

Biblioteka
Politechniki Wrocławskiej

Archiwum

II | D 1972

EINSTEIN'S
RELATIVITÄTSTHEORIE

UND IHRE STELLUNG
IM SYSTEM DER GESAMTERFAHRUNG

VON

DR. KARL BOLLERT



DRESDEN UND LEIPZIG
VERLAG von THEODOR STEINKOPFF

1921

VERLAG VON THEODOR STEINKOPFF, DRESDEN UND LEIPZIG

Wissenschaftliche Forschungsberichte

Naturwissenschaftliche Reihe

Herausgegeben von Dr. R. ED. LIESEGANG, Frankfurt a. M.

Band I:

Analytische Chemie

von

Dr. Th. DÖRING

o. Professor an der Bergakademie Freiberg

VIII und 97 Seiten stark, Preis M. 12,—.

Band II:

Allgemeine Geologie und Stratigraphie

von

Dr. A. BORN

Privatdozent an der Universität Frankfurt a. M.

X und 145 Seiten stark, Preis M. 18,—.

Band III:

Organische Chemie

von

Dr. R. PUMMERER

Professor an der Universität München

XII und 182 Seiten stark, Preis ca. M. 24,—.

Ferner sind in Vorbereitung und erscheinen in rascher Folge:

Anorganische Chemie von Prof. Dr. W. Mecklenburg,
Berlin-Dahlem.

Lebensmittelchemie von Prof. Dr. Heiduschka, Dresden.

Quantentheorie und Atombau (Theorie) von Priv.-Doz.
Dr. Landé, Frankfurt a. M.

Optik und Wellenlehre (experimenteller Teil)
von Prof. Dr. Grebe, Bonn.

Elektronik und Radioaktivität (experimenteller Teil)
von Dr. Gerlach, Frankfurt a. M.

Drahtlose Telegraphie und Telephonie von Dr. Lertes,
Frankfurt a. M.

Mineralogie von Prof. Dr. Gross, Hamburg.

abu. 45
D 1972 E
Archivum

EINSTEIN'S RELATIVITÄTSTHEORIE

UND IHRE STELLUNG
IM SYSTEM DER GESAMTERFAHRUNG

VON

DR. KARL BOLLERT



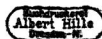
DRESDEN UND LEIPZIG
VERLAG von THEODOR STEINKOPFF
1921

Alle Rechte vorbehalten.

Copyright 1921 by Theodor Steinkopff
Dresden und Leipzig



Inu. 4771.



ak. 4771/49.

Meiner Mutter

gewidmet

VORREDE

Die vorliegende kleine Schrift ist aus einer Reihe von Vorträgen hervorgegangen, die der Verfasser unter dem Titel „Einstein und Kant“ im Jahre 1920 gehalten hat. Sie stellt einen Versuch dar, die auf den ersten Anblick paradoxen Resultate der Relativitätstheorie in das System der kritischen Erkenntnislehre einzuordnen, was nach Ansicht des Verfassers unter gewissen Einschränkungen möglich ist. So lange man freilich in der Kant'schen Raum- und Zeitlehre den Schwerpunkt der kritischen Philosophie sieht, wird man mehr Abweichendes als Gemeinsames finden. Erst wenn man auf den allgemeinen Grundgedanken des kritischen Idealismus zurückgeht, zeigt sich eine so weitgehende Uebereinstimmung, daß man beinahe von einer experimentellen Bestätigung durch die Relativitätstheorie reden kann, eine Uebereinstimmung, die bei manchen modernen Darstellungen des kritischen Idealismus wie bei Natorp bis zu denselben Redewendungen geht. Die Anregungen zu seiner Arbeit hat der Verfasser durch die Lektüre des Cassirer'schen Werkes „Substanzbegriff und Funktionsbegriff“¹⁾ erhalten. Hier kann der Leser statt der fragmentarischen Andeutungen von Kapitel 6 eine ausführliche Behandlung der in Betracht kommenden erkenntnistheoretischen

¹⁾ Bei Bruno Cassirer 1910.

Fragen finden¹⁾. Da die vorliegende Arbeit sich an einen weiteren Leserkreis wendet, war es nötig, die Ordnungsbegriffe der Relativitätstheorie zu erläutern und zu begründen. Hierbei war der übliche analytische Weg, der das Problem erst in seiner Allgemeinheit löst um dann zu spezialisieren, wegen des großen mathematischen Apparats, den diese Methode voraussetzt, nicht gangbar. Statt dessen ist auf synthetische Weise in anschaulicher Form unter Beschränkung auf die verhältnismäßig einfachen Verhältnisse im statischen Gravitationsfeld der Sonne das für den Zweck des Buches Nötige behandelt. Im übrigen gibt die Arbeit nur den individuellen Standpunkt des Verfassers wieder. Ein Eingehen auf andere Ansichten oder auf die interessante Geschichte dieser Fragen war nicht beabsichtigt.

Berlin-Schöneberg, den 1. April 1921.

Karl Bollert.

¹⁾ In diesem Jahre ist übrigens in dem gleichen Verlag eine Spezialarbeit aus derselben Feder erschienen, die dem Verfasser erst nach Schluß seiner Arbeit bekannt wurde, und die dasselbe Thema nach etwas anderen Gesichtspunkten behandelt.

INHALTS-VERZEICHNIS

	Seite
1. Kapitel:	
Die Grundlage der speziellen Relativitätstheorie und das Verhalten von Meßvorrichtungen im Inertialsystem	1
2. Kapitel:	
Die raum-zeitliche Invariante der speziellen Relativitätstheorie und die Lorentztransformationen	8
3. Kapitel:	
Die Union von Raum und Zeit in der speziellen Relativitätstheorie	11
4. Kapitel:	
Die Voraussetzungen der allgemeinen Relativitätstheorie und das Einkörperproblem	17
5. Kapitel:	
Die Euklidische und die Riemann'sche Mannigfaltigkeit . . .	30
6. Kapitel:	
Das Problem der Realität und die Stellung des Objektsbegriffs in der kritischen Erkenntnislehre	41
7. Kapitel:	
Die Gesamterfahrung als ein System von Objektivationsstufen .	46
8. Kapitel:	
Die differentiale und die integrale Methode der Erkenntnis . . .	58

KAPITEL I.

Die Grundlage der speziellen Relativitätstheorie und das Verhalten von Meßvorrichtungen im Inertialsystem.

Den Ort eines materiellen Gegenstandes im Raum kann man nur angeben in bezug auf einen anderen Körper. So kann z. B. der Ort eines Gegenstandes im Zimmer angegeben werden durch seine Entfernungen von drei eine Ecke bildenden Wänden; die Lage des Zimmers kann dann weiter angegeben werden durch seinen Ort in einem entsprechenden durch den Erdmittelpunkt gelegten Koordinatensystem, dieses wieder durch seine Lage in bezug auf das Sonnensystem oder den Fixsternhimmel. Ebenso kann auch die Ortsveränderung eines Körpers nur konstatiert werden in bezug auf einen andern. Gäbe es nur einen einzigen Körper im Raum, so könnte man weder von seinem Ort noch von seiner Bewegung sprechen. Zum Begriff der Bewegung sind also zwei Körper nötig, die relativ zueinander in Bewegung oder Ruhe sind. Jede Frage nach dem absoluten Ort oder nach der absoluten Bewegung hieße fragen nach dem Ort der Welt als Ganzes und wäre logisch ebenso gegenstandslos wie die Frage nach der absoluten Größe eines Dinges. Es wäre das keine Frage nach einem „Wo?“, sondern nach einem „Wo des Wos?“. Bei allen solchen Fragen ist ein Maßstab fingiert, der in keiner Erfahrung gegeben sein kann. Dieser schlichte Gedanke bildet die e i n e Grundlage der Relativitätstheorie.

Unabhängig davon aber ist folgende Fragestellung. Es wäre nämlich auch im Rahmen dieser Ansicht recht wohl möglich, daß der Raum zwischen den Fixsternen nicht leer, sondern mit einem sinnlich nicht wahrnehmbaren materiellen Körper erfüllt ist, der Träger aller derjenigen Veränderungen ist, die keines materiellen Körpers im gewöhnlichen Sinne bedürfen, wie des Lichtes. In bezug auf einen solchen — wir meinen den Aether der alten Physik — ließe sich dann natürlich von Ruhe und Bewegung reden.

Die Frage, ob ein solcher Aether existiert, läßt sich nur experimentell entscheiden. Eine solche Entscheidung herbeizuführen, ist denn auch auf mehrfache Art versucht worden. Der berühmteste derartige Versuch ist der vom Amerikaner Michelson im Jahre 1881 unternommene. Ein kurzes Lichtsignal müßte sich, wenn ein solcher Aether der Träger der Lichtwellen wäre, von seiner Erregungsstelle in dem Aether nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit c als Kugelwelle ausbreiten. Wenn also jemand auf der Erde ein solches Lichtsignal gibt, und die augenblickliche Geschwindigkeit der Erde in Bezug auf den ruhenden Aether gleich v ist, müßte dieser irdische Beobachter in der Richtung seiner Bewegung die Lichtgeschwindigkeit $c-v$, in der entgegengesetzten die Geschwindigkeit $c+v$ messen. Eine solche mit den besten theoretischen und experimentellen Grundlagen ausgeführte Messung hat diese Vermutung nicht bestätigt. Die Lichtgeschwindigkeit erwies sich für diesen irdischen Beobachter in allen Richtungen als gleich groß, so daß ein solcher Beobachter, ganz unabhängig von der wechselnden augenblicklichen Geschwindigkeit in bezug auf einen eventuellen Aether nach dem Ergebnis seiner Messungen wenigstens für die Dauer einer solchen Messung den Mittelpunkt einer Kugelwelle bildete. Für diese Dauer kann die Bewegung der Erde als geradlinig und gleichförmig angesehen werden, so daß wir als zweite Grundlage der Relativitätstheorie den Satz erhalten: für alle Beobachter, die sich geradlinig und gleichförmig¹⁾ bewegen, hat die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen dieselbe Größe c . Ein ruhender Aether als spezifischer Träger der Lichtwirkung existiert also nicht. Trotzdem kann der Raum zwischen den Körpern nicht als leer gedacht werden, da die Gravitationswirkungen, die die Körper aufeinander ausüben, die sogenannten Gravitationsfelder, in irgend einem Sinne eine reale Existenz haben werden. Sie könnten die Lichtgeschwindigkeit beeinflussen²⁾. In dem ersten Teil unserer Betrachtungen wollen wir von den Gravitationsfeldern ganz absehen. Der Raum soll als buchstäblich

¹⁾ Bei den Betrachtungen der speziellen Relativitätstheorie handelt es sich um einen idealen Fall. Es braucht also auf die tatsächlichen Kriterien einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung nicht eingegangen zu werden.

²⁾ Wir werden im vierten Kapitel sehen, daß in der Tat die Lichtgeschwindigkeit von dem Gravitationspotential des Ortes abhängt und dort auch die Gründe erkennen, weshalb sich diese Abhängigkeit bei dem Michelson'schen Versuch nicht bemerkbar machen kann.

leer, also als völlig homogen und isotrop angesehen werden. Die Lichtgeschwindigkeit in einem solchen Raum soll Vakuumlichtgeschwindigkeit heißen, und für diese soll jener Satz von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in aller Strenge gelten. Unter diesem Vorbehalt folgen aus den beiden erwähnten Voraussetzungen in einem großartigen Gedankenexperiment, das wir Albert Einstein verdanken, diejenigen Sätze, die unter dem Namen spezielle Relativitätstheorie bekannt sind, und die zunächst entwickelt werden sollen.

Wir stellen uns für das folgende zwei materielle Systeme vor, die sich geradlinig und gleichförmig mit der relativen Geschwindigkeit v zueinander bewegen. Als anschauliches Beispiel können zwei auf geradliniger Schienenbahn aneinander vorbeifahrende Eisenbahnzüge dienen. In jedem System beziehen wir die materiellen Punkte in gewohnter Weise auf kartesische Koordinaten und wählen die Achsenrichtungen der Figur 1 entsprechend. An jedem

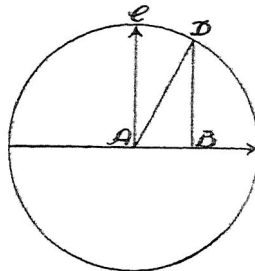


Fig. 1

Eisenbahnzug möge senkrecht zur Schienenrichtung eine spitze Metallstange so angebracht sein, daß im Vorbeifahren die Spitzen sich berühren. Denken wir uns diese Stangen verschieden elektrisch aufgeladen, so würde durch die Berührung ein Funke entstehen, der eine Lichtwelle erzeugen würde. Die Erregungsstelle soll zu Beginn der Zeitzählung den gemeinsamen Mittelpunkt der beiden Systeme bilden. Nach dem Grundprinzip der speziellen Relativitätstheorie können nun zwei mit den beiden Systemen sich bewegende Beobachter A u. B mit dem gleichen Recht sich als in Ruhe befindlich betrachten. Die ganze Anordnung ist offenbar völlig symmetrisch in bezug auf A und B. In der Figur 1 ist nun die Lichtausbreitung vom Standpunkt des Beobachters A gezeichnet. Für ihn wird sich das Licht in Form einer Kugelwelle ausbreiten, deren Radius zur Zeit t die Größe $AC = ct$ besitzt. In derselben

Zeit hat der Beobachter B sich um die Strecke $AB = vt$ weiterbewegt. Auch der Beobachter B konstatiert nun nach der Grundvoraussetzung mit Hilfe seiner Messungen, daß sich das Licht in Form einer Kugelwelle mit dem Zentrum B und der Geschwindigkeit c ausgebreitet hat. Würde der zweite Beobachter die Strecken und Zeiten in derselben Weise messen wie A, so würde ein solches Urteil, wie der Anblick der Figur zeigt, offenbar unmöglich sein. Wenn wir umgekehrt die Zeichnung richtig anlegen vom Standpunkt des Beobachters B, so würden sich dieselben Widersprüche für A ergeben. Diese scheinbaren Widersprüche sind, wie wir im folgenden sehen werden, nur zu beseitigen, wenn wir annehmen, daß beide Beobachter Zeiten und Strecken verschieden messen. Das würde logisch keinen Widerspruch bedeuten, denn es könnte sein, daß bewegte Maßstäbe und Uhren sich anders verhalten, als ruhende. Ueber das Verhalten von solchen bewegten Maßstäben und Uhren wollen wir zunächst drei Sätze ableiten.

1. Ein Maßstab, der zur Bewegungsrichtung senkrecht steht, hat für einen Beobachter dieselbe Länge, gleichgültig, ob er relativ zu ihm ruht oder sich bewegt. Um das zu beweisen, denken wir uns zwei objektiv gleiche Maßstäbe, d. h. zwei solche, die, nebeneinander gelegt, sich als genau gleich erweisen, in der Richtung der y -Achse in A beziehungsweise B angebracht. Für den Beobachter A wäre nun der Maßstab in B ein bewegter. Könnte nun ein solcher Maßstab, z. B. eine von den vorhin erwähnten Eisenstangen, in bewegtem Zustand eine andere Länge haben als ruhend? Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an, es wäre der Fall, und zwar wäre beispielsweise der bewegte Maßstab in B, von A aus beurteilt, verkürzt. Dann würde im Zeitpunkt $t=0$, als die Maßstäbe aneinander vorbeiglichen, das obere Ende des bewegten mit einem Punkt unterhalb des oberen Endes des festen Maßstabes sich berührt haben. Da die Naturgesetze für B aber genau so beschaffen sein müssen wie für A, und für B der Maßstab in A der bewegte ist, so müßte B den Maßstab A für kürzer halten. Beim Vorbeigleiten müßte also für den zweiten Beobachter das obere Ende des Maßstabes in B den Maßstab A überragen. Zu welchen Konsequenzen würde dieses führen? Um dies deutlich hervortreten zu lassen, wollen wir uns einmal statt der beiden Maßstäbe in A senkrecht zur x -Achse eine Metallplatte vorstellen mit einer kreisförmigen Oeffnung und in B eine Kugel, deren Größe und Lage im System genau der Oeffnung

entspricht, wenn Platte und Kugel zueinander ruhen. Es würde unter diesen Voraussetzungen A die Beobachtung machen, daß die bewegte Kugel durch die Oeffnung mit einem gewissen Spielraum hindurchgleitet; für B wäre das nicht der Fall, die Kugel würde gegen den Rand stoßen und dort irgend welche Veränderungen hervorrufen. Derselbe objektive Tatbestand würde also für die beiden Beobachter die Veranlassung zu einer völlig anderen Ereignisreihe sein. Damit wäre die Einheit der Natur überhaupt aufgehoben. Findet also für irgend einen Beobachter ein Ereignis statt, das darin besteht, daß zwei materielle Punkte sich zu irgend einer Zeit berühren — zwei solche materiellen Punkte sind z. B. die Marken der vorhin erwähnten Stäbe, die sich beim Vorbeigleiten berührten — so ist dieses für jeden Beobachter dasselbe Ereignis, ganz unabhängig von seinem Bewegungszustand, denn von einem solchen Zusammentreffen hängen die realen Veränderungen ab. Wir müssen unsere Behauptung noch erweitern. Das reale Geschehene hängt offenbar auch ab von dem Zustand, in dem sich die beiden Punkte im Moment der Berührung befinden. Diese Zustände müssen also für jeden Beobachter im Moment der Berührung die gleichen sein. Eine solche Berührung zweier materieller Punkte, von denen sich jeder in einem bestimmten Zustand befindet, wollen wir eine räum-zeitliche Koinzidenz nennen. Dann gilt als fundamentaler Grundsatz für die Wirklichkeit das Prinzip: die Koinzidenzen sind für alle Beobachter die gleichen. Eine Folgerung dieses Prinzips ist also auch unser Lehrsatz I, daß die Dimensionen von Körpern senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung sich infolge ihrer Bewegung nicht ändern können. Die Strecke BD hat also für beide Beobachter die gleiche Länge. Für die Dimensionen in der Bewegungsrichtung gilt das oben besprochene Schlußverfahren offenbar nicht.

2. Hieraus folgt sofort ein wichtiges Resultat für die Zeitmessung. Beide Beobachter mögen eine Messung der Lichtgeschwindigkeit in ihren Systemen vornehmen, indem sie die Zeit feststellen, die das Licht braucht, um bis zum Punkte D zu gelangen. Für A ist das Licht in einer Zeit t von A nach D gelangt; für B hat es den kleineren Weg BD zurückgelegt. Die Strecke BD wird nach I von beiden Beobachtern als gleich beurteilt. Sie ist gleich $\sqrt{AD^2 - AB^2}$ oder $\sqrt{c^2 t^2 - v^2 t^2}$. Der Beobachter* B soll nun die Zeit unter objektiv gleichen Umständen wie A messen, d. h. mit einer mit ihm festverbundenen, gleichbeschaffenen Uhr. Beide

dividieren den Lichtweg durch die nach ihrer Uhr verfllossene Zeit und erhalten nach dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit denselben Wert c . Es ist das offenbar nur möglich, wenn die von B an seiner Uhr abgelesene Zeit t' in demselben Verhältnis kürzer ist, als die von A an der Uhr in A gefundene, wie der Lichtweg BD kleiner ist als AD. Also

$$t : t' = AD : BD = ct : \sqrt{c^2 t^2 - v^2 t^2}$$

oder
$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2)$$

Wir erhalten also als zweiten Satz:

Eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Uhr geht im Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ langsamer als dieselbe Uhr, wenn sie ruht.

Dieses Resultat kann nicht auf eine bewegte Uhr beschränkt bleiben, sondern der Ablauf der Veränderungen in allen materiellen Körpern, die mit B fest verbunden sind, muß für den Beobachter A in demselben Verhältnis verlangsamt sein, denn sonst würde eine relative Bewegung, die ein Beobachter A, den wir uns in beliebiger Entfernung von B denken können, auszuführen beginnt, auf die Ereignisse in der Umgebung von B einen kausalen Einfluß haben. Zu den Vorgängen, die dem A verlangsamt erscheinen, gehören auch die physiologischen Prozesse im Körper des B und damit auch dessen subjektiver Zeitverlauf. Für B ist daher die sich gleichmäßig auf alles erstreckende Veränderung des Zeitverlaufs der mit ihm verbundenen Ereignisse nicht vorhanden. Dagegen muß ihm der Gang der Uhr des A usw. aus denselben Gründen, die uns zum Satz 2 geführt haben, in dem angegebenen Verhältnis verkürzt erscheinen¹⁾. Eine Konsequenz unseres Satzes ist noch folgende. Von zwei Uhren, die zunächst relativ zu einander ruhen mögen, werde die eine in beschleunigte Bewegung gesetzt, bis sie die Geschwindigkeit v besitzt. Eine Zeitlang lasse man sie sich mit dieser Geschwindigkeit bewegen. Dann gebe man ihr eine der ersten entgegengesetzte Beschleunigung, die die Geschwindigkeit v in $-v$ verwandelt. Die zweite Uhr wird dadurch zu der anderen zurückkehren. Wenn sie dort wieder angelangt ist, ist sie im Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ zurückgeblieben²⁾.

¹⁾ Eine anschauliche Aufklärung dieser Verhältnisse erfolgt in Kapitel III.

²⁾ Vergl. hierzu Seite 24—26.

3. Wir wollen jetzt noch zeigen, daß die Dimensionen von materiellen Körpern, die in der Bewegungsrichtung liegen, in demselben Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ für einen Beobachter verkürzt erscheinen, wenn sich diese Körper relativ zum Beobachter mit der Geschwindigkeit v bewegen. Die Länge eines an einem Beobachter B vorbeifahrenden Eisenbahnzuges läßt sich nicht messen ohne eine Zeitmessung und wird daher mit einer solchen Zeitmessung in den Kreis der Relativität hineingezogen. Der unserer Ableitung zugrunde liegende Gedanke ist folgender. Außer der Lichtgeschwindigkeit muß offenbar auch die relative Geschwindigkeit v , mit der sich zwei materielle starre Systeme gegeneinander bewegen, von beiden Systemen aus gleich beurteilt werden, denn beide Systeme sind nach dem Grundprinzip völlig gleichwertig. Von dem Beobachter B möge nun die Länge des vorbeifahrenden Zuges dadurch gemessen werden, daß er die Geschwindigkeit v mit der nach seiner Uhr während des Vorbeifahrens des Zuges verstreichenden Zeit t' multipliziert. Von den Insassen des Zuges kann dessen „Ruhelänge“ dadurch ermittelt werden, daß sie mit ihren Uhren die Zeit t , in der der Beobachter B an dem ganzen Zuge vorübergleitet, messen. Für die Zuglänge ergibt sich also in bewegtem Zustande die Größe $l' = vt'$ und in Ruhe $l = vt$. Da aber die Uhr des B für die Mitreisenden sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, so gilt nach Satz 2

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{und also auch}$$

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3)$$

Damit erweist sich die schon vor der Relativitätstheorie zur Erklärung des Michelson'schen Versuches von Lorentz und Fitzgerald ersonnene Kontraktionshypothese als eine notwendige Konsequenz der Relativitätstheorie.

