Die Theorie der geographischen Netze oder der Entwerfungen der Kugelfläche.

Ein

Kompendium

für Landkartenzeichner

und

für den Unterricht angehender Geographen

von

Johann Friedrich

D. F. Raupach,

Professor an der Ritterakademie zu Liegnitz.

(Mit vier Kupfertafeln.)

Liegnitz, bei J. F. Kuhlmey 1816.

So wie ich die Elemente der Geometrie und Buchstabenrechnung voraussetzen darf, eben so erwarte ich von dem, der die Mappirung lernen will, daß er schon einen Begriff von einem Globus und einer geogr. Karte haben wird. Er kann sich zuerst bei den perspektivischen Projekzionen mit dem stereographischen Entwurfe der Halbkugel begnügen, den ich ihm, wie manches Andre, so einfach gemacht habe, als es nur möglich ist.

Was die Erklärung der zum Zeichnen nöthigen Werkzeuge angeht, so glaube ich, daß sie dem mündlichen und praktischen Unterrichte zu überlassen ist.

Ich habe alle vorzügliche Schriften über diesen Gegenstand zu Rathe gezogen, jedoch die Materien gewählt, geordnet und vorgetragen, wie es mir mein Zweck vorschrieb; ob ich diesen erreicht habe, mögen Kenner entscheiden. Das Bestreben nach möglichster Kürze in einem Kompendium, zumal dieser Art, wird man hoffentlich nicht tadeln.

Alle nöthige Verbesserungen sind sorgfältig angezeigt worden.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Perspektivische Entwerfungen.

Stereographische §. 4.

Orthographische §. 15.

Zentrale §. 16.

Aequatorialprojekzion v. De la Hire §. 17.

II. Freie (nicht perspektivische) Entwerfungsarten.

Gradlinige Parall. und (konvergirende) Meridiane §. 19.

Die Delilische §. 21.

Entwerfung auf einen tangirenden Kegel. §. 23.

Die Bonnische §. 25.

Die Flamsteedische §. 27.

Die Murdochische §. 28.

Merkators §. 31.

Lamberts §. 34.

III. Netze für Erdkegel, Erdkörper und Erdkugeln, §. 39.

Vorzügliche Karten, und Schriften über die Projekzionen.

Geschichtliche Notizen.

IV. Zusätze.

Beweise der angewendeten geom. und trig. Formeln.

Beweis, daß in der ster. Proj. die Kreise sich unter demselben Winkel schneiden, wie auf der Kugel.

Beweis der in §. 41. gegebenen Formeln für einen Koniglobus.

Beweis, daß Bonnes und Flamsteeds Projekz. die Flächen richtig darstellen.

Beweis der Formel §. 33.

Perspektivische Projekzionen.

§. 1.

Eine künstliche Erdkugel allein kann eine richtige Vorstellung der Erdoberfläche und aller ihrer Theile gewähren, der Gestalt, Lage und Fläche der Länder, so wie der Entfernung irgend zweier Punkte auf derselben von einander. Die **Meridiane**, größte Kreise der Kugel, welche durch ihre beiden Pole gehen, und etwa von zehn zu zehn Grad gezogen sind, schneiden den Aequator und die ihm parallelen Kreise, die **Parallelkreise** unter rechten Winkeln, und bilden mit diesen ein **Netz** von krummlinigen Vierecken, in welchen jedem Punkte der Erdoberfläche seine Stelle auf dem Globus bezeichnet wird, nemlich nach seiner geographischen **Länge**, das ist, seiner Entfernung von dem als Ersten angenommenen Meridiane, in Graden auf dem Aequator genommen, und durch seine geogr. **Breite**, das ist, seine Entfernung vom Aequator auf seinem Meridiane in Graden gemessen. Der messingne Meridian ist der Meridian jedes Orts.

Die Grade des Aequators und eines Meridians (Mittagskreises) die Erde als eine Kugel betrachtet, sind gleich groß oder lang, weil beide größte Kreise der Kugel und in 360 Grad, wie jeder Kreis, eingeteilt sind. Die Grade der Parallelkreise aber werden nach dem Pole zu immer kleiner oder kürzer. Es sey, fig. 1, PApB ein Durchschnitt der Erdkugel durch die Pole P und p, und AB ihr Durchmesser, so ist ED der Halbmesser eines Parallelkreises. Es verhält sich CB, der Erdradius, oder Radius des Aequators, zu ED, wie der Sinus totus zum Kosinus des W. DCB, welcher die Entfernung des Parellelkreises vom Aequator, oder seine geographische Breite, in Graden ausdrückt. Eben so verhalten sich folglich der Aequator und der Parallelkreis, also auch ihre aliquoten Teile oder Grade. Einem Aequatorgrad auf der Erdkugel giebt man 15 geographische Meilen: man findet daher die Länge eines Parallelgrades z. B. unter dem funfzigsten Grade der Breite durch die Regel de Tri:

$$\textit{sin. tot.} : \textit{cos.}\ 50^\circ = 15 : 9{,}6418 \ldots \text{Meilen}$$

In Vegas Tafeln ist der Kosinus jedes Grades für den Sinus totus Eins angegeben; daher ist der Kosinus der Breite nur mit 15 zu multipliziren.

Die Breite eines Parallelkreises (oder eines Orts) ist das Komplement seiner Entfernung vom Pole, und diese das Komplement von jener; ihre Summe ist 90 Grad.

§. 2.

Soll ein bedeutender Theil jener Kugelfläche auf einer Ebene entworfen oder abgebildet, das ist, eine geographische Karte gezeichnet werden, so wird jenes Kugelnetz auf dem Papiere merklich verschoben erscheinen müssen, denn es läßt sich auf einer Ebene nicht ausbreiten. Wollte man das wahre Verhältniß der Seiten der Vierecke in der Zeichnung beibehalten, so würden die Winkel verändert, und wenn diese Abweichung auch bei einem einzigen kleinen Vierecke nicht merklich wäre, so würde sie es doch bei den übrigen seyn. Es können also entweder die Grade der Länge (die Parallelgrade) zu den Graden der Breite (den Meridiangraden) auf dem Netze der Karte nicht durchweg dasselbe Verhältniß haben, wie auf der Kugel, oder die Vierecke nicht rechtwinklicht seyn, das ist, die Lage der Oerter gegen einander, ihre verhält-

niß-

nißmäßige Entfernung, also die Gestalt oder Fläche der Länder wird auf der Karte nicht ganz dieselbe seyn, wie auf der Kugel. Da also eine Karte keine vollkommene Aehnlichkeit mit ihrem Urbilde gewähren kann, so muß man unter den Entwerfungsarten der Kugelfläche diejenige wählen, die das Original am wenigsten verunstaltet oder einem besondern Zwecke der Karte entspricht, z. B. die Länge und Breite eines Orts innerhalb eines Vierecks mit Leichtigkeit zu bestimmen, oder die Lage der Oerter gegen einander und das Verhältniß ihrer Distanzen möglichst beizubehalten, oder den Flächenraum der Länder genau darzustellen u. s. w.

§. 3.

Diese Entwerfungsarten oder Projekzionen sind entweder perspektivische oder freie. Bei jenen hat das Auge einen bestimmten Standpunkt, aus welchem es eine durchsichtige Halbkugel mit ihrem Netze auf einer Glastafel abgebildet sieht, deren Entfernung und Lage auch bestimmt ist. Das Bild (die Projekzion) eines jeden Punktes der Kugel auf der Tafel ist da, wo die grade Linie vom Auge bis zum Punkte selbst durch die Tafel geht. — Bei den freien Entwerfungen wird weder eine Stelle des Auges, noch eine Tafel angenommen.

Die perspektivische Projekzion ist entweder orthographisch, oder stereographisch oder zentral. Für die erste denkt man sich das Auge in einer unendlichen Entfernung von der künstlichen Erdkugel, und die durchsichtige Tafel, auf welcher sich die jenseitige Halbkugel für das Auge entwirft, durch den Mittelpunkt der Kugel so gelegt, daß die grade Linie vom Auge nach diesem Punkte durch die Tafel senkrecht geht. Bei der stereographischen befindet sich das Auge in einem Punkte der Oberfläche der Kugel, und die perspektivische Tafel liegt wie vorhin. Bei der Zentralprojekzion steht das Auge im Mittelpunkte der Kugel, und sieht alle Punkte derselben auf einer Tafel, welche die Kugel berührt. — Außer diesen kann man sich noch unendlich viele perspektivische Entwerfungen denken, weil man dem Auge jede beliebige Stelle geben kann.

Liegt das Bild des Poles in der Mitte der Tafel, so heißt die Abbildung der Halbkugel oder eines Teiles derselben eine Polarprojekzion; sie ist eine Aequatorialprojekzion, wenn der Aequator als eine grade Linie mitten durch die Tafel geht, und eine Horizontalprojekzion für einen gegebenen Ort der Kugel, wenn das Bild desselben in den Mittelpunkt der Tafel fällt.

A. Stereographische Projekzion der Halbkugel.

§. 4.

Lehrsatz. Wenn ein schiefer Kegel, dessen auf der Grundfläche senkrechter (längs der Axe geführter) Durchschnitt ABC, fig. 2, von ED so geschnitten wird, daß W. AED = W. ACB, oder W. ADE = W. ABC, so ist die auf ABC senkrechte Durchschnittsfigur EIDL ein Kreis.

Beweis. Man lege FG durch einen Punkt K von ED parallel BC, so ist der Schnitt FIGL, senkrecht auf ABC, ein Kreis. Die Punkte I, K und L sind in grader Linie, denn IL ist der Durchschnitt zweier Ebenen, welche beide auf einer dritten ABC senkrecht stehen; daher ist IL senkrecht auf FG, und auch auf ED, weil FG und ED in derselben Ebene BAC sind. Nun ist W. AFG = W. ABC und W. AGF = W. ACB. Da nun W. AED = W. ACB sein soll, so ist W. DGK = W. AED, und weil auch W. DKG = W. FKE, so sind die Drefecke FEK und DGK ähnlich. Es ist demnach FK : EK = KD : KG oder $FK \times KG = EK \times KD$. Im Kreise FIGL aber ist bekanntlich $FK \times KG = IK^2$, also auch $EK \times KD = IK^2$, folglich der Schnitt EIDL auch ein Kreis.

KD nennt man eine Abscisse, IK die zu ihr gehörige Ordinate.

ED schneidet die BA unter demselben Winkel wie BC die AC, oder die AC unter demselben Winkel wie die BC die BA. Ein solcher Schnitt heißt ein antiparalleler, oder ein Wechselschnitt. — Er ist

auch

auch ein Kreis im schiefen Cylinder; ganz nach dem vorigen Beweise.

§. 5.

Lehrsatz. In der stereographischen Projekzion erscheinen die Meridiane und die Parallelkreise der Kugel entweder als grade Linien, oder als Kreise oder Kreisbogen.

Beweis. 1. Es sei ABDE, fig. 3, der Meridian der Kugel, in dessen Ebene das Auge in E steht und AD die perspektivische Tafel, die Ebne eines größten Kreises, senkrecht auf ABDE: so ist die grade Linie AD durch C die Projekzion des Halbkreises ABD.

Irgend ein anderer Meridian PGpK, ist die Peripherie der Grundfläche des Kegels EPGpK, dessen Spitze im Auge ist. Die Tafel AD, senkrecht auf der Axe EC dieses Kegels, ist auch senkrecht auf jedem Durchschnitte desselben, also auch auf EpP, welcher der auf der Grundfläche senkrechte sein mag. Die Projekzion oder die Abbildung des Bogens OPG auf der Tafel kann nur ein Kreisbogen sein, denn die Tafel AD macht einen Wechselschnitt des Kegels. Da nemlich W. EPB ein Rechter, als Winkel im Halbkreise, so wie W. ECA, und W. PEB beiden Dreiecken ECF und EPB gemein ist, so sind die Dreiecke ähnlich, und W. EFC = W. EBP = W. BEp = W. EpP.

2. GK, fig. 4, sei der Durchmesser eines Parallelkreises und FH seine Projekzion auf der Tafel AD. Es ist W. BGK = W. KEB (Peripheriewinkel auf derselben Sehne) und W. ECA = W. EGB, also W. EGK = W. BGK + W. EGB = W. CEH + W. ECH = W. EHA: folglich FH ein Wechselschnitt des Kegels EGK, und die Projekzion der Peripherie seiner Grundfläche auf der Tafel ein Kreis oder Kreisbogen.

§. 6.

Aufgabe. Eine stereogr. Polarprojekzion der Halbkugel (ein Polar-Netz für einen Planiglobus oder eine Planisphäre) zu zeichnen. Fig. 5.

Auflösung und Beweis. Der Kreis ABDE ist die Ebene des Aequators, also die Tafel, denn das Auge steht in einem Pole senkrecht über C. Es ist also C die Projekzion des andern Pols. Da das Auge sich in der Ebene jedes Meridians befindet, so sieht es alle seine Punkte in seinem Durchmesser auf der Tafel, und jeder Meridian erscheint als eine grade Linie durch den Punkt C. Da die Parallelkreise die Peripherien der Grundflächen der in diesem Falle graden Kegel sind, deren Spitze im Auge ist: so sind ihre Projekzionen Kreise, und zwar konzentrische, weil alle ihre Mittelpunkte in der Erdaxe liegen, sich also in C projiziren. Man ziehe AD und BE senkrecht auf einander, theile den Umfang ABDE in 360 Grade, etwa von zehn zu zehn, und ziehe von jedem Teilungspunkte eine grade Linie durch C. — Man denke sich nun die Pole einmal in A und D, und das Auge in A nach dem Parallelkreise z. B. des 50sten Grades vom Pole hinsehend, und ziehe Aa, so ist klar, daß Cd die Projekzion des Halbmessers des funfzigsten Parallels seyn wird. Eben so werden die Radien aller andern Parallelkreise gefunden.

Es ist Da die Entfernung des Parallels vom Pol in Graden; sie wird durch den Winkel DCa am Mittelpunkt gemessen, und mag η heißen. Der beliebige Radius AC sey r, so ist, den Sinus totus Eins gesetzt, CD = r. *tang* DAa, (*Sin tot* : *tang* DAa = r : Cd). Nun ist W. DAa = W. $\frac{1}{2}$ DCa, also Cd = r . *tang* $\frac{1}{2}\,\eta$.

Folgende Tafel giebt die Radien der Parallelkreise von zehn zu zehn Grad, in solchen Teilen, deren man dem beliebigen Halbmesser AC, als Maaßstab einge-

eingeteilt, tausend geben kann. Es ist der Radius des Parallels des 80sten Grads der Breite oder

Des 10ten Grades vom Pol				=	87
— 20sten	—	—	—	=	176
— 30sten	—	—	—	=	272
— 40sten	—	—	—	=	364
— 50sten	—	—	—	=	470
— 60sten	—	—	—	=	577
— 70sten	—	—	—	=	705
— 80sten	—	—	—	=	839
— 90sten	—	—	—	=	1000

Mißt man ein gegebenes r auf einem metallenen Maaßstabe, so sind alle diese Radien mit der so bestimmten Länge von r zu multipliziren, und von jedem Produkt drei Dezimalen abzuschneiden.

Die Grade der Breite werden auf BC von B oder E an bemerkt, die Grade der Länge von E nach der Rechten zu am Umfange des Kreises von Null bis 360 Grad; BE ist der erste Meridian. In dieses Netz kann nun die nördliche oder südliche Hemisphäre gezeichnet werden. An dieser aber werden die Grade der Länge von E an nach der Linken bemerkt, damit so wie vorhin die Länder auf dem Planiglobus so liegen wie auf der Halbkugel von außen betrachtet.

§. 7.

Aufgabe. Eine Aequatorialprojekzion der Halbkugel zu zeichnen.

Auflösung und Beweis. 1. Das Auge ist senkrecht über C, fig. 6, in der Ebene des Aequators, dessen Projekzion also AD auf der Tafel APDp; Pp ist die Projekzion des Meridians, in dessen Ebene das Auge steht. Der Kreisbogen PaP sey die Projekzion eines andern Meridians, der um λ

(z. B. 40) Grade auf der Kugel vom mittelsten absteht, so ist Ca die Projekzion des Aequatorbogens λ, also Ca $= r \,.\, tang\, \frac{1}{2}\lambda$. §. 6.

Es ist nun der Halbmesser (ϱ) mit welchem der Bogen Pap beschrieben werden muß, aus den Bekannten Ca und CP zu berechnen. Ein bekannter Lehrsatz vom Kreise nemlich giebt:

$$aC : CP = CP : 2\varrho - aC,$$

$$\text{oder } r \,.\, tang\, \tfrac{1}{2}\lambda : r = r : 2\varrho - r \,.\, tang\, \tfrac{1}{2}\lambda,$$

$$\text{Daraus ist } \varrho = \frac{\frac{1}{2} r}{tang\, \frac{1}{2}\lambda} + \tfrac{1}{2} r \,.\, tang\, \lambda$$

$$\text{oder } \varrho = \tfrac{1}{2} r \left(\frac{\cos \frac{1}{2}\lambda}{\sin \frac{1}{2}\lambda} + \frac{\sin \frac{1}{2}\lambda}{\cos \frac{1}{2}\lambda}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} r \left(\frac{\cos \frac{1}{2}\lambda^2 + \sin \frac{1}{2}\lambda^2}{\sin \frac{1}{2}\lambda \,.\, \cos \frac{1}{2}\lambda}\right) = \frac{r}{\sin \lambda}.$$

Oder auch $\varrho = r.\, cosec\, \lambda = r.\, sec\, (90^\circ - \lambda) = r.\, sec$ PCF.

Es ist also dieser Radius des Meridians die Linie CF. Da Pa = pa weil Pp senkrecht auf AD, so liegt der Mittelpunkt, aus welchem Pap zu beschreiben ist, in der (verlängerten) CD. — Der Bogen Pbp, die Projekzion des Meridians, der vom mittelsten ebenfalls um λ Grade absteht, hat denselben Halbmesser; sein Mittelpunkt fällt in CA oder seine Verlängerung.

2. Es sey, fig. 7, GE der Durchmesser eines Parallelkreises, der Bogen GD = ε seine Breite, so sieht das Auge A im Aequator (PC ist hier die Tafel) den Punkt G im Punkte α des mittlern Meridians, also um $\beta\alpha$ niedriger, als seinen Mittelpunkt β, der in PC fällt. Es ist dieses

$\beta\alpha$

$\beta\alpha = G\beta \,.\, tang\, \beta G\alpha = G\beta \,.\, tang\, GAD = G\beta \,.\, tang\, \frac{1}{2}\, e.$

Da nun $G\beta = r \,.\, cos\, \varepsilon$ (§. 1), so ist $\beta\alpha = r \,.\, cos\, \varepsilon \,.\, tang\, \frac{1}{2}\, \varepsilon.$

Aus diesen nun bekannten $\alpha\beta$ und $G\beta$ (fig. 6), läßt sich wie vorhin, der Halbmesser ϱ des auf dem Planiglobus zu entwerfenden Parallels bestimmen.

Es ist $\alpha\beta : G\beta = \beta G : 2\varrho - \alpha\beta;$

$$\text{daraus } \varrho = \tfrac{1}{2} r \,.\, cos\, \varepsilon \left(\frac{1}{tang\, \frac{1}{2}\varepsilon} + tang\, \tfrac{1}{2}\varepsilon \right)$$

$$\text{also } \varrho = \frac{r' .\, cos\, \varepsilon}{sin\, \varepsilon} = r \,.\, cotg\, \varepsilon,$$

das ist PF fig. 6. Der Mittelpunkt des Parallels fällt in die (verlängerte) CP. Der Parallel HI, dessen südliche Breite auch ε ist, hat denselben Halbmesser. Der Abstand der Punkte α u. s. f., durch welche die Parallelen gehen, von C, ist nach fig. 7, wie oben die Radien, $C\alpha = r\, tang\, \frac{1}{2}\, \varepsilon$.

$$\text{Es ist } \frac{G\beta}{\varrho} = \frac{r \,.\, cos\, \varepsilon}{r \,.\, cot\, \varepsilon} =$$

$$sin\, \varepsilon = sin\, Gq\alpha, \text{ also } Gq\alpha = \varepsilon.$$

Eben so hat ein halber Meridianbogen λ Grade, oder die beiden Radien aus P und aus a schneiden sich unter dem Winkel λ.

§. 8.

Jene Abstände $C\alpha$, und die ihnen gleichen Ca, können für den tausendteiligen Maaßstab CP aus dem Täfelchen §. 6. genommen werden: was dort Entfernung vom Pole ist, ist hier Breite.

Der Radius des Parallels

des 10ten Gr. der Br. ist	=	5,671
20sten	=	2,747
30sten	=	1,697
40sten	=	1,171
50sten	=	824
60sten	=	573
70sten	=	360
80sten	=	173
90sten	=	Null

Der Radius des Meridians, welcher vom mittlern um

10	Grad	absteht	ist	=	5758
20	:	:	:	=	2923
30	:	:	:	=	2000
40	:	:	:	=	1555
50	:	:	:	=	1305
60	:	:	:	=	1155
70	:	:	:	=	1064
80	:	:	:	=	1015
90	:	:	:	=	1000

Wird r nach einem andern Maaßstabe bestimmt, so sind diese Radien wie vorhin mit dem Werthe von r zu multipliziren und durch 1000 zu dividiren.

Die Breite wird von D nach P und p angemerkt, die Länge auf AD, von der Linken zur Rechten wie auf dem Globus, von außen betrachtet. Ist der Kreis PApD der erste Meridian, so kann die alte oder die neue Welt in das Netz verzeichnet werden. Für jene ist C der 90ste Grad der Länge, für diese der 270ste.

Anmerk. Die Projekzion ist dieselbe, in welcher Lage gegen den Horizont man sich auch Pp, senkrecht AD, denken mag. Man muß sich, um die Figuren und Beweise zu verstehen, die durchsichtige Kugel und

und Tafel mit dem Auge in ihrer gehörigen Lage klar vorstellen.

§. 9.

Aufgabe. Für einen gegebenen Ort, der zwischen dem Pol und dem Aequator liegt, eine Horizontalprojekzion der Halbkugel zu zeichnen.

Auflösung und Beweis. 1. Es ist, fig. 8, AD die Projekzion des Meridians ABD des Orts B und der Kreisbogen GKF auf der Tafel AGDF die Projekzion des Meridians GPF, der von PB um den W. FPB $= \lambda^\circ$ absteht. Das Auge ist in E, um einen Kugeldurchmesser vom gegebenen Orte entfernt, und K ist die Projekzion des Pols P, also CK $= r. tang \frac{1}{2}$ BP. Dieser Bogen BP, die Entfernung des gegebenen Orts B vom Pole, welcher Ort sich in der Mitte C der Tafel projizirt, sei η.

2. Die Lage der Sehne GF, welche ein Kugeldurchmesser ist, gegen AC, wird durch den Winkel ACF oder den Bogen AF bestimmt. Dieser Bogen (er heiße ϕ) ist eine Seite des sphärischen Dreiecks APF, in welchem der W. PAF ein Rechter (der Neigungswinkel zweier auf einander senkrecht stehenden Ebenen), die Seite AP $= 90^\circ - \eta$, und W. APF ist das Supplement des Winkels FPB, des Längenunterschiedes der Meridiane PB und PF. Es ist also aus AP und den anliegenden Winkeln AF $= \phi$ zu suchen, daher:

$$tang\ \phi = sin\ AP.\ tang\ (180^\circ - \lambda)$$

oder $tang\ \phi = cos\ \eta. - tang\ \lambda = - cos\ \eta.\ tang\ \lambda.$

Der Winkel ϕ ist also in den Tafeln zu finden. Er ist immer größer als ein Rechter, da λ nicht größer zu sein braucht, als 90 Grad, und wird mittelst der Sehne seines Supplements $2\ r.\ sin\ (90^\circ - \frac{1}{2}\ \phi)$ aufgetragen.

