

Sammlung Göschen

Algebraische Kurven

Von

Eugen Beutel

II

Theorie und Kurven
dritter und vierter Ordnung

Mit 57 Figuren im Text



Sammlung

Göfchen

Unser heutiges Wissen

Biblioteka
Politechniki Wrocławskiej

D. 1621

Archivum

Sed

G.

G.

3

übe
W
auf
rück
art
bie
gef
zu

es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Ein ausführliches Verzeichnis der bisher erschienenen Nummern befindet sich am Schluß dieses Bändchens

Mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen

Jedes Bändchen in Leinwand gebunden 90 Pfennig

- Geschichte der Mathematik** von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.
- Arithmetik u. Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.
- Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra** von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.
- Ebene Geometrie** m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41.
- Ebene und sphärische Trigonometrie** mit 70 Figuren von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.
- Stereometrie** mit 66 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.
- Niedere Analysis** m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.
- Höhere Analysis I: Differentialrechnung** mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.
- Höhere Analysis II: Integralrechnung** mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.
- Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** m. 46 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 146.
- Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung** m. 50 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 147.
- Analytische Geometrie der Ebene** mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene** mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.
- Analytische Geometrie des Raumes** mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.
- Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes** mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.
- Projektive Geometrie** in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Professor Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.
- Darstellende Geometrie I** mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haußner. Nr. 142.
- — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung** von Dr. Franz Hack, Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Mit 15 Figuren im Text. Nr. 508.
- Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt** von Prof. Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haußner, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 81.
- Fünfstellige Logarithmen** von Prof. Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.
- Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik** mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.

Wenden!

- Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate** v. Prof. Wilh. Weitbrecht. 2 Bändchen. Nr. 302 u. 641.
- Vektoranalysis** mit 16 Figuren von Professor Dr. Siegr. Valentiner. Nr. 354.
- Determinanten** von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.
- Algebraische Kurven** von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I. Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.
- — II: Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.
- Koordinatensysteme** von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichtenfelde. Nr. 507.
- Einführung in die geometrische Optik** von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.
- Einleitung in die Funktionentheorie** (Theorie der komplexen Zahlenreihen) von Oberlehrer Max Rose in Berlin-Wilmersdorf. Mit 10 Figuren. Nr. 581.
- Funktionentheorie** von Dr. Konrad Knopp, Privatdozent an der Universität Berlin. I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 9 Figuren. Nr. 668.
- Versicherungsmathematik** v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.
- Geometrisches Zeichnen** mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.
- Vermessungskunde** von Oberlehrer Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 2 Bändchen mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.
- Geodäsie** von Prof. Dr. C. Reinhertz, neubearbeitet von Dr. G. Förster in Potsdam. Mit 68 Abbildungen. Nr. 102.
- Astronomie.** Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearbeitet von Prof. Dr. Herm. Kobold. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.
- — II: Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.
- Astrophysik** mit 15 Abbildungen von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus, neubearbeitet von Dr. H. Ludendorff. Nr. 91.
- Astronomische Geographie** mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.
- Nautik.** Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schifffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.
- Luft- und Meeresströmungen** von Dr. Franz Schulze. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Sammlung Göschen

Algebraische Kurven

Von

Eugen Beutel

Oberreallehrer in Vaihingen-Enz

Zweiter Teil

Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung

Mit 52 Figuren im Text



Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1911

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.



Inm. 355.

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.

Inm. 355.

Inhaltsverzeichnis.

1. Abschnitt:

Polare und Hessesche Kurve.

		Seite
§§	1. Schnittpunkte zweier Kurven	7
§§	2. Schnittpunkte zweier Kurven an mehrfachen Punktstellen	12
§	3. Klasse einer Kurve	16
§§	4. Verhalten der ersten Polaren in einem Doppel- und Rückkehrpunkt der Grundkurve	19
§	5. Hessesche Kurve; Wendepunkte der Grundkurve	23
§§	6. Verhalten der Hesseschen Kurve in einem viel- fachen Punkt der Grundkurve	25

2. Abschnitt:

Das Dualitätsprinzip in der analytischen Geometrie der Ebene.

§	7. Die Plückerschen Linienkoordinaten	29
§§	8. Spezielle Dualität in der Ebene	34
§§	9. Übergang von Punktkoordinaten zu Linienkoordi- naten und umgekehrt	36
§	10. Singularitäten bei Ordnungs- und Klassenkurven	41
§§	11. Plückersche Formeln	49
§	12. Geschlecht; rationale Kurven	50

3. Abschnitt:

Höhere Singularitäten.

§	13. Begriff der höheren Singularität	53
§	14. Auflösung der höheren Singularitäten	54

4. Abschnitt:		Seite
Kurven dritter Ordnung.		
§ 15.	Die Kurvengleichung	
	I. Die allgemeine Gleichung	58
	II. Plückers symbolische Gleichungsformen . .	59
	III. Newtons Normalformen	61
	IV. Projektive Erzeugung von Kurven dritter Ordnung	65
§ 16.	Einteilung der Kurven dritter Ordnung	66
	I. Die Einteilung nach Klasse und Geschlecht	67
	II. Die Einteilung nach der Gestalt	68
	III. Die Newtonsche Einteilung	71
§ 17.	Rationale und zirkulare Kurven dritter Ordnung	74

5. Abschnitt:		
Kurven vierter Ordnung.		
§ 18.	Plückers Form der Kurvengleichung	82
§ 19.	Höhere Singularitäten bei Kurven vierter Ordnung	84
§ 20.	Einteilung der Kurven vierter Ordnung	
	I. Die Einteilung nach dem Geschlecht . . .	91
	II. Die Einteilung nach der Gestalt für die nichtsingulären Kurven	92
	III. Die Einteilung nach der Gestalt für die singulären Kurven	98
§ 21.	Die quadratische Transformation	100
§ 22.	Rationale Kurven vierter Ordnung	107
§ 23.	Bizirkulare Kurven vierter Ordnung	119
§ 24.	Rationale bizirkulare Kurven vierter Ordnung	121
	Register	134

Schematisch gezeichnet sind die Figuren 1, 2, 4, 5, 6, 8, 16 bis 21, 31 bis 36; die übrigen sind punktweise berechnet worden.

Literaturverzeichnis*).

1. Berzolari, L., Allgemeine Theorie der höheren algebraischen Kurven. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. III, 2. Teil, C. 4. Leipzig 1906. M. 5.60. (Einzel nicht käuflich.)
2. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie. I. Band, Teil IV und V. 1. Aufl. Leipzig 1876; 2. Aufl. im Erscheinen.
3. Haas, A., Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven. Stuttgart 1894. (Kleyers Enzyklopädie, Bd. 53.) M. 7,—.
4. Hagen, J., Synopsis der höheren Mathematik. 2. Band. Geometrie der algebraischen Gebilde. Berlin 1894. M. 30,—.
5. De Longchamps, G., Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre. Paris (Delagrave) 1890. Fr. 6,—.
6. Kohn, G., und G. Loria, Spezielle ebene algebraische Kurven. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band III, 2. Teil, C. 5. 1. Teil: Ebene Kurven dritter und vierter Ordnung. Leipzig 1909.
7. Loria, G., Spezielle algebraische und transzendente Kurven, deutsch von Schütte. Leipzig 1902. M. 28,—. 2. Aufl. in 2 Teilen. I. Band 1910. Mk. 18,—. II. Band im Erscheinen.
8. Pascal, E., Repertorium der höheren Mathematik, deutsch von A. Schepp. 2. Band. Leipzig 1902. M. 12,—. 2. Aufl. in 2 Teilen; 2. Hälfte im Erscheinen.
9. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. 2. Aufl. Leipzig 1882. M. 12,20.
10. Sauerbeck, H., Einleitung in die analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Nach den Methoden von J. P. de Gua. Leipzig 1902. M. 8,—.

*) Im Text bei Verweisungen abgekürzt mit L. V.

11. Simon, M., Analytische Geometrie der Ebene. (Sammlung Schubert, Bd. VIII.) Leipzig 1900. M. 6,—.
12. Teixeira, G., Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. Tome I. Coïmbre 1908 (Paris, Gauthier-Villars). Fr. 20,—. Tome II. Coïmbre 1909.
13. Wieleitner, H., Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. (Sammlung Schubert, Bd. XLIII.) Leipzig 1905. M. 10,—.
14. Wieleitner, H., Spezielle ebene Kurven. (Sammlung Schubert, Bd. LVI.) Leipzig 1908. M. 12,—.

Auf weitere, hier nicht aufgeführte Werke ist im Text verwiesen. Die unter 1, 4, 6, 8 genannten Werke bringen nur Definitionen, Erklärungen und Sätze ohne die dazugehörigen Entwicklungen; bis auf den neuesten Stand der Wissenschaft fortgeführt sind die Sammelreferate von Berzolari (1) und Kohn (6).

Eine große Anzahl von Abhandlungen über unser Gebiet ist erschienen in den mathematischen Zeitschriften, hauptsächlich in den öfters erwähnten „Mathematischen Annalen“, sowie als Programmschriften und Dissertationen.

Sämtliche literarische Veröffentlichungen sind, mit kurzer Inhaltsangabe, aufgeführt in der Zeitschrift: „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“, wo sie inhaltlich nach verschiedenen Gruppen geordnet sind.

Für den Zeitabschnitt von 1890—1904 hat Wieleitner, Leipzig (Göschen) 1905, eine Bibliographie der höheren algebraischen Kurven herausgegeben. (M. 1,50.)

I. Abschnitt.

Polare und Hessesche Kurve.

§ 1. Schnittpunkte zweier Kurven.

Die Schnittpunkte der beiden Kurven m ter und n ter Ordnung

$$\begin{cases} (1) & f_n(x, y) = 0 \\ (2) & \varphi_m(x, y) = 0 \end{cases}$$

haben Koordinaten (x, y) , welche beide Kurvengleichungen befriedigen.

Ein sehr einfacher Fall ist folgender: Die eine Kurve ist eine oszillierende Parabel n ter Ordnung (vgl. Alg. K. I, S. 19), die andere eine Gerade

$$(3) \quad \begin{cases} y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \\ y = ax + b. \end{cases}$$

Für jedes Wertepaar (x, y) eines Schnittpunktes sind beide Kurvengleichungen erfüllt; man kann also für die Ordinate y des Schnittpunktes aus der zweiten Gleichung (3) den Wert $ax + b$ in die erste einsetzen, was eine Gleichung n ten Grads in x ergibt, welche durch die Abszisse eines beliebigen, also jeden Schnittpunktes befriedigt wird. Diese Gleichung n ten Grads in x hat, wie die Algebra lehrt, wegen ihrer reellen Koeffizienten n reelle oder paarweise komplex konjugierte Wurzeln. Die bisherige Betrachtung zeigt, daß sich die Abszissen der Schnittpunkte unter diesen n Wurzeln befinden. Umge-

kehrt ist auch jede Wurzel x dieser Gleichung die Abszisse eines Schnittpunkts; denn zu ihr gibt $y = ax + b$ ein solches y , daß das Wertepaar (x, y) beide Kurvengleichungen befriedigt. (Vgl. Fig. 1, wo im Fall a $n = 5$, im Fall b $n = 4$ und $y = 0$ die schneidende Gerade ist.)

Bei einer beliebigen Kurve n ter Ordnung an Stelle der oszillierenden Parabel erhält man mit denselben Schlüssen

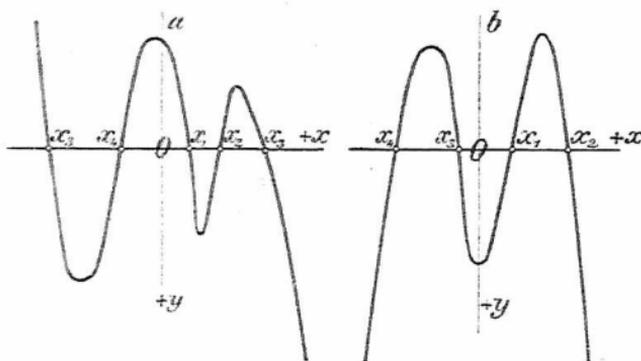


Fig. 1.

wieder eine Schnittpunktsabszissengleichung n ten Grads. Es gilt also der

Satz: *Eine Kurve n ter Ordnung wird von einer Geraden in n reellen oder paarweise komplex konjugierten Punkten geschnitten.*

Bei besonderen Lagen der Geraden ist dieser Satz nur richtig, wenn man unter den Schnittpunkten gewisse endliche Punkte mehrfach zählt und auch unendlich ferne Punkte mitrechnet. Schneidet man z. B. die Kurve n ter Ordnung (Alg. K. I, S. 55)

$$x^4 y - 2x^2 y - y^2 + 3y - 1 = 0$$

mit der Geraden $y = \alpha$ (genauer $y = 0 \cdot x + \alpha$), wo α eine Wurzel der Gleichung $y^2 - 3y + 1 = 0$ ist, so

ergibt sich als Schnittpunktsabszissengleichung

$$0 \cdot x^5 + \alpha x^4 - 2 \alpha x^2 = 0$$

oder

$$0 \cdot x^5 + x^4 - 2 x^2 = 0 .$$

Ihre Wurzeln sind ∞ , 0 , 0 , $+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ und die zugehörigen Schnittpunkte (∞, α) , $(0, \alpha)$, $(0, \alpha)$, $(+\sqrt{2}, \alpha)$, $(-\sqrt{2}, \alpha)$. Wir erhalten also 5 Schnittpunkte der Geraden $y = \alpha$ mit der Kurve fünfter Ordnung: einen unendlich fernen Punkt (∞, α) , einen doppelt zu zählenden endlichen Punkt $(0, \alpha)$ und zwei weitere endliche Punkte $(\pm\sqrt{2}, \alpha)$.

Allgemein gilt der

Satz: *Zwei Kurven m ter und n ter Ordnung schneiden einander in $m \cdot n$ Punkten.*

Über das Zählen der Schnittpunkte ist hiebei dasselbe zu bemerken, wie für den besonderen Fall $m = 1$.

Einen Anschauungsbeweis liefern die beiden oszillierenden Parabeln m ter und n ter Ordnung

$$\begin{cases} x = \varphi_m(y) \\ y = f_n(x) . \end{cases}$$

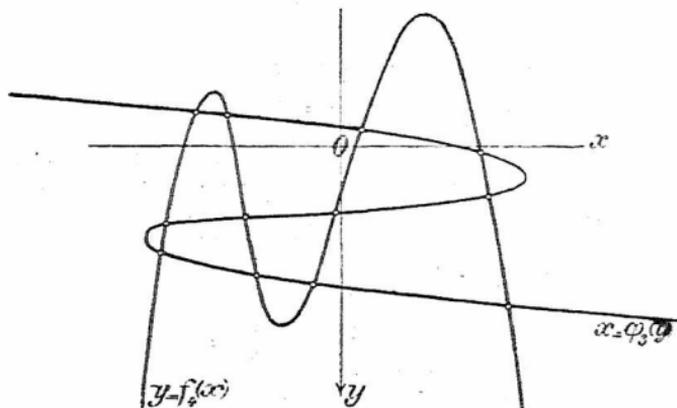


Fig. 2.

Die erste besteht aus m oszillierenden Bögen, die in Richtung der x -Achse auf- und abstreben, die zweite aus n in Richtung der y -Achse oszillierenden Bögen. Die beiden Kurven schneiden einander in $m \cdot n$ Punkten (vgl. Fig. 2, wo $m = 3$, $n = 4$. Die Zahl der Schnittpunkte beträgt $m \cdot n = 12$).

Hinsichtlich eines allgemeinen Beweises für diesen Satz verweisen wir auf Fischer, Determinanten (Sammlung Göschen) S. 105ff. Wir begnügen uns damit, ein **Beispiel** für den Fall anzugeben, daß $m = n = 2$ ist. Die beiden Kegelschnitte

$$(4) \quad \begin{cases} E' \equiv x^2 + 2y^2 - 3x - 8y + 8 = 0 \\ E'' \equiv x^2 + xy + 4y^2 - 4x - 17y + 15 = 0 \end{cases}$$

haben (vgl. Fig. 3) vier Schnittpunkte. Um deren Koordinaten zu berechnen, verfahren wir wie folgt:

Durch Ordnen der Gleichungen nach Potenzen von y ergibt sich

$$\begin{cases} 2y^2 - 8y + (x^2 - 3x + 8) = 0 \\ 4y^2 + (x - 17)y + (x^2 - 4x + 15) = 0, \end{cases}$$

wofür wir zur Abkürzung schreiben

$$(5) \quad \begin{cases} A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0 \\ B_0 y^2 + B_1 y + B_2 = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von y aus den beiden Gleichungen (5) erhalten wir (vgl. Fischer, S. 114) eine Gleichung in x , die sich in folgender Form schreiben läßt:

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist die Schnittpunktsabszissengleichung und heißt auch die *Resultante* der beiden Gleichungen (5) in x . Setzt man für die A_i und B_i die aus der Vergleichung von (4) und (5) hervorgehenden Werte ein, so liefert eine einfache Rechnung

$$x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0.$$

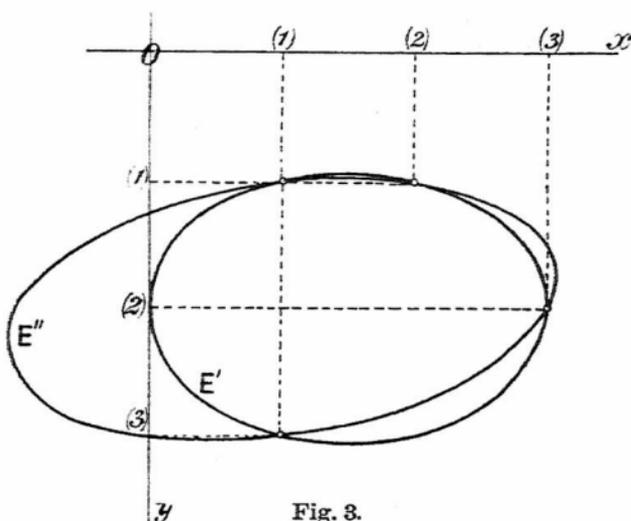


Fig. 3.

Diese Gleichung hat die Wurzeln 1, 1, 2, 3. Für $x = 1$ wird aus (4)

$$\begin{cases} 2y^2 - 8y + 6 = 0 \\ 4y^2 - 16y + 12 = 0; \end{cases}$$

also nach Division der beiden Gleichungen mit 2 bzw. 4 ein und dieselbe Gleichung

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

mit den Wurzeln 1 und 3, so daß (1, 1) und (1, 3) beide Gleichungen (4) erfüllen, also zwei Schnittpunkte der Kegelschnitte sind. Mit $x = 2$ erhält man aus (4)

die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 2y^2 - 8y + 6 &= 0, \\ 4y^2 - 15y + 11 &= 0. \end{aligned}$$

Die erste hat 1 und 3, die zweite 1 und $\frac{11}{4}$ zu

Wurzeln. Die Wurzel 1 ist also gemeinsam und damit (2, 1) ein weiterer (dritter) Schnittpunkt der Kegelschnitte. Mit $x = 3$ erhält man aus (4) die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2y^2 - 8y + 8 &= 0 \\ 4y^2 - 14y + 12 &= 0 \end{aligned}$$

mit der gemeinsamen Wurzel 2, was den weiteren (vierten) Schnittpunkt (3, 2) ergibt. Die beiden Kurven zweiter Ordnung schneiden sich also in $2 \cdot 2 = 4$ Punkten.

§ 2. Schnittpunkte zweier Kurven an mehrfachen Punktstellen.

Bei den Untersuchungen des vorigen Paragraphen haben wir den Fall ganz unerörtert gelassen, daß unter den $m \cdot n$ Schnittpunkten einer C_m mit einer C_n ein Punkt sich befindet, der für die eine Kurve oder für beide Kurven ein mehrfacher Punkt ist. Da man durch eine Koordinatentransformation jeden Schnittpunkt in den Ursprung verlegen kann, so genügt es anzunehmen, daß beide Kurven im Ursprung einen mehrfachen Punkt haben, was die Untersuchung besonders einfach gestaltet.

Haben die beiden gegebenen Kurven m ter und n ter Ordnung im Ursprung einen i - bzw. k -fachen Punkt, so daß

$$\begin{aligned} (1) \quad f &\equiv f_i + f_{i+1} + \dots + f_n = 0 \\ (2) \quad \varphi &\equiv \varphi_k + \varphi_{k+1} + \dots + \varphi_m = 0, \end{aligned}$$

so stellt $f_i = 0$ bzw. $\varphi_k = 0$ als Aggregat der Glieder niederster Ordnung die Gesamtheit der Tangenten jeder Kurve

im Ursprung dar (vgl. Alg. K. I, S. 79ff.). Um die Zahl der Schnittpunkte beider Kurven zu bestimmen, bilden wir die Resultante von f und φ in x . Erhalten wir dann

$$R(f, \varphi)^* \equiv x^2 F(x) = 0,$$

so gibt λ im allgemeinen**) die Zahl der im Ursprung zusammenfallenden Schnittpunkte der beiden Kurven.

In einfachen Fällen läßt sich die Resultante direkt bilden, wenn nämlich die eine Unbekannte leicht eliminiert werden kann, wie das folgende **Beispiel** zeigt.

Die Spitzparabel $y^3 = x^4$ hat mit der Kurve $(y - x^2)^2 = x^5$, die im Ursprung eine Schnabelspitze oder Spitze 2. Art (vgl. Alg. K. I, S. 65) hat, $5 \cdot 4 = 20$ Schnittpunkte. Um nun die Anzahl der von diesen 20 in den Ursprung fallenden Punkte zu bestimmen, schreiben wir die Gleichung der C_5 in der Form $y = x^2 \pm x^2 \sqrt{x}$. Setzen wir diesen Wert für y in die Gleichung $y^3 = x^4$ ein, eliminieren also aus beiden Gleichungen y , so erhalten wir als Resultante

$$x^4 = [x^2(1 \pm \sqrt{x})]^3$$

oder
$$x^4 = x^6(1 \pm 3\sqrt{x} + 3x \pm x\sqrt{x}),$$

woraus nach einfacher Umformung und Quadrierung sich ergibt

$$(*) \quad x^8(3x^3 + x^2 - 1)^2 - x^{13}(x + 3)^2 = 0.$$

Hieraus folgt $x^8 = 0$, d. h. die beiden Kurven haben im Ursprung 8 Schnittpunkte und außerdem noch 7 weitere Schnittpunkte, da die Gleichung (*) vom 15. Grad ist. Von den insgesamt 20 Schnittpunkten fehlen also

*) Die Abkürzung $R(f, \varphi)$ bedeutet nach Newton: „Resultante von $f=0$ und $\varphi=0$.“

**) Es kann auch der Fall eintreten, daß zu $x=0$ ein Wert y gehört, der von 0 verschieden ist, wenn etwa auf der y -Achse noch zufällig ein Schnittpunkt liegt.

noch 5, die im Unendlichen liegen müssen. Machen wir die beiden Gleichungen homogen

$$\left. \begin{aligned} y^3 \omega &= x^4 \\ y^2 \omega^3 - 2 x^2 y \omega^2 + x^4 \omega &= x^5, \end{aligned} \right\}$$

so erhalten wir durch Elimination von ω

$$x^{12} - 2 x^{10} y^2 + x^8 y^4 - x^5 y^7 = 0,$$

woraus $x^5 = 0$ folgt; aus $y^3 \omega = x^4$ ergibt sich weiter ($\omega = 0^*$), d. h. im Punkt ($x = 0, \omega = 0$) liegen weitere 5 (unendlich ferne) Schnittpunkte. Die beiden Kurven 4. und 5. Ordnung haben also $8 + 7 + 5 = 20$ Schnittpunkte.

Häufig liegen nun die Verhältnisse nicht so einfach, daß, wie in dem eben behandelten Beispiel, die Resultante direkt aufgestellt werden kann. Dann sind 2 Fälle zu unterscheiden:

1. Die Kurve (1) besitzt im Ursprung i Zweige, deren Tangenten durch $f_i = 0$ bestimmt sind. Ebenso hat die Kurve (2) im Ursprung k Zweige mit $\varphi_k = 0$ als Tangenten. Fällt nun keine der Tangenten $f_i = 0$ mit irgendeiner der Tangenten $\varphi_k = 0$ zusammen, d. h. *sind f_i und φ_k teilerfremd*, so schneiden die Tangenten von f im Ursprung die k Tangenten von φ in $i \cdot k$ Punkten, also haben die beiden Kurven im Ursprung $i \cdot k$ Schnittpunkte (vgl. den Satz S. 9).

2. Haben aber die beiden Kurven (1) und (2) im Ursprung Zweige mit gemeinsamer Tangente, d. h. *sind f_i und φ_k nicht teilerfremd*, so führt folgendes Verfahren zum Ziel: Man bildet aus den beiden gegebenen Funktionen f und φ eine neue Funktion ψ durch Elimination der in f und φ vorhandenen Glieder niederster Ordnung.

*) Nicht $y = 0$, weil dies im Widerspruch mit der vorhergehenden Gleichung stände.

Dieser Prozeß wird zwischen ψ und f so lange fortgesetzt, bis die erhaltene neue Funktion ψ ein Glied niederster Ordnung bekommt, das nicht mehr Faktor des Glieds niederster Ordnung von f ist. Schließlich haben wir dann zwei Funktionen mit teilerfremden Gliedern niederster Ordnung, also den einfacheren Fall 1. Die Zahl der Schnittpunkte im Ursprung läßt sich häufig mit dem Satz finden*):

Ist λ eine ganze Funktion beliebigen Grades in x und y und $\psi = \varphi + \lambda f$, so ist

$$R(f, \psi) \equiv R(f, \varphi + \lambda f) = R(f, \varphi).$$

Die folgenden Beispiele werden die Methode klarlegen.

1. Beispiel. Wieviel Schnittpunkte hat die Spitzparabel $y^3 = x^4$ mit der $C_5 (y - x^2)^2 = x^5$ im Ursprung?

Setzen wir $\varphi \equiv y^3 - x^4$ und $f \equiv y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5$ und bilden

$$\begin{aligned} \varphi - yf &\equiv \psi = 2x^2y^2 - x^4 - x^4y + x^5y \\ &= x^2(2y^2 - x^2) - x^4y + x^5y, \end{aligned}$$

so ist $R(f, \varphi - yf) = R(f, \varphi)$. Da die beiden Kurven $f = 0$ und $\psi = 0$ im Ursprung keine gemeinsame Tangente haben, so liegen im Ursprung $2 \cdot 4 = 8$ Schnittpunkte, womit das auf S. 13 gefundene Ergebnis bestätigt ist.

2. Beispiel. Gegeben seien die beiden Kurven

$$\begin{aligned} f &\equiv (x + y) + x^2 - y(x^2 - 2y^2) + x^4 = 0 \quad | -x^2 \\ \varphi &\equiv (x + y)x^2 - x^3y - 3x^3y^2 + y^6 = 0. \quad | 1 \end{aligned}$$

Um die Zahl der in den Ursprung fallenden Schnittpunkte zu ermitteln, bilden wir die Funktion

$$\begin{array}{l} \varphi - x^2f = -x^3(x + y) + x^2y(x^2 - 3xy - 2y^2) - (x^6 - y^6) \quad | 1 \\ f = (x + y) + x^2 - y(x^2 - 2y^2) + x^4. \quad | x^3 \end{array}$$

*) Den Leser, der sich über diesen und weitere Sätze genauer unterrichten will, verweisen wir auf *Berzolari*, Enzykl. der math. Wiss., Band III, 2, S. 406, wo die hierauf sich beziehende Literatur zusammengestellt ist.

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi - x^2 f + x^3 f &\equiv \psi = x^2 (x^3 + x^2 y - 3 x y^2 - 2 y^3) \\ &\quad - (x^6 + x^5 y - 2 x^3 y^3 - y^6) + x^7 \\ f &= (x + y) + x^2 - y (x^2 - 2 y^2) + x^4. \end{aligned}$$

Nun hat man

$$R(f, \varphi - x^2 f + x^3 f) \equiv R(f, \psi) = R(f, \varphi),$$

also ist die Zahl der Schnittpunkte beider Kurven im Ursprung $5 \cdot 1 = 5$.

§ 3. Klasse einer Kurve.

Erklärung. Unter der Klasse einer Kurve versteht man die Zahl der Tangenten, die man von einem beliebigen, nicht auf der Kurve liegenden Punkt an diese ziehen kann.

Um diese Zahl zu finden, verfahren wir nach dem Vorgang von Joachimsthal folgendermaßen. Sind

$$P \equiv (\overline{X}, \overline{Y}, \overline{\Omega}) \quad \text{und} \quad Q \equiv (\overline{x}, \overline{y}, \overline{\omega})$$

zwei beliebige Punkte und $R \equiv (\xi, \eta, \theta)$ ein vorerst beliebiger Punkt der Geraden PQ (Fig. 4), so gelten für die Koordinaten von R die Gleichungen

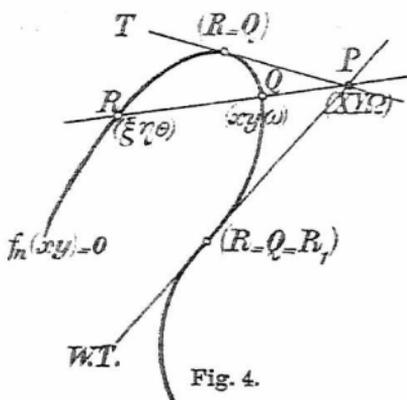


Fig. 4.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x + \lambda X}{1 + \lambda} \\ \eta &= \frac{y + \lambda Y}{1 + \lambda} \\ \theta &= \frac{\omega + \lambda \Omega}{1 + \lambda} \end{aligned} \right\}.$$

Ist nun R ein Punkt der Kurve n ter Ordnung $f_n(x, y, \omega) = 0$, so ist

$$\begin{cases} 0 = \widetilde{f_n(\xi, \eta, \theta)} = f_n\left(\frac{x + \lambda X}{1 + \lambda}, \frac{y + \lambda Y}{1 + \lambda}, \frac{\omega + \lambda \Omega}{1 + \lambda}\right) \\ = \frac{1}{(1 + \lambda)^n} f_n(x + \lambda X, y + \lambda Y, \omega + \lambda \Omega). \end{cases}$$

Entwickeln wir mit dem Taylorschen Satz nach steigenden Potenzen von λ , so haben wir

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = \widetilde{f_n(\xi, \eta, \theta)} \\ = \frac{1}{(1 + \lambda)^n} \left\{ \widetilde{f_n(x, y, \omega)} + \frac{\lambda}{1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega \right] \right. \\ + \frac{\lambda^2}{2!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega \right]^{(2)} \\ + \frac{\lambda^3}{3!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega \right]^{(3)} + \dots \\ + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega \right]^{(n-1)} \\ \left. + \frac{\lambda^n}{n!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega \right]^{(n)} \right\}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega \right]^{(2)} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} X^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} XY \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} Y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \omega} X\Omega + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \omega} Y\Omega + \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} \Omega^2, \\ \left[\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega \right]^{(3)} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} X^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} X^2 Y \\ &+ 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} X Y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} Y^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial \omega} X^2 \Omega + \dots \\ &+ \frac{\partial^3 f}{\partial \omega^3} \Omega^3, \end{aligned}$$

Diese Gleichung n ten Grads in λ liefert n Wurzeln λ , welchen die n Schnittpunkte R der Geraden PQ mit der Kurve entsprechen.

Nehmen wir nun an, daß der Punkt $P \equiv (X, Y, \Omega)$ außerhalb der Kurve, $Q \equiv (x, y, \omega)$ auf der Kurve liege, so ist

$$(2) \quad f_n(x, y, \omega) = 0;$$

(1) besitzt eine Wurzel $\lambda = 0$, d. h. einer der Schnittpunkte R fällt mit Q zusammen.

Soll noch ein weiterer der Schnittpunkte R mit Q zusammenfallen, so muß Gleichung (1) eine Doppelwurzel $\lambda = 0$ haben, d. h. es muß der Koeffizient von λ Null sein; wir haben also bei festem $P(X, Y, \Omega)$ für die Koordinaten x, y, z von Q die Bedingung

$$(3) \quad X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + \Omega \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0.$$

Ist diese erfüllt, so ist PQ Tangente an die C_n ; die Berührungspunkte Q sämtlicher von P an die C_n gezogenen Tangenten liegen auf der Kurve (3) und das simultane System der Kurven (2) und (3) liefert die Koordinaten der Berührungspunkte. (X, Y, Ω) sind als Koordinaten eines festen Punkts konstant; Gleichung (3) stellt, wenn wir x, y, ω als laufende Koordinaten auffassen, eine Kurve $(n-1)$ ten Grads dar, die wir nach Bobillier *erste Polare des Punkts P in bezug auf die Kurve f* nennen.

Analog nennt man den Faktor von λ^2

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega \right]^{(2)} = 0$$

die *zweite Polare* usw.

Da die gegebene Kurve vom n ten. die erste Polare

vom $(n - 1)$ ten Grad ist, so haben beide Kurven nach § 1 $n(n - 1)$ Schnittpunkte; also

Satz: Von einem Punkt außerhalb einer C_n lassen sich im allgemeinen $n(n - 1)$ Tangenten an diese ziehen, deren Berührungspunkte die Schnittpunkte der Kurve mit ihrer ersten Polaren sind.

Diese Zahl $n(n - 1)$ ist nun nichts anderes als die Klasse der Kurve. Hierbei ist die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß die C_n keine singulären Punkte enthält. Treten solche Punkte auf, dann erniedrigt sich die Klasse, wie im folgenden Paragraphen auseinandergesetzt wird.

§ 4. Verhalten der ersten Polaren in einem Doppel- und Rückkehrpunkt der Grundkurve.

Besitzt die Grundkurve $f = 0$ vielfache Punkte, so befriedigen deren Koordinaten die 3 Gleichungen (vgl. Alg. K I, S. 113)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0,$$

also auch die Gleichung der ersten Polaren von f

$$\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega = 0.$$

Daraus folgt

Satz 1. Die erste Polare einer Kurve geht durch sämtliche vielfache Punkte der Grundkurve.

Um das Verhalten der ersten Polaren in einem Doppelpunkt der Grundkurve zu bestimmen, legen wir diesen in den Ursprung. Dann lautet die Gleichung der C_n nach passender Drehung

$$(1) \quad f \equiv 0 = \alpha x^2 + y^2 + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \dots,$$

homogen

$$f \equiv 0 = (\alpha x^2 + y^2) \omega^{n-2} + \varphi_3(x, y) \omega^{n-3} \\ + \varphi_4(x, y) \omega^{n-4} + \dots$$

Für die erste Polare einer Grundkurve mit Doppelpunkt erhalten wir damit als Gleichung

$$P_d \equiv 0 = X \left(2\alpha x + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} + \dots \right) \\ + Y \left(2y + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} + \dots \right) \\ + \Omega [(n-2)(\alpha x^2 + y^2) + (n-3)\varphi_3 + \dots]$$

oder

$$(2) \quad P_d \equiv 0 = 2(\alpha x X + y Y) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} X + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} Y \\ + (n-2)(\alpha x^2 + y^2) \Omega + \dots$$

Die Glieder niederster Ordnung geben Null gesetzt

$$\alpha x X + y Y = 0.$$

Diese Gleichung stellt die Tangente der ersten Polaren im Ursprung dar, welche im allgemeinen mit einer der beiden Tangenten von f nicht übereinstimmt; die C_n und ihre erste Polare haben also nach dem Satz in § 1 S. 9 im Ursprung $2 \cdot 1 = 2$ Schnittpunkte.

Satz 2. *Die erste Polare einer Kurve mit Doppelpunkt geht einfach durch den Doppelpunkt und hat dort zwei Schnittpunkte mit der Grundkurve.*

Hat die Grundkurve einen r -fachen Punkt im Ursprung, so lautet ihre Gleichung

$$0 \equiv f_n(x, y) = \overbrace{\varphi_r(x, y)} + \overbrace{\varphi_{r+1}(x, y)} + \dots + \varphi_n,$$

homogen

$$0 \equiv f_n(x, y) = \overbrace{\varphi_r(x, y)} \omega^{n-r} \\ + \overbrace{\varphi_{r+1}(x, y)} \omega^{n-r-1} + \dots + \varphi_n,$$

woraus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x} + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial y} + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = (n - r) \varphi_r + (n - r - 1) \varphi_{r+1} + \dots$$

Damit wird die Gleichung der ersten Polare

$$X \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x} X + \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial x} Y \\ + (n - r) \varphi_r + \dots = 0.$$

Diese hat also im Ursprung einen $(r - 1)$ -fachen Punkt mit den Tangenten

$$X \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} = 0,$$

welche im allgemeinen von den Tangenten des r -fachen Punkts verschieden sind; Grundkurve und erste Polare haben also in einem r -fachen Punkt

$$r(r - 1) = \frac{r(r - 1)}{2} \cdot 2$$

Schnittpunkte. Durch Vergleichung mit Satz 2 erhalten wir

Satz 3. *Ein r -facher Punkt der Grundkurve ist $(r - 1)$ -facher Punkt ihrer ersten Polaren und gleichwertig mit $\frac{r(r - 1)}{2} = \binom{r}{2}$ Doppelpunkten.*

Einen Anschauungsbeweis für den dreifachen Punkt zeigt Fig. 5 (S. 22), wo durch Zusammenrücken der drei Doppelpunkte ein dreifacher Punkt entstehen würde.

Um das Verhalten der ersten Polare in einem Rück-

kehrpunkt der Grundkurve zu untersuchen, setzen wir in Gleichung (1) $\alpha = 0$. Dann hat f im Ursprung einen Rückkehrpunkt (mit $y = 0$ als Rückkehrtangente) und als erste Polare folgt mit $\alpha = 0$ aus Gleichung (2)

$$(3) \quad P_r \equiv 0 = 2yY + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} X + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} Y + \dots$$

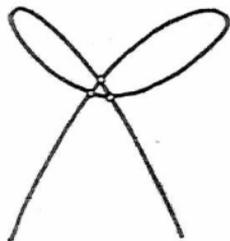


Fig. 5.

Hieraus ist ersichtlich, daß die erste Polare im Ursprung die Rückkehrtangente der Grundkurve als Tangente hat. Zur Bestimmung der Zahl der Schnittpunkte von (3) mit (1) bilden wir zwecks Anwendung des Satzes auf S. 15 die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = 2fY - yP_r &= 2\varphi_3 Y - \varphi_2 y X \\ &\quad - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} x X - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} x Y + \dots \end{aligned}$$

Diese Kurve hat nun nach dem Satz über die Resultantenbildung in § 2 dieselben Schnittpunkte mit $P_r = 0$ wie $f = 0$ mit $P_r = 0$; sie hat im Ursprung einen dreifachen Punkt, also ist die Zahl der Schnittpunkte von $P_r = 0$ mit $f = 0$ $3 \cdot 1 = 3$. Damit erhalten wir den

Satz 4. Die erste Polare einer Kurve mit Rückkehrpunkt geht einfach durch diesen, hat dort die Rückkehrtangente als Tangente und drei Schnittpunkte mit der Grundkurve.

Mittels der Sätze 2 und 4 läßt sich nun die Zahl der Tangenten von einem Punkte außerhalb einer C_n , die d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte hat, bestimmen.

Jeder Doppelpunkt erniedrigt die Zahl der Tangenten von einem Punkt außerhalb einer C_n an diese um 2.

Fassen wir den Rückkehrpunkt als Grenzfall des Doppelpunkts auf, wenn die Schleife erdrückt wird (Fig. 6), so fallen in der Tat drei von P ausgehende Tangenten in die Verbindungslinie von P mit dem Rückkehrpunkt; der Rückkehrpunkt erniedrigt die Zahl der Tangenten um 3. Es gilt also der .

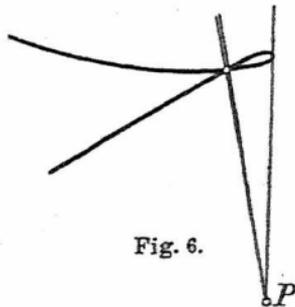


Fig. 6.

Satz 5. *Hat eine C_n d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte, so ist ihre Klasse*

$$k = n(n - 1) - 2d - 3r .$$

Dies ist die erste der sogenannten *Plückerschen Formeln* (vgl. § 11).

§ 5. Hessesche Kurve; Wendepunkte der Grundkurve.

Eine Kurve hat bekanntlich einen *Wendepunkt*, wenn die Kurventangente in diesem Punkt, die Wendetangente, die Kurve in *drei aufeinanderfolgenden Punkten* schneidet. Fällt noch ein weiterer Schnittpunkt R_1 der Kurve und der Geraden PQ mit Q zusammen, so ist die Gerade PQ Wendetangente (s. Fig. 4).

Die Bedingung hiefür ist, daß außer dem Koeffizienten von λ in Gleichung (1) § 3 auch der Koeffizient von λ^2 verschwinden muß; die Koordinaten (x, y, ω) aller Wendepunkte einer C_n befriedigen also das simultane System der drei Gleichungen

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} (*) \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, \omega) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega = 0 \end{array} \right. \\ (**) \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega \right]^{(2)} = 0 \right. \end{array} \right\} .$$

$P \equiv (X, Y, \Omega)$ ist jetzt nicht mehr beliebig wählbar; denn durch Elimination von x, y, z aus den Gleichungen (4) erhält man eine Bedingungsgleichung für X, Y, Ω . Die Gleichung

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega = 0$$

drückt aus, P sei so zu wählen, daß die Gerade PQ mit der Tangente der C_n in einem Wendepunkt Q zusammenfällt. Jeder Punkt P der Geraden PQ muß den drei Gleichungen (4) genügen, also auch die Gleichung

$$(**) \quad \Phi \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Omega \right]^{(2)} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} X^2 \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} XY + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} Y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \omega} X\Omega \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \omega} Y\Omega + \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} \Omega^2 = 0$$

befriedigen. Diese Gleichung stellt mit X, Y, Ω als laufenden Koordinaten und x, y, z als Koordinaten eines beliebigen Wendepunkts der Grundkurve einen Kegelschnitt dar, den sog. *Polarkegelschnitt*, welcher die Tangente (*) vollständig enthalten muß. Der Polarkegelschnitt muß also in zwei Gerade zerfallen, oder, was analytisch dasselbe besagt, einen Doppelpunkt besitzen. Dies ist der Fall, wenn

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial X} &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} X + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} Y + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \omega} \Omega = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial Y} &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} X + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} Y + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \omega} \Omega = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega} &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial x} X + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial y} Y + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} \Omega = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Diese drei in X, Y, Ω homogen linearen Gleichungen können aber nur dann gleichzeitig bestehen, wenn

$$H \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \omega} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \omega} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Sind jetzt (x, y, ω) nicht mehr bloß die Koordinaten eines Wendepunkts der Grundkurve, sondern laufende Koordinaten, so sind die einzelnen Glieder der Determinante H vom Grade $(n - 2)$ in x, y, ω . $H = 0$ stellt also eine Kurve vom Grad $3(n - 2)$ dar. Sie heißt die *Hessesche Kurve**) (vgl. Alg. K. I, S. 116).

Die Wendepunkte einer Kurve n ter Ordnung $f_n = 0$ sind deren Schnittpunkte mit ihrer Hesseschen Kurve $H = 0$.

Satz. Jede C_n ohne singuläre Punkte hat $3n(n - 2)$ Wendepunkte.

Diese Zahl umfaßt die Gesamtheit der reellen und imaginären Wendepunkte. So ist z. B. für jede Kurve dritter Ordnung die Hessesche Kurve ebenfalls von der dritten Ordnung; jede C_3 hat also $3 \cdot 3 = 9$ Wendepunkte, von denen aber höchstens drei reell sind (vgl. S. 61).

§ 6. Verhalten der Hesseschen Kurve in einem vielfachen Punkt der Grundkurve.

Wie die Klassenzahl, so wird auch die Zahl der Wendepunkte einer C_n durch das Auftreten von Doppel- und Rückkehrpunkten erniedrigt.

*) Zuerst von *Hesse* in einer 1844 veröffentlichten Arbeit angegeben.

Wir nehmen wie oben an, daß der Doppel- bzw. der Rückkehrpunkt der Grundkurve im Ursprung liege und stellen nun für diese beiden Fälle die Gleichung der Hesseschen Kurve auf, wobei wir die Entwicklungen nur für wenige Glieder niedrigen Grads anschreiben, was für unsere Zwecke vollständig genügt. Die Gleichung der Grundkurve n ter Ordnung mit einem *Doppelpunkt* sei

$$0 \equiv f_n(x, y, \omega) = (\alpha x^2 + y^2) \omega^{n-2} + \varphi_3(x, y) \cdot \omega^{n-3} + \dots$$

Damit wird die Hessesche Kurve [der Leser mag die Rechnung zur Übung nachprüfen]

$$H_d \equiv \begin{vmatrix} 2\alpha + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \dots & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} + \dots & 2(n-2)\alpha x + \dots \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} + \dots & 2 + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} + \dots & 2(n-2)y + \dots \\ 2(n-2)\alpha x + \dots & 2(n-2)y + \dots & (n-2)(n-3)(y^2 + \alpha x^2) + \dots \end{vmatrix}$$

oder entwickelt und nach steigenden Potenzen von x und y geordnet:

$$H_d \equiv 0 = 4\alpha(n-1)(n-2)(y^2 + \alpha x^2) + \psi_3 + \dots$$

Daraus folgt:

Satz 1. Die Hessesche Kurve hat in einem Doppelpunkt der Grundkurve ebenfalls einen Doppelpunkt mit denselben Tangenten.

