

Sammlung Götschen

**Algebraische
Kurven**

Von

Eugen Beutel

Erster Teil

Kurvendiskussion

Mit 57 Figuren im Text

Sammlung

Götschen

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen

Jede Nummer in eleg. Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Götschen“ ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Ein ausführliches Verzeichnis der bisher erschienenen Nummern befindet sich am Schluß dieses Bändchens

Mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden 80 Pfennig.

- Geschichte der Mathematik** von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.
- Arithmetik u. Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.
- Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra** von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.
- Ebene Geometrie** m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41.
- Darstellende Geometrie I** mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haubner. Nr. 142.
- Ebene und sphärische Trigonometrie** mit 70 Figuren von Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.
- Stereometrie** mit 44 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.
- Niedere Analysis** m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.
- Vierstellige Logarithmen** von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigen Druck. Nr. 81.
- Analytische Geometrie der Ebene** mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene** mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.
- Analytische Geometrie des Raumes** mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes** mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.
- Höhere Analysis I: Differentialrechnung** mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.
- Höhere Analysis II: Integralrechnung** mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.
- Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** m. 46 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 146.
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung** m. 50 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 147.
- Projektive Geometrie** in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Professor Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.
- Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik** mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.
- Versicherungsmathematik** v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.
- Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate** m. 15 Fig. u. 2 Taf. v. Prof. Wilh. Weitbrecht. Nr. 302.
- Vektoranalysis** mit 11 Figuren von Privatdoz. Dr. Siegf. Valentiner. Nr. 354.
- Statik I: Die Grundlehren der Statik starrer Körper** mit 82 Figuren von Diplom-Ingenieur W. Hauber. Nr. 178.
- Statik II: Angewandte Statik** mit 61 Figuren von Diplom-Ingenieur W. Hauber. Nr. 179.
- Astronomische Geographie** mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.
- Astronomie** mit 36 Abbildungen und einer Karte von Professor Dr. Walter F. Wislicenus. Nr. 11.
- Astrophysik** mit 11 Abb. von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Nr. 91.
- Geodäsie** mit 66 Abbildungen von Prof. Dr. C. Reinherz. Nr. 102.
- Nautik.** Kurzer Abriss des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schifffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.
- Geometrisches Zeichnen** mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.

D 1621
Sammlung Göschen

Algebraische Kurven

Von

Eugen Beutel

Oberreallehrer in Vaihingen-Enz

Erster Teil

Kurvendiskussion

Prof. W. Heine

Mit 57 Figuren im Text



Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1909

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Archiwum



355 .

abc. 355 / 46

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung.	
Überblick über die Geschichte der algebraischen Kurven.	
1. Vom Altertum bis Descartes (1637) . . .	7
2. Von Descartes bis zur Gegenwart . . .	9
§ 1. Die algebraischen Kurven im allgemeinen . . .	16
§ 2. Prinzip der Homogenität	22
§ 3. Signierungsprinzip	26
§ 4. Prinzip der linearen Kombination	31
§ 5. Singularitäten	35
§ 6. Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnung . . .	42
§ 7. Kurvendiskussion mittels des Signierungsprinzips und des Prinzips der linearen Kombination . . .	55
§ 8. Weitere Hilfsmittel der Kurvendiskussion . . .	68
I. Symmetrieverhältnisse	68
II. Schnittpunkte mit den Achsen und den Medianen	69
III. Berechnung weiterer Kurvenpunkte	69
IV. Numerische Auflösung der Gleichung.	
1. Algebraische Auflösung	71
2. Graphisch-mechanische Auflösung	72
a) Gleichungen 3. Grads	72
b) Gleichungen 4. Grads	75
c) Gleichungen höheren Grads	77
§ 9. Verhalten einer Kurve im Nullpunkt; mehrfache Kurvenpunkte	79
§ 10. Verhalten einer Kurve im Unendlichen; Asymptoten.	
Vorbemerkung	85
1. Die geradlinigen Asymptoten	87
Berechnung der Asymptoten	89
2. Krummlinige Asymptoten	93
3. Grad der asymptotischen Annäherung	95

	Seite
§ 11. Berührungssätze des Prinzips der linearen Kombination	97
Kürzeste Berechnung der Asymptoten	99
§ 12. Hilfsmittel der Differentialrechnung	109
§ 13. Das analytische Dreieck	117
§ 14. Reihenentwicklung für einen gegebenen Kurvenpunkt	122
§ 15. Spezielle algebraische Kurven	129
Weitere Übungsbeispiele	134
§ 16. Umgekehrte Kurvendiskussion	135
Beispiele	138
Register	146

Literaturverzeichnis*).

Binnen Jahresfrist soll der zweite Teil des vorliegenden Bandes erscheinen, der sich mehr mit der Theorie der algebraischen Kurven, sowie in gedrängter Weise mit einem Überblick über die Kurven 3. und 4. Ordnung befassen wird.

Für diejenigen Leser, die sich eingehender mit den Problemen der algebraischen Kurven abgeben möchten, ist im folgenden eine Anzahl größerer Werke aufgeführt.

1. Berzolari, L., Allgemeine Theorie der höheren algebraischen Kurven. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band III, 2. Teil, C. 4. Leipzig 1906. M. 5,60. (Einzeln nicht käuflich.)
2. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie. I. Band, Teil IV und V. 1. Aufl. Leipzig 1876; 2. Aufl. im Erscheinen.
3. Ebner, F., Leitfaden der technisch wichtigsten Kurven. Leipzig 1906. M. 4,—.
4. Haas, A., Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven. Stuttgart 1894. (Kleyers Enzyklopädie, Bd. 53.) M. 7,—.
5. Hagen, J., Synopsis der höheren Mathematik. 2. Band. Geometrie der algebraischen Gebilde. Berlin 1894. M. 30,—.
6. Loria, G., Spezielle algebraische und transzendente Kurven, deutsch von Schütte. Leipzig 1902. M. 28,—.
7. Pascal, E., Repertorium der höheren Mathematik, deutsch von A. Schepp. 2. Teil. Leipzig 1902. M. 12,—. 2. Aufl. im Erscheinen.
8. Reuschle, C., Praxis der Kurvendiskussion. Stuttgart 1886. M. 3,80.
9. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. 2. Aufl. Leipzig 1882. M. 12,20.

*) Im Text bei Verweisungen abgekürzt mit L. V.

10. Sauerbeck, H., Einleitung in die analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Nach den Methoden von J. P. de Gua. Leipzig 1902. M. 8,—.
11. Simon, M., Analytische Geometrie der Ebene. (Sammlung Schubert, Bd. VIII.) Leipzig 1900. M. 6,—.
12. Teixeira, G., Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. Tome I. Coïmbre 1908 (Paris, Gauthier-Villars). Fr. 20,—.
13. Wieleitner, H., Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. (Sammlung Schubert, Bd. XLIII.) Leipzig 1905. M. 10,—.
14. Wieleitner, H., Spezielle ebene Kurven. (Sammlung Schubert, Bd. LVI.) Leipzig 1908. M. 12,—.

Auf weitere hier nicht aufgeführte Werke ist im Text verwiesen. Die unter 1, 5, 7 genannten Werke bringen nur Definitionen, Erklärungen und Sätze ohne die dazugehörigen Entwicklungen; bis auf den neuesten Stand der Wissenschaft fortschreitend ist dies geschehen in dem ausgezeichneten Sammelreferat von Berzolari (1).

Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Kurven von Descartes bis zur Neuzeit ist in erschöpfender Weise behandelt worden von Brill und Noether: „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit.“ Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 3. Band. Berlin 1894.

Eine große Anzahl von Abhandlungen über unser Gebiet ist erschienen in den mathematischen Zeitschriften, hauptsächlich in den öfters erwähnten „Mathematischen Annalen“, sowie als Programmschriften und Dissertationen.

Sämtliche literarische Veröffentlichungen sind, mit kurzer Inhaltsangabe, aufgeführt in der Zeitschrift: „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“, wo sie inhaltlich nach verschiedenen Gruppen geordnet sind.

Für den Zeitabschnitt von 1890—1904 hat Wieleitner, Leipzig (Göschen) 1905, eine Bibliographie der höheren algebraischen Kurven herausgegeben (M. 1,50).

Einleitung.

Überblick über die Geschichte der algebraischen Kurven*).

1. Vom Altertum bis Descartes (1637).

In diesem Zeitraum ist die Geschichte der algebraischen Kurven in der Hauptsache eine Geschichte der Kegelschnitte. Die Entdeckung der C^2 **) verdanken wir dem Schüler Platos, Menächmus (340 v. Chr.), der durch die Lösung des delischen Problems (der Würfelverdopplung) auf diese Kurven geführt wurde. Ist nämlich x die gesuchte Würfelkante, so folgt aus $x^3 = 2a^3$ sofort $x = a\sqrt[3]{2}$. Die Aufgabe, diesen irrationalen Ausdruck geometrisch, d. h. mit alleiniger Anwendung von Zirkel und Lineal zu konstruieren, erkannten die griechischen Geometer bald als unlösbar und suchten deshalb dem Problem durch Näherungskonstruktionen beizu-

*) Vgl. hierüber: *Günther*, Geschichte der Mathematik. Leipzig 1908 (Göschen; erschienen ist bisher Teil I) und: *Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 4 Bände. Leipzig 1907. (Teubner.) 3. Aufl.

**) Wir gebrauchen C^2 als Abkürzung für „Kegelschnitt“, bzw. „Kurve 2. Ordnung“; analog C^3 für „Kurve 3. Ordnung“, usf.; C^n für „Kurve n ter Ordnung“. Diese Abkürzungen C^2 , C^3 , C^n an Stelle von C_2 , C_3 , C_n wurden deshalb gewählt, weil sie sich auch in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften finden in Band III₂. C. 4: „Berzolari, Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven“.

kommen. Aus der Proportion

$$x : 2a = a^2 : x^2$$

läßt sich das simultane System von Gleichungen ableiten:

$$\left\{ \begin{array}{l} ay = x^2 \\ xy = 2a^2 \end{array} \right\}.$$

Diese beiden Gleichungen stellen, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, zwei Kurven 2. Ordnung dar. Die Abszisse des Schnittpunkts beider Kurven (einer Parabel und einer gleichseitigen Hyperbel) gibt die gesuchte Würfelkante. Durch diese Näherungslösung wurde das Studium der obigen Kurven angeregt und Menächmus fand auch, daß diese Kurven erhalten werden als Schnittlinien einer Ebene mit einem geraden Kreiskegel von verschieden großem Öffnungswinkel. Wahrscheinlich kannte Menächmus auch schon die Asymptoten der Hyperbel. Bei Archimedes kommen sie in seiner Schrift *De conoidibus* (237 v. Chr.) unter dem Namen *αἱ ἔγγιστα* vor. Erst von Euklid (300 v. Chr.) wissen wir bestimmt, daß ihm die Asymptoten der Hyperbel bekannt waren. Der Name Asymptote stammt von Apollonius (225 v. Chr.).

Die drei berühmten Probleme des Altertums: die Würfelverdopplung, die Dreiteilung des Winkels und die Quadratur des Kreises, deren geometrische Lösung die hervorragendsten Mathematiker jener Zeit versuchten, erwiesen sich für die Entwicklung der Lehre von den algebraischen Kurven überaus fruchtbar. Diokles (um 200 v. Chr.) kam durch das delische Problem auf eine C^3 , die Kissoide, Nikomedes um dieselbe Zeit auf eine C^4 , die Konchoide oder Muschellinie. Das Problem der Dreiteilung des Winkels führte Hippias (420 v. Chr.) und das Problem der Kreisquadratur später Dinostratus,

den Bruder von Menächmus, auf die erste transzendente Kurve, die Quadratrix.

Das klassische Hauptwerk des Altertums auf diesem Gebiet sind die acht Bücher „Kegelschnitte“ des Apollonius von Pergä (200 v. Chr.), des „großen Mathematikers“, in denen alle bereits bekannten Eigenschaften dieser Kurven zusammengestellt und mit zahlreichen eigenen Entdeckungen zu einem Ganzen verarbeitet sind. Auch die heutigen Namen der Kegelschnitte: Ellipse, Parabel und Hyperbel rühren von ihm her. Wie Menächmus die Kegelschnitte als Schnittlinien einer Ebene mit Kegeln erhalten hatte, so kam Perseus (2. Jahrh. v. Chr.), ein sonst wenig bekannter Mathematiker, in Verfolgung dieses Verfahrens, Kurven durch Schnitte von Flächen mit Ebenen zu erzeugen, durch Schnitte eines Kreisrings oder Wulstes (auch Spire genannt) mit Ebenen parallel der Achse auf die spirischen Linien.

Römer und Inder haben auf unserem Gebiet fast nichts geleistet. Die Araber, die Erben der griechischen Mathematik, pflegten hauptsächlich die Algebra. Ihre geometrischen Leistungen blieben durchweg hinter denen ihrer griechischen Lehrmeister zurück. In jener geistesarmen Zeit des Mittelalters besteht ihr Hauptverdienst in der Überlieferung der Leistungen des Altertums durch ihre Übersetzungstätigkeit. Leider sind jedoch durch die Völkerwanderung, durch die vielen Kriege und den gewalttätigen Charakter des Mittelalters viele Werke der griechischen Geometer vernichtet worden, so daß uns in vielen Fällen nur noch deren Titel und Verfasser bekannt sind.

2. Von Descartes bis zur Gegenwart.

Eine vollständige Umwälzung erfuhr die Geometrie durch die Arbeiten von Fermat (1629, veröffentlicht

1660) und Descartes (1637). Indem sie die Algebra in den Dienst der Geometrie stellten, entstand die *analytische* oder *Koordinatengeometrie*, die mit einem Schlag auf unserem Gebiet der mathematischen Forschung eine ungeahnte Entwicklung bewirkte. Schon in den geometrischen Werken von Archimedes und Apollonius findet sich bei den Kegelschnitten eine Art von Parallelkoordinaten, aus Durchmesser und den dazu konjugierten parallelen Sehnen bestehend, wobei bereits unsere modernen Ausdrücke Abszisse und Ordinate gebraucht werden. Aber erst bei Descartes erscheint ein von der Figur unabhängiges Koordinatensystem und die heute gebräuchliche Bezeichnung der Koordinaten mit x und y . Descartes und seine Zeitgenossen haben sich auf zwei Koordinaten, also auf die ebenen Gebilde beschränkt; erst Parent 1700, Clairaut 1713 und Euler in seiner „*Introductio in analysin infinitorum*“ 1748 haben den Übergang auf die Darstellung räumlicher Gebilde mit drei Koordinaten gemacht. Der Name „Koordinaten“ stammt von Leibniz (*Acta Eruditorum* 1692).

Durch Descartes' analytische Geometrie war zugleich die Möglichkeit gegeben, die Theorie der algebraischen Kurven auszubilden. Jetzt erst war eine analytische Einteilung der Kurven nach dem Grad ihrer Gleichung möglich. Newtons Einteilung der Kurven nach der Zahl der Schnittpunkte mit einer Geraden, d. h. nach ihrer Ordnung, ist eine der ersten Anwendungen der analytischen Geometrie. Berühmt ist die Einteilung der C^3 von Newton in seiner „*Enumeratio linearum tertii ordinis*“ 1706, wobei er auf fünf Klassen kam, die sich als Projektionen von fünf Grundkurven ergaben. Newtons Untersuchungen wurden fortgesetzt und erweitert von Stirling (1692—1770) und Mac Laurin in seiner „*Geometria*

organica“ 1720. Letzterer studierte die algebraischen Kurven hauptsächlich in synthetischer Richtung. Descartes selbst verdanken wir die Entdeckung und verschiedene Sätze über Parabeln höherer Ordnung ($y^n = a^{n-1}x$), über einige transzendente Kurven (Roulette, Trochoide) und das nach ihm benannte Descartessche Blatt. Giles Personnier, nach seinem Geburtsort meist Roberval genannt (1602—75), ersann die nach ihm benannte Methode der Tangentenkonstruktion. René de Sluse (1622—85) untersuchte hauptsächlich die Perlkurven, deren allgemeine Gleichung lautet: $ay^n = (x \pm a)x^n$. Der Niederländer Huygens (1629—95) ist besonders durch seine Untersuchungen über Evoluten und Evolventen, sowie über die Zykloide bekannt. Überhaupt gab es in jener Zeit der Blüte der analytischen Geometrie kaum ein Problem, das nicht von mehreren der eben erwähnten, meist französischen Mathematikern in Angriff genommen wurde; ein ausgedehnter Briefwechsel verbreitete die Forschungsergebnisse — häufig in Form einer Aufgabe — unter den Fachgenossen.

Kaum hatten die Mathematiker die neuen Methoden der Koordinatengeometrie auf ihre Probleme angewandt, als schon ein neues, noch besseres Hilfsmittel zu deren Lösung geschaffen wurde, die *Differential- und Integralrechnung*, in der Hauptsache von Leibniz 1675 erfunden (veröffentlicht 1684), von dem auch die Bezeichnungen \int und dx herrühren. Er hat auch zuerst die Kurven in „algebraische“ und „transzendente“ unterschieden. Unabhängig von Leibniz kam Newton 1671 (veröffentlicht 1687) auf dieselbe neue Rechenmethode. Die Brüder Jakob und Johann Bernoulli (1655—1705; 1667—1748) wandten die neue Rechenweise der Differentialgeometrie auf die Kurvenlehre an, besonders auf die Isochronen. Johann

Bernoulli hat sich besonders mit der Lemniskate beschäftigt. Durch die Hilfsmittel der Infinitesimalrechnung konnte nun auch die Rektifikation der Kurven in einfachster Weise behandelt werden, ein Problem, dem das mathematische Rüstzeug der Geometer des Altertums nicht gewachsen war. Eine Unzahl von Sätzen über das Ziehen von Tangenten und Krümmungskreisen, die Längenbestimmung von Kurvenbogen und die Flächenberechnung wurde aufgestellt und bewiesen. Durch den Übergang von Punktkoordinaten zu Polarkoordinaten wurde eine Reihe von neuen Kurven entdeckt. Diese Methode, aus bekannten Kurven durch Koordinatenverwandlung neue Kurven abzuleiten, hat in ihrer Allgemeinheit zuerst Varignon 1722 angewandt: er ersetzt die Punktkoordinaten x und y der Kurvengleichung durch die Polarkoordinaten r und $l \cdot \varphi$, so daß aus der gegebenen Kurve $f(x, y) = 0$ die neue Kurve $f(r, l\varphi) = 0$ entsteht.

Als Begründer der *Kurvendiskussion* in analytischer Behandlungsweise kann de Gua angesehen werden. In seiner 1740 veröffentlichten Schrift „Usages de l'analyse de Descartes“ (L. V. 10.) hat er, angeregt durch Newtons „Enumeratio“, erstmals eine allgemeine *Theorie der algebraischen Kurven* entwickelt. Seine Verdienste um die Anwendung der Algebra auf die Geometrie gerieten jedoch fast bis in die Neuzeit hinein in Vergessenheit, weil er das Vorhandensein der von de l'Hôpital 1696 aufgefundenen Schnabelspitze bestritt. Auch hat de Gua die *Singularitäten* der Kurven 3., 4. und 5. Ordnung untersucht und die der beiden erstgenannten — abgesehen von der Schnabelspitze — vollständig behandelt.

Als weitere Versuche einer *Theorie der algebraischen Kurven* sind Eulers *Introductio* 1748 und Cramers „Introduction à l'analyse des lignes courbes“ 1750 zu be-

trachten. In beiden Werken spielte, ebenso wie bei Newton, die Gestalt der Kurven die Hauptrolle. Die ersten Andeutungen über *singuläre Punkte* finden wir in Newtons „Enumeratio“ und in Mac Laurins „Tractatus“ 1746. Fermat hatte schon 1638 den Wendepunkt behandelt. Cramer betrachtet bereits Doppelpunkte und Wendepunkte verschiedener Ordnung. Auch finden sich schon bei Newton die allgemeinen Begriffe von Durchmesser und Mittelpunkten für Kurven höherer Ordnung. Weitere höhere Singularitäten, insbesondere die Wendepunkte und Berührungspunkte höherer Ordnung (Flachpunkt, Spitzpunkt u. a.) finden sich bei Maupertuis 1729.

Nach einer mehr als 100 jährigen Zeit der Ruhe und des Stillstands auf diesem Gebiet der mathematischen Forschung blieb es dem 19. Jahrhundert vorbehalten, eine eigentliche Theorie der algebraischen Kurven zu schaffen. In der Form der *projektiven* oder *synthetischen Geometrie* taucht ein neuer Zweig der Geometrie auf. Im Gegensatz zur analytischen Geometrie ist sie an kein Koordinatensystem gebunden, auch bedarf sie nicht der Differentialgeometrie. Beim Ausbau dieser für das 19. Jahrhundert charakteristischen Wissenschaft kamen zwei ihrer Hauptvertreter fast gleichzeitig auf das fundamentale Prinzip, das für die Theorie der algebraischen Kurven von größter Bedeutung wurde, das *Prinzip der Dualität*, begründet von Gergonne 1819 und Poncelet 1824. Plücker, der in den Prioritätsstreit zwischen den beiden französischen Geometern über das Dualitätsprinzip hereinbezogen wurde, begründete es 1826 analytisch durch Einführung der nach ihm benannten Linienkoordinaten. Außer den bereits Genannten sind Möbius, Steiner, Staudt, Reye, Lindemann, Chasles und Cremona

die Hauptvertreter dieser neuen Richtung der Geometrie. Plücker schuf in seinen beiden Werken: „System der analytischen Geometrie“ 1835 und „Theorie der algebraischen Kurven“ 1839 durch Einführung des Prinzips der Homogenität und unter Benutzung seiner Linienkoordinaten die Grundlage für den Ausbau der Theorie der höheren algebraischen Kurven.

Riemann und Clebsch haben um die Mitte des vergangenen Jahrhunderts der Geometrie besonders die Theorie der Abelschen Funktionen nutzbar gemacht. Bei dieser projektiven und mehr abstrakten Behandlung der geometrischen Gebilde wurde auf Figuren wenig Wert gelegt, die deshalb auch in den Werken jener Zeit größtenteils fehlen.

Gegenwärtig sind es hauptsächlich die *höheren Singularitäten*, die im Vordergrund des Interesses stehen. Außer den bereits Genannten haben namentlich Hesse, Salmon*) und Cayley sich eingehend damit beschäftigt und bis in die neueste Zeit herein hat eine Reihe der bedeutendsten Mathematiker, wie Aronhold, Brill, Clebsch, Darboux, Geiser, Gordan, Halphen, Klein, Nöther, Smith, Sylvester, Zeuthen u. a., wesentlich zur Entwicklung dieses Teils der Geometrie der algebraischen Kurven beigetragen. Hierbei ist auch die sinnliche Darstellung durch Figuren wieder mehr in den Vordergrund getreten.

Die *Untersuchung spezieller Kurven* wurde in neuester Zeit durch die Arbeiten von Brocard (*Intermédiaire des mathém.* Bd. 4, 5, 7 und „Notes de bibliographie des courbes géométriques“ 1897 und 1899) und durch das Sammelwerk von Loria: „Spezielle algebraische und tran-

*) (L. V. 9.)

szendente ebene Kurven“, 1902, sehr gefördert*). Eine neue Methode zur Diskussion algebraischer Kurven, deren Gleichung in Linienkoordinaten gegeben ist, hat durch dualistische Übertragung Reuschle 1889**) ersonnen.

Da die Koordinatenachsen bei vielen algebraischen Kurven mit deren Gestalt meist nur in losem, häufig auch gar keinem Zusammenhang stehen, so wurden schon gegen Ende des 18. Jahrhunderts von Lacroix in seinem „Traité du Calcul diff. et intégr.“ 1797 Versuche gemacht, diesen Unbequemlichkeiten aus dem Wege zu gehen.

Denselben Gedankengang hat Cesarò verfolgt und in seinem Buch: „Geometria intrinseca“, in deutscher Übertragung von Kowalewski „Natürliche Geometrie“, 1901 durch eine Reihe von Sätzen begründet und weiter ausgebaut. Als Koordinaten benutzt Cesarò nur solche Elemente, die mit der Gestalt der Kurve zusammenhängen, dagegen für die Lage der Kurve in der Ebene ohne Einfluß sind: die Bogenlänge s und den Krümmungsradius ρ . Cesarò nennt daher die Relation $f(s, \rho) = 0$ die „natürliche Gleichung“ der Kurve. Dieser neueste Zweig der Geometrie hat durch Anwendung der Methode der Koordinatenverwandlung zur Entdeckung einer ganzen Reihe neuer Kurven geführt, die man auf anderem Wege schwerlich gefunden hätte.

*) Das Werk von Loria (L. V. 6.), das die Geschichte der einzelnen Kurvengattungen sehr eingehend behandelt, und das von Teixeira (L. V. 12.), dessen Original in spanischer Sprache 1905 erschienen ist, das aber mehr eine Art „Kurvenenzyklopädie“ ist, verdanken ihr Entstehen einem Preisausschreiben der Akademie der Wissenschaften in Madrid 1892, wiederholt 1895.

**) Abgedruckt im Tageblatt der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Heidelberg 1889.

Mehr ins einzelne gehende geschichtliche Angaben über spezielle Gebiete der Theorie der algebraischen Kurven finden sich im II. Teil der „*Algebraischen Kurven*“.

§ 1. Die algebraischen Kurven im allgemeinen.

In den folgenden Untersuchungen betrachten wir ausschließlich *ebene algebraische Kurven*, sehen also von den Raumkurven und auch von den ebenen transzendenten Kurven ab.

Sind x und y die (reellen) Koordinaten eines beliebigen Punkts der Koordinatenebene, so stellt jede Gleichung von der Form

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

oder

$$(2) \quad y = \varphi(x) \quad \text{oder} \quad x = \psi(y)$$

wegen der Willkürlichkeit einer Veränderlichen eine ∞^1 Schar stetig aufeinanderfolgender Punkte, d. h. eine *ebene Kurve* dar. $f(x, y) = 0$ heißt die implizite Form, $y = \varphi(x)$ oder $x = \psi(y)$ die explizite Form der Kurvengleichung.

Ein beliebiger Punkt (a, b) liegt also auf der Kurve, wenn seine Koordinaten die Kurvengleichung befriedigen, d. h. wenn

$$f(a, b) = 0 \quad \text{oder} \quad b = \varphi(a) \quad \text{oder} \quad a = \psi(b).$$

Unter einer *algebraischen Kurve* verstehen wir ein solches Gebilde, dessen sämtliche Punkte der Gleichung genügen:

$$0 = F(x, y) = \sum_0^m \sum_0^n a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu,$$

wo μ, ν positive ganze Zahlen und die $a_{\mu\nu}$ reelle Konstante bedeuten. Die höchste, in $F(x, y) = 0$ vor-

kommende Potenz $\mu + \nu$ der beiden Unbekannten nennt man den *Grad* oder die *Ordnung* der Kurve.

Jedes Polynom n ten Grads in den beiden Veränderlichen x und y von der Form

$$0 = F(x, y) = A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \dots \\ \dots + A_{n-1} y + A_n$$

stellt, wenn

$$A_\nu = a_0 x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \dots + a_{\nu-1} x + a_\nu$$

eine rationale ganze Funktion ν ten Grads in x ist, eine algebraische Kurve n ten Grades, kurz eine C^n dar.

Tritt die Funktion der Kurve in irrationaler Form auf, so kann sie durch Potenzieren stets auf die rationale Form gebracht werden.

Kommen in $F(x, y) = 0$ irrationale Exponenten vor, so bezeichnet man Kurven dieser Art nach dem Vorgang von Leibniz als *interszendente* Kurven. Eine solche ist z. B. $y = x^{\sqrt{2}}$. Diese bilden gewissermaßen den Übergang zwischen algebraischen und transzendenten Kurven.

Alle diejenigen Kurven, die man nicht durch eine ganze rationale (algebraische) Gleichung zwischen den Koordinaten x und y eines Punkts darstellen kann, nennt man *transzendente Kurven*.

Legen wir der Kurvengleichung *Polarkoordinaten* zugrunde, die durch das System der Gleichungen bestimmt sind:

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \end{array} \right\}, \quad \text{woraus} \quad \left. \begin{array}{l} \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \end{array} \right\},$$

so erscheint die Gleichung vieler algebraischer Kurven in „transzendente Gewand“. Jede durch Polarkoordi-

naten dargestellte Kurve ist algebraisch, wenn in der Gleichung

$$\varrho = F(\varphi)$$

der Parameter φ nur in der Form $F(\sin n \varphi, \cos m \varphi)$ auftritt. Sowie φ als nicht rein trigonometrische Funktion vorkommt, z. B. $\varrho = a \cdot \varphi$, ist die Kurve transzendent.

Ist also $f(x, y)$ oder $\varphi(x)$ oder $\psi(y)$ eine $\left. \begin{array}{l} \text{algebraische} \\ \text{transzendenten} \end{array} \right\}$ Funktion, so ist die durch $f(x, y) = 0$ oder $y = \varphi(x)$ oder $x = \psi(y)$ dargestellte Kurve eine $\left. \begin{array}{l} \text{algebraische} \\ \text{transzendenten} \end{array} \right\}$ Kurve.

Die algebraischen Kurven werden nach dem Grad ihrer Gleichung in x und y eingeteilt in Kurven 1., 2., 3., ... Ordnung.

So ist die Gerade $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$ eine Kurve 1. Ordnung; der Kegelschnitt

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

eine Kurve 2. Ordnung, kurz eine C^2 usw.

Läßt sich die Funktion $f_n(x, y)$ in mehrere Funktionen niederen Grads zerlegen, d. h. lautet die Gleichung der C^n :

$$0 = f_n(x, y) = \varphi_\alpha(x, y) \cdot \psi_\beta(x, y) \cdot \chi_\gamma(x, y) \cdot \dots,$$

wo

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \dots,$$

so zerfällt die C^n in die Kurven

$$\varphi_\alpha(x, y) = 0, \quad \psi_\beta(x, y) = 0, \quad \chi_\gamma(x, y) = 0, \dots$$

von den Ordnungen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Die Gleichung $f_n(x, y) = 0$ ergibt mit $y = ax + b$ eine Gleichung n ten Grades in x , die bekanntlich

n Wurzeln hat. Diese n Wurzeln sind alle sämtlich reell oder paarweise konjugiert. Daraus folgt der

Satz: *Jede Gerade schneidet eine C^n in n reellen oder komplex konjugierten (imaginären) Punkten.*

Ist n ungerade, so ist mindestens ein Schnittpunkt reell; ist n gerade, so sind die Schnittpunkte paarweise reell oder alle imaginär.

So wird die „oszillierende Parabel 3. Grads“ der Fig. 1 von der Geraden G_1 in einem reellen Punkt, von G_2 in drei reellen Punkten geschnitten; die oszillierende Parabel

4. Grads der Fig. 2 von G_1 in zwei reellen Punkten, von G_2 in vier reellen Punkten geschnitten.

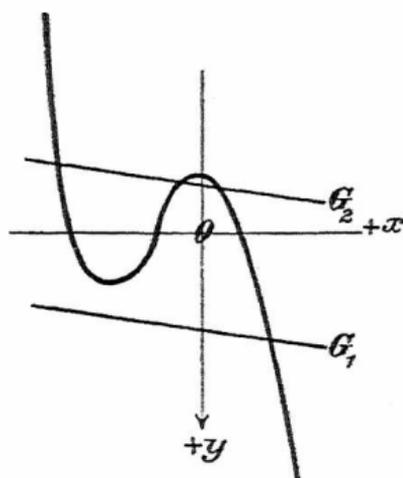


Fig. 1.

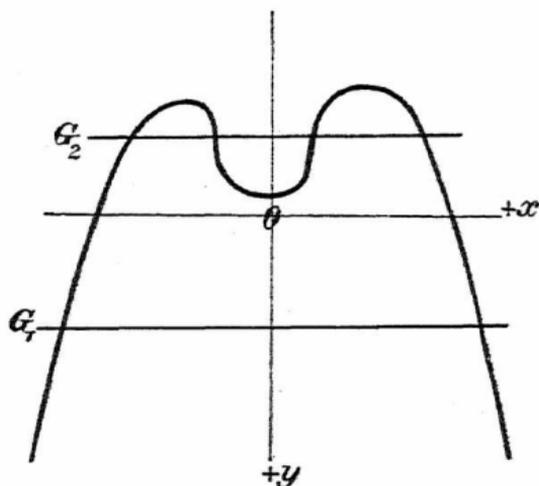


Fig. 2.

Jede algebraische Gleichung von der Form

$0 = f_n(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_n y^n$
enthält neben den Veränderlichen x und y noch Konstante a_0, a_1, \dots

x und y als Strecken sind Größen 1. Dimension,

also sind Zahlen „ 0. „ „

Flächen (x^2, xy, y^2) „ 2. „ usw.

Soll also die Gleichung einer Kurve dimensional sein, so müssen alle ihre Glieder in den Veränderlichen und Konstanten zugleich vom selben Grade sein.

Im allgemeinen werden wir unsere Kurvengleichungen in der Form von Zahlengleichungen aufstellen, d. h. die Einheit der Strecke = 1 setzen.

Bild einer Kurve. Nicht jede Gleichung einer algebraischen Kurve mit reellen Koeffizienten stellt eine reelle Kurve dar. So ist z. B. durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + a^2 = 0$$

ein imaginärer Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung dargestellt, dessen ganzer Verlauf imaginär ist.

Die Gleichung

$$(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = 0$$

stellt eine imaginäre C^4 dar, die als einzige reelle Bestandteile die vier Punkte $\left\{ \begin{array}{l} x = \pm a \\ y = \pm b \end{array} \right\}$ hat.

Arten von Kurvenzügen. Unter einem Kurvenzug oder Kurvenast verstehen wir den Inbegriff aller reellen Punkte, die ein auf der Kurve wandernder Punkt durchlaufen kann, den Durchgang durch das Unendliche eingeschlossen, bis er wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt.

So bilden nach dieser Anschauung die beiden Zweige der Hyperbel nur einen Zug.

Ein Kurvenzug kann *paar* oder *unpaar* sein, je nachdem er von einer Geraden in einer *geraden* oder *ungeraden* Zahl von Punkten geschnitten wird.

Ein paarer Zug ohne vielfache Punkte teilt die Ebene in zwei Gebiete, von denen das eine („äußere“) unpaare Züge enthalten kann, das andere („innere“) nicht.

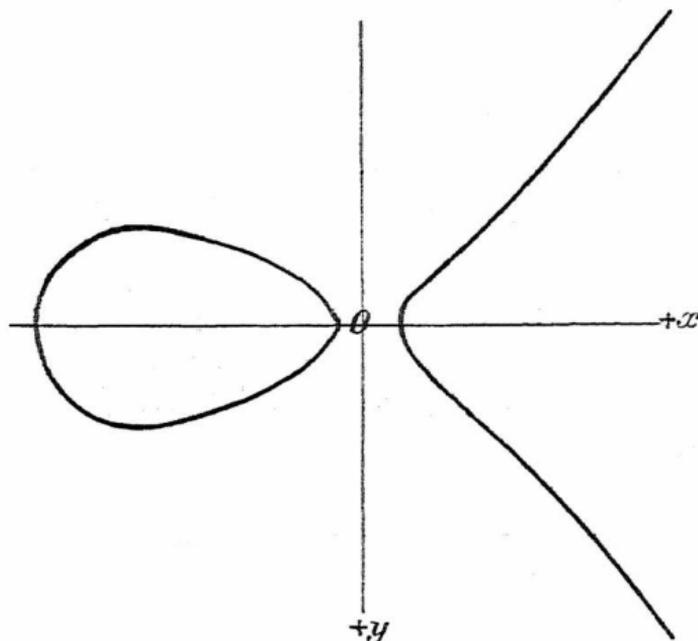


Fig. 3.

Jeden unpaaren Zug kann man sich durch Deformation eines Kegelschnitts entstanden denken. Die paarren Züge werden deshalb nach Salmon *Ovale* genannt; Zeuthen beschränkt den Ausdruck *Ovale* auf solche Kurvenzüge, die keine singulären Punkte (insbesondere auch keine Wendepunkte) besitzen.

Die in Fig. 3 dargestellte Kurve 3. Grads

$$y^2 = (x - a)(x + b)(x + c)$$

hat ein Oval und einen unpaaren Zug.

Die Kurve der Fig. 8 besteht aus zwei paaren Zügen, die jedoch nach Zeuthen keine Ovale wären, da jeder Zug vier Wendepunkte besitzt (s. Seite 32).

Da sich zwei unpaare Kurvenzüge immer schneiden, so folgt daraus, daß eine Kurve ohne Doppelpunkt höchstens einen unpaaren Zug haben kann; eine Kurve ohne Doppelpunkt von ungerader Ordnung enthält immer einen unpaaren Zug (siehe Fig. 3, 42); eine Kurve von gerader Ordnung ohne Doppelpunkt enthält keinen unpaaren Zug (siehe Fig. 8).

Ferner: Ein Zug hat eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Wendepunkten, je nachdem er paar oder unpaar ist.

So besitzt der unpaare Zug der Fig. 3 im ganzen drei Wendepunkte, von denen einer ∞ fern ist; der paare Zug derselben Figur (das Oval) hat keinen Wendepunkt. Die beiden paaren Züge der Fig. 8 haben je vier reelle Wendepunkte.

§ 2. Prinzip der Homogenität.

1. Jede Gleichung von der Form

$$(1) \begin{cases} 0 = \widetilde{f_n}(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots \\ \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n, \end{cases}$$

deren sämtliche Glieder in bezug auf die Veränderlichen allein vom n ten Grad sind, heißt eine *homogene* Gleichung in x und y und wird mit dem Symbol $\widetilde{f_n}(x, y) = 0$ bezeichnet, wobei die Wellenlinie über den Veränderlichen die Homogenität anzeigen soll.

Dividieren wir die Gleichung (1) mit y^n durch, so erhalten wir

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 \left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + a_2 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} + \dots \\ \dots + a_{n-1} \frac{x}{y} + a_n = 0. \end{array} \right.$$

Diese Gleichung liefert n Wurzelwerte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ für $\frac{x}{y}$, also läßt sich Gleichung (2) und damit auch Gleichung (1) in der Form schreiben:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 \left(\frac{x}{y} - \alpha_1\right) \left(\frac{x}{y} - \alpha_2\right) \left(\frac{x}{y} - \alpha_3\right) \dots \\ \dots \left(\frac{x}{y} - \alpha_{n-1}\right) \left(\frac{x}{y} - \alpha_n\right) = 0. \end{array} \right.$$

Diese Gleichung stellt nun nichts anderes dar als ein System von n Nullpunktsgereaden, also

Satz: Die allgemeine homogene Gleichung n ten Grads in x und y :

$$\begin{aligned} \widetilde{f_n(x, y)} &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots \\ &\dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 0 \end{aligned}$$

stellt das System von n Nullpunktsgereaden dar.

2. Setzt man in der Gleichung $f_n(x, y) = 0$ einer Kurve n ter Ordnung $\frac{x}{\omega}$ an Stelle von x und $\frac{y}{\omega}$ an Stelle von y , so erhält man

$$f_n(x, y) = f_n\left(\frac{x}{\omega}, \frac{y}{\omega}\right) = 0$$

oder nach Multiplikation mit ω^n :

$$\widetilde{f_n(x, y, \omega)} = 0.$$

Diese Gleichung n ten Grads ist homogen in den drei Veränderlichen x, y, ω , d. h. jedes Glied der Gleichung ist in bezug auf x, y, ω vom n ten Grad.

