

Spis treści

Wstęp	7
Ireneusz Kuropka: Przydatność wybranych modeli umieralności do prognozowania natężenia zgonów w Polsce	9
Joanna Krupowicz: Wykorzystanie zmiennych wyprzedzających do prognozowania procesu urodzeń	21
Wioletta Wolańska: Perspektywy starzenia się ludności Polski do roku 2035	36
Marcin Błażejowski: Prognozowanie miesięcznej stopy bezrobocia dla Polski oraz województw za pomocą algorytmów X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS	49
Jacek Szandula: Diagnostowanie i prognozowanie długości cykli nieregularnych	60
Włodzimierz Szkutnik, Maciej Pichura: Analiza wewnątrzsesyjnej zmienności wartości kontraktów terminowych z zastosowaniem modeli klasy ARCH/GARCH	72
Maria Szmuksta-Zawadzka, Jan Zawadzki: O prognozowaniu na podstawie modeli Holta-Wintersa dla pełnych i niepełnych danych	85
Konstancja Poradowska: Prawo propagacji niepewności w ocenie dopuszczalności prognoz	100
Dorota Appenzeller: Wartość kapitału intelektualnego firmy a prognozowanie upadłości	112

Summaries

Ireneusz Kuropka: Selected mortality models utility in death density forecasting in Poland	20
Joanna Krupowicz: The leading indicators used to forecasting the number of birth in Poland	35
Wioletta Wolańska: Ageing of the Polish population till the year 2035	48
Marcin Błażejowski: Forecasting monthly unemployment rate in Poland and Poland's voivodeships with the use of X-12-ARIMA and TRAMO/SEATS algorithms	59
Jacek Szandula: Diagnosing and forecasting a length of irregular cycles	71
Włodzimierz Szkutnik, Maciej Pichura: Intraday volatility analysis of futures contracts using ARCH/GARCH models	83

Maria Szmuksta-Zawadzka, Jan Zawadzki: Forecasting on the basis of holt-winter's models for complete and incomplete data	99
Konstancja Poradowska: Law of propagation of uncertainty in measuring forecast accuracy	111
Dorota Appenzeller: Value of companies' intellectual capital in business failure forecasting	120

Maria Szmuksta-Zawadzka

Politechnika Szczecińska

Jan Zawadzki

Akademia Rolnicza w Szczecinie

O PROGNOZOWANIU NA PODSTAWIE MODELI HOLTA-WINTERSA DLA PEŁNYCH I NIEPEŁNYCH DANYCH

Streszczenie: Praca poświęcona jest praktycznym aspektom wykorzystania modeli Holta-Wintersa w prognozowaniu zmiennych wykazujących wahania sezonowe na podstawie pełnych szeregów czasowych oraz szeregów z lukami w danych. Autorzy sformułowali przesłanki wyboru równań do celów prognozowania inter- i ekstrapolacyjnego. Ze względu na zbliżone oceny mierników $MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$ do prognozowania należy wybierać kilkanaście modeli różniących się dość znacznie kombinacjami stałych wygładzenia. Do budowy prognoz *ex ante* powinny zostać wybrane spośród nich modele charakteryzujące się minimalnymi ocenami błędów prognoz *ex post*.

Słowa kluczowe: dane pełne i niepełne, prognozowanie, model Holta-Wintersa.

1. Wstęp

Modele Holta-Wintersa należą do najczęściej wykorzystywanych modeli adaptacyjnych (wyrównywania wykładniczego) w prognozowaniu zmiennych z wahaniami sezonowymi na podstawie kompletnych szeregów czasowych, zwłaszcza w sytuacji, gdy nie jest spełniona zasada dynamicznego *status quo*. Wyróżnia się dwie postaci modelu [Dittmann 2003]: addytywną i multiplikatywną. Składają się one z trzech równań opisujących kolejno: operator rzędu pierwszego (m_t), parametr kierunkowy trendu (δ_{1t}) oraz efekt sezonowy (składniki lub wskaźniki sezonowości – C_t). Analityczne zapisy modeli dane są równaniami (1)-(8).

Równania dla postaci addytywnej przedstawiają się następująco:

$$m_t = \alpha(Y_t - C_{t-m}) + (1 - \alpha)m_{t-1}, \quad (1)$$

$$\delta_{1t} = \beta(m_t - m_{t-1}) + (1 - \beta)\delta_{1t-1}, \quad (2)$$

$$C_t = \delta(Y_t - m_t) + (1 - \delta)C_{t-m}, \quad (3)$$

gdzie: m oznacza długość okresu wahań periodycznych (np. 12 miesięcy), zaś α , β , δ są stałymi wygładzania przyjmującymi wartości z przedziału $[0,1]$.

Predyktor oparty na tym modelu wyraża się wzorem:

$$\Pi = m_{t_0} + \delta_{t_0} h + C_{t_0-m+h}. \quad (4)$$

Natomiast zapis postaci multiplikatywnej jest następujący:

$$m_t = \frac{\alpha Y_t}{C_{t-m}} + (1-\alpha)(m_{t-1} + \delta_{t-1}), \quad (5)$$

$$\delta_t = \beta(m_t - m_{t-1}) + (1-\beta)\delta_{t-1}, \quad (6)$$

$$C_t = \frac{\delta Y_t}{m_t} + (1-\delta)C_{t-m}. \quad (7)$$

Oceny C_t są wskaźnikami sezonowości. Predyktor oparty na modelu danym równaniami (5)-(7) przyjmuje postać:

$$\Pi = (m_{t_0} + \delta_{t_0} h) C_{t_0-m+h}. \quad (8)$$

Z prognozowaniem na ich podstawie wiążą się dwa problemy:

- wyбір wartości początkowych : m_0 , δ_{10} , C_{t-m} , dla $t = 1, \dots, 12$,
- wyбір modelu o najlepszych własnościach predyktywnych.

