = + 3,05 \text{ mt.}$$

$$M_1^B = k \cdot b_1 = 1,55 \cdot 2,42 = - 3,75 \text{ mt.}$$

Diese beiden Momente wurden in Fig. 397 aufgetragen und  $M_1^A$  nach links und  $M_1^B$  nach rechts in bekannter Weise weitergeleitet.

Aus der erhaltenen Momentenfläche ermitteln wir nun die im gedachten Lager bei  $C$  auftretende Festhaltungskraft  $F^s$ ; es ist

$$F^s = Q_3^A + Q_4^B + Q_5^C = \frac{3,05 + 1,50}{8,00} + \frac{2,05 + 1,00}{8,00} - \frac{0,35 + 0,20}{8,00}$$

$$= 0,57 + 0,38 - 0,07 = + 0,88 \text{ t.}$$

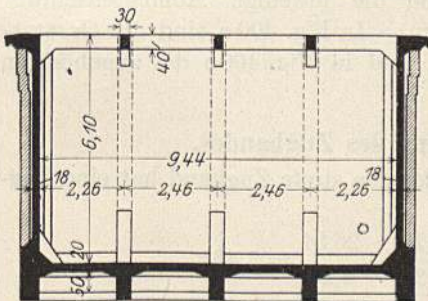
Entfernen wir nun das gedachte Lager in  $C$ , so tritt die Verschiebungskraft  $V^s$  (umgekehrte Festhaltungskraft  $F^s$ ) in Tätigkeit, welche die Senkungs-Zusatzmomente (Fig. 398) hervorruft; letztere erhalten wir durch Multiplikation der  $M^*$ -Momentenfläche der Fig. 375 mit  $V^s = - 0,88 \text{ t}$ .

Durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Momente (siehe Fig. 399) infolge der vorausgesetzten Senkung.

### Beispiel 5.

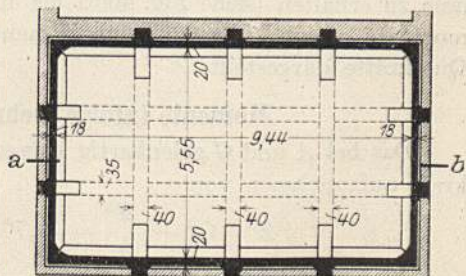
#### Wasserhochbehälter.

Es soll ein Längsbinder (Längsträger mit Wandrippen) des in den Fig. 400 und 400a dargestellten Wasserhochbehälters berechnet werden.



Längenschnitt a-b.

Fig. 400.



Horizontalschnitt.

Fig. 400a.

Das in Fig. 400 b dargestellte Belastungsschema enthält für die Belastungsbreite  $b = \frac{1,78 + 1,99}{2} = 1,885 \text{ m}$  nachstehende Lasten:

**Eigengewicht:**

Bodenträger einschl. Plattenstreifen:

$$g = (0,35 \cdot 0,50 + 1,885 \cdot 0,20) \cdot 2,4 = 1,325 \text{ t/m.}$$

**Nutzlast durch Wasser:**

Für die Seitenrippen beträgt der Wasserdruck in der Tiefe 5,80 m:

$$w = 1,885 \cdot 5,80 = 10,93 \text{ t/m,}$$

und für die Dreiecksbelastung des Bodenträgers ist die Belastungshöhe ebenfalls

$$w = 10,93 \text{ t/m.}$$

Zwecks graphischer Ermittlung der Momente nach Teil I, Kap. V ist die Wasserbelastung in einzelne Lamellen geteilt worden, und diese werden wie Einzellasten behandelt.

**Festpunkte.**

Zur Ermittlung der Festpunkte werden die Seitenrippen in die Verlängerung der Balkenachse umgeklappt, so daß die Festpunkte wie für den kontinuierlichen Träger mit sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment nach Kap. III, 10 ermittelt werden können, was aus Fig. 400c ersichtlich ist.

**Momente.**

Mittels Kraft- und Seileck wurden die  $M_0$ -Flächen für die einzelnen Belastungsfälle graphisch ermittelt. In gleicher Weise wurden die Schwerlinien der  $M_0$ -Flächen bestimmt, um die Kreuzlinienabschnitte bzw. die Längsordinaten

$$\frac{k}{H} = \frac{6 \cdot F_0 \cdot \zeta}{l^2 \cdot H}$$

nach der allgem. Gl. (240) zu bilden, wobei  $F_0$  den Inhalt der  $M_0$ -Fläche und  $\zeta$  (bzw.  $\zeta'$ ) den Schwerpunktsabstand derselben vom Auflager bedeuten.

Die mittels der Kreuzlinien ermittelten Stützenmomente sind dann durch die Festpunkte der anliegenden Felder weiterzuleiten und die Momente aus beiden Feldbelastungen zu addieren, um die jeweilige Momentenschlußlinie zu erhalten (siehe Fig. 400d bis 400m). In Fig. 400n sind die Gesamtmomente einschl. Eigengewichtsmomente, und in Fig. 400o die zugehörigen Querkräfte dargestellt.

**Momente infolge Dehnung des Zugbandes.**

Das bei  $A$  und  $G$  gelenkartig angeschlossene steife Zugband hat eine Zugkraft aufzunehmen von

$$Z = Q_0^A + \frac{M^B}{h} = 31,70 \frac{2,28}{6,25} - \frac{26,91}{6,25} = 7,46 \text{ t}$$

Die Bewehrung des Zugbandes bestehe aus

$$4 \text{ } \Phi \text{ 20 mm mit } f_e = 12,57 \text{ cm}^2,$$

so daß eine Dehnung des Zugbandes von

$$\Delta l = \frac{Z \cdot l}{E \cdot F} = \frac{7460 \cdot 992}{2400000 \cdot 12,57} = 0,242 \text{ cm}$$

Fig. 400b—o.

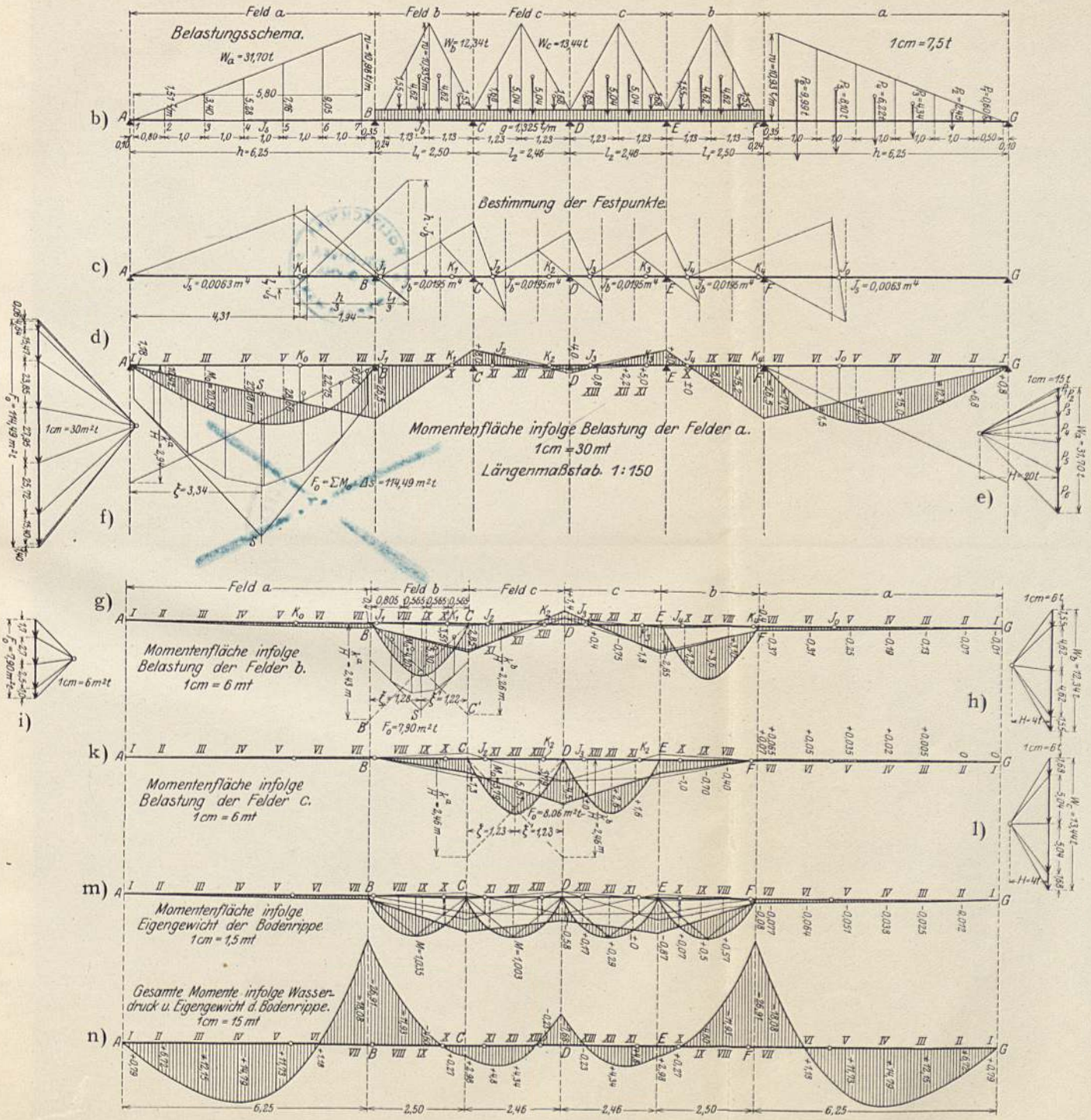


Fig. 401.



Fig. 402.

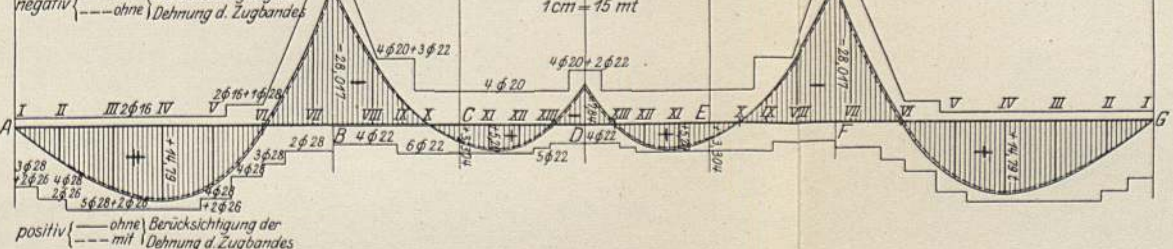
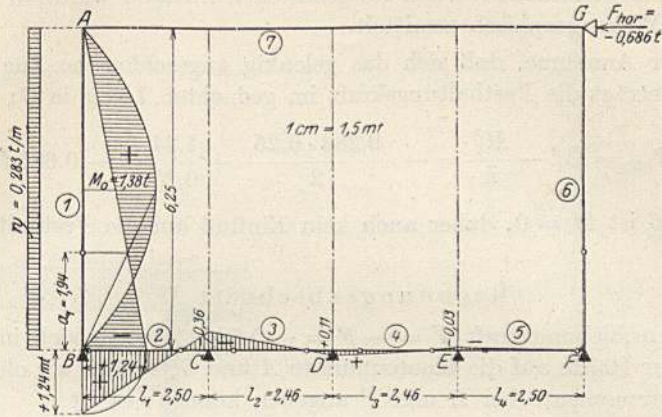


Fig. 400—402.



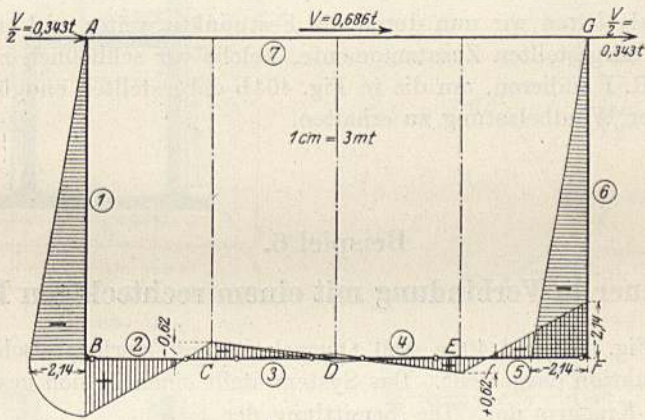


Wind von links.



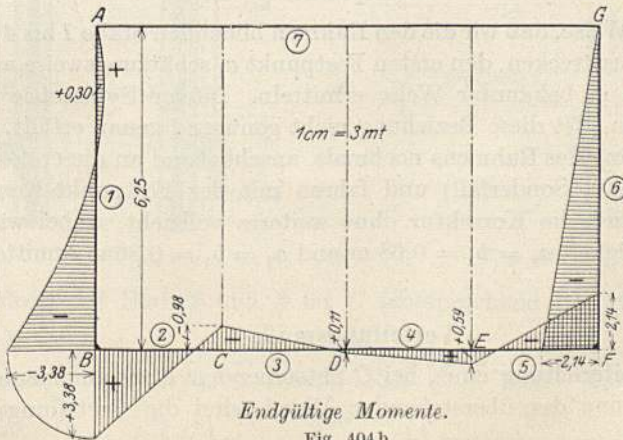
Momente des R. I.

Fig. 404.



Zusatzmomente.

Fig. 404 a.



Endgültige Momente.

Fig. 404 b.

Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand wurde in Fig. 404 in bekannter Weise graphisch ermittelt.

Bei der Annahme, daß sich das gelenkig angeschlossene Zugband nicht ausbiege, beträgt die Festhaltungskraft im gedachten Lager in  $G$ :

$$F_{\text{hor}} = \Sigma_1^A - \frac{M_1^B}{h} = - \frac{0,283 \cdot 6,25}{2} + \frac{1,24}{6,25} = - 0,686 \text{ t.}$$

(Am Stab  $C$  ist  $M = 0$ , daher auch kein Einfluß auf die Festhaltungskraft.)

#### Rechnungsabschnitt II.

Die Verschiebungskraft  $V = -F = + 0,686 \text{ t}$  verteilt sich infolge Symmetrie je zur Hälfte auf die Knotenpunkte  $A$  und  $G$ , so daß wir ohne weiteres die Einspannmomente bei  $B$  und  $F$  angeben können; es ist

$$M_1^B = M_1^F = - \frac{V}{2} \cdot h = - \frac{0,686}{2} \cdot 6,25 = - 2,14 \text{ mt.}$$

Diese Momente leiten wir nun durch die Festpunkte weiter und erhalten die in Fig. 404a dargestellten Zusatzmomente, welche wir schließlich zu den Momenten des R. I addieren, um die in Fig. 404b dargestellten endgültigen Momente aus der Windbelastung zu erhalten.

### Beispiel 6.

#### Stützmauer in Verbindung mit einem rechteckigen Kanal.

In den Fig. 405 und 405a sind Querschnitt und Horizontalschnitt durch diese Konstruktion dargestellt. Das System stellt einen in sich geschlossenen Rahmen mit Kragarm dar. Die Ermittlung der

#### Festpunkte

geschieht in der Weise, daß wir die den Rahmen bildenden Stäbe 1 bis 4 (Fig. 406) in eine Gerade ausstrecken, den ersten Festpunkt  $a_1$  schätzungsweise annehmen, und die übrigen in bekannter Weise ermitteln. Infolge Symmetrie soll dann z. B.  $a_1 = b_3$  sein. Ist diese Beziehung nicht genügend genau erfüllt, so tragen wir die Abwicklung des Rahmens nochmals, anschließend an die erstere ab (vgl. Teil I, Kap. III, 9, Sonderfall) und fahren mit der Festpunkt-Konstruktion weiter, worauf sich die Korrektur ohne weiteres vollzieht, wobei wir mit genügender Genauigkeit  $a_1 = b_3 = 0,68 \text{ m}$  und  $a_2 = b_4 = 0,36 \text{ m}$  ermittelt haben.

#### Verteilungsmaß.

Für die Weiterleitung eines bei  $C$  entstehenden Konsolmomentes infolge seitlicher Belastung der überstehenden Wand, sind die Verteilungsmaße erforderlich.

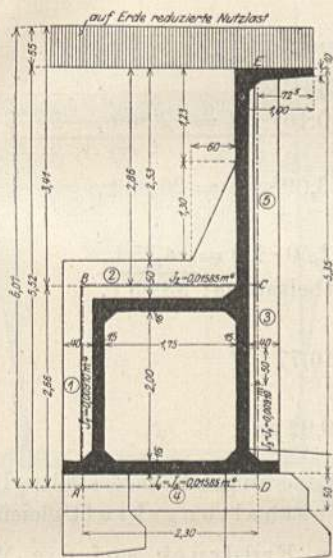


Fig. 405.

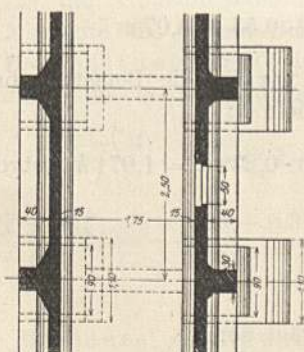


Fig. 405a.

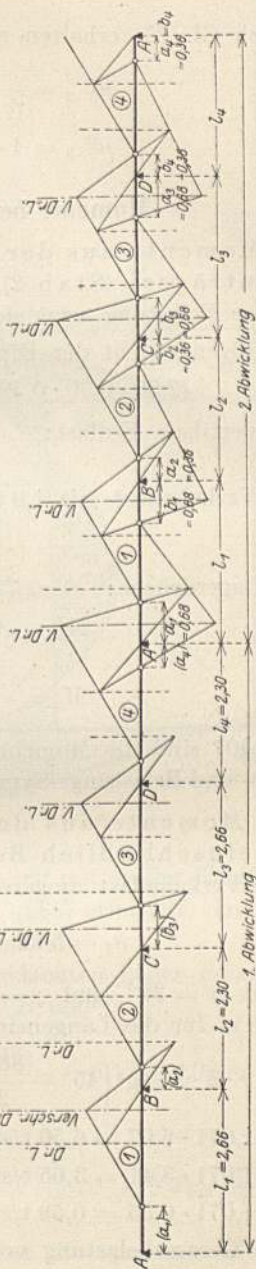


Fig. 406.

Drehwinkel für Stab 2 und 3 bei C (entsprechend Gl. 42a):

$$\tau_2^C = \frac{l_2}{6J_2E} \left( 3 - \frac{l_2}{l_2 - a_2} \right) = \frac{2,30}{6 \cdot 0,01585 E} \left( 3 - \frac{2,30}{2,30 - 0,36} \right) = \frac{43,8}{E}$$

$$\tau_3^C = \frac{l_3}{6J_3E} \left( 3 - \frac{l_3}{l_3 - a_3} \right) = \frac{2,66}{6 \cdot 0,0091 E} \left( 3 - \frac{2,66}{2,66 - 0,68} \right) = \frac{80,5}{E}$$

Nach Gl. (37) erhalten wir das Verteilungsmaß

$$\mu_{5-2}^C = \frac{\tau_3^C}{\tau_2^C + \tau_3^C} = \frac{80,5}{43,8 + 80,5} = 0,65;$$

$$\mu_{5-3}^C = 1 - 0,65 = 0,35.$$

### Momente bei festgehaltenen Säulenköpfen.

I. Momente aus der gleichmäßig verteilten Belastung des Deckenträgers (Stab 2).

Diese Belastung setzt sich zusammen aus:

a) Eigengewicht der Rippe mit Deckenplatte:

$$(2,30 \cdot 0,30 \cdot 0,50 + 2,05 \cdot 2,50 \cdot 0,16) \cdot 2,4 = 2,80 \text{ t,}$$

b) vertikale Erdlast:

$$1,90 \cdot 2,50 \cdot 3,09 \cdot 1,8 = 26,00 \text{ t,}$$

c) Verkehrslast mit  $1,0 \text{ t/m}^2$ :

$$1,90 \cdot 2,50 \cdot 1,0 = 4,75 \text{ t.}$$

$$\text{Gesamtbelastung: } 33,55 \text{ t.}$$

Auflagerdrücke:

$$A_2^B = A_2^C = \frac{33,55}{2} = 16,77 \text{ t,}$$

$$M_o = \frac{33,55 \cdot 2,30}{8} = 9,92 \text{ mt.}$$

In Fig. 407 sind die Momente aus diesem Belastungsfall dargestellt. Infolge Rahmen- und Belastungs-Symmetrie ist die Festhaltungskraft gleich Null.

II. Momente aus dem seitlichen Erddruck auf die Wand  $A-B$ , einschließlich Belastung durch Verkehr.

Die Verkehrslast umgerechnet in Erdlast ergibt eine Belastungshöhe

$$h_1 = 5,52 + \frac{1,0}{1,8} = 5,52 + 0,55 = 6,07 \text{ m}$$

und mit  $\varphi = 38^\circ$  und  $\gamma = 1,8$  erhalten wir für die Belastungsbreite von  $b = 2,50 \text{ m}$  für die Längeneinheit in der Tiefe  $h$ :

$$p = \gamma \cdot b \cdot h \cdot \text{tg}^2\left(45^\circ - \frac{38^\circ}{2}\right) = 1,8 \cdot 2,50 \cdot 0,238 h = 1,071 h \text{ t/stgd. m,}$$

$$p^A = 1,071 \cdot 6,07 = 6,50 \text{ t/stgd. m,}$$

$$p^B = 1,071 \cdot 3,41 = 3,65 \text{ t/stgd. m,}$$

$$p^E = 1,071 \cdot 0,55 = 0,59 \text{ t/stgd. m.}$$

Die Gesamtbelastung von Stab 1 beträgt somit

$$Q = \frac{6,50 + 3,65}{2} \cdot 2,66 = 13,50 \text{ t;}$$

und die Auflagerdrücke dieser Last sind (unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens):

$$A_1^A = -\left(\frac{3,65 \cdot 2,66}{2} + \frac{(6,50 - 3,65) \cdot 2,66}{3}\right) = -(4,85 + 2,53) = -7,38 \text{ t,}$$

$$A_1^B = 7,38 - 13,50 = -6,12 \text{ t.}$$

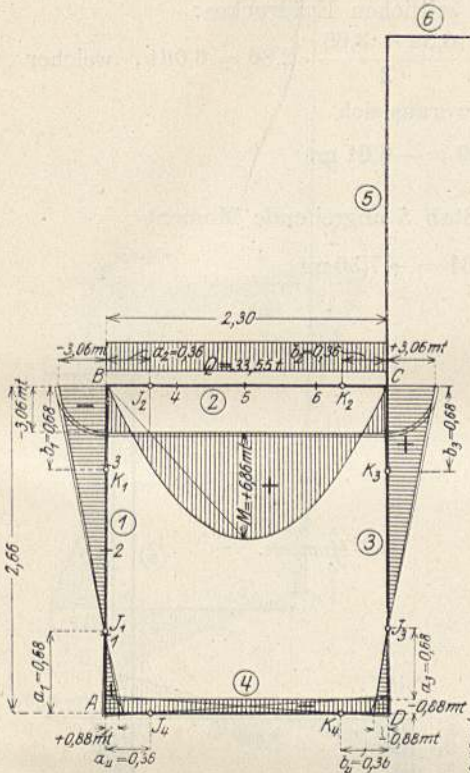


Fig. 407.

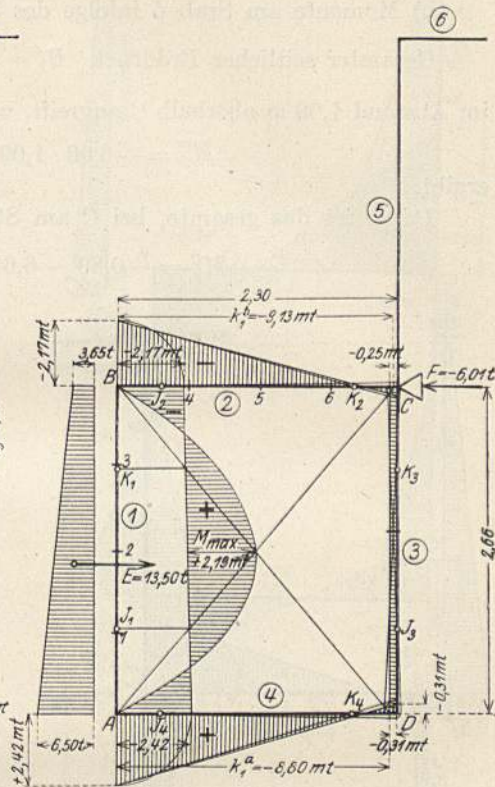


Fig. 408.

Die Ordinaten der  $M_0$ -Momentenfläche haben wir mittels der Koeffizienten der Fig. 129, die Kreuzlinienabschnitte nach Gl. (268) ermittelt. In Fig. 408 sind die Momente aus diesem Belastungsfall ermittelt.

Die Festhaltungskraft in dem in  $C$  gedachten Lager erhalten wir als die Summe der beiden Säulenquerkräfte bei  $B$  und  $C$ :

$$Q_1^B = Q_1^B + \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = -6,12 + \frac{-2,17 + 2,42}{2,66} = -6,12 + 0,09 = -6,03 \text{ t}$$

$$Q_3^C = \frac{M_3^C - M_3^D}{l_3} = \frac{-0,25 + 0,31}{2,66} = \dots \dots \dots \frac{+0,02}{F_{\text{hor}} = -6,01 \text{ t}}$$

III. Momente infolge Belastung des Kragarmes (Stab 5) mit Konsole.

a) Momente durch die Konsole:

Gewicht der Platte:  $0,725 \cdot 0,15 \cdot 2,50 \cdot 2,4 = 0,65 \text{ t}$

Nutzlast:  $0,725 \cdot 2,50 \cdot 1,0 = 1,81 \text{ t}$

zusammen =  $2,46 \text{ t pro Rippe.}$

$$M_5^C = -\frac{2,46 \cdot 0,725}{2} = -0,89 \text{ mt.}$$

b) Momente am Stab 5 infolge des seitlichen Erddruckes:

Gesamter seitlicher Erddruck  $E_1 = \frac{0,59 + 3,65}{2} \cdot 2,86 = 6,06 \text{ t}$ , welcher im Abstand 1,09 m oberhalb C angreift, woraus sich

$$M_5^C = -6,06 \cdot 1,09 = -6,61 \text{ mt}$$

ergibt.

Daher ist das gesamte, bei C am Stab 5 angreifende Moment

$$M_5^C = -0,89 - 6,61 = -7,50 \text{ mt},$$

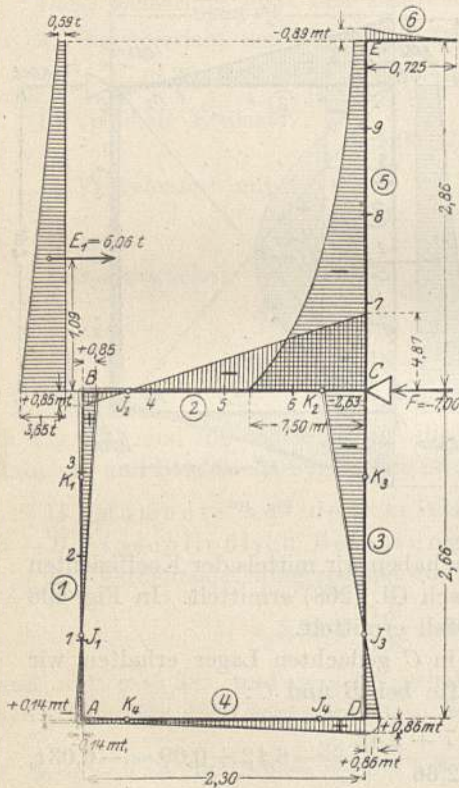


Fig. 409.

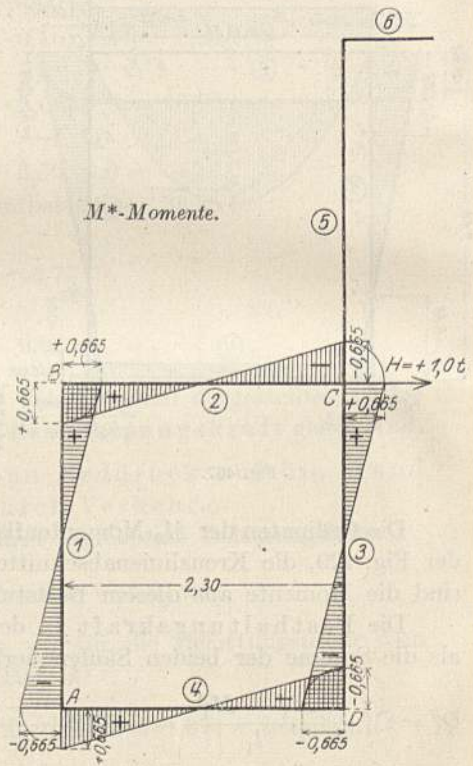


Fig. 410.

das wir in Fig. 409 aufgetragen und mittels der Verteilungsmaße in die Stäbe 2 und 3 eingeleitet haben. So erhielten wir

$$M_2^C = \mu_{5-2} \cdot M_5^C = -0,65 \cdot 7,50 = -4,87 \text{ mt},$$

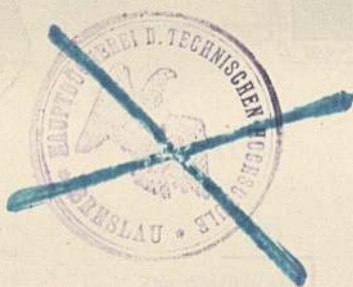
und

$$M_3^C = -0,35 \cdot 7,50 = -2,63 \text{ mt},$$

welche durch die Festpunkte weitergeleitet worden sind. Hierbei ist die Wirkung der Festhaltungskraft vorausgesetzt, die sich bestimmt aus:

$$F_{\text{hor}} = Q_1^B + Q_3^C + Q_5^C - E_1 = \frac{0,85 + 0,14 - 2,63 - 0,86}{2,66} - 6,06 = -7,00 \text{ t}.$$







**Zusatz-Momente infolge der Verschiebungskräfte.**

Infolge der Symmetrie des geschlossenen Rahmens können wir die Ermittlung der  $M'$ -Momente umgehen und wir erhalten die  $M^*$ -Momente infolge  $H = 1$  im Knotenpunkt  $C$  direkt nach Gl. (536); es ist

$$M_1^B = M_2^C = +\frac{h}{4} = +\frac{2,66}{4} = 0,665 \text{ mt} = -M_1^A = -M_3^D$$

(Fig. 410).

Durch Multiplikation der  $M^*$ -Momentenfläche mit den Verschiebungs Kräften  $V = +6,01 \text{ t}$  für den Belastungsfall II und  $V = +7,00 \text{ t}$  für den Belastungsfall III erhalten wir die in den Fig. 411 und 412 dargestellten Zusatzmomente, während die

**Gesamtmomente**

dieser beiden Belastungsfälle in den Fig. 413 und 414 veranschaulicht sind. Die infolge der Belastungsfälle I bis III entstehenden

**Querkräfte**

sind aus den Fig. 415 bis 417 zu ersehen.

Die Größtwerte der Momente und Querkräfte sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt und in den Fig. 418 und 419 aufgetragen.

Tabelle 1.  
Zusammenstellung der Momente.

Stab	Schnitt	Totalmomente aus Belastungsfall			Größtwerte der Momente
		I. Gleichm. vert. Belastung auf Stab 2 (Deckenträg.)	II. Seitl. Erd- druck auf Stab 1	III. Krag- belastung auf Stab 5 einschl. Konsole	
①	$A_1$	+0,88 mt	-6,42 mt	-4,80 mt	-10,34 mt
	1	+0,10 „	-0,84 „	-2,23 „	- 2,97 „
	2	-1,09 „	+2,18 „	+0,35 „	+ 1,44 „
	3	-2,07 „	+2,97 „	+2,93 „	+ 3,83 „
	$B_1$	-3,06 „	+1,83 „	+5,51 „	+ 4,28 „
②	$B_2$	-3,06 „	+1,83 „	+5,51 „	+ 4,28 „
	4	+4,40 „	+0,43 „	+1,76 „	+ 6,59 „
	5	+6,86 „	-0,96 „	-2,00 „	+ 3,90 „
	6	+4,40 „	-2,35 „	-5,76 „	- 3,71 „
	$C_2$	-3,06 „	-3,75 „	-9,53 „	-16,34 „
③	$C_3$	+3,06 „	+3,75 „	+2,03 „	+ 8,84 „
	$D_3$	-0,88 „	-4,31 „	-3,80 „	- 8,99 „
④	$D_4$	-0,88 „	-4,31 „	-3,80 „	- 8,99 „
	$A_4$	-0,88 „	+6,42 „	+4,80 „	+10,34 „
⑤	$C_5$	—	—	-7,50 „	- 7,50 „
	7	—	—	-4,01 „	- 4,01 „
	8	—	—	-2,21 „	- 2,21 „
	9	—	—	-1,10 „	- 1,10 „
	$E_5$	—	—	-0,89 „	- 0,89 „

Tabelle 2.  
Zusammenstellung der Querkräfte.

Stab	Schnitt	Querkräfte aus Belastungsfall			Größtwerte der Querkräfte
		I. Gleichm. Belastung von Stab 2	II. Seitl. Erd- druck auf Stab 1	III. Seitl. Erd- druck auf d. Kragarm	
①	A <sub>1</sub>	- 1,48 t	-10,48 t	-3,88 t	-15,84 t
	1	- 1,48 „	- 0,40 „	-3,88 „	-11,76 „
	2	- 1,48 „	- 2,80 „	-3,88 „	- 8,16 „
	3	- 1,48 „	+ 0,34 „	-3,88 „	- 5,02 „
	B <sub>1</sub>	- 1,48 „	+ 3,02 „	-3,88 „	- 2,34 „
②	B <sub>2</sub>	+16,77 „	- 2,43 „	-6,54 „	+ 7,80 „
	4	+ 8,38 „	- 2,43 „	-6,54 „	- 0,59 „
	5	± 0 „	- 2,43 „	-6,54 „	- 8,97 „
	6	- 8,38 „	- 2,43 „	-6,54 „	-17,35 „
	C <sub>2</sub>	-16,77 „	- 2,43 „	-6,54 „	-25,74 „
③	C <sub>3</sub>	+ 1,48 „	- 3,03 „	-2,19 „	- 3,74 „
	D <sub>3</sub>	+ 1,48 „	- 3,03 „	-2,19 „	- 3,74 „
④	D <sub>4</sub>	0	- 4,67 „	-3,74 „	- 8,41 „
	A <sub>4</sub>	0	- 4,67 „	-3,74 „	- 8,41 „
⑤	C <sub>5</sub>	—	—	+6,06 „	+ 6,06 „
	7	—	—	+3,73 „	+ 3,73 „
	6	—	—	+1,94 „	+ 1,94 „
	9	—	—	+0,70 „	+ 0,70 „
	E <sub>5</sub>	—	—	0	0

### Fundamentkräfte.

Horizontaler Erddruck:

$$E_1 = 13,50 + 6,06 = 19,56 \text{ t.}$$

Lotrechter Erddruck:

$$E_2 = 1,90 \cdot 2,50 \cdot 3,58 \cdot 1,8 = 30,61 \text{ t.}$$

Eigenlasten:

Deckenplatte:  $2,05 \cdot 2,50 \cdot 0,16 = 0,82 \text{ cbm}$

Bodenplatte:  $2,85 \cdot 2,50 \cdot 0,16 = 1,14 \text{ „}$

Seitenwände:  $2 \cdot 2,00 \cdot 2,50 \cdot 0,15 = 1,50 \text{ „}$

Decken- und Bodenrippen:  $2 \cdot 0,30 \cdot 0,50 \cdot 2,85 = 0,86 \text{ „}$

Wandrippen:  $2 \cdot 0,30 \cdot 0,40 \cdot 2,32 = 0,56 \text{ „}$

$$G_1 = 4,88 \cdot 2,4 = 11,71 \text{ t}$$

Kragwand:  $3,03 \cdot 2,50 \cdot 0,15 = 1,14 \text{ cbm}$

Kragwandrippe:  $3,03 \cdot 0,30 \cdot 0,40 = 0,36 \text{ „}$

Obere Platte:  $2,50 \cdot 0,85 \cdot 0,15 = 0,32 \text{ „}$

$$1,82 \cdot 2,4 = 4,37 \text{ t}$$

Nutzlast auf der oberen Platte:  $0,85 \cdot 2,50 \cdot 1,0 = 2,13 \text{ t}$

$$G_2 = 6,50 \text{ t.}$$

Diese Lasten haben wir in Fig. 420 und 420a mittels Kraft- und Seileck zu einer Resultierenden zusammengesetzt und diese darauf in die beiden parallel zu derselben angenommenen Auflagerkräfte  $A^A = 10,50 \text{ t}$  und  $A^D = 42,00 \text{ t}$  zerlegt.

Die Armierung des Rahmenbinders ist aus Fig. 421 ersichtlich.

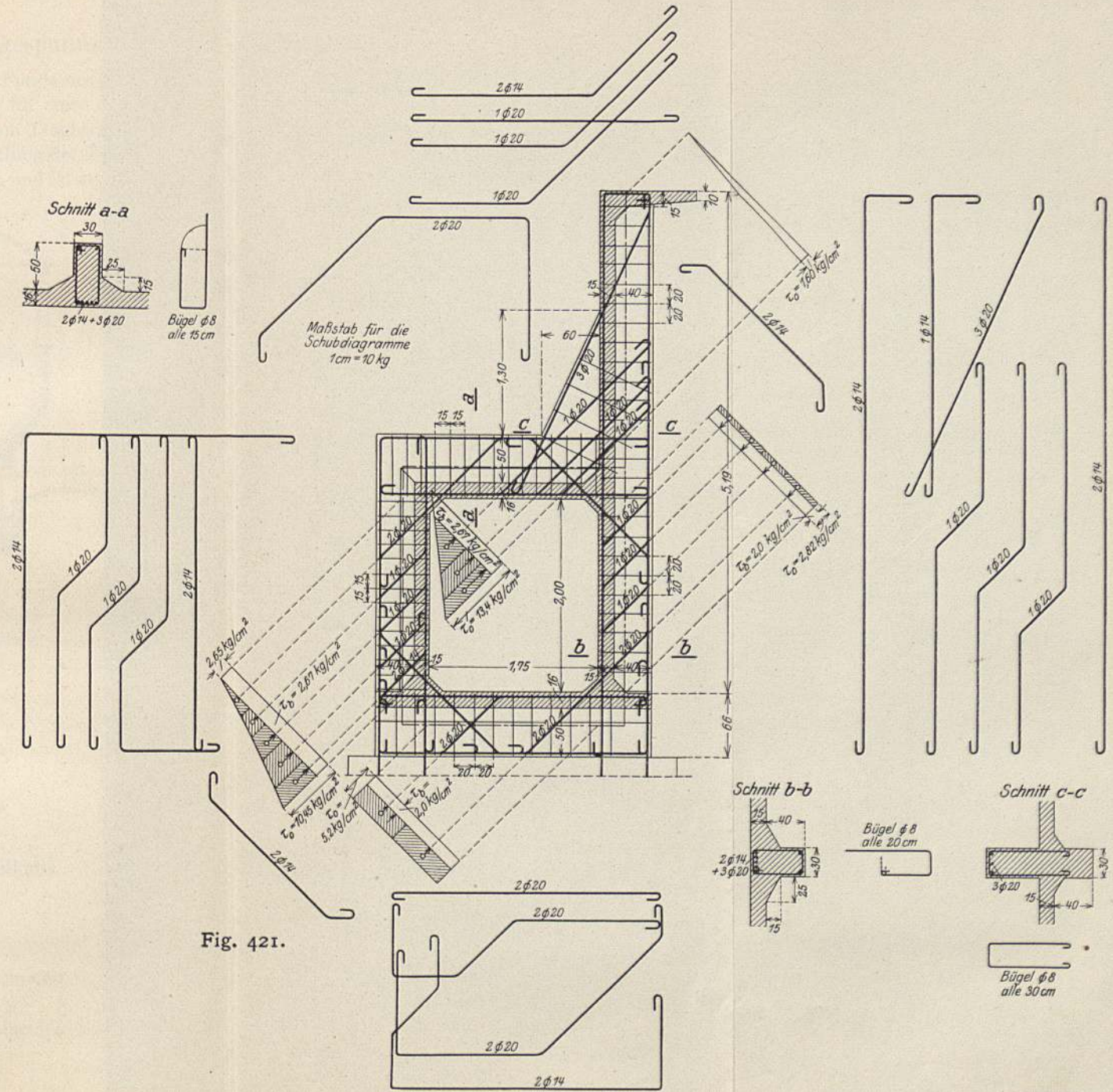
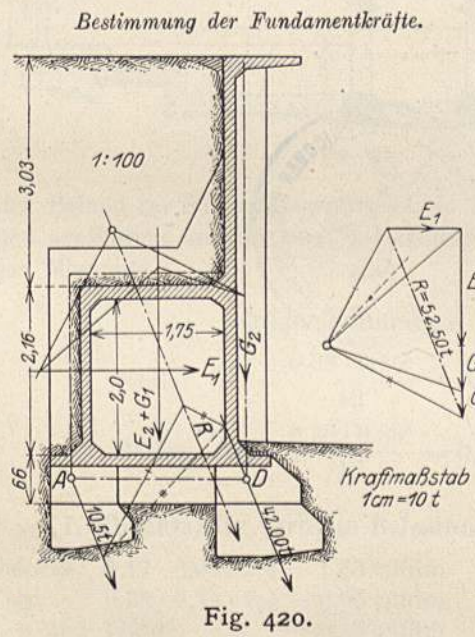


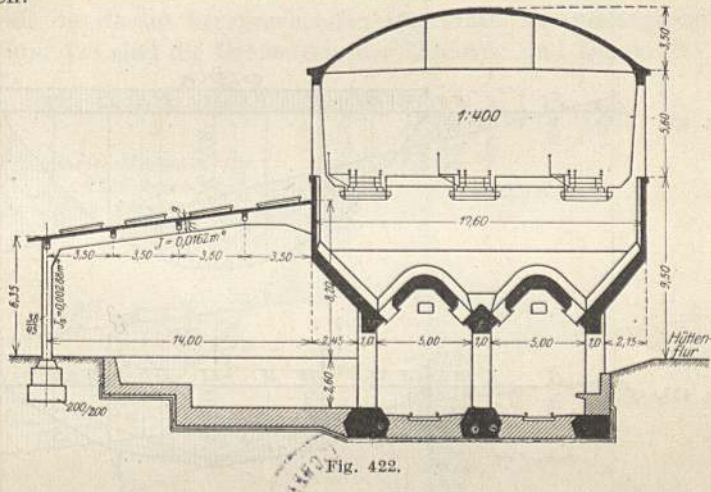
Fig. 420—421.



## Beispiel 7.

## Vordach eines Erzsilos, in letzterem eingespannt.

Infolge der festen Einspannung des Säulenfußes im Fundament und des Balkens im Silo (siehe Fig. 422) kann die Berechnung wie für einen durchlaufenden Balken auf 3 Stützen mit sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment und fester Einspannung an den Enden erfolgen. Die Ermittlung der Festpunkte wurde nach Teil I, Kap. III, 10, a) graphisch vorgenommen und ist aus Fig. 423 ersichtlich.



Da der Balken im Silo eingespannt ist, so kann er keine seitlichen Verschiebungen ausführen, und die aus R. I erhaltenen Momente sind daher die endgültigen Momente.

## Trägheitsmomente:

$$\text{Säule: } J_s = \frac{0,38 \cdot 0,45^3}{12} = 0,00288 \text{ m}^4,$$

$$\text{Balken: } J_b = \frac{0,38 \cdot 0,80^3}{12} = 0,01620 \text{ m}^4.$$

## I. Gleichmäßig verteilte Belastung des Balkens.

$$\text{Dachdecke: } 6,17 \cdot 0,09 \cdot 2,4 = 1,33 \text{ t/lfdm}$$

$$\text{Balken: } 0,38 \cdot 0,71 \cdot 2,4 = 0,65 \text{ t/lfdm}$$

$$\text{Schnee und Wind: } = 0,10 \text{ t/lfdm}$$

$$\underline{2,08 \text{ t/lfdm in der Dachneigung,}}$$

oder

$$g = 2,08 \cdot \frac{14,14}{14,00} = 2,10 \text{ t/lfdm in der Horizontalprojektion,}$$

womit folgt

$$M_0 = \frac{2,10 \cdot 14,00^2}{8} = 51,50 \text{ mt.}$$

Fig. 424 zeigt die Ermittlung der Momentenfläche infolge der Belastung  $g$ .

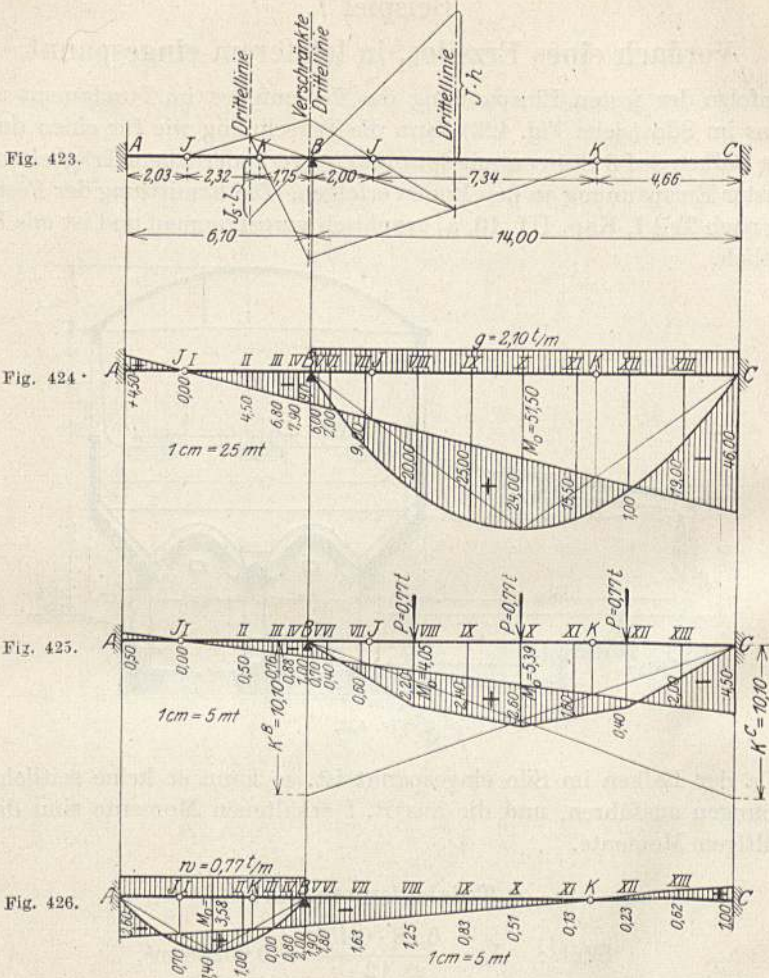


Fig. 423—426.

II. Einzellasten aus dem Eigengewicht der Nebenträger.

$$P = 0,20 \cdot 0,26 \cdot 6,17 \cdot 2,4 = 0,77 \text{ t,}$$

$$\text{in } \frac{l}{4} \text{ ist: } M_0 = \frac{3}{8} \cdot 0,77 \cdot 14,00 = 4,05 \text{ mt,}$$

$$\text{in } \frac{l}{2} \text{ ist: } M_0 = \frac{1}{2} \cdot 0,77 \cdot 14,00 = 5,39 \text{ mt.}$$

Die Kreuzlinienabschnitte sind nach Gl. (265 c):

$$k^B = k^C = \frac{15}{16} P \cdot l = \frac{15}{16} \cdot 0,77 \cdot 14,00 = 10,10 \text{ mt.}$$

Fig. 425 zeigt die Ermittlung der Momentenfläche infolge der Einzellasten  $P$ .

### III. Winddruck auf die Säule.

$$w = 6,17 \cdot 0,125 = 0,77 \text{ t/stgdm,}$$

$$M_0 = \frac{0,77 \cdot 6,10^2}{8} = 3,58 \text{ mt.}$$

Fig. 426 zeigt die Ermittlung der Momentenfläche infolge des Winddrucks auf die Säule.

In nachstehender Tabelle sind die Momente aus den einzelnen Belastungsfällen sowie die daraus hervorgehenden Querkräfte zusammengestellt; in den Fig. 427 und 428 sind die Größtwerte der Momente und Querkräfte graphisch dargestellt.

Die Staffellinie zeigt die Momente, die von den Eisen bei  $\sigma_e = 1200 \text{ kg/cm}^2$  aufgenommen werden können.

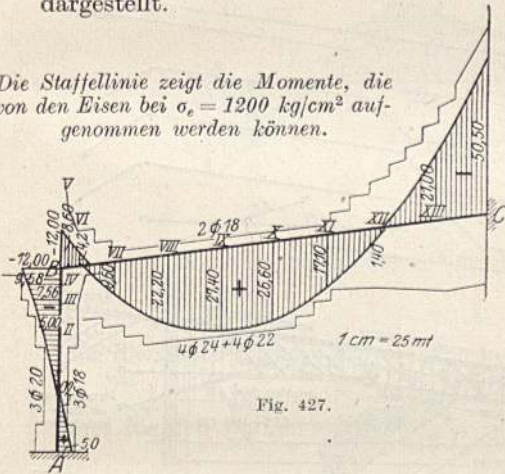


Fig. 427.

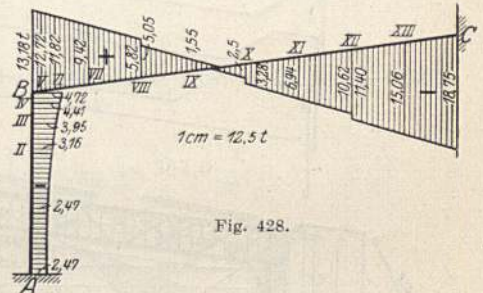


Fig. 428.

Tabelle der Momente und Querkräfte.

Schnitt	Momente infolge			Maximale Momente	Querkräfte infolge			Maximale Querkräfte
	gleichm. L.	Einzellast	Wind		gleichm. L.	Einzellast	Wind	
A	+ 4,50	+0,50	-2,60	+ 5,00	- 2,22	-0,25	+2,45	- 2,47
I	0,00	0,00	+0,70	+ 0,70	- 2,22	-0,25	+0,87	- 2,47
II	- 4,50	-0,50	+1,00	- 5,00	- 2,22	-0,25	-0,69	- 3,16
III	- 6,80	-0,76	0,00	- 7,56	- 2,22	-0,25	-1,48	- 3,95
IV	- 7,90	-0,88	-0,80	- 9,58	- 2,22	-0,25	-1,94	- 4,41
B	- 9,00	-1,00	-2,00	-12,00	l - 2,22	-0,25	-2,25	- 4,72
					r +12,06	+0,91	+0,21	+13,18
V	- 6,00	-0,70	-1,90	- 8,60	+11,60	+0,91	+0,21	+12,72
VI	- 2,00	-0,40	-1,80	- 4,20	+10,70	+0,91	+0,21	+11,82
VII	+ 9,00	+0,60	-1,63	+ 9,60	+ 8,30	+0,91	+0,21	+ 9,42
VIII	+20,00	+2,20	-1,25	+22,20	+ 4,70	l +0,91	+0,21	+ 5,82
					r +0,14	+0,21	+0,21	+ 5,05
IX	+25,00	+2,40	-0,83	+27,40	+ 1,20	+0,14	+0,21	+ 1,55
X	+24,00	+2,60	-0,51	+26,60	- 2,64	l +0,14	+0,21	- 2,50
					r -0,64	+0,21	+0,21	- 3,28
XI	+15,50	+1,60	-0,13	+17,10	- 6,30	-0,64	+0,21	- 6,94
XII	+ 1,00	+0,40	+0,23	+ 1,40	- 9,98	l -0,64	+0,21	-10,62
					r -1,41	+0,21	+0,21	-11,40
XIII	-19,00	-2,00	+0,62	-21,00	-13,65	-1,41	+0,21	-15,06
C	-46,00	-4,50	+1,00	-50,50	-17,34	-1,41	+0,21	-18,75

Fig. 429 zeigt die Armierung des Binders sowie die Schubdiagramme, auf Grund deren die Lage und Anzahl der aufgebogenen Eisen bestimmt wurde. Wollen wir den

### Einfluß der Temperaturänderungen

berücksichtigen, z. B. eine Temperaturerhöhung um  $t = +20^\circ$ , so berechnen wir die davon herrührenden Längenänderungen

$$\Delta = \alpha \cdot t \cdot l;$$

es ist für die Säule  $\Delta_1 = 0,000010 \cdot 20 \cdot 6,10 = 0,00122$  m,

und für den Balken  $\Delta_2 = 0,000010 \cdot 20 \cdot 14,14 = 0,00283$  m.

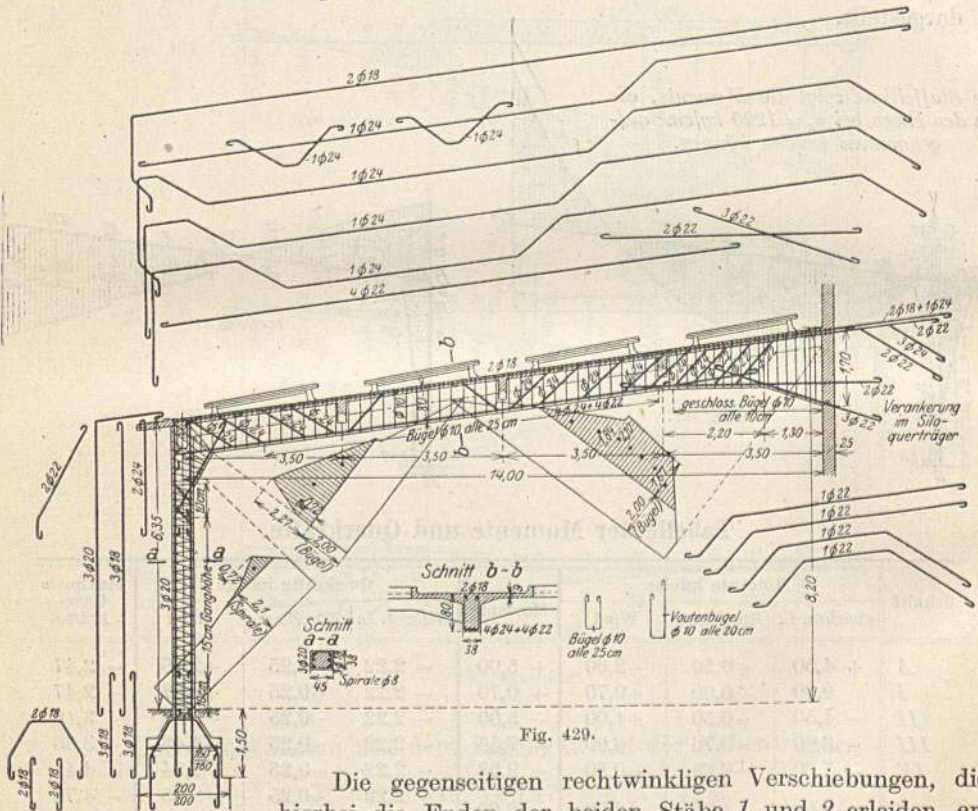


Fig. 429.

Die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen, die hierbei die Enden der beiden Stäbe 1 und 2 erleiden, ermitteln sich graphisch, oder rechnerisch zu

$$q_1 = \frac{\Delta_2 + \Delta_1 \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

und

$$q_2 = \frac{\Delta + \Delta \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

wobei  $\alpha$  den spitzen Winkel der beiden Stabrichtungen bedeutet (Fig. 430); es ist

$$q_1 = \frac{0,00283 + 0,00122 \cdot 0,139}{0,990} = 0,0030 \text{ m,}$$

$$q_2 = \frac{0,00122 + 0,00283 \cdot 0,139}{0,990} = 0,00163 \text{ m.}$$



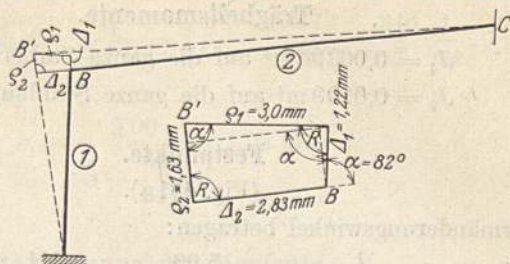


Fig. 430.

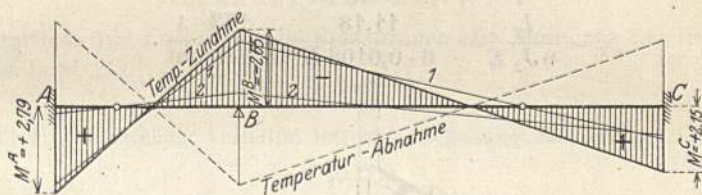


Fig. 430 a.

Die Momente infolge dieser Verschiebungen erhalten wir nach den Gl. (515) und (520), wobei

$$\text{für die Stütze} \quad E \beta_1 = \frac{l_1}{6 J_1} = \frac{6,10}{6 \cdot 0,00288} = 354,0 \frac{1}{\text{m}^3},$$

$$\text{und für den Balken} \quad E \beta_2 = \frac{l_2}{6 J_2} = \frac{14,14}{6 \cdot 0,0162} = 145,5 \frac{1}{\text{m}^3};$$

$$\text{Momente infolge } q_1: \quad M_1^B = - \frac{E \cdot 0,0030}{6,10 \cdot 354,0 \cdot 2,32} \cdot 1,75 = -2,20 \text{ mt},$$

$$M_1^A = + \frac{2,20}{1,75} \cdot 2,03 = +2,56 \text{ mt}.$$

$$\text{Momente infolge } q_2: \quad M_2^B = - \frac{E \cdot 0,00163}{14,14 \cdot 145,5 \cdot 7,34} \cdot 2,00 = -0,45 \text{ mt},$$

$$M_2^C = + \frac{0,45}{2,00} \cdot 4,66 = +1,05 \text{ mt}.$$

Fig. 430a zeigt den Verlauf der Momente.

### Beispiel 8.

## Vordach eines Gebäudes, an letzterem horizontal verschiebbar aufgelagert.

Im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel ist der Balken des Dachbinders der Fig. 431 auf der Mauer des anstoßenden Gebäudes horizontal verschiebbar aufgelagert, so daß der Dachbinder in die Kategorie der Rahmen fällt.

Dieser Dachbinder soll nun für nachstehende Belastungsfälle berechnet werden.

Die Festpunkte werden nach Teil I, Kap. II analytisch ermittelt.

**Trägheitsmomente.**

$J_1 = 0,00396 \text{ m}^4$  auf die ganze Stablänge,

$J_2 = 0,0108 \text{ m}^4$  auf die ganze Stablänge.

**Festpunkte.**

(Fig. 431 a).

Die Formänderungswinkel betragen:

$$\beta_1 = \frac{l_1}{6 J_1 E} = \frac{5,00}{6 \cdot 0,00396 E} = \frac{211}{E} \text{ mt},$$

$$\beta_2 = \frac{l_2}{6 J_2 E} = \frac{11,18}{6 \cdot 0,0108 E} = \frac{173}{E} \text{ mt}.$$

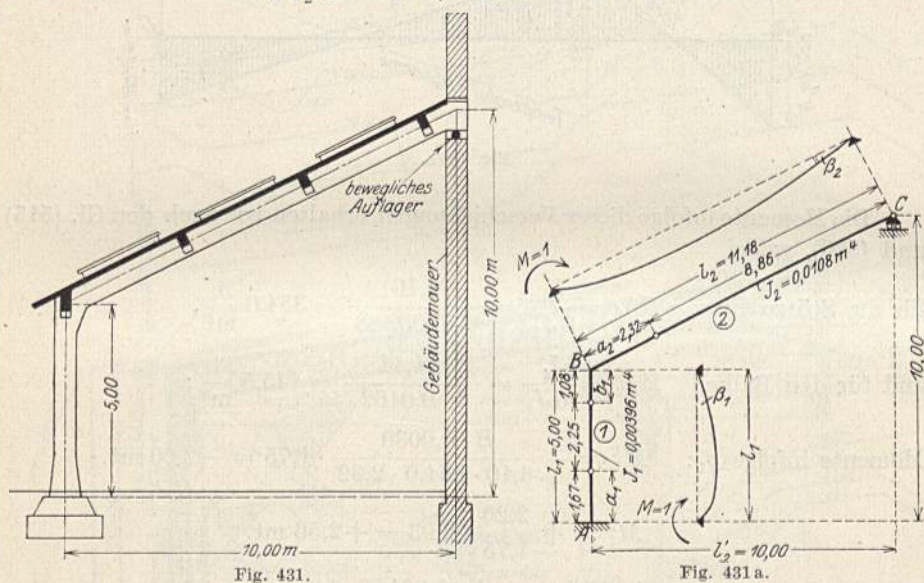


Fig. 431.

Fig. 431 a.

Nach den Hauptformeln (7) und (8) sind die Festpunktabstände

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^a + \epsilon^a} \quad \text{und} \quad b = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^b + \epsilon^b},$$

und für konstantes Trägheitsmoment (auf Stablänge) mit  $\alpha^a = \alpha^b = 3 \beta$  ist:

$$a = \frac{l}{3 + \frac{\epsilon^a}{\beta}} \quad \text{und} \quad b = \frac{l}{3 + \frac{\epsilon^b}{\beta}}.$$

Es ist am

Stab 1:

$$a_1 = \frac{l_1}{3} = \frac{5,00}{3} = 1,67 \text{ m},$$

Ferner ist

$$\text{Drehwinkel } \tau_1^B = \frac{l_1}{4 J E} = 1,5 \beta_1 = 1,5 \cdot \frac{211}{E} = \frac{317}{E} \text{ mt},$$

mit  $\epsilon_2^a = \tau_1^B$  erhält man am

Stab 2:

$$a_2 = \frac{11,18}{3 + \frac{317}{173}} = 2,32 \text{ m},$$

Ferner ist

$$\text{Drehwinkel } \tau_2^B = \frac{l_2}{3JE} = 2\beta_2 = 2 \cdot \frac{173}{E} = \frac{346}{E} \frac{1}{\text{mt}},$$

mit  $\epsilon_1^b = \tau_2^B$  ergibt sich am

$$\text{Stab I: } b_1 = \frac{5,00}{3 + \frac{346}{211}} = 1,08 \text{ m.}$$

### Bestimmung der Momente.

#### Rechnungsabschnitt I.

Wir ermitteln für nachstehende Belastungen die Momente bei festgehaltenem Säulenkopf *B*.

Belastungsfall I: Gleichmäßig verteilte, lotrechte Belastung des Balkens (Fig. 432).

$$g = 2,10 \text{ t/m.}$$

$$M_0 = \frac{2,10 \cdot 10,00^2}{8} = 26,20 \text{ mt.}$$

Fig. 432 zeigt die Ermittlung der Momente.

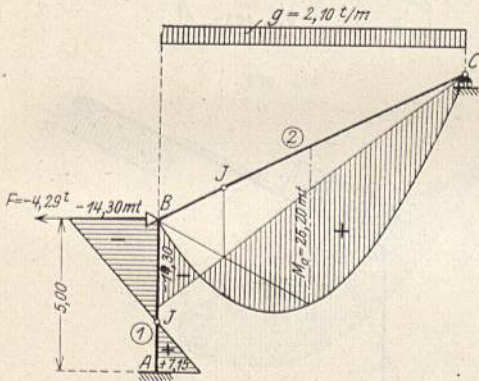


Fig. 432.

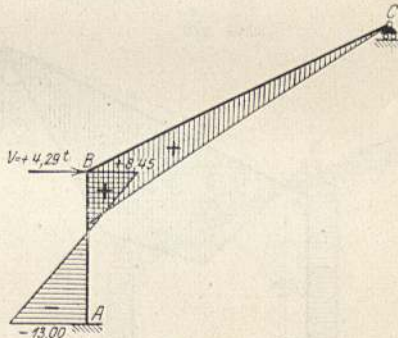


Fig. 432a.

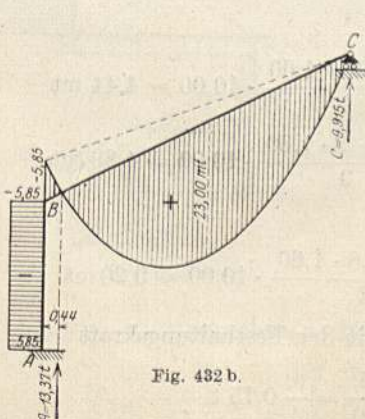


Fig. 432 b.

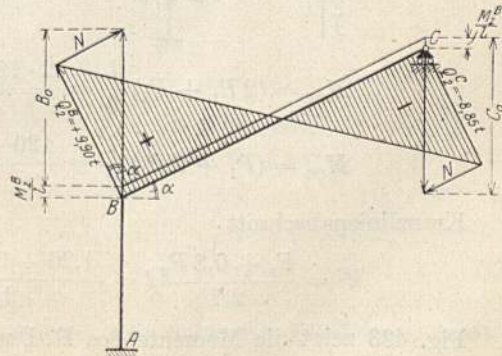


Fig. 432 c.

Da eine lotrechte Belastung, auch beim schiefen Balken, keinen Einfluß auf die Horizontalkomponente der Querkraftsresultierenden an einem Knotenpunkt besitzt, ist die Festhaltungskraft gleich der Querkraft am Säulenkopf:

$$F_{\text{hor}} = \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = \frac{M_1^B}{\frac{2}{3} \cdot l_1} = \frac{-14,30}{\frac{2}{3} \cdot 500} = -4,29 \text{ t.}$$

**Belastungsfall II: Einzellasten in gleichen Abständen (Fig. 433).**

$$P_1 = 1,20 \text{ t}; P_2 = 1,60 \text{ t.}$$

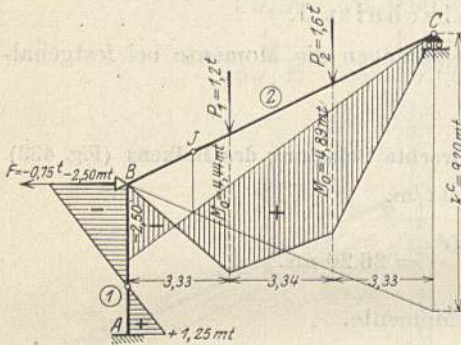


Fig. 433.

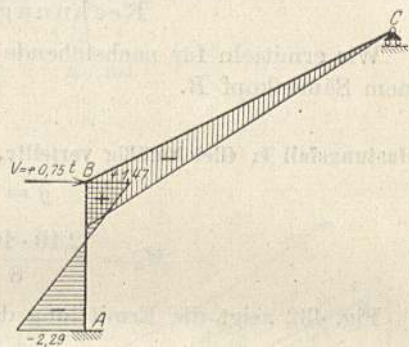


Fig. 433 a.

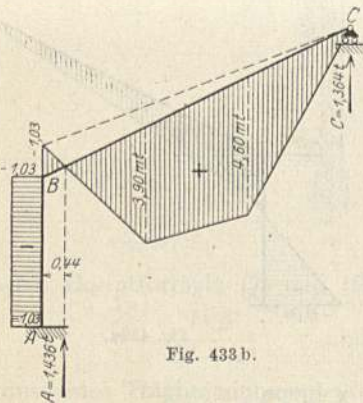


Fig. 433 b.

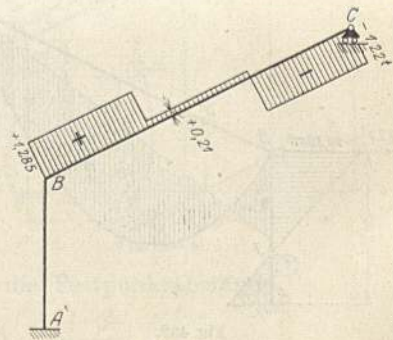


Fig. 433 c.

$$M_{01} = (2P_1 + P_2) \frac{l}{9} = \frac{2 \cdot 120 + 1,60}{9} \cdot 10,00 = 4,44 \text{ mt}$$

$$M_{02} = (P_1 + 2P_2) \frac{l}{9} = \frac{120 + 2 \cdot 1,60}{9} \cdot 10,00 = 4,89 \text{ mt}$$

Kreuzlinienabschnitt

$$k^C = \frac{P_1 + 0,8 P_2}{2,7} l = \frac{1,20 + 0,8 \cdot 1,60}{2,7} \cdot 10,00 = 9,20 \text{ mt.}$$

Fig. 433 zeigt die Momente des R. I mit der Festhaltungskraft

$$F_{\text{hor}} = \frac{-2,50}{\frac{2}{3} \cdot 500} = -0,75 \text{ t.}$$

**Belastungsfall III: Windbelastung des Balkens (Fig. 434).**

Die horizontale Belastung betrage  $w_0 = 0,90 \text{ t/m}$ .  
Normal zum Balken wirkt dann

$$w = w_0 \sin^2 \alpha = 0,90 \cdot 0,446^2 = 0,18 \text{ t/m},$$

womit

$$M_0 = \frac{0,18 \cdot 11,18^2}{8} = 2,82 \text{ mt.}$$

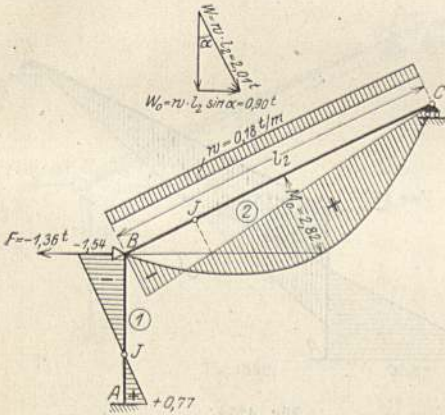


Fig. 434.

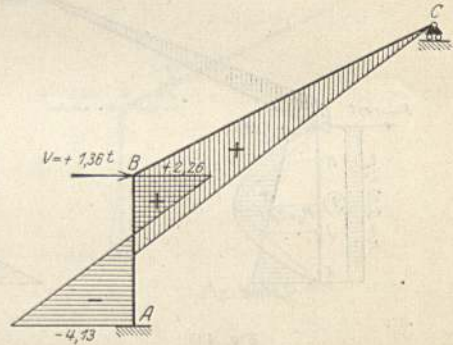


Fig. 434 a.

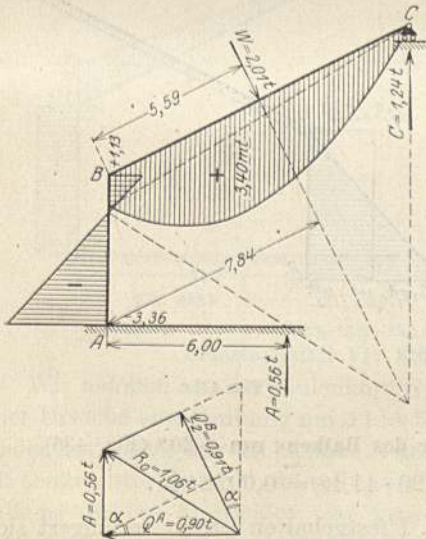


Fig. 434 b.

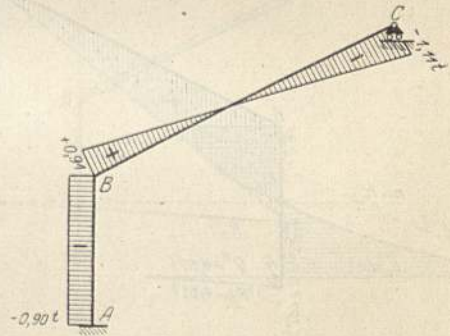


Fig. 434 c.

Den in Fig. 434 ermittelten Momenten entspricht die Festhaltungskraft

$$F_{\text{hor}} = -W_0 + \frac{M_1^B}{\frac{2}{3}l_1} = -0,90 - \frac{1,54}{\frac{2}{3} \cdot 5,00} = -1,36 \text{ t.}$$

## Belastungsfall IV: Windbelastung der Säule (Fig. 435).

$$w = 0,90 \text{ t/m.}$$

$$M_0 = \frac{0,90 \cdot 5,00^2}{8} = 2,81 \text{ mt.}$$

Fig. 435 zeigt den Momentenverlauf. Die horizontale Festhaltungskraft beträgt hier

$$F_{\text{hor}} = Q_0 + \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = -\frac{0,90 \cdot 5,00}{2} + \frac{-0,90 + 2,30}{5,00} = -1,97 \text{ t.}$$

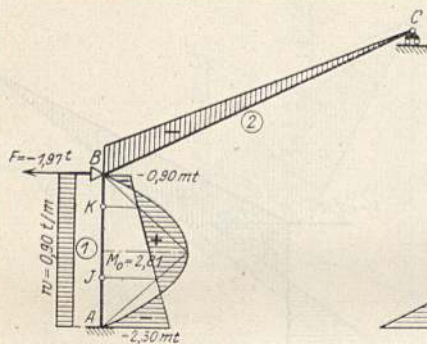


Fig. 435.

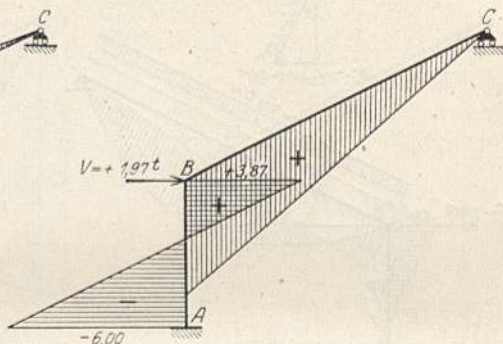


Fig. 435 a.

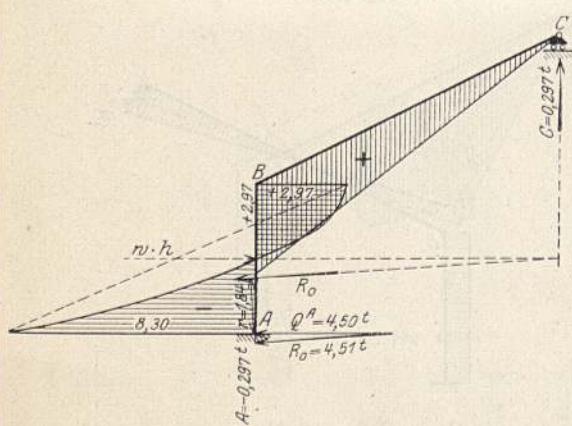


Fig. 435 b.

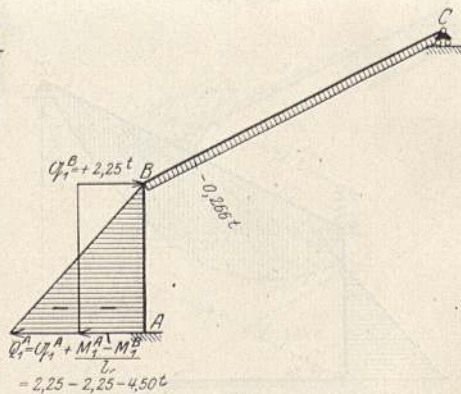


Fig. 435 c.

Belastungsfall V: Temperaturänderung des Balkens um  $+20^\circ$  (Fig. 436).

$$\Delta = \alpha \cdot t \cdot l_2 = 0,000010 \cdot 20 \cdot 11,18 = 0,00224 \text{ m.}$$

Da der Knotenpunkt B während R. I. festgehalten ist, so verlängert sich der Balken (Stab 2) um  $\Delta$  nach rechts, und da sich ferner das Rollenlager in C nicht von seiner Unterlage abheben soll, so gelangt das Balkenende C in die aus Fig. 436 ersichtliche neue Lage C'. Dadurch erleidet der Balken eine „gegenseitige rechtwinklige Verschiebung“  $\varrho$  seiner Enden, und zwar

$$\varrho = \Delta \cdot \text{tg} \alpha = 0,00224 \cdot 0,5 = 0,00112 \text{ m.}$$

Nach Gl. (515) entsteht infolge  $\varrho$  unter Berücksichtigung, daß  $b_2 = 0$ :

$$M_2^B = \frac{\varrho}{l_2 \cdot \beta_2 \cdot (l_2 - a_2)} \cdot a_2 = - \frac{0,00112 \cdot E}{11,18 \cdot 173 \cdot 8,86} \cdot 2,32 = - 0,32 \text{ mt.}$$

Dieses Moment leiten wir durch den unteren Festpunkt der Säule sowie in das Ende  $C$  des Balkens (Fig. 436). Die im gedachten Lager in  $B$  auftretende Festhaltungskraft ist:

$$F_{\text{hor}} = \frac{- 0,32}{\frac{2}{3} \cdot 5,00} = - 0,096 \text{ t.}$$

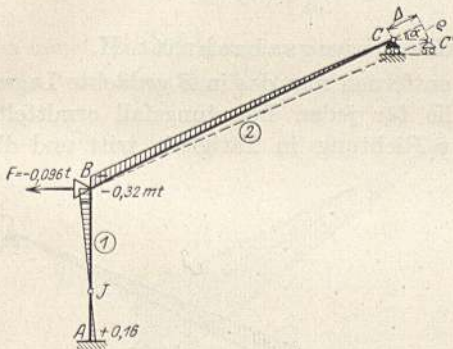


Fig. 436.

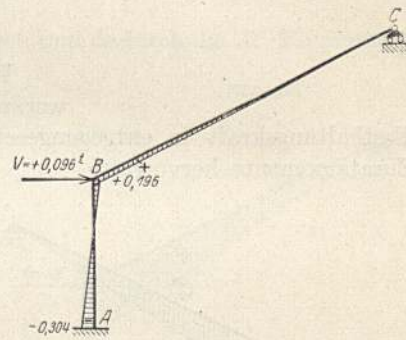


Fig. 436 a.

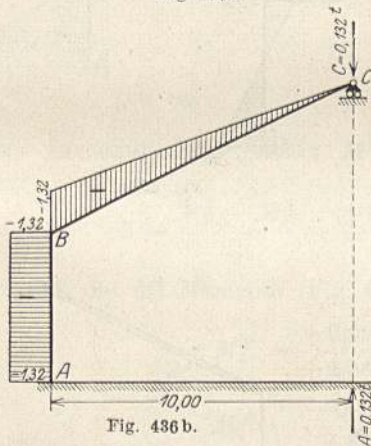


Fig. 436 b.

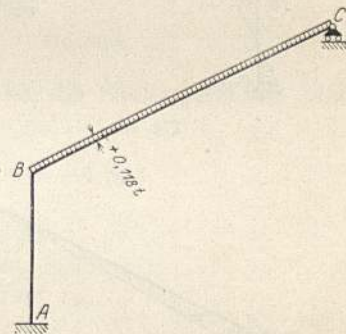


Fig. 436 c.

### Belastungsfall VI: Stützensenkung (Fig. 437).

Wir nehmen an, der Säulenkopf  $B$  oder die ganze Säule erleide aus irgendeiner Ursache eine Senkung um  $\Delta 1 = 5 \text{ mm}$ . Während  $R. I$  sei Knotenpunkt  $B$  wieder horizontal unverschiebbar festgehalten, und zwar durch ein Rollenlager mit senkrechter Bahn; dann rollt das Balkenende  $C$  nach  $C'$  und die Enden des Balkens (Stabes 2) erleiden eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho_2$ , welche wir entweder nach Teil II, Kap. II graphisch (Fig. 437), oder aus dem Dreieck  $CC''C'$  der graphischen Konstruktion analytisch erhalten zu:

$$\varrho_2 = \frac{\Delta 1}{\cos \alpha} = \frac{\Delta 1}{\frac{l_2}{l_2}} = \frac{0,005}{\frac{10,00}{11,18}} = 0,0056 \text{ m.}$$

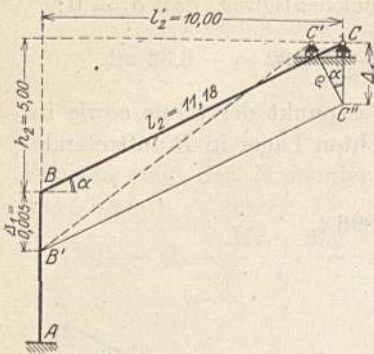


Fig. 437.

Bezugnehmend auf den vorherigen Belastungsfall erhalten wir durch Proportion

$$M_2^B = + \frac{0,32}{0,00112} \cdot 0,0056 = +1,60 \text{ mt,}$$

welches Moment wir wieder über die Stäbe 1 und 2 weiterleiten (Fig. 438); die zugehörige Festhaltungskraft ist:

$$F_{\text{hor}} = + \frac{1,60}{\frac{2}{3} \cdot 5,00} = +0,48 \text{ t.}$$

Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen nun das in *B* gedachte Lager, worauf die für jeden Belastungsfall ermittelte Festhaltungskraft in entgegengesetzter Richtung in Tätigkeit tritt und die Zusatzmomente hervorruft.

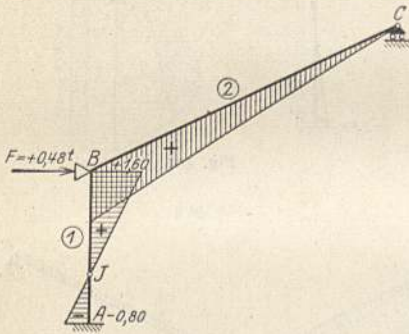


Fig. 438.

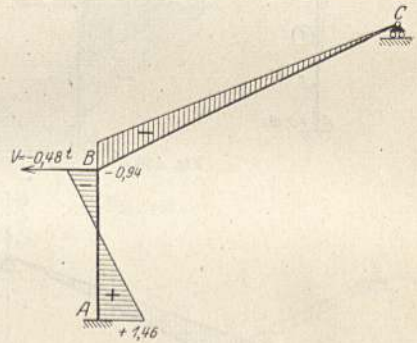


Fig. 438a.

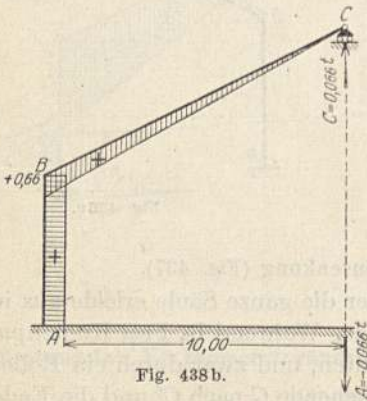


Fig. 438b.

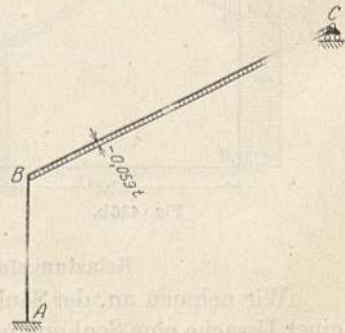


Fig. 438c.

Um diese zu erhalten, bestimmen wir zunächst die Momente  $M'$  und  $M^*$ , und zwar wie folgt:

Wir verschieben den Knotenpunkt *B* nach rechts um  $\Delta = 1$  cm. Dabei verschiebt sich auch Knotenpunkt *C* um das gleiche Maß, weil die Bahn des Punktes *C* normal zum Stab 1 steht; der Stab 2 verschiebt sich also nur parallel zu sich selbst und seine Enden erleiden keine gegenseitigen Verschiebungen.



Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung des Stabes  $I$  ist gleich der gegebenen Verschiebung, also

$$e_1 = 0,01 \text{ m.}$$

Nach den Gl. (515) und (520) erhalten wir nun die dadurch im Stab  $I$  hervorgerufenen Momente zu:

$$M_1^B = + \frac{0,01 \cdot 2100000}{5,00 \cdot 211 \cdot 2,25} \cdot 1,08 = +9,55 \text{ mt,}$$

$$M_1^A = - \frac{9,55}{1,08} \cdot 1,67 = -14,75 \text{ mt,}$$

von denen wir  $M_1^B$  über den Stab 2 weiterleiten und dadurch die  $M'$ -Momentenfläche erhalten (Fig. 439).

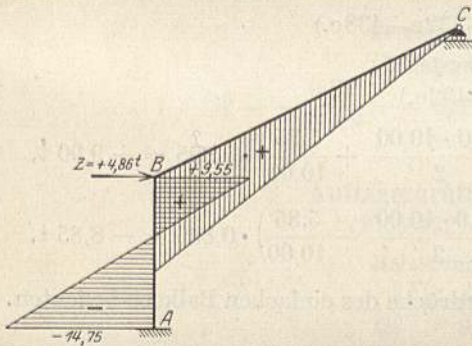


Fig. 439.

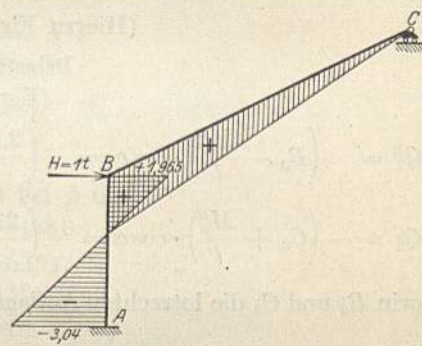


Fig. 439a.

Die Erzeugungskraft dieser  $M'$ -Momente ist die Säulenquerkraft und beträgt

$$Z = \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = \frac{+9,55 + 14,75}{5,00} = +4,86 \text{ t,}$$

so daß sich die  $M^*$ -Momente (Fig. 440) ergeben zu:

$$M_1^{B*} = \frac{+9,55}{+4,86} = +1,965 \text{ mt}$$

und

$$M_1^{A*} = \frac{-14,75}{4,86} = -3,04 \text{ mt.}$$

Die Zusatzmomente für jeden Belastungsfall erhalten wir nun durch Multiplikation der  $M^*$ -Momente mit der jeweiligen Verschiebungskraft, und zwar sind die Eckmomente der:

$$\text{Zusatzmomente für Belastungsfall I } \left\{ \begin{array}{l} M_1^B = 1,965 \cdot 4,29 = + 8,45 \text{ mt} \\ M_1^A = - 3,04 \cdot 4,29 = - 13,00 \text{ ,,} \end{array} \right\} \quad (\text{Fig. 432a})$$

$$\text{Zusatzmomente für Belastungsfall II } \left\{ \begin{array}{l} M_1^B = 1,965 \cdot 0,75 = + 1,47 \text{ ,,} \\ M_1^A = - 3,04 \cdot 0,75 = - 2,28 \text{ ,,} \end{array} \right\} \quad (\text{Fig. 433a})$$

$$\text{Zusatzmomente für Belastungsfall III } \left\{ \begin{array}{l} M_1^B = 1,965 \cdot 1,36 = + 2,67 \text{ ,,} \\ M_1^A = - 3,04 \cdot 1,36 = - 4,13 \text{ ,,} \end{array} \right\} \quad (\text{Fig. 434a})$$

$$\text{Zusatzmomente für Belastungsfall IV} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1^B = 1,965 \cdot 1,97 = + 3,87 \text{ mt} \\ M_1^A = - 3,04 \cdot 1,97 = - 6,00 \text{ „} \end{array} \right\} \quad (\text{Fig. 435a})$$

$$\text{Zusatzmomente für Belastungsfall V} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1^B = 1,965 \cdot 0,096 = + 0,188 \text{ „} \\ M_1^A = - 3,04 \cdot 0,096 = - 0,292 \text{ „} \end{array} \right\} \quad (\text{Fig. 436a})$$

$$\text{Zusatzmomente für Belastungsfall VI} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1^B = - 1,965 \cdot 0,48 = - 0,94 \text{ „} \\ M_1^A = + 3,04 \cdot 0,48 = + 1,46 \text{ „} \end{array} \right\} \quad (\text{Fig. 438a})$$

Durch Addition der Momente aus R. I und R. II erhalten wir nun die in den Fig. 432b—438b dargestellten endgültigen Momente für die einzelnen Belastungsfälle.

### Bestimmung der Querkräfte.

(Hierzu Fig. 432c—438c.)

#### Belastungsfall I.

(Fig. 432c.)

$$Q_2^B = \left( B_0 - \frac{M_2^B}{l} \right) \cdot \cos \alpha = \left( \frac{2,10 \cdot 10,00}{2} + \frac{5,85}{10,00} \right) \cdot 0,895 = + 9,90 \text{ t,}$$

$$Q_2^C = - \left( C_0 + \frac{M_2^B}{l} \right) \cdot \cos \alpha = - \left( \frac{2,10 \cdot 10,00}{2} - \frac{5,85}{10,00} \right) \cdot 0,895 = - 8,85 \text{ t,}$$

worin  $B_0$  und  $C_0$  die lotrechten Auflagerdrücke des einfachen Balkens bedeuten.

#### Belastungsfall II.

(Fig. 433c.)

$$B_0 = \frac{1,20 \cdot 6,67 + 1,60 \cdot 3,33}{10,00} = + 1,333 \text{ t,}$$

$$C_0 = 1,20 + 1,60 - 1,333 = + 1,467 \text{ t,}$$

$$\text{Querkraft } Q_2^B = \left( 1,333 + \frac{1,03}{10,00} \right) 0,895 = + 1,285 \text{ t,}$$

unter der Last  $P_1$ :  $Q_1 = Q_2^B - P_1 \cdot \cos \alpha = + 1,285 - 1,20 \cdot 0,895 = + 0,21 \text{ t,}$

„ „ „  $P_2$ :  $Q_2 = Q_1 - P_2 \cos \alpha = 0,21 - 1,60 \cdot 0,895 = - 1,22 \text{ t,}$

am Auflager C:  $Q_2^C = - 1,22 \text{ t.}$

#### Belastungsfall III.

(Fig. 434c.)

$$Q_1^A = \frac{M_1^A - M_1^B}{l_1} = \frac{- 3,36 - 1,13}{5,00} = - 0,90 \text{ t,}$$

$$Q_2^B = Q_2^B - \frac{M_2^B}{l_2} = \frac{0,18 \cdot 11,18}{2} - \frac{1,13}{11,18} = + 0,91 \text{ t,}$$

$$Q_2^C = Q_2^C - \frac{M_2^B}{l_2} = - \frac{0,18 \cdot 11,18}{2} - \frac{1,13}{11,18} = - 1,11 \text{ t.}$$

**Belastungsfall IV.**

(Fig. 435 c.)

$$Q_1^A = Q_1^A + \frac{M_1^A - M_1^B}{l_1} = -\frac{0,90 \cdot 5,00}{2} + \frac{-8,30 - 2,97}{5,00} = -4,50 \text{ t,}$$

$$Q_1^B = Q_1^B + \frac{M_1^A - M_1^B}{l_1} = +\frac{0,90 \cdot 5,00}{2} + \frac{-8,30 - 2,97}{5,00} = 0,00 \text{ t,}$$

$$Q_2^B = -\frac{M_2^B}{l_2} = -\frac{2,97}{11,18} = -0,266 \text{ t; } Q_2^C = +0,266 \text{ t.}$$

**Belastungsfall V.**

(Fig. 436 c.)

$$Q_2^B = -\frac{M_2^B}{l_2} = \frac{+1,32}{11,18} = +0,118 \text{ t; } Q_2^C = -0,118 \text{ t.}$$

**Belastungsfall VI.**

(Fig. 438 c.)

$$Q_2^B = -\frac{0,66}{11,18} = -0,059 \text{ t; } Q_2^C = +0,059 \text{ t.}$$

**Auflagerkräfte bei A u. C.**

(Fig. 432 b—438 b.)

**Belastungsfall I.**

(Fig. 432 b.)

$$\frac{Q_2^B}{\cos \alpha} = \frac{9,90}{0,895} = 11,085 \text{ t,}$$

$$\text{Eigenlast der Säule: } 0,38 \cdot 0,50 \cdot 5,00 \cdot 2,4 = \frac{2,280}{A} = 13,365 \text{ t}$$

$$\text{Exzentrizität } e = \frac{M}{A} = \frac{5,85}{13,365} = 0,44 \text{ m,}$$

$$C = \frac{Q_2^C}{\cos \alpha} = \frac{8,85}{0,895} = 9,915 \text{ t.}$$

**Belastungsfall II.**

(Fig. 433 b.)

$$A = \frac{Q_2^B}{\cos \alpha} = \frac{1,285}{0,895} = 1,436 \text{ t,}$$

$$e = \frac{1,03}{1,436} = 0,72 \text{ m,}$$

$$C = \frac{1,22}{0,895} = 1,364 \text{ t.}$$

**Belastungsfall III.**

(Fig. 434 b.)

$$A = \frac{Q_2^B}{\cos \alpha} - Q_1^A \cdot \text{tg } \alpha = \frac{0,91}{0,895} - 0,90 \cdot \frac{1}{2} = 0,56 \text{ t,}$$

$$e = \frac{3,36}{0,56} = 6,00 \text{ m; } C = \frac{1,11}{0,895} = 1,24 \text{ t.}$$

**Belastungsfall IV.**

(Fig. 435 b.)

$$A = -C = \frac{Q_2^B}{\cos \alpha} = \frac{-0,266}{0,895} = -0,297 \text{ t,}$$

$$R_o = \sqrt{4,50^2 + 0,297^2} = 4,51 \text{ t.}$$

Abstand der Resultierenden  $R_o$  von der Einspannstelle:  $r = \frac{M_1^A}{R_o} = \frac{8,30}{4,51} = 1,84 \text{ m.}$

**Belastungsfall V.**

(Fig. 436 b.)

$$A = -C = \frac{Q_2^B}{\cos \alpha} = \frac{0,118}{0,895} = 0,132 \text{ t,}$$

$$e = \frac{M_1^B}{A} = \frac{1,32}{0,132} = 10,00 \text{ m.}$$

**Belastungsfall VI.**

(Fig. 438 b.)

$$A = -C = \frac{Q_2^B}{\cos \alpha} = \frac{-0,059}{0,895} = -0,066 \text{ t.}$$

$$e = \frac{M_1^B}{A} = \frac{0,66}{0,066} = 10,00 \text{ m.}$$

Eine Kontrolle für die richtig ermittelten Momente bietet sich uns darin, daß wir die als Querkraft ermittelte Auflagerkraft  $C$  als statisch unbestimmte Größe betrachten und dann von neuem in jedem Belastungsfall die Momente ermitteln. Dann ergibt sich bei:

**Belastungsfall I.**

$$M_1^A = M_1^B = C \cdot l - \frac{g l^2}{2} = 9,915 \cdot 10,00 - \frac{2,10 \cdot 10,00^2}{2} = -5,85 \text{ mt.}$$

**Belastungsfall II.**

$$\begin{aligned} M_1^A = M_1^B &= C \cdot l - (P_1 + 2 P_2) \frac{l}{3} \\ &= 1,364 \cdot 10,0 - (1,2 + 2 \cdot 1,6) \frac{10,0}{3} = -1,03 \text{ mt.} \end{aligned}$$

**Belastungsfall III.**

$$M_1^A = 1,24 \cdot 10,00 - 2,01 \cdot 7,84 = -3,36 \text{ mt,}$$

$$M_1^B = 1,24 \cdot 10,00 - 2,01 \cdot 5,59 = +1,13 \text{ mt.}$$

**Belastungsfall IV.**

$$M_1^A = 0,297 \cdot 10,00 - \frac{0,90 \cdot 5,00^2}{2} = -8,30 \text{ mt,}$$

$$M_1^B = 0,297 \cdot 10,00 = +2,97 \text{ mt.}$$

**Belastungsfall V.**

$$M_1^A = M_1^B = 0,132 \cdot 10,00 = -1,32 \text{ mt.}$$

**Belastungsfall VI.**

$$M_1^A = M_1^B = 0,066 \cdot 10,00 = +0,66 \text{ mt.}$$





Stab 1: 
$$b_1 = \frac{l_1}{3 + \frac{\epsilon_1^b}{\beta_1}} = \frac{5,25}{3 + \frac{348,0}{180,0}} = 1,07 \text{ m.}$$

**Verteilungsmaße  $\mu$ .**

Nach Gl. (37) erhalten wir für  $M_4^C = 1$ :

am Stab 2: 
$$\mu_{4-2}^C = \frac{\tau_3^C}{\tau_2^C + \tau_3^C} = \frac{332}{343 + 332} = 0,492$$

und am Stab 3: 
$$\mu_{4-3}^C = 1 - 0,492 = 0,508.$$

**Ermittlung der Momente  $M^*$  infolge einer Horizontalkraft  $H = +1,0 \text{ t}$ .**

Wir ermitteln zunächst die einer horizontalen Verschiebung des Stabes 2 um  $\Delta = +0,01 \text{ m}$  (nach rechts) entsprechenden Momente  $M'$  und die dabei auftretende horizontale Erzeugungskraft  $Z$ , und erhalten dann die der Kraft  $H = 1$  entsprechenden Momente  $M^* = \frac{M'}{Z}$  nach Gl. (529).

Bei der horizontalen Verschiebung von Stab 2 erleidet derselbe nur eine Parallelverschiebung, und demnach liefern nur die Stäbe 1 und 3 Anteile zu den Momenten  $M'$ .

Momente infolge der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung  $\varrho_1 = 0,01 \text{ m}$ .

Mit  $E = 2100000 \text{ t/m}^2$  erhalten wir nach den Gl. (515) und (520) die Momente:

$$M_1^B = \frac{\varrho_1}{l_1 \cdot \beta_1 \cdot (l_1 - a_1 - b_1)} \cdot b_1 = + \frac{0,01 \cdot 2100000}{5,25 \cdot 180 \cdot 2,43} \cdot 1,07 = +9,70 \text{ mt.}$$

$$M_1^A = - \frac{9,70}{1,07} \cdot 1,75 = -15,95 \text{ mt.}$$

$M_1^B$  leiten wir durch die Festpunkte  $K_2$  und  $J_3$  weiter (Fig. 442).

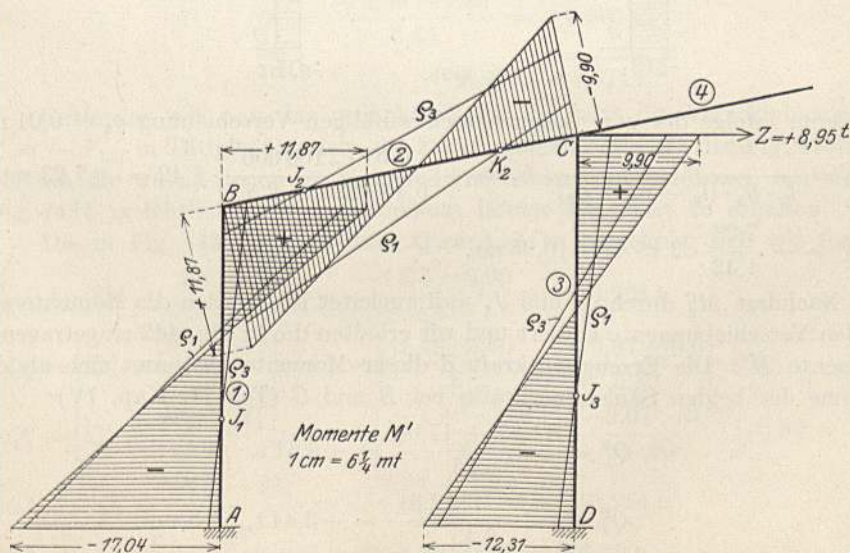


Fig. 442.

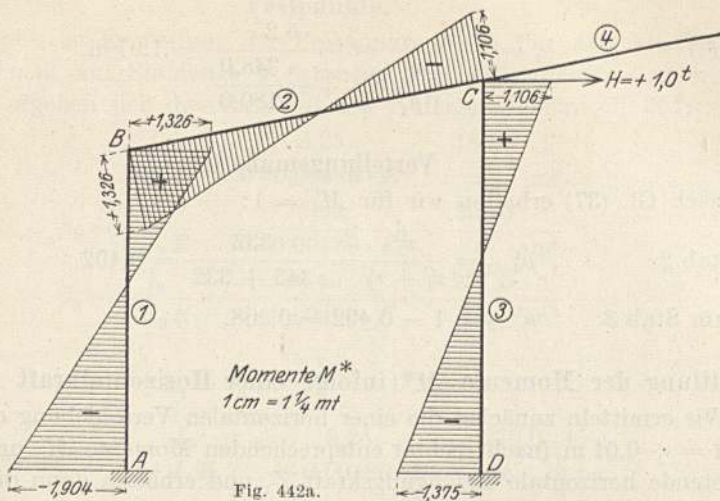


Fig. 442a.

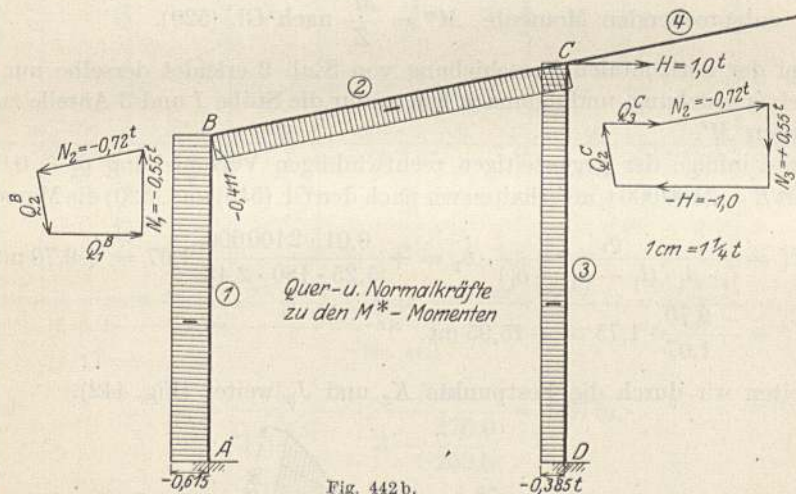


Fig. 442b.

Momente infolge der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung  $e_3 = 0,01$  m:

$$M_3^C = \frac{e_3}{l_3 \cdot \beta_3 \cdot (l_3 - a_3 - b_3)} \cdot b_3 = + \frac{0,01 \cdot 2100000}{6,45 \cdot 221,6 \cdot 2,88} \cdot 1,42 = +7,23 \text{ mt.}$$

$$M_3^D = - \frac{7,23}{1,42} \cdot 2,15 = -10,98 \text{ mt.}$$

Nachdem  $M_3^C$  durch  $J_2$  und  $J_1$  weitergeleitet ist, werden die Momente aus beiden Verschiebungen  $e$  addiert und wir erhalten die in Fig. 442 eingetragenen Momente  $M'$ . Die Erzeugungskraft  $Z$  dieser Momente bestimmt sich als die Summe der beiden Säulenquerkräfte bei B und C (Teil II, Kap. IV):

$$Q_1^B = \frac{11,87 + 17,04}{5,25} = +5,51 \text{ t,}$$

$$Q_3^C = \frac{9,90 + 12,31}{6,45} = +3,44 \text{ t,}$$

$$Z = +8,95 \text{ t.}$$



Die der horizontalen Kraft  $H = +1,0$  t entsprechenden Momente  $M^*$  zeigt Fig. 442a; in Fig. 442b sind die den  $M^*$ -Momenten entsprechenden Querkräfte dargestellt.

### Ermittlung der Momente und Querkräfte für die verschiedenen Belastungsfälle.

#### 1. Eigengewicht des Balkens.

(Fig. 443—443c).

Belastung:  $g_0 = 1,46$  t/m.

Für den lfdm. Horizontalprojektion ist  $g = \frac{g_0}{\cos \alpha} = \frac{1,46}{0,98} = 1,49$  t/m.  
Die  $M_0$ -Momente sind für

$$\text{Stab 2: } M_0^m = \frac{g l^2}{8} = \frac{1,49 \cdot 5,80^2}{8} = +6,28 \text{ mt.}$$

$$\text{Stab 4: } M_4^C = -\frac{g l^2}{2} = -\frac{1,49 \cdot 3,80^2}{2} = -10,75 \text{ mt.}$$

Von  $M_4^C$  gelangt

$$\text{in Stab 2: } M_2^C = \mu_{4-2}^C \cdot M_4^C = -0,492 \cdot 10,75 = -5,29 \text{ mt,}$$

$$\text{in Stab 3: } M_3^C = -10,75 - (-5,29) = -5,46 \text{ mt.}$$

Da die Säulenköpfe unverschiebbar vorausgesetzt sind (R. I), können wir diese Momente durch die entsprechenden Festpunkte weiterleiten; wir vereinigen die erhaltenen Momente mit denen vom Balken 2, die wir durch Konstruktion der Schlußlinie und Weiterleitung der Stützenmomente, ebenfalls durch die Festpunkte, erhalten haben (Fig. 443). Hierbei ist der Balken festgehalten von den beiden Säulenquerkräften, welche sich zu der im gedachten Lager in  $C$  wirkenden Festhaltungskraft  $F_{\text{hor}}$  zusammensetzen; es ist:

$$Q_1^B = \frac{-1,42 - 0,71}{5,25} = -0,406 \text{ t,}$$

$$Q_3^C = \frac{-2,86 - 1,43}{6,45} = -0,665 \text{ t,}$$

$$F_{\text{hor}} = -1,071 \text{ t.}$$

Entfernen wir nun das gedachte Lager, so tritt die Verschiebungskraft  $V = -F_{\text{hor}}$  in Tätigkeit, welche die Zusatzmomente  $V \cdot M^*$  der Fig. 443a hervorruft, die wir zu denen für festgehaltene Säulenköpfe addieren, um die aus Fig. 443b ersichtlichen Gesamtmomente infolge Eigenlast zu erhalten.

Die in Fig. 443c dargestellten Querkräfte berechnen sich wie folgt:

$$\text{Stab 1: } Q_1^A = \frac{M_1^A - M_1^B}{l_1} = \frac{-1,33 - 0,00}{5,25} = -0,254 \text{ t.}$$

$$\text{Stab 2: } \begin{cases} Q_2^B = \left[ \varrho_2^B + \frac{M_2^C - M_2^B}{l} \right] \cos \alpha = \left[ \frac{1,49 \cdot 5,80}{2} + \frac{-9,07 - 0,0}{5,80} \right] \cdot 0,98 = +2,70 \text{ t} \\ Q_2^C = \left[ \varrho_2^C + \frac{M_2^C - M_2^B}{l} \right] \cos \alpha = \left[ \frac{-1,49 \cdot 5,80}{2} + \frac{-9,07 - 0,00}{5,80} \right] \cdot 0,98 = -5,76 \text{ t.} \end{cases}$$

$$\text{Stab 3: } Q_3^C = \frac{M_3^D - M_3^C}{l_3} = \frac{-0,04 + 1,68}{6,45} = +0,254 \text{ t.}$$

$$\text{Stab 4: } Q_4^C = g \cdot l_4 \cdot \cos \alpha = 1,49 \cdot 3,88 \cdot 0,98 = +5,55 \text{ t.}$$

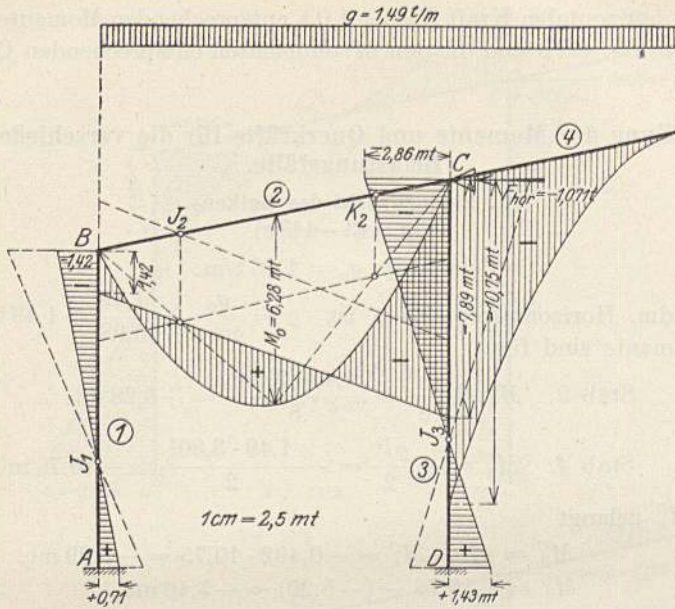


Fig. 443.

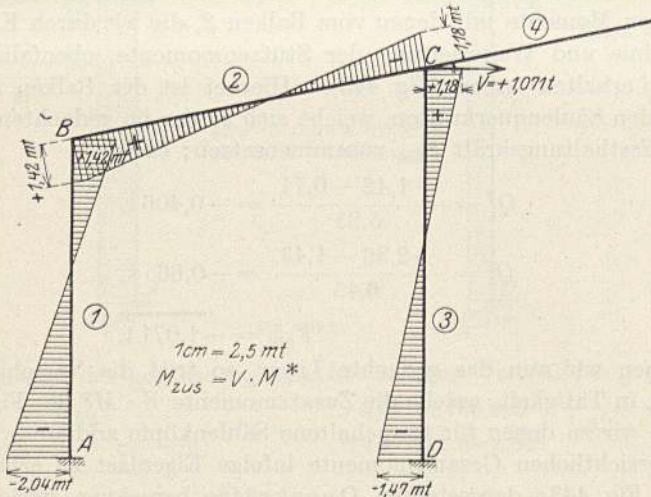


Fig. 443 a.

2. Wind auf den Balken.

(Fig. 444—444c.)

Auf die vertikale Fläche ist der Winddruck für den lfdm.

$$w_2 = 4,00 \cdot 0,150 = 0,60 \text{ t/m}$$

und demnach auf die unter dem Winkel  $\alpha$  geneigte Fläche

$$w' = w_2 \cdot \sin^2 \alpha = 0,60 \cdot 0,203^2 = 0,0246 \text{ t/m.}$$

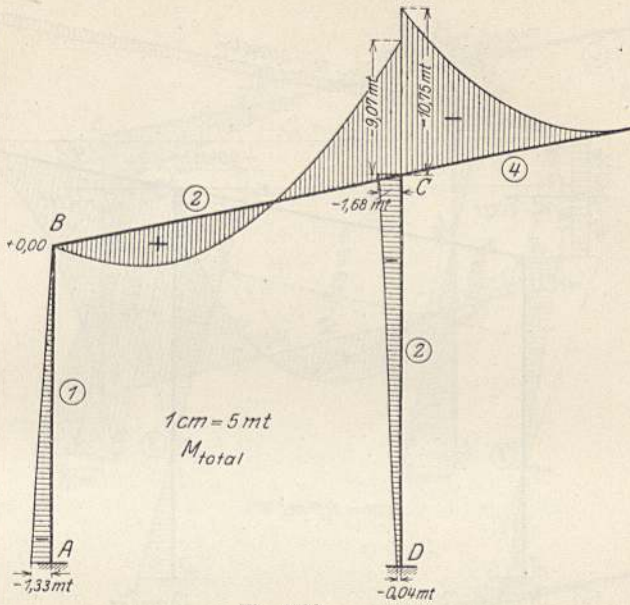


Fig. 443 b.

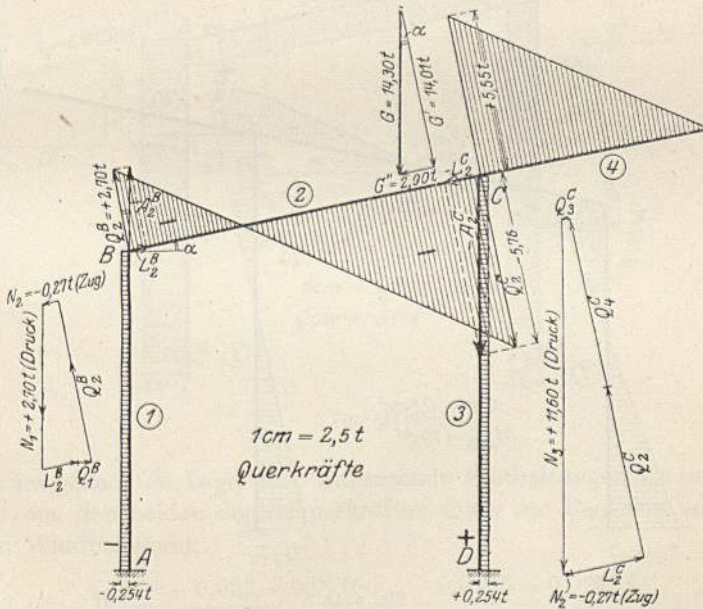


Fig. 443 c.

$M_0$ -Momente.

$$\text{Stab 2: } M_0^m = \frac{0,0246 \cdot 5,92^2}{8} = +0,108 \text{ mt.}$$

$$\text{Stab 4: } M_4^c = \frac{0,024 \cdot 3,88^2}{2} = -0,186 \text{ mt.}$$

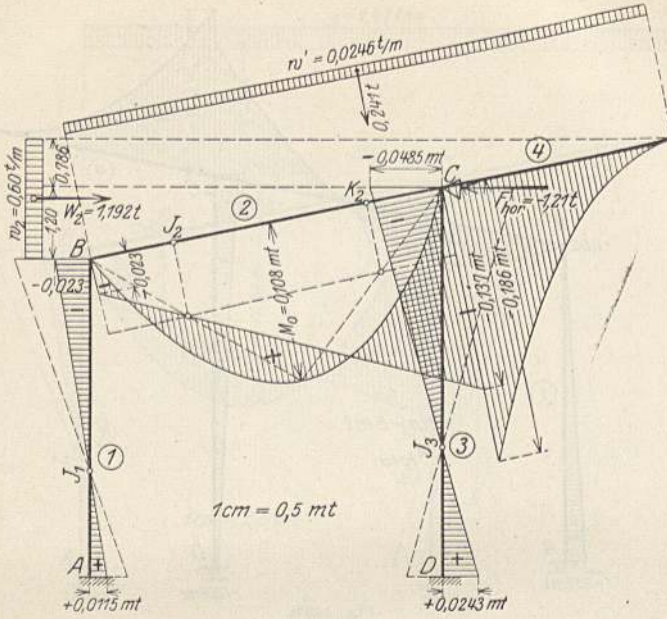


Fig. 444.

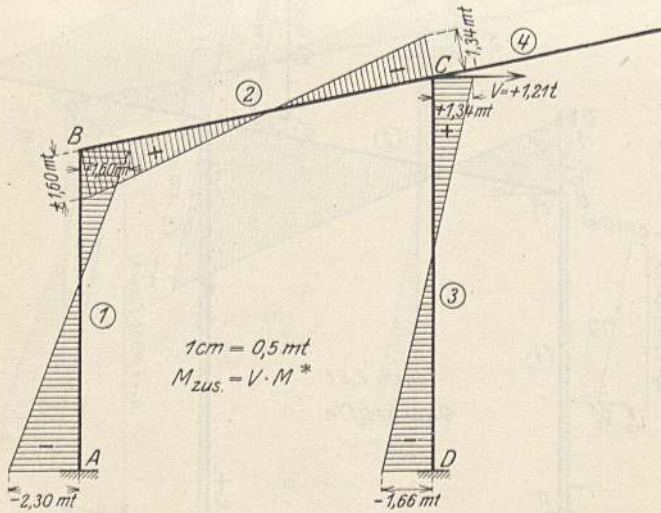


Fig. 444 a.

Von  $M_4^C$  gelangt

$$\text{in Stab 2: } M_2^C = -0,186 \cdot 0,492 = -0,0914 \text{ mt}$$

$$\text{und in Stab 3: } M_3^C = -0,186 \cdot 0,508 = -0,0941 \text{ mt.}$$

Den Verlauf der Momente zeigt Fig. 444, wobei die Säulenköpfe B und C durch das gedachte Lager in C in Ruhe gehalten sind.

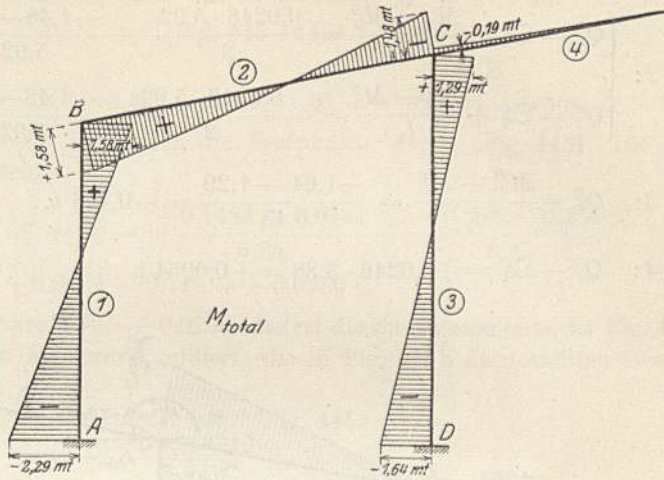


Fig. 444 b.

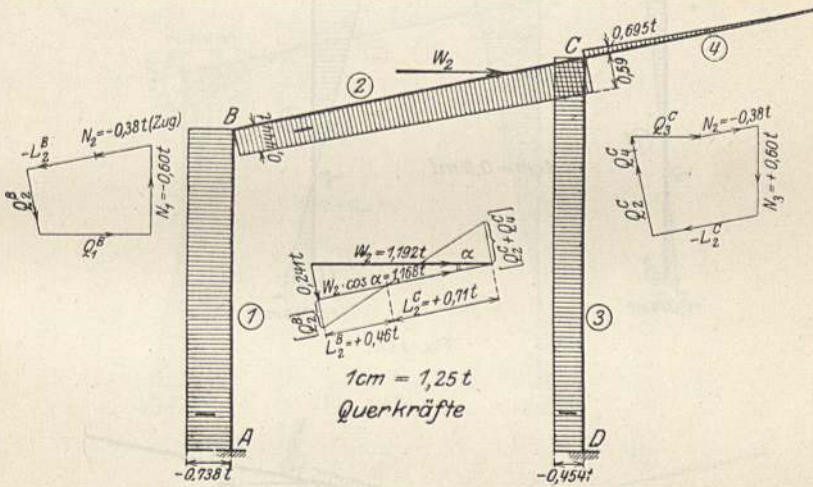


Fig. 444 c.

Die im gedachten Lager in C auftretende Festhaltungskraft setzt sich zusammen aus den beiden Säulenquerkräften sowie der Reaktion von der horizontalen Windbelastung:

$$F_{\text{hor}} = Q_1^B + Q_3^C - W_2 = \frac{-0,023 - 0,0115}{5,25} + \frac{-0,0485 - 0,02425}{6,45} - 1,192 = -1,21 \text{ t.}$$

Mit der Verschiebungskraft  $V = +1,21 \text{ t}$  erhalten wir die in Fig. 444 a ersichtlichen Zusatzmomente  $V \cdot M^*$ , welche wir zu den Momenten aus R. I addieren, um die in Fig. 444 b dargestellten Gesamtmomente zu erhalten.

Die aus Fig. 444 c zu ersiehenden Querkräfte erhalten wir zu:

$$\text{Stab I: } Q_1^A = \frac{M_1^A - M_1^B}{l_1} = \frac{-2,29 - 1,58}{5,25} = -0,738 \text{ t.}$$

$$\text{Stab 2: } \begin{cases} Q_2^B = Q_2^B + \frac{M_2^C - M_2^B}{l_2} = \frac{0,0246 \cdot 5,92}{2} + \frac{-1,48 - 1,58}{5,92} = -0,444 \text{ t,} \\ Q_2^C = Q_2^C + \frac{M_2^C - M_2^B}{l_2} = -\frac{0,0246 \cdot 5,92}{2} + \frac{-1,48 - 1,58}{5,92} = -0,590 \text{ t.} \end{cases}$$

$$\text{Stab 3: } Q_3^D = \frac{M_3^D - M_3^C}{l_3} = \frac{-1,64 - 1,29}{6,45} = -0,454 \text{ t.}$$

$$\text{Stab 4: } Q_4^C - Q_4^C = +0,0246 \cdot 3,88 = +0,0954 \text{ t.}$$

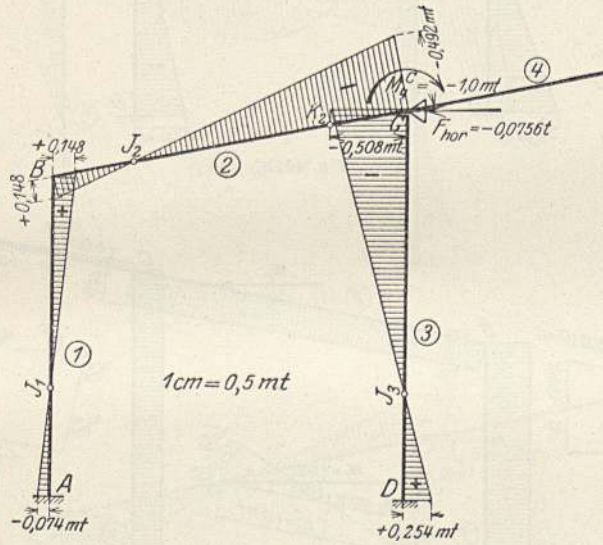


Fig. 445.

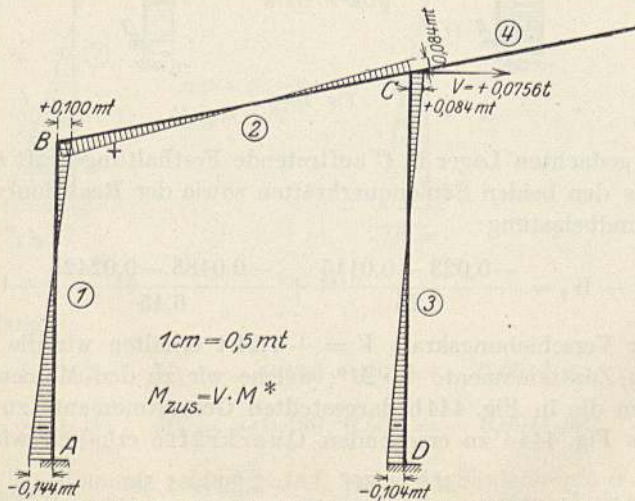


Fig. 445 a.

3. Belastung durch das Kragmoment  $M_4^C = -1,0$  mt.

(Fig. 445—445c.)

Es ist:

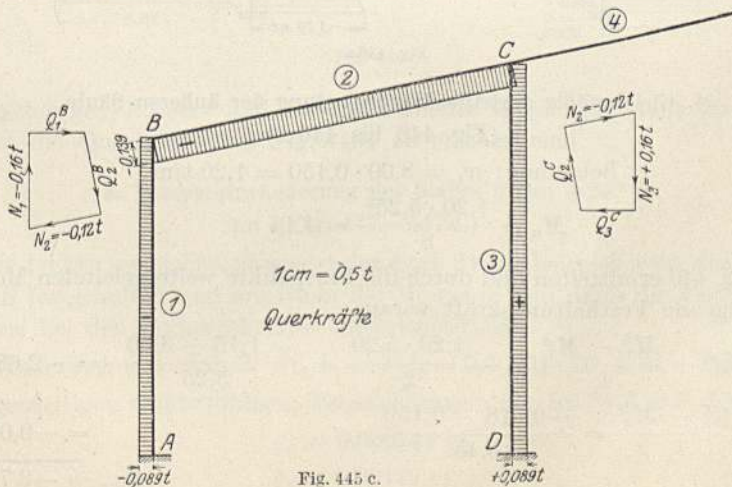
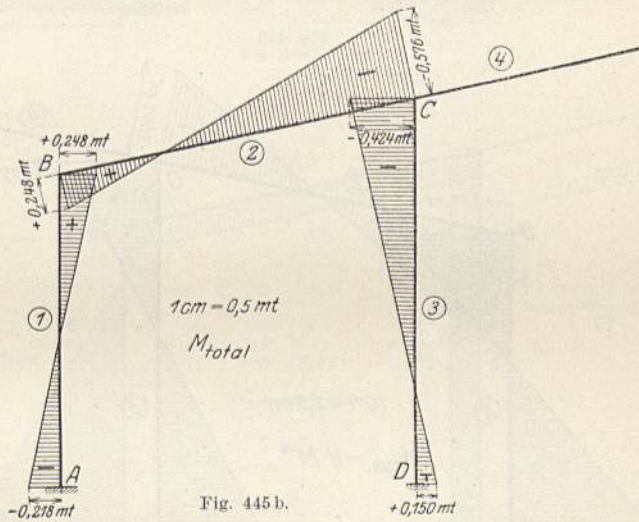
$$M_2^C = -\mu_{4-2}^C = -0,492 \text{ mt}; \quad M_3^C = -\mu_{4-3}^C = -0,508 \text{ mt}.$$

Diese Momente leiten wir durch die Festpunkte weiter (Fig. 445). Die Festhaltungskraft beträgt:

$$F_{\text{hor}} = Q_1^B + Q_3^C = \frac{+0,1482 + 0,0741}{5,25} + \frac{-0,508 - 0,254}{6,45} \\ = +0,0424 - 0,118 = -0,0756 \text{ t}.$$

Die Verschiebungskraft  $V = +0,0756$  t liefert die Zusatzmomente der Fig. 445a, welche, zu obigen Momenten addiert, die in Fig. 445b dargestellten Gesamtmomente ergeben.

