

Der  
**Vierendeel-Träger**

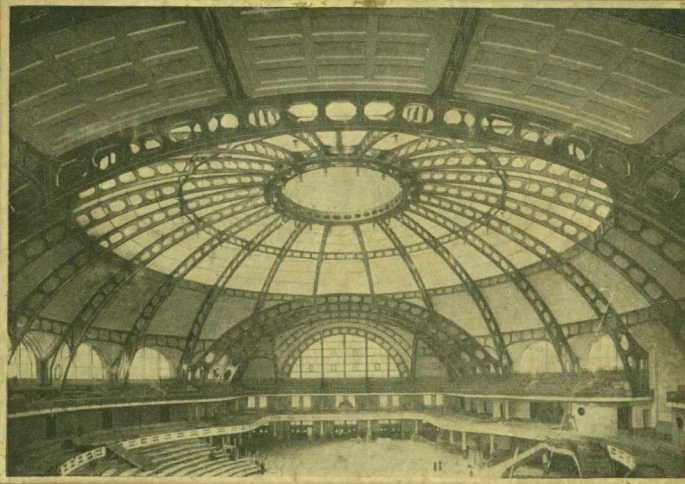
Seine Berechnung  
und Konstruktion

von

**A. VIERENDEEL**

Professor an der Universität in Löwen

Deutsch von Dipl.-Ing. **WILHELM MERTENS**



Festhalle in Frankfurt a. M.

Druck und Verlag von A. BAGEL in Düsseldorf \* 1912

2  
6 1132

11







Der  
**Vierendeel-Träger**

Seine Berechnung  
und Konstruktion

von

**A. VIERENDEEL**

Professor an der Universität in Löwen

---

Deutsch von Dipl.-Ing. **WILHELM MERTENS**



*6 1132 kl*

Druck und Verlag von A. BAGEL in Düsseldorf \* 1912

*1926. 334.*



## Vorrede

---

Die übliche Theorie der Gitterträger entspricht nicht dem gegenwärtigen Stand der Wissenschaft; sie geht bei der Bestimmung der Spannkkräfte von *reibungslosen* Gelenken an den Knotenpunkten aus — eine Voraussetzung, die den Ausführungen in der Wirklichkeit nicht entspricht, einerlei ob die Knotenpunkte als Gelenke ausgebildet oder fest vernietet werden. Aus der mangelhaften Übereinstimmung zwischen den Voraussetzungen der Theorie und der Ausführung resultieren die sogenannten Nebenspannungen des Fachwerks, die man wegen der äußerst schwierigen Berechnung in der Praxis zu vernachlässigen pflegt, obwohl eingehende Berechnungen und ausgeführte Versuche erwiesen haben, daß diese Nebenspannungen häufig genug die Größe der Hauptspannungen erreichen, ja in einzelnen Fällen diese sogar überschreiten. Wenn die so ausgeführten Gitterträgersysteme dennoch halten, so ist dafür die Erklärung in der geringen zulässigen Beanspruchung zu suchen, die selbst im Verein mit der größeren Beanspruchung aus den Nebenspannungen die Elastizitätsgrenze des Materials wesentlich nicht überschreitet. Bilden auch diese Art Konstruktionen infolge der geringen zulässigen Beanspruchung aus den Hauptspannungen keine direkte Gefahr für ein Bauwerk, so haben sie doch auch nicht annähernd den geforderten Sicherheitsgrad. Auf der anderen Seite ist der geforderte hohe Sicherheitsgrad nötig, um auf alle Fälle den rechnerisch nicht nachgewiesenen Nebenspannungen Rechnung zu tragen. In jedem Falle wird man rationeller, d. h. mit geringerem Materialaufwand konstruieren können, wenn man den wirklichen Spannungszustand eines Tragwerks nachweist und sich dementsprechend mit einem geringeren Sicherheitsgrad begnügt.

Diese Erklärung ist der Ausdruck meiner Überzeugung, die ich gewonnen habe, nachdem ich mich 36 Jahre mit der Theorie und Praxis von Eisenkonstruktionen beschäftigt habe. Die Theorie der Gitterträger entspricht nicht der Wissenschaft, und die mit ihr errechneten Resultate sind ungenau. Die Konstruktion der Gitterträger mit starren Knotenpunkten ist unrationell; sie haben zuviel Stäbe. Welche Sorgfalt man auch bei der Ausführung verwenden mag, man hat nicht die Gewißheit, daß sich die Kräfte so verteilen, wie es Voraussetzung für die Berechnung ist, und die Erfahrung beweist, daß diese Verteilung tatsächlich ganz verschieden ist. Die rationelle Lösung besteht darin, die Anzahl der Stäbe auf ein Minimum zurückzuführen, d. h. den Träger allein aus den Gurtungen und Pfosten zu konstruieren.

Vermittelst dieser Vereinfachung wird eine genaue Berechnung möglich, und außerdem hat man die Gewißheit, daß die im Träger auftretenden Spannungen auch die in der Berechnung ermittelten sein werden; die Möglichkeit, daß es anders sein könnte, ist ausgeschlossen.



# I. Kapitel

## Allgemeine Theorie

---

1. Die Träger, die ich für gut halte, bestehen im allgemeinen aus Gurtungen und Pfosten, aus nichts weiter; das ist der Gedanke des Trägers auf seine einfachste Form gebracht.

Es sei (Abb. 1) ein Träger mit 2 gekrümmten Gurtungen; wir beziehen ihn auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, schneiden ihn durch einen Schnitt,

$n$  Felder.  
 $n + 1$  Pfosten.

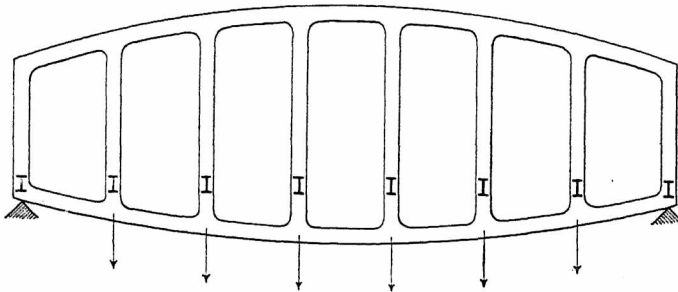


Abb. 1.

der alle Pfosten,  $n + 1$  an der Zahl, trifft (Abb. 2); jeder Teil für sich wird sich in demselben statischen Zustand befinden, als wenn er mit dem andern verbunden wäre, vorausgesetzt, daß wir an jedem Schnitt in Gestalt von äußeren Kräften einen Ersatz für die inneren Kräfte anbringen, die dort wirkten, solange die beiden Teile ein einheitliches Ganzes bildeten. Wir erhalten also im Schwerpunkt des Querschnitts  $S$  des Pfostens  $n^{\circ} r$ :

- eine Vertikalkomponente  $q_{r,}$ ,
- eine Horizontalkomponente  $\pi_{r,}$ ,
- ein Moment  $\mu_{r,}$ ,

drei Unbekannte für jeden Pfosten. Das ganze System enthält also  $3(n + 1)$  Unbekannte.

Die Bestimmungsgleichungen für diese Unbekannten erhalten wir aus der Tatsache, daß die linearen und Drehungsverschiebungen eines Schnittes  $S$  eines Pfostens, ausgedrückt als Funktionen der Abmessungen des oberen Teiles und der dort angebrachten Kräfte, gleich sein müssen dem Ausdruck für die Verschie-

bungen desselben Schnittes, berechnet als Funktionen der Abmessungen des unteren Teiles und der dort angebrachten Kräfte.

Bezeichnen wir mit  $\Delta x_r, \Delta y_r, \Delta \alpha_r$  die Verschiebungen von S für den oberen Teil und mit  $\Delta' x_r, \Delta' y_r, \Delta' \alpha_r$  die Verschiebungen desselben Schnittes für den unteren Teil, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Delta x_r = \Delta' x_r \\ (2) \quad & \Delta y_r = \Delta' y_r \\ (3) \quad & \Delta \alpha_r = \Delta' \alpha_r. \end{aligned}$$

Das sind die 3 Grundgleichungen für die Theorie des Vierendeel-Trägers. Diese drei Gleichungen drücken eine Tatsache aus; sie stehen außerhalb jeder beliebigen Hypothese und sogar außerhalb jeder Theorie über die Deformationsmöglichkeit dieser Balken.

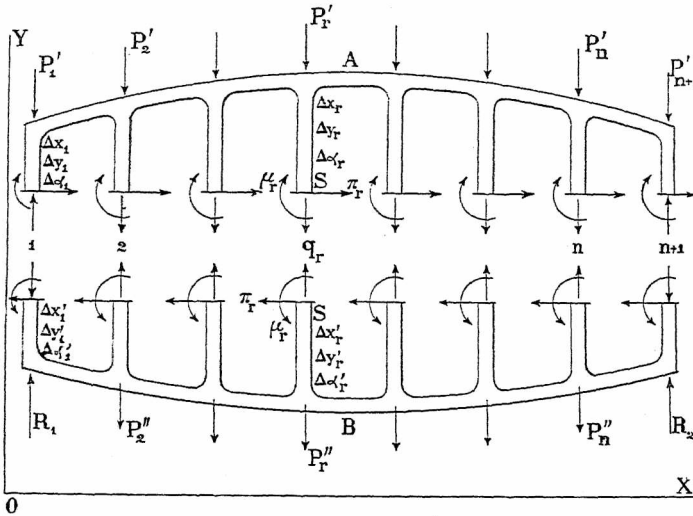


Abb. 2.

Mit Bezugnahme auf Abb. 2 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta x_r &= \Delta x_1 + F (q \pi \mu) + (y_r - y_1) \Delta \alpha_1 \\ \Delta y_r &= \Delta y_1 + f (q \pi \mu) + (x_r - x_1) \Delta \alpha_1 \\ \Delta \alpha_r &= \Delta \alpha_1 + \varphi (q \pi \mu) \\ \Delta' x_r &= \Delta' x_1 + F' (q \pi \mu) + (y_r - y_1) \Delta \alpha'_1 \\ \Delta' y_r &= \Delta' y_1 + f' (q \pi \mu) + (x_r - x_1) \Delta \alpha'_1 \\ \Delta' \alpha_r &= \Delta \alpha'_1 + \varphi' (q \pi \mu) \end{aligned}$$

und infolge der drei Grundgleichungen (1), (2), (3):

$$\begin{aligned} (4) \quad & F (q \pi \mu) = F' (q \pi \mu) \\ (5) \quad & f (q \pi \mu) = f' (q \pi \mu) \\ (6) \quad & \varphi (q \pi \mu) = \varphi' (q \pi \mu). \end{aligned}$$



Jeder Pfosten mit Ausnahme des ersten gibt uns eine Gruppe von drei ähnlichen Gleichungen; im ganzen also  $3n$  Gleichungen für  $3(n+1)$  Unbekannte.

Die Statik gibt uns drei Gleichungen, die ausdrücken, daß jeder abgeschnittene Teil der Abb. 2 unter der Wirkung der bekannten und unbekanntenen, dort angebrachten Kräfte im Gleichgewicht ist, woraus folgt:

$$\begin{array}{ll} (7) & \Sigma \text{ der Horizontalkräfte} = 0 \\ (8) & \Sigma \text{ der Vertikalkräfte} = 0 \\ (9) & \Sigma \text{ der Momente} = 0. \end{array}$$

Wir haben also im ganzen  $3(n+1)$  Gleichungen für  $3(n+1)$  Unbekannte des Systems; die Aufgabe läßt sich also lösen.

Wenn die Lasten symmetrisch sind, verringern sich die Unbekannten um die Hälfte, wenn die Felderzahl gerade ist, und ungefähr um die Hälfte, wenn sie ungerade ist; die Aufgabe vereinfacht sich also ganz erheblich.

Sind die  $q$ ,  $\pi$  und  $\mu$  bekannt, so kann man durch einen einfachen Rechnungsgang die Beanspruchungen bestimmen, ganz gleich, welchen Schnitt des Balkens man untersucht, und somit die Standsicherheit beweisen.

Ich sage beweisen, denn tatsächlich ist der Weg, den ich soeben angegeben habe, ein einfacher Beweis, denn um die Verschiebungen  $\Delta x$   $\Delta y$   $\Delta z$  zu bestimmen, muß man von vornherein die Abmessungen aller Balkenquerschnitte kennen. (Ebenso ist es, wenn man einen Bogen mit weniger als 3 Gelenken berechnet.)

Wir werden sehen, daß diese Bedingung eine rein theoretische ist und daß wir die Gleichungen mit für die Praxis genügender Genauigkeit aufstellen und lösen können, ohne irgendwelche Abmessungen der Querschnitte zu kennen; d. h. die Berechnung ist unmittelbar und auch die Kräftebestimmung erfolgt unmittelbar wie bei statisch bestimmten Systemen, sie ist also nicht eine Ermittlung von Spannungen in angenommenen Querschnitten, wie das bei statisch unbestimmten Systemen der Fall ist. Nachdem wir diese Hauptprinzipien festgestellt haben, wollen wir getrennt den Träger mit parallelen und nicht parallelen Gurtungen behandeln.

---

## II. Kapitel

### Träger mit parallelen Gurtungen

2. Es sei Abb. 3 ein Feld des Trägers mit parallelen Gurtungen; wir teilen dieses Feld durch Schnitte in halber Höhe der Pfosten in zwei Teile; dann ist:

$$\begin{aligned} \mu_r &= 0 & \mu_{r+1} &= 0 \\ q_r &= \frac{I}{2} (P_r'' - P_r') & q_{r+1} &= \frac{I}{2} (P_{r+1}'' - P_{r+1}'), \end{aligned}$$

wir haben also an jedem Pfosten nur eine Unbekannte, nämlich die Querkraft  $\pi$ .

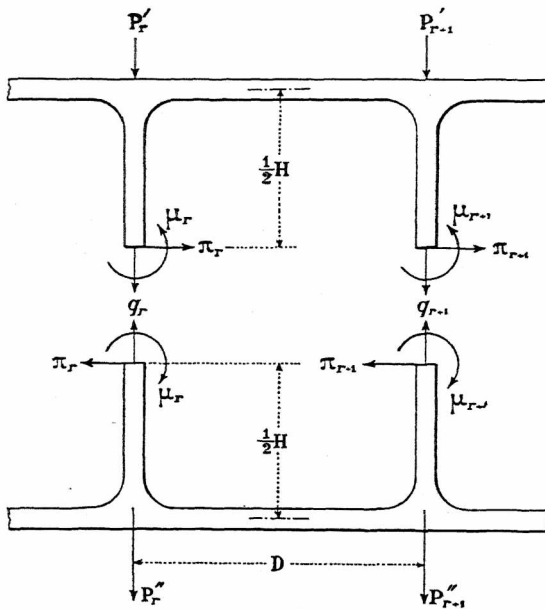


Abb. 3.

Bekanntlich ist es erlaubt, ohne einen praktisch wesentlichen Fehler zu begehen, anzunehmen, daß das Trägheitsmoment  $J$  von einem bis zum andern Ende des Balkens für Pfosten und Gurtungen denselben Wert hat.

Ferner kann man Lasten zwischen den Pfosten durch gleichwertige über den Pfosten ersetzen.

Ich gebe hier nicht die verschiedenen untergeordneten Beweise, das würde die gegenwärtigen Ausführungen allzu umfangreich machen, sondern weise auf die »Théorie générale des Poutres Vierendeel« hin, erschienen in »Les mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France«, Heft vom August 1900. Ebenso verweise ich auf Band V meines »Cours de stabilité«.

Diese verschiedenen Annahmen sind gestattet. Wir schneiden nun den Träger mitten durch die Pfosten in zwei Teile und erhalten Abb. 4; alle an diesem Träger angebrachten Lasten sind senkrecht.

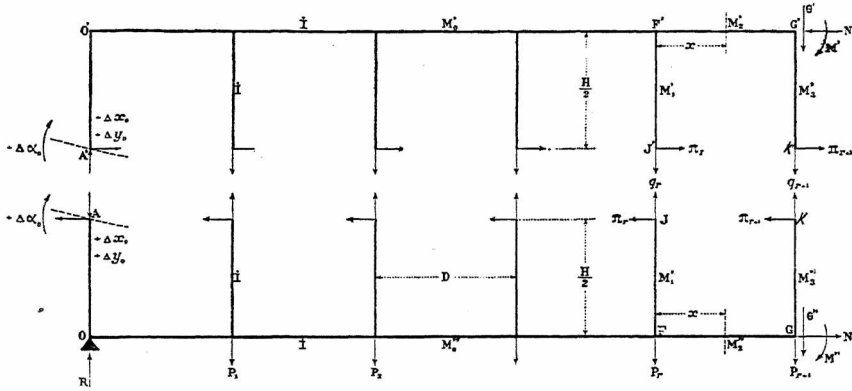


Abb. 4.

Im Querschnitt der Gurtungen unmittelbar rechts von  $G'$  und  $G$  wirken  $\Theta' M' \Theta'' M''$  und die Längskräfte  $N$ ; diese Längskräfte sind in beiden Gurtungen gleich infolge der Gleichheit der horizontalen Kräfte.

In den Querschnitten der Pfosten haben wir die Reaktionen  $q$  und  $\pi$ ; die Momente sind Null, da die Schnitte in halber Höhe liegen und das Trägheitsmoment  $J$  ist oben und unten dasselbe.

Wir betrachten das Stück  $AOGK$  und beziehen es auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit  $O$  und dessen  $x$ -Achse mit  $OG$  zusammenfällt.

Es sei  $M''_0$  das sekundäre Biegemoment in irgendeinem Schnitt von  $AOF$ ;  $M''_1$  in irgendeinem Schnitt von  $JF$ ;  $M''_2$  in irgendeinem Schnitt von  $FG$  und  $M''_3$  in irgendeinem Schnitt von  $GK$ .

$+\Delta x_0 + \Delta y_0 + \Delta \alpha_0$  seien die linearen und Drehungsverschiebungen des Querschnitts im Anfangspunkt  $A$ .

Als positiv betrachten wir die linearen Verschiebungen im Sinne der positiven Achsen und die Drehverschiebungen im Sinne des Uhrzeigers.