Wartości początkowe (startowe) wyznaczane są najczęściej na podstawie $m + 1$ początkowych wartości szeregu. W praktycznych zastosowaniach na ogół jesteśmy skazani na procedury ich wyboru „wmontowane” do programów obliczeniowych (jeśli program nie przewiduje wprowadzenia tych wartości).

Z kolei w drugim przypadku najczęściej wybierany jest model, któremu odpowiada minimalna ocena średniego względnego błędu wartości wyrównanych, a ściślej rzecz ujmując $n - m + 1$ „prognoz” obliczonych dla przedziału czasowego „próby”:

$$MAPE^{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{1}{n - m + 1} \sum_{t=m+2}^n \frac{Y_{tp}^{\wedge \alpha, \beta, \gamma}}{Y_t}. \quad (9)$$

Wybór ten stwarza z jednej strony problemy natury obliczeniowej, polegające na konieczności liczenia c^3 kombinacji parametrów, gdzie c jest liczbą wartości przyjmowanych przez każdy z parametrów wygładzania (α , β , γ). Natomiast z drugiej strony – ograniczenie się tylko do kombinacji o minimalnej ocenie tego

miernika nie gwarantuje otrzymania najlepszych prognoz *ex ante*. Ponadto różnice ocen dla kolejnych kombinacji bardzo często nie przekraczają kilku dziesiątych punktu procentowego. Stąd w swej wcześniejszej pracy autorzy niniejszego artykułu [Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki 2007] proponują wybór nie jednego, a dziesięciu modeli o najniższych ocenach miernika $MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$, a następnie obliczenie prognoz i przeprowadzenie ich empirycznej weryfikacji. Autorzy postulują, aby do budowy prognoz *ex ante* wybierać modele, które charakteryzują się najniższymi ocenami błędów względnych prognoz *ex post*. Zasadność takiego postępowania zostanie sprawdzona w pracy.

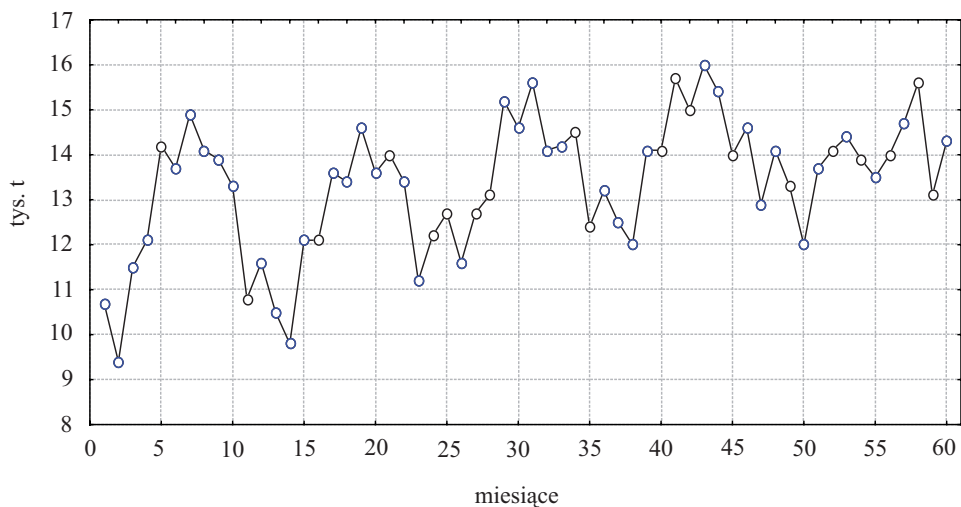
Szerokie wykorzystanie w badaniach empirycznych modele Holta-Wintersa zawdzięczają temu, że wchodzą w skład modułów prognostycznych w najbardziej znanych pakietach statystyczno-ekonometrycznych: STATGRAPHICS i STATISTICA. W pierwszym z nich modele o optymalnych własnościach predyktywnych znajdują się przez ich wybór spośród c^3 kombinacji stałych wygładzania. W przypadku pakietu STATISTICA istnieje możliwość automatycznego wyboru modeli z optymalnymi kombinacjami stałych wygładzania oraz możliwość wprowadzania wartości początkowych (wyjściowych). Istotną niedogodnością jest jednak to, że STATISTICA wymaga dysponowania danymi dotyczącymi sześciu cykli. W przypadku pakietu STAGRAPHICS wystarczające są dane obejmujące tylko dwa cykle.

Modele Holta-Wintersa mogą być wykorzystywane do prognozowania brakujących danych jedynie w przypadku, gdy szereg zawiera $m + 1$ wyrazów początkowych, które są potrzebne do wyznaczenia wartości startowych. Spośród dwóch wymienionych wcześniej pakietów statystyczno-ekonometrycznych do prognozowania zmiennych z wahaniami sezonowymi w warunkach braku pełnej informacji w sposób bezpośredni może być wykorzystany jedynie STATGRAPHICS. Niemożność wykorzystania pakietu STATISTICA wynika z tego, że luki w danych są uzupełniane automatycznie, za pomocą jednego z kilku sposobów, z których żaden nie uwzględnia występowania wahań sezonowych. Oznacza to, że może on być wykorzystany w ramach procedury dwustopniowej dla danych oczyszczonych z sezonowości. Najpierw, po automatycznym uzupełnieniu luk, buduje się prognozy na podstawie modeli nie uwzględniających występowania wahań sezonowych, a następnie mnoży się je przez wskaźniki sezonowości.