KAPITEL II.

Die raum-zeitliche Invariante der speziellen Relativitätstheorie und die Lorentz transformationen.

Wir haben im vorigen Kapitel gesehen, daß Maßstäbe und Uhren sich in bewegtem Zustande anders verhalten als in ruhendem. Jetzt soll allgemein folgende Frage gelöst werden. In dem System A ereigne sich zur Zeit t an einem Ort $(x\ y\ z)$ ein Ereignis. Zu welcher Zeit t' und an welchem Ort $(x'\ y'\ z')$ ereignet sich dasselbe Ereignis in dem System B, wenn sich B mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der positiven x -Achse bewegt und die Zeiten und Längen in beiden Systemen mit in ihnen ruhenden Meßvorrichtungen gemessen werden? Wir nehmen

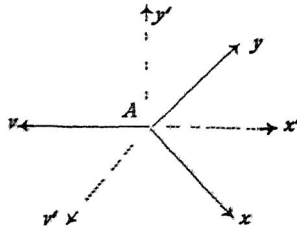


Fig. 2

an, daß zur Zeit $t = t' = t'' = 0$ eine Anzahl Beobachter sich in der Nähe einer Uhr A befinden, von der sie sich mit Geschwindigkeiten v, v', v'' in verschiedenen Richtungen entfernen. Nach den Zeiten t, t', t'' habe die Uhr A in den verschiedenen Systemen die Koordinaten $x\ y\ z, x'\ y'\ z'$ usw., sodaß also $x^2 + y^2 + z^2 = v^2 t^2$. Für die anderen Systeme gelten entsprechende Gleichungen. Die Zeigerstellung der Uhr t_0 ist nun ein Paradigma für ein bestimmtes Ereignis. Sie berechnet sich in den verschiedenen Systemen nach Gleichung 2.

$$t_0 = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t' \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = t'' \sqrt{1 - \frac{v''^2}{c^2}}$$

$$\text{oder } \frac{\sqrt{c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}}{c} = \frac{\sqrt{c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)}}{c} \quad \text{usw.}$$

Die Koordinaten eines punktförmigen Ereignisses werden also in Systemen, die zu Beginn der Zeitzählungen dieselben Koordinatenmittelpunkte besaßen, so gemessen, daß

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2). \quad (4)$$

Von dieser Beschränkung wollen wir uns nun noch freimachen. In den verschiedenen Systemen sind $x y z$ die Koordinaten einer vom Anfangspunkt in den Zeiten t ausgeführten geradlinigen Bewegung. Eine solche Bewegung wollen wir eine Verschiebung nennen und ihr die vier Koordinaten $x y z t$ zuordnen. Die Größe der Verschiebung sei definiert durch den Ausdruck

$$\Delta s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2).$$

Wäre diese Verschiebung nun nicht vom Koordinatenanfangspunkt, sondern von einem beliebigen Punkt aus erfolgt und wären weiter die Systeme mit ihren Mittelpunkten zur Zeit $t = 0$ nicht vereinigt, so müßte man statt $x y z$ die ihnen gleichen Größen $(x_2 - x_1)$ $(y_2 - y_1)$ $(z_2 - z_1)$ und statt t entsprechend $t_2 - t_1$ setzen¹⁾. Es ist also der Ausdruck

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

für alle Systeme eine Invariante.

Bei nicht geradlinigen Bewegungen kann ein hinreichend kleines Stück als geradlinig angesehen werden und wir erhalten definitiv folgenden Satz:

Die Größe einer infinitesimalen Verschiebung ds hat in allen berechtigten Systemen den invarianten Wert

$$\sqrt{c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)} \quad (5)$$

Haben zwei solche berechtigten Systeme die Lagebeziehungen wie in Figur 1 und beginnt die Zeitzählung in ihnen beiden in dem Moment der Vereinigung ihrer Mittelpunkte, so ergeben sich die gesuchten Koordinatentransformationsformeln durch Koeffizientenvergleichung. Die Transformationen müssen so beschaffen sein, daß 4 identisch erfüllt ist. Nach dem Satze von der gleichen Beurteilung von Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung, muß zunächst sein

$$y = y'$$

$$z = z'$$

¹⁾ Dies kann in der speziellen Relativitätstheorie ohne weiteres geschehen, da der Raum nach Voraussetzung homogen und isotrop ist.

Die Gleichung 4 reduziert sich also auf:

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$$

Wir setzen an:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta t \\ t' &= \gamma x + \delta t \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind zu bestimmen. Für B ($x' = 0$) muß die Bewegungsgleichung lauten: $x = vt$. Es ist also $\frac{\beta}{\alpha} = -v$.

Setzt man in den reduzierten Ausdruck von 4 für x' und t' die erwähnten linearen Funktionen ein, so müssen die Koeffizienten entsprechender Glieder gleich sein, da zwei ganze rationale Funktionen derselben Variablen nur dann identisch gleich sind, wenn die Variablen die gleichen Koeffizienten haben. Wir erhalten also den 3 Produkten der Variablen x^2, t^2, xt entsprechend 3 Gleichungen, die mit $\frac{\beta}{\alpha} = -v$ die 4 Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eindeutig bestimmen.

Die Rechnung ergibt

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6)$$

oder nach x', y', z', t' aufgelöst

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6a)$$

Diese Gleichungen vermitteln also den Uebergang von einem System zum andern¹⁾. Ersetzt man die gestrichenen Variablen durch die ungestrichenen und umgekehrt, so müssen sich sämtliche Vorgänge in der Natur für den zweiten Beobachter nach ganz denselben Gesetzen mit denselben Konstanten abspielen wie für den anderen.

1) Wenn v gegenüber c hinreichend klein ist, wie bei den meisten uns zugänglichen Bewegungen, so konvergiert $\frac{v}{c^2}$ und $\frac{v^2}{c^2}$ gegen Null und wir erhalten die bekannten Galilei-Transformationen der klassischen Mechanik

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

KAPITEL III.

Die Union von Raum und Zeit in der speziellen Relativitätstheorie.

In diesem Kapitel wollen wir die durch die entwickelten Transformationsformeln dargestellten Verhältnisse diskutieren. Beginnen wir unsere Betrachtung, indem wir noch einmal zurückgreifen auf die Figur 1. Das, was zunächst überrascht, ist die Tatsache, daß es nicht gelingen will, die Erfahrungen beider Beobachter in einem und demselben Raume darzustellen. Stellen wir die Beobachtung für A richtig dar, dann stimmt unsere Zeichnung für B nicht und ebenso umgekehrt. Nun ist es doch das Grunddogma der alten Physik, daß in einem Zeitpunkt die Welt sich in einem ganz bestimmten Zustande befindet, sodaß also in einem und demselben Raume jedes in diesem Zeitpunkt stattfindende Ereignis seine ganz bestimmte Stelle hat, und daß dieser Zustand für alle in diesem Zeitpunkt lebenden Subjekte derselbe ist. Hier zeigt sich aber schon gleich zu Anfang unserer Betrachtung ein fundamentaler Unterschied. Es hat den Anschein, als ob dieser eine absolute Raum zu eng wäre, um gleichzeitig die Beobachtung von A und B darzustellen. Das ist tatsächlich auch der Fall, wie die folgenden Ausführungen zeigen werden.

Es empfiehlt sich nicht, die Betrachtung wie im vorigen Kapitel rein begrifflich fortzusetzen, sondern wir wollen versuchen, uns auf einem Umwege den in den vorhin entwickelten Formeln liegenden Gehalt anschaulich vor die Augen zu führen. Zu diesem Zwecke müssen wir uns allerdings auf die Vorgänge in einer Ebene beschränken. Wir denken uns in dieser Ebene irgend welche Vorgänge: etwa sich bewegende Punkte und sich in Kreiswellen ausbreitende Lichtsignale. Ein solches Lichtsignal möge zur Zeit $t = 0$ von A ausgehen. Im selben Moment möge ein zweiter Beobachter B sich mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der x -Achse bewegen. Wir denken uns vom Standpunkt des Beobachters A für die darauf folgenden Zeiten die Momentbilder dieser Bewegung auf entsprechende Ebenen aufgezeichnet,

und diese Momentbilder so übereinander geschichtet, daß die Koordinatenkreuze senkrecht übereinander liegen in Abständen, die der verfloßenen Zeit entsprechen. Wir erhalten dann folgenden graphischen Fahrplan: (Fig. 3) A befindet sich dauernd im Mittelpunkt einer Kreiswelle, B bewegt sich auf einer Geraden O B. Nach unserem Grundprinzip muß sich B aber gleichfalls im Mittelpunkt einer Kreiswelle befinden. Die Länge B D wird nach unserem ersten Satz von beiden gleich gemessen, denn sie steht senkrecht zur Bewegungsrichtung. Die Längen in der Bewegungsrichtung werden zwar in beiden Systemen verschieden gemessen, aber sie werden proportional verändert. B muß also unter allen Umständen der Mittelpunkt des auf B D senkrechten Durchmessers sein. Es wird also vermutlich B seine Messungen nicht in derselben Zeitebene machen. Um die Zeitebene t' für B zu erhalten, muß man die Ebene durch B D so drehen, daß $BE = BF$ wird. Dies ist die Ebene t' , auf der alle Ereignisse liegen, die zur Zeit t' sich im System B ereignen. Die übrigen Zeitebenen für B sind dieser parallel.

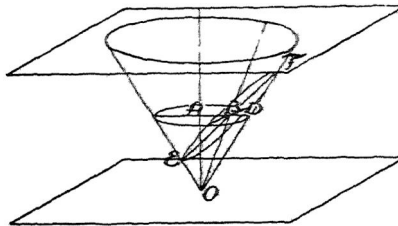


Fig. 3

Wir wollen jetzt nachweisen, daß die eben erwähnte Vermutung in der Tat den Hauptgehalt der Formeln 6 und 6a ausmacht.

In Figur 3 ist der Abstand der verschiedenen Zeitebenen willkürlich gewählt. Er soll jetzt so festgesetzt werden (Figur 4), daß $OA = AH = AG = ct$ wird. Nach 6 und 6a ist für B ($x' = 0$) zunächst $AB = vt$, weiter $t'_B = t_A k^1$.

Welche Ereignisse finden nun für B gleichzeitig zur Zeit t'_B statt? Es sind das die auf der Ebene EBF, deren Gleichung nach 6a lautet:

¹⁾ Im folgenden soll die Zeit einer Uhr, die beispielsweise im System A an dem Ort B ruht, mit t_B , die einer solchen im System B ruhenden mit t'_B bezeichnet werden und für $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ soll die Abkürzung k eingeführt werden.

$$t_{Ak} = t'_B = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{k}$$

Die Zeitwerte von E und F ergeben sich als Schnittpunkte mit den in der Grundebene liegenden Seitenlinien des Lichtkegels, deren Gleichungen $x = \pm ct$ sind. Es ist also $t_E = t_A \left(1 - \frac{v}{c}\right)$ und $t_F = t_A \left(1 + \frac{v}{c}\right)$. Da $t_B = t_A$, folgt hieraus, daß B die Mitte von EF ist.

Wir wollen jetzt die Maßeinheiten im System B analog festsetzen wie für System A. Es sollen sein $BO = BE = BF = BD$, also gleich ct'_B . Dann sind die so definierten Längen auch ihrer Größe nach die durch Formeln 6 und 6a geforderten und es ist

1. OB die Zeitachse für System B der Richtung und Größe nach.
2. der Schnitt der Zeitebene $t'_B = \text{konstans}$ mit dem Lichtkegel der Kreis $x'^2 + y'^2 = (ct'_B)^2$.

Wenn man die Strecken in Figur 4 als Funktionen von t_A berechnet, so erhält man, t_A gleich t und $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = k$ gesetzt,

$$\begin{aligned} AB &= vt \\ AO &= ct \\ BO &= ctk \\ BJ &= vtk \\ OJ &= ctk^2 \\ BK &= vtk^2 \text{)} \end{aligned}$$

Wir können jetzt die früher erhaltenen zunächst etwas paradox anmutenden Resultate aus der Figur 4 ablesen.

A liest zur Zeit t_A an der mit B bewegten Uhr die Zeit t_{Ak} ab, B liest zur Zeit t'_B an der Uhr A nun nicht wieder t_A ab, sondern, da diese Uhr für B im Zustand J ist, die Zeit t_{Ak}^2 ab.

Für beide Beobachter sind also die bewegten Uhren im Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ zurückgeblieben.

1) Die in Figur 3 und 4 anschaulich erfaßten Längen der Strecken stimmen mit den errechneten nicht überein, weil wir die Maßeinheiten in den verschiedenen Richtungen verschieden festgesetzt haben. So ist infolge unserer Festsetzung $BO = ct'_B = ctk$ kleiner als AO und der Schnitt der t' -Ebene mit dem Kegel ein Kreis.

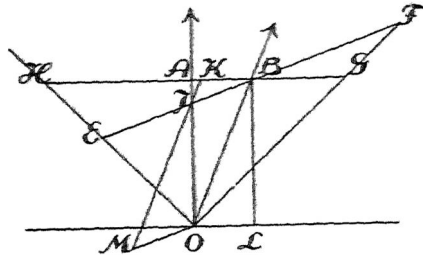


Fig. 4

Ferner werden die „Weltlinien“ eines materiellen Stabes, der die Länge $AB = vt$ besitzt und relativ zu A ruht, repräsentiert durch das Rechteck $ABLO$. Aus diesem Rechteck schneidet die Zeitebene EF die Länge BJ heraus. Er hat also für B die Länge $BJ = vkt$. Ein im System B ruhender Stab von der Länge $BJ = vkt$ wird in der in Figur 4 dargestellten raum-zeitlichen Mannigfaltigkeit dargestellt durch das „Parallelogramm“ $JBMO$, aus dem eine Zeitebene des A die Länge BK ausschneidet, die sich nach dem Proportionalitätensatz berechnet als vtk^2 . Es sind also sowohl für A wie für B die bewegten Maßstäbe, die in der Bewegungsrichtung liegen, in Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ verkürzt. Die senkrecht zur Bewegungsrichtung liegenden Maßstäbe BD (Figur 3) liegen in dem Schnitt der beiden Zeitebenen und werden von beiden Beobachtern gleich beurteilt. Wir sehen also an unserm Modell in anschaulicher Weise unsere früheren Behauptungen bestätigt. Das Interessanteste aber ist folgendes: Denken wir uns in den Punkten E und F Pulverhäufchen, die so beschaffen sind, daß der Lichtstrahl um O sie zur Explosion bringt. Dann würden die beiden Explosionen für den Beobachter B gleichzeitig stattfinden, während die Explosion in E für den Beobachter A zur Zeit $t_A \left(1 - \frac{v}{c}\right)$ und die Explosion in F zur Zeit $t_A \left(1 + \frac{v}{c}\right)$ stattfindet. Es können also zwei Ereignisse, die für einen Beobachter gleichzeitig sind, für einen anderen zu verschiedenen Zeiten stattfinden. Diese Relativierung des Begriffs der Gleichzeitigkeit ist die radikalste Forderung der Relativitätstheorie. Nach der alten Ansicht kommt der Gleichzeitigkeit von zwei Ereignissen absolute Bedeutung zu. Es handelt sich selbstredend, wenn wir von Gleichzeitigkeit reden, um die objektive Gleichzeitigkeit von zwei Ereignissen und nicht um die Gleichzeitigkeit

im subjektiven Erleben, die natürlich auch nach der alten Ansicht von dem Standpunkt des Beobachters abhängt. So ist z. B. natürlich das Sehen von zwei Ereignissen, die verschieden weit von mir entfernt sind, abhängig von meiner Entfernung zu den beiden Ereignissen. Hier wird jetzt aber behauptet, daß auch die durch das Denken festgestellte objektive Gleichzeitigkeit noch von meiner relativen Bewegung zu den Erregungszentren der Ereignisse abhängt. Nach der alten Physik sind die Naturvorgänge so beschaffen, daß sie sich in einem objektiven Raume und in einer Zeit, der Newton'schen Zeit, ordnen. Auch vom Standpunkt der alten Physik hätten wir einen solchen graphischen Fahrplan entwerfen können wie in Figur 4. Es würden dann die t-Ebenen für alle Beobachter dieselbe Schar paralleler Ebenen sein oder, auf die volle Zahl der Dimensionen übertragen, auch von diesem Standpunkt aus wäre die Welt ein vierdimensionales Raum-Zeit-Kontinuum. Wir würden urteilen, daß für uns alle in einem bestimmten Zeitpunkt derselbe objektive Zustand der Welt vorhanden ist oder, um einen bekannten Vergleich zu gebrauchen: das Schicksalsbuch, in dem die vergangenen und zukünftigen Ereignisse aufgezeichnet sind, ist tatsächlich in diesem Sinne ein Buch, daß alle Ereignisse, die zu einem gleichen Zeitpunkt stattfinden, auf einer Seite aufgezeichnet sind und wir daher alle im Fortschritt der einen Zeit eine Seite nach der anderen als Schicksal erleben. Die Welt können wir von diesem Standpunkt aus als ein geschichtetes Kontinuum bezeichnen, dessen einzelne Raumschichten sich wenigstens im Begriff auseinandernehmen lassen. Hier müssen wir das Ganze etwa vergleichen mit einem geaderten Marmorblock. Die verschiedenen räumlichen Lagen und zeitlichen Zustände eines bestimmten materiellen Punktes würden auch hier natürlich durch eine vierdimensionale Kurve dargestellt werden, die man Weltlinie nennt. Diese Weltlinie und ihre Schnittpunkte, die wir früher Koinzidenzen genannt hatten, wären das für alle Beobachter in gleicher Weise Vorhandene. In unserm Vergleich sollen die Marmoradern die Rolle dieser Weltlinien übernehmen. Aber von einer von vornherein gegebenen Schichtung ist keine Rede, so daß also „Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Union der beiden Selbständigkeit bewahren soll.“ (Minkowski)

An Stelle des Werdens im dreidimensionalen Raum tritt in diesem vierdimensionalen Kontinuum ein zeitlos geltendes Sein¹⁾.

Die Spaltung in Raum und Zeit findet erst statt, wenn mit irgend einer Weltlinie ein Beobachter verbunden ist nach dem in Figur 4 unter Benutzung des Lichtkegels beschriebenen Verfahren. Alle Beobachter, deren Weltlinien also nicht parallel sind, spalten die Welt in anderer Weise in Raum und Zeit, so daß jeder für seine denkende Betrachtung seine Erfahrungen in einem anderen Raum und in einer andern Zeit ordnet.

Diese letzten Ausführungen sollen keinerlei metaphysischen Charakter tragen. Wir wollen damit nicht behaupten, daß ein solches zeitloses Gewebe von Koinzidenzen etwa die Welt an sich darstellt, dessen einzelne Partien das Ich sukzessive als sein Schicksal erlebt, sondern nur, daß eben das Erfahrungsganze so beschaffen ist, daß wir unsere tatsächlichen Erlebnisse nicht anders ordnen können als in einem solchen Kontinuum. Davon am Schlusse der Abhandlung mehr.

¹⁾ So haben die Gesetze der zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Felder in diesem vierdimensionalen Kontinuum genau dieselben einfachen Formen wie die des stationären Magnetfeldes im dreidimensionalen Raum, nur ist die Anzahl der Variablen um eine erhöht. (Weyl, Raum — Zeit — Materie [2. Aufl.], 180.)

KAPITEL IV.

Die Voraussetzungen der allgemeinen Relativitätstheorie und das Einkörperproblem.

Die in den früheren Kapiteln abgeleiteten Verhältnisse ergeben sich mit absoluter Konsequenz aus den in Kapitel I angeführten beiden Grundprinzipien der speziellen Relativitätstheorie. Davon war das eine, das Prinzip von der Relativität jeder beobachtbaren Bewegung, von erkenntnistheoretischer allgemeiner Natur, das zweite, das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit dagegen, hatte als experimentelle Grundlage den Michelson'schen Versuch. An dem ersten Prinzip müssen wir also unter allen Umständen festhalten. Die Behauptung, daß zum Begriff der Bewegung zwei verschiedene Körper notwendig sind, und daß es keinen Sinn hat, falls es nur einen Körper gäbe, diesem eine Bewegung zuzuschreiben, wollen wir aufrecht erhalten und zwar nicht nur für den Fall, daß es sich um eine gleichförmige geradlinige Translationsbewegung des Körpers handelt, sondern auch für jede beliebige Bewegung, also auch für jede eventuelle Drehbewegung. Dies scheint mit den Beobachtungen im Widerspruch zu stehen. Denken wir uns zwei flüssige Kugeln von gleicher Größe und Art frei im Raume schweben in so großer Entfernung von einander, daß ihre Gravitationskräfte sich gegenseitig nicht beeinflussen. Der eine Körper soll relativ zum Fixsternhimmel ruhen, der andre eine Drehbewegung ausführen. Dann würde der zweite abgeplattet sein. Nach der Newton'schen Auffassung würde diese Abplattung eine Folge der absoluten Drehbewegung des Körpers sein. Aber diese absolute Drehbewegung ist keine beobachtbare Tatsache. Was wir am Körper tatsächlich beobachten, ist seine relative Drehbewegung zum Fixsternhimmel; sie also können wir allein verantwortlich machen für die Abplattung des Körpers. Die Existenz der Fixsterne und ihre Rotation relativ zum zweiten Körper ist also eine wesentliche Bedingung für die Abplattung dieses Körpers. Wäre es möglich, dem Fixsternhimmel als Ganzem eine Rotationsbewegung von derselben Richtung und Winkelge-

schwindigkeit zu geben wie die des zweiten Körpers, so würde dieser Kugelgestalt annehmen und der erste Körper sich entsprechend abplatten. Die Zentrifugal- und Corioliskräfte¹⁾ sind also, wie schon Mach vermutet hat, eine Folge der relativen Bewegung des Körpers gegen die großen Massen des Fixsternhimmels. Diese Massen rufen auf dem zweiten Körper ein Gravitationsfeld hervor von freilich anderer Beschaffenheit als das Newton'sche. Nach dem Newton'schen Gesetz hängt die Gravitationswirkung, die von allen übrigen Massen auf eine von ihnen ausgeübt wird, nur von der räumlichen Verteilung der Massen ab. Hier hängt sie dagegen auch von dem relativen Beschleunigungszustand der übrigen Massen in Bezug auf diese eine ab. Das Feld ist also für unsere beiden Flüssigkeitskugeln ein verschiedenes. Nehmen wir als Analogon dafür die elektro-magnetischen Felder. Denken wir uns etwa die beiden Flüssigkeitskugeln in gleicher Weise elektrisch aufgeladen, so würde ein Beobachter, der sich mit seinen elektrischen und magnetischen Meßkörpern auf der ersten Kugel befindet, feststellen, daß auf seiner Kugel nur ein elektrostatisches Feld vorhanden ist, während auf der zweiten außerdem ein infolge der durch die Rotation verursachten Konvektionsströme induziertes magnetisches Feld vorhanden ist. Für einen mit der zweiten Kugel rotierenden Beobachter dagegen würden sich diese Verhältnisse in bezug auf die beiden Kugeln grade umgekehrt stellen.