3. Es

3. Es sey nun, fig. 9, GAFD die Tafel, das Auge in der Entfernung CG senkrecht über C, und GF die Sehne in ihrer nun bestimmten Lage gegen AD, K der projizirte Pol und GKF die Projekzion jenes Meridians. Man ziehe LN senkrecht durch GF, so liegt der Mittelpunkt des Bogens GKF in der Linie LN. Denkt man sich GCF als die Projekzion des (eingebildeten) größten Kreises, in dessen Ebene das Auge steht, so ist GKF ein andrer projizirter größter Kreis, der jenen auf der Kugel in G und F halbiren würde, und man sieht, daß sich der Meridian GPF, fig. 8, auf der Tafel fürs Auge E grade so entwerfen wird, wie die Meridiane in fig. 6, nur daß hier GF, jenes Pp, und CL jenes CD schief, und für jeden Meridian anders liegt, welches nur die Lage von K (des Bildes von P) gegen G und F ändert. Man denke sich nun noch einen größten Kreis durchs Auge, senkrecht auf jenem eingebildeten, so ist CL, fig. 9, die Projekzion seines Quadranten, und CO des Bogens, um welchen der Meridian GKF von jenem eingebildeten Kreise absteht. Dieser Bogen heiße λ, so ist nach §. 5. der Radius des Bogens GKF oder $\varrho = \frac{r}{\sin\lambda}$. Das Komplement von λ ist der Winkel oder Bogen, um welchen die Meridianfläche von der Tafel absteht; die Projekzion dieses Bogens ist OL fig. 9. Nennt man ihn ψ, so ist $\varrho = \frac{r}{\cos\psi}$.

Dieser auf jenem Eingebildete vertikale Kreis durchs Auge, wovon ψ ein Bogen, geht nicht durch den Pol, sondern der Pol liegt diesseit oder jenseit desselben. Es ist also ψ nicht etwa AP, sondern es ist erst durch den sphärischen Winkel AFP zu bestimmen, welchen der Meridian mit dem Umkreise der Tafel macht. Nun ist im sphärischen Dreiecke AFP

wie

wie vorhin bekannt W. PAF $= 90°$, W. APF $= 180° - \lambda$ und AP $= 90° - \eta$, eine Seite und die anliegenden Winkel, daher

$$\cos \psi = \sin \eta \, . \sin \lambda;$$

$$\text{folglich } \varrho = \frac{r}{\sin \eta \, . \sin \lambda} . = \mathrm{NK} = \mathrm{NG}.$$

4. In fig. 4. ist FH der entworfene Durchmesser des Parallelkreises GK. Es sey der Bogen PB $= \eta$ und PK $=$ PG $= \grave{\eta}$, so ist CF $= r \, . \tang \frac{1}{2} (\eta + \grave{\eta})$ und CH $= r \, . \tang \frac{1}{2} (\eta - \grave{\eta})$, folglich der Halbmesser des projizirten Parallelkreises

$$\tfrac{1}{2} (\mathrm{CF} - \mathrm{CH}) = \tfrac{1}{2} r \left(\tang \tfrac{1}{2} (\eta + \grave{\eta}) - \tang \tfrac{1}{2} (\eta - \grave{\eta})\right)$$

oder, wenn man $\frac{\sin}{\cos}$ statt *tang* setzt

$$\grave{\varrho} = \frac{r \, . \sin \grave{\eta}}{2 \, . \cos \frac{1}{2} (\eta + \grave{\eta}) \, . \cos \frac{1}{2} (\eta - \grave{\eta})}$$

$$= \frac{r \, . \sin \grave{\eta}}{\cos \eta + \cos \grave{\eta}}$$

Die Entfernung des Zentrums c des Parallelkreises vom Mittelpunkte C der Tafel, oder Cc ist CH $+$ Hc $= \frac{1}{2} r \left(\tang \frac{1}{2} (\eta + \grave{\eta}) + \tang \frac{1}{2} (\eta - \grave{\eta})\right) = \frac{r. \sin \eta}{\cos \eta + \cos \grave{\eta}}$. Dieß Zentrum ist nicht die Projekzion des Pols.

Da GC $= r$, und NO $= \frac{r}{\cos \psi}$, so ist $\frac{\mathrm{GC}}{\mathrm{NO}} = \cos \psi = \sin \mathrm{GNO}$, also W. GNO $= 90° - \psi$. — Ferner ist CO $= r \, . \cot \frac{1}{2} \psi$; auch W. NCD $= \varphi - 90°$.

§. 10.

Für den Entwurf einer Planisphäre berechnet man weder φ noch ϱ, sondern (fig. 10) BP, und OP die Entfernung des Mittelpunkts O eines Meridianbogens GF von P, auf der senkrechten CQ. Dadurch wird der Radius OK bestimmt; K ist der Pol, dessen Entfernung von $B = r \,.\, tg\, \frac{1}{2}\, \eta$.

Es ist $BP = BO \cos OBP = BO \sin DBF = BO \sin \varphi$;

Da nun $BO = BG \,.\, ctg \,.\, BOG = r \,.\, tg\, \psi$, und in dem sphärischen Dreiecke AFP, fig. 8, $\cot AFP = \cot AP \,.\, \sin AF$,

oder $\cot \psi = tg\, \eta \,.\, \sin \varphi$,

so ist $BP = \dfrac{r}{tg\, \eta} = r \,.\, \cot \eta$.

Daraus folgt $PK = PB + BK = r\,(\cot \eta + tg\, \frac{1}{2}\, \eta) = \dfrac{r}{\sin \eta}$; also ist PK der Radius des Meridians, welcher 90 Grad vom mittlern Meridian absteht; $\lambda = 90°$. Aus OK und PK ergiebt sich

$$OP = \sqrt{OK^2 - PK^2} = \frac{r}{\sin \eta} \,.\, \cot \lambda = PK \,.\, \cot \lambda.$$

PK als Radius eines bestimmten Meridians ist unveränderlich: also liegen die Mittelpunkte aller Meridiane in der auf PK senkrechten CQ. Lägen sie drüber oder drunter, so müßte, da OP auf KP senkrecht sein soll, auch P höher oder niedriger liegen, also PK verschiedne Werthe haben. Es ist daher für jeden Meridian, der durch K gehen muß, nur OP besonders zu berechnen.

In fig. 10 ist B der gegebene Ort, dessen Breite 50°, und dessen Länge 30°. BK ist also $r \,.\, tang\ 20°$, und $PK = \frac{r}{sin\ 40°}$. GF und EL sind zwei Meridiane, jeder um 60 Grad vom mittlern AD des Ortes B abstehend, folglich ist $OP = PK\ cot\ 60°$; da die Länge von B ein zehnter Grad ist, so wird es diesseit und jenseit P gelegt, und beide Meridiane werden mit dem Radius OK beschrieben. Fiele die Länge von B, z. B. 31°, 40′, zwischen zwei zehnte Grade, so wäre z. B. für den Meridian des vierzigsten Grades $\lambda = 8°, 20$, und für den Meridian des dreißigsten $\lambda = 1°, 40'$: es werden nemlich nur die Meridiane der ganzen Grade, und etwa nur von 10 zu 10 Graden gezogen. Ob O diesseit oder jenseit P fällt ist leicht zu beurtheilen. Man kann das beliebige r in tausend Teile teilen, oder auch nach dem metallenen Maaßstabe bestimmen.

Der Parallelkreis des funfzigsten Grades geht durch B, sein Radius ist $\frac{1}{2}\, r \,.\, tang\ 40°$, und sein Zentrum in c. Für den Aequator HI ist $\eta = 90°$, also sein Radius $\frac{r}{cos\ \eta}$; die grade Linie von H nach I geht durch B. Der Entwurf des Parallelkreises, in dessen Ebene das Auge steht, ist eine grade Linie senkrecht durch AD; er kann nur auf der Planisphäre sein, wenn der Pol über 45° von B fällt, oder die die Breite von B unter 45° ist, und seine Entfernung von B nach unten ist $r \,.\, tg\ (90° - \eta)$. Projiziren sich noch Parallelen darunter, so sind ihre Radien negativ, also von dem Punkte an, in welchem BD vom Parallel geschnitten wird, nach unten auf dem verlängerten BD zu nehmen.

Zu-

Zusatz.

Wendekreise sind Parallelkreise, deren Breite 23°, 28′, nördlich und südlich, und die Polarkreise haben die Breite von 66°, 32′. Sollte eine Aequatorialprojekzion die halbe Himmelskugel darstellen, so wird die Ekliptik als eine grade Linie den Aequator in C unter einem Winkel von 23°, 28 schneiden, wenn das Auge in ihrem Durchschnittspunkte mit dem Aequator steht.

Stereogr. Projekzionen einzelner Teile der Kugelfläche.

§. 11.

Da es für einzelne Länder weit vorteilhaftere Entwerfungen giebt, als die perspektivischen, so folgt hier nur das Nothwendige für die Theorie und für die Zeichnung von Kreisbogen durch Punkte.

Aus den vorigen Paragraphen ergiebt sich ohne Schwierigkeit, wie ein Netz für einen Teil der Halbkugel stereographisch zu entwerfen ist, z. B. $\alpha\beta\gamma\delta$, fig. 5, nach der Polarprojekzion. Es sei die zu zeichnende Landkarte zwischen dem 50sten und 60sten Grade der Breite, und zwischen dem 6ten und 20sten der Länge enthalten, und der für dieselbe angenommene Aequator- oder Meridiangrad, um sich des metallenen Zollmaaßstabes zur Zeichnung bedienen zu können, einen Zoll lang. Es ist demnach das obige

$r = 57,296$ Zoll $\left(355 : \frac{113}{2} = 360 : r\right)$, und daraus läßt sich der Halbmesser ϱ des Parallels eines jeden Grades finden, nach $r \,.\, tang\, \frac{1}{2}\, \eta = \varrho$. Den Meridian des 13ten Grades nehme man für den mittelsten, auf dem untern und obern Rande der Karte senkrechten Meridian, und man kann aus dem Punkte C in seiner Verlängerung, der durch den Radius des untersten beliebig zu legenden Parallels gegeben wird, alle Parallelen und alle Meridiane, Grad für Grad ziehen. Sicherer verfährt man, wenn man für diese den Punkt des untersten und obersten Parallels bestimmt,

stimmt, durch welche der nächste Meridian gehen muß. Man nimmt nemlich aus Vegas Tafeln die Tangente eines Grades (oder mehrerer) multiplizirt sie mit dem Radius des untersten Parallels, und legt sie nach dem angenommenen Maaßstabe von a nach c: eben so trägt man die Tangente e n eines Grades für den Radius des obersten Parallels auf, und zieht den Meridian durch die Endpunkte beider Tangenten. Die andern Meridiane werden bestimmt, wenn man den abgeschnittenen Bogen auf jedem der beiden Parallele herumträgt.

Könnte man etwa die untersten Parallelen, wegen Länge ihrer Radien, auch mit dem Stangenzirkel nicht bequem ziehen, so nimmt man, statt der Tangente, aus den Tafeln, den Sinus und Kosinus eines Grades (oder mehrerer), welche mit ϱ zu multipliziren sind; man bekommt also die Längen r s und C r. Darauf zieht man den Kosinus von ϱ ab, um den Sinus Versus (E r) zu erhalten, und so wird der Durchschnittspunkt s des Parallels und eines Meridians, folglich eben so jeder andere bestimmt, auch zugleich die Lage der Meridiane, wenn man die Punkte des obersten Parallels, welche dieselbe Länge haben, eben so suchen müßte. Die Punkte desselben Parallels kann man alsdann durch grade Linien, oder aus freier Hand, oder mittelst eines biegsamen stählernen Lineals verbinden. Die Grade der Länge werden längs der Einfassung oben und unten von der Linken zur Rechten, die Grade der Breite an beiden Seiten derselben bemerkt. —

Wäre die Länge dieser Seiten vorgeschrieben, z. B. a Zoll, so müßte r aus der Gleichung $r\ (tang\ \tfrac{1}{2}\ \eta - tang\ \tfrac{1}{2}\ \eta') = a$ bestimmt werden, wenn η' des obersten Parallels Entfernung vom Pol ist. Ob r kleiner sein muß, wenn überdieß die Karte bei einer gegebenen

Länge

Länge (2 b), auf dem untersten Parallel rechts und links λ Längengrade fassen soll: findet man aus der Gleichung $r = \frac{b}{\sin\lambda}$.

In das Netz dieser Karte könnte man Grosbritanien und Irland eintragen.

§. 12.

Eine Aequatorialprojekzion für ein Stück der Erdfläche, LMNO fig. 11, welches sehr nahe am Aequator oder auf beiden Seiten desselben liegt, ist also zu zeichnen.

Nachdem r angenommen worden, ziehe man PC, den mittelsten Meridian der Karte. Nun berechne man $C\alpha$, $C\beta$, $C\gamma$ u. s. w. nach der Formel $C\alpha = r \,.\, \tang \frac{1}{2}\varepsilon$, ($\varepsilon$ ist die Breite der Parallelen), so erhält man $C\beta - C\alpha = \alpha\beta$ u. s. w., das ist die Punkte α, β, γ, durch welche die Parallelen gehen müssen. Der Radius eines jeden ist $\varrho = r \,.\, \cotg \varepsilon$. Man wird sie wegen Nähe des Aequators und des größern Maaßstabes der Karte (der Größe von r) durch Punkte zeichnen müssen. Man nehme also, wie vorhin, den Sinus und Sinus Versus von 1, 2, 3 Grad u. s. w. für den Radius ϱ des Parallels, so wird man diesseit und jenseit des mittelsten Meridians so viel Punkte des Parallels, obgleich nicht von Parallelgrad zu Parallelgrad, erhalten, als man braucht, um sie leicht verbinden zu können. Sollten sie nicht nahe genug an einander liegen, so nehme man den Sinus und Sinus Versus von $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ Gr. u. s. w.

Um nun einen Meridian a b auch durch Punkte zu zeichnen, so ist, wenn Dl der Aequator, zuerst $Cl = \alpha g = r \,.\, \tang \frac{1}{2}\lambda$ bekannt; λ ist der gegebene Längenunterschied dieses Meridians und des mittelsten.

sten. Nun berechne man den Winkel x, den die verlängerten Radien ah und lD machen, durch $\varrho = \frac{r}{sin\ \lambda}$ und durch seinen bekannten Sinus $ak = C\alpha$: es ist $\frac{C\alpha}{\varrho} = sin\ x$. Bei diesem Winkel steht in den Tafeln auch sein Kosinus, also ist der Sinus Versus lk zu finden, folglich auch der Punkt a, wo der Meridian den untern Rand der Karte schneidet. Um irgend einen andern Punkt d desselben zu bestimmen, suche man gleicherweise für ϱ den Sinus df und Sin. V. lf eines Winkels, der größer als x ist, nehme $\alpha\gamma$ gleich diesem Sinus weniger Ca, errichte $\gamma e = Cl$ senkrecht darauf in γ und mache ed gleich dem Sinus V. lf, so ist d der verlangte Punkt. Die Distanzen αa und γd werden auch jenseit des mittelsten Meridians getragen. Da die trigonometrischen Linien für den Radius Eins schon berechnet sind, so ist diese Arbeit so mühsam nicht. Durch die Meridiane werden nun auch die Parallelgrade bestimmt, so wie die Meridiangrade durch die Parallelen.

Das für eine gegebene Größe des Papiers anzunehmende r läßt sich beiläufig berechnen. Ist a die halbe Höhe des Papiers und b seine halbe Länge, so ist $b = r . tg\ \frac{1}{2}\lambda$, aber auch $a = r . (tg\ \frac{1}{2}\varepsilon - tg\ \frac{1}{2}\grave{\varepsilon})$, wenn ε die größte Breite. Von diesen beiden Werthen für r nehme man den kleinern; wenn $\grave{\varepsilon}$ südliche Breite, so ist $tg\ \frac{1}{2}\grave{\varepsilon}$ zu addiren.

§. 13.

Dasselbe Verfahren würde für die Horizontalprojekzion eines Stücks der Erdfläche anzuwenden seyn. Nachdem r beliebig angenommen, oder wie vorhin ungefähr bestimmt, und der mittlere Meridian

gezogen

gezogen worden, setzt man den Ort B, fig. 10, die Mitte des zu entwerfenden Landes, in die Mitte des Meridians AD. Man berechnet darauf für den äusſersten Meridian die Lage der BF gegen AB, seinen Radius und CO fig. 9; eben so CH fig. 4, und den Radius für die äußersten Parallelen, um zu sehen, ob *r* etwa zu groß genommen ist. Da die Meridiane gewöhnlich durch Punkte zu zeichnen sind, so muß man in diesem Falle den Sinus und Sinus Versus einiger Winkel an N fig. 9 berechnen, von ein oder zwei Grad an, für den Radius des Meridians. — Daß dieß genügt, kann man sich anschaulich machen, wenn man das Netz fig. 10 vollendet.

Die Polarprojekzion verändert die Gegenden um den Pol am wenigsten und die um den Aequator am meisten; bei der Aequatorprojekzion ist dieß umgekehrt. Die Distanzen der Oerter vom Mittelpunkte der Karte werden in jedem perspektivischen Entwurfe größer im Verhältniße der Tangenten der halben Winkel, und nur die Gegenden um den Mittelpunkt der Karte ziemlich richtig abgebildet; daher ist für solche Projekzionen großer Erdteile ein einziger Meilenmaaßstab nicht hinlänglich. Die Vierecke des Netzes sind zwar überall, wie auf der Kugel, rechtwinklicht, weil die Meridiane und Parallelen sich unter rechten Winkeln schneiden; dagegen sind die Meridiangrade von verschiedener Größe, und haben nirgends das wahre Verhältniß zu den Parallelgraden. Auch wird das Eintragen der Oerter ins Netz nach ihrer Länge und Breite dadurch beschwerlich, daß die Seiten der Vierecke Kreisbogen verschiedener Halbmesser sind, so wie das Abzeichnen derjenigen Teile einer solchen Karte, durch welche der grade mittlere Meridian nicht geht. Man bedient sich daher jetzt in der Regel anderer Entwerfungsarten, selbst für die

Halb-

Halbkugel, um mehrern Bedingungen einer guten Karte zugleich Genüge zu leisten. Vordem hielt man die perspektivischen für die einzig richtigen, weil man die Stelle des Auges für etwas Wesentliches ansah; in dieser bestimmten Stelle aber befindet sich das Auge nicht, am wenigsten bei der orthographischen, wenn es eine Karte betrachtet, und wenn man es auch darin erhielte, so wäre dadurch nicht der geringste Vorteil erreicht. Das Wesentliche einer Karte besteht in dem richtigen Verhältnisse aller ihrer Teile und der leichten Zeichnung des Netzes: die Beste ist die, welche bei der einfachen Konstrukzion die Distanzen der Oerter, so wie die Gestalt und die Fläche der Erdteile am richtigsten darstellt.

§. 14.

Die wahre Distanz eines Ortes vom Mittelpunkte einer stereographisch entworfenen Karte läßt sich so berechnen:

Man messe fig. 12, nach demselben beliebigen Maaßstabe die Distanz Cd und die Distanz $C\alpha$ auf der Karte: jene sei a, diese b und der Unterschied der Breiten von C und α sei μ, so ist $b = r \cdot tg\, \frac{1}{2}\, \mu$. Nun sei D der Ort auf der Kugel, dessen Projekzion d auf der Tafel EGF ist, und $DB = c$ ein Bogen des größten Kreises durch D und B, so ist $a = r \cdot tg\, \frac{1}{2}\, c$ oder $\frac{a}{r} = tg\, \frac{1}{2}\, c$, folglich $\frac{a}{b} \cdot tang\, \frac{1}{2}\, \mu = tang\, \frac{1}{2}\, c$, woraus $c = DB$, die Entfernung von D und B auf der Kugel in Graden, bestimmt wird. Ein Grad hat 15 geogr. Meilen.

Wenn man auf einer solchen Karte $C\alpha$, eine Distanz auf dem mittlern Meridian nach irgend einem Maaßstabe mißt, so findet man den Kugelradius r,

nach

nach welchem die Karte gezeichnet worden ist, aus der Gleichung

$$r = C\alpha \,.\, cotg. \tfrac{1}{2}\,\mu.$$

Zusatz.

Die Distanz zweier Oerter wird aus ihrer geogr. Länge und Breite folgendermaaßen berechnet:

Liegen beide Oerter im Aequator oder in demselben Meridiane, so ist ihre Entfernung von einander unmittelbar in Graden eines größten Kreises gegeben. Haben sie aber verschiedene Breite und Länge wie A und B, fig. 13, so ist ihre kürzeste Entfernung, *) der Bogen AB eines größten Kreises zu berechnen. CE ist der Aequator, P der Pol, PAC der Meridian von A und PBD der Meridian von B, also der Bogen CD, oder der Winkel CPD der Unterschied (λ) ihrer Längen. Da nun auch PA und PB, die Komplemente der Breite von A und B, bekannt sind: so sind im sphärischen Dreiecke APB zwei Seiten und der eingeschloßne Winkel gegeben, und folglich ist

$$cos\ AB = cos\ PA \,.\, cos\ PB + sin\ PB \,.\, sin\ PA \,.\, cos\ \lambda.$$

(Man addirt *log. cos* PA zu *log. cos* PB, und sucht die zu dieser Logarithmensumme gehörige Zahl; eben so die Zahl zu *log. sin* PB + *log. sin* PA + *log. cos* λ. Sucht man die Summe dieser beiden Zahlen unter den natürlichen Kosinus, so findet man den Bogen AB in Graden und Minuten. Oder man nehme den Logarithmen dieser Summe, und suche ihn unter den Logarithmen der Kosinus.)

§. 14.

---

*) Von mehrern Kreisbogen durch zwei Punkte ist derjenige der kürzeste, dessen Radius der größte ist, denn er hat die kleinste Krümmung.

B. Orthographische Projekzion.

§. 15.

Bei dieser denkt man sich das Auge unendlich von der perspektivischen Tafel entfernt, so daß alle Sehlinien parallel und auf der Tafel senkrecht sind, auch nimmt man an, daß die scheinbare Größe der Kugel unverändert bleibe, ob sie gleich bei jener Voraussezzung verschwinden müßte. Der vorige Strahlenkegel KPGp, fig. 3, verwandelt sich nun in einen Cylinder, welcher von der Tafel nur dann seiner Grundfläche parallel geschnitten wird, wenn die Tafel die Ebne eines Parallelkreises ist und also das Auge in der verlängerten durch beide Pole gehenden Erdaxe steht. Es sind daher diese Schnitte, den eben angezeigten Fall ausgenommen, das heißt, die Projekzionen der Meridiane und Parallelen keine Kreise oder Kreisbogen, sondern länglichte, geschlossene Linien, Ellipsen genannt, deren Figur man sich leicht vorstellen kann, wenn man einen graden Cylinder schief schneidet. Hier wird ein schiefer Cylinder, d. i., ein solcher, welcher auf seiner kreisrunden Grundfläche schief steht, von der Tafel senkrecht durch seine Axe geschnitten.

In der orthographischen Polarprojekzion, für welche die Ebne des Aequators die Tafel ist, sind die Meridiane grade Linien, die sich in der Projekzion des Pols unter denselben Winkeln schneiden, wie auf der Kugel; das Auge befindet sich nemlich in der Durchschnittslinie ihrer Ebnen, in der Erdaxe. Die Parallelkreise

lelkreise erscheinen als konzentrische Kreise, ihr Mittelpunkt ist der projizirte Pol, und der Radius eines jeden ist $r \,.\, \sin \eta$, oder auch der Kosinus der Breite des Parallels für den angenommenen Halbmesser r des Entwurfs. Die Parallelen nähern sich einander immer mehr nach dem Aequator hin, und die Gegenden um denselben ziehen sich daher in der Breite immer mehr zusammen, und werden ihrem Originale auf der Kugel sehr unähnlich. Man könnte folglich diese Projekzion nur für die Polarländer gebrauchen.

Die andern orthographischen Projekzionen sind wegen der Verzeichnung jener Ellipsen mühsam, und da sie keinen besondern Vorteil gewähren, so sind sie für Landkarten sehr selten angewendet worden. Bei manchen astronomischen Zeichnungen sind sie unentbehrlich. *) Das Nöthige dazu giebt folgender Zusatz.

Horizontalprojekzion.