Um also eine Gleichung n ten Grads in x und y homogen zu machen, hat man jedem Glied so viel Faktoren ω beizugeben, daß die Exponentensumme der drei Veränderlichen x, y, ω jedes Glieds $= n$ wird. ω nennt man die *homogenisierende Veränderliche**).

Beispiele:

$$(x^2 - 1)(x^2 - y^2) = xy(y^2 - 1);$$

$$\text{homogen: } (x^2 - 1 \cdot \omega^2)(x^2 - y^2) = xy(y^2 - 1 \cdot \omega^2).$$

$$x^4 y - 2x^2 y - y^2 + 3y - 1 = 0;$$

$$\text{homogen: } x^4 y - 2x^2 y \omega^2 - y^2 \omega^3 + 3y \omega^4 - 1 \cdot \omega^5 = 0.$$

Aus der homogenen Form einer Gleichung erhält man die gewöhnliche (nicht homogene) Gleichung, indem man $\omega = 1$ setzt.

3. Setzt man in der Funktion $f_n(x, y, \omega)$ an Stelle von x, y, ω die Werte $\varrho x, \varrho y, \varrho \omega$, so erhält man

$$(4) \quad \begin{cases} f_n(x, y, \omega) = f_n(\varrho x, \varrho y, \varrho \omega) \\ \quad \quad \quad = \varrho^n \cdot f_n(x, y, \omega). \end{cases}$$

Diese Gleichung (4) drückt die *charakteristische Eigenschaft einer homogenen Funktion* aus.

*) Zur Verhütung von Verwechslungen haben wir nach dem Vorgang von *Reuschle*, Praxis der Kurvendiskussion (vgl. S. 145f. ebenda) ω statt des allgemein üblichen z gewählt. ω hat den Vorteil, daß es auch in der Raumgeometrie als homogenisierende Variable brauchbar ist. Von *Reuschle* (ebenda S. 142) stammt auch das die Homogeneigenschaft einer Kurvengleichung anzeigende Symbol, die Wellenlinie über den Veränderlichen.

Eulerscher Homogensatz; Deutung von ω .

4. **Der Eulersche Homogensatz.** Durch Differentiation der Gleichung (4) nach ϱ erhält man

$$\frac{\partial f(\varrho x, \dots)}{\partial \varrho x} \frac{d\varrho x}{d\varrho} + \frac{\partial f(\varrho x, \dots)}{\partial \varrho y} \frac{d\varrho y}{d\varrho} + \frac{\partial f(\varrho x, \dots)}{\partial \varrho \omega} \frac{d\varrho \omega}{d\varrho} = n \cdot \varrho^{n-1} f(x, y, \omega)$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho x} x + \frac{\partial f}{\partial \varrho y} y + \frac{\partial f}{\partial \varrho \omega} \omega = n \cdot \varrho^{n-1} f(x, y, \omega)$$

woraus mit $\varrho = 1$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial f}{\partial \omega} = n \cdot f(x, y, \omega).$$

Ist $f(x, y, \omega) = 0$, so ist auch

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0.$$

5. **Geometrische Deutung von ω .** Sind x, y die homogenen Koordinaten eines beliebigen Punktes, sind seine kartesischen Koordinaten bestimmt durch Verhältnis $\frac{x}{\omega}, \frac{y}{\omega}$. Die homogenen Koordinaten nennt man deshalb auch *Verhältniskordinaten*.

Ist speziell $\omega = 0$, so sind $\frac{x}{0}, \frac{y}{0}$ die Koordinaten aller Punkte, für die $\omega = 0$ ist. Diese Punkte liegen alle im Unendlichen, also stellt $\omega = 0$ den Inbegriff aller ∞ fernen Punkte der Ebene dar. Da $\omega = 0$ Gleichung 1. Grads eine Gerade darstellt, so liegen

∞ fernen Punkte der Ebene auf einer (∞ fernen) Geraden, deren Gleichung lautet: $\omega = 0$.

Wahl der Koordinatenachsen.

Nach der allgemein üblichen Art legen wir die $+x$ -Achse nach rechts. Soll nun durch eine Drehung um 90° im Sinn des Uhrzeigers die $+x$ -Achse in die

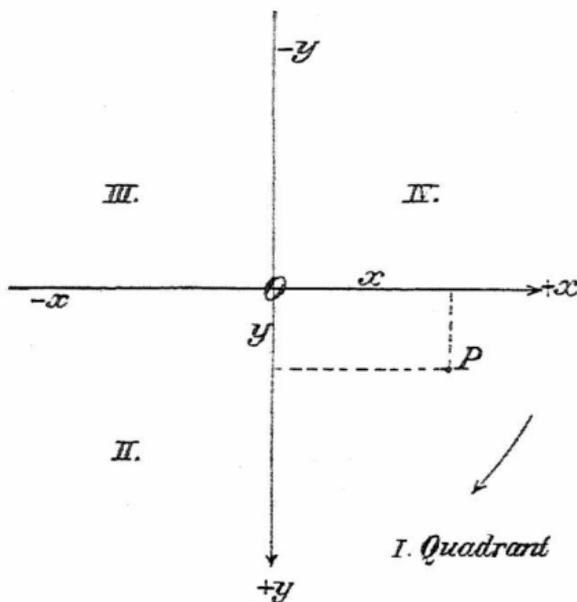


Fig. 4.

$+y$ -Achse übergeführt werden, so muß die $+y$ -Achse nach unten gerichtet sein (s. Fig. 4). Bei sämtlichen Figuren ist diese Art des Koordinatensystems zugrunde gelegt.

§ 3. Signierungsprinzip.

In der Gleichung $f(x, y) = 0$ einer Kurve ist die Funktion $f(x, y)$ Null für alle auf der Kurve liegenden Punkte. Für alle anderen Punkte der Ebene ist der

Signierungsprinzip.

Wert der Funktion $f(x, y)$ von Null verschieden, positiv oder negativ. Der Übergang von positiv zu negativ kann nun im Endlichen nur durch Null hindurch geschehen, also ist *die Funktion für alle Punkte auf einer Seite der Kurve positiv, auf der andern Seite negativ*.

Um die positive, bzw. negative Seite der Kurve bestimmen, setzt man die Koordinaten eines nicht der Kurve liegenden Punktes (a, b) in die Funktion $f(x, y)$ ein und bestimmt das Vorzeichen des Ausdrucks $f(a, b)$.

Zur bequemen Rechnung nimmt man hierzu einen (nicht auf der Kurve liegenden) ausgezeichneten Punkt der Ebene, den Nullpunkt, einen Punkt der x - oder y -Achse, der Mediane $x - y = 0$ oder $x + y = 0$.

Wählen wir die Koordinatenachsen wie oben angegeben, so ergibt sich als allgemeine **Regel** für die Signierung einer Funktion:

Der am weitesten rechts in der Richtung der Mediane $x - y = 0$ im 1. Quadranten gelegene, von $f(x, y)$ begrenzte Teil der Ebene („Zwickel“ genannt) ist immer positiv).*

Diese Regel gilt aber nur, wenn $f(x, y) = 0$ in Form geschrieben ist: $x - \varphi(y)$, z. B. $x - y^2$, $x^2 - y^2$ — also so, daß das Glied mit x positiv ist. Läßt sich die signierende Funktion nicht in einfache Funktionen zerlegen oder ist die Anwendung der Regel nicht ganz einwandfrei, so bleibt zur Signierung nichts anderes übrig als die Bestimmung des Vorzeichens des Werts der Funktion für einen beliebigen Punkt.

*) „Zwickel“ zur Abkürzung für „begrenzter Teil Koordinatenebene“. — Der Name „Zwickel“ rührt her von *Reuschle*, Das Divisionsprinzip in der anal. Geom. *M. math. V. Württ. II, 2.* (1900.) S. 52.

Für jede in *gerader Potenz* vorkommende Funktion ändert sich beim Durchgang durch 0 das Vorzeichen nicht; solche *Funktionen von der Form f^2, f^4, \dots* bleiben bei der Signierung unberücksichtigt.

Es ist zum Zweck der Signierung zu empfehlen, die Kurvengleichung $F(x, y) = 0$ immer auf die Form zu bringen:

$$f + \lambda g = 0 \quad \text{oder} \quad f = \lambda_1 g,$$

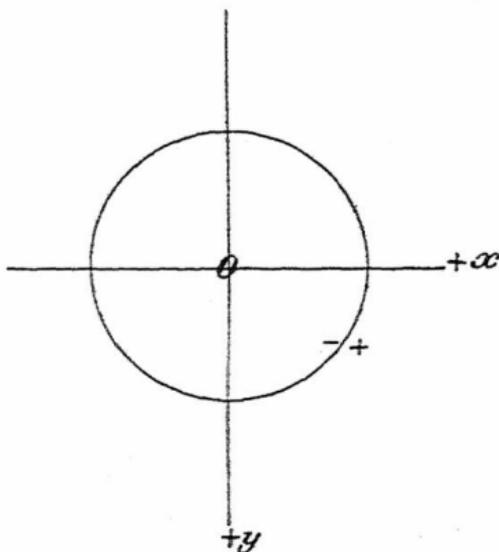


Fig. 5.

wo λ , bzw. λ_1 konstante, d. h. von x und y unabhängige Faktoren sind.

Beispiele:

1. Für den Kreis $f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$ ist die innere Kreisfläche negativ; mit $\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}$ kommt $f(0, 0) = -r^2$. (Fig. 5.)

2. Für die Parabel $f(x, y) \equiv x^2 - 2py = 0$ kommt mit $\left. \begin{array}{l} x = a \\ y = 0 \end{array} \right\}$ $f(a, 0) = a^2$ (Fig. 6), d. h. die von der

Parabel „umschlossene“ Fläche (durch welche die $+y$ Achse geht) ist negativ.

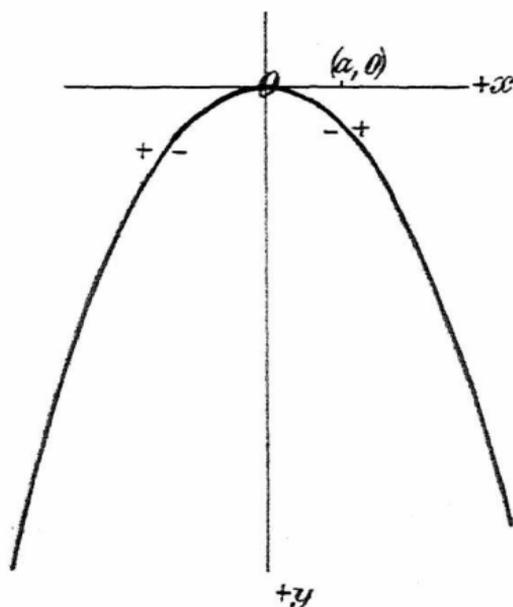


Fig. 6.

3. Für die C^4 :

$$[(x-1)(x+1)(x+y)(x-y) = xy(y-1)(y+1)]$$

folgt nach der obigen Regel: Der am weitesten rechts von $x-y=0$ liegende Teil der Ebene ist sowohl für die linke, wie für die rechte Seite der Gleichung positiv. Da nun für solche Punkte die Gleichung befriedigt werden kann, so können in diesem Teil der Ebene Kurvenpunkte liegen; für den „Nebenzwickel“ dagegen wird durch Überschreitung der Geraden $y-1=0$ die rechte Seite der Gleichung negativ, die linke Seite bleibt positiv, also können in diesem Zwickel keine Kurvenpunkte liegen. Um dies für das Auge wahrnehmbar zu

machen, wird dieser Zwickel schraffiert (s. Fig. 7, in der zugleich das Bild der Kurve eingezeichnet ist).

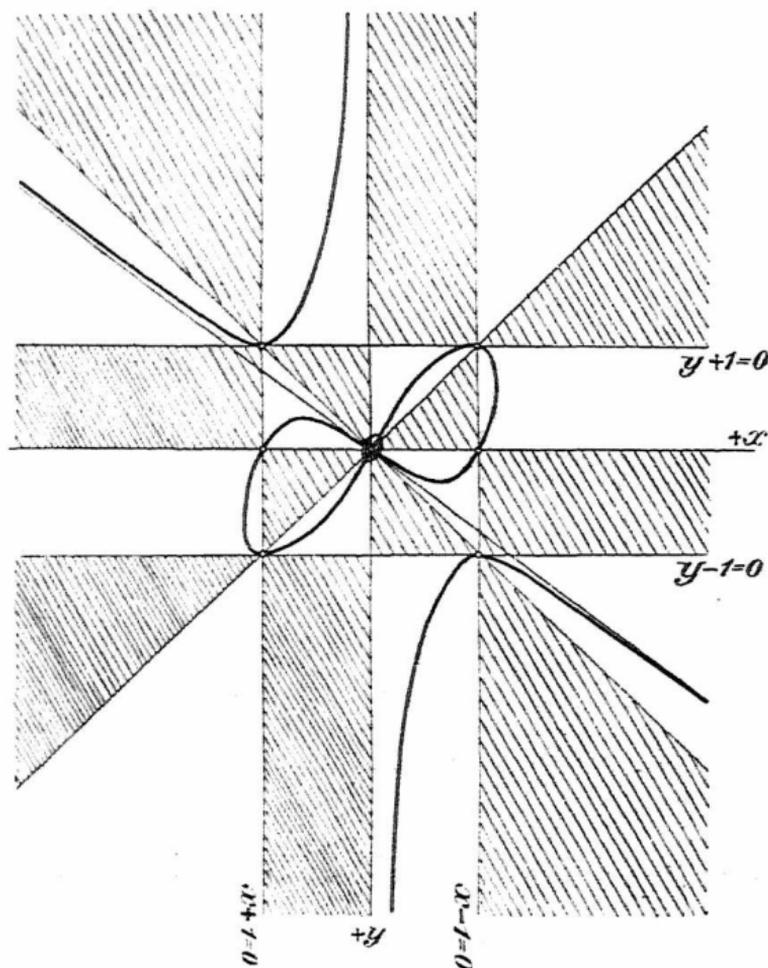


Fig. 7.

Hieraus läßt sich folgende weitere **Signierungsregel** ableiten: Können in irgend einem Zwickel Kurvenpunkte liegen, so liegen in den Nebenzwickeln keine Kurvenpunkte, wobei wir unter „Nebenzwickel“ solche Teile

der Ebene verstehen, in die man vom 1. Zwickel durch Überschreitung von nur einer Signierungslinie kommt.

Mittels des Signierungsprinzips läßt sich also aus der Koordinatenebene eine Anzahl von Teilen ausscheiden, in denen die vorgelegte Kurve nicht verlaufen kann. Zugleich ersieht man, daß es vorteilhafter ist, die Kurvengleichung $F(x, y) \equiv f + \lambda g = 0$ so zu zerlegen, daß die Funktionen f und g selbst in möglichst viele Faktoren zerlegbar sind.

§ 4. Prinzip der linearen Kombination.

Satz 1. Sind $f_n(x, y) = 0$ und $g_n(x, y) = 0$ die Gleichungen zweier C^n , so stellt die durch lineare Kombination beider Gleichungen erhaltene neue Gleichung

$$(1) \quad f_n(x, y) + \lambda g_n(x, y) = 0,$$

wo λ ein beliebiger, von x und y unabhängiger Faktor ist*), eine Kurve dar, die durch sämtliche (n^2) Schnittpunkte der beiden gegebenen Kurven geht, oder kurz:

Die Kurve $f + \lambda g = 0$ geht durch sämtliche Schnittpunkte der beiden Kurven $\left\{ \begin{matrix} f = 0 \\ g = 0 \end{matrix} \right\}$.

Die Gleichung (1) wird nämlich nur befriedigt, wenn gleichzeitig gilt: $\left\{ \begin{matrix} f = 0 \\ g = 0 \end{matrix} \right\}$, d. h. der Gleichung (1) genügen nur die Koordinaten solcher Punkte, die sowohl auf der Kurve $f = 0$, als auch auf der Kurve $g = 0$ liegen.

Ebenso gilt der

Satz 2. Die Kurve

$$f_1 f_2 + \lambda g_1 g_2 = 0.$$

*) Ist λ ein veränderlicher Parameter, so stellt $f + \lambda g = 0$ ∞^1 viele Kurven dar, die alle durch die Schnittpunkte von $\left\{ \begin{matrix} f = 0 \\ g = 0 \end{matrix} \right\}$ gehen, also ein Kurvenbüschel oder ein Kurvennetz.

geht durch die Schnittpunkte der Kurven

$$\left\{ \begin{matrix} f_1 = 0 \\ g_1 = 0 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} f_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} f_2 = 0 \\ g_1 = 0 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} f_2 = 0 \\ g_2 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Beispiel. Die Kurve

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) + \lambda(y^2 - 1)(y^2 - 4) = 0$$

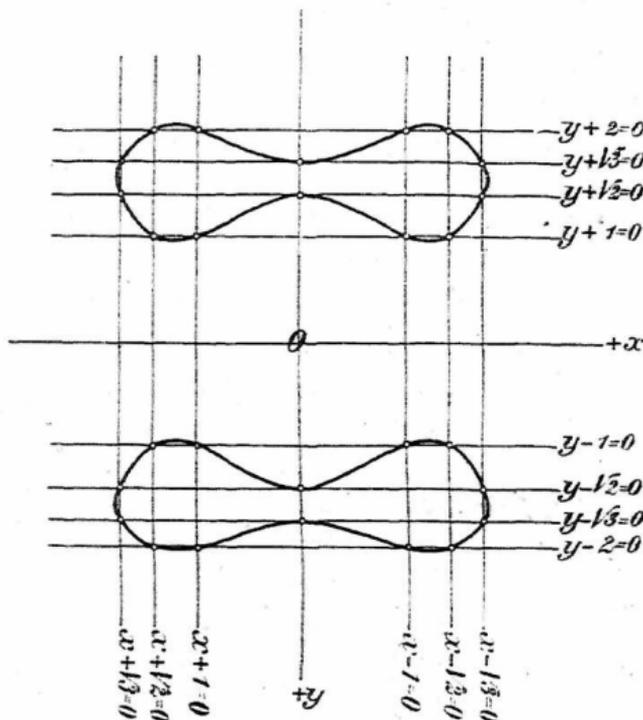


Fig. 8.

oder

$$(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) + \lambda(y - 1)(y + 1)(y - 2)(y + 2) = 0$$

geht durch die $4 \cdot 4 = 16$ Schnittpunkte der Geraden $x \pm 1 = 0$ und $x \pm \sqrt{2} = 0$ mit $y \pm 1 = 0$ und $y \pm 2 = 0$.

Für $\lambda = 1$ hat die Kurve die Gestalt der Fig. 8.

Allgemein gilt der
Satz 3. Die Kurve

$$f_1 f_2 f_3 \dots f_n + \lambda g_1 g_2 g_3 \dots g_n = 0$$

oder abgekürzt
$$\prod_{i=1}^n f_i + \lambda \prod_{k=1}^n g_k = 0$$

geht durch die Schnittpunkte der Kurven $\left\{ \begin{matrix} f_i = 0 \\ g_k = 0 \end{matrix} \right\}$
 $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Aus der Gleichung $f + \lambda g_1 g_2 = 0$ folgt, wenn beiden Kurven $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ zusammenfallen, d. h. wenn $g_1 = g_2$, der

Satz 4. Die Kurve

$$f + \lambda g^2 = 0$$

berührt die Kurve $f=0$ in ihren Schnittpunkten mit der Kurve $g=0$ (Fig. 9). [Zweipunktige Berührung, entsprechend den zwei

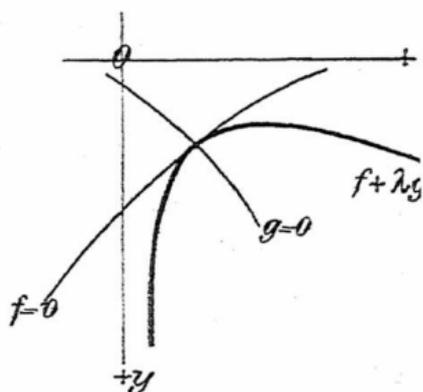


Fig. 9.

Schnittpunkten von $\left\{ \begin{matrix} f=0 \\ g_1=0 \end{matrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{matrix} f=0 \\ g_2=0 \end{matrix} \right\}$ an der treffenden Kurvenstelle.]

Auf welcher Seite von f die Berührung stattfindet ergibt sich aus der Signierung.

Beispiel. Die Gleichung der durch Fig. 8 d) gestellten C^4 läßt sich auch in der Form schreiben:

$$x^2(x^2 - 3) + (y^2 - 3)(y^2 - 2) = 0$$

oder

$$\begin{cases} x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \\ + (y - \sqrt{3})(y + \sqrt{3})(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2}) = 0. \end{cases}$$

Gemäß Satz 4 folgt hieraus:

Die C^4 berührt die Geraden $y \pm \sqrt{3} = 0$ und $y \pm \sqrt{2} = 0$ in ihren Schnittpunkten mit $x = 0$ und, geht durch die acht Punkte $\begin{cases} x \pm \sqrt{3} = 0 \\ y \pm \sqrt{3} = 0 \end{cases}$ und $\begin{cases} x \pm \sqrt{3} = 0 \\ y \pm \sqrt{2} = 0 \end{cases}$.

Aus den vorstehenden Sätzen, besonders aus Satz 3 ist ersichtlich, daß man bei der Diskussion einer Kurve deren Gleichung in die algebraische Summe zweier Produkte zu zerlegen hat, um die Sätze 1—4 anwenden zu können. Je mehr Faktoren diese Produkte haben, um so mehr Kurvenpunkte lassen sich ablesen. Durch *mehrfache Umformung der Kurvengleichung* in ein derartiges Binom ergeben sich so viel Kurvenelemente, daß schon eine ziemlich genaue Zeichnung des Bildes der vorgelegten Kurve möglich ist.

Aus den beiden Formen der in Fig. 8 gezeichneten Kurven lassen sich $16 + 16 = 32$ Kurvenpunkte ablesen, wobei die vier Berührungspunkte auf der y -Achse doppelt gerechnet sind.

Zur „*Diskussion*“ einfacher algebraischer Kurven, d. h. zur Bestimmung so vieler Kurvenelemente (Punkte und Tangenten), daß die genaue Aufzeichnung der Kurve in einwandfreier Weise möglich ist, würden die in den §§ 2—4 entwickelten Prinzipien hinreichen. Doch wird die Diskussion wesentlich erleichtert durch die Deutung der verschiedenen „Symbole“, besonders derjenigen, die ω enthalten. Deshalb wurden die *Beispiele zur Kurvendiskussion* den folgenden §§ nachgestellt.

§ 5. Singularitäten.

Erklärung. Unter *singulären Punkten*, bzw. *singulären Tangenten* verstehen wir im allgemeinen vielfache Punkte, bzw. vielfache Tangenten.

Singuläre Punktstellen treten erst bei Kurven 3. und höheren Grads auf; die Kegelschnitte sind also die einzigen Kurven, die keine singulären Punkte besitzen.

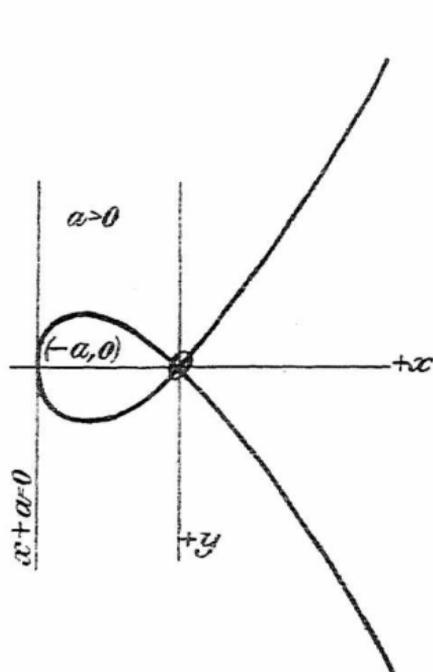


Fig. 10.

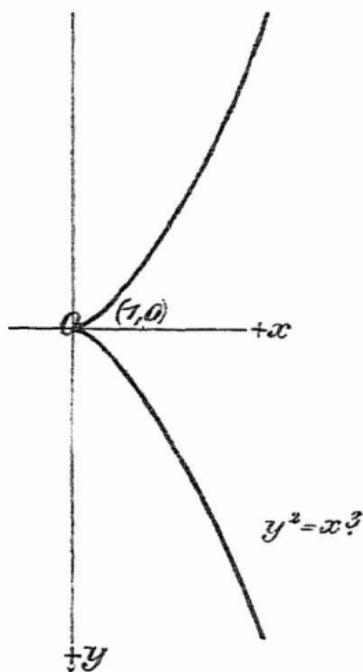


Fig. 11.

Ein *Kurvenpunkt* ist ein *r-facher Punkt*, wenn die Kurve *r*-mal durch ihn hindurchgeht; die Kurve hat also in ihm *r* Tangenten. Sind diese alle verschieden, so ist der Kurvenpunkt ein gewöhnlicher *r*-facher Punkt.

Der einfachste Fall des vielfachen Punkts ist der *Doppelpunkt*. Hierbei sind in bezug auf die beiden

Tangenten, die die Kurve im Doppelpunkt hat, drei Fälle möglich.

	<i>reell und verschieden</i>	}
<i>Sind die zwei Tangenten</i>	<i>reell und zusammenfallend</i>	
	<i>imaginär konjugiert</i>	}
	<i>gewöhnlicher Doppelpunkt</i>	
<i>so ist der Doppelpunkt ein</i>	<i>Rückkehrpunkt</i>	}
	<i>isolierter Punkt</i>	

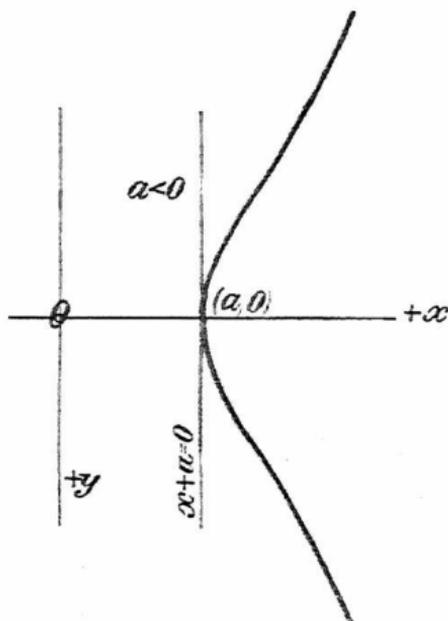


Fig. 12.

Beispiel. Die Kurve 3. Grads $ay^2 = x^2(x + a)$ hat
 > 0 { Doppelpunkt (Fig. 10),
für $a = 0$ einen { Rückkehrpunkt (Fig. 11),
 < 0 { isolierten Punkt (Fig. 12).

Für eine Reihe singulärer Punkte lassen sich nach dem Prinzip der linearen Kombination folgende Sätze angeben.

1. Die Kurve

$$f + \lambda g^3 = 0$$

Wendepunkt; Flachpunkt.

berührt die Kurve $f = 0$ dreipunktig in ihrem Schnittpunkt*) mit $g = 0$.

Ist speziell $f = 0$ eine Gerade $G = 0$, so hat n
1 a. Die Kurve

$$G + \lambda g^3 = 0$$

berührt die Gerade $G = 0$ in ihrem Schnittpunkt $g = 0$ dreipunktig, d. h. der Schnittpunkt ist ein *Wen-*
punkt mit $G = 0$ als Wendetangente (Fig. 13 a).

2. Die Kurve

$$G + \lambda g^4 = 0$$

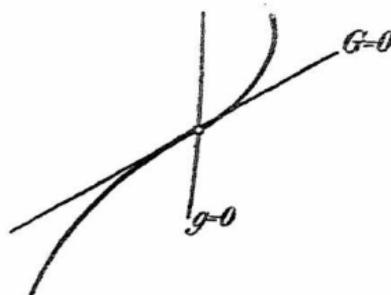


Fig. 13a.

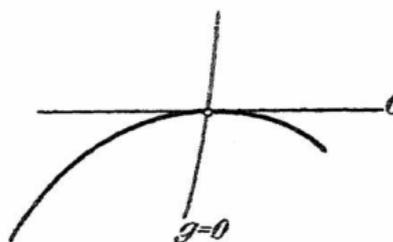


Fig. 13b.

berührt die Gerade $G = 0$ in ihrem Schnittpunkt n
 $g = 0$ vierpunktig, d. h. der Schnittpunkt ist ein *Flac-*
punkt mit $G = 0$ als Flachtangente (Fig. 13 b).

3. Die Kurve

$$G + \lambda g^5 = 0$$

berührt die Gerade $G = 0$ in ihrem Schnittpunkt m

*) Da wir über den Grad der Funktionen f und g kein näheren Bestimmungen machen, so haben die beiden Kurve $f = 0$ und $g = 0$ im allgemeinen mehrere (reelle oder imaginäre) Schnittpunkte. Die Sätze 1—10 gelten für jede dieser Schnittpunkte; der Einfachheit halber betrachten wir aber nur einen dieser Schnittpunkte.

$g = 0$ fünfpunktig, d. h. der Schnittpunkt ist ein *Wendeflachpunkt* mit $G=0$ als Wendeflachtangente (Fig. 13 c)*).

4. Die Kurve

$$f^2 + \lambda g^2 g_1 = 0$$

hat in dem Schnittpunkt von $f=0$ mit $g=0$ einen *Doppelpunkt* (Fig. 13 d).

Dieser ist $\left. \begin{array}{l} \text{reell} \\ \text{isoliert} \end{array} \right\}$, wenn

der Punkt $\left\{ \begin{array}{l} f=0 \\ g=0 \end{array} \right\}$ in dem $\left. \begin{array}{l} \text{nichtschraffierten} \\ \text{schraffierten} \end{array} \right\}$ Teil der Ebene liegt.

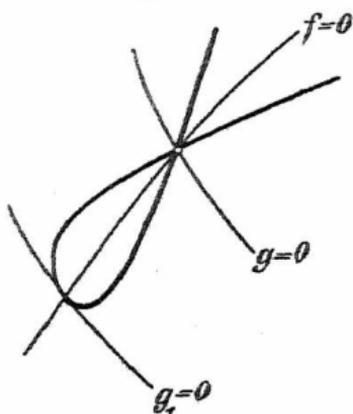


Fig. 13 c.

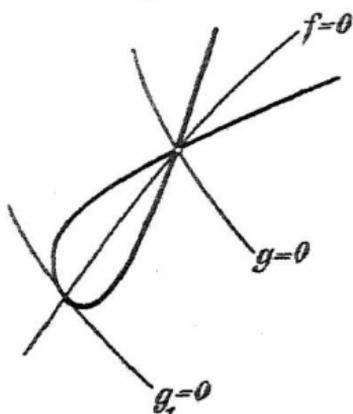


Fig. 13 d.

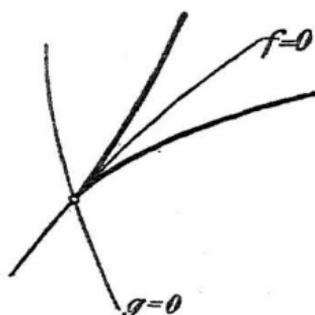


Fig. 13 e.

Wird $g_1 = g$, so hat man:

5. Die Kurve

$$f^2 + \lambda g^3 = 0$$

hat in dem Schnittpunkt von $f=0$ mit $g=0$ einen *Rückkehrpunkt* (oder Spitze 1. Art) mit der Tangente an $f=0$ als Rückkehrtangente (Fig. 13 e).

*) In bezug auf die Bezeichnung der höheren Singularitäten vgl. *Reuschle* (L. V. 8.) und *Sauerbeck* (L. V. 10.).

Selbstberührungspunkt.

6. Die Kurve $f^2 + \lambda g^4 = 0$

hat in dem Schnittpunkt von $f = 0$ mit $g = 0$ ei

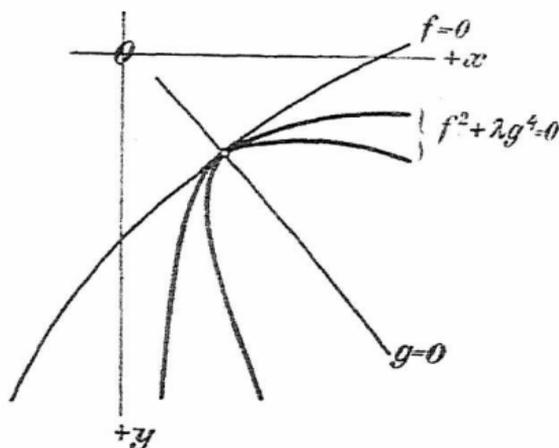


Fig. 14a.

Selbstberührungspunkt (oder *Binodalpunkt*) mit der Tangente an $f = 0$ als Selbstberührungstangente.

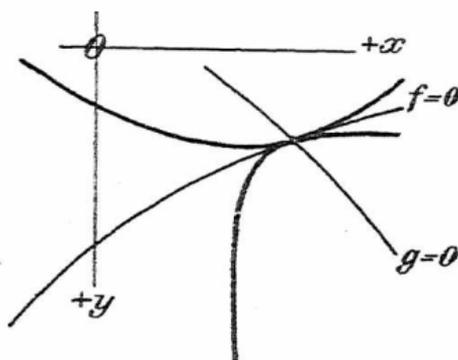


Fig. 14b.

Der Selbstberührungspunkt entsteht durch das Zusammenfallen zweier Doppelpunkte. Hierbei können nur beide Kurvenzweige nach derselben Seite (Fig. 14 a) oder nach verschiedenen Seiten (Fig. 14 b) konkav gekrümmt

sein oder mit anderen Worten: Die zu den zwei Kurvenzweigen des Selbstberührungspunkts gehörigen Krümmungskreise haben ihre Mittelpunkte auf derselben Seite (Fall a) oder auf entgegengesetzten Seiten (Fall b) der beiden Kurvenzweige.

7. Die Kurve

$$f^2 + \lambda g^5 = 0$$

hat in dem Schnittpunkt von $f=0$

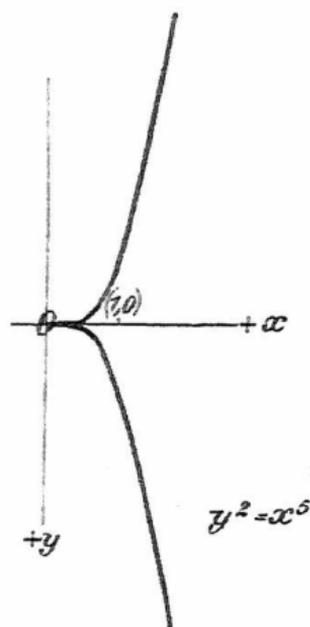


Fig. 15.

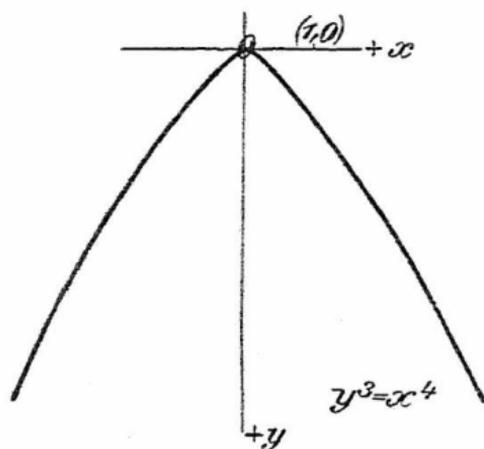


Fig. 16.

mit $g=0$ einen *Rückkehrflachpunkt* mit der Tangente an $f=0$ als Rückkehrflachtangente (Fig. 15).

8. Die Kurve

$$f^3 + \lambda g^4 = 0$$

hat in dem Schnittpunkt von $f=0$ mit $g=0$ einen *Spitzpunkt* mit der Tangente an $f=0$ als Spitztangente (Fig. 16).

9. Die Kurve

$$f^3 + \lambda g^5 = 0$$

Wendespitzpunkt; Rückkehrspitzpunkt.

hat in dem Schnittpunkt von $f = 0$ mit $g = 0$ ein *Wendespitzpunkt* mit der Tangente an $f = 0$ als *Wendespitztangente* (Fig. 17).

10. Die Kurve

$$f^4 + \lambda g^5 = 0$$

hat in dem Schnittpunkt von $f = 0$ mit $g = 0$ einen *Rückkehrspitzpunkt* mit der Tangente an $f = 0$ als *Rückkehrspitztangente* (Fig. 18) usw. usw.

Durch Vergleichung d. Fig. 13—18 folgt:

Die Berührung der Kurve $f + \lambda g^n = 0$ im Punkt $\begin{cases} f = \\ g = \end{cases}$ mit der Kurve $f = 0$ ist um so inniger, je größer n ist.

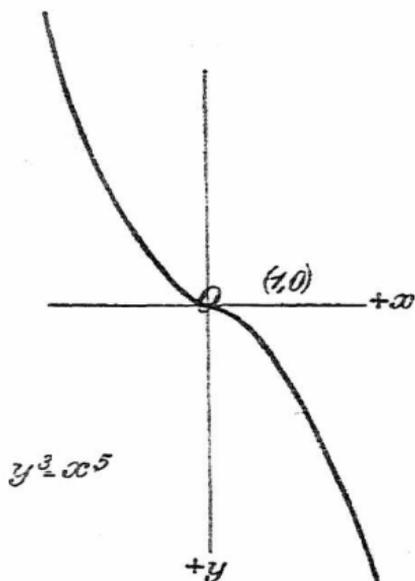


Fig. 17.

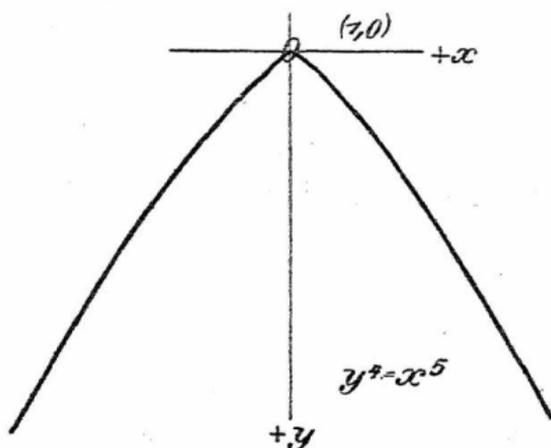


Fig. 18.

Ferner: Die Berührung der Kurve $f^n + \lambda g^m = 0$ im Punkt $\left\{ \begin{array}{l} f = 0 \\ g = 0 \end{array} \right\}$ mit der Kurve $f = 0$ ist um so schwächer, je mehr sich der Quotient $\frac{n}{m}$ dem Wert 1 nähert.

Diese für das Auge ohne weiteres wahrnehmbare Eigenschaft der oben aufgeführten singulären Punkte wird auch durch deren Namen Wende-, Flach-, Spitzpunkt usw. treffend charakterisiert.

§ 6. Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnung.

(Zugleich typische Beispiele für das Prinzip der linearen Kombination.)

