Reinhardt-Zeisberg

Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen

Detlefs
Darstellende Geometrie

Zweites Heft

Verlag Moritz Diesterweg
Frankfurt am Main

Bestell-Nr. 8372

Reinhardt-Zeisberg
Mathematisches Unterrichtswerk
für höhere Schulen

Die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie

in drei Heften

Von

Prof. Hermann Detlefs †
Studienrat in Frankfurt a. M.

★

Zweites Heft
Die senkrechte Projektion auf mehrere Tafeln

Mit 73 Figuren und 225 Übungsaufgaben

1928

Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main

Bestell-Nr. 8372

Piererſche Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co., Altenburg, Thür.

Vorwort.

Das vorliegende, für Obersekunda bestimmte Heft enthält die Grundlagen des für die Technik so wichtigen Grund- und Aufrißverfahrens mit Ausnahme der Durchdringungen und Schattenkonstruktionen, die in das dritte Heft verlegt werden, weil für sie in der Obersekunda keine Zeit übrig ist. Da meine Ausführungen für den Mathematikunterricht bestimmt sind, habe ich mich nicht entschließen können, auf einige allgemeine mathematische Beziehungen wie Affinität und Kollineation zu verzichten. Ohne diese hat m. E. das ganze Verfahren etwas Mechanisches, für den Mathematiker und auch den mathematisch veranlagten Schüler wenig Anziehendes an sich. Dabei ist doch auch der praktische Wert dieser Beziehungen für die Konstruktionen und Proben kein geringer. Das Heft ist aber so geschrieben, daß es auch benutzt werden kann, wenn auf diese Beziehungen verzichtet werden soll.

Zur Veranschaulichung der Raumgebilde werden, wie schon im 1. Heft, in reichem Maße Schrägbilder benutzt. Die schiefe Parallelprojektion hat sich für diesen Zweck seit langer Zeit gut bewährt. Ihre Bilder sind weit leichter zu entwerfen als die z. B. von Martus empfohlenen zentralperspektivischen und stehen diesen an Anschaulichkeit kaum nach. Bei einer gewissen, nicht einmal sehr großen Entfernung des Projektionszentrums besteht praktisch zwischen beiden Arten von Bildern kein Unterschied mehr. Die Verwendung von körperlichen Modellen ist natürlich nicht auszuschließen, solange solche Modelle von allen Schülern leicht und schnell hergestellt werden können. Aber das Vorzeigen von für die ganze Klasse bestimmten Modellen verbietet sich, abgesehen von wenigen Fällen, von selbst, nicht nur wegen der hohen Kosten, welche die Anschaffung, Aufbewahrung und Erhaltung so vieler großer Modelle verursachen würde, sondern vor allem aus pädagogischen Gründen. Solche Modelle erscheinen von den 30—40 Schülerplätzen aus überall verschieden, und Erklärungen an ihnen sind deshalb und auch wegen der fehlenden Bezeichnungen sehr schwierig. Es trägt auch gerade nicht zur Förderung der Raumanschauung bei, die doch Hauptzweck dieses ganzen Unterrichts ist, wenn man den Schülern zu viele handgreifliche Modelle zeigt, statt sie anzuleiten, wenn auch mit einiger Anstrengung, ebene Figuren als Darstellungen räumlicher Gebilde zu deuten und zu sehen.

Frankfurt a. M., im September 1927.

Hermann Detlefs.

Inhaltsverzeichnis.

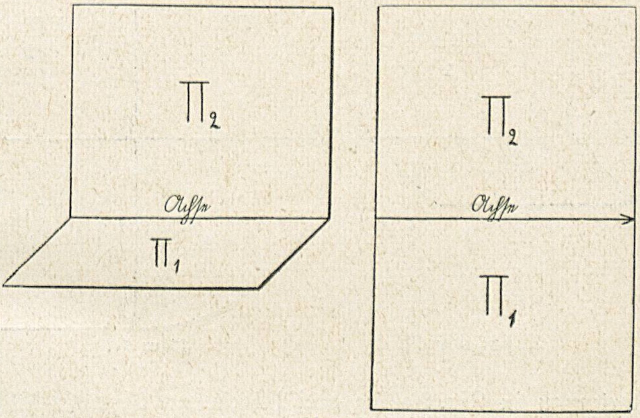
Die senkrechte Projektion auf mehrere Tafeln.

		Seite
A.	Einleitung	1
B.	Frühere Sätze über die senkrechte Projektion auf eine Ebene	4
C.	Ungünstige Lagen von Punkten und Geraden	5
D.	Der Punkt	6
E.	Einfache Körper in einfachen Lagen	11
F.	Die Gerade	15
G.	Zwei Gerade	21
H.	Die Ebene	22
I.	Flächeninhalt der Projektion einer ebenen Figur	30
K.	Affinitätsbeziehungen	30
L.	Die wahre Gestalt einer ebenen Figur	32
M.	Darstellung ebener Figuren in allgemeiner Lage	34
N.	Zwei Ebenen	37
O.	Ebene und Gerade	40
P.	Körper in allgemeiner Lage	45
Q.	Ebene Schnitte durch Körper	48
R.	Geschichtliches	56

Die senkrechte Projektion auf mehrere Tafeln.

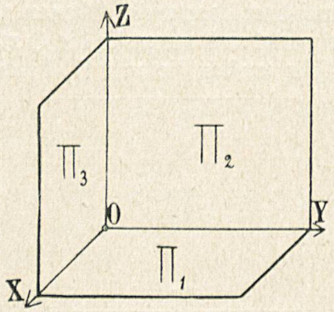
A. Einleitung.

Für manche Zwecke kommt man mit einer Projektionszeichnung nicht aus. Die senkrechte Projektion liefert meistens wenig anschauliche Bilder, und man empfindet die beigefügten Koten oder Höhenmaßstäbe leicht als ein störendes Zubehör. Die schiefe Parallelprojektion gibt zwar recht anschauliche Bilder, aber die Entnahme der wahren Größen der dargestellten Gebilde aus der Zeichnung ist nicht immer einfach. In den meisten Gebieten der Technik zieht man es deshalb vor, die darzustellenden Gegenstände senkrecht auf zwei, in einigen Fällen sogar auf drei oder mehr Ebenen zu projizieren. Die erste Bildebene legt man horizontal und nennt sie die Grundrißebene, auch wohl Grundebene. Wir wollen sie mit Π_1 bezeichnen.

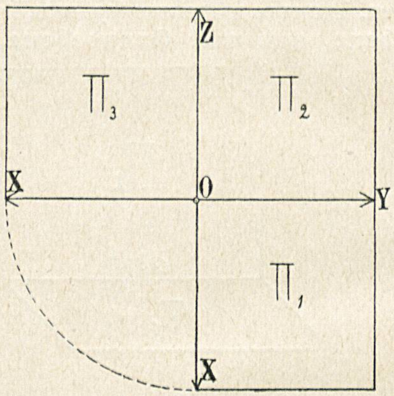


Figur 1.

Die senkrechte Projektion eines Gegenstandes auf sie liefert den uns schon aus dem ersten Heft bekannten Grundriß. Die zweite Zeichenebene (Π_2) steht vertikal und heißt Aufrißebene oder Aufebene. Das in ihr liegende Bild ist der uns auch schon bekannte Aufriß. Die Schnittgerade beider Ebenen wird die Bildachse oder kurz die Achse genannt. Da es nun aber nicht wohl möglich ist, gleichzeitig auf eine wagerechte und eine lotrechte Ebene zu zeichnen, klappt man die Grundebene durch Drehung um die Achse (daher der Name) herunter, so daß jetzt beide Zeichenebenen in eine zusammenfallen, die man beim Zeichnen in eine beliebige bequeme Lage bringen kann (Fig. 1). Beim Betrachten einer Grund- und Aufrißzeichnung muß man sich stets die ursprüngliche Lage der Bildebenen vergegenwärtigen. Grund- und Aufriß genügen gewöhnlich, dem Beschauer bei einiger Übung von dem gezeichneten Gegenstand ein klares Bild zu verschaffen, sowie alle erforderlichen Abmessungen aus ihnen zu entnehmen. Nur in wenigen Fällen wird noch eine dritte Projektion auf eine ebenfalls vertikale Ebene (Π_3) nötig sein, die man senkrecht zur Auf- (und Grundebene) annimmt und Seitenriß- oder Seitenebene nennt. Das in ihr liegende Bild heißt Seitenriß. Da nun drei Ebenen sich im allgemeinen in drei Geraden schneiden, die in einen Punkt (O Fig. 2a) zusammenlaufen, so kommen zu der ursprünglichen Achse OY noch zwei neue OX und OZ hinzu, die auf den Ebenen und aufeinander senkrecht stehen (warum?). Die drei Ebenen bilden eine dreiseitige körperliche Ecke oder ein Dreikant. Um alle drei Risse in einer Ebene zu erhalten, muß man auch die Ebene Π_3 durch Drehung um die Z-Achse zurückklappen, bis sie mit Π_2 und Π_1 in eine Ebene fällt (Fig. 2b). Die X-Achse tritt in dem aufgeklappten Dreikant zweimal auf, obgleich sie im geschlossenen nur einmal vorhanden ist.



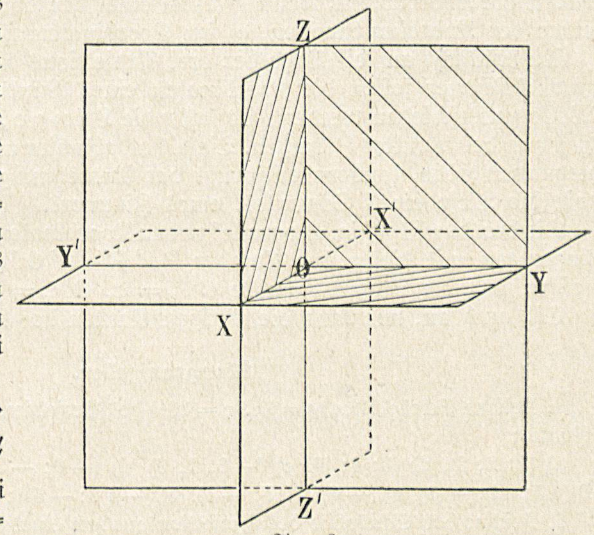
Figur 2a.



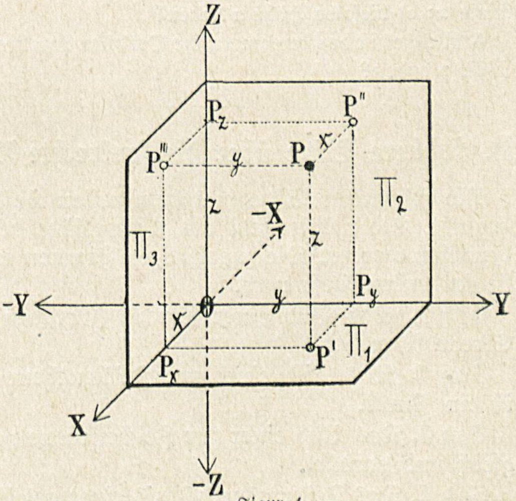
Figur 2b.

Erweitert man in Fig. 2a die drei Bildebenen über die Achsen hinaus, so erhält man Fig. 3. Die drei nach allen Richtungen ins Unendliche erweiterten Ebenen teilen nunmehr den ganzen Raum in acht Oktanten (= Achtel). Man bringt gewöhnlich den darzustellenden Gegenstand in den in Fig. 2a allein abgebildeten Oktanten, dessen Lage in Fig. 3 vom Beschauer aus als vorn oben rechts beschrieben werden kann, und den man den ersten nennt. Es läßt sich aber nicht immer vermeiden, daß Teile der Zeichnung in die über die Achsen hinaus erweiterten Zeichenebenen fallen. Werden nun die vollständigen Ebenen Π_1 und Π_2 wie in Fig. 2b durch Drehung um die Y-Achse und die Z-Achse zur Deckung gebracht, so liegen alle drei Zeichenebenen übereinander. Es bleibt dann von der Zeichnung alles sichtbar, was in den den ersten Oktanten begrenzenden (in der Fig. 3 schraffierten) Ebenen liegt (s. auch Fig. 2b), fast alles übrige wird unsichtbar (verdeckt). Die verdeckten Linien zeichnet man, wenn man sie nicht ganz fortlassen will, gestrichelt.

Koordinaten. Die drei in Fig. 3 abgebildeten Ebenen bilden ein rechtwinkliges räumliches dreiachsiges Koordinatensystem, mittels dessen man die Lage eines Punktes P im Raum genau in derselben Weise festlegen kann, wie es für einen Punkt in einer Ebene durch das schon bekannte rechtwinklige ebene zweiachsige Koordinatensystem geschieht. Um die Koordinaten des Punktes P (Fig. 4) zu erhalten, braucht man ihn nur auf die drei Koordinatenebenen senkrecht zu projizieren. Die Abstände $PP' = z$, $PP'' = x$ und $PP''' = y$ sind dann die drei Koordinaten des Punktes P. Da jeder Punkt im Raum von jeder der drei Ebenen einen bestimmten Abstand hat, so besitzt er drei bestimmte Koordinaten. Umgekehrt gehört zu drei gegebenen Koordinaten x, y, z ein eindeutig bestimmter Punkt. Man erhält ihn als Schnittpunkt der drei Ebenen, welche man in den Abständen x, y, z parallel zu den Koordinatenebenen legt. Eine solche Parallelebene ist offenbar der stereometrische Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Ebene einen gegebenen Abstand haben.



Figur 3.



Figur 4.

Liegt der Punkt P, wie in Fig. 4, im ersten Oktanten, so sind seine Koordinaten alle positiv zu nehmen, da sie in die Richtungen der in Fig. 4 als positiv angenommenen Koordinatenachsen fallen. In den anderen Oktanten sind eine, zwei oder gar alle drei Koordinaten negativ. Im zweiten Oktanten (rechts, oben, hinten) z. B. ist x negativ, während y und z positiv sind. Zeichne

Fig. 4 für die Lagen des Punktes P in allen acht Oktanten und bestimme in jedem Falle, welche Koordinaten negativ, welche positiv sind. Welche Werte haben die Koordinaten, wenn P a) in einer der Koordinatenebenen, b) auf einer der Koordinatenachsen, c) im Koordinatenursprung O liegt?

Mit Rücksicht auf die Lage der drei Projektions- oder Koordinatenebenen zum Beschauer sollen die Koordinaten eines Punktes P kurz in folgender Weise unterschieden werden: Es soll y die Länge, x die Tiefe und z die Höhe des Punktes P heißen. Tiefe hat also hier nicht die Bedeutung einer negativen Höhe, sondern entspricht der Ausdehnung von vorn nach hinten, wie die Tiefe eines Schrankes, eines Zimmers.

Die drei durch P (Fig. 4) parallel zu den Koordinatenebenen gelegten Ebenen begrenzen mit diesen den Quader $PP'P''P'''\,OP_xP_yP_z$, und man sieht sofort, daß die Achsenabschnitte $OP_x = x$, $OP_y = y$, $OP_z = z$ sind.

Gib auch an, wie lang die übrigen Kanten des Quaders sind.

Übungsaufgaben.

1. Zeichne Schrägbilder ($q = 1/3$, $\varphi = 30^0$) des Projektionsquaders (Fig. 4) folgender Punkte:

a) (2; 2; 2). b) (3; 4; 5). c) (—6; 2; 3). d) (—6; —3; 2,5). e) (3,6; —1,8; 4). f) (4,5; 2,9; —3). g) (—6,3; 2,5; —4). h) (—4,8; —5,5; —4). i) (5,7; —4; —3,2).

2. Zeichne das Schrägbild des Projektionsquaders eines beliebigen Punktes und bestimme aus der Zeichnung seine Koordinaten.

3. Weshalb genügen nicht eine oder zwei Koordinaten zur Festlegung eines Raumpunktes?

4. Welches ist der stereometrische Ort aller Punkte, die a) dieselbe Länge y; b) dieselbe Tiefe x; c) dieselbe Höhe z haben?

5. Welches ist der stereometrische Ort aller Punkte, welche dieselbe Tiefe x und dieselbe Höhe z haben?

B. Frühere Sätze über die senkrechte Projektion auf eine Ebene.

Die folgenden Sätze aus dem ersten Heft werden auch hier häufig gebraucht. Sie mögen jetzt als Übungssätze der Stereometrie betrachtet und bewiesen werden. Die zugehörigen Figuren entwerfe man selbst oder schlage sie im ersten Heft nach.

Satz 1. Das Bild einer Strecke (Geraden) ist im allgemeinen auch eine Strecke (Gerade).

Satz 2. Das Bild einer zur Zeichenebene senkrechten Strecke (Geraden) ist ein Punkt.

Satz 3. Das Bild einer zur Zeichenebene parallelen Strecke ist der Strecke gleich und parallel.

Satz 4. Das Teilungsverhältnis einer geteilten Strecke bleibt bei der Projektion im Bilde erhalten.

Satz 5. Die Spur einer Geraden (d. i. ihr Schnittpunkt mit der Bildebene) liegt auf der Projektion der Geraden.

Satz 6. Die Bilder zweier sich schneidenden Geraden schneiden sich, die Bilder paralleler Geraden sind parallel, die Bilder windschiefer Geraden schneiden sich oder sind parallel.

Satz 7. Gleiche parallele Strecken haben auch gleiche Bilder.

Satz 8. Die Bilder paralleler Strecken verhalten sich wie die Strecken selbst.

Satz 9. Die Spuren aller in einer Ebene liegenden Geraden liegen auf der Spur der Ebene (d. h. auf der Schnittgeraden der Ebene mit der Bildebene).

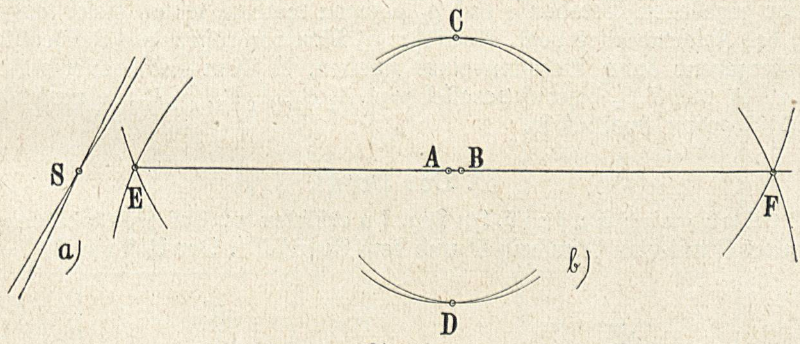
Satz 10. Die Projektionen der Fallinien einer Ebene stehen, ebenso wie die Fallinien selbst, auf der Spur der Ebene senkrecht.

Satz 11. Eine ebene Figur, die der Bildebene parallel ist, bildet sich unverändert ab.

C. Ungünstige Lagen von Punkten und Geraden.

Beim Linearzeichnen entstehen oft Schwierigkeiten dadurch, daß Punkte oder Gerade nicht mit hinreichender Genauigkeit bestimmt sind. Man muß dann versuchen, diese Ungenauigkeit nach Möglichkeit zu beseitigen. Die am häufigsten vorkommenden Fälle sind folgende:

1. Zwei geometrische Örter (Gerade oder Kreise), die zur Bestimmung eines Punktes S dienen sollen, schneiden sich unter einem sehr spitzen Winkel (Fig. 5). Die Lage von S läßt sich dann nicht mit Sicherheit feststellen. Abhilfe: a) Man sucht einen dritten geometrischen Ort für S, der mit den

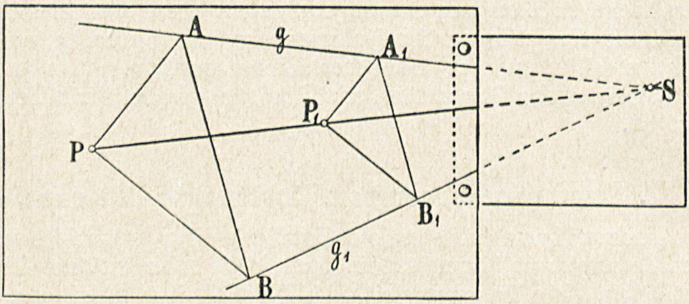


Figur 5.

andern einen besseren Schnitt erzielt. Ist z. B. der Schwerpunkt eines sehr spitzen Dreiecks gesucht, so haben die Seitenhalbierenden einen schlechten Schnitt. Man findet aber auf irgendeiner von ihnen den Schwerpunkt genau mittels des Satzes, daß der Schwerpunkt sie im Verhältnis 2 : 1 teilt. b) Man zieht die beiden geometrischen Örter besonders fein (Fig. 5 a) und bestimmt ihren Schnittpunkt mittels einer Lupe und einer feinen Nadel. Um den kaum sichtbaren Nadelstich zieht man mit Blei einen Ring, um ihn leicht wiederfinden zu können.

2. Zur Bestimmung einer Geraden sind zwei Punkte vorhanden, die aber so nahe beieinander liegen, daß man die Gerade nicht genau ziehen kann.

Abhilfe: Man sucht einen dritten Punkt in hinreichender Entfernung von den beiden anderen zu bestimmen, der auch auf der Geraden liegt. Geben die Aufgabe oder die später an vielen Stellen angegebenen Genauigkeitsproben keine Möglichkeit, einen solchen Punkt zu finden, so kann man im Notfalle folgendes tun: Sollen z. B. in Fig. 5 b die Punkte A und B verbunden werden, so schlage man um A und B mit gleichem Radius Kreise und bestimme



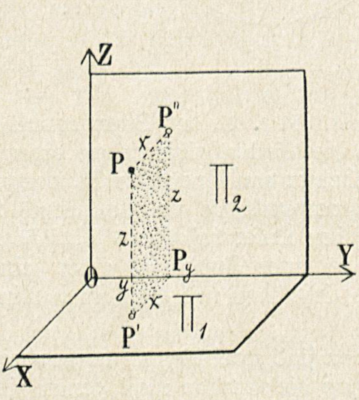
Figur 6.

ihre Schnittpunkte C und D wegen des schlechten Schnittes nach 1 b. Irgend zwei mit demselben Radius um C und D geschlagene Kreise schneiden sich dann in Punkten (z. B. E und F), die auf AB liegen (Beweis!).

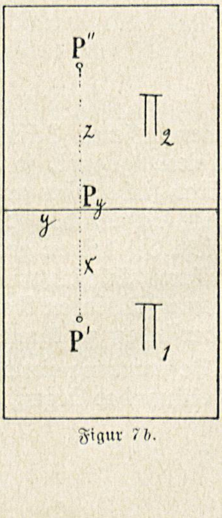
3. Durch einen Punkt P (Fig. 6) soll eine Gerade nach dem Schnittpunkt S zweier gegebenen Geraden g und g_1 gezogen werden, wenn dieser außerhalb des Zeichenblattes liegt. Abhilfe: a) Man vergrößert das Zeichenblatt vorübergehend durch Anheften eines zweiten. b) Man zieht beliebig AB, dann PA und PB, hierauf parallel dazu A_1B_1, A_1P_1, B_1P_1, so muß PP_1 durch S gehen (weshalb?).

D. Der Punkt.

Grund- und Aufriß. In Fig. 7 a erblicken wir das Schrägbild eines Punktes P mit dem Grundriß P' und dem Aufriß P''. Der Abstand $PP' = z$



Figur 7 a.



Figur 7 b.

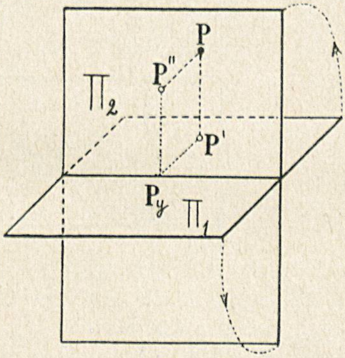
des Punktes P von Π_1 ist seine Höhe, der Abstand $PP'' = x$ von Π_2 seine Tiefe. Die Ebene $PP'P''$ (eine Seitenebene des Projektionsquaders Fig. 4) schneidet die Achse in P_y. Da diese Ebene auf Π_1 und Π_2 senkrecht steht (weshalb?), steht sie auch auf der Achse senkrecht. Demnach sind auch $P''P_y$ und $P'P_y$ senkrecht zur Achse. Während nun Π_1 heruntergeklappt wird, bleibt $P'P_y$ stets senkrecht zur Achse und fällt schließlich (Fig. 7 b) mit $P''P_y$ in eine Gerade. Wir haben also den wichtigen

Satz 12. Grund- und Aufriß eines Punktes liegen in einer Senkrechten zur (y-) Achse.

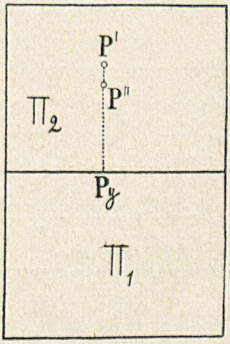
Da aus dem Rechteck $PP'P_yP''$ folgt, daß $P'P_y = PP'' = x$ und $P''P_y = PP' = z$ ist, so ergibt sich als

Zusatz. Der Abstand des Grundrisses eines Punktes von der Achse ist gleich der Tiefe, der Abstand des Aufrisses von der Achse gleich der Höhe des Punktes.

Wie kann man demnach umgekehrt aus dem vorliegenden Grund- und Aufriß eines Punktes seine Lage im Raum bestimmen? (Die Grundebene ist dabei wieder in ihre ursprüngliche Lage zu bringen.) Wenn der Punkt P wie in Fig. 7 vor Π_2 und über Π_1 liegt, so liegt in der Zeichnung stets P'' über und P' unter der Achse. Anders ist es, wenn der Punkt in einem anderen der durch die beiden erweiterten Projektionsebenen entstehenden Raumquadranten liegt. Betrachten wir z. B. (Fig. 8 a) einen Punkt P hinter Π_2



Figur 8 a.