Die erwähnten Zentrifugal- und Corioliskräfte, die mit den Newton'schen Gravitationskräften zu einem Gravitationsfeld, dem Einstein'schen, zusammengefaßt werden, haben nun, so verschieden sie auf den ersten Blick scheinen, eine Eigenschaft mit den Newton'schen Gravitationskräften gemeinsam. In einem hinreichend kleinen Bezirk, in dem man diese Kräfte als homogen ansehen kann, rufen sie bei allen materiellen Körpern dieselbe gleichgerichtete Beschleunigung hervor. Wenn wir also die Bewegung auf ein „lokales“ materielles System, das sich an dieser Stelle befindet und frei beweglich ist, beziehen, so sind in bezug auf

¹⁾ Unter Zentrifugalkräften versteht man diejenigen Scheinkräfte, die auf einen mit dem rotierenden Bezugssystem fest verbundenen Massenpunkt ausgeübt werden. Sie sind es, die die Abplattung hervorrufen. Hat ein solcher Massenpunkt außerdem noch eine Bewegung relativ zu dem rotierenden Bezugssystem, so treten weitere Scheinkräfte auf, die man Corioliskräfte nennt. Diese sind es zum Beispiel, die auf der Erde die Ostabweichung eines fallenden Steins bewirken.

dieses die Beschleunigungen gleich Null. Für einen mit dem System bewegten Beobachter sind also keine Feldwirkungen vorhanden. Er befindet sich also in einem Inertialsystem und für ihn bewegen sich alle freien Körper nach dem Trägheitsgesetz.

In diesem Zusammenhang gewinnt eine altbekannte Tatsache einen neuen Sinn. Daß alle Körper gleich schnell fallen, wird bekanntlich dadurch erklärt, daß die Kräfte, die auf die verschiedenen Körper ausgeübt werden, zwar verschieden groß, nämlich ihren Gewichten proportional sind, daß aber andererseits ihr Trägheitswiderstand in demselben Verhältnis sich ändert, denn Gewicht sowohl wie Trägheitswiderstand sind beide der Masse proportional. Diese Tatsache, die experimentell mit der größten Genauigkeit geprüft ist, wird von der klassischen Mechanik „zwar registriert, aber nicht interpretiert.“ Ihre innere Begründung liegt nun im Vorhergehenden. Die Körper müssen gleich schnell fallen, weil sie sonst in dem Inertialsystem sich nicht nach dem Trägheitsgesetz bewegen würden. Es handelt sich also bei der Trägheits- und bei der Fallbewegung nicht um zwei verschiedene Phänomene, sondern um denselben Tatbestand von zwei verschiedenen Standpunkten aus gesehen. (Prinzip von der Gleichheit der schweren und trägen Masse).

Der Geltungsbereich dieser Äquivalenzhypothese ist aber ein weiterer. In einem solchen frei beweglichen Systeme müssen auch die sämtlichen übrigen Naturvorgänge sich abspielen wie in einem leeren Raume. Es gelten also die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie. In einem im Felde der Erde frei fallenden Kasten muß also z. B. das Licht für einen in ihm befindlichen Beobachter nach allen Richtungen sich geradlinig mit der Geschwindigkeit c ausbreiten. Wenn aber ein horizontaler Lichtstrahl für diesen Beobachter geradlinig ist, so muß derselbe Strahl für einen im Felde der Erde ruhenden Beobachter gekrümmt sein. Das Licht breitet sich also in einem Gravitationsfeld nach anderen Gesetzen aus als in einem leeren Raume. Wir müssen unser Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit für Gravitationsfelder aufgeben¹⁾.

¹⁾ Es wird sich zeigen, daß die Lichtgeschwindigkeiten vom Potential des Ortes abhängen. Bei dem Michelson'schen Versuch werden nur die Lichtgeschwindigkeiten für denselben Ort von einem an dem Ort befindlichen Beobachter in den verschiedenen Richtungen miteinander verglichen. Diese erweisen sich als gleich.

Da von dem Gesetz der Lichtausbreitung alle die Folgerungen der speziellen Relativitätstheorie abhängen, insbesondere das Verhalten von Meßinstrumenten, so müssen wir darauf gefaßt sein, daß dieses Verhalten der Meßkörper durch das Gravitationsfeld verändert wird. Diese Beeinflussung der Meßkörper ist zwar bei den schwachen uns zugänglichen Gravitationsfeldern praktisch eine minimale, dafür aber theoretisch eine so tiefgreifende, daß das Studium der Maßverhältnisse eines beliebigen Gravitationsfeldes eine schwierige Aufgabe ist. Es muß hier auf die Spezialwerke verwiesen werden¹⁾. Wir wollen uns darauf beschränken, diese Frage für das Gravitationsfeld einer Zentralmasse (der Sonne) zu lösen, eine Aufgabe, die sich ohne besonderen mathematischen Apparat behandeln läßt, und die uns Gelegenheit geben wird, diejenigen Bemerkungen zu machen, die für den Zweck dieses Buches notwendig sind.

Wir denken uns zunächst ein homogenes Gravitationsfeld, in dem die Beschleunigung überall die gleiche Größe und Richtung hat. In diesem Felde seien eine Anzahl Uhren auf der x -Achse eines im Felde ruhenden starren Systemes S befestigt, und außerdem sei ein frei bewegliches System S' vorhanden, dessen augenblickliche Lage mit S zusammenfällt und das sich in diesem Moment mit der Beschleunigung γ in der Richtung der negativen x -Achse in Bewegung setzt. Ein Fahrstuhl, der sich eben losgerissen hat, kann als anschauliches Beispiel für das System S' , das Feld der Erde mit den in den Stockwerken ruhenden Gegenständen als Beispiel für das System S gelten.

Es hat zwar noch niemand in einem solchen abstürzenden Fahrstuhl Messungen machen können; wir können aber die Verhältnisse relativ zu ihm auch so völlig überschauen. Da alle freien Körper gleich schnell fallen, wird ihre relative Fallbeschleunigung in bezug auf den stürzenden Fahrstuhl gleich Null sein. Sie werden also für einen im Fahrstuhl befindlichen Beobachter entweder frei schweben oder sich gleichförmig geradlinig bewegen; er wird also urteilen, daß er sich in einem von Gravitationsfeldern freien Inertialsystem befindet. Daß sich die außer seinem Kasten befindlichen Gegenstände mit der Beschleunigung γ in entgegengesetzter Richtung bewegen, wird ihn

¹⁾ A. Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (1916). H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 2. Aufl. (1919).

nicht weiter wundern, wenn er bei genauerer Beobachtung sieht, daß die Lampen usw. an gespannten Hängevorrichtungen hängen, deren nach oben gerichtete Zugkraft eben die Ursache für ihre Bewegung aufwärts ist.

Freilich gilt dieses Verschwinden des Gravitationsfeldes nur für den Bereich, für den vom Standpunkt des Beobachters S ein homogenes Feld von der Stärke γ vorhanden ist; für die übrigen Teile der Erde wäre auch für den Beobachter S' ein Feld von allerdings anderer Beschaffenheit vorhanden wie für S. So würden Körper, die in einer etwaigen Höhle im Mittelpunkt der Erde für S gravitationsfrei schweben, für S' in der Richtung der positiven x-Achse beschleunigt sein, und diese Beschleunigung ließe sich nicht aus Druck- und Zugspannungen erklären. Das aber ist die Behauptung der allgemeinen Relativitätstheorie, daß man jeden materiellen Körper, ganz gleichgültig, wie er sich von einem anderen aus betrachtet bewegt, als ruhend ansehen kann, wenn man das entsprechende Gravitationsfeld bei der Berechnung der Naturvorgänge in Rechnung setzt. Zunächst wollen wir uns auf einen Raum beschränken, der örtlich so begrenzt ist, daß in ihm das Gravitationsfeld als homogen angesehen werden kann. In Fig. 5 sind die Verhältnisse für die beiden Systeme S und S' in derselben Weise graphisch dargestellt wie in Fig. 3, Kapitel 3.

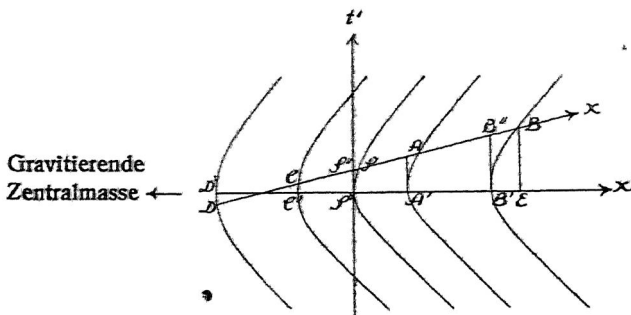


Fig. 5

Der Beobachter S' möge sich hier als in Ruhe befindlich betrachten. Dann sind die Weltlinien von S und den relativ zu S ruhenden Uhren durch die Kurven S' S, A' A usw. gegeben. Diese Uhren müssen, wenn sie objektiv gleich beschaffen sind, zu einer Zeit t' diejenige für alle gleiche Zeigerstellung aufweisen, die einer zur x' -Achse parallelen Ebene entspricht. Ebenso müssen auch alle übrigen objektiv gleichen Veränderungen, die mit diesen Uhren fest ver-

bunden sind, dieselbe Schnelligkeit des zeitlichen Verlaufs zeigen. Wie wird nun der Beobachter S, der relativ zum Gravitationsfeld ruht, diese Vorgänge beurteilen? Seine Weltlinie ist die Kurve S'S, und für ihn sind alle diejenigen Ereignisse mit einem Zeitpunkt t gleichzeitig, die auf einer Ebene SAB liegen, die wir, wie oben angegeben, mit Hilfe des Lichtkegels erhalten können, wenn wir aus ihm eine Ellipse so herausschneiden, daß S ihr Mittelpunkt ist. Dieses Verfahren würde allerdings, streng genommen, voraussetzen, daß S sich gleichförmig und geradlinig bewegt. Es wird aber auch dann noch richtig sein, wenn S, verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit, so langsam beschleunigt ist, daß er sich quasi stationär d. h. so bewegt, daß seine Messungen nur von der augenblicklichen Geschwindigkeit und nicht von seiner Beschleunigung abhängen. Zu Beginn der Zeitzählung waren die beiden Systeme miteinander in Deckung. Wir wollen jetzt unsere Formeln 6 beziehungsweise 6a ansetzen für den Zeitmoment, in dem sich die Beschleunigungen zu der hinreichend kleinen Relativgeschwindigkeit Δv addiert haben.

Zunächst ist:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' - \frac{\Delta v x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{(\Delta v)^2}{c^2}}}$$

In dieser Formel bedeutet $\Delta t'$ die Zeigerstellung einer der mit S festverbunden in der Entfernung x' befindlichen Uhren und Δt die Zeit im System S oder die Zeigerstellung einer in der Nähe von S ruhenden Uhr. Es ist also

$$\Delta t = \frac{\Delta t' \left(1 - \frac{\Delta v x'}{\Delta t' c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{(\Delta v)^2}{c^2}}}$$

Gehen wir zur Grenze über, so wird

$$dt = dt' \left(1 - \frac{\gamma x'}{c^2} \right).$$

Für S gehen also Uhren, die relativ zu ihm auf der x-Achse ruhen, verschieden schnell (vgl. auch Figur), und zwar diejenigen, die auf der negativen x-Achse liegen, also der gravitierenden Masse

¹⁾ Man beachte, daß jetzt sich das System S in der Richtung der positiven x-Achse bewegt und daß daher das Vorzeichen von Δv negativ ist.

näher liegen, langsamer als die Uhren in seiner Nähe. Da $\gamma x'$ die Potentialdifferenz $\Phi(x')$ zwischen einer Uhr in der Entfernung x' und der Uhr bei S ist, so kann die Formel auch geschrieben werden:

$$dt = dt' \left(1 - \frac{\Phi(x')}{c^2} \right)$$

Aus den übrigen Gleichungen 6 und 6 a folgt nur:

$$x = x', y = y', z = z'$$

Wir können also die Indizes hier fortlassen. Für dt wollen wir t_0 und für dt' t_x schreiben, da die Gleichung nach ihrer Ableitung auch für endliche Zeiten gelten muß.

$$t_0 = t_x \left(1 - \frac{\Phi(x)}{c^2} \right) \quad (7)$$

Wir wollen die Gleichung 7 noch von der Einschränkung auf ein homogenes lokales Feld befreien. Zu dem Zweck denken wir uns die Potentialdifferenz auf der x-Achse in n hinreichend kleine gleiche Teile von der Größe $\frac{\Phi(x)}{n}$ zerlegt, so daß wir in den auf diese Weise entstehenden lokalen Systemen die Beziehung 7 anwenden können. Für in benachbarten Teilpunkten angebrachten Uhren $t_0 t_1 t_2 \dots t_x$ gelten dann die Gleichungen

$$t_0 = t_1 \left(1 - \frac{\Phi(x)}{nc^2} \right)$$

$$t_1 = t_2 \left(1 - \frac{\Phi(x)}{nc^2} \right) \text{ usw.}$$

Durch Elimination ergibt sich dann

$$t_0 = t_x \left(1 - \frac{\Phi(x)}{nc^2} \right)^n$$

In erster Annäherung, wenn wie überall im folgenden die höheren Potenzen von $\frac{\Phi(x)}{c^2}$ vernachlässigt werden:

$$t_0 = t_x \left(1 - \frac{\Phi(x)}{c^2} \right) \quad (7)$$

oder in derselben Annäherung

$$t_x = t_0 \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2} \right) \quad (7a)$$

Eine Anwendung dieser Beziehung ist Folgendes. Da alle Vorgänge in der Nähe von gravitierenden Massen langsamer verlaufen von einem entfernten Beobachter aus beurteilt, so müssen zum Beispiel auch diejenigen periodischen Veränderungen, die

zur Bildung der Spektrallinien Veranlassung geben, auf der Oberfläche von Sternen mit großer Masse eben merklich langsamer verlaufen und daher die Linien etwas nach Rot verschoben sein, wenn sie von einem irdischen Beobachter betrachtet werden.

* * *

Vielleicht ist es bei dieser Gelegenheit angebracht, das zu Beginn von Kapitel 4 Besprochene an einem konkreten Beispiel zu erläutern, da wir jetzt mit Hilfe von 7 imstande sind, dieses Beispiel auch rechnerisch zu behandeln. Zwei Eisenbahnwagen S und S' befinden sich in A nebeneinander auf zwei parallelen Geleisen. S hat soeben von einer Lokomotive einen Stoß erhalten, der ihm die Geschwindigkeit v erteilt hat. Mit dieser Geschwindigkeit bewegt sich S gleichförmig eine Zeit t (gemessen an einer ruhenden Uhr), bis im Punkte B die Bremse angezogen wird, die ihm in der kurzen Zeit τ auf dem kleinen Wege BC eine gleichförmige Verzögerung γ erteilt. In C kommt er zur Ruhe. Wir wollen diesen Vorgang von den Standpunkten zweier Beobachter, die sich in den Wagen befinden, verfolgen. Hierbei wird uns die kleine

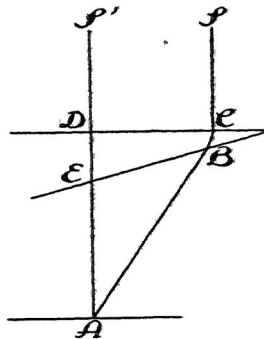


Fig. 6

nebenstehende Skizze der beiden Wagen mit den Weltlinien behilflich sein. Für den Beobachter S' gestaltet sich der Vorgang einfach. Wenn sich zur Zeit t S' im Weltpunkt D befindet, so ist, von für die Zeitmessung unwesentlichen Abweichungen im Anfang und am Ende des Vorgangs abgesehen, während der Zeit t die Uhr des S nach Satz 2 Seite 6 im Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ zurückgeblieben. Er liest also auf der Uhr S in C und auch schon angenähert in B die Zeigerstellung $t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ab. Zu demselben Resultat in

bezug auf die beiden Uhren muß am Ende des Vorgangs auch S gelangen, da beide Wagen dann in einem gravitationsfreien Felde relativ zueinander in Ruhe sind ¹⁾.

Nach dem Grundprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie kann sich auch S während des ganzen Vorgangs als in Ruhe befindlich betrachten. Wie ist das möglich? fragen wir, und welches sind seine Uhrenbeobachtungen in den verschiedenen Zeitmomenten? Nach dem Stoß der Lokomotive bewegt sich für ihn die Erde mit dem Wagen S' mit der Geschwindigkeit v der Stoßrichtung entgegengesetzt. Er wird sich das dadurch deuten, daß während des Stoßes im ganzen Raume ein homogenes Gravitationsfeld vorhanden war, dessen Beschleunigungen der Stoßrichtung entgegengesetzt waren. Sein Wagen ist daher allein in Ruhe geblieben, während sich alle übrigen Gegenstände, auch die im Wagen befindlichen, sich mit der Geschwindigkeit v in Bewegung gesetzt haben. Während der Zeit des Stoßes hat aus denselben Gründen wie in Figur 5 dieses Gravitationsfeld eine Drehung der Zeitebene bewirkt. (Siehe Skizze.) Jetzt bewegt sich der Wagen S' gleichförmig, bis die Bremsvorrichtung im Weltpunkt B in Aktion tritt. Im Punkt B zeigt nach der Voraussetzung oben die Uhr S die Zeigerstellung $t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Die bewegte Uhr S' zeigt also in E die Zeigerstellung $t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$, da sie zurückgeblieben ist. Während der Wirkung der Bremsvorrichtung auf dem Wege BC ist für S trotz der zwischen den festgeklemmten Rädern und Schienen bestehenden Reibung keine Mitführung des Wagens durch die bewegten Schienen vorhanden. Diesen Umstand und die verlangsamte Bewegung des Erdkörpers erklärt er sich wieder durch ein entsprechendes, dem ersten entgegengesetztes Gravitationsfeld. Dieses hat eine Drehung seiner Zeitebene in die alte Richtung DC zur Folge, so daß er tatsächlich zuletzt an S' die Zeit t abliest.

Eine kleine Rechnung zeigt dasselbe. In E zeigt die Uhr S' die Zeigerstellung $t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$. Da sie in D die Zeit t anzeigen muß, ist sie also während der zweiten Drehung²⁾ um $t \frac{v^2}{c^2}$ voraus-

¹⁾ Von dem Newton'schen Gravitationsfelde der Erde kann während der ganzen Betrachtung abgesehen werden; es hat keinen Einfluß auf die Zeitmessung, da es keinen Potentialunterschied zwischen den beiden Uhren bedingt.

²⁾ Die erste Drehung hat nach der Figur und der Formel 7a auf die dort benachbarten Uhren keinen Einfluß.

geeilt. Das geht auch aus 7a hervor. Während des Vorhandenseins des Gravitationsfeldes, also während der Bremszeit τ hat die Uhr S' einen Zeitzuwachs von $\tau \left(1 + \frac{\gamma x}{c^2}\right)$. Sie ist also der Uhr S um $\tau \frac{\gamma x}{c^2}$ vorausgeeilt. Da $v = \gamma \tau$ und $x = vt$ ist, so ergibt sich in Uebereinstimmung $t \frac{v^2}{c^2}$ für den Zuwachs.

Wenn man übrigens den Wagen S dieselben Bewegungen rückwärts durchlaufen läßt, bis er wieder mit S' an derselben Stelle ruht, dann werden die Uhren S und S' nach dem Gesagten die Zeiten $2t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ bzw. $2t$ anzeigen, wie schon auf Seite 6 erwähnt.

* * *

Wir wollen jetzt das Verhalten von Maßstäben im Gravitationsfeld untersuchen. Wir denken uns zu diesem Zweck einen im gravitationsfreien System S' ruhenden Maßstab $S'B'$ (Figur 5). Die Weltlinien seiner Endpunkte sind dann der t' -Achse parallele Gerade. Für den Beobachter S führt der Stab also eine beschleunigte Bewegung aus. Ein Blick auf die Figur zeigt schon, daß sich für S die beiden Endpunkte mit verschiedener Geschwindigkeit bewegen. Wir berechnen zunächst den Weg seines Endpunktes B' ; dieser Weg hat die Länge BB'' , die für einen kleinen Zeitzuwachs sich von $B'E$ nicht merklich unterscheidet. Für einen solchen kleinen Zeitzuwachs werden die in der Figur gezeichneten Kurvenstücke von der Gestalt von Parabeln nicht merklich abweichen. Infolgedessen ist $(B'E)^2 = \frac{1}{2} \gamma t_x^2$ und

$$v_x = \gamma t_x \text{ oder nach 7a}$$

$$v_x = \gamma t_0 \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2}\right) = v_0 \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2}\right)$$

Es ist also infolge der verschiedenen Geschwindigkeit des Zeitablaufs die Geschwindigkeit der verschiedenen Punkte dieses Stabes eine Funktion ihrer Entfernung. Diesen Geschwindigkeiten aber sind die Verschiebungen eines solchen Stabes proportional. Wird also der Stab in der Nähe von S um dl_0 verschoben, so verschiebt sich das andere Ende um eine andere Länge dl_x , so daß

$$dl_x = dl_0 \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2}\right) \quad (8)$$

Eine Länge dl_0 verkürzt oder verlängert sich also in dem angegebenen Verhältnis, wenn sie in der x -Richtung liegt und zu einem Punkt anderen Potentials transportiert wird. Für Längen senkrecht zur Richtung des Feldes gilt das nach Satz 1 der speziellen Relativitätstheorie Seite 4 nicht. Hieraus ergeben sich tiefgreifende Veränderungen der geometrischen Verhältnisse. Ueber diese wird im fünften Kapitel die Rede sein.