2. Modelowanie i prognozowanie dla pełnych danych

W dalszej części pracy na przykładzie zmiennej charakteryzującej się dość silnym natężeniem wahań sezonowych zostaną omówione spostrzeżenia związane najpierw z modelowaniem i prognozowaniem dla pełnych danych, a następnie dla danych z lukami. Rozważania będą prowadzone na przykładzie prognozowania produkcji masła. Miesięczne dane statystyczne obejmują lata 2002-2006, przy czym rok 2006

jest okresem empirycznej weryfikacji prognoz. Kształtowanie się produkcji masła w latach 2002-2006 przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Kształtowanie się produkcji masła w Polsce w latach 2002-2006 według miesiący

Źródło: opracowanie własne.

Badana zmienna charakteryzuje się dość silnym natężeniem sezonowości. Minimum sezonowe przypada na luty, a maksimum – na lipiec. Różnica pomiędzy skrajnymi ocenami wskaźników przekracza 32,5 punktu procentowego. Kształtowanie się tych ocen zestawiono w kolumnie drugiej tab. 1. W kolumnie trzeciej liczbami rzymskimi podana została kolejność wskaźników (od najmniejszego do największego).

Badanie wpływu rozmieszczenia luk w danych oraz ich sekwencji na dokładność prognoz inter- i ekstrapolacyjnych poprzedzone zostanie omówieniem relacji zachodzących między własnościami predyktywnymi mierzonymi jakością opisu wartości wyrównanych ($MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$) a przeciętną względną dokładnością prognoz ekstrapolacyjnych dla pełnych danych.

Do budowy prognoz zostało wybranych wstępnie 10 modeli charakteryzujących się minimalnymi ocenami miernika $MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$. Postąpiono tak, ponieważ różnica ocen między modelem pierwszym i dziesiątym w kolejności była niższa niż 0,06 punktu procentowego. Parametr α w modelach należących do wybranej dziesiątki, przyjmujący wartości 0,8 lub 0,9, informuje o nadaniu wyższych wag najnowszym informacjom o zmiennej prognozowanej. Następnie na ich podstawie zbudowane zostały prognozy ekstrapolacyjne oraz przeprowadzona została analiza *ex post* ich dokładności. Jako kryterium dopuszczalności przyjęto 15-procentowy błąd względny, a długość horyzontu prognozy $h = 12$ miesięcy.

Tabela 1. Oceny wskaźników sezonowości

Miesiąc	Ocena	Ranga
Styczeń	89,5	III
Luty	83,48	I
Marzec	97,2	V
Kwiecień	98,05	VI
Maj	110,64	XI
Czerwiec	106,48	VIII
Lipiec	116,05	XII
Sierpień	107,12	IX
Wrzesień	107,28	X
Październik	104,37	VII
Listopad	86,76	II
Grudzień	93,07	IV

Źródło: obliczenia własne.

W toku analizy *ex post* okazało się, że żaden z modeli nie spełniał tego kryterium (błędy względne zawarte były w przedziale od 22,3 do 34,6%). Dlatego też postanowiono zwiększyć liczbę modeli do 30. Jednak nie były to modele zajmujące miejsca od 11. do 30., ponieważ prognozy otrzymane na ich podstawie również nie spełniały kryterium dopuszczalności. Parametry α w tych modelach były równe 0,7, 0,8 lub 0,9. W wyborze dodatkowych dwudziestu modeli wykorzystano fakt, że obliczenia były prowadzone osobno dla trzech podzbiorów wartości parametru α : A(0,1; 0,2; 0,3), B(0,4; 0,5; 0,6) oraz C(0,7; 0,8; 0,9), liczących po $3 \cdot 9^2 = 243$ modele. Ponieważ w skład pierwszej dziesiątki wchodziły modele z parametrami α zawartymi w przedziale 0,7-0,9, wybrano po dziesięć najlepszych modeli z podzbiorów A i B.

W tabeli 2 zestawionych zostało 30 modeli. Uszeregowane rosnąco oceny miernika $MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$ zawiera trzecia kolumna. Najniższymi ocenami zawartymi w przedziale od 3,79 do 3,86% charakteryzuje się rozpatrywana na początku pierwsza dziesiątka. W skład drugiej dziesiątki wchodzi modele należące do podzbioru B z ocenami od 4,138 do 4,148%. Trzecią dziesiątkę tworzą modele należące do podzbioru A z parametrami α równymi 0,1 lub 0,3 i z ocenami mierników od 4,89 do 5,05%. Zatem różnica między skrajnymi ocenami $MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$ wynosi 1,29 punktu procentowego. W czwartej kolumnie zestawione zostały oceny względnych błędów prognoz *ex post*. Z informacji w niej zawartych wynika, że kryterium dopuszczalności prognoz spełniają jedynie modele należące do trzeciej dziesiątki – z dość stabilnymi ocenami błędów zawartymi w przedziale od 6,22 do 8,20%. Zwracają uwagę także zaskakująco wysokie wahania błędów prognoz *ex post*, otrzymanych na podstawie modeli należących do drugiej dziesiątki (od 18,76 do 70,13%). Wśród nich można