A. Es falle ein Strahlencylinder durch die kreisrunde Oeffnung BC einer Tafel AE senkrecht auf die unter dem W. A geneigte Tafel AF, welche vertikal steht, und deren unterer Rand mit dem untern Rande der Tafel AE parallel läuft (fig. a): so ist GBCD ein schiefer senkrecht geschnittener Cylinder und das Bild oder die orthographische Projekzion jenes Kreises auf dieser Tafel wird eine ovale Figur, eine Ellipse sein. Ihre größte Breite $GD = BK$, die kleine Axe genannt, ist $BC \,.\, \sin DCA$. Es sei der Durchmesser des Kreises $BC = 2\,\varrho$ und der Neigungswinkel der Axe des Strahlencylinders gegen die Tafel AE, d. i. der W. $DCA = \delta$, so ist die kleine Axe $= 2\,\varrho \,.\, \sin \delta$. Die größte Länge der Ellipse, ihre große Axe, ist der auf

*) Z. B. für eine Mondkarte, oder der Entwurf eines Erdteils, aus dem Monde betrachtet.

auf BC senkrechte Durchmesser des Kreises, also BC oder 2 ϱ.

Wenn also eine Ebne einen schiefen Cylinder senkrecht durch seine Axe schneidet, so ist der Schnitt eine solche Ellipse. Um sie durch Punkte, durch Abscissen und Ordinaten verzeichnen zu können, muß eine Gleichung zwischen diesen gesucht werden, so daß wenn man sich auf der kleinen Axe beliebig eine Abscisse giebt, die daran Senkrechte zu berechnen ist, deren Endpunkt ein Punkt der Ellipse ist.

Es sei, fig. b. GID der senkrechte Schnitt des schiefen Cylinders, GD also die kleine Axe desselben, GK eine Abscisse x und KI eine senkrechte Ordinate y. Der Schnitt AIF sei der Grundfläche BC parallel, also ein Kreis und KI auch seine senkrechte Ordinate, wie §. 4. Man ziehe GE parallel BC. Es ist

$$GD : GE = GK : KA$$

$$\text{oder } 2\varrho \,.\, \sin\delta : 2\varrho = x : \frac{x}{\sin\delta} = AK$$

$$\text{also } KF = 2\varrho - \frac{x}{\sin\delta} = \frac{2\varrho \sin\delta - x}{\sin\delta}.$$

Es ist folglich $KI^2 = KA \times KF$, oder für die Ellipse

$$y^2 = \frac{2\varrho}{\sin\delta}\, x - \frac{1}{\sin\delta^2}\, x^2.$$

Giebt man sich beliebig einen Werth für x vom Anfangspunkt der kleinen Axe an, so wird aus dieser Gleichung y gefunden, also ein Punkt der Ellipse bestimmt. Setzt man $x = \varrho \,.\, \sin\delta$, das ist gleich der halben kleinen Axe, so erhält man $y = \varrho$: also geht die große Axe 2 ϱ senkrecht durch die Mitte der kleinen; auch hat y zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe.

B. Wenn

B. Wenn nun fig. 4, der Parallelkreis GK auf der Tafel AD orthographisch entworfen werden soll, so muß man sich die Linien GE und KE nach dem Auge unter sich und mit EB parallel denken. Der Bogen PK sei $\grave{\eta}$, der Bogen BP, die Entfernung des Ortes B vom Pole sei η. Siehe fig. c; es ist derselbe Fall, wie fig. a.

1. Der Neigungswinkel der Ebne des Parallelkreises gegen die Axe des Cylinders, der W. GaN $= \delta$ ist gleich dem Winkel LBE, wenn LB parallel GK. Er mißt den halben Bogen EL. Da LG $=$ BK (Bogen zwischen parallelen Sehnen), so ist LB $= \eta + \grave{\eta} + \eta - \grave{\eta} = 2\,\eta$, also EL $= 180° - 2\,\eta$ und $\frac{1}{2}$ EL $= 90° - \eta$. Daher $\sin\delta = \cos\eta$.

Das vorige ϱ, der Halbmesser des Parallelkreises ist hier $r \,.\, \sin\grave{\eta}$, wenn $r =$ CB. Substituirt man diese Werthe von δ und ϱ in der vorigen Gleichung für die Ellipse, so wird sie

$$y^2 = \frac{2\,r\,.\,\sin\grave{\eta}\,.}{\cos\eta}\,x - \frac{1}{\cos\eta^2}\,x^2.$$

Berechnet man also die kleine Axe HF $= 2\,r.\,\sin\grave{\eta}\,.\,\cos\eta$, und giebt von H an dem x beliebige Zahlwerthe kleiner als HF, so erhält man aus dieser Gleichung das zugehörige y über und unter der kleinen Axe, also zwei Punkte des Parallels. Die große Axe ist $2\,\varrho = 2\,r\,.\,\sin\grave{\eta}$. Für x $=$ o oder x $= 2\,r\,.\,\sin\grave{\eta}\,.\,\cos\eta$ ist y $=$ o.

Noch ist der Anfangspunkt H der Abscissen, das ist, seine Entfernung vom Mittelpunkt C der Tafel zu bestimmen. Da nun DK parallel EB, so ist CH gleich der Senkrechten von K auf EB, also gleich $r.\,\sin$ KB, daher CH $= r.\,\sin\,(\eta - \grave{\eta})$.

Der Punkt b ist der Ort des Pols auf CA. Es ist Cb $= r\,.\,\sin\eta$.

2. Für

2. Für den Entwurf des Meridians GPF, fig. 8, ist die kleine Axe $2r . \sin \delta$, und die große GF $= 2r$, denn er ist wieder derselbe Schnitt, nur daß die Axen gegen den Horizont geneigt sind. Dieser Winkel δ ist hier der Neigunswinkel der Meridianaxe gegen die Cylinderaxe EB, oder $90° -$ W. AFP, oder $90° - \psi$ nach §. 9; folglich $\sin \delta = \cos \psi = \sin \eta . \sin \lambda$, wenn λ, wie § 9, der Längenunterschied des gegebnen und des mittlern Meridians. Die kleine Axe ist nun $2r . \sin \eta . \sin \lambda = 2$ CO fig. 9.

Setzt man diesen Werth von $\sin \delta$ statt $\sin \delta$ in obige Gleichung, so erhält man die Gleichung für die Meridianellipse:

$$y^2 = \frac{2r}{\sin \eta . \sin \lambda} . x - \frac{1}{(\sin \eta . \sin \lambda)^2} . x^2.$$

Die Lage der großen Axe gegen AD, der Winkel φ, wird wie §. 9, bestimmt. Für die Zeichnung ist es besser, wenn man das gefundne y, von der kleinen Axe an, auf die große trägt und an dasselbe die halbe kleine Axe weniger x senkrecht setzt *).

Für die orthographische Aequatorialprojekzion ist $\eta = 90°$. Aequator und Parallelen sind grade, parallele Linien; die Mer. Ellipsen, deren große Axe $2r$, und deren halbe kleine Axe $r . \sin \lambda$ ist. Die Entfernung eines Parallels vom Aequator ist $r . \sin \varepsilon$. Pp, fig. 6, ist die gemeinschaftliche große Axe aller Ellipsen, weil $\varphi = 180°$.

Anmerk. Ein Kegelschnitt ED, fig. 2, der kein Wechselschnitt ist und dessen Axe ED die BC schneidet, wenn man beide verlängert, ist auch eine Ellipse. Man

*) Die Abscissen sind nicht auf GF, fig. 9, sondern auf OC zu nehmen. Man vergleiche Mayers pr. Geom. 1815. IV. Teil, S. 608.

Man ziehe aus D und E Parallelen (c und d) mit BC, setze ED = a, und bestimme wie vorhin DK und KE: ihr Produkt ist KI^2 oder y^2, und man erhält, wie vorhin eine Gleichung für x und y, nur mit andern Koeffizienten von x und x^2.

C. Zentralprojekzion.

§. 16.

Für diese steht das Auge im Mittelpunkte der Erdkugel, und die Tafel berührt dieselbe in irgend einem Punkte. Da also das Auge sich in der Ebne jedes Meridians befindet, so erscheint ein jeder auf der Tafel als eine grade Linie, und eben so der Aequator, und jeder größte Kreis.

Es sei, fig. 14, in C das Auge, ABD die Tafel senkrecht auf $CK = r$, da sie die Kugel in K tangirt; $PK = \eta$, E die Projekzion des Pols F, EH die Projekzion des Meridians PKL, (des mittelsten der Karte) dessen Stück $EK = r \,.\, tang\, \eta$; EF die Projekzion des λ Grade (um NO) von ihm abstehenden Meridians PZO, QN der Aequator, und z auf der Tafel die Projekzion des Punktes Z auf der Kugel, dessen Entfernung PZ vom Pole (sie mag η' heißen) bekannt ist. Es ist Ez, die Projekzion des Bogens PZ, zu bestimmen.

Da GF, die Projekzion des Aequatorbogens NO, also CGF in der Ebne des Aequators ist, und diese senkrecht auf der Meridianebne PKL, so steht auch GF senkrecht auf EH, und macht mit CG, das in dieser Meridianebne liegt, den rechten Winkel CGF.

In

In diesem Dreiecke ist nun $CF = CG \,.\, sec\, GCF = r \,.\, cosec\, \eta \,.\, sec\, \lambda$, weil $CG = r \,.\, sec\, KCN = r \,.\, cosec\, \eta$. — Nun ist im rechtwinklichten Dreiecke ECK die $CE = r \,.\, sec\, \eta$, also im rechtwinklichten Dreiecke ECF die Hypotenuse $EF = r \sqrt{sec\, \eta^2 + cosec\, \eta^2 \,.\, sec\, \lambda^2}$,

und $tang\, CEF = \frac{CF}{CE} = \frac{cosec\, \eta \,.\, sec\, \lambda}{sec\, \eta} = cot\, \eta \,.\, sec\, \lambda$.

Es sind also im Dreiecke ECz bekannt CE und die anliegenden Winkel, und da W. $CzE = 180° - \grave{\eta} - CEF$,

so ist: $$Ez = \frac{r \,.\, sec\, \eta \,.\, sin\, \grave{\eta}}{sin\, (\grave{\eta} + CEF)}$$

Die Lage von EF gegen den mittlern Meridian EH ist durch $GF = r \,.\, cosec\, \eta \,.\, tang\, \lambda$ bestimmt. Fällt der Aequator nicht auf die Tafel, so ist jene Lage durch KR, senkrecht durch die Mitte von EH gezogen, zu bestimmen. Aus der Proporzion $EG : GF = EK : KR$, oder $r\, (tg\, \eta + cot\, \eta) : GF = r \,.\, tg\, \eta : KR$ ist $KR = r \,.\, sin\, \eta \,.\, tg\, \lambda$.

Faßt die Tafel z. B. 20 Grad Breite, so ist $KH = r \,.\, tang\, 10°$, also HF, am untern Rande, der mit KR parallel ist, aus EK, KR und EH zu finden. So wird die Lage von EF bestimmt durch F und R, wenn auch der Pol nicht auf die Tafel fällt.

Aus dem Vorigen folgt noch $tang\, HEF = cos\, \eta \,.\, tg\, \lambda$.

Es läßt sich also jeder Meridian von Grad zu Grad (oder von 5 zu 5 Grad) entwerfen, und zugleich beliebig in perspektivische Grade einteilen. Die gleichnamigen Teilungspunkte der gezogenen Meridiane verbinde man, so sind die Parallelen gezeichnet. Diese sind in der Horizontalprojekzion Ellipsen und Hyperbeln, in der Polarprojekzion konzentrische Kreise, deren Radius $\varrho = r \,.\, tang\, \eta$; in der Aequatorialprojekzion Hyperbeln,

krumme

krumme Linien, welche entstehen, wenn z. B. ein Kegel senkrecht auf die Grundfläche geschnitten wird.

Die Halbkugel kann nach dieser Zentralprojekzion nicht gezeichnet werden, denn die Tangente von 90 Grad ist unendlich. Sie wird für kleine Teile der Erdfläche und für die Polargegenden am vorteilhaftesten gebraucht. Die Distanzen der Oerter und die Gestalt und Fläche der Länder werden noch mehr verändert, als in der stereographischen; die Distanzen nemlich wachsen wie die ganzen Tangenten der Breite und Länge: doch hat sie das Auszeichnende, daß sie alle Oerter eines größten Kreises der Kugel in einer graden Linie darstellt.

D. Aequatorialprojekzion von De la Hire

§. 17.

Sie bringt Meridiangrade und Parallelgrade in ein richtigeres Verhältniß als die Obige, weil das Auge in O, fig. 15, außerhalb der Kugel, jedoch auch in der Ebne des Aequators steht. Sie ist also auch perspektivisch.

Es sei PRpr die Tafel, und Pzup die Projekzion des Meridians PZUp, welcher vom Meridian des Auges PBp, dessen Projekzion Pp, um λ Grade abstehe, oder um den Aequatorbogen BU. Z sei ein Punkt dieses Meridians, seine Breite ε, und z die Projekzion dieses Punktes auf der Tafel. Es soll der

Ort

Ort dieses Punktes auf der Tafel durch die auf einander senkrechten $Cy = x$ und $yz = t$ bestimmt werden; jene mag Abscisse, diese Ordinate heißen.

Man ziehe ZY, so wie zy senkrecht auf die Radien CR und CU, so ist $CY = r \,.\, \cos \varepsilon$ und $ZY = r \,.\, \sin \varepsilon$. Ferner ziehe man OY und YD, dieses parallel mit Cu, so daß also der Winkel CDY ein Rechter sei. Es sei auch $OC = k$.

Nun ist $DY = Cy \,.\, \sin \lambda = r \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \sin \lambda$,

$$CD = Cy \,.\, \cos \lambda = r \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \cos \lambda.$$

Also $OD = \kappa + r \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \cos \lambda$.

In den ähnlichen Dreiecken OCy und ODY ist

$$OD : OC = DY : Cy$$

oder $\kappa + r \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \cos \lambda : \kappa = r \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \sin \lambda : Cy = x$

$$\text{folglich } x = \frac{\kappa\, r \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \sin \lambda}{\kappa + r \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \cos \lambda}.$$

In den ähnlichen Dreiecken Ozy und OZY ist

$$OD : OC = ZY : zy$$

oder $\kappa + r \,.\, \cos \lambda : \kappa = r \,.\, \sin \varepsilon : zy = t$

$$\text{folglich } t = \frac{\kappa\, r \,.\, \sin \varepsilon}{\kappa + r \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \cos \lambda} = \frac{x \,.\, \tan \varepsilon}{\sin \lambda}.$$

Durch diese Formeln lassen sich die Punkte eines jeden Meridians von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Graden bestimmen, also durch Verbindung derselben alle Meridiane ziehen. Das erhaltne t wird über und unter den Aequator gelegt; eben so x diesseit und jenseit Pp. Verbindet man alle Meridianpunkte, die gleiche Breite haben, so werden auch die Parallelen gezeichnet. Meridiane und Parallelen sind in dieser Projekzion Ellipsen §. 15. Zus.

Nun ist noch $\varkappa = OC$ zu bestimmen. Es wird sein Werth so angenommen, daß wenn $BU = \frac{1}{2} BB$, auch $Cu = \frac{1}{2} CB$ sei, damit die Projekzionen der Aequatorbogen sich beinahe verhalten, wie diese Bogen selbst. Es ist also in der Formel für x, $\varepsilon = 0$ und $\lambda = 45$ Grad zu setzen, und da $x = \frac{1}{2} r$ sein soll, so wird sie

$$\frac{1}{2} r = \frac{\varkappa\, r\, .\, \sin 45^\circ}{\varkappa + r\, .\, \cos 45^\circ}$$

oder $\frac{1}{2} r = \frac{\varkappa\, r\, .\, \sin 45^\circ}{\varkappa + r\, .\, \sin 45^\circ}$, weil $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$

also $\frac{1}{2} r\varkappa + \frac{1}{2} r^2 .\, \sin 45^\circ = \varkappa r\, .\, \sin 45^\circ$,

oder $\varkappa r\, .\, (\sin 45^\circ - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} r^2 .\, \sin 45.$

und daraus $\varkappa = \frac{r\, .\, \sin 45^\circ}{2 \sin 45^\circ - 1}$

das ist $\varkappa = r\, .\, 1{,}7071068.$

Zusatz.

Um eine Planisphäre nach dieser Projekzion zu zeichnen, berechne man für jeden Meridian dieß x und t von zehn zu zehn Grad der Breite: dieß ist hinlänglich, selbst wenn der Durchmesser des Planiglobus zwei Fuß wäre. Man kann für die Berechnung $r = 1$ setzen, und für den Werth von x und t drei Dezimalstellen nehmen, deren letzte jedoch um Eins vergrößert wird, wenn die vierte, welche die Log. Tafeln zugleich geben, über 5 ist. Würde dann für die Zeichnung r in tausend Teile geteilt, so wären jene Dezimalbrüche Ganze. Nimmt man r nach einem andern Maaßstabe, so erhält man ebenfalls das x und t in Teilen dieses Maaßstabes. Die Werthe von x für $\varepsilon = 0$ sind gleich den Werthen von t für $\lambda = 0$, wenn jenes λ diesem ε gleich ist.

Es

Es wird weiterhin eine Tafel vorkommen, welche diese Berechnung sehr erleichtert.

§. 18.

Zum Schluß dieser Projekzionen mag die Tafel folgen, welche die Länge eines Parallelgrades in geographischen Meilen unter jedem ganzen und halben Grade der Breite zeigt, und welche bei den nun vorzutragenden Entwerfungsarten der Kugelfläche oft gebraucht wird.

Die Erde ist keine vollkommene Kugel, daher sind die Meridiangrade, streng genommen, nicht von gleicher Länge, und auch die Parallelgrade nicht genau so lang, wie sie die Rechnung für die Kugel giebt. Dieser Unterschied ist aber zu unbedeutend, und auch noch zu unbestimmt, als daß bei Verfertigung von Globen und Karten, welche ohnehin nicht die höchste Genauigkeit gewähren können, darauf Rücksicht genommen werden müßte.

Grad	Meilen	Grad	Meilen
0	15,	6	14,918
$\frac{1}{2}$	14,999	$6\frac{1}{2}$	14,904
1	14,998	7	14,888
$1\frac{1}{2}$	14,994	$7\frac{1}{2}$	14,871
2	14,990	8	14,853
$2\frac{1}{2}$	14,986	$8\frac{1}{2}$	14,835
3	14,979	9	14,815
$3\frac{1}{2}$	14,972	$9\frac{1}{2}$	14,794
4	14,963	10	14,771
$4\frac{1}{2}$	14,954	$10\frac{1}{2}$	14,748
5	14,944	11	14,724
$5\frac{1}{2}$	14,931	$11\frac{1}{2}$	14,698

Grad	Meilen	Grad	Meilen
12	14,672	29	13,119
12½	14,644	29½	13,055
13	14,615	30	12,990
13½	14,585	30½	12,924
14	14,554	31	12,857
14½	14,522	31½	12,789
15	14,488	32	12,721
15½	14,454	32½	12,651
16	14,418	33	12,580
16½	14,382	33½	12,508
17	14,344	34	12,430
17½	14,305	34½	12,362
18	14,265	35	12,287
18½	14,224	35½	12,212
19	14,182	36	12,135
19½	14,139	36½	12,058
20	14,095	37	12,980
20½	14,050	37½	12,900
21	14,003	38	11,820
21½	13,956	38½	11,739
22	13,907	39	11,657
22½	13,858	39½	11,574
23	13,807	40	11,491
23½	13,755	40½	11,406
24	13,703	41	11,321
24½	13,649	41½	11,234
25	13,605	42	11,147
25½	13,538	42½	11,059
26	13,482	43	11,970
26½	13,424	43½	10,881
27	13,365	44	10,790
27½	13,305	44½	10,699
28	13,244	45	10,607
28½	13,182	45½	10,514

Grad	Meilen	Grad	Meilen
46	10,419	63	6,810
46½	10,325	63½	6,693
47	10,230	64	6,575
47½	10,134	64½	6,458
48	10,037	65	6,339
48½	9,939	65½	6,220
49	9,841	66	6,101
49½	9,742	66½	5,981
50	9,642	67	5,861
50½	9,541	67½	5,740
51	9,440	68	5,619
51½	9,338	68½	5,497
52	9,234	69	5,375
52½	9,131	69½	5,253
53	9,027	70	5,130
53½	8,922	70½	5,007
54	8,817	71	4,884
54½	8,699	71½	4,759
55	8,604	72	4,636
55½	8,496	72½	4,522
56	8,388	73	4,385
56½	8,279	73½	4,260
57	8,169	74	4,134
57½	8,059	74½	4,008
58	7,949	75	3,882
58½	7,837	75½	3,756
59	7,726	76	3,629
59½	7,613	76½	3,502
60	7,500	77	3,374
60½	7,386	77½	3,247
61	7,272	78	3,119
61½	7,157	78½	2,990
62	7,042	79	2,862
62½	6,925	79½	2,733

Grad	Meilen
80	2,605
80½	2,476
81	2,346
81½	2,217
82	2,088
82½	1,958
83	1,828
83½	1,698
84	1,568
84½	1,438.
85	1,307
85½	1,177
86	1,046
86½	0,916
87	0,785
87½	0,654
88	0,523
88½	0,393
89	0,262
89½	0,131
90	0.

Freie Projekzionen.

Freie Entwerfungsarten.

§. 19.

Da die vorigen Projekzionen keine vollkommne Aehnlichkeit mit dem Netze auf der Kugel gewähren können, so sind auch noch andre Entwerfungsarten zu untersuchen, bei welchen das Auge keine bestimmte Stelle hat, um auszumitteln, ob sie vorteilhafter sind, als jene, und welchen einzelnen Bedingungen der Aehnlichkeit mit dem Original eine jede am Besten Genüge leistet. Man kann dann für eine zu verfertigende Karte diejenige gebrauchen, die dem Hauptzwecke der Karte am meisten entspricht. Es sollen Netze für einzelne Teile der Erdfläche gezeichnet werden.

Erste Entwerfungsart.

Man ziehe, fig. 16. senkrecht auf HF, den mittelsten Meridian AB, und teile ihn in die bestimmte Anzahl Breitengrade, welche die Karte fassen soll. Mit HF ziehe man GE parallel, und nehme den Parallelgrad BD, so wie den Parallelgrad AC jeden nach seinem wahren Verhältniße zum Meridiangrade. Darauf trage man die Länge von zwei, drei Parallelgraden u. s. w. unter der Breite HF von B nach F und von B nach H;*) eben

*) Man muß nicht einen gemeßnen Parallelgrad mehreremal auftragen, weil dadurch ein unmerklicher Fehler in der Messung zuletzt bedeutend werden kann, sondern sein Zweifaches, Dreifaches u. s. w. vom Maaßstabe abnehmen und auftragen.

eben so die Länge von zwei, drei Parallelgraden u. s. w. unter der Breite GE von A nach E und von A nach G zu. Die Linien CD, IF sind die Meridiane, die Linien OP, welche durch die Teilungspunkte des mittelsten Meridians, senkrecht durch denselben gezogen werden, sind die Parallelen.

Den angenommenen Grad des Meridians lege man einigemal auf eine grade Linie, und teile den ersten davon in 15, 30, 60 Teile, das ist in Meilen, oder in Minuten oder Teile des Grades: so hat man einen Maaßstab zur Verfertigung des Netzes und zur Messung der Distanzen auf der Karte in Meilen. Die Länge der beiden Parallelgrade ist aus jener Tafel zu nehmen; bediente man sich eines andern Maaßstabes, nach welchem z. B. AB = 100 wäre, so müßte jene Länge noch mit $\frac{100}{15}$ multiplicirt werden.

Die Grade der Breite werden an der Seiteneinfassung EF und GH, die Grade der Länge an der obern und untern GE und HF von der Linken zur Rechten bemerkt, auch wohl Minuten oder aliquote Teile derselben. — BD und AC können auch mehrere Grade fassen, so wie BK.

Ein solches Netz ist leicht zu zeichnen, weil es nur aus graden Linien besteht. Auch läßt sich ein Ort a innerhalb eines Vierecks nach seiner Länge und Breite ziemlich sicher und mit wenig Mühe eintragen, indem man ein Lineal so legt, daß es an der obern und untern Einfassung seine Grade der Länge zeigt; der Unterschied seiner Breite von der des nächsten Parallels ist von der Einteilung des Seitenrandes, oder vom Maaßstabe abzunehmen, und von diesem Parallel nach oben oder unten an das Lineal zu legen. Eben so wird die Länge und Breite eines Orts in einem Vierecke gefunden.