\* \* \*

3. Der Ausdruck für die Längenverschiebung des Schnittes  $K$  ist bei alleiniger Berücksichtigung der aus den Momenten herrührenden Verschiebungen: \*

$$EI \Delta x_{r+1} = EI \Delta x_o + \int_A^F \left(\frac{H}{2} - y\right) M_o'' ds + \int_F^G \frac{H}{2} M_2'' ds + \int_G^K \left(\frac{H}{2} - y\right) M_3'' ds$$

$$M_2'' = \frac{-H}{2} \pi_{r+1} + M'' + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) (D - x)$$

$$M_3'' = -\pi_{r+1} \left(\frac{H}{2} - y\right);$$

daraus folgt:

$$\int_F^G \frac{H}{2} M_2'' ds = \int_o^D \frac{H}{2} M_2'' dx = \frac{-H^2 D}{4} \pi_{r+1} + \frac{HD}{2} M'' + \frac{HD^2}{4} (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1})$$

$$\int_G^K \left(\frac{H}{2} - y\right) M_3'' ds = \int_o^{\frac{H}{2}} \left(\frac{H}{2} - y\right) M_3'' dy = \frac{-H^3}{24} \pi_{r+1}.$$

Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir:

$$(1) \quad EI \Delta x_{r+1} = + EI \Delta x_o + \int_A^F \left(\frac{H}{2} - y\right) M_o'' ds - \frac{H^2 D}{4} \pi_{r+1} +$$

$$+ \frac{HD}{2} M'' + \frac{HD^2}{4} (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) - \frac{H^3}{24} \pi_{r+1}.$$

\* \* \*

4. Der Ausdruck für die Längenverschiebung des Schnittes  $J$  lautet:

$$EI \Delta x_r = + EI \Delta x_o + \int_A^F \left(\frac{H}{2} - y\right) M_o'' ds + \int_F^J \left(\frac{H}{2} - y\right) M_1'' ds$$

$$\int_F^J \left(\frac{H}{2} - y\right) M_1'' ds = \int_o^{\frac{H}{2}} \left(\frac{H}{2} - y\right) \left[-\left(\frac{H}{2} - y\right) \pi_r\right] dy = \frac{-H^3}{24} \pi_r;$$

daraus folgt:

$$(2) \quad EI \Delta x_r = + EI \Delta x_o + \int_A^F \left(\frac{H}{2} - y\right) M_o'' ds - \frac{H^3}{24} \pi_r.$$

\* Man kann, wie schon erwähnt, von den aus den Normalkräften herrührenden Verschiebungen absehen; s. die schon angegebene Quelle.

Wir ziehen (2) von (1) ab und erhalten:

$$(3) \quad EI \Delta x_{r+1} - EI \Delta x_r = -\frac{H^2 D}{4} \pi_{r+1} + \frac{H D}{2} M'' + \\ + \frac{H D^2}{4} (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) - \frac{H^3}{24} \pi_{r+1} + \frac{H^3}{24} \pi_r.$$

\* \* \*

5. Wir untersuchen jetzt den oberen Teil des Trägers der Abb. 4 und legen den Anfangspunkt des Koordinatensystems nach  $O'$ ; die positive  $x$ -Achse ist  $O'G'$ . Die Anfangsverschiebungen des ersten Querschnittes  $A'$  dieses Stückes haben dieselben Werte  $+\Delta x_0 + \Delta y_0 + \Delta \alpha_0$  wie die des zum andern Stück gehörigen Schnittes  $A$ .

Der Ausdruck für die Längenschiebung des Schnittes  $K'$  des Pfostens n<sup>o</sup>  $(r + 1)$  lautet:

$$EI \Delta x_{r+1} = EI \Delta x_0 + \int_{A'}^{F'} \left( \frac{H}{2} - y \right) M'_0 ds + \int_{F'}^{G'} \frac{H}{2} M'_2 ds + \int_{G'}^{K'} \left( \frac{H}{2} - y \right) M'_3 ds \\ M'_2 = + \frac{H}{2} \pi_{r+1} - M' - (\Theta' + q_{r+1})(D - x) \\ M'_3 = + \left( \frac{H}{2} - y \right) \pi_{r+1}.$$

Durch Einsetzen und Integrieren erhalten wir daraus:

$$(4) \quad EI \Delta x_{r+1} = EI \Delta x_0 + \int_{A'}^{F'} \left( \frac{H}{2} - y \right) M'_0 ds + \frac{H^2 D}{4} \pi_{r+1} \\ - \frac{H \cdot D}{2} M' - \frac{H D^2}{4} (\Theta' + q_{r+1}) + \frac{H^3}{24} \pi_{r+1}.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir für die Längenschiebungen des Schnittes  $J'$ :

$$(5) \quad EI \Delta x_r = EI \Delta x_0 + \int_{A'}^{F'} \left( \frac{H}{2} - y \right) M'_0 ds + \frac{H^3}{24} \pi_r.$$

Wir ziehen (5) von (4) ab und erhalten:

$$(6) \quad EI \Delta x_{r+1} - EI \Delta x_r = \frac{H^2 D}{4} \pi_{r+1} - \frac{H D}{2} M' \\ - \frac{H D^2}{4} (\Theta' + q_{r+1}) + \frac{H^3}{24} \pi_{r+1} - \frac{H^3}{24} \pi_r.$$

\* \* \*

6. Es ist ersichtlich, daß die linken Seiten der Gleichung (6) übereinstimmen, also müssen auch die rechten Seiten gleich sein. Daraus folgt nach einer Vereinfachung:

$$(7) \quad -\pi_{r+1} \left[ + \frac{HD}{2} + \frac{H^2}{12} \right] + \frac{H^2}{12} \pi_r = \\ = -\frac{D}{2} (M' + M'') - \frac{D^2}{4} (P_{r+1} + \Theta' + \Theta'').$$

\* \* \*

7. Stellen wir die Momentengleichung des gesamten abgeschnittenen Trägerstückes für den Schwerpunkt von  $G'$  auf und bezeichnen mit  $M_{r+1}$  das Biegemoment im Vertikalschnitt  $GG'$  des Trägers, so erhalten wir:

$$M_{r+1} + M' + M'' - N \cdot H = 0;$$

weiter:

$$N = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_r + \pi_{r+1} = \sum_1^r \pi + \pi_{r+1};$$

daraus folgt:

$$M' + M'' = H \sum_1^r \pi + H \cdot \pi_{r+1} - M_{r+1}.$$

Bezeichnen wir mit  $T_r$  die auf den Träger zwischen den Pfosten  $n^\circ r$  und  $n^\circ (r+1)$  wirkende Querkraft, so folgt:

$$T_r - P_{r+1} - \Theta' - \Theta'' = 0 \\ P_{r+1} + \Theta' + \Theta'' = T_r.$$

Wir setzen in (7) ein und erhalten nach Vereinfachung:

$$\pi_{r+1} = \pi_r + \frac{6D}{H} \sum_1^r \pi - \frac{3D}{H^2} (2M_{r+1} - DT_r),$$

weiter:

$$M_{r+1} = M_r + DT_r,$$

also:

$$2M_{r+1} - DT_r = 2M_r + DT_r,$$

und infolgedessen:

$$(8) \quad \pi_{r+1} = \pi_r + \frac{6D}{H} \sum_1^r \pi - \frac{3D}{H^2} (2M_r + DT_r).$$

Bezeichnen wir mit  $M_r^{r+1}$  das Biegemoment im mittleren Schnitt zwischen  $r$  und  $(r+1)$ , so erhalten wir:

$$2M_r + DT_r = 2M_r^{r+1}$$

und Formel (8) geht über in:

$$(9) \quad \pi_{r+1} = \pi_r + \frac{6D}{H} \sum_1^r \pi - \frac{6D}{H^2} M_r^{r+1}.$$

*Dies ist die allgemeine Formel für Träger mit parallelen Gurtungen, die in den Gurtungen und Pfosten gleiches Trägheitsmoment und gleichen Querschnitt haben.*



8. Es ist interessant, den Grenzfall zu untersuchen, wo das  $J$  der oberen Gurtung immer kleiner und kleiner und schließlich unendlich klein wird, während der Querschnitt  $\Omega$  dieser Gurtung immer einen endlichen Wert behält; dies kommt darauf hinaus, die obere Gurtung als vom einen bis zum andern Ende, und besonders an der Spitze der Pfosten, als gelenkig zu betrachten; der Gelenkpunkt auf den Pfosten ist in diesem Falle ihre Spitze und um die Verschiebungen  $\Delta x_{r+1}$   $\Delta x_r$  dieser Spitzen zu erhalten, genügt es, im Ausdruck (3)  $H$  durch  $2H$  zu ersetzen; wir erhalten dadurch:

$$(3') EI (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) = -H^2 D \pi_{r+1} + H D M'' + \frac{H D^2}{2} (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) - \frac{H^3}{3} \pi_{r+1} + \frac{H^3}{3} \pi_r.$$

Für den oberen Gurt wird  $H = 0$ , das zweite Glied der Gleichung (6) wird unendlich klein von der zweiten Ordnung, während  $I'$  erster Ordnung ist; man hat also:

$$(6') EI' (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) = 0; \text{ daraus } \Delta x_{r+1} - \Delta x_r = 0.$$

Wir nehmen (6') und (3') zusammen und erhalten:

$$(7') -H^2 D \pi_{r+1} + H D M'' + \frac{H D^2}{2} (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) - \frac{H^3}{3} \pi_{r+1} + \frac{H^3}{3} \pi_r = 0.$$

Das sekundäre Moment  $M'$  ist Null, also:

$$M'' = H \Sigma_1^r \pi + H \pi_{r+1} - M_{r+1}.$$

$\Theta'$  und  $q_{r+1}$  sind Null; folgt also:

$$P_{r+1} + \Theta'' = T_r.$$

Die Einsetzung dieser Werte in (7') ergibt:

$$(8') \pi_{r+1} = \pi_r + \frac{3D}{H} \Sigma_1^r \pi - \frac{3D}{H^2} \left( M_{r+1} - \frac{D T_r}{2} \right).$$

Da 
$$M_{r+1} - \frac{D}{2} T_r = M_r^{r+1},$$

so erhalten wir:

$$(9') \pi_{r+1} = \pi_r + \frac{3D}{H} \Sigma_1^r \pi - \frac{3D}{H^2} M_r^{r+1}.$$

Dies ist die allgemeine Formel für Balken mit parallelen Gurtungen; die beiden Gurtungen haben denselben Querschnitt  $\Omega$ , aber die eine hat ein unendlich kleines Trägheitsmoment; mit andern Worten: die eine der beiden Gurtungen ist gelenkig an der Spitze der Pfosten befestigt.

\* \* \*

9. Zum besseren Verständnis wollen wir diese Formel (9') unmittelbar suchen.

Nehmen wir also an, wir haben einen Träger mit parallelen Gurtungen, der die Besonderheit hat, daß der obere Gurt an der Spitze der Pfosten gelenkig befestigt ist, wie Abb. 5 zeigt.

Wir teilen diesen Balken in zwei Teile; der eine,  $A' J' K'$ , besteht allein aus den gelenkigen Stäben der oberen Gurtung, der andere,  $A O G K$ , besteht aus dem starren Pfostenwerk des Trägers, welches in allen seinen Teilen gleichen Querschnitt und gleiches Trägheitsmoment hat.

Der obere Gurt  $A' J' K'$  kann nur Normalkräften, von den Kräften  $\pi$  erzeugt, unterworfen sein; er überbringt keine Vertikalkräfte, denn die  $q$  sind Null, wie auch die Scherkräfte  $\Theta'$  und die Momente  $M'$  Null sind.

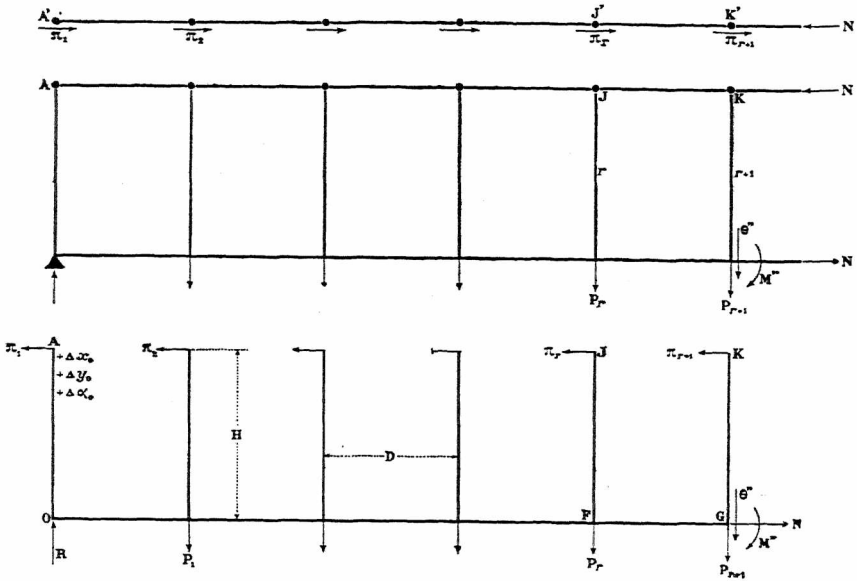


Abb. 5.

Das Stück  $A O G K$  ist den in der Abb. 5 angegebenen Kräften und Lasten unterworfen. Machen wir in bezug auf diesen Teil dieselben Schlüsse, wie wir es oben getan haben, so erhalten wir eine der Gleichung (3) analoge Gleichung, nämlich:

$$(10) \quad EI \Delta x_{r+1} - EI \Delta x_r = -H^2 D \pi_{r+1} + H D M'' + \frac{H D^2}{2} (P_{r+1} + \Theta'') - \frac{H^3}{3} \pi_{r+1} + \frac{H^3}{3} \pi_r.$$

Das Stück  $A' J' K'$  liefert uns:

$$\Delta x_{r+1} = \Delta x_0; \quad \Delta x_r = \Delta x_0; \quad \text{woraus} \quad \Delta x_{r+1} - \Delta x_r = 0.$$

Denn wir sehen, siehe Nr. 3, von den unmittelbaren Normalbeanspruchungen ab; andererseits haben wir:

$$M'' = N H - M_{r+1} = H \sum_1^r \pi + H \pi_{r+1} - M_{r+1} \\ P_{r+1} + \Theta'' = T_r.$$

Wir setzen die verschiedenen Werte in (10) und folgern:

$$\pi_{r+1} = \pi_r + \frac{3D}{H} \sum_1^r \pi - \frac{3D}{H^2} \left( M_{r+1} - \frac{DT_r}{2} \right).$$

Da  $M_{r+1} - \frac{DT_r}{2} = M_r^{r+1}$ ,  
erhalten wir schließlich:

$$(II) \quad \pi_{r+1} = \pi_r + \frac{3D}{H} \sum_1^r \pi - \frac{3D}{H^2} M_r^{r+1}.$$

Das ist dieselbe Formel wie (9') oben.

\* \* \*

10. Es ist interessant zu untersuchen, ob die Werte von  $\pi$  wesentlich verschieden sind, je nachdem der Gelenkpunkt in der Mitte oder auf der Spitze der Pfosten liegt.

Nehmen wir zunächst einen Träger wie in Abb. 6 an, dessen oberer Gurt gelenkig ist; die Felder dieses Trägers sind Quadrate, seine Stützweite eine beliebige;

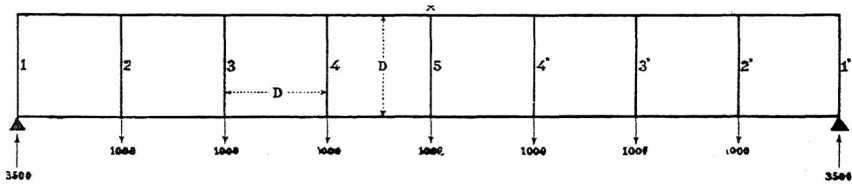


Abb. 6.

dieser Träger ist mit 1000 kg am Fuße eines jeden Pfostens belastet. Wir können die Formel (II) aus Nr. 9 benutzen, die im Falle der Abb. 6 lautet:

$$\pi_{r+1} = \pi_r + 3 \sum_1^r \pi - \frac{3}{D} M_r^{r+1}.$$

Wir haben:

$$\frac{1}{D} M_1^2 = \frac{3500}{2} = 1750$$

$$\frac{1}{D} M_2^3 = \frac{1}{2} (3500 \cdot 3 - 1000) = 4750$$

$$\frac{1}{D} M_3^4 = \frac{1}{2} [3500 \cdot 5 - 1000 (3 + 1)] = 6750$$

$$\frac{1}{D} M_4^5 = \frac{1}{2} [3500 \cdot 7 - 1000 (5 + 3 + 1)] = 7750.$$

Die allgemeine Formel, von Pfosten zu Pfosten angewandt, liefert uns:

$$\pi_1 = \pi_1$$

$$\pi_2 = \pi_1 + 3 \pi_1 - 3 \cdot 1750$$

$$\pi_3 = \pi_2 + 3 (\pi_1 + \pi_2) - 3 \cdot 4750$$

$$\pi_4 = \pi_3 + 3 (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) - 3 \cdot 6750$$

$$\pi_5 = \pi_4 + 3 (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4) - 3 \cdot 7750.$$

Wir drücken alle diese Gleichungen als Funktionen von  $\pi_1$  aus und erhalten:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \pi_1 \\ \pi_2 &= 4 \pi_1 - 5250 \\ \pi_3 &= 19 \pi_1 - 35250 \\ \pi_4 &= 91 \pi_1 - 177000 \\ \pi_5 &= 436 \pi_1 - 852750.\end{aligned}$$

Infolge der Symmetrie des Balkens ist ersichtlich  $\pi_5 = 0$ , also:

$$436 \pi_1 - 852750 = 0$$

also  $\pi = 1955,85 \text{ kg.}$

Mit Einsetzung dieses Wertes in die Gleichungen für die anderen  $\pi$  erhalten wir:

$$\begin{aligned}\pi_2 &= 2573 \text{ kg} \\ \pi_3 &= 1911 \text{ kg} \\ \pi_4 &= 982 \text{ kg} \\ \pi_5 &= 0.\end{aligned}$$

Nachdem wir die Werte  $\pi$  erhalten haben, ist die Berechnung der Querschnitte, die wir den einzelnen Gliedern des Trägers geben müssen, nur eine einfache Aufgabe der Festigkeitslehre.

Untersuchen wir jedoch die Werte von  $\pi$  für den Fall, daß der Balken in Abb. 6 vollkommen starr ist. Wir haben gesehen, daß es in diesem Falle in halber Höhe der Pfosten einen Wendepunkt gibt, und wir haben Formel (9) aus Nr. 7 anzuwenden, die mit  $D = H$  lautet:

$$\pi_{r+1} = \pi_r + 6 \sum_1^r \pi - \frac{6}{D} M_r^{r+1}.$$

Wir entwickeln diese Formel in derselben Weise wie eben vorher und erhalten:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 1890 \text{ kg} \\ \pi_2 &= 2731 \text{ kg} \\ \pi_3 &= 1965 \text{ kg} \\ \pi_4 &= 996 \text{ kg} \\ \pi_5 &= 0.\end{aligned}$$

Vergleichen wir diese Werte mit denen, die wir für den Fall von Gelenken an der Spitze der Pfosten erhielten, so können wir feststellen, daß diese Unterschiede praktisch zu vernachlässigen sind. Um also die Werte  $\pi$  eines Trägers mit parallelen Gurten zu berechnen, kann man annehmen, daß der obere Gurt oben an den Pfosten gelenkig befestigt ist. Diese Bemerkung ist nicht von Wichtigkeit für die Träger mit parallelen Gurten, wohl aber ist sie sehr wichtig für die Berechnung von Trägern mit nicht parallelen Gurten, denn sie vereinfacht deren Berechnung ganz erheblich.