I. Die Parabeln höherer Ordnung.

Unter *Parabeln höherer Ordnung* versteht man Kurven, deren Gleichung in ihrer einfachsten Form lautet:

$$p^{\beta-\alpha} y^\alpha = x^\beta,$$

wo α und β positive ganze Zahlen sind und $\beta > \alpha$ oder, wenn der Parameter $p = 1$ gesetzt wird,

$$y^\alpha = x^\beta.$$

Diese Gleichung kann man sich entstanden denken durch Verallgemeinerung der Gleichung der gewöhnlichen Parabel 2. Ordnung $y = x^2$. — Die Parabeln höherer Ordnung, auch *binomische Parabeln* genannt, lassen sich bei gegebenem α und β leicht punktweise berechnen und aufzeichnen.

Aus der Parabel 2. Grades $y = x^2$ läßt sich durch eine einfache Substitution die ganze Reihe der binomischen Parabeln von der Form $y = x^\beta$ ableiten.

Setzt man in der Gleichung $y = x^2$ statt y den Ausdruck $\frac{y}{x}$, so erhält man

$$\frac{y}{x} = x^2 \quad \text{oder} \quad y = x^3.$$

Hieraus ergibt sich durch dieselbe Substitution

$$\frac{y}{x} = x^3 \quad \text{oder} \quad y = x^4, \text{ usw.}$$

Ist (a, b) ein beliebiger Punkt der Parabel $y = x^2$, so erhält man die Kurve $y = x^3$ als (a, b) -Eliminat aus

$$\left. \begin{array}{l} x = a \\ \frac{y}{b} = \frac{x}{1} \\ b = a^2 \end{array} \right\}.$$

Hieraus ergibt sich folgende

Konstruktion der Parabel 3. Ordnung $y = x^3$ aus der gezeichneten Parabel $y = x^2$ (s. Fig. 19): Ziehe die Gerade $x = 1$; fälle vom Punkt $P(a, b)$ auf sie das Lot PQ , so schneidet die Gerade OQ die Gerade $x = a$ im Punkt R , der ein Punkt der gesuchten Kurve $y = x^3$ ist.

Das Prinzip der linearen Kombination liefert nun für das Verhalten der binomischen Parabeln im Ursprung

$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}$ und im ∞ fernen Punkt der Ordinatenachse $\left\{ \begin{array}{l} \omega = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\}$ eine Reihe von Sätzen 1—9. — Der Verlauf

der Kurve in der Nähe der beiden singulären Punkte wird durch das Signierungsprinzip geliefert. Der Leser möge die Signierung der einzelnen Kurven selbst vornehmen.

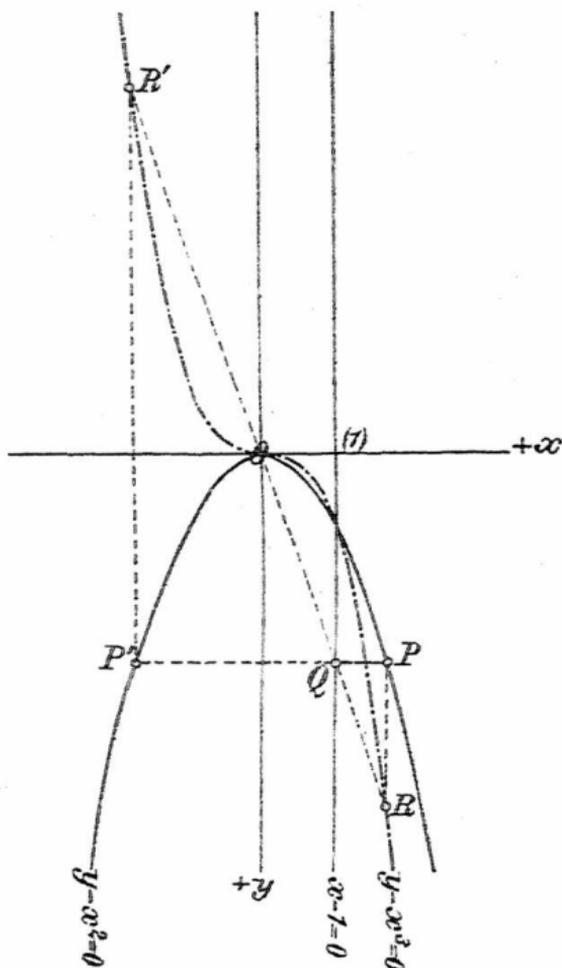


Fig. 19.

1. Die Parabel $y = x^2$, homogen $y \omega = x^2$ (Fig. 20).

a) Die Kurve berührt die Abszissenachse $y = 0$ zweipunktig im Schnitt mit der Ordinatenachse $x = 0$: Der Ursprung ist ein gewöhnlicher Kurvenpunkt (Ovalpunkt) und kann mit dem Symbol $[y, x^2]$, kurz $[1, 2]$ bezeichnet werden.

b) Aus der homogenen Form folgt: Die Kurve berührt die ∞ ferne Gerade $\omega = 0$ in ihrem Schnittpunkt mit $x = 0$. Symbol $[\omega, x^2]^*$.

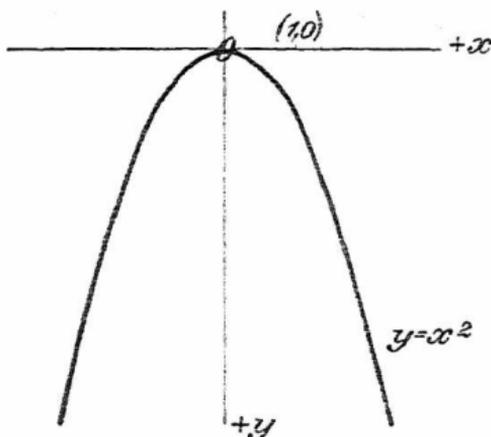


Fig. 20.

2. Die Wendeparabel $y = x^3$, homogen $y \omega^2 = x^3$ (Fig. 21).

a) Die Kurve berührt $y = 0$ im Schnitt mit $x = 0$ dreipunktig: Der Ursprung ist *Wendepunkt* mit $y = 0$ als *Wendetangente*. Symbol $[y, x^3]$, kurz $[1, 3]$.

b) Der ∞ ferne Punkt der Ordinatenachse $\begin{cases} x = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$ ist *Rückkehrpunkt* mit $\omega = 0$ als *Rückkehrtangente*. Symbol $[\omega^2, x^3]$.

*) Für die Kurvendiskussion ist es von großem Nutzen, wenn man sich das Bild der verschiedenen Symbole, besonders mit Rücksicht auf die ∞ ferne Gerade, einprägt.

Dem Leser kann nicht genug empfohlen werden, diese Ablesungen in selbst anzufertigende Figuren einzutragen (am besten mit Farbstift) und so diese Kurven selbst zu „diskutieren“, indem die einzelnen Ablesungen durch möglichst einfache Kurvenzüge verbunden werden.

3. Die *Flachparabel* $y = x^4$, homogen $y \omega^3 = x^4$ (Fig. 22).

a) Die Kurve berührt $y = 0$ vierpunktig im Schnitt mit $x = 0$: Der Ursprung ist *Flachpunkt* mit $y = 0$ als Flachtangente. Symbol $[y, x^4]$, kurz $[1, 4]$.

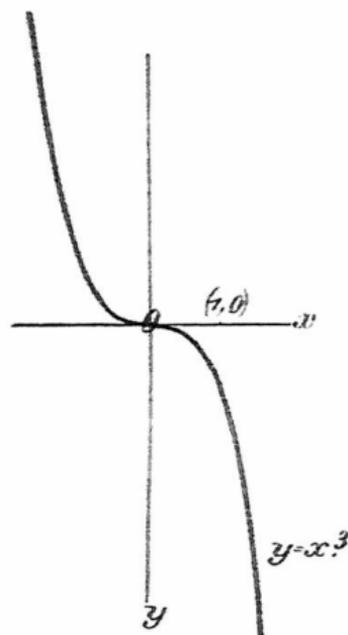


Fig. 21.

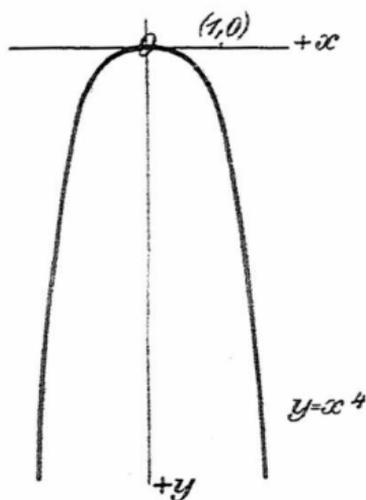


Fig. 22.

b) Der ∞ ferne Punkt der Ordinatenachse $\begin{cases} x = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$ ist *Spitzpunkt* mit $\omega = 0$ als Spitztangente. Symbol $[\omega^3, x^4]$.

4. Die *Wendeflachparabel* $y = x^5$, homogen $y \omega^4 = x^5$ (Fig. 23).

a) Die Kurve berührt $y = 0$ fünfpunktig im Schnitt mit $x = 0$: Der Ursprung ist *Wendeflachpunkt* mit $y = 0$ als Wendeflachtangente. Symbol $[y, x^5]$, kurz $[1, 5]$.

b) Der ∞ ferne Punkt der Ordinatenachse $\begin{cases} x = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$ ist *Rückkehrspitzpunkt* mit $\omega = 0$ als Rückkehrspitztangente. Symbol $[\omega^4, x^5]$.

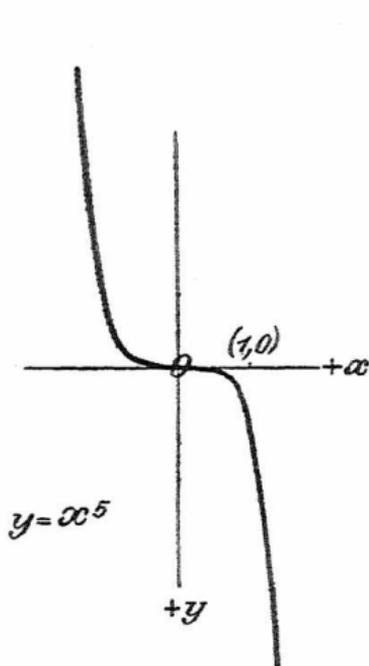


Fig. 23.

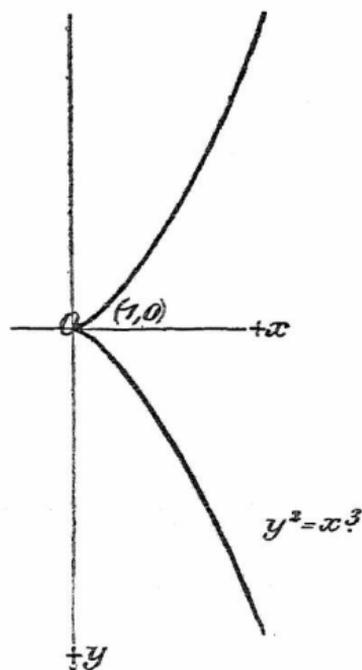


Fig. 11.

Ganz analoge Ergebnisse findet man für die Kurven, deren Gleichung lautet: $x = y^{\beta}$ oder $G_1 = G_2^{\beta}$, wo $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ zwei beliebige Gerade sind.

5. Die Rückkehrparabel $y^2 = x^3$, homogen $y^2 \omega = x^3$ (Fig. 11).

a) Die Kurve hat im Ursprung einen *Rückkehrpunkt* mit $y = 0$ als Rückkehrtangente. Symbol $[y^2, x^3]$, kurz $[2, 3]$.

b) Der ∞ ferne Punkt der Ordinatenachse $\begin{cases} \omega = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

ist *Wendepunkt* mit $\omega = 0$ als *Wendetangente*. Symbol $[\omega, x^3]$.

Durch Vergleichung von 2. und 5. findet man:

Die *Wende-
Rückkehr-
punkt* mit $y = 0$ als *Tangente* und im *Unendlichen* einen *Wende-
Rückkehr-
punkt* mit $\omega = 0$ als *Tangente*.

6. Die Kurve $y^2 = x^4$, homogen $y^2 \omega^2 = x^4$ zerfällt in die beiden Parabeln 2. Ordnung $y = x^2$ und $y = -x^2$.

a) Der Ursprung ist *Selbstberührungspunkt* mit $y = 0$ als *Tangente*. Symbol $[y^2, x^4]$, kurz $[2, 4]$.

b) Der ∞ ferne Punkt der Ordinatenachse ist ebenfalls *Selbstberührungspunkt* mit $\omega = 0$ als *Tangente*. Symbol $[\omega^2, x^4]$.

Nehmen wir die Vorzeichen der Parameter der beiden Parabeln positiv und wählen diese selbst verschieden, so haben wir die Kurve $(y - px^2)(y - qx^2) = 0$.

Es ergeben sich auch hier die beiden Fälle des § 5, 6, je nachdem p und q gleichzeitig oder ungleichzeitig sind*).

7. Die *Rückkehrflachparabel* $y^2 = x^5$, homogen $y^2 \omega^3 = x^5$ (Fig. 15).

a) Der Ursprung ist *Rückkehrflachpunkt* mit $y = 0$ als *Rückkehrflachtangente*. Symbol $[y^2, x^5]$, kurz $[2, 5]$.

b) Der ∞ ferne Punkt der Ordinatenachse ist *Wendespitzpunkt* mit $\omega = 0$ als *Tangente*. Symbol $[\omega^3, x^5]$.

8. Die *Wendespitzparabel* $y^3 = x^5$, homogen $y^3 \omega^2 = x^5$ (Fig. 17).

a) Der Ursprung ist *Wendespitzpunkt* mit $y = 0$ als *Tangente*. Symbol $[y^3, x^5]$, kurz $[3, 5]$.

*) Vgl. hierüber *Beutel*, *Algebr. Kurven*, II. Teil: Höhere Singularitäten bei den Kurven 4. Ordnung.

b) Der ∞ ferne Punkt der Ordinatenachse ist *Rückkehrflachpunkt* mit $\omega = 0$ als Tangente. Symbol $[\omega^2, x^5]$.

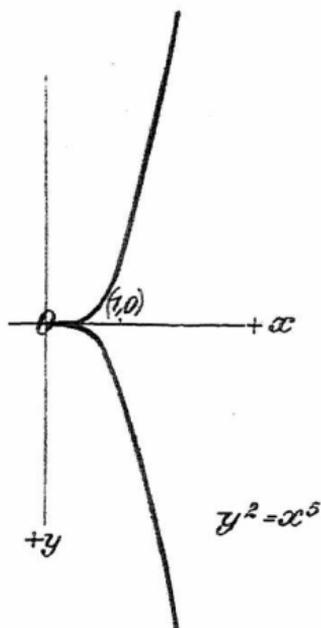


Fig. 15.

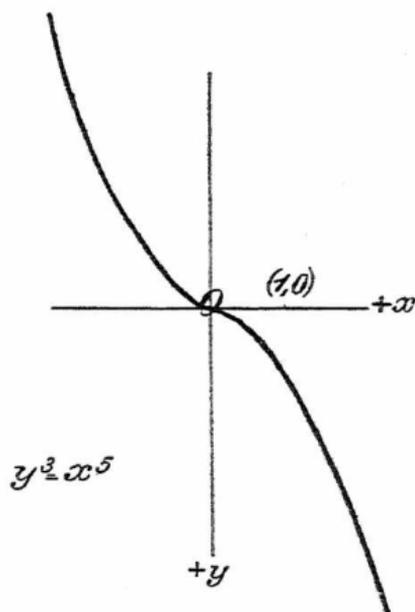


Fig. 17.

9. Die *Spitzparabel* $y^3 = x^4$, homogen $y^3 \omega = x^4$ (Fig. 16).

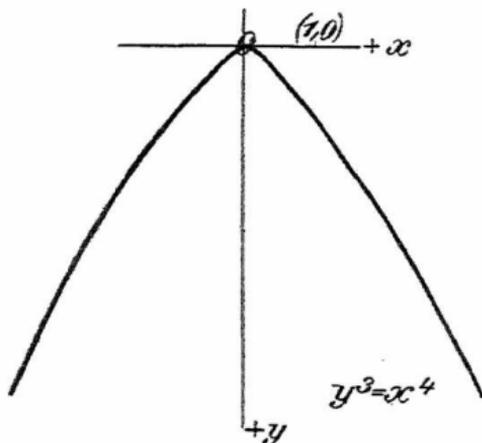


Fig. 16.

a) Der Ursprung ist *Spitzpunkt* mit $y = 0$ als Tangente. Symbol $[y^3, x^4]$, kurz $[3, 4]$.

b) Der ∞ ferne Punkt der Ordinatenachse ist *Flachpunkt* mit $\omega = 0$ als Tangente. Symbol $[\omega, x^4]$.

Analog wie bei 5 läßt sich in bezug auf 3 und 9, 7 und 8 ein ganz ähnlicher Satz bezüglich des Verhaltens im Ursprung und in dem ∞ fernen Punkt der Ordinatenachse aufstellen.

II. Die Hyperbeln höherer Ordnung.

Wie man durch Verallgemeinerung der Gleichung der Parabel 2. Ordnung auf Parabeln höherer Ordnung kommt, so erhält man aus der auf ihre Asymptoten bezogenen (gleichseitigen) Hyperbel $xy = q^2$ Kurven, deren allgemeine Gleichung lautet:

$$x^\alpha y^\beta = q^{\alpha+\beta},$$

wo α und β positive ganze Zahlen sind: es sind dies die *Hyperbeln höherer Ordnung*. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$y^\beta = q^{\alpha+\beta} x^{-\alpha},$$

so erkennt man leicht den Zusammenhang beider Arten von Kurven. Deshalb werden Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnung auch mit dem gemeinsamen Namen *binomische Kurven* bezeichnet.

Auch hier läßt sich aus der gleichseitigen Hyperbel $xy = q^2$ durch die Substitution $\frac{x}{q}$ an Stelle von y die Reihe der Hyperbeln $x^2 y = q^3$, $x^3 y = q^4$ usw. ableiten, woraus sich eine der auf Seite 43 angegebenen analoge Konstruktion ableiten läßt.

1. Die gleichseitige Hyperbel $xy = 1$, homogen $xy = \omega^2$ (Fig. 24).

Die Kurve hat sowohl die Gerade $x = 0$, als auch $y = 0$ zu Tangenten im Schnitt mit der ∞ fernen Geraden $\omega = 0$. Da der Berührungspunkt dieser Tangenten ∞ fern liegt, so sind die Koordinatenachsen gewöhnliche

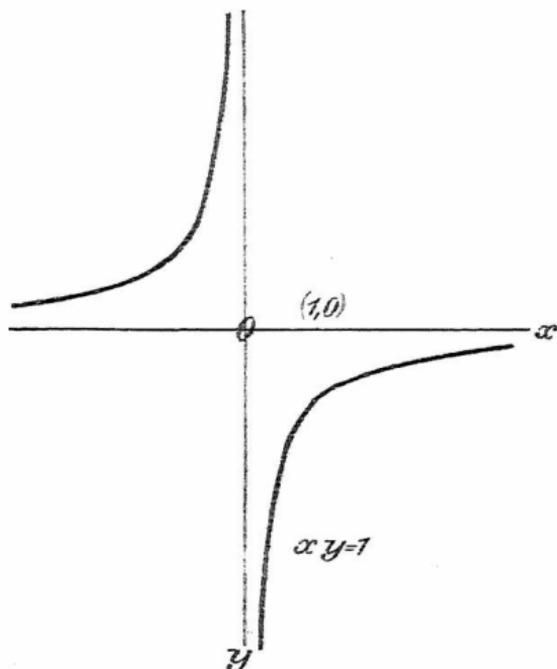


Fig. 24.

Asymptoten der Kurve. Symbole der ∞ fernen Kurvenpunkte $[x, \omega^2]$, bzw. $[y, \omega^2]$.

Das Signierungsprinzip liefert zugleich, daß die Kurve im Unendlichen auf verschiedenen Seiten der Asymptoten verläuft.

2. *Monosinguläre Hyperbel 3. Ordnung**) $x^2 y = 1$, homogen $x^2 y = \omega^3$ (Fig. 25).

*) Bezeichnung nach *Reuschle*, Praxis der Kurvendiskussion, S. 54.

a) Die Abszissenachse $y = 0$ wird von der Kurve dreipunktig berührt im Schnitt mit $\omega = 0$, d. h. $y = 0$ ist *Wendeadsymptote*. Symbol $[y, \omega^3]$.

b) Die Ordinatenachse $x = 0$ hat im Schnitt mit der ∞ fernen Geraden einen Rückkehrpunkt: $x = 0$ ist *Rückkehrasymptote*. Symbol $[x^2, \omega^3]$.

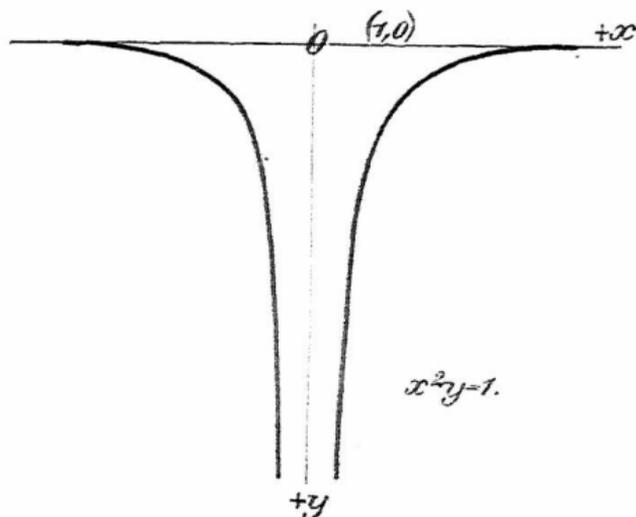


Fig. 25.

3. *Monosinguläre Hyperbel* 4. Ordnung $x^3 y = 1$, homogen $x^3 y = \omega^4$ (Fig. 26).

a) $y = 0$ wird im Schnitt mit $\omega = 0$ vierpunktig berührt, d. h. $y = 0$ ist *Flachasymptote*. Symbol $[x, \omega^4]$.

b) $x = 0$ hat im Schnitt mit $\omega = 0$ einen Spitzpunkt: $x = 0$ ist *Spitzasymptote*. Symbol $[x^3, \omega^4]$.

4. *Monosinguläre Hyperbel* 5. Ordnung $x^4 y = 1$, homogen $x^4 y = \omega^5$ (Fig. 27).

a) $y = 0$ wird im Schnitt mit $\omega = 0$ fünfpunktig berührt, d. h. $y = 0$ ist *Wendeflachasymptote*. Symbol $[y, \omega^5]$.

Hyperbeln höherer Ordnung.

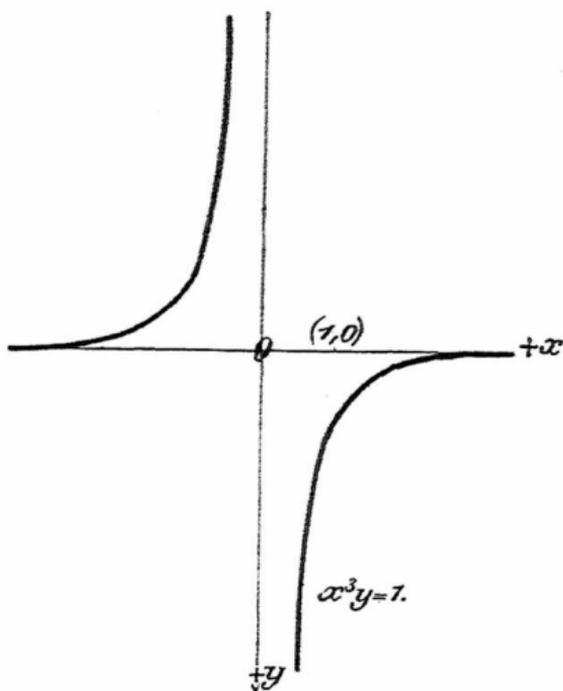


Fig. 26.

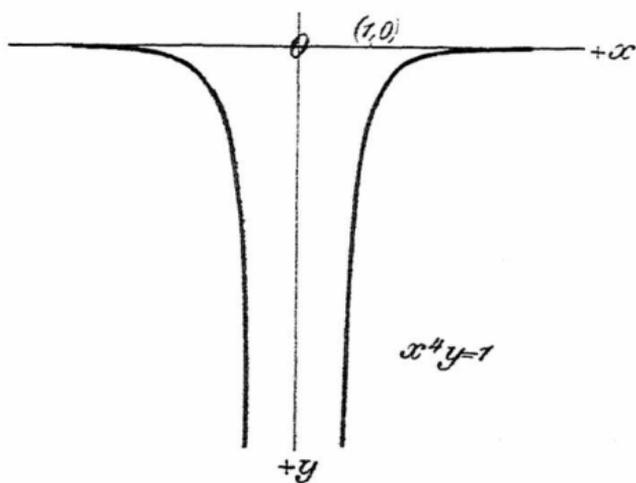


Fig. 27.

b) $x = 0$ hat im Schnitt mit $\omega = 0$ einen Rückkehrspitzpunkt: $x = 0$ ist Rückkehrspitzasymptote. Symbol $[x^4, \omega^5]$.

5. Bisinguläre Hyperbel 5. Ordnung $x^2 y^3 = 1$, homogen $x^2 y^3 = \omega^5$ (Fig. 28).

a) $y = 0$ hat im Schnitt mit $\omega = 0$ einen Wendespitzpunkt mit $y = 0$ als Wendespitzasymptote. Symbol $[y^3, x^5]$.

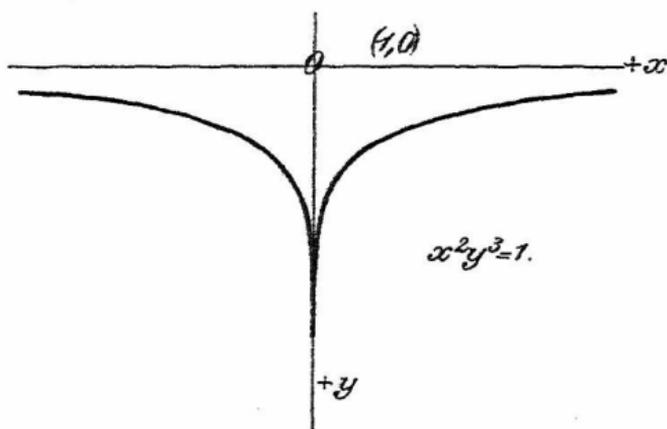


Fig. 28.

b) Die Ordinatenachse $x = 0$ hat im Schnittpunkt mit $\omega = 0$ einen Rückkehrflachpunkt mit $x = 0$ als Rückkehrflachasymptote. Symbol $[x^2, \omega^5]$.

Die Betrachtung der gestaltlichen Verhältnisse der binomischen Hyperbeln ergibt folgenden

Satz: Steht eine Asymptote in $\left. \begin{array}{l} \text{gerad-} \\ \text{ungerad-} \end{array} \right\}$ punktiger Berührung mit der Kurve, so liegen die beiden der Asymptote sich nähernden Kurvenzweige auf verschiedenen Seiten } der Asymptote. $\left. \begin{array}{l} \text{verschiedenen} \\ \text{derselben} \end{array} \right\}$

Ferner: Je größer im Symbol $[x^m, \omega^n]$, bzw. $[y^m, \omega^n]$ der Quotient $\frac{m}{n}$ ist, desto rascher nähert sich die Kurve der Asymptote.

§ 7. Kurvendiskussion mittels des Signierungsprinzips und des Prinzips der linearen Kombination.

Auf Grund der in den §§ 3—6 entwickelten Sätze läßt sich jede durch ihre Gleichung gegebene Kurve beliebig hoher Ordnung diskutieren. Der hiezu einzuschlagende Weg mag an den folgenden Beispielen ersehen werden, wobei dem Leser zu empfehlen ist, die Figuren selbst nochmals anzufertigen.

1. Beispiel.

$$x^4 y - 2 x^2 y - y^2 + 3 y - 1 = 0. \quad (\text{Fig. 29.})$$

Wir suchen zuerst eine passende Zerlegung der Gleichung in die algebraische Summe zweier Produkte. Eine solche bezeichnen wir im folgenden immer als „ λ -Form“. Wir erhalten so, indem wir gleichzeitig homogen machen:

$$x^2 y (x^2 - 2) = y^2 - 3 y + 1$$

oder

$$x^2 y (x + \sqrt{2} \omega) (x - \sqrt{2} \omega) = (y - 2,62) (y - 0,38) \omega^3 *).$$

Als Signierungskurven sind die fünf Geraden $y = 0$, $x + \sqrt{2} \omega = 0$, $x - \sqrt{2} \omega = 0$, $y - 2,62 = 0$ und $y - 0,38 = 0$ einzuzuzeichnen. Das Glied $x^2 = 0$ bleibt für die

*) Die Beifügung des Faktors ω bei den Funktionen von Geraden kann unterlassen werden, da dies keinerlei Einfluß auf die Deutung der Symbole der ∞ fernen singulären Punkte hat.

Diejenigen Zwickel, in denen keine Kurvenpunkte liegen können, machen wir durch Schraffieren kenntlich, so daß also bloß in den nichtschraffierten Zwickeln Kurvenpunkte liegen können. Durch Anwendung der auf S. 27 angegebenen Regel ergibt sich sofort ohne Rechnung nach dem Satz: „*Positiv gleich positiv ist möglich*“ derjenige Zwickel im ersten Quadranten, in dem Punkte der Kurve liegen können.

Nach dem Prinzip der linearen Kombination lesen wir ab:

(1) Symbol $[x^2(x + \sqrt{2}\omega)(x - \sqrt{2}\omega), \omega^3]$ *): Die Kurve hat im Punkt $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$ einen Spitzpunkt mit $\omega = 0$ als Tangente.

(2) Symbol $[y, (y - 2,62\omega)(y - 0,38\omega)\omega^3]$: Die Kurve hat im Punkt $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$ einen Wendeflachpunkt mit $y = 0$ als Wendeflachsasymptote.

(3) $[x - \sqrt{2}, y - 2,62]$: Die Kurve geht durch den Schnittpunkt der Geraden $\left. \begin{array}{l} x - \sqrt{2} = 0 \\ y - 2,62 = 0 \end{array} \right\}$.

Ebenso findet man, daß

(4) $\left. \begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ y = 0,38 \end{array} \right\}$, (5) $\left. \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ y = -2,62 \end{array} \right\}$, (6) $\left. \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ y = 0,38 \end{array} \right\}$

Punkte der Kurve sind.

*) Bei der Ablesung nach dem Prinzip der linearen Kombination sind *sämtliche* durch den Kurvenpunkt gehende Hilfskurven in das Symbol aufzunehmen; also hier die Geraden $\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$, die alle durch den Punkt $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$ gehen. Hieraus ergibt sich auch, daß das Symbol $\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \cdot \omega \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$ nichts Neues liefert.

(7) $[x^2, y - 2,62]$: Die Kurve berührt die Gerade $y - 2,62 = 0$ im Schnitt mit $x = 0$. Ebenso

(8) $[x^2, y - 0,38]$: $y - 0,38 = 0$ ist Tangente an die Kurve im Punkt $(0, 0,38)$.

Trägt man nun die so gewonnenen acht Ablesungen in die Figur ein — am besten mit Farbstift —, so läßt sich hieraus bereits der Verlauf der Kurve außerhalb des durch die vier Geraden $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 2,62$ und $y = 0,38$ gebildeten Rechtecks bestimmen, indem man die bereits gefundenen Kurvenelemente durch einfache Linienzüge verbindet. Dagegen ist der Verlauf der Kurve innerhalb des Rechtecks unsicher, da das Rechteck vier Eingänge hat. Es sind deshalb hier drei Fälle möglich, die in den Fig. 29 a, b, c schematisch dargestellt sind.

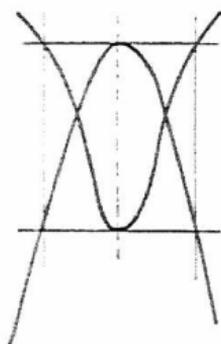


Fig. 29 a.

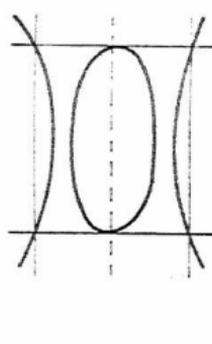


Fig. 29 b.

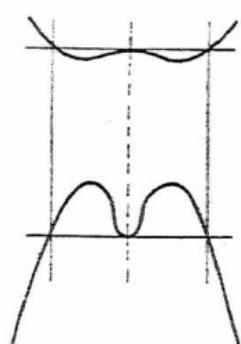


Fig. 29 c.

Zum Entscheid hierüber benutzen wir eine zweite λ -Form:

$$y(x - 1)^2(x + 1)^2 = (y - 1)^2 \omega^3.$$

Hieraus folgt:

$y = 0$ ist einzige Signierungslinie, d. h. die Kurve verläuft vollständig auf der Seite der positiven y -Achse*).

*) Würden einzelne der bereits erhaltenen Kurvenpunkte in solchen Gebieten liegen, die nach der Signierung auf Grund

Nach dem Prinzip der linearen Kombination lesen wir ab:

(9) $[y, (y - 1)^2 \omega^3]$: $y = 0$ ist Wendeflachsasymptote [s. (2)].

(10) $[(x - 1)^2(x + 1)^2, \omega^3]$: Der Punkt $\begin{cases} x = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$ ist Spitzpunkt mit $\omega = 0$ als Tangente [s. (1)].

(11) $[(x - 1)^2, y^2]$; (12) $[(x + 1)^2, y^2]$:

Die Punkte $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ sind Doppelpunkte.

Damit kann nun die Kurve nach ihrem ungefähren Verlauf ohne weiteres eingezeichnet werden. Zugleich ist ersichtlich, daß die schematische Darstellung von Fig. 29 a in unserem Fall die richtige ist.

Soll das Bild der Kurve *möglichst genau* entworfen werden, so sind hiezu weitere Hilfsmittel nötig (vgl. § 8).

Durch Auflösung der gegebenen Kurvengleichung nach x^2 , bzw. nach y lassen sich zwei neue Gleichungen herstellen, die zur Berechnung weiterer Kurvenpunkte dienen können.

2. Beispiel.

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 (x + y) (x - y) = 2xy \cdot \omega^4.$$

(Fig. 30.)

Signierungsgeraden sind $x + y = 0$, $x - y = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Die Kurvengleichung in der Form „positiv = positiv“ liefert: Kurvenpunkte liegen in dem Raum zwischen $y = 0$ und $x - y = 0$.

der zweiten λ -Form keine Kurvenpunkte enthalten können (abgesehen vom Fall des Doppelpunkts, der sich so als isolierter Punkt ergibt), so deutet das auf irgend einen Rechenfehler. Durch die neue Signierung dürfen nur solche Räume überdeckt werden, in denen keine reellen Kurvenpunkte auf Grund der ersten λ -Form bereits bestimmt wurden.

Nach dem Prinzip der linearen Kombination erhält man:

(1) Symbol $[(x + y)(x - y), xy]$: Der Koordinatenursprung ist Doppelpunkt mit vorerst noch unbekanntem Tangentenpaar.

(2) $[(x^2 + y^2 - 1)^2, x]$ und (3) $[(x^2 + y^2 - 1)^2, y]$: Die y -, bzw. x -Achse wird von der Kurve in den

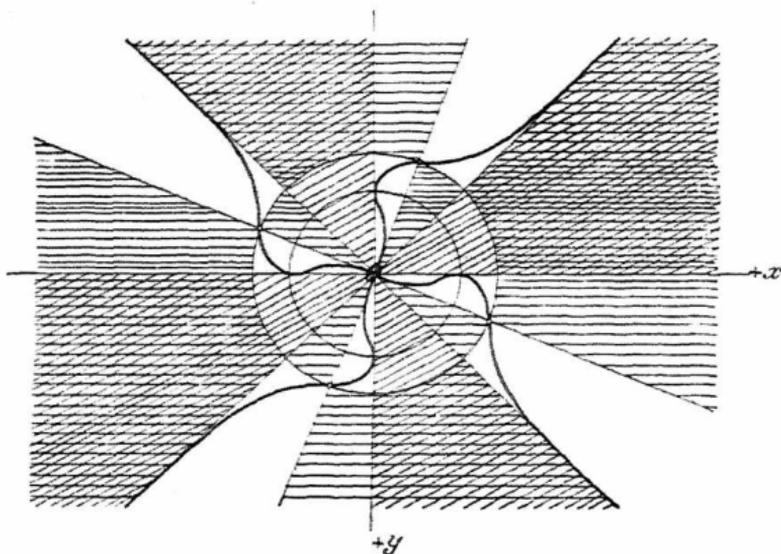


Fig. 30.

Schnittpunkten mit dem Kreis $x^2 + y^2 - 1 = 0$ zweipunktig berührt, d. h. die beiden Achsen sind Doppeltangenten.

(4) $[x + y, \omega^4]$ und (5) $[x - y, \omega^4]$: Die beiden Medianen sind Flachasymptoten. Der Verlauf der Kurve in der Nähe der so gefundenen Punkte, insbesondere längs der Asymptoten, wird durch die Signierung bestimmt.

Durch Umformung der gegebenen Gleichung läßt sich leicht eine zweite λ -Form erhalten:

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2) + (x^2 - 2xy - y^2) = 0$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)(x^2 + y^2 - 2) \\ + (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) = 0, \quad \text{wo} \quad \alpha = 1 \pm \sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Durch die neue Signierung (horizontale Schraffur) werden nun weitere Zwickel ausgeschieden, in denen die Kurve nicht verlaufen kann.

Weiter ergeben sich die Schnittpunkte des Kreises $x^2 + y^2 = 2$ mit dem Geradenpaar $x = (1 \pm \sqrt{2})y$ als Punkte der Kurve.

Das Symbol $[(x^2 + y^2)(x + y)(x - y), (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)]$ liefert: Die Kurve hat im Ursprung einen Doppelwendepunkt mit den Geraden $x = (1 \pm \sqrt{2})y$ als Wendetangenten.

Damit kann das Bild der Kurve ziemlich genau aufgezeichnet werden.

Beliebige weitere Kurvenpunkte liefert die Parameterdarstellung

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \pm \sqrt{\lambda} \\ \lambda(x^2 - y^2) = 2xy \end{array} \right\}$$

als Schnittpunkte der konzentrischen Kreisschar $x^2 + y^2 = 1 \pm \sqrt{\lambda}$ mit dem Geradenbüschel durch den Ursprung $\lambda(x^2 - y^2) = 2xy$, und zwar liefert jeder Wert von λ vier Kurvenpunkte. Eine zweite Parameterform ergibt die Substitution $y = \mu x$.