Die

Die Parallelgrade zwischen dem obersten und untersten genau bestimmten können zwar nicht genau das wahre Verhältniß zum Meridiangrade haben, doch ist die Abweichung *) ganz unmerklich auf einer Karte von mäßiger Breite und Länge. Auch sind die Meridiangrade nicht durchweg von gleicher Länge wie auf dem mittelsten Meridiane, und die Meridiane, außer dem mittlern, schneiden die Parallelen nicht senkrecht.

Welchen Einfluß diese Veränderungen auf die Distanzen der Oerter auf der Karte haben, läßt sich leicht berechnen.

§. 20.

Die Karte sei zwischen dem 50sten und 60sten Grad der Breite und zwischen dem 6ten und 20sten der Länge enthalten. Der mittelste Meridian wäre also der 13te.

Man berechne die größte Entfernung HE auf der Karte aus den Bekannten HF und FE. Es ist $HF = 14 . 9{,}6418 = 134{,}98$ Meilen. Ferner ist $FE = 10 . 15 = 150$ Meilen. Das Quadrat von jenem ist 18135, von diesem 22500, die Summe derselben 40635: also $HE = \sqrt{HF^2 + FE^2} = \sqrt{40635} = 201{,}58$ Meilen nach dem Maaßstabe der Karte.

Nun berechne man die wahre Distanz HE (auf der Kugel) nach der Formel §. 14

cos

---

*) Es ist $BD - AC : BA = CA : \frac{BA . CA}{BD - AC}$ der Verlängerung von AB, bis es das verlängerte DC schneidet. Sie sei x, so ist ferner z. B. $x : AC = x + AK : KQ$. Dieser Werth von KQ muß mit seiner wahren Länge, welche sich aus der geogr. Breite des Parallels ergiebt, verglichen werden.

$$\cos HE = \overset{A}{\cos (90^\circ - 50^\circ) \,.\, (\cos 90^\circ - 60^\circ)} + \overset{+}{\vphantom{x}}$$
$$\overset{B}{\sin 40^\circ .\, \sin 30^\circ .\, \cos \lambda}.$$

Dieses λ ist hier $LI + IE = 14^\circ + IE$. Nun ist $AE = BF = 7 \,.\, 9{,}6418.. = 67{,}5$. Meilen und $AI = 7 \,.\, AC = 7 . 7{,}5 = 52{,}5$ Meilen (denn der Grad des sechszigsten Parallels hat $7\frac{1}{2}$ Meilen). Also ist $IE = 67{,}5 - 52{,}2 = 15$ Meilen, das ist zwei Grad im obersten Parallel. Also ist $\lambda = 16^\circ$: daher

$$\begin{array}{l}
\text{l. } \cos 40^\circ = 9{,}8842540 - 10 \\
\text{l. } \cos 30^\circ = 9{,}9375306 - 10 \\
\hline
\text{l. } \quad A \quad = 9{,}8217846 - 10.
\end{array}
\quad \text{Also } A = 0{,}66341$$

Ferner:

$$\begin{array}{l}
\text{l. } \sin 40^\circ = 9{,}8080675 - 10 \\
\text{l. } \sin 30^\circ = 9{,}6989700 - 10 \\
\text{l. } \cos 16^\circ = 9{,}9828416 - 10 \\
\hline
\text{l. } \quad B \quad = 9{,}4898791 - 10.
\end{array}
\quad \text{Also } B = 0{,}30894$$

$$\text{und } \cos HE = 0{,}97235$$

Sucht man diesen Kosinus in den Tafeln der natürlichen Sinus, oder seinen Logarithmen in den log. trig. Tafeln, so findet man den Bogen $HE = 13^\circ, 30'$, also in Meilen 202,5. Die Karte gab 201,58 M., also ist der Unterschied noch nicht eine Meile, und der Fehler sehr unbedeutend für eine Distanz von 200 Meilen. Man wird also für eine Karte von 15 Grad Breite und Länge (nicht allzunahe am Pole) und drüber, sehr wohl einen einzigen Meilenmaaßstab gebrauchen können. — Ein solcher Meilenmaaßstab ist nur nothwendig für die Messung der Distanzen, nicht zur Zeichnung des Netzes.

Zusatz. Wäre die Breite a und Länge b des Papiers in Zollen gegeben, so müßte darnach die

Länge g des Meridiangrads auf der Karte bestimmt werden. Es sei für obige $a = 12$ Zoll, $b = 16$ Z., so ist $b = 14.\ g.\ \cos 50°$, daher $g = 1{,}79$ Zoll. Es soll aber auch sein: $a = 10\,g$, daher $g = \frac{a}{10}$, das ist 1, 2 Zoll. Es darf also der Meridiangrad nicht länger angenommen werden werden, als 1, 2 Zoll.

Für eine Karte, die etwa nur bis 8 Grad Länge und Breite faßt, kann man ohne merklichen Nachteil die Meridiane und Parallelen senkrecht auf einander ziehen, und den Graden eines Parallels das wahre Verhältniß zum Meridiangrade geben; dadurch wird die Zeichnung des Netzes und die Eintragung der Oerter noch leichter.

Zweite Entwerfungsart.

§. 21.

Sie ist die Vorige, jedoch mit dem bedeutenden Unterschiede, daß die Parallelen konzentrische Kreisbogen sind.

Der mittelste Meridian AB, fig. 17, ist in seine gleich großen Grade geteilt, und die Parallelgrade AC und BD sind in ihrem wahren Verhältnisse zum Meridiangrade nach ihrer Breite genommen; eigentlich ihre Sehnen, doch die Sehne des Bogens von 1° kann bei einem großen Radius für den Bogen selbst gelten. Ein Meridiangrad mehreremal auf eine grade Linie getragen, giebt einen Meilenmaaßstab zur Zeichnung des Netzes; den ersten Grad teilt man in 15, 30 oder 60 gleiche Teile, oder auch in Dezimalteile.

Da

Da nun die Parallelen Kreisbogen sein sollen, so ist der Radius PA zu bestimmen.

Man ziehe Cf parallel AB, so ist

$$Df : fC = CA : AP$$

oder $DB - CA : AB = CA : PA$.

Es sei, z. B. die Karte zwischen den 40sten und 60sten Grad der Breite enthalten, (und fasse 20 Grad Länge): so ist $AB = 300$ Meilen, $DB = 11{,}490$ M. und $AC = 7{,}5$ M., daher $DB - CA = 3{,}99$. Folglich ist der Radius $PA = \frac{7{,}5 \,.\, 300}{4} = 562{,}5$ Meilen, oder $37\frac{1}{2}$ Mer. Grad (oder Zoll, wenn dieß die angenommene Länge des Meridiangrades wäre.) Für jeden folgenden Parallel wächst dieser Radius um die Länge AE, eines Meridiangrads oder mehrerer, je nachdem man die Parallelen ziehen will. AC so wie BD werden diesseit und jenseit AB mehreremal aufgetragen, und dann kann man die Meridiane CD u. s. w. ziehen.

Soll die Karte in der Mitte am genauesten sein, so giebt man den Graden zweier mittlern Parallelen das wahre Verhältniß zum Meridiangrade.

Die Kreisbogen dieser Karte würden sich mit dem Stangenzirkel noch ziehen lassen. Sollte dies in einem andern Falle wenigstens für die untern Parallelen nicht angehen, so zeichnet man den untersten Parallel durch Punkte, welche um einen Parallelgrad (oder mehrere) von einander abstehen. Der zu einem Längengrade gehörige Winkel an B ist aber nicht ein Grad des Kreisbogens, dessen Radius PB. Es ist DB die Tangente eines Grads für diesen Radius, also

$$\mathit{tang}\ DPB = \frac{DB}{BP}.$$

für

Für obige Data ist daher

$$tang\ DPB = \frac{11,49}{862,5} = 0,01332.$$

folglich nach den Sinustafeln der Winkel an P, der einem Längengrade zugehört,

$$W.\ DPB = 45',\ 47\tfrac{1}{2}''.$$

Nun läßt sich, wie oben §. 11, der Sinus und Sinus Versus eines Längengrades, und mehrerer, berechnen, wodurch auch auf beiden Seiten des mittlern Meridians, die Punkte des Parallels bestimmt werden, die um einen Längengrad von einander abstehen. So kann auch das oberste Parallel verzeichnet werden, und die andern, wenn man den Linien, welche die Punkte des untern Parallels verbinden, gleichlaufende zieht, nachdem die Meridiane durch die gleichnamigen Punkte der beiden Parallelen gezogen worden. —

Für die Zeichnung ist es bequemer und sicherer, wenn man durch den Punkt des Parallels im mittleren Meridian eine Senkrechte zieht, auf diese jene Sinus trägt, und an dieselben die Sinus Versus senkrecht setzt.

Anmerk. Zwischen dem Bogen DB und seiner Sehne 2 PB. $sin\ \frac{1}{2}$ DPB ist für die Zeichnung kein Unterschied. Sie ist 11,492 Meilen, und da der Bogen DB = 11,490 . . . so ist ihre Differenz unmerklich, wenn auch DB mehrere Grade faßt.

§. 22.

Diese Entwerfungsart (die Delilische) ist eine der vorzüglichsten, denn sie erfüllt die Hauptbedingungen der Aehnlichkeit mit dem Kugelnetze. Die Meridiane erscheinen als grade Linien, wenigstens zwei Parallelgrade haben das wahre Verhältniß zum Meri-

Meridiangrade und die andern weichen nur unmerklich davon ab, die Meridiangrade sind überall gleich und die Meridiane schneiden die Parallelen unter rechten Winkeln: so daß also die Gestalt der Länder höchst wenig verändert wird und die Distanzen der Oerter proporzionirt bleiben. Ueberdieß ist die Zeichnung des Netzes leicht und auch die Länge und Breite eines Orts α innerhalb eines Vierecks ohne Mühe zu bestimmen. Man teilt nemlich die obersten und untersten Parallelgrade von Minute zu Minute, oder von 5 zu 5 Minuten ein, legt ein Lineal so, daß es am obersten und untersten Parallel die Länge von α zeigt, und nimmt nachher $\beta\alpha$ am Meridiangrade, der auch ein Minutenmaaßstab ist.

Den Meilenmaaßstab kann man mit Sicherheit gebrauchen, wenn auch die Karte eine Distanz von 400 geogr. Meilen und darüber faßte. Um zu untersuchen, wie groß wohl der Fehler bei Messung eines solchen Abstandes werden könne, berechne man GA nach den Bestimmungsstücken des Netzes.

Es ist $GN = r . \sin GBP$; $r = 862{,}5$ und W. $GPB = 7°, 38' = 10. DPB$, also $GN = 114{,}56$ Meilen. Ferner $PN = r. \cos GPB = 854{,}86$ M. also $AN = 292{,}56$ M. Daraus erhält man $GA = 314{,}18$ Meilen. Nun berechne man die wahre Entfernung auf der Erdkugel von G und A nach obiger Formel

$$\cos GA = \cos 50°. \cos 30° + \sin 50°. \sin 30°. \cos 10°.$$

Der Bogen $GB = \lambda$ ist nach der Voraussetzung 10 Grad. Man findet $GA = 314{,}75$ M., also ist der Fehler nur etwa eine halbe Meile für diese große Distanz, und bei der angenommenen Länge des Meridiangrads auf der Karte kaum bemerkbar. Man wird aber daraus nicht schließen, daß dieser Unterschied

für

für eine n fache Distanz n fach sei: wohl aber, daß er bei einem geringern Abstande kleiner, wenn auch demselben nicht genau proporzionirt sei. — (Auf einer gegebenen Karte kann man GA nach ihrem Maaßstabe messen, und es nachher mit der wahren Distanz vergleichen, um die Karte in dieser Hinsicht zu prüfen. So giebt z. B. eine Karte von Europa v. S. nach dieser Projekzion, deren Meridiangrad $\frac{2}{3}$ par. Zoll, für die Distanz zweier Oerter, Gibr. und Petersb., deren Breitenunterschied 24°, und deren Längenunterschied 36°, das ist für 500 Meilen, einen Fehler von etwa 8 Meilen, oder noch nicht vier Linien. Wenn auch die Zeichnung vollkommen richtig ist, so ist es doch der Abdruck gewöhnlich niemals, weil er sich beim Trocknen zusammenzieht, und zwar anders in der Breite als in der Länge.)

Man sieht hieraus, daß die Parallelgrade von ihrem wahren Verhältnisse zum Meridiangrad nur um ein Unmerkliches differiren können. SQ z. B. läßt sich aus PA, AC und PQ durch eine Regel Detri finden, und hernach mit der wahren Länge des Parallelgrads unter derselben Breite vergleichen.

Zusatz. Ist die Breite a und Länge b der Karte vorgeschrieben, so setze man $b = 20.\ g.\ \cos 40° = GB$. Ist nun z. B. $b = 8$, so erhält man $g = 0{,}5222$ Zoll, um sehr wenig zu klein. Eine genauere Rechnung giebt 0,5228. Größer darf g nicht sein, wenn es auch für $a = 12$. größer sein könnte.

[Man findet $r = \dfrac{20\ g.\ \cos 60}{\cos 40 - \cos 60}$, und es ist wie vorhin der W. $GPB = 7°,\ 38'$. Daher ist nun $\frac{1}{2} b = r.\ \sin GPB$, woraus $g = 0{,}5228$ . . Zoll; g hat keinen Einfluß auf den Winkel.]

Dritte Entwerfungsart.

§. 23.

Sie unterscheidet sich von der Vorigen darin, daß der Parallelgrad nur auf einem (dem mittelsten) Parallele in seinem wahren Verhältnisse zum Meridiangrade genommen wird. Man kann sie, so wie die Vorige, als eine Abwickelung einer Kegelzone ansehen.

Man denke sich eine Erdkugel in den graden Kegel GPK fig. 17, so hineingeschoben, daß ihre Axen zusammenfallen, so wird des Kegels krumme Fläche sie in einem Parallelkreise HI tangiren. Hat ein Kugelzonenstück auf beiden Seiten von HI nur eine geringe Breite BA, so kann man es ohne Nachteil für das eben so breite Kegelzonenstück LMGK nehmen und dieses abwickeln, oder auf einer Ebne ausbreiten, denn ein grader Kegel läßt sich abwickeln. Es ist

1. Der Halbmesser R der Kugel die angenommene Länge (g) eines Breitengrades multiplizirt mit 57,296 . . . ; die Peripherie 360 hat zum Halbmesser 57,296.

2. Der Halbmesser PI = PQ = r des Parallelkreises HI auf der Karte ist die Kotangente der Breite (ε) von HI für den Kugelradius R, oder $r = R \, cotg \, \varepsilon$. PI ist nemlich als Seitenlinie des Kegels die Tangente der Kugel in I, also des Winkels am Mittelpunkte der Kugel, der die Entfernung des Punkts I vom Pole angiebt: folglich ist PI die Kotangente der Breite.

3. Der

3. Der dem Parallelgrade QS zugehörige Winkel an P verhält sich zu dem im Mittelpunkte des Parallelkreises in der Kugel, das ist, zu einem Grade, wie der Sinus der Breite des Parallels zum Sinus totus. Soll nemlich ein Kreisbogen, welcher, als Länge betrachtet, der nte Teil einer Peripherie ist, der mte Teil einer andern sein, so müssen sich die Peripherien oder die Radien verhalten wie n : m, also die jener bestimmten Bogenlänge zugehörigen Zentriwinkel wie m : n. — Nun ist der Radius des Bogens QS auf der Kugel $=$ R. *cos* ε und sein Radius auf der Karte, oder $r =$ R. *cotg* ε: folglich verhält sich der Bogen QS, oder ein Parallelgrad zum Winkel SPQ wie R. *cotg* ε : R. *cos* ε, oder wie 1 : *sin* ε.

4. Die Meridiangrade werden von der Kugel auf die Kugelfläche getragen; sie bekommen also gleiche Länge.

§. 24.

Soll demnach für obige Karte, welche 20 Grad Breite faßt, ein Netz nach dieser Entwerfungsart gezeichnet werden, so ist etwa der Parallel des funfzigsten Grades für den mittelsten anzunehmen, welcher die Kugel tangirt, und dessen Grade die wahre Länge erhalten. Giebt man dem Meridiangrade einen Zoll Länge, so ist der Kugelradius R $=$ 57, 296 Zoll. Daraus folgt PQ der Radius der Karte für den Parallel HI, oder $r =$ R *cotg* $50^\circ = 48, 10$ Zoll. Für die andern Parallelen ist der Radius größer oder kleiner um die Länge eines oder mehrerer Meridiangrade. Zuletzt ist der Winkel SPQ $=$ *sin* $50^\circ = 0{,}766^\circ$, das ist $45', 57''$. Man sieht, wie wenig die Bestimmungsstücke dieses Netzes von denen für das Vorige abweichen. —

Um

Um die Meridiane CD u. s. w. zu ziehen, ist AC aus PQ, QS und PA zu berechnen. Es ist QS = 0, 64 Zoll und PA = PQ — AQ.

Sollten sich die Parallelen nicht aus ihrem Mittelpunkte beschreiben lassen, so kann man Punkte in denselben bestimmen, die um einen Parallelgrad und mehrere, vom mittl. Mer. abstehen, da der Radius und der Winkel am Mittelpunkte P für einen Längengrad bekannt sind. Durch je zwei dieser Punkte, welche in zwei Parallelen dieselbe Länge haben, kann man alsdann die Meridiane ziehen. —

Wären die Dimensionen der Karte vorgeschrieben, so müßte wie oben die Länge des Meridiangrads (die Länge von 15 geogr. Meilen) darauf bestimmt werden. — Das Netz kann auch nach einem Meilen-Maaßstabe berechnet und gezeichnet werden.

Liegt eine zu entwerfende Erdfläche auf beiden Seiten des Aequators, so ist eine Kegelprojekzion nicht vorteilhaft, weil sie die Längengrade auch jenseit des Aequators vergrößert, welche doch auf der Kugel abnehmen. Hat sie nur geringe Breite, so ist nur ein Netz wie für Plankarten zu zeichnen, (alle Vierecke als Quadrate); der Aequator, für den r unendlich, ist eine grade Linie, und die Meridiane sind parallel, weil der Winkel an P Null ist.

Anmerk. Diese Entwerfungsart ist, so wie die Vorige, eine der gebräuchlichsten geworden, seitdem man sich (sehr spät) überzeugt hat, daß eine bestimmte Stelle des Auges keine Hauptbedingung für die Konstrukzion eines geographischen Netzes ist. Sie hat fast alle Vorzüge der Vorigen, jedoch ist sie etwas weniger genau; wenn man einem Meridiangrade etwa $\frac{1}{2}$ rhl. Zoll Länge gäbe, so könnte man auf einer Karte von Europa noch ohne bedeutenden Fehler denselben Meilenmaaßstab gebrauchen.

Vierte Entwerfungsart.

von Bonne.

§. 25.

Sie ist die Vorige, für eine grössere Ausdehnung eingerichtet. Es erhalten nemlich alle Parallelgrade ihr wahres Verhältniß zum angenommenen Meridiangrade.

Die Zeichnung des Netzes ist folgende:

Man zieht den mittlern Meridian AB, fig. 18, und teilt ihn in die vorgeschriebne Anzahl gleicher Grade oder Teile. Dann berechnet man den Radius des mittelsten Parallels wie vorhin und beschreibt eben so die Parallelen. Nun sucht man für jeden Parallel die wahre Länge seiner Grade in Bezug auf den Breitengrad, und teilt ihn vom mittelsten Meridian an, in seine Grade oder Vielfache von Graden ein; $gf = ig$ u. s. f. Alle Punkte der Parallelen g, h u. s. f. welche dieselbe Länge haben, verbindet man, und so sind auch die Meridiane gezogen, welche in diesem Falle weder Kreise noch Ellipsen sind, sondern eigne krumme Linien.

Es sei z. B. das Netz für eine Karte zu zeichnen, welche 60 Grad Breite, vom 10ten bis 70sten fassen soll. Es ist der Kugelradius $R = 15 . 57,296 = 859,43$ Meilen, und nach dem Vorigen der Halbmesser des vierzigsten Parallels, welcher hier der mittlere sein kann, oder $r = R. \, cotg \, 40° = 1024,2$ Meilen. Die Parallelen, so wie die Meridiane sollen von 10 zu 10 Grad gezogen werden.

Es sind 10 Grade des Parallels	$l =$	51, 3 M.
„ „ „ „ „ „	$f =$	75
„ „ „ „ „ „	$e =$	96, 4
„ „ „ „ „ „	$d =$	114, 9
„ „ „ „ „ „	$c =$	129, 9
„ „ „ „ „ „	$b =$	140, 9
„ „ „ „ „ „	$a =$	147, 7

Diese kann man von einem beliebigen oder durch die Größe der Karte bestimmten Meilenmaaßstabe abnehmen und als Sehnen auf die Parallelen tragen, sie werden von den Bogen gf u. s. w., deren Länge sie eigentlich ausdrücken, nur unmerklich differiren. Könnten die Parallelen nicht wirklich mit dem Radius (r) beschrieben werden, welches bei den untersten vielleicht der Fall ist, so kann man mittelst des Winkels an P, welcher zehn, zwanzig u. s. w. Parallelgraden zugehört, die nöthigen Punkte des Parallels bestimmen. Da $2\pi r$ die Per. für r, und 2π R. $\cos \varepsilon$: 360 die Länge eines Par. Grades, also eines Teiles derselben, so ist

$$2\pi r : 360^\circ = \frac{1}{360}\, 2\pi \, \mathrm{R}.\cos\varepsilon : \varphi,$$

folglich der Winkel an P für einen Grad,

$$\varphi = \frac{\mathrm{R}.\cos\varepsilon}{r} \text{ Grad. §. 23. 3.}$$

Da die Karte eine so große Ausdehnung hat, so wird man die Länge des Meridiangrades nicht über einen Viertelzoll annehmen können.

§. 26.

Nach dieser Entwerfungsart kann man Distanzen von mehr als tausend Meilen auf der Karte ohne bedeutenden Fehler mit demselben Meilenmaaßstabe messen.

Um dieß durch ein Beispiel zu beweisen, so sei

fig.

fig. 18, der Unterschied der Länge der beiden Oerter E und F 120 Grad, die Breite von E 10 Grad und von F 60 Grad. Es ist die Entfernung der Oerter E und F, die Seite EF des Dreiecks PEF zu berechnen.

PF ist der Radius des 60sten Parallels. Da nun der Radius des 40sten 1024, 2 M. ist, so ist PF = 1024, 2 — 15. 20 = 724, 2. Ferner ist PE der Radius des zehnten Parallels, also 1024,2 + 15. 30 = 1474, 2 Meilen. Zuletzt ist der Winkel an P, für einen Grad des Parallels a = 34′, 26½″, folglich der sechszigmal größere Winkel EPa = 34°, 26′, 30″. Nach derselben Rechnung ist der Winkel aPF = 35°, 36′, 3″: also der ganze Winkel FPF = 70°, 2′, 33′. Aus den beiden Seiten PE und PF und dem eingeschloßnen Winkel findet man EF = 1403, 2 Meilen.

Die Entfernung von E und F auf der Kugel ist aber 1432 Meilen. Der Fehler wäre also etwa 29 Meilen, nicht beträchtlich für eine Distanz von 1400 Meilen, und ein sehr kleiner Teil der Dimension einer Karte, welche 120 Grad geogr. Länge, nahe am Aequator, fassen soll. Er wird noch geringer ausfallen, wenn man die Distanz nicht, wie in diesem Beispiele, grade in der Diagonale der Karte nimmt.

In einem solchen Netze sind nicht alle Meridiangrade genau von gleicher Länge, auch schneiden die Meridiane die Parallelen nicht unter vollkommen rechten Winkeln; doch sind diese Abweichungen sehr unbedeutend. Die Meridiane haben eine nur sehr geringe Krümmung, daher macht auch die Bestimmung der Länge und Breite eines Orts in einem Vierecke und das Eintragen desselben keine Schwierigkeit. Da überdieß, wie Prof. Mollweide bewiesen hat, diese Entwerfungsart auch die Flächen richtig darstellt, so ist sie die vorzüglichste für sehr große Teile der Erde.

Zu-

Zusatz. Ist die Breite und Länge des Papiers gegeben, so kann man die anzunehmende Länge des Meridiangrades wie §. 22. berechnen.

Fünfte Entwerfungsart. von Flamsteed.

§. 27.