### III. Kapitel

## Träger mit nicht parallelen Gurtungen

II. Die genaue Theorie der Träger mit nicht parallelen Gurtungen habe ich in meinem schon unter n° 2 angegebenen Aufsatz aufgestellt. Sie führt zu Formeln, die ziemlich kompliziert und ziffernmäßig langwierig zu berechnen sind. Ich will nun eine einfache Theorie aufstellen, die zu Formeln führt, die einfach zu berechnen und praktisch gleichwohl genau sind.

### § 1. Allgemeine Formeln

12. Das eingehende Studium der Träger mit parallelen Gurtungen beweist, daß man, ohne der praktischen Genauigkeit der Resultate Eintrag zu tun, von den Verlängerungen und Verkürzungen der Balkenteilchen, die aus unmittelbarem Zug oder Druck herrühren, absehen kann. Das bedeutet, daß gerade über den Pfosten die Biegungsordinaten der oberen und unteren Gurtungen gleich sind, und dieser Schluß ist ersichtlich für nicht parallele Gurtungen zutreffend.

Andrerseits läßt sich leicht beweisen, daß sich für parallele Gurtungen die Gleichheit der Biegungsordinaten zwischen den Pfosten fortsetzt, und wir nehmen auf Grund einer der Wahrheit sehr nahe kommenden Hypothese an, daß dieses für parallele Gurtungen genaue Resultat auch für nicht parallele Gurtungen genau ist, in den Grenzen, wo nicht parallele Gurtungen für Konstruktionen von Brücken und Hochbaukonstruktionen gebräuchlich sind.

Wir nehmen einen Trägerteil mit nicht parallelen Gurtungen von irgendwelcher Form, Abb. 7, und schneiden ihn durch einen Schnitt, der alle Pfosten trifft, in 2 Teile; wir bezeichnen mit:

$\Delta' y_1$  die Biegungsordinate eines Punktes der oberen Gurtung mit der Entfernung  $x_1$  vom Anfangspunkt;

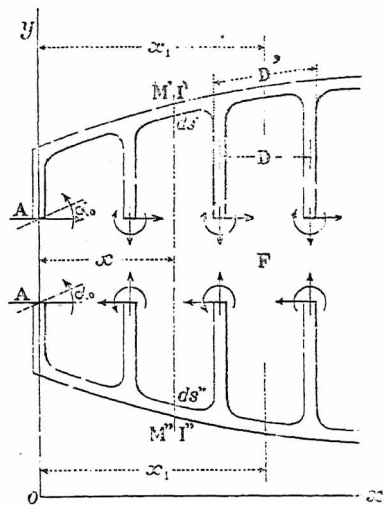


Abb. 7.

$\Delta'' y_1$  die Biegungsordinate des entsprechenden Punktes der unteren Gurtung auf derselben Vertikalen;

$M'$  und  $J'$  das Biegungs- und Trägheitsmoment für die obere Gurtung im Abstand  $x$  vom Anfangspunkt. Die Abgeleitete der Gurtung in diesem Punkte ist  $ds'$ ;

$M''$ ,  $J''$ ,  $ds''$  sind die entsprechenden Werte der unteren Gurtung in derselben Entfernung  $x$ .

$$\text{Wir haben: } \Delta' y_1 = \alpha_0 x_1 + \int_0^{x_1} (x_1 - x) \frac{M' ds'}{EI'} + \Delta y_A,$$

$$\Delta'' y_1 = \alpha_0 x_1 + \int_0^{x_1} (x_1 - x) \frac{M'' ds''}{EI''} + \Delta y_A,$$

und da für jeden beliebigen Wert von  $x_1$  immer

$$\Delta' y_1 = \Delta'' y_1,$$

so folgt:

$$\frac{M' ds'}{EI'} = \frac{M'' ds''}{EI''},$$

und daraus

$$(1) \quad \frac{M'}{M''} = \frac{I' ds''}{I'' ds'}.$$

Dieses sehr einfache Verhältnis gibt uns die Beziehungen, die zwischen den beiden sekundären Biegemomenten  $M'$  und  $M''$ , die auf jede Gurtung in derselben Entfernung  $x$  einwirken, bestehen.

Sind die Gurtungen parallel, so wird (1)

$$\frac{M'}{M''} = \frac{I'}{I''},$$

d. h. das sekundäre Biegemoment, das auf jede Gurtung einwirkt, ist proportional seiner Steifigkeit, und das ist logisch. Wird eine der Gurtungen, z. B. die obere, unendlich schwach, würde man  $J' = 0$  haben, und die Beziehung (1) liefert uns  $M' = 0$ , was mit der Wirklichkeit übereinstimmt.

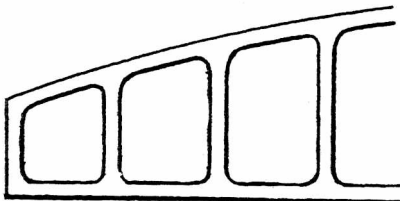


Abb. 8.

Die Beziehung (1) zeigt uns noch, daß die sekundären Biegemomente  $M'$  und  $M''$  immer gleichgerichtet sind.

Gehen wir von dem allgemeinen Fall des Trägers (Abb. 7) zu dem spezielleren und häufigeren der Abb. 8 über, so lautet (1)

$$(2) \quad \frac{M'}{M''} = \frac{I' dx}{I'' ds} = a.$$

Im folgenden wollen wir allein den Träger vom Typ der Abb. 8 betrachten, mit horizontalem unteren Gurt und gebogenem oder vielmehr polygonalem oberen



Gurt, d. h. der Gurt ist gebogen, aber von einem Pfosten zum anderen gradlinig; wir lassen die Lasten am Fuß der Pfosten angreifen.

\* \* \*

13. Betrachten wir irgendeinen Teil (Abb. 9) dieses Trägers (Abb. 8) und in diesem Stück zwei um  $dx$  voneinander entfernte Schnitte  $A$  und  $B$ . Auf jede Gurtung wirken im Schnitt  $A$  die auf der Abbildung angegebenen Kräfte und Momente; ebenso auf jede Gurtung im Schnitt  $B$ . Jeder Teil der Gurtung ist im Gleichgewicht, also:

$$\begin{aligned} M' &= \mu' + \Theta' dx - N dy \\ M'' &= \mu'' + \Theta'' dx \end{aligned}$$

und infolge von (2)

$$\mu' + \Theta' dx - N dy = \frac{I' dx}{I'' ds} (\mu'' + \Theta'' dx);$$

nun ist: 
$$\mu' = \frac{I' dx}{I'' ds} \mu'',$$

also:

$$\Theta' dx - N dy = \frac{I' dx}{I'' ds} \Theta'' dx$$

$$\Theta' - \frac{I' dx}{I'' ds} \Theta'' = N \frac{dy}{dx}.$$

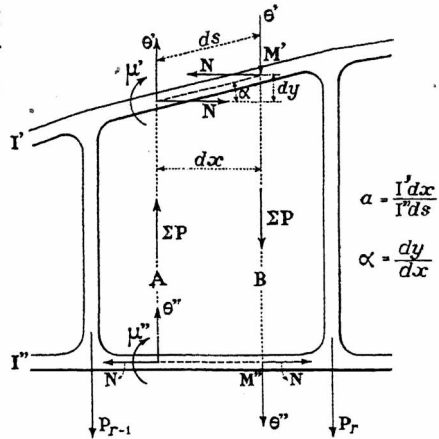


Abb. 9.

Bezeichnen wir mit  $\alpha$  die Tangente des unendlich kleinen Teilchens der oberen Gurtung im Intervall von  $A$  bis  $B$  und mit  $a$  den Wert  $\frac{I' dx}{I'' ds}$  für dasselbe Intervall, so haben wir:

$$\Theta' - a \Theta'' = \alpha N,$$

andererseits:

$$\Theta' + \Theta'' = \Sigma P.$$

Wir setzen  $\Theta' = \Theta'_{r-1}$  und  $\Theta'' = \Theta''_{r-1}$ , um anzuzeigen, daß  $\Theta'$  und  $\Theta''$  Werte in dem Feld vom Pfosten  $n^\circ (r-1)$  bis  $n^\circ r$  sind, und leiten ab:

$$(3) \quad \Theta' = \Theta'_{r-1} = \frac{I}{I+a} (a \Sigma P + \alpha N) = \frac{I}{I+a} (a \Sigma P + \alpha \Sigma_{1}^{r-1} \pi)$$

$$(4) \quad \Theta'' = \Theta''_{r-1} = \frac{I}{I+a} (\Sigma P - \alpha N) = \frac{I}{I+a} (\Sigma P - \alpha \Sigma_{1}^{r-1} \pi).$$

Diese Resultate sind gültig, welches Vorzeichen  $M'$  auch in betreff  $\mu$  habe.

Die Statik lehrt, daß  $\Theta'$  und  $\Theta''$  über die ganze Ausdehnung eines Feldes konstant sind; diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Gurtungen von einem Pfosten bis zum folgenden gerade sind, denn dann sind  $a$  und  $\alpha$  konstant.

\* \* \*

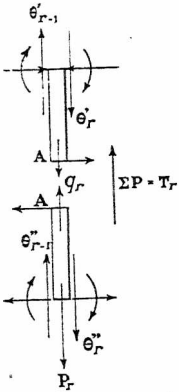


Abb. 10.

14. Trennen wir ein oberes Stück des Pfostens n° r durch einen Horizontalschnitt A und durch zwei vertikale Schnitte unmittelbar rechts und links ab, so haben wir die in Abb. 10 dargestellten Verhältnisse.

Die Gleichung der Vertikalkräfte gibt uns:

$$q_r - \theta'_{r-1} + \theta'_r = 0, \text{ woraus: } q_r - \theta'_{r-1} = -\theta'_r.$$

Das untere Stück gibt uns:

$$q_r + \theta''_{r-1} - P_r - \theta''_r = 0, \text{ woraus: } q_r + \theta''_{r-1} - P_r = \theta''_r.$$

Nennen wir  $\theta'_{r-1}$  und  $\theta''_{r-1}$  die auf jede Gurtung von n° (r-1) bis n° r wirkenden partiellen Scherkräfte und  $T_r$  die totale Scherkraft vom Pfosten n° r bis n° (r+1), so erhalten wir unter Benutzung der Formeln (3) und (4):

$$(5) \quad q_r - \theta'_{r-1} = -\frac{a T_r}{I+a} - \frac{\alpha}{I+a} \sum_1' \pi.$$

$$(6) \quad q_r + \theta''_{r-1} - P_r = \frac{T_r}{I+a} - \frac{\alpha}{I+a} \sum_1' \pi.$$

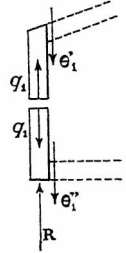
Es ist zu beachten, daß die Werte a und  $\alpha$  dem Feld vom Pfosten n° r bis n° (r+1) entsprechen.

Für den Pfosten n° I, den über dem Auflager, haben wir:

$$q_1 - \theta'_1 = 0, \text{ woraus } q_1 = \theta'_1 \text{ und } q_1 = \frac{a T_1}{I+a} + \frac{\alpha \pi_1}{I+a}$$

$$R - q_1 - \theta''_1 = 0; \text{ daraus } R - q_1 = \theta''_1 = \frac{T_1}{I+a} - \frac{\alpha \pi_1}{I+a}.$$

\* \* \*



15. Trennen wir einen vollständigen Pfosten von seinen beiden Gurtungen, so haben wir die in Abb. 12 dargestellten Verhältnisse. Die Momentengleichung liefert uns:

$$(N_1 - N) H = M' + M'' + M'_1 + M''_1;$$

daraus:

$$\pi_r \cdot H = (I+a) M'' + (I+a_1) M''_1.$$

Ist S der Schnitt, für den das auf den Pfosten wirkende Biegemoment O wird, so haben wir:

$$(N_1 - N) y = M'' + M''_1$$

$$y = \frac{M'' + M''_1}{\pi_r} = \frac{(M'' + M''_1) H}{(I+a) M'' + (I+a_1) M''_1}.$$

Es ist:

$$a = \frac{I'}{I''} \cos \alpha \quad a_1 = \frac{I'}{I''} \cos \alpha_1.$$

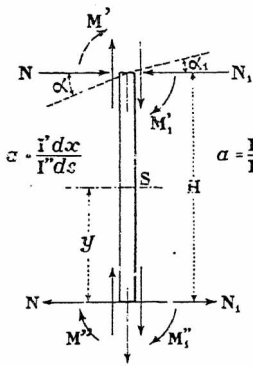


Abb. 12.

Abb. 11.

In der Ausführung unterscheiden sich die beiden Cosinuse wenig von einander und man kann, ohne praktisch einen Fehler zu machen, setzen:

$$a = a_1 = \frac{a + a_1}{2},$$

also:

$$(7) \quad y = \frac{H}{1 + \frac{a + a_1}{2}}.$$

Damit ist von vornherein der Wendepunkt S auf jedem Pfosten bekannt. Nach diesem Resultat sieht man, daß es immer einen Momenten-Nullpunkt auf jedem Pfosten gibt.

Auf dem Stützpfeiler n° I haben wir (Abb. 13):

$$\pi_1 \cdot H = M'_I + M''_I = a M''_I + M''_I,$$

$$\pi_1 = \frac{(1 + a) M''_I}{H},$$

$$\pi_1 \cdot y = M''_I,$$

$$y = \frac{M''_I}{\pi_1} = \frac{H}{1 + a}.$$

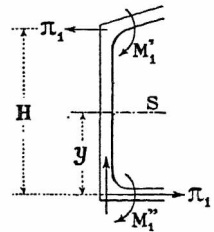


Abb. 13.

Das ist die Stelle des Momenten-Nullpunktes auf dem ersten Pfosten.

\* \* \*

16. Wir nennen  $M_r$  das Biegemoment rechts vom Pfosten n°  $r$ ; wir erhalten für einen Schnitt unmittelbar links von diesem Pfosten, siehe Abb. 12,

$$M'_r + M''_r + N H_r - M_r = 0.$$

Zusammen mit Formel (2) aus n° 12 leiten wir daraus ab:

$$(8) \quad M'_r = \frac{a}{1+a} M_r - \frac{a \cdot H_r}{1+a} \sum_i^{r-1} \pi_i. \quad \left. \begin{array}{l} \text{Der Wert } a \text{ entspricht dem} \\ \text{Feld vom Pfosten n° } (r-1) \text{ bis} \\ \text{zu dem n° } r. \end{array} \right\}$$

$$(9) \quad M''_r = \frac{1}{1+a} M_r - \frac{H_r}{1+a} \sum_i^{r-1} \pi_i.$$

\* \* \*

## § 2. Träger mit geradem unteren und polygonalem oberem Gurt

17. Wir wollen jetzt den Träger vom Typ der Abb. 8 untersuchen. Wir schneiden ihn in zwei Teile durch Schnitte, die in der Höhe der Wendepunkte durch die Pfosten gehen; damit erhalten wir Abb. 14.

Der Wendepunkt auf jedem Pfosten ist durch den Ausdruck (7) in n gegeben:

$$h = \frac{H}{1 + \frac{a + a_1}{2}}$$

Die Werte von  $a$  und  $a_1$  sind:

$$a = \frac{I'}{I''} \cos \alpha \quad a_1 = \frac{I'}{I''} \cos \alpha_1.$$

Wir untersuchen jetzt das Stück  $A O G K$ ; alle seine Teilchen haben das Trägheitsmoment  $I''$ ; wir bezeichnen mit:

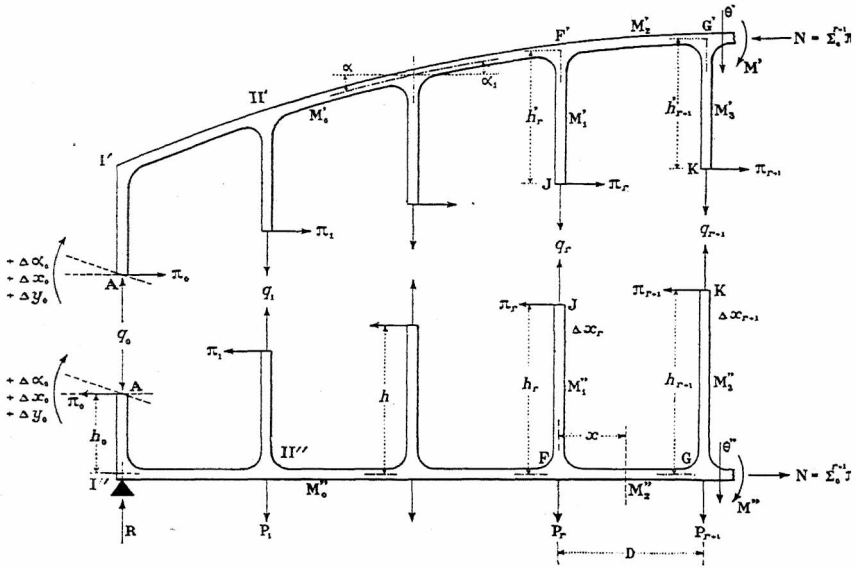


Abb. 14.

- $M_0''$  das sekundäre Biegemoment in irgendeinem Schnitt von  $A O F$ ,
- $M_1''$  dasselbe in einem Schnitt von  $F J$ ,
- $M_2''$  dasselbe in einem Schnitt von  $F G$ ,
- $M_3''$  dasselbe in einem Schnitt von  $G K$ ,
- $h_r$  und  $h_{r+1}$  sind die Höhen  $F J$  und  $G K$ .