Im allgemeinen enthalten die Glieder dritter und höherer Ordnung von H_d den Faktor $y^2 + \alpha x^2$ nicht, deshalb hat man zur Bestimmung der Zahl der Schnittpunkte von $f = 0$ mit $H_d = 0$ gemäß der auf S. 15 angegebenen Methode:

$$\begin{array}{l|l} -4\alpha(n-1)(n-2) & 0 = f \equiv (y^2 + \alpha x^2) + \varphi_3 + \dots \\ 1 & 0 = H_d \equiv 4\alpha(n-1)(n-2)(y^2 + \alpha x^2) + \psi_3 + \dots \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv H_d - 4\alpha(n-1)(n-2)f \\ &= -4\alpha(n-1)(n-2)\varphi_3 + \psi_3 + \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt: Die Zahl der Schnittpunkte von f mit H in einem Doppelpunkt von f beträgt $2 \cdot 3 = 6$ oder

Satz 2. *Jeder Doppelpunkt einer Kurve erniedrigt die Zahl ihrer Wendepunkte um 6.*

Hat die Grundkurve im Ursprung einen Rückkehrpunkt, ist also in der vorigen Entwicklung $\alpha = 0$, so wird

$$H_r \equiv 0 = -2(n-1)(n-2)y^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \dots$$

Daraus folgt:

Satz 3. *In einem Rückkehrpunkt der Grundkurve hat die Hessesche Kurve einen dreifachen Punkt, bestehend aus einem Rückkehrpunkt mit derselben Tangente wie die Grundkurve und einem weiteren durch diesen gehenden Zweig.*

Zur Bestimmung der Zahl der Schnittpunkte von H_r mit f nach der Methode S. 15 bilden wir den Ausdruck

$$0 \equiv H_r + 2(n-1)(n-2) \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} f = \psi_4 + \dots$$

Hieraus folgt: Die Zahl der Schnittpunkte von f mit H_r in einem Rückkehrpunkt von f beträgt $2 \cdot 4 = 8$ oder:

Satz 4. *Jeder Rückkehrpunkt erniedrigt die Zahl der Wendepunkte um 8.*

Unter Berücksichtigung der Sätze (2) und (4) ergibt sich gemäß dem in § 5 abgeleiteten Satz der

Satz 5. *Die Zahl der Wendepunkte einer C_n mit d Doppelpunkten und r Rückkehrpunkten beträgt*

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r.$$

Damit haben wir eine weitere *Plückersche Formel* gewonnen (vgl. § 11).

Hat die Grundkurve im Ursprung einen r -fachen Punkt, d. h. ist ihre Gleichung

$$0 \equiv f_n(x, y, \omega) = \varphi_r(x, y) \omega^{n-r} \\ + \varphi_{r+1}(x, y) \omega^{n-r-1} + \dots \varphi_n(x, y),$$

so wird

$$H \equiv \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2} + \dots & \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x \partial y} + \dots & (n-r) \frac{\partial \varphi_r(x, y)}{\partial x} + \dots \\ \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x \partial y} + \dots & \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial y^2} + \dots & (n-r) \frac{\partial \varphi_r(x, y)}{\partial y} + \dots \\ (n-r) \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} + \dots & (n-r) \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} + \dots & (n-r)(n-r-1) \varphi_r(x, y) + \dots \end{array} \right) = 0$$

Der Grad der Glieder niederster Ordnung ist

$$(r-2) + (r-2) + r = 3r - 4; \text{ also}$$

Satz 6. In einem r -fachen Punkt der Grundkurve hat die Hessesche Kurve einen $(3r - 4)$ -fachen Punkt mit Tangenten, die im allgemeinen verschieden sind von den Tangenten der Grundkurve f .

2. Abschnitt.

Das Dualitätsprinzip in der analytischen Geometrie der Ebene.

§ 7. Die Plückerschen Linienkoordinaten.

1. Einführung der Linienkoordinaten.

Das Dualitätsprinzip*) stellt Punkt und Gerade als gleichberechtigte Elemente einander gegenüber. Den Descartesschen Punktkoordinaten, bei denen der Punkt die Grundlage des Koordinatensystems bildet, entsprechen dualistisch die Plückerschen Linienkoordinaten mit der Geraden als Grundlage.

Aus der allgemeinen Gleichung der Geraden

$$(1) \quad Ax + By + C = 0$$

folgt durch Division mit dem Absolutglied C , d. h. dem weder x noch y enthaltenden Glied

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0,$$

oder, wenn gesetzt wird

$$(2) \quad \frac{A}{C} = u, \quad \frac{B}{C} = v,$$

$$(3) \quad ux + vy + 1 = 0.$$

*) Über die historische Entwicklung des Dualitätsprinzips vgl. *Beutel*, Alg. K. I, S. 13.

Die Größen u und v entsprechen der Geraden

$$Ax + By + C = 0$$

umkehrbar eindeutig und heißen nach Plücker die Koordinaten der Geraden $Ax + By + C = 0$ oder kurz „*Linienkoordinaten*“. Wie bei den Punktkoordinaten ein Punkt kurzerhand mit (x, y) bezeichnet wird, so heißen wir die Gerade (3) kurz die Gerade (u, v) .

Als Achsenabschnitte der Geraden (3) erhalten wir

$$(4) \begin{cases} \text{auf der } x\text{-Achse (mit } y = 0): p = -\frac{1}{u} = -\frac{C}{A}, \\ \text{auf der } y\text{-Achse (mit } x = 0): q = -\frac{1}{v} = -\frac{C}{B}. \end{cases}$$

Somit haben wir als *geometrische Deutung der Linienkoordinaten*: Die Koordinaten einer Geraden sind die negativen, reziproken Werte ihrer Achsenabschnitte.

2. Allgemeine Gleichung in u und v .

Jede Gleichung in Linienkoordinaten

$$(5) \quad \varphi(u, v) = 0,$$

wo φ eine stetige Funktion von u und v ist, stellt wegen der Willkürlichkeit einer der beiden Veränderlichen eine ∞^1 Schar stetig aufeinander folgender Geraden dar, also eine *Kurve als Umhüllungsgebilde einer veränderlichen Geraden*.

3. Gleichung in Achsenabschnitten.

Da gemäß der Substitution

$$(4) \quad p = -\frac{1}{u}, \quad q = -\frac{1}{v}, \quad \text{bzw.} \quad u = -\frac{1}{p}, \quad v = -\frac{1}{q}$$

die Größen u und v die negativen, reziproken Achsenabschnitte der die Kurve umhüllenden Tangenten sind,

so läßt sich durch diese Substitution die Gleichung (5) auf die Form bringen

$$\varphi\left(-\frac{1}{p}, -\frac{1}{q}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \psi(p, q) = 0.$$

Diese Gleichung ist zur *tangentenweisen Berechnung* der Kurve besonders geeignet. Zugleich ist ersichtlich, daß bei Anwendung von Linienkoordinaten die Aufgabe: „die Umhüllungskurve einer nach einem bestimmten Gesetz sich bewegenden Geraden zu finden“, rein algebraischer Natur ist; für Punktkoordinaten ist dies eine Aufgabe der Differentialrechnung.

4. Gleichung des Punkts.

Die einfachste Gleichung in Linienkoordinaten ist eine in u und v lineare Gleichung, etwa in der Form $\alpha u + \beta v + \gamma = 0$, oder, wenn $\frac{\alpha}{\gamma} = a$, $\frac{\beta}{\gamma} = b$ gesetzt wird

$$(6) \quad au + bv + 1 = 0.$$

Die Gleichung einer beliebigen Geraden (u, v) , welche (6) befriedigt, ist nach (3) in Punktkoordinaten

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Diese Gerade geht aber gemäß (6) durch den Punkt (a, b) . Somit stellt die Gleichung $au + bv + 1 = 0$ alle Gerade, welche durch den Punkt (a, b) gehen, also den Punkt (a, b) dar und heißt *Gleichung des Punkts* (a, b) .

Die in u und v lineare Gleichung $\alpha u + \beta v + \gamma = 0$ stellt den Punkt $\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right)$ dar.

Faßt man in der Gleichung $ux + vy + 1 = 0$

u und v } als veränderliche Linien }
 x und y } Punkt } koordinaten auf,

so stellt die Gleichung den Punkt (x, y) }
 die Gerade (u, v) } dar; oder:

Die Gleichung $ux + vy + 1 = 0$ ist die Bedingung für die vereinigte Lage des Punktes (x, y) und der Geraden (u, v) .

5. Duale Gegenüberstellung von Gerade und Punkt, von Punkt- und Tangentenkurve.

Auf Grund der eben gemachten Darlegungen können wir folgende Gebilde als einander dualistisch entsprechend gegenüberstellen:

der Geraden

$$G \equiv \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

dem Schnittpunkt zweier Geraden

$$\left. \begin{aligned} G_1 &\equiv \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ G_2 &\equiv \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

der Bedingung, daß drei Gerade $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ durch einen Punkt gehen,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Das simultane System

$$\left\{ \begin{aligned} f_n(x, y) &= 0 \\ G &= 0 \end{aligned} \right\}$$

stellt die n Schnittpunkte

den Punkt

$$P \equiv au + bv + c = 0;$$

die Verbindungslinie zweier Punkte

$$\left. \begin{aligned} P_1 &\equiv a_1 u + b_1 v + c_1 = 0 \\ P_2 &\equiv a_2 u + b_2 v + c_2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

die Bedingung, daß drei Punkte $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ auf einer Geraden liegen,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Das simultane System

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_n(u, v) &= 0 \\ P &= 0 \end{aligned} \right\}$$

stellt die n Tangenten vom

der Geraden G mit der Kurve f_n dar; $f_n(x, y) = 0$ ist also die Gleichung einer *Kurve n ter Ordnung*.

Durch das simultane System

$$\begin{cases} f_m(x, y) = 0 \\ g_n(x, y) = 0 \end{cases}$$

sind $m \cdot n$ Punkte in der Ebene dargestellt als gemeinsame Punkte der beiden Kurven m ter und n ter Ordnung f_m und g_n .

Jede Kurve läßt sich in *doppelter Weise* auffassen: entweder als Inbegriff von ∞^1 vielen, stetig aufeinanderfolgenden Punkten: *Punkt- oder Ordnungskurve*

Punkt P an die Kurve φ_n dar; $\varphi_n(u, v) = 0$ ist also die Gleichung einer *Kurve n ter Klasse*.

Durch das simultane System

$$\begin{cases} \varphi_m(u, v) = 0 \\ \psi_n(u, v) = 0 \end{cases}$$

sind $m \cdot n$ Gerade in der Ebene dargestellt als gemeinsame Tangenten der beiden Kurven m ter und n ter Klasse φ_m und ψ_n .

oder als Inbegriff von ∞^1 vielen, stetig aufeinanderfolgenden Geraden: *Tangenten- oder Klassenkurve*.

Die Ordnungszahl ist aber von der Klassenzahl im allgemeinen verschieden.

Der Ordnung einer Kurve wird so die Klasse als gleichberechtigtes Element gegenübergestellt, und zugleich haben wir für den in § 3 entwickelten Begriff der Klasse eine neue Grundlage gefunden.

Diese beiden Auffassungen lassen sich nach *Plücker* in folgender Weise vereinigen:

Eine ebene Kurve f entsteht, wenn auf einer Geraden t ein Punkt P stetig fortrückt, während die Gerade t gleichzeitig sich stetig um diesen Punkt dreht.

6. Homogene Koordinaten.

Wie bei Punktkoordinaten, so lassen sich auch bei Linienkoordinaten *homogene Koordinaten* einführen.

Der Geraden $\alpha x + \beta y + \gamma \omega = 0$ mit den homogenen Koordinaten α, β, γ oder den gewöhnlichen Koordinaten $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$ entspricht der Punkt $au + bv + c\theta = 0$ mit den homogenen Koordinaten a, b, θ oder den gewöhnlichen Koordinaten $\frac{a}{\theta}, \frac{b}{\theta}$. Wie die ∞ ferne Gerade durch $\omega = 0$, so ist der Nullpunkt durch $\theta = 0$ dargestellt.

§ 8. Spezielle Dualität in der Ebene.

Stellen wir der Geraden $G \equiv ax + by + c\omega = 0$ den Punkt $(**) P \equiv au + bv + c\theta = 0$ gegenüber, so wird dadurch eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Punkten und Geraden der Ebene hergestellt. G ist nichts anderes als die Polare des Punktes P [mit den Punktkoordinaten (a, b)] in bezug auf den imaginären Kreis $x^2 + y^2 + 1 = 0$ oder, in der Form

$$-ax - by - 1 = 0$$

geschrieben, die Polare des Punktes $(-a, -b)$ in bezug auf den reellen Kreis $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Wir haben also den

Satz: Die zum Punkt $P(a, b)$ in diesem speziellen Sinn dualistische, auch polarreziprok genannte Gerade p ist die Polare des Punktes $P'(-a, -b)$ in bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (s. Fig. 7).

Damit läßt sich zu jeder (x, y) - oder Ordnungskurve die speziell dualistische, polarreziproke (u, v) - oder Klassenkurve als Umhüllungsgebilde konstruieren.

Mit dieser Dualität lassen sich aus bekannten Sätzen

in Punktkoordinaten entsprechende in Linienkoordinaten gewinnen.

Aus den beiden Gleichungen (*) und (**) folgt:

Den drei Kardinalgeraden

$x=0$ oder y -Achse
 $y=0$ oder x -Achse
 $\omega=0$ oder ∞ ferne Gerade

entsprechen
dualistisch

die drei Kardinalpunkte

$u=0$ oder ∞ ferner Punkt
 der x -Achse
 $v=0$ oder ∞ ferner Punkt
 der y -Achse
 $\theta=0$ oder Nullpunkt.

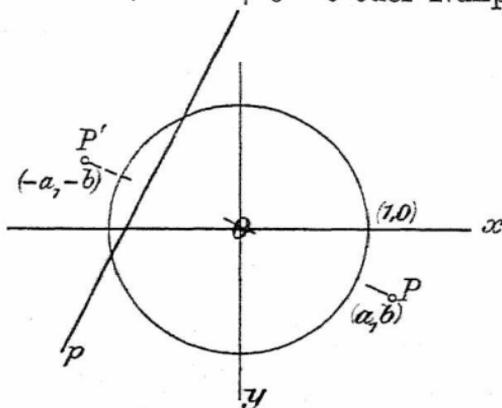


Fig. 7.

Die drei simultanen Systeme

$$\left. \begin{array}{l} f_n(x, y) = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} f_n(x, y) = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} f_n(x, y, \omega) = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$$

stellen die n Schnittpunkte der Kurve mit den drei Kardinalgeraden dar.

Die drei simultanen Systeme

$$\left. \begin{array}{l} f_n(u, v) = 0 \\ u = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} f_n(u, v) = 0 \\ v = 0 \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} f_n(u, v, \theta) = 0 \\ \theta = 0 \end{array} \right\}$$

stellen die n Tangenten an die Kurve von den drei Kardinalpunkten aus dar, d. h. die horizontalen, vertikalen und Nullpunktstangenten.

In unserer speziellen Dualität entsprechen sich fern *Asymptoten*, d. h. Tangenten in ∞ fernem Berührungspunkt.

Berührungspunkte auf (raden durch den Nullpunkt (*Kurvenpunkte auf Nullpunktstangenten*)).

Daraus folgt weiter:

Das simultane System

$$\left. \begin{aligned} \overbrace{f_n(x, y, \omega)} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \omega} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

liefert die *Berührungspunkte der Nullpunktstangenten* der Kurve n ter Ordnung $f = 0$.

Das simultane System

$$\left. \begin{aligned} \overbrace{\varphi_n(u, v, \theta)} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

liefert die *Asymptoten* der Kurve n ter Klasse $\varphi = 0$.

§ 9. Übergang von Punktkoordinaten zu Linienkoordinaten und umgekehrt.

Zu einer Kurve im Plückerschen Sinn (vgl. S. 33) gehören zwei Gleichungen, eine in Punkt- und eine in Linienkoordinaten. Ist die Kurve als Ordnungskurve durch eine Gleichung in Punktkoordinaten gegeben, so erscheint häufig wünschenswert, daraus ihre Gleichung als Klassekurve in Linienkoordinaten abzuleiten und umgekehrt.

Wir machen zunächst den *Übergang von Punktkoordinaten zu Linienkoordinaten*, suchen also die Gleichung, welcher Linienkoordinaten (u, v) einer beliebigen Tangente der Ordnungskurve $f(x, y) = 0$ genügen.

Für die Ordnungskurve $f(x, y) = 0$, homogen

$$\overbrace{f(x, y, \omega)} = 0$$

lautet die Gleichung der Tangente im Punkt (x_1, y_1, ω_1)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x + \frac{\partial f}{\partial y_1} y + \frac{\partial f}{\partial \omega_1} \omega = 0.$$

§ 9. Übergang von Punktkoordinaten zu Linienkoord.

Hieraus ergeben sich durch Identifizierung mit Gleichung

$$(1) \quad ux + vy + \theta \omega = 0$$

unter Weglassung der Indizes mit $\omega = 1$ und θ die beiden Systeme von Gleichungen

$$(2a) \left\{ \begin{array}{l} \varrho u = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \varrho v = \frac{\partial f}{\partial y} \\ \varrho = \frac{\partial f}{\partial \omega} \\ f(x, y) = 0, \end{array} \right. \text{ bzw. } \left\{ \begin{array}{l} \varrho u = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \varrho v = \frac{\partial f}{\partial y} \\ \varrho = \frac{\partial f}{\partial \omega} \\ ux + vy + 1 = 0 \end{array} \right.$$

Die gesuchte u, v -Gleichung der gegebenen Ordnung erhalten wir dann durch Elimination von x, y aus dem System (2a), bzw. (2b). Die Elimination der Größen x, y, ϱ kann zuweilen recht schwierig werden während zwei, z. B. y und ϱ , sich relativ leicht eliminieren lassen. Dann erhält man die Gleichung der Kurve in Parameterform

$$\left. \begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ v = \psi(x) \end{array} \right\}; \text{ hieraus } \left\{ \begin{array}{l} p = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\varphi(x)} \\ q = -\frac{1}{v} = -\frac{1}{\psi(x)} \end{array} \right.$$

zur punktweisen Berechnung der Kurventangente im Berührungspunkt für jedes willkürlich angenommene

Der Übergang von *Linienkoordinaten auf Punktkoordinaten* wird auf Grund ganz ähnlicher Überlegungen werkgestellt.

Aus der gegebenen Gleichung der Klassenkurve

$$\varphi(u, v) = 0$$

oder homogen $\varphi(u, v, \theta) = 0$ folgt für die Gleichung des Berührungspunkts der Tangente $\widetilde{(u, v, \theta)}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} v + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \theta = 0.$$

Durch Identifizierung dieser Gleichung mit

$$u x + v y + \theta = 0$$

erhalten wir die beiden Systeme von Gleichungen

$$(3a) \left\{ \begin{array}{l} \varrho x = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \varrho y = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \varrho = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \varphi(u, v) = 0 \end{array} \right. \quad \text{bzw.} \quad \left. \begin{array}{l} \varrho x = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \varrho y = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \varrho = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ u x + v y + 1 = 0 \end{array} \right\} (3b)$$

Eliminieren wir hieraus die Größen u, v, ϱ , so erhalten wir die gesuchte (x, y) -Gleichung der gegebenen Klassenkurve.

Die Schwierigkeiten, welche die Elimination mit sich bringen kann, lassen sich zuweilen auf folgende Weise zum Teil umgehen.

Ist (1) $u x + v y + 1 \cdot \omega = 0$ eine beliebige Gerade, so ergeben sich deren Schnittpunkte mit der Kurve $\widetilde{f(x, y, \omega)} = 0$ aus dem System

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{f(x, y, \omega)} = 0 \\ u x + v y + 1 \cdot \omega = 0. \end{array} \right.$$

Soll nun die Gerade (1) Tangente der Kurve sein, so muß die Eliminate des Systems (3) z. B. in x eine Doppelwurzel haben. Da man zur Bestimmung der Schnitt-

punkte einer Geraden mit einer Kurve sowohl x , als y , als ω eliminieren kann, so gilt der dreifache

Satz. *Eliminiert man aus dem System*

$$\left. \begin{array}{l} \overline{f(x, y, \omega)} = 0 \\ ux + vy + \omega = 0 \end{array} \right\} \text{entweder } x \text{ oder } y \text{ oder } \omega,$$

so daß die Resultante die Gleichung hat

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\varphi(y, \omega)} = 0 \\ \overline{\psi(x, \omega)} = 0 \\ \overline{\chi(x, y)} = 0 \end{array} \right\},$$

so erhalten wir die u, v -Gleichung der Kurve

$$\overline{f(x, y, \omega)} = 0$$

durch Bildung der Diskriminante der Funktion

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\varphi(y, \omega)} \\ \overline{\psi(x, \omega)} \\ \overline{\chi(x, y)} \end{array} \right\},$$

also durch Elimination von

$$\left. \begin{array}{l} y \text{ aus } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = 0 \\ x \text{ aus } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = 0 \\ \overline{x, y} \text{ aus } \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0 \end{array} \right\}.$$

1. Beispiel. Für die Kurve dritter Ordnung

$$\overline{f(x, y, \omega)} = x^3 + y^3 - x\omega^2 = 0$$

soll die Gleichung in Linienkoordinaten aufgestellt werden. Eliminiert man aus der gegebenen Gleichung

$$\left. \begin{array}{l} x^3 + y^3 - x\omega^2 = 0 \\ \text{und aus } ux + vy + 1 \cdot \omega = 0 \end{array} \right\}$$

die Größe ω , so kommt nach leichter Umformung

$$\chi \equiv x^3(1-u^2) - 2uvx^2y - v^2xy^2 + y^3 = 0.$$

Aus

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} &= 3(1-u^2)x^2 - 4uvxy - v^2y^2 = 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} &= -2uvx^2 - 2v^2xy + 3y^2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

erhalten wir (ρ ist Proportionalitätsfaktor)

$$\begin{aligned} \rho x^2 &= -2v(6u+v^3) \\ \rho xy &= 2uv^3 + 9u^2 - 9 \\ \rho y^2 &= -2v^2(u^2+3). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, da $(\rho xy)^2 = \rho x^2 \cdot \rho y^2$ ist, als gesuchte Gleichung

$$(2uv^3 + 9u^2 - 9)^2 = 4v^3(6u+v^3)(u^2+3)$$

oder nach einiger Umformung

$$4v^3(u^3 - v^3 - 9u) + 27(u^2 - 1)^2 = 0.$$

Die gegebene Kurve dritter Ordnung ist also von der sechsten Klasse, in Übereinstimmung mit der ersten Plücker'schen Formel

$$k = n(n-1) - 2d - 3r,$$

da in unserem Fall $n=3$, $d=0$, $r=0$ ist, was eine einfache Diskussion der Kurve sofort darlegt.

2. Beispiel. Die Kurve dritter Ordnung $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ hat im Ursprung einen Doppelpunkt mit den beiden Medianen $x \pm y = 0$ als Tangenten. Gemäß der eben erwähnten Formel ($d=1$) wird ihre Klasse $k = 3 \cdot 2 - 2 = 4$. Dies bestätigt uns folgende Rechnung. Aus

$$x^3 + (x^2 - y^2)\omega = 0$$

und

$$ux + vy + 1 \cdot \omega = 0$$

folgt durch Elimination von ω die Gleichung

$$\chi \equiv x^3(u-1) + vx^2y - uxy^2 - vy^3 = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 3(u-1)x^2 + 2vxy - uxy^2 = 0$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = vx^2 - 2uxy - 3vy^2 = 0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho x^2 &= -2(u^2 + 3v^2) \\ \rho xy &= v(8u - 9) \\ \rho y^2 &= -2(3u^2 + v^2 - 3u). \end{aligned}$$

Damit kommt als gesuchte Gleichung

$$v^2(8u - 9)^2 = 4(u^2 + 3v^2)(3u^2 + v^2 - 3u)$$

oder $4(u^2 - v^2)^2 = 4u^3 - 36uv^2 + 27v^2$,

also eine Kurve vierter Klasse.

3. Beispiel. Die Kurve dritter Ordnung (Rückkehrparabel) $f(x, y) \equiv y^2 - x^3 = 0$ hat im Ursprung einen Rückkehrpunkt mit $y = 0$ als Rückkehrtangente. Für ihre Klasse erhalten wir daher aus der ersten Plückerschen Formel mit $r = 1$

$$k = 3 \cdot 2 - 3 = 3,$$

was durch folgende Rechnung bestätigt wird. Aus

$$y^2 = x^3 \quad \text{oder} \quad y = x^{3/2} \quad \left. \vphantom{y^2 = x^3} \right\}$$

und

$$ux + vy + 1 = 0 \quad \left. \vphantom{ux + vy + 1 = 0} \right\}$$

folgt durch Elimination von x

$$\chi \equiv ux + vx^{3/2} + 1 = 0.$$

Hieraus

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = u + \frac{3}{2} vx^{1/2} = 0.$$

Die Elimination von x aus den beiden letzten Gleichungen liefert

$$\varphi(u, v) \equiv v^2 + \frac{4}{27} u^3 = 0 \quad \text{oder} \quad v^2 = -\frac{4}{27} u^3,$$

eine Kurve dritter Klasse. Aus der Form von φ ist ersichtlich, daß die Kurvengleichung in Punktkoordinaten bis auf einen konstanten Faktor identisch ist mit der Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten.

§ 10. Singularitäten bei Ordnungs- und Klassenkurven.

Wie wir in § 7 gesehen haben, läßt sich jede Kurve in doppelter Weise auffassen: entweder als geometrischen Ort eines sich bewegenden Punkts (Punktgebilde, Ord-

nungskurve) oder einer sich bewegenden Geraden (Tangentengebilde, Klassenkurve). Während nun *Ordnungs- und Klassenzahl allgemeine Eigenschaften* einer Kurve sind und jeder Kurve zukommen, hat eine Kurve nur dann *singuläre Eigenschaften*, wenn zwischen den Koeffizienten ihrer Gleichung bestimmte Relationen vorhanden sind.

Als *Singularitäten* im weiteren Sinn bezeichnet man *vielfache Punkte* und *vielfache Tangenten*, *Stillstands- oder stationäre Punkte* und *Stillstands- oder stationäre Tangenten*.

Die einfachsten Fälle dieser Punkte und Tangenten sind die *elementaren Singularitäten* und zwar

- | | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| 1. der <i>Doppelpunkt</i> , | 3. die <i>Doppeltangente</i> , |
| 2. der <i>Wendepunkt</i> , | 4. die <i>Rückkehrtangente</i> . |

Doppelpunkt bzw. Doppeltangente können reell oder isoliert sein; wir haben also im ganzen sechs elementare Singularitäten. Alle übrigen Singularitäten werden *höhere Singularitäten* genannt. Das Singuläre oder Besondere an diesen Punkten und Tangenten besteht darin, daß sie entweder *dieselbe Lage wiederholt einnehmen* (Doppelpunkt und Doppeltangente) oder daß *in ihrer Bewegungsrichtung ein momentaner Stillstand eintritt* (Wendepunkt und Rückkehrtangente).

Je nachdem wir eine Kurve betrachten als
 Punktgebilde (Ordnungskurve)
 oder als

Tangentengebilde (Klassenkurve),

erhalten wir folgende dualistische Gegenüberstellungen:

Der *Doppelpunkt* ist ein Kurvenpunkt, der zwei verschiedenen Kurvenzweigen gemeinsam ist, oder ein

Die *Doppeltangente* ist eine Kurventangente, die zwei verschiedenen Kurvenzweigen gemeinsam ist, oder

Kurvenpunkt, in dem zwei verschiedene Tangenten vorhanden sind.

Sind die beiden Tangenten

reell
 imaginär konjugiert }
 so erhalten wir einen
 gewöhnlichen } Doppel-
 isolierten } punkt.

eine Kurventangente, auf der zwei verschiedene Berührungspunkte liegen.

Sind die beiden Berührungspunkte

reell
 imaginär konjugiert }
 so erhalten wir eine
 gewöhnliche } Doppel-
 isolierte } tangente.

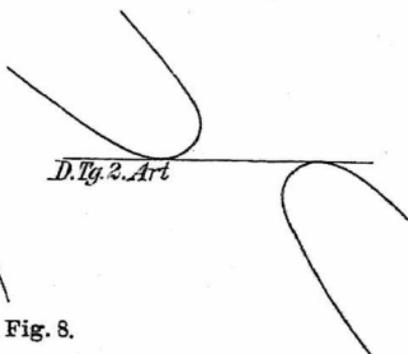
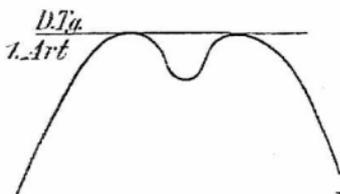


Fig. 8.

Den isolierten Punkt können wir als unendlich kleines Oval oder als unendlich kleine Ellipse mit bestimmter Achsenrichtung betrachten; denn jede durch ihn gehende Gerade hat mit ihm zwei Schnittpunkte gemein.

Je nachdem die Berührungspunkte einer Doppeltangente auf demselben Kurvenzug liegen, bzw. beide imaginär konjugiert sind oder auf zwei verschiedenen Kurvenzügen liegen, unterscheidet man nach Zeuthen*) *Doppeltangenten erster Art* und *Doppeltangenten zweiter Art* (Fig. 8). So hat z. B. die Kurve vierter Ordnung (b) der Fig. 31 vier

*) Zeuthen, „Sur les différentes formes des courbes planes du 4^{ième} ordre“, Math. Annalen, Band 7, S. 410—432.

Doppeltangenten erster Art und 24 Doppeltangenten zweiter Art.

Kurvenzüge ohne reelle Doppeltangenten nennt Zeuthen *Ovale*; Kurvenzüge mit 1, 2, 3 oder 4 Doppeltangenten erster Art nennt er *Unifolia*, *Bi-*, *Tri-* oder *Quadrifolia* (vgl. S. 93).

Wie aus Fig. 8 ersichtlich, bedingt jede Doppeltangente erster Art das Auftreten von zwei Wendepunkten. So ist z. B. der reelle Kurvenzug der Fig. 9a ein Quadrifolium und hat deshalb $4 \cdot 2 = 8$ Wendepunkte. Dagegen besteht z. B. die Kurve $(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 2)^2 = 1$ aus vier Ovalen.

Die dualistische Gegenüberstellung von Wendepunkt und Rückkehrtangente liefert uns das weitere Ergebnis:

Der *Wendepunkt* ist ein Kurvenpunkt, in dem sich der Drehungssinn einer sich bewegenden Kurventangente ändert.

Die *Rückkehrtangente* ist eine Kurventangente, in der sich die Fortschrittingsrichtung eines sich bewegenden Kurvenpunkts ändert.

Vom dualistischen Standpunkt aus sind Wendepunkt und Doppeltangente bei Ordnungskurven gewöhnliche*) Vorkommnisse, bei Klassenkurven Singularitäten im eigentlichen Sinn; ebenso sind Rückkehrtangente und Doppelpunkt bei Ordnungskurven eigentliche Singularitäten, bei Klassenkurven gewöhnliche Vorkommnisse (vgl. hierzu die Fig. 9 bis 11).

Bei der speziellen Dualität in § 8 entsprechen sich der Nullpunkt und die unendlich ferne Gerade. Nun haben die binomischen Kurven von der Form $y^\alpha = x^\beta$ ($\beta > \alpha$)

*) d. h. auch wenn zwischen den Koeffizienten der Kurvengleichung keine Relationen bestehen.

ihre sämtlichen singulären Punkte im Ursprung und im unendlich fernen Punkt der y -Achse ($x = 0, \omega = 0$). Wie eine einfache Rechnung analog der auf S. 41 ausgeführten zeigt, hat die Kurve mit der Gleichung $y^\alpha = x^\beta$ in Punktkoordinaten die Gleichung

$$\left(\frac{v}{\alpha}\right)^\alpha = (-1)^\beta (\beta - \alpha)^{\beta - \alpha} \cdot \left(\frac{u}{\beta}\right)^\beta$$

oder $v^\alpha = \text{konst. } u^\beta$ in Linienkoordinaten.

Zur Untersuchung der Liniensingularitäten können wir uns also auf die in Alg. K. I § 6 gefundenen Ergebnisse stützen: Die Liniensingularität der Kurve $v^\alpha = u^\beta$ im Ursprung entspricht der Punktsingularität der Kurve $y^\alpha = x^\beta$ auf der unendlich fernen Geraden und umgekehrt: die speziell dualistischen Kurven

$$y^\alpha = x^\beta \quad \text{und} \quad v^\alpha = u^\beta$$

sind also Kurven vom selben Typus.

Durch Vergleichung der beiden speziell dualistischen Parabeln dritten Grads

$$(1) \quad y \omega^2 = x^3 \quad \text{und} \quad v \theta^2 = u^3. \quad (2)$$

folgt: Dem Ursprung ($x = 0, y = 0$), der für die Ordnungskurve (1) Wendepunkt ist (Symbol $[y, x^3]$), entspricht die unendlich ferne Gerade ($u = 0, v = 0$), (Symbol $[v, u^3]$). Diese aber ist, wie wir aus (1) entnehmen dürfen — die beiden Gleichungen (1) und (2) stellen ja denselben Kurventypus dar — Rückkehrtangente der Kurve (2) (Symbol $[\omega^2, x^3]$). Ferner entspricht der unendlich fernen Geraden $\omega = 0$, die für (1) Rückkehrtangente ist, der Nullpunkt in (2) (Symbol $[\theta^2, u^3]$). Dieser ist aber ein Wendepunkt, wie wir eben gesehen haben. Wir haben also wieder folgende *duale Gegenüberstellung*:

Wendepunkt	Rückkehrtangente
Rückkehrpunkt	Wendetangente.

Genau dasselbe würde sich aus den beiden Kurven

$$y^2 \omega = x^3 \quad \text{und} \quad v^2 \theta = u^3$$

ergeben.

Durch Ausdehnung dieser Schlußweise auf die in Alg. K. I. § 6 behandelten binomischen Kurven erhalten wir folgende dualistische Gegenüberstellung:

Punktkoordinaten		Linienkoordinaten	
Symbol in $[x, y]$	Singularität	Symbol in $[u, v]$	Singularität
$[1, 2]$	Ovalpunkt	$[1, 2]$	Ovaltangente
$[1, 3]$	Wendepunkt	$[1, 3]$	Rückkehrtangente
$[2, 3]$	Rückkehrpunkt	$[2, 3]$	Wendetangente
$[2, 2]$	Doppelpunkt	$[2, 2]$	Doppeltangente
$[1, 4]$	Flachpunkt	$[1, 4]$	Spitztangente
$[2, 4]$	Selbstberührungspunkt	$[2, 4]$	Selbstberührungstangente
$[3, 4]$	Spitzpunkt	$[3, 4]$	Flachtangente
$[3, 3]$	dreifacher Punkt usw.	$[3, 3]$	dreifache Tangente usw.

Zur Erläuterung des dualistischen Entsprechens von Ordnungs- und Klassenkurven sollen die Fig. 9, 10 und 11 dienen, in welchen duale Kurvenelemente durch gleiche Ziffern gekennzeichnet sind. Um die Klassenkurven zu diskutieren, kann man die von Reuschle (vgl. Alg. K. I. S. 15, Anm.) ersonnene Methode anwenden — auf die näher einzugehen uns leider der Mangel an Raum verbietet — oder die Kurven tangentialweise aufzeichnen. Zu diesem Zweck empfiehlt es sich, die gegebene Kurvengleichung (in u und v) in die Gleichung in Achsenabschnitten mittels der Substitution

$$p = -\frac{1}{u}, \quad q = -\frac{1}{v}$$

überzuführen und aus letzterer Gleichung die Kurve tangentialweise zu berechnen.

Fig. 9a stellt die Kurve vierter Ordnung

$$x^4 + y^4 = x^2 + y^2$$

oder

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\left(x^2 - \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)\left(y^2 - \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)$$

dar. Diese hat vier Doppeltangenten erster Art

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}; \quad y = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}$$

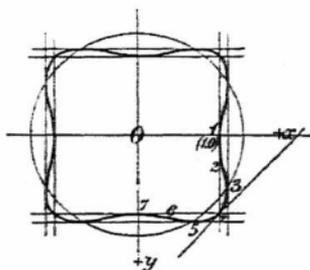


Fig. 9a.

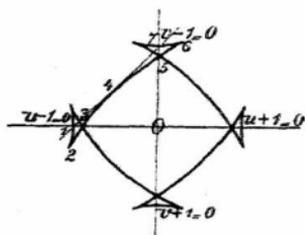


Fig. 9b.

acht reelle Wendepunkte und den Ursprung als isolierten (Selbstberührungs-)Punkt.

Fig. 9b stellt die speziell dualistische Kurve vierter Klasse

$$u^4 + v^4 = u^2 + v^2$$

dar mit vier Doppelpunkten, acht Rückkehrtangente und der unendlich fernen Geraden als isolierter Doppeltangente*).

*) Die Klassenkurve Fig. 9b besteht aus vier „Steigbügel“. Solche Steigbügel, bestehend aus einem Kurvenzug mit einem Doppel- und zwei Rückkehrpunkten, kommen bei Kurven vierter Klasse häufig vor.

Die Kurve dritter Ordnung (Fig. 10 a)

$$x^3 + y^2 - x = 0$$

hat drei reelle Wendepunkte, von denen einer (7) die unendlich ferne Gerade als Wendetangente hat, und ein durch den Nullpunkt gehendes Oval (1 2 3 4).

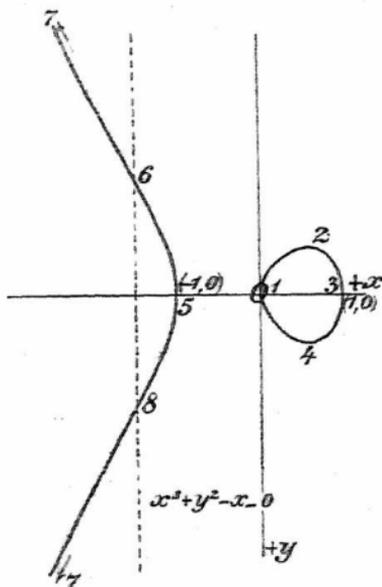


Fig. 10 a.

Die Kurve dritter Klasse (Fig. 10 b)

$$u^3 + v^2 - u = 0$$

hat drei reelle Rückkehrtangenten, von denen eine (7) den Ursprung als Rückkehrpunkt hat und ein die unendlich ferne Gerade berührendes Oval (1 2 3 4).

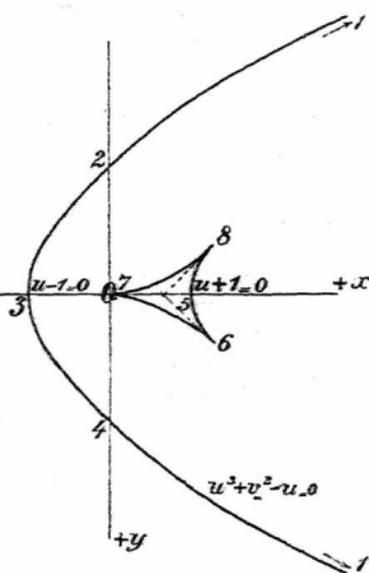


Fig. 10 b.

Die Kurve dritter Ordnung (Fig. 11 a)

$$x^3 - x^2 + y^2 - 1 = 0$$

hat drei reelle Wendepunkte, von denen einer (1) $\omega = 0$

Die Kurve dritter Klasse (Fig. 11 b)

$$u^3 - u^2 + v^2 - 1 = 0$$

hat drei reelle Rückkehrtangenten, von denen eine

als Tangente hat, und besitzt zwei Tangenten durch den Nullpunkt.

den Nullpunkt als Berührungspunkt hat, und besitzt zwei Kurvenpunkte auf der unendlich fernen Geraden, also zwei Asymptoten.

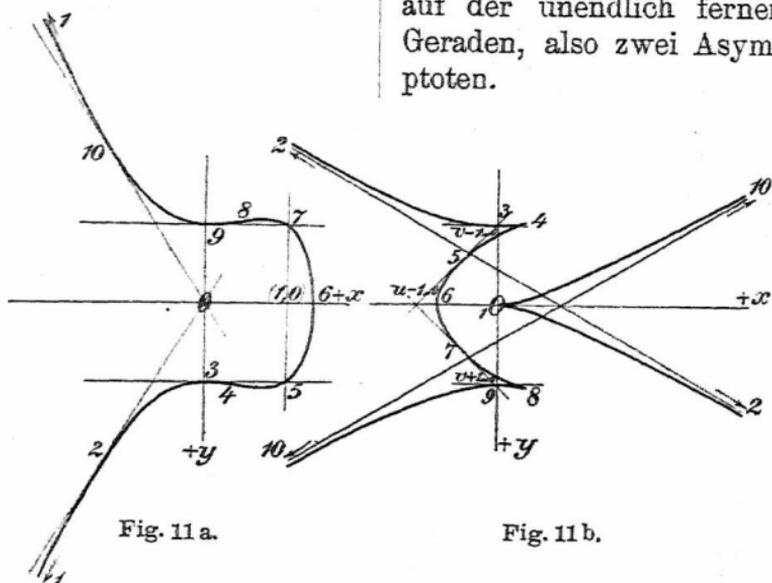


Fig. 11 a.

Fig. 11 b.

§ 11. Plücker'sche Formeln.

Bezeichnet für eine Kurve n die Ordnung, k die Klasse, w die Zahl der Wendepunkte, r die Zahl der Rückkehrpunkte, d die Zahl der Doppelpunkte und t die der Doppeltangenten, so ist zunächst nach Satz 5 der §§ 4 und 6, wenn sonst keine Singularitäten vorhanden sind,

$$(1) \quad k = n(n - 1) - 2d - 3r,$$

$$(2) \quad w = 3n(n - 2) - 6d - 8r.$$

Aus diesen beiden von Plücker zuerst aufgestellten Formeln ergeben sich durch dualistische Übertragung sofort die weiteren Formeln

$$(3) \quad n = k(k-1) - 2t - 3w,$$

$$(4) \quad r = 3k(k-2) - 6t - 8w.$$

Von diesen vier Gleichungen sind nur drei voneinander unabhängig; Gleichung (4) erhält man nämlich durch Multiplikation der drei ersten Gleichungen mit bzw. 3, -1, 3 und Addition derselben.

Durch Elimination lassen sich aus ihnen weitere Formeln erhalten. Eliminiert man d aus (1) und (2), so ergibt sich

$$(5) \quad r - w = 3(n - k).$$

Durch Elimination von w und r aus (2), (3) und (4) kommt

$$(6) \quad 2(t - d) = (k - n)(k + n - 9).$$

Diese sechs Gleichungen heißen *Plückersche Formeln*; in ihnen wird zwischen reellen und imaginären Singularitäten kein Unterschied gemacht.

§ 12. Geschlecht; rationale Kurven.

Clebsch und Gordan haben in ihrer Theorie der Abelschen Funktionen eine neue für jede Kurve charakteristische Größe eingeführt, das *Geschlecht*.

Gemäß Satz (3) von § 4 ist ein r -facher Punkt äquivalent $\frac{r(r-1)}{2}$ Doppelpunkten. Da eine C_n höchstens einen $(n-1)$ fachen Punkt besitzt, so kann sie höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte haben.

So hat eine C_3 höchstens 1, eine C_4 höchstens 3 Doppelpunkte (vgl. S. 91).

Man bezeichnet nun als *Geschlecht* p oder nach Cayley Defekt (deficiency) den Überschuß der möglichen Doppelpunkte einer C_n über die wirklich vorhandene Anzahl derselben, setzt also

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r.$$

Um p in den übrigen Größen auszudrücken, welche in den Plücker'schen Formeln vorkommen, verfahren wir folgendermaßen. Durch Subtraktion der Gleichungen (1) und (3) des § 11 ergibt sich

$$n^2 - k^2 = 2(d - t) + 3(r - w).$$

Nun können wir mit Benützung der Gleichungen (5) und (6) des § 11 schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}(k-1)(k-2) \\ &= \frac{1}{2}[n^2 - k^2 - 3(n-k)] = (d-t) + (r-w), \end{aligned}$$

woraus

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r = \frac{1}{2}(k-1)(k-2) - t - w = p.$$

Hieraus ersehen wir, daß *jede Kurve mit ihrer speziell dualistischen (oder reziproken) Kurve vom selben Geschlecht ist*. Mit dieser Gleichung und den Formeln (1) und (3) von § 11 findet man das Gleichungssystem:

$$2(p-1) = \begin{cases} n(n-3) - 2(d+r) \\ k(k-3) - 2(t+w) \\ n+w - 2k \\ k+r - 2n, \end{cases}$$

aus welchem leicht umgekehrt die sechs Plücker'schen Formeln des § 11 abgeleitet werden können.

Besonderes Interesse bieten diejenigen Kurven, deren *Geschlecht* $p=0$ ist, die also die Höchstzahl $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

von Doppelpunkten besitzen.

Es läßt sich zeigen*), daß die Koordinaten jedes Punktes einer solchen Kurve als rationale Funktionen

*) Vgl. *Wieleitner*, *Algebr. Kurven*, S. 71 ff.

eines Parameters λ darstellbar sind. Man nennt deshalb diese Kurven *rationale Kurven*.

So ergibt sich z. B. für eine C_3 mit Doppelpunkt im Ursprung, d. h. für eine rationale C_3 die rationale Parameterdarstellung, wenn man durch den Doppelpunkt ein Geradenbüschel $y = \lambda x$ legt und aus dieser Gleichung und derjenigen der C_3 die eine Veränderliche eliminiert. Für das Descartessche Blatt z. B.