Die zugehörigen Querkräfte zeigt Fig. 445c.



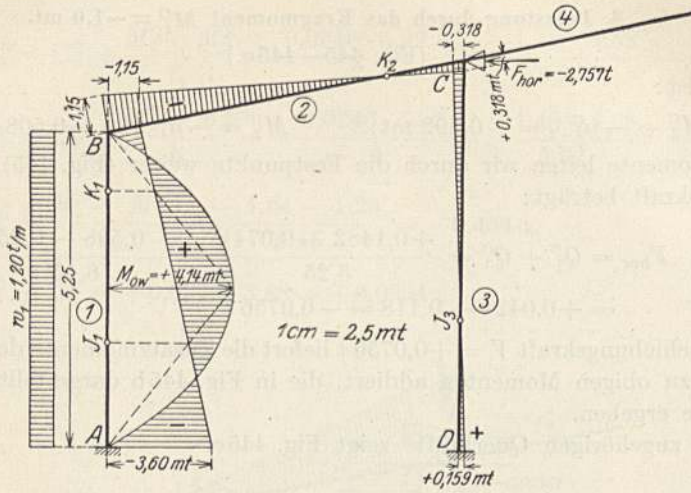


Fig. 446.

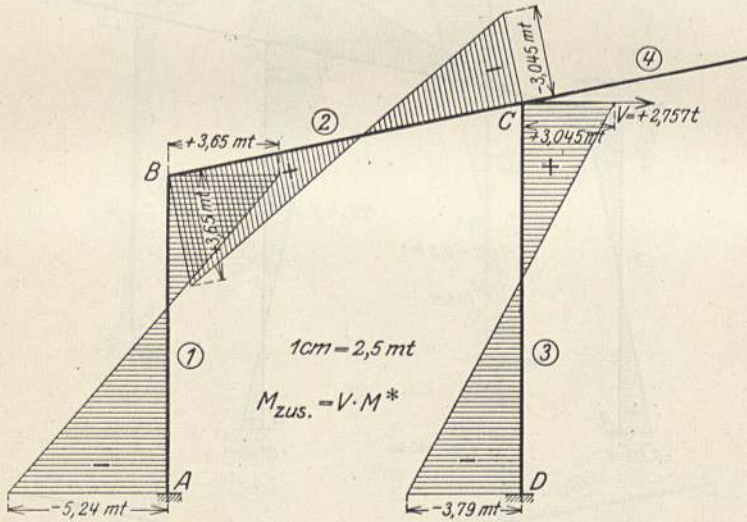


Fig. 446 a.

4. Gleichmäßig verteilte Windbelastung der äußeren Säule.

(Fig. 446 bis 446 c.)

Belastung:  $w_1 = 8,00 \cdot 0,150 = 1,20 \text{ t/m}$ ,

$$M_0 = \frac{1,20 \cdot 5,25^2}{8} = 4,14 \text{ mt.}$$

Die in Fig. 446 ermittelten und durch die Festpunkte weitergeleiteten Momente setzen folgende Festhaltungskraft voraus:

$$Q_1^B = Q_1^B + \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = -\frac{1,20 \cdot 5,20}{2} + \frac{-1,15 + 3,60}{5,25} = -2,683 \text{ t,}$$

$$Q_3^C = \frac{M_3^C - M_3^D}{l_3} = \frac{-0,318 - 0,159}{6,45} = -0,074 \text{ t,}$$

$$F_{\text{hor}} = -2,757 \text{ t.}$$



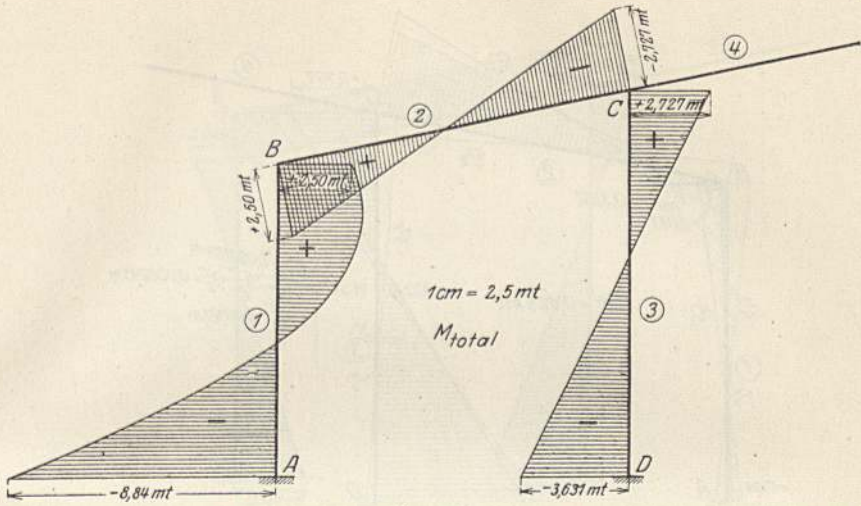


Fig. 446 b.

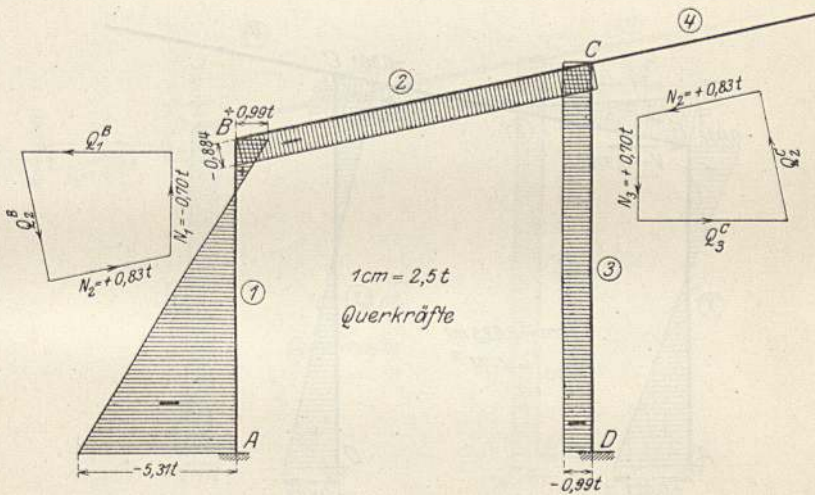


Fig. 446 c.

Die zugehörigen Zusatz- und Gesamtmomente zeigen Fig. 446a bzw. 446b, während die Querkräfte aus Fig. 446c zu ersehen sind.

5. Temperaturänderung des Stabes 2 um  $+20^\circ \text{C}$ .

(Fig. 447—447 c.)

Wir denken uns zunächst wieder den Stab 2 resp. beispielsweise den Knotenpunkt B festgehalten und ermitteln die Momente und dann die Festhaltungskraft wie bei den vorhergehenden Belastungsfällen.

Längenänderung von Stab 2:  $\Delta l_2 = \alpha \cdot t \cdot l_2 = 0,00001 \cdot 20 \cdot 5,92 = 0,001184 \text{ m}$ .

Die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Stäbe 2 und 3 betragen:

$$Q_2 = 0,000245 \text{ m},$$

$$Q_3 = 0,00121 \text{ m}.$$

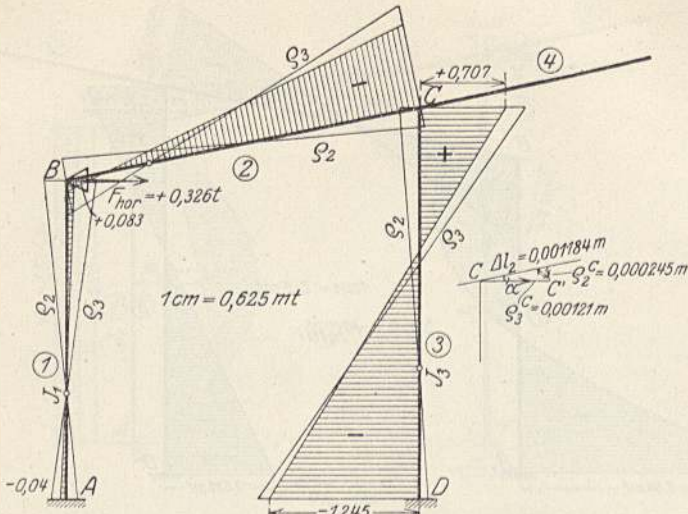


Fig. 447.

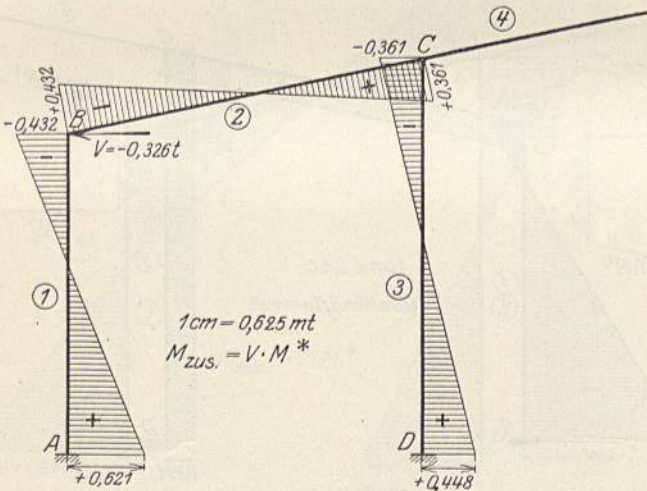


Fig. 447 a.

Nach den Gl. (515) und (520) ergibt die Verschiebung  $\varrho_2$  die Momente:

$$M_2^C = + \frac{\varrho_2}{l_2 \cdot \beta_2 (l_2 - a_2 - b_2)} \cdot b_2 = + \frac{0,000245 \cdot 2100000}{5,92 \cdot 202,0 \cdot 3,27} \cdot 1,28 = + 0,168 \text{ mt,}$$

$$M_2^B = - \frac{0,168}{1,28} \cdot 1,37 = - 0,1802 \text{ mt.}$$

Die Momente infolge der Verschiebung  $\varrho_3$  erhalten wir durch Proportion aus den vorhergehend für die Verschiebung  $\varrho_3 = 0,01$  m ermittelten  $M'$ -Momenten zu

$$M_3^C = + \frac{7,23}{0,01} \cdot 0,00121 = + 0,875 \text{ mt,}$$

$$M_3^D = - \frac{10,98}{0,01} \cdot 0,00121 = - 1,329 \text{ mt.}$$

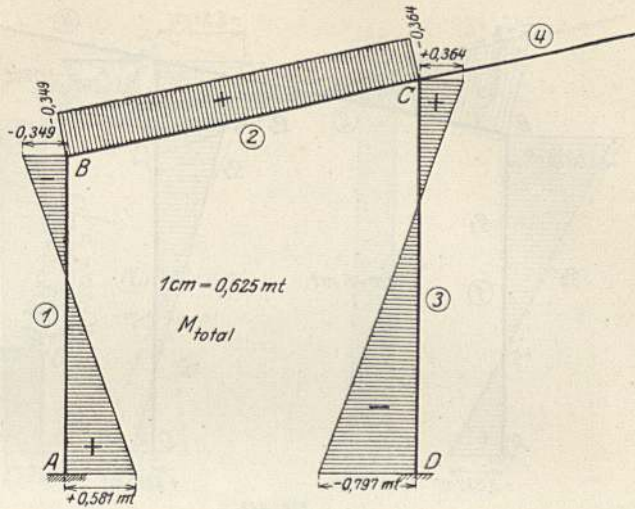


Fig. 447 b.

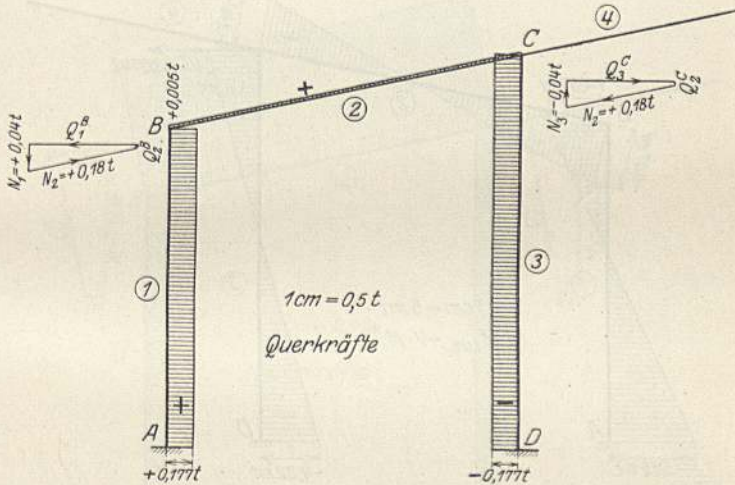


Fig. 447 c.

Diese Momente leiten wir einzeln durch die Festpunkte und addieren sie dann (Fig. 447).

Die beiden Säulenquerkräfte liefern wieder die Festhaltungs- bzw. Verschiebungskraft.

Zusatz- und Gesamtmomente zeigen die Fig. 447 a und 447 b, während in Fig. 447 c die Querkräfte dargestellt sind.

### 6. Senkung der Säule 3 um $\Delta l_3 = 0,01$ m.

Hierbei gelangt Punkt C nach C' und die beiden Stäbe 2 und 3 erleiden die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen (Fig. 448):

$$Q_2 = 0,0102 \text{ m,}$$

$$Q_3 = 0,00207 \text{ m.}$$

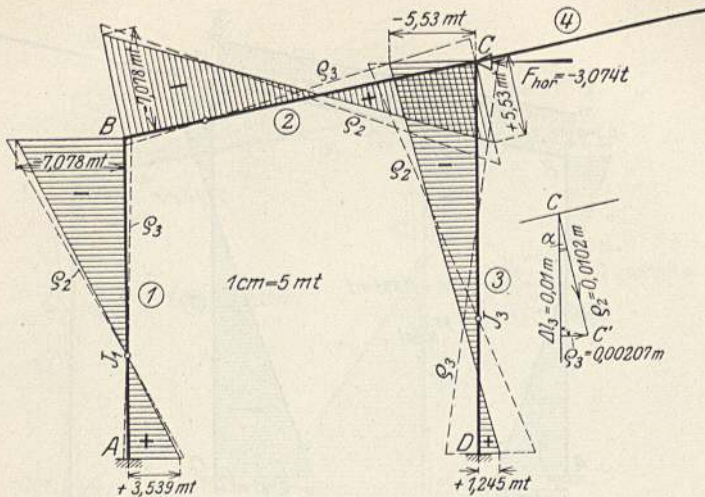


Fig. 448.

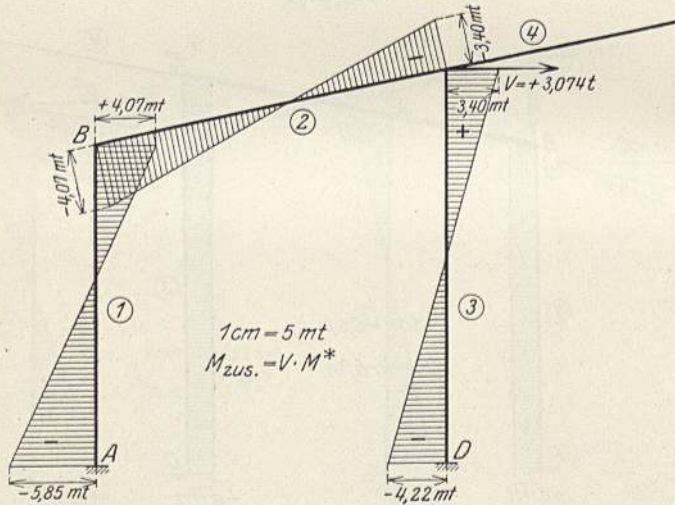


Fig. 448a.

In derselben Weise wie beim vorhergehenden Belastungsfall sind auch hier die Momente ermittelt worden (siehe Fig. 448—448b). Fig. 448c zeigt die zugehörigen Querkräfte.

Für die nun folgenden Belastungsfälle ergeben sich die Gesamtmomente und Querkräfte durch Proportion aus den vorhergehend ermittelten.

### 7. Schneebelastung.

$$p = 0,41 \text{ t/m.}$$

Momente und Querkräfte sind proportional jenen aus dem Eigengewicht des Balkens; wir multiplizieren jene mit dem Faktor

$$k = \frac{0,41}{1,49} = 0,275.$$

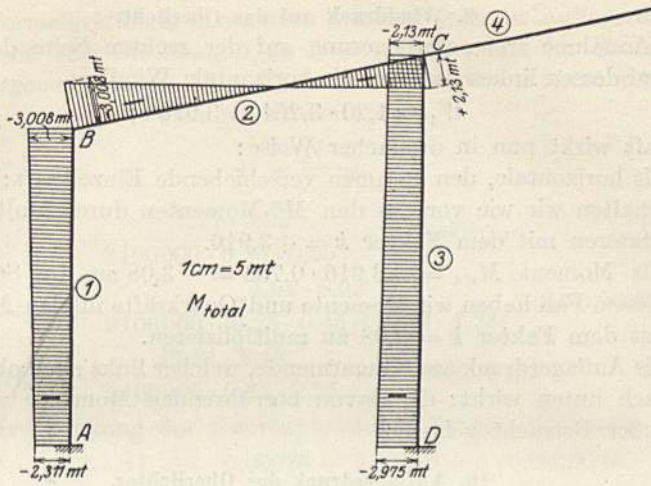


Fig. 448 b.

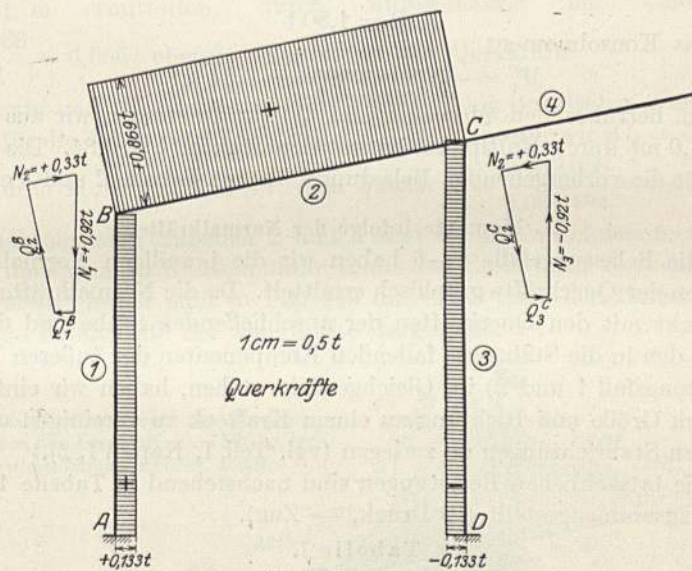


Fig. 448 c.

Die entsprechenden Momente und Querkräfte sind in den Tabellen 2 und 3 zusammengestellt.

8. Winddruck auf den Konsolträger.

Der zwischen je einem Binder liegende Konsolträger überträgt auf den Rahmen eine horizontale Einzelkraft

$$W_3 = 0,60 \cdot 1,986 = +1,192 t.$$

Wir erhalten die Momente und Querkräfte aus den  $M^*$ -Momenten und deren Querkräften durch einfaches Multiplizieren mit dem Faktor

$$k = 1,192.$$

### 9. Winddruck auf das Oberlicht.

Bei Annahme freier Auflagerung auf der rechten Seite des Oberlichtes entfällt auf dessen linkes Auflager die horizontale Windlast

$$W_4 = 1,20 \cdot 3,264 = 3,916 \text{ t};$$

diese Kraft wirkt nun in dreifacher Weise:

- Als horizontale, den Rahmen verschiebende Einzelkraft: Die Momente erhalten wir wie vor aus den  $M^*$ -Momenten durch Multiplikation der letzteren mit dem Faktor  $k = +3,916$ .
- Als Moment  $M_{w_4} = -3,916 \cdot 0,786 = -3,08 \text{ mt}$  im Schnitt  $C_4$ : In diesem Fall haben wir Momente und Querkräfte infolge  $M_4^C = -1,0 \text{ mt}$  mit dem Faktor  $k = 3,08$  zu multiplizieren.
- Als Auflagerdruck am Kragarmende, welcher links nach oben und rechts nach unten wirkt; die davon herrührenden Momente werden jedoch außer Betracht gelassen.

### 10. Auflagerdruck des Oberlichtes.

Der lotrechte Auflagerdruck des Oberlichtes

$$D = 1,80 \text{ t}$$

erzeugt das Konsolmoment

$$M_4^C = -1,80 \cdot 3,80 = -6,84 \text{ mt}.$$

Die davon herrührenden Momente und Querkräfte finden wir aus jenen für  $M_4^C = -1,0 \text{ mt}$  durch Multiplikation mit dem Faktor  $k = 6,84$ . Die Resultate sind wie für die vorhergehenden Belastungsfälle aus Tabelle 2 und 3 ersichtlich.

### 11. Momente infolge der Normalkräfte.

Für die Belastungsfälle 1—6 haben wir die jeweiligen Normalkräfte bei den Figuren der Querkräfte graphisch ermittelt. Da die Normalkräfte an einem Knotenpunkt mit den Querkräften der anschließenden Stäbe und den Reaktionen aus den in die Stabachse fallenden Komponenten der äußeren Belastung (bei Belastungsfall 1 und 2) im Gleichgewicht stehen, haben wir einfach diese Kräfte nach Größe und Richtung zu einem Kräfteck zu vereinigen und in die anstoßenden Stabrichtungen zu zerlegen (vgl. Teil I, Kap. VI, 2).

Für die tatsächlichen Belastungen sind nachstehend in Tabelle 1 die Normalkräfte zusammengestellt (+ Druck, — Zug).

Tabelle 1.  
Normalkräfte.

Nr.	Belastungsfall	Stab 1	Stab 2	Stab 3
1	Eigengewicht des Riegels . . . .	+2,70 t	-0,27 t	+11,60 t
7	Schneebelastung des Riegels . . .	+0,74	-0,07	+ 3,19
2	Windbelastung des Riegels . . . .	-0,60	-0,38	+ 0,60
8	Winddruck $W_3$ auf Konsolträger	-0,66	-0,86	+ 0,66
9	Winddruck auf { Einzelkraft $W_4$ das Oberlicht { Moment $M_{w_4}$ .	-2,15 -0,49	-2,82 -0,37	+ 2,15 + 0,49
4	Windbelastung von Stütze 1 . . .	-0,70	+0,83	+ 0,70
10	Eigengewicht des Oberlichtes . . .	-1,09	-0,82	+ 1,09
5	Temperatur (Stab 2) . . . . .	$\mp 0,04$	$\mp 0,18$	$\pm 0,18$
	$N =$	-2,29	-4,94	+20,66
	Längsträger:	+10,06	—	+26,95
	$N_{\text{total}} =$	+7,77	-4,94	+47,61

Zu den Normalkräften in den Säulen kommen noch die Auflagerdrücke der Längsträger, die sich für Säule 1 zu  $N = +10,06 \text{ t}$  und für Säule 3 zu  $N = +26,95 \text{ t}$  ergeben haben. Nun erhalten wir die davon herrührenden

Längenänderungen:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$$

Stab 1:  $\Delta l_1 = -\frac{7,77 \cdot 5,25}{2100000 \cdot 0,35 \cdot 0,55} = -0,00010 \text{ m},$

Stab 2:  $\Delta l_2 = +\frac{4,94 \cdot 5,92}{2100000 \cdot (0,25 \cdot 0,45 + 0,10 \cdot 1,25)} = +0,00006 \text{ m},$

Stab 3:  $\Delta l_3 = -\frac{47,61 \cdot 6,45}{2100000 \cdot 0,35 \cdot 0,55} = -0,00076 \text{ m}.$

Die relative Senkung des Knotenpunktes C beträgt demnach

$$\Delta C = \Delta l_3 - \Delta l_1 = -0,00076 + 0,00010 = -0,00066 \text{ m}.$$

Die Momente für diese Senkung erhalten wir aus den unter 6. für  $\Delta l_3 = 0,01 \text{ m}$  ermittelten, durch Multiplikation mit dem Faktor  $k = \frac{0,00066}{0,01} = 0,066$ ; ebenso erhalten wir die Querkräfte.

Momente und Querkräfte aus der Verlängerung des Stabes 2 erhalten wir aus jenen für die Temperaturänderung um  $+20^\circ \text{ C}$ , wofür wir  $\Delta l_2 = 0,001184 \text{ m}$  hatten, durch Multiplikation mit dem Faktor  $k = \frac{0,000058}{0,001184} = 0,049$ .

In nachfolgenden Tabellen 2 und 3 sind die Gesamtmomente und Querkräfte für die einzelnen Knotenpunkte (ohne den Einfluß der Normalkräfte) zusammengestellt; ferner sind in Fig. 449 die Größtwerte der Momente und in Fig. 450 die Größtwerte der Querkräfte dargestellt.

Die Staffellinie zeigt die Momente, die von den Eisen bei  $\sigma_e = 1200 \text{ kg/cm}^2$  aufgenommen werden können.

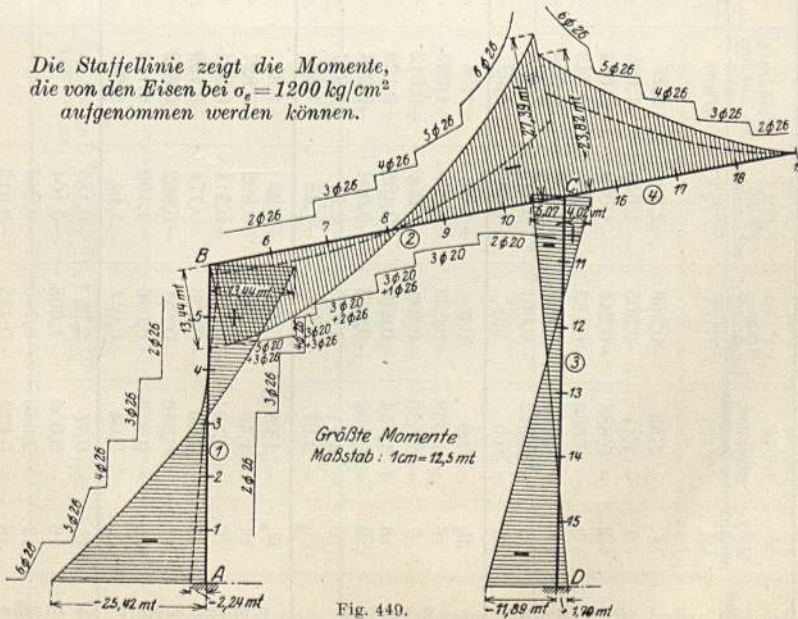


Tabelle 2.

## Momente.

Stab	Querschnitt	Eigengew. des Balkens	Schneebelastung d. Balkens	Windbelastung d. Balkens	Winddruck $W_2$ auf den Konsolträger	Winddruck auf das Oberlicht		Windbelastung d. äußeren Säule	Moment $M_D$ Eigengew. des Oberlichts	Temperaturänderung $\pm 20^\circ$	Stützensenkung	Größtwerte	Kleinstwerte
						Einzelkraft $W_4$	Moment $M_{W_4}$						
Äußere Säule 1	$A_1$	-1,33	-0,366	-2,29	-2,27	-7,46	-0,67	-8,84	+1,49	+0,581	-0,125	-2,24	-25,42
	1	-1,11	-0,305	-1,645	-1,625	-5,35	-0,432	-4,655	-0,959	$\pm 0,426$	-0,140	-1,64	-16,65
	2	-0,888	-0,244	-1,000	-0,984	-3,242	-0,194	-1,385	-0,428	$\pm 0,271$	-0,155	-1,04	-8,79
	3	-0,666	-0,183	-0,355	-0,343	-1,134	+0,044	+0,970	+0,103	$\pm 0,116$	-0,170	-0,45	-1,85
	4	-0,444	-0,122	+0,290	+0,298	+0,974	+0,282	+2,395	+0,634	$\mp 0,043$	-0,185	+4,29	-0,15
	5	-0,222	-0,061	+0,935	+0,939	+3,082	+0,520	+2,900	+1,165	$\mp 0,194$	-0,201	+9,31	+0,75
	$B_1$	0,0	0,0	+1,58	+1,58	+5,19	+0,76	+2,50	+1,70	$\mp 0,349$	-0,216	+13,44	+1,35
Balken 2	$B_2$	0,0	0,0	+1,58	+1,58	+5,19	+0,76	+2,50	+1,70	$\pm 0,349$	-0,216	+13,44	+1,35
	6	+1,938	+0,533	+1,130	+1,095	+3,605	+0,337	+1,629	+0,76	$\pm 0,352$	-0,159	+11,22	+2,35
	7	+2,526	+0,691	+0,656	+0,612	+2,018	-0,086	+0,758	-0,18	$\pm 0,354$	-0,103	+7,25	+1,99
	8	+1,744	+0,474	+0,158	+0,129	+0,431	-0,509	-0,113	-1,12	$\pm 0,357$	-0,046	+1,71	+0,27
	9	-0,498	-0,143	-0,364	-0,354	-1,156	-0,932	-0,985	-2,06	$\pm 0,359$	+0,010	-2,20	-6,84
	10	-4,11	-1,135	-0,91	-0,837	-2,743	-1,355	-1,856	-3,00	$\pm 0,361$	+0,067	-6,75	-16,24
	$C_2$	-9,07	-2,50	-1,48	-1,32	-4,33	-1,78	-2,73	-3,94	$\pm 0,364$	+0,123	-12,65	-27,39
Innere Säule 3	$C_3$	-1,68	-0,463	+1,29	+1,32	+4,33	-1,31	+2,73	-2,90	$\pm 0,364$	-0,123	+4,02	-5,07
	11	-1,40	-0,386	+0,802	+0,827	+2,71	-1,015	+1,667	-2,245	$\pm 0,170$	-0,141	+1,38	-4,34
	12	-1,13	-0,311	+0,314	+0,334	+1,09	-0,720	+0,608	-1,580	$\mp 0,023$	-0,159	-0,90	-3,04
	13	-0,86	-0,236	-0,174	-0,159	-0,53	-0,425	-0,452	-0,925	$\mp 0,216$	-0,178	-1,57	-4,15
	14	-0,586	-0,161	-0,662	-0,652	-2,15	-0,130	-1,512	-0,270	$\mp 0,411$	-0,197	-0,44	-6,73
	15	-0,313	-0,086	-1,150	-1,145	-3,77	+0,165	-2,571	+0,375	$\mp 0,603$	-0,216	+0,66	-9,31
	$D_3$	-0,04	-0,011	-1,64	-1,64	-5,39	+0,46	-3,63	+1,03	$\mp 0,797$	-0,235	+1,79	-11,89
Kragarm 4	$C_4$	-10,75	-2,96	-0,185			-3,08		-6,84			-17,59	-23,81
	16	-6,050	-1,665	-0,104			-2,30		-5,13			-11,18	-15,25
	17	-2,690	-0,740	-0,046			-1,534		-3,42			-6,11	-8,43
	18	-0,672	-0,185	-0,012			-0,767		-1,71			-2,38	-3,35
	19	0,00	0,00	0,00			0,00		0,00			0,00	0,00



Tabelle 3.  
Querkräfte.

Stab	Querschnitt	Eigengew. des Balkens	Schneebelastung d. Balkens	Windbelastung d. Balkens	Winddruck $W_1$ auf den Konsolträger	Winddruck auf das Oberlicht		Windbelastung d. äußeren Säule	Moment $M_D$ Eigengew. des Oberlichts	Temperaturänderung $\pm 20^\circ$	Stützensenkung	Größtwerte	Kleinstwerte
						Einzelkraft $W_1$	Moment $M_{W_1}$						
Äußere Säule 1	$A_1$	-0,254	-0,070	-0,738	-0,733	-2,41	-0,274	-5,31	-0,609	$\pm 0,177$	+0,016	-0,69	-10,56
	1	"	"	"	"	"	"	-4,26	"	"	"	"	-9,51
	2	"	"	"	"	"	"	-3,21	"	"	"	"	-8,46
	3	"	"	"	"	"	"	-2,16	"	"	"	"	-7,41
	4	"	"	"	"	"	"	-1,11	"	"	"	"	-6,36
	5	"	"	"	"	"	"	-0,06	"	"	"	"	-5,31
$B_1$	-0,254	-0,070	-0,738	-0,733	-2,41	-0,274	+0,99	-0,609	$\pm 0,177$	+0,016	-0,69	-5,15	
Balken 2	$B_2$	+2,70	+0,743	-0,444	-0,489	-1,604	-0,428	-0,884	-0,951	$\pm 0,0005$	+0,057	+2,49	-2,04
	6	+1,29	+0,355	-0,468	"	"	"	"	"	"	"	+0,69	-3,48
	7	-0,12	-0,033	-0,492	"	"	"	"	"	"	"	-1,07	-4,94
	8	-1,53	-0,421	-0,516	"	"	"	"	"	"	"	-2,48	-6,77
	9	-2,94	-0,809	-0,540	"	"	"	"	"	"	"	-3,89	-8,59
	10	-4,35	-1,197	-0,565	"	"	"	"	"	"	"	-5,30	-10,41
	$C_2$	-5,76	-1,585	-0,590	-0,489	-1,604	-0,428	-0,884	-0,951	$\pm 0,0005$	+0,057	-6,71	-12,23
Innere Säule 3	$C_3$	+0,254	+0,070	-0,454	-0,459	-1,506	+0,274	-0,99	+0,609	$\mp 0,177$	-0,016	+1,11	-1,57
	11	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
	12	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
	13	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
	14	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
	15	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
	$D_3$	+0,254	+0,070	-0,454	-0,459	-1,506	+0,274	-0,99	+0,609	$\mp 0,177$	-0,016	+1,11	-1,57
Kragarm 4	$C_4$	+5,55	+1,528	+0,095			+0,795		+1,764			+9,73	+7,31
	16	+4,16	+1,140	+0,072			"		"			+7,93	+5,92
	17	+2,77	+0,760	+0,048			"		"			+6,14	+4,53
	18	+1,39	+0,380	+0,024			"		"			+4,35	+3,15
	19	+0,00	+0,00	+0,00			"		"			+2,56	+1,76

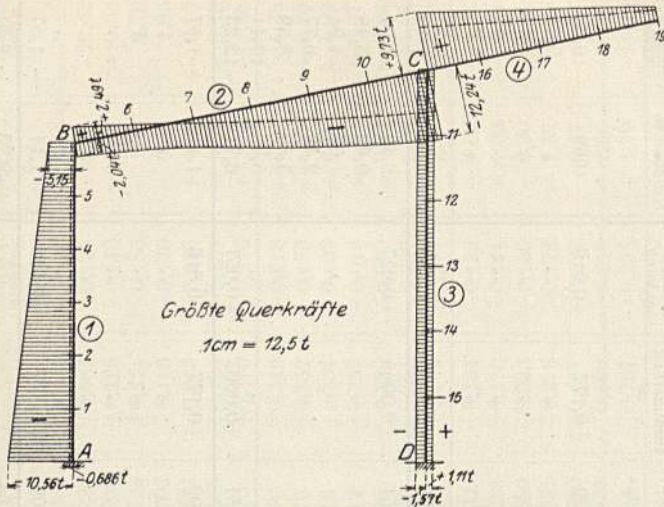


Fig. 450.

## Untersuchung der Säulengrundamente.

### a) Äußere Säule.

#### 1. Ohne Windbelastung.

$$\text{Normalkraft nach Tabelle 1: } 2,70 - 1,09 + 0,04 = 1,65 \text{ t,}$$

$$\text{Äußerer Längsträger} = 10,06 \text{ t,}$$

$$\text{Eigengewicht der Säule} = 0,35 \cdot 0,55 \cdot 5,25 \cdot 2,4 = 2,42 \text{ t,}$$

$$N = 14,13 \text{ t (Reaktion).}$$

$$\text{Querkraft nach Tabelle 3: } Q = -0,69 \text{ t (Reaktion),}$$

$$\text{Moment ,, ,, 2: } M^A = -2,24 \text{ mt.}$$

Auf das Fundament wirken die „Aktionen“ von  $N$  und  $Q$  mit der Resultierenden

$$R = \sqrt{N^2 + Q^2} = \sqrt{14,13^2 + 0,69^2} = 14,14 \text{ t,}$$

welche im Abstand  $r = \frac{M}{R} = \frac{-2,24}{14,14} = -0,158 \text{ m}$  vom Auflager  $A$  angreift.

Das Eigengewicht des Fundamentes wurde ermittelt zu:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = 1,165 + 0,775 + 5,28 = 7,22 \text{ t,}$$

$$N = 14,13 \text{ t,}$$

$$\text{gesamte Bodenbelastung: } \bar{N}_1 = 21,35 \text{ t.}$$

Die Lage der Resultierenden aus  $N$ ,  $Q$  und  $G$  wurde in Fig. 451 graphisch ermittelt; mit dem Abstand  $e_1 = 0,34 \text{ m}$  von der Fundamentmitte ergeben sich die Bodenpressungen zu:

$$\sigma_r^I = \frac{N_1}{F} \left( 1 \pm \frac{6e}{b} \right) = \frac{21350}{300 \cdot 100} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot 34}{300} \right) = \left. \begin{array}{l} +1,20 \\ +0,23 \end{array} \right\} \text{ kg/cm}^2.$$

## 2. Mit Windbelastung

$$\begin{aligned} \text{Normalkraft nach Tabelle 1} &= 7,85 \text{ t,} \\ \text{Eigengewicht der Säule} &= 2,42 \text{ t,} \\ \hline \bar{N} &= 10,27 \text{ t.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Querkraft nach Tabelle 3: } Q &= -10,56 \text{ t,} \\ \text{Moment „ „ 2: } M &= -25,42 \text{ t.} \end{aligned}$$

$$R' = \sqrt{10,27^2 + 10,56^2} = 14,73 \text{ t,}$$

$$r' = \frac{-25,42}{14,73} = -1,73 \text{ m.}$$

Gesamte Bodenbelastung:  $N'_1 = N + G = 10,27 + 7,22 = 17,49 \text{ t.}$

Der Angriffspunkt von  $N'_1$  hat sich nach Fig. 451 graphisch zu  $e_2 = 1,75 \text{ m}$  ergeben, womit wir die Bodenpressungen erhalten:

$$\sigma'_i = \frac{17490}{300 \cdot 100} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot 175}{300} \right) = \begin{matrix} +2,62 \\ -1,46 \end{matrix} \text{ kg/cm}^2.$$

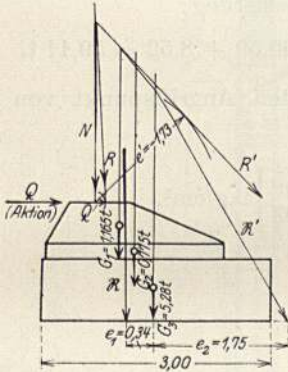


Fig. 451.

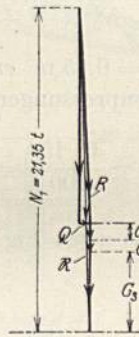


Fig. 451 a.

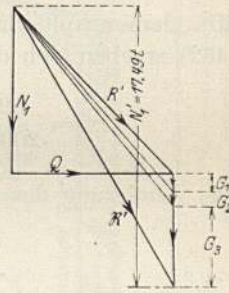


Fig. 451 b.

## b) Innere Säule.

## 1. Ohne Windbelastung.

$$\begin{aligned} \text{Normalkraft nach Tabelle 1: } &+ 11,60 + 1,09 + 0,18 = 12,87 \text{ t,} \\ \text{Längsträger} &= 26,95 \text{ t,} \\ \text{Eigengewicht der Säule: } &0,35 \cdot 0,55 \cdot 6,45 \cdot 2,4 = 2,98 \text{ t,} \\ \hline \bar{N} &= 42,80 \text{ t.} \end{aligned}$$

$$\text{Querkraft nach Tabelle 3: } Q = +1,11 \text{ t,}$$

$$\text{Moment „ „ 2: } M^D = +1,787 \text{ mt.}$$

$$R = \sqrt{N^2 + Q^2} = \sqrt{42,80^2 + 1,11^2} = 42,82 \text{ t,}$$

$$r = \frac{M}{R} = \frac{1,787}{42,82} = 0,04 \text{ m.}$$

Das Fundamentgewicht wurde ermittelt zu:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = 1,13 + 1,23 + 6,16 = 8,52 \text{ t.}$$

Somit beträgt die gesamte Bodenbelastung:

$$N_3 = N + G = 42,80 + 8,52 = 51,52 \text{ t.}$$

Der in Fig. 452 graphisch ermittelte Angriffspunkt von  $N_3$ , nämlich  $e = 0,06$  m, bestimmt die Bodenpressungen:

$$\sigma_r' = \frac{51320}{200 \times 175} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot 6}{200} \right) = \left. \begin{array}{l} +1,73 \\ +1,20 \end{array} \right\} \text{kg/cm}^2.$$

2. Mit Windbelastung.

Normalkraft nach Tabelle 1 = 47,61 t,

Eigengewicht der Säule = 2,98 t,

$$N = 50,59 \text{ t.}$$

Querkraft nach Tabelle 3:  $Q = -1,574$  t

Moment „ „ 2:  $M = -11,893$  mt.

$$R' = \sqrt{50,59^2 + 1,574^2} = 50,60 \text{ t;}$$

$$r' = \frac{-11,893}{50,60} = -0,24 \text{ m.}$$

Gesamte Bodenbelastung:

$$N_3' = N + G = 50,59 + 8,52 = 59,11 \text{ t.}$$

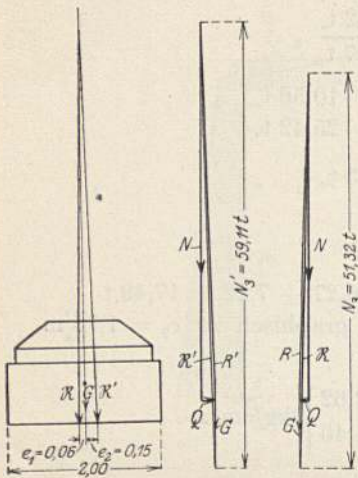


Fig. 452.

Fig. 452a u. b.

Mit dem graphisch zu  $e_2 = 0,15$  m ermittelten Angriffspunkt von  $N_3'$  (Fig. 452) ergeben sich die Bodenpressungen:

$$\sigma_i' = \frac{59110}{200 \cdot 175} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot 15}{200} \right) = \left. \begin{array}{l} +2,45 \\ +0,93 \end{array} \right\} \text{kg/cm}^2.$$

Die Armierung des Rahmens zeigt Fig. 453.

## Beispiel 10.

### Zweistöckiger Rahmenbinder eines Erzsilos.

Es soll der Binder eines Erzsilos, dessen unterer Stockwerkbalken durch den Siloboden und dessen oberer Stockwerkbalken durch die Erzzufuhrgeleise belastet ist (vgl. Fig. 454 und 454a), berechnet werden; die einzelnen Stäbe des Stockwerkrahmens haben auf ihre Länge konstantes Trägheitsmoment. Die Entfernung der Binder beträgt 4,15 m.

Mit den in Fig. 454b eingetragenen Trägheitsmomenten und Auflagerwinkeln  $E \cdot \beta$  erhalten wir nachstehende

#### Festpunkte.

Da bei  $A$ ,  $B$  und  $C$  gelenkige Auflagerung angenommen, so ist

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Um die übrigen Festpunkte alle berechnen zu können, müssen wir vorerst zwei derselben schätzungsweise annehmen. Wir wählen  $b_4 = 0,50$  m und  $b_5 = 1,10$  m.

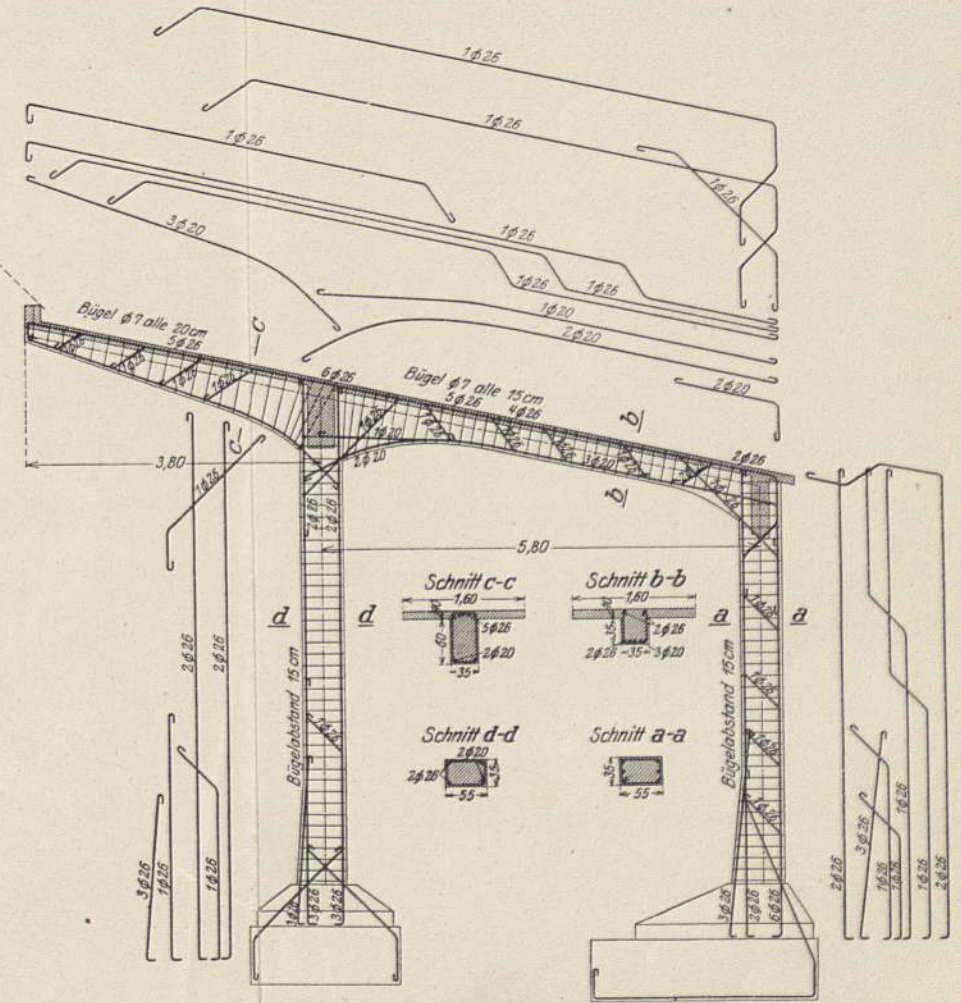
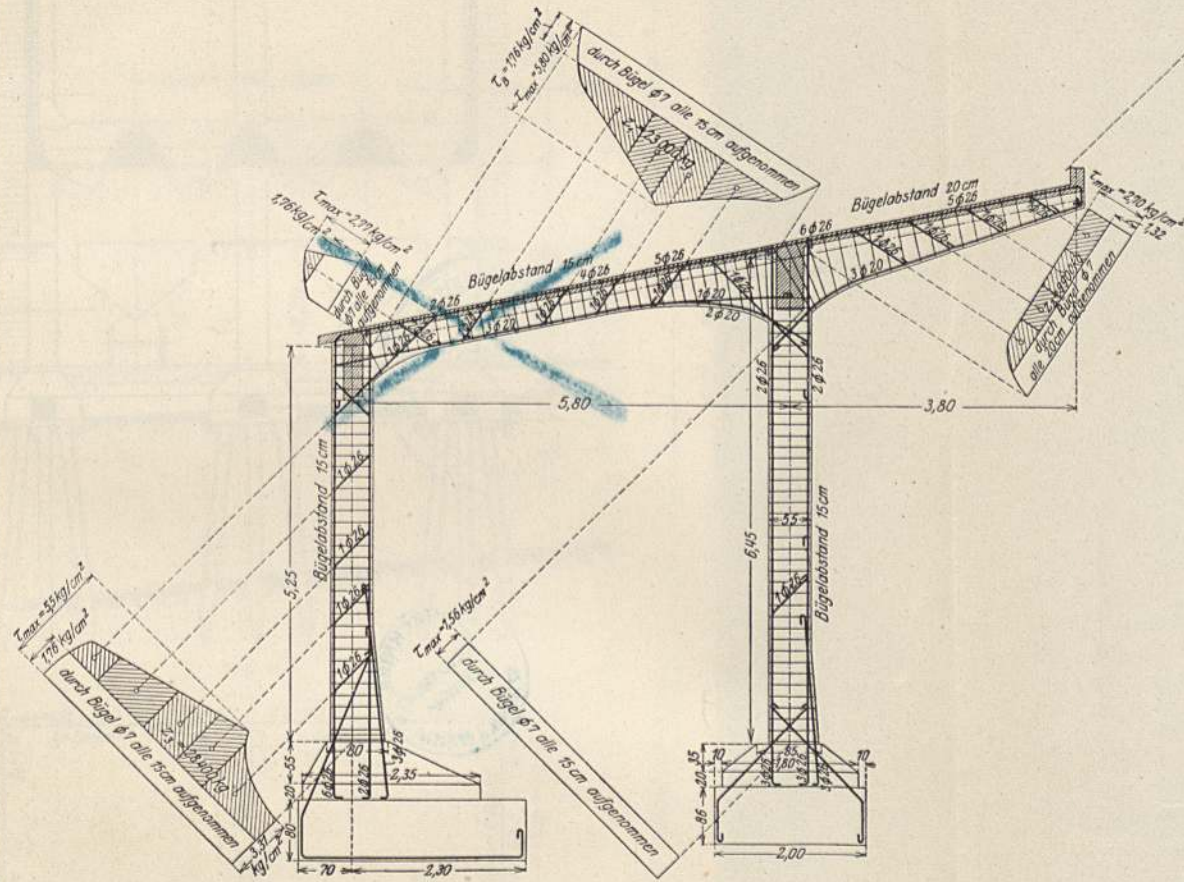
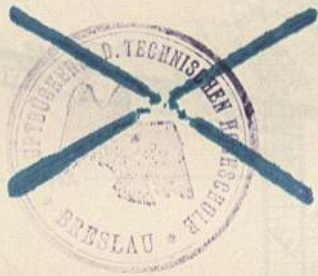


Fig. 453.



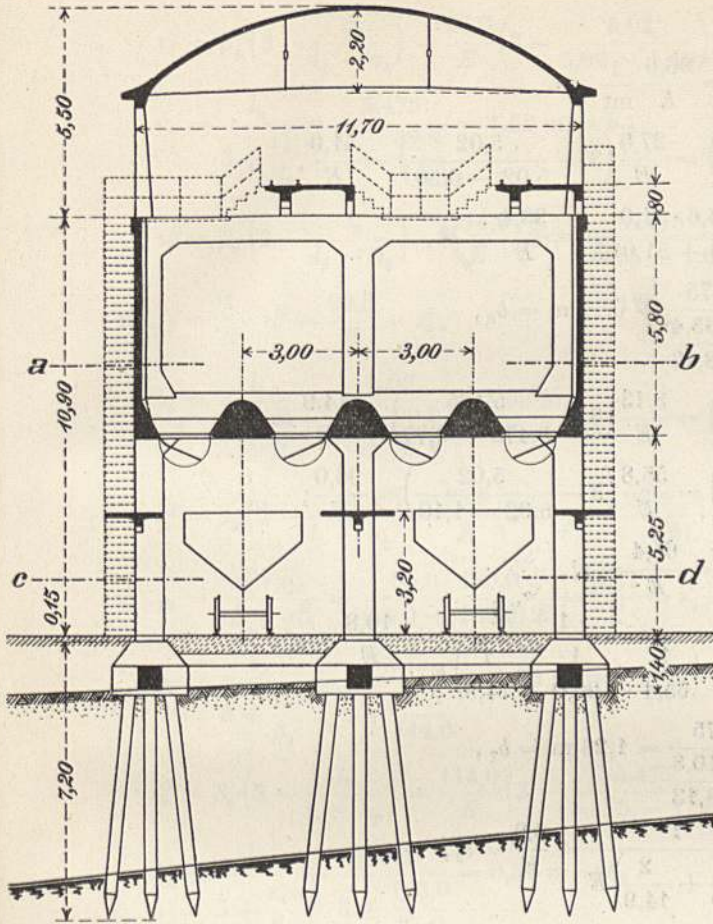


Fig. 454.

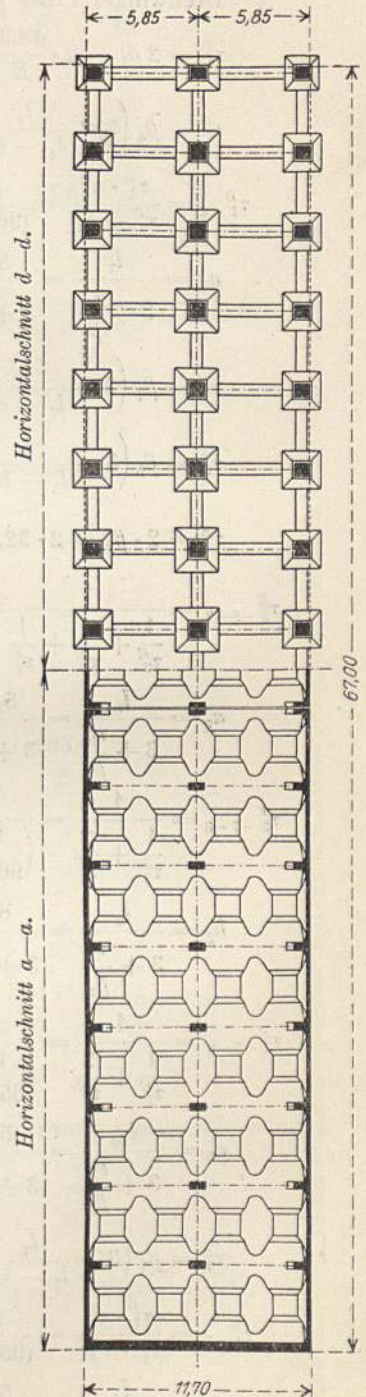


Fig. 454 a.

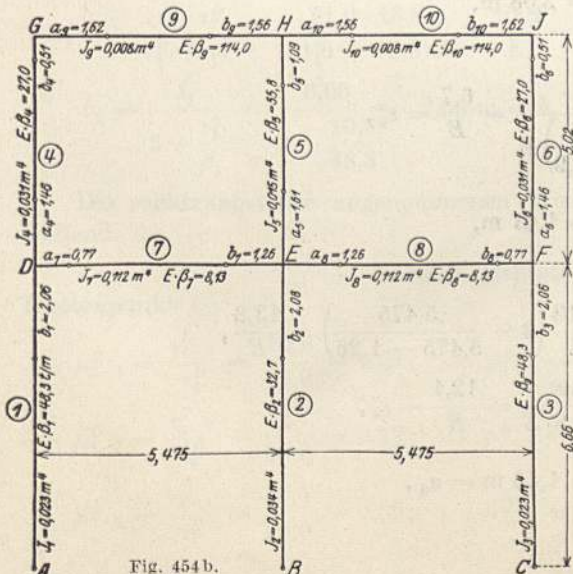


Fig. 454 b.

Drehwinkel  $\tau$  bei  $D$ :

$$\tau_1^D = 2\beta_1 = 2 \cdot \frac{48,3}{E} = \frac{96,6}{E} \text{ mt},$$

$$\tau_4^D = \beta_4 \left( 3 - \frac{l_4}{l_4 - b_4} \right) = \frac{27,0}{E} \left( 3 - \frac{5,02}{5,02 - 0,50} \right) = \frac{51,0}{E},$$

$$\tau_{1-4}^D = \frac{\tau_1^D \cdot \tau_4^D}{\tau_1^D + \tau_4^D} = \frac{96,6 \cdot 51,0}{(96,6 + 51,0)E} = \frac{33,4}{E} = \varepsilon_7^a,$$

$$a_7 = \frac{l_7}{3 + \frac{\varepsilon_7^a}{\beta_7}} = \frac{5,475}{3 + \frac{33,4}{8,13}} = 0,77 \text{ m} = b_8,$$

$$\tau_7^E = \beta_7 \left( 3 - \frac{l_7}{l_7 - a_7} \right) = \frac{8,13}{E} \left( 3 - \frac{5,475}{5,475 - 0,77} \right) = \frac{14,9}{E} = \tau_8^E,$$

$$\tau_5^E = \beta_5 \left( 3 - \frac{l_5}{l_5 - b_5} \right) = \frac{55,8}{E} \left( 3 - \frac{5,02}{5,02 - 1,10} \right) = \frac{96,0}{E},$$

$$\tau_2^E = 2 \cdot \beta_2 = 2 \cdot 32,7 = \frac{65,4}{E} = \varepsilon_8^a,$$

$$\tau_{2-5-7}^E = \frac{1}{\frac{1}{\tau_2^E} + \frac{1}{\tau_5^E} + \frac{1}{\tau_7^E}} = \frac{1}{\left( \frac{1}{65,4} + \frac{1}{96,0} + \frac{1}{14,9} \right) E} = \frac{10,8}{E} = \varepsilon_8^a,$$

$$a_8 = \frac{l_8}{3 + \frac{\varepsilon_8^a}{\beta_8}} = \frac{5,475}{3 + \frac{10,8}{8,13}} = 1,26 \text{ m} = b_7,$$

$$\tau_{5-7-8}^E = \frac{1}{\frac{1}{\tau_5^E} + \frac{2}{\tau_7^E}} = \frac{1}{\left( \frac{1}{96,0} + \frac{2}{14,9} \right) E} = \frac{6,9}{E} = \varepsilon_2^b,$$

$$b_2 = \frac{l_2}{3 + \frac{\varepsilon_2^b}{\beta_2}} = \frac{6,66}{3 + \frac{6,9}{32,7}} = 2,08 \text{ m},$$

$$\tau_{2-7-8}^E = \frac{1}{\frac{1}{\tau_2^E} + \frac{2}{\tau_7^E}} = \frac{1}{\left( \frac{1}{65,4} + \frac{2}{14,9} \right) E} = \frac{6,7}{E} = \varepsilon_5^a,$$

$$a_5 = \frac{l_{10}}{3 + \frac{\varepsilon_5^a}{\beta_5}} = \frac{5,02}{3 + \frac{6,7}{55,8}} = 1,61 \text{ m},$$

$$\tau_7^D = \beta_7 \left( 3 - \frac{l_7}{l_7 - b_7} \right) = \frac{8,13}{E} \left( 3 - \frac{5,475}{5,475 - 1,26} \right) = \frac{13,8}{E},$$

$$\tau_{1-7}^D = \frac{\tau_1^D \cdot \tau_7^D}{\tau_1^D + \tau_7^D} = \frac{96,6 \cdot 13,8}{(96,6 + 13,8)E} = \frac{12,1}{E} = \varepsilon_4^a,$$

$$a_4 = \frac{l_4}{3 + \frac{\varepsilon_4^a}{\beta_4}} = \frac{5,02}{3 + \frac{12,1}{27,0}} = 1,46 \text{ m} = a_6,$$



$$\tau_4^G = \beta_4 \left( 3 - \frac{l_4}{l_4 - a_4} \right) = \frac{27,0}{E} \left( 3 - \frac{5,02}{5,02 - 1,46} \right) = \frac{42,8}{E} = \varepsilon_9^a,$$

$$a_9 = \frac{l_9}{3 + \frac{\varepsilon_9^a}{\beta_9}} = \frac{5,475}{3 + \frac{42,8}{114,0}} = 1,62 \text{ m} = b_{10},$$

$$\tau_9^H = \beta_9 \left( 3 - \frac{l_9}{l_9 - a_9} \right) = \frac{114,0}{E} \left( 3 - \frac{5,475}{5,475 - 1,62} \right) = \frac{180,0}{E} = \tau_{10}^J,$$

$$\tau_{9-10}^H = \frac{1}{2} \cdot \tau_9^H = \frac{90,0}{E} = \varepsilon_5^b,$$

$$b_5 = \frac{l_5}{3 + \frac{\varepsilon_5^b}{\beta_5}} = \frac{5,02}{3 + \frac{90,0}{55,8}} = 1,09 \text{ m},$$

$$\tau_5^H = \beta_5 \left( 3 - \frac{l_5}{l_5 - a_5} \right) = \frac{55,8}{E} \left( 3 - \frac{5,02}{5,02 - 1,61} \right) = \frac{85,0}{E},$$

$$\tau_{5-10}^H = \frac{\tau_5^H \cdot \tau_{10}^H}{\tau_5^H + \tau_{10}^H} = \frac{85,0 \cdot 180,0}{(85,0 + 180,0) E} = \frac{57,7}{E} = \varepsilon_9^b,$$

$$b_9 = \frac{l_9}{3 + \frac{\varepsilon_9^b}{\beta_9}} = \frac{5,475}{3 + \frac{57,7}{114,0}} = 1,56 \text{ m} = a_{10},$$

$$\tau_9^G = \beta_9 \left( 3 - \frac{l_9}{l_9 - b_9} \right) = \frac{114,0}{E} \left( 3 - \frac{5,475}{5,475 - 1,56} \right) = \frac{183,0}{E} = \varepsilon_4^b,$$

$$b_4 = \frac{l_4}{3 + \frac{\varepsilon_4^b}{\beta_4}} = \frac{5,02}{3 + \frac{183,0}{27,0}} = 0,51 \text{ m} = b_6,$$

$$\tau_{4-7}^D = \frac{\tau_4^D \cdot \tau_7^D}{\tau_4^D + \tau_7^D} = \frac{51,0 \cdot 13,8}{(51,0 + 13,8) E} = \frac{10,8}{E} = \varepsilon_1^b,$$

$$b_1 = \frac{l_1}{3 + \frac{\varepsilon_1^b}{\beta_1}} = \frac{6,66}{3 + \frac{10,8}{48,3}} = 2,06 \text{ m} = b_3.$$

Die schätzungsweise angenommenen Werte waren somit genügend zutreffend.

#### Verteilungsmaße.

Knotenpunkt D:

$$\mu_{1-4}^D = \frac{\tau_{4-7}^D}{\tau_4^D} = \frac{10,8}{51,0} = 0,21; \quad \mu_{1-7}^D = 1 - \mu_{1-4}^D = 1 - 0,21 = 0,79;$$

$$\mu_{4-1}^D = \frac{\tau_{1-4}^D}{\tau_1^D} = \frac{12,1}{96,6} = 0,12; \quad \mu_{4-7}^D = 0,88;$$

$$\mu_{7-1}^D = \frac{\tau_{1-4}^D}{\tau_1^D} = \frac{33,4}{96,6} = 0,35; \quad \mu_{7-4}^D = 0,65.$$

Knotenpunkt  $E$ :

$$\begin{aligned}\mu_{2-5}^E &= \frac{\tau_{5-7-8}^E}{\tau_5^E} = \frac{6,9}{96,0} = 0,08; & \mu_{2-7}^E &= \frac{0,92}{2} = 0,46 = \mu_{2-8}^E; \\ \mu_{5-2}^E &= \frac{\tau_{2-7-8}^E}{\tau_2^E} = \frac{6,7}{65,4} = 0,10; & \mu_{5-7}^E &= \frac{0,90}{2} = 0,45 = \mu_{5-8}^E; \\ \mu_{7-8}^E &= \frac{\tau_{2-5-8}^E}{\tau_8^E} = \frac{10,8}{14,9} = 0,72 = \mu_{8-7}^E; \\ \mu_{7-2}^E &= \frac{\mu_{2-5-8}^E}{\tau_2^E} = \frac{10,8}{65,4} = 0,17; & \mu_{7-5}^E &= 1 - 0,72 - 0,17 = 0,11.\end{aligned}$$

Knotenpunkt  $H$ :

$$\begin{aligned}\mu_{5-9}^H &= \frac{\tau_{9-10}^H}{\tau_9^H} = \frac{90,0}{180,0} = 0,50 = \mu_{5-10}^H; \\ \mu_{9-10}^H &= \frac{\tau_{5-10}^H}{\tau_{10}^H} = \frac{57,7}{180,0} = 0,32 = \mu_{10-9}^H; & \mu_{9-5}^H &= 0,68 = \mu_{10-5}^H.\end{aligned}$$

Da wir für alle Belastungsfälle die Momente  $M'$  bzw.  $M^*$  benötigen, werden dieselben nachstehend zuerst ermittelt.

### Momente $M'_I$ .

Wir verschieben den oberen Stockwerkbalken  $GHJ$  um  $\Delta = 1$  mm nach rechts, wobei der untere Balken  $DHF$  unverschiebbar festgehalten sein soll; dann treten die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen  $\varrho_4 = \varrho_5 = \varrho_6$  auf. Infolge  $\varrho_4 = 0,001$  m erhalten wir nach Gl. (515) und (520) die Momente:

$$\begin{aligned}M_4^G &= \frac{\varrho_4 \cdot b_4}{l_4 \cdot \beta_4 (l_4 - a_4 - b_4)} = + \frac{0,001 \cdot 2100000 \cdot 0,51}{5,02 \cdot 27,0 \cdot (5,02 - 1,46 - 0,51)} = + 2,59 \text{ mt}, \\ M_4^D &= \frac{M_4^G}{b_4} \cdot a_4 = - \frac{2,59}{0,51} \cdot 1,46 = - 7,42 \text{ mt}.\end{aligned}$$

Infolge  $\varrho_5 = 0,001$  m die Momente:

$$\begin{aligned}M_5^H &= \frac{0,001 \cdot 2100000 \cdot 1,09}{5,02 \cdot 55,8 (5,02 - 1,61 - 1,09)} = + 3,52 \text{ mt}, \\ M_5^E &= - \frac{3,52}{1,09} \cdot 1,61 = - 5,20 \text{ mt}.\end{aligned}$$

und endlich infolge  $\varrho_6 = 0,001$  m die Momente:

$$M_6^J = M_4^G = + 2,59 \text{ mt}; \quad M_6^F = M_4^D = - 7,42 \text{ mt}.$$

Diese Momente einzeln mittels Festpunkte und Verteilungsmaße über den Rahmen weitergeleitet und dann summiert, ergeben die in Fig. 455 dargestellten Momente  $M'_I$  infolge Verschiebung des oberen Stockwerkbalkens.

Die Erzeugungskraft  $Z_I$  dieser Momente erhalten wir als die Summe der horizontalen Querkräfte an den Säulenköpfen  $G$ ,  $H$  und  $J$  zu:

$$Z_I = \frac{2 \cdot (3,20 + 7,60) + 5,10 + 6,40}{5,02} = + 6,59 \text{ t}.$$

Der untere Stockwerkbalken wird dabei voraussetzungsgemäß unverschiebbar festgehalten von der Festhaltungskraft  $D_{II(AI)}$ , welche sich aus nachstehenden Querkräften zusammensetzt:

von den oberen Säulen

$$-Z_I = -6,59 \text{ t}$$

von den unteren Säulen  $\sum Q = -\frac{2 \cdot 1,00 + 0,20}{6,66} = -0,33 \text{ t}$

$$\text{Festhaltungskraft } D_{II(AI)} = \underline{\underline{-6,92 \text{ t}}}$$

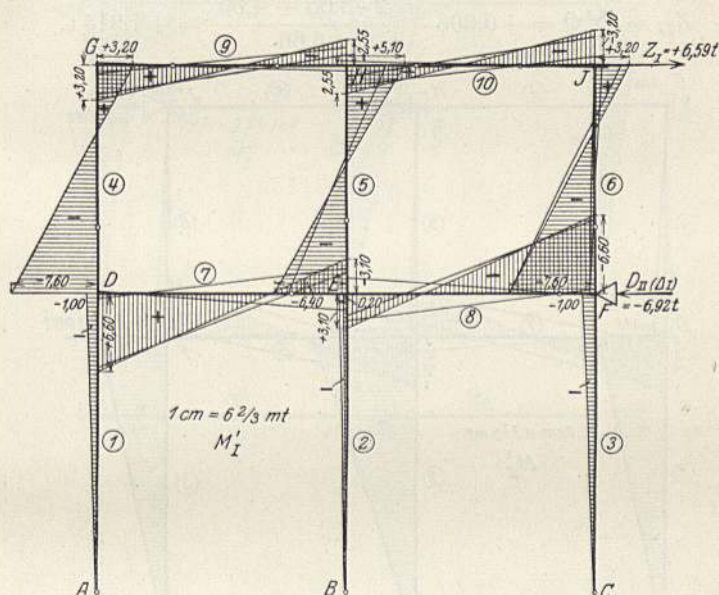


Fig. 455.

### Momente $M'_{II}$ .

Wir verschieben jetzt in gleicher Weise den unteren Stockwerkbalken  $DEF$  um  $\Delta = 1 \text{ mm}$  nach rechts, wobei sich der obere Stockwerkbalken parallel mitverschieben soll. Dann erhalten wir die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen  $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$  und daraus folgende Momente:

Infolge  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_3 = 0,001 \text{ m}$ :

$$M_1^P = \frac{0,001 \cdot 2100000 \cdot 2,06}{6,66 \cdot 48,3 (6,66 - 2,06)} = +2,93 \text{ mt} = M_3^F.$$

Infolge  $\varrho_2 = 0,001 \text{ m}$ :

$$M_2^E = \frac{0,001 \cdot 2100000 \cdot 2,08}{6,66 \cdot 32,7 (6,66 - 2,08)} = +4,36 \text{ mt}.$$

In Fig. 456 sind diese drei Einzelmomente wieder mittels Verteilungsmaße und Festpunkte weitergeleitet und dann addiert, wodurch sich die Momente  $M'_{II}$  ergeben.



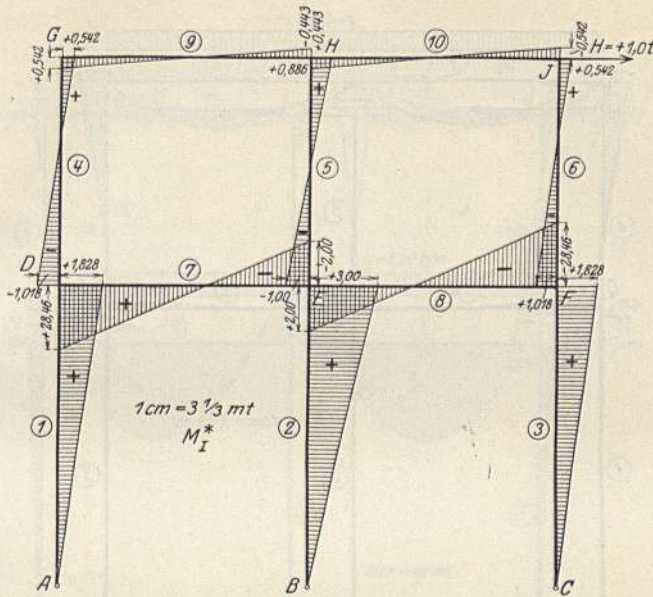


Fig. 457.

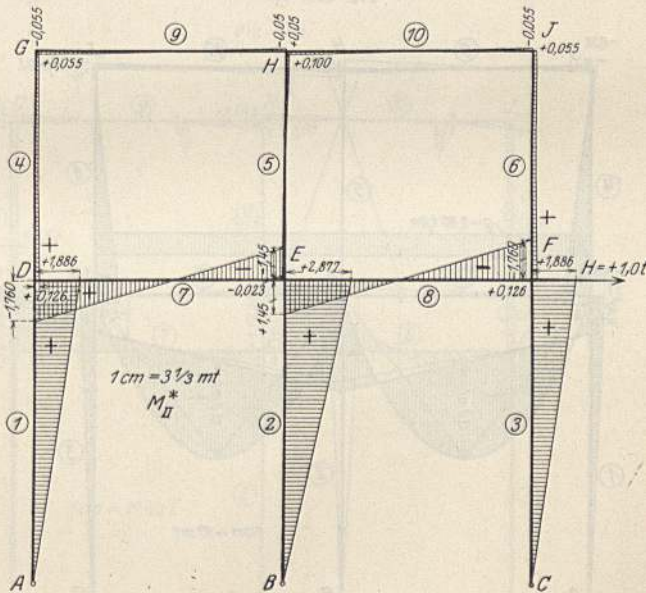


Fig. 458.

Momente und Querkräfte aus den äußeren Belastungen.

I. Eigengewicht.

a) Eigengewicht des oberen Stockwerkbalkens:

$$g = 0,35 \cdot 0,65 \cdot 2,4 = 0,55 \text{ t/m,}$$

$$M_0 = \frac{0,55 \cdot 5,475^2}{8} = 2,06 \text{ mt.}$$

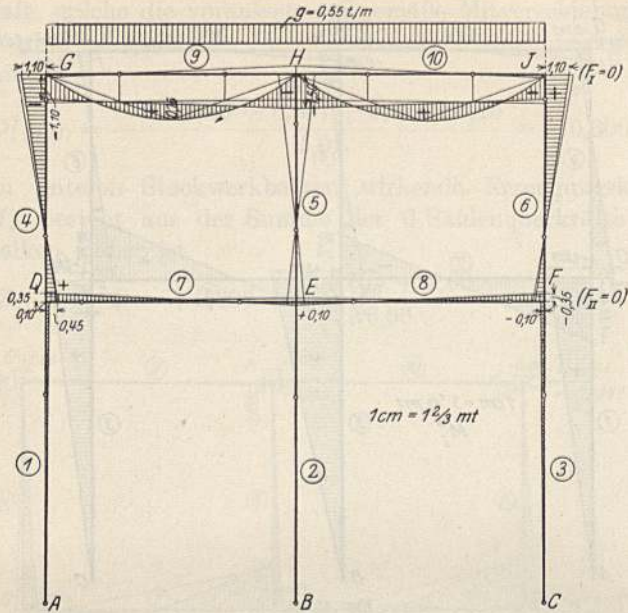


Fig. 459.

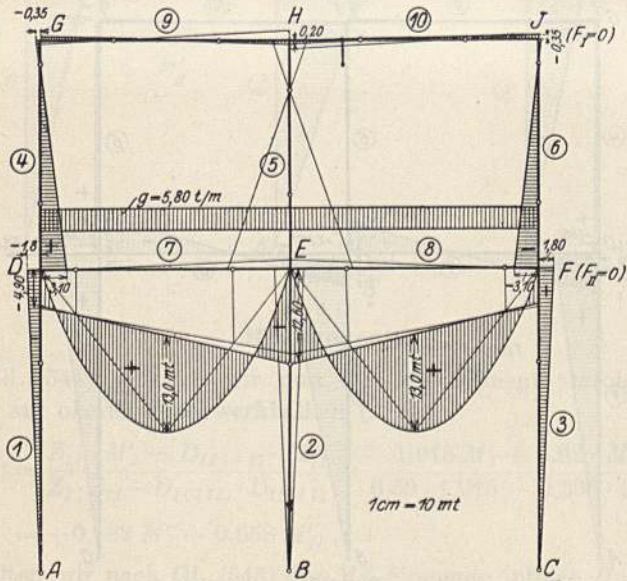


Fig. 459 a.

Mittels Festpunkte und Verteilungsmaße sind die in Fig. 459 ersichtlichen Momente (R. I) ermittelt.

b) Eigengewicht des unteren Stockwerkbalkens:

$$\text{Querschnitt } F = 2,42 \text{ m}^2; \quad g = 2,42 \cdot 2,4 = 5,80 \text{ t/m};$$

$$M_0 = \frac{5,80 \cdot 5,475}{8} = 21,70 \text{ mt.}$$

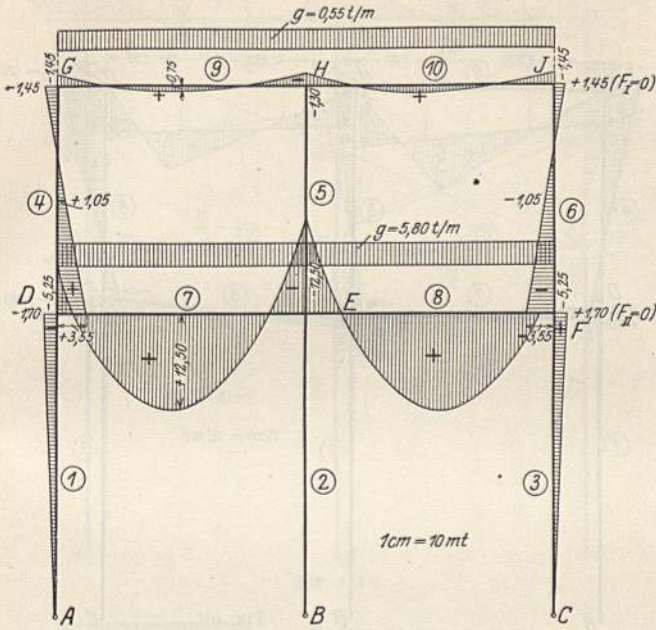


Fig. 460.

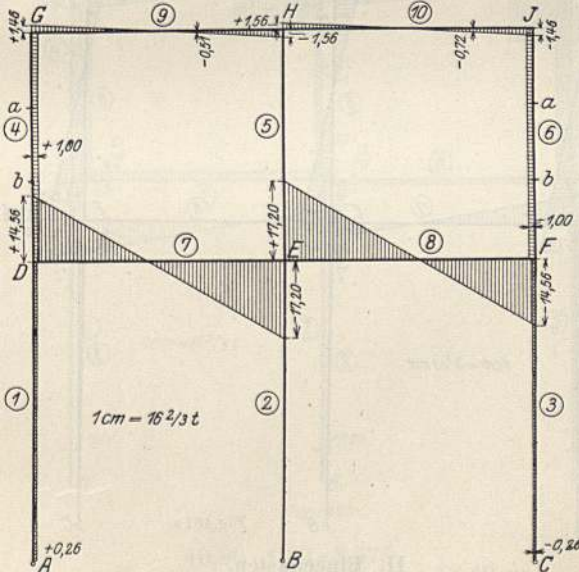


Fig. 460a.

Fig. 459a enthält die Momente aus dieser Belastung, während in Fig. 460 die Gesamtmomente aus a) und b) des R. I dargestellt sind, welche gleichzeitig die fertigen Momente sind, da der Symmetrie wegen keine Zusatzmomente hinzukommen. Fig. 460a zeigt die zugehörigen Querkräfte.

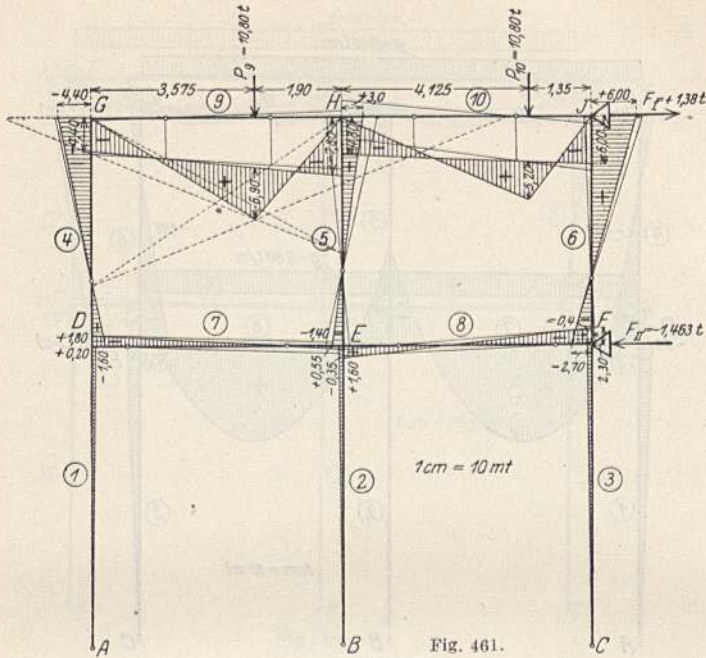


Fig. 461.

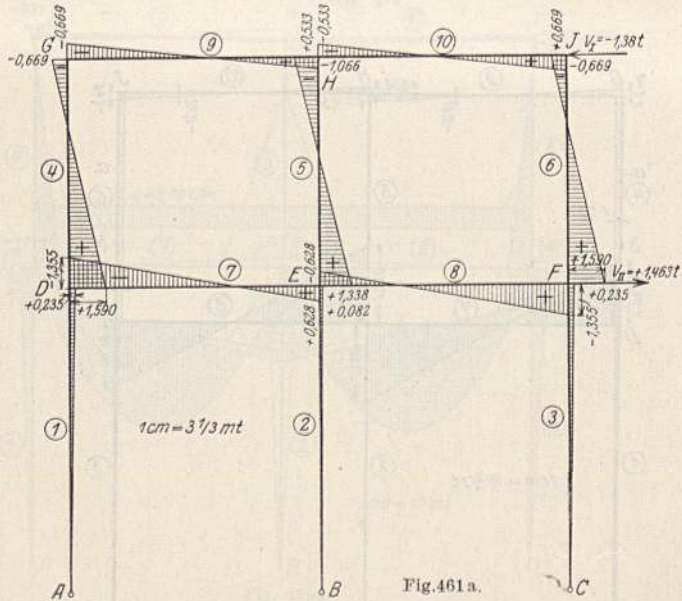


Fig. 461 a.

II. Einzellasten.

Stab 9: Eigenlast der Gleisträger	$0,475 \cdot 4,15 \cdot 1,14 =$	2,24 t
Säule		= 0,16 t
Platte	$0,10 \cdot 0,70 \cdot 2,4 \cdot 4,15 \cdot 1,14 =$	0,80 t
Verkehrslast auf dem Gleis		= 6,90 t
,, ,, der Platte		= 0,70 t
		$P_9 = 10,80 t.$



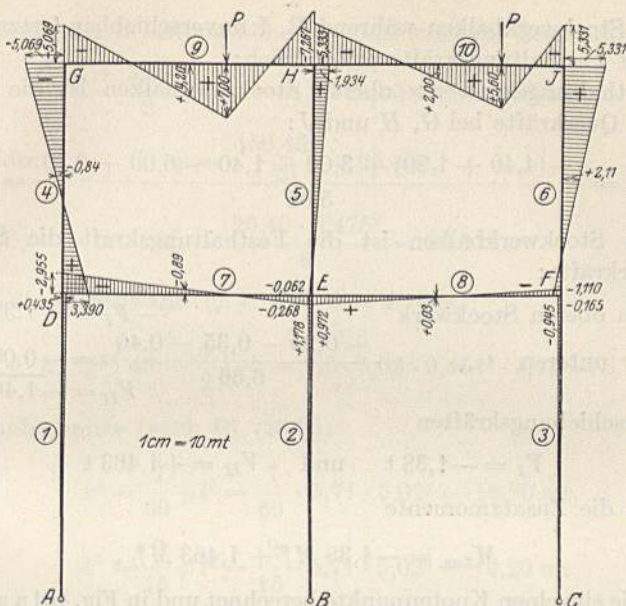


Fig. 461 b.

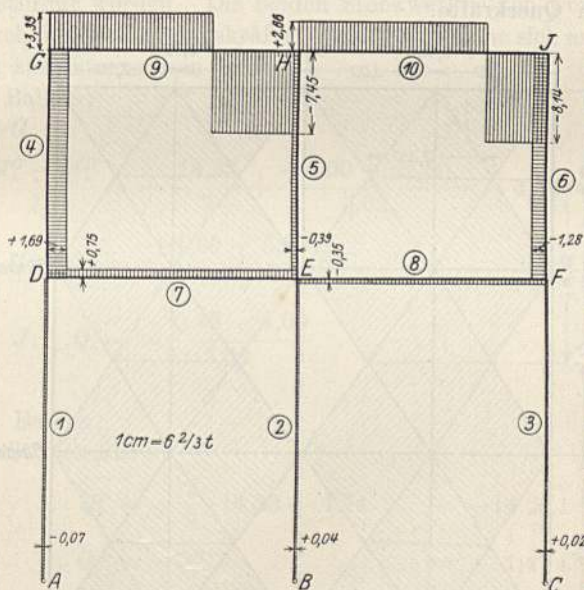


Fig. 461 c.

$$M_0 = \frac{10,80 \cdot 1,90 \cdot 3,575}{5,475} = 13,40 \text{ mt.}$$

Stab 10: Dieselbe Einzellast wirkt auch hier, also  $P_{10} = 10,80 \text{ t}$

$$M_0 = \frac{10,80 \cdot 1,35 \cdot 4,125}{5,475} = 11,00 \text{ mt.}$$

Die Momente des R. I zeigt Fig. 461.

Um die Stockwerkbalken während R. I unverschiebbar festzuhalten, sind nachstehende Festhaltungskräfte erforderlich:

Die Festhaltungskraft am oberen Stockwerkbalken ist die Summe der horizontalen Querkräfte bei  $G$ ,  $H$  und  $J$ :

$$F_I = \sum Q = \frac{-(4,40 + 1,80) + 3,00 + 1,40 + 6,00 + 2,70}{5,02} = +1,38 \text{ t.}$$

Am unteren Stockwerkbalken ist die Festhaltungskraft die Summe aller 6 Säulenquerkräfte:

$$\begin{array}{rcl} \text{vom oberen Stockwerk} & & -F_I = -1,38 \text{ t} \\ \text{,, unteren ,,} & + 0,20 - 0,35 - 0,40 & = -0,083 \text{ t} \\ & \frac{\phantom{+ 0,20 - 0,35 - 0,40}}{6,66} & F_{II} = -1,463 \text{ t.} \end{array}$$

Mit den Verschiebungskräften

$$V_I = -1,38 \text{ t} \quad \text{und} \quad V_{II} = +1,463 \text{ t}$$

erhalten wir die Zusatzmomente

$$M_{Zus.} = -1,38 M_I^* + 1,463 M_{II}^*,$$

welche für die einzelnen Knotenpunkte berechnet und in Fig. 461 a aufgezeichnet wurden. Fig. 461 b enthält die Gesamtmomente von Belastungsfall II, Fig. 461 c die zugehörigen Querkräfte.

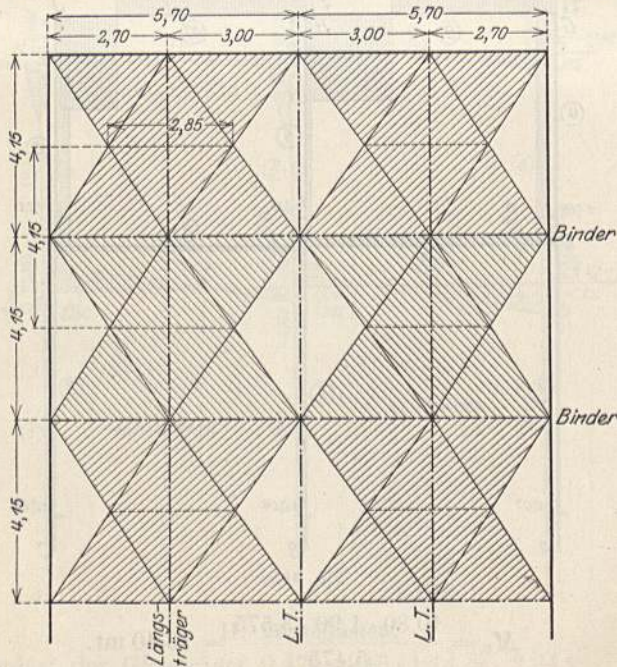


Fig. 461 d.

### III. Linksseitige Erfüllung.

Der Einfachheit halber nehmen wir die Belastung über der in Fig. 461 d schraffierten Fläche als gleichmäßig verteilt an:

Mit  $\gamma = 1,6$  und der Belastungshöhe  $h = 5,30$  m ist die Belastung für 1 Silofeld:

$$\frac{2,70 + 3,00 + 2,85}{2} \cdot 4,15 \cdot 5,30 \cdot 1,6 = 150,43 \text{ t}$$

oder pro lfdm 
$$p = \frac{150,43}{5,70} = 26,40 \text{ t,}$$

daher 
$$M_0 = \frac{26,40 \cdot 5,475^2}{8} = 99,0 \text{ mt.}$$

Druck auf die Seitenwand ( $\varphi = 45^\circ$ ,  $b = 4,15$  m):

$$p = \gamma \cdot h \cdot \text{tg}^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot b = 1,6 \cdot 5,02 \cdot 0,414^2 \cdot 4,15 = 5,71 \text{ t/m.}$$

Kreuzlinienabschnitte [nach Gl. (267)]:

$$k^a = \frac{7}{60} p l^2 = \frac{7}{60} \cdot 5,71 \cdot 5,02^2 = 16,80 \text{ mt,}$$

$$k^b = \frac{2}{15} p l^2 = \frac{2}{15} \cdot 5,71 \cdot 5,02^2 = 19,20 \text{ mt.}$$

Die Momente aus diesen beiden Belastungen (Boden- und Seitendruck) sind in Fig. 462 bestimmt worden. Die beiden Stockwerkbalken werden hierbei festgehalten durch die Festhaltungskräfte  $F_I$  und  $F_{II}$ , welche sich aus nachstehenden Querkraften zusammensetzen:

Oberer Balken:

Stützenkopf G:

$$Q_4^G = \Sigma Q_4^G + \frac{M_4^G - M_4^D}{l_4} = + \frac{14,33}{3} + \frac{-1,00 - 22,80}{5,02} = +4,78 - 4,74 = +0,04 \text{ t}$$

Stützenkopf H:  $Q_5^H = \frac{+1,60 + 5,80}{5,02} \dots \dots \dots = +1,47 \text{ t}$

„ J:  $Q_6^J = \frac{-0,45 - 4,00}{5,02} \dots \dots \dots = -0,89 \text{ t}$

$$F_I = +0,62 \text{ t.}$$

Unterer Balken:

vom oberen Stockwerk:

$$Q_4^D = + \frac{2}{3} \cdot 14,33 + 4,74 \dots = +14,29 \text{ t}$$

$$Q_5^E = -Q_5^H \dots \dots \dots = -1,47 \text{ t}$$

$$Q_6^F = -Q_6^J \dots \dots \dots = +0,89 \text{ t}$$

Normalkraft im Stab 7:

$$N_7 = E \dots \dots \dots = -14,33 \text{ t}$$

von den unteren Säulen:

$$\Sigma Q = \frac{-7,20 + 8,80 - 1,90}{6,66} = -0,05 \text{ t}$$

$$F_{II} = -0,67 \text{ t.}$$

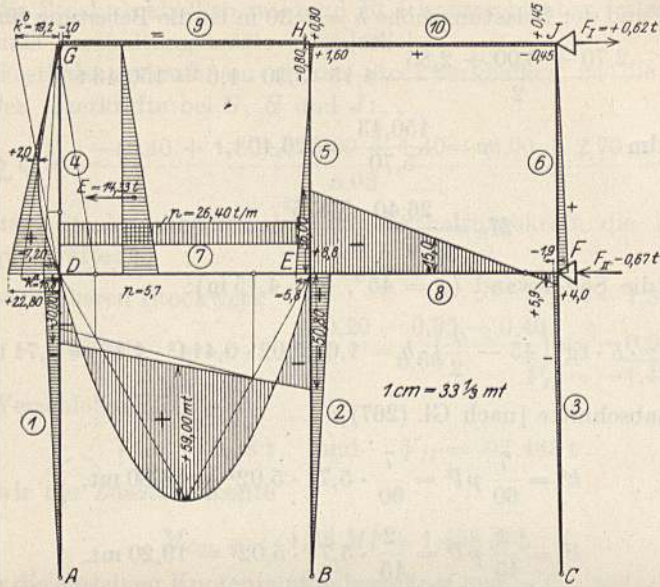


Fig. 462.

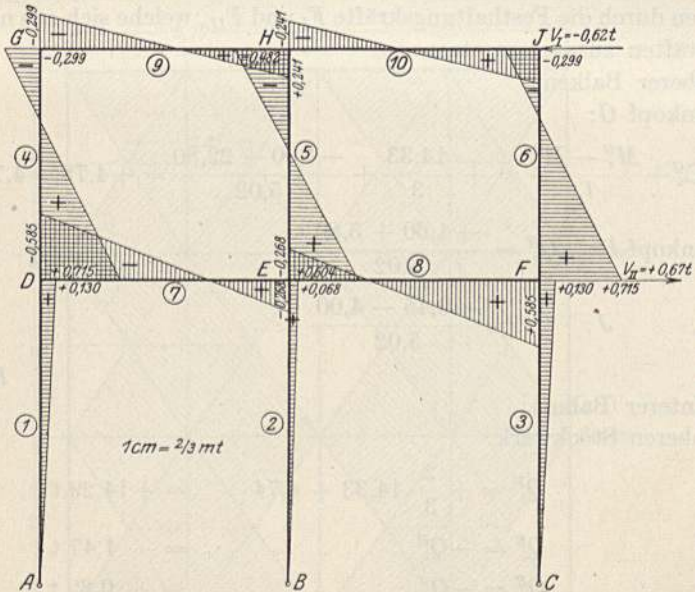


Fig. 462 a.

Mit den Verschiebungskräften  $V_I = -0,62 t$  und  $V_{II} = +0,67 t$  erhalten wir die Zusatzmomente (Fig. 462 a):

$$M_{Zus.} = -0,62 M_I^* + 0,67 M_{II}^*,$$

womit wir in Fig. 462 b die Gesamtmomente und in Fig. 462 c die Querkräfte aus diesem Belastungsfall erhalten.

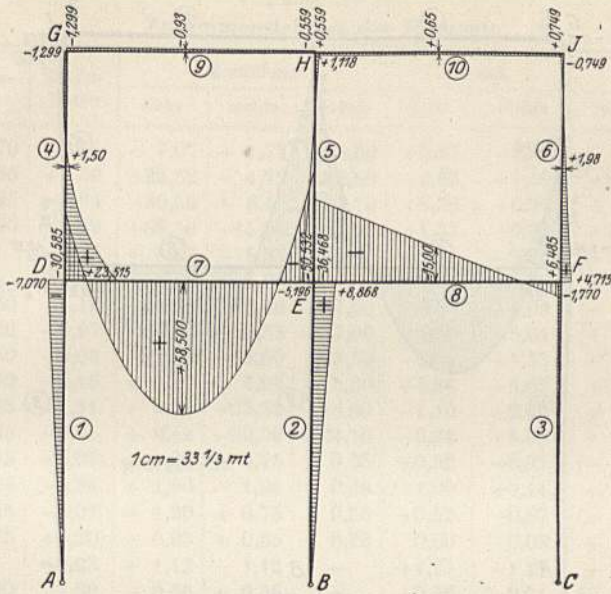


Fig. 462 b.

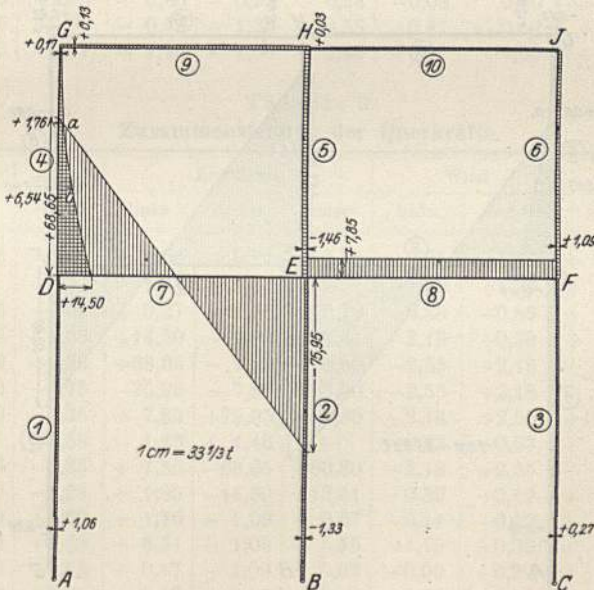


Fig. 462 c.

IV. Beiderseitige Erzfüllung.

Die Momente und Querkräfte erhalten wir durch entsprechende Addition der Momente für einseitige Füllung. Dieselben sind in Fig. 463 und 463 a dargestellt.

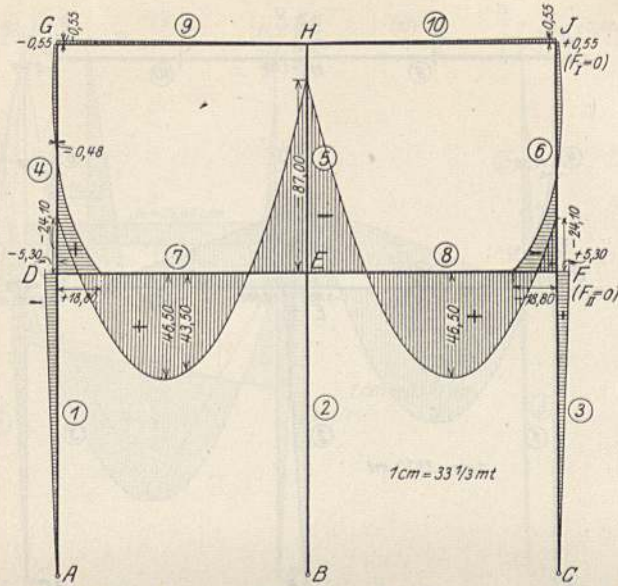


Fig. 463.

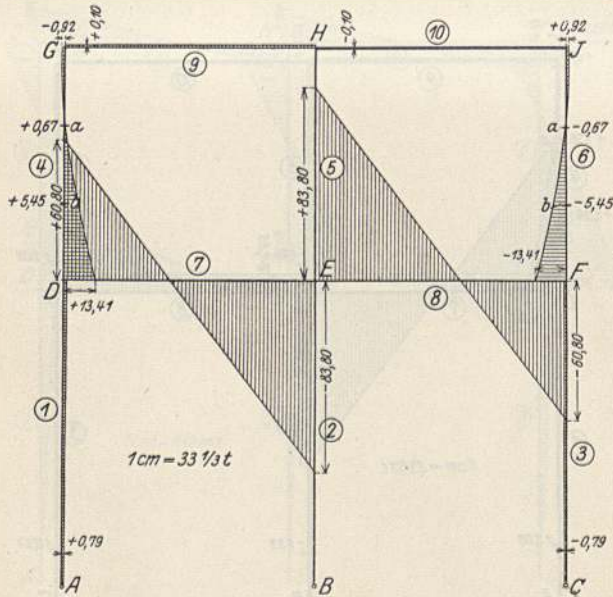


Fig. 463 a.

V. Wind von links.

Belastung:  $w = 0,150 \cdot 4,15 = 0,623 \text{ t/m,}$

daher  $M_0 = \frac{0,623 \cdot 5,02^2}{8} = 1,96 \text{ mt.}$

Tabelle 1.  
Zusammenstellung der Momente.

Schnitt	Eigenlast	Einzellasten	Erzfüllung			Wind		Grenzwerte	
			links	rechts	beiders.	links	rechts	max.	min.
$D_1$	- 1,70	+0,44	- 7,07	+ 1,77	- 5,30	+5,67	-5,84	+ 6,18	- 14,17
$D_4$	+ 3,55	+3,39	+23,52	- 4,72	+18,80	-2,63	+1,10	+31,56	- 0,41
$D_7$	- 5,25	-2,95	-30,59	+ 6,49	-24,10	+8,30	-6,94	+ 6,59	- 45,73
$7_m$	+12,50	-0,89	+58,50	-15,00	+43,50	+1,33	-0,98	+71,44	- 4,37
$E_2$	—	-0,27	+ 8,87	- 8,87	—	+9,25	-9,25	+17,85	- 18,39
$E_5$	—	-0,06	- 5,20	+ 5,20	—	-1,38	+1,38	+ 6,52	- 6,64
$E_7$	-12,50	+1,18	-50,53	-36,46	-87,00	-5,64	+4,99	(- 6,33)	-103,96
$E_8$	-12,50	+0,97	-36,46	-50,53	-87,00	+4,99	-5,64	(- 6,54)	-104,17
$8_m$	+12,50	+0,03	-15,00	+58,50	+43,50	-0,98	+1,33	+71,36	- 3,45
$F_3$	+ 1,70	-0,16	- 1,77	+ 7,07	+ 5,30	+5,84	-5,67	+14,45	- 5,90
$F_6$	- 3,55	-1,11	+ 4,72	-23,52	-18,80	-1,10	+2,63	+ 2,69	- 29,28
$F_8$	- 5,25	-0,95	+ 6,49	-30,59	-24,10	-6,94	+8,30	+ 8,59	- 43,73
$G_4$	- 1,45	-5,07	- 1,30	+ 0,75	- 0,55	+0,52	-0,87	(- 5,25)	- 8,69
$4_m$	+ 1,05	-0,84	+ 1,50	- 1,98	- 0,48	+1,00	+0,11	+ 2,71	- 1,77
$G_9$	- 1,45	-5,07	- 1,30	+ 0,75	- 0,55	+0,52	-0,87	(- 5,25)	- 8,69
$9_m$	+ 0,75	+4,20	- 0,93	+ 0,65	- 0,28	0,00	-0,08	+ 5,59	(+ 3,94)
$H_5$	—	+1,93	+ 1,12	- 1,12	—	+1,27	-1,27	+ 4,32	- 0,46
$H_9$	- 1,30	-7,86	+ 0,56	+ 0,56	—	-0,56	-0,71	(- 8,00)	- 9,83
$H_{10}$	- 1,30	-5,33	+ 0,56	- 0,56	—	+0,71	-0,56	(- 5,36)	- 7,75
$J_{10}$	- 1,45	-5,33	+ 0,75	- 1,30	- 0,55	-0,87	+0,87	(- 5,16)	- 8,95
$10_m$	+ 0,75	+2,00	+ 0,65	- 0,93	- 0,28	-0,08	0,00	+ 3,40	(+ 3,76)
$J_6$	+ 1,45	+5,33	- 0,75	+ 1,30	+ 0,55	+0,87	-0,52	+ 8,95	(+ 5,51)
$6_m$	- 1,05	+2,11	+ 1,98	- 1,50	+ 0,48	-0,11	-1,00	+ 3,04	- 1,44

Tabelle 2.  
Zusammenstellung der Querkräfte.

Schnitt	Eigenlast	Einzellasten	Erzfüllung			Wind		Grenzwerte	
			links	rechts	beiders.	links	rechts	max.	min.
$A_1$	+ 0,26	-0,07	+ 1,06	- 0,27	+ 0,79	-0,85	+0,85	+ 2,10	- 0,93
$B_2$	—	+0,04	- 1,33	+ 1,33	—	-1,39	+1,39	+ 2,76	- 2,68
$C_3$	- 0,26	+0,02	+ 0,27	- 1,06	- 0,79	-0,88	+0,88	+ 0,91	- 2,18
$D_4$	+ 1,00	+1,69	+14,50	- 1,09	+13,41	-2,19	+0,39	+17,58	- 0,59
$D_7$	+14,56	+0,75	+68,65	- 7,85	+60,80	-2,55	+2,18	+86,14	(+ 4,91)
$E_7$	-17,20	+0,75	-75,95	- 7,85	-83,80	-2,55	+2,18	(- 14,27)	-102,80
$E_8$	+17,20	-0,35	+ 7,85	+75,95	+83,80	-2,18	+2,55	+103,20	(+ 14,67)
$E_5$	—	-0,39	- 1,46	+ 1,46	—	-0,53	+0,53	+ 1,60	- 2,38
$F_8$	-14,56	-0,35	+ 7,85	-68,65	-60,80	-2,18	+2,55	(- 3,81)	- 85,04
$F_6$	- 1,00	-1,28	+ 1,09	-14,50	-13,41	-0,39	+2,19	+ 1,00	- 17,17
$4_a$	+ 1,00	+1,69	+ 1,76	- 1,09	+ 0,67	-0,11	+0,39	+ 4,84	(+ 1,49)
$4_b$	+ 1,00	+1,69	+ 6,54	- 1,09	+ 5,45	-1,15	+0,39	+ 9,62	(+ 0,45)
$G_4$	+ 1,00	+1,69	+ 0,17	- 1,09	- 0,92	+0,95	+0,39	+ 3,81	(+ 1,60)
$G_9$	+ 1,46	+3,35	+ 0,13	- 0,03	+ 0,10	-0,20	+0,26	+ 5,20	(+ 4,58)
$P'_9$	- 0,51	-7,45	+ 0,13	- 0,03	+ 0,10	-0,20	+0,26	(- 7,57)	- 8,19
$H_9$	- 1,56	-7,45	+ 0,13	- 0,03	+ 0,10	-0,20	+0,26	(- 8,62)	- 9,24
$H_{10}$	+ 1,56	+2,66	+ 0,03	- 0,13	- 0,10	-0,26	+0,20	+ 4,45	(+ 3,83)
$P'_{10}$	- 0,72	-8,14	+ 0,03	- 0,13	- 0,10	-0,26	+0,20	(- 8,63)	- 9,25
$J_{10}$	- 1,46	-8,14	+ 0,03	- 0,13	- 0,10	-0,26	+0,20	(- 9,37)	- 9,99
$J_6$	- 1,00	-1,28	+ 1,09	- 0,17	+ 0,92	-0,39	-0,93	(- 0,27)	- 3,38
$6_a$	- 1,00	-1,28	+ 1,09	- 1,76	- 0,67	-0,39	+0,11	(- 1,08)	- 4,43
$6_b$	- 1,00	-1,28	+ 1,09	- 6,54	- 5,45	-0,39	+1,15	(- 0,04)	- 9,21

Die Werte in den Klammern kommen für die Dimensionierung nicht in Betracht.

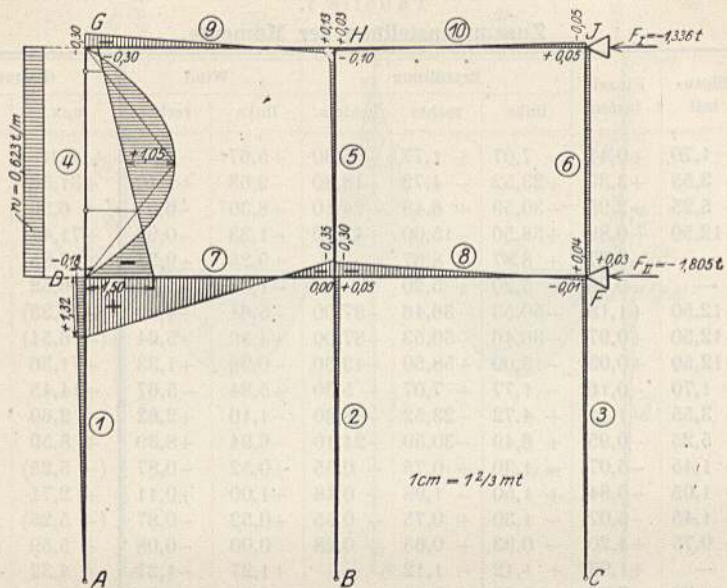


Fig 464.

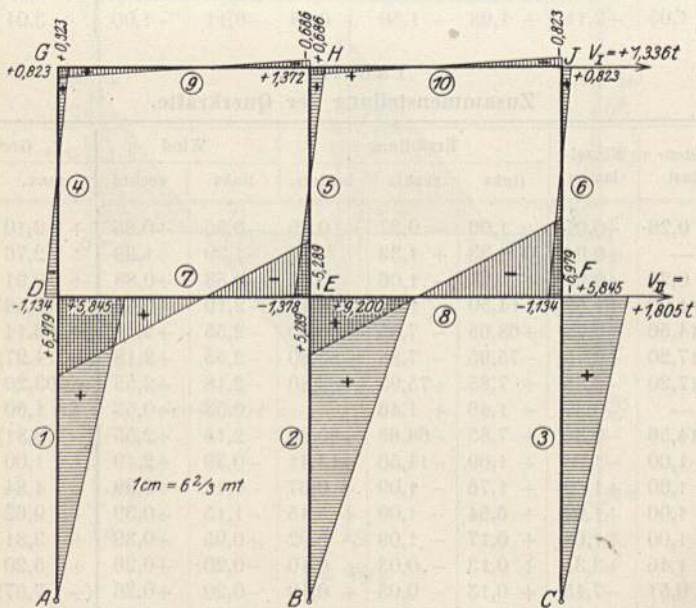


Fig. 464 a.

Die Momente des R. I sind in Fig. 464 dargestellt. Hierbei wirken nachstehende Festhaltungskräfte:



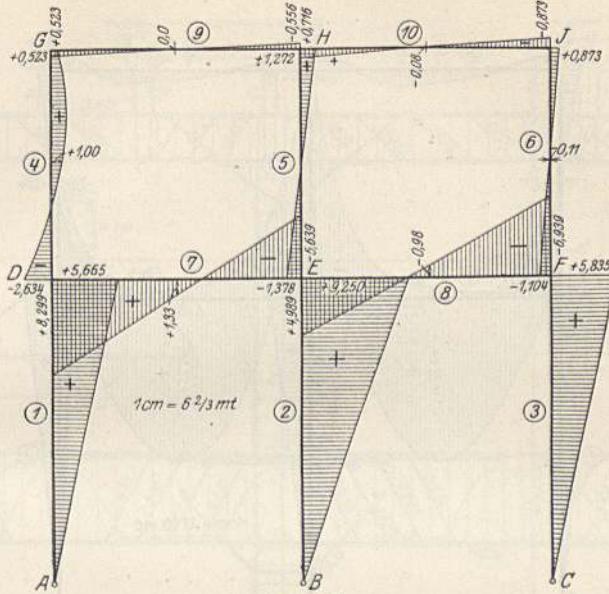


Fig. 464 b.

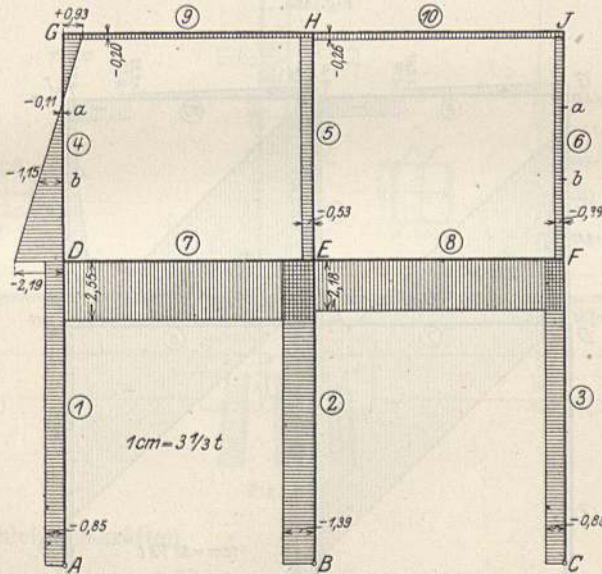


Fig. 464 c.

Oberer Balken:

$$Q_4^G = Q_4^G + \frac{M_4^G - M_4^D}{l_4}$$

$$= \frac{-0,623 \cdot 5,02}{2} + \frac{-0,30 + 1,50}{5,02} = -1,56 + 0,24 = -1,320 \text{ t}$$

$$Q_5^H + Q_6^J = \frac{-0,10 + 0,0 + 0,05 - 0,03}{5,02} \dots = -0,016 \text{ t}$$

$$F_I = -1,336 \text{ t.}$$

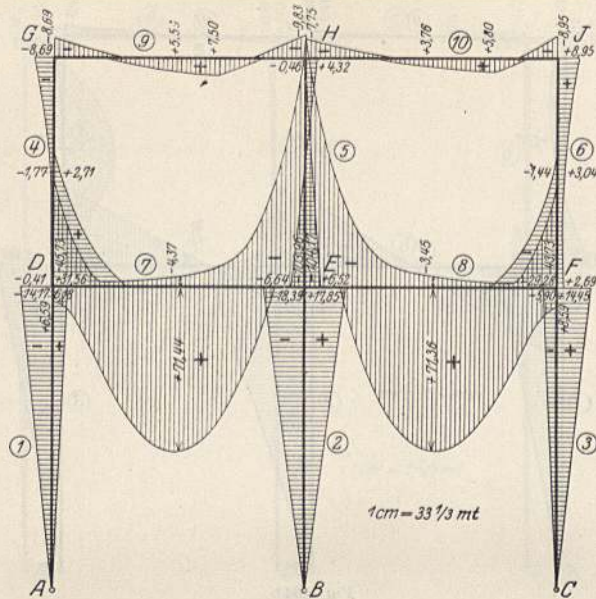


Fig. 465.

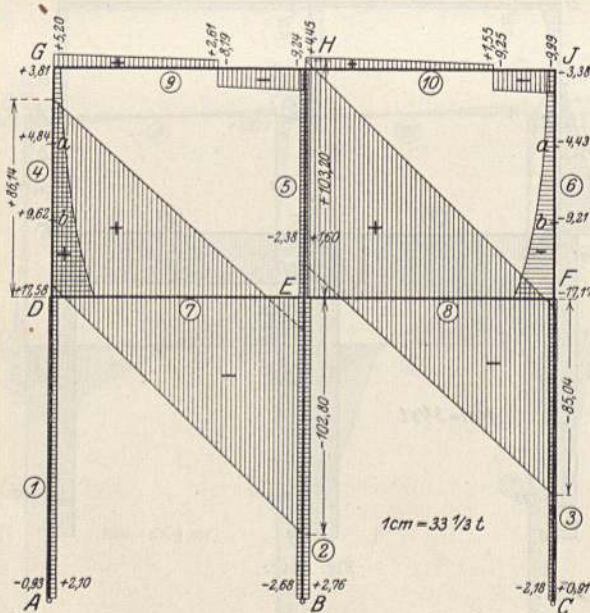


Fig. 466.

Unterer Balken:

$$Q_4^D = -1,56 - 0,24 \dots \dots \dots = -1,800 \text{ t}$$

$$Q_5^E + Q_6^F \dots \dots \dots = +0,016 \text{ t}$$

$$Q_1^D + Q_2^E + Q_3^F = \frac{-0,18 + 0,05 - 0,01}{6,66} = -0,021 \text{ t}$$

$$F_{II} = -1,805 \text{ t.}$$

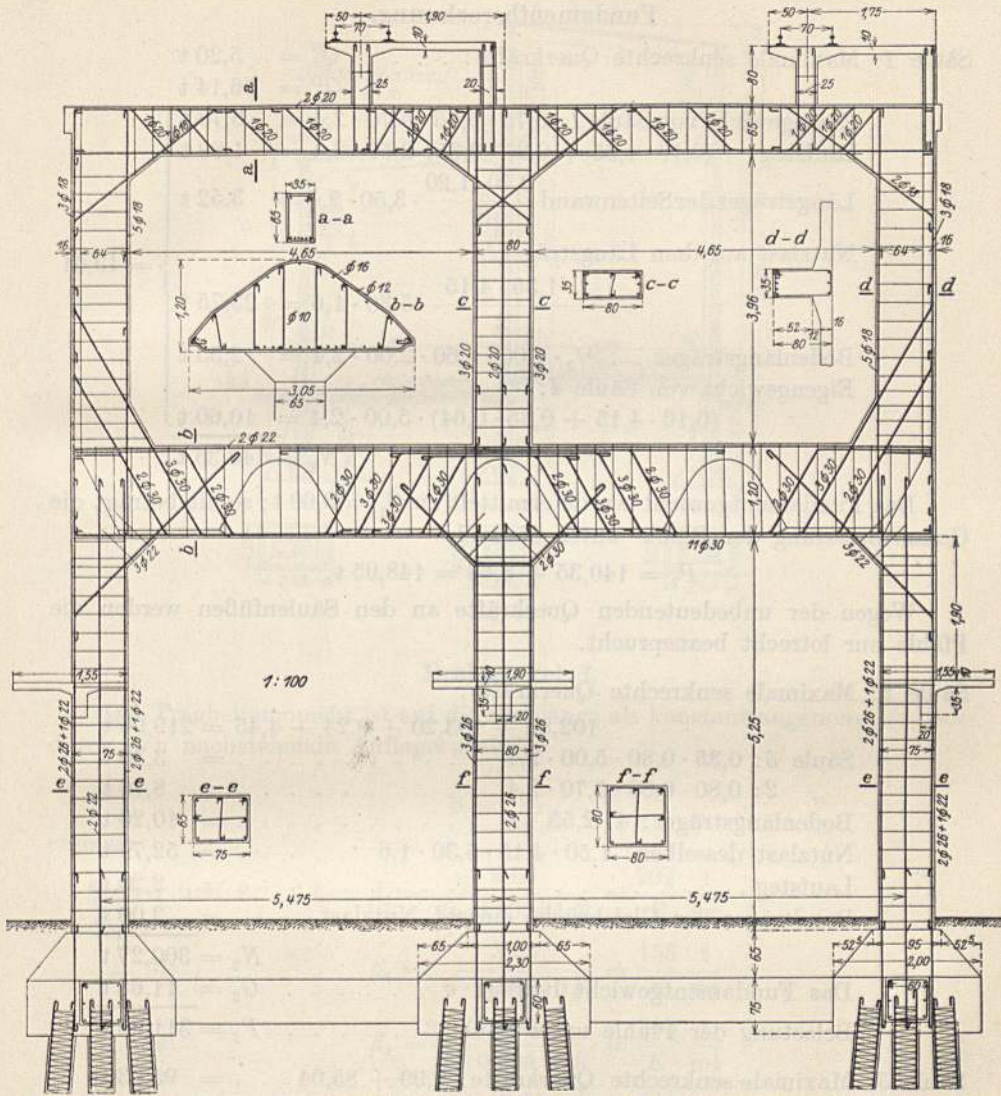


Fig. 467.

Mit den Verschiebungskräften

$$V_I = +1,336 \text{ t} \quad \text{und} \quad V_{II} = +1,805 \text{ t}$$

erhalten wir die Zusatzmomente

$$M_{\text{Zus.}} = +1,336 M_I^* + 1,805 M_{II}^*,$$

die in Fig. 464a dargestellt sind. Fig. 464b zeigt die Gesamtmomente und Fig. 464c die Querkräfte für diesen Belastungsfall.

Die Größtwerte der Momente und Querkräfte sind in Tabelle 1 und 2 zusammengestellt und in Fig. 465 und 466 aufgetragen. Eine Übersicht der Armierung zeigt Fig. 467.

**Fundamentberechnung.**

Säule 1: Maximale senkrechte Querkräfte: . . . . .	$Q_9^G = 5,20 \text{ t}$	
	$Q_7^D = 86,14 \text{ t}$	
Eigengewicht von Säule 1: $0,75 \cdot 0,65 \cdot 5,70 \cdot 2,4 =$	$6,70 \text{ t}$	}
Laufsteg: $(0,10 \cdot 1,55 + 0,20 \cdot 0,35) 3,50 \cdot 2,4 =$	$1,89 \text{ t}$	
Längsträger der Seitenwand $\frac{0,70 \cdot 1,20}{2} \cdot 3,50 \cdot 2,4 =$	$3,52 \text{ t}$	
Nutzlast auf dem Längsträger		
$\frac{1,35 \cdot 4,15}{2} \cdot 5,30 \cdot 1,6 =$	$23,75 \text{ t}$	
Bodenlängsträger . . $\frac{1}{3} \cdot 1,00 \cdot 1,60 \cdot 2,00 \cdot 2,4 =$	$2,55 \text{ t}$	
Eigengewicht von Säule 4: $(0,16 \cdot 4,15 + 0,35 \cdot 0,64) \cdot 5,00 \cdot 2,4 =$	$10,60 \text{ t}$	
	$N_1 = 140,35 \text{ t.}$	$= 49,01$

Das Fundamentgewicht wurde ermittelt zu  $G_1 = 8,60 \text{ t}$ ; somit beträgt die Gesamtbelastung der Pfähle unter Säule 1:

$$P_1 = 140,35 + 8,60 = 148,95 \text{ t.}$$

Wegen der unbedeutenden Querkräfte an den Säulenfüßen werden die Pfähle nur lotrecht beansprucht.

Säule 2: Maximale senkrechte Querkräfte:

	$102,80 + 103,20 + 9,24 + 4,45 =$	$219,96 \text{ t}$
Säule 5: $0,35 \cdot 0,80 \cdot 5,00 \cdot 2,4$ . . . . .		$= 3,36 \text{ t}$
„ 2: $0,80 \cdot 0,80 \cdot 5,70 \cdot 2,4$ . . . . .		$= 8,76 \text{ t}$
Bodenlängsträger: $4 \cdot 2,55$ . . . . .		$= 10,20 \text{ t}$
Nutzlast desselben: $1,50 \cdot 4,15 \cdot 5,30 \cdot 1,6$ . . . . .		$= 52,79 \text{ t}$
Laufsteg . . . . .		$= 2,20 \text{ t}$
Randträger der Gleisbrücke einschl. Nutzlast . . . . .		$= 3,00 \text{ t.}$
		$N_2 = 300,27 \text{ t}$
Das Fundamentgewicht beträgt . . . . .	$G_2 =$	$11,68 \text{ t}$
Belastung der Pfähle unter Säule 2 . . . . .	$P_2 =$	$311,95 \text{ t.}$

Säule 3: Maximale senkrechte Querkräfte: $9,99 + 85,04$ . . . . .		$= 95,03 \text{ t}$
Belastung durch die Gleisbrücke . . . . .		$= 3,20 \text{ t}$
Die übrige Last ist wie bei Säule 1 . . . . .		$= 49,01 \text{ t}$
		$N_3 = 147,24 \text{ t}$
Fundament . . . . .	$G_3 =$	$8,60 \text{ t}$
Belastung der Pfähle unter Säule 3: . . . . .	$P_3 =$	$155,84 \text{ t.}$

**Beispiel 11.****Hallenbinder einer Erzbrikettierungsanlage, nach der Seite zweistöckig.**

Es soll der in Fig. 468 dargestellte, nach der Seite zweistöckige Hallenbinder berechnet werden, dessen Säulenfüße fest eingespannt sind.



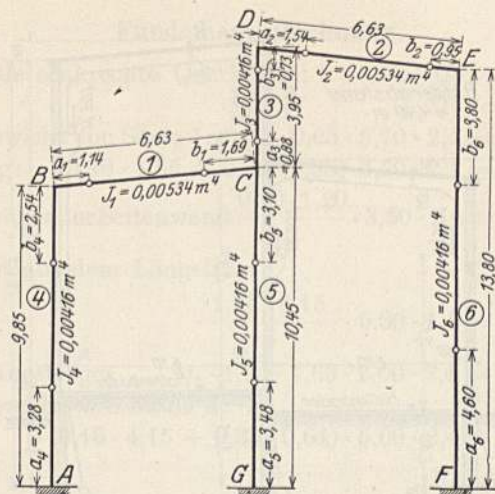


Fig. 468 a.

$$\text{Stab 1: } a_1 = \frac{l_1}{3 + \frac{\varepsilon_1^a}{\beta_1}} = \frac{6,63}{3 + \frac{593}{207}} = 1,14 \text{ m; } l_1 - a_1 = 6,63 - 1,14 = 5,49 \text{ m,}$$

$$\tau_1^C = \beta_1 \left( 3 - \frac{l_1}{l_1 - a_1} \right) = \frac{207}{E} \left( 3 - \frac{6,63}{5,49} \right) = \frac{370}{E}.$$

$$\text{Stab 5: } a_5 = \frac{l_5}{3} = \frac{10,45}{3} = 3,48 \text{ m,}$$

$$\tau_5^G = \frac{l_5}{4 J E} = \frac{10,45}{4 \cdot 0,00416 E} = \frac{627}{E},$$

$$\tau_{1-5}^C = \frac{\tau_1^C \cdot \tau_5^G}{\tau_1^C + \tau_5^G} = \frac{370 \cdot 627}{370 + 627} = \frac{233}{E} = \varepsilon_3^a.$$

$$\text{Stab 3: } a_3 = \frac{l_3}{3 + \frac{\varepsilon_3^a}{\beta_3}} = \frac{3,95}{3 + \frac{233}{158}} = 0,88 \text{ m; } l_3 - a_3 = 3,95 - 0,88 = 3,07 \text{ m,}$$

$$\tau_3^D = \beta_3 \left( 3 - \frac{l_3}{l_3 - a_3} \right) = 158 \left( 3 - \frac{3,95}{3,07} \right) = \frac{271}{E} = \varepsilon_2^a.$$

$$\text{Stab 2: } a_2 = \frac{l_2}{3 + \frac{\varepsilon_2^a}{\beta_2}} = \frac{6,63}{3 + \frac{271}{207}} = 1,54 \text{ m; } l_2 - a_2 = 6,63 - 1,54 = 5,09 \text{ m,}$$

$$\tau_2^F = \beta_2 \left( 3 - \frac{l_2}{l_2 - a_2} \right) = 207 \left( 3 - \frac{6,63}{5,09} \right) = \frac{351}{E} = \varepsilon_6^b.$$

$$\text{Stab 6: } b_6 = \frac{l_6}{3 + \frac{\varepsilon_6^b}{\beta_6}} = \frac{13,80}{3 + \frac{351}{553}} = 3,80 \text{ m,}$$

$$\text{Stab 6: } a_6 = \frac{13,80}{3} = 4,60 \text{ m,}$$

$$\tau_6^E = \frac{l_6}{4 J_6 E} = \frac{13,80}{4 \cdot 0,00416 E} = \frac{830}{E} = \varepsilon_2^b,$$

$$\text{Stab 2: } q_2 = \frac{l_2}{3 + \frac{\varepsilon_2^b}{\beta_2}} = \frac{6,63}{3 + \frac{830}{207}} = 0,95 \text{ m; } l_2 - b_2 = 6,63 - 0,95 = 5,68 \text{ m,}$$

$$\tau_2^D = \beta_2 \left( 3 - \frac{l_2}{l_2 - b_2} \right) = 207 \left( 3 - \frac{6,63}{5,68} \right) = \frac{379}{E} = \varepsilon_3^b,$$

$$\text{Stab 3: } b_3 = \frac{l_3}{3 + \frac{\varepsilon_3^b}{\beta_3}} = \frac{3,95}{3 + \frac{379}{158}} = 0,73 \text{ m; } l_3 - b_3 = 3,95 - 0,73 = 3,22 \text{ m,}$$

$$\tau_3^C = \beta_3 \left( 3 - \frac{l_3}{l_3 - b_3} \right) = 158 \left( 3 - \frac{3,95}{3,22} \right) = \frac{280}{E},$$

$$\tau_{1-3}^C = \frac{\tau_1^C \cdot \tau_3^C}{\tau_1^C + \tau_3^C} = \frac{370 \cdot 280}{370 + 280} = \frac{159}{E} = \varepsilon_5^b,$$

$$\text{Stab 5: } b_5 = \frac{l_5}{3 + \frac{\varepsilon_5^b}{\beta_5}} = \frac{10,45}{3 + \frac{159}{418}} = 3,10 \text{ m,}$$

$$\tau_{3-5}^C = \frac{\tau_3^C \cdot \tau_5^C}{\tau_3^C + \tau_5^C} = \frac{280 \cdot 627}{280 + 627} = \frac{193}{E} = \varepsilon_1^b.$$

$$\text{Stab 1: } b_1 = \frac{l_1}{3 + \frac{\varepsilon_1^b}{\beta_1}} = \frac{6,63}{3 + \frac{193}{207}} = 1,69 \text{ m; } l_1 - b_1 = 6,63 - 1,69 = 4,94 \text{ m,}$$

$$\tau_1^B = \beta_1 \left( 3 - \frac{l_1}{l_1 - b_1} \right) = 207 \left( 3 - \frac{6,63}{4,94} \right) = \frac{344}{E} = \varepsilon_4^b,$$

$$\text{Stab 4: } b_4 = \frac{l_4}{3 + \frac{\varepsilon_4^b}{\beta_4}} = \frac{9,85}{3 + \frac{344}{395}} = 2,54 \text{ m.}$$

#### Verteilungsmaße für den Knotenpunkt C.

$$\mu_{1-5}^C = \frac{\tau_{3-5}^C}{\tau_5^C} = \frac{193}{627} = 0,31; \quad \mu_{1-3}^C = 1 - 0,31 = 0,69,$$

$$\mu_{5-3}^C = \frac{\tau_{1-3}^C}{\tau_3^C} = \frac{159}{280} = 0,57; \quad \mu_{5-1}^C = 1 - 0,57 = 0,43,$$

$$\mu_{3-1}^C = \frac{\tau_{1-5}^C}{\tau_1^C} = \frac{233}{370} = 0,63; \quad \mu_{3-5}^C = 1 - 0,63 = 0,37.$$

#### Momente $M_I$ .

Diese erhalten wir, wenn wir den Balken 1 um  $\Delta = 1$  cm nach rechts verschieben, wobei Balken 2 dieselbe Verschiebung mitmachen soll (Fig. 469 und 469a). Dann erleiden die Säulen 4, 5 und 6 (siehe Fig. 469a) gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen  $q$  ihrer Enden, welche gleich der gegebenen Verschiebung  $\Delta = 1$  cm sind.