Der Anfang des Koordinatensystems liegt in  $O$ ; die  $x$ -Achse fällt mit zusammen; wir haben:

$$EI'' \Delta x_{r+1} = EI'' \Delta x_0 + \Delta \alpha_0 (h_{r+1} - h_0) EI'' + \int_A^F (h_{r+1} - y) M_0'' ds + \int_F^G h_{r+1} M_2'' ds + \int_G^K (h_{r+1} - y) M_3'' ds$$

$$EI'' \Delta x_r = EI'' \Delta x_0 + \Delta \alpha_0 (h_r - h_0) EI'' + \int_A^F (h_r - y) M_0'' ds + \int_F^J (h_r - y) M_1'' ds,$$

subtrahieren Glied für Glied, so erhalten wir:

$$EI'' (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) = EI'' (h_{r+1} - h_r) \left[ \Delta \alpha_0 + \int_A^F \frac{M_0'' ds}{EI''} + \int_F^J \frac{M_1'' ds}{EI''} \right] -$$

$$- (h_{r+1} - h_r) \int_F^J M_1'' ds + \int_F^G h_{r+1} M_2'' ds + \int_G^K (h_{r+1} - y) M_3'' ds - \int_F^J (h_r - y) M_1'' ds.$$

Der Ausdruck zwischen [ ] ist die gesamte Drehungsverschiebung  $\Delta \alpha_r$  des Schnittes  $J$  des Pfostens  $n_0 r$ ; wir erhalten also:

$$EI'' (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) = EI'' (h_{r+1} - h_r) \Delta \alpha_r - (h_{r+1} - h_r) \int_F^J M_1'' ds +$$

$$+ h_{r+1} \int_F^G M_2'' ds + \int_G^K (h_{r+1} - y) M_3'' ds - \int_F^J (h_r - y) M_1'' ds.$$

Die Werte der Integrale sind:

$$\int_F^J M_1'' ds = \int_0^{h_r} -\pi_r (h_r - y) dy = -\frac{\pi_r}{2} h_r^2$$

$$\int_F^J (h_r - y) M_1'' ds = \int_0^{h_r} - (h_r - y)^2 \pi_r dy = -\frac{\pi_r}{3} h_r^3$$

$$\int_F^G M_2'' ds = \int_0^D \left[ -\pi_{r+1} h_{r+1} + M'' + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) (D - x) \right] dx =$$

$$= -\pi_{r+1} h_{r+1} D + M'' D + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) \frac{D^2}{2}$$

$$\int_G^K (h_{r+1} - y) M_3'' ds = \int_0^{h_{r+1}} - (h_{r+1} - y)^2 \pi_{r+1} dy = -\frac{\pi_{r+1}}{3} h_{r+1}^3.$$

Wir setzen diese Werte ein und erhalten:

$$(10) \quad EI'' (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) = EI'' (h_{r+1} - h_r) \Delta \alpha_r + \frac{\pi_r h_r^2}{6} (3 h_{r+1} - h_r) -$$

$$- \frac{\pi_{r+1} \cdot h_{r+1}^2}{3} (3D + h_{r+1}) + M'' D h_{r+1} + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) \frac{D^2 h_{r+1}}{2}.$$

\* \* \*

18. Untersuchen wir jetzt die Verschiebungen  $\Delta_{r+1}$  und  $\Delta x_r$  der Schnitte  $K$  und  $J$ , indem wir sie als zum oberen Teil der Abb. 14 gehörig betrachten. Wir behalten dasselbe Koordinatensystem mit seinem Ursprung in  $O$  bei; wir bezeichnen mit  $J'$  des Trägheitsmoment des oberen Stückes und erhalten:

$$E I' \Delta x_{r+1} = E I' \Delta x_0 + E I' \Delta \alpha_0 (h_{r+1} - h_0) + \int_A^{J'} (h_{r+1} - y) M'_0 ds + \\ + \int_{F'}^{G'} (h_{r+1} - y) M'_2 ds + \int_{G'}^K (h_{r+1} - y) M'_3 ds$$

$$E I' \Delta x_r = E I' \Delta x_0 + E I' \Delta \alpha_0 (h_r - h_0) + \int_A^{F'} (h_r - y) M'_0 ds + \int_{F'}^J (h_r - y) M'_1 ds.$$

Die gliedweise Subtraktion ergibt uns:

$$E I' (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) = E I' \Delta \alpha_0 (h_{r+1} - h_r) + (h_{r+1} - h_r) \int_A^{F'} M'_0 ds \\ + \int_{F'}^{G'} (h_{r+1} - y) M'_2 ds + \int_{G'}^K (h_{r+1} - y) M'_3 ds - \int_{F'}^J (h_r - y) M'_1 ds \\ + \int_{F'}^J (h_{r+1} - h_r) M'_1 ds - \int_{F'}^J (h_{r+1} - h_r) M'_1 ds$$

oder

$$E I' (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) = E I' (h_{r+1} - h_r) \left[ \Delta \alpha_0 + \int_A^{F'} \frac{M'_0 ds}{E I'} + \int_{F'}^J \frac{M'_1 ds}{E I'} \right] \\ - \int_{F'}^J (h_{r+1} - h_r) M'_1 ds - \int_{F'}^J (h_r - y) M'_1 ds + \int_{F'}^{G'} (h_{r+1} - y) M'_2 ds \\ + \int_{G'}^K (h_{r+1} - y) M'_3 ds.$$

Der Ausdruck zwischen [ ] ist die gesamte Verdrehung von  $J$  im Pfosten n°  $r$ ; sein Wert ist derselbe wie  $\Delta \alpha_r$ , den wir fanden, als wir den untern Teil untersuchten; wir erhalten also:

$$(II) \quad E I' (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) = E I' (h_{r+1} - h_r) \Delta \alpha_r - (h_{r+1} - h_r) \int_{F'}^J M'_1 ds \\ - \int_{F'}^J (h_r - y) M'_1 ds + \int_{F'}^{G'} (h_{r+1} - y) M'_2 ds + \int_{G'}^K (h_{r+1} - y) M'_3 ds$$



$$\begin{aligned}
 & - (h_{r+1} - h_r) \int_{F'}^J M'_1 ds = - (h_{r+1} - h_r) \int_{F'}^J \pi_r (y - h_r) dy = + \frac{1}{2} (h_{r+1} - h_r) \pi_r h_r'^2 \\
 & - \int_{F'}^J (h_r - y) M'_1 ds = - \int_{F'}^J (h_r - y) \pi_r (y - h_r) dy = - \frac{1}{3} \pi_r h_r'^3 \\
 & + \int_{G'}^K (h_{r+1} - y) M'_3 ds = \int_{G'}^K (h_{r+1} - y) \pi_{r+1} (y - h_{r+1}) dy = + \frac{1}{3} \pi_{r+1} h_{r+1}'^3 \\
 & M'_2 = \pi_{r+1} (y - h_{r+1}) - (q_{r+1} + \Theta') (D - x) - M' + N (h_{r+1} + h'_{r+1} - y).
 \end{aligned}$$

Wir werten das Integral nicht aus

$$\int_{F'}^{G'} (h_{r+1} - y) M'_2 ds,$$

denn der Ausdruck wäre reichlich lang.

Die Einsetzung in (11) liefert uns:

$$\begin{aligned}
 (12) \quad EI' (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) &= EI' (h_{r+1} - h_r) \Delta \alpha_r + \frac{1}{2} h_{r+1} - h_r) \pi_r h_r'^2 - \\
 & - \frac{1}{3} \pi_r h_r'^3 + \frac{1}{3} \pi_{r+1} h_{r+1}'^3 + \int_{F'}^{G'} (h_{r+1} - y) M'_2 ds.
 \end{aligned}$$

\* \* \*

19. Setzen wir die Ausdrücke (19) und (12) gleich, so gelangen wir zu einem Ausdruck der  $\pi_{r+1}$  als Funktion aller vorhergehenden  $\pi$  auch in dem ganz allgemeinen Fall der Abb. 14, wo die Gelenkpunkte auf den Pfosten in durch Formel (7) bestimmten Höhen liegen, aber das führt zu einem reichlich komplizierten Ausdruck für  $\pi_{r+1}$ , dessen Auswertung umständlich ist. Um die Aufgabe zu vereinfachen, benutzen wir die unter (10) gemachte Bemerkung und suchen die Lösung, indem wir zu dem Grenzfall übergehen, wo der obere Gurt ein unendlich kleines Trägheitsmoment hat; in diesem Falle erhalten wir:

$$h = \frac{H}{1 + \frac{a + a_1}{2}} = H,$$

d. h. die Gelenkpunkte liegen in der Spitze der Pfosten, also:

$$h_r = H_r; \quad h_{r+1} = H_{r+1}; \quad h'_r = 0; \quad h'_{r+1} = 0;$$

vernachlässigen wir im Ausdruck (12) die unendlich Kleinen höherer Ordnung, so erhalten wir:

$$EI' (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) = EI' (H_{r+1} - H_r) \Delta \alpha_r + \int_{F'}^{G'} (H_{r+1} - y) M'_2 ds$$

oder:

$$\Delta x_{r+1} - \Delta x_r = (H_{r+1} - H_r) \Delta \alpha_r + \int_{F'}^{G'} (H_{r+1} - y) \frac{M'_2 ds}{EI'}.$$

$M'_2$  und  $I'$  sind Null, aber infolge von Formel (2) in n° 12 haben wir:

$$\frac{M'_2 ds}{EI'} = \frac{M''_2 dx}{EI''};$$

der obere Ausdruck wird also:

$$(I3) \quad \Delta x_{r+1} - \Delta x_r = (H_{r+1} - H_r) \Delta \alpha_r + \int_{F'}^{G'} (H_{r+1} - y) \frac{M''_2 dx}{EI''}.$$

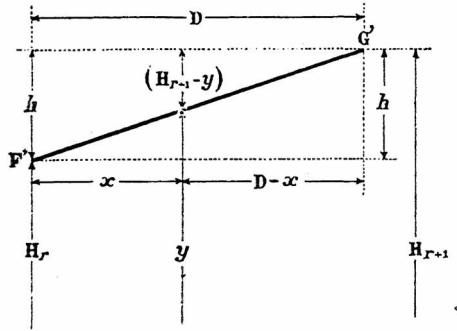


Abb. 15.

Der Wert von  $M''_2$  lautet:

$$M''_2 = -\pi_{r+1} \cdot H_{r+1} + M'' + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1})(D - x);$$

andererseits ist (s. Abb. 15)

$$h : (H_{r+1} - y) = D : (D - x);$$

daraus:

$$H_{r+1} - y = \frac{h - (D - x)}{D}$$

und infolgedessen:

$$\int_{F'}^{G'} (H_{r+1} - y) M''_2 dx = \int_0^D \frac{h}{D} (D - x) \left[ -\pi_{r+1} H_{r+1} + M'' + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1})(D - x) \right] dx = \frac{h}{D} \left[ -\pi_{r+1} H_{r+1} \frac{D^2}{2} + \frac{M'' D^2}{2} + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) \frac{D^3}{3} \right].$$

Durch Einsetzen in (I3) erhalten wir:

$$(I4) \quad EI' (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) = EI'' (H_{r+1} - H_r) \Delta \alpha_r + h \left[ -\pi_{r+1} H_{r+1} \frac{D}{2} + \frac{M'' D}{2} + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) \frac{D^2}{3} \right].$$

Der Ausdruck (10) geht über in:

$$EI'' (\Delta x_{r+1} - \Delta x_r) = EI'' (H_{r+1} - H_r) \Delta \alpha_r + \frac{\pi_r H_r^2}{6} (3H_{r+1} - H_r) - \frac{\pi_{r+1} H_{r+1}^2}{3} (3D + H_{r+1}) + M'' DH_{r+1} + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) \frac{D^2 H_{r+1}}{2}.$$

Durch Kombinierung mit (14) erhält man:

$$(15) \quad \frac{\pi_r H_r^2}{6} (3H_{r+1} - H_r) - \frac{\pi_{r+1} H_{r+1}^2}{3} (3D + H_{r+1}) + M'' DH_{r+1} + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) \frac{D^2 H_{r+1}}{2} = h \left[ -\pi_{r+1} H_{r+1} \frac{D}{2} + \frac{M'' D}{2} + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) \frac{D^2}{3} \right].$$

Wir haben die Werte  $M''$  und  $(P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1})$  auszuwerten; wir wissen, daß  $M'$  gleich Null ist; wir stellen die Momentengleichung für den ganzen Träger (Abb. 14) um den Gelenkpunkt  $G'$  auf; wir bezeichnen mit  $M_{r+1}$  das Biegemoment rechts vom Pfosten  $n^\circ (r+1)$ ; das gibt:

$$M_{r+1} + M'' - N \cdot H_{r+1} = 0;$$

Daraus:

$$M'' = H_{r+1} \sum_1^{r+1} \pi - M_{r+1} = H_{r+1} \sum_1^r \pi + H_{r+1} \pi_{r+1} - M_{r+1}.$$

Schneiden wir den Gelenkpunkt  $G'$  an der Spitze des Pfostens  $n^\circ (r+1)$  heraus, so erhalten wir die in Abb. 16 dargestellten Verhältnisse, und die Gleichung der vertikalen Kräfte liefert uns:

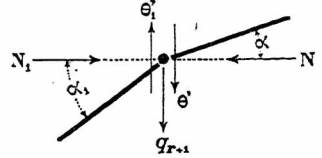


Abb. 16.

$$q_{r+1} + \Theta' - \Theta'_1 = 0$$

$$\Theta' = \alpha N \quad \Theta'_1 = \alpha_1 N_1,$$

also:

$$q_{r+1} + \alpha N - \alpha_1 N_1 = 0.$$

Wir bezeichnen mit  $T_{r+1}$  die Scherkraft vom Pfosten  $n^\circ (r+1)$  bis  $n^\circ (r+2)$  wirkend; das gibt:

$$T_{r+1} - \Theta' - \Theta'' = 0$$

oder

$$T_{r+1} - \alpha N - \Theta'' = 0$$

$$\alpha N = T_{r+1} - \Theta'',$$

also:

$$q_{r+1} + T_{r+1} - \Theta'' - \alpha_1 N_1 = 0$$

oder

$$P_{r+1} - P_{r+1} - q_{r+1} - T_{r+1} + \Theta'' + \alpha_1 N_1 = 0,$$

woraus

$$P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1} = P_{r+1} + T_{r+1} - \alpha_1 N_1$$

$$T_{r+1} = T_r - P_{r+1}$$

$$\alpha_1 N_1 = \alpha_1 \sum_1^r \pi,$$

also:

$$P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1} = T_r - \alpha_1 \sum_1^r \pi.$$

Wir ersetzen  $\alpha_1$  durch  $\alpha_r$ , um die Neigung der oberen Gurtung vom Pfosten n°  $r$  bis n°  $(r + 1)$  zu bezeichnen, und erhalten:

$$P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1} = T_r - \alpha_r \Sigma_1^r \pi.$$

Setzen wir diesen Wert und den oben für  $M''$  erhaltenen in den Ausdruck (15) ein, so erhalten wir nach einigen Vereinfachungen:

$$(16) \quad \pi_{r+1} = \pi_r \frac{H_r^2}{2 H_{r+1}^3} (3 H_{r+1} - H_r) + \frac{D (3 H_r H_{r+1} + h^2)}{H_{r+1}^3} \Sigma_1^r \pi \\ - \frac{3 D (H_r + H_{r+1})}{2 H_{r+1}^3} M_{r+1} + \frac{D^2 (2 H_r + H_{r+1})}{2 H_{r+1}^3} T_r.$$

Das ist die allgemeine Formel für Balken mit vertikalen Pfosten, unterem geraden und oberem polygonalen Gurt wie Abb. 8 und 14.

Diese Formel ist aufgestellt für den Fall, wo das  $I'$  der oberen Gurtung unendlich klein wird, d. h. wo die obere Gurtung gelenkig an der Spitze der Pfosten befestigt ist; aber gemäß der vorher in n° 10 gemachten Bemerkung ist sie anwendbar, welches auch die beiderseitigen Werte von  $I'$  und  $I''$  der Gurtungen sein mögen, d. h. in welcher Höhe der Pfosten der Gelenkpunkt auch liegen mag.

\* \* \*

20. In der Praxis kann die Formel (16) in der Mehrzahl der Fälle noch vereinfacht werden; tatsächlich kann man, wenn in Gleichung (15) der Wert  $h$  im Vergleich zu  $H$  und  $D$  hinreichend klein ist, das zweite Glied vernachlässigen und erhält:

$$\frac{\pi_r \cdot H_r^2}{6} (3 H_{r+1} - H_r) - \frac{\pi_{r+1} \cdot H_{r+1}^2}{3} (3 D + H_{r+1}) + M'' D H_{r+1} \\ + (P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1}) \frac{D^2 H_{r+1}}{2} = 0.$$

Ersetzen wir  $M''$  und  $(P_{r+1} + \Theta'' - q_{r+1})$  durch ihre schon in n° 19 gefundenen Werte, so ergibt das:

$$\frac{\pi_r \cdot H_r^2}{6} (3 H_{r+1} - H_r) - \frac{1}{3} H_{r+1}^3 \pi_{r+1} + D H_{r+1} \left[ H_{r+1} - \frac{1}{2} \alpha_r D \right] \Sigma_1^r \pi + \\ + D H_{r+1} \left[ -M_{r+1} + \frac{1}{2} T_r D \right] = 0.$$

$\left( H_{r+1} - \frac{1}{2} \alpha_r D \right)$  ist die Höhe des Feldes in der Mitte der Pfosten n°  $r$  und n°  $(r + 1)$ ; wir nennen sie  $H_r^{r+1}$ ;

$\left( M_{r+1} - \frac{1}{2} D T_r \right)$  ist das Biegemoment in dem Schnitt mitten zwischen den Pfosten n°  $r$  und n°  $(r + 1)$ ; wir nennen es  $M_r^{r+1}$ .

Die Einsetzung dieser Werte gibt:

$$(17) \quad \pi_{r+1} = \pi_r \frac{H_r^2}{2H_{r+1}^3} (3H_{r+1} - H_r) + \frac{3DH_r^{r+1}}{H_{r+1}^2} \sum_1^r \pi - \frac{3D}{H_{r+1}^2} M_r^{r+1},$$

eine Formel, die ersichtlich einfacher ist als n° (16) und die in der Mehrzahl der Fälle genügt.

\* \* \*

### § 3. Berechnung eines Halbparabel-Trägers

**21. Vollständige Belastung.** Wir wollen den in Abb. 17 dargestellten Träger berechnen. Seine Stützweite beträgt 44,40 m; seine obere Gurtung ist einer Parabel einbeschrieben.

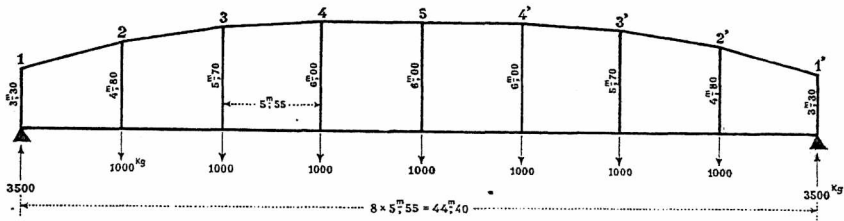


Abb. 17.