Tabela 2. Oceny błędów względnych wartości wyrównanych i prognoz ekstrapolacyjnych oraz miejsca w rankingu

Lp.	Model	$MAPE^{a,b,\gamma}$	Błąd wzgl. prog. ekstr.	Miejsce w rankingu	Błąd wzgl. prog. 2007
1	HW1819	3,79	24,93	16	22,29
2	HW1818	3,80	25,10	17	22,72
3	HW1919	3,80	26,95	20	25,29
4	HW1817	3,81	25,27	18	23,13
5	HW1829	3,81	34,53	23	34,41
6	HW1828	3,81	34,59	24	34,78
7	HW1918	3,83	26,99	21	25,40
8	HW1816	3,83	27,03	22	23,54
9	HW1827	3,84	25,44	19	35,12
10	HW1917	3,86	22,29	15	25,52
11	HW1663	4,14	63,86	27	66,10
12	HW1664	4,14	64,76	28	66,49
13	HW1653	4,14	57,20	25	62,77
14	HW1654	4,14	57,74	26	62,63
15	HW1614	4,14	20,15	13	17,81
16	HW1615	4,14	19,46	12	16,52
17	HW1613	4,14	20,84	14	19,08
18	HW1674	4,15	70,13	30	66,72
19	HW1616	4,15	18,76	11	15,22
20	HW1673	4,15	68,94	29	65,98
21	HW1118	4,89	7,07	8	4,24
22	HW1117	4,91	6,92	7	3,89
23	HW1116	4,97	6,87	5	3,59
24	HW1119	4,97	7,32	9	4,63
25	HW1126	4,98	6,22	1	4,82
26	HW1127	5,00	6,27	2	5,01
27	HW1125	5,02	6,37	3	4,64
28	HW1128	5,04	6,53	4	5,27
29	HW1314	5,08	8,19	10	4,88
30	HW1115	5,08	6,89	6	3,30

Uwaga: w zapisie modeli przyjęto następujące oznaczenia: HW – model Holta-Wintersa, pierwsza cyfra oznacza numer wariantu, trzy kolejne cyfry oznaczają miejsca dziesiąte stałych wygładzania.

Źródło: obliczenia własne.

wyróżnić dwie podgrupy: pierwszą, składającą się z 4 modeli z błędami w granicach 20%, oraz drugą, zawierającą 6 modeli o błędach powyżej 57%. Podgrupy różnią się ocenami parametru β . W pierwszym przypadku wynosi on 0,1, a w drugim jest zawarty w przedziale 0,5-0,7.

W kolumnie przedostatniej podana została kolejność modeli ze względu na wartość oceny błędu prognoz *ex post*. Wynika z niej, że model o najlepszych własnościach predykcyjnych zajmuje 16. miejsce w rankingu modeli o najniższych błędach względnych prognoz *ex post*. Jeszcze niższą (25.) pozycję zajmuje model HW1126, charakteryzujący się minimalną oceną miernika dokładności prognoz *ex post*.

W celu zbadania siły i kierunku zależności między obu miernikami został obliczony współczynnik korelacji liniowej. Jego ocena wynosząca $-0,56$ wskazuje na dość silną ujemną zależność między nimi. Również ujemna jest ocena współczynnika korelacji rang ($-0,65$).

Z analizy porównawczej relacji, jakie zachodzą między ocenami miernika $MAPE^{\alpha, \beta, \gamma}$, mierzącego własności predykcyjne, a ocenami względnych błędów prognoz *ex post* wynika, że pierwszy miernik może odgrywać jedynie rolę pomocniczą w procesie wyboru modelu do celów predykcji. Natomiast decydującą rolę powinien odgrywać względny błąd prognoz *ex post*. Oparcie procedury wyboru wyłącznie na mierniku dokładności prognoz *ex post* stwarza jednak problem natury obliczeniowej, ponieważ wymaga obliczenia tych błędów dla wszystkich kombinacji stałych wygładzania (w naszym przypadku 729).

Zatem procedura zaproponowana powyżej, polegająca na wyborze większej liczby modeli różniących się znacznie stałą wygładzania α , wydają się być w pełni zasadna. Aby się przekonać, czy tak jest w istocie, zbudowane zostaną prognozy na rok 2007, a następnie przeprowadzona zostanie analiza *ex post* ich dokładności. Prognozy dla tego roku wyznaczono na podstawie szeregu czasowego wydłużonego o wielkości produkcji masła w roku 2006. Jako stałe wygładzania zostały przyjęte wielkości parametrów zawarte w kolumnie drugiej tab. 2. Oceny błędów względnych prognoz *ex post* dla roku 2007 zamieszczono w kolumnie ostatniej. Okazało się, że podobnie jak w roku 2006, prognozy dopuszczalne otrzymano jedynie na podstawie modeli należących do trzeciej dziesiątki. Minimalna ocena błędu względnego dla tego roku jest o prawie 3 punkty procentowe niższa od oceny minimalnej w roku poprzednim. Przemawia to w sposób jednoznaczny za wykorzystywaniem zaproponowanej procedury w wyborze modeli do celów prognozowania *ex ante*.