3. Beispiel.

$$(1) \quad (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 4)(y^2 - 1)^2 = 0 \quad (\text{Fig. 31})$$

oder

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2 + (y - 2)(y + 2) \\ (y - 1)^2(y + 1)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Durch einfache Umformungen ergeben sich noch zwei weitere λ -Formen:

$$(2) \quad x^2(x^2 - 4) + y^2(y^2 - 3)^2 = 0$$

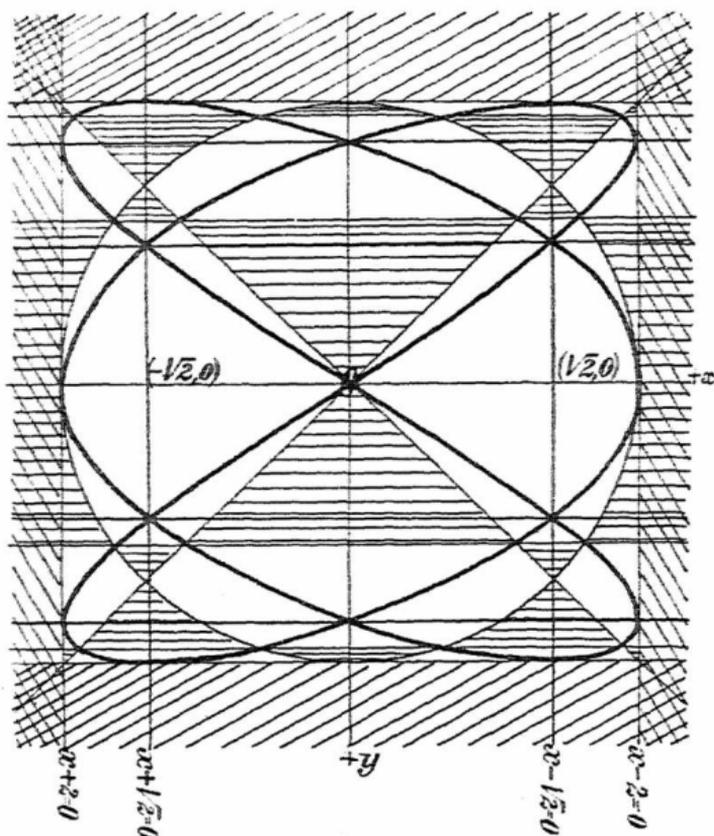


Fig. 31.

oder

$$(2') \quad x^2(x-2)(x+2) + y^2(y-\sqrt{3})^2(y+\sqrt{3})^2 = 0$$

und

$$(3) \quad (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) + y^2(y^4 - 5y^2 + 5) = 0$$

oder

$$(3') \quad \begin{cases} (x+y)(x-y)(x^2+y^2-4) + y^2(y+1,90) \\ (y-1,90)(y+1,18)(y-1,18) = 0. \end{cases}$$

Das Signierungsprinzip, der Reihe nach angewandt auf die Formen (1'), (2') und (3'), gibt: Die Kurve liegt ganz zwischen den Geraden $x \pm 2 = 0$ und $y \pm 2 = 0$. Die Form (3') scheidet dann in diesem Quadrat noch 18 Zwickel aus, in denen die Kurve nicht verlaufen kann.

Das Prinzip der linearen Kombination liefert aus (1'): Die Geraden $y \pm 2 = 0$ sind Doppeltangenten der Kurve, die Berührungspunkte liegen auf $x \pm \sqrt{2} = 0$.

Ferner: Die Schnittpunkte von $x \pm \sqrt{2} = 0$ mit $y \pm 1 = 0$ sind Doppelpunkte. Aus (2') folgt: Der Ursprung und die Punkte $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pm \sqrt{3} \end{array} \right\}$ sind ebenfalls Doppelpunkte; die Geraden $x \pm 2 = 0$ sind Doppeltangenten mit den Punkten $\left\{ \begin{array}{l} x \pm 2 = 0 \\ y \pm \sqrt{3} = 0 \end{array} \right\}$ als Berührungspunkten.

Aus (3') kommt:

Auf dem Kreis $x^2 + y^2 - 4 = 0$ liegen zehn Punkte der Kurve (eigentlich zwölf, da die Punkte $x = \pm 2$, $y = 0$ doppelt zählen), auf den Geraden $x \pm y = 0$ je sechs Punkte (der Ursprung zählt doppelt) im Schnitt mit den drei Geradenpaaren

$$y^2 = 0, \quad y \pm 1,90 = 0 \quad \text{und} \quad y \pm 1,18 = 0.$$

Unsere drei λ -Formen liefern also für die vorgelegte C^6 unmittelbar 33 Punkte und zugleich die Tangenten in 10 derselben.

4. Beispiel.

$$x^4 + x^2 y^2 - 6x^2 y + y^2 = 0 \quad (\text{Fig. 32}).$$

Die in den vorhergehenden Beispielen angewandte Methode, mehrere λ -Formen zur Diskussion zu ver-

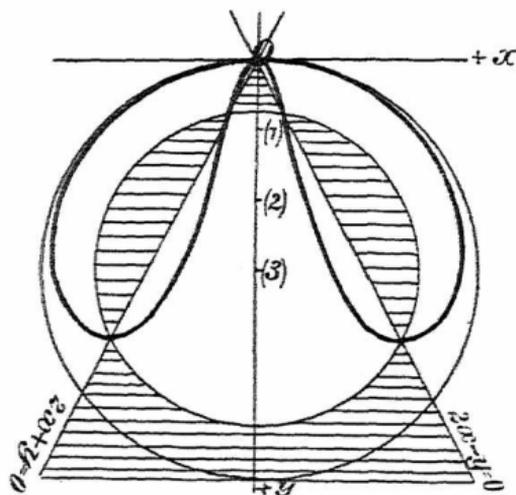


Fig. 32.

wenden, ist hier besonders vorteilhaft. Aus der gegebenen Gleichung folgt

$$x^2(x^2 + y^2 - 6y) + y^2 = 0$$

oder

$$(1) \quad x^2[x^2 + (y - 3)^2 - 9] + y^2 = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich durch das simultane System der zwei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x^2 + (y - 3)^2 - 9 &= -\lambda^2 \\ \lambda^2 x^2 &= y^2 \end{aligned} \right\}$$

ersetzen. Hierin ist λ^2 ein willkürlicher Parameter. Jedem bestimmten Wert von λ^2 entspricht eine λ -Form.

So z. B. mit

$$\lambda^2 = 1 : (2) x^2 [x^2 + (y - 3)^2 - 8] = x^2 - y^2 ;$$

$$\lambda^2 = 2 : (3) x^2 [x^2 + (y - 3)^2 - 7] = 2x^2 - y^2 ;$$

$$\lambda^2 = 4 : (4) x^2 [x^2 + (y - 3)^2 - 5] = 4x^2 - y^2$$

usw. Aus der Gleichung (1) folgt nach dem Signierungsprinzip, da „positiv plus positiv“ nicht gleich Null sein kann: Die Kurve liegt innerhalb des Kreises $x^2 + (y - 3)^2 = 9$, hat also keine reellen ∞ fernen Punkte.

Das Symbol $[x^2[x^2 + (y - 3)^2 - 9], y]$ besagt: Die Kurve hat im Ursprung einen Selbstberührungspunkt mit $y = 0$ als Tangente. Da die Kurve innerhalb des Kreises verlaufen muß, so liegen beide Zweige des Selbstberührungspunktes auf der Seite der positiven y -Achse. Weitere Kurvenpunkte ergeben die λ -Formen (2), (3), (4), usw. Hieraus folgt: Die Kurve ist das Erzeugnis eines konzentrischen Kreisbüschels mit einem dazu projektiven Geradenpaar durch den Ursprung.

5. Beispiel. $(x^2 - y)^2 = x^5$ (Fig. 33).

Einzigste Signierungslinie ist $x = 0$. Daraus folgt, daß nur auf seiten der x -Achse reelle Kurvenpunkte liegen können. Das Symbol $[(x^2 - y)^2, x^5]$ besagt: Die Parabel $x^2 - y = 0$ ist Näherungskurve im Ursprung, aber gemäß der Signierung nur im I. Quadranten. Die Kurve hat im Ursprung eine sogenannte „Schnabelspitze“ — der Name rührt von der Ähnlichkeit mit einem Vogelschnabel her. Das Charakteristische der Schnabelspitze besteht also darin, daß in der Nähe der Spitze beide Kurvenzüge auf derselben Seite der Spitzentangente liegen, die in unserem Fall $y = 0$ ist. Aus der homogenen Form

$$(x^2 - y\omega)^2 \omega = x^5$$

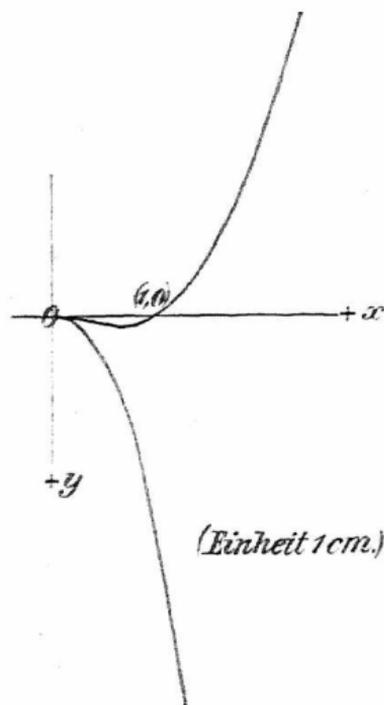


Fig. 33.

folgt: Die Kurve verläuft im Unendlichen wie die Parabel $y^2 = x^5$.

Durch Auflöser nach y erhält man

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}} \text{ *) ,}$$

eine zur punktweisen Berechnung sehr geeignete Form der Kurvengleichung.

Anmerkung. Die Schnabelspitzen — auch *Spitzen 2. Art* genannt — treten erst bei Kurven 4. Ordnung auf. Folgende Kurven haben im Ursprung eine Schnabelspitze:

$$1. \quad x^4 - x^2 y - x y^2 + \frac{y^2}{4} = 0 ,$$

$$2. \quad x^4 + x y^3 + y^4 - 2 x^2 y - x y^2 + y^2 - \lambda y^3 = 0 .$$

Wie sieht die Kurve 2. aus a) für $\lambda = 1$? b) für $\lambda = 2$?

Die Diskussion der durch das simultane System

$$\begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 - 4 = \lambda \\ (x - 3y + 1)\lambda + y = 0 \end{cases}$$

*) Vgl. hierüber Beutel, Algebraische Kurven, II. Teil, Höhere Singularitäten.

oder durch die Gleichung

$$[x^2 + (y + 1)^2 - 4] (x - 3y + 1) + y \cdot \omega^2 = 0$$

dargestellten C^3 sei dem Leser überlassen (s. Fig. 34).

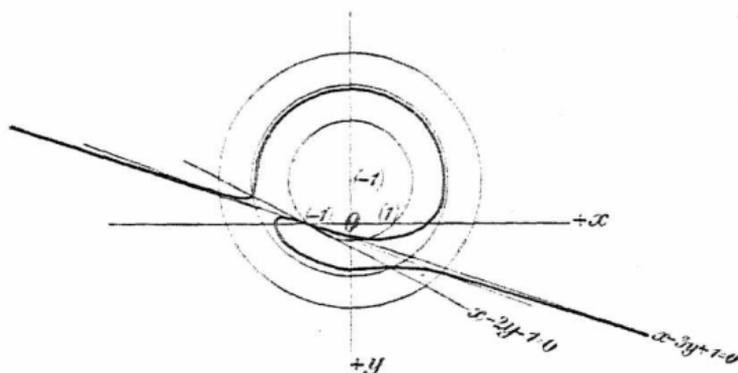


Fig. 34.

Diese Kurve ist ein spezieller Fall der Kurve 3. Ordnung

$$\Phi \cdot G_1 + G_2 \omega^2 = 0,$$

wo $\Phi = 0$ einen Kegelschnitt (in dem obigen Fall einen Kreis) und $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ zwei Gerade darstellen. Alle diese C^3 haben $G_1 = 0$ als Asymptote und gehen durch die Schnittpunkte von $\Phi = 0$ mit $G_2 = 0$.

Wie sieht die C^3 aus, wenn G_2 den Kegelschnitt berührt oder gar nicht schneidet? wenn der Punkt $\left\{ \begin{matrix} G_1 = 0 \\ G_2 = 0 \end{matrix} \right\}$ auf $\Phi = 0$ liegt? wenn $\Phi = 0$ eine Parabel oder eine Hyperbel ist?

Weitere Beispiele sind im folgenden überall verstreut; auch bietet die auf Seite 129 ff. angegebene Liste spezieller Kurven genügend Stoff zur Übung in der Kurvendiskussion.

§ 8. Weitere Hilfsmittel der Kurvendiskussion.

Obwohl die Prinzipien der Signierung und der linearen Kombination vollständig hinreichen, um den *rohen* Verlauf einer durch ihre Gleichung gegebenen Kurve zu bestimmen, so ist es doch meistens notwendig, zur Festlegung des *genauen* Verlaufs der Kurve noch weitere Punkte zu bestimmen. Zugleich hat man damit eine Kontrolle für die Richtigkeit der aus beiden Prinzipien gewonnenen Ablesungen.

I. Symmetrieverhältnisse.

1. Kommt in der Gleichung einer Kurve die Veränderliche x nur in geraden Potenzen vor, so entspricht jedem Wert von y eine Anzahl von Wertepaaren von x , die nur durch das Vorzeichen unterschieden sind, d. h. ist (x, y) ein Punkt der Kurve, so liegt auch der Punkt $(-x, y)$ auf der Kurve: Die Kurve ist *symmetrisch zur Ordinatenachse* $x = 0$.

2. Ebenso ist eine Kurve, deren Gleichung nur gerade Potenzen von y enthält, *symmetrisch zur Abszissenachse* $y = 0$.

3. Enthält eine Kurvengleichung nur gerade Potenzen der homogenisierenden Veränderlichen ω , so ist der Ursprung Mittelpunkt der Kurve, denn jedem Kurvenpunkt (x, y, ω) entspricht ein Kurvenpunkt $(x, y, -\omega)$ oder dem Punkt $\left(\frac{x}{\omega}, \frac{y}{\omega}\right)$ entspricht der Punkt $\left(\frac{-x}{\omega}, \frac{-y}{\omega}\right)$.

Da aber die Verbindungsgerade zweier solcher Punkte im Ursprung halbiert wird, so ist damit die Richtigkeit des oben aufgestellten Satzes erwiesen.

4. Lassen sich in der Kurvengleichung x und y vertauschen, ohne daß die Gleichung sich ändert, so ist die Kurve *symmetrisch zur 1. Mediane* $x - y = 0$.

5. Lassen sich in der Kurvengleichung x und y mit $-y$ und $-x$ vertauschen, ohne daß diese sich ändert, so ist die Kurve symmetrisch zur 2. Mediane $x + y = 0$.

II. Schnittpunkte mit den Achsen und den Medianen.

Aus der Gleichung $f_n(x, y, \omega) = 0$ einer C^n erhält man die Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen aus den zwei simultanen Systemen

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, \omega) = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, \omega) = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, \omega) = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$$

liefert die Schnittpunkte mit der ∞ fernen Geraden (vgl. § 10).

Die Koordinaten der Schnittpunkte der Kurve mit den beiden Medianen ergeben sich aus den beiden simultanen Systemen

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right\}.$$

III. Berechnung weiterer Kurvenpunkte.

Hat eine Kurve eine Asymptote, so empfiehlt es sich immer, deren Schnittpunkte mit der Kurve zu bestimmen. Dies geschieht in einfachster Weise dadurch, daß man die Kurvengleichung $f(x, y) = 0$ nach Potenzen einer Unbekannten, z. B. x , ordnet und mit der Funktion der Asymptote $y = ax + b$ in die Kurvengleichung dividiert. Die sich ergebende Restfunktion $\psi(x, y)$ stellt, gleich Null gesetzt, eine Kurve dar, die durch die Schnittpunkte der gegebenen Kurve mit der Asymptote geht. Die Kurvengleichung läßt sich dann in die Form bringen:

$$0 = f(x, y) = (y - ax - b)\varphi(x, y) + \psi(x, y).$$

Der Vorteil ist hier, daß der Grad von $\psi(x, y)$ im allgemeinen mindestens um 2 niedriger ist, als der von $f(x, y) = 0$; denn macht man homogen, so hat man

$$0 = f_n(x, y, \omega) = (y - ax - b\omega) \varphi_{n-1}(x, y, \omega) + \psi_{n-2}(x, y, \omega) \cdot \omega^2.$$

$y - ax - b = 0$ ist ja nur dann Asymptote, wenn zu $\psi_{n-2}(x, y, \omega)$ der Faktor ω^2 tritt (falls nicht $\varphi_{n-1}(x, y, \omega) = 0$ durch den Punkt $\left\{ \begin{array}{l} y - ax - b\omega = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$ geht), da $\omega = 0$ die Gerade $y - ax - b\omega = 0$ in 2 zusammenfallenden Punkten schneiden muß.

Hat eine Kurve mehrere Asymptoten, so läßt sich dieses Verfahren mehrmals anwenden.

Sind $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ die drei reellen Asymptoten einer C^3 , so erhält man durch Anwendung des Divisionsprinzips die Gleichung in der (zuerst von Plücker)* angegebenen Form

$$G_1 G_2 G_3 + \lambda G \omega^2 = 0.$$

Bei einer C^4 mit vier reellen Asymptoten $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$, $G_4 = 0$ bekommt man ebenso:

$$G_1 G_2 G_3 G_4 + \lambda \Phi_2(x, y) = 0,$$

wo Φ_2 eine Funktion 2. Grads ist. Damit erhält man nebenbei die zwei

Sätze. Bei einer C^3 mit drei reellen Asymptoten liegen deren Schnittpunkte mit der Kurve auf einer Geraden, bei einer C^4 mit vier reellen Asymptoten auf einem Kegelschnitt.

Hat die Kurve einen mehrfachen Punkt, so erhält man weitere Kurvenpunkte als Schnittpunkte eines durch

*) Plücker, System der anal. Geometrie. 1835. S. 130.

den mehrfachen Punkt gelegten Strahlenbüschels. Die Rechnung gestaltet sich sehr einfach, wenn der mehrfache Punkt im Ursprung liegt. Die Kurve läßt sich dann mittels der Substitution $y = \lambda x$ in der Form darstellen:

$$\begin{cases} x = \varphi(\lambda) \\ y = \psi(\lambda) \end{cases}.$$

Ist der mehrfache Punkt ein r -facher Punkt, so erniedrigt sich durch die Substitution $y = \lambda x$ der Grad der Gleichung $f(x, \lambda x) = 0$ um r : x^r tritt als Faktor vor die Gleichung, entsprechend den r Schnittpunkten $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ der Kurve mit der Geraden $y = \lambda x$.

Beispiel. Die C^4

$$x^4 - y^4 - 2x^2y = 0 \quad (\text{Fig. 40, s. Seite 91})$$

hat im Ursprung einen 3fachen Punkt (Oval- und Rückkehrpunkt).

Die Substitution $y = \lambda x$ ergibt die Parameterform

$$\begin{cases} x = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^4} \\ y = \frac{2\lambda^2}{1 - \lambda^4} \end{cases}.$$

Da sich die Koordinaten eines Kurvenpunktes rational in λ ausdrücken lassen, so ist die gegebene C^4 eine rationale Kurve.

IV. Numerische Auflösung der Gleichung.

1. Algebraische Auflösung.

Ordnet man die Gleichung der Kurve nach fallenden Potenzen einer der drei Veränderlichen, z.B. nach x , so läßt

sich diese so erhaltene Gleichung nach bekannten Methoden algebraisch auflösen. Dies ist aber praktisch nur dann zu empfehlen, wenn der Grad der Gleichung nicht > 2 . Zuweilen läßt sich auch die Kurvengleichung in einfacher Weise nach Potenzen einer linearen Kombination zweier Veränderlichen anordnen und nach diesen auflösen. Auch die Fälle, in denen $f(x, y) = 0$ quadratisch in x^2 , y^2 , $(x - y)^2$ usw. ist, gehören hierher.

So ist die Kurve § 7, Beispiel 1 quadratisch in x^2 und kann nach x^2 aufgelöst werden.

2. Graphisch-mechanische Auflösung*).

Wie wir oben gesehen haben, ist es häufig von Wert, die Schnittpunkte ausgezeichneter Geraden mit der Kurve zu bestimmen. Wird der Grad der Bestimmungsgleichung > 2 , so empfiehlt sich die Anwendung graphischer Methoden; die Anwendung der bekannten Formeln zur Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung 3. oder 4. Grads ist praktisch viel zu umständlich. Selbstverständlich sind diese Methoden nur dann anwendbar, wenn es sich um Zahlengleichungen handelt.

Sind ganzzahlige Wurzelwerte vorhanden, was durch einfaches Probieren festgestellt wird, da sie Faktoren des Absolutglieds sind, so werden diese durch Abdividieren ausgeschieden. Die Restgleichung wird dann auf folgende Weise weiter behandelt.

a) Gleichungen 3. Grads.

Aus der Gleichung 3. Grads in der Form

$$x^3 + bx^2 + cx = d$$

folgt

$$x(x^2 + bx + c) = d.$$

*) Vgl. *Mehmkke*, Numerisches Rechnen. Enzyklopädie der math. Wissensch., Band I, 2. Teil, F. Leipzig 1904.

Diese Gleichung läßt sich ersetzen durch das simultane System

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + b x + c = y \\ x y = d \end{array} \right\} \text{ oder } \left. \begin{array}{l} (1) \left\{ y - \left(c - \frac{b^2}{4} \right) = \left(x + \frac{b}{2} \right)^2 \right\} \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} x y = d \end{array} \right\} \end{array} \right\}.$$

Gleichung (1) stellt die um $-\frac{b}{2}$ parallel zur $+x$ -Achse und $\left(c - \frac{b^2}{4} \right)$ parallel zur $+y$ -Achse verschobene Parabel $y = x^2$ dar; Gleichung (2) eine gleichseitige Hyperbel mit den Achsen als Asymptoten. Die Abszissen der Schnittpunkte beider Kurven liefern die Wurzeln der gegebenen Gleichung 3. Grads. Da der Parameter der Parabel von den Konstanten der gegebenen Gleichung unabhängig ist, so läßt sich mittels der Hyperbelschar (2) und der beweglichen Parabel (1) jede Gleichung 3. Grads graphisch, d. h. näherungsweise, auflösen*).

Anmerkung. Die Methode vereinfacht sich wesentlich, wenn, was oft der Fall, b oder c verschwindet.

Beispiel. Die gegebene Gleichung sei

$$x^3 + x^2 - 1 = 0.$$

Aus

$$x(x^2 + x) - 1 = 0$$

folgt das simultane System

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x^2 + x \\ x y = 1 \end{array} \right\} \text{ oder } \left\{ \begin{array}{l} y + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \\ x y = 1 \end{array} \right\}$$

Durch punktweises Aufzeichnen beider Kurven (genau braucht dies ja nur in der Nähe der mutmaßlichen

*) Vgl. *Reuschle*, Graphisch-mechanischer Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen. Stuttgart 1885.

Schnittpunkte zu geschehen) ergibt sich, daß die Gleichung nur eine reelle Wurzel hat:

$$x = 0,76 .$$

(Die letzte Dezimale ist angenähert.) Die Figur mag sich hier der Leser selbst anfertigen.

Eine andere Zusammenfassung der einzelnen Glieder der Gleichung 3. Grads

$$x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

in der Form

$$(x^3 + b x^2) + c x + d = 0$$

liefert das simultane System*)

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} y \\ \end{array} \right. = x^3 + b x^2 \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} y + c x + d = 0 \\ \end{array} \right. \end{array} \right\} .$$

Konstruiert man nun für die einzelnen Werte von b die entsprechenden Kurven 3. Grads, so stellen die Abszissen der Schnittpunkte der Geraden (2) mit der Kurve (1) die positiven Wurzeln der gegebenen Gleichung 3. Grads dar. Um die negativen Wurzeln zu bekommen, ersetzt man x durch $-x$ und erhält damit

$$-x^3 + b x^2 - c x + d = 0$$

oder

$$x^3 - b x^2 + c x - d = 0 .$$

Diese Methode hat den Vorteil, daß die Gerade (2) für jeden Wert von c bzw. d eingezeichnet werden kann (ein Faden genügt hiebei), wenn nur b ganzzahlig ist. Hat man jedoch für genügend viele Werte von b

*) Vgl. *d'Ocagne*, calcul graphique et nomographie, Paris 1908, S. 276, wo eine Modifikation dieser Methode angegeben ist, und auch das größere Werk desselben Verfassers: *Traité de nomographie*, Paris 1899.

das Kurvenbüschel (1) gezeichnet, so läßt sich unschwierig der Wert von b interpolieren.

Sowohl die Methode von d'Ocagne, als auch die von Reuschle erfordern eine unschwierig anzufertigende graphische Tafel, um die Auflösung möglichst rasch bewerkstelligen zu können.

b) Gleichungen 4. Grads.

Aus der allgemeinen Gleichung 4. Grads in der Form

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 = dx + 1$$

folgt

$$x^2(ax^2 + bx + c) = dx + 1,$$

woraus das simultane System hervorgeht:

$$\begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = y \\ \end{array} \right\} \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} x^2y = dx + 1 \end{array} \right\}. \end{array}$$

Gleichung (1) stellt die parallel verschobene Parabel $y = ax^2$, Gleichung (2) eine trinomische Hyperbel mit $y = 0$ als Asymptote und $x = 0$ als Rückkehrasymptote dar, die sich ohne Mühe punktweise konstruieren lassen. Die Schnittpunkte beider Kurven sind die Abszissen der Wurzeln.

Beispiel. Für die Kurve

$$x(x - y + 1)(x^2 + y^2 - 4) = (y - 1)(y + 1)\omega^2$$

sollen die Schnittpunkte mit der x -Achse bestimmt werden.

$y = 0$ gibt

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

oder

$$x^2(x^2 + x - 4) - 4x + 1 = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich nun durch das simultane System ersetzen:

$$\begin{cases} (1) & y = x^2 + x - 4 \\ (2) & x^2 y = 4x - 1 \end{cases}.$$

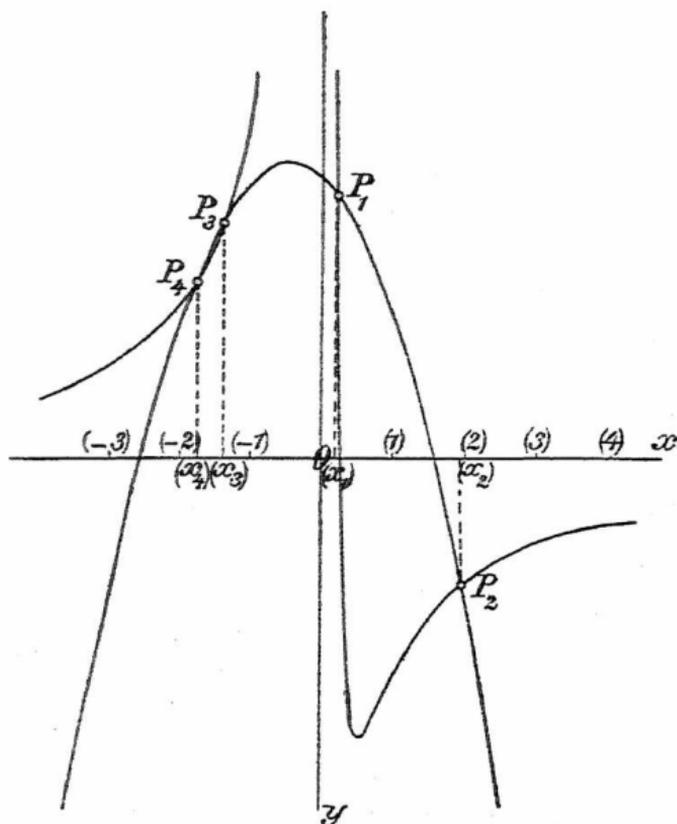


Fig. 35.

Die Aufzeichnung der beiden Kurven (1) und (2) — am besten auf Millimeterpapier — (s. Fig. 35) ergibt als Wurzelwerte (die 2. Dezimale angenähert):

$$x_1 = 0,21; \quad x_2 = 1,96; \quad x_3 = -1,38; \quad x_4 = -1,77.$$

c) Gleichungen höheren Grads.

Die oben angegebene Methode läßt sich auch auf Gleichungen höheren Grads ausdehnen, wenn eines oder mehrere Glieder derselben fehlen. Durch passende Substitution ergeben sich zwei leicht zu konstruierende

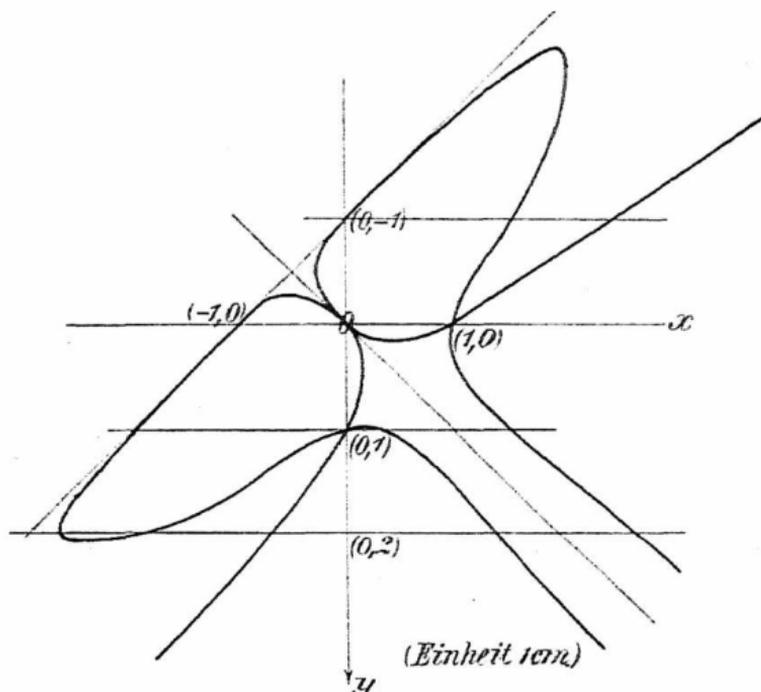


Fig. 36.

Kurven. Der Gang der Methode wird am besten durch ein Beispiel erläutert.

Beispiel: Es soll die C^5 diskutiert werden, deren Gleichung lautet:

$$(x + y - 1)^2 (x + y + 1) (x - y)^2 = x^2 y^2 \cdot \omega \quad (\text{Fig. 36}).$$

Die Deutung der einzelnen Symbole sei dem Leser zur Übung überlassen.

Um die Kurve genau zeichnen zu können, müssen weitere Punkte berechnet werden, wobei zu berücksichtigen ist, daß die 1. Mediane $x = y$ Symmetrielinie ist.

1. $y = 1$ gibt $x^2(x + 2)(x - 1)^2 = x^2$ oder $x^2 = 0$ (Probe!) und $(x + 2)(x - 1)^2 = 1$ oder $x^3 - 3x + 1 = 0$ oder $x(x^2 - 3) + 1 = 0$.

Hieraus ergeben sich aus dem System $\begin{cases} xy + 1 = 0 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$ drei reelle Wurzelwerte:

$$x_1 = 0,32; \quad x_2 = 1,53; \quad x_3 = -1,86.$$

2. $y = -1$ gibt $(x - 2)^2 x(x + 1)^2 = x^2$ oder $x = 0$ (Probe!) und $(x - 2)^2(x + 1)^2 = x$ oder $(x^2 - x - 2)^2 = x$.

Das simultane System $\begin{cases} y = x^2 - x - 2 \\ y^2 = x \end{cases}$ liefert zwei reelle Wurzeln:

$$x_1 = 1,6; \quad x_2 = 2,6.$$

3. $y = 2$ gibt $(x + 1)^2(x + 3)(x - 2)^2 = 4x^2$ oder $(x + 3)(x^2 - x - 2)^2 = 4x^2$.

Hieraus folgt das simultane System

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = y \\ y^2(x + 3) = 4x^2 \end{cases},$$

das fünf reelle Wurzelwerte gibt:

$$x_1 = 2,7; \quad x_2 = 2,4; \quad x_3 = -0,7; \quad x_4 = -2 \text{ (genau);}$$

$$x_5 = -2,6.$$

Die Figuren (am besten auf Millimeterpapier) möge sich hier der Leser selbst anfertigen.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots = 0 \end{array} \right\} \text{ oder } \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 + \varphi_3 + \dots = 0 \end{array} \right\}$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} bx + cy = 0 \\ dx^2 + exy + fy^2 + \dots = 0 \end{array} \right\}.$$

Eliminiert man hieraus y , so ergibt sich eine Gleichung in x , deren niederstes Glied vom 2. Grad ist, die also zwei Wurzeln $x=0$ hat, d.h. die Gerade $\varphi_1 \equiv bx + cy = 0$ schneidet die Kurve im Ursprung in zwei zusammenfallenden Punkten oder die Gerade $\varphi_1 = 0$ ist Tangente.

Satz 2. Die Kurve

$$0 = f(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \dots$$

hat im Nullpunkt einen gewöhnlichen Punkt mit $\varphi_1(x, y) = 0$ als Tangente.

Ganz ähnlich ist die Beweisführung für die folgenden Sätze:

Satz 3. Die Kurve

$$0 = f(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_1(x, y) \psi_1(x, y) + \varphi_3(x, y) + \dots$$

oder

$$0 = f(x, y) = \varphi_1(x, y) [1 + \psi_1(x, y)] + \varphi_3(x, y) + \dots$$

hat im Nullpunkt einen Wendepunkt mit $\varphi_1(x, y) = 0$ als Wendetangente.

Dasselbe gilt für die Kurve

$$0 = f(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_3(x, y) + \dots$$

Satz 4. Die Kurve

$$0 = f(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_1(x, y) \psi_1(x, y) + \varphi_1(x, y) \psi_2(x, y) + \varphi_4(x, y) + \dots$$

oder

$$0 = f(x, y) = \varphi_1(x, y) [1 + \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y) + \varphi_4(x, y) + \dots]$$

oder

$$0 = f(x, y) = \varphi_1(x, y) \cdot \chi_2(x, y) + \varphi_4(x, y) + \dots$$

hat im Ursprung einen Flachpunkt mit $\varphi_1(x, y) = 0$ als Flachtangente usw. usw.

Ist $\varphi_1(x, y) = 0$, so gilt der

Satz 5. Die Kurve

$$0 = f(x, y) = \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \dots$$

hat im Ursprung einen Doppelpunkt mit $\varphi_2(x, y) = 0$ als Tangentenpaar.

Sind die Wurzeln der Gleichung $\varphi_2(x, y) = 0$ reell und getrennt
 reell und zusammenfallend
 imaginär konjugiert
 gewöhnlicher Doppelpunkt
 Rückkehrpunkt
 isolierter Punkt

} (siehe Fig. 10—12).

Satz 6. Die Kurve

$$0 = f(x, y) = \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \dots$$

hat im Nullpunkt einen dreifachen Punkt mit $\varphi_3(x, y) = 0$ als Tangenten.

Hier können nun vier Fälle auftreten: Von den drei Wurzeln der Gleichung $\varphi_3(x, y) = 0$ ist eine stets reell; für die beiden anderen können die drei Fälle des Satzes 5 eintreten.

a) Ist eine Wurzel reell und sind die beiden andern reell und verschieden
 reell und gleich
 imaginär konjugiert

} so ist der dreifache Punkt ein

gewöhnlicher Kurvenpunkt im Verein mit einem
Doppelpunkt
Rückkehrpunkt } . (Beispiel siehe unten.)
isolierten Punkt

b) Sind alle drei Wurzeln gleich, so tritt der Spitzpunkt auf (siehe Fig. 16).

Beispiel zu a) (Fig. 37—39).

$$1. \text{ Fall: } x^4 + y^4 = y(2x^2 - \sqrt{9}xy + y^2) \text{ oder} \\ x^4 + y^4 = y(2x - y)(x - y):$$

dreifacher Punkt im Ursprung mit den Geraden $y = 0$, $2x - y = 0$, $x - y = 0$ als Tangenten. (Fig. 37.)

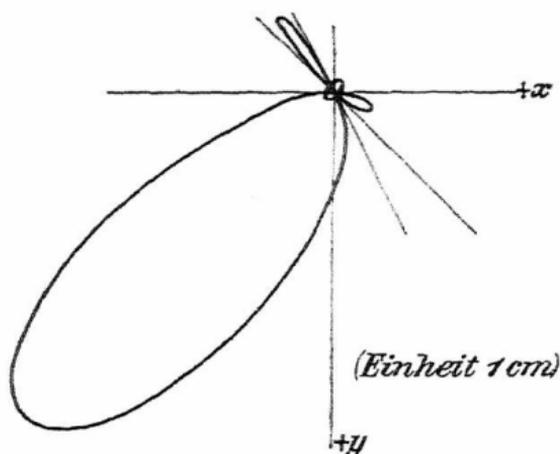


Fig. 37.

$$2. \text{ Fall: } x^4 + y^4 = y(2x^2 - \sqrt{8}xy + y^2) \text{ oder} \\ x^4 + y^4 = y(x\sqrt{2} - y)^2:$$

$y = 0$ ist gewöhnliche Tangente, $x\sqrt{2} - y = 0$ ist Rückkehrtangente der Kurve im Ursprung. Dieses Ergebnis läßt sich auch aus dem Symbol

$$[x^4 + y^4, y(x\sqrt{2} - y)^2] \text{ ablesen:}$$

$y = 0$ ist gewöhnliche Tangente (Symbol $[1, 2]$), da der Faktor 2. Grads $(x\sqrt{2} - y)^2$ den Ausdruck 4. Grads $x^4 + y^4$ um den Exponenten 2 vermindert; ferner $(x\sqrt{2} - y)^2 = 0$ ist Rückkehrtangente (Symbol $[2, 3]$), da der Faktor 1. Grads y den Ausdruck 4. Grads $x^4 + y^4$ um den Exponenten 1 vermindert. (Fig. 38.)

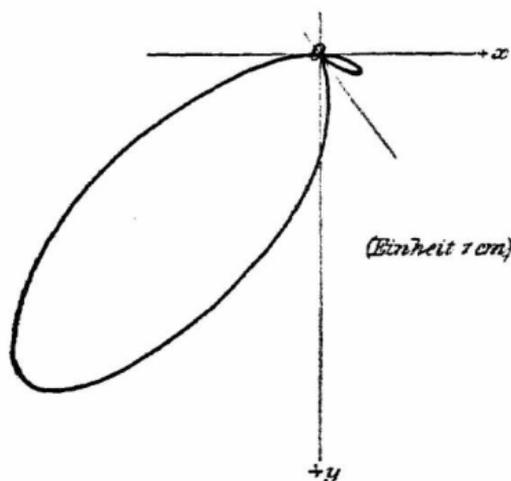


Fig. 38.

3. Fall: $x^4 + y^4 = y(2x^2 - \sqrt{7}xy + y^2)$:

Der Klammerausdruck $2x^2 - \sqrt{7}xy + y^2 = 0$ läßt sich nicht in zwei reelle Faktoren zerlegen, deshalb ist der Ursprung gewöhnlicher Kurvenpunkt mit $y = 0$ als Tangente im Verein mit einem isolierten Punkt. Für das Auge ist diese Singularität von einem gewöhnlichen Kurvenpunkt nicht zu unterscheiden; in der Fig. 39 haben wir den isolierten Punkt durch Verdickung angedeutet.

Die Betrachtung der drei Figuren 37—39 läßt zugleich den Übergang der einen Art in die andere erkennen:

In Fig. 38 ist die Schleife der Fig. 37 im 3. Quadranten verschwunden; in Fig. 39 erreicht die Schleife im 1. Quadranten den Ursprung nicht mehr und statt der Spitze treten zwei Wendepunkte auf.

Zur punktweisen Konstruktion der Kurve empfiehlt sich die Substitution

$$y = \lambda x,$$

wodurch x und y als rationale Funktionen von λ sich ergeben.