Die beiden Gurtungen haben denselben Querschnitt; die Höhe des Momenten-Nullpunktes auf jedem Pfosten ist durch die Formel gegeben:

$$h_r = \frac{H_r}{1 + \frac{a + a_1}{2}}$$

$$a = \cos \alpha \quad a_1 = \cos \alpha_1.$$

Diese beiden Cosinusse liegen der Einheit sehr nahe, und aus diesem Grunde ist  $h_r$  so wenig von  $H_r$  verschieden, daß es praktisch kein Fehler ist, den Momenten-Nullpunkt in halber Höhe der Pfosten anzunehmen.\*

Um die Horizontalkräfte  $\pi$  in diesen Momenten-Nullpunkten zu berechnen, wenden wir Formel (16) in n° 19 an:

$$\begin{aligned} \pi_{r+1} = \pi_r \frac{H_r^2}{2H_{r+1}^3} (3H_{r+1} - H_r) + \frac{D(3H_r H_{r+1} + h^2)}{H_{r+1}^3} \sum_1^r \pi \\ - \frac{3D(H_r + H_{r+1})}{2H_{r+1}^3} M_{r+1} + \frac{D^2(2H_r + H_{r+1})}{2H_{r+1}^3} T_r. \end{aligned}$$

\* Stellt man eine genaue Berechnung an, so sieht man, daß dieser Schluß begründet ist.

Wir lassen am Fuße eines jeden Pfostens eine Last von 1000 kg wirken und erhalten:

	$H_1$	$h$	$H_2$	$h$	$H_3$	$h$	$H_4$	$h$	$H_5$
	3,30 m	1,50	4,80	0,90	5,70	0,30	6 m	0	6 m
zur zweiten	10,89	2,25	23,04	0,81	32,49	0,09	36	0	36
zur dritten	35,937		110,592		185,193		216		216

$$M_2 = 19425 \text{ kg/m} \quad T_1 = 3500 \text{ kg}$$

$$M_3 = 33300 \text{ kg/m} \quad T_2 = 2500 \text{ kg}$$

$$M_4 = 41625 \text{ kg/m} \quad T_3 = 1500 \text{ kg}$$

$$M_5 = 44400 \text{ kg/m} \quad T_4 = 500 \text{ kg}$$

$$\frac{H_r^2}{2 H_{r+1}^3} (3 H_{r+1} - H_r) \text{ ist:}$$

<i>Feld</i> 1-2	0,5465088
<i>do.</i> 2-3	0,7651261
<i>do.</i> 3-4	0,9250625
<i>do.</i> 4-5	1,000

$$\frac{D (3 H_r H_{r+1} + h^2)}{H_{r+1}^3} \text{ ist:}$$

<i>Feld</i> 1-2	2,4976806
<i>do.</i> 2-3	2,4841084
<i>do.</i> 3-4	2,6385625
<i>do.</i> 4-5	2,775

$$\frac{3 D (H_r + H_{r+1})}{2 H_{r+1}^3} \text{ ist:}$$

<i>Feld</i> 1-2	0,6097412
<i>do.</i> 2-3	0,4720076
<i>do.</i> 3-4	0,4509375
<i>do.</i> 4-5	0,4625

$$\frac{D^2 (2 H_r + H_{r+1})}{2 H_{r+1}^3} \text{ ist:}$$

<i>Feld</i> 1-2	1,5875854
<i>do.</i> 2-3	1,2723976
<i>do.</i> 3-4	1,2406562
<i>do.</i> 4-5	1,2834375

Wir erhalten also folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{Feld } 1-2: \pi_2 &= 0,5465088 \pi_1 + 2 \cdot 4976806 \pi_1 - 0,6097412 M_2 + 1 \cdot 5875854 T_1 \\ \text{do. } 2-3: \pi_3 &= 0,7651261 \pi_2 + 2 \cdot 4841084 (\pi_1 + \pi_2) - 0,4720076 M_3 + \\ &\quad + 12723976 T_2 \\ \text{do. } 3-4: \pi_4 &= 0,9250625 \pi_3 + 2 \cdot 6385625 (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) - 0,4509375 M_4 + \\ &\quad + 1 \cdot 2406562 T_3 \\ \text{do. } 4-5: \pi_5 &= \pi_4 + 2 \cdot 775 (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4) - 0,4625 M_5 + 1 \cdot 2834375 T_4 \end{aligned}$$

Die verschiedenen Koeffizienten dieser Gleichungen lassen sich ein für allemal berechnen und sind von den Lasten unabhängig.

Wir ersetzen  $M$  und  $T$  durch ihre Zahlenwerte und drücken die verschiedenen Gleichungen als Funktionen von  $\pi_1$  aus; das gibt:

$$\begin{aligned}\pi_2 &= + 3,0441894 \pi_1 - 6287,674 \\ \pi_3 &= + 12,3753926 \pi_1 - 32966,958 \\ \pi_4 &= + 54,771860 \pi_1 - 150981,487 \\ \pi_5 &= + 252,327995 \pi_1 - 698779,997.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten von  $\pi_1$  in diesen 4 Gleichungen sind unabhängig von den Lasten; sie sind die gleichen, was für Lasten auch in Frage kommen, man braucht sie also nur einmal zu berechnen.

Infolge der Symmetrie der Belastung ist ersichtlich  $\pi_5 = 0$ , also

$$\begin{aligned}252,327995 \pi_1 - 698779,997 &= 0 \\ \pi_1 &= 2769,332 \text{ kg.}\end{aligned}$$

Dieser Wert in die vorigen Gleichungen eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned}\pi_2 &= 2143 \text{ kg} \\ \pi_3 &= 1305 \text{ kg} \\ \pi_4 &= 700 \text{ kg.}\end{aligned}$$

\* \* \*

22. Abb. 18 stellt uns die Verhältnisse an einem Träger dar, der in der Höhe der Momenten-Nullpunkte in den Pfosten geschnitten ist; die einzigen Unbekannten

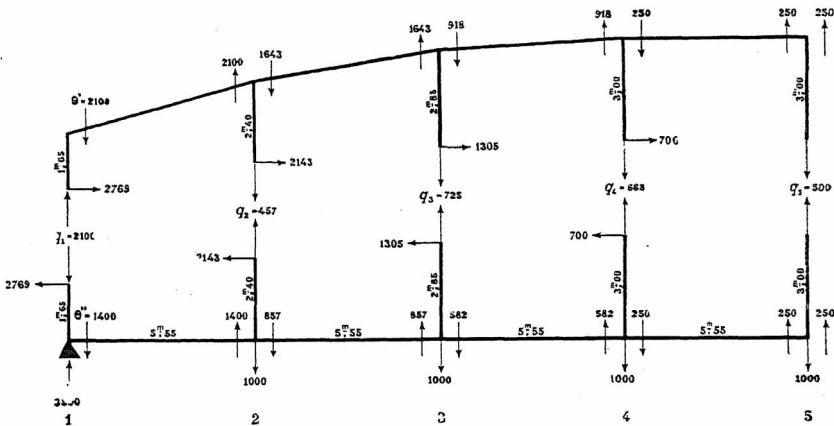


Abb. 18.

sind die unmittelbar auf die Pfosten wirkenden Kräfte  $\pi$ ; wir wollen sie berechnen.

Infolge der Formeln (3) und (4) aus n° 13 erhalten wir:

$$\theta' = \frac{I}{I + a} [a \Sigma P + \alpha N]$$

$$\theta'' = \frac{I}{I + a} [\Sigma P - \alpha N]$$

daraus ergibt sich für die verschiedenen Felder:

*Feld 1 bis 2*

$$\begin{aligned}\Sigma P &= 3500 \text{ kg} & N &= 2769 \text{ kg} \\ \alpha &= \frac{1500}{5550} = \frac{30}{111}; & \cos \alpha &= a = 0.965 \\ \theta'' &= \frac{1}{1.965} \left[ 3500 - \frac{30}{111} \times 2769 \right] = 1400 \text{ kg} \\ q_1 &= 3500 - 1400 = 2100 \text{ kg durch Druck.}\end{aligned}$$

*Feld 2 bis 3*

$$\begin{aligned}\Sigma P &= 2500 & N &= 2769 + 2143 = 4912 \\ \alpha &= \frac{900}{5550} = \frac{18}{111} = \frac{6}{37} & \cos \alpha &= a = \frac{111}{112.5} = 0.987 \\ \theta'' &= \frac{1}{1.987} \left[ 2500 - \frac{6}{37} \times 4912 \right] = 857 \\ q_2 &= 457 \text{ kg durch Zug.}\end{aligned}$$

*Feld 3 bis 4*

$$\begin{aligned}\Sigma P &= 1500 & N &= 4912 + 1305 = 6217 \\ \alpha &= \frac{300}{5550} = \frac{2}{37} & \cos \alpha &= a = 1 \\ \theta'' &= \frac{1}{2} \left[ 1500 - \frac{2}{37} \times 6217 \right] = 582 \\ q_3 &= 1582 - 857 = 725 \text{ kg durch Zug.}\end{aligned}$$

*Feld 4 bis 5*

$$\begin{aligned}\Sigma P &= 500 & N &= 6217 + 700 = 6917 \\ \alpha &= 0 & \cos \alpha &= 1 = a \\ \theta'' &= \frac{500}{2} = 250 \\ q_4 &= 1250 - 582 = 678 \text{ kg durch Zug} \\ q_5 &= 1000 - 2 \times 250 = 500 \text{ kg durch Zug.}\end{aligned}$$

Die für jeden halben Träger ermittelten Beanspruchungen gibt uns Abb. 18 an; man kann jetzt leicht die Einflußlinien der Querkraft und des Biegemomentes für jedes Glied zeichnen, also auch seine Abmessungen bestimmen, doch ist es hier nicht unsere Aufgabe, uns mit diesen elementaren Aufgaben der Festigkeitslehre zu befassen.

\* \* \*

23. Wenn wir, anstatt die Werte  $\pi$  vermittelt Formel (16) zu bestimmen, wie wir es getan haben, die viel einfachere Formel (17) anwenden, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 2661 & \pi_2 &= 2222 & \pi_3 &= 1327 & \pi_4 &= 705 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 &= 6914 \text{ kg,}\end{aligned}$$



während Formel (16)

$$\pi_1 = 2769 \quad \pi_2 = 2143 \quad \pi_3 = 1305 \quad \pi_4 = 7000$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 6917 \text{ kg ergab.}$$

Man sieht, daß man sich darauf hätte beschränken können, die  $\pi$  nach Formel (17) zu berechnen.

\* \* \*

24. Teilweise Belastung. — Ermitteln wir die  $\pi$  für eine teilweise Belastung,

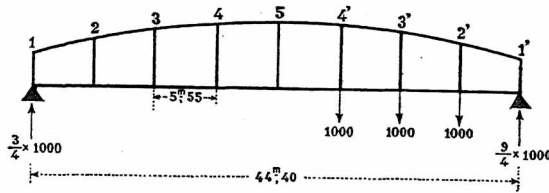


Abb. 19.

z. B. für die in Abb. 19 angegebene. Der Träger hat dieselben Abmessungen wie der vorige Abb. 17. Für die Felder vom Pfosten n° 1 bis n° 5 haben wir:

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \frac{3}{4} \times 1000 = 750$$

$$M_2 = 750 \times 5,55 \text{ m} = 4162,5$$

$$M_3 = 4162,5 \times 2 = 8324$$

$$M_4 = 4162,5 \times 3 = 12487,5$$

$$M_5 = 4162,5 \times 4 = 16650.$$

Wir wenden die Formel (16) an, die uns die Benutzung der eben erhaltenen Werte liefert:

$$\pi_2 = 0,5465088 \pi_1 + 2 \cdot 4976806 \pi_1 - 0,6097412 \times 4162 + 1 \cdot 5875854 \times 750$$

$$\pi_3 = 0,7651261 \pi_2 + 2 \cdot 4841084 (\pi_1 + \pi_2) - 0,4720076 \times 8325 + 1 \cdot 2723976 \times 750$$

$$\pi_4 = 0,9250625 \pi_3 + 2 \cdot 6385625 (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) - 0,4509375 \times 12488 +$$

$$+ 1 \cdot 2406562 \times 750$$

$$\pi_5 = \pi_4 + 2 \cdot 775 (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4) - 0,4625 \times 16650 + 1,2834375 \times 750.$$

Diese Gleichungen ergeben auf ihre einfachste Form gebracht:

$$A \begin{cases} \pi_2 = 3 \cdot 0441894 \pi_1 - 1347,1 \\ \pi_3 = 12 \cdot 3753926 \pi_1 - 7352,1 \\ \pi_4 = 54 \cdot 771860 \pi_1 - 34454,8 \\ \pi_5 = 252 \cdot 327995 \pi_1 - 160945,2. \end{cases}$$

Man sieht, daß die Koeffizienten von  $\pi_1$  die eben in n° 21 für Totalbelastung erhaltenen sind. Wie schon gesagt, braucht man sie also nur einmal zu berechnen.

Wir nehmen jetzt den Träger in Abb. 19, kehren den Lastenzug um und erhalten Abb. 20; es ist:

$$\begin{aligned} M_2' &= 2250 \times 5,55 \text{ m} = 12487,5 & T_1' &= 2250 \\ M_3' &= 19425 & T_2' &= 1250 \\ M_4' &= 20812,5 & T_3' &= 250 \\ M_5' &= 16650 & T_4' &= -750. \end{aligned}$$

Die Formel (16) gibt uns:

$$\begin{aligned} \pi_2' &= 0,5465088 \pi_1' + 2,4976806 \pi_1' - 0,6097412 \times 12487,5 + 1,5875854 \times 2250 \\ \pi_3' &= 0,7651261 \pi_2' + 2,4841084 (\pi_1' + \pi_2') - 0,4720076 \times 19425 + 1,2723976 \times 1250 \\ \pi_4' &= 0,9250625 \pi_3' + 2 \cdot 6385625 (\pi_1' + \pi_2' + \pi_3') - 0,4509375 \times 20812,5 + \\ &\quad + 1 \cdot 2406562 \times 250 \\ \pi_5' &= \pi_4' + 2 \cdot 775 (\pi_1' + \pi_2' + \pi_3' + \pi_4') - 0,4625 \times 16650 + 1 \cdot 2834375 (-750). \end{aligned}$$

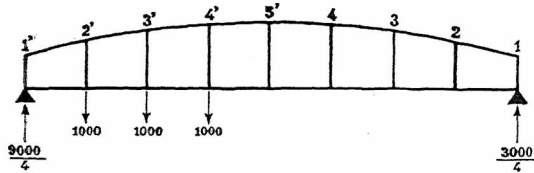


Abb. 20.

Diese Gleichungen ergeben:

$$(A') \begin{cases} \pi_2' = 3,0441894 \pi_1' - 4042 \\ \pi_3' = 12,3753926 \pi_1' - 20711,6 \\ \pi_4' = 54,771860 \pi_1' - 93548 \\ \pi_5' = 252,327995 \pi_1' - 430498 \end{cases}$$

Wir haben  $\pi_5' = -\pi_5'$ , also:

$$\pi_1 + \pi_1' = \frac{591443,2}{252,328} = 2343,946 \text{ kg.}$$

Wir erhalten in gleicher Weise infolge der Gleichheit der Horizontalkräfte:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 - \pi_4' - \pi_3' - \pi_2' - \pi_1' = 0;$$

mit Einsetzung der Werte (A) und (A') ergibt sich:

$$71,191442 (\pi_1 - \pi_1') + 252,327995 \pi_1 - 85797,6 = 0;$$

ersetzen wir  $\pi_1'$  durch  $\pi_1$ , so folgt:

$$71,191442 (2\pi_1 - 2343,946) + 252,327995 \pi_1 - 85797,6 = 0$$

$$\pi_1 = \frac{252666,3}{394,710879} = 640,13 \text{ kg}$$

$$\pi_1' = 2343,946 - 640,13 = 1703,816 \text{ kg.}$$

Setzen wir diese beiden Werte in die Gruppengleichungen (A) und (A'), so erhalten wir:

$$\begin{array}{ll}
 \pi_1 = 640 \text{ kg} & \pi'_1 = 1704 \\
 \pi_2 = 601 & \pi'_2 = 1144 \\
 \pi_3 = 569 & \pi'_3 = 374 \\
 \pi_4 = 606 & \pi'_4 = -227 \\
 \pi_5 = 577 & \pi'_5 = -577.
 \end{array}$$

Haben wir die Werte  $\pi$ , so ermitteln wir die Werte für  $q$  auf die vorher in n° 22 angegebene Weise; um jedoch diese Abhandlung nicht allzu lang zu gestalten, möge von diesen Berechnungen abgesehen werden.

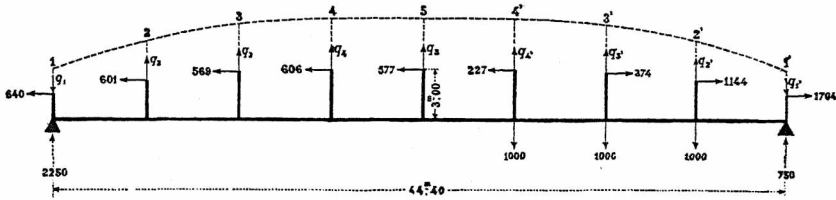


Abb. 21.

Abb. 21 zeigt die dem unteren Teil des Trägers entsprechenden Verhältnisse; die Kräfte  $\pi$  und  $q$  sind in halber Höhe der Pfosten angebracht. Die Verhältnisse in der oberen Trägerhälfte sind symmetrisch.

Im allgemeinen kann man sich auf die Berechnung bei vollständiger (Abb. 17) und teilweiser Belastung (Abb. 19) beschränken, im ersten Fall erhalten wir die Maximal-Beanspruchungen in den Gurten und Pfosten außer in n° 5, und der zweite Fall gibt uns die Maximal-Beanspruchung in diesem letzten Pfosten n° 5.

\* \* \*

25. Nimmt man die Berechnungen von n° 24 unter Benutzung der vereinfachten Formel (17) aus n° 15 vor, so erhält man:

$$\begin{array}{ll}
 \pi_1 = 611 & \pi'_1 = 1644 \\
 \pi_2 = 618 & \pi'_2 = 1197 \\
 \pi_3 = 578 & \pi'_3 = 383 \\
 \pi_4 = 610 & \pi'_4 = -228 \\
 \pi_5 = 579 & \pi'_5 = -579.
 \end{array}$$

Der Vergleich mit den in n° 24 erhaltenen Resultaten läßt erkennen, daß die Unterschiede gering sind und daß man in der Mehrzahl der Fälle Formel (17) anstatt Formel (16) anwenden kann; derselbe Schluß, wie wir ihn schon in n° 23 vorher gezogen haben. Die Fälle, in denen Formel (16) unbedingt anzuwenden ist, sind die, wo der Wert  $h$  der Trägerfelder erheblich im Vergleich zu den Gesamthöhen  $H_r$  und  $H_{r+1}$  ist.

