Sammlung Göschen

Wahrscheinlichkeits-rechnung

Von

Prof. Dr. Franz Hack

Mit 15 Figuren

GJG

Sammlung

Unſ

Biblioteka
Politechniki Wrocławskiej

D. 1634. I.

Archiwum

Jed

G.
G.

3

übe
Wi
auf
rück
arb
biet

geſtellt, aber dennoch ſtehen alle Bändchen in innerem Zuſammenhange miteinander, ſo daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, ſyſtematiſche Darſtellung unſeres geſamten Wiſſens bilden dürfte.

Ein ausführliches Verzeichnis der bisher erſchienenen Nummern befindet ſich am Schluß dieſes Bändchens

Mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen

Jedes Bändchen in Leinwand gebunden 90 Pfennig

Geschichte der Mathematik

Die außerordentliche Erhöhung der Buchdrucker-, Buchbinder- und Papierpreise, die in den letzten Jahren stattgefunden und die Herstellung aller Bücher in starkem Maße verteuert hat, zwingt uns leider, den Ladenpreis unserer

Sammlung Göschen auf 1 Mark

für den Band zu erhöhen. Diese Steigerung bedeutet im Verhältnis zum großen Anwachsen der Herstellungskosten einen minimalen Aufschlag, und so dürfen wir wohl hoffen, daß dadurch der andauernde Aufschwung unseres Unternehmens in keiner Weise gehemmt wird, die Bändchen vielmehr eine immer weitere Verbreitung finden und neue Freunde sich gewinnen werden, um so mehr, als angesichts ihres inneren Wertes und aller sonstigen einschlägigen Verhältnisse unsere Bändchen doch immer noch ungewöhnlich preiswert bleiben.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

G. m. b. H.

Berlin und Leipzig.

Wahrscheinlichkeitsrechnung von Dr. Franz Hack, Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Mit 15 Figuren im Text. Nr. 508.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Prof. Dr. Hermann Schubert Neue Ausgabe von Dr. Robert Haußner, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Prof. Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.

Wenden!

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate v. Prof. Wilh. Weitbrecht. 2 Bändchen. Nr. 302 u. 641.

Vektoranalysis mit 16 Figuren von Professor Dr. Siegfr. Valentiner. Nr. 354.

Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Algebraische Kurven von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I. Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.

— — **II:** Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.

Koordinatensysteme von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 507.

Einführung in die geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Einleitung in die Funktionentheorie (Theorie der komplexen Zahlenreihen) von Oberlehrer Max Rose in Berlin-Wilmersdorf. Mit 10 Figuren. Nr. 581.

Funktionentheorie von Dr. Konrad Knopp, Privatdozent an der Universität Berlin. **I:** Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 9 Figuren. Nr. 668

Versicherungsmathematik v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.

Geometrisches Zeichnen mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.

Vermessungskunde von Oberlehrer Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 2 Bändchen mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469

Geodäsie von Prof. Dr. C. Reinhertz, neubearbeitet von Dr. G. Förster in Potsdam. Mit 68 Abbildungen. Nr. 102.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearbeitet von Prof. Dr. Herm. Kobold. **I:** Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

— — **II:** Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.

Astrophysik mit 15 Abbildungen von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus, neubearbeitet von Dr. H. Ludendorff. Nr. 91.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schiffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.

Luft- und Meeresströmungen von Dr. Franz Schulze. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Sammlung Göschen

Wahrscheinlichkeits-rechnung

Von

Professor Dr. Franz Hack

Mit 15 Figuren im Text

Neudruck

Berlin und Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.
1914

Alle Rechte, namentlich das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Politechniki
Wrocławskiej

Inv. 358.

Druck
der Spamerschen
Buchdruckerei in Leipzig

Inhalt.

Seite

III. Abschnitt. Das Gesetz der großen Zahlen.

IV. Abschnitt. Wahrscheinlichkeit auf Grund der Erfahrung.

V. Abschnitt. Theorie der Beobachtungsfehler.

Literatur.

A. Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt.

J. Bertrand, Calcul des probabilités. Paris 1888.

H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig 1906.

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Auflage, 2 Bände. Band I. Leipzig 1908.

N. Herz, Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung. Sammlung Schubert. Leipzig 1900.

A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch von H. Liebmann. Leipzig 1912.

H. Poincaré, Calcul des probabilités. Paris 1896.

B. Ausgleichungsrechnung.

E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891.

F. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. Auflage. Leipzig 1907.

C. Statistik und Versicherungswesen.

E. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik. Leipzig 1906.

C. Landré, Mathemathisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung. 3. Auflage. Jena 1905.

Über das ganze Gebiet und dessen Literatur siehe ferner die einschlägigen (nicht für den Anfänger bestimmten) Artikel der: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, I. Band. 2. Teil. D. 1, 2, 4a, 4b. Leipzig 1900—1904.

Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, Tome I, vol. IV, 20, 21' 22, 24, 25. Leipzig 1906—1911.

Die in dem vorliegenden Band der Sammlung Göschen als bekannt vorausgesetzen Ergebnisse der algebraischen Analsysis und Infinitesimalrechnung finden sich fast ausnahmslos in den Bänden 53, 87 und 88; die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate ist in Band 302 und 641, die Versicherungsmathematik in Band 180 eingehend behandelt.

I. Abschnitt.

Die Grundlehren.

§ 1. Die mathematische Wahrscheinlichkeit und deren unmittelbare Bestimmung; Gegensatz zwischen Wahrscheinlichkeit a priori und a posteriori.

1. Über das Eintreffen eines Ereignisses E oder das Vorhandensein eines Tatbestandes sei bekannt, daß unter m möglichen Fällen deren g $(g < m)$ das Eintreffen von E bedeuten oder, wie man gewöhnlich sagt, dem Ereignis E günstig sind; man bezeichnet dann den echten Bruch $w = \frac{g}{m}$ als die mathematische Wahrscheinlichkeit von E. Ob E in einem Einzelfall wirklich stattfindet, wissen wir nicht; darüber entscheidet nach der üblichen Ausdrucksweise der Zufall (vgl. § 21), selbst dann, wenn w noch so nahe an 0 oder 1 liegt.

Sind z. B. in einer Urne 7 Kugeln, worunter 5 weiße und 2 schwarze, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel gleich $^5/_7$.

Ist $g = 0$, so wird $w = 0$; ist $g = m$, so wird $w = 1$; die Zahlenwerte $w = 0$ und $w = 1$ bezeichnen also die Unmöglichkeit und die Gewißheit; von Wahrscheinlichkeit kann man hier genau genommen nicht mehr sprechen, da dem Zufall kein Platz mehr übrigbleibt.

Ist $g = \frac{1}{2} m$, also $w = \frac{1}{2}$, so kann E ebensowohl eintreffen als ausbleiben, oder man kann 1 gegen 1 wetten, daß E stattfindet: häufig bezeichnet man in diesem Fall das Ereignis schlechthin als wahrscheinlich.

Sind g Fälle günstig für E, so sind $m - g$ Fälle ungünstig; setzt man also $w' = \frac{m-g}{m}$, so ist:

$$w + w' = 1;$$

w', auch Gegenwahrscheinlichkeit genannt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß E nicht stattfindet.

2. Die vorangehende Begriffsbestimmung bedarf noch einer wichtigen Ergänzung: die in Betracht gezogenen Fälle müssen gleichwertig (gleichmöglich, gleichberechtigt) sein. Zur Erläuterung diene ein einfaches Beispiel. Ich habe zwei Kästchen A, B, jedes mit zwei Fächern a, b; in jedem Fach liegt eine Münze von folgender Beschaffenheit:

	A:	B:
a:	Gold,	Gold,
b:	Gold,	Silber.

Ich wähle ein Kästchen, öffne ein Fach und finde darin eine Goldmünze; welches ist die Wahrscheinlichkeit, in dem zweiten Fach eine Silbermünze zu finden?

Der Anfänger schließt vielleicht: entweder habe ich A gewählt oder B, der erste Fall ist ungünstig, der zweite günstig, folglich $w = \frac{1}{2}$. Aber dies ist irrig; möglich sind drei Fälle: Aa, Ab, Ba; günstig ist nur der letztgenannte, also $w = \frac{1}{3}$. Der Fehlschluß war, daß die Fälle A und B als gleichwertig behandelt wurden; tatsächlich umfaßt A zwei Fälle, B nur einen.

Kann man, wie hier, durch Zerlegung in „Elementarfälle“ die Schwierigkeit beheben, so bleibt dem Mathematiker nur die Abzählung der Fälle, zumeist auf Grund der Regeln der Kombinatorik.

3. Unsere Betrachtungen beschränken sich nicht auf den Fall, daß eine solche unmittelbare Bestimmung der Wahrscheinlichkeit möglich sei. Läßt sich die letztere auf rein deduktivem Weg feststellen, ohne irgendwie die Erfahrung heranzuziehen, so spricht man von Wahrscheinlichkeit a priori. Im Gegensatz hierzu kann man darauf ausgehen, auf Grund von Versuchen, statistischen Erhebungen usw. ein Urteil über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu gewinnen. Eine Wahrscheinlichkeit, bei deren Berechnung die Erfahrung mitgewirkt hat, wird als Wahrscheinlichkeit a posteriori[1]) bezeichnet; ist in n beobachteten, gleichwertigen Fällen das Ereignis E α-mal eingetreten, so nennt man $\frac{\alpha}{n}$ die relative Häufigkeit von E. Die Abschnitte I, II und III unserer Darstellung beziehen sich im allgemeinen auf die Wahrscheinlichkeit a priori; dabei ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß die Erfahrung zum Vergleich herangezogen wird. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit a priori, mit einer Münze Wappen zu werfen, $1/2$; die Erfahrung ergibt, daß bei einer großen Zahl von Versuchen tatsächlich etwa in der Hälfte der Fälle Wappen geworfen wird. In den Abschnitten IV, V und VI dient die Erfahrung als wesentliche Grundlage der Wahrscheinlichkeitsbestimmung[2]).

---

[1]) Der Begriff wurde in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt von Jakob (I) Bernoulli, Ars conjectandi (1713), vierter Teil, Kap. IX; deutsch von R. Haußner: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 107 und 108, Leipzig 1899.

[2]) Über den Sinn der Wahrscheinlichkeitssätze s. u. a. J. v. Kries, Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Freiburg 1886, bes. S. 1—23.

§ 2. Vollständige und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit bei Wiederholung von Versuchen.

1. Eine Urne möge 11 Kugeln enthalten, darunter 5 weiße, 4 schwarze, 2 rote. Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, eine schwarze oder rote Kugel zu ziehen. Unter den 11 möglichen Fällen sind $4+2$ günstig; daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{4+2}{11} = \frac{4}{11} + \frac{2}{11}$; man muß also die einzelnen Wahrscheinlichkeiten addieren.

Wird allgemein das Ereignis E verwirklicht durch das Eintreffen eines e i n z e l n e n der sich gegenseitig ausschließenden Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_r$, und ist g_i die Zahl der für E_i günstigen Fälle, so ist die Zahl der für E günstigen Fälle:

$$g = g_1 + g_2 + \cdots + g_r \,.$$

Sind nun im ganzen m Fälle möglich ($m \geqq g$), so folgt:

$$\frac{g}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \cdots + \frac{g_r}{m} \,.$$

Ist daher $\frac{g}{m} = w$ die Wahrscheinlichkeit von E, $\frac{g_i}{m} = w_i$ diejenige von E_i, so ergibt sich:

$$w = w_1 + w_2 + \ldots + w_r \,.$$

Der hierin enthaltene Satz heißt auch A d d i t i o n s s a t z der Wahrscheinlichkeitsrechnung; w selbst heißt v o l l s t ä n d i g e (auch alternative) Wahrscheinlichkeit, es ist die Wahrscheinlichkeit des „Entweder—Oder“.

2. Wir gehen nun zu einem völlig anders gearteten Fall über. Außer der vorhin beschriebenen Urne sei eine

zweite vorhanden; diese soll 13 Kugeln, worunter 6 weiße, 7 schwarze, enthalten. Ich ziehe aus jeder Urne eine Kugel; welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß es beidemal eine weiße Kugel sei?

Hier sind offenbar $11 \cdot 13$ Fälle möglich, davon $5 \cdot 6$ günstig; also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{5 \cdot 6}{11 \cdot 13} = \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{13}$; man hat somit die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zu multiplizieren.

Gilt allgemein E als eingetroffen, wenn jedes der Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_r$ stattgefunden hat, und sind g_i, m_i die Zahlen der günstigen bzw. möglichen Fälle für E_i, g, m die entsprechenden Zahlen für E, so ist:

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_r\,, \qquad m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r\,.$$

Hieraus folgt, wenn $\frac{g}{m} = w$, $\frac{g_i}{m_i} = w_i$ gesetzt wird:

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_r\,.$$

Dies ist der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung; er drückt die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer, voneinander unabhängiger Ereignisse aus; w heißt in diesem Fall die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, es ist die Wahrscheinlichkeit des „Sowohl—Als auch“.

Beschränken wir uns auf zwei Ereignisse E_1, E_2, so kann es vorkommen, daß die Wahrscheinlichkeit von E_2 davon abhängt, ob E_1 eingetreten ist. Es sei z. B. bei der in 1. genannten Urne nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß zweimal nacheinander eine weiße Kugel gezogen wird, wobei jedoch die zuerst gezogene weiße Kugel aus der Urne entfernt bleibt. Hier hat man $w_1 = \frac{5}{11}$,

aber $w_2 = \frac{5-1}{11-1} = \frac{4}{10}$, daher $w = \frac{5 \cdot 4}{11 \cdot 10} = \frac{2}{11}$.
Zu dem gleichen Ergebnis kommt man indessen auch, wenn mit einem Griff zwei Kugeln gezogen werden; dann ist die Zahl der möglichen bzw. günstigen Fälle $\binom{11}{2}$ bzw. $\binom{5}{2}$.

3. Die Ereignisse E_1, E_2 mögen einander ausschließen und die Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2 haben; hierbei ist $w_1 + w_2 \leqq 1$; das Gleichheitszeichen gilt, wenn E_2 in dem Nichteintreffen von E_1 besteht.

Die Wahrscheinlichkeit w_0 dafür, daß bei $x+y$-maligem Versuch E_1 in x, E_2 in y Fällen und zwar in bestimmter Reihenfolge eintritt, ergibt sich aus dem Multiplikationssatz:

$$w_0 = w_1^x \cdot w_2^y .$$

Ist die Reihenfolge beliebig, so ist auf Grund des Additionssatzes die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = m \cdot w_0 ,$$

wenn m die Zahl der Permutationen von $x+y$ Elementen, worunter je x und je y gleiche, bedeutet. Man hat also[1]):

$$w = \frac{(x+y)!}{x!\,y!} w_1^x w_2^y = \binom{x+y}{x} w_1^x w_2^y = \binom{x+y}{y} w_1^x w_2^y .$$

Offenbar ist w ein Glied in der Entwicklung von $(w_1 + w_2)^{x+y}$, daher $w < 1$, wie es sein muß.

Einfache Beispiele liefern die vorerwähnten Urnen.

Setzt man $x+y=n$, sowie $x=n, n-1, \ldots, n-r$, $y = 0, 1, \ldots, r$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei n-maligem Versuch:

E_1 in n, E_2 in 0 Fällen eintrifft: w_1^n,

---

[1]) Sammlung Göschen, Nr. 53, § 16.

E_1 „ $n-1$, E_2 „ 1 Fall eintrifft: $\binom{n}{1} w_1^{n-1} w_2$,

E_1 „ $n-2$, E_2 „ 2 Fällen „ : $\binom{n}{2} w_1^{n-2} w_2^2$,

. . . .

E_1 „ $n-r$, E_2 „ r „ „ : $\binom{n}{r} w_1^{n-r} w_2^r$.

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei n-maligem Versuch nur E_1 oder E_2, und zwar E_1 mindestens $n-r$-mal stattfindet:

$$W = w_1^n + \binom{n}{1} w_1^{n-1} w_2 + \binom{n}{2} w_1^{n-2} w_2^2 + \ldots + \binom{n}{r} w_1^{n-r} w_2^r.$$

Für $r = n$ wird hieraus:

$$W_n = (w_1 + w_2)^n,$$

entsprechend den früheren Formeln; W_n ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in jedem der n Fälle entweder E_1 oder E_2 eintritt.

Ist $r < n$, aber $w_1 + w_2 = 1$, so ist W einfacher die Wahrscheinlichkeit dafür, daß E_1 mindestens $n-r$-mal stattfindet.

Ist endlich $r = n$ und $w_1 + w_2 = 1$, so wird $W_n = 1$.

§ 3. Relative Wahrscheinlichkeit; Abhängigkeit von Ereignissen.

1. Unter relativer Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E in bezug auf ein anderes F versteht man die Wahrscheinlichkeit von E unter der Voraussetzung, daß F eingetreten ist (oder zugleich eintritt). Eine Urne enthalte 17 Kugeln, davon 11 weiße, 4 schwarze, 2 rote; jemand zieht eine Kugel und teilt mir mit, daß sie nicht

Bibl.

rot ist. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine weiße Kugel gezogen wurde, nach § 1: $W_1 = \frac{11}{11+4} = \frac{11}{15}$. In diesem Beispiel sind $w_1 = \frac{11}{17}$, $w_2 = \frac{4}{17}$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weißen bzw. schwarzen Kugel; die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit ist $W_1 = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$.

Der Sachverhalt kann allgemein so dargestellt werden: unter den überhaupt möglichen Fällen wird nur ein bestimmter Komplex F betrachtet, der aus dem Eintreffen eines der einander ausschließenden Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_r$ mit den absoluten Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, \ldots, w_r$ besteht. Nach dem Additionssatz hat F die Wahrscheinlichkeit $w_1 + w_2 + \ldots + w_r$; E_1 kommt nun dadurch zustande, daß zunächst F und dann E_1 eintritt. Ist also W_1 die Wahrscheinlichkeit von E_1 unter der Voraussetzung des Eintreffens von F, kürzer „unter der Voraussetzung F", so ergibt der Multiplikationssatz:

$$w_1 = (w_1 + w_2 + \ldots + w_r) \cdot W_1 ,$$

oder:

$$W_1 = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + \ldots + w_r} .$$

Dieser Quotient ist die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit.

2. Wir wollen mit $W(E, F)$ die Wahrscheinlichkeit von E unter der Voraussetzung F bezeichnen, mit $W(E, F_0)$ diejenige unter einer von F verschiedenen Voraussetzung; für Gewißheit und Unmöglichkeit sollen die Symbole 1 und 0 benutzt werden.

Ist nun E tatsächlich von F abhängig, so kann dieser Sachverhalt durch die Beziehung:

$$W(E, F) \neq W(E, F_0)$$

gekennzeichnet werden; hingegen bedeutet

$$W(E, F) = W(E, F_0)$$

die Unabhängigkeit der Ereignisse E, F.

Folgt aus dem Bestehen von F notwendig dasjenige von E, so gilt:

$$W(E, F) = 1 \, .$$

Schließen hingegen die Ereignisse E, F einander gegenseitig aus, so ist:

$$W(E, F) = W(F, E) = 0 \, .$$

§ 4. Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs: unendliche Anzahl der Fälle.

1. Das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wir suchen, soll darin bestehen, daß eine unbekannte reelle Zahl x zwischen gegebene Grenzen a, b $(a < b)$ falle; x selbst soll alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen können, jedoch so, daß die Häufigkeit des Vorkommens der Zahl x durch:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

dargestellt wird.

Die Bedeutung von $\varphi(x)$ läßt sich folgendermaßen erläutern: ist Δx so klein, daß die Änderung von $\varphi(x)$ vernachlässigt werden kann, während x in $x + \Delta x$ übergeht, so wird die Zahl der Fälle, in welchen x zwischen x_0 und $x_0 + \Delta x$ liegt, dem Produkt $\varphi(x_0) \cdot \Delta x$ proportional sein; nimmt man z. B. $x_0 = 0$ und $= 3$, so werden Zahlen zwischen 0 und Δx zehnmal so häufig sein als solche zwischen 3 und $3 + \Delta x$. Die Anzahl der günstigen und möglichen Fälle ist hier unendlich; die seitherige Definition versagt also.

Da wir aber nur das Verhältnis dieser Anzahlen suchen, so beantwortet sich die eingangs gestellte Frage dadurch, daß man den Quotienten der beiden Integrale:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

bildet; das erstere hat den Wert $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a$, das letztere den Wert π; mithin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a)\,.$$

Die Integrale können geometrisch gedeutet werden (Fig. 1); das erste ist die schraffierte Fläche, das zweite die ganze Fläche zwischen der Kurve und der Abszissenachse[1]).

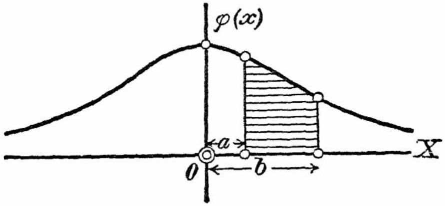

Fig. 1.

2. Wird einer geometrischen Figur eine zu ihrer Bestimmung nicht hinreichende Zahl von Bedingungen auferlegt, so kann die Figur noch unendlich viele Formen

[1]) Sammlung Göschen, Nr. 88, § 23 u. 24,

annehmen. Man stellt nun gewisse Forderungen auf und fragt nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine beliebig gezeichnete Figur diesen Forderungen entspricht; Beispiele hierzu werden in § 11 gegeben werden. Auch bei dieser geometrischen Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Fälle unendlich groß und entzieht sich deshalb der Abzählung; die Lösung der Aufgabe kann wie in 1. mit Hilfe der Integralrechnung oder auch auf elementarem Weg erfolgen.

3. Probleme der angeführten Art haben zu einer Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs Anlaß gegeben[1]): Die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnis aus dem Inhalt der Mannigfaltigkeit der ihm günstigen Fälle zu der Mannigfaltigkeit aller als gleichwertig vorausgesetzten Fälle.

Diese Definition umfaßt ebenso die Fälle, wo der Inhalt der Mannigfaltigkeit sich durch Zählung bestimmen läßt (diskrete Mannigfaltigkeit), wie die anderen, wo die Messung (nötigenfalls im mehrdimensionalen Raum) Platz greifen muß (kontinuierliche Mannigfaltigkeit). Was die Gleichwertigkeit der Fälle anlangt, so liegt den Aufgaben der geometrischen Wahrscheinlichkeit im allgemeinen die Annahme einer homogenen Struktur des Kontinuums zugrunde; hiernach entfällt z. B. auf ein der Größe nach gegebenes Intervall einer Geraden überall die gleiche Punktmenge, unabhängig von der Lage des Intervalls. Dieser Voraussetzung über die Struktur des Kontinuums, dem die Elemente angehören, entspricht die Aussage, daß jedes herausgegriffene Element schlechthin willkürlich gewählt sei. So kann auch der in **1.** ge-

[1]) E. Czuber, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I, 2, D. 1, S. 753. 1900—1904.

fundene Wert w als geometrische Wahrscheinlichkeit dafür gedacht werden, daß ein willkürlich zwischen der Kurve und der Abszissenachse gewählter Punkt in das schraffierte Gebiet fällt.

§ 5. Mathematischer Erwartungswert, mathematisches Risiko.

1. Hat A aus einem Ereignis E_1, dessen Wahrscheinlichkeit w_1 ist, den Gewinn a_1 zu erwarten, so nennt man $e_0 = a_1 w_1$ den mathematischen Erwartungswert; der Geldbetrag e_0 bedeutet hiernach einen Ersatz für die unsichere Einnahme a_1, um den Preis e_0 kann A seinen Gewinnanspruch zum Verkauf anbieten. Mann kann e_0 auch als Durchschnittswert auffassen: unter einer großen Anzahl n von Fällen werden etwa $n w_1$ den Gewinn a_1 bringen, die übrigen nichts; also ist der durchschnittliche Gewinn $a_1 n w_1 : n = a_1 w_1$.

Es sollen nun r Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_r$ möglich sein derart, daß sie einander ausschließen, aber eines unter ihnen eintreten muß; für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt dann:

(1) $$w_1 + w_2 + \ldots + w_r = 1 .$$

Fällt für das Eintreffen von E_i dem A der Gewinn a_i zu (die a_i können auch $= 0$ und im Fall des Verlustes < 0 sein), so ist der Erwartungswert des A in Bezug auf die Gesamtheit der r Ereignisse:

(2) $$e_0 = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_r w_r .$$

Da also $e_0 = (a_1 w_1 + \ldots + a_r w_r) : (w_1 + \ldots + w_r)$ ist, so kann e_0 als Mittelwert der mit den Gewichten w_i versehenen Größen a_i gelten; in dem eingangs angeführten Fall ist E_2 das Ausbleiben von E_1 und $a_2 = 0$. Läßt man allgemein aus (2) von vornherein diejenigen Glieder fort, deren $a_i = 0$ ist, so ist für die übrigen Ereignisse die Summe der Wahrscheinlichkeiten < 1.

2. An einem Glücksspiel mögen sich r Spieler beteiligen, mit der irgendwie ermittelten Wahrscheinlichkeit $w_1, w_2, \ldots, w_r$, zu gewinnen; dabei sei:

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_r = 1 .$$

Ferner seien die Einsätze der Spieler $e_1, e_2, \ldots, e_r$, sowie

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_r = s$$

die dem Gewinner zufallende Summe. Soll nun das Spiel billig sein, so muß:

$$e_1 : e_2 : \ldots : e_r = w_1 : w_2 : \ldots : w_r ,$$

also auch

$$e_i : s = w_i : 1$$

oder

$$e_i = s\, w_i , \tag{3}$$

d. h. der Einsatz jedes Spielers gleich seinem Erwartungswert sein.

3. Auf das Eintreffen eines Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit w (Gegenwahrscheinlichkeit $w' = 1 - w$) sei von dem Unternehmer A der Preis a ausgesetzt; der Spieler B hat dann den Einsatz:

$$e_0 = a\, w \tag{4}$$

zu leisten. Gewinnt B, so ist sein Reingewinn:

$$a - e_0 = a(1 - w) = a\, w'$$

und der zugehörige Erwartungswert:

$$h_0 = a\, w\, w' = e_0 \cdot w' . \tag{5}$$

Verliert dagegen B, so ist sein Verlust e_0, der zugehörige Erwartungswert:

$$k_0 = e_0\, w' = h_0 . \tag{6}$$

Für A gilt das Umgekehrte; $h_0 = k_0$ heißt mathematisches Risiko; die Zahl $h_0/e_0 = k_0/e_0 = w'$ bezeichnet man als relatives Risiko, sowohl für A als für B.

Um sein Risiko zu verringern, leistet B einem zweiten Unternehmer A' die Zahlung k_0, wofür ihm A' im Fall des Verlustes den Betrag e_0 auszuzahlen hat.

Gewinnt nun B, so ist sein Reingewinn $a - e_0 - h_0$, das zugehörige Risiko, wie eine leichte Rechnung ergibt:

$$h_1 = a\,w \cdot w'^2 = e_0 \cdot w'^2 . \tag{7}$$

Verliert B, so ist die Summe k_0 verloren; das Risiko ist:

$$k_1 = k_0 \cdot w' = e_0\, w'^2 = h_1 . \tag{8}$$

Die Fortsetzung ist einleuchtend; ist $k_r = e_0 \cdot w'^{r+1}$, so hätte B, um gegen jeden Verlust gedeckt zu sein, den Betrag aufzuwenden:

$$e_0 + k_0 + k_1 + k_2 + \ldots = \frac{e_0}{1 - w'} = \frac{e_0}{w} = a ; \tag{9}$$

aber dann gewinnt er auch nichts.

4. Für mehrere, einander ausschließende Ereignisse E_i, unter welchen eines eintreten muß, seien die Wahrscheinlichkeiten w_i vorhanden und die Preise a_i ausgesetzt; alsdann ist:

$$\sum_1^r w_i = 1 ; \tag{10}$$

der Erwartungswert, zugleich der von dem Spieler zu leistende Einsatz ist:

$$e_0 = \sum_1^r a_i\, w_i . \tag{11}$$

Ist nun $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} > e_0$; $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_r \lesseqgtr e_0$, so ist die Gewinnerwartung:

$$h_0 = \sum_1^{n-1} (a_i - e_0)\, w_i ; \tag{12}$$

die Verlusterwartung:

$$k_0 = \sum_n^r (e_0 - a_i)\, w_i \,. \tag{13}$$

Dabei ist:

$$h_0 - k_0 = \sum_1^r a_i w_i - e_0 \sum_1^r w_i = 0\,, \qquad \text{also} \qquad h_0 = k_0.$$

Als relatives Risiko gilt wiederum der Quotient $h_0/e_0 = k_0/e_0$.

Erhält z. B. der Spieler so viel ℳ, als der Spielwürfel Punkte zeigt, so ist $r = 6$, $w_i = \frac{1}{6}$ für jeden Wert von i, $e_0 = \frac{1}{6}(6+5+4+3+2+1) = 3{,}5$ ℳ; ferner $n = 4$, und

$$h_0 = \frac{1}{6}(2{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5) = 0{,}75 \text{ ℳ},$$

$$k_0 = \frac{1}{6}(0{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5) = 0{,}75 \text{ ℳ};$$

endlich

$$h_0/e_0 = k_0/e_0 = \frac{0{,}75}{3{,}5} = \frac{3}{14} \qquad \text{oder} \qquad 21{,}4\,\%.$$

II. Abschnitt.

Anwendung der Grundlehren auf spezielle Probleme.

§ 6. Aufgaben zur Erläuterung der Grundformeln.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln eine der Summen 2 bis 12 zu werfen?

Die Anzahl m der möglichen Fälle ist $6^2 = 36$; die Anzahl g der günstigen Fälle und die entsprechende Wahrscheinlichkeit $w = g/m$ ist aus nebenstehendem Täfelchen zu entnehmen.

Summe	g	w
2; 12	1	$^1/_{36}$
3; 11	2	$^1/_{18}$
4; 10	3	$^1/_{12}$
5; 9	4	$^1/_9$
6; 8	5	$^5/_{36}$
7	6	$^1/_6$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel im ersten, zweiten oder dritten Wurf die Zahl 1 zu werfen?

Die Wahrscheinlichkeit, im ersten Wurf 1 nicht zu werfen, ist $^5/_6$; also nach dem Multiplikationssatz die Wahrscheinlichkeit, in keinem der drei ersten Würfe 1 zu werfen, $w' = (^5/_6)^3$; somit die gesuchte Wahrscheinlichkeit $w = 1 - w' = \dfrac{91}{216}$. Umgekehrt kann man aus gegebenem w die Zahl der Würfe berechnen.

3. Zwei gleiche Urnen enthalten je nur weiße und schwarze Kugeln; die erste a_1 weiße, b_1 schwarze, die zweite a_2 weiße und b_2 schwarze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit, sowohl die erste Urne zu wählen, als auch aus ihr eine weiße Kugel zu ziehen, ist $w_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1}{a_1 + b_1}$; die entsprechende Wahrscheinlichkeit für die zweite Urne ist $w_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b_2}$. Nach dem Additionssatz ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2}{a_2 + b_2} \right).$$

4. In einer Urne sind n Kugeln, darunter a weiße, b schwarze ($a + b \leqq n$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w, mit drei aufeinanderfolgenden Zügen zwei weiße und eine schwarze Kugel in beliebiger Reihenfolge zu erhalten, wenn die Kugeln nicht wieder hineingelegt werden?

Die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine weiße, dann nochmals eine weiße, zum Schluß eine schwarze Kugel zu ziehen, ist:

$$w_0 = \frac{a}{n} \cdot \frac{a-1}{n-1} \cdot \frac{b}{n-2};$$

ebenso groß sind, wie man leicht sieht, die Wahrscheinlichkeiten für die beiden anderen Reihenfolgen; folglich ist:

$$w = 3\, w_0 = \frac{3\, a(a-1) \cdot b}{n(n-1)\,(n-2)}.$$

5. Ein Kästchen enthält n Schrotkörner; welches ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Griff eine ungerade bezw. eine gerade Anzahl zu erfassen?

In den beiden Fällen ist:

$$w_1 = \frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots}{N} = \frac{Z_1}{N}, \quad w_2 = \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots}{N} = \frac{Z_2}{N},$$

wo
$$N = Z_1 + Z_2 .$$

Setzt man die aus dem binomischen Satz folgenden Werte [1]) von Z_1, Z_2, N ein, so wird:

$$w_1 = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} = \tfrac{1}{2}(1 + \theta), \quad w_2 = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} = \tfrac{1}{2}(1 - \theta),$$

wo
$$\theta = \frac{1}{2^n - 1} .$$

Demnach ist $w_1 > w_2$, aber $\lim\limits_{n=\infty}(w_1 - w_2) = \lim\limits_{n=\infty}\theta = 0$.

6. A und B spielen mit zwei Würfeln; A wirft zuerst und gewinnt, wenn er die Summe 6 hat; andernfalls würfelt B und gewinnt, wenn er die Summe 7 erhält. Wie müssen sich die Einsätze verhalten?

Ist G der Gewinn, so ist der Erwartungswert des A: $a = \frac{5}{36} G$, derjenige des B: $b = \frac{31}{36} \cdot \frac{1}{6} G$; also ist das Verhältnis der Einsätze $a : b = 30 : 31$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel unentschieden bleibt, ist

$$\frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{155}{216} = 0{,}717 .$$

7. A und B lassen den C würfeln; geben die beiden Würfel die Summe 7, so soll der Gewinn dem A zufallen, geben sie die Summe 10, dem B; in allen anderen Fällen soll zwischen A und B gleich geteilt werden. Wie müssen sich die Einsätze des A und B verhalten?

---

[1]) Sammlung Göschen Nr. 53, § 23.

G sei der Gewinn, dann ist der Erwartungswert des A: $\frac{1}{6}G + \frac{1}{12}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}G = \frac{13}{24}G$; des B: $\frac{1}{12}G + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}G = \frac{11}{24}G$. Die Einsätze müssen sich folglich wie $13:11$ verhalten.

8. n Personen spielen mit einem Würfel und bezahlen je 1 ℳ Einsatz. Wer den höchsten Wurf tut, bekommt n ℳ; werfen mehrere gleichviel und mehr als die übrigen, so wird der Gewinn gleichmäßig verteilt. A beginnt und wirft a Augen; wie groß ist sein Erwartungswert?