Sie weicht von der Bonnischen nur darin ab, daß sie fig. 19., die Parallelen als grade Linien darstellt; ihren Graden giebt man durchweg ihr wahres Verhältniß zum Meridiangrade. Die Meridiane sind wie bei jener eine eigene Art krummer Linien, Sinuslinien genannt.

Diese Entwerfungsart ist leichter, als die Vorige, auch sehr bequem zur Bestimmung der Längen und Breiten der Oerter in den Vierecken, weil die Meridiane nur eine sehr geringe Krümmung haben, wenn die abzubildende Erdfläche nicht ganz nahe am Pole liegt, auch stellt sie die Flächenräume richtig dar. Ein solches Netz kann aber keine solche Ausdehnung haben, als das vorige, oder sehr große Distanzen darauf können nicht mehr mit Sicherheit mit demselben Meilenmaaßstabe gemessen werden; auf einer Karte die 20 bis 40 Grad Länge und Breite faßt, wird jedoch der Fehler kaum merklich.

Es sei $AB = 20° = 300$ Meilen, $EB = 10°$ des vierzigsten Parallelkreises, also $= 10. \; 11{,}49 = 114{,}9$ Meilen, und $AD = 10°$ des sechszigsten, also $= 10. \; 7{,}5 = 75$ Meilen: so ist $EC = EB + AD = 189{,}91$ Meilen. Da nun $DC = AB = 300$, so ist

$$ED = \sqrt{(189{,}91)^2 + 300^2} = 355{,}05$$

Die

Die Formel: $\cos ED = \cos 50^\circ . \cos 30^\circ + \sin 50^\circ . \sin 30^\circ . \cos 20^\circ$
giebt für die wahre Entfernung von E und D auf der Kugel 353, 5 Meilen, daher ist der Unterschied nur anderthalb Meilen, welcher, wenn der Meridiangrad einen halben Zoll Länge hat, auf der Karte kaum merklich ist.

Es gehe die Karte vom 20sten bis 60sten Grade der Breite, und fasse ebenfalls 40 Grad Länge. In diesem Falle ist nach derselben Rechnungsweise ED = 710, 1 Meilen, und der wahre Abstand von E und D = 719, 8 Meilen: also der Unterschied 9, 7 Meilen, welches ebenfalls kein bedeutender Fehler für eine solche Distanz ist.

Anmerkung. Diese Projekzion und die dritte so wie die Zentralprojekzion, sind auch zu Himmelskarten gebraucht worden. Auf diesen wird die Ekliptik durch ihre Durchschnittspunkte mit den Meridianen der Karte bestimmt. Eine Himmelskugel zeigt, daß um diese Punkte zu finden, man für jeden eine Kathete eines rechtwinklichten sphärischen Dreiecks berechnen muß.

Sechste Entwerfungsart.

von Murdoch.

§. 28.

Sie unterscheidet sich von den Vorigen dadurch, daß sie eine Projekzion auf eine Kegelzone, und Abwickelung derselben ist, daß die Meridiane grade Linien sind, welche die konzentrischen Parallelen senkrecht schneiden, und überdieß daß der

ganze

ganze Entwurf seinem Originale auf der Kugel an Inhalt gleich ist.

Es sei fig. 20, CBO der Viertelkreis eines Meridians, Q und S zwei Oerter auf dem Meridian OGC, die geographische Breite (CQ) des einen α, des andern CS $= \beta$. Der Punkt G liege in der Mitte zwischen Q und S, so ist seine Breite CG $= \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$. Auf GB ziehe man senkrecht in A die DP, so daß, wenn man LD dem Bogen SQ an Länge gleich setzt, und die Figur um BP sich drehen läßt, die so entstehende Kugelzone zwischen Q und S gleich sei an Fläche der Kegelzone zwischen D und L. Es ist nun der so bedingte Punkt A auf GB zu bestimmen.

Der Inhalt der Kugelzone ist für den Radius $BC = R$, $2\pi R . HM = 2\pi R^2 (\sin\beta - \sin\alpha.)$. Der Inhalt der Kegelzone ist $= 2\pi . AI . LD$. Da nun beide gleich sein sollen, so muß sein

$$2\pi . AI . LD = 2\pi R^2 (\sin\beta - \sin\alpha);$$

$$\text{Also } AI = \frac{R^2 (\sin\beta - \sin\alpha)}{LD}.$$

Da nun auch $AI = AB . \sin ABI$

$$= AB . \cos GBC = AB \cos \tfrac{1}{2} (\beta + \alpha)$$

$$\text{So ist } AB = \frac{AI}{\cos \frac{1}{2} (\beta + \alpha)}.$$

§. 29.

Denkt man sich nun die Kegelfläche von P bis D auf einer Karte in einen Kreisausschnitt ausgebreitet, so wird PL der Radius des obersten Parallels, und PD der Radius des untersten auf der Karte sein. Desgleichen wird PA $= r$, der Halbmesser des mittelsten Parallels, und PF, so wie PE, sind die Halbmesser der zwei Parallelen, deren Grade sich zum Meridiangrad verhalten, wie auf der Kugel. Alle diese Radien sind nun zu bestimmen.

1) Des

1) Des mittelsten Parallels.

Es ist PA $=$ BA *tang* GBP $=$ BA $cotg\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ oder statt AB seinen Werth gesetzt,

$$PA = \frac{AI}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \cdot cotg\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta) =$$

$\frac{AI}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$, das ist, statt AI das ihm gleiche gesetzt,

$$PA = \frac{R^2(\sin\beta - \sin\alpha)}{LD.\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

Es ist aber $\sin\beta - \sin\alpha = 2.\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$, folglich:

$$PA = \frac{2R^2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{LD.\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

und da LD $=$ QS $= \beta - \alpha$ in Graden, oder 15 $(\beta-\alpha)$ in Meilen, so ist in Meilen

$$r = \frac{2R^2 cotg\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha).}{15(\beta-\alpha)}$$

2. PF und PE; die Radien der Parallelen deren Grade in ihrem wahren Verhältnisse zum Meridiangrade sind. Es sei der Bogen GF $=$ GE $= \delta$, so ist

$$\frac{AB}{R} = \cos\delta, \text{ oder } \cos\delta = \frac{AI}{R\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

Wird statt AI sein obiger Werth

$$\frac{2R^2.\sin(\beta-\alpha).\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\beta-\alpha} \text{ in Graden,}$$

also R $=$ 57, 296 gesetzt:

$$\text{so ist } \cos\delta = \frac{57,296.\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}.$$

Haben

Haben α und β auch Minuten und Sekunden, so müssen sie in Dezimalteile des Graden im Nenner verwandelt werden.

Durch diesen Werth von $cos\ \delta$ werden nun PF und PE bestimmt. Es ist:

$$PF = PA - FA = PA - R\ sin\ \delta$$

$$\text{und } PE = PA + R.\ sin\ \delta$$

Zusatz. Man setze $\frac{R}{15}$ in den Werth von $cos\ \delta$ statt 57, 296, und $\frac{1}{2}\ cos\ \delta$ in den Werth von PA statt $\frac{R.\ sin\ (\beta - \alpha)}{15.\ (\beta - \alpha)}$, so erhält man für PA in Meilen den Ausdruck:

$$r = R.\ cotg\ \tfrac{1}{2}\ (\alpha + \beta).\ cos\ \delta.$$

§. 30.

Es sei nun das Netz für eine Karte vom 10ten bis zum 70sten Grade der Breite nach dieser Entwerfungsart zu zeichnen. Man ziehe den mittlern Meridian, und teile ihn in 6 gleiche Teile, also jeder von 10 Grad. Da nun $\alpha = 10°$ und $\beta = 70°$,

so ist $log\ cos\ \delta = l.\ \frac{57,\ 296.\ sin\ 30°}{30} = 9{,}9799713$

und $l.\ PA = l.\ R + l.\ cotg\ 40° + l.\ cos\ \delta = 2,\ 9903717$

das ist PA = 978, 1 Meilen.

Mit diesem Halbmesser beschreibe man den Parallel des vierzigsten Grades der Breite, welcher für diesen Fall der mittelste der Karte sein wird.

Da $\delta = 17°\ 16'$, so wird die Breite des Parallels, dessen Radius PF, $40°, + 17°, 16' = 57°, 16'$ sein, und die Breite des Parallels, dessen Radius PE = $22°, 44'$. Diese Kreisbogen ziehe man aus dem Mittelpunkte P durch die so bestimmten, um δ

vom

vom mittlern Parallel abstehenden beiden Punkte des mittlern Meridians, und teile sie auf beiden Seiten desselben in solche Grade ein, welche das wahre Verhältniß zum Meridiangrad haben. Für die Breite von 57°, 16′ ist die Länge des Parallelgrads 8, 11 Meilen, für die andre 13, 83; da nun hier die Länge so wie die Breite, von 10 zu 10 Grad auf dem Netze angegeben werden soll, so sind die Teile des obern Parallels jeder 81,1 Meilen, und die Teile des untern jeder 138,3 Meilen. Zuletzt ziehe man grade Linien durch je zwei Punkte von gleicher Länge in diesen beiden Parallelen, so werden diese graden Linien die Meridiane sein.

Sollten sich die Parallelen aus P nicht beschreiben lassen, so muß man auch die Halbmesser PF und PE berechnen. Es ist $PF = PA - R \sin \delta$

$$\begin{array}{rl} \text{l. } R. & = 2{,}9342139 \\ \text{l. } \sin 17°, 16' & = 9{,}4724922 - 10 \\ \hline \text{l. } R. \sin \delta & = 2{,}40167061. \end{array}$$

Also $R. \sin \delta = 255, 1$ M.

Daher $PF = 723$ Meilen, und eben so
$PE = 1233, 2$ Meilen.

Nun läßt sich der Winkel für 10 Längengrade an P wie §. 26 finden; also können auch die Parallelen von zehn zu zehn Grad durch Punkte verzeichnet werden.

Anmerkung. Diese Entwerfungsart gewährt wie man sieht, etwas mehr Vorteil als die Bonnische, in Rücksicht der Zeichnung, so wie der Eintragung der Oerter ins Netz, oder Bestimmung ihrer Länge und Breite. In Rücksicht der Genauigkeit bei Messung der Distanzen steht sie jener um Etwas nach; auch haben nicht alle Parallelgrade, das wahre Verhältniß zum Meridiangrade; doch sind diese Abweichungen so groß nicht, daß sie auf einer Karte, welche 50 bis 60 Grad Breite und Länge faßt, für mittlere Distanzen, einen bedeutenden Fehler geben könnten.

§. 31.

§. 31.

Eine nützliche Veränderung dieser Entwerfungsart von Albers ist folgende:

Es soll nicht blos, wie vorhin, die ganze Kegelzone der ganzen Kugelzone gleich sein, sondern auch jeder einzelne Teil von dieser z. B. von 5 Grad Breite dem gleich breiten Teile von jener: so daß also auch die Flächen der einzelnen Teile auf der Karte richtig dargestellt werden, und wie geometr. Figuren zu berechnen sind, wenn man sie wie diese zerteilt, und die nöthigen Dimensionen mit dem Maaßstabe der Karte mißt.

Die Grade des mittlern Meridians können alsdann nicht gleich groß genommen werden. Die Kegelzone zwischen A und v soll der Kugelzone zwischen G und V gleich sein. Es sei der Bogen $GV = \varphi$, so ist die Breite von $V = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \varphi$, da die Breite von $G = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, und daraus läßt sich die Fläche der Zone zwischen G und V berechnen.

Sie ist $2\pi R$ multiplizirt mit ihrer Höhe a b. Es ist aber $ab = Bb - Ba = R. \sin(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \varphi) - R. \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = R \sin(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \varphi) - \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta))$ daher die Kugelzone

$$Z = 2\pi R^2. (\sin(\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + \varphi) - \sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta))$$

oder, wenn man statt des Unterschieds der beiden Sinus das ihm gleiche Produkt $2 \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \varphi) \sin\frac{1}{2}\varphi$ setzt,

$$Z = 4\pi R^2 \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \varphi) \sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

(So ist eine Kugelzone durch R, ihre Breite φ in Graden, und durch die geogr. Breiten, γ und $\gamma + \varphi$, ihrer äußersten Parallelkreise bestimmt:

$$4\pi R^2 \cos(\gamma + \tfrac{1}{2}\varphi) \sin\tfrac{1}{2}\varphi.)$$

Die

Die Fläche der Kegelzone zwischen A und v ist $\pi . Av . (AI + Tv)$. Es ist aber $AI = AP . \sin API = r . \sin CBG = r . \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$; desgleichen $Tv = Pv . \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$, oder $Av = x$ gesetzt, $= (r - x) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$. Daher ist die Kegelzone:
$\pi x (r . \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + (r - x) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$, das ist nach gehöriger Redukzion

$$\pi x (2 r - x) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

Nun soll die Kegelzone der Kugelzone gleich sein. Es ist also:

$$x^2 - 2 r x = \frac{Z}{\pi . \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)},$$

Und daraus $x = r - \sqrt{r^2 - \frac{Z}{\pi . \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}}$.

Das π im Nenner hebt sich gegen das π im Zähler Z. So kann man die Werthe von x von Grad zu Grad, oder von 5 zu 5 Graden berechnen, also die Punkte auf dem mittlern Meridian, vom mittlern Parallel an, bestimmen, durch welche die Parallelen gehen müssen, deren Radien $r - x$ sind. Für die Parallelen unter AI ist φ abzuziehen, und alsdann das bekannte Glied der quadratischen Gleichung zu addiren; dadurch wird x negativ.

Auf einem solchen Netze ist nach dem Maaßstabe LD der Distanzenfehler größer als auf dem Vorigen; jedoch auf einer Karte von etwa 20 Grad Breite noch nicht bedeutend.

Siebente Entwerfungsart.

Merkators-Karten.

§. 32.

Ein besonderes Bedürfniß der Seefahrer hat diese veranlaßt. Da der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf der Kugel ein Bogen eines größten Kreises derselben ist, und mit jedem Meridiane einen andern Winkel macht, so müßten sie in den mehrsten Fällen auf diesem kürzesten Wege die Richtung ihres Laufs gegen die Weltgegenden, das ist, ihren Strich beständig verändern, um jeden Meridian unter einem andern Winkel zu schneiden. Sie behalten aber lieber ihren Strich für ein Stück Weges, und dieses ist nun ein Bogen einer besondern krummen Linie, welche die loxodromische, oder Linie des schiefen Laufs, genannt wird. Auf einer Karte mit zusammenlaufenden Meridianen würde sich diese Linie äußerst schwer beschreiben und messen lassen, dagegen sie auf einer Karte mit parallelen Meridianen als eine grade Linie erscheinen muß, weil sie sie alle unter demselben Winkel schneidet. Da es nun dem Schiffer vorzüglich um die leichte Verzeichnung und Messung seines Weges zu thun ist: so bedient er sich der nach seinem Bedürfnisse eingerichteten Plankarten, Merkators-Karten, Wrigths-Karten, Seekarten, Karten mit wachsenden Breiten, auch reduzirte genannt, ob sie gleich die Lage und Gestalt der Erdteile nach den Polen hin sehr verändern.

Auf

Auf solchen Karten haben die Parallelgrade eine bestimmte unveränderliche Länge, dagegen wachsen die Breitengrade oder Meridiangrade nach dem Pole zu, und zwar in dem Verhältnisse der Sekante ihrer Breite (ε), so daß sich der Parallelgrad zum Meridiangrade verhält, wie $1 : \sec \varepsilon$ oder $1 : \frac{1}{\cos \varepsilon}$, das ist wie $\cos \varepsilon : 1$, also wie auf der Kugel.

So ist z. B. fig. 21, $BE : BC = 1 : \sec 41°$ wenn BE und BC einzelne Grade bedeuten, also $BC = BE.\ \sec 41°$. Eben so ist $CF = DC.\ \sec 42° = BE.\ \sec 43°$ u. s. w. so daß
$BA = BE\ (\sec 41° + \sec 42°, + \sec 43° \ldots . \sec 45°)$.

Man muß also, um die Länge AB (welche zuerst zu bestimmen ist) zu erhalten, die Sekanten aller zwischen A und B liegenden Grade oder Minuten addiren, und ihre Summe mit 15 multipliziren, wenn man AB in Meilen ausdrücken will.

Die folgende Tafel zeigt diese Länge von AB, vom Aequator an gerechnet, in Meilen zwischen dem nullten und εten Grad der Breite.

ε	AB	ε	AB	ε	AB
0	0,0	12	181,3	24	371,0
1	15,0	13	196,7	25	387,5
2	30,0	14	212,1	26	404,1
3	45,0	15	227,9	27	420,9
4	60,0	16	243,2	28	437,8
5	75,1	17	258,8	29	454,9
6	90,2	18	274,5	30	472,1
7	105,3	19	290,4	31	489,5
8	120,4	20	306,3	32	507,0
9	135,5	21	322,6	33	524,9
10	150,8	22	338,4	34	542,9
11	166,0	23	354,7	35	561,1

ε	AB	ε	AB	ε	AB
36	579,5	55	992,0	74	1686,4
37	598,2	56	1018,5	75	1742,6
38	617,1	57	1045,7	76	1802,5
39	645,2	58	1073,6	77	1866,5
40	655,7	59	1102,3	78	1936,1
41	675,4	60	1131,8	79	2011,4
42	695,4	61	1162,3	80	2093,8
43	715,8	62	1193,7	81	2184,8
44	736,4	63	1226,2	82	2286,4
45	757,5	64	1259,9	83	2401,4
46	778,9	65	1294,7	84	2534,2
47	800,7	66	1330,9	85	2691,2
48	822,9	67	1368,5	86	2883,1
49	845,5	68	1407,7	87	3130,6
50	868,6	69	1448,6	88	3479,1
51	892,2	70	1491,5	89	4074,9
52	916,3	71	1536,4	90	Unendlich
53	940,9	72	1583,7		
54	966,2	73	1633,6		

§. 33.

Liegt der Punkt B nicht im Aequator, wie in dieser Tafel angenommen ist, sondern z. B. unter dem 40sten Grad der Breite und A unter dem 60sten, so ist dieses AB = 1131,8 — 655,7 Meilen = 476,1. Man kann nun die Linie AB, oder ihre Länge, wenn sie auf dem Papiere gegeben sein sollte, als Meilenmaaßstab einteilen, um BC, CF u. s. w. aufzutragen. Es ist BC aus der Tafel das AB von 41 Grad weniger dem AB des 40sten Grades, das ist 675,4 — 655,7 = 19,7 Meilen. Desgleichen CF = 695,4 — 675,4 = 20,0 Meilen u. s. w. Eben so verfährt man, wenn BC, CF u. s. w. 5 oder 10 Grad vorstellen. Der überall gleiche Parallelgrad BE ist 15 Meilen. — Hätte man

man zuerst die Länge von BE, des Par. Grades, beliebig angenommen, und darnach einen Meilenmaaßstab verfertigt, so würde nach diesem die Länge von BA auf der Karte bestimmt.

Sind nun die Punkte B, C, F u. s. w. gefunden, so zieht man durch dieselben senkrecht auf BA grade Linien, welche die Parallelen sein werden; die Meridiane HE u. s. w. werden parallel mit dem mittlern BA gezogen.

Anmerk. Da auf einem solchen Netze die Meridiangrade nach dem Pole zu immer größer werden, so verlieren auch die in dasselbe gezeichneten Länder ihre wahre Gestalt, je näher sie dem Pole liegen; auch ist für eine solche Karte ein einziger Maaßstab für Distanzen nicht hinlänglich, sondern jedes Viereck hat seinen eigenen. Es muß daher jeder Meridiangrad in die nach seiner Breite ihm zukommende Anzahl Meilen geteilt werden, um große Distanzen beiläufig messen zu können, und in Minuten, um die Oerter nach ihrer Länge und Breite in die Vierecke einzutragen. Kleine Teile der Erdfläche behalten auf dieser Karte ziemlich ihre Aehnlichkeit mit dem Urbilde.

Man hat nach dieser Entwerfungsart ganze Weltteile, ja allgemeine Weltkarten gezeichnet.

Die Formel für die Länge AB ist

$$AB = 1978{,}92.\ \log.\ tg\ (45° + \tfrac{1}{2}\ \varepsilon).$$

Achte

Achte Entwerfungsart.
von Lambert.

§. 34.

Sie hat das Vorzügliche, daß sowohl der ganze Entwurf, als jeder Teil desselben seinem Original auf der Kugel an Flächeninhalt gleich ist, und sie giebt richtigere Planisphären als die obigen Projekzionen.

Es sei, fig. 22, A der Pol; R der Kugelradius. Die Kugelkappe zwischen dem Pol und einem Parallelkreise DEF ist gleich einem Kreise, dessen Radius die Sehne ist, welche den Bogen AD zwischen dem Pole und dem Parallelkreise spannt. Dieser Bogen, die Entfernung vom Pole sei η, so ist der Radius jenes Kreises $= 2\,R.\,sin\,\frac{1}{2}\,\eta$. Nimmt man also diese Sehne des Bogens, sie sei AH, und beschreibt damit den Kreis HIN auf einer Ebne, so hat dieser dieselbe Fläche, wie die Kugelkappe DEFA, und so läßt sich jede andre durch einen, mit diesem konzentrischen Kreis entwerfen. Für den Aequator ist $\eta = 90°$, also die Sehne $AL = 2\,R.\,sin\,45°$, und ein Kreis mit diesem Radius beschrieben, hat mit der Halbkugel CPBp gleiche Fläche. Mit diesem Kreise werden die Parallelen, etwa von 10 zu 10 Grad, konzentrisch gezogen; der Radius eines jeden ist $2\,R.\,sin\,\frac{1}{2}\,\eta$.

Teilt man diesen Kreis, den Aequator, in 360 Grad, etwa von 10 zu 10 Grad, und zieht von diesen Teilungspunkten grade Linien nach A, so sind diese die Meridiane, welche mit einander dieselben Winkel machen, wie auf der Kugel.

Wäre

Wäre der Radius (r) der Planisphäre vorgeschrieben, so erhält man den Kugelradius aus der Gleichung $2\,R.\,sin\,45^\circ = r$. Es ist $R = \frac{r}{2.\,sin\,45^\circ}$; oder $= \sqrt{\tfrac{1}{2}\,r^2}$, da $r^2 = R^2 + R^2$, das ist $R = r.\,0{,}70701\ldots$

Auf diese Weise läßt sich eine Polarentwerfung der Halbkugel (oder einer Kugelkappe) zeichnen, welche vor jener perspektivischen voraus hat, daß sie die Flächenräume in ihrem richtigen Verhältnisse darstellt, auch die Gestalt der Länder weniger verändert, weil die Grade der Länge verhältnißmäßiger ausfallen. Der Inhalt eines jeden Landes auf dieser Planisphäre läßt sich in Quadratmeilen berechnen, wenn man es in Rechtecke oder Trapezien und Dreiecke teilt, und die Dimensionen von diesen nach dem Maaßstabe $R = 860$ Meilen mißt.

Da sich der Radius jedes Parallelkreises berechnen läßt, und der Winkel zweier Meridiane in A dem auf der Kugel gleich ist, so läßt sich diese Entwerfungsart auch leicht für einen Teil der Erdfläche gebrauchen.

Zusatz. Wenn man die Parallelgrade dieser verschiedenen Polarentwerfungen mit dem Parallelgrade auf der Kugel vergleichen will, so ist in Meilen der Parallelgrad

der obigen Projekzion $= \frac{860\,\pi\;tang\,\frac{1}{2}\,\eta}{180}$

dieser Entw. v. L. $= \frac{86\,\pi.\;2\,sin\,\frac{1}{2}\,\eta}{18}$

auf der Kugel $= 15.\,sin\,\eta$

Desgleichen ist in Meilen der Meridiangrad der

ob. Proj. $= 860\,(tg\,\tfrac{1}{2}\,\eta - tg\,\tfrac{1}{2}\,(\eta - 1))$

dieser Entw. $= 860.\,2\,(sin\,\tfrac{1}{2}\,\eta - sin\,\tfrac{1}{2}\,(\eta - 1))$

der Kugel $= 15.$

Dar-

Daraus ist das Verhältniß des Breitengrades zum Längengrade für jede Breite zu berechnen.

§. 35.

Es sei nun ein Aequatorialnetz nach dieser Entwerfungsart zu zeichnen.