Figur 8 b.

und über Π_1, so geht beim Herunterklappen des vorderen Teiles von Π_1 der hintere Teil in die Höhe und deckt sich schließlich mit der Rückseite von Π_2. Dann liegen P' und P'' beide über der Achse.

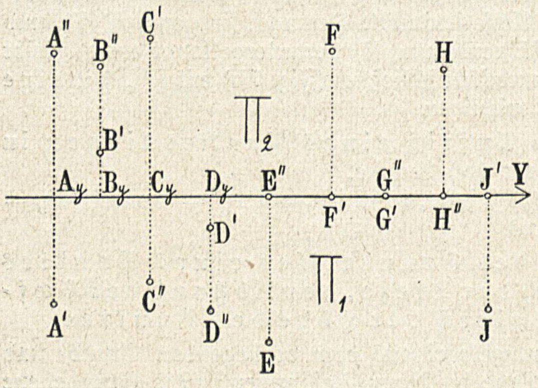
Übungsbeispiele.

1. Untersuche auch die Lage der Projektionen eines Punktes in jedem der unteren Quadranten.

2. Welche Lagen haben die in Fig. 9 abgebildeten Punkte A, B, C, D im Raume?

3. Zeichne Grund- und Aufriß folgender durch Tiefe (x) und Höhe (z) bestimmten Punkte: a) $(+3;\ +4)$; b) $(-2{,}5;\ +3{,}8)$; c) $(-4{,}2;\ +2{,}7)$; d) $(-1{,}8;\ -2{,}4)$; e) $(+5;\ -3)$; f) $(+5;\ -5)$; g) $(0;\ +2)$; h) $(+3;\ 0)$; i) $(0;\ -4)$; k) $(-6;\ 0)$; l) $(0;\ 0)$.

Besondere Fälle. 1. Der Grundriß eines Punktes (E in Fig. 9) der Grundebene ist der Punkt selbst, sein Aufriß liegt auf der Achse (weshalb?).



Figur 9.

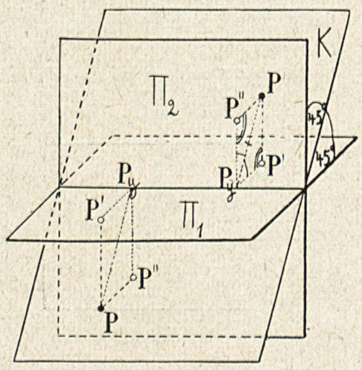
2. Der Aufriß eines Punktes der Aufebene (F in Fig. 9) ist der Punkt selbst. Sein Grundriß liegt in der Achse.

3. Die Risse eines Achsenpunktes (G in Fig. 9) fallen mit ihm selbst zusammen.

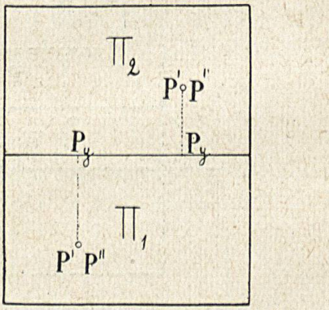
Welche Lagen haben in Fig. 9 die Punkte H und J?

*4. Von besonderer Bedeutung ist eine Ebene (K in Fig. 10 a), welche den hinteren und den unteren Nebenwinkel des von Π_1 und Π_2 gebildeten Winkels halbiert (die sogenannte zweite Halbierungsebene). Ist P ein beliebiger Punkt dieser Ebene, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $P\,P'\,P_y$ und $P\,P''\,P_y$ (Beweis!):

$$P'\,P_y = P''\,P_y.$$



Figur 10 a.



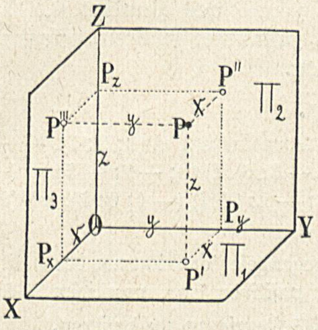
Figur 10 b.

Beim Herunterklappen des vorderen und gleichzeitigen Heraufklappen des hinteren Teiles von Π_1 müssen also Grund- und Aufriß eines jeden Punktes P der Ebene K zusammenfallen (Fig. 10 b). Die Ebene K heißt aus diesem Grunde die Koinzidenzebene (lat. coincidere = zusammenfallen).

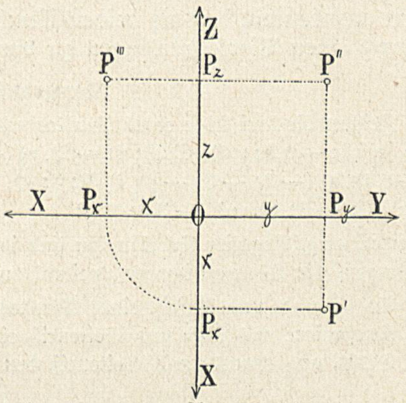
Was ist über Grund- und Aufriß eines Punktes der ersten Halbierungsebene, die den Winkel zwischen Π_1 und Π_2 halbiert, zu sagen?

Seitenriß.

Wir betrachten in Fig. 11 nur den häufigsten Fall, daß der abzubildende Punkt P im ersten Oktanten liegt. Die Koordinatenebenen sind zugleich Projektionsebenen. Fig. 11 a stellt das Schrägbild des geschlossenen Dreikants mit dem Koordinaten- oder Projektionsquader des Punktes P dar, Fig. 11 b das aufgeklappte Dreikant mit den drei Rissen. Man erkennt sofort, daß der Zusammenhang zwischen Seiten- und Aufriß sowie zwischen Seiten- und Grundriß derselbe ist wie zwischen Grund- und Aufriß. Je zwei Risse liegen auf einer Senkrechten zur zugehörigen Achse, wobei zu beachten ist, daß wegen des zweimaligen Auftretens der X-Achse die beiden Punkte P_x als identisch zu betrachten sind und $P_x P'''$ als Fortsetzung (Verlängerung) von $P' P_x$ zu gelten hat. In der Figur kommt auch die Länge y des Punktes P vor, die beim Grund- und Aufriß selten gebraucht wird.



Figur 11a.

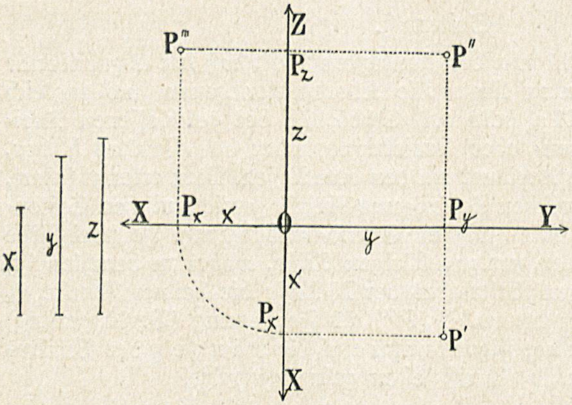


Figur 11b.

Sind die Achsen gegeben, so ist durch zwei Risse eines Punktes der dritte bestimmt. Weise dies für verschiedene Fälle nach.

Der Grundriß eines Raumgebildes zeigt uns dieses von oben gesehen. Ebenso gibt uns der Aufriß die Ansicht von vorn und der Seitenriß von der Seite und zwar bei unserer Wahl der Seitenrißebene von rechts. Aus dem Grundriß allein können wir niemals erkennen, welcher von zwei Punkten der höhere ist. Darüber belehrt uns der Aufriß. In ihm ist der Abstand des Aufrisses eines Punktes von der Achse ohne weiteres die Höhe des abgebildeten Punktes über der Grundrißebene. Je weiter also die Punkte von der Achse entfernt sind, desto höher liegen sie. Ganz entsprechend ersieht man aus dem Grundriß die Tiefe eines Punktes, d. h. seinen Abstand von der Aufebene. Ein Punkt liegt um so weiter nach vorn, je weiter sein Grundriß von der Achse entfernt ist.

Grundaufgabe 1. Ein Punkt P ist durch seine rechtwinkligen Koordinaten x, y, z gegeben. Zeichne seinen Grund-, Auf- und Seitenriß.



Figur 12.

Lösung. (Fig. 12.) Man zeichne die Achse, wie in Fig. 7b, aber ohne die Zeichentafeln zu umrahmen, und trage auf der doppelt vorhandenen X-Achse $OP_x = x$, auf der Y-Achse $OP_y = y$ und auf der Z-Achse $OP_z = z$ ab. Die Schnittpunkte der durch P_x, P_y und P_z gezogenen Parallelen zu den Achsen sind die gesuchten Risse des Punktes P.

Um anzudeuten, daß die beiden Punkte P_x zusammengehören, pflegt man sie durch einen Viertelkreisbogen zu verbinden.

Übungsaufgaben.

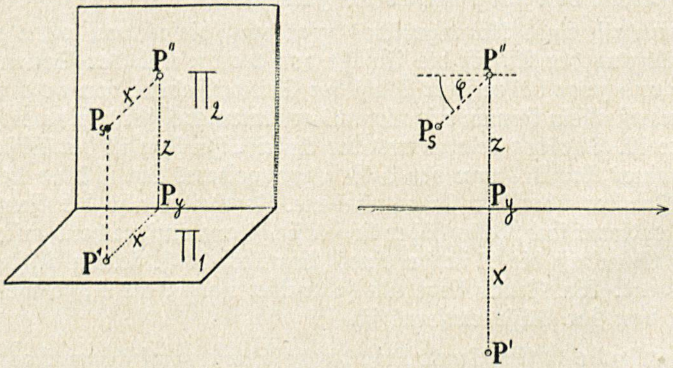
1. Zeichne die drei Risse eines Punktes mit den Koordinaten: a) (1; 2; 3). b) (— 2; 3; 4). c) (3; — 1,5; 2,5). d) (3; 4; — 2). e) (— 3; — 3; 5). f) (3; — 2; — 5). g) (— 4; 3; — 2,5). h) (— 2; — 3; — 4). i) (0; 3; 4). k) (3; — 2; 0). l) (— 4; 0; 5). m) (0; 0; 4); n) (0; — 3; 0). o) (— 3,6; 0; 0).

Anleitung. Negative Koordinaten sind in entgegengesetzter Richtung der positiven anzutragen, die Längen immer zweimal auf der positiven bzw. negativen X-Achse.

2. Aus Grund- und Aufriß eines Punktes den Seitenriß zu konstruieren.
3. Konstruiere aus Auf- und Seitenriß eines Punktes den Grundriß.
4. Desgl. aus Grund- und Seitenriß den Aufriß.

Schrägbild.

Aus Grund- und Aufriß eines Punktes P kann man ohne weiteres für jede beliebige Verzerrung (q und φ) seine schiefe Parallelprojektion auf die Auf-



Figur 13 a. Figur 13 b.

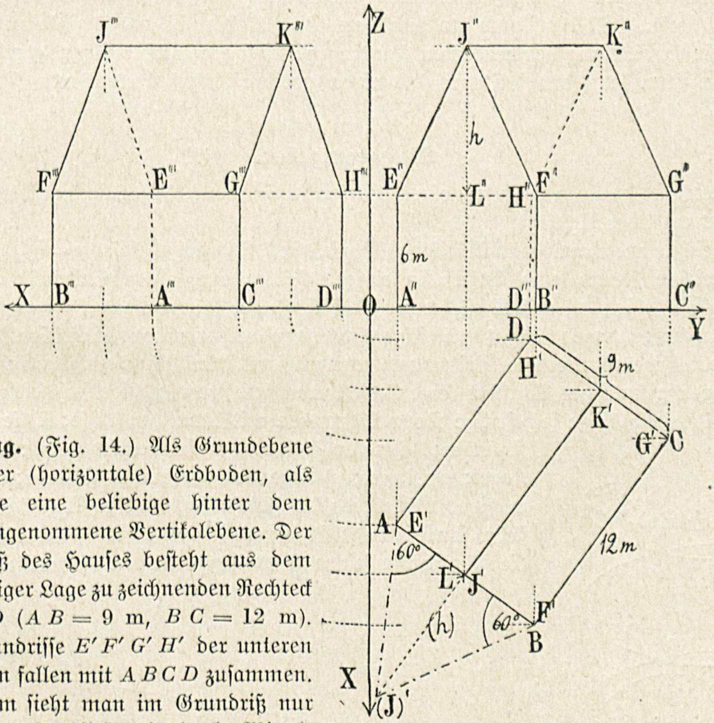
rißebene konstruieren. Man braucht nur (vgl. Heft 1 S. 41) von P'' aus in der durch φ gegebenen Richtung und mit der Verkürzung q (den aus dem Grundriß zu entnehmenden Tiefenabstand x des Punktes P von der Aufriß- (Bild-) Ebene zu ziehen. Der Endpunkt P_s ist das gesuchte Schrägbild (Fig. 13).

Zeige auch, wie man umgekehrt aus dem Schrägbilde P_s eines Punktes P seinen Grund- und Aufriß finden kann. Was muß dazu außer P_s noch gegeben sein?

E. Einfache Körper in einfachen Lagen.

Das bisher Gesagte setzt uns schon jetzt in den Stand, die Risse einfacher Körper in einfacher Lage zu entwerfen.

Beispiel. Die Risse eines einfachen Hauses mit rechteckigem Grundriß, altdeutschem Giebel und einfachem Satteldach zu zeichnen. Länge des Hauses 12 m, Breite 9 m, Höhe bis zum Dach 6 m. Maßstab 1 : 200.



Lösung. (Fig. 14.) Als Grundebene diene der (horizontale) Erdboden, als Aufebene eine beliebige hinter dem Hause angenommene Vertikalebene. Der Grundriß des Hauses besteht aus dem in beliebiger Lage zu zeichnenden Rechteck $ABCD$ ($AB = 9$ m, $BC = 12$ m). Die Grundrisse $E'F'G'H'$ der unteren Dachecken fallen mit $ABCD$ zusammen. Außerdem sieht man im Grundriß nur noch den Dachfirst $J'K'$ als Mittelparallele des Rechtecks.

Figur 14.

Um den Aufriß zu erhalten, haben wir zunächst von den Grundrißpunkten die Senkrechten zur Achse zu fällen, auf denen nach Satz 12. die zugehörigen Aufrißpunkte liegen. $A''B''C''D''$ liegen nach Sonderfall 1 S. 8, auf der Achse, $E''F''G''H''$ 6 m höher, also auf der oberen Parallelen zur Achse im Abstande 6 m. Um J'' zu erhalten, haben wir zunächst die Höhe des Giebeldreiecks $E'J'F'$ zu ermitteln, das bei einem altdeutschen Dach gleichseitig ist, und dessen Gestalt wir am einfachsten durch Umlegen in die Grundebene des Daches ermitteln. In dem Grundriß $E'F'(J)'$ des umgelegten Dreiecks ist $L'(J)'$ die gesuchte Höhe h. Durch deren Abtragen erhält man im Aufriß J'' ($L''J'' = h$). K'' liegt in derselben Höhe wie J''. Da Gerade sich im allgemeinen als Gerade projizieren, hat man nur noch die gefundenen Aufrißpunkte in richtiger Weise zu verbinden. Verdeckte Kanten wie $D''H''$ und $K''H''$ werden entweder gar nicht oder gestrichelt gezeichnet. Welche Kanten im Aufriß verdeckt sind, erkennt man wie folgt: Zunächst ist, wie immer, der gesamte Umriß des Aufrisses sichtbar, also die Figur $A''C''G''K''J''E''$. Innerhalb des Umrisses sind diejenigen Kanten sichtbar, die nach vorn liegen, also aus dem Grundriß leicht zu finden sind. Es sind $B''F''$ und $J''F''$. Dagegen liegen, wie auch aus dem Grundriß ersichtlich ist, $D''H''$ und $K''H''$ nach hinten und sind deswegen verdeckt. Ganz entsprechend findet man im Grundriß die verdeckten Kanten unter Zuhilfenahme des Aufrisses. Sie fallen aber hier mit sichtbaren Kanten zusammen. Um einen Seitenriß zu erhalten, wende man das aus Fig. 11 b ersichtliche Verfahren (Aufg. 2 S. 10) Punkt für Punkt an. Das Weitere ist aus Fig. 14 zu ersehen. Über die Ermittelung der verdeckten Kanten vgl. das soeben über Grund- und Aufriß Gesagte. Man kann den Seitenriß als einen zweiten Aufriß betrachten.

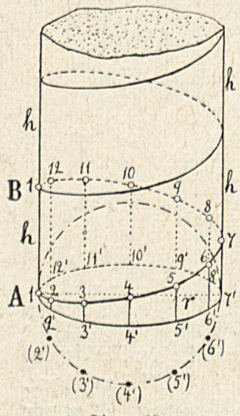
Übungsaufgaben.

1. Zeichne Grund- und Aufriß eines Würfels ($a = 3$ cm), dessen horizontale Grundfläche 2 cm über Π_1 liegt.

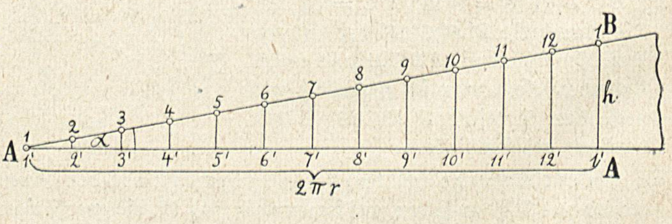
2. Zeichne aus Grund- und Aufriß des Würfels in 1. sein Schrägbild ($q = 1/2, \varphi = 45^0$).

3. Zeichne Grund- und Aufriß, in einigen Fällen auch einen Seitenriß oder ein Schrägbild folgender, auf Π_1 stehender oder liegender Körper:

a) Quader; b) regelmäßiges dreiseitiges Prisma; c) rechtwinkliges dreiseitiges Prisma; d) regelmäßiges fünfseitiges Prisma; e) regelmäßiges Vierflach; f) quadratische Pyramide; g) regelmäßiges Achtflach (eine Achse lotrecht); h) regelmäßige sechsseitige Pyramide; i) regelmäßige sechsseitige Doppelpyramide mit lotrechter Achse; k) senkrechter Zylinder; l) schiefer Zylinder; m) senkrechter Kegel; n) schiefer Kegel; o) Kugel; p) liegendes dreiseitiges Prisma; q) regelmäßiges Achteck, dessen Fläche senkrecht zu Π_1, schief zu Π_2 steht. Anleitung: Lege das Achteck in die Grundebene um; die Grundrisse seiner Ecken liegen auf der Grundspur seiner



Figur 15 a.

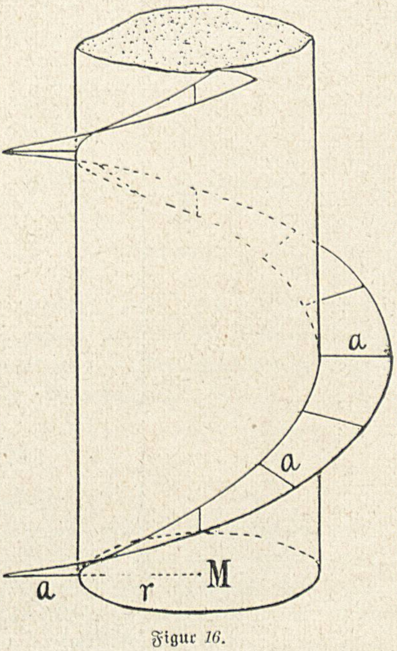


Figur 15 b.

Ebene. Die Höhen der Ecken sind aus der umgelegten Figur unmittelbar zu entnehmen. *r) Kreis, dessen Fläche senkrecht zu Π_1 und schief zu Π_2 steht. Anl.: Der Umfang wird etwa in 12 Teile geteilt (vgl. Heft 1 S. 45). Aus dem umgelegten Kreise ergeben sich wie bei q) die Grundrisse der Teilpunkte sowie ihre für den Aufriß erforderlichen Höhen. Man kann auch wie in Heft 1 S. 32 verfahren. *s) Liegender Zylinder; t) Kugelabschnitt; u) Kugelausschnitt.

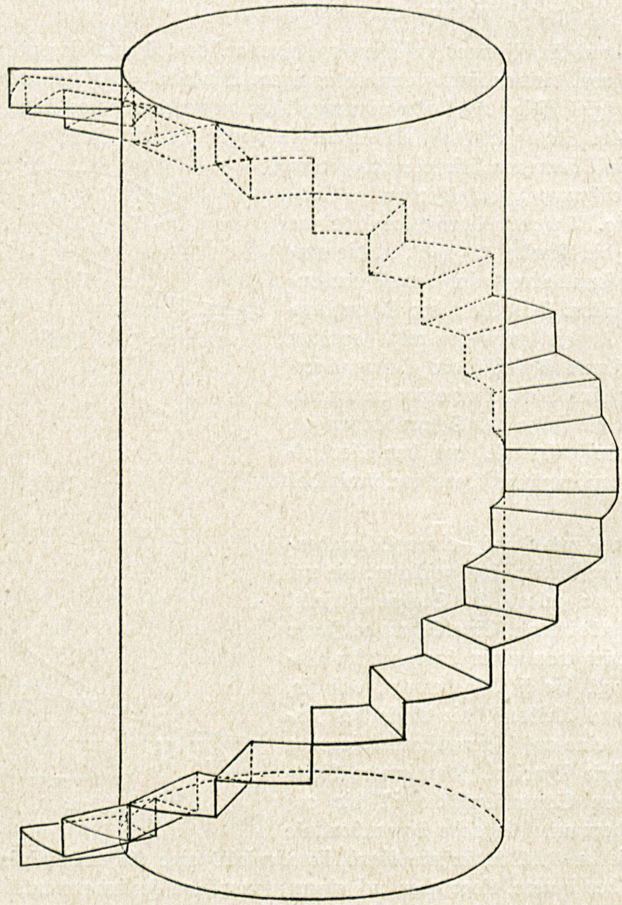
4. Grund- und Aufriß eines Zylinders mit einer auf dem Mantel liegenden Schraubenlinie zu zeichnen, die von links unten unter einem Winkel $\alpha = 20^0$ nach vorn rechts aufsteigt. (Schrägbild Fig. 15 a.) Anleitung. Über die Erklärung der Schraubenlinie vgl. Heft 1 S. 49. Den zur Konstruktion der in Fig. 15 a im Schrägbild dargestellten Schraubenlinie benutzten Winkel α trägt man in der Rißzeichnung zweckmäßig an die Bildachse an (Fig. 15 b), um durch Parallele zur Achse durch die Punkte *1, 2, 3, . . .* die entsprechenden Punkte im Aufriß der Schraubenlinie zu erhalten. Das Stück der Schraubenlinie von *A* bis zum senkrecht darüber liegenden Punkt *B* heißt ein Schraubengang oder eine Schraubenwindung. $AB = h$ ist die Höhe des Schraubenganges. Sein Grundriß ist, wie auch der aller folgenden Schraubengänge, der Grundkreis des Zylinders.

*5. Grund- und Aufriß einer Schraubenfläche von der Breite *a* zu zeichnen, die um einen Zylinder gelegt ist. Steigungswinkel $\alpha = 30^0$. Anleitung. Eine Schraubenfläche (Fig. 16) wird von einer horizontalen Geraden erzeugt, die sich, so bewegt, daß sie, stets horizontal bleibend, die Achse des Zylinders und eine auf seinem Mantel liegende Schraubenlinie schneidet. Der innere Rand der gesuchten Schraubenfläche ist die auf dem Zylindermantel liegende Schraubenlinie (Konstr. wie in 4). Der äußere Rand ist ebenfalls eine Schraubenlinie von gleicher Höhe wie der innere, liegt aber auf einem konaxialen Zylindermantel vom Radius $r + a$. Die erzeugende Gerade ist in jeder Lage eine Höhenlinie der Schraubenfläche, bleibt daher im Aufriß parallel der Bildachse.



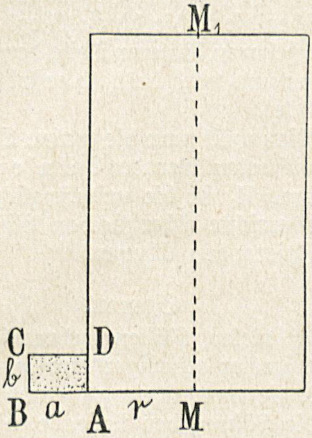
Figur 16.

*6. Grund- und Aufriß einer in einer Windung um einen zylindrischen Turm gelegten Wendeltreppe zu zeichnen. Höhe des Turmes 4 m, Durchmesser 2 m, Höhe der Treppenstufen 20 cm, Breite 60 cm. Maßstab 1:50. Anleitung: Das Bild einer Wendeltreppe entsteht aus einer Schraubenfläche (vgl. Fig. 16), wenn man durch in gleichen Abständen aufeinander folgende Höhenlinien derselben je eine senkrechte und wagerechte Ebene legt und diese bis zu ihrem Schnitt erweitert (Schrägbild Fig. 17). Ermittle zunächst aus Höhe der Treppe und Stufenhöhe die Anzahl der Stufen, welche gleich der Anzahl der zu ziehenden Höhenlinien ist. In ebensoviele Teile teile man zur Konstruktion der Schraubenlinien den Grundkreis. Der Steigungswinkel ist aus Umfang und Höhe des Turmes leicht konstruierbar. Im Aufriß erscheinen die wagrechten, im Grundriß die senkrechten Flächen der Treppe als gerade Linien (weshalb?).