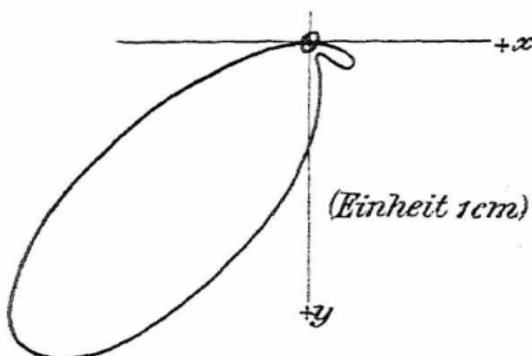


Fig. 39.

Allgemein gilt bezüglich des Verhaltens einer Kurve im Nullpunkt der

Satz 7. Sind in der Gleichung einer Kurve

$$0 = f_n(x, y) = \varphi_r(x, y) + \varphi_{r+1}(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y)$$

die Glieder niederster Ordnung vom r ten Grad, so ist der Nullpunkt ein r -facher Punkt mit den Tangenten $\varphi_r(x, y) = 0$, oder kurz:

Das Aggregat $\varphi_r(x, y) = 0$ der Glieder niederster Ordnung einer Kurvengleichung liefert die r Nullpunktstangenten.

Mit Berücksichtigung dieses Satzes ergibt sich aus jeder Kurvengleichung eine λ -Form, aus der mittels des

Signierungsprinzips sofort bestimmt werden kann, auf welcher Seite der Tangente die Kurve in der Nähe des Nullpunkts verläuft.

Für die Kurve Seite 62 Fig. 31 erhalten wir durch Ausmultiplizieren

$$y^6 - 6y^4 + x^4 - 4x^2 + 9y^2 = 0,$$

woraus das Aggregat der Glieder niederster Ordnung die Geraden $2x = \pm 3y$ als Wendetangenten im Ursprung ergibt.

§ 10. Verhalten einer Kurve im Unendlichen; Asymptoten.

Vorbemerkung. Die geradlinigen Asymptoten der Hyperbel hat aller Wahrscheinlichkeit nach schon Menächmus (350 v. Chr.) gekannt*); sie finden sich wieder bei Archimedes (237 v. Chr.) und bei Apollonius (225 v. Chr.), der ihnen den bis heute gebräuchlichen Namen gegeben hat.

Der Begriff der *krummlinigen Asymptote* und des *asymptotischen Punktes* stammt von Albrecht Dürer (1525). Ausführlich behandelt werden die Asymptoten in Eulers *Introductio* 1748, wo er nach dem Vorgang Newtons die Kurvenäste in hyperbolische oder parabolische einteilt, je nachdem eine im Endlichen verlaufende oder die ∞ ferne Gerade Tangente im ∞ fernen Kurvenpunkt ist.

Die Asymptoten dienten namentlich Plücker als Mittel zur Einteilung der Kurven 3. und 4. Grads. Die Kenntnis der Asymptoten einer Kurve ist für deren graphische

*) Vgl. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3. Aufl. 1903. 1. Band. S. 231. Günther, Geschichte der Mathematik. I. Teil (Sammlung Schubert). 1908. S. 71.

Darstellung von größter Wichtigkeit; nicht mit Unrecht werden die Asymptoten als das „Knochengerüst der Kurven“ bezeichnet. Auch für die Theorie einer Kurve ist das Vorhandensein von Asymptoten von großem Nutzen, da nach Cayley die theoretische Behandlung um so schwieriger wird, je weniger Asymptoten eine Kurve hat.

Erklärung. *Eine geradlinige Asymptote ist die im Endlichen verlaufende Tangente in einem ∞ fernen Kurvenpunkt, oder: Die Asymptote einer Kurve ist eine Gerade, die sich einem unendlichen Kurvenzweig mehr und mehr nähert, derart, daß der Abstand eines Kurvenpunkts von der Geraden sich der Grenze 0 nähert, je weiter der Kurvenpunkt auf dem Kurvenzweig bleibend unbegrenzt hinausrückt.*

Ist die ∞ ferne Gerade Tangente der Kurve, so strebt die Kurve ins Unendliche wie die binomischen Parabeln. Diese spielen dann die Rolle von Näherungskurven im Unendlichen, die deshalb auch *asymptotische Kurven* genannt werden.

Wickelt sich eine Kurve derart um einen Kreis mit Radius r herum, daß sie ihn erst nach ∞ vielen Windungen erreicht, so nennen wir diesen Kreis einen *asymptotischen Kreis*. Ist der Radius r des Kreises $= 0$, so erhalten wir den *asymptotischen Punkt*. Asymptotische Punkte sind also solche Punkte, die erst nach ∞ vielen Umläufen der Kurve um diesen Punkt erreicht werden. — Diese beiden Arten von Singularitäten kommen nur bei transzendenten Kurven vor*).

*) Vgl. *Cesarò*, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Leipzig 1901. S. 11 ff. und: *Wieleitner* (L. V. 14.), S. 220, S. 252 ff., wo eine Reihe solcher Kurven diskutiert ist.

1. Die geradlinigen Asymptoten.

Die Kurve

$$0 = \widetilde{f_n(x, y, \omega)} = \widetilde{\varphi_n(x, y)} + \widetilde{\varphi_{n-1}(x, y)} \omega + \widetilde{\varphi_{n-2}(x, y)} \omega^2 + \dots + \widetilde{\varphi_1(x, y)} \omega^{n-1} + \widetilde{\varphi_0(x, y)} \omega^n$$

hat die ∞ fernen Punkte

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{f_n(x, y, \omega)} = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\varphi_n(x, y)} = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}.$$

Diese liegen auf den n Nullpunktsgersten $\widetilde{\varphi_n(x, y)} = 0$.

Entsprechend dem Satz 7 in § 9 erhalten wir hier den analogen

Satz 1. *Das gleich Null gesetzte Aggregat der Glieder höchster Ordnung einer Kurve stellt die Richtungen nach den n ∞ fernen Punkten dar.*

Daraus folgt: *Die Anzahl der geradlinigen Asymptoten einer C^n ist, da die Gleichung $\widetilde{\varphi_n(x, y)} = 0$ n Wurzeln hat, im allgemeinen $= n$.*

Unter einer Asymptote r ter Ordnung verstehen wir eine Asymptote, die r geradlinige Asymptoten vertritt, d. h. mit der Kurve im Unendlichen $2r$ Schnittpunkte hat. Die Kurvengleichung ist dann von der Form

$$0 = \widetilde{f(x, y, \omega)} = (ax + by)^r \widetilde{\varphi_{n-r}(x, y)} + \widetilde{\varphi_{n-2}(x, y)} \omega^2.$$

Je nach der Art der ∞ fernen Kurvenpunkte können verschiedene Arten von Asymptoten auftreten (vgl. die binomischen Hyperbeln, § 6, II).

Nach dem Prinzip der linearen Kombination lassen sich aus der homogenen Form der Kurvengleichung folgende Sätze ableiten:

Satz 2. Die Kurve

$$0 = \widetilde{f_n(x, y, \omega)} = \widetilde{\varphi_n(x, y)} + \widetilde{\varphi_{n-2}(x, y)} \omega^2$$

wird von den n Nullpunktsgerechten $\widetilde{\varphi_n(x, y)} = 0$ berührt im Schnitt mit $\omega = 0$, d. h. $\widetilde{\varphi_n(x, y)} = 0$ stellt die Gesamtheit der n Asymptoten der C^n dar.

Es treten selbstverständlich nur so viele reelle Asymptoten auf, als die Gleichung $\widetilde{\varphi_n(x, y)} = 0$ reelle Wurzeln hat.

Satz 3. Die Kurve

$$0 = \widetilde{f_n(x, y, \omega)} = \widetilde{\varphi_n(x, y)} + \widetilde{\varphi_{n-3}(x, y)} \omega^3$$

hat die n Nullpunktsgerechten $\widetilde{\varphi_n(x, y)} = 0$ als Wendenasymptoten usw.

Satz 4. Die Kurve

$$0 = \widetilde{f_n(x, y, \omega)} = \widetilde{\varphi_n(x, y)} + \widetilde{\varphi_{n-1}(x, y)} \omega$$

hat n Asymptoten parallel zu den n Nullpunktsgerechten $\widetilde{\varphi_n(x, y)} = 0$.

In diesem Fall sind die Asymptoten zu berechnen.

Satz 5. Die Kurve

$$0 = \widetilde{f_n(x, y, \omega)} = (bx - ay)^2 \widetilde{\varphi_{n-2}(x, y)} + \widetilde{\psi_{n-2}(x, y)} \omega^2$$

hat $n - 2$ geradlinige Asymptoten $\widetilde{\varphi_{n-2}(x, y)} = 0$ und ein zu $bx - ay = 0$ paralleles Asymptotenpaar.

Satz 6. a) Die Kurve

$$y = ax + b + \frac{f_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$$

oder

$$(y - ax - b) \cdot \varphi_{n-1}(x) \omega = f_n(x)$$

hat $(n - 1)$ Asymptoten $\varphi_{n-1}(x) = 0$ parallel zu $x = 0$; denn für jeden Wert von x , der die Gleichung $\varphi_{n-1}(x) = 0$ befriedigt, wird $y = \infty$.

b) Ebenso hat die Kurve

$$x = ay + b + \frac{f_n(y)}{\varphi_{n-1}(y)}$$

$(n-1)$ Asymptoten $\varphi_{n-1}(y) = 0$ parallel zu $y = 0$.
Stellt in der Kurve

$$0 = f_n(x, y, \omega) = (G_1 G_2 + \mu \cdot \omega^2) \varphi_{n-2}(x, y) + \lambda \cdot \psi_{n-2}(x, y) \cdot \omega^2$$

$G_1 G_2 + \mu \omega^2 = 0$ eine $\left. \begin{array}{l} \text{Hyperbel} \\ \text{Ellipse} \end{array} \right\}$ dar, je nachdem
 $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ zwei beliebige $\left. \begin{array}{l} \text{reelle} \\ \text{imag. konjug.} \end{array} \right\}$
 Gerade sind, so hat die Kurve zwei $\left. \begin{array}{l} \text{reelle und getrennte} \\ \text{imag. konjugierte} \end{array} \right\}$
 Asymptoten.

Ist speziell $G_1 = G_2$ und μ $\left. \begin{array}{l} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{array} \right\}$, so hat $f = 0$
 ein $\left. \begin{array}{l} \text{reelles paralleles} \\ \text{imag. konjugiertes} \end{array} \right\}$ Asymptotenpaar.

Berechnung der Asymptoten.

Läßt sich eine vorgelegte Kurvengleichung nicht derart umformen, daß die Asymptoten nach Satz (2) oder (3) direkt abgelesen werden können, sondern nur ihre Richtung (nach Satz 4) bekannt ist, so müssen die Asymptoten berechnet werden. Hierzu kann folgender Weg eingeschlagen werden.

Man faßt in der Kurvengleichung die Glieder höchster Ordnung zusammen, so daß

$$(1) \quad 0 = f_n(x, y, \omega) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) \omega.$$

Hat nun die C^n mindestens eine reelle Asymptote, so muß sich aus $\varphi_n(x, y) = 0$ ein reeller Faktor $bx - ay$

abspalten lassen und die Gleichung (1) nimmt nun die Form an

$$(2) \quad (bx - ay) \psi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) \omega = 0.$$

$bx - ay = 0$ ist dann eine Nullpunktsgerade parallel der gesuchten Asymptote. Man setzt hierauf

$$(3) \quad bx - ay = C$$

und eliminiert aus den Gleichungen (2) und (3) entweder y oder x . Die so erhaltene Gleichung (die sogenannte Asymptotenschnittpunktgleichung) wird nach Potenzen der Unbekannten x geordnet. Da $bx - ay = 0$ durch einen (∞ fernen) Punkt der Kurve geht, so wird der Faktor von $x^n = 0$. Da aber die Asymptote die Kurve in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet, so muß auch der Faktor von x^{n-1} gleich Null werden. Dieser liefert die Bestimmungsgleichung für C . Der so gefundene Wert von C in die übrige Gleichung eingesetzt gibt die Koordinaten der Schnittpunkte der Asymptote mit der Kurve (daher der obenerwähnte Name der Gleichung in x und C). Die Bestimmung dieser Schnittpunkte ist zur genauen Festlegung des Verlaufs der Kurve nicht zu unterlassen (vgl. § 8, III).

Beispiel. Die Asymptoten der Kurve $x^4 - y^4 = 2ax^2y\omega$ zu bestimmen (Fig. 40).

Aus der Form

$$(1) \quad (x + y)(x - y)(x^2 + y^2) = 2ax^2y \cdot \omega$$

folgt: Die Kurve hat zwei reelle Asymptoten parallel $x + y = 0$ und $x - y = 0$. Um dies in der Figur anzudeuten, versehen wir die Geraden an ihren Enden mit Pfeilen. Setzen wir nun

$$(2) \quad x - y = C,$$

so ist

$$y = x - C;$$

damit kommt als Asymptotenschnittpunktgleichung

$$C(2x - C)(2x^2 - 2Cx + C^2) = 2ax^2(x - C)$$

oder ausmultipliziert und nach Potenzen von x geordnet

$$(3) \quad 2x^3(2C - a) - 2Cx^2(3C - a) + 4C^3x - C^4 = 0.$$

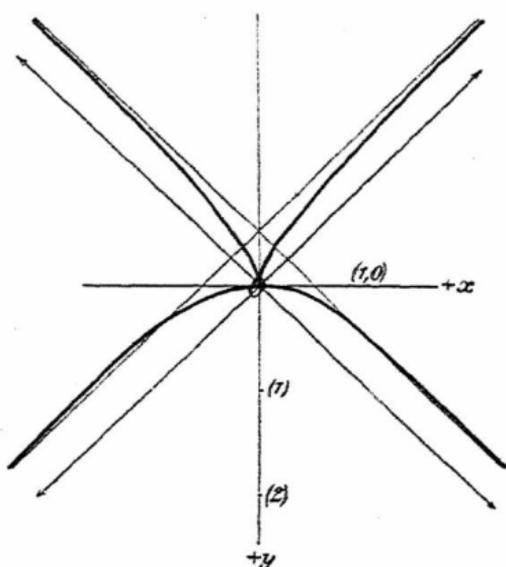


Fig. 40.

Durch Nullsetzen des Koeffizienten von x^3 folgt

$$(4) \quad 2C - a = 0, \quad \text{woraus} \quad C = \frac{a}{2};$$

so daß also

$$x - y = \frac{a}{2}$$

die Gleichung der Asymptote ist.

Dieser Wert in (3) eingesetzt gibt für die Abszissen der Schnittpunkte der Asymptote mit der Kurve

$$8x^2 - 8ax + a^2 = 0,$$

woraus

$$x = \frac{a}{4} (2 \pm \sqrt{2}).$$

Aus Symmetriegründen folgt, daß die zweite Asymptote die Gleichung hat:

$$x + y = -\frac{a}{2}.$$

Eine zweite, bedeutend einfachere Methode liefern uns die Sätze des § 11.

Aufgabe. Die Asymptoten folgender Kurven zu bestimmen.

$$1. (x^2 + y^2 - a^2)(x^2 + y^2 - b^2) = 4x^2y^2 \text{ (Fig. 41).}$$

Asymptoten:

$$x - y = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}; \quad x + y = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

$$2. \quad x^3 + y^3 - 3xy - x = 0.$$

Asymptote: $x + y + 1 = 0.$

$$3. \quad x^4 - x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Asymptoten: $x \pm y - 1 = 0; \quad x + 1 \pm \sqrt{2} = 0.$

$$4. \quad 2y^2(x^2 - y^2) - ax^3 + bxy^2 = 0.$$

Asymptoten: $x \pm y = \frac{a - b}{4}.$

$$5. \quad 4x(y^2 - b^2) = y^2(y^2 - a^2).$$

Asymptoten: $y \pm b = 0$; $4x - y^2 = 0$

ist Näherungskurve im Unendlichen (asymptotische Parabel, s. folg. Abschnitt).

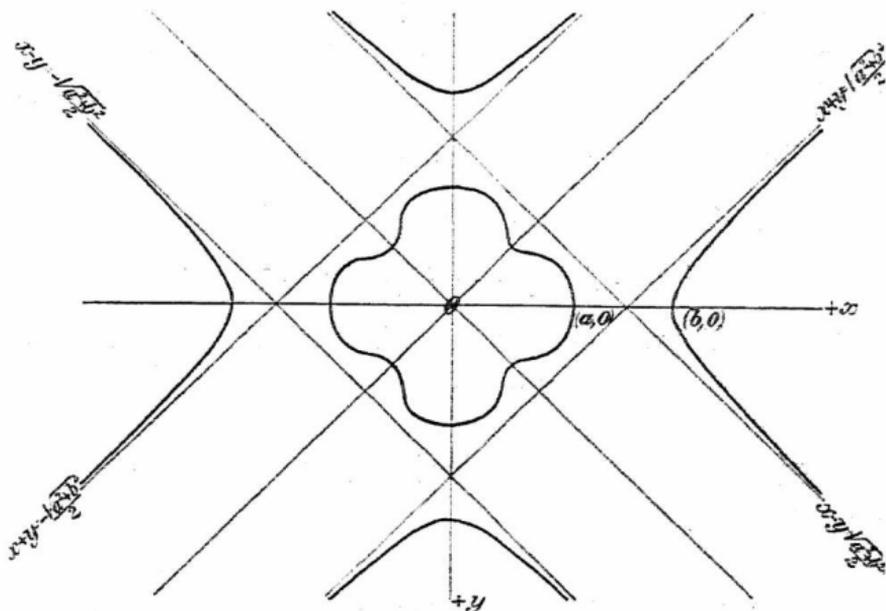


Fig. 41.

2. Krummlinige Asymptoten.

(Näherungskurven im Unendlichen.)

Läßt sich eine Kurvengleichung auf die Form bringen:

$$0 = \widetilde{f}_n(x, y, \omega) = (G_1^2 + \mu G_2 \omega) \varphi_{n-2}(x, y) + \psi_{n-2}(x, y) \omega^2$$

so hat die Kurve $f = 0$ im Schnitt mit $\omega = 0$ [außer den $n - 2$ geradlinigen Asymptoten $\varphi_{n-2}(x, y) = 0$] die Parabel $G_1^2 + \mu G_2 \omega = 0$ als asymptotische Kurve.

Die Kurve

$$0 = f_n(x, y, \omega) = \varphi_{n-\alpha}(x, y) \psi_\alpha(x, y) + \chi_{n-r}(x, y) \cdot \omega^r$$

hat die Kurven $\varphi_{n-\alpha}(x, y) = 0$ und $\psi_\alpha(x, y) = 0$ zu asymptotischen Kurven, und zwar ist der Grad der Berührung um so höher, je größer r ist. Dies zeigt sich auch im Bild der Kurve: die Annäherung der Kurvenzweige an die Kurven $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ erfolgt um so schneller, je größer der Wert $\frac{r}{n}$ ist.

Beispiele. 1. Die Kurve (Fig. 29)

$$x^4 y - 2 x^2 y - y^2 + 3 y + 1 = 0$$

hat als Näherungskurve im Unendlichen die Parabel 4. Ordnung $y = x^4 - 2 x^2$, wie aus der Gleichung in der Form

$$y(x^4 - 2 x^2 \omega^2 - y \omega^3) + (3 y + 1 \cdot \omega) \omega^4 = 0$$

zu sehen ist.

2. Die Kurve 6. Ordnung

$$(x^2 + 2 p y) (x^2 - p x + 2 p y)^2 - p^6 \omega^6 = 0$$

hat die beiden Parabeln $x^2 + 2 p y = 0$ und $x^2 - p x + 2 p y = 0$ als Näherungskurven im Unendlichen.

3. Die Kurve 4. Ordnung

$$y^4 - 4 a x y^2 - a^2 y^2 - 4 a b^2 x = 0$$

hat die Parabel $y^2 - 4 a x - a^2 = 0$ als asymptotische Kurve, was sich direkt aus der Gleichung in der Form

$$y^2(y^2 - 4 a x - a^2) = 4 a b^2 x \cdot \omega^3$$

ergibt.

4. Die C^3

$$y^3 - 2 x y + 1 = 0$$

oder homogen

$$y^3 - 2xy\omega + \omega^3 = 0$$

hat die Parabel $y^2 - 2x = 0$ als Näherungskurve im Unendlichen, was aus der Gleichung

$$y(y^2 - 2x) + \omega^3 = 0$$

folgt. Die Kurve heißt wegen ihrer seltsamen Gestalt *Tridens* (Fig. 42).

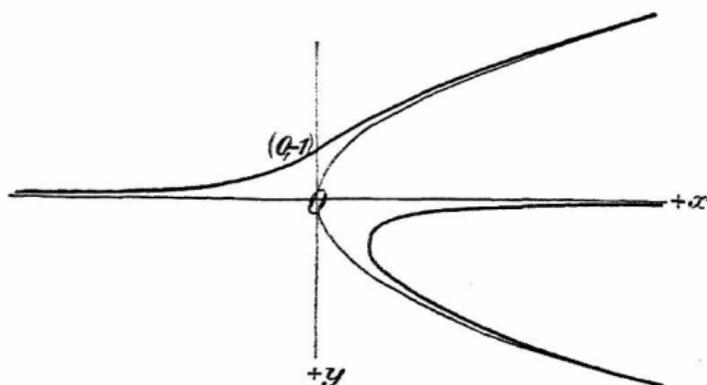


Fig. 42.

3. Grad der asymptotischen Annäherung.

Aus der Gleichung der Kurve

$$(1) \quad 0 = f_n(x, y) = \varphi_m(x, y) \psi_{n-m}(x, y) + \chi_{n-1}(x, y) \omega$$

folgt für die Annäherung der Kurve $\varphi = 0$ an die Kurve $f = 0$, wenn (x, y) ein Punkt von $\varphi = 0$, also $\varphi(x, y) = 0$ und $(x + \varepsilon, y)$ ein auf derselben Ordinate gelegener Punkt von $f = 0$ ist (Fig. 43),

$$(2) \quad f(x + \varepsilon, y) = 0$$

oder mittels des Taylorschen Satzes nach Potenzen von ε entwickelt:

$$0 = f(x, y) + \frac{\varepsilon}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$$

oder, da gemäß (1) mit $\varphi(x, y) = 0$ die Funktion $f(x, y)$ übergeht in $\chi(x, y)$,

$$(3) \quad 0 = \chi(x, y) + \frac{\varepsilon}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots$$

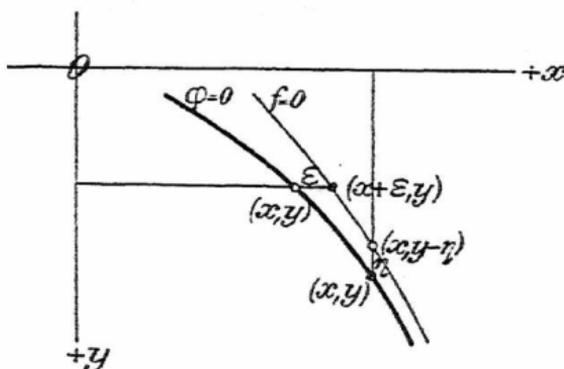


Fig. 43.

Nimmt man nun den Punkt (x, y) auf $\varphi = 0$ so weit draußen an, daß ε im Vergleich zu x sehr klein ist, so lassen sich höhere Potenzen von ε vernachlässigen, und man hat für den Grad der Annäherung

$$\varepsilon = - \frac{\chi(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Analog hat man für die Annäherung η die Bestimmungsgleichung

$$(4) \quad 0 = \chi(x, y) + \frac{\eta}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\eta^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots$$

Nähern sich der Kurve $\varphi = 0$ zwei Zweige der Kurve (1) asymptotisch, so bestimmen sich die beiden Werte von ε

aus der Gleichung 2. Grads

$$\chi(x, y) + \frac{\varepsilon}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

(s. Beispiel 2 oben).

§ 11. Berührungssätze des Prinzips der linearen Kombination.

Satz 1. Die Kurve

$$\varphi(x, y) G + \psi(x, y) H = 0,$$

wo φ und ψ Funktionen von beliebig hohem Grad, G und H lineare Funktionen sind, hat im Punkt $\begin{cases} G = 0 \\ H = 0 \end{cases}$ oder (a, b) die Tangente

$$\varphi(a, b) G + \psi(a, b) H = 0.$$

Beweis. Die Tangente der Kurve im Punkt $\begin{cases} G = 0 \\ H = 0 \end{cases}$ oder (a, b) hat die Gleichung*):

$$\begin{aligned} & x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} G_{(a, b)} + \frac{\partial G}{\partial x} \varphi(a, b) + \frac{\partial \psi}{\partial x} H_{(a, b)} + \frac{\partial H}{\partial x} \psi(a, b) \right) \\ & + y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} G_{(a, b)} + \frac{\partial G}{\partial y} \varphi(a, b) + \frac{\partial \psi}{\partial y} H_{(a, b)} + \frac{\partial H}{\partial y} \psi(a, b) \right) \\ & + \omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} G_{(a, b)} + \frac{\partial G}{\partial \omega} \varphi(a, b) + \frac{\partial \psi}{\partial \omega} H_{(a, b)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial H}{\partial \omega} \psi(a, b) \right) = 0 \end{aligned}$$

*) Bekanntlich lautet die Tangente der Kurve $f(x, y, \omega) = 0$ im Punkt (a, b) :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0,$$

wobei in den partiellen Ableitungen die Koordinaten des Kurvenpunktes einzusetzen sind.

oder

$$\begin{aligned}
 & G_{(a,b)} \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right) \\
 & + H_{(a,b)} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \right) \\
 & + \varphi(a,b) \left(x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} + \omega \frac{\partial G}{\partial \omega} \right) \\
 & + \psi(a,b) \left(x \frac{\partial H}{\partial x} + y \frac{\partial H}{\partial y} + \omega \frac{\partial H}{\partial \omega} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Nun ist nach dem Eulerschen Homogensatz

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \varphi(x, y),$$

$$x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} + \omega \frac{\partial G}{\partial \omega} = G(x, y),$$

.....

also hat man für die Tangente im Punkt (a, b) :

$$\begin{aligned}
 & G_{(a,b)} \varphi(x, y) + H_{(a,b)} \psi(x, y) \\
 & + \varphi(a, b) G + \psi(a, b) H = 0.
 \end{aligned}$$

Da nun für diesen Punkt $G_{(a,b)} = 0$ und $H_{(a,b)} = 0$, so ist die Gleichung der gesuchten Tangente

$$\varphi(a, b) G + \psi(a, b) H = 0.$$

Regel: Die Tangente der Kurve

$$\varphi(x, y) G + \psi(x, y) H = 0$$

im Punkt $\left\{ \begin{array}{l} G = 0 \\ H = 0 \end{array} \right\}$ oder (a, b) erhält man, indem man in die übrigen Bestandteile der Kurvengleichung für x und y die Werte a und b einsetzt.

Diese Regel kann sehr vorteilhaft zur

kürzesten Berechnung der Asymptoten

benutzt werden.

Hat die Kurvengleichung die Form

$$0 = f_n(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \omega) = (bx - ay) \psi_{n-1}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) + \varphi_{n-1}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \omega,$$

so hat (vgl. Satz 4, S. 88) die Kurve eine Asymptote parallel der Geraden $bx - ay = 0$.

Fassen wir die Asymptote auf als Tangente der Kurve im Punkt $\left\{ \begin{array}{l} bx - ay = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$ oder im Punkt mit den homogenen Koordinaten $(\widetilde{a}, \widetilde{b}, 0)^*$, so lautet deren Gleichung:

$$(bx - ay) \psi_{n-1}(\widetilde{a}, \widetilde{b}) + \varphi_{n-1}(\widetilde{a}, \widetilde{b}) \cdot \omega = 0.$$

1. Beispiel. Die Asymptoten der Kurve

$$x^4 - y^4 - 2ax^2y = 0$$

zu bestimmen (vgl. S. 91, Fig. 40).

Aus der homogen gemachten λ -Form

$$(x + y)(x - y)(x^2 + y^2) = 2ax^2y\omega$$

folgt: Die Kurve hat zwei Asymptoten parallel zu den Geraden $x \pm y = 0$.

a) *Asymptote parallel $x - y = 0$.*

Die Koordinaten des ∞ fernen Punkts ergeben sich aus $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{\omega}{0}$ als $(\widetilde{1}, \widetilde{1}, 0)$. Damit erhält man als Asymptote:

$$2(x - y) \cdot 2 = 2 \cdot a \cdot 1 \cdot 1 \cdot \omega \quad \text{oder} \quad x - y = \frac{a}{2}.$$

*) Diese lassen sich direkt ablesen aus der Gleichung der Geraden in der Form $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{\omega}{0}$; die Nenner der drei Brüche sind die gesuchten Koordinaten.

b) *Asymptote parallel* $x + y = 0$.

Koordinaten des ∞ fernen Punkts: $(1, -1, 0)$, also
Asymptote:

$$(x + y) \cdot 2 \cdot 2 = -2 a \cdot 1 \cdot 1 \cdot \omega \quad \text{oder} \quad x + y = -\frac{a}{2}.$$

Wir bemerken hier ausdrücklich, daß dies die ganze Rechnung ohne jegliche Unterdrückung ist.

2. Beispiel. Für die Kurve

$$(x^2 - 1)(x^2 - y^2) = xy(y^2 - 1) \quad (\text{Fig. 7})$$

oder

$$(x - 1)(x + 1)(x - y)(x + y) = xy(y - 1)(y + 1)$$

lautet die Tangente

$$\text{im Punkt } \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{ oder } (1, 0):$$

$$(x - 1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot y \cdot (-1) \cdot 1 \quad \text{oder} \quad 2x + y - 2 = 0;$$

$$\text{im Punkt } \left\{ \begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{ oder } (-1, 0):$$

$$(x + 1)(-2)(-1)(-1) = (-1)y(-1) \cdot 1$$

oder

$$2x + y + 2 = 0.$$

Für den Punkt $\left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{array} \right\}$ liest man direkt das Symbol ab: $[(x - 1)(x - y), y - 1]$, d. h. $y - 1 = 0$ ist Tangente, was sich auch nach unserer Regel feststellen läßt.

Aus der zweiten λ -Form

$$x(x^3 - xy^2 - y^3) = (x^2 - xy - y^2)\omega^2$$

ergeben sich zwei reelle Asymptoten: $x = 0$ und $x^3 - xy^2 - y^3 = 0$. Letztere Gleichung 3. Grads liefert, graphisch aufgelöst (s. S. 73), als einzige reelle Wurzel und damit als zweite Asymptote $y = 0,76x$.

3. Beispiel.

$$x(x^2 - y^2 - a^2 \cdot \omega^2) = b(x^2 + y^2 - a^2 \cdot \omega^2) \cdot \omega .$$

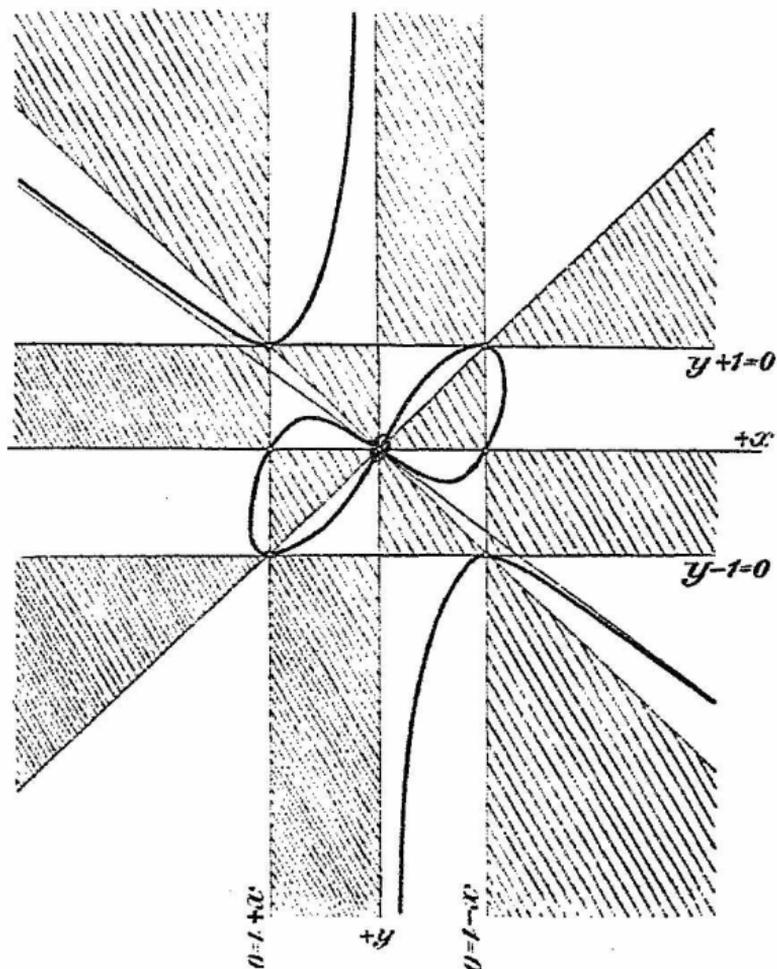


Fig. 7.

Asymptote parallel $x = 0$: Koordinaten des ∞ fernen Punktes $(0, 1, 0)$, also Asymptote:

$$x(-1) = b \cdot 1 \cdot \omega \quad \text{oder} \quad x + b = 0 .$$

Aus der λ -Form $y^2(x + b) = (x^2 - a^2)(x - b)$ oder $y^2 = \frac{(x^2 - a^2)(x - b)}{x + b}$ folgt direkt: $x + b = 0$ ist Asymptote.

Um die zwei weiteren Asymptoten zu bestimmen, fassen wir die Glieder höchsten Grads zusammen und

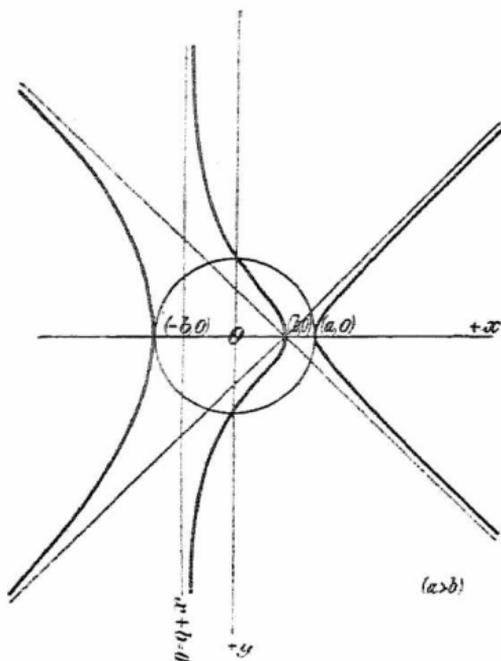


Fig. 44.

erhalten so als weitere (dritte) λ -Form:

$$x(x - y)(x + y) = [(x^2 + y^2)b + a^2(x - b\omega) \cdot \omega] \omega .$$

Asymptote parallel $x - y = 0$: Koordinaten des ∞ fernen Punkts $(1, 1, 0)$, also Asymptote:

$$1 \cdot (x - y)^2 = 2 \cdot b \cdot \omega \quad \text{oder} \quad x - y = b .$$

Analog erhält man für die dritte Asymptote parallel $x + y = 0$ die Gleichung $x + y = b$.

Aus der Kurvengleichung in der Form

$$(x + y - b)(x - y - b)(x + b) = (a^2 + b^2)(x - b) \cdot \omega^2$$

lassen sich die drei Asymptoten der Kurve direkt ablesen. Zugleich folgt aus dem Symbol $[(x + b), (a^2 + b^2)(x - b)\omega^2]$, daß $x + b = 0$ Wendeasymptote ist.

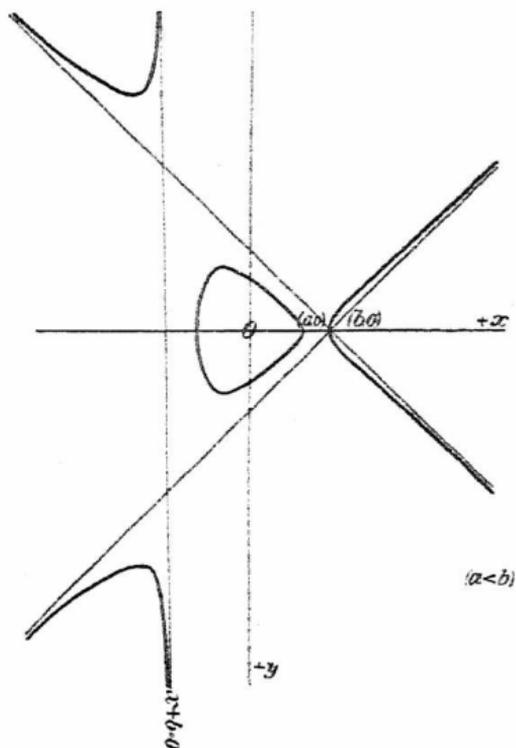


Fig. 45.

Je nachdem $a \geq b$, erhält man zwei verschiedene Kurven.

Ist $a > b$ (Fig. 44), so besteht die C^3 aus einem hyperbelartigen Zug mit einem ebenfalls ins Unendliche sich erstreckenden Oval (elliptische Serpentine mit hyperbolischem Oval); im Fall $a < b$ (Fig. 45) verläuft das Oval ganz im Endlichen, während der hyperbelartige Zug bleibt (hyperbolische Serpentine mit elliptischem Oval).

Auf ganz analoge Weise wie bei Satz 1 lassen sich folgende Sätze beweisen:

Satz 2. *Die Kurve*

$$\varphi(x, y) G^2 + \psi(x, y) H^2 = 0$$

hat im Punkt $\left\{ \begin{array}{l} G = 0 \\ H = 0 \end{array} \right\}$ oder (a, b) einen Doppelpunkt mit dem Tangentenpaar $\varphi(a, b) G^2 + \psi(a, b) H^2 = 0$.

Haben die Funktionen $\varphi(a, b)$ und $\psi(a, b)$ dasselbe entgegengesetztes Vorzeichen, so ist das Tangentenpaar imag. konjug. reell, d. h. der Doppelpunkt ist ein isolierter Doppelpunkt. eigentlicher

Zugleich erkennt man, daß das Tangentenpaar harmonisch konjugiert ist zu dem Geradenpaar $G = 0$ und $H = 0$.

Satz 3. *Die Kurve*

$$\varphi(x, y) G^2 + \psi(x, y) H = 0$$

geht durch den Punkt $\left\{ \begin{array}{l} G = 0 \\ H = 0 \end{array} \right\}$ oder (a, b) wie die Parabel

$$\varphi(a, b) G^2 + \psi(a, b) H = 0;$$

die Parabel ist Näherungskurve im Punkt (a, b) .

Ebenso gilt der

Satz 3a: *Die Kurve*

$$\varphi(x, y) \Phi_2(x, y) + \psi(x, y) H = 0$$

hat in den Punkten $\left\{ \begin{array}{l} \Phi_2(x, y) = 0 \\ H = 0 \end{array} \right\}$ oder (a, b) die Näherungskurven

$$\varphi(a, b) \cdot \Phi_2(x, y) + \psi(a, b) \cdot H = 0.$$

Satz 4. Die Kurve

$$\varphi(x, y) G_1 G_2 + \psi(x, y) H = 0$$

geht durch den Punkt $\begin{cases} G_1 = 0 \\ G_2 = 0 \\ H = 0 \end{cases}$ oder (a, b) wie die Parabel

$$\varphi(a, b) G_1 G_2 + \psi(a, b) H = 0.$$

Die Kurve hat also im Punkt (a, b) die Gerade $H = 0$ als Tangente.