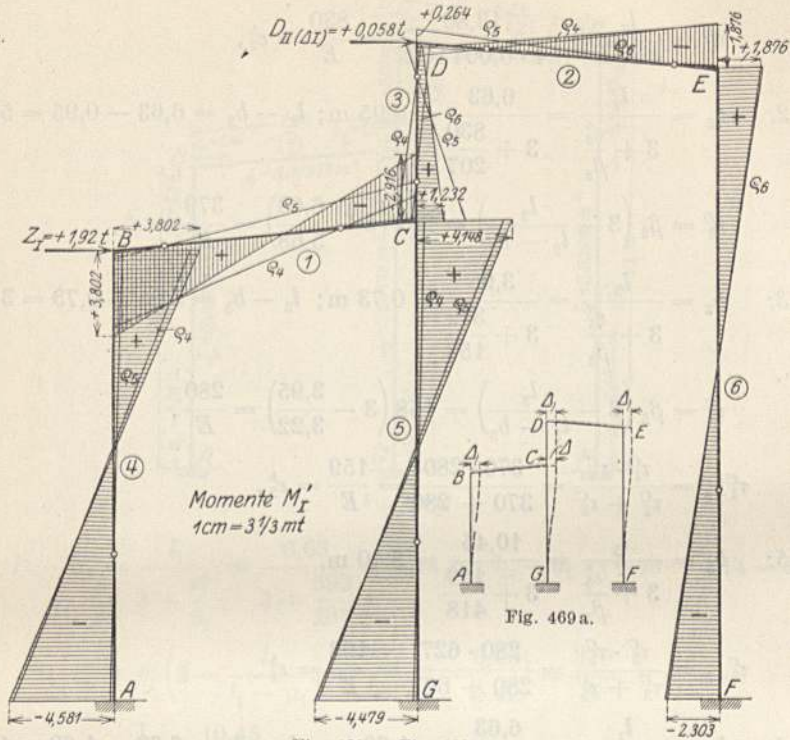


Fig. 469 u. Fig. 469 a.

Die davon herrührenden Momente erhalten wir nach den Gl. (515) und (520), und zwar:

a) Infolge  $q_4 = 1 \text{ cm}$ :

$$M_4^B = \frac{q_4 \cdot b_4}{l_4 \cdot \beta_4 (l_4 - a_4 - b_4)} = \frac{0,01 \cdot 2100000 \cdot 2,54}{9,85 \cdot 3,95 (9,85 - 3,28 - 2,54)} = +3,40 \text{ mt},$$

$$M_4^A = \frac{M_4^B}{b_4} \cdot a_4 = -\frac{3,40}{2,54} \cdot 3,28 = -4,30 \text{ mt}.$$

Das Moment  $M^B$  leiten wir mittels der Festpunkte und Verteilungsmaße über die übrigen Stäbe weiter (Fig. 469).

b) Infolge  $q_5 = 1 \text{ cm}$ :

$$M_5^C = \frac{q_5 \cdot b_5}{l_5 \cdot \beta_5 (l_5 - a_5 - b_5)} = \frac{0,01 \cdot 2100000 \cdot 3,10}{10,45 \cdot 4,18 (10,45 - 3,48 - 3,10)} = +3,85 \text{ mt},$$

$$M_5^G = \frac{M_5^C}{b_5} \cdot a_5 = -\frac{3,85}{3,10} \cdot 3,48 = -4,33 \text{ mt}.$$

$M_5^C$  leiten wir wieder mittels Verteilungsmaße und Festpunkte weiter.

c) Infolge  $q_6 = 1 \text{ cm}$ :

$$M_6^E = \frac{q_6 \cdot b_6}{l_6 \cdot \beta_6 (l_6 - a_6 - b_6)} = \frac{0,01 \cdot 2100000 \cdot 3,80}{13,80 \cdot 5,53 (13,80 - 4,60 - 3,80)} = +1,93 \text{ mt},$$

$$M_6^F = \frac{M_6^E}{b_6} \cdot a_6 = -\frac{1,93}{3,80} \cdot 4,60 = -2,33 \text{ mt}.$$



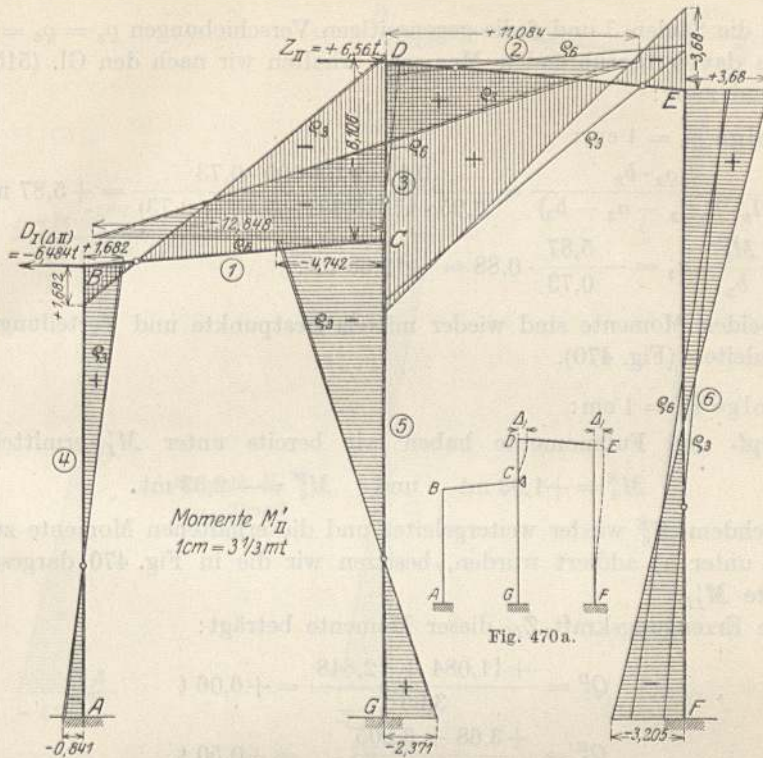


Fig. 470 u. Fig. 470 a.

$M_6^E$  wieder wie die vorhergehenden Momente weitergeleitet und dann zu diesen addiert, ergibt die in Fig. 469 dargestellten Momente  $M'_I$ .

Die Erzeugungskraft  $Z_I$  dieser Momente stellt sich als die Summe der Säulenquerkräfte bei B und C dar:

$$Q_B^B = \frac{+3,802 + 4,581}{9,85} = +0,850 \text{ t}$$

$$Q_5^C = \frac{+4,148 + 4,479}{10,45} = +0,825 \text{ t}$$

$$Q_3^C = \frac{+1,232 - 0,264}{3,95} = +0,245 \text{ t}$$

$$Z_I = +1,920 \text{ t.}$$

Die Kraft  $D_{II(\Delta I)}$ , die den Balken 2 in der mitverschobenen Lage festhält, ist die Summe der beiden Säulenquerkräfte bei D und E, nämlich:

$$Q_3^D = -Q_3^C = -0,245 \text{ t}$$

$$Q_6^E = \frac{+1,876 + 2,303}{13,80} = +0,303 \text{ t}$$

$$D_{II(\Delta I)} = +0,058 \text{ t.}$$

**Momente  $M'_{II}$ .**

Wir verschieben nun den Balken 2 um  $\Delta = 1 \text{ cm}$  nach rechts, wobei der Balken 1 unverschiebbar festgehalten werden soll (Fig. 470 und 470 a). Dann

erleiden die Säulen 3 und 6 die gegenseitigen Verschiebungen  $\varrho_3 = \varrho_6 = 1$  cm, und die davon herrührenden Momente erhalten wir nach den Gl. (515) und (520), und zwar:

a) Infolge  $\varrho_3 = 1$  cm:

$$M_3^D = \frac{\varrho_3 \cdot b_3}{l_3 \cdot \beta_3 (l_3 - a_3 - b_3)} = \frac{0,01 \cdot 2100000 \cdot 0,73}{3,95 \cdot 158 (3,95 - 0,88 - 0,73)} = +5,87 \text{ mt,}$$

$$M_3^C = \frac{M_3^D}{b_3} \cdot a_3 = -\frac{5,87}{0,73} \cdot 0,88 = -12,68 \text{ mt.}$$

Diese beiden Momente sind wieder mittels Festpunkte und Verteilungsmaße weiterzuleiten (Fig. 470).

b) Infolge  $\varrho_6 = 1$  cm:

Kopf- und Fußmomente haben wir bereits unter  $M'_I$  ermittelt zu:

$$M_6^E = +1,93 \text{ mt} \quad \text{und} \quad M_6^F = -2,33 \text{ mt.}$$

Nachdem  $M_6^E$  wieder weitergeleitet und die erhaltenen Momente zu denjenigen unter a) addiert wurden, besitzen wir die in Fig. 470 dargestellten Momente  $M'_{II}$ .

Die Erzeugungskraft  $Z_{II}$  dieser Momente beträgt:

$$Q_3^D = \frac{+11,084 + 12,848}{3,95} = +6,06 \text{ t}$$

$$Q_6^E = \frac{+3,68 + 3,205}{13,80} = +0,50 \text{ t}$$

$$Z_{II} = +6,56 \text{ t.}$$

Die Kraft  $D_{I(\Delta II)}$ , die den Balken I wie vorausgesetzt festhält, bestimmt sich zu:

$$Q_4^B = \frac{+1,682 + 0,841}{9,85} = +0,256 \text{ t}$$

$$Q_5^C = \frac{-4,742 - 2,371}{10,45} = -0,680 \text{ t}$$

$$Q_3^C = \frac{-12,848 - 11,084}{3,95} = -6,060 \text{ t}$$

$$D_{I(\Delta II)} = -6,484 \text{ t.}$$

### Momente $M_I^*$ .

Die Momente  $M_I^*$  infolge der horizontalen Kraft  $H = +1$  t am Balken I erhalten wir aus den  $M'$ -Momenten nach der Gl. (544) zu:

$$\begin{aligned} M_I^* &= \frac{Z_{II} \cdot M'_I - D_{II(\Delta I)} \cdot M'_{II}}{Z_I \cdot Z_{II} - D_{I(\Delta II)} \cdot D_{II(\Delta I)}} \\ &= \frac{6,56 M'_I - 0,058 M'_{II}}{1,92 \cdot 6,56 + 6,484 \cdot 0,058} = 0,50573 M'_I - 0,00447 M'_{II}. \end{aligned}$$

Mit diesen Koeffizienten erhalten wir z. B. am Punkte A das  $M_I^*$ -Moment:

$$M^{A*} = -0,50573 \cdot 4,581 + 0,00447 \cdot 0,841 = -2,316 \text{ mt (Fig. 471).}$$

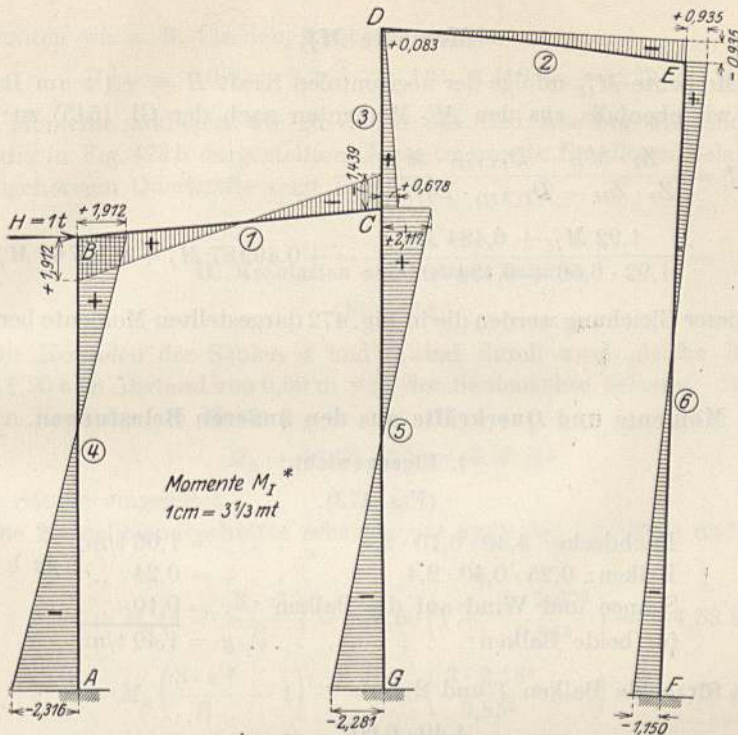


Fig. 471.

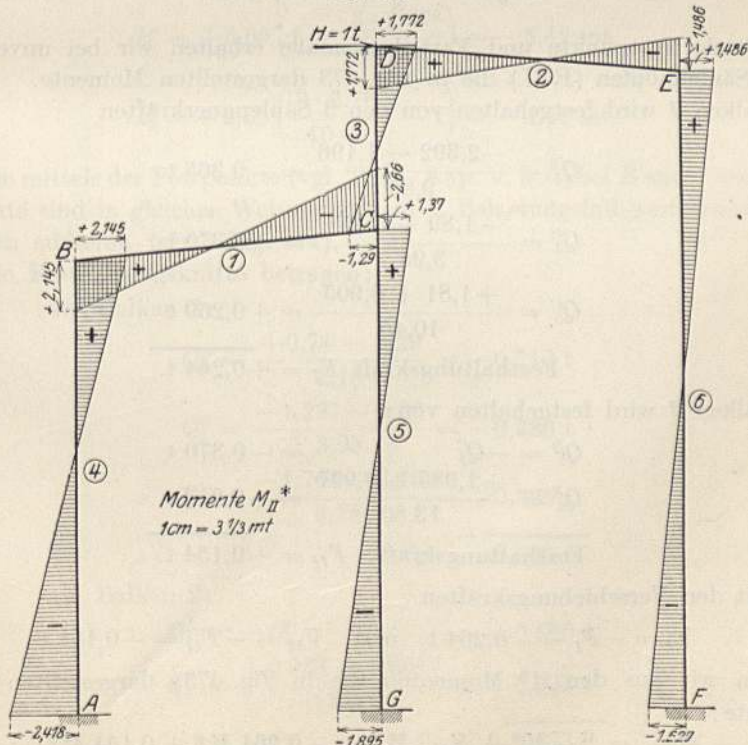


Fig. 472.

### Momente $M_{II}^*$ .

Die Momente  $M_{II}^*$  infolge der horizontalen Kraft  $H = +1$  t am Balken 2' erhalten wir ebenfalls aus den  $M'$ -Momenten nach der Gl. (545) zu:

$$\begin{aligned} M_{II}^* &= \frac{Z_I \cdot M'_{II} - D_{I(\Delta II)} \cdot M'_I}{Z_I \cdot Z_{II} - D_{I(\Delta II)} \cdot D_{II(\Delta I)}} \\ &= \frac{1,92 M'_{II} + 6,484 M'_I}{1,92 \cdot 6,56 + 6,484 \cdot 0,058} = +0,49987 M'_I + 0,10760 M'_{II}. \end{aligned}$$

Mittels dieser Gleichung werden die in Fig. 472 dargestellten Momente berechnet.

### Momente und Querkräfte aus den äußeren Belastungen.

#### I. Eigengewicht.

(Fig. 473).

$$\begin{aligned} \text{Dachdecke: } & 4,40 \cdot 0,10 \cdot 2,4 \dots\dots\dots = 1,06 \text{ t/m,} \\ \text{Balken: } & 0,25 \cdot 0,40 \cdot 2,4 \dots\dots\dots = 0,24 \text{ ,,} \\ \text{Schnee und Wind auf die Balken } & \dots\dots\dots = 0,10 \text{ ,,} \\ \text{für beide Balken: } & \dots\dots\dots g = \underline{1,40 \text{ t/m,}} \end{aligned}$$

daher ist für beide Balken 1 und 2

$$M_0 = \frac{1,40 \cdot 6,60^2}{8} = 7,62 \text{ mt.}$$

Mittels Festpunkte und Verteilungsmaße erhalten wir bei unverschieb-  
baren Säulenköpfen (R. I.) die in Fig. 473 dargestellten Momente.

Balken 1 wird festgehalten von den 3 Säulenquerkräften

$$Q_4^B = \frac{-2,392 - 1,196}{9,85} = -0,365 \text{ t}$$

$$Q_3^C = \frac{-1,89 + 3,35}{3,95} = +0,370 \text{ t}$$

$$Q_5^C = \frac{+1,81 + 0,905}{10,45} = +0,259 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } F_I = +0,264 \text{ t.}$$

Balken 2 wird festgehalten von:

$$Q_3^D = -Q_3^C = -0,370 \text{ t}$$

$$Q_6^E = \frac{+1,985 + 0,997}{13,80} = +0,216 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft: } F_{II} = -0,154 \text{ t.}$$

Mit den Verschiebungskräften

$$V_I = -F_I = -0,264 \text{ t} \quad \text{und} \quad V_{II} = -F_{II} = +0,154 \text{ t}$$

erhalten wir aus den  $M^*$ -Momenten die in Fig. 473a dargestellten Zusatz-  
momente:

$$M_{\text{Zus.}} = V_I \cdot M_I^* + V_{II} \cdot M_{II}^* = -0,264 M_I^* + 0,154 M_{II}^*.$$

So erhalten wir z. B. für den Knotenpunkt  $A$ :

$$M_{\text{Zus.}}^A = +0,264 \cdot 2,316 - 0,154 \cdot 2,418 = +0,239 \text{ mt.}$$

Diese Momente addieren wir zu denen des R. I. aus Fig. 473 und erhalten dann die in Fig. 473 b dargestellten Gesamtmomente für diesen Belastungsfall. Die zugehörigen Querkräfte zeigt Fig. 473 c.

## II. Kranlasten am kleinen Rahmen.

(Fig. 474.)

Die Konsolen der Säulen 4 und 5 sind durch zwei gleiche Kranlasten  $P = 11,20 \text{ t}$  im Abstand von  $0,50 \text{ m}$  von der Säulennachse belastet. Daher wird bei den Konsolen ein Moment

$$M_0 = 11,20 \cdot 0,50 = 5,60 \text{ mt}$$

in die Säulen eingeleitet.

Die Kreuzlinienabschnitte erhalten wir nach den Gl. (283) und (284) für Säule 4 zu:

$$k_4^a = -M_0 \left( 1 - \frac{3 \cdot z^2}{l_4^2} \right) = -5,60 \left( 1 - \frac{3 \cdot 7,67^2}{9,85^2} \right) = +4,53 \text{ mt,}$$

$$k_4^b = -M_0 \left( \frac{3 \cdot z'^2}{l_4^2} - 1 \right) = -5,60 \left( \frac{3 \cdot 2,18^2}{9,85^2} - 1 \right) = +4,78 \text{ mt.}$$

für Säule 5:

$$k_5^a = +5,60 \left( 1 - \frac{3 \cdot 7,67^2}{10,45^2} \right) = -5,42 \text{ mt,}$$

$$k_5^b = +5,60 \left( \frac{3 \cdot 2,78^2}{10,45^2} - 1 \right) = -4,41 \text{ mt.}$$

Die mittels der Festpunkte (vgl. Teil I, Kap. V, 3, d) bei  $B$  und  $C$  ermittelten Momente sind in gleicher Weise wie beim I. Belastungsfall weiterzuleiten und dann zu addieren (siehe Fig. 474).

Die Festhaltungskräfte betragen:

am Balken 1:

$$Q_4^B = \frac{+0,74 - 2,29}{2,18} = -0,710 \text{ t}$$

$$Q_5^C = \frac{-1,237 - 0,26}{3,95} = -0,380 \text{ t}$$

$$Q_5^C = \frac{-1,704 + 3,16}{2,78} = +0,525 \text{ t}$$

$$F_I = \underline{\underline{-0,565 \text{ t.}}}$$

am Balken 2:

$$Q_3^D = -Q_3^C = +0,380 \text{ t}$$

$$Q_6^E = \frac{+0,033 + 0,0017}{13,80} = +0,003 \text{ t}$$

$$F_{II} = \underline{\underline{+0,383 \text{ t.}}}$$

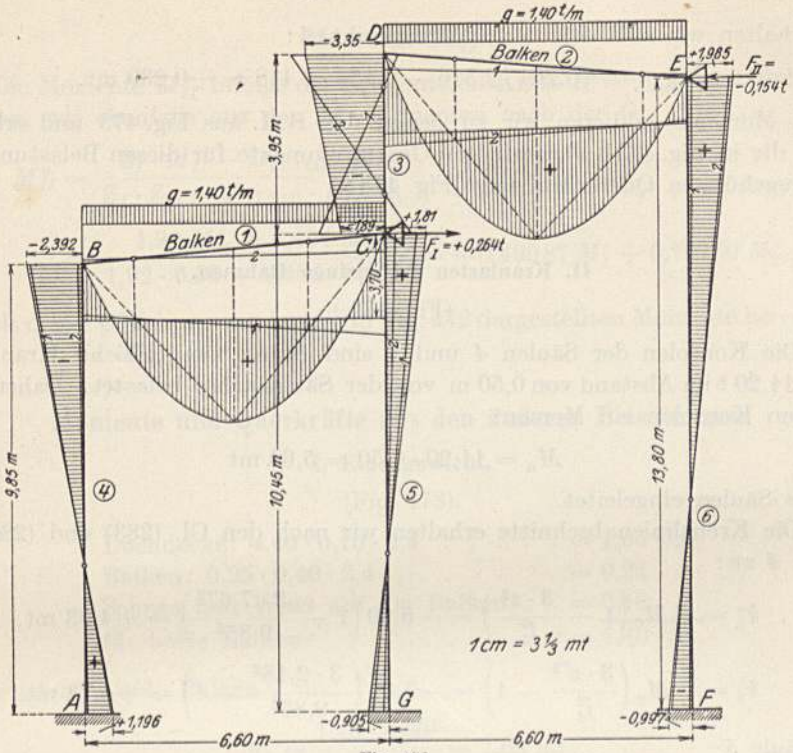


Fig. 473.

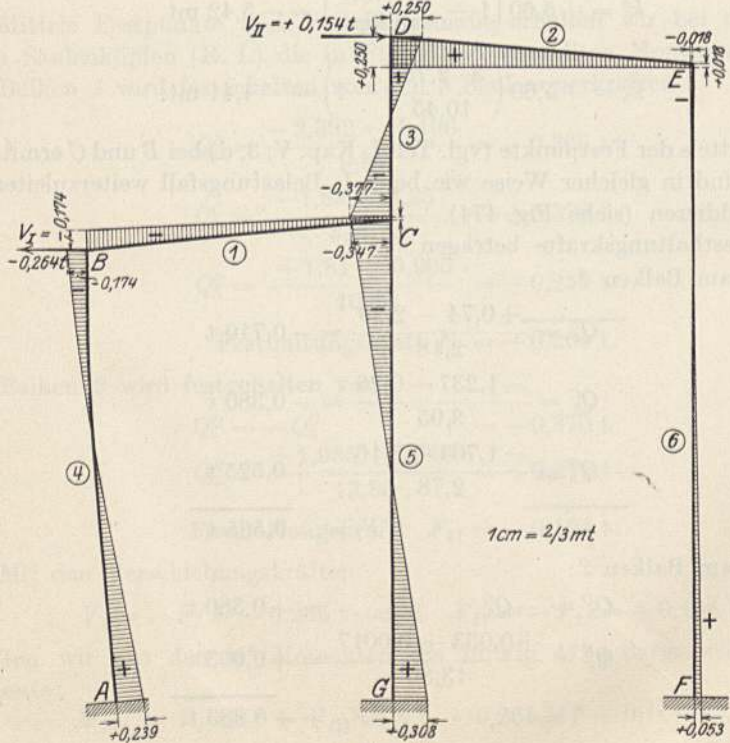
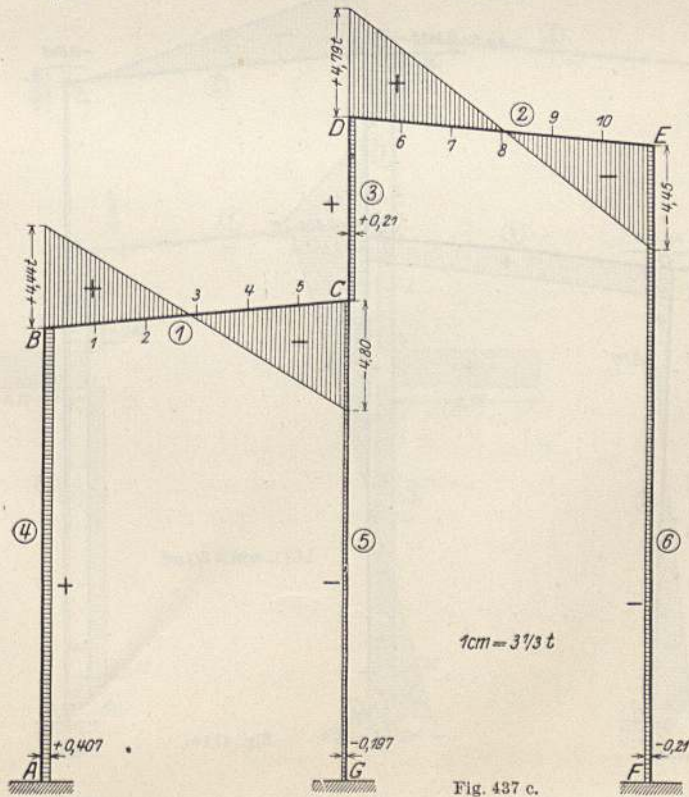
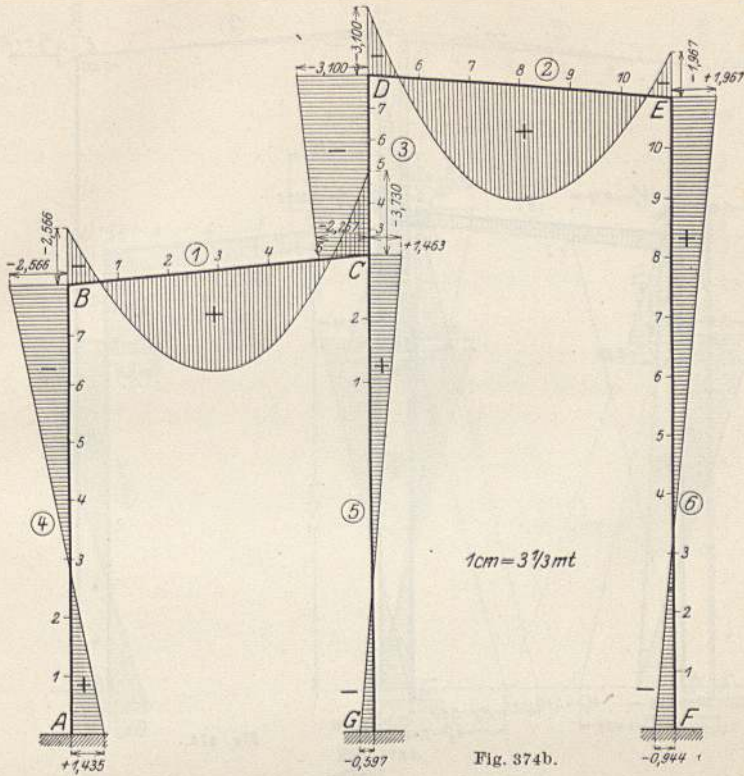


Fig. 473a.



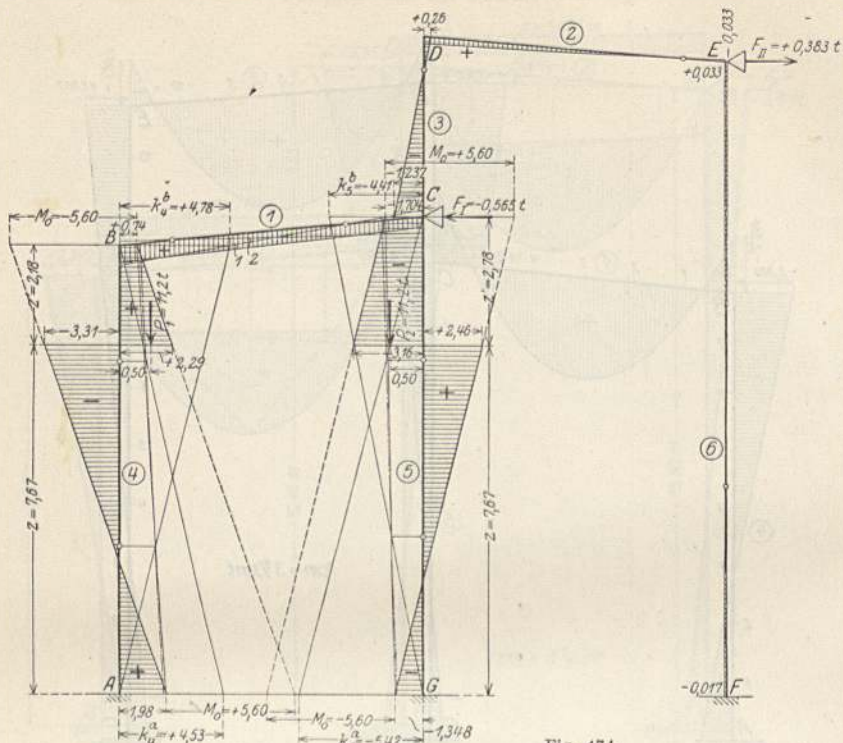


Fig. 474.

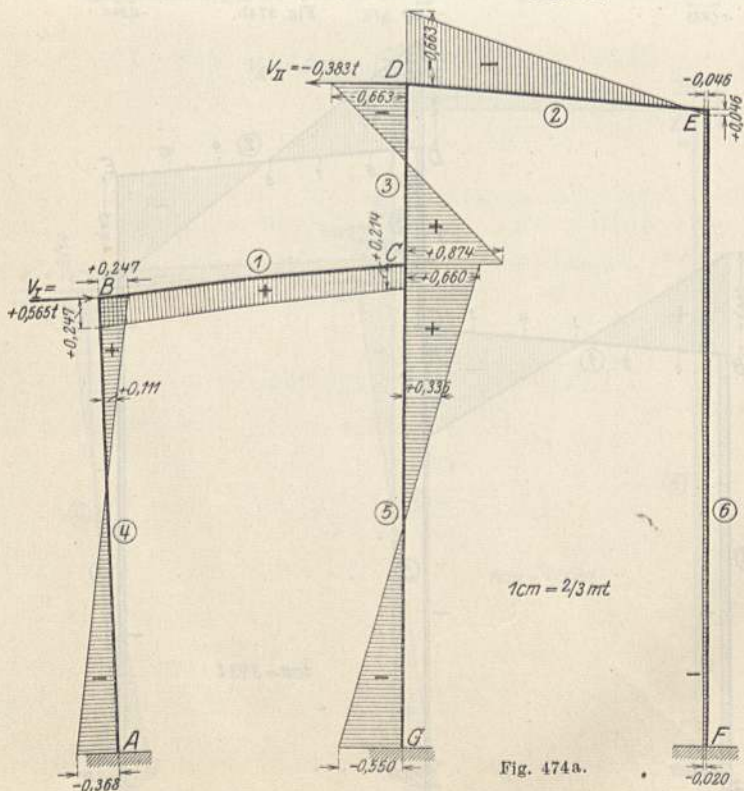


Fig. 474a.



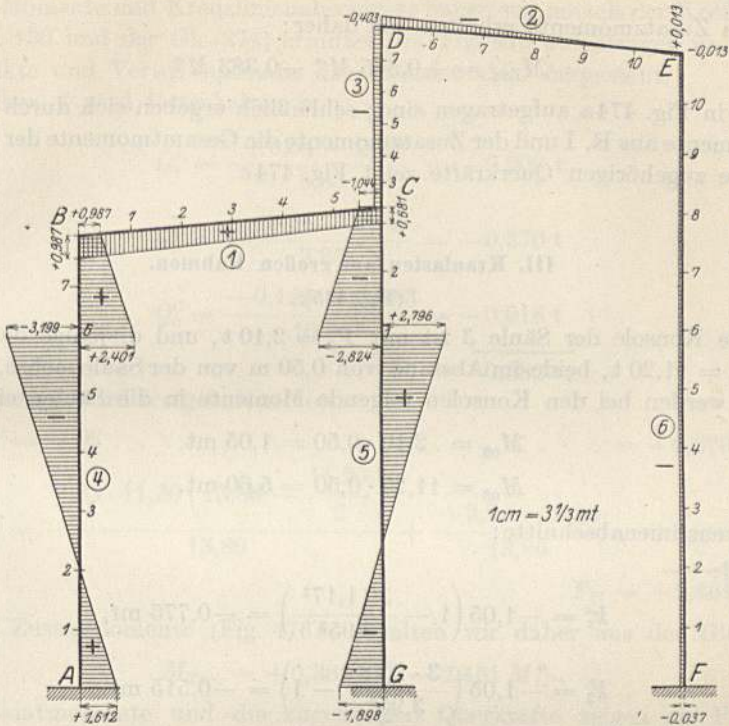


Fig. 474 b.

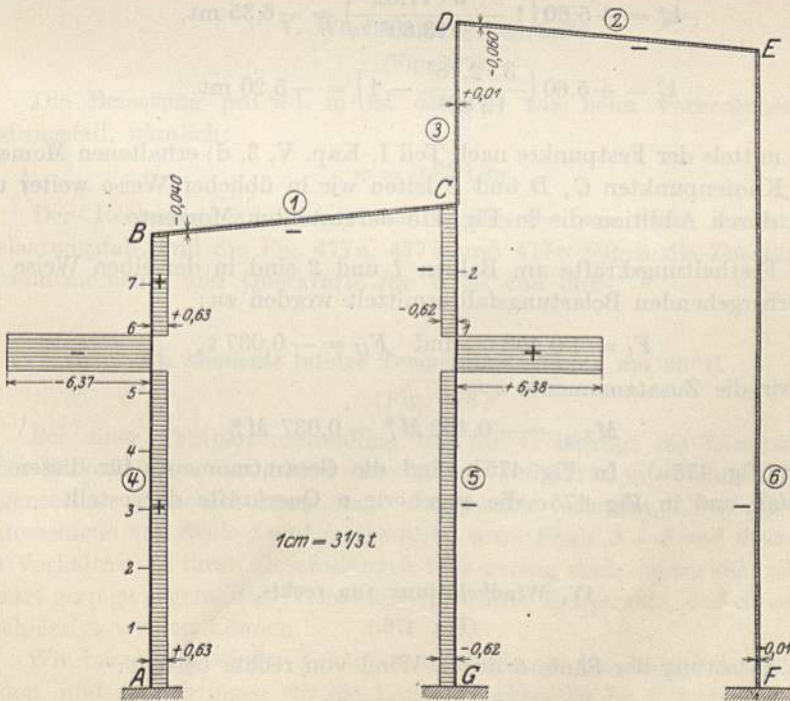


Fig. 474 c.

Als Zusatzmomente erhalten wir daher:

$$M_{\text{Zus.}} = +0,565 M_I^* - 0,383 M_{II}^*,$$

welche in Fig. 474a aufgetragen sind; schließlich ergeben sich durch Addition der Momente aus R. I und der Zusatzmomente die Gesamtmomente der Fig. 474b.

Die zugehörigen Querkräfte zeigt Fig. 474c.

### III. Kranlasten am großen Rahmen.

(Fig. 475).

Die Konsole der Säule 3 ist mit  $P_3 = 2,10$  t, und diejenige der Säule 6 mit  $P_6 = 11,20$  t, beide im Abstand von 0,50 m von der Säulenachse, belastet. Daher werden bei den Konsolen folgende Momente in die Säulen eingeleitet:

$$M_{03} = 2,10 \cdot 0,50 = 1,05 \text{ mt},$$

$$M_{06} = 11,20 \cdot 0,50 = 5,60 \text{ mt}.$$

Kreuzlinienabschnitte:

Säule 3:

$$k_3^a = -1,05 \left( 1 - \frac{3 \cdot 1,17^2}{3,95^2} \right) = -0,775 \text{ mt},$$

$$k_3^b = -1,05 \left( \frac{3 \cdot 2,78^2}{3,95^2} - 1 \right) = -0,515 \text{ mt}.$$

Säule 6:

$$k_6^a = +5,60 \left( 1 - \frac{3 \cdot 11,62^2}{13,80^2} \right) = -6,35 \text{ mt},$$

$$k_6^b = +5,60 \left( \frac{3 \cdot 2,18^2}{13,80^2} - 1 \right) = -5,20 \text{ mt}.$$

Die mittels der Festpunkte nach Teil I, Kap. V, 3, d) erhaltenen Momente bei den Knotenpunkten C, D und E leiten wir in üblicher Weise weiter und erhalten durch Addition die in Fig. 475 dargestellten Momente.

Die Festhaltungskräfte am Balken 1 und 2 sind in derselben Weise wie beim vorhergehenden Belastungsfall ermittelt worden zu:

$$F_I = +0,452 \text{ t} \quad \text{und} \quad F_{II} = -0,037 \text{ t},$$

womit wir die Zusatzmomente aus

$$M_{\text{Zus.}} = -0,452 M_I^* + 0,037 M_{II}^*$$

erhalten (Fig. 475a). In Fig. 475b sind die Gesamtmomente für diesen Belastungsfall und in Fig. 475c die zugehörigen Querkräfte dargestellt.

### IV. Windbelastung von rechts.

(Fig. 476.)

Die Belastung der Säule 6 durch Wind von rechts beträgt:

$$w = 0,75 \cdot 4,40 = 0,33 \text{ t/m}.$$

Die  $M_0$ -Momente und Kreuzlinienabschnitte haben wir mittels der Koeffizienten der Fig. 130 und der Gl. (274) ermittelt, in Fig. 476 aufgetragen und mittels Festpunkte und Verteilungsmaße das Momentenbild hergestellt.

Balken 1 wird festgehalten von:

$$Q_4^B = \frac{+0,04 + 0,02}{9,85} = +0,006 \text{ t}$$

$$Q_3^C = \frac{-0,34 - 1,12}{3,95} = -0,370 \text{ t}$$

$$Q_5^E = \frac{-0,126 - 0,063}{10,45} = -0,018 \text{ t}$$

$$F_I = -0,382 \text{ t};$$

Balken 2 wird festgehalten von:

$$Q_3^D = -Q_3^C \dots \dots \dots = +0,370 \text{ t}$$

$$Q_6^E = \frac{0,33 \cdot 11,30 \left( 13,80 - \frac{11,30}{2} \right)}{13,80} + \frac{+3,70 - 5,20}{13,80} = +2,091 \text{ t}$$

$$F_{II} = +2,461 \text{ t}.$$

Die Zusatzmomente (Fig. 476a) erhalten wir daher aus der Gleichung:

$$M_{\text{Zus.}} = +0,382 M_I^* - 2,461 M_{II}^*.$$

Die Gesamtmomente und die zugehörigen Querkräfte zeigen die Fig. 476b und 476c.

### V. Windbelastung von links.

(Fig. 477).

Die Belastung pro lfd. m ist dieselbe wie beim vorhergehenden Belastungsfall, nämlich:

$$w = 0,33 \text{ t/m}.$$

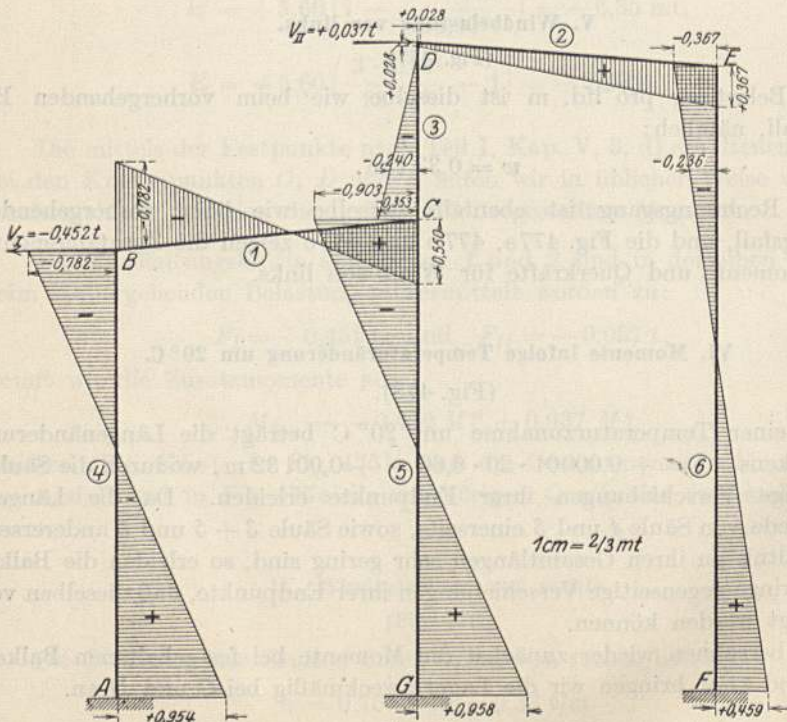
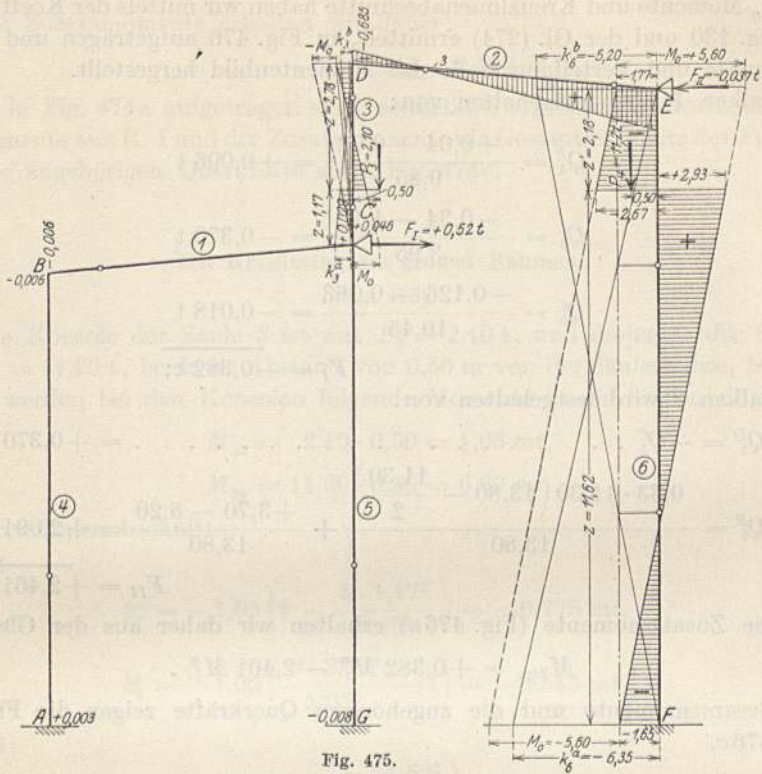
Der Rechnungsgang ist ebenfalls derselbe wie beim vorhergehenden Belastungsfall, und die Fig. 477a, 477b und 477c zeigen die Zusatzmomente, Gesamtmomente und Querkräfte für Wind von links.

### VI. Momente infolge Temperaturänderung um 20° C.

(Fig. 478).

Bei einer Temperaturzunahme um 20° C beträgt die Längenänderung eines Balkens  $\Delta l = +0,00001 \cdot 20 \cdot 6,60 = +0,00132 \text{ m}$ , wodurch die Säulen gegenseitige Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden. Da die Längenunterschiede von Säule 4 und 5 einerseits, sowie Säule 3 + 5 und 6 andererseits im Verhältnis zu ihren Gesamtlängen sehr gering sind, so erleiden die Balken derart geringe gegenseitige Verschiebungen ihrer Endpunkte, daß dieselben vernachlässigt werden können.

Wir berechnen wieder zunächst die Momente bei festgehaltenen Balkenden, und zwar bringen wir die Lager zweckmäßig bei C und D an.



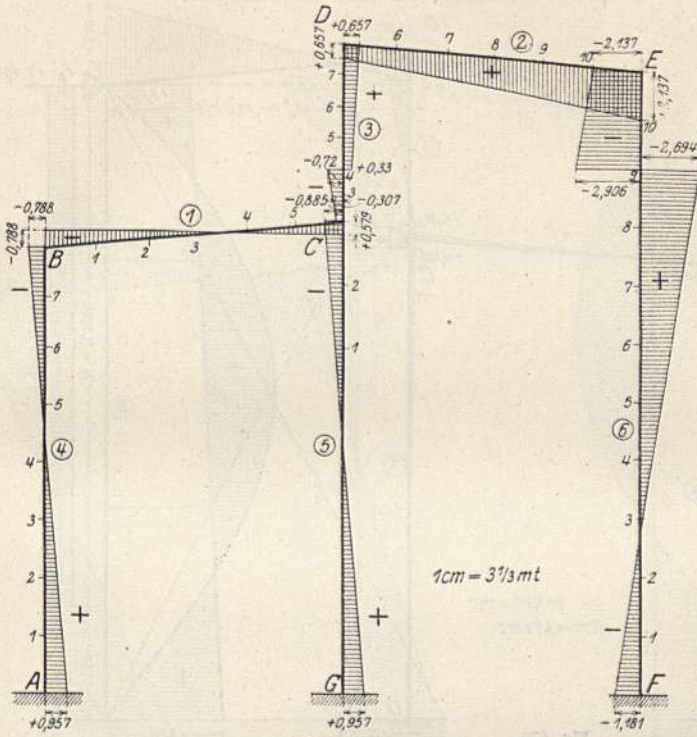


Fig. 475b.

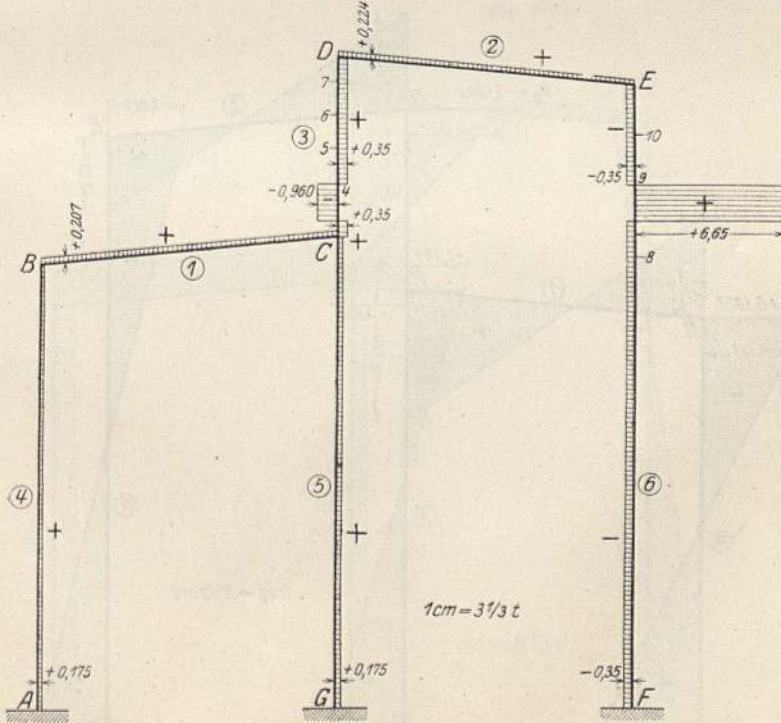


Fig. 475c.

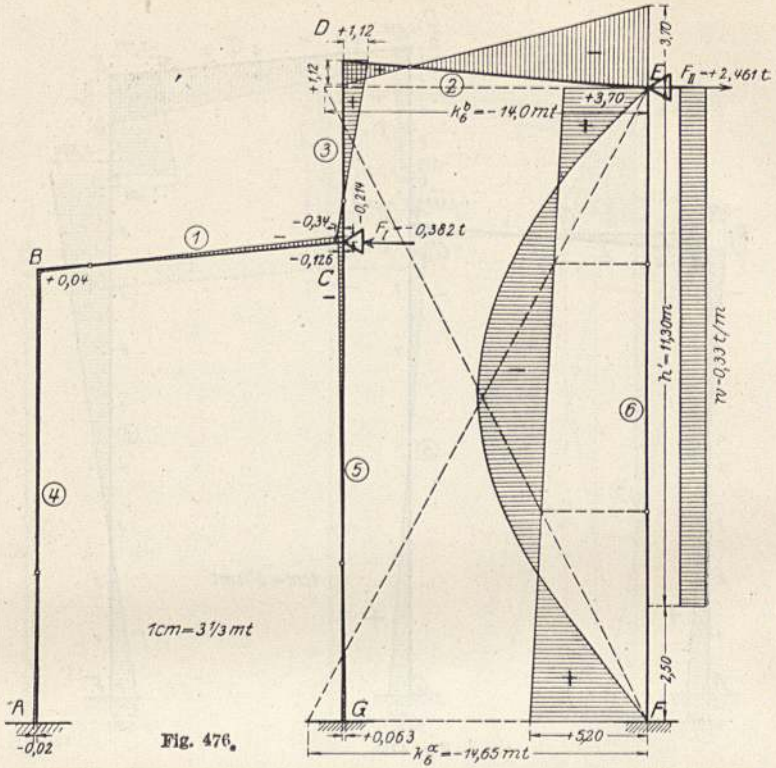


Fig. 476.

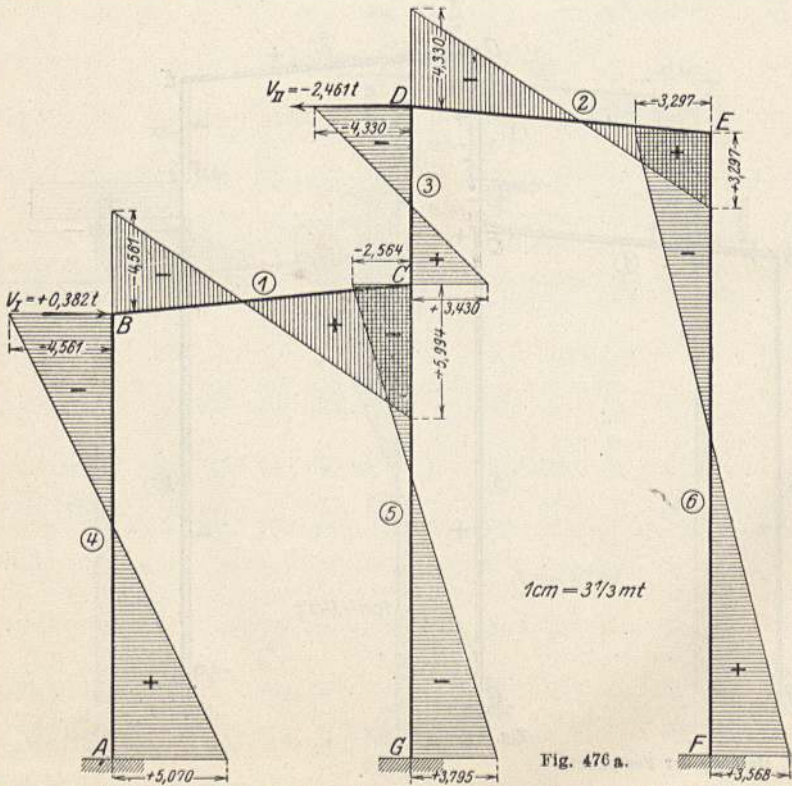


Fig. 476 a.

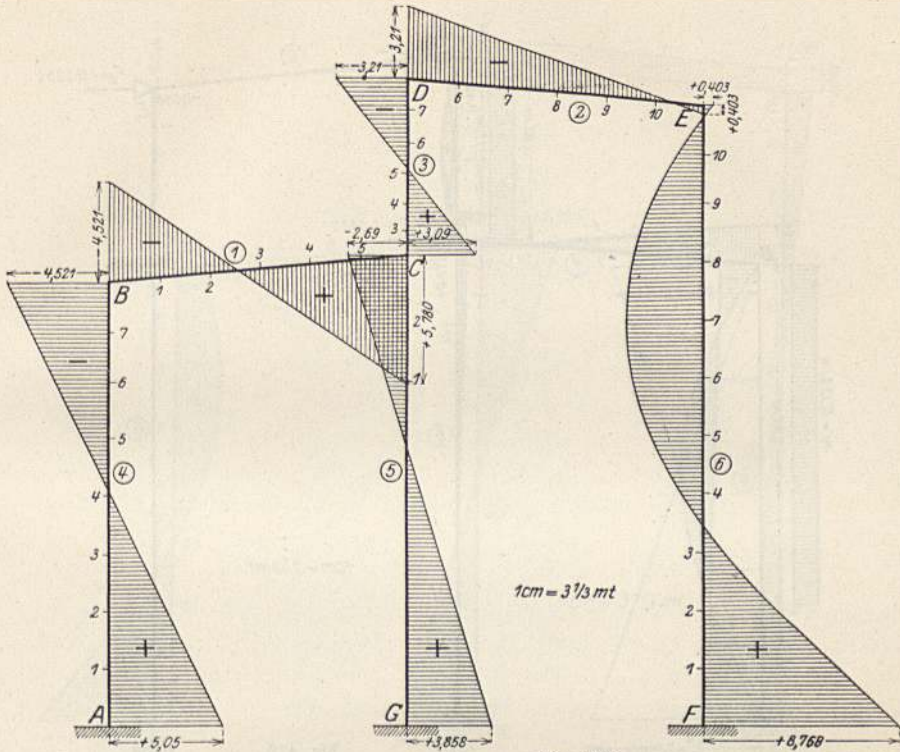


Fig. 476 b.

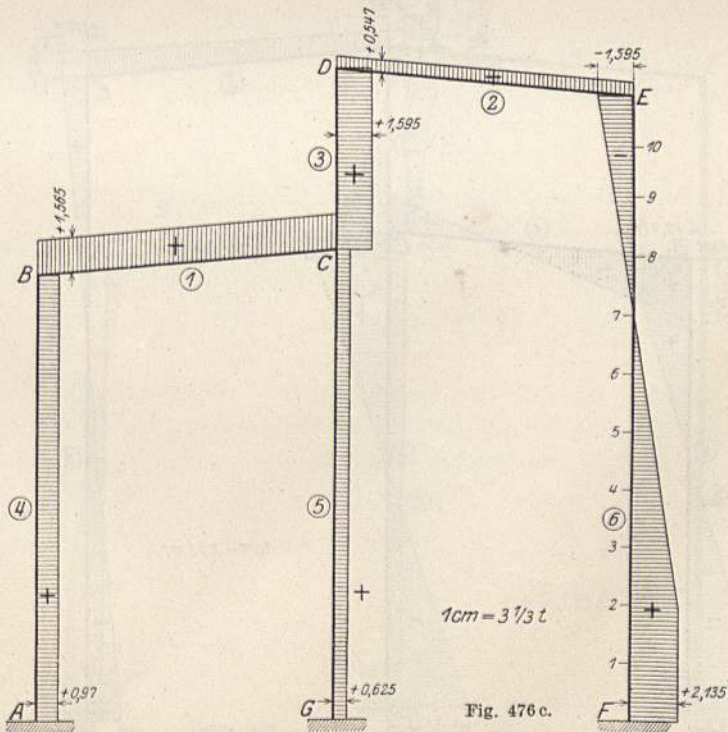


Fig. 476 c.

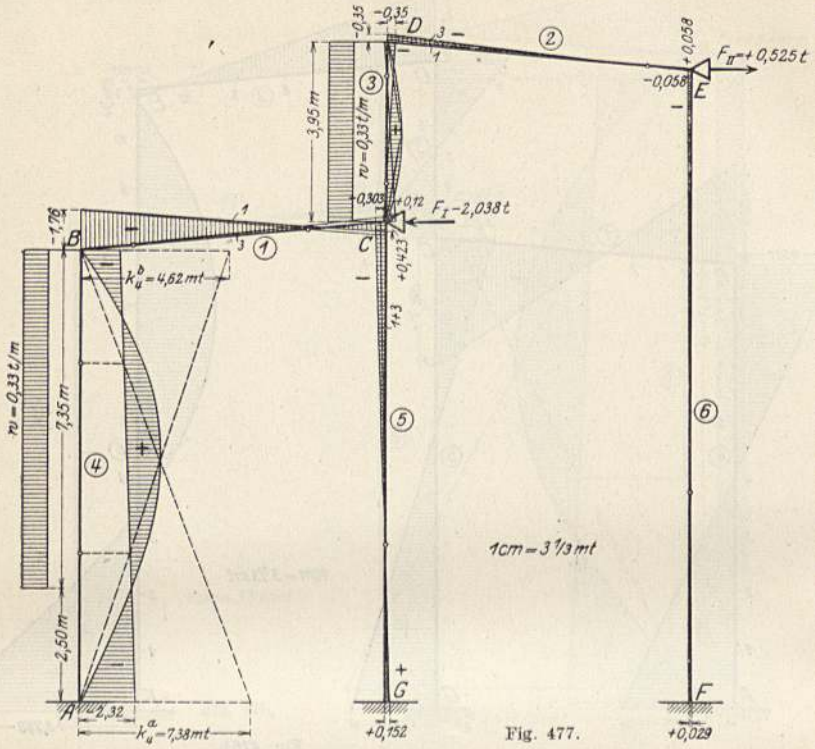


Fig. 477.

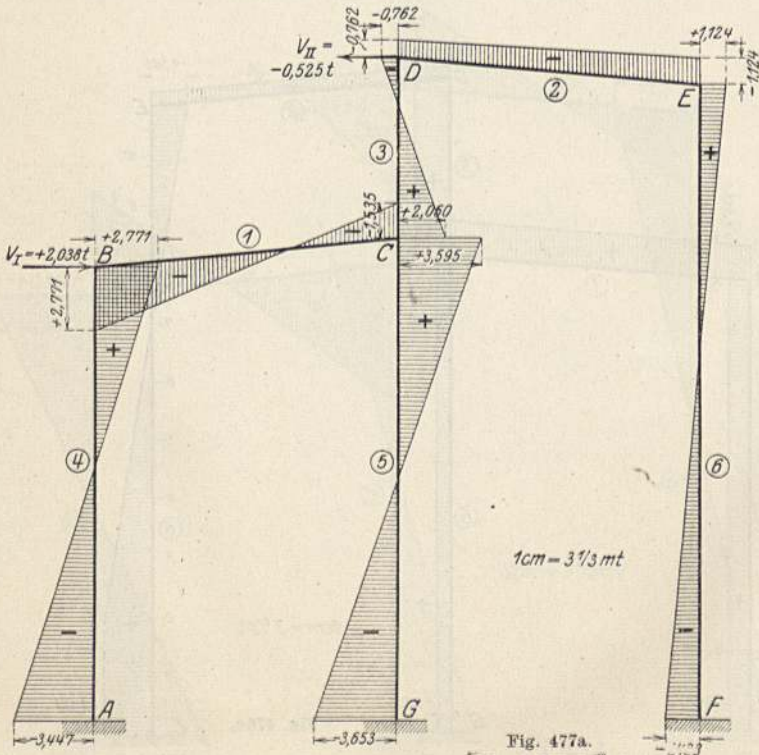


Fig. 477a.



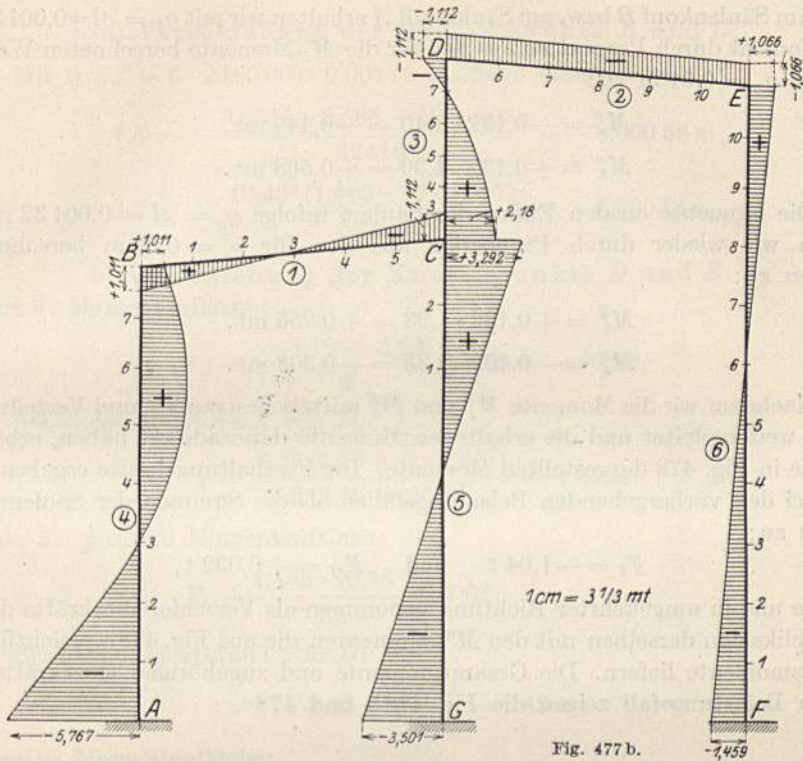


Fig. 477 b.

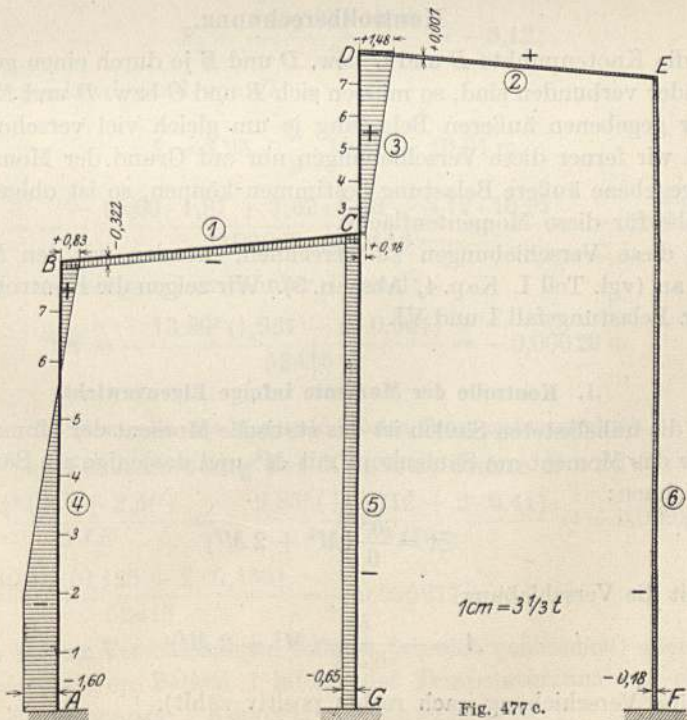


Fig. 477 c.

Am Säulenkopf  $B$  bzw. am Säulenfuß  $A$  erhalten wir mit  $q_4 = \Delta l = 0,00132$  m das Moment durch Proportion aus den für die  $M'_I$ -Momente berechneten Werten infolge  $q_4 = 0,01$  m zu:

$$M_B^B = -0,132 \cdot 3,40 = -0,449 \text{ mt,}$$

$$M_A^A = +0,132 \cdot 4,30 = +0,568 \text{ mt.}$$

Die Momente an den Enden der Säule  $6$  infolge  $q_6 = \Delta l = 0,00132$  m erhalten wir wieder durch Proportion aus den für  $q_6 = 0,01$  m berechneten Werten zu:

$$M_6^E = +0,132 \cdot 1,93 = +0,255 \text{ mt,}$$

$$M_6^F = -0,132 \cdot 2,33 = -0,308 \text{ mt.}$$

Nachdem wir die Momente  $M_4^B$  und  $M_6^E$  mittels Festpunkte und Verteilungsmaße weitergeleitet und die erhaltenen Momente dann addiert haben, erhalten wir die in Fig. 478 dargestellten Momente. Die Festhaltungskräfte ergeben sich wie bei den vorhergehenden Belastungsfällen als die Summen der Säulenquerkräfte zu:

$$F_I = -1,04 \text{ t} \quad \text{und} \quad F_{II} = +0,032 \text{ t,}$$

welche uns in umgekehrter Richtung genommen als Verschiebungskräfte durch Multiplikation derselben mit den  $M^*$ -Momenten die aus Fig. 478a ersichtlichen Zusatzmomente liefern. Die Gesamtmomente und zugehörigen Querkräfte für diesen Belastungsfall zeigen die Fig. 478b und 478c.

### Kontrollberechnung.

Da die Knotenpunkte  $B$  und  $C$  bzw.  $D$  und  $E$  je durch einen geraden Stab miteinander verbunden sind, so müssen sich  $B$  und  $C$  bzw.  $D$  und  $E$  unter Wirkung der gegebenen äußeren Belastung je um gleich viel verschoben haben; und weil wir ferner diese Verschiebungen nur auf Grund der Momentenfläche für die gegebene äußere Belastung bestimmen können, so ist obige Bedingung eine Probe für diese Momentenfläche.

Um diese Verschiebungen zu berechnen, wenden wir den Mohrschen Satz III an (vgl. Teil I, Kap. 4, Abschn. 3). Wir zeigen die Kontrolle beispielsweise für Belastungsfall I und VI.

#### 1. Kontrolle der Momente infolge Eigengewicht.

Für die unbelasteten Säulen ist das statische Moment der Momentenfläche, wenn wir das Moment am Säulenkopf mit  $M^k$  und dasjenige am Säulenfuß mit  $M^f$  bezeichnen:

$$\mathcal{S}t = \frac{h^2}{6} (M^k + 2 M^f)$$

und somit die Verschiebung

$$\Delta = -\frac{h^2}{6 J E} (M^k + 2 M^f)$$

(wobei eine Verschiebung nach rechts positiv zählt).

a) Verschiebung der Knotenpunkte  $B$  und  $C$ :

Mit  $6 EJ = 6 \cdot 2100000 \cdot 0,00416 = 52416$  erhalten wir:

$$\Delta B = -\frac{9,85^2 (-2,566 + 2 \cdot 1,435)}{52416} = -0,00056 \text{ m};$$

$$\Delta C = -\frac{10,45^2 (1,463 - 2 \cdot 0,597)}{52416} = -0,00056 \text{ m}.$$

b) Verschiebung der Knotenpunkte  $D$  und  $E$ :

Säule 3: Momentenfläche:

$$F_3 = \frac{-3,10 + 2,267}{2} \cdot 3,95 = -10,60;$$

Schwerpunktsabstand von  $D$ :

$$\xi = \frac{3,95 (3,10 + 2 \cdot 2,267)}{3 (3,10 + 2,267)} = 1,87 \text{ m}.$$

Säule 5: positive Momentenfläche:

$$F_5 = \frac{1,463 \cdot 10,45}{2} = 7,62;$$

Schwerpunktsabstand von  $D$ :

$$\xi = 3,95 + \frac{10,45}{3} = 7,43 \text{ m};$$

negative Momentenfläche:

$$F_5 = \frac{-0,597 \cdot 10,45}{2} = -3,12;$$

Schwerpunktsabstand von  $D$ :

$$\xi = 3,95 + \frac{2}{3} \cdot 10,45 = 10,91 \text{ m}.$$

$$\Delta D = -\frac{-10,60 \cdot 1,87 + 7,62 \cdot 7,43 - 3,12 \cdot 10,91}{2100000 \cdot 0,00416} = -0,00029 \text{ m}.$$

Ferner ist nach eingangs erwähnter Formel:

$$\Delta E = -\frac{13,80^2 (1,967 - 2 \cdot 0,944)}{52416} = -0,00029 \text{ m}.$$

## 2. Kontrolle der Momente infolge Temperaturzunahme.

a) Verschiebung der Knotenpunkte  $B$  und  $C$ :

$$\Delta B = -\frac{h^2 (M^k + 2 M^f)}{6 JE} = -\frac{9,85^2 (-0,312 + 2 \cdot 0,41)}{52416} = -0,000943 \text{ m};$$

$$\Delta C = -\frac{10,45^2 (0,125 + 2 \cdot 0,153)}{52416} = +0,000377 \text{ m}.$$

Diese beiden Verschiebungen müssen (absolut genommen) gleich sein der Längenänderung von Balken  $I$  infolge der Temperaturzunahme, d. h.

$$0,000943 + 0,000377 = 0,00132 \text{ m} = \Delta l_1.$$

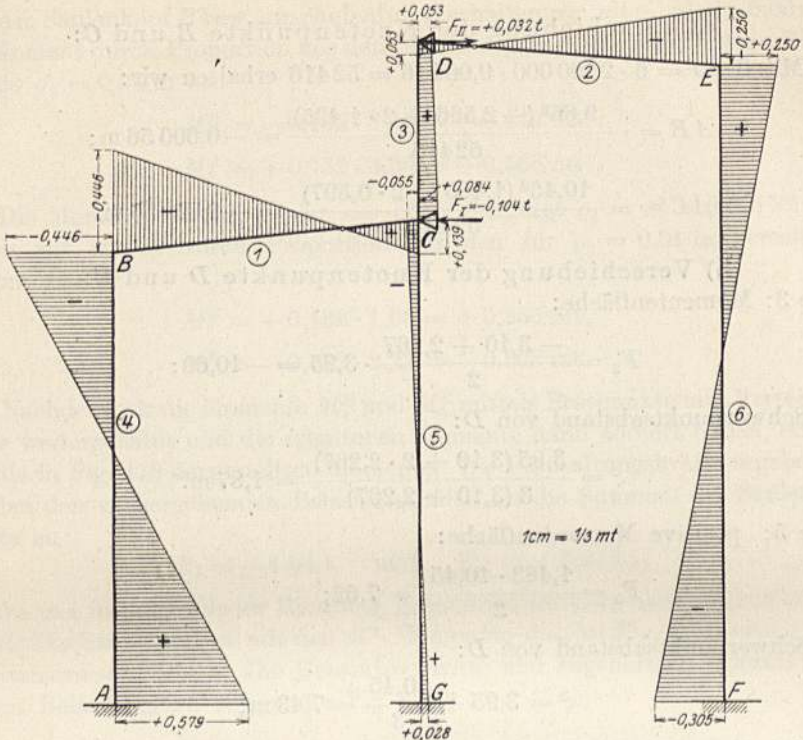


Fig. 478.

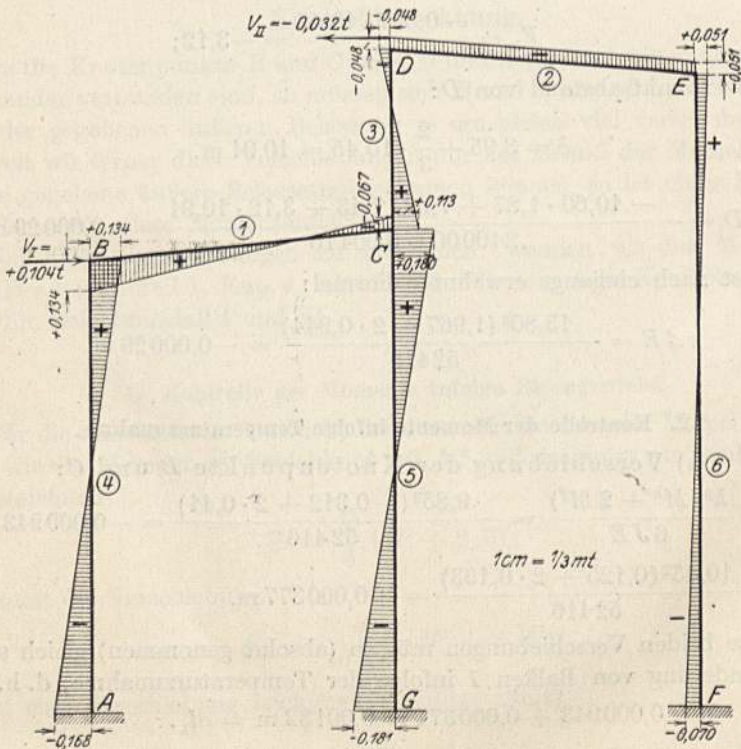


Fig. 478 a.

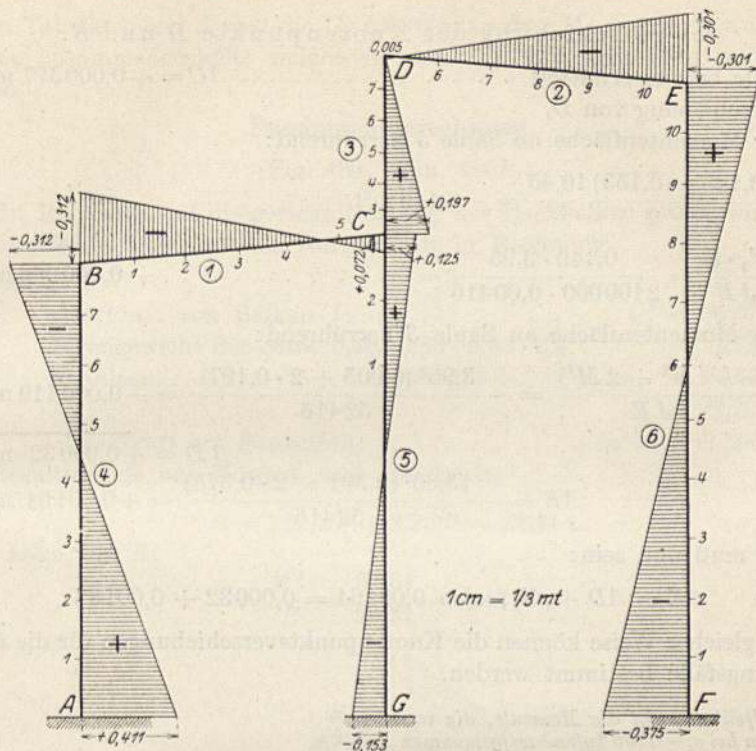


Fig. 478 b.

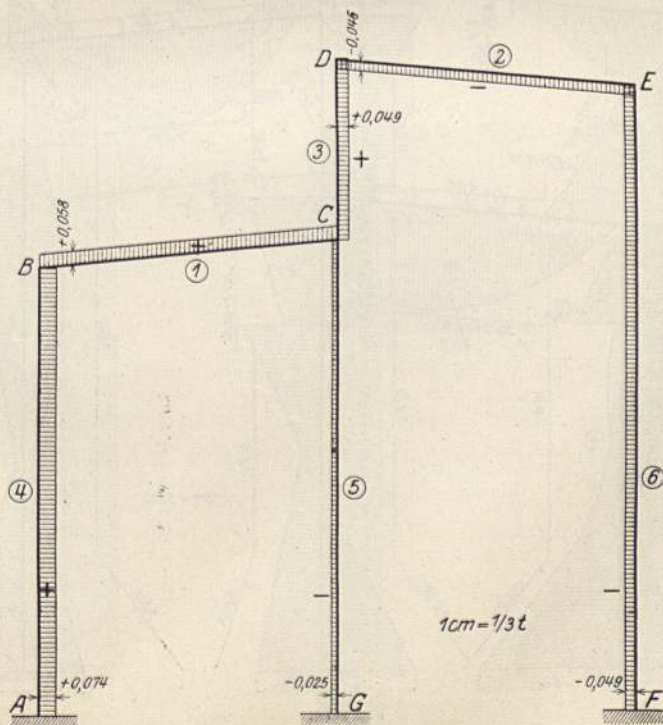


Fig. 478 c.

b) Verschiebung der Knotenpunkte *D* und *E*:

Es wurde bereits ermittelt . . . . .  $\Delta C = +0,000377$  m  
 Verschiebung von *D*,  
 von der Momentenfläche an Säule 5 herrührend:

$$F_5 = \frac{(0,125 - 0,153) 10,45}{2} = -0,146 \text{ m}^2\text{t}$$

$$-\frac{F_5 \cdot l_3}{JE} = \frac{0,146 \cdot 3,95}{2100000 \cdot 0,00416} = \dots \dots \dots + 0,000066 \text{ m}$$

von der Momentenfläche an Säule 3 herrührend:

$$\frac{-h^2 (M^k + 2M^f)}{6JE} = -\frac{3,95^2 (0,005 + 2 \cdot 0,197)}{52416} = -0,000119 \text{ m}$$

$$\Delta D = +0,00032 \text{ m.}$$

$$\Delta E = -\frac{13,80^2 (0,301 - 2 \cdot 0,375)}{52416} = +0,00164 \text{ m.}$$

Es muß nun sein:

$$\Delta E = \Delta D + \Delta l_2, \text{ also } 0,00164 = 0,00032 + 0,00132.$$

In gleicher Weise können die Knotenpunktverschiebungen für die übrigen Belastungsfälle bestimmt werden.

Die Staffellinie zeigt die Momente, die von den Eiseisen bei  $\sigma_s = 1200 \text{ kg/cm}^2$  aufgenommen werden können.

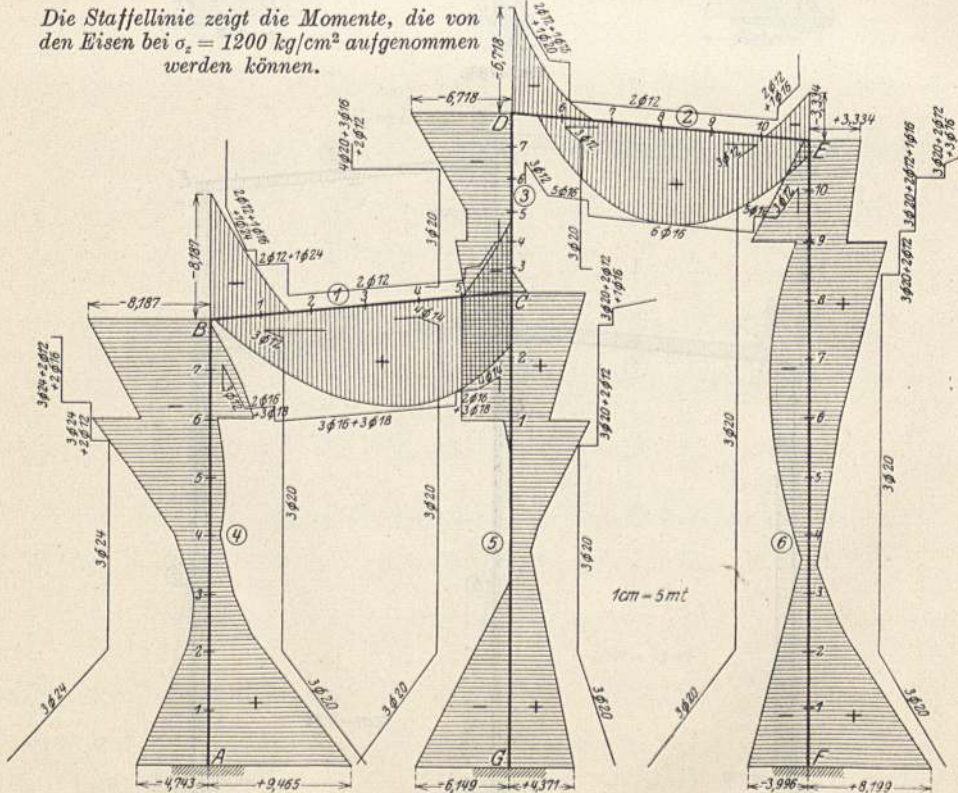


Fig. 479.

In Tabelle 1 und 2 sind die Größtwerte der Momente und Querkräfte zusammengestellt, welche in den Fig. 479 und 479a aufgetragen wurden.

**Fundamentberechnung.**

(Fig. 480, 480a, 480b.)

Mit Rücksicht auf die geringe Neigung der Dachbalken setzen wir einfach die betreffende Querkraft als Normalkraft in Rechnung.

Säule 4:

Querkraft von Balken 1: . . . . .	$Q_1^B = 6,274$ t
Eigengewicht der Säule $0,40 \cdot 0,50 \cdot 9,85 \cdot 2,4$ . . . . .	$= 4,73$ t
Kranlast . . . . .	$= 11,20$ t
	$N_4 = 22,20$ t

Querkraft am Säulenfuß: . . . . .  $Q_1^A = + 2,256$  t.

Resultierende aus Normal- und Querkraft:

$$R = \sqrt{22,20^2 + 2,256^2} = 22,31 \text{ t.}$$

Lage von R:

$$r = \frac{M^A}{R} = \frac{9,464}{22,31} = 0,43 \text{ m.}$$

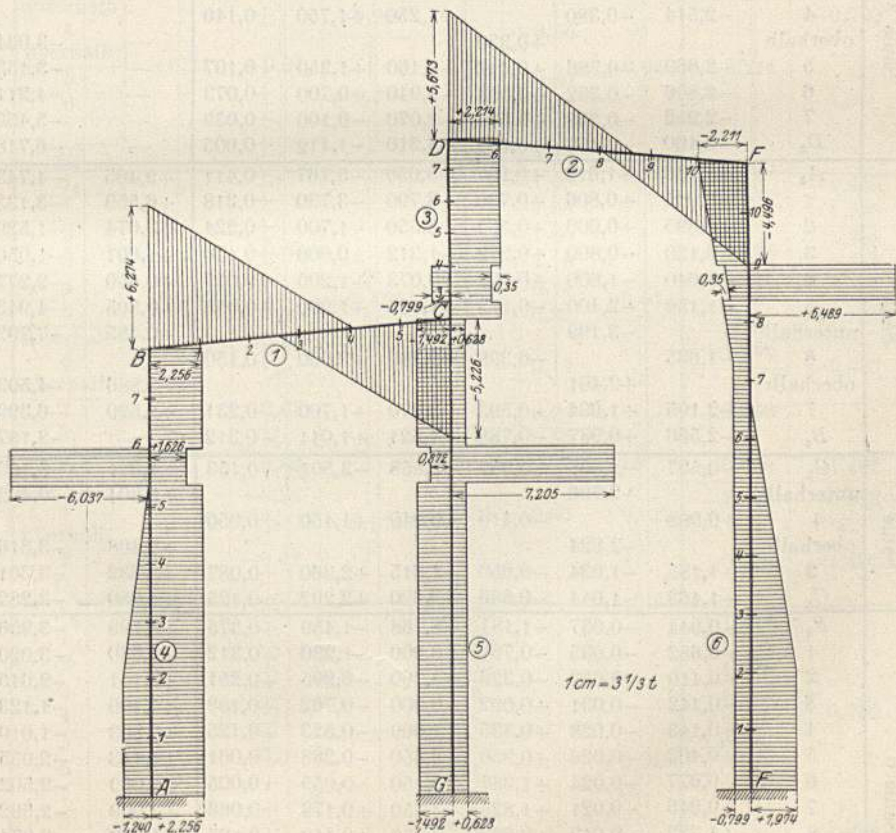


Fig. 479a.

Tabelle 1.  
Zusammenstellung der Momente.

Rahmenteil	Schnitt	Momente aus					Maximale Momente		
		Eigenlast	Kranlast am kl. Rahmen	Kranlast am gr. Rahmen	Wind von rechts	Wind von links	Temp. ± 20° C.	Positiv	Negativ
Falcken 1	$B_1$	-2,566	+0,987	-0,788	-4,521	+1,011	±0,312	—	-8,187
	1	+1,200	+0,936	-0,760	-2,760	+0,666	±0,246	+3,048	-2,566
	2	+3,600	+0,885	-0,332	-1,050	+0,305	±0,182	+4,972	—
	3	+4,500	+0,834	-0,104	+0,662	-0,032	±0,116	+6,112	—
	4	+3,700	+0,783	+0,125	+2,390	-0,393	±0,055	+7,053	—
	5	+0,950	+0,732	+0,348	+4,100	-0,745	±0,009	+6,139	—
	$C_1$	-3,730	+0,681	+0,579	+5,780	-1,112	±0,072	+3,382	-4,914
Balken 2	$D_2$	-3,100	-0,403	+0,657	-3,210	-1,112	±0,005	—	-6,718
	6	+1,600	-0,334	+0,904	-2,620	-1,105	±0,045	+2,549	-1,381
	7	+4,300	-0,262	+1,150	-2,010	-1,097	±0,097	+5,547	—
	8	+5,100	-0,193	+1,400	-1,410	-1,089	±0,147	+6,647	—
	9	+4,200	-0,126	+1,643	-0,805	-1,081	±0,199	+6,042	—
	10	+1,800	-0,057	+1,890	-0,218	-1,074	±0,250	+3,940	—
	$E_2$	-1,967	+0,013	+2,137	+0,403	-1,066	±0,301	+0,887	-3,334
Säule 3	$C_3$	-2,267	-0,363	-0,307	+3,090	+2,180	±0,197	+1,020	-3,134
	3	-2,391	-0,372	-0,514	+2,170	+2,000	±0,169	—	-3,446
	unterhalb			-0,720				—	-3,754
	4	-2,514	-0,380		+1,250	+1,750	±0,140	—	-3,034
	oberhalb			+0,330				—	-3,153
	5	-2,660	-0,386	+0,412	+0,160	+1,350	±0,107	—	-4,211
	6	-2,806	-0,392	+0,494	-0,940	+0,700	±0,073	—	-5,459
	7	-2,952	-0,398	+0,576	-2,070	-0,100	±0,039	—	-6,718
	$D_3$	-3,100	-0,403	+0,657	-3,210	-1,112	±0,005	—	-6,718
Säule 4	$A_4$	+1,435	+1,612	+0,957	+5,050	-5,767	±0,411	+9,465	-4,743
	1	+0,915	+0,806	+0,730	+3,790	-3,730	±0,318	+6,559	-3,133
	2	+0,395	+0,000	+0,505	+2,550	-1,700	±0,224	+3,674	-1,529
	3	-0,120	-0,800	+0,279	+1,312	±0,000	±0,130	+1,601	-1,050
	4	-0,640	-1,600	+0,053	+0,073	+1,200	±0,037	+0,650	-2,277
	5	-1,150	-2,400	-0,173	-1,165	+1,900	±0,055	+0,805	-4,943
	unterhalb		-3,199				+0,485	-7,792	
	6	-1,665		-0,398	-2,380	+2,000	±0,150	+2,886	-4,593
	oberhalb		+2,401				+1,520	-6,399	
	7	-2,105	+1,694	-0,593	-3,470	+1,700	±0,231	—	-8,187
	$B_4$	-2,566	+0,987	-0,788	-4,521	+1,011	±0,312	—	-8,187
Säule 5	$G_5$	-0,597	-1,898	+0,957	+3,858	-3,501	±0,153	+4,371	-6,149
	unterhalb		+2,796					+5,204	-0,492
	1	+0,908		-0,410	-0,940	+1,450	±0,050	+2,408	-3,316
	oberhalb		-2,824				+3,632	-3,301	
	2	+1,185	-1,934	-0,650	-1,815	+2,360	±0,087	+4,880	-3,282
	$C_5$	+1,463	-1,044	-0,886	-2,690	+3,292	±0,125	—	—
Säule 6	$F_6$	-0,944	-0,037	-1,181	+8,768	-1,459	±0,375	+8,199	-3,996
	1	-0,682	-0,035	-0,761	+6,000	-1,230	±0,312	+5,630	-3,020
	2	-0,410	-0,033	-0,326	+3,300	-0,995	±0,251	+3,141	-2,015
	3	-0,142	-0,031	+0,092	+0,900	-0,762	±0,188	+1,180	-1,123
	4	+0,143	-0,028	+0,535	-1,000	-0,523	±0,125	+0,803	-1,010
	5	+0,402	-0,026	+0,950	-2,350	-0,288	±0,061	+1,413	-2,035
	6	+0,677	-0,024	+1,387	-3,150	-0,055	±0,005	+2,069	-2,502
	7	+0,945	-0,021	+1,825	-3,450	+0,173	±0,066	+3,009	-2,592
	8	+1,222	-0,019	+2,260	-3,150	+0,410	±0,127	+4,019	-2,074
		unterhalb		+2,694				+5,036	-1,009
	9	+1,500	-0,017		-2,300	+0,650	±0,192	+2,342	-3,915
	oberhalb			-2,906			+2,827	-2,204	
	10	+1,730	-0,015	-2,522	-1,150	+0,850	±0,247	+3,334	-0,484
	$E_6$	+1,967	-0,013	-2,137	+0,403	+1,066	±0,301	—	—



Tabelle 2.  
Zusammenstellung der Querkräfte.

Rahmenteil	Schnitt	Querkräfte aus					Maximale Querkräfte		
		Eigenlast	Kranlast am kl. Rahmen	Kranlast am gr. Rahmen	Wind von rechts	Wind von links	Temp. + 20° C	positiv	negativ
Balken 1	$B_1$	+4,44	↑	↑	↑	↑	↑	+6,274	—
	1	+2,90						+4,730	—
	2	+1,36						+3,190	—
	3	-0,18	-0,046	+0,207	+1,565	-0,322	±0,058	+1,650	-0,606
	4	-1,72						+0,110	-2,146
	5	-3,26						—	-3,686
Balken 2	$C_1$	-4,80						—	-5,226
	$D_2$	+4,79	↑	↑	↑	↑	↑	+5,673	—
	6	+3,25						+4,133	—
	7	+1,71	+0,066	+0,224	+0,547	+0,007	±0,046	+2,593	—
	8	+0,17						+1,053	—
	9	-1,37						—	-1,416
Säule 3	10	-2,91						—	-2,956
	$E_2$	-4,45	↓	↓	↓	↓	↓	—	-4,496
	$C_3$	↑	↑	+0,35	↑	+0,18	↑	↑	—
	3					+0,37			
	unterhalb 4			-0,960					-0,799
	oberhalb 5	+0,21	+0,01	↑	+1,595	+0,56	±0,049	+2,214	
Säule 4	6			+0,35		+0,80			
	7					+1,02			
	$D_3$	↓	↓	↓	↓	+1,25	↓	↓	
	1	↑	↑	↑	↑	+1,48	↑	↑	
	2					-1,60			-1,240
	3		+0,63			-1,60		+2,256	-1,240
Säule 5	4	+0,407		+0,175	+0,97	-1,18			-0,856
	5					-0,74	±0,074		-0,488
	unterhalb 6		-6,37			-0,32		+1,626	-0,122
	oberhalb 7		↑						
	8		+0,63			+0,11		+2,256	-6,037
	$B_4$	↓	↓	↓	↓	+0,20	↓	↓	—
Säule 6	$G_5$	↑	-0,62	↑	↑	↑	↑	+0,628	-1,492
	unterhalb 1		+6,38					+7,205	-0,872
	oberhalb 2	-0,197	↑	+0,175	+0,625	-0,65	±0,025	↑	↑
	3		-0,62					+0,628	-1,492
Säule 6	$C_5$	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	$F_6$	↑	↑	↑	+2,135	↑	↑	+1,974	↑
	1				+2,135			+1,974	
	2				+2,135			+1,974	
	3				+1,72			+1,559	
	4				+1,28			+1,119	-0,799
	5	-0,21	-0,01	-0,35	+0,85	-0,18	±0,049	+0,689	
	6				+0,44			+0,279	
	7				+0,00				
	8				-0,44				-1,056
Säule 6	unterhalb 9			+6,65	-0,85			6,489	-1,116
	oberhalb 10			↑					
	$E_6$	↓	↓	↓	-0,35	-1,21	↓	↓	-1,826
					-1,595	↓	↓	-2,211	

Das Eigengewicht des Fundamentes beträgt  $G_4 = 7,00$  t, somit ist die ganze senkrechte Bodenbelastung

$$N'_4 = 22,20 + 7,00 = 29,20 \text{ t.}$$

Bodenpressung:

$$\sigma = \frac{29200}{150 \cdot 240} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot 25}{240} \right) = \left. \begin{array}{l} + 1,30 \\ + 0,30 \end{array} \right\} \text{ kg/cm}^2.$$

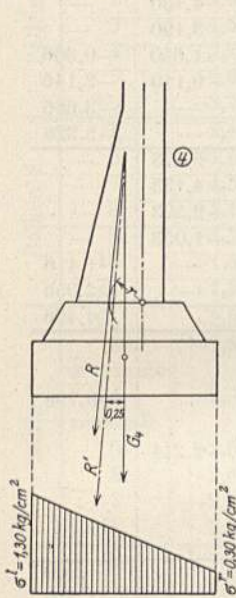


Fig. 480.

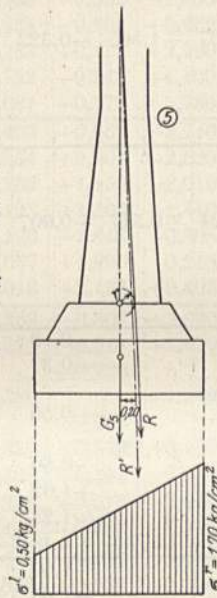


Fig. 480a.

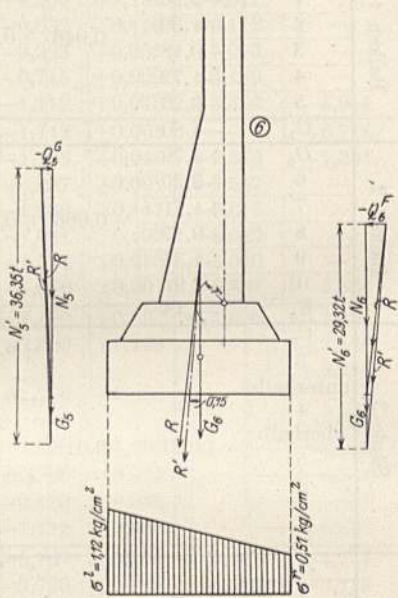


Fig. 480b.

Säule 5:

Querkraft vom Balken 1: . . . . .  $Q_1^B = 5,226$  t.

Für den Balken 2 müssen dieselben Belastungsfälle in Betracht gezogen werden, welche am Balken 1  $Q_{\max}$  erzeugt haben, also die Fälle I, II, V und VI.

- Aus Belastungsfall I: . . . . .  $N = 4,790$  t
- „ „ II: . . . . .  $N = 0,066$  t
- „ „ V: . . . . .  $N = 0,077$  t
- „ „ VI: . . . . .  $N = 0,046$  t

Eigenlast der Säulen 3 und 5:  $0,40 \cdot 0,50 \cdot 14,40 + 2,4 = 6,915$  t

Kranlasten:  $2,10 + 11,20 = 13,300$  t

$$N'_5 = 30,35 \text{ t.}$$

Querkraft am Säulenfuß:

$$Q_5^G = - 1,492 \text{ t.}$$

$$R = \sqrt{30,35^2 + 1,492^2} = 30,39 \text{ t;}$$

$$r = \frac{6,149}{30,39} = 0,20 \text{ m.}$$

Mit dem Fundamentgewicht  $G_4 = 6,00$  t ergibt sich die senkrechte Bodenbelastung

$$N'_5 = 30,35 + 6,00 = 36,35 \text{ t.}$$

Bodenpressung:

$$\sigma = \frac{36350}{150 \cdot 220} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot 20}{220} \right) = \left. \begin{matrix} 1,70 \\ 0,50 \end{matrix} \right\} \text{kg/cm}^2.$$

Säule 6: Querkraft von Balken 2: . . . . .  $Q_{\frac{1}{2}}^E = 4,496 \text{ t}$   
 Eigenlast der Säule:  $0,40 \cdot 0,50 \cdot 13,80 \cdot 2,4$  . . . . .  $= 6,624 \text{ t}$   
 Kranlast . . . . .  $= 11,20 \text{ t}$   
 $N_6 = 22,32 \text{ t}.$

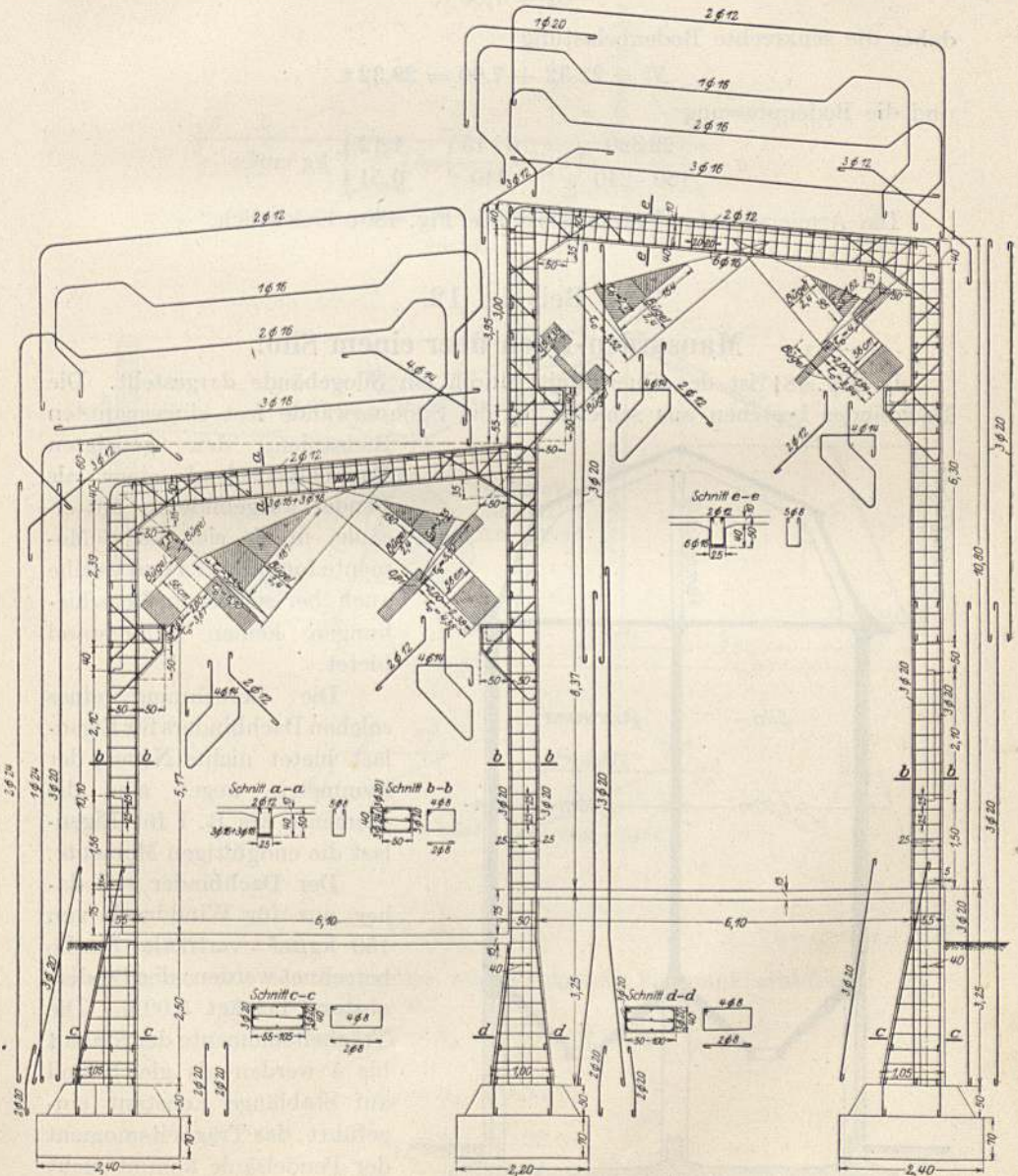


Fig. 480c.

Querkraft am Säulenfuß:

$$Q_6^F = +1,974 \text{ t,}$$

$$R = \sqrt{22,32^2 + 1,974^2} = 22,40 \text{ t,}$$

$$r = \frac{8,199}{22,40} = 0,37 \text{ m.}$$

Das Fundamentgewicht beträgt:

$$G_6 = 7,00 \text{ t,}$$

daher die senkrechte Bodenbelastung:

$$N_6' = 22,32 + 7,00 = 29,32 \text{ t.}$$

und die Bodenpressung:

$$\sigma = \frac{29320}{150 \cdot 240} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot 15}{240} \right) = \left. \begin{array}{l} 1,12 \\ 0,51 \end{array} \right\} \text{ kg/cm}^2.$$

Die Armierung des Rahmens ist aus Fig. 480 c ersichtlich.

### Beispiel 12.

#### Mansarden-Dach über einem Silo.

In Fig. 481 ist der Querschnitt durch ein Silogebäude dargestellt. Die Dachbinder bestehen aus schiefen, in die Siloquerwände fest eingespannten

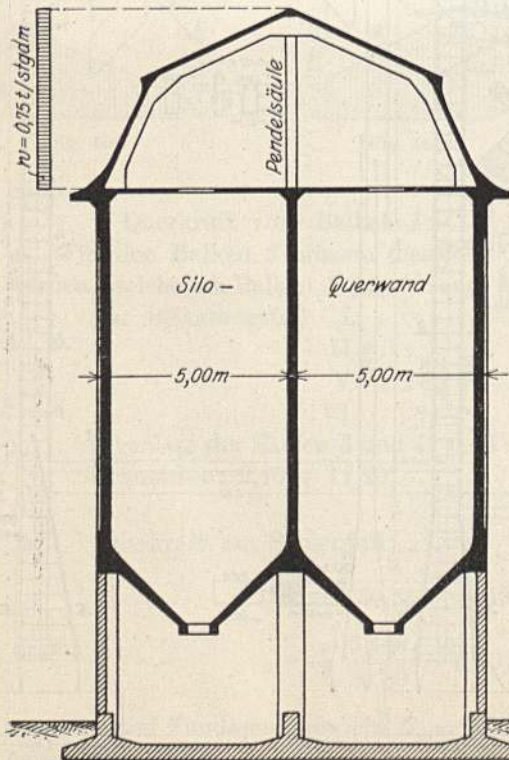


Fig. 481.

Endsäulen, den geneigten Dachbalken und einer als Pendel ausgebildeten Mittelsäule, in die sich keine Momente fortpflanzen und welche auch bei seitlichen Verschiebungen keinen Widerstand bietet.

Die Berechnung eines solchen Dachbinders für Eigenlast bietet nichts Neues; der Symmetrie wegen sind die Momente des R. I für Eigenlast die endgültigen Momente.

Der Dachbinder soll daher nur für Winddruck von  $150 \text{ kg/m}^2$  vertikale Fläche berechnet werden; der Binderabstand beträgt  $5,00 \text{ m}$ . Die Trägheitsmomente der Stäbe 1 bis 4 werden als gleich und auf Stablänge konstant eingeführt; das Trägheitsmoment der Pendelsäule kommt nicht in Betracht.

**Festpunkte.**

Der Stabzug 1 bis 4 wird in eine Gerade ausgestreckt, worauf die Festpunkte wie an einem frei aufliegenden kontinuierlichen Balken nach Teil I, Kap. III, graphisch ermittelt werden können (Fig. 481 a). Die Stablängen betragen

$$l_1 = l_4 = \sqrt{3,00^2 + 1,30^2} = 3,27 \text{ m,}$$

$$l_2 = l_3 = \sqrt{3,50^2 + 1,70^2} = 3,89 \text{ m.}$$

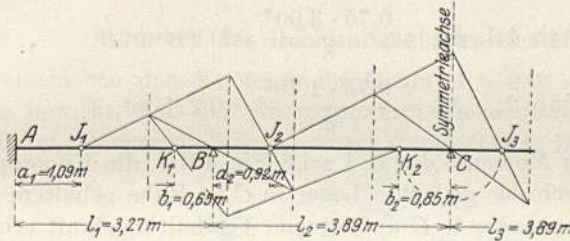


Fig. 481 a.

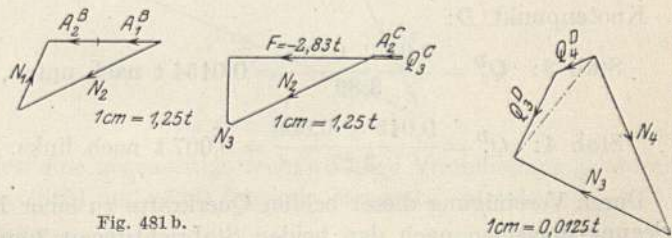
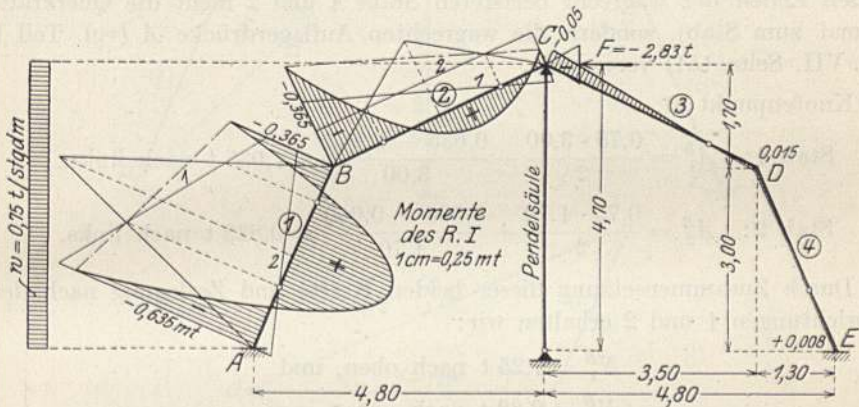


Fig. 481 b.

Es ergeben sich der Symmetrie wegen folgende Festpunktsabstände:

$$a_1 = b_4 = \frac{3,27}{3} = 1,09 \text{ m,}$$

$$b_1 = a_4 = 0,65 \text{ m,}$$

$$a_2 = b_3 = 0,92 \text{ m,}$$

$$b_2 = a_3 = 0,85 \text{ m.}$$

### Momente des Rechnungsabschnittes I.

Um die Konstruktion vorübergehend unverschiebbar zu machen, bringen wir in  $C$  ein Lager an. Den Winddruck von  $w = 5,0 \cdot 0,15 = 0,75$  t pro stgdm Vertikalprojektion der auf die Stäbe 1 und 2 entfallenden Dachflächen zerlegen wir, weil eine horizontale Belastung, zweckmäßig nicht in die Richtung dieser Stäbe und normal dazu, sondern wir bilden die Momente mit der Vertikalprojektion der Stablängen.

$M_0$ -Momente.

$$\text{Stab 1: } M_0 = \frac{0,75 \cdot 3,00^2}{8} = 0,844 \text{ mt,}$$

$$\text{Stab 2: } M_0 = \frac{0,75 \cdot 1,70^2}{8} = 0,271 \text{ mt.}$$

Die Konstruktion der Momente des R. I zeigt Fig. 481 b; die Knotenpunkte  $B$ ,  $C$  und  $D$  werden durch das gedachte Lager in  $C$  in Ruhe gehalten.

Die im gedachten Lager in  $C$  auftretende Festhaltungskraft erhalten wir nach Teil I, Kap. VII, 1, wie folgt (siehe Kräftepläne der Fig. 481 b), wobei wir an den Enden der wagrecht belasteten Stäbe 1 und 2 nicht die Querkräfte (normal zum Stab), sondern die wagrechten Auflagerdrücke  $A$  (vgl. Teil I, Kap. VII, Seite 151) verwenden.

Knotenpunkt  $B$ :

$$\text{Stab 1: } A_1^B = \frac{0,75 \cdot 3,00}{2} - \frac{0,635 - 0,365}{3,00} = 1,035 \text{ t nach links,}$$

$$\text{Stab 2: } A_2^B = \frac{0,75 \cdot 1,70}{2} + \frac{0,365 - 0,050}{1,70} = 0,823 \text{ t nach links.}$$

Durch Zusammensetzung dieser beiden Kräfte und Zerlegung nach den Stabrichtungen 1 und 2 erhalten wir:

$$N_1^B = 1,25 \text{ t nach oben, und}$$

$$N_2^B = 2,62 \text{ t nach unten.}$$

Knotenpunkt  $D$ :

$$\text{Stab 3: } Q_3^D = \frac{0,05 + 0,015}{3,89} = 0,0154 \text{ t nach unten,}$$

$$\text{Stab 4: } Q_4^D = \frac{0,015 + 0,008}{3,27} = 0,007 \text{ t nach links.}$$

Durch Vereinigung dieser beiden Querkräfte zu einer Resultierenden und Zerlegung derselben nach den beiden Stabrichtungen 3 und 4 erhalten wir:

$$N_3 = 2,90 \text{ t nach oben, und}$$

$$N_4 = 3,20 \text{ t nach unten.}$$

Knotenpunkt  $C$ :

$$\text{Stab 2: } A_2^C = \frac{0,75 \cdot 1,70}{2} - \frac{0,365 - 0,05}{1,70} = 0,453 \text{ t nach links,}$$

$$\text{Stab 3: } Q_3^C = -Q_3^D = 0,0154 \text{ t nach oben.}$$

Durch Zusammensetzung dieser beiden Kräfte mit  $N_2$  und  $N_3$  und Zerlegung der daraus hervorgehenden Resultierenden wagerecht (die gewählte Richtung der Festhaltungskraft) und senkrecht (Richtung der Pendelsäule) erhalten wir als Horizontalkomponente die gesuchte

$$\text{Festhaltungskraft } F = -0,53 \text{ t.}$$

Als Teilprobe muß die Summe der Horizontalprojektionen von  $F$ ,  $A_1^A$ ,  $N_1$ ,  $Q_4^E$  und  $N_4$  gleich Null sein.

### Momente des Rechnungsabschnittes II.

Wir verschieben den Knotenpunkt  $C$  um  $\Delta = 0,01$  m nach rechts; die Pendelsäule bewirkt, daß der Knotenpunkt  $C$  in wagerechter Richtung geführt ist. Dabei gelangen die Knotenpunkte  $B$  und  $D$  nach  $B'$  und  $D'$  (Fig. 481 c)

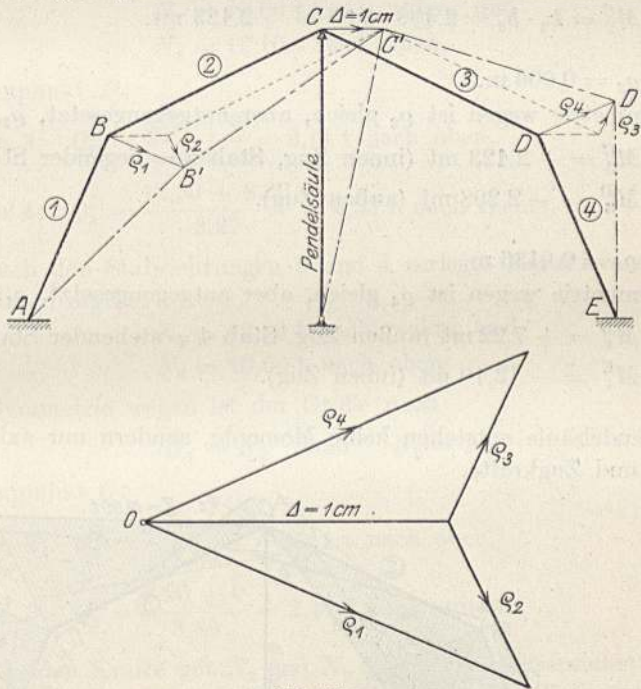


Fig. 481 c.

und alle Stäbe erleiden eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $\varrho$ , durch welche nach den Gln. (515) und (520) folgende Momente entstehen:

1. Infolge  $\varrho_1 = 0,0136$  m.

$$\text{Da} \quad J_1 = 0,00106 \text{ m}^4 = J_4$$

und

$$\beta_1 = \frac{3,27}{6 \cdot 0,00106 \cdot E} = \frac{514,15}{E} = \beta_4,$$

so ist

$$k_1 = \frac{0,0136 \cdot 2100000}{3,27 \cdot 514,15 (3,27 - 1,09 - 0,65)} = 11,103,$$

und daher

$$M_1^A = k_1 \cdot a_1 = 11,103 \cdot 1,09 = -12,10 \text{ mt,}$$

$$M_1^B = k_1 \cdot b_1 = 11,103 \cdot 0,65 = +7,22 \text{ mt.}$$

Die Vorzeichen dieser beiden Momente wurden nach der in Teil II, Kap. III, Seite 303, angegebenen Regel aus der Anschauung bestimmt.

2. Infolge  $q_2 = 0,006$  m.

Da

$$J_2 = 0,00106 \text{ m}^4 = J_3$$

und

$$\beta_2 = \frac{3,89}{6 \cdot 0,00106 \cdot E} = \frac{611,63}{E} = \beta_3,$$

so ist

$$k_2 = \frac{0,006 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 000}{3,89 \cdot 611,63 (3,89 - 0,92 - 0,85)} = 2,498,$$

und daher:

$$M_2^B = k_2 \cdot a_2 = 2,498 \cdot 0,92 = + 2,298 \text{ mt},$$

$$M_2^C = k_2 \cdot b_2 = 2,498 \cdot 0,85 = - 2,123 \text{ mt}.$$

3. Infolge  $q_3 = 0,006$  m.

Der Symmetrie wegen ist  $q_3$  gleich, aber entgegengesetzt,  $q_2$ , so daß

$$M_3^C = + 2,123 \text{ mt (innen Zug, Stab 3 = liegender Stab),}$$

$$M_3^D = - 2,298 \text{ mt (außen Zug)}.$$

4. Infolge  $q_4 = 0,0136$  m.

Der Symmetrie wegen ist  $q_4$  gleich, aber entgegengesetzt,  $q_1$ , so daß

$$M_4^D = + 7,22 \text{ mt (außen Zug, Stab 4 = stehender Stab),}$$

$$M_4^E = - 12,10 \text{ mt (innen Zug)}.$$

5. In der Pendelsäule entstehen keine Momente, sondern nur axiale Druck- und Zugkräfte.

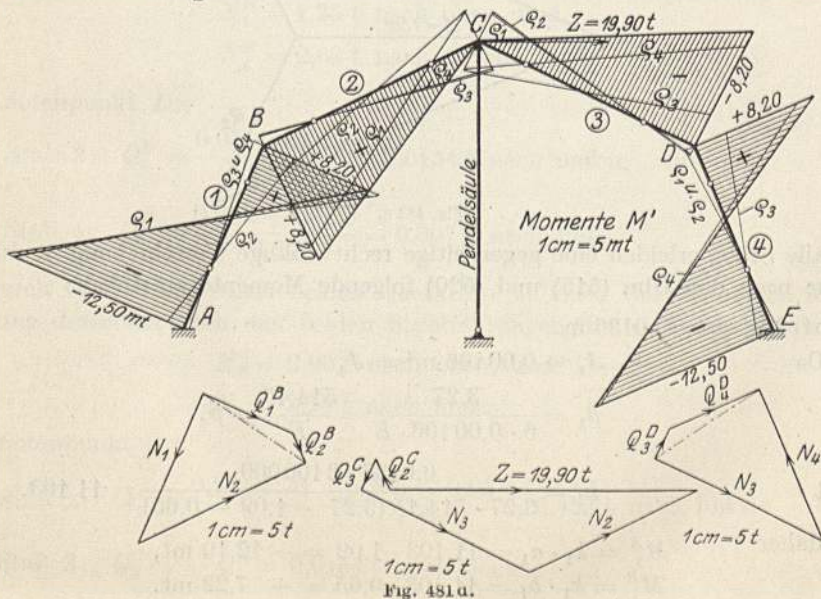


Fig. 481 u.



Diese einzelnen Momente wurden in Fig. 481d aufgetragen, mittels der Festpunkte weitergeleitet und dann addiert, wodurch sich die Momente  $M'$  ergaben.

Die Erzeugungskraft  $Z$  dieser Momente erhalten wir wie folgt (siehe Kräftepläne der Fig. 481d):

Knotenpunkt  $B$ :

$$\text{Stab 1: } Q_1^B = \frac{12,50 + 8,20}{3,27} = 6,33 \text{ t nach rechts,}$$

$$\text{Stab 2: } Q_2^B = \frac{8,20 + 0}{3,89} = 2,11 \text{ t nach unten.}$$

Diese beiden Kräfte zu einer Resultierenden vereinigt und letztere nach den Stabrichtungen 1 und 2 zerlegt gibt:

$$N_1 = 10,60 \text{ t nach unten, und}$$

$$N_2 = 12,10 \text{ t nach oben.}$$

Knotenpunkt  $D$ :

$$\text{Stab 3: } Q_3^D = \frac{8,20 + 0}{3,89} = 2,11 \text{ t nach oben,}$$

$$\text{Stab 4: } Q_4^D = \frac{12,50 + 8,20}{3,27} = 6,33 \text{ t nach rechts.}$$

Die nach den Stabrichtungen 3 und 4 zerlegte Resultierende aus diesen beiden Kräften ergibt:

$$N_3 = 12,10 \text{ t nach rechts, und}$$

$$N_4 = 10,60 \text{ t nach oben.}$$

Der Symmetrie wegen ist der Größe nach

$$N_1 = N_4 \quad \text{und} \quad N_2 = N_3.$$

Knotenpunkt  $C$ :

$$\text{Stab 2: } Q_2^C = \frac{8,20 + 0}{3,89} = 2,11 \text{ t nach oben,}$$

$$\text{Stab 3: } Q_3^C = \frac{8,20 + 0}{3,89} = 2,11 \text{ t nach unten.}$$

Diese beiden Kräfte mit  $N_3$  und  $N_2$  zu einer Resultierenden vereinigt und letztere in wagrechter (die gewählte Richtung der Erzeugungskraft) und senkrechter (Pendelsäule) Richtung zerlegt, ergibt als Horizontalkomponente die gesuchte Erzeugungskraft

$$Z = 19,90 \text{ t nach rechts,}$$

und die Vertikalkomponente ist der Symmetrie wegen gleich Null.

Als Teilprobe muß die Summe der Horizontalprojektionen von  $Z$ ,  $Q_1^A$ ,  $N_1$ ,  $Q_4^B$  und  $N_4$  gleich Null sein.

Aus den obenermittelten Momenten  $M'$  sowie der zugehörigen Erzeugungskraft  $Z$  erhalten wir nach Gl. (529) die  $M^*$ -Momente infolge  $H = +1$  t in  $C$  zu

$$M^* = \frac{M'}{Z}.$$

Da es sich in vorliegendem Beispiel nur um einen Belastungsfall handelt, wurden die  $M^*$ -Momente nicht aufgetragen, sondern nach Gl. (529a) direkt die Zusatzmomente

$$M_{\text{zus.}} = V \cdot M^* = V \cdot \frac{M'}{Z}$$

berechnet und in Fig. 481 e dargestellt.

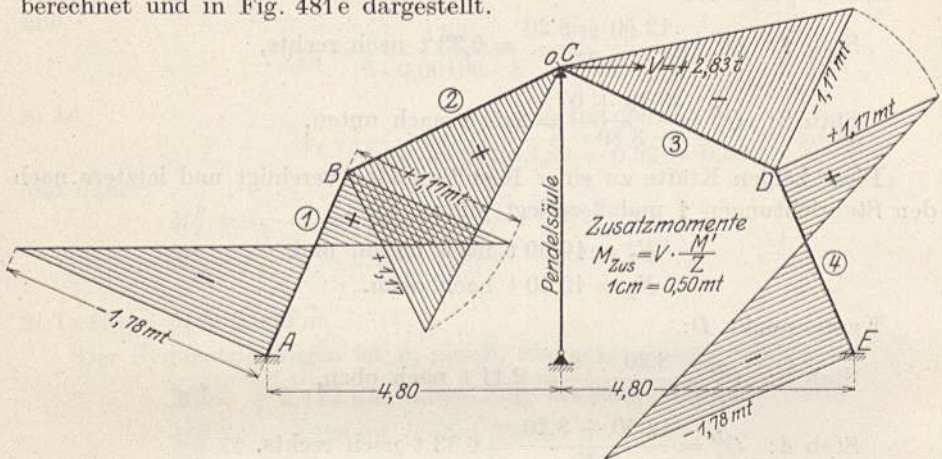


Fig. 481 e.

Durch Addition der Momente aus R. I und R. II (Zusatzmomente) erhalten wir schließlich die endgültigen Momente für die gegebene äußere Belastung, welche aus Fig. 481 f zu ersehen sind.