Berechnen wir noch die Lichtgeschwindigkeit in einem Punkte P, der auf der x -Achse zwischen der gravitierenden Masse und dem Beobachter S liegen möge. Zur Zeit $t=0$ sei in P ein Lichtsignal gegeben, das sich für den gravitationsfreien Beobachter S' in Kugelwellen mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Für ihn gelten die Gleichungen $\frac{dz'}{dt'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dx'}{dt'} = c$, wenn dx' , dy' , dz' die der Zeit dt' entsprechenden Lichtwege sind. Von S wird nun der Vorgang nach dem Vorhergehenden wie folgt beurteilt. Von den vier Größen werden von ihm mit seinen Instrumenten nur dy' und dz' in gleicher Weise gemessen. Die Länge der Zeit dt' erscheint ihm im Verhältnis $1:1 + \frac{\Phi(x)}{c^2}$ vergrößert¹⁾, da, mit seiner Uhr verglichen, alle Vorgänge, die dem Gravitationszentrum näher liegen, verlangsamt erscheinen. Die Größe von dx' dagegen erscheint ihm in demselben Verhältnis nach 8 verkleinert. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt daher für ihn in der Richtung der y -Achse:

$$c_y = c \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2} \right)$$

und in der Richtung der x -Achse:

$$c_x = c \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2} \right)^2 = c \left(1 + 2 \frac{\Phi(x)}{c^2} \right)$$

Die Lichtwelle hat also für S die Form eines Rotationsellipsoids mit der Hauptachse c_x und den Nebenachsen c_y gleich c_z . In einer Zwischenrichtung, die mit der x -Achse den Winkel φ bildet, ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit als Radius ρ der Rotationsellipse. Es ist nach der Ellipsengleichung:

$$\rho^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) = 1.$$

Setzt man für a und b bzw. c_x und c_y ein, so ergibt eine einfache Rechnung in derselben Annäherung:

¹⁾ $\Phi(x)$ ist nach unserer Annahme auf der negativen x -Achse negativ.

$$c_{\varphi} = c \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2} (1 + \cos^2 \varphi) \right) \quad (9)$$

Befindet sich der Beobachter am Rande des Feldes im gravitationsfreien Raum, so muß c_{φ} den Betrag c für alle Werte von φ annehmen. Es ist das der Fall, wenn für $\Phi(x)$ gesetzt wird $-\frac{kM}{r}$, wo M die Zentralmasse und k die Gravitationskonstante bedeutet. Da das Feld kugelsymmetrisch ist, so ist damit unsere Aufgabe vollständig gelöst. Der Wert

$$c_{\varphi} = c \left(1 - \frac{kM}{rc^2} (1 + \cos^2 \varphi) \right) \quad (9a)$$

stellt für einen am Rande des Feldes stehenden Beobachter die Größe der Lichtgeschwindigkeit dar für denjenigen Strahl, der einen Ort in der Entfernung r von der Zentralmasse passiert und mit r den Winkel φ bildet.

Für einen solchen Beobachter können wir zum Schluß noch die Krümmung eines Lichtstrahls, die nach dem Huygens'schen Prinzip eine Folge der mit dem Ort veränderlichen Geschwindigkeit ist, berechnen. Wir wählen ein Koordinatensystem der nebenstehenden Skizze entsprechend. In M sei die gravitierende Masse. Der Lichtstrahl sei als x -Achse, das Lot MO als y -Achse gewählt. Der Beobachter befinde sich auf der positiven x -Achse in großer Entfernung. MC ist gleich r .

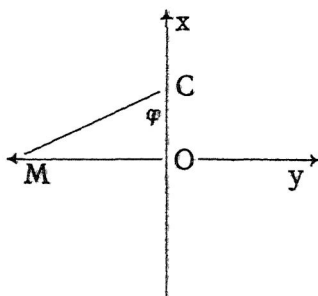


Fig. 7

Die zu berechnende Krümmung ist so minimal, daß man mit genügender Annäherung die x -Achse als Ort des Lichtstrahles annehmen kann. In der Zeit dt haben sich um die auf der y -Achse liegenden Zentren A und B zwei Elementarwellen ausgebreitet. Ist die Lichtgeschwindigkeit in B gleich c_{φ} und ist $AB = dy$,

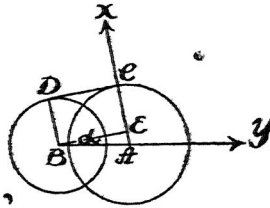


Fig. 8

so ist diese in A gleich $c_\varphi + \frac{\partial c_\varphi}{\partial y} dy$. Es ist also

$$AE = \frac{\partial c_\varphi}{\partial y} dy dt \text{ oder, wenn } AE = dx,$$

$$AE = \frac{\partial c_\varphi}{\partial y} dy \frac{dx}{c}$$

Folglich ist auf dem Wege dx die Krümmung

$$\alpha \sim \sin \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{\partial c_\varphi}{\partial y} \frac{dx}{c}$$

Die Gesamtkrümmung ist dann

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial c_\varphi}{\partial y} \frac{dx}{c} \text{ oder nach 9a, da } \cos \varphi = \frac{x}{r},$$

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \left[1 - \frac{kM}{rc^2} \left(1 + \frac{x^2}{r^2} \right) \right]}{\partial y} dx$$

Die Ausrechnung ergibt

$$B = \frac{4kM}{c^2 \mathcal{A}}, \text{ wo } \mathcal{A} = MO$$

Für einen am Sonnenrand vorbeigehenden Lichtstrahl hat B den Wert $1,7''$.

Diese von Einstein vorausgesagte Krümmung wurde durch Messungen gelegentlich einer Sonnenfinsternis im Mai 1919 mit hinreichender Genauigkeit bestätigt.

KAPITEL V.

Die Euklidische und die Riemann'sche Mannigfaltigkeit.

Bei der modernen wissenschaftlichen Begründung der geometrischen Sätze geht man nicht mehr von dem anschaulich erfaßten Sein der einzelnen geometrischen Grundgebilde aus, da dieses sich allen Versuchen, es in strenge Definitionen zu fassen, entzieht, sondern man definiert diese Grundgebilde durch ihr gegenseitiges Verhalten, indem man ihren Verknüpfungszusammenhang in einfachen axiomatischen Lehrsätzen festlegt. Auf diese Weise gelangt man im Fortschritt der wissenschaftlichen Arbeit immer mehr zu einem in sich geschlossenen, freischwebenden System von streng gültigen Wahrheiten. Diese vielbewunderte Allgemeingültigkeit der geometrischen Wahrheiten ist allerdings um einen bestimmten Preis erkaufte. Sie sind nur deswegen jeder Kritik entrückt, weil sie nichts mehr aussagen wollen über die Wirklichkeit selber. Sie behaupten nur, daß unter bestimmten axiomatischen Voraussetzungen gewisse Folgerungen gelten. Ob es aber in der Wirklichkeit physikalische Gebilde gibt, die dem Komplex von Axiomen entsprechen, wie er etwa die Grundlage für die Euklidische Geometrie bildet, darüber kann nur die Erfahrung Rechenschaft geben. Jede angewandte Geometrie ist also schon eine induktive Wissenschaft, die wie Alles, was aus der Erfahrung stammt, darauf gefaßt sein muß, durch eine genauere Erfahrung über den Haufen geworfen zu werden.

Ein solcher induktiver Satz, der Jahrtausende lang für einen geometrischen gegolten, in Wirklichkeit aber schon der erste physikalische Satz ist, ist die Behauptung, daß sich die starren Körper, wenn keine deformierenden Kräfte auf sie einwirken, bei ihrer Verschiebung den Gesetzen der Euklidischen Kongruenz entsprechend verhalten. Ein weiterer ist der von der Geradlinigkeit der Lichtstrahlen im materiefreien Raum. Beide Sätze sind nach dem Vorhergehenden im Gravitationsfeld nicht mehr zutreffend, und damit kann auch das Verhalten von starren Körpern und Lichtstrahlen im Gravitationsraum kein Euklidisches sein.

Wir wollen das Gesagte an einem Beispiel erläutern. Denkt man sich in dem statischen Gravitationsfeld des vorigen Kapitels durch die Zentralmasse eine Ebene gelegt und auf dieser Ebene um die Zentralmasse konzentrische Kreise konstruiert, so müßte für zwei von ihnen in einem Euklidischen Raum das Verhältnis der Differenz ihrer Umfänge zur doppelten Ringbreite die Zahl π ergeben. Wenn man aber die beiden Umfänge und die Ringbreite mit starren Maßstäben mißt und das Verhältnis $\frac{U_1 - U_2}{2d}$

bildet, so erhält man eine von π verschiedene Zahl, denn nach den Sätzen des vorigen Kapitels werden die Maßstäbe in der Gravitationsrichtung, mit denen also d gemessen wird, in ihrer Länge verändert, während das für die dazu senkrechten Maßstäbe nicht gilt.

Die Maßverhältnisse auf unserer Ebene sind also, wenn man die Entfernung von zwei Punkten mit starren Maßstäben mißt, andere als die anschaulich erfaßten Euklidischen. Für einen am Rand der Ebene außerhalb der Gravitationswirkungen befindlichen Beobachter sind die Maßverhältnisse in seiner Nähe von den Euklidischen nicht verschieden, während die in der Gravitationsrichtung gelegten Maßstäbe nach dem Innern zu sich entsprechend δ verkürzen. Denken wir uns diese radial liegenden verkürzten Längen entsprechend gestreckt, dann wird der Rand der Ebene unverändert bleiben, während sie nach dem Innern zu sich trichterförmig einstülpt. Auf einer solchen krummlinigen Rotationsfläche werden jetzt die Längen anschaulich richtig erfaßt, und die auf ihr geltende Geometrie ist dieselbe wie auf unsrer Nicht-Euklidischen Ebene. Auf einer solchen krummlinigen Fläche ist es nicht mehr möglich, die Punkte auf ein gewöhnliches kartesisches Koordinatensystem zu beziehen, da sie sich nicht mehr wie die Euklidische Ebene mit einem Netz von kongruenten, aus gleichen starren Maßstäben gebildeten Quadraten bedecken läßt. Nur für jedes hinreichend kleine Stück der Fläche ist es möglich, sie mit einem solchen Netz von infinitesimalen Quadraten zu bedecken. In einem unendlich kleinen lokalen Gebiet gilt also noch die Euklidische Geometrie.

An Stelle der geraden Linie tritt die geodätische Kurve als kürzeste Verbindungslinie von zwei Punkten der Fläche. Man kann sich eine solche entstanden denken durch Aneinanderreihen von unendlich vielen kongruenten infinitesimalen Quadraten, von

deren Kongruenz und quadratischer Form man sich überzeugen kann, indem man sie auf alle möglichen Arten miteinander zur Deckung bringt¹⁾).

Versucht man aus gleichlangen geodätischen Kurvenstücken ein Quadrat zu konstruieren, so mißlingt dies. Diese Beziehungen lassen sich ohne weiteres auf den Raum übertragen. Stellt man sich aus irgend welchem Stoff eine große Anzahl hinlänglich kleiner kongruenter Würfel her, so ergeben diese durch Aneinanderreihen ebenfalls eine geodätische Linie. Errichtet man auf dem Endwürfel einer solchen Kette eine dazu senkrechte, gleich lange, und wiederholt dieses Verfahren zweimal in der geeigneten Richtung, so müßte man bei Euklidischen Maßverhältnissen im Raum ein Quadrat konstruieren haben. Im Gravitationsraum wird bei einer solchen Konstruktion der erste und letzte Würfel im allgemeinen nicht wieder zusammenfallen. Es ist bei den hier herrschenden geometrischen Verhältnissen ein endliches Quadrat im allgemeinen nicht möglich.

Dieses Resultat läßt sich auch noch anders ausdrücken. Durch Aneinanderlegen von solchen Würfeln wird eine unendlich kleine Strecke, beispielsweise eine der Würfelkanten, parallel mit sich verschoben. Ziehe ich von dem Ausgangswürfel eine schleifenförmige Kurve, die auf einem beliebigen Wege wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt, und ordne auf dieser Kurve die kleinen Würfel so, daß sie eine Treppe bilden, deren benachbarte Stufen parallele Kanten haben, so wird auf diese Weise eine Kante parallel mit sich verschoben, bis sie wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrt. Ist nun die letzte Kante wieder der ersten parallel, unabhängig von dem Verschiebungsweg, dann ist das Kontinuum ein Euklidisches, und ich kann den Punkten im Raum solche Koordinaten zuordnen, daß sich eine unendlich kleine Strecke ds aus den Koordinaten ihrer Endpunkten nach der Formel

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (9)$$

berechnet. Auf einer gekrümmten Fläche oder in unserem Gravitationsraum ist das nicht mehr möglich. Es bleibt nichts übrig, als die Punkte auf irgend eine Art zu nummerieren, doch so, daß

¹⁾ Von einer geodätischen Linie verschafft man sich eine anschauliche Vorstellung, indem man auf eine krumme Fläche einen schmalen geradlinigen Streifen klebt.

die Koordinaten von zwei Nachbarpunkten sich nur unendlich wenig unterscheiden, und dann berechnet sich die Strecke ds durch die quadratische Differentialform

$$ds^2 = g_{11} dx_1^2 + g_{22} dx_2^2 + g_{33} dx_3^2 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + 2g_{13} dx_1 dx_3 + 2g_{23} dx_2 dx_3 \quad (10)$$

wo die g_{ik} Funktionen des Orts der Strecke sind, also

$$g_{ik} = f_{ik}(x_1, x_2, x_3).$$

Ordnet man den Punkten andre Koordinaten zu, indem man etwa setzt

$$x_i = \varphi_i(x'_1, x'_2, x'_3) \text{ oder} \\ dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_2} dx'_2 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x'_3} dx'_3$$

so erhält der Ausdruck ds wieder die gleiche Form

$$ds^2 = g'_{11} dx_1'^2 + g'_{22} dx_2'^2 + \dots$$

Er ist kovariant gegen die Transformation, d. h. er drückt sich in den neuen Koordinaten durch einen Ausdruck von demselben Bildungsgesetz aus. Durch die quadratische Differentialform werden dem Raum, der an und für sich eine formlose dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist, erst seine Maßverhältnisse aufgeprägt, da durch diesen Ausdruck erst bestimmt wird, wie die Entfernung zwischen zwei benachbarten Punkten gemessen werden soll. Von diesem Ausdruck ds hängen die geometrischen Verhältnisse im Raum, soweit sie metrischer Natur sind, ab. In seiner Habilitationsschrift „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ hat Riemann diese allgemeine mehrdimensionale Mannigfaltigkeit einer Untersuchung unterworfen und damit den Grund gelegt zu den mathematischen Voraussetzungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Bei den bis dahin bekannten geometrischen Mannigfaltigkeiten der Euklidischen und den beiden Nicht-Euklidischen im engeren Sinne ist der Raum homogen. Bei einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit sind die Maßverhältnisse eine Funktion des Ortes. Ueber den Grund, der die Veranlassung bilden kann zu einer solchen Abhängigkeit der metrischen Verhältnisse vom Ort, äußert sich Riemann am Schluß seines Vortrags in folgenden prophetischen Worten: „Die Frage nach der Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem inneren Grunde der Maßverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raum gerechnet werden kann, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, daß

bei einer diskreten Mannigfaltigkeit das Prinzip der Maßverhältnisse schon in dem Begriff der Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei stetigen aber anderswoher hinzukommen muß. Es muß also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.

Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese, durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche wie die hier geführten von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, daß diese Arbeiten nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.

Es führt dies hinüber in das Gebiet einer anderen Wissenschaft, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt.“ —

Diese von Riemann geahnten Kräfte, die die Veranlassung sind, daß die Maßverhältnisse mit dem Ort variieren, sind, wie wir im vorigen Kapitel gezeigt haben, die Gravitationspotentiale. Das Verhältnis zwischen der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie ist genau dasselbe wie zwischen dem Euklidischen und dem Riemann'schen Raum, nur daß sich entsprechend der hinzukommenden zeitlichen Veränderungen die Dimensionenzahl um eine erhöht. In der speziellen Relativitätstheorie war nach Seite 9 die durch die Gleichung 5 definierte raum-zeitliche Verschiebung die Grundinvariante; wie bei 9 sind also die g_{ik} konstant. Durch geeignete Wahl der Zeiteinheit kann man dem Ausdruck 5 dieselbe Form wie 9 geben [Minkowski]).

Der Ausdruck 5 stellt im vierdimensionalen Kontinuum die Größe eines Weltlinienelements dar und seine Invarianz bedeutet eben, daß der diesem Element entsprechenden raum-zeitlichen Beziehung, unabhängig von ihrer Lage in demselben oder in anderen berechtigten Systemen die feste Zahl ds zuge-

¹⁾ Eine Mannigfaltigkeit, in der ds^2 konstante von eins verschiedene Koeffizienten hat, heißt eine affine.

ordnet ist. Setzen wir in 5 $dx = dy = dz = 0$, so ist $ds = ct$, von c abgesehen, die Zeitstrecke eines Vorgangs (Zeitablauf einer Uhr), der im System ruht, und es liegt darin der Satz, daß reinzeitliche Veränderungen, wenn sie objektiv gleich sind, an jeder Stelle des Raumes auch dieselbe Zeit dauern.

Setzen wir $dt = 0$, so stellt ds , von dem Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ abgesehen, eine Raumstrecke dar, und wir erhalten den Satz, daß Raumstrecken (gemessen durch ruhende Maßstäbe) einander gleich sind, wenn die Quadrate ihrer Koordinatenprojektionen dieselbe Summe geben (Pythagoras). Mit anderen Worten, wir erhalten in diesen beiden Spezialfällen die beiden Invarianten der klassischen Mechanik.

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird jetzt das Weltlinienelement, unabhängig von seiner Lage in demselben System oder zu anderen Systemen durch einen Ausdruck von der Form 10 wiedergegeben. (Die Zahl der Koordinaten auf 4 erhöht). Wir wollen für das von uns in 4 behandelte Einkörperproblem die Werte der g_{ik} , wie sie sich als letzte Konsequenzen einer umständlichen Rechnung ergeben, zunächst hinschreiben¹⁾.

In diesem Spezialfall sind in unserer Bezeichnung

$$g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} - \frac{2kM}{c^2 r^3} x_\rho x_\sigma \quad (\rho \text{ und } \sigma \text{ zwischen } 1 \text{ und } 3)$$

$$g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0 \quad (\rho \text{ zwischen } 1 \text{ und } 3)$$

$$g_{44} = c^2 \left(1 - \frac{2kM}{c^2 r} \right)$$

$\delta_{\rho\sigma}$ ist dabei gleich 1 bzw. 0, je nachdem $\rho = \sigma$ oder $\rho \neq \sigma$. Wir sehen zunächst, daß die Form 10 mit diesen Werten der g_{ik} für den Rand des Feldes im gravitationsfreien Raum die Form 5 annimmt. Behandeln wir sie in gleicher Weise wie 5, dann erhalten wir unsere schon aus Kapitel 4 bekannten Resultate.

1. Eine reinzeitliche Veränderung ($dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$) die im leeren Raum am Rand die Zeit dx'_4 ausfüllt, hat also in der Entfernung r eine Dauer dx_4 , die sich wie folgt berechnet:

$$ds^2 = c^2 dx'^2_4 = g_{44} dx^2_4$$

oder in Annäherung:

$$dx_4 = dx'_4 \left(1 + \frac{kM}{c^2 r} \right)$$

¹⁾ Siehe Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie von A. Einstein 1916, § 22.

2. Für einen in der Entfernung r befindlichen auf der x -Achse liegenden Maßstab, der im leeren Raum die Länge dx'_1 hat, gilt ($x_1 = r, x_2 = x_3 = 0, dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0$)

$$ds^2 = - dx'^2_1 = g_{11} dx_1^2 \text{ oder}$$

$$dx_1 = dx'_1 \left(1 - \frac{kM}{c^2 r} \right)$$

3. Für einen entsprechenden, aber senkrecht zum Felde befindlichen Maßstab ($x_1 = r, x_2 = x_3 = 0, dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0$)

$$\text{gilt } ds^2 = - dx'^2_2 = g_{22} dx_2^2 \text{ oder}$$

$$dx_2 = dx'_2$$

Es handelt sich jetzt noch darum, die obenstehenden Werte der g_{ik} , die wir zunächst aus der Einstein'schen Arbeit entnommen hatten, aus unseren früheren Resultaten abzuleiten.

Die statischen Gravitationsfelder sind dadurch charakterisiert, daß bei geeigneter Wahl der Koordinaten die Welt sich in Raum und Zeit spaltet. Es muß sich unter diesen Bedingungen die Grundform 10 in folgender Weise schreiben lassen:

$$ds^2 = g_{44} dx_4^2 - ds'^2.$$

Hier ist dx_4 die Zeitkoordinate und

$$ds'^2 = - \sum_{i,k}^3 g_{ik} dx_i dx_k.$$

Die Koeffizienten sind nur noch Funktionen der x_1, x_2, x_3 und nicht mehr abhängig von der Zeit x_4 .

Da das Einkörperfeld kugelsymmetrisch ist, besitzt ds^2 notwendig die Gestalt

$$g_{44} dx_4^2 + \lambda (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2$$

wo g_{44}, λ, l Funktionen der Entfernung r vom Zentrum sind, denn dieses ist die allgemeinste quadratische Differentialform, die linearen orthogonalen Transformationen der Variablen x_1, x_2, x_3 gegenüber invariant ist.

Außerdem muß der Wert ds^2 am Rande des Feldes gegen $c^2 dx_4'^2 - dx_1'^2 - dx_2'^2 - dx_3'^2$ konvergieren. Die durch ein bestimmtes Weltlinienelement dargestellte raum-zeitliche Beziehung, der in der Entfernung r vom Zentrum die Koordinaten dx zugeordnet sind, hat also im gravitationsfreien Raum am Rande Koordinaten dx' , die mit den dx durch folgende Gleichung verbunden sind:

$$\begin{aligned} g_{44} dx_4^2 + \lambda (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2 \\ = c^2 dx_4'^2 - dx_1'^2 - dx_2'^2 - dx_3'^2. \end{aligned}$$

Spezialisieren wir zur Bestimmung der unbekanntenen Funktionen von r g_{44} , λ , l diese Gleichung genau so wie in den drei Fällen auf Seite 35, so müssen wir unsere in Kapitel IV abgeleiteten drei Sätze über das Verhalten von Maßkörpern erhalten.