Anmerkung. Die Berechnung der Tangente in einem der durch das Prinzip der linearen Kombination gelieferten Kurvenpunkte bietet nicht nur weitere Anhaltspunkte für den Verlauf der Kurve, sondern genügt häufig zur Entscheidung über den Verlauf der Kurve in einem sogenannten Diskriminantenzwickel (Zwickel mit mindestens vier Eingängen).

4. Beispiel. Die Kurve

$$x y (x - y)^2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) \quad (\text{Fig. 46})$$

oder

$$x y (x - y)^2 = (x - 1)(x + 1)(y - 1)(y + 1)$$

hat die Punkte $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ zu Doppelpunkten.

Für das Tangentenpaar im Punkt $(1, 1)$ hat man

$$1 \cdot 1 \cdot (x - y)^2 = (x - 1) \cdot 2(y - 1) \cdot 2$$

oder

$$x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0,$$

gibt, nach x aufgelöst,

$$x - y(2 \mp \sqrt{3}) = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Ganz analog ist die Rechnung für den Punkt $(-1, -1)$; aus Symmetriegründen folgt, daß dieses Tangentenpaar parallel zu dem im Punkt $(1, 1)$ ist.

Die im 2. Beispiel (s. S. 100) behandelte Kurve

$$(x^2 - 1)(x^2 - y^2) = xy(y^2 - 1)$$

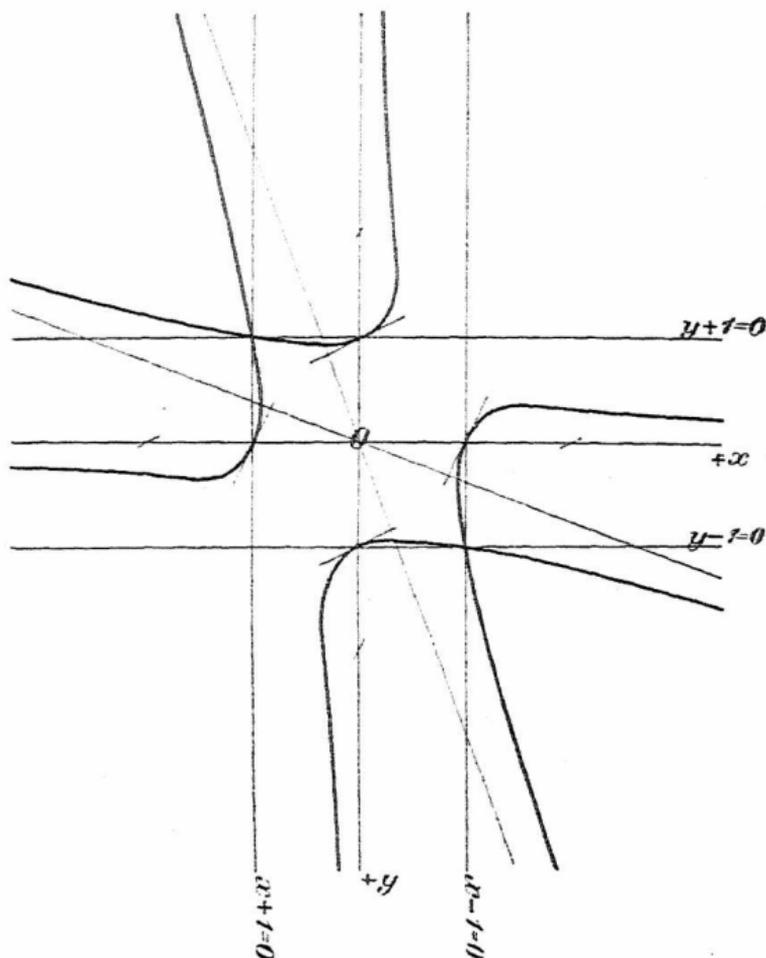


Fig. 46.

hat im Ursprung einen Doppelpunkt mit dem Tangentenpaar

$$-1(x^2 - y^2) = xy(-1) \quad \text{oder} \quad x^2 - xy - y^2 = 0.$$

5. Beispiel.

$$2(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-4) + [(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2] = 0$$

(Fig. 47).

Die Kurve hat sechs Doppelpunkte: vier in den Punkten $\left\{ \begin{matrix} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{matrix} \right\}$ und zwei im Unendlichen (in Richtung $x = 0$ und $y = 0$).

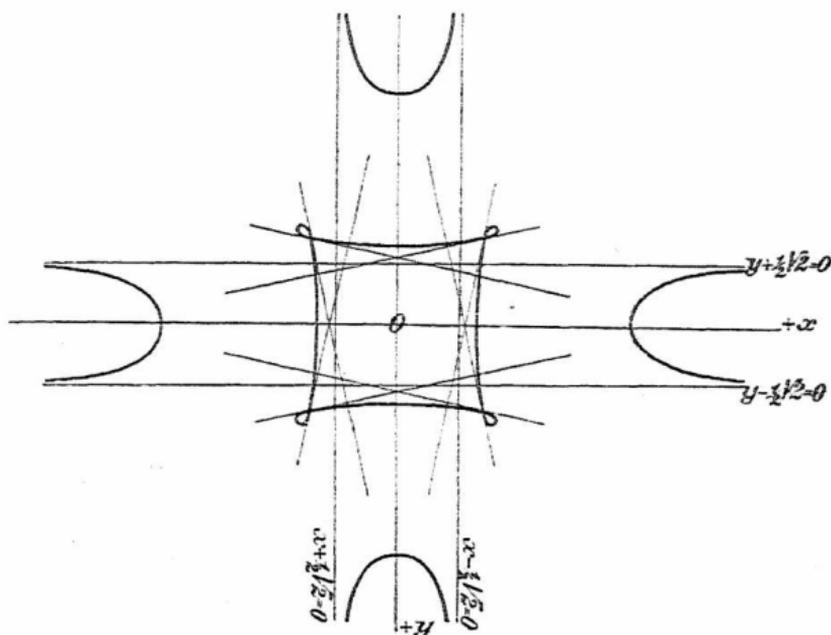


Fig. 47.

Für die Asymptoten parallel $x = 0$ erhalten wir als Tangenten im Punkt $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{\omega}{0}$ oder $(0, 1, 0)$ durch Einsetzen der Werte $x = 0$, $y = 1$, $\omega = 0$ in die nicht durch diesen Punkt gehenden Bestandteile der homogenen Kurvengleichung (sie sind in der Gleichung unterstrichen):

$$2(x^2 - \omega^2) \underline{(y^2 - \omega^2)} \underline{(x^2 + y^2 - 4 \cdot \omega^2)} \\ + [(x^2 - \omega^2)^2 + (y^2 - \omega^2)^2] \omega^2 = 0,$$

$$2(x^2 - 1) 1 \cdot 1 + 1 \cdot \omega^2 = 0 \quad \text{oder} \quad 2x^2 = 1;$$

woraus $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ebenso erhält man als Asymptoten parallel $y = 0$:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Für die Tangenten im Doppelpunkt $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ oder $(1, 1)$ erhält man aus

$$2(x - 1) \underline{(x + 1)} (y - 1) \underline{(y + 1)} \underline{(x^2 + y^2 - 4)} \\ + [(x - 1)^2 \underline{(x + 1)^2} + (y - 1)^2 \underline{(y + 1)^2}] = 0$$

durch Einsetzen der Werte $x = 1, y = 1$ in die unterstrichenen Glieder:

$$2(x-1) \cdot 2(y-1) \cdot 2 \cdot (-2) + (x-1)^2 \cdot 4 + (y-1)^2 \cdot 4 = 0$$

$$\text{oder} \quad (x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) + (y-1)^2 = 0,$$

woraus durch Auflösung nach $x - 1$

$$x - 1 = (y - 1)(2 \pm \sqrt{3})$$

oder

$$x - y(2 \pm \sqrt{3}) = -(1 \pm \sqrt{3})$$

als gesuchtes Tangentenpaar. Die weitere Diskussion der Kurve sei dem Leser zur Übung empfohlen. — Wie sieht die Kurve aus, wenn die Gleichung lautet:

a)

$$2(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) - [(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2] = 0,$$

b)

$$2(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) + [(x^2 - 1)^2 - (y^2 - 1)^2] = 0,$$

c)

$$2(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) - [(x^2 - 1)^2 - (y^2 - 1)^2] = 0?$$

6. Beispiel. Die Kurve

$$(x^2 + y^2 - a^2)(x^2 + y^2 - b^2) = 4x^2y^2 \quad (\text{s. Fig. 41})$$

oder

$$(x - y)^2(x + y)^2 = [(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - a^2b^2 \cdot \omega^2] \omega^2$$

hat zwei zu $x - y = 0$, bzw. $x + y = 0$ parallele Asymptotenpaare, denn das Symbol $[(x - y)^2, \omega^2]$, bzw. $[(x + y)^2, \omega^2]$ zeigt je einen ∞ fernen Doppelpunkt in Richtung der Medianen an.

Hieraus folgt für das Asymptotenpaar parallel zur 1. Mediane $x - y = 0$ gemäß Satz 2:

$$\text{Koordinaten des } \infty \text{ fernen Punkts } \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{\omega}{0}$$

oder $(1, 1, 0)$.

Damit kommt als Asymptotenpaar

$$(x - y)^2(1 + 1)^2 = [(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) - a^2b^2 \cdot 0] \omega^2$$

oder

$$x - y = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Eine analoge Rechnung liefert als zweites Asymptotenpaar

$$x + y = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

§ 12. Hilfsmittel der Differentialrechnung.

Die von der Differentialrechnung gelieferten *Hilfsmittel zur Bestimmung ausgezeichnetener und singulärer Punktstellen* einer gegebenen Kurve haben den Vorteil, *sämtliche* derartige Punkte zu liefern, jedoch den großen Nachteil, daß die Rechnung schon bei Kurven 3. Grads

und noch viel mehr bei Kurven höheren Grads meist sehr umständlich und langwierig ist. Die Anwendung der Methoden empfiehlt sich nur dann, wenn die seitherigen Regeln (abgesehen von § 13) nichts Neues mehr liefern, was aber nur selten der Fall ist.

Wir beschränken uns auf die Wiedergabe der wichtigsten Formeln und verweisen bezüglich der Entwicklungen auf *Junker*, Höhere Analysis, I. Teil, S. 133 ff. (Sammlung Göschen)*).

Aus der homogenen Form der Kurvengleichung $f(X, Y, \Omega) = 0$ folgt für die Gleichung der Tangente im Punkt (x, y, ω) , wenn X, Y, Ω laufende Koordinaten sind:

$$(1) \quad X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + \Omega \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0.$$

Die Tangente ist zugleich 1. Näherungskurve der gegebenen Kurve im Punkt (x, y, ω) . Läßt sich die Kurvengleichung auf die Form bringen:

$$Y = f(X),$$

so hat man für die Tangente im Punkt (x, y) :

$$(1a) \quad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} \quad \text{oder} \quad X - x = y'(Y - y).$$

Daraus folgt für die Normale:

$$(2) \quad \begin{cases} (X - x) dx + (Y - y) dy = 0 & \text{oder} \\ (X - x) y' + (Y - y) = 0. \end{cases}$$

Ist τ der Richtungswinkel der Tangente, so erhält man aus Fig. 48:

*) In ausführlicher Weise findet dies der Leser in jedem größeren Lehrbuch der Differentialrechnung, z. B. *Meyer*, Differentialrechnung, Leipzig, Göschen.

$$(3) \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = y';$$

$$(4) \cos \tau = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds};$$

$$(5) \sin \tau = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dy}{ds},$$

wo

$$(6) ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

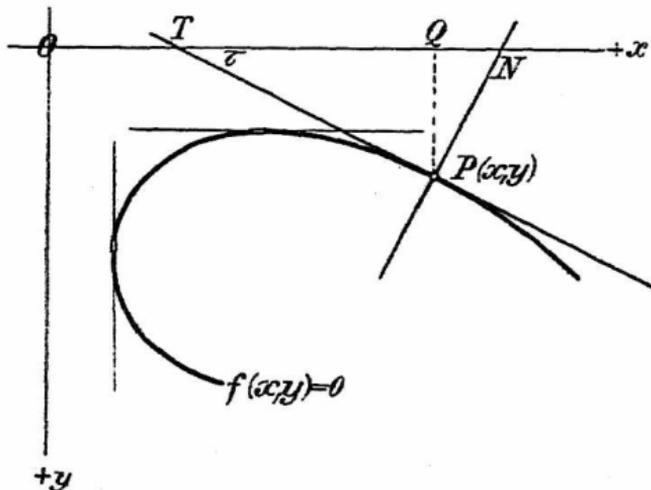


Fig. 48.

Ferner folgt aus Fig. 48 für die Länge der

(7) Subnormale:

$$QN = y \operatorname{tg} \tau = y \frac{dy}{dx} = yy';$$

(8) Subtangente:

$$TQ = y \operatorname{ctg} \tau = y \frac{dx}{dy} = \frac{y}{y'};$$

(9) Normale:

$$PN = \frac{y}{\cos \tau} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y \sqrt{1 + y'^2},$$

(10) Tangente:

$$PT = \frac{y}{\sin \tau} = y \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}} = y \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'}.$$

Für *höchste und tiefste Punkte (Maxima und Minima)* hat man:

$$\text{a) in bezug auf die } x\text{-Achse: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}; \quad (11)$$

(horizontale Tangenten)

$$\text{b) in bezug auf die } y\text{-Achse: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}. \quad (12)$$

(vertikale Tangenten)

Die Systeme (11) und (12) liefern also die Berührungspunkte der zu den Achsen parallelen, d. h. horizontalen und vertikalen Tangenten.

Setzt man in den Gleichungen (11) und (12) statt den Ausdruck $\frac{x}{\xi}$ und statt y den Wert $\frac{y}{\eta}$, so hat man gemäß dem Eulerschen Homogensatz (s. S. 25):

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \quad \text{und} \quad y \frac{\partial f}{\partial y} + \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0.$$

Damit ergibt sich das für die Rechnung oft einfache System

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 \end{array} \right\} \quad (11 \text{ a}) \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \end{array} \right\} \quad (12 \text{ a})$$

$(\xi = 1) \qquad \qquad \qquad (\eta = 1)$

zur Bestimmung der höchsten und tiefsten Punkte in bezug auf die x -, bzw. y -Achse.

Ebenso liefert das simultane System

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{f_n(x, y, \omega)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0 \end{array} \right\}$$

die (n) Nullpunktstangenten der Kurve.

Zur Bestimmung der Doppelpunkte hat man die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \quad (13) \quad \text{oder das ein-} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0 \end{array} \right\} \quad (13 \text{ a}).$$

fachere System

Die Gleichung des Tangentenpaares im Doppelpunkt lautet:

$$(14) \quad (X-x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2(X-x)(Y-y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (Y-y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Je nachdem die Diskriminante der Gleichung (14)

$$(15) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \leq 0,$$

sind die Tangenten des Tangentenpaars

reell und getrennt

reell und zusammenfallend } , d. h. der Doppelpunkt ist ein

imaginär konjugiert

eigentlicher Doppelpunkt

Rückkehrpunkt

isolierter Punkt

Die Kurve $y = f(x)$ hat einen *Wendepunkt*, wenn

$$(16) \quad y'' = 0.$$

Hat die Kurvengleichung die Form $f(x, y) = 0$, so ist

$$y'' = \frac{-1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{-1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \end{vmatrix} \stackrel{*)}{=} \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

*) Zur Abkürzung setzen wir $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \equiv ac' - 2bb' + ca'$.

Das Symbol $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$ wird Determinante 2. Art genannt.

Um nun eine mehr symmetrisch gebaute Form der Determinante zu erhalten, verfahren wir wie folgt:

Die Gleichung der Tangente der Kurve $f_n(x, y, \omega) = 0$ lautet (vgl. (1)):

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0.$$

Wird auf die Funktionen $(n-1)$ ten Grads $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ der Reihe nach der Eulersche Homogensatz angewandt, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \omega} \omega &= (n-1) \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \omega} \omega &= (n-1) \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial x} x + \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial y} y + \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} \omega &= (n-1) \frac{\partial f}{\partial \omega} \end{aligned} \right\} (*) .$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2, \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} = f_3;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{12}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \omega} = f_{13},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \omega} = f_{23}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = f_{33},$$

so nimmt die Determinate die Form an:

$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{1}{f_2^3} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 & *) \\ f_{21} & f_{22} & f_2 & \\ \underline{f_1} & \underline{f_2} & 0 & \\ -x & -y & & \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{(n-1)f_2^3} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \omega & (-x^{**}) \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \omega & (-y \\ f_1 & f_2 & -f_1 x - f_2 y & \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{(n-1)^2 f_2^3} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

Diese Bedingung erfüllt jeder Wendepunkt der Kurve; alle Wendepunkte der gegebenen Kurve $f(x, y) = 0$ liegen also auf der Kurve

$$(17) \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Kurve wird nach dem Vorschlag von Sylvester die *Hessesche Kurve* der gegebenen Kurve genannt^{***)}.

) Oder, wenn die Glieder der 1. und 2. H.-Reihe mit $-x$ und $-y$ multipliziert und zur 3. addiert werden, unter Berücksichtigung der Gleichungen (), S. 115.

**) Wenn derselbe Prozeß mit der 1. und 2. V.-Reihe gemacht wird.

***) Weiteres über die Hessesche Kurve findet der Leser im II. Teil der „*Algebraischen Kurven*“.

Unter dem *Krümmungsmittelpunkt* (X, Y) des Punktes (x, y) versteht man den Schnittpunkt zweier ∞ benachbarter Normalen. Der um (X, Y) mit Radius

$$(18) \quad \varrho = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2}$$

beschriebene Kreis heißt *Krümmungskreis*, ϱ ist der Krümmungsradius. Für letzteren hat man

$$(19) \quad \varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

die Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind

$$(20) \quad \begin{cases} X = x - \frac{(1 + y'^2) y'}{y''} \\ Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{cases}$$

Das (x, y) Eliminat aus den Gleichungen (20) und der Kurvengleichung gibt den *geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte* (X, Y) ; dieser ist zugleich die Umhüllungskurve der Normalen von f , die sogenannte *Evolute*. Die gegebene Kurve f führt den Namen *Evolvente*.

§ 13. Das analytische Dreieck.

Die Theorie des analytischen Dreiecks haben nach dessen Entdecker Newton (*Enumeratio*) 1704 besonders de Gua (*Usages de l'analyse de Descartes*) 1740 und Cramer (*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*) 1750 weiter ausgebaut.

Wie in den §§ 9 und 10 gezeigt wurde, lassen sich in vielen Fällen aus einer passend hergestellten λ -Form die Näherungskurven im Ursprung und im Unendlichen

ohne weiteres ablesen. Allerdings ergeben sich nicht sämtliche Näherungskurven aus einer einzigen λ -Form, und die Aufstellung geeigneter λ -Formen ist Sache der Übung. Das analytische Dreieck, nach seinem Entdecker auch Newtonsches Parallelogramm genannt, liefert nun in einfacher Weise sämtliche Näherungskurven im Ursprung und im Unendlichen.

Haben wir eine Kurvengleichung von der Form

$$0 = f(x, y) = \begin{array}{l} a \\ + bx + cy \\ + dx^2 + exy + fy^2 \\ + gx^3 + hx^2y + ix^2y^2 + ky^3 \\ + \dots \end{array}$$

und schreibt man diese Glieder mit Weglassung der Konstanten und der Vorzeichen in Form eines gleichseitigen

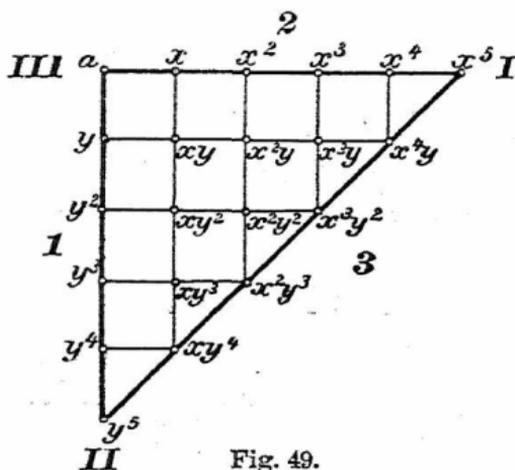


Fig. 49.

Dreiecks, so haben wir das analytische Dreieck. Wir nehmen nun statt des gleichseitigen ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck (entsprechend dem rechtwinkligen Koordinatensystem) und ordnen die einzelnen Glieder derart, daß auf den beiden Katheten, von der Spitze aus gerechnet, nur die Glieder stehen, die x bzw. y allein enthalten,

geordnet nach steigenden Potenzen (s. Fig. 49). Um eine Kurvengleichung „auf das analytische Dreieck zu legen“, markiert man mit Ringen die einzelnen Glieder

der Kurvengleichung und zieht die Umrißlinien des so entstandenen Polygons. Aus diesen Umrißlinien nun lassen sich wichtige Schlüsse über das Verhalten der Kurve in den drei Kardinalpunkten der Ebene (I) $\begin{cases} y = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$, (II) $\begin{cases} \omega = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, (III) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ziehen.

Auf den drei Seiten des analytischen Dreiecks liegen diejenigen Glieder der gegebenen Kurvengleichung, die nur Potenzen der drei Veränderlichen enthalten. Das gleich 0 gesetzte Aggregat dieser Glieder gibt die Schnittpunkte der Kurve mit den drei Kardinalgeraden (1) $y = 0$, (2) $x = 0$, (3) $\omega = 0$.

Satz 1. Die auf der $\left. \begin{matrix} 1. \\ 2. \\ 3. \end{matrix} \right\}$ Seite des analytischen Dreiecks gelegenen Umrißlinien geben das Verhalten der $\left. \begin{matrix} 1. \\ 2. \\ 3. \end{matrix} \right\}$ Kurve auf der Kardinalgeraden, d. h. die Schnittpunkte der Kurve mit der $\left. \begin{matrix} x\text{-Achse} \\ y\text{-Achse} \\ \infty \text{ fernen Geraden} \end{matrix} \right\}$.

Ein ähnlicher Satz läßt sich für die gegen die drei Ecken geneigten Umrißlinien aufstellen. Hierzu schicken wir folgende Betrachtung voraus.

Sind zwei beliebige Glieder des analytischen Dreiecks

$$x^p y^q \quad \text{und} \quad x^{p+\alpha} y^{q+\beta}$$

für eine der beiden Veränderlichen, z. B. für x , von derselben Ordnung ∞ groß, bzw. ∞ klein, so muß, da

$$x^{p+\alpha} \cdot y^{q+\beta} = x^p \cdot y^q \cdot x^\alpha \cdot y^\beta,$$

der Ausdruck $x^\alpha y^\beta$ endlich sein. Folglich sind auch alle Glieder von der Form

$$x^p y^q (x^\alpha y^\beta)^\nu \quad \text{oder} \quad x^{p+\alpha\nu} y^{q+\beta\nu}$$

∞ groß, bzw. ∞ klein von derselben Ordnung. Für die verschiedenen Werte von ν erhält man die Reihe

$$\dots, x^{p-2\nu} y^{q-2\nu}, x^{p-\nu} y^{q-\nu}, x^p y^q, x^{p+\nu} y^{q+\nu}, \\ x^{p+2\nu} y^{q+2\nu}, \dots$$

leren sämtliche Glieder von derselben Ordnung ∞ groß, bzw. ∞ klein sind wie das Mittelglied. Alle diese Glieder liegen im analytischen Dreieck auf derselben Geraden. Daraus folgt

Satz 2. *Liegen drei oder mehr Glieder einer Kurvengleichung auf derselben Polygonseite, so sind sie für einen nicht endlichen Wert der einen Veränderlichen ∞ klein oder ∞ groß von derselben Ordnung.*

Hieraus folgt weiter:

Alle Glieder des analytischen Dreiecks, die rechts
links }
von dieser Geraden liegen, sind von höherer
niederer } Ordnung

∞ groß in x als $x^p y^q$.

Für ∞ große
 ∞ kleine } Werte der einen Veränderlichen x sind die Glieder einer Umrißlinie dann von der höchsten Ordnung, wenn im analytischen Dreieck keine im Sinn der wachsenden } Potenzen von x gelegene Parallele durch abnehmenden } ein markiertes Glied der Gleichung möglich ist; deshalb

Satz 3. *Die gegen die I.
II.
III. } Ecke des analytischen Dreiecks*

gekehrten Umrißlinien des analytischen Polygons lie-

fern die Näherungskurven der gegebenen Kurve im ∞ fernen Punkt der x -Achse } I.
 II.
 III. }
 Kardinalpunkt, d. h. im ∞ fernen Punkt der y -Achse }
 Nullpunkt }

Für die Diskussion einer Kurve, deren Gleichung in ausmultiplizierter Form vorliegt, bietet das analytische Polygon den Vorteil, daß dessen Umrißlinien verschiedene λ -Formen liefern, die sich für die Diskussion der Kurve deshalb gut eignen, weil aus ihnen zugleich die Näherungskurven im Ursprung, bzw. im Unendlichen abgelesen werden können. Je mehr Umrißlinien das analytische Polygon hat, desto mehr Elemente hat man zur Bestimmung des Verlaufs der Kurve.

Beispiele. 1. Für die Kurve (Fig. 29)

$$x^4 y - 2x^2 y - y^2 + 3y - 1 = 0$$

A B C D E

hat man als Näherungskurven (Fig. 50)

a) im ∞ fernen Punkt der x -Achse: $AE \equiv x^4 y - 1 = 0$;

b) im Schnittpunkt mit der ∞ fernen Geraden:
 $AC \equiv x^4 y - y^2 = 0$ oder $y(x^4 - y) = 0$.

2. Die Kurve (Fig. 37)

$$x^4 + y^4 = y(2x^2 - 3xy + y^2)$$

oder

$$x^4 + y^4 - 2x^2 y + 3xy^2 - y^3 = 0$$

A B C D E

hat als Näherungskurven (Fig. 51)

a) im Ursprung: $CDE \equiv y(2x - y)(x - y) = 0$;
 eine sich der Kurve mehr anschmiegende Näherungskurve liefert

$$AC \equiv x^2(x^2 - 2y) = 0;$$

b) im Schnitt mit
 der ∞ fernern Geraden: $AB \equiv x^4 + y^4 = 0$;
 die Kurve verläuft also ganz im Endlichen.

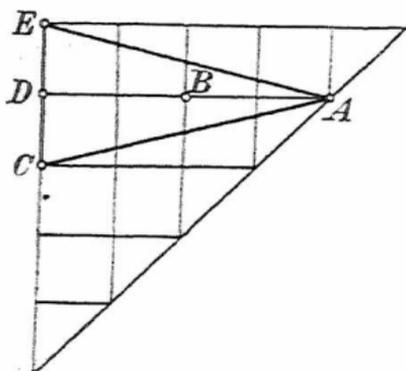


Fig. 50.

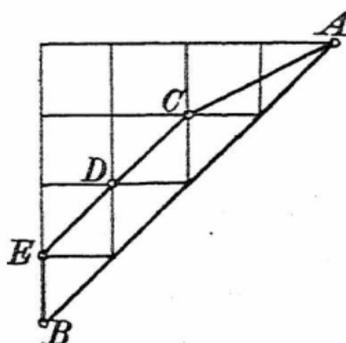


Fig. 51.

Sämtliche in § 7 diskutierte Kurven können auf das Verhalten in den drei Kardinalpunkten mittels des analytischen Dreiecks nachgeprüft werden. Zu diesem Zweck muß jedoch die Kurvengleichung in ausmultiplizierter Form gegeben sein.

§ 14. Reihenentwicklung für einen gegebenen Kurvenpunkt.

Zur Untersuchung singulärer Punktstellen reichen die bisherigen Hilfsmittel nicht immer aus, namentlich wenn höhere Singularitäten auftreten. *Bringen wir durch Koordinatentransformation den zu untersuchenden Punkt in den Koordinatenursprung*, so liefert das analytische Dreieck die Näherungskurven. Diese sind aber zuweilen bloß auf einer Seite brauchbar. So hat z. B. die C^4 $(x^2 - y)^2 = x^3$ die Parabel $x^2 - y = 0$ als Näherungskurve nur rechts von $x = 0$. Den Entscheid hierüber gibt, namentlich in einfacheren Fällen, das Signierungs-

prinzip. Bei höheren Singularitäten bleibt nichts anderes übrig, als y nach Potenzen von x zu entwickeln. Diese Entwicklungen gelten nur in der nächsten Umgebung des betreffenden Punktes, genauer innerhalb eines Kreises, der den nächsten Verzweigungs-, bzw. Unstetigkeitspunkt ausschließt. Solche Punkte sind definiert durch das simultane System

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array} \right\}.$$

Besondere Fälle. 1. Läßt sich die Kurvengleichung in die Form bringen: $y = f(x)$, wo $f(x)$ irrationale Ausdrücke enthält, so lassen sich diese Ausdrücke mittels bekannter Sätze häufig direkt nach Potenzen von x entwickeln. So gibt für die Kurve

$$y = x^2 + \sqrt{1 + x^2}$$

der binomische Satz die Reihenentwicklung

$$y = 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - + \dots$$

Aufgabe. Bilde für die Kurve (Fig. 52)

$$2y = \pm \sqrt{6x - x^2} \pm \sqrt{6x + x^2} \pm \sqrt{36 - x^2}^*$$

*) Diese Kurve gehört zur Gattung der *Polyzomalkurren*. Jede Kurve, deren Gleichung sich auf die Form bringen läßt:

$$\sum_{i=1}^{i=r} \sqrt{U_i} \equiv \sqrt{U_1} + \sqrt{U_2} + \sqrt{U_3} + \dots + \sqrt{U_r} = 0,$$

wo die Wurzeln beliebiges Vorzeichen haben und die U -Funktionen r ten Grads in den Veränderlichen x, y, ω sind, ist eine Polyzomalkurve (vgl. Loria [L. V. 6.], S. 287 ff.). Der Name stammt von Cayley.

die Reihenentwicklungen

- a) im Punkt $(0, 3)$,
- b) im Punkt $(3, \frac{3}{2})$,
- c) im Punkt $(6, 3\sqrt{2})$.

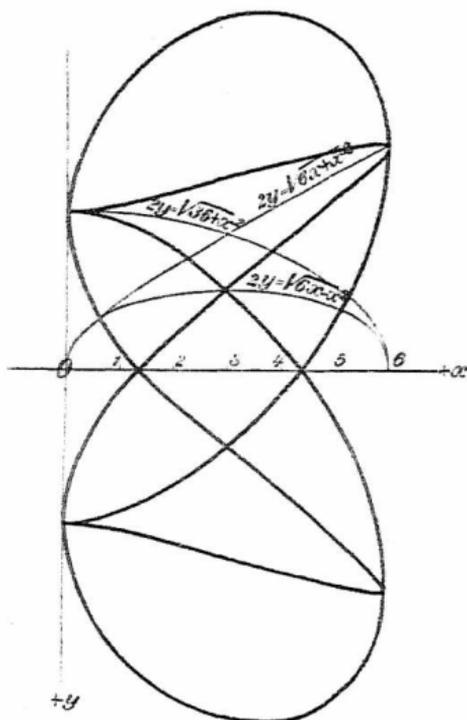


Fig. 52.

Zur Diskussion erhält man durch zweimaliges Quadrieren sechs λ -Formen, die zwei in bezug auf die x -Achse symmetrisch liegende Kurven 4. Grads liefern.

Allgemein kann die Gleichung $y = f(x)$ nach dem Taylorschen Satz in eine Potenzreihe entwickelt werden:

$$(1) \quad y = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots,$$

wo $f(0)$, $f'(0)$, ... die Werte der betreffenden Funktionen für $x = 0$ angeben.

2. Für die Kurve $F(x, y) = 0$ hat man die Reihe*)

$$(2) \quad F(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x|_{x=0}} x + \frac{\partial f}{\partial y|_{y=0}} y \right) \\ + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2|_{x=0}} x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y|_{x=0, y=0}} xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2|_{y=0}} y^2 \right) + \dots$$

Hat die Kurve n ter Ordnung im Ursprung einen r -fachen Punkt, so ist die Kurvengleichung von der Form

$$0 = f_n(x, y) = \varphi_r(x, y) + \varphi_{r+1}(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y).$$

Aus dem analytischen Dreieck lassen sich aus dem gegen die dritte Ecke (die Spitze) geneigten Linienzug die r (reellen und imaginären) Näherungskurven ablesen. Dies gibt die ersten Näherungskurven von der Form

$$y = \alpha x^2, \quad y = \beta x^2, \quad \dots$$

Zur Bestimmung der folgenden Glieder setzen wir nach dem Vorgang von Newton

$$y = \alpha x^2 + u.$$

Damit wird aus $f(x, y)$ eine neue Funktion $F(x, u)$. Stellen wir jetzt das analytische Dreieck in bezug auf x und u her, so erhalten wir wieder einen konvexen Linienzug, der weitere Näherungskurven gibt. Durch Fortsetzung des Verfahrens erhält man für jeden Zweig der Kurve im Ursprung eine Reihenentwicklung von der Form

$$x = \alpha x^u + \alpha_1 x^{u_1} + \alpha_2 x^{u_2} + \dots$$

*) In beiden Fällen (1) und (2) gelten die Entwicklungen nur für einen im Nullpunkt liegenden Kurvenpunkt (vgl. S. 122).

Liegt die singuläre Punktstelle im Punkt $\left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ \omega = 0 \end{matrix} \right\}$, so bringt man den Punkt in den Koordinatenursprung durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi}$$

und entwickelt dann y nach aufsteigenden Potenzen von ξ , bzw. nach absteigenden Potenzen von x .

Am besten wird die Methode klar werden an folgendem Beispiel. Für die Kurve

$$x^6 y = (y^2 - 3x^2)^2$$

sollen die Reihenentwicklungen im Ursprung auf drei Glieder angegeben werden.

Näherungskurven im Ursprung sind $y^2 - 3x^2 = 0$ oder $y = \pm x\sqrt{3}$. Es gibt also vier Reihenentwicklungen; aus Symmetriegründen ist jedoch nur die Aufstellung von zweien derselben notwendig; die beiden andern ergeben sich aus diesen durch Vertauschung von x mit $-x$.

Setzen wir

$$(1) \quad x\sqrt{3} - y = u \quad \text{oder} \quad y = x\sqrt{3} - u,$$

so erhalten wir damit aus der Kurvengleichung:

$$(2) \quad x^6(x\sqrt{3} - u) = (2\sqrt{3}ux - u^2)^2$$

oder

$$\overset{A}{x^7\sqrt{3}} - \overset{B}{ux^6} = \overset{C}{12u^2x^2} - \overset{D}{4\sqrt{3}u^3x} + \overset{E}{u^4}.$$

Hieraus folgt als Näherungskurve (Fig. 53)

$$(3) \quad \overset{C}{12u^2x^2} = \overset{A}{x^7\sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad u = \pm \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{3}};$$

also

$$(4) y_1 = x\sqrt{3} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt[4]{3}} + v_1 \quad \text{oder} \quad x\sqrt{3} - y_1 = u = +\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt[4]{3}} - v_1;$$

$$(5) y_2 = x\sqrt{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt[4]{3}} + v_2 \quad \text{oder} \quad x\sqrt{3} - y_2 = u = -\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt[4]{3}} - v_2.$$

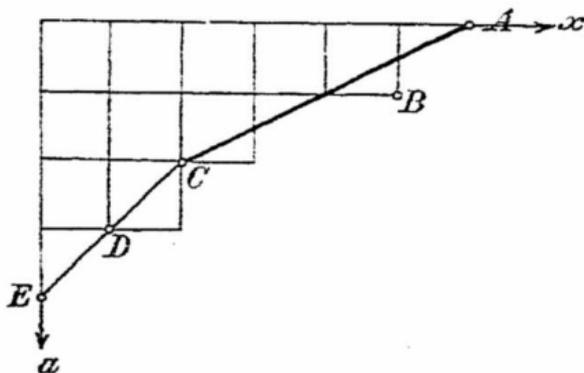


Fig. 53.

Zur Berechnung von v_1 hat man den Wert von y_1 aus Gleichung (4) in die gegebene Kurvengleichung oder besser in (2) einzusetzen und bekommt:

$$x^6 \left(x\sqrt{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt[4]{3}} + v_1 \right) = \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt[4]{3}} + v_1 \right)^2 \left(2x\sqrt{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt[4]{3}} + v_1 \right)^2.$$

Hieraus folgt durch Ausquadrieren:

$$x^7\sqrt{3} + \frac{x^{\frac{17}{2}}}{2\sqrt[4]{3}} + v_1 x^6 = \left(\frac{x^5}{4\sqrt[4]{3}} + \frac{v_1 x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[4]{3}} + v_1^2 \right) \cdot \left(12x^2 + v_1^2 + \frac{x^5}{4\sqrt[4]{3}} + 2\sqrt[4]{3} \cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{v_1 x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[4]{3}} + 4v_1 x\sqrt{3} \right)$$

$$= x^7 \sqrt{3} + \frac{12 v_1 x^{\frac{9}{2}}}{\sqrt[4]{3}} + \frac{x^{10}}{48} + \frac{x^{\frac{11}{2}}}{2 \sqrt[4]{3}} + \frac{v_1 x^{\frac{15}{2}}}{4 \sqrt[4]{3^3}} + 2 v_1 x^6 + \dots$$

$$\text{oder (6) } 0 = \frac{12 v_1 x^{\frac{9}{2}}}{\sqrt[4]{3}} + \frac{x^{10}}{48} + v_1 x^6 + \frac{v_1 x^{\frac{15}{2}}}{4 \sqrt[4]{3^3}} + \dots$$

Die weiteren Glieder können unterdrückt werden, da sie zur Bestimmung der Näherungskurve ohne Einfluß sind.

Aus Gleichung (6) folgt für die Näherungskurve:

$$\frac{x^{10}}{48} + \frac{12 v_1 x^{\frac{9}{2}}}{\sqrt[4]{3}} = 0, \quad \text{woraus} \quad v_1 = -\frac{\sqrt[4]{3}}{3^2 \cdot 4^3} x^{\frac{11}{2}}.$$

$$\text{Eine analoge Rechnung liefert } v_2 = +\frac{\sqrt[4]{3}}{3^2 \cdot 4^3} x^{\frac{11}{2}}.$$

Damit erhält man die vier Reihenentwicklungen:

$$y_1 = x \sqrt{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2 \sqrt[4]{3}} - \frac{\sqrt[4]{3}}{3^2 \cdot 4^3} x^{\frac{11}{2}} + \dots;$$

$$y_2 = x \sqrt{3} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2 \sqrt[4]{3}} + \frac{\sqrt[4]{3}}{3^2 \cdot 4^3} x^{\frac{11}{2}} - \dots;$$

$$y_3 = -x \sqrt{3} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2 \sqrt[4]{3}} + \frac{\sqrt[4]{3}}{3^2 \cdot 4^3} x^{\frac{11}{2}} - \dots;$$

$$y_4 = -x \sqrt{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2 \sqrt[4]{3}} - \frac{\sqrt[4]{3}}{3^2 \cdot 4^3} x^{\frac{11}{2}} + \dots$$

§ 15. Spezielle algebraische Kurven.