Um die in der Pendelsäule auftretende Axialkraft zu bestimmen, gehen wir analog vor wie zur Bestimmung der Festhaltungskraft, und zwar wie folgt (siehe die unteren Kräftepläne in Fig. 481 f):

Knotenpunkt B:

$$\text{Stab 1: } A_1^B = \frac{0,75 \cdot 3,00}{2} - \frac{2,415 + 0,805}{3,00} = 0,052 \text{ t nach links,}$$

$$\text{Stab 2: } A_2^B = \frac{0,75 \cdot 1,70}{2} - \frac{0,805 + 0,05}{1,70} = 0,135 \text{ t nach links.}$$

Die Resultierende aus diesen beiden Kräften nach den Stabrichtungen 1 und 2 zerlegt ergibt:

$$N_1 = 0,125 \text{ t nach oben, und}$$

$$N_2 = 0,263 \text{ t nach unten.}$$

Knotenpunkt D:

$$\text{Stab 3: } Q_3^D = \frac{1,105}{3,89} = 0,284 \text{ t nach oben,}$$

$$\text{Stab 4: } Q_4^D = \frac{1,155 + 1,770}{3,27} = 0,895 \text{ t nach rechts.}$$

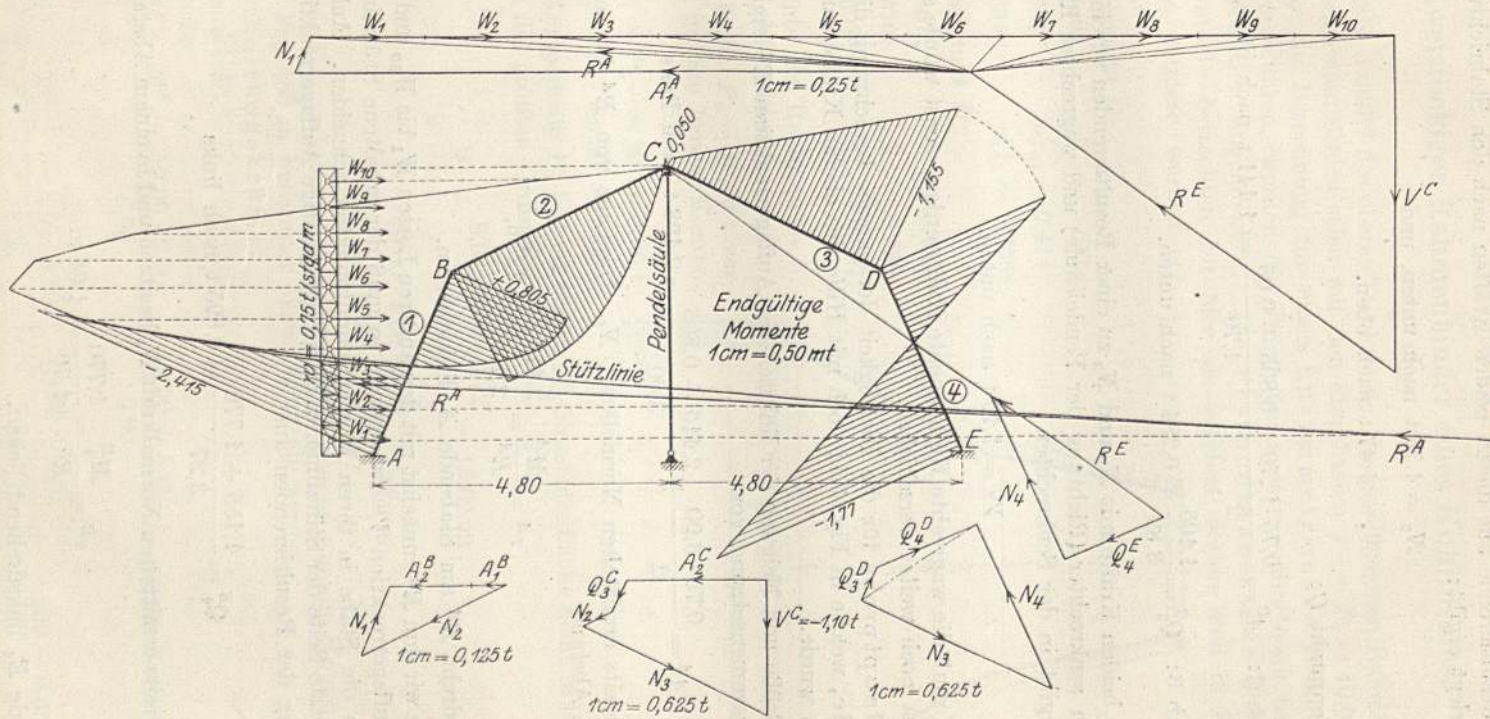


Fig. 481 f.

Die Resultierende aus diesen beiden Kräften nach den Stabrichtungen 3 und 4 zerlegt ergibt:

$$N_3 = 1,70 \text{ t nach unten, und}$$

$$N_4 = 1,47 \text{ t nach oben.}$$

Knotenpunkt  $C$ :

$$\text{Stab 2: } A_2^C = \frac{0,75 \cdot 1,70}{2} + \frac{0,805 + 0,05}{1,70} = 1,141 \text{ t nach links,}$$

$$\text{Stab 3: } Q_3^C = \frac{1,105}{3,89} = 0,284 \text{ t nach unten.}$$

Diese beiden Kräfte mit  $N_2$  und  $N_3$  zu einer Resultierenden vereinigt und letztere in senkrechter (Richtung der Pendelsäule) und wagrechter Richtung zerlegt, ergibt in der Senkrechten

$$V^C = 1,10 \text{ t nach unten.}$$

Als Probe muß die wagrechte Komponente Null werden, sonst würde sich der Rahmen ja noch weiter verschieben.

Als Hauptprobe für die Richtigkeit der ganzen Berechnung dient die Stützlinie, welche in Fig. 481f noch mit Hilfe des oberen Kräfteplanes eingezeichnet wurde.]

Die Größe und Neigung der linksseitigen Auflagerreaktion  $R^A$  ergibt sich durch Zusammensetzung von

$$A_1^A = \frac{0,75 \cdot 3,00}{2} + \frac{2,415 + 0,805}{3,00} = 2,198 \text{ t nach links}$$

mit der bereits ermittelten Normalkraft  $N_1$ . Die Lage von  $R^A$  ist bestimmt durch den Abstand

$$r^A = \frac{M_1^A}{R^A} = \frac{2,415}{2,15} = 1,127 \text{ m,}$$

und zwar dreht  $R^A$  am Stabende  $A_1$  links herum.

Setzen wir nun  $R^A$  zunächst mit den äußeren Lasten  $W_1$  bis  $W_{10}$  und darauf mit der Auflagerreaktion  $V^C$  zusammen, so muß der erhaltene Stützlinienzug als Probe die Stäbe in ihren Momentennullpunkten schneiden. Außerdem muß die letzte Seite der Stützlinie, d. h. die rechtsseitige Auflagerreaktion  $R^E$ , die Neigung der Resultierenden aus

$$Q_4^E = \frac{1,155 + 1,770}{3,27} = 0,895 \text{ t nach links}$$

und der bereits ermittelten Normalkraft  $N_4$  besitzen und in einem Abstand von

$$r^E = \frac{M_4^E}{R^E} = \frac{1,770}{1,70} = 1,04 \text{ m.}$$

am Stabende  $E_4$  linksdrehend liegen.

## Beispiel 13.

## Zweistöckiger Rahmenbinder eines Kühlturmes.

(Fig. 482.)

Die Stäbe 5 und 7 des oberen Stockwerkes des geschlossenen Rahmens mit beliebig gerichteten Säulen seien mit den Einzellasten  $P_5 = P_7 = 10,00$  t belastet. Um die Berechnung für einen unsymmetrischen geschlossenen Rahmen vorzuführen, wurden die Trägheitsmomente symmetrisch liegender Stäbe verschieden angenommen. Die Festpunktabstände und Verteilungsmaße betrachten wir hier als gegeben; erstere sind in Fig. 483 eingetragen, letztere wurden ermittelt zu:

am Knotenpunkt C:

$$\mu_{2-5}^C = 0,449; \quad \mu_{2-4}^C = 0,551;$$

$$\mu_{5-2}^C = 0,586; \quad \mu_{5-4}^C = 0,414;$$

$$\mu_{4-2}^C = 0,634; \quad \mu_{4-5}^C = 0,366;$$

am Knotenpunkt D:

$$\mu_{3-6}^D = 0,567; \quad \mu_{3-4}^D = 0,433;$$

$$\mu_{6-3}^D = 0,670; \quad \mu_{6-4}^D = 0,330;$$

$$\mu_{4-3}^D = 0,603; \quad \mu_{4-6}^D = 0,397.$$

## Momente des Rechnungsabschnittes I.

Die Kraft  $P_5 = 10,00$  t zerlegen wir in ihre beiden Komponenten

$$P'_5 = P_5 \cdot \cos 30^\circ = 8,66 \text{ t}$$

$$\text{und } P''_5 = P_5 \cdot \sin 30^\circ = 5,00 \text{ t.}$$

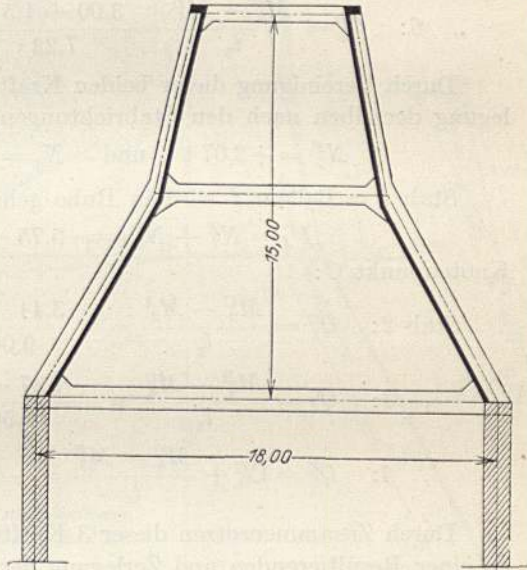


Fig. 482.

Die Komponente  $P''_5$  kommt für die  $M_0$ -Momentenfläche nicht in Betracht; diese hat die größten Ordinaten

am Stab 5:

$$M_0 = \frac{8,66 \cdot 3,50 \cdot 3,72}{7,22} = 15,62 \text{ mt.}$$

am Stab 7:

$$M_0 = \frac{10,00 \cdot 4,00 \cdot 2,00}{6,00} = 13,33 \text{ mt.}$$

Mittels Festpunkte und Verteilungsmaße können nun die Momente aus R. I der Fig. 483 in bekannter Weise ermittelt werden.

Festhaltungskräfte:

Knotenpunkt E:

Stab 7:

$$Q_7^E = Q_7^E + \frac{M_7^F - M_7^E}{l_7} = \frac{10,00 \cdot 2,00}{6,00} + \frac{-3,00 + 8,60}{6,00} = +3,333 + 0,934 = +4,267 \text{ t,}$$

Stab 5:

$$Q_5^E = Q_5^E + \frac{M_5^E - M_5^C}{l_5} = \frac{-8,66 \cdot 3,50}{7,22} + \frac{-8,60 + 6,05}{7,22} = -4,200 - 0,353 = -4,553 \text{ t.}$$

Durch Vereinigung dieser beiden Querkräfte zu einer Resultierenden und Zerlegung derselben nach den beiden Stabrichtungen 5 und 7 erhalten wir die Horizontalkomponente

$$N_7^E = -5,75 \text{ t}$$

und eine Komponente in Richtung des Stabes 5:

$$N_5 = +5,45 \text{ t (siehe Fig. 483 a).}$$

Knotenpunkt *F*:

$$\text{Stab 7: } Q_7^F = Q_7^E + \frac{M_7^E - M_7^F}{l_7} = (10,00 - 3,333) - 0,934 = +5,733 \text{ t,}$$

$$\text{„ 6: } Q_6^F = \frac{M_6^F - M_6^D}{l_6} = \frac{3,00 + 1,51}{7,22} = +0,625 \text{ t.}$$

Durch Vereinigung dieser beiden Kräfte zu einer Resultierenden und Zerlegung derselben nach den Stabrichtungen 5 und 7 erhalten wir:

$$N_7^F = +2,07 \text{ t und } N_6 = +6,07 \text{ t (Fig. 483 b).}$$

Stab 7 = Balken *I* wird in Ruhe gehalten von:

$$F_I = N_7^E + N_7^F = -5,75 + 2,07 = -3,68 \text{ t.}$$

Knotenpunkt *C*:

$$\text{Stab 2: } Q_2^C = \frac{M_2^C - M_2^A}{l_2} = \frac{-3,44 - 0,93}{9,06} = -0,485 \text{ t,}$$

$$\text{„ 4: } Q_4^C = \frac{M_4^D - M_4^C}{l_4} = \frac{-1,37 - 2,61}{9,50} = -0,419 \text{ t,}$$

$$\text{„ 5: } Q_5^C = Q_5^E + \frac{M_5^C - M_5^E}{l_5} = -(8,66 - 4,20) + 0,353 = -4,107 \text{ t.}$$

Durch Zusammensetzen dieser 3 Kräfte mit  $N_5$  und der Reaktion von  $P_5'$  zu einer Resultierenden und Zerlegung der letzteren in Richtung der Stäbe 4 und 2 ergeben sich:

$$N_4^C = -7,70 \text{ t; } N_2 = +12,40 \text{ t (Fig. 483 c).}$$

Knotenpunkt *D*:

$$\text{Stab 3: } Q_3^D = \frac{M_3^D - M_3^B}{l_3} = \frac{-0,14 - 0,30}{9,06} = -0,049 \text{ t,}$$

$$\text{„ 4: } Q_4^D = -Q_4^C = +0,419 \text{ t,}$$

$$\text{„ 6: } Q_6^D = -Q_6^F = -0,625 \text{ t.}$$

Durch Zusammensetzen dieser 3 Kräfte mit  $N_6$  zu einer Resultierenden und Zerlegen der letzteren in die Richtungen der Stäbe 3 und 4 ergeben sich:

$$N_4^D = +1,15 \text{ t; } N_3 = +6,90 \text{ t (Fig. 483 d).}$$

Stab 4 = Balken *II* wird in Ruhe gehalten von der Festhaltungskraft

$$F_{II} = N_4^C + N_4^D = -7,70 + 1,15 = -6,55 \text{ t.}$$

Knotenpunkt *A*:

$$\text{Stab 1: } Q_1^A = \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = \frac{+0,30 + 0,93}{18,00} = +0,068 \text{ t.}$$

$$\text{„ 2: } Q_2^A = -Q_2^C = +0,485 \text{ t.}$$

Vereinigen wir diese beiden Kräfte mit  $N_2$  zu einer Resultierenden und zerlegen diese in eine horizontale und vertikale Komponente, so erhalten wir:

$$N_1^A = +6,25 \text{ t} \quad \text{und} \quad A_0 = +10,85 \text{ t} \quad (\text{Fig. 483e}).$$

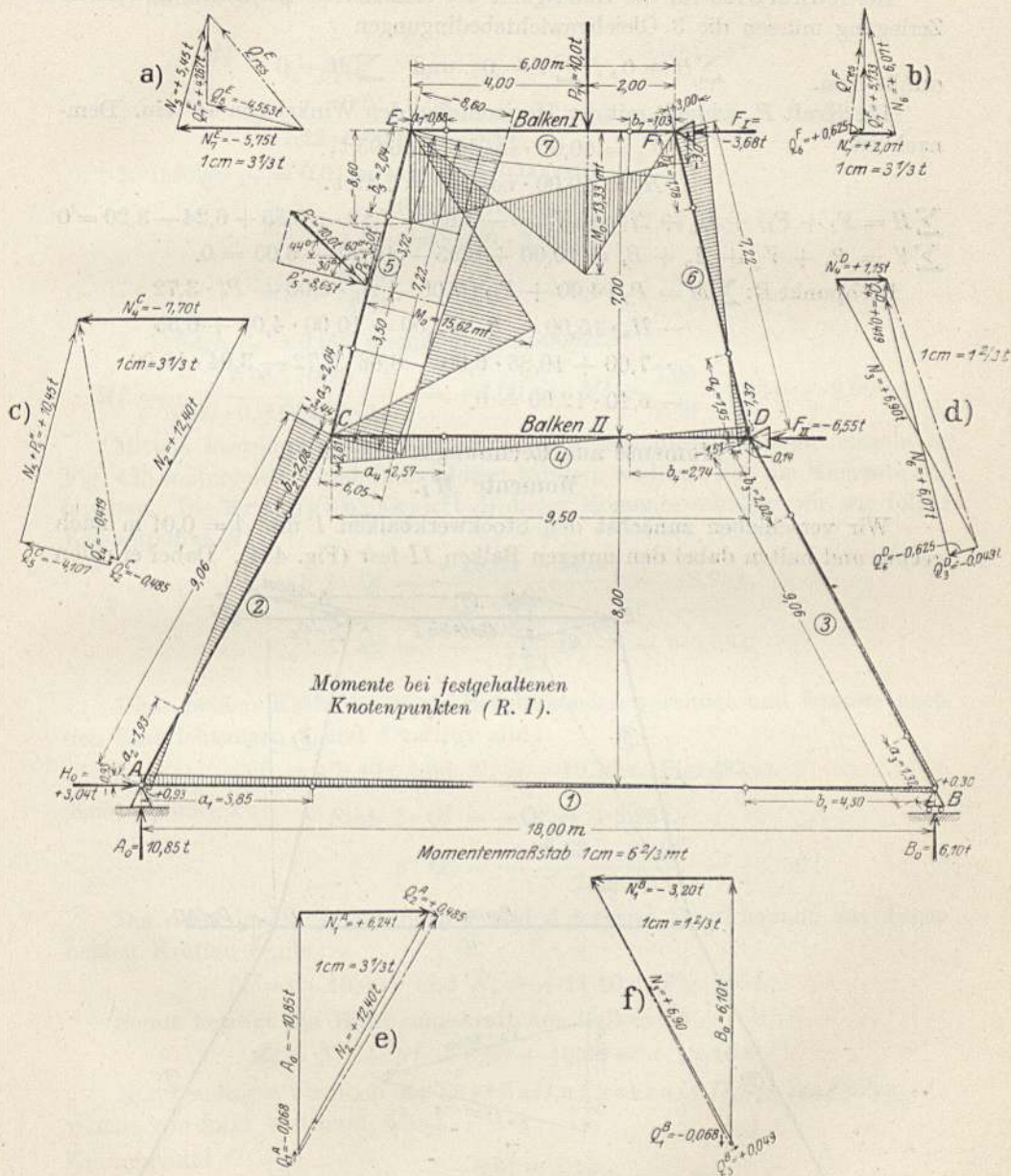


Fig. 483—483f.

Knotenpunkt B:

Stab 1:

$$Q_1^B = -Q_1^A = -0,068 \text{ t},$$

„ 3:

$$Q_3^B = -Q_3^D = +0,049 \text{ t}.$$





die Stäbe 5, 6 und 7 gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen, und zwar ist  $\varrho_5 = \varrho_6 = 0,01$  m und  $\varrho_7 = 0,005$  m, woraus sich nach den Gl. (515) und (520) nachstehende Momente ergeben:

1. Infolge  $\varrho_5 = 0,01$  m:

$$M_5^E = \frac{\varrho_5 \cdot b_5}{l_5 \cdot \beta_5 (l_5 - a_5 - b_5)}; \quad \beta_5 = 0,0000638$$

$$= \frac{0,01 \cdot 2,04}{7,22 \cdot 0,0000638 \cdot 3,14} = +14,10 \text{ mt}; \quad M_5^C = -14,10 \text{ mt.}$$

2. Infolge  $\varrho_6 = 0,01$  m mit  $\beta_6 = 0,000040$ :

$$M_6^F = \frac{0,01 \cdot 1,78}{7,22 \cdot 0,000040 \cdot 3,49} = +17,67 \text{ mt};$$

$$M_6^D = \frac{17,67}{1,78} \cdot 1,95 = -19,35 \text{ mt.}$$

3. Infolge  $\varrho_7 = 0,005$  m mit  $\beta_7 = 0,0000228$ :

$$M_7^E = \frac{0,005 \cdot 0,80}{6,00 \cdot 0,0000228 \cdot 4,17} = +7,00 \text{ mt}; \quad M_7^F = \frac{7,00}{0,80} \cdot 1,03 = -9,00 \text{ mt.}$$

Mittels Festpunkte und Verteilungsmaße sind diese Momente einzeln in Fig. 485 weitergeleitet und dann addiert worden, wodurch sich die Momente  $M_I^E$  ergaben. Die Erzeugungskraft  $Z_I$  dieser Momente erhalten wir wie folgt: Knotenpunkt E:

$$\text{Stab 7: } Q_7^E = \frac{-29,63 - 24,05}{6,00} = -8,95 \text{ t.}$$

$$\text{,, 5: } Q_5^E = \frac{+24,05 + 18,90}{7,22} = +5,95 \text{ t.}$$

Diese beiden Kräfte zu einer Resultierenden vereinigt und letztere nach den Stabrichtungen 7 und 5 zerlegt gibt:

$$N_7^E = +8,40 \text{ t und } N_5 = -10,70 \text{ t (Fig. 485a).}$$

Knotenpunkt F:

$$\text{Stab 7: } Q_7^F = -Q_7^E = +8,95 \text{ t.}$$

$$\text{,, 6: } Q_6^F = \frac{+29,63 + 24,96}{7,22} = +7,56 \text{ t.}$$

Die nach den Stabrichtungen 7 und 6 zerlegte Resultierende aus diesen beiden Kräften ergibt:

$$N_7^F = +10,00 \text{ t und } N_6 = +11,10 \text{ t (Fig. 485b).}$$

Somit beträgt die Erzeugungskraft am Balken I:

$$Z_I = N_7^E + N_7^F = 8,40 + 10,00 = +18,40 \text{ t.}$$

Nun benötigen wir noch die Festhaltungskraft  $D_{II(AD)}$  am Balken II, welche wie folgt bestimmt wird:

Knotenpunkt C:

$$\text{Stab 2: } Q_2^C = \frac{-8,61 - 3,13}{9,06} = -1,30 \text{ t.}$$

$$\text{,, 4: } Q_4^C = \frac{-10,74 - 10,29}{9,50} = -2,21 \text{ t.}$$

$$\text{,, 5: } Q_5^C = -Q_5^E = -5,95 \text{ t.}$$



Knotenpunkt A: Stab 2:  $Q_2^A = -Q_2^C = +1,30 \text{ t}$ ;  
 „ 1:  $Q_1^A = \frac{+2,93 + 3,13}{18,00} = +0,34 \text{ t}$ .

Diese beiden Kräfte mit  $N_3$  zu einer Resultierenden vereinigt und letztere wagrecht und senkrecht zerlegt ergibt:

$$N_1^A = -4,50 \text{ t und } A = -10,80 \text{ t (Fig. 485e).}$$

Knotenpunkt B: Stab 3:  $Q_3^B = -Q_3^D = +1,89 \text{ t}$ ;  
 „ 1:  $Q_1^B = -Q_1^A = -0,34 \text{ t}$ .

Diese beiden Kräfte mit  $N_3$  zu einer Resultierenden vereinigt, welche wir wieder wagrecht und senkrecht zerlegen, gibt:

$$N_1^B = -3,70 \text{ t und } B = +10,80 \text{ t.}$$

Am festen Auflager wirkt somit der Horizontalschub:

$$H = N_1^A + N_1^B = -4,50 - 3,70 = -8,20 \text{ t.}$$

Als Kontrolle ist, wie ersichtlich,  $\sum H = 0$ ,  $\sum V = 0$  und (Drehpunkt A)

$$\sum M = 18,40 \cdot 15,00 - 10,20 \cdot 8,0 - 10,80 \cdot 18,00 = 0.$$

### Momente $M_{II}$ .

Wir verschieben jetzt den Balken II um  $\Delta = 1,0 \text{ cm}$ , wobei wir am Knotenpunkt F des Balkens I ein Rollenlager mit senkrechter Verschiebung  $\varrho$  der einzelnen

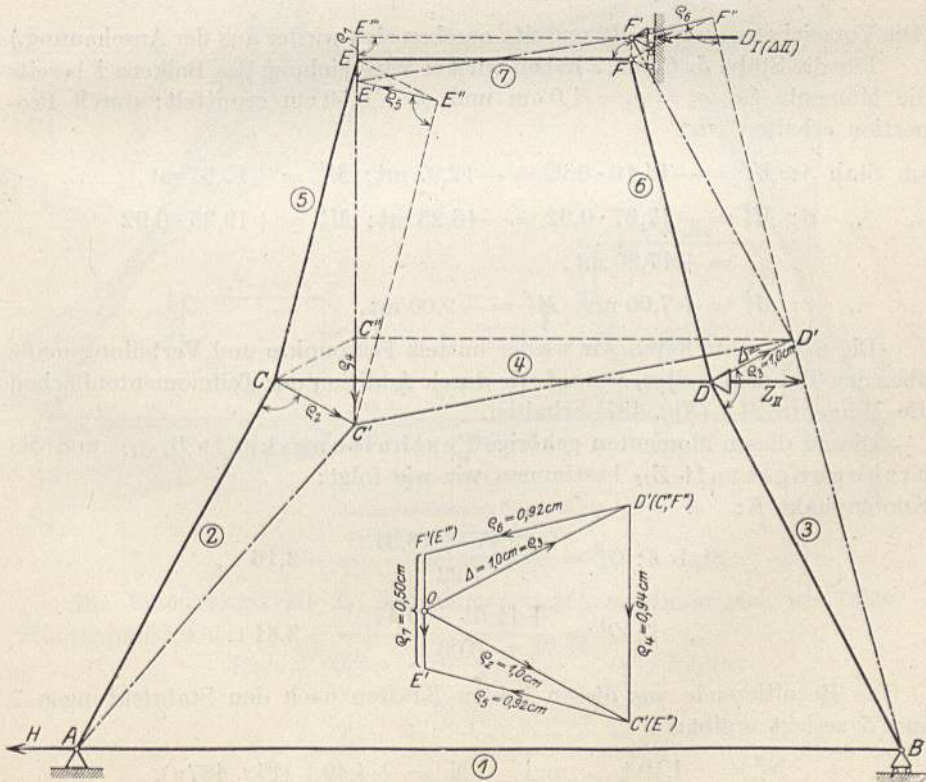


Fig. 486.

Stäbe graphisch ermittelt worden, worauf wir nachstehend die einzelnen sich daraus ergebenden Momente an den Stabenden ermitteln können.

Nach den Gl. (515) und (520) erhalten wir mit den Drehwinkeln

$$\beta_2 = 0,0000338,$$

$$\beta_3 = 0,0000238,$$

$$\beta_4 = 0,0000528:$$

$$\text{am Stab 2: } M_2^C = \frac{0,01 \cdot 2,08}{9,06 \cdot 0,0000338 \cdot 5,05} = +13,50 \text{ mt;}$$

$$M_2^A = \frac{13,50}{2,08} \cdot 1,93 = -12,47 \text{ mt;}$$

$$\text{„ „ 3: } M_3^D = \frac{0,01 \cdot 2,02}{9,06 \cdot 0,0000238 \cdot 5,72} = +16,37 \text{ mt;}$$

$$M_3^B = \frac{16,37}{2,02} \cdot 1,32 = -10,70 \text{ mt;}$$

$$\text{„ „ 4: } M_4^C = \frac{0,0094 \cdot 2,57}{9,50 \cdot 0,0000528 \cdot 4,19} = +11,50 \text{ mt;}$$

$$M_4^D = \frac{11,50}{2,57} \cdot 2,74 = -12,26 \text{ mt.}$$

(Die Vorzeichen von  $M_2^A$ ,  $M_3^B$  und  $M_4^D$  ergeben sich wieder aus der Anschauung.)

Für die Stäbe 5, 6 und 7 haben wir bei Verschiebung des Balkens I bereits die Momente für  $\varrho_5 = \varrho_6 = 1,0$  cm und  $\varrho_7 = 0,50$  cm ermittelt; durch Proportion erhalten wir:

$$\text{am Stab 5: } M_5^E = -14,10 \cdot 0,92 = -12,97 \text{ mt; } M_5^G = +12,97 \text{ mt,}$$

$$\text{„ „ 6: } M_6^F = -17,67 \cdot 0,92 = -16,25 \text{ mt; } M_6^D = +19,35 \cdot 0,92 \\ = +17,80 \text{ mt,}$$

$$\text{„ „ 7: } M_7^E = +7,00 \text{ mt; } M_7^F = -9,00 \text{ mt.}$$

Diese Momente leiten wir wieder mittels Festpunkte und Verteilungsmaße über den Rahmen weiter, worauf wir durch Addition der Teilmomentenflächen die Momente  $M'_{II}$  (Fig. 487) erhalten.

Die zu diesen Momenten gehörige Festhaltungskraft  $D_{I(II)}$  und die Erzeugungskraft  $Z_{II}$  bestimmen wir wie folgt:

Knotenpunkt E:

$$\text{Stab 5: } Q_5^E = \frac{-9,47 - 13,31}{7,22} = -3,16 \text{ t,}$$

$$\text{„ 7: } Q_7^E = \frac{+11,61 - 9,47}{6,00} = +3,51 \text{ t.}$$

Die Resultierende aus diesen beiden Kräften nach den Stabrichtungen 7 und 5 zerlegt ergibt:

$$N_7^E = -4,10 \text{ t} \quad \text{und} \quad N_5 = +4,40 \text{ t (Fig. 487 a).}$$

Knotenpunkt  $F$ :  
 Stab 7:  $Q_7^F = -Q_7^E = -3,51 \text{ t}$ ,  
 „ 6:  $Q_6^F = \frac{-11,61 - 20,19}{7,22} = -4,40 \text{ t}$ .

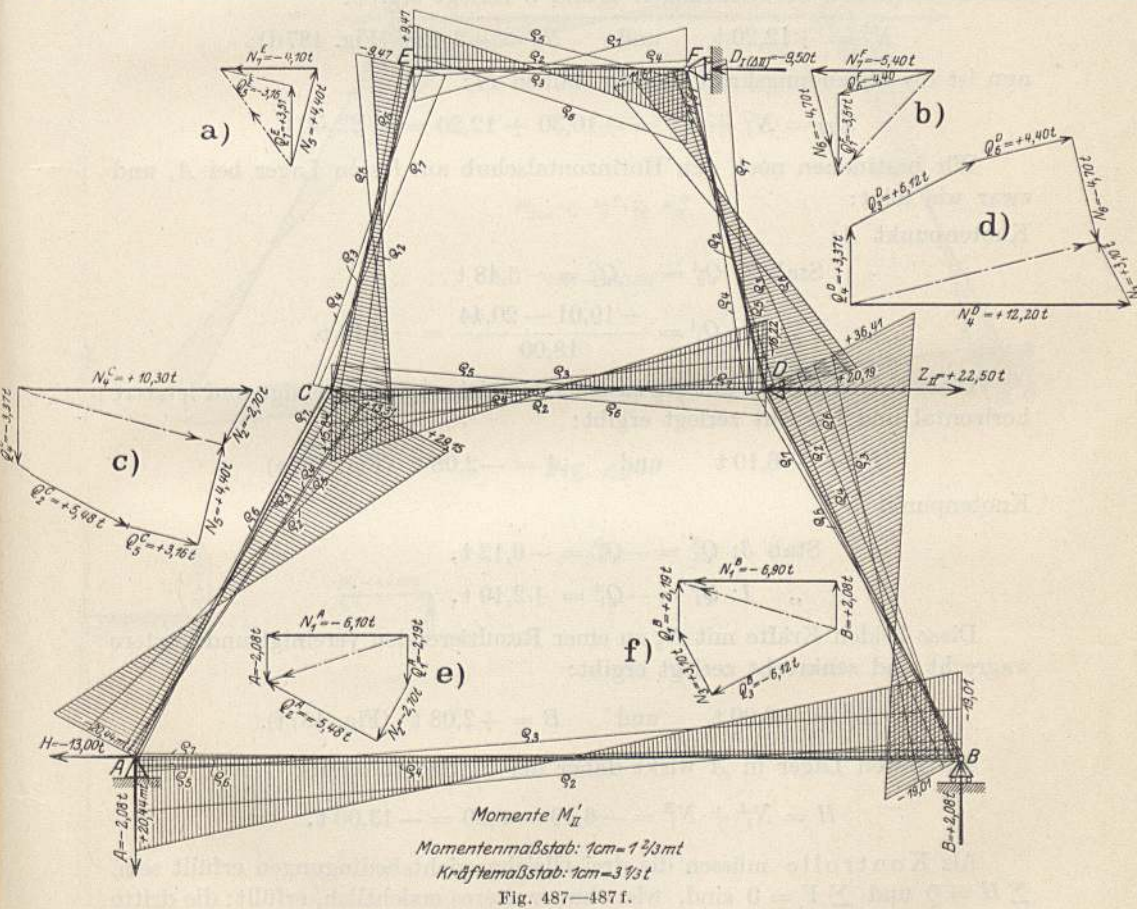
Die Resultierende dieser beiden Kräfte nach den Stabrichtungen 7 und 6 zerlegt ergibt:

$$N_7^F = -5,40 \text{ t} \quad \text{und} \quad N_6 = -4,70 \text{ t} \quad (\text{Fig. 487 b}),$$

und nun ist die Festhaltungskraft

$$D_{I(II)} = N_7^F + N_6^F = -4,10 - 5,40 = -9,50 \text{ t}.$$

Diese Kraft regelt, wie vorausgesetzt, die Verschiebung des Knotenpunktes  $F$  bzw. des oberen Stockwerkes.



Momente  $M'_{II}$   
 Momentenmaßstab:  $1\text{cm} = 1 \frac{2}{3} \text{t/m}$   
 Kräftemaßstab:  $1\text{cm} = 3 \frac{2}{3} \text{t}$   
 Fig. 487—487f.

Die Erzeugungskraft  $Z_{II}$  der Momente  $M'_{II}$  bestimmt sich wie folgt:  
 Knotenpunkt  $C$ :

Stab 2:  $Q_2^C = \frac{+29,15 + 20,44}{9,06} = +5,48 \text{ t}$ ,  
 „ 4:  $Q_4^C = \frac{-16,22 - 15,84}{9,50} = -3,37 \text{ t}$ ,  
 „ 5:  $Q_5^C = -Q_5^E = +3,16 \text{ t}$ .

Diese drei Kräfte mit  $N_5$  zu einer Resultierenden vereinigt und letztere nach den Stabrichtungen 4 und 2 zerlegt gibt:

$$N_4^C = +10,30 \text{ t} \quad \text{und} \quad N_2 = -2,70 \text{ t} \quad (\text{Fig. 487c}).$$

Knotenpunkt  $D$ :

$$\text{Stab 3: } Q_3^D = \frac{+36,41 + 19,01}{9,06} = +6,12 \text{ t},$$

$$\text{,, 4: } Q_4^D = -Q_4^C = +3,37 \text{ t},$$

$$\text{,, 6: } Q_6^D = -Q_6^C = +4,40 \text{ t}.$$

Diese drei Kräfte mit  $N_6$  zu einer Resultierenden zusammengesetzt und letztere nach den Stabrichtungen 4 und 3 zerlegt ergibt:

$$N_4^D = +12,20 \text{ t} \quad \text{und} \quad N_3 = +3,10 \text{ t} \quad (\text{Fig. 487d});$$

nun ist die Erzeugungskraft  $Z_{II}$  am Balken  $II$ :

$$Z_{II} = N_4^C + N_4^D = +10,30 + 12,20 = +22,50 \text{ t}.$$

Wir bestimmen noch den Horinzontalschub am festen Lager bei  $A$ , und zwar wie folgt:

Knotenpunkt  $A$ :

$$\text{Stab 2: } Q_2^A = -Q_2^C = -5,48 \text{ t},$$

$$\text{,, 1: } Q_1^A = \frac{-19,01 - 20,44}{18,00} = -2,19 \text{ t}.$$

Diese beiden Kräfte mit  $N_2$  zu einer Resultierenden vereinigt und letztere horizontal und lotrecht zerlegt ergibt:

$$N_1^A = -6,10 \text{ t} \quad \text{und} \quad A = -2,08 \text{ t} \quad (\text{Fig. 487e}).$$

Knotenpunkt  $B$ :

$$\text{Stab 3: } Q_3^B = -Q_3^D = -6,12 \text{ t},$$

$$\text{,, 1: } Q_1^B = -Q_1^A = +2,19 \text{ t}.$$

Diese beiden Kräfte mit  $N_3$  zu einer Resultierenden vereinigt und letztere waagrecht und senkrecht zerlegt ergibt:

$$N_1^B = -6,90 \text{ t} \quad \text{und} \quad B = +2,08 \text{ t} \quad (\text{Fig. 487f}).$$

Am festen Lager in  $A$  wirkt daher der Horinzontalschub:

$$H = N_1^A + N_1^B = -6,10 - 6,90 = -13,00 \text{ t}.$$

Als Kontrolle müssen die drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein.  $\sum H = 0$  und  $\sum V = 0$  sind, wie ohne weiteres ersichtlich, erfüllt; die dritte Bedingung mit  $A$  als Pol ergibt:

$$\sum M = 22,50 \cdot 8,00 - 9,50 \cdot 15,00 - 2,08 \cdot 18,00 = 0.$$

### Momente $M_I^*$ und $M_{II}^*$ .

Aus den eben ermittelten Momenten  $M_I'$  und  $M_{II}'$  sowie den zugehörigen Erzeugungs- und Festhaltungskräften bestimmen sich nach den Gl. (544)

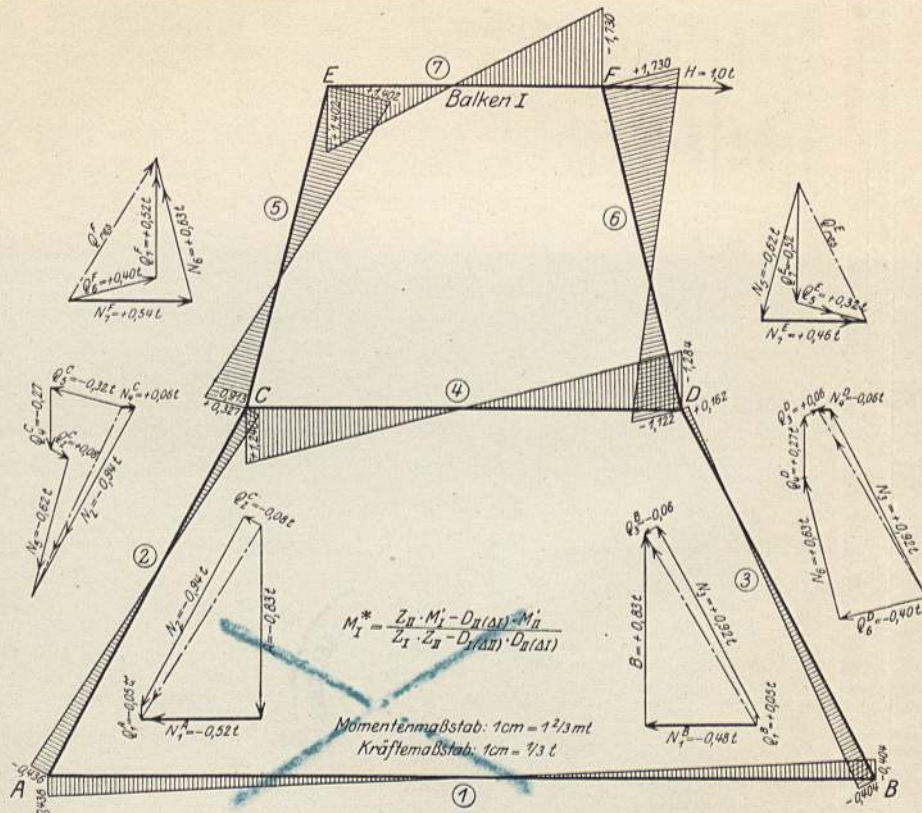


Fig. 488.

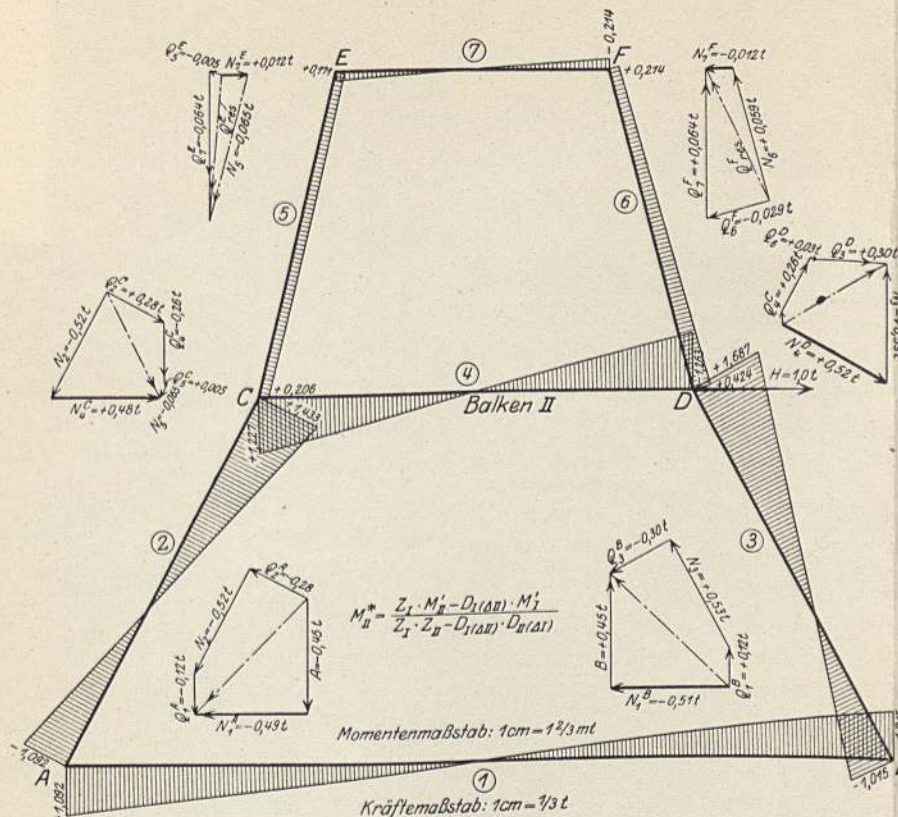


Fig. 489.

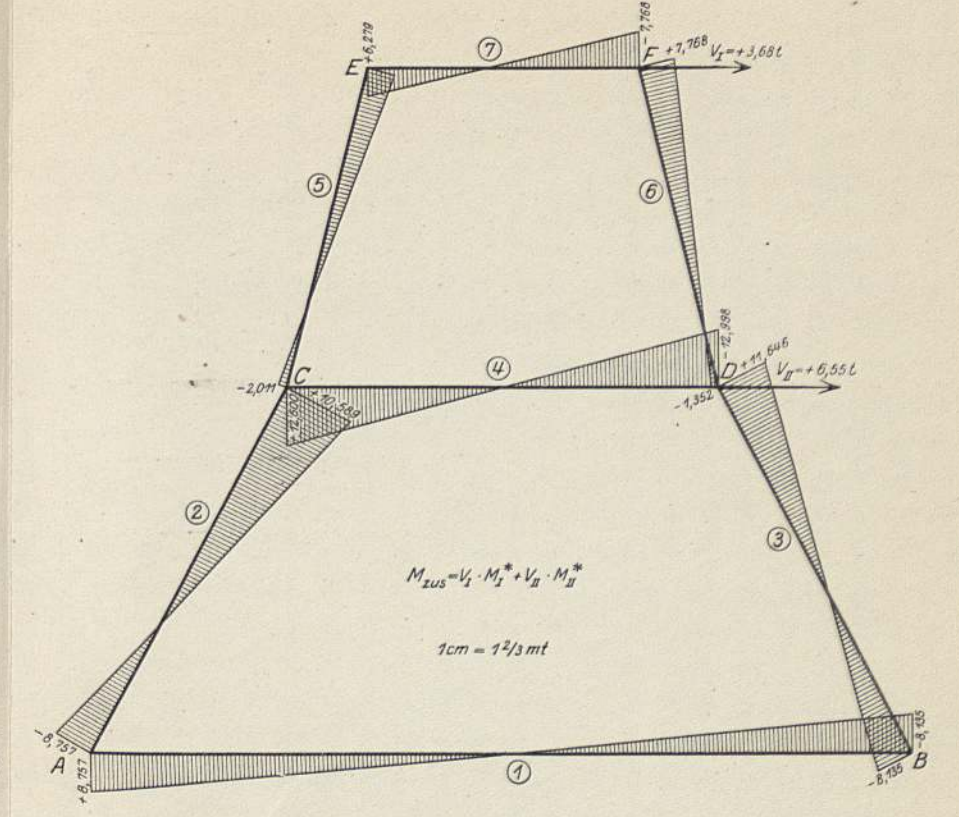
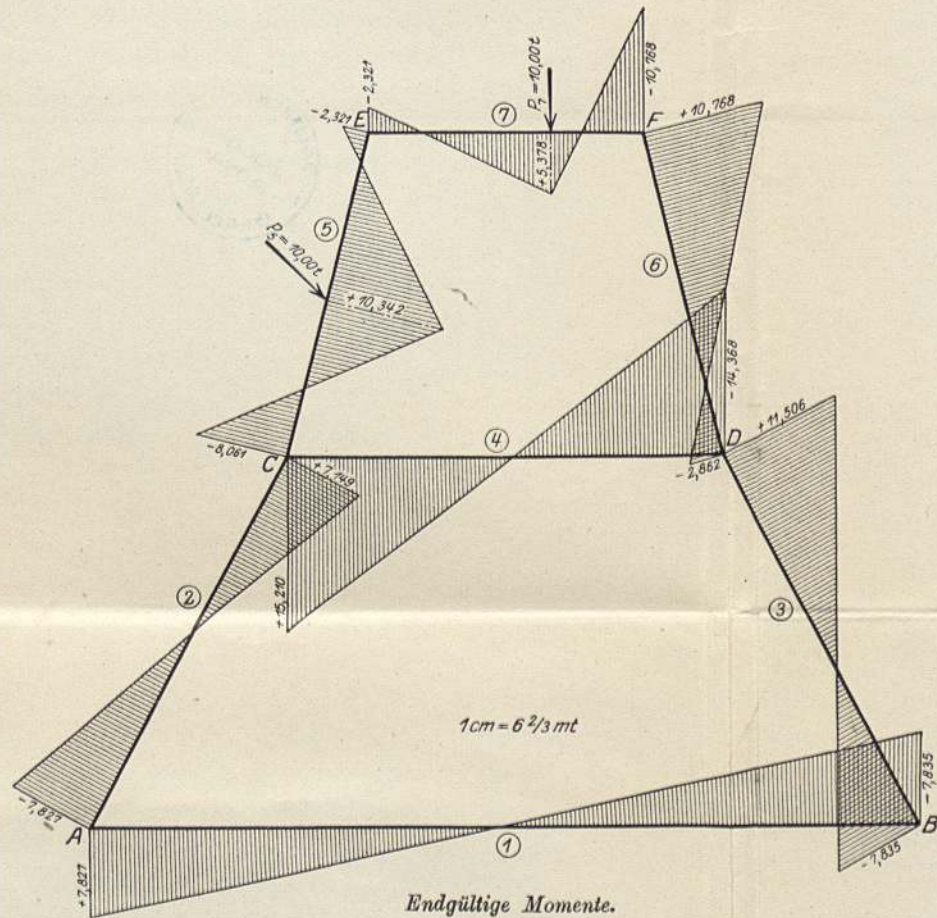
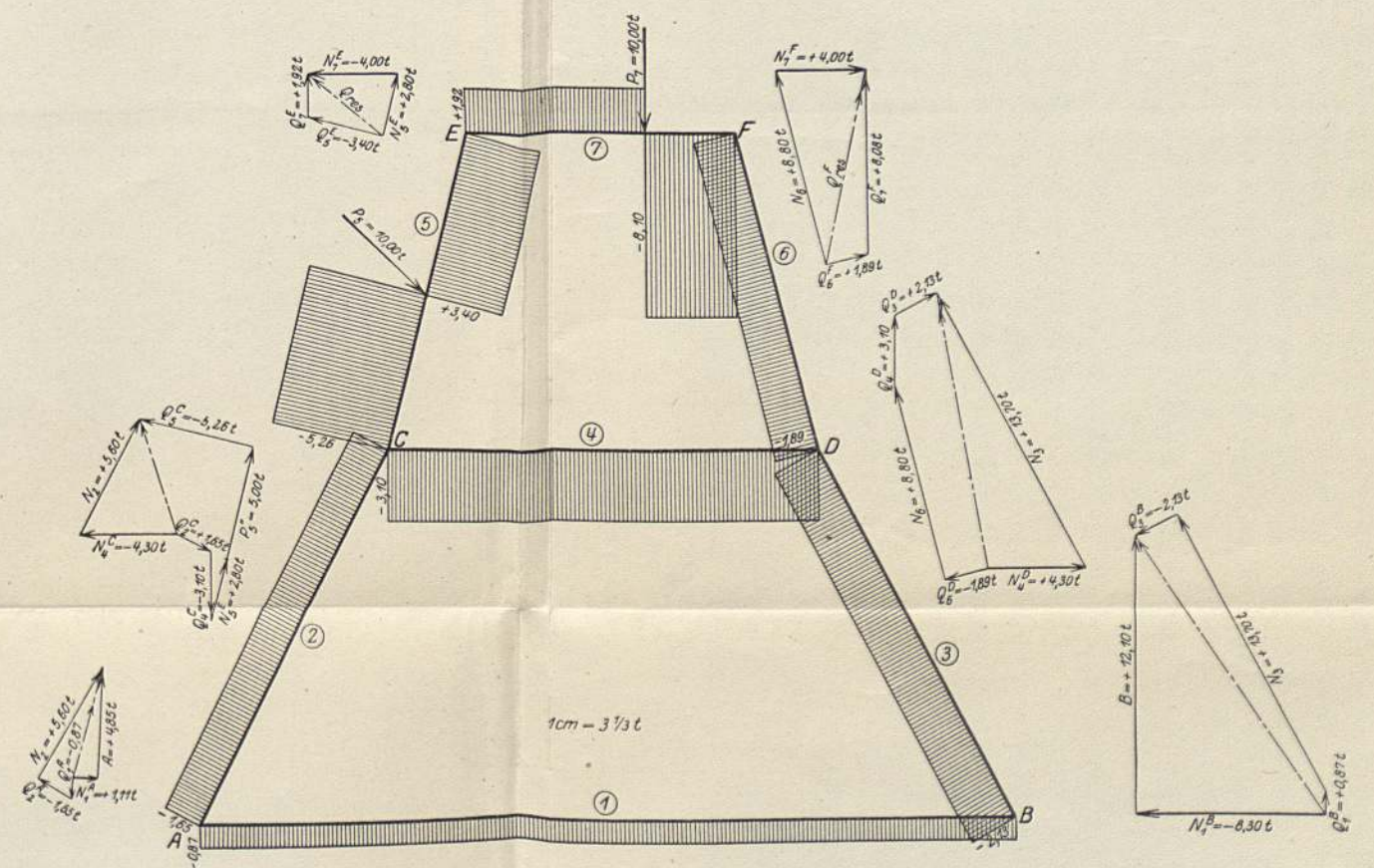


Fig. 490.



Endgültige Momente.

Fig. 491.



Querkräfte.

Fig. 492.

Fig. 488—492.

Politechnika Główna w Warszawie



1881 187





und (545) die  $M^*$ -Momente für die Krafteinheit am Balken  $I$  und  $II$  zu:

$$M_I^* = \frac{Z_{II} \cdot M'_I - D_{II(\Delta I)} \cdot M'_{II}}{Z_I \cdot Z_{II} - D_{I(\Delta II)} \cdot D_{II(\Delta I)}} \\ = \frac{+22,50 M'_I + 10,20 M'_{II}}{+18,40 \cdot 22,50 - 9,50 \cdot 10,20} \\ = +0,07096 M'_I + 0,03217 M'_{II},$$

$$M_{II}^* = \frac{Z_I \cdot M'_{II} - D_{I(\Delta II)} \cdot M'_I}{Z_I \cdot Z_{II} - D_{I(\Delta II)} \cdot D_{II(\Delta I)}} \\ = \frac{18,40 M'_{II} + 9,50 M'_I}{18,40 \cdot 22,50 - 9,50 \cdot 10,20} \\ = 0,02996 M'_I + 0,05803 M'_{II}.$$

In nebenstehender Tabelle sind die Momente  $M^*$  für die einzelnen Knotenpunkte berechnet und in Fig. 488 und 489 dargestellt. Zur Kontrolle der  $M^*$ -Momente ist in beiden Figuren die Querkraftszerglegung an den einzelnen Knotenpunkten durchgeführt, worauf die drei Gleichgewichtsbedingungen angeschrieben worden sind.

Die Zusatzmomente (Fig. 490) bestimmen sich nun zu:

$$M_{Zus.} = V_I \cdot M_I^* + V_{II} \cdot M_{II}^* \\ = +3,68 M_I^* + 6,55 M_{II}^*.$$

Diese addieren wir zu den Momenten aus R. I und erhalten damit die endgültigen Momente (Fig. 491) für die gegebene äußere Belastung.

Die den Totalmomenten entsprechenden

### Querkräfte

ergeben sich zu:

am Stab  $I$ :

$$Q_1^A = \frac{-7,835 - 7,827}{18,00} = -0,87 \text{ t};$$

am Stab  $2$ :

$$Q_2^A = \frac{-7,827 - 7,149}{9,06} = -1,65 \text{ t};$$

Tabelle der Momente.

Schnitt	$A_1$	$A_2$	$B_1$	$B_2$	$C_2$	$C_3$	$D_2$	$D_3$	$D_6$	$E_5$	$E_7$	$F_6$	$F_7$
0,07096 $M'_I$	-0,222	+0,222	+0,208	+0,208	-0,611	-1,341	-1,009	0,762	-1,771	+1,707	+1,707	+2,103	-2,103
0,03217 $M'_{II}$	+0,658	-0,658	-0,612	-0,612	0,938	+0,428	1,171	0,522	0,649	-0,305	-0,305	-0,373	+0,373
$M_I^*$	+0,436	-0,436	-0,404	-0,404	0,327	+1,240	0,162	1,284	-1,122	+1,402	+1,402	1,730	-1,730
$V_I \cdot M_I^*$	+1,604	-1,604	-1,487	-1,487	+1,203	+4,563	0,596	4,725	-4,129	+5,159	+5,159	6,366	-6,366
0,02996 $M'_I$	-0,094	+0,094	+0,088	+0,088	-0,258	-0,566	-0,426	0,322	-0,748	+0,721	+0,721	+0,888	-0,888
0,05803 $M'_{II}$	+1,186	-1,186	-1,103	-1,103	1,691	+0,772	2,113	0,941	1,172	-0,550	-0,550	-0,674	+0,674
$M_{II}^*$	+1,092	-1,092	-1,015	-1,015	1,433	+1,227	1,687	1,263	+0,424	+0,171	+0,171	0,214	-0,214
$V_{II} \cdot M_{II}^*$	+7,153	-7,153	-6,648	-6,648	+9,386	+1,349	+11,050	8,273	+2,777	+1,120	+1,120	1,402	-1,402
$M_{(n. D)}$	-0,93	+0,93	+0,30	+0,30	-3,44	-6,05	-0,14	1,37	-1,51	-8,60	-8,60	+3,00	-3,00
$M_{Zus.}$	+8,757	-8,757	-8,135	-8,135	+10,589	-2,011	+11,646	-12,998	-4,352	+6,279	+6,279	7,768	-7,768
$M_{total}$	+7,827	-7,827	-7,835	-7,835	+7,149	+15,210	+11,506	-14,368	-2,802	-2,321	-2,321	+10,768	-10,768

$$\text{am Stab 3: } Q_3^B = \frac{-7,835 - 11,506}{9,06} = -2,13 \text{ t;}$$

$$\text{am Stab 4: } Q_4^C = \frac{-14,368 - 15,210}{9,50} = -3,10 \text{ t;}$$

$$\begin{aligned} \text{am Stab 5: } Q_5^C &= Q_5^C + \frac{M_5^C - M_5^E}{l_5} = -4,46 + \frac{-8,061 + 2,321}{7,22} \\ &= -4,46 - 0,80 = -5,26 \text{ t,} \end{aligned}$$

$$Q_5^E = Q_5^E + \frac{M_5^C - M_5^E}{l_5} = +4,20 - 0,80 = +3,40 \text{ t;}$$

$$\text{am Stab 6: } Q_6^D = \frac{-2,862 - 10,768}{9,06} = -1,89 \text{ t;}$$

$$\begin{aligned} \text{am Stab 7: } Q_7^E &= Q_7^E + \frac{M_7^F - M_7^E}{l_7} = +3,33 + \frac{-10,768 + 2,321}{6,00} \\ &= +3,33 - 1,41 = +1,92 \text{ t,} \end{aligned}$$

$$Q_7^F = Q_7^F + \frac{M_7^F - M_7^E}{l_7} = -6,67 - 1,41 = -8,08 \text{ t.}$$

Fig. 492 zeigt diese Querkräfte sowie ihre Zusammensetzung und Zerlegung an den einzelnen Knotenpunkten zwecks Gleichgewichtskontrolle.

### Beispiel 14.

#### Gedeckter Eisenbetonsteg mit Vierendeelträgern als Tragwände.

Der in Fig. 493 dargestellte Verbindungssteg besitzt Vierendeelträger aus Eisenbeton als Hauptträger. Im folgenden wird die Berechnung eines solchen für Eigengewicht, halbseitige und volle Nutzlast gezeigt.

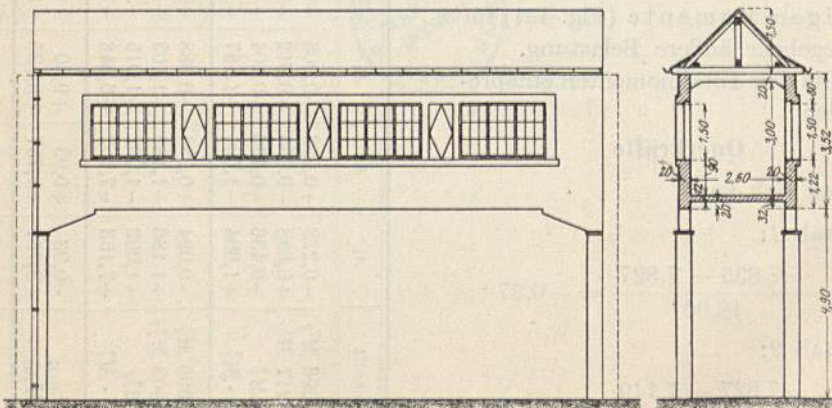


Fig. 493.

**Trägheitsmomente.**

$$\begin{aligned} \text{Stäbe I u. 2: } J_{1 \text{ u. } 2} &= \frac{0,40 \cdot 0,75^3}{12} = 0,0141 \text{ m}^4, \\ \text{„ 3-6: } J_{3-6} &= \frac{0,20 \cdot 1,22^3}{12} = 0,0303 \text{ m}^4, \\ \text{„ 7 u. 11: } J_{7 \text{ u. } 11} &= \frac{0,20 \cdot 1,80^3}{12} = 0,0972 \text{ m}^4, \\ \text{„ 8-10: } J_{8-10} &= \frac{0,20 \cdot 1,00^3}{12} = 0,0167 \text{ m}^4, \\ \text{„ 12-15: } J_{12-15} &= \frac{0,20 \cdot 0,80^3}{12} = 0,00854 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

**Drehwinkel  $\beta$ .**

$$\beta = \frac{l}{6JE}$$

Stäbe	$\beta$
1 und 2	$\frac{5,60}{6 \cdot 0,0141 \cdot E} = \frac{66}{E} \text{ mt}$
3 „ 6	$\frac{4,20}{6 \cdot 0,0303 \cdot E} = \frac{23}{E} \text{ „}$
4 „ 5	$\frac{3,30}{6 \cdot 0,0303 \cdot E} = \frac{18}{E} \text{ „}$
7 „ 11	$\frac{2,50}{6 \cdot 0,0972 \cdot E} = \frac{4,3}{E} \text{ „}$
8, 9 „ 10	$\frac{2,50}{6 \cdot 0,0167 \cdot E} = \frac{25}{E} \text{ „}$
12 „ 15	$\frac{4,20}{6 \cdot 0,00854 \cdot E} = \frac{82}{E} \text{ „}$
13 „ 14	$\frac{3,30}{6 \cdot 0,00854 \cdot E} = \frac{64}{E} \text{ „}$

**Festpunktabstände (Fig. 494).**

$$a_1 = a_2 = \frac{5,60}{3} = 1,87 \text{ m.}$$

Um die übrigen Festpunkte ermitteln zu können, müssen wir 3 davon zunächst schätzen. Wir wählen

$$b_7 = 0,40 \text{ m, } \quad b_8 = 0,45 \text{ m} \quad \text{und} \quad b_9 = 0,50 \text{ m.}$$

Drehwinkel  $\tau$  bei C:

$$\tau_1^C = \frac{l_1}{4 J_1 E} = 1,5 \beta_1 = 1,5 \cdot \frac{66}{E} = \frac{99}{E} \text{ mt},$$

$$\tau_7^C = \beta_7 \left( 3 - \frac{l_7}{l_7 - b_7} \right) = \frac{4,3}{E} \left( 3 - \frac{2,50}{2,50 - 0,10} \right) = \frac{8,5}{E}$$



$$\tau_{5-10}^J = \frac{\tau_5^J \cdot \tau_{10}^J}{\tau_5^J + \tau_{10}^J} = \frac{30 \cdot 44,5}{(30 + 44,5)E} = \frac{17,9}{E} = \varepsilon_6^a,$$

$$a_6 = \frac{l_3}{3 + \frac{\varepsilon_6^a}{\beta_6}} = \frac{4,20}{3 + \frac{17,9}{23}} = 1,11 \text{ m} = b_3,$$

$$\tau_3^C = \beta_3 \left( 3 - \frac{l_3}{l_3 - b_3} \right) = \frac{23}{E} \left( 3 - \frac{4,20}{4,20 - 1,11} \right) = \frac{37,8}{E},$$

$$\tau_{1-3}^C = \frac{\tau_1^C \cdot \tau_3^C}{\tau_1^C + \tau_3^C} = \frac{99 \cdot 37,8}{(99 + 37,8)E} = \frac{27,3}{E} = \varepsilon_7^a,$$

$$a_7 = \frac{l_7}{3 + \frac{\varepsilon_7^a}{\beta_7}} = \frac{2,50}{3 + \frac{27,3}{4,3}} = 0,27 \text{ m} = a_{11},$$

$$\tau_7^E = \beta_7 \left( 3 - \frac{l_7}{l_7 - a_7} \right) = \frac{4,3}{E} \left( 3 - \frac{2,50}{2,50 - 0,27} \right) = \frac{8,2}{E} = \varepsilon_{12}^a,$$

$$a_{12} = \frac{l_{12}}{3 + \frac{\varepsilon_{12}^a}{\beta_{12}}} = \frac{4,20}{3 + \frac{8,2}{82}} = 1,35 \text{ m} = b_{15},$$

$$\tau_{12}^K = \beta_{12} \left( 3 - \frac{l_{12}}{l_{12} - a_{12}} \right) = \frac{82}{E} \left( 3 - \frac{4,20}{4,20 - 1,35} \right) = \frac{125}{E},$$

$$\tau_{3-4}^G = \frac{\tau_3^G \cdot \tau_4^G}{\tau_3^G + \tau_4^G} = \frac{36 \cdot 30}{(36 + 30)E} = \frac{16,4}{E} = \varepsilon_8^a,$$

$$a_8 = \frac{l_8}{3 + \frac{\varepsilon_8^a}{\beta_8}} = \frac{2,50}{3 + \frac{16,4}{25}} = 0,68 \text{ m} = a_{10},$$

$$\tau_8^K = \beta_8 \left( 3 - \frac{l_8}{l_8 - a_8} \right) = \frac{25}{E} \left( 3 - \frac{2,50}{2,50 - 0,68} \right) = \frac{40,7}{E} = \tau_{10}^M,$$

$$\tau_{8-12}^K = \frac{\tau_8^K \cdot \tau_{12}^K}{\tau_8^K + \tau_{12}^K} = \frac{40,7 \cdot 125}{(40,7 + 125)E} = \frac{30,7}{E} = \varepsilon_{13}^a,$$

$$a_{13} = \frac{l_{13}}{3 + \frac{\varepsilon_{13}^a}{\beta_{13}}} = \frac{3,30}{3 + \frac{30,7}{64}} = 0,94 \text{ m} = b_{14},$$

$$\tau_{13}^L = \beta_{13} \left( 3 - \frac{l_{13}}{l_{13} - a_{13}} \right) = \frac{64}{E} \left( 3 - \frac{3,30}{3,30 - 0,94} \right) = \frac{103,7}{E},$$

$$\tau_{4-5}^H = \frac{\tau_4^H}{2} = \frac{30,2}{2E} = \frac{15,1}{E} = \varepsilon_9^a,$$

$$a_9 = \frac{l_9}{3 + \frac{\varepsilon_9^a}{\beta_9}} = \frac{2,50}{3 + \frac{15,1}{25}} = 0,70 \text{ m},$$

$$\tau_9^L = \beta_9 \left( 3 - \frac{l_9}{l_9 - a_9} \right) = \frac{25}{E} \left( 3 - \frac{2,50}{2,50 - 0,70} \right) = \frac{40,3}{E},$$

$$\tau_{9-13}^L = \frac{\tau_9^L \cdot \tau_{13}^L}{\tau_9^L + \tau_{13}^L} = \frac{40,3 \cdot 103,7}{(40,3 + 103,7) E} = \frac{28,0}{E} = \varepsilon_{14}^a,$$

$$a_{14} = \frac{l_{14}}{3 + \frac{\varepsilon_{14}^a}{\beta_{14}}} = \frac{3,30}{3 + \frac{28}{64}} = 0,95 \text{ m} = b_{13},$$

$$\tau_{14}^M = \beta_{14} \left( 3 - \frac{l_{14}}{l_{14} - a_{14}} \right) = \frac{64}{E} \left( 3 + \frac{3,30}{3,30 - 0,95} \right) = \frac{103}{E} = \tau_{13}^K,$$

$$\tau_{10-14}^M = \frac{\tau_{10}^M \cdot \tau_{14}^M}{\tau_{10}^M + \tau_{14}^M} = \frac{40,7 \cdot 103}{(40,7 + 103) E} = \frac{29,3}{E} = \varepsilon_{15}^a,$$

$$a_{15} = \frac{l_{15}}{3 + \frac{\varepsilon_{15}^a}{\beta_{15}}} = \frac{4,20}{3 + \frac{29,3}{82}} = 1,25 \text{ m} = b_{12},$$

$$\tau_{15}^P = \beta_{15} \left( 3 - \frac{l_{15}}{l_{15} - a_{15}} \right) = \frac{82}{E} \left( 3 - \frac{4,20}{4,20 - 1,25} \right) = \frac{129,4}{E} = \varepsilon_{15}^b,$$

$$b_{11} = \frac{l_{11}}{3 + \frac{\varepsilon_{11}^b}{\beta_{11}}} = \frac{2,50}{3 + \frac{129,4}{4,3}} = 0,08 \text{ m} = b_7,$$

$$\tau_{12-13}^K = \frac{\tau_{12}^K \cdot \tau_{13}^K}{\tau_{12}^K + \tau_{13}^K} = \frac{125 \cdot 103}{(125 + 103) E} = \frac{56,5}{E} = \varepsilon_8^b,$$

$$b_8 = \frac{l_8}{3 + \frac{\varepsilon_8^b}{\beta_8}} = \frac{2,50}{3 + \frac{56,5}{25}} = 0,47 \text{ m} = b_{10},$$

$$\tau_{13-14}^L = \frac{\tau_{13}^L}{2} = \frac{103,7}{2E} = \frac{51,9}{E} = \varepsilon_9^b,$$

$$b_9 = \frac{l_9}{3 + \frac{\varepsilon_9^b}{\beta_9}} = \frac{2,50}{3 + \frac{51,9}{25}} = 0,49 \text{ m},$$

$$\tau_{3-7}^C = \frac{\tau_3^C \cdot \tau_7^C}{\tau_3^C + \tau_7^C} = \frac{37,8 \cdot 8,5}{(37,8 + 8,5) E} = \frac{7,0}{E} = \varepsilon_1^b,$$

$$b_1 = \frac{l_1}{3 + \frac{\varepsilon_1^b}{\beta_1}} = \frac{5,60}{3 + \frac{7,0}{66}} = 1,80 \text{ m} = b_2,$$

### Verteilungsmaße $\mu$ .

Im Zähler des Ausdruckes für das Verteilungsmaß steht der gemeinsame Drehwinkel der beiden Stäbe, auf die sich  $M = 1$  verteilt; im Nenner der Drehwinkel desjenigen Stabes, für den das Verteilungsmaß gesucht wird.

Knotenpunkt  $C$ :

$$\mu_{7-1}^C = \frac{\tau_{1-3}^C}{\tau_1^C} = \frac{27,3}{99} = 0,276; \quad \mu_{7-3}^C = 0,724;$$

$$\mu_{1-7}^C = \frac{\tau_{3-7}^C}{\tau_7^C} = \frac{7,0}{8,5} = 0,824; \quad \mu_{1-3}^C = 0,176,$$

Knotenpunkt *G*:

$$\mu_{3-4}^G = \frac{\tau_{4-8}^G}{\tau_4^G} = \frac{17,9}{30} = 0,596; \quad \mu_{3-8}^G = 0,404;$$

$$\mu_{4-3}^G = \frac{\tau_{3-8}^G}{\tau_3^G} = \frac{20}{36} = 0,556; \quad \mu_{4-8}^G = 0,444;$$

$$\mu_{8-4}^G = \frac{\tau_{3-4}^G}{\tau_4^G} = \frac{16,4}{30} = 0,546; \quad \mu_{8-3}^G = 0,454.$$

Knotenpunkt *H*:

$$\mu_{4-5}^H = \frac{\tau_{5-9}^H}{\tau_5^H} = \frac{17,9}{30,2} = 0,592 = \mu_{5-4}^H; \quad \mu_{4-9}^H = 0,408 = \mu_{5-9}^H;$$

$$\mu_{9-5}^H = \frac{\tau_{4-5}^H}{\tau_5^H} = 0,500; \quad \mu_{9-4}^H = 0,500.$$

Knotenpunkt *K*:

$$\mu_{12-13}^K = \frac{\tau_{8-13}^K}{\tau_{13}^K} = \frac{29,3}{103} = 0,284; \quad \mu_{12-8}^K = 0,716;$$

$$\mu_{13-12}^K = \frac{\tau_{8-12}^K}{\tau_{12}^K} = \frac{28}{125} = 0,224; \quad \mu_{13-8}^K = 0,776;$$

$$\mu_{8-12}^K = \frac{\tau_{12-13}^K}{\tau_{12}^K} = \frac{56,5}{125} = 0,452; \quad \mu_{8-13}^K = 0,548.$$

Knotenpunkt *L*:

$$\mu_{13-14}^L = \frac{\tau_{9-14}^L}{\tau_{14}^L} = \frac{28,0}{103,7} = 0,270; \quad \mu_{13-9}^L = 0,730;$$

$$\mu_{9-13}^L = \mu_{9-14}^L = 0,500.$$

## 1. Momente aus Rechnungsabschnitt I.

## I. Belastungsfall:

## Eigengewicht, Schnee und Wind.

Obergurt *EF* . . . . .  $0,20 \cdot 0,80 \cdot 2,4 = 0,384$  t/mRabitzdecke . . . . .  $1,30 \cdot 0,06 \cdot 2,0 = 0,156$  ,,Schnee und Wind . . . . .  $1,50 \cdot 0,200 = 0,300$  ,,Zuschlag für Versteifungsträger . . . . .  $= 0,060$  ,,

$$g_1 = 0,90 \text{ t/m.}$$

Untergurt *CD* . . . . .  $0,20 \cdot 1,22 \cdot 2,4 = 0,586$  t/mDecke . . . . .  $1,30 \cdot 0,12 \cdot 2,4 = 0,374$  ,,Zuschlag für Fensterpfeiler . . . . .  $= 0,150$  ,,

$$g_2 = 1,11 \text{ t/m.}$$

Momente  $M_0$ :

$$\text{Obergurt Endfelder: } M_0 = \frac{0,90 \cdot 4,20^2}{8} = 1,98 \text{ mt,}$$

$$\text{,, Mittelfelder: } M_0 = \frac{0,90 \cdot 3,30^2}{8} = 1,23 \text{ ,, ,}$$

$$\text{Untergurt Endfelder: } M_0 = \frac{1,11 \cdot 4,20^2}{8} = 2,45 \text{ ,, ,}$$

$$\text{,, Mittelfelder: } M_0 = \frac{1,11 \cdot 3,30^2}{8} = 1,51 \text{ ,, .}$$

In Fig. 495 sind die Stützenmomente aus  $g_1$  und  $g_2$  mittels Festpunkte und Verteilungsmaße konstruiert, weitergeleitet und addiert worden. Die drei Mittelpfosten werden lotrecht festgehalten durch nachstehende Festhaltungskräfte, welche sich aus folgenden Querkräften zusammensetzen:

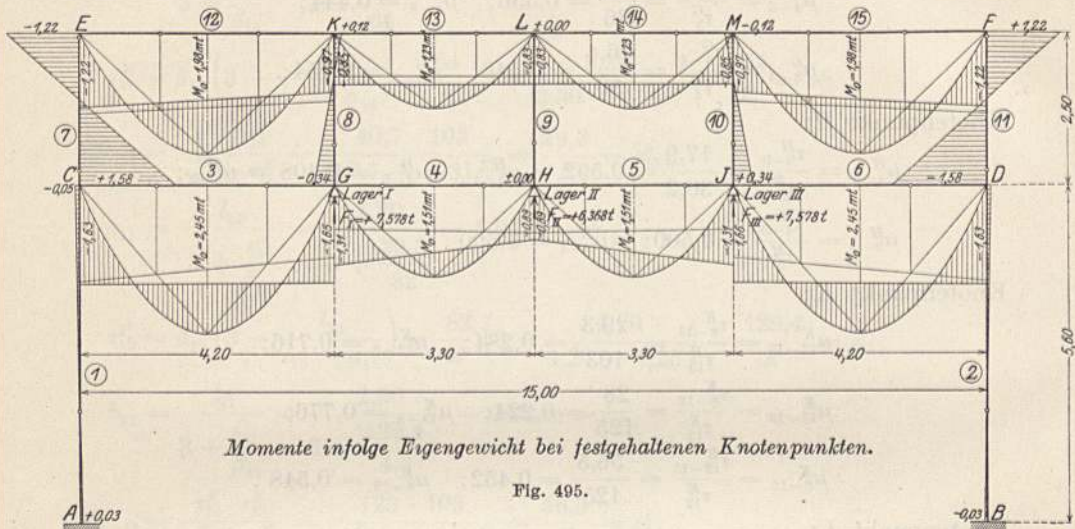


Fig. 495.

Knotenpunkt G:

Stab 3:

$$Q_3^G = \mathcal{Q}_3^G + \frac{M_3^C - M_3^G}{l_3} = \frac{1,11 \cdot 4,20}{2} + \frac{-1,63 + 1,65}{4,20} = +2,331 + 0,005 = +2,336 \text{ t}$$

Stab 4:

$$Q_4^G = \mathcal{Q}_4^G + \frac{M_4^H - M_4^G}{l_4} = \frac{1,11 \cdot 3,30}{2} + \frac{-0,89 + 1,31}{3,30} = +1,832 + 0,127 = +1,959 \text{ t}$$

Knotenpunkt K:

Stab 12:

$$Q_{12}^K = \mathcal{Q}_{12}^K + \frac{M_{12}^E - M_{12}^K}{l_{12}} = \frac{0,90 \cdot 4,20}{2} + \frac{-1,22 + 0,97}{4,20} = +1,890 - 0,095 = +1,795 \text{ t}$$

Stab 13:

$$Q_{13}^K = \mathcal{Q}_{13}^K + \frac{M_{13}^L - M_{13}^K}{l_{13}} = \frac{0,90 \cdot 3,30}{2} + \frac{-0,83 + 0,85}{3,30} = +1,485 + 0,006 = +1,491 \text{ t}$$

Festhaltungskraft  $F_I = +7,578 \text{ t} = F_{III}$ .

Knotenpunkt H:

Stab 4:

$$Q_4^H = \mathcal{Q}_4^H + \frac{M_4^G - M_4^H}{l_4} = +1,832 - 0,127 = 1,705 \text{ t}$$

Stab 5:

$$Q_5^H = Q_4^H = 1,705 \text{ t}$$



Knotenpunkt  $L$ :

Stab 13:

$$Q_{13}^L = \Sigma Q_{13}^L + \frac{M_{13}^K - M_{13}^L}{l_{13}} = +1,485 - 0,006 = +1,479 \text{ t}$$

Stab 14:

$$Q_{14}^L = Q_{13}^L = +1,479 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } F_{II} = +6,368 \text{ t.}$$

**II. Belastungsfall:**

**Halbseitige Nutzlast.**

Der Untergurt  $CD$  sei auf der linken Trägerhälfte belastet mit

$$p = 1,30 \cdot 0,500 = 0,65 \text{ t/m.}$$

Momente  $M_0$ :

Linkes Endfeld:  $M_0 = \frac{0,65 \cdot 4,20^2}{8} = 1,43 \text{ mt,}$

„ Mittelfeld:  $M_0 = \frac{0,65 \cdot 3,30^2}{8} = 0,88 \text{ mt.}$

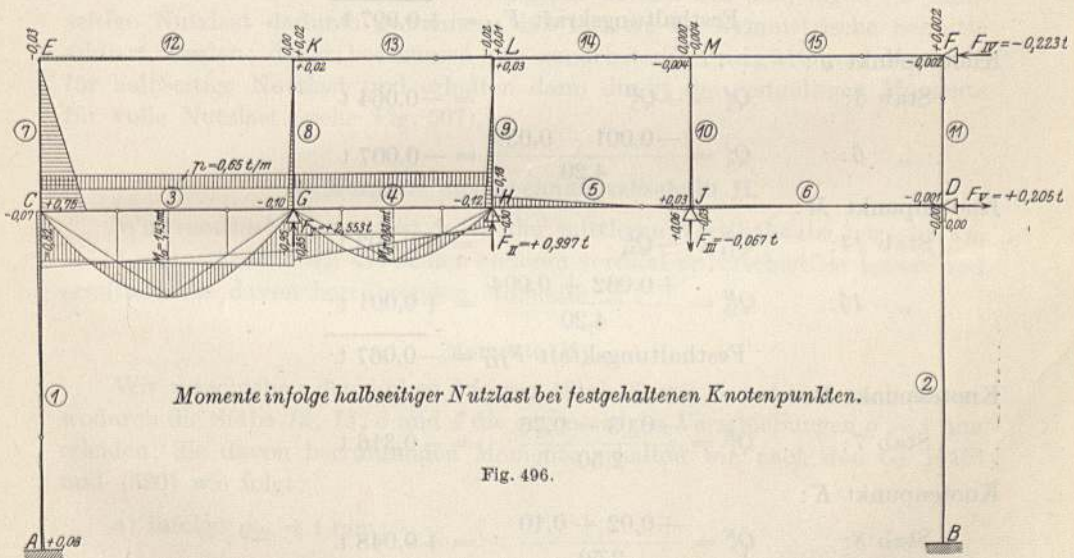


Fig. 496.

Fig. 496 zeigt das zugehörige Momentenbild. Die entsprechenden Festhaltungskräfte erhalten wir aus den folgenden Querkräften:

Knotenpunkt  $G$ :

Stab 3:

$$Q_3^G = \frac{0,65 \cdot 4,20}{2} + \frac{-0,82 + 0,95}{4,20} = +1,365 + 0,032 = +1,397 \text{ t}$$

Stab 4:

$$Q_4^G = \frac{0,65 \cdot 3,30}{2} + \frac{-0,30 + 0,85}{3,30} = 1,073 + 0,131 = +1,204 \text{ t}$$

Knotenpunkt *K*:

Stab 12:

$$Q_{12}^K = \frac{-0,03 - 0,12}{4,20} = -0,036 \text{ t}$$

Stab 13:

$$Q_{13}^K = \frac{-0,02 - 0,02}{3,30} = -0,012 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } F_I = +2,553 \text{ t.}$$

Knotenpunkt *H*:

$$\text{Stab 4: } Q_4^H = +1,073 - 0,131 = +0,942 \text{ t}$$

$$\text{„ 5: } Q_5^H = \frac{+0,03 + 0,18}{3,30} = +0,064 \text{ t}$$

Knotenpunkt *L*:

$$\text{Stab 13: } Q_{13}^L = -Q_{13}^K = +0,012 \text{ t}$$

$$\text{„ 14: } Q_{14}^L = \frac{0,00 - 0,01}{3,30} = -0,003 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } F_{II} = +0,997 \text{ t.}$$

Knotenpunkt *J*:

$$\text{Stab 5: } Q_5^J = -Q_5^H = -0,064 \text{ t}$$

$$\text{„ 6: } Q_6^J = \frac{-0,001 - 0,030}{4,20} = -0,007 \text{ t}$$

Knotenpunkt *M*:

$$\text{Stab 14: } Q_{14}^M = -Q_{14}^L = +0,003 \text{ t}$$

$$\text{„ 15: } Q_{15}^M = \frac{+0,002 + 0,004}{4,20} = +0,001 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } F_{III} = -0,067 \text{ t}$$

Knotenpunkt *E*:

$$\text{Stab 7: } Q_7^E = \frac{-0,03 - 0,76}{2,50} = -0,316 \text{ t}$$

Knotenpunkt *K*:

$$\text{Stab 8: } Q_8^K = \frac{+0,02 + 0,10}{2,50} = +0,048 \text{ t}$$

Knotenpunkt *L*:

$$\text{Stab 9: } Q_9^L = \frac{+0,03 + 0,12}{2,50} = +0,060 \text{ t}$$

Knotenpunkt *M*:

$$\text{Stab 10: } Q_{10}^M = \frac{-0,004 - 0,030}{2,50} = -0,014 \text{ t}$$

Knotenpunkt *F*:

$$\text{Stab 11: } Q_{11}^F = \frac{-0,002 - 0,001}{2,50} = -0,001 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft (am Obergurt) } F_{IV} = -0,223 \text{ t.}$$

Am Untergurt hat zu wirken:

$$-F_{IV} = +0,223 \text{ t}$$

$$\text{Stab I:} \quad Q_1^c = \frac{-0,07 - 0,03}{5,60} = -0,018 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft (am Untergurt) } F_V = +0,205 \text{ t}$$

Da der Rahmen durch 5 Festhaltungskräfte in Ruhe gehalten wird, so werden seine Zusatzmomente eigentlich wie bei einem 5-stöckigen Rahmen bestimmt. Der Rahmen lehnt sich jedoch an seinen beiden Enden gegen die Gebäudeumfassungsmauern, so daß die beiden Gurtungen von Haus aus horizontal unverschiebbar festgehalten sind. Der Rahmen wird daher wie ein 3-stöckiger berechnet, und die Festhaltungskräfte  $F_{IV}$  und  $F_V$  geben lediglich die von den Gebäudemauern aufzunehmenden horizontalen Kräfte an.

Zu den Festhaltungskräften an den Lagern *I*, *II* und *III* ist bei höheren Trägern das Eigengewicht der vertikalen Stäbe über diesen Lagern hinzuzuzählen. In vorliegendem Fall wurde ein Zuschlag zu den Längsträgern gemacht.

### III. Belastungsfall: Volle Nutzlast.

Die Momente für diesen Belastungsfall werden aus denjenigen für halbseitige Nutzlast dadurch gewonnen, daß letztere für symmetrische Schnitte addiert werden; daher bestimmen wir zunächst die endgültigen Momente für halbseitige Nutzlast und erhalten dann direkt die endgültigen Momente für volle Nutzlast (siehe Fig. 507).

#### 2. Momente aus Rechnungsabschnitt II.

Wir verschieben zunächst jeden der mittleren Vertikalstäbe lotrecht um  $\Delta = 1 \text{ mm}$ , während wir die beiden anderen vertikal unverschiebbar lassen, und ermitteln die davon herrührenden Momente  $M'$ .

#### Momente $M'_I$ .

Wir verschieben den linken Pfosten (Stab 8) um  $\Delta = 1 \text{ mm}$  nach unten, wodurch die Stäbe 12, 13, 3 und 4 die gegenseitigen Verschiebungen  $\varrho = 1 \text{ mm}$  erleiden; die davon herrührenden Momente erhalten wir nach den Gl. (515) und (520) wie folgt:

a) infolge  $\varrho_{12} = 1 \text{ mm}$ :

$$M_{12}^K = \frac{\varrho_{12} \cdot b_{12}}{l_{12} \cdot \beta_{12} (l_{12} - a_{12} - b_{12})} = \frac{0,001 \cdot 2100000 \cdot 1,25}{4,20 \cdot 82 \cdot 1,60} = +4,77 \text{ mt,}$$

$$M_{12}^E = -M_{12}^K \cdot \frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{-4,77}{1,25} \cdot 1,35 = -5,15 \text{ mt.}$$

b) infolge  $\varrho_{13} = 1 \text{ mm}$ :

$$M_{13}^K = \frac{2100 \cdot 0,94}{3,30 \cdot 64 \cdot 1,41} = +6,63 \text{ mt,}$$

$$M_{13}^E = \frac{-6,63}{0,94} \cdot 0,95 = -6,70 \text{ mt.}$$

c) infolge  $q_3 = 1$  mm:

$$M_3^G = \frac{2100 \cdot 1,11}{4,20 \cdot 23 \cdot 1,83} = +13,20 \text{ mt.}$$

$$M_3^C = \frac{-13,20}{1,11} \cdot 1,27 = -15,00 \text{ mt.}$$

d) infolge  $q_4 = 1$  mm:

$$M_4^G = \frac{2100 \cdot 0,80}{3,30 \cdot 18 \cdot 1,67} = +16,90 \text{ mt.}$$

$$M_4^H = \frac{-16,90}{0,80} \cdot 0,83 = -17,53 \text{ mt.}$$

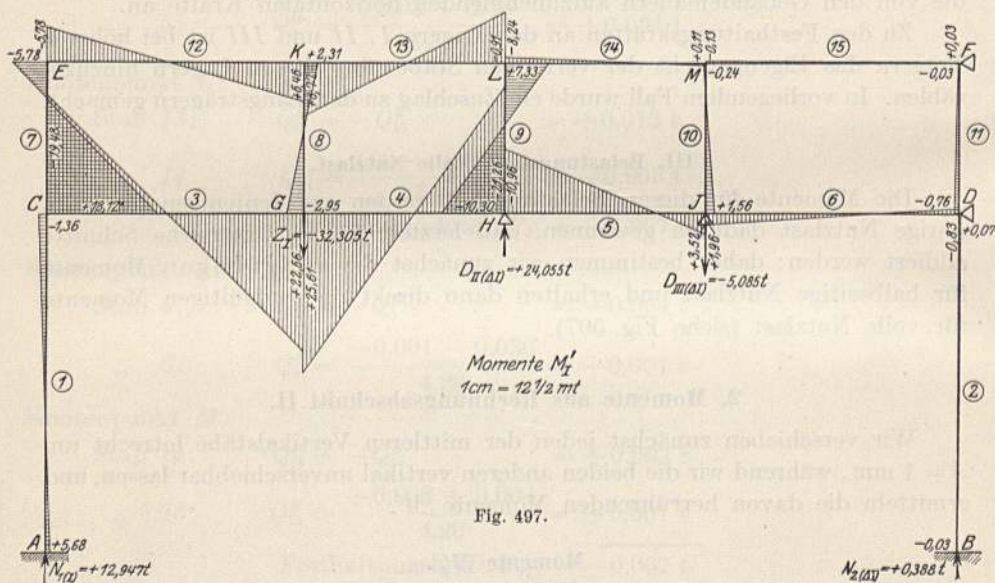


Fig. 497.

Diese Momente leiten wir einzeln mittels der Festpunkte und Verteilungsmaße weiter und erhalten dann durch Addition der Teilmomentenflächen die Momente  $M'_I$ , welche in Fig. 497 dargestellt sind.

#### Momente $M'_{II}$ .

Durch die Verschiebung des mittleren Pfostens (Stabes 9) um  $\Delta = 1$  mm nach unten erleiden die Enden der Stäbe 13, 14, 4 und 5 je eine gegenseitige Verschiebung um  $q = 1$  mm. Die Momente infolge dieser  $q$  brauchen wir nicht frisch zu berechnen, sondern die Momente für  $q_{13} = 1$  mm und  $q_4 = 1$  mm sind gleich den mit umgekehrtem Vorzeichen zu nehmenden, bereits unter  $M'_I$  berechneten diesbezüglichen Werten, und die Momente infolge  $q_{14} = 1$  mm und  $q_5 = 1$  mm bilden aus Symmetriegründen das Spiegelbild der für  $q_{13}$  und  $q_4$  ermittelten Momentenfläche:

$$M_{13}^L = M_{14}^L = + 6,70 \text{ mt.}; \quad M_{13}^K = M_{14}^N = - 6,63 \text{ mt.}$$

$$M_4^H = M_5^H = +17,53 \text{ mt.}; \quad M_4^G = M_5^J = -16,90 \text{ mt.}$$

Diese Momente sind wieder weiterzuleiten und dann zu addieren, wodurch wir die in Fig. 498 dargestellten Momente  $M'_{II}$  erhalten.

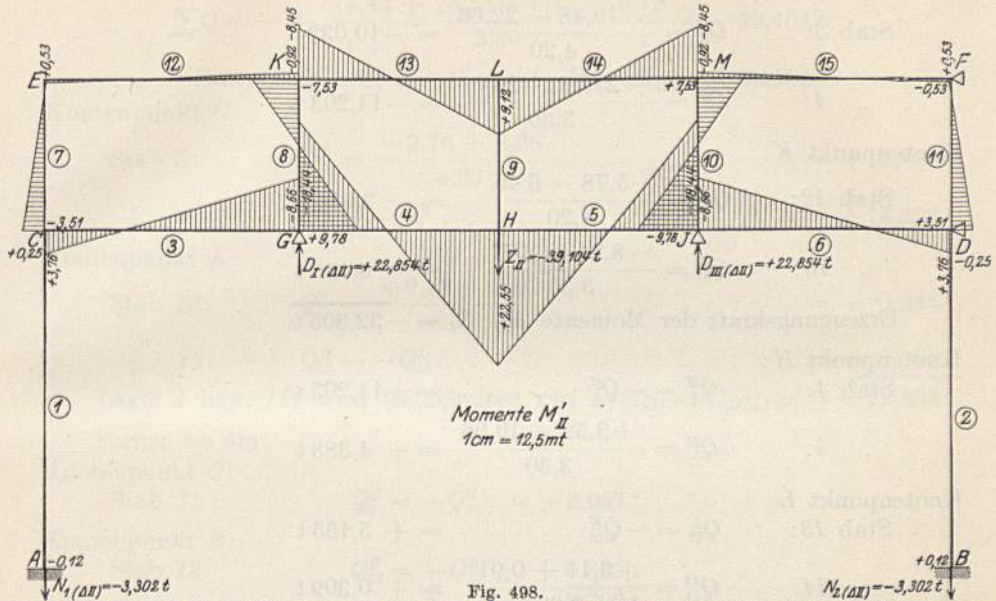


Fig. 498.

**Momente  $M'_{III}$ .**

Die  $M'_{III}$ -Momentenfläche (Fig. 499) infolge Verschiebung des rechten Pfostens (Stab 10) ist aus Symmetriegründen gleich dem Spiegelbild der  $M'_I$ -Momentenfläche.

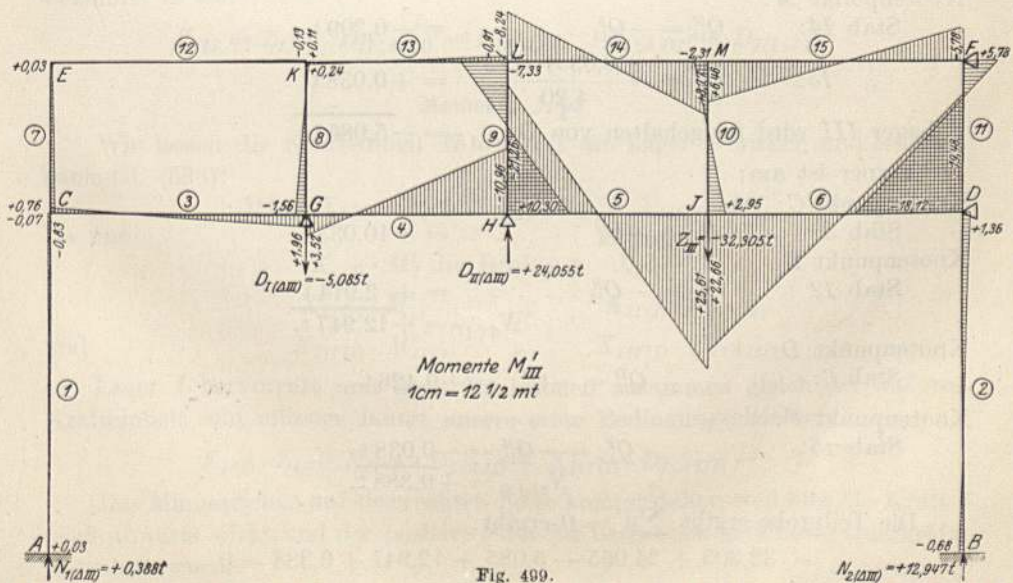


Fig. 499.

Erzeugungskräfte  $Z$  und Festhaltungskräfte  $D$ .a) Zu den  $M'_I$ -Momenten (Fig. 497).Knotenpunkt  $G$ :

$$\text{Stab 3: } Q_3^G = \frac{-19,48 - 22,66}{4,20} = -10,033 \text{ t}$$

$$\text{„ 4: } Q_4^G = \frac{-21,26 - 25,61}{3,30} = -14,203 \text{ t}$$

Knotenpunkt  $K$ :

$$\text{Stab 12: } Q_{12}^K = \frac{-5,78 - 6,46}{4,20} = -2,914 \text{ t}$$

$$\text{„ 13: } Q_{13}^K = \frac{-8,24 - 8,77}{3,30} = -5,155 \text{ t}$$

Erzeugungskraft der Momente  $M'_I$ :  $Z_I = -32,305 \text{ t}$ .Knotenpunkt  $H$ :

$$\text{Stab 4: } Q_4^H = -Q_4^G \dots \dots = +14,203 \text{ t}$$

$$\text{„ 5: } Q_5^H = \frac{+3,52 + 10,96}{3,30} = +4,388 \text{ t}$$

Knotenpunkt  $L$ :

$$\text{Stab 13: } Q_{13}^L = -Q_{13}^K \dots \dots = +5,155 \text{ t}$$

$$\text{„ 14: } Q_{14}^L = \frac{+0,11 + 0,91}{3,30} = +0,309 \text{ t}$$

Lager  $II$  wird festgehalten von  $D_{II(AI)} = +24,055 \text{ t}$ .Knotenpunkt  $J$ :

$$\text{Stab 5: } Q_5^J = -Q_5^H \dots \dots = -4,388 \text{ t}$$

$$\text{„ 6: } Q_6^J = \frac{-0,83 - 1,96}{4,20} = -0,426 \text{ t}$$

Knotenpunkt  $M$ :

$$\text{Stab 14: } Q_{14}^M = -Q_{14}^L \dots \dots = -0,309 \text{ t}$$

$$\text{„ 15: } Q_{15}^M = \frac{+0,03 + 0,13}{4,20} = +0,038 \text{ t}$$

Lager  $III$  wird festgehalten von  $D_{III(AI)} = -5,085 \text{ t}$ .

Ferner ist am:

Knotenpunkt  $C$ :

$$\text{Stab 3: } Q_3^C = -Q_3^G \dots \dots = +10,033 \text{ t}$$

Knotenpunkt  $E$ :

$$\text{Stab 12: } Q_{12}^E = -Q_{12}^K \dots \dots = +2,914 \text{ t}$$

$$N_{1(AI)} = +12,947 \text{ t}$$

Knotenpunkt  $D$ :

$$\text{Stab 6: } Q_6^D = -Q_6^J = +0,426 \text{ t}$$

Knotenpunkt  $F$ :

$$\text{Stab 15: } Q_{15}^F = -Q_{15}^M = -0,038 \text{ t}$$

$$N_{2(AI)} = +0,388 \text{ t}$$

Die Teilprobe ergibt  $\sum V = 0$  ergibt:

$$-32,305 + 24,055 - 5,085 + 12,947 + 0,388 = 0.$$

b) Zu den  $M'_{II}$ -Momenten (Fig. 498).

Knotenpunkte  $H$  und  $L$ :

$$\sum Q = -2 \cdot \frac{14,44 + 28,55 + 8,45 + 9,12}{3,30} = -39,104 \text{ t.}$$

Erzeugungskraft der Momente  $M'_{II}$ :  $Z_{II} = -39,104 \text{ t.}$

Knotenpunkt  $G$ :

Stab 3:  $Q_3^G = \frac{+3,76 + 8,66}{4,20} \dots \dots \dots = + 2,957 \text{ t}$

„ 4:  $Q_4^G = -Q_4^H \dots \dots \dots = + 14,228 \text{ t}$

Knotenpunkt  $K$ :

Stab 12:  $Q_{12}^K = \frac{+0,53 + 0,92}{4,20} \dots \dots \dots = + 0,345 \text{ t}$

„ 13:  $Q_{13}^K = -Q_{13}^L \dots \dots \dots = + 5,324 \text{ t}$

Lager  $I$  bzw.  $III$  wird festgehalten von  $D_{I(\Delta I)} = D_{III(\Delta II)} = +22,854 \text{ t.}$

Ferner ist am:

Knotenpunkt  $C$ :

Stab 3:  $Q_3^C = -Q_3^G = -2,957 \text{ t}$

Knotenpunkt  $E$ :

Stab 12:  $Q_{12}^E = -Q_{12}^K = -0,345 \text{ t}$   
 $N_{1(\Delta I)} = N_{2(\Delta II)} = -3,302 \text{ t.}$

Die Teilprobe  $\sum V = 0$  ergibt:

$$-39,104 + 2 \cdot 22,854 - 2 \cdot 3,302 = 0.$$

c) Zu den  $M'_{III}$ -Momenten (Fig. 499).

Aus Symmetriegründen sind Erzeugungs- und Festhaltungskräfte bereits bekannt; es ist:

$$Z_{III} = Z_I; \quad D_{II(\Delta III)} = D_{II(\Delta I)}; \quad D_{I(\Delta III)} = D_{III(\Delta I)}.$$

**Momente  $M'_I$ .**

Wir lassen die Krafteinheit  $H = -1 \text{ t}$  am Lager  $I$  wirken und erhalten nach Gl. (538):

$$M'_I = X_{I(I)} \cdot M'_I + X_{II(I)} \cdot M'_{II} + X_{III(I)} \cdot M'_{III}.$$

Da nun

$X_{I(I)} \cdot M'_I$  die Reaktion  $X_{I(I)} \cdot Z_I$ ,

$X_{II(I)} \cdot M'_{II}$  „ „  $X_{II(I)} \cdot D_{I(\Delta II)}$

und

$X_{III(I)} \cdot M'_{III}$  „ „  $X_{III(I)} \cdot D_{I(\Delta III)}$

am Lager  $I$  hervorruft und diese Reaktionen zusammen gleich der äußeren Krafteinheit sein müssen, lautet unsere erste Bedingungs-gleichung:

$$X_{I(I)} \cdot Z_I + X_{II(I)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(I)} \cdot D_{I(\Delta III)} = -1.$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite kommt daher, weil hier die Kraft  $I$  nach abwärts wirkt und der positive Sinn für nach oben gerichtete Querkräfte festgelegt wurde.

Am Lager II verursacht:

$$X_{I(I)} \cdot M'_I \text{ die Reaktion } X_{I(I)} \cdot D_{II(II)},$$

$$X_{II(I)} \cdot M'_{II} \text{ ,, ,, } X_{II(I)} \cdot Z_{II}$$

und

$$X_{III(I)} \cdot M'_{III} \text{ ,, ,, } X_{III(I)} \cdot D_{II(III)}.$$

Da keine äußere Last auf das Lager II einwirkt, muß die Summe dieser Reaktionen Null sein; also lautet die zweite Bedingungsgleichung:

$$X_{I(I)} \cdot D_{II(II)} + X_{II(I)} \cdot Z_{II} + X_{III(I)} \cdot D_{II(III)} = 0.$$

Am Lager III verursacht:

$$X_{I(I)} \cdot M'_I \text{ die Reaktion } X_{I(I)} \cdot D_{III(II)},$$

$$X_{II(I)} \cdot M'_{II} \text{ ,, ,, } X_{II(I)} \cdot D_{III(II)}$$

und

$$X_{III(I)} \cdot M'_{III} \text{ ,, ,, } X_{III(I)} \cdot Z_{III}.$$

Wir erhalten aus dem gleichen Grunde wie vor als dritte Bedingungsgleichung:

$$X_{I(I)} \cdot D_{III(II)} + X_{II(I)} \cdot D_{III(II)} + X_{III(I)} \cdot Z_{III} = 0.$$

Mit den vorhin bestimmten Zahlenwerten für Z und D lauten die Bedingungsgleichungen:

$$-32,305 X_{I(I)} + 22,854 X_{II(I)} - 5,085 X_{III(I)} = -1,$$

$$+24,055 X_{I(I)} - 39,104 X_{II(I)} + 24,055 X_{III(I)} = 0,$$

$$- 5,085 X_{I(I)} + 22,854 X_{II(I)} - 32,305 X_{III(I)} = 0,$$

woraus wir mit Hilfe der Gl. (556), (557) und (560) erhalten:

$$X_{I(I)} = +0,0721; \quad X_{II(I)} = +0,0662 \quad \text{und} \quad X_{III(I)} = +0,0354.$$

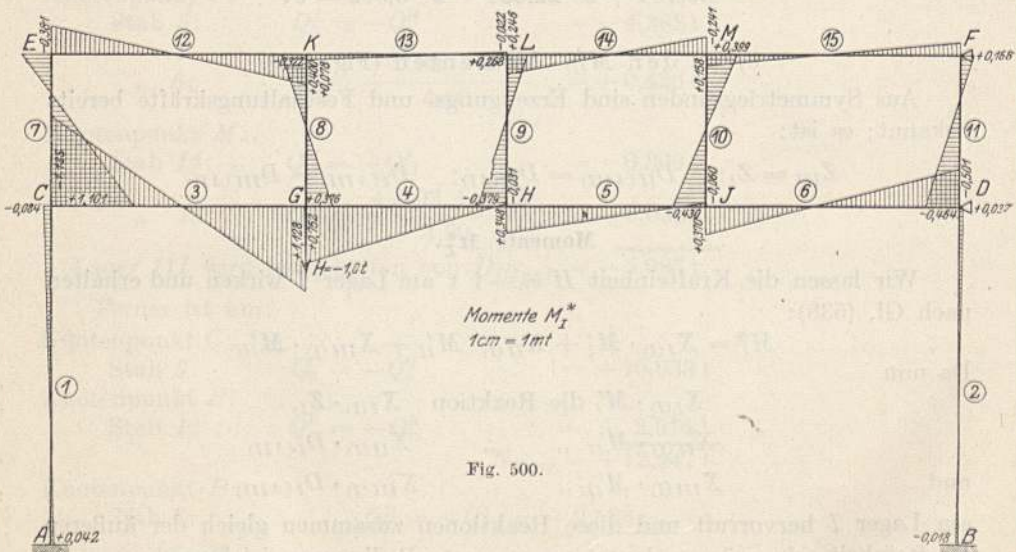


Fig. 500.

Daher lautet die Gleichung für die  $M_I^*$ -Momente:

$$M_I^* = +0,0721 M'_I + 0,0662 M'_{II} + 0,0354 M'_{III}.$$

Nach dieser Gleichung wurden die  $M^*$ -Momente an jedem Knotenpunkt berechnet (siehe Tabelle 1) und in Fig. 500 aufgetragen.





Tabelle 1:

Schnitt	A	B	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>7</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>6</sub>	D <sub>11</sub>	E <sub>7</sub>	F <sub>11</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>8</sub>
+0,0721 M' <sub>I</sub>	+0,049	-0,002	-0,098	-1,405	+1,306	+0,005	-0,060	-0,055	-0,417	-0,002	+1,632	+1,847	-0,217
+0,0662 M'' <sub>II</sub>	-0,008	+0,008	+0,016	+0,249	-0,232	-0,016	+0,249	+0,232	+0,035	-0,035	-0,573	-1,220	+0,643
+0,0354 M''' <sub>III</sub>	+0,001	-0,024	-0,002	-0,029	+0,027	+0,048	-0,690	-0,641	+0,001	+0,205	+0,069	+0,125	-0,055
M* <sub>I</sub>	+0,042	-0,018	-0,084	-1,185	+1,101	+0,037	-0,501	-0,464	-0,381	+0,168	+1,128	+0,752	+0,376
+0,0629 (M' <sub>I</sub> +M'' <sub>II</sub> )	+0,045	-0,045	-0,090	-1,278	-1,188	+0,090	-1,278	-1,188	-0,362	+0,362	+1,548	+1,833	-0,284
+0,1030 M''' <sub>III</sub>	-0,012	+0,012	+0,026	+0,388	+0,362	-0,026	+0,388	+0,362	+0,055	-0,055	-0,892	-1,900	+1,007
M* <sub>II</sub>	+0,033	-0,033	-0,064	-0,890	+0,826	+0,064	-0,890	-0,826	-0,307	+0,307	+0,656	-0,067	+0,723
M* <sub>III</sub>	+0,018	-0,042	-0,037	-0,501	+0,464	+0,084	-1,185	-1,101	-0,168	+0,381	+0,370	-0,060	+0,430

Tabelle 2: Zusatz- und endgültige Momente

Schnitt	A	B	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>7</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>6</sub>	D <sub>11</sub>	E <sub>7</sub>	F <sub>11</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>8</sub>
+7,578 M' <sub>I</sub>	+0,319	-0,136	-0,636	-8,980	+8,340	+0,280	-3,800	-3,518	-2,890	+1,272	+8,510	+5,700	+2,850
+6,368 M'' <sub>II</sub>	+0,210	-0,210	-0,407	-5,661	+5,260	+0,407	-5,661	-5,260	-1,955	+1,955	+4,175	-0,465	+4,600
+7,578 M''' <sub>III</sub>	+0,136	-0,319	-0,280	-3,800	+3,518	+0,638	-8,980	-8,340	-1,272	+2,890	+2,805	-0,455	+3,260
M <sub>g</sub> (Zusatz)	+0,665	-0,665	-1,323	-18,441	+17,118	+1,323	-18,441	-17,118	-6,117	+6,117	+15,490	+4,780	+10,710
M <sub>g</sub> (R. I)	+0,03	-0,03	-0,05	-1,63	+1,58	+0,05	-1,63	-1,58	-1,22	+1,22	-1,65	-1,31	-0,34
M <sub>g</sub> (endgültig)	+0,69	-0,69	-1,37	-20,07	+18,70	+1,37	-20,07	-18,70	-7,34	+7,34	+13,84	+3,47	+10,37
+2 553 M' <sub>I</sub>	+0,107	-0,046	-0,215	-3,025	+2,810	+0,094	-1,280	-1,185	-0,971	+0,429	+2,880	+1,921	+0,960
+0,997 M'' <sub>II</sub>	+0,033	-0,033	-0,064	-0,887	+0,822	+0,064	-0,886	-0,824	-0,306	+0,306	+0,654	-0,067	+0,720
-0,067 M''' <sub>III</sub>	-0,001	+0,003	+0,002	+0,034	-0,031	-0,006	+0,079	+0,074	+0,011	-0,026	-0,025	+0,004	-0,029
M <sub>p</sub> (Zusatz)	+0,139	-0,076	-0,277	-3,878	+3,601	+0,152	-2,087	-1,935	-1,266	+0,709	+3,509	+1,858	+1,651
M <sub>p</sub> (R. I)	+0,03	-	-0,07	-0,82	+0,75	-	-	-	-0,03	-0,02	-0,95	-0,85	-0,10
M <sub>p</sub> (endgültig)	+0,17	-0,08	-0,35	-4,70	+4,35	+0,15	-2,09	-1,94	-1,30	+0,69	+2,56	+1,01	+1,55

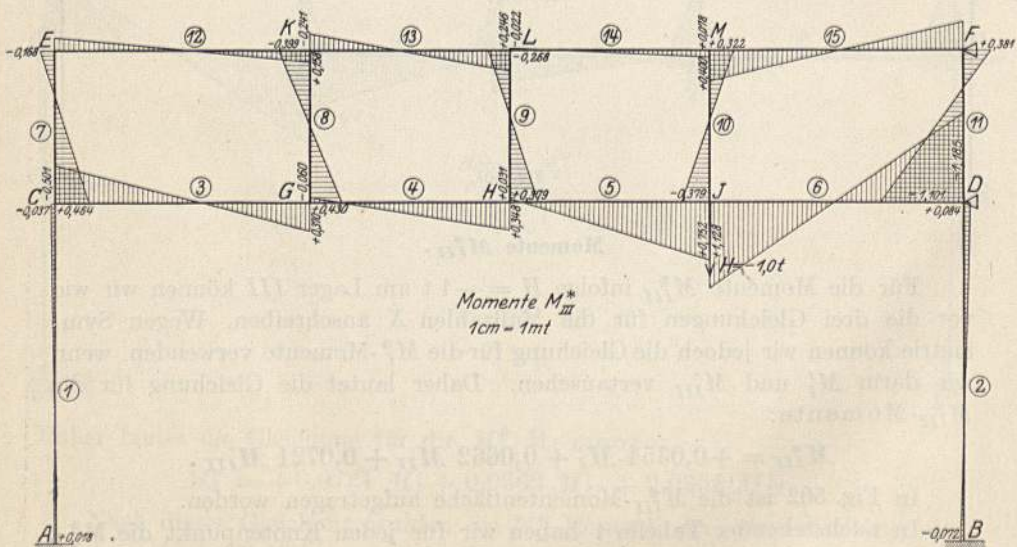


Fig. 502

$M^* = \text{Momente.}$ 

$H_4$	$H_5$	$H_6$	$J_5$	$J_6$	$J_{10}$	$K_8$	$K_{12}$	$K_{13}$	$L_0$	$L_{13}$	$L_{14}$	$M_{10}$	$M_{14}$	$M_{15}$
-1,533	-0,790	-0,743	+0,254	+0,141	+0,113	+0,167	+0,466	+0,634	+0,528	-0,594	-0,066	-0,017	+0,008	-0,009
+1,890	+1,890	0,00	-1,220	-0,573	-0,647	-0,498	-0,061	-0,560	0,00	+0,604	+0,604	+0,498	-0,560	-0,061
-0,388	-0,752	+0,364	+0,906	+0,802	+0,104	+0,009	-0,005	+0,004	-0,259	-0,032	-0,282	-0,082	+0,311	+0,228
-0,031	+0,348	-0,379	-0,060	+0,370	-0,430	-0,322	+0,400	+0,078	+0,268	-0,022	+0,246	+0,399	-0,241	+0,158
-2,027	-2,027	0,00	+1,833	+1,548	+0,284	+0,160	+0,396	+0,558	0,00	-0,576	-0,576	-0,160	+0,558	+0,396
+2,940	+2,940	0,00	-1,900	-0,892	-1,007	-0,775	-0,095	-0,872	0,00	+0,939	+0,939	+0,775	-0,872	-0,095
+0,913	+0,913	0,00	-0,067	+0,656	-0,723	-0,615	+0,301	-0,314	0,00	+0,363	+0,363	+0,615	-0,314	+0,301
+0,348	-0,031	+0,379	+0,752	+1,128	-0,376	-0,399	+0,158	-0,241	-0,268	+0,246	-0,022	+0,322	+0,078	+0,400

für Eigenlast und halbseitige Nutzlast.

$H_4$	$H_5$	$H_6$	$J_5$	$J_6$	$J_{10}$	$K_8$	$K_{12}$	$K_{13}$	$L_0$	$L_{13}$	$L_{14}$	$M_{10}$	$M_{14}$	$M_{15}$
-0,235	+2,638	-2,873	-0,455	+2,805	-3,260	-2,440	+3,030	+0,590	+2,031	-0,167	+1,865	+3,025	-1,824	+1,200
+5,820	+5,820	0,00	-0,465	+4,175	-4,600	-3,915	+1,916	-2,000	0,00	+2,310	+2,310	+3,915	-2,000	+1,916
+2,638	-0,235	+2,873	+5,700	+8,514	-2,850	-3,025	+1,200	-1,824	-2,031	+1,865	-0,167	+2,440	+0,590	+3,030
+8,233	+8,223	0,00	+4,780	+15,490	-10,710	-9,380	+6,146	-3,234	0,00	+4,008	+4,008	+9,380	-3,234	+6,146
-0,89	-0,89	0,00	-1,31	-1,65	+0,34	+0,12	-0,97	-0,85	0,00	-0,83	-0,83	-0,12	-0,85	-0,97
+7,33	+7,33	0,00	+3,47	+13,84	-10,37	-9,26	+5,18	-4,08	0,00	+3,18	+3,18	+9,26	-4,08	+5,18
-0,079	+0,890	-0,969	-0,153	+0,945	-1,098	-0,822	+1,021	+0,199	+0,684	-0,056	+0,629	+1,019	-0,615	+0,404
+0,910	+0,910	0,00	-0,067	+0,654	-0,720	-0,613	+0,300	-0,313	0,00	+0,362	+0,362	+0,613	-0,313	+0,300
-0,023	+0,022	-0,025	-0,050	-0,076	+0,025	+0,027	-0,011	+0,016	+0,018	-0,016	-0,001	-0,022	-0,005	-0,027
+0,808	+1,802	-0,994	-0,270	+1,523	-1,793	-1,408	+1,310	-0,098	+0,702	+0,290	+0,992	+1,610	-0,983	+0,677
-0,30	-0,18	-0,12	+0,06	+0,03	+0,03	+0,02	0,00	+0,02	+0,03	-0,02	+0,01	-	-	-
+0,51	+1,62	-1,11	-0,21	+1,55	-1,76	-1,39	+1,31	-0,08	+0,73	+0,27	+1,00	+1,61	-0,93	+0,68

## Zusatzmomente.

## a) Für Belastungsfall I.

Die Zusatzmomente werden durch die Verschiebungskräfte (umgekehrte Festhaltungskräfte aus R. I) hervorgerufen und es ist daher nach Gl. (537) in einem beliebigen Schnitt:

$$M_{g \text{ Zus.}} = +7,578 M^* + 6,368 M_{II}^* + 7,578 M_{III}^*.$$

In Tabelle 2 sind die Werte an den einzelnen Knotenpunkten berechnet und sie wurden in Fig. 503 aufgetragen.

## b) Für Belastungsfall II.

Ebenfalls nach Gl. (537) ist:

$$M_{p \text{ Zus.}} = 2,553 M^* + 0,997 M_{II}^* - 0,067 M_{III}^*.$$

Fig. 504 enthält die nach dieser Gleichung ebenfalls in Tabelle 2 berechneten Werte.

c) Für Belastungsfall III.

Die Zusatzmomente für Vollbelastung erhalten wir aus denen der halbseitigen Belastung (Fig. 504) durch Addition der Momente symmetrisch liegender Querschnitte; diese wurden weder berechnet noch aufgetragen, weil es

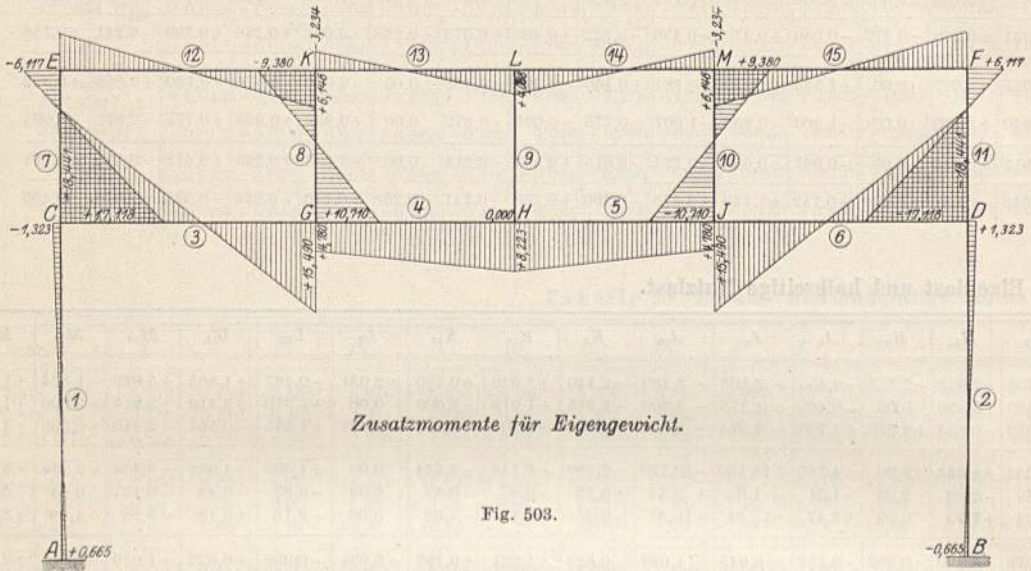


Fig. 503.

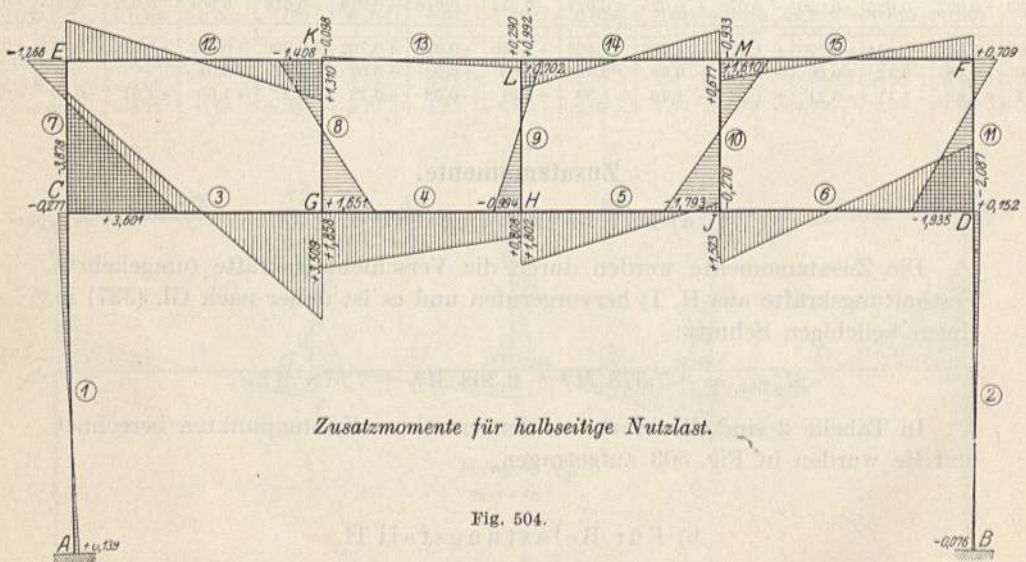
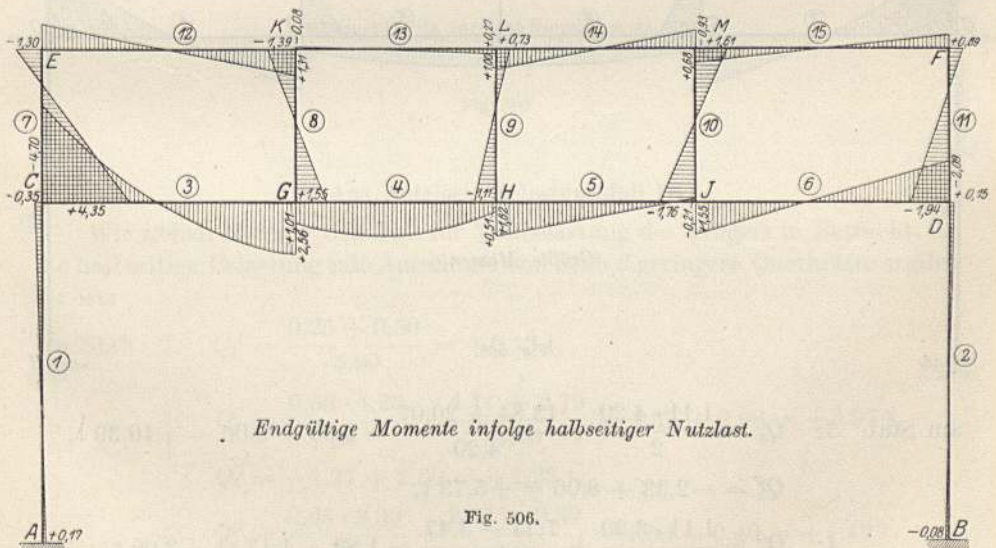
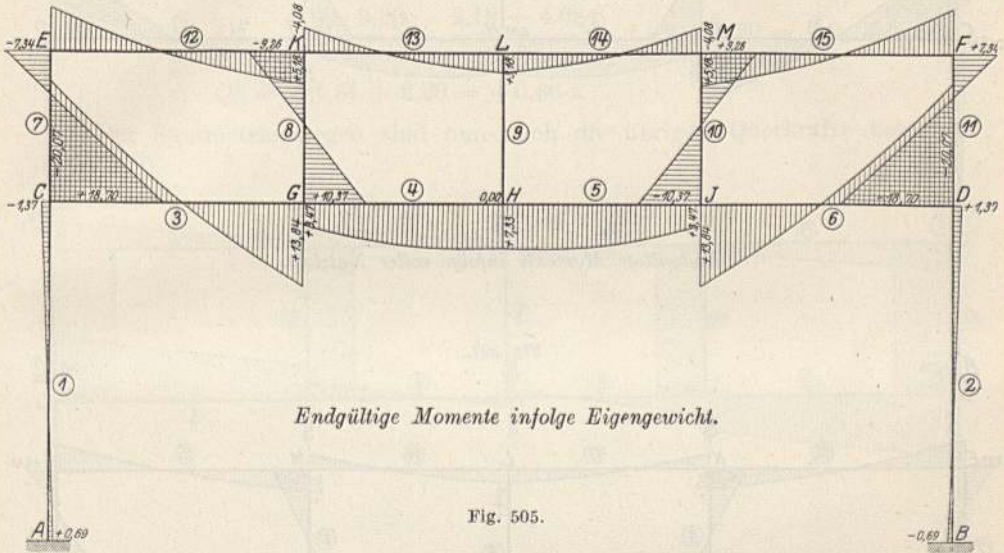


Fig. 504.

in diesem Falle zweckmäßiger ist, zuerst die endgültigen Momente für Belastungsfall II (halbseitige Nutzlast) zu bilden und erst dann die Momente symmetrisch liegender Schnitte zu addieren, worauf man direkt die endgültigen Momente für volle Nutzlast erhält (Fig. 507).

### 3. Endgültige Momente.

Durch Addition der Momente aus R. I und R. II erhalten wir die endgültigen Momente für jeden Belastungsfall (Fig. 505, 506 und 507), aus welchen wir schließlich die Grenzwerte der Momente (Fig. 508) bilden können.

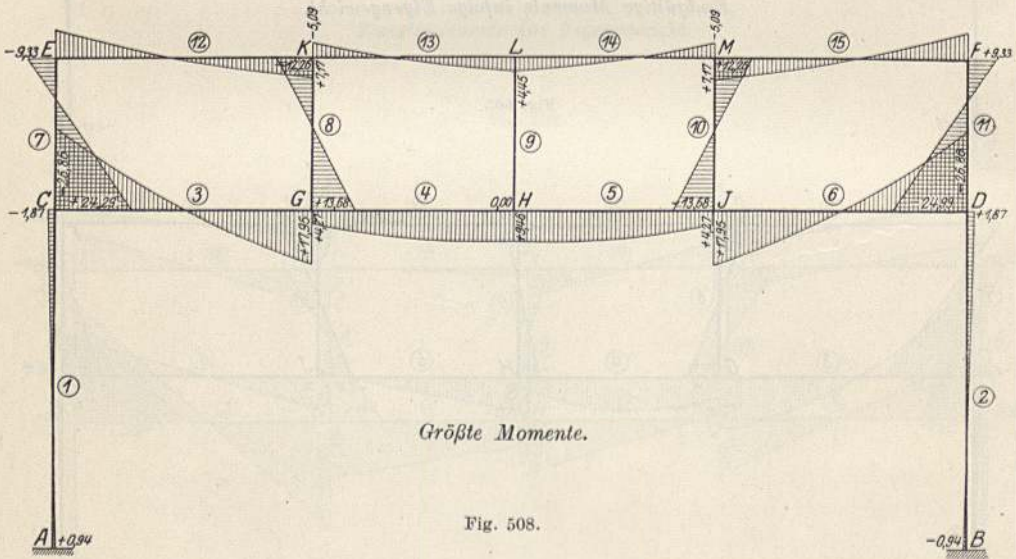
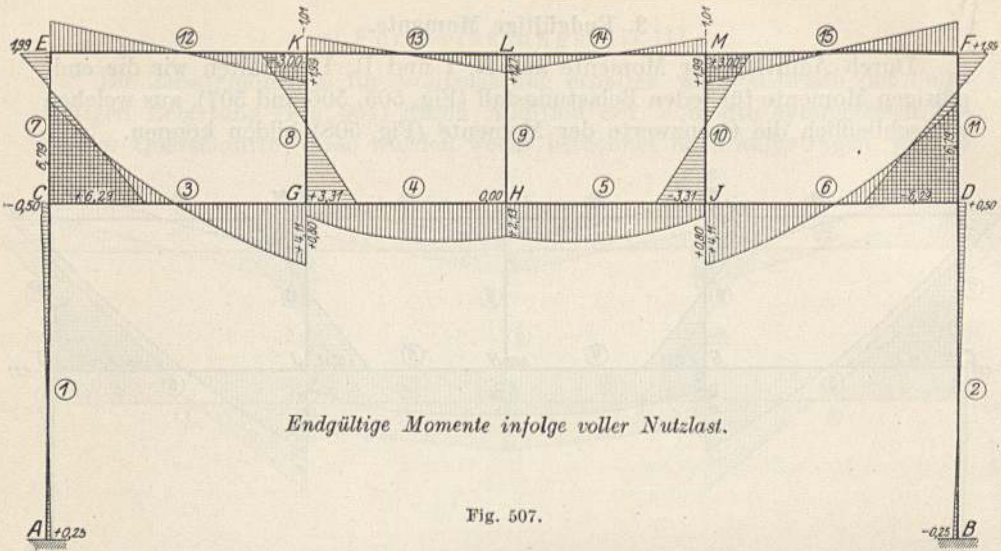


### 4. Querkräfte.

a) Aus Eigengewicht, Schnee und Wind (Belastungsfall I).