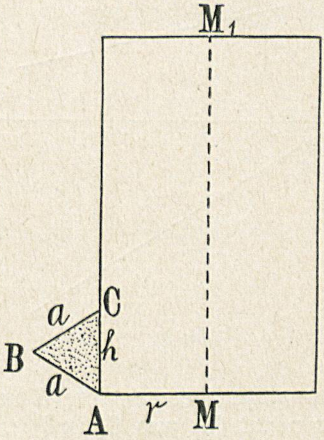


Figur 17.

*7. Eine Schraube mit flachem Gewinde zu zeichnen. Anl.: Fig. 18a zeigt einen Achsenschnitt des Zylinders, auf welchem das Gewinde sitzen soll. Links unten ist an den Mantel das Rechteck $ABCD$ gezeichnet. Dieses bewege sich nun so um den Zylindermantel, daß A eine Schraubenlinie beschreibt und die Fläche des Rechtecks stets in einem Achsenschnitt des Zylinders liegt. Was beschreiben dann die Punkte D, C und B sowie die Seiten AD, DC, CB und BA (vgl. Aufg. 5)? Die Fläche des Rechtecks beschreibt das Schraubengewinde, das in Wirklichkeit mit der Masse des Zylinders aus einem Stück besteht. Als Höhe der Windungen nimm 2 b. Zeichne die vier von den Ecken durchlaufenen Schraubenlinien und laß beim Ausziehen die unsichtbaren Kanten weg.



Figur 18 a.



Figur 18 b.

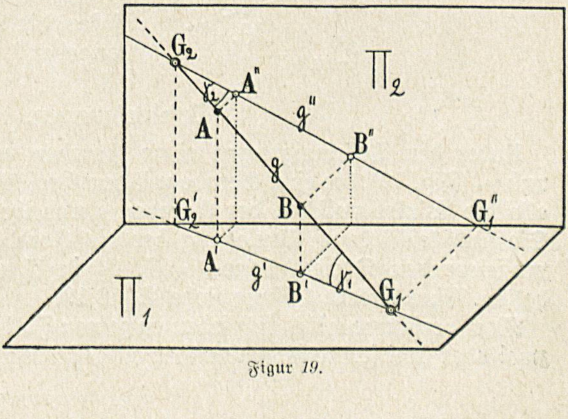
*8. Eine Schraube mit scharfem Gewinde zu zeichnen. Anl.: Die das Gewinde erzeugende Fläche ist hier (Fig. 18 b) das gleichschenklige Dreieck ABC. Nimmt man die Ganghöhe $h = AC$, so wird der Zylindermantel ganz von dem Gewinde verdeckt. Die Seiten AB und BC beschreiben hier schiefe Schraubenflächen.

F. Die Gerade.

Grund- und Aufriß.

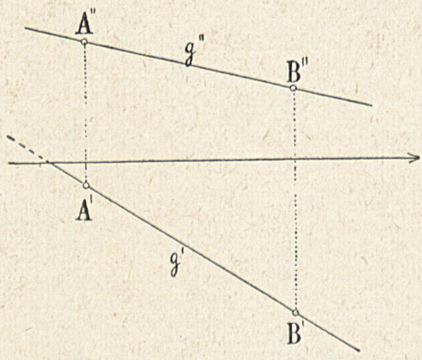
Nach Satz 1. ist die Projektion einer Geraden mit einer Ausnahme (welcher?) wieder eine Gerade. Die Gerade ist durch zwei ihrer Punkte bestimmt. Sind also A und B zwei gegebene Punkte und ist g die durch sie gelegte Gerade (Fig. 19), so müssen A' und B' auf dem Grundriß g', A'' und B'' auf dem Aufriß g'' der Geraden liegen. Entsprechendes gilt für den Seitenriß, der ja nur ein anders gelegener Aufriß ist. Wir haben daher:

Satz 13. Die Risse einer Geraden sind die durch die gleichnamigen Risse zweier ihrer Punkte gezogenen Geraden.



Figur 19.

Grundaufgabe 2. Durch zwei (durch ihre Risse) gegebene Punkte A und B die Gerade zu ziehen.



Figur 20.

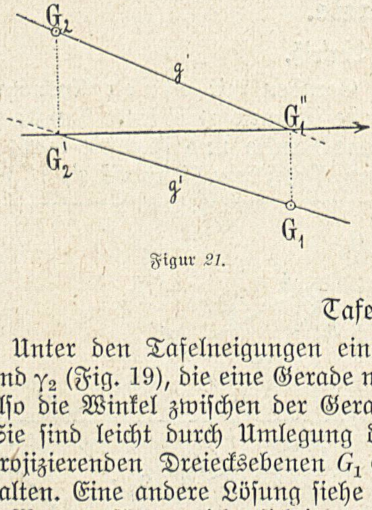
Konstruktion. (Fig. 20.) $A'B'$ ist g', $A''B''$ ist g''. Die Verlängerung von g' über die Achse hinaus liegt in dem unsichtbaren hinteren Teile der Grundebene und wird deshalb gestrichelt gezeichnet.

Wie erhält man die wahre Lage der gezeichneten Geraden? Anleitung: Bringe Π_1 in die ursprüngliche Lage und errichte über beiden Rissen die projizierenden Ebenen.

Spuren.

In vielen Fällen gebraucht man statt zweier beliebiger Punkte zur Bestimmung der Geraden ihre Spurpunkte, die man Grund- und Aufspur nennt (G_1 und G_2 in Fig. 19). Die Lösung der Aufgabe, die Projektionen einer Geraden aus ihren Spuren zu finden, ist nur ein Sonderfall der Grundaufgabe 2. Da Punkt G_1 sein eigener Grundriß G_1' ist und sein Aufriß G_1'' auf der Achse liegt, ebenso G_2 sein eigener Aufriß ist und der Grundriß G_2' in die Achse fällt, so sind $G_1 G_2'$ und $G_2 G_1'$ die Risse der Geraden (Fig. 21). Die umgekehrte Aufgabe ist:

Grundaufgabe 3. Aus den Projektionen g' und g'' einer Geraden g die Spuren der Geraden zu finden.



Figur 21.

Konstruktion. Fig. 21 (vgl. Fig. 19). Errichte in den Achsenschnittpunkten G_1'' und G_2' der Projektionen g'' und g' die Senkrechten auf der Achse; sie schneiden g' und g'' in den gesuchten Spuren G_1 und G_2.

Wie kann man mittels der Spuren sofort die Lage der Geraden im Raum angeben?

Tafelneigungen.

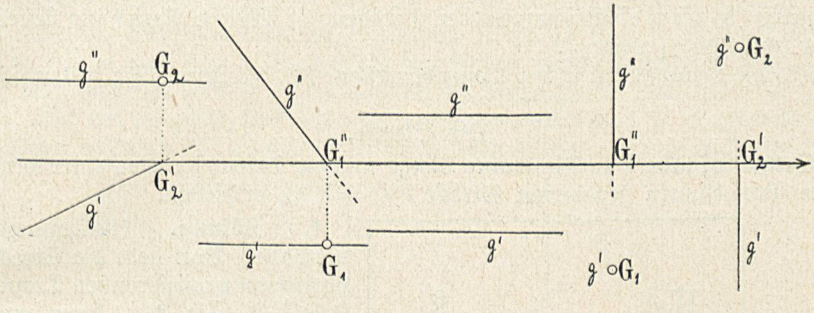
Unter den Tafelneigungen einer Geraden versteht man die Winkel γ_1 und γ_2 (Fig. 19), die eine Gerade mit den Projektionstafeln Π_1 und Π_2 bildet, also die Winkel zwischen der Geraden g und ihren Projektionen g' und g''. Sie sind leicht durch Umlegung der die Gerade g horizontal und vertikal projizierenden Dreiecksebenen $G_1 G_2' G_2$ in Π_1 und $G_1 G_1'' G_2$ in Π_2 zu erhalten. Eine andere Lösung siehe S. 18/19.

Man versäume nicht, sich jeden einzelnen Fall mittels eines Bleistiftes und zwei oder drei senkrecht zueinander aufgestellten Tafeln zu veranschaulichen!

Sonderfälle.

1. Die Gerade g ist $\parallel \Pi_1$. Dann haben alle ihre Punkte gleiche Höhe, also ist g'' parallel der Achse (Fig. 22 a).

2. Die Gerade g ist $\parallel \Pi_2$. Da alle ihre Punkte dieselbe Tiefe haben, ist g' parallel der Achse (Fig. 22 b).

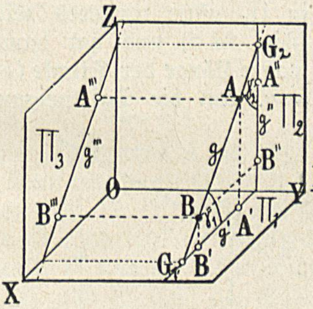


a) b) c) d) e)

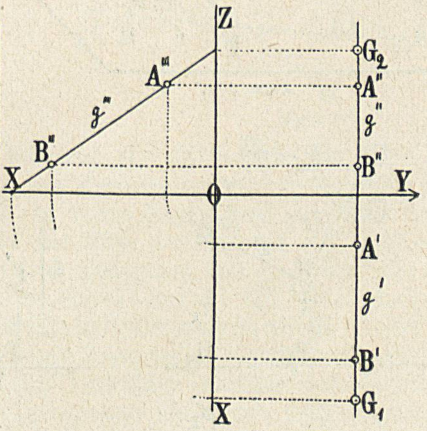
Figur 22.

3. $g \parallel \Pi_1$ und Π_2. Beide Risse sind der Achse parallel. (Fig. 22 c.)

4. $g \perp \Pi_1$. Der Grundriß g' ist ein Punkt, g'' eine Senkrechte zur Achse (weshalb?). (Fig. 22 d.)



Figur 23 a.



Figur 23 b.

5. $g \perp \Pi_1$. $g' \perp$ Achse, g'' ein Punkt. (Fig. 22 e.)

a) Wo liegen in jedem Fall die Spuren, und wie findet man die Tafelneigungen? b) Wie bestimmt man umgekehrt aus der Zeichnung die Lage der Geraden? c) Untersuche den Fall, daß die Gerade in Π_1 oder Π_2 liegt.

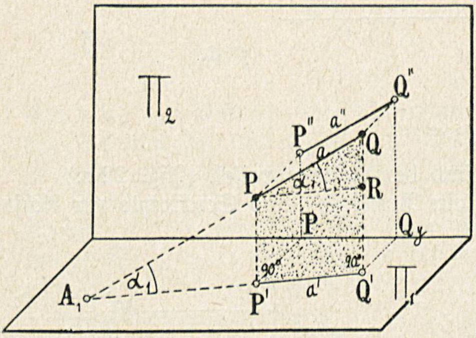
6. Die Gerade g liegt in einer zur Achse senkrechten Ebene. g' und g'' fallen in der Zeichnung in eine zur Achse senkrechte Gerade. (Fig. 23 a und b.) Aus Grund- und Aufriß von Zeichnung 23 b läßt sich die Lage der Geraden

im Raum nicht erkennen (weshalb nicht?). Eine genaue Bestimmung ist nur möglich, wenn die Risse zweier Punkte (A und B) der Geraden gegeben sind. Man nimmt dann eine beliebige Seitenebene an und bestimmt wie in Aufg. 2 S. 10 die Seitenrisse A''' und B''' der beiden Punkte, so ist $A'''\ B'''$ der Seitenriß g''' der Geraden, und nun ist nach Schließung des Dreikantes die Lage der Geraden im Raum leicht zu bestimmen. Bestimme auch a) die Spuren, b) die Tafelneigungen der Geraden, c) Welche Beziehung besteht hier zwischen γ_1 und γ_2?

*7. Die Gerade liegt in der Koinzidenzebene (S. 8). Ihre Risse decken sich.

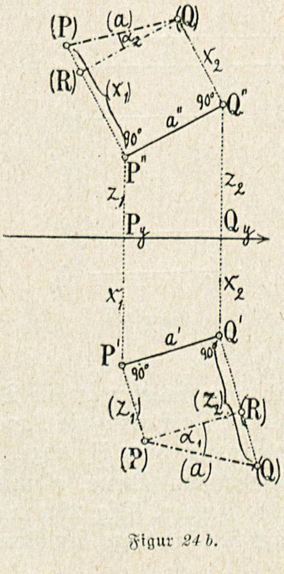
Die Strecke.

Grundaufgabe 4 a. Die wahre Länge und die Tafelneigungen einer durch ihre Projektionen gegebenen Strecke $P\,Q = a$ zu ermitteln.

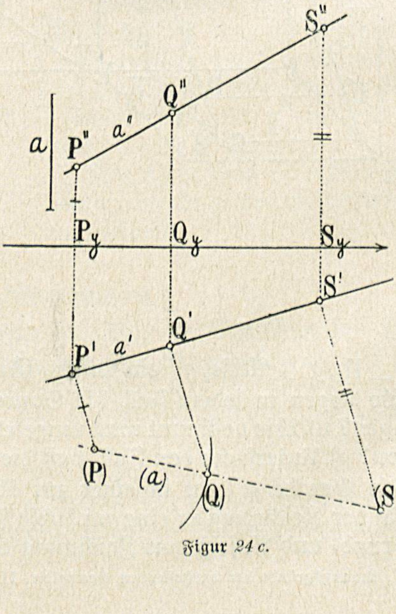


Figur 24 a.

1. Lösung. (Umlegungsmethode.) Von dem die Strecke horizontal projizierenden Trapez $P\,Q\,P'\,Q'$ (Fig. 24 a) kennt man $P'\,Q'$, $\sphericalangle\ P\,P'\,Q' = \sphericalangle\ Q\,Q'\,P' = 90^0$ und die Seiten $P\,P'$ $(= P''\,P_y)$ und $Q\,Q'$ $(= Q''\,Q_y)$ als Höhen der Punkte P und Q. Man kann daher seine Umlegung in Π_1 ohne weiteres zeichnen (Fig. 24 b) und hat dann die wahre Länge der Strecke $(P)\,(Q) = a$. Um die Tafelneigung α_1



Figur 24 b.

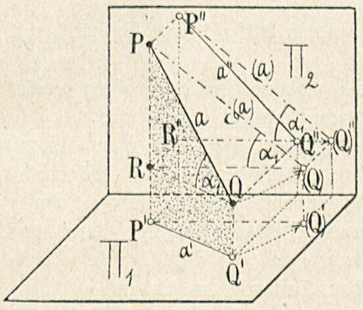


Figur 24 c.

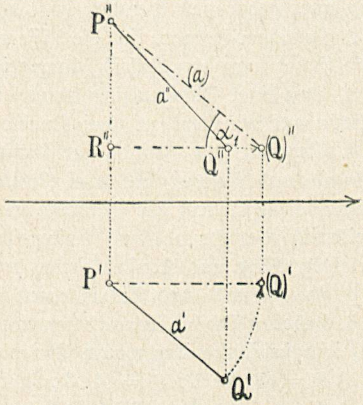
zu erhalten, ist es nicht nötig, die Strecke bis zu ihrer Grundspur A_1 zu verlängern. Zieht man PR [in der Umlegung $(P)(R)$] $\parallel P'Q'$, so ist auch $\sphericalangle (R)(P)(Q) = \alpha_1$. Vgl. Heft 1 S. 8.

Ganz in derselben Weise kann man zur Probe auch das die Strecke PQ vertikal projizierende Trapez $PQP''Q''$ in die Aufebene umlegen (s. Fig. 24 b), wobei man dieselbe Strecke a, aber die zweite Tafelneigung α_2 erhält.

2. Lösung. (Drehungsmethode.) Wenn die Strecke $PQ \parallel \Pi_2$ ist, so ist ihre wahre Länge nach Satz 3. schon durch den Aufriß gegeben. Ist dies, wie gewöhnlich, nicht der Fall, so denke man sich das projizierende Trapez $PP'QQ'$ (Fig. 25 a) um die zu Π_1 senkrechte Achse PP' gedreht, bis es $\parallel \Pi_2$ geworden ist. Dabei beschreibt Q' offenbar den Kreisbogen $Q'(Q)'$, und es ist $P'(Q)' \parallel$



Figur 25 a.



Figur 25 b.

der Achse (Sonderfall 2. S. 17), während Q'' sich parallel der Achse verschiebt, denn der Punkt Q behält bei der Drehung immer dieselbe Höhe QQ'. Da nach Satz 12. Q'' stets mit Q' in einer Senkrechten zur Achse liegen muß, so ist auch $(Q)''(Q)'$ senkrecht zur Achse und dadurch $(Q)''$ bestimmt. Die Punkte P' und P'' behalten bei der Bewegung ihre Lage bei, also sind jetzt $P'(Q)'$ und $P''(Q)''$ die Risse der Strecke und $P''(Q)'' = a$. Auch der Neigungswinkel $PQR = \alpha_1$ erscheint jetzt in seiner wahren Größe $P''(Q)''R$.

In entsprechender Weise kann man durch Drehung des vertikal projizierenden Trapezes $PP''QQ''$ um PP'' (oder QQ'') als Achse erreichen, daß die Strecke $PQ \parallel \Pi_1$ wird, worauf ihre wahre Länge und die zweite Tafelneigung α_2 ohne weiteres dem Grundriß entnommen werden können. Die Ausführung sei dem Schüler überlassen.

Die Drehungsmethode ist der Umlegungsmethode wegen der größeren Einfachheit der Ausführung vorzuziehen.

Grundaufgabe 4 b. (Umkehrung von 4 a.) Auf einer durch ihre Risse gegebenen Geraden g soll von einem gegebenen Punkte P aus die gegebene Strecke a abgetragen werden.

Lösung. (Fig. 24 c.) Nimm auf der Geraden einen beliebigen Punkt S an, lege nach Grundaufgabe 4 a) PS in Π_1 um, trage auf $(P)(S)$ die gegebene

Strecke $a = (P)(Q)$ ab und fälle $(Q)\,Q' \perp g'$, so ist Q' der Grundriß von Q. Der Aufriß Q'' liegt senkrecht über Q' auf g''.

*Berechnung der Projektion einer Strecke.

Satz 14. Die Länge der Projektion einer Strecke a ist gleich der Länge der Strecke multipliziert mit dem Kosinus ihrer Tafelneigung.

Beh.: $a' = a \cdot \cos \alpha_1$; $a'' = a \cdot \cos \alpha_2$.

Bew. folgt unmittelbar aus Fig. 24 a. Grenzfälle?

Übungsaufgaben.

1. Wie erkennt man aus der Grund- und Aufrißzeichnung, ob ein gegebener Punkt auf einer gegebenen Geraden liegt oder nicht?

2. Von einer Geraden sind die Risse und der Grundriß (Aufriß) eines Punktes gegeben. Wie findet man den Aufriß (Grundriß)?

3. Von einer Geraden sind Grund- und Aufriß gegeben. Bestimme ihren Seitenriß. (Nimm auf der Geraden zwei Punkte an und bestimme ihre Seitenrisse.)

4. Gegeben sind Grund- und Aufspur einer Geraden. Bestimme ihre Seitenspur. (Grund- und Aufspur sind zwei Punkte der Geraden. Bestimme ihre Seitenrisse und damit den Seitenriß der Geraden. Wende dann Grundaufgabe 3. an. Für Auf- und Seitenriß oder Grund- und Seitenriß gelten unter Vertauschung der Bezeichnungen dieselben Sätze und Konstruktionen wie für Grund- und Aufriß.)

5. Aus Grund- und Aufriß eines Dreiecks den Seitenriß zu finden.

6. Gegeben sind die Koordinaten zweier Punkte P und Q. Zeichne die Risse der Strecke PQ und bestimme ihre wahre Länge und ihre Tafelneigungen.
a) $P = (3;\, 4;\, 5)$; $Q = (1;\, 2;\, 3)$. b) $P = (-2;\, 1;\, 4)$; $Q = (3;\, 2;\, 3)$. c) $P = (3;\, -2;\, 5)$; $Q = (2;\, 4;\, -3{,}5)$. d) $P = (4;\, 0;\, 3)$; $Q = (5;\, 6;\, 3)$. e) $P = (3;\, 0;\, 0)$; $Q = (3;\, 4;\, 6)$. f) $P = (4;\, 2;\, 3)$; $Q = (4;\, 3;\, 1)$.

7. Zeichne durch $P = (3;\, 4;\, 4{,}5)$ eine Gerade a) $\perp \Pi_1$; b) $\perp \Pi_2$; c) $\perp \Pi_3$.

8. Gegeben sind Grund- und Aufspur einer Geraden g. Zeichne ihre Risse. a) $G_1 = (3;\, 4;\, 0)$; $G_2\ (4;\, 0;\, 5)$. b) $G_1 = (2;\, -3;\, 0;)$ $G_2 = (3;\, 0;\, -4)$. c) $G_1 = (5;\, 0;\, 0)$; $G_2 = (4;\, 0;\, 6)$.

9. Durch $P = (5;\, 4;\, 3)$ soll eine Strecke von 3 cm Länge gezogen werden, a) deren Grundriß gegeben ist; b) deren Grundriß der Richtung nach gegeben ist, und welche die Tafelneigung $\gamma_1 = 30^0$ hat.

10. Eine gegebene[1]) Strecke PQ soll a) halbiert, b) in 3 gleiche Teile geteilt, c) im Verhältnis 2 : 3 geteilt, d) um sich selbst verlängert werden. (Satz 4.)

11. Von einem Dreieck ABC sind Grund- und Aufriß gegeben. Ermittle die wahre Gestalt des Dreiecks. (Bestimme nach Grundaufgabe 4. die wahren Seitenlängen und konstruiere daraus das Dreieck.)

12. Bestimme den Schwerpunkt eines gegebenen Dreiecks.

13. Ergänze ein gegebenes Dreieck ABC durch Verlängerung der Seitenhalbierenden s_c zu einem Parallelogramm. Welche Gestalt haben die Risse des Parallelogramms?

14. Ermittle die wahre Gestalt eines gegebenen Parallelogramms (beachte Satz 6).

---

[1]) Bei dem Worte „gegeben" ohne nähere Bestimmung ist stets gemeint: „durch Grund- und Aufriß".

15. Die wahre Größe eines durch seine Risse gegebenen Winkels zu finden. (Lösung nach 11.)

*16. Die Längen der drei Höhen eines gegebenen Dreiecks zu ermitteln (nach 11).

*17. Von einem gegebenen Punkte P auf eine gegebene Gerade g die Senkrechte zu fällen (nach 11).

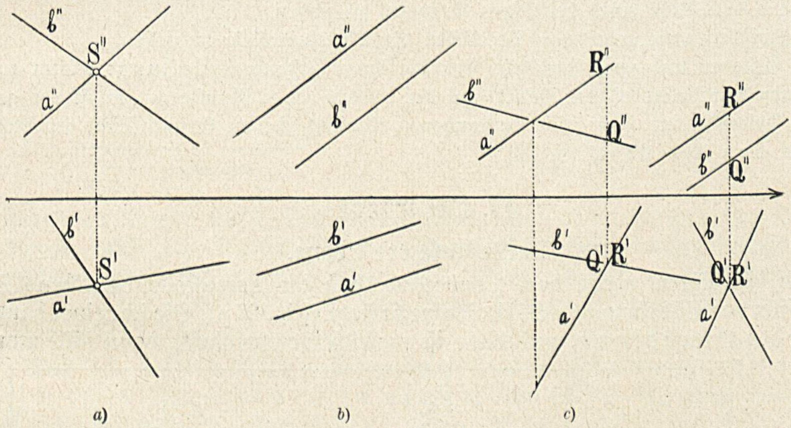
18. In einem gegebenen Würfel die Länge der Raumdiagonale zu bestimmen, sowie die Winkel, die sie mit den Kanten bildet.

19. Löse dieselbe Aufgabe wie 18. für einen Quader.

20. Bestimme die Längen der Seitenkanten einer gegebenen Pyramide und ihre Neigungswinkel gegen die Grundfläche.

G. Zwei Gerade.

Welche Lagen können zwei Gerade a und b im Raum zueinander haben? Wir haben zu untersuchen, wie die vier aus Heft 1. und aus der Stereometrie bekannten Fälle in der Projektionszeichnung aussehen.



Figur 26.

1. Die Geraden fallen zusammen. Dann haben sie natürlich auch dieselben Risse.

2. Die Geraden haben einen im Endlichen liegenden Punkt S gemeinsam. Dann muß S' sowohl auf a' als auf b' liegen, also ihr Schnittpunkt sein. Ebenso muß S'' der Schnittpunkt von a'' und b'' sein. Nach Satz 12. muß schließlich S'' senkrecht über S' liegen. (Fig. 26 a.)

3. Die Geraden sind parallel (sie schneiden sich in einem „uneigentlichen" Punkte im Unendlichen). Nach Satz 6. muß dann sowohl $a' \parallel b'$, als auch $a'' \parallel b''$ sein. (Fig. 26 b.)

4. Die Geraden sind „windschief" oder „kreuzen sich". (Fig. 26 c.) Auch dann werden nach Satz 6. ihre gleichnamigen Risse als Geraden in einer Ebene sich schneiden (eines von den beiden Rissepaaren kann auch parallel sein, siehe Fig. 26 d), aber die Schnittpunkte der Risse liegen nicht senkrecht übereinander, können also nach Satz 12. nicht Projektionen eines Punktes sein.

Zum Beispiel ist der Schnittpunkt von a' und b' der Grundriß eines Punktes R auf a und eines Punktes Q auf b, wobei R höher liegt als Q, wie man aus dem Aufriß ersieht. Entsprechend erkennt man aus dem Grundriß, daß im Aufriß an der Kreuzungsstelle a'' vor b'' liegt. Man deutet dies in der Zeichnung dadurch an, daß man die vom Beschauer der Kreuzungsstelle weiter entfernte Gerade dort ein kleines Stück unterbricht.