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

erhält man mit

$$y = \lambda x$$

die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} x = \frac{3a\lambda}{1 + \lambda^3} \\ y = \frac{3a\lambda^2}{1 + \lambda^3} \end{cases}$$

Alle C_n , die einen $(n - 1)$ -fachen Punkt besitzen, sind rationale Kurven. Liegt der $(n - 1)$ -fache Punkt im Ursprung, so gibt wieder $y = \lambda x$ die rationale Parameterdarstellung der Kurve.

3. Abschnitt.

Höhere Singularitäten.

§ 13. Begriff der höheren Singularität.

Wie wir schon in § 10 angemerkt haben, verstehen wir unter höheren Singularitäten alle singulären Punkte und Tangenten, die keine Doppelpunkte, Wendepunkte, Doppeltangenten oder Rückkehrtangenten sind.

Cayley hat zuerst gezeigt, daß *jede höhere Singularität in bestimmter eindeutiger Weise einer gewissen Anzahl elementarer Singularitäten äquivalent ist.*

Höhere Singularitäten kommen erst bei Kurven vierter Ordnung vor, bei denen ja auch die Doppeltangente erstmals auftritt. Da eine solche mit der Kurve mindestens vier Schnittpunkte haben muß, so ist ohne weiteres ersichtlich, daß bei den Kurven dritter Ordnung Doppeltangenten nicht vorkommen können. Die bei den C_4 möglichen Arten von höheren Singularitäten finden sich in § 19 zusammengestellt.

Nach Cayley lassen sich die höheren Singularitäten in vier Hauptarten einteilen, die durch folgende symbolische Ausdrücke bezeichnet werden können:

1. *Ein Punkt, eine Tangente, ein Zweig.*

Beispiele: Flachpunkt, Wendeflachpunkt.

2. *Ein Punkt, eine Tangente, mehrere Zweige.*

Beispiele: Selbstberührungspunkt, Schnabelspitze, Rückkehrfachpunkt.

3. *Ein Punkt, mehrere Tangenten, mehrere Zweige.*

Beispiele: Dreifacher Punkt, n -facher Punkt.

4. *Mehrere Punkte, eine Tangente, mehrere Zweige.*

Beispiele: Dreifache Tangente, n -fache Tangente.

a) Die Kurve $(y^2 - 4) + x^2(x^2 - 3)^2 = 0$ (Fig. 12) hat die Geraden $y \pm 2 = 0$ als dreifache Tangenten, deren drei

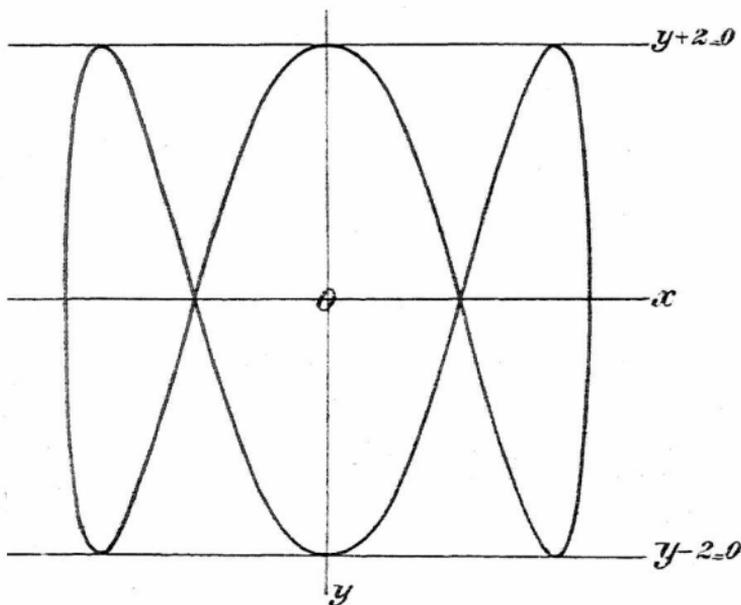


Fig. 12.

Berührungspunkte im Schnitt mit den Geraden $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ liegen.

b) Die Kurve $(x^2 - 2)^2 + (y^2 - 4)(y^2 - 1)^2 = 0$ (Alg. K. I, S. 61ff.) hat die Geraden $x = \pm 2$ ebenfalls als dreifache Tangenten.

§ 14. Auflösung der höheren Singularitäten.

Schon bei den binomischen Kurven vierter und höherer Ordnung treten höhere Singularitäten auf. Wollen wir für

eine der dort vorkommenden höheren Singularität die äquivalenten elementaren Singularitäten suchen, so können wir dies in folgender Weise bewerkstelligen.

Wir führen in der Gleichung der Kurve, deren höhere Singularität im Ursprung liegen soll, eine oder auch mehrere kleine, konstante Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ derart ein, daß für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ die neue Kurvengleichung

$$f(x, y, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$$

die ursprüngliche Form $f(x, y) = 0$ der Kurvengleichung wieder annimmt und daß die Gleichung $f(x, y, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ eine Kurve darstellt, welche keine höhere Singularität mehr besitzt. Diese Kurve nennen wir nach Brill die *penultimate Kurve*; in ihr ist die höhere Singularität in ihre äquivalenten elementaren Singularitäten zerlegt, so daß diese nicht mehr *bei-* oder *ineinander*, sondern *neben-einander* liegen. Aus ihr kann die höhere Singularität mit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ erzeugt werden.

Wie die folgenden Beispiele zeigen, ist in einfacheren Fällen ohne weitere Rechnung die Singularität auflösbar. Dieses von uns angewandte Verfahren darf aber nur mit der nötigen Vorsicht benützt werden, wenn es nicht zu falschen Schlüssen führen soll.

Eine genaue Methode, die wissenschaftliche Strenge mit leichter Anwendbarkeit verbindet, hat Brill angegeben. Leider verbietet es uns der Raum, auf sie näher einzugehen, und wir müssen uns deshalb darauf beschränken, den Leser, der sich hierüber genauer unterrichten will, auf die in den Math. Annalen, Bd. 16, S. 348 ff. stehende Abhandlung hinzuweisen.

1. Beispiel. Die Kurve (Fig. 13)

$$y = x^2(x^2 - \varepsilon^2) \quad \text{oder} \quad y = x^2(x - \varepsilon)(x + \varepsilon)$$

hat für $\varepsilon = 0$ einen *Flachpunkt*. Da diese Kurve, wie Fig. 13 zeigt, in der Nähe des Ursprungs eine Doppeltangente

so sehen wir, daß im Ursprung ein Doppelpunkt und ein Rückkehrpunkt liegt. Wir trennen die in der Gleichung quadratisch auftretende Parabel $y - x^2 = 0$ in zwei Parabeln

$$[y - x(x - \varepsilon_1)] [y - (1 + \varepsilon_2)x(x - \varepsilon_1)] .$$

Beide Parabeln gehen durch den Ursprung und durch den Punkt $\begin{cases} x = \varepsilon_1 \\ y = 0 \end{cases}$. Lassen wir nun durch diesen Punkt die Gerade $x = \varepsilon_1$ (an Stelle von $x = 0$) gehen, so lautet die Gleichung der Kurve

$$(*) [y - x(x - \varepsilon_1)] [y - (1 + \varepsilon_2)x(x - \varepsilon_1)] = x^3(x - \varepsilon_1)^2 .$$

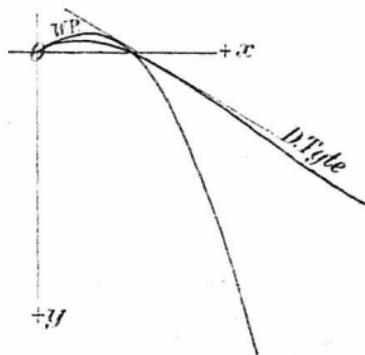


Fig. 15.

In Fig. 15 ist die penultimate Kurve (*) dargestellt mit $\varepsilon_1 = 1$ cm, $\varepsilon_2 = 4$ cm; sie zeigt die *Auflösung der Schnabelspitze in einen Doppelpunkt, einen Rückkehrpunkt, einen Wendepunkt und eine Doppeltangente.*

4. Abschnitt.

Kurven dritter Ordnung.

§ 15. Die Kurvengleichung.

I. Die allgemeine Gleichung.

Für die nichtzerfallenden Kurven dritter Ordnung erhalten wir aus den Plückerschen Formeln folgende Tabelle, worin bei den Singularitäten zwischen reell und imaginär kein Unterschied gemacht wird:

n	k	w	r	d	t	p
3	6	9	0	0	0	1
3	4	3	0	1	0	0
3	3	1	1	0	0	0

Für zerfallende C_3 haben die Plückerschen Formeln keine Geltung. Zerfällt eine C_3 in eine C_2 und eine Gerade, so hat die Kurve $d = 2$ Doppelpunkte. Zerfällt die C_3 in drei Gerade, so wird $d = 3$. Für diese Zahl von Doppelpunkten liefert die Gleichung (2) S. 49 mit $r = 0$ eine negative Zahl von Wendepunkten.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß *jede* C_3 *mindestens einen reellen Wendepunkt hat*, da imaginäre Wendepunkte paarweise konjugiert auftreten müssen.

Die allgemeine Gleichung der Kurve dritter Ordnung

$$(Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3) + (Ex^2 + Fxy + Gy^2) + (Hx + Jy) + K = 0$$

hat $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ Glieder, also, da mit einem Koeffizienten, z. B. A dividiert werden kann, $10 - 1 = 9$ unabhängige Koeffizienten*). Hat eine Kurve einen Doppelpunkt, so besteht eine, hat sie einen Rückkehrpunkt, so bestehen zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten, von denen dann nur noch 8 bzw. 7 unabhängig sind.

Durch neun gegebene Punkte läßt sich im allgemeinen eine C_3 legen; denn die neun gegebenen Punkte liefern ebenso viele lineare Gleichungen (durch Einsetzen ihrer Werte in die allgemeine Kurvengleichung) zur Bestimmung der neun Koeffizienten.

II. Plücker's symbolische Gleichungsformen.

Sind $G = 0$, $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ die Gleichungen von vier Geraden, und ist λ ein konstanter Faktor, so kann nach Plücker die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung in einer der drei Formen geschrieben werden:

$$(1) \quad G_1 G_2 G_3 + \lambda G = 0,$$

$$(2) \quad G_1 G_2 G_3 + \lambda G^2 = 0,$$

$$(3) \quad G_1 G_2 G_3 + \lambda G^3 = 0.$$

Die Gleichung (1) heißt *Asymptotengleichung* der C_3 , weil $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ ihre Asymptoten sind.

*) Allgemein: Die Gleichung einer C_n läßt sich in der Form schreiben:

$$f_n(x, y) \equiv \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y) = 0.$$

Die Zahl ihrer Glieder beträgt also

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$$

und die Zahl ihrer unabhängigen Koeffizienten

$$\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 1 = \frac{n^2 + 3n}{2} = \frac{n(n + 3)}{2}.$$

Dies folgt sofort aus der homogenen Form der Kurvengleichung:

$$(1^*) \quad f \equiv G_1 G_2 G_3 + \lambda G \omega^2 = 0.$$

Die Schnittpunkte der drei Asymptoten mit der Kurve $f = 0$ liegen auf der Geraden $G = 0$; diese wird die „*Begleiterin*“ der unendlich fernen Geraden $\omega = 0$ genannt. Die Gleichung jeder Kurve dritter Ordnung mit drei reellen, bzw. einer reellen und zwei imaginär konjugierten Asymptoten läßt sich folgendermaßen auf die Form (1) bringen:

Man ermittelt der Reihe nach die Asymptoten $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$, worauf sich durch Koeffizientenvergleichung der Ausdrücke f und $G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 + \lambda G$ die Form (1) auf eine einzige Art ergibt.

Auf diese Form der Kurvengleichung, also auf das Verhalten der Kurve dritter Ordnung im Unendlichen, speziell hinsichtlich ihrer Asymptoten, gründet Plücker (System der analytischen Geometrie, 1835) seine Einteilung der C_3 .

Die Gleichung

$$(2) \quad G_1 G_2 G_3 + \lambda G^2 = 0$$

stellt eine Kurve dritter Ordnung dar mit den Tangenten $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$, deren Berührungspunkte auf der Geraden $G = 0$ liegen. Aus der homogenen Form

$$(2^*) \quad G_1 G_2 G_3 + \lambda G^2 \omega = 0$$

folgt, daß die Tangenten $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ parallel zu den Asymptoten laufen.

Um die Gleichung einer C_3 in diese Form zu bringen, bestimmt man die drei Geraden parallel zu den Asymptoten durch den Nullpunkt $G' = 0$, $G'' = 0$, $G''' = 0$ (vgl. Alg. K. I, S. 87). Setzt man nun $G_1 = G' + p_1$, $G_2 = G'' + p_2$, $G_3 = G''' + p_3$, so erhält man durch

Koeffizientenvergleichung der Ausdrücke f und $G_1 G_2 G_3 + \lambda G^2$, wo $G = \alpha x + \beta y + \gamma$, zur Bestimmung der sieben unbekanntenen Größen $p_1, p_2, p_3, \alpha, \beta, \gamma, \lambda$ sechs Gleichungen, da $G' G'' G'''$ gleich dem Aggregat der vier Glieder dritten Grads der Kurvengleichung ist. Diese Gleichungen gestatten, sechs der Unbekannten zu bestimmen; es läßt sich also eine C_3 auf unendlich viele Arten in die Gleichungsform (2) bringen.

Aus der Gleichung

$$(3) \quad G_1 G_2 G_3 + \lambda G^3 = 0$$

folgt: Die drei Geraden $G_1 = 0, G_2 = 0, G_3 = 0$ sind *Wendetangenten* und ihre Berührungspunkte liegen auf der Geraden $G = 0$ oder mit anderen Worten:

Drei Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung liegen in einer Geraden.

Dieser Satz läßt sich auch in der Form aussprechen:

Eine Gerade durch zwei Wendepunkte enthält noch einen dritten).*

III. Newtons Normalformen.

Zur Klassifikation der C_3 hat schon Newton versucht, die allgemeine Gleichung auf einfachere Formen zurückzuführen. Newton kam auf folgende *vier Hauptformen*:

$$x y^2 + e y = f_3(x); \quad x y = f_3(x); \quad y^2 = f_3(x); \quad y = f_3(x),$$

wo

$$f_3(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

*) Mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum müssen wir es uns versagen, auf die Konfiguration der neun Wendepunkte einer C_3 näher einzugehen. Wir verweisen den Leser, der sich hierüber eingehender unterrichten will, auf das Lehrbuch von Wieleitner I, S. 213 ff., sowie auf die reichhaltigen Literaturangaben in Kohn (L. V. 6), S. 475 ff.

Unter diesen ist

$$(1) \quad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

die wichtigste. Aus der homogenen Form der Gleichung (1) folgt mittels des Prinzips der linearen Kombination sofort, daß die durch (1) dargestellten Kurven im unendlich fernen Punkt der y -Achse ihren reellen Wendepunkt und die unendlich ferne Gerade zur Wendetangente haben. Diese Kurven nannte Newton „*divergierende Parabeln*“, da sie alle als Näherungskurve im Unendlichen die Rückkehrparabel $y^2 = ax^3$ haben, also wie diese ins Unendliche gehen (vgl. Fig. 20, S. 72).

Wir beweisen den

Satz: *Jede Kurve dritter Ordnung läßt sich in eine Kurve projizieren, deren Gleichung lautet*

$$(1) \quad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Wir denken uns die Kurve (1) in der xy -Ebene eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems und einen durch (1) gehenden Kegel mit Spitze S . Diesen Kegel schneiden wir mit einer beliebigen Ebene E durch die z -Achse; die Schnittkurve ist nichts anderes als die Projektion der Kurve (1) von S aus auf die Ebene E . Der Wendepunkt von (1) im unendlich fernen Punkt der y -Achse wird dabei zum Schnittpunkt der durch S zur y -Achse gezogenen Parallelen mit E und die neue Wendetangente geht parallel der xy -Ebene. Die xz -Projektion der Schnittkurve ist wiederum eine Kurve dritter Ordnung, welche den Schnittpunkt der durch S zur y -Achse gezogenen Parallelen mit der xz -Ebene als Wendepunkt und die Parallele zur x -Achse durch diesen Punkt zur Wendetangente hat.

Jede Kurve dritter Ordnung hat einen reellen Wendepunkt. Durch Verschiebung und Drehung des Koor-

dinatensystems legen wir diesen in den Punkt $(0, 1)$ der xz -Ebene und die Wendetangente parallel zur x -Achse. Dann ist die Gleichung der Kurve von der Form

$$(2) \quad x^3 + (z-1)(Ax^2 + Bxz + Cz^2 + Dx + Ez + F) = 0.$$

Wir zeigen, daß es zu jeder gegebenen Kurve (2) eine Ebene $E \equiv y - mx - n = 0$ und einen Punkt $S(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \beta, 1)$ gibt, so daß S die Projektion von (2) parallel der y -Achse auf E in eine Kurve (1) projiziert, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Das System

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x - \alpha = \lambda(z - \gamma) \\ y - \beta = \mu(z - \gamma) \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda(z - 1) \\ y - \beta = \mu(z - 1) \end{array} \right\}$$

stellt bei veränderlichem λ und μ das durch den Punkt (α, β, γ) , d. h. $(0, \beta, 1)$ gehende Geradenbündel dar. Soll nun eine Gerade (3) die in der Ebene $z = 0$ liegende Kurve (1) schneiden, so müssen die Gleichungen $z = 0$, (1) und (3) für den Schnittpunkt (x, y, z) zusammen bestehen. Durch Elimination von x, y, z aus diesen vier Gleichungen erhält man somit als Bedingung für λ und μ

$$(4) \quad (\beta - \mu)^2 = -a\lambda^3 + b\lambda^2 - c\lambda + d.$$

Setzen wir aus (3) die Werte für λ und μ in (4) ein, so ergibt sich als Gleichung des Kegels nach einfacher Umformung

$$(z-1)(\beta z - y)^2 = -ax^3 + b(z-1)x^2 - c(z-1)^2x + d(z-1)^3.$$

Die Projektion der Schnittkurve dieses Kegels mit E auf die xz -Ebene hat die Gleichung

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (z-1)(\beta z - mx - n)^2 + ax^3 - b(z-1)x^2 \\ \quad + c(z-1)^2x - d(z-1)^3 = 0. \end{array} \right.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von (5) und (2) erhält man zur Bestimmung der sieben Größen $\beta; m, n;$

a, b, c, d und eines Proportionalitätsfaktors σ , mit welchem (2) bei der Vergleichung von (2) und (5) multipliziert wird, neun Gleichungen, welche sich auf die folgenden sieben reduzieren:

$$\begin{aligned}\sigma &= a \\ \sigma A &= -b + m^2 \\ \sigma B &= +c - 2\beta m \\ \sigma C &= -d + \beta^2 \\ \sigma D &= -c + 2mn \\ \sigma E &= +2d - 2\beta n \\ \sigma F &= -d + n^2.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}\beta &= \varrho(2C + E) \\ m &= -\varrho(B + D) \\ n &= -\varrho(E + 2F) \\ \sigma &= 4\varrho^2(C + E + F) \\ a &= 4\varrho^2(C + E + F) \\ b &= -4\varrho^2 A(C + E + F) + \varrho^2(B + D)^2 \\ c &= -4\varrho^2 D(C + E + F) + 2\varrho^2(B + D)(E + 2F) \\ d &= -4\varrho^2 F(C + E + F) + \varrho^2(E + 2F)^2,\end{aligned}$$

wo ϱ eine neue, willkürlich bleibende Größe ist. Aus (1) wird damit

$$y^2 = \varrho^2 \{ 4(C + E + F)(x^3 - Ax^2 - Dx - F) + [(B + D)x + (E + 2F)]^2 \}.$$

Man kann also jede Kurve (2) in unendlich viele Kurven (1) projizieren. Die Größe $C + E + F$ kann nicht Null sein, weil sonst der Punkt $(0, 1)$ der xz -Ebene auf dem Kegelschnitt $Ax^2 + Bxz + \dots + F = 0$ liegen würde, also die Kurve (2) in diesem Punkt $(0, 1)$ keinen Wendepunkt, sondern einen Doppelpunkt hätte.

Der Beweiskgang versagt nur dann, wenn die Kurve (2) ihren reellen Wendepunkt nicht im Punkt $(0, 1)$, son-

dem im Unendlichen hat. Man kann dann diesen unendlich fernen Wendepunkt durch Drehung in die Richtung der z -Achse bringen, so daß an Stelle von (2) die Gleichung tritt

$$(2') \quad x^3 + Ax^2 + Bxz + Cz^2 + Dx + Ez + F = 0.$$

Die Kurve (2') läßt sich parallel der y -Achse auf eine Ebene $y = px + qz + r$ projizieren und diese Projektion parallel der z -Achse in eine Kurve (1), wie die Koeffizientenvergleichung von (2') und

$$(5') \quad -(px + qz + r)^2 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

zeigt. Die Kurve (5') ist die (x, z) -Projektion der Schnittkurve des durch (1) gehenden Zylinders parallel der z -Achse mit der Ebene $y = px + qz + r$.

IV. Projektive Erzeugung von Kurven dritter Ordnung.

Bekanntlich lassen sich die Kegelschnitte erzeugen als geometrischen Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente zweier projektiver Strahlenbüschel

$$(*) \quad \begin{cases} G_1 + \lambda G_2 = 0 \\ G_3 + \lambda G_4 = 0 \end{cases},$$

wobei man das Erzeugnis durch Elimination des Parameters λ aus den beiden Gleichungen (*) in der Form $G_1 G_4 - G_2 G_3 = 0$ erhält.

Ebenso ergeben sich die *Kurven dritter Ordnung als Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente eines Strahlenbüschels und eines dazu projektiven Kegelschnittbüschels*. Ist das Strahlenbüschel durch die Gleichung

$$(1) \quad G_1 + \lambda G_2 = 0$$

und das Kegelschnittbüschel durch die Gleichung

$$(2) \quad K_1 + \lambda K_2 = 0$$

dargestellt, so erhält man als Erzeugnis der beiden projektiven Gebilde durch Elimination von λ aus den beiden Gleichungen (1) und (2)

$$(3) \quad G_1 K_2 - G_2 K_1 = 0.$$

Diese Kurve dritter Ordnung geht durch die vier Grundpunkte $\begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = 0 \end{cases}$ des Kegelschnittbüschels und durch den Mittelpunkt $\begin{cases} G_1 = 0 \\ G_2 = 0 \end{cases}$ des Strahlenbüschels.

Da in der Gleichung (3) 14 Konstanten enthalten sind, in der allgemeinen Gleichung der Kurve dritter Ordnung jedoch nur neun, so läßt sich vermuten, daß die Gleichung jeder Kurve dritter Ordnung in die Form (3) gebracht werden kann, und dies ist wirklich der Fall.

§ 16. Einteilung der Kurven dritter Ordnung.

Die Klassifikation der C_3 ist ein seit Newton vielfach behandeltes Problem. Weil diese Einteilungen von verschiedenen Gesichtspunkten aus unternommen wurden, sind sie sehr ungleich ausgefallen. Im allgemeinen wird ein Einteilungsprinzip für um so besser gehalten, je kleiner die Zahl der Gattungen und Arten der Kurven wird und je weniger Willkürlichkeiten bei seiner Aufstellung in Betracht kommen. Newton hat in seiner *Enumeratio* weniger eine Einteilung der C_3 geben wollen, als vielmehr nur eine Aufzählung der verschiedenen Arten. Euler, Cramer und Plücker legten ihrer Einteilung nach dem Vorgang Newtons das Verhalten der Kurve im Unendlichen zugrunde. So erhält Euler 16 Gattungen, Cramer 14 und Plücker deren 19, aus denen er 219 Arten ableitet.

I. Die Einteilung nach Klasse und Geschlecht.

Nach Cayley sollte sich die Einteilung der C_3 auf der Grundlage der Projektivität aufbauen. Mit der Ordnung einer Kurve ist durch die Plückerschen Formeln die *Klasse* eng verbunden, die nach dem Dualitätsprinzip ein der Ordnung einer Kurve gleichartiger Begriff ist. Bei der Projektion einer Kurve bleibt offenbar die Klasse wie die Ordnung erhalten; zwei Kurven derselben Klasse sind aber nicht immer ineinander projizierbar (vgl. z. B. die Dreiecks- und Viereckskurve dritter Ordnung S. 70). Die Einteilung nach der Klasse ist also keine projektive.

Nach der Tabelle auf S. 58 lassen sich die Kurven dritter Ordnung in drei Gattungen einteilen:

- a) Kurven dritter Ordnung sechster Klasse;
- b) „ „ „ vierter „ ;
- c) „ „ „ dritter „ .

Die *Kurven dritter Ordnung sechster Klasse* (C_3^6) sind Kurven *ohne vielfachen Punkt*; man bezeichnet sie deshalb als *allgemeine oder nichtsinguläre* C_3 .

Die *Kurven dritter Ordnung vierter Klasse* (C_3^4) besitzen einen *Doppelpunkt*, der Selbstschnitt der Kurve (eigentlicher Doppelpunkt) oder isolierter Punkt sein kann.

Die *Kurven dritter Ordnung dritter Klasse* (C_3^3) zeichnen sich durch einen *Rückkehrpunkt* (Spitze erster Art) aus.

Dies ist auch zugleich eine Einteilung nach dem *Geschlecht*.

Die nichtsingulären C_3 sind vom Geschlecht 1 (elliptische Kurven dritter Ordnung)*), die singulären C_3 (Kur-

*) Durch passende Koordinatentransformation läßt sich die Gleichung der Kurve auf die Form bringen:

ven mit Doppel- oder Rückkehrpunkt) vom Geschlecht 0 (rationale Kurven dritter Ordnung).

II. Die Einteilung nach der Gestalt.

Die nichtsinguläre C_3 hat zwei verschiedene Grundformen: Die eine Grundform ist *einteilig* und besteht aus

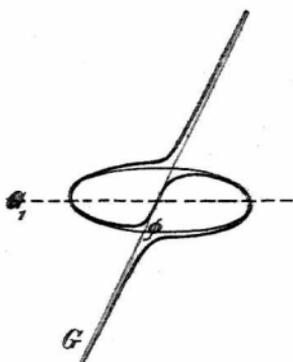


Fig. 16.

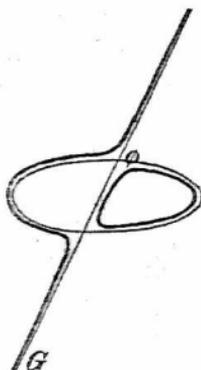


Fig. 17.

einem unpaaren Zug mit drei Wendepunkten (Fig. 16); die andere Grundform (Fig. 17) ist *zweiteilig* und besteht

Mit

erhalten wir

$$y = x(y - x)(k^2 y - x).$$

$$\varrho x = \lambda, \quad \varrho y = \lambda^3$$

$$\varrho = \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2 \lambda^2)}$$

Setzt man nun $\lambda = \operatorname{sn} u$, wo

$$u = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2 \lambda^2)}},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u},$$

so hat man

$$\varrho x = \operatorname{sn} u, \quad \varrho y = \operatorname{sn}^3 u, \quad \varrho = \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u.$$

Diese Gleichungen sind eine parametrische Darstellung der Kurve durch *elliptische Funktionen*, womit die Bezeichnung *elliptische Kurve* dritter Ordnung erklärt ist.

aus einem ebenfalls unpaaren Zug in Gemeinschaft mit einem paaren Zug ohne Wendepunkt (Oval). Beide Grundformen lassen sich durch Deformation einer zerfallenden Kurve dritter Ordnung erhalten. Stellt $\Phi = 0$ einen Kegelschnitt, $G = 0$ und $G_1 = 0$ Geraden, ferner k eine genügend klein zu nehmende Konstante dar, so liefert die Gleichung

$$\Phi \cdot G + k = 0$$

eine zweizügige C_3 mit $G = 0$ als Wendeasymptote (Fig. 17), die Gleichung

$$\Phi G + k G_1 = 0$$

eine einzügige C_3 mit $G = 0$ als Asymptote (Fig. 16).

Die einteilige nichtsinguläre C_3 (Fig. 18, a) entsteht aus der singulären Kurve mit Doppelpunkt durch „Verbinden am Knoten“, die zweiteilige C_3 (Fig. 18, b) durch „Trennen am Knoten“. Stellt $f = 0$ eine singuläre C_3 dar, so gibt die Gleichung $f + k = 0$ den Fall a, bzw. b, je nach dem Vorzeichen der Konstanten k .

Im ganzen hat man bei der Einteilung nach der Gestalt *fünf Gattungen von Kurven dritter Ordnung*:

1. die einzügige Kurve dritter Ordnung (nichtsinguläre C_3 ohne Oval);
2. die zweizügige Kurve dritter Ordnung (nichtsinguläre C_3 mit Oval);

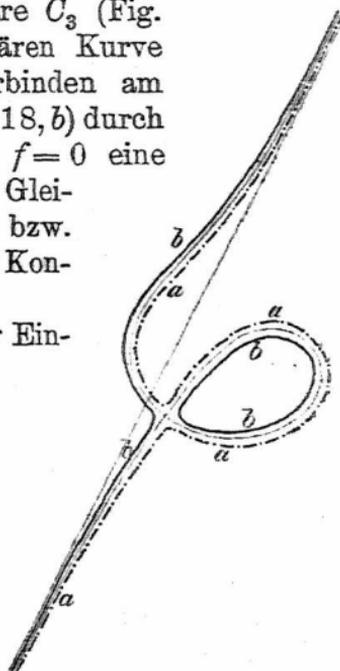


Fig. 18

- | | |
|---|-----------------------|
| 3. die Kurve dritter Ordnung mit reellem Doppelpunkt (Selbstschnitt); | } (Rationale C_3 .) |
| 4. die Kurve dritter Ordnung mit isoliertem Doppelpunkt; | |
| 5. die Kurve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt | |

Dies ist die Fünfteilung von Newton.

Die Gattung 1. enthält im ganzen drei Arten. Zieht man die drei Wendetangenten, welche die einteilige Kurve

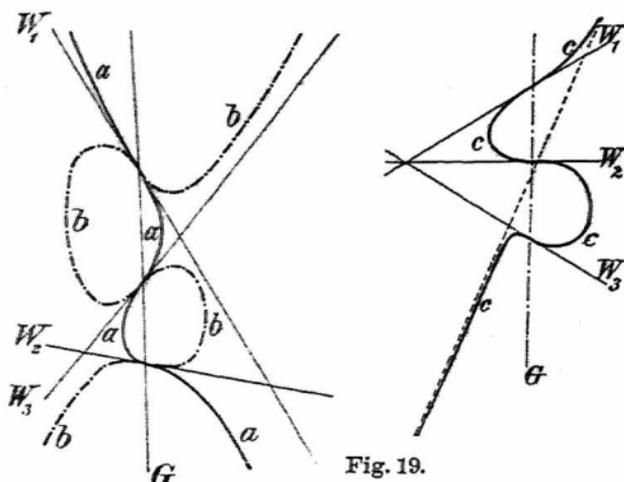


Fig. 19.

besitzt, so teilen diese und die Verbindungsgerade der drei Wendepunkte die Ebene in elf Felder, welche vier Dreiecke und drei Vierecke bilden und wir erhalten folgende drei Arten (Fig. 19a, b, c):

- Die Kurve verläuft innerhalb von drei Dreiecken (Dreieckskurve);
- die Kurve verläuft innerhalb von drei Vierecken (Viereckskurve);
- die drei Wendetangenten gehen durch denselben Punkt (Übergangskurve).

Damit hätten wir eine *Siebenteilung*, die zuerst Möbius angegeben hat.

Die Kurvengleichung hat in den letzten drei Fällen die Form

$$W_1 W_2 W_3 + \lambda G^3 = 0,$$

wo $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, $W_3 = 0$ die Gleichungen der Wendetangenten in den drei reellen Wendepunkten sind und $G = 0$ die Gerade ist, auf welcher jene drei Wendepunkte liegen (vgl. S. 61).

III. Die Newtonsche Einteilung.

Newton geht von der auf S. 62 ff. behandelten Grundform aus:

$$(1) \quad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Aus ihr lassen sich ebenfalls fünf, bzw. sieben verschiedene Kurvenformen II ableiten.

Zerlegt man die rechte Seite von (1) in ihre linearen Faktoren, so daß Gleichung (1) die Form annimmt

$$y^2 = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$

so können wir mit Newton fünf Hauptfälle unterscheiden (Fig. 20):

I. *Alle Wurzeln sind reell und verschieden* und zwar sei $\alpha < \beta < \gamma$. Die Kurve besteht aus einem *Oval* und einem sich *ins Unendliche erstreckenden Zweig*; die unendlich ferne Gerade ist Wendetangente: *Zweizügige Kurve*. (Parabola campaniformis cum ovali*.)

II. *Alle Wurzeln sind reell und zwei sind gleich*: $\beta = \gamma > \alpha$. Die beiden Kurvenzweige vereinigen sich in einem Knoten: *Kurve mit Doppelpunkt*. (Parabola nodata.)

*) Die in Klammer stehenden lateinischen Namen stammen von Newton.

III. *Alle Wurzeln sind reell und zwei sind gleich:* $\alpha = \beta < \gamma$. Das Oval des Falles I zieht sich auf einen isolierten Punkt zusammen: *Kurve mit isoliertem Punkt.* (Parabola punctata.)

IV. *Eine Wurzel (α) ist reell, die beiden andern sind konjugiert imaginär.* Diese Kurve entsteht aus der vorigen Form, wenn der isolierte Punkt verschwindet: *Einzügige Kurve.* (Parabola pura.)

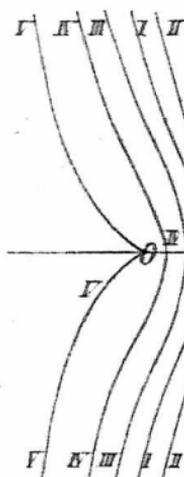


Fig. 20.

V. *Alle drei Wurzeln sind gleich* $\alpha = \beta = \gamma$: *Kurve mit Spitze.* (Parabola cuspidata.)

Wie schon früher S. 70), lassen sich bei der einzügigen Kurve drei Gattungen unterscheiden.

Hat die Kurvengleichung die Form

$$y^2 = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$

so kann die Zahl der höchsten und tiefsten Punkte (Kulminationspunkte) als Unterscheidungsmerkmal genommen werden.

Beträgt die Zahl dieser Punkte $\left. \begin{array}{l} 4 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right\}$, so ist die Kurve eine

Viereckskurve (Fall b S. 70) }
 Übergangskurve (Fall c S. 70) }
 Dreieckskurve (Fall a S. 70) }

Analytisch ist dieser Entscheid aus folgender Entwicklung zu entnehmen.

Sei

$$f \equiv a(x - \alpha)(x^2 + px + q) - y^2 = 0$$

die Gleichung der Kurve mit der Bedingung $p^2 - 4q < 0$.

Dann werden die Abszissen der Kulminationspunkte geliefert durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = 3x^2 - 2(p - \alpha)x + (q - p\alpha).$$

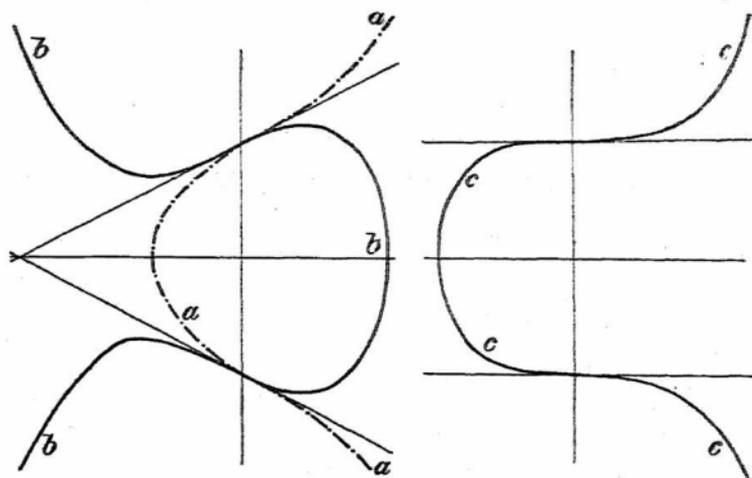


Fig. 21.

Ist nun die Diskriminante dieser in x quadratischen Gleichung

$$p^2 + \alpha p + \alpha^3 - 3q \geq 0,$$

so ist die Kurve eine

Vierecks-	} kurve dritter Ordnung	(Fig. 21, b)
Übergangs-		(Fig. 21, c).
Dreiecks-		(Fig. 21, a)

Damit haben wir also eine Siebenteilung der Kurven dritter Ordnung, welche nach § 15, III projektiv ist.

§ 17. Rationale und zirkulare Kurven dritter Ordnung.

Alle Kurven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder einem Rückkehrpunkt nennt man auch rationale C_3 . Legt man nämlich durch diesen Punkt einen Strahlenbüschel vom Parameter λ , so lassen sich die Koordinaten x und y eines beliebigen Kurvenpunkts auf dem S. 52 angegebenen Wege als rationale Funktionen von λ darstellen.

Zirkulare C_3 sind solche Kurven dritter Ordnung, deren Gleichung auf die Form gebracht werden kann

$$(1) \quad (\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) + (a_1 x^2 + 2 b_1 x y + c_1 y^2 + d_1 x \omega + e_1 y \omega + f_1 \omega) \omega = 0.$$

Jede zirkulare C_3 geht durch die zyklischen Punkte $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$ und hat eine reelle Asymptote parallel zur Geraden $\alpha x + \beta y = 0$.

Nehmen wir diese Gerade zur x' -Achse und die dazu im Ursprung senkrechte Gerade zur y' -Achse, so erhält man die Gleichung der Kurve im $(x' y')$ -System mittels der Transformationsformeln

$$x = -\frac{\alpha x' + \beta y'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad y = \frac{\beta x' + \alpha y'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

in der Form

$$y'(x'^2 + y'^2) + a_2 x'^2 + 2 b_2 x' y' + c_2 y'^2 + d_2 x' + e_2 y' + f_2 = 0,$$

wo $f_1 = f_2$ ist oder, wenn wir statt x' , y' wieder x und y schreiben

$$(2) \quad y(x^2 + y^2) + a_2 x^2 + 2 b_2 x y + c_2 y^2 + d_2 x + e_2 y + f_2 = 0.$$

Die beiden zu $x + i y = 0$ und $x - i y = 0$ parallelen imaginären Asymptoten haben die Gleichungen

$$x = \pm iy - b_2 \pm \frac{i}{2}(c_2 - a_2),$$

also einen reellen Schnittpunkt mit den Koordinaten

$$x = -b_2, \quad y = \frac{a_2 - c_2}{2},$$

den *außerordentlichen Brennpunkt* oder das Zentrum der Kurve*).

Nehmen wir diesen Punkt unter Beibehaltung der Achsenrichtung als Koordinatenanfang, ersetzen also x und y durch

$$x - b_2 \quad \text{und} \quad y + \frac{a_2 - c_2}{2},$$

so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$(3) \quad (y + a)(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0.$$

Aus der homogenen Form der Gleichung folgt, daß $y + a = 0$ Asymptote ist. Diese schneidet die Kurve in dem Punkt

$$x = \frac{ac - d}{b}, \quad y = -a.$$

Dieser Punkt wird der *Hauptpunkt* der Kurve genannt.

Die Gleichung (3) können wir ersetzen durch das simultane System der beiden Gleichungen

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - r^2 = 0 \\ (y + a)(r^2 + c) + b \left(x - \frac{ac - d}{b} \right) = 0 \end{array} \right\},$$

wo r ein willkürlicher Parameter ist. Aus diesem

*) *Brennpunkte* einer Kurve nennt man die *Schnittpunkte* der aus den *imaginären Kreispunkten*

$$\left\{ \begin{array}{l} x \pm iy = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$$

Gleichungssystem folgt: *Jede zirkuläre Kurve dritter Ordnung ist Ort der Schnittpunkte eines Strahlenbüschels durch den Hauptpunkt und eines um den außerordentlichen Brennpunkt beschriebenen, zu jenem projektiven Büschels konzentrischer Kreise.* (Deshalb heißt der außerordentliche Brennpunkt auch Zentrum.)

Ist die zirkuläre C_3 symmetrisch in bezug auf eine Achse, z. B. die y -Achse, so lautet nach (2) ihre Gleichung, wenn der Schnittpunkt mit der Achse Koordinatenursprung ist:

$$(5) \quad y(x^2 + y^2) + ax^2 + by^2 + cy = 0.$$

Der Übergang zu Polarkoordinaten liefert

$$\rho^2 + \rho \frac{a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi}{\sin \varphi} + c = 0.$$

Sind ρ_1 und ρ_2 die Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$\rho_1 \rho_2 = c,$$

d. h. die Kurve (5) wird durch eine Inversion mit der Potenz c und dem Ursprung, also dem außerordentlichen Brennpunkt, als Inversionszentrum in sich selbst transformiert*).

Alle diejenigen Kurven, die durch eine Inversion in sich selbst transformiert werden können, haben nach dem Vorschlag von Moutard die Bezeichnung *anallagmatische Kurven* erhalten (α privans und $\alpha\lambda\lambda\alpha\tau\omega$ = ich ändere).

an die Kurve gezogenen Tangenten. Die vier Brennpunkte der Kegelschnitte, von denen nur zwei reell sind, genügen dieser Definition.

*) Die *Inversion* oder die *Transformation durch reziproke Radien* ordnet zwei auf demselben Strahl durch das Inversionszentrum O gelegene Punkte P_1 und P_2 einander derart zu, daß die Beziehung besteht:

$$OP_1 \cdot OP_2 = c \quad \text{oder} \quad \rho_1 \rho_2 = c.$$

Der Kreis um O mit Radius \sqrt{c} heißt *Inversionskreis*; dieser ist bei negativem c imaginär.

Die rationalen zirkulären Kurven dritter Ordnung lassen sich mittels Transformation durch reziproke Radien aus einem Kegelschnitt K ableiten, wenn das In-

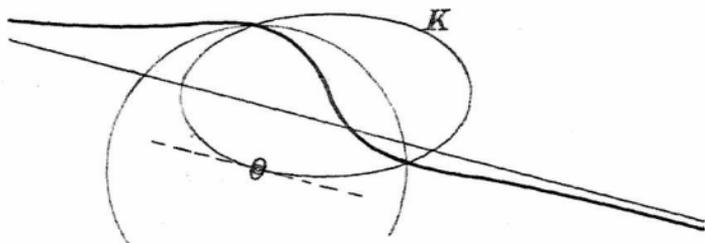


Fig. 22a.

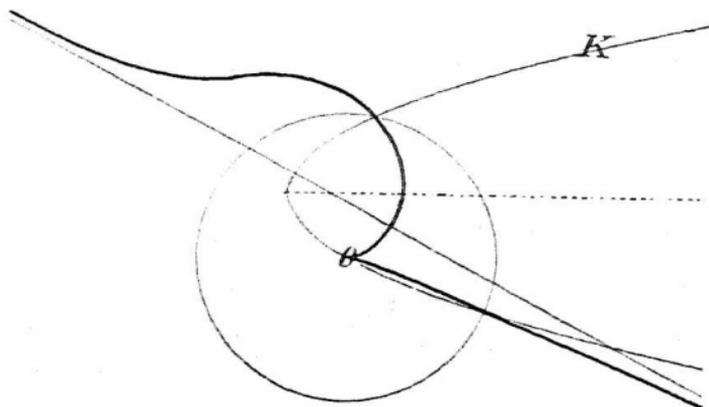


Fig. 22b.

versionszentrum auf K liegt. Ein beliebiger Kegelschnitt, welcher durch den Ursprung geht und in ihm die y -Achse zur Tangente hat, ist dargestellt durch die Gleichung

$$(1) \quad K \equiv ax^2 + bxy + cy^2 + x = 0$$

oder in Polarkoordinaten (ρ', φ)

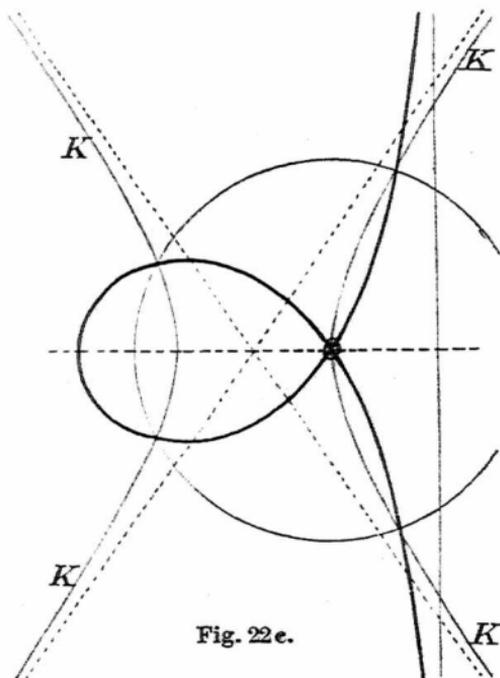
$$\rho'(a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) + \cos \varphi = 0.$$

Mit der Gleichung

$$(2) \quad \rho \rho' = r^2,$$

die diese Transformation herstellt, folgt daraus für die gesuchte inverse Kurve

$$(3) \quad \rho \cos \varphi + r^2 (a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) = 0$$



oder in Punktkoordinaten

$$(4) \quad x(x^2 + y^2) + r^2(ax^2 + bxy + cy^2) = 0.$$

Gleichung (4) stellt eine rationale, zirkulare Kurve dritter Ordnung dar mit einer Asymptote parallel der Nullpunktstangente von K und dem Ursprung (In-

versionszentrum) O als Doppelpunkt. Dieser ist ein isolierter Punkt
 Rückkehrpunkt } , je nachdem $b^2 - 4ac \leq 0$, d. h. K eine
 Doppelpunkt

Ellipse }
 Parabel } ist (Fig. 22 a, b, c).
 Hyperbel }

Außerdem erhalten wir *rationale zirkuläre* C_3 als *Fußpunktkurven der Parabel*, d. h. als geometrischen Ort der Fußpunkte der Lote, die von einem festen Punkt, dem Pol, auf sämtliche Tangenten der Parabel gefällt werden.