Es ist:

$$\text{am Stab I: } Q_1^A = \frac{+0,69 + 1,37}{5,60} = 0,37 \text{ t,}$$



am Stab 3:  $Q_3^C = \frac{1,11 \cdot 4,20}{2} + \frac{13,84 + 20,07}{4,20} = 2,33 + 8,06 = +10,39 \text{ t,}$   
 $Q_3^G = -2,33 + 8,06 = +5,73 \text{ t,}$   
 „ „ 4:  $Q_4^G = \frac{1,11 \cdot 3,30}{2} + \frac{7,33 - 3,47}{3,30} = 1,83 + 1,17 = +3,00 \text{ t,}$   
 $Q_4^H = -1,83 + 1,17 = -0,66 \text{ t,}$   
 „ „ 7:  $Q_7^C = \frac{18,70 + 7,34}{2,50} = +10,42 \text{ t,}$   
 „ „ 8:  $Q_8^G = \frac{10,37 + 9,26}{2,50} = +7,85 \text{ t,}$

am Stab 9:  $Q_9 = 0,00$ ,

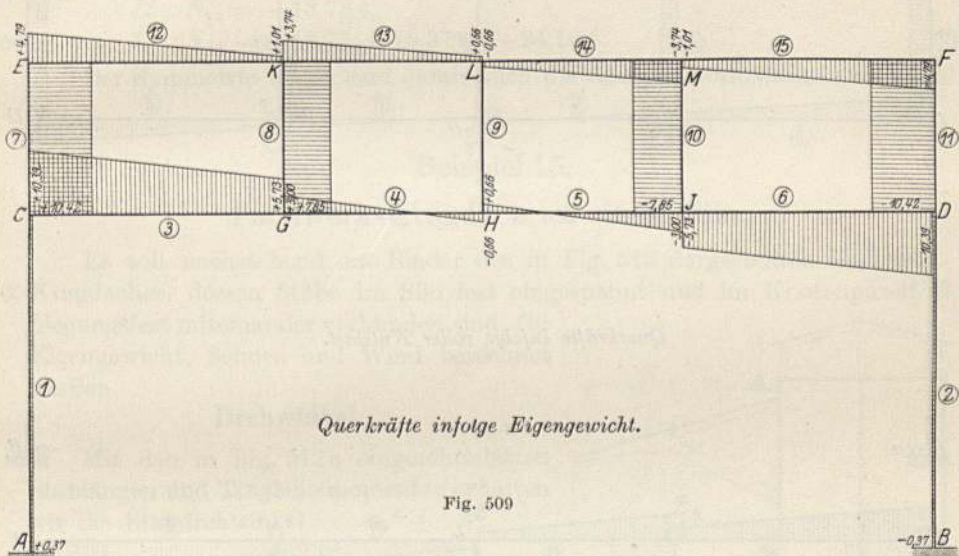
$$12: Q_{12}^E = \frac{0,90 \cdot 4,20}{2} + \frac{5,18 + 7,34}{4,20} = 1,89 + 2,90 = 4,79 \text{ t},$$

$$Q_{12}^K = -1,89 + 2,90 = +1,01 \text{ t},$$

$$13: Q_{13}^K = \frac{0,90 \cdot 3,30}{2} + \frac{3,18 + 4,08}{3,30} = 1,54 + 2,20 = +3,74 \text{ t},$$

$$Q_{13}^L = -1,54 + 2,20 = +0,66 \text{ t}.$$

Der Symmetrie wegen sind nun auch die übrigen Querkräfte bekannt (Fig. 509).



### b) Aus Nutzlast (Belastungsfall III).

Wir ziehen hier nur den Fall für Vollbelastung des Trägers in Betracht, da die halbseitige Belastung mit Ausnahme von Stab 9 geringere Querkräfte ergibt. Es ist:

$$\text{am Stab 1: } Q_1^A = \frac{0,25 + 0,50}{5,60} = +0,13 \text{ t},$$

$$3: Q_3^C = \frac{0,65 \cdot 4,20}{2} + \frac{4,11 + 6,79}{4,20} = 1,37 + 2,60 = +3,97 \text{ t},$$

$$Q_3^G = -1,37 + 2,60 = +1,23 \text{ t},$$

$$4: Q_4^G = \frac{0,65 \cdot 3,30}{2} + \frac{2,13 - 0,80}{3,30} = 1,09 + 0,40 = +1,49 \text{ t},$$

$$Q_4^H = -1,09 + 0,40 = -0,69 \text{ t},$$

$$7: Q_7^C = \frac{6,29 + 1,99}{2,50} = +3,31 \text{ t},$$

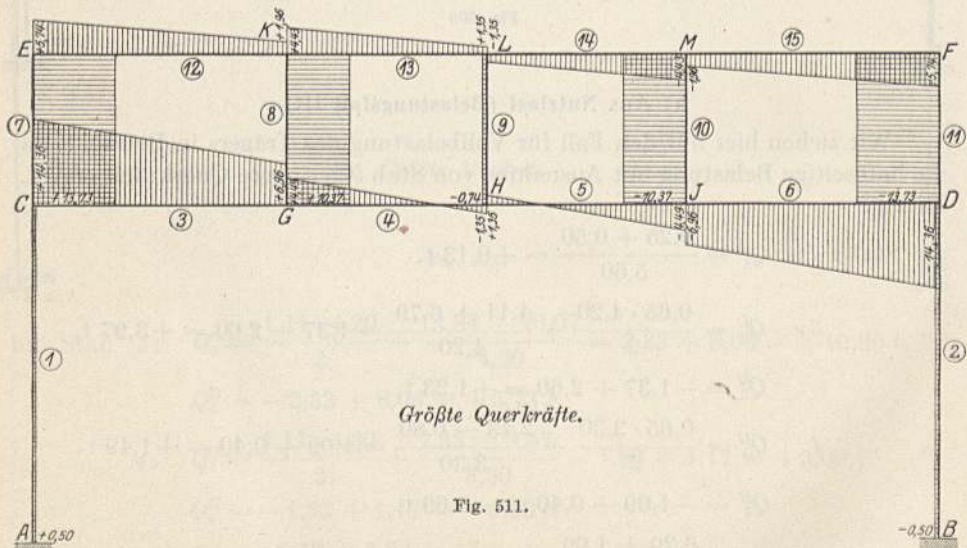
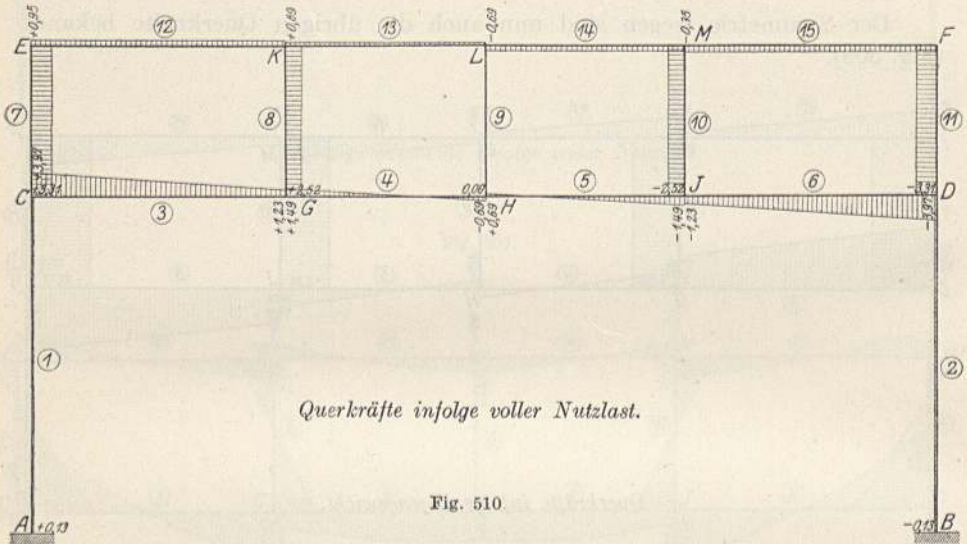
$$8: Q_8^G = \frac{3,31 + 3,00}{2,50} = +2,52 \text{ t},$$

am Stab 9:  $Q_9 = 0,00$ ,

$$\left( \text{für halbseitige Nutzlast wird } Q_9^H = \frac{-1,11 - 0,73}{2,50} = -0,74 \text{ t} \right),$$

am Stab 12:  $Q_{12}^E = \frac{+2 \cdot 1,99}{4,20} = +0,95 \text{ t},$

„ „ 13:  $Q_{13}^K = \frac{1,27 + 1,01}{3,30} = +0,69 \text{ t}.$



Die übrigen Querkräfte sind damit der Symmetrie wegen bekannt (Fig. 510). Die Größtwerte der Querkräfte (Fig. 511) erhalten wir durch Addition der unter a) und b) ermittelten Querkräfte.



5. Normalkräfte.

Es ist:

- in Stab 1:  $Q_3^C + Q_{12}^E = 14,36 + 5,74 \dots = 20,10 \text{ t}$   
 Eigenlast:  $0,40 \cdot 0,75 \cdot 5,60 \cdot 2,4 = 4,03 \text{ t}$   
 $N_1 = 24,13 \text{ t (Druck)}$
- „ „ 3:  $N_3 = +0,50 - 13,73 = -13,23 \text{ t (Zug)}$ ,
- „ „ 4:  $N_4 = -13,23 - 10,37 = -23,60 \text{ t}$ ,
- „ „ 7:  $N_7 = +5,74 \text{ t}$ ,
- „ „ 8:  $N_8 = +4,43 - 1,96 = +2,47 \text{ t}$ ,
- „ „ 9:  $N_9 = -2 \cdot 1,35 = -2,70 \text{ t}$ ,
- „ „ 12:  $N_{12} = +13,73 \text{ t}$ ,
- „ „ 13:  $N_{13} = +13,73 + 10,37 = +24,10 \text{ t}$ .

Der Symmetrie wegen sind damit auch die übrigen Normalkräfte bekannt.

Beispiel 15.

Fachwerk-Kragdach an einem Silo.

Es soll nachstehend ein Binder des in Fig. 512 dargestellten Fachwerk-Kragdaches, dessen Stäbe im Silo fest eingespannt und im Knotenpunkt B biegefest miteinander verbunden sind, für Eigengewicht, Schnee und Wind berechnet werden.

Drehwinkel.

Mit den in Fig. 512a eingeschriebenen Stablängen und Trägheitsmomenten erhalten wir die Stabdrehwinkel

$$\beta_2 = \frac{l_2}{6 J_2 E} = \frac{7,00}{6 \cdot 0,0086 E} = \frac{135,6}{E},$$

$$\beta_3 = \frac{l_3}{6 \cdot J_3 E} = \frac{7,60}{6 \cdot 0,0054 E} = \frac{234,6}{E},$$

und bei fester Einspannung der Stabenden bei C und D ist:

$$\tau_2^B = 1,5 \beta_2 = 1,5 \cdot \frac{135,6}{E} = \frac{203,4}{E} = \epsilon_3^a,$$

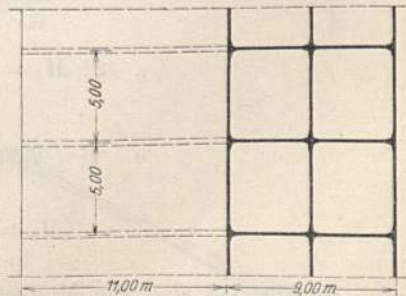
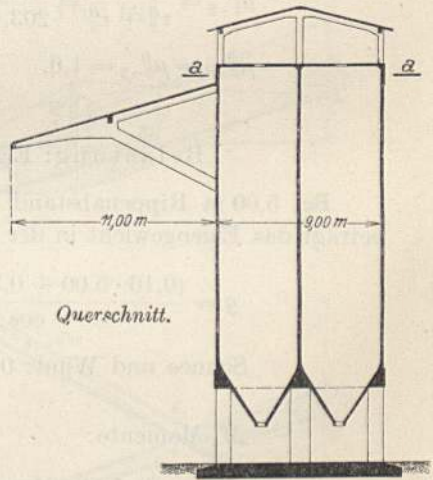
$$\tau_3^B = 1,5 \beta_3 = 1,5 \cdot \frac{234,6}{E} = \frac{351,9}{E} = \epsilon_2^a.$$

Festpunkte.

(Fig. 512 a.)

Stab 2:  $a_2 = \frac{l_2}{3 + \frac{\epsilon_2^a}{\beta_2}} = \frac{7,00}{3 + \frac{351,9}{135,6}} = 1,25 \text{ m};$

$$b_2 = \frac{7,00}{3} = 2,33 \text{ m};$$



Horizontalschnitt a-a.

Fig. 512.

$$\text{Stab 3: } a_3 = \frac{l_3}{3 + \frac{\varepsilon_3^\alpha}{\beta_3}} = \frac{7,60}{3 + \frac{203,4}{234,6}} = 1,97 \text{ m; } b_3 = \frac{7,60}{3} = 2,53 \text{ m.}$$

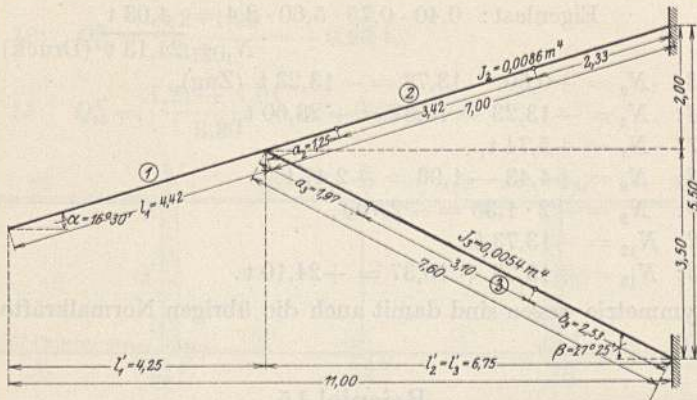


Fig. 512a.

## Verteilungsmaße.

$$\mu_{1-2}^B = \frac{\tau_3^B}{\tau_2^B + \tau_3^B} = \frac{351,9}{203,4 + 351,9} = 0,634; \quad \mu_{1-3} = 0,366;$$

$$\mu_{2-3}^B = \mu_{3-2}^B = 1,0.$$

## Momente.

Belastung: Eigengewicht, Schnee und Wind.

Bei 5,00 m Rippenabstand und einer mittleren Rippenhöhe von 0,50 m beträgt das Eigengewicht in der Horizontalprojektion:

$$g = \frac{(0,10 \cdot 5,00 + 0,30 \cdot 0,50) \cdot 2,4}{\cos \alpha} = \frac{1,56}{0,958} = 1,62 \text{ t/m,}$$

$$\text{Schnee und Wind: } 0,100 \cdot 5,00 = 0,50 \text{ t/m}$$

$$q = 2,12 \text{ t/m}$$

$M_o$ -Momente:

$$\text{Stab 1: } M_o = \frac{2,12 \cdot 4,25^2}{2} = 19,15 \text{ mt;}$$

$$\text{„ 2: } M_o = \frac{2,12 \cdot 6,75^2}{8} = 12,09 \text{ mt} = \frac{k_2}{2};$$

$$\text{„ 3: } g = \frac{0,30 \cdot 0,60 \cdot 2,4}{\cos \beta} = \frac{0,432}{0,888} = 0,486 \text{ t/m,}$$

$$M_o = \frac{0,486 \cdot 6,75^2}{8} = 2,77 \text{ mt} = \frac{k_3}{2}.$$

In Fig. 513 sind die Momente ohne Berücksichtigung der Längenänderungen der Stäbe infolge der Normalkräfte als R. I dargestellt.

**Normalkräfte.**

Wir ermitteln dieselben, indem wir die am Knotenpunkt *B* wirkenden Auflagerdrücke zusammenfassen und dann nach den Stabrichtungen 2 und 3 zerlegen (siehe Fig. 513a); es ist am

$$\begin{aligned} \text{Stab 1: } A_1^B &= q \cdot l_1 = 2,12 \cdot 4,25 = + 9,01 \text{ t} \\ \text{,, 2: } A_2^B &= \frac{q \cdot l_2'}{2} + \frac{M_2^C - M_2^B}{l_2} = \frac{2,12 \cdot 6,75}{2} + \frac{-4,80 + 14,00}{6,75} = + 8,52 \text{ t} \\ \text{,, 3: } A_3^B &= \frac{q \cdot l_3'}{2} + \frac{M_3^D - M_3^B}{l_3} = \frac{0,486 \cdot 6,75}{2} + \frac{-0,15 + 5,15}{6,75} = + 2,38 \text{ t} \\ &\qquad\qquad\qquad \sum A^B = + 19,91 \text{ t} \end{aligned}$$

$$N_2 = 19,91 \cdot \frac{\sin 62^\circ 35'}{\sin 43^\circ 55'} = 19,91 \cdot \frac{0,888}{0,693} = 25,20 \text{ t (Zug),}$$

$$N_3 = 19,91 \cdot \frac{\sin 73^\circ 30'}{\sin 43^\circ 55'} = 19,91 \cdot \frac{0,959}{0,693} = 27,60 \text{ t (Druck).}$$

**Längenänderungen infolge der Normalkräfte:**

$$E \cdot \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{F_2} = \frac{25,20 \cdot 7,00}{0,30 \cdot 0,60 + 0,10 \cdot 1,00} = 630 \text{ t/m,}$$

$$E \cdot \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{F_3} = \frac{-27,60 \cdot 7,60}{0,30 \cdot 0,60} = 1165 \text{ t/m.}$$

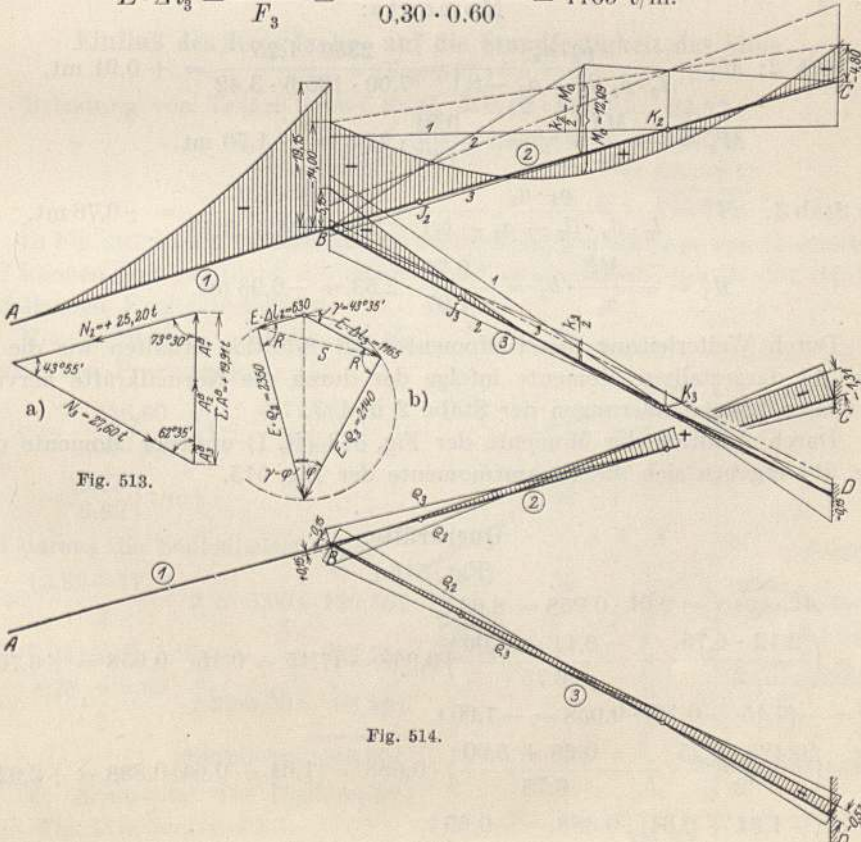


Fig. 514.

Nun können wir die durch die Längenänderungen der Stäbe 2 und 3 verursachten gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$  der Enden der Stäbe 2 und 3 nach Teil II, Kap. VII, konstruieren (siehe Fig. 513 b). Außerdem können wir die Größe von  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$  auch rechnerisch leicht ermitteln, da das von den Strecken  $\Delta l_2$ ,  $\Delta l_3$ ,  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$  gebildete Viereck ein Kreisviereck ist; es ist darin:

$$\cos \gamma = \cos 43^\circ 35' = 0,720,$$

und somit nach dem Kosinussatz

$$S = \sqrt{630^2 + 1165^2 + 2 \cdot 630 \cdot 1165 \cdot 0,720} = 1675.$$

Der Winkel  $\varphi$  ermittelt sich aus der Beziehung

$$\sin \varphi = \frac{E \cdot \Delta l_3 \cdot \sin \gamma}{S} = \frac{1165 \cdot 0,693}{1675} = 0,478;$$

$$\varphi = 28^\circ 35'; \quad \gamma - \varphi = 43^\circ 35' - 28^\circ 35' = 15^\circ.$$

Somit

$$E \cdot \varrho_2 = \frac{E \cdot \Delta l_2}{\operatorname{tg}(\gamma - \varphi)} = \frac{630}{0,268} = 2350 \text{ t/m},$$

$$E \cdot \varrho_3 = \frac{E \cdot \Delta l_3}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1165}{0,545} = 2140 \text{ t/m}.$$

Damit erhalten wir nach den Gl. (515) und (520) die

Momente:

$$\text{am Stab 2: } M_2^B = \frac{\varrho_2 \cdot a_2}{l_2 \cdot \beta_2 (l_2 - a_2 - b_2)} = \frac{2350 \cdot 1,25}{7,00 \cdot 135,6 \cdot 3,42} = +0,91 \text{ mt},$$

$$M_2^C = -\frac{M_2^B}{a_2} \cdot b_2 = -\frac{0,91}{1,25} \cdot 2,33 = -1,70 \text{ mt}.$$

$$\text{am Stab 3: } M_3^B = \frac{\varrho_3 \cdot a_3}{l_3 \cdot \beta_3 (l_3 - a_3 - b_3)} = \frac{2140 \cdot 1,97}{7,60 \cdot 234,6 \cdot 3,10} = +0,76 \text{ mt},$$

$$M_3^D = -\frac{M_3^B}{a_3} \cdot b_3 = -\frac{0,76}{1,97} \cdot 2,53 = -0,98 \text{ mt}.$$

Durch Weiterleitung dieser Momente und Addition erhalten wir die in Fig. 514 dargestellten Momente infolge der durch die Normalkräfte hervorgerufenen Längenänderungen der Stäbe 2 und 3.

Durch Addition der Momente der Fig. 513 (R. I) und der Momente der Fig. 514 ergeben sich die Gesamtmomente der Fig. 515.

### Querkräfte.

(Fig. 516.)

$$Q_1^B = A_1^B \cdot \cos \alpha = 9,01 \cdot 0,958 = 8,63 \text{ t},$$

$$Q_2^B = \left( \frac{2,12 \cdot 6,75}{2} + \frac{-6,11 + 5,00}{6,75} \right) \cdot 0,958 = (7,15 - 0,16) \cdot 0,958 = +6,70 \text{ t}.$$

$$Q_2^C = -(7,15 + 0,16) \cdot 0,958 = -7,00 \text{ t}.$$

$$Q_3^B = \left( \frac{0,486 \cdot 6,75}{2} + \frac{-0,68 + 5,00}{6,75} \right) \cdot 0,888 = (1,64 + 0,64) \cdot 0,888 = +2,92 \text{ t}.$$

$$Q_3^D = (-1,64 + 0,64) \cdot 0,888 = -0,89 \text{ t}.$$

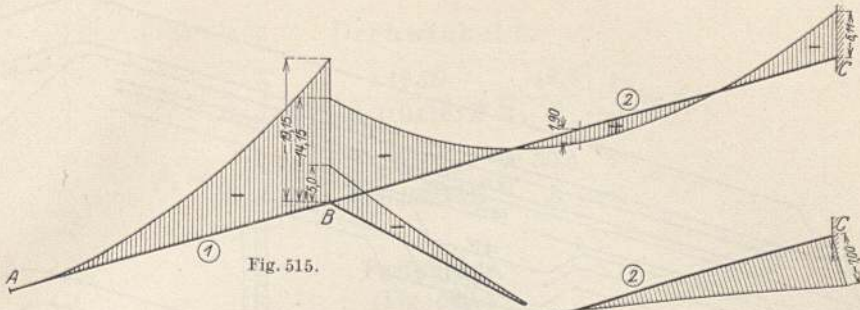


Fig. 515.

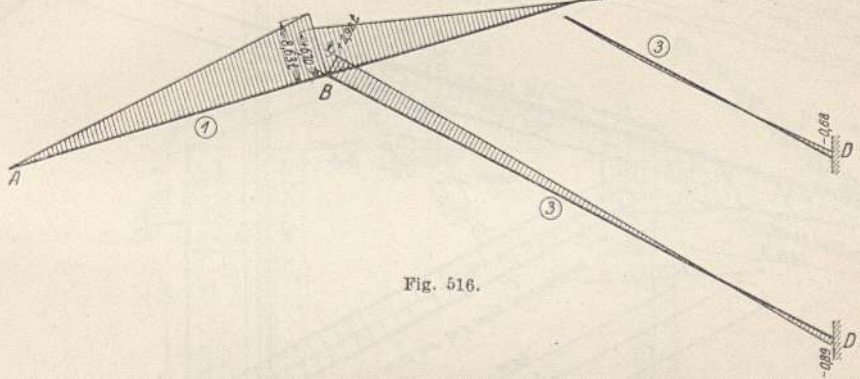


Fig. 516.

**Einfluß des Kragdaches auf die Standfestigkeit des Silos.**  
(Fig. 517.)

Belastung von Träger 1 und 2:  $G_1 = 2,12 \cdot 11,00 = 23,32 \text{ t}$   
 " " " 3:  $G_2 = 0,486 \cdot 6,75 = 3,28 \text{ t}$   
 Silogewicht:  $G_3 = 420,00 \text{ t}$   
 $R = 446,60 \text{ t}.$

In Fig. 517 haben wir mit Kräfte- und Seilpolygon die Lage von  $R$  ermittelt und können nun mittels des Spannungsdiagrammes die auf die drei Säulen entfallenden Kräfte berechnen.

Mit  $e = 0,50 \text{ m}$  erhalten wir die spezifischen Pressungen:

$$\sigma = \frac{446,60}{9,00 \cdot 5,00} \left( 1 \pm \frac{6 \cdot 0,50}{9,00} \right) = \frac{13,23}{6,62} \text{ t/m}^2$$

und daraus die Säulenbelastungen:

$$P_1 = \frac{13,23 + 11,58}{2} \cdot 2,25 \cdot 5,00 = 139,55 \text{ t}$$

$$P_2 = 9,92 \cdot 4,50 \cdot 5,00 = 223,25 \text{ t}$$

$$P_3 = \frac{8,28 + 6,62}{2} \cdot 2,25 \cdot 5,00 = 83,80 \text{ t}$$

zusammen: 446,60 t.

Die Armierung des Dachbinders ist in Fig. 518 dargestellt.

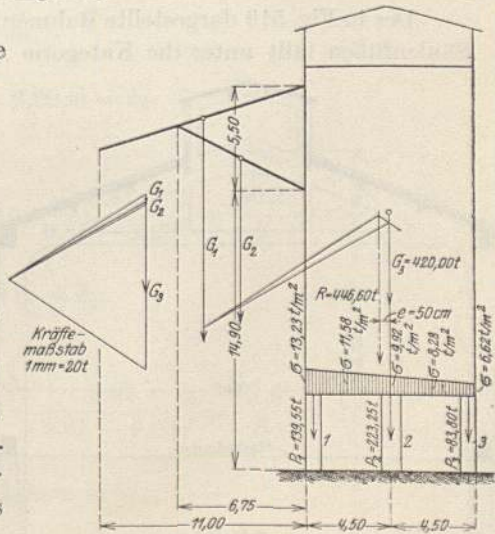


Fig. 517.

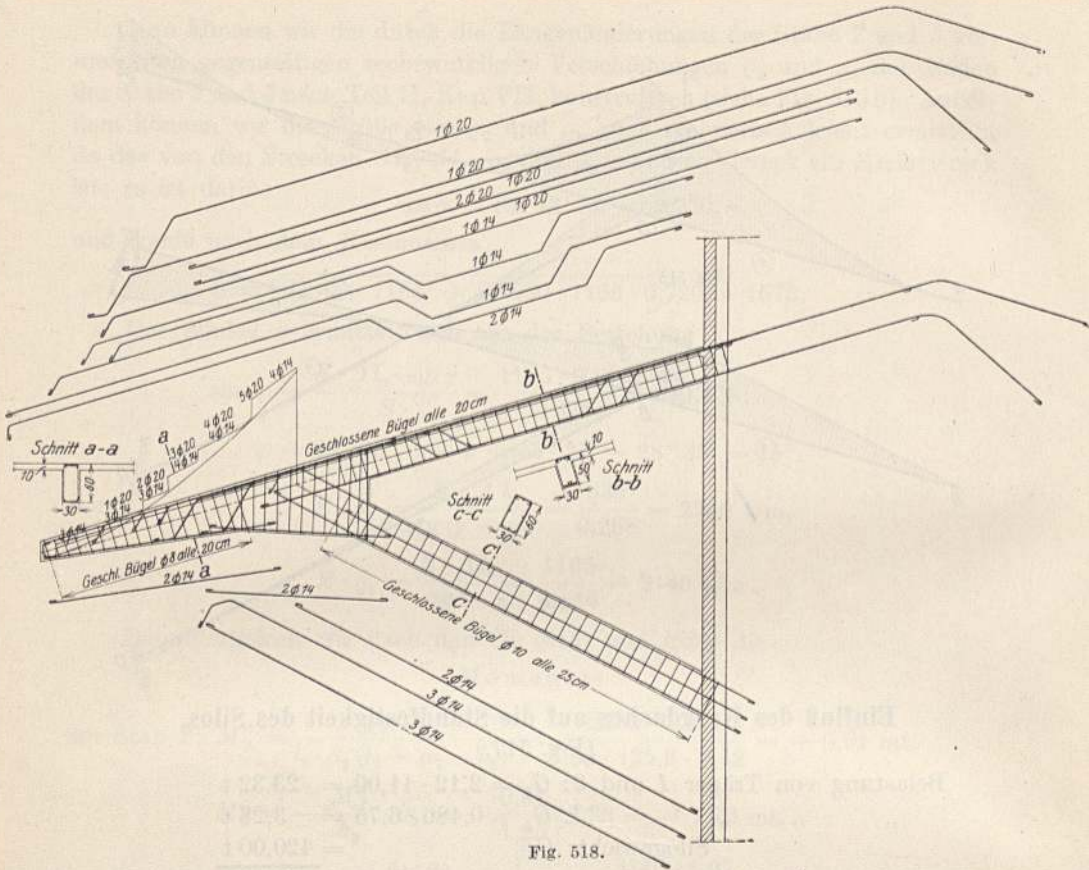


Fig. 518.

Beispiel 16.

Rahmenbinder einer Maschinenhalle mit Zugband.

Der in Fig. 519 dargestellte Rahmenbinder mit Zugband und eingespannten Säulenfüßen fällt unter die Kategorie „Sonderfälle der nach der Seite mehrstöckigen Rahmen“, und die das Dach bildenden Stäbe werden daher nicht zusammen als Bogen betrachtet, sondern als je ein gerader Stab in die Berechnung eingeführt.

Der Gang der Berechnung erfolgt wie in Teil II, Kap. I, für Sonderfall III beschrieben.

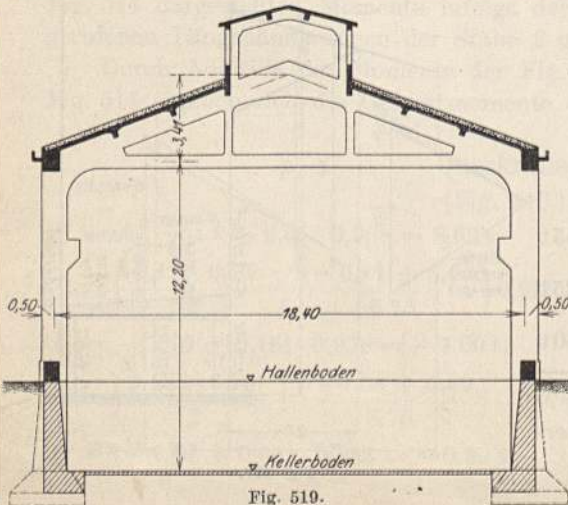


Fig. 519.

Trägheitsmomente.

$$J_1 = J_4 = \frac{0,50 \cdot 1,00^3}{12} = 0,04167 \text{ m}^4,$$

$$J_2 = J_3 = \frac{0,50 \cdot 0,92^3}{12} = 0,0324 \text{ m}^4.$$

Drehwinkel  $\beta$ .

$$\beta_1 = \frac{l_1}{6 \cdot J_1 E} = \frac{12,20}{6 \cdot 0,04167 E} = \frac{48,8}{E} \frac{1}{\text{mt}} = \beta_4,$$

$$\beta_2 = \frac{l_2}{6 \cdot J_2 E} = \frac{9,81}{6 \cdot 0,03244 E} = \frac{50,4}{E} \frac{1}{\text{mt}} = \beta_3.$$

Festpunkte.

(Fig. 520.)

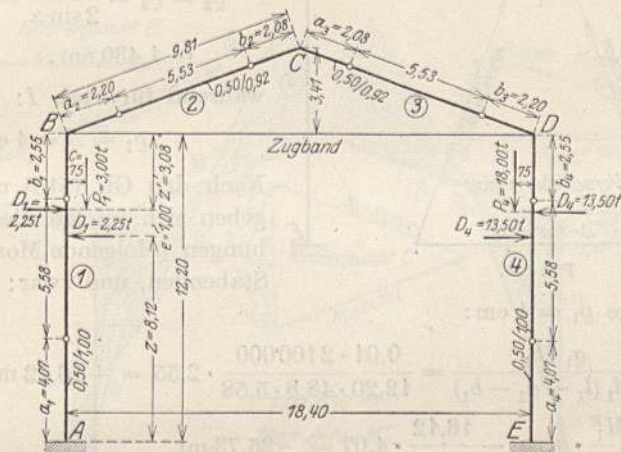


Fig. 520.

Bei fester Einspannung ist:

$$a_1 = a_4 = \frac{12,20}{3} = 4,07 \text{ m.}$$

$$\tau_1^B = 1,5 \beta_1 = 1,5 \cdot \frac{48,8}{E} = \frac{73,2}{E} \frac{1}{\text{mt}} = \epsilon_2^a,$$

$$a_2 = \frac{l_2}{3 + \frac{\epsilon_2^a}{\beta_2}} = \frac{9,81}{3 + \frac{73,2}{50,4}} = 2,20 \text{ m} = b_3,$$

$$\tau_2^C = \beta_2 \left( 3 - \frac{l_2}{l_2 - a_2} \right) = \frac{50,4}{E} \left( 3 - \frac{9,81}{9,81 - 2,20} \right) = \frac{86,2}{E} = \epsilon_3^a,$$

$$a_3 = \frac{l_3}{3 + \frac{\epsilon_3^a}{\beta_3}} = \frac{9,81}{3 + \frac{86,2}{50,4}} = 2,08 \text{ m} = b_2,$$

$$\tau_3^D = \beta_3 \left( 3 - \frac{l_3}{l_3 - a_3} \right) = \frac{50,4}{E} \left( 3 - \frac{9,81}{9,81 - 2,08} \right) = \frac{87,2}{E} = \epsilon_4^b,$$

$$b_4 = \frac{l_4}{3 + \frac{\epsilon_4^b}{\beta_4}} = \frac{12,20}{3 + \frac{87,2}{48,8}} = 2,55 \text{ m} = b_1.$$

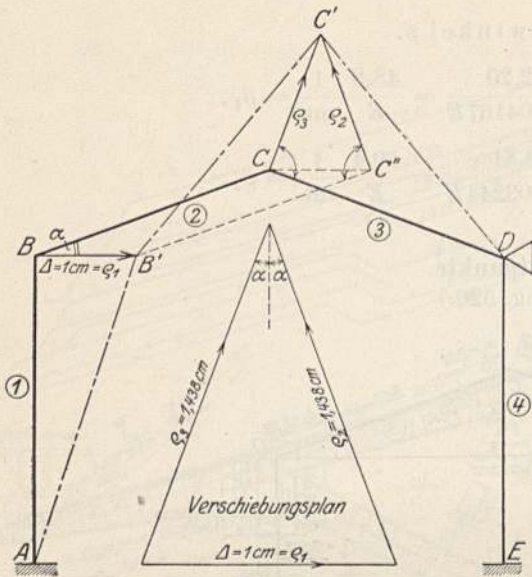


Fig. 521.

Momente  $M'_I$ .

Wir verschieben den Säulen-  
kopf  $B$  um  $\Delta = 1$  cm nach rechts,  
während der Knotenpunkt  $D$  fest-  
gehalten sein soll (siehe Fig. 521).  
Hierbei erleiden die Stäbe 2 und 3  
die gegenseitigen rechtwinkligen Ver-  
schiebungen

$$\varrho_2 = \varrho_3 = \frac{1}{2 \sin \alpha} = \frac{9,81}{2 \cdot 3,41} \\ = 1,430 \text{ cm,}$$

während für Stab 1:

$$\varrho_1 = \Delta = 1 \text{ cm.}$$

Nach den Gl. (515) und (520) er-  
geben sich infolge dieser Verschie-  
bungen  $\varrho$  folgende Momente an den  
Stabenden, und zwar:

a) infolge  $\varrho_1 = 1$  cm:

$$M_1^B = \frac{\varrho_1 \cdot b_1}{l_1 \cdot \beta_1 (l_1 - a_1 - b_1)} = \frac{0,01 \cdot 2100000}{12,20 \cdot 48,8 \cdot 5,58} \cdot 2,55 = +16,12 \text{ mt,}$$

$$M_1^A = -\frac{M_1^B}{b_1} \cdot a_1 = -\frac{16,12}{2,55} \cdot 4,07 = -25,73 \text{ mt,}$$

b) infolge  $\varrho_2 = 1,438$  cm:

$$M_2^C = -\frac{0,01438 \cdot 2100000}{9,81 \cdot 50,4 \cdot 5,53} \cdot 2,08 = -22,97 \text{ mt,}$$

$$M_2^B = +\frac{22,97}{2,08} \cdot 2,20 = +24,30 \text{ mt;}$$

c) infolge  $\varrho_3 = 1,438$  cm:

$$M_3^C = -22,97 \text{ mt und } M_3^D = +24,30 \text{ mt.}$$

Diese Momente werden in Fig. 522 einzeln durch die entsprechenden Fest-  
punkte weitergeleitet und dann addiert, wodurch wir das Momentenbild  $M'_I$   
erhalten.

Die Erzeugungskraft  $Z_I$  und Festhaltungskraft  $D_{II(AI)}$  dieser  
Momente ermitteln wir aus nachstehenden Querkraften:

Knotenpunkt  $C$ :

$$Q_2^C = \frac{47,06 + 50,28}{9,81} = +9,92 \text{ t,}$$

$$Q_3^C = \frac{32,19 + 50,28}{9,81} = +8,41 \text{ t.}$$

Diese beiden Querkraften zu einer Resultierenden vereinigt und letztere  
nach den Stabrichtungen 2 und 3 zerlegt, ergibt uns die Normalkräfte

$$N_2 = 24,30 \text{ t und } N_3 = 24,90 \text{ t.}$$



Knotenpunkt B:

$$Q_1^B = \frac{47,06 + 41,20}{12,20} = +7,23 \text{ t,}$$

$$Q_2^B = -Q_2^C = -9,92 \text{ t.}$$

Diese beiden Querkräfte mit  $N_2$  zu einer Resultierenden zusammengesetzt und diese lotrecht und wagrecht zerlegt ergibt:

$$N_1 = -0,85 \text{ t}$$

und

$$Z_I = +33,50 \text{ t.}$$

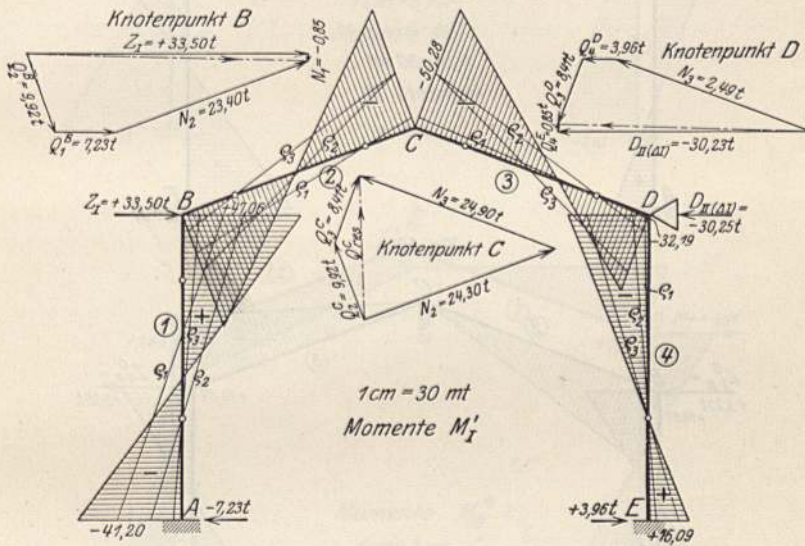


Fig. 522.

Knotenpunkt D:

$$Q_4^D = -\frac{32,19 + 16,09}{12,20} = -3,96 \text{ t,}$$

$$Q_3^D = -Q_3^C = -8,41 \text{ t.}$$

Setzen wir diese beiden Querkräfte wieder mit  $N_3$  zu einer Resultierenden zusammen, so ergibt die lotrechte und wagrechte Zerlegung derselben:

$$N_4 = +0,85 \text{ t,}$$

$$D_{II(AI)} = -30,25 \text{ t.}$$

**Momente  $M'_{II}$ .**

Diese Momente, welche durch Verschieben des Knotenpunktes D um  $\Delta = 1 \text{ cm}$  nach Wegnahme des Zugbandes entstehen, sind aus Gründen der Symmetrie bereits bekannt und in Fig. 522a dargestellt.

**Momente  $M'_I + M'_{II}$ .**

Diese Momente entstehen durch gleichzeitiges Verschieben der Knotenpunkte B und D um  $\Delta = 1 \text{ cm}$ , welcher Fall bei vorhandenem Zugband ein-

tritt, wenn wir den Knotenpunkt  $D$  nach rechts verschieben. Die Momente infolge dieser Verschiebungen erhalten wir durch Addition der Momente  $M'_I$  und  $M'_{II}$  (siehe Fig. 522 b).

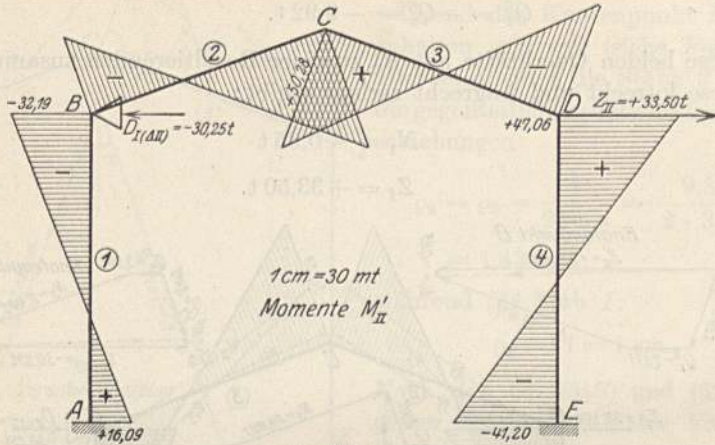


Fig. 522 a.

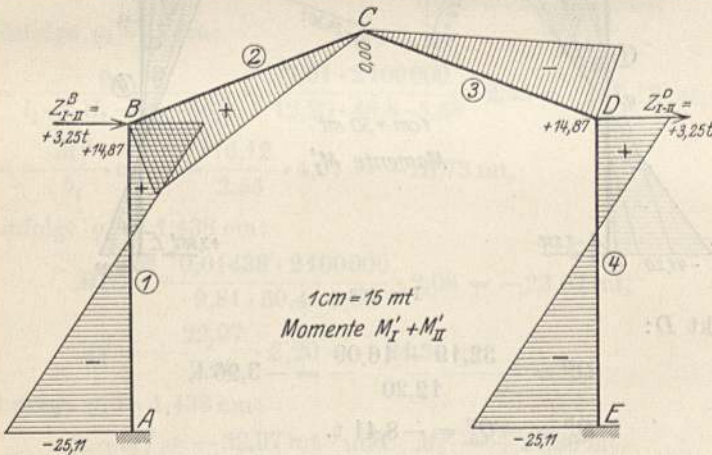


Fig. 522 b.

**Momente  $M_I^*$ .**

Für die Kraft  $H = +1,0 \text{ t}$  am Knotenpunkt  $B$  erhalten wir nach Gl. (544) die Momente:

$$M_I^* = \frac{Z_{II} \cdot M'_I - D_{II(\Delta I)} \cdot M'_{II}}{Z_I \cdot Z_{II} - D_{I(\Delta II)} \cdot D_{II(\Delta I)}} = \frac{33,50 M'_I + 30,25 M'_{II}}{33,50^2 - 30,25^2}$$

$$= 0,1617 M'_I + 0,1460 M'_{II},$$

wonach die in Fig. 523 dargestellten Momente berechnet wurden.

**Momente  $M_{II}^*$ .**

Aus Symmetriegründen sind uns diese Momente, welche am Rahmen ohne Zugband infolge  $H = +1 \text{ t}$  am Knotenpunkt  $D$  entstehen, bereits bekannt und in Fig. 523 a dargestellt.

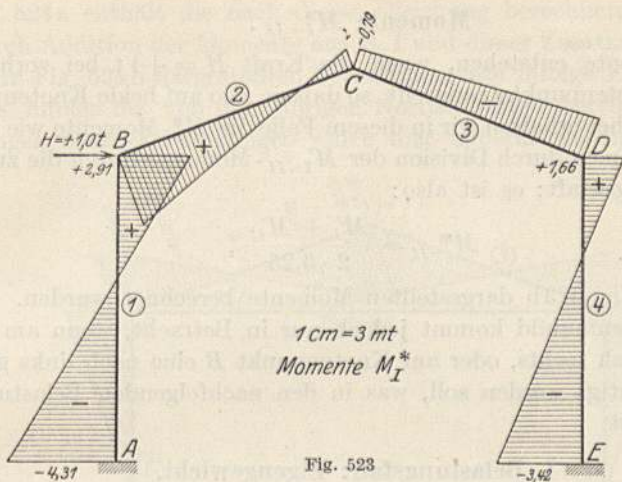


Fig. 523

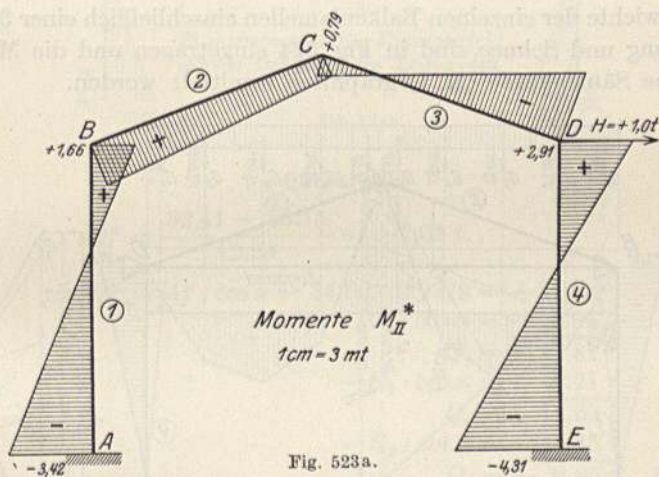


Fig. 523 a.

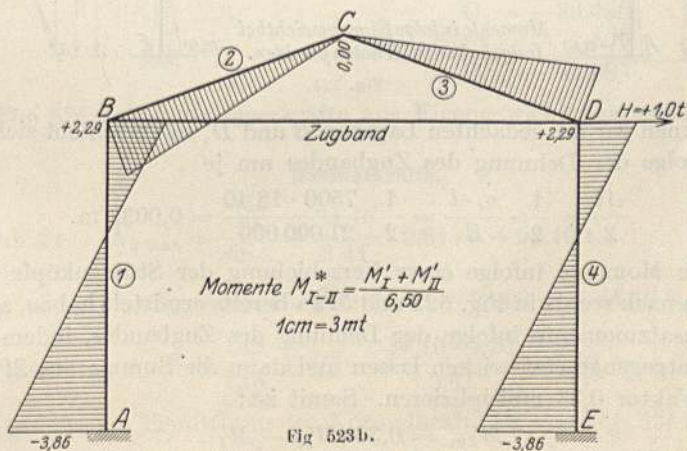


Fig 523 b.

Momente  $M'_{I-II}$ .

Diese Momente entstehen, wenn die Kraft  $H = +1t$  bei vorhandenem Zugband am Knotenpunkt  $D$  angreift, so daß sie also auf beide Knotenpunkte  $B$  und  $D$  wirkt. Daher erhalten wir in diesem Falle die  $M^*$ -Momente wie an einem einstöckigen Rahmen durch Division der  $M'_{I-II}$ -Momente durch die zugehörige Gesamterzeugungskraft; es ist also:

$$M^*_{I-II} = \frac{M'_I + M'_{II}}{2 \cdot 3,25}$$

wonach die in Fig. 523 b dargestellten Momente berechnet wurden.

Dieses Momentenbild kommt jedoch nur in Betracht, wenn am Knotenpunkt  $D$  eine nach rechts, oder am Knotenpunkt  $B$  eine nach links gerichtete Kraft berücksichtigt werden soll, was in den nachfolgenden Belastungsfällen nicht der Fall ist.

I. Belastungsfall: Eigengewicht.

Momente.

Die Gewichte der einzelnen Balkenlamellen einschließlich einer 30 cm hohen Kiesschüttung und Schnee sind in Fig. 524 eingetragen und die Momente für festgehaltene Säulenköpfe (R. I) graphisch ermittelt worden.

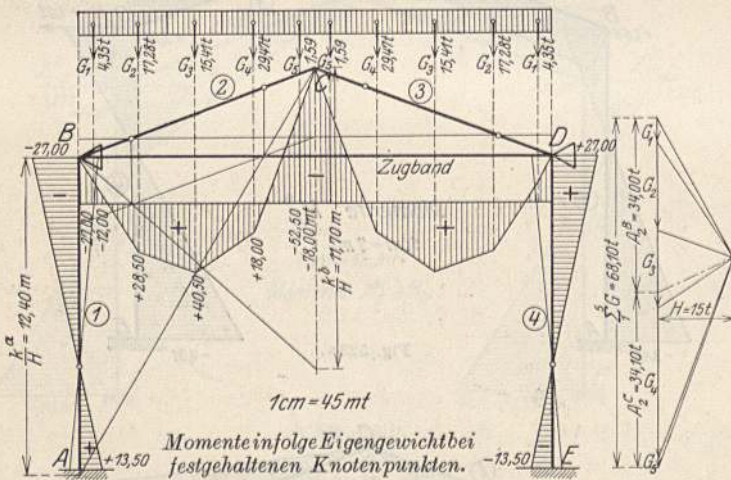


Fig. 524.

Entfernen wir die gedachten Lager in  $B$  und  $D$ , so verschiebt sich Punkt  $B$  und  $D$  infolge der Dehnung des Zugbandes um je

$$\frac{\Delta l}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_e \cdot l}{E} = \frac{1}{2} \frac{7500 \cdot 18,40}{21\,000\,000} = 0,0033 \text{ m.}$$

Da wir die Momente infolge einer Verschiebung der Stützenköpfe  $B$  und  $D$  um je 1 cm nach rechts in Fig. 522 und 522a bereits ermittelt haben, so erhalten wir die Zusatzmomente infolge der Dehnung des Zugbandes, indem wir  $Z_I$  in Fig. 522 entgegengesetzt wirken lassen und dann die Summe aus  $M'_I$  und  $M'_{II}$  mit dem Faktor 0,33 multiplizieren. Somit ist:

$$M_{Zus.} = 0,33 (M'_{II} - M'_I).$$

Fig. 524a enthält die nach dieser Gleichung berechneten Werte.

Durch Addition der Momente aus R. I und dieser Zusatzmomente erhalten wir die in Fig. 524b dargestellten Gesamtmomente infolge Eigengewicht. Die Momente infolge der von den übrigen Normalkräften herrührenden Stabverlängerungen oder -Verkürzungen sollen hier unberücksichtigt bleiben.

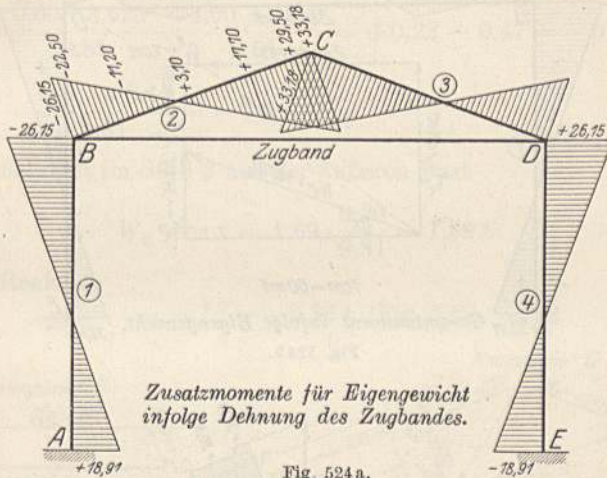


Fig. 524 a.

#### Querkräfte.

$$Q_1^A = \frac{32,41 + 53,15}{12,20} = +7,01 \text{ t.}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2^B &= A_2^B \cdot \cos \alpha = 34,00 \cdot 0,9378 = +31,89 \text{ t} \\
 -G_1 \cdot \cos \alpha &= -4,08 \text{ t} \\
 Q_1 &= +27,81 \text{ t} \\
 -G_2 \cdot \cos \alpha &= -16,21 \text{ t} \\
 Q_2 &= +11,60 \text{ t} \\
 -G_3 \cdot \cos \alpha &= -14,45 \text{ t} \\
 Q_3 &= -2,85 \text{ t} \\
 -G_4 \cdot \cos \alpha &= -27,64 \text{ t} \\
 Q_4 &= -30,49 \text{ t} \\
 -G_5 \cdot \cos \alpha &= -1,49 \text{ t} \\
 Q_5^C &= -31,98 \text{ t.}
 \end{aligned}$$

In Fig. 524c sind die Querkräfte aus Eigengewicht dargestellt.

#### Normalkräfte.

$$\text{Stab 2: } N_2 \max = \frac{A_2^C}{\sin \alpha} = \frac{34,10}{3,41} \cdot 9,81 = +98,10 \text{ t,}$$

$$\text{,, 1: } N_1 = A_2^B + A_2^C = 34,10 + 34,00 = +68,10 \text{ t,}$$

$$\text{Zugband: } Z = \frac{A_2^C}{\text{tg } \alpha} + Q_1^B = \frac{34,10 \cdot 9,20}{3,41} - 7,01 = +84,99 \text{ t.}$$

Die graphische Ermittlung der Normalkräfte ist aus Fig. 524b ersichtlich.

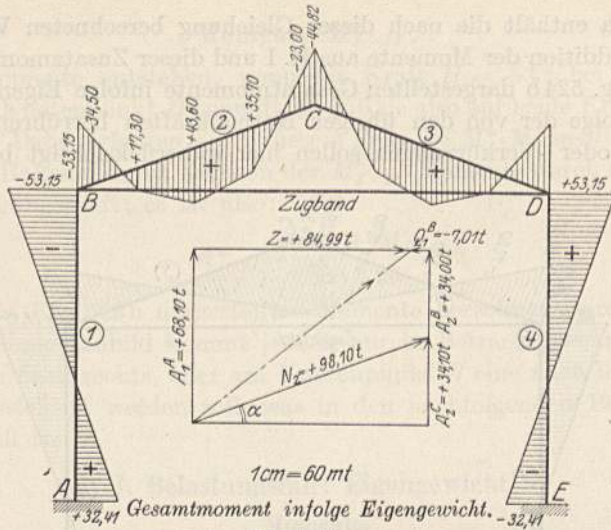


Fig. 524 b.

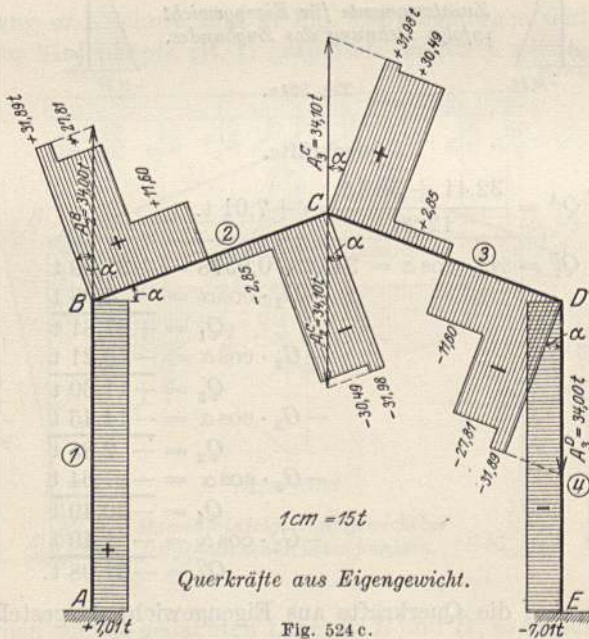


Fig. 524 c.

## II. Belastungsfall: Winddruck.

### Momente.

a) Wind auf Stütze I und Dachbalken 2.

Bei 5,50 m Binderabstand beträgt die Belastung des Stabes 1:

$$w_1 = 0,125 \cdot 5,50 = 0,688 \text{ t/m,}$$

senkrecht zu Stab 2 wirkt  $w_2 = w_1 \cdot \sin^2 \alpha = 0,688 \cdot \left(\frac{3,41}{9,81}\right)^2 = 0,083 \text{ t/m.}$

Die  $M_0$ -Momente und Kreuzlinienabschnitte sind nach den Koeffizienten der Fig. 130 bzw. Gl. (269) ermittelt. Fig. 525 zeigt die Momente des R. I.

Die Knotenpunkte  $B$  und  $D$  werden hierbei von nachstehenden Kräften festgehalten:

Knotenpunkt  $C$ :

$$Q_2^C = \frac{0,60 \cdot 3,625}{9,81} - \frac{4,00 + 0,60}{9,81} = +0,22 - 0,47 = -0,25 \text{ t,}$$

$$Q_3^C = -\frac{0,60 + 0,17}{9,81} = -0,08 \text{ t.}$$

Die Normalkraft im Stab 2 aus der äußeren Last

$$W_2 \cdot \cos \alpha = 1,69 \cdot \frac{9,20}{9,81} = 1,59 \text{ t}$$

hat in  $C$  die Reaktion

$$-L_2^C = -0,36 \text{ t (Fig. 525).}$$

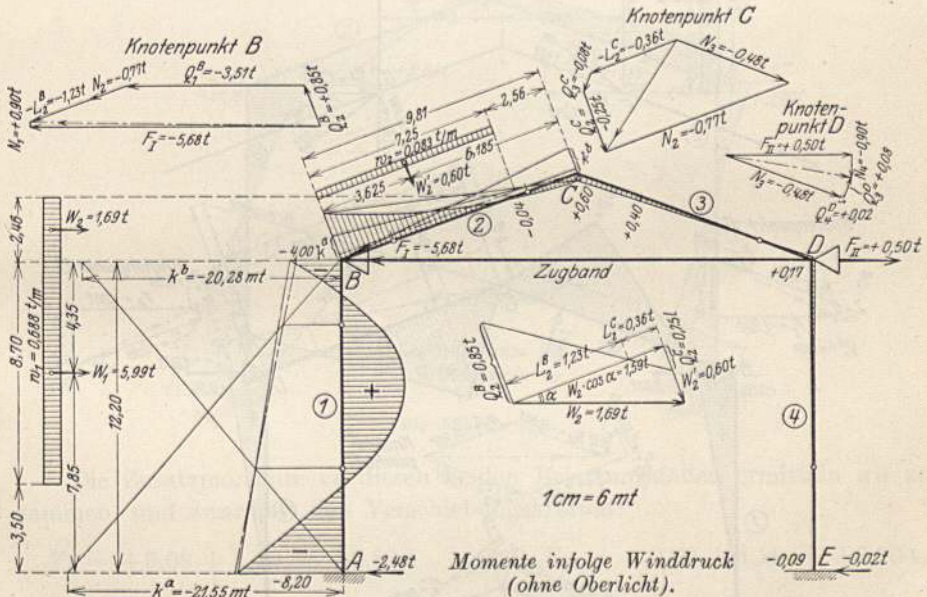


Fig. 525.

Diese drei Kräfte zu einer Resultierenden zusammengesetzt und letztere nach den Stabrichtungen 2 und 3 zerlegt, ergibt die Normalkräfte

$$N_2 = -0,77 \text{ t und } N_3 = -0,48 \text{ t.}$$

Knotenpunkt  $B$ :

$$Q_1^B = -\frac{5,99 \cdot 7,85}{12,20} + \frac{-4,00 + 8,20}{12,20} = -3,85 + 0,34 = -3,51 \text{ t,}$$

$$Q_2^B = +\frac{0,60 \cdot 6,185}{9,81} + \frac{0,60 + 4,00}{9,81} = +0,38 + 0,47 = +0,85 \text{ t.}$$

Diese beiden Querkräfte mit  $N_2$  und der Reaktion aus der äußeren Last,  $-L_2^B = -1,23 \text{ t}$ , zu einer Resultierenden vereinigt, und letztere lotrecht und wagrecht zerlegt, liefert uns

$$N_1 = +0,90 \text{ t} \quad \text{und} \quad F_I = -5,68 \text{ t}.$$

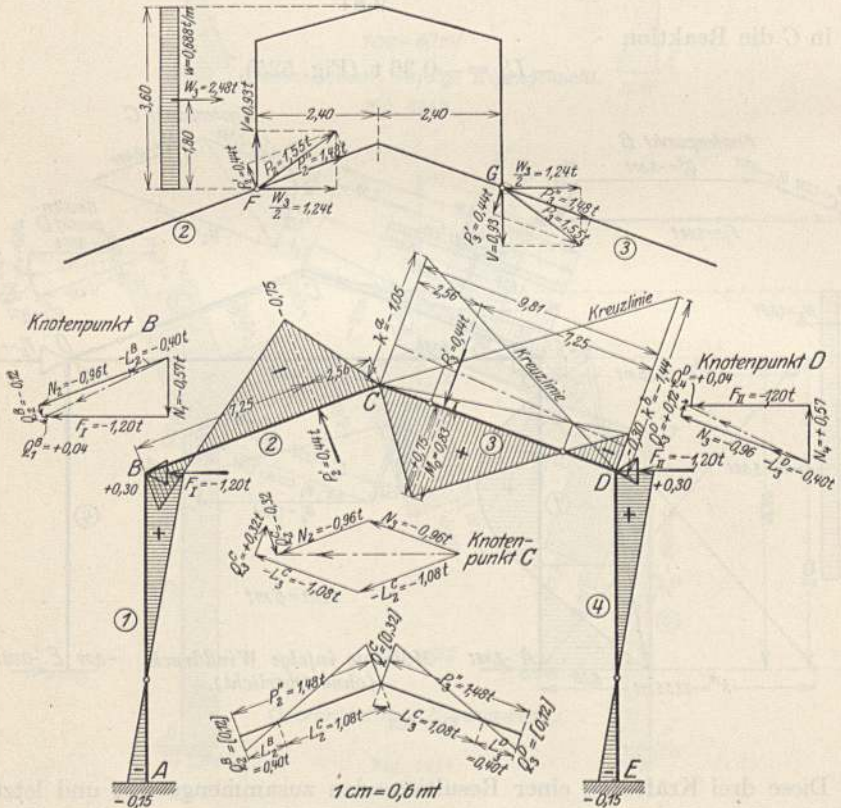
Knotenpunkt D:

$$Q_3^D = -Q_3^C = +0,08 \text{ t},$$

$$Q_4^D = + \frac{0,17 + 0,09}{12,20} = +0,02 \text{ t}.$$

Setzen wir diese beiden Querkräfte mit  $N_3$  zu einer Resultierenden zusammen und zerlegen dieselbe nach der Senkrechten und Wagrechten, so erhalten wir

$$N_4 = -0,90 \text{ t} \quad \text{und} \quad F_{II} = +0,50 \text{ t}.$$



Momente infolge Winddruck auf das Oberlicht.

Fig. 525 a.

b) Wind auf das Oberlicht.

Wir berücksichtigen den horizontalen Winddruck auf das Oberlicht dadurch, daß wir die gesamte Windlast  $W_3$  (Fig. 525 a) auf die beiden gelenkig angenommenen Füße des Oberlichts je zur Hälfte verteilen; ferner wirken in den Anschlußpunkten der Oberlichtsäulen zwei gleiche und entgegengerichtete vertikale



Kräfte  $V = \frac{W_3 \cdot 1,80}{4,80} = 0,93 \text{ t}$ , von denen diejenige am Stab 2 nach oben und diejenige am Stab 3 nach unten gerichtet ist.

An jedem Anschlußpunkt des Oberlichtes setzen wir die Kräfte  $\frac{W_3}{2}$  und  $V$  zu einer Resultierenden  $P_2$  bzw.  $P_3$  zusammen und zerlegen jede derselben normal und in Richtung des betreffenden Stabes, wodurch wir die Kräfte erhalten:

am Punkt  $F$ :  $P'_2 = 0,44 \text{ t}$  (nach oben) und  $P''_2 = 1,48 \text{ t}$  (nach rechts),  
 „ „  $G$ :  $P'_3 = 0,44 \text{ t}$  („ „ unten) „ „  $P''_3 = 1,48 \text{ t}$  („ „ „ „).

Die Momente des R. I aus den zur Stabachse normal gerichteten Kräften  $P'$  haben wir in Fig. 525a in üblicher Weise ermittelt. In gleicher Weise wie beim I. Belastungsfall haben wir die Festhaltungskräfte  $F_I$  und  $F_{II}$  ermittelt (Fig. 525a).

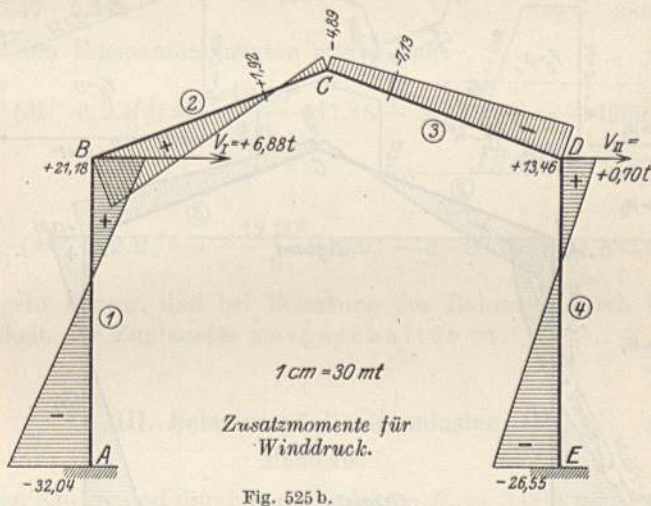


Fig. 525 b.

Die Zusatzmomente zu diesen beiden Belastungsfällen ermitteln wir zusammen, und zwar mit den Verschiebungskräften:

$$V_I = +5,68 + 1,20 = +6,88 \text{ t} \quad \text{und} \quad V_{II} = -0,50 + 1,20 = +0,70 \text{ t},$$

und erhalten die Zusatzmomente:

$$M_{\text{Zus.}} = +6,88 M_I^* + 0,70 M_{II}^*,$$

welche in Fig. 525b aufgetragen sind. Zu diesen addieren wir nun die Momente des R. I aus Fig. 525 und 525a, um die Gesamtmomente für die ganze Windbelastung zu erhalten, welche in Fig. 525c dargestellt sind.

#### Querkräfte.

$$Q_1^A = -\frac{5,99 \cdot 4,35}{12,20} - \frac{40,39 + 17,48}{12,20} = -2,14 - 4,74 = -6,88 \text{ t},$$

$$Q_1^B = +\frac{5,99 \cdot 7,85}{12,20} - 4,74 = +3,85 - 4,74 = -0,89 \text{ t},$$

$$Q_2^B = \frac{0,60 \cdot 6,185 - 0,44 \cdot 2,56}{9,81} - \frac{4,29 + 17,48}{9,81} = +0,26 - 2,22 = -1,96 \text{ t,}$$

$$Q_2^C = +0,26 - (0,60 - 0,44) - 2,22 = +0,10 - 2,22 = -2,12 \text{ t,}$$

$$Q_3^C = + \frac{0,44 \cdot 7,25}{9,81} + \frac{-13,93 + 4,29}{9,81} = +0,32 - 0,98 = -0,66 \text{ t,}$$

$$Q_3^D = +0,32 - 0,44 - 0,98 = -1,10 \text{ t,}$$

$$Q_4^E = - \frac{26,79 + 13,93}{12,20} = -3,34 \text{ t.}$$

In Fig. 525d sind die Querkräfte dargestellt.

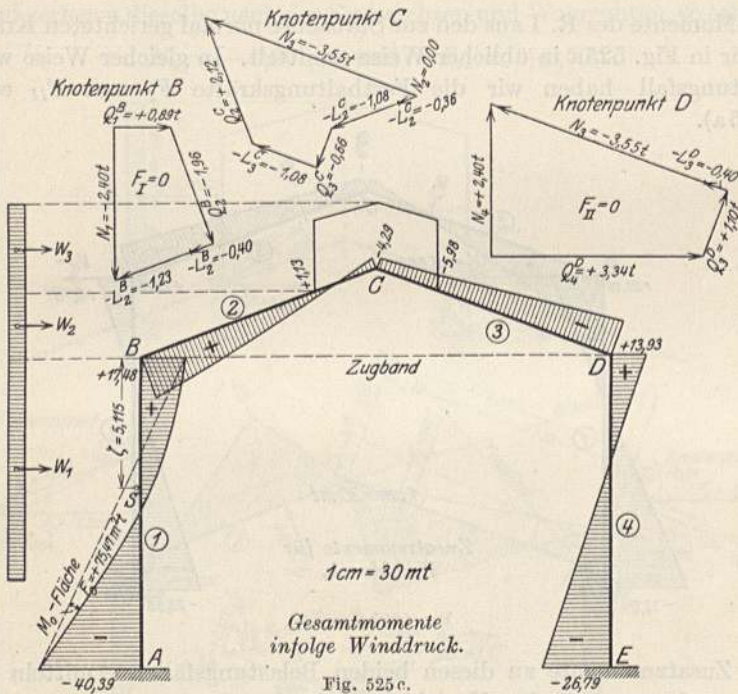


Fig. 525 c.

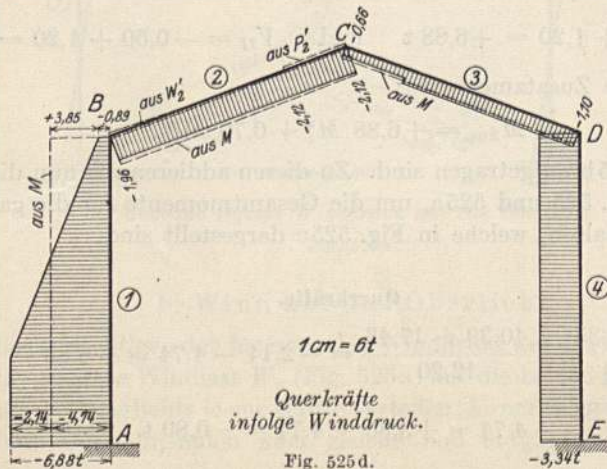


Fig. 525 d.

## Normalkräfte.

Die Normalkräfte sind aus den Kräfteplänen der Fig. 525c zu entnehmen. In dem Kräfteplan für Knotenpunkt *B* und demjenigen für Knotenpunkt *D* muß als Probe die Resultierende aus den am Knotenpunkt angreifenden inneren Kräften genau in die Stabrichtung *I* bzw. *4* fallen; d. h. es muß  $F_I = F_{I'} = 0$  sein.

Verschiebungen der Knotenpunkte *B* und *C* infolge Winddruck.

Die  $J \cdot E$ -fachen Verschiebungen erhalten wir nach Mohr als die statischen Momente der Momentenflächen.

Stab *I*: Der Inhalt der  $M_0$ -Fläche wurde ermittelt zu  $F_0 = +75,47 \text{ m}^2\text{t}$  und ihr Schwerpunktsabstand von *B* zu  $\xi = 5,115 \text{ m}$ , somit ist aus der  $M_0$ -Fläche:

$$JE \delta_0 = -75,47 \cdot 5,115 = -386,03 \text{ m}^3\text{t}$$

Aus den Einspannmomenten ergibt sich:

$$JE \delta' = -\frac{h_1^2}{6} (M_1^B + 2M_1^A) = -\frac{12,20^2}{6} (17,48 - 2 \cdot 40,39) = +1568,90 \text{ ,,}$$

$$JE \delta_I = +1182,87 \text{ m}^3\text{t.}$$

Stab *4*:

$$JE \delta_{II} = -\frac{h_4^2}{6} (M_4^D + 2M_4^E) = -\frac{12,20^2}{6} (13,93 - 2 \cdot 26,79) = +833,62 \text{ m}^3\text{t.}$$

Daraus geht hervor, daß bei Belastung des Rahmens durch Winddruck die Wirksamkeit des Zugbandes ausgeschaltet ist.

## III. Belastungsfall: Kranlasten.

## Momente.

Die beiden Säulen sind durch die Kranlasten  $P_1 = 3,00 \text{ t}$  und  $P_4 = 18,00 \text{ t}$  belastet, deren Konsolmomente  $M_0$  wir durch die im Abstand  $e = 1,00 \text{ m}$  wirkenden Kräftepaare  $D_1$  bzw.  $D_2$  ersetzen (Fig. 520).

Säule *1*:  $M_{01} = 3,00 \cdot 0,75 = 2,25 \text{ mt.}$

Kreuzlinienabschnitte (nach den Gl. 281 u. 282):

$$k_1^a = -M_0 \left[ 1 - \frac{e^2 + 3z(e+z)}{l^2} \right] = -2,25 \left[ 1 - \frac{1,00^2 + 3 \cdot 8,12 \cdot 9,12}{12,20^2} \right] = +1,125 \text{ mt,}$$

$$k_1^b = +M_0 \left[ 1 - \frac{e^2 + 3z'(e+z')}{l^2} \right] = +2,25 \left[ 1 - \frac{1,00^2 + 3 \cdot 3,08 \cdot 4,08}{12,20^2} \right] = +1,665 \text{ mt,}$$

Säule *4*:  $M_{04} = -18,00 \cdot 0,75 = -13,50 \text{ mt,}$

$$k_4^a = -6 \cdot k_1^a = -6 \cdot 1,125 = -6,75 \text{ mt,}$$

$$k_4^b = -6 \cdot k_1^b = -6 \cdot 1,665 = -9,99 \text{ mt.}$$

Die Momente des R. I zeigt Fig. 526, wo auch die Festhaltungskräfte in bekannter Weise bestimmt wurden. Die Zusatz- und Gesamtmomente gehen aus Fig. 526a bzw. 526b hervor.

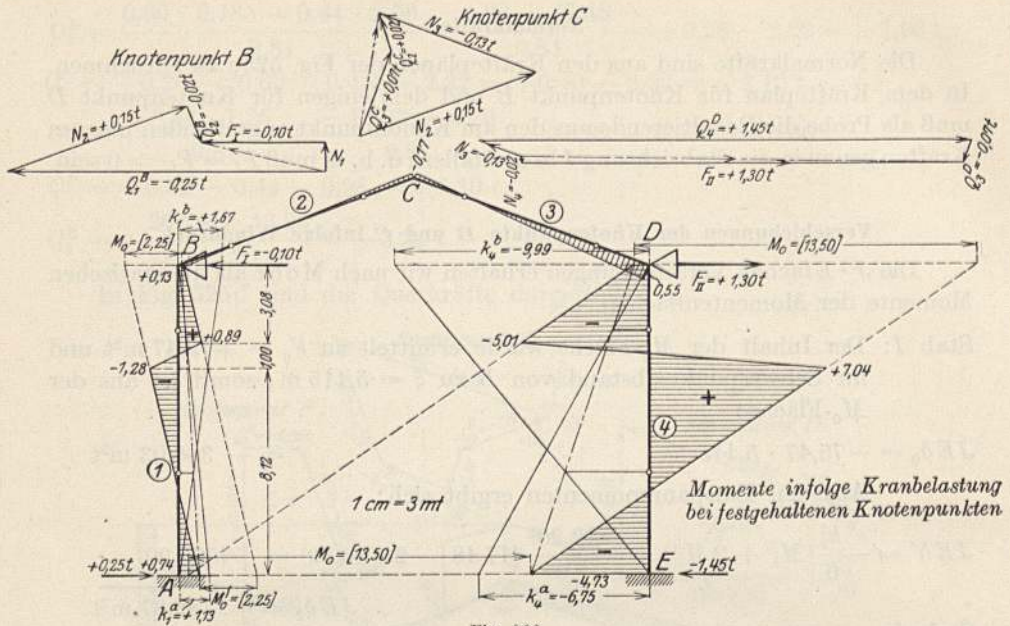


Fig. 526.

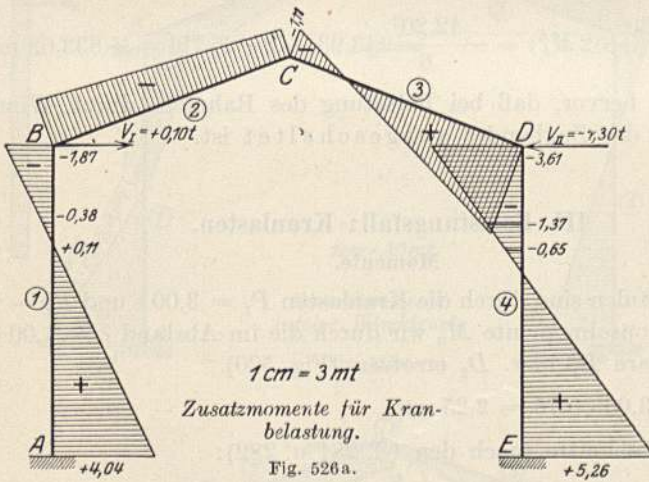


Fig. 526 a.

**Querkräfte.**

$$Q_1^A = \frac{M_{01} + M_1^A - M_1^B}{l_1} = \frac{+ 2,25 + 4,76 + 1,74}{12,20} = +0,72 \text{ t.}$$

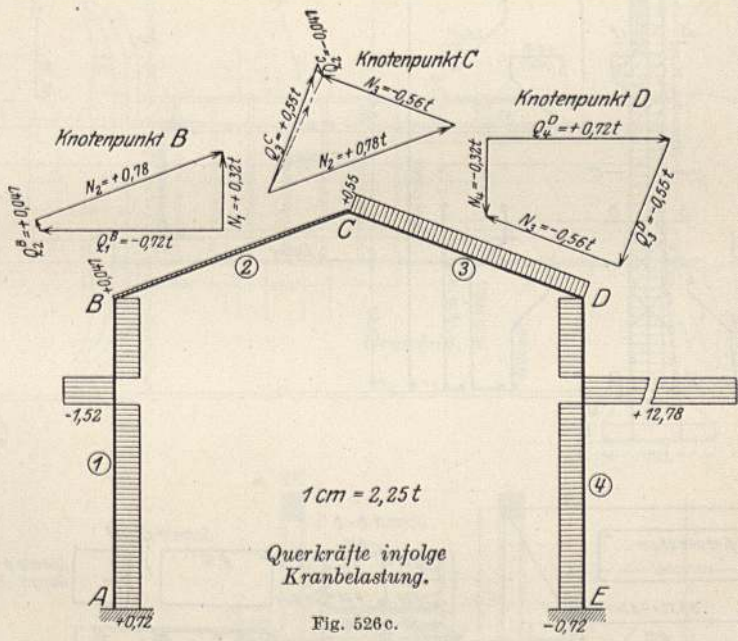
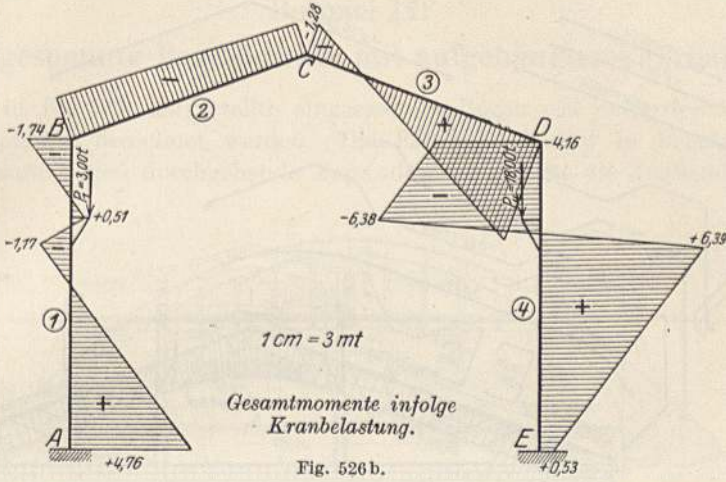
An der Konsole:  $0,72 - 2,25 = -1,52 \text{ t.}$

$$Q_2^B = \frac{-1,28 + 1,74}{9,81} = +0,047 \text{ t,}$$

$$Q_3^C = \frac{4,16 + 1,28}{9,81} = +0,55 \text{ t,}$$

$$Q_4^E = \frac{M_{04} + M_4^E - M^D}{l_4} = \frac{-13,50 + 0,53 + 4,16}{12,20} = -0,72 \text{ t.}$$

An der Konsole:  $-0,72 + 13,50 = +12,78 \text{ t.}$



**Normalkräfte.**

Die Normalkräfte aus Kranbelastung sind aus den Kraftecken über der Fig. 526 c zu entnehmen.

Nun können die Resultierenden an den Säulenfüßen in bekannter Weise (nach Teil I, Kap. VI, 3) bestimmt werden.

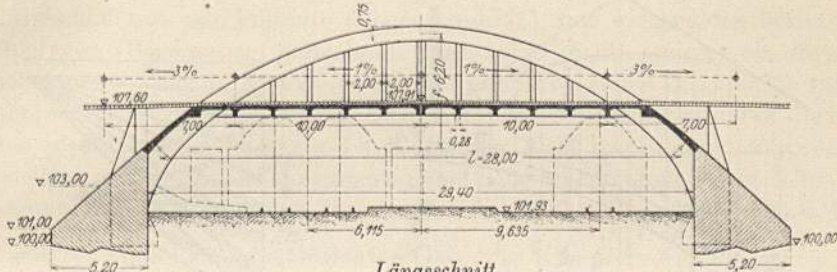
Aus Fig. 527 ist zum Schluß die Armierung des berechneten Hallenbinders ersichtlich.



Beispiel 17.

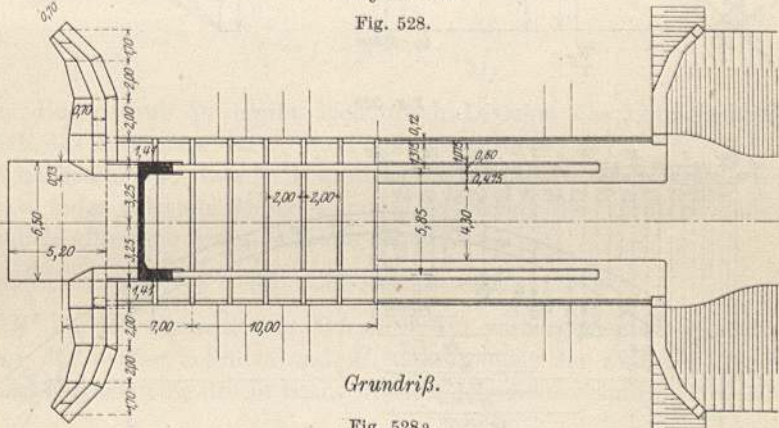
Eingespannte Bogenbrücke mit aufgehängter Fahrbahn.

Der in Fig. 528 dargestellte eingespannte Bogen soll nach der Methode der Festpunkte berechnet werden. Die Fahrbahn besitzt in Brückenmitte eine bis zum Bogen durchgehende Fuge, damit sie nicht als Zugband wirkt.



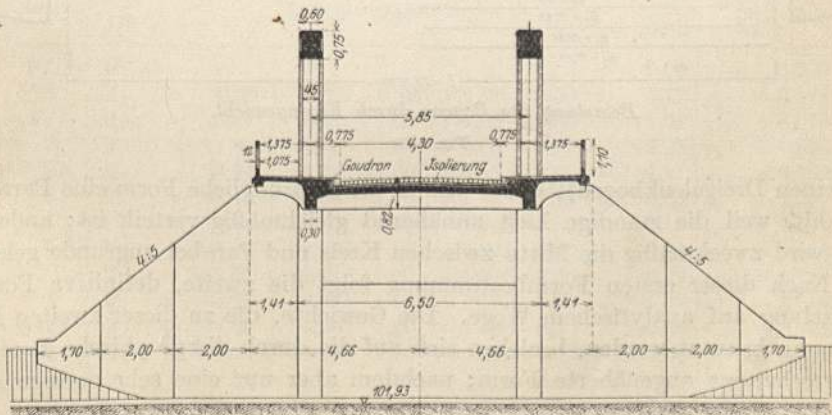
Längsschnitt.

Fig. 528.



Grundriß.

Fig. 528 a.



Querschnitt.

Fig. 528 b.

## Bogenform.

Der Bogenachse geben wir zweckmäßig die Form einer Stützlinie für ständige Last<sup>1)</sup>, was nur mittels Versuchsrechnungen möglich ist.

Die erste Formbestimmung, die zu einer angenäherten Form geführt hat, wurde graphisch durchgeführt (Fig. 529) durch Legen des Seilpolygons für die ständige Last durch die 3 Punkte: Scheitelmittle und beide Kämpfermitten (wie

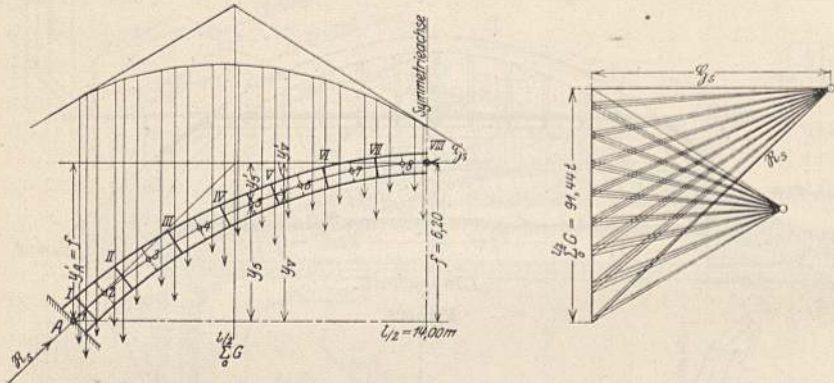
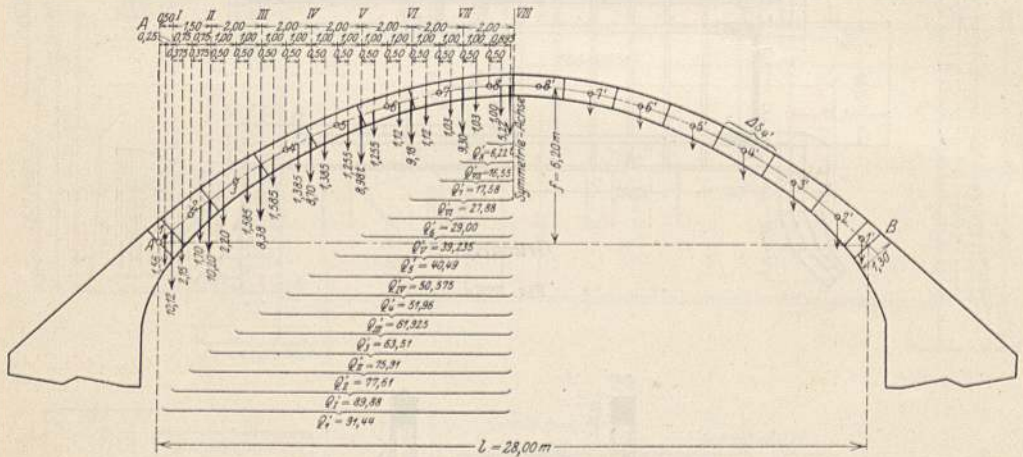


Fig. 529.



Belastung des Bogens durch Eigengewicht.

Fig. 529 a.

für einen Dreigelenkbogen); dabei wurde als ursprüngliche Form eine Parabel gewählt, weil die ständige Last annähernd gleichmäßig verteilt ist; andernfalls wird zweckmäßig die Mitte zwischen Kreis und Parabel zugrunde gelegt.

Nach dieser ersten Formbestimmung folgt die zweite, definitive Formermittlung auf analytischem Wege. Die Gewichte, die zu dieser zweiten Berechnung benutzt werden, beziehen sich auf die durch die graphische Berechnung erhaltene angenäherte Form; nachdem aber nur eine sehr geringe Ab-

<sup>1)</sup> Vgl. Mörsch, Berechnung von eingespannten Gewölben, Schweiz. Bauzeitung, Band 47, Nr. 7 und 8 sowie derselbe „Die Gmündertobelbrücke bei Teufen“, Schweiz. Bauzeitung, Band 53 Nr. 10.



weichung der definitiven Form von der angenäherten sich ergibt, können die Gewichte als richtig angenommen werden. Diese Gewichte sind in Fig. 529a eingetragen; aus letzterer ist auch ersichtlich, daß das Eigengewicht des Bogens zwischen den Hängesäulen-Einzellasten durch je 2 Teillasten eingeführt wird.

Um die Bogenform analytisch zu bestimmen, berechnen wir zweckmäßig die Ordinaten  $y'$  zwischen der verlängerten Seilseite durch die Scheitelmitte (Bogenschub  $\xi_s$ ) und den anderen Seilseiten (Bogenachse); diese Ordinaten, multipliziert mit der Polweite (Bogenschub  $\xi_s$ ), mit welcher das betreffende Seilpolygon (Bogenachse) gezeichnet wurde, sind nichts anderes als die statischen Momente der in  $A$  eingespannten, frei auskragenden Bogenhälfte infolge Eigengewicht bezüglich der betr. Bogenschnitte. Wir erhalten daher die Ordinaten  $y'$  durch Division der auf analytischem Wege ermittelten Momente der Lamellengewichte (Lamellenmomente) vom Scheitel her bezüglich der einzelnen Bogenpunkte (wie an einem Kragträger) durch den Bogenschub  $\xi_s$ , d. h. es ist  $y' = \frac{M}{\xi_s}$ ; dann sind die Ordinaten  $y$  von der Kämpferverbindungsline aus:

$$y = f - y' = f - \frac{M}{\xi_s}.$$

Der Bogenschub  $\xi_s$  ergibt sich durch Division des Lamellenmomentes bezüglich des Kämpfers durch die Pfeilhöhe  $f$ , da  $y'_A = f$ .

In nachstehender Tabelle I wurden die Lamellenmomente berechnet, und zwar jedes folgende Moment unter Benutzung des vorhergehenden. Es ist nämlich allgemein jedes folgende Moment

$$M = M' + Q' \cdot \lambda + M_\lambda,$$

worin  $M'$  und  $Q'$  Moment und Querkraft im vorhergehenden Schnitt,  $\lambda$  der Abstand der beiden Schnitte und  $M_\lambda$  das Moment der zwischen den beiden Schnitten liegenden Kräfte in bezug auf den folgenden Schnitt, für den wir  $M'$

Tabelle I.

Schnitt	Lamellenmomente in mt	$y = f - \frac{M}{\xi_s}$ in m
VIII	$M_{VIII} =$	$= 0,00$
8	$M_8 = 0,00 + 5,22 \cdot 0,895 + 1,00 \cdot 0,50 =$	$5,17$
VII	$M_{VII} = 5,17 + 6,22 \cdot 1,00 + 1,03 \cdot 0,50 =$	$11,91$
7	$M_7 = 11,91 + 16,55 \cdot 1,00 + 1,03 \cdot 0,50 =$	$28,97$
VI	$M_{VI} = 28,97 + 17,58 \cdot 1,00 + 1,12 \cdot 0,50 =$	$47,11$
6	$M_6 = 47,11 + 27,88 \cdot 1,00 + 1,12 \cdot 0,50 =$	$75,55$
V	$M_V = 75,55 + 29,00 \cdot 1,00 + 1,255 \cdot 0,50 =$	$105,18$
5	$M_5 = 105,18 + 39,235 \cdot 1,00 + 1,255 \cdot 0,50 =$	$145,04$
IV	$M_{IV} = 145,04 + 40,49 \cdot 1,00 + 1,385 \cdot 0,50 =$	$186,22$
4	$M_4 = 186,22 + 50,575 \cdot 1,00 + 1,385 \cdot 0,50 =$	$237,49$
III	$M_{III} = 237,49 + 51,96 \cdot 1,00 + 1,585 \cdot 0,50 =$	$290,24$
3	$M_3 = 290,24 + 61,925 \cdot 1,00 + 1,585 \cdot 0,50 =$	$352,96$
II	$M_{II} = 352,96 + 63,51 \cdot 1,00 + 2,20 \cdot 0,50 =$	$417,57$
2	$M_2 = 417,57 + 75,91 \cdot 0,75 + 1,70 \cdot 0,375 =$	$475,14$
I	$M_I = 475,14 + 77,61 \cdot 0,75 + 2,15 \cdot 0,375 =$	$534,16$
1	$M_1 = 534,16 + 89,88 \cdot 0,25 =$	$556,63$
A	$M_A = 556,63 + 91,44 \cdot 0,25 =$	$579,49$

suchen. Die Richtigkeit dieser Zusammensetzung ist aus Fig. 529 b leicht ersichtlich: das durch die Strecke  $AC$  dargestellte Moment  $H \cdot \overline{AC}$  ergibt sich wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $ABC$  und  $A'OC'$  zu  $Q' \cdot \lambda$ , und das durch die Strecke  $CD$  dargestellte Moment  $H \cdot \overline{CD}$  ist nach dem bekannten Satze vom statischen Moment paralleler Kräfte gleich dem Moment  $M_1$ , der zwischen den beiden Schnitten liegenden Kräfte in bezug auf den folgenden Schnitt.

Als Probe für die Richtigkeit der so berechneten Lamellenmomente wurde das Moment in bezug auf den Kämpfer noch direkt ermittelt.

Nun ermitteln wir in Tabelle II die von der Belastung unabhängigen Größen, die wir zur Berechnung der Festpunkte benötigen. Als elastische Elemente werden die Bogenstücke zwischen den Hängesäulen angenommen, und zwar mit Rücksicht auf die Ermittlung der Einflußlinien, die zwischen je zwei Säulen geradlinig verlaufen; dann erhält man unter den durch die Hängesäulen auf den Bogen übertragenen Einzellasten genaue Einflußordinaten.

Den Bogenschub  $B$  infolge  $M = 1$  an beiden Enden des symmetrischen Zweigelenkbogens erhalten wir nach Gl. (380) zu

$$B = \frac{\sum_0^{l/2} y w}{\sum_0^{l/2} y^2 w} = \frac{2117,0}{11143,5} = 0,190 \text{ t.}$$

Der Auflagerdrehwinkel  $\bar{\alpha}$  infolge  $M = 1$  an beiden Enden des symmetrischen Zweigelenkbogens beträgt nach Gl. (418)

$$\bar{\alpha} = \frac{\sum_0^{l/2} w - B \cdot \sum_0^{l/2} y w}{E} = \frac{442,40 - 0,190 \cdot 2117,0}{E} = + \frac{40,17}{E} \frac{1}{\text{mt}}.$$

Tabelle II.

Lamelle	$\Delta s$	$b$	$h$	1000 $J$	$w = \frac{\Delta s}{J}$	$y$	$y \cdot w$	$y^2 \cdot w$	$x$	$l - x$	$x(l - x)w$	$F$	$v = \frac{\Delta s}{F}$
1	0,70	0,65	1,28	113,60	6,16	0,245	1,5	0,4	0,25	27,75	42,7	0,83	0,84
2	1,90	0,65	1,21	95,98	19,80	1,117	22,1	24,7	1,25	26,75	662,1	0,79	2,41
3	2,45	0,55	1,07	56,61	43,28	2,424	104,9	254,3	3,00	25,00	3246,0	0,58	4,22
4	2,30	0,55	0,98	43,14	53,31	3,659	195,1	713,7	5,00	23,00	6130,7	0,54	4,26
5	2,15	0,55	0,91	34,51	62,30	4,648	289,6	1345,9	7,00	21,00	9158,1	0,50	4,30
6	2,10	0,55	0,85	28,15	74,60	5,392	402,2	2168,9	9,00	19,90	12756,6	0,48	4,38
7	2,05	0,55	0,80	23,47	87,35	5,890	514,5	3030,4	11,00	17,00	16334,5	0,44	4,66
8	2,00	0,55	0,77	20,92	95,60	6,141	587,1	3605,2	13,00	15,00	18642,0	0,42	4,76
				$\sum_0^{l/2} w = 442,40$			2117,0	11143,5			66972,7		29,83

Der Auflagerdrehwinkel  $\beta$  am symmetrischen Zweigelenkbogen infolge  $M = 1$  am gegenüberliegenden Bogenende ergibt sich nach Gl. (417) zu:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{2 \cdot \sum_0^{l/2} x(l-x)w}{E \cdot l^2} - \frac{B \cdot \sum_0^{l/2} yw}{2E} = \\ &= \frac{2 \cdot 66972,7}{28,00^2 \cdot E} - \frac{0,190 \cdot 2117,0}{2E} = - \frac{30,265}{E} \text{ mt}.\end{aligned}$$

### Festpunkte.

Bei fester Einspannung der Bogenkämpfer ergeben sich mit  $\varepsilon = 0$  die Festpunktabstände zu:

$$a = b = \frac{l \cdot \beta}{\bar{\alpha}} = - \frac{28,00 \cdot 30,265}{40,17} = - 21,10 \text{ m}.$$

### I. Belastungsfall: Eigengewicht.

Da das Tragwerk nur aus einem bogenförmigen Stab besteht, dessen Enden unverschiebbar gelagert sind, so besteht die Berechnung nur aus Rechnungsabschnitt I.

Der zu den Kräften der Stützlinie für Eigengewicht (Fig. 529a) noch hinzutretende Ergänzungsbogenshub  $\mathfrak{S}_e$ , herrührend von der Zusammendrückung des Bogens durch die Normalkräfte (vgl. Teil I, Kap. VIII, Seite 196) ergibt sich nach Gl. (468) unter Vernachlässigung des zweiten Nennergliedes zu:

$$\mathfrak{S}_e = - \frac{\mathfrak{S}_s \cdot \sum_0^{l/2} v}{\sum_0^{l/2} y^2 w} = - \frac{93,466 \cdot 29,83}{11143,50} = - 0,250 \text{ t}.$$

Die Kämpfermomente infolge Verkürzung der Bogenachse erhalten wir nun nach Gl. (474) zu:

$$M^A = M^B = \frac{\mathfrak{S}_e}{E \cdot \bar{\alpha}} \sum_0^{l/2} yw = \frac{-0,250}{40,17} \cdot 2117,0 = - 13,175 \text{ mt},$$

und der endgültige Bogenschub am eingespannten Bogen infolge Eigengewicht beträgt:

$$\begin{aligned}H_g &= \mathfrak{S}_s + \mathfrak{S}_e + B \cdot M^A = \mathfrak{S}_s + H'; \\ H' &= - 0,250 - 0,190 \cdot 13,175 = - 2,753 \text{ t}; \\ H_g &= + 93,466 - 2,753 = + 90,713 \text{ t}.\end{aligned}$$

Bei der Ermittlung der Momente aus Eigengewicht fallen die äußeren Lasten mit ihren Reaktionen  $\mathfrak{S}_s$  und  $\mathfrak{B}_s$  außer Betracht, weil infolge der Stützlinienform (Gl. 478) des Bogens  $M_0 - \mathfrak{S}_s \cdot y = 0$ . Die Momente in einem beliebigen Schnitt ergeben sich daher nach Gl. (477) zu:

$$M_y = M_y^A - H' \cdot y = - 13,175 + 2,753 y,$$

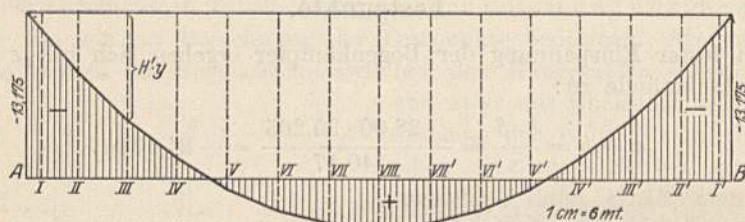
wonach in Tabelle III die Momente für die einzelnen Schnitte berechnet und in Fig. 530 aufgetragen wurden.

Die gleichzeitig auftretende Normalkraft in einem beliebigen Schnitt setzt sich zusammen aus (vgl. Fig. 530 a):

$$N_x = \mathfrak{S}_s \cdot \cos \varphi + \mathfrak{B}_x \cdot \sin \varphi = \frac{\mathfrak{S}_s}{\cos \varphi} \quad \text{und} \quad N'_x = H' \cdot \cos \varphi,$$

daher ist

$$N_x = \frac{\mathfrak{S}_s}{\cos \varphi} + H' \cdot \cos \varphi = \frac{\mathfrak{S}_s + H' \cdot \cos^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$



Momente infolge Eigengewicht.

Fig. 530.

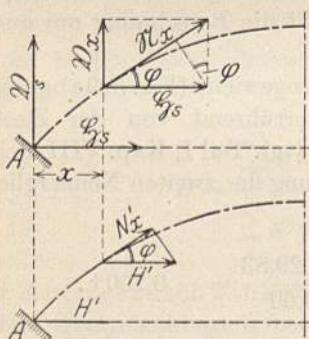


Fig. 530 a.

Tabelle III.  
Momente aus Eigengewicht.

Schn'tt	$M^A = M^B$	2,753 y	$M_g$
A	-13,175	0,000	-13,175
I	-13,175	1,343	-11,83
II	-13,175	4,798	-8,38
III	-13,175	8,540	-4,64
IV	-13,175	11,604	-1,57
V	-13,175	13,988	+0,81
VI	-13,175	15,697	+2,52
VII	-13,175	16,733	+3,56
VIII	-13,175	17,069	+3,89

Die lotrechte Abweichung der Stützlinie für Eigengewicht infolge  $\mathfrak{S}_e$  beträgt nach Gl. (479):

$$\Delta y = \frac{M_g}{H_g},$$

also

am Scheitel:  $\Delta y = \frac{+3,89}{90,713} = +0,043 \text{ m (nach oben),}$

am Kämpfer:  $\Delta y = \frac{-13,175}{90,713} = -0,145 \text{ m (nach unten).}$

Die Randspannungen infolge Eigengewicht in einem beliebigen Schnitt betragen dann:

$$\sigma_o = \frac{\mathfrak{S}_s + H' \cdot \cos^2 \varphi}{F \cdot \cos \varphi} + \frac{M_g}{W} = \sigma_1 + \sigma_2;$$

$$\sigma_u = \frac{\mathfrak{S}_s + H' \cdot \cos^2 \varphi}{F \cdot \cos \varphi} - \frac{M_g}{W} = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Hätten wir an Stelle der Momente auf die Querschnittsmitten diejenigen bezüglich der beiden Kernpunkte eines jeden Querschnittes gebildet, so würden wir aus

$$\sigma_o = \frac{\xi_s}{F \cdot \cos \varphi} + \frac{M_{ku}}{W},$$

$$\sigma_u = \frac{\xi_s}{F \cdot \cos \varphi} - \frac{M_{ko}}{W}$$

die genau gleichen Randspannungen erhalten haben, jedoch wäre dieser Weg in vorliegendem Falle (Bogenform = Stützlinie für Eigengewicht) umständlicher.

## II. Belastungsfall: Verkehrslast.

Die Verkehrsbelastung besteht aus 400 kg/m<sup>2</sup> Menschengedränge und einer 17,5 t schweren Dampfwalze (siehe Fig. 535). Diese wird durch die Hängesäulen auf den Bogen übertragen.

Die in den einzelnen Schnitten von der Verkehrslast hervorgerufenen größten Randspannungen bestimmen wir mittels der Einflußlinien der Kernpunktmomente, aus welchen wir durch Division mit dem Widerstandsmomente  $W$  die Randspannungen ohne weiteres erhalten, d. h. ohne die Normalkraft für den betreffenden Belastungsfall ermitteln zu müssen; es ist nämlich:

$$\sigma_o = \frac{M_{ku}}{W} \quad \text{und} \quad \sigma_u = -\frac{M_{ko}}{W}.$$

Um die Einflußlinien der Momente  $M_k$  bezüglich der Kernpunkte der zu untersuchenden Bogenquerschnitte auftragen zu können, benötigen wir die Momentenlinien für die einzelnen Stellungen der Last  $P = 1$  t; wir haben 15 Laststellungen angenommen, welche sich jedoch der Symmetrie wegen auf die 8 Laststellungen der Bogenhälfte reduzieren. Da das Tragwerk nur aus einem bogenförmigen Stab besteht, dessen Enden unverschiebbar gelagert sind, so besteht die Berechnung nur aus Rechnungsabschnitt I.

### Momente $M_o$ .

Last $P = 1$ t	mt	Last $P = 1$ t	mt
in I: $M_o = \frac{0,50 \cdot 27,50}{28,00}$	= 0,491	in V: $M_o = \frac{8,00 \cdot 20,00}{28,00}$	= 5,714
in II: $M_o = \frac{2,00 \cdot 26,00}{28,00}$	= 1,857	in VI: $M_o = \frac{10,00 \cdot 18,00}{28,00}$	= 6,429
in III: $M_o = \frac{4,00 \cdot 24,00}{28,00}$	= 3,429	in VII: $M_o = \frac{12,00 \cdot 16,00}{28,00}$	= 6,857
in IV: $M_o = \frac{6,00 \cdot 22,00}{28,00}$	= 4,714	in VIII: $M_o = \frac{14,00 \cdot 14,00}{28,00}$	= 7,000

### Bogenschübe $\xi$ .

Die durch die Last  $P = 1$  t in ihren einzelnen Stellungen am Zweigelenbogen hervorgerufenen Bogenschübe  $\xi$  ermitteln wir zweckmäßig mit Hilfe der Einflußlinie für  $\xi$ , welche wir am einfachsten graphisch auf Grund des Satzes von der Gegenseitigkeit der Formänderungen erhalten, indem wir

die Biegelinie für den Zustand  $\xi = -1$  (mit den elastischen Gewichten  $1 \cdot y \cdot w$ ) zeichnen (Fig. 531). Sind  $\eta = \frac{E \cdot \delta}{H'}$  die im Längenmaßstab gemessenen Ordinaten der mit der beliebigen Polweite  $H'$  gezeichneten Biegelinie, so ist der Bogen Schub  $\xi$  für eine bestimmte Laststellung:

$$\xi = \frac{E \cdot \delta}{\sum_0^l y^2 w} = \frac{H'}{2 \cdot \sum_0^{\frac{l}{2}} y^2 w} \cdot \eta = \frac{2000}{2 \cdot 11143,5} \cdot \eta = 0,0897 \eta.$$

Rechnerisch erhalten wir die Durchbiegungen  $E \cdot \delta$ , wenn wir in nachfolgender Tabelle IV die Momente des mit  $1 \cdot y \cdot w$  belasteten einfachen Balkens ermitteln, was am einfachsten dadurch geschieht, daß wir jedes folgende Moment aus dem vorhergehenden (wie bei der Bogenform) berechnen, zu welchem Zweck man sich die Querkräfte für die elastischen Gewichte  $E \cdot \Delta F$  bildet (siehe Fig. 531 a). Durch Division der Werte  $E \cdot \delta$  durch  $2 \sum_0^{\frac{l}{2}} y^2 w$  erhalten wir

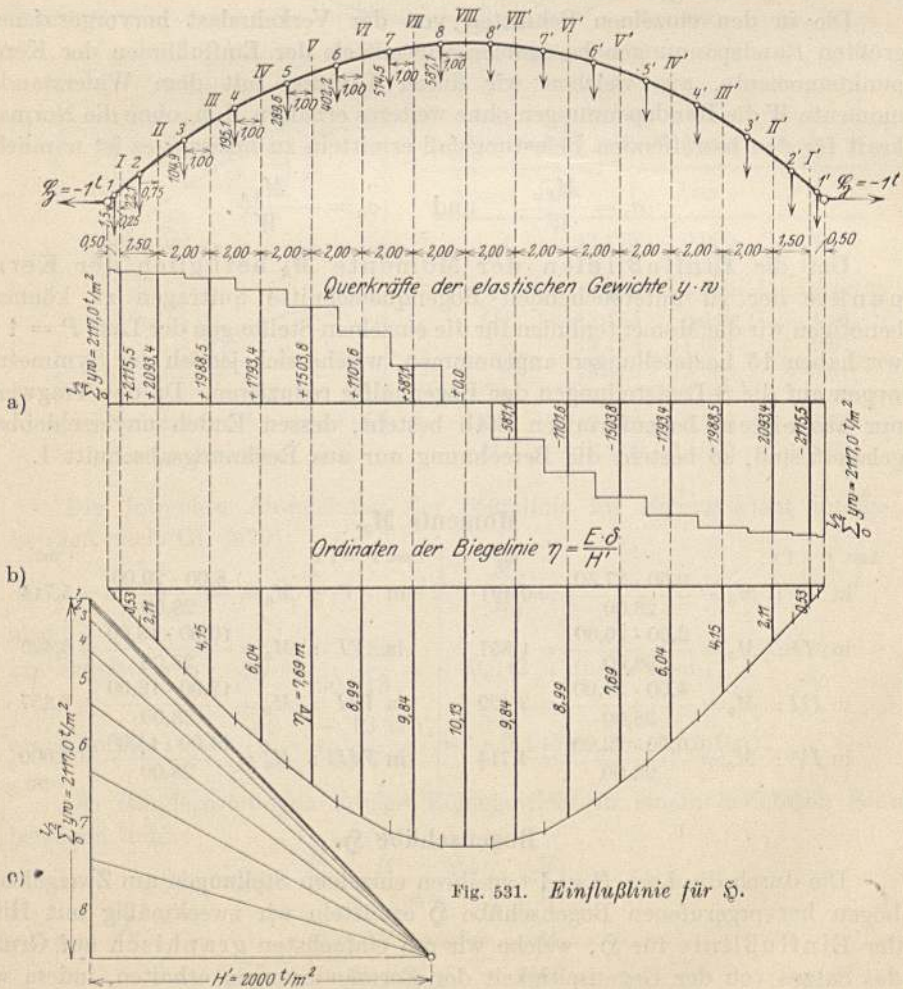


Fig. 531. Einflusslinie für  $\xi$ .

dann die vorgenannter Tabelle angefügten Werte der Einflußlinienordinaten für  $\xi$ .

Tabelle IV. Ordinaten der Einflußlinie für  $\xi$ .

Schnitt	$E \cdot \delta$	$\delta$
A		0,00
I	$0,00 + 2117,0 \cdot 0,50 - 1,5 \cdot 0,25 = 1058,12_5$	0,047 t
II	$1058,12_5 + 2115,5 \cdot 1,50 - 22,1 \cdot 0,75 = 4214,80$	0,189 t
III	$4214,80 + 2093,4 \cdot 2,00 - 104,9 \cdot 1,0 = 8296,70$	0,372 t
IV	$8296,70 + 1988,5 \cdot 2,00 - 195,1 \cdot 1,0 = 12078,60$	0,542 t
V	$12078,60 + 1793,4 \cdot 2,00 - 289,6 \cdot 1,0 = 15375,80$	0,690 t
VI	$15375,80 + 1503,8 \cdot 2,00 - 402,2 \cdot 1,0 = 17981,20$	0,807 t
VII	$17981,20 + 1101,6 \cdot 2,00 - 514,5 \cdot 1,0 = 19669,90$	0,883 t
VIII	$19669,90 + 587,1 \cdot 2,00 - 587,1 \cdot 1,0 = 20257,00$	0,909 t

### Kreuzlinienabschnitte bzw. Schlußliniensenkungen.

Die Kreuzlinienabschnitte für jede Stellung der Last  $P = 1$  t (für jeden Belastungsfall) ermitteln wir der vielen Stellungen wegen nicht mit Hilfe von  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$  bzw.  $M_0$  und  $\xi$ , sondern wie beim geraden Stab (vgl. Teil I, Kap. V, sowie Beisp. 2 und 3) auf Grund des Satzes von der Gegenseitigkeit der Formänderungen mit Hilfe der Biegelinie des Zweigelenkbogens für die Belastung  $M = 1$  am Stabende, welche nichts anderes ist als die Einflußlinie der Kreuzlinienabschnitte bzw. Schlußliniensenkungen. Diese Biegelinie erhalten wir nach Mohr durch Belasten des Zweigelenkbogens mit den in nachstehender Tabelle V zusammengestellten elastischen Gewichten  $E \cdot \Delta F = \left( \frac{x}{l} - \frac{B}{2} \cdot y \right) w$  infolge  $M = 1$  bei B (als Kontrolle muß  $\sum_0^l \frac{x}{l} w = \frac{1}{2} \sum_0^l w$  und  $\sum_0^l E \cdot \Delta F = E \cdot \bar{\alpha}$  sein) und Zeichnen eines Seilpolygons dazu mit der Polweite  $H'$  (Fig. 532). Die Kreuzlinienabschnitte bzw. die Schlußliniensenkungen, welche letztere wir beim Bogen vorteilhafter verwenden, erhalten wir nun in gleicher Weise wie beim geraden Stab für eine bestimmte Laststellung zu:

$$k^a = -\frac{\delta^b}{\beta} = -s^b \quad \text{und} \quad k^b = -\frac{\delta^a}{\beta} = -s^a$$

oder

$$S^b = \frac{b}{l} \cdot k^a = -\frac{b}{l} \cdot \frac{\delta^b}{\beta} = -\frac{b}{l} \cdot s^b$$

und

$$S^a = \frac{a}{l} \cdot k^b = -\frac{a}{l} \cdot \frac{\delta^a}{\beta} = -\frac{a}{l} \cdot s^a.$$

Da wir den Winkel  $\beta$  bereits besitzen, so wählen wir:

$$S^b = -\frac{b}{l} \cdot \frac{\delta^b}{\beta} = -\frac{-21,10 \cdot E \cdot \delta^b}{-28,00 \cdot 30,265},$$

$$E \cdot \delta^b = \eta^b \cdot H', \quad H' = 25, \quad \text{daher} \quad S^b = -0,6225 \cdot \eta^b,$$

worin  $\eta^b$  die im Längenmaßstab zu messenden Ordinaten der Biegelinie für  $M^B = 1$  sind.

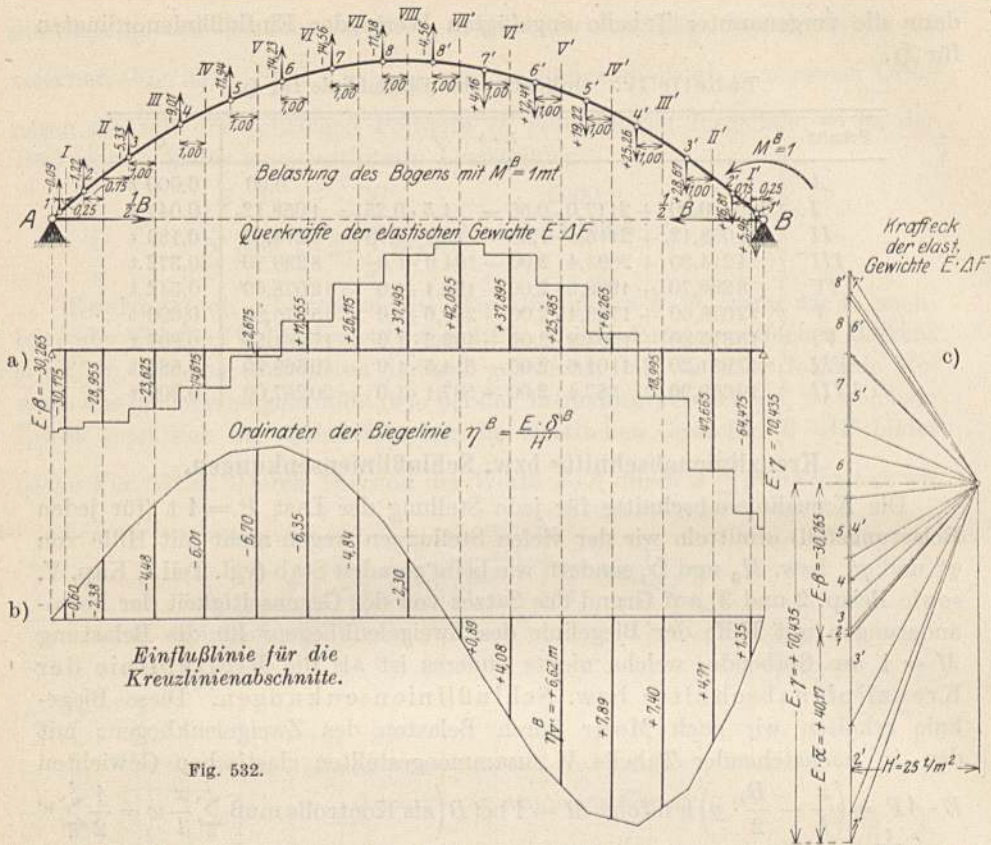


Fig. 532.

Tabelle V.

Lamelle	$\frac{x}{l} w$	$\frac{B}{2} y w$	$E \cdot \Delta F$
1	0,05	0,14	- 0,09
2	0,88	2,10	- 1,22
3	4,64	9,97	- 5,33
4	9,52	18,53	- 9,01
5	15,57	27,51	- 11,94
6	23,98	38,21	- 14,23
7	34,32	48,88	- 14,56
8	44,39	55,77	- 11,38
8'	51,21	55,77	- 4,56
7'	53,04	48,88	+ 4,16
6'	50,62	38,21	+ 12,41
5'	46,73	27,51	+ 19,22
4'	43,79	18,53	+ 25,26
3'	38,64	9,97	+ 28,67
2'	18,91	2,10	+ 16,81
1'	6,10	0,14	+ 5,96
$\frac{1}{2} \cdot \sum w$	$= 442,40$	$E \cdot \alpha = + 40,17$	

Die Werte  $E \cdot \delta^b$  gehen aus der Biegelinie für  $M^B = 1$  hervor; da der Bogen symmetrisch ist, so ist die Biegelinie für  $M^A = 1$  das Spiegelbild der in Fig. 532b für  $M^B = 1$  gezeichneten. Aus diesem Grunde erhalten wir die Werte  $E \cdot \delta^a$  aus dieser Figur dadurch, daß wir symmetrisch liegende Laststellungen vertauschen; es ist daher z. B.

$E \cdot \delta_1^a = E \cdot \delta_1^b$  und, da  $a = b$ ,  
so ist  $S_1^b = S_1^a$ ,

so daß die Ordinaten  $S^a$  auch bekannt sind (siehe Tabelle VI).

Rechnerisch erhalten wir die Durchbiegungen  $E \cdot \delta^b$ , wenn wir (siehe Tabelle VI) die Momente des mit den elastischen Gewichten  $E \cdot \Delta F$  der Ta-

belle V belasteten einfachen Balkens ermitteln, was wieder am einfachsten dadurch geschieht, daß wir jedes folgende Moment aus dem vorhergehenden



ermitteln, zu welchem Zweck man sich die Querkräfte für die elastischen Gewichte  $E \cdot \Delta F$  bildet (siehe Fig. 532 a).

Tabelle VI.

Schnitt	$E \cdot \delta^b$	$S^a$	$S^b$	$\frac{S^a + S^b}{2} B$	$\xi$	$H$
A		0,00	0,000	—	—	—
I	0,00 - 30,265 · 0,50 + 0,09 · 0,25 = - 15,11	- 0,840	+ 0,376	- 0,044	+ 0,047	+ 0,003
II	- 15,11 - 30,175 · 1,50 + 1,22 · 0,75 = - 59,46	- 2,934	+ 1,480	- 0,138	+ 0,189	+ 0,051
III	- 59,46 - 28,955 · 2,00 + 5,33 · 1,00 = - 112,04	- 4,594	+ 2,790	- 0,171	+ 0,372	+ 0,201
IV	- 112,04 - 23,625 · 2,00 + 9,01 · 1,00 = - 150,28	- 4,911	+ 3,742	- 0,111	+ 0,542	+ 0,431
V	- 150,28 - 14,615 · 2,00 + 11,90 · 1,00 = - 167,57	- 4,120	+ 4,172	+ 0,005	+ 0,690	+ 0,695
VI	- 167,57 - 2,675 · 2,00 + 14,23 · 1,00 = - 158,69	- 2,542	+ 3,951	+ 0,133	+ 0,807	+ 0,940
VII	- 158,69 + 11,555 · 2,00 + 14,56 · 1,00 = - 121,02	- 0,551	+ 3,013	+ 0,234	+ 0,883	+ 1,117
VIII	- 121,02 + 26,115 · 2,00 + 11,38 · 1,00 = - 57,41	+ 1,430	+ 1,430	+ 0,272	+ 0,909	+ 1,181
VII'	- 57,41 + 37,495 · 2,00 + 4,56 · 1,00 = + 22,14	+ 3,013	- 0,551			+ 1,117
VI'	+ 22,14 + 42,055 · 2,00 - 4,16 · 1,00 = + 102,09	+ 3,951	- 2,542			+ 0,940
V'	+ 102,09 + 37,895 · 2,00 - 12,41 · 1,00 = + 165,47	+ 4,172	- 4,120			+ 0,695
IV'	+ 165,47 + 25,485 · 2,00 - 19,22 · 1,00 = + 197,22	+ 3,742	- 4,911			+ 0,431
III'	+ 197,22 + 6,265 · 2,00 - 25,26 · 1,00 = + 184,49	+ 2,790	- 4,594			+ 0,201
II'	+ 184,49 - 18,995 · 2,00 - 28,67 · 1,00 = + 117,83	+ 1,480	- 2,934			+ 0,051
I'	+ 117,83 - 47,665 · 1,50 - 16,81 · 0,75 = + 33,73	+ 0,376	- 0,840			+ 0,003
B	+ 33,73 - 64,475 · 0,50 - 5,96 · 0,25 = 0,00	0,000	0,000			—

Gesamtbogenschübe  $H$ .

Die durch die Last  $P = 1$  t in ihren einzelnen Stellungen am eingespannten Bogen hervorgerufenen Gesamtbogenschübe  $H$  erhalten wir nach Gl. (444) zu

$$H = \xi + \frac{B}{2} (M^A + M^B).$$

Nun ist aber [vgl. Fig. 171 e sowie Gl. (221) und (222)] am symmetrischen geraden oder bogenförmigen Stab:

$$M^A \cdot \frac{l-a}{a} + M^B = k^b = S^a \cdot \frac{l}{a},$$

$$M^B \cdot \frac{l-b}{b} + M^A = k^a = S^b \cdot \frac{l}{b},$$

oder

$$M^A \cdot \frac{l-a}{l} + M^B \cdot \frac{a}{l} = S^a,$$

$$M^A \cdot \frac{b}{l} + M^B \cdot \frac{l-b}{l} = S^b,$$

woraus durch Addition:

$$M^A \left( \frac{l-a+b}{l} \right) + M^B \left( \frac{l-b+a}{l} \right) = S^a + S^b$$

und, da  $a = b$ :

$$M^A + M^B = S^a + S^b$$

so daß bei Symmetrie

$$H = \xi + \frac{B}{2} (S^a + S^b)$$

wonach in Tabelle VI für die einzelnen Stellungen der Last  $P = 1$  t die Gesamtbogenschübe  $H$  berechnet wurden, deren Werte auch als Ordinaten der Einflußlinie für  $H$  betrachtet werden können.