Alle vier Ergebnisse gelten auch umgekehrt. Sind z. B. die gleichnamigen Risse zweier Geraden parallel, so müssen die Geraden selbst parallel sein. Wären sie es nämlich nicht, so müßte einer von den drei anderen Fällen vorliegen, die gleichnamigen Risse müßten also entweder sich decken oder sich schneiden, was der Voraussetzung widerspricht.

Übungsaufgaben.

1. Durch einen gegebenen Punkt P zu einer gegebenen Geraden g die Parallele zu ziehen.

2. Ein gegebenes Dreieck ABC soll zu einem Parallelogramm ergänzt werden.

3. Die drei Risse eines beliebigen Trapezes zu ziehen.

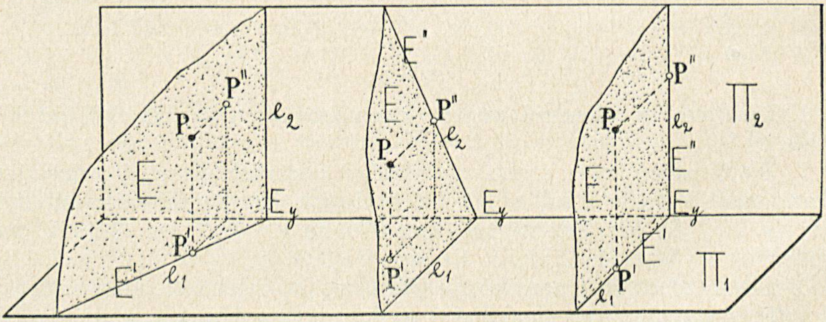
4. Zwischen zwei gegebenen Parallelen die Mittelparallele zu ziehen.

*5. Gegeben sind zwei Parallele. Ermittle ihren Abstand. Anleitung: Nimm auf der einen Parallelen einen Punkt, auf der andern zwei Punkte an, so ist der gesuchte Abstand eine Höhe des entstandenen Dreiecks, dessen Gestalt leicht ermittelt werden kann (vgl. Üb. 11 S. 20).

H. Die Ebene.

Darstellung der Ebene.

Wir betrachten zuerst den Sonderfall, daß die darzustellende Ebene E auf einer der Bildebenen, z. B. Π_1, senkrecht steht (Fig. 27 a). Sie schneidet dann Π_1 in der Grundspur, und diese ist zugleich ihr Grundriß, denn fällt man

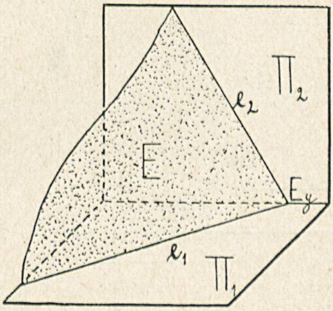


a) b) c)

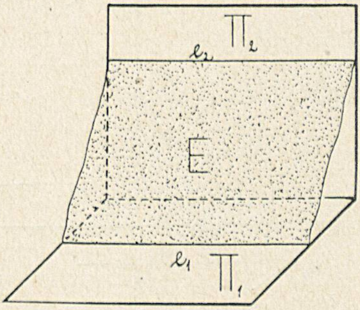
Figur 27.

von einem Punkte einer Ebene, die auf einer andern senkrecht steht, die Senkrechte auf diese, so liegt die Senkrechte in der ersten Ebene (Beweis!). Die Grundrisse sämtlicher Punkte von E liegen also in der Grundspur e_1. Die Aufspur e_2, d. i. die Schnittgerade der Ebene E mit Π_2, ist senkrecht zur Achse (weshalb?). Ebenso ist die Schnittgerade einer zu Π_2 senkrechten Ebene mit Π_2, also ihre **Aufspur**, zugleich ihr Aufriß (Fig. 27 b). Die Grundspur e_1 ist senkrecht zur Achse. Steht die Ebene E auf beiden Bildebenen, also auch auf der Achse (weshalb?) senkrecht, so sind beide Spuren zugleich die gleichnamigen Risse der Ebene (Fig. 27 c).

In jedem anderen Falle bedecken die Projektionen aller Punkte einer unbegrenzten Ebene die ganzen Bildebenen und sind deshalb zur Darstellung der Ebene ungeeignet. Wir wissen nun aus der Stereometrie, daß eine Ebene bestimmt ist durch drei Punkte (Ausnahme?) oder durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade oder durch eine Gerade und einen außerhalb dieser



Figur 28 a.



Figur 28 b.

liegenden Punkt. Diese Bestimmungsstücke oder vielmehr ihre Projektionen dienen auch zur Darstellung der Ebene. Als Bestimmungsgerade einer solchen eignen sich am einfachsten ihre beiden Spuren e_1 (die Grundspur) und e_2 (die Aufspur) (Fig. 28). Aus einem stereometrischen Satz (welchem?) folgt sofort:

Satz 15. **Die beiden Spuren einer Ebene E schneiden sich im allgemeinen in einem Punkte** (E_y, Fig. 28 a) **der Achse oder sind parallel** (Fig. 28 b).

Wie läßt sich die Lage einer Ebene im Raum mittels ihrer Spuren sofort angeben?

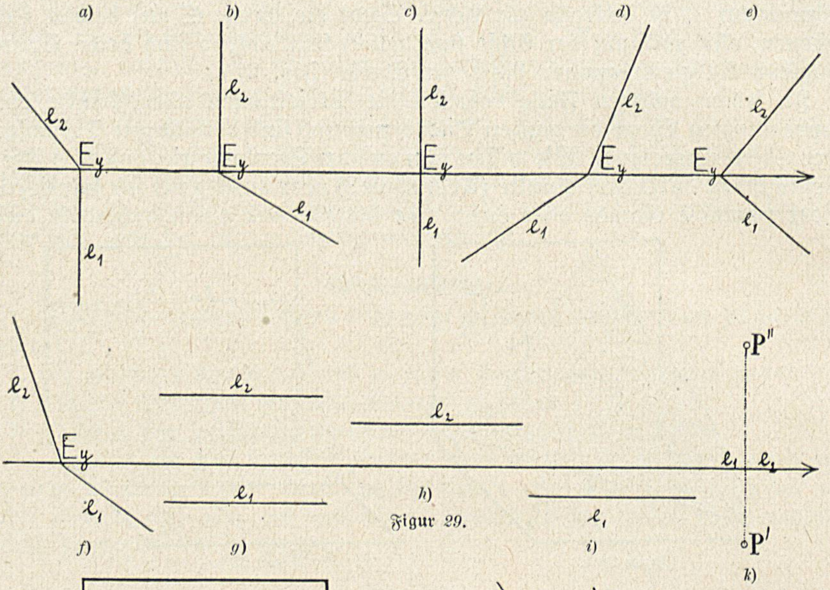
Übungsaufgaben.

1. Betrachte folgende Sonderfälle: a) E $\parallel \Pi_1$; b) E $\parallel \Pi_2$; c) E enthält die Achse. Ist in diesem Falle die Ebene durch ihre Spuren bestimmt? Was muß noch gegeben sein?
2. Stelle in allen Fällen die Ebene auch bei heruntergeklappter Grundebene dar.
3. Gib die Lagen der in Fig. 29 a—k dargestellten Ebenen an.

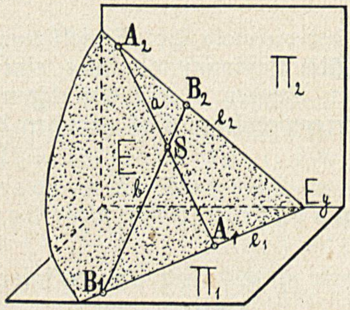
Grundaufgabe 5. **Die Spuren einer durch zwei sich schneidende Gerade** a **und** b **bestimmten Ebene E zu bestimmen.**

Analysis. (Fig. 30 a.) Nach Satz 9. müssen die Spuren jeder in der Ebene liegenden Geraden auf den Spuren der Ebene liegen. Wenn man also nach Grundaufgabe 3 die Grundspuren A_1 und B_1 der gegebenen Geraden sowie ihre Aufspuren A_2 und B_2 bestimmt, so muß A_1B_1 die Grundspur e_1 und A_2B_2

die Aufspur e_2 der Ebene sein, denn eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte bestimmt.



Figur 29.

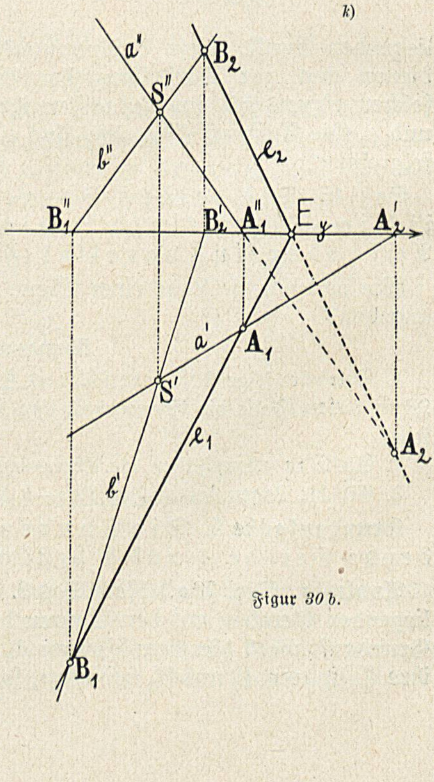


Figur 30 a.

Konstruktion. (Fig. 30 b.) Bestimme die Spurpunkte A_1, A_2, B_1, B_2 der gegebenen Geraden wie in Fig. 21 und ziehe $A_1\,B_1$ und A_2B_2; diese Geraden sind die gesuchten Spuren.

Probe: e_1 und e_2 müssen sich nach Satz 15. auf der Achse schneiden.

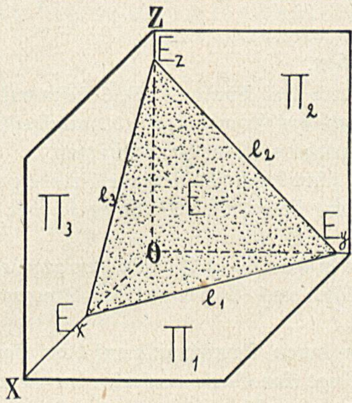
Bemerkung. Sollten nicht alle vier Spurpunkte der gegebenen Geraden auf dem Papier erreichbar



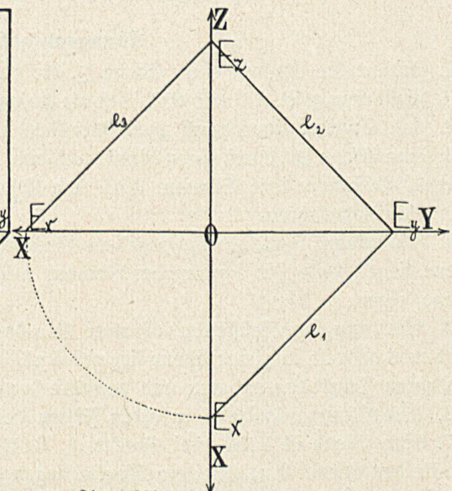
Figur 30 b.

sein, so ersetze man die Geraden durch andere in derselben Ebene liegende, die man erhält, indem man zwei geeignete Punkte der gegebenen Geraden verbindet.

Jede Ebene hat im allgemeinen auch in der Seitenebene eine Spur, die man die dritte Spur (e_3) oder die Seitenspur nennt.



Figur 31 a.



Figur 31 b.

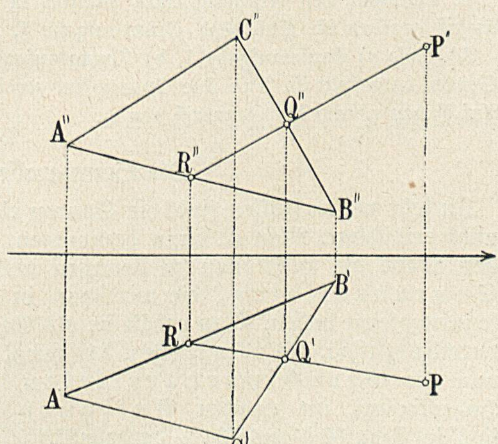
Grundaufgabe 6. Aus Grund- und Aufspur einer Ebene E die Seitenspur zu ermitteln.

Analysis. Nach Satz 15. müssen sich je zwei benachbarte Spuren einer Ebene in der Achse ihrer Bildebenen treffen (Fig. 31 a). Sie bilden im geschlossenen Dreikant im allgemeinen ein Dreieck E_x E_y E_z, das Spurendreieck.

Konstruktion aus Fig. 31 b ohne weiteres ersichtlich.

Grundaufgabe 7. In einer gegebenen Ebene E liegt ein Punkt P, dessen Grundriß P' gegeben ist. Bestimme seinen Aufriß.

Analysis. Die Ebene sei etwa durch ein Dreieck ABC dargestellt. Zieht man durch P eine Hilfsgerade g durch das Dreieck, so hat man auf g' un-



Figur 32[1]).

[1]) Bei A und P im Grundriß fehlt der Strich!

mittelbar die Grundrisse ihrer Schnittpunkte mit zwei Dreiecksseiten, während die Aufrisse nach Satz 12. durch Hinaufloten ermittelt werden können. Auf der durch die Aufrißpunkte gezogenen Geraden g'' muß dann auch P'' liegen.

Konstruktion. (Fig. 32.) Ziehe $P'Q'R'$, bestimme durch die Senkrechten zur Achse Q'' auf $B''C''$ und R'' auf $A''B''$ und ziehe $R''Q''$. Die Senkrechte von P' zur Achse schneidet $R''Q''$ in P''.

Übungsaufgaben.

1. Zeichne die Spuren einer Ebene E, die durch drei Punkte A, B, C bestimmt ist. Anl. Zieht man z. B. AC und BC, so ist die Aufgabe auf Grundaufgabe 5. zurückgeführt.

2. Die Spuren einer durch zwei Parallele gelegten Ebene zu bestimmen.

3. Eine Ebene soll durch einen Punkt und eine nicht durch ihn gehende Gerade gelegt werden. Bestimme ihre Spuren. Anl. Die Lösung ist auf Grundaufgabe 5. oder auf Üb. 2. zurückzuführen.

4. Wie erkennt man, ob eine gegebene Gerade in einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene liegt? Anl. Die Spuren der Geraden müssen nach Satz 9. auf den Spuren der Ebene liegen.

5. Wie kann man feststellen, ob zwei Gerade, deren Schnittpunkt auf dem Papier nicht erreichbar ist, in einer Ebene liegen? Anl. Lege eine Ebene durch eine der Geraden und einen Punkt der anderen und verfahre dann nach Üb. 4.

6. Löse Grundaufgabe 6. in allen Fällen der Fig. 29.

7. Eine Ebene ist durch drei Punkte A, B, C gegeben. Bestimme beliebige weitere Punkte der Ebene. Anl. Weitere Punkte liegen außer auf AB, AC und BC auf allen Verbindungslinien irgend zweier Punkte dieser Geraden.

8. Gegeben sind vier Punkte A, B, C, D. Wie kann man feststellen, ob sie in einer Ebene liegen? Anl. Eine Verbindungslinie, z. B. DA, muß BC schneiden (oder $\parallel BC$ sein).

9. Bestimme den Grundriß eines Punktes in einer gegebenen Ebene, wenn sein Aufriß gegeben ist. Anl. Vgl. Grundaufgabe 7.

10. Löse a) Grundaufgabe 7, b) Übungsaufgabe 9, wenn die Ebene E durch ihre Spuren dargestellt ist. Anl. Die Spuren sind zwei Gerade der Ebene, die Achse ist der Aufriß von e_1 und der Grundriß von e_2.

Die Spurparallelen.

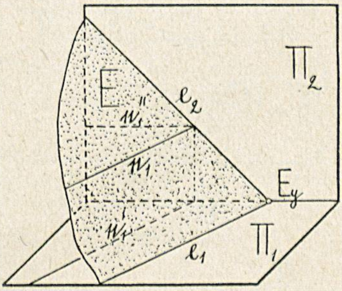
In sehr vielen Fällen sind die Spuren einer Ebene auf der Zeichenfläche nicht erreichbar. Man ist dann gezwungen, an ihrer Stelle andere Gerade der Ebene als Hilfslinien zu benutzen und bedient sich vorzugsweise der **Spurparallelen**, die wir schon in Heft I (S. 15) als Höhenlinien kennengelernt haben. Man erhält sie als Gerade der Ebene E, die entweder parallel e_1 (Fig. 33) oder e_2 (Fig. 34) gelegt werden. Im ersten Falle nennt man sie **Grundspurparallelen** (z. B. e_1) (es sind die früheren Höhenlinien), im zweiten **Aufspurparallelen** (e_2). Ihre Risse sind in Fig. 33 b und 34 b dargestellt.

Man erhält die Spurparallelen auch als Schnittlinien der Ebene E mit Ebenen parallel Π_1 oder Π_2. Zu den Spurparallelen rechnet man auch die Spuren selbst.

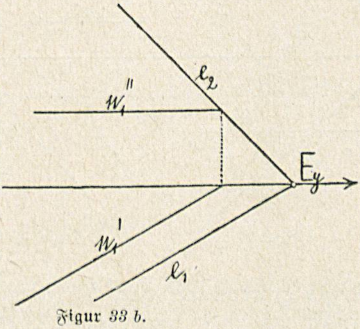
Aus den Figuren erkennt man:

Satz 16a. Der Grundriß (Aufriß) einer Grundspurparallelen (Aufspurparallelen) ist parallel der Grundspur (Aufspur) der Ebene.

b) Der Aufriß (Grundriß) einer Grundspurparallelen (Aufspurparallelen) ist parallel zur Achse.



Figur 33 a.

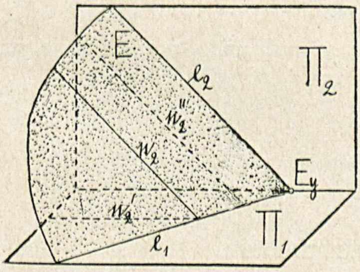


Figur 33 b.

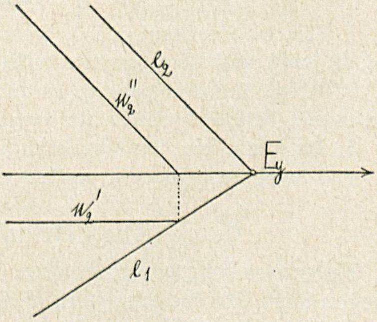
c) Die Aufspur (Grundspur) einer Grundspurparallelen (Aufspurparallelen) liegt auf der Aufspur (Grundspur) der Ebene.

Der einfache Beweis sei dem Schüler überlassen.

Durch zwei Spurparallele ist die Lage einer Ebene eindeutig bestimmt (Fig. 35).



Figur 34 a.

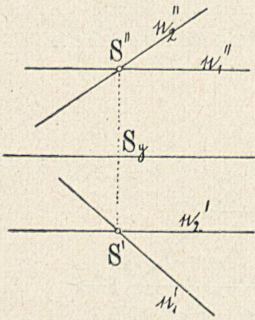


Figur 34 b.

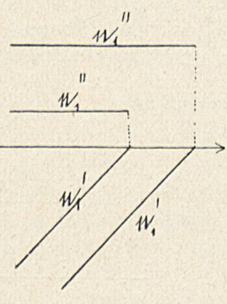
Grundaufgabe 8. Durch einen gegebenen Punkt P einer durch ein Dreieck ABC bestimmten Ebene E die Spurparallelen zu ziehen.

Lösung. (Fig. 36.) Ist P' der Grundriß des gegebenen Punktes, so konstruiere man P'' nach Grundaufgabe 7. Dabei benutze man als Hilfsgerade die Aufspurparallele e_2 durch P, weil man deren Grundriß $Q'R'$ nach Satz 16 b ohne weiteres als Parallele durch P' zur Achse zeichnen kann. Ihren Aufriß

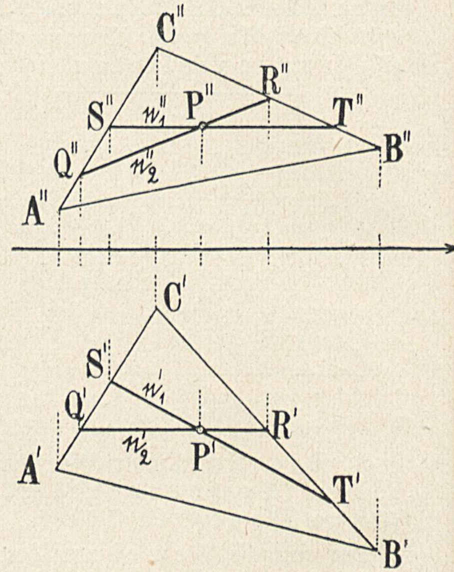
$Q''R''$ erhält man durch Hinaufloten von Q' nach $A''C''$ und von R' nach $B''C''$. Auf $Q''R''$ liegt dann P'' senkrecht über P'. Durch P'' zieht man die Parallele $S''T''$ als Aufriß der durch P gehenden Grundspurparallelen e_1.



Figur 35 a.



Figur 35 b.



Figur 36.

Durch Hinabloten von S'' nach $A'C'$ erhält man S' und somit $S'P'$ als Grundriß e'_1 der durch P gehenden Grundspurparallelen e_1. Probe: Der Schnittpunkt T' muß senkrecht unter T'' liegen.

Am einfachsten lassen sich die Spurparallelen durch A, B oder C ziehen.

Übungsaufgaben.

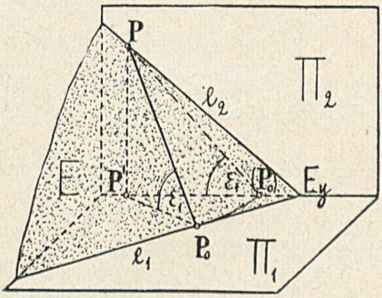
1. Löse die Grundaufgabe 5, wenn die Ebene a) durch zwei Spurparallele e_1 und e_2, b) durch zwei Spurparallele derselben Art e_1 und f_1 dargestellt ist.
2. Desgl. Grundaufgabe 7, wenn die Ebene durch zwei Spurparallele a) verschiedener Art; b) derselben Art dargestellt ist.
3. Untersuche die Spurparallelen in den verschiedenen Fällen der Fig. 29.
4. Löse Grundaufgabe 7. mittels einer Spurparallelen durch P.

Die Tafelneigungen einer Ebene.

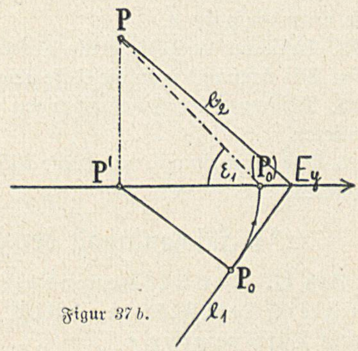
Unter der Neigung einer Ebene E gegen die Bildtafel Π_1, haben wir im ersten Heft den Neigungswinkel ihrer Fallinien, die wir auch als Spursenkrechte bezeichnen können, kennengelernt. Wir nennen diesen Winkel ε_1 jetzt die erste Tafelneigung der Ebene. Unter der zweiten Tafelneigung ε_2 verstehen wir den Neigungswinkel gegen Π_2 oder den Winkel, den die Spursenkrechten auf e_2 mit Π_2 bilden. Es ist klar, daß die Spurensenkrechten auch auf den entsprechenden Spurenparallelen senkrecht stehen.

Grundaufgabe 9. Die Tafelneigungen einer Ebene E zu bestimmen.

Lösung 1. Die Spuren der Ebene seien erreichbar. Wir begnügen uns mit der Bestimmung von ε_1, da die Konstruktion für ε_2 ganz entsprechend ist. Ist P (Fig. 37 a) ein beliebiger Punkt von e_1, PP_0 seine Spursenkrechte (Fallinie), $P'P_0$ ihr Grundriß, so ist auch $P'P_0 \perp e_1$ (Beweis



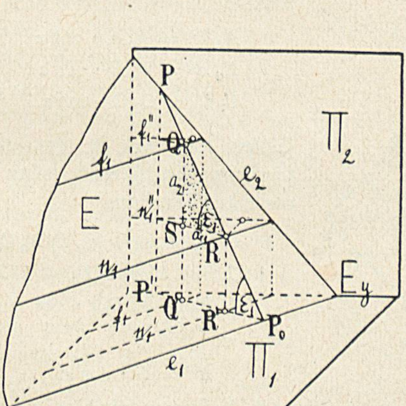
Figur 37 a.



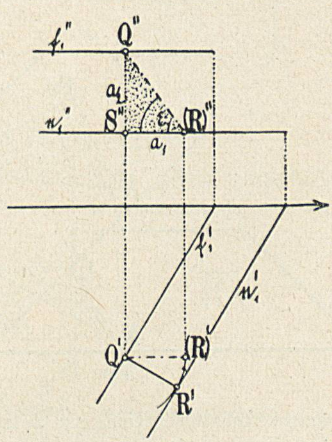
Figur 37 b.

s. 1. Heft, S. 15) und $\sphericalangle PP_0P' = \varepsilon_1$. Durch Umlegen des Dreiecks $PP'P_0$ (des „Konstruktionsdreiecks" des Punktes P) in Π_2 erhält man den Winkel ε_1 in seiner wahren Größe (Fig. 37 b).