Für jeden anderen Spieler ist die Wahrscheinlichkeit des Wurfes a gleich $1:6$, diejenige eines geringeren gleich $(a-1):6$. A muß mit $r-1$ $(1 \gtreqless r \gtreqless n)$ anderen Spielern teilen, wenn diese den Wurf a, die $n-r$ übrigen einen geringeren Wurf tun; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{r-1}\left(\frac{a-1}{6}\right)^{n-r} = \frac{(a-1)^{n-r}}{6^{n-1}}.$$

Nun kann aber die Zahl $r-1$ auf $\binom{n-1}{r-1}$ verschiedene Arten zustande kommen; mithin ist der Erwartungswert des A:

$$e_r = \binom{n-1}{r-1}\frac{(a-1)^{n-r}}{6^{n-1}}\cdot\frac{n}{r} = \binom{n}{r}\frac{(a-1)^{n-r}}{6^{n-1}}.$$

Um alle Fälle zu erschöpfen, in denen A gewinnt, muß man $E = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ bilden; die übrigen Fälle bleiben (vgl. S. 19) unberücksichtigt. Es ist aber:

$$e_0 + e_1 + \ldots + e_n = \frac{1}{6^{n-1}}\cdot[(a-1)+1]^n = \frac{a^n}{6^{n-1}},$$

$$e_0 = \frac{(a-1)^n}{6^{n-1}};$$

mithin:

$$E = \frac{a^n - (a-1)^n}{6^{n-1}} = 6 \cdot \left[\left(\frac{a}{6}\right)^n - \left(\frac{a-1}{6}\right)^n\right].$$

Hieraus folgt noch:

$$\lim_{n=\infty} E = \begin{cases} 6 \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad a \begin{cases} = 6 \\ < 6 \end{cases};$$

in der Tat werden bei sehr großer Teilnehmerzahl etwa $\frac{n}{6}$ den Wurf 6 tun; auf jeden entfällt dann der Gewinn $n : n/6 = 6$ ℳ; die anderen gehen leer aus.

§ 7. Das „Jeu du Treize" und das Rencontrespiel; das Problem von Moivre.

1. Eine Urne enthält n (13), mit 1 bis n bezifferte Karten, welche nacheinander herausgezogen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine Karte an der durch ihre Ziffer bezeichneten Stelle erscheint?

Die n Elemente[1]) geben $n!$ Permutationen; dies ist die Zahl der möglichen Fälle. Hält man 1 fest, so geben die $n-1$ übrigen Elemente $(n-1)!$ Permutationen; 1 ist also nicht an seinem Platz in:

$$z_1 = n! - (n-1)!$$

Fällen. Unter diesen gibt es solche, wo 2 an seinem Platz ist; die $n-1$ übrigen Elemente geben dann entsprechend z_1 die Zahl von $(n-1)! - (n-2)!$ Fallen, wo 2, aber nicht 1 am richtigen Platz ist, wie man auch unmittelbar bestätigen kann. Somit ist:

$$z_2 = n! - 2(n-1)! + (n-2)!$$

[1]) Zur Verdeutlichung mag man etwa $n = 5$ wählen.

die Zahl der Fälle, wo weder 1 noch 2 an seinem Platz ist. Hält man 3 fest, so geben die $(n-1)$ übrigen Elemente entsprechend z_2 die Zahl von:

$$(n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!$$

Fällen, wo 3, aber weder 1 noch 2 am richtigen Platz sich befindet. Folglich gibt:

$$z_3 = n! - 3(n-1)! + 3(n-2)! - (n-3)!$$

die Zahl der Fälle an, wo keines der Elemente 1, 2, 3 den richtigen Platz einnimmt. Allgemein ist:

$$z_r = n! - \binom{r}{1}(n-1)! + \binom{r}{2}(n-2)! - \ldots \pm (n-r)!$$

die Zahl der Fälle, in denen keines der r ersten Elemente den durch seine Ziffer bezeichneten Platz hat; man erhärtet dies leicht durch den Schluß von r auf $r+1$. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist:

$$w_r = 1 - \binom{r}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{r}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)} - \ldots \pm \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Mit $r = n$ ergibt sich:

$$w_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Bei dem „Jeu du Treize" ist $n = 13$; aber schon für mäßig große n kann man $w_n = e^{-1}$ setzen. Die Wahrscheinlichkeit, welche wir suchen, ist $1 - w_n$ oder sehr nahezu

$$\frac{e-1}{e} = 0{,}6321\ .$$

Setzt man $n = 32$, so hat man den Fall des auch von Euler behandelten Rencontrespiels: A und B haben je ein Spiel von 32 Karten und decken gleichzeitig je ein Blatt auf; so oft gleiche Blätter erscheinen, findet ein

Rencontre statt. A wettet auf das Stattfinden, B auf das Ausbleiben eines Rencontres; wie verhalten sich ihre Aussichten, zu gewinnen?

Da für $n = 32$ der Unterschied zwischen w_n und e^{-1} unmerklich wird, so lautet die Antwort auf vorstehende Frage: die Wahrscheinlichkeiten des Gewinnens verhalten sich wie $(e-1):1$; also rund wie $7:4$.

2. Das „Problem von Moivre" hat folgenden Wortlaut: In einer Urne sind p, mit 1 bis p bezeichnete Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in n Ziehungen je einer Kugel, die jedesmal zurückgelegt wird, die Summe s zu erhalten?

Der Ausdruck:

$$Y = (x + x^2 + \ldots + x^p)^n$$

liefert entwickelt als Koeffizienten von x^s die Zahl:

$$g = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}.$$

Hierbei sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Null oder positiv ganzzahlig; ferner:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots &= s, \\ \alpha + \beta + \gamma + \ldots &= n. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Summe s ist:

$$W = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} \cdot w^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} = w^n \cdot \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots},$$

wenn $w = \frac{1}{p}$ die Wahrscheinlichkeit für den einmaligen Zug einer jeden Kugel ist, die mit $1, 2, 3, \ldots$ bezeichnete Kugel $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ mal gezogen wird und die obigen Bedingungen gelten.

Nun läßt sich Y in der Form:

$$Y = x^n (1 - x^p)^n (1 - x)^{-n} = x^n \cdot y$$

schreiben; folglich ist g der Faktor von x^{s-n} in der Entwicklung von y. Der binomische Satz ergibt:

$$(1-x^p)^n = 1 - \binom{n}{1} x^p + \binom{n}{2} x^{2p} - + \ldots,$$

$$(1-x)^{-n} = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n+1}{2} x^2 + \ldots$$

Hiernach wird:

$$g = \binom{s-1}{s-n} - \binom{s-1-p}{s-n-p}\binom{n}{1} + \binom{s-1-2p}{s-n-2p}\binom{n}{2} - + \ldots,$$

und da:

$$\binom{\sigma}{\alpha} = \binom{\sigma}{\sigma-\alpha}$$

ist, so hat man, wenn noch:

$$s-1 = s_0, \quad n-1 = n_0$$

gesetzt wird, einfacher:

$$g = \binom{s_0}{n_0} - \binom{s_0-p}{n_0}\binom{n}{1} + \binom{s_0-2p}{n_0}\binom{n}{2} - + \ldots$$

Die Reihe ist so lange fortzusetzen, als $s_0 - \lambda p \geqq n_0$ oder $s - n \geqq \lambda p$ ist für ein positives, ganzzahliges λ. Durch g ist auch:

$$W = g \cdot p^{-n}$$

bestimmt.

Beispiel: Für $p = 5$, $n = 4$, $s = 14$ erhält man $g = 68$, $W = 0{,}1088$.

Setzt man in obigen Formeln $p = 6$, so hat man zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür gefunden, durch einen Wurf mit n Würfeln die Summe s zu erhalten; ist z. B. $n = 3$, $s = 8$, so wird $W = \binom{7}{2} \cdot 6^{-3} = {}^7/_{72}$.

Laplace berechnete im Anschluß an die eben durchgeführten Betrachtungen die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß die Summe der Neigungen von 10 Planetenbahnen den durch Beobachtung gefundenen Wert von 92^0 neuer Teilung nicht überschreite; er erhielt $w = 12 \cdot 10^{-8}$, mit anderen Worten: es ist äußerst unwahrscheinlich, daß diese Neigungen ein Werk des Zufalls seien.

§ 8. Das Teilungsproblem; Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeits- und Differenzenrechnung.

1. A und B hören zu spielen auf, als dem A noch m, dem B noch n Partien zum Sieg fehlen; ihre Wahrscheinlichkeiten[1]), ein einzelnes Spiel zu gewinnen, sind p und q $(p + q = 1)$. Wie haben sie sich in den Gewinn zu teilen?

Anstatt der seither angewendeten kombinatorischen Behandlungsweise legen wir ein auf Pascal zurückzuführendes Verfahren zugrunde. Da der Gewinn im Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten zu teilen ist, welche A und B für den Sieg besitzen, so genügt es, diese Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln; diejenige für A sei $y_{m,n}$. Entweder nun gewinnt A die nächste Partie; dafür ist p die Wahrscheinlichkeit und es fehlen ihm noch $m - 1$ Partien zum Sieg, dann ist $p\, y_{m-1,n}$ die Wahrscheinlichkeit, daß A siegen wird. Oder aber verliert A beim nächsten Spiel; q ist hierfür die Wahrscheinlichkeit und dem B fehlen noch $n - 1$ Partien; in diesem Fall ist $q\, y_{m,n-1}$ die Wahrscheinlichkeit des Sieges für A. Daher läßt sich $y_{m,n}$ als vollständige Wahrscheinlichkeit angeben:

$$(\mathrm{Y}) \qquad y_{m,n} = p\, y_{m-1,n} + q\, y_{m,n-1} .$$

Hierbei ist offenbar:

$$y_{0,\lambda} = 1\,, \quad y_{\mu,0} = 0$$

[1]) Wie diese ermittelt sind, kommt nicht in Betracht.

für jedes positive, ganzzahlige λ, μ. Setzt man also $n = 1$, so bekommt man:

$$y_{11} = p\,, \quad y_{21} = p^2\,, \quad y_{31} = p^3\,, \quad \ldots,$$

ferner

$$y_{12} = p + pq\,, \quad y_{22} = p^2(1 + 2q)\,, \quad \ldots$$

Auf diesem Wege kann man durch Rekursion jedes beliebige $y_{m,n}$ ermitteln; aber eine allgemeine Formel für $y_{m,n}$ erhält man zunächst nicht.

Um die mit (Y) bezeichnete Funktionalgleichung aufzulösen, setzen wir mit Lagrange[1]):

$$m = x\,, \quad n = t$$

und schreiben demgemäß statt (Y), indem wir zugleich jeden Zeiger um 1 erhöhen:

$$p\,y_{x,t+1} + q\,y_{x+1,t} - y_{x+1,t+1} = 0\,.$$

Lagrange zeigt nun mit Hilfe einer Reihenentwicklung, daß dieser Gleichung durch einen Ausdruck von folgender Form[2]) genügt wird:

$$y_{x,t} = p^x\left[1 + xq + \frac{x(x+1)}{2!}q^2 + \ldots\right];$$

dabei ist die Summe bis zu dem Glied mit q^{t-1} auszudehnen.

Ersetzt man wieder x, t durch ihre Werte m, n, so ergibt sich:

$$y_{m,n} = p^m\left[1 + mq + \frac{m(m+1)}{2!}q^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!}q^{n-1}\right];$$

---

1) Oeuvres, T. IV, p. 221 ff. Paris 1869.

2) Die obige Gleichung ist nur formal verschieden von derjenigen bei Lagrange.

wie man sieht, steht dieser Wert mit den Grenzbedingungen $y_{0,\lambda} = 1$, $y_{\mu,0} = 0$ im Einklang, man überzeugt sich auch leicht von der Übereinstimmung mit den S. 31 angegebenen speziellen Werten. Am kürzesten läßt sich das Ergebnis in der Form:

$$y_{m,n} = p^m \sum_0^{n-1} {}_r \binom{m+r-1}{r} q^r$$

darstellen. Die Wahrscheinlichkeit des Sieges für den anderen Spieler B erhält man durch Vertauschung von m, n und p, q:

$$z_{m,n} = q^n \sum_0^{m-1} {}_r \binom{n+r-1}{r} p^r .$$

Ist z. B. $m = 1$, $n = 2$, so wird:

$$y_{m,n} = p + pq\,, \quad z_{m,n} = q^2\,, \quad y_{m,n} + z_{m,n} = 1\,.$$

2. Lagrange führt a. a. O. eine weitere, minder einfache Lösung durch, welche unmittelbar an die Grundbegriffe der Differenzenrechnung anknüpft. Diese liefert für die Lösung von Wahrscheinlichkeitsproblemen eine Methode, deren Grundzüge wir — unter Beschränkung auf gewöhnliche Differenzengleichungen — kurz darlegen wollen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit y_x hänge von einer ganzzahligen Veränderlichen x ab und es sei eine Beziehung von der Form:

$$F(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+r}) = 0$$

bekannt. Nun ergibt das Schema der Hauptreihe und ihrer Differenzenreihen[1]):

[1]) Sammlung Göschen Nr. 53, § 82.

$$\begin{matrix} y_x & y_{x+1} & y_{x+2} & \dots \\ & \Delta y_x & \Delta y_{x+1} & \dots \\ & & \Delta^2 y_x & \dots \end{matrix}$$

für $r = 1, 2 \ldots, r$:

$$y_{x+r} = y_x + \binom{r}{1} \Delta y_x + \binom{r}{2} \Delta^2 y_x + \ldots + \Delta^r y_x .$$

Setzt man die hieraus sich ergebenden Werte in $F = 0$ ein, so erhält man eine gewöhnliche Differenzengleichung r ter Ordnung:

$$\Phi(x, y_x, \Delta y_x, \ldots, \Delta^r y_x) = 0 .$$

Kann man $F = 0$ oder $\Phi = 0$ integrieren, so ist auch das Wahrscheinlichkeitsproblem gelöst.

Sei insbesondere die lineare homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten vorgelegt:

$$F = y_{x+2} + 2\, a_1\, y_{x+1} + a_2\, y_x = 0 ,$$

so gehört zu ihr die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\, a_1 \lambda + a_2 = 0 .$$

Ist nun, was wir hier voraussetzen wollen:

$$a_1^2 - a_2 > 0 ,$$

so genügen der charakteristischen Gleichung zwei reelle verschiedene Werte λ_1, λ_2 und die allgemeine Lösung von $F = 0$ ist, wie man leicht bestätigt:

$$y_x = C_1 \cdot \lambda_1^x + C_2\, \lambda_2^x ,$$

wo C_1, C_2 zwei willkürliche Konstanten sind.

Laplace führte, um die Differenzengleichungen zu integrieren, den Begriff der **erzeugenden Funktion** u von y_x ein, nämlich für ganze positive x:

$$u = \Sigma y_x t^x ;$$

alsdann erzeugt:

$$u \cdot (a + b\,t^{-1}) = \Sigma(a\,y_x + b\,y_{x+1})\,t^x$$

die Funktion $a\,y_x + b\,y_{x+1}$ usf. Indessen hat dieses Verfahren nur noch historische Bedeutung.

§ 9. Das Problem der Spieldauer und seine Lösung durch eine Differenzengleichung.

1. A besitzt m, B n ℳ, $(m + n = s)$; beide spielen die Partie zu 1 ℳ so lange, bis einer von beiden nichts mehr besitzt. Die Wahrscheinlichkeit, eine Partie zu gewinnen[1]), sei p für A und q für B, $(p + q = 1)$; man ermittle für jeden die Wahrscheinlichkeit, seinen ganzen Besitz dem Spiel zu opfern.

Sei y_x die gesuchte Wahrscheinlichkeit für B in dem Augenblick, wo er x ℳ besitzt; da B das nächste Spiel entweder verliert oder gewinnt, so ist:

$$y_x = p\,y_{x-1} + q\,y_{x+1}\,,$$

oder, wenn jeder Index um 1 erhöht wird:

$$q\,y_{x+2} - y_{x+1} + (1 - q) \cdot y_x = 0\,.$$

Die charakteristische Gleichung ist:

$$q\,\lambda^2 - \lambda + (1 - q) = 0$$

oder:

$$(\lambda - 1) \cdot [q(\lambda + 1) - 1] = 0\,.$$

Hieraus folgt:

$$\lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_2 = \frac{1 - q}{q} = \frac{p}{q}\,.$$

Daher wird die allgemeine Lösung:

$$y_x = C_1 + C_2 \cdot \lambda_2^x$$

---

[1]) Vgl. die Fußnote S. 30.

Die Grenzbedingungen sind offenbar:

$$y_0 = 1\,, \quad y_s = 0\,;$$

man eliminiert also C_1, C_2 mit Hilfe der Determinante:

$$\begin{vmatrix} y_x & 1 & \lambda_2^x \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda_2^s \end{vmatrix} = 0$$

und findet:

$$y_x = \frac{\lambda_2^s - \lambda_2^x}{\lambda_2^s - 1}\,.$$

Setzt man $x = n$, $\lambda_2 = p/q$ und $s = m + n$, so ergibt sich als Wahrscheinlichkeit für den Ruin des B:

$$y_n = \frac{p^n(p^m - q^m)}{p^{m+n} - q^{m+n}}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Ruin des A ist:

$$z_m = \frac{q^m(p^n - q^n)}{p^{m+n} - q^{m+n}}\,.$$

Hieraus folgt zunächst: $y_n + z_m = 1$; d. h. das Spiel kann nicht unentschieden bleiben; für $n = m$ vereinfachen sich die Formeln. Sei ferner:

α) $p > q$, $\lambda_2 > 1$. Kann man dann 1 gegenüber λ_2^s vernachlässigen, so ist:

$$y_n = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m;$$

ist also A erheblich geschickter als B, so hat B nur dann einige Aussicht, dem Ruin zu entgehen, wenn A im Vergleich mit B sehr wenig besitzt.

β) $p = q = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$. Hier wird y_n unbestimmt; die bekannte Regel[1]) ergibt:

---

[1]) Sammlung Göschen Nr. 87, § 41.

$$y_n = \frac{s\,\lambda_2^{s-1} - n\,\lambda_2^{n-1}}{s\,\lambda_2^{s-1}} = \frac{s-n}{s} = \frac{m}{s}\,.$$

Man findet dies auch durch Zurückgehen auf die Differenzengleichung, welche in diesem Fall die beiden partikulären Integrale $y_x = 1$, $y_x = x$ hat. Je kleiner also n gegen m ist, desto sicherer ist der Untergang des B.

γ) $p < q$, $\lambda_2 < 1$. Aus:

$$y_n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_2^s}{1 - \lambda_2^s}$$

folgt für unendlich zunehmendes s:

$$\lim_{s=\infty} y_n = \lambda_2^n = \left(\frac{p}{q}\right)^n;$$

ist also B der geschicktere Spieler, so entrinnt er dem Untergang um so eher, je größer sein Besitz ist, vgl. α).

2. Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß A spätestens mit einem bestimmten Spiel den gesamten Besitz des B an sich gebracht hat, so ist die Lösung erheblich schwieriger und gibt zu weitläufigen Rechnungen Anlaß, auf welche hier nicht eingegangen werden kann. Besonders die französischen Mathematiker des 18. Jahrhunderts haben dieser Aufgabe Untersuchungen gewidmet; als Ergebnis sei die Formel von Laplace[1]) angeführt, welche unter der Voraussetzung $m = \infty$ die Wahrscheinlichkeit angibt, daß B mit dem $(n + 2x)$ten Spiel seinen Besitz verloren haben wird:

$$y = p^n \sum_0^x A_x p^x q^x,$$

wobei

---

[1]) Théorie analytique des probabilités, p. 285 Paris 1812. = Oeuvres, T 7, p 238. Paris 1886.

$$A_0 = 1\,, \quad A_x = \frac{n(n+x+1)(n+x+2)\ldots(n+2x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot x}$$

ist; für $x = 0$ ist die Formel leicht zu bestätigen.

§ 10. Das Petersburger Problem, der moralische Erwartungswert.

1. Die in der Überschrift genannte, zu einer gewissen Berühmtheit gelangte Aufgabe von N. Bernoulli führt auf ein zunächst befremdendes Ergebnis.

A wirft ein Geldstück in die Luft, zeigt es Wappen, so zahlt er an *B* 2 ℳ aus und das Spiel ist zu Ende; andernfalls wirft *A* noch einmal, erscheint jetzt Wappen, so zahlt er $2^2 = 4$ ℳ aus usf. Allgemein: wenn erst im $n$ten Wurf Wappen zum Vorschein kommt, so muß *A* dem *B* 2^n ℳ ausbezahlen. Wieviel muß *B* vor Beginn des Spieles dem *A* geben, damit das Spiel gerecht ist?[1])

Da die Wahrscheinlichkeit, erst mit dem $n$ten Wurf Wappen zu bekommen, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ist, so hat *B* den in ℳ ausgedrückten Erwartungswert:

$$E = \frac{1}{2}\cdot 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2^3 + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots\,;$$

mithin ist $E = \infty$; *A* kann also von *B* beliebig viel fordern, dieser aber wird nur eine bescheidene Summe für die Teilnahme an dem Spiel opfern wollen; hierauf darf *A* nicht eingehen.

2. Damit das Spiel zustande kommt, zeigte Poisson folgenden Weg. *A* ist nicht unendlich reich, sein Besitz,

---

[1]) Der Wortlaut der Aufgabe ist gegenüber dem ursprünglichen unwesentlich abgeändert; vgl. die Seite 38 angeführte Bearbeitung der Abhandlung von D. Bernoulli: Specimen Theoriae novae de Mensura Sortis (1738).

einschließlich der Zahlung des B, sei $< 2^{p+1}$ ℳ, aber $\geqq 2^p$ ℳ; dann ist der Erwartungswert des B, falls A höchstens 2^p ℳ ausbezahlt:

$$E' = \frac{1}{2} \cdot 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot 2^p + \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} \cdot 2^p + \ldots,$$

oder:

$$E' = p + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = p + 1\,.$$

Besitzt etwa A 2000 ℳ, so ist $p = 10$ und $E' = 11$ ℳ.

3. D. Bernoulli führte[1]) den Begriff der moralischen Erwartung ein. Hat jemand das Vermögen x und wächst x um dx, so ist der „moralische Vorteil" dy dieser Zunahme proportional zu $\frac{dx}{x}$; ob dies immer zutrifft, soll unerörtert bleiben. Aus:

$$dy = c \cdot \frac{dx}{x}$$

folgt aber[2]):

$$y_1 - y = c \cdot \operatorname{Log} \frac{x_1}{x}\,.$$

Setzt man noch $c = 1$, $x_1 = x + \varDelta x$ und ist w die Wahrscheinlichkeit des Zuwachses, so ist:

$$\mathfrak{e} = (y_1 - y)\, w = w \operatorname{Log} \frac{x + \varDelta x}{x}$$

der moralische Erwartungswert; für $\varDelta x = 0$ wird auch $\mathfrak{e} = 0$.

Ist x_0 das ursprüngliche, x das um den Einsatz ver-

---

[1]) Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen; herausgegeben von A. Pringsheim. Leipzig 1896.

[2]) Log bedeutet durchweg den natürlichen Logarithmus.

minderte Vermögen des B ($x \geqq 0$), so ist sein moralischer Erwartungswert:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\frac{x+2}{x_0} + \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}\frac{x+4}{x_0} + \ldots + \frac{1}{2^n}\,\mathrm{Log}\frac{x+2^n}{x_0} + \ldots;$$

$\mathfrak{E}$ ist also (vgl. S. 18) der Mittelwert der einzelnen Vorteile, da $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$ ist.

Setzt man:

$$\mathfrak{E} = \mathrm{Log}\frac{x+y}{x_0},$$

so ist y ein einmaliger Vermögenszuwachs, welcher gleichwertig ist mit dem aus dem Spiel zu erwartenden Gewinn. Mithin ist:

$$\text{(Y)} \quad x + y = (x+2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x+4)^{\frac{1}{4}} \cdot \ldots \cdot (x+2^n)^{\frac{1}{2^n}} \ldots$$

Sei zunächst $x = 0$, so gilt für den zugehörigen Wert y_0:

$$\mathrm{Log}\, y_0 = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\, 2 + \frac{1}{4}\mathrm{Log}\, 4 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2^n}\mathrm{Log}\, 2^n + \ldots = K\,\mathrm{Log}\, 2\,;$$

hierbei ist:

$$K = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots,$$

folglich:

$$K - \tfrac{1}{2}K = 1, \quad K = 2\,; \quad y_0 = 4\,.$$

Multipliziert man (Y) beiderseits mit $u = x^{-1}$, so wird:

$$\text{(U)} \qquad 1 + uy = \prod_1^{\infty} (1 + 2^n u)^{\frac{1}{2^n}},$$

$$\operatorname{Log}(1 + u\,y) = \sum_{1}^{\infty} u_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(1 + 2^n u)}{2^n};$$

da nun $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$ ist, so konvergiert sowohl die Reihe als das Produkt; man kann also aus u den Wert y finden; solange der Einsatz $x_0 - x < y$ ist, bleibt $\mathfrak{E} > 0$. Nebenstehende Tafel gibt einige Zahlenwerte.

u	x	y
∞	0	4,0
1	1	4,3
10^{-1}	10	5,5
10^{-2}	100	7,9
10^{-3}	1000	11

Da das Vermögen des A unberücksichtigt bleibt, so ist dies keine befriedigende Lösung des Petersburger Problems; hingegen hat das logarithmische Gesetz in der Wertlehre und Psychologie Eingang gefunden.

4. Buffon nahm auch die Erfahrung zu Hilfe, in 2048 Spielen mußte A durchschnittlich 10 ℳ, niemals über 512 ℳ ausbezahlen; der durchschnittliche Betrag wuchs langsam mit der Zahl der Spiele. Ändert man die Aufgabe dahin ab, daß A nicht 2^n, sondern $2\,n$ ℳ zahlen muß, so findet man 4 ℳ als Erwartungswert des B, da:

$$\frac{1}{2}\cdot 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 6 + \ldots = 4$$

ist; nach Buffons Zahlen wird die durchschnittliche Leistung des A in diesem Fall 3,95 ℳ.

§ 11. Geometrische Wahrscheinlichkeit; das Nadelproblem und andere Beispiele.

1. Die eigentümlichen Schwierigkeiten dieser Gruppe von Aufgaben lassen sich am besten aus einem Beispiel

ersehen, welches gewöhnlich als das Paradoxon von Bertrand bezeichnet wird. Die Frage ist folgende:

Gegeben ist ein Kreis vom Halbmesser 1; man zieht in ihm eine Sehne, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese größer als die Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist?

Erste Lösung (Fig. 2). Sieht man den Endpunkt A als gegeben an und ist $\sphericalangle BOC = \pi/3$, so sind günstig diejenigen Fälle, wo der andere Endpunkt P der Sehne zwischen B und C liegt. Da wir gleichmäßige Verteilung der Punkte P auf der Kreislinie voraussetzen (§ 4), so ist:

$$w_1 = \frac{\operatorname{arc} BC}{\operatorname{arc} AB} = \frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3}.$$

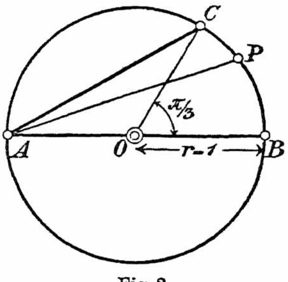

Fig. 2.

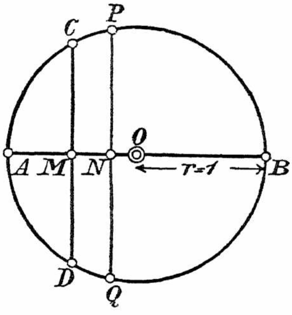

Fig. 3.

Zweite Lösung (Fig. 3). Wir nehmen an, die Sehne soll auf dem Halbmesser AO senkrecht stehen. Ist M die Mitte von AO, N die Mitte der Sehne, so sind günstig diejenigen Fälle, in welchen $ON < OM$ ist. Da nun die Punkte N die Strecke OA gleichmäßig erfüllen, so ist:

$$w_2 = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2}.$$

Der Grund des Widerspruches ist leicht zu sehen: die Voraussetzungen sind verschieden; wenn die Punkte P auf dem Kreisumfang gleichmäßig verteilt sind, so können dies nicht auch die Punkte N auf dem Durchmesser AB sein (vgl. die harmonische Bewegung).

Es ist nicht ohne Interesse, den einfachen Fall auch rechnerisch zu behandeln (Fig. 4).

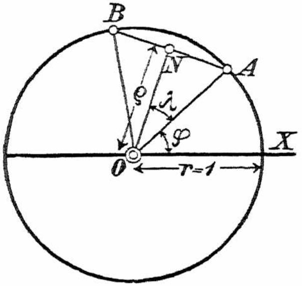

Fig. 4.

Bei der ersten Lösung kann man in voller Allgemeinheit die Sehne AP als bestimmt ansehen durch die Winkel φ und λ; OX ist eine feste Richtung, φ liegt zwischen 0 und 2π, λ zwischen 0 und $\pi/2$. Die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Annahme ist, mit k_1 als einer Konstanten, $k_1 \cdot d\varphi\, d\lambda$; günstig sind die Fälle, in welchen $\pi/3 \gtreqless \lambda \gtreqless \pi/2$ ist. Folglich wird

$$w_1 = k_1 \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi\, d\lambda : k_1 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} d\varphi\, d\lambda = \pi/6 : \pi/2 = \tfrac{1}{3}\,.$$

Die zweite Lösung nimmt $\varphi + \lambda = \vartheta$ und $ON = \varrho$ als gegeben an; die Wahrscheinlichkeit irgendeiner Annahme ist $k_2 \cdot d\vartheta\, d\varrho$, für die günstigen Fälle ist $\varrho \leqq \frac{1}{2}$, also:

$$w_2 = k_2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} d\vartheta\, d\varrho : k_2 \int_0^{2\pi}\int_0^{1} d\vartheta\, d\varrho = \tfrac{1}{2}\,.$$

Die Verschiedenheit der Annahmen zeigt sich darin, daß die Integrale nicht ineinander überführbar sind; aus:

$$\vartheta = \varphi + \lambda\,, \quad \varrho = \cos\lambda$$

folgt nämlich:

$$\frac{\partial(\vartheta, \varrho)}{\partial(\varphi, \lambda)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sin\lambda \end{vmatrix} = -\sin\lambda\,;$$

somit ist:

$$\iint d\vartheta\, d\varrho = -\iint \sin\lambda\, d\varphi\, d\lambda\,;$$

das rechts stehende Integral ist verschieden von dem in der ersten Lösung auftretenden.

2. Eine Strecke a sei in drei Teile x, y, z zerlegt; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man aus x, y, z ein Dreieck bilden kann?

Zeichnet man (Fig. 5) ein gleichseitiges Dreieck ABC

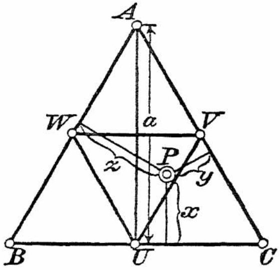

Fig. 5.

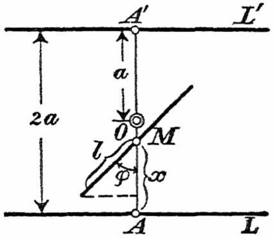

Fig. 6.

mit der Höhe a und fällt aus dem Punkt P im Innern Lote x, y, z auf die drei Seiten, so ist $x + y + z = a$. Wie man leicht sieht, muß

$$x \leqq a/2\,, \quad y \leqq a/2\,, \quad z \leqq a/2$$

sein, den $\begin{Bmatrix}\text{möglichen}\\ \text{günstigen}\end{Bmatrix}$ Fällen entspricht also die Fläche von $\begin{Bmatrix}\triangle\, ABC\\ \triangle\, UVW\end{Bmatrix}$, wenn U, V, W die Mitten von BC, CA, AB sind. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{1}{4}$.

Zu dem gleichen Ergebnis führt auch eine einfache stereometrische Betrachtung, bei welcher $\triangle ABC$ als Fläche eines regulären Oktaeders betrachtet wird, während x, y, z die Koordinaten eines Punktes dieser Fläche, bezogen auf den Oktaedermittelpunkt, sind.

3. Das Nadelproblem fragt nach der Wahrscheinlichkeit, daß eine Nadel von der Länge $2l$ eine unter einer Schar von Parallelen im Abstand $2a$ $(a > l)$ trifft (Fig. 6).

Die Bestimmungsstücke für die Lage der Nadel sind, wenn M die Mitte der Nadel ist, der senkrechte Abstand $AM = x$ $(a \geqq x \geqq 0)$ und der Winkel φ zwischen OM und der Nadel. $(\pi/2 \geqq \varphi \geqq 0)$. Damit die Nadel die Parallele L trifft, muß $l \cos\varphi \geqq x$ sein; daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = \int_0^l dx \int_0^{\arccos\frac{x}{l}} d\varphi : \int_0^a dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \int_0^l \arccos\frac{x}{l}\, dx : a\frac{\pi}{2};$$

d. h.
$$w = \frac{2l}{a\pi}.$$

Die Fälle symmetrischer Lage der Nadel ändern w nicht

4. In einem Kreis zieht man eine Sehne und nimmt zwei Punkte an; welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Punkte auf der gleichen Seite der Sehne liegen? (Fig. 7.)

Bestimmt man, wie bei der zweiten Lösung des Bertrandschen Paradoxons, die Sehne UV durch den Abschnitt AM des zu UV senkrechten Durchmessers AB und sind F_1, F_2 die Flächen der beiden entstandenen Segmente, so ist

$$\mathfrak{S} = \int_0^{2r} (F_1^2 + F_2^2)\, dx$$

das Maß der Mannigfaltigkeit der günstigen Fälle. Setzt man $\sphericalangle\, COV = \varphi$, $(OC \perp AB)$, so ist:

$$x = r(1 - \sin\varphi)\,,$$

$$dx = -r\cos\varphi\, d\varphi\,,$$

$$F_1^2 + F_2^2 = 2\,r^4[\pi^2/4 + (\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)^2]\,.$$

Die unschwierige Ausführung der Integration ergibt:

$$\mathfrak{S} = 2\,r^5\left(\pi^2 - \frac{128}{45}\right).$$

Das Maß der Mannigfaltigkeit der möglichen Fälle ist:

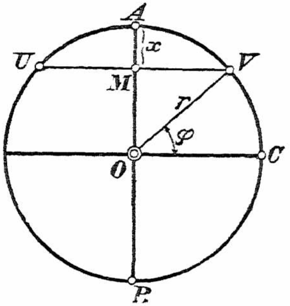

Fig. 7.

$$\mathfrak{M} = \int_0^{2r} (r^4\,\pi^2)\, dx = 2\,r^5\,\pi^2\,,$$

folglich die verlangte Wahrscheinlichkeit:

$$w = \mathfrak{S}/\mathfrak{M} = 1 - \frac{128}{45\,\pi^2} = 0{,}712\,;$$

die Gegenwahrscheinlichkeit ist $w' = \dfrac{128}{45\,\pi^2} = 0{,}288$.