### Einflußlinien der Kernpunkts-Momente.

Die Kernpunktsordinaten  $y_{k_0}$  bzw.  $y_{k_u}$  berechnen sich aus (vgl. Fig. 533)

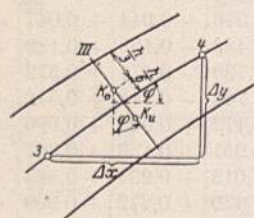


Fig. 533.

$$y_k = y \pm \frac{h}{6} \cos \varphi$$

$$\text{wobei} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

Für die Querschnittshöhen  $h$  setzen wir das Mittel der in Tabelle I eingeführten Höhen.

Tabelle VII. Ordinaten der Kernpunkte.

Schnitt	$\Delta y$	$\Delta x$	$\cos \varphi$	$y$	$h$	$\frac{h}{6} \cos \varphi$	$y_{k_0}$	$y_{k_u}$
A	0,245	0,25	0,715	0,000	1,30	0,155	0,155	- 0,155
I	0,872	1,00	0,753	0,488	1,24 <sub>5</sub>	0,154	0,642	0,334
II	1,307	1,75	0,802	1,743	1,14	0,152	1,895	1,591
III	1,235	2,00	0,851	3,102	1,02 <sub>5</sub>	0,145	3,247	2,957
IV	0,989	2,00	0,897	4,215	0,94 <sub>5</sub>	0,141	4,356	4,074
V	0,744	2,00	0,937	5,081	0,88	0,137	5,218	4,944
VI	0,498	2,00	0,970	5,702	0,82 <sub>5</sub>	0,133	5,835	5,569
VII	0,251	2,00	0,992	6,078	0,78 <sub>5</sub>	0,130	6,208	5,948
VIII	0,000	2,00	1,000	6,200	0,75	0,125	6,325	6,075

Die Balkenmomente für die einzelnen Laststellungen sind in Fig. 534 konstruiert worden. Die Momentenlinien für die einzelnen Laststellungen (Belastungsfälle) tragen wir wie üblich an ein und dieselbe Systemfigur an. Zuerst bestimmen wir mit Hilfe der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte bzw. Schlußliniensenkungen die Schlußlinie und hängen an diese die  $M_0$ -Fläche an.

Die Bogenmomente  $-H \cdot y_{k_0}$  und  $-H \cdot y_{k_u}$  haben wir für die 4 Schnitte, für welche wir die Einflußlinien der Kernpunktsmomente bestimmen wollen, in Tabelle VIII berechnet und in Fig. 534a aufgetragen.

Die Ordinaten der Einflußlinie des Momentes bezüglich eines Kernpunktes finden wir als die auf der Senkrechten durch diesen Punkt abgegriffenen Ordinaten sämtlicher, den einzelnen Laststellungen entsprechenden Balkenmomentenflächen, zuzüglich (algebraisch) der unter der betreffenden Laststellung abgegriffenen Ordinate des Bogenmomentes bezüglich des betreffenden Kernpunktes; diese resultierenden Ordinaten werden in denjenigen Laststellungen aufgetragen, aus deren zugehöriger Balkenmomentenfläche sie gewonnen wurden. Dabei ist zu beachten, daß die Laststellungen der rechten Bogenhälfte der Symmetrie wegen das Spiegelbild der Balkenmomentenflächen infolge der Laststellungen auf der linken Bogenhälfte hervorrufen, so daß man die Ordinaten für die rechte Hälfte der Einflußlinien in dem symmetrisch zur Bogenmitte

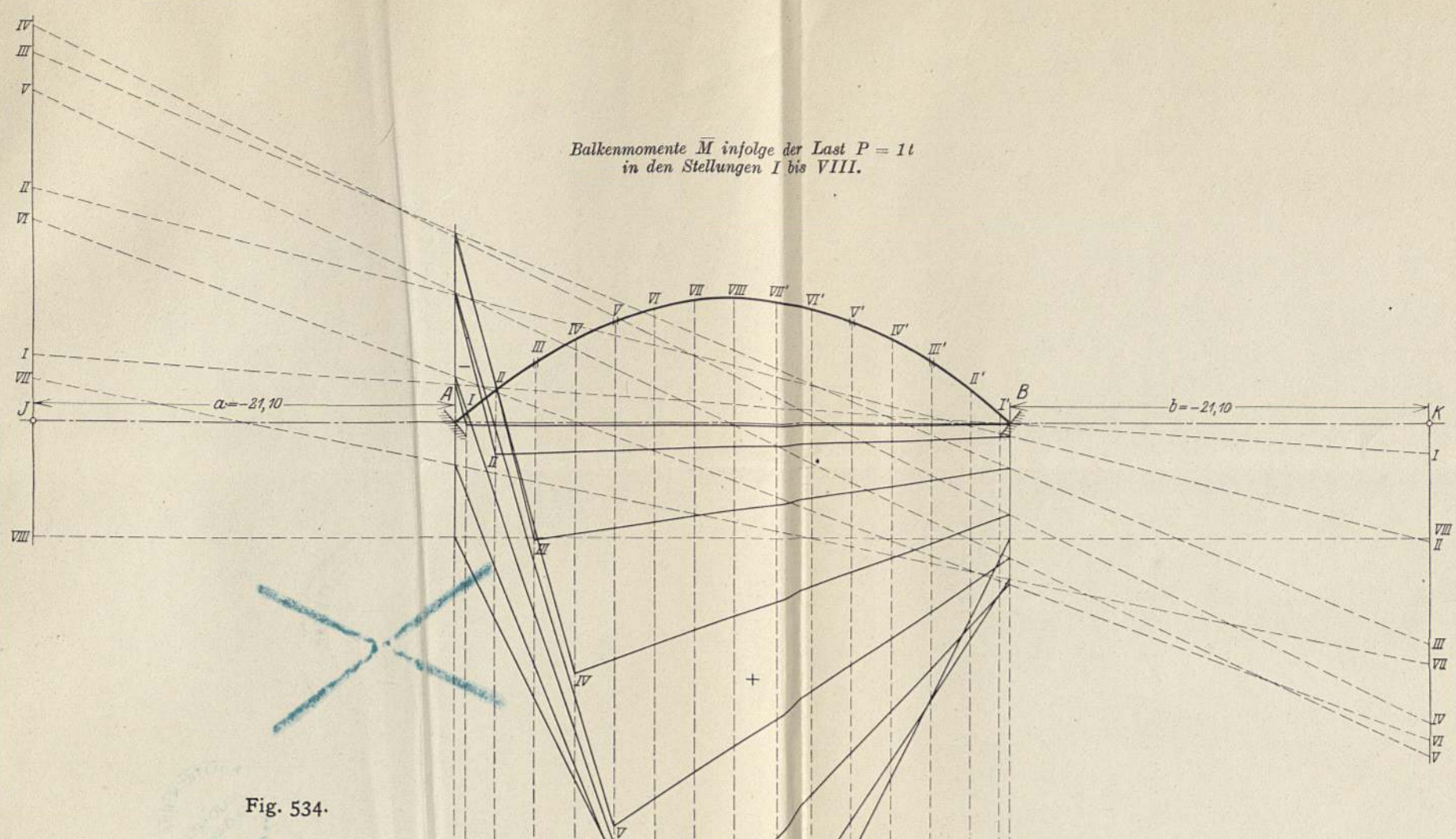


Fig. 534.

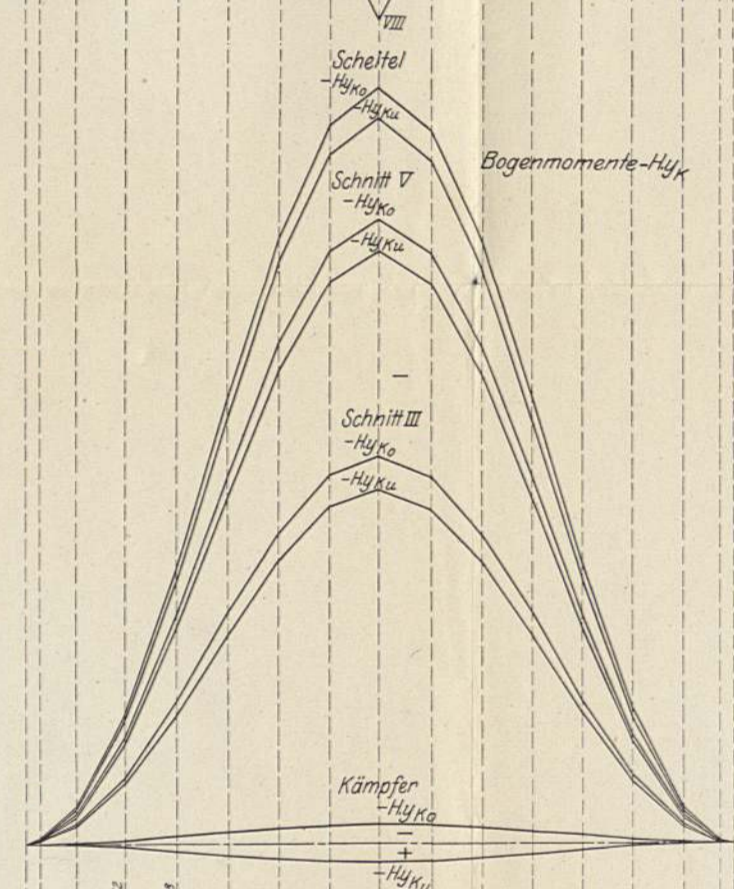


Fig. 534a.



Fig. 534b.

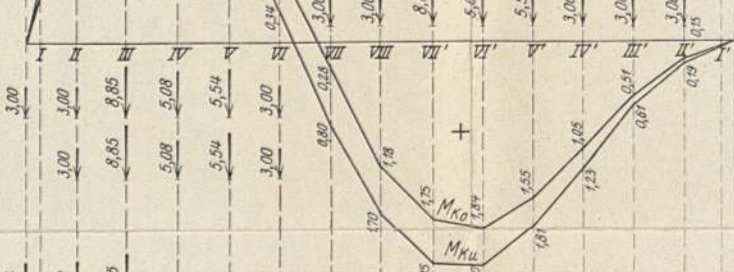


Fig. 534c.

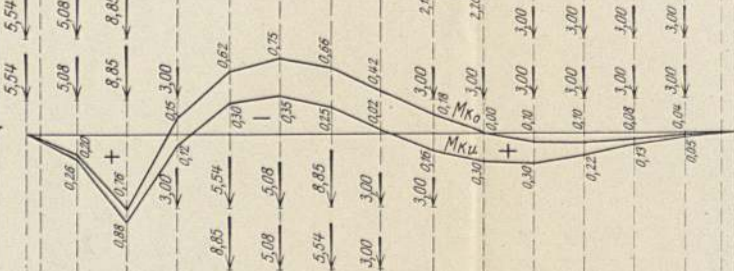


Fig. 534d.



Fig. 534e.

$$\begin{aligned}
 &+ M_{k_o} = 3,00 (0,28 + 1,18 + 1,05 + 0,55 + 0,15) + 8,85 \cdot 1,75 \\
 &\quad + 5,08 \cdot 1,84 + 5,54 \cdot 1,55 = 43,06 \text{ mt} \\
 &+ M_{k_u} = 3,00 (0,80 + 1,70 + 1,23 + 0,61 + 0,19) + 8,85 \cdot 2,15 \\
 &\quad + 5,08 \cdot 2,20 + 5,54 \cdot 1,81 = 53,83 \text{ mt} \\
 &- M_{k_o} = 3,00 (0,12 + 1,70 + 0,78) + 8,85 \cdot 2,52 + 5,08 \cdot 2,48 \\
 &\quad + 5,54 \cdot 1,84 = 52,89 \text{ mt} \\
 &- M_{k_u} = 3,00 (1,46 + 0,37) + 8,85 \cdot 2,20 + 5,08 \cdot 2,14 \\
 &\quad + 5,54 \cdot 1,40 = 43,59 \text{ mt} \\
 \\
 &+ M_{k_o} = 5,08 \cdot 0,20 + 8,85 \cdot 0,76 + 3,00 (0,10 + 0,10 + 0,08 \\
 &\quad + 0,04) = 8,71 \text{ mt} \\
 &+ M_{k_u} = 5,08 \cdot 0,26 + 8,85 \cdot 0,88 + 3,00 (0,12 + 0,16 + 0,30 \\
 &\quad + 0,30 + 0,22 + 0,13 + 0,05) = 12,95 \text{ mt} \\
 \\
 &- M_{k_o} = 3,00 (0,15 + 0,42 + 0,18) + 5,54 \cdot 0,62 + 5,08 \cdot 0,75 \\
 &\quad + 8,85 \cdot 0,66 = 15,33 \text{ mt} \\
 &- M_{k_u} = 8,85 \cdot 0,30 + 5,08 \cdot 0,35 + 5,54 \cdot 0,25 + 3,00 \cdot 0,02 \\
 &\quad = 5,89 \text{ mt} \\
 \\
 &+ M_{k_o} = 3,00 (0,08 + 0,40) + 5,54 \cdot 0,26 + 5,08 \cdot 0,68 \\
 &\quad + 8,85 \cdot 1,40 = 18,72 \text{ mt} \\
 &+ M_{k_u} = 3,00 (0,12 + 0,70) + 5,54 \cdot 0,34 + 5,08 \cdot 0,80 \\
 &\quad + 8,85 \cdot 1,60 = 22,56 \text{ mt} \\
 &- M_{k_o} = 3,00 (0,33 + 0,62 + 0,40 + 0,20 + 0,06) + 5,54 \cdot 0,70 \\
 &\quad + 5,08 \cdot 0,85 + 8,85 \cdot 0,78 = 19,93 \text{ mt} \\
 &- M_{k_u} = 3,00 (0,36 + 0,27 + 0,13 + 0,04) + 8,85 \cdot 0,54 \\
 &\quad + 5,08 \cdot 0,52 + 5,54 \cdot 0,41 = 12,09 \text{ mt} \\
 \\
 &+ M_{k_o} = 3,00 (0,05 + 0,20 + 0,20 + 0,34 + 0,30 + 0,16 + 0,05) \\
 &\quad + 5,54 \cdot 0,16 + 5,08 \cdot 0,30 + 8,85 \cdot 0,34 = 9,32 \text{ mt} \\
 &+ M_{k_u} = 3,00 (0,04 + 0,17 + 0,18 + 0,12 + 0,04) + 5,54 \cdot 0,12 \\
 &\quad + 5,08 \cdot 0,18 + 8,85 \cdot 0,17 = 4,72 \text{ mt} \\
 \\
 &- M_{k_o} = (3,00 + 5,08) \cdot 0,21 + 8,85 \cdot 1,01 - 5,54 \cdot 0,20 = 9,53 \text{ mt} \\
 &- M_{k_u} = 3,00 (0,03 + 0,51) + 8,85 \cdot 1,30 + 5,08 \cdot 0,51 \\
 &\quad + 5,54 \cdot 0,03 = 15,89 \text{ mt}
 \end{aligned}$$

Fig. 534.



liegenden (mit Strich bezeichneten) Schnitt abgreifen muß. In Fig. 534 b—e sind die Einflußlinien der Kernpunktsmomente für den Kämpfer, die Schnitte III und V, sowie den Scheitel des Bogens aufgetragen.

Tabelle VIII. Bogenmomente —  $H y_k$ .

Last $P=1$ in	Kämpfer	Schnitt III	Schnitt V	Scheitel
A	—	—	—	—
I	- 0,000 <sub>5</sub>	- 0,010	- 0,016	- 0,018
	+ 0,000 <sub>5</sub>	- 0,009	- 0,015	- 0,018
II	- 0,008	- 0,166	- 0,266	- 0,323
	+ 0,008	- 0,151	- 0,252	- 0,310
III	- 0,031	- 0,653	- 1,049	- 1,271
	+ 0,031	- 0,594	- 0,994	- 1,221
IV	- 0,067	- 1,399	- 2,249	- 2,726
	+ 0,067	- 1,274	- 2,131	- 2,618
V	- 0,108	- 2,257	- 3,627	- 4,396
	+ 0,108	- 2,055	- 3,436	- 4,222
VI	- 0,146	- 3,052	- 4,905	- 5,946
	+ 0,146	- 2,780	- 4,647	- 5,711
VII	- 0,173	- 3,627	- 5,829	- 7,065
	+ 0,173	- 3,303	- 5,522	- 6,786
VIII	- 0,183	- 3,835	- 6,162	- 7,470
	+ 0,183	- 3,492	- 5,839	- 7,175

Rechnerisch erhalten wir die Ordinaten der Einflußlinien der Kernpunktsmomente aus Tabelle IX. Wie aus Fig. 534f ersichtlich, haben die Balkenmomente  $M_k$  die Werte:

a) Last  $P = 1$  t rechts vom Schnitt  $x$ :

$$\bar{M}_k = S^a + \frac{S^b - S^a}{l - a - b} \left( x - a \mp \frac{h}{6} \sin \varphi \right) + \frac{l - \xi}{l} \left( x \mp \frac{h}{6} \sin \varphi \right);$$

b) Last  $P = 1$  t links vom Schnitt  $x$ :

$$\bar{M}_k = S^a + \frac{S^b - S^a}{l - a - b} \left( x - a \mp \frac{h}{6} \sin \varphi \right) + \frac{\xi}{l} \left( l - x \pm \frac{h}{6} \sin \varphi \right).$$

Hierin gilt das obere Vorzeichen für  $M_{ko}$  und das untere für  $M_{ku}$ .

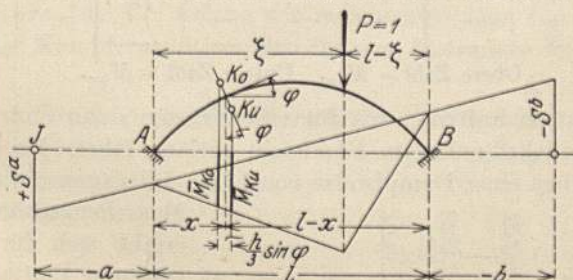


Fig. 534f.

### Auswertung der Einflußlinien.

Die Übertragung der Verkehrslast auf den Bogen erfolgt mittels der Hängesäulen. Die Fahrbahn ist demnach so zu belasten, daß in den Hängestangen

Tabelle IX. Berechnung der Einflußlinien der Kernpunktsmomente.

Last $P = 1$ in	Balkenmomente $\bar{M}_k$				Bogenmomente $-Hy_k$				Ordinaten der Einflußlinien			
	Kämpfer	Schnitt III	Schnitt V	Scheitel	Kämpfer	Schnitt III	Schnitt V	Scheitel	Kämpfer	Schnitt III	Schnitt V	Scheitel
A	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
I	-0,60	+0,03	+0,04	+0,01	-0,00	-0,01	-0,02	-0,02	-0,60	+0,02	+0,02	-0,01
	-0,34	+0,04	+0,05	+0,01	+0,00	-0,01	-0,02	-0,02	-0,34	+0,03	+0,03	-0,01
II	-1,69	+0,37	+0,35	+0,27	-0,01	-0,17	-0,27	-0,32	-1,70	+0,20	+0,08	-0,05
	-1,47	+0,41	+0,37	+0,27	+0,01	-0,15	-0,25	-0,31	-1,46	+0,26	+0,12	-0,04
III	-1,49	+1,41	+1,31	+1,10	-0,03	-0,65	-1,05	-1,26	-2,52	+0,76	+0,26	-0,16
	-2,23	+1,47	+1,33	+1,10	+0,03	-0,59	-0,99	-1,22	-2,20	+0,88	+0,34	-0,12
IV	-2,41	+0,99	+2,93	+2,44	-0,07	-1,14	-2,25	-2,74	-2,48	-0,15	+0,68	-0,30
	-2,21	+1,39	+2,94	+2,44	+0,07	-1,27	-2,14	-2,62	-2,14	+0,12	+0,80	-0,18
V	-1,73	+1,63	+5,03	+4,06	-0,11	-2,25	-3,63	-4,40	-1,84	-0,62	+1,40	-0,34
	-1,51	+1,76	+5,04	+4,06	+0,11	-2,06	-3,44	-4,23	-1,40	-0,30	+1,60	-0,17
VI	-0,63	+2,30	+5,31	+5,75	-0,15	-3,05	-4,91	-5,95	-0,78	-0,75	+0,40	-0,20
	-0,49	+2,43	+5,30	+5,75	+0,15	-2,78	-4,65	-5,72	-0,34	-0,35	+0,70	+0,03
VII	+0,45	+2,97	+5,50	+7,29	-0,17	-3,63	-5,83	-7,08	+0,28	-0,66	-0,33	+0,21
	+0,63	+3,05	+5,52	+7,29	+0,17	-3,30	-5,52	-6,78	+0,80	-0,25	-0,00	+0,51
VIII	+1,36	+3,42	+5,46	+8,43	-0,18	-3,84	-6,16	-7,42	+1,18	-0,42	-0,70	+1,01
	+1,52	+3,47	+5,48	+8,43	+0,18	-3,49	-5,84	-7,13	+1,70	-0,02	-0,36	+1,30
VII	+1,92	+3,45	+4,98	+7,29	-0,17	-3,63	-5,83	-7,08	+1,75	-0,18	-0,85	+0,21
	+1,98	+3,46	+4,98	+7,29	+0,17	-3,30	-5,52	-6,78	+2,15	+0,16	-0,54	+0,51
VI	+1,99	+3,05	+4,13	+5,75	-0,15	-3,05	-4,91	-5,95	+1,84	+0,00	-0,78	-0,20
	+2,05	+3,08	+4,13	+5,75	+0,15	-2,78	-4,65	-5,72	+2,20	+0,30	-0,52	+0,03
V	+1,66	+2,35	+3,01	+4,06	-0,11	-2,25	-3,63	-4,40	+1,55	+0,10	-0,62	-0,34
	+1,70	+2,36	+3,03	+4,06	+0,11	-2,06	-3,44	-4,23	+1,81	+0,30	-0,41	-0,17
IV	+1,12	+1,24	+1,85	+2,44	-0,07	-1,14	-2,25	-2,74	+1,05	+0,10	-0,40	-0,30
	+1,16	+1,49	+1,87	+2,44	+0,07	-1,27	-2,14	-2,62	+1,23	+0,22	-0,27	-0,18
III	+0,54	+0,73	+0,85	+1,10	-0,03	-0,65	-1,05	-1,26	+0,51	+0,08	-0,20	-0,16
	+0,58	+0,72	+0,86	+1,10	+0,03	-0,59	-0,99	-1,22	+0,61	+0,13	-0,13	-0,12
II	+0,16	+0,21	+0,21	+0,27	-0,01	-0,17	-0,27	-0,32	+0,15	+0,04	-0,06	-0,05
	+0,20	+0,20	+0,21	+0,27	+0,01	-0,15	-0,25	-0,31	+0,19	+0,05	-0,04	-0,04
I	+0,03	+0,02	+0,00	+0,01	-0,00	-0,01	-0,02	-0,02	+0,03	+0,01	-0,02	-0,01
	+0,04	+0,03	+0,01	+0,01	+0,00	-0,01	-0,02	-0,02	+0,04	+0,02	-0,01	-0,01
B	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Obere Zahl =  $M_{k_o}$ . Untere Zahl =  $M_{k_u}$ .

die größte Reaktion auftritt, was für einen Bogen dann eintritt, wenn die Dampfwalze möglichst nahe am Randstein entlang fährt. Da die Belastung der Fahrbahn neben einer Dampfwalze von 17,5 t Dienstgewicht aus 0,400 t/m<sup>2</sup>

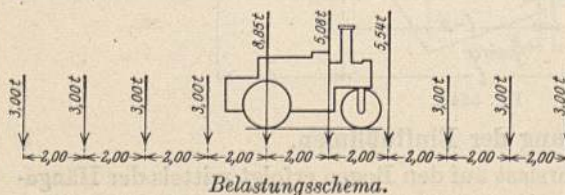


Fig. 535.

Menschengedränge besteht, so ergibt sich für die Auswertung der Einflußlinien nebenstehendes Belastungsschema (Fig. 535), wobei die Lasten auch in umgekehrter Reihenfolge wirken können. Über den

Einflußlinien (Fig. 534 b–e) sind die jeweiligen Laststellungen eingetragen, welche die daneben eingeschriebenen Größtwerte der Kernpunktmomente zur Folge haben.

### Auflagerdrücke $V^A$ .

Die durch die Last  $P = 1 \text{ t}$  in ihren einzelnen Stellungen am eingespannten Bogen hervorgerufenen Auflagerdrücke  $V^A$  erhalten wir nach Gl. (447) zu:

$$V^A = \mathfrak{B}^A + \frac{M^B - M^A}{l}$$

Hierin ist

$$\mathfrak{B}^A = 1 \cdot \frac{l - x}{l}$$

und die Kämpfermomente  $M^A$  und  $M^B$  erhalten wir entweder graphisch aus Fig. 534 oder rechnerisch nach den Gl. (336) und (337).

Tabelle X.

$P=1$ in	$g$	$M^A$	$M^B$	$\frac{M^B - M^A}{l}$	$V^A$
A	1,000	0	0	0	1,000
I	0,982	-0,47	0,01	0,017	0,999
II	0,909	-1,58	0,17	0,063	0,992
III	0,857	-2,36	0,56	0,104	0,961
IV	0,786	-2,31	1,14	0,123	0,909
V	0,714	-1,62	1,68	0,118	0,832
VI	0,643	-0,56	2,02	0,092	0,735
VII	0,572	0,54	1,95	0,050	0,622
VIII	0,500	1,43	1,43	0,000	0,500
VII'	0,429	1,95	0,54	-0,051	0,378
VI'	0,357	2,02	-0,56	-0,092	0,265
V'	0,286	1,68	-1,62	-0,118	0,168
IV'	0,214	1,14	-2,31	-0,123	0,091
III'	0,143	0,56	-2,36	-0,104	0,039
II'	0,071	0,17	-1,58	-0,063	0,008
I'	0,018	0,01	-0,47	-0,017	0,001

In Tabelle X wurden die Auflagerdrücke  $V^A$  für die einzelnen Stellungen der Last  $P = 1 \text{ t}$  berechnet; diese Werte sind nichts anderes als die Ordinaten der Einflußlinie für  $V^A$ , welche wir neben derjenigen für  $H$  und  $M^A$  zur Bestimmung der Kämpferresultierenden für eine bestimmte Verkehrsbelastung benötigen.

### Bestimmung der Kämpferresultierenden.

Die Kämpferresultierende für eine bestimmte Stellung der Verkehrslast erhalten wir durch Auswerten der Einflußlinien für  $H$ ,  $V^A$  und  $M^A$ , welche in Fig. 536 aufgetragen sind, und Zusammensetzen der erhaltenen Werte. So z. B. erhalten wir für Vollbelastung die in Fig. 536 eingeschriebenen Werte für  $H$ ,  $V^A$  und  $M^A$ , woraus

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{35,99^2 + 28,13^2} = 45,68 \text{ t, und}$$

$$r = \frac{M^A}{R} = \frac{14,26}{45,68} = 0,312 \text{ m (nach oben, siehe Fig. 536a).}$$

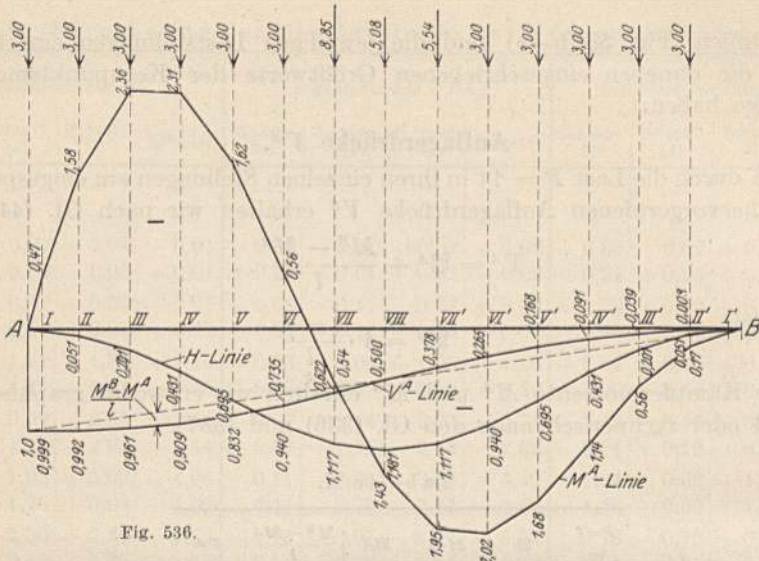


Fig. 536.

$$V^A = 3,00 (1,0 + 0,992 + 0,961 + 0,909 + 0,832 + 0,735 + 0,265 + 0,168 + 0,091 + 0,039 + 0,008) + 8,85 \cdot 0,622 + 5,08 \cdot 0,5 + 5,54 \cdot 0,378 = 28,13 \text{ t.}$$

$$H = 3,00 (0,051 + 0,201 + 0,431 + 0,695 + 0,940) \cdot 2 + 8,85 \cdot 1,117 + 5,08 \cdot 1,181 + 5,54 \cdot 1,117 = 35,99 \text{ t.}$$

$$M^A = 8,85 \cdot 0,54 + 5,08 \cdot 1,43 + 5,54 \cdot 1,95 + 3,00 (2,02 + 1,68 + 1,14 + 0,56 + 0,17 - 0,56 - 1,62 - 2,31 - 2,36 - 1,58) = 14,26 \text{ mt.}$$

### III. Belastungsfall: Temperaturänderung um $\pm 20^\circ \text{C}$ .

Die Berechnung erfolgt für eine Temperaturzunahme von  $t = +20^\circ \text{C}$ . Für eine Temperaturabnahme um  $20^\circ$  sind die Momente dann entgegengesetzt gleich.

Der Temperaturzunahme von  $t = 20^\circ \text{C}$  entspricht eine Spannweitenänderung von

$$\Delta = \alpha \cdot t \cdot l = 0,00001 \cdot 20 \cdot 28,00 = 0,0056 \text{ m.}$$

Damit erhalten wir nach Gl. (592a) unter Berücksichtigung, daß wegen der Symmetrie  $b = a$  und wegen voller Einspannung an den Kämpfern  $a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha}$ , die Kämpfermomente:

$$M_t^A = M_t^B = \frac{\Delta \cdot B}{2 \cdot \alpha} = \frac{2100000 \cdot 0,0056 \cdot 0,190}{2 \cdot 40,17} = 27,85 \text{ mt,}$$

und nach Gl. (444) unter Berücksichtigung von Gl. (586) den Gesamtbogenshub:

$$\begin{aligned} H_t &= \zeta_t + M_t^A \cdot B = \frac{E \cdot \Delta}{\sum_0^l y^2 w} + M_t^A \cdot B \\ &= \frac{2100000 \cdot 0,0056}{2 \cdot 11143,5} + 27,85 \cdot 0,190 = 5,82 \text{ t.} \end{aligned}$$

Nun ergeben sich die Kernpunktmomente infolge der gegebenen Temperaturerhöhung aus:

$$M_k = M_t^A - H_t \cdot y_k = 27,85 - 5,82 y_k,$$



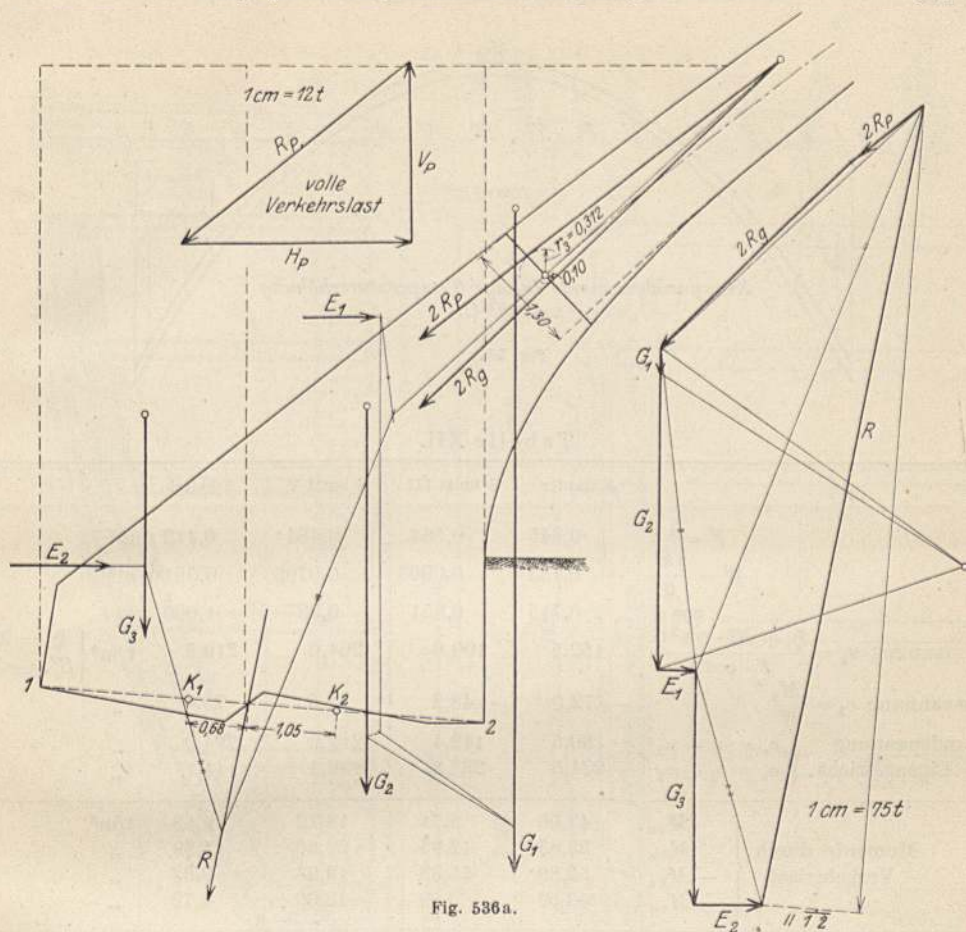


Fig. 536a.

wonach dieselben in Tabelle XI für die einzelnen Schnitte berechnet und in Fig. 537 aufgetragen wurden.

Die Randspannungen infolge Temperaturerhöhung ergeben sich darauf zu:

$$\sigma_o = \frac{M_{ku}}{W} \quad \text{und} \quad \sigma_u = -\frac{M_{ko}}{W}$$

**Grenzwerte der Randspannungen.**

In nachstehender Tabelle XII wurden die in den 4 Schnitten: Kämpfer, Schnitt III, Schnitt V und Scheitel auftretenden Randspannungen für die einzelnen Belastungsfälle berechnet und die Grenzwerte der Randspannungen gebildet.

Die Armierung des Bogens zeigt Fig. 538.

Tabelle XI.

Schnitt	$M_i^A = M_i^B$	- 5,82 $\gamma_{ko}$	$M_{ko}$
		- 5,82 $\gamma_{ku}$	$M_{ku}$
A	27,85	- 0,90	+ 26,95
		+ 0,90	+ 28,75
I	27,85	- 3,74	+ 24,11
		- 1,95	+ 25,90
II	27,85	- 11,03	+ 16,82
		- 9,26	+ 18,59
III	27,85	- 19,47	+ 8,38
		- 17,20	+ 10,65
IV	27,85	- 25,35	+ 2,50
		- 23,70	+ 4,15
V	27,85	- 30,35	- 2,50
		- 28,75	- 0,90
VI	27,85	- 33,95	- 6,10
		- 32,40	- 4,55
VII	27,85	- 36,15	- 8,30
		- 34,60	- 6,75
VIII	27,85	- 36,80	- 8,95
		- 35,30	- 7,45





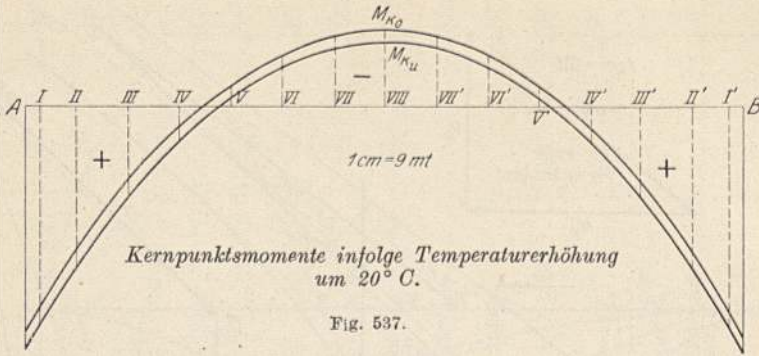


Tabelle XII.

		Kämpfer	Schnitt III	Schnitt V	Scheitel	
Normalspannung $\sigma_1 = \frac{\bar{\sigma}_s + H' \cdot \cos^2 \varphi}{F \cdot \cos \varphi}$	$F = bh$	0,845	0,564	0,484	0,413	m <sup>2</sup>
	$W = \frac{bh^2}{6}$	0,183	0,0963	0,0709	0,0516	m <sup>3</sup>
	$\cos \varphi$	0,715	0,851	0,937	1,000	
		152,5	190,6	201,0	219,5	t/m <sup>2</sup> $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_s = 93,466 \text{ t} \\ H' = -2,753 \text{ t} \end{array} \right.$
Biegungsspannung $\sigma_2 = \frac{M_o}{W}$		- 72,0	- 48,2	11,6	75,4	,,
Randspannung vom Eigengewicht $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_u = \sigma_1 - \sigma_2 \end{array} \right.$		80,5	142,4	212,6	294,9	,,
		224,5	238,8	189,4	144,1	,,
Momente durch Verkehrslast $\left\{ \begin{array}{l} M_{k_o} \\ M_{k_u} \\ -M_{k_o} \\ -M_{k_u} \end{array} \right.$		43,06	8,71	18,72	9,53	t/m <sup>2</sup>
		53,83	12,95	22,56	15,89	,,
		52,89	15,33	19,93	9,32	,,
		43,59	5,89	12,09	4,72	,,
Momente durch Temperatur $\left\{ \begin{array}{l} M_{k_o} \\ M_{k_u} \end{array} \right.$		$\pm$ 26,95	$\pm$ 8,38	$\pm$ 2,50	$\pm$ 8,95	t/m <sup>2</sup>
		$\pm$ 28,75	$\pm$ 10,65	$\pm$ 0,90	$\pm$ 7,45	,,
Grenzwerte der Momente durch Verkehr und Temperatur $\left\{ \begin{array}{l} M_{k_o} \\ M_{k_u} \\ -M_{k_o} \\ -M_{k_u} \end{array} \right.$		70,01	17,09	21,22	18,48	t/m <sup>2</sup>
		82,58	23,60	23,46	23,34	,,
		79,84	23,71	22,43	18,27	,,
		72,34	16,54	12,99	12,17	,,
Randspannungen durch Verkehr und Temperatur $\left\{ \begin{array}{l} \text{Aus pos. Momenten} \\ \text{Aus neg. Momenten} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sigma_u = -\frac{M_{k_o}}{W} \\ \sigma_o = \frac{M_{k_u}}{W} \\ \sigma_u = -\frac{M_{k_o}}{W} \\ \sigma_o = \frac{M_{k_u}}{W} \end{array} \right.$		- 383	- 178	- 300	- 358	t/m <sup>2</sup>
		452	245	331	453	,,
		436	246	316	354	,,
		- 395	- 172	- 183	- 236	,,
Grenzwerte der Randspannungen $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o \text{ max} \\ \sigma_u \text{ max} \\ \sigma_o \text{ min} \\ \sigma_u \text{ min} \end{array} \right.$		+ 533	+ 387	+ 544	+ 748	t/m <sup>2</sup>
		+ 661	+ 485	+ 505	+ 498	,,
		- 314	- 30	+ 30	+ 59	,,
		- 159	+ 61	- 111	- 214	,,

$\left. \begin{array}{l} + = \text{Druck} \\ - = \text{Zug} \end{array} \right\}$

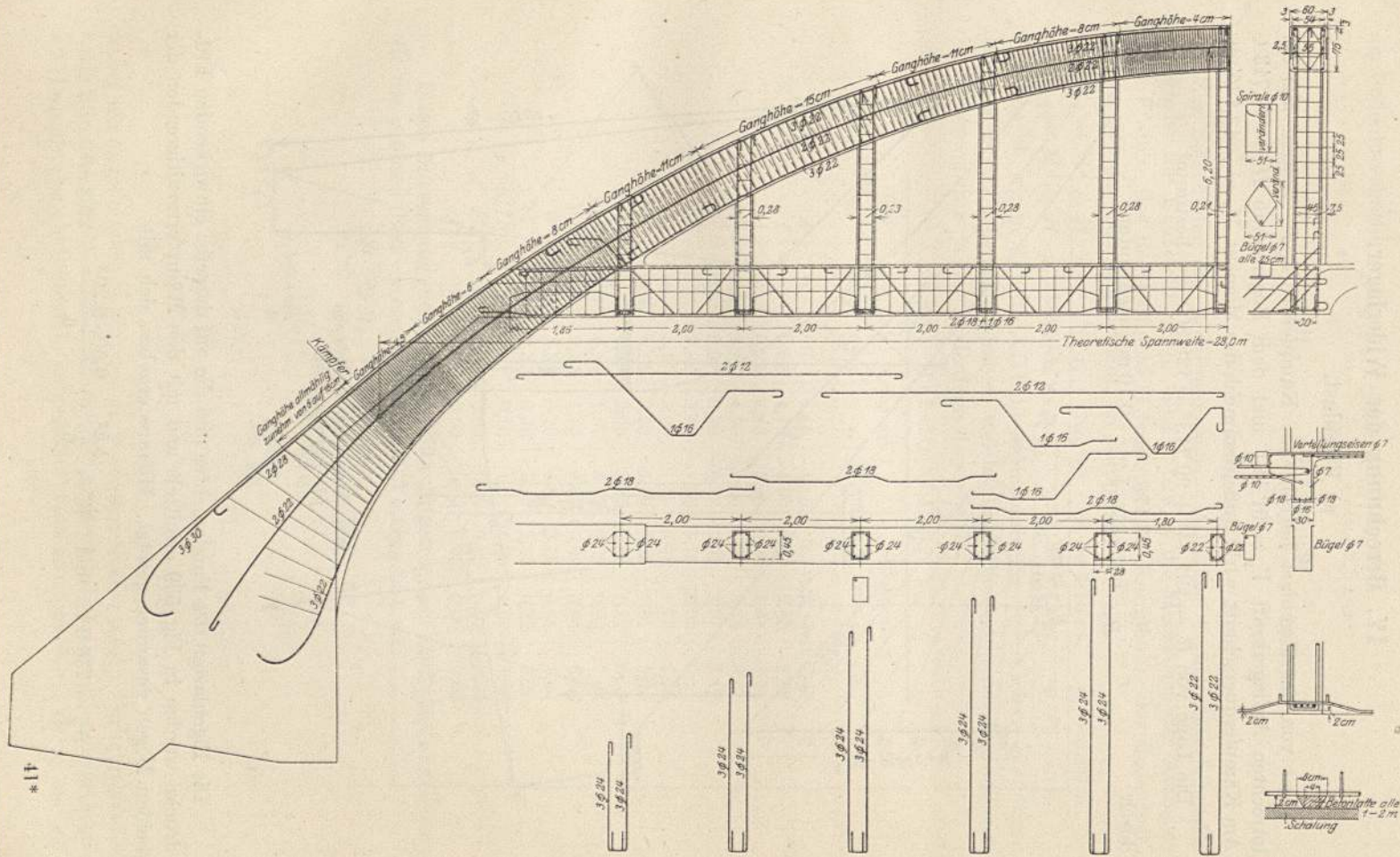


Fig. 538.

## IV. Berechnung der Widerlager.

## a) Eigenlast.

Der von der Eigenlast herrührende Kämpferdruck  $R_g$  besteht aus der lotrechten Auflagerkraft  $V_g = 91,44$  t und dem Bogenschub  $H_g = 90,713$  t. Am Kämpferquerschnitt wirkt außerdem noch das Moment  $M_g = -13,175$  mt.

Die Lage von  $R_g = \sqrt{91,44^2 + 90,713^2} = 128,80$  t ist bestimmt

durch 
$$r = \frac{M_g}{R_g} = -\frac{13,175}{128,80} = -0,10 \text{ m (nach unten).}$$

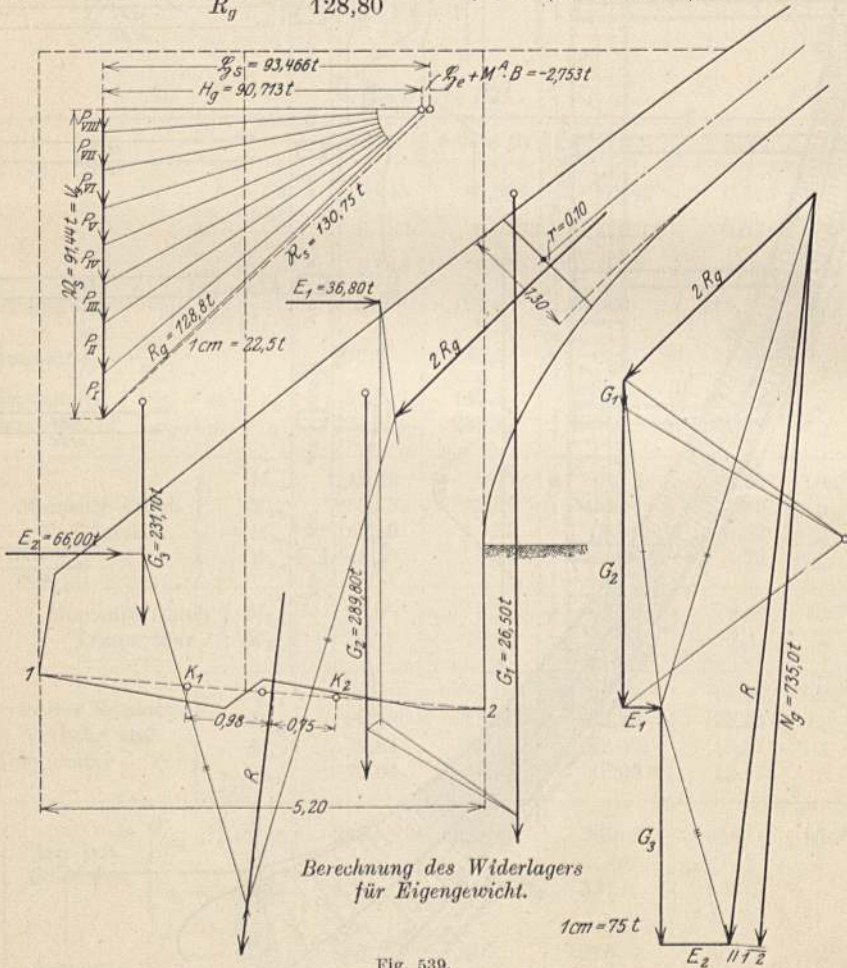


Fig. 539.

Die Eigenlasten des Fundamentes und die auf dasselbe einwirkenden Erd-drücke wurden in Fig. 539 ermittelt und mit den Kämpferresultierenden der beiden Bögen zusammengesetzt. Hieraus ergaben sich mit

$$N_g = 735,0 \text{ t} \quad \text{und} \quad W = \frac{bh^2}{6} = \frac{6,50 \cdot 5,20^2}{6} = 29,3 \text{ m}^3$$

die Bodenpressungen:

$$\sigma_1 = \frac{M_{k_2}}{W} = \frac{735,0 \cdot 0,75}{29,3} = 18,8 \text{ t/m}^2,$$

$$\sigma_2 = -\frac{M_{k_1}}{W} = -\frac{735,0 \cdot 0,98}{29,3} = 24,6 \text{ t/m}^2.$$

### b) Verkehrslast.

Zur Berechnung der Bodenpressungen infolge der Verkehrslast benutzen wir wieder die Einflußlinien. Sind  $x$  bzw.  $y$  die Hebelarme der Auflagerkraft  $V^A$  bzw. des Bogenschubes  $H$  bezüglich der Kernpunkte der Bodenfuge, und ist  $M^A$  das Kämpfermoment, so wird (Fig. 539a):

$$M_{k_1} = M^A + H \cdot y_1 - V^A \cdot x_1, \quad \text{wobei} \quad x_1 = 4,16 \text{ m}, \quad y_1 = 5,50 \text{ m},$$

$$M_{k_2} = M^A + H \cdot y_2 - V^A \cdot x_2, \quad \text{,,} \quad x_2 = 2,43 \text{ m}, \quad y_2 = 5,40 \text{ m},$$

und wonach wir in Tabelle XIII diese Momente für die einzelnen Stellungen der Last  $P = 1 \text{ t}$  berechnet haben, welche die Ordinaten  $\eta_k$  der Einflußlinien der Kernmomente in der Bodenfuge darstellen.

Tabelle XIII.

Last $P=1$ in	Aus Tab. X $M^A$	Kernpunkt 1			Kernpunkt 2		
		$H \cdot y_1$	$V^A \cdot x_1$	$\eta_{k_1}$	$H \cdot y_2$	$V^A \cdot x_2$	$\eta_{k_2}$
A	0	0	4,16	-4,16	0	2,43	-2,43
I	-0,47	0,02	4,15	-4,60	0,02	2,43	-2,88
II	-1,58	0,28	4,13	-5,43	0,28	2,41	-3,71
III	-2,36	1,11	4,00	-5,25	1,09	2,34	-3,61
IV	-2,31	2,37	3,78	-3,72	2,33	2,21	-2,19
V	-1,62	3,82	3,46	-1,26	3,76	2,02	0,11
VI	-0,56	5,17	3,06	1,55	5,08	1,79	2,73
VII	0,54	6,14	2,59	4,09	6,03	1,51	5,06
VIII	1,43	6,50	2,08	5,85	6,38	1,22	6,59
VII'	1,95	6,14	1,57	6,52	6,03	0,92	7,06
VI'	2,02	5,17	1,10	6,09	5,08	0,64	6,46
V'	1,68	3,82	0,70	4,80	3,76	0,41	5,04
IV'	1,14	2,37	0,38	3,13	2,33	0,22	3,25
III'	0,56	1,11	0,16	1,51	1,09	0,09	1,56
II'	0,17	0,28	0,03	0,42	0,28	0,02	0,43
I'	0,01	0,02	0,00	0,03	0,02	0,00	0,03

Durch Auswertung dieser in Fig. 539 a aufgetragenen Einflußlinien erhalten wir die größten Bodenpressungen infolge Verkehrslast zu:

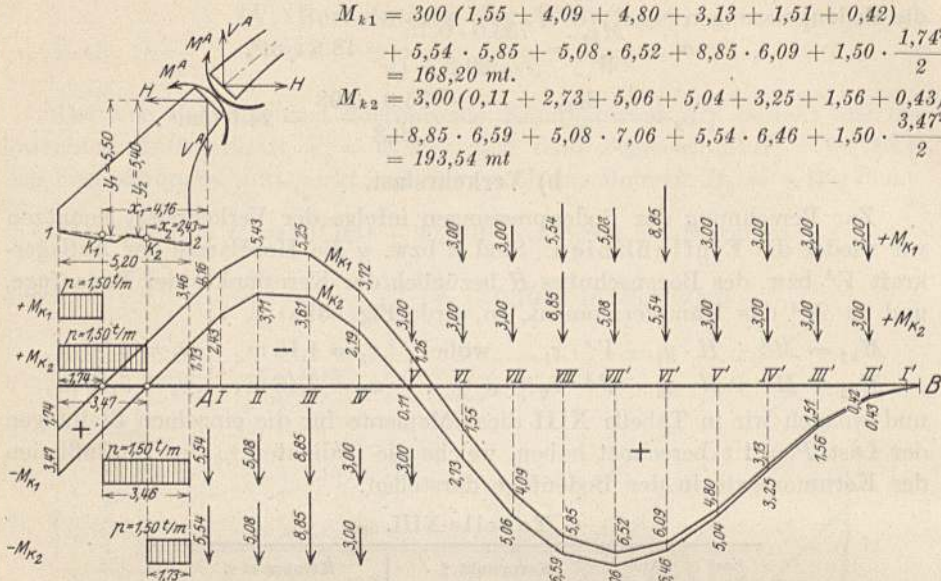
$$\sigma_1 = \frac{2 M_{k_2}}{W} = \frac{2 \cdot 193,54}{29,3} = 13,2 \text{ t/m}^2,$$

$$\sigma_1 = \frac{2 M_{k_2}}{W} = -\frac{2 \cdot 83,23}{29,3} = -5,7 \text{ t/m}^2,$$

$$\sigma_2 = -\frac{2 M_{k_1}}{W} = -\frac{2 \cdot 168,20}{29,3} = -11,5 \text{ t/m}^2,$$

$$\sigma_2 = -\frac{2 M_{k_1}}{W} = -\frac{2 \cdot 121,01}{29,3} = 8,3 \text{ t/m}^2.$$

wobei wir angenommen haben, daß die Kämpferreaktion infolge Verkehrslast für beide Bögen die gleiche sei; dadurch erhalten wir bei der angenommenen Belastungsart (Dampfwalze am Randstein aufgestellt) etwas zu große Werte für  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ .



$$-M_{k1} = 5,54 \cdot 4,16 + 5,08 \cdot 5,43 + 8,85 \cdot 5,25 + 3,00(3,72 + 1,26) + 1,50 \cdot \frac{3,46^2}{2} = 121,01 \text{ mt}$$

$$-M_{k2} = 5,54 \cdot 2,43 + 5,08 \cdot 3,71 + 8,85 \cdot 3,61 + 3,00 \cdot 2,19 + 1,50 \cdot \frac{1,73^2}{2} = 83,23 \text{ mt}$$

Einflusslinien der Fundament-Kernpunktmomente.

Fig. 539 a.

### c) Temperatur.

Infolge der angenommenen Temperaturschwankung von  $\pm 20^\circ \text{C}$  entstehen mit  $M_t^A$  als Kämpfermoment und  $H_t$  als Gesamtbogenschub des einen Bogens die Kernpunktmomente:

$$M_{k1} = M_t^A + H_t \cdot y_1 = \pm \left( \frac{26,95 + 28,75}{2} + 5,82 \cdot 5,50 \right) = \pm 59,84 \text{ mt},$$

$$M_{k2} = M_t^A + H_t \cdot y_2 = \pm (27,85 + 5,82 \cdot 5,40) = \pm 59,28 \text{ mt}.$$

Hieraus ergeben sich die Bodenpressungen:

$$\sigma_1 = \pm \frac{2 M_{k2}}{W} = \pm \frac{2 \cdot 59,28}{29,3} = \pm 4,0 \text{ t/m}^2,$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{2 M_{k1}}{W} = \pm \frac{2 \cdot 59,84}{29,3} = \pm 4,1 \text{ „}$$

### d) Grenzwerte der Bodenpressungen.

Diese werden in nachstehender Tabelle XIV gebildet:

Tabelle XIV.

Boden- pressung	Eigen- last	Verkehr	Temp.	Grenzwerte der Bodenpressungen	} t/m <sup>2</sup>
$\sigma_1$	+18,8	+13,2	$\pm 4,0$	+36,0	
		-5,7		+9,1	
$\sigma_2$	+24,6	-11,5	$\pm 4,1$	+9,0	
		+8,3		+37,0	



Beispiel 18.

Bogendach mit Zugband über 2 Öffnungen in biegungsfester Verbindung mit den Säulen.

Das in Fig. 540 dargestellte Bogendach über einem Erzsilo soll für Eigengewicht, Winddruck und Kranlasten nach Kap. VIII des Teiles I und II berechnet werden. Vom Bogendach wird ein Streifen von 3,00 m Breite zu dem von Säulen und Dach gebildeten Rahmenbinder gerechnet.

Wir ermitteln zunächst die von der Belastung unabhängigen Größen für die bogenförmigen Stäbe 1 und 2.

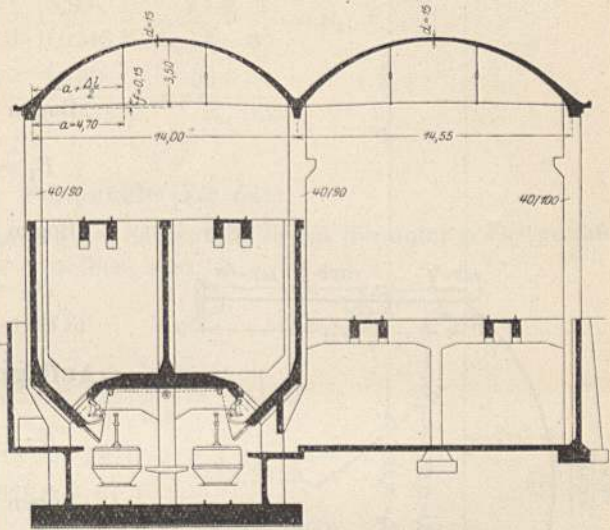


Fig. 540.

Tabelle I. Bogen 1.

Lamelle	$\Delta s$	$h$	1000 J	$w = \frac{\Delta s}{J}$	$y$	$y \cdot w$	$y^2 \cdot w$	$x$	$l - x$	$x(l - x)w$
1	1,00	0,32	8,192	122	0,36	44	16	0,30	13,70	507
2	1,00	0,24	3,456	289	1,12	324	363	1,00	13,00	3757
3	1,00	0,20	2,000	500	1,78	890	1 584	1,80	12,20	10 980
4	1,00	0,18	1,458	686	2,34	1 605	3 756	2,65	11,35	20 634
5	1,00	0,17	1,228	814	2,80	2 279	6 382	3,56	10,44	30 255
6	1,00	0,16	1,024	977	3,14	3 068	9 633	4,53	9,47	41 914
7	1,00	0,155	0,931	1074	3,38	3 630	12 270	5,51	8,49	50 244
8	1,00	0,15	0,844	1185	3,49	4 136	14 433	6,50	7,50	57 772
			$\sum_0^{l/2}$	5647		15 976	48 437			216 063

Tabelle II. Bogen 2.

Lamelle	$\Delta s$	$h$	1000 J	$w = \frac{\Delta s}{J}$	$y$	$y \cdot w$	$y^2 \cdot w$	$x$	$l - x$	$x(l - x)w$
1	1,04	0,32	8,192	127	0,36	46	16	0,30	14,25	542
2	1,04	0,24	3,456	301	1,12	337	378	1,04	13,51	4 229
3	1,04	0,20	2,000	520	1,78	926	1 648	1,86	12,69	12 271
4	1,04	0,18	1,458	713	2,34	1 668	3 904	2,76	11,79	23 203
5	1,04	0,17	1,228	847	2,80	2 372	6 640	3,72	10,83	34 125
6	1,04	0,16	1,024	1016	3,14	3 190	10 017	4,71	9,84	47 084
7	1,04	0,155	0,931	1117	3,38	3 775	12 761	5,73	8,82	56 448
8	1,04	0,15	0,844	1232	3,49	4 300	15 006	6,76	7,79	64 875
			$\sum_0^{l/2}$	5873		16 614	50 370			242 777



## Auflagerdrehwinkel der Säulen.

$$\beta = \frac{l}{6JE}.$$

$$\text{Säule 3 u. 4: } \beta_3 = \frac{5,98}{6 \cdot 0,0243 E} = \frac{41,0}{E} \frac{1}{\text{mt}} = \beta_4;$$

$$,, \quad 5: \beta_5 = \frac{11,30}{6 \cdot 0,0333 E} = \frac{56,6}{E} \frac{1}{\text{mt}}.$$

## Festpunkte (Fig. 541).

Infolge fester Einspannung der Säulenfüße liegen die unteren Festpunkte der Säulen in Drittelhöhe derselben, also:

$$a_3 = a_4 = \frac{5,98}{3} = 1,99 \text{ m} \quad \text{und} \quad a_5 = \frac{11,30}{3} = 3,77 \text{ m}.$$

$$\tau_3^A = 1,5 \beta_3 = \frac{1,5 \cdot 41,0}{E} = \frac{61,5}{E} \frac{1}{\text{mt}} = \tau_4^B = \varepsilon_1^a;$$

$$a_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1 + \varepsilon_1^a} = -\frac{14,00 \cdot 430,0}{378,0 + 61,5} = -13,70 \text{ m}.$$

$$\tau_1^B = \bar{\alpha}_1 - \frac{l_1}{l_1 - a_1} \cdot \beta_1 = \frac{378,0}{E} + \frac{14,00 \cdot 430,0}{(14,00 + 13,70) E} = \frac{595,0}{E}.$$

$$\tau_{1-4}^B = \frac{\tau_1^B \cdot \tau_4^B}{\tau_1^B + \tau_4^B} = \frac{595,0 \cdot 61,5}{(595,0 + 61,5) E} = \frac{55,7}{E} = \varepsilon_2^a;$$

$$a_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2 + \varepsilon_2^a} = -\frac{14,55 \cdot 445,0}{394,0 + 55,7} = -14,40 \text{ m};$$

$$\tau_2^C = \bar{\alpha}_2 - \frac{l_2}{l_2 - a_2} \cdot \beta_2 = \frac{394,0}{E} + \frac{14,55 \cdot 445,0}{(14,55 + 14,40) E} = \frac{618,0}{E} = \varepsilon_3^b;$$

$$b_5 = \frac{l_5}{3 + \frac{\varepsilon_3^b}{\beta_5}} = \frac{11,30}{3 + \frac{618,0}{56,6}} = +0,81 \text{ m};$$

$$\tau_5^C = 1,5 \beta_5 = 1,5 \cdot 56,6 = \frac{84,9}{E} = \varepsilon_2^b;$$

$$b_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2 + \varepsilon_2^b} = -\frac{14,55 \cdot 445,0}{394,0 + 84,9} = -13,52 \text{ m};$$

$$\tau_2^B = \bar{\alpha}_2 - \frac{l_2}{l_2 - b_2} \cdot \beta_2 = \frac{394,0}{E} + \frac{14,55 \cdot 445,0}{(14,55 + 13,52) E} = \frac{625,0}{E};$$

$$\tau_{2-4}^B = \frac{\tau_2^B \cdot \tau_4^B}{\tau_2^B + \tau_4^B} = \frac{625,0 \cdot 61,5}{(625,0 + 61,5) E} = \frac{56,0}{E} = \varepsilon_1^b;$$

$$b_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1 + \varepsilon_1^b} = -\frac{14,00 \cdot 430,0}{378,0 + 56,0} = -13,87 \text{ m};$$

$$\tau_1^A = \bar{\alpha}_1 - \frac{l_1}{l_1 - b_1} \cdot \beta_1 = \frac{378,0}{E} + \frac{14,00 \cdot 430,0}{(14,00 + 13,87) E} = \frac{594,0}{E} = \varepsilon_3^a;$$

$$b_3 = \frac{l_3}{3 + \frac{\varepsilon_3^b}{\beta_3}} = \frac{5,98}{3 + \frac{594,0}{41,0}} = +0,34 \text{ m};$$

$$\tau_{1-2}^B = \frac{\tau_1^B \cdot \tau_2^B}{\tau_1^B + \tau_2^B} = \frac{595,0 \cdot 625,0}{(595,0 + 625,0)E} = \frac{305,0}{E} = \varepsilon_4^b;$$

$$b_4 = \frac{l_4}{3 + \frac{\varepsilon_4^b}{\beta_4}} = \frac{5,98}{3 + \frac{305,0}{41,0}} = +0,57 \text{ m}.$$

## Verteilungsmaße.

$$\mu_{1-2}^B = \frac{\tau_{2-1}^B}{\tau_2^B} = \frac{56,0}{625,0} = 0,09; \quad \mu_{1-4}^B = 1 - 0,09 = 0,91;$$

$$\mu_{2-1}^B = \frac{\tau_{1-4}^B}{\tau_1^B} = \frac{55,7}{595,0} = 0,09; \quad \mu_{2-4}^B = 1 - 0,09 = 0,91;$$

$$\mu_{4-1}^B = \frac{\tau_{1-2}^B}{\tau_1^B} = \frac{305,0}{595,0} = 0,51; \quad \mu_{4-2}^B = 1 - 0,51 = 0,49.$$

Im Nachstehenden ermitteln wir wieder zuerst die von den Verschiebungen der, während R. I festgehaltenen, Säulenköpfe um  $\Delta = 1 \text{ cm}$  sich ergebenden Momente.

Momente  $M'_i$ .

Wir verschieben den Knotenpunkt  $A$  um  $\Delta = 0,01 \text{ m}$  nach rechts, während die Knotenpunkte  $B$  und  $C$  unverschiebbar festgehalten werden (siehe Fig. 542).

Dadurch erleidet der gerade Stab 3 eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $e_3 = 1 \text{ cm}$ , der bogenförmige Stab 1 eine gegenseitige Verschiebung seiner Kämpfer  $\Delta = 1 \text{ cm}$ , in Richtung seiner Kämpferverbindungsline; die infolgedessen an den Enden des betreffenden Stabes hervorgerufenen Momente betragen:

a) infolge  $e_3 = 0,01 \text{ m}$ .

$$M_3^A = \frac{e_3 \cdot b_3}{l_3 \cdot \beta_3 (l_3 - a_3 - b_3)} = + \frac{0,01 \cdot 2100000 \cdot 0,34}{5,98 \cdot 41,0 \cdot 3,65} = + 7,98 \text{ mt}$$

und

$$M_3^D = - M_3^A \cdot \frac{a_3}{b_3} = - 7,98 \cdot \frac{1,99}{0,34} = - 46,70 \text{ mt};$$

b) infolge  $\Delta_1^A = 0,01 \text{ m}$ : erhalten wir am Bogen 1 nach den Gl. (592a u. 593a) die Kämpfermomente:

$$M_1^A = \frac{B \left( \frac{l_1}{2} - b_1 \right) \cdot \Delta_1^A}{l_1 \cdot \beta_1 \cdot (l_1 - a_1 - b_1)} a_1 = + \frac{0,32983 \left( \frac{14,00}{2} + 13,87 \right) \cdot 0,01 \cdot 2100000 \cdot 13,70}{14,00 \cdot 430,0 \cdot (14,00 + 13,70 + 13,87)}$$

$$= + \frac{1980397,9}{250251,4} = + 7,91 \text{ mt},$$

$$M_1^B = \frac{B \left( \frac{l_1}{2} - a_1 \right) \cdot \Delta_1^A}{l_1 \cdot \beta_1 \cdot (\beta_1 - a_1 - b_1)} b_1 = + \frac{0,32981 \left( \frac{14,00}{2} + 13,70 \right) \cdot 0,01 \cdot 2100000 \cdot 13,87}{250251,4}$$

$$= + 7,95 \text{ mt}.$$

Diese Momente (bei  $A$  und  $B$ ) leiten wir mittels Festpunkte und Verteilungsmaße (genau wie an geraden Stäben) weiter und addieren dieselben an den einzelnen Knotenpunkten, wodurch wir das  $M'_I$ -Momentenbild der Fig. 542 erhalten. Den Einfluß des Bogenschubes lassen wir zunächst der Einfachheit halber sowohl bei den  $M'$ - und  $M^*$ -Momenten als auch bei den Momenten des R. I und den Zusatzmomenten ganz weg und berücksichtigen denselben erst am Schluß bei der Bildung der Gesamtmomente für den betreffenden Belastungsfall. Auf diese Weise erhalten wir nur an den geraden Stäben die tatsächlichen Momente für den betreffenden Belastungszustand, während für die Schnitte zwischen den Kämpfern der bogenförmigen Stäbe das Moment  $H \cdot y$  in Abzug zu denken ist.

Die Erzeugungs- und die Festhaltungskräfte der  $M'_I$ -Momente berechnen sich wie folgt:

Knotenpunkt  $A$ :

Bogenschub nach den Gl. (586) und (595) mit  $E \cdot A = 21\,000$  :

$$H_{A_1} = B_{A_1} + \frac{B_1}{2} (M_1^A + M_1^B)$$

$$= \frac{21000}{2 \cdot 48437} + \frac{0,32983}{2} (15,89 + 11,94) = + 0,217 + 4,373 = + 4,590 \text{ t}$$

Querkraft am Säulenkopf  $A$ :  $Q_3^A = \frac{15,89 + 50,66}{5,98} \dots = + 11,129 \text{ t}$

Erzeugungskraft  $Z_I = + 15,719 \text{ t}$ .

Knotenpunkt  $B$ :

Bogenschub  $- H_{A_1} \dots = - 4,590 \text{ t}$

Bogenschub  $H_{A_2} = \frac{B_2}{2} (M_2^B + M_2^C) = \frac{0,32981}{2} (1,08 + 0,52) = + 0,264 \text{ t}$

Querkraft am Säulenkopf  $Q_4^B = - \frac{10,86}{3,99} \dots = - 2,722 \text{ t}$

Lager  $II$  ist festgehalten durch  $D_{II(AI)} \dots = - 7,048 \text{ t}$ .

Knotenpunkt  $D$ :

Bogenschub  $- H_{A_2} \dots = - 0,264 \text{ t}$

Querkraft  $Q_5^C = - \frac{0,52}{7,53} \dots = - 0,069 \text{ t}$

Lager  $III$  ist festgehalten durch  $D_{III(AI)} \dots = - 0,333 \text{ t}$ .

### Momente $M'_{II}$ .

Nun wird der Knotenpunkt  $B$  um  $A = 1 \text{ cm}$  nach rechts verschoben, während die Knotenpunkte  $A$  und  $C$  unverschiebbar festgehalten werden (siehe Fig. 542a).

Dadurch erleiden die Enden des geraden Stabes  $4$  eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung  $Q_4 = 1 \text{ cm}$ , der bogenförmige Stab  $1$  eine gegenseitige Verschiebung seiner Kämpfer  $A_1 = 1 \text{ cm}$  und der bogenförmige Stab  $2$  eine

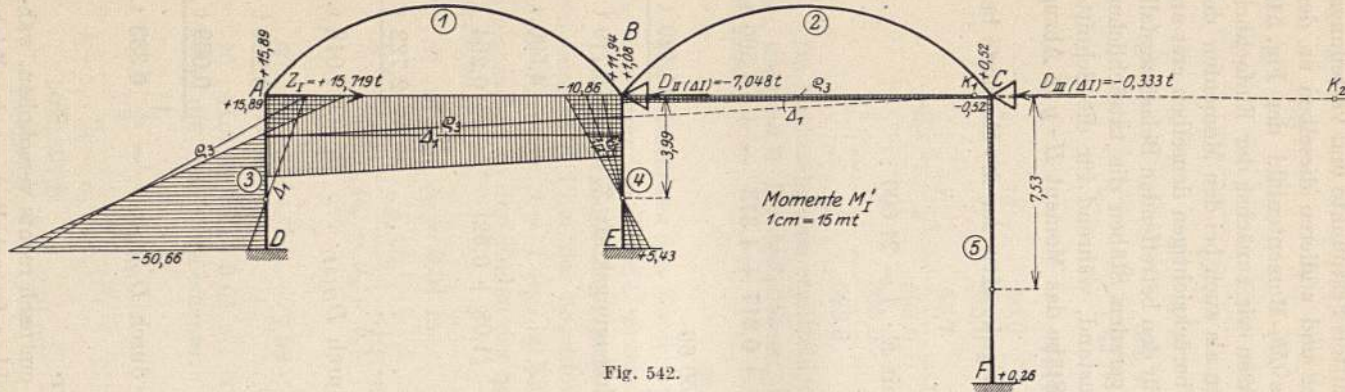


Fig. 542.

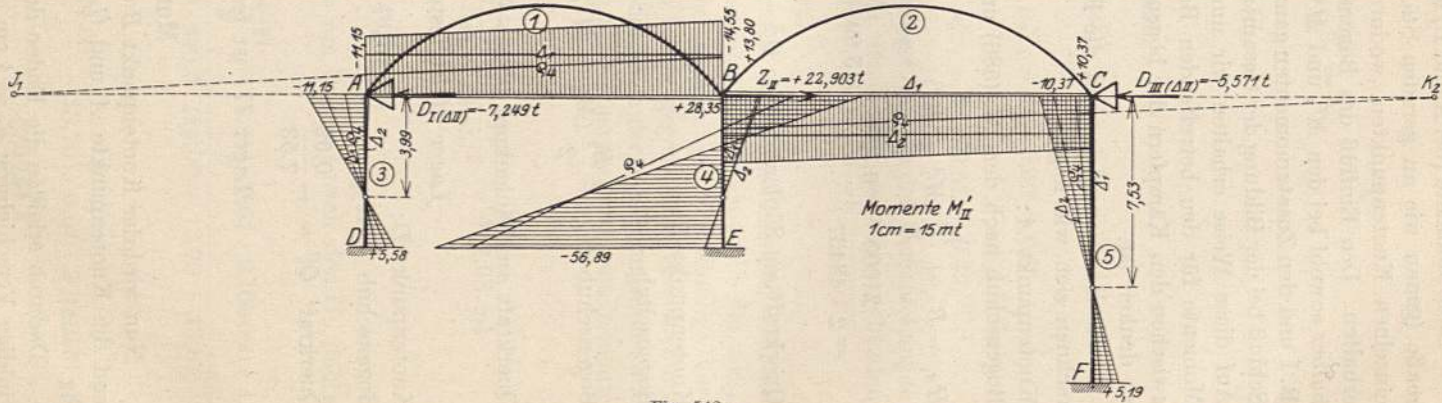


Fig. 542a.

solche von  $\Delta_2 = 1$  cm in Richtung seiner Kämpferverbindungsline; die infolgedessen an den Enden des betreffenden Stabes auftretenden Momente betragen:

a) infolge  $q_4 = 0,01$  m:

$$M_4^B = \frac{0,01 \cdot 2100000 \cdot 0,57}{5,98 \cdot 41,0 \cdot 3,42} = +14,28 \text{ mt}$$

$$M_4^F = -\frac{14,28}{0,57} \cdot 1,99 = -49,85 \text{ mt};$$

b) infolge  $\Delta_1^B = 0,01$  m erhalten wir am Bogen I nach den Gl. (592 a u. 593 a) die Kämpfermomente:

$$M_2^A = -7,91 \text{ mt} \quad \text{und} \quad M_2^B = -7,95 \text{ mt};$$

c) infolge  $\Delta_2^B = 0,01$  m erhalten wir am Bogen 2 nach den Gl. (592 a u. 593 a) die Kämpfermomente:

$$M_2^B = \frac{B \left( \frac{l_2}{2} - b_2 \right) \cdot \Delta_2^B}{l_2 \cdot \beta_2 (l_2 - a_2 - b_2)} \cdot a_2$$

$$= + \frac{0,32981 \left( \frac{14,55}{2} + 13,52 \right) \cdot 0,01 \cdot 2100000 \cdot 14,40}{14,55 \cdot 445,0 \cdot (14,55 + 14,40 + 13,52)}$$

$$= + \frac{2073979,85}{275630,1} = +7,52 \text{ mt},$$

$$M_2^C = \frac{B \left( \frac{l_2}{2} - a_2 \right) \cdot \Delta_2^B}{l_2 \cdot \beta_2 (l_2 - a_2 - b_2)} \cdot b_2$$

$$= + \frac{0,32981 \left( \frac{14,55}{2} + 14,40 \right) \cdot 0,01 \cdot 2100000 \cdot 13,52}{275630,1} = +7,36 \text{ mt}.$$

Diese Momente in üblicher Weise weitergeleitet und dann summiert ergeben uns das  $M'_{II}$ -Momentenbild der Fig. 542a.

Hierbei sind an den drei Knotenpunkten A, B und C nachstehende Lagerkräfte wirksam:

Knotenpunkt A:

$$\text{Bogenschub } H_{A_1} = B_{A_1} + \frac{B_1}{2} (M_1^A + M_1^B)$$

$$= -0,217 - \frac{0,32983}{2} (11,15 + 14,55) = -4,455 \text{ t}$$

$$Q_{A_3}^A = -\frac{11,15}{3,99} \dots \dots \dots = -2,794 \text{ t}$$

Lager I ist festgehalten durch  $D_{I(AII)} = -7,249 \text{ t}$ .

Knotenpunkt *B*:

von Bogen *I*: Bogenschub  $-H_{A_1} \dots \dots \dots = + 4,455 \text{ t}$

„ „ 2:  $H_{A_2} = \frac{21000}{2 \cdot 50370} + \frac{0,32981}{2} (13,80 + 10,37) = +0,208 + 3,986 = + 4,194 \text{ t}$

$Q_4^B = \frac{+28,35 + 56,89}{5,98} \dots \dots \dots = +14,254 \text{ t}$

Erzeugungskraft  $Z_{II} = + 22,903 \text{ t}$ .

Knotenpunkt *C*:

Bogenschub  $H_{A_2} \dots \dots \dots = -4,194 \text{ t}$

$Q_5^C = -\frac{10,37}{7,53} \dots \dots \dots = -1,377 \text{ t}$

Lager *III* ist festgehalten durch  $D_{III(AII)} = -5,571 \text{ t}$ .

### Momente $M'_{III}$ .

Wir verschieben den Knotenpunkt *C* um  $A = 1 \text{ cm}$  nach rechts, während die Knotenpunkte *A* und *B* in Ruhe bleiben sollen.

Infolge dieser Verschiebung des Knotenpunktes *C* entstehen folgende Teilmomente:

a) infolge  $e_5 = 0,01 \text{ m}$ :

$M_5^C = + \frac{0,01 \cdot 2100000 \cdot 0,81}{11,30 \cdot 56,6 \cdot 6,72} = +3,96 \text{ mt}$ .

$M_5^F = -\frac{3,96}{0,81} \cdot 3,77 = -18,43 \text{ mt}$ ;

b) infolge  $A_2^C = 0,01 \text{ cm}$  nach rechts erhalten wir am Bogen 2 nach den Gl. (592a u. 593a) die Kämpfermomente (siehe unter Momente  $M'_{II}$ ):

$M_2^B = -7,52 \text{ mt}$  und  $M_2^C = -7,36 \text{ mt}$ .

Diese Momente in bekannter Weise weitergeleitet und dann addiert ergeben uns das in Fig. 542b dargestellte Momentenbild  $M'_{III}$ , zu welchem nachstehende Lagerkräfte gehören:

Knotenpunkt *A*:

Bogenschub  $H_{A_1} = \frac{B_1}{2} (M_1^A + M_1^B) = -\frac{0,32983}{2} (0,42 + 0,86) = -0,211 \text{ t}$

$Q_3^A = -\frac{0,42}{3,99} \dots \dots \dots = -0,105 \text{ t}$

Lager *I* ist festgehalten durch  $D_{I(AIII)} = -0,316 \text{ t}$ .

Knotenpunkt *B*:

von Bogen *I*:  $-H_{A_1} \dots \dots \dots = +0,211 \text{ t}$

„ „ 2:  $H_{A_2} = -\frac{21000}{2 \cdot 50370} - \frac{0,32981}{2} (9,50 + 11,32) = -3,641 \text{ t}$

$Q_4^B = \frac{-8,64}{3,99} \dots \dots \dots = -2,165 \text{ t}$

Lager *II* ist festgehalten durch  $D_{II(AIII)} = -5,595 \text{ t}$ .



Knotenpunkt C:

$$\text{Bogenschub } -H_{A_1} \dots \dots \dots = +3,641 \text{ t}$$

$$Q_5^C = \frac{11,32 + 22,11}{11,30} \dots \dots \dots = +2,958 \text{ t}$$

$$\text{Erzeugungskraft } Z_{III} = +6,599 \text{ t.}$$

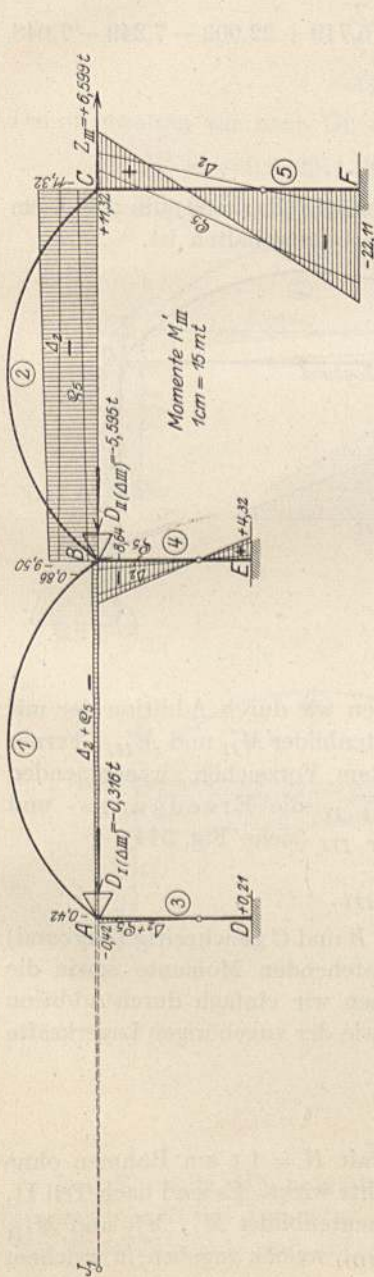


Fig. 542b.

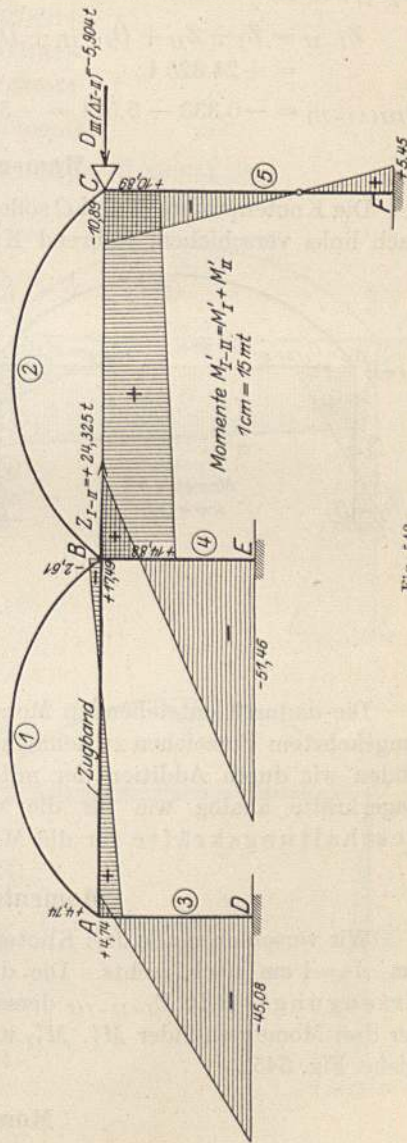


Fig. 543.

### Momente $M'_{I-II}$ .

Die Knotenpunkte  $A$  und  $B$  sollen sich nur gleichzeitig (Zugband) um  $\Delta = 1$  cm nach rechts verschieben, während der Knotenpunkt  $C$  in Ruhe bleibt.

Die dadurch entstehenden Momente (Fig. 543) erhalten wir durch Addition der Momente  $M'_I$  und  $M'_{II}$ . Ebenso finden wir durch Addition der Lagerkräfte dieser Momente die Erzeugungs- und Festhaltungskräfte für die Momente  $M'_{I-II}$ ; es ist:

$$\begin{aligned} Z_{I-II} &= Z_I + Z_{II} + D_{I(II)} + D_{II(I)} = +15,719 + 22,903 - 7,249 - 7,048 \\ &= +24,325 \text{ t,} \end{aligned}$$

$$D_{III(I-II)} = -0,333 - 5,571 = -5,904 \text{ t.}$$

### Momente $M'_{II-III}$ .

Die Knotenpunkte  $B$  und  $C$  sollen sich gleichzeitig (Zugband) um  $\Delta = 1$  cm nach links verschieben, während Knotenpunkt  $A$  festgehalten ist.

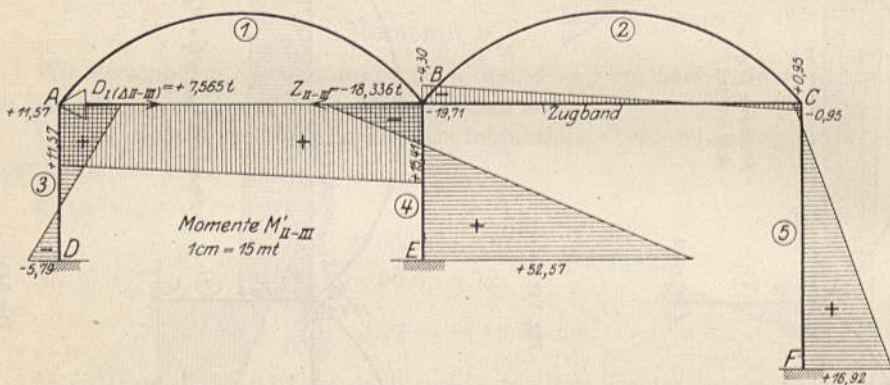


Fig. 544.

Die dadurch entstehenden Momente erhalten wir durch Addition der mit umgekehrtem Vorzeichen zu nehmenden Momentenbilder  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$ . Ferner finden wir durch Addition der mit umgekehrtem Vorzeichen zu nehmenden Lagerkräfte analog wie für die Momente  $M'_{I-II}$  die Erzeugungs- und Festhaltungskräfte für die Momente  $M'_{II-III}$  (siehe Fig. 544).

### Momente $M_{I-II-III}$ .

Wir verschieben alle drei Knotenpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  gleichzeitig (Zugband) um  $\Delta = 1$  cm nach rechts. Die dadurch entstehenden Momente sowie die Erzeugungskraft  $Z_{I-II-III}$  derselben erhalten wir einfach durch Addition der drei Momentenbilder  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  sowie der zugehörigen Lagerkräfte (siehe Fig. 545).

### Momente $M_I^*$ .

Die Momente  $M_I^*$  entstehen, wenn die Kraft  $H = 1$  t am Rahmen ohne Zugband am Knotenpunkt  $A$  (Lager  $I$ ) nach rechts wirkt. Es sind nach Teil II, Kap. IV, zur Bildung der  $M_I^*$ -Momente die Momentenbilder  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  erforderlich. Die Maßzahlen  $X_{I(I)}$ ,  $X_{II(I)}$  und  $X_{III(I)}$ , welche angeben, in welchem

Verhältnis diese  $M'$ -Momente übereinander zu legen sind, erhalten wir aus folgendem Gleichungssystem (vgl. Gl. 539):

$$\begin{aligned} +51,719 \cdot X_{I(t)} - 7,249 X_{II(t)} - 0,316 X_{III(t)} &= 1, \\ -7,048 \cdot X_{I(t)} + 22,903 X_{II(t)} - 5,595 X_{III(t)} &= 0, \\ -0,333 \cdot X_{I(t)} - 5,571 X_{II(t)} + 6,599 X_{III(t)} &= 0, \end{aligned}$$

woraus sich die unbekanntnen  $X$  ergeben zu:

$$\begin{aligned} X_{I(t)} &= +0,078911, \\ X_{II(t)} &= +0,031818, \\ X_{III(t)} &= +0,030844. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir nach Gl. (538) die Momente:

$$M_I^* = +0,078911 M'_I + 0,031818 M'_{II} + 0,030844 M'_{III},$$

welche in Fig. 546 dargestellt sind.

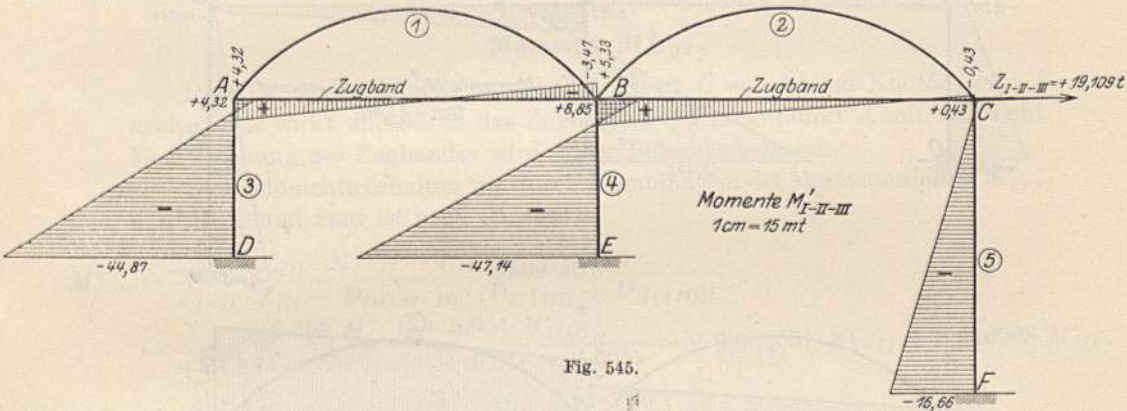


Fig. 545.

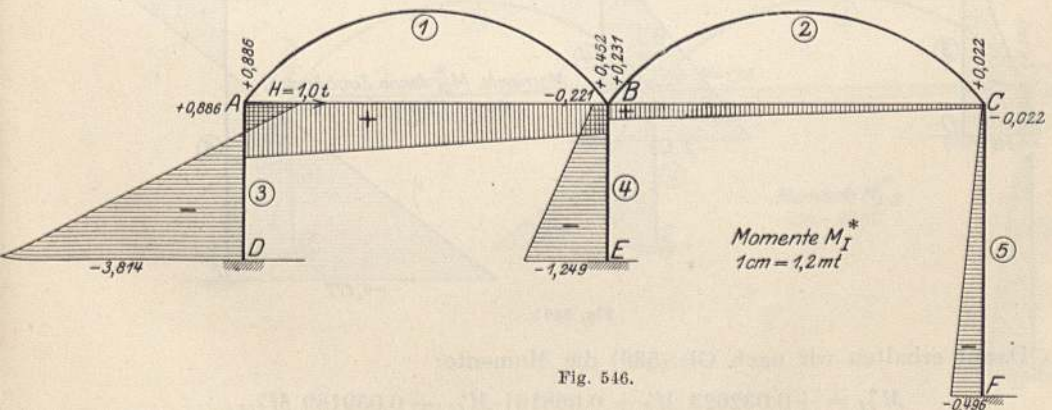


Fig. 546.

### Momente $M_{II}^*$ .

Die Momente  $M_{II}^*$  entstehen infolge Wirkung der Kraft  $H = 1,0t$  am Knotenpunkt  $B$  des Rahmens ohne Zugband von links nach rechts. Zur Bildung dieser Momente sind ebenfalls die Momente  $M'_I$ ,  $M'_{II}$  und  $M'_{III}$  erforder-

lich. Die unbekanntn Maßzahlen  $X$  erhalten wir aus folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +15,719 X_{I(II)} - 7,249 X_{II(II)} - 0,316 X_{III(II)} &= 0, \\ - 7,048 X_{I(II)} + 22,903 X_{II(II)} - 5,595 X_{III(II)} &= 1, \\ - 0,333 X_{I(II)} - 5,571 X_{II(II)} + 6,599 X_{III(II)} &= 0, \end{aligned}$$

woraus sich die Unbekanntn  $X$  ergeben zu:

$$X_{I(II)} = +0,032623,$$

$$X_{II(II)} = +0,068161,$$

$$X_{III(II)} = +0,059189.$$

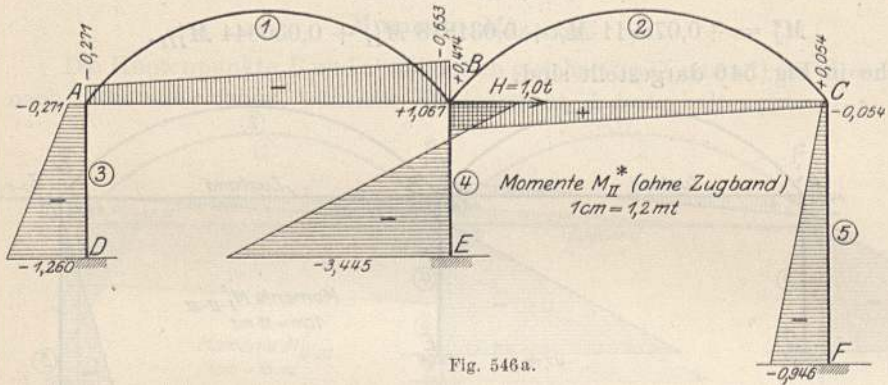


Fig. 546 a.

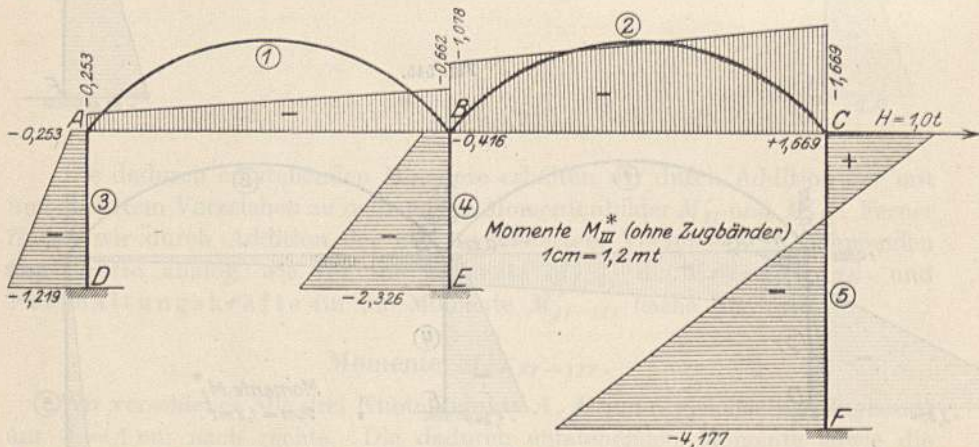


Fig. 546 b.

Damit erhalten wir nach Gl. (539) die Momente:

$$M_{II}^* = +0,032623 M_I' + 0,068161 M_{II}' + 0,059189 M_{III}',$$

welche in Fig. 546 a aufgetragen sind.

#### Momente $M_{III}^*$ .

Die Momente  $M_{III}^*$  entstehen infolge Wirkung der Kraft  $H = 1,0 t$  am Knotenpunkt  $C$  nach rechts, ebenfalls am Rahmen ohne Zugband. Auch diese

Momente erhalten wir durch Kombination der Momente  $M'_{I'}$ ,  $M'_{II'}$  und  $M'_{III'}$ . Die zugehörigen Maßzahlen  $X$  erhalten wir aus folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +15,719 X_{I(III)} - 7,249 X_{II(III)} - 0,316 X_{III(III)} &= 0, \\ - 7,048 X_{I(III)} + 22,903 X_{II(III)} - 5,595 X_{III(III)} &= 0, \\ - 0,333 X_{I(III)} - 5,571 X_{II(III)} + 6,599 X_{III(III)} &= 1, \end{aligned}$$

woraus sich die Unbekannten  $X$  ergeben zu:

$$\begin{aligned} X_{I(III)} &= +0,031438, \\ X_{II(III)} &= +0,059314, \\ X_{III(III)} &= +0,20320. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir nach Gl. (540) die Momente:

$$M_{III}^* = +0,031438 M'_{I'} + 0,059314 M'_{II'} + 0,20320 M'_{III'}$$

welche in Fig. 546 b aufgetragen sind.

### Momente $M_{I-II}^*$ .

Diese Momente entstehen, wenn die Kraft  $H = 1,0 \text{ t}$  am Knotenpunkt  $B$  nach rechts wirkt und durch das Zugband den Knotenpunkt  $A$  mit sich zieht. Eine Dehnung des Zugbandes wird außer Betracht gelassen.

Diese Momente erhalten wir durch Kombination der Momentenbilder  $M'_{I-II}$  und  $M'_{III}$ , und zwar ist nach Gl. (544):

$$\begin{aligned} M_{I-II}^* &= \frac{Z_{III} \cdot M'_{I-II} - D_{III(AI-II)} \cdot M'_{III}}{Z_{I-II} \cdot Z_{III} - D_{III(AI-II)} \cdot (D_{I(AIII)} + D_{II(AIII)})} \\ &= \frac{+6,599 M'_{I-II} + 5,904 M'_{III}}{+24,325 \cdot 6,599 - 5,904 (0,316 + 5,595)} = +0,052531 M'_{I-II} + 0,046998 M'_{III}. \end{aligned}$$

Fig. 547 zeigt die  $M_{I-II}^*$ -Momente.

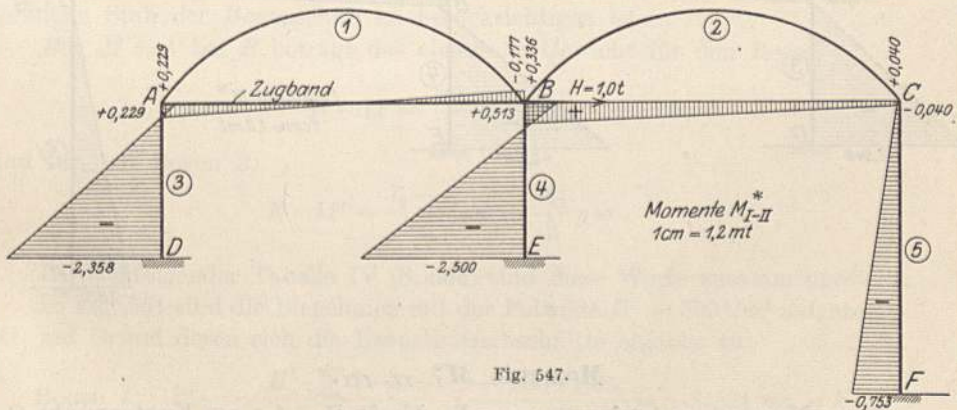


Fig. 547.

### Momente $M_{II-III}^*$ .

Diese Momente entstehen, wenn die Kraft  $H = -1,0 \text{ t}$  (nach links gerichtet) am Knotenpunkt  $B$  angreift und mittels des Zugbandes den Knotenpunkt  $C$  mit sich zieht.

Mit Hilfe der Momentenbilder  $M'_I$  und  $M'_{II-III}$  berechnen wir die Momente  $M^*_{I-II-III}$  wieder nach Gl. (544):

$$M^*_{I-II-III} = - \frac{Z_I \cdot M'_{II-III} - D_{I(II-III)} M'_I}{Z_I \cdot Z_{II-III} - D_{I(II-III)} \cdot (D_{II(AD)} + D_{III(AD)})}$$

$$= - \frac{+15,719 M'_{II-III} - 7,565 M'_I}{-15,710 \cdot 18,336 + 7,565 (7,048 + 0,333)} = -0,032554 M'_I + 0,067642 M'_{II-III},$$

nach welcher Gleichung die in Fig. 548 aufgetragenen Momente  $M^*_{II-III}$  berechnet wurden.

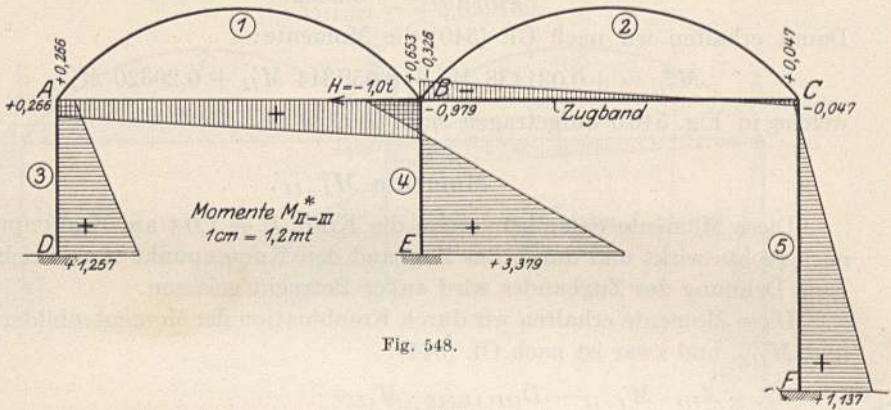


Fig. 548.

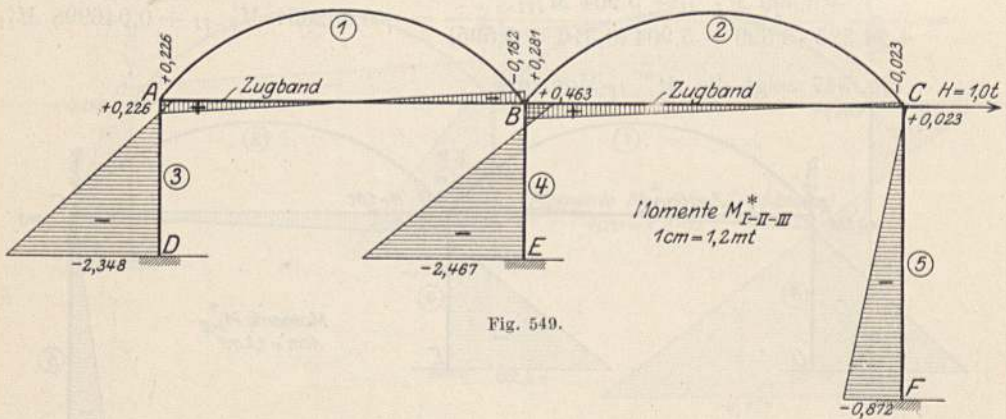


Fig. 549.

### Momente $M^*_{I-II-III}$ .

Diese Momente entstehen, wenn die Kraft  $H = 1 \text{ t}$  am Knotenpunkt  $C$  nach rechts wirkt und mittels der Zugbänder die beiden anderen Knotenpunkte mitzieht.

In diesem Falle haben wir einfach die  $M'_{I-II-III}$ -Momente durch ihre Erzeugungskraft  $Z_{I-II-III}$  zu dividieren, um die in Fig. 549 dargestellten  $M^*_{I-II-III}$ -Momente zu erhalten.

## I. Belastung durch Eigengewicht.

## a) Momente bei festgehaltenen Säulenköpfen.

Der Binderabstand beträgt 6,20 m. Die Gewichte  $G$  und die damit in Fig. 550 graphisch ermittelten  $M_0$ -Momente sowie die Werte  $M_0 \cdot yw$  sind in nachfolgender Tabelle III zusammengestellt.

Tabelle III.

Bogen 1				Bogen 2			
Lamelle	$G$	$M_0$	$M_0 \cdot yw$	Lamelle	$G$	$M_0$	$M_0 \cdot yw$
1	4,76	6,60	290	1	4,95	7,00	322
2	3,57	19,90	6 448	2	3,71	21,60	7 279
3	2,98	32,00	28 480	3	3,10	34,70	32 132
4	2,68	42,00	67 410	4	2,79	46,10	76 895
5	2,53	50,70	115 545	5	2,63	55,60	131 883
6	2,38	57,40	176 103	6	2,48	62,80	200 332
7	2,31	61,90	224 697	7	2,40	67,60	255 190
8	2,23	64,10	265 118	8	2,32	70,00	301 000
23,44 t			884 091	24,38 t			1 005 033

Nun erhalten wir die Bogenschübe  $\xi$  der beiden Zweigelenkbögen nach Gl. (394) zu:

$$\text{Bogen 1:} \quad \xi_1 = \frac{884091}{48437} = 18,252 \text{ t};$$

$$\text{„ 2:} \quad \xi_2 = \frac{1005033}{50370} = 19,953 \text{ t.}$$

Die Kreuzlinienabschnitte ermitteln wir mittels der Biegelinie für  $M = 1$  wie beim geraden Stab, mit dem einzigen Unterschied, daß beim bogenförmigen Stab der Bogenschub zu berücksichtigen ist.

Für  $M = 1$  bei  $B$  beträgt das elastische Gewicht für den Bogen 1:

$$E \cdot \Delta F = \frac{xw}{l_1} - \frac{B_1}{2} yw$$

und für den Bogen 2:

$$E \cdot \Delta F = \frac{l_2 - x}{l_2} w - \frac{B_2}{2} yw.$$

In nachfolgender Tabelle IV (S. 664) sind diese Werte zusammengestellt.

In Fig. 551 sind die Biegelinien mit der Polweite  $H' = 500^1/\text{m}^3$  aufgezeichnet, auf Grund deren sich die Kreuzlinienabschnitte ergeben zu:

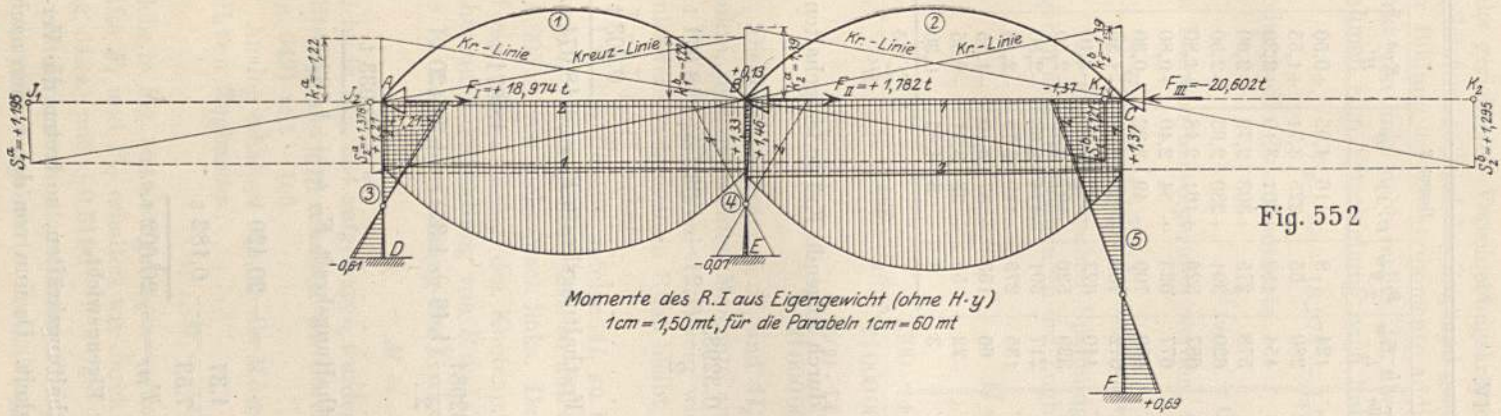
$$\text{Bogen 1:} \quad k_1^a = -\frac{H' \cdot \sum G \cdot \delta}{\beta_1} = -\frac{500 \cdot 1,05}{-430} = -1,221 \text{ mt} = k_1^b,$$

$$\text{„ 2:} \quad k_2^a = -\frac{H' \cdot \sum G \cdot \delta}{\beta_2} = -\frac{500 \cdot 1,24}{-445} = -1,393 \text{ mt} = k_2^b,$$

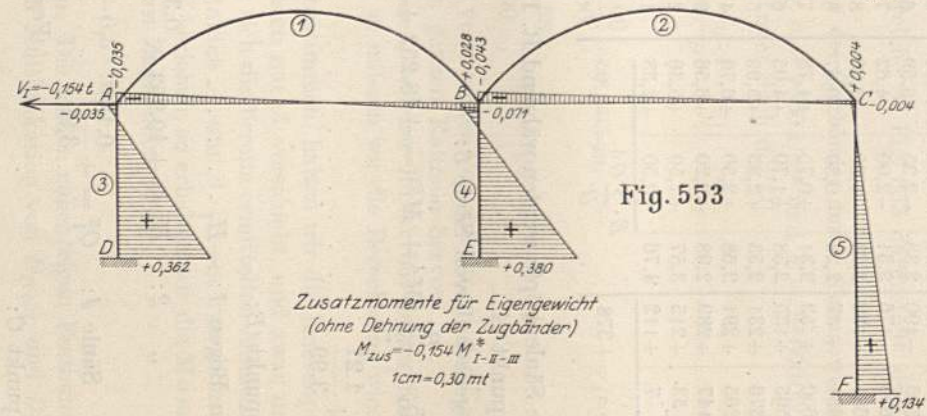
womit die Momente bei festgehaltenen Säulenköpfen (Fig. 552) in bekannter Weise ermittelt wurden; für die Schnitte zwischen den Kämpfern der bogenförmigen Stäbe ist das Moment  $H \cdot y$  in Abzug zu denken.







Momente des R.I. aus Eigengewicht (ohne H-y)  
 1cm = 1,50 mt, für die Parabeln 1cm = 60 mt



Zusatzmomente für Eigengewicht  
 (ohne Dehnung der Zugbänder)  
 $M_{zus} = -0,154 M_{I-II-III}^*$   
 1cm = 0,30 mt

Fig. 552—553.

Tabelle IV.

Bogen 1							Bogen 2						
La- melle	$\frac{x}{l_1} \cdot w$	$\frac{B_1}{2} y w$	$E \cdot \Delta F$	$G$	$\frac{E \cdot \delta}{H'}$	$\frac{E \cdot G \cdot \delta}{H'}$	La- melle	$\frac{l_2 - x}{l_2} w$	$\frac{B_2}{2} y w$	$E \cdot \Delta F$	$G$	$\frac{E \cdot \delta}{H'}$	$\frac{E \cdot G \cdot \delta}{H'}$
1	3	7	- 4	4,76	-0,25	-1,90	1	124	8	+116	4,95	+0,50	+2,48
2	21	53	- 32	3,57	-0,85	-3,03	2	280	55	+225	3,71	+1,55	+5,75
3	64	147	- 83	2,98	-1,50	-4,47	3	454	153	+301	3,10	+2,30	+7,13
4	130	265	-135	2,68	-2,00	-5,36	4	578	275	+303	2,79	+2,60	+7,25
5	207	376	-169	2,53	-2,35	-5,95	5	630	391	+239	2,63	+2,50	+6,58
6	316	505	-190	2,38	-2,35	-5,59	6	687	526	+161	2,48	+1,80	+4,64
7	423	600	-176	2,31	-2,00	-4,62	7	677	623	+ 54	2,40	+0,80	+1,92
8	550	681	-132	2,23	-1,30	-2,90	8	660	709	- 49	2,32	-0,30	-0,70
8'	635	681	- 47	2,23	-0,30	-0,67	8'	572	709	-137	2,32	-1,30	-3,02
7'	652	600	+ 53	2,31	+0,75	+1,73	7'	440	623	-183	2,40	-2,10	-5,04
6'	661	505	+155	2,38	+1,70	+4,05	6'	329	526	-197	2,48	-2,50	-6,20
5'	607	376	+231	2,53	+2,35	+5,95	5'	217	391	-174	2,63	-2,50	-6,58
4'	556	265	+291	2,68	+2,50	+6,70	4'	135	275	-140	2,79	-2,15	-6,00
3'	436	147	+289	2,98	+2,20	+6,56	3'	66	153	- 87	3,10	-1,55	-4,81
2'	268	53	+215	3,57	+1,50	+5,36	2'	22	55	- 33	3,71	-0,85	-3,15
1'	119	7	+112	4,76	+0,50	+2,38	1'	3	8	- 5	4,95	-0,30	-1,49
$E \cdot \bar{\alpha}_1 = +378$				$\frac{E \cdot \sum G \delta}{H'} = -1,05$			$E \cdot \bar{\alpha}_2 = +394$				$\frac{E \cdot \sum G \delta}{H'} = -1,24$		

Die Säulenköpfe werden während R. I durch folgende Kräfte festgehalten:  
Knotenpunkt A:

Bogenshub von Säule 3:

$$H_1 = \bar{Q}_1 + \frac{B_1}{2} (M_1^A + M_1^B) = +18,252 + \frac{0,32983}{2} (1,21 + 1,33) = +18,671 \text{ t}$$

$$Q_3^A = + \frac{1,21}{3,99} \dots \dots \dots = + 0,303 \text{ t}$$

Festhaltungskraft  $F_I = +18,974 \text{ t}$ .

Knotenpunkt B:

von Bogen 1:  $-H_1 \dots \dots \dots = -18,671 \text{ t}$

„ „ 2:  $H_2 = +19,953 + \frac{0,32981}{2} (1,46 + 1,37) = +20,420 \text{ t}$

„ Säule 4:  $Q_4^B = + \frac{0,13}{3,99} \dots \dots \dots = + 0,033 \text{ t}$

Festhaltungskraft  $F_{II} = + 1,782 \text{ t}$ .

Knotenpunkt C:

von Bogen 2:  $-H_2 \dots \dots \dots = -20,420 \text{ t}$

„ Säule 5:  $Q_5^C = - \frac{1,37}{7,53} = - 0,182 \text{ t}$

Festhaltungskraft  $F_{III} = -20,602 \text{ t}$ .

**b) Zusatzmomente für Eigengewicht.**

Entfernen wir die Lager mit den Festhaltungskräften, so treten die Verschiebungskräfte  $V_I, V_{II}$  und  $V_{III}$  in Tätigkeit. Da nun von den beiden nach

links gerichteten Verschiebungskräften  $V_I$  und  $V_{II}$  die erstere größer ist als die letztere, so wird das Zugband gezogen und die beiden Kräfte können daher zur Bildung der Zusatzmomente addiert werden. Die Verschiebungskraft  $V_{III}$  wirkt von links nach rechts, ist aber kleiner als  $V_I + V_{II}$ , so daß der ganze Rahmen eine Verschiebung nach links erleidet; es ist also

$$V_{\text{Res.}} = -18,974 - 1,782 + 20,602 = -0,154 \text{ t,}$$

wodurch die Zusatzmomente

$$M_{\text{Zus.}} = -0,154 \cdot M_{I-II-III}^*$$

am Rahmen hervorgerufen werden, welche in Fig. 553 dargestellt sind.

c) Momente infolge der Dehnungen der Zugbänder durch Eigengewicht.

Bei einer spezifischen Spannung  $\sigma = 7500 \text{ t/m}^2$  und  $E = 21000000 \text{ t/m}^2$  ergeben sich die Dehnungen der Zugbänder nach der Gl.

$$\Delta l = \frac{\sigma \cdot l}{E}$$

zu:

$$\Delta l_1 = \frac{7500 \cdot 14,00}{21000000} = 0,005 \text{ m,}$$

$$\Delta l_2 = \frac{7500 \cdot 14,55}{21000000} = 0,005196 \text{ m.}$$

Diese Verlängerungen  $\Delta l_1$  und  $\Delta l_2$  verursachen Verschiebungen der Knotenpunkte, und diese rufen Momente am ganzen Rahmen hervor.

Da wir nicht von vornherein wissen, welcher Punkt bei diesen Knotenpunktverschiebungen in Ruhe bleibt, so müssen wir die Berechnung wieder in R. I und R. II trennen.

Um die Momente infolge  $\Delta l_1$  zu bestimmen, halten wir die Knotenpunkte  $B$  und  $C$  vorübergehend fest, so daß sich nur  $A$  verschiebt, und zwar um  $\Delta l_1 = 0,005 \text{ m}$  von rechts nach links. Da sich die bereits ermittelten Momente  $M_I'$  auf eine Verschiebung des Knotenpunktes  $A$  um  $\Delta = 1 \text{ cm}$  von links nach rechts unter Festhaltung von  $B$  und  $C$  beziehen, so erhalten wir die Momente des R. I für die Dehnung des linken Zugbandes zu:

$$M = -0,5 \cdot M_I',$$

welche in Fig. 554 aufgetragen wurden. Die beiden zugehörigen Festhaltungskräfte  $F_{II}$  und  $F_{III}$  erhalten wir durch Multiplikation von  $D_{II(\Delta l)}$  und  $D_{III(\Delta l)}$  (Fig. 542) mit  $-0,5$ .

Analog erhalten wir für die Momente des R. I für die Dehnung  $\Delta l_2$  des rechten Zugbandes:

$$M = +0,5196 M_{III}',$$

welche in Fig. 554a aufgetragen wurden. Die beiden zugehörigen Festhaltungskräfte  $F_I$  und  $F_{II}$  erhalten wir durch Multiplikation von  $D_{I(\Delta l)}$  und  $D_{II(\Delta l)}$  (Fig. 542a) mit  $+0,5196$ .

Entfernen wir die während R. I gedachten Lager, so treten die Verschiebungskräfte (umgekehrte Festhaltungskräfte) in Tätigkeit. Die beiden Ver-

schiebungskräfte  $V_{II}$  und  $V_{III}$  für  $\Delta l_1$  können wir, da  $V_{II}$  die größere ist, am Knotenpunkt  $B$  zusammenfassen zu:

$$V_{II-III} = -3,524 - 0,167 = -3,691 \text{ t,}$$

ebenso können wir  $V_I$  und  $V_{II}$  für  $\Delta l_2$  am Knotenpunkt  $B$  zusammenfassen zu:

$$V_{I-II} = +2,907 + 0,164 = +3,071 \text{ t.}$$

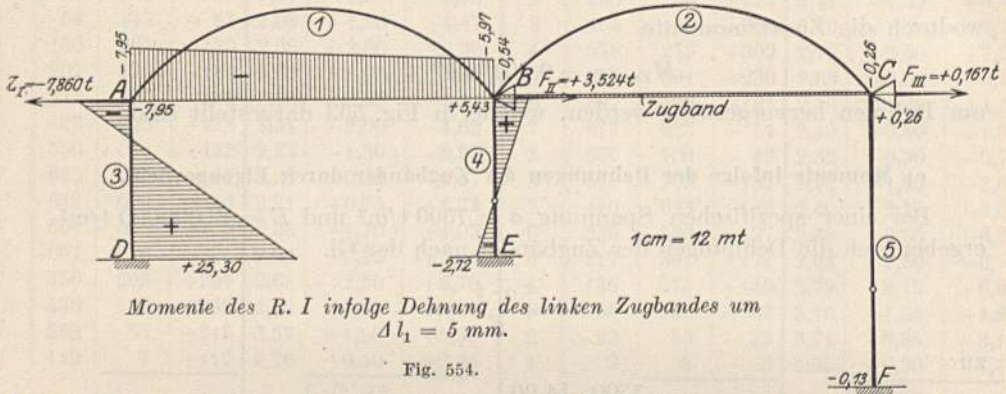


Fig. 554.

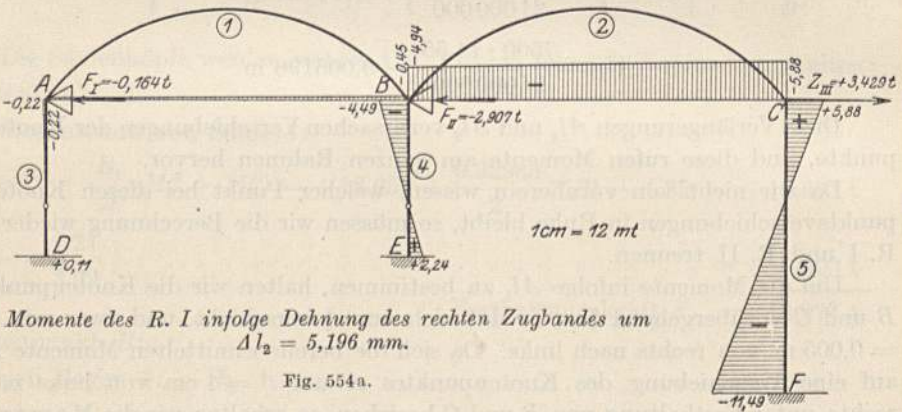


Fig. 554 a.

Die Zusatzmomente für die Dehnungen beider Zugbänder zusammen ergeben sich daher zu:

$$M_{Zus.} = +3,071 M_{I-II}^* + 3,691 M_{II-III}^*,$$

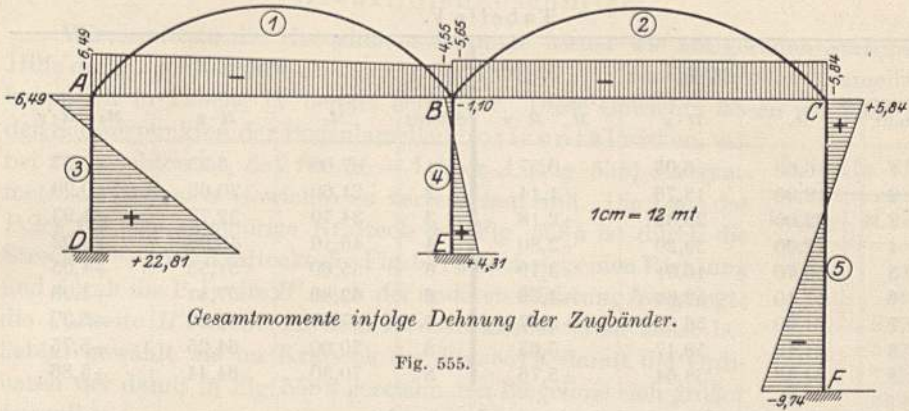
welche wir zu den Momenten aus R. I addiert haben, um die Gesamtmomente für die Dehnungen beider Zugbänder in Fig. 555 zu erhalten.

d) Gesamtmomente aus Eigengewicht samt Dehnung der Zugbänder.

Wir addieren nun die Momente der Fig. 552, 553 und 555 an den einzelnen Knotenpunkten, wodurch wir in Fig. 556 für die Säulen die gesuchten Gesamtmomente ohne weiteres erhalten.

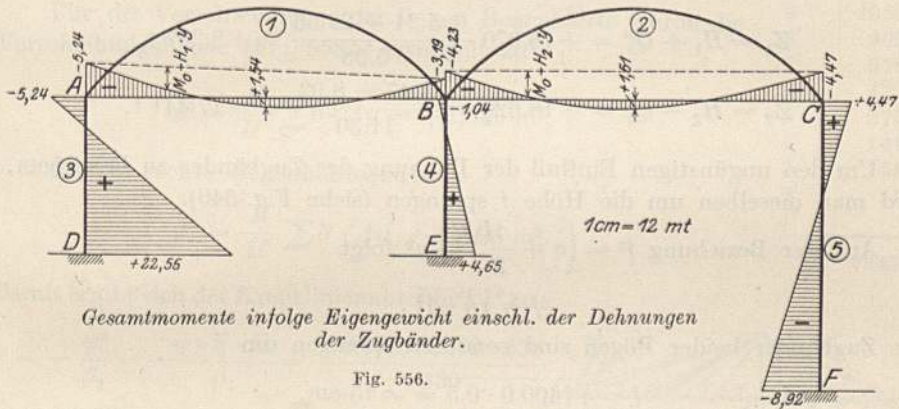
Für die Bögen ist

$$M_x = M_0 + \frac{M^l(l-x) + M^r \cdot x}{l} - H \cdot y,$$



Gesamtmomente infolge Dehnung der Zugbänder.

Fig. 555.



Gesamtmomente infolge Eigengewicht einschl. der Dehnungen der Zugbänder.

Fig. 556.

wobei  $H$  den endgültigen, gesamten Bogenschub bedeutet. Dieser ist für:

Bogen 1:

$$H_1 = \zeta_1 + B_{A1} + \frac{B_1}{2} (M_1^A + M_1^B)$$

$$= +18,252 - \frac{2100000 \cdot 0,005}{2 \cdot 48437} - \frac{0,32983}{2} (5,24 + 3,19) = +16,754 \text{ t};$$

Bogen 2:

$$H_2 = \zeta_2 + B_{A2} + \frac{B_2}{2} (M_2^B + M_2^C)$$

$$= +19,953 - \frac{2100000 \cdot 0,005196}{2 \cdot 50370} - \frac{0,32981}{2} (4,23 + 4,47) = +18,410 \text{ t}.$$

In Fig. 556 werden an den bogenförmigen Stäben durch die Verbindungslinie der Kämpfermomente lediglich die Werte  $\frac{M^l(l-x) + M^r \cdot x}{l}$  abgegrenzt, so daß wir diese Momentenfläche noch mit  $M_0 - H \cdot y$ , welche Werte in folgender Tabelle V für die beiden Bogenhälften aufgestellt sind, zusammensetzen müssen, was in Fig. 556 erfolgt ist.

Tabelle V.

Bogen 1				Bogen 2			
Schnitt	$M_0$	$H \cdot y$	$M_0 - H \cdot y$	Schnitt	$M_0$	$H \cdot y$	$M_0 - H \cdot y$
1	6,60	6,03	+0,57	1	7,00	6,73	+0,27
2	19,90	18,76	+1,14	2	21,60	20,62	+0,99
3	32,00	29,82	+2,18	3	34,70	32,77	+1,93
4	42,00	39,20	+2,80	4	46,10	43,08	+3,02
5	50,70	46,91	+3,79	5	55,60	51,55	+4,05
6	57,40	52,61	+4,79	6	62,80	57,81	+4,99
7	61,90	56,63	+5,27	7	67,60	62,23	+5,37
8	64,10	58,47	+5,63	8	70,00	64,25	+5,75
S	64,40	58,64	+5,76	S	70,30	64,44	+5,86

Die Zugbänder sind beansprucht durch:

$$Z_1 = H_1 + Q_3^A = +16,970 - \frac{5,24 + 22,56}{5,98} = +8,207 \text{ t,}$$

$$Z_2 = H_2 - Q_5^C = +18,626 - \frac{4,47 + 8,92}{11,30} = +17,441 \text{ t.}$$

Um den ungünstigen Einfluß der Dehnung der Zugbänder zu beseitigen, wird man dieselben um die Höhe  $f$  sprengen (siehe Fig. 540).

Aus der Beziehung  $f^2 = \left(a + \frac{\Delta l}{2}\right)^2 - a^2$  folgt

$$f = \sqrt{a \cdot \Delta l}.$$

Die Zugbänder beider Bögen sind somit zu sprengen um

$$f = \sqrt{1400,0 \cdot 0,5} = \approx 26,46 \text{ cm.}$$

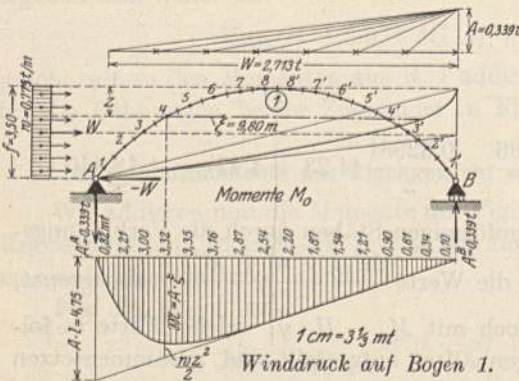
## II. Windbelastung am linken Bogen.