Die Parabel habe die Gleichung $y^2 = 2px$ und der Pol O die Koordinaten a und b .

Die Gleichung einer beliebigen Parabeltangente lautet:

$$y = mx + \frac{p}{2m},$$

und das Lot auf sie durch den Punkt (a, b)

$$y - b = -\frac{1}{m}(x - a).$$

Wird aus diesen beiden Gleichungen m eliminiert, so erhalten wir als Gleichung der Fußpunktkurve der Parabel

$$2(x - a)(x^2 + y^2) - 2(ax + by)(x - a) + p(y - b)^2 = 0.$$

Aus der Gleichung dieser Kurve in der Form

$$2y(x - a)(y - b) + 2x(x - a)^2 + p(y - b)^2 = 0$$

oder

$$2(x - a)[y(y - b) + x(x - a)] + p(y - b)^2 = 0$$

ersehen wir, daß sie den Pol (a, b) als *Doppelpunkt* und

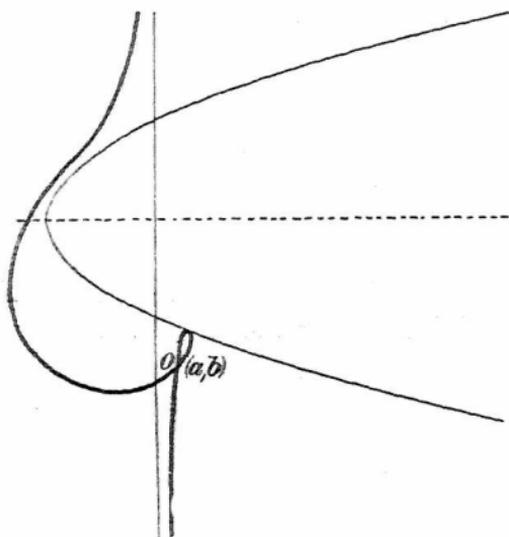


Fig. 23 a.

eine Asymptote parallel $x - a = 0$ hat mit der Gleichung

$$x = a - \frac{p}{2}.$$

Bringen wir durch Koordinatenverschiebung den Pol in den Ursprung, ersetzen also in der Kurvengleichung $x - a$ und $y - b$ durch x und y , so erhalten wir die Gleichung

$$x(x^2 + y^2) + ax^2 + bxy + \frac{p}{2}y^2 = 0,$$

welche die Form der Gleichung (4) hat.

Wir haben somit den Satz:

Die Fußpunktkurve der Parabel ist eine rationale zirkulare Kurve dritter Ordnung mit dem Pol als Doppelpunkt und ihrer Asymptote parallel zur y-Achse. Der

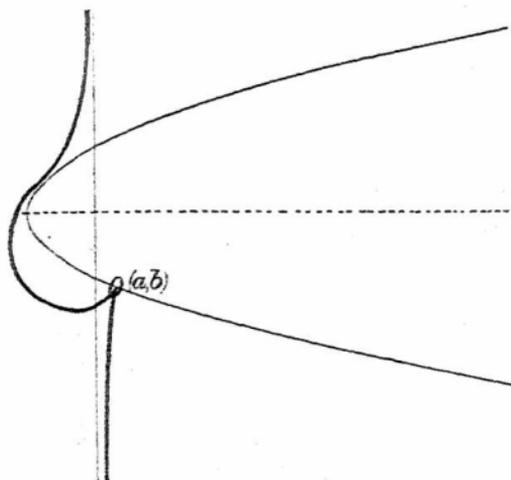


Fig. 23b.

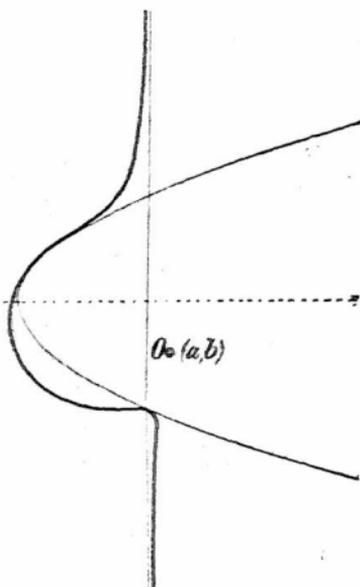


Fig. 23c.

wirklicher Doppel-
Doppelpunkt ist ein Rückkehr-
isolierter Doppel- } *punkt, je nach-*
außerhalb } *dem der Pol auf* } *der Parabel liegt (Fig. 23 a, b, c).*
innerhalb }

5. Abschnitt.

Kurven vierter Ordnung.

§ 18. Plückers Form der Kurvengleichung.

Die allgemeine Gleichung einer Kurve vierter Ordnung enthält $\frac{1}{2}n(n+3) = 14$ unabhängige Konstanten (vgl. S. 59, Anm.). Hat die Kurve ein, zwei oder drei Doppelpunkte, so vermindert sich die Zahl der Konstanten auf 13 bzw. 12 oder 11. Die Gleichung der allgemeinen C_4 kann in zwei quadratische, einen kubischen und einen linearen, einen quadratischen und zwei lineare oder in vier lineare Faktoren zerfallen. Dem entspricht geometrisch ein Zerfallen der C_4 in zwei Kegelschnitte, in eine Kurve dritter Ordnung und eine Gerade, in einen Kegelschnitt und zwei Gerade oder in vier Gerade.

*Plücker**) hat zuerst gezeigt, daß die Gleichung einer Kurve vierter Ordnung ohne mehrfache Punkte auf die Form gebracht werden kann

$$(1) \quad G_1 G_2 G_3 G_4 = \lambda \Phi^2,$$

dabei sind $G_i = 0$ Geraden und $\Phi = 0$ ein Kegelschnitt. Aus (1) folgt, daß die G_i *Doppeltangenten erster Art* sind (vgl. S. 47), wenn ihre vier Schnittpunkte außerhalb Φ liegen und daß Φ ein durch die acht Berührungspunkte dieser Doppeltangenten gehender Kegelschnitt ist. Für die

*) J. Plücker, *Algebraische Kurven*, Bonn 1839, S. 228; vgl. auch Wieleitner I, S. 266 ff.

allgemeine C_4 bedingt jede Doppeltangente erster Art zwei reelle Wendepunkte (vgl. Fig. 8). Man hat also die

Sätze: *Die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten erster Art liegen auf einem Kegelschnitt. Die nichtsinguläre Kurve vierter Ordnung hat vier Doppeltangenten erster Art und doppelt so viel reelle Wendepunkte.*

Da man zeigen kann, daß die Maximalzahl der Doppeltangenten erster Art = 4 ist*), so gilt der weitere

Satz: *Unter den 24 Wendepunkten, die eine allgemeine nichtsinguläre Kurve vierter Ordnung hat**), sind höchstens acht reell.*

Geht der Kegelschnitt Φ durch einen Schnittpunkt zweier der Geraden G_i , so hat die C_4 in diesem Punkt einen Doppelpunkt. Wir haben also den

Satz: *Geht der Kegelschnitt Φ der durch die Gleichung $\prod_{i=1}^4 G_i + \lambda \Phi^2 = 0$ dargestellten C_4 durch 2 } Schnittpunkte von je zweien der Geraden G_i , so hat die C_4 1 }
2 } Doppelpunkte.
3 }*

Geht der Kegelschnitt Φ durch vier Schnittpunkte der Geraden G_1, G_2, G_3, G_4 , so zerfällt die C_4 in zwei Kegelschnitte, die selbst wieder einzeln oder beide in Geradenpaare zerfallen können, da jetzt vier Doppelpunkte auftreten. Diese sind die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte bzw. der Geradenpaare.

*) Vgl. Wieleitner I (L. V. 13), S. 265.

**) Vgl. die Tabelle auf S. 91.

§ 19. Höhere Singularitäten bei Kurven vierter Ordnung.

Wie wir schon früher erwähnt haben (S. 53), kommen höhere Singularitäten erst bei den Kurven vierter Ordnung vor. Um nun die hier möglichen Fälle zu erläutern, nehmen wir an, daß der Ursprung ein Doppelpunkt sei, dessen beide Tangenten mit der y -Achse zusammenfallen. Dann lautet die Gleichung der Kurve:

$$y^2 = \widetilde{f_3}(x, y) + \widetilde{f_4}(x, y),$$

wo

$$\widetilde{f_3}(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3,$$

$$\widetilde{f_4}(x, y) = ex^4 + fx^3y + gx^2y^2 + hxy^3 + ky^4.$$

Je nachdem wir die Koeffizienten a, b, c, \dots, k bestimmten Bedingungen unterwerfen, erhalten wir verschiedene Singularitäten. Ist a nicht Null, so liefert uns das analytische Dreieck (Alg. K. I, S. 117 ff.) im Ursprung die Näherungskurve*)

$$y^2 = ax^3,$$

d. h. die Kurve hat im Ursprung einen Rückkehrpunkt, also keine höhere Singularität. Damit solche auftreten können, muß notwendig $a = 0$ sein.

1. Mit $a = 0$ erhalten wir als Näherungskurven zwei Parabeln, deren Gleichungen die Form haben:

$$y = m_1 x^2, \quad y = m_2 x^2,$$

und die C_4 hat folgende Gleichung:

$$(y - m_1 x^2)(y - m_2 x^2) = cxy^2 + dy^3 + fx^3y + gx^2y^2 + hxy^3 + ky^4;$$

*) Die hier und im folgenden auszuführenden Rechnungen müssen wir aus Mangel an Raum dem Leser überlassen.

die Kurve hat im Ursprung einen *Selbstberührungspunkt* oder einen *Berührungsknoten*. Sind m_1 und m_2 gleichzeitig }
 ungleichzeitig } , so liegen beide Kurvenzweige auf
 derselben }
 verschiedenen } Seiten der y -Achse.

Beispiele: Von den zahlreichen speziellen Kurven vierter Ordnung mit einem Selbstberührungspunkt führen wir nur einige wenige an.

1. **Die Kappakurve.** Man beschreibt über der beliebig gewählten Strecke OA (Fig. 24) als Durchmesser den Kreis und

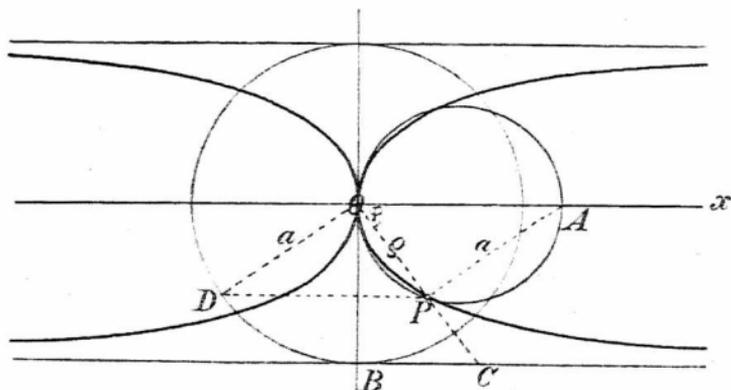


Fig 24.

trägt die konstante Strecke $AP = a$ als Sehne ein. Die Punkte P beschreiben bei veränderlichem OA die Kappakurve, deren Gleichung lautet

$$(x^2 + y^2)y^2 = a^2 x^2.$$

Aus der Polargleichung $\varrho = a \operatorname{ctg} \varphi$ folgt die Konstruktion: Beschreibe um O mit Radius $OB = a$ einen Kreis, ziehe einen beliebigen Radius OD , $OP \perp OD$ und $DP \perp OB$. Dann ist P ein Punkt der Kappakurve. Der Ursprung ist Selbstberührungspunkt mit $x = 0$ als Tangente; die Geraden $y \pm a = 0$ sind Asymptoten (Tangenten im Doppelpunkt $\left\{ \begin{matrix} y = 0 \\ \omega = 0 \end{matrix} \right\}$).

2. Die Jerabeksche Kurve. Auf dem Radius $OA = a$ eines Kreises (Fig. 25) liegt Punkt B im Abstand b vom Ursprung O . Ist OC ein beliebiger Radius des Kreises und $BP \perp BC$, so ist P ein Punkt der Kurve mit der Gleichung (OA ist x -Achse)

$$a^2(x^2 + y^2 - bx)^2 + b^2(x^2 + y^2)(x - b)^2 = 0.$$

Der Punkt B ($x = b, y = 0$) ist Selbstberührungspunkt.

3. Die K\"ulpsche Konchoide. Gegeben ein fester Kreis mit Radius $OA = a$ und die Tangente in A . Ein beliebiger Radius OC schneidet die Tangente in D .

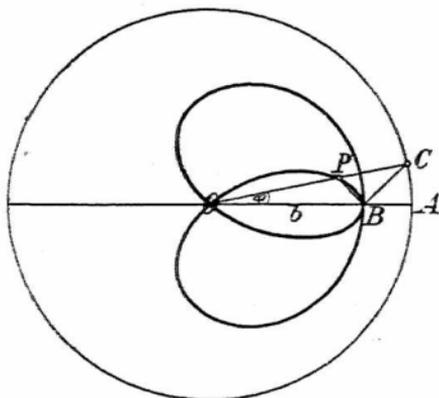


Fig. 25.

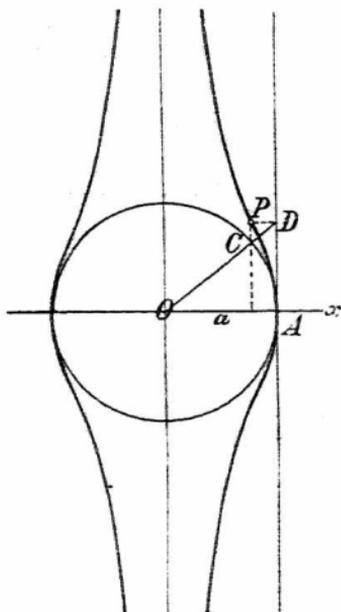


Fig. 26.

Ist $DP \parallel AO$ und $CP \perp OA$, so ist P ein Punkt der Kurve (Fig. 26). Ihre Gleichung lautet

$$x^2 y^2 + a^2(x^2 - a^2) = 0;$$

die Kurve hat den Punkt $(x = 0, y = 0)$ als (unendlich fernem) Selbstberührungspunkt mit $x = 0$ als Tangente (Asymptote).

Da der Selbstberührungspunkt durch Zusammenfallen zweier Doppelpunkte entsteht, so kann die Kurve noch

einen dritten Doppelpunkt besitzen. Soll dieser z. B. im Punkt $\left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ \omega = 0 \end{matrix} \right\}$ liegen, so muß sein $c = d = h = k = 0$.

2. Ist $m_1 = m_2$, so ist die Kurvengleichung von der Form:

$$(y - m x^2)^2 = c x y^2 + d y^3 + f x^3 y + g x^2 y^2 + h x y^3 + k y^4.$$

Die Entwicklung gibt (nach der in Alg. K. I, S. 125 f. angegebenen Methode) für die Anfangsglieder

$$y = m x^2 \pm n x^{5/2}, \quad \text{wo } n \equiv \sqrt{m(f + 2cm)} \neq 0;$$

die Kurve hat im Ursprung eine *Schnabelspitze*. Auch hier kann noch ein weiterer Doppelpunkt wie vorhin auftreten.

Beispiel: Die Kurve $x^4 + x y^3 + y^4 - 2 x^2 y - x y^2 - 2 y^3 + y^2 = 0$ hat im Ursprung eine Schnabelspitze mit $y=0$ als Tangente und im Punkt einen Doppelpunkt (Fig. 27).

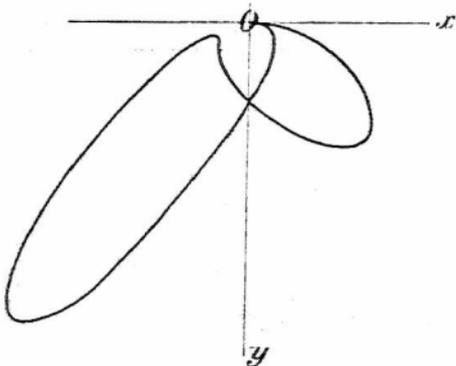


Fig. 27.

3. Ist $f + 2cm = 0$, so kann man die Gleichung in der Form schreiben

$$(y - m x^2 - c x y)^2 = d y^3 + l x^2 y^2 + h x y^3 + k y^4$$

und die Entwicklung lautet

$$y = m x^2 + m x^3 (c \pm \sqrt{m d + l}) + \dots$$

Die Gleichungen der beiden Näherungskurven im Ursprung haben die Form

$$(*) \quad \left. \begin{matrix} y = m x^2 + n_1 x^3 \\ y = m x^2 + n_2 x^3 \end{matrix} \right\}$$

Hieraus folgt, daß die Kurve im Ursprung zwei sich berührende und gleichzeitig schneidende Kurvenzweige hat: man nennt diese Singularität *Oskulationsknoten*. Bedingung für das Auftreten dieser Singularität ist also

$$\sqrt{m d + l} \neq 0.$$

Da die beiden Näherungskurven sich im Ursprung in drei zusammenfallenden Punkten schneiden (eliminiert man y aus den beiden Gleichungen (*)), so ergibt sich für die Abszissen der Schnittpunkte beider Kurven die

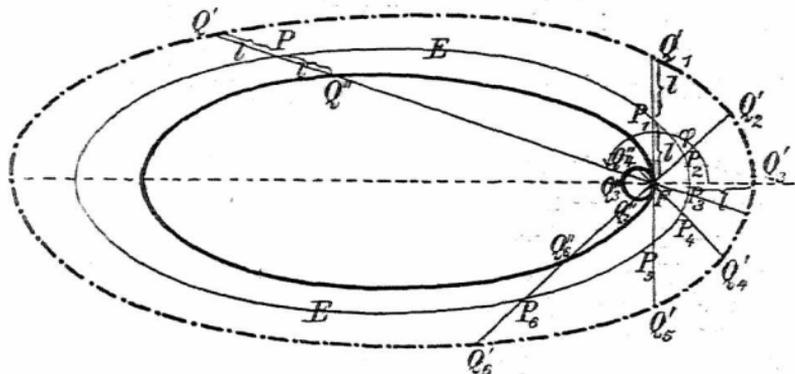


Fig. 28.

Gleichung $(n_1 - n_2)x^3 = 0$ oder $x^3 = 0$), so ist der Oskulationsknoten äquivalent drei Doppelpunkten.

Beispiel. Ziehen wir durch den Brennpunkt F einer Ellipse E mit der Polargleichung $\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$, auf den Brennpunkt als Pol und die große Achse als Polarachse bezogen, eine beliebige Gerade FP und tragen von P aus auf FP die konstante Strecke l (das „Zwischenstück“) ab bis Q' bzw. Q'' , so beschreibt Q die *Brennpunktskonchoide* der Ellipse, wenn P auf der Ellipse wandert (Fig. 28). Die Konchoide hat die

Gleichung $\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \pm l$ und zerfällt in zwei C_4 :

$$(x^2 + y^2 \mp \varepsilon l x)^2 = (x^2 + y^2)(p \pm l - \varepsilon x)^2.$$

Wird $l = p$, d. h. ist das Zwischenstück gleich der Ordinate der Ellipse im Brennpunkt, so wird F Oskulationsknoten für die im Innern der Ellipse verlaufende Kurve, deren Gleichung dann lautet

$$\varrho = -\frac{p \varepsilon \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{oder} \quad (x^2 + y^2 - \varepsilon p x)^2 = \varepsilon^2 x^2 (x^2 + y^2).$$

Der Oskulationsknoten unterscheidet sich für das Auge nicht vom Selbstberührungspunkt. Dagegen zeigt die Fig. 28, daß, wenn der Punkt P auf der Ellipse der Reihe nach die Lagen P, P_1, P_2, P_3, \dots einnimmt, die entsprechenden Punkte Q'' der Konchoide in die Lagen $Q'', F, Q''_2, Q''_3, \dots$ kommen: im Punkt F durchsetzen sich also die beiden Kurvenzweige so, daß FP_1 gemeinsame Tangente ist.

4. Wenn aber $md + l = 0$ ist, so läßt sich die Gleichung in der Form schreiben:

$$(y - mx^2 - cxy - d_1y^2)^2 = y^3(Ax + By)$$

und die Entwicklung lautet

$$y = mx^2 + cmx^3 \pm \sqrt{Am} \cdot x^{7/2} + \dots$$

Die Kurve hat im Ursprung eine *Berührungsknotenspitze*. Damit diese auftritt, muß notwendigerweise A von Null verschieden sein. Wäre $A = 0$, so hätte die C_4 die Gleichung

$$(y - mx^2 - cxy - d_1y^2)^2 = By^4,$$

aus der ersichtlich ist, daß dann die C_4 in zwei C_2 zerfallen würde. Eine höhere Singularität kann also bei Kurven vierter Ordnung nicht vorkommen.

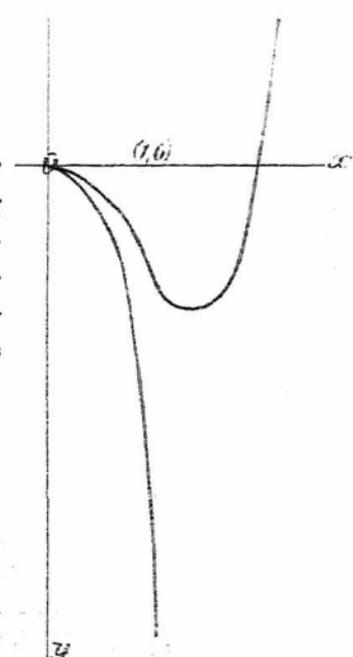


Fig. 29.

Die Gestalt der Berührungsknotenspitze zeigt die Fig. 29, welche die Kurve

$$y = x^2 + x^3 \pm x^{7/2}$$

darstellt. Diese Kurve, welche aber nicht vom vierten, sondern vom siebenten Grad ist, besitzt im Ursprung diese Singularität.

Um die Äquivalenzzahlen der Berührungsknotenspitze zu bestimmen, betrachten wir die Kurve

$$(y - x^2 - x^3)^2$$

$$= x^3(x - \varepsilon_1)^2(x - \varepsilon_2)^2,$$

welche mit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ in $y = x^2 + x^3 \pm x^{7/2}$ übergeht.

Die penultimate Kurve besitzt an Stelle der höheren Singularität einen Rückkehrpunkt, einen Wendepunkt, zwei Doppelpunkte und zwei Doppeltangenten (s. Fig. 30, wo $\varepsilon_1 = 0,5$ cm und $\varepsilon_2 = 1$ cm)*).

Wie die Figuren zeigen, ist im allgemeinen für das Auge ein Unterschied zwischen Schnabelspitze und Berührungsknotenspitze, wie auch zwischen Berührungsknoten und Oskulationsknoten nicht wahrzunehmen.

Außer diesen vier Singularitäten kann bei Kurven vierter

Ordnung noch der dreifache Punkt mit seinen drei

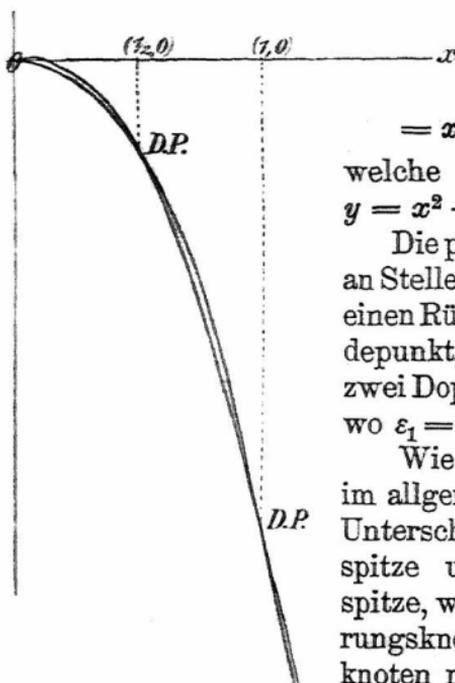


Fig. 30.

*) Um die Deutlichkeit der Figur nicht zu beeinträchtigen, sind die beiden Doppeltangenten nicht eingezeichnet worden.

Unterfällen auftreten, endlich noch der Flachpunkt und der Spitzpunkt*); bei Kurven vierter Ordnung sind also $4 + 3 + 2 = 9$ höhere Singularitäten möglich.

§ 20. Einteilung der Kurven vierter Ordnung.

I. Die Einteilung nach dem Geschlecht.

Mit Hilfe der *Plücker'schen Gleichungen* läßt sich folgende Tabelle anschreiben:

n	k	w	r	d	t	p
4	12	24	0	0	28	3
4	10	18	0	1	16	2
4	9	16	1	0	10	2
4	8	12	0	2	8	1
4	7	10	1	1	4	1
4	6	8	2	0	1	1
4	6	6	0	3	4	0
4	5	4	1	2	2	0
4	4	2	2	1	1	0
4	3	0	3	0	1	0

Teilen wir mit Rücksicht auf das *Geschlecht* ein, so erhalten wir vier Gattungen von Kurven vierter Ordnung:

I. Kurven vierter Ordnung vom Geschlecht $p = 3$ (allgemeine oder nichtsinguläre Kurven);

II. Kurven vierter Ordnung vom Geschlecht $p = 2$ (hyperelliptische Kurven)**) mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkt;

*) Vgl. Alg. K. I, S. 46, 49 und 82ff.

**) Diese Namen rühren daher, daß die Koordinaten eines Punktes dieser Kurve sich als hyperelliptische bzw. elliptische Funktionen eines Parameters darstellen lassen.

III. Kurven vierter Ordnung vom Geschlecht $p = 1$ (elliptische Kurven)*) mit zwei Doppelpunkten, von denen jeder in eine Spitze ausarten kann;

IV. Kurven vierter Ordnung vom Geschlecht $p = 0$ (rationale Kurven) mit drei Doppelpunkten, von denen jeder in eine Spitze ausarten kann.

Jede C_4 mit einer höheren Singularität kann vermöge ihrer Plücker'schen Äquivalente (vgl. S. 56) hier eingereiht werden.

II. Die Einteilung nach der Gestalt für die nicht-singulären Kurven vierter Ordnung.

Wie wir schon früher erwähnt haben**), unterscheidet man *paare* und *unpaare* Kurvenzüge. Jeden unpaaren Zug kann man sich durch Deformation einer Geraden, jeden paaren Zug durch eine solche eines Kegelschnitts entstanden denken. Ein unpaarer Zug wird von einer Geraden in einer ungeraden Zahl von Punkten geschnitten und hat mindestens drei Wendepunkte, im allgemeinen eine ungerade Anzahl; ein paarer Zug wird von einer Geraden in einer geraden Zahl von Punkten geschnitten und hat entweder keine oder eine gerade Anzahl von Wendepunkten. Jeder paare Zug mit zwei Wendepunkten gibt zu einer Einbuchtung und zur Bildung einer Doppeltangente erster Art Veranlassung (s. Fig. 8). Nach Zeuthen bezeichnet man einen paaren Zug mit einer Einbuchtung als *Unifolium*, mit zwei, drei, vier Einbuchtungen bzw. als *Bifolium*, *Trifolium*, *Quadrifolium*. Rücken die beiden Wendepunkte eines Unifoliums zusammen, so entsteht

*) Siehe Anmerkung **) auf S. 91.

**) *Beutel*, Alg. K. I, S. 21, wo Zeile 9 von unten statt „unpaar“ „paar“ stehen muß.

ein *Flachpunkt* und die Doppeltangente wird zur *Flachtangente*. So hat die Kurve $y = x^2(x^2 - \varepsilon^2)$ zwei Wendepunkte und eine Doppeltangente erster Art (s. Fig. 13); für $\varepsilon = 0$ rücken die Wendepunkte zusammen und wir erhalten die Flachparabel $y = x^4$. Verschwindet beim weiteren Übergang der Flachpunkt, so entsteht ein *Oval*; die Kurvengleichung lautet dann $y = x^2(x^2 + \varepsilon^2)$.

Soll die C_4 nichtsingulär sein, insbesondere keinen Doppelpunkt besitzen, so kann kein unpaarer Zug vorkommen. Ein unpaarer Zug einer C_4 wird von einer Geraden in einem oder in drei Punkten geschnitten und der zweite oder vierte Schnittpunkt mit der Kurve müßte auf einem zweiten unpaaren Zug liegen. Zwei unpaare Züge bestimmen aber einen Doppelpunkt, gehören also einer singulären C_4 an.

Eine Kurve vierter Ordnung kann aus höchstens vier paaren Zügen bestehen. Man kann nämlich einen Kegelschnitt so konstruieren, daß er durch je einen Punkt eines Zuges geht. Dann wird jeder Zug nochmals in je einem Punkt geschnitten, so daß die Gesamtzahl der Schnittpunkte 8 beträgt.

Jeder paare Zug teilt die Ebene in ein inneres und äußeres Gebiet. Liegt ein paarer Zug innerhalb eines zweiten (Fig. 32, VI), so kann der innere Zug keinen Wendepunkt haben, da die Tangente in diesem Punkt mit der C_4 dann $3 + 1 + 2 = 6$ Schnittpunkte hätte. Ferner kann kein weiterer paarer Kurvenzug vorhanden sein, da man sonst ebenfalls Gerade mit sechs Schnittpunkten bestimmen könnte. Denn jede Gerade, die den inneren Zug schneidet, hat mit diesem mindestens zwei Punkte gemein und ebenso mit dem äußeren paaren Zug; sie würde also von einem dritten paaren Kurvenzug in zwei weiteren Punkten geschnitten. Die Gesamtzahl der Schnittpunkte der

Geraden mit der C_4 wäre also $2 + 2 + 2 = 6$. Eine derartige C_4 mit zwei paaren Zügen heißt „Ringkurve“ oder „Gürtelkurve“.

Nach dem Vorgang von Zeuthen (Math. Ann. 7, S. 417 ff.) gründen wir die Einteilung auf die Gleichung

$$G_1 G_2 G_3 G_4 + \lambda \Phi^2 = 0.$$

Durch das Vierseit der Doppeltangenten erster Art wird die Ebene in vier Dreiecke und drei Vierecke eingeteilt. Nach dem Signierungsprinzip kann die Kurve entweder ganz innerhalb der Vierecke (*Viereckskurve*) oder ganz innerhalb der Dreiecke (*Dreieckskurve*) verlaufen. Nach der Lage der Schnittpunkte von Φ mit den vier Doppeltangenten erster Art in bezug auf das von diesen gebildete Vierseit ergeben sich 13 Fälle mit insgesamt 36 Typen für die allgemeine Kurve vierter Ordnung, deren Existenz Zeuthen nachweist und teilweise mit Figuren belegt.

Betrachten wir nur diejenigen Fälle, in denen sämtliche acht Schnittpunkte der vier Geraden G_i mit dem Kegelschnitt Φ , also auch die acht Wendepunkte reell sind, so erhalten wir vier Fälle mit neun Typen. Die übrigen 27 Typen ergeben sich hieraus ohne weiteres, da geringe Formänderungen hinreichen, um z. B. aus einem Unifolium ein Oval entstehen zu lassen. Auch kann jedes Oval verschwinden, wenn es beim Übergang durch die Form des isolierten Punktes hindurchgeht.

I. Φ trifft alle Seiten eines Vierecks:

1. Ringförmige Kurve: ein Quadrifolium, ein inneres Oval (Fig. 32, VI);
2. Viereckskurve: ein Quadrifolium, zwei Ovale*) (Fig. 31a);

*) Die im I. und III. Quadranten liegenden Kurvenzüge haben zwei Asymptoten, bilden also nur ein Oval, das von

3. Dreieckskurve: vier Unifolien (Fig. 31 b).

II. Φ trifft drei Seiten eines Vierecks und eine eines anderen Vierecks*):

4. Viereckskurve: ein Trifolium, ein Unifolium, ein Oval;

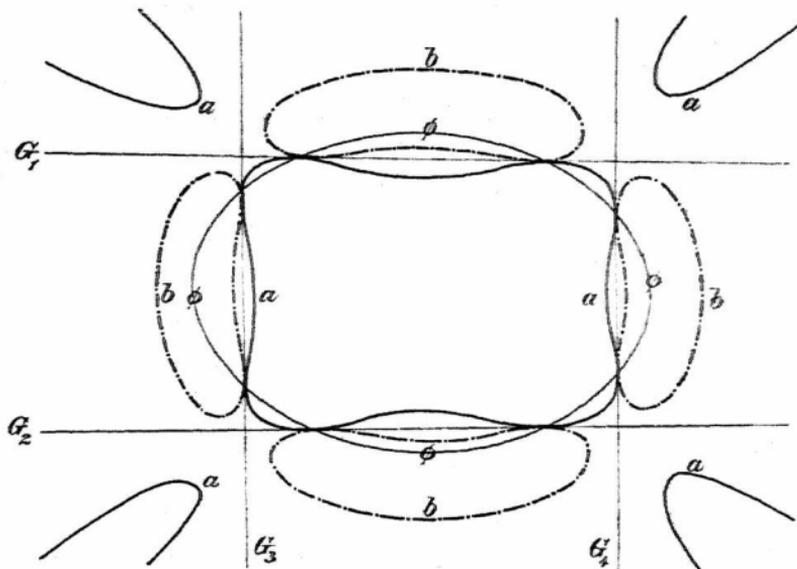


Fig. 31.

5. Dreieckskurve: ein Bifolium, zwei Unifolien, ein Oval.

III. Φ trifft zwei anliegende Seiten von zwei Vierecken:

6. Viereckskurve: zwei Bifolien, ein Oval;

7. Dreieckskurve: zwei Bifolien, zwei Ovale.

der unendlich fernen Geraden in zwei Punkten geschnitten wird; dasselbe ist mit den im II. und IV. Quadranten verlaufenden Kurvenzügen der Fall.

*) Die Figuren für die folgenden Fälle kann sich der Leser unschwer selbst anfertigen.

IV. Φ trifft zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks und von jedem der beiden anderen Vierecke je eine Seite:

8. Viereckskurve: ein Bifolium, zwei Unifolien;
9. Dreieckskurve: ein Trifolium, ein Unifolium, zwei Ovale.

Wird dieses Verfahren weiter fortgesetzt, so ergeben sich im ganzen 13 verschiedene Lagen von Φ bezüglich des von den G_i gebildeten Vierseits mit zusammen 36 Typen Kurven vierter Ordnung. Den Schluß der Kette bildet der Fall:

XIII. Φ trifft keine der vier Geraden, wodurch sich ergibt: entweder

1. eine ringförmige Kurve, aus zwei einander umschließenden Ovalen bestehend, oder
2. eine Viereckskurve, bestehend aus drei Ovalen, oder
3. eine Dreieckskurve, bestehend aus vier Ovalen.

Berücksichtigt man jedoch nur die *Anzahl der Züge* und der *reellen Doppeltangenten*, so lassen sich mit Zeuthen für die nichtsinguläre C_4 folgende *sechs Hauptformen* angeben (Fig. 32):

Hauptform	I	II	III	IV	V	VI
Anzahl der Züge	4	3	2	1	0	2
Anzahl der Doppeltangenten	28	16	8	4	4	4
Anzahl der Doppeltangenten erster Art	4	4	2	4	4	4
Anzahl der reellen Wendepunkte . .	8	8	4	8	0	8

Bei der Hauptform V sind die vier Doppeltangenten isolierte Doppeltangenten, d. h. solche, die den Berührungskegelschnitt Φ nicht reell schneiden; es ist dies die imaginäre C_4 (ohne reelle Züge). F. Klein hat in Math.

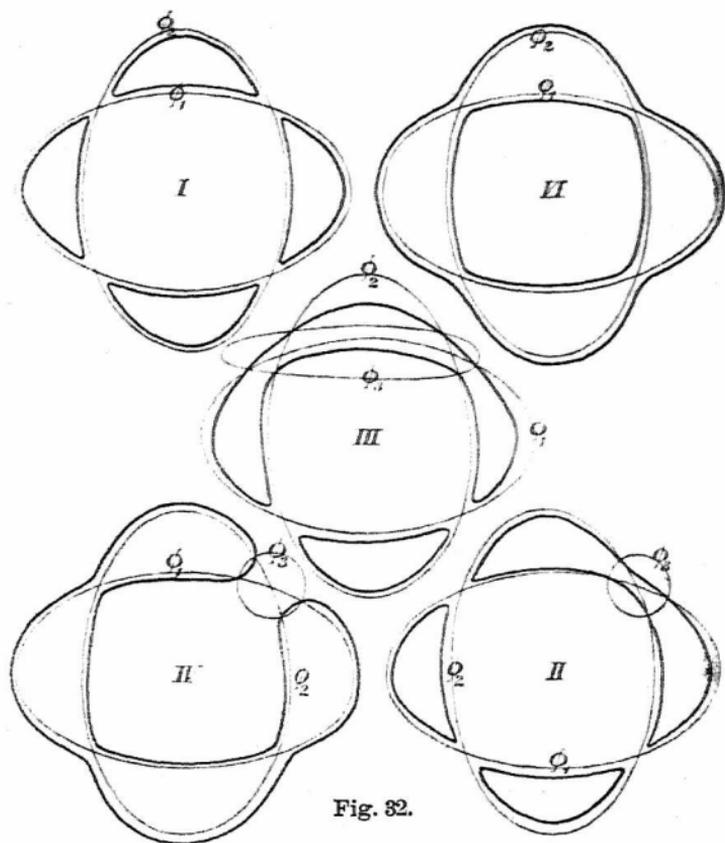


Fig. 32.

Ann. 10 (1876) S. 376 gezeigt, wie man die ein-, zwei- und dreiteilige Kurve (Hauptformen IV, III und II) aus der Gleichung $\Phi_1 \Phi_2 + \varepsilon \Phi_3 = 0$ ableiten kann, wenn ε genügend klein genommen wird. Sind $\Phi_1 = 0$ und $\Phi_2 = 0$ zwei einander in vier reellen Punkten schneidende Kegelschnitte, so erhalten wir die Hauptformen II und IV bzw. III, wenn $\Phi_3 = 0$ den einen bzw. beide Schnittpunkte von $\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{array} \right\}$ umschließt. Die Gleichung $\Phi_1 \Phi_2 + \varepsilon = 0$

liefert bei positivem ε die Hauptform I, bei negativem ε die Hauptform VI (die Gürtelkurve), wenn der Ursprung innerhalb der Kegelschnitte liegt.

III. Die Einteilung nach der Gestalt für die singulären Kurven.

Die singulären Kurven können wir als Grenzfälle von nichtsingulären Kurven auffassen.

So kann ein Doppelpunkt einer Kurve vierter Ordnung dadurch entstehen, daß das Oval (oder allgemeiner einer ihrer paaren Züge) auf einen Punkt zusammenschrumpft, oder daß zwei Züge der Gürtelkurve zum Schnitt kommen. Die Zahl der Doppeltangenten erster Art bleibt in beiden Fällen ungeändert. Entsteht jedoch ein Doppelpunkt dadurch, daß a) ein paarer Zug in zwei unpaare Züge zerfällt oder b), daß zwei außer einander liegende Züge sich schneiden, so ändert sich die Zahl der Doppeltangenten erster Art. (Vgl. Fig. 35, wo die Kurve a zwei, die Kurve b eine, die Kurve c keine Doppeltangente erster Art besitzt, während Kurve I Fig. 32, aus der die Kurven a, b, c der Fig. 35 hervorgehen, vier Doppeltangenten erster Art hat.) Verschwindet die beim Entstehen eines Doppelpunkts auftretende Schleife, so erhalten wir eine Form mit Spitze.

Der Fall a) tritt ein, wenn ein paarer Zug durchs Unendliche geht und mit sich selbst zum Schnitt kommt. Da jeder der dabei entstehenden unpaaren Züge drei Wendepunkte hat, der Doppelpunkt deren zwei absorbiert, muß der paare Zug acht Wendepunkte besessen haben, d. h. dieser Zerfall kann nur bei einem Quadri-*folium* vorkommen.

Beispiel. Die *Dürersche Muschellinie* (Fig. 33) ist eine rationale C_4 und hat die Gleichung

$$(xy + y^2 - ay - l^2)^2 + (x - y + a)^2 (y^2 - l^2) = 0;$$

die Schnittpunkte der Hyperbel $xy + y^2 - ay - l^2 = 0$ mit der Geraden $x - y + a = 0$ sind Doppelpunkte; ein weiterer

Doppelpunkt ist $\left\{ \begin{array}{l} y \pm \frac{l}{2} \sqrt{2} = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\}$.

Die Gleichung

$$(xy + y^2 - ay - l^2)^2 + (x - y + a)^2 (y^2 - l^2) - \varepsilon = 0$$

stellt bei sehr kleinem ε eine penultimate nichtrationale oder

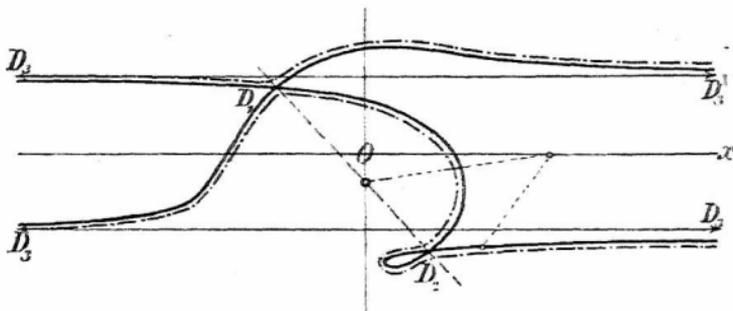


Fig. 33.

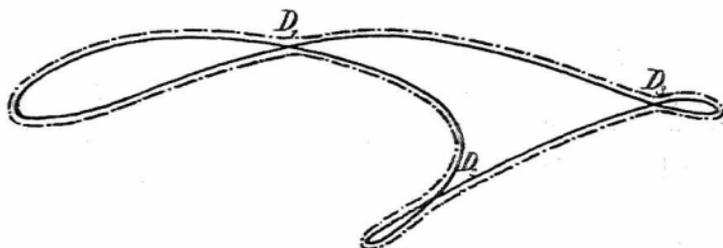


Fig. 34.

nichtsinguläre Kurve dar, die aus zwei unpaaren Zügen mit je drei reellen Wendepunkten besteht, wenn ε positiv ist (die in Fig. 33 strichpunktiert gezeichnete Kurve); bei negativem ε erscheinen zwei paare Züge und ein Oval (innerhalb der Schleife) (in Fig. 33 nicht eingezeichnet). Schneiden sich die beiden paaren Züge, so treten Doppelpunkte auf. Die (schematische) Fig. 34 zeigt zugleich, wie aus dem (strichpunktiert

gezeichneten) Quadrifolium eine C_4 mit drei im Endlichen gelegenen Doppelpunkten D_1, D_2, D_3 entsteht. Rückt D_3 ins Unendliche, so haben wir die Kurve der Fig. 33, die Variation der Konstanten ε liefert dann den Zerfall in zwei unpaare Züge.

Im Falle b) läßt sich das Entstehen eines Doppelpunkts aus der Gleichung $G_1 G_2 G_3 G_4 = \lambda \Phi^2$ ableiten, wie wir auf S. 83 gesehen haben. Auch hier kann statt des Doppelpunkts eine Spitze auftreten.

Auf ganz ähnliche Weise lassen sich durch Verbinden auseinanderliegender Zweige *Kurven mit zwei und drei Doppelpunkten* herstellen. So zeigen die Fig. 35 das

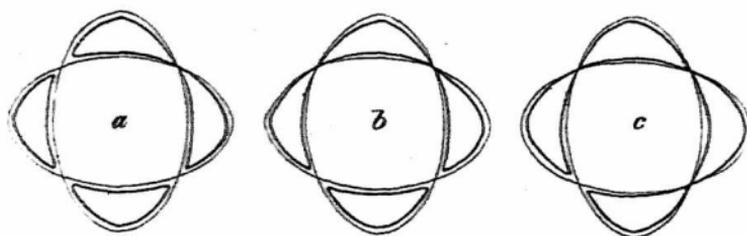


Fig. 35.

Entstehen einer Kurve mit ein, zwei und drei Doppelpunkten aus der nichtsingulären vierteiligen Kurve (Kurve I der Fig. 32).

§ 21. Die quadratische Transformation.

Zum Zweck der Klassifikation der C_4 mit drei Doppel- bzw. Rückkehrpunkten, also der rationalen C_4 , müssen wir kurz auf ein Verfahren eingehen, das uns gestattet, diese Kurven aus einem Kegelschnitt abzuleiten. Dies geschieht mit Hilfe einer *quadratischen* oder (nach ihrem Begründer so genannten) *Cremonaschen Transformation*.

Gegeben sei ein Dreieck ABC , mit den Seiten a_1, a_2, a_3 und in der Ebene des Dreiecks ein Punkt P (Fig. 36). p_1, p_2, p_3 seien die Abstände des Punktes P bzw. von den Seiten BC, CA, AB . p_1 werde positiv genommen, wenn P mit A auf derselben Seite von a_1 liegt, andernfalls negativ; entsprechendes gelte für p_2 und p_3 . Dann ist, wenn F den Flächeninhalt des Dreiecks bezeichnet,

$$(1) \quad a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 2 F .$$

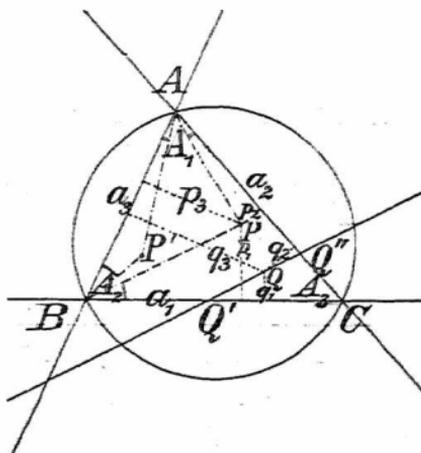


Fig. 36.