Das Ergebnis gilt jedoch nur, wenn die Sehne in der angegebenen Weise gezogen wird.

III. Abschnitt.

Das Gesetz der großen Zahlen.

§ 12. Die Stirlingsche Formel für $n!$

1. Die Stirlingsche Formel gibt einen Näherungswert von $n!$ für große Werte von n. Nebenstehende Tabelle enthält die genauen Werte und deren vierstellige Logarithmen bis zu $n = 10$. Für größere Beträge von n ist die Berechnung von $n!$ ziemlich mühsam; außerdem genügt in den Anwendungen häufig ein angenäherter Wert.

n	$n!$	$\log n!$
1	1	0.0000
2	2	0.3010
3	6	0.7782
4	24	1.3802
5	120	2.0792
6	720	2.8573
7	5040	3.7024
8	40320	4.6055
9	362880	5.5598
10	3628800	6.5598

Für jedes positive n gilt die Reihe:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots,$$

die auch in der Form:

$$N = \left(n + \frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots$$

geschrieben werden kann. Ersetzt man rechts alle Koeffizienten $3, 5, \ldots$ durch 3, zo zeigt die Summation der geometrischen Reihe, daß:

$$1 < N < 1 + \frac{1}{12\,n(n+1)},$$

also auch, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen ist:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}$$

sein muß. Sei nun:

$$u_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad u_{n+1} = \frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

also:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

so geht die vorstehende Ungleichung über in:

$$1 < \frac{u_n}{u_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Da aber

$$\frac{1}{12\,n(n+1)} = \frac{1}{12\,n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

ist, so ergibt sich:

$$u_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}} < u_{n+1}\, e^{-\frac{1}{12(n+1)}} < u_{n+1} < u_n.$$

Folglich nehmen mit wachsendem n die Zahlen u_n ab, die Zahlen $u_n' = u_n \cdot e^{-\frac{1}{12n}}$ hingegen zu, aber so, daß $u_n' < u_n$ ist. Sei nun:

$$\lim_{n=\infty} u_n = \lim_{n=\infty} u'_n = a\,,$$

so liegt (Fig. 8) a beständig zwischen u_n und u'_n; es gilt also, wenn θ zwischen 0 und 1 liegt:

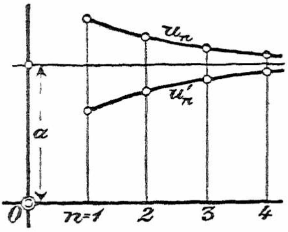

Fig. 8.

$$a = u_n \cdot e^{-\frac{\theta}{12n}}\,,$$

$$u_n = a \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}\,,$$

mithin:

$$n! = a \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}\,.$$

2. Es handelt sich noch darum, a zu bestimmen. Die Formel von Wallis[1]) ergibt unmittelbar:

$$\lim_{n=\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

oder auch:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n)^2}{(2n)!\,\sqrt{2n+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\,\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Führt man hier den in 1. gefundenen Wert von $n!$ bezw. $(2n)!$ ein und vernachlässigt $\theta/12n$, so erhält man:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a\,n}{\sqrt{2n(2n+1)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,, \quad \text{d. h.} \quad a = \sqrt{2\pi}\,.$$

Damit ist die Stirlingsche Formel bewiesen:

$$\underline{n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}\,.}$$

Je größer n, desto genauer ist die Formel, d. h. desto kleiner ist der begangene Fehler im Verhältnis zu $n!$

---

[1]) Sammlung Göschen Nr. 88, § 25.

selbst. Für $n = 10$ findet man als Näherungswert etwa 3598700, der Fehler ist also rund 30100 oder 0,83%; für $n = 20$ sinkt der prozentuale Fehler etwa auf die Hälfte dieses Wertes herab.

§ 13. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx$ und verwandte Integrale.

1. Das Integral:

$$J_0 = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx$$

hat einen Sinn, da $x^n e^{-x^2}$ für jedes n bei unendlich zunehmendem x nach Null konvergiert; ferner hat, da der Integrand eine gerade Funktion ist, das zwischen den Grenzen $\mp\infty$ genommene Integral den Wert $2J_0$. Wir betrachten mit Poisson das Doppelintegral:

$$\iint e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy\,;$$

die Gleichung $z = e^{-(x^2+y^2)}$ bedeutet eine Drehfläche, deren Meridianfigur (Glockenkurve) in Fig. 9a dargestellt ist. Geht man durch die Gleichungen

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta$$

zu Polarkoordinaten über, so wird das Flächenelement der XY-Ebene[1]) $r\,dr\,d\theta$; das Integral verwandelt sich in:

$$\iint e^{-r^2} r\,dr\,d\theta\,.$$

Einerseits ist nun, wenn über einem Quadrat mit der Seite $2a$ (vgl. Fig. 9b) integriert wird:

$$J_1 = \int\limits_{-a}^{+a}\int\limits_{-a}^{+a} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy = \int\limits_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx \int\limits_{-a}^{+a} e^{-y^2} dy = \left[\int\limits_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx\right]^2;$$

[1]) Sammlung Göschen Nr. 88, § 59.

andererseits, wenn die Integration über eine Kreisfläche vom Halbmesser r erstreckt wird:

$$J_2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^r e^{-r^2} r\,dr = \pi(1 - e^{-r^2})\,.$$

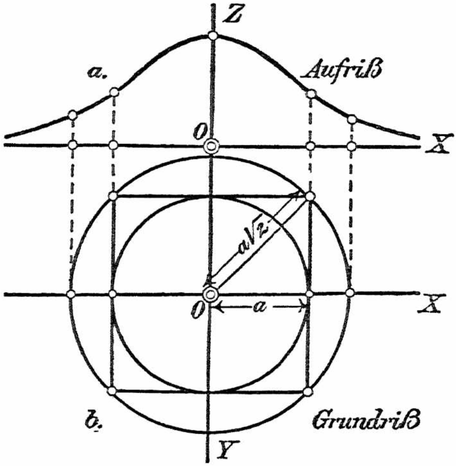

Fig. 9.

Offenbar liegt nun (Fig. 9b) J_1 zwischen denjenigen Werten von J_2, die zu $r = a$ und $r = a\sqrt{2}$ gehören. Mithin ist:

$$\pi(1 - e^{-a^2}) < \left[\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx\right]^2 < \pi(1 - e^{-2a^2})\,.$$

Geht man zur Grenze $a = \infty$ über, so folgt:

$$4\,J_0^2 = \pi\,, \qquad J_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,; \qquad \text{d. h.}$$

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

2. Setzt man hier $x = h\,u$, so folgt:

$$\int_0^\infty e^{-h^2u^2}\,du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot h^{-1}\,.$$

Differentiiert man diese Gleichung p-mal nach dem Parameter h, so bekommt man, indem sich jedesmal der Faktor $2\,h$ auf die rechte Seite bringen läßt und die Minuszeichen sich wegheben:

$$\int_0^\infty e^{-h^2u^2}u^{2p}\,du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot h^{-(2p+1)}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2p-1)}{2^p}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot h^{-(2p+1)}\,\frac{(2\,p)!}{2^{2p}\cdot p!}\,.$$

Nimmt man wieder x als Integrationsbuchstaben, so ist das Ergebnis:

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-h^2x^2}x^{2p}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{(2\,h)^{2p+1}}\cdot\frac{(2\,p)!}{p!}\,.$$

3. Sei:

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2\,\alpha\,x)\,dx\,,$$

so ist:

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha} = \int_0^\infty \sin(2\,\alpha\,x)\cdot d(e^{-x^2}) = -2\,\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2\,\alpha\,x)\,dx = -2\,\alpha\,J,$$

wie man durch partielle Integration sogleich erkennt.

Hieraus folgt mit $\log J_0$ als Integrationskonstante:

$$\log J = -\alpha^2 + \log J_0 ,$$

wo J_0 (für $\alpha = 0$) aus (1) bekannt ist; man erhält hiernach:

$$J = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot e^{-\alpha^2} .$$

Wir setzen:

$$x = \lambda\sqrt{P}, \qquad 2\alpha\sqrt{P} = u$$

und finden:

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P\lambda^2} \cos(u\lambda) \cdot d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{P}} \cdot e^{-\frac{u^2}{4P}} .$$

Differentiiert man diese Gleichung 4 mal nach u, so ergibt eine leichte Rechnung:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^4 e^{-P\lambda^2} \cos(u\lambda)\, d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{P}}\, e^{-\frac{u^2}{4P}} \cdot k(u) \\ & \text{für} \quad k(u) = \frac{3}{4P^2} - \frac{3u^2}{4P^3} + \frac{u^4}{16P^4} . \end{aligned} \right.$$

Von dieser Beziehung wird in § 25 Gebrauch gemacht werden; für $u = 0$ hat k ein Maximum $k_0 = \dfrac{3}{4P^2}$.

§ 14. Das Wahrscheinlichkeitsintegral.

1. Die weiteren Untersuchungen werden häufig auf ein bestimmtes Integral $\Phi(t)$ führen, dessen Eigenschaften nun abgeleitet werden sollen. Setzen wir:

$$(1) \qquad \Phi(t) = \int_0^t e^{-t^2} dt , \qquad \Psi(t) = \int_t^\infty e^{-t^2} dt ,$$

so ist nach § 13, (1):

$$\Phi(t) + \Psi(t) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Die Reihenentwicklung für e^{-t^2} ergibt die konvergente Reihe:

$$(2) \qquad \Phi(t) = t - \frac{t^3}{3 \cdot 1!} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - + \ldots;$$

allein diese Reihe ist nur für kleine Werte von t zur wirklichen Berechnung von $\Phi(t)$ brauchbar. Eine für große Werte von t taugliche Entwicklung erhält man wie folgt. Die partielle Integration liefert:

$$\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\,dt = \int_t^\infty \frac{2\,t \cdot e^{-t^2}}{2\,t^{2n+1}}\,dt$$

$$= \frac{e^{-t^2}}{2\,t^{2n+1}} - \frac{2\,n+1}{2}\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}\,dt.$$

Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ bekommt man:

$$\Psi(t) = \frac{e^{-t^2}}{2\,t} - \frac{1}{2}\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt,$$

$$\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt = \frac{e^{-t^2}}{2\,t^3} - \frac{3}{2}\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt,$$

$$\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt = \frac{e^{-t^2}}{2\,t^5} - \frac{5}{2}\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^6}\,dt,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $1, -\frac{1}{2}, +\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}, \ldots$, so folgt:

$$(3)\qquad \Psi(t) = \frac{e^{-t^2}}{2\,t}\left[1 - \frac{1}{2\,t^2} + \frac{1\cdot 3}{(2\,t^2)^2} - + \cdots\right].$$

Diese Reihe ist halbkonvergent; d. h. sie hat die Eigenschaft, daß der Rest R stets kleiner bleibt, als das letzte berücksichtigte Glied. Begnügt man sich z. B. mit den angegebenen Gliedern, so ist:

$$|R| = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^6}\,dt\,.$$

Da e^{-t^2} für zunehmendes t abnimmt, so ist das letztere Integral:

$$< e^{-t^2}\int_t^\infty \frac{dt}{t^6}\,,\quad \text{d. h.}\quad < \frac{e^{-t^2}}{5\cdot t^5}\,;$$

somit:

$$|R| < \frac{e^{-t^2}}{2\,t}\cdot\frac{1\cdot 3}{(2\,t^2)^2}\,.$$

Aus $\Psi(t)$ erhält man auch $\Phi(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \Psi(t)$.

Geeignete Hilfsmittel zur Berechnung bietet auch die mechanische Quadratur.

Fig. 10 stellt für $t \geqq 0$ den Wertverlauf von e^{-t^2} und $\Phi(t)$ dar; im Anhang S. 121 ist eine dreistellige Tafel der Werte von:

$$(4)\qquad \underline{\theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt}$$

gegeben.

2. Über die mechanische Quadratur führen wir noch einen sogleich zu verwendenden Satz an. Ist $y = f(x)$, $y_n = f(n)$, so ergibt die Trapezformel[1]) die Näherung:

$$2\int_0^r f(x)\,dx = y_0 + 2\,y_1 + 2\,y_2 + \ldots + 2\,y_{r-1} + y_r\,;$$

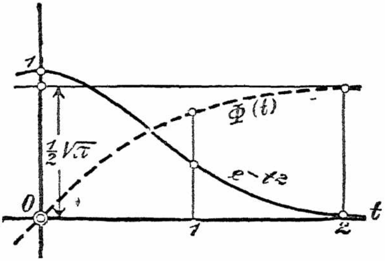

Fig. 10.

ist insbesondere $f(x)$ eine gerade Funktion, so kann man auch schreiben, indem man $y_{-r} - y_r (= 0)$ addiert:

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \sum_{-r}^{+r} y_n - y_r \quad \text{oder} \quad \sum_{-r}^{+r} y_n = \int_{-r}^{+r} f(x)\,dx + y_r\,;$$

die Summe kann also angenähert durch das Integral ersetzt werden, wenn man letzteres um y_r vermehrt.

§ 15. Das Theorem von Bernoulli.

1. Ein Ereignis E und das entgegengesetzte F haben die Wahrscheinlichkeiten p, q, wobei $p + q = 1$ ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n-maligem Versuch E

[1]) Sammlung Göschen Nr. 88, § 29.

in α, F in β Fällen $(\alpha + \beta = n)$ eintrifft, ist nach § 2, S. 12:

$$w = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}\, p^\alpha q^\beta . \tag{1}$$

Betrachtet man w als Funktion von α, so wird w für ein bestimmtes α ein Maximum werden. Sei:

$$w_{-1} = \frac{n!\, p^{\alpha-1} q^{\beta+1}}{(\alpha-1)!\,(\beta+1)!}, \quad w_{+1} = \frac{n!\, p^{\alpha+1} q^{\beta-1}}{(\alpha+1)!\,(\beta-1)!},$$

so muß, wenn w das Maximum ist:

$$w > w_{-1}, \qquad w_{+1} < w$$

sein. Die Ausrechnung ergibt:

$$\beta p + p > \alpha q, \qquad \beta p < \alpha q + q; \tag{2}$$

addiert man durchweg αp, so folgt:

$$np + p > \alpha > np - q .$$

Mithin liegt die ganze Zahl α zwischen zwei im allgemeinen nicht ganzzahligen Werten, deren Unterschied $p + q = 1$ ist; hierdurch ist α im allgemeinen eindeutig bestimmt. Sind ausnahmsweise die Grenzen ganze Zahlen, so kann α jede dieser Zahlen sein; z. B. gibt die Annahme $n = 101$, $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$ für α den Wert 68 oder 67.

Addiert man zu (2) überall βq, so findet sich:

$$nq - p < \beta < nq + q .$$

Mithin ist:

$$\alpha \text{ nahezu} = np, \qquad \beta \text{ nahezu} = nq . \tag{3}$$

Unter der Voraussetzung, daß n, α, β hinlänglich groß sind, kann w nach der Stirlingschen Formel berechnet werden. Man erhält:

$$\frac{n!}{\alpha!\beta!} = \frac{n^n}{\alpha^\alpha \beta^\beta} \sqrt{\frac{n}{2\pi\alpha\beta}};$$

also wird aus (1):

$$w = \left(\frac{np}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{nq}{\beta}\right)^\beta \sqrt{\frac{n}{2\pi\alpha\beta}}. \tag{4}$$

Dies gilt noch für jedes mit $\alpha + \beta = n$ verträgliche Wertepaar α, β; setzt man die in (3) angegebenen Näherungen ein, so ergibt sich für das Maximum von w die Näherung:

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}. \tag{5}$$

2. Es handelt sich nun darum, auch für w selbst einen Näherungswert zu ermitteln, falls α, β Werte annehmen, die von np, nq sich nicht allzuweit entfernen. Erweitert man in (4) rechts mit $\sqrt{npq}$, so wird:

$$w = w_0 \left(\frac{np}{\alpha}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{nq}{\beta}\right)^{\beta+\frac{1}{2}},$$

oder, da $\left(\frac{np}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $\left(\frac{nq}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$ von 1 wenig verschieden sind:

$$w = w_0 \left(\frac{np}{\alpha}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{nq}{\beta}\right)^\beta,$$

$$\operatorname{Log} w = \operatorname{Log} w_0 - \alpha \operatorname{Log}\frac{\alpha}{np} - \beta \operatorname{Log}\frac{\beta}{nq}.$$

Sei nun:

$$\alpha = np + \lambda\sqrt{n}, \quad \beta = nq - \lambda\sqrt{n}, \tag{6}$$

ferner:

$$A = \alpha \operatorname{Log}\frac{\alpha}{np}, \qquad B = \beta \operatorname{Log}\frac{\beta}{nq}.$$

Mit Hilfe der Reihenentwicklung für den natürlichen Logarithmus ergibt sich:

$$A = \lambda \sqrt{n} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{p\sqrt{n}}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{2p\sqrt{n}} + \frac{\lambda^2}{3p^2 n} - \ldots\right),$$

und bei Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung n^{-r}, wo $r \geqq \frac{1}{2}$ ist:

$$A = \lambda \sqrt{n} + \frac{\lambda^2}{2p}; \qquad \text{ebenso} \qquad B = -\lambda \sqrt{n} + \frac{\lambda^2}{2q}.$$

Folglich ist:

$$A + B = \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{\lambda^2}{2pq};$$

also:

$$w = w_0 \cdot e^{-(A+B)} = w_0 \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}. \tag{7}$$

Wir setzen jetzt $\lambda \sqrt{n} = x$ und verfügen über λ so, daß x eine ganze Zahl ist, ebenso ersetzen wir np durch die nächstliegende ganze Zahl α_0; für w_0 wird sein Wert (5) eingeführt und w durch y ersetzt. Alsdann ist genähert:

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}},$$

die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von E in $\alpha_0 \pm x$ Fällen. Nimmt man:

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm r,$$

so ist $\sum\limits_{-r}^{+r}{}' y_n$ die vollständige Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von E in mindestens $\alpha_0 - r$ und höchstens $\alpha_0 + r$ Fällen; nach § 14, S. 55 kann man dafür schreiben:

$$(8)\qquad w_{-r}^{+r} = \int_{-r}^{+r} \frac{e^{-\frac{x^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}}\,dx + \frac{e^{-\frac{r^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}}\,.$$

Um vollends auf das Wahrscheinlichkeitsintegral zu kommen, setzen wir:

$$(9)\qquad \frac{x}{\sqrt{2npq}} = t\,,\qquad \frac{r}{\sqrt{2npq}} = \gamma\,;$$

dann wird, wenn $\theta(\gamma)$ die in § 14, (4) angegebene Bedeutung hat:

$$(10)\qquad w_{-r}^{+r} = \theta(\gamma) + w_0\, e^{-\gamma^2}\,.$$

Für einigermaßen beträchtliche Werte von n kann man in (8) und (10) das zweite Glied rechts unterdrücken.

Die Gleichungen (3), (5) und (10) bilden zusammen das Theorem von J. Bernoulli[1]): (3) gibt an, für welches Wertepaar α_0, β_0 die Wahrscheinlichkeit des α, β-maligen Eintreffens von E, F das in (5) angegebene Maximum w_0 erreicht, (10) enthält eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit, daß E in mindestens $\alpha_0 - r$, höchstens $\alpha_0 + r$ Fällen eintrifft, wobei $\gamma = \dfrac{r}{\sqrt{2npq}}$ ist.

§ 16. Folgerungen aus dem Theorem von Bernoulli, das Gesetz der großen Zahlen.

1. Zunächst soll ein Zahlenbeispiel zu den Formeln des § 15 durchgeführt werden. Wir wählen $n = 100$; $p = 0{,}7$; $q = 0{,}3$; dann wird $\alpha_0 = 70$, $\beta_0 = 30$; $w_0 = 0{,}087$. Sei ferner $r = 5$, so ergibt sich $\gamma = 0{,}772$, hieraus nach S. 121 $\theta(\gamma) = 0{,}725$, $w_0 \cdot e^{-\gamma^2} = 0{,}048$, $w_{-r}^{+r} = 0{,}773$. Mit dieser Wahrscheinlichkeit steht also

[1]) Der Satz wurde erst von Laplace vollständig aufgestellt.

zu erwarten. daß das Ereignis E in wenigstens 65 und höchstens 75 Fällen eintreffen werde.

Die Ergebnisse werden noch anschaulicher, wenn man von einem bestimmten Wert von $\theta(\gamma)$, nämlich $\theta(\gamma) = \frac{1}{2}$ ausgeht, der zugehörige Wert $\gamma = 0{,}477$ sei mit ϱ bezeichnet. Soll nun $w_{-r}^{+r} = \frac{1}{2}$ werden, so erhält ϱ eine geringfügige Verbesserung $\Delta\varrho$, die in dem Zusatzglied der Formel (10) unberücksichtigt bleiben kann. Man hat also:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho + \Delta\varrho} e^{-t^2}\, dt + w_0 \cdot e^{-\varrho^2}$$

oder

$$0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\varrho}^{\varrho + \Delta\varrho} e^{-t^2}\, dt + w_0 \cdot e^{-\varrho^2}.$$

Aber auch für das Integral kann e^{-t^2} konstant $= e^{-\varrho^2}$ angenommen werden; somit ist:

$$\Delta\varrho = -\frac{w_0 \sqrt{\pi}}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2npq}}.$$

In obigem Beispiel wird $\Delta\varrho = -0{,}077$; $\gamma = \varrho + \Delta\varrho = 0{,}400$; hierzu gehört $r = 2{,}6$.

2. Wir wollen nun n so groß wählen, daß man ohne Schaden der Genauigkeit $\Delta\varrho$ vernachlässigen kann. Bezeichnet man mit u den zu $\gamma = \varrho$ gehörigen Wert von r, so folgt: $u = \varrho\sqrt{2npq}$. Nun wird $pq = p(1-p)$ ein Maximum für $p = q = \frac{1}{2}$, und da $\Delta\varrho$ stets < 0 ist, so wird:

$$u = \varrho\sqrt{\frac{n}{2}} = 0{,}337\sqrt{n}$$

der größte Wert von r unter der Voraussetzung $w_{-r}^{+r} = \frac{1}{2}$. Für $n = 4040$ wird z. B. in runder Zahl $u = 21$; also kann man 1 gegen 1 wetten, daß bei 4040 Würfen mit einer Münze mindestens 1999 mal und höchstens 2041 mal Wappen fällt. Bei Buffons Versuch (vgl. S. 40) ergab sich die Zahl 2048.

Wie man sieht, wächst u zugleich mit n, aber nicht wie n selbst, sondern nur wie $\sqrt{n}$.

3. Kehren wir nochmals zu den Endformeln des § 15 zurück; das Zusatzglied soll vernachlässigt und γ als gegeben betrachtet werden. Die relative Häufigkeit von E ist dann zwischen den Grenzen $\frac{\alpha_0 \mp r}{n}$ enthalten, mithin ist:

$$\varDelta = \pm \frac{r}{n} = \pm \gamma \cdot \sqrt{\frac{2pq}{n}}$$

die zu erwartende Abweichung gegenüber $\frac{\alpha_0}{n}$. Nun ist schon für $\gamma = 2$ der Wert $\theta(\gamma)$ von 1 sehr wenig verschieden; läßt man also n unbegrenzt wachsen, so kann man mit beliebig großer Wahrscheinlichkeit die Zahl $\varDelta$ unter jede angegebene Grenze herabdrücken. Dies ist der genaue Ausdruck des Gesetzes der großen Zahlen.

Es liegt nahe, die Erfahrung zum Vergleich heranzuziehen, und dies ist auch in umfangreichem Maß geschehen (Lotterien, Versuche mit Münzen, Würfeln u. a.). Hierbei kann jedoch schon für ein kleines n zufällig $\varDelta = 0$ sein und für ein großes n sich ein Wert von $\varDelta$ ergeben, welcher den erwarteten erheblich übertrifft. Ferner setzen z. B. unsere Formeln ideale Würfel voraus, bei denen alle Würfe gleich möglich sind; von den zu den Versuchen benutzten Würfeln gilt dies sicher nicht. Ein minder anfechtbares Beispiel liefert die Verteilung der Endziffern einer Zahlentafel, obschon auch diese kein Werk des Zufalls sind; so enthält die in den fünfstelligen Tafeln von F. G. Gauß S. 118—120 angegebene Sehnentafel 109mal die Endziffer 0, der Theorie nach sollte diese $0{,}1 \cdot 1080 = 108$mal auftreten (vgl. S. 7).

Erwähnt sei noch, daß Poisson dem Theorem von Bernoulli eine Erweiterung für den Fall gegeben hat, daß sich die Wahrscheinlichkeiten während der Versuche ändern; wir können jedoch hierauf nicht eingehen.

IV. Abschnitt.

Wahrscheinlichkeit auf Grund der Erfahrung.

§ 17. Wahrscheinlichkeit der Ursachen; Beispiele hierzu.

1. Es seien r Urnen $U_1, U_2, \ldots, U_r$ vorhanden, deren jede eine Anzahl von weißen Kugeln enthält; für jede Urne U_i sei die Wahrscheinlichkeit w_i des Zuges einer weißen Kugel bekannt. Jemand tritt an die Urnen heran, zieht eine Kugel und teilt mir mit, daß sie weiß ist. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel der Urne U_i entstammt?

Will man die Frage auf den Grundbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückführen, so nehme man an, daß die Urne U_i im ganzen n_i Kugeln, darunter a_i weiße enthält. Nun vermehrt man die Kugeln unter Beibehaltung ihres Zahlenverhältnisses so, daß:

$$(1) \qquad \lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2 = \ldots = \lambda_r n_r = n$$

wird; hierdurch ändert sich an den Wahrscheinlichkeiten nichts. Dann ist die Zahl der günstigen Fälle $\lambda_i a_i$, diejenige der möglichen:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r n_r,$$

daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$W_i = \frac{\lambda_i a_i}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r n_r}.$$

Ersetzt man hier die Größen λ durch ihre aus (1) folgenden Werte, hebt n weg und beachtet, daß $a_i : n_i = w_i$ ist, so folgt:

$$(2) \qquad W_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2 + \ldots + w_r}.$$

W_i erscheint hier als relative Wahrscheinlichkeit, was sich auch unmittelbar begründen läßt. Schon das in § 1, S. 8 erwähnte Beispiel läßt sich nach (2) behandeln; die dortige Frage ist gleichbedeutend mit der, ob die Goldmünze aus dem Kästchen B stammt; nun ist $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{1}{2}$, also $W = \frac{1}{2} : (1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$.

Es kann vorkommen, daß für die Wahl der Urne U_i eine besondere Wahrscheinlichkeit u_i besteht, etwa wenn die Urnen mit verschiedenem Anstrich versehen sind und die Versuchsperson bestimmte Farben bevorzugt. In solchen Fällen muß man in (2) die Wahrscheinlichkeit w_i ersetzen durch die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $u_i w_i$; das Ergebnis ist alsdann:

$$(3) \qquad W_i' = \frac{u_i w_i}{u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_r w_r}.$$

Um die allgemeine Bedeutung dieser Formel übersichtlich darzustellen, bedienen wir uns der in § 3 eingeführten Bezeichnungsweise; unter den U_i verstehen wir Ursachen, die einander ausschließen und deren jede das Ereignis E herbeiführen kann; $W(A, B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß A unter der Voraussetzung B eintrifft. Gl. (3) lautet dann:

$$W(U_i, E) = \frac{W(U_i) \cdot W(E, U_i)}{W(U_1) \cdot W(E, U_1) + \ldots + W(U_r) \cdot W(E, U_r)}$$

für Gl. (2) kommen die $W(U_i)$ in Wegfall.

2. Eine Urne enthält weiße und schwarze Kugeln in der Gesamtzahl n; der erste Zug liefert eine weiße Kugel, welche wieder zurückgelegt wird; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, α) daß m weiße Kugeln vorhanden sind, β) daß der zweite Zug nochmals eine weiße Kugel gibt?

α) Enthält die Urne $1, 2, \ldots, n$ weiße Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu bekommen: $1/n, 2/n, \ldots, n/n$; die Summe dieser Zahlen ist $n(n+1) : 2n = (n+1) : 2$.

Gl. (2) gibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit; der Zähler ist $m : n$, der Nenner $(n+1) : 2$, also:

$$W_m = \frac{2m}{n(n+1)}.$$

β) Hier ist die Wahrscheinlichkeit, daß m weiße Kugeln vorhanden sind und der zweite Zug wieder eine weiße Kugel gibt:

$$W_m \cdot \frac{m}{n} = \frac{2m^2}{n^2(n+1)} = P_m.$$

Hieraus folgt die verlangte Wahrscheinlichkeit:

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \frac{2}{n^2(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

d. h.
$$P = \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n},$$

also:
$$\lim_{n=\infty} P = \frac{2}{3}.$$

Würde die gezogene Kugel nicht zurückgelegt, so würde man erhalten:

$$P_m = \frac{2m(m-1)}{(n+1)\cdot n \cdot (n-1)}, \qquad P = \frac{2}{3}.$$

3. Bei der eben durchgeführten Rechnung setzten wir voraus, daß das Vorhandensein jeder Anzahl von weißen Kugeln gleich wahrscheinlich sei. Wir wollen jetzt annehmen, die Urne sei in folgender Weise gefüllt worden: A hat eine Münze n-mal in die Luft geworfen, je nachdem sie Schrift oder Wappen zeigte, hat er in die Urne eine weiße oder schwarze Kugel gelegt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein von r weißen Kugeln (§ 2):

$$u_r = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Diesmal muß Gl. (3) benutzt werden; der Zähler ist:

$$u_m \cdot \frac{m}{n} = \binom{n}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{m}{n} = \binom{n-1}{m-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n ;$$

der Nenner:

$$\frac{1}{n}\left[\binom{n}{1}\cdot 1 + \binom{n}{2}\cdot 2 + \ldots + \binom{n}{n}\cdot n\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Differentiiert man die Identität:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

nach x und setzt $x = 1$, so erkennt man, daß der in eckigen Klammern stehende Ausdruck den Wert $n \cdot 2^{n-1}$ hat. Mithin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit unter der neuen Annahme:

$$W'_m = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \binom{n-1}{m-1} .$$

Für $n = 6$, $m = 3$ wird $W_m = \frac{1}{7}$, $W'_m = \frac{5}{16}$.

§ 18. Stetig veränderliche Ursachen.

1. Der Fall einer stetig veränderlichen Ursache kommt häufig in folgender Form vor. Ein Ereignis E habe die unbekannte Wahrscheinlichkeit x; in $n = \alpha + \beta$ Fällen ist E tatsächlich α-mal eingetroffen und β-mal ausgeblieben; dieses Ereignis F hat, da eine bestimmte Reihenfolge vorliegt, die Wahrscheinlichkeit a priori:

$$w = x^{\alpha}(1 - x)^{\beta} . \tag{1}$$

Man kann nun x als Ursache von F auffassen; x ist zwischen 0 und 1 enthalten und stetig veränderlich. Dann ist die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, x habe bei den n Versuchen zwischen x und $x + dx$ gelegen, proportional zu $w \cdot dx$, also etwa $k \cdot w \cdot dx$. Mithin ist die Wahrscheinlichkeit, x habe zwischen den Grenzen a, b $(a < b)$ gelegen:

$$W = k\int_a^b w\,dx .$$

Für $a = 0$ und $b = 1$ muß $W = 1$ sein; also:

$$1 = k\int_0^1 w\,dx .$$

Durch Division wird k eliminiert; es folgt:

$$W = \int_a^b w\,dx : \int_0^1 w\,dx . \tag{2}$$

Diese, zu § 17, (2) analoge Formel wurde unter der Annahme aufgestellt, daß alle Werte von x gleich wahrscheinlich seien. Kommt hingegen jedem Wert von x eine besondere, als Funktion von x zu betrachtende Wahrscheinlichkeit u zu, so tritt an Stelle von w die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $u\,w$; die Gl. (2) ist zu ersetzen durch:

$$(3) \qquad W' = \int_a^b u\,w\,dx : \int_0^1 u\,w\,dx\,.$$

Dies ist die Übertragung von § 17, (3) auf den Fall der stetig veränderlichen Ursache; auch diese Formel läßt sich verdeutlichen, wenn man die Zeichen:

$$u = W(x)\,, \qquad w = W(F, x)$$

einführt.

2. Wir wollen noch feststellen, für welchen Wert der Veränderlichen x der Betrag von w möglichst groß wird. Differentiiert man (1) logarithmisch und setzt die Ableitung $= 0$, so folgt:

$$\frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{1-x} = 0\,,$$

d. h.

$$(4) \quad x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{n}\,, \qquad 1 - x = \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\beta}{n}\,;$$

daß diese Werte ein Maximum von w bedingen, ist leicht ersichtlich. Man hat also das Ergebnis: w wird ein Maximum, wenn man für x und $1-x$ die Wahrscheinlichkeiten a posteriori wählt.

3. Zum Schluß berechnen wir das in (2) auftretende Integral:

$$(5) \qquad J(\alpha, \beta) = \int_0^1 w\,dx = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta\,dx\,.$$

Die Integration nach Teilen liefert sogleich:

$$J(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha+1} \int_0^1 x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta-1}\,dx\,.$$

Beachtet man die Identität $x = 1 - (1 - x)$, so wird der letzte Integrand:

$$x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1} - x^{\alpha}(1-x)^{\beta},$$

infolgedessen ist:

$$J(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha+1} J(\alpha, \beta-1) - \frac{\beta}{\alpha+1} J(\alpha, \beta)$$

und

$$J(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha+\beta+1} J(\alpha, \beta-1).$$

Setzt man diese Schlußweise fort, bis man bei:

$$J(\alpha, 0) = \frac{1}{\alpha+1}$$

angelangt ist, so findet sich:

$$(6) \quad J(\alpha, \beta) = \frac{\beta!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha!\,\beta!}{(n+1)!}.$$

Schreibt man statt dessen:

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\alpha!\,\beta!}{n!}$$

und wendet die Stirlingsche Formel an, so wird:

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{2\pi\alpha\beta}{n}} \cdot \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{n}\right)^{\beta}.$$

Für große n kann man $n+1$ durch n ersetzen und hat die Näherungsformel:

$$(7) \qquad J(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{n}\right)^{\beta} \cdot \sqrt{\frac{2\pi\alpha\beta}{n^3}}.$$

§ 19. Das Theorem von Bayes.