Lösung 2. *Die Spuren der Ebene seien unerreichbar.* Als Hilfslinien benutzen wir zwei Grundspurparallele e_1 und f_1. Fig. 38a



Figur 38 a.



Figur 38 b.

zeigt das Schrägbild. Eine beliebige Fallinie QR bildet mit jeder Horizontalebene denselben Winkel ε_1. Ist RS ihre Projektion auf die durch e_1 gelegte Horizontalebene, so ist $\sphericalangle QRS = \varepsilon_1$. Das rechtwinklige Dreieck QRS ist aber konstruierbar aus den Katheten $SR = a_1$ und $SQ = a_2$, und zwar ist a_1 ($= Q'R'$) der Abstand zwischen e_1' und f_1' und $a_2 = Q''S''$ der Abstand zwischen e_1'' und f_1''. Dreht man das $\Delta\, QSR$ um QS, bis es Π_2 parallel ist, so erhält man es in seiner wahren Gestalt $Q''S''(R)''$ in der Aufrißebene (s. Grundaufg. 4, 2. Lös.). Die *Konstruktion* ist aus Fig. 38 b ersichtlich.

Übungsaufgaben.

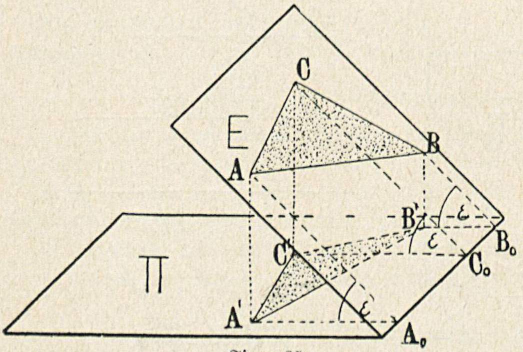
1. Wie findet man die Tafelneigungen einer Ebene, die einer der Bildtafeln parallel ist?
2. Bestimme die zweite Tafelneigung ε_2 einer Ebene E entsprechend den Lösungen der Grundaufgabe 9.
3. Bestimme auch die dritte Tafelneigung ε_3.
4. Wie bestimmt man die Tafelneigungen in den verschiedenen Fällen der Fig. 29?
5. Bestimme die Tafelneigungen einer Dreiecksebene, ohne die Spuren zu konstruieren.
6. Aus Grundspur e_1 und erster Tafelneigung ε_1 einer Ebene E ihre Aufspur zu konstruieren.

*I. Flächeninhalt der Projektion einer ebenen Figur.

Satz 17. Der Flächeninhalt der Projektion einer ebenen Figur ist gleich dem Flächeninhalt F der Figur multipliziert mit dem Kosinus ihrer Tafelneigung ε.

Beweis. In der Ebene E (Fig. 39) liege das Dreieck ABC, seine senkrechte Projektion auf Π sei $A'\,B'\,C'$. Wir ziehen die Fallinien $A\,A_0$, BB_0, CC_0 und ihre Projektionen $A'\,A_0$, $B'\,B_0$, $C'\,C_0$, so ist der Flächeninhalt der Projektion $A'\,B'\,C'$:

$$F' = \text{Trapez}\,A_0\,A'C'C_0 + \text{Tr.}\,C_0C'B'B_0 - \text{Tr.}\,A_0A'B'B_0$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(A_0\,A' + C_0\,C')\cdot A_0\,C_0 + \tfrac{1}{2}\,(C_0\,C' + B_0\,B')\,C_0\,B_0 + \tfrac{1}{2}\,(A_0\,A' + B_0\,B')\,A_0\,B_0.$$



Figur 39.

Nun ist

$$A_0\,A' = A_0\,A\cdot\cos\varepsilon$$
$$B_0\,B' = B_0\,B\cdot\cos\varepsilon$$
$$C_0\,C' = C_0\,C\cdot\cos\varepsilon.$$

Setzen wir das in die obige Gleichung ein, so wird, wenn wir $\cos\varepsilon$ ausklammern:

$$F' = [\tfrac{1}{2}\,(A_0\,A + C_0\,C)\,A_0\,C_0 + \tfrac{1}{2}\,(C_0\,C + B_0\,B)\,C_0B_0 + \tfrac{1}{2}\,(A_0\,A + B_0\,B)\,A_0\,B_0]\cdot\cos\varepsilon$$

oder

$$F' = F\cdot\cos\varepsilon.$$

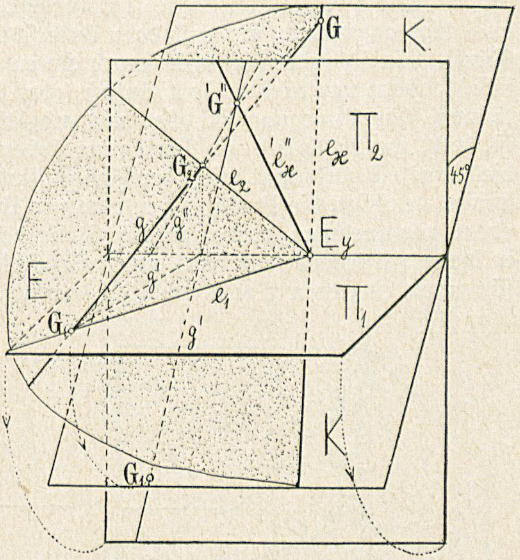
Haben wir statt des Dreiecks ein Polygon F in der Ebene E, so können wir dies in lauter Dreiecke zerlegen. Für jedes Dreieck gilt die soeben bewiesene Gleichung, und wenn wir alle diese Gleichungen addieren, erhalten wir auch für das Polygon $F' = F\cdot\cos\varepsilon$.

Eine Grenzbetrachtung, ähnlich wie bei der Berechnung der Kreisfläche, zeigt, daß der Satz auch für krummlinig begrenzte Figuren gelten muß.

*K. Affinitätsbeziehungen.

Sind vielleicht Grund- und Aufriß einer ebenen Figur affin? Nach Satz 12. sind die Verbindungslinien der Grund- und Aufrisse aller Punkte der Figur parallel. Wir haben also noch zu untersuchen, ob sich Grund- und Aufriß aller Geraden der vorliegenden ebenen Figur auf einer Geraden schneiden. Es sei g eine Gerade in der Ebene E. Grundriß g' und Aufriß g'' der Geraden müssen sich in einem (endlichen oder unendlich fernen) Punkte schneiden, da Π_1 und Π_2 in der Zeichnung eine Ebene bilden. Dieser Punkt $'G''$ (lies: G Strich und zwei Strich) ist zugleich Grundriß G' und Aufriß G'' eines Punktes G der Geraden g, und zwar liegt G nach S. 8 in der Koinzidenzebene K. Da nun Punkt G sowohl in E als in K liegt, muß er auf der Schnittgeraden beider Ebenen liegen, die wir $e_\varkappa$ nennen wollen. Nun fallen aber auch Grund- und Aufriß der Schnittgeraden $e_\varkappa$ in eine Gerade $'e_\varkappa''$ (Sonderfall 7, S. 18). Die zweite Affinitätsbedingung ist somit erfüllt und wir haben den

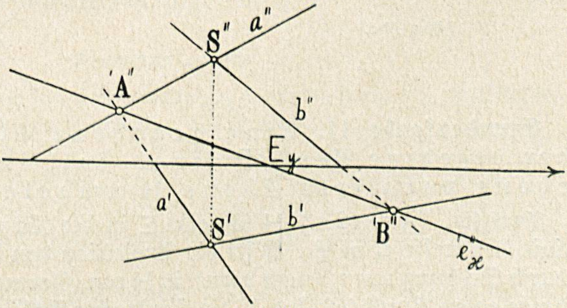
Satz 18. Grund- und Aufriß einer ebenen Figur sind affin. Die Affinitätsrichtung ist senkrecht zur Bildachse, und die Affinitätsachse ist der Grund- und Aufriß der Schnittgeraden der Ebene der Figur mit der Koinzidenzebene.



Figur 40.

Die Affinitätsachse $'e_\varkappa''$ muß durch den Spurenschnittpunkt E_y gehen (weshalb?). Sie ist für alle in der Ebene E liegenden Figuren dieselbe. Wir können sie also die Affinitätsachse der Ebene nennen. Satz 18. kann sowohl zur Konstruktion des Aufrisses bei gegebenem Grundriß (und umgekehrt) dienen als zur Kontrolle der Zeichnung.

Grundaufgabe 10. Die Affinitätsachse $'e_\varkappa''$ einer durch zwei sich schneidende Gerade a und b gegebenen Ebene E zu bestimmen.

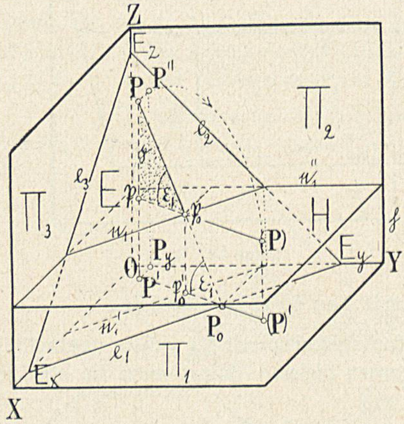


Figur 41.

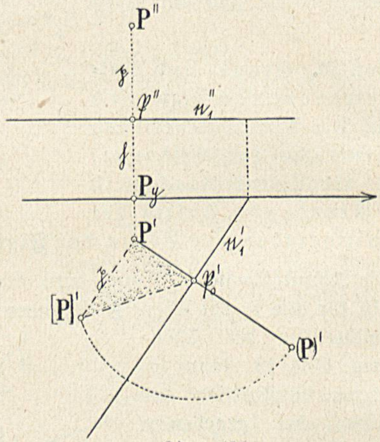
Lösung. Nach dem Vorhergehenden ist $'e_\varkappa''$ die Verbindungslinie der Punkte $'A''$ und $'B''$, in denen sich die Grundrisse und die Aufrisse der Geraden a und b schneiden (Fig. 41).

L. Die wahre Gestalt einer ebenen Figur.

Zur Ermittelung der wahren Gestalt einer ebenen Figur aus ihrer Projektion haben wir im 1. Heft die Ebene E der Figur durch Drehung um ihre Spur e in die Projektionsebene Π umgelegt. Dieselbe Methode können wir auch hier anwenden, nur mit dem Unterschied, daß hier die Abstände der Punkte von Π_1 (oder Π_2) nicht durch Koten oder Höhenmaßstäbe bestimmt sind, sondern unmittelbar dem Aufriß (oder Grundriß) entnommen werden können. Die Umlegung ist aber nur möglich, wenn die Spur e erreichbar ist, d. h. innerhalb der zur Verfügung stehenden Zeichenfläche liegt. Wenn dies, was oft vorkommt, nicht der Fall ist, sind wir, wie schon früher bemerkt wurde, genötigt, die Umlegung in eine zur Projektionsebene parallele Hilfsebene vorzunehmen, wobei an die Stelle der Spur e die Spurparallele $\mathfrak{e}$ in dieser Hilfsebene tritt. Das dabei einzuschlagende Verfahren soll zunächst für einen einzelnen Punkt erläutert werden.



Figur 42 a.



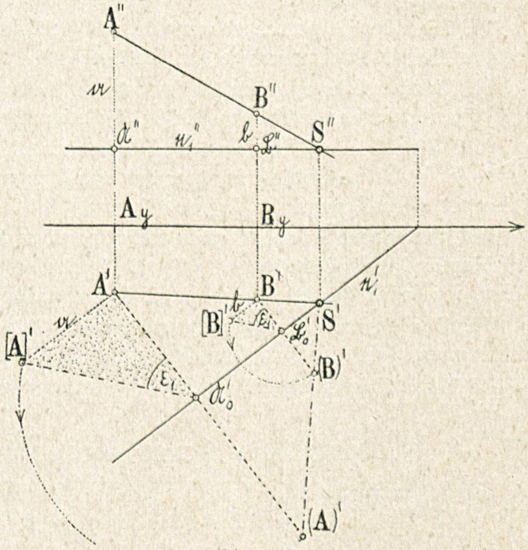
Figur 42 b.

Grundaufgabe 11. Eine gegebene Ebene E, in welcher der gegebene Punkt P liegt, soll in eine der Grundebene parallele Ebene H umgelegt werden.

Analysis. (Fig. 42 a.) H schneide E in der Spurparallelen $\mathfrak{e}_1$. Die Falllinie PP_0 treffe $\mathfrak{e}_1$ in $\mathfrak{P}_0$. $\mathfrak{P}$ sei die Projektion von P auf H. Wir legen nun E durch Drehung um $\mathfrak{e}_1$ (nach vorn) in H um. Geometrische Örter für den in H umgelegten Punkt (P) sind 1. die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_0$ auf $\mathfrak{e}_1$, 2. der Kreis um $\mathfrak{P}_0$ mit dem Halbmesser $\mathfrak{P}_0P$ in der auf $\mathfrak{e}_1$ senkrechten Ebene des Konstruktionsdreiecks $P\mathfrak{P}\mathfrak{P}_0$. Der Halbmesser $\mathfrak{P}_0P$ ist die Hypotenuse des Konstruktionsdreiecks, das aus den Katheten $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}$ (gleich ihrem Grundriß $\mathfrak{P}_0'P'$) und $P\mathfrak{P}$ (gleich ihrem Aufriß $P''\mathfrak{P}'' = \mathfrak{p}$) leicht konstruiert werden kann. $\mathfrak{p}$ ist der Abstand des Punktes P von der Ebene H, also gleich der

Höhendifferenz $P''P_y - \mathfrak{P}''P_y$. Die Konstruktion von $(P)'$ kann ohne weiteres in der Zeichenebene ausgeführt werden, da $\mathsf{H} \parallel \Pi_1$ ist, also jede Zeichnung in H sich nach Satz 11. unverändert auf Π_1 projiziert. Nebenbei ergibt sich hier die erste Tafelneigung der Ebene, $\sphericalangle P\mathfrak{P}_0\mathfrak{P} = \varepsilon_1$.

Konstruktion. (Fig. 42b.) Fälle $P'\mathfrak{P}_0' \perp e_1'$, trage in P' an $\mathfrak{P}_0'P'$ einen Rechten an, mache den Schenkel $P'[P]' = \mathfrak{p} = \mathfrak{P}''P''$ und ziehe $[P]'\mathfrak{P}_0'$, so ist $\Delta[P]'P'\mathfrak{P}_0'$ der Grundriß des in H umgelegten Konstruktionsdreiecks des Punktes P. Nun schlage um $\mathfrak{P}_0'$ mit $\mathfrak{P}_0'[P]'$ den Kreis, der $P'\mathfrak{P}_0'$ in $(P)'$ trifft. $(P)'$ ist der Grundriß des in H umgelegten Punktes P.



Figur 43.

Bemerkung. Sind in E zwei Punkte A und B (oder eine Strecke AB) gegeben und legt man beide Punkte nach Grundaufgabe 11. um (Figur 43), so behält der Schnittpunkt S der Geraden AB mit e_1 bei der Umlegung seine Lage. Außerdem sind $A'(A)'$ und $B'(B)'$ parallel. Der Grundriß der Strecke AB ist demnach mit dem Grundriß der in H umgelegten Strecke affin. Affinitätsachse ist der Grundriß von e_1. Allgemein ist, wie hiernach leicht einzusehen ist, der Grundriß jeder in E liegenden Figur mit dem Grundriß der in H umgelegten Figur affin.

Übungsaufgaben.

*1. In einer Ebene E mit der Tafelneigung ε_1 liegt ein Kreis mit dem Radius r. Berechne den Flächeninhalt des Grundrisses des Kreises.

*2. Stelle eine allgemeine Formel für den Flächeninhalt der Ellipse als Kreisprojektion auf. Anl. Die große Achse ($2a$) der Ellipse ist gleich dem horizontalen Durchmesser des Kreises, die kleine ($2b$) gleich dem Grundriß des steilsten Durchmessers.

3. Die wahre Gestalt eines durch Grund- und Aufriß gegebenen Dreiecks ABC zu bestimmen.

4. Grund- und Aufriß eines Trapezes $ABCD$ sind gegeben. Bestimme seine wahre Gestalt.

5. Bestimme die Gestalt eines Parallelogramms bei gegebenem Grund- und Aufriß.

6. Bestimme die wahre Größe eines durch Grund- und Aufriß gegebenen Winkels. Anl.: Lege den Winkel um die Grundspur seiner Ebene in Π_1 um. Ist die Grundspur unzugänglich, so ersetze man den Winkel durch einen anderen, dessen Schenkel den ge-

gebenen Schenkeln parallel sind und dessen Grundspur erreichbar ist, oder verfahre nach Grundaufgabe 11, wobei an die Stelle der Grundspur e und der Achse Grund- und Aufriß einer Spurparallelen e_1 treten.

7. Wie vereinfacht sich Grundaufgabe 11, wenn die Umlegung in Π_1 erfolgt?

8. Löse Grundaufgabe 11. für den Fall, daß die Ebene E in eine der Aufebene parallele Ebene H umgelegt werden soll.

9. In einer durch zwei Gerade gegebenen Ebene liegt ein Fünfeck, dessen Grundriß gegeben ist. Konstruiere den Aufriß und die wahre Gestalt des Fünfecks.

10. Die Ebene eines gegebenen Dreiecks steht senkrecht zur Achse. Bestimme seine wahre Gestalt. Anl.: Benutze den Seitenriß.

11. In einer Ebene, die auf Π_1 senkrecht steht und gegen Π_2 um 30^0 geneigt ist, liegt ein Viereck, dessen Aufriß gegeben ist. Bestimme seine wahre Gestalt.

*12. Eine Ebene E ist durch drei Punkte A, B, C gegeben. Suche ihre Affinitätsachse $'e_x''$ und bestimme mit ihrer Hilfe zu dem gegebenen Grundriß (Aufriß) eines Punktes A der Ebene den Aufriß (Grundriß).

*13. Eine Ebene E ist durch einen in ihr liegenden Punkt P und eine Gerade g gegeben. Bestimme ihre Affinitätsachse $'e_x''$ und konstruiere unter Benutzung der Affinität zu dem gegebenen Grundriß eines in E liegenden Vielecks den Aufriß.

14. Den Abstand eines gegebenen Punktes P von einer gegebenen Geraden g zu bestimmen. Anl.: Lege die durch Punkt und Gerade bestimmte Ebene um.

15. Den Abstand zweier gegebenen Parallelen zu bestimmen.

M. Darstellung ebener Figuren in allgemeiner Lage.

Grundaufgabe 12. Auf einer Horizontalebene H liegt eine Ebene E und in ihr ein gegebener Punkt (P). Ebene E und Punkt (P) sollen durch Drehung um eine gegebene in H (und E) liegende Gerade e_1 in eine solche Lage gebracht werden, daß E die gegebene Tafelneigung ε_1 erhält.

Analysis. Ein Blick auf Fig. 42a zeigt, daß die Aufgabe die genaue Umkehrung der Grundaufgabe 11. ist. Daraus ergibt sich sofort die

Konstruktion. (Fig. 42b.) Fälle von $(P)'$ die Senkrechte $(P)'\mathfrak{P}_0'$ auf e_1', trage daran in $\mathfrak{P}_0'$ den Winkel ε_1 an, schlage um $\mathfrak{P}_0'$ mit $\mathfrak{P}_0'(P)'$ als Radius den Kreis, der den Schenkel von ε_1 in $[P]'$ trifft, und fälle $[P]'P' = \mathfrak{p}$ senkrecht $\mathfrak{P}_0'(P)'$, so ist P' der Grundriß von P und $\mathfrak{p}$ die Höhe von P über H. Ist nun $\mathfrak{h}$ die Höhe der Horizontalebene H, so erhält man den Aufriß P'' einfach durch Hinaufloten von P' und durch die Gesamthöhe $\mathfrak{h} + \mathfrak{p}$ des Punktes P.

1. Beispiel. Ein gegebenes Quadrat $ABCD$ in beliebiger Lage darzustellen.

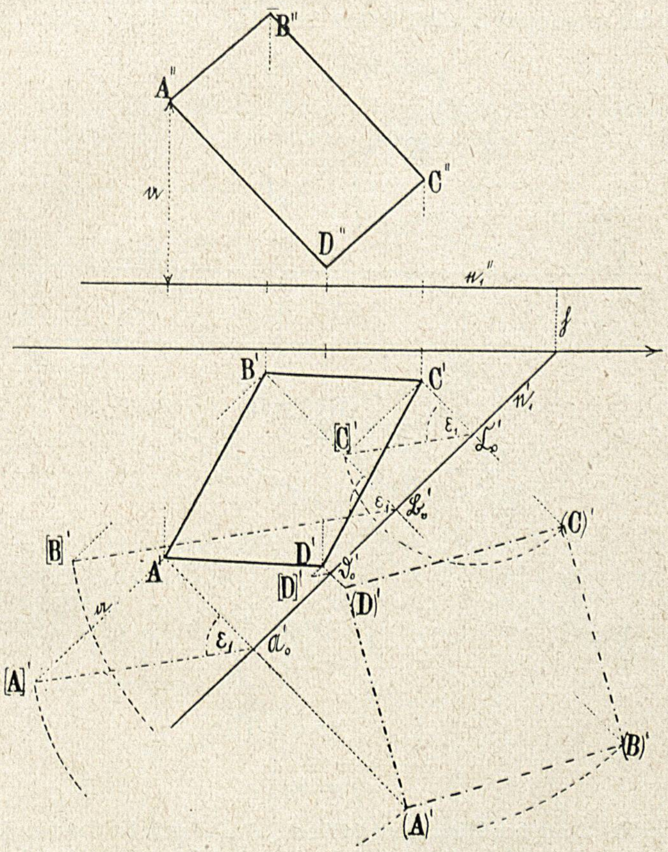
Analysis. Das zunächst in einer beliebigen Horizontalebene H liegende Quadrat habe den Grundriß $(A)'(B)'(C)'(D)'$. Nennen wir nun die Ebene des Quadrates E und sind e_1 die Schnittgerade (E H) und ε_1 die beliebig anzunehmende Tafelneigung, welche E erhalten soll, so kann man nach Grundaufgabe 12. die Grund- und Aufrisse der Quadratecken einzeln finden.

Konstruktion (siehe Fig. 44). Beachte, daß die vier Konstruktionsdreiecke der Ecken ähnlich sind.

Proben: 1. Die Projektionen des Quadrates müssen Parallelogramme sein.

2. Das umgelegte Quadrat und der Grundriß sind affin.

*3. Grund- und Aufriß sind affin.

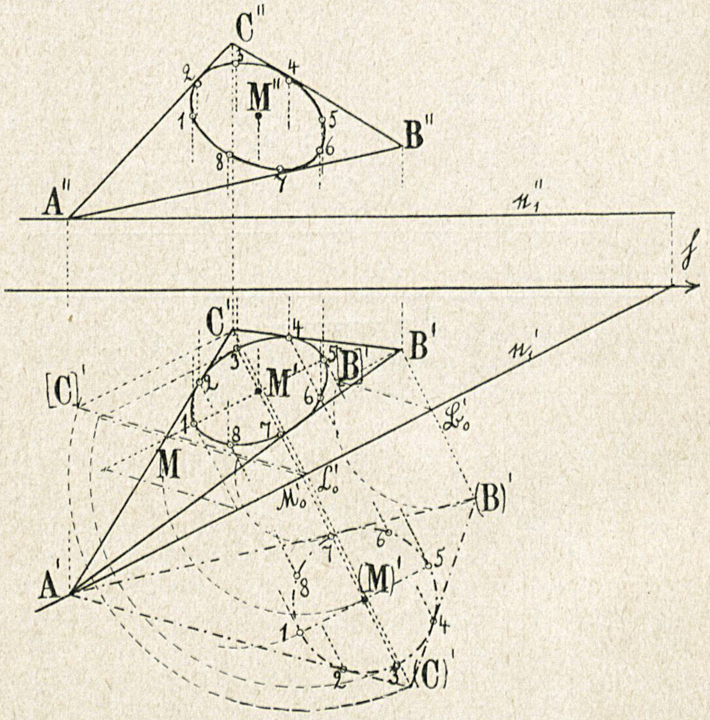


Figur 44.

2. Beispiel. Den Inkreis eines durch Grund- und Aufriß gegebenen Dreiecks ABC zu konstruieren.

Analysis. In der Dreiecksebene E ziehe man nach Grundaufgabe 8. eine Spurparallele e_1 (am besten durch den tiefsten Punkt A des Dreiecks) und lege das Dreieck nach Grundaufgabe 11. in die zu e_1 gehörige Horizontalebene um. Man kann dann dem Grundriß $(A)'(B)'(C)'$ des umgelegten Dreiecks in bekannter Weise den Kreis einbeschreiben und nach Grundaufgabe 12. seinen Grund- und Aufriß konstruieren. Beide Risse sind im allgemeinen Ellipsen. Die Zeichnung des Grundrisses wird erleichtert, wenn man beachtet, daß die durch den Mittelpunkt des Kreises, dessen Projektionen auch Mittelpunkte der Ellipsen werden, gezogene Grundspurparallele und Fallinie im Grundriß die große und kleine Halbachse der Ellipse werden. Für die Aufrißellipse gilt Entsprechendes.