Durch Vergleich ergibt sich ohne weiteres aus 1, daß

$$g_{44} = c^2 \left(1 - \frac{2kM}{c^2 r} \right), \text{ aus 3, daß } \lambda = -1 \text{ und endlich aus 2, daß}$$

$$l = -\frac{2kM}{c^2 r^3}. \text{ Wie man sich durch Einsetzen von } l \text{ überzeugt, sind das für die } g_{ik} \text{ die Einstein'schen Werte}^1).$$

Durch die Werte der g_{ik} auf Seite 35 wird also die Weltmetrik einer Einkörperwelt in derselben Weise beschrieben wie in Kapitel 4. Der Raum ist also kein leeres Gefäß, das sich gleichgültig gegen seinen Inhalt verhält, sondern er empfängt seine innere Struktur erst durch die in ihm verteilten Massen und deren Strömungen. Wie elektrische Massen ein elektrisches Feld erzeugen, so erzeugen die gravitierenden ein metrisches. Bei dem von uns behandelten Einkörperproblem bildete Raum und Materie eine unauflösbare Union. Haben wir es in dem allgemeineren Fall statt mit einem statischen mit sich verändernden Gravitationsfeldern zu tun, so ist auch noch die Zeit so eng mit den beiden eben genannten Grundelementen verschmolzen, daß man für einen endlichen Bereich weder von einer Geometrie noch von einer Mechanik im alten Sinne reden kann. Man kann in diesem Fall nicht mehr mit Sinn fragen: wie weit ist in diesem Augenblick ein anderer Weltkörper von der Erde entfernt, und was passiert jetzt auf ihm? Der Weltprozeß läßt sich nur noch beschreiben durch ein vierdimensionales Gewebe von Koinzidenzen, das eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit bildet, deren Invariante ds^2 die allgemeinste quadratische Differentialform ist (sie besitzt auch die auf Seite 63 fehlenden Glieder $2g_{\rho 4} dx_\rho dx_4$ [ρ zwischen 1 und 3]). Den vier Koordinaten dx kommt aber keine unmittelbare räumliche oder zeitliche Bedeutung mehr zu. Sie sind reine Rechnungs-

¹⁾ Ein im Gravitationsfelde freibeweglicher Körper, der so klein ist, daß man seine Rückwirkungen auf das Feld vernachlässigen kann, bewegt sich so, daß seine Weltlinie eine geradeste Kurve bildet, d. h. daß $\int ds$ ein Minimum ist. Ermittelt man für die Planeten diejenigen Bahnkurven, die dieser Bedingung entsprechen, so erhält man das auf Seite 40 erwähnte Vorrücken des Merkur-Perihels als Konsequenz der Theorie. Ueber die Rechnung vgl. Weyl, Raum — Zeit — Materie (2. Aufl.), § 30.

größen. Wir sind also bei einer rein algebraischen Welt angelangt, deren Rechnungsgrößen den letzten Rest von dem ursprünglichen anschaulichen Erleben eingebüßt haben.

In einer solchen Riemann'schen Mannigfaltigkeit ist es unmöglich, die Koordinaten so zu wählen, daß für das ganze Gebiet die g_{ik} Konstanten werden. Wohl aber ist dieses für jeden hinreichend kleinen lokalen Bereich möglich. Von einem Koordinatensystem, das in der unmittelbaren Umgebung eines Punktes so beschaffen ist, daß die g_{ik} konstant sind oder $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_1} = 0$, sagt man, es ist an dem betreffenden Punkt geodätisch. In einem solchen lokalen Bezirk kann man die quadratische Differentialform in analoger Weise wie bei den Flächen zweiter Ordnung auf ihre Hauptachsen transformieren und nach passender Wahl der Maßeinheiten ihr die Form 5 geben. In diesem Bereich gilt also die spezielle Relativitätstheorie; es ist kein Gravitationsfeld vorhanden. Ein solches geodätisches System ist z. B. das in Kapitel IV erwähnte System S' . In diesem Gebiet läßt sich dann weiter die Mannigfaltigkeit nach Kapitel III in Raum und Zeit spalten, und es gelten für jedes Spaltungsprodukt die Verhältnisse der alten Physik. Für die nicht geodätischen Bezugssysteme hat das eben beschriebene eine beliebige beschleunigte Bewegung. Daß eine solche Bewegung keine absolute ist, sondern mit demselben Recht auch als ruhend angesehen werden kann, ist die schon oben zitierte Grundvoraussetzung der Relativitätstheorie.

In dieser Behauptung liegen zwei verschiedene Gesichtspunkte, wie wir uns an dem klassischen Beispiel der Planetenbewegung klarmachen wollen. Als Kopernikus sich von dem Gedanken an die im Mittelpunkt des Weltalls absolut ruhende Erde freigemacht hatte, und die Bewegungen der Planeten vom Standpunkt eines Beobachters auf der Sonne beschrieb, war er trotz der seinem Buch vorausgeschickten Widmung an den Papst Paul III. überzeugt, die wahre Natur dieser Bewegungen aufgefunden zu haben. Für unsern Standpunkt aber enthält diese Widmung, in der er bekanntlich die Ansicht ausspricht, daß er nur eine Hypothese entdeckt hätte, um die Bewegungen der Planeten leichter faßlich darzustellen, die volle Wahrheit. Ueber die absolute Natur der Bewegungen läßt sich selbstverständlich nach allem Vorhergehenden nichts aussagen. Sie lassen sich immer nur von einem Standpunkt aus beschreiben,

und die Wahl dieses Standpunktes ist willkürlich. Wenn man die Planetenbewegungen von irgend einem Standpunkt aus kennt, so ist es lediglich eine Aufgabe der mathematischen Umrechnung, sie von einem andern aus zu beschreiben. So wären wir natürlich imstande, nachdem Kepler diese Bewegungen beschrieben hat vom Standpunkt eines Beobachters, der sich an der Stelle der Sonne befindet, ohne an ihrer Rotation gegen den Fixsternhimmel teilzunehmen, sie für einen andern Beobachter, der etwa mit der Sonne rotiert oder sich auf einer als ruhend gedachten Erde befindet, umzurechnen. Wenigstens ist das möglich unter der Voraussetzung der klassischen Mechanik, daß die Raummetrik eine ein für alle mal feststehende ist. Vgl. Seite 34 und 37. Würden die Planeten und die Sonne im Raum leuchtende Spuren hinterlassen, so würden diese von uns unmittelbar anschaulich erfaßten Kurven die seit Ptolemäus dauernd gesuchten und nie völlig richtig festgelegten Kurven sein. Beide Beschreibungen wären gleichwertig, nur wären die Kepler'schen infolge des zufälligen Umstandes, daß die Sonnenmasse die Masse der Planeten so bedeutend überwiegt, einfacher. Wäre das nicht der Fall, so wäre bei dieser Lage des Problems auch kein praktischer Vorteil mehr mit dem Kepler'schen Standpunkt verbunden. Ueber diese Art der Relativität sollte seit Kant's Schrift „Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaften“ eigentlich kein Streit mehr sein. So lange man die Bewegungen wie Kopernikus kinematisch auffaßt, ist selbstverständlich jeder Standpunkt gleichberechtigt.

Die Frage tritt aber mit Newton in ein anderes Stadium. Als Newton die Kepler'schen Gesetze auf eine dynamische Wechselwirkung zwischen den gravitierenden Massen zurückgeführt hatte, war die Wahl des Standpunktes nicht mehr gleichgültig. Sein Gravitationsgesetz verlangt ein Bezugssystem, das relativ zum Fixsternhimmel ohne Rotation ruht. Auf einem rotierenden Körper treten außer den Newton'schen Gravitationswirkungen Zentrifugalkräfte auf, die sich aus dem Attraktionsgesetz nicht ableiten lassen. Soll also die allgemeine Relativität nicht nur eine mathematische Fiktion sein, so muß ein allgemeines Gravitationsgesetz gefunden werden, welches so beschaffen ist, daß es ebenso wie der Ausdruck ds sich einer beliebigen Koordinatentransformation gegenüber kovariant verhält. Erst dann kann jeder Beobachter sich mit gleichem Recht als ruhend ansehen,

da sich für alle nach demselben Gesetz aus der Verteilung der gravitierenden Massen und deren Strömungen das für seinen Standpunkt vorhandene Gravitationsfeld ergibt. Einstein gelang es, dieses Problem in zwingender Weise zu lösen. Aus seinem Gravitationsgesetz erklärt sich die Planetenbewegung nicht nur ebenso gut wie nach dem alten Newton'schen, sondern die einzige bis dahin nicht befriedigend erklärte Unstimmigkeit, das Vorrücken des Merkur-Perihels um $43''$ im Jahrhundert ergibt sich ebenfalls quantitativ richtig aus seiner Theorie. Von den Gravitationswirkungen hängen die in der quadratischen Grundform ds vorkommenden Koeffizienten g_{ik} ab und damit, wie wir in diesem Kapitel gesehen haben, die metrischen Verhältnisse der Welt.

KAPITEL VI.

Das Problem der Realität und die Stellung des Objektbegriffs in der kritischen Erkenntnislehre.

Wir wollen uns nun einer Frage zuwenden, die wir, so sehr sie sich auch in den Vordergrund drängen wollte, bis jetzt zurückgestellt haben. Welche erkenntnistheoretische Bedeutung kommt der in den vorhergehenden Kapiteln besprochenen Relativitätstheorie im Gesamtsystem unserer Erfahrungen zu? Dieses Gesamtsystem stellt einen sehr komplizierten Zusammenhang dar, aber trotzdem, so sollte man denken, müßte es doch möglich sein, die Gesamterfahrung nach einer Methode, in einer Wissenschaft zu erforschen. Denn es gibt doch nur eine Wirklichkeit. Wie kommt es nun, daß wir zwei verschiedene Gruppen von Erfahrungswissenschaften besitzen: die Naturwissenschaften und die Geisteswissenschaften? Entsprechen diesen beiden Wissenschaften zwei getrennte Gebiete des Seins, das physische und psychische, und gibt es eine für sich bestehende Welt der materiellen Naturdinge und davon real getrennt ein völlig anders geartetes Sein, das seelische Erleben in den Einzelsubjekten? Und wie mögen sich die beiden Seiten des Seins zueinander verhalten? Denn ganz ohne Zusammenhang kann sich auch der entschiedenste Dualist diese beiden Reiche nicht denken.

Es kann nicht unsere Aufgabe sein, noch einmal von uns aus zu zeigen, warum die Metaphysik, deren Geschichte seit *Descartes* in der Hauptsache nichts weiter ist als ein einziger großer Versuch das Ich und die Dinge in zwei verschiedene Sphären zu zerlegen, unfruchtbar geblieben ist. Sobald man einmal den Zusammenhang der Erfahrungen in die beiden real getrennten Gebiete der äußeren und inneren Erfahrung zerrissen hat, gelingt es keiner Dialektik, die verloren gegangene Einheit wiederherzustellen. Es bleibt nichts übrig als mit *du Bois Reymond* ein absolutes Welträtsel zu konstatieren. Es ist in der Tat ewig unbegreiflich, wie an gewisse absolute Atomkomplexe, wie sie in unserm Gehirn vorliegen mögen, ein seelisches Leben gebunden sein soll, oder die Materie, populär gesprochen, im Laufe der Entwicklung die

Eigenschaft erlangt haben soll, über sich selber nachzudenken. Und ebenso unbegreiflich ist es, wie wir, denen doch zunächst nur das eigene seelische Erleben gegeben ist, von einer solchen für sich bestehenden Materie etwas wissen sollten. Auf metaphysischem Boden sehen wir keine Möglichkeit die oben gestellten Fragen zu beantworten. Es bleibt nichts übrig als zu dem Standpunkt der schlichten Erfahrung zurückzukehren, für die ein solcher Gegensatz noch nicht existiert. Sie enthält mit dem Bewußtsein des eigenen Daseins zugleich ein unmittelbares Bewußtsein der Dinge außer uns und bildet eine natürliche Einheit. Diese Einheit gilt es im Folgenden zu wahren auch allen tiefgreifenden Veränderungen des Weltbildes gegenüber, zu denen uns die Wissenschaft zwingt.

Schon in den einfachsten Erlebnissen ist immer zweierlei enthalten: einmal ein Ich, welches erlebt, und zweitens ein Inhalt, der erlebt wird. Der Inhalt hebt sich als etwas relativ Beständiges von dem Akt des Erlebens ab und tritt ihm als etwas Selbständiges gegenüber. Das gilt schon, wenn ich einen einfachen Sinneseindruck etwa anspreche als rot. Indem ich das qualitativ Gleichbleibende von meiner bald matteren, bald lebhafteren Auffassung desselben abhebe, vollziehe ich einen primitiven Erkenntnisakt, der im Prinzip schon das logische Verfahren enthält, das dem ganzen Erkennen eigentümlich ist. Was heißt es z. B., ich habe die objektive Gestalt eines Dinges erkannt? Wenn ich um einen Tisch herumgehe, so erhalte ich eine Reihe perspektivischer Bilder, die ja nach meiner Stellung und Entfernung vom Tisch wechseln. Wenn ich jetzt diesen Einzelbildern die objektive Gestalt des Tisches gegenüberstelle, so heißt das, ich habe das Gesetz erkannt, durch das sich diese Bilder zu einer Einheit zusammenschließen und aus dem jedes wieder unter Berücksichtigung meiner momentanen Stellung zum Tische erklärbar ist. Ein anderes Beispiel: was ist objektive Zeitfolge? Ich beobachte etwa von einem Fenster aus eine nach dem Takt einer Musik auf mich zu marschierende Kolonne. Dabei sehe ich, daß derjenige Teil der Kolonne, der ebenso weit hinter der Musik marschiert, als ich mich vor ihr befinde, gleichzeitig mit dem Takt der Musik tritt, während die übrigen vor und bzw. hinter den Taktschlägen auftreten. Für andere Bewohner der Straße würde sich das Verhältnis entsprechend verschieben. Ich habe die objektive für alle Bewohner gültige Ordnung der Zeitfolge erkannt, wenn ich alle Erlebnisreihen so auf eine Zeit bezogen habe, daß

sich diese Reihen, unter Benutzung der Schallgeschwindigkeit und der verschiedenen Entfernungen der Beobachter in bezug auf die Kolonne daraus berechnen lassen.

An solchen Beispielen zeigt sich, daß das Verknüpfungsgesetz der einzelnen Erfahrungen zu einem Zusammenhang in keiner einzelnen Erfahrung für sich aufweisbar ist, und eine funktionale Verknüpfung von ihnen zu einer Einheit nur möglich ist durch gewisse Mittelbegriffe, auf die wir die Reihen der Einzelerlebnisse beziehen müssen.

In der Erfahrung des alltäglichen Lebens stellt der gewöhnliche Dingbegriff einen solchen Mittelbegriff dar, durch den Sinnesempfindungen aufeinander bezogen werden, in der Welt des Physikers sind es die Atome und die anderen Objektbegriffe, die als Ansatzpunkte für die gesetzlichen Beziehungen die gleiche Rolle spielen. Wenn wir überhaupt noch eine Einheit zwischen den Erfahrungen eines Subjekts und erst recht zwischen denen verschiedener Subjekte stiften wollen, müssen wir uns solcher Mittelbegriffe bedienen, die sich bei einer Erweiterung des Erfahrungskreises immer mehr von den sinnlichen Erlebnissen entfernen. Mit Recht sagt Stumpf:

„Das, woran sich die gesetzlichen Beziehungen finden, die den Gegenstand und das Ziel der Naturforschung bilden, sind nie und nimmer die sinnlichen Erscheinungen. Zwischen ihnen, wie sie jedem das eigene Bewußtsein darbietet, besteht nicht die regelmäßige Folge und Koexistenz, die der Naturforscher in seinen Gesetzen behauptet. Sie besteht lediglich innerhalb der Vorgänge, die wir als jenseits der sinnlichen Erscheinungen, als unabhängig vom Bewußtsein sich vollziehende, statuieren, und die wir statuieren müssen, wenn von Gesetzlichkeit überhaupt die Rede sein soll. Mögen wir auch dieses Wirkliche in sich selbst garnicht und seine Beziehungen nur in der ganz abstrakten Form von Gleichungen erkennen, mag selbst die Raumanschauung, in der wir uns die Beziehungen zu versinnlichen pflegen, ein entbehrliches Symbol sein: diese gesetzlichen Beziehungen und das darin stehende bilden die *physische Welt* der Wissenschaft, während die sinnlichen Erscheinungen, aus denen die physische Welt des gemeinen Bewußtseins sich aufbaut, lediglich die Bedeutung von Ausgangspunkten für die Erforschung jener rein mathematischen, ich möchte sagen algebraischen, Welt haben!).“

1) Stumpf, Leib und Seele, 27.

Dies ist ohne weiteres zuzugeben.

Daraus ist aber nicht zu folgern, daß in diesen Mittelbegriffen ein völlig anders geartetes Sein ergriffen wird, sondern sie sind nichts weiter als der Ausdruck der Gesetzmäßigkeit der Erfahrung selbst, und sie würden ihren ganzen Sinn und ihre ganze Erkenntnisfunktion einbüßen, wenn wir sie zu transszendenten Wirklichkeiten, die in keinem verständlichen Zusammenhang mit dem Bewußtsein selbst stünden, hypostasieren wollen. Vielleicht ist ein Vergleich angebracht. Wenn ich in der Arithmetik zu einer Reihe gegebener Zahlen das Bildungsgesetz finden soll, so habe ich eine ähnliche Aufgabe zu lösen. Dieses Gesetz liegt in keiner einzelnen von ihnen und auch im allgemeinen nicht in mehreren. Um es zu finden muß ich hypothetisch eine Reihe von Bildungsgesetzen ansetzen, die für einige von ihnen gelten, und dann prüfen, welches von diesen Gesetzen so beschaffen ist, daß sich auch die übrigen fügen. Ich kann das gesuchte Gesetz dann in Form des sogenannten allgemeinen (nten) Gliedes aussprechen, aus dem sich die einzelnen Zahlen unter Benutzung des Wertes von n ergeben. Ebenso wie dieses allgemeine Glied nur in konzentrierter Form das Reihengesetz darstellt und durchaus keine besondere Wesenheit außerhalb der Reihe, so sind auch diese Mittelbegriffe nur der prägnante Ausdruck für den Zusammenhang der Erfahrung selbst. Durch sie wird das, was die Sinne liefern an Rohmaterial, zu einer Einheit verbunden, und dadurch erst jenen vorüberauschenden Eindrücken jene Dauer verliehen, die wir *Sein* nennen.

Freilich darf der Ausdruck Rohmaterial nicht so verstanden werden, als ob wir es am Ausgangspunkt des Erkennens mit einem völlig ungeordneten Material zu tun hätten. Jeder Eindruck wird nur erfahren als mit anderen schon irgendwie raumzeitlich und kausal verknüpft. Eine sogenannte reine Erfahrung, an der das objektivierende Denken in keiner Weise beteiligt ist, ist eine Fiktion. Einem solchen Material gegenüber wäre das Denken völlig richtungslos. Das Denken spielt de facto den sinnlichen Eindrücken gegenüber die Rolle eines Richters, der eine Reihe von Zeugen vernimmt, um einen objektiven Vorgang zu erkennen. Damit er überhaupt mit Sinn Fragen stellen kann, muß er eine, wenn auch noch so unbestimmte Vorstellung von dem Vorgang haben. Diese Vermutung prüft er im weiteren Verlauf der Vernehmungen. Zu diesem Zweck müssen die einzelnen Aussagen der Zeugen gewertet werden. Er unterscheidet zwischen

typischen, sich immer wiederholenden Aussagen und sporadischen aus dem Rahmen herausfallenden, die er vorläufig beiseite läßt. Er hat den Vorgang als objektiven erkannt, wenn sich die Zeugenaussagen zu einem widerspruchsfreien Ganzen zusammenfügen und die zunächst aus dem Rahmen herausfallenden aus der subjektiven Beschaffenheit der Aussagenden und andere Zufälligkeiten ebenfalls erklärt sind. Genau so verfahren wir, wenn wir die Aussagen der verschiedenen Sinne miteinander konfrontieren und zu einer einheitlichen, gesetzmäßigen Erfahrung gestalten. Was dabei vorläufig unverbunden bleibt, beziehen wir auf das Subjekt mit dem Vorsatz, wenn die Möglichkeit sich bieten sollte, innerhalb dieses engeren Erfahrungskreises ebenfalls zu objektivieren.

Doch wollen wir hierauf erst im folgenden genauer eingehen, wenn wir einen größeren Teil des Erfahrungsganzen überblicken können. Dann wird es auch möglich sein, den zu Eingang dieses Kapitels aufgeworfenen Fragen eine solche Form zu geben, daß wir sie beantworten können.

KAPITEL VII.

Die Gesamterfahrung als ein System von Objektivationsstufen.

Um die im letzten Kapitel entwickelten Gedanken klar hervortreten zu lassen und wieder den Anschluß an unser eigentliches Thema zu gewinnen, sei es gestattet, zunächst ein bewußtes Wesen zu fingieren, das dem unsern gleich aber im leeren Raum sich so weit von allen Dingen entfernt befinden möge wie wir von den Fixsternen. An dieser Stelle soll es beliebige aber hinreichend kleine Bewegungen ausführen können. Ihm würde, je nach seiner Lage, bald dieser, bald jener Teil des Fixsternhimmels wahrnehmbar sein. Von diesen wechselnden Aspekten würde sich als gleichbleibender Kern das Richtungsbild des Gesamthimmels abheben, also die konstanten Winkelbeziehungen zwischen den Sehstrahlen, und seine Wissenschaft würde darin bestehen, diese Winkel miteinander zu vergleichen und sich ihre Beziehungen in Form von Sternbildern einzuprägen. Ein Tieferlebnis würde fehlen und seine Geometrie wäre die der Winkelrelationen eines Strahlenbüschels. Diese Ordnungsform würde ihm als die einzig mögliche erscheinen und ebenso würde ihm das in dieser Form geordnete Qualitative, die gelben Punkte auf blauem Grunde, als in sich bestimmt d. h. als absolute Substanz erscheinen, wie überhaupt auf jeder Stufe der Erkenntnis dasjenige, was sich durch sämtliche zugängliche Erfahrungen des Erfahrungskreises unveränderlich als roter Faden hindurchzieht, von dem Denken einfach als seiend hingenommen werden muß, vor dem ihm nur übrig bleibt, vorläufig stillzustehen.