1. Die vorstehenden Entwicklungen führen unmittelbar auf den in der Überschrift genannten Satz. Unter der

Annahme, daß alle Werte von x gleich möglich sind, suchen wir diejenigen Beträge von W, welche zu einem in der Nachbarschaft von $p = \alpha/n$ liegenden Wert von x gehören.

Man setzt also in § 18, (2): $a = p - \varepsilon$, $b = p + \varepsilon$, wo ε eine kleine Größe bedeutet; dann ist nur noch das erste Integral Z auszuwerten.

Sei: $x = p + z$, $q = 1 - p = \dfrac{\beta}{n}$, so wird:

$$Z = \int_{p-\varepsilon}^{p+\varepsilon} w\, dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (p+z)^\alpha (q-z)^\beta dz$$

$$= p^\alpha q^\beta \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left(1 + \frac{z}{p}\right)^\alpha \left(1 - \frac{z}{q}\right)^\beta dz .$$

Da z eine kleine Zahl ist, so kann man:

$$\operatorname{Log}\left(1 + \frac{z}{p}\right)^\alpha = \alpha \left(\frac{z}{p} - \frac{z^2}{2p^2}\right),$$

$$\operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{q}\right)^\beta = -\beta \left(\frac{z}{q} + \frac{z^2}{2q^2}\right)$$

setzen; also wird der Logarithmus des letzten Integranden:

$$z\left(\frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q}\right) - \frac{z^2}{2}\left(\frac{\alpha}{p^2} + \frac{\beta}{q^2}\right) = -\frac{n^3 z^2}{2\alpha\beta} .$$

Sei nun:

$$z\sqrt{\frac{n^3}{2\alpha\beta}} = t, \quad \varepsilon\sqrt{\frac{n^3}{2\alpha\beta}} = \gamma, \quad dz = dt\sqrt{\frac{2\alpha\beta}{n^3}},$$

so folgt:

$$Z = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{n}\right)^\beta \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{n^3}} \int_{-\gamma}^{+\gamma} e^{-t^2} dt .$$

oder einfacher nach § 18, (7) und § 14, (4):

$$Z = J(\alpha, \beta) \cdot \theta(\gamma).$$

Nun ist $J(\alpha, \beta)$ das zweite Integral in § 18, (2); mithin ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$W = \theta(\gamma).$$

Der Sinn dieses, nach Bayes benannten Satzes ist folgender: ist das Ereignis E unter n Fällen α-mal eingetroffen und β-mal ausgeblieben, so ist die Wahrscheinlichkeit a posteriori oder relative Häufigkeit von E, nämlich $\alpha : n$, zugleich die nächstliegende Annahme für die unbekannte Wahrscheinlichkeit a priori, welche dem Ereignis E zukommt: eine Abweichung ε von $\alpha : n$ ist mit der Wahrscheinlichkeit $\theta(\gamma)$ zu erwarten, wo γ den oben angegebenen Wert hat.

2. Da α, β im allgemeinen mit n von gleicher Größenordnung sind, so kann man über n so verfügen, daß zu einem gegebenen ε die Wahrscheinlichkeit $\theta(\gamma)$ der Einheit beliebig nahe kommt; dieser, auf das Theorem von Bayes gegründete Schluß ist die Umkehrung des Gesetzes der großen Zahlen.

Sei, um noch ein Zahlenbeispiel durchzuführen, $\alpha = 6 \cdot 10^3$, $\beta = 4 \cdot 10^3$, $n = 10^4$, $\varepsilon = 10^{-2}$, so wird:

$$\gamma = \varepsilon \sqrt{\frac{10^6}{48}} = \frac{10}{\sqrt{48}} = 1{,}44\,; \qquad \theta(\gamma) = 0{,}96\,:$$

man kann also 24 gegen 1 wetten, daß die Wahrscheinlichkeit a priori zwischen 0,59 und 0,61 enthalten war; nimmt man hingegen unter sonst gleichen Voraussetzungen $\varepsilon = 10^{-3}$, so ergibt sich $\gamma = 0{,}144$, $\theta(\gamma) = 0{,}161$; erst für $\alpha = 6 \cdot 10^5$, $\beta = 4 \cdot 10^5$, $n = 10^6$ gehört zu $\varepsilon = 10^{-3}$ wieder der Wert $\theta(\gamma) = 0{,}96$. Will man daher eine

Wahrscheinlichkeit auf empirischem Weg mit einiger Genauigkeit bestimmen, so muß die Zahl der Versuche sehr groß sein.

§ 20. Wahrscheinlichkeit zukünftiger Ereignisse.

1. Nach § 17, (3) ist, wenn alle Buchstaben ihre Bedeutung beibehalten:

$$W_i' = \frac{u_i w_i}{u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_r w_r}$$

die Wahrscheinlichkeit a posteriori der Ursache U_i. Ein bevorstehendes Ereignis G möge aus jeder der Ursachen U_i mit der Wahrscheinlichkeit a priori v_i hervorgehen können; dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß G aus U_i entspringen wird: $v_i W_i'$, mithin die vollständige Wahrscheinlichkeit von G:

$$\mathfrak{W} = v_1 W_1' + v_2 W_2' + \ldots + v_r W_r',$$

oder:

$$(1) \qquad \mathfrak{W} = \frac{u_1 v_1 w_1 + u_2 v_2 w_2 + \ldots + u_r v_r w_r}{u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_r w_r}.$$

Die Formel vereinfacht sich, wenn alle u_i gleich sind.

Eine Urne enthalte 3, schwarze oder weiße Kugeln; 3 Versuche, mit jedesmaligem Zurücklegen der Kugel, ergaben 2 weiße, 1 schwarze Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der nächste Versuch eine weiße Kugel liefert?

Als gleich wahrscheinliche Ursachen U_i sind anzusehen das Vorhandensein entweder von 2 weißen, 1 schwarzen oder von 1 weißen, 2 schwarzen Kugeln. Das Versuchsergebnis hat in dem einen oder anderen Fall die Wahrscheinlichkeit a priori:

$$w_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}, \qquad w_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}.$$

Aus U_1 geht das künftige Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit $v_1 = \frac{2}{3}$, aus U_2 mit der Wahrscheinlichkeit $v_2 = \frac{1}{3}$ hervor; die u_i fallen weg, also ist nach (1):

$$\mathfrak{W} = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{3(4+2)} = \frac{5}{9}.$$

2. Sind, wie in § 18, u, v, w Funktionen einer zwischen 0 und 1 stetig veränderlichen Wahrscheinlichkeit x, so geht (1) über in:

$$\mathfrak{W} = \int_0^1 u\,v\,w\,dx : \int_0^1 u\,w\,dx. \tag{2}$$

Auch hier tritt eine Vereinfachung ein, wenn u konstant ist.

3. Die wichtigste Anwendung ist folgende. Ein Ereignis ist in $n = \alpha + \beta$ Fällen α-mal eingetroffen, β-mal ausgeblieben; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in weiteren $n_1 = \alpha_1 + \beta_1$ Fällen das Ereignis α_1-mal eintreffen, β_1-mal ausbleiben wird?

Wir gehen von (2) unter Annahme eines konstanten Wertes von u aus; dann ist:

$$w = x^\alpha (1-x)^\beta, \qquad v = \frac{n_1!}{\alpha_1!\,\beta_1!} \cdot x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1};$$

der Koeffizient bei v ist beigefügt, da wir über die Reihenfolge der zukünftigen Fälle nichts wissen; ein derartiger Faktor bei w würde das Ergebnis nicht beeinflussen.

Mit Hilfe von § 18, (6) lassen sich die in (2) auftretenden Integrale, aus welchen u wegfällt, sogleich ausführen; man erhält die von Condorcet aufgestellte Formel:

$$\mathfrak{W} = \frac{(\alpha+\alpha_1)!\,(\beta+\beta_1)!\,(n+1)!\,n_1!}{\alpha!\,\alpha_1!\,\beta!\,\beta_1!\,(n+n_1+1)!}. \tag{3}$$

Die Formel kann auch in Binomialkoeffizienten geschrieben werden. Nimmt man $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $n_1 = n$ an und benutzt die Stirlingsche Formel, so ergibt sich, da $(n+1):(2n+1)$ für unbegrenzt wachsendes n nach $1:2$ konvergiert:

$$\frac{(2\alpha)!}{(\alpha!)^2} = \frac{2^{2\alpha}}{\sqrt{\alpha\pi}}, \quad \frac{(2\beta)!}{(\beta!)^2} = \frac{2^{2\beta}}{\sqrt{\beta\pi}}, \quad \frac{(n+1)!\,n!}{(2n+1)!} = \frac{\sqrt{n\pi}}{2^{2n+1}};$$

mithin:

$$(4) \qquad \mathfrak{W}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\alpha\beta\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi n p q}},$$

wenn $p = \alpha : n$, $q = \beta : n$ ist. Vergleicht man dies mit § 15, (5), so wird:

$$(5) \qquad w_0 = \mathfrak{W}_0\sqrt{2};$$

die Verschiedenheit der Ergebnisse rührt davon her, daß in § 15 p, q die sicher bekannten Wahrscheinlichkeiten a priori waren, wogegen in (4) p, q die aus n Versuchen ermittelten Wahrscheinlichkeiten a posteriori sind.

Ist allgemein $n_1 = \lambda n$, $\alpha_1 = \lambda\alpha$, $\beta_1 = \lambda\beta$, so ergibt eine dem § 15 entsprechende Untersuchung, daß man in den dortigen Gleichungen (5), (9) und (10) n, w_0, w_{-r}^{+r} durch $n_1(\lambda+1)$, $\mathfrak{W}_0$, $\mathfrak{W}_{-r}^{+r}$ ersetzen muß; $\mathfrak{W}_{-r}^{+r}$ ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses in $\alpha_1 - r$ bis $\alpha_1 + r$ Fällen. Je größer also n_1 gegen n ist, desto größer wird λ und desto unsicherer die Vorhersagung.

§ 21. Empirische Wahrscheinlichkeitsbestimmung.

Wie wir schon in § 1 sahen, wird die Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit a priori erschwert durch die Forderung der Gleichwertigkeit der möglichen Fälle.

welch letztere kaum jemals sicher feststehen dürfte. Beim Würfel kann die Bearbeitung der Würfelflächen, die Art des Würfelns, die Beschaffenheit des Spieltisches einen Einfluß ausüben; beim Zug aus der Urne können die Kugeln mehr oder weniger gut gemischt worden sein; die Zahl der Endnullen auf einer Seite der Logarithmentafel ist durch die Eigenschaften der Zahlen völlig bestimmt. Wenn wir trotzdem die Fälle als gleichwertig behandeln, so tun wir dies, weil wir über ihre Beschaffenheit nichts Näheres wissen, und wir dürfen es tun, solange nicht das Ergebnis unserer Überlegung in auffallenden Widerspruch zu der Erfahrung tritt. Beobachten wir, daß ein Ereignis bald eintrifft, bald ausbleibt, so sagen wir, dies sei das Werk des Zufalls; in Wirklichkeit ist jedes Ereignis, jeder Tatbestand abhängig von einer Menge von Ursachen, die einander bald verstärken, bald aufheben: aus diesem Grund stimmt die Zahl der Endnullen in einer Logarithmentafel annähernd mit der a priori zu erwartenden überein.

Die hervorgehobenen Mängel der Wahrscheinlichkeitsbestimmung a priori haften natürlich auch denjenigen Problemen an, in welchen die Zahl der Fälle unendlich ist oder die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe zusammengesetzter Formeln ermittelt wird.

Im Hinblick hierauf darf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit a posteriori das gleiche Recht beanspruchen, als wissenschaftliche Methode angesehen zu werden. Hierzu kommt das ausschlaggebende Moment, daß fast auf allen Gebieten der Anwendungen die Wahrscheinlichkeitsbestimmung a priori ein Ding der Unmöglichkeit ist. Fragt man: welches ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Theodolit einen Winkel auf n'' genau zu messen, oder die Wahrscheinlichkeit, daß eine Operation gelingt, oder diejenige, daß ein jetzt 30jähriger Mann 70 Jahre alt wird, so haben alle diese Fragen einen wohlbegründeten Sinn, aber nur die Erfahrung kann die Antwort geben; nicht die deduktive Untersuchung der Urteilsmaterie löst die Aufgabe, sondern die empirische Zusammenstellung der relativen Häufigkeit des Ereignisses in den seither beobachteten Fällen. Andererseits haben wir am Schluß von § 19 und § 20 die Schwierigkeiten kennen gelernt, welche einer empirischen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit entgegenstehen: nur ein sehr umfangreiches Beobachtungsmaterial liefert genaue und weiterhin verwendbare Ergebnisse.

Man wird also Poincaré beipflichten müssen, wenn er am Schluß seiner Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung[1]) erklärt, daß schon das Wort „Wahrscheinlichkeitsrechnung" einen Widerspruch in sich schließt, und das Verdienst dieses Zweigs der Mathematik darin besteht, uns zu zeigen, „daß wir nichts wissen können".

---

[1]) Vgl. S. 7.

V. Abschnitt.

Theorie der Beobachtungsfehler.

§ 22. Einteilung der Beobachtungsfehler; wahre und scheinbare Beobachtungsfehler.

1. Man unterscheidet grobe, regelmäßige (systematische) und zufällige Messungsfehler. Erstere, durch Nachlässigkeit des Beobachters herbeigeführt, scheiden aus unserer Betrachtung aus; die Fehler der zweiten Gruppe können, soweit sie ihren Grund in der Beschaffenheit der Meßinstrumente haben, durch Untersuchung der Meßwerkzeuge vorher berechnet und unschädlich gemacht werden; in diese Gruppe gehört ferner der Einfluß der Erdkrümmung, der normalen Strahlenbrechung und ähnliches. Es bleiben noch die jedem Beobachter wohlbekannten zufälligen Fehler; diese haben allgemein folgende Eigenschaften: sie entspringen einer großen Zahl von möglichen Ursachen, sie können ebensowohl positiv als negativ sein, ihre Häufigkeit nimmt mit wachsender Größe rasch ab; endlich überschreiten sie eine gewisse Grenze nicht, aber diese Grenze rückt mit der Zahl der Beobachtungen immer weiter hinaus.

Daraus folgt, daß die Unterscheidung zwischen groben und zufälligen Fehlern keine ganz scharfe ist; gerade in dieser Beziehung wird sich die Theorie der Beobachtungsfehler nützlich erweisen. Allein auch zwischen regelmäßigen und zufälligen Fehlern wird in der Praxis nicht immer streng unterschieden; z. B. ist es bei der Winkelmessung mit einem gewöhnlichen Feldmeßtheodolit nicht üblich, die Achsen- und Teilungsfehler in Rechnung zu stellen, man richtet vielmehr die Beobachtungen so ein, daß diese Fehler bald positiv, bald negativ auftreten und dadurch den Charakter zufälliger Fehler erlangen.

2. Den Gegensatz zwischen wahren und scheinbaren Beobachtungsfehlern wollen wir an einem Beispiel kennen lernen. Die Polhöhe einer Sternwarte sei durch mehrjährige, sorgfältige Messungen auf 0,1″ genau bestimmt; den so gefundenen Wert ψ wird man mit großer Annäherung als wahren Wert der (ohnehin nicht ganz konstanten) Polhöhe betrachten dürfen. Nun mißt man an einem Abend mit einem kleinen Universalinstrument, welches nur 20″ Nonienablesung gibt, n-mal die Polhöhe und findet die Werte $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$; alsdann gilt das arithmetische Mittel aus diesen Beobachtungen:

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_n}{n}$$

als wahrscheinlichster Wert (Axiom vom arithmetischen Mittel). Die Unterschiede $u_i = \psi - \psi_i$ nennt man wahre, die Unterschiede $v_i = \psi_0 - \psi_i$ scheinbare Beobachtungsfehler; da $\psi = \psi_i + u_i$, $\psi_0 = \psi_i + v_i$ ist, so sind u_i, v_i die anzubringenden Verbesserungen und nicht die Fehler, die angegebene Bezeichnung ist aber allgemein üblich.

In den meisten Fällen ist der wahre Wert einer unmittelbar zu messenden Größe nicht, oder wenigstens nicht mit absoluter Genauigkeit bekannt; denn in der Regel sind die zu messenden Objekte geometrisch nicht streng definiert, außerdem unterliegen sie zeitlichen Veränderungen. Man wird indessen dem wahren Wert einer Beobachtungsgröße immer näher kommen, je genauer man die regelmäßigen Fehler kennt und je zahlreicher und sorgfältiger die Messungen sind.

§ 23. Das Fehlergesetz auf Grund des arithmetischen Mittels (C. F. Gauß).

1. Für eine zu bestimmende Größe haben die Beobachtungen die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ergeben; welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Wert zwischen z und $z + dz$ liegt?

Das Ereignis besteht in dem Auftreten der n Beobachtungen, als Ursache gilt der Wert von z. Sei nun $\varphi(x_r, z)\,dx_r$ die Wahrscheinlichkeit, daß die $r$te Beobachtung zwischen x_r und $x_r + dx_r$ fällt, so ist:

$$w = \varphi(x_1, z) \cdot \varphi(x_2, z) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_n, z)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungssystems. Die Wahrscheinlichkeit a priori, daß die Ursache z in das Intervall dz falle, sei:

$$u = \psi(z)\, dz\,.$$

Da z zwischen $-\infty$ und $+\infty$ enthalten sein kann, so ist nach den Regeln über die Wahrscheinlichkeit der Ursachen die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$W = u\,w : \int_{-\infty}^{+\infty} u\,w\,dz\,. \tag{1}$$

2. Wir vereinfachen nun die Rechnung durch folgende Annahmen:

α) $\psi(z)$ sei konstant, d. h. jedes z gleich wahrscheinlich, ehe über die Beobachtungen etwas bekannt ist;

β) das Axiom vom arithmetischen Mittel soll gelten, d. h. es soll:

$$\varphi(x_1, z) \cdot \varphi(x_2, z) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_n, z) = \text{Maximum}$$

sein, wenn $z = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n}$ ist[1]).

γ) $\varphi(x_r, z) = \varphi(z - x_r)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtung soll nur von der Größe ihres Fehlers abhängen.

Da aus (1) auch die dx_r fortfallen und das Integral einen konstanten Wert besitzt, so muß, wenn $v_r = z - x_r$ gesetzt wird:

$$\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(v_r) = \text{Maximum}$$

sein. Hierzu tritt die aus β) sich ergebende Bedingung: $nz - [x] = [z - x] = 0$ oder:

$$[v] = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0\,. \tag{2}$$

Differentiiert man die vorangehende Gleichung logarithmisch nach z und setzt:

$$F(v_r) = \frac{\varphi'(v_r)}{\varphi(v_r)}\,,$$

so muß auch:

$$F(v_1) + F(v_2) + \ldots + F(v_n) = 0 \tag{3}$$

sein; (2) und (3) sagen offenbar das gleiche aus, wenn — für λ als eine Konstante —:

$$F(v_r) = 2\,\lambda\, v_r$$

ist; man zeigt auch leicht die Unmöglichkeit einer anderen Lösung. Hieraus folgt weiter, mit μ als zweiter Konstante:

---

[1]) Die Bezeichnung $[x]$ ist aus einem Summenzeichen entstanden und wird gelesen: „Summe der x"; wir werden sie auch künftig benutzen.

$$\operatorname{Log} \varphi(v_r) = \lambda v_r^2 + \mu ,$$

$$\varphi(v_r) = e^{\lambda v_r^2 + \mu} = e^{\mu} e^{\lambda v_r^2} .$$

Läßt man den Zeiger r weg, beachtet, daß $\varphi(v)$ mit wachsendem v abnehmen, also $\lambda = -h^2$ sein muß, und ersetzt e^{μ} durch C, so wird:

$$\varphi(v) = C \cdot e^{-h^2 v^2} .$$

Gemäß der Bedeutung des Buchstabens φ ist $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\, dv = 1$, folglich (§ 13, S. 51):

$$C \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{h} = 1 , \qquad C = \frac{h}{\sqrt{\pi}} .$$

Damit ist das nach C. F. Gauß benannte Fehlergesetz aufgestellt:

$$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2} . \tag{4}$$

3. Vorstehende Herleitung ist, wie auch Gauß selbst bemerkt hat, durchaus nicht einwandfrei, vor allem infolge der willkürlichen Voraussetzungen α) und γ); in der Tat lassen sich auch minder einfache Fehlergesetze aufstellen, welche von diesen Einschränkungen frei sind. Zur Rechtfertigung von β) kann man anführen: z als arithmetisches Mittel der x genügt auch der Forderung einer kleinsten Quadratsumme der Fehler; in der Tat folgt aus:

$$(z - x_1)^2 + (z - x_2)^2 + \ldots + (z - x_n)^2 = \text{Minimum}$$

durch Differentiieren sogleich: $n z = [x]$, wie oben.

Nimmt man ferner an, der Mittelwert z_0 bestimme sich aus:

$$n f(z_0) = [f(x)] ,$$

und die x_r unterscheiden sich nur wenig von z_0, so gilt angenähert:

$$n f(z_0) = [f(z_0 + \overline{x - z_0})] = n f(z_0) + f'(z_0) \cdot [x - z_0],$$

d. h. $\quad [x - z_0] = 0\,, \quad n z_0 = [x]\,, \quad z_0 = z\,;$

man wird also auf das arithmetische Mittel geführt, welches auch die Funktion f sei.

Bedeutet endlich z wie anfangs den wahren Wert, z_0 das arithmetische Mittel und setzt man gemäß (4):

$$\Phi = \prod_1^n \varphi(z - x_r) = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2 N},$$

wo

$$N = n z^2 - 2 n z z_0 + [x^2] = n(z - z_0)^2 + [x^2] - n z_0^2$$

ist, so ergibt sich der Mittelwert μ von $z - z_0$ aus[1]):

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - z_0)\, \Phi\, dz : \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\, dz\,.$$

Ersteres Integral ist bis auf einen konstanten, endlichen Faktor:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (z - z_0)\, e^{-h^2 n (z - z_0)^2}\, d(z - z_0)\,;$$

mithin verschwindet es, weil der Integrand eine ungerade Funktion von $z - z_0$ ist; das zweite Integral verschwindet nicht, folglich ist $\mu = 0$, d. h. bei Annahme des Gaußschen Gesetzes ist das arithmetische Mittel z_0 der Durchschnittsbetrag der unendlich vielen wahren Werte z. Ein zwingender Grund zugunsten des arithmetischen Mittels und des Gaußschen Fehlergesetzes liegt natürlich auch hierin nicht.

---

1) Deutet man $z - z_0$ als Koordinate, Φ als Masse eines materiellen Punktes einer Geraden, so ist μ die Koordinate des Schwerpunktes; vgl. Sammlung Göschen Nr. 88, § 40.

§ 24. Hilfssätze über bestimmte Integrale.

1. Um das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ auszuwerten, zerlegen wir es in Teilintegrale mit den Grenzen $0, \pi, 2\pi, \ldots$; dadurch verwandelt sich (Fig. 11) das Integral in eine Reihe, deren Glieder bei abwechselndem Vorzeichen gegen

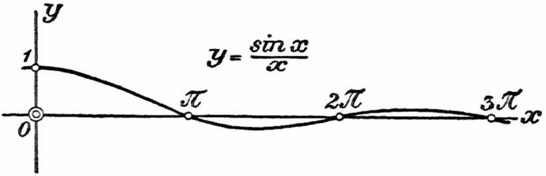

Fig. 11.

Null abnehmen. Folglich hat das Integral einen Sinn und einen positiven Zahlenwert.

Geht man von der für echt gebrochene x gültigen Beziehung[1]):

$$\sin\alpha + x\sin 2\alpha + x^2\sin 3\alpha + \ldots = \frac{\sin\alpha}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

aus und integriert zwischen 0 und x, so wird:

$$x\sin\alpha + \frac{x^2}{2}\sin 2\alpha + \ldots = \operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\pi}{2} - \alpha\,.$$

Es genügt hier, $0 < \alpha < \pi/2$ vorauszusetzen, man muß aber $\alpha = 0$ ausschließen; im übrigen konvergiert die letztere Reihe, wenn $0 \leqq x \leqq 1$ ist. Für $x = 1$ erhält man:

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha + \ldots = \frac{\pi-\alpha}{2}$$

[1]) Sammlung Göschen Nr. 53, § 81.

oder

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}+\frac{\sin 3\alpha}{3\alpha}+\ldots\right)\alpha=\frac{\pi-\alpha}{2}.$$

Läßt man nun α unbegrenzt abnehmen, so geht die linke Seite in das vorgelegte Integral, die rechte in $\pi/2$ über; daher ist:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

2. Ersetzt man in (1) x durch px, so ergibt sich:

$$\int_0^\infty \frac{\sin px}{x}\,dx=\pm\frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

wo das $+$Zeichen für positive, das $-$Zeichen für negative p gilt; ist $p=0$, so verschwindet auch das Integral. Hieraus folgt unmittelbar, daß die Differenz:

$$\Delta=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x-u)\lambda}{\lambda}\,d\lambda-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x-u-du)\lambda}{\lambda}\,d\lambda$$

den Wert 0 hat, wenn $x<u$ oder $>u+du$ ist ($du>0$ vorausgesetzt); für $u<x<u+du$ gilt $\Delta=1$; an den Grenzen $x=u$ und $x=u+du$ ist $\Delta=\frac{1}{2}$. Da nun:

$$\sin(u+du-x)\lambda-\sin(u-x)\lambda=\frac{d\sin(u-x)\lambda}{du}\,du$$
$$=\lambda\cdot\cos(x-u)\lambda\cdot du$$

ist, so ergibt sich durch Vereinigung der Integrale:

$$\Delta=\frac{du}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x-u)\lambda\cdot d\lambda.$$

Fügt man dem letzten Integranden die ungerade Funktion $i \sin(x - u)\lambda$ hinzu, so folgt:

$$(3) \qquad \varDelta = \frac{du}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-u)\lambda}\, d\lambda = \begin{cases}0\\1\end{cases},$$

wenn die Werte $x = u$ und $x = u + du$ ausgeschlossen werden und im übrigen die angegebenen Grenzen gelten.

§ 25. Die Begründung des Fehlergesetzes durch Bessel.

1. Das Fehlergesetz von Gauß bezieht sich auf scheinbare Fehler v; Bessel geht bei seiner Herleitung des Fehlergesetzes auf die Entstehung der wahren Fehler u ein; er nimmt dabei an:

α) u kommt zustande als Summe einer großen Zahl n von Elementarfehlern $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

β) diese Elementarfehler sind von gleicher Größenordnung;

γ) positive und negative Elementarfehler sind gleich wahrscheinlich; ihre Fehlergesetze $\varphi_r(x_r)$ sind also gerade Funktionen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß

$$u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

zwischen u und $u + du$ liegt, ist:

$$\psi(u)\, du = \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n .$$

Ersetzt man in § 24, (3) x durch $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, so ist $\varDelta = 1$, wenn der Fehler zwischen u und $u + du$ liegt; führt man also $\varDelta$ als Diskontinuitätsfaktor ein, so wird:

$$2\pi \cdot \psi(u) = \int e^{-iu\lambda}\, \varPhi\, d\lambda ,$$

wenn

$$\varPhi = \int \ldots \int e^{i\lambda x_1} \varphi_1(x_1) \ldots e^{i\lambda x_n} \varphi_n(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

ist; die Integrationsgrenzen sind für λ: $\mp\infty$, für x_r: $\mp a_r$; nach β) sind die a_r alle von gleicher Größenordnung. Die in Φ auftretenden Integrale können einzeln ausgeführt werden; beachtet man γ) und läßt den Zeiger weg, so ist:

$$\int_{-a}^{+a} \varphi(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = \int_{-a}^{+a} \varphi(x) \cos(\lambda x)\, dx = A\,.$$

Wir entwickeln $\cos\lambda x$ in die Potenzreihe und setzen:

$$\int_{-a}^{+a} x^2 \varphi(x)\, dx = p^2\,, \qquad \int_{-a}^{+a} x^4 \varphi(x)\, dx = q^4\,, \qquad \ldots;$$

nach dem ersten Mittelwertsatz liegen p, q zwischen 0 und a, da die Integration von $\varphi(x)\,dx$ zwischen $\mp a$ den Wert 1 ergibt. Die Reihenentwicklung und Integration liefert:

$$A = 1 - \frac{p^2 \lambda^2}{2!} + \frac{q^4 \lambda^4}{4!} - \ldots\,,$$

$$\operatorname{Log} A = -\frac{p^2 \lambda^2}{2} - \frac{(3p^4 - q^4)\lambda^4}{24} - \ldots\,,$$

$$\operatorname{Log} \Phi = -\frac{[p^2]}{2}\lambda^2 - \frac{3[p^4] - [q^4]}{24}\lambda^4 - \ldots\,,$$

$$\Phi = e^{-\frac{[p^2]}{2}\lambda^2} \cdot \left(1 - \frac{3[p^4] - [q^4]}{24}\lambda^4 - \ldots\right).$$

Gebraucht man für die in Φ auftretenden Brüche die Abkürzungen P, Q, so folgt:

$$2\pi\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P\lambda^2}(1 - Q\lambda^4 - \ldots) \cos(u\lambda)\, d\lambda\,.$$

Wir wenden nun § 13, Gl. (3) und (4) an und finden sogleich:

$$2\pi\,\psi(u) = \sqrt{\frac{\pi}{P}}\, e^{-\frac{u^2}{4P}} \{1 - Q \cdot k(u) - \ldots\}\,.$$

Ersetzt man $k(u)$ durch seinen größten Wert k_0 und beachtet, daß p, q mit a von gleicher Größenordnung sind, so ergeben sich für P, Q, k_0 die Größenordnungen $n\,a^2$, $n\,a^4$, $n^{-2}\,a^{-4}$. Infolgedessen gehört $k_0\,Q$ zur Größenordnung n^{-1}, das nächstfolgende Glied, wie eine einfache Überlegung zeigt, zur Größenordnung n^{-2} u. s. f. Da wir nun n als große Zahl voraussetzen, so ergibt sich die Näherung:

$$\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[p^2]}}\, e^{-\frac{u^2}{2[p^2]}}\,.$$

Dies ist das Fehlergesetz in der von **Gauß** angegebenen Form, aber für *wahre* Fehler. Obgleich auch die **Bessel**schen Annahmen nicht völlig einwandfrei sind, so ist doch die Beweisführung minder willkürlich als jene auf Grund des arithmetischen Mittels.

§ 26. Genauigkeitsmaß; wahrscheinlicher, durchschnittlicher und mittlerer Fehler.

1. Das Gesetz der wahren oder scheinbaren Fehler x einer Beobachtungsreihe sei:

$$(1) \qquad \varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}\,;$$

dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß x zwischen den Grenzen $\mp s$ enthalten sei:

$$w(s) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-s}^{+s} e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{s} e^{-h^2 x^2}\, dx\,.$$

Setzt man $hx = t$ und ist $hs = \gamma$, so wird:

(2) $$w(s) = \theta(hs) = \theta(\gamma)\,.$$

Hieraus erklärt sich die Bedeutung von h; hat man nämlich eine zweite Beobachtungsreihe mit den entsprechenden Größen h', s', wobei $hs = h's'$ ist, so folgt: $w(s') = w(s)$. Ist also z. B. $h : h' = 5 : 1$, $s : s' = 1 : 5$, so ist ein Fehler zwischen 0 und $\pm 5s$ in der zweiten Gruppe ebenso wahrscheinlich, als ein Fehler zwischen 0 und $\pm s$ in der ersten; kurz gesagt, die erste Beobachtungsreihe ist 5 mal so genau als die zweite. Aus diesem Grund nennt man h das Genauigkeitsmaß.

2. Unter dem wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtungsreihe verstehen wir denjenigen besonderen Wert r von s, für welchen:

$$\theta(hr) = 0{,}5\,, \qquad hr = 0{,}477$$

ist; es gilt also für r die Gleichung:

(3) $$r = 0{,}477 : h = 1 : 2{,}097\,h\,.$$

Der durchschnittliche Fehler k berechnet sich aus:

$$k = \int_0^\infty x\,\varphi(x)\,dx : \int_0^\infty \varphi(x)\,dx\,;$$

diese Gleichung kann so gedeutet werden: k ist die Abszisse des Schwerpunkts der positiven X-Achse, wenn in dem Punkt mit der Abszisse x die Masse $\varphi(x)$ angebracht wird. Nun ist:

$$\int_0^\infty x\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-h^2x^2}\,d(h^2x^2) = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}\,;$$

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\,;$$

folglich:

(4) $$k = 1 : h\sqrt{\pi}\,.$$

k ist der Durchschnittswert der absoluten Beträge von x; in ähnlicher Weise bestimmen wir den mittleren Fehler m aus:

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\varphi(x)\,dx : \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx\,,$$

(hiernach läßt sich m als Trägheitsradius deuten), wobei das zweite Integral $= 1$ ist. Nach § 13, (2) wird:

$$m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\,h^3} = \frac{1}{2\,h^2}\,,$$

(5) $$m = 1 : h\sqrt{2}\,.$$

(Wie man leicht sieht, sind $\pm m$ die Abszissen der Wendepunkte von $y = \varphi(x)$.) Somit ist: $m > k > r$ und:

$$k = m\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}798\,m\,; \quad r = 0{,}477\,m\sqrt{2} = 0{,}674\,m\,.$$

Mit Hilfe von § 13, (2) lassen sich solche Durchschnittswerte auch für die höheren geraden Potenzen finden; zur Beurteilung einer Beobachtungsreihe genügt indessen die Angabe von m.

3. Wir bestimmen noch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Beobachtungsfehler den p-fachen mittleren Fehler nicht überschreite; man braucht nur in (2) $s = p\,m$, also gemäß (5): $h\,s = 0{,}707\,p$ zu setzen. Man erhält das nebenstehende Täfelchen. Die letzte (auf Grund genauerer Werte der θ berechnete) Spalte gibt an, unter wieviel Beobachtungen der p-fache mittlere Fehler einmal überschritten wird; denn für $p = 2$ ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß $2\,m$ überschritten wird: 0,046;

p	θ	$1:(1-\theta)$
0,5	0,383	2
1	0,683	3
1,5	0,866	7
2	0,954	22
2,5	0,988	81
3	0,997	370

mithin wird unter 1000 Beobachtungen dieser Fall durchschnittlich 46 mal eintreten, unter 22 Beobachtungen einmal. Man wird diese Betrachtungen anwenden, wenn es sich um die Ausscheidung widersprechender Beobachtungen handelt.