Konstruktion. (Fig. 45.) Ziehe durch A die Spurparallele e_1 (Grundaufgabe 8.) und lege das $\triangle\ A\,B\,C$ nach Grundaufgabe 11. in die e_1 enthaltende Horizontalebene um. Der Grundriß des umgelegten Dreiecks ist das Dreieck $(A)'\,(B)'\,(C)'$. Zeichne den Inkreis



Figur 45.

dieses Dreiecks. Durch den Mittelpunkt $(M)'$ des Inkreises ziehe die Durchmesser $1\ 5 \parallel e_1'$ und $3\ 7 \perp e_1'$. Außer den Punkten 1, 3, 5, 7 zeichne noch in gleichen Abständen die Kreispunkte 2, 4, 6, 8. Von M und den acht Kreispunkten konstruiere nach Grundaufgabe 12 die Grund- und Aufrisse. Die Zeichnung der Ellipsen ist dann nicht schwierig, wenn du noch beachtest, daß die Dreiecksseiten Tangenten an die Ellipsen sein müssen. Als Probe benutze die Affinitätsbeziehungen.

Übungsaufgaben.

1. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck in allgemeiner Lage.
2. Desgl. ein regelmäßiges Sechseck.
3. Zeichne einen Kreis, dessen Ebene parallel zur Achse ist und die Tafelneigung $\varepsilon_1 = 45^0$ hat.

4. Zeichne einen Kreis, dessen Ebene auf Π_2 senkrecht steht und die Tafelneigung $\varepsilon_1 = 30^0$ besitzt.

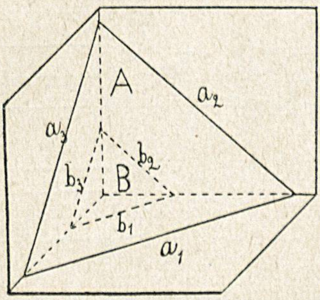
5. Einen Kreis zu projizieren, dessen Ebene auf Π_1 senkrecht steht und die Tafelneigung $\varepsilon_2 = 60^0$ hat.

6. Zeichne ein Dreieck mit seinem Umkreis in allgemeiner Lage.

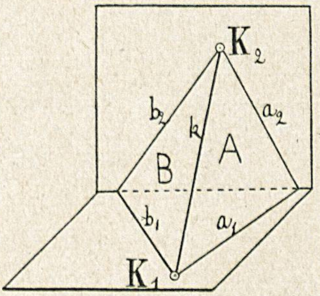
7. Zeichne einen Kreisring in allgemeiner Lage.

N. Zwei Ebenen.

Die gegenseitige Lage zweier Ebenen ist am leichtesten aus ihren Spuren ersichtlich. Zwei Ebenen und A B sind entweder parallel (Fig. 46) oder schnei-

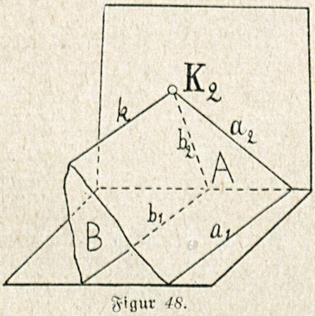


Figur 46.

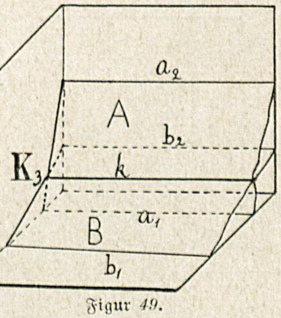


Figur 47.

den sich in einer Geraden (Fig. 47). Im ersten Falle müssen ihre gleichnamigen Spuren parallel sein (weshalb?), im zweiten muß ihre Schnittgerade k durch die Schnittpunkte K_1 und K_2 der gleichnamigen Spuren gehen. Dabei kann es vorkommen, daß einer der Spurenschnittpunkte im Unendlichen liegt,



Figur 48.



Figur 49.

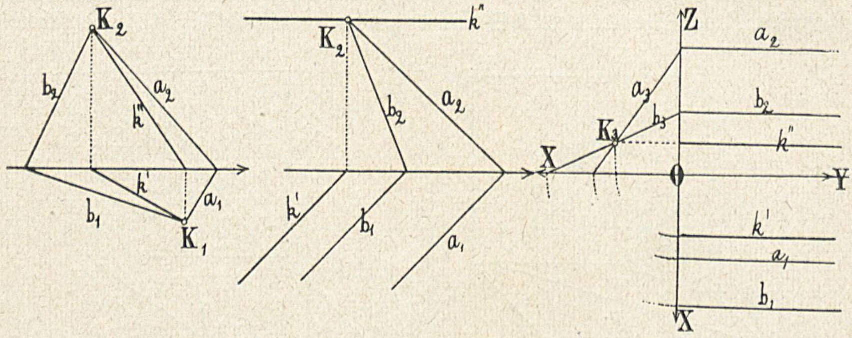
wenn nämlich zwei gleichnamige Spuren parallel sind (Fig. 48). Dann wird auch k diesen Spuren parallel (weshalb?). Es können sogar beide Spurenpaare parallel sein. Dies tritt ein, wenn beide Ebenen parallel der Achse sind (Fig. 49). Dann werden sämtliche Spuren und auch die Schnittgerade k der Achse parallel (weshalb?). Die Schnittgerade geht aber auch durch den

Schnittpunkt K_3 der Seitenspuren und kann mittels des Seitenrisses ermittelt werden.

Sind umgekehrt die gleichnamigen Spuren zweier Ebenen (einschließlich der Seitenspuren) parallel, so sind auch die Ebenen parallel. Schneiden sich wenigstens zwei gleichnamige Spuren, so schneiden sich auch die Ebenen.

Grundaufgabe 12. Die Schnittgerade k zweier nichtparallelen Ebenen A und B zu zeichnen.

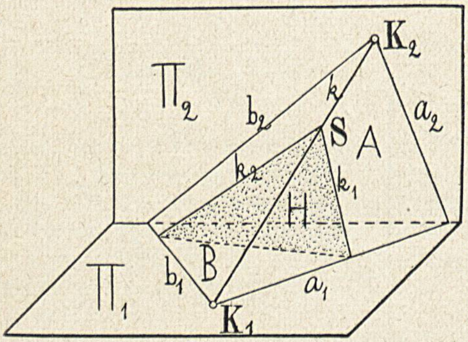
1. (einfachster) **Fall.** Die Spuren der Ebenen sind bekannt.



Figur 50.

Lösung. Die Konstruktion ist aus Fig. 46—49 leicht ersichtlich. Die Spuren von k sind unmittelbar gegeben, und nach der Umkehrung von Grundaufgabe 3. findet man die Risse von k. (Fig. 50.)

2. **Fall.** Die Spuren der Ebenen sind nicht gegeben, oder die vorhergehende Lösung versagt aus sonst irgend einem Grunde.

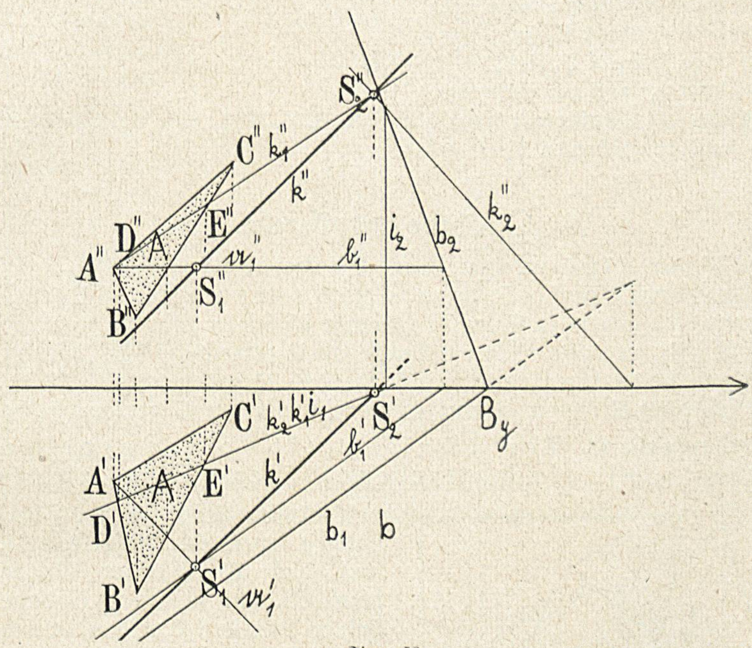


Figur 51.

Analysis. Jede beliebige Ebene (Hilfsebene H), welche k nicht enthält und nicht parallel k ist, muß k in einem Punkte S (Fig. 51) schneiden, und dieser Punkt S muß der Schnittpunkt der beiden Geraden k_1 und k_2 sein, in welchen H die Ebenen A und B schneidet. Wählt man nun H so, daß k_1 und k_2 leicht zu ermitteln sind und ihr Schnittpunkt S_1 erreichbar ist, so hat man in S_1 einen Punkt der gesuchten Schnittkante k gefunden. Ermittelt man auf dieselbe Art einen zweiten Punkt S_2, so ist k bekannt.

Als Hilfsebenen eignen sich 1.* die Koinzidenzebene, sowie 2. Ebenen, die entweder auf der Bildebene Π_1 oder Π_2 senkrecht stehen oder zu einer von ihnen parallel sind.

Konstruktion. Die Ebene A sei durch drei Punkte A, B, C und die Ebene B durch ihre Spuren b_1 und b_2 gegeben (Fig. 52). Um die Verwendung der verschiedenen soeben angegebenen Hilfsebenen zu zeigen, legen wir 1. eine Horizontalebene H durch A und B. Sie schneidet A und B in zwei Grundspurparallelen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$, deren Risse wir nach S. 27 finden. Ihr Schnittpunkt



Figur 52.

S_1 ist der erste Punkt von k. Dann legen wir 2. eine Hilfsebene I (sprich: Jota) senkrecht Π_1 durch A und B. Ihre Aufspur i_2 ist senkrecht zur Achse (warum?). Sie schneidet AB und BC in den Punkten D und E, deren Grundrisse auf i_1 liegen müssen (weshalb?) und deren Aufrisse man durch Hinaufloten nach $A''B''$ und $B''C''$ findet. DE ist die Schnittgerade (AI). Die Schnittgerade (BI) ergibt sich nach dem 1. Fall. Der Schnittpunkt S_2 von (AI) und (BI) ist ein zweiter Punkt von k. S_1S_2 ist somit die gesuchte Schnittgerade k.

* Zur Probe benutzen wir noch als Hilfsebene 3. die Koinzidenzebene K. Der Schnittpunkt S_3 der beiden leicht zu findenden Affinitätsachsen $'a_x''$ und $'b_x''$ der gegebenen Ebenen muß ebenfalls auf k liegen (weshalb?). In unserer Figur liegt aber der Schnittpunkt außerhalb der Zeichenfläche.

Übungsaufgaben.

1. Konstruiere die Schnittgerade zweier Ebenen A und B, wenn
   a) $A \perp \Pi_1$, B schief zu Π_1 und Π_2 ist;
   b) $A \perp \Pi_2$, B schief zu Π_1 und Π_2 ist;
   c) $A \parallel \Pi_1$, B schief zu Π_1 und Π_2 ist;
   d) $A \parallel \Pi_2$, B schief zu Π_1 und Π_2 ist;
   e) A $\parallel$ der Achse, B schief zu Π_1 und Π_2 ist;
   f) $A \parallel \Pi_1$, $B \parallel \Pi_2$ ist;
   g) beide parallel zur Achse sind;
   h) beide senkrecht Π_1 sind;
   i) beide senkrecht Π_2 sind;
   k) beide parallel zur Achse sind.
2. Zeichne den Schnittpunkt dreier Ebenen A, B, Γ. Anl.: Alle drei Schnittgeraden müssen durch den gesuchten Punkt gehen.

O. Ebene und Gerade.

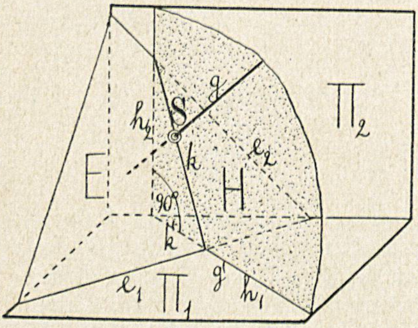
Eine Gerade g kann zu einer Ebene E folgende Lagen haben:

1. Die Gerade g liegt in E, wenn sie durch zwei Punkte von E geht. Sie muß dann jede andere in E liegende Gerade schneiden oder ihr parallel sein.

2. g ist $\parallel$ E, wenn sie keinen Punkt mit E gemeinsam hat. Dies ist der Fall, wenn sie zu irgendeiner in E liegenden Geraden parallel ist.

3. g schneidet E, wenn sie nur einen Punkt mit E gemeinsam hat.

Grundaufgabe 13. Den Schnittpunkt S einer gegebenen Geraden g mit einer gegebenen Ebene E zu ermitteln.

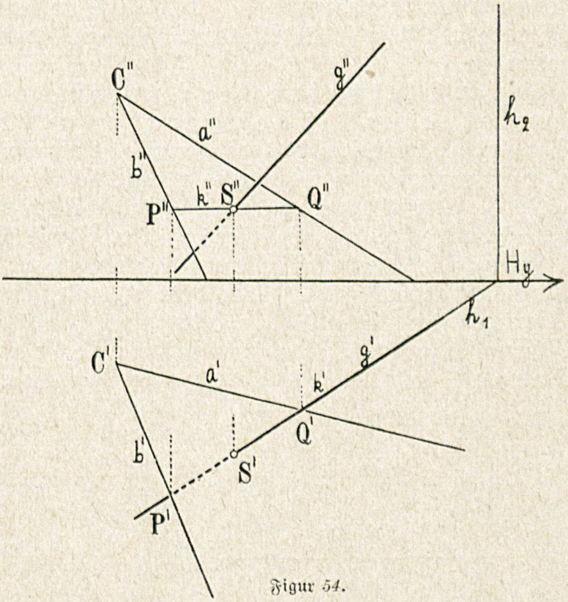


Figur 53.

Analysis. Legt man (Fig. 53) durch g irgendeine Hilfsebene H, so muß diese E in einer Geraden k schneiden, und k muß g in dem gesuchten Punkte S schneiden, da andernfalls E und K eine Gerade und einen Punkt außerhalb dieser Geraden gemeinsam hätten und deshalb zusammenfallen müßten. Besonders geeignete Hilfsebenen sind die beiden Ebenen, die g auf Π_1 oder Π_2 projizieren, also auf Π_1 oder Π_2 senkrecht stehen. In Fig. 53 ist $H \perp \Pi_1$.

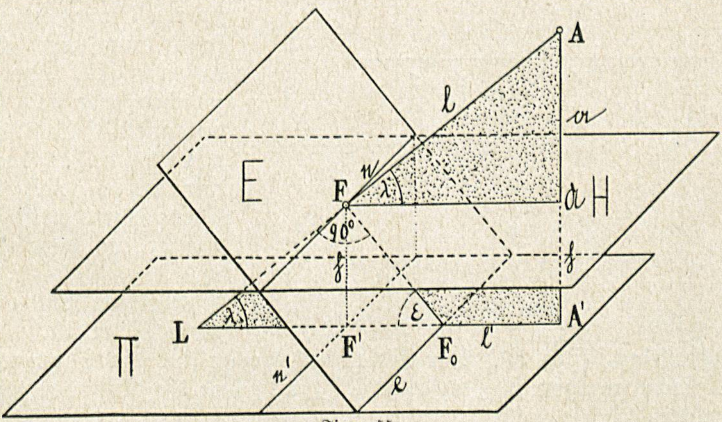
Wir sehen aus der Figur, daß dann der Grundriß g' der gegebenen Geraden zugleich die Grundspur h_1 der Hilfsebene H und der Grundriß k' der Schnittgeraden (HE) wird. Dieser günstige Umstand ist der Anlaß für die Wahl der Hilfsebene.

Konstruktion. (Fig. 54.) Die Ebene E sei durch zwei ihrer Geraden a und b bestimmt, die natürlich auch die Spuren sein dürfen. Ihr (nicht weiter benutzter) Schnittpunkt sei C. Die Hilfsebene H hat als Grundspur h_1 und zugleich als Grundriß H′ die Gerade g'. Ihre zur Achse senkrechte Aufspur h_2 wird nicht weiter gebraucht. Nun ist aber h_1 auch der Grundriß k' der in H liegenden Schnittgeraden k. Wenn diese a und b etwa in P und Q schneidet, so sind die Grundrisse P' und Q' dieser beiden Schnittpunkte unmittelbar gegeben als Schnittpunkte von k' mit a' und b'. Die Aufrisse P'' und Q'' findet man durch Hinaufloten nach a'' und b''. $P''Q''$ ist der Aufriß k'' von k. Da nun k und g sich in S schneiden müssen, so ist der Schnittpunkt S'' von g'' und k'' der Aufriß und senkrecht darunter S' auf k' (und g') der Grundriß von S.



Figur 54.

Zur Probe kann man S auch mittels der zweiten projizierenden Ebene $(g\,g'')$ als Hilfsebene bestimmen. Der Schnittpunkt S kann natürlich auch außerhalb der Winkelfläche (a, b) liegen.



Figur 55.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, daß eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht.

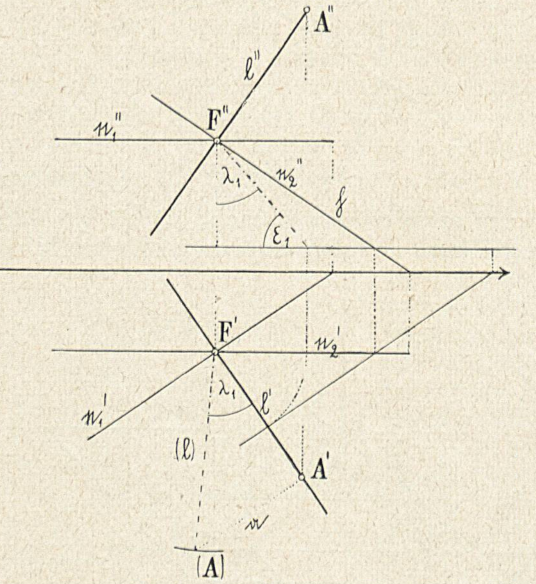
Ist $AF \perp$ E (Fig. 55), so steht die $A\ F$ projizierende Ebene ALA' senkrecht auf E und auf Π, also muß nach einem bekannten stereometrischen Satz auch die Schnittgerade von E und Π, d. i. die Spur e, auf der Ebene ALA' senkrecht stehen. Dann ist aber auch $e \perp l'$, denn l' ist eine Fußgerade von e in der Ebene ALA'. Wir haben also den wichtigen, für alle Risse der Senkrechten geltenden

Satz 19. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht jeder Riß der Geraden auf der gleichnamigen Spur, somit auch auf den gleichnamigen Rissen der gleichnamigen Spurparallelen der Ebene senkrecht.

Z. B.: Der Grundriß der Geraden steht auf den Grundrissen der Grundspurparallelen der Ebene senkrecht usw.

Zusatz. Die Tafelneigung λ der Senkrechten, ist, wie aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck folgt, gleich dem Komplement der zugehörigen Tafelneigung ε der Ebene E, $\lambda = 90^0 - \varepsilon$.

Grundaufgabe 14. In einem gegebenen Punkte F einer Ebene E die Senkrechte auf ihr zu errichten.



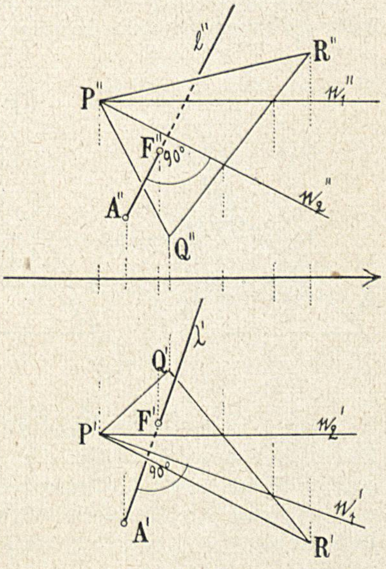
Figur 56.

Analysis. Sind die Spuren der Ebene nicht gegeben, so ermittle man nach Grundaufgabe 8. zwei beliebige Spurparallelen e_1 und e_2 und ziehe durch F' zu e_1' und durch F'' zu e_2'' die Senkrechten. Sie sind die Risse der gesuchten Senkrechten. Soll die Senkrechte die gegebene Länge $FA = l$ erhalten, so verfahre man nach Grundaufgabe 4b. oder lege, nachdem man nach Grundaufgabe 9. die Tafelneigung ε_1 bestimmt hat, das rechtwinklige $\Delta AF\mathfrak{A}$ in die Ebene H und projiziere es auf Π_1, wo man es aus l und $\lambda (= 90^0 - \varepsilon_1)$ leicht konstruieren kann und dadurch A' erhält.

Konstruktion. (Fig. 56.) Der Einfachheit wegen sind die Spurparallelen durch F selbst gezogen. $l'(\perp e_1')$ und $l''(\perp e_2'')$ sind die Risse der gesuchten Senkrechten.

Grundaufgabe 15. Von einem gegebenen Punkt A außerhalb einer gegebenen Ebene E die Senkrechte auf die Ebene zu fällen.

Konstruktion. Die Ebene E sei durch das Dreieck PQR bestimmt (Fig. 57). Ziehe etwa durch P zwei Spurparallele e_1 und e_2 und fälle von A'' auf e_2'', sowie von A' auf e_1' die Senkrechten, so sind diese die Risse der gesuchten Senkrechten auf die Ebene. Den Fußpunkt F, der natürlich auch außerhalb des Dreiecks fallen kann, ermittle nach Grundaufgabe 13. Eine einfache Überlegung nach S. 21 ergibt, welcher Teil der Senkrechten durch das (undurchsichtige) Dreieck verdeckt wird. Dies läßt sich auch leicht durch das Zeichendreieck und einen Bleistift veranschaulichen.



Figur 57.

Übungsaufgaben.

1. Den Abstand eines gegebenen Punktes P von einer gegebenen Ebene E zu finden (Grundaufgabe 15, 13 und 4 a).

2. Den Abstand zweier gegebenen parallelen Ebenen E und Φ (Phi) zu finden. (Grundaufgabe 14, 13 und 4 a.)

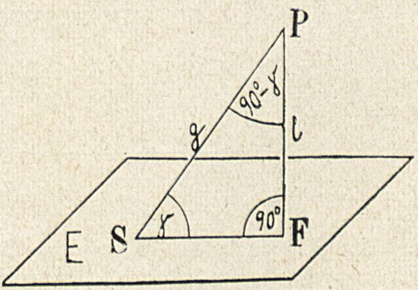
3. Durch einen gegebenen Punkt P auf einer gegebenen Geraden g soll die Ebene E gelegt werden, die auf g senkrecht steht. Anl.: Ziehe durch P die beiden Spurparallelen der gesuchten Ebene (s. Satz 19).

4. Durch einen gegebenen Punkt P die Ebene E zu legen, die auf einer gegebenen Geraden g senkrecht steht (vgl. die Anleitung von 3).

5. Zu einer gegebenen Ebene E in gegebenem Abstande a eine Parallelebene zu legen (Grundaufgabe 14. Zwei Lösungen).

6. Durch eine gegebene Gerade g die Ebene Φ zu legen, die auf der gegebenen Ebene E senkrecht steht. Anl.: Fällt man nach Grundaufgabe 15. von einem beliebigen Punkte P auf g die Senkrechte l auf E, so ist die Ebene (g, l) die gesuchte.

7. Von einem gegebenen Punkte P auf eine gegebene Gerade g die Senkrechte zu fällen. Anl.: Lege durch P nach Üb. 4 die Ebene E $\perp$ g und bestimme ihren Schnittpunkt S mit g, so ist PS die gesuchte Senkrechte. Bestimme auch ihre Länge. Andere Lösung siehe Üb. 17. S. 21.



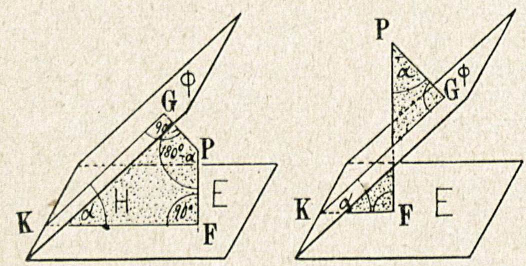
Figur 58.

8. Den Abstand zweier gegebenen Parallelen a und b zu bestimmen. Anl.: Nimm auf einer der Parallelen einen beliebigen Punkt an und verfahre wie in Üb. 7. Andere Lösung s. Üb. 17. S. 21.

9. Den Neigungswinkel γ einer gegebenen Geraden g gegen eine gegebene Ebene E zu bestimmen. Anl.: Fig. 58. Fällt man von einem beliebigen Punkte P der Geraden g

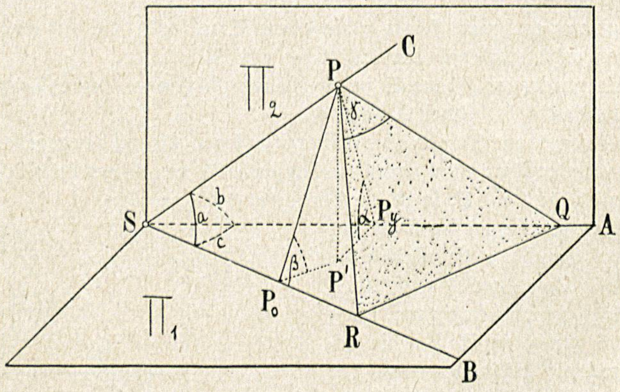
die Senkrechte l auf E (Grundaufgabe 15), so ist $\sphericalangle (g, l) = 90^0 - \gamma$. Die wahre Größe dieses Winkels ermittle durch Umlegen der Winkelebene in Π_1 oder eine andere Horizontalebene nach Grundaufgabe 11.