\* \* \*

### § 4. Durchbiegung

26. Nehmen wir an, wir wollten die Durchbiegung des Trägers in Abb. 17 für den Fall vollständiger Belastung bestimmen; wir schneiden den unteren Teil dieses Trägers ab und erhalten nach den in Abb. 18 verzeichneten Ergebnissen die Abb. 22. Die Aufgabe läuft auf die Bestimmung der Durchbiegung der unteren

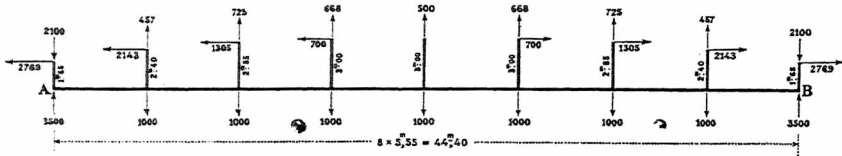
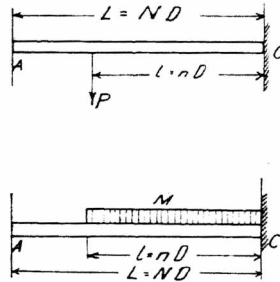


Abb. 22.

Gurtung  $AB$  hinaus, deren mittleres Trägheitsmoment bekannt ist. Diese Gurtung hat Biegemomente aufzunehmen, die aus den in Abb. 22 eingezeichneten Kräften resultieren.

Man bestimmt die Durchbiegung dieser Gurtung  $AB$  vermittelt der graphischen Methode von *Mohr*; sie ist genau gleich der des gesamten Trägers. Im Falle einer teilweisen Belastung ist der Weg derselbe.



Hinsichtlich Einzelheiten und Anwendungen verweise ich auf die schon in n° 2 erwähnten Abhandlungen.

Die Durchbiegung des unteren Gurtes in Abb. 21 kann auch auf analytischem Wege ermittelt werden; es genügt, folgende beiden Formeln anzuwenden:

1. Es sei  $P$  die am Fuße eines Pfostens angebrachte senkrechte Last; die Biegung  $F$  in  $A$  beträgt:

$$6 E I F = P l^2 (3 L - l) = D^3 \cdot P_n^2 (3 N - n).$$

2. Es sei  $M$  ein gleichmäßig auf die Länge  $l$  wirkendes Moment; die dadurch erzeugte Durchbiegung  $F$  in  $A$  lautet:

$$6 E I F = 3 M l (2 L - l) = D^3 \cdot M \cdot 3 n (2 N - n).$$

Die Anwendung der analytischen Methode geht im allgemeinen schneller als die der graphischen.

\* \* \*

## § 5. Berechnung eines Parabel-Trägers

27. Die obere Gurtung ist ein einer Parabel von 6 m Stich und 44,40 m Sehnenweite einbeschriebenes Polygon; die untere Gurtung ist gerade.

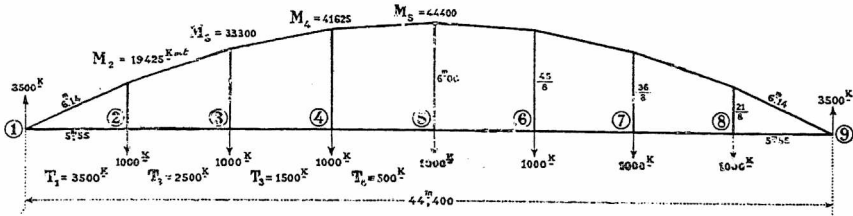


Abb. 23.

Wir wollen diesen Balken für eine Last von 1000 kg, wirkend am Fuße jedes Pfostens, berechnen.

Zunächst müssen wir die Werte von  $\pi$  bestimmen.

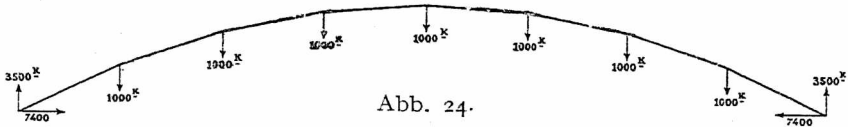


Abb. 24.

1. Feld. Wir wenden die allgemeine Formel 16 in n° 19 an; sie lautet für das Feld 1 bis 2:

$$\pi_2 = \pi_1 \frac{H_1^2}{3H_2^3} (3H_2 - H_1) + \frac{D(3H_1H_2 + h^2)}{H_2^3} \pi_1 - \frac{3D(H_1 + H_2)}{2H_2^3} M_2 + \frac{D^2(2H_1 + H_2)}{2H_2^3} T_1;$$

im vorliegenden Fall ist  $H_1 = 0$  und  $h = H_2$ , daraus:

$$\pi_2 = \frac{D}{H_2} \pi_1 - \frac{3D}{2H_2^2} M_2 + \frac{D^2}{2H_2^2} T_1 = \frac{D}{H_2} \pi_1 - \frac{D}{2H_2^2} (3M_2 - DT_1).$$

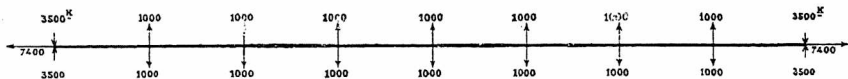


Abb. 25.

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\pi_2 = \frac{5,55 \times 8}{21} \pi_1 - \frac{5,55 \times 64}{2 \times 441} (3 \times 19425 - 5,55 \times 3500);$$

daraus:  $\pi_2 = 2,114286 \pi_1 - 15645,714.$

2. Feld.

$$\pi_3 = \pi_2 \frac{H_2^2}{2H_3^2} (3H_3 - H_2) + \frac{D(3H_2H_3 + h^2)}{H_3^3} (\pi_1 + \pi_2) - \frac{3D(H_2 + H_3)}{2H_3^2} M_3 + \frac{D^2(2H_2 + H_3)}{2H_3^3} T_2;$$

daraus:  $\pi_3 = 8,257828 \pi_1 - 61107,922.$

3. Feld. Im dritten Feld wird die Neigung der oberen Gurtung relativ klein; wir wenden Formel (17) an und erhalten:

$$\pi_4 = \pi_3 \frac{H_3^2}{3H_4^2} (3H_4 - H_3) + \frac{3D(H_3 + H_4)}{2H_4^2} (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) - \frac{3D}{H_4^2} M_3^4$$

$$M_3^4 = \frac{M_3 + M_4}{2}.$$

Ersetzen wir die Ausdrücke durch ihre Zahlenwerte, so ergibt das:

$$\pi_4 = 36,108823 \pi_1 - 267205,2634.$$

4. Feld.

$$\pi_5 = \pi_4 \frac{H_4^2}{2H_5^2} (3H_5 - H_4) + \frac{3D(H_4 + H_5)}{2H_5^2} (\pi_1 + \dots + \pi_4) - \frac{3D}{H_5^2} M_4^5;$$

daraus:  $\pi_5 = 160,370141 \pi_1 - 1186738,929.$

Zusammenfassend haben wir also folgende Gruppe von Resultaten:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_1 \\ \pi_2 &= 2,114286 \pi_1 - 15645,714 \\ \pi_3 &= 8,257828 \pi_1 - 61107,922 \\ \pi_4 &= 36,108823 \pi_1 - 267205,2634 \\ \pi_5 &= 160,370141 \pi_1 - 1186738,929. \end{aligned}$$

Infolge der Symmetrie der Lasten ist

$$\pi_5 = 0,$$

also:  $\pi_1 = 7400,001178 \text{ kg.}$

Die Einsetzung in die vorher erhaltenen Ausdrücke liefert:

$$\pi_2 = 2,114286 \pi_1 - 15645,714 = 15645,719 \text{ kg} - 15645,714 \text{ kg} = 0$$

$$\pi_3 = 8,257828 \pi_1 - 61107,922 = 61107,937 \text{ kg} - 61107,922 \text{ kg} = 0$$

$$\pi_4 = 36,108823 \pi_1 - 267205,2634 = 267205,3328 \text{ kg} - 267205,2634 \text{ kg} = 0.$$

Die Pfosten erleiden keine Biegung, sie bilden im Gegenteil einfache Hängestangen.

\* \* \*

28. Wir haben jetzt die auf diese Pfosten wirkenden Kräfte  $q$  zu berechnen; wir wenden die Formeln (3) und (4) in n° 13 an:

$$\theta' = \frac{1}{1+a} (aT + \alpha \Sigma_1^{r+1} \pi)$$

$$\theta'' = \frac{1}{1+a} (T - \alpha \Sigma_1^{r+1} \pi).$$

Im gegenwärtigen Fall und für jedes beliebige betrachtete Feld hat man:

$$\Sigma_1^{r-1} \pi = 7400 \text{ kg.}$$

$$\text{Feld 1 bis 2} \quad T = 3500 \quad \alpha = \frac{21}{8 \times 5,55} = \frac{70}{148} \quad a = \cos \alpha = \frac{555}{614}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{1 + \frac{555}{614}} \left( \frac{555}{614} \times 3500 + \frac{70}{148} \times 7400 \right) = 3500 \text{ kg} \\ \theta'' &= \frac{1}{1 + \frac{555}{614}} \left( 3500 - \frac{70}{148} \times 7400 \right) = 0 \end{aligned} \right\} \text{daraus } q_1 = 3500 \text{ kg.}$$

$$\text{Feld 2 bis 3} \quad T = 2500 \text{ kg}$$

$$\alpha = \frac{15}{8 \times 5,55} = \frac{50}{148}$$

$$\theta' = \frac{1}{1 + a} \left( a \times 2500 + \frac{50}{148} \times 7400 \right) = \frac{1}{1 + a} (a \times 2500 + 2500) = 2500 \text{ kg}$$

$$\theta'' = \frac{1}{1 + a} \left( 2500 - \frac{50}{148} \times 7400 \right) = \frac{1}{1 + a} (2500 - 2500) = 0$$

$$q_2 = + \theta' (1 \text{ bis } 2) - \theta' (2 \text{ bis } 3) = 3500 - 2500 = 1000 \text{ kg,}$$

oder:  $q_2 = + \theta'' (1 \text{ bis } 2) + P_2 - \theta'' (2 \text{ bis } 3) = 1000 \text{ kg.}$

$$\text{Feld 3 bis 4} \quad T = 1500 \text{ kg}$$

$$\alpha = \frac{9}{8 \times 5,55} = \frac{90}{444} = \frac{30}{148}$$

$$\theta' = \frac{1}{1 + a} \left( a \times 1500 + \frac{30}{148} \times 7400 \right) = \frac{1}{1 + a} (a \times 1500 + 1500) = 1500 \text{ kg}$$

$$\theta'' = \frac{1}{1 + a} \left( 1500 - \frac{30}{148} \times 7400 \right) = 0$$

$$q_3 = \theta' (2 \text{ bis } 3) - \theta' (3 \text{ bis } 4) = 2500 - 1500 = 1000 \text{ kg.}$$

$$\text{Feld 4 bis 5} \quad T = 500 \text{ kg}$$

$$\alpha = \frac{3}{8 \times 5,55} = \frac{10}{148}$$

$$\theta' = \frac{1}{1 + a} \left( a \times 500 + \frac{10}{148} \times 7400 \right) = \frac{1}{1 + a} (a \times 500 + 500) = 500 \text{ kg}$$

$$\theta'' = \frac{1}{1 + a} \left( 500 - \frac{10}{148} \times 7400 \right) = 0$$

$$q_4 = \theta' (3 \text{ bis } 4) - \theta' (4 \text{ bis } 5) = 1500 \text{ kg} - 500 = 1000 \text{ kg}$$

$$q_5 = \theta' (4 \text{ bis } 5) + \theta' (5 \text{ bis } 6) = 500 + 500 = 1000 \text{ kg.}$$

\* \* \*

29. Nachdem wir diese verschiedenen Resultate erhalten haben, trennen wir die beiden Gurtungen und haben damit die in Abbn. 24 und 25 dargestellten Verhältnisse.

Wir sehen, daß die untere Gurtung als einfache Zugstange mit einer Spannung von 7400 kg wirkt. Die obere Gurtung trägt die gesamte Last der Fahrbahn; diese wird auf sie durch die als einfache Hängestangen wirkenden Pfosten übertragen.

Kurz, meine Formeln führen zu Resultaten, die vollkommen mit der Wirklichkeit übereinstimmen. So erhalten wir, wenn wir die Spannung der Zugstange des parabelförmigen Bogens in Abb. 23 nach den gewöhnlichen Formeln berechnen:

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Moment in Trägermitte}}{\text{Stich}} = \frac{44400}{6} = 7400 \text{ kg,}$$

also ganz genau unserm Wert.

Diese Übereinstimmung der Resultate liefert einen interessanten Beweis für die Genauigkeit meiner Theorie und meiner Formeln.

\* \* \*

30. Vermittelst der vorher in n<sup>o</sup> 24 angegebenen Methoden wollen wir die Werte von  $\pi$  für verschiedene teilweise Belastungen bestimmen; die Resultate sind in Abbn. 26 bis 29 vermerkt.

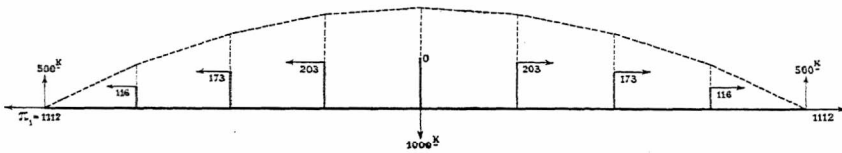


Abb. 26.

Addiert man diese Resultate, so kann man die aus n<sup>o</sup> 27 finden; das ist ein

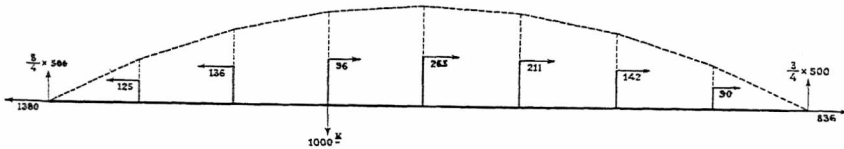


Abb. 27.

interessanter Beweis; suchen wir z. B. den Wert von  $\pi_1$  für die Last von 1000 kg an allen Pfosten wirkend. Wir erhalten:

$$\pi_1 = + 1112 + (1380 + 836) + (1610 + 557) + (1626 + 279) = 7400 \text{ kg,}$$

Das ist das in n<sup>o</sup> 27 gefundene Resultat.



Ebenso erhalten wir für  $\pi_2$ :

$$\pi_2 = + 116 + (125 + 90) + (51 + 61) - 474 + 31 = 0$$

und ebenso für  $\pi_3, \pi_4, \pi_5$ .

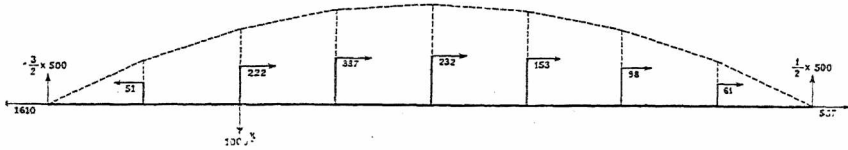


Abb. 28.

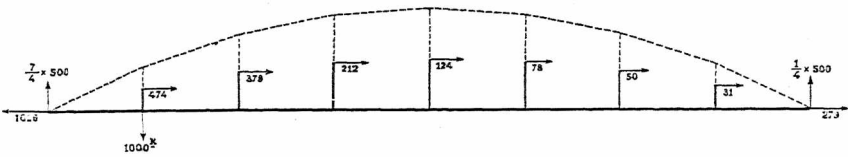


Abb. 29.

Hat man die Resultate der Abbn. 26 bis 29, so kann man durch einfache Addition die  $\pi$ - und  $q$ -Werte für jede beliebige Lastverteilung auf dem Träger berechnen.

## IV. Kapitel

### Ausgeführte Träger

---

31. Das System der Träger ohne Diagonalen existiert seit 1896. 1897 ist eine Brücke von 31,50 m Spannweite in Tervueren nahe bei Brüssel bis zum Bruch erprobt worden. Dieser mit einem Kostenaufwand von 37 000 fr. veranstaltete Versuch hat die Voraussetzungen der Theorie und die Richtigkeit der Berechnungen bestätigt und die Eigenschaften des neuen Systems glänzend gezeigt; es sind seine Festigkeit, seine geringe Biegsamkeit, seine Wirtschaftlichkeit und das gute Aussehen.

Vom praktischen Gesichtspunkt aus haben diese Träger das Charakteristikum, daß sie sehr starre Knotenpunkte haben und daß die Zahl ihrer Glieder auf ein Minimum beschränkt ist.

Vom theoretischen Gesichtspunkt aus haben sie die Besonderheit, daß die Berechnungen die Starrheit der Knoten und die Biegung der Einzelglieder berücksichtigen. Die Berechnung ist erschöpfend und ungleich genauer als die der Gitterträger.

Seit 1897 sind verschiedene eiserne Brücken in Belgien ausgeführt:

- A) Signalbrücke von 50 m Spannweite über den Nordbahnhof in Brüssel.
- B) Straßenbrücke, 44,50 m, über die Schelde bei Avelghem.
- C) Straßen- und Eisenbahnbrücke bei Beerigen, 26 m lang.\*
- D) Straßenbrücke, 44,50 m, über die Lys bei Ousselghem.
- E) Straßen- und Kleinbahnbrücke bei Charleroi, 30 m lang.

Außerdem *gibt es noch derartige Fußgängerbrücken* und Rahmenträger. Auch im Ausland gibt es Ausführungen dieses Systems, so der Viadukt von Kinzua (Vereinigte Staaten), zwei Stege in Glasgow, ein Brücke in Sunderland, die Festhalle in Frankfurt a. M. und andere mehr.

Diese Ausführungen haben es möglich gemacht, allmählich Verbesserungen in den Einzelheiten vorzunehmen, und heute ist der Arbeitslohn in der Werkstatt bei der Montage von Vierendeel-Trägern derselbe wie bei Gitterträgern, so daß die ganze Ersparnis am Gewicht eine tatsächliche Ersparnis bedeutet.

---

\* Bezüglich der Berechnungen dieser Brücke s. den Aufsatz erschienen 1909 im »Bulletin de l'Union des Ingénieurs« der Ecoles spéciales de Louvain.

32. Die Brücke über die Schelde bei Avelghem ist 1903 bis 1904 ausgeführt; siehe die beiden Photographien Abbn. 30 und 31.