Der Kreis pb, fig. 23, sei mit demselben Radius (der Sehne AL) wie vorhin beschrieben, damit die Gleichheit des Flächenraums mit der Halbkugel beibehalten werde. Der Pol aber sei nun in p, durch a gehe der Aequator cb und dqe sei ein beliebiger Parallel, dessen Breite gegeben. Dieser ist durch Punkte zu verzeichnen, oder es ist die Lage irgend eines Punktes q auf demselben zu bestimmen.

Diese Lage wird bestimmt durch aq und den Winkel paq $=$ u, oder den W. hab $=$ y $= 90 -$ u. Es ist aber nach dem Vorigen, damit die Zonenflächen innerhalb des Kreises und auf der Kugel gleich bleiben, aq die Sehne des Bogens η, des Bogens AQ, fig. 22, das ist, $2\,R.\ sin\ \frac{1}{2}\,\eta$; welchen Namen dieser Bogen eines größten Kreises hat, ist hier einerlei. Dieser ist nun zuerst aus dem sphärischen Dreiecke PAQ zu berechnen. In demselben ist bekannt $PA = 90°$, $PQ = 90° - \varepsilon$, wenn die Breite des Punkts, der Bogen QK oder $RA = \varepsilon$, und W. $APQ = \lambda$, dem gegebnen Längenunterschiede des mittelsten Meridians PA und des Meridians PK. Daraus erhält man

$$cos\ \eta = cos\ \lambda .\ cos\ \varepsilon,$$

und $tang\ u = sin\ \lambda .\ cotg\ \varepsilon = \dfrac{sin\ \lambda}{tang\ \varepsilon};$

oder $tang\ y = \dfrac{tang\ \varepsilon}{sin\ \lambda}.$

Ist

Ist nun η und u gefunden, so trägt man jenen Winkel paq an ap, und nimmt auf ah das Stück $aq = 2R. \sin \frac{1}{2} \eta$, so ist die Stelle des Punkts q bestimmt; zugleich auch der Punkt s, der gleichen Abstand vom mittlern Meridian hat, so wie auch die beiden Punkte, welche dieselbe, aber südliche Breite haben, und vom mittelsten Meridian gleich weit weg liegen.

So kann man von 5 zu 5, oder von 10 zu 10 Grad Punkte desselben Parallels finden, und sie verbinden, um das Parallel zu ziehen, und so alle Parallelen auf beiden Seiten von cb. Für den Aequator cb ist $\varepsilon = 0$, also $\eta = \lambda$ und $u = 90°$, folglich der Aequator eine grade auf pa senkrechte Linie. Man kann diesen von a an als Maaßstab für die Hülfslinien aq nach dem Verhältnisse von $\sin \frac{1}{2} \eta$ einteilen, so daß z. B. die Abteilung für 40 Grad, von a an genommen $2R. \sin 20°$ sei.

Die Meridiane werden gezogen, indem man die gleichen Längen zugehörigen Punkte der Parallelen verbindet. Beide, sowohl Meridiane als Parallelen, sind eine eigne Art krummer Linien.

Ein so entworfenes Aequatorialnetz gewährt, außer der Gleichheit der Flächen, eine ähnlichere Gestalt der Länder als die obige ster. Projekzion, und ein täuschendes Kugelrelief.

Die folgende Tafel giebt den Bogen η so wie den Winkel $hab = y = 90° - u$ für jeden Werth von λ und von ε von 5 zu 5 Graden, und macht also die Zeichnung einer solchen Planisphäre sehr leicht. Wenn, z. B. $\varepsilon = 15°$ und $\lambda = 20°$, so ist $\eta = 24°, 49'$. Oder wenn $\varepsilon = 10°$ und $\lambda = 25°$, so ist $y = 22°, 39'$ u. s. f. Ist r nur etwa einen Fuß lang, so sind Meridiane und Parallelen nur von 10 zu 10 Grad zu ziehen, also η und y nur von 10 zu 10 Grad aus der Tafel zu nehmen.

§. 36.

§. 36.

Tafel für die Werthe von π.

Wenn	$e = 0$	5	10	15	20
$\lambda = 0$	0.	5	10.	15.	20.
5	5.	7. 4.	11. 10.	15. 48.	20. 35.
10	10.	11. 10.	14. 6.	17. 58.	22. 16.
15	15.	15. 48.	17. 58.	21. 6.	24. 49.
20	20.	20. 35.	22. 16.	24. 49.	27. 59.
25	25.	25. 28.	26. 48.	28. 54.	31. 37.
30	30.	30. 23.	31. 29.	33. 14.	35. 32.
35	35.	35. 19.	36. 13.	37. 42.	39. 40.
40	40.	40. 16.	41. 2.	42. 16.	43. 57.
45	45.	45. 13.	45. 44.	46. 55.	48. 22.
50	50.	50. 11.	50. 44.	51. 37.	52. 50.
55	55.	55. 9.	55. 36.	56. 21.	57. 23.
60	60.	60. 8.	60. 30.	61. 7.	61. 58.
65	65.	65. 9.	65. 24.	65. 55.	66. 36.
70	70.	70. 5.	70. 19.	70. 43.	71. 15.
75	75.	75. 3.	75. 14.	75. 31.	75. 55.
80	80.	80. 2.	80. 9.	80. 21.	80. 37.
85	85.	85. 2.	85. 5.	85. 10.	85. 18.
90	90.	90. 0.	90. 0.	90. 0.	90. 0.

Wenn	$\varepsilon = 25$	30	35	40	45
$\lambda = 0$	25.	30.	35.	40.	45.
5	25. 28.	30. 23.	35. 19.	40. 16.	45. 13.
10	26. 48.	31. 29.	36. 13.	41. 2.	45. 44.
15	28. 45.	33. 14.	37. 42.	42. 16.	46. 55.
20	31. 37.	35. 32.	39. 40.	43. 57.	48. 22.
25	34. 47.	38. 20.	42. 4.	46. 2.	50. 2.
30	38. 20.	41. 25.	44. 49.	48. 26.	52. 14.
35	42. 4.	44. 49.	47. 51.	51. 8.	54. 36.
40	46. 2.	48. 26.	51. 8.	54. 4.	57. 12.
45	50. 2.	52. 14.	54. 36.	57. 12.	60. 0.
50	54. 22.	56. 10.	58. 13.	60. 30.	62. 58.
55	58. 41.	60. 13.	61. 58.	63. 56.	66. 4.
60	63. 3.	64. 20.	65. 46.	67. 29.	69. 18.
65	67. 29.	68. 32.	69. 45.	71. 7.	72. 37.
70	71. 57.	72. 46.	73. 44.	74. 49.	76. 0.
75	76. 26.	77. 3.	77. 46.	78. 34.	79. 27.
80	80. 57.	81. 21.	81. 49.	82. 21.	82. 57.
85	85. 29.	85. 40.	85. 29.	86. 10.	86. 28.
90	90. 0.	60. 0.	90. 0.	90. 0.	90. 0.

Wenn

Wenn	ε = 50	55	60	65	70
λ = 0	50. 0.	50. 0.	60. 0.	65. 0.	70. 0.
5	50. 11.	55. 9.	60. 8.	65. 9.	70. 5.
10	50. 44.	55. 36.	60. 30.	65. 24.	70. 19.
15	51. 37.	56. 21.	61. 7.	65. 55.	70. 43.
20	52. 50.	57. 53.	61. 58.	66. 36.	70. 15.
25	54. 22.	58. 41.	63. 3.	67. 26.	71. 57.
30	56. 10.	60. 13.	64. 20.	68. 32.	72. 46.
35	58. 13.	61. 58.	65. 46.	69. 45.	73. 44.
40	60. 30.	63. 56.	67. 29.	71. 7.	74. 49.
45	62. 58.	66. 4.	69. 18.	72. 37.	76. 0.
50	65. 36.	68. 22.	71. 15.	74. 14.	77. 18.
55	68. 22.	70. 48.	73. 20.	75. 58.	78. 41.
60	71. 15.	73. 20.	75. 31.	77. 48.	80. 9.
65	74. 14.	75. 58.	77. 48.	79. 43.	81. 41.
70	77. 18.	78. 41.	80. 9.	81. 41.	83. 17.
75	80. 25.	81. 28.	82. 34.	83. 45.	84. 55.
80	83. 35.	84. 17.	85. 1.	85. 47.	86. 36.
85	86. 47.	87. 8.	87. 30.	87. 53.	88. 17.
90	90. 0.	90. 0.	90. 0.	90. 0.	90. 0.

Wenn

Wenn	ε = 75	80	85	90
λ = 0	75. 0.	80. 0.	85. 0.	90. 0.
5	75. 3.	80. 2.	85. 1.	90. 0.
10	75. 14.	80. 9.	85. 5.	90. 0.
15	75. 31.	80. 21.	85. 10.	90. 0.
20	75. 55.	80. 37.	85. 18.	90. 0.
25	76. 26.	80. 57.	85. 29.	90. 0.
30	77. 3.	81. 21.	85. 40.	90. 0.
35	77. 46.	81. 49.	85. 54.	90. 0.
40	78. 34.	82. 21.	86. 10.	90. 0.
45	79. 27.	82. 57.	86. 28.	90. 0.
50	80. 25.	83. 35.	86. 47.	90. 0.
55	81. 28.	84. 17.	87. 8.	90. 0.
60	82. 34.	85. 1.	87. 30.	90. 0.
65	83. 45.	85. 47.	87. 53.	90. 0.
70	84. 55.	86. 36.	88. 17.	90. 0.
75	86. 10.	87. 26.	88. 42.	90. 0.
80	87. 26.	88. 16.	89. 8.	90. 0.
85	88. 42.	89. 8.	89. 34.	90. 0.
90	90. 0.	90. 0.	90. 0.	90. 0.

§. 37.

Tafel für die Werthe von y.

Wenn	ε = 0	5	10	15	20
λ = 0		90. 0.	90. 0.	90. 0.	90. 0.
5	0. 0.	45. 7.	63. 42.	71. 59.	76. 32.
10	0. 0.	26. 44.	45. 26.	57. 3.	64. 30.
15	0. 0.	18. 40.	34. 16.	46. 0.	54. 35.
20	0. 0.	14. 21.	27. 16.	38. 5.	46. 47.
25	0. 0.	10. 56.	22. 39.	32. 22.	40. 44.
30	0. 0.	9. 54.	19. 26.	28. 11.	36. 3.
35	0. 0.	8. 40.	17. 6.	25. 2.	32. 24.
40	0. 0.	7. 45.	15. 20.	22. 38.	29. 31.
45	0. 0.	7. 3.	14. 0.	20. 45.	27. 14.
50	0. 0.	6. 31.	12. 58.	19. 17.	25. 25.
55	0. 0.	6. 6.	12. 9.	18. 7.	23. 58.
60	0. 0.	5. 46.	11. 31.	17. 12.	22. 48.
65	0. 0.	5. 31.	11. 1.	16. 28.	21. 53.
70	0. 0.	5. 19.	10. 38.	15. 55.	21. 10.
75	0. 0.	5. 11.	10. 21.	11. 31.	20. 39.
80	0. 0.	5. 5.	10. 9.	15. 13.	20. 17.
85	0. 0.	5. 1.	10. 2.	15. 4.	20. 4.
90	0. 0.	5. 0.	10. 0.	15. 0.	20. 0.

Wenn

Wenn	ε = 25	30	35	40	45
λ = 0	90. 0.	90. 0.	90. 0.	90. 0.	90. 0.
5	79. 25.	81. 25.	82. 54.	84. 4.	85. 1.
10	69. 35.	73. 16.	76. 4.	78. 18.	80. 9.
15	60. 58.	65. 51.	69. 43.	72. 46.	75. 29.
20	53. 45.	59. 21.	63. 58.	67. 49.	71. 7.
25	47. 49.	53. 48.	58. 53.	63. 16.	67. 5.
30	43. 0.	49. 9.	54. 28.	59. 13.	63. 26.
35	39. 7.	45. 11.	50. 41.	55. 39.	60. 10.
40	35. 58.	41. 56.	47. 27.	52. 33.	57. 16.
45	33. 24.	39. 14.	44. 43.	49. 53.	54. 44.
50	31. 20.	37. 0.	42. 25.	47. 36.	52. 33.
55	29. 39.	35. 11.	40. 32.	45. 41.	50. 41.
60	28. 18.	33. 42.	38. 57.	44. 6.	49. 6.
65	27. 13.	32. 30.	37. 41.	42. 48.	47. 49.
70	26. 24.	31. 34.	36. 41.	41. 46.	46. 47.
75	25. 46.	30. 52.	35. 56.	40. 47.	46. 0.
80	25. 20.	30. 23.	35. 25.	40. 26.	45. 26.
85	25. 5.	30. 6.	35. 6.	40. 6.	45. 7.
90	25. 0.	30. 0.	35. 0.	40. 0.	45. 0.

Wenn

Wenn	$\varepsilon = 50$	55	60	65	70
$\lambda = 0$	90. 0.	90. 0.	90. 0.	90. 0.	90. 0.
5	85. 49.	86. 30.	87. 7.	87. 47.	88. 11.
10	81. 43.	83. 4.	84. 16.	85. 22.	85. 58.
15	77. 45.	79. 44.	81. 30.	83. 7.	84. 37.
20	73. 59.	76. 32.	78. 50.	80. 56.	82. 54.
25	70. 29.	73. 31.	76. 17.	78. 51.	81. 15.
30	67. 14.	70. 42.	73. 54.	76. 53.	79. 41.
35	64. 18.	68. 7.	71. 41.	75. 2.	78. 12.
40	61. 39.	65. 46.	69. 38.	73. 39.	76. 50.
45	59. 19.	63. 39.	67. 48.	71. 45.	75. 34.
50	57. 16.	61. 48.	66. 9.	70. 21.	74. 25.
55	55. 30.	60. 10.	64. 41.	69. 6.	73. 45.
60	54. 0.	58. 46.	63. 26.	68. 1.	72. 30.
65	52. 45.	57. 36.	62. 23.	67. 5.	71. 45.
70	51. 45.	56. 39.	61. 31.	66. 20.	71. 7.
75	50. 59.	55. 56.	60. 51.	65. 45.	70. 38.
80	50. 26.	55. 25.	60. 23.	65. 20.	70. 17.
85	50. 6.	55. 6.	60. 6.	65. 5.	70. 4.
90	50. 0.	55. 0.	60. 0.	65. 0.	70. 0.

Wenn	$\varepsilon = 75$	80	85	90
$\lambda = 0$	90. 0.	90. 0.	90. 0.	90. 0.
5	88. 40.	89. 7.	89. 35.	90. 0.
10	87. 20.	88. 15.	89. 8.	90. 0.
15	86. 2.	87. 23.	88. 42.	90. 0.
20	84. 46.	86. 31.	88. 17.	90. 0.
25	83. 32.	85. 44.	87. 55.	90. 0.
30	82. 22.	84. 53.	87. 30.	90. 0.
35	81. 16.	84. 14.	87. 8.	90. 0.
40	80. 14.	83. 32.	86. 47.	90. 0.
45	79. 16.	82. 53.	86. 28.	90. 0.
50	78. 24.	82. 18.	86. 10.	90. 0.
55	77. 37.	81. 47.	85. 54.	90. 0.
60	76. 56.	81. 19.	85. 40.	90. 0.
65	76. 21.	80. 55.	85. 28.	90. 0.
70	75. 52.	80. 36.	85. 18.	90. 0.
75	75. 29.	80. 20.	85. 10.	90. 0.
80	75. 13.	80. 9.	85. 5.	90. 0.
85	75. 3.	80. 2.	85. 1.	90. 0.
90	75. 0.	80. 0.	85. 0.	90. 0.

§. 38.

§. 38.

Sollte auf diese Art ein Stück der Erdfläche zwischen dem Aequator und Pole entworfen werden, und fiele der Punkt a (also der Aequator) nicht auf die Karte: so sind für jede Breite die Punkte q der Parallelen durch die Ordinaten kq und die Abscissen rk zu bestimmen.

Es ist $kq. = aq\ sin\ u = 2R.\ sin\ u.$ Die Abscisse rk ist $ak - ar$; da nun $ak = 2R.\ sin \frac{1}{2} \eta.\ cos\ u$ und $ar = 2R.\ sin \frac{1}{2} \varepsilon$, so ist $rk = 2R\ (sin \frac{1}{2} \eta.\ cos\ u - sin \frac{1}{2} \varepsilon)$.

Man bestimmt nun auf der Karte zuerst auf dem mittlern Meridiane den Punkt r für den untersten Parallel und nachdem dieser gezogen ist, für den nächsten Parallel, dessen Breite $\grave{\varepsilon}$ sein mag. Es ist alsdann die Entfernung der beiden Parallelen auf dem mittelsten Meridiane $2R.\ sin \frac{1}{2} \grave{\varepsilon} - 2R.\ sin \frac{1}{2} \varepsilon = 2R\ (sin \frac{1}{2} \grave{\varepsilon} - sin \frac{1}{2} \varepsilon)$.

Faßt die Karte über 10 Grade der Länge und Breite, so kann man einen einzigen Meilenmaaßstab zu Messung großer Distanzen nicht sicher gebrauchen, ob man gleich die Dimensionen der zu berechnenden Flächen damit messen kann.

Anmerk. Jene Tafeln für η und y sind die §. 17. erwähnten. Sucht man für ein gegebenes ε und λ das zugehörige η in der ersten Tafel, und davon den Kosinus, so hat man $cos\ \varepsilon.\ cos\ \lambda$, welches in der Formel für x §. 17. vorkommt. Sucht man für ε und λ das y aus der zweiten Tafel, und dazu die Tangente, so erhält man $\frac{tang\ \varepsilon}{sin\ \lambda}$, welches ein Faktor der Formel für t, §. 17. ist. So wird die Berechnung der dortigen Abscissen und Ordinaten erleichtert.

Zusatz.

Zusatz.

Lambert hat auch eine sehr einfache Projekzion angegeben, um die Flächen richtig darzustellen.

Wenn ε die Breite eines Parallelkreises, so ist $r.\ \sin \varepsilon$ die Höhe der Kugelzone zwischen ihm und dem Aequator, also ihre Fläche $2\pi r.\ r \sin \varepsilon$, das ist ein Rechteck, dessen Grundlinie der Aequator und dessen Höhe $r.\ \sin \varepsilon$ ist. Eben so ist jede Zone zwischen zwei Parallelen $2\pi r.\ r\ (\sin \varepsilon - \sin \grave{\varepsilon})$, wenn $\grave{\varepsilon}$ die Breite des untersten. Es läßt sich daher jede Kugelzone oder ein Teil derselben, durch ein solches Rechteck darstellen, dessen Fläche der Kugelzone gleich ist, und in welchem sich die eingetragenen Länder wie geometrische Figuren mittelst des angenommenen Meilenmaaßstabes r (des Kugelradius) ausrechnen lassen. Wenn r in 860 Teile geteilt ist, so sind die Werthe von $r.\ \sin \varepsilon$ aus der Tafel §. 18. zu nehmen, wenn man statt der dortigen Breite ihr Komplement setzt, also z. B. 88 statt 2 Grad u. s. w. Man zieht den mittlern Meridian, und trägt rechts und links die Parallelgrade (jeden von 15 Meilen) auf den untersten Parallel; der Abstand der gleichlaufenden Parallelen ist $r.\ \sin \varepsilon - r.\ \sin \grave{\varepsilon} = r\ (\sin \varepsilon - \sin \grave{\varepsilon})$. Die Grade der ebenfalls gleichlaufenden, auf den Parallelen senkrechten, Meridiane werden nach dem Pole zu immer kleiner.

Diese Projekzion ist nur vorteilhaft für die Gegenden nahe um den Aequator, höchstens bis zur Breite von 30 Grad, weil sonst der Distanzenfehler sehr bedeutend, und die Verunstaltung der Länder sehr merklich wird.

Schlußbemerkung.

Was bisher von den Eigenschaften der verschiedenen Projekzionen vorgetragen worden ist, wird für den

Landkartenzeichner hinlänglich sein, um sich in jedem Falle für dieses oder jenes Netz zu entscheiden. Faßt die zu verfertigende Karte nicht mehr als zwölf Grad Breite und Länge zwischen dem Aequator und Pol, so kann er sich mit gradlinigen Parallelen und (konvergirenden) Meridianen begnügen; enthält sie bis zwanzig Grad, so kann er die Entwerfung auf einen tangirenden Kegel gebrauchen, oder die veränderte Murdochische, wenn er auch die Flächen richtig darstellen will. Hat die Karte eine noch größere Ausdehnung in die Breite und Länge, etwa bis vierzig Grad, so ist die Delilische, oder die Murdochische sehr vorteilhaft; für sehr große Teile der Erdfläche ist die Bonnische die einzig brauchbare, so wie sie auch für kleinere eine vorzügliche Genauigkeit gewährt. — Die Gegenden um den Pol sind stereographisch oder nach §. 34. zu entwerfen; die Länder um den Aequator bis 30 Grad Breite stereographisch oder nach Lambert §. 38. Zus., darüber, nach Bonne, oder nach Flamsteed, wenn der Aequator der mittelste Parallel ist.

Die schönsten und richtigsten Planisphären giebt die Lambertische Projekzion. Zu einem Horizontalentwurf der Halbkugel ist die stereographische die schicklichste, weil sich in dieser die Entfernungen vom gegebenen Orte, der Mitte der Planisphäre, leicht finden und andre geographische Aufgaben auflösen lassen. —

Die Wahl des Netzes kann jedoch auch von andern nothwendigen Rücksichten abhängen.

Netze

N e t z e

für

Erdkegel, Erdkörper und Erdkugeln.

Netze für Erdkegel.

§. 39.

In der obigen Polarjekzion sind die Winkel der Meridiane am Pole gleich den entsprechenden Winkeln auf der Kugel. Man kann sie dahin abändern, daß jene Winkel zu diesen ein beliebiges Verhältniß haben z. B. das von m : 1. Es ist für diese Annahme der Radius eines Parallels zu suchen. Er sei x. = ag, fig. 23.

Die Fläche des Kreises, dessen Radius ag, ist $\pi (ag)^2 = \pi . (2 R. \sin \frac{1}{2} \eta)^2 = 4 \pi R^2 . \sin \frac{1}{2} \eta^2$. Diese ist auch die Fläche der Kugelkappe zwischen A und D, fig. 22. Der Ausschnitt ADE, der Kugelfläche, welcher n Grade fassen mag, ist demnach $\frac{n}{360} . 4 \pi . R^2 . \sin \frac{1}{2} \eta^2$, und der Kreissektor gai der ihm gleich sein soll mit der Bedingung, daß W. gai = m. W. DAE, ist $\frac{m. n}{360} . \pi x^2$. Man hat folglich die Gleichung

$$m x^2 = 4 R^2 . \sin \frac{1}{2} \eta^2 .$$

und daraus $x = 2 R . \sin \frac{1}{2} \eta . \sqrt{\frac{1}{m}}$

Nimmt man also m kleiner als Eins an, so kann man nach der obigen Polarentwerfung die Halbkugel innerhalb eines Kreisausschnittes abcd, fig. 24, darstellen, dessen Winkel m. 360 Grade sein wird.

Ist

Ist z. B. m $= \frac{3}{4}$, so ist der überstumpfe Winkel bac oder der Bogen bdc = 270 Grad. Ist dieser (der Aequator) mit dem Radius

$$ab = x = 2R.\ \sin 45^\circ.\ \sqrt{\frac{1}{m}}$$

beschrieben, so wird er in 360 Grad eingeteilt, und aus diesen Teilungspunkten werden die gradlinigen Meridiane nach a gezogen. Die Parallelkreise sind aus a mit den zugehörigen Radien (x) zu beschreiben.

Da sich nun ein solcher Kreissektor in eine Kegelfläche krümmen läßt, so ist das in ihn gezeichnete Netz ein Netz für einen Koniglobus, einen Erdkegel, (oder Himmelskegel).

§. 40.

Man kann zu der Bedingung der gleichen Flächenräume noch die hinzufügen, daß irgend ein Meridiangrad und Parallelgrad das richtige Verhältniß zu einander haben sollen: es ist alsdann das willkührlich angenommene m darnach zu bestimmen.