3. Prognozowanie w warunkach braku pełnej informacji

Proces wyboru modeli do budowy prognoz inter- i ekstrapolacyjnych będzie przebiegał w sposób analogiczny jak dla pełnych danych. W porównaniu z analizą dla pełnych danych rozszerzona ona zostanie o analizę błędów prognoz interpolacyjnych, tj. prognoz wyznaczonych dla tych miesięcy okresu estymacyjnego (przedziału czasowego „próby”), w których występowały luki. Dla każdego z 6 wariantów luk

liczonych będzie 729 kombinacji stałych wygładzania, po 243 dla każdego podzbioru parametrów α . Następnie z każdej z grup wybranych zostanie 10 modeli o najniższych ocenach mierników dokładności wartości wyrównanych.

Rozpatrywanych było 6 niżej wymienionych wariantów luk niesystematycznych, oznaczonych symbolami M2-M7. We wszystkich przypadkach założono, że dostępnych jest co najmniej pierwszych piętnaście obserwacji (od stycznia 2003 do marca 2004), a także pozostawiono ostatnią obserwację (dla grudnia 2006). Uwzględnienie danych początkowych było konieczne do wyznaczenia wartości początkowych (startowych). W celach porównawczych wyniki modelowania i prognozowania ekstrapolacyjnego będą konfrontowane z wynikami otrzymanymi dla wariantu bez luk w danych (M1).

Warianty z lukami w danych były następujące:

- M2 – luki występują w miesiącach parzystych (od kwietnia 2004),
- M3 – luki występują w miesiącach nieparzystych (od maja 2004),
- M4 – luki występują naprzemiennie w kolejnych dwóch miesiącach (od kwietnia 2004),
- M5 – wariant ten jest podobny do M4 z lukami rozpoczynającymi się od czerwca 2004,
- M6 – luki występują w drugim i czwartym kwartale,
- M7 – luki występują w pierwszym i trzecim kwartale.

Ze względu na obszerność obliczeń szczegółowe wyniki przedstawione zostaną w postaci tabelarycznej jedynie dla pierwszego wariantu luk w danych (M2).

Kolejność wskaźników sezonowości odpowiadająca lukom w danych dla tego wariantu dotyczy miesięcy środkowych o rangach: IV, VI-IX. Wyniki modelowania oraz prognozowania zestawione zostały w tab. 3. Tłustym drukiem zaznaczono modele charakteryzujące się minimalnymi ocenami błędów względnych odpowiednio: wartości wyrównanych oraz prognoz inter- i ekstrapolacyjnych. Zawarte w trzeciej kolumnie oceny miernika $MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$ dla wartości wyrównanych przyjmują wartości z przedziału od 5,38 do 5,80%. Różnica między wielkościami skrajnymi wynosi 0,42 punktu procentowego wobec 1,29 punktu dla pełnych danych. Równocześnie jednak minimalna jego wielkość, dla omawianego wariantu, jest o 0,33 punktu wyższa od maksymalnej dla wariantu M1. W skład pierwszej dziesiątki wchodzi modele z parametrami α równymi 0,1 lub 0,2. Drugą dziesiątkę w ośmiu przypadkach na dziesięć tworzą modele z parametrami α należącymi do przedziału 0,7-0,9.

Błędy względne prognoz interpolacyjnych (kolumna czwarta) mieszczą się w przedziale od 3,23 (model HW2915) do 6,50% (model HW2217). W następnej kolumnie podane zostały kolejności poszczególnych modeli ze względu na kształtowanie się błędów prognoz interpolacyjnych. Wynika z niej, że modele z pierwszej dziesiątki zajmują miejsca od 21. do 30. Świadczyć to może o istnieniu ujemnej zależności między dokładnością wartości wyrównanych a dokładnością prognoz interpolacyjnych. Ocena współczynnika korelacji wynosi $-0,740$, a współczynnika korelacji rang $-0,455$.

Tabela 3. Mierniki dokładności: wartości wyrównanych, prognoz inter- i ekstrapolacyjnych, oraz miejsca w rankingach dla wariantu M2

Lp.	Model	$MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$	Błąd wzgl. prog. inter.	Miejsce w rankingu	Błąd wzgl. prog. ekstr.	Miejsce w rankingu
1	HW2217	5,38	5,91	25	10,12	7
2	HW2218	5,39	6,11	27	10,23	9
3	HW2216	5,39	5,72	23	10,05	6
4	HW2219	5,42	6,30	29	10,41	10
5	HW2125	5,44	6,06	26	9,49	1
6	HW2126	5,45	6,29	28	9,57	3
7	HW2215	5,45	5,52	22	10,03	5
8	HW2124	5,46	5,82	24	9,53	2
9	HW2127	5,50	6,50	30	9,67	4
10	HW2214	5,52	5,31	21	10,17	8
11	HW2811	5,58	3,36	6	26,55	25
12	HW2611	5,58	3,71	11	21,57	20
13	HW2711	5,59	3,53	9	24,34	22
14	HW2812	5,61	3,36	7	26,41	24
15	HW2914	5,62	3,25	2	27,92	27
16	HW2913	5,63	3,26	3	27,96	28
17	HW2912	5,63	3,27	4	27,99	29
18	HW2911	5,63	3,29	5	28,03	30
19	HW2915	5,64	3,23	1	27,89	26
20	HW2612	5,65	3,76	12	21,11	19
21	HW2712	5,65	3,55	10	24,05	21
22	HW2813	5,65	3,37	8	26,28	23
23	HW2411	5,67	4,23	17	15,40	14
24	HW2511	5,67	3,88	15	18,48	16
25	HW2412	5,70	4,35	18	14,80	13
26	HW2613	5,72	3,80	13	20,66	18
27	HW2512	5,74	3,96	16	17,90	15
28	HW2413	5,74	4,47	19	14,25	12
29	HW2414	5,78	4,59	20	13,75	11
30	HW2614	5,80	3,84	14	20,21	17

Źródło: obliczenia własne.