Die Länge der Träger zwischen den Achsen der Auflagerrollen beträgt 42 m. Die Breite von Achse zu Achse der Balken 5,17 m; jeder Träger ist in sieben

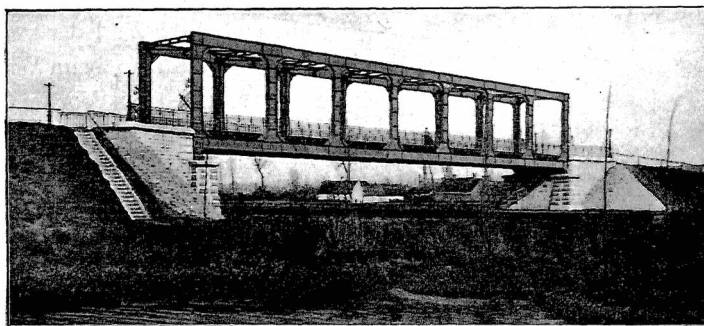


Abb. 30.

quadratische Felder untergeteilt mit einer Höhe von 6 m zwischen den Achsen der Gurtungen und 6 m Breite zwischen den Achsen der Pfosten.

Man bemerkt die große Entfernung der Pfosten, bedingt aus Sparsamkeitsrücksichten. Sie bietet außerdem den Vorteil eines freien Blickes auf die Landschaft.

Die Chaussee ist mit Pflastersteinen aus Porphy von 15 cm Dicke gepflastert, die auf einer Betonbettung liegen; dieser Beton ist auf einem aus Belag-Eisen bestehenden Brückenbelag gestampft, die auf den Querträgern der Brücke ruhen; diese Querträger sind 2 m entfernt voneinander. Die Chaussee hat eine Breite von 2,80 m; jeder Fußsteig ist 1 m breit; der Belag der Fußsteige besteht aus Eichenbohlen von 10 cm Dicke, deren Ränder durch ein starkes Winkel-eisen 200 × 100 × 12 geschützt sind.

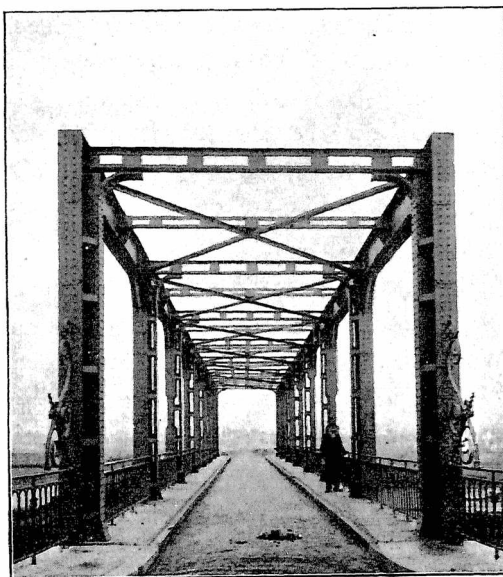


Abb. 31.

Das Eigengewicht der Chaussee und der Fußsteige setzt sich folgendermaßen zusammen:

2,80 qm Steinpflaster = 104 Steine à 8,5 kg = . . . . .	884 kg
Beton, im Mittel 15 cm stark . . . . .	630 „
0,25 cbm Eichenholz der Fußsteige . . . . .	250 „
	<hr/>
	1764 kg.

Die Hauptträger sind durch einen oberen Windverband gehalten, der so angeordnet ist, daß er oberhalb der Chaussee eine freie Höhe von 5,20 m läßt.

Alle Glieder, Gurte und Pfosten haben dasselbe Profil, Abb. 32; es ist von einem zum andern Ende konstant. Die Querschnittsabstufung ist bewirkt durch die Änderung der Zahl der Lamellen ( $320 \times 10$ ). Man sieht schon, daß die Zahl der verschiedenen Profile (Flacheisen und Winkel), die man beim Walzwerk bestellen muß, sehr klein ist. Das ist ein Vorteil hinsichtlich der Leichtigkeit und Schnelligkeit der Beschaffung und auch hinsichtlich des Preises.

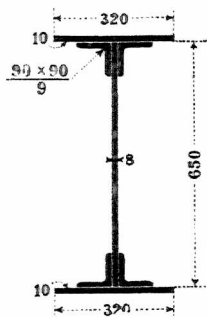


Abb. 32.

Die Brücke besteht aus weichem basischen Flußeisen, dessen charakteristische Merkmale sind:

- Bruchfestigkeit bei 40 bis 45 kg pro mm<sup>2</sup>,
- Elastizitätsgrenze 25 kg,
- Minimale Dehnung 20 %,
- Qualitätskoeffizient mindestens 900.

Das Eisen ist im kalten und warmen Zustand geprüft und der Schreckprobe unterzogen worden.

Die Nieten sind aus Schweißeisen; alle Löcher sind gebohrt; die mit der Schere geschnittenen Stücke sind auf 3 mm glattgehobelt.

Die Brücke ist für einen Lastwagen von 18 000 kg und ein Menschengedränge von 400 kg/m<sup>2</sup> berechnet worden; für das laufende Meter mögen 1800 kg angenommen werden; also insgesamt:  $1800 \cdot 42 = 75\ 600$  kg.

Die Berechnung ergibt als maximale Beanspruchungen:

- Größte primäre Beanspruchung . . . . . 6,2 kg
- Größte Beanspruchung, primär und sekundär . . . . . 11,5 „

Es ist zu bemerken, daß diese Beanspruchungen geringer sind als die in Wirklichkeit bei Gitterträgern auftretenden.

Das Gewicht des eisernen Teiles der Brücke ermittelt sich nach den gemachten Wägungen:

Die beiden Hauptlängsträger . . . . .	52 752 kg
22 Querträger, Vernietung und Windverband . . . . .	29 782 „
Die Bleche für die Fahrbahn, die Winkeleisen für die Fußsteige, Schutzleisten, Wasserabflußrohre. . . . .	19 031 „
Geländer . . . . .	5 458 „
Gesamtes von der Brücke getragenes Eisengewicht . . . . .	<u>107 023 kg</u>
Lagergestell . . . . .	3 728 „
Gesamte Eisenlieferung . . . . .	<u>110 751 kg.</u>

Alles ist geliefert, montiert und fünfmal mit Farbe gestrichen für 27,25 fr für 100 kg; also insgesamt für 30 180 fr.

Die Eisengewichte für das laufende Meter sind also:

Die beiden Hauptträger . . . . .	$\frac{52752}{42,6} = 1238$	} 1937 kg
Querträger, Vernietung und Windverband . . . . .	$\frac{29782}{42,6} = 699$	
Belageisen, Fußsteigeisen, Geländer . . . . .	$\frac{24489}{42,6}$	
		580 kg 2517 kg.

Bei der Montage ist die Brücke von Widerlager zu Widerlager vorgeschoben worden. Trotz der großen Entfernung der Pfosten waren die Gurtungen hinreichend stark, um den Übergang der Rollen beim Verschieben zuzulassen. Auch hat sich dieser Vorgang bewerkstelligen lassen, ohne daß irgendwelche Verstärkungen und Absteifungen erforderlich gewesen wären; die Gurtungen haben in keiner Weise gelitten. Es waren nur zwei Rollensätze für jeden Hauptträger vorhanden, bei einem Eigengewicht von 107 t.

Nachdem die Brücke an Ort und Stelle gebracht war und allein das Eisengewicht von 107 t trug, hat sie sich um 35 mm durchgebogen.

Nach Aufbringung der vollständigen Fahrbahn und der Bürgersteige, was mit dem Eisen ein Eigengewicht von 181 t ausmacht, erreichte die Durchbiegung 57 mm. Sie hat sich während einer Woche vergrößert wegen der Nachgiebigkeit der Nietverbindungen, einer hinlänglich bekannten Erscheinung.

Am 29. November erreichte die Durchbiegung 70 bis 71 mm; seit der Zeit ist sie dieselbe geblieben. Alle Ergebnisse stimmen mit der Berechnung überein. Da die Brücke mit einer Überhöhung von 80 mm ausgeführt ist, so bleibt eine Sprengung nach oben von 10 mm.

Die Probelastung der Brücke mit einem 18 000 kg schweren, mit fünf Pferden bespannten Lastwagen fand am 24. Dezember 1904 statt: Der Wagen war auf eine schiefe Ebene gestellt worden, um die Anfahrt zu erleichtern; er kam mit einer gewissen Geschwindigkeit auf der Brücke an; trotz dieser dynamischen Wirkung hat man kaum eine leichte Vibration verspürt; der Wagen wurde so gestellt, daß sein Schwerpunkt genau in der Mitte der Brücke lag; die nach einer Viertelstunde ermittelte Biegung betrug 8 mm; nach Verlauf einer halben Stunde hatte sie sich nicht verändert. Die Rechnung bestimmte mit  $E = 18\,000\,000 \text{ kg/cm}^2$  eine solche von 11 mm. Nachdem der Wagen die Brücke verlassen hatte, verschwand die Durchbiegung vollständig, eine bleibende Änderung trat nicht ein. Die Brücke hatte ihre erwähnte Sprengung von 10 mm wieder erhalten.

Die für eine Belastung von 1800 kg pro lfd. m, das sind 75,6 t Totalbelastung, errechnete Durchbiegung beträgt mit  $E = 18\,000\,000 \text{ kg/cm}^2$  24 mm. Nach den für den 18-t-Wagen festgestellten Ergebnissen wird sie 20 mm nicht überschreiten.

\* \* \*

### 33. Brücke bei Ousselghem.

Die Brücken von Ousselghem und Charleroi sind im Jahre 1910 ausgeführt. Ich will kurz die in Abbn. 33 bis 37 dargestellte Brücke bei Ousselghem beschreiben.

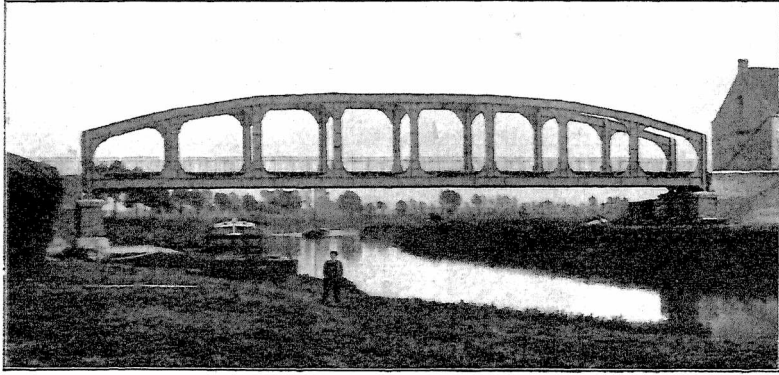


Abb. 33.

Die Brückenlänge zwischen den Achsen der Stützen beträgt 44,40 m; ihre Breite zwischen den Achsen der Träger 5,30 m.

Die Chaussee besteht aus Porphyrpflastersteinen, die auf Eisenbetonplatten ruhen; die Fußsteige bestehen aus gleichfalls auf Eisenbetonplatten verlegten Fliesen. Die Brücke ist berechnet für eine Menschenlast von 2000 kg pro lfd. m

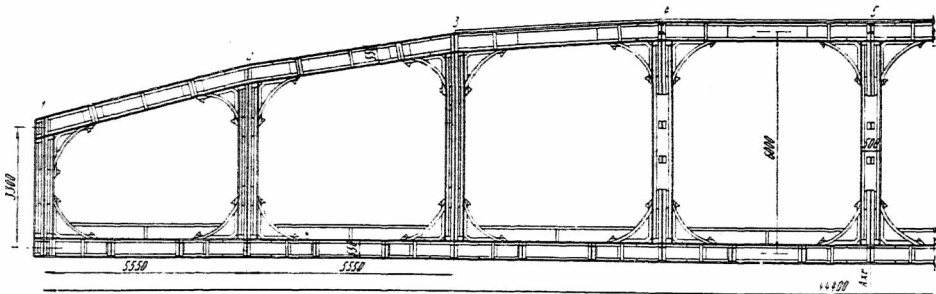


Abb. 34.

und für einen zweiachsigen 18 t schweren Lastwagen. Die Berechnung des Trägers ist vorher in Kapitel III § 3 gegeben. Das verwandte Material ist basisches Flußeisen mit folgenden charakteristischen Eigenschaften:

- a) Bruchfestigkeit: 40 bis 50 kg/mm<sup>2</sup>,
- b) Elastizitätsgrenze: 25 kg,
- c) Kleinste Dehnung auf 200 mm: 20 %,
- d) Qualitätskoeffizient: mindestens 900.

Der Qualitätskoeffizient bedeutet das Verhältnis von Bruchfestigkeit zur Dehnung.

Das Flußeisen muß bei jeder beliebigen Probe beständig sein.

Die zulässige Beanspruchung ist in den Berechnungen auf 13 kg/mm<sup>2</sup> bemessen. Man sieht, daß diese Beanspruchung höher als die bei Gitterträgern zugelassene ist, aber man muß auch daran denken, daß unsere Berechnung beide Arten der Beanspruchung berücksichtigt: die durch unmittelbaren Druck oder

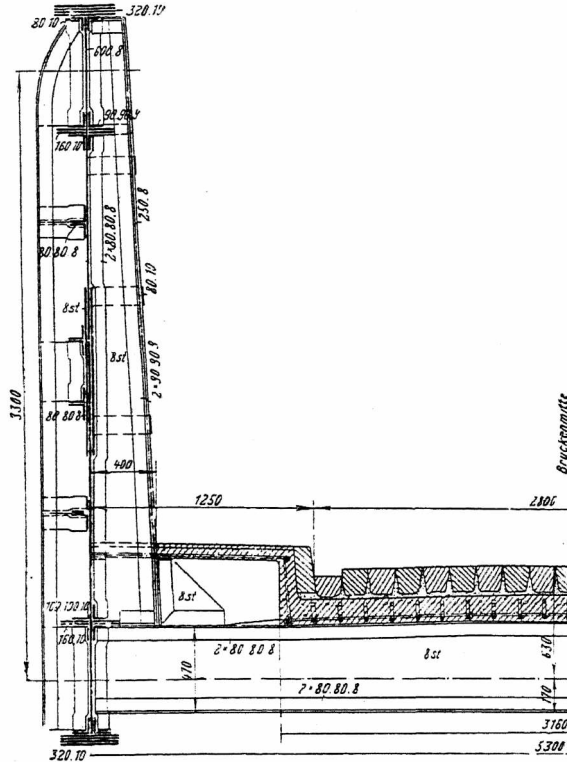


Abb. 35.

Zug und die durch Biegung (Nebenspannungen) hervorgerufenen, während man bei Gitterträgern letztere Beanspruchungen vernachlässigt.

Ich glaube, der Vierendeel-Träger kann mit 15 kg/mm<sup>2</sup> berechnet werden.

In der Brücke ist an Eisen enthalten:

Walzflußeisen . . . . .	94 700 kg
Schmiedeeisen für die Geländer . . . . .	3 213 „
Gußeisen für die Lager . . . . .	3 400 „
Gesamt . . . . .	101 313 kg

Das alles ist geliefert und vollkommen fertiggestellt für 31 200 fr.

Die Probelastung hat am 25. Oktober 1910 stattgefunden: ein mit 5 Pferden bespannter 18-t-Wagen hat während 2 1/2 Stunden mitten auf der Brücke

gestanden; nach Verlauf der ersten halben Stunde betrug die Durchbiegung 7 mm; sie hat sich nicht geändert und betrug noch 7 mm nach  $2\frac{1}{2}$  Stunden. Die Rechnung ergab eine Durchbiegung von 12 mm.

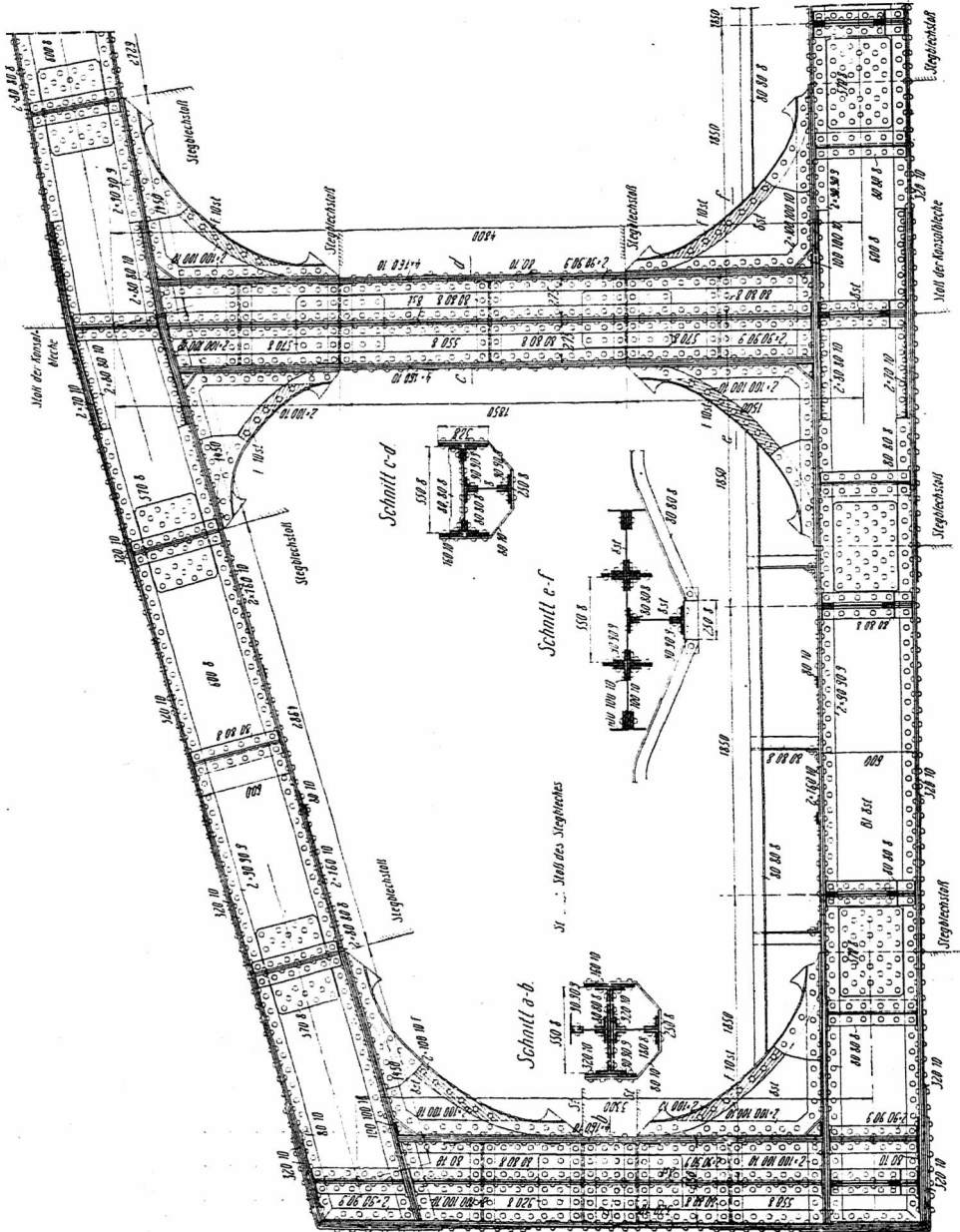


Abb. 36.