Erst wenn bei einer Erweiterung des Erfahrungskreises sich das vorläufig als konstant Gesetzte wieder veränderlich zeigt, ist ein weiterer Fortschritt der Erkenntnis möglich, der sein Ziel dann erreicht hat, wenn das Veränderliche festgestellt ist in seiner Abhängigkeit von gleichzeitigen anderweitigen Aenderungen und wieder von neuen Konstanten. Eine solche Erweiterung würde in unserem Falle eintreten, wenn sich im

Laufe der Zeit die Bewegungen des Beobachters, unter denen nach unseren Voraussetzungen zunächst nur die Drehbewegungen bemerkt werden konnten, sich zu einer so großen Ortsveränderung addiert hätten, daß sie eine merkliche perspektivische Verschiebung am Firmament hervorrufen würden. Zu seinem größten Erstaunen würde der fingierte Beobachter sehen, daß die scheinbar festen Winkelbeziehungen kleinen Veränderungen unterworfen sind, die zu einer Gruppierung der Sterne zu neuen Bildern führen. Lange Zeit würde er diesen Tatsachen ratlos gegenüberstehen, und es würde das Genie eines Kepler oder Einstein dazu gehören, um die Erklärung für diese überraschende Veränderung zu finden. Sie würde darin bestehen, daß eine tiefer liegende Invariante aufgezeigt wird. Alle die Richtungsbilder, die der Beobachter im Laufe der Zeit vom Sternenhimmel erhält, würden sich zu einer Einheit zusammenschließen, wenn jedem Sterne ein bestimmter Ort im dreidimensionalen Raum zugewiesen ist, und ihm damit feste, durch ein Längenmaß ausdrückbare Entfernungen von allen übrigen zugeordnet sind. Hieraus und aus dem jeweiligen Ort des Beobachters würden sich dann die verschiedenen Richtungsbilder errechnen lassen. Unter Benutzung eines kartesischen Koordinatensystems würde die neue Invariante die Form haben

$$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

für eine endliche Entfernung oder $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ für eine infinitesimale Strecke. Wir wären also beim Weltbild der alten Physik angelangt; der momentane Zustand der Dinge ist beschrieben durch ihre Lagebeziehungen im dreidimensionalen Euklidischen Raum. Ihre Veränderungen erfolgen für alle Beobachter in der eindimensionalen Newton'schen Zeit. Beide Ordnungssysteme erscheinen als konstante Bestandteile jeder Erfahrung und daher schlechthin als seiend. Habe ich in ihnen jedem Ereignis mit Hilfe der Kausalgesetze seine bestimmte Stelle zugeordnet, so ist damit die Erfahrung beschrieben als losgelöst vom Standpunkt eines individuellen Subjekts, wie sie sich darstellt für ein Bewußtsein überhaupt. Was sich auf dem früheren engeren Erfahrungsstandpunkt darstellte als eine absolute Invariante, nämlich jene festen Winkelrelationen des Richtungsbildes, wird durch den Ueberschnitt zu diesem höheren Ordnungssystem nicht etwa vollständig aufgehoben, sondern hat nur seine ihm zukommende Stellung gefunden. Es bleibt ein Objektives, nur kann es nicht mehr gelten als definitiver Ausdruck des Seins, sondern es ist ein Sein von

meinem Standpunkt aus, wie es sich darstellt innerhalb des dadurch bestimmten engeren Urteilszusammenhanges.

Die in den ersten Kapiteln beschriebenen Erfahrungen nötigen uns nun abermals zu einem höheren Ordnungsbegriff. Es zeigt sich nämlich, daß wir uns in einer dem fingierten Beobachter genau entsprechenden Situation befinden. Auch dieses Weltbild der alten Physik zeigt sich, analog dem Richtungsbild, wiederum als ein einseitiger Standpunkt im Ganzen der Erfahrung. Daß es möglich war, die Erfahrung vieler Jahrtausende unter den beschränkenden Bedingungen dieses Standpunktes zu ordnen, liegt daran, daß wir Menschen und die materiellen Körper nur geringe Geschwindigkeiten verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit entwickeln. Erst den Mitteln moderner Experimentierkunst gelang es, Beobachtungen zu machen, die nicht mehr in dem Ordnungssystem der alten Physik Platz hatten. Um sie noch in einer Erfahrung ordnen zu können, ist es nötig jene affine¹⁾ vierdimensionale Mannigfaltigkeit zu benutzen, von der in Kapitel 3 ausführlich die Rede ist. Es sind in dieser Mannigfaltigkeit, wie daselbst ausgeführt ist, nicht mehr invariant der räumliche Abstand von zwei verschiedenen Punkten eines materiellen Körpers und dementsprechend der zeitliche Abstand von zwei verschiedenen Zeitpunkten einer materiellen Veränderung, sondern die oben definierte raum-zeitliche Verschiebung von der Größe

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

während sich die Abstände von zwei verschiedenen Raumpunkten und ebenso die von zwei verschiedenen Zeitpunkten als abhängig erweisen von der Geschwindigkeit des Beobachters relativ zu ihnen. Das Weltbild der alten Physik ist also nur ein möglicher Standpunkt, nämlich derjenigen Beobachter, die relativ zueinander ruhen; nur für solche spaltet sich diese affine Mannigfaltigkeit in gleicher Weise in Raum und Zeit²⁾.

Berücksichtigt man noch die mit der Materie unzertrennlich verbundenen Gravitationswirkungen, so erweist sich die oben angeführte Größe ds wieder als veränderlich. Sie ist in der Tat nur so lange invariant, als wir es zu tun haben mit jenen lokalen Inertialsystemen, von denen in Kapitel 4 die Rede ist, und angenähert für Felder mit schwachen Gravitationswirkungen. Für

¹⁾ Ueber die Definition einer affinen Mannigfaltigkeit siehe S. 34 Fußnote.

²⁾ Vgl. S. 16.

andere Gravitationsfelder muß sie ersetzt werden durch die noch abstraktere Invariante

$$ds^2 = \sum_{i,k}^4 g_{ik} dx_i dx_k$$

und, wie wir in Kapitel IV ausgeführt haben, ist selbst die Länge von relativ zum Beobachter ruhenden objektiv gleichen Stäben und der zeitliche Verlauf von ebenfalls ruhenden objektiv gleichen Ereignissen nicht invariant, sondern hängt von dem Potentialunterschied zwischen dem Ort des Beobachters und dem Ort des Meßinstrumentes ab³⁾.

So gliedert sich das Ganze der Erfahrungen in eine Reihe wohldefinierter Objektivationsstufen. Das Bestreben, einen immer weiteren Kreis von Erfahrungen und schließlich alle zugänglichen zu einer Einheit zu verknüpfen, zwingt uns zu immer abstrakteren Ordnungssystemen, da die bei einer Erweiterung des Erfahrungskreises zunächst verloren gegangene Einheit sich nur wieder gewinnen läßt, indem man von einem Teil des Erfahrungsinhalts abstrahiert und sich beschränkt auf das, was jetzt noch allen einzelnen Erfahrungen in gleicher Weise zu Grunde liegt. Was sich dieser Bedingung nicht fügt, bleibt auf der niedrigeren Objektivationsstufe stehen. So wird diese Erweiterung des Umfangs der Erkenntnis erkaufte mit einer Verarmung des Inhalts. Je höher man steigt, desto mehr überblickt man zwar, übersieht aber zu gleicher Zeit den für den Tieferstehenden sich anbietenden charakteristischen Inhalt. In diesem Sinne könnte man sagen, daß alle wissenschaftlichen Siege Pyrrhussiege sind. Zuletzt bleibt übrig jene algebraische Welt, jener vierdimensionale Zahlenkörper, aus dem alles verbannt ist, was noch irgend eine Ähnlichkeit mit dem in den sinnlichen Empfindungen liegenden Ausgangspunkt besitzt. Auf dieser Stufe ist z. B. das objektive Korrelat der Lichtempfindung nicht eine elektromagnetische Wellenbewegung, sondern ein rein rechnerischer Zusammenhang von Koinzidenzen, dessen Rechnungsgrößen keine anschauliche Bedeutung mehr haben.

So hätte sich die Wirklichkeit aufgelöst zu einer großen Rechnung, die wir freilich alle in gleicher Weise vollziehen müssen, wenn wir uns nicht zu unserm Schaden verrechnen wollen. Wer diese zeitlos geltende Rechnung für etwas für sich Bestehendes hält, der würde

³⁾ Objektiv gleiche Meßvorrichtungen sind solche, die sich im gravitationsfreien Raum gleich verhalten würden. Vgl. S. 21.

damit die Verpflichtung übernehmen, nun auch rückwärts das konkrete Erleben, wie es sich jetzt und hier in einer bestimmten Person abspielt, kausal¹⁾ abzuleiten. Ein aussichtsloses Unternehmen, da diese verschiedenen Objektivationsstufen begrifflich logisch und nicht kausal miteinander verknüpft sind und sich daher der reichere Inhalt der untergeordneten Stufen nicht aus der höheren gewinnen läßt. So läßt sich z. B. schon, wenn man Ereignisse in einer objektiven Zeit geordnet hat, die ausgezeichnete Stellung, die der konkreten Gegenwart zukommt, aus dieser objektiven Folge nicht wiedergewinnen. Und ebenso läßt sich nicht, um ein anderes Beispiel anzuführen, aus dem affinen Ordnungssystem der speziellen Relativitätstheorie kausal erklären, warum ein bestimmtes Subjekt die Welt in der beschriebenen Weise in Raum und Zeit spaltet und auf diese Weise die Ereignisse als sein Schicksal erlebt.

Jeder Objektivationsstufe entspricht als ihre Ergänzung ein Subjektbegriff, der immer konkreter wird, je tiefer wir in der Reihe der Objektivationen hinabsteigen. So gilt der Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie für ein Bewußtsein überhaupt, der der speziellen Relativitätstheorie angenähert für alle diejenigen Subjekte, die sich nicht zu weit entfernen von einem bestimmten Weltpunkt innerhalb der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit. Streng würde er nur gelten für Subjekte innerhalb der oben erwähnten lokalen Inertialsysteme. Der Standpunkt der alten Physik gilt wiederum für alle diejenigen unter ihnen, die relativ zu einander ruhen. Das qualitative Weltbild der natürlichen Erkenntnis für alle diejenigen Subjekte mit unserer sinnlichen Organisation. Von hier aus wäre jetzt weiter zurückzufragen zu noch konkreteren Objektivationsstufen, und damit kämen wir in das Gebiet der physiologischen Psychologie, also zunächst zu dem Beitrag der einzelnen Sinne zu diesem Weltbild. Hier würde z. B. für den Gesichtssinn das zu Beginn des Kapitels erwähnte Richtungsbild seine Stelle finden. Und von hier aus weiter zurück zu denjenigen Erlebnissen, die sich nur noch objektivieren lassen in bezug auf unsere Gehirnorganisation.

Wie man sieht, handelt es sich hier um keine prinzipielle Trennung zwischen zwei verschiedenen Gebieten des Seins, sondern um einen einzigen nach derselben Methode zu erforschenden Zu-

¹⁾ Ueber die Definition einer kausalen Veränderung siehe Seite 63.

sammenhang. Was gesetzmäßig in ihm eingegliedert ist, ist damit als objektiv erkannt. Ein Jeder müßte unter gleichen Bedingungen — und dazu gehört auch dieselbe Gehirnstruktur — das Gleiche erleben. Der ganze Unterschied ist der, daß für die flüchtigeren Erlebnisse die objektiven Wurzeln nicht so tief reichen als für die beständigeren. Dieser Unterschied ist aber nur ein relativer. So wenig wie es etwas absolut Beständiges gibt, gibt es auch etwas absolut Flüchtiges. Nehmen wir zunächst etwa die Träume, die Halluzinationen und die geometrisch-optischen Urteilstäuschungen, so sind das Erlebnisse, deren objektive Bedingungen nicht über meine Gehirnorganisation hinausreichen. Einem weiteren Zusammenhang würden schon angehören die eigentlichen Sinnesstäuschungen, wie sie z. B. vorliegen bei der Spiegelung und Brechung. Ihr objektives Korrelat ist das Netzhautbild. Sie sind subjektiv vom Standpunkt der natürlichen Erfahrung, die zu ihrem Erkenntnisobjekt dadurch gelangt, daß sie das Material der verschiedenen Sinne durch den Mittelbegriff der geometrischen Gestalt der Körper zu einer widerspruchsfreien Einheit zu verknüpfen sucht. In diesem Weltbild ist für das Spiegelbild kein Platz. Auf dem engeren Standpunkt der Physiologie des Gesichtssinnes ist dagegen das Spiegelbild durchaus objektiv und in diesem engeren Urteilszusammenhang durchaus kein Unterschied mehr zwischen dem Bild im Spiegel und dem Rahmen des Spiegels etwa. Wenn nun weiter das Weltbild der alten Physik, in dem von den qualitativen Eigenschaften der Dinge abstrahiert wird, dem natürlichen Weltbild der empirischen Dinge gegenübergestellt wird und vom physikalischen Standpunkt aus wieder die Qualitäten für subjektiv erklärt werden, so stellt dieser Vorgang nur die Wiederholung des eben geschilderten auf einer höheren Stufe dar. In dem natürlichen Weltbild sind die einzelnen Qualitäten der einzelnen Sinne ohne Aenderung ihrer Beschaffenheit einfach durch den Dingbegriff aufeinander bezogen. Sie bekleiden die Dinge wie Tapeten als für sich bestehende Eigenschaften. Bei schärferer mit den Mitteln des Experiments vorgenommener Prüfung zeigen sie sowohl untereinander als in Bezug auf das Subjekt eine weitgehende Abhängigkeit. Diese läßt sich zunächst für die einzelnen Sinnesgebiete exakt darstellen, wenn es gelungen ist, ein objektives Maß für die qualitativen und intensiven Nüancen der Empfindungen eines Sinnes zu finden, so z. B. für den Gegensatz zwischen warm und kalt und seinen intensiven Abstufungen

in der Temperatur. Weiter werden dann die Empfindungen der verschiedenen Sinne durch einen neuen übergeordneten Begriff verbunden. Einen solchen liefert das Energiegesetz, nach dem immer, wenn ein bestimmtes Quantum Wärme oder Licht oder Bewegung verschwindet, ein ihm gleiches Quantum anderer Energie entsteht. Mit seiner Hilfe gelingt es, die verschiedenen sinnlichen Empfindungen gewissermaßen auf einen Nenner zu bringen und so das anthropomorphe Element in ihnen auszuschalten. Damit ist aber nicht eine Art Ding entdeckt, das in einem besonderen Reich jenseits alles Bewußtseins existenzfähig wäre, sondern diese Ausschaltung des sinnlichen Elements soll nichts weiter besagen, als daß ein tieferliegender Zusammenhang besteht, der nicht nur die Sinneseindrücke eines mit normalen Sinnen ausgestatteten menschlichen Bewußtseins zu einer Einheit verknüpft, sondern auch diejenigen von Menschen mit irgend welcher anormalen oder nicht vollsinnigen Sinnesorganisation, ja sogar die eines etwaigen Bewußtseins von ganz anderer sinnlichen Beschaffenheit überhaupt, vorausgesetzt, daß diese erkennenden Subjekte dieselben raumzeitlichen Anschauungsformen wie wir besitzen.

Wenn wir jetzt, nachdem wir in der physikalischen Welt von Raum, Zeit und Zahl einen neuen übergreifenden Gesichtspunkt, ein allgemeines Reihenglied höherer Ordnung gefunden haben, von dieser höheren Warte aus die sinnlichen Empfindungen als subjektiv bezeichnen, so soll das nur heißen, daß zu dem Komplex von Bedingungen für das Auftreten dieser Empfindungen eine sinnliche Organisation von bestimmter Beschaffenheit gehört und nicht etwa, daß sie Vorstellungen in uns sind, die kausal durch äußere Dinge erzeugt werden. Wir dürfen also nicht mit M a u t h n e r¹⁾ das Urteil etwa „der Baum ist grün“ in das andere „der Baum grünt mich“ abändern, sondern der sachlich und sprachlich richtige Ausdruck für das in Frage stehende Verhältnis lautet „der Baum grünt mir“. Durch die nachträgliche Ueberlegung, daß die Sinneempfindungen auch von meiner Organisation abhängen, wird nämlich an der Substanz des „Grüns“ nichts geändert, sondern dem Urteil „der Baum ist grün“ wird durch den von uns gewählten Ausdruck der Geltungsbereich nur genauer abgegrenzt.

An einen Gedanken muß man sich allerdings gewöhnen, nämlich an den, daß die Wirklichkeit einen umfassenden

¹⁾ Kritik der Sprache.

Zusammenhang darstellt, aus dem nichts Einzelnes herausgelöst werden kann, sondern in dem alles miteinander steht und fällt, und daß zweitens zu diesem Zusammenhang stets auch das Subjekt (der Beobachter) gehört. Es ist zwecklos, hinter diesem Zusammenhang noch ein anderes metaphysisches Sein zu konstruieren, um dem Ganzen Halt zu geben, da ein solches Sein im System der Erfahrungswissenschaften keine Rolle spielen könnte. „Daß in der Welt der Erscheinung immer nur Eins mit und durch das Andere bestehen kann, kann leicht dazu führen und hat dazu geführt, allen Erscheinungen die eigentliche Existenz abzusprechen und als letzten haltbaren und Halt gewährenden Grund ihrer wechselnden Vielheit an sich bestehende, selbständig seiende feste Dinge anzunehmen, die mit ihrer Ansicht nie in die Erscheinung treten können. Denn, sagt man: wenn sich Eins hinsichtlich des Grundes seiner Existenz immer nur auf das Andere berufen will, so fehlt zuletzt ein Grund für alle Existenz; spricht A, ich kann nur bestehen sofern B besteht, und B hinwiederum, ich kann nur bestehen, sofern A besteht, so haben beide sich zuletzt auf Nichts berufen. Aber statt daß A und B den Grund der Existenz, den sie nicht einseitig und wechselseitig ineinander finden können, nun weiter rückwärts in etwas hinter sich zu suchen haben, was ihrem Schein den Grund und Kern gebe, haben sie ihn in der Totalität zu suchen, von der sie beide Glieder sind; das Ganze ist der Kern und Halt des Ganzen und alles dessen, was darin. Im Ganzen hat man allen Grund des Einzelnen zu suchen, nicht in etwas Einzelnem, dahinter noch Anderem, nach dessen Grunde man von neuem zu fragen hätte; doch kann man untersuchen, nach welchen Regeln sich das Einzelne zum Ganzen fügt und was die letzten Elemente. . . . Was wir Objektives an einem materiellen Dinge finden können, beruht immer nicht in einem unabhängig von den Wahrnehmungen, Erscheinungen rückliegenden dunklen Dinge dahinter, sondern in einem über die Einzelwahrnehmungen, Einzelercheinungen, welche das Ding gewährt, hinausreichenden, solidarisch gesetzlichen Zusammenhang derselben, von dem jede Erscheinung einen Teil verwirklicht.“¹⁾

¹⁾ Fechner, Ueber die physikalische und philosophische Atomenlehre 2. Aufl. (Leipzig 1864), 111 ff.

Der in diesen Worten Fechner's ausgesprochene Gedanke von der Relativität jedes erfahrungsmäßigen Seins hat nun durch die Einstein'sche Relativitätstheorie seine experimentelle Bestätigung gefunden, und zwar ist hier der entscheidende Punkt, daß zu dem Zusammenhang stets auch der Beobachter gehört. Durch diese Relativitätstheorie ist dem Einzelnen der letzte Rest substanzieller Selbständigkeit genommen. Wenn wir fragen nach dem Sein eines Dings, so erhalten wir immer eine andere Antwort, als wir eigentlich erwartet haben. Jedes Sein ist ein Verhalten in einem bestimmten Bezugssystem relativ zu einem Beobachter. Das gilt nicht nur für die subjektiven Qualitäten, sondern auch für die Größe, die Gestalt, für die Masse und den Energiegehalt des Dings. Diese Größen ändern sich in der speziellen Relativitätstheorie mit dem Bewegungszustand des Beobachters und in der allgemeinen sogar mit dem Ort desselben.

Wenn der naiv-realistische Standpunkt der natürlichen Erkenntnis den Dingen ihre Eigenschaften als unabhängig vom Beobachter zuschreibt und infolgedessen meint, daß diese Eigenschaften den Dingen schon zukamen, bevor es erkennende Wesen gab, so ist diese Ansicht dahin zu berichtigen, daß auch damals die Dinge schon so beschaffen waren, daß ein Wesen von unserer sinnlichen Organisation von seinem Standpunkt und in seinem Bewegungszustande den Dingen diese Eigenschaften hätte zuschreiben müssen.

Die schematische Struktur des Erkenntnisganzen ist nach dem Vorhergehenden also folgende: Für einen Subjektbegriff mit den konkreten Eigenschaften A, B, C wird zunächst die Reihe der möglichen Erfahrungen 'zu einem Funktionalzusammenhang $f(a b c)$ vereinigt, den man in dinglicher Form als das allgemeine Glied der vorliegenden Erfahrungsreihe ansprechen kann. Zeigt sich nun, daß eine Variation der Eigenschaft A eine Veränderung dieses allgemeinen Gliedes zur Folge hat, so daß es dadurch die Form erhält $f(a_1 b c)$, $f(a_2 b c)$ usw., so dienen diese Ausdrücke wieder als Grundlage für eine neue Reihe, deren Bildungsgesetz ein allgemeines Glied höherer Ordnung $f(b c)$ ergibt. Dieses stellt dann den Funktionalzusammenhang dar für die sämtlichen Erfahrungen, die dem allgemeineren Subjektbegriff mit den Eigenschaften B C zukommen. In dieser Weise ist fortzufahren, bis man zu einem Funktionalzusammenhang kommt für ein Subjekt

ohne konkrete Eigenschaften, für ein Bewußtsein überhaupt.

So ging z. B., wie oben ausgeführt, das Weltbild der natürlichen Erkenntnis, nachdem man seine Abhängigkeit von der sinnlichen Beschaffenheit des Subjekts erkannt hatte, in das Weltbild der alten Physik von Raum, Zeit und Zahl über. Dieses galt so lange als definitiv, bis die spezielle Relativität eine neue Abhängigkeit zeigte, die darin bestand, daß der objektive Raum und die objektive Zeit verschieden gedacht werden müssen für Beobachter, die relativ zueinander eine Geschwindigkeit haben. Abstrahieren wir wieder von den relativen Geschwindigkeiten der Beobachter, so lassen sich die gemeinsamen Erfahrungen nur noch in einer vierdimensionalen affinen Mannigfaltigkeit ordnen. Zuletzt zeigte sich dann, daß auch diese affine Mannigfaltigkeit als Ordnungssystem nur Gültigkeit hat für einen Beobachter in einem lokalen Inertialsystem in der unmittelbaren Umgebung des Beobachters. Eliminieren wir jetzt auch diese Abhängigkeit vom Ort des Beobachters, so schließen sich die Gesamterfahrungen nur noch zu einer Einheit zusammen, wenn wir das Gewebe der Koinzidenzen in einer vierdimensionalen Riemann'schen Mannigfaltigkeit zu Grunde legen; sie wäre damit wenigstens vorläufig das definitive Weltbild für ein Erkenntniswesen schlechthin ohne konkrete Eigenschaften.

So stellt sich das Erfahrungsganze dar als ein System begrifflich ineinandergeschachtelter Zusammenhänge, als eine Reihe von Objektivationsstufen, zwischen denen es nur noch ein Verhältnis der logischen Ueber- und Unterordnung gibt. Dieses Verhältnis ist für alle Stufen dasselbe wie zwischen Reiz und Empfindung, die ja nur einen speziellen Fall der Beziehung zwischen zwei bestimmten benachbarten Objektivationsstufen bilden. Die Beziehung zwischen Reiz und Empfindung ist keine kausale. Hier konnte die Wahrheit deswegen so lange verborgen bleiben, weil beide zeitlich verlaufen, und erst eine strengere Prüfung zeigt, daß es sich hier schon deswegen um kein kausales Verhältnis handeln kann, weil an ein Folgen in der Zeit, das zum Begriff der kausalen Abhängigkeit gehört, nicht gedacht werden kann. Die Empfindung muß als streng gleichzeitig mit ihrem inneren Reiz gedacht werden. Bei den höheren Objektivationsstufen kann aber der wahre Sachverhalt nicht verborgen bleiben, weil mit der Beseitigung des anschaulichen Elements von Raum und Zeit auch jene spezielle Art der Begründung, die als Kausalverknüpfung

lange Zeit im System der Erfahrungswissenschaften als die einzige mögliche erschien, beseitigt ist. Man darf nicht fragen, wie bringt eine höhere Stufe die niedere kausal hervor, sondern immer nur, welche logischen Motive veranlassen uns unsere Sinnesempfindungen in einer solchen Stufenfolge zu ordnen? Man kann das Verhältnis auch als eine Art logischen Parallelismus bezeichnen, wenn man darunter folgendes versteht: jede höhere Objektivationsstufe liefert der konkreteren niederen die Daten, während das Gesetz der Konstruktion aus dem reicheren Inhalt der niederen Stufe selbst entnommen ist, genau wie durch gegebene Strecken als Daten das aus ihnen zu konstruierende Dreieck bestimmt ist.