Die folgende Zusammenstellung umfaßt die Mehrzahl derjenigen algebraischen Kurven, denen besondere Namen beigelegt sind. Über sämtliche Kurven findet der Leser neben meist sehr eingehenden Untersuchungen auch historische Angaben in dem großen Sammelwerk von *Loria**), das mit erstaunlicher Vollständigkeit eine Fülle von Stoff über spezielle algebraische Kurven enthält. Die Liste ist gedacht als Übungsmaterial zur Kurvendiskussion.

Außerdem sind am Schluß noch einige weitere Kurvengleichungen aufgeführt, deren Behandlung aus Mangel an Raum dem Leser überlassen werden muß. Eine große Zahl von ihnen entstammt den Aufgaben in analytischer Geometrie, die bei der ersten realistischen Dienstprüfung in Württemberg (vor 1900 „realistische Professorsprüfung“ genannt) gestellt wurden.

Achterkurve: $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$.

Agnesische Kurve (s. Versiera): $x^2 y + a^2(y - a) = 0$.

Ährenkurve: $\rho \cos \lambda \varphi = a$.

Anacampis: $x(x^2 \pm a^2) = b^2 y$.

Anguinea: $y(x^2 + y^2 - 2\lambda xy) + a^2(x - \mu y) = 0$ ($\lambda < 1$).

Astroide: $(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2 x^2 y^2 = 0$

$$\text{oder } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Atriphthaloide: $x^2(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - a^2)^3$.

Birnförmige Kurve: $y^2(x - R)^2 - 2R^3 y + R^4 = 0$.

Cassinische Kurve: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - b^4 = 0$.

Conchoidea punctata: $a y^2 = x^2(x - a)$.

*) Auch in den beiden Werken von *Teixeira* (L. V. 12.) und *Wieleitner* (L. V. 14.) findet sich eine große Zahl dieser Kurven behandelt, in letzterem Werk nach der Erzeugungsweise zusammengestellt.

Descartessesches Blatt: $x^3 + y^3 = 3 a x y$.

Doppeleilinie: $(x^2 + y^2)^3 = r^2 x^4$.

Doppelherzkurve: $x^4 + y^4 - 2 a^2 y^2 - 2 b^2 x^2 + b^4 = 0$.

Dreiblatt (gerades): $(x^2 + y^2)^2 = 2 a x (x^2 - y^2)$.

Duplikatrix (kubische): $x^3 = a(x^2 + y^2)$.

Duplikatrix von Montucci: $y = \pm \sqrt{\lambda x} \pm \sqrt{a x - x^2}$.

Eiförmige Kurve, auch Oval genannt:

$$(x^2 + y^2)^3 - 2 a x^3 (x^2 + y^2) + (a^2 - b^2) x^4 = 0.$$

Einblatt: $(x^2 + y^2)^2 = \pm a x^3$.

Gutschovensche Kurve: $a^2 x^2 = (x^2 + y^2) y^2$.

Halphensche Kurve: $(x^2 + y^2)^2 - a^2 y^2 (x^2 + y^2) - b^4 = 0$.

Herzkurve (Kardioid): $(x^2 + y^2 - 2 a x)^2 = \pm a^2 (x^2 + y^2)$.

Hyperbola punctata: $x(x^2 - y^2) = a(x^2 + y^2)$.

Hyperkissoide: $a(x^2 + \lambda^2 y^2) = 2 x(x^2 + y^2)$.

Hypokissoide: $a(x^2 - \lambda^2 y^2) = 2 x(x^2 + y^2)$.

Hypozykloide (dreispitzige), auch Steinersche Kurve genannt:

$$(x^2 + y^2)^2 + 8 a x (x^2 - 3 y^2) + 18 a^2 (x^2 + y^2) - 27 a^4 = 0.$$

Ieřabeksche Kurve: $(x^2 + y^2 - a x)^2 = \lambda (x^2 + y^2) (x - a)^2$.

Käferkurve: $(x^2 + y^2) (x^2 + y^2 + a x)^2 = b^2 (x^2 - y^2)$.

Kampyla: $x^4 = a^2 (x^2 + y^2)$.

Kappakurve: $y^2 (x^2 + y^2) = a^2 x^2$.

Kaprikornoide: $x^2 (x^2 + y^2) = \lambda (x^2 + y^2 - a y)^2$.

Kiepertsche Kurve: $(x^2 + y^2)^3 = 4 a^3 x (x^2 - 3 y^2)$.

Kissoide (gerade)*): $x(x^2 + y^2) = 2 a y^2$.

Kissoide (schiefe): $(x - \lambda y) (x^2 + y^2) = 2 a y^2$.

Knotenkurve: $y = a \operatorname{tg} \mu \varphi$.

*) Die *Kissoide* zweier Kurven Γ und Γ' in bezug auf einen festen Punkt O entsteht durch Subtraktion der Radienvektoren OP und OP' von Γ und Γ' .

Kohlenspitzkurve: $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1.$

Konchale: $(x + a)^2 [(x - a)^2 + y^2] = a^2 b^2.$

Konchoidale: $y^2 [(x - a)^2 + (y - b)^2] = \lambda (bx - ay)^2.$

Konchoide*): $(x - a)^2 (x^2 + y^2) = b^2 x^2.$

Konchoide von Kulp: $x^2 y^2 + a^2 (x^2 - a^2) = 0.$

Konchoide von Sluse: $(x^2 + y^2)(x - a) \pm R x^2 = 0.$

Konchoide von Varignon:

$$x(x^2 + y^2) - 6 a x^2 + a^2 x - 4 a^3 = 0.$$

Konchoide (zirkulare): $(x - y)(x^2 + y^2) = a(x^2 + y^2 - xy).$

Kornoide:
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi) \\ y = r \sin \varphi (1 + 2 \cos^2 \varphi) \end{cases}.$$

Kreiselkurve: $x^4 - 2 a x^3 + a^2 y^2 = 0.$

Kreiskonchoide (Pascalsche Schnecke):

$$(x^2 + y^2 - 2 a x)^2 = b^2 (x^2 + y^2).$$

Kremphut, auch Zweihorn genannt:

$$(x^2 + 2 a y - a^2)^2 + y^2 (x^2 - a^2) = 0.$$

Kreuzkurve: $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1.$

Kubische Parabel (Wendeparabel): $a^2 y = x^3.$

Lamésche Kurve: $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1.$

Lemniskate von Bernoulli: $(x^2 + y^2)^2 = 2 a^2 (x^2 - y^2).$

Lemniskate von Booth: $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 \pm b^2 y^2.$

Lemniskate (schiefe): $(x^2 + y^2 + 2 \lambda x y)^2 = 4 a^2 x y.$

*) Aus einer Kurve Γ leitet man eine *Konchoide* ab, indem man von einem beliebigen Pol O aus die Radienvektoren von Γ um eine konstante Strecke l verlängert, bzw. verkürzt.

Lissajoussche Kurven: $\left\{ \begin{array}{l} x = a \cos 2\pi(\alpha t - \varphi) \\ x = b \cos 2\pi\beta t \end{array} \right\}^*$

Muschellinie von Dürer:

$$(xy - y^2 + b^2)^2 + (x + y - a)^2(y^2 - a^2) = 0.$$

Neilsche Parabel (Rückkehrparabel): $ay^2 = x^3$.

Nierenkurve (Nephroide):

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2 - 2ax)^2.$$

Ophiuride: $x(x^2 + y^2) = y(x - \lambda y)$.

Panastrophoide: $x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) + b^2(x + y) = 0$.

Parabola cum ovali: $y^2 = x(x - a)(x - b)$.

Parabola punctata: $y^2 = x^2(x - a)$.

Parabola pura: $y^2 = x(x^2 - ax + b^2)$ ($a^2 - 4b^2 < 0$).

Perikissoide: $(x - a)(x^2 + y^2) + bx^2 = 0$; ($a > b$).

Perlkurve ($n + 1$)ter Ordnung: $ay^n + (x \pm a)x^n = 0$.

Polyode: $y^2(x^2 + y^2 - a^2) = (x^2 + y^2 - ax - 2b^2)^2$.

⁷seudoversiera, auch geometrische Quadratrix genannt:

$$x^2y + a^2(y - 2a) = 0.$$

iersackkurve (Bésace):

$$x^4 - 4(a^2 + by)x^2 + 4(a^2 + b^2)y^2 = 0.$$

liale der Ellipse^{**}): $(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = a^4b^4(x^2 + y^2)^2$.

*) Die *Lissajousschen Kurven* entstehen durch Interferenz zweier zueinander rechtwinkliger (Schall-) Wellen. Hierbei sind a und b die Amplitüden, φ die Phasendifferenz, und β die Schwingungszahlen der beiden Komponenten. $\alpha = \beta$ gibt den Gleichklang, $\alpha = n\beta$ gibt die harmonischen Korde. — Für spezielle Werte von φ nehmen die Gleichungen einfachere Gestalt an. t ist willkürlicher Parameter.

***) Die *Radiale* einer gegebenen Kurve Γ ist der geometrische Ort der Endpunkte aller Strecken, die von einem festen Punkt ausgehen und mit den Krümmungsradien von Γ gleich und gleich gerichtet sind.

Radiale der Parabel (s. kubische Duplikatrix):

$$x^3 = p(x^2 + y^2).$$

Rollesche Kurve: $xy^2 = a(x + y)^2$.

Rosenkurven: $\rho = R \sin \alpha \varphi$.

Speziell: Gleichseitiges Kleeblatt:

$$\rho = R \sin 3 \varphi \quad \text{oder} \quad (x^2 + y^2)^2 = a x(x^2 - 3y^2).$$

Vierblättrige Rosenkurve:

$$\rho = R \sin 2 \varphi \quad \text{oder} \quad (x^2 + y^2)^3 = 4 a^2 x^2 y^2.$$

Sanduhrkurve: $4 b^2 x^2 (y^2 + b^2) = a^2 (y^2 - b^2)^2$.

Seiltänzerkurve: $y^2 = \frac{x^2(x - b)^2}{a^2 - (x - c)^2}$.

Serpentine: Elliptische Serpentine:

$$x(x^2 + y^2) - (ax^2 + 2bxy - ay^2) + (x - a)b^2 = 0.$$

Elliptische S. mit elliptischem Oval:

$$y^2(x + a) + x(x - a)(x - b) = 0.$$

Elliptische S. mit hyperbolischem Oval:

$$x(x^2 - y^2 - b^2) = a(x^2 + y^2 - b^2); \quad (a < b).$$

Elliptische S. mit parabolischem Oval:

$$x(y^2 - 2px) + a(y^2 - 2qx) = 0.$$

Hyperbolische S. mit elliptischem Oval:

$$x(x^2 - y^2 - b^2) = a(x^2 + y^2 - b^2); \quad (a > b).$$

Parabolische S.: $x(y^2 + ax) + a^3 = 0$.

Parabolische S. mit elliptischem Oval:

$$y^2(x - a) = 2px(x + b).$$

Strophoide (gerade): $(x^2 + y^2)(x - 2a) + a^2x = 0$.

Teufelskurve: $x^4 - y^4 - 100 a^2 x^2 + 96 a^2 y^2 = 0$.

Tridens: $x^3 - a x y + a^3 = 0$.

Trilatere: $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$.

Trisekante: $(x^2 + y^2)(y^2 - a^2) + \frac{a^2}{4} = 0$.

Trisektrix von Catalan: $27 a y^2 = (x - 4 a)^2 (2 x + a)^2$.

Trisektrix von Longchamps: $x(x^2 - 3 y^2) + a(x^2 + y^2) = 0$.

Trisektrix von Maclaurin: $x(x^2 + y^2) + a(3 x^2 - y^2) = 0$.

Tschirnhausens Kurve 3. Ordnung: $x^3 + a(x^2 - 3 y^2) = 0$.

Versiera: $x^2 y + a^2(y - a) = 0$.

Visiera: $(x^2 + y^2)(2 x - a) = a x^2$.

Wattsche Kurve, auch Lemniskoide genannt:

$$(x^2 + y^2) \left(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4} - r^2 - \frac{b^2}{4} \right) + b^2 y^2 (x^2 + y^2 - r^2) = 0.$$

Windmühle: $x^2 y^2 (x^2 + y^2) = a^2 (x^2 - y^2)^2$.

Zweiblatt (gerades): $(x^2 + y^2)^2 = b x^2 y$.

Zweiblatt (schiefes): $(x^2 + y^2)^2 = x^2 (a x + b y)$.

$$x^3 y + x y^3 + x + y + 1 = 0.$$

$$x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4 + a x^3 - 4 a^2 y^2 = 0.$$

$$x^3 y + y^4 + a x^3 - b x y^2 = 0 \text{ (besondere Fälle für } a \text{ und } b!).$$

$$x^4 - y^4 - x^2 - 2 x y + y^2 = 0.$$

$$(x + 1)^3 y = x (y - 1)^3.$$

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 = x^2 y.$$

$$(x^2 - 4)(y^2 - 4) + \lambda (x^2 + y^2 - 6)^2 = 0 \text{ (verschiedene Werte von } \lambda!).$$

$$(x^2 - x + y)^2 = 4 x^5.$$

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 + (x^2 - y^2) \left(x - \frac{a}{2}\right)(x - b) = 0; \quad \left(b > \frac{a}{2}\right).$$

$$(8x^2 - y^2 + 18y + 27)^2 = (y + 9)^3(y + 1).$$

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 = x^2 y^2 (x + y + \sqrt{2}).$$

$$x^2 y^2 - 2xy(x + y) + (x - y)^2 = 0.$$

$$x^2 y(x^2 - y^2) = (x^2 - a^2 y^2)(x^2 - b^2 y^2).$$

$$2x^4 - 4a^2 x^2 + y^4 - 2a^2 y^2 + a^4 = 0.$$

$$(x + y)^3(x - y - 1) = (x - y)^2(x + y - 1).*$$

§ 16. Umgekehrte Kurvendiskussion.

Während wir bisher die Gestalt einer Kurve aus ihrer Gleichung zu bestimmen suchten, so handelt es sich jetzt darum, *die Gleichung einer gezeichneten Kurve aufzustellen* oder: *die Gleichung einer Kurve zu bestimmen, der wir besondere Eigenschaften vorschreiben.*

In der Technik kommt es häufig vor, daß durch Versuche für bestimmte Werte einer Veränderlichen (z. B. des Gasdrucks p) die entsprechenden Funktionswerte einer 2. Veränderlichen (z. B. des Gasvolumens v) ermittelt wurden. So lautet z. B. für Gase die sogenannte van der Waalssche Gleichung:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = c,$$

*) Weitere Beispiele zur Kurvendiskussion finden sich in jeder Aufgabensammlung zur Differentialrechnung, so z. B. in *Junker, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung*, Sammlung Göschen, Leipzig, 2. Aufl. 1907, § 46—51, 56, 57. Zugleich bietet die Bestimmung geometrischer Örter ebenfalls häufig interessante Beispiele für höhere Kurven; vgl. *Bürklen, Aufgabensammlung zur anal. Geom. der Ebene*, Sammlung Göschen, Leipzig, 1905, § 28—34.

wo a und b der Gasmasse eigentümliche Konstante sind (z. B. für Kohlensäure ist $a = 0,00874$; $b = 0,0023$)

und $c = 1 + \frac{t}{273}$, wo t die Temperatur bedeutet.

($1 + \frac{t}{273} = T$ ist bekanntlich die absolute Temperatur

des Gases.) Nehmen wir p als Abszisse und v als Ordinate, so erhalten wir eine C^4 mit $v = 0$ als Rückkehrasymptote, $v = b$ und $p = 0$ als gewöhnliche Asymptoten. Die λ -Form

$$p v^2(v - b) = c v^2 - a v + a b \quad \text{oder} \quad p = \frac{c v^2 - a v + a b}{v^2(v - b)}$$

kann zur punktweisen Berechnung dienen.

Unter der Annahme einer sehr kleinen Fehlergrenze der Beobachtungen wird man innerhalb des beobachteten Druckintervalls p eine stetige Reihe von Werten für v erhalten, so daß wir setzen können:

$$p = f(v).$$

Tragen wir die einander entsprechenden Wertepaare (p, v) in ein Koordinatensystem ein, so lassen sich die einzelnen Punkte durch einen stetigen Kurvenzug verbinden. Durch Bestimmung der Höchstzahl der Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden läßt sich der Grad der Kurve finden. Entspricht jedem Wert von p nur ein Wert von v und ist z. B. der Grad der Kurve $= 4$, so setzt man

$$p = a v^4 + b v^3 + c v^2 + d v + e$$

und bestimmt die fünf Koeffizienten durch Einsetzen von fünf bekannten Wertepaaren (p, v) . $p = f(v)$ ist dann in dem Beobachtungsintervall die Gleichung der auf rein empirischem Wege gefundenen Kurve.

Die Lösung von Aufgaben der umgekehrten Kurvendiskussion setzt ein gewisses Maß von Vertrautheit mit algebraischen Kurven voraus — denn nur um solche handelt es sich hier —, um so mehr, als sich eine allgemeine, auf jeden Fall anwendbare Methode nicht angeben läßt.

Schreibt man der Kurve Besonderheiten in Gestalt von Näherungskurven in bestimmten Punkten vor, so läßt sich mit Vorteil das analytische Dreieck anwenden. Werden in bezug auf das Koordinatensystem keine besonderen Vorschriften gemacht, so legt man den Koordinatenursprung in einen vielfachen Punkt. Die Anwendung des Prinzips der linearen Kombination vereinfacht die Rechnung oft wesentlich. Je höher der Grad der Kurve ist, um so schwieriger ist die Aufgabe; auch das Fehlen von Doppelpunkten ist ein Maß für die Schwierigkeit der Behandlung.

Schon frühe haben die Umrißlinien der Pflanzenblätter dazu angeregt, deren analytische Darstellung durch eine Gleichung zu versuchen. Die Gleichungen derjenigen Kurven, die die Gestalt von Rosetten mit mehreren Blättern haben, wurden zuerst von Guido Grandi 1713 aufgestellt. Er nannte sie Rhodoneen; die Franzosen heißen sie *rosaces*, die Deutschen Rosenkurven*). Sie wurden in neuerer Zeit weiter untersucht von F. W. Hyde 1875 und Himstedt (Progr. Löbau 1888). Einige spezielle Fälle sind S. 133 angegeben. Habenicht hat 1895 für eine große Zahl von Baumblättern deren Umrißlinien analytisch dargestellt. Brocard hat diesen Kurven den Namen „geometrische Blätter“**) gegeben.

*) Vgl. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, 1902, S. 297 ff.

**) Ebenda, S. 307 ff.

Beispiele.

Die Wege, die zur Behandlung von Aufgaben der umgekehrten Kurvendiskussion eingeschlagen werden können, lassen sich am besten an einigen *Beispielen* darlegen.

1. Beispiel. Es soll die einfachste Gleichung einer zur x -Achse symmetrischen C^3 mit drei reellen Asymptoten angegeben werden.

Sind $x + y - a = 0$, $x - y - a = 0$ und $x + b = 0$ die drei Asymptoten, so lautet nach dem Prinzip der linearen Kombination die Gleichung der gesuchten Kurve:

$$(x + y - a)(x - y - a)(x + b) = \lambda G \cdot \omega^2,$$

wo $G = 0$ eine beliebige Gerade darstellt. Da nun die C^3 symmetrisch zu $y = 0$ sein soll, so dürfen in bezug auf y nur Glieder 2. Grads vorkommen, also muß G die Form haben:

$$G \equiv x + c.$$

Somit lautet die gesuchte Gleichung:

$$(x + y - a)(x - y - a)(x + b) = \lambda(x + c) \cdot \omega^2.$$

Den verschiedenen Werten von λ und c entsprechen zwei verschiedene Kurvenbüschel, deren Diskussion wir dem Leser überlassen.

Sollen die drei Asymptoten Wendeasymptoten sein, so lautet die Gleichung:

$$(x + y - a)(x - y - a)(x + b) = \lambda c \omega^3.$$

2. Beispiel. Die einfachste Gleichung einer geschlossenen Kurve 6. Grads zu finden, die im Ursprung die beiden binomischen Parabeln $x = y^3$ und $x^3 = y^2$ als Näherungskurven hat.

Wir legen die beiden Parabeln auf das analytische Dreieck, indem wir die ihnen entsprechenden Linien $A'B'$ und $C'D'$ eintragen (Fig. 54), und verschieben dann beide Linien parallel zu sich selbst, daß ein geschlossener, gegen O zugekehrter Linienzug entsteht, und markieren die so entstandenen Ecken. Dabei erhalten B und D ein negatives Zeichen, also haben wir für diejenigen

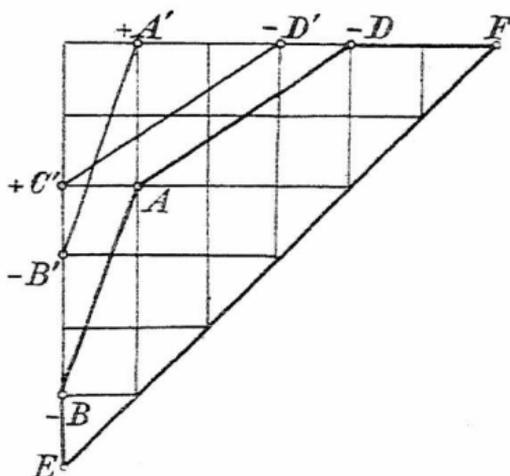


Fig. 54.

Glieder, die uns das Verhalten der Kurve im Ursprung angeben:

$$A \quad D \quad B \\ x y^2 - x^4 - y^5 .$$

Soll die Kurve 6. Grads geschlossen sein, so darf das Aggregat der Glieder 6. Grads nicht reell zerlegbar sein; außerdem dürfen keine gegen die 2. und 3. Ecke des analytischen Dreiecks geneigten Linien vorkommen (da diesen Näherungskurven im Unendlichen entsprechen würden); also hat man als weitere (einfachste) Glieder

$$F \quad E \\ 6. \text{ Ordnung} \quad a x^6 + b y^6 .$$

Damit lautet die gesuchte Gleichung:

$$ax^6 + by^6 - x^4 - y^5 + xy^2 = 0,$$

wo a und b gleichzeitig sind. Soll z. B. für $x = 0$ $y = -2$ werden, so hat man:

$$by^6 = y^5 \quad \text{oder} \quad b = -\frac{1}{2}.$$

Für $y = 0$ hat man:

$$ax^6 - x^4 = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{a}}.$$

Sollen diese beiden Wurzelwerte imaginär werden, so ist auch a negativ zu nehmen, etwa $= -\frac{1}{2}$, womit sich als gesuchte Kurvengleichung ergibt:

$$x^6 + y^6 + 2y^5 + 2x^4 - 2xy^2 = 0.$$

3. Beispiel. Die Gleichung der in Fig. 55 gezeichneten Kurve zu bestimmen.

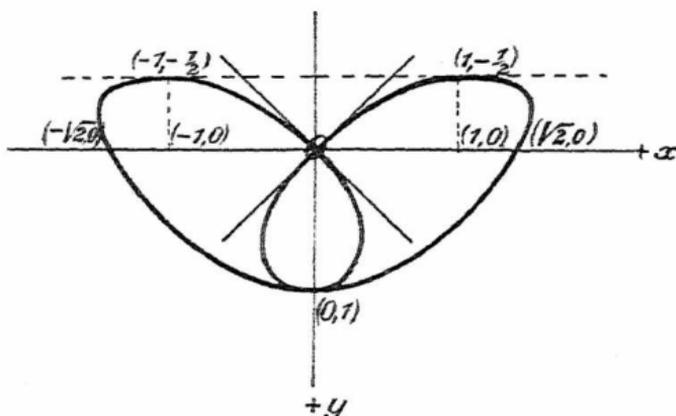


Fig. 55.

Legen wir die Gleichung einer allgemeinen C^4 mit beliebigen Koeffizienten zugrunde, so sehen wir sofort, daß das Aggregat der Glieder niederster Ordnung $\lambda(x^2 - y^2)$

ist. Da aus Symmetriegründen x nur in geraden Potenzen vorkommt, so lautet die Gleichung:

$$(1) \quad x^4 + ax^2y^2 + by^4 + cy^3 + dx^2y + e(x^2 - y^2) = 0$$

mit fünf vorerst noch unbestimmten Konstanten a, b, c, d, e .

Nun ist für $y = 0$

$x^4 + ex^2 = 0$, woraus $x^2 = 0$ und $x^2 = -e = 2$, also

$$(2) \quad e = -2.$$

Für $x = 0$ ist $by^4 + cy^3 + 2y^2 = 0$,

woraus $y^2 = 0$ und $by^2 + cy + 2 = 0$.

Durch Koeffizientenvergleichung mit

$$(y - 1)^2 \equiv y^2 - 2y + 1 = 0$$

folgt:

$$(3) \quad b = 2, \quad c = -4.$$

Dies in (1) eingesetzt gibt:

$x^4 + ax^2y^2 + 2y^4 - 4y^3 + dx^2y - 2(x^2 - y^2) = 0$
oder

$$(4) \quad x^2(x^2 + ay^2 + dy - 2) + 2y^2(y - 1)^2 = 0.$$

Soll nun der Punkt $(0,1)$ ein Selbstberührungspunkt sein, so muß nach dem Prinzip der linearen Kombination die Ellipse $x^2 + ay^2 + dy - 2 = 0$ durch diesen Punkt gehen, also

$$(5) \quad a + d - 2 = 0.$$

Um nun noch den fehlenden Koeffizienten zu stimmen, setzen wir fest, daß für $x = 1 \quad y = -\frac{1}{2}$!

num sei. Damit erhalten wir aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2axy^2 + 2dxy - 4x = 0:$$

$$(6) \quad a = 2d.$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$a = \frac{4}{3}; \quad d = \frac{2}{3}.$$

In (4) eingesetzt gibt:

$$x^2(x^2 + \frac{4}{3}y^2 + \frac{2}{3}y - 2) + 2y^2(y - 1)^2 = 0$$

oder

$$x^2(3x^2 + 4y^2 + 2y - 6) + 6y^2(y - 1)^2 = 0$$

als gesuchte Kurvengleichung. Die Diskussion dieser Gleichung muß umgekehrt die in Fig. 55 gezeichnete Kurve liefern.

4. Beispiel. Die Gleichung einer zur y -Achse symmetrischen C^4 aufzustellen, die in den Punkten $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ Doppelpunkte hat und die y -Achse in den Punkten mit den Ordinaten -1 und -2 schneidet. (Fig. 56.)

Aus Symmetriegründen dürfen in der Kurvengleichung keine Glieder mit ungeraden Potenzen von x vorkommen, also ist die allgemeinste Gleichung einer solchen C^4 :

$$x^4 + ax^2y^2 + by^4 + cx^2y + dy^3 + ex^2 + fy^2 + gy + h = 0.$$

Für $y = 0$ kommt

$$x^4 + ex^2 + h = 0 \equiv (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1,$$

woraus

$$(1) \quad e = -2h.$$

Für $x = 0$ kommt

$$by^4 + dy^3 + fy^2 + gy + h = 0 \equiv (y-1)^2(y+1)(y+2) \\ = y^4 + y^3 - 3y^2 - y + 2,$$

woraus

$$(2) \quad b = 1, \quad d = 1, \quad f = -3, \quad g = -1, \quad h = 2.$$

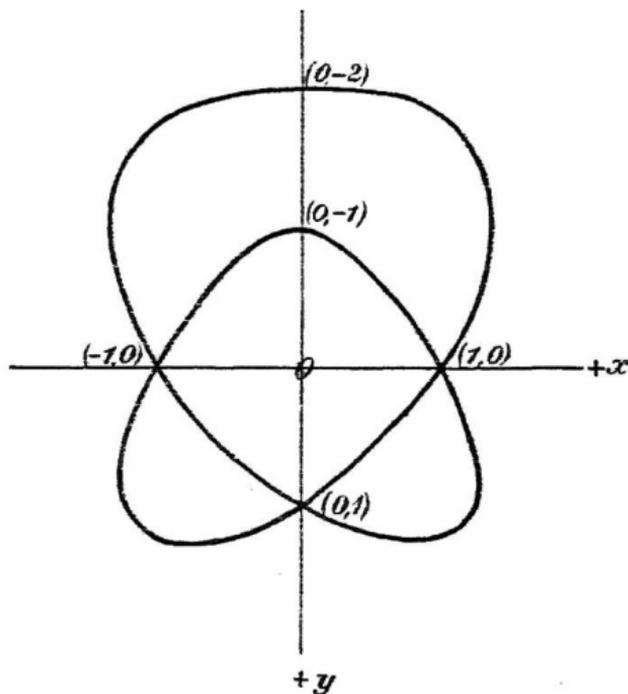


Fig. 56.

Damit wird die Gleichung der gesuchten Kurve:

$$(3) \quad F(x, y, \omega) \equiv 2x^4 + 2ax^2y^2 + y^4 + 2cx^2y\omega \\ + y^3\omega - 4x^2\omega^2 - 3y^2\omega^2 - y\omega^3 + 2\omega^4 = 0.$$

Diese Kurve muß nun in den drei Punkten $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ Doppelpunkte haben, deshalb müssen

die Koordinaten dieser Punkte die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \omega} = 0$$

befriediger. Für $x = 1$, $y = 0$ liefert $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ die Gleichung

$$(4) \quad 2c = 1.$$

Die beiden übrigen Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial \omega} = 0$ liefern nichts Neues. Damit wird aus Gleichung (3):

$$(5) \quad 2x^4 + 2ax^2y^2 + y^4 + x^2y + y^3 - 4x^2 - 3y^2 - y + 2 = 0.$$

Da nun die Kurve geschlossen sein soll, so darf das Aggregat der Glieder 4. Grads nicht in reelle Faktoren zerlegbar sein, d. h. es muß $a < \sqrt{2}$ sein.

Die Kurve (5) stellt also $\infty^1 C^4$ mit den verlangten Eigenschaften dar, wenn $a < \sqrt{2}$.

5. Beispiel. Es soll die Gleichung der Herzform aufgestellt werden (s. Fig. 57).

Legen wir den Koordinatenursprung derart, daß die beiden Rückkehrpunkte in die Punkte $(0, \pm 1)$ fallen, so wird jede Kurve, die in diesen beiden Punkten Rückkehrpunkte hat, dargestellt durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = \lambda x^2 y^3.$$

Zugleich hat diese Kurve, da das Aggregat der Glieder höchsten Grads $(x^2 + y^2)^3$ ist, keine reellen ∞ fernen Punkte.

Es bleibt nun noch der Parameter λ zu bestimmen übrig.

$$\text{Mit } x = 1 \text{ wird } y = \sqrt[3]{\lambda}, \text{ woraus mit } \lambda = 4 \\ y = 1,58.$$

Für $y = 1$ ergibt sich damit $x = 1,41$.

Die weitere Diskussion, insbesondere die Untersuchung der höchsten und tiefsten Punkte in bezug auf die Achsen sei dem Leser überlassen.

Die gesuchte Kurvengleichung lautet also:

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = 4x^2y^3.$$

Hiebei sind allerdings die Punkte $(\pm 1, 0)$ dreifache Punkte; jedoch sind zwei der durch sie hindurchgehenden

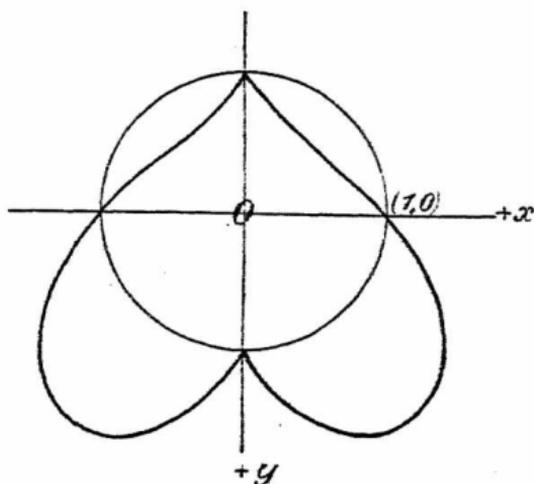


Fig. 57.

Kurvenzüge imaginär konjugiert (folgt mit $y = 0$ ohne weiteres aus der Kurvengleichung). Für das Auge sind also diese beiden Punkte von gewöhnlichen (Oval-) Punkten nicht verschieden.

Weitere Übungsbeispiele kann sich der Leser selbst machen und damit zugleich den Reiz einer selbst gestellten Aufgabe genießen. Übrigens lassen sich die meisten der in den §§ 7, 9, 10, 11 diskutierten Kurven unschwierig als Beispiele der umgekehrten Kurvendiskussion behandeln.

Register.

(Die beigesetzten Zahlen geben die Seiten des Buches an.)

- Abszisse** 10.
Algebraische Kurven im
allgemeinen 16.
—, spezielle 129.
Analytisches Dreieck 117.
Analytische Geometrie
10.
Asymptoten, Berechnung
88, 99.
—, geradlinige 51, 85.
—, krummlinige 93.
**Asymptotische Annähe-
rung** 95.
Asymptotischer Kreis 86.
" Punkt 86.
Berührungspunkt 33, 97.
Berührungssätze 97.
Bild einer Kurve 20.
Deutung von ω 25.
Differentialrechnung 11.
Dimension 20.
Diskussion von Kurven
55.
—, weitere Beispiele
129, 134.
Doppelpunkt 36, 81.
—, Bedingung für einen
D. 113.
Dreifacher Punkt 81.
Dualität 13.
Eulerscher Homogensatz
25.
Evolute 117.
Evolvente 117.
Explizite Gleichung 16.
Flachasymptote 52.
Flachpunkt 37.
Funktion, algebraische
17.
—, interszendente 17.
—, transzendente 17.
**Geschichte der algebra-
ischen Kurven** 7.
Gleichung einer Kurve
16.
Gleichung, algebraische
Auflösung 71.
—, graphisch-mechani-
sche Auflösung 72.
Grad einer Kurve 17.
Hessesche Kurve 116.
Homogene Gleichung 23.
**Homogene Punktkoordin-
aten** 23.
**Hyperbel höherer Ord-
nung** 50.
Implizite Gleichung 16.
Interszendente Kurve 17.
Isolierter Punkt 38, 104,
114.
Kombination, lineare 31.
Koordinatenachsen 26.
Krümmungsradius 117.
Kurvendiskussion 55.
—, umgekehrte 135.
**Kurvenpunkte, Berech-
nung** 69, 71.
—, mehrfache 80.
Kurvenzug, paarer 21.
—, unpaarer 21.
**Mehrfache Kurven-
punkte** 80.
**Näherungskurven im Un-
endlichen** 93, 121.
— im Ursprung 79, 121.
Natürliche Gleichung 15.
**Newtonsches Parallelo-
gramm** 117.
Nullpunktstangente 113.
Ordinate 10.
Oval 21.
Ovalpunkt 44.
Paar Kurvenzug 21.
**Parabel höherer Ord-
nung** 42.
Parameter einer Gleichung 31.
Polarkoordinaten 17.
Prinzip der Homogenität
23.
— der linearen Kombi-
nation 31.
— der Signierung 27.
Projektive Geometrie 13.
Rationale Kurven 71.
Reihenentwicklung 122.
r-facher Punkt 35, 71, 125.
Rückkehrasymptote 52.
Rückkehrflachasymptote
54.
Rückkehrflachpunkt 40,
48.
Rückkehrpunkt 38, 47.
Rückkehrspitzasymptote
54.
Rückkehrspitzpunkt 41,
47.
Schnabelspitze 66.
**Schnittpunkte einer
Kurve mit einer Ger-
aden** 19.

- | | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Selbstberührungspunkt 39.
 Signierungsprinzip 27.
 Singularitäten 13, 35, 37.
 Spezielle algebraische Kurven 129.
 Spitzasymptote 52.
 Spitze 1. Art 38, 47.
 — 2. Art 66.
 Spitzpunkt 40, 50.
 Symmetrielinien einer Kurve 68.
 Synthetische Geometrie 13.</p> | <p>Tangente, Berechnung 97, 110.
 —, Gleichung 110.
 —, horizontale 112.
 —, Nullpunkts- 113.
 —, vertikale 112.
 Transzendente Kurven 17.
 Umgekehrte Kurvendiskussion 138.
 Unendlich ferne Gerade 26.
 Unpaare Kurvenzüge 21.</p> | <p>Verhalten einer Kurve im Nullpunkt 79.
 Verhalten einer Kurve im Unendlichen 85.
 Verhältniskoordinaten 25.
 Wendearsymptote 52.
 Wendeachasymptote 52.
 Wendeachpunkt 38.
 Wendepunkt 37, 45, 80.
 Wendespitzasymptote 54.
 Wendespitzpunkt 41, 48.</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
-



Biblioteka

Politechniki

Wrocławskiej

Verzeichnis der erschienenen Bände.

	Seite		Seite
Astronomie	12	Meteorologie	12
Bau- u. Ingenieurwissenschaften	14	Militärwissenschaft	21
Bibliothekswesen	21	Mineralogie	10
Botanik	10	Musikwissenschaft	19
Chemie	13	Naturwissenschaft	9
Chemische Technologie	13	Recht	16
Elektrotechnik	15	Pädagogik	18
Forstwirtschaft	20	Pharmazie	22
Geologie	10	Philosophie	2
Geographie	6	Photographie	22
Geschichte	4	Physik	12
Gewerbewesen	17	Rechtswissenschaft	16
Handelwissenschaft	20	Religionswissenschaft	18
Hygiene	22	Soziale Wissenschaften	18
Ingenieurwissenschaften	14	Sprachwissenschaft	2
Jurisprudenz	16	Staatswissenschaft	16
Kaufmännische Wissenschaften	20	Stenographie	22
Kristallographie	11	Technologie, chemische	13
Kunst	19	Technologie, mechanische	14
Landwirtschaft	20	Theologie	18
Literaturdenkmäler	3	Volkswirtschaft	17
Literaturgeschichte	3	Werkstoffkunde	15 u. 19
Mathematik	8	Zeitungswesen	21
Mechanik	12	Zoologie	9
Mechanische Technologie	14		

Bibliothek zur Philosophie.

- Einführung in die Philosophie von Dr. Max Brentano, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 281.
- Geschichte der Philosophie IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. Bruno Bauch, Privatdoz. an der Univers. Halle a. S. Nr. 394.
- Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Eisehans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.
- Grundriß der Psychophysik von Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Fig. Nr. 98.
- Ethik von Prof. Dr. Thomas Achilles in Bremen. Nr. 90.
- Allgemeine Ästhetik von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer an der Kgl. Akademie der bildenden Künste in Stuttgart. Nr. 300.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Sprachwissenschaft.