### a) Momente bei festgehaltenen Säulenköpfen.

Bei 6,20 m Säulenternung beträgt die horizontale Windbelastung:

$$w = 0,125 \cdot 6,20 = 0,775 \text{ t/m.}$$

$M_0$ - Momente.



In Fig. 557 sind die  $M_0$ -Momente für den bei A in einem festen Gelenklager gestützten und bei B horizontal verschiebbar gelagerten Bogen 1 in bekannter Weise ermittelt. Die Zählergrößen für den Zweigelenkbogenshub sind in Tabelle VI zusammengestellt, womit

$$\delta = \frac{\sum M_0 \cdot y w}{\sum y^2 w} = \frac{72476}{2 \cdot 48437} = +0,748 \text{ t.}$$

Fig. 557.

Kreuzlinienabschnitte.

Wir ermitteln die Kreuzlinienabschnitte wieder wie am geraden Stab mit Hilfe der Biegelinien; die elastischen Gewichte  $E \cdot \Delta F$  für die einzelnen Lamellen haben wir in Tabelle IV bereits berechnet. Diese Gewichte lassen wir jetzt in den Schwerpunkten der Bogenlamellen horizontal wirken, wobei zu beachten ist, daß für  $M = 1$  über  $A$  (Fig. 558) die symmetrisch liegenden Gewichte zu vertauschen sind. Die Lage des Poles für das zugehörige Kräfteck der Fig. 558a ist durch die Strecke  $E \cdot \beta_1$  des Kräftecks der Fig. 551a nach der einen Richtung und durch die Polweite  $H'$  nach der anderen Richtung festgelegt; die Polweite  $H'$  wurde zu dem Zwecke kleiner (aber sonst beliebig) gewählt als im Kräfteck der Fig. 551a, damit die Ordinaten der damit in Fig. 558a gezeichneten Biegelinie sich größer darstellen.

Für die Verschiebungen der linken Bogenhälfte wurde die Verschiebungsfläche (Fig. 558b) ermittelt zu:

$$F = \frac{E}{H'} \sum \delta \cdot \Delta y = +12,40 \text{ m}^2,$$

und für die rechte Bogenhälfte zu:

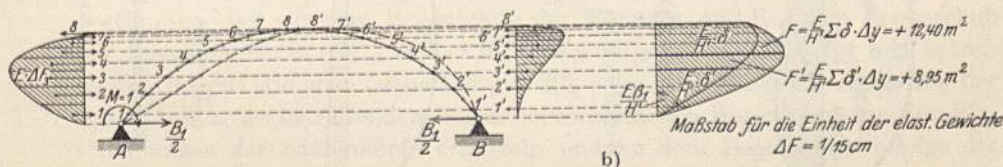
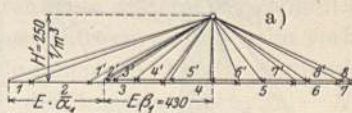
$$F' = \frac{E}{H'} \sum \delta' \cdot \Delta y = +8,95 \text{ m}^2.$$

Tabelle VI.

Lamelle	$M_{0,yw}$
1	36
2	716
3	2670
4	5329
5	7635
6	9695
7	10418
8	10505
8'	9099
7'	6788
6'	4725
5'	2758
4'	1445
3,	543
2'	110
1'	4
$\Sigma = 72476$	

Damit ergibt sich der Kreuzlinienabschnitt  $k^b$  zu:

$$k^b = -\frac{\varphi^a}{\beta_1} = -\frac{w \cdot F \cdot H'}{\beta_1} = +\frac{0,775 \cdot 12,40 \cdot 250}{430} = +5,59 \text{ mt.}$$



Belastung des Bogens durch die elastischen Gewichte  $E \cdot \Delta F$ .

Fig. 558.

Für  $k^a$  müssen wir  $M = 1$  über  $B$  denken, was einen Vorzeichenwechsel in den Verschiebungsflächen zur Folge hat. Die Richtung von links nach rechts zähle als positiv. Dann ist:

$$k^a = -\frac{\varphi^b}{\beta_1} = -\frac{w \cdot F' \cdot H'}{\beta_1} = -\frac{0,775 \cdot 8,95 \cdot 250}{430} = -4,03 \text{ mt.}$$

Nun können wir in Fig. 559 die Momente des R. I in bekannter Weise konstruieren.

Festhaltungskräfte.

Knotenpunkt A:

Bogenschub

$$H_1 = \xi + \frac{B_1}{2} (M_1^A + M_1^B) = +0,748 + \frac{0,32983}{2} (-2,35 + 0,85) = +0,497 \text{ t}$$

$$-W = -2,713 \text{ t}$$

$$\text{Querkraft } Q_3^A = -\frac{2,35}{3,99} \dots \dots \dots = -0,589 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } F_I = -2,805 \text{ t.}$$

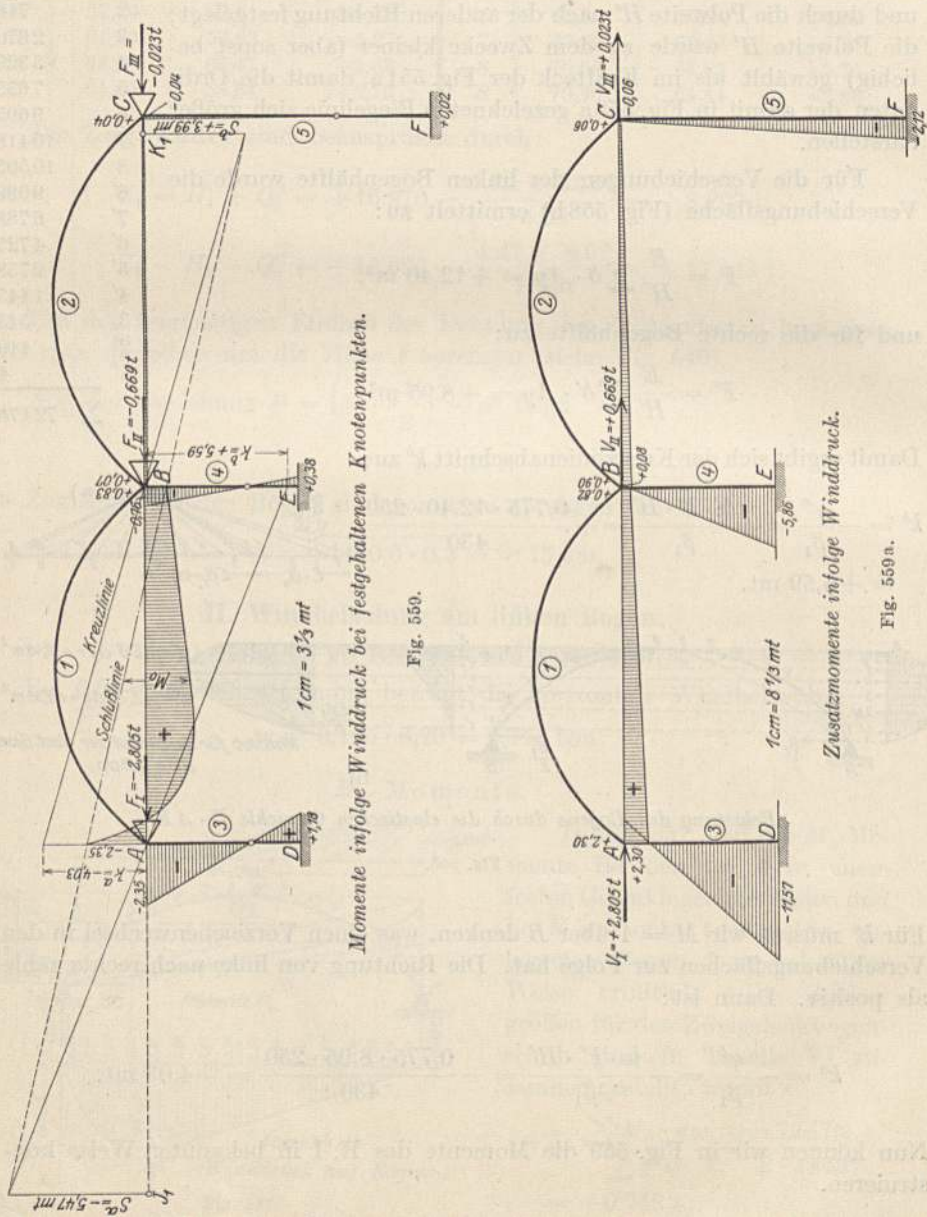


Fig. 550.

Fig. 550 n.

Momente infolge Winddruck bei festgehaltenen Knotenpunkten.

Zusatzmomente infolge Winddruck.



Knotenpunkt B:

$$\text{Bogenschub } -H_1 \dots \dots \dots = -0,497 \text{ t}$$

$$\text{,, } H_2 = \frac{B_2}{2} (M_2^B + M_2^C) = \frac{0,32984}{2} (0,07 + 0,04) = +0,018 \text{ t}$$

$$\text{Querkraft } Q_4^B = -\frac{0,76}{3,99} \dots \dots \dots = -0,190 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } F_{II} = -0,669 \text{ t.}$$

Knotenpunkt C:

$$\text{Bogenschub } -H_2 \dots \dots \dots = -0,018 \text{ t}$$

$$\text{Querkraft } Q_5^C = -\frac{0,04}{7,53} \dots \dots \dots = -0,005 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } F_{III} = -0,023 \text{ t.}$$

## b) Zusatzmomente für Windbelastung.

Wir lassen die Festhaltungskräfte als Aktionen wirken und erhalten mittels der einfachen  $M^*$ -Momente (beide Zugbänder sind außer Wirkung) die Zusätze:

$$M_{\text{zus.}} = +2,805 M_I^* + 0,669 M_{II}^* + 0,023 M_{III}^*,$$

welche in Fig. 559a für die einzelnen Knotenpunkte dargestellt sind.

## c) Gesamtmomente für Windbelastung.

Um diese zu erhalten, addieren wir an allen Knotenpunkten die Momente aus R. I sowie die Zusatzmomente.

An den geraden Stäben erhalten wir dadurch ohne weiteres die endgültigen Momente. An den bogenförmigen Stäben dagegen müssen wir wie beim vorhergehenden Belastungsfall die durch die Verbindungslinie der Knotenpunktmomente bestimmte Momentenfläche noch mit der Momentenfläche  $M_0 - H \cdot y$  zusammensetzen. Den endgültigen Bogenschub können wir entweder dadurch bestimmen, daß wir zum Bogenschub der Momente aus R. I den Bogenschub der Zusatzmomente ( $H_{\text{zus.}} = V_I \cdot H_I^* + V_{II} \cdot H_{II}^* + V_{III} \cdot H_{III}^*$  für den betreffenden Bogen) addieren (siehe Beispiel 20), oder den durch die Änderung der Spannweiten der betreffenden Bögen hervorgerufenen Bogenschub aus den Verschiebungen der Säulenköpfe ermitteln und zu dem Bogenschub infolge der äußeren Lasten und demjenigen infolge der totalen Kämpfermomente addieren. Nachstehend zeigen wir das letztgenannte Verfahren.

Die einzelnen Säulenkopfverschiebungen erhalten wir am einfachsten nach dem Mohrschen Satz (Teil I, Kap. IV) als statisches Moment der  $\frac{1}{JE}$  fachen Momentenfläche.

Für die unbelastete Säule mit konstantem Trägheitsmoment und den Momenten  $M^k$  und  $M^l$  an ihren Enden wird, wenn eine Verschiebung nach rechts positiv gilt:

$$E \cdot \delta = -E \beta l (M^k + 2M^l),$$

so daß

$$E \cdot \delta^A = -41,00 \cdot 5,98 (-0,05 - 2 \cdot 10,39) = +5107 \text{ t/m,}$$

$$E \cdot \delta^B = -41,00 \cdot 5,98 (-0,68 - 2 \cdot 5,48) = +2854 \text{ t/m,}$$

$$E \cdot \delta^C = -56,6 \cdot 11,30 (-0,10 - 2 \cdot 2,10) = +2750 \text{ t/m.}$$

Daher sind die Änderungen der Spannweiten der beiden Bögen, wenn eine Verringerung derselben positiv gilt:

$$E \cdot \Delta_1 = E \cdot \delta^A - E \cdot \delta^B = 5107 - 2854 = +2255 \text{ t/m},$$

$$E \cdot \Delta_2 = E \cdot \delta^B - E \cdot \delta^C = 2854 - 2750 = +104 \text{ t/m},$$

so daß nach Gl. (586) der durch die Spannweitenänderung hervorgerufene Bogenschub

$$\frac{E \cdot \Delta_1}{\sum y^2 w} \text{ resp. } \frac{E \cdot \Delta_2}{\sum y^2 w}$$

beträgt.

Wir erhalten jetzt den gesamten Bogenschub am Bogen 1 zu:

$$\begin{aligned} H_1 &= \xi_1 + \frac{E \cdot \Delta_1}{\sum y^2 w} + \frac{B_1}{2} (M_1^A + M_1^B) \\ &= +0,748 + \frac{2255}{2 \cdot 48437} + \frac{0,32983}{2} (-0,05 + 1,65) = +0,807 \text{ t}, \end{aligned}$$

und am Bogen 2 zu:

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{E \cdot \Delta_2}{\sum y^2 w} + \frac{B_2}{2} (M_2^B + M_2^C) \\ &= +\frac{104}{2 \cdot 50370} + \frac{0,32981}{2} (0,97 + 0,10) = +0,177 \text{ t}, \end{aligned}$$

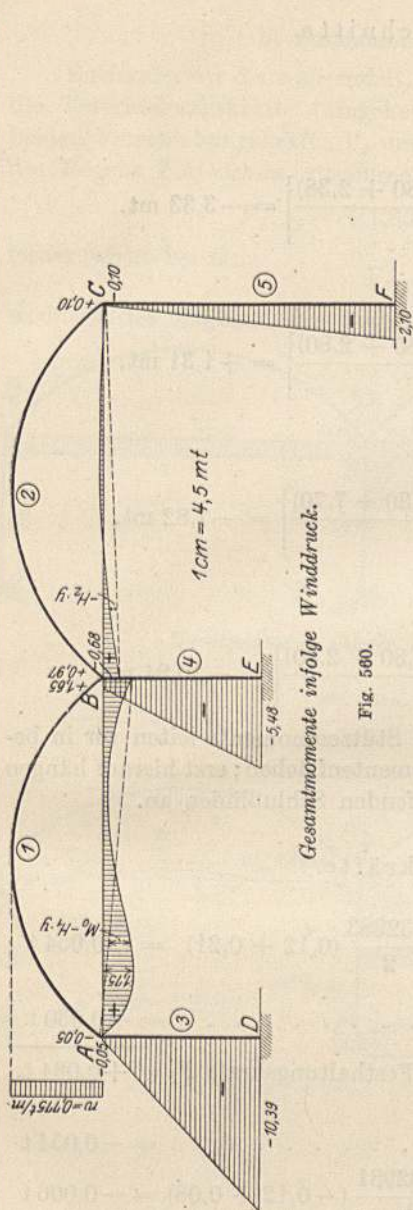
womit das Schnittmoment an den Bögen ermittelt werden kann; es ist:

$$M_x = M_0 + \frac{M^l (l - x) + M^r \cdot x}{l} - H \cdot y.$$

Das erste und letzte Glied dieser Gleichung haben wir in Tabelle VII berechnet und darauf Fig. 560 vervollständigt.

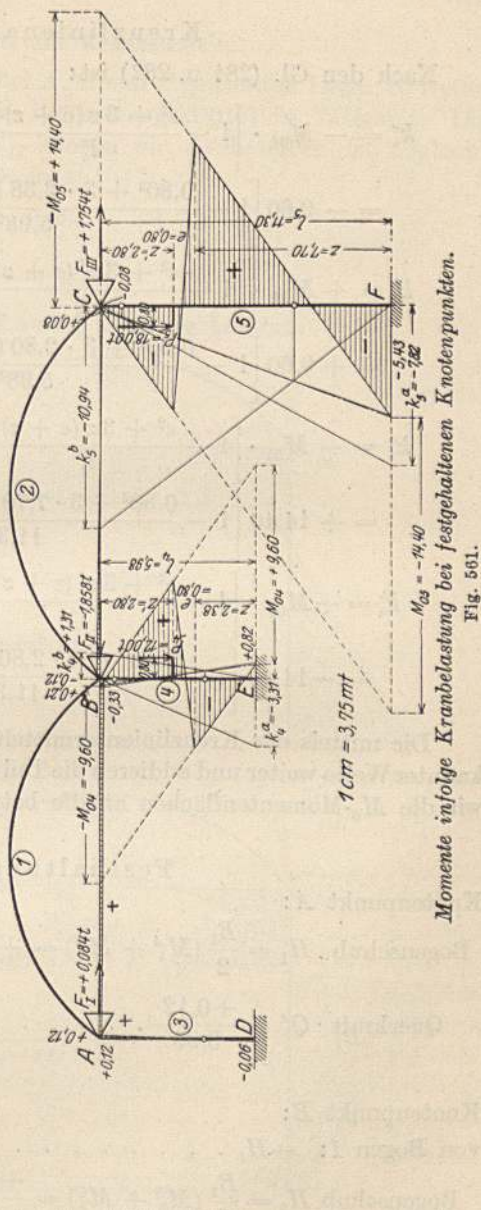
Tabelle VII.

Bogen 1				Bogen 2	
Schnitt	$M_0$	$-H_1 \cdot y$	$M_0 - H_1 \cdot y$	Schnitt	$-H_2 \cdot y$
1	0,82	-0,29	+0,53	1	-0,06
2	2,21	-0,90	+1,31	2	-0,20
3	3,00	-1,44	+1,56	3	-0,32
4	3,32	-1,89	+1,43	4	-0,41
5	3,35	-2,26	+1,09	5	-0,50
6	3,16	-2,53	+0,63	6	-0,56
7	2,87	-2,73	+0,14	7	-0,60
8	2,54	-2,82	-0,28	8	-0,62
8'	2,20	-2,82	-0,62		
7'	1,87	-2,73	-0,86		
6'	1,54	-2,53	-0,69		
5'	1,21	-2,26	-1,05		
4'	0,90	-1,89	-0,99		
3'	0,61	-1,44	-0,83		
2'	0,34	-0,90	-0,56		
1'	0,10	-0,29	-0,19		



Gesamtmomente infolge Winddruck.

Fig. 560.



Momente infolge Kranbelastung bei festgehaltenen Knotenpunkten.

Fig. 561.

### III. Kranbelastung. (Fig. 561.)

#### a) Momente bei festgehaltenen Säulenköpfen.

Die Säulen 4 und 5 sind durch die Kranlasten  $P_4 = 12,00 t$  und  $P_5 = 18,00 t$  im Abstand von  $0,80 m$  von ihren Achsen belastet.

$M_0$ -Momente.

Säule 4:  $M_{04} = +12,00 \cdot 0,80 = + 9,60 mt,$

Säule 5:  $M_{05} = -18,00 \cdot 0,80 = -14,40 mt.$

## Kreuzlinienabschnitte.

Nach den Gl. (281 u. 282) ist:

$$k_4^a = -M_{04} \cdot \left[ 1 - \frac{e^2 + 3z(e+z)}{l_4^2} \right]$$

$$= -9,60 \left[ 1 - \frac{0,80^2 + 3 \cdot 2,38(0,80 + 2,38)}{5,98^2} \right] = -3,33 \text{ mt,}$$

$$k_4^b = +M_{04} \cdot \left[ 1 - \frac{e^2 + 3z'(e+z')}{l_4^2} \right]$$

$$= +9,60 \left[ 1 - \frac{0,80^2 + 3 \cdot 2,80(0,80 + 2,80)}{5,98^2} \right] = +1,31 \text{ mt,}$$

$$k_5^a = -M_{05} \cdot \left[ 1 - \frac{e^2 + 3z(e+z)}{l_5^2} \right]$$

$$= +14,40 \left[ 1 - \frac{0,80^2 + 3 \cdot 7,70(0,80 + 7,70)}{11,30^2} \right] = -7,82 \text{ mt,}$$

$$k_5^b = +M_{05} \cdot \left[ 1 - \frac{e^2 + 3z'(e+z')}{l_5^2} \right]$$

$$= -14,40 \left[ 1 - \frac{0,80^2 + 3 \cdot 2,80(0,80 + 2,80)}{11,30^2} \right] = -10,94 \text{ mt.}$$

Die mittels der Kreuzlinien ermittelten Stützenmomente leiten wir in bekannter Weise weiter und addieren die Teilmomentenflächen; erst hierauf hängen wir die  $M_0$ -Momentenflächen an die betreffenden Schlußlinien an.

## Festhaltungskräfte.

Knotenpunkt A:

$$\text{Bogenschub } H_1 = \frac{B_1}{2} (M_1^A + M_1^B) = + \frac{0,32983}{2} (0,12 + 0,21) = +0,054 \text{ t}$$

$$\text{Querkraft } Q_3^A = \frac{+0,12}{3,99} \dots \dots \dots = +0,030 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } F_I = +0,084 \text{ t.}$$

Knotenpunkt B:

$$\text{von Bogen 1: } -H_1 \dots \dots \dots = -0,054 \text{ t}$$

$$\text{Bogenschub } H_2 = \frac{B_2}{2} (M_2^B + M_2^C) = \frac{+0,32981}{2} (-0,12 + 0,08) = -0,006 \text{ t}$$

$$\text{Querkraft } Q_4^B = \frac{M_4^B - M_4^E - M_{04}}{l_4} = \frac{-0,33 - 0,82 - 9,60}{5,98} = -1,798 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } F_{II} = -1,858 \text{ t.}$$

Knotenpunkt C:

$$\text{von Bogen 2: } -H_2 \dots \dots \dots = +0,006 \text{ t}$$

$$\text{Querkraft } Q_5^C = \frac{M_5^C - M_5^F - M_{05}}{l_5} = \frac{-0,08 + 5,43 + 14,40}{11,30} = +1,748 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } F_{III} = +1,754 \text{ t.}$$

b) Zusatzmomente aus Kranbelastung.

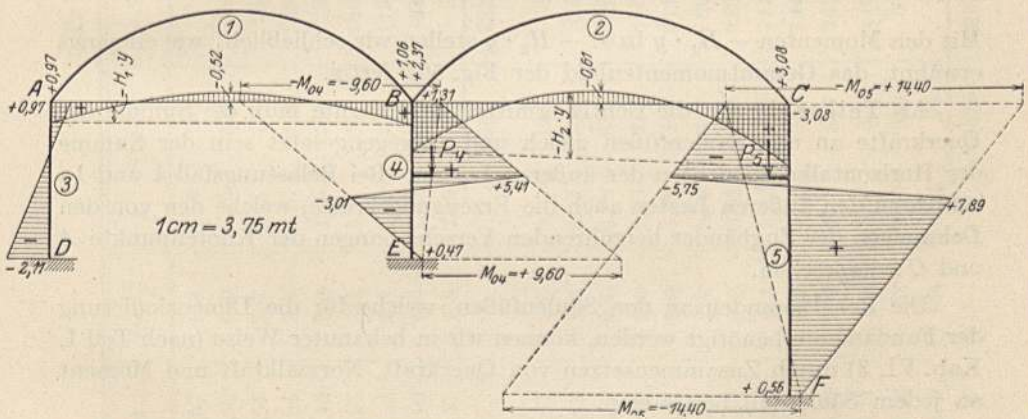
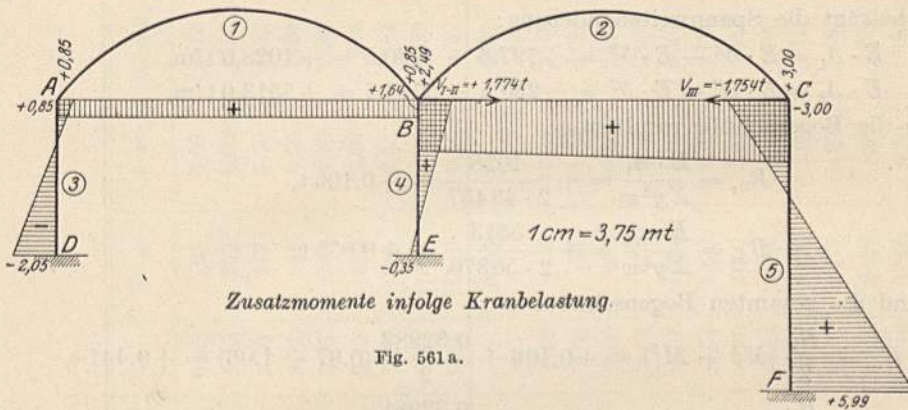
Entfernen wir die während R. I bei A, B und C gedachten Lager, so treten die Verschiebungskräfte (umgekehrte Festhaltungskräfte) in Tätigkeit. Die beiden Verschiebungskräfte  $V_I$  und  $V_{II}$  können wir, da dieselben das Zugband des Bogens I anziehen, zusammenfassen zu:

$$V_{I-II} = +1,858 - 0,084 = +1,774 \text{ t};$$

ferner wirkt bei C:

$$V_{III} = -1,754 \text{ t},$$

wodurch das Zugband des Bogens 2 außer Wirkung kommt.



Die Zusatzmomente berechnen sich daher nach der Gl.:

$$M_{\text{Zus.}} = +1,774 M_{I-II}^* - 1,754 M_{III}^*$$

und sind für die einzelnen Knotenpunkte in Fig. 561 a dargestellt.

c) Gesamtmomente aus Kranbelastung.

Wir addieren die Zusatzmomente zu jenen des R. I und bringen für die Bögen ( $M_0 = 0$ )  $H \cdot y$  in Abzug (siehe Fig. 562).

Um die dafür benötigten endgültigen Bogenschübe  $H_1$  und  $H_2$  zu ermitteln, bestimmen wir wieder zunächst die Änderungen der Bogen Spannweiten auf Grund des Mohrschen Satzes, wonach wir für konstantes Trägheitsmoment der Säulen erhalten:

$$E \cdot \delta^A = -E \beta_3 l_3 (M_3^A + 2 M_3^D) \\ = -41,00 \cdot 5,98 (0,97 - 2 \cdot 2,11) = +797,5 \text{ t/m,}$$

$$E \cdot \delta^B = -E \beta_3 l_4 (M_4^B + 2 M_4^F - k_4^A) \\ = -41,00 \cdot 5,98 (1,31 + 2 \cdot 0,47 - 1,31) = -230,5 \text{ t/m,}$$

$$E \cdot \delta^C = -E \beta_3 l_5 (M_5^C + 2 M_5^F - k_5^A) \\ = -56,6 \cdot 11,30 (-3,08 + 2 \cdot 0,56 + 10,94) = -5743,5 \text{ t/m,}$$

daher beträgt die Spannweitenänderung:

$$E \cdot \Delta_1 = E \cdot \delta^A - E \cdot \delta^B = +797,5 + 230,5 = +1028,0 \text{ t/m,}$$

$$E \cdot \Delta_2 = E \cdot \delta^B - E \cdot \delta^C = -230,5 + 5743,5 = +5513,0 \text{ t/m,}$$

woraus die Bogenschübe resultieren:

$$B_{A_1} = \frac{E \cdot \Delta_1}{\sum y^2 w} = + \frac{1028}{2 \cdot 48437} = +0,106 \text{ t,}$$

$$B_{A_2} = \frac{E \cdot \Delta_2}{\sum y^2 w} = + \frac{5513}{2 \cdot 50370} = +0,055 \text{ t.}$$

Nun sind die gesamten Bogenschübe:

$$H_1 = B_{A_1} + \frac{B_1}{2} (M_1^A + M_1^B) = +0,106 + \frac{0,32983}{2} (0,97 + 1,06) = +0,441 \text{ t,}$$

$$H_2 = B_{A_2} + \frac{B_2}{2} (M_2^B + M_2^C) = +0,055 + \frac{0,32981}{2} (2,37 + 3,08) = +0,954 \text{ t.}$$

Mit den Momenten  $-H_1 \cdot y$  bzw.  $-H_2 \cdot y$  stellen wir schließlich, wie eingangs erwähnt, das Gesamtmomentenbild der Fig. 562 fertig.

Als Teilprobe für die richtig ermittelten Momente muß die Summe der Querkräfte an den Säulenfüßen gleich und entgegengesetzt sein der Summe der Horizontalkomponenten der äußeren Lasten. Bei Belastungsfall I und Ia zählen zu den äußeren Lasten auch die Erzeugungskräfte, welche den von den Dehnungen der Zugbänder herrührenden Verschiebungen der Knotenpunkte  $A$  und  $C$  entsprechen.

Die Resultierenden an den Säulenfüßen, welche für die Dimensionierung der Fundamente benötigt werden, können wir in bekannter Weise (nach Teil I, Kap. VI, 3) durch Zusammensetzen von Querkraft, Normalkraft und Moment an jedem Säulenfuß bestimmen.

### Beispiel 19.

## Unsymmetrischer Hallenbinder, bestehend aus bogenförmigen und geradlinigen Stäben.

(Textbeispiel des Kap. VIII.)

Die Berechnung soll nur für die drei beliebig gerichteten Einzellasten  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  auf dem rechten Bogen (siehe Fig. 563) durchgeführt werden.

Wir ermitteln zunächst die von der Belastung unabhängigen Größen für alle Stäbe.

Tabelle I.

	Lamelle	$\Delta S$	1000 J	$w = \frac{\Delta S}{J}$	y	y · w	y <sup>2</sup> · w	x	x · w	l - x	(l - x) w	y(l - x) w	x(l - x) w	x · y · w
Bogen 1	1	1,35	8,57	158	0,50	79	39	0,40	63	9,60	1513	755	604	32
	2	1,35	7,50	180	1,40	252	353	1,40	252	8,60	1548	2165	2165	353
	3	1,35	6,54	207	2,13	441	938	2,50	517	7,50	1552	3304	3880	1102
	4	1,35	5,95	227	2,70	612	1650	3,74	848	6,26	1420	3830	5308	2288
	5	1,35	5,40	250	3,00	750	2250	5,10	1275	4,90	1225	3681	6250	3825
	6	1,35	5,95	227	2,87	651	1868	6,40	1452	3,60	816	2342	5220	4160
	7	1,35	6,54	207	2,40	497	1191	7,66	1585	2,34	484	1162	3705	3800
	8	1,35	7,50	180	1,63	293	477	8,77	1578	1,23	222	361	1945	2568
	9	1,35	8,57	158	0,60	94	57	9,64	1516	0,36	57	34	549	911
						3669	8823		9086		8837	17634	29626	19039
Bogen 2	10	1,50	8,57	175	0,70	123	86	0,32	56	12,34	2160	1511	691	39
	11	1,50	8,19	183	2,00	366	732	1,06	194	11,60	2121	4245	2254	388
	12	1,50	7,50	200	3,18	636	2022	2,00	400	10,66	2132	6770	4264	1272
	13	1,50	6,85	219	4,20	920	3862	3,08	674	9,58	2100	8800	6448	2830
	14	1,50	6,25	240	5,05	1212	6115	4,31	1034	8,35	2002	10120	8630	5215
	15	1,50	5,95	252	5,60	1410	7900	5,71	1439	6,95	1750	9800	10000	8040
	16	1,50	5,40	278	5,76	1600	9200	7,20	2000	5,46	1517	8770	10920	11510
	17	1,32	5,40	244	5,52	1346	7410	8,56	2088	4,10	1000	5520	8550	11500
	18	1,32	5,95	222	4,96	1100	5445	9,77	2170	2,89	641	3178	6260	10720
	19	1,32	6,54	202	4,12	831	3422	10,77	2177	1,89	382	1572	4110	8950
	20	1,32	7,17	184	3,10	570	1766	11,57	2127	1,09	201	621	2320	6585
	21	1,32	7,85	168	1,90	319	606	12,16	2040	0,50	84	160	1021	3878
	22	1,32	8,57	154	0,62	95	59	12,56	1933	0,10	15	10	194	1197
							10528	48625		18332		16105	61077	65662

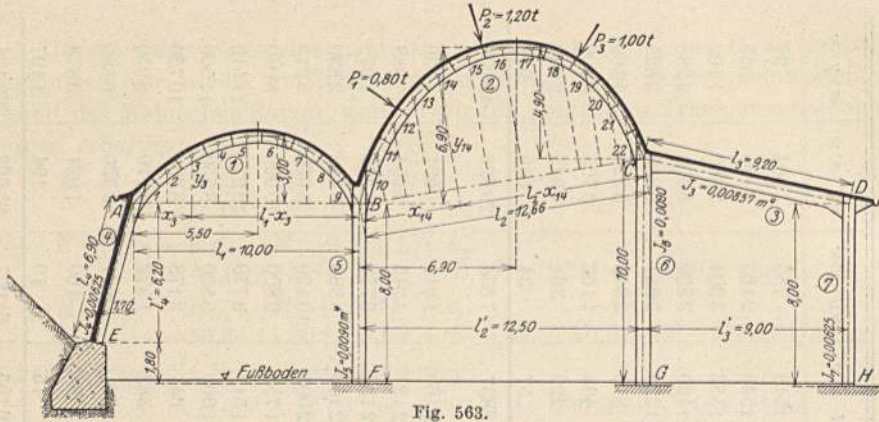


Fig. 563.

### Bogenschübe $B_{(M^a=1)}$ , $B_{(M^b=1)}$ und $B$ .

$$\text{Bogen 1: } B_{(M^a=1)} = \frac{\sum y(l-x)w}{l \sum y^2 w} = \frac{17634}{10,00 \cdot 8823} = 0,1999 \text{ t}$$

$$B_{(M^b=1)} = \frac{\sum xyw}{l \sum y^2 w} = \frac{19039}{10,00 \cdot 8823} = 0,2158 \text{ t}$$

$$B_1 = 0,4157 \text{ t};$$

$$\text{,, 2: } B_{(M^a=1)} = \frac{\sum y(l-x)w}{l \sum y^2 w} = \frac{61077}{12,66 \cdot 48625} = 0,0992 \text{ t}$$

$$B_{(M^b=1)} = \frac{\sum xyw}{l \sum y^2 w} = \frac{72124}{12,66 \cdot 48625} = 0,1172 \text{ t}$$

$$B_2 = 0,2164 \text{ t.}$$

### Auflagerdrehwinkel der Bögen.

$$E \alpha^a = \frac{\sum (l-x)w - B \sum (l-x)yw}{l}$$

$$\text{Bogen 1: } \alpha_1^a = \frac{8837 - 0,4157 \cdot 17634}{10,00 E} = \frac{150,7}{E} \frac{1}{\text{mt}};$$

$$\text{,, 2: } \alpha_2^a = \frac{16105 - 0,2164 \cdot 61077}{12,66} = \frac{228,1}{E} \frac{1}{\text{mt}}.$$

$$E \alpha^b = \frac{\sum xw - B \sum xyw}{l}$$

$$\text{Bogen 1: } \alpha_1^b = \frac{9086 - 0,4157 \cdot 19039}{10,00 E} = \frac{117,1}{E} \frac{1}{\text{mt}};$$

$$\text{,, 2: } \alpha_2^b = \frac{18332 - 0,2164 \cdot 72124}{12,66 E} = \frac{215,2}{E} \frac{1}{\text{mt}}.$$

$$E \beta = \frac{\sum x(l-x)w - l B_{(M^a=1)} \cdot \sum xyw}{l^2}$$

$$\text{Bogen 1: } \beta_1 = \frac{29626 - 10,00 \cdot 0,1999 \cdot 19039}{10,00^2 \cdot E} = \frac{84,3}{E} \frac{1}{\text{mt}};$$

$$\text{,, 2: } \beta_2 = \frac{65662 - 12,66 \cdot 0,0992 \cdot 72124}{12,66^2 \cdot E} = \frac{155,5}{E} \frac{1}{\text{mt}}.$$





$$\tau_5^B = 1,5 \cdot \beta_5 = 1,5 \cdot \frac{148,1}{E} = \frac{222,2}{E},$$

$$\tau_{1-5}^B = \frac{\tau_1^B \cdot \tau_5^B}{\tau_1^B + \tau_5^B} = \frac{187,5 \cdot 222,2}{(187,5 + 222,2) E} = \frac{101,7}{E} = \varepsilon_2^a,$$

$$a_2 = \frac{l_2 \beta_2}{\alpha_2^a + \varepsilon_2^a} = \frac{-12,66 \cdot 155,5}{228,1 + 101,7} = -5,97 \text{ m},$$

$$\tau_2^C = \alpha_2^b - \frac{l_2}{l_2 - a_2} \beta_2 = \frac{215,2}{E} + \frac{12,66 \cdot 155,5}{(12,66 + 5,97) E} = \frac{320,9}{E},$$

$$\tau_6^C = 1,5 \beta_6 = 1,5 \cdot \frac{185,2}{E} = \frac{277,8}{E},$$

$$\tau_{2-6}^C = \frac{\tau_2^C \cdot \tau_6^C}{\tau_2^C + \tau_6^C} = \frac{320,9 \cdot 277,8}{(320,9 + 277,8) E} = \frac{148,9}{E} = \varepsilon_3^a,$$

$$a_3 = \frac{l_3}{3 + \frac{\varepsilon_3^a}{\beta_3}} = \frac{9,20}{3 + \frac{148,9}{178,9}} = 2,40 \text{ m},$$

$$\tau_3^D = \beta_3 \left( 3 - \frac{l_3}{l_3 - a_3} \right) = \frac{178,9}{E} \left( 3 - \frac{9,20}{9,20 - 2,40} \right) = 294,6 = \varepsilon_7^b,$$

$$b_7 = \frac{l_7}{3 + \frac{\varepsilon_7^b}{\beta_7}} = \frac{8,00}{3 + \frac{294,6}{213,3}} = 1,83 \text{ m},$$

$$\tau_7^D = 1,5 \beta_7 = 1,5 \cdot \frac{213,3}{E} = \frac{320,0}{E} = \varepsilon_3^b,$$

$$b_3 = \frac{l_3}{3 + \frac{\varepsilon_3^b}{\beta_3}} = \frac{9,20}{3 + \frac{320,0}{178,9}} = 1,92 \text{ m},$$

$$\tau_3^C = \beta_3 \left( 3 - \frac{l_3}{l_3 - b_3} \right) = \frac{178,9}{E} \left( 3 - \frac{9,20}{9,20 - 1,92} \right) = \frac{310,6}{E},$$

$$\tau_{3-6}^C = \frac{\tau_3^C \cdot \tau_6^C}{\tau_3^C + \tau_6^C} = \frac{310,6 \cdot 277,8}{(310,6 + 277,8) E} = \frac{146,6}{E} = \varepsilon_2^b,$$

$$b_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^b + \varepsilon_2^b} = \frac{-12,66 \cdot 155,5}{215,2 + 146,6} = -5,44 \text{ m},$$

$$\tau_2^B = \alpha_2^a - \frac{l_2}{l_2 - b_2} \beta_2 = \frac{228,1}{E} + \frac{12,66 \cdot 155,5}{(12,66 + 5,44) E} = \frac{336,9}{E},$$

$$\tau_{2-5}^B = \frac{\tau_2^B \cdot \tau_5^B}{\tau_2^B + \tau_5^B} = \frac{336,9 \cdot 222,2}{(336,9 + 222,2) E} = \frac{133,9}{E} = \varepsilon_1^b,$$

$$b_1 = \frac{l_1 \beta_1}{\alpha_1^b + \varepsilon_1^b} = \frac{-10,00 \cdot 84,3}{117,1 + 133,9} = -3,36 \text{ m},$$

$$\tau_1^A = \alpha_1^a - \frac{l_1}{l_1 - b_1} \beta_1 = \frac{150,7}{E} + \frac{10,00 \cdot 84,3}{(10,00 + 3,36) E} = \frac{213,8}{E} = \varepsilon_1^a,$$

$$b_4 = \frac{l_4}{3 + \frac{\varepsilon_4^b}{\beta_4}} = \frac{6,90}{3 + \frac{213,8}{184,0}} = 1,66 \text{ m,}$$

$$\tau_{1-2}^B = \frac{\tau_1^B \cdot \tau_2^B}{\tau_1^B + \tau_2^B} = \frac{187,5 \cdot 336,9}{(187,5 + 336,9) E} = \frac{120,5}{E} = \varepsilon_5^b,$$

$$b_5 = \frac{l_5}{3 + \frac{\varepsilon_5^b}{\beta_5}} = \frac{8,00}{3 + \frac{120,5}{148,1}} = 2,10 \text{ m,}$$

$$\tau_{2-3}^C = \frac{\tau_2^C \cdot \tau_3^C}{\tau_2^C + \tau_3^C} = \frac{320,9 \cdot 310,6}{(320,9 + 310,6) E} = \frac{157,8}{E} = \varepsilon_6^b,$$

$$b_6 = \frac{l_6}{3 + \frac{\varepsilon_6^b}{\beta_6}} = \frac{10,00}{3 + \frac{157,8}{185,2}} = 2,60 \text{ m.}$$

**Verteilungsmaße.**

(Fig. 564.)

Knotenpunkt *B*:

$$\mu_{1-2}^B = \frac{\tau_{2-5}^B}{\tau_2^B} = \frac{133,9}{336,9} = 0,40; \quad \mu_{1-5}^B = 1 - 0,40 = 0,60;$$

$$\mu_{2-1}^B = \frac{\tau_{1-5}^B}{\tau_1^B} = \frac{101,7}{187,5} = 0,54; \quad \mu_{2-5}^B = 0,46;$$

$$\mu_{5-1}^B = \frac{\tau_{1-2}^B}{\tau_1^B} = \frac{120,5}{187,5} = 0,64; \quad \mu_{5-2}^B = 0,36;$$

Knotenpunkt *C*:

$$\mu_{2-3}^C = \frac{\tau_{3-6}^C}{\tau_3^C} = \frac{146,6}{310,6} = 0,47; \quad \mu_{2-6}^C = 0,53;$$

$$\mu_{3-2}^C = \frac{\tau_{2-6}^C}{\tau_2^C} = \frac{148,9}{320,9} = 0,46; \quad \mu_{3-6}^C = 0,54;$$

$$\mu_{6-2}^C = \frac{\tau_{2-3}^C}{\tau_2^C} = \frac{157,8}{320,9} = 0,49; \quad \mu_{6-3}^C = 0,51.$$

**Momente  $M_I$ .**

Wir verschieben den Knotenpunkt *A* senkrecht zur Säulenachse *4* um  $\Delta = 1$  cm nach rechts, wobei die übrigen Knotenpunkte unverschiebbar festgehalten sein sollen (Fig. 565a).

Dadurch erleidet Stab *4* eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung seiner Enden:

$$e_4 = 0,01 \text{ m,}$$

und der Bogen *I* eine gegenseitige Verschiebung der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie:

$$\Delta' = \Delta \cdot \cos \alpha = 0,01 \cdot \frac{6,20}{6,90} = 0,00899 \text{ m,}$$

sowie eine gegenseitige Verschiebung der Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie:

$$\Delta'' = \Delta \cdot \sin \alpha = 0,01 \cdot \frac{1,70}{6,90} = 0,00246 \text{ m.}$$

Die durch diese gegenseitigen Verschiebungen hervorgerufenen Momente betragen:

a) Infolge  $\varrho_4 = 0,01 \text{ m}$ :

Nach den Gl. (515) und (520) ist:

$$M_4^A = \frac{\varrho_4 \cdot b_4}{l_4 \cdot \beta_4 (l_4 - a_4 - b_4)} = \frac{2100000 \cdot 1,66 \cdot 0,01}{6,90 \cdot 184,0 (6,90 - 2,30 - 1,66)} = +9,339 \text{ mt,}$$

$$M_4^E = -\frac{M_4^A}{b_4} a_4 = -\frac{9,339}{1,66} \cdot 2,30 = -12,940 \text{ mt.}$$

b) Infolge  $\Delta' = 0,00899 \text{ m}$  und  $\Delta'' = 0,00246 \text{ m}$ :

Nach den Gl. (590a, 600, 591a und 601) erhalten wir für diese beiden Verschiebungen zusammen die Kämpfermomente:

$$\begin{aligned} M_1^A &= \frac{(B_{(M^a=1)} \cdot l_1 - B_1 \cdot b_1) \Delta' + \Delta''}{l_1 \cdot \beta_1 (l_1 - a_1 - b_1)} \cdot a_1 \\ &= + \frac{2100000 [(0,1999 \cdot 10,00 + 0,4157 \cdot 3,36) 0,00899 + 0,00246]}{10,00 \cdot 84,3 (10,00 + 1,98 + 3,36)} \cdot 1,98 \\ &= +10,604 \text{ mt,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1^B &= \frac{(B_{(M^b=1)} \cdot l_1 - B_1 \cdot a_1) \Delta' - \Delta''}{l_1 \cdot \beta_1 (l_1 - a_1 - b_1)} \cdot b_1 \\ &= + \frac{2100000 [(0,2158 \cdot 10,00 + 0,4157 \cdot 1,98) 0,00899 - 0,00246]}{10,00 \cdot 84,3 (10,00 + 1,98 + 3,36)} \cdot 3,36 \\ &= +13,271 \text{ mt.} \end{aligned}$$

Diese Momente leiten wir in bekannter Weise mittels Festpunkte und Verteilungsmaße weiter, worauf wir durch Addition der Teilmomentenflächen die Momente  $M'_i$  (Fig. 565) erhalten; an den bogenförmigen Stäben wird, wie im vorhergehenden Beispiel, der Einfluß des Bogenschubes auf die Momente zwischen den Kämpfern erst am Schluß bei den endgültigen Momenten in Rechnung gestellt.

Die Erzeugungs- und die Festhaltungskräfte der  $M'_i$ -Momente berechnen sich wie folgt:

Knotenpunkt A:

$$\begin{aligned} \text{Bogenschub: } H_{\Delta_1} &= B_{\Delta'} + M_1^A \cdot B_{(M^a=1)} + M_1^B \cdot B_{(M^b=1)} \\ &= \frac{2100000 \cdot 0,00899}{8823} + 19,943 \cdot 0,1999 + 15,606 \cdot 0,2158 \\ &= +9,494 \text{ t,} \end{aligned}$$

$$\text{Auflagerdruck: } V_1^A = \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = \frac{+15,606 - 19,943}{10,00} = -0,434 \text{ t.}$$

$$\text{Querkraft: } Q_4^A = \frac{M_4^A - M_4^B}{l_4} = \frac{+19,943 + 18,242}{6,90} = +5,534 \text{ t.}$$

Diese drei Kräfte zu einer Resultierenden vereinigt und letztere horizontal und in Richtung von Stab 4 zerlegt (Fig. 565b) liefert uns die (in Richtung der Festhaltungskraft  $F_I$  anzunehmende) Erzeugungskraft

$$Z_I = +15,32 \text{ t.}$$

Knotenpunkt B:

Bogenschub:  $-H_{A1} = -9,494 \text{ t,}$

$$V_1^B = -V_1^A = +0,434 \text{ t;}$$

von Bogen 2:

$$H_{A2} = M_2^B \cdot B_{(M^a=1)} + M_2^C \cdot B_{(M^b=1)} \\ = +6,242 \cdot 0,0992 + 1,872 \cdot 0,1172 = +0,838 \text{ t,}$$

$$V_2^B = \frac{M_2^C - M_2^B}{l_2} = \frac{1,872 - 6,242}{12,66} = -0,345 \text{ t,}$$

$$Q_5^B = \frac{M_5^B}{l_5 - a_5} = \frac{-9,364}{5,33} = -1,756 \text{ t.}$$

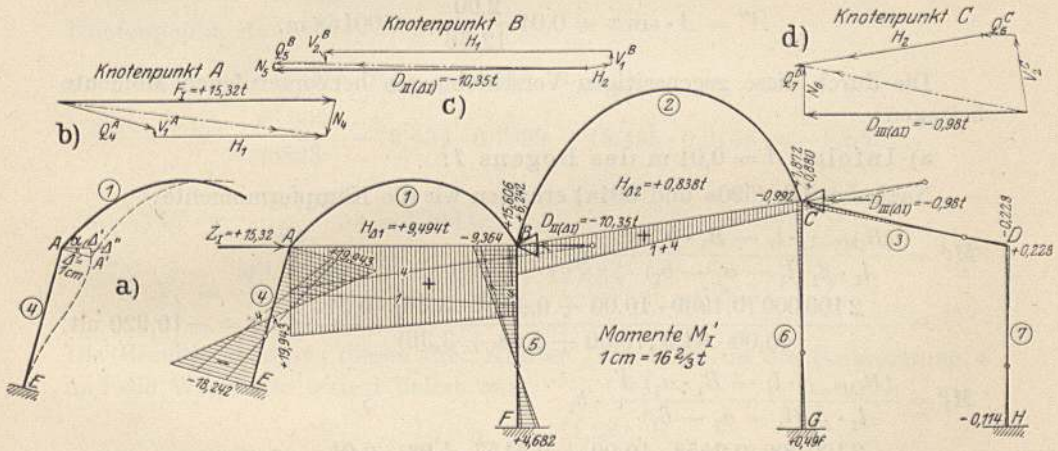


Fig. 565—565 d.

Die Resultierende aus vorstehenden Kräften (Fig. 565c) in die Wagrechte und Senkrechte zerlegt, ergibt:

$$D_{II(AI)} = -10,35 \text{ t.}$$

Knotenpunkt C:

$$-H_{A2} \dots \dots \dots = -0,838 \text{ t,}$$

$$V_2^C = -V_2^B \dots \dots \dots = +0,345 \text{ t,}$$

$$Q_6^C = \frac{-0,992}{6,67} = -0,149 \text{ t,}$$

$$Q_7^D = \frac{+0,228}{5,33} = +0,043 \text{ t.}$$

Die Resultierende aus diesen Kräften (Fig. 565d) in die Wagrechte und Senkrechte zerlegt, ergibt:

$$D_{III(AI)} = -0,98 \text{ t.}$$

### Momente $M'_{II}$ .

Wir verschieben den Knotenpunkt  $B$  um  $\Delta = 1$  cm horizontal nach rechts, während die übrigen Knotenpunkte in Ruhe bleiben sollen (Fig. 566a).

Dadurch erleidet der Stab 5 eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung seiner Enden:

$$\varrho_5 = 0,01 \text{ m,}$$

der Bogen 1 eine gegenseitige Verschiebung der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie:

$$\Delta = 0,01 \text{ m,}$$

der Bogen 2 eine gegenseitige Verschiebung der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie:

$$\Delta' = \Delta \cdot \cos \alpha = 0,01 \cdot \frac{12,50}{12,66} = 0,00987 \text{ m,}$$

sowie eine gegenseitige Verschiebung der Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie:

$$\Delta'' = \Delta \cdot \sin \alpha = 0,01 \cdot \frac{2,00}{12,66} = 0,00158 \text{ m.}$$

Die durch diese gegenseitigen Verschiebungen hervorgerufenen Momente betragen:

a) Infolge  $\Delta = 0,01$  m des Bogens 1:

Nach den Gl. (590a und 591a) erhalten wir die Kämpfermomente:

$$\begin{aligned} M_1^A &= \frac{(B_{(M^a=1)} \cdot l_1 - B_1 \cdot b_1) \Delta'}{l_1 \cdot \beta_1 (l_1 - a_1 - b_1)} \cdot a_1 \\ &= - \frac{2100000 (0,1999 \cdot 10,00 + 0,4157 \cdot 3,36) \cdot 0,01}{10,00 \cdot 84,3 (10,00 + 1,98 + 3,36)} \cdot 1,98 = -10,920 \text{ mt,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1^B &= \frac{(B_{(M^b=1)} \cdot l_1 - B_1 \cdot a_1) \Delta'}{l_1 \cdot \beta_1 (l_1 - a_1 - b_1)} \cdot b_1 \\ &= - \frac{2100000 (0,2158 \cdot 10,00 + 0,4157 \cdot 1,98) \cdot 0,01}{10,00 \cdot 84,3 (10,00 + 1,98 + 3,36)} \cdot 3,36 = -16,267 \text{ mt.} \end{aligned}$$

b) Infolge  $\Delta' = 0,00987$  m und  $\Delta'' = 0,00158$  m des Bogens 2:

Nach den Gl. (590a, 600) und (591a, 601) erhalten wir für diese beiden Verschiebungen zusammen die Kämpfermomente:

$$\begin{aligned} M_2^B &= \frac{(B_{(M^a=1)} \cdot l_2 - B_2 \cdot b_2) \cdot \Delta' + \Delta''}{l_2 \cdot \beta_2 (l_2 - a_2 - b_2)} \cdot a_2 \\ &= + \frac{2100000 [(0,0992 \cdot 12,66 + 0,2164 \cdot 5,44) 0,00987 + 0,00158]}{12,66 \cdot 155,5 (12,66 + 5,97 + 5,44)} \cdot 5,97 \\ &= + 6,774 \text{ mt,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2^C &= \frac{(B_{(M^b=1)} \cdot l_2 - B_2 \cdot a_2) \cdot \Delta' - \Delta''}{l_2 \cdot \beta_2 (l_2 - a_2 - b_2)} \cdot b_2 \\ &= + \frac{2100000 [(0,1172 \cdot 12,66 + 0,2164 \cdot 5,97) 0,00987 + 0,00158]}{12,66 \cdot 155,5 (12,66 + 5,97 + 5,44)} \cdot 5,44 \\ &= + 6,226 \text{ mt.} \end{aligned}$$

c) Infolge  $q_5 = 0,01$  m:

Nach den Gl. (515) und (520) erhalten wir:

$$M_5^B = \frac{q_5}{l_5 \cdot \beta_5 (l_5 - a_5 - b_5)} \cdot b_5$$

$$= \frac{2\,100\,000 \cdot 0,01}{8,00 \cdot 148,1 (8,00 - 2,67 - 2,10)} \cdot 2,10 = +11,524 \text{ mt.}$$

$$M_5^F = -\frac{11,524}{2,10} \cdot 2,67 = -14,653 \text{ mt.}$$

Diese Momente leiten wir wieder über den Rahmen weiter; die Summierung der erhaltenen Teilmomentenflächen ergibt uns das in Fig. 566 aufgetragene Momentenbild  $M'_{II}$ , worin an den bogenförmigen Stäben wieder  $H \cdot y$  in Abzug zu denken ist.

Die Erzeugungs- sowie die Festhaltungskräfte der  $M'_{II}$ -Momente berechnen sich wie folgt:

Knotenpunkt A:

$$H_{A1} = B_{A'} + M_1^A \cdot B_{(M^a=1)} + M_1^B \cdot B_{(M^b=1)}$$

$$= -\frac{21\,000}{8823} - 12,434 \cdot 0,1999 - 18,488 \cdot 0,2158 = -8,855 \text{ t.}$$

$$Q_1^A = \frac{-12,434}{4,60} = -2,703 \text{ t.}$$

$$V_1^A = \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = \frac{-18,488 + 12,434}{10,00} = -0,605 \text{ t.}$$

Die Resultierende aus diesen drei Kräften (Fig. 566b) in die Stabrichtung 4 und die Wagrechte zerlegt liefert uns:

$$D_{I(AII)} = -11,28 \text{ t.}$$

Knotenpunkt B:

$$-H_{A1} = +8,855 \text{ t.}$$

$$V_1^B = -V_1^A = +0,605 \text{ t.}$$

$$H_{A2} = B_{A'} + M_2^B \cdot B_{(M^a=1)} + M_2^C \cdot B_{(M^b=1)}$$

$$= \frac{+20\,735}{48\,625} + 5,015 \cdot 0,0992 + 5,699 \cdot 0,1172 = +1,592 \text{ t.}$$

$$V_2^B = \frac{M_2^C - M_2^B}{l_2} = \frac{5,699 - 5,015}{12,66} = +0,054 \text{ t.}$$

$$Q_5^B = \frac{23,503 + 20,643}{8,00} = +5,518 \text{ t.}$$

Nachdem wir diese Kräfte zu einer Resultierenden vereinigt haben (Fig. 566c) erhalten wir durch Zerlegung derselben in die Wagrechte und Senkrechte die Erzeugungskraft:

$$Z_{II} = +15,95 \text{ t.}$$

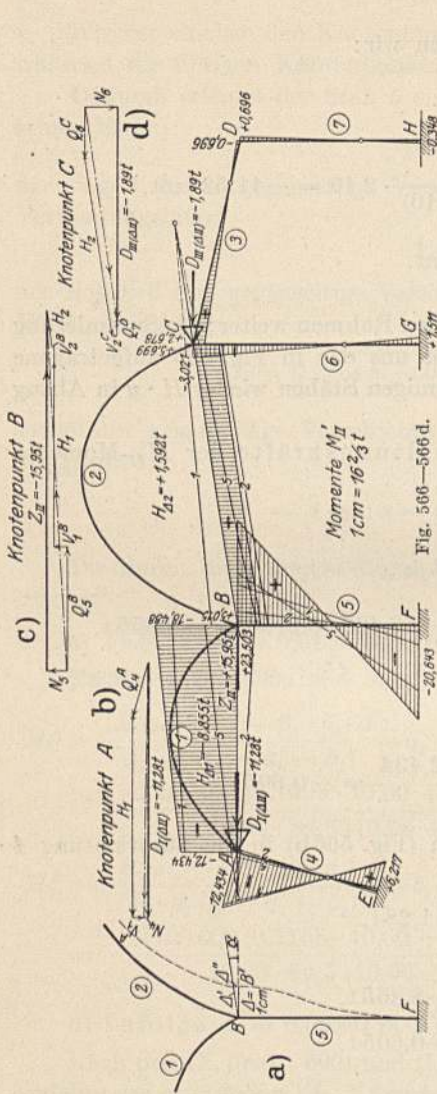


Fig. 506—506d.

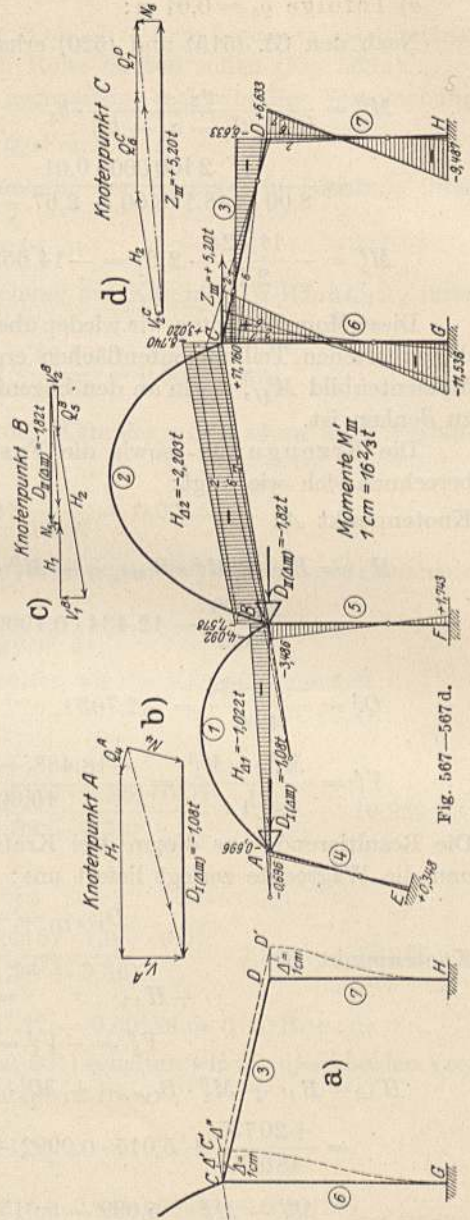


Fig. 507—507d.

Knotenpunkt C:

$$\begin{aligned}
 -H_{A2} &= -1,592 \text{ t,} \\
 V_2^C &= -V_2^B = -0,054 \text{ t,} \\
 Q_6^C &= \frac{-3,021}{6,67} = -0,453 \text{ t,} \\
 Q_7^D &= \frac{+0,696}{5,33} = +0,131 \text{ t.}
 \end{aligned}$$



Die Resultierende aus diesen Kräften (Fig. 566d) in die Wagrechte und Senkrechte zerlegt liefert uns die Festhaltungskraft:

$$D_{III(\Delta III)} = -1,89 \text{ t.}$$

### Momente $M'_{III}$ .

Wir verschieben den Knotenpunkt  $C$  um  $\Delta = 0,01$  m nach rechts, wobei wegen des geraden Stabes 3 der Knotenpunkt  $D$  sich um das gleiche Maß mitverschiebt, während die übrigen Knotenpunkte  $A$  und  $B$  festgehalten sein sollen (Fig. 567 a).

Dadurch erleidet der Stab 6 eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung seiner Enden:

$$\varrho_6 = 0,01 \text{ m,}$$

der Stab 7 eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung seiner Enden:

$$\varrho_7 = 0,01 \text{ m,}$$

und der Bogen 2 die gleichgroße gegenseitige Verschiebung  $\Delta'$  der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie und  $\Delta''$  normal dazu wie bei Verschiebung des Knotenpunktes  $B$  (Fig. 566 a), jedoch mit entgegengesetzter Wirkung auf den Bogen.

Die durch diese gegenseitigen Verschiebungen hervorgerufenen Momente betragen:

a) Infolge  $\Delta' = 0,00987$  m und  $\Delta'' = 0,00158$  m des Bogens 2:

$$M_2^B = -6,774 \text{ mt} \quad \text{und} \quad M_2^C = -6,226 \text{ mt.}$$

b) Infolge  $\varrho_6 = 0,01$  m:

$$M_6^C = \frac{\varrho_6}{l_6 \cdot \beta_6 (l_6 - a_6 - b_6)} \cdot b_6 = + \frac{0,01 \cdot 21000000 \cdot 2,60}{10,00 \cdot 185,2 (10,00 - 3,33 - 2,60)} = +7,244 \text{ mt,}$$

$$M_6^A = - \frac{M_6^C}{b_6} \cdot a_6 = - \frac{7,244}{2,60} \cdot 3,33 = -9,278 \text{ mt.}$$

c) Infolge  $\varrho_7 = 0,01$  m:

$$M_7^D = + \frac{0,01 \cdot 2100000 \cdot 1,83}{8,00 \cdot 213,3 (8,00 - 2,67 - 1,83)} = + 6,434 \text{ mt,}$$

$$M_7^H = - \frac{6,434}{1,83} \cdot 2,67 = -9,387 \text{ mt.}$$

Nachdem wir in Fig. 567 diese Momente entsprechend weitergeleitet haben, erhalten wir durch Addition der Teilmomentenflächen die Momente  $M'_{III}$ ; an den bogenförmigen Stäben ist wieder  $H \cdot y$  in Abzug zu denken.

Die Erzeugungs- sowie die Festhaltungskräfte der  $M'_{III}$ -Momente berechnen sich wie folgt:

Knotenpunkt  $A$ :

$$\begin{aligned} H_{A1} &= M_1^A \cdot B_{(M^a=1)} + M_1^B \cdot B_{(M^b=1)} \\ &= -0,696 \cdot 0,1999 - 4,092 \cdot 0,2158 = -1,022 \text{ t,} \end{aligned}$$

$$V_1^A = \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = \frac{-4,092 + 0,696}{10,00} = -0,340 \text{ t,}$$

$$Q_4^A = \frac{-0,696}{4,60} = -0,153 \text{ t.}$$

Die Resultierende dieser drei Kräfte liefert uns in ihrer Zerlegung horizontal und in die Stabrichtung 4 die Festhaltungskraft:

$$D_{I(AIII)} = -1,08 \text{ t.}$$

Knotenpunkt B:

$$-H_{A1} = +1,022 \text{ t,}$$

$$V_1^B = -V_1^A = +0,340 \text{ t,}$$

$$\begin{aligned} H_{A2} &= B_{A'} + M_2^B \cdot B_{(M^a=1)} + M_2^C \cdot B_{(M^b=1)} \\ &= -\frac{20735}{48625} - 7,578 \cdot 0,0992 - 8,740 \cdot 0,1172 = -2,203 \text{ t,} \end{aligned}$$

$$V_2^B = \frac{M_2^C - M_2^B}{l_2} = \frac{-8,740 + 7,578}{12,66} = -0,092 \text{ t,}$$

$$Q_5^B = -\frac{3,486}{5,33} = -0,654 \text{ t.}$$

Die Resultierende dieser fünf Kräfte nach der wagrechten und senkrechten Richtung zerlegt liefert uns:

$$D_{II(AIII)} = -1,69 \text{ t.}$$

Knotenpunkt C:

$$-H_{A2} = +2,203 \text{ t,}$$

$$V_2^C = +0,092 \text{ t}$$

$$Q_6^C = +\frac{11,760}{6,67} = +1,763 \text{ t,}$$

$$Q_7^D = +\frac{6,633}{5,33} = +1,244 \text{ t.}$$

Die Resultierende aus vorstehenden Kräften liefert uns durch Zerlegung nach der wagrechten und senkrechten Richtung die Erzeugungskraft:

$$Z_{III} = +5,07 \text{ t.}$$

### Momente $M_I^*$ .

Die Momente  $M_I^*$  werden durch die am Knotenpunkt A (Lager I) von links nach rechts wirkende Kraft  $H = 1 \text{ t}$  hervorgerufen. Zur Bildung derselben sind die Momente  $M_I'$ ,  $M_{II}'$  und  $M_{III}'$  (vgl. Teil II, Kap. IV) erforderlich. Die unbekanntes Maßzahlen  $X$  erhalten wir aus folgendem Gleichungssystem:

$$+15,32 X_{I(I)} - 11,28 X_{II(I)} - 1,08 X_{III(I)} = 1,$$

$$-10,35 X_{I(I)} + 15,95 X_{II(I)} - 1,82 X_{III(I)} = 0,$$

$$-0,98 X_{I(I)} - 1,89 X_{II(I)} + 5,20 X_{III(I)} = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Unbekannten  $X$  zu:

$$X_{I(I)} = +0,14383; \quad X_{II(I)} = +0,10060; \quad X_{III(I)} = +0,06367,$$

womit wir nach Gl. (538) erhalten:

$$M_I^* = +0,14383 M_I' + 0,10060 M_{II}' + 0,06367 M_{III}'.$$

In Fig. 568 sind die  $M_I^*$ -Momente aufgetragen; an den bogenförmigen Stäben ist  $H_I^* \cdot y$  in Abzug zu denken.

Momente  $M_{II}^*$ .

Die Momente  $M_{II}^*$  werden durch die am Knotenpunkt  $B$  (Lager  $II$ ) von links nach rechts wirkende Kraft  $H = 1$  t hervorgerufen und werden mit Hilfe der  $M'$ -Momente bestimmt. Die unbekanntes Maßzahlen  $X$  erhalten wir aus folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +15,32 X_{I(II)} - 11,28 X_{II(II)} - 1,08 X_{III(II)} &= 0, \\ -10,35 X_{I(II)} + 15,95 X_{II(II)} - 1,82 X_{III(II)} &= 1, \\ -0,98 X_{I(II)} - 1,89 X_{II(II)} + 5,20 X_{III(II)} &= 0. \end{aligned}$$

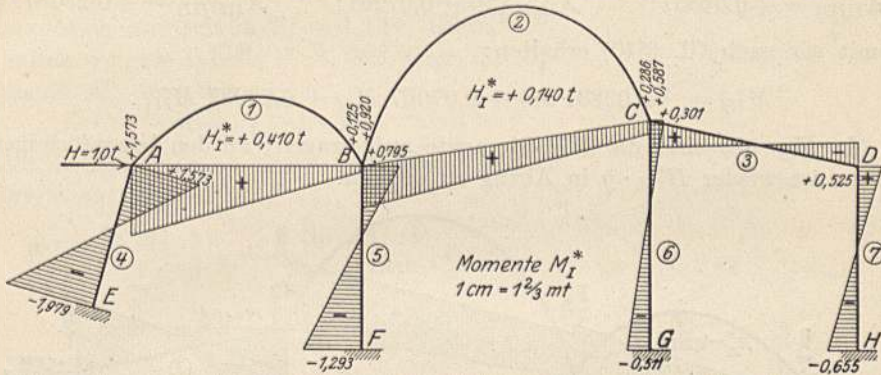


Fig. 568.

Die Unbekannten  $X$  wurden ermittelt zu:

$$X_{I(II)} = +0,10981; \quad X_{II(II)} = +0,14221; \quad X_{III(II)} = +0,07239,$$

womit wir nach Gl. (539) erhalten:

$$M_{II}^* = +0,10981 M_I' + 0,14221 M_{II}' + 0,07239 M_{III}'.$$

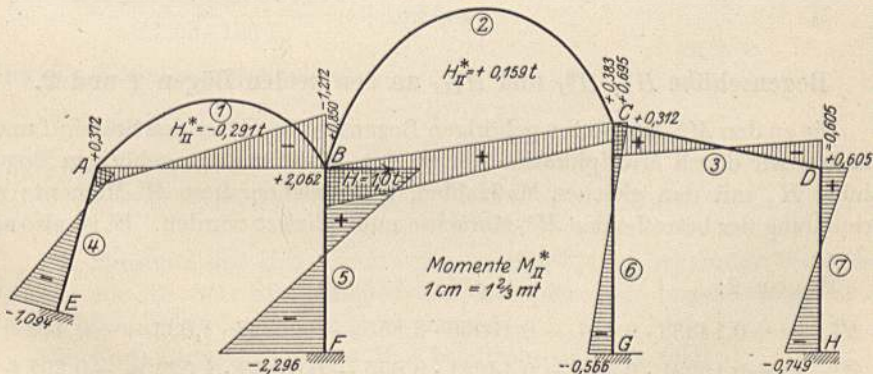


Fig. 569.

In Fig. 569 sind die  $M_{II}^*$ -Momente aufgetragen; an den bogenförmigen Stäben ist wieder  $H_{II}^* \cdot y$  in Abzug zu denken.

Momente  $M_{III}^*$ .

Die Momente  $M_{III}^*$  werden durch die am Knotenpunkt  $C$  (Lager  $III$ ) von links nach rechts wirkende Kraft  $H = 1$  t hervorgerufen und werden mit Hilfe



Momente aus den äußeren Lasten  $P$ .

a) Momente bei festgehaltenen Säulenköpfen (R. I).

Momente  $M_0$ .

Der Auflagerdruck des mit den Kräften  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  belasteten Bogens  $2$  bei  $C$ , normal zur Kämpferverbindungsline  $BC$ , ergibt sich zu (siehe Fig. 570 a):

$$\mathfrak{R}_2^C = \frac{0,80 \cdot 4,40 + 1,20 \cdot 6,95 + 1,00 \cdot 5,10}{12,66} = 1,34 \text{ t.}$$

Der Auflagerdruck  $\mathfrak{R}_2^B$  ist in Fig. 570 a graphisch ermittelt zu  $\mathfrak{R}_2^B = 1,13$  t. Hiermit erhalten wir, wie Tabelle II (S. 692) zeigt, die Momente  $M_0$ , und der

Bogenschub  $\mathfrak{S}$

am Zweigelenkbogen infolge der äußeren Lasten ergibt sich darauf zu:

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{\sum M_0 \cdot yw}{\sum y^2 w} = + \frac{33629}{48625} = +0,692 \text{ t.}$$

Kreuzlinienabschnitte.

$$k_2^a = - \frac{\varphi_2^a}{\beta_2} = - \frac{\sum M_0 xw - \mathfrak{S}_2 \sum xyw}{l_2 \cdot \beta_2} = - \frac{46543 - 0,692 \cdot 72124}{-12,66 \cdot 155,5} = -1,71 \text{ mt,}$$

$$k_2^b = - \frac{\varphi_2^b}{\beta_2} = - \frac{\sum M_0 (l-x)w - \mathfrak{S}_2 \sum y(l-x)w}{l_2 \cdot \beta_2} = - \frac{43721 - 0,692 \cdot 61077}{-12,66 \cdot 155,5} = +0,74 \text{ mt,}$$

oder die Schlußliniensenkungen:

$$S^a = \frac{a_2}{l_2} k_2^b = \frac{-5,97 \cdot 0,74}{12,66} = -0,35 \text{ mt,}$$

$$S^b = \frac{b_2}{l_2} k_2^a = + \frac{5,44 \cdot 1,71}{12,66} = +0,73 \text{ mt.}$$

Die Momente des R. I wurden nun in Fig. 571 in bekannter Weise konstruiert; für die Schnitte zwischen den Kämpfern der bogenförmigen Stäbe ist das Moment  $H \cdot y$  in Abzug zu denken.

Die Festhaltungskräfte des R. I ermitteln sich wie folgt:  
Knotenpunkt  $A$ :

$$H_1 = M_1^A \cdot B_{(M^A=1)} + M_1^B \cdot B_{(M^B=1)} = -0,007 \cdot 0,1999 - 0,043 \cdot 0,2158 = -0,011 \text{ t,}$$

$$V_1^A = \frac{M_1^B - M_1^A}{l_1} = \frac{-0,043 + 0,007}{10,00} = -0,004 \text{ t,}$$

$$Q_4^A = \frac{-0,007}{4,60} = -0,002 \text{ t.}$$

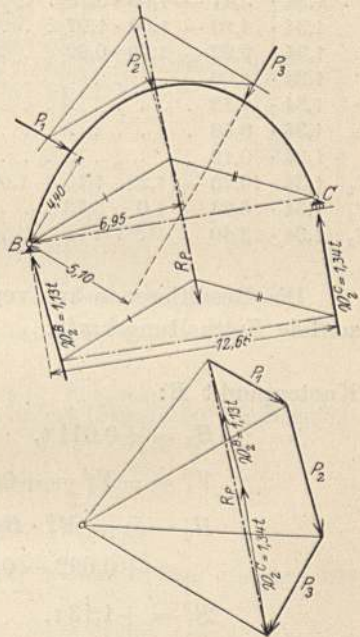


Fig. 570 a.

Tabelle II.

Lamelle	Momente $M_0$	$M_0 \cdot y w$	$M_0 \cdot x w$	$M_0 \cdot (l-x) w$
10	$1,34 \cdot 12,37 - (0,80 \cdot 3,70 + 1,20 \cdot 6,60 + 1,00 \cdot 5,27) \dots = 0,42$	52	24	907
11	$1,34 \cdot 11,60 - (0,80 \cdot 2,30 + 1,20 \cdot 5,72 + 1,00 \cdot 5,52) \dots = 1,31$	479	254	2779
12	$1,34 \cdot 10,70 - (0,80 \cdot 0,80 + 1,20 \cdot 4,70 + 1,00 \cdot 5,58) \dots = 2,47$	1571	988	5266
13	$1,34 \cdot 9,60 - (1,20 \cdot 3,50 + 1,00 \cdot 5,36) \dots = 3,30$	3036	2224	6930
14	$1,34 \cdot 8,35 - (1,20 \cdot 2,20 + 1,00 \cdot 4,95) \dots = 3,60$	4363	3722	7207
15	$1,34 \cdot 6,95 - (1,20 \cdot 0,73 + 1,00 \cdot 4,20) \dots = 4,22$	5950	6073	7385
16	$1,34 \cdot 5,47 - 1,00 \cdot 3,15 \dots = 4,17$	6672	8340	6326
17	$1,34 \cdot 4,10 - 1,00 \cdot 1,97 \dots = 3,52$	4738	7350	3520
18	$1,34 \cdot 2,92 - 1,00 \cdot 0,69 \dots = 3,22$	3542	6987	2064
19	$1,34 \cdot 1,90 \dots = 2,54$	2111	5530	970
20	$1,34 \cdot 1,13 \dots = 1,51$	861	3212	304
21	$1,34 \cdot 0,56 \dots = 0,75$	239	1530	63
22	$1,34 \cdot 0,12 \dots = 0,16$	15	309	2
unter $P_1$	$1,34 \cdot 10,20 - (1,20 \cdot 4,15 + 1,00 \cdot 5,50) \dots = 3,18$	33629	46543	43721
„ $P_2$	$1,34 \cdot 6,23 - 1,0 \cdot 3,73 \dots = 4,61$			
„ $P_3$	$1,34 \cdot 2,40 \dots = 3,22$			

Die Resultierende aus vorstehenden Kräften liefert (Fig. 571a) die horizontale Festhaltungskraft:

$$F_I = -0,012 \text{ t.}$$

Knotenpunkt B:

$$-H_1 = +0,011 \text{ t,}$$

$$V_1^B = -V_1^A = +0,004 \text{ t,}$$

$$H_2 = \mathfrak{S} + M_2^B \cdot B_{(M^B=1)} + M_2^C \cdot B_{(M^C=1)}$$

$$= +0,692 - 0,080 \cdot 0,0992 + 0,484 \cdot 0,1172 = +0,741 \text{ t,}$$

$$\mathfrak{R}_2^B = +1,13 \text{ t,}$$

$$\mathfrak{A}_2^B = \frac{M_2^C - M_2^B}{l_2} = \frac{+0,484 + 0,080}{12,66} = +0,045 \text{ t,}$$

$$Q_5^B = \frac{-0,037}{5,33} = -0,007 \text{ t.}$$

Die Resultierende aus diesen Kräften liefert (Fig. 571 b) die horizontale Festhaltungskraft:

$$F_{II} = +0,43 \text{ t.}$$

Knotenpunkt C:

$$-H_2 = -0,741 \text{ t,}$$

$$\mathfrak{R}_2^C = +1,34 \text{ t,}$$

$$\mathfrak{A}_2^C = -\mathfrak{A}_2^B = -0,045 \text{ t,}$$

$$Q_6^C = \frac{-0,257}{6,67} = -0,039 \text{ t,}$$

$$Q_7^D = \frac{+0,067}{5,33} = +0,013 \text{ t.}$$

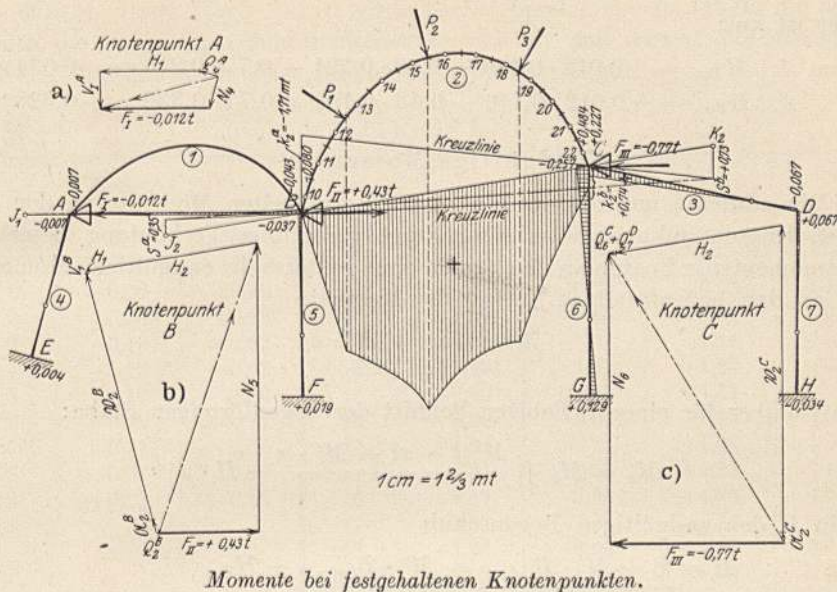


Fig. 571—571 c.

Die Resultierende aus vorstehenden Kräften liefert (Fig. 571 c) die horizontale Festhaltungskraft:

$$F_{III} = -0,77 \text{ t.}$$

b) Zusatzmomente.

Indem wir die Festhaltungskräfte als Aktionen wirken lassen, erhalten wir die Zusatzmomente:

$$M_{Zus.} = +0,012 M_I^* - 0,43 M_{II}^* + 0,77 M_{III}^*,$$

welche in Fig. 572 aufgetragen sind; an den bogenförmigen Stäben ist das Moment  $H \cdot y$  in Abzug zu denken.

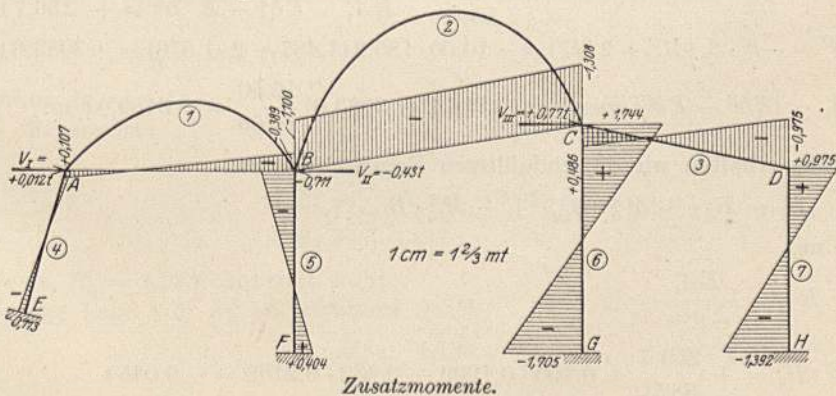


Fig. 572.

Die zu den Zusatzmomenten gehörigen Bogenschübe ermitteln sich zu:

$$H_{Zus.} = V_I \cdot H_I^* + V_{II} \cdot H_{II}^* + V_{III} \cdot H_{III}^*,$$

daher ist am:

$$\begin{aligned} \text{Bogen 1: } H_{\text{Zus.}} &= +0,012 \cdot 0,410 + 0,43 \cdot 0,291 - 0,77 \cdot 0,213 = -0,034 \text{ t,} \\ \text{,, 2: } H_{\text{Zus.}} &= +0,012 \cdot 0,140 - 0,43 \cdot 0,159 - 0,77 \cdot 0,339 = -0,328 \text{ t.} \end{aligned}$$

c) Endgültige Momente:

Wir addieren nun die unter a) und b) ermittelten Momente an den einzelnen Knotenpunkten und erhalten durch geradlinige Verbindung dieser Gesamtmomentenordinaten an den Säulen ohne weiteres die endgültigen Momente, und an den bogenförmigen Stäben die Momente

$$\frac{M^l (l - x) + M^r \cdot x}{l}$$

Nun ist aber für einen beliebigen Schnitt der bogenförmigen Stäbe:

$$M_x = M_0 + \frac{M^l (l - x) + M^r \cdot x}{l} - H \cdot y,$$

worin  $H$  den endgültigen Bogenschub

$$H = \frac{\xi + M^l \cdot B_{(M^l=1)} + M^r \cdot B_{(M^r=1)}}{(R. I)} + H_{\text{Zus.}}$$

bedeutet; dieser ist für:

$$\begin{aligned} \text{Bogen 1: } H_1 &= -0,011 - 0,034 = -0,045 \text{ t,} \\ \text{,, 2: } H_2 &= +0,741 - 0,328 = +0,413 \text{ t.} \end{aligned}$$

Zur Kontrolle ermitteln wir nachstehend noch diese endgültigen Bogenschübe wie im vorhergehenden Beispiel aus den Spannweitenänderungen der Bögen, welche wir auf Grund der endgültigen Momente an den Säulen nach dem Mohrschen Satz erhalten. Danach ist:

$$E \cdot \delta^A = -l_4 \cdot \beta_4 (M_4^A + 2 M_4^E) = -6,20 \cdot 184,0 (0,100 - 2 \cdot 0,109) = + 134,6 \text{ t/m,}$$

$$E \cdot \delta^B = -l_5 \cdot \beta_5 (M_5^B + 2 M_5^F) = -8,00 \cdot 148,1 (-0,748 + 2 \cdot 0,423) = - 116,1 \text{ t/m}$$

$$E \Delta'_1 = E \delta^A - E \delta^B = + 250,7 \text{ t/m,}$$

$$E \cdot \delta^C = -l_6 \cdot \beta_6 (M_6^C + 2 M_6^G) = -10,00 \cdot 185,2 (1,487 - 2 \cdot 1,576) = + 3083,6 \text{ t/m,}$$

$$E \Delta'_2 = (E \delta^B - E \delta^C) \cos \alpha = - (116,1 + 3083,6) \frac{12,50}{12,66} = - 3159,0 \text{ t/m.}$$

Hieraus erhalten wir die endgültigen Bogenschübe zu:

$$H_1 = B_{A1} + M_1^A \cdot B_{(M^A=1)} + M_2^B \cdot B_{(M^B=1)}$$

und mit

$$B_{A1} = \frac{E \Delta'_1}{\Sigma y^2 w}$$

$$H_1 = + \frac{250,7}{8823} + 0,100 \cdot 0,1999 - 0,432 \cdot 0,2158 = -0,045 \text{ t,}$$

$$H_2 = \xi + B_{A2} + M_3^B \cdot B_{(M^B=1)} + M_2^C \cdot B_{(M^C=1)}$$

$$= + 0,692 - \frac{3159}{48625} - 1,180 \cdot 0,0992 - 0,824 \cdot 0,1172 = + 0,413 \text{ t.}$$



Mittels dieser Werte haben wir in nachstehender Tabelle III für die beiden Bögen die endgültigen Schnittmomente ermittelt und darauf das Momentenbild der Fig. 573 (endgültige Momente) vervollständigt.

Tabelle III.

Bogen 1			Bogen 2				
Schnitt	$-H_1 y$	$M_{tot.}$	Schnitt	$M_0$	$-H_2 \cdot y$	$M_0 - H_2 y$	$M_{tot.}$
1	+0,02	+0,10	10	+0,42	-0,29	+0,13	-1,04
2	+0,06	+0,09	11	+1,31	-0,83	+0,48	-0,68
3	+0,10	+0,07	12	+2,42	-1,31	+1,11	+0,02
4	+0,12	+0,02	unter $P_1$	+3,18	-1,53	+1,65	+0,53
5	+0,14	-0,03	13	+3,30	-1,73	+1,57	+0,45
6	+0,13	-0,11	14	+3,60	-2,09	+1,51	+0,43
7	+0,11	-0,20	15	+4,22	-2,31	+1,91	+0,86
8	+0,07	-0,30	unter $P_2$	+4,61	-2,36	+2,25	+1,22
9	+0,03	-0,38	16	+4,17	-2,38	+1,79	+0,78
			17	+3,52	-2,28	+1,24	+0,27
			18	+3,22	-2,05	+1,17	+0,24
			unter $P_3$	+3,22	-1,89	+1,33	+0,42
			19	+2,54	-1,70	+0,84	-0,06
			20	+1,51	-1,28	+0,23	-0,64
			21	+0,75	-0,78	-0,03	-0,88
			22	+0,16	-0,26	-0,10	-0,92

Die Stützlinie als Probe.

Am belasteten bogenförmigen Stab 2 erhalten wir die Stützkkräfte wie folgt:

Wir vereinigen den Bogenschub  $H_2$  und die beiden Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}_2^B$  und  $\mathfrak{B}_2^B$  zu der Resultierenden  $R_2^B$  (Fig. 573 c); desgleichen ermitteln wir  $R_2^C$  aus  $H_2$ ,  $\mathfrak{A}_2^C$  und  $\mathfrak{B}_2^C$  (Fig. 573 d). Es ist:

$$\mathfrak{B}_2^B = +1,13 \text{ t (graphisch ermittelt in Fig. 570 a);}$$

$$\mathfrak{A}_2^B = \frac{M_2^C - M_2^B}{l_2} = \frac{-0,824 + 1,180}{12,66} = +0,028 \text{ t,}$$

$$H_2 = +0,413 \text{ t,}$$

woraus  $R_2^B = 1,18 \text{ t.}$

Ferner ist:

$$\mathfrak{B}_2^C = +1,34 \text{ t.}$$

$$\mathfrak{A}_2^C = -\mathfrak{A}_2^B = -0,028 \text{ t,}$$

$$H_2 = +0,413 \text{ t,}$$

woraus  $R_2^C = 1,37 \text{ t}$  ermittelt wurde.

Die Lage von  $R_2^B$  ist bestimmt durch:

$$r_2^B = \frac{M_2^B}{R_2^B} = \frac{1,180}{1,18} = 1,00 \text{ m,}$$

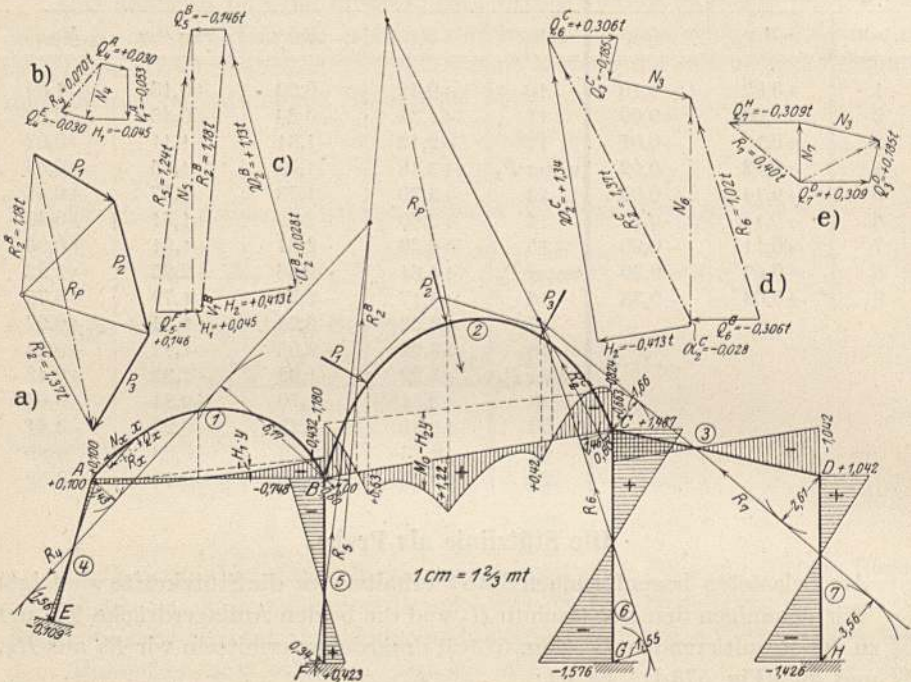
jene von  $R_2^C$  durch:

$$r_2^C = \frac{M_2^C}{R_2^C} = \frac{0,824}{1,37} = 0,60 \text{ m;}$$

nun kann die Stützlinie für den Bogen 2 mit Hilfe des Kräfteckes der Fig. 573 a gezeichnet werden.

Die Stützkraft im Stab 5 ergibt sich folgendermaßen:

Auf den Stab 5 wirkt von Bogen 2 die Kämpferresultierende  $R_2^B$ , von Bogen 1 der Bogenschub  $H_1$ , der Auflagerdruck  $V_1^B$  sowie die Säulenquerkraft  $Q_5^B$ ; die Resultierende aus diesen Kräften stellt die Säulennormalkraft  $N_5$  dar



Endgültige Momente und Stützlinie.

Fig. 573—573 e.

(Fig. 573 c). Die Resultierende aus  $N_5$  und der Querkraft  $Q_5^F$  am Säulenfuß ergibt die Stützkraft  $R_5 = 1,24$  t, deren Lage bestimmt ist durch:

$$r_5^F = \frac{M_5^F}{R_5} = \frac{0,423}{1,24} = 0,34 \text{ m}$$

und

$$r_5^B = \frac{M_5^B}{R_5} = \frac{0,748}{1,24} = 0,60 \text{ m}.$$

Die Stützkraft  $R_4$  erhalten wir durch Vereinigung der in Fig. 573 b bestimmten Normalkraft  $N_4$  mit  $Q_4^E$  zu einer Resultierenden, welche im Abstand:

$$r_4^E = \frac{0,109}{0,070} = 1,56 \text{ m}$$

und

$$r_4^A = \frac{0,100}{0,070} = 1,43 \text{ m}$$

am Stab 4 angreift; andererseits ist ihr Abstand vom Punkt B:

$$r_1^B = \frac{0,432}{0,070} = 6,17 \text{ m}.$$

Um die Stützkraft  $R_7$  zu erhalten, ermitteln wir zunächst die beiden Querkraften  $Q_7^D$  und  $Q_7^D$  (Fig. 573e) und zerlegen deren Resultierende in die Normalkräfte  $N_7$  und  $N_3$ . Die Resultierende aus  $N_7$  und  $Q_7^D$  ist dann die gesuchte Stützkraft  $R_7$ , deren Lage bestimmt ist durch:

$$r_7^H = \frac{1,426}{0,40} = 3,56 \text{ m}$$

und

$$r_7^D = \frac{1,042}{0,40} = 2,61 \text{ m},$$

oder durch ihren Abstand vom Knotenpunkt  $C$ :

$$r_3^C = \frac{0,662}{0,40} = 1,66 \text{ m}.$$

Zur Bestimmung der Stützkraft  $R_6$  setzen wir  $R_2^C$  mit den beiden Querkraften  $Q_3^C$  und  $Q_6^C$  sowie mit der Normalkraft  $N_3$  zu einer Resultierenden zusammen, welche die Normalkraft  $N_6$  des Stabes 6 ist (Fig. 573d) und daher senkrecht verlaufen muß. Fügen wir nun zu  $N_6$  noch die Querkraft  $Q_6^C$  hinzu, so ergibt sich  $R_6 = 1,02 \text{ t}$ , angreifend in den Abständen:

$$r_6^C = \frac{1,576}{1,02} = 1,55 \text{ m}$$

und

$$r_8^C = \frac{1,487}{1,02} = 1,46 \text{ m}.$$

Als Probe müssen die Stützkraften durch die Momentennullpunkte hindurchgehen; ferner muß der Schnittpunkt von  $R_4$  und  $R_5$  auf  $R_2^B$ , und jener von  $R_6$  und  $R_7$  auf  $R_2^C$  liegen.

An den bogenförmigen Stäben werden ferner aus der Stützlinie die Quer- und Normalkräfte für jeden Schnitt dadurch erhalten, daß wir die in dem betreffenden Schnitt wirkende Stützkraft  $R$  normal und tangential zur Bogenachse zerlegen.

Endlich sind die Stützkraften  $R_4$ ,  $R_5$ ,  $R_6$  und  $R_7$  die der Berechnung der Fundamente zugrunde zu legenden Resultierenden.

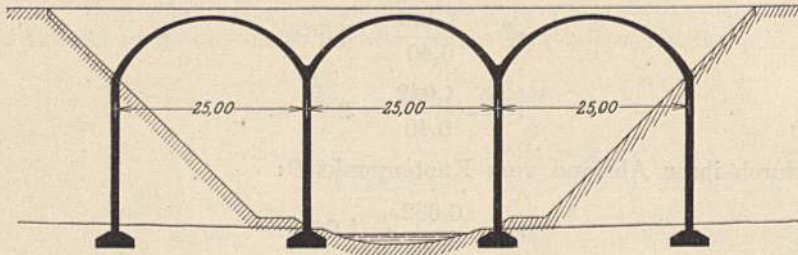
### Beispiel 20.

## Einflußlinien der inneren Kräfte eines kontinuierlichen Bogens auf elastisch drehbaren Pfeilern.

(Fig. 574.)

Es soll hier lediglich die Bestimmung der Einflußlinien der Biegemomente (der Einfachheit halber bezogen auf Querschnittsmitte an Stelle der Kernpunkte, siehe Beispiel 17) für Schnitte sowohl an den Bögen als auch an den Pfeilern gezeigt werden, durch deren Auswertung die größten Biegemomente an allen Stäben infolge der gegebenen Belastung berechnet werden können. Ferner werden für die bogenförmigen Stäbe die Einflußlinien der Horizontalschübe und Auflagerdrücke an denselben aufgetragen, auf Grund deren die größten Quer- und Normalkräfte für die gegebene Belastung erhalten

werden können. Um die größten Querkräfte an den Pfeilern zu erhalten, zeichnen wir noch schließlich die Einflußlinien für die Querkräfte an den Pfeilerfüßen auf; die Querkräfte an den Pfeilerköpfen sind gleich groß wie an den Pfeilerfüßen, jedoch entgegengesetzt gerichtet.



Längsschnitt.

Fig. 574.

Wir ermitteln zunächst die von der Belastung unabhängigen Größen für alle Stäbe. Die Untersuchung erstreckt sich auf 1 m Breite.

Tabelle I.

Lamelle	$\Delta s$	$h$	$1000 J$	$w = \frac{\Delta s}{J}$	$y$	$y \cdot w$	$y^2 \cdot w$	$x$	$l - x$	$x(l - x) w$
1	1,95	0,88	56,79	34,34	0,87	30	26	0,45	24,55	379
2	1,95	0,84	49,39	39,48	2,53	100	253	1,50	23,50	1392
3	1,95	0,80	42,67	45,70	4,00	183	731	2,80	22,20	2842
4	1,95	0,77	38,04	51,26	5,27	270	1424	4,30	20,70	4562
5	1,95	0,73	32,42	60,15	6,33	381	2410	5,92	19,08	6794
6	1,95	0,69	27,38	71,22	7,13	508	3621	7,73	17,27	9508
7	1,95	0,66	23,96	81,37	7,70	627	4824	9,60	15,40	12029
8	1,95	0,62	19,86	98,19	7,96	782	6221	11,53	13,47	15250
$\sum_0^{l/2} = 480,71$						2881	19510			52756

## Bogenschub.

$$B = \frac{\sum_0^{l/2} y w}{\sum_0^{l/2} y^2 \cdot w} = \frac{2881}{19510} = 0,1476 \text{ t.}$$

## Auflagerdrehwinkel der Bögen.

$$E \bar{\alpha} = \sum_0^{l/2} w - B \cdot \sum_0^{l/2} y w;$$

$$\bar{\alpha} = \frac{480,71 - 0,1476 \cdot 2881}{E} = + \frac{56,7}{E} \text{ mt};$$

$$E \beta = \frac{2 \sum_0^{l/2} x(l-x) w}{l^2} - \frac{B}{2} \cdot \sum_0^{l/2} y w;$$

$$\beta = \frac{2 \cdot 52756}{25,00^2 \cdot E} - \frac{0,1476}{2} \cdot \frac{2881}{E} = - \frac{43,7}{E} \text{ mt}$$



$$b_7 = \frac{l_7}{3 + \frac{\varepsilon_7^b}{\beta_7}} = \frac{20,00}{3 + \frac{86,3}{40,0}} = 3,88 \text{ m} = b_4;$$

$$\tau_{1-2}^B = \frac{\tau_1^B \cdot \tau_2^B}{\tau_1^B + \tau_2^B} = \frac{88,5 \cdot 86,4}{(88,5 + 86,4) E} = \frac{43,7}{E} = \varepsilon_5^b;$$

$$b_5 = \frac{l_5}{3 + \frac{\varepsilon_5^b}{\beta_5}} = \frac{20,00}{3 + \frac{43,7}{40,0}} = 4,89 \text{ m} = b_6.$$

### Verteilungsmaße.

$$\mu_{1-2}^B = \frac{\tau_{2-5}^B}{\tau_2^B} = \frac{\tau_{2-6}^C}{\tau_2^B} = \frac{35,4}{60,0} = 0,59 = \mu_{3-2}^C; \quad \mu_{1-5}^B = \mu_{3-6}^C = 0,44;$$

$$\mu_{2-1}^B = \frac{\tau_{1-5}^B}{\tau_1^B} = \frac{35,7}{88,5} = 0,40 = \mu_{2-3}^C; \quad \mu_{2-5}^B = \mu_{2-6}^C = 0,60;$$

$$\mu_{5-1}^B = \frac{\tau_{1-2}^B}{\tau_1^B} = \frac{43,7}{88,5} = 0,49 = \mu_{6-3}^C; \quad \mu_{5-2}^B = \mu_{6-2}^C = 0,51.$$

### Momente $M_I'$ .

Wir verschieben den Knotenpunkt  $A$  um  $\Delta = 0,01$  m nach rechts, während die übrigen Knotenpunkte in Ruhe bleiben sollen.

Dadurch erleidet Stab 4 eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung seiner Enden:

$$\varrho_4 = 0,01 \text{ m},$$

und der Bogen 1 eine gegenseitige Verschiebung seiner Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie

$$\Delta = 0,01 \text{ m nach innen.}$$

Die durch diese gegenseitigen Verschiebungen hervorgerufenen Momente betragen:

a) Infolge  $\varrho_4 = 0,01$  m:

Nach den Gl. (515) und (520) ist:

$$M_4^A = \frac{\varrho_4 \cdot b_4}{l_4 \cdot \beta_4 (l_4 - a_4 - b_4)} = \frac{0,01 \cdot 2100000 \cdot 3,88}{20,00 \cdot 40,0 \cdot 9,45} = +10,778 \text{ mt};$$

$$M_4^B = -\frac{M_4^A}{b_4} \cdot a_4 = -\frac{10,778}{3,88} \cdot 6,67 = -18,528 \text{ mt}.$$

b) Infolge  $\Delta = 0,01$  m nach innen:

Für den symmetrischen Bogen erhalten wir nach den Gl. (592a) und (593a) die Kämpfermomente:

$$M_1^A = \frac{\left(\frac{l_1}{2} - b_1\right) \Delta \cdot B}{l_1 \cdot \beta_1 (l_1 - a_1 - b_1)} \cdot a_1 = + \frac{\left(\frac{25,00}{2} + 11,86\right) 0,01 \cdot 2100000 \cdot 0,1476 \cdot 9,36}{25,00 \cdot 43,7 \cdot 46,22}$$

$$= +13,996 \text{ mt};$$

$$M_1^B = \frac{\left(\frac{l_1}{2} - a_1\right) \Delta \cdot B}{l_1 \cdot \beta_1 (l_1 - a_1 - b_1)} \cdot b_1 = + \frac{\left(\frac{25,00}{2} + 9,36\right) 0,10 \cdot 2100000 \cdot 0,1476 \cdot 9,36}{25,00 \cdot 43,7 \cdot 46,22}$$

$$= +9,360 \text{ mt}.$$

Nachdem wir vorstehende Momente in üblicher Weise über den Rahmen weitergeleitet und dann addiert haben, erhalten wir die in Fig. 575 dargestellten  $M'_I$ -Momente; an den bogenförmigen Stäben wird, wie in den vorhergehenden Beispielen, der Einfluß des Bogenschubes auf die Momente zwischen den Kämpfern erst am Schluß bei den endgültigen Momenten für die gegebene Belastung in Rechnung gestellt.

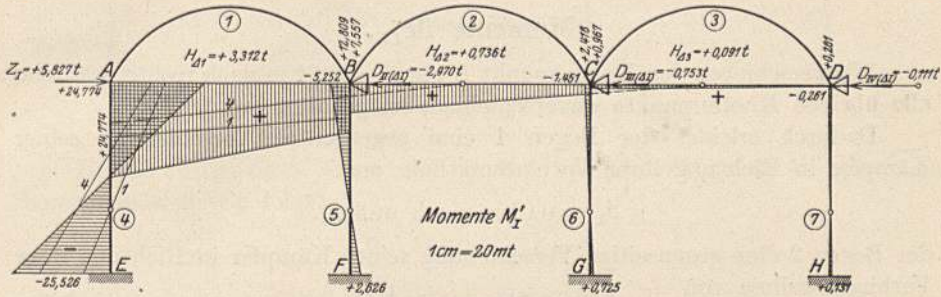


Fig. 575.

Die Erzeugungs- und Festhaltungskräfte der  $M'_I$ -Momente bestimmen sich wie folgt:

Knotenpunkt A:

Bogenschub nach den Gl. (586) und (595):

$$H_{A1} = B_{A1} + \frac{B_1}{2} (M_1^A + M_1^B) \\ = + \frac{21\,000}{2 \cdot 19\,510} + \frac{0,1476}{2} (24,774 + 12,809) = + 3,312$$

$$\text{Säulenquerkraft } Q_4^A = \frac{24,774 + 25,526}{20,00} = + 2,515 \text{ t}$$

$$\text{Erzeugungskraft } Z_1 = + 5,827 \text{ t};$$

Knotenpunkt B:

$$\text{Bogenschub } - H_{A1} = - 3,312$$

$$\text{Bogenschub } H_{A2} = \frac{B_2}{2} (M_2^B + M_2^C) = + \frac{0,1476}{2} (7,557 + 2,418) = + 0,736 \text{ t}$$

$$Q_5^B = - \frac{5,252}{13,33} = - 0,394 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } D_{II(AI)} = - 2,970 \text{ t}.$$

Knotenpunkt C:

$$\text{Bogenschub } - H_{A2} = - 0,736 \text{ t}$$

$$\text{Bogenschub } H_{A3} = \frac{B_3}{2} (M_3^C + M_3^D) = + \frac{0,1476}{2} (0,967 + 0,261) = + 0,091 \text{ t}$$

$$Q_6^C = - \frac{1,451}{13,33} = - 0,108 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } D_{III(AI)} = - 0,753 \text{ t}.$$

Knotenpunkt  $D$ :

$$\text{Bogenschub } -H_{A3} = -0,091 \text{ t}$$

$$Q_7^D = -\frac{0,261}{13,33} = -0,020 \text{ t}$$

$$\text{Festhaltungskraft } D_{IV(AI)} = -0,111 \text{ t.}$$

**Momente  $M'_{II}$ .**

Wir verschieben den Knotenpunkt  $B$  um  $\Delta = 0,01$  m nach rechts, während alle übrigen Knotenpunkte unverrückbar festgehalten werden.

Dadurch erleidet der Bogen 1 eine gegenseitige Verschiebung seiner Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie von

$$\Delta_1 = 0,01 \text{ m nach außen,}$$

der Bogen 2 eine gegenseitige Verschiebung seiner Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie von

$$\Delta_2 = 0,01 \text{ m nach innen,}$$

und der Stab 5 eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung seiner Enden von

$$\varrho_5 = 0,01 \text{ m.}$$

Die durch diese gegenseitigen Verschiebungen hervorgerufenen Momente betragen:

a) Infolge  $\Delta_1 = 0,01$  m nach außen:

Diese Momente sind umgekehrt gerichtet wie die bereits unter  $M'_I$  für  $\Delta_1$  nach innen berechneten, daher ist:

$$M_1^A = -13,996 \text{ mt} \quad \text{und} \quad M_1^B = -9,360 \text{ mt.}$$

b) Infolge  $\Delta_2 = 0,01$  m nach innen:

Nach den Gl. (592a) und (593a) erhalten wir:

$$\begin{aligned} M_2^B = M_2^C &= \frac{\left(\frac{l_2}{2} - b_2\right) \Delta_2 \cdot B}{l_2 \beta_2 (l_2 - a_2 - b_2)} \cdot a_2 \\ &= + \frac{\left(\frac{25,00}{2} + 11,86\right) 0,01 \cdot 2\,100\,000 \cdot 0,1476 \cdot 11,86}{25,00 \cdot 43,7 \cdot 48,64} = +16,838 \text{ mt.} \end{aligned}$$

c) Infolge  $\varrho_5 = 0,01$  m:

Nach den Gl. (515) und (520) ist:

$$\begin{aligned} M_5^B &= \frac{\varrho_5 \cdot b_5}{l_5 \cdot \beta_5 \cdot (l_5 - a_5 - b_5)} = + \frac{0,01 \cdot 2\,100\,000 \cdot 4,89}{20,00 \cdot 40,0 \cdot 8,44} = +15,209 \text{ mt;} \\ M_5^F &= -\frac{M_5^B}{b_5} \cdot a_5 = -\frac{15,209}{4,89} \cdot 6,67 = -20,745 \text{ mt.} \end{aligned}$$

Diese Momente leiten wir wieder über den Rahmen weiter; die Summierung der erhaltenen Teilmomentenflächen ergibt das in Fig. 576 aufgetragene Momentenbild  $M'_{II}$ , worin an den bogenförmigen Stäben wieder  $H \cdot y$  in Abzug zu denken ist.



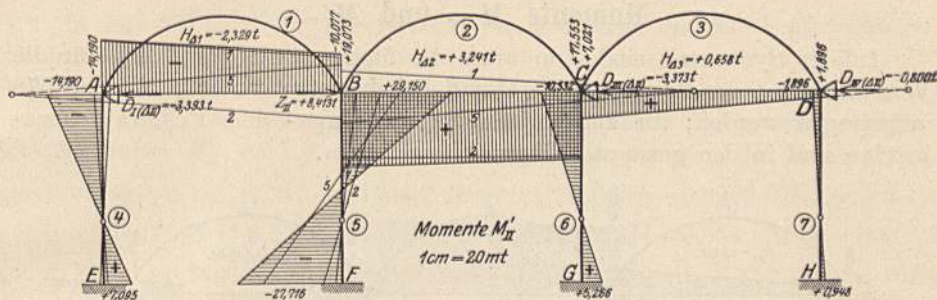


Fig. 576.

Die Erzeugungs- sowie die Festhaltungskräfte der  $M'_{II}$ -Momente berechnen sich wie folgt:

Knotenpunkt A:

$$\begin{aligned} \text{Bogenschub } H_{A1} &= B_{A1} + \frac{B_1}{2} (M_1^A + M_1^B) \\ &= + \frac{21\,000}{2 \cdot 19\,510} - \frac{0,1476}{2} (14,190 + 10,077) = -2,329 \text{ t} \\ Q_4^A &= - \frac{14,190}{13,33} = -1,064 \text{ t} \\ \text{Festhaltungskraft } D_{I(A II)} &= -3,393 \text{ t.} \end{aligned}$$

Knotenpunkt B:

$$\begin{aligned} \text{Bogenschub } -H_{A1} &= +2,329 \text{ t} \\ \text{Bogenschub } H_{A2} &= + \frac{21\,000}{2 \cdot 19\,510} + \frac{0,1476}{2} (19,073 + 17,553) = +3,241 \text{ t} \\ Q_5^B &= + \frac{29,150 + 27,716}{20,00} = +2,843 \text{ t} \\ \text{Erzeugungskraft } Z_{II} &= +8,413 \text{ t.} \end{aligned}$$

Knotenpunkt C:

$$\begin{aligned} \text{Bogenschub } -H_{A2} &= -3,241 \text{ t} \\ \text{Bogenschub } H_{A3} &= + \frac{0,1476}{2} (7,021 + 1,896) = +0,658 \text{ t} \\ Q_6^C &= - \frac{10,532}{13,33} = -0,790 \text{ t} \\ \text{Festhaltungskraft } D_{III(A II)} &= -3,373 \text{ t.} \end{aligned}$$

Knotenpunkt D:

$$\begin{aligned} \text{Bogenschub } -H_{A3} &= -0,658 \text{ t} \\ Q_7^D &= - \frac{1,896}{13,33} = -0,142 \text{ t} \\ \text{Festhaltungskraft } D_{IV(A II)} &= -0,800 \text{ t.} \end{aligned}$$

### Momente $M'_{III}$ und $M'_{IV}$ .

Infolge Symmetrie sind nun auch die Momente  $M'_{III}$  und  $M'_{IV}$  für die Verschiebungen der Knotenpunkte  $C$  und  $D$  bekannt und in Fig. 577 und 578 aufgetragen worden; die zugehörigen Erzeugungs- und Festhaltungskräfte sind in den genannten Figuren angetragen.

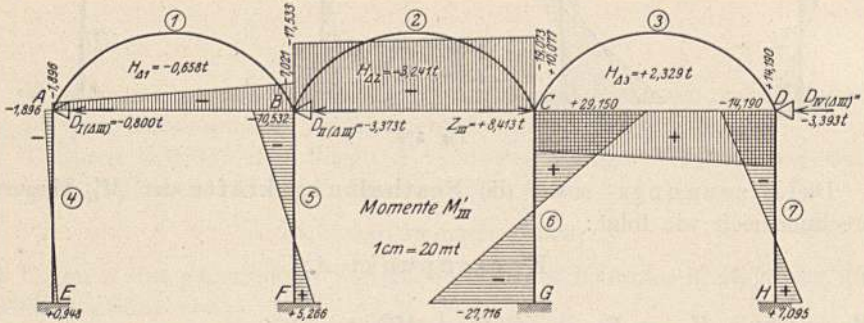


Fig. 577.

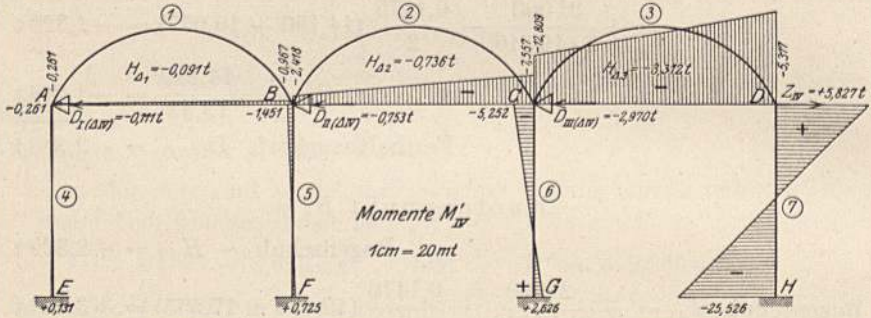


Fig. 578.

### Momente $M_I^*$ .

Die Momente  $M_I^*$  werden durch die am Knotenpunkt  $A$  von links nach rechts wirkende Kraft  $H = 1$  t hervorgerufen. Zur Bildung derselben sind die Momente  $M'_I$  bis  $M'_{IV}$  (vgl. Teil II, Kap. IV) erforderlich. Die unbekanntes Maßzahlen  $X$  erhalten wir aus folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} + 5,827 X_{I(l)} - 3,393 X_{II(l)} - 0,800 X_{III(l)} - 0,111 X_{IV(l)} &= 1; \\ - 2,970 X_{I(l)} + 8,413 X_{II(l)} - 3,373 X_{III(l)} - 0,753 X_{IV(l)} &= 0; \\ - 0,753 X_{I(l)} - 3,373 X_{II(l)} + 8,413 X_{III(l)} - 2,970 X_{IV(l)} &= 0; \\ - 0,111 X_{I(l)} - 0,800 X_{II(l)} - 3,393 X_{III(l)} + 5,827 X_{IV(l)} &= 0; \end{aligned}$$

Wir lösen dieses System mit Hilfe der Gln. (564) bis (566) auf, wobei sich infolge Symmetrie der Koeffizienten die Hilfswerte  $k$  auf die Hälfte reduzieren; wir erhalten:

$$X_{I(l)} = + 0,2827; \quad X_{II(l)} = + 0,1564; \quad X_{III(l)} = + 0,1238; \quad X_{IV(l)} = + 0,0992;$$

womit sich nach Gl. (538) ergibt:

$$M_I = + 0,2827 M'_I + 0,1564 M'_{II} + 0,1238 M'_{III} + 0,0992 M'_{IV}.$$

In Fig. 579 sind die  $M_I^*$ -Momente aufgetragen; an den bogenförmigen Stäben ist  $H_I^* \cdot y$  in Abzug zu denken.

Diese zu den  $M_I^*$ -Momenten gehörigen Bogenschübe  $H_I^*$  setzen sich, genau wie  $M_I^*$  aus den  $M_I'$  bis  $M_{IV}'$ , aus den zu diesen Momenten gehörigen Bogenschüben  $H_A$ , nach Maßgabe der Größen  $X$ , zusammen. Es ist daher am

- Bogen 1:  $H_I^* = +0,2827 \cdot 3,312 - 0,1564 \cdot 2,329 - 0,1238 \cdot 0,658 - 0,0992 \cdot 0,091 = +0,482t$ ;  
 „ 2:  $H_I^* = +0,2827 \cdot 0,736 + 0,1564 \cdot 3,241 - 0,1238 \cdot 3,241 - 0,0992 \cdot 0,736 = +0,241t$ ;  
 „ 3:  $H_I^* = +0,2827 \cdot 0,091 + 0,1564 \cdot 0,658 + 0,1238 \cdot 2,329 - 0,0992 \cdot 3,312 = +0,018t$ .

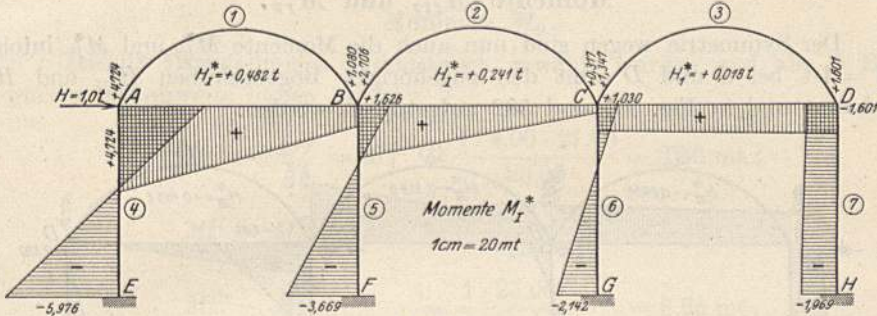


Fig. 579.

### Momente $M_{II}^*$ .

Die Momente  $M_{II}^*$  werden durch die am Knotenpunkt B von links nach rechts wirkende Kraft  $H = 1t$  hervorgerufen und werden mit Hilfe der  $M'$ -Momente bestimmt. Die unbekanntn Maßzahlen  $X$  erhalten wir aus folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} + 5,827 X_{I(II)} - 3,393 X_{II(II)} - 0,800 X_{III(II)} - 0,411 X_{IV(II)} &= 0; \\ - 2,970 X_{I(II)} + 8,413 X_{II(II)} - 3,373 X_{III(II)} - 0,753 X_{IV(II)} &= 1; \\ - 0,753 X_{I(II)} - 3,373 X_{II(II)} + 8,413 X_{III(II)} - 2,970 X_{IV(II)} &= 0; \\ - 0,411 X_{I(II)} - 0,800 X_{II(II)} - 3,393 X_{III(II)} + 5,827 X_{IV(II)} &= 0. \end{aligned}$$

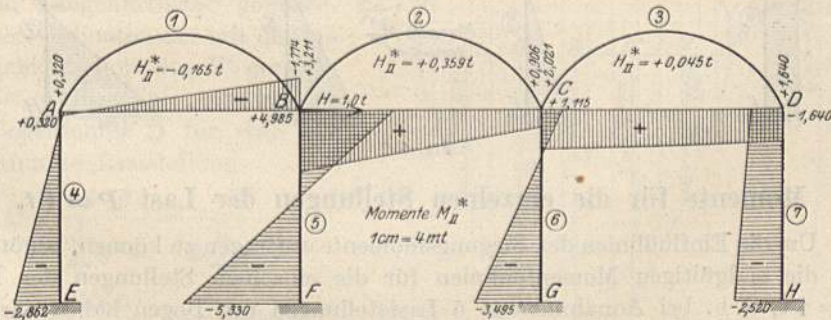


Fig. 580.

Die Unbekanntn  $X$  wurden ermittelt zu:

$X_{I(II)} = +0,1790$ ;  $X_{II(II)} = +0,2717$ ;  $X_{III(II)} = +0,1703$ ;  $X_{IV(II)} = +0,187$ ;  
 womit wir nach Gl. (539) erhalten:

$$M_{II}^* = +0,1790 M_I' + 0,2717 M_{II}' + 0,1703 M_{III}' + 0,1387 M_{IV}'.$$

In Fig. 580 sind die  $M_{II}^*$ -Momente aufgetragen; an den bogenförmigen Stäben ist wieder  $H_{II}^* \cdot y$  in Abzug zu denken.

Diese zu den  $M_{II}^*$ -Momenten gehörigen Bogenschübe  $H_{II}^*$  werden ebenfalls auf Grund der Maßzahlen  $X$  erhalten; es ist am

$$\text{Bogen 1: } H_{II}^* = +0,1790 \cdot 3,312 - 0,2717 \cdot 2,329 - 0,1703 \cdot 0,658 - 0,1387 \cdot 0,091 = -0,165 \text{ t;}$$

$$\text{,, 2: } H_{II}^* = +0,1790 \cdot 0,736 + 0,2717 \cdot 3,241 - 0,1703 \cdot 3,241 - 0,1387 \cdot 0,736 = +0,359 \text{ t;}$$

$$\text{,, 3: } H_{II}^* = +0,1790 \cdot 0,091 + 0,2717 \cdot 0,658 + 0,1703 \cdot 2,329 - 0,1387 \cdot 3,312 = +0,045 \text{ t.}$$

### Momente $M_{III}^*$ und $M_{IV}^*$ .

Der Symmetrie wegen sind nun auch die Momente  $M_{III}^*$  und  $M_{IV}^*$  infolge  $H = 1 \text{ t}$  bei  $C$  und  $D$  samt den zugehörigen Bogenschüben  $H_{III}^*$  und  $H_{IV}^*$  bekannt und in Fig. 581 und 582 aufgetragen worden.

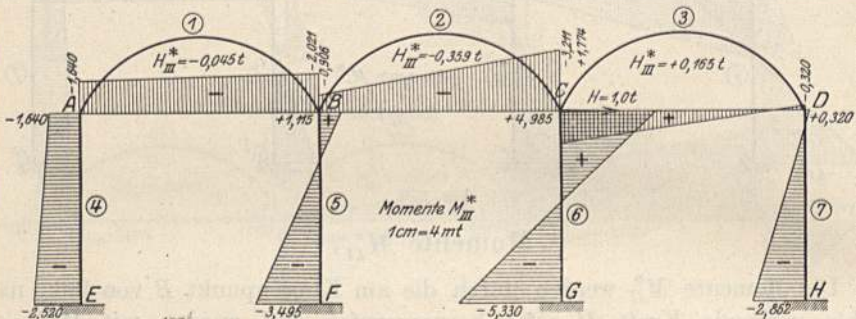


Fig. 581.

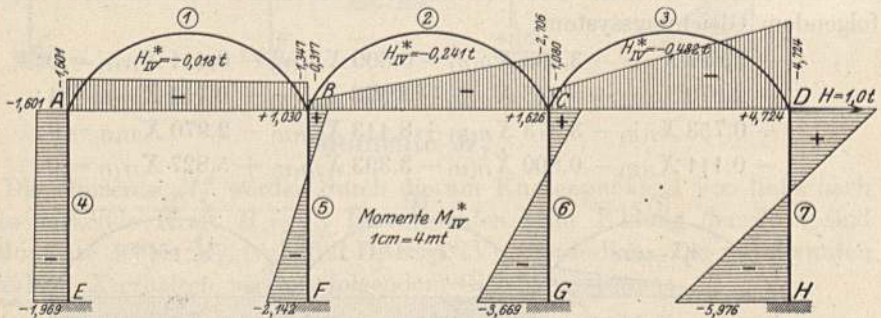


Fig. 582.

### Momente für die einzelnen Stellungen der Last $P = 1 \text{ t}$ .

Um die Einflußlinien der Biegemomente auftragen zu können, benötigen wir die endgültigen Momentenlinien für die einzelnen Stellungen der Last  $P = 1 \text{ t}$ , d. h. bei Annahme von 5 Laststellungen pro Bogen haben wir die Momente für  $3 \cdot 5 = 15$  Belastungsfälle zu bestimmen, welche sich aber in unserem Falle wegen der Symmetrie des Rahmens auf die Hälfte reduzieren.

Wir bestimmen also zunächst für die 8 Stellungen der Last  $P = 1 \text{ t}$  (Belastungsfälle) die Momente des R. I, darauf die Zusatzmomente und schließlich die endgültigen Momente am ganzen Rahmen, aus denen die Ordinaten der Einflußlinien gewonnen werden.

## a) Momente bei festgehaltenen Säulenköpfen.

(R. I.)

Die Momentenlinien für die einzelnen Laststellungen (Belastungsfälle) tragen wir, wie üblich, an ein und dieselbe Systemfigur an. Zuerst bestimmen wir an den belasteten Stäben (Bögen) mit Hilfe der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte die Schlußlinie und hängen an diese die  $M_0$ -Fläche an. Zum Schluß sollten wir die Bogenmomente  $H \cdot y$  noch in Abzug bringen, wir berücksichtigen den Bogenschub  $H$  jedoch erst bei der Bildung der endgültigen Momentenlinien.

Momente  $M_0$ .

Da die Laststellungen symmetrisch gewählt wurden und alle 3 Bögen gleiche Spannweite haben, so ist

$$M_0^I = M_0^{VI} = M_0^{VI} = \frac{1 \cdot 4,00 \cdot 21,00}{25,00} = 3,36 \text{ mt};$$

$$M_0^{II} = M_0^{IV} = M_0^{VII} = \frac{1 \cdot 8,25 \cdot 16,75}{25,00} = 5,53 \text{ mt};$$

$$M_0^{III} = M_0^{VIII} = \frac{1 \cdot 25,00}{4} = 6,25 \text{ mt}.$$

Bogenschübe  $\mathfrak{S}$ .