Es mögen eih und kfg zwei um einen Grad von einander abstehende Parallelkreise sein; die Entfernung des ersten vom Pole sei η, also die des andern $\eta - 1$ Grad. Es ist nun ke (ein Mer. Gr.) der Unterschied ihrer Halbmesser, das ist

$$2R.\ (\sin \tfrac{1}{2}\eta - \sin \tfrac{1}{2}(\eta - 1)\ \sqrt{\frac{1}{m}}.$$

Da nun $\sin\left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2}\right) = \sin \frac{1}{2}\eta.\ \cos 30' -$ $\sin 30'.\cos \frac{1}{2}\eta$, und da $\cos 30'$ ohne merklichen Fehler der Sinus totus Eins ist, so ist jener Meridiangrad

$$2R.\ \sin 30'.\ \cos \tfrac{1}{2}\eta.\sqrt{\frac{1}{m}}.$$

Eben

Eben so ist der Parallelgrad auf eih zu berechnen. Der Radius dieses Parallels ist $2\,R.\,\sin\frac{1}{2}\eta\sqrt{\frac{1}{m}}$, daher der ganze Kreis $2\,\pi.\,2\,R.\,\sin\frac{1}{2}\eta\sqrt{\frac{1}{m}}$ also der Bogen eih, oder des mfache des Kreises $m.\,4\,R.\,\pi.\,\sin\frac{1}{2}\eta\sqrt{\frac{1}{m}}$; folglich der 360ste Teil davon oder ein Grad

$$\frac{4\,m.\,R.\,\pi.\,\sin\frac{1}{2}\eta\sqrt{\frac{1}{m}}}{360}.$$

Es soll nun, jener zweiten Bedingung gemäß, der Meridiangrad ke zu diesem Parallelgrade sich verhalten, wie auf der Kugel, das ist, wie $1 : \sin\eta$. Es muß also nach Aufhebung gleicher Faktoren, sein:

$$\sin 30'.\cos\tfrac{1}{2}\eta : \frac{2\,m\,\pi.\,\sin\frac{1}{2}\eta}{360} = 1 : \sin\eta,$$

$$\text{oder}\ \frac{2\,m\,\pi.\,\sin\frac{1}{2}\eta}{360} = \sin 30'.\cos\tfrac{1}{2}\eta.\sin\eta,$$

oder, da $\sin\eta = 2.\sin\frac{1}{2}\eta.\cos\frac{1}{2}\eta$,

$$\frac{m\pi}{360} = \sin 30'.\cos\tfrac{1}{2}\eta^2,$$

oder da $\sin 30'$ von seinem Bogen $\frac{\pi}{360}$ nicht merklich verschieden ist:

$$m = \cos\tfrac{1}{2}\eta^2 = \frac{1+\cos\frac{1}{2}\eta}{2}.$$

Zusatz. Sollte also das richtige Verhältniß des Meridiangrades zum Parallelgrade z. B. unter dem 40sten Grade der Breite statt finden, so wäre $\eta = 50$, und daher $m = 0{,}8113$. Der Winkel des Ausschnitts (m. 360) würde sein 295,668.. Grad, und der

der Radius x des Parallels $\left(\frac{1}{\cos \frac{1}{2} \eta}\right.$ statt $\sqrt{\frac{1}{m}}$ in die Formel §. 39. gesetzt) $= 2\,R.\, tang\, \frac{1}{2}\, \eta$

Anmerk. Diese Entwerfungsart läßt sich auch für einzelne Erdteile gebrauchen.

§. 41.

Man kann sich auch eine andre Haupt-Bedingung als die Gleichheit der Flächen für das Netz zu einem Koniglobus geben. Es soll z. B. so entworfen werden, daß alle sehr klein genommene Vierecke auf demselben den Entsprechenden auf der Kugel vollkommen ähnlich sind, also jeder Parallelgrad zum nächsten Meridiangrad das richtige Verhältniß hat, und wie vorhin der Meridianwinkel zu dem auf der Kugel ist, wie m : 1. Dabei würde die möglichste Aehnlichkeit der einzelnen Teile mit dem Original beabsichtigt.

Es mag wenigstens hier die Formel für den Radius af eines Parallels stehen; η sei die Entfernung desselben vom Pol, oder das Komplement seiner Breite. Es ist

$$af = \tfrac{1}{2}\, \pi.\, R.\, tang\, \tfrac{1}{2}\, \eta^{m},$$

$$\text{oder } log.\ af = log.\ \tfrac{1}{2}\, \pi\, R + m.\ log.\ tang\ \tfrac{1}{2}\, \eta.$$

Da nun m wiederum beliebig ist, so kann es auch so bestimmt werden, daß die Grade irgend zweier Parallelen sich zu einander verhalten, wie auf der Kugel. Man setze ai $= \grave{\eta}$, so ist dieß der Fall, wenn

$$m = \frac{log.\ sin\ \grave{\eta} - log.\ sin\ \eta}{log.\ tang\ \frac{1}{2}\, \grave{\eta} - log.\ tang\ \frac{1}{2}\, \eta}.$$

Folgendes Täfelchen zeigt den Werth von af von 10 zu 10 Graden des Abstands vom Pole, den Kugelradius Eins gesetzt. Die Parallelen, deren Grade das wahre Verhältniß zu einander haben sollen, sind der eine 30, der andere 60 Grad vom Pole, so daß m nahe $\frac{3}{4}$ ist.

η	af
0	0,0000
10	0,2527
20	0,4274
30	0,5849
40	0,7360
50	0,8863
60	0,0403
70	1,2023
80	1,3765
90	1,5707

Der Winkel des Ausschnitts ist in diesem Falle 270 Grad. Das Netz ist nach einem Kugelradius R als Maaßstabe zu zeichnen, den man in 1000 Teile teilen kann; auf diesem wird af für jedes η abgenommen, für 10 Grad z. B. 253 Teile. Der Radius für den Aequator ist so angenommen, daß er dem Quadranten der Kugel gleich ist. Die Meridiangrade sind nicht gleich, sie haben aber höchst nahe überall das richtige Verhältniß zu dem nächsten Parallelgrade.

Zusatz.

Das einfachste Netz für einen solchen Kegel ist folgendes:

Es sei, fig. 23, der Kegel cqb in der Halbkugel und das Auge in a, so wird der Punkt o in n projizirt. Die Seite cq, der Radius des Ausschnitts, den der entwickelte Kegel giebt, ist $\sqrt{2R^2}$ oder $R\sqrt{2}$, daher ist der Winkel des Ausschnitts $\frac{R}{RK} . 360$ Grad $=$ 180. $\sqrt{2}$, das ist, 254°, 33½′. Hat man diesen Sek-

Sektor beschrieben, so zieht man den Parallel des Punktes o mit dem Radius qn, und wenn man den Quadranten cq z. B. in neun gleiche Teile teilt und an die Teilungspunkte die Radien ao zieht, so werden auf cnq die Radien der Parallelen von 10 zu 10 Grad abgeschnitten. Der Bogen des Ausschnitts ist alsdann in 36 Teile zu teilen, an deren Erdpunkte die Meridiane als grade Linien von der Spitze des Sektors gezogen werden.

Will man die Radien der Parallelen berechnen, so ist W. c = W q = 45° und co = ε, die Breite des Parallels durch o: daher

$$cn \,.\, \sin 45^\circ = an \,.\, \sin \varepsilon = nf.$$

Wenn nun qn = ϱ, so ist nl = $\varrho . \sin 45$, daher $an = \frac{\varrho . \sin 45^\circ}{\cos \varepsilon}$ und $en = R\sqrt{2} - \varrho$.

Substituirt man diese Werthe, so erhält man: ($\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$)

$$\varrho = \frac{R . \cos \varepsilon}{\sin 45^\circ . \sin \varepsilon + \sin 45^\circ . \cos \varepsilon} = \frac{R . \cos \varepsilon}{\sin (45^\circ + \varepsilon)}.$$

Dieses Netz gewährt nicht die Vorteile der Vorigen. — Die Kegelprojekzion für eine Hemisphäre gebraucht man nur für die Himmelskugel, zur Verfertigung der Sternkegel.

Netze zu den Seegnerischen Erdkörpern.

§. 42.

Ein ähnlicheres Bild der Erdkugel als die Koniglobén geben die sogenannten Erdkörper. Sie bestehen aus einem Cylinder, auf welchem die heisse Erdzone abgebildet ist, und aus zwei daran passenden abgekürzten Kegeln, welche auf ihrer krummen Fläche die beiden gemäßigten Zonen und auf ihrer obern Kreisfläche jeder eine kalte Zone darstellen. Das Netz dazu läßt sich nach folgenden Grundsätzen verzeichnen.

Es sei PCA, fig. 25, ein Viertelkreis, der Winkel BCA, dessen Tangente AB, sei die halbe Breite der heissen Zone, also 23°, 28′, eben so wie der Winkel PCE. Es ist also der Winkel ECB die Breite einer gemäßigten Zone, das ist = 43°′, 4. EB ist die Summe der Tangenten der beiden W. ECD und DCB.

Dreht sich diese Figur um PC, so beschreibt AB einen Cylinder, EB einen abgekürzten Kegel und PE eine Kreisfläche. Auf den Cylinder soll nun die halbe heisse Zone, auf den abgekürzten Kegel eine gemäßigte, und auf den Kreis eine kalte Zone entworfen werden.

Die Abwickelung des Cylinders giebt ein Rechteck. Man setze den Kugelradius $R = 1$, so ist die Grundlinie dieses Rechtecks (cd, fig. 26) $2\pi = 6{,}2831\ldots$ und seine Höhe $ab = tang\ 23°,\ 28'$.

Die Abwickelung der Kugelfläche, welche durch die Umdrehung von GBN um GN entsteht, giebt einen Kreisausschnitt, dessen Radius GB, (gb, fig. 26). Da DB = BA (als zwei sich schneidende geom. Tangenten am Kreise) und $DB = tang\ DCB$, so ist auch W. DCB = W. BCA = 23°, 28′, folglich DCE = 19°, 36′ und DCG = 43°, 4′. Nun ist

DG

DG = *tang* 43°, 4′, also der Radius gb = *tang* 43°, 4′ + *tang* 23°, 28′ = 1,3688. — Der überstumpfe Winkel (egf) des Ausschnitts ist

$$\frac{360°.\ BN}{GB} = \frac{360°}{1,3688} = 263,00\ ..\ \text{Grad}.$$

Um die Kegelfläche darzustellen, welche nur von EB beschrieben wird, ziehe man von glbf die Fläche ab, welche von GE erzeugt wird. Man beschreibe also aus g mit dem Radius gh = GE den Kreisbogen hek, so ist kfblh die Kegelfläche, auf welche die mittlere Kugelzone entworfen werden soll.

Zieht man alsdann noch einen Kreis aus p, fig. 26, mit dem Radius pe = PE = CE. *sin* ECP = *sec* ECD. *sin* ECP = 0,4227, so ist dies der Kreis für die kalte Zone, und nun ist der Umriß des Netzes für den halben Erdkörper vollendet. Dieselbe Zeichnung muß nun auch unter cd gelegt werden.

§. 43.

Die Aufgabe ist nun: die Meridiane und Parallelen dieses Netzes zu zeichnen.

Man legt einen Parallel dahin, wo der verlängerte Kugelradius, durch den Parallelkreis der Kugel geführt, die Tangente trifft. Sie mögen von 10 zu 10 Grad zu entwerfen sein. Zwischen a und b fällt der Parallel des 10ten, und der des 20sten Grades; für den erstern ist a 1 = *tang* 10° = 0,1763, für den andern a 2 = *tang* 20° = 0,3639. Beide werden cd parallel gezogen. Zwischen b und e fallen die vier Parallelen; des 30sten, 40sten, 50sten und 60sten Grades der Breite. Der Punkt D (n fig. 26), von welchem an nun die Tangenten zu rechnen sind, und dessen Breite 46°, 56′, steht von b um BD = bn ab, das ist um 0,4341 Teile des Maaßstabs. Für den

vier-

vierzigsten Parallel ist also $tang\ 6°,\ 56' = 0,1216$ nach unten von n bis 4 zu legen, und für den dreißigsten die $tang\ 16°,\ 56' = 0,3044$ von n nach 3. Eben so bestimmt man die Punkte 5 und 6 für den funfzigsten und sechzigsten Parallel von n aus oberhalb, wenn man n 5 $= tang\ 3°,\ 4' = 0,0536$ (n fünf, n 5) und n 6 $= tang\ 13°,\ 4' = 0,2321$ macht. Durch diese nun bestimmte Punkte 3, 4, 5 und 6 werden aus g Kreisbogen beschrieben, welche die Parallelen auf der Kegelfläche sind.

EP ist die Tangente von ECP für den Radius CP, also verhält sie sich zur Tangente von ECP für den Radius Eins wie CP : 1, oder wie sec ECD. cos ECP : 1, das ist, wie 0,9737 zu 1. Daher ist p 7 $= tang\ 20°.\ 0,9737 = 0,3543$ und p 8 $= tang\ 10°.\ 0,9737 = 0,1716$. Mit diesen Radien werden auf der Kreisfläche die Parallelen des 70sten und 80sten Grades beschrieben.

Die Meridiane sind grade Linien; in dem Rechtecke sind sie parallel a b, in dem Ausschnitte laufen sie nach g zusammen, im Kreise in p. Will man sie von 10 zu 10 Grad ziehen, so teile man cd in 36 Teile, eben so den Bogen des Ausschnitts und die Peripherie des Kreises. — Giebt man dem Kugelradius 10000 Teile, so sind jene Dezimalbrüche ganze Zahlen.

Zusatz. Hier folgt eine Tafel der nöthigen Tangenten (für den Kugelradius Eins), wenn man für einen größern Erdkörper, etwa von zwei Fuß Durchmesser, die Parallelen von 5 zu 5 Grad ziehen wollte. Man nimmt für den Parallel

des 5ten Gr. von a an,	$tang$	$5°$	$= 0,0875$
= 15ten = = = =	$tang$	$15°$	$= 0,2679$
des 25sten Gr. von n nach unten	$tang$	$21°,\ 56'$	$= 0,4026$
= 35sten = = = = =	$tang$	$11°,\ 56'$	$= 0,2113$
= 45sten = = = = =	$tang$	$1°,\ 56'$	$= 0,0337$

des

des 55sten Gr. von n nach oben *tang* 8°, 4′ = 0,1417
= 65sten = = = = = *tang* 18°, 4′ = 0,3262
des 75sten Gr. von p an 0,9737. *tang* 15° = 0,2608
= 85sten = = = = 0,9737. *tang* 5° = 0,0852

Für diesen Fall müssen denn auch die Grundlinie des Rechtecks, der Bogen des Ausschnitts und die Peripherie des Kreises in 72 gleiche Teile geteilt werden, weil auch die Meridiane von 5 zu 5 Grad zu ziehen sind.

Netze für Kugeln.

§. 44.

Kugeln werden mit Papierstreifen belegt von der Figur 27, auf welche das Netz für die ganze Kugel zu verzeichnen ist. PB und PC haben sehr nahe die Länge des Quadranten, PA ist ein wenig kürzer, bekommt aber die nöthige Länge durch Ausdehnung des Streifens beim Aufleimen auf die Kugel, wenn der Bogen BC nicht zu groß genommen wird, nicht über 30 Grad, oder den zwölften Teil des Kugelumfangs, das ist, $\frac{1}{6}\pi$, wenn Eins der Halbmesser der Kugel ist. Dieser in 1000 Teile geteilt, ist der Maaßstab der Zeichnung.

Die Parallelen werden auf einem solchen Segmente gezeichnet, wie bei der obigen dritten Entwerfungsart. Der Radius des Parallels dfg ist qf, das ist, wenn ε seine Breite $= cotg\ \varepsilon$. Der Winkel an q, der einem Parallelgrade zugehört, ist, wie oben $= sin\ \varepsilon$, daher ist, wenn BA n Grade faßt, der dem Bogen df zugehörige Winkel an q $=$ n. $sin\ \varepsilon$ Grade. Jeder Parallel hat seinen eignen Radius $cotg\ \varepsilon$.

Sind alle Parallelen beschrieben und etwa von 5 zu 5 Graden eingeteilt, so erhält man die Meridiane, wenn man diejenigen Punkte der Parallelen, welche dieselbe Länge haben, mit einander verbindet.

Die

Die Meridiane PBp und PCp können Kreisbogen sein, welche mit einem solchen Radius BD beschrieben werden, daß das Verhältniß von AB zu BP auf dem Segment dem auf der Kugel, welches 1 : 6 ist, so nahe komme als möglich. Es sei dieser Radius Eins und der Bogen PB $= \varphi$, so ist die Gleichung $1 - \cos \varphi = 6 \varphi$, und daraus erhält man φ oder den W. BDP $= 19°, 17'$. Sein Sinus Versus AB ist $= 0{,}0561$ und BP $= 0{,}3365$, also dieses genau genug das Sechsfache von jenem. BD, mit dem angenommnen Kugelradius Eins verglichen, ist 4,666, denn für diesen ist AB $= \frac{2\pi}{24} = 0{,}2618$ und

$$BA : BD = 0{,}0561 : 1, \text{ also } BD = \frac{AB}{0{,}0561}. \text{ —}$$

Für große Kugeln (z. B. von zwei Fuß Durchmesser) nimmt man BC nur 18 Grad. Alsdann ist AB : BP $= 1 : 10$, und bei dieser Annahme ist W. BDP $= 11°, 30'$, und der Radius BD $= 7{,}8540$.

Anmerk. Da der feuchte Abdruck einer Kupferplatte beim Trocknen sich in der Länge und Breite zusammenzieht, so muß man durch einen Probeabdruck eines Kreises untersuchen, wieviel diese Zusammenziehung beträgt, ehe man ein Segment auf die Kupferplatte zeichnet. Fände man nun daß jenes Kreises Durchmesser sich der Länge des Papiers nach z. B. um $\frac{1}{136}$, und in der Breite um $\frac{1}{70}$ verkürzt hätte, so müßten alle Linien der Zeichnung, welche nach der Länge des Papiers gehen, um $\frac{1}{136}$, und alle Querlinien um $\frac{1}{70}$ länger genommen werden, als sie die Rechnung giebt.

Einige

Einige Karten nach den verschiedenen Projekzionen.

Weltkarte von Bode in zwei Hemisphären (für den Horizont von Berlin) 1783.

Allgem. Himmelskarte von Bode (ster. Pol. pr.) Anleit. zur Kenntn. des gest. Himmels, 5te Aufl.

Zwei Planisphären in seiner Uranographie (ster. Aequ. pr.)

Mondkarten, z. B. in der Zeitung für die Jugend. 1806. Erst. B. (Orthog. Aequat. pr.)

Der Gesellschaftsatlas. Größere Homannische Karten (ster. Horiz. pr.)

Atlas des ganzen Erdkreises von Reichard. (Zentralproj.) so wie

Doppelmaiers Himmelskarten.

A map of the world by Arrowsmith (De la Hires Proj.)

Generalkarte des russischen Reichs. 1777 (Delilische Pr.)

Uranographie von Bode, (Kegelprojekzion, so wie viele neue Karten von Sotzmann, Güssefeld, Streit rc.

Karte von Nordamerika v. Bonne, so wie von Westindien v. Stieler 1806. und Asien v. Reichard.

Map of India by Arrowsmith. 1804 (Bonn. Proj.)

Flamsteeds Himmelsatlas, so wie Karten von Sanson, Senex und

Lotters Generalkarte 1778. (Flamst. Projek.)

Carte de l'Archipel p. Maurepas. 1738, so wie

A chart of the world by Arrowsmith. (Merkators Projek.)

Karte von Schlesien und Mähren von Güssefeld. 1815 (Murdoch. Proj.) desgl. Karte von Preußen v. Sotzmann.

Vieths

Vieths Atlas der alten Welt. 1800 (Murdoch und Lambert. Pr.)

Zwei Planisphären v. Bode, vor seiner Anl. zur allg. Kenntniß der Erde (Lamberts Pr.)

Obige Himmelskarte v. Bode, vor der 8ten Auflage. Polarpr., so daß die Grade (vom Nordpol bis 40sten Grad südl. Breite) nach dem Verhältnisse der Tangenten von $\frac{2}{3}\,\eta$ zunehmen.

Funks Sternenkegel und Erdkörper.

Himmelskugel v. Bode und Erdkugel v. Sotzmann, bei Franz in Nürnberg.

Schriften über die Projekzionen und verwandte Gegenstände.

T. Mayers prakt. Geometrie. Vierter Teil. 1815.
Kästners Weitere Ausführung der math. Geographie. Seine diss. math. et phys. und geom. Abhandlungen.
Lamberts Beiträge zum Gebrauch der Mathematik. Dritter Teil.
Lamberts freie Perspektiv.
Karstens Lehrbegriff der Mathematik. Siebenter Teil.
Klügels geomet. Entwickelung der Eig. der ster. Projekzion. 1788.
Zachs monatliche Korrespondenz. 1805. 1806. 1807.
Zachs allgem. geogr. Ephemeriden.
Puissant, traité de topographie. sec. section.
Henry, Mémoire sur la projection des cartes géogr. 1810.
Mallets mathem. Beschreibung der Erdkugel von Röhl.
Bodes Anleitung zur allgem. Kenntniß der Erdkugel.
Bertuchs möglichst vollst. Sammlung aller bek. geogr. Ortsbestimmungen.

Von ältern Schriften sind noch zu bemerken:

Severtii de mapparum mundi principiis libri III. 1598.
Aguillonii Opticorum libri. VI. 1613.
Tacqueti Optica. (lib. tert.) 1669.
Varenii geographia generalis a Jurino ed. 1712.

Geschichtliche Notizen.

Ptolemäus, gegen die Mitte des zweiten Jahrhunderts, gebraucht zuerst zu seinem Astrolabium (Sternenscheibe) die stereographische Polarprojekzion. — In seiner Geographie lehrt er eine dieser sehr ähnlichen Entwerfungsart, in welcher er die Meridiane jenseit des Aequators, der auch ein Kreisbogen ist, wieder konvergiren läßt; auch noch eine andre, in welcher die Meridiane, außer dem mittelsten, Kreisbogen sind. Ueberdieß zeigt er, wie ein Stück der Erdfläche verzeichnet werden muß, daß der mittelste Parallel eine grade Linie sei, und die andern als Kreisbogen erscheinen, also eine ster. Konstrukzion. Da der damals bekannte Teil der Erde von Westen nach Osten ausgedehnter war als von Süden nach Norden, so nennt er jene Dimension Länge, diese Breite. Er vergleicht einen ganzen Parallelkreis mit dem größten Kreise der Kugel, und beschreibt in jener ersten Projekzion den Aequator und zwei obere Parallelen konzentrisch mit solchen Radien, die sich wie diese Kreise verhalten; zwei nächste Parallelen fassen immer eine Zone an deren Grenzen der längste Tag um eine Viertelstunde verschieden ist.

Vor ihm hatte der Tyrier Marinus schon gradlinige Netze mit parallelen Meridianen gezeichnet, und

nur

nur dem mittelsten Parallel das wahre Verhältniß zum Aequator gegeben. Diese Entwerfung, welche Ptolemäus nur für einzelne Länder billigt, ward bis ins sechszehnte Jahrhundert bei der Schiffahrt gebraucht, nur daß man die Parallelgrade dem Meridiangrade gleich machte; Prinz Heinrich von Portugall (1420) gilt für den Erfinder dieser Plankarten.

Nach der Wiederherstellung der Wissenschaften ersinnt Johann Werner (1514) mehrere freie Projekzionen zu besondern Zwecken. Er berechnet auch nach den Sinustafeln den Umfang jedes Parallelkreises in Graden, Minuten und Sekunden des Aequators und einen Parallelgrad in denselben Teilen.

Appian (1524) giebt den Grad eines jeden Parallels in deutschen Meilen und deren Sechszigteln, den Meridiangrad zu 15 Meilen gerechnet, so wie in Minuten und Sekunden des Aequators.

Loritus lehrt die Kugeln mit Papierstreifen überziehen.

Gemma Frisius (1532) ersinnt die ster. Aequatorialprojekzion. Er bemerkt, daß die Krümmung der Erde die Ausdehnung der Landkarten innerhalb hundert Meilen beschränke, wenn sie die Lage und Weite der Oerter ziemlich richtig angeben sollen.

Juan de Roya giebt die orthogr. Aequatorialprojekzion an.

Ger-

Gerhard Merkator (1550) liefert die ersten Seekarten mit wachsenden Breiten.