§ 27. Genauigkeit einer Beobachtungsreihe; theoretische und wirkliche Fehlerzahl.

1. Der Unterschied zwischen wahren Beobachtungsfehlern u_r und scheinbaren v_r darf nur bei großer Zahl n der Beobachtungen vernachlässigt werden. Sei allgemein:

$$u_r = v_r + \lambda\,, \tag{1}$$

d. h. λ der Unterschied zwischen wahrem Wert und arithmetischem Mittel; hierbei muß $[v] = 0$ sein. Daher kann man $\lambda, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ als unabhängige Veränderliche betrachten, durch welche $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bestimmt sind. Nun ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der u, wenn $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = [u\,u]$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[u\,u]}\,du_1\,du_2 \ldots du_n\,. \tag{2}$$

Wir fuhren in (2) an Stelle der u die eben genannten Veränderlichen ein; es wird zufolge (1), da $[v] = 0$:

$$[u\,u] = [v\,v] + n\,\lambda^2\,;$$

sowie, da $u_n = -(v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}) + \lambda$ ist:

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)}{\partial(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, \lambda)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = n;$$

den Wert der Determinante erhält man durch Addition ihrer $n-1$ ersten Reihen zur letzten. Mithin geht (2) über in:

$$(3) \qquad n \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[vv]-nh^2\lambda^2} dv_1 \ldots dv_{n-1} d\lambda .$$

Da nun für λ keine Grenze festgesetzt ist, so bilden wir zunächst:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nh^2\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der v:

$$\sqrt{n} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} e^{-h^2[vv]} dv_1 \ldots dv_{n-1}.$$

Hier ist h noch verfügbar; man wird die Wahl so treffen, daß das beobachtete System scheinbarer Fehler eine möglichst große Wahrscheinlichkeit erhält. Die logarithmische Differentiation ergibt:

$$\frac{n-1}{h} - 2h[vv] = 0,$$

woraus (§ 26):

$$\frac{1}{2h^2} = m^2 = \frac{[vv]}{n-1}.$$

Dies ist die von Helmert gegebene Herleitung der „klassischen Formel":

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}\,; \tag{4}$$

sie liefert den auf Grund des Fehlergesetzes wahrscheinlichsten Wert von m.

Sind die u selbst (wenigstens näherungsweise) bekannt, so kann man unmittelbar:

$$n \cdot m_1^2 = [u\,u]\,,$$

$$m_1 = \sqrt{\frac{[u\,u]}{n}} \tag{5}$$

setzen. Für große Werte von n wird der Unterschied zwischen m und m_1 unmerklich (§ 22, Schluß).

2. Eine einwandfreie Begründung des Fehlergesetzes a priori ist unmöglich; deshalb ist es von wesentlicher Bedeutung, das Gesetz mit Erfahrungstatsachen zu vergleichen. Der Weg hierzu ist folgender: aus einer Beobachtungsreihe findet man nach (4) den Wert von m und hieraus den von h. Die Anzahl der zwischen den Grenzen a und b $(0 \leqq a < b)$ enthaltenen Beobachtungsfehler ist dann der Theorie nach:

$$n \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{ha}^{hb} e^{-t^2}\,dt\,;$$

rechnet man auch die in gleicher Zahl vorhandenen Fehler zwischen $-a$ und $-b$ hinzu, so wird die Gesamtzahl der zu erwartenden Fehler:

$$\nu = n \cdot \{\theta(h\,b) - \theta(h\,a)\}\,.$$

Es folgen (in abgekürzter Gestalt) zwei Tabellen; die erste rührt von Bessel her und bezieht sich auf Fixsterndeklinationen, welche Bradley beobachtet hatte; die zweite hat eine in England ausgeführte Maßvergleichung (Maßeinheit $1 \cdot 10^{-6}$ Yard = 0,91 Mikron) zum Gegenstand. In beiden Fällen zeigt sich gute Übereinstimmung.

I. $m = \pm 1'',6$.

Grenzen in $''$	v berechnet	v beobachtet
0 bis 0,8	38	41
0,8 „ 1,6	30	28
1,6 „ 2,4	19	17
2,4 „ 3,2	8	8
über 3,2	5	6
Summe n =	100	100

II. $m = \pm 0,9$.

Grenzen	v berechnet	v beobachtet
0 bis 0,5	17	15
0,5 „ 1	12	14
1 „ 1,5	7	8
über 1,5	4	3
Summe n =	40	40

§ 28. Die Hauptaufgaben der Methode der kleinsten Quadrate.

1. Gauß hat seine (erste) Begründung des Fehlergesetzes auf die Hypothese des arithmetischen Mittels gestützt; damit gleichbedeutend ist (S. 81) die Forderung, daß die Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ ein Minimum werden soll. Um dieses Prinzip zu erläutern, geben wir noch einige einfache Beispiele[1]); diese zeigen zugleich den Zusammenhang zwischen der Theorie der Beobachtungsfehler und den Aufgaben der Messungspraxis; auch § 33 enthält eine Anwendung des Prinzips.

Nr.	Beobachtet	v	$v\,v$
1	3,324	$+\ 7$	49
2	3,347	-16	256
3	3,336	$-\ 5$	25
4	3,319	$+12$	144
5	3,329	$+\ 2$	4
	16,655	0	478

[1]) Ausführliche Behandlung in Sammlung Göschen Nr. 302.

2. Es sei nur eine Größe gesucht und diese in n Beobachtungen von gleicher Genauigkeit gemessen; z. B. mögen für die Dichte eines Augitkristalles fünf Bestimmungen vorliegen. Das Mittel ist 3,331; hieraus ergeben sich die v (in Einheiten der 3. Dezimalstelle), die vv und

$$m = \sqrt{\frac{478 \cdot 10^{-6}}{4}} = \pm 0{,}011\,.$$

Hierbei ist m der mittlere Fehler der einzelnen Bestimmung; derjenige des Ergebnisses ist, wie hier nur angeführt sein möge, $m : \sqrt{n} = \pm 0{,}005$.

3. Es sollen m (2) Größen $x, y, \ldots$, die Elemente, durch vermittelnde Beobachtungen bestimmt werden; d. h. man beobachtet n ($> m$) Größen U_r:

$$U_r = f_r(x, y, \ldots)\,, \qquad r = 1, 2, \ldots, n\,,$$

wobei f_r eine bekannte Funktion bedeutet. Kennt man Näherungswerte $x_0, y_0, \ldots$ der Elemente, so ist bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$f_r = (x, y, \ldots) = f_r(x_0, y_0, \ldots) + a_r(x - x_0) + b_r(y - y_0) + \cdots,$$

$$\text{wo} \qquad a_r = \frac{\partial f_r}{\partial x}\Big/_0, \qquad b_r = \frac{\partial f_r}{\partial y}\Big/_0, \qquad \ldots$$

ist[1]); wenn insbesondere f_r eine lineare Funktion ist, so ist die vorangehende Gleichung genau richtig. Setzt man:

$$x - x_0 = \xi\,,\ \ y - y_0 = \eta\,,\ \ \ldots,\ \ f_r(x_0, y_0, \ldots) - U_r = l_r\,,$$

so erhält man n Gleichungen, die Fehlergleichungen:

$$a_r \xi + b_r \eta + \ldots + l_r = 0\,.$$

[1]) Das Zeichen $/_0$ bedeutet, daß nach Ausführung der Differentiation $x = x_0$, $y = y_0$, ... zu nehmen ist.

Da $n > m$, so sind diese Gleichungen im allgemeinen nicht verträglich; bezeichnet man den an Stelle von 0 erscheinenden Wert der linken Seite mit v_r, so fordert das Prinzip, daß $[v\,v]$ = Minimum wird. Man hat also:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}[v\,v] = \frac{\partial}{\partial \eta}[v\,v] = \ldots = 0\,.$$

Die Ausführung ergibt sogleich:

$$\begin{aligned} [a\,a]\,\xi + [a\,b]\,\eta + \ldots + [a\,l] &= 0\,, \\ [a\,b]\,\xi + [b\,b]\,\eta + \ldots + [b\,l] &= 0\,. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Aus diesen m Gleichungen, den Normalgleichungen, bestimmen sich ξ, η, ..., also auch x, y, ...

Beispiel. Zur Bestimmung der Polhöhe φ wurden Mittagshöhen der Sonne beobachtet; in nachstehender Tabelle ist U die von Strahlenbrechung und Parallaxe befreite Zenitdistanz des Sonnenmittelpunktes, t die annähernd bekannte wahre Zeit, δ die Deklination der Sonne.

Unter der Annahme fehlerfreier Messungen ist:

$$U = \varphi + C t^2 - \delta\,;$$

für φ kennt man den Näherungswert $\varphi_0 = 48^0\,43',0$; woraus:

$$C = \frac{225}{2\,\varrho'}\,\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} = 0{,}0314\,.$$

Die Elemente sind die Polhöhe $\varphi = x$ und die Standverbesserung y der Uhr; ihre Näherungswerte sind $x_0 = \varphi_0$ und $y_0 = 0$; Cy^2 kann vernachlässigt werden. Aus den allgemeinen Formeln wird also:

$$U = x + 2\,C t\,y + C t^2 - \delta\,,$$

mithin

$$a = 1\,, \quad b = 2\,C t\,, \quad l = \varphi_0 + C t^2 - (U + \delta)\,.$$

Die mit Rechenschieber ausführbare Rechnung liefert die Normalgleichungen und deren Auflösung:

$$\left|\begin{array}{r} 8\,\xi + 0{,}11\,\eta + 1{,}80 = 0 \\ 0{,}11\,\xi + 0{,}58\,\eta - 0{,}45 = 0 \end{array}\right|,$$

$$\xi = -0{,}24\,, \qquad \eta = +0{,}82\,.$$

Mithin ist $\varphi = \varphi_0 + \xi = 48^0\,42',76$, $y = \eta = +0^m,82$; demnach sind die drei letzten Spalten ausgefüllt[1]); aus $[v\,v] = 0{,}3125$ folgt[2]) der mittlere Fehler der U: $\pm 0',23$, sowie derjenige von φ: $\pm 0',08$.

Nr.	U	δ	t	$t+y$	v	$v\,v$
1	$43^0\,37',0$	$5^0\,6',8$	$-6^m,0$	$-5^m,2$	$-0',26$	0,0676
2	36,0	6,7	−4,5	−3,7	+0,43	0,1849
3	36,3	6,7	−2,5	−1,7	−0,17	0,0289
4	36,0	6,7	−1,5	−0,7	+0,09	0,0081
5	36,3	6,7	+1,5	+2,3	−0,07	0,0049
6	36,7	6,7	+3,5	+4,3	−0,06	0,0036
7	37,3	6,6	+5,0	+5,8	−0,08	0,0064
8	37,7	6,6	+6,5	+7,3	+0,09	0,0081

4. Namentlich der geodätischen Praxis gehört der Fall der **bedingten Beobachtungen** an; wir wollen nur ein einfaches Beispiel besprechen. Drei Größen x, y, z sind beobachtet, zwischen ihnen besteht eine Beziehung $F(x, y, z) = 0$, der die Beobachtungswerte x_0, y_0, z_0 nicht völlig genügen werden. Sei:

$$x = x_0 + \xi\,, \qquad y = y_0 + \eta\,, \qquad z = z_0 + \zeta\,,$$

so folgt mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung und der auf S. 94 eingeführten Bezeichnung:

---

[1]) Die zweite Dezimale der v ist nicht mehr sicher.
[2]) Sammlung Göschen Nr 302, §§ 16—18.

$$F(x_0 \cdot y_0, z_0) + \xi \cdot \frac{\partial F}{\partial x}\Big/_0 + \eta \cdot \frac{\partial F}{\partial y}\Big/_0 + \zeta \cdot \frac{\partial F}{\partial z}\Big/_0 = 0\,,$$

oder mit leicht verständlicher Abkürzung

$$a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta + l = 0\,.$$

Wie fügen nun die Forderung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{Minimum}$$

hinzu; ist k ein unbestimmter Faktor, so muß[1])

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2\,k(a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta + l) = \text{Minimum},$$

also

$$\xi + k\,a = \eta + k\,b = \zeta + k\,c = 0$$

sein. Hieraus folgt, mit $a^2 + b^2 + c^2 = N$:

$$k = -\frac{l}{N}\,, \qquad \xi = \frac{a\,l}{N}\,, \qquad \eta = \frac{b\,l}{N}\,, \qquad \zeta = \frac{c\,l}{N}\,.$$

Der Multiplikator k heißt nach Gauß Korrelate; das Rechnungsverfahren Korrelatenausgleichung im Gegensatz zu der in 3. dargelegten Elementenausgleichung. Häufig läßt sich eine Aufgabe nach beiden Methoden behandeln; die Bedürfnisse der Geodäsie haben auch zu einem Zwischentypus, den „vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen" geführt.

Folgendes ist eine einfache Anwendung: Für drei Teilstrecken eines Nickelinstabes ergab die Messung des Widerstands folgende Werte:

$$\begin{aligned} AB&:\quad x_0 = 1345 \cdot 10^{-6}\ \text{Ohm},\\ BC&:\quad y_0 = 846 \cdot 10^{-6}\ \text{Ohm},\\ AC&:\quad z_0 = 2212 \cdot 10^{-6}\ \text{Ohm};\end{aligned}$$

man soll die wahrscheinlichsten Werte x, y, z bestimmen. (Die Länge der Strecken bleibt unberücksichtigt.)

---

1) Sammlung Göschen Nr. 87, § 65.

Es ist:

$$F(x, y, z) = x + y - z = 0,$$

also:

$$l = x_0 + y_0 - z_0 = -21, \quad a = b = 1, \quad c = -1, \quad N = 3;$$

hieraus folgt:

$$\xi = \eta = 7, \qquad \zeta = -7.$$

Die wahrscheinlichsten Werte der drei Widerstände sind:

$$\begin{aligned} AB&: \quad x = 1352 \cdot 10^{-6}\ \text{Ohm}, \\ BC&: \quad y = 853 \cdot 10^{-6}\ \text{Ohm}, \\ AC&: \quad z = 2205 \cdot 10^{-6}\ \text{Ohm}. \end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man nach vermittelnden Beobachtungen ausgleicht, wobei etwa x und y als die Elemente gelten können.

§ 29. Fehlerverteilung in der Ebene.

1. Für die rechtwinkligen Koordinaten x, y eines Punktes mögen n Beobachtungen x_r, y_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ vorliegen. Die Fehler sind dann:

$$x - x_r = u_r, \qquad y - y_r = v_r;$$

gilt nun für alle Fehlerpaare (u_r, v_r) das gleiche Gesetz, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß u_r, v_r innerhalb der Intervalle du_r, dv_r liegen:

$$w_r = \varphi(u_r, v_r)\, du_r\, dv_r.$$

Dafür, daß das Wertepaar (x, y) in das Intervall dx, dy falle, sei die Wahrscheinlichkeit a priori $\psi(x, y)\, dx\, dy$; alsdann ist (vgl. § 17 und § 23) die Wahrscheinlichkeit a posteriori der Ursache (x, y):

$$\psi(x, y)\, w_1 w_2 \ldots w_n\, dx\, dy : \iint \psi(x, y)\, w_1 w_2 \ldots w_n\, dx\, dy,$$

wobei die Differentiale du_r und dv_r die Rolle von Konstanten spielen und wegfallen.

2. Zur Ermittlung des Fehlergesetzes $\varphi(u, v)$ nehmen wir (vgl. § 23) $\psi(x, y)$ als konstant an; ferner wollen wir unter (x, y) den Schwerpunkt der Punkte (x_r, y_r), den „wahrscheinlichsten Punkt" verstehen; dadurch wird das Axiom vom arithmetischen Mittel aus dem eindimensionalen Gebiet auf die Ebene ausgedehnt. Die Größen u_r, v_r sind dann scheinbare Fehler und es bestehen die Gleichungen:

$$n x = [x] , \quad n y = [y] .$$

oder:

$$[u] = [v] = 0 .$$

Da das Integral einen konstanten Wert hat, so kommt die Forderung darauf hinaus, daß:

$$\varphi(u_1, v_1) \ldots \varphi(u_n, v_n) = \text{Maximum}$$

werden soll. Wir differentiieren logarithmisch und setzen:

$$\frac{\partial \operatorname{Log} \varphi(u_r, v_r)}{\partial u_r} = U_r , \qquad \frac{\partial \operatorname{Log} \varphi(u_r, v_r)}{\partial v_r} = V_r ;$$

dann muß:

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_r = 0 , \quad V_1 + V_2 + \ldots + V_r = 0$$

sein. Dies kommt mit der Bedingung $[u] = [v] = 0$ überein, wenn unter Weglassung des Zeigers r:

$$U = a u + b v , \qquad V = b u + c v$$

ist; hierbei sind a, b, c die der Funktion φ eigentümlichen Konstanten, ferner ist der Bedingung:

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial^2 \operatorname{Log} \varphi(u, v)}{\partial u \, \partial v}$$

Rechnung getragen; endlich beweist man leicht, daß außer dieser augenscheinlich richtigen Lösung keine weitere möglich ist. Nunmehr wird, wenn λ eine Konstante bedeutet:

$$\operatorname{Log} \varphi(u, v) = \tfrac{1}{2} a u^2 + b u v + \tfrac{1}{2} c v^2 + \lambda ;$$

setzt man:

$$\tfrac{1}{2} a = -a_{11}, \quad b = -2 a_{12}, \quad \tfrac{1}{2} c = -a_{22}, \quad \lambda = \operatorname{Log} C,$$

so folgt:

$$\varphi(u, v) = C \cdot e^{-(a_{11} u^2 + 2 a_{12} u v + a_{22} v^2)} = C \cdot e^{-F}.$$

Die quadratische Form F muß positiv sein; dazu ist erforderlich, daß:

$$a_{11} > 0, \qquad a_{22} > 0, \qquad A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

ist. Integriert man $\varphi(u, v)\, du\, dv$ zwischen den Grenzen $\mp\infty$ für u und v, so muß sich 1 ergeben; um die Integration auszuführen, schreibt man:

$$F = \frac{A u^2 + (a_{12} u + a_{22} v)^2}{a_{22}},$$

nun läßt sich zuerst nach v, dann nach u integrieren. Mit Rücksicht auf § 13, (1) erhält man:

$$C \cdot \frac{\pi}{\sqrt{A}} = 1, \qquad C = \frac{\sqrt{A}}{\pi}.$$

Das **Fehlergesetz in der Ebene** ist also:

$$\varphi(u, v) = \frac{\sqrt{A}}{\pi} e^{-(a_{11} u^2 + 2 a_{12} u v + a_{22} v^2)}.$$

3. Die Kurven $F = \text{konst.} = \sigma$ bilden eine Schar ähnlicher und ähnlich liegender **Ellipsen**, in dieser Weise gruppieren sich also die Punkte gleicher Fehlerwahrscheinlichkeit um $O(u = 0, v = 0)$, s. Fig. 12; die Fläche der Ellipse $F = \sigma$ ist $\dfrac{\sigma \pi}{\sqrt{A}}$, wie man durch Transformation auf die Hauptachsen sogleich erkennt. Er-

richtet man auf der Zeichnungsebene in jedem Punkt (u, v) nach oben ein Lot $= \varphi(u, v)$, so entsteht eine Fläche, deren Horizontalschnitte Ellipsen sind; die durch O geführten Vertikalschnitte ergeben „Glockenkurven" nach Art von Fig. 9a; für $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$ bekommt man die in Fig. 9a und 9b dargestellte Drehfläche.

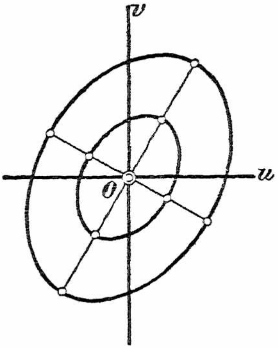

Fig. 12.

Wir zeigen noch kurz, wie sich a_{11}, a_{12} und a_{22} aus den Beobachtungen bestimmen lassen. Der Mittelwert der u^2 ist:

$$M(u^2) = \frac{\sqrt{A}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-F} du\, dv = \frac{a_{22}}{2A};$$

das Doppelintegral wird ausgewertet, indem man die für F angegebene Umformung, sowie § 13, (2) benutzt.

Ebenso ist der Mittelwert der v^2:

$$M(v^2) = \frac{\sqrt{A}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-F} du\, dv = \frac{a_{11}}{2A},$$

endlich derjenige der uv:

$$M(uv) = \frac{\sqrt{A}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv\, e^{-F} du\, dv = -\frac{a_{12}}{2A};$$

die Integration nach v ergibt nämlich:

$$M(u\,v) = -\frac{a_{12}\sqrt{A}}{a_{22}\sqrt{a_{22}\,\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{A u^2}{a_{22}}}\,du\,,$$

woraus nach § 13, (2) der obige Wert folgt.

Ist n so groß, daß man berechnete und beobachtete Mittelwerte gleichsetzen darf, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{a_{22}}{2\,A} = \frac{[u\,u]}{n} = P\,, \qquad \frac{a_{12}}{2\,A} = -\frac{[u\,v]}{n} = Q\,,$$

$$\frac{a_{11}}{2\,A} = \frac{[v\,v]}{n} = R\,,$$

in welchen P, Q, R bekannt sind. Nun ist:

$$\frac{1}{A} = 4(PR - Q^2)\,, \qquad 2\,A = \frac{1}{2(PR - Q^2)}\,;$$

mithin sind auch a_{11}, a_{12} und a_{22} bestimmt:

$$a_{11} = \frac{R}{2(PR - Q^2)}\,, \qquad a_{12} = \frac{Q}{2(PR - Q^2)}\,,$$

$$a_{22} = \frac{P}{2(PR - Q^2)}\,.$$

4. Die Fehlerellipsen finden Anwendung bei der trigonometrischen Punktbestimmung (Andrä, Helmert) und bei Schießversuchen (Bertrand). Auf letztere bezieht sich folgende Zusammenstellung[1]): Die Scheibe wurde durch die Fehlerellipse in 10 Gebiete eingeteilt, deren jedes der Theorie nach 100 Schüsse hätte aufnehmen sollen; das Ergebnis war: 99, 106, 100, 108, 100, 118, 86, 94, 90, 99.

---

[1]) Mitgeteilt nach E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler (vgl. S. 6) S. 397.

VI. Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik.

§ 30. Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

1. Die statistische Wahrscheinlichkeit (relative Häufigkeit, vgl. § 21) ist ein nach Analogie der mathematischen Wahrscheinlichkeit gebildeter Quotient $a : n$, wobei n die Zahl der Fälle bedeutet, die man beobachtet, um eine gewisse Veränderung festzustellen, a ist die Zahl der Fälle, in welchen diese Änderung binnen der Zeiteinheit eingetreten ist. Naturgemäß stehen die verwickelten Verhältnisse des menschlichen Lebens in scharfem Gegensatz zu den Voraussetzungen der mathematischen Wahrscheinlichkeit, vor allem hinsichtlich der Gleichwertigkeit der Fälle; die Praxis wird immer dazu nötigen, die Fälle in Gruppen zusammenzufassen, z. B. „gesunde männliche Personen im Alter von 20—25 Jahren", allein innerhalb dieser Gruppe sind Lebensverhältnisse, geistige Befähigung, Berufsart usf. völlig verschieden. Ferner ist die statistische Wahrscheinlichkeit vom Zeitpunkt der angestellten Untersuchung abhängig; auch wenn man außergewöhnliche Ursachen, wie Krieg, Epidemie, beiseite läßt, zeigt die Erfahrung nur eine annähernde Konstanz der statistischen Wahrscheinlichkeit. Endlich sind wir über die Abhängigkeit der in die Statistik einbezogenen Fälle selten genügend unterrichtet; ist z. B. für

den Bergmann A_1 die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahr zu sterben, w_1, und ist w_2 die entsprechende Zahl für einen anderen Bergmann A_2, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide im nächsten Jahre sterben, nur dann $w_1 w_2$, wenn die Todesfälle ganz unabhängig voneinander eintreten. Da wir aber mit der Möglichkeit eines viele dahinraffenden Grubenunglücks rechnen müssen, so ist auch der Wert $w_1 w_2$ unrichtig, falls A_1 und A_2 in der gleichen Grube arbeiten.

Wenn trotzdem die Statistik von den Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung Gebrauch macht, so kann die Befugnis hierzu hergeleitet werden erstens aus der ausgleichenden Wirkung des Zufalls (vgl. § 21), sodann aus dem Umstand, daß erhebliche Schwankungen der statistischen Maßzahlen nur da vorkommen, wo die Ursachen merkliche Veränderungen aufweisen, endlich aus der Möglichkeit, das statistische Grundmaterial fortwährend zu ergänzen, die Methoden zu verfeinern und die Theorie mit der Wirklichkeit zu vergleichen.

2. Die Statistik liefert ihre Angaben teils als **unbenannte** (**intensive**), teils als **benannte** (**extensive**) **Maßzahlen**; die wichtigste intensive Maßzahl ist die Wahrscheinlichkeit, die wichtigste extensive das arithmetische Mittel. Beide Arten von Maßzahlen sind indessen ineinander überführbar; aus einer Tafel der Sterbenswahrscheinlichkeiten kann man die mittlere Lebensdauer, aus den gemessenen Brustumfängen von Rekruten die relative Häufigkeit eines zwischen a und b cm enthaltenen Brustumfanges bestimmen.

Von den in Abschnitt I bis V entwickelten Sätzen kommen für die mathematische Statistik namentlich die Theoreme von **Bernoulli** und **Bayes**, sowie das **Fehlergesetz** in Betracht; umfangreiches und sorgfältig bearbeitetes statistisches Material steht besonders für die Aufgaben der Lebensversicherung zu Gebote.

§ 31. Die Dispersionstheorie von Lexis.

1. Vernachlässigt man in § 15 (8) das Zusatzglied, setzt:

$$n = \nu\,, \quad r = \nu\varepsilon\,, \quad x = \nu u\,, \quad h^2 = \frac{\nu}{2pq}\,, \quad h\varepsilon = \gamma\,,$$

so ist:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-h^2u^2}\,du = \theta(\gamma)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei ν maligem Versuch die gesuchte Wahrscheinlichkeit zwischen den Grenzen $p - \varepsilon$ und $p + \varepsilon$ liegt. Entsprechend dem Fehlergesetz hat man h als das Genauigkeitsmaß der Versuchsgruppe (a priori) zu bezeichnen.

Zu einer anderen Bestimmung des Genauigkeitsmaßes gelangt man, wenn eine Reihe von n Versuchen in s Gruppen von je ν Versuchen eingeteilt wird; aus jeder Gruppe bildet man einen Mittelwert, wodurch die Zahlen $p_1\,, \; p_2\,, \ldots p_s$ entstehen, hieraus das Gesamtmittel $p_0 = (p_1 + p_2 + \ldots + p_s) : s$. Alsdann ist nach § 27 (4) der mittlere Fehler der als Einzelbeobachtung geltenden Gruppe:

$$m = \sqrt{\frac{[(p_0 - p_i)^2]}{s-1}}\,, \qquad i = 1\,, 2\,, \ldots s\,.$$

Hieraus folgt das Genauigkeitsmaß (a posteriori):

$$h'' = \sqrt{\frac{s-1}{2\,[(p_0 - p_i)^2]}}\,.$$

Da der wahre Wert p bei einer statistischen Erhebung niemals bekannt ist, so erhält man für h wenigstens eine Annäherung, indem man p durch p_0, q durch $q_0 = 1 - p_0$ ersetzt; an Stelle von h tritt also:

$$h' = \sqrt{\frac{\nu}{2\,p_0\,q_0}}\,.$$

Lexis spricht nun von normaler Dispersion (Streuung), wenn sich h'' ungefähr $= h'$ ergibt; in diesem Falle ist gegen die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nichts zu sagen. Ist h'' erheblich kleiner als h', so gehen die Gruppenmittel p_i stark auseinander, dann liegt übernormale Dispersion vor; im entgegengesetzten Falle hat man unternormale Dispersion. Die Zahl $h' : h''$ heißt auch Divergenzkoeffizient[1]).

Theorie und Erfahrung zeigen nun, daß unternormale Dispersion so gut wie nie vorkommt; im Falle der übernormalen Dispersion wird man fragen müssen, ob die statistischen Ergebnisse sich einem Fehlergesetz mit dem Genauigkeitsmaß h'' unterordnen (vgl. § 27, Schluß). Trifft dies zu, so läßt sich schließen, daß p zwar nicht konstant bleibt, aber Änderungen erleidet, die dem Fehlergesetz nicht widersprechen. Zeigen hingegen die Zahlen keinen Anschluß an das Fehlergesetz, so ist die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt verfehlt.

2. Ein Beispiel normaler Dispersion liefert fast durchgehends das Geschlechtsverhältnis der Geborenen. Folgende Tafel bezieht sich auf das Königreich Sachsen; die Zahl der Geburten beiderlei Geschlechts lag zwischen 142 527 im Jahre 1892 und 158 579 im Jahre 1899; die Gesamtzahl war $n = 1\,507\,970$, daher kann genau

[1]) Die Bezeichnung rührt von Dormoy her, welcher aber nicht den mittleren, sondern den durchschnittlichen Fehler zugrunde legt.

genug $\nu = 150\,797$ gesetzt werden; p_i ist die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, $v_i = p_0 - p_i$.

Nr.	Jahr	p_i	$10^4 v_i$	$10^8 v_i^2$
1	1891	0,5121	+ 5	25
2	1892	0,5139	−13	169
3	1893	0,5121	+ 5	25
4	1894	0,5104	+22	484
5	1895	0,5121	+ 5	25
6	1896	0,5130	− 4	16
7	1897	0,5128	− 2	4
8	1898	0,5118	+ 8	64
9	1899	0,5129	− 3	9
10	1900	0,5149	−23	529
	Mittel:	$p_0 = 0{,}5126$	0	1350

Zur Berechnung der Genauigkeitsmaße hat man noch:

$$q_0 = 0{,}4874, \qquad s = 10;$$

daher ist:

$$h' = 549, \qquad h'' = 577,$$

der Divergenzkoeffizient wird $h' : h'' = 0{,}95$.

Die Dispersion ist also normal; läßt man dagegen die Jahre 1894 und 1900 weg, so verrät sich diese willkürliche Änderung dadurch, daß (bei gleichbleibendem Wert von p_0) der Divergenzkoeffizient den auffallend geringen Betrag 0,48 annimmt.

§ 32. Die Konstruktion der Sterblichkeitstafeln.

1. Seit dem 17. Jahrhundert geht das Bestreben der mathematischen Statistik dahin, Absterbeordnungen aufzustellen: man sucht unter l_0 Geborenen die Zahl l_x

derjenigen zu ermitteln, welche ein Alter von l_x Jahren erreichen: l_0 (Basis, Grundmasse) bleibt willkürlich und wird meist als eine Potenz von 10 angenommen, manchmal ist es zweckmäßiger, von einer höheren Altersstufe auszugehen, also etwa $l_{20} = 10^3$ zu setzen. Die Zahl $l_x - l_{x+1} = d_x$ gibt an, wie viele Personen während des $x$ten Lebensjahres mit Tod abgehen; die Quotienten:

$$(1) \qquad \frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x\,, \qquad \frac{d_x}{l_x} = q_x$$

drücken die Wahrscheinlichkeit des Lebens oder Absterbens im $x$ten Lebensjahre aus, zwischen beiden besteht die Beziehung:

$$(2) \qquad p_x + q_x = 1\,.$$

Man nimmt nun an, daß in dem betrachteten Wertgebiet l_x eine eindeutige, stetige, differentiierbare Funktion von x sei und setzt demgemäß:

$$(3) \qquad l_x = f(x)\,;$$

wegen der Willkürlichkeit von l_0 ist $f(x)$ nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Aus $f(x)$ entspringt der Grenzwert:

$$(4) \qquad \lim_{h=0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h\,f(x)} = -\frac{f'(x)}{f(x)} = \varphi(x)\,.$$

Da $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ ist, so ist $\varphi(x) > 0$; man berechnet $\varphi(x)$ als Sterblichkeitskraft oder Sterbensintensität; aus einer Annahme über $\varphi(x)$ ergibt sich durch Integration ein hypothetisches Gesetz $f(x)$. Die Zahlen l_x, d_x, p_x, q_x und $\varphi(x)$ hat man biometrische Funktionen genannt; einige weitere werden in § 34 besprochen werden.

Es sei noch bemerkt, daß die Zahlenwerte von q_x und $\varphi(x)$ nicht sehr verschieden sind; man hat nämlich auf Grund des Taylorschen Satzes:

$$q_x = \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} = -\frac{f'(x) + \frac{1}{2} f''(x+\vartheta)}{f(x)},$$

wo $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ ist; mithin:

$$q_x = \varphi(x) + \varepsilon. \tag{5}$$

Über $\varepsilon = -f''(x+\vartheta) : 2f(x)$ läßt sich folgendes sagen: ist $y = f(x)$ eine lineare Funktion von x (wie Moivre annahm), so ist $\varepsilon = 0$; bedeutet $y = f(x)$ geometrisch eine nach unten konkave, nur schwach gekrümmte Kurve, so ist ε ein kleiner, positiver, echter Bruch. Die letztere Voraussetzung trifft, wie wir sehen werden, wenigstens für die mittleren Altersstufen zu. (Fig. 15, S. 115.)

2. Von den oben aufgezählten biometrischen Funktionen genügt nach Annahme von l_0 eine, um die übrigen zu berechnen; als solche Grundfunktion wählt man aus praktischen Gründen meist q_x. Man hat dann:

$$l_1 = (1 - q_0)\, l_0,$$
$$l_2 = (1 - q_1)\, l_1 = (1 - q_0)(1 - q_1) \cdot l_0, \quad \ldots,$$

allgemein:

$$l_x = l_0 \prod_0^{x-1} (1 - q_r). \tag{6}$$

Aus der Zahlenreihe der q_x erhält man also ohne weiteres diejenigen der l_x und $d_x = q_x l_x$.