Die durch die Last  $P=1 \text{ t}$  in ihren einzelnen Stellungen am Zweigelenkbogen hervorgerufenen Bogenschübe  $\mathfrak{S}$  ermitteln wir zweckmäßig mit Hilfe der Einflußlinie für  $\mathfrak{S}$ , welche wir am einfachsten graphisch auf Grund des Satzes von der Gegenseitigkeit der Formänderungen erhalten, indem wir die Biegelinie für den Zustand  $\mathfrak{S} = -1$  (mit den elastischen Gewichten  $1 \cdot y \cdot w$ )

zeichnen. Sind  $\eta = \frac{E \cdot \delta}{H'}$  die im Längenmaßstab gemessenen Ordinaten der mit der beliebigen Polweite  $H'$  gezeichneten Biegelinie, so ist der Bogenschub  $\mathfrak{S}$  für eine bestimmte Laststellung

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{E \cdot \delta}{\sum_0^l y^2 w} = \frac{H'}{2 \sum_0^{l/2} y^2 w} \cdot \eta \\ &= \frac{1000}{39020} \cdot \eta = 0,0256 \cdot \eta. \end{aligned}$$

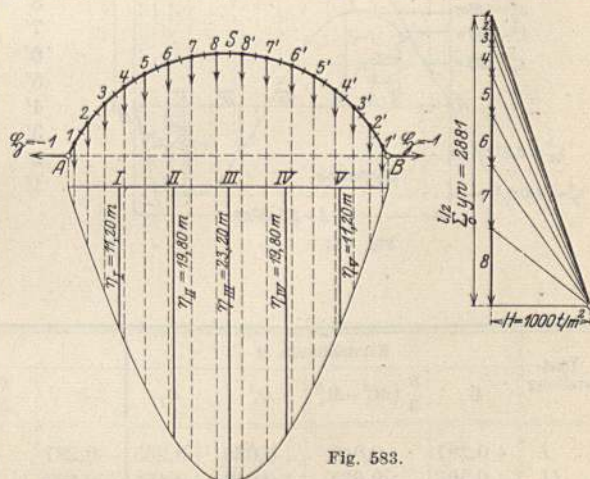


Fig. 583.

Für die Laststellungen I bis VIII erhalten wir demnach (Fig. 583):

$$\mathfrak{S}_I = \mathfrak{S}_V = \mathfrak{S}_{VI} = +0,287 \text{ t};$$

$$\mathfrak{S}_{II} = \mathfrak{S}_{IV} = \mathfrak{S}_{VII} = +0,507 \text{ t};$$

$$\mathfrak{S}_{III} = \mathfrak{S}_{VIII} = +0,594 \text{ t}.$$

**Kreuzlinienabschnitte bzw. Schlußliniensenkungen.**

Die Kreuzlinienabschnitte für jede Stellung der Last  $P = 1 \text{ t}$  (für jeden Belastungsfall) ermitteln wir der vielen Stellungen wegen nicht mit Hilfe von  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$  resp.  $M_0$  und  $\mathfrak{S}$ , sondern wie beim geraden Stab (vgl. Teil I, Kap. V, sowie Beisp. 2 und 3) auf Grund des Satzes von der Gegenseitigkeit der Formänderungen mit Hilfe der Biegelinie des Zweigelenkbogens für die Belastung  $M = 1$  am Stabende, welche nichts anderes ist als die Einflußlinie der Kreuzlinienabschnitte bzw. Schlußliniensenkungen. Diese Biegelinie erhalten wir nach Mohr durch Belasten des Zweigelenkbogens mit den in nachstehender Tabelle II zu-

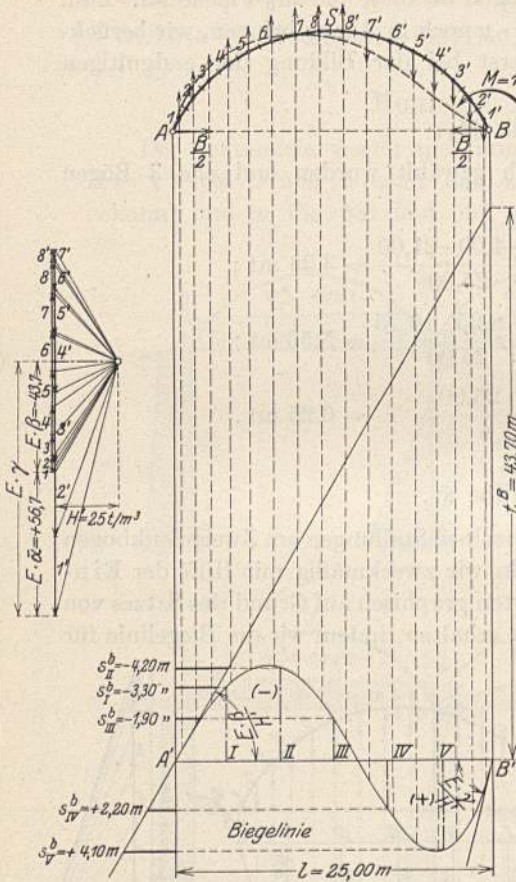


Fig. 584.

Tabelle II.

Lamelle	$\frac{x}{l} \cdot w$	$\frac{B}{2} \cdot yw$	$E \cdot \Delta F$
1	0,6	2,2	- 1,6
2	2,4	7,4	- 5,0
3	5,1	13,5	- 8,4
4	8,8	19,9	- 11,1
5	14,2	28,1	- 13,9
6	22,0	37,5	- 15,5
7	31,2	46,3	- 15,5
8	45,3	57,7	- 12,4
8'	52,9	57,7	- 4,8
7'	50,1	46,3	+ 3,8
6'	49,2	37,5	+ 11,7
5'	45,9	28,1	+ 17,8
4'	42,8	19,9	+ 22,9
3'	40,6	13,5	+ 27,1
2'	37,1	7,4	+ 29,7
1'	33,7	2,2	+ 31,5

$E \cdot \bar{\alpha} = + 56,7 \frac{1}{\text{mt}}$

Tabelle III

Laststellung	Knotenpunkt A				Knotenpunkt B				
	$\mathfrak{S}$	$\frac{B}{2} (M_1^A + M_1^B)$	$Q_1^A$	$F_I$	$\mathfrak{S}$	$-\frac{B}{2} (M_1^A + M_1^B)$	$\frac{B}{2} (M_2^B + M_2^C)$	$Q_2^B$	$F_{II}$
I	+0,287	+0,010	+0,068	+0,365	-0,287	-0,010	-0,044	+0,023	-0,318
II	+0,507	-0,075	+0,019	+0,451	-0,507	+0,075	-0,073	+0,039	-0,466
III	+0,594	-0,118	-0,056	+0,420	-0,594	+0,118	-0,049	+0,026	-0,499
IV	+0,507	-0,048	-0,079	+0,380	-0,507	+0,048	+0,023	-0,012	-0,448
V	+0,287	+0,041	-0,045	+0,283	-0,287	-0,041	+0,066	-0,035	-0,297
VI	-	+0,041	+0,009	+0,050	+0,287	-0,041	+0,030	+0,050	+0,326
VII	-	+0,011	+0,002	+0,013	+0,507	-0,011	-0,070	+0,014	+0,440
VIII	-	-0,034	-0,007	-0,041	+0,594	+0,034	-0,132	-0,041	+0,455

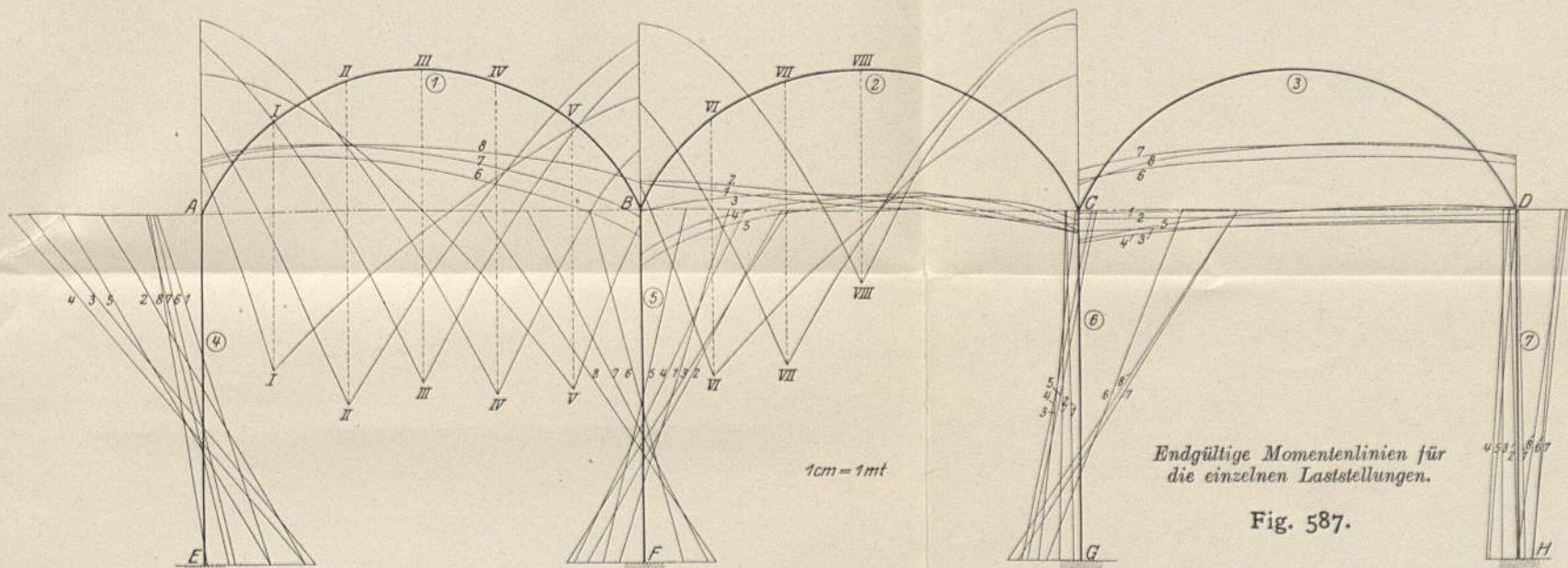
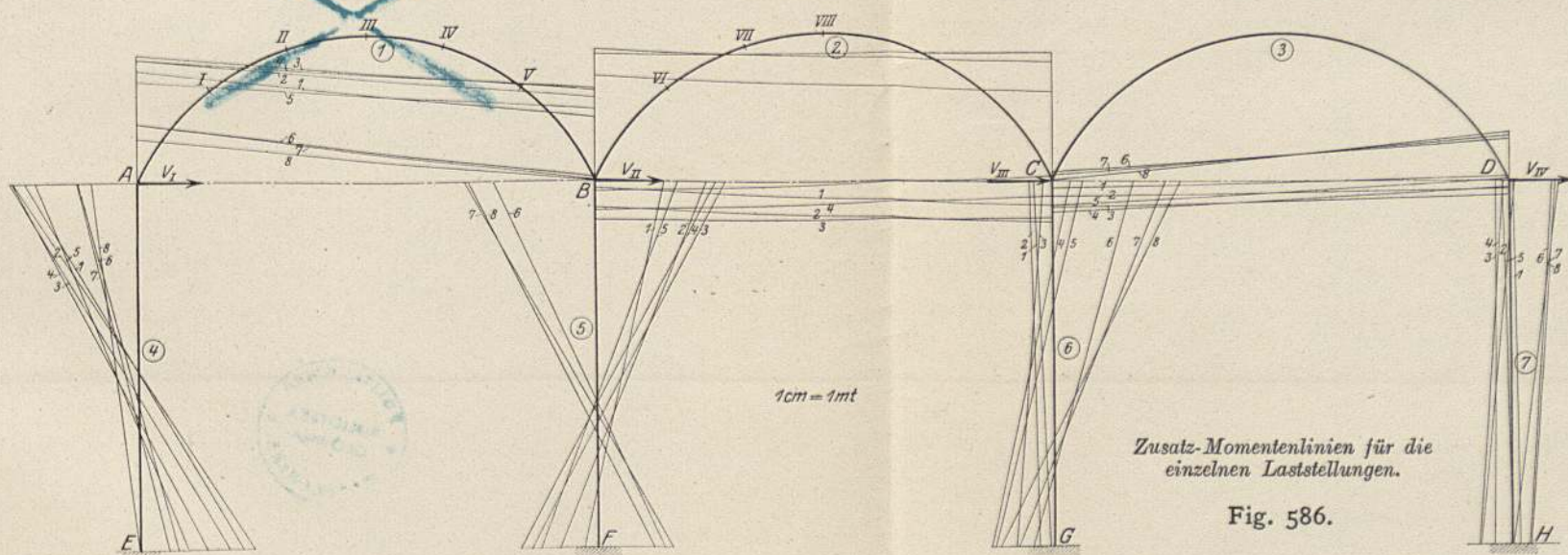
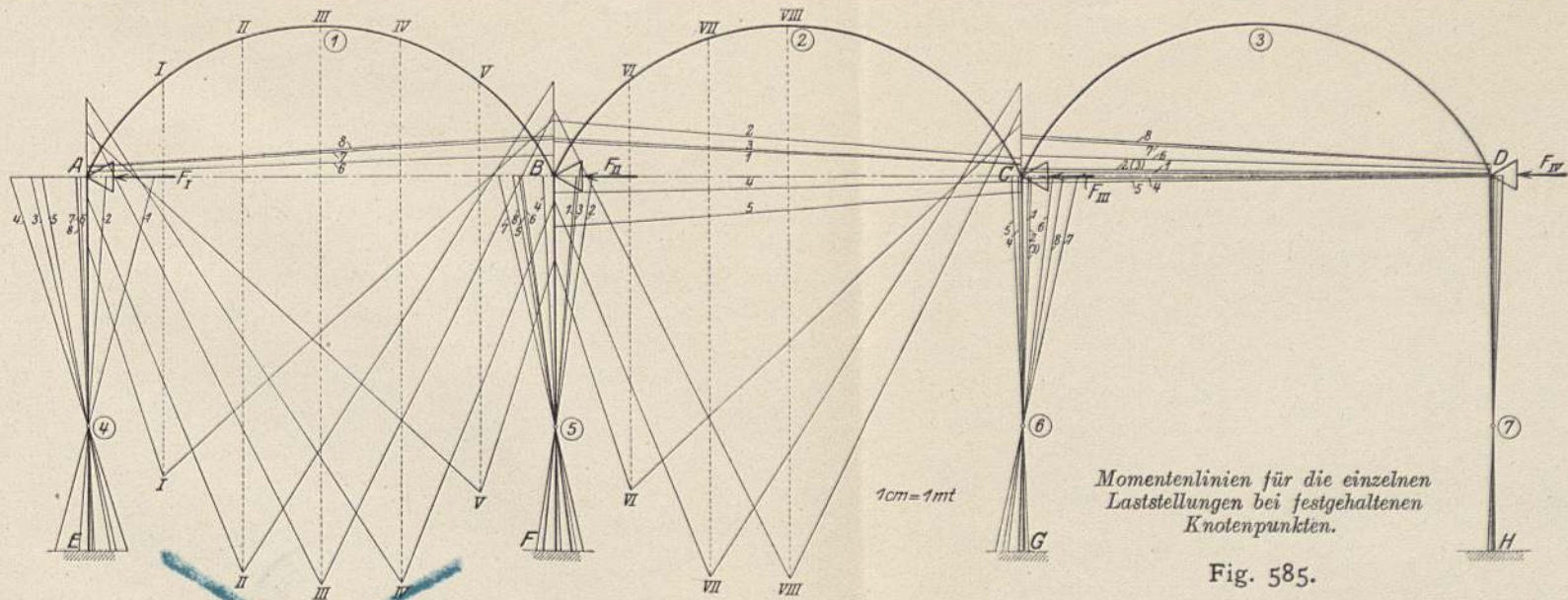


Fig. 585—587.





sammengestellten elastischen Gewichten  $E \cdot \Delta F = \left( \frac{x}{l} - \frac{B}{2} \cdot y \right) w$  infolge  $M = 1$  bei  $B$  und Zeichnen eines Seilpolygons dazu mit der beliebigen Polweite  $H'$  (Fig. 584). Die Kreuzlinienabschnitte erhalten wir darauf in Fig. 584 in der gleichen Weise wie beim geraden Balken; es ist nach den Gl. (339 u. 340) sowie (343 u. 344)

$$k^a = -\frac{\delta^b}{\beta} = -s^b;$$

$$k^b = -\frac{\delta^a}{\beta} = -s^a.$$

Die Werte  $s^a$  gehen aus der Biegelinie für  $M = 1$  bei  $A$  hervor; da der Bogen symmetrisch, so ist die Biegelinie für  $M^B = 1$  das Spiegelbild der in Fig. 584 für  $M^A = 1$  gezeichneten. Aus diesem Grunde erhalten wir die Abschnitte  $s^a$  aus Fig. 584 dadurch, daß wir, wie beim geraden symmetrischen Stab (Beisp. Nr. 3), symmetrisch liegende Laststellungen vertauschen; es ist daher:

$$s_I^a = s_V^b; \quad s_{II}^a = s_{IV}^b; \quad s_{III}^a = s_{III}^b; \quad s_{IV}^a = s_{II}^b; \quad s_V^a = s_I^b.$$

Mit diesen Abschnitten erhalten wir dann auch die Schlußliniensenkungen für  $P = 1$  t:

$$S^a = -\frac{a}{l} s^a \quad \text{und} \quad S^b = -\frac{b}{l} s^b.$$

Beispielsweise erhalten wir für die Laststellung im Schnitt I:

$$S_I^a = + \frac{9,36}{25,00} \cdot 4,10 = + 1,54 \text{ mt}$$

$$S_I^b = - \frac{11,86}{25,00} \cdot 3,30 = - 1,57 \text{ mt}$$

In Fig. 585 haben wir für die einzelnen Laststellungen die Momente aus R. I ermittelt; für die Schnitte zwischen den Kämpfern der bogenförmigen Stäbe ist, wie eingangs erwähnt, noch das Moment  $H \cdot y$  in Abzug zu bringen.

Die den einzelnen Laststellungen entsprechenden Festhaltungskräfte haben wir nach T. I, Kap. VIII, 9 ermittelt und in Tabelle III zusammengestellt.

(Festhaltungskräfte des R. I).

Knotenpunkt C					Knotenpunkt D			
$\wp$	$-\frac{B}{2} (M_2^B + M_2^C)$	$\frac{B}{2} (M_3^C + M_3^D)$	$Q_6^C$	$F_{III}$	$\wp$	$-\frac{B}{2} (M_3^C + M_3^D)$	$Q_7^D$	$F_{IV}$
—	+0,044	-0,005	+0,006	+0,045	—	+0,005	+0,001	+0,006
—	+0,073	-0,009	+0,011	+0,075	—	+0,009	+0,002	+0,011
—	+0,049	-0,006	+0,007	+0,050	—	+0,006	+0,001	+0,007
—	-0,023	+0,003	-0,003	-0,023	—	-0,003	-0,001	-0,004
—	-0,066	+0,008	-0,010	-0,068	—	-0,008	-0,002	-0,010
-0,287	-0,030	-0,026	+0,032	-0,311	—	+0,026	+0,006	+0,032
-0,507	+0,070	-0,047	+0,056	-0,428	—	+0,047	+0,010	+0,057
-0,594	+0,132	-0,034	+0,041	-0,455	—	+0,034	+0,007	+0,041

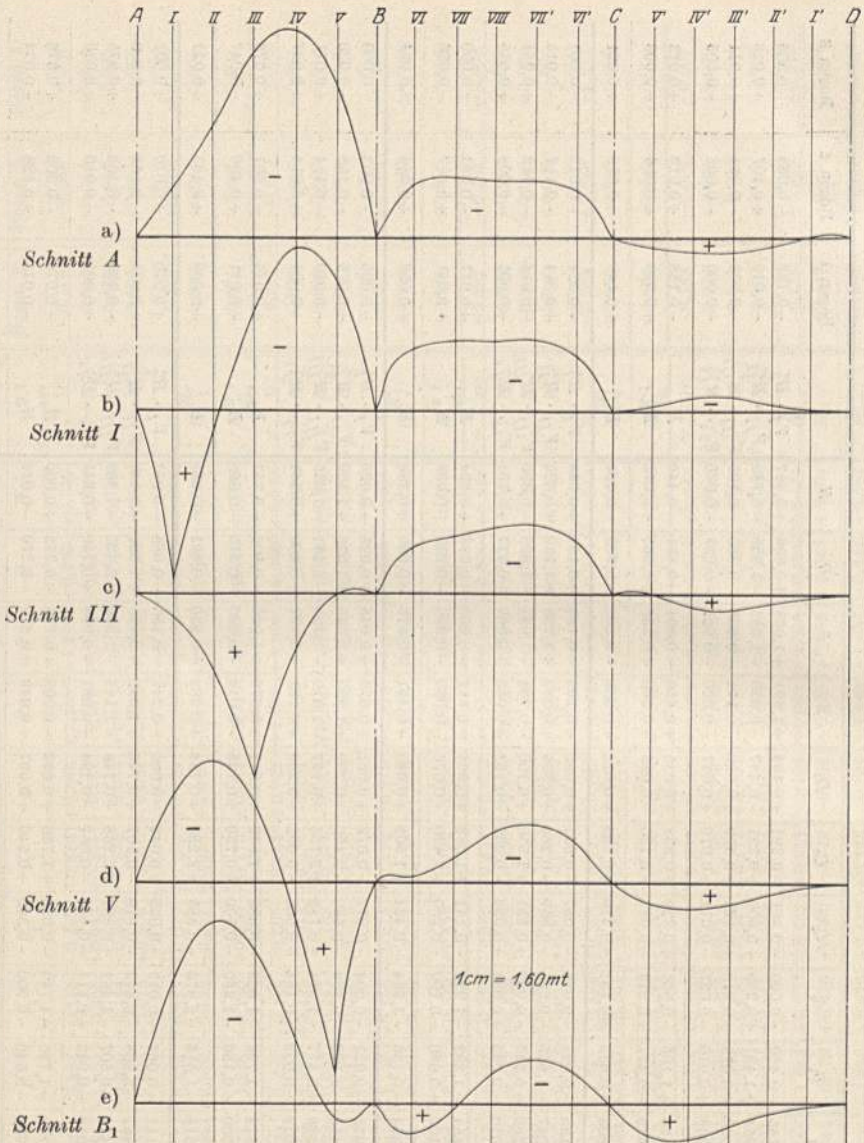
Tabelle IV. Momente und Bogenschübe.

Laststellung	Schnitt	A <sub>4</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>6</sub>	D <sub>7</sub>	E	F	G	H		Bogen 1	Bogen 2	Bogen 3
I	$V_I \cdot M_I^*$	-1,724	-0,394	-0,987	-0,593	-0,115	-0,491	-0,376	+0,584	+2,181	+1,339	+0,782	+0,719	$V_I \cdot H_I^*$	-0,176	-0,088	-0,006
	$V_{II} \cdot M_{II}^*$	+0,102	-0,564	+1,021	+1,585	+0,288	+0,642	+0,354	-0,522	-0,910	-1,695	-1,111	-0,801	$V_{II} \cdot H_{II}^*$	-0,052	+0,114	+0,014
	$V_{III} \cdot M_{III}^*$	+0,074	+0,091	+0,041	-0,050	+0,144	-0,080	-0,224	-0,014	+0,113	+0,157	+0,240	+0,129	$V_{III} \cdot H_{III}^*$	+0,002	+0,016	-0,007
	$V_{IV} \cdot M_{IV}^*$	+0,010	+0,008	+0,002	-0,003	+0,016	+0,006	-0,010	-0,028	+0,012	+0,013	+0,022	+0,036	$V_{IV} \cdot H_{IV}^*$	+0,000	+0,001	+0,003
	$M_{zus}$	-1,538	-0,859	+0,077	+0,936	+0,333	+0,077	-0,256	+0,020	+1,396	-0,186	-0,067	+0,083	$H_{zus}$	-0,226	+0,043	+0,004
	$M_{R I}$	+0,900	-0,760	-0,448	+0,312	-0,143	-0,057	+0,086	+0,015	-0,450	-0,151	-0,043	-0,008	$H_{R I}$	+0,297	-0,044	-0,005
	$M_{tot}$	-0,638	-1,619	-0,371	+1,248	+0,190	+0,020	-0,170	+0,035	+0,946	-0,337	-0,110	+0,075	$H_{tot}$	+0,071	-0,001	-0,001
II	$V_I \cdot M_I^*$	-2,130	-0,487	-1,220	-0,733	-0,143	-0,607	-0,464	+0,722	+2,695	+1,655	+0,966	+0,888	$V_I \cdot H_I^*$	-0,217	-0,109	-0,008
	$V_{II} \cdot M_{II}^*$	+0,149	-0,827	+1,496	+2,323	+0,422	+0,942	+0,520	-0,764	-1,333	-2,484	-1,629	-1,174	$V_{II} \cdot H_{II}^*$	-0,077	+0,167	+0,021
	$V_{III} \cdot M_{III}^*$	+0,123	+0,151	+0,068	-0,083	+0,241	-0,133	-0,374	-0,024	+0,189	+0,262	+0,400	+0,215	$V_{III} \cdot H_{III}^*$	+0,003	+0,027	-0,012
	$V_{IV} \cdot M_{IV}^*$	+0,176	+0,014	+0,003	-0,011	+0,030	+0,012	-0,018	-0,052	+0,022	+0,024	+0,040	+0,066	$V_{IV} \cdot H_{IV}^*$	+0,000	+0,003	+0,005
	$M_{zus}$	-1,682	-1,149	+0,347	+1,496	+0,550	+0,214	-0,336	-0,118	+1,573	-0,543	-0,223	-0,005	$H_{zus}$	-0,291	+0,088	+0,006
	$M_{R I}$	+0,250	-1,270	-0,749	+0,521	-0,240	-0,096	+0,144	+0,026	-0,125	-0,260	-0,072	-0,013	$H_{R I}$	+0,432	-0,073	-0,009
	$M_{tot}$	-1,432	-2,419	-0,402	+2,017	+0,310	+0,118	-0,192	-0,092	+1,448	-0,803	-0,295	-0,018	$H_{tot}$	+0,141	+0,015	-0,003
III	$V_I \cdot M_I^*$	-1,984	-0,453	-1,136	-0,683	-0,133	-0,566	-0,433	+0,672	+2,510	+1,541	+0,900	+0,827	$V_I \cdot H_I^*$	-0,202	-0,101	-0,008
	$V_{II} \cdot M_{II}^*$	+0,160	-0,885	+1,602	+2,487	+0,452	+1,008	+0,556	-0,818	-1,428	-2,660	-1,744	-1,257	$V_{II} \cdot H_{II}^*$	-0,082	+0,179	+0,024
	$V_{III} \cdot M_{III}^*$	+0,082	+0,101	+0,045	-0,056	+0,160	-0,089	-0,249	-0,016	+0,126	+0,175	+0,267	+0,143	$V_{III} \cdot H_{III}^*$	+0,002	+0,018	-0,008
	$V_{IV} \cdot M_{IV}^*$	+0,011	+0,009	+0,002	-0,007	+0,019	+0,008	-0,011	-0,033	+0,014	+0,015	+0,026	+0,042	$V_{IV} \cdot H_{IV}^*$	+0,000	+0,002	+0,003
	$M_{zus}$	-1,731	-1,228	+0,513	+1,741	+0,498	+0,361	-0,137	-0,195	+1,222	-0,929	-0,551	-0,245	$H_{zus}$	-0,282	+0,098	+0,011
	$M_{R I}$	-0,750	-0,850	-0,502	+0,348	-0,161	-0,064	+0,097	+0,017	+0,375	-0,174	-0,049	-0,009	$H_{R I}$	+0,476	-0,049	-0,006
	$M_{tot}$	-2,481	-2,078	+0,011	+2,089	+0,337	+0,297	-0,040	-0,178	+1,597	-1,103	-0,800	-0,254	$H_{tot}$	+0,194	+0,049	+0,005
IV	$V_I \cdot M_I^*$	-1,795	-0,410	-1,028	-0,618	-0,120	-0,511	-0,391	+0,608	+2,271	+1,394	+0,814	+0,748	$V_I \cdot H_I^*$	-0,183	-0,092	-0,007
	$V_{II} \cdot M_{II}^*$	+0,143	-0,795	+1,438	+2,233	+0,405	+0,905	+0,500	-0,735	-1,282	-2,388	-1,566	-1,129	$V_{II} \cdot H_{II}^*$	-0,074	+0,161	+0,020
	$V_{III} \cdot M_{III}^*$	-0,038	-0,046	-0,021	+0,025	-0,074	+0,041	+0,115	+0,007	-0,058	-0,080	-0,123	-0,066	$V_{III} \cdot H_{III}^*$	-0,001	-0,008	+0,004
	$V_{IV} \cdot M_{IV}^*$	-0,006	-0,005	-0,001	+0,004	-0,011	-0,004	+0,007	+0,019	-0,008	-0,009	-0,015	-0,024	$V_{IV} \cdot H_{IV}^*$	-0,000	-0,001	-0,002
	$M_{zus}$	-1,696	-1,256	+0,388	+1,644	+0,200	+0,431	+0,231	-0,101	+0,923	-1,083	-0,890	-0,471	$H_{zus}$	-0,258	+0,060	+0,015
	$M_{R I}$	-1,050	+0,400	+0,236	-0,164	+0,076	+0,030	-0,046	-0,008	+0,525	+0,082	+0,043	+0,004	$H_{R I}$	+0,459	+0,023	+0,003
	$M_{tot}$	-2,746	-0,856	+0,624	+1,480	+0,276	+0,461	+0,185	-0,109	+1,448	-1,001	-0,847	-0,467	$H_{tot}$	+0,201	+0,083	+0,018

Fortsetzung von Tabelle IV. Momente und Bogenschübe.

Last- stellung	Schnitt	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>6</sub>	D <sub>7</sub>	E	F	G	H		Bogen 1	Bogen 2	Bogen 3
V	V <sub>I</sub> · M <sub>I</sub> <sup>*</sup>	-1,337	-0,305	-0,765	-0,460	-0,090	-0,381	-0,291	+0,453	+1,691	+1,038	+0,606	+0,557	V <sub>I</sub> · H <sub>I</sub> <sup>*</sup>	-0,136	-0,068	-0,006
	V <sub>II</sub> · M <sub>II</sub> <sup>*</sup>	+0,095	-0,527	+0,954	+1,481	+0,269	+0,600	+0,331	-0,487	-0,850	-1,583	-1,038	-0,748	V <sub>II</sub> · H <sub>II</sub> <sup>*</sup>	-0,049	+0,107	+0,013
	V <sub>III</sub> · M <sub>III</sub> <sup>*</sup>	-0,112	-0,137	-0,062	+0,075	-0,218	+0,121	+0,339	+0,022	-0,171	-0,238	-0,362	-0,195	V <sub>III</sub> · H <sub>III</sub> <sup>*</sup>	-0,003	-0,024	+0,011
	V <sub>IV</sub> · M <sub>IV</sub> <sup>*</sup>	-0,016	-0,013	-0,003	+0,010	-0,027	-0,011	+0,016	+0,047	-0,020	-0,021	-0,037	-0,060	V <sub>IV</sub> · H <sub>IV</sub> <sup>*</sup>	-0,000	-0,002	-0,005
	M <sub>zus</sub>	-1,370	-0,982	+0,124	+1,106	-0,066	+0,329	+0,395	+0,035	+0,650	-0,804	-0,831	-0,446	H <sub>zus</sub>	-0,188	+0,013	+0,013
	M <sub>R I</sub>	-0,600	+1,150	+0,679	-0,471	+0,217	+0,087	-0,130	-0,023	+0,300	+0,236	+0,065	+0,012	H <sub>R I</sub>	+0,328	+0,066	+0,008
	M <sub>tot</sub>	-1,970	+0,168	+0,803	+0,635	+0,151	+0,416	+0,265	+0,012	+0,950	-0,568	-0,766	-0,434	H <sub>tot</sub>	+0,140	+0,079	+0,021
VI	V <sub>I</sub> · M <sub>I</sub> <sup>*</sup>	-0,236	-0,054	-0,135	-0,081	-0,016	-0,067	-0,051	+0,080	+0,299	+0,183	+0,107	+0,098	V <sub>I</sub> · H <sub>I</sub> <sup>*</sup>	-0,024	-0,012	-0,001
	V <sub>II</sub> · M <sub>II</sub> <sup>*</sup>	-0,104	+0,578	-1,047	-1,625	-0,295	-0,659	-0,364	+0,535	+0,933	+1,738	+1,139	+0,825	V <sub>II</sub> · H <sub>II</sub> <sup>*</sup>	+0,054	-0,117	-0,015
	V <sub>III</sub> · M <sub>III</sub> <sup>*</sup>	-0,510	-0,628	-0,282	+0,346	-0,999	+0,551	+1,550	+0,100	-0,784	-1,087	-1,658	-0,890	V <sub>III</sub> · H <sub>III</sub> <sup>*</sup>	-0,014	-0,112	+0,051
	V <sub>IV</sub> · M <sub>IV</sub> <sup>*</sup>	+0,051	+0,043	+0,010	-0,033	+0,086	+0,034	-0,052	-0,151	+0,063	+0,069	+0,117	+0,191	V <sub>IV</sub> · H <sub>IV</sub> <sup>*</sup>	+0,001	+0,008	+0,015
	M <sub>zus</sub>	-0,799	-0,061	-1,454	-1,393	-1,224	-0,141	+1,083	+0,564	+0,511	+0,903	-0,295	+0,224	H <sub>zus</sub>	+0,017	-0,233	+0,050
	M <sub>R I</sub>	+0,119	+0,440	+1,100	+0,660	-0,700	-0,280	+0,420	+0,076	-0,060	-0,330	-0,210	-0,038	H <sub>R I</sub>	+0,041	+0,317	-0,026
	M <sub>tot</sub>	-0,680	+0,379	-0,354	-0,733	-1,924	-0,421	+1,503	+0,640	+0,451	+0,573	-0,505	+0,186	H <sub>tot</sub>	+0,058	+0,084	+0,024
VII	V <sub>I</sub> · M <sub>I</sub> <sup>*</sup>	-0,061	-0,014	-0,035	-0,021	-0,004	-0,017	-0,013	+0,021	+0,075	+0,048	+0,028	+0,026	V <sub>I</sub> · H <sub>I</sub> <sup>*</sup>	-0,006	-0,003	-0,000
	V <sub>II</sub> · M <sub>II</sub> <sup>*</sup>	-0,141	+0,780	-1,413	-2,193	-0,399	-0,889	-0,490	+0,722	+1,259	+2,345	+1,538	+1,109	V <sub>II</sub> · H <sub>II</sub> <sup>*</sup>	+0,073	-0,158	-0,020
	V <sub>III</sub> · M <sub>III</sub> <sup>*</sup>	-0,702	-0,865	-0,388	+0,477	-1,374	+0,759	+2,133	+0,137	-1,079	-1,495	-2,281	-1,225	V <sub>III</sub> · H <sub>III</sub> <sup>*</sup>	-0,019	-0,154	+0,071
	V <sub>IV</sub> · M <sub>IV</sub> <sup>*</sup>	+0,091	+0,077	+0,018	-0,039	+0,154	+0,062	-0,092	-0,269	+0,121	+0,122	+0,209	+0,341	V <sub>IV</sub> · H <sub>IV</sub> <sup>*</sup>	+0,001	+0,014	+0,027
	M <sub>zus</sub>	-0,813	-0,022	-1,818	-1,796	-1,623	-0,085	+1,538	+0,611	+0,379	+1,020	-0,506	+0,251	H <sub>zus</sub>	+0,049	-0,301	+0,078
	M <sub>R I</sub>	+0,032	+0,120	+0,300	+0,180	-1,250	-0,500	+0,750	+0,135	-0,016	-0,090	-0,375	-0,068	H <sub>R I</sub>	+0,011	+0,496	-0,047
	M <sub>tot</sub>	-0,781	+0,098	-1,518	-1,616	-2,873	-0,585	+2,288	+0,746	+0,363	+0,930	-0,881	+0,183	H <sub>tot</sub>	+0,060	+0,195	+0,031
VIII	V <sub>I</sub> · M <sub>I</sub> <sup>*</sup>	+0,194	+0,044	+0,111	+0,067	+0,013	+0,055	+0,042	-0,066	-0,245	-0,150	-0,088	-0,081	V <sub>I</sub> · H <sub>I</sub> <sup>*</sup>	+0,020	+0,010	+0,001
	V <sub>II</sub> · M <sub>II</sub> <sup>*</sup>	-0,146	+0,807	-1,461	-2,268	-0,412	-0,919	-0,507	+0,746	+1,302	+2,425	+1,590	+1,147	V <sub>II</sub> · H <sub>II</sub> <sup>*</sup>	+0,075	-0,163	-0,020
	V <sub>III</sub> · M <sub>III</sub> <sup>*</sup>	-0,746	-0,919	-0,412	+0,507	-1,461	+0,807	+2,268	+0,146	-1,147	-1,590	-2,425	-1,302	V <sub>III</sub> · H <sub>III</sub> <sup>*</sup>	-0,020	-0,163	+0,075
	V <sub>IV</sub> · M <sub>IV</sub> <sup>*</sup>	+0,066	+0,055	+0,013	-0,042	+0,111	+0,044	-0,067	-0,194	+0,081	+0,088	+0,150	+0,245	V <sub>IV</sub> · H <sub>IV</sub> <sup>*</sup>	+0,001	+0,010	+0,020
	M <sub>zus</sub>	-0,632	-0,013	-1,749	-1,736	-1,749	-0,013	+1,736	+0,632	-0,009	+0,773	-0,773	+0,009	H <sub>zus</sub>	+0,076	-0,306	+0,076
	M <sub>R I</sub>	-0,097	-0,360	-0,900	-0,540	-0,900	-0,360	+0,540	+0,097	+0,049	+0,270	-0,270	-0,049	H <sub>R I</sub>	-0,034	+0,628	-0,034
	M <sub>tot</sub>	-0,729	-0,373	-2,649	-2,276	-2,649	-0,373	+2,276	+0,729	+0,040	+1,043	-1,043	-0,040	H <sub>tot</sub>	+0,042	+0,322	+0,042

Einflüßlinien der inneren Kräfte eines kontinuierlichen Bogens.



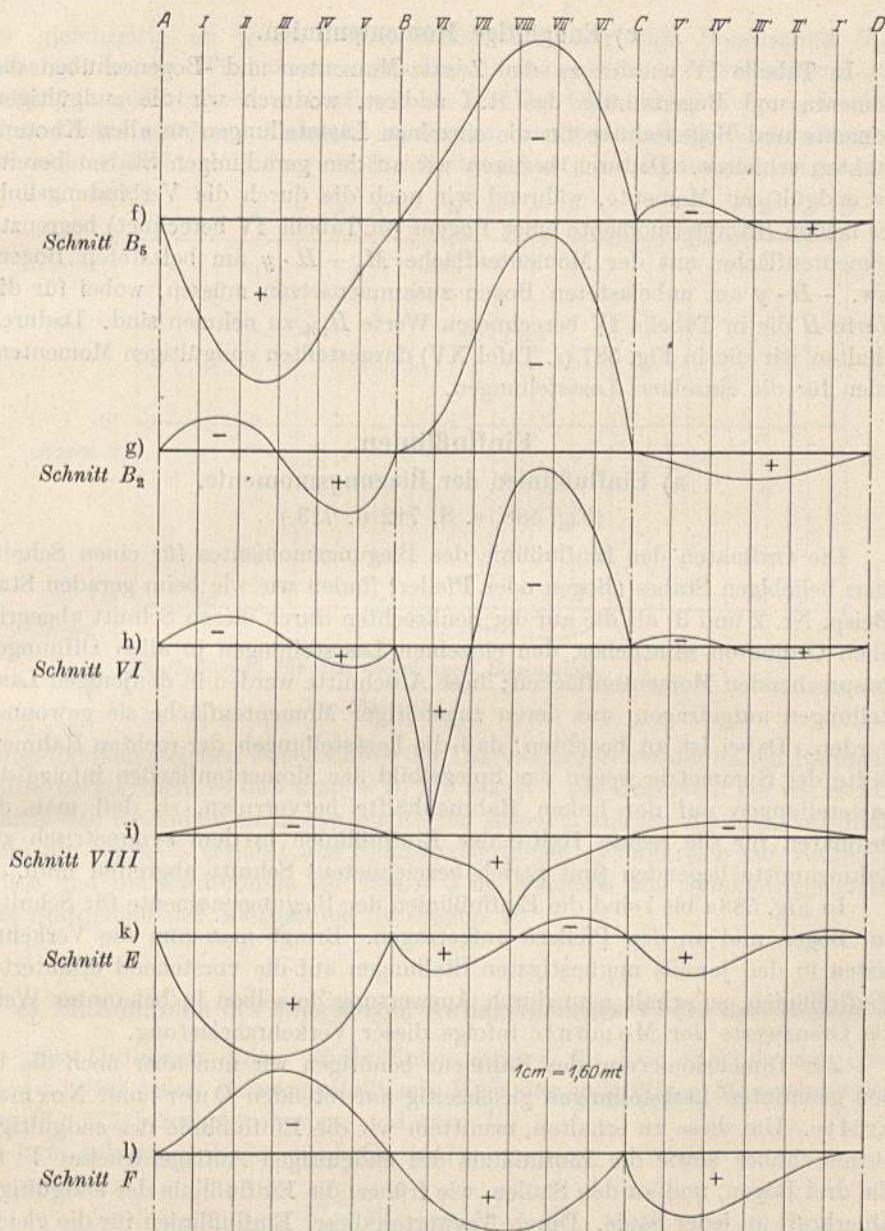
Einflußlinien der Biegemomente.

Fig. 588 a—e.

## b) Zusatzmomentenlinien.

Entfernen wir die während R. I an den Säulenköpfen gedachten Lager, so treten für jede Laststellung die zugehörigen 4 Verschiebungskräfte  $V_I$ ,  $V_{II}$ ,  $V_{III}$  und  $V_{IV}$  (entgegengesetzte Festhaltungskräfte  $F_I$ ,  $F_{II}$ ,  $F_{III}$  und  $F_{IV}$ ) in Tätigkeit und rufen die in Fig. 586 (s. Tafel XV) dargestellten Zusatzmomentenlinien hervor. Die Zusatzmomente an den einzelnen Knotenpunkten haben wir in vorstehender Tabelle IV (s. S. 710 u. 711) mit Hilfe der  $M^*$ -Momente berechnet, und zwar ist für jede Laststellung

$$M_{\text{zus}} = V_I \cdot M_I^* + V_{II} \cdot M_{II}^* + V_{III} \cdot M_{III}^* + V_{IV} \cdot M_{IV}^*$$



Einflußlinien der Biegemomente.

Fig. 588f-1.

Die zu den Zusatzmomenten gehörigen Bogenschübe wurden ebenfalls in Tabelle IV (s. S. 710 u. 711) ermittelt, und zwar ist für jede Laststellung und jeden Bogen:

$$H_{\text{zus}} = V_I \cdot H_I^* + V_{II} \cdot H_{II}^* + V_{III} \cdot H_{III}^* + V_{IV} \cdot H_{IV}^*$$

### c) Endgültige Momentenlinien.

In Tabelle IV wurden zu den Zusatz-Momenten und -Bogenschüben die Momente und Bogenschübe des R. I addiert, wodurch wir die endgültigen Momente und Bogenschübe für die einzelnen Laststellungen an allen Knotenpunkten erhielten. Dadurch besitzen wir an den geradlinigen Stäben bereits die endgültigen Momente, während wir noch die durch die Verbindungslinie der beiden Kämpfermomente eines Bogens (in Tabelle IV berechnet) begrenzte Momentenfläche mit der Momentenfläche  $M_0 - H \cdot y$  am belasteten Bogen, bzw.  $-H \cdot y$  am unbelasteten Bogen zusammensetzen müssen, wobei für die Werte  $H$  die in Tabelle IV berechneten Werte  $H_{\text{tot}}$  zu nehmen sind. Dadurch erhalten wir die in Fig. 587 (s. Tafel XV) dargestellten endgültigen Momentenlinien für die einzelnen Laststellungen.

## Einflußlinien.

### a) Einflußlinien der Biegemomente.

(Fig. 588, s. S. 712 u. 713.)

Die Ordinaten der Einflußlinie des Biegemomentes für einen Schnitt eines beliebigen Stabes (Bogen oder Pfeiler) finden wir wie beim geraden Stab (Beisp. Nr. 2 und 3) als die auf der Senkrechten durch diesen Schnitt abgegriffenen Ordinaten sämtlicher, den einzelnen Laststellungen in allen Öffnungen entsprechenden Momentenflächen; diese Abschnitte werden in denjenigen Laststellungen aufgetragen, aus deren zugehöriger Momentenfläche sie gewonnen wurden. Dabei ist zu beachten, daß die Laststellungen der rechten Rahmehälfte der Symmetrie wegen das Spiegelbild der Momentenflächen infolge der Laststellungen auf der linken Rahmehälfte hervorrufen, so daß man die Ordinaten für die rechte Hälfte der Einflußlinien in dem symmetrisch zur Rahmenmitte liegenden (mit Strich bezeichneten) Schnitt abgreifen muß.

In Fig. 588 a bis l sind die Einflußlinien der Biegemomente für Schnitte am Bogen und an den Pfeilern aufgetragen. Bringt man nun die Verkehrslasten in den jeweils ungünstigsten Stellungen auf die vorstehend erläuterten Einflußlinien, so erhält man durch Auswertung derselben in bekannter Weise die Grenzwerte der Momente infolge dieser Verkehrsbelastung.

Zur Dimensionierung des Rahmens benötigen wir nun aber noch die bei den genannten Laststellungen gleichzeitig auftretenden Quer- und Normalkräfte. Um diese zu erhalten, ermitteln wir die Einflußlinie des endgültigen Bogenschubes sowie die Einflußlinie des endgültigen Auflagerdruckes  $V'$  für die drei Bögen, und an den Säulen, wie früher, die Einflußlinie der endgültigen Querkraft an jeder Säule. Durch Auswerten dieser Einflußlinien für die gleiche Laststellung wie für das Biegemoment für einen bestimmten Schnitt an einem Bogen erhalten wir den zugehörigen Bogenschub  $H$  und Auflagerdruck  $V'$ , so daß wir darauf nach Gl. (457) und (456) die außer dem Biegemoment in dem betreffenden Schnitt wirkende Quer- und Normalkraft bilden können.

### b) Einflußlinien des endgültigen Bogenschubes $H$ der drei Bögen.

Die Ordinaten dieser Einflußlinien sind in Tabelle IV enthalten, wo für jede Laststellung und jeden Bogen außer den endgültigen Momenten auch

der gleichzeitig an jedem Bogen auftretende endgültige Bogenschub  $H_{tot}$  berechnet wurde. Wir brauchen also diese Werte nur in den betreffenden Laststellungen aufzutragen, worauf wir die in Fig. 589a bis c aufgezeichneten Einflußlinien erhalten. Dabei ist wieder zu beachten, daß die Laststellungen der rechten Rahmenhälfte (mit Strich bezeichnet) der Symmetrie wegen die

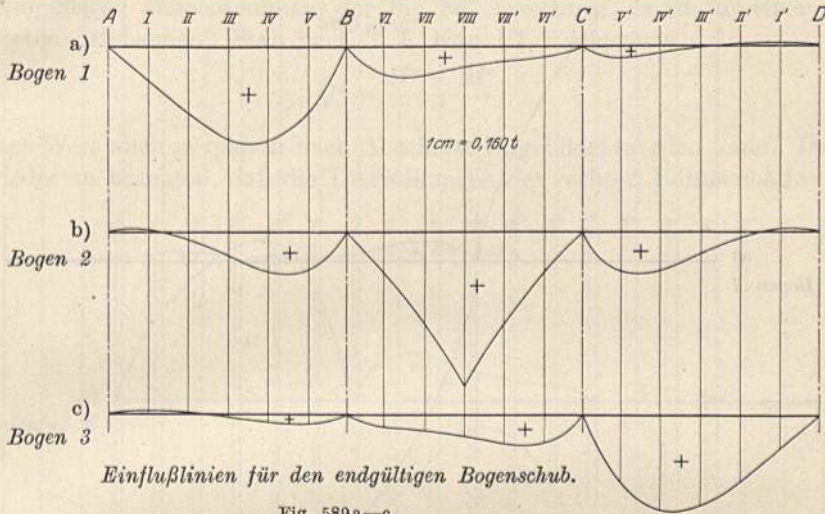


Fig. 589a—c.

spiegelbildlich gleichen Bogenschübe der Laststellungen auf der linken Rahmenhälfte hervorrufen, so daß man z. B. für Bogen 1 die Ordinaten für die rechte Hälfte der Einflußlinien in der Spalte für Bogen 3 ablesen muß; die Einflußlinie für Bogen 2 verläuft aus Symmetriegründen symmetrisch zur Rahmenmitte und die Einflußlinie für Bogen 3 ist ebenfalls aus Symmetriegründen das Spiegelbild der Einflußlinie für Bogen 1.

### c) Einflußlinien des endgültigen Auflagerdruckes $V^l$ der drei Bögen.

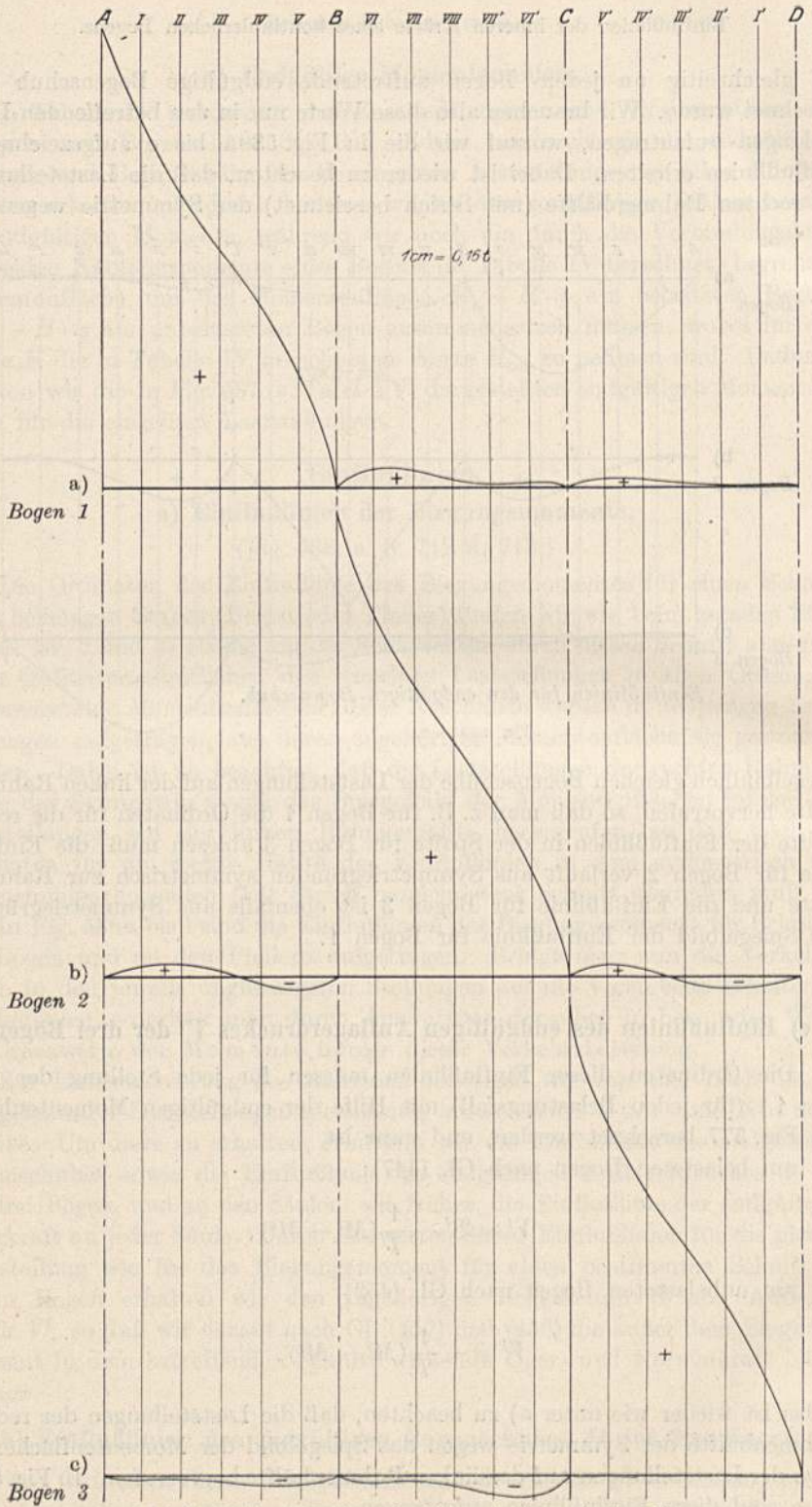
Die Ordinaten dieser Einflußlinien müssen für jede Stellung der Last  $P = 1 \text{ t}$  (für jeden Belastungsfall) mit Hilfe der endgültigen Momentenlinien der Fig. 577 berechnet werden, und zwar ist am belasteten Bogen nach Gl. (447):

$$V^l = \mathfrak{R}^l - \frac{1}{l} (M^l - M^r),$$

am unbelasteten Bogen nach Gl. (452):

$$V^l = -\frac{1}{l} (M^l - M^r).$$

Dabei ist wieder wie unter a) zu beachten, daß die Laststellungen der rechten Rahmenhälfte der Symmetrie wegen das Spiegelbild der Momentenflächen infolge der Laststellungen auf der linken Rahmenhälfte hervorrufen. In Fig. 590a bis c sind diese Einflußlinien aufgetragen.



Einflußlinien für die endgültigen Auflagerdrücke  $V'$ ,

Fig. 590 a—c.

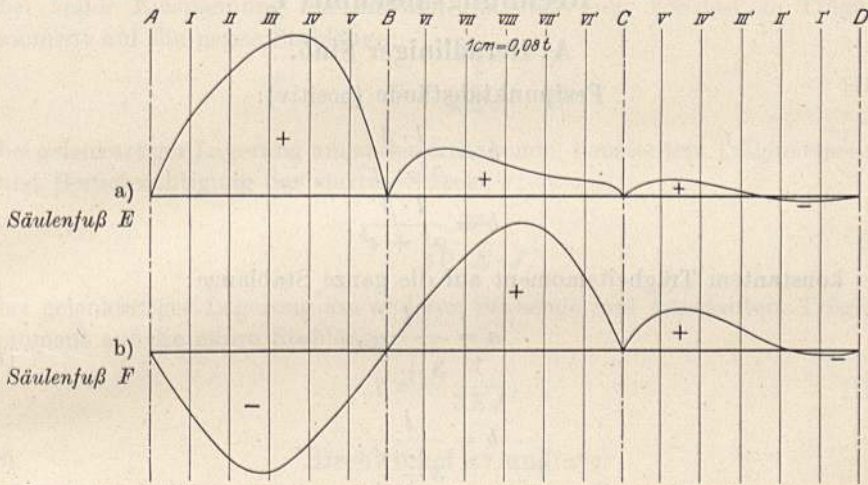


### d) Einflußlinien der endgültigen Säulenquerkräfte.

Die Querkraft an den Säulen ist (weil ohne Belastung) auf deren ganze Höhe konstant; aus Symmetriegründen brauchen wir nur die beiden Säulen 4 und 5 zu betrachten. Die Ordinaten der Einflußlinien der Querkräfte (z. B. für die Säulenfüße) müssen wir für jede Stellung der Last  $P = 1 \text{ t}$  mit Hilfe der endgültigen Momentenlinien der Fig. 587 berechnen; es ist für einen unbelasteten „stehenden“ Stab nach T. I, Kap. VI, 1 allgemein

$$Q^u = \frac{M^u - M^o}{l}$$

welcher Wert auch graphisch nach Abschnitt b) gebildet werden kann. Dabei ist wieder zu beachten, daß die Laststellungen der rechten Rahmehälfte der



Einflußlinien für die endgültigen Querkräfte an den Säulenfüßen.

Fig. 591 a—b.

Symmetrie wegen das Spiegelbild der Momentenflächen infolge der Laststellungen auf der linken Rahmehälfte hervorrufen. In Fig. 591 a und b sind diese Einflußlinien aufgetragen, durch deren Auswerten wir die Grenzwerte der Querkräfte an den Säulen erhalten.

## Anhang.

# I. Zusammenstellung der im ersten und zweiten Teil abgeleiteten Hauptformeln.

## Rechnungsabschnitt I.

### A. Geradliniger Stab.

Festpunktabstände (positiv):

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^a + \varepsilon^a}, \quad (7)$$

$$b = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^b + \varepsilon^b}, \quad (8)$$

bei konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge:

$$a = \frac{l}{3 + \frac{\varepsilon^a}{\beta}}, \quad (7a)$$

$$b = \frac{l}{3 + \frac{\varepsilon^b}{\beta}}. \quad (8a)$$

Gemeinsamer Drehwinkel:

$$\varepsilon = \tau_{1-2-3-\dots-n} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} + \dots + \frac{1}{\tau_n}}, \quad (18)$$

$$\tau_{2-3} = \frac{\tau_2 \cdot \tau_3}{\tau_2 + \tau_3}. \quad (36)$$

Verteilungsmaß:

$$\mu_{1-n} = \frac{\tau_{2-3-4-\dots-n}}{\tau_n}, \quad (26a)$$

$$\mu_{1-2} = \frac{\tau_3}{\tau_2 + \tau_3} \quad (\text{bei 3 Stäben 1, 2, 3}). \quad (37)$$

Einfacher Drehwinkel:

$$\tau^A = \alpha^a - \frac{l}{l-b} \cdot \beta, \quad (42)$$

$$\tau^B = \alpha^b - \frac{l}{l-a} \cdot \beta; \quad (43)$$

bei elastischer Einspannung am anderen Stabende und konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge:

$$\tau^A = \beta \left( 3 - \frac{l}{l-b} \right), \quad (42a)$$

$$\tau^B = \beta \left( 3 - \frac{l}{l-a} \right); \quad (42b)$$

bei voller Einspannung am anderen Stabende, konstantem Trägheitsmoment und Berücksichtigung der starren Strecke  $f$ :

$$\tau = \frac{l^2 (2l - 3a)}{6l(l-a)E \cdot J}; \quad (138)$$

bei voller Einspannung am anderen Stabende und konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge:

$$\tau = \frac{l}{4EJ}; \quad (138a)$$

bei gelenkartiger Lagerung am anderen Stabende, konstantem Trägheitsmoment und Berücksichtigung der starren Strecke  $f$ :

$$\tau = \frac{l^3}{3l^2 \cdot E \cdot J}; \quad (139)$$

bei gelenkartiger Lagerung am anderen Stabende und konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge:

$$\tau = \frac{l}{3EJ}. \quad (139a)$$

**Drehwinkel  $\alpha^a$  und  $\alpha^b$ :**

$$E \cdot \alpha^a = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l w \cdot z', \quad w = \frac{\Delta s}{J}, \quad (199)$$

$$E \cdot \alpha^b = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l w \cdot z; \quad (200)$$

bei symmetrischem Stab:

$$\alpha^a = \alpha^b = 3\beta; \quad (207a)$$

bei konstantem Trägheitsmoment, jedoch mit starrer Strecke  $f$  an einem Stabende:

$$E \cdot \alpha^a = \frac{l'(l' + 2f)}{2l \cdot J}, \quad (202)$$

$$E \cdot \alpha^b = \frac{l^2}{2l \cdot J}; \quad (203)$$

bei konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge:

$$E \cdot \alpha^a = E \cdot \alpha^b = E \cdot \bar{\alpha} = \frac{l}{2J}, \quad (204)$$

$$\alpha^a = \alpha^b = 3\beta. \quad (207a)$$

**Drehwinkel  $\beta$ :**

$$E \cdot \beta = \frac{1}{l^2} \cdot \sum_0^l w \cdot z \cdot z'; \quad (205)$$

bei konstantem Trägheitsmoment, jedoch mit starrer Strecke  $f$  an einem Stabende:

$$E \cdot \beta = \frac{l^2 (l + 2f)}{6 l^2 \cdot J}; \quad (206)$$

bei konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge:

$$E \cdot \beta = \frac{l}{6 J}, \quad (207)$$

$$\beta = \frac{\alpha^a}{3} = \frac{\alpha^b}{3}. \quad (207a)$$

Für den Balken mit geraden und parabolischen Vouten sind im Abschnitt II dieses Anhanges Tabellen über die Drehwinkel  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$  und  $\beta$  enthalten.

**Drehwinkel  $\alpha^{a0}$  und  $\alpha^{b0}$ :**

$$\alpha^{a0} = \Sigma P \cdot \delta^a, \quad (244)$$

$$\alpha^{b0} = \Sigma P \cdot \delta^b. \quad (245)$$

**Stützenmomente,**

konstruiert mit Hilfe der

**Kreuzlinienabschnitte:**

$$k^a = -\frac{\alpha^{b0}}{\beta} = -\frac{\Sigma P \cdot \delta^b}{\beta}, \quad (223)$$

$$k^b = -\frac{\alpha^{a0}}{\beta} = -\frac{\Sigma P \cdot \delta^a}{\beta}. \quad (224)$$

**Schlußliniensenkungen:**

$$S^a = \frac{a}{l} \cdot k^b, \quad (225)$$

$$S^b = \frac{b}{l} \cdot k^a. \quad (226)$$

Für die am häufigsten vorkommenden Belastungsfälle sind die Werte der Kreuzlinienabschnitte für den Balken mit konstantem Trägheitsmoment auf Seite 97 ff. zu finden. Für den Balken mit geraden und parabolischen Vouten sind im Abschnitt II dieses Anhanges die Ordinaten der Einflußlinien der Kreuzlinienabschnitte  $k^a$  und  $k^b$  enthalten.

Die Momente am belasteten Stab werden erhalten als Momente am einfachen Balken, belastet durch die (bei Belastung mehrerer Öffnungen, totalen) Stützenmomente und die äußeren Lasten, d. h. es ist

$$M_x = M_0 + M^a \cdot \frac{l-x}{l} + M^b \cdot \frac{x}{l}. \quad (1)$$

### B. Bogenförmiger Stab.

Festpunktabstände (negativ):

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^a + \varepsilon^a}, \tag{330}$$

$$b = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^b + \varepsilon^b}. \tag{330 a}$$

Gemeinsamer Drehwinkel:

$$\varepsilon = \tau_{1-2-3-\dots-n} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} + \dots + \frac{1}{\tau_n}}, \tag{422}$$

$$\tau_{1-5} = \frac{\tau_1 \cdot \tau_5}{\tau_1 + \tau_5}. \tag{424}$$

Verteilungsmaß:

$$\mu_{1-n} = \frac{\tau_{2-3-4-\dots-5}}{\tau_n}, \tag{425}$$

$$\mu_{1-2} = \frac{\tau_3}{\tau_2 + \tau_3} \text{ (bei 3 Stäben 1, 2, 3)}. \tag{429}$$

Einfacher Drehwinkel:

$$\tau^A = \alpha^a - \frac{l}{l-b} \cdot \beta, \tag{441}$$

$$\tau^B = \alpha^b - \frac{l}{l-a} \cdot \beta. \tag{442}$$

Drehwinkel  $\alpha^a$  und  $\alpha^b$ :

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte)

$$E \cdot \alpha^a = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l (l-x) w - \frac{1}{l} \cdot B \cdot \int_0^l (l-x) y \cdot w, \tag{403}$$

$$E \cdot \alpha^b = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l x \cdot w - \frac{1}{l} \cdot B \cdot \int_0^l x \cdot y \cdot w; \tag{404}$$

bei symmetrischem Stab (der Einfluß der Normalkräfte fällt weg):

$$E \cdot \alpha^a = E \cdot \alpha^b = E \cdot \bar{\alpha} = \int_0^{l/2} w - B \cdot \int_0^{l/2} y \cdot w. \tag{418}$$

Drehwinkel  $\beta$ :

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte)

$$E \cdot \beta = \frac{1}{l^2} \cdot \int_0^l x(l-x) w - \frac{1}{l} \cdot B_{(M^a=1)} \cdot \int_0^l x \cdot y \cdot w; \tag{399}$$

bei symmetrischem Stab (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$E \cdot \beta = \frac{2}{l^2} \cdot \int_0^{l/2} x(l-x) w - \frac{B}{2} \cdot \int_0^{l/2} y \cdot w. \tag{417}$$

**Drehwinkel  $\varphi^a$  und  $\varphi^b$ :**

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte)

$$E \cdot \varphi^a = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_0 (l-x) w - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{S} \cdot \sum_0^l y \cdot (l-x) w, \quad (410)$$

$$E \cdot \varphi^b = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_0 \cdot x \cdot w - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{S} \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w; \quad (411)$$

bei symmetrischem Stab (der Einfluß der Normalkräfte fällt weg):

$$E \cdot \varphi^a = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_0 (l-x) w - \frac{\mathfrak{S}}{2} \cdot \sum_0^l y \cdot w, \quad (420)$$

$$E \cdot \varphi^b = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_0 \cdot x \cdot w - \frac{\mathfrak{S}}{2} \cdot \sum_0^l y \cdot w. \quad (421)$$

**Bogenschub  $B_{(M^a=1)}$ :**

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte)

$$B_{(M^a=1)} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\sum_0^l y (l-x) \cdot w}{\sum_0^l y^2 \cdot w}; \quad (370)$$

bei symmetrischem Stab (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$B_{(M^a=1)} = B_{(M^b=1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_0^{l/2} y \cdot w}{\sum_0^{l/2} y^2 \cdot w} = \frac{1}{2} B. \quad (412)$$

**Bogenschub  $B$ :**

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte)

$$B = \frac{\sum_0^l y \cdot w}{\sum_0^l y^2 \cdot w}; \quad (380)$$

bei symmetrischem Stab dasselbe. (413)**Bogenschub  $\mathfrak{S}$** 

infolge äußerer Belastung (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$\mathfrak{S} = \frac{\sum_0^l M_0 \cdot y \cdot w}{\sum_0^l y^2 \cdot w}; \quad (394)$$

bei symmetrischem Stab dasselbe. (415)

Für symmetrische Parabelbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind die Drehwinkel  $\bar{\alpha}$  und  $\beta$  sowie der Bogenschub  $B$  und die Ordinaten der Einflußlinie des Bogenschubes  $\xi$  im Abschnitt II dieses Anhanges angegeben.

### Bogenschub $\xi^t$

infolge gleichmäßiger Temperaturerhöhung (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$\xi^t = \frac{E \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l}{\sum_0^l y^2 \cdot w}; \quad (395)$$

bei symmetrischem Stab dasselbe. (416)

### Kämpfermomente

konstruiert mit Hilfe der

#### Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = -\frac{\varphi^b}{\beta} = -\frac{\sum P \cdot \delta^b}{\beta}, \quad (339)$$

$$k^b = -\frac{\varphi^a}{\beta} = -\frac{\sum P \cdot \delta^a}{\beta}. \quad (340)$$

#### Schlußliniensenkungen:

$$S^a = \frac{a}{l} \cdot k^b, \quad (341)$$

$$S^b = \frac{b}{l} \cdot k^a; \quad (342)$$

oder berechnet nach folgenden Gleichungen:

$$M^a = \frac{k^b(l-b) - k^a \cdot b}{l(l-a-b)} \cdot a, \quad (336)$$

$$M^b = \frac{k^a(l-a) - k^b \cdot a}{l(l-a-b)} \cdot b. \quad (337)$$

Für symmetrische Parabelbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind im Abschnitt II dieses Anhanges die Ordinaten der Einflußlinien für die Kreuzlinienabschnitte  $k^a$  und  $k^b$  angegeben.

Die Momente am belasteten Stab werden erhalten als Momente am Zweigelenkbogen, belastet mit den äußeren Lasten und den beiden (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomenten, d. h. es ist am Bogen mit gleich hoch liegenden Kämpfern und senkrechter Belastung

$$M_x = M_o + M^a \cdot \frac{l-x}{l} + M^b \cdot \frac{x}{l} - H \cdot y. \quad (455)$$

### Gesamtbogenschub $H$

am belasteten Bogen:

$$H = \xi + M^a \cdot B_{(M^a=1)} + M^b \cdot B_{(M^b=1)}, \quad (443)$$

bei Symmetrie:

$$H = \xi + \frac{1}{2} B(M^a + M^b). \quad (444)$$





**Zusatzmomente**

am einstöckigen Rahmen:

$$M_{\text{zus.}} = V \cdot M^*; \quad (529 \text{ a})$$

am  $n$ -stöckigen Rahmen:

$$M_{\text{zus.}} = V_I \cdot M_I^* + V_{II} \cdot M_{II}^* + \dots + V_n \cdot M_n^*. \quad (537)$$

**B. Bogenförmiger Stab.****Momente  $M'$ :**

a) Kämpfermomente infolge der Verschiebung  $\Delta'$  der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$M_{A'}^a = \frac{(B_{(M^a=1)} \cdot l - B \cdot b) \cdot \Delta'}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot a, \quad (590 \text{ a})$$

$$M_{A'}^b = \frac{(B_{(M^b=1)} \cdot l - B \cdot a) \cdot \Delta'}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot b; \quad (591 \text{ a})$$

am symmetrischen Bogen (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$M_{A'}^a = \frac{B \left( \frac{l}{2} - b \right) \cdot \Delta'}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot a, \quad (592 \text{ a})$$

$$M_{A'}^b = \frac{B \left( \frac{l}{2} - a \right) \cdot \Delta'}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot b. \quad (593 \text{ a})$$

**Bogenschub  $B_{A'}$ :**

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte)

$$B_{A'} = \frac{E \cdot \Delta'}{l \sum_0 y^2 \cdot w}, \quad (586)$$

( $\Delta'$  bei Zusammendrücken des Bogens positiv);  
bei Symmetrie dasselbe.

**Momente am Stab,**

dessen Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungsgeraden verschoben wurden:

$$M_x = M_{A'}^a \cdot \frac{l-x}{l} + M_{A'}^b \cdot \frac{x}{l} - H_{A'} \cdot y. \quad (598)$$

**Gesamtbogenschub  $H_{A'}$** 

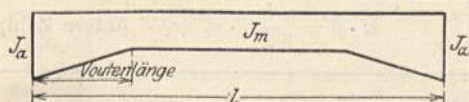
infolge obiger Kämpferverschiebung:

$$H_{A'} = B_{A'} + M_{A'}^a \cdot B_{(M^a=1)} + M_{A'}^b \cdot B_{(M^b=1)}, \quad (594)$$



## II. Tabellen zur raschen Ermittlung der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte.

### 1. Balken mit beidseitig gleicher gerader Voute. Drehwinkel $\bar{\alpha}$ und $\beta$ .

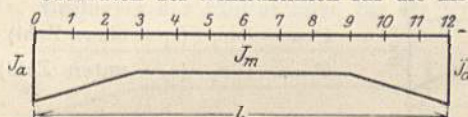


$$E \cdot \bar{\alpha} = \frac{l}{2 J_m} \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl}),$$

$$E \cdot \beta = \frac{l}{6 J_m} \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_\alpha}$												
	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,080	0,100	0,125	0,150	0,200	0,250	0,350	0,500
$\frac{l}{2}$	0,172	0,204	0,229	0,250	0,271	0,307	0,339	0,375	0,407	0,462	0,512	0,596	0,705
	0,234	0,271	0,302	0,327	0,349	0,389	0,423	0,460	0,492	0,545	0,593	0,668	0,760
$\frac{l}{3}$	0,448	0,468	0,485	0,500	0,513	0,538	0,559	0,583	0,602	0,639	0,673	0,723	0,803
	0,610	0,631	0,647	0,660	0,672	0,692	0,710	0,729	0,743	0,770	0,797	0,835	0,881
$\frac{l}{4}$	0,585	0,601	0,614	0,625	0,635	0,653	0,669	0,688	0,701	0,729	0,756	0,797	0,850
	0,767	0,779	0,789	0,797	0,804	0,817	0,827	0,839	0,847	0,864	0,879	0,901	0,931
$\frac{l}{5}$	0,668	0,680	0,691	0,700	0,708	0,722	0,734	0,750	0,761	0,784	0,804	0,838	0,881
	0,846	0,853	0,860	0,866	0,870	0,878	0,885	0,894	0,900	0,910	0,921	0,935	0,954
$\frac{l}{6}$	0,725	0,734	0,742	0,750	0,756	0,769	0,779	0,792	0,801	0,820	0,837	0,864	0,901
	0,891	0,896	0,900	0,904	0,908	0,914	0,919	0,925	0,929	0,937	0,944	0,954	0,968

### Ordinaten der Einflußlinien für die Kreuzlinienabschnitte $k^a$ und $k^b$ .



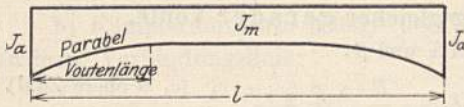
$$k^a = -l \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -l \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	$n = \frac{J_m}{J_\alpha}$	Last $P = 1$ in										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
—	1,0	0,083	0,162	0,234	0,296	0,344	0,375	0,385	0,370	0,328	0,255	0,146
		0,146	0,255	0,328	0,370	0,385	0,375	0,344	0,296	0,234	0,162	0,083
$\frac{l}{2}$	0,20	0,083	0,165	0,242	0,313	0,369	0,402	0,401	0,365	0,304	0,220	0,117
		0,117	0,220	0,304	0,365	0,401	0,402	0,369	0,313	0,242	0,165	0,083
$\frac{l}{3}$	0,10	0,083	0,166	0,244	0,318	0,375	0,408	0,405	0,364	0,298	0,212	0,110
		0,110	0,212	0,298	0,364	0,405	0,408	0,375	0,318	0,244	0,166	0,083
$\frac{l}{4}$	0,05	0,084	0,166	0,246	0,319	0,379	0,412	0,407	0,364	0,294	0,206	0,106
		0,106	0,206	0,294	0,364	0,407	0,412	0,379	0,319	0,246	0,166	0,084
$\frac{l}{5}$	0,20	0,083	0,165	0,243	0,312	0,364	0,395	0,398	0,370	0,310	0,223	0,117
		0,117	0,223	0,310	0,370	0,398	0,395	0,364	0,312	0,243	0,165	0,083
$\frac{l}{6}$	0,10	0,083	0,166	0,244	0,315	0,368	0,398	0,401	0,370	0,307	0,218	0,112
		0,112	0,218	0,307	0,370	0,401	0,398	0,368	0,315	0,244	0,166	0,083
$\frac{l}{7}$	0,05	0,084	0,166	0,245	0,316	0,370	0,400	0,402	0,370	0,305	0,215	0,110
		0,110	0,215	0,305	0,370	0,402	0,400	0,370	0,316	0,245	0,166	0,084
$\frac{l}{8}$	0,20	0,083	0,165	0,242	0,308	0,358	0,388	0,394	0,372	0,318	0,232	0,122
		0,122	0,232	0,318	0,372	0,394	0,388	0,358	0,308	0,242	0,165	0,083
$\frac{l}{9}$	0,10	0,083	0,165	0,243	0,309	0,360	0,390	0,395	0,372	0,317	0,229	0,118
		0,118	0,229	0,317	0,372	0,395	0,390	0,360	0,309	0,243	0,165	0,083
$\frac{l}{10}$	0,05	0,084	0,166	0,243	0,310	0,361	0,391	0,398	0,372	0,316	0,227	0,117
		0,117	0,227	0,316	0,372	0,398	0,391	0,361	0,310	0,243	0,166	0,084
$\frac{l}{11}$	0,20	0,083	0,165	0,240	0,304	0,354	0,384	0,391	0,372	0,322	0,239	0,126
		0,126	0,239	0,322	0,372	0,391	0,384	0,354	0,304	0,240	0,165	0,083
$\frac{l}{12}$	0,10	0,083	0,165	0,241	0,306	0,355	0,385	0,392	0,372	0,321	0,237	0,124
		0,124	0,237	0,321	0,372	0,392	0,385	0,355	0,306	0,241	0,165	0,083
$\frac{l}{13}$	0,05	0,084	0,165	0,241	0,306	0,356	0,386	0,393	0,372	0,321	0,236	0,123
		0,123	0,236	0,321	0,372	0,393	0,386	0,356	0,306	0,241	0,165	0,084
$\frac{l}{14}$	0,20	0,083	0,164	0,239	0,302	0,351	0,382	0,390	0,371	0,324	0,244	0,130
		0,130	0,244	0,324	0,371	0,390	0,382	0,351	0,302	0,239	0,164	0,083
$\frac{l}{15}$	0,10	0,083	0,165	0,239	0,303	0,352	0,382	0,391	0,371	0,324	0,243	0,128
		0,128	0,243	0,324	0,371	0,391	0,382	0,352	0,303	0,239	0,165	0,083
$\frac{l}{16}$	0,05	0,084	0,165	0,240	0,304	0,352	0,383	0,391	0,372	0,323	0,242	0,127
		0,127	0,242	0,323	0,372	0,391	0,383	0,352	0,304	0,240	0,165	0,084

2. Balken mit beidseitig gleicher parabolischer Voute.

Drehwinkel  $\bar{\alpha}$  und  $\beta$ .

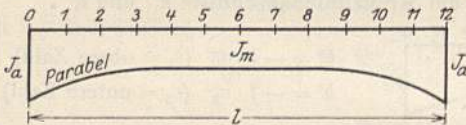


$$E \cdot \bar{\alpha} = \frac{l}{2 J_m} \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$E \cdot \beta = \frac{l}{6 J_m} \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_\alpha}$												
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,125	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50
$\frac{l}{2}$	0,354 0,479	0,387 0,515	0,412 0,542	0,435 0,565	0,454 0,584	0,486 0,615	0,514 0,643	0,545 0,670	0,570 0,692	0,616 0,732	0,656 0,763	0,720 0,812	0,800 0,872
$\frac{l}{3}$	0,569 0,742	0,591 0,761	0,608 0,774	0,622 0,786	0,635 0,795	0,657 0,811	0,677 0,825	0,696 0,839	0,714 0,849	0,744 0,868	0,769 0,884	0,813 0,909	0,869 0,938
$\frac{l}{4}$	0,676 0,847	0,693 0,858	0,706 0,866	0,717 0,873	0,727 0,879	0,743 0,888	0,757 0,897	0,772 0,905	0,785 0,911	0,808 0,922	0,828 0,932	0,860 0,946	0,902 0,964
$\frac{l}{5}$	0,741 0,899	0,754 0,907	0,764 0,912	0,773 0,916	0,780 0,920	0,794 0,927	0,806 0,932	0,818 0,938	0,829 0,942	0,847 0,949	0,861 0,955	0,888 0,965	0,922 0,976
$\frac{l}{6}$	0,784 0,928	0,795 0,933	0,803 0,938	0,811 0,941	0,818 0,943	0,829 0,947	0,839 0,952	0,848 0,956	0,857 0,958	0,872 0,964	0,886 0,968	0,906 0,975	0,932 0,983

Ordinaten der Einflußlinien für die Kreuzlinienabschnitte  $k^a$  und  $k^b$ .



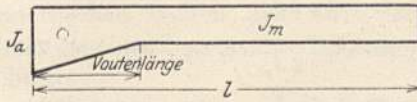
$$k^a = -l \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -l \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	$n = \frac{J_m}{J_\alpha}$	Last $P = 1$ in											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
—	1,0	0,083 0,146	0,162 0,255	0,234 0,328	0,296 0,370	0,344 0,385	0,375 0,375	0,385 0,344	0,370 0,296	0,328 0,234	0,255 0,162	0,146 0,083	
	$\frac{l}{2}$	0,20	0,083 0,123	0,164 0,230	0,241 0,312	0,308 0,368	0,361 0,396	0,393 0,393	0,396 0,361	0,368 0,308	0,312 0,241	0,230 0,164	0,123 0,083
		0,10	0,083 0,119	0,165 0,225	0,242 0,309	0,311 0,368	0,364 0,398	0,396 0,396	0,398 0,364	0,368 0,311	0,309 0,242	0,225 0,165	0,119 0,083
$\frac{l}{3}$	0,20	0,083 0,125	0,164 0,234	0,240 0,317	0,307 0,371	0,358 0,394	0,388 0,388	0,394 0,358	0,371 0,307	0,317 0,240	0,234 0,164	0,125 0,083	
	0,10	0,083 0,122	0,165 0,230	0,241 0,315	0,309 0,371	0,360 0,395	0,389 0,389	0,395 0,360	0,371 0,309	0,315 0,241	0,230 0,165	0,122 0,083	
	0,05	0,083 0,117	0,165 0,223	0,243 0,308	0,312 0,368	0,366 0,399	0,398 0,398	0,399 0,366	0,368 0,312	0,308 0,243	0,223 0,165	0,117 0,083	
$\frac{l}{4}$	0,20	0,083 0,129	0,164 0,240	0,239 0,322	0,304 0,371	0,353 0,391	0,384 0,384	0,391 0,353	0,371 0,304	0,322 0,239	0,240 0,164	0,129 0,083	
	0,10	0,083 0,127	0,165 0,238	0,240 0,321	0,305 0,371	0,354 0,392	0,385 0,385	0,392 0,354	0,371 0,305	0,321 0,240	0,238 0,165	0,127 0,083	
	0,05	0,083 0,126	0,165 0,237	0,240 0,321	0,305 0,372	0,355 0,392	0,385 0,385	0,392 0,355	0,372 0,305	0,321 0,240	0,237 0,165	0,126 0,083	
$\frac{l}{5}$	0,20	0,083 0,132	0,164 0,245	0,238 0,324	0,302 0,371	0,350 0,389	0,381 0,381	0,389 0,350	0,371 0,302	0,324 0,238	0,245 0,164	0,132 0,083	
	0,10	0,083 0,131	0,164 0,243	0,239 0,324	0,302 0,371	0,351 0,390	0,382 0,382	0,390 0,351	0,371 0,302	0,324 0,239	0,243 0,164	0,131 0,083	
	0,05	0,083 0,130	0,164 0,243	0,239 0,324	0,303 0,371	0,352 0,390	0,382 0,382	0,390 0,352	0,371 0,303	0,324 0,239	0,243 0,164	0,130 0,083	
$\frac{l}{6}$	0,20	0,083 0,135	0,164 0,248	0,237 0,325	0,300 0,371	0,349 0,388	0,379 0,379	0,388 0,349	0,371 0,300	0,325 0,237	0,248 0,164	0,135 0,083	
	0,10	0,083 0,134	0,164 0,247	0,238 0,325	0,301 0,371	0,349 0,389	0,380 0,380	0,389 0,349	0,371 0,301	0,325 0,238	0,247 0,164	0,134 0,083	
	0,05	0,083 0,133	0,164 0,246	0,238 0,325	0,301 0,371	0,350 0,389	0,380 0,380	0,389 0,350	0,371 0,301	0,325 0,238	0,246 0,164	0,133 0,083	

### 3. Balken mit einseitiger gerader Voute.

Drehwinkel  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$  und  $\beta$ .



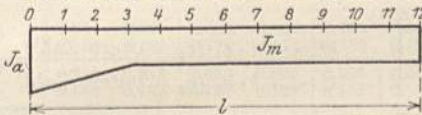
$$E \cdot \alpha^a = \frac{l}{2 J_m} \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$E \cdot \alpha^b = \frac{l}{2 J_m} \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{mittlere Zahl})$$

$$E \cdot \beta = \frac{l}{6 J_m} \cdot c_3 \quad (c_3 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_a}$												
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,125	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50
$l$	0,074 0,272 0,125	0,097 0,311 0,157	0,117 0,342 0,184	0,136 0,368 0,208	0,154 0,392 0,230	0,185 0,430 0,268	0,215 0,464 0,303	0,249 0,512 0,341	0,282 0,531 0,376	0,342 0,585 0,438	0,395 0,647 0,490	0,492 0,698 0,580	0,625 0,787 0,703
$l/2$	0,355 0,818 0,617	0,376 0,827 0,636	0,394 0,836 0,651	0,410 0,842 0,664	0,421 0,845 0,676	0,451 0,858 0,695	0,474 0,866 0,712	0,500 0,875 0,730	0,524 0,883 0,746	0,567 0,896 0,774	0,600 0,907 0,797	0,670 0,925 0,885	0,758 0,946 0,882
$l/3$	0,530 0,919 0,805	0,546 0,922 0,815	0,560 0,926 0,823	0,572 0,929 0,830	0,583 0,932 0,836	0,603 0,937 0,846	0,620 0,941 0,855	0,639 0,944 0,864	0,657 0,947 0,872	0,688 0,954 0,887	0,716 0,958 0,898	0,757 0,966 0,917	0,827 0,976 0,941
$l/4$	0,632 0,955 0,884	0,645 0,957 0,890	0,655 0,959 0,895	0,666 0,961 0,899	0,674 0,962 0,902	0,690 0,964 0,909	0,704 0,967 0,914	0,719 0,968 0,916	0,733 0,971 0,924	0,758 0,974 0,933	0,781 0,979 0,940	0,816 0,981 0,951	0,865 0,985 0,964
$l/5$	0,699 0,971 0,923	0,709 0,972 0,927	0,718 0,973 0,930	0,726 0,975 0,933	0,733 0,976 0,935	0,746 0,977 0,940	0,758 0,978 0,943	0,770 0,981 0,947	0,782 0,982 0,950	0,803 0,984 0,956	0,819 0,986 0,961	0,861 0,989 0,968	0,891 0,992 0,977
$l/6$	0,746 0,979 0,944	0,754 0,980 0,948	0,762 0,981 0,950	0,768 0,981 0,952	0,775 0,982 0,954	0,782 0,983 0,957	0,795 0,984 0,961	0,805 0,987 0,962	0,816 0,987 0,964	0,833 0,989 0,968	0,848 0,990 0,972	0,878 0,992 0,977	0,908 0,994 0,983

Ordinaten der Einflußlinien für die Kreuzlinienabschnitte  $k^a$  und  $k^b$ .



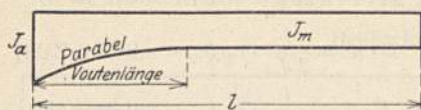
$$k^a = -l \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -l \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	$n = \frac{J_m}{J_a}$	Last $P = 1$ in										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$l$	0,20	0,082 0,103	0,165 0,185	0,242 0,249	0,313 0,292	0,373 0,316	0,419 0,321	0,446 0,306	0,448 0,273	0,416 0,223	0,340 0,158	0,207 0,082
	0,10	0,083 0,088	0,165 0,161	0,244 0,219	0,317 0,261	0,382 0,286	0,435 0,294	0,470 0,285	0,479 0,259	0,455 0,215	0,381 0,155	0,239 0,082
	0,05	0,083 0,075	0,166 0,139	0,245 0,192	0,321 0,231	0,390 0,257	0,448 0,269	0,490 0,265	0,509 0,244	0,492 0,206	0,423 0,152	0,273 0,081
$l/2$	0,20	0,083 0,094	0,165 0,176	0,244 0,244	0,318 0,296	0,382 0,329	0,429 0,339	0,451 0,323	0,442 0,286	0,396 0,230	0,311 0,161	0,180 0,083
	0,10	0,083 0,080	0,166 0,153	0,247 0,217	0,323 0,269	0,393 0,307	0,447 0,324	0,474 0,315	0,467 0,281	0,421 0,228	0,331 0,160	0,192 0,083
	0,05	0,083 0,069	0,166 0,135	0,248 0,195	0,327 0,247	0,401 0,288	0,461 0,312	0,493 0,308	0,489 0,278	0,442 0,227	0,349 0,160	0,203 0,082
$l/3$	0,20	0,083 0,106	0,165 0,199	0,244 0,277	0,315 0,332	0,371 0,359	0,409 0,359	0,422 0,335	0,408 0,291	0,363 0,232	0,283 0,161	0,163 0,083
	0,10	0,083 0,095	0,166 0,183	0,246 0,261	0,320 0,320	0,380 0,351	0,419 0,354	0,434 0,332	0,421 0,290	0,374 0,232	0,292 0,161	0,168 0,083
	0,05	0,083 0,087	0,166 0,171	0,248 0,247	0,324 0,309	0,386 0,344	0,427 0,351	0,443 0,330	0,430 0,289	0,383 0,231	0,302 0,161	0,174 0,083
$l/4$	0,20	0,083 0,115	0,165 0,216	0,243 0,298	0,310 0,349	0,363 0,371	0,396 0,366	0,408 0,339	0,393 0,294	0,349 0,233	0,271 0,162	0,156 0,083
	0,10	0,083 0,107	0,166 0,205	0,245 0,288	0,314 0,343	0,368 0,366	0,403 0,363	0,415 0,338	0,400 0,293	0,355 0,233	0,276 0,162	0,159 0,083
	0,05	0,083 0,100	0,166 0,196	0,246 0,281	0,317 0,337	0,372 0,362	0,408 0,361	0,420 0,336	0,406 0,292	0,360 0,233	0,280 0,162	0,161 0,083
$l/5$	0,20	0,083 0,118	0,165 0,223	0,243 0,306	0,308 0,356	0,360 0,375	0,391 0,369	0,403 0,340	0,387 0,295	0,344 0,232	0,266 0,161	0,153 0,083
	0,10	0,083 0,112	0,166 0,214	0,245 0,269	0,312 0,352	0,363 0,342	0,397 0,367	0,407 0,340	0,392 0,294	0,348 0,233	0,270 0,162	0,156 0,083
	0,05	0,083 0,105	0,166 0,206	0,247 0,295	0,314 0,348	0,367 0,369	0,401 0,365	0,411 0,338	0,397 0,293	0,351 0,234	0,271 0,162	0,156 0,083
$l/6$	0,20	0,083 0,120	0,165 0,228	0,243 0,311	0,307 0,361	0,358 0,378	0,387 0,371	0,400 0,340	0,383 0,296	0,341 0,230	0,263 0,160	0,150 0,083
	0,10	0,083 0,115	0,166 0,220	0,245 0,306	0,311 0,358	0,360 0,359	0,393 0,370	0,402 0,341	0,387 0,294	0,343 0,233	0,266 0,162	0,154 0,083
	0,05	0,083 0,108	0,166 0,213	0,247 0,304	0,312 0,355	0,364 0,374	0,396 0,368	0,405 0,339	0,391 0,293	0,345 0,234	0,265 0,162	0,153 0,083

#### 4. Balken mit einseitiger parabolischer Voute.

Drehwinkel  $\alpha^a$ ,  $\alpha^b$  und  $\beta$ .



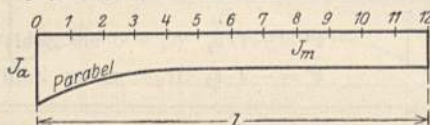
$$E \cdot \alpha^a = \frac{l}{2 J_m} \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$E \cdot \alpha^b = \frac{l}{2 J_m} \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{mittlere Zahl})$$

$$E \cdot \beta = \frac{l}{6 J_m} \cdot c_3 \quad (c_3 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_a}$												
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,125	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50
$\frac{l}{2}$	0,172	0,203	0,230	0,253	0,272	0,308	0,340	0,374	0,407	0,464	0,512	0,601	0,632
	0,536	0,571	0,597	0,619	0,636	0,665	0,689	0,714	0,735	0,770	0,792	0,838	0,910
	0,309	0,349	0,380	0,407	0,430	0,460	0,501	0,536	0,566	0,617	0,657	0,741	0,821
$\frac{l}{3}$	0,471	0,495	0,514	0,532	0,545	0,570	0,593	0,615	0,637	0,674	0,706	0,757	0,824
	0,884	0,893	0,899	0,905	0,909	0,916	0,923	0,928	0,933	0,943	0,950	0,959	0,972
	0,740	0,758	0,771	0,783	0,792	0,808	0,821	0,834	0,846	0,866	0,886	0,905	0,933
$\frac{l}{4}$	0,622	0,640	0,653	0,661	0,677	0,695	0,711	0,728	0,743	0,770	0,792	0,829	0,879
	0,949	0,952	0,954	0,957	0,959	0,962	0,965	0,968	0,970	0,974	0,978	0,982	0,988
	0,871	0,880	0,887	0,893	0,898	0,905	0,912	0,918	0,925	0,935	0,942	0,953	0,968
$\frac{l}{5}$	0,706	0,721	0,732	0,741	0,750	0,764	0,777	0,791	0,803	0,823	0,839	0,868	0,906
	0,971	0,973	0,974	0,976	0,977	0,979	0,980	0,982	0,983	0,986	0,987	0,989	0,992
	0,924	0,930	0,934	0,937	0,940	0,945	0,949	0,953	0,956	0,962	0,966	0,973	0,981
$\frac{l}{6}$	0,760	0,772	0,782	0,790	0,796	0,808	0,818	0,830	0,839	0,856	0,869	0,892	0,922
	0,982	0,983	0,984	0,985	0,985	0,986	0,987	0,988	0,990	0,991	0,992	0,993	0,995
	0,950	0,954	0,956	0,959	0,961	0,964	0,966	0,969	0,971	0,975	0,978	0,982	0,987
$\frac{l}{6}$	0,799	0,807	0,816	0,823	0,828	0,839	0,847	0,856	0,864	0,879	0,889	0,910	0,935
	0,988	0,988	0,989	0,989	0,990	0,990	0,991	0,991	0,993	0,994	0,995	0,997	0,997
	0,964	0,967	0,969	0,970	0,972	0,974	0,976	0,978	0,980	0,982	0,985	0,987	0,991

Ordinaten der Einflußlinien für die Kreuzlinienabschnitte  $k^a$  und  $k^b$ .



$$k^a = -l \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -l \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	$n = \frac{J_m}{J_a}$	Last $P=1$ in										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{l}{2}$	0,20	0,083	0,165	0,243	0,315	0,377	0,424	0,450	0,449	0,412	0,330	0,196
	0,10	0,098	0,180	0,245	0,292	0,319	0,325	0,312	0,278	0,226	0,159	0,082
	0,05	0,083	0,166	0,247	0,324	0,396	0,455	0,498	0,512	0,486	0,404	0,247
$\frac{l}{3}$	0,20	0,083	0,165	0,243	0,314	0,372	0,411	0,426	0,413	0,368	0,287	0,165
	0,10	0,106	0,199	0,274	0,327	0,354	0,356	0,333	0,291	0,232	0,161	0,083
	0,05	0,083	0,166	0,248	0,319	0,381	0,424	0,441	0,429	0,383	0,299	0,173
$\frac{l}{4}$	0,20	0,083	0,166	0,244	0,313	0,367	0,402	0,415	0,400	0,356	0,276	0,159
	0,10	0,109	0,207	0,288	0,342	0,366	0,366	0,338	0,292	0,233	0,162	0,083
	0,05	0,083	0,166	0,246	0,316	0,372	0,408	0,421	0,407	0,362	0,282	0,162
$\frac{l}{5}$	0,20	0,083	0,165	0,240	0,305	0,355	0,388	0,398	0,384	0,340	0,264	0,152
	0,10	0,125	0,232	0,311	0,359	0,377	0,370	0,342	0,295	0,234	0,162	0,083
	0,05	0,083	0,165	0,242	0,308	0,359	0,392	0,403	0,388	0,344	0,267	0,154
$\frac{l}{6}$	0,20	0,083	0,166	0,243	0,310	0,362	0,396	0,407	0,392	0,348	0,270	0,156
	0,10	0,113	0,217	0,300	0,351	0,372	0,367	0,340	0,294	0,233	0,162	0,083
	0,05	0,083	0,165	0,240	0,304	0,352	0,385	0,395	0,381	0,337	0,261	0,152
$\frac{l}{6}$	0,20	0,083	0,165	0,240	0,304	0,350	0,382	0,393	0,379	0,335	0,259	0,152
	0,10	0,128	0,237	0,316	0,363	0,379	0,371	0,343	0,295	0,234	0,162	0,083
	0,05	0,083	0,165	0,241	0,306	0,356	0,388	0,398	0,383	0,339	0,263	0,157
$\frac{l}{6}$	0,20	0,083	0,166	0,242	0,308	0,358	0,391	0,402	0,386	0,343	0,265	0,154
	0,10	0,118	0,224	0,305	0,354	0,374	0,368	0,341	0,294	0,234	0,162	0,083
	0,05	0,083	0,166	0,243	0,310	0,362	0,396	0,407	0,392	0,348	0,270	0,156
$\frac{l}{6}$	0,20	0,083	0,165	0,240	0,304	0,350	0,382	0,393	0,379	0,335	0,259	0,152
	0,10	0,130	0,240	0,319	0,366	0,380	0,371	0,343	0,295	0,234	0,162	0,083
	0,05	0,083	0,165	0,241	0,305	0,354	0,385	0,395	0,380	0,336	0,260	0,159
$\frac{l}{6}$	0,20	0,083	0,166	0,242	0,307	0,355	0,388	0,399	0,382	0,340	0,262	0,153
	0,10	0,125	0,236	0,317	0,362	0,379	0,369	0,342	0,295	0,234	0,162	0,083
	0,05	0,083	0,166	0,242	0,307	0,355	0,388	0,399	0,382	0,340	0,262	0,153

### 5. Sonderfall: Gleichmäßig verteilte Belastung der unter 1. bis 4. behandelten Balken.

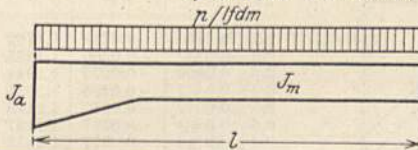
Wie in Kap. V, 2, c) auf Seite 96 erwähnt, sind für einen beliebigen symmetrischen Balken, also auch für die unter 1. und 2. behandelten Balken, für gleichmäßig verteilte Belastung auf der ganzen Länge die Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = k^b = -\frac{p l^2}{4} = -2f,$$

d. h. genau gleich groß wie wenn das Trägheitsmoment auf die ganze Balkenlänge konstant wäre.

Für die unter 3. und 4. behandelten Balken mit einseitiger Voute sind die Werte der Kreuzlinienabschnitte  $k^a$  und  $k^b$  in nachstehenden beiden Tabellen zusammengestellt, damit man die unter 3. und 4. angegebenen Einflußlinien der Kreuzlinienabschnitte für diesen häufig vorkommenden Belastungsfall nicht auszuwerten braucht.

#### a) Balken mit einseitiger gerader Voute.

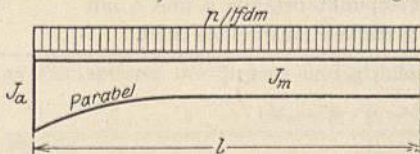


$$k^a = -p l^2 \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -p l^2 \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_a}$												
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,125	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50
$l$	0,344 0,157	0,335 0,166	0,328 0,172	0,323 0,177	0,318 0,182	0,311 0,189	0,306 0,194	0,304 0,196	0,297 0,197	0,289 0,203	0,285 0,215	0,278 0,222	0,269 0,231
$\frac{l}{2}$	0,318 0,182	0,313 0,187	0,310 0,190	0,308 0,193	0,305 0,195	0,301 0,199	0,298 0,203	0,294 0,204	0,291 0,209	0,286 0,215	0,281 0,219	0,275 0,225	0,268 0,233
$\frac{l}{3}$	0,287 0,213	0,285 0,215	0,283 0,217	0,282 0,218	0,281 0,219	0,279 0,221	0,277 0,223	0,275 0,225	0,274 0,227	0,271 0,229	0,269 0,231	0,265 0,235	0,260 0,239
$\frac{l}{4}$	0,273 0,227	0,272 0,228	0,271 0,229	0,270 0,230	0,270 0,231	0,269 0,232	0,267 0,233	0,265 0,234	0,265 0,235	0,263 0,237	0,262 0,238	0,260 0,241	0,257 0,243
$\frac{l}{5}$	0,266 0,234	0,265 0,235	0,265 0,236	0,264 0,236	0,263 0,237	0,263 0,238	0,262 0,238	0,261 0,239	0,260 0,240	0,259 0,241	0,258 0,242	0,257 0,243	0,255 0,245
$\frac{l}{6}$	0,260 0,239	0,260 0,240	0,260 0,240	0,260 0,240	0,259 0,241	0,259 0,241	0,259 0,241	0,258 0,242	0,257 0,243	0,256 0,244	0,255 0,245	0,255 0,245	0,254 0,246

#### b) Balken mit einseitiger parabolischer Voute.



$$k^a = -p l^2 \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -p l^2 \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_a}$												
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,125	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50
$l$	0,338 0,160	0,332 0,168	0,326 0,174	0,321 0,179	0,317 0,183	0,310 0,189	0,306 0,195	0,301 0,200	0,296 0,204	0,289 0,211	0,285 0,216	0,277 0,223	0,267 0,233
$\frac{l}{2}$	0,296 0,204	0,293 0,208	0,290 0,210	0,288 0,212	0,286 0,214	0,283 0,217	0,281 0,220	0,278 0,222	0,276 0,224	0,273 0,228	0,270 0,230	0,266 0,234	0,261 0,239
$\frac{l}{3}$	0,275 0,225	0,273 0,227	0,272 0,228	0,270 0,229	0,269 0,230	0,268 0,232	0,267 0,233	0,265 0,234	0,265 0,235	0,263 0,237	0,261 0,239	0,259 0,241	0,256 0,244
$\frac{l}{4}$	0,266 0,235	0,264 0,236	0,263 0,237	0,263 0,237	0,262 0,238	0,261 0,239	0,261 0,240	0,260 0,240	0,259 0,241	0,258 0,242	0,257 0,243	0,255 0,245	0,254 0,246
$\frac{l}{5}$	0,261 0,239	0,260 0,240	0,259 0,241	0,259 0,241	0,258 0,242	0,258 0,242	0,257 0,243	0,257 0,243	0,256 0,244	0,255 0,245	0,255 0,245	0,254 0,246	0,253 0,246
$\frac{l}{6}$	0,258 0,242	0,257 0,243	0,256 0,244	0,256 0,244	0,256 0,245	0,256 0,245	0,255 0,245	0,255 0,245	0,254 0,246	0,254 0,246	0,254 0,246	0,254 0,246	0,253 0,246

## 6. Der symmetrische Parabelbogen mit vom Scheitel zu den Kämpfern zunehmendem Trägheitsmoment.

Nachstehenden Tabellen liegt eine Zunahme des Trägheitsmomentes vom Scheitel zu den Kämpfern nach dem Gesetz von Dr.-Ing. Max Ritter<sup>1)</sup>:

$$\frac{J_s}{J_x \cdot \cos \varphi} = 1 - (1 - n) \left(1 - \frac{x}{l/2}\right)^2$$

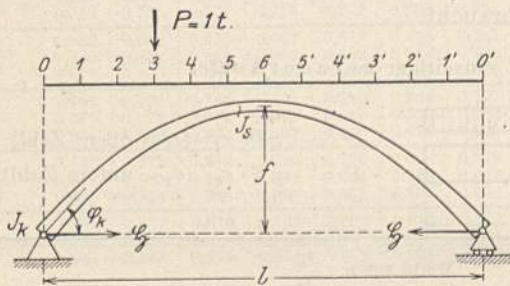
zugrunde, worin 
$$n = \frac{J_s}{J_k \cdot \cos \varphi_k};$$

hierin bedeuten:

$J_s$  das Trägheitsmoment am Scheitel,

$J_k$  „ „ an den Kämpfern.

$\varphi_k$  der Neigungswinkel der Bogenachse an den Kämpfern.



Drehwinkel  $\bar{\alpha}$  und  $\beta$  sowie  
Bogenschub  $B$ .

$n$	$E \cdot \bar{\alpha}$	$E \beta$	$B$
0.1	0,0285	-0,0241	1,1762
0.2	0,0347	-0,0260	1,1855
0.3	0,0409	-0,0279	1,1944
0.4	0,0471	-0,0298	1,2031
0.5	0,0532	-0,0317	1,2115
0.6	0,0593	-0,0337	1,2197
0.8	0,0714	-0,0377	1,2353
1.0	0,0833	-0,0417	1,2500
	$\frac{l}{J_s}$	$\frac{l}{J_k}$	$\frac{l}{f}$

**a) Senkrechte wandernde Einzellast.  
Ordinaten der Einflußlinie für den Bogenschub  $\bar{\varphi}$ .**

$n$	Last $P = 1$ in					
	1	2	3	4	5	6
0.1	0,0487	0,0960	0,1378	0,1709	0,1925	0,1954
0.2	0,0490	0,0964	0,1379	0,1708	0,1920	0,1963
0.3	0,0494	0,0967	0,1381	0,1706	0,1916	0,1973
0.4	0,0498	0,0971	0,1383	0,1705	0,1911	0,1978
0.5	0,0500	0,0974	0,1386	0,1703	0,1907	0,1983
0.6	0,0503	0,0978	0,1387	0,1702	0,1903	0,1989
0.8	0,0508	0,0984	0,1389	0,1699	0,1895	0,1994
1.0	0,0514	0,0990	0,1391	0,1697	0,1888	0,2000

Ordinaten der Einflußlinien für die Schlußliniensenkungen  $S^a$  und  $S^b$ .

$S^a = a \cdot$  obere Zahl } worin die Festpunktabstände  $a$  und  $b$  mit  
 $S^b = b \cdot$  untere Zahl } ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

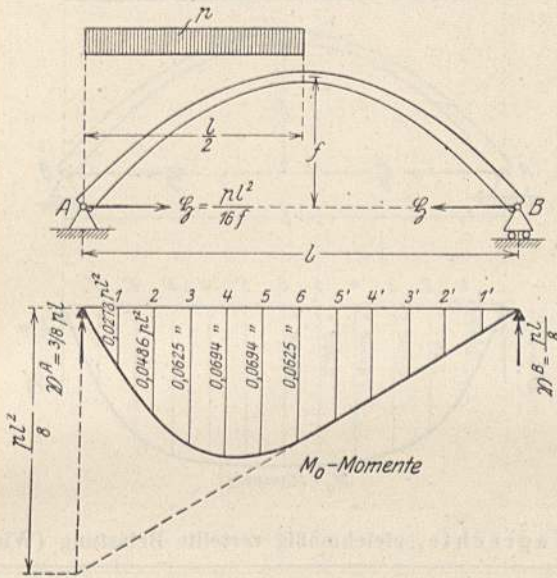
$n$	Last $P = 1$ in										
	1	2	3	4	5	6	5'	4'	3'	2'	1'
0.1	+0,1569	+0,2371	+0,2329	+0,1602	+0,0504	-0,0631	-0,1521	-0,1986	-0,1995	-0,1533	-0,0821
	-0,0821	-0,1533	-0,1995	-0,1986	-0,1521	-0,0631	+0,0504	+0,1602	+0,2329	+0,2371	+0,1569
0.2	+0,1606	+0,2363	+0,2276	+0,1540	+0,0464	-0,0635	-0,1495	-0,1947	-0,1936	-0,1516	-0,0818
	-0,0818	-0,1516	-0,1936	-0,1947	-0,1495	-0,0635	+0,0464	+0,1540	+0,2276	+0,2363	+0,1606
0.3	+0,1637	+0,2354	+0,2229	+0,1485	+0,0430	-0,0637	-0,1470	-0,1911	-0,1906	-0,1502	-0,0815
	-0,0815	-0,1502	-0,1906	-0,1911	-0,1470	-0,0637	+0,0430	+0,1485	+0,2229	+0,2354	+0,1637
0.4	+0,1663	+0,2344	+0,2186	+0,1437	+0,0400	-0,0638	-0,1452	-0,1878	-0,1879	-0,1487	-0,0813
	-0,0813	-0,1487	-0,1879	-0,1878	-0,1452	-0,0638	+0,0400	+0,1437	+0,2186	+0,2344	+0,1663
0.5	+0,1684	+0,2334	+0,2147	+0,1394	+0,0375	-0,0637	-0,1425	-0,1848	-0,1854	-0,1475	-0,0810
	-0,0810	-0,1475	-0,1854	-0,1848	-0,1425	-0,0637	+0,0375	+0,1394	+0,2147	+0,2334	+0,1684
0.6	+0,1702	+0,2323	+0,2111	+0,1356	+0,0352	-0,0636	-0,1405	-0,1817	-0,1832	-0,1464	-0,0808
	-0,0808	-0,1464	-0,1832	-0,1817	-0,1405	-0,0636	+0,0352	+0,1356	+0,2111	+0,2323	+0,1702
0.8	+0,1727	+0,2300	+0,2047	+0,1290	+0,0316	-0,0632	-0,1367	-0,1771	-0,1792	-0,1444	-0,0804
	-0,0804	-0,1444	-0,1792	-0,1771	-0,1367	-0,0632	+0,0316	+0,1290	+0,2047	+0,2300	+0,1727
1.0	+0,1745	+0,2278	+0,1992	+0,1235	+0,0287	-0,0625	-0,1333	-0,1728	-0,1758	-0,1428	-0,0801
	-0,0801	-0,1428	-0,1758	-0,1728	-0,1333	-0,0625	+0,0287	+0,1235	+0,1992	+0,2278	+0,1745

<sup>1)</sup> Vgl. Dr.-Ing. Max Ritter, Beiträge zur Theorie der vollwandigen Bogen-träger ohne Scheitelgelenk.



**b) Senkrechte, auf der Bogenhälfte gleichmäßig verteilte Belastung  $p/lfdm$ .**

$n$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	
$\delta$	für alle Werte von $n$ : $\delta = \frac{p l^2}{16 f}$								
$S^a$	+0,0692	+0,0682	+0,0670	+0,0664	+0,0657	+0,0649	+0,0636	+0,0625	· $a p l$ } $a$ und $b$ mit Vor- · $b p l$ } zeichen einsetzen
$S^b$	-0,0692	-0,0682	-0,0670	-0,0664	-0,0657	-0,0649	-0,0636	-0,0625	



**c) Senkrechte, auf dem ganzen Bogen gleichmäßig verteilte Belastung.**

$$\delta = \frac{p l^2}{8 f} \text{ (unabhängig von } n \text{)}$$

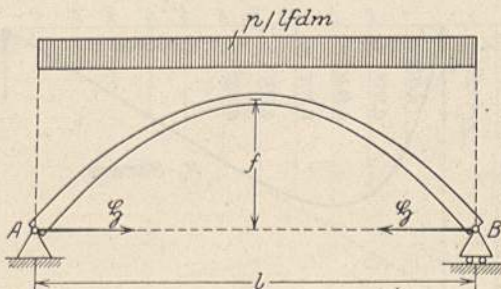
$$S^a = S^b = 0,$$

da bei Parabelform des Bogens und gleichmäßig verteilter Belastung:

$$M_0 - \delta \cdot y = 0 \text{ (vgl. Gl. 478)}$$

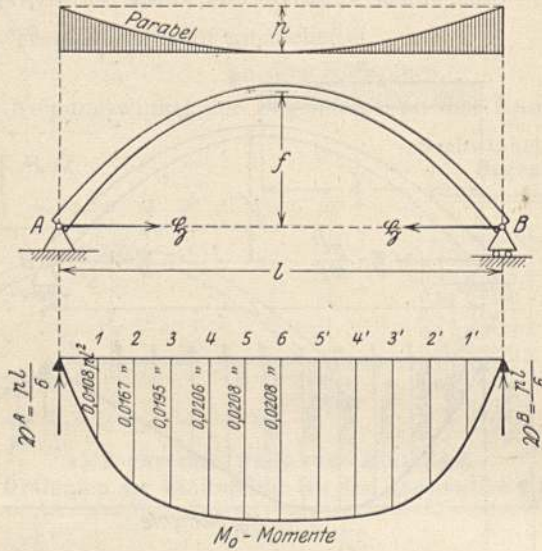
und damit

$$\varphi = 0.$$



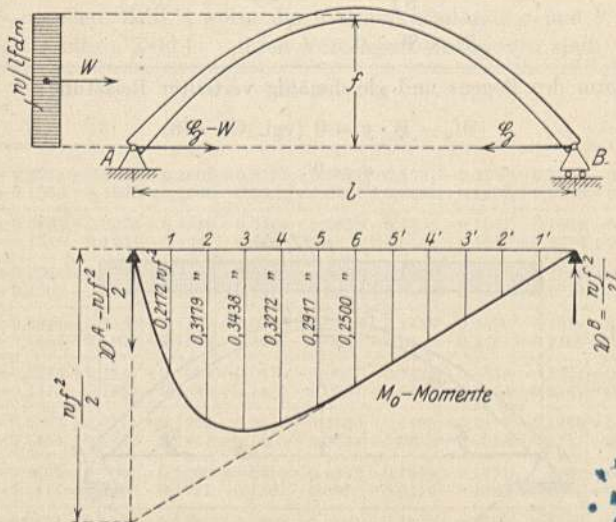
d) Senkrechte, symmetrische, parabelförmige Belastung.

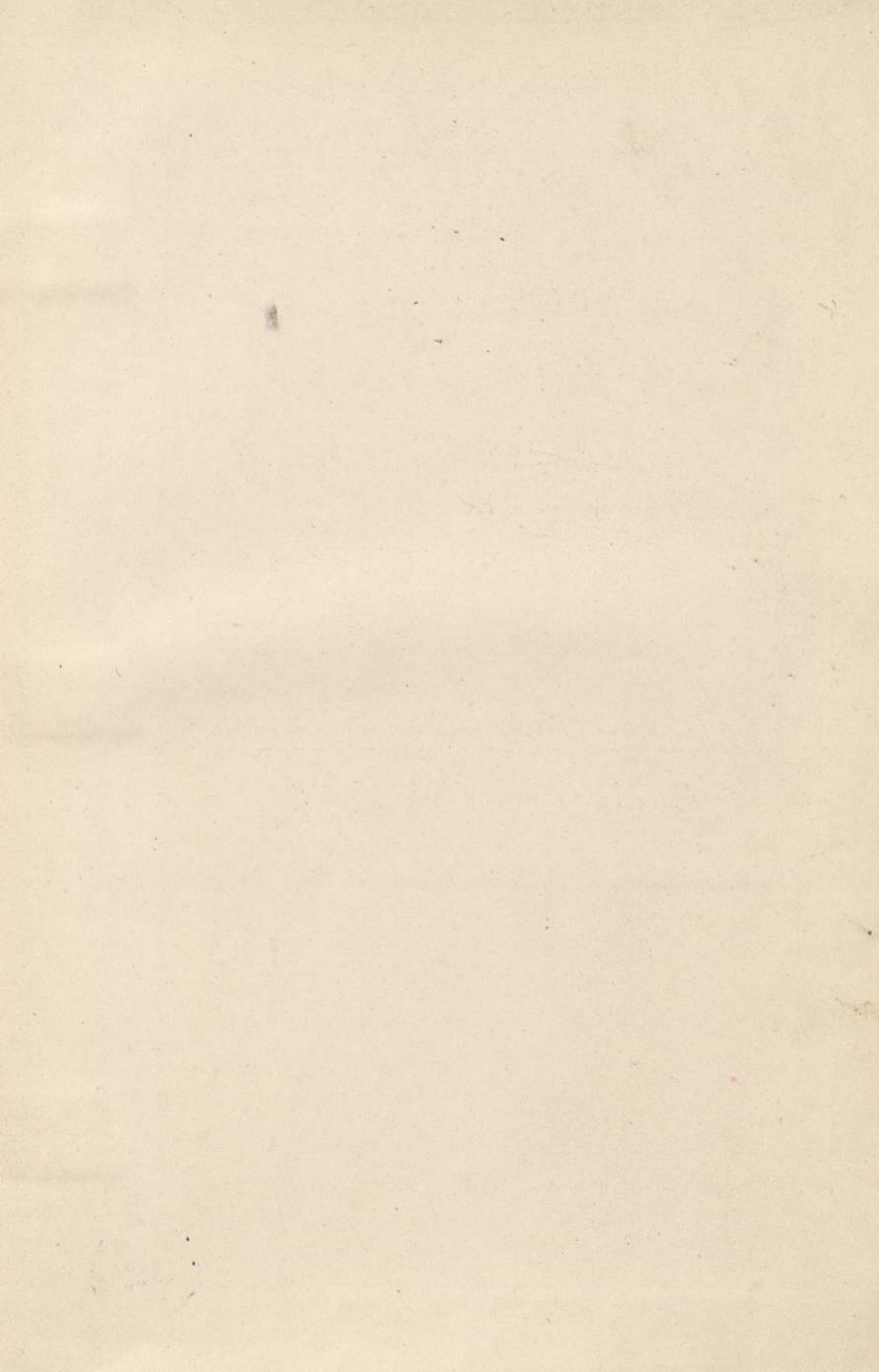
n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	
$\bar{\varphi}$	0,0307	0,0304	0,0300	0,0296	0,0293	0,0289	0,0283	0,0277	$\cdot \frac{p l^2}{f}$
$S^a$	0,0083	0,0086	0,0088	0,0090	0,0091	0,0093	0,0094	0,0095	$\cdot a p l$   a und b mit Vor-
$S^b$	0,0083	0,0086	0,0088	0,0090	0,0091	0,0093	0,0094	0,0095	$\cdot b p l$   zeichen einsetzen

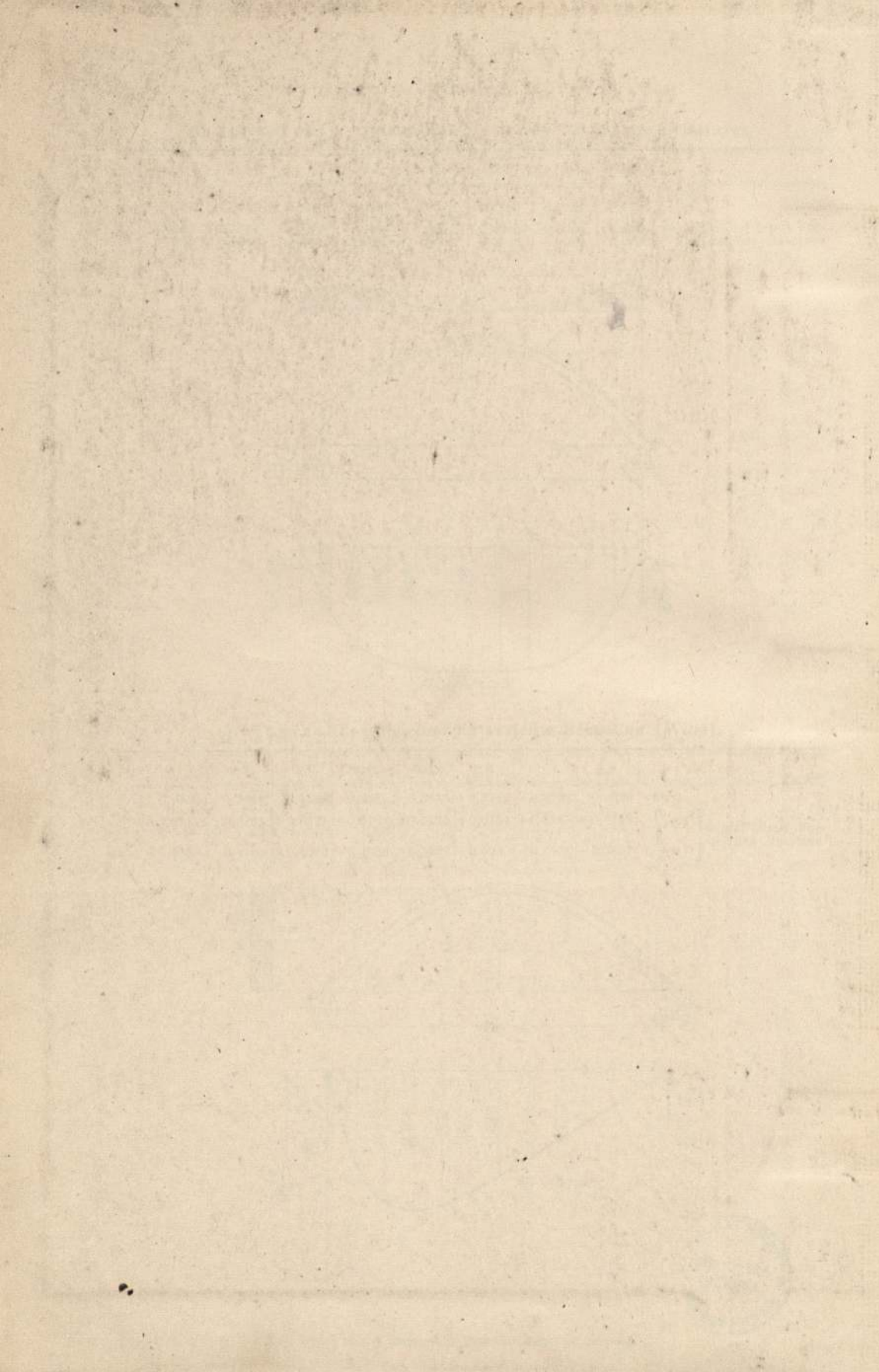


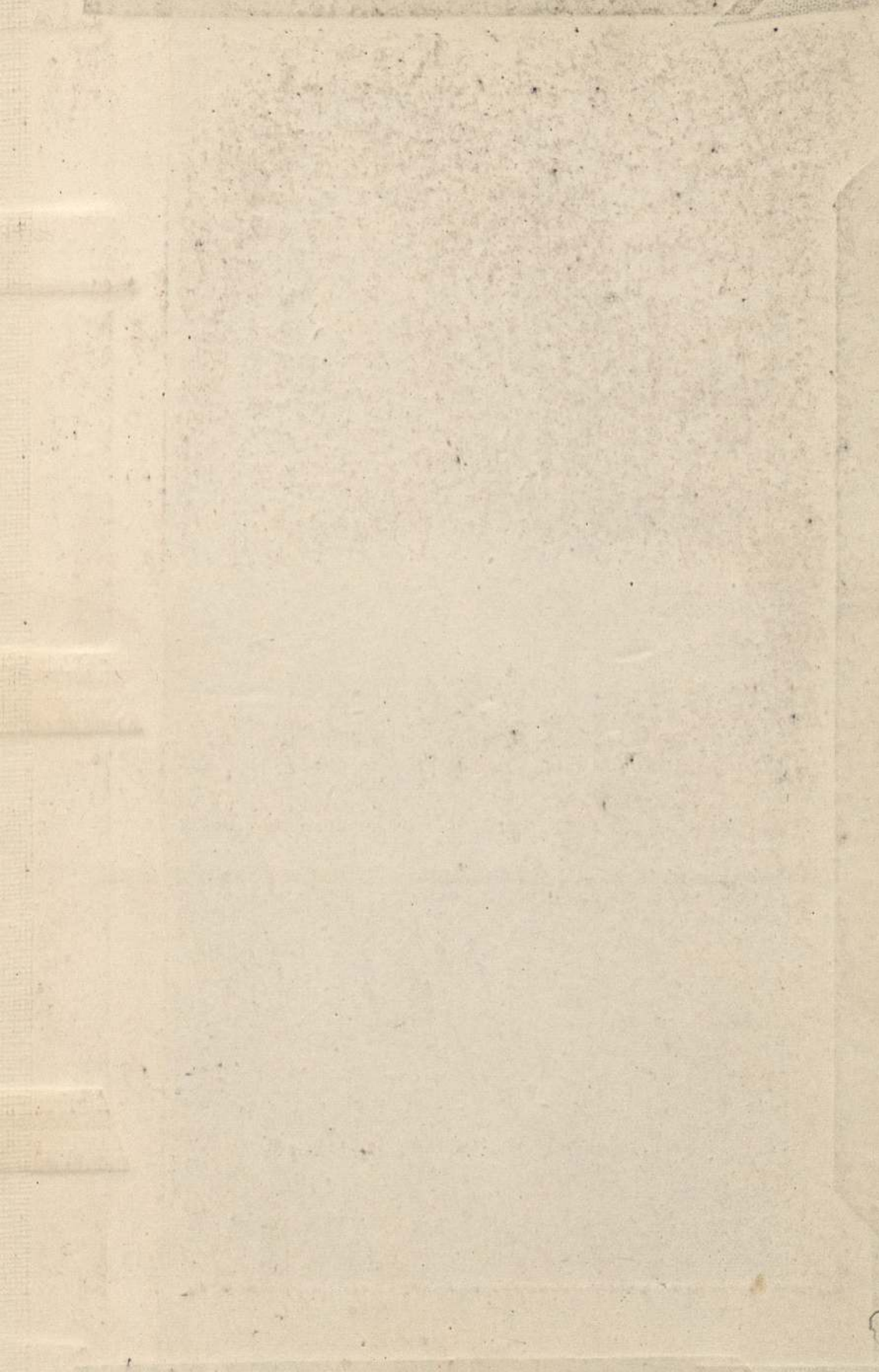
e) Wagrechte, gleichmäßig verteilte Belastung (Wind).

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	
$\bar{\varphi}$	0,3689	0,3643	0,3598	0,3555	0,3513	0,3472	0,3394	0,3320	$\cdot w f$
$S^a$	+0,6117	+0,6164	+0,6177	+0,6184	+0,6185	+0,6184	+0,6167	+0,6143	$\cdot \frac{a}{l} w f^2$   a und b mit Vor-
$S^b$	-0,4152	-0,4105	-0,4064	-0,4026	-0,3992	-0,3960	-0,3905	-0,3857	$\cdot \frac{b}{l} w f^2$   zeichen einsetzen











BIBLIOTEKA GŁÓWNA

5-923

ANNA WILK