W kolejnej kolumnie zostały podane oceny błędów względnych prognoz ekstrapolacyjnych i kolejność poszczególnych modeli w rankingu ze względu na wielkość tego błędu. Minimalną ocenę, wynoszącą 9,49%, otrzymano dla modelu HW2125. Jest ona o 3,2 punktu procentowego wyższa od oceny otrzymanej dla najlepszego modelu dla pełnych danych. Model ten był 19. wśród modeli dla wartości wyrównanych. Współczynnik korelacji między błędami wartości wyrównanych i błędami prognoz ekstrapolacyjnych wynosi 0,548, a korelacji rang 0,435. Oznacza to istnienie słabej dodatniej zależności między nimi. Model ten był aż 26. w klasyfikacji dokładności prognoz interpolacyjnych.

Jeżeli prześledzi się kolejność modeli dla obu rodzajów prognoz, to zauważymy niemal jej odwrócenie, tzn. najlepsze modele dla prognoz interpolacyjnych dają najgorsze prognozy ekstrapolacyjne i odwrotnie. O istnieniu silnej ujemnej zależności między nimi świadczą oceny współczynników korelacji liniowej i korelacji rang wynoszące odpowiednio: $-0,939$ i $-0,955$.

Oceną maksymalną błędu prognoz *ex post* charakteryzuje się model HW2911 (28,02%). Błędy te wykazują jednak znacznie mniejsze zróżnicowanie w porównaniu z wariantem M1. Spośród 30 modeli prognozy dopuszczalne otrzymano tylko dla 13, przy czym jedynie 3 pochodziły spoza pierwszej dziesiątki.

Obecnie przechodzimy do syntetycznej prezentacji wyników dla wszystkich wariantów (łącznie z wyżej omówionymi). Wyniki te zestawione zostaną w formie tabelarycznej i zawierać będą informacje o modelach charakteryzujących się najniższymi ocenami błędów względnych: wartości wyrównanych, prognoz interpolacyjnych oraz prognoz ekstrapolacyjnych, wraz z podaniem miejsc zajmowanych przez nie w rankingach. W osobnej tabeli zostaną podane oceny współczynników korelacji między trzema rodzajami błędów. W tabeli 4 zestawione zostały na głównych przekątnych (dla wszystkich wariantów) modele o najniższych ocenach błędów względnych:

- wartości wyrównanych (WW),
- prognoz interpolacyjnych (IN),
- prognoz ekstrapolacyjnych *ex post* (EX); dla wszystkich elementów leżących na tych przekątnych w nawiasach podano numery miejsc (1) zajmowanych w rankingu 30 modeli różniących się kombinacjami parametrów α , β oraz γ , wybranymi zgodnie z przedstawioną wcześniej procedurą.

Natomiast poza główną przekątną podane zostały odpowiednio względne mierniki dokładności i miejsca w rankingu, które zajęły modele najlepsze w danej klasie. Macierze odpowiadające poszczególnym wariantom nie są symetryczne, ponieważ przykładowo w pierwszych wierszach w kolumnie drugiej i trzeciej podane są odpowiednio: wielkości błędów prognoz inter- i ekstrapolacyjnych, a w nawiasach miejsca zajmowane przez modele o minimalnych błędach wartości wyrównanych (WW) w rankingu dokładności prognoz interpolacyjnych (IN) i prognoz ekstrapolacyjnych (EX). W pierwszej kolumnie, w drugim i trzecim wierszu, dla każdego wariantu,

podane zostały błędy wartości wyrównanych otrzymane dla modeli charakteryzujących się minimalnymi ocenami błędów prognoz inter- i ekstrapolacyjnych.

Tabela 4. Błędy względne: wartości wyrównanych, prognoz inter- i ekstrapolacyjnych, oraz miejsca w rankingu dla najlepszych modeli

Wariant	MODEL	Oznaczenia	Średnie błędy względne		
			WW	IN	EX
M1	HW1819	WW	3,79(1)	–	24,93(16)
	–	IN	–	–	–
	HW1126	EX	4,98(25)	–	6,22(1)
M2	HW2217	WW	5,38(1)	5,91(14)	10,12(7)
	HW2915	IN	5,04(19)	3,24(1)	27,89(26)
	HW2215	EX	5,45(1)	6,06((26)	9,45(1)
M3	HW3218	WW	4,35(1)	6,99(28)	10,67(17)
	HW3816	IN	4,88(30)	5,18(1)	19,80(30)
	HW3519	EX	4,77(21)	6,47(18)	9,08(1)
M4	HW4219	WW	4,22(1)	8,13(29)	12,42(8)
	HW4818	IN	4,83(30)	3,48(1)	24,73(27)
	HW4227	EX	4,56(12)	7,13(22)	11,90(1)
M5	HW5611	WW	5,24(1)	3,11(16)	14,37(22)
	HW5314	IN	5,37(14)	0,27(1)	8,49(6)
	HW5315	EX	5,37(13)	5,89(31)	8,22(1)
M6	HW6611	WW	5,71(1)	7,60(17)	14,57(21)
	HW6133	IN	5,84(14)	5,69(1)	9,57(4)
	HW6812	EX	5,79(10)	7,61(17)	9,36(1)
M7	HW7319	WW	3,87(1)	5,99(24)	10,05(2)
	HW7819	IN	4,99(30)	3,58(1)	23,92(22)
	HW7329	EX	4,24(12)	6,67(27)	9,28(1)

Źródło: obliczenia własne.