- Indogermanische Sprachwissenschaft von Dr. A. Meisinger, Professor an der Universität Graz. Mit 1 Tafel. Nr. 59.
- Germanische Sprachwissenschaft von Dr. Rich. Loewe in Berlin. Nr. 238.
- Romanische Sprachwissenschaft von Dr. Adolf Jauner, Privatdozent an der Universität Wien. 2 Bände. Nr. 128, 250.
- Semitische Sprachwissenschaft von Dr. E. Brockelmann, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 291.
- Deutsche Grammatik und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.
- Deutsche Poetik von Dr. R. Borinski, Professor an der Universität München. Nr. 40.
- Deutsche Redelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Nr. 61.
- Aussagewürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.
- Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung v. Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.
- Deutsches Wörterbuch von Dr. Ferd. Dettler, Prof. an der Universität Prag. Nr. 64.
- Das Fremdwort im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.
- Deutsches Fremdwörterbuch von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.
- Die deutschen Personennamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.
- Englisches-deutsches Gesprächsbuch von Professor Dr. E. Hausnecht in Lausanne. Nr. 424.
- Grundriß der lateinischen Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Botsch i. Magdeburg. Nr. 82.
- Russische Grammatik von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Universit. Prag. Nr. 66.
- Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 68.
- Russisches Lesebuch mit Glossar v. Dr. Erich Berneker, Prof. a. d. Univ. Prag. Nr. 67.

Russische Literatur v. Dr. Erich Boehme, Lektor an d. Handelshochschule Berlin.
I. Teil: Auswahl moderner Prosa und Poesie mit ausführlichen Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 403.

— II. Teil: Всеволодъ Гаршинъ, Разказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 404.

Geschichte der klassischen Philologie von Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. an der Universität Münster. Nr. 367.

Siehe auch „Handelsswissenschaftliche Bibliothek“.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Literaturgeschichtliche Bibliothek.

Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

Deutsche Literaturgeschichte der Klassikerzeit von Prof. Carl Weitbrecht. Nr. 161.

Deutsche Literaturgeschichte des 19. Jahrhunderts von Carl Weitbrecht. Durchgesehen und ergänzt von Dr. Richard Weitbrecht in Wimpfen. 2 Teile. Nr. 134, 135.

Geschichte des deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielle. Nr. 229.

Gotische Sprachdenkmäler mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Hermann Janzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Ebdalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilh. Kantsch, Gymnasialoberlehrer in Denabrucl. Nr. 171.

Das Balthari-Lied. Ein Heldensang aus dem 10. Jahrhundert im Versmaße der Urschrift übersetzt u. erläutert v. Prof. Dr. H. Althof in Weimar. Nr. 46.

Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitungen und Wörterbuch herausgegeben von Dr. Hermann Janzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Goltzer, Prof. an der Universität Rostock. Nr. 1.

Aubrun und Dietrichsphen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. S. Zitzigel, Prof. an der Universität Münster. Nr. 10.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch v. Dr. R. Marold, Prof. a. Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von O. Günther, Prof. an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Die Epigonen des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junl, Aktuar der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Literaturdenkmäler des 14. und 15. Jahrhunderts, ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Janzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

- Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. I: Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlin, Oberlehrer am Nikolainnmasium zu Leipzig. Nr. 7.
- II: Hans Sachs. Ausgewählt u. erläutert v. Professor Dr. Julius Sahr. Nr. 24.
- III: Von Brant bis Hollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos und Fabel. Ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 26.
- Deutsche Literaturdenkmäler des 17. und 18. Jahrhunderts** von Dr. Paul Wegband in Berlin. 1. Teil. Nr. 364.
- Simplicius Simplicissimus** von Hans Jakob Christoffel von Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeben von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 133.
- Das deutsche Volkslied.** Ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Julius Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132.
- Lessings Emilia Galotti.** Mit Einleitung und Anmerkungen von Professor Dr. B. Wotisch. Nr. 2.
- Lessings Minna von Barnhelm.** Mit Anmerkungen von Dr. Tomajschel. Nr. 5.
- Englische Literaturgeschichte** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.
- Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte** von Dr. Arnold W. M. Schroer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.
- Italienische Literaturgeschichte** von Dr. Karl Wöpler, Prof. an der Universität Heidelberg. Nr. 125.
- Spanische Literaturgeschichte** von Dr. Rudolf Beer in Wien. 2 Bde. Nr. 167, 168.
- Portugiesische Literaturgeschichte** von Dr. Karl von Reinhardtsoettner, Prof. an der Königl. Technischen Hochschule München. Nr. 213.
- Russische Literaturgeschichte** von Dr. Georg Bolonskij in München. Nr. 166.
- Slawische Literaturgeschichte** von Dr. Josef Karásej in Wien. I: **Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt.** Nr. 277.
- II: **Das 19. Jahrhundert.** Nr. 278.
- Nordische Literaturgeschichte. I: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters** von Dr. Wolfgang Goltzer, Prof. an der Universität Kofnod. Nr. 254.
- Die Hauptliteraturen des Orients** von Dr. Mich. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. I: **Die Literaturen Ostasiens und Indiens.** Nr. 162.
- II: **Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken.** Nr. 163.
- Griechische Literaturgeschichte mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften** von Dr. Alfred Gerde, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 70.
- Römische Literaturgeschichte** von Dr. Herm. Joachim in Hamburg. Nr. 52.
-  Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Geschichtliche Bibliothek.

- Einleitung in die Geschichtswissenschaft** von Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Universität Greifswald. Nr. 270.
- Urgeschichte der Menschheit** von Dr. Moritz Hoernes, Prof. an der Universität in Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.
- Geschichte des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, o. ö. Prof. der semitischen Sprachen an der Universität in München. Mit 9 Voll- und Zergliedern und 1 Karte des Morgenlandes. Nr. 43.

- Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Sic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.
- Neutestamentliche Zeitgeschichte I: Der historische und kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums von Sic. Dr. W. Staerk, Privatdozent in Jena. Mit 3 Karten. Nr. 325.
- II: Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit einer Planskizze. Nr. 326.
- Griechische Geschichte von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der Deutschen Univ. Prag. Nr. 49.
- Griechische Altertumskunde von Prof. Dr. Rich. Maass, neubearbeitet von Rektor Dr. Franz Bohlhammer. Mit 9 Holzschnitten. Nr. 16.
- Römische Geschichte von Realgymnasialdirektor Dr. Julius Koch in Grunewald. Nr. 19.
- Römische Altertumskunde von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Holzschnitten. Nr. 45.
- Geschichte des Byzantinischen Reiches von Dr. R. Roth in Rempten. Nr. 190.
- Deutsche Geschichte I: Mittelalter (bis 1519) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 33.
- II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege (1500—1648) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 34.
- III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs (1648 bis 1806) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 35.
- Deutsche Stammeskunde von Dr. Rudolf Much, Prof. an der Universität in Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.
- Die deutschen Altertümer von Dr. Franz Fuhs, Direktor des Städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abbildungen. Nr. 124.
- Abriß der Burgenkunde von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.
- Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.
- Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realcommentar zu den Volks- und Kunstepen und zum Minnesang. I: Öffentliches Leben. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel u. Abbildungen. Nr. 93.
- II: Privatleben. Mit Abbildungen. Nr. 328.
- Quellenkunde zur Deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Universität in Tübingen. 1. Band. Nr. 279.
- Österreichische Geschichte. I: Von der Urzeit bis zum Tode König Albrechts II. (1439) von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 11 Stammtafeln. Nr. 104.
- II: Vom Tode König Albrechts II. bis zum Westfälischen Frieden (1440 bis 1648) von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Universität Graz. Mit 2 Stammtafeln. Nr. 105.
- Englische Geschichte von Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.
- Französische Geschichte von Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Univ. Berlin. Nr. 85.
- Russische Geschichte von Dr. Wilhelm Reeb, Oberlehrer am Pflanzgymnasium in Mainz. Nr. 4.
- Polnische Geschichte von Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.
- Spanische Geschichte von Dr. Gust. Diercks. Nr. 266.
- Schweizerische Geschichte v. Dr. A. Dänblicher, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.

- Geschichte der christlichen Balkanstaaten** (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. R. Roth in Rempten. Nr. 331.
- Bayerische Geschichte** von Dr. Hans Oel in Augsburg. Nr. 160.
- Sächsische Geschichte** von Prof. Otto Raemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
- Thüringische Geschichte** von Dr. Ernst Deubert in Jena. Nr. 352.
- Sächsische Geschichte** von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pfortzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.
- Geschichte Lothringens** von Geh. Reg.-R. Dr. Herm. Derichsweiler in Straßburg. Nr. 6.
- Die Kultur der Renaissance.** Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.
- Geschichte des 19. Jahrhunderts** von Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Universität Bonn. 1. Bändchen: 1800—1852. Nr. 216.
- 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.
- Kolonialgeschichte** von Dr. Dietrich Schäfer, Prof. der Geschichte an der Univ. Berlin. Nr. 156.
- Die Seemacht in der deutschen Geschichte** von Wirkl. Admiralsratsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.
-  Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Geographische Bibliothek.

- Physikalische Geographie** von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.
- Astronomische Geographie** von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.
- Klimafunde. I: Allgemeine Klimalehre** von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln u. 2 Figuren. Nr. 114.
- Meteorologie** von Dr. W. Trabert, Professor a. d. Universität in Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.
- Physikalische Meereskunde** von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abb. im Text u. 8 Tafeln. Nr. 112.
- Paläogeographie.** Geologische Geschichte der Meere u. Festländer v. Dr. Franz Kofman in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.
- Die Alpen** von Dr. Rob. Sieger, Prof. an der Universität Graz. Mit 19 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 129.
- Gletscherkunde** von Dr. Fritz Machacek in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.
- Pflanzengeographie** von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univ. Berlin. Nr. 389.
- Tiergeographie** von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.
- Länderkunde von Europa** von Dr. Franz Heiderich, Professor am Franciscus-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.
- der außereuropäischen Erdteile von Dr. Franz Heiderich, Professor am Franciscus-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen u. Profül. Nr. 63.

- Landeskunde und Wirtschaftsgeographie des Festlandes Australiens von Dr. Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 8 Abbildungen, 6 graphischen Tabellen und 1 Karte. Nr. 319.
- von Baden von Professor Dr. D. Kienig in Karlsruhe. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 199.
- des Königreichs Bayern von Dr. W. Göy, Professor an der Königl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 176.
- der Republik Brasilien von Rodolpho von Thering. Mit 12 Abbildungen und einer Karte. Nr. 373.
- von Britisch-Nordamerika von Professor Dr. A. Oepel in Bremen. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 284.
- von Elsaß-Lothringen von Prof. Dr. R. Langenbed in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 215.
- des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Rhassau und des Fürstentums Waldeck von Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.
- der Oberischen Halbinsel v. Dr. Fris Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte im Farbendruck. Nr. 235.
- von Osterreich-Ungarn von Dr. Alfred Grund, Professor an der Universität Berlin. Mit 10 Textillustrationen und 1 Karte. Nr. 244.
- der Rheinprovinz von Dr. B. Steincke, Direktor des Realgymnasiums in Essen. Mit 9 Abb., 3 Kärtchen und 1 Karte. Nr. 308.
- des Europäischen Rußlands nebst Finnlands von Dr. Alfred Philippson, ord. Prof. der Geographie an der Universität Halle a. S. Mit 9 Abbildungen, 7 Textkarten und einer lithographischen Karte. Nr. 359.
- des Königreichs Sachsen von Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnasium in Plauen. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 258.
- der Schweiz von Gymnasiallehrer Dr. J. Walser in Bern. Mit 16 Abbildungen und einer Karte. Nr. 398.
- von Skandinavien (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Heinrich Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 202.
- der Vereinigten Staaten von Nordamerika von Prof. Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädtischen Realgymnasium in Berlin. Mit Karten, Figuren im Text und Tafeln. 2 Bändchen. Nr. 381, 382.
- des Königreichs Württemberg von Dr. Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.
- Landes- und Volkskunde Palästinas von Privatdozent Dr. G. Hölcher in Halle a. S. Mit 8 Vollbildern und einer Karte. Nr. 345.
- Völkertunde von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 56 Abbildungen. Nr. 73.
- Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Geisich, Direktor der I. I. Kaiserlichen Schule in Luffinpiccolo und J. Sauter, Professor am Realgymnasium in Ulm, neu bearbeitet von Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. Mit 70 Abbildungen. Nr. 30.

➤ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Mathematische Bibliothek.

- Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.
- Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.
- Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.
- Ebene Geometrie mit 110 zweifarb. Figuren von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Wm. Nr. 41.
- Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Dr. Rob. Haußner, Prof. an der Universität Jena. Nr. 142.
- — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.
- Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Figuren von Dr. Gerhard Hefenberg, Privatdozent an der Techn. Hochschule Berlin. Nr. 99.
- Stereometrie mit 44 Figuren von Dr. R. Glafer in Stuttgart. Nr. 97.
- Niedere Analysis mit 6 Fig. von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Nr. 53.
- Dreifarbige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.
- Fünfstellige Logarithmen von Professor Aug. Adler, Direktor der I. I. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.
- Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 65.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Fig. von D. Th. Bürklen, Professor am Realgymnasium in Schwab.-Gmünd. Nr. 256.
- Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 89.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Fig. von D. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schwab.-Gmünd. Nr. 309.
- Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsghymnasium in Stuttgart. Nr. 87.
- II: Integralrechnung mit 89 Figuren von Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsghymnasium in Stuttgart. Nr. 88.
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung mit 46 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsghymnasium in Stuttgart. Nr. 146.
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung mit 52 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsghymnasium in Stuttgart. Nr. 147.
- Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Dr. R. Doehlemann, Prof. an der Universität München. Nr. 72.
- Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enthaltend die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von D. Th. Bürklen, Prof. am kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

- Versicherungsmathematik** von Dr. Alfred Soewy, Prof. an der Universität Freiburg i. Br. Nr. 180.
- Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate** mit 15 Fig. und 2 Tafeln von Wilh. Weibrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Nr. 302.
- Vektoranalysis** von Dr. Siegf. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.
- Astronomische Geographie** mit 52 Figuren von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Nr. 92.
- Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper** von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbildungen. Nr. 91.
- Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper** von A. F. Möbius, neubearb. von Dr. W. F. Wislicenus, Prof. an der Univ. Straßburg. Mit 36 Abbildungen und 1 Sternkarte. Nr. 11.
- Geodäsie** mit 66 Abbildungen von Dr. C. Reinherz, Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. Nr. 102.
- Nautik. Kurzer Abriss des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Theils der Schiffahrtskunde** mit 56 Abbildungen von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationschule zu Lübeck. Nr. 84.
- Geometrisches Zeichnen** von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Sonderling, Direktor der Königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung. Gleichzeitig macht die Verlagshandlung auf die „Sammlung Schubert“, eine Sammlung mathematischer Lehrbücher, aufmerksam. Ein vollständiges Verzeichnis dieser Sammlung, sowie ein ausführlicher mathematischer Katalog der G. J. Göschen'schen Verlagshandlung können kostenfrei durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Naturwissenschaftliche Bibliothek.

- Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten**, von E. Rehmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. S. Eiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.
- Urgeschichte der Menschheit** von Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Universität Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.
- Völkerkunde** von Dr. Michael Haberlandt, I. u. I. Rufos der ethnogr. Sammlung des naturhist. Hofmuseums u. Privatdozent an der Universität Wien. Mit 51 Abbildungen. Nr. 73.
- Tierkunde** von Dr. Franz v. Wagner, Prof. an der Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.
- Abriss der Biologie der Tiere** von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Nr. 131.
- Tiergeographie** von Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

- Das Tierreich. I: Säugetiere, von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Rgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.
- III: Reptilien und Amphibien. Von Dr. Franz Werner, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 48 Abbildungen. Nr. 383.
- IV: Fische, von Dr. Mag. Rauther, Privatdozent der Zoologie an der Universität Gießen. Mit 37 Abbildungen. Nr. 356.
- Entwicklungsgeschichte der Tiere von Prof. Dr. Johs. Meisenheimer, Privatdozent der Zoologie an der Universität Marburg. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.
- II: Organbildung. Mit 46 Figuren. Nr. 379.
- Schmarotzer und Schmarotkertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde von Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Graz. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.
- Geschichte der Zoologie von Dr. Rud. Burckhardt, weil. Direktor der Zoologischen Station des Berliner Aquariums in Robigno (Sizilien). Nr. 357.
- Die Pflanze, ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. C. Dammert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.
- Das Pflanzenreich. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reineke in Breslau und Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Fig. Nr. 122.
- Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 127.
- Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univerf. Berlin. Nr. 389.
- Morphologie, Anatomie und Physiologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.
- Die Pflanzenwelt der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.
- Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit 100 Abbildungen. Nr. 268, 269.
- Die Nadelhölzer von Prof. Dr. F. W. Reger in Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.
- Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. der Großh. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.
- Das System der Blütenpflanzen mit Ausschluß der Gymnospermen von Dr. R. Pilger, Assistent am Rgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 31 Figuren. Nr. 393.
- Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedrich Bruch in Gießen. Mit 1 farb. Tafel und 45 Abbildungen. Nr. 310.
- Mineralogie von Dr. H. Brauns, Professor an d. Universität Bonn. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.
- Geologie in kurzem Auszug für Schulen und zur Selbstbelehrung zusammengestellt von Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbildungen und 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.
- Paläontologie von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.
- Petrographie von Dr. W. Brühns, Professor an der Universität Straßburg i. E. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.

- Kristallographie** von Dr. W. Brunn, Prof. an der Universität Straßburg.
Mit 190 Abbildungen. Nr. 210.
- Geschichte der Physik** von U. Rißner, Prof. an der Großh. Realschule zu Einsheim a. G. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Figuren. Nr. 293.
— II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Nr. 294.
- Theoretische Physik.** I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 19 Abb. Nr. 76.
— II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.
— III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.
— IV. Teil: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.
- Radioaktivität** von Wilh. Frommel. Mit 18 Figuren. Nr. 317.
- Physikalische Messungsmethoden** von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.
- Geschichte der Chemie** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.
— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.
- Anorganische Chemie** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.
- Metalloide (Anorganische Chemie I. Teil)** von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.
- Metalle (Anorganische Chemie II. Teil)** von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.
- Organische Chemie** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.
- Chemie der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.
— III: Aromatische Verbindungen. Nr. 193.
— IV: Heterocyclische Verbindungen. Nr. 194.
- Analytische Chemie** von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.
— II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.
- Maßanalyse** von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.
- Technisch-Chemische Analyse** von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.
- Stereochemie** von Dr. E. Bedelind, Professor an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.
- Allgemeine und physikalische Chemie** von Dr. Max Rudolph, Professor an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.
- Elektrochemie** von Dr. Heinrich Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Figuren. Nr. 252.
— II: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Figuren. Nr. 253.
- Agrikulturchemie.** I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

- Das agrilkulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Prische in Göttingen. Nr. 304.
- Physiologische Chemie von Dr. med. A. Lehmann in Berlin. I: Assimilation. Nr. 240.
Mit 2 Tafeln.
- II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.
- Meteorologie von Dr. W. Traber, Prof. an der Universität Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.
- Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preussischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbildungen und 3 Tafeln. Nr. 175.
- Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. W. F. Wislicenus, Prof. an der Univ. Straßburg. Mit 36 Abbildungen und 1 Sternkarte. Nr. 11.
- Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Univers. Straßburg. Mit 11 Abbildungen. Nr. 91.
- Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.
- Physikalische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.
- Physikalische Meereskunde von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsleiter an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abb. im Text u. 8 Taf. Nr. 112.
- Klimafunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Fig. Nr. 114.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Physik.

- Geschichte der Physik von A. Rißner, Professor an der Groß. Realschule zu Sinsheim a. G. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.
- II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 13 Figuren. Nr. 294.
- Theoretische Physik. I: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Universität Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.
- II: Licht und Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.
- III: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.
- IV: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.
- Radioaktivität von Wilh. Frommel. Mit 18 Figuren. Nr. 317.
- Physikalische Messungsmethoden von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Sichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.
- Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.
- Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.
- Spektroanalyse von Dr. Siegf. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Chemie.

- Geschichte der Chemie von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.
— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.
- Anorganische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.
- Metalloide (Anorganische Chemie I) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.
- Metalle (Anorganische Chemie II) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.
- Organische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.
- Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I, II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.
— III: Aarboehyllische Verbindungen. Nr. 193.
— IV: Heteroehyllische Verbindungen. Nr. 194.
- Analytische Chemie von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.
— II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.
- Maßanalyse von Dr. Otto Köhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.
- Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.
- Stereochemie von Dr. E. Bedetind, Professor an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.
- Allgemeine und physikalische Chemie von Dr. Max Rudolphi, Professor an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Fig. Nr. 71.
- Elektrochemie von Dr. Heinrich Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie u. ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Fig. Nr. 252.
— II: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Figuren. Nr. 253.
- Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.
- Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Fritsche in Göttingen. Nr. 304.
- Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
— II: Dissimilation. Mit 1 Tafel. Nr. 241.
- ☛ Siehe auch „Technologie“. Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Technologie.

Chemische Technologie.

- Allgemeine chemische Technologie v. Dr. Gust. Kauter in Charlottenburg. Nr. 113.
- Die Fette und Öle sowie die Seifen- und Kerzenfabrikation und die Harze, Lade, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Carl Braun. I: Einführung in die Chemie, Besprechung einiger Salze und die Fette und Öle. Nr. 335.
— II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbildungen. Nr. 336.
— III: Harze, Lade, Firnisse. Nr. 337.

- Die Explosivstoffe.** Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. S. Brunstwig in Neubabelsberg. Mit 16 Abbildungen. Nr. 333.
- Brauereiwesen I: Mälzerei** von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor der Brauer- und Mälzerschule in Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.
- Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe** von Dipl.-Ing. Dr. Ernst Leher. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.
- Anorganische chemische Industrie** von Dr. Gust. Kauter in Charlottenburg.
- I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.
- II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Taf. Nr. 206.
- III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.
- Metallurgie** von Dr. Aug. Geiß. 2 Bde. Mit 21 Fig. Nr. 313, 314.
- Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels** von Dr. Gustav Kauter. I: Glas- und keramische Industrie. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.
- II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Taf. Nr. 234.
- Die Färbestoffe** mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Professor a. d. Königl. Technischen Hochschule Dresden. Nr. 214.

Mechanische Technologie.

- Mechanische Technologie** von Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke in Braunschweig. Nr. 340, 341.
- Textil-Industrie I: Spinnerei und Zwirnerei** von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Fig. Nr. 184.
- II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.
- III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textil-Industrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.
-  Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zu den Ingenieurwissenschaften.

- Das Rechnen in der Technik u. seine Hilfsmittel** (Rechenchieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ingenieur Joh. Eugen Mayer in Karlsruhe i. B. Mit 30 Abb. Nr. 405.
- Materialprüfungswesen.** Einführung in die moderne Technik der Materialprüfung von E. Memmler, Diplom-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am Königl. Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.
- II: Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelpfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Figuren. Nr. 312.
- Statik. I: Die Grundlehren der Statik starrer Körper** von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 82 Figuren. Nr. 178.
- II: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

- festigkeitslehre** von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 56 Figuren. Nr. 288.
- Hydraulik** v. W. Hauber, Diplom-Ingenieur in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 397.
- Geometrisches Zeichnen** von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neubearbeitet von Professor J. Sonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.
- Perspektive** nebst einem Anhang über Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Oberlehrer an der Baugewerkschule Köln. Mit 88 Abbildungen. Nr. 57.
- Schattenkonstruktionen** von Prof. J. Sonderlinn in Münster. Mit 114 Figuren. Nr. 236.
- Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Trigonometrie** von Prof. J. Sonderlinn in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.
- Technisches Wörterbuch** von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.
— II. Teil: Englisch-Deutsch. Nr. 396.
- Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik** von J. Herrmann, Professor an der Königlich Technischen Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Figuren. Nr. 196.
— II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Figuren. Nr. 197.
— III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.
- Die Gleichstrommaschine** von E. Ringbrunner, Ingenieur und Dozent für Elektrotechnik an der Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Figuren. Nr. 257.
- Das Fernsprechwesen** von Dr. Ludwig Kellstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.
- Die elektrische Telegraphie** von Dr. Ludwig Kellstab. Mit 19 Figuren. Nr. 172.
- Maurer- u. Steinhauerarbeiten** von Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.
- Eisenkonstruktionen im Hochbau.** Kurzgefaßtes Handbuch mit Beispielen von Ingenieur Karl Schindler in Meissen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.
- Der Eisenbetonbau** von Reg.-Baumeister Karl Röhle in Berlin-Steglitz. Mit 77 Abbildungen. Nr. 349.
- Heizung und Lüftung** von Ingenieur Johannes Körting, Direktor der Akt.-Ges. Gebrüder Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.
— II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.
- Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen** von Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.
- Das Veranschlagen im Hochbau.** Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen des Kostenanschlages von Emil Beutinger, Architekt B.D.L., Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Figuren. Nr. 385.
- Bauführung.** Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen der Bauführung von Architekt Emil Beutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 25 Figuren und 11 Tabellen. Nr. 399.
- Öffentliche Bade- und Schwimmanstalten** Dr. Karl Wolff, Stab- u. Oberbauamt in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

- Die Maschinenelemente.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Figuren. Nr. 3.
- Eisenhüttenkunde** von A. Krauß, diplomierter Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Figuren und 4 Tafeln. Nr. 152.
- II: Das Schmiedeeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.
- Technische Wärmelehre (Thermodynamik)** von R. Walther und M. Röttinger, Diplom-Ingenieuren. Mit 54 Figuren. Nr. 242.
- Die Dampfmaschine.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Figuren. Nr. 8.
- Die Dampfkessel.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Figuren. Nr. 9.
- Die Gasstrommaschinen.** Kurzgefaßte Darstellung der wichtigsten Gasmaschinen-Bauarten v. Ingenieur Alfred Kirschte in Halle a. S. Mit 55 Figuren. Nr. 316.
- Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion** von Ingenieur Hermann Wilda, Professor am staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abbildungen. Nr. 274.
- Die zweckmäßigste Betriebskraft** von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. I: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 14 Abbildungen. Nr. 224.
- II: Verschiebene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbildungen. Nr. 225.
- Die Hebezeuge, ihre Konstruktion und Berechnung** von Ingenieur Hermann Wilda, Prof. am staatl. Technikum in Bremen. Mit 399 Abbildungen. Nr. 414.
- Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen.** Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Bogdt, Oberlehrer an der Königl. höheren Maschinenbauerschule in Posen. Mit 59 Abbildungen. Nr. 290.
- Die landwirtschaftlichen Maschinen** von Karl Balthar, Diplom-Ingenieur in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 407—409.
- Nautik.** Kurzer Abriss des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schifffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zu den Rechts- u. Staatswissenschaften.

- Allgemeine Rechtslehre** von Dr. Th. Sternberg, Privatdozent an der Univerf. Göttingen. I: Die Methode. Nr. 169.
- II: Das System. Nr. 170.
- Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.** Zweites Buch: Schulrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Dertmann, Professor an der Univerfität Erlangen. Nr. 323.
- II. Abteilung: Die einzelnen Schulverhältnisse von Dr. Paul Dertmann, Professor an der Univerfität Erlangen. Nr. 324.

- Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Lise, Professor an der Univ. Göttingen. Nr. 305.
- Das deutsche Seerecht von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. 2 Bände. Nr. 386, 387.
- Postrecht von Dr. Alfred Wolke, Postinspektor in Bonn. Nr. 425.
- Allgemeine Staatslehre von Dr. Hermann Nehm, Prof. an der Universität Straßburg i. E. Nr. 358.
- Allgemeines Staatsrecht von Dr. Julius Haßchel, Prof. der Rechte an der Kgl. Akademie in Posen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.
- Preussisches Staatsrecht von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univ. Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.
- Kirchenrecht von Dr. Emil Seehling, ord. Prof. der Rechte in Erlangen. Nr. 377.
- Das deutsche Urheberrecht an literarischen, künstlerischen und gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.
- Der internationale gewerbliche Rechtsschutz von J. Neuberger, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.
- Das Urheberrecht an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken der bildenden Künste und der Photographie von Staatsanwalt Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.
- Das Warenzeichenrecht. Nach dem Gesetz zum Schutz der Warenbezeichnungen vom 12. Mai 1894 von J. Neuberger, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamtes zu Berlin. Nr. 360.
- Der unlautere Wettbewerb von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. Nr. 339.
- Deutsches Kolonialrecht von Dr. F. Eder v. Hoffmann, Privatdozent an der Universität Göttingen. Nr. 318.
- Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.
- Deutsche Wehrverfassung von Kriegsgewichtsrat Carl Endres in Würzburg. Nr. 401.
- Forensische Psychiatrie von Prof. Dr. W. Wegandt in Würzburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Volkswirtschaftliche Bibliothek.

- Volkswirtschaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Freiburg i. Br. Nr. 133.
- Volkswirtschaftspolitik von Präsident Dr. R. van der Borcht in Berlin. Nr. 177.
- Gewerbewesen von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. 2 Bände. Nr. 203, 204.
- Das Genossenschaftswesen in Deutschland. Von Dr. Otto Lindeke, Sekretär des Hauptverbandes deutscher gewerblicher Genossenschaften. Nr. 384.
- Das Handelswesen von Dr. Wilh. Legis, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

- Das Handelswesen von Dr. Wih. Legis, Professor an der Universität Göttingen. II. Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.
- Auswärtige Handelspolitik von Dr. Heinrich Sieveking, Professor an der Universität Marburg. Nr. 245.
- Das Versicherungswesen von Dr. jur. Paul Wolbenhauer, Dozent der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.
- Die gewerbliche Arbeiterfrage von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.
- Die Arbeiterversicherung von Professor Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.
- Finanzwissenschaft von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. I. Allgemeiner Teil. Nr. 148.
- II. Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.
- Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.
- Die Entwicklung der sozialen Frage von Professor Dr. Ferd. Lönies in Gütin. Nr. 353.
- Armenwesen und Armenfürsorge. Einführung in die soziale Hilfsarbeit von Dr. Adolf Weber, Dozent an der Universität in Bonn. Nr. 346.
- ☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Theologische und religionswissenschaftliche Bibliothek.

- Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. B. Staerk in Jena. Nr. 272.
- Alttestamentliche Religionsgeschichte von D. Dr. Max Lohr, Professor an der Universität Breslau. Nr. 292.
- Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.
- Landes- u. Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölcher in Halle. Mit 8 Holzbildern und 1 Karte. Nr. 345.
- Die Entstehung d. Neuen Testaments v. Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.
- Die Entwicklung der christlichen Religion innerhalb des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 388.
- Neutestamentliche Zeitgeschichte von Lic. Dr. B. Staerk in Jena. I: Der historische u. kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums. Nr. 325.
- II: Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Nr. 326.
- Abriß der vergleichenden Religionswissenschaft von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.
- Jüdische Religionsgeschichte von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.
- Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.
- Griechische und römische Mythologie von Dr. Hermann Steuding, Professor am Kgl. Gymnasium in Würzen. Nr. 27.
- Germanische Mythologie von Dr. E. Mogk, Prof. an der Univ. Leipzig. Nr. 15.
- Die deutsche Heldensage von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 32.
- ☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Pädagogische Bibliothek.

- Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität in Jena. Nr. 12.
- Geschichte der Pädagogik von Oberlehrer Dr. S. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.
- Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Sehfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.
- Das öffentliche Unterrichtswesen Deutschlands in der Gegenwart von Dr. Paul Stöhrer, Gymnasialoberlehrer in Zwidau. Nr. 130.
- Geschichte des deutschen Unterrichtswesens von Professor Dr. Friedrich Seiler, Direktor des königlichen Gymnasiums zu Ludau. I: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.
- II: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.
- Das deutsche Fortbildungsschulwesen nach seiner geschichtlichen Entwicklung und in seiner gegenwärtigen Gestalt von S. Sierds, Direktor der städt. Fortbildungsschulen in Heide i. Holstein. Nr. 392.
- Die deutsche Schule im Auslande von Hans Amrhein, Direktor der deutschen Schule in Lüttich. Nr. 259.
- Zeichenschule von Professor A. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- u. Golddruck u. 200 Voll- u. Teilbildern. Nr. 39.
- Bewegungsspiele von Dr. E. Rohrkauß, Prof. am kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbildungen. Nr. 96.
-  Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Kunst.

- Geschichte der Malerei I. II. III. IV. V. von Dr. Rich. Muther, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 107—111.
- Stilkunde von Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbildern und 195 Textillustrationen. Nr. 80.
- Die Baukunst des Abendlandes von Dr. A. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbildungen. Nr. 74.
- Die Plastik des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.
- Die Plastik seit Beginn des 19. Jahrhunderts von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern auf amerikanischem Kunstbruderpapier. Nr. 321.
- Die graphischen Künste v. Carl Kampmann, Fachlehrer an der I. I. Graphischen Lehr- u. Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbild. u. Beilagen. Nr. 75.
- Die Photographie von S. Kessler, Prof. an der I. I. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbildungen. Nr. 94.
-  Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Musik.

- Allgemeine Musiklehre von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.
- Musikalische Kunstik von Dr. Karl S. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbildungen. Nr. 21.
- Harmonielehre von A. Salm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

- Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre)** von Stephan Krehl. I. II.
Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149, 150.
- Kontrapunkt.** Die Lehre von der selbständigen Stimmführung von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 390.
- Musikästhetik** von Dr. R. Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.
- Geschichte der alten und mittelalterlichen Musik** von Dr. U. Mähler. Mit zahlreichen Abbildungen und Musikbeilagen. I. II. Nr. 121, 347.
- Musikgeschichte des 17. u. 18. Jahrhunderts** v. Dr. R. Grunsky i. Stuttgart. Nr. 239.
- **seit Beginn des 19. Jahrhunderts** von Dr. R. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Land- und Forstwirtschaft.

- Ackerbau- und Pflanzenbaulehre** von Dr. Paul Rippert in Berlin und Ernst Langenbed in Bochum. Nr. 232.
- Landwirtschaftliche Betriebslehre** von Ernst Langenbed in Bochum. Nr. 227.
- Allgemeine und spezielle Tierzuchtlehre** von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.
- Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung** von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.
- Das agrikulturchemische Kontrollwesen** v. Dr. Paul Krifche in Göttingen. Nr. 304.
- Fischerei und Fischzucht** von Dr. Karl Gastein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.
- Forstwissenschaft** von Dr. Ab. Schwappach, Prof. an der Forstakadem. Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation d. forstlichen Versuchswesens. Nr. 108.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Handelwissenschaftliche Bibliothek.

- Buchführung in einfachen und doppelten Posten** von Robert Stern, Oberlehrer der Öffentlichen Handelshochschule und Dozent der Handelshochschule zu Leipzig. Mit Formularen. Nr. 115.
- Deutsche Handelskorrespondenz** von Prof. Th. de Beaug, Offizier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelshochschule und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 182.
- Französische Handelskorrespondenz** von Professor Th. de Beaug, Offizier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelshochschule und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 183.
- Englische Handelskorrespondenz** von E. E. Whistfield, M.-A., Oberlehrer am King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.
- Italienische Handelskorrespondenz** von Professor Alberto de Beaug, Oberlehrer am Königl. Institut S. S. Annunziata zu Florenz. Nr. 219.
- Spanische Handelskorrespondenz** v. Dr. Alfredo Nadal de Mariczcurrena. Nr. 295.
- Russische Handelskorrespondenz** von Dr. Th. v. Katrasky in Leipzig. Nr. 315.
- Kaufmännisches Rechnen** von Prof. Richard Just, Oberlehrer an d. Öffentlichen Handelshochschule der Dresdener Kaufmannschaft. 3 Bde. Nr. 139, 140, 187.
- Warenkunde** von Dr. Karl Hassad, Professor an der Wiener Handelsakademie.
- I: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.
- II: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.

- Drogenkunde** von Rich. Dorstewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 418.
- Maß-, Münz- und Gewichtswesen** von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Das Wechselwesen** von Rechtsanwalt Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

Weitere Bände sind in Vorbereitung. Siehe auch „Volkswirtschaftliche Bibliothek“. Ein ausführliches Verzeichnis der außerdem im Verlage der G. J. Göschen'schen Verlagsbuchhandlung erschienenen handelswissenschaftlichen Werke kann durch jede Buchhandlung kostenfrei bezogen werden.

Militärwissenschaftliche Bibliothek.

- Das moderne Feldgeschütz. I:** Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850—1890, v. Oberstleutnant W. Hendenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 1 Abbild. Nr. 306.
- **II:** Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart, von Oberstleutnant W. Hendenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 11 Abbildungen. Nr. 307.
- Die modernen Geschütze der Fußartillerie. I:** Vom Auftreten der gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890 von Nummenhoff, Major beim Stabe des Fußartillerie-Regiments, Generalfeldzeugmeister (Brandenburgisches Nr. 3). Mit 50 Textbildern. Nr. 334.
- **II:** Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.
- Die Entwicklung der Handfeuerwaffen seit der Mitte des 19. Jahrhunderts** und ihr heutiger Stand von G. Wzodek, Oberleutnant im Inf.-Regt. Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posenisches) Nr. 59 und Assistent der Königl. Gewehrprüfungscommission. Mit 21 Abbildungen. Nr. 366.
- Militärstrafrecht** von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.
- Deutsche Wehrverfassung** von Karl Endres, Kriegsgerichtsrat bei dem Generalkommando des Kgl. bair. II. Armeekorps in Würzburg. Nr. 401.
- Die Seemacht in der deutschen Geschichte** von Virkl. Admiraltätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

Verschiedenes.

Bibliotheks- und Zeitungswesen.

- Volksbibliotheken** (Bücher- und Leseshallen), ihre Einrichtung und Verwaltung von Emil Jaesche, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.
- Das deutsche Zeitungswesen** v. Dr. Robert Brumhuber in Köln a. Rh. Nr. 400.

- Das moderne Zeitungswesen (System der Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320
 Allgemeine Geschichte des Zeitungswesens von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Hygiene und Pharmazie.

- Die Infektionskrankheiten und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fiebertafel. Nr. 327.
 Tropenhygiene von Med.-Rat Prof. Dr. Koch, Direktor des Institutes für Schiffs- u. Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.
 Die Hygiene des Städtebaus von H. Chr. Ruxbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 30 Abbildungen. Nr. 348.
 Die Hygiene des Wohnungswesens von H. Chr. Ruxbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 20 Abbildungen. Nr. 363.
 Gewerbehygiene von Geh. Medizinalrat Dr. Roth in Potsdam. Nr. 350.
 Pharmatognosie. Von Apotheker F. Schmittanner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 257.
 Drogenkunde von Rich. Dorstewig in Leipzig u. Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 411.

Photographie.

- Die Photographie. Von H. Kessler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Taf. und 52 Abbild. Nr. 9.

Stenographie.

- Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Mitglied des kgl. Stenogr. Instituts Dresden. Nr. 241
 Die Redeschrift des Gabelsberger'schen Systems von Dr. Albert Schramm Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 361
 Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze Schrey) nebst Schlüssel, Lesestützen u. einem Anhang von Dr. Amstel, Oberlehrer des Kadettenhauses Oranienstein. Nr. 81

☛ Weitere Bände dieser einzelnen Abteilungen sind in Vorbereitung

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig

Soeben erschien:

DIE ZEICHENKUNST

METHODISCHE DARSTELLUNG DES
GESAMTEN ZEICHENWESENS

UNTER MITWIRKUNG
HERVORRAGENDER FACHMÄNNER

HERAUSGEGEBEN

VON

KARL KIMMICH

ZWEITE VERBESSERTE UND VERMEHRTE
AUFLAGE

MIT 1157 ABBILDUNGEN IM TEXT UND
60 TAFELN IN FARBEN- UND LICHTDRUCK

23 LIEFERUNGEN à M. 1.— UND 2 EINBAND-
DECKEN à M. 1.— ODER KOMPLETT IN 2 ORI-
GINAL-LEINENBÄNDEN M. 25.—, PROBEHEFT
MIT 48 SEITEN TEXT UND 4 TAFELN 20 PF.