Setzen wir nun

$$(2) \quad x_1 = \varrho p_1, \quad x_2 = \varrho p_2, \quad x_3 = \varrho p_3,$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist, so folgt aus Gleichung (1)

$$(3) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 2 F \varrho .$$

Zu jedem Punkt P gehört ein bestimmtes Abstandstriple (p_1, p_2, p_3) und ein bestimmtes Abstandsverhältnis $(x_1 : x_2 : x_3)$; umgekehrt entspricht jedem Abstands-

verhältnis $(x_1 : x_2 : x_3)$ ein gemäß (3) und (2) bestimmbares Abstandstripel und damit ein bestimmter Punkt P . Man nennt x_1, x_2, x_3 *Dreiecks- oder Verhältniskoordinaten des Punktes P* , das Dreieck ABC *Koordinaten- oder Fundamentaldreieck*, seine Seiten *Koordinatenseiten* oder *Koordinatenachsen*. Der Punkt vom Koordinatenverhältnis $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1 : 1$ heißt der *Einheitspunkt*; dieser ist offenbar der Inkreismittelpunkt des Koordinatendreiecks*).

Jede in x_1, x_2, x_3 homogene Gleichung stellt im System der Dreieckskoordinaten eine Kurve dar. Wir zeigen zunächst, daß eine lineare Gleichung

$$(4) \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

eine Gerade darstellt. Die Kurve (4) schneide BC in einem Punkt Q' . Für Q' ist offenbar $x_1 = 0$, also ist nach (4) $x_2 : x_3 = -c_3 : c_2$ und die Abstände des Punktes Q' von den Koordinatenseiten sind nach (3) und (2) bzw.

$$0, \quad \frac{-2 F c_3}{a_3 c_2 - a_2 c_3}, \quad \frac{2 F c_2}{a_3 c_2 - a_2 c_3}.$$

Die Kurve (4) schneide CA im Punkte Q'' . Dann sind die Abstände des Punktes Q'' von den Seiten des Fundamentaldreiecks

$$\frac{-2 F c_3}{a_3 c_1 - a_1 c_3}, \quad 0, \quad \frac{2 F c_1}{a_3 c_1 - a_1 c_3}.$$

Ähnlich wie im gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinatensystem findet man für die Abstände q_1, q_2, q_3 eines Punktes Q , welcher die Strecke $Q'Q''$ im Verhältnis $m : n$ teilt, von den Koordinatenachsen

*) Mißt man die Abstände p_1, p_2, p_3 nach verschiedenen Längeneinheiten, so entstehen allgemeinere Dreieckskoordinaten.

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{0 \cdot n + \frac{-2 F c_3 m}{a_3 c_1 - a_1 c_3}}{m + n}, \\ q_2 = \frac{\frac{-2 F c_3 n}{a_3 c_2 - a_2 c_3} + 0 \cdot m}{m + n}, \\ q_3 = \frac{\frac{2 F c_2 n}{a_3 c_2 - a_2 c_3} + \frac{2 F c_1 m}{a_3 c_1 - a_1 c_3}}{m + n}. \end{array} \right.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß die Koordinaten von Q ($x_1 : x_2 : x_3 = q_1 : q_2 : q_3$) die Gleichung (4) befriedigen, was auch m und n sein mag; also liegen alle Punkte Q der Geraden $Q'Q''$ auf der durch (4) dargestellten Kurve. Befriedigen umgekehrt die Abstände q_1, q_2, q_3 eines Punktes Q von den Koordinatenachsen die Gleichung (4), so lassen sich die Zahlen m und n so bestimmen, daß q_1, q_2, q_3 durch die Gleichungen (5) darstellbar sind, so daß Q auf der Geraden $Q'Q''$ liegt. Somit stellt (4) eine Gerade dar.

Insbesondere sind offenbar $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ die Gleichungen der drei Koordinatenachsen BC, CA, AB .

Die Abstände eines unendlich fernen Punktes von den Koordinatenachsen sind unendlich. Aus (2) folgt aber

$$p_1 = \frac{x_1}{\varrho}, \quad p_2 = \frac{x_2}{\varrho}, \quad p_3 = \frac{x_3}{\varrho};$$

also ist $\varrho = 0$. Nach Gleichung (3) befriedigen daher die Koordinaten jedes unendlich fernen Punktes P die Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

die somit die unendlich ferne Gerade darstellt. Da nach

dem Sinussatz, wenn A_1, A_2, A_3 die Dreieckswinkel an den Ecken A, B, C sind,

$$a_1 : a_2 : a_3 = \sin A_1 : \sin A_2 : \sin A_3 ,$$

so ist die Gleichung der unendlich fernen Geraden auch

$$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0 .$$

Die Gleichung

$$x_2 + \lambda x_3 = 0$$

stellt bei veränderlichem λ ein Geradenbüschel durch den Punkt $\left\{ \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$, d. i. durch den Punkt A dar. Ist P ein Punkt einer solchen Geraden durch A , φ der in der Drehrichtung nach AC zu positiv genommene Winkel von AP mit der Halbierungslinie $x_2 - x_3 = 0$ des Winkels $BAC = A_1$, dann gilt für die Abstände p_2 und p_3 des Punktes P von AC und AB offenbar die Beziehung

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{\sin\left(\frac{A_1}{2} - \varphi\right)}{\sin\left(\frac{A_1}{2} + \varphi\right)} \quad \text{oder} \quad p_2 = \frac{\sin\left(\frac{A_1}{2} - \varphi\right)}{\sin\left(\frac{A_1}{2} + \varphi\right)} p_3 .$$

Die Gleichung der Geraden AP ist also

$$x_2 - \frac{\sin\left(\frac{A_1}{2} - \varphi\right)}{\sin\left(\frac{A_1}{2} + \varphi\right)} x_3 = 0 .$$

Durch Vergleichung mit

$$x_2 + \lambda x_3 = 0$$

ergibt sich

$$\frac{\sin\left(\frac{A_1}{2} + \varphi\right)}{\sin\left(\frac{A_1}{2} - \varphi\right)} = -\frac{1}{\lambda}.$$

Hieraus folgt durch korrespondierende Addition und Subtraktion

$$\frac{2 \sin \frac{A_1}{2} \cos \varphi}{2 \cos \frac{A_1}{2} \sin \varphi} = \frac{-\lambda + 1}{-\lambda - 1}$$

oder

$$(6) \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \operatorname{ctg} \frac{A_1}{2}.$$

Jede homogene Gleichung n ten Grads in x_1, x_2, x_3

$$c_1 x_1^n + c_2 x_1^{n-1} x_2 + \dots = 0$$

stellt eine Kurve dar, die von jeder Geraden in n Punkten geschnitten wird, also eine Kurve n ter Ordnung.

Wir nehmen zwei in derselben Ebene liegende Fundamentaldreiecke ABC und $A'B'C'$ so an, daß ihre entsprechenden Ecken sich decken, und es seien zwei Punkte P und P' einander so zugeordnet, daß die Transformationsformeln lauten:

$$(7) \quad x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{x'_1} : \frac{1}{x'_2} : \frac{1}{x'_3} = x'_2 x'_3 : x'_3 x'_1 : x'_1 x'_2.$$

Dann gilt umgekehrt

$$(7') \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2.$$

Jeder Geraden von Punkten P

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

entspricht ein Kegelschnitt, der durch die drei Ecken des Koordinatendreiecks geht:

$$c_1 x'_2 x'_3 + c_2 x'_3 x'_1 + c_3 x'_1 x'_2 = 0 .$$

Insbesondere entspricht der unendlich fernen Geraden

$$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0$$

der Kegelschnitt

$$x'_2 x'_3 \sin A_1 + x'_3 x'_1 \sin A_2 + x'_1 x'_2 \sin A_3 = 0 ,$$

welcher der Umkreis des Koordinatendreiecks ist. Denn $x'_2 x'_3 \sin A_1$, $x'_3 x'_1 \sin A_2$, $x'_1 x'_2 \sin A_3$ sind mit Vorzeichen

bis auf den Faktor $\frac{1}{Q^2}$ die Inhalte der Dreiecke, welche die

drei Abstände eines Punktes P' von den Koordinatenachsen paarweise bilden. Wenn die Summe dieser Inhalte null ist, so liegen die Fußpunkte der Abstände auf einer Geraden. Dies trifft aber nach einem bekannten Satz der Dreiecksgeometrie nur für die Punkte P' des Umkreises zu.

Jedem Punkt P als Schnittpunkt zweier Geraden *entspricht ein Punkt P'* als vierter Schnittpunkt der jenen Geraden entsprechenden Kegelschnitte.

Der Koordinatenecke $A \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\}$ entspricht die gegenüberliegende Koordinatenseite $x'_1 = 0$. Einer Geraden durch diese Ecke $x_2 + \lambda x_3 = 0$ entspricht der Kegelschnitt $x'_3 x'_1 + \lambda x'_1 x'_2 = 0$, der in die Koordinatenseite $x'_1 = 0$ und in die Gerade $x'_3 + \lambda x'_2 = 0$ zerfällt. Die beiden Geraden $x_2 + \lambda x_3 = 0$ und $x'_3 + \lambda x'_2 = 0$ gehen durch dieselbe Ecke A . Schreibt man die zweite Gerade in der Form

$$x'_2 + \frac{1}{\lambda} x'_3 = 0 ,$$

so ergibt sich für die Winkel φ und φ' der beiden einander entsprechenden Geraden nach (6)

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \operatorname{ctg} \frac{A_1}{2}, \quad \operatorname{ctg} \varphi' = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \operatorname{ctg} \frac{A_1}{2},$$

also

$$\operatorname{ctg} \varphi' = -\operatorname{ctg} \varphi, \quad \text{d. h.} \quad \varphi' = -\varphi:$$

Die beiden transformierten Geraden sind in bezug auf die Halbierungslinie des Dreieckswinkels symmetrisch.

Um also zu einem Punkt P den entsprechenden Punkt P' zu konstruieren, verbindet man P mit zwei Ecken des Dreiecks und zeichnet die in bezug auf die beiden Winkelhalbierenden symmetrischen Geraden, die sich im gesuchten Punkt P' schneiden (vgl. Fig. 37).

Einer C_n entspricht eine C_{2n} ; schneidet die C_n eine Dreiecksseite n mal, so geht die C_{2n} n mal durch die gegenüberliegende Ecke. Fallen einzelne dieser Schnittpunkte zusammen, so entstehen bei der entsprechenden C_{2n} mehr als n -fache Punkte in der Koordinatenecke.

Dies erkennt man, wenn man die Konstruktion des Punktes P' aus P an der C_n verfolgt.

§ 22. Rationale Kurven vierter Ordnung.

Wenden wir die eben angeführten Transformationsformeln auf die Kurven vierter Ordnung an, so erkennen wir, daß jede C_4 mit drei Doppelpunkten aus einem Kegelschnitt abgeleitet werden kann. Legen wir nämlich die drei singulären Punkte in die Ecken des Koordinatendreiecks, so lautet die Gleichung der C_4

$$(1) \quad (\Gamma) \quad a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 x_3^2 \\ + 2 a_{23} x_2 x_3 x_1^2 + 2 a_{13} x_3 x_1 x_2^2 = 0.$$

Die Transformierte dieser Kurve ist der Kegelschnitt (K)

$$(2) \quad a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 \\ + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{13} x_1 x_3 = 0,$$

wenn wir der Einfachheit halber die Striche weglassen.

Umgekehrt kann auch die Kurve (1) aus dem Kegelschnitt (2) abgeleitet werden. Je nach der Lage der C_2 in bezug auf die Seiten des Dreiecks erhalten wir verschiedene „Typen“ der rationalen Kurve vierter Ordnung. Aus dem Schlußsatz von § 21 folgt:

Schneidet der Kegelschnitt alle drei Seiten des Dreiecks, so hat die C_4 drei Doppelpunkte; berührt der Kegelschnitt die Dreiecksseiten, so erhält die C_4 drei Spitzen; sind die Schnittpunkte imaginär, so hat die C_4 drei isolierte Punkte in den Koordinatenecken. Selbstverständlich können sämtliche drei Arten von Doppelpunkten bei Γ

nebeneinander vorkommen, jedoch immer nur so, daß die Gesamtsumme 3 beträgt.

In Fig. 37 ist die Konstruktion für einen Kreis K ausgeführt, der die Koordinatenseite AB in zwei Punkten 4 und 7 schneidet, AC in 1, 2 berührt und BC nicht schneidet. Γ hat dementsprechend einen Doppelpunkt $C(4', 7')$, einen Rückkehrpunkt $B(1', 2')$ und einen isolierten Punkt A .

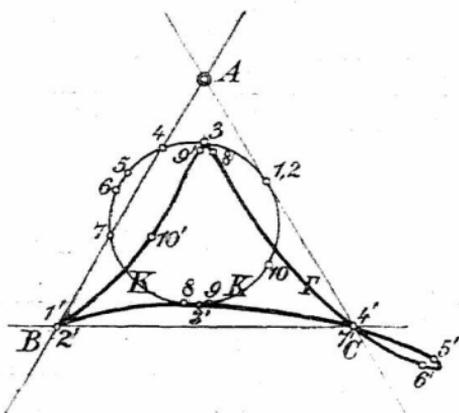


Fig. 37.

Entsprechende Punkte von K und Γ sind durch gleiche Ziffern bezeichnet.

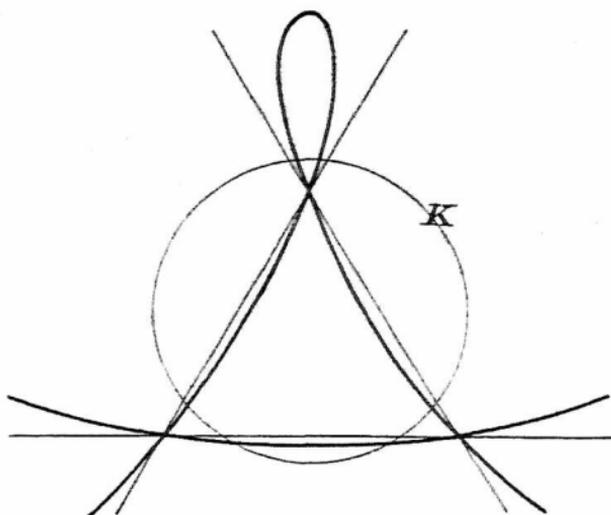


Fig. 38.

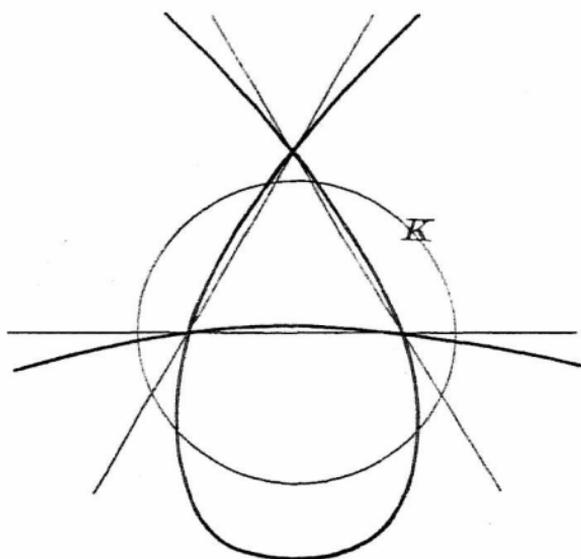


Fig. 39.

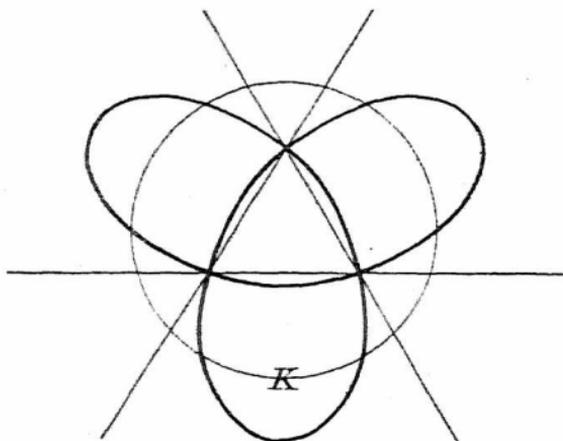


Fig 40.

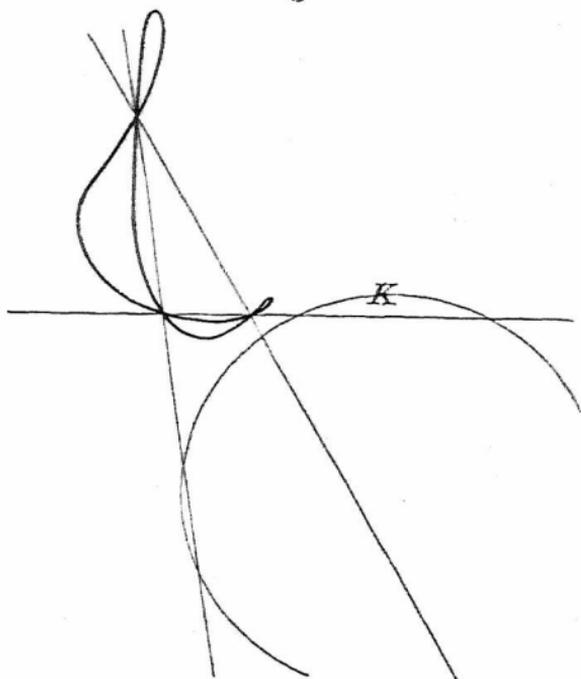


Fig. 41.

Die Figuren 38, 39, 40 und 41 stellen weitere vier Fälle von rationalen C_4 dar, die sich dadurch unterscheiden, daß von den Ecken des Fundamentaldreiecks in Fig. 38 zwei, in Fig. 39 eine, in Fig. 40 keine, in Fig. 41 drei Ecken außerhalb K liegen. Bei Fig. 37 liegen alle Schnittpunkte von K mit den Seiten des Fundamentaldreiecks zwischen den Ecken, bei Fig. 41 auf den Verlängerungen der Seiten.

Weil der unendlich fernen Geraden

$$x_1 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_3 \sin A_3 = 0$$

der Umkreis des Fundamentaldreiecks

$$x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = 0$$

entspricht und umgekehrt, so entspricht jedem Schnittpunkt von K mit dem Umkreis ein unendlich ferner Punkt. Verläuft K ganz innerhalb oder ganz außerhalb des Umkreises, so liegt Γ ganz im Endlichen. Man findet die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten der C_4 durch Konstruktion der Bilder der Schnittpunkte von K mit dem Umkreis. Jeder Asymptote der C_4 entspricht ein durch die Ecken des Dreiecks gehender Kegelschnitt K_1 , der K in einem jener Schnittpunkte berührt*). Der Tangente T_i ($i = 1, 2, 3$) von K_1 in einer Koordinatenecke entspricht die gegenüberliegende Koordinatenachse a_i und zugleich die zu T_i bezüglich der Winkelhalbierenden symmetrische Gerade T'_i . T_i hat mit K_1 zwei zusammenfallende Schnittpunkte; dasselbe trifft also für (a_i, T'_i) und die dem Kegelschnitt K_1 entsprechende Asymptote der C_4 zu, d. h. diese Asymptote geht durch den Schnittpunkt von a_i und T'_i . Konstruiert man also

*) Es läßt sich nämlich zeigen, daß zweien einander berührenden Kurven (hier der C_4 und ihrer Asymptote) wieder zwei einander berührende Kurven (hier K und K_1) entsprechen.

mittels des Pascalschen Sechsecks*) die Tangenten T_i eines solchen Kegelschnitts K_1 in zwei Ecken des Dreiecks, so entspricht ihnen auf der gegenüberliegenden Seite je ein Punkt (a_i, T'_i) und die Verbindungslinie dieser beiden Punkte ist die gesuchte Asymptote.

Wir ziehen von den Fundamentalpunkten A, B, C die drei Tangentenpaare an K . Als Gleichung des Tangentenpaares von einem Punkt (y_1, y_2, y_3) an K findet man nach der auch auf Dreieckskoordinaten anwendbaren Methode von § 3

$$4K(x_1, x_2, x_3)K(y_1, y_2, y_3) - \left(\frac{\partial K}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial K}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial K}{\partial x_3} y_3 \right) = 0.$$

Setzt man für y_1, y_2, y_3 der Reihe nach die Koordinaten von A, B, C , so werden die Gleichungen jener drei Tangentenpaare:

$$(*) \quad \begin{cases} A_{22} x_1^2 - 2 A_{12} x_1 x_2 + A_{11} x_2^2 = 0, \\ A_{33} x_2^2 - 2 A_{23} x_2 x_3 + A_{22} x_3^2 = 0, \\ A_{11} x_3^2 - 2 A_{13} x_1 x_3 + A_{33} x_1^2 = 0, \end{cases}$$

wo die A_{ik} die aus der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

durch Tilgen der i ten Zeile und k ten Spalte entstehenden Unterdeterminanten sind. Sollen umgekehrt drei Geradenpaare durch die Koordinatenecken mit den Gleichungen

$$(**) \quad \begin{cases} a_1 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2 = 0, \\ a_2 x_2^2 + b_2 x_2 x_3 + c_2 x_3^2 = 0, \\ a_3 x_3^2 + b_3 x_1 x_3 + c_3 x_1^2 = 0 \end{cases}$$

*) Vgl. *Doehlemann*, Projektive Geometrie (Sammlung Götschen), S. 101.

einen Kegelschnitt berühren, so muß zwischen ihren Koeffizienten eine Bedingung stattfinden, welche ausdrückt, daß der Kegelschnitt K , welcher fünf Geraden der drei Paare als Tangenten hat, auch von der sechsten Geraden berührt wird. Dazu müssen die Gleichungen (**) und (*) bis auf drei Proportionalitätsfaktoren übereinstimmen und die gesuchte Bedingung wird $a_1 a_2 a_3 = c_1 c_2 c_3$. Den drei von A , B , C an K gehenden Tangentenpaaren entsprechen nach der Cremonatransformation drei andere Geradenpaare, von denen man leicht zeigt, daß sie die Bedingung $a_1 a_2 a_3 = c_1 c_2 c_3$ erfüllen. Da diese aber die Tangenten von Γ aus den Doppelpunkten sind, so erhalten wir den

Satz: *Die sechs Tangenten, die von den drei Doppelpunkten einer rationalen C_4 an diese gezogen werden können, berühren einen Kegelschnitt.*

Für die Gleichungen der Tangenten in den drei Doppelpunkten von Γ erhält man nach derselben Regel, welche für gewöhnliche Punktkoordinaten gilt:

$$(*) \quad \begin{cases} a_{22} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{11} x_2^2 = 0 ; \\ a_{33} x_2^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{22} x_3^2 = 0 ; \\ a_{11} x_3^2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + a_{33} x_1^2 = 0 . \end{cases}$$

Auch sie genügen der Bedingung $a_1 a_2 a_3 = c_1 c_2 c_3$, also

Satz: *Die sechs Doppelpunktstangenten einer rationalen Kurve vierter Ordnung berühren einen Kegelschnitt.*

Nach den Plückerschen Formeln hat eine rationale C_4 mit drei Doppelpunkten sechs Wendetangenten und vier Doppeltangenten (vgl. S. 91). Den Wendetangenten bzw. Doppeltangenten entsprechen bei der Transformation Kegelschnitte durch die Fundamentalpunkte, die K oskulieren bzw. doppelt berühren; also:

Satz: *Durch drei Punkte gibt es an einen gegebenen*

Kegelschnitt sechs oskulierende und vier doppelt berührende Kegelschnitte.

Die Gleichung (1) Seite 107 kann auf folgende Weise geschrieben werden:

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} & (\sqrt{a_{11}} x_2 x_3 + \sqrt{a_{22}} x_3 x_1 + \sqrt{a_{33}} x_1 x_2)^2 \\ & = 2 x_1 x_2 x_3 \{ \sqrt{a_{22} a_{33}} x_1 + \sqrt{a_{33} a_{11}} x_2 \\ & \quad + \sqrt{a_{11} a_{22}} x_3 - (a_{23} x_1 + a_{31} x_2 + a_{12} x_3) \}, \end{aligned} \right.$$

wovon man sich durch Umformung von (1') überzeugen kann.

Nach dem Prinzip der linearen Kombination ist die Gerade

$$\sqrt{a_{22} a_{33}} x_1 + \sqrt{a_{33} a_{11}} x_2 + \sqrt{a_{11} a_{22}} x_3 = a_{23} x_1 + a_{31} x_2 + a_{12} x_3$$

Doppeltangente der C_4 . Da $\sqrt{a_{11}}$, $\sqrt{a_{22}}$, $\sqrt{a_{33}}$ in der Gleichung (1') je positives oder negatives Vorzeichen haben können, so treten insgesamt acht Vorzeichenmöglichkeiten auf, denen aber, wie eine einfache Überlegung zeigt, nur vier untereinander verschiedene Vorzeichenmöglichkeiten für $\sqrt{a_{22} a_{33}}$, $\sqrt{a_{33} a_{11}}$, $\sqrt{a_{11} a_{22}}$ entsprechen. Wir erhalten so vier Doppeltangenten, deren Gleichungen lauten:

$$\sqrt{a_{22} a_{33}} x_1 + \sqrt{a_{33} a_{11}} x_2 + \sqrt{a_{11} a_{22}} x_3 = a_{23} x_1 + a_{31} x_2 + a_{12} x_3$$

$$\sqrt{a_{22} a_{33}} x_1 - \sqrt{a_{33} a_{11}} x_2 + \sqrt{a_{11} a_{22}} x_3 = a_{23} x_1 + a_{31} x_2 + a_{12} x_3$$

$$\sqrt{a_{22} a_{33}} x_1 + \sqrt{a_{33} a_{11}} x_2 - \sqrt{a_{11} a_{22}} x_3 = a_{23} x_1 + a_{31} x_2 + a_{12} x_3$$

$$\sqrt{a_{22} a_{33}} x_1 - \sqrt{a_{33} a_{11}} x_2 - \sqrt{a_{11} a_{22}} x_3 = a_{23} x_1 + a_{31} x_2 + a_{12} x_3$$

Werden die Gleichungen der vier Doppeltangenten zur Abkürzung durch $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$, $G_4 = 0$ bezeichnet, so kann die Gleichung der rationalen Kurve vierter Ordnung dargestellt werden durch

$$(3) \quad G_1^{1/2} + G_2^{1/2} + G_3^{1/2} + G_4^{1/2} = 0,$$

woraus durch dreimaliges Quadrieren die rationale Form hervorgeht

$$(4) \quad \{[(G_1 - G_3) + (G_2 - G_4)]^2 - 4(G_1 G_2 + G_3 G_4)\}^2 \\ = 64 G_1 G_2 G_3 G_4 .$$

Dies kann man durch die Umformung von (4) in (1) mittels der Werte von G_1, G_2, G_3, G_4 bestätigen.

Der durch die geschweifte Klammer dargestellte Kegelschnitt

$\Phi \equiv [(G_1 - G_3) + (G_2 - G_4)]^2 - 4(G_1 G_2 + G_3 G_4) = 0$
geht durch die acht Berührungspunkte der Doppeltangenten (vgl. S. 82, 83).

Durch Ausquadrierung und Zusammenziehung erhalten wir aus (4)

$$\begin{aligned} & [(G_1 - G_3) + (G_2 - G_4)]^4 \\ & - 8[(G_1 - G_3) + (G_2 - G_4)]^2(G_1 G_2 + G_3 G_4) \\ & + 16[G_1 G_2 - G_3 G_4]^2 = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & [(G_1 - G_3) + (G_2 - G_4)]^4 \\ & - 8[(G_1 - G_3) + (G_2 - G_4)]^2(G_1 G_2 + G_3 G_4) \\ & + 16[(G_1 - G_3)G_2 + (G_2 - G_4)G_3]^2 = 0 . \end{aligned}$$

In dieser Gleichung kommen nur Glieder vor, die entweder $(G_1 - G_3)^2$, $(G_1 - G_3)(G_2 - G_4)$ oder $(G_2 - G_4)^2$ enthalten, wodurch der Punkt

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 - G_3 = 0 \\ G_2 - G_4 = 0 \end{array} \right\}$$

als Doppelpunkt der C_4 nachgewiesen ist.

Da die Gleichung des Kegelschnitts Φ sich auch in den beiden Formen schreiben läßt

$$\Phi \equiv [(G_1 - G_2) + (G_3 - G_4)]^2 - 4(G_1 G_3 + G_2 G_4) = 0$$

und

$$\Phi \equiv [(G_1 - G_4) + (G_2 - G_3)]^2 - 4(G_1 G_2 + G_3 G_4) = 0 ,$$

so folgt auf dieselbe Weise wie vorhin, daß auch die Punkte

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 - G_2 = 0 \\ G_3 - G_4 = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} G_1 - G_4 = 0 \\ G_2 - G_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Doppelpunkte der Kurve sind.

Einem die Seiten des Fundamentaldreiecks berührenden Kegelschnitt K entspricht eine C_4 mit drei Spitzen, also eine Kurve vierter Ordnung dritter Klasse (C_4^3). Die Gleichung eines solchen Kegelschnitts K lautet

$$K \equiv (c_1 x_1)^{1/2} + (c_2 x_2)^{1/2} + (c_3 x_3)^{1/2} = 0$$

oder

$$\begin{aligned} c_1^2 x_1^2 + c_2^2 x_2^2 + c_3^2 x_3^2 - 2 c_1 c_2 x_1 x_2 \\ - 2 c_2 c_3 x_2 x_3 - 2 c_3 c_1 x_3 x_1 = 0, \end{aligned}$$

wovon man sich durch zweimaliges Quadrieren überzeugt.

Die diesem Kegelschnitt entsprechende C_4 mit drei Spitzen hat dann die Gleichung

$$\Gamma \equiv \left(\frac{c_1}{x_1} \right)^{1/2} + \left(\frac{c_2}{x_2} \right)^{1/2} + \left(\frac{c_3}{x_3} \right)^{1/2} = 0$$

oder, nach Änderung der Konstanten

$$(\kappa x_1)^{-1/2} + (\lambda x_2)^{-1/2} + (\mu x_3)^{-1/2} = 0.$$

Durch zweimaliges Quadrieren erhalten wir hieraus für die C_4 mit drei Spitzen die Gleichung

$$\begin{aligned} \kappa^2 \lambda^2 x_1^2 x_2^2 + \lambda^2 \mu^2 x_2^2 x_3^2 + \mu^2 \kappa^2 x_3^2 x_1^2 - 2 \kappa^2 \lambda \mu x_1^2 x_2 x_3 \\ - 2 \kappa \lambda^2 \mu x_1 x_2^2 x_3 - 2 \kappa \lambda \mu^2 x_1 x_2 x_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Bestimmen wir die Tangenten in den Doppelpunkten, so ergibt sich z. B. für den Punkt

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

aus den Gleichungen(*) S. 113 mit $a_{11} = \lambda^2 \mu^2$, $a_{22} = \mu^2 \kappa^2$, $a_{33} = \kappa^2 \lambda^2$, $a_{12} = \kappa \lambda \mu^2$, $a_{23} = \kappa^2 \lambda \mu$, $a_{13} = \kappa \lambda^2 \mu$
 $\kappa^2 x_1^2 - 2 \kappa \lambda x_1 x_2 + \lambda^2 x_2^2 = 0$ oder $(\kappa x_1 - \lambda x_2)^2 = 0$.

Da die beiden Tangenten im Doppelpunkt zusammenfallen, so sehen wir, daß der Doppelpunkt ein Rückkehrpunkt und die Gerade $\varkappa x_1 - \lambda x_2 = 0$ Rückkehrtangente ist. Analog erhalten wir die Rückkehrtangente in den beiden anderen Doppelpunkten; die drei Rückkehrtangente haben die Gleichungen

$\varkappa x_1 - \lambda x_2 = 0$, $\lambda x_2 - \mu x_3 = 0$, $\mu x_3 - \varkappa x_1 = 0$.
Hieraus ist ersichtlich, daß sie durch einen Punkt gehen, dessen Koordinaten das Abstandsverhältnis haben

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{\varkappa} : \frac{1}{\lambda} : \frac{1}{\mu} = c_1 : c_2 : c_3 .$$

Wird das Fundamentaldreieck gleichseitig und ist K dessen Inkreis, so erhalten wir die dreiachsige-symmetrische „*Steinersche Hypozykloide*“ (Fig. 42).

Sie kann in folgender Weise konstruiert werden: Auf der Peripherie eines Kreises vom Radius $OA = r$ bewegen sich von A aus in entgegengesetzter Richtung zwei Punkte Q und R , so daß R die doppelte Geschwindigkeit hat wie Q . Die Hüllkurve von QR ist die Steinersche Kurve. Sie ist auch der Ort eines Peripheriepunkts P eines Kreises vom Radius r (Mittelpunkt O'), der auf einem Kreis mit Radius $3r$ (Mittelpunkt O) rollt, ohne zu gleiten. Die Kurve gehört deshalb zur Gattung der Hypozykloiden.

Ist $\angle AOQ = \varphi$, so erhalten wir für die Koordinaten von P , da $RQ = QP$, $QR = 2r \sin \frac{3\varphi}{2}$, $\angle QBP = \frac{3\varphi}{2}$,

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi + 2r \sin \frac{3\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ y = r \sin \varphi + 2r \sin \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \end{cases}$$

oder

$$(1) \quad \begin{cases} x = 2r \cos \varphi - r \cos 2\varphi \\ y = 2r \sin \varphi + r \sin 2\varphi \end{cases} .$$

Die Elimination von φ ergibt die Gleichung

$$(2) \quad (x^2 + y^2)^2 + 8rx(x^2 - 3y^2) + 18r^2(x^2 + y^2) - 27r^4 = 0,$$

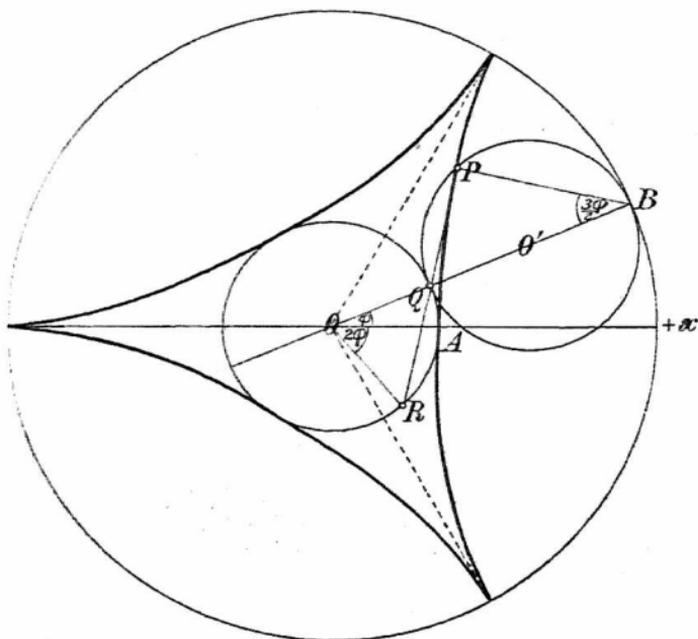


Fig. 42.

die auch in der Form geschrieben werden kann:

$$(3) \quad (x^2 + y^2 - 12rx + 9r^2)^2 + 4r(2x - 3r)^3 = 0.$$

Die Gleichung (3) zeigt, daß die (in Fig. 42 nicht eingezeichneten) Schnittpunkte des Kreises

$$K \equiv x^2 + y^2 - 12rx + 9r^2 \equiv (x - 6r)^2 + y^2 - (3\sqrt{3}r)^2 = 0$$

mit der Geraden $2x - 3r = 0$ Spitzen sind, d. h. die Punkte

$$\left(\frac{3}{2}r, \pm \frac{3}{2}r\sqrt{3}\right).$$

Die dritte Spitze liegt auf der x -Achse, denn mit $y = 0$ ergibt sich

$$O = x^4 + 8rx^3 + 18r^2x^2 - 27r^4 \equiv (x - r)(x + 3r)^3;$$

d. h. der Punkt $(-3r, 0)$ ist Rückkehrpunkt mit $y = 0$ als Rückkehrtangente. Man überzeugt sich noch leicht, daß die drei Rückkehrpunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Aus (2) folgt für die Gleichung der Tangente PQ

$$x \sin \frac{\varphi}{2} + y \cos \frac{\varphi}{2} = r \sin \frac{3\varphi}{2},$$

deren Achsenabschnitte

$$u = -\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{r \sin \frac{3\varphi}{2}}, \quad v = -\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{r \sin \frac{3\varphi}{2}} \quad \text{sind.}$$

Die Elimination von φ ergibt hieraus als Gleichung der Steinerschen Kurve in Linienkoordinaten

$$u^2 + v^2 = r v (3u^2 - v^2),$$

womit erwiesen ist, daß die Kurve von der dritten Klasse ist.

§ 23. Bizirkulare Kurven vierter Ordnung.

Unter einer *bizirkularen Kurve* vierter Ordnung verstehen wir eine Kurve, bei der zwei Doppelpunkte in die unendlich fernen Kreispunkte der Ebene fallen. Ihre Gleichung hat in homogenen Punktkoordinaten die Form

$$(1) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 + (\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) \omega \\ + (a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x \omega \\ + 2 a_{23} y \omega + a_{33} \omega^2) \omega^2 = 0. \end{cases}$$

Aus der Gleichung (1) ist ersichtlich, daß die beiden imaginären unendlich fernen Punkte

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

Doppelpunkte der Kurve sind; die Kurve verläuft also ganz im Endlichen. Verschiebt man sie derart, daß der

Punkt $\left(\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}\right)$ in den Ursprung kommt, so wird aus (1),

da man x und y durch $x - \frac{\alpha}{4}$, $y - \frac{\beta}{4}$ zu ersetzen hat,

$$(2) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 + b_{11} x^2 + 2 b_{12} x y + b_{22} y^2 \\ + 2 b_{13} x + 2 b_{23} y + b_{33} = 0. \end{cases}$$

Dieser Punkt heißt der *Fundamentalpunkt* der bizirkularen Kurve. Führt man Polarkoordinaten ein, so lautet die Gleichung der Kurve

$$\varrho^4 + (b_{11} \cos^2 \varphi + 2 b_{12} \cos \varphi \sin \varphi + b_{22} \sin^2 \varphi) \varrho^2 + (2 b_{13} \cos \varphi + b_{23} \sin \varphi) \varrho + b_{33} = 0.$$

Da der Faktor von $\varrho^3 = 0$ ist, so folgt hieraus

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 = 0.$$

Sind also P_1, P_2, P_3, P_4 die Schnittpunkte eines durch den Fundamentalpunkt O gehenden Radiusvektors mit der Kurve, so ist

$$OP_1 + OP_2 + OP_3 + OP_4 = 0.$$

Die bekanntesten bizirkularen C_4 sind:

1. die *spirischen Linien des Perseus*:

$$(x^2 + y^2)^2 - (a^2 x^2 + b^2 y^2) - k^2 = 0;$$

2. die *Cassinischen Kurven*:

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) - k^2 = 0;$$

3. die *Cartesischen Ovale*:

$$(x^2 + y^2 - 2 r x)^2 - l^2(x^2 + y^2) - k^2 = 0.$$

Für alle drei Kurven ist der Fundamentalpunkt (Ursprung) Mittelpunkt.

In den beiden imaginären Kreispunkten

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

haben die Kurven 1. und 2. *Doppelwendepunkte*, die Kurven 3. *Rückkehrpunkte**).

*) Näheres über diese Kurven findet der Leser in Wieleitner II und Loria (L. V. 14 und 7).

§ 24. Rationale bizirkuläre Kurven vierter Ordnung.

Eine rationale bizirkuläre Kurve vierter Ordnung muß noch einen dritten Doppelpunkt haben. Dieser kann nicht auf der unendlich fernen Geraden liegen, da die

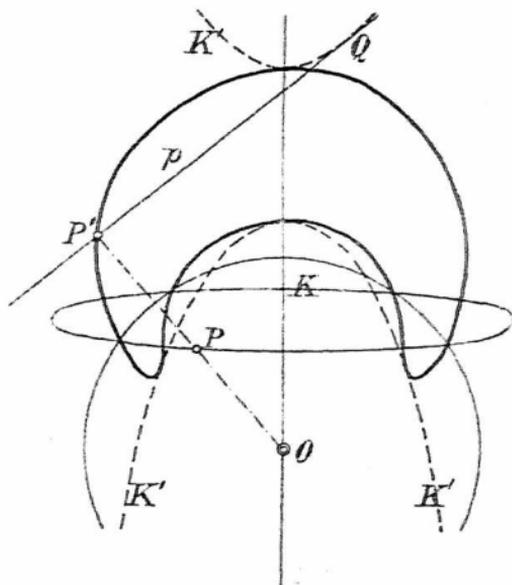


Fig. 43.

C_4 sonst zerfallen müßte. Ist (α, β) der dritte Doppelpunkt, so lautet die Gleichung der Kurve

$$(x^2 + y^2)^2 + (dx + ey)(x^2 + y^2) + a(x - \alpha)^2 + b(x - \alpha)(y - \beta) + c(y - \beta)^2 = 0.$$

Verschiebt man die Kurve parallel, bis der Doppelpunkt Ursprung wird, ersetzt also x, y durch $(\alpha + x), (\beta + y)$, so erhält die Kurvengleichung die Form

$$(1) (x^2 + y^2)^2 + (dx + ey)(x^2 + y^2) + ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

Der Doppelpunkt im Ursprung ist ein $\left. \begin{array}{l} \text{isolierter Punkt} \\ \text{Rückkehrpunkt} \\ \text{Doppelpunkt} \end{array} \right\}$,
 je nachdem $b^2 - 4ac \begin{cases} \geq 0 \\ < 0 \end{cases}$.

Diese Kurve transformieren wir vom Ursprung O aus durch reziproke Radien. Zu diesem Zweck führen wir in (1) Polarkoordinaten (ϱ', φ) ein und erhalten

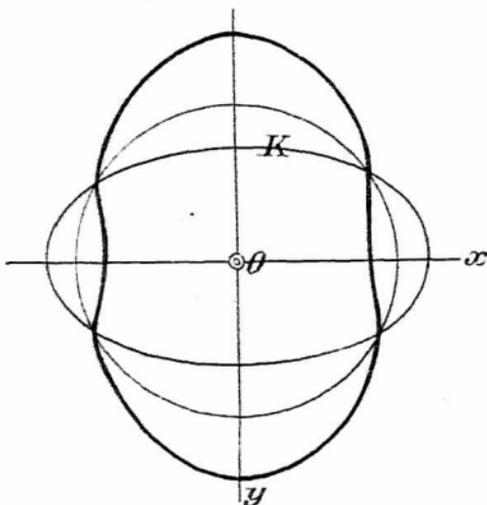


Fig. 44.

$$(1') \quad \begin{cases} \varrho'^2 + (d \cos \varphi + e \sin \varphi) \varrho' \\ + (a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) = 0. \end{cases}$$

Ist (ϱ, φ) der zu (ϱ', φ) inverse Punkt, so hat die inverse Kurve gemäß

$$\varrho \varrho' = r^2 \quad \text{oder} \quad \varrho' = \frac{r^2}{\varrho}$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{r^4}{\varrho^2} + (d \cos \varphi + e \sin \varphi) \frac{r^2}{\varrho} \\ & + (a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) = 0 \end{aligned}$$

oder
$$\rho^2(a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi) + r^2 \rho(d \cos \varphi + e \sin \varphi) + r^4 = 0.$$

Der Übergang zu Punktkoordinaten liefert

(2). $K \equiv ax^2 + bxy + cy^2 + r^2(dx + ey) + r^4 = 0,$
also einen Kegelschnitt.

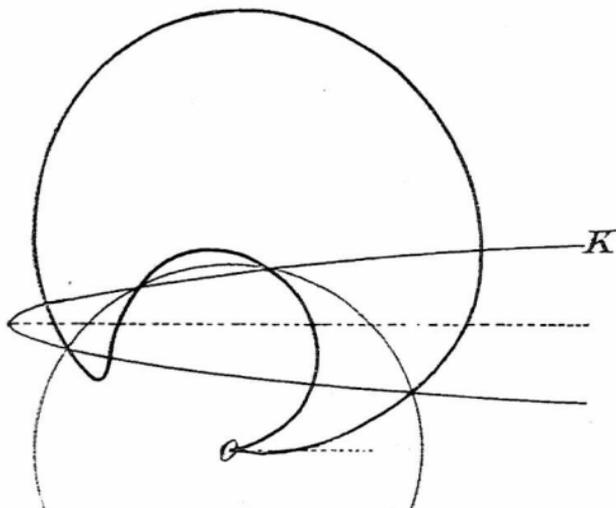


Fig. 45.

Da dieser Kegelschnitt nicht durch den Ursprung geht, so gilt der

Satz: *Jede rationale bizirkuläre C_4 ist Inverse eines Kegelschnitts von einem nicht auf diesem liegenden Inversionszentrum aus.*

Wie wir oben gesehen haben, ist der Ursprung, also das Inversionszentrum, Doppelpunkt der C_4 mit dem Tangentenpaar $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$. Daraus folgt:

Der Doppelpunkt O ist ein $\left. \begin{array}{l} \text{isolierter Punkt} \\ \text{Rückkehrpunkt} \\ \text{Doppelpunkt} \end{array} \right\}$, je nachdem

$b^2 - 4ac \begin{cases} \leq 0, & \text{d. h. } K \text{ eine Ellipse} \\ \geq 0, & \text{d. h. } K \text{ eine Parabel} \\ & \text{Hyperbel} \end{cases}$ ist. (Vgl. Fig. 44—47.)