Wie aus dem statistischen Rohmaterial der Versicherungsgesellschaften Näherungswerte q_x' für die q_x festgestellt werden, liegt außerhalb des Rahmens unserer

Darstellung[1]). Man hat zahlreiche Versuche unternommen, die Form der Funktion $f(x)$ anzugeben; die geläufigste Hypothese (zugleich die in praxi am besten verwendbare) spricht sich in dem Gompertz-Makehamschen Gesetz aus.

Makeham nimmt für die Sterblichkeitskraft ein Exponentialgesetz von der Form:

$$\varphi(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} = a + b \cdot r^x \tag{7}$$

an; hierbei sind a, b, r positive Konstante, die Hypothese gilt also nur, wenn $\varphi(x)$ zugleich mit x zunimmt, d. h. für $x > \alpha$, wo α erfahrungsgemäß mindestens $= 20$ ist. Die Integration von (7) liefert, mit c als willkürlicher Konstante:

$$\operatorname{Log} \frac{c}{f(x)} = a x + \frac{b \cdot r^x}{\operatorname{Log} r}.$$

Setzt man noch:

$$e^{-a} = k, \qquad e^{-\frac{b}{\operatorname{Log} r}} = g, \tag{8}$$

so folgt:

$$\underline{f(x) = c \cdot k^x g^{r^x}.} \tag{9}$$

Diese Formel enthält zugleich das ältere Gompertzsche Gesetz, wenn man $a = 0$, $k = 1$ wählt. Die Konstanten k, g, r können aus speziellen Werten von $f(x)$ näherungsweise bestimmt werden; nehmen wir für den Augenblick an, dies sei geschehen, so bestimmt sich c mit Hilfe der willkürlichen Basis $l_\alpha = f(\alpha)$ aus:

$$c = \frac{l_\alpha}{k^\alpha \cdot g^{r^\alpha}}. \tag{10}$$

---

[1]) Sammlung Göschen, Nr. 180. Kap. II. § 2.

§ 33. Ausgleichung und endgültige Gestalt der Sterblichkeitstafeln.

1. Das Theorem von Bayes zeigt (§ 19, Schluß), daß einer empirischen Wahrscheinlichkeit q'_x nur dann einige Genauigkeit zukommt, wenn die Kenntnis von q'_x sich auf eine große Zahl von Fällen stützt. Nimmt man noch die Schwierigkeit der statistischen Erhebungen hinzu, so leuchtet ein, daß die in ein Koordinatensystem eingetragenen Punkte (x, q'_x) keinem regelmäßigen Kurvenzug angehören werden; man ist daher genötigt, eine Ausgleichung vorzunehmen. Bei der graphischen Ausgleichung wird eine stetige Kurve möglichst nahe an den Punkten (x, q'_x) vorbeigeführt (vgl. Fig. 13, S. 113); die mechanische Ausgleichung besteht entweder darin, daß jedes q'_x durch das Mittel der umliegenden Werte ersetzt wird, z. B.:

$$q_{43} = \tfrac{1}{5}(q'_{41} + q'_{42} + q'_{43} + q'_{44} + q'_{45})$$

— das Verfahren kann auch wiederholt werden — oder darin, daß man die erwähnte Kurve aus Parabelstücken zusammensetzt; auch dies kommt auf eine Mittelbildung, aber mit ungleichen Gewichten hinaus. Die genannten Methoden enthalten keine Voraussetzung über die Beschaffenheit der auszugleichenden Zahlenwerte, gelten daher ebenso für jede andere empirische Zahlentafel.

2. Die analytische Ausgleichung beruht hingegen auf dem Makehamschen Gesetz. Mit Rücksicht auf § 32, Gl. (5) und (7) kann man von dem Ansatz:

$$(1) \qquad q_x = a + b \cdot r^x$$

ausgehen; man führt also anstatt der Sterbensintensität die Sterbenswahrscheinlichkeit in die Rechnung ein, welche dadurch ohne erhebliche Einbuße an Genauigkeit sehr vereinfacht wird.

Zur Bestimmung von a, b, r kann man ein summarisches Verfahren anwenden; setzt man:

$$\text{2)}\qquad \begin{cases} q'_{20} + q'_{21} + \dots + q'_{39} = 20\,A\,, \\ q'_{40} + q'_{41} + \dots + q'_{59} = 20\,B\,, \\ q'_{60} + q'_{61} + \dots + q'_{79} = 20\,C\,, \end{cases}$$

so folgt aus (1) und (2) mit $q'_x = q_x$ und:

$$\text{(3)}\qquad 20\,R = b\,(r^{20} - 1) : (r - 1)$$

das Gleichungssystem:

$$a + r^{20} R = A\,, \quad a + r^{40} R = B\,, \quad a + r^{60} R = C\,.$$

Die Elimination von R und r ergibt:

$$(B - a)^2 = (A - a)(C - a)\,,$$

also:

$$\text{(4)}\qquad a = \frac{A\,C - B^2}{A + C - 2\,B}\,;$$

diejenige von R und a:

$$\text{(5)}\qquad r^{20} = \frac{C - B}{B - A}\,.$$

Hieraus folgt:

$$\text{(6)}\qquad R = \frac{(B - A)^3}{(C - B)(A + C - 2\,B)}\,.$$

Aus R bestimmt sich b mit Hilfe von (3).

Diese Methode gibt mindestens brauchbare Näherungswerte a_0, b_0, r_0 für eine systematische Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Es liegt hier der Fall der vermittelnden Beobachtungen entsprechend § 28, 3. vor; die q'_x sind die Beobachtungen, a, b und r die Elemente; man kann dabei auch Rücksicht nehmen auf die von x abhängige Unsicherheit, mit welcher die q'_x aus der Statistik hervorgehen.

Betrachtet man in (1) a, b, r als veränderlich, so ergibt die Differentiation:

$$dy = da + r^x db + x b r^{x-1} dr\,;$$

setzt man ferner:

$$q_{0x} = a_0 + b_0 r_0^x\,,$$

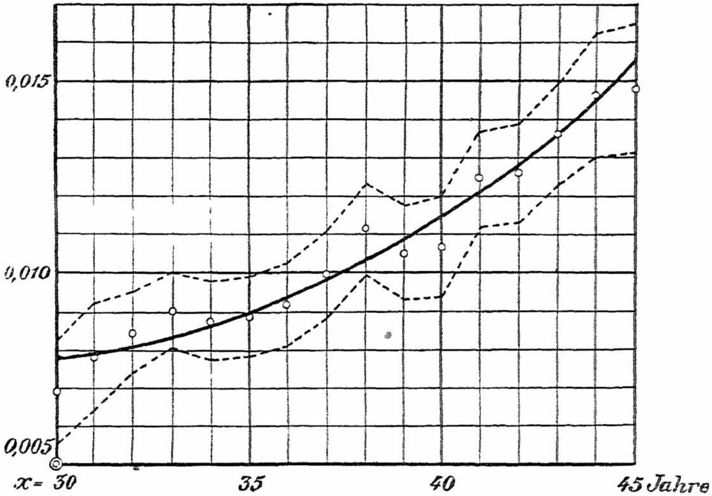

Fig. 13.

so erhält man aus jedem q'_x eine Fehlergleichung:

$$da + r_0^x db + x b_0 r_0^{x-1} dr + (q_{0x} - q'_x) = 0\,;$$

hierzu bildet man die Normalgleichungen und findet da, db, dr sowie $a = a_0 + da$, $b = b_0 + db$, $r = r_0 + dr$; daraus berechnet man die ausgeglichenen q_x.

In Fig. 13 ist eine solche Ausgleichung graphisch dargestellt; die mit Ringen bezeichneten Punkte entsprechen den beobachteten q'_x, die ausgezogene Kurve den ausgeglichenen q_x. Bedeutet m_x den mittleren Fehler eines q'_x vor der Ausgleichung, so kann man (§ 26) etwa $3\,m_x$ als Maximalfehler ansehen; die gestrichelten Zickzacklinien entsprechen den Werten $q'_x \mp 3\,m_x$ und begrenzen die Fehlerzone. Wie man sieht, überschreitet die Kurve der q_x diese Zone nicht; indessen gibt Fig. 13 bloß einen Teil der Kurve wieder und ist nur als schematisches Beispiel aufzufassen.

3. Ist die Ausgleichung vollzogen, so bekommt man aus den ausgeglichenen q_x nach § 32, (6) die l_x und d_x. Im Anhang S. 122 ist eine kleine Übersichtstafel nach „23 D. G. M. u. W. I" gegeben; sie schreitet von 5 zu 5 Jahren fort, die Zwischenwerte können durch Einschaltung leicht gefunden werden; die praktischen Rechnungen des Versicherungswesens bedürfen einer größeren numerischen Genauigkeit, wenn diese auch über die tatsächliche weit hinausgeht. In Fig. 14 ist q_x, in Fig. 15 l_x und d_x je durch eine Kurve veranschaulicht; für die Endwerte ist die Zeichnung naturgemäß nicht zuverlässig.

Es braucht kaum darauf hingewiesen zu werden, daß die Sterblichkeitstafel sich nicht zu Vorhersagungen für den einzelnen eignet; da in jedem Einzelfall die Veränderlichkeit des Individuums und nicht die Konstanz der Massenerscheinung den Ausschlag gibt. Aber auch, wenn die Aussage für ein, falls man so sagen darf, „durchschnittliches Individuum" gemacht wird, muß man bedenken, daß (Näheres s. § 20, Schluß) die empirische Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit von ungünstigem Einfluß auf die Sicherheit der Vorhersagung ist. Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit, die Tafeln beständig nachzuprüfen und zu verbessern.

An der Hand der Sterblichkeitstafel beantwortet man

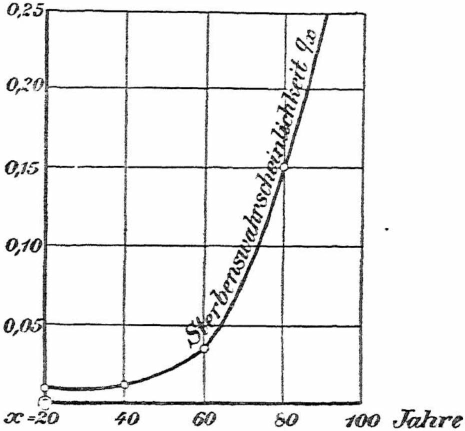
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
Sterbenswahrscheinlichkeit q_x
x =20
40
60
80
100 Jahre

Fig. 14.

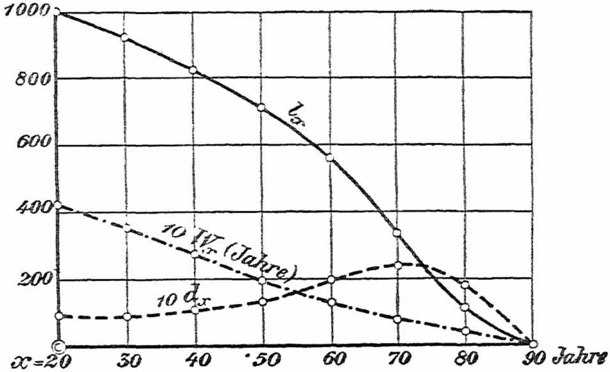
1000
800
600
400
200
l_x
10 W_x (Jahre)
10 d_x
x=20
30
40
50
60
70
80
90 Jahre

Fig. 15.

leicht Fragen folgender Art: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w, daß eine $x$jährige Person a) y Jahre alt wird? b) im Lauf ihres $(y+1)$ten Jahres stirbt?

Die Antwort ist zu a)

$$w = \frac{l_y}{l_x}, \text{ z. B. für } x = 40, \quad y = 60 : w = 0{,}674 ;$$

zu b)

$$w = \frac{l_y}{l_x} \cdot q_y = \frac{l_y}{l_x} \cdot \frac{d_y}{l_y} = \frac{d_y}{l_x} = \frac{l_y - l_{y+1}}{l_x},$$

also für $x = 60, \quad y = 70 : w = 0{,}045$.

§ 34. Wahrscheinliche und mittlere Lebensdauer, Wahrscheinlichkeiten für verbundene Leben.

1. Unter wahrscheinlicher Lebensdauer $u = W_x$ einer $x$jährigen Person versteht man diejenige Zahl von Jahren, für welche die Bedingung:

$$(1) \qquad \frac{l_{x+u}}{l_x} = \frac{1}{2}$$

erfüllt ist; man kann dann 1 gegen 1 wetten, daß die Person noch u Jahre am Leben bleibt. Ist z. B. $x = 30$, so wird nach der Sterblichkeitstafel $x + u$ ungefähr $= 65$, also $u = W_x = 35$. (Fig. 15.)

Um die mittlere Lebensdauer e_x einer x Jahre alten Person zu finden, denken wir uns in Fig. 14 die nach rechts sich erstreckende Fläche zwischen der Ordinate l_x, der X-Achse und der Kurve der l_x in ein Rechteck mit der Höhe l_x verwandelt; dessen Grundlinie:

$$(2) \qquad e_x = \frac{1}{l_x}\int_x^w l_x\, dx$$

ist die mittlere Lebensdauer; w bedeutet die höchste Altersstufe, also 90 bis 100 Jahre. Die Zahl e_x läßt sich auch als Erwartungswert deuten; nimmt man an, daß der Tod am Ende des nächsten, übernächsten usf. Jahres erfolge, so ist nach § 33, Schluß, der Erwartungswert:

$$1 \cdot \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} + 2 \cdot \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} + \cdots$$

$$= \frac{1}{l_x} \sum_{0}^{w-x} v \left(l_{x+v-1} - l_{x+v} \right) .$$

Läßt man v von Null aus sich stetig ändern, setzt $v = z - x$ und beachtet, daß $l_{x+v-1} - l_{x+v}$ in $-d\,l_z$ übergeht, so entsteht die neue Definition:

$$e_x = -\frac{1}{l_x} \int_x^w (z - x) \frac{d\,l_z}{d\,z} \cdot d\,z ;$$

die partielle Integration ergibt wieder den Ausdruck (2), da $l_w = 0$ ist.

Aus der Sterblichkeitstafel bekommt man die mittlere Lebensdauer, wie folgt. Findet das Ableben stets zu Anfang des Rechnungsjahres statt, so erleben die l_x Personen im ersten Jahr l_{x+1} Jahre, im zweiten l_{x+2} Jahre usw., also ist die Summe $l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots$ Jahre und der Durchschnitt:

$$\left| e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x} \right. .$$

Tritt hingegen der Tod am Jahresschluß ein, so findet sich (wie oben) der Durchschnitt:

$$e_x \left| = \frac{l_x + l_{x+1} + \cdots}{l_x} \right. ;$$

das Mittel aus $|e_x$ und $e_x|$ wird der Wahrheit am nächsten kommen; die Sterblichkeitstafel liefert also den Näherungswert:

$$(3) \qquad e'_x = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x}.$$

Zur Ausrechnung kann man sich einer Rechenmaschine bedienen; gute Annäherung bekommt man auch durch Anwendung der Simpsonschen Regel[1]) auf (2):

$$(4) \quad e''_x = \frac{5}{3} \cdot \frac{l_x + 4\,l_{x+5} + 2\,l_{x+10} + 4\,l_{x+15} + \cdots}{l_x};$$

es wird z. B. $e'_{50} = e''_{50} = 19{,}0$ Jahre, ferner $u = W_{50} = 19{,}1$ Jahre.

2. Die numerische Übereinstimmung zwischen mittlerer und wahrscheinlicher Lebensdauer erklärt sich, wenn man annimmt, daß die l_x eine abnehmende arithmetische Reihe erster Ordnung bilden. Es sei:

$$l_x = (w - x)\,\delta\,, \quad l_{x+1} = (w - x - 1)\,\delta\,, \quad \ldots\,, \quad l_w = 0\,;$$

außerdem $w - x$ eine gerade Zahl. Durch Summation der Reihe erhält man leicht nach (3):

$$e'_x = \frac{w - x}{2}\,;$$

andererseits ist (1) erfüllt, wenn man:

$$u = \frac{w - x}{2}$$

wählt; folglich ist $e'_x = u$. Da nun die Kurve der l_x von einer geraden Linie nicht allzusehr verschieden ist, so ist angenähert $e'_x = W_x$.

3. An der Hand der Sterblichkeitstafel (oder des Makehamschen Gesetzes) lassen sich auch die Wahr-

---

[1]) Sammlung Göschen Nr. 88, § 29.

scheinlichkeiten für verbundene Leben ermitteln; wir wollen annehmen, daß es sich um Ehegatten handelt und die Trennung nur durch Todesfall herbeigeführt wird. Man muß hierbei für beide Geschlechter verschiedene Tafeln benutzen; für Abschätzungen genügt die Tafel S. 122. Eine genaue Beantwortung der gestellten Fragen hätte auch darauf zu achten, ob z. B. die Sterbenswahrscheinlichkeit für eine Witwe ebenso groß ist, wie für eine gleichaltrige verheiratete Frau.

Ist A (der Mann) x, B (die Frau) y Jahre alt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach u Jahren:

A und B leben:

$$\frac{l_{x+u}}{l_x} \cdot \frac{l'_{y+u}}{l'_y},$$

A lebt, B tot ist:

$$\frac{l_{x+u}}{l_x}\left(1 - \frac{l'_{y+u}}{l'_y}\right),$$

A tot ist, B lebt:

$$\frac{l'_{y+u}}{l'_y}\left(1 - \frac{l_{x+u}}{l_x}\right),$$

A und B tot sind:

$$\left(1 - \frac{l_{x+u}}{l_x}\right)\left(1 - \frac{l'_{y+u}}{l'_y}\right),$$

nicht mehr beide leben:

$$1 - \frac{l_{x+u}}{l_x} \cdot \frac{l'_{y+u}}{l'_y}.$$

Man kann auch die wahrscheinliche Ehedauer u berechnen; hierfür besteht die Gleichung:

$$\frac{l_{x+u}}{l_x} \cdot \frac{l'_{y+u}}{l'_y} = \frac{1}{2}.$$

Ist z. B. $x = 30$, $y = 20$, so muß:

$$l_{30} + u \cdot l'_{20} + u = \tfrac{1}{2} l_{30} \cdot l'_{20}$$

sein; nach Seite 122 ist ungefähr:

$$\tfrac{1}{2} \cdot l_{30} \cdot l'_{20} = 458000 = a\,,$$

$$\text{für } u_1 = 25: \quad l_{55}\, l'_{45} = 502700 = a_1\,,$$

$$\text{für } u_2 = 30: \quad l_{60}\, l'_{50} = 401300 = a_2\,.$$

Die „regula falsi"[1]) ergibt:

$$u = u_1 + \frac{(a_1 - a)(u_2 - u_1)}{a_1 - a_2}\,,$$

also: $u = 25 + 2{,}2 = 27{,}2$ Jahre.

4) In ähnlicher Weise kann man die Aufgaben über mehr als zwei verbundene Leben lösen. Wird etwa nach der gemeinsamen Lebensdauer von drei 20jährigen Personen gefragt, so gilt:

$$l^3_{20+u} = \tfrac{1}{2}\, l^3_{20}\,,$$

$$l_{20+u} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\, l_{20}\,.$$

Da $1 : \sqrt[3]{2} = 0{,}794$ ist, so ergibt die Tafel S. 122 ungefähr: $20 + u = 43{,}5$; $u = 23{,}5$. Danach darf man 1 gegen 1 wetten, daß nach 23,5 Jahren noch alle drei am Leben sind; hierbei ist vorausgesetzt, daß die Todesfälle gänzlich unabhängig voneinander eintreten, bei drei Matrosen an Bord des gleichen Schiffes wird man dies nicht als allein gültige Annahme aufstellen dürfen.

[1]) Sammlung Göschen, Nr. 53, § 114.

Anhang.

Zahlentafeln.

I. Werte von $\theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\gamma e^{-t^2}\, d\, t$.

γ	$(\theta\gamma)$	Diff.	γ	$\theta(\gamma)$	Diff.
0,00	0,000	56	0,90	0,797	24
0,05	0,056	56	0,95	0,821	22
0,10	0,112	56	1,00	0,843	37
0,15	0,168	55	1,10	0,880	30
0,20	0,223	53	1,20	0,910	24
0,25	0,276	53	1,30	0,934	18
0,30	0,329	50	1,40	0,952	14
0,35	0,379	49	1,50	0,966	10
0,40	0,428	47	1,60	0,976	8
0,45	0,475	45	1,70	0,984	5
0,50	0,520	43	1,80	0,989	4
0,55	0,563	41	1,90	0,993	2
0,60	0,604	38	2,00	0,995	2
0,65	0,642	36	2,10	0,997	1
0,70	0,678	33	2,20	0,998	1
0,75	0,711	31	2,30	0,999	0
0,80	0,742	29	2,40	0,999	1
0,85	0,771	26	2,50	1,000	
0,90	0,797				

II. Sterblichkeitstafel.

Nach. 23 D. G. M u W. I.[1])

x	q_x	l_x	d_x	W_x	$\log l_x$
20	0,009	1000	9	43	3,0000
25	0,008$_5$	956	8	39	2 9805
30	0,009	916	8	35	2 9619
35	0 010	874	9	31	2,9415
40	0,012	829	10	27	2,9186
45	0,014	777	11	23	2 8904
50	0,018	718	13	19	2,8561
55	0,025	647	16	16	2,8109
60	0,035	559	20	13	2,7474
65	0,049	454	22	10	2,6571
70	0,073	337	25	7	2,5276
75	0,106	216	23	5	2,3345
80	0,155	111	17	4	2,0453
85	0,222	40	9	3	1,6021
90	0,247	11			1,0414

[1]) Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften; normal versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung (1883) Die Zahlen entsprechen nicht mehr genau den jetzigen Verhältnissen

Politechniki Wrocławskiej

Namenregister.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Sammlung Göschen

Jeder Band in Leinw. geb. **90 Pf.**

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände

Abwässer. Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung von Professor Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landw. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre v. Dr. Paul Rippert i. Essen u. Ernst Langenbeck, Gr.-Lichterfelde. Nr. 232.

Agrarwesen und Agrarpolitik von Prof. Dr. W. Wygodzinski in Bonn. 2 Bändchen. **I: Boden u. Unternehmung.** Nr. 592.

— — **II: Kapital u. Arbeit in der Landwirtschaft. Verwertung der landwirtschaftl. Produkte. Organisation des landwirtschaftl. Berufsstandes.** Nr. 593.

Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Agrikulturchemische Kontrollwesen, Das, v. Dr. Paul Krische in Leopoldshall-Staßfurt. Nr. 304.

— **Untersuchungsmethoden** von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftl. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 470.

Akkumulatoren, Die, für Elektrizität v. Kais. Reg.-Rat Dr.-Ing. Richard Albrecht in Berlin-Zehlendorf. Mit 52 Figuren. Nr. 620.

Akustik. Theoret. Physik I: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 19 Abb. Nr. 76.

— **Musikalische,** von Professor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 36 Abbild. Nr. 21.

Algebra. Arithmetik und Algebra von Dr. H. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Algebra. Beispielsammlung z. Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums i. Hamburg. Nr. 48.

Algebraische Kurven. Neue Bearbeitung von Dr. H. Wieleitner, Gymnasialprof. i. Pirmasens. **I: Gestaltliche Verhältnisse.** Mit zahlreichen Fig. Nr. 435.

— **II: Theorie u. Kurven dritter u. vierter Ordnung** v. Eugen Beutel, Oberreall. in Vaihingen-Enz. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.

Algen, Moose und Farnpflanzen von Professor Dr. H. Klebahn in Hamburg. Mit zahlr. Abbildungen. Nr. 736.

Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Professor an der Universität Graz. Mit 19 Abb. u. 1 Karte. Nr. 129.

Althochdeutsche Grammatik von Dr. Hans Naumann, Privatdozent an der Universität Straßburg. Nr. 727.

Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung u. Erläuterungen v. Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Althochdeutsches Lesebuch von Dr. Hans Naumann, Privatdozent an der Universität Straßburg. Nr. 734.

Alttestamentl. Religionsgeschichte von D. Dr. Max Löhr, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 292.

Amphibien. Das Tierreich III: Reptilien u. Amphibien v. Dr. Franz Werner, Prof. an der Universität Wien. Mit 48 Abbild. Nr. 383.

Analyse, Techn.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Rektor des Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 67 Figuren. Nr. 87.

— — Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Rektor d. Realgymnas. u. d. Oberrealsch. i. Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.

— — II: Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnas. u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Fig. Nr. 88.

— — Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung v. Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnas. und der Oberrealschule in Göppingen. Mit 50 Fig. Nr. 147.

— Niedere, von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Prof. an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Arbeiterversicherung siehe: Sozialversicherung.

Archäologie von Dr. Friedrich Koepp, Prof. an der Universität Münster i. W. 3 Bändchen. M. 28 Abb. im Text u. 40 Tafeln. Nr. 538/40.

Arithmetik u. Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Armeepferd, Das, und die Versorgung der modernen Heere mit Pferden v. Felix von Damnitz, General der Kavallerie z. D. u. ehemal. Preuß. Remonteinspekteur. Nr. 514.

Armenwesen und Armenfürsorge. Einführung in d. soziale Hilfsarbeit v. Dr. Adolf Weber, Prof. an der Handelshochschule in Köln. Nr. 346.

Arzneimittel, Neuere, ihre Zusammensetzung, Wirkung und Anwendung von Dr. med. C. Bachem, Professor der Pharmakologie an der Universität Bonn. Nr. 669.

Ästhetik, Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer a. d. Kgl. Akademie d. bild. Künste in Stuttgart. Nr. 300.

Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Universität Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

— — II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper v. Prof. W. F. Wislicenus. Neu bearbeitet von Dr. H. Ludendorff in Potsdam. Mit 15 Abbild. Nr. 91.

Ätherische Öle und Riechstoffe von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Aufsatzentwürfe v. Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnas. i. Stuttg. Nr. 17.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Wilh. Weitbrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. 2 Bändchen. Mit 16 Figuren. Nr. 302 u. 641.

Außereuropäische Erdteile, Länderkunde der, von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.

Australien. Landeskunde u. Wirtschaftsgeographie des Festlandes Australien von Dr. Kurt Hassert, Prof. d. Geographie an d. Handels-Hochschule in Köln. Mit 8 Abb., 6 graph. Tab. u. 1 Karte. Nr. 319.

Autogenes Schweiß- und Schneidverfahren von Ingen. Hans Niese in Kiel. Mit 30 Figuren. Nr. 499.

Bade- u. Schwimmanstalten, Öffentliche, v. Dr. Karl Wolff, Stadtoberbaur., Hannover. M. 50 Fig. Nr. 380.

Baden. Badische Geschichte von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnas. in Pforzheim u. Privatdozent der Geschichte an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

— Landeskunde von Baden von Prof. Dr. O. Kienitz i. Karlsruhe. Mit Profil., Abb. u. 1 Karte. Nr. 199.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. den praktischen Gebrauch von Oberingenieur Friedr. Barth in Nürnberg. **I:** Kesselsysteme und Feuerungen. Mit 43 Fig. Nr. 9.
— — **II:** Bau und Betrieb der Dampfkessel. M. 57 Fig. Nr. 521.
Dampfmaschinen, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2 Bdchn. **I:** Wärmetheoretische und dampftechn. Grundlag. Mit 64 Fig Nr. 8.
— — **II:** Bau u. Betrieb der Dampfmaschinen. Mit 109 Fig. Nr. 572.
Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise u. Konstruktion von Ingen. Herm. Wilda, Prof. a. staatl. Technikum in Bremen. 3 Bdchn. Mit zahlr. Abb. Nr. 274, 715 u. 716.
Desinfektion von Dr. M. Christian, Stabsarzt a. D. in Berlin. Mit 18 Abbildungen. Nr. 546.
Determinanten von P. B. Fischer, Oberl. a. d. Oberrealsch. z. Groß-Lichterfelde. Nr. 402.
Deutsche Altertümer von Dr. Franz Fuhse, Dir. d. städt. Museums in Braunschweig. M. 70 Abb. Nr. 124.
Deutsche Fortbildungsschulwesen, Das, nach seiner geschichtlichen Entwicklung u. in seiner gegenwärt. Gestalt von H. Sierds, Revisor gewerbl. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.
Deutsches Fremdwörterbuch von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.
Deutsche Geschichte von Dr. F. Kurze, Prof. a. Kgl. Luisengymnas. in Berlin. **I: Mittelalter** (bis 1519). Nr. 33.
— — **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1517 bis 1648). Nr. 34.
— — **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648—1806). Nr. 35.
— — siehe auch: Quellenkunde.
Deutsche Grammatik und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Prof. Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.
Deutsche Handelskorrespondenz von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.
Deutsches Handelsrecht von Dr. Karl Lehmann, Prof. an der Universität Göttingen. 2 Bde. Nr. 457 u. 458.
Deutsche Heldensage, Die, von Dr. Otto Luitp. Jiriczek, Prof. a. d. Univ. Würzburg. Mit 5 Taf. Nr. 32.
Deutsche Kirchenlied, Das, in seinen charakteristischen Erscheinungen ausgewählt v. D. Friedrich Spitta, Prof. a. d. Universität in Straßburg i E. **I:** Mittelalter u. Reformationszeit. Nr. 602.
Deutsches Kolonialrecht von Prof. Dr. H. Edler von Hoffmann, Studiendirektor d. Akademie f. kommunale Verwaltung in Düsseldorf. Nr. 318.
Deutsche Kolonien. I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. K. Dove. M. 16 Taf. u. 1 lithogr Karte. Nr. 441.
— **II: Das Südseegebiet und Kiautschou** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 520.
— **III: Ostafrika** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.
— — **IV: Südwestafrika** von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. und 1 lithogr. Karte. Nr. 637.
Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.
Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- u. Kunstepen u. zum Minnesang. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. **I:** Öffentliches Leben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 93.
— — **II:** Privatleben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 328.
Deutsche Literatur des 13. Jahrhunderts. Die Epigonen d. höfischen Epos. Auswahl a. deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.
Deutsche Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.
— **des 16. Jahrhunderts. I: Martin Luther und Thom. Murner.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymn. zu Leipzig. Nr. 7.

Deutsche Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. II: Hans Sachs. Ausgewählt u. erlaut. v. Prof. Dr. J. Sahr. Nr. 24.
— — **III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos u. Fabel.** Ausgew. u. erläut. von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.
— **des 17. und 18. Jahrhunderts bis Klopstock. I:** Lyrik von Dr. Paul Legband in Berlin. Nr. 364.
— — **II:** Prosa v. Dr. Hans Legband in Kassel. Nr. 365.
Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 31.
Deutsche Literaturgeschichte d. Klassikerzeit v. Carl Weitbrecht, durchgesehen u. ergänzt v. Karl Berger. Nr. 161.
— **des 19. Jahrhunderts** von Carl Weitbrecht, neu bearbeitet von Dr Rich. Weitbrecht in Wimpfen. I. II. Nr. 134. 135.
Deutsche Lyrik, Geschichte der, von Prof. Dr. Rich. Findeis in Wien. 2 Bde. Nr. 737/8.
Deutschen Mundarten, Die, von Prof. Dr. H. Reis in Mainz. Nr. 605.
Deutsche Mythologie. Germanische Mythologie von Dr. Eugen Mogk, Prof. an der Universität Leipzig. Nr. 15.
Deutschen Personennamen, Die, v. Dr. Rud. Kleinpaul i. Leipzig. Nr. 422.
Deutsche Poetik von Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.
Deutsche Rechtsgeschichte v. Dr. Richard Schröder, Prof. a. d. Univers. Heidelberg. **I: Bis z. Mittelalter.** Nr. 621.
— — **II:** Die Neuzeit. Nr. 664.
Deutsche Redelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. i. Bamberg. Nr. 61.
Deutsche Schule, Die, im Auslande von Hans Amrhein, Seminaroberlehrer in Rheydt. Nr. 259.
Deutsches Seerecht v. Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. **I:** Allgem. Lehren: Personen u. Sachen d. Seerechts. Nr. 386.
— — **II:** Die einz. seerechtl. Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts u. außervertragliche Haftung. Nr. 387.
Deutsche Stammeskunde v. Dr. Rud. Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.
Deutsche Stadt, Die, und ihre Verwaltung. Eine Einführung i. d. Kommunalpolitik d. Gegenw. Herausgeg. v. Dr. Otto Most, Beigeordn. d. Stadt Düsseldorf. **I:** Verfassung u. Verwaltung im allgemeinen; Finanzen und Steuern; Bildungs- und Kunstpflege; Gesundheitspflege. Nr. 617.
— — **II:** Wirtschafts- u. Sozialpolitik. Nr. 662.
— — **III:** Technik: Städtebau, Tief- u. Hochbau. Mit 48 Abb. Nr. 663.
Deutsches Unterrichtswesen. Geschichte des deutschen Unterrichtswesens v. Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. **I:** Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.
— — **II:** Vom Beginn d. 19. Jahrh. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.
Deutsche Urheberrecht, Das, an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internat. Verträge v. Dr. Gust. Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.
Deutsche Volkslied, Das, ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25 u. 132.
Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Geheimer Kriegsrat u. vortragender Rat im Kriegsministerium in München. Nr. 401.
Deutsches Wörterbuch v. Dr. Richard Loewe. Nr. 64.
Deutsche Zeitungswesen, Das, v. Dr. R. Brunhuber i. Köln a. Rh. Nr. 400.
Deutsches Zivilprozeßrecht von Prof. Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.
Deutschland in römischer Zeit von Dr. Franz Cramer, Provinzialschulrat zu Münster i. W. Mit 23 Abbildungen. Nr. 633.
Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Ausw. mit Einltg. u. Wörterb. herausgeg. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor d. Königin Luise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.
Dietrichepen. Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung u. Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. a. d. Universität Würzburg. Nr. 10.
Differentialrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 68 Figuren. Nr. 87.

Differentialrechnung. Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung v. Dr. Friedr. Junker, Rektor des Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Goppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Disziplinar- u. Beschwerderecht für Heer u. Marine, Das, von Dr. Max E. Mayer, Professor a. d. Universität Straßburg i. E. Nr. 517.

Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Druckwasser- und Druckluft-Anlagen. Pumpen, Druckwasser- u. Druckluft-Anlagen von Dipl.-Ingen. Rudolf Vogdt, Regierungsbaumstr. a. D. in Aachen. Mit 87 Fig. Nr. 290.

Ecuador. Die Cordillerenstaaten von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen. II: Ecuador, Colombia u. Venezuela. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 653.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzg. u. Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenbahnbau. Die Entwicklung des modernen Eisenbahnbaues v. Dipl.-Ing. Alfred Birk, o. ö. Prof. a. d. k. k. Deutschen Techn. Hochschule in Prag. Mit 27 Abbild. Nr. 553.