Analiza kształtowania się mierników dokładności: wartości wyrównanych oraz prognoz inter- i ekstrapolacyjnych dla wariantów luk w danych (M2-M7), prowadzona będzie w dwojaki sposób. Pierwszy z nich będzie polegał na wskazywaniu modeli o najniższych i najwyższych ocenach tych mierników dla wszystkich wa-

riantów w aspekcie modeli bez luk. Pozwoli to na ewentualne określenie wpływu sekwencji luk lub jej braku (luki pojedyncze) na dokładność prognoz. Analizowane ponadto będą pary wariantów: M2 i M3, M4 i M5 oraz M6 i M7, ponieważ układ luk w parach jest taki sam, różnią się one jedynie ich rozmieszczeniem.

Z analizy błędów wartości wyrównanych ($MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$) wynika, że najniższymi, niemal identycznymi jego ocenami charakteryzują się warianty: M1 (bez luk) oraz M7 (luki naprzemienne trzymiesięczne). Ocenę wyższą o 0,4-0,5 punktu procentowego otrzymano dla wariantów M3 i M4. W przypadku trzech wariantów M2, M5 i M6 błędy te kształtują się w przedziale od 5,24 (M5) do 5,71% (M7). Z analizy par wariantów wynika, że dla jednego wariantu błędy wartości wyrównanych kształtują się w granicach 4%, a dla drugiego powyżej 5%. Oznacza to, że rozmieszczenie luk w danych wpływa na wielkość tego miernika.

Podobną prawidłowość zaobserwowano w przypadku prognoz interpolacyjnych. W każdej parze dla jednego z wariantów błędy kształtują się w granicach 3,2-3,6%, a dla drugiego w granicach 5,18-5,69%. W przypadku drugiej i trzeciej pary mamy do czynienia z prawidłowością polegającą na tym, że wariantowi o niższej ocenie $MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$ odpowiada także niższa ocena błędów prognoz interpolacyjnych. Dla pierwszej pary jest dokładnie odwrotnie. Minimalną ocenę błędów prognoz interpolacyjnych otrzymano dla wariantu M2, a maksymalną, podobnie jak dla wartości wyrównanych, dla wariantu M3.

W przypadku błędów prognoz ekstrapolacyjnych minimalną oceną (6,22%) charakteryzuje się wariant M1 (bez luk). Spośród wariantów z lukami ocenę o 2 punkty procentowe wyższą otrzymano dla wariantu M5. Należy zauważyć, że wariant ten charakteryzował się jednymi z najwyższych ocen błędów: wartości wyrównanych i prognoz interpolacyjnych.

Dla czterech kolejnych wariantów błędy kształtują się w granicach od 9,08 (M3) do 9,45% (M2). Jedynie dla wariantu M4 błąd ten jest znacznie wyższy i wynosi 11,90%. Widzimy zatem, że w przypadku pierwszej i trzeciej pary wariantów różnice w ocenach błędów są nieznaczne i nie przekraczają 0,37 punktu procentowego. Różnicę istotną, wynoszącą ponad 3,5 punktu procentowego, otrzymano dla drugiej pary. Dla wariantu M5 była to wartość najniższa, a dla M4 – najwyższa. W wariantach tych luki występowały na przemian w kolejnych dwóch miesiącach. Trudno uznać za przyczynę różnicy w dokładności fakt, że w wariantach M5 znanych jest 17 wartości początkowych, a w wariantach M4 – 15. Również dwumiesięczna sekwencja luk nie wydaje się być zasadniczą przyczyną tego stanu rzeczy, ponieważ w wariantach M6 i M7 mamy do czynienia z sekwencją trzymiesięczną, a błędy względne prognoz ekstrapolacyjnych są niemal identyczne. Przyczyny tej należy poszukiwać raczej w układzie luk względem rang wskaźników sezonowości.

W wariantach M4 luki te odpowiadają następującym rangom ocen wskaźników sezonowości: VI, XI, IX, X oraz IV, III. Natomiast w wariantach M5 odpowiednio: VIII, XII, VII, II oraz I, V. Z analizy układu wskaźników sezonowości wynika, że mniej dokładnych prognoz należałoby raczej oczekiwać w wariantach M5, ponie-

waż suma bezwzględnej wielkości różnic w parach luk wynosi 13, a w wariancie M4 – tylko 7. Ponadto w wariancie M5 luki występują w miesiącach skrajnych w rankingu: I, II oraz XII. Jednak sytuacja wygląda odwrotnie. Jedynym w miarę racjonalnym wytłumaczeniem jest występowanie jednej pełnej potrójnej sekwencji rang wskaźników sezonowości, obejmującej miejsca: IX-XI, oraz drugiej quasi-sekwencji, obejmującej miejsca: III, IV oraz VI.