Liegt das *Inversionszentrum* O im *Brennpunkt* F , so ist die kartesische Gleichung von K in Polarkoordinaten

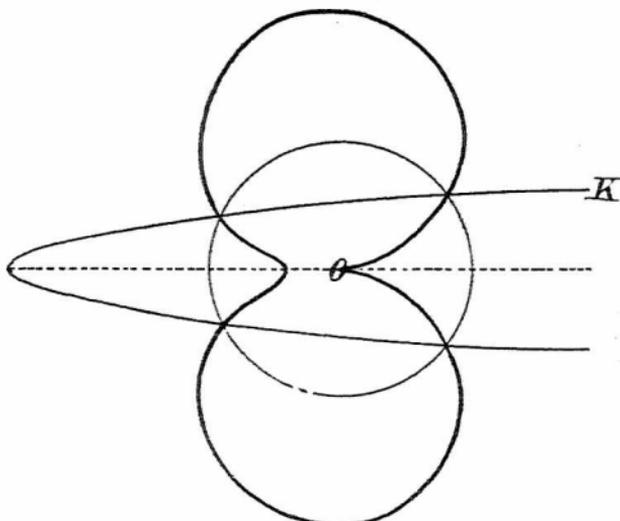


Fig. 46.

in Polarkoordinaten mit dem Brennpunkt als Pol und der Kegelschnittsachse als Achse des Polarsystems

$$\rho' = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

wo p der Parameter und K eine $\left. \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ darstellt, je

nachdem $\varepsilon \begin{cases} \leq 1 \\ > 1 \end{cases}$. Die inverse Kurve hat dann wegen $\rho \rho' = r^2$ die Gleichung

$$(3) \quad \rho p = r^2 (1 + \varepsilon \cos \varphi)$$

oder in Punktkoordinaten

$$(4) \quad [(x^2 + y^2)p - \varepsilon r^2 x]^2 = r^4(x^2 + y^2).$$

Die beiden Kreispunkte sind jetzt Rückkehrpunkte, was sich aus der homogenen Gleichung der Kurve

$$(4') \quad \begin{cases} p^2(x^2 + y^2)^2 - 2\varepsilon r^2 p x(x^2 + y^2)\omega \\ + r^4[(\varepsilon^2 - 1)x^2 - y^2]\omega^2 = 0 \end{cases}$$

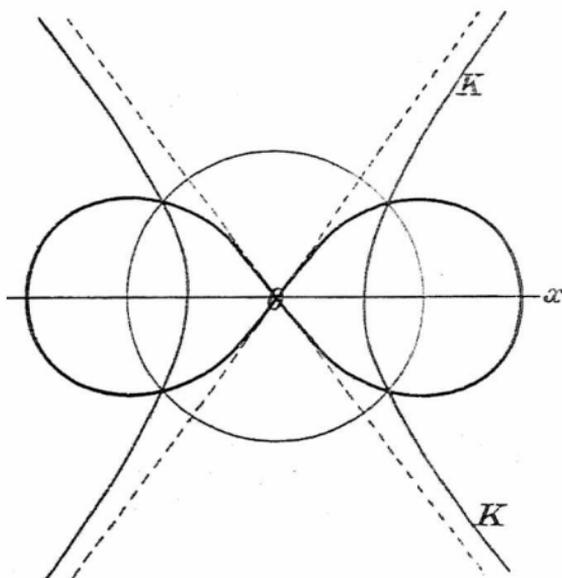


Fig. 47.

ergibt. Außerdem zeigt Gleichung (4'), daß die Kurve im Ursprung einen *isolierten Punkt* } hat, wenn $\varepsilon \leq 1$,
Rückkehrpunkt }
Doppelpunkt }

d. h. wenn K eine *Ellipse* } ist.
Parabel }
Hyperbel }

Im ersten und dritten Fall ($\varepsilon \leq 1$) ist die Kurve eine

Pascalsche Schnecke (Fig. 51 u. 48), im zweiten Fall ($\varepsilon = 1$) eine *Kardioide* (Fig. 50)*.

Diese Kurven gehören zur Gattung der *Kreiskonchoiden* und lassen sich auf folgende Weise erzeugen: Auf der Peripherie eines Kreises K liegt Punkt O (Fig. 49). Auf jedem

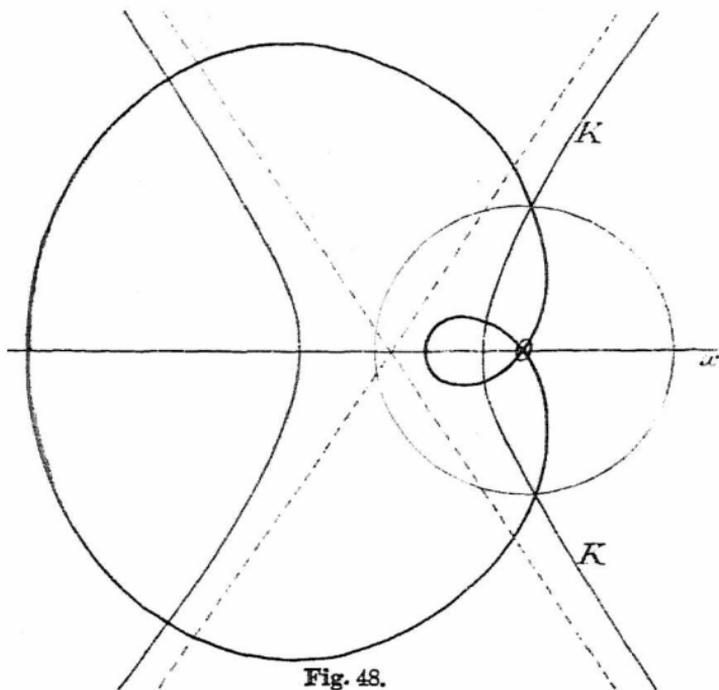


Fig. 48.

Radiusvektor OP wird eine konstante Strecke $PQ = l$ abgetragen. Der Ort der Punkte Q ist eine Pascalsche Schnecke. Ist $OM = R$ Polarachse und $\angle MOP = \varphi$, so wird

$$\rho = OQ = OP + PQ.$$

Damit haben wir als Polargleichung der Pascalschen Schnecke

$$\rho = 2R \cos \varphi + l$$

und

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = l^2(x^2 + y^2)$$

*) Die Konstruktion der Kurven durch Inversion ist nur in Fig. 48 durchgeführt.

als Gleichung der Kurve in Punktkoordinaten, die mit (4) identisch ist, wenn $R = \frac{\varepsilon r^2}{2p}$, $l = \frac{r^2}{p}$ ist. Der Ursprung ist isolierter Punkt }
 Rückkehrpunkt } , je nachdem $l \gtrless 2R$. Dies folgt aus
 Doppelpunkt }
 dem Aggregat der Glieder niederster Ordnung in der Gleichung der Kurve

$$(x^2 + y^2)^2 - 4R x(x^2 + y^2) - [(l^2 - 4R^2)x^2 + l^2 y^2] = 0.$$

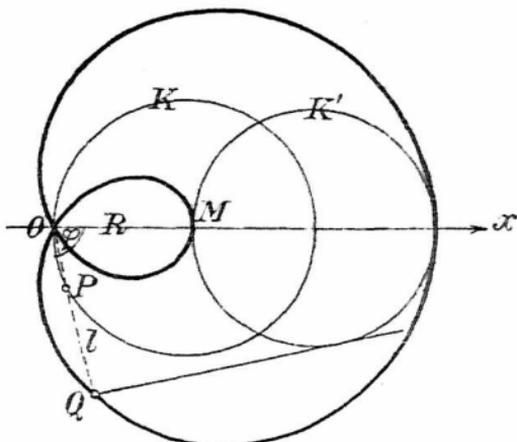


Fig. 49.

Die Gerade $x + \frac{l^2}{8R} = 0$ ist Doppeltangente, was aus der Kurvengleichung in der Form

$$\left(x^2 + y^2 - 2Rx - \frac{l^2}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}(8Rx + l^2)$$

hervorgeht.

Liegt das Inversionszentrum im Mittelpunkt der Ellipse bzw. der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so erhalten wir aus der Polargleichung

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \varphi \pm a^2 \sin^2 \varphi}$$

und der Transformationsgleichung $\rho \rho' = r^2$ für die transformierte Kurve nach einfacher Rechnung

$$(5) \quad a^2 b^2 (x^2 + y^2)^2 = r^4 (b^2 x^2 \pm a^2 y^2).$$

Im Fall der Ellipse ist der Ursprung isolierter Punkt (Fig. 44), im Fall der Hyperbel Doppelpunktwendepunkt mit den Asymptoten als Wendetangenten (Fig. 47).

Die Kurven (5) heißen *elliptische bzw. hyperbolische Lemniskaten* von Booth.

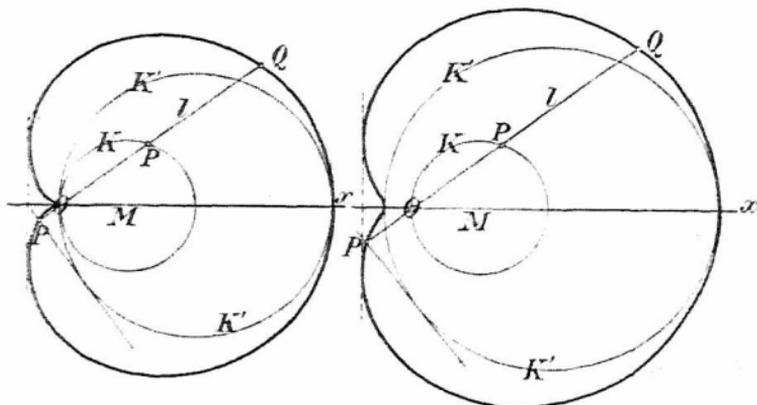


Fig. 50 und 51.

Für $a = b$ wird die Hyperbel gleichseitig und wir erhalten die *Bernoullische Lemniskate* (Fig. 52)

$$(6) \quad a^2 (x^2 + y^2)^2 = r^4 (x^2 - y^2) \omega^2.$$

Alle diese Kurven haben drei *Doppelwendepunkte*: einen reellen im Ursprung und zwei in den unendlich fernen Kreispunkten, was aus der homogenen Kurvengleichung ohne weiteres zu entnehmen ist.

Setzen wir in der Gleichung der Lemniskate von Bernoulli $\frac{r^4}{a^2} = c^2$ und ist in Fig. 52 $OM_1 = OM_2 = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, so gilt für jeden Kurvenpunkt P die Relation

$$\overline{M_1 P} \cdot \overline{M_2 P} = \overline{OM_1^2} = \frac{c^2}{2};$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \overline{M_1 P^2} \cdot \overline{M_2 P^2} &= \left[\left(x - \frac{c}{2} \sqrt{2} \right)^2 + y^2 \right] \left[\left(x + \frac{c}{2} \sqrt{2} \right)^2 + y^2 \right] \\ &= \left(x^2 + y^2 + \frac{c^2}{2} + c x \sqrt{2} \right) \left(x^2 + y^2 + \frac{c^2}{2} - c x \sqrt{2} \right) \\ &= (x^2 + y^2)^2 + \frac{c^4}{4} + c^2 (x^2 + y^2) - 2 c^2 x^2, \end{aligned}$$

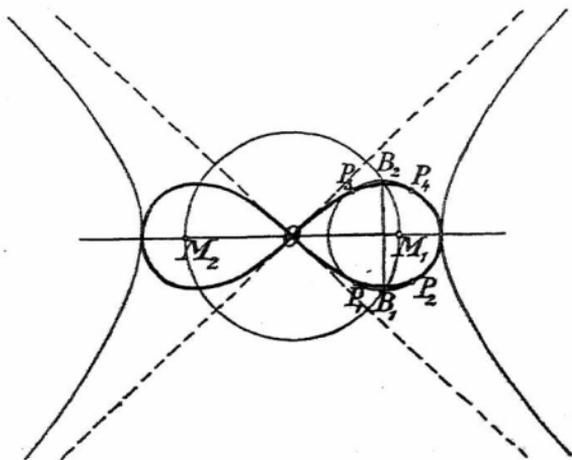


Fig. 52.

woraus mit Berücksichtigung der Kurvengleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = c^2 (x^2 - y^2)$$

sich ergibt

$$\overline{M_1 P^2} \cdot \overline{M_2 P^2} = \frac{c^4}{4}$$

oder

$$\overline{M_1 P} \cdot \overline{M_2 P} = \frac{c^2}{2} = \overline{O M_1^2}.$$

Setzen wir $\overline{M_1 P} = \varrho_1$, $\overline{M_2 P} = \varrho_2$, so haben wir die Relation

$$\varrho_1 \varrho_2 = \frac{c^2}{2},$$

die auch die Gleichung der Kurve in Bipolarkoordinaten ist.

Wir führen noch kurz eine *Konstruktion* der Bernoullischen Lemniskate an, deren Beweis wir dem Leser überlassen. Ist $B_1 B_2$ eine beliebige der im Kreis mit Radius OM_1 zu OM_1 senkrechten Sehnen, so schneidet der über $B_1 B_2$ als Durchmesser beschriebene Kreis den um B_1 (bzw. B_2) mit Radius OB_1 (bzw. OB_2) beschriebenen Kreis in vier Punkten der Lemniskate.

Wie die rationalen zirkularen C_3 lassen sich auch die rationalen bizirkularen C_4 als *Fußpunktkurven* auffassen, nur daß hier die Grundkurven Ellipsen und Hyperbeln sind, während es dort Parabeln waren. Dies kann ganz einfach auf folgende Weise geschehen: Zu einem Punkt P des Kegelschnitts K können wir den entsprechenden Punkt P' der Inversen in der Weise konstruieren, daß wir die Polare p von P in bezug auf den Inversionskreis mit OP schneiden (Fig. 43). Durchläuft nun P den Kegelschnitt K , so umhüllen die Polaren p einen zweiten Kegelschnitt K'^*). Der Ort der Punkte P' , d. h. die rationale bizirkulare C_4 , ist also nichts anderes als die *Fußpunktkurve* von K' in bezug auf den Pol O . Diese berührt offenbar K' in den vier gemeinsamen Punkten, wie dies Fig. 43 auch zeigt.

In den Figuren 49, 50 und 51 sind die Pascalsche Schnecke und die Kardioide auch als Fußpunktkurven eines Kreises K' vom Pol O aus dargestellt, der in Fig. 49 außerhalb K' , in Fig. 50 auf K' und in Fig. 51 innerhalb K' liegt.

Um nun *die verschiedenen Formen* zu erhalten, welche die *rationalen bizirkularen Kurven vierter Ordnung* annehmen können, nimmt man den Inversionskreis fest und bringt K in verschiedene Lagen. Man hat dann *drei Hauptfälle*, je nachdem K eine Ellipse, Parabel oder

*) Vgl. hierfür z. B. *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. der Kegelschnitte, 2. Teil, § 401.

Hyperbel ist, wobei O entweder innerhalb oder außerhalb K liegen kann*).

Wir erhalten so sechs verschiedene Typen, die in den Fig. 43—48 dargestellt sind. In den Fig. 43 u. 44 ist K eine Ellipse, in den Fig. 45 u. 46 eine Parabel und in den Fig. 47 u. 48 eine Hyperbel.

Daß die bizirkulären rationalen C_4 *Fußpunktkurven der Mittelpunktskegelschnitte* sind, wollen wir jetzt auch noch mittels Rechnung darlegen. Die Grundkurve sei die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

die Gleichung der Tangente mit gegebenem Richtungsfaktor m lautet

$$y = mx + \sqrt{m^2 a^2 + b^2}.$$

Das vom Pol (α, β) darauf gefüllte Lot hat die Gleichung

$$y - \beta = -\frac{1}{m}(x - \alpha).$$

Die Elimination von m aus diesen beiden Gleichungen gibt

(7) $[x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y)]^2 - a^2(x - \alpha)^2 - b^2(y - \beta)^2 = 0$
als Gleichung der gesuchten Fußpunktkurve. Aus der homogenen Form der Gleichung (7)

$$(7') \underline{[x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y)\omega]^2} = [a^2(x - \alpha)^2 + b^2(y - \beta)^2]\omega^2$$

*) Liegt das Inversionszentrum O auf K , d. h. ist in den Gleichung (2) (S. 123) $r^4 = 0$, so erhalten wir als Inverse von K eine rationale zirkuläre Kurve dritter Ordnung (vgl. S. 77 f.); man kann diese als spezielle bizirkuläre C_4 ansehen, da sie zusammen mit der unendlich fernen Geraden ebenfalls eine Kurve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in den unendlich fernen Kreispunkten darstellt.

ersieht man, daß die Punkte

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \end{array} \right\}$$

Doppelpunkte sind, d. h. die *Fußpunktkurven der Mittelpunktskegelschnitte sind bizirkulare rationale Kurven vierter Ordnung*. Diese Kurven haben drei Doppelpunkte, einen im Pol und zwei in den unendlich fernen Kreispunkten. Der im Pol liegende Doppelpunkt ist ein reeller Doppelpunkt } außerhalb }
 isolierter Punkt } , je nachdem der Pol auf }
 Rückkehrpunkt } innerhalb }
 der Grundkurve liegt.

Für die Hyperbel erhalten wir als Fußpunktkurve, wenn wir in (7) statt $+b^2$ den Wert $-b^2$ setzen:

$$(8) [x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y)]^2 = [a^2(x - \alpha)^2 - b^2(y - \beta)^2]$$

Geben wir dem Pol besondere Lagen, oder nehmen wir spezielle Kegelschnitte an, so bekommen wir *ausgezeichnete Arten* der Fußpunktkurven.

I. Der Kegelschnitt sei die *Ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. $\alpha = 0, \beta = 0$: $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$
 (*elliptische Lemniskate von Booth*).
2. $\alpha = c = \sqrt{a^2 - b^2}, \beta = 0$: $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2) = 0$
 (Scheitelkreis der Ellipse).
3. $\alpha = a, \beta = 0$: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x - a)^2 + b^2 y^2$
 (*Pascalsche Schnecke*).

Mit $a = b$ wird die Ellipse zum Kreis.

Setzen wir z. B. $\beta = 0$, so erhalten wir

$$(x^2 + y^2 - \alpha x)^2 = a^2(x - \alpha)^2 + b^2 y^2$$

(*Pascalsche Schnecke*).

Liegt der Pol auf der Peripherie und ist z. B. $\alpha = a$, $\beta = 0$, so erhalten wir

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2[(x - a)^2 + y^2],$$

oder, wenn man $x - a$ durch x ersetzt, was einer Verschiebung der Kurve in Richtung der positiven x -Achse um a entspricht,

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

(*Kardioide*).

II. Der Kegelschnitt sei die *Hyperbel*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. $\alpha = 0$, $\beta = 0$: $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2$

(*hyperbolische Lemniskate von Booth*).

2. $\alpha = c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\beta = 0$: $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2) = 0$

(Scheitelkreis der Hyperbel).

3. $\alpha = a$, $\beta = 0$: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x - a)^2 - b^2 y^2$

(*Pascalsche Schnecke*).

Wird die Hyperbel gleichseitig, ist also $a = b$, so erhalten wir für

$$\alpha = 0, \beta = 0: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

(*Lemniskate von Bernoulli*), für

$$\alpha = a, \beta = 0: (x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2[(x - a)^2 - y^2]$$

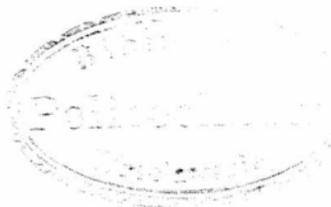
(*Kardioide*).

Register.

(Die beigetzten Zahlen geben die Seiten des Buches an.)

- Äquivalente Singularitäten 55.
 Anallagmatische Kurven 76.
 Asymptoten 36.
 Asymptotengleichung einer C_3 59.
 Auflösung der höheren Singularitäten 55 ff.
 Begleiterin der unendlich fernen Geraden 60.
 Bernoullische Lemniskate 128.
 Berührungsknoten 85.
 Berührungsknotenspitze 89.
 Berührungspunkt, Gleichung des B.es 38.
 Bifolium 44, 93.
 Binomische Kurven 45.
 Bizirkulare C_4 119 ff.
 Bizirkulare rationale C_4 121 ff.
 Brennpunkte einer Kurve 75.
 Brennpunktskonchoide 88.
 Cartesische Ovale 120.
 Casinische Kurven 120.
 Cremonasche Transformation 100.
 Descartessches Blatt 52.
 Divergierende Parabeln 62.
 Doppelpunkt 42.
 —, Maximal der D.-P.e 51.
 Doppeltangenten bei C_4 82.
 Doppeltangenten 1. Art 43, 46.
 Doppeltangenten 2. Art 43.
 Dreieckskoordinaten 102 ff.
 Dreieckskurven 3. Ordnung 70, 72.
 Dreieckskurven 4. Ordnung 94.
 Dreifacher Punkt 54.
 Dreifache Tangente 54.
 Dualität 29 ff.
 —, spezielle, in der Ebene 34 ff.
 Dürersche Muschellinie 99.
 Einheitspunkt 102.
 Einteilung der C_3 66 ff.
 Einteilung der C_4 91 ff.
 Flachpunkt 53.
 Flachpunkt-Äquivalenz des F.es 55.
 Fundamentaldreieck 102.
 Fußpunktkurven der Mittelpunktskegelschnitte 130 f.
 Fußpunktkurven der Parabel 79.
 Geschlecht 50.
 Gleichung, allgemeine, in u und v 30.
 Gleichung des Punkts 30.
 Gleichung in Achsenabschnitten 30.
 Gürtelkurve 94, 97.
 Hessesche Kurve 25.
 —, Verhalten der H.n.K. in einem vielfachen Punkt der Grundkurve 25 ff.
 Homogene Linienkoordinaten 34.
 Inversion 76, 78, 122.
 Inversionskreis 76.
 Jerabeksche Kurve 86.
 Kappakurve 85.
 Kardioide 126.
 Klasse einer Kurve 16.
 Koeffizienten, Anzahl der K. einer Kurvengleichung 59.
 Koordinatendreieck 102.
 Kreiskonchoiden 126.
 Kùlpische Konchoide 86.
 Kurve, doppelte Auffassung einer K. 33.
 Kurven 3. Ordnung 53 ff.
 —, die allgemeine Kurvengleichung 53 ff.
 —, Einteilung der K. 3. O. 66 ff.
 —, Newtons Normalformen 61 ff.
 —, Plückers symbolische Gleichungsformen 59 ff.
 —, rationale K. 3. O. 74.
 —, rationale zirkulare K. 3. O. 77 ff.
 —, zirkulare K. 3. O. 74 ff.
 — n ter Ordnung 33.
 — k ter Klasse 33.

- Kurven 4. Ordnung 82 ff.
 —, bizirkulare K. 4. O. 119 ff.
 —, Einteilung der K. 4. O. 91 ff.
 —, höhere Singularitäten bei K. 4. O. 84 ff.
 —, Plücker's Form der Kurvengleichung 82 ff.
 —, rationale K. 4. O. 107 ff.
 —, rationale bizirkulare K. 4. O. 121 ff.
- Lemniskate, elliptische 128.
 —, hyperbolische 128.
 Linienkoordinaten 29.
 —, Übergang von L. zu Punktkoordinaten 37.
- Newton's Einteilung der C_3 71 ff.
 — Normalformen der C_3 61 ff.
- Nullpunktstangenten 36.
- Oskulationsknoten 88.
 Oval 44, 69.
- Paare Kurvenzüge 92 f.
- Pascalsche Schnecke 126.
- Penultimate Kurve 55.
- Plücker'sche Formeln 49.
 — Linienkoordinaten 29.
- Polare 18.
 —, Verhalten der 1. P.n 19 ff.
- Punktkoordinaten.
 Übergang von P.- zu Linienkoordinaten 36.
- Quadratische Transformation 100 ff.
 Quadrifolium 44, 93.
- Rationale Kurven 52.
 — 3. Ordnung 74 ff.
 — 4. Ordnung 107 ff.
- Resultante 11.
- Reziproke einer Kurve 34.
- Reziproke Radien, Transformation durch 76, 78, 122.
- r -facher Punkt 21.
- Ringkurve 94, 97.
- Rückkehrpunkt 45.
- Rückkehrspitzpunkt, Äquivalenz des R.es 56.
- Rückkehrtangente 42, 44, 45.
- Schnabelspitze 53, 87.
 —, Äquivalenz der Sch. 56.
- Schnittpunkte zweier Kurven 7 ff.
 — an mehrfachen Punktstellen 12 ff.
- Selbstberührungspunkt 53, 85.
- Singularitäten 42 ff. 53 ff.
- , Auflösung der höheren S. 55 ff.
 —, höhere S. 53.
 —, bei Ordnungs- und Klassenkurven 41 ff.
 —, höhere S. bei C_4 84 ff.
- Spirische Linien des Perseus 120.
- Spitzpunkt, Äquivalenz des Sp.es 56.
- Steigbügel 47.
- Steinersche Hypozykloide 117.
- Tangenten an eine Kurve 19.
- Transformation, Cremonasche 100 ff.
 — durch reziproke Radien 76, 78, 122.
- Trennen am Knoten 69.
- Trifolium 44, 93.
- Übergangskurven 3. Ordnung 70.
- Unifolium 44, 93.
- Unpaare Züge 92 f.
- Verbinden am Knoten 69.
- Viereckskurve 3. Ordnung 70, 72.
 — 4. Ordnung 94.
- Wendeflachpunkt, Äquivalenz des W.es 56.
- Wendepunkt 42, 44 f.
 — bei Kurven 3. Ordnung 61.
 —, Zahl der W.e einer Kurve 25.
- Wendetangente 46.
- Zirkulare Inversion 76, 78, 122,
 — Kurven 3. Ordnung 74 ff.



Berichtigungen zum I. Teil.

- S. 21, Zeile 9 v. u. lies statt: Jeden unpaaren Zug — Jeden
paaren Zug.
- S. 31, Zeile 9 v. u. lies statt: d. h. der Gleichung (1) genügen
— d. h. der durch die Gleichung (1) dargestellten Kurve
genügen.
- S. 35, Zeile 6 v. o. ist der Satz: „Die Kegelschnitte sind
also . . . besitzen“ zu streichen.
- S. 65, Zeile 9 v. o. lies statt: $[x^2[x^2 + (y - 3)^2 - 9], y]$
— $[x^2[x^2 + (y - 3)^2 - 9], y^2]$.
- S. 113, Zeile 9 v. o. lies statt: die (n) Nullpunktstangenten
— die $n(n - 1)$ Nullpunktstangenten.
- S. 116, Zeile 9 von u. lies: Die Gleichung dieser Kurve
wurde zuerst von *Hesse* in einer 1844 veröffentlichten
Arbeit: „Über die Wendepunkte der Kurven 3. Ordnung“
(*Gesammelte Werke*, S. 123 ff.) aufgestellt: die Kurve
wird . . .

Sammlung

Jeder Band
in Leinw. geb.

90 Pf.

Götschen

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

- Abwässer.** Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung u. Untersuchung von Professor Dr. Emil Hajelhoff, Vorsteher der landw. Versuchsanstalt in Marburg in Hessen. Nr. 473.
- Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre** v. Dr. Paul Rippert i. Gießen u. Ernst Langenbeck, Gr.-Lichterfelde. Nr. 232.
- Agrarwesen und Agrarpolitik** von Prof. Dr. W. Wiggoldzinski in Bonn. 2 Bändchen. I: Boden u. Unternehmung. Nr. 592.
- II: Kapital u. Arbeit in der Landwirtschaft. Bewertung der landwirtschaftl. Produkte. Organisation des landwirtschaftl. Berufsstandes. Nr. 593.
- Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung** v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.
- Agrikulturchemische Kontrollwesen, Das,** v. Dr. Paul Kriehle in Leopoldshall-Stahfurt. Nr. 304.
- **Untersuchungsmethoden** von Prof. Dr. Emil Hajelhoff, Vorsteher der landwirtschaftl. Versuchsanstalt in Marburg in Hessen. Nr. 470.
- Akkumulatoren, Die, für Elektrizität** v. Kaij. Reg.-Rat Dr.-Ing. Richard Albrecht in Berlin-Zehlendorf. Mit 52 Figuren. Nr. 620.
- Akustik. Theoret. Physik I: Mechanik u. Akustik.** Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 19 Abb. Nr. 76.
- **Musikalische,** von Professor Dr. Karl S. Schäfer in Berlin. Mit 36 Abbild. Nr. 21.
- Algebra. Arithmetik und Algebra** von Dr. S. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- Algebra. Beispielsammlung z. Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums i. Hamburg. Nr. 48.
- Algebraische Kurven v. Eugen Dentele.** Oberreallehrer in Balingen-Enz, I: Kurvendiskussion. Mit 57 Fig. im Text. Nr. 435.
- II: Theorie u. Kurven dritter u. vierter Ordnung. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.
- Alpen, Die,** von Dr. Rob. Sieger, Professor an der Universtät Graz. Mit 19 Abb. u. 1 Karte. Nr. 129.
- Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung u. Erläuterungen** v. Th. Schaffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.
- Mittejamentl. Religionsgeschichte** von D. Dr. Max Löhr, Professor an der Universtät Königsberg. Nr. 292.
- Amphibien. Das Tierreich III: Reptilien u. Amphibien** v. Dr. Franz Werner, Prof. an der Universtät Wien. Mit 48 Abbild. Nr. 383.
- Analyse, Techn.-Chem.,** von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eigen. Politechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.
- Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung.** Von Dr. Frdr. Junker, Rektor des Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 68 Figuren. Nr. 87.
- **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** von Dr. Frdr. Junker, Rektor d. Realgymn. u. d. Oberrealsch. in Göppingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Analysis, Höhere, II: Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junfer, Rektor des Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göppingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88

— **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung** v. Dr. Friedr. Junfer, Rekt. d. Realgymnas. und der Oberrealschule in Göppingen. Mit 50 Fig. Nr. 147.

— **Niedere**, von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Prof. an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Arbeiterversicherung siehe: Sozialversicherung.

Archäologie von Dr. Friedrich Koepf, Prof. an der Universität Münster i. W. 3 Bändchen. W. 28 Abb. im Text u. 40 Tafeln. Nr. 538/40.

Arithmetik u. Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrten-schule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— **Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Prof. a. d. Gelehrten-schule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Armeeferd, Das, und die Versorgung der modernen Heere mit Pferden v. Felix von Dammiz, General der Kavallerie z. D. u. ehemal. Preuß. Remonteinspekteur. Nr. 514.

Armenwesen und Armenfürsorge. Einführung in d. soziale Hilfsarbeit v. Dr. Adolf Weber, Prof. an der Handelshochschule in Köln. Nr. 346.

**Arzneimittel, Neuere, ihre Zusammen-
setzung, Wirkung und Anwendung** von Dr. med. C. Bachem, Professor der Pharmakologie an der Universität Bonn. Nr. 669.

Ästhetik, Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer a. d. Kgl. Akademie d. bild. Künste in Stuttgart. Nr. 300.

**Astronomie. Größe, Bewegung u. Ent-
fernung der Himmelskörper** v. A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. an der Universität Kiel. I: Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

— II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.

Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper v. Prof. W. F. Wislicenus. Neu bearbeitet von Dr. G. Lubendorff in Potsdam. Mit 15 Abbild. Nr. 91.

Atherische Öle und Nichtstoffe von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Auffassentwürfe v. Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Oberhard-Ludwigs-Gymnas. i. Stuttg. Nr. 17.

Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Wilh. Weibrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. 2 Bändchen. Mit 16 Figuren. Nr. 302 u. 641.

**Aufereuropäische Erdteile, Länder-
kunde** der, von Dr. Franz Heiderich, Professor an der Exportakademie in Wien. Mit 11 Textfiguren und Profilen. Nr. 63.

**Australien. Landeskunde u. Wirt-
schaftsgeographie des Festlandes** Australien von Dr. Kurt Häffert, Prof. d. Geographie an d. Handels-hochschule in Köln. Mit 8 Abb., 6 graph. Tab. u. 1 Karte. Nr. 319.

**Autogenes Schweiß- und Schneid-
verfahren** von Ingen. Hans Niele in Kiel. Mit 30 Figuren. Nr. 499.

**Bade- u. Schwimmanstalten, Öffent-
liche**, v. Dr. Karl Wolff, Stadtob-
baur., Hannover. W. 50 Fig. Nr. 380.

Baden. Badische Geschichte von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnas. in Pforzheim u. Privatdozent der Geschichte an der Technischen Hoch-schule in Karlsruhe. Nr. 230.

— **Landeskunde von Baden** von Prof. Dr. O. Rienitz i. Karlsruhe. Mit Profil., Abb. u. 1 Karte. Nr. 199.

Bahnhöfe. Hochbauten der Bahnhöfe v. Eisenbahnbauinspekt. E. Schwab, Vorstand d. Kgl. E.-Hochbauinspektion Stuttgart II. I: Empfangsgebäude. Nebengebäude. Güterschuppen. Lokomotivschuppen. Mit 91 Ab-bildungen. Nr. 515.

**Balkanstaaten. Geschichte d. christ-
lichen Balkanstaaten** (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Rempen. Nr. 331.

Bankwesen. Technik des Bankwesens von Dr. Walter Conrad, stellvert. Vorstand der statist. Abteilung der Reichsbank in Berlin. Nr. 484.

Bauführung. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen der Bauführung v. Archit. Emil Heutingen, Assistent an d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Nr. 25 Fig. u. 11 Tabell. Nr. 399.

Baukunst, Die, des Abendlandes v. Dr. K. Schäfer, Assist. a. Gewerbe-museum, Bremen. Mit 22 Abb. Nr. 74.

— **des Schulhauses v. Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein, Darmstadt. I: Das Schulhaus. Nr. 38 Abb. Nr. 443.**

— **II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. Nr. 31 Abb. Nr. 444.**

Bausteine. Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Baustoffkunde, Die, v. Prof. S. Haberstroh, Oberl. a. d. Herzogl. Bau-gewerkschule Holzminden. Mit 36 Abbildungen. Nr. 506.

Bayern. Bayerische Geschichte von Dr. Hans Adel in Augsburg. Nr. 160.

— **Landeskunde des Königreichs Bayern v. Dr. W. Göb, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule München. Nr. Profil., Abb. u. 1 Karte. Nr. 176.**

Befestigungswesen. Die geschichtliche Entwicklung des Befestigungswesens vom Aufkommen der Pulvergeschütze bis zur Neuzeit von Reuleaux, Major b. Stabe d. 1. Westpreuß. Pionierbataill. Nr. 17. Mit 30 Bildern. Nr. 569.

Beschwerderecht. Das Disziplinar- u. Beschwerderecht für Heer u. Marine v. Dr. Max E. Mayer, Prof. a. d. Univ. Straßburg i. E. Nr. 517.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedr. Barth, Oberingen. in Rürnberg. 1. Teil: Einleitung. Dampf-kraftanlagen. Verschied. Kraft-maschinen. Nr. 27 Abb. Nr. 224.

— **— II: Gas-, Wasser- u. Wind-kraftanlagen. Nr. 31 Abb. Nr. 225.**

— **— III: Elektromotoren. Betriebs-kostentabellen. Graph. Darstell. Wahl d. Betriebskraft. Nr. 27 Abb. Nr. 474.**

Bewegungsspiele v. Dr. E. Rohrkrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymn. zu Hannover. Nr. 15 Abb. Nr. 96.

Wäscherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Wajss, Prof. a. d. Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Blütenpflanzen, Das System der, mit Ausschluß der Gymnospermen von Dr. R. Wilger, Rufos in Berlin-Dahlem. Mit 31 Figuren. Nr. 393.

Bodenkunde von Dr. W. Bögeler in Königsberg i. Pr. Nr. 455.

Bolivia. Die Cordillerenstaaten von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen. I: Einleitung, Bolivia u. Peru. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 652.

Brandenburg. - Preussische Geschichte von Prof. Dr. W. Thamm, Dir. des Kaiser Wilhelms-Gymnasiums in Montabaur. Nr. 600.

Brazilien. Landeskunde der Republik Brasilien von Bel. Rodolphs von Jhering. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 373.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Deverhoff, Dir. der Brauer- u. Mälzereischule zu Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.

Britisch-Nordamerika. Landeskunde von Britisch-Nordamerika v. Prof. Dr. A. Coppel in Bremen. Mit 13 Abb. und 1 Karte. Nr. 284.

Buchführung in einfachen u. doppelten Posten v. Prof. Rob. Stern, Oberl. d. Essentl. Handelslehraust. u. Doz. d. Handelshochschule zu Leipzig. Nr. vielen Formul. Nr. 115.

Buddha von Professor Dr. Edmund Harbh. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.

Bürgerliches Gesetzbuch siehe: Recht des BGB.

Byzantinisches Reich. Geschichte des byzantinischen Reiches von Dr. K. Roth in Rempten. Nr. 190.

Chemie, Allgemeine u. physikalische, von Dr. Max Rudolph, Prof. an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

Chemie, Analytische, von Dr. Johannes Hoppe in München. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganische**, von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

— **Geschichte der**, von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chemischen Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis z. Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium d. Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Alphabetische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— III: Karbochloidsche Verbindungen. Nr. 193.

— IV: Heterochloidsche Verbindungen. Nr. 194.

— **Organische**, von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

— **Pharmazeutische**, von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 4 Bändchen. Nr. 543/44, 588 u. 682.

— **Physiologische**, von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— II: Dissimilation. Nr. 1 Tafel. Nr. 241.

— **Toxikologische**, von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Chemische Industrie, Anorganische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsoda-industrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.

— II: Salinentwesen, Kalifalze, Düngerindustrie u. Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— III: Anorganische chemische Präparate. Nr. 6 Taf. Nr. 207.

Chemische Technologie, Allgemeine, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Christlichen Literaturen des Orients, Die, von Dr. Union Baumgart. I: Einleitung. — Das Christlich-aramäische u. d. koptische Schrifttum. Nr. 527.

— II: Das Christl.-arab. und das äthiop. Schrifttum. — Das Christl. Schrifttum d. Armenier und Georgier. Nr. 528.

Colombia. Die Cordillerenstaaten von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen. II: Ecuador, Colombia u. Venezuela. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 653.

Cordillerenstaaten, Die, von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen. I: Einleitung, Bolivia u. Peru. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 652.

— II: Ecuador, Colombia u. Venezuela. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 653.

Dampfessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. den praktischen Gebrauch von Oberingenieur Friedr. Barth in Nürnberg. I: Kesselsysteme und Feuerungen. Mit 43 Fig. Nr. 9.

— II: Bau und Betrieb der Dampfessel. Nr. 57 Fig. Nr. 521.

Dampfmaschinen, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2 Bdchn. I: Wärmetheoretische und dampftechnische Grundlagen. Mit 64 Fig. Nr. 8.

— II: Bau und Betrieb der Dampfmaschinen. Mit 109 Fig. Nr. 572.

Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise u. Konstruktion von Ingen. Herm. Wilda, Prof. a. staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abb. Nr. 274.

Desinfektion von Dr. M. Christian, Stabsarzt a. D. in Berlin. Mit 18 Abbildungen. Nr. 546.

Determinanten von B. B. Fischer, Oberl. a. d. Oberrealsch. z. Großlichterfelde. Nr. 402.

Deutsche Altertümer von Dr. Franz Fuhs, Dir. d. städt. Museums in Braunschweig. Nr. 70 Abb. Nr. 124.

- Deutsche Fortbildungsschulwesen**, Das, nach seiner geschichtlichen Entwicklung u. in seiner gegenwärt. Gestalt von H. Eierds, Rektor gewerbl. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.
- Deutsches Fremdwörterbuch** von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.
- Deutsche Geschichte** von Dr. F. Kurze, Prof. a. Rgl. Luisengymnas. in Berlin. I: Mittelalter (bis 1519) Nr. 33.
- II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege (1517 bis 1648). Nr. 34.
- III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs (1648—1806). Nr. 35.
- siehe auch: Quellenkunde
- Deutsche Grammatik und kurze Geschichte** der deutschen Sprache von Schulrat Prof. Dr. L. Lyon in Dresden. Nr. 20.
- Deutsche Handelskorrespondenz** von Prof. Th. de Beauv, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.
- Deutsches Handelsrecht** von Dr. Karl Lehmann, Prof. an der Universität Göttingen. 2 Bde. Nr. 457 u. 458.
- Deutsche Heldensage**, Die, von Dr. Otto Luitvold Jiriczek, Prof. an d. Univ. Würzburg. Mit 5 Tafeln. Nr. 32.
- Deutsche Kirchenlied**, Das, in seinen charakteristischen Erscheinungen ausgewählt v. D. Friedrich Spitta, Prof. a. d. Universität in Straßburg i. E. I: Mittelalter u. Reformationszeit. Nr. 602.
- Deutsches Kolonialrecht** von Prof. Dr. H. Ebler von Hoffmann, Studien- direktor der Akademie für kommunale Verwaltung in Düsseldorf. Nr. 318.
- Deutsche Kolonien**. I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 441.
- II: Das Südseegebiet und Kiautschou von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 520.
- III: Ostafrika von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.
- IV: Südwestafrika von Prof. Dr. K. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 637.
- Deutsche Kulturgeschichte** von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.
- Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert**. Realkommentar zu den Volks- u. Kunstepen u. zum Minne- sang. Von Prof. Dr. Jul. Dieffen- bacher in Freiburg i. B. I: Öffent- liches Leben. Mit zahlreichen Ab- bildungen. Nr. 93.
- II: Privatleben. Mit zahl- reichen Abbildungen. Nr. 328.
- Deutsche Literatur des 13. Jahrhun- derts**. Die Epigonen d. höfischen Epos. Auswahl a. deutschen Dich- tungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junl, Aktuaris der Kaiserlichen Akademie der Wissen- schaften in Wien. Nr. 289.
- Deutsche Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts**. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jansen, Direktor d. Königin Luise- Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.
- Deutsche Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts**. I: Martin Luther u. Thom. Murner. Ausgewählt u. mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Ober- lehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.
- II: Hans Sachs. Ausgewählt u. erläut. v. Prof. Dr. J. Sahr. Nr. 24.
- III: Von Brant bis Hollen- hagen: Brant, Sulten, Fischart, sowie Tierrepos u. Fabel. Ausgew. u. erläut. von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.
- des 17. und 18. Jahrhunderts bis Klopstock. I: Bril von Dr. Paul Legband in Berlin. Nr. 364.
- II: Prosa v. Dr. Hans Legband in Kassel. Nr. 365.
- Deutsche Literaturgeschichte** von Dr. Max Koch, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 31.
- der Klassikerzeit v. Carl Weidbrecht, durchgesehen u. ergänzt v. Karl Berger. Nr. 161.
- des 19. Jahrhunderts von Carl Weidbrecht, neu bearbeitet von Dr. Rich. Weidbrecht in Wimpfen. I. II. Nr. 134. 135.
- Deutschen Mundarten**, Die, von Prof. Dr. H. Reis in Mainz. Nr. 605.
- Deutsche Mythologie**. Germanische Mythologie von Dr. Eugen Mogk, Prof. a. d. Univerf. Leipzig. Nr. 15.