Eisenbahnbetrieb, Der, v. S. Scheibner, Königl. Oberbaurat a. D. in Berlin. Mit 3 Abbildgn. Nr. 676

Eisenbahnen, Die Linienführung der, von H. Wegele, Professor an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 52 Abbildungen. Nr. 623.

Eisenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal, Regierungsbaumeister u. Oberingen. in Hannover. I: Die Lokomotiven. Mit 89 Abbild. im Text und 2 Tafeln. Nr. 107.

— — II: Die Eisenbahnwagen und Bremsen. Mit Anh.: Die Eisenbahnfahrzeuge im Betrieb. Mit 56 Abb. im Text u. 3 Taf. Nr. 108.

Eisenbahnpolitik. Geschichte d. deutschen Eisenbahnpolitik v. Betriebsinspektor Dr. Edwin Kech in Karlsruhe i. B. Nr. 533.

Eisenbahnverkehr, Der, v. Kgl. Eisenbahn-Rechnungsdirektor Th. Wilbrand in Berlin-Friedenau. Nr. 618.

Eisenbetonbau, Der, v. Reg.-Baumstr. Karl Rößle. M. 75 Abbild. Nr. 349.

Eisenbetonbrücken von Dr.-Ing. K. W. Schaechterle in Stuttgart. Mit 104 Abbildungen. Nr. 627.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Taf. Nr. 152.

— — II: Das Schmiedeisen. M. 25 Fig. u. 5 Taf. Nr. 153.

Eisenkonstruktionen im Hochbau von Ingen. Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Figuren Nr. 322.

Eiszeitalter, Das, v. Dr. Emil Werth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.

Elastizitätslehre für Ingenieure I: Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, Ebene Platten, Torsion, Gekrümmte Träger. Von Dr.-Ing. Max Enßlin, Prof. a. d. Kgl. Baugewerkschule Stuttgart und Privatdozent a. d. Techn. Hochschule Stuttgart. Mit 60 Abbild. Nr. 519.

Elektrischen Meßinstrumente, Die, von J. Herrmann, Prof. an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Mit 195 Figuren. Nr. 477.

Elektrische Öfen von Dr. Hans Goerges in Berlin-Südende. Mit 68 Abbildgn. Nr. 704.

Elektrische Schaltapparate von Dr.-Ing. Erich Beckmann, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 54 Fig. u. 107 Abb. auf 16 Tafeln. Nr. 711.

Elektrische Telegraphie, Die, von Dr. Lud. Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Elektrizität. Theoret. Physik III: Elektrizität u. Magnetismus von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel in Genf. I: Theoretische Elektrochemie u. ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 16 Fig. Nr. 252.

— — II: Experiment. Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. Nr. 253.

Elektromagnet. Lichttheorie. Theoret. Physik IV: Elektromagnet. Lichttheorie u. Elektronik von Professor Dr. Gust. Jäger in Wien. Mit 21 Figuren. Nr 374.

Elektrometallurgie von Dr. Friedrich Regelsberger, Kaiserl. Reg.-Rat in Steglitz-Berlin M. 16 Fig. Nr. 110

Elektrotechnik. Einführung in die Starkstromtechnik v. J. Herrmann, Prof. d. Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. **I:** Die physikalischen Grundlagen. Mit 95 Fig. u. 16 Taf. Nr. 196.

— — **II:** Die Gleichstromtechnik. Mit 118 Fig. und 16 Taf. Nr. 197.

— — **III:** Die Wechselstromtechnik. Mit 154 Fig. u. 16 Taf. Nr. 198.

— — **IV:** Die Erzeugung und Verteilung der elektrischen Energie. Mit 96 Figuren u. 16 Tafeln. Nr. 657.

Elektrotechnik. Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik von Ing.-Prof. Herm. Wilda i. Bremen. M. 3 Abb. Nr. 476.

Elsaß-Lothringen, Landeskunde von, v. Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 215.

Englisch. Neuenglische Laut- u. Formenlehre siehe: Neuenglisch.

Englisch-deutsches Gesprächsbuch von Prof. Dr. E. Hausknecht in Lausanne. Nr. 424.

Englisch für Techniker. Ein Lese- und Übungsbuch f. Ing. u. zum Gebrauch an Techn. Lehranstalten. Unter Mitarb. v. Albany Featherstonhaugh, Dozent a. d. militärtechn. Akad. i. Charlottenburg herausgeg. von Ingenieur Carl Volk, Direktor der Beuth-Schule, Berlin. I. Teil. Mit 25 Fig. Nr. 705.

Englische Geschichte v. Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.

Englische Handelskorrespondenz von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

Englische Literaturgeschichte von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

Englische Literaturgeschichte. Grundzüge und Haupttypen d. englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Professor an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.

Englische Phonetik mit Lesestücken von Dr. A. E. Dunstan, Lektor an der Univ. Königsberg i. Pr. Nr. 601.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johannes Meisenheimer, Prof. der Zoologie an der Universität Jena. **I:** Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Joh. Meisenheimer, Prof. der Zool. a. d. Univ. Jena. **II:** Organbildg. Mit 46 Fig. Nr. 379.

Epigonen, Die, des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius d. Kaiserl. Akad. der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Erbrecht. Recht des Bürgerl. Gesetzbuches. Fünftes Buch: Erbrecht von Dr. Wilhelm von Blume, ord. Prof. der Rechte an der Univ. Tübingen. I. Abteilung: Einleitung — Die Grundlagen des Erbrechts. II. Abteilung: Die Nachlaßbeteiligten. Mit 23 Figuren. Nr. 659/60.

Erdbau von Reg.-Baum. Erwin Link in Stuttgart Mit 72 Abbild. Nr. 630.

Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht von Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts in Potsdam. Mit 7 Tafeln und 16 Figuren. Nr. 175.

Erdteile, Länderkunde der außereuropäischen, von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. d. Exportakad. in Wien. Mit 11 Textkärtchen u. Profilen. Nr. 63.

Ernährung und Nahrungsmittel von Oberstabsarzt Professor H. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbild. Nr. 464.

Ethik von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Europa, Länderkunde von, von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. d. Exportakademie in Wien. Mit 14 Textkärtchen u. Diagrammen u. einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen d. häufigeren i. Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile Mit je 50 Abbildungen. Nr. 268 und 269.

Experimentalphysik v. Prof. R. Lang in Stuttgart. **I:** Mechanik d. fest., flüss. u. gasigen Körper. M. 125 Fig. Nr. 611.

— — **II:** Wellenlehre u. Akustik. Mit 69 Figuren. Nr. 612.

Explosivstoffe. Einführung in d. Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Steglitz. Mit 6 Abbild. und 12 Tab. Nr. 333.

Familienrecht. Recht d. Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

Färberei. **Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe** von Dr. Wilhelm Massot, Prof. an der Preußischen höheren Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186

Farnpflanzen siehe: Algen, Moose und Farnpflanzen.

Feldgeschütz, Das moderne, v. Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer a. d. Militärtechn. Akademie in Berlin. **I:** Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschl. der Erfindung des rauchl. Pulvers, etwa 1850 bis 1890. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— — **II:** Die Entwicklung d. heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart. Mit 11 Abbild. Nr. 307.

Fernmeldewesen. Das elektrische Fernmeldewesen bei den Eisenbahnen von K. Fink, Geheim. Baurat in Hannover. Mit 50 Figuren. Nr. 707.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.

Festigkeitslehre v. Prof. W. Hauber, Dipl.-Ing. Mit 56 Fig. Nr. 288.

— **Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen** von R. Haren, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 42 Fig. Nr. 491.

Fette, Die, und Öle sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikat. u. d. Harze, Lacke, Firnisse m. ihren wicht. Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. **I:** Einführung in die Chemie, Besprechung einiger Salze und der Fette und Öle. Nr. 335.

— — **II:** Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbildungen. Nr. 336.

— — **III:** Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

Feuerwaffen. Geschichte d. gesamten Feuerwaffen bis 1850. Die Entwicklung der Feuerwaffen v. ihrem ersten Auftreten bis zur Einführung d. gezog. Hinterlader, unter besond. Berücksichtig. d. Heeresbewaffnung von Major a. D. W. Gohlke, Steglitz-Berlin. Mit 105 Abbildungen. Nr. 530.

Feuerwerkerei, Die, von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorstand des Stadt. Chemischen Laboratoriums in Stuttgart. Mit 6 Fig. Nr. 634.

Filzfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Geh. Regierungsr. im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.

Finanzsysteme der Großmächte, Die, (Internat. Staats- und Gemeinde-Finanzwesen) v. O. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat in Berlin. 2 Bändchen. Nr. 450 und 451.

Finanzwissenschaft von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. **I:** Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— — **II:** Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

Finnisch-ugrische Sprachwissenschaft von Dr. Josef Szinnyei, Prof. an der Universität Budapest. Nr. 463.

Finnland. Landeskunde des Europäischen Rußlands nebst Finnlands von Prof. Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.

Firnisse. Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Fette und Öle III.) Nr. 337.

Fische. Das Tierreich IV: Fische von Prof. Dr. Max Rauther in Neapel. Mit 37 Abbild. Nr. 356.

Fischerei und Fischzucht von Dr. Karl Eckstein, Prof. a. d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Flechten, Die. Eine Übersicht unserer Kenntnisse v. Prof. Dr. G. Lindau, Kustos a. Kgl. Botanisch. Museum, Privatdozent an d. Univers. Berlin. Mit 55 Figuren. Nr. 683.

Flora. Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen v. Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbild. Nr. 268, 269.

Flußbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 103 Abbildungen. Nr. 597.

Fördermaschinen, Die elektrisch betriebenen, von A. Balthaser, Dipl.-Bergingenieur. Mit 62 Figuren. Nr. 678.

Forensische Psychiatrie von Professor Dr W. Weygandt, Dir. d. Irrenanstalt Friedrichsberg i. Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.

Forstwissenschaft v. Dr. Ad. Schwappach, Prof. a. d. Forstakad. Eberswalde, Abteil.-Dirig. b. d. Hauptstat. d. forstl. Versuchswesens. Nr. 106

Fortbildungsschulwesen, Das deutsche. nach seiner geschichtl. Entwicklung u. i. sein. gegenwärt. Gestalt v. H. Sierds, Revisor gewerbl. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.

Franken. Geschichte Frankens v. Dr Christ. Meyer, Kgl. preuß. Staatsarchivar a. D., München. Nr. 434.

Frankreich. Französische Geschichte v. Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 85.

Frankreich. Landesk. v. Frankreich v. Dr. Rich. Neuse, Direkt. d. Oberrealschule in Spandau. 1. Bändch. M. 23 Abb. im Text u. 16 Landschaftsbild. auf 16 Taf. Nr. 466.

— — 2. Bändchen. Mit 15 Abb. im Text, 18 Landschaftsbild. auf 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 467.

Französisch-deutsches Gesprächsbuch von C. Francillon, Lektor am orientalisch. Seminar u. an d. Handelshochschule in Berlin. Nr. 596

Französische Grammatik von Cyprien Francillon, Lehrer am oriental. Seminar und an der Handelshochschule in Berlin. Nr. 729.

Französische Handelskorrespondenz v. Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.

Französisches Lesebuch mit Wörterverzeichnis von Cyprien Francillon, Lektor a. oriental. Seminar u. a. d. Handelshochschule i. Berlin. Nr 643.

Fremdwort, Das, im Deutschen v. Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 55.

Fremdwörterbuch, Deutsches, von Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 273.

Fuge. Erläuterung u. Anleitung zur Komposition derselben v. Prof. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.

Funktionentheorie von Dr. Konrad Knopp, Privatdozent an der Universität Berlin. I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analyt. Funktionen. Mit 9 Fig. Nr. 668.

— — II: Anwendungen der Theorie zur Untersuchung spezieller analytischer Funktionen. Mit 10 Figuren. Nr. 703.

Funktionentheorie, Einleitung in die, (Theorie der komplexen Zahlenreihen) von Max Rose, Oberlehrer an der Goetheschule in Deutsch-Wilmersdorf. Mit 10 Fig. Nr. 581.

Fußartillerie, Die, ihre Organisation, Bewaffnung u. Ausbildg. v. Splett, Oberleutn. im Lehrbat. d. Fußart.-Schießschule u. Biermann, Oberleutn. in der Versuchsbatt. d. Art.-Prüfungskomm. M. 35 Fig. Nr. 560.

Gardinenfabrikation. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation u. Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ingen. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbildungen. Nr. 412.

Gaskraftmaschinen, Die, v. Ing. Alfred Kirschke in Kiel. 2 Bändchen. Mit 116 Abb. u. 6 Tafeln. Nr. 316 u. 651.

Gasthäuser und Hotels von Architekt Max Wöhler in Düsseldorf. I: Die Bestandteile u. die Einrichtung des Gasthauses. Mit 70 Fig. Nr. 525.

— — II: Die verschiedenen Arten von Gasthäusern. Mit 82 Fig. Nr. 526.

Gebirgsartillerie. Die Entwicklung der Gebirgsartillerie von Klußmann, Oberst u. Kommandeur der 1. Feld-Art.-Brigade in Königsberg i. Pr. Mit 78 Bildern und Übersichtstafeln. Nr. 531.

Genossenschaftswesen, Das, in Deutschland v. Dr. Otto Lindecke in Düsseldorf. Nr. 384.

Geodäsie von Prof. Dr. C. Reinhertz in Hannover. Neubearbeitet von Dr. G. Förster, Observator a. Geodätisch. Inst. Potsdam. M. 68 Abb. Nr. 102.

— Vermessungskunde von Diplom.-Ing. P. Werkmeister, Oberlehr. a. d. Kais. Techn Schule i. Straßburg i. E. I: Feldmessen u. Nivellieren. Mit 146 Abb. II: Der Theodolit. Trigonometr. u barometr. Höhenmessg. Tachymetr. M. 109 Abb. Nr. 468, 469.

Geographie, Geschichte der, von Prof. Dr. Konrad Kretschmer i. Charlottenburg. Mit 11 Kart. im Text. Nr. 624.

Geologie in kurzem Auszug f. Schulen u. zur Selbstbelehrung zusammengestellt v. Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. u. 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene v. Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 52 Figuren. Nr. 65.

— — **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.

— — **des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.

— — **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie des Raumes** von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Fig. Nr. 309.

— **Darstellende,** von Dr. Robert Haußner, Prof. an d. Univ. Jena, I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.

— — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.

— **Ebene,** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarbigen Figuren. Nr. 41.

— **Projektive,** in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.

Geometrische Optik, Einführung in die, von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt u. Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Germanische Mythologie von Dr. E. Mogk, Prof.a.d.Univ.Leipzig. Nr. 15.

Germanische Sprachwissenschaft von Dr. Rich. Loewe. Nr. 238.

Gesangskunst. Technik der deutschen Gesangskunst von Osk. Noë u. Dr. Hans Joachim Moser. Nr. 576.

Geschäfts- und Warenhäuser v. Hans Schliepmann, Königl. Baurat in Berlin. I: Vom Laden zum „Grand Magasin". Mit 23 Abb. Nr. 655.

— — **II:** Die weitere Entwickelung d. Kaufhäuser. Mit 39 Abb. Nr. 656.

Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, v. Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univ. Greifswald. Nr. 270.

Geschütze, Die modernen, der Fußartillerie v. Mummenhoff, Oberstleutnant u. Kommand. d. Thür. Fußartillerie Regts. Nr. 18. I: Vom Auftreten d. gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890. Mit 50 Textbildern. Nr. 334.

— — **II:** Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.

Geschwindigkeitsregler der Kraftmaschinen, Die, v. Dr.-Ing. H. Kröner in Friedberg. Mit 33 Fig. Nr. 604.

Gesetzbuch, Bürgerliches, siehe: Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten v. E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbild. u. 1 Tafel. Nr. 18.

Gewerbehygiene von Dr. E. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. I. II. Nr. 203, 204.

Gewerbliche Arbeiterfrage, Die, von Werner Sombart, Prof. a. d. Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Gewerbliche Bauten. Industrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. I: Allgemeines über Anlage und Konstruktion der industriellen und gewerblichen Bauten. Nr. 511.

— — **II:** Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.

Gewichtswesen. Maß-, Münz- u. Gewichtswesen v.Dr.Aug.Blind, Prof. a. d. Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Gießereimaschinen von Dipl.-Ing. Emil Treiber in Heidenheim a. B. Mit 51 Figuren. Nr. 548.

Glas- und keramische Industrie (Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels I) v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.

Gleichstrommaschine, Die, von Ing. Dr. C. Kinzbrunner in London. Mit 81 Figuren. Nr. 257.

Heizung u. Lüftung v. Ing. Johannes Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen u. die Berechnung der Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.

— — II: Die Ausführung der Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

Hessen. Landeskunde des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck v. Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

Hieroglyphen von Geh. Regier.-Rat Dr. Ad. Erman, Prof. an der Universitat Berlin. Nr. 608.

Hochspannungstechnik, Einführ. in die moderne, von Dr.-Ing. K. Fischer in Hamburg-Bergedorf. Mit 92 Fig. Nr. 609.

Holz, Das. Aufbau, Eigenschaften u. Verwendung v. Ing. Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 33 Abb. Nr. 459.

Hotels. Gasthäuser und Hotels von Archit. Max Wöhler in Düsseldorf. I: Die Bestandteile u. d. Einrichtg. des Gasthauses. Mit 70 Fig. Nr. 525.

— — II: Die verschiedenen Arten von Gasthäusern. Mit 82 Fig. Nr. 526.

Hydraulik v. W. Hauber, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 397.

Hygiene des Städtebaus, Die, von Prof. H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit. 30 Abb. Nr. 348.

— **des Wohnungswesens, Die,** von Prof. H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 20 Abbild. Nr. 363.

Iberische Halbinsel. Landeskunde der Iberischen Halbinsel von Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. M. 8 Kärtchen u. 8 Abb. im Text u. 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

Indische Religionsgeschichte von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

Indogerman. Sprachwissenschaft von Dr. R. Meringer, Professor an der Univers. Graz. M. 1 Tafel. Nr. 59

Industrielle u. gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. I: Allgemeines üb. Anlage u, Konstruktion d. industriellen u. gewerblichen Bauten. Nr. 511.

— — II: Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.

Infektionskrankheiten, Die, und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fiebertafel. Nr. 327.

Insekten. Das Tierreich V: Insekten v. Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoolog.). Mit 56 Abb. Nr. 594.

Instrumentenlehre v. Musikdir. Professor Franz Mayerhoff in Chemnitz. I: Text. Nr. 437.

— — II: Notenbeispiele. Nr. 438.

Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88.

Integralrechnung. Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 52 Figuren. Nr. 147.

Israel. Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Italienische Handelskorrespondenz v. Prof. Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.

Italienische Literaturgeschichte von Dr. Karl Voßler, Professor an der Universität München. Nr. 125.

Jugendpflege I: Männliche Jugend von H. Siercks. Vorsitzender des Vereins für Jugendwohlfahrt in Schleswig-Holstein in Schleswig. Nr. 714.

Kalkulation, Die, im Maschinenbau v. Ing. H. Bethmann, Doz. a. Technik. Altenburg. Mit 63 Abb. Nr. 486.

Kältemaschinen. Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen von M. Röttinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Mit 73 Figuren. Nr. 2.

Kamerun. Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithogr. Karte. Nr. 441.

Kampf um befestigte Stellungen, seine Formen und Grundsätze von Major Tiersch, Kommandeur des Kurhessisch. Pionier-Bat. Nr. 11. Nr. 732.

Kampfesformen u. Kampfesweise der Infanterie von Hein, Oberstleutnant beim Stabe des 5. Westpreußischen Infanterie-Regiments Nr. 148 in Bromberg. Mit 15 Abbildgn. Nr. 712.

Kanal- und Schleusenbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abb. Nr. 585.

Kant, Immanuel. (Geschichte d. Philosophie Bd. 5) v. Dr. Bruno Bauch, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 536.

Kartell u. Trust v. Dr. S. Tschierschky in Düsseldorf. Nr. 522.

Kartenkunde von Dr. M. Groll, Kartograph i. Berlin. 2 Bändchen. **I:** Die Projektionen. Mit 56 Fig. Nr. 30.

— — **II:** Der Karteninhalt u. das Messen auf Karten. Mit 39 Fig. Nr. 599.

Kartographische Aufnahmen u. geograph. Ortsbestimmung auf Reisen von Dr.-Ing. R. Hugershoff, Prof. an der Forstakademie zu Tharandt. Mit 73 Figuren. Nr 607.

Katholischen Kirche, Geschichte der, von der Mitte des 18. Jahrh. bis zum Vatikanischen Konzil von Geh. Konf.-Rat Prf. D. Mirbt i. Göttingen. Nr. 700.

Kaufmännische Rechtskunde. I: Das Wechselwesen v. Rechtsanwalt Dr. Rud. Mothes in Leipzig. Nr. 103.

— **II:** Der Handelsstand v. Rechtsanw. Dr. jur. B. Springer, Leipzig. Nr. 545.

Kaufmännisches Rechnen von Prof. Richard Just, Oberlehrer a. d. Öffentl. Handelslehranstalt d. Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139, 140, 187.

Keilschrift, Die, von Dr. Bruno Meißner, o. Professor a. d. Universität Breslau. Mit 6 Abbildungen. Nr. 708.

Keramische Industrie. Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gust. Rauter. **I:** Glas- u. keram. Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.

Kerzenfabrikation. Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Öle II.) Mit 25 Abb. Nr. 336.

Kiautschou. Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou v. Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 520.

Kindesrecht u. Kinderschutz von Assessor H. E. Wendel in Grunewald. Nr. 693.

Kinematik von Dipl.-Ing. Hans Polster, Assist. a. d. Kgl. Techn. Hochschule Dresden. M. 76 Abb. Nr. 584.

Kirchenrecht v. Dr. E. Sehling, ord. Prof. d. Rechte in Erlangen. Nr. 377

Klima und Leben (Bioklimatologie) von Dr. Wilh. R. Eckardt, Assist. an der öffentl. Wetterdienststelle in Weilburg. Nr. 629.

Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Figuren. Nr. 114.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte an der Universität Berlin. Nr. 156.

Kolonialrecht, Deutsches, von Prof. Dr. H. Edler von Hoffmann, Studiendirektor d. Akademie für kommunale Verwaltung in Düsseldorf. Nr. 318

Kometen. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. **Möbius,** neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Univ. Kiel. **II:** Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.

Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magistratsassessor in Berlin. Nr. 534.

Kompositionslehre. Musikalische Formenlehre v. Steph. Krehl. I. II. M. viel. Notenbeispiel. Nr. 149, 150.

Kontrapunkt. Die Lehre von der selbständigen Stimmführung v. Steph. Krehl in Leipzig. Nr. 390.

Kontrollwesen, Das agrikulturchemische, von Dr. Paul Krische in Leopoldshall-Staßfurt. Nr. 304.

Koordinatensysteme v. Paul B Fischer, Oberl. a. d. Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Mit 8 Fig. Nr. 507.

Körper, Der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten von E. Rebmann, Oberschulr. i. Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. M. 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Kostenanschlag siehe: Veranschlagen.

Kredit- und Bankwesen von Geh. Oberregierungsrat Wilhelm Lexis, Prof. an der Univ. Göttingen. Nr. 733.

Kriegsschiffbau. Die Entwicklung des Kriegsschiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit. Von Tjard Schwarz, Geh. Marinebaurat u. Schiffbau-Direktor. I. Teil: Das Zeitalter der Ruderschiffe u. der Segelschiffe f. d. Kriegsführung zur See vom Altertum bis 1840. Mit 32 Abb. Nr. 471.

— — II. Teil: Das Zeitalt. der Dampfschiffe f. d. Kriegsführ. z. See v. 1840 bis zur Neuzeit. Mit 81 Abb. Nr. 472.

Kriegswesens, Geschichte des, von Dr. Emil Daniels in Berlin. I: Das antike Kriegswesen. Nr. 488.
— II: Das mittelalterliche Kriegswesen. Nr. 498.
— — III: Das Kriegswesen der Neuzeit. Erster Teil. Nr. 518.
— — IV: Das Kriegswesen der Neuzeit. Zweiter Teil. Nr. 537.
— — V: Das Kriegswesen der Neuzeit. Dritter Teil. Nr. 568.
— — VI: Das Kriegswesen der Neuzeit. Vierter Teil. Nr. 670.
— — VII: Das Kriegswesen der Neuzeit. Fünfter Teil. Nr. 671.
Kristallographie v. Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Bergakademie Clausthal. Mit 190 Abbild. Nr. 210.
Kristalloptik, Einführung in die, von Dr. Eberhard Buchwald i. München. Mit 124 Abbildungen. Nr. 619.
Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Würzburg. Nr. 10.
Kultur, Die, der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung v. Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.
Kulturgeschichte, Deutsche, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.
Kurvendiskussion. Algebraische Kurven von E. Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I: Kurvendiskussion. Mit 57 Fig. im Text. Nr. 435.
Kurzschrift siehe: Stenographie.
Küstenartillerie. Die Entwicklung der Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart v. Korvettenkapitän Huning. Mit Abb. u. Tab. Nr. 606.
Lacke. Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III.) Nr. 337.
Lagerhäuser. Industrielle und gewerbliche Bauten. (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt H. Salzmann, Düsseldorf. I: Allgem. über Anlage u. Konstrukt. d. industr. u. gewerbl. Bauten. Nr. 511.
— — II: Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.
Länder- und Völkernamen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.
Landstraßenbau von Kgl. Oberlehrer A. Liebmann, Betriebsdirekt. a. D. i. Magdeburg. Mit 44 Fig. Nr. 598.
Landwirtschaftliche Betriebslehre v. E. Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 227.
Landwirtschaftlichen Maschinen, Die, von Karl Walther, Diplom.-Ing. in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildgn. Nr. 407—409
Lateinische Grammatik. Grundriß der latein. Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.
— **Sprache. Geschichte der lateinischen Sprache** v. Dr. Friedr. Stolz, Prof. an d. Univ. Innsbruck. Nr. 492.
Lateinisches Lesebuch für Oberrealschulen und zum Selbststudium enthaltend: Cäsars Kämpfe mit den Germanen und den zweiten Punischen Krieg von Professor Lic. theol. Johannes Hillmann, Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule in Frankfurt a. M. Mit Vokabular. Nr. 713.
Laubhölzer, Die. Kurzgefaßte Beschreibung der in Mitteleuropa einheimischen Bäume und Sträucher, sowie der wichtigeren in Gärten gezogenen Laubholzpflanzen von Dr. F. W. Neger, Professor an der Kgl. Forstakademie Tharandt. Mit 74 Textabbildgn. und 6 Tabellen. Nr. 718.
Leuchtgasfabrikation, Die Nebenprodukte der, von Dr. phil. K. R. Lange, Diplom-Ingenieur. Mit 13 Figuren. Nr. 661.
Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Techn. Hochschule in Wien. M. 47 Abb. Nr. 77.
Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Neue Ausgabe v. Dr. Robert Haußner, Prof. an der Universität Jena Nr. 81.
— **Fünfstellige,** von Professor August Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.
Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Professor Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.
Lokomotiven. Eisenbahnfahrzeuge von H. Hinnenthal. I: Die Lokomotiven Mit 89 Abb. im Text u. 2 Tafeln. Nr. 107.

Lothringen. **Geschichte Lothringens** von Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.

— **Landeskunde v. Elsaß-Lothringen** v. Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abb. u. 1 Karte. Nr. 215.

Lötrohrprobierkunde. **Qualitative Analyse mit Hilfe des Lötrohrs** von Dr. Mart. Henglein in Freiberg i. Sa. Mit 10 Figuren. Nr. 483.

Lübeck. **Landeskunde d. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck** v. Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbildungen und Karten im Text und 1 lithographischen Karte. Nr. 487.

Luftelektrizität von Dr. Karl Kähler, wissenschaftlichem Hilfsarbeiter am Königl. Preuß. Meteorologisch-Magnetischen Observatorium in Potsdam. Mit 18 Abb. Nr. 649.

Luftsalpeter. Seine Gewinnung durch den elektrischen Flammenbogen von Dr. G. Brion, Prof. an der Kgl. Bergakademie in Freiberg. Mit 50 Figuren. Nr. 616.

Luft- und Meeresströmungen von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.

Lüftung. **Heizung und Lüftung** von Ing. Johannes Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen und die Berechnung d. Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Fig. Nr. 342.

— — II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

Luther, Martin, und Thom. Murner. Ausgewählt und mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen v. Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus. **Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus.** Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule Wien. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

Mälzerei. **Brauereiwesen I: Mälzerei** von Dr. P. Dreverhoff, Direktor d. Öffentlichen und 1. Sächs. Versuchsstation für Brauerei und Mälzerei, sowie der Brauer- und Mälzerschule zu Grimma. Nr. 303.

Märkte und Markthallen für Lebensmittel von Richard Schachner, Stadt. Baurat in München. I: Zweck und Bedeut. von Märkten u. Markthallen, ihre Anlage u. Ausgestalt. II: Markthallenbauten. Mit zahlr. Abb. Nr. 719 u. 720.

Maschinenbau, Die Kalkulation im, v. Ing. H. Bethmann, Doz. a. Techn. Altenburg. Mit 63 Abb. Nr. 486.

— **Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik** von Ingenieur Prof. Hermann Wilda. Mit 3 Abbildungen. Nr. 476.

Maschinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Fr. Barth, Oberingen. in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.

Maschinenzeichnen, Praktisches, von Obering. Rich. Schiffner in Warmbrunn. I: Grundbegriffe, Einfache Maschinenteile bis zu den Kuppelungen. Mit 60 Tafeln. Nr. 589.

— — II: Lager, Riem- u. Seilscheiben, Zahnräder, Kolbenpumpe. Mit 51 Tafeln. Nr. 590.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Darmstadt. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. August Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik d. Materialprüfung v. K. Memmler, Dipl.-Ing., ständ. Mitarbeiter a. Kgl. Material-Prüfungsamte zu Gr.-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel f. Festigkeitsversuche. Mit 58 Fig. Nr. 311.

— — II: Metallprüfung und Prüfung v. Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enthaltend die wichtigsten Formeln u. Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- u. Integralrechnung v. O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. M. 18 Fig. Nr. 51.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Prof. am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Maurer- und Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Ed. Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbild. Nr. 419—421.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

Mechanische Technologie von Geh. Hofrat Professor A. Lüdicke in Braunschweig. 2 Bändchen. Nr. 340, 341.

Mecklenburg. Landeskunde d. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck von Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbild. im Text, 16 Taf. und 1 Karte in Lithographie. Nr. 487.

Mecklenburgische Geschichte von Oberlehrer Otto Vitense in Neubrandenburg i. M. Nr. 610.

Medizin, Geschichte der, von Dr. med. et phil. Paul Diepgen, Privatdozent für Geschichte der Medizin in Freiburg i. Br. **I:** Altertum. Nr. 679.

Meereskunde, Physische, von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher bei d. Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Meeresströmungen. Luft- u. Meeresströmungen v. Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationsschule zu Lübeck. Mit 27 Abb. u. Tafeln. Nr. 551.

Meliorationen v. Baurat Otto Fauser in Ellwangen. 2 Bdchen. Mit vielen Fig. Nr. 691/92.

Menschliche Körper, Der, sein Bau u. seine Tätigkeiten von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre v. Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Tafel. Nr. 18.

Metallographie. Kurze, gemeinfaßliche Darstellung der Lehre von den Metallen u. ihren Legierungen unter besond. Berücksichtigung der Metallmikroskopie v. Prof. E. Heyn u. Prof. O. Bauer a. Kgl. Materialprüfungsamt (Gr.-Lichterfelde) d. K. Techn. Hochschule zu Berlin. **I:** Allgem. Teil. Mit 45 Abb. im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.

Metallographie. II: Spez. Teil. Mit 49 Abb. im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.

Metallurgie von Dr. August Geitz in Kristianssand (Norwegen). I. II. Mit 21 Figuren. Nr. 313, 314.

Meteore. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. **II:** Kometen, Meteore u. das Sternensystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.

Meteorologie v. Dr. W. Trabert, Prof. an der Universität Wien. Mit 49 Abbild. u. 7 Tafeln. Nr. 54.

Militärische Bauten v. Rg.-Baumstr. R. Lang i. Stuttgart. M. 59 Abb. Nr. 626.

Militärstrafrecht, Deutsches, v. Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an d. Univ. Straßburg i. E. 2 Bde. Nr. 371, 372.

Mineralogie von Geheimer Bergrat Dr. R. Brauns, Prof. an d. Univ. Bonn. Mit 132 Abbild. Nr. 29.

Minnesang und Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen u. einem Wörterb. von O. Güntter, Prof. an d. Oberrealschule u. an d. Techn. Hochschule i. Stuttgart. Nr. 23.

Mittelhochdeutsche Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitg. u. Wörterbuch herausgeg. von Dr. Hermann Jantzen, Dir. d. Königin Luise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Mittelhochdeutsche Grammatik. Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurz. Wörterb. v. Dr. W. Golther, Prof. a. d. Univ. Rostock. Nr. 1.

Moose siehe: Algen, Moose und Farnpflanzen.

Morgenland. Geschichte des alten Morgenlandes v. Dr. Fr. Hommel, Prof. an d. Universität München. Mit 9 Bildern u. 1 Karte. Nr. 43.

Morphologie und Organographie der Pflanzen v. Prof. Dr. M. Nordhausen in Kiel. M. 123 Abb. Nr. 141.

Mörtel. Die Industrie d. künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Mundarten, Die deutschen, von Prof. Dr. H. Reis in Mainz. Nr. 605.

Mundarten, Plattdeutsche, von Dr. Hubert Grimme, Professor an der Universſ. Münster i. W. Nr. 461.

Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof a d. Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Murner, Thomas. Martin Luther u. Thomas Murner. Ausgewählt u. m. Einleitungen u. Anmerk. versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnas. zu Leipzig. Nr. 7.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, v. Dr. A. Möhler in Steinhaußen. 2 Bdch. Mit zahlr. Abb. u. Musikbeil. Nr. 121 u. 347.

Musikalische Akustik von Professor Dr. Karl L. Schäfer in Berlin. Mit 36 Abbildungen. Nr. 21.

Musikal. Formenlehre (Kompositionslehre) von Stephan Krehl. I. II. Mit viel. Notenbeisp. Nr. 149, 150.

Musikästhetik von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Musikgeschichte des 17 Jahrhunderts v. Dr. Karl Grunsky i. Stuttgart. Nr. 239.

Musikgeschichte des 18. Jahrhunderts von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 710, 725.