Während des Übergangs der Pferde und des Wagens über die Brücke waren die Vibrationen unsichtbar und nicht wahrzunehmen.



Abb. 37 gibt die Verbindungsart der Pfosten auf den Gurtungen bei der Brücke von Ousselghem an. Für die Brücke von Charleroi ist diese Verbindung noch vereinfacht. Die Konsolen sind nach Abb. 38 zusammengesetzt; das umgebogene Winkeleisen ist, wie man sieht, durch zwei gestoßene ersetzt. Das macht jede Schmiedearbeit unnötig, denn das Krümmen des gekrümmten Winkeleisens läßt sich in kaltem Zustand machen.

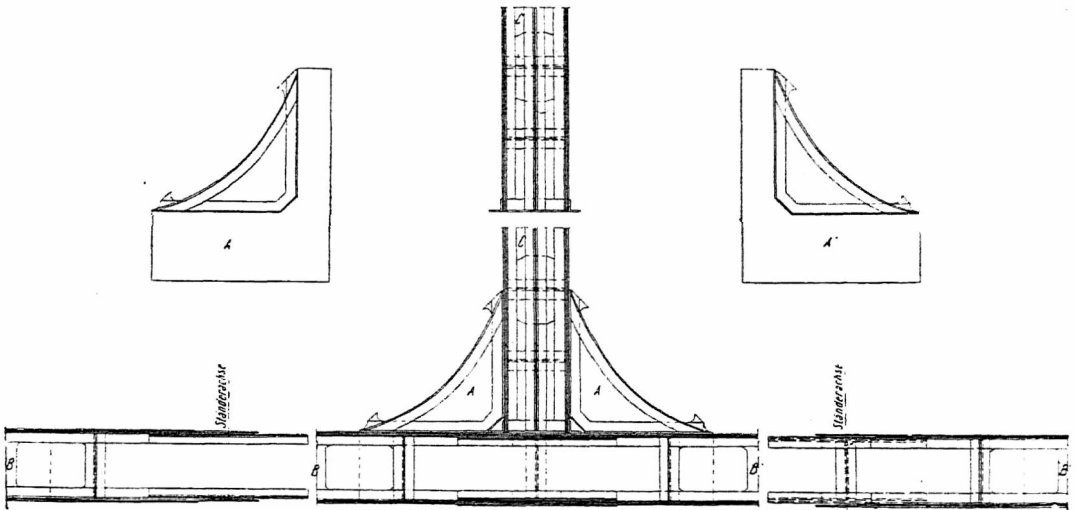


Abb. 37.

Kurz, neue Brücken dieser Bauart sind nach der Anordnung der Abb. 39 auszubilden, sie gestattet ersichtlich eine Ersparnis an Gewicht, ohne den Arbeitslohn zu erhöhen.

\* \* \*

### 34. Brücken mit ungleichen Gurtungen.

Für alle bisher besprochenen Brücken sind die beiden Gurtungen gleich. Sie haben, sowohl der obere wie der untere Gurt, gleiche Höhe, gleichen Querschnitt und gleiches Trägheitsmoment.

Abb. 40 stellt einen Entwurf mit ungleichen Gurtungen dar, den der Verfasser für eine Brücke von 52 m Spannweite aufgestellt hat; die Besonderheit dieses Entwurfes besteht darin, daß der untere Gurt 1 m hoch ist, während der obere eine Höhe von nur 50 cm hat. Dies ermöglicht es, der Konstruktion ein leichteres Aussehen zu geben, denn der untere Gurt liegt unter dem Brückenbelag.

Die Berechnung der  $\pi$ - und  $q$ -Werte dieses Trägers mit ungleichen Gurtungen erfolgt ebenso wie bei einem mit gleichen, s. Kap. II, § 2 und § 3.

Für die Berechnung der sekundären Biegemomente muß man vorläufig die Lage des Momenten-Nullpunktes bestimmen: es sei  $y$  die Ordinate dieses Punktes,

gemessen von der Achse der unteren Gurtung aus, und  $H$  die Höhe des zu

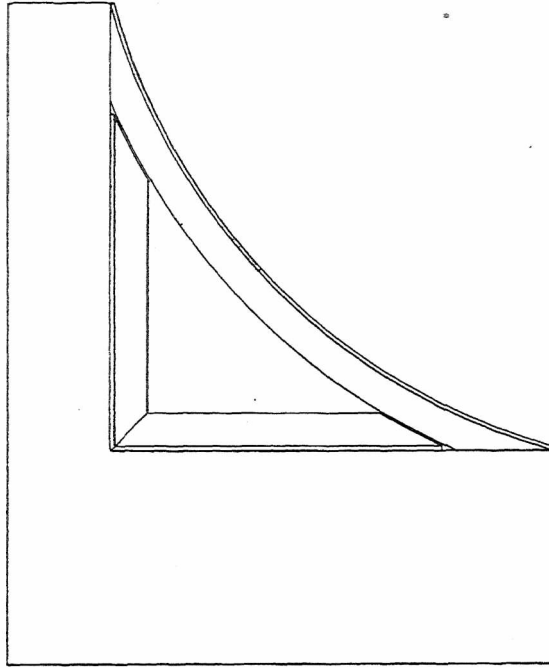


Abb. 38.

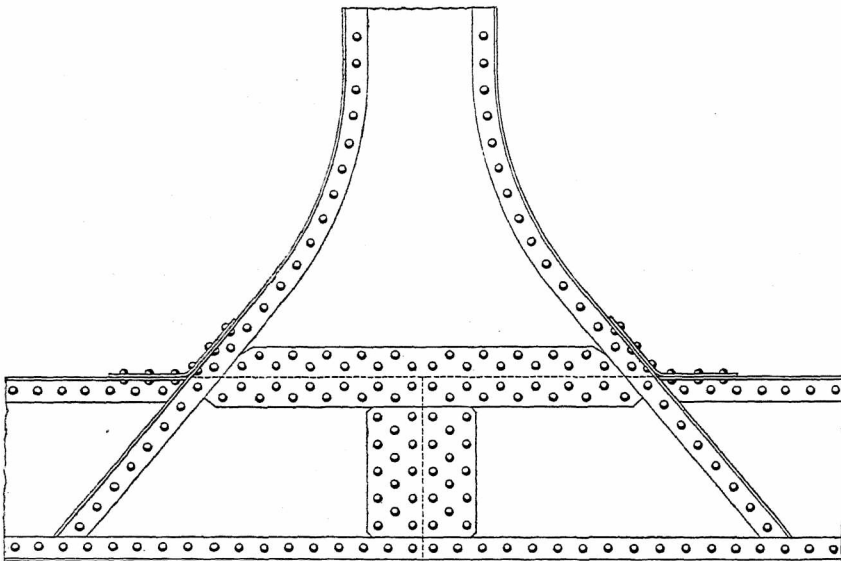


Abb. 39.

untersuchenden Pfostens, gemessen von Achse zu Achse der beiden Gurtungen.

$I'$  und  $I''$  seien die Trägheitsmomente der beiden Gurtungen.  $dx$  und  $ds$  seien die Längen der unteren und oberen Gurtung, gemessen zwischen zwei unendlich nahen Ordinaten. Für das vor dem zu untersuchenden Pfosten liegende Feld nehmen wir einen Koeffizienten  $a$  an, ausgedrückt durch:

$$a = \frac{I' dx}{I'' ds}$$

und für das Feld hinter dem Pfosten:

$$a_1 = \frac{I' dx}{I'' ds}$$

Wir erhalten als Wert der gesuchten Ordinate  $y$ :

$$(I) \quad y = \frac{I}{I + \frac{I}{2}(a + a_1)} \times H.$$

s. Kapitel III, § I n° 12.

Mittelst dieses Ausdruckes (I) kann man die Lage des Momenten-Nullpunktes auf jeden Pfosten ermitteln. Ist diese Lage bekannt, so erfolgt die Berechnung

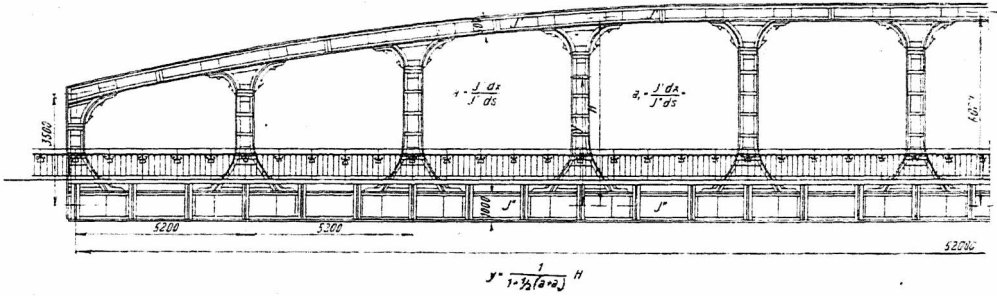


Abb. 40.

der Biegemomente des Trägers mit ungleichen Gurtungen ebenso wie beim Träger mit gleichen Gurtungen.

Hat der Balken gleiche und parallele Gurtungen ( $I' = I''$ ), also  $dx = ds$ , so liefert Formel (I)  $y = \frac{H}{2}$ , das heißt der Momenten-Nullpunkt liegt in halber Höhe der Pfosten.

Ist der obere Gurt gelenkig, also  $I' = 0$ , so ist  $a = 0$ ,  $a_1 = 0$  und Formel (I) liefert uns  $y = H$ , d. h. der Momenten-Nullpunkt der Pfosten liegt in Höhe der Achse der oberen Gurtung. In diesem Falle müssen alle sekundären Biegemomente, die von den Lasten erzeugt sind, vollständig durch die untere Gurtung im Gleichgewicht gehalten werden. Das trifft zu im Falle der Abb. 41. Die obere Gurtung ist gelenkig; sie hält nur Druckbeanspruchungen das Gleichgewicht. Die untere Gurtung ist starr; sie hält dem Zug und den verschiedenen Momenten das Gleichgewicht.

Dieser Träger, Abb. 41, ist das Gegenteil des gewöhnlichen Entwurfs, nämlich eines starren, von einer Zugstange gehaltenen Bogens. Im letzteren Fall hält der

Bogen dem Druck und den Biegemomenten das Gleichgewicht; die Zugstange nimmt nur den Zug auf, während im Fall der Abb. 41 das Gegenteil zutrifft.

Kurz, man kann die Lage des Momenten-Nullpunktes auf den Pfosten beliebig wählen, und das bietet in gewissen Fällen Vorteile.

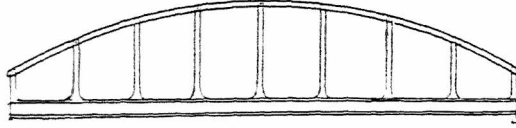


Abb. 41.

So ist Abb. 42 ein Vierendeel-Träger, indem  $I'' = 0$ ,  $a = \infty$ ,  $a_1 = \infty$  ist, und Formel (I) liefert  $y = 0$ . Der Momenten-Nullpunkt liegt am Fuß der Pfosten; die untere Gurtung ist ein einfaches Zugband.

\* \* \*

### 35. Brücken mit großer Spannweite.

Die Wirtschaftlichkeit des Vierendeel-Systems nimmt mit zunehmender Spannweite der Brücke zu.

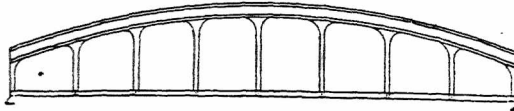


Abb. 42.

Sie tritt erst in die Erscheinung bei Brücken von 25 bis 30 m Länge, und nimmt von da an zu für Brücken von 50, 100 m und darüber.

Abb. 43 zeigt die Anordnung der Verbindung von Pfosten und Gurtungen für Brücken von über 100 m.

Vermittelt dieser Anordnung erhalten die Brücken eine große Einfachheit im Entwurf und sind in der Werkstatt sehr einfach auszuführen. Die Gurtungen sind einfache Balken in Doppel-T-Form; 100 kg kosten 22 bis 33 fr.; auf diese Gurtungen werden die Pfosten aufgebolzt.

\* \* \*

### 36. Vierendeel-Träger aus armiertem Beton.

Im Jahre 1899 hatte Verfasser ein belgisches Patent auf die Anwendung des Trägers ohne Diagonalen für Balken aus armiertem Beton genommen. 1905 hat er auf der Ausstellung in Lüttich gezeigt, daß man bei Verwendung dieses Typs erhebliche Spannweiten (50 m) bewältigen kann, und zwar wirtschaftlicher, als wenn man Gewölbe aus armiertem Beton verwandt hätte.

Die Theorie der Vierendeel-Träger in armiertem Beton ist dieselbe, wie sie eben für gleichartige Träger aus Schmiede- oder Flußeisen aufgestellt worden ist.

In der Tat kann man bei statisch unbestimmten Systemen aus Eisenbeton (das sind solche, bei denen die Reaktionen von den Deformationen abhängen), dem, sei es auf Zug, sei es auf Druck, beanspruchten Beton denselben Elastizitätskoeffizienten beilegen, woraus folgt, daß die Berechnung des Trägers aus Eisenbeton dieselbe ist, wie bei einem Träger aus homogenem Material. Die Formeln zur Bestimmung

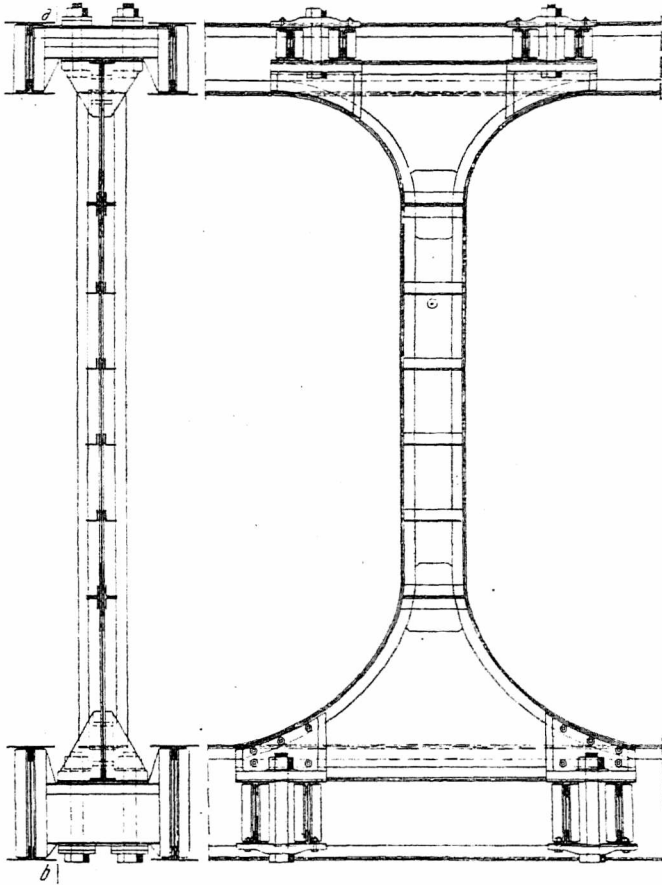


Abb. 43.

des  $\pi$  und  $q$  und des Momenten-Nullpunkts auf den Pfosten sind absolut dieselben; im übrigen sind diese Formeln unabhängig vom  $E$  und  $I$ , d. h. vom Elastizitätskoeffizient des Materials und vom Trägheitsmoment der Querschnitte.

Das System ohne Diagonalen hat in Deutschland, Österreich und der Schweiz eine gewisse Ausdehnung gefunden; man hat bisher einige 30 Brücken dieses Typs ausgeführt; die einen mit parallelen Gurtungen, die anderen mit oben gekrümmten Gurtungen. Die größte bis jetzt ausgeführte Spannweite (Dezember 1911) beträgt 40 m.





# Inhalts-Verzeichnis

---

## I. Kapitel

### Allgemeine Theorie

## II. Kapitel

### Träger mit parallelen Gurtungen

N <sup>o</sup>		Seite
7	Allgemeine Formel . . . . .	8
8 und 9	Allgemeine Formel für den Fall, daß der eine der Gurte gelenkig ist	9
10	Anwendung . . . . .	11

## III. Kapitel

### Träger mit nicht parallelen Gurtungen

#### § 1. Allgemeine Formeln

#### § 2. Träger mit geradem unteren und polygalem oberen Gurt

19	Allgemeine Formel des Trägers . . . . .	21
20	Allgemeine Formel, vereinfacht . . . . .	24

#### § 3. Berechnung eines Halbparabel-Trägers

#### § 4. Durchbiegung

#### § 5. Berechnung eines Parabel-Trägers

## IV. Kapitel

### Ausgeführte Träger

31	Verschiedene eiserne Brücken . . . . .	38
32	Brücke über die Schelde bei Avelghem . . . . .	39
33	Brücke bei Ousselghem . . . . .	42
34	Brücken mit ungleichen Gurtungen . . . . .	45
35	Brücken mit großer Spannweite . . . . .	48
36	Vierendeel-Träger aus armiertem Beton . . . . .	48



A. Bagel, Verlag



in Düsseldorf 112

# Handbuch der Baustatik

Vorträge und Abhandlungen von

**A. F. ZSCHETZSCHE**

ord. Professor an der K. K. Technischen  
Hochschule in Wien

**Anordnung, statische Kennzeichnung  
und statische Wertung der Tragwerke  
mit Berücksichtigung der  
Kriegsbrückensysteme**

Des Gesamtwerkes Erster Band

Ein starker Band von 552 Seiten mit 379 Abbildungen, 29 Tabellen  
und 10 Tafeln. In Ganzleinen Mark 25,—.

---

Bei der Stoffbehandlung tritt augenfällig zutage, daß dem Autor die Erreichung der gesteckten Ziele als das Hauptsächliche vorschwebt, die nach den Zielen hinführenden Wege aber nach Anlage und Benutzungsart als ein Nebensächliches erscheinen; hiernach bilden die wissenschaftlichen Behelfe, die der Autor zuzuziehen Anlaß findet, mehr oder minder Einstreuungen im breiten Zuge des eigentlichen Darlegungsganges. Die gedachte Behandlungsweise entsprang aus dem Entwicklungsgange des Autors und seiner Auffassung vom Ingenieurwesen, das er als eine eminent praktische und wirtschaftliche Tätigkeit hoch einschätzt.