- Deutschen Personennamen, Die, v. Dr. Rud. Kleinpaul i. Leipzig. Nr. 422.**
- Deutsche Poesie von Dr. K. Vorincki, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.**
- Deutsche Rechtsgeschichte v. Dr. Richard Schröder, Prof. a. d. Univ. Heidelberg. I: Bis z. Mittelalter. Nr. 621.**
 — — II: Die Neuzeit. Nr. 664.
- Deutsche Redelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. i. Bamberg. Nr. 61.**
- Deutsche Schule, Die, im Auslande von Hans Amrhein, Seminaroberlehrer in Rheindt. Nr. 259.**
- Deutsches Seerecht v. Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I: Allgem. Lehren: Personen u. Sachen d. Seerechts. Nr. 386.**
 — — II: Die einz. seerechtl. Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts u. außervertragliche Haftung. Nr. 387.
- Deutsche Stadt, Die, und ihre Verwaltung. Eine Einführung i. d. Kommunalpolitik d. Gegenw. Herausgeg. v. Dr. Otto Rost, Beigeordn. d. Stadt Düsseldorf. I: Verfassung u. Verwaltung im allgemeinen; Finanzen und Steuern; Bildungs- und Kunstpflege; Gesundheitspflege. Nr. 617.**
 — — II: Wirtschafts- u. Sozialpolitik. Nr. 662.
- — III: Technik: Städtebau, Tief- u. Hochbau. Mit 48 Abb. Nr. 663.
- Deutsche Stammeskunde v. Dr. Rud. Wuch, a. o. Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.**
- Deutsches Unterrichtswesen. Geschichte des deutschen Unterrichtswesens v. Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des kgl. Gymnasiums zu Ludau. I: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.**
 — — II: Vom Beginn d. 19. Jahrh. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.
- Deutsche Urheberrecht, Das, an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internat. Verträge v. Dr. Gust. Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.**
- Deutsche Volkslied, Das, ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25 u. 132.**
- Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Geheimer Kriegsrat u. vortragender Rat im Kriegsministerium in München. Nr. 401.**
- Deutsches Wörterbuch v. Dr. Richard Loewe. Nr. 64.**
- Deutsche Zeitungswesen, Das, von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 400.**
- Deutsches Zivilprozessrecht von Prof. Dr. Wilhelm Rüd. in Strassburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.**
- Deutschland in römischer Zeit von Dr. Franz Cramer, Provinzialschulrat zu Münster i. W. Mit 23 Abbildungen. Nr. 633.**
- Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Ausw. mit Einl. u. Wörterb. herausgeg. v. Dr. Herm. Fausen, Direktor d. Königin Luise-Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.**
- Dietrichen. Rudrun und Dietrichen. Mit Einleitung u. Wörterbuch von Dr. L. G. Jiriczek, Prof. a. d. Universität Würzburg. Nr. 10.**
- Differentialrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göttingen. Mit 68 Figuren. Nr. 87.**
 — Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rektor d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göttingen. Mit 46 Fig. Nr. 146.
- Drogentechnik von Rich. Dorfmeister in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.**
- Druckwasser- und Druckluft-Anlagen. Pumpen, Druckwasser- u. Druckluft-Anlagen von Dipl.-Ing. Rudolf Bogdt, Regierungsbaumeistr. a. D. in Aachen. Mit 87 Fig. Nr. 290.**
- Ecuador. Die Cordillerenstaaten von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen. II: Ecuador, Colombia u. Venezuela. Mit 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 653.**
- Ebdasteder mit Grammatik, Aberg. u. Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Esnabrück. Nr. 171.**
- Eisenbahnbau. Die Entwicklung des modernen Eisenbahnbauwes. v. Dipl.-Ing. Alfred Birk, o. ö. Prof. a. d. k. k. Deutschen Techn. Hochschule in Prag. Mit 27 Abbild. Nr. 553.**
- Eisenbahnbetrieb, Der, v. E. Scheibner, Königl. Oberbaurat a. D. in Berlin. Mit 3 Abbildgn. Nr. 676.**

- Eisenbahnen, Die Linienführung der**, von H. Wegele, Professor an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 52 Abbildungen. Nr. 623.
- Eisenbahnfahrzeuge** von F. Hinnenhal, Regierungsbaumeister u. Oberingenieur in Hannover. I: Die Lokomotiven. Mit 89 Abbild. im Text und 2 Tafeln. Nr. 107.
- II: Die Eisenbahnwagen und Bremsen. Mit Anh.: Die Eisenbahnfahrzeuge im Betrieb. Mit 56 Abb. im Text u. 3 Taf. Nr. 108.
- Eisenbahnpolitik. Geschichte d. deutschen Eisenbahnpolitik** v. Betriebsinspektor Dr. Edwin Koch in Karlsruhe i. S. Nr. 533.
- Eisenbahnverkehr, Der**, v. Kgl. Eisenbahn-Rechnungsdirektor Th. Wilbrand in Berlin-Friedenau. Nr. 618.
- Eisenbetonbau, Der**, v. Reg.-Baumstr. Karl Köpfe. Mit 75 Abbildungen. Nr. 349.
- Eisenbetonbrücken** von Dr.-Ing. K. W. Schächterle in Stuttgart. Mit 104 Abbildungen. Nr. 627.
- Eisenhüttenkunde** von A. Krauß, dipl. Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Taf. Nr. 152.
- II: Das Schmiedeeisen. N. 25 Fig. u. 5 Taf. Nr. 153.
- Eisenkonstruktionen im Hochbau** von Ingen. Karl Schindler in Weissen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.
- Eiszeital. er, Das**, v. Dr. Emil Berth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 431.
- Elastizitätslehre für Ingenieure I: Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände**, Zylinder, Ebene Platten, Torsion, Gekrümmte Träger. Von Dr.-Ing. Max Englin, Prof. a. d. Kgl. Baugewerkschule Stuttgart und Privatdozent a. d. Techn. Hochschule Stuttgart. Mit 60 Abbild. Nr. 519.
- Elektrischen Meßinstrumente, Die**, von F. Herrmann, Prof. an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Mit 195 Figuren. Nr. 477.
- Elektrische Telegraphie, Die**, von Dr. Lud. Kellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.
- Elektrizität. Theoret. Physik III: Elektrizität u. Magnetismus** von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.
- Elektrochemie** von Dr. Heinz Danneel in Genf. I: Theoretische Elektrochemie u. ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 16 Fig. Nr. 252.
- II: Experiment. Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. Nr. 253.
- Elektromagnet. Lichttheorie. Theoret. Physik IV: Elektromagnet. Lichttheorie u. Elektronik** von Professor Dr. Gust. Jäger in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.
- Elektrometallurgie** von Dr. Friedrich Regelsberger, Kaiserl. Reg.-Rat in Stieglitz-Berlin. N. 16 Fig. Nr. 110.
- Elektrotechnik. Einführung in die Starkstromtechnik** v. J. Herrmann, Prof. d. Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 95 Fig. u. 16 Taf. Nr. 196.
- II: Die Gleichstromtechnik. Mit 118 Fig. und 16 Taf. Nr. 197.
- III: Die Wechselstromtechnik. Mit 154 Fig. u. 16 Taf. Nr. 198.
- IV: Die Erzeugung und Verteilung der elektrischen Energie. Mit 96 Figuren u. 16 Tafeln. Nr. 657.
- Elektrotechnik. Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik** von Ingenieur Prof. Hermann Wilda in Bremen. Mit 3 Abbildgn. Nr. 476.
- Elfaß-Lothringen, Landeskunde** von, v. Prof. Dr. R. Langenbed in Straßburg i. E. Mit 11 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 215.
- Englisch-deutsches Gesprächsbuch** von Prof. Dr. E. Haunstreck in Lausanne. Nr. 424.
- Englische Geschichte** v. Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.
- Englische Handelskorrespondenz** von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.
- Englische Literaturgeschichte** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.
- Grundzüge und Haupttypen d. englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold R. M. Särder, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.
- Englische Phonetik mit Lesestücken** von Dr. A. G. Dunstan, Lektor an der Universität Königsberg i. Preußen. Nr. 601.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johannes Meisenheimer, Prof. der Zoologie an der Universität Jena. I: Furchung, Erimittivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378. — II: Organbildung. Mit 46 Fig. Nr. 379.

Epigonen, Die, des höllischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 19. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junz, Altknarius d. Kaiserl. Akad. der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Erbrecht. Recht des Bürgerl. Gesetzbuches. Fünftes Buch: Erbrecht von Dr. Wilhelm von Blume, ord. Prof. der Rechte an der Univ. Tübingen. I. Abtheilung: Einleitung. — Die Grundlagen des Erbrechts. II. Abtheilung: Die Nachlassbeteiligten. Mit 23 Figuren. Nr. 659/60.

Erdbau von Reg.-Baum. Erwin Link in Stuttgart. Mit 72 Abbild. Nr. 630.

Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht von Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Königl. Preussischen Meteorologischen Instituts in Potsdam. Mit 7 Tafeln und 16 Figuren. Nr. 175.

Erteile, Länderkunde der außereuropäischen, von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. d. Exportakad. in Wien. Mit 11 Textärtchen u. Profilen. Nr. 63.

Ernährung und Nahrungsmittel von Oberstabsarzt Professor H. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbild. Nr. 484.

Ethik von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Europa, Länderkunde von, von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. d. Exportakademie in Wien. Mit 14 Textärtchen u. Diagrammen u. einer Karte der Alpenabtheilung. Nr. 62.

Erfahrungsflora von Deutschland zum Bestimmen d. häufigeren i. Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Wigula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbildungen. Nr. 268 und 269.

Experimentalphysik v. Prof. R. Lang in Stuttgart. I: Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper. Mit 123 Figuren. Nr. 611.

Explosivstoffe. Einführung in d. Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. S. Brunsvig in Steglitz. Mit 6 Abbild. und 12 Tab. Nr. 333.

Familienrecht. Recht d. Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Tüze, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

Färberei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilhelm Massot, Prof. an der Preussischen höheren Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Feldgeschütz, Das moderne, u. Oberstleutnant W. Sendenreich, Militärlehrer a. d. Militärtechn. Akademie in Berlin. I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschli. der Erfindung des rauchl. Pulvers, etwa 1850 bis 1890. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— II: Die Entwicklung d. heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart. Mit 11 Abbild. Nr. 307.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Kellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.

Festigkeitslehre v. W. Hauber, Dipl.-Ingenieur. Mit 56 Fig. Nr. 288.

— **Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen** von R. Haren, Diplom-Ingenieur in Mannheim. Mit 42 Fig. Nr. 491.

Fette, Die, und Ole sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikat. u. d. Harze, Lade, Firnisse m. ihren wicht. Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführung in die Chemie, Beschreibung einiger Salze und der Fette und Ole. Nr. 335.

— II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbild. Nr. 336.

— III: Harze, Lade, Firnisse. Nr. 337.

Feuerwaffen. Geschichte d. gesamten Feuerwaffen bis 1850. Die Entwicklung der Feuerwaffen v. ihrem ersten Auftreten bis zur Einführung d. gezog. Hinterlader, unter besond. Berücksichtigung. d. Seereschiffbewaffnung von Major a. D. W. Gohlke, Steglitz-Berlin. Mit 105 Abbild. Nr. 530.

Feuerwerke, Die, von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorstand des Stadt Chemischen Laboratoriums in Stuttgart. Mit 6 Fig. Nr. 634.

- Filzfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Fasamentierelei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Professor Max Gürtler, Geh. Regierungsr. im kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.
- Finanzsysteme der Großmächte, Die, (Internat. Staats- und Gemeindefinanzwesen) v. L. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat in Berlin. 2 Bändchen. Nr. 450 und 451.**
- Finanzwissenschaft** von Präsident Dr. R. von der Borcht in Berlin. I: Allgemeiner Teil. Nr. 148.
— II: Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.
- Finnisch-ugrische Sprachwissenschaft** von Dr. Josef Szinnvei, Prof. an der Universität Budapest. Nr. 463.
- Finnland. Landeskunde des Europäischen Russlands nebst Finnlands** von Prof. Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.
- Firnisse. Harze, Lade, Firnisse** von Dr. Karl Braun in Berlin. (Fette und Ole III.) Nr. 337.
- Fische. Das Tierreich IV: Fische** von Prof. Dr. Max Kautzer in Neapel. Mit 37 Abbild. Nr. 356.
- Fischerei und Fischzucht** von Dr. Karl Eckstein, Prof. a. d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.
- Flechten, Die. Eine Übersicht unserer Kenntnisse** v. Prof. Dr. G. Lindau, Kustos a. kgl. Botanisch. Museum, Privatdozent an d. Univerf. Berlin. Mit 55 Figuren. Nr. 683.
- Flora. Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen** v. Dr. W. Wigula, Prof. a. d. Forstakademie Eichenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbild. Nr. 268, 269.
- Flugbau** von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 103 Abbildungen. Nr. 597.
- Fördermaschinen, Die elektrisch betriebenen, von A. Walthaser, Dipl.-Bergingenieur. Mit vielen Figuren. Nr. 678.**
- Forenische Psychiatrie** von Professor Dr. W. Wengandt, Dir. d. Irrenanstalt Friedrichsberg i. Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.
- Forstwissenschaft** v. Dr. Ab. Schwabpach, Prof. a. d. Forstakad. Eberswalde, Abteil.-Dirig. b. d. Hauptstat. d. forstl. Versuchswesens. Nr. 106.
- Fortbildungsschulwesen, Das deutsche, nach seiner geschichtl. Entwicklung u. i. sein. gegenwärt. Gestalt** v. H. Stierds, Revisor gemeinl. Fortbildungsschulen in Schleswig. Nr. 392.
- Franken. Geschichte Frankens** v. Dr. Christ. Meyer, kgl. preuß. Staatsarchivar a. D., München. Nr. 434.
- Frankreich. Französische Geschichte** v. Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 85.
- Frankreich. Landesv. Frankreich v. Dr. Rich. Neuje, Direkt. d. Oberrealschule in Spandau. 1. Bändch. Nr. 23 Abb. im Text u. 18 Landschaftsbild. auf 16 Taf. Nr. 466.
— 2. Bändchen. Mit 15 Abb. im Text, 18 Landschaftsbild. auf 16 Tafeln u. 1 lithogr. Karte. Nr. 467.**
- Französisch-deutsches Gesprächsbuch** von C. Francillon, Lektor am orientalisches Seminar u. an d. Handelshochschule in Berlin. Nr. 596.
- Französisches Handelskorrespondenz** v. Prof. Th. de Beaug, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.
- Französisches Lesebuch mit Wörterverzeichnis** von Cyprien Francillon, Lektor a. orient. Seminar u. a. d. Handelshochschule i. Berlin. Nr. 643.
- Fremdwort, Das, im Deutschen** v. Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 55.
- Fremdwörterbuch, Deutsches, von Dr. Rud. Kleinpaul, Leipzig. Nr. 273.**
- Fuge. Erläuterung u. Anleitung zur Komposition derselben** v. Prof. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.
- Funktionentheorie** von Dr. Konrad Knopp, Privatdozent an der Universität Berlin. I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analyt. Funktionen. Mit 9 Fig. Nr. 668.
- **Einführung in die, (Theorie der komplexen Zahlenreihen)** von Max Kose, Oberlehrer an der Goetheschule in Deutsch-Wilmersdorf. Mit 10 Figuren. Nr. 581.
- Fußartillerie, Die, ihre Organisation, Bewaffnung u. Ausbildung** v. Splett, Oberleutn. im Lehrbat. d. Fußart.-Schießschule u. Hiemann, Oberleutn. in der Versuchsbatt. d. Art.-Prüfungskomm. Nr. 35 Fig. Nr. 560.

Gardinenfabrikation. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Faszamenfabrikerei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation u. Filzfabrikation von Prof. Max Gürler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abornanlagen von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbildungen. Nr. 412.

Gasstraßmaschinen, Die, v. Ing. Alfred Kircke in Kiel. 2 Bändchen. Mit vielen Figuren. Nr. 316 u. 651.

Gashäuser und Hotels von Architekt Max Wöhler in Düsseldorf. I: Die Bestandteile u. die Einrichtung des Gashauses. Mit 70 Fig. Nr. 525.

— II: Die verschiedenen Arten von Gashäusern. Mit 82 Fig. Nr. 526.

Gebirgsartillerie. Die Entwicklung der Gebirgsartillerie von Klugmann, Oberst u. Kommandeur der 1. Feld-Art.-Brigade in Königsberg i. Pr. Mit 78 Bildern und Übersichtstafeln. Nr. 531.

Genossenschaftswesen, Das, in Deutschland v. Dr. Otto Lindede in Düsseldorf. Nr. 384.

Geodäsie von Prof. Dr. C. Reinherz in Hannover. Neubearbeitet von Dr. G. Förster, Observator a. Geodätisch. Inst. Potsdam. M. 68 Abb. Nr. 102.

— **Vermessungskunde** v. Diplom-Ing. W. Wertmeister, Oberlehrer an der Kgl. Techn. Schule i. Straßburg i. G. I: Feldmessen u. Nivellieren. Mit 146 Abb. II: Der Theodolit. Trigonometrie u. baromet. Höhenmessg. Tachymetrie. M. 109 Abb. Nr. 468, 469.

Geographie, Geschichte der, von Prof. Dr. Konrad Kretschmer i. Charlottenburg. Mit 11 Kart. im Text. Nr. 624.

Geologie in kurzem Auszug f. Schulen u. zur Selbstbelehrung zusammengestellt v. Prof. Dr. Fernh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. u. 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene v. Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 52 Figuren. Nr. 65.

— **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von D. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwab.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.

Geometrie, Analytische, des Raumes von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.

— **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie des Raumes** von D. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwab.-Gmünd. Mit 8 Fig. Nr. 309.

— **Darstellende,** von Dr. Robert Haubner, Prof. an d. Univ. Jena. I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.

— II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.

— **Ebene,** von G. Kähler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 110 zweifarbigen Figuren. Nr. 41.

— **Projektive,** in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.

Geometrische Optik, Einführung in die, von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Germanisches Zeichnen von G. Beder, Architekt u. Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neubearbeitet von Prof. J. Vonderkinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 55.

Germanische Mythologie von Dr. E. Rogg, Prof. a. d. Univ. Leipzig. Nr. 15.

Germanische Sprachwissenschaft von Dr. Rich. Loewe. Nr. 238.

Gesangskunst. Technik der deutschen Gesangskunst von Est. Koß u. Dr. Hans Joachim Moser. Nr. 576.

Geschäfts- und Warenhäuser v. Hans Schliepmann, Königl. Baurat in Berlin. I: Vom Laden zum „Grand Magasin“. Mit 23 Abb. Nr. 655.

— II: Die weitere Entwicklung d. Kaufhäuser. Mit 39 Abb. Nr. 656.

Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, v. Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univ. Greifswald. Nr. 270.

Geschütze, Die modernen, der Fußartillerie v. Mummenhoff, Major u. Lehrer an d. Fußartillerie-Schießschule in Jüterbog. I: Vom Auftreten d. gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890. Mit 50 Textbildern. Nr. 334.

— II: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.

- Geschwindigkeitsregler der Kraftmaschinen, Die**, v. Dr.-Ing. S. Kröner in Friedberg. Mit 33 Fig. Nr. 604.
- Gesetzbuch, Bürgerliches**, siehe: Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.
- Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten** v. E. Kessmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. S. Seiler. Mit 47 Abbild. u. 1 Tafel. Nr. 18.
- Gewerbelehre** von Dr. E. Roth in Potsdam. Nr. 350.
- Gewerbewesen** von Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. I. II. Nr. 203, 204.
- Gewerbliche Arbeiterfrage, Die**, von Werner Sombart, Prof. a. d. Handelshochschule Berlin. Nr. 209.
- Gewerbliche Bauten. Industrielle und gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken)** v. Architekt Heinr. Salzmänn in Düsseldorf.
- I: Allgemeines über Anlage und Konstruktion der industriellen und gewerblichen Bauten.** Nr. 511.
- II: Speicher und Lagerhäuser.** Mit 123 Figuren. Nr. 512.
- Gewichtswesen. Maß-, Münz- u. Gewichtswesen** v. Dr. Aug. Blind, Prof. a. d. Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Gießeremaschinen** von Dipl.-Ing. Emil Treiber in Heidenheim a. S. Mit 51 Figuren Nr. 548.
- Glas- und keramische Industrie (Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels I)** v. Dr. Gust. Kauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.
- Gleichstrommaschine, Die**, von Ing. Dr. C. Kitzbrunner in London. Mit 81 Figuren. Nr. 257.
- Gleitscherkunde** v. Dr. Friz Machacek in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.
- Gotische Sprachdenkmäler mit Grammatik, Übersetzung u. Erläuterung.** v. Dr. Herm. Janzen, Direktor d. Königl. Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.
- Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue. Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg.** Auswahl a. d. höflich. Epös m. Anmerk. u. Wörterbuch v. Dr. R. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichs-Kollegium z. Königsberg/Pr. Nr. 22.
- Graphischen Künste, Die**, von Carl Kampmann, I. I. Lehrer an der I. I. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbildungen u. Beilagen. Nr. 75.
- Griechisch. Neugriechisch = deutsches Gesprächsbuch** mit besond. Berücksichtigung der Umgangsprache von Dr. Johannes Kalitjanakis, Doz. am Seminar für orient. Sprache in Berlin. Nr. 587.
- Griechische Altertumskunde** v. Prof. Dr. Rich. Kattich, neu bearbeitet v. Rektor Dr. Franz Kollhammer. Mit 9 Holzbildern. Nr. 16.
- Griechische Geschichte** von Dr. Heinrich Swoboda, Professor an d. deutschen Universität Prag. Nr. 49.
- Griechische Literaturgeschichte** mit Berücksichtigung d. Geschichte der Wissenschaften v. Dr. Alfred Gerde, Prof. an der Univ. Breslau. 2 Bändchen. Nr. 70 u. 557.
- Griechischen Papyri, Auswahl** aus, von Prof. Dr. Robert Selbing in Karlsruhe i. S. Nr. 625.
- Griechischen Sprache, Geschichte der, I: Bis zum Ausgange d. klassischen Zeit** v. Dr. Otto Hoffmann, Prof. a. d. Univ. Münster. Nr. 111.
- Griechische u. römische Mythologie** v. Prof. Dr. Herm. Steuding, Refk. d. Gymnas. in Schneeberg. Nr. 27.
- Grundbuchrecht, Das formelle**, von Oberlandesgerichtsr. Dr. F. Kreschmar in Dresden. Nr. 549.
- Handelspolitik, Auswärtige**, von Dr. Heinz Sieveling, Professor an der Universität Zürich. Nr. 245.
- Handelsrecht, Deutsches**, von Dr. Karl Lehmann, Prof. an d. Universität Göttingen. I: Einleitung. Der Kaufmann u. seine Hilfspersonen. Offene Handelsgesellschaft. Kommandit- und stille Gesellschaft. Nr. 457.
- II: Aktiengesellschaft. Gesellschaft m. b. S. Eing. Gen. Handelsgesch.** Nr. 458.
- Handelschulwesen, Das deutsche**, von Direktor Theodor Blum in Dessau. Nr. 558.
- Handelsstand, Der**, von Rechtsanwält Dr. jur. Bruno Springer in Leipzig (Kaufmänn. Rechtskunde. Bd. 2). Nr. 545.

Handelswesen, Das, von Geh. Oberregierungsrat Dr. Wilh. Gerz, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— II: Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Handfeuerwaffen, Die Entwicklung der, seit der Mitte des 19. Jahrhunderts u. ihr heutiger Stand von G. Wzodek, Hauptmann u. Kompaniechef im Inf.-Reg. Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posen'sches) Nr. 59 i. Soldau. Nr. 21 Abb. Nr. 366.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und **Gottfried von Straßburg.** Auswahl aus d. höfischen Epos mit Anmerk. u. Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königl. Friedrichs-Kollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Harz, Lade, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Ole III). Nr. 337.

Hebezeuge, Die, ihre Konstruktion u. Berechnung von Ing. Prof. Herm. Wilba, Bremen. Mit 399 Abb. Nr. 414.

Heeresorganisation, Die Entwicklung der, seit Einführung der stehenden Heere von Otto Neuschler, Hauptmann u. Batteriechef in Ulm. I: Geschichtl. Entwicklung bis zum Ausgange d. 19. Jahrh. Nr. 552.

Heizung u. Lüftung v. Ing. Johannes Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen u. die Berechnung der Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.

— II: Die Ausführung der Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

Hessen. Landeskunde des Großherzogtums Hessen, der Provinz Heffen-Kassau und des Fürstentums Waldeck v. Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

Hieroglyphen von Geh. Regier.-Rat Dr. Ab. Erman, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 608.

Hochspannungstechnik, Einführ. in die moderne, von Dr.-Ing. R. Fischer in Hamburg-Bergedorf. Mit 92 Fig. Nr. 609.

Holz, Das. Aufbau, Eigenschaften u. Verwendung v. Ing. Prof. Herm. Wilba in Bremen. Mit 33 Abb. Nr. 459.

Hotels. Gasthäuser und Hotels von Archit. Max Böhrer in Düsseldorf. I: Die Bestandteile u. d. Einrichtg. des Gasthauses. Mit 70 Figuren. Nr. 525.

— II: Die verschiedenen Arten von Gasthäusern. Mit 82 Figuren. Nr. 526.

Hydraulik v. W. Hauber, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 397.

Hygiene des Städtebaus, Die, von Prof. S. Chr. Kupbaum in Hannover. Mit. 30 Abb. Nr. 348.

— des **Wohnungswesens, Die,** von Prof. S. Chr. Kupbaum in Hannover. Mit 5 Abbild. Nr. 363.

Iberische Halbinsel. Landeskunde der Iberischen Halbinsel von Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. Nr. 8 Kärtchen u. 8 Abb. im Text u. 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

Indische Religionsgeschichte von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

Indogerman. Sprachwissenschaft von Dr. R. Wieringer, Professor an der Univ. Graz. Nr. 1 Tafel. Nr. 59.

Industrielle u. gewerbliche Bauten (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt Heinr. Salzmann in Düsseldorf. I: Allgemeines üb. Anlage u. Konstruktion d. industriellen u. gewerblichen Bauten. Nr. 511.

— II: Speicher und Lagerhäuser. Mit 123 Figuren. Nr. 512.

Infektionskrankheiten, Die, und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fibertafel. Nr. 327.

Insekten. Das Tierreich V: Insekten von Dr. J. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 594.

Instrumentenlehre v. Musikdir. Franz Wayerhoff in Chemnitz. I: Text. Nr. 437.

— II: Notenbeispiele. Nr. 438.

Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Rekt. d. Realgymnasiums u. d. Oberrealschule in Göttingen. Mit 89 Figuren. Nr. 88.

- Integralrechnung.** Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junfer, Rekt. d. Realgymnasiums u. der Oberrealschule in Göppingen. Mit 52 Figuren. Nr. 147.
- Israel.** Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. F. Benzinger. Nr. 231.
- Italienische Handelskorrespondenz v.** Prof. Alberto de Beauz, Oberlehrer am Königl. Institut S. C. Annunziata in Florenz. Nr. 219.
- Italienische Literaturgeschichte** von Dr. Karl Voßler, Professor an der Universität München. Nr. 125.
- Kalkulation, Die, im Maschinenbau** von Ingen. S. Bethmann, Dozent am Technikum Altenburg. Mit 63 Abbildungen. Nr. 486.
- Kältemaschinen.** Die thermodynamischen Grundlagen der Wärme- und Kältemaschinen von W. Körttinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Mit 73 Figuren. Nr. 2.
- Kamerun.** Die deutschen Kolonien I: Logo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithogr. Karte. Nr. 441.
- Kanal- und Schienenbau** von Regierungsbauemeister Otto Kappold in Stuttgart. Mit 78 Abb. Nr. 585.
- Kant, Immanuel.** (Geschichte der Philosophie Bd. 5) von Dr. Bruno Bauch, Prof. a. d. Univ. Jena Nr. 536.
- Kartell u. Ernst** v. Dr. E. Tschierschky in Düsseldorf. Nr. 522
- Kartenkunde** von Dr. M. Groll, Kartograph i. Berlin. 2 Bänden. I: Die Projektionen. Mit 56 Fig. Nr. 30.
- II: Der Karteninhalt und das Messen auf Karten. Mit 39 Fig. Nr. 599.
- Kartographische Aufnahmen u. geograph.** Ortsbestimmung auf Reisen von Dr.-Ing. R. Gugershoff, Prof. an der Forstakademie zu Tharandt. Mit 73 Figuren. Nr. 607.
- Kaufmännische Rechtskunde. I:** Das Wechselwesen v. Rechtsanwalt Dr. Rud. Mothes in Leipzig. Nr. 103.
- II: Der Handelsstand v. Rechtsanwalt Dr. jur. Bruno Springer, Leipzig. Nr. 545.
- Kaufmännisches Rechnen** von Prof. Richard Just, Oberlehrer a. d. Öffentl. Handelslehreanstalt d. Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139, 140, 187.
- Keramische Industrie.** Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Wärrfels von Dr. Gust. Rauter. I: Glas- u. keram. Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.
- Kerzenfabrikation.** Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Ole II.) Mit 25 Abb. Nr. 336.
- Kiautschou.** Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou v. Prof. Dr. R. Dove. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 520.
- Kinematik** von Dipl.-Ing. Hans Volster, Assst. a. d. Königl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 76 u. 65. Nr. 584.
- Kirchenlied,** Das deutsche, in seinen charakteristischen Erscheinungen ausgewählt von D. Friedrich Spitta, Prof. a. d. Universität in Straßburg i. E. I: Mittelalter u. Reformationzeit. Nr. 602.
- Kirchenrecht** v. Dr. E. Seßling, orb. Prof. der Rechte in Erlangen. Nr. 377.
- Klima und Leben** (Bioklimatologie) von Dr. Wilh. R. Eckardt, Assst. an der öffentl. Wetterdienststelle in Weisburg. Nr. 629.
- Klimafunde I:** Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Figuren. Nr. 114.
- Kolonialgeschichte** von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte an der Universität Berlin. Nr. 156.
- Kolonialrecht, Deutsches,** von Prof. Dr. S. Ebler von Hoffmann, Studien- direktor d. Akademie für kommunale Verwaltung in Düsseldorf. Nr. 318.
- Kometen. Astronomie.** Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. Herrn. Kobold, Prof. an der Univ. Kiel. II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.
- Kommunale Wirtschaftspflege** von Dr. Alfons Kieß, Registrarsassessor in Berlin. Nr. 534.

- Kompositionslehre.** Musikalische Formenlehre v. Steph. Krehl. I. II. Nr. viel. Notenbeispiel. Nr. 149, 150.
- Kontrapunkt.** Die Lehre von der selbständigen Stimmführung v. Steph. Krehl in Leipzig. Nr. 390.
- Koordinatensysteme** v. Paul V. Fischer, Oberl. a. d. Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Mit 8 Fig. Nr. 507.
- Körper, Der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten** von E. Rehm, Oberlehr. i. Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. G. Feiler. Nr. 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.
- Kostenanschlag** siehe: Veranschlagen.
- Kriegsschiffbau.** Die Entwicklung des Kriegsschiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit. Von Tjard Schwarz, Geh. Marinebaurat und Schiffbau-Direktor. I. Teil: Das Zeitalter der Ruderfahrzeuge u. der Segelschiffe für die Kriegsführung zur See vom Altertum bis 1840. Mit 32 Abbildungen. Nr. 471.
- II. Teil: Das Zeitalter der Dampfschiffe für die Kriegsführung zur See von 1840 bis zur Neuzeit. Mit 81 Abbildungen. Nr. 472.
- Kriegswesens, Geschichte des,** von Dr. Emil Daniels in Berlin. I: Das antike Kriegswesen. Nr. 488.
- II: Das mittelalterliche Kriegswesen. Nr. 498.
- III: Das Kriegswesen der Neuzeit. Erster Teil. Nr. 518.
- IV: Das Kriegswesen der Neuzeit. Zweiter Teil. Nr. 537.
- V: Das Kriegswesen der Neuzeit. Dritter Teil. Nr. 568.
- VI: Das Kriegswesen der Neuzeit. Vierter Teil. Nr. 670.
- VII: Das Kriegswesen der Neuzeit. Fünfter Teil. Nr. 671.
- Kristallographie** v. Dr. W. Brühns, Prof. a. d. Bergakademie Clausthal. Mit 190 Abbild. Nr. 210.
- Kristalloptik, Einführung in die,** von Dr. Oberhard Buchwald i. München. Mit 124 Abbildungen. Nr. 619.
- Kubrun und Dietrichshagen.** Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. D. S. Piriczek, Professor an der Universität Würzburg. Nr. 10.
- Kultur, Die, der Renaissance.** Gesittung, Forschung, Dichtung v. Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.
- Kulturgeschichte, Deutsche,** von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.
- Kurvenbistuffion.** Algebraische Kurven von Eug. Beutel, Oberreallehrer in Baihingen-Enz. I: Kurvenbistuffion. Mit 57 Fig. im Tert. Nr. 435.
- Kurzschrift** siehe: Stenographie.
- Küstenartillerie.** Die Entwicklung der Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart v. Korvettenkapitän Huning. Mit Abb. u. Tab. Nr. 606.
- Lade, Harz, Lade, Firnisse** von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Ole III.) Nr. 337.
- Lagerhäuser.** Industrielle und gewerbliche Bauten. (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) von Architekt Heinrich Salzmann, Düsseldorf. II: Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.
- Länder- und Völkernamen** von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.
- Landstraßenbau** von Kgl. Oberlehrer M. Liebmann, Betriebsdirekt. a. D. i. Magdeburg. Mit 44 Fig. Nr. 598.
- Landwirtschaftliche Betriebslehre** v. E. Langenbed in Groß-Lichterfelde. Nr. 227.
- Landwirtschaftlichen Maschinen, Die,** von Karl Walther, Diplom.-Ing. in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildgn. Nr. 407—409.
- Latijnische Grammatik.** Grundriß der latein. Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Boisch in Magdeburg. Nr. 82.
- **Sprache.** Geschichte der lateinischen Sprache von Dr. Friedrich Stolz, Professor an der Universität Innsbruck. Nr. 492.
- Leuchtgasfabrikation, Die Nebenprodukte der,** von Dr. phil. R. H. Lange, Diplom.-Ingenieur. Mit 13 Figuren. Nr. 661.
- Licht, Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme.** Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Techn. Hochschule in Wien. Nr. 47 Abb. Nr. 77.
- Logarithmen.** Vierstellige Tafeln und Gegen tafeln für logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Lehrerschule des Johanneums in Hamburg. Neue Ausgabe v. Dr. Robert Haugner, Prof. an der Universität Jena. Nr. 81.

Logarithmen, Fünfstellige, von Prof. August Ubler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Logik, Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Professor Dr. Th. Eisenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Lokomotiven, Eisenbahnfahrzeuge von G. Hinnenthal. I: Die Lokomotiven. Mit 89 Abb. im Text u. 2 Tafeln. Nr. 107.

Lothringen, Geschichte Lothringens von Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.

— **Landeskunde v. Elsaß-Lothringen** v. Prof. Dr. R. Langerbed in Straßburg i. G. Mit 11 Abb. u. 1 Karte. Nr. 215.

Lötprobierrunde, Qualitative Analyse mit Hilfe des Lötrohres von Dr. Mart. Henglein in Freiberg i. Sa. Mit 10 Figuren. Nr. 483.

Lübed, Landeskunde v. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübed v. Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübed. Mit 17 Abbildungen und Karten im Text und 1 lithographischen Karte. Nr. 487.

Luftelektrizität von Dr. Karl Köhler, wissenschaftlichem Hilfsarbeiter am Königl. Preuß. Meteorologisch-Magnetischen Observatorium in Potsdam. Mit 18 Abb. Nr. 649.

Luftsälpeter, Seine Gewinnung durch den elektrischen Flammenbogen von Dr. G. Brion, Prof. an der Kgl. Bergakademie in Freiberg. Mit 50 Figuren. Nr. 616.

Luft- und Meeresströmungen von Dr. Franz Schulte, Direktor der Navigationschule zu Lübed. Mit 27 Abbildungen und Tafeln. Nr. 551.

Lüftung, Heizung und Lüftung von Ing. Johannes Körting in Düsseldorf. I: Das Wezen und die Berechnung d. Heizungs- u. Lüftungsanlagen. Mit 34 Fig. Nr. 342.

— II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

Luther, Martin, und Thom. Murner, Ausgewählt und mit Einleitungen u. Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolai-Gymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus, Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule Wien. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

Mälzerei, Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. B. Dreverhoff, Direktor d. Öffentlichen und 1. Sächsl. Versuchstation für Brauerei und Mälzerei, sowie der Brauer- und Mälzerschule zu Grimma. Nr. 303.

Maschinenbau, Die Kalkulation im, v. Ing. G. Bethmann, Doz. a. Techn. Altensburg. Mit 63 Abb. Nr. 486.

— **Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik** von Ingenieur Prof. Hermann Wilda. Mit 3 Abbildungen. Nr. 476.

Maschinenelemente, Die, Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Fr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.

Maschinenzeichnen, Praktisches, von Oberg. Rich. Schiffner in Darmbrunn. I: Grundbegriffe, Einfache Maschinenteile bis zu den Kupplungen. Mit 60 Tafeln. Nr. 589.

— II: Lager, Riem- und Seilscheiben, Zahnräder, Kolbenpumpe. Mit 51 Tafeln. Nr. 590.

Maßanalyse von Dr. Otto Köhm in Darmstadt. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. August Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Materialprüfungswesen, Einführung in die moderne Technik d. Materialprüfung von H. Remmler, Dipl.-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.

— II: Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Prof. am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enthaltend die wichtigsten Formeln u. Lehrgänge d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, anal. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von L. Th. Bürklen, Professor am kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

Maurer- und Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Ed. Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbild. Nr. 419—421.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

Mechanische Technologie von Geh. Hofrat Professor A. Lübke in Braunschweig. 2 Bändchen. Nr. 340, 341.

Mecklenburg. Landeskunde d. Großherzogtümer Mecklenburg u. der Freien u. Hansestadt Lübeck von Dr. Sebald Schwarz, Direktor der Realschule zum Dom in Lübeck. Mit 17 Abbild. im Text, 16 Taf. und 1 Karte in Lithographie. Nr. 487.

Mecklenburgische Geschichte von Oberlehrer Lito Wittenje in Neubrandenburg i. M. Nr. 610.

Medizin, Geschichte der, von Dr. med. et phil. Paul Diepgen, Privatdozent für Geschichte der Medizin in Freiburg i. Br. I: Altertum. Nr. 679.

Meereskunde, Physische, von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsleiter bei d. Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 39 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Meeresströmungen. Zuf. u. Meeresströmungen v. Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationschule zu Lübeck. Mit 27 Abb. u. 1 Tafeln. Nr. 551.

Menschliche Körper, Der, sein Bau u. seine Tätigkeiten von C. Rehmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre v. Dr. med. G. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Tafel. Nr. 18.

Metallographie. Kurze, gemeinschaftliche Darstellung der Lehren von den Metallen u. ihren Legierungen unter besond. Berücksichtigung der Metallmikroskopie v. Prof. E. Hehn u. Prof. O. Bauer a. kgl. Materialprüfungsamt (Gr.-Lichterfelde) d. k. Techn. Hochschule zu Berlin. I: Allgem. Teil. Mit 45 Abb. im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432. — II: Spez. Teil. Mit 49 Abbildungen im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.

Metallurgie von Dr. August Geiß in Kristiansand (Norwegen). I. II. Mit 21 Figuren. Nr. 313, 314.

Meteore. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearbeitet von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. II: Kometen, Meteore u. das Sternensystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternarten. Nr. 529.

Meteorologie v. Dr. W. Traber, Prof. an der Universität Wien. Mit 49 Abbild. u. 7 Tafeln. Nr. 54.

Militärische Bauten von Reg.-Baumeister R. Lang in Stuttgart. Mit 59 Abb. Nr. 626.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an d. Univ. Straßburg i. E. 2 Bde. Nr. 371, 372.

Mineralogie von Geheimem Bergrat Dr. R. Brauns, Prof. an d. Univ. Bonn. Mit 132 Abbild. Nr. 29.

Minnefang und Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnefang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen u. einem Wörterb. von D. Günther, Prof. an d. Oberrealschule u. an d. Techn. Hochschule i. Stuttgart. Nr. 23.

Mittelhochdeutsche Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitg. u. Wörterbuch herausgeg. von Dr. Hermann Zanke, Dir. d. Königin Luise Schule i. Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Mittelhochdeutsche Grammatik. Der Ribelunge Nöt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurz. Wörterb. v. Dr. W. Goltzer, Prof. a. d. Univ. Rostod. Nr. 1.

Morgenland. Geschichte des alten Morgenlandes v. Dr. Fr. Hommel, Prof. an d. Universität München. Mit 9 Bildern u. 1 Karte. Nr. 43.

Morphologie und Organographie der Pflanzen v. Prof. Dr. R. Nordhausen in Kiel. Mit 123 Abbildgn. Nr. 141.

Mörtel. Die Industrie d. künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. G. Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Mundarten, Die deutschen, von Prof. Dr. S. Reis in Mainz. Nr. 605.

Mundarten, Plattdeutsche, von Dr. Subert Grimme, Professor an der Univerf. Münster i. W. Nr. 461.

Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. a. d. Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Murner, Thomas. Martin Luther u. Thomas Murner. Ausgewählt u. m. Einleitungen u. Anmerk. versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaighymnaf. zu Leipzig. Nr. 7.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, v. Dr. A. Wöhler in Steinhilgen. 2 Bch. Mit zahlr. Abb. u. Musikbeil. Nr. 121 u. 347.

Musikalische Kunst von Professor Dr. Karl S. Schäfer in Berlin. Mit 36 Abbildungen. Nr. 21.

Musikal. Formenlehre (Kompositionslehre) von Stephan Krehl. I. II. Mit viel. Notenbeisp. Nr. 149, 150.

Musikfächer von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.

Musikgeschichte seit Beginn des 19. Jahrhunderts v. Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.

Musiklehre, Allgemeine, von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Mythologie, Germanische, von Dr. Eugen Mogk, Prof. a. d. Universität Leozig. Nr. 15.

— Griechische u. römische, von Prof. Dr. Herm. Steubing, Rektor des Gymnaf. in Schneeberg. Nr. 27.

Nadelhölzer, Die, von Dr. F. W. Neger, Prof. an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

Nahrungsmittel. Ernährung u. Nahrungsmittel v. Oberstabsarzt Prof. S. Bischoff in Berlin. Mit 4 Abbildungen. Nr. 464.

Nautil. Kurzer Abriß d. täglich an Bord von Handelschiffen angen. Zeils d. Schiffahrtstunde. Von Dr. Franz Schulze, Dir. d. Navigationschule zu Lübed. Mit 56 Abbildgn. Nr. 84.

Neugriechisch-deutsches Gesprächsbuch mit besond. Berücksichtigung d. Umgangssprache v. Dr. Johannes Kaliternakis, Doz. am Seminar für orient. Sprache in Berlin. Nr. 537.

Neunzehntes Jahrhundert. Geschichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprof. a. d. Univ. Bonn. 1. Bch.: 1800—1852. Nr. 216. — 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.

Neutestamentliche Zeitgeschichte von Lic. Dr. W. Staert, Prof. a. der Univ. in Jena. I: Der historische u. kulturgeschichtl. Hintergrund d. Urchristentums. W. 3 Karten. Nr. 325. — II: Die Religion d. Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit 1 Planstizze. Nr. 326.

Nibelunge Nöt, Der, in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterb. v. Dr. W. Goltzer, Prof. an der Univ. Rostod. Nr. 1.

Nordische Literaturgeschichte I: Die isländ. u. norweg. Literatur des Mittelalters v. Dr. Wolfg. Goltzer, Prof. an der Universität Rostod. Nr. 254.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. F. Behrens, Vorst. d. Großherzogl. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Öle. Die Fette u. Öle sowie d. Seifen u. Kerzenfabrikation u. d. Harze, Lade, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführung in d. Chemie, Besprechung einiger Salze u. der Fette und Öle. Nr. 335.

Öle und Nichtstoffe, Atherische, von Dr. F. Rochussen in Wittig. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Optik. Einführung in d. geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Orientalische Literaturen. Die Literaturen des Orients von Dr. W. Haberlandt, Privatdoz. an d. Universität Wien. I: Die Literaturen Ostasiens und Indiens. Nr. 162.

Orientalische Literaturen. Die Literaturen des Orients von Dr. M. Haberlandt, Privatdoz an d. Universität Wien. II: Die Literaturen d. Perser, Semiten und Türken. Nr. 163.

— **Die christlichen Literaturen des Orients** von Dr. Ant. Baumstark. I: Einleitg. — Das christl.-aramäische u. d. hebr. Schrifttum. Nr. 527.

— II: Das christlich-arabische und das äthiopische Schrifttum. — Das christliche Schrifttum der Armenier und Georgier. Nr. 528.

Ortsnamen im Deutschen, Die, ihre Entwicklung u. ihre Herkunft von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig-Gohlis. Nr. 573.

Ostafrika. Die deutschen Kolonien III: Ostafrika von Prof. Dr. K. Dode. Mit 16 Taf. u. 1 lithogr. Karte. Nr. 567.

Osterreich. Osterreichische Geschichte von Prof. Dr. Franz v. Kroneg, neubearb. von Dr. Karl Uhlirz, Prof. a. d. Univ. Graz. I: Von d. Urzeit b. z. Tode König Albrechts II. (1439). Mit 11 Stammtaf. Nr. 104.

— II: Vom Tode König Albrechts II. bis z. Westf. Frieden (1440—1648). Mit 3 Stammtafeln. Nr. 105.

— **Landeskunde v. Osterreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Prof. an d. Universität Prag. Mit 10 Textillustrationen u. 1 Karte. Nr. 244.

Ovidius Naso, Die Metamorphosen des. In Auswahl mit einer Einleit. u. Anmerk. herausgeg. v. Dr. Zul. Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 442.

Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor d. Pädagog. Seminars a. d. Univ. Jena. Nr. 12.

— **Geschichte der, von Oberlehrer Dr. S. Weimer in Wiesbaden.** Nr. 145.

Paläogeographie. Geolog. Geschichte der Meere und Festländer von Dr. Franz Kossmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.

Paläohimatology von Dr. Wih. H. Eckardt i. Weiburg (Lahn). Nr. 482.

Paläontologie von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

— **und Abstammungslehre** von Dr. Karl Diener, Prof. an der Univ. Wien. Mit 9 Abbild. Nr. 460.

Palästina. Landes- und Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Volkbildern und 1 Karte. Nr. 345.

Parallelspektive. Rechthöckige u. schiefwinkl. Azonometrie v. Prof. J. Bordeninn in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.

Personennamen, Die deutschen, v. Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.

Peru. Die Cordillerenstaaten von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen. I: Einleitung, Bolivia und Peru. Mit 16 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 652.

Petrographie v. Dr. W. Brühns, Prof. an der Bergakademie Clausthal. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Prof. Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Pflanzenbaulehre. Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Ripvert in Gießen u. Ernst Langenbed in Groß-Nichterfelde. Nr. 232.

Pflanzenbiologie v. Dr. W. Rigula, Professor an d. Forstakademie Eisenach. I: Allgemeine Biologie. Mit 43 Abbildungen. Nr. 127.

Pflanzenernährung. Agrifikurchemie I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Pflanzengeographie von Professor Dr. Ludwig Diels in Marburg (Hessen). Nr. 389.

Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedr. Bruch, Privatdoz. i. Gießen. Mit 1 farb. Tafel und 45 Abbildgn. Nr. 310.

Pflanzenmorphologie. Morphologie u. Organographie d. Pflanzen von Prof. Dr. R. Nordhausen in Kiel. Mit 123 Abbildungen. Nr. 141.

Pflanzenphysiologie von Dr. Abolf Hanjen, Prof. an der Universität Gießen. Mit 43 Abbild. Nr. 591.

Pflanzenreich, Die Stämme des, von Privatdoz. Dr. Rob. Pilger, Kustos am Kgl. Botan. Garten in Berlin-Dahlem. Mit 22 Abb. Nr. 485.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Rigula, Prof. a. b. Forstak. Eisenach. Mit 50 Abb. Nr. 158.

Pflanzenzellenlehre. Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. S. Wiehe in Leipzig. Mit 79 Abbildungen. Nr. 556.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmittbener, Assst. a. Botan. Institut d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Pharmazeutische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. 4 Bändchen. Nr. 543/44, 588, 682.

Philologie, Geschichte d. Klassischen, v. Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. a. d. Univ. Münster in Westf. Nr. 367.

Philosophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentzler, Professor an der Universität Bonn. Nr. 281.

Philosophie, Geschichte d., IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. B. Bauch, Professor an der Universität Jena. Nr. 394.

— V: **Immanuel Kant** von Dr. Bruno Bauch, Professor an d. Universität Jena. Nr. 536.

— VI: **Die Philosophie im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts** von Arthur Drexler, Prof. der Philosophie an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 571.

— **Hauptprobleme der,** v. Dr. Georg Simmel, Professor an der Universität Berlin. Nr. 500.

— **Psychologie und Logik zur Einf. in d. Philosophie** von Prof. Dr. Th. Eshenhaus. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photographie, Die. Von G. Kessler, Prof. an d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 3 Taf. und 42 Abbild. Nr. 94.

Physik, Theoretische, von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Techn. Hochschule in Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 24 Abbildungen. Nr. 76.

— II. Teil: Licht u. Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— IV. Teil: Elektromagnet. Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Fig. Nr. 374.

Physik, Geschichte der, von Prof. A. Rißner in Wertheim a. M. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

— II: Die Physik von Newton bis z. Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sadur, beide an der Univ. Breslau. Nr. 445.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof. der Mathematik u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Rejultaten. Nr. 243.

— **Formelsammlung** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 63 Figuren. Nr. 136.

— **Messungsmethoden** von Dr. Wilh. Bahrt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

— **Tabellen** v. Dr. A. Leid, Oberlehrer an der Comeniuschule zu Berlin-Schöneberg. Nr. 650.

Physiologische Chemie von Dr. med. A. Lehmann in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— II: Dissimilation. Mit 1 Taf. Nr. 241.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerh. Schott, Abteilungsdir. b. d. Deutsch. Seewarte in Hamburg. Nr. 39 Abb. im Text u. 8 Taf. Nr. 112.

Pflanze, Die. Eine Einführung in die Kenntniss ihrer Formenreihen von Prof. Dr. G. Lindau in Berlin. Mit 10 Figurengruppen i. Text. Nr. 574.

— **Spalt- und Schleimpflanze.** Eine Einführung in ihre Kenntniss von Prof. Dr. Gustav Lindau,ustos am Kgl. Botanischen Museum und Privatdozent der Botanik an der Universität Berlin. Mit 11 Abbildungen. Nr. 642.

Planetensternsystem. Astronomie (Größe, Bewegung u. Entfernungen d. Himmelskörper) von A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univ. Kiel. I: Das Planetensternsystem. Mit 33 Abbild. Nr. 11.

Plankton, Das, des Meeres von Dr. G. Etkasny in Wien. Mit vielen Abbildungen. Nr. 675.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Direktor des Bayer. Nationalmuseums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

— **Die, seit Beginn des 19. Jahrhunderts** von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern. Nr. 321.

Plattdeutsche Mundarten von Dr. Sub. Grimme, Professor an der Universität Münster i. W. Nr. 461.

Boetiz, Deutsche, v. Dr. K. Borinski,
 Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.
Solarlicht. Erdmagnetismus, Erd-
strom u. Polarlicht von Dr. A.
Rippoldt, Mitglied des kgl. Preuß.
Meteorolog. Instituts zu Potsdam.
 Mit 7 Taf. u. 16 Figuren. Nr. 175.
Solnische Geschichte von Dr. Clemens
Brandenburger in Posen. Nr. 338.
Sommern. Landeskunde von Pom-
mern von Dr. W. Deede, Prof. an
der Universität Freiburg i. S. Mit
 10 Abb. und Karten im Text und
 1 Karte in Lithographie. Nr. 575.
Portugiesische Geschichte v. Dr. Gustav
Diercks in Berlin-Steglitz. Nr. 622.
Portugiesische Literaturgeschichte von
Dr. Karl von Reinhardtjoertner,
 Professor an der kgl. Techn. Hoch-
 schule München. Nr. 213.
Porzellanerei. Textil-Industrie II:
Weberei, Wirkerei, Posamentiere-
rei, Spitzen- und Gardinenfabri-
kation und Filzfabrikation v. Prof.
Max Gürler, Geh. Regierungsrat
im kgl. Landesgewerbeamt zu
Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.
Postrecht von Dr. Alfred Wolde, Post-
inspektor in Bonn. Nr. 425.
Preßluftwerkzeuge, Die, von Diplom-
Ing. P. Jltis, Oberlehrer an der
Kais. Techn. Schule in Strassburg.
 Mit 82 Figuren. Nr. 493.
Preussische Geschichte. Brandenburg-
isch-Preussische Geschichte v. Prof.
Dr. M. Thamm, Direktor d. Kaiser
Wilhelms-Gymnasiums in Monta-
baur. Nr. 600.
Preussisches Staatsrecht von Dr. Fris
Stier-Somlo, Prof. an der Univ.
Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.
Psychiatrie, Forensische, von Professor
Dr. B. Wegandt, Dir. der Irren-
anstalt Friedrichsberg in Hamburg.
 2 Bändchen. Nr. 410 und 411.
Psychologie und Logik zur Einführung
in d. Philosophie v. Prof. Dr. Th.
Eisenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.
Psychophysik, Grundriß der, v. Prof.
Dr. G. F. Lipps in Zürich. Mit
 3 Figuren. Nr. 98.
Pumpen, Druckwasser- und Druckluft-
Anlagen. Ein kurzer Überblick von
Dipl.-Ing. Rudolf Vogdt, Regie-
rungsbaumeister a. D. in Aachen.
 Mit 87 Abbildungen. Nr. 290.

Quellenkunde d. deutschen Geschichte
 von Dr. Carl Jacob, Prof. an der
 Universität Tübingen. 1. Band.
 Nr. 279.

Radioaktivität von Dipl.-Ing. Wilh.
Frommel. Mit 21 Abbildungen
 Nr. 317.

Rechnen, Das, in der Technik u. seine
 Hilfsmittel (Rechenchieber, Rechen-
 tafeln, Rechenmaschinen usw.) von
 Ing. Joh. Eug. Mayer in Freiburg
 i. Br. Mit 30 Abbild. Nr. 405.

— **Kaufmännisches, von Professor**
Richard Just, Oberlehrer an der
Öffentlichen Handelslehranstalt der
Dresdener Kaufmannschaft. I. II.
III. Nr. 139, 140, 187.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuchs.
 Erstes Buch: Allg. Teil. I: Ein-
 leitung — Lehre v. d. Personen u.
 v. d. Sachen v. Dr. F. Dertmann,
 Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 447.

— — II: Erwerb u. Verlust, Geltend-
 machung u. Schutz der Rechte von
 Dr. Paul Dertmann, Professor an
 der Universität Erlangen. Nr. 448.

— **Zweites Buch: Schuldrecht. I. Ab-**
teilung: Allgemeine Lehren von
Dr. Paul Dertmann, Professor an
der Universität Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abt.: Die einzelnen Schuld-
 verhältnisse v. Dr. Paul Dertmann,
 Prof. an der Universität Erlangen.
 Nr. 324.

— **Drittes Buch: Sachenrecht von Dr.**
F. Kregianmar, Oberlandesgerichts-
rat in Dresden. I: Allgem. Lehren.
Besitz und Eigentum. Nr. 480.

— — II: Begrenzte Rechte. Nr. 481.

— **Viertes Buch: Familienrecht von**
Dr. Heinrich Tische, Professor an der
Universität Göttingen. Nr. 305.

— **Fünftes Buch: Erbrecht von Dr.**
Wilhelm von Blume, ord. Prof. der
Rechte an der Universität Tübingen.
I. Abteilung: Einleitung. — Die
Grundlagen des Erbrechts. Nr. 659.

— — II. Abteilung: Die Nachlassbe-
 teiligten. Mit 23 Figuren. Nr. 660.

Recht der Versicherungsunterneh-
mungen, Das, von Regierungsrat
a. D. Dr. jur. K. Seibl, erstem
Direktor der Nürnberger Lebens-
versicherungsbank, früherer Mitglied
des Kaiserlichen Aufsichtsamts für
Privatversicherung. Nr. 635.

Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche, von J. Neuberger, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied d. Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Rechtswissenschaft, Einführung in die, von Dr. Theodor Sternberg in Berlin. I: Methoden- und Quellenlehre. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Redelehre, Deutsche, v. Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Nr. 61.

Redeschrift siehe: Stenographie.

Reichsfinanzen, Die Entwicklung der, von Präsident Dr. R. van der Borcht in Berlin. Nr. 427.

Religion, Die Entwicklung der christlichen, innerhalb des Neuen Testaments von Professor Dr. Lic. Carl Clemen Nr. 388.

Religion, Die, des Judentums im Zeitalter des Hellenismus u. der Römerherrschaft von Lic. Dr. W. Staerk (Neutestamentliche Zeitgeschichte II.) Mit einer Planfuge. Nr. 326.

Religionen der Naturvölker, Die, von Dr. Th. Achelis, Professor in Bremen. Nr. 449.

Religionswissenschaft, Abriss der vergleichenden, von Professor Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Renaissance. Die Kultur der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung v. Dr. Robert F. Arnold, Prof. an der Universität Wien. Nr. 189.

Reptilien. Das Tierreich III: Reptilien und Amphibien. Von Dr. Franz Werner, Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.

Rheinprovinz, Landeskunde der, von Dr. W. Steinede, Direktor d. Realgymnasiums in Essen. Mit 9 Abb., 3 Karten und 1 Karte. Nr. 308.

Riechstoffe. Atherische Ole und Riechstoffe von Dr. F. Kochussen in Wittig. Mit 9 Abb. Nr. 446.

Roman. Geschichte des deutschen Romans von Dr. Hellm. Mielle. Nr. 229.

Romanische Sprachwissenschaft von Dr. Adolf Zauner, Prof. a. d. Univ. Graz. 2 Bände. Nr. 128, 250.

Römische Altertumskunde von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Rollbildern. Nr. 45.

Römische Geschichte von Realgymnasial-Direktor Dr. Jul. Koch in Grunewald. 2 Bdn. (I: Königszeit und Republik. II: Die Kaiserzeit bis zum Untergang des Weströmischen Reiches.) Nr. 19 u. 677.

Römische Literaturgeschichte von Dr. Herm. Joachim in Hamburg. Nr. 52.

Römische und griechische Mythologie von Professor Dr. Hermann Steuding, Rektor des Gymnasiums in Schneeberg. Nr. 27.

Römische Rechtsgeschichte von Dr. Robert von Mayr, Prof. an der Deutschen Univ. Prag. 1. Buch: Die Zeit d. Volksrechtes. 1. Hälfte: Das öffentliche Recht. Nr. 577.

— 2. Hälfte: Das Privatrecht. Nr. 578.

— 2. Buch: Die Zeit des Amts- und Verlehrrechtes. 1. Hälfte: Das öffentliche Recht. Nr. 645.

— 2. Hälfte: Das Privatrecht I. Nr. 646.

— 2. Hälfte: Das Privatrecht II. Nr. 647.

Rußland. Russische Geschichte von Dr. Wih. Keed, Oberlehrer am Obergymnasium in Mainz. Nr. 4.

— **Landeskunde des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Professor Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.

Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 68.

Russische Grammatik von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 66.

Russische Handelskorrespondenz von Dr. Theodor von Karwinsky in Leipzig. Nr. 315.

Russisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität München. Nr. 67.

Russische Literatur von Dr. Erich Boehme, Lektor a. d. Handelshochschule Berlin. I. Teil: Auswahl moderner Prosa u. Poesie mit ausführlichen Anmerkungen u. Akzentbezeichnung. Nr. 403.

— II. Teil: Всеволодъ Гаршинъ, Пазказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnungen. Nr. 404.

Russische Literaturgeschichte von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

- Russisches Vokabelbuch, Kleines, von Dr. Erich Boehme, Lektor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 475.
- Sachenrecht. Recht d. Bürgerl. Gesetzbuches. Drittes Buch: Sachenrecht von Dr. F. Reschmar, Oberlandesgerichtsrat i. Dresden. I: Allgemeine Lehren. Besitz u. Eigentum, — II: Begrenzte Rechte. Nr. 480. 481.
- Sachs, Hans. Ausgewählt u. erläutert. v. Prof. Dr. Julius Zahrt. Nr. 24.
- Sachsen. Sächsische Geschichte v. Prof. Otto Raemmel, Rektor d. Nikolai-Gymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
- Landeskunde des Königreichs Sachsen v. Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abbildungen u. 1 Karte. Nr. 258.
- Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere von Oberstudientrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.
- Schattenkonstruktionen von Professor F. Wunderlinn in Münster. Mit 114 Figuren. Nr. 236.
- Schiffs- und Küstenartillerie bis zur Gegenwart, Die Entwicklung der, von Korvettenkapitän Hünig. Mit Abbild. und Tabellen. Nr. 606.
- Schleswig-Holstein. Landeskunde von Schleswig-Holstein, Helgoland u. der freien und Hansestadt Hamburg von Dr. Paul Hambroch, Abteilungsleiter am Museum für Völkerverkunde in Hamburg. Mit Abb., Plänen, Profilen und 1 Karte in Lithographie. Nr. 563.
- Schleusenbau. Kanal- u. Schleusenbau von Regierungsbaumeister Otto Rappold in Stuttgart. Mit 78 Abbildungen. Nr. 585.
- Schmalspurbahnen (Klein-, Arbeits- u. Feldbahnen) v. Dipl.-Ing. Aug. Boshart in Nürnberg. Mit 99 Abbildungen. Nr. 524.
- Schmarozer und Schmarozerium in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarozerkunde von Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univ. Graz. Mit 67 Abbildgn. Nr. 151.
- Schreiner-Arbeiten. Tischler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Fig. auf 75 Tafeln. Nr. 502.
- Schuldrecht. Recht des Bürgerl. Gesetzbuches. Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Dertmann, Prof. a. d. Univ. Erlangen. Nr. 323.
- II. Abteilung: Die einzelnen Schulverhältnisse von Dr. Paul Dertmann, Professor a. d. Universität Erlangen. Nr. 324.
- Schule, die deutsche, im Auslande von Hans Amrhein, Seminar-Oberlehrer in Rhedt. Nr. 259.
- Schulhaus. Die Baukunst des Schulhauses von Prof. Dr.-Ing. Ernst Bettelein in Darmstadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abbild. II: Die Schulräume — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbild. Nr. 443 und 444.
- Schulpraxis. Methodik d. Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.
- Schweiß- und Schneidverfahren, Das autogene, von Ingenieur Hans Niese in Kiel. Mit 30 Fig. Nr. 499.
- Schweiz. Schweizerische Geschichte von Dr. R. Dändliker, Professor an der Universität Zürich. Nr. 188.
- Landeskunde der Schweiz von Prof. Dr. S. Walser in Bern. Mit 16 Abb. und 1 Karte. Nr. 398.
- Schwimmanstalten. Öffentl. Bade- und Schwimmanstalten von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.
- Seemacht, Die, in der deutschen Geschichte von Wirl. Admiraltätsrat Dr. Ernst von Halle, Professor an der Universität Berlin. Nr. 370.
- Seerecht, Das deutsche, von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I: Allgemeine Lehren: Personen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.
- II: Die einzelnen seerechtlichen Schulverhältnisse: Verträge des Seerechts und außervertragliche Haftung. Nr. 387.

- Seifenfabrikation, Die, die Seifenanalyse und d. Kerzenfabrikation** v. Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette u. Ole II.) Mit 25 Abbildgn. Nr. 336.
- Semitische Sprachwissenschaft** von Dr. C. Brockmann, Professor an der Univ. Königsberg. Nr. 291.
- Serbokroatische Grammatik** von Dr. Vladimir Corovic, Bibliothekar des bošn.-herzegow. Landesmuseums in Sarajevo (Bosnien). Nr. 638.
- Silikate. Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels** von Dr. Gustav Kauter in Charlottenburg. I: Glas u. keramische Industrie. Nr. 12 Taf. Nr. 233.
— II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.
- Simplicius Simplicissimus** von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgeg. von Prof. Dr. F. Robertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.
- Skandinavien, Landeskunde von** (Schweden, Norwegen u. Dänemark) von Heinrich Kerp, Kreis-Inspektors in Kreuzburg. Mit 11 Abb. und 1 Karte. Nr. 202.
- Slavische Literaturgeschichte** von Dr. Josef Karáeet in Wien. I: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.
— II: Das 19. Jahrh. Nr. 278.
- Soziale Frage. Die Entwicklung der sozialen Frage** von Professor Dr. Ferdin. Tönnies. Nr. 353.
- Sozialversicherung** von Prof. Dr. Alfred Raney in Berlin. Nr. 267.
- Soziologie** von Prof. Dr. Thomas Ahlert in Bremen. Nr. 101.
- Spalt- und Schleimpilze. Eine Einführung in ihre Kenntnis** von Prof. Dr. Gustav Lindau, Kusos am kgl. Botanischen Museum und Privatdozent der Botanik an der Universität Berlin. Mit 11 Abbildungen. Nr. 642.
- Spanien. Spanische Geschichte** von Dr. Gustav Dierck. Nr. 266.
— Landeskunde der Iberischen Halbinsel v. Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univ. Würzburg. Mit 8 Karten und 8 Abbild. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.
- Spanische Handelskorrespondenz** von Dr. Alfredo Nadal de Marizcurrena. Nr. 295.
- Spanische Literaturgeschichte** v. Dr. Rud. Beer, Wien. I. II. Nr. 167, 168.
- Speicher, Industrielle und gewerbliche Bauten** (Speicher, Lagerhäuser u. Fabriken) v. Architekt Heinz Salzmann in Düsseldorf. II: Speicher u. Lagerhäuser. Mit 123 Fig. Nr. 512.
- Spinnerei. Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnerei** von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.
- Spisenfabrikation. Textilindustrie II: Weberei, Wirerei, Färberei, Spizen- und Gardinenfabrikat. u. Filzfabrikation** von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Fig. Nr. 185.
- Spruchdichtung. Walthar von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung.** Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Günther, Prof. a. d. Oberrealschule u. an der Technischen Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.
- Staatslehre, Allgemeine**, von Dr. Hermann Rehm, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Nr. 338.
- Staatsrecht, Allgemeines**, von Dr. Julius Haßchel, Prof. d. Rechte an der Universität Göttingen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.
- Staatsrecht, Preussisches**, von Dr. Fritz Gier-Somlo, Prof. a. d. Universität Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.
- Stadt, Die deutsche, und ihre Verwaltung.** Eine Einführung in die Kommunalpolitik der Gegenwart. Herausgegeben von Dr. Otto Mofk, Beigeordn. der Stadt Düsseldorf.
- I: Verfassung und Verwaltung im allgemeinen; Finanzen u. Steuern; Bildungs- und Kunstpflege; Gesundheitspflege.** Nr. 617
— II: Wirtschafts- u. Sozialpolitik. Nr. 662.
— III: Technik: Städtebau, Tief- u. Hochbau. Mit 48 Abbildungen. Nr. 663.
- Stammeskunde, Deutsche**, von Dr. Rudolf Much, a. d. Prof. a. d. Univ. Wien. Nr. 2 Kart. u. 2 Taf. Nr. 126.

Statik von W. Hauber, Dipl.-Ing. I. Teil: Die Grundlehren der Statik fester Körper. Mit 82 Fig. Nr. 178.

— II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

— Graphische, mit besond. Berücksichtigung der Einflußlinien von Kgl. Oberlehrer Dipl.-Ing. Otto Henkel in Rendsburg. 1. Teil. Mit 121 Fig. Nr. 603.

Steinhauerarbeiten. Maurer- und Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. und Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.

Stellwerke, Die mechanischen der Eisenbahnen, von E. Scheibner, Kgl. Oberbaurat a. D. in Berlin. I: Signale und deren Anordnung. Selbständige mechanische Stellwerke. Mit 38 Abbild. Nr. 674.

Stenographie. Geschichte der Stenographie von Dr. Arthur Menz in Königsberg i. Pr. Nr. 501.

Stenographie n. d. System v. F. F. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.

— Die Redeschrift des Gabelsberger'schen Systems von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.

Stenographie. Lehrbuch d. Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Leseübungen u. einem Anhang von Professor Dr. Amjel, Oberlehrer des Kadettenkorps in Pichterfelde. Nr. 86.

— Redeschrift. Lehrbuch der Redeschrift d. Systems Stolze-Schrey nebst Kürzungsbeisp., Leseübungen, Schlüssel und einer Anleitung zur Steigerung der stenographischen Fertigkeit von Heinrich Dröse, amtl. hdb. Landtagsstenograph in Karlsruhe (W.). Nr. 494.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Prof. an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 66 Figuren. Nr. 97.

Sternsystem. Astronomie. Größe, Bewegung u. Entfernung d. Himmelskörper v. H. J. Wölbis, neu bearb. v. Dr. Herm. Kobold, Prof. a. d. Univerf. Kiel. II: Kometen, Meteore u. das Sternsystem. Mit 15 Fig. u. 2 Sternkarten. Nr. 529.

Steuerysteme des Auslandes, Die, v. Geh. Oberfinanzrat D. Schwarz in Berlin. Nr. 426.

Stiftunde v. Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbild. u. 195 Textillustrationen. Nr. 80.

Stöchiometrische Aufgabensammlung von Dr. Wilh. Bährdt, Oberl. an d. Oberrealschule in Groß-Richterfelde. Mit den Resultaten. Nr. 452.

Straßenbahnen von Dipl.-Ing. Aug. Boshart in Nürnberg. Mit 72 Abbildungen. Nr. 559.

Strategie von Köffler, Major im Kgl. Sächs. Kriegsmin. i. Dresd. Nr. 505.

Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen v. Jos. Herzog, Dipl.-Elektroing. in Budapest u. Clarence Feldmann, Prof. d. Elektrotechnik in Delft. Mit 68 Abb. Nr. 456.

Südamerika. Geschichte Südamerikas von Dr. Hermann Lufft. I: Das spanische Südamerika (Chile, Argentinien und die kleineren Staaten). Nr. 632.

— II: Das portugiesische Südamerika (Brasilien). Nr. 672.

Südseegebiet. Die deutschen Kolonien II: Das Südseegebiet und Kiautschou v. Prof. Dr. R. Dove. M. 16 Taf. u. 1 lith. Karte. Nr. 520.

Südwestafrika. Die deutschen Kolonien. IV: Südwestafrika von Prof. Dr. R. Dove Mit 16 Tafeln und 1 lithogr. Karte. Nr. 637.

Talmud. Die Entstehung des Talmuds von Dr. E. Funk in Bostowiz. Nr. 479.

Talmudproben von Dr. E. Funk in Bostowiz. Nr. 583.

Technik. Das Rechnen in der Technik und seine Hilfsmittel (Rechenchieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ing. Joh. Eug. Mayer in Freiburg i. Br. Mit 30 Abbild. Nr. 405.

Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.

Technische Tabellen und Formeln von Dr.-Ing. W. Müller, Dipl.-Ing. am Kgl. Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde. Mit 106 Figuren. Nr. 579.

Technisches Wörterbuch, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke d. Maschinenbaues, Schiffbaues u. d. Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin.

I. Teil: Dtsch.-Engl. Nr. 395.

— II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396.

— III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453.

— IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.

Technologie, Allgemeine chemische, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg Nr. 113.

— **Mechanische**, v. Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke in Braunschweig. Nr. 340, 341.

Teerfarbstoffe, Die, mit bes. Berücksichtigung der synthetisch. Methoden v. Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule, Dresd. Nr. 214.

Telegraphenrecht v. Postinspektor Dr. jur. Alfred Wolke in Bonn I: Einleitung. Geschichtliche Entwicklung. Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, allgemeiner Teil. Nr. 509.

— II: Die Stellung d. deutsch. Telegraphenwesens im öffentl. Rechte, besonderer Teil. Das Telegraphen-Strafrecht. Rechtsverhältnis d. Telegraphie z. Publikum. Nr. 510.

Telegraphie, Die elektrische, v. Dr. Lud. Kellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Testament. Die Entstehung des Alten Testaments v. Lic. Dr. W. Staerk, Prof. a. d. Univ. Jena. Nr. 272.

— **Die Entstehung des Neuen Testaments** v. Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

Textilindustrie. I: Spinnerei und Zwirnerei v. Prof. Max Gürtler, Geh. Reg.-Rat im Kgl. Landesgewerbeamt, Berlin. Nr. 9 Fig. Nr. 184.

— II: **Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** v. Prof. M. Gürtler, Geh. Regierungsrat i. Kgl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Nr. 29 Fig. Nr. 185.

— III: **Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe** von Dr. Wilm. Massot, Prof. a. d. Preuß. höheren Fachschule f. Textilindustr. in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Textiltechnische Untersuchungsmethoden von Dr. Wilhelm Massot, Professor an der Färberei- u. Appreturschule Krefeld. I: Die Mikroskopie der Textilmaterialien. Mit 92 Figuren. Nr. 673.

Thermodynamik (Technische Wärmelehre) v. K. Balthar u. M. Röttinger, Dipl.-Ing. Nr. 54 Fig. Nr. 242.

Thermodynamik (Technische Wärmelehre). Die thermodynamischen Grundlagen der Wärmekraft- und Kältemaschinen von M. Röttinger, Dipl.-Ing. in Mannheim. Nr. 2.

Thüringische Geschichte v. Dr. Ernst Devrient in Leipzig. Nr. 352.

Tierbiologie. Abriss der Biologie der Tiere v. Dr. Heinrich Eintracht, Prof. a. d. Univ. Leipzig. I: Entstehung u. Weiterbildung der Tierwelt. — Beziehungen zur organ. Natur. Mit 24 Abbild. Nr. 131.

— II: **Beziehungen der Tiere zur organischen Natur**. Mit 35 Abbild. Nr. 654.

Tiere, Entwicklungsgeschichte der, von Dr. Johs. Meisenheimer, Prof. der Zoologie a. d. Universität Jena. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— II: **Organbildung**. Mit 46 Figuren. Nr. 379.

Tiergeographie v. Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie a. d. Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Tierkunde von Dr. Franz v. Wagner, Prof. a. d. Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Tierreich, Das, I: Säugetiere v. Oberstudient. Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorst. d. Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Nr. 15 Abb. Nr. 282.

— III: **Reptilien und Amphibien** von Dr. Franz Wemer, Prof. a. d. Univ. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 383.

— IV: **Fische** von Prof. Dr. Max Rauter in Neapel. Nr. 356.

— V: **Insekten** von Dr. F. Groß in Neapel (Stazione Zoologica). Mit 56 Abbildungen. Nr. 594.

— VI: **Die wirbellosen Tiere** von Dr. Ludw. Böhmig, Prof. d. Zool. a. d. Univ. Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Kriechquallen und Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.

Tierreich, Das, VI: Die wirbellosen Tiere von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. d. Zool. a. d. Univ. Graz. II: Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter und Manteltiere. Nr. 97 Fig. Nr. 440.

Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle, von Dr. Paul Rippert in Effen. Nr. 228.

Tischler- (Schreiner-) Arbeiten I: Materialien, Handwerkszeuge, Maschinen, Einzelverbindungen, Fußböden, Fenster, Fensterladen, Treppen, Aborte von Prof. E. Viehweger, Architekt in Köln. Mit 628 Figuren auf 75 Tafeln. Nr. 502.

Togo. Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithographischen Karte. Nr. 441.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Prof. Dr. Gerh. Hessenberg in Breslau. Mit 70 Fig. Nr. 99.

Tropenhygiene v. Medizinalrat Prof. Dr. Nocht, Direktor des Instituts für Schiffs- und Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Trutt, Kartell und Trust von Dr. E. Tschiersch in Düsseldorf. Nr. 522.

Turnen, Das deutsche, v. Dr. Rudolf Gajch, Prof. a. König Georg-Gymn. in Dresden. Mit 87 Abb. Nr. 628.

Turnkunst, Geschichte der, von Dr. Rudolf Gajch, Prof. a. König Georg-Gymnasium in Dresden. Mit 17 Abbildungen. Nr. 504.

Ungarn. Landeskunde von Österreich-Ungarn von Dr. Alfred Grund, Prof. an der Universität Prag. Mit 10 Textillustr. u. 1 Karte. Nr. 244.

Ungarische Literatur, Geschichte der, von Prof. Dr. Ludwig Katona und Dr. Franz Szinnhei, beide an der Universität Budapest. Nr. 550.

Ungarische Sprachlehre v. Dr. Josef Szinnhei, v. ö. Prof. an der Universität Budapest. Nr. 595.

Unterrichtswesen. Geschichte d. deutschen Unterrichtswesens von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Ludau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende d. 18. Jahrh. Nr. 275.

Unterrichtswesen. Geschichte d. deutschen Unterrichtswesens von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Königl. Gymnasiums zu Ludau. II. Teil: Vom Beginn d. 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

— Das höhere und mittlere Unterrichtswesen in Deutschland von Professor Dr. Jakob Wächgram, Schulrat in Lübeck. Nr. 644.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Professor an der Univ. Wien. Mit 85 Abb. Nr. 42.

Urheberrecht, Das, an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken d. bildenden Künste u. Photographie v. Staatsanw. Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

Urheberrecht, Das deutsche, an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Urzeit. Kultur der Urzeit von Dr. Moriz Hoernes, v. ö. Prof. an der Univ. Wien. 3 Bändch. I: Steinzeit. Mit 40 Bildergrupp. Nr. 564.

— II: Bronzezeit. Mit 36 Bildergruppen. Nr. 565.

— III: Eisenzeit. Mit 35 Bildergruppen. Nr. 566.

Vektoranalysis von Dr. Siegf. Valentiner, Prof. an der Bergakademie in Clausthal. Mit 16 Fig. Nr. 354.

Venezuela. Die Cordillerenstaaten von Dr. Wilhelm Sievers, Prof. an der Universität Gießen II: Guaybor, Colombia u. Venezuela. Mit 16 Tafeln und 1 lithogr. Karte. Nr. 653.

Veranschlagungen, Das, im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch üb. d. Wesen d. Kostenanschlags v. Architekt Emil Heutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Fig. Nr. 385.

Vereinigten Staaten. Landeskunde der Vereinigten Staaten von Nordamerika von Professor Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädt. Realgymnasium in Berlin. I. Teil: Mit 22 Karten und Figuren im Text und 14 Tafeln. Nr. 381.

Vereinigte Staaten. Landeskunde der Vereinigten Staaten von Nordamerika von Professor Heinrich Frischer, Oberlehrer am Luisenstädt. Realgymnasium i. Berlin. II. Teil: Mit 3 Karten im Text, 17 Tafeln u. 1 lith. Karte. Nr. 382.

Vergil. Die Gedichte des P. Vergilius Maro. In Auswahl mit einer Einleitung u. Anmerkungen herausgeg. von Dr. Julius Ziehen. I: Einleitung und Aeneis. Nr. 497.

Vermessungskunde von Dipl.-Ing. P. Werkmeister, Oberlehrer an der Kgl. Techn. Schule in Straßburg i. E. I: Geldmessen und Nivellieren. Mit 146 Abb. Nr. 468.

— II: Der Theodolit. Trigonometrische u. barometr. Höhenmessung. Tachymetrie. Mit 109 Abbildungen. Nr. 469.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Professor an der Universität Freiburg i. S. Nr. 180.

Versicherungsunternehmungen, Das Recht der, von Regierungsrat a. D. Dr. jur. R. Leibl, erstem Direktor der Nürnberger Lebensversicherungsbank, früher Mitglied des kaiserlichen Aufsichtsamts für Privatversicherung. Nr. 635.

Versicherungsweisen, Das, von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Professor der Versicherungslehre an der Handels-Hochschule Köln. I: Allgemeine Versicherungslehre. Nr. 262.

— II: Die einzelnen Versicherungszweige. Nr. 636.

Völkerkunde v. Dr. Michael Haberlandt, I. u. I. Rufos d. ethnogr. Sammlung d. naturhist. Hofmuseums u. Privatdozent a. d. Univ. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.

Völkernamen. Länder- u. Völkernamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 478.

Volkbibliotheken (Bücher- u. Lesehallen), ihre Einrichtung u. Verwaltung v. Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

Volklied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132

Volkswirtschaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Tübingen. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik v. Präsident Dr. R. van der Borcht, Berlin. Nr. 177.

Waffen, Die blanken, und die Schusswaffen, ihre Entwicklung von der Zeit der Landsknechte bis zur Gegenwart m. besonderer Berücksichtigung der Waffen in Deutschland, Österreich-Ungarn und Frankreich von W. Gohlke, Feuerwerks-Major a. D. in Berlin-Steglitz. Mit 115 Abbildungen. Nr. 631.

Wahrscheinlichkeitsrechnung von Dr. Franz Gac, Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Mit 15 Fig. im Text. Nr. 508.

Waldeck. Landeskunde des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck von Professor Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

Waltherlied, Das, im Versmaße der Urschrift übersezt u. erläutert von Prof. Dr. G. Uthoff, Oberlehrer am Realgymnas. in Weimar. Nr. 46.

Walther von der Vogelweide, mit Auswahl a. Minnefang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkgn. u. einem Wörterbuch v. Otto Günther, Prof. a. d. Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Walzwerke. Die, Einrichtung und Betrieb. Von Dipl.-Ing. A. Holverschmid, Oberlehrer a. d. Kgl. Maschinenbau- u. Hüttenchule in Duisburg. Mit 151 Abbild. Nr. 580.

Warenhäuser. Geschäfts- u. Warenhäuser von Hans Schliepmann, Königl. Baurat in Berlin. I: Vom Laden zum „Grand Magazin“. Mit 23 Abbildungen. Nr. 655.

— II: Die weitere Entwicklung der Kaufhäuser. Mit 39 Abbildungen. Nr. 656.

Warenkunde von Dr. Carl Gaffad, Prof. u. Leiter der I. I. Handelsakademie in Graz. I. Teil: Unorganische Waren. Nr. 40 Abb. Nr. 222.

— II. Teil: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.

Warenzeichnerecht, Das. Nach dem Gesetz z. Schutz d. Warenzeichnungen v. 12. Mai 1894. Von Reg.-Rat J. Neuberg, Mitglied des kgl. Patentamts zu Berlin. Nr. 360.

Wärme. Theoretische Physik II. 2.: Licht u. Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien. Mit 47 Abbildgn. Nr. 77.

Wärme- und Kältemaschinen. Die thermodynamischen Grundlagen der Wärme- u. Kältemaschinen von M. Röttiger, Diplom.-Ing. in Mannheim. Mit 73 Figuren. Nr. 2.

Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik) v. K. Balthier u. M. Röttiger, Dipl.-Ing. Mit 54 Figuren. Nr. 242.

Wäscherei. Textilindustrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Prof. an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Arefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Wasser, Das, und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe v. Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ing. in Saalfeld. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.

Wasser und Abwässer. Ihre Zusammenziehung, Beurteilung u. Untersuchung v. Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorst. d. landwirtsch. Versuchsanstalt in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Wasserinstallationen. Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen v. Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.

Wasserkräftenanlagen von Th. Kümmelin, Regierungsbaumeister a. D., Oberingenieur in Dresden. I: Beschreibung. Mit 66 Figuren. Nr. 665.

— II: Gewinnung der Wasserkraft. Mit 35 Figuren. Nr. 666.

— III: Bau und Betrieb. Mit 56 Figuren. Nr. 667.

Wasserturbinen, Die, von Dipl.-Ing. P. Holl in Berlin. I: Allgemeines. Die Freisratturbinen. Mit 113 Abbildungen. Nr. 541.

— II: Die Überdruckturbinen. Die Wasserkräftenanlagen. Mit 102 Abbildungen. Nr. 542.

Wasser- u. Abwasserreinigung der Ortschaften v. Dr.-Ing. Robert Wehrhach, Prof. an der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 85 Fig. Nr. 5.

Weberei. Textilindustrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Wechselstromerzeuger von Ing. Karl Fichelmaher, Prof. an der k. k. Technischen Hochschule in Wien. Mit 40 Figuren. Nr. 547.

Wechselwesen, Das, v. Rechtsanw. Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

Wehrverfassung, Deutsche, von Geh. Kriegsrat Karl Endres, vortr. Rat i. Kriegsminist. i. München. Nr. 401.

Werkzeugmaschinen für Holzbearbeitung, Die, von Ing. Professor Hermann Wilda in Bremen. Mit 125 Abbildungen. Nr. 582.

Werkzeugmaschinen für Metallbearbeitung, Die, von Ing. Professor Hermann Wilda in Bremen. I: Die Mechanismen der Werkzeugmaschinen. Die Drehbänke. Die Fräsmaschinen. Mit 319 Abb. Nr. 561.

— II: Die Bohr- und Schleifmaschinen. Die Hobel-, Schaping- u. Stoßmaschinen. Die Sägen u. Scheren. Antrieb u. Kraftbedarf. Mit 206 Abbild. Nr. 562.

Westpreußen. Landeskunde der Provinz Westpreußen von Fritz Braun, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium in Graudenz. Mit 16 Tafeln, 7 Textarten u. 1 lith. Karte. Nr. 570.

Wettbewerbs, Der unlautere, von Rechtsanwält Dr. Martin Wassermann in Hamburg. I: Generalklausel, Reklameauswüchse, Ausverkaufswesen, Angestelltenbestechung. Nr. 339.

— II: Kreditfähigkeit, Firmen- und Namenmißbrauch, Verrat von Geheimnissen, Ausländerzusch. Nr. 535.

Wirbellose Tiere. Das Tierreich VI: Die wirbellosen Tiere von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. d. Zoologie an der Univ. Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen u. Würmer. Mit 74 Fig. Nr. 439.

— II: Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Arthropoden, Stachelhäuter u. Manteltiere. Mit 97 Fig. Nr. 440.

Wirkerei, Textilindustrie II: Weber-, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- u. Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 29 Figuren. Nr. 185.

Wirtschaftlichen Verbände, Die, v. Dr. Leo Müffelmann in Rostock. Nr. 586.

Wirtschaftspflege, Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Kieß, Magistratsass. in Berlin. Nr. 534.

Wohnungsfrage, Die, v. Dr. L. Pöhle, Prof. der Staatswissenschaften zu Frankfurt a. M. I: Das Wohnungswesen in der modernen Stadt. Nr. 495.

— — II: Die städtische Wohnungs- und Bodenpolitik. Nr. 496.

Wolfram von Eschenbach, Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem hof. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. S. Marold, Prof. am Königl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— Deutsches, von Dr. Richard Loewe in Berlin. Nr. 64.

— Technisches, entfaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.

— — II. Teil: Engl.-Dtsch. Nr. 396.

— — III. Teil: Dtsch.-Franz. Nr. 453.

— — IV. Teil: Franz.-Dtsch. Nr. 454.

Württemberg, Württembergische Geschichte v. Dr. Karl Weller, Prof. am Karlsghymnasium in Stuttgart. Nr. 462.

Württemberg, Landeskunde des Königreichs Württemberg von Dr. K. Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern u. 1 Karte. Nr. 157.

Zeichenschule von Prof. F. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 200 Voll- und Teiltbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, von H. Beder, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Sonderlinn, Direktor der Königl. Baugewerkschule zu Münster. Mit 290 Fig. u. 23 Taf. im Text. Nr. 58.

Zeitungswesen, Das deutsche, von Dr. K. Brunhuber, Köln a. Rh. Nr. 400.

Zeitungswesen, Das moderne, (Ehst. d. Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

Zeitungswesen, Allgemeine Geschichte des, von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Zellenlehre und Anatomie der Pflanzen von Prof. Dr. S. Wiehe in Leipzig. Mit 79 Abbild. Nr. 556.

Zentral-Veranstaltung von Architekt Hans Frenberger, neu bearbeitet von Professor J. Sonderlinn, Direktor der Königl. Baugewerkschule in Münster i. Westf. Mit 132 Fig. Nr. 57.

Zimmerarbeiten von Carl Epich, Oberlehrer an der Kais. Techn. Schule in Straßburg i. E. I: Allgemeines, Balkenlagen, Zwischendecken und Deckenbildungen, hölz. Fußböden, Fachwerkwände, Gänge- und Sprengwerke. Mit 169 Abbildungen. Nr. 489.

— — II: Dächer, Wandbekleidungen, Simschalungen, Blöc-, Bohlen- und Bretterwände, Zäune, Türen, Tore, Kriibünen und Baugerüste. Mit 167 Abbildungen. Nr. 490.

Zivilprozeßrecht, Deutsches, von Prof. Dr. Wilhelm Risch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Zoologie, Geschichte der, von Prof. Dr. Rud. Burdhardt. Nr. 357.

Zündwaren von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorst. des Städt. Chem. Laboratoriums Stuttgart. Nr. 109.

Zwangsversteigerung, Die, und die Zwangsverwaltung von Dr. F. Kresschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. Nr. 523.

Zwirnerei, Textilindustrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Fig. Nr. 184.

== Weitere Bände sind in Vorbereitung. ==

In unserm Verlag erschien soeben:

Rußlands Kultur und Volkswirtschaft

Aufsätze und Vorträge im Auftrage der Vereinigung für staatswissenschaftliche Fortbildung zu Berlin

herausgegeben von Max Sering

Steif geheftet, Preis Mark 7.20

Inhalt:

- Die religiösen Grundlagen der russischen Kultur. Von Prof. Dr. Holl.
- Die Bedeutung der neueren russischen Literatur. Von Prof. Dr. Brückner.
- Die Grundzüge des russischen Rechts. Von Prof. Dr. Neubeder.
- Die innere Entwicklung Rußlands seit 1905. Von Prof. Dr. Goesch.
-
- Die wirtschaftsgeographischen Grundlagen der russischen Volkswirtschaft. Von Prof. Dr. Ballod.
- Die Durchführung der russischen Agrarreform. Von Prof. Dr. Luhagen.
- Die gegenwärtige russische Agrargesetzgebung und ihre Durchführung in der Praxis. Von A. Koesoeb.
- Russische Industrie. Von Dr. Otto Goebel.
- Die Petersburger Industrie. Von Woffsidlo.
- Die russischen Finanzen. Von Prof. Dr. Wilkowi.
- Rußlands Stellung in der Weltwirtschaft. Von Professor Dr. Wiedenfeld.

In unserm Verlag erschien soeben:

Geschichte der Aufteilung und Kolonisation Afrikas seit dem Zeitalter der Entdeckungen

Erster Band: 1415—1870

Von Dr. Paul Darmstädter
Professor an der Universität Göttingen

Brochiert M. 7.50, gebunden M. 9.50

Das Buch beabsichtigt, in kurzen Zügen, durchweg an der Hand der Quellen, einen Überblick über die Geschichte der Aufteilung und Kolonisation Afrikas, vom Zeitalter der Entdeckungen bis in unsere Tage zu geben. Wie der Titel andeutet, ist die Aufgabe eine doppelte: es soll die Aufteilung des Erdteils geschildert werden, ein Vorgang, der sich zum großen Teil in Europa abgespielt hat und ein wichtiges Kapitel der Weltgeschichte der neueren Zeit bildet; es soll dabei gezeigt werden, wie die Wert-schätzung Afrikas in der Meinung der europäischen Völker jeweils eine verschiedene gewesen ist, natürlich unter dem Einfluß der herrschenden kolonialpolitischen Anschauungen, und wie dadurch der mehr oder minder rasche Gang der Aufteilung bestimmt wurde. Dann aber soll auch die Kolonisation, die Verwaltung und Ausnutzung der von den europäischen Nationen in Besitz genommenen Gebiete dargestellt und gezeigt werden, welche Bedeutung die afrikanischen Kolonien für die europäischen Völker gewonnen haben.

Der vorliegende erste Band behandelt die Epoche der portugiesischen Vorherrschaft (15. und 16. Jahrhundert), die Geschichte Afrikas in der Zeit des Sklavenhandels (17. und 18. Jahrhundert), und ausführlicher den Zeitraum vom Ende des 18. Jahrhunderts bis 1870, in dem namentlich die Darstellung der ägyptischen Expedition Napoleons sowie die Geschichte Algeriens und Südafrikas Interesse erwecken werden. In einem zweiten Bande soll die Geschichte der Aufteilung und Kolonisation Afrikas bis in die unmittelbare Gegenwart fortgeführt werden. Ein beträchtlicher und nicht unwichtiger Teil der Geschichte der neuesten Zeit — es sei nur an Tunis und Ägypten, Tripolis und Marokko, die Gründung des Kongostaats und der deutschen Kolonien, den Burenkrieg und die Einigung Südafrikas erinnert — wird in dem Buche zur Darstellung gelangen, das ebenso dem Kolonialpolitiker wie dem Historiker zu dienen bestimmt ist.

In unserm Verlag erschien ferner:

Historik

Ein Organon geschichtlichen Denkens u. Forschens

Von

Dr. Ludwig Rieß

Privatdozent an der Universität Berlin

Erster Band

25 Bogen gr. 8^o. Broschirt M. 7.50, in Halbfranz geb. M. 9.50

Die Aufgabe der „Historik“ ist von Wilhelm von Humboldt und von Johann Gustav Droysen am klarsten erfaßt worden. Sie muß die produktive Ausprägung der allgemeinen Gedanken sein, die in den mustergültigen geschichtlichen Betrachtungen übereinstimmend als Ausgangspunkt oder Zielpunkt der Forschung unmittelbar vorausgesetzt werden. Es handelt sich dabei nicht um die methodischen Kunstgriffe der Heuristik, Kritik und Interpretation, sondern um das Eindringen in den Kern aller menschlichen Beziehungen und in die Wirksamkeit der Kräfte, auf denen die Abwandlungen der historischen Begebenheiten beruhen. Dieses Element der Wirklichkeit geistig zu durchdringen ist die Aufgabe, die hier zum ersten Male zu lösen versucht wird. So gestaltet sich die Darstellung zu einer durch scharfe Begriffsbestimmungen und anschauliche Beispiele auf der Höhe wahrer Wissenschaft gehaltenen Enzyklopädie der Grundüberzeugungen der Geschichts- und Menschenkenner.

02869
1116
-95/27

02869