Musikgeschichte seit Beginn des 19. Jahrhunderts v. Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.

Musiklehre, Allgemeine, von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220

Nadelhölzer, Die, von Dr. F W. Neger, Prof. an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

Nahrungsmittel. Ernährung u. Nahrungsmittel v. Oberstabsarzt Prof. H. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbildungen. Nr. 464.

Nautik. Kurzer Abriß d. täglich an Bord von Handelsschiffen angew. Teils d. Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationsschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildgn. Nr. 84.

Neuenglische Laut- und Formenlehre von Dr. Eilert Ekwall, Prof. an der Univ. Lund. Nr. 735.

Neugriechisches Lesebuch (Schrift- und Volkssprache) mit Glossar, gesammelt und erläutert von Dr. Johannes E. Kalitsunakis, Dozent am Orient. Sem. der Univ. in Berlin. Nr. 726.

Neugriechisch-deutsches Gesprächsbuch mit besond. Berücksichtigung d. Umgangssprache v. Dr. Johannes Kalitsunakis, Doz. am Seminar für orient. Sprache in Berlin. Nr. 587.

Neunzehntes Jahrhundert. Geschichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprof. a. d. Univ. Bonn. 1. Bdch.: 1800—1852. Nr. 216.

— — 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.

Neutestamentliche Zeitgeschichte von Lic. Dr. W. Staerk, Prof. a. der Univ. in Jena. I: Der historische u. kulturgeschichtl. Hintergrund d. Urchristentums. M. 3 Karten. Nr. 325.

— — II: Die Religion d. Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit 1 Planskizze. Nr. 326.

Nibelunge Nôt, Der, in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterb. v. Dr. W. Golther, Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 1.

Nordamerikanische Literatur, Geschichte der, von Dr. Leon Kellner, Prof. an der Univ. Czernowitz. 2 Bdchen. Nr. 685/86.

Nordische Literaturgeschichte I: Die isländ. u. norweg Literatur des Mittelalters v. Dr. Wolfg. Golther, Prof. an der Universität Rostock. Nr 254

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großherzogl. landwirtschaftl. Versuchsanst Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Öle. Die Fette u. Öle sowie d. Seifen- u. Kerzenfabrikation u. d. Harze, Lacke, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführung in d. Chemie, Besprechung einiger Salze u. der Fette und Öle. Nr. 335.

Öle und Riechstoffe, Ätherische, von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Optik. Einführung in d. geometrische Optik von Dr. W Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Orientalische Literaturen. Die Hauptliteraturen des Orients von Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. an d. Universität Wien. I: Die Literaturen Ostasiens und Indiens. Nr. 162.

— II: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken. Nr. 163.

Orientalische Literaturen. Die christlichen Literaturen des Orients von Dr. Ant Baumstark. I: Einleitung. — Das christl.-aramäische u. d. kopt. Schrifttum. Nr. 527.

— — II: Das christlich-arabische und das äthiopische Schrifttum. — Das christliche Schrifttum der Armenier und Georgier. Nr. 528.

Ortsnamen im Deutschen, Die, ihre Entwicklung u. ihre Herkunft von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig-Gohlis. Nr. 573.

Ostafrika. Die deutschen Kolonien III: Ostafrika von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567

Österreich. Österreichische Geschichte von Prof. Dr. Franz v. Krones, neubearb. von Dr. Karl Uhlirz, Prof. a. d. Univ. Graz. I: Von d. Urzeit b. z. Tode König Albrechts II. (1439). Mit 11 Stammtaf. Nr. 104.

— — II: Vom Tode König Albrechts II. bis z. Westf. Frieden (1440—1648). Mit 3 Stammtafeln. Nr. 105.

— **Landeskunde v. Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Prof. an d. Universität Prag. Mit 10 Textillustrationen u. 1 Karte. Nr. 244.

Ovidius Naso, Die Metamorphosen des. In Auswahl mit einer Einleit. u. Anmerk. herausgeg. v. Dr. Jul. Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 442.

Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor d. Pädagog. Seminars a. d. Univ. Jena. Nr. 12.

— **Geschichte der,** von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Paläogeographie. Geolog. Geschichte der Meere und Festländer von Dr. Franz Kossmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.

Paläoklimatologie von Dr. Wilh. R. Eckardt i. Weilburg (Lahn). Nr. 482.

Paläontologie von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

Paläontologie und Abstammungslehre von Dr. Karl Diener, Prof. an der Univers. Wien. Mit 9 Abbildungen. Nr. 460.

Palästina. Landes- und Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 345.

Parallelperspektive. Rechtwinklige u. schiefwinklige Axonometrie v. Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.

Personennamen, Die deutschen, v. Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.

Peru. Die Cordillerenstaaten von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen. I: Einleitung, Bolivia und Peru. Mit 16 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 652.

Petrographie v. Dr. W. Bruhns, Prof. an der Bergakademie Clausthal. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Prof. Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

— von Geh. Hofr. Prof. Dr. Adolf Hansen in Gießen. Mit zahlr. Abb. Nr. 742.

Pflanzenbaulehre. Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Essen u. Ernst Langenbeck in Groß-Lichterfelde. Nr. 232.

Pflanzenbiologie v. Dr. W. Migula, Professor an d. Forstakademie Eisenach. I: Allgemeine Biologie. Mit 43 Abbildungen. Nr. 127.

Pflanzenernährung. Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Pflanzengeographie v. Prof. Dr. Ludw. Diels in Marburg (Hessen). Nr. 389.

Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedr. Bruck, Privatdoz. i. Gießen. Mit 1 farb. Taf. u. 45 Abb. Nr. 310.

Pflanzenmorphologie. Morphologie u. Organographie d. Pflanzen von Prof. Dr. M. Nordhausen in Kiel. Mit 123 Abbildungen. Nr. 141.

Pflanzenphysiologie von Dr. Adolf Hansen, Prof. an der Universität Gießen. Mit 43 Abbild. Nr. 591.

Pflanzenreichs, Die Stämme des, von Privatdoz. Dr. Rob. Pilger, Kustos am Kgl. Botan. Garten in Berlin-Dahlem. Mit 22 Abb. Nr. 485.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstak. Eisenach. Mit 50 Abb. Nr. 158

Pflanzenzellenlehre. Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. H. Miehe in Leipzig. Mit 79 Abbildungen. Nr. 556.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assist. a. Botan. Institut d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Pharmazeutische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 4 Bändchen. Nr. 543/44, 588, 682.

Philologie, Geschichte d. klassischen, v. Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. a. d. Univ. Münster in Westf. Nr. 367.

Philosophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentscher, Professor an der Universität Bonn. Nr. 281.

Philosophie, Geschichte d., IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. B. Bauch, Professor an der Universität Jena. Nr. 394.

— — **V: Immanuel Kant** von Dr. Bruno Bauch, Professor an d. Universität Jena. Nr. 536.

— **VI: Die Philosophie im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts** von Arthur Drews, Prof. der Philosophie an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 571.

— **VII: Die Philosophie im zweiten Drittel des 19. Jahrhunderts** von Arthur Drews, Prof. der Philosophie an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 709.

— **Hauptprobleme der,** v. Dr. Georg Simmel, Professor an der Universitat Berlin. Nr. 500.

— **Psychologie und Logik** zur Einf. in d. Philosophie von Prof. Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie von Professor Dr. Hans Dock in Mähr.-Weißkirchen. Mit 59 Abbildgn. Nr. 699.

Photographie, Die. Von H. Keßler, Prof. an d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 3 Taf. und 42 Abbild. Nr. 94.

Physik, Theoretische, von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik a. d. Techn. Hochschule i. Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 24 Abb. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht u. Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Mit 33 Abb. Nr. 78.

— — IV. Teil: Elektromagnet. Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Fig. Nr. 374.

Physik, Geschichte, der, von Prof. A. Kistner in Wertheim a. M. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

Physik, Geschichte, der, von Prof. A. Kistner in Wertheim a. M. II: Die Physik von Newton bis z. Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sackur, beide an der Univ. Breslau. Nr. 445.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof. der Mathematik u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

— **Formelsammlung** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 65 Figuren. Nr. 136.

— **Messungsmethoden** von Dr. Wilh. Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

— **Tabellen** v. Dr. A. Leick, Oberlehrer an der Comeniusschule zu Berlin-Schöneberg. Nr. 650.

Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. **I:** Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — **II:** Dissimilation. Mit 1 Taf. Nr. 241.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule in München. Mit 37 Abbildungen. Nr. 26.

Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerh. Schott, Abteilungsvorst. b. d. Deutsch. Seewarte in Hamburg. M. 39 Abb. im Text u. 8 Taf. Nr. 112.

Pilze, Die. Eine Einführung in die Kenntnis ihrer Formenreihen von Prof. Dr. G. Lindau in Berlin. Mit 10 Figurengruppen i. Text. Nr. 574.

Pionierdienst, Der, von Major Reichardt, Bataillonskomm. im Infant.-Regmt. „Kronprinz" (Nr. 4) in Chemnitz. Mit 150 Abb. Nr. 730.

Planetensystem. Astronomie (Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper) von A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. **I:** Das Planetensystem. Mit 33 Abbild. Nr. 11.

Plankton, Das, des Meeres von Dr. G. Stiasny in Wien. Mit 83 Abbildungen. Nr. 675.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Direktor des Bayer. Nationalmuseums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

Plastik, Die, seit Beginn des 19. Jahrhunderts von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern. Nr. 321.

Plattdeutsche Mundarten von Dr. Hub. Grimme, Professor an der Universität Münster i. W. Nr. 461.

Poetik, Deutsche, v. Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.

Polarlicht. Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht von Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Kgl. Preuß. Meteorolog. Instituts zu Potsdam. Mit 7 Taf. u. 16 Figuren. Nr. 175.

Polnische Geschichte von Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.

Pommern. Landeskunde von Pommern von Dr. W. Deecke, Prof. an der Universität Freiburg i. B. Mit 10 Abb. und Karten im Text und 1 Karte in Lithographie. Nr. 575.

Portugiesische Geschichte v. Dr. Gustav Diercks in Berlin-Steglitz. Nr. 622.

Portugiesische Literaturgeschichte von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule München. Nr. 213.

Posamentiererei Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation v. Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.

Postrecht von Dr. Alfred Wolcke, Postinspektor in Bonn. Nr. 425.

Preßluftwerkzeuge, Die, von Diplom-Ing. P Iltis, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg. Mit 82 Figuren. Nr. 493.

Preußische Geschichte. Brandenburgisch-Preußische Geschichte v. Prof. Dr. M. Thamm, Direktor d. Kaiser Wilhelms-Gymnasiums in Montabaur. Nr. 600.

Preußisches Staatsrecht von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univ. Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.

Psychiatrie, Forensische, von Professor Dr. W. Weygandt, Dir. der Irrenanstalt Friedrichsberg in Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 und 411.

Psychologie und Logik zur Einführung in d. Philosophie v. Prof. Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Psychophysik, Grundriß der, v. Prof. Dr. G. F. Lipps in Zürich. Mit 3 Figuren. Nr. 98.

Pumpen, Druckwasser- und Druckluft-Anlagen. Ein kurzer Überblick von Dipl.-Ing. Rudolf Vogdt, Regierungsbaumeister a. D. in Aachen. Mit 87 Abbildungen. Nr. 290.

Quellenkunde d. deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Universität Tübingen. 1. Band. Nr. 279.

Radioaktivität von Dipl.-Ing. Wilh. Frommel. Mit 21 Abb. Nr. 317.

Rechnen, Das, in der Technik u. seine Hilfsmittel (Rechenschieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ing. Joh. Eug. Mayer in Freiburg i. Br. Mit 30 Abbild. Nr. 405.

— **Kaufmännisches,** von Professor Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139, 140, 187.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuchs. Erstes Buch: Allg. Teil. I: Einleitung — Lehre v. d. Personen u. v. d. Sachen v. Dr. P. Oertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 447.

— — II: Erwerb u. Verlust, Geltendmachung u. Schutz der Rechte von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 448.

— Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.

— — II Abt.: Die einzelnen Schuldverhältnisse v. Dr. Paul Oertmann, Prof. an der Universitat Erlangen. Nr. 324.

— Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. I: Allgem. Lehren. Besitz und Eigentum. Nr. 480.

— — II: Begrenzte Rechte. Nr. 481.

— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Professor an der Universität Göttingen. Nr. 305.

— Fünftes Buch: Erbrecht von Dr. Wilhelm von Blume, ord. Prof. der Rechte an der Universität Tübingen. I. Abteilung: Einleitung. — Die Grundlagen des Erbrechts. Nr 659.

— — II. Abteilung: Die Nachlaßbeteiligten. Mit 23 Figuren. Nr. 660.

Russische Literatur von Dr. Erich Boehme, Lektor a. d. Handelshochschule Berlin. I. Teil: Auswahl moderner Prosa u. Poesie mit ausführlichen Anmerkungen u. Akzentbezeichnung. Nr. 403.
— — II. Teil: Всеволодъ Гаршинъ, Разсказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnungen. Nr. 404.
Russische Literaturgeschichte von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.
Russisches Vokabelbuch, Kleines, von Dr. Erich Boehme, Lektor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 475.
Russisches Wörterbuch. Deutsch-russisches kaufmännisches Wörterbuch von Michael Kulhánek in Dresden. Nr. 717.
Ruthenische Grammatik von Dr. Stephan von Smal-Stockyj, o. ö. Prof. an d. Univ. Czernowitz. Nr. 680.
Ruthenisch-deutsches Gesprächsbuch von Dr. Stephan von Smal-Stockyj, o. ö. Prof. an d. Univ. Czernowitz. Nr. 681.
Sachenrecht. Recht d. Bürgerl. Gesetzbuches. Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat i. Dresden. I: Allgemeine Lehren. Besitz u. Eigentum,
— — **II:** Begrenzte Rechte. Nr. 480. 481.
Sachs, Hans. Ausgewählt u. erläut. v. Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.
Sachsen. Sächsische Geschichte v. Prof. Otto Kaemmel, Rektor d. Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
— **Landeskunde des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abb. u. 1 Karte. Nr. 258.
Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.
Schaltapparate siehe: Elektrische Schaltapparate.
Schattenkonstruktionen von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Figuren. Nr. 236.
Schleswig-Holstein. Landeskunde von Schleswig-Holstein, Helgoland u. der freien und Hansestadt Hamburg von Dr. Paul Hambruch, Abteilungsvorsteher am Museum für Völkerkunde in Hamburg. Mit Abb., Plänen, Profilen und 1 Karte in Lithographie. Nr. 563.
Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart, Die Entwicklung der, von Korvettenkapitän Huning. Mit Abbild. und Tabellen. Nr. 606.
Schleusenbau. Kanal- u. Schleusenbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abbildungen. Nr. 585.
Schmalspurbahnen (Klein-, Arbeits- u. Feldbahnen) v. Dipl.-Ing. Aug. Boshart in Nürnberg. Mit 99 Abbildungen. Nr. 524.
Schmarotzer und Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde von Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univ. Graz. Mit 67 Abb. Nr. 151.
Schreiner-Arbeiten. Tischler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Fig. auf 75 Tafeln. Nr. 502.
Schuldrecht. Recht des Bürgerl. Gesetzbuches. Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 323.
— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse von Dr. Paul Oertmann, Professor a. d. Universität Erlangen. Nr. 324.
Schule, die deutsche, im Auslande von Hans Amrhein, Seminar-Oberlehrer in Rheydt. Nr. 259.
Schulhaus. Die Baukunst des Schulhauses von Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein in Darmstadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abbild. II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbild. Nr. 443 und 444.
Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.
Schweiß- und Schneidverfahren, Das autogene, von Ingenieur Hans Niese in Kiel. Mit 30 Fig. Nr. 499.
Schweiz. Schweizerische Geschichte von Dr. K. Dändliker, Professor an der Universität Zürich. Nr. 188.
— **Landeskunde der Schweiz** von Prof. Dr. H. Walser in Bern. Mit 16 Abb. und 1 Karte. Nr. 398.

Schwimmanstalten. Öffentl. **Bade- und Schwimmanstalten** von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

Seemacht, Die, in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Professor an der Universität Berlin. Nr. 370.

Seerecht, Das deutsche, von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. **I:** Allgemeine Lehren: Personen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.

— — **II:** Die einzelnen seerechtlichen Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts und außervertragliche Haftung. Nr. 387.

Seifenfabrikation, Die, die Seifenanalyse und d. Kerzenfabrikation v. Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Öle II.) Mit 25 Abbildgn. Nr. 336.

Semitische Sprachwissenschaft von Dr. C. Brockelmann, Professor an der Univers. Königsberg. Nr. 291.

Serbokroatische Grammatik von Dr. Vladimir Ćorović, Bibliothekar des bosn.-herzegow. Landesmuseums in Sarajevo (Bosnien). Nr. 638.

Serbokroatisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Vladimir Ćorović, Bibliothekar des bosn.-herzegow. Landesmuseums i. Sarajevo (Bosn.). Nr. 639.

Serbokroatisch-deutsches Gesprächsbuch von Dr. Vladimir Ćorović, Bibliothekar des bosn.-herzegow. Landesmuseums i. Sarajevo (Bosn.). Nr. 640.

Silikate. Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. **I:** Glas u. keramische Industrie. M. 12 Taf. Nr. 233.

— — **II:** Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgeg. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.

Skandinavien, Landeskunde von, (Schweden, Norwegen u. Dänemark) von Heinrich Kerp, Kreisschulinspektor in Kreuzburg. Mit 11 Abb. und 1 Karte. Nr. 202.

Slavische Literaturgeschichte v. Dr. J. Karásek in Wien. **I:** Ältere Literat. bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— — **II:** Das 19. Jahrh. Nr. 278.

Soziale Frage. Die Entwicklung der sozialen Frage von Professor Dr. Ferdin. Tönnies. Nr. 353.

Sozialversicherung von Prof. Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Spalt- und Schleimpilze. Eine Einführung in ihre Kenntnis von Prof. Dr. Gustav Lindau, Kustos am Kgl. Botanischen Museum und Privatdozent der Botanik an der Univ. Berlin. Mit 11 Abb. Nr. 642.

Spanien. Spanische Geschichte von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.

— **Landeskunde der Iberischen Halbinsel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

Spanische Handelskorrespondenz von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.

Spanische Literaturgeschichte v. Dr. Rud. Beer, Wien. I. II. Nr. 167, 168.

Speicher, Industrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf **II:** Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.

Spinnerei. Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.

Spitzenfabrikation. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikat. u. Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.

Sportanlagen von Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt **in** Darmstadt. **I.** Mit 78 Abbildungen. Nr. 684.

Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule u. an der Technischen Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Staatslehre, Allgemeine, von Dr. Hermann Rehm, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Nr. 358.

Staatsrecht, Allgemeines, von Dr. Julius Hatschek, Prof. d. Rechte an der Universität Göttingen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.

Staatsrecht, Preußisches, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. a. d. Universität Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.

Stadtstraßenbau von Dr.-Ing. Georg Klose in Berlin. Mit 50 Abb. Nr. 740.

Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. M. 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.

Statik von W. Hauber, Dipl.-Ing. I. Teil: **Die Grundlehren der Statik starrer Körper.** Mit 82 Fig. Nr. 178.

— — II. Teil: **Angewandte Statik.** Mit 61 Figuren. Nr. 179.

— **Graphische,** mit besond. Berücksichtig. der Einflußlinien von Kgl. Oberlehrer Dipl.-Ing. Otto Henkel in Rendsburg. 2 Teile. Mit 207 Fig. Nr. 603, 695.

Steinhauerarbeiten. Maurer- und Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.

Stellwerke. Die Kraftstellwerke der Eisenbahnen von S. Scheibner, Kgl. Oberbaurat a. D. in Berlin. 2 Bändchen. Mit 72 Abbild. Nr. 689/90.

— **Die mechanischen Stellwerke der Eisenbahnen** von S. Scheibner, Kgl. Oberbaurat a. D. in Berlin. 2 Bändchen. Mit 79 Abbild. Nr. 674 u. 688.

Stenographie. Geschichte der Stenographie von Dr. Arthur Mentz in Königsberg i. Pr. Nr. 501.

Stenographie n. d. System v. F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.

— **Die Redeschrift des Gabelsbergerschen Systems** von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.

Stenographie. Lehrbuch d. Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang von Professor Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenkorps in Lichterfelde. Nr. 86.

Stenographie. Redeschrift. Lehrbuch d. Redeschrift d. Einh. Stolze-Schrey nebst Kürzungsbeisp., Lesestücken, Schlüssel und einer Anleitung zur Steigerung der stenographischen Fertigkeit von Heinrich Dröse, amtl. bad. Landtagsstenograph in Karlsruhe (B.). Nr. 494.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Prof. an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 66 Figuren. Nr. 97.

Sternsystem. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univers. Kiel. II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.

Steuersysteme des Auslandes, Die, v. Geh. Oberfinanzrat O. Schwarz in Berlin. Nr. 426.

Stilkunde v. Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbild. u. 195 Textillustrationen. Nr. 80.

Stöchiometrische Aufgabensammlung von Dr. Wilh. Bahrdt, Oberl. an d. Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit den Resultaten. Nr. 452.

Straßenbahnen von Dipl.-Ing. Aug. Boshart in Nürnberg. Mit 72 Abbildungen. Nr. 559.

Strategie von Löffler, Major im Kgl. Sächs. Kriegsmin. i. Dresd Nr. 505.

Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen v. Jos. Herzog, Dipl.-Elektroing. in Budapest u. Clarence Feldmann, Prof. d. Elektotechnik in Delft. Mit 68 Abb. Nr 456.

Südamerika. Geschichte Südamerikas von Dr. Hermann Lufft I: Das spanische Südamerika (Chile, Argentinien und die kleineren Staaten). Nr. 632.

— — II: Das portugiesische Südamerika (Brasilien). Nr. 672.

Südseegebiet. Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou v. Prof. Dr. K. Dove. M. 16 Taf. u. 1 lith. Karte. Nr. 520.

Talmud. Die Entstehung des Talmuds von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 479.

Talmudproben von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 583.

Tierreich, Das, VI: Die wirbellosen Tiere von Dr. Ludw. Böhmig, Prof. d. Zool. a. d. Univ. Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.

— — II: Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter und Manteltiere. M. 97 Fig. Nr. 440.

Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle, von Dr. Paul Rippert in Essen. Nr. 228.

Tischler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Figuren auf 75 Tafeln. Nr. 502.

Togo. Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithographischen Karte. Nr. 441.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Prof. Dr. Gerh. Hessenberg in Breslau. Mit 70 Fig. Nr. 99.

Tropenhygiene v. Medizinalrat Prof. Dr. Nocht, Direktor des Instituts für Schiffs- und Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Trust. Kartell und Trust von Dr. S. Tschierschky in Düsseldorf. Nr. 522.

Tschechisch-deutsches Gesprächsbuch v. Dr. Emil Smetánka, ao. Prof. an der böhm. Univ. Prag. Nr. 722.

Tschechische Grammatik von Dr. Emil Smetánka, ao. Prof. an der böhm. Univ. Prag. Nr. 721.

Tschechisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Emil Smetánka, ao. Prof. an der böhm. Univ. Prag. Nr. 723.

Turnen, Das deutsche, v. Dr. Rudolf Gasch, Prof. a. König Georg-Gymn. in Dresden. Mit 87 Abb. Nr. 628.

Turnkunst, Geschichte der, von Dr. Rudolf Gasch, Prof. a. König Georg-Gymnasium in Dresden. Mit 17 Abbildungen. Nr. 504.

Ungarn. Landeskunde von Österreich-Ungarn von Dr. Alfred Grund, Prof. an der Universität Prag. Mit 10 Textillustr. u. 1 Karte. Nr. 244.

Ungarisch-deutsches Gesprächsbuch von Dr. Wilhelm Tolnai, Prof. an der staatlich. Bürgerschullehrerinnen-Bildungsanst. in Budapest. Nr. 739.

Ungarische Literatur, Geschichte der, von Prof. Dr. Ludwig Katona und Dr. Franz Szinnyei, beide an der Universität Budapest. Nr. 550.

Ungarische Sprachlehre v. Dr. Josef Szinnyei, o. ö. Prof. an der Universität Budapest. Nr. 595.

Ungarisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Wilhelm Tolnai, Professor an der staatlichen Bürgerschullehrerinnen-Bildungsanstalt in Budapest. Nr. 694.

Unterrichtswesen. Geschichte d. deutschen Unterrichtswesens von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende d. 18. Jahrh. Nr. 275.

— — II. Teil: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

— **Das höhere und mittlere Unterrichtswesen in Deutschland** von Schulrat Prof. Dr. Jakob Wychgram in Lübeck. Nr. 644.

Untersuchungsmethoden, Agrikulturchemische, von Professor Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 470.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moritz Hoernes, Professor an der Univ. Wien. Mit 85 Abb. Nr. 42.

Urheberrecht, Das, an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken d. bildenden Künste u. Photographie v. Staatsanw. Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

Urheberrecht, Das deutsche, an literarischen, künstlerischen u. gewerbl. Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg Nr. 263.

Urzeit. Kultur der Urzeit von Dr. Moritz Hoernes, o. ö. Prof. an der Univ. Wien. 3 Bändch. I: Steinzeit. Mit 40 Bildergrupp. Nr. 564

— — II: Bronzezeit. Mit 36 Bildergruppen. Nr. 565.

— — III: Eisenzeit. Mit 35 Bildergruppen. Nr. 566.

Warenzeichenrecht, Das. Nach dem Gesetz z. Schutz d. Warenbezeichnungen v. 12. Mai 1894. Von Reg.-Rat J. Neuberg, Mitglied des Kais. Patentamts zu Berlin. Nr. 360.

Wärme. Theoretische Physik II. T.: Licht u. Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien. Mit 47 Abbildgn. Nr. 77.

Wärmekraftmaschinen. Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- u. Kältemaschinen von M. Röttinger, Diplom-Ing. in Mannheim. Mit 73 Fig. Nr. 2.

Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik) v. K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ing. Mit 54 Fig. Nr. 242

Wäscherei. Textilindustrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Prof. an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Wasser, Das, und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe v. Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ing. in Saalfeld. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.

Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung v. Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorst. d. landwirtsch. Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Wasserinstallationen. Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen v. Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.

Wasserkraftanlagen von Th. Rümelin, Regierungsbaumeister a. D., Oberingenieur in Dresden. **I:** Beschreibung. Mit 66 Figuren. Nr. 665.

— — **II:** Gewinnung der Wasserkraft. Mit 35 Figuren. Nr. 666.

— — **III:** Bau und Betrieb. Mit 56 Figuren. Nr. 667.

Wasserturbinen, Die, von Dipl.-Ing. P. Holl in Berlin. **I:** Allgemeines. Die Freistrahlturbinen. Mit 113 Abbildungen. Nr. 541.

— — **II:** Die Überdruckturbinen. Die Wasserkraftanlagen. Mit 102 Abbild. Nr. 542.

Wasserversorgung der Ortschaften v. Dr.-Ing. Robert Weyrauch, Prof. an der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 85 Fig. Nr. 5.

Weberei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Wechselstromerzeuger von Ing. Karl Pichelmayer, Prof. an der k. k. Technischen Hochschule in Wien. Mit 40 Figuren. Nr. 547.

Wechselwesen, Das, v. Rechtsanw. Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

Wehrverfassung, Deutsche, von Geh. Kriegsrat Karl Endres, vortr. Rat i. Kriegsminist. i. München. Nr. 401.

Werkzeugmaschinen für Holzbearbeitung, Die, von Ing. Professor Hermann Wilda in Bremen. Mit 125 Abbildungen. Nr. 582.

Werkzeugmaschinen für Metallbearbeitung, Die, von Ing. Prof. Hermann Wilda in Bremen. **I:** Die Mechanismen der Werkzeugmaschinen. Die Drehbänke. Die Fräsmaschinen. Mit 319 Abb. Nr. 561.

— — **II:** Die Bohr- und Schleifmaschinen. Die Hobel-, Shaping- u. Stoßmaschinen. Die Sägen u. Scheren. Antrieb u. Kraftbedarf. Mit 206 Abbild. Nr. 562.

Westpreußen. Landeskunde der Provinz Westpreußen von Fritz Braun, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium in Graudenz. Mit 16 Tafeln, 7 Textkarten u. 1 lith. Karte. Nr. 570.

Wettbewerb, Der unlautere, von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. **I:** Generalklausel, Reklameauswüchse, Ausverkaufswesen, Angestelltenbestechung. Nr. 339.

— — **II:** Kreditschädigung, Firmen- und Namenmißbrauch, Verrat von Geheimnissen, Ausländerschutz. Nr. 535.

Wirbellose Tiere. Das Tierreich VI: Die wirbellosen Tiere von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. d. Zoologie an der Univ. Graz. **I:** Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen u. Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.

— — **II:** Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter u. Manteltiere. Mit 97 Fig. Nr. 440.

Wirkerei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Wirtschaftlichen Verbände, Die, von Dr. Leo Müffelmann in Rostock. Nr. 586.

Wirtschaftspflege. Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magistratsass. in Berlin. Nr. 534.

Wohnungsfrage, Die, v. Dr. L. Pohle, Prof. der Staatswissenschaften zu Frankfurt a. M. I: Das Wohnungswesen i. d. modern. Stadt. Nr. 495.

— — II: Die städtische Wohnungs- und Bodenpolitik. Nr. 496.

Wolfram von Eschenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos m. Anmerkungen u. Wörterbuch v. Dr K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskolleg. zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— Deutsches, von Dr. Richard Loewe in Berlin. Nr. 64.

— Technisches, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.

— — II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396.

— — III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453.

— — IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.

Württemberg. Württembergische Geschichte v. Dr. Karl Weller, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 462.

Württemberg. Landeskunde des Königreichs Württemberg von Dr. K. Hassert, Prof. d. Geographie a. d. Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern u. 1 Karte. Nr. 157.

Zeichenschule von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 200 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster. Mit 290 Fig. u. 23 Taf. im Text. Nr. 58.

Zeitungswesen, Das deutsche, von Dr. R. Brunhuber, Köln a. Rh. Nr. 400.

Zeitungswesen, Das moderne, (Syst. d. Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

Zeitungswesen, Allgemeine Geschichte des, von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. H. Miehe in Leipzig. Mit 79 Abbild. Nr. 556.

Zentral-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, Direktor der Königl. Baugewerkschule in Münster i. Westf. Mit 132 Fig. Nr. 57.

Zimmerarbeiten von Carl Opitz, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. I: Allgemeines, Balkenlagen, Zwischendecken und Deckenbildungen, hölz. Fußböden, Fachwerkswände, Hänge- und Sprengwerke. Mit 169 Abbildungen. Nr. 489.

— — II: Dächer, Wandbekleidungen, Simsschalungen, Block-, Bohlen- und Bretterwände, Zäune, Türen. Tore, Tribünen und Baugerüste, Mit 167 Abbildungen. Nr. 490.

Zivilprozeßrecht, Deutsches, von Prof. Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Zoologie, Geschichte der, von Prof. Dr. Rud. Burckhardt. Nr. 357.

Zündwaren von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorst. des Städt. Chem. Laboratoriums Stuttgart. Nr. 109.

Zwangsversteigerung, Die, und die Zwangsverwaltung von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. Nr. 523.

Zwirnerei. Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königlichen Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Fig. Nr. 184.

Weitere Bände sind in Vorbereitung

Allgemeine Verkehrsgeographie.

Von Prof. Dr. Kurt Hassert. Mit 12 Karten und graphischen Darstellungen. Brosch. M. 10.—, in Halbfranz geb. M. 12.—.

Geschichte der Aufteilung und Kolonisation Afrikas seit dem Zeitalter der Entdeckungen.

Von Prof. Dr. Paul Darmstaedter. Erster Band: 1415—1870. Brosch. M. 7.50, in Halbfranz geb. M. 9.50.

Goethes Wilhelm Meister und die Entwicklung des modernen Lebensideals.

Von Professor Max Wundt. Brosch. M. 8.—, geb. M. 8.80.

Grundriß einer Philosophie des Schaffens als Kulturphilosophie.

Einführung in die Philosophie als Weltanschauungslehre. Von Privatdozent Dr. Otto Braun. Brosch. M. 4.50, geb. M. 5.—.

Das Gefühl.

Eine psychologische Untersuchung Von Professor Dr Theobald Ziegler. 5. durchges. u. verb. Aufl. Brosch. M. 4.20, geb. M. 5.20.

Historik.

Ein Organon geschichtlichen Denkens und Forschens. Von Privatdozent Dr. Ludwig Rieß. Erster Band. Brosch. M. 7.50, in Halbfranz geb. M. 9.50.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H. in Berlin W 10 u. Leipzig

Volkspsychologie

Das Seelenleben im Spiegel der Sprache

Von Dr. Rudolf Kleinpaul.

Preis: broschiert M. 4.80, gebunden M. 5.50.

Der Verfasser beginnt in der Einleitung des Werkes mit dem Nachweis, wie überhaupt eine Psyche in die Welt gekommen und den Naturkindern der Begriff eines inwendigen Menschen aufgegangen ist und schildert dann in großen Zügen die Schicksale und die Hauptbegebenheiten, die eine müßige Menge diesem inwendigen Menschen zuschreibt: sein romanhaftes Gemütsleben, sein geplagtes Alltagsleben, sein Naturleben, seine Erfahrungswissenschaft, sein Traumleben, seine Ekstasen und sein Leben nach dem Tode. Er entwickelt die sensualistische Erkenntnistheorie des Volkes. Mit beispielloser Kühnheit wird im Verfolg seiner Anschauungen der Vorhang von der geheimen Werkstätte des Geistes weggezogen und dem philosophischen Ich auf den Grund gegangen. Zum erstenmal und mit überlegener Kunst wurde hier an die Grundlagen des psychologischen Wissens selbst gerührt und von dem hergebrachten Schematismus an die Worte und ihren sichtbaren Ursprung appelliert. Auf die einfachsten Begriffe der Seelenlehre, der Logik und der Moral fällt dabei plötzlich und überraschend ein helles Schlaglicht — man sieht den Frieden und den Kummer, wie er gewesen ist, und den Schmerz, wie in ein Laokoon gefuhlt hat, man sieht die Geduld tragen, den Verstand stehen und die Intelligenz lesen — der Grund, der zureichende Grund, das Wissen selbst erscheint in seiner wahren, unverfälschten und unverkünstelten Gestalt, eine Umwälzung der gesamten philosophischen Terminologie tritt ein, und dennoch ist es keine neue Phantasie, sondern nur eine Wiederherstellung des Alten, Eingebürgerten und männiglich Bekannten.

GJG
1785