10. Den spitzen Neigungswinkel α zweier gegebenen Ebenen E und Φ zu bestimmen. Anl.: Fällt man von einem beliebigen Punkte P auf beide Ebenen die Senkrechten PF und PG (Fig. 59) und legt durch die beiden Senkrechten die Ebene H, welche die Schnittgerade (E Φ) in K senkrecht (weshalb?) schneidet, so ist der spitze Winkel zwischen den Senkrechten PF und PG gleich dem spitzen Neigungswinkel α der gegebenen Ebenen. Seine wahre Größe ist wie in Üb. 9. durch Umlegen zu ermitteln.



Figur 59.

11. Von einer gegebenen dreiseitigen körperlichen Ecke liegt der Scheitel S auf der Achse; die Kante $S\,A$ fällt in die Achse, SB in Π_1 und SC in den ersten Oktanten (Fig. 60). Die Seiten a, b, c und die Winkel α, β, γ der Ecke zu ermitteln. Anl.: c ist unmittelbar gegeben Nimmt man auf SC einen beliebigen Punkt P an und zeichnet die Fallinien PP_0 und PP_y, sowie ihre Grundrisse $P'P_0$ und $P'P_y$, so erhält man zunächst α und β durch Umlegen von $\triangle\, P\,P_y\,P'$ und $\triangle\, P\,P_0\,P'$ und sodann a und b durch Umlegen der Dreiecke



Figur 60.

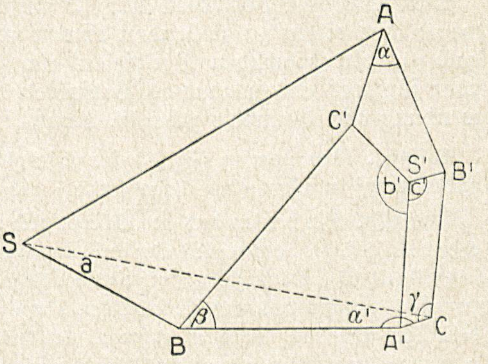
PSP_0 und PSP_y in die Zeichenebene. Um γ zu finden, lege man etwa durch P eine Ebene PQR senkrecht zu SC. Diese enthält bei P den Winkel γ. Da PQ und $PR \perp SP$ sind, findet man die Punkte Q und R und zugleich die wahren Längen von PQ und PR leicht in den umgelegten Dreiecken PSP_0 und PSP_y und kann dann $\triangle\ PQR$ in Π_1 umlegen, um seine wahre Gestalt zu erhalten. Fertige ein Pappmodell der Ecke an.

12. Eine dreiseitige Ecke sei durch ihre Kanten in allgemeiner Lage gegeben. Wie kann man ihre Seiten und Winkel ermitteln? Führe dies für eine Seite und einen Winkel aus.

13. Konstruiere zu der Ecke in Üb. 11. die Polarecke, indem du a) in S auf den Seiten der Ecke nach außen die Senkrechten errichtest, b) von einem innerhalb der Ecke gelegenen Punkte S_1 auf die Seiten der Ecke die Senkrechten fällst.

*14. Löse dieselbe Aufgabe wie 13, wenn die Ecke in allgemeiner Lage gegeben ist.

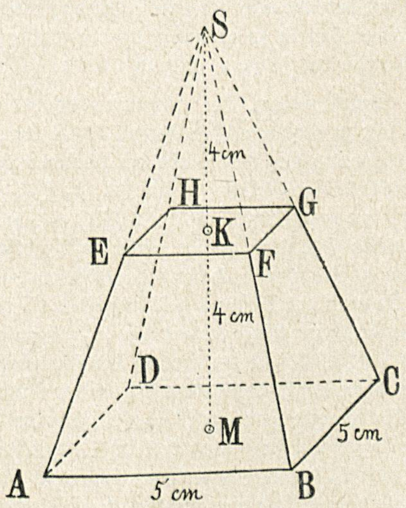
*15. Stelle ein Pappmodell der Ecke mit Polarecke Fig. 61 her.



Figur 61.

P. Körper in allgemeiner Lage.

Schon Albrecht Dürer (s. S. 57) hat Grund- und Aufriß von ebenen Figuren und Körpern in allgemeiner Lage dargestellt. Er zeichnete sie zuerst in möglichst einfacher Lage zu den Bildebenen und brachte sie dann durch mehrere Drehungen um Achsen, die senkrecht zu den Bildebenen gewählt wurden, in möglichst allgemeine Lagen. Dreht man z. B. einen Körper, dessen Grund- und Aufriß vorliegen, um eine senkrecht auf Π_1 stehende Achse um einen beliebigen Winkel α, so beschreiben alle Punkte des Körpers horizontal liegende Kreisbogen (vgl. S. 19), deren Radien gleich den Abständen der Punkte von der Drehungsachse und deren Zentriwinkel alle gleich α sind. Der Grundriß dreht sich somit, ohne dabei seine Gestalt zu verändern. Man kann ihn einfach in die neue Lage durchpausen. Gleichzeitig verschieben sich nun die Punkte im Aufriß, deren Abstände von Π_1 ja unverändert bleiben, geradlinig parallel zur Bildachse. Ihre Endlagen können durch Hinaufloten von den bereits gefundenen Grundrißpunkten schnell ermittelt werden. Sind nun beide Risse fertig, so macht man in derselben Weise eine Drehung um eine Achse $\perp$ Π_2 und schließlich noch



Figur 62.

eine wieder um eine Achse $\perp \Pi_1$. Dann befindet sich der Körper in allgemeinster Lage.

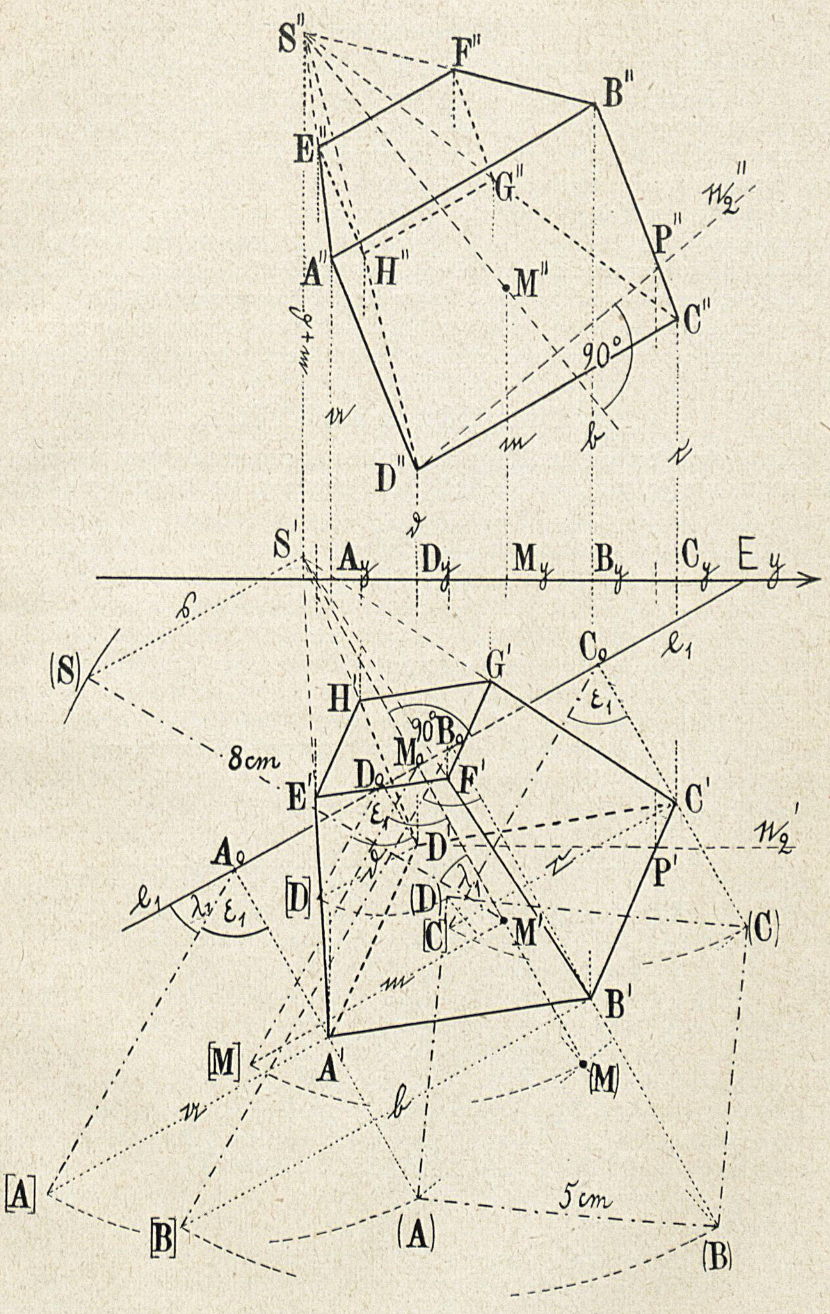
Das Dürersche Verfahren ist sehr einfach, aber etwas zeitraubend und wegen der vielen zu ziehenden Linien nicht sehr genau. Wir wollen deshalb in den folgenden Beispielen ein zwar etwas schwierigeres, dafür aber kürzeres und genaueres Verfahren kennen lernen, das auf der Anwendung von Grundaufgabe 12. beruht.

Beispiel. Von dem in Fig. 62 im Schrägbilde dargestellten quadratischen Pyramidenstumpf in allgemeiner Lage Grund- und Aufriß zu zeichnen.

Analysis. Wir denken uns den Körper mit seiner Grundfläche E auf die Zeichenebene Π_1 gestellt. Der (erste) Grundriß der Grundfläche in dieser (einfachen) Lage sei (A) (B) (C) (D). Dann ziehen wir eine beliebige Gerade e_1 und denken uns E bis an e_1 erweitert und mit dem auf ihr stehenden Körper um ihre Spur e_1 als Achse um einen beliebigen Winkel ε_1 aufwärts gedreht. Der Körper befindet sich dann offenbar in allgemeiner Lage. Seinen (zweiten) Grundriß erhalten wir nun wie folgt:

Zunächst können wir den Grundriß A' B' C' D' und den Aufriß A'' B'' C'' D'' der Grundfläche in der neuen Lage nach Grundaufgabe 12. (S. 34) mit der Vereinfachung erhalten, daß an Stelle der dortigen Horizontalebene H hier die Grundrißebene Π_1 tritt. Um die Risse der über der Grundfläche liegenden Punkte des Körpers zu erhalten, haben wir dann noch die Projektionen dieser Punkte auf die Grundfläche E, zuerst in der ersten, dann in der zweiten Lage zu ermitteln, nach Grundaufgabe 14. in den Projektionen die Senkrechten auf E zu errichten und diesen die gegebenen Längen zu geben. Man braucht also als ersten Grundriß des Körpers nur einen kotierten Grundriß und keinen Aufriß zu zeichnen, da ein solcher nur zur Entnahme der Höhen der einzelnen Punkte des Körpers dienen würde.

Konstruktion. Der erste Grundriß der Grundfläche, das Quadrat (A) (B) (C) (D) ist leicht zu erhalten. Der Fußpunkt (M) der Höhe ist der Mittelpunkt des Quadrats. Die Zeichnung der Grundrisse der oberen Ecken ist hier noch nicht erforderlich. Ziehe nun die beliebige Gerade e_1, fälle $(A)\,A_0 \perp e_1$, trage an $(A)\,A_0$ in A_0 den beliebigen Winkel ε_1 an, trage auf dem Schenkel $A_0\,[A] = A_0\,(A)$ ab und fälle $[A]\,A' \perp (A)\,A_0$, so ist A' der zweite Grundriß von A. Ganz entsprechend bestimme B', C' und D'. $A'\,B'\,C'\,D'$ ist der zweite Grundriß der Grundfläche. $[A]\,A' = a$ ist die Höhe des Punktes A über Π_1, also auch der Abstand des Aufrisses A'' von der Achse. Um A'' zu finden, ziehe $A'\,A_y$ senkrecht zur Achse und mache $A_y\,A'' = a$. In derselben Weise bestimme B'', C'', D''. $A''\,B''\,C''\,D''$ ist der Aufriß der Grundfläche. M' und M'' sind die Schnittpunkte der Diagonalen in den beiden Rissen der Grundfläche. Um nun die Risse von S zu erhalten, ist die zweite Spur e_2 der Ebene E erforderlich. Du erhältst sie leicht nach Grundaufgabe 5, da schon die Risse mehrerer in E liegenden Geraden und außerdem der Spurenschnittpunkt E_y bekannt sind. Dann fälle nach Grundaufgabe 14. von M' die Senkrechte auf e_1 und von M'' die Senkrechte auf e_2. Sie sind die Risse der Pyramidenhöhe. Der Grundriß S' der Spitze wird wie in Grundaufgabe 14. gefunden, der Aufriß S'' durch Hinaufloten von S' nach dem Aufriß der Höhe. Verbinde S' und S'' mit $A'\,B'\,C'\,D'$ bzw. $A''\,B''\,C''\,D''$ und halbiere diese Strecken, so sind auch die Risse der Deckfläche des Stumpfes bestimmt. Eine einfache Überlegung ergibt, welche Kanten sichtbar und welche verdeckt sind (vgl. hierzu S. 12). Gib einige Genauigkeitsproben an!


S''
F''
B''
E''
G''
w_2''
P''
A''
H''
M''
C''
90°
D''
S'
A_y
D_y
M_y
B_y
C_y
E_y
(S)
G'
C_0
e_1
ε_1
H'
90°
B_0
M_0
8cm
E'
D_0
F'
C'
D'
w_2'
A_0
P'
[D]
(D)
e_1
λ_1
ε_1
[C]
M'
(C)
B'
[M]
A'
(M)
[A]
5cm
[B]
(A)
(B)

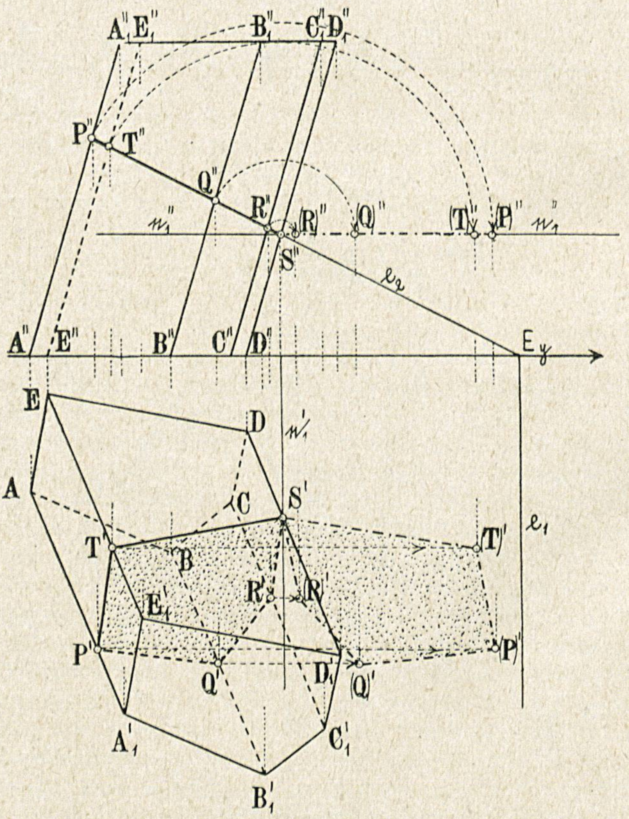
Figur 63.

Übungsaufgaben.

1. Zeichne Grund- und Aufriß, in einigen Fällen auch den Seitenriß oder einen Schrägriß (S. 10) folgender Körper in allgemeiner Lage: a) Würfel. b) Quader. c) Regelmäßiges dreiseitiges Prisma. d) Quadratische Pyramide. e) Oktaeder (aus zwei kongruenten quadratischen Pyramiden zusammengesetzt. Nimm die gemeinsame Fläche als Grundfläche). f) Regelmäßiges Tetraeder. g) Dreiseitiger Pyramidenstumpf. h) Regelmäßige sechsseitige Pyramide. i) Zylinder (vgl. 2. Beispiel S. 35). k) Kegel. l) Kegelstumpf. m) Halbkugel. n) Erdkugel mit dem Äquator und beiden Polen. (Nimm die Äquatorebene als Grundfläche. Die Umrisse sind Kreise, die Pole liegen im allgemeinen *nicht* auf ihnen.) o) Reifen eines Schwungrades (vgl. Üb. 7, S. 37). p) Kugelabschnitt. 2. Zeichne nach dem Dürerschen Verfahren in allgemeiner Lage: a) ein Dreieck; b) ein Quadrat; c) einen Kreis; d) einige der in Üb. 1. angeführten Körper.

Q. Ebene Schnitte durch Körper.

Wir beschränken uns in diesem Abschnitte auf einfache Körper in einfachen Lagen und legen zur Vereinfachung der Zeichnung die Aufrißebene so, daß



Figur 64.

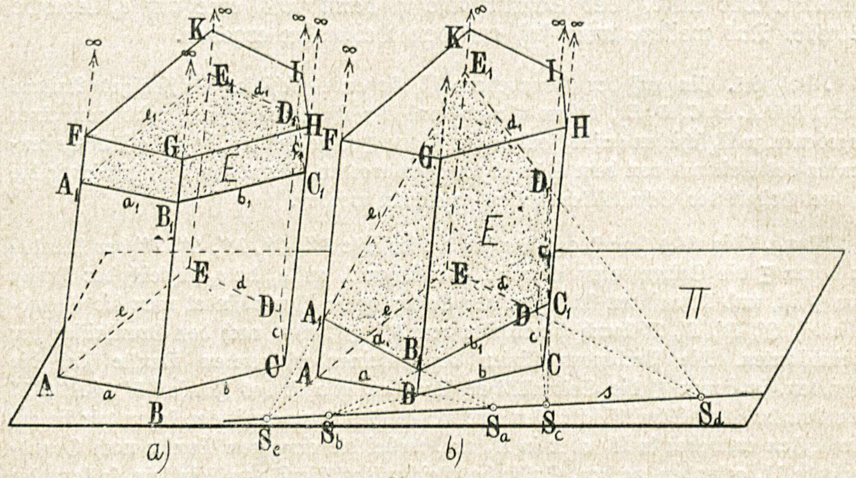
sie auf der den Körper schneidenden Ebene E senkrecht steht. Die Aufspur e_2 von E ist dann nach S. 22 zugleich ihr Aufriß und enthält demnach die Aufrisse aller ihrer Punkte, während die Grundspur e_1 senkrecht zur Achse verläuft. Der Aufriß der Schnittfläche ist dann stets eine auf e_2 liegende Strecke. Das weitere wird sich aus den Beispielen ergeben.

1. Beispiel. Ein auf der Grundebene Π_1 stehendes schiefes fünfseitiges Prisma $A\,B\,C\,D\,E\,A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1$, dessen Grund- und Aufriß gegeben sind, wird von einer gegebenen zu Π_1 schiefen auf Π_2 senkrechten Ebene E so geschnitten, daß alle fünf Seitenkanten des Prismas von dem Schnitt getroffen werden. Grund- und Aufriß sowie die wahre Gestalt der Schnittfläche sollen gezeichnet werden.

Lösung. (Fig. 64.) Zuerst ergeben sich die Aufrisse P'', Q'', R'', S'', T'' der Punkte, in denen E die Seitenkanten schneidet. Sie liegen 1. auf e_2, da e_2 zugleich der Aufriß von E ist, und 2. auf den Aufrissen der Seitenkanten. Dann findet man die Grundrisse P', Q', R', S', T' durch Hinabloten von P'', Q'', usw. nach den Grundrissen der Seitenkanten. Die Verbindungslinien der aufeinanderfolgenden Punkte sind die Geraden, in denen E die Seitenflächen schneidet, also ist das Fünfeck $P'\,Q'\,R'\,S'\,T'$ der Grundriß der Schnittfläche. Um ihre wahre Gestalt zu ermitteln, legen wir sie am einfachsten entweder in Π_1 oder in Π_2 um, wobei die einzelnen Punkte nach Grundaufgabe 11. gefunden werden. Sollte das Zeichenblatt hierfür zu klein sein, so kann die Umlegung auch, wie in Grundaufgabe 11. gezeigt wurde, in eine geeignete zu Π_1 (oder Π_2) parallele Ebene erfolgen. In Fig. 64 ist die Schnittfläche in die durch ihren tiefsten Punkt S gelegte Horizontalebene durch Drehung um die zu Π_2 senkrechte Spurparallele e_1 umgelegt. Dabei beschreiben die Punkte P, Q, R usw. Kreisbogen parallel Π_2, die sich in natürlicher Gestalt und Größe auf Π_2 projizieren und in den Punkten $(P)''$ $(Q)''$ ... auf e_1'' endigen, während ihre Grundrisse sich geradlinig senkrecht zu e_1' bewegen, bis sie schließlich nach Satz 12. in $(P)'$, $(Q)'$, ... lotrecht unter $(P)''$, $(Q)''$, ... liegen. Die Figur $(P)'\,(Q)'\,(R)'\,(S)'\,(T)'$ stellt die wahre Gestalt der Schnittfläche dar, weil sie jetzt parallel Π_1 liegt.

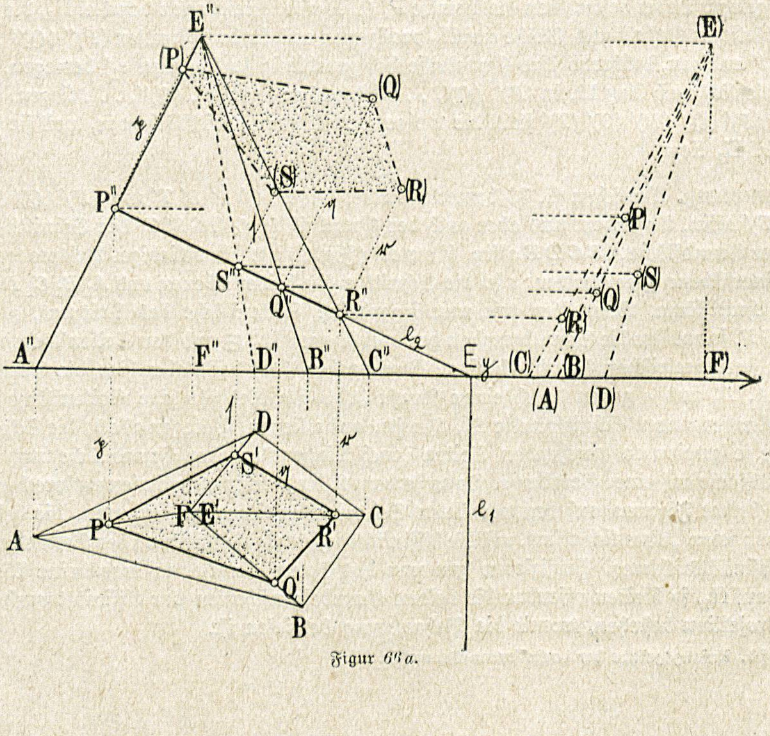
Bemerkung. Wie schon S. 33 bemerkt wurde, sind $P'\,Q'\,R'\,S'\,T'$ und $(P)'\,(Q)'\,(R)'\,(S)'\,(T)'$ affin. Außerdem sind aber auch der Grundriß $P'\,Q'\,R'\,S'\,T'$ der Schnittfläche und der Grundfläche $A\,B\,C\,D\,E$ affin. Beweis (Fig. 65 b): Ein beliebiges Prisma werde von einer Ebene E geschnitten; s sei die Schnittgerade beider Ebenen und $A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1$ die Schnittfläche. Betrachten wir nun irgendeine Seitenfläche des Prismas, z. B. $A\,B\,G\,F$, so müssen die Schnittgeraden der drei Ebenen Π_1, E und der Seitenfläche nach einem stereometrischen Satz durch einen Punkt gehen. Das heißt aber hier, die Geraden $A\,B$, $A_1\,B_1$ und s gehen durch einen Punkt (S_a). Da dies für jede Seitenfläche gilt und alle derartigen Schnittpunkte S_a, S_b usw. auf s liegen, so liegen also 1. die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Seiten (auch Diagonalen) der Grundfläche und der Schnittfläche auf einer Geraden s. Da außerdem 2. die Verbindungslinien entsprechender Ecken beider Figuren auf den parallelen Seitenkanten liegen, so sagt man, die beiden Figuren seien „räumlich affin". s ist die Affinitätsachse und die Richtung der Seitenkanten die Affinitätsrichtung. Projizieren wir nun das Ganze parallel auf irgendeine Ebene, z. B. auf Π_1, so bleiben offenbar die beiden Grundeigenschaften der Affinität auch für die Projektion bestehen, womit die Behauptung bewiesen ist.

Ebenso läßt sich beweisen, daß Schnittfläche und Deckfläche, ja überhaupt je zwei Schnittflächen des Prismas affin sind. Wie läßt sich die Kongruenz paralleler Schnittflächen (z. B. Grund- und Deckfläche) als Sonderfall der Affinität auffassen (s. Fig. 65a)?



Figur 65.

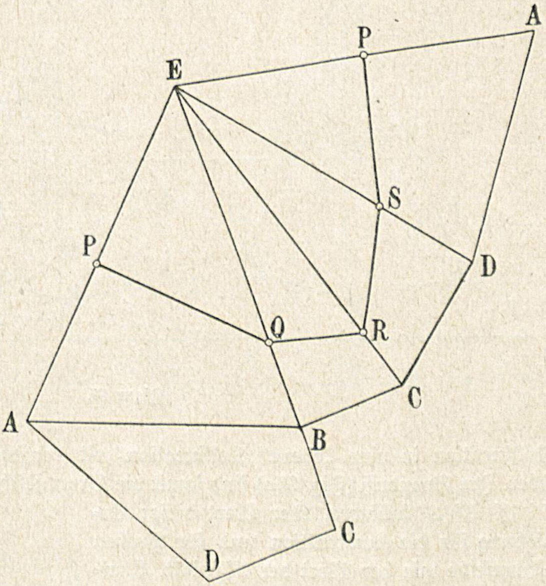
Die Affinität zwischen Grundfläche und Grundriß der Schnittfläche läßt sich oft bei der Konstruktion des Grundrisses und zur Probe vorteilhaft verwenden.