Tabela 5. Oceny współczynników korelacji między błędami wartości wyrównanych, prognoz interpolacyjnych i prognoz ekstrapolacyjnych

Wariant	MODEL	Oznaczenia	Współczynniki korelacji		
			WW	IN	EX
M1	H819	WW	1	–	–0,5596
	–	IN	–	–	–
	H126	EX	–0,5596	–	1
M2	H217	WW	1	–0,7370	0,4354
	H915	IN	–0,7370	1	–0,9393
	H215	EX	0,4354	0,9393	1
M3	H218	WW	1	–0,8694	0,5926
	H816	IN	–0,8694	1	–0,8411
	H519	EX	0,5926	–0,8411	1
M4	H219	WW	1	–0,8306	0,7862
	H818	IN	–0,8306	1	–0,9577
	H227	EX	0,7862	–0,9577	1
M5	H611	WW	1	0,4774	0,6865
	H314	IN	0,4774	1	0,6843
	H315	EX	0,6865	0,6843	1
M6	H611	WW	1	–0,4996	–0,5564
	H133	IN	–0,4996	1	0,6462
	H812	EX	–0,5564	0,6462	1
M7	H319	WW	1	–0,8001	0,8311
	H819	IN	–0,8001	1	–0,6669
	H329	EX	0,8311	–0,6669	1

Źródło: obliczenia własne.

Obecnie przechodzimy do analizy elementów w nawiasach leżących poza główną przekątną. Oznaczają one numery miejsc w rankingu błędów zajmowanych przez najlepsze modele dla wartości wyrównanych, prognoz interpolacyjnych i prognoz ekstrapolacyjnych. Dla większości wariantów mamy do czynienia ze znaczącymi różnicami miejsc. Odnosi się to zwłaszcza do prognoz interpolacyjnych względem wartości wyrównanych (warianty M3, M4, M6 i M7) oraz względem prognoz ekstrapolacyjnych (warianty M2-M4). Wskaźniki kolejności odpowiadające tym wariantom są wyższe od 25.

Z 52 elementów leżących poza główną przekątną tylko 7 należy do pierwszej dziesiątki, 11 do drugiej i aż 34 do trzeciej. Wskazuje to na istnienie dość silnej lub silnej zależności ujemnej między miernikami dokładności najlepszych modeli w danej klasie względem pozostałych dwóch klas. W całej rozciągłości potwierdzają to spostrzeżenia informacje zawarte w tab. 5, zawierającej oceny współczynników korelacji między miernikami dokładności wartości wyrównanych oraz prognoz inter- i ekstrapolacyjnych obliczone dla 30 modeli w każdym z wariantów.

Z 22 współczynników korelacji tylko 6 jest dodatnich, w tym tylko 2 dotyczą prognoz interpolacyjnych (wariant M5). Pozostałe 4 odnoszą się do zależności mierników wartości wyrównanych i prognoz ekstrapolacyjnych. W pozostałych przypadkach są one ujemne i przyjmują wartości z przedziału $-0,958$, $-0,56$, przy czym wartości bliskie -1 dotyczą najczęściej prognoz interpolacyjnych

4. Podsumowanie

Z przeprowadzonych badań można wyprowadzić następujące wnioski:

- błędy względne wartości wyrównanych ($MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$) mogą być wyłącznie kryterium pomocniczym w procesie wyboru modeli Holta-Wintersa do celów prognozowania, zarówno dla pełnych, jak i niepełnych danych,
- wyboru należy dokonywać spośród przynajmniej kilkunastu modeli, różniących się stałą wygładzania operatora rzędu pierwszego,
- zasadniczym kryterium wyboru powinna być odpowiednio: dokładność prognoz interpolacyjnych i prognoz ekstrapolacyjnych (*ex post*),
- wobec ujemnego i przynajmniej dość silnego skorelowania błędów prognoz inter- i ekstrapolacyjnych inne modele powinny być wybierane do budowy każdego rodzaju prognoz,
- na dokładność prognoz interpolacyjnych wpływało przede wszystkim rozmieszczenie luk w danych, a nie ich sekwencyjność,
- w przypadku prognoz ekstrapolacyjnych zasadniczym czynnikiem wpływającym na ich dokładność była sekwencja rang wskaźników sezonowości dla miesięcy, w których wystąpiły luki w danych.

Literatura

- Chatfield C., *The Holt-Winters forecasting procedure*, „Applied Statistics” 1978, vol. 27, no. 3.
- Dittmann P., *Prognozowanie w przedsiębiorstwie*, Oficyna Wydawnicza, Kraków 2003.
- Mertens P. (Hrsg.), *Prognoserechnung*, Physica Verlag, Würzburg–Wien 1973.
- Reid D.J., *A review of short – term projection techniques*, [w:] H. Gordon (ed.), *Practical aspects of forecasting*, London 1975.
- Szmuksta-Zawadzka M., Zawadzki J., *Zastosowanie modeli wyrównania wykładniczego w prognozowaniu brakujących danych dekadowych*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2007.
- Winters P.R., *Forecasting sales by exponentialy weighted moving averages*, „Management Science” 1960.
- Zawadzki J., *Modelowanie predyktywne i prognozowanie zjawisk w skali mikroekonomicznej*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1996.

FORECASTING ON THE BASIS OF HOLT-WINTER'S MODELS FOR COMPLETE AND INCOMPLETE DATA

Summary: The paper concerns practical aspects of the use of Holt-Winters models in forecasting variables with seasonal fluctuations. The authors consider full time series and series with data gaps. Because of similar values of $MAPE^{\alpha,\beta,\gamma}$ in the forecasting process there should be chosen several models which are considerably different from each other by the combination of smoothing constants. For *ex ante* forecasting it should be chosen models with minimal *ex post* forecasts errors. The analyses are illustrated by an empirical example.