Wie die Daten ihren ganzen Sinn nur als Konstruktionsdaten für die Konstruktion besitzen, ist hier jede höhere Stufe auf die niedere angewiesen und umgekehrt, so daß sie alle ein untrennbares Ganzes bilden und erst in ihnen allen sich die Gesamtheit der Erkenntnis vollendet. Keine ist überflüssig, die höchste hängt mit der niedersten durch alle übrigen zusammen. Um das einzusehen, muß man bedenken, daß jede noch so indirekte Erkenntnis im letzten Grunde keine andere Aufgabe haben kann, als einen Zusammenhang zu stiften zwischen den unmittelbaren Sinneseindrücken. Zunächst ist das Gewebe der Koinzidenzen ein leeres Schema. Um es mit konkretem Inhalt zu füllen, müssen nun die Invarianten der allgemeinen Relativitätstheorie, jene natürlichen Abstände ds zwischen zwei Weltpunkten, wirklich gemessen werden. Jede physikalische Messung kommt letzten Endes hinaus auf eine unmittelbare Schätzung und unterscheidet sich von dieser nur dadurch, daß statt der sinnlich nicht zugänglichen oder nur ungenau zu schätzenden Größen andere mit ihnen in festem Zusammenhang stehende, genauer beobachtbare Größen geschätzt werden. Solche sind z. B. das Zusammenfallen der Länge einer Quecksilbersäule mit einer bestimmten Marke eines Maßstabes, oder bei Empfindungen verschiedener Sinne, das Zusammenfallen eines Schallsignals mit der Zeigerstellung einer Uhr. Von hier bis zur Berechnung der Abstände ds ist noch ein weiter Weg, der uns durch alle Zwischenstufen hindurch führt. Diese Abstände ds sind prinzipiell nur bestimmbar, wenn man voraussetzt, daß die Mannigfaltigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie in einem hinreichend kleinen Gebiet affin ist, daß also in diesem lokalen Gebiet die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gelten. Diese spezielle Relativitätstheorie schließt nun wieder die Voraussetzung in sich, daß für die relativ

zum Beobachter ruhenden Meßinstrumente die gewöhnlichen physikalischen, also die Newton'sche Zeit und der Euklidische Raum gelten¹⁾).

Wenn wir übrigens die raum-zeitliche Koinzidenz von zwei Sinnesindrücken vorhin eine Tatsache der unmittelbaren Erfahrung nannten, so gilt das auch nur *cum grano salis*, da bei der Schätzung einer solchen Koinzidenz, um den Schätzungsfehler herabzudrücken wieder theoretische Voraussetzungen nötig sind. Diese sind den Lehren der physiologischen Psychologie entnommen, also einer noch tieferen Objektivationsstufe. So wird beispielsweise die räumliche Koinzidenz von zwei Gesichtseindrücken durch Anvisieren festgestellt. Hier kämen also die Gesetzmäßigkeiten des früher erwähnten Richtungsbildes in Frage. Weiter wäre bei der Feststellung von der Gleichzeitigkeit von zwei Eindrücken verschiedener Sinne die persönliche Gleichung des Beobachters zu berücksichtigen usw. So gibt es im Erfahrungsganzen, streng genommen, keine „unmittelbaren Erfahrungen“, sondern auch zu ihnen ist in einem unendlichen Regressus durch immer tiefere Objektivationsstufen immer weiter zurückzufragen.

¹⁾ Vgl. hierzu S. 61.

KAPITEL VIII.

Die differentiale und die integrale Methode der Erkenntnis.

Von dem subjektiven Raum und der subjektiven Zeit als den beiden Formen, in denen ein Bewußtsein seine Empfindungen und deren Veränderungen „unmittelbar“ lokalisiert, ist der objektive Raum der Dinge und die objektive Zeit ihrer kausalen Veränderungen deutlich geschieden. Die Bewußtseinswelt bildet eine lebendige Einheit. Außer allem Einzelnen in ihr gibt es immer noch einen Jemand, der von alledem weiß. Dieser Jemand, den wir das transzendente Ich nennen, ist als Bedingung der Einheit des Bewußtseins auch die Voraussetzung der Einheit jedes Gegenstandes und damit auch die Voraussetzung der Einheit des Bewußtseinsraumes. Wenn auf einer photographischen Platte jeder der belichteten Punkte nur sich selber empfindet, so würde dieses Nebeneinander von Bewußtsein doch nicht das Bewußtsein eines Nebeneinanders sein. Damit auch die gegenseitige Lage der Punkte erfaßt wird, ist ein übergreifendes Bewußtsein, das von ihnen allen weiß, erforderlich. Für die Zeit gilt dasselbe. Ohne ein solches Bewußtsein, das zwischen den augenblicklichen Vorstellungen unterscheidet, und die einen als Wahrnehmungsvorstellungen auf den gegenwärtigen Moment, die anderen als Erinnerungsvorstellungen auf die Vergangenheit beziehungsweise Zukunft bezieht, würde das Nacheinander der Vorstellungen in der Zeit niemals zur Vorstellung eines Nacheinanders werden.

Im Bewußtseinsraum ist das Nahe und das Ferne, ist das räumlich Getrennte und das sich Berührende in gleicher Weise da. Wir können unsern Blick in buchstäblichem Sinne in die Ferne werfen, und können weit getrennte Objekte in einer Schau umfassen. Diese psychologische Einheit des Bewußtseinsraumes zeigt sich ferner auch experimentell in den subtilen und doch so streng gesetzmäßigen korrelativen Veränderungen der Farben infolge des Kontrastes und in den diesem entsprechenden geometrisch-optischen

Täuschungen, die mit ihrem zarten Filigran den ganzen Raum überziehen.

Während im Bewußtsein alles Einzelne nur möglich ist durch und im Rahmen des Ganzen, so daß hier das Ganze früher ist als seine Teile, ist in der Natur das Umgekehrte der Fall, denn die Natur ist, methodisch gesprochen, der Versuch, das Ganze aus dem Einzelnen zu begreifen, soweit — es sich eben begreifen läßt. Wir gelangen nämlich von dem unmittelbaren Erleben zu der objektiven Welt der Dinge durch Auflösen der Korrelation zwischen den Akten des Bewußtseins und seinem Inhalt und durch Ver selbständlichung des in den Empfindungskomplexen gegebenen Inhalts zu für sich bestehenden Dingen, aus deren kausaler Wechselwirkung dann der Zusammenhang zu konstruieren ist. Zu diesem Zweck müssen wir den Zusammenhang, in dem wir unsere Empfindungen unmittelbar erleben, in mannigfacher Weise abändern, ergänzen und hypothetisch unterbauen. Von diesen Operationen abgesehen aber wird auf der Stufe der natürlichen Erkenntnis in naiv-realistischer Weise angenommen, daß die Empfindungskomplexe als selbständige Dinge, auch unabhängig von meinem Bewußtsein, mit denjenigen Eigenschaften weiter bestehen, die meine Sinne an ihnen wahrnehmen. Zu diesen Dingen gehören auch die Organismen mit ihren Lebensfunktionen.

Der Glaube der natürlichen Erkenntnis, in den Sinnendingen schon das selbständige Einzelne gefunden zu haben, erweist sich einer schärferen Kritik gegenüber, die mit den Mitteln des Experiments arbeitet, als trügerisch, da die Sinnendinge sich bei genauerer Betrachtung als durchaus abhängig von meiner sinnlichen Organisation erweisen. Auf der Suche nach dem ihnen zu Grunde liegenden materiellen Kern sieht sich die Wissenschaft gezwungen, sie aufzulösen, um aus ihren hypothetisch vorausgesetzten elementaren Bestandteilen die Natur zu konstruieren. Diese die physikalische Betrachtungsweise nämlich hat das Ziel, die Welt aus dem Unendlichkleinen zu verstehen. Dieses Bestreben führt nicht notwendig zu einem Atomismus; für den genannten Zweck würden Volumen- oder Energieelemente den gleichen Dienst tun. Weshalb sich die Materie sowohl im Großen wie im Kleinen und Kleinsten zu relativ selbständigen Komplexen zusammenballt, ist ein weiteres, das eigentliche empirische Problem der Materie.

Auch in der physikalischen Welt hängt jedes Element mit jedem zusammen, aber in ganz anderer Weise wie in der des

Bewußtseins, nämlich nur wie die Glieder eines Kettengewebes, eines immer nur mit den unmittelbar benachbarten. Was räumlich und zeitlich getrennt ist, ist absolut getrennt; eine Wirkung aufeinander kann nur erfolgen durch Vermittlung der räumlich dazwischenliegenden Elemente, sodaß der Zustand der Materie in einem Raumelement in jedem Zeitpunkt bestimmt ist durch das, was in ihm und in seinen Nachbarelementen im Moment unmittelbar vorher vorhanden war. Das Buch der Natur ist in Differentialgleichungen geschrieben, und dem entsprechend wollen wir diese ganze auf Vereinzelnung hinauslaufende analytische Erkenntnisrichtung die differentiale Methode nennen.

Ebenso wie die natürliche Erkenntnisstufe nur zu erklimmen war durch Preisgabe der lebendigen Einheit des Bewußtseins, bleibt hier ein weiteres Opfer am Wege der Erkenntnis liegen: wir meinen die Organismen und ihre Lebensfunktionen und die von ihnen abhängigen sinnlichen Qualitäten. Wie der Elefant, wenn man ihn unter einem Mikroskop betrachten könnte, als Elefant verschwinden würde, so fallen die an das Ganze des Organismus gebundenen Lebensfunktionen aus dem physikalischen Weltbild heraus infolge seiner Tendenz sich nur mit dem unendlich kleinen Einzelnen und seinen Wechselwirkungen zu beschäftigen. Der Versuch, nun mit diesen Mitteln zu einem allumfassenden Zusammenhang zu gelangen, indem man jedem materiellen Element in einem objektiven Raum und in einer objektiven Zeit seine feste Stelle anweist, mißlingt nach den in den ersten Kapiteln ausgeführten Sätzen der speziellen Relativitätstheorie abermals. Wir sind gezwungen auch den Raum und die Zeit als für sich bestehende Formen preiszugeben und an ihre Stelle ein algebraisches Verschmelzungsprodukt von beiden zu setzen, das sich zunächst noch als eine homogene vierdimensionale Mannigfaltigkeit charakterisiert, deren Gleichförmigkeit bei dem Ueberschritt zur allgemeinen Relativitätstheorie zuletzt auch noch geopfert werden muß.

Damit ist die differentiale Erkenntnisrichtung an ihrem Ziel. Ihr ganzer Weg ist gekennzeichnet durch ein schrittweises Auflösen der konkreten Gestaltenfülle. Der Reihe nach sind zerstört worden nicht nur der Makrokosmos der Bewußtseinswelt, nicht nur der Mikrokosmos des lebendigen Organismus, sondern auch die geometrische Form des Raumes und zuletzt die rechnerische Gleichförmigkeit der Welt.

Mit der durch die Invariante $ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k$ charakterisierten allgemeinen Relativitätstheorie ist eine Objektivationsstufe erreicht, in der auch der letzte Rest von Gestalt beseitigt zu sein scheint. De facto zeigt aber eine schärfere Betrachtung, daß wir von dieser Stufe nur deswegen noch eine Brücke schlagen können zu der Gestaltenfülle der niederen, weil die Gestalt nicht völlig vernichtet sondern nur aufs äußerste komprimiert ist. In der Tat werden wir, wie wir gleich zeigen wollen, in den lokalen unendlichkleinen Weltgebieten genau jenes Minimum an Gestalt vorfinden, das nach der Kritik der reinen Vernunft die apriorische Bedingung für eine Erfahrbarekeit von Gegenständen überhaupt ist.

Die vierdimensionale algebraische Welt besitzt infolge der Variabilität der g_{ik} von Punkt zu Punkt verschiedene Maßbeziehungen. Damit man überhaupt von der Veränderlichkeit einer Maßbeziehung reden kann, muß für einen bestimmten Wert der Parameter x_i eine solche Maßbestimmung fixierbar sein. Die logischen Voraussetzungen sind aus der Differentialrechnung bekannt. Betrachten wir ein einfaches Beispiel. Der Ausdruck Veränderlichkeit der Richtung einer Kurve hat nur Sinn, wenn die Richtung in einem Punkt der Kurve eindeutig bestimmbar ist. Dies ist nur möglich, wenn die Richtung der Kurve in einem unendlichkleinen Kurvenstück sich nicht ändert, d. h. also, wenn dieses Kurvenstück als geradlinig betrachtet werden kann. Genau in derselben Weise liegt in dem Begriff der Variabilität der Maßverhältnisse einer inhomogenen Mannigfaltigkeit als logisches Fundament die Annahme zu Grunde, daß für ein unendlichkleines Weltgebiet diese Mannigfaltigkeit als homogen angesehen werden kann. Diese notwendige Bedingung wird von der Relativitätstheorie auch ausdrücklich dadurch anerkannt, daß g_{ik} als differentiierbare Funktionen vorausgesetzt werden.

Weiter muß, wie schon auf Seite 56 ausgeführt ist, von dem Gewebe der Koinzidenzen zu dem in der unmittelbaren Erfahrung nur gegebenen raum-zeitlichen Zusammentreffen von zwei Punkten eine Brücke geschlagen werden. Diese Brücke könnte nicht geschlagen werden, wenn nicht wenigstens in diesem lokalen Gebiet sich die Welt in Raum und Zeit spalten ließe. Auch das wird ausdrücklich von der Relativitätstheorie vorausgesetzt, indem der quadratischen Differentialform ds^2 eine weitere Beschränkung auferlegt wird. Die quadratischen Formen lassen sich bekanntlich

klassifizieren nach den Normalformen, die man ihnen bei geeigneter Koordinatentransformation geben kann. Unsere Form muß zu derjenigen Klasse gehören, von der wir einen Spezialfall schon bei dem Einkörperproblem auf Seite 36 kennen gelernt haben. Sie muß sich nämlich auf die Normalform $g_{44} dx_4^2 - d\sigma^2$ bringen lassen. In dieser ist dx_4 der Zeitparameter, sein Koeffizient g_{44} ist positiv und $d\sigma^2$ ist eine positiv definite¹⁾ Differentialform der drei Raumparameter. Die Zugehörigkeit des Ausdrucks ds^2 zu dieser Klasse ist die Bedingung für die Spaltbarkeit der Welt in Raum und Zeit in jedem lokalen Gebiet.

Eine homogene dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit der Grundform $d\sigma^2$ ist entweder schon eine Euklidische oder sie stellt eine der beiden Möglichkeiten der Nichteuklidischen Geometrie im engeren Sinne dar. Unsere Form $d\sigma^2$ ist nach dem Obengesagten im Unendlichkleinen homogen. Nach einem Hauptsatz der Nichteuklidischen Geometrie müssen aber die beiden Formen der Nichteuklidischen Geometrie im Unendlichkleinen gegen die Euklidische konvergieren.

Es zeigt sich also, daß dieselbe Relativitätstheorie, die mit dem unendlichen Euklidischen Raum und der unendlichen Newtonischen Zeit als starren fertigen Erkenntnisgegenständen in so gründlicher Weise aufräumt, eben diese Räumlichkeit in der Stellenordnung eines Beieinander und diese Zeitlichkeit in der Stellenordnung eines Nacheinander als Erkenntnismittel nicht entbehren kann. In diesem strengen Sinn als notwendige Erkenntnisfunktionen sind die reinen Anschauungsformen apriorisch, denn sie sind die logischen Grundlagen jeder Bestimmbarkeit der Erfahrung überhaupt und sind nicht selbst Erfahrungen. Daß Menschen mit normalen Augen die Objekte des Gesichtssinns farbig sehen, ist z. B. eine Tatsache der Erfahrung, das Verhalten der Welt im Unendlichkleinen ist kein Gegenstand möglicher Erfahrung sondern deren ideelle Grundlage.

Weitere apriorische Bedingungen für die Möglichkeit, das Gegebene in eindeutig bestimmter Weise zu einer Erfahrung zu verknüpfen, sind nach Kant die reinen Verstandsbegriffe, deren wichtigste Repräsentanten die Kategorien der Substantialität und Kausalität sind. Zeigen wir jetzt noch die Punkte

¹⁾ Eine solche positiv definite Differentialform muß sich auf die Normalform $a^2 dx_1^2 + b^2 dx_2^2 + c^2 dx_3^2$ bringen lassen, hat also nur positive Koeffizienten.

auf, in denen die Relativitätstheorie auch diese Kategorien anerkennen muß.

Die letzten Elemente, die jeder Naturerklärung zu Grunde liegen, müssen unveränderlich sein, weil sie nichts anderes sind als die Einheiten, mit denen gerechnet wird, und die deswegen für den Bereich der Gültigkeit der Rechnung selbstverständlich unveränderlich sind. Diejenigen rechnerischen Beziehungen, die als Naturgesetze den Anspruch auf zeitlose Gültigkeit erheben, müssen daher Bezugsgrundlagen besitzen, die in aller Zeit beharren. Die klassische Mechanik glaubte diese Rechnungseinheiten gefunden zu haben in der Massengröße der materiellen Volumelemente, d. h. in den bestimmten Zahlen, die jedem materiellen Element ein für allemal zugeordnet sind. Diese Zahlen werden nun freilich mit allem übrigen in den Strudel der Relativität hineingezogen; sie ändern sich im allgemeinen mit dem Bezugssystem. Aber diese Veränderlichkeit kann nur festgestellt werden als abhängig von den Aenderungen des Bezugssystems und wiederum von neuen Konstanten. Diese neuen Konstanten sind die in jedem lokalen Inertialsystem eindeutig bestimmten unveränderlichen „Ruhmassen“.

Ebenso wie die Substantialität finden wir auch die Kategorie der Kausalität im Fundament der Relativitätstheorie wieder. Das Kausalgesetz ist die Bedingung für die Möglichkeit, die Veränderungen in einer objektiven Zeit zu ordnen. Dieses Gesetz bleibt gültig in der Relativitätstheorie, aber es ist streng auf das Unendlichkleine beschränkt. Wir können es in folgender Weise aussprechen: Die Anwesenheit eines Körpers ruft in einem lokalen Gebiet eine kausale Veränderung hervor, wenn das Gewebe der Koinzidenzen an dieser Stelle mit ihm ein anderes ist als ohne ihn. Von den kausalen Veränderungen müssen wir jetzt die phänomenologischen unterscheiden. Eine kausale Veränderung ist eine Nahewirkung, die auch für die am Ort befindlichen Beobachter vorhanden ist; eine phänomenologische ist eine Abänderung meines Urteils, die durch die Aenderung meines Standpunktes oder meiner relativen Bewegung bedingt ist. Wenn jemand sich bewegt, dann ist zum Beispiel die Veränderung der Koinzidenzen der Farbenpunkte mit den Stellen der Netzhaut eine kausale, die damit zusammenhängende Aenderung des Richtungsbildes der räumlichen Gegenstände eine rein phänomenologische und zwar das Wort hier an dieser Stelle im subjektiven Sinne gebraucht.

Dem entsprechend sollen alle diejenigen Abänderungen des Urteils als objektiv phänomenologische bezeichnet werden, die nur durch eine Aenderung des Bezugssystems herbeigeführt sind. Eine solche wäre z. B. vorhanden, wenn ich infolge der Aenderung meiner relativen Geschwindigkeit urteilen muß, daß irgendwelche Gegenstände in beliebiger Entfernung von mir dadurch in ihrer Länge verändert sind, oder daß der Zeitverlauf irgendwelcher entfernter Ereignisse infolge meiner relativen Beschleunigung oder durch das Vorhandensein eines Gravitationsfeldes ein anderer geworden ist.

Nachdem wir so den Begriff einer kausalen Veränderung abgegrenzt haben, wollen wir seinen Inhalt festlegen. Das Kausalitätsgesetz lautet, daß gleiche Ursachen gleiche Wirkungen zur Folge haben. Was heißt das, gleiche Ursachen und gleiche Wirkungen? Da jeder Vorgang nur wiederholbar ist an einem anderem Ort im Raum und zu einem anderem Zeitpunkt, so soll diese Formulierung offenbar bedeuten, daß wo immer und wann immer die gleichen materiellen Voraussetzungen realisiert sind, sie dieselben Folgen haben. Das Kausalgesetz ist also in der alten Physik direkt der Ausdruck für die homogene Beschaffenheit von Raum und Zeit. Da die Welt der Relativitätstheorie aber eine inhomogene Mannigfaltigkeit ist, so erhebt sich jetzt die Frage, was in einer solchen noch unter gleichen Ursachen und Wirkungen zu verstehen ist? In der Tat gäbe es nur noch eine für die Physiker wertlose individuelle Kausalität, wenn es nicht möglich wäre, diese Inhomogenität in Gedanken dadurch zu beseitigen, daß man jeden Vorgang von einem lokalen Inertialsystem aus betrachtet. Wenn in allen solchen Systemen nun aus denselben materiellen Kombinationen sich nicht die gleichen Kausalketten ergeben würden, wäre die Welt offenbar ein Chaos. Wir sehen also hier den Punkt, in dem auch für die Relativitätstheorie die Kategorie der Kausalität die Bedingung für jede Erfahrungsmöglichkeit ist.

Es ist also ein Irrtum zu glauben, daß zwischen der Relativitätstheorie und dem Kantischen Apriorismus ein Widerspruch besteht. Was durch diese definitiv beseitigt ist, ist die Welt Newtons, denn die Wirklichkeit hat nicht jene gleichförmige Beschaffenheit der Newtonschen Physik, sondern ist eine von Punkt zu Punkt differenzierte Mannigfaltigkeit. Die Apriorität bestimmter Erkenntnisfunktionen — und nur diese behauptet der kritische Idealismus in seiner abgeklärten Form — wird dadurch

nicht in Frage gestellt. Diese Erkenntnisfunktionen liegen vielmehr der Einsteinschen Welt genau so zu Grunde, wie der Newtonschen, wie jeder denkbaren Möglichkeit einer Naturerkenntnis überhaupt.