Figur 66a.

2. Beispiel. Durch eine gegebene vierseitige Pyramide $A\ B\ C\ D\ S$ soll ein beliebiger Schnitt senkrecht Π_2 gelegt und das Netz der durchschnittenen Pyramide gezeichnet werden.

Lösung. (Fig. 66.) Man findet, wie im 1. Beispiel, zunächst die Strecke $P''\ Q''\ R''\ S''$ als Aufriß, dann das Viereck $P'\ Q'\ R'\ S'$ als Grundriß der Schnittfläche. Um ihre wahre Gestalt zu erhalten, legt man sie durch Drehung um die Spur e_2, die ja sicher auf dem Papier liegt, in Π_2 um. Man braucht nur die Senkrechten in P'', Q'', R'', S'' auf e_2 zu errichten und auf ihnen die aus dem Grundriß zu entnehmenden Tiefen p, q, r, s der Ecken abzutragen. $(P)\ (Q)\ (R)\ (S)$ ist die wahre Gestalt der Schnittfläche. Sollte das Zeichenblatt zu klein sein, so darf man die Tiefenabstände alle um ein gleiches Stück verkürzen, was mit einer Parallelverschiebung der Figur nach e_2 hin gleichbedeutend ist (oder mit der Umlegung in eine Parallelebene zu Π_2).

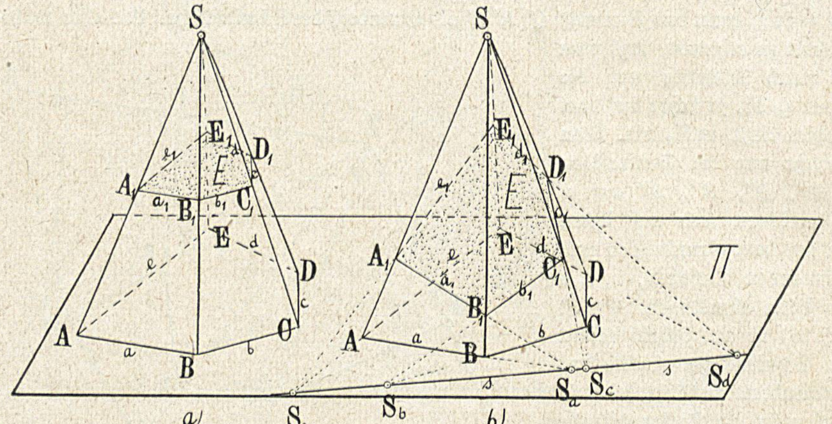


Figur 66 b.

Zur Herstellung des Netzes braucht man die wahren Längen der Seitenkanten mit den auf ihnen liegenden Schnittpunkten. So findet man z. B. die Seitenkante $E A$ als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $E F A$, dessen eine Kathete die Höhe $E F$ der Pyramide ist, während die andere gleich dem Grundrisse $E' A$ von $E A$ ist. Die vier hier erforderlichen rechtwinkligen Dreiecke zeichnet man einfach, wie aus Fig. 66 a ersichtlich ist, neben den Aufriß. Man kann dann durch Parallelen zur Achse durch P'', Q'' usw. schnell in (P), (Q), (R), (S) die wahren Lagen der Schnittpunkte P, Q, R, S auf den Seitenkanten ermitteln. Die Grundkanten der Pyramide sind unmittelbar dem Grundrisse zu entnehmen. Die Konstruktion des Netzes ist aus Fig. 66 b zu ersehen. Man kann dann entweder Modelle der ganzen Pyramide mit den Schnittlinien oder der beiden Teile herstellen. Im letzteren Falle braucht man natürlich auch die Schnittfläche.

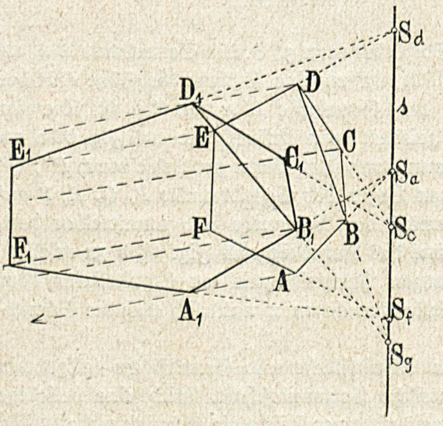
Bemerkung. Auch hier besteht zwischen Schnittfläche und Grundfläche (allgemein zwischen zwei Schnittflächen) eine geometrische Verwandtschaft. Wird eine beliebige Pyramide (Fig. 67 b) von einer Ebene E geschnitten und ist s die Schnittgerade ($\mathsf{E}\,\Pi$), so sieht man ohne weiteres, daß 1. die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der Grund- und Schnittfläche durch einen Punkt S gehen. Ferner läßt sich, wie in der Bemerkung zum 1. Beispiel, beweisen, daß die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Seiten (oder Diagonalen), z. B. $A\ B$ und $A_1\ B_1$, $B\ C$ und $B_1\ C_1$, $A\ C$ und $A_1\ C_1$ usw.

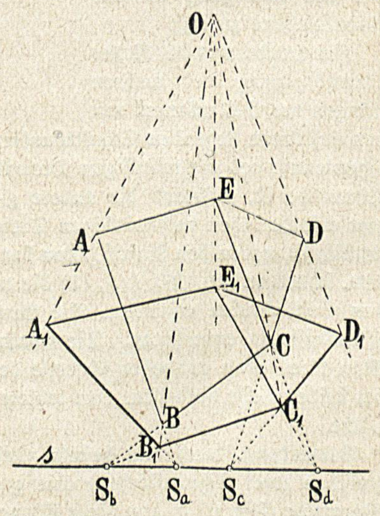
auf s liegen. Man nennt diese Art der Verwandtschaft „räumliche Kollineation“. S heißt das Kollineationszentrum, s die Kollineationsachse. Die beiden Figuren sind „räumlich kollinear“. Durch die Projektion des Ganzen auf eine Ebene geht die räumliche



Figur 67.

Kollineation in eine „ebene“ Kollineation mit denselben beiden Grundeigenschaften über. Im Grundriß (Fig. 66a) sind somit die Grundfläche $A\,B\,C\,D$ und die Schnittfläche $P'\;Q'\;R'\;S'$ kollinear. Der Wert dieser Beziehung für die Konstruktion und für Proben ist derselbe wie der Wert der Affinität. Über-

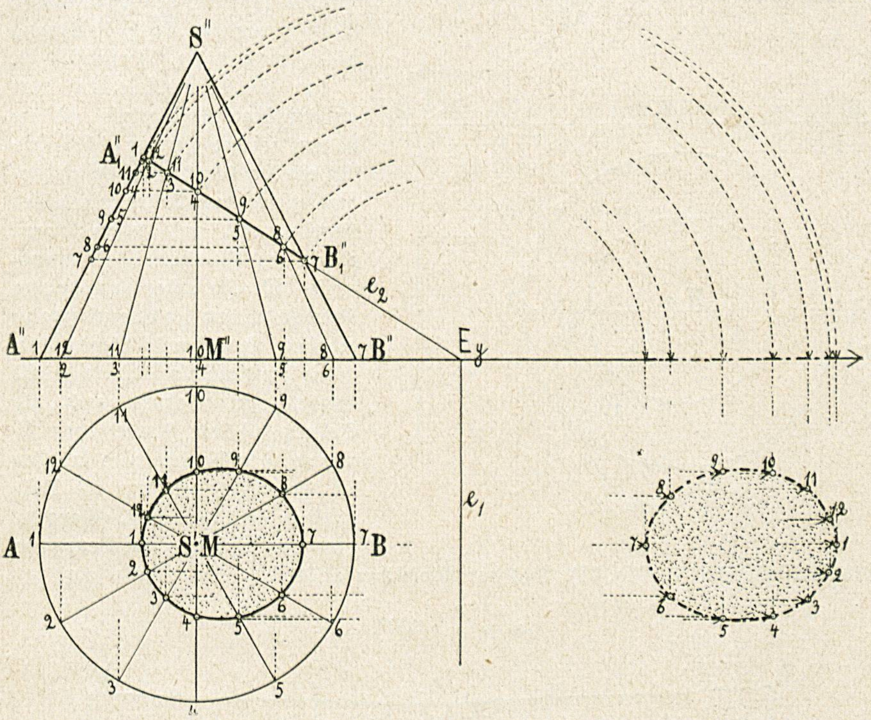




a Figur 68. b

haupt ist die Affinität ein Grenzfall der allgemeinen Kollineation. Sie tritt ein, wenn das Kollineationszentrum S ins Unendliche rückt.

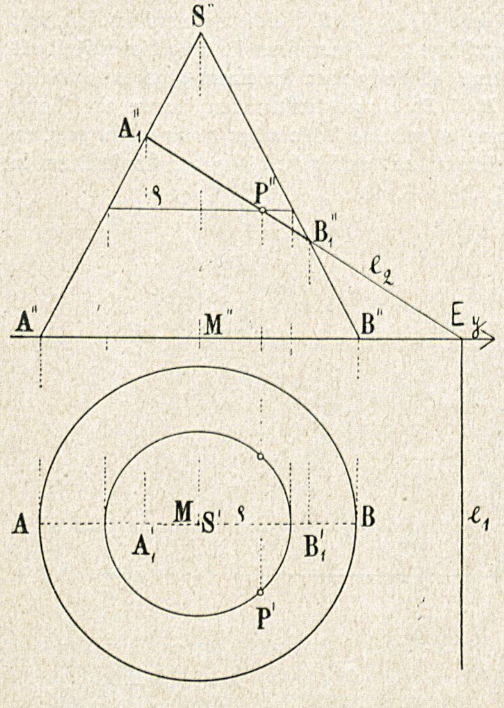
1. Was tritt ein, wenn $\mathsf{E} \parallel \Pi$ wird (siehe Fig. 67a)? 2. Welche Verwandtschaft besteht dann zwischen Grundfläche und Schnittfläche? 3. Inwiefern ist auch dieser Fall als Grenzfall der Kollineation zu betrachten? 4. Aufgabe: Zu einem gegebenen Vieleck $ABCDE$ das kollineare Vieleck $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ zu konstruieren, wenn ein Punkt (z. B. A_1) desselben sowie das Zentrum O und die Achse s der Kollineation gegeben sind. Die Lösung ist aus Fig. 68b ersichtlich und entspricht völlig der Konstruktion in 68a einer affinen Figur (vgl. auch 1. Heft S. 43).



Figur 69.

3. Beispiel. Lege durch einen in Grund- und Aufriß gegebenen senkrechten Kegel einen schiefen Schnitt senkrecht Π_2, der alle Seitenlinien schneidet, und konstruiere die wahre Gestalt der Schnittfläche sowie den abgewickelten Kegelmantel mit der Schnittlinie.

Lösung. Da bekanntlich der Kegel als Grenzfall der Pyramide betrachtet werden kann und seine Seitenlinien den Seitenkanten einer Pyramide gleichzustellen sind, so entspricht die Lösung durchaus der Lösung des 2. Beispiels. Auf dem Grundkreis nimm zweckmäßig 12 Punkte in gleichen Abständen (s. Fig. 69) an, ziehe die zugehörigen Seitenlinien und ermittle ihre Schnittpunkte mit der schneidenden Ebene E. Hierbei stellt sich heraus, daß beim Grundriß die vorderen und hinteren Seitenlinien mit den vom Aufriß kommenden Loten entweder gar keinen oder einen schlechten Schnitt ergeben, da der Schnittwinkel ein sehr spitzer ist. Um auch hier die Schnittpunkte genauer zu erhalten, lege durch einen zu ermittelnden Punkt P einen Horizontalschnitt, dessen Auf-

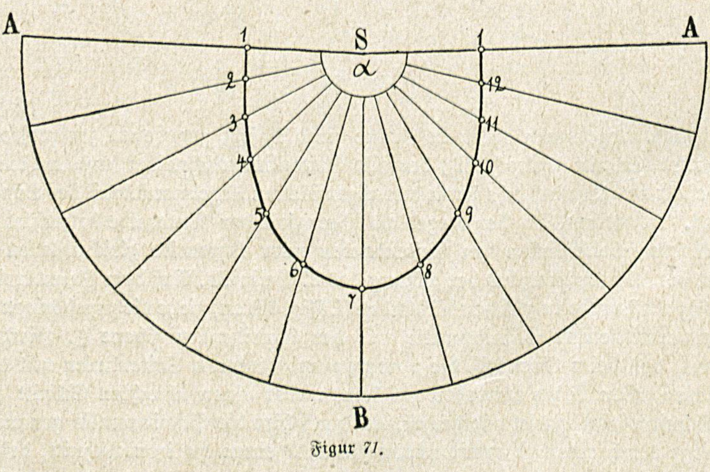


Figur 70.

riß eine Parallele zur Achse und dessen Grundriß ein Kreis um M ist, dessen Radius ρ du unmittelbar dem Aufrisse entnehmen kannst (Höhenlinie). So kannst du alle Punkte des Grundrisses der Schnittfigur genau bestimmen. Die wahre Gestalt konstruiere, falls auf dem Zeichenblock Platz genug ist, durch Umlegung in II_1, wie aus Fig. 69 ersichtlich ist.

Um die Schnittlinie auf dem abgewickelten Kegelmantel zu erhalten, zeichne ihn; er ist bekanntlich ein Kreisausschnitt, dessen Radius gleich der Seitenlinie s des Kegelmantels und dessen Bogen gleich der Peripherie des Grundkreises ist. In erster Annäherung könntest du, um die Bogenlänge zu erhalten, statt der 12 Bogenstücke, in die der Grundkreis $2\pi r$ geteilt wurde, ihre Sehnen auch als Sehnen auf dem Mantelbogen abtragen. Der Fehler wäre indessen bei Annahme von nur 12 Teilpunkten doch zu groß. Genauer wird die Zeichnung bei Benutzung des Mantelwinkels α (Fig. 71). Aus der Projektion $\alpha : 360^0 = 2\pi r : 2\pi s$ folgt

$$\alpha = \frac{r}{s} \cdot 360^0.$$



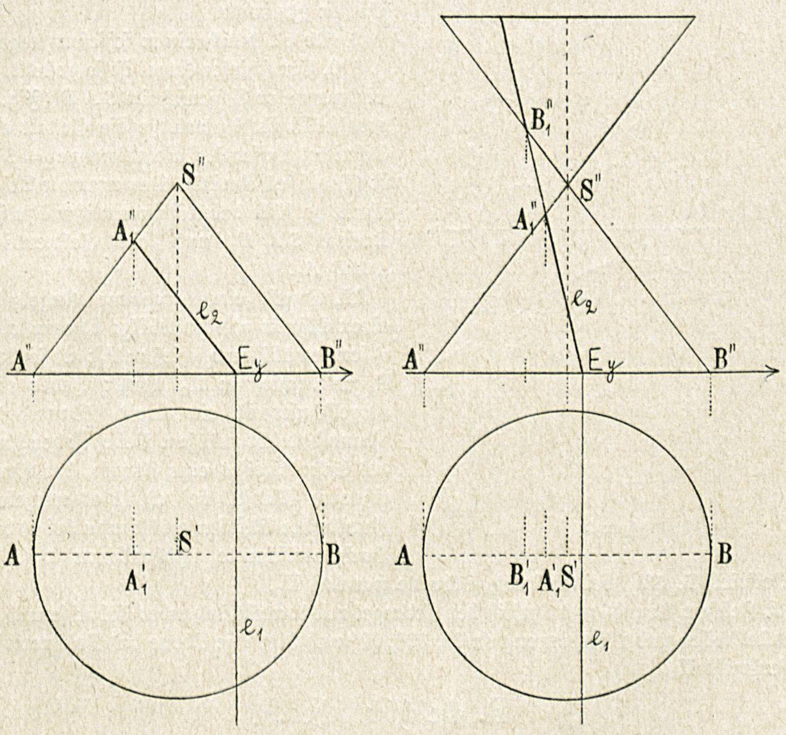
Figur 71.

Hieraus berechne Winkel α und trage ihn, wenn er nicht konstruierbar ist, mit dem Winkelmesser oder mittels seines Tangens an. Teile dann den Mantelbogen in zuerst 2, dann 4 und zuletzt 12 gleiche Teile und verbinde die Teilpunkte mit *S*. Auf den so erhaltenen 12 Seitenlinien bestimme die Schnittpunkte (*1*), (*2*) .. wie in Fig. 66 a. Die 12 zu ihrer Bestimmung dienenden rechtwinkligen Dreiecke S M 1, S M 2, . . . sind alle kongruent und decken sich (Fig. 69 $\triangle\, S''M''A''$). Die erhaltenen Punkte verbinde durch eine möglichst glatte Kurve.

Der in Fig. 69 in seiner wahren Gestalt erhaltene Kegelschnitt ist, wie in Reinhardt-Zeisberg, Teil IV bewiesen wird, eine Ellipse.

Übungsaufgaben.

Wenn nichts anderes bemerkt ist, sollen die Schnitte in den folgenden Aufgaben senkrecht zu Π_2 und schief zu Π_1 gelegt werden. Die Körper stehen mit der Grundfläche auf Π_1. Die wahre Gestalt der Schnittfläche ist stets zu ermitteln.



a Figur 72. *b*

1. Zeichne Schnitte durch folgende Körper:

a) Würfel; b) senkrechtes regelmäßiges dreiseitiges Prisma; c) quadratisches Prisma; d) regelmäßiges sechsseitiges Prisma; e) senkrechter Zylinder. Zeichne jedesmal auch das Netz mit den Schnittlinien.

2. Durch eine senkrechte regelmäßige fünfseitige Pyramide lege einen horizontalen Schnitt und stelle ein Modell des Stumpfes her.

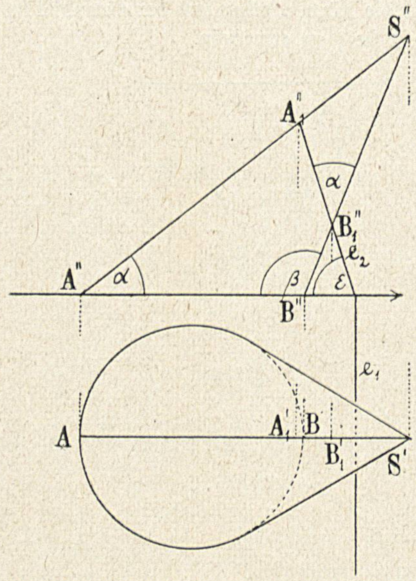
3. Löse dieselbe Aufgabe wie 2. für eine schiefe Pyramide.

*4. Durch ein senkrechtes quadratisches Prisma, von dem zwei Grundkanten der Achse parallel sind, wird ein Schnitt gelegt, der auf Π_1 und Π_2 schief steht. Bestimme die wahre Gestalt der Schnittfläche. Anl.: Wende Grundaufgabe 13. und 11. an.

*5. Löse dieselbe Aufgabe wie 4. a) für eine senkrechte quadratische Pyramide; b) für ein Tetraeder.

6. Lege durch einen Kegel (Fig. 72 a) einen Schnitt, der einer Seitenlinie (SB) parallel ist. (Die Schnittkurve ist eine Parabel.)

7. Lege durch einen Kegel einen Schnitt, der auch den Scheitelkegel (Fig. 72 b) schneidet. (Die Schnittkurve ist eine Hyperbel.)



Figur 73.

8. Lege einen Schnitt durch einen schiefen Zylinder.

9. Desgl. durch einen schiefen Kegel.

*10. Ein schiefer Kegel ist so gestellt, daß sein normaler Achsenschnitt SAB (Fig. 73) parallel Π_2 ist. Untersuche die Gestalt eines Schnittes, dessen 1. Tafelneigung $\varepsilon_1 = \beta - \alpha$ ist (Wechselschnitt). Der normale Achsenschnitt zerfällt dadurch in ein ihm ähnliches Dreieck SA_1B_1 und ein Sehnenviereck ABB_1A_1.

11. Durch eine gegebene Kugel lege einen Schnitt a) parallel Π_1; b) parallel Π_2; c) senkrecht Π_2 und schief zu Π_1; d) senkrecht Π_1 und schief zu Π_2. Anl.: Jeder ebene Kugelschnitt ist ein Kreis. Danach sind a) und b) leicht zu lösen. Bei c) ist der Aufriß des Schnittkreises eine Strecke, der Grundriß eine Ellipse, bei d) ist es umgekehrt. Punkte der Ellipsen erhält man bei c) durch Horizontalschnitte (Höhenlinien vgl. das 3. Beispiel S. 53), bei d) durch Schnitte parallel Π_2.

12. Zeichne Grund- und Aufriß der Erdkugel mit lotrecht stehender Erdachse und den Parallelkreisen und Meridianen von 0°, 30°, 60° und 90°. Die Ebene des Nullmeridians sei senkrecht Π_2.

R. Geschichtliches.

Die Erfindung der Abbildung von Körpern durch Parallelprojektion verdanken wir nicht den eigentlichen Mathematikern, den Vertretern der reinen oder theoretischen Mathematik, sondern den Praktikern. Schon im Altertum wurden in der Baukunst Risse benutzt, ohne welche die Herstellung so mancher großartiger Bauwerke der Alten nicht wohl möglich gewesen wäre. Ohne vorherige genaue Zeichnungen der nötigen Bausteine hätten z. B. Gewölbebauten gar nicht ausgeführt werden können. Von den alten Ägyptern sind auch tatsächlich auf Papyrus gezeichnete Grund- und Aufrisse noch erhalten. Der Begründer der wissenschaftlichen Astronomie Hipparch (160—125 v. Chr.) in Alexandria benutzte bereits die Orthogonalprojektion zur Darstellung der Himmelskugel. Auch Schnitte und Umlegungen wurden schon damals gemacht.

Im Mittelalter waren es ebenfalls in erster Linie die Bauhandwerker in den „Bauhütten", den damaligen Innungen, welche die überlieferten Regeln der senkrechten Projektion weiter entwickelten. Die Mitglieder wurden aber aus Geschäftsinteressen eidlich verpflichtet, ihre Kenntnisse streng geheim zu halten. Die wissenschaftlichen Mathematiker kümmerten sich auch damals gar nicht oder nur sehr wenig um dieses Fach. Diese stiefmütterliche Behandlung eines so wichtigen Zweiges der angewandten Mathematik hat merkwürdigerweise bis in die neueste Zeit gedauert. Es war ein deutscher Künstler, der berühmte Maler Albrecht Dürer (1455—1528), zugleich ein tüchtiger Mathematiker und Architekt, der zuerst in zwei Büchern außer manchem anderen wohl alles veröffentlichte, was man damals über die senkrechte Parallelprojektion wußte. Die Titel lauteten 1. Geometrie, Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheut in Linien, Ebenen und ganzen Körpern (Nürnberg 1525) und 2. Vier Bücher von menschlicher Proportion usw. (Nürnberg 1528). Vieles, was in diesen Werken über das Grund- und Aufrißverfahren steht, besitzt jetzt noch Geltung. Sie waren für Künstler geschrieben. Nach einigen weniger wichtigen Veröffentlichungen erschien erst etwa 200 Jahre später von dem französischen Ingenieur Frézier das Buch: La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois ou traité de stéréotomie, das schon bedeutend mehr in strenger geometrischer Begründung über die senkrechte Projektion enthielt. Aber das erste ausführliche zusammenhängende und wissenschaftliche Lehrbuch der darstellenden Geometrie verdanken wir dem französischen Mathematiker Gaspard Monge (1746—1818), der diesem neuen mathematischen Lehrgegenstand auch in dem Titel seines Buches den Namen Géometrie descriptive gab (1798). Dieses Buch bildet noch heute die Grundlage der darstellenden Geometrie, wenn auch natürlich seit seinem Erscheinen manche der von Monge angegebenen Methoden z. B. durch Anwendung der Affinität, der Kollineation, der Koinzidenzebene usw. verbessert worden sind und manches Neue hinzugekommen ist.

Die Entwicklung der schiefen Parallelprojektion ging neben der Entwicklung der senkrechten her. Sie wurde hauptsächlich zur Herstellung von anschaulichen Schaufiguren benutzt. Ihre theoretischen Grundlagen wurden von Joh. Heinr. Lambert (1728—1777) gegeben.

Reinhardt-Zeisberg

Mathematisches Unterrichtswerk

(ministeriell genehmigt)

Gliederung:

Hofmann, Rechenbuch für Knaben
Frisch, Rechenbuch für Mädchen, je 3 Hefte
Hofmann, Aufgabensammlung für den Rechenunterricht an Aufbauschulen, 1 Heft
Ausgabe A für Realanstalten, 4 Teile in 6 Bänden
„ C „ Gymnasien und Realgymnasien, 4 Teile in 6 Bänden
„ B „ Mädchenschulen, 5 Teile
Hofmann, Vierstellige Logarithmentafel
Detlefs, Darstellende Geometrie, 3 Hefte
Heft 1: Untertertia bis Untersekunda
„ 2: Obersekunda
„ 3: Prima

*

Schlüssel zu allen Teilen (ausschließlich der Darstellenden Geometrie) im Druck bzw. zum Teil erschienen

*

Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt a. M.