* * *

Wenn die Gesamterfahrung auch ein einheitliches System von aufeinanderbezogenen Objektivationsstufen darstellt, so scheint der Weg zu ihr doch in doppelter Richtung gangbar zu sein. Entweder „erklärt“ man nämlich den Menschen — das Wort hier im weitesten Sinne gebraucht — aus der Natur, oder man erklärt die Natur aus dem Menschen. In der letzten Richtung, von dem unmittelbaren Erleben zum Naturzusammenhang, haben wir den Weg im Vorhergehenden verfolgt. Diese Methode, die wir die differentiale genannt haben, ist, erkenntnistheoretisch betrachtet, die primäre, die jeder von uns von den ersten Tagen der Geburt sein ganzes Leben gegangen ist und gehen mußte, denn die Bewußtseinsserlebnisse und nicht der Naturzusammenhang sind das ursprünglich Gegebene. Wenn wir übrigens oben von „Erklärung“ der Natur geredet hatten, so soll das nur heißen, daß wir uns klar geworden sind über die logischen Motive, die uns veranlaßt haben einen solchen Zusammenhang zu setzen.

Trotzdem liegt uns die umgekehrte Methode psychologisch näher, denn in dem ersten Moment unseres geistigen Erwachens war uns der dingliche Zusammenhang, weil wir in der Richtung zu ihm schon ein großes Stück Weges zurückgelegt hatten, so konkret greifbar und fertig gegeben, daß er uns als das realere Fundament gilt im Gegensatz zu den mehr ephemeren Erscheinungen des Lebens und Bewußtseins. Indem wir nun versuchen aus einer im Sinne des metaphysischen Materialismus für sich bestehenden Natur die Lebens- und Bewußtseinsvorgänge abzuleiten, entstehen eine Reihe von berüchtigten Scheinproblemen, deren Lösung um so unmöglicher ist, je schärfer der Begriff Natur gefaßt wird. Dieser Begriff in seiner endgültigen Fassung als zeitloses Gewebe von Koinzidenzen ist ein einseitiges Abstraktionsprodukt der differentialen Methode. Wie wir schon betont haben, haben wir in dieser letzten Objektivationsstufe nicht den Urquell alles Seins, aus dem sich nun die volle Wirklichkeit deduzieren ließe, sondern nur einen lückenlosen rechnerischen Zusammenhang gefunden, der die ganze Erfahrung in ihrer

ganzen Breite unterbaut. Wenn wir von diesem Unterbau zu der konkreten Gestaltenfülle der Wirklichkeit zurückkehren wollen, bleibt uns keine andere Möglichkeit als die, den Erkenntnisweg einfach umzukehren, indem wir uns die Frage vorlegen, wovon wir bei den einzelnen Erkenntnisschritten eigentlich abstrahiert haben. Diese synthetische Redintegration des Konkreten wollen wir die integrale Erkenntnisrichtung nennen.

Die differentiale Richtung ist eine zwangsläufige und eindeutige. Jeder Vorgang ist entweder schon ein Naturvorgang, oder er ist, wenn auch durch eine Anzahl von Objektivationsstufen, auf einen solchen beziehbar. Er führt also zuletzt auf ganz bestimmte Differentialgleichungen. Das umgekehrte Problem der Redintegration des Vorgangs ist ein vieldeutiges. Wir finden also hier, entsprechend vertieft, dieselben Verhältnisse vor, die wir von der Infinitesimalrechnung her kennen. Auch hier führt, um ein Beispiel zu nennen, jede vorgegebene Kurve auf bestimmte Differentialgleichungen, während die Wiederherstellung der Lage und Gestalt der Kurve aus diesen Gleichungen ohne weitere Angaben nicht möglich ist.

Genau so wie hier im Formalen, enthält im System der Gesamterfahrung jede höhere Objektivationsstufe die konkrete niedere, die in der empirischen Welt tatsächlich vorgefunden wird, nur neben einer unbegrenzten Zahl von Möglichkeiten, die in der Erfahrung nicht realisiert sind. So stellt zunächst eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit mit den Grundinvarianten $\sum_k g_{ik} dx_i dx_k$ infolge der Veränderlichkeit der g_{ik} im allgemeinen eine Welt moluskenartiger Dinge mit sich dauernd verändernden Gestalten dar. Neben diesen vielen ist auch unsere empirische mit ihren in praktischer Hinsicht festen Euklidischen Körpern in dieser Form als Grenzfall enthalten infolge des „zufälligen“ Umstandes, daß die g_{ik} bei den tatsächlich nur vorhandenen schwachen Gravitationsfeldern in weitem Umfang als konstant angesehen werden können. Ebenso wie an dieser Stelle sind wir nun bei jedem weiteren Erkenntnisschritt gezwungen, ein neues empirisches Moment einfach aus der Erfahrung zu übernehmen, ohne es logisch deduzieren zu können.

Fahren wir in unserer Betrachtung fort. Eine solche in praktischer Hinsicht homogene Mannigfaltigkeit läßt sich an und für sich auf unendlich vielfache Weise spalten. Daß sie sich gerade nach den Angaben der speziellen Relativitätstheorie in Raum

und Zeit spaltet, liegt in keiner Weise schon in ihr begründet. Ein weiterer Erkenntnisschritt führt uns nun von der physikalischen Welt des Raumes, der Zeit und der Zahl zu der Stufe der natürlichen Erkenntnis mit ihren lebenden Organismen und empirischen Einzeldingen. Wir befinden uns also im Gebiet der systematischen Naturwissenschaften mit ihren Problemen der Gestalt, deren wichtigstes die Zweckgestalt des organischen Lebens ist. Es ist hier genau so unmöglich, wie bei den anderen Erkenntnisstufen, das wesentlich neue Moment, das wir Leben nennen, aus dem Abstraktionsprodukt des Physikers irgendwie ableiten zu wollen. Aber eine andere Problemstellung ergibt sich trotzdem mit Notwendigkeit. Es ist nämlich die Frage unvermeidlich, wovon denn der Physiker, wenn er die Einheit der lebenden Organismen auch nur als *Berührungszusammenhang* des Unendlichkleinen auffaßt, eigentlich abstrahiert hat. Was wir an biologischen Gesetzen kennen, geht vorläufig nur auf die Lebensäußerungen und nicht auf die dynamischen Akte, die ihnen zu Grunde liegen. Diese biologischen Gesetze sind nämlich alle nur Variationen des gleichen Themas. Ob wir von der Selbsterhaltung der organischen Gestalt bei allem Wechsel des Stoffes, ob wir von der Vererbung derselben bei der Fortpflanzung, ob wir von ihrer Regeneration nach teilweiser Zerstörung, oder ob wir bei der Evolution von ihrer Anpassung an die veränderten Lebensbedingungen unter minimalster Abänderung sprechen, immer ist es dasselbe Gesetz von dem Beharren der organischen Gestalt. Welches sind nun die biologischen Kräfte, die alledem zu Grunde liegen, und wie verhalten sie sich zu den mechanisch energetischen? Sind sie etwa mit ihnen identisch? Oder wird die physikalische Berührungskausalität im Organismus überlagert durch eigentliche Fernkräfte, so daß also die Veränderungen an irgend einem Punkte des Organismus nicht nur von der unmittelbaren Umgebung des Punktes abhängen sondern auch von dem Ort dieses Punktes relativ zu den übrigen Teilen des Organismus? Wäre diese Annahme oder ein ähnliches integrales Erklärungsprinzip zutreffend, so würde das Verhältnis der *Allheit* der physikalischen Gesetze zur Gesamterfahrung dasselbe sein wie das jedes einzelnen zu allen übrigen. Keins dieser einzelnen physikalischen Gesetze erhebt nämlich schon den Anspruch sich auf die volle Wirklichkeit zu beziehen, die in ihrer unendlichen Vielgestaltigkeit begrifflich überhaupt nicht zu erschöpfen ist, sondern es beschreibt

immer nur einen idealen Fall. So gelten beispielsweise die Fallgesetze zunächst für einen Massenpunkt im reibungslosen Raum; will man sie auch auf Körper ausdehnen oder die Reibung berücksichtigen, so kann das nur geschehen, indem neue idealisierende Annahmen gemacht werden und so in infinitum. Auf diese Weise wird in einem unendlichen Regressus eine Annäherung an die Wirklichkeit erstrebt, ohne sie je zu erreichen. Genau so würde, die Existenz integraler Kräfte vorausgesetzt, auch die Gesamtheit der physikalischen Gesetze sich nicht schon auf die volle Wirklichkeit beziehen, sondern auf eine ideale Konstruktion derselben als ein Konglomerat von Berührungszusammenhängen, die sich nur im Anorganischen mit der Wirklichkeit asymptotisch berührt. — Doch das sind alles noch offene Fragen, die wir hier nur gestreift haben, um dem Lebensproblem im System der Erfahrung seine Stelle anzuweisen.

Wie es sich auch mit der Lösung des Lebensproblems verhalten möge, jedenfalls bilden die Organismen reale Einheiten und stehen als solche zwischen dem äußerlichen Zusammenhang in der anorganischen Welt und der absoluten Einheit des Bewußtseins. Wie die organischen Bildungen von dem Gesetz der Beharrung der Gestalt beherrscht werden, so ist die Grundtatsache des Bewußtseins das Streben nach Form und nach immer konzentrierterer Vereinheitlichung der Form. Jeder Inhalt wird so weit als irgend zugänglich geformt. So verschmilzt die Empfindungsgrundlage mit den Elementen der Erinnerung zu einer möglichst klaren Wahrnehmung. So verschmelzen gleichzeitige Töne zur Einheit eines Klanges, gleichzeitige Gefühlskomponenten zu einer einheitlichen Gefühlslage und so weiter. Alle Prinzipien der psychologischen Interpretation, so die Gesetze der schöpferischen Synthese, des Wachstums geistiger Werte, der beziehenden Relation sind nur verschiedene Momente dieser einen integralen Grundfunktion.

In vollkommener Reinheit zeigt sich dieses Grundmotiv alles Bewußtseins in den normativen Forderungen, die es an sich selber stellt. Die ästhetischen, logischen und ethischen Normen besagen nämlich nichts weiter, als daß das Bewußtsein sich erst dann am Ziel sieht, wenn es ihm gelungen ist, seinem vergänglichen Inhalt eine definitive Form zu geben.

So empfindet das Bewußtsein einen Gegenstand oder einen Vorgang als ästhetisches Objekt, wenn dieses ohne irgend eine

Verkümmerung seiner vollen lebendigen Anschaulichkeit doch so dargestellt ist, daß diese Darstellung nicht als zufälliger Einzelfall, sondern als endgültige Darstellung der Idee des Objekts erscheint. Und aus eben diesem Grunde, weil das Bewußtsein in seinem anschaulichen Erleben sich hier endlich am Ziel sieht, empfindet es diese ästhetischen Objekte inmitten der lärmvollen Unruhe des Daseins als Glieder eines für sich bestehenden stillen Reiches, nach einem schönen Vergleich Schopenhauers, als den über dem tosenden Wasserfall unbewegt schwebenden Regenbogen.

Die gleiche Grundfunktion alles Bewußtseins zeigt sich im logischen Denken. Vermittelst des begrifflichen Denkens versucht das Bewußtsein den losen assoziativen Verbindungen, die in ihm in den wechselnden Momenten des unmittelbaren Erlebens zufällig zusammengeraten, diejenige definitive Form aufzuprägen, die zeitlose Gültigkeit hat. Freilich leistet der empirische Stoff dem logischen Einheitswillen dauernd Widerstand, so daß die in einem bestimmten Stadium der Wissenschaft festgestellte Einheit der Erfahrung immer nur eine vorläufige ist. Wir finden sie nur, wie man gesagt hat, um sie wieder zu verlieren. Seinen letzten Zweck erreicht das Bewußtsein nur da, wo es sich auf die formalen Gesetze jeder Verknüpfungsmöglichkeit, also auf die Gesetze der Logik selbst beschränkt. Diese sind zwar in ihrer Anwendung auf den empirischen Stoff angewiesen, aber nichtsdestoweniger von allem Empirischen deutlich geschieden, und eben weil hier wieder das Bewußtsein sein letztes Ziel erreicht hat, stellen sie sich ihm dar als ein freischwebendes Reich der Wahrheiten an sich, ein Reich des Seins, welches kein Werden hat im Gegensatz zum Empirischen, das immer wird, aber niemals eigentlich ist.

Man spricht nun allerdings oft von einer psychischen Kausalität des Denkens. Wenn man diesen Begriff in seiner präzisen Bedeutung nimmt, dann gäbe es im Strom des Bewußtseins einzelne aufeinanderfolgende zeitliche Zustände, die sich kausal bedingen. Diese Uebertragung des physikalischen Kausalbegriffes auf das Bewußtsein ist aber psychologisch unmöglich. Es gibt im lebendigen Vollzug eines Gedankens keine zeitlichen Querschnitte wie in der gegenständlichen Natur. Was an einem Denkvorgang kausal zu begreifen ist, ist der assoziative Vorstellungsverlauf oder, besser gesagt, dessen physiologische Grund-

lage. Durch diesen wird dem Denken aber nur das Material geliefert. Was den Vorgang erst zu einem Denkvorgang macht, ist vielmehr ein Kampf gegen das diesen Assoziationsverlauf regelnde Prinzip der Gewohnheit mit ihrer Gedankenträgheit und unrichtigen Verallgemeinerung und den übrigen Hemmungen des Denkens. Durch die kausale Betrachtungsweise wird das denkende Bewußtsein zu einer Rechenmaschine, die abwarten muß, ob sie richtig rechnet. Eine solche Rechenmaschine aber sieht nichts ein, und jeder wahre Denktakt ist ein Einsehen, d. h. buchstäblich ein Hineinsehen in jenes für sich bestehende Reich logischer Abhängigkeiten und Beziehungen. An diesem Universum des Gedachten richtet sich das endliche Denken auf und findet an seiner inneren Struktur seinen Halt. So ist jeder wahre Gedanke eine Befreiung von dem Zwang der Kausalität.

Was hier für das logische Bewußtsein ausgeführt ist, gilt entsprechend auch für das sittliche. In jedem Subjekt liegt dauernd im Kampf mit den augenblicklichen und vorübergehenden sinnlichen Bestimmungsgründen, die das Bewußtsein in eine ihm fremde Richtung drängen, die eigentliche Grundfunktion alles Wollens. Diese kann auch hier keine andere sein als die, jedem Willensentscheid eine objektive und somit endgültige Form zu geben. Das Bewußtsein empfindet einen Willensentscheid erst dann als sittlich wertvoll, wenn es sich von allem, das es zwingen will, freigemacht hat, wenn es also so gewollt hat, wie es wünschen kann, daß immer und von allen gewollt wird. Dann erst hätte es seinen letzten Zweck erreicht und wäre sich selbst treu geblieben. Aus dem ewigen Antagonismus zwischen dem, was das sittliche Bewußtsein als seine letzte Pflicht ansieht, und dem, was es erfahrungsmäßig erreicht, entspringt die religiöse Forderung eines Reiches, das nicht von dieser Welt ist, eines Reichs des Guten. So sehen wir zuletzt am Horizont der Gesamterfahrung die religiösen Ideen aufleuchten.



VERLAG VON THEODOR STEINKOPFF, DRESDEN UND LEIPZIG

Die wissenschaftlichen Grundlagen der Analytischen Chemie

Elementar dargestellt von **WILHELM OSTWALD**

Siebente Auflage 233 S. u. 3 Fig. im Text Preis steif karton. M. 20.—

Grundlinien der Anorganischen Chemie

Von **WILHELM OSTWALD**

Vierte Auflage. 860 S. u. 132 Fig. im Text. Preis M. 38.—, geb. M. 45.—

Grundriß der Allgemeinen Chemie

Von **WILHELM OSTWALD**

== Sechste umgearbeitete Auflage ==

Groß-Oktav-Format. 647 S mit 69 Abb. Preis geh. M. 38.—, geb. M. 45.—

Moderne Elektrizitätslehre

von

N. R. CAMPBELL

Professor an der Universität Cambridge

Nach der 2. Auflage des Originals mit Autorisation des
Verfassers in deutscher Sprache herausgegeben von

DR. ULFILAS MEYER

Groß-Oktav-Format, X und 423 Seiten stark. Preis M. 50.—

Einführung ⁱⁿ die ^{die} Spektrochemie

von

G. URBAIN

Professor an der Sorbonne, Paris

Autorisierte Uebersetzung aus dem Französischen von

DR. ULFILAS MEYER

Groß-Oktav-Format, VIII u. 213 Seiten stark, mit 67 Abbildungen u. 9 Tafeln

Preis M. 25.—, gebunden M. 30.—

VERLAG VON THEODOR STEINKOPFF, DRESDEN UND LEIPZIG

DIE ATOME

von Dr. J. PERRIN, Prof. an der Sorbonne, Paris

Autorisierte Uebersetzung aus dem Franzosischen von Dr. A. Lottermoser, Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden

Zweite verbesserte Auflage :. Preis geh. M 18.—

Einführung in die Thermodynamik

von R. BLONDLOT, Prof an der Universität Nancy

Autorisierte deutsche Ausgabe, übersetzt von Karl Schorr und Friedrich Platschek . Preis M. 12.—

RADIUM- TIEFENTHERAPIE

Das Problem der modernen
Radiumbehandlung des Krebses

zugleich ein Tabellarium für die Radiumbestrahlung des Gebärmutterkrebses.

Von

Dr. W. LAHM

Medizinalrat und Vorstand des Laboratoriums an der Staatlichen Frauenklinik in Dresden

mit einem Vorwort von Dr. E. KEHRER, Geh. Medizinalrat und Direktor der Staatlichen Frauenklinik in Dresden

Preis M. 5.—

Demnächst erscheinen

ZUR THERAPIE DES KARZINOMS MIT RÖNTGENSTRAHLEN

von

Prof. Dr. FR. DESSAUER, Frankfurt a. M.

ca. 4 Bogen stark, mit zahlreichen Abbildungen . Preis ca. M. 8.—

(Erscheint Ende September 1921)

EINFÜHRUNG IN DIE PHYSIK DER RÖNTGENSTRAHLEN

von

Prof. Dr. FR. DESSAUER, Frankfurt a. M.

und **Prof. Dr. FRIEDRICH**, Freiburg i Br

ca. 15 Bogen stark, mit zahlreichen Abbildungen : Preis ca. M. 30.—

VERLAG VON THEODOR STEINKOPFF, DRESDEN UND LEIPZIG

Reine und angewandte Kolloidchemie in Einzeldarstellungen:

DIE BEDEUTUNG DER KOLLOIDE FÜR DIE TECHNIK

Allgemeinverständlich dargestellt von **Prof. Dr. KURT ARNDT**
Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin
Dritte vermehrte und verbesserte Auflage Preis M. 4.—

EINFÜHRUNG IN DIE KOLLOIDCHEMIE

Ein Abriss der Kolloidchemie für Studierende, Aerzte, Lehrer und Fabrikleiter
Von **Dr. VICTOR PÖSCHL**
Professor an der Handelshochschule Mannheim
Fünfte verbesserte und vermehrte Auflage XII u. 148 S. Gr.-Oktav mit 56 Abbildungen
Preis M. 18.—

DIE METHODEN ZUR HERSTELLUNG KOLLOIDER LÖSUNGEN ANORGANISCHER STOFFE

Von **Dr. THE SVEDBERG**
Professor an der Universität Upsala
Zweite Auflage (anastatischer Neudruck der ersten Auflage)
32 Bogen mit 60 Abbild., zahlreichen Tabellen und 3 Tafeln Preis M. 40.—

GRUNDRISS DER KOLLOIDCHEMIE

Von
DR. WO. OSTWALD
Professor a. d. Universität Leipzig
Sechste Auflage. 1. Hälfte. Preis M. 40.—

DIE WELT DER VERNACHLÄSSIGTEN DIMENSIONEN

Eine Einführung in die moderne Kolloidchemie mit
besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen
Von
DR. WO. OSTWALD
Professor a. d. Universität Leipzig
Fünfte bis sechste Auflage. Umfang 16 Bogen mit zahlreichen Abbildungen.
Preis steif karton. M. 30.—

Kleines Praktikum der Kolloidchemie

Von
DR. WO. OSTWALD
Professor a. d. Universität Leipzig
mitbearbeitet von **PAUL WOLSKI**
Zweite Auflage
Groß-Oktav-Format XII und 159 Seiten mit 14 Textfiguren
Preis: Steif karton. M. 18.—
168 vom Verfasser ausprobierte und nur gangbare Versuche machen
dieses Praktikum für jeden unentbehrlich, der sich experimentell mit
Kolloidchemie beschäftigt

Bayliss, Prof. Dr. W. M.: Das Wesen der Enzym-Wirkung. Deutsch von Karl Schorr. Preis M. 8.—

Findlay, Prof. Dr. Alexander: Der osmotische Druck. Deutsch von Dr. Guido Szivessy. Mit einer Einführung von Wi. Ostwald. 96 Seiten. Preis geheftet M. 10.—

Fischer, Prof. Dr. Martin H.: Das Oedem. Eine experimentelle und theoretische Untersuchung der Wasserbindung in Organismen. Deutsch von K. Schorr u. Wo. Ostwald. 14 Bogen stark mit 42 Abbildungen. Preis M. 16.—

Fischer, Prof. Dr. Martin H.: Die Nephritis. Autorisierte deutsche Ausgabe von Hans Handovsky u. Wo. Ostwald. Mit 30 Illustrationen und 1 farbigen Tafel. Preis M. 12.—

Fischer, Prof. Dr. Martin H.: Diagnose, Prognose und Behandlung bei Nephritis. Eine klinische Vorlesung. Preis M. 5.—

Freundlich, Prof. Dr. H.: Kapillarchemie und Physiologie. Preis geh. M. 4.—

Handovsky, Hans: Fortschritte in der Kolloidchemie der Eiweißkörper. Preis M. 4.—

Liesegang, R. E.: Beiträge zu einer Kolloidchemie des Lebens. Preis M. 8.—

Michaelis, Prof. Dr. L.: Dynamik der Oberflächen. Eine Einführung in die biologischen Oberflächenstudien. Preis M. 12.—

Pauli, Prof. Dr. Wo.: Kolloidchemie der Eiweißkörper (1. Hälfte). M. 12.—

Pauli, Prof. Dr. Wo.: Kolloidchemie der Muskelkontraktion. Preis M. 3.—

Plimmer, R. H. A.: Die chemische Konstitution der Eiweißkörper. Deutsch von J. Matula. Preis M. 24.—

Robertson, Prof. Dr. T. B.: Die physikalische Chemie der Proteine. Umfang 29 Bogen. Preis M. 40.—, geb. M. 48.—

Weiser, Dr. Martin H., Medizinische Kinematographie. 124 Seiten stark mit 24 Abbildungen. Preis M. 10.—

Eichwald, Dr. E.: Probleme und Aufgaben der Nahrungsmittelchemie. VIII und 100 Seiten stark. Preis M. 15.—