In seiner Ausgabe des Ptolemäus braucht er zuerst das gradlinige Netz, in welchem die Meridiane konvergent und die Parallelen gleichlaufend sind, und giebt den Graden der zwei Parallelen, welche von den äußersten um den vierten Teil der ganzen Breite der Karte abstehen, das wahre Verhältniß zum unveränderlich angenommnen Grade des mittelsten Meridians. Ohne diese besondere Modif. kommt diese Pr. auch schon auf viel älteren Karten vor. Ueberdieß giebt er auf der ptolemäischen Weltkarte jedem der konzentrischen Parallele seine wahren Grade, so daß die Meridiane krumme Linien werden, wie nach Bonne. — Verfertigt Erdgloben von 1 Fuß Durchmesser.

Der Jes. Grienberger (1602) lehrt die Zentralprojekzion für Himmelskarten, und berechnet Tafeln dazu.

Der Jesuit Aguillonius (1613) erklärt die perspektivischen Projekzionen gründlich, und giebt der stereographischen ihren Namen.

Wrigth (1660) giebt die Theorie der Merkatorskarten.

De la Hire (1701) lehrt eine neue Aequatorialprojekzion. (Zuerst bei einem Planiglobus angewendet von Arrowsmith 1785).

Zim-

Zimmermann (1706) verfertigt die ersten Sternkegel.

Hase (1717) entwirft einzelne Teile der Erde nach der ster. Horizontalprojekzion und lehrt ihre richtige und bequeme Zeichnung.

Peter Smit lehrt die Grundsätze nach welchen die Kugelstreifen zu entwerfen und zu zeichnen sind.

Flamsteed (1729) liefert Himmelskarten nach seiner Entwerfungsart.

De l'Isle (1760) zeigt die Vorteile der nach ihm genannten Projekzion.

Kästner giebt die anal. geom. Theorie der ster. Projekz. in seinen dissert. mathem. 1771, der Zentralprojekzion 1776 und der Zeichnung der Kugelstreifen 1778.

Lambert (1772) giebt Netze zur Bestimmung der Distanzen und Flächen, so wie für andre besondre Zwecke; auch der Zentralprojekzion ihren Namen.

Zusätze.

Geometrisch-analytische Lehrsätze.

§. 1.

A. Wenn der Umfang eines Kreises, dessen Diameter Eins ist, π genannt wird, so ist $\pi = \frac{22}{7}$ oder $\frac{355}{113}$ oder 3,1415926 ....

Der Umfang eines Kreises, dessen Radius r ist, ist alsdann $2\,r\,\pi$. Die Länge eines Bogens vom m Graden ist $2\,m\,r\,\pi : 360$.

Die Fläche dieses Kreises ist $\pi\,r^2$, das Produkt des Umfangs und des halben Radius.

B. Eine Formel für eine Kegelzone, oder für die Fläche eines abgekürzten graden Kegels findet man also: Sein Durchschnitt sei ABCD, fig. I, der Radius GD des untersten Kreises R, des obersten BK = r, und seine Seitenlänge BD = l. Es ist DE = R — r, und

$$DE : BD = GD : DF$$

$$\text{oder } R - r : l = R : \frac{R\,l}{R - r} = DF$$

Nun ist die Fläche eines Kegels die Peripherie seiner Grundfläche multiplizirt mit seiner halben Seitenlänge: also die Fläche

$$\text{des Kegels } FCD = 2\,\pi\,R.\,\tfrac{1}{2}\,\frac{R\,l}{R - r} = \frac{\pi\,R^2\,l}{R - r}$$

$$\text{des Kegels } FAB = 2\,\pi\,r.\,\tfrac{1}{2}\left(\frac{R\,l}{R - r} - l = \right)\frac{\pi\,r^2\,l}{R - r}$$

Zieht

Zieht man diese von jener ab, so bleibt die Fläche des abgekürzten

$$\pi l \frac{(R^2 - r^2)}{R - r} = \pi l (R + r) = 2 \pi l . HI,$$

weil in einen Trapez die Mittellinie $HI = \frac{1}{2} (R + r)$.

C. Wenn ein Teil einer Kegelfläche in einen Kreissektor ausgebreitet wird, so verhält sich der Winkel dieses Ausschnitts zum Winkel, der demselben Bogen am Zentrum der Grundfläche zugehört, wie der Radius der Grundfläche zum Radius des Kreissektors: oder die Winkel verhalten sich verkehrt, wie die Radien.

Es sei, fig. II AB der ausgedehnte Bogen DE der Grundfläche. Diese haben a Grade; der Winkel ACB des Ausschnitts habe m Grade. Nun ist die Länge des Bogens $AB = \frac{2 \pi R m}{360}$ und des Bogens $DE = \frac{2 \pi r a}{360}$. Da beide gleich sein sollen, so ist $2 \pi R m = 2 \pi r a$: daher $r a = R m$, das ist, $R : r = a : m = W. DFE : W. ACB$.

Wird der ganze Kegel abgewickelt, so ist der Winkel des Ausschnitts GCKBA

$W. GCK = \frac{360^\circ . r}{R}$; für einen Grad ist er $= \frac{r}{R}$.

2.

A. Die Fläche einer Kugelzone oder Kugelkappe wird durch das Produkt ihrer Höhe in den Umfang des größten Kreises der Kugel ($2 \pi r$) ausgedrückt.

Es sei, fig. III, die Höhe $AB = h$, unendlich klein angenommen, so daß FE für den Bogen gilt, den

den es tangirt. Dreht sich AFBE um AB, so wird FE eine Zone beschreiben. Da diese für eine Kegelzone gelten kann, so ist ihre Fläche $\pi . FE\ (AF + BE)$ oder, weil BE um nichts Angebbares größer ist, als AF, auch $\pi . FE . 2AF$. Nun ist aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ACF und FDE:

$$AF : CF = DF : FE$$

$$\text{oder } AF : r = h : FE = \frac{rh}{AF},$$

Daher die Kugelzone $2\pi rh$, oder $2\pi r . h$. — Eine jede Zone oder Kappe kann man sich aus solchen unendlich schmalen Zonen zusammengesetzt denken.

B. Eine solche Kugelkappe hat die Fläche des Kreises, der mit ihrer Sehne HK als Radius beschrieben wird.

Ihre Fläche ist nemlich $2\pi r . AK = 2\pi rh$. Es ist $AH^2 = h\ (2r - h) = 2rh - h^2$; wenn also z die Sehne, so ist $z^2 = 2rh - h^2 + h^2 = 2rh$, und daraus $h = \frac{z^2}{2r}$. Folglich ist die Fläche der Kugelkappe $= \frac{2\pi r z^2}{2r} = \pi z^2$, das ist die Fläche des Kreises dessen Radius z.

Trigonometrische Formeln.

3.

Der Winkel C im rechtwinklichten Dreiecke ABC (fig. IV) läßt sich als Zahlgröße durch das Verhältniß der Seite a zur Seite c, das ist durch $\frac{c}{a}$ repräsentiren oder ausdrücken, denn dieses ist in allen solchen

chen Dreiecken, welche denselben Winkel C haben, dasselbe, und ändert sich nur mit diesem Winkel C. Eben so wird er durch die Verhältnisse $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{b}$ bestimmt oder gegeben.

Der Quozient $\frac{c}{a}$ heißt der **Sinus** des Winkels C, $\frac{b}{a}$ der **Kosinus**, $\frac{c}{b}$ die **Tangente** und $\frac{b}{c}$ die **Kotangente**. Da b und a so gegen W. B liegen, wie c und a gegen C, so ist auch $\frac{b}{a} = \sin B = \cos C$, eben so $\frac{c}{a} = \cos B = \sin C$ und $\frac{b}{c} = \operatorname{tang} B = \operatorname{cotg} C$; das heißt: der Sinus eines Winkels ist der Kosinus seines Komplements, oder seiner Ergänzung zu 90 Grad. Es ist also z. B. $\sin 40° = \cos 50°$, eben so $\operatorname{tang} 40° = \operatorname{cotg} 50°$ u. s. w. — Der Quozient $\frac{a}{b}$ heißt die **Sekante** des W. C und $\frac{a}{c}$ die Kosekante. Der Sinus des rechten Winkels, größter Sinus oder **Sinus totus** ist nach diesem $\frac{a}{a} = 1$.

Der $\cos C : \sin C = b : c$, so ist $\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{c}{b} = \operatorname{tang} C$, und $\frac{\cos C}{\sin C} = \operatorname{cotg} C$. Ferner ist $\operatorname{tang} C \times \operatorname{cotg} C = 1$ und folglich $\operatorname{tang} C = \frac{1}{\operatorname{cotg} C}$. Des-

gleichen

gleichen ist $sec\,C = \frac{1}{cos\,C}$ und $cosec\,C = \frac{1}{sin\,C}$; auch $(sin\,C)^2 + (cos\,C)^2 = 1$ und $cos\,C = \sqrt{1 - sin\,C^2}$.

Der W. C und sein Supplement BCE haben denselben Sinus; z. B. $sin\,110° = sin\,70°$. Ist aber C größer als zwei Rechte, oder überstumpf, so fällt c unter DE, und da es vorher in E Null geworden, so ist der Quozient $\frac{c}{a}$, oder der Sinus negativ. Der Kosinus des rechten Winkels ist Null in C denn b nimmt ab, wenn der Winkel wächst; stumpfe Winkel also haben negative Kosinus, denn b fällt alsdann von C nach E; es ist z. B. $cos\,120° = -\,cos\,60°$. Der Kosinus von Null Grad ist der Sinus totus Eins. — Ob die Tangente und Kotangente positiv oder negativ ist, wird durch ihre Werthe $\frac{sin\,C}{cos\,C}$ und $\frac{cos\,C}{sin\,C}$ bestimmt. — $Tang\,(90° + A) = -\,tang\,(90° - A)$; $tang\,(90° - A); = cotg\,A$.

4.

Es ist nun dem Vorigen zufolge in jedem rechtwinklichten Dreiecke

$c = a.\,sin\,C$; $b = a.\,cos\,C$; $c = b.\,tang\,C$; $(a = b.\,sec\,C.)$

Man hat jene Verhältnisse, oder die Sinus u. s. w. für jeden Werth des W. C in Graden Minuten und Sekunden, berechnet, und sie selbst, desgleichen auch ihre Logarithmen in Tafeln gebracht. S. Vegas log. trig. Handbuch, 2 Teile. Man kann also nun mittelst dieser Tafeln und jener Gleichungen ein Stück eines rechtwinklichten Dreiecks leicht berechnen, wenn zwei Stücke desselben gegeben sind, z. B. den W. C aus

aus den gegebenen Seiten a und c, oder die Seite b aus den gegebnen c und W. C, u. s. w. In den Tafeln steht nemlich der Winkel neben seinem Sinus u. s. w., so daß mit einem Winkel auch sein Sinus und umgekehrt gegeben ist.

Für die Logarithmen der goniometrischen Größen hat man den Sinus totus nicht Eins, (wovon der Logarithme Null ist), sondern so angenommen, daß sein Logarithmus 10 ist. Bedient man sich also dieser Logarithmen der Tafeln mit jenen Formeln, welches die Rechnung erleichtert, so muß man von jedem dieser Logarithmen 10 abziehen, oder — 10 dahinter setzen; dadurch wird er zweiteilig und gehört als solcher zu einem ächten Bruche, wie dieß fast alle goniometrischen Größen für den Sinus totus Eins sind. Soll ein Winkel des Dreiecks bestimmt werden, so berechnet man zuerst seinen Sinus oder Kosinus oder seine Tangente nach der Formel mittelst jener Logarithmen, und sucht den gefundenen Logarithmen unter den Sinus, Kosinus oder Tangenten der Tafeln ohne den Abzug von 10; der zugehörige Winkel steht dabei.

Aus drei gegebenen Stücken eines Dreiecks, es mag spitzwinklicht oder stumpfwinklicht sein, lassen sich, wenn wenigstens eine Seite gegeben, alle andere Stücke berechnen. Die Seite dem W. A gegen über heiße a, die dem W. B gegenüber b, u. s. w. Es ist in dem Dreiecke ABC, fig. V.

$$\frac{CE}{a} = \sin B \text{ und } \frac{CE}{b} = \sin A, \text{ also } \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}.$$

$$\frac{AD}{b} = \sin C \text{ und } \frac{AD}{c} = \sin B, \text{ also } \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}.$$

$$\text{Eben so ist } \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a}.$$

Dieß

Dieß heißt: die Sinus je zweier Winkel verhalten sich, wie die diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten.

Nach diesem Satze werden die Stücke eines Dreiecks bestimmt, wenn entweder eine Seite mit den anliegenden Winkeln, oder ein Winkel und zwei Seiten gegeben sind. Der Abzug 10 von den Logarithmen ist hier nicht nöthig.

Wären zwei Seiten a und c und der eingeschloßne Winkel B gegeben, könnte man zuerst nach obigem CE und EB berechnen, dann aus CE und dem nun bekannten AE die Seite b, oder den Winkel A.

Um aus den gegebnen drei Seiten die Winkel zu finden, könnte man zuerst $BE = x$ berechnen. Da $CE^2 = CB^2 - BE^2$ und auch $= CA^2 - AE^2$, so ist auch $a^2 - x^2 = b^2 - (c - x)^2$ und daraus:

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\,c}.$$

In Vegas Tafeln stehen im Anhange die bequemern Formeln für diese beiden letzten Fälle; sie sollen weiterhin bewiesen werden.

5.

Man setze den Sinus des W. a und des W. b als bekannt: es soll eine Formel für $sin\,(a \pm b)$, desgleichen für $cos\,(a \pm b)$ gesucht werden.

In fig. VI sei der Radius $GC = FC = 1$, $GCA = a$ und $GCH = GCF = b$, so ist $ACH = a + b$ und $FCA = a - b$. Also $DG = sin\,a$, $HE = sin\,(a + b)$, $BF = sin\,(a - b)$, und $DC = cos\,a$, $CE = cos\,(a + b)$, $CB = cos\,(a - b)$.

Da

Da NH $=\frac{1}{2}$ FH, so ist auch HI $=\frac{1}{2}$ HK $=$ IK und IN $=\frac{1}{2}$ FK $=$ BL, also:

$$\sin(a+b) = LN + IH \text{ und}$$
$$\sin(a-b) = LN - IH.$$

Desgleichen $\cos(a+b) = CL - IN$ und
$$\cos(a-b) = CL + IN.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CGD und CNL folgt:

GC : GD $=$ CN : LN und GC : CD $=$ CN : CL.
also ist LN $=$ GD $\times$ CN und CL $=$ CN $\times$ CD

Die ähnlichen Dreiecke NIH und CGD geben:

GC : HN $=$ CD : IH und GC : HN $=$ GD : IN
also ist IH $=$ HN $\times$ CD und IN $=$ GD $\times$ HN.

Nun ist GD $= \sin a$, CN $= \cos b$, HN $= \sin b$ und CD $= \cos a$.

Folglich LN $= \sin a.\ \cos b$ und IH $= \sin b.\ \cos a$.
Daher $\sin(a+b) = \sin a.\ \cos b + \sin b.\ \cos a$
und $\sin(a-b) = \sin a.\ \cos b - \sin b.\ \cos a$.

Ferner ist CL $= \cos a.\ \cos b$ und IN $= \sin a.\ \sin b$
Daher $\cos(a+b) = \cos a.\ \cos b - \sin a.\ \sin b$
und $\cos(a-b) = \cos a.\ \cos b + \sin a.\ \sin b$.

6.

Wenn man diese Formeln addirt, von einander abzieht, mit einander multiplizirt oder dividirt, so erhält man neue Gleichungen zwischen jenen Winkelfunkzionen. Es ist z. B.

$$\frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{\sin a.\ \cos b \pm \sin b.\ \cos a}{\cos a.\ \cos b \mp \sin a.\ \sin b}$$

Dividirt man den andern Teil dieser Gleichung (Zähler und Nenner) durch $\cos a.\ \cos b$, so erhält man:

A) *tang*

$$\text{A)}\ tang\,(a \pm b) = \frac{tang\,a \pm tang\,b}{1 \mp tang\,a .\ tang\,b},$$

und $$cot\,(a \pm b) = \frac{cot\,a \mp tg\,b}{1 \pm cot\,a .\ tg\,b}.$$

Setzt man $a = b$, und statt a seine Hälfte, so ist $cot\,a = \frac{1}{2}(cot\,\frac{1}{2}\,a - tg\,\frac{1}{2}\,a)$ §. 10.

Addirt man die beiden Formeln für den Kosinus, so erhält man:

$cos\,(a + b) + cos\,(a - b) = 2\,cos\,a .\ cos\,b.$

Setzt man α statt $a + b$, so ist $a = \frac{\alpha + \beta}{2}$ und $b = \frac{\alpha - \beta}{2}$, daher:

B) $cos\,\alpha + cos\,\beta = 2\,cos\,\frac{1}{2}\,(\alpha + \beta) .\ cos\,\frac{1}{2} .\ (\alpha - \beta)$. §. 9.

Subtrahirt man die beiden Formeln für den Sinus, so erhält man:

$sin\,(a + b) - sin\,(a - b) = 2\,sin\,b .\ cos\,a.$

und wenn man die vorige Substituzion gebraucht:

C) $sin\,\alpha - sin\,\beta = 2\,cos\,\frac{1}{2}\,(\alpha + \beta) .\ sin\,\frac{1}{2} .\ (\alpha - \beta)$. §. 31.

Wenn man jene Formeln addirt, so findet man:

D) $sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\,cos\,\frac{1}{2}\,(\alpha - \beta .)\ sin\,\frac{1}{2}\,(\alpha + \beta)$.

Dividirt man jene Gleichung durch diese, so folgt:

$$\text{E)}\ \frac{sin\,\alpha - sin\,\beta}{sin\,\alpha + sin\,\beta} = \frac{tang\,\frac{1}{2}\,(\alpha - \beta)}{tang\,\frac{1}{2}\,(\alpha + \beta)}$$

$= tang\,\frac{1}{2}\,(\alpha - \beta) .\ cot\,\frac{1}{2}\,(\alpha + \beta)$.

Hieraus läßt sich ferner ableiten, mittelst C, B und D:

$$\text{F)}\ tang\,\frac{1}{2}\,(\alpha + \beta) = \frac{sin\,\alpha + sin\,\beta}{cos\,\alpha + cos\,\beta}$$

 und

und $tang\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$.

Daher

G) $tang\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-tang\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\dfrac{2\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$.

Statt α und β kann man a und b setzen, so wie $\frac{1}{2}$ a, 2 a u. s. w. statt a, auch b $=$ a.

Noch ist:

H) $tang\ a+tang\ b=\dfrac{\sin\ a}{\cos\ a}+\dfrac{\sin\ b}{\cos\ b}=\dfrac{\sin(a+b).}{\cos a.\ \cos b}$ §. 9.

7.

Da, fig. V, $\sin A:\sin B=a:b$, so ist auch:

$$\sin A+\sin B:\sin A-\sin B=a+b:a-b,$$

also nach der Gleichung E:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tang\,\frac{1}{2}(A+B)}{tang\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

Sind also in einem Dreiecke zwei Seiten und der eingeschloßne Winkel gegeben, so lassen sich die andern Winkel durch die Proporzion finden: die Summe der beiden Seiten verhält sich zu ihrem Unterschiede, wie die Tangente der halben Summe der andern beiden Winkel zur Tangente ihres halben Unterschieds. Aus diesem und ihrer Summe lassen sich beide Winkel finden.*)

Es

---

*) Oder: sind B, a und c (fig. V) gegeben, so ist

$$tang\ A=\frac{CE}{AE}=\frac{a.\ \sin B}{c-b.\ \cos B},$$

oder $cotg\ A=\dfrac{c}{a.\ \sin B}-\cot B.$

Es ist Num. 4, fig. V, das dortige $x = a.\cos B$, also

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac.\cos B}.$$

Nun aber ist Num. 5, wenn man dort $a = b$ nimmt: $\cos 2B = \cos B^2 - \sin B^2 = (1 - \sin B^2) - \sin B^2 = 1 - 2\sin B^2$, oder, wenn man $\frac{1}{2}B$ statt B setzt, so ist $\cos B = 1 - 2(\sin\frac{1}{2}B)^2$. Setzt man diesen Werth statt $\cos B$ in die Formel, so ist

$$b = \sqrt{(a-c)^2 + 4ac.\sin\tfrac{1}{2}B^2}.$$

Daraus läßt sich die dritte Seite b, aus a, c und B unmittelbar berechnen.

Es folgt hieraus nach Num. 4:

$$2\sin\tfrac{1}{2}B^2 = 1 + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}$$

$$= \frac{2ac + b^2 - a^2 - c^2}{2ac} = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2ac}$$

$$= \frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2ac}.$$

Setzt man nun $\frac{a+b+c}{2} = S$, der halben Summe der drei Seiten, so ist

$$\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\sqrt{(S-c)(S-a)}}{ac}.$$

Nach dieser Formel wird ein Winkel gefunden, wenn die drei Seiten gegeben sind.

For-

Formeln für sphärische Dreiecke.

8.

Ein sphärisches Dreieck entsteht auf der Kugel, wenn sich drei größte Kreise derselben schneiden. Die Seiten eines solchen Dreiecks sind also Kreisbogen und werden in Graden und Minuten ausgedrückt: die Winkel sind die Winkel der Tangenten der Bogen oder Seiten, oder auch die Neigungswinkel je zweier der drei Seitenebnen, die sich im Mittelpunkte der Kugel schneiden.

Es sei dieß Dreieck ABC, fig. VII, CD senkrecht auf SAB, DF auf SB, DE auf SA; auch sei CF und CE gezogen. Es ist nun W. CFD der Neigungswinkel der Ebnen SCB und SBA, da auch CF senkrecht auf SB, und eben deswegen W. CED der Neigungswinkel der Ebnen SCA und SBA. Folglich ist, wenn der Kugelradius Eins,

$$CE = \sin CA = \sin b;\quad CF = \sin CB = \sin a,$$
$$SE = \cos CA = \cos b;\quad SF = \cos CB = \cos a.$$

Ferner $CD = CE.\sin CED = \sin b.\sin A.$

$DE = CE.\cos CED = \sin b.\cos A.$

Auch ist $CD = CF.\sin CFD = \sin a.\sin B.$

$DF = CF.\cos CFD = \sin a.\cos B.$

Setzt man die beiden Werthe von CD einander gleich, so ist:

$$\text{I.}\quad \sin b.\sin A = \sin a.\sin B$$

oder $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$

das ist: die Sinus der Winkel des sphärischen Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Seiten.

Nun ziehe man GE parallel DF, und DH parallel SB. Da SGE, wie SED ein rechter Winkel, so ist HED = ESG = c, also

$$DH = DE.\sin HED = \sin b.\cos A.\sin c,$$

ferner

ferner $SG = SE . \cos ESG = \cos b . \cos c.$

Da nun $DH + SG = SF = \cos a$, so ist

II. $\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$. (§. 14.)

Nach der Formel I wird ein Winkel oder eine Seite eines sphärischen Dreiecks berechnet, wenn zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel, oder zwei Winkel und eine gegenüber liegende Seite gegeben sind; nach der Formel II eine Seite, wenn der gegenüber liegende Winkel und die ihn einschließenden Seiten gegeben sind.

9.

Da es willkührlich ist, wie die Winkel und gegenüber liegenden Seiten benannt werden, indem es hier nur auf ihre Lage gegen einander ankommt: so kann man in jenen Formeln A mit B oder C vertauschen, nur muß alsdann statt a auch b oder c gesetzt werden. Vertauscht man in der Formel II a mit c, so erhält man:

$$\cos c = \cos b . \cos a + \sin b . \sin a . \cos C.$$

In diese Gleichung setze man den Werth von $\cos a$ aus II statt $\cos a$, so folgt:

$$\cos c = \cos c . \cos b^2 + \sin b . \sin c . \cos b . \cos A + \sin a . \sin b . \cos C,$$

und wenn man in diese Gleichung $1 - \sin b^2$ statt $\cos b^2$ einführt, und sie durch $\sin b$ dividirt:

$$\cos C . \sin a = \cos c . \sin b - \sin c . \cos b . \cos A.$$

Nun ist nach der Formel I: $\sin a = \frac{\sin c . \sin A}{\sin C}$.

Setzt man diesen Werth statt $\sin a$ in die letzte Gleichung, so erhält man, da $\frac{\cos C}{\sin C} = \cot C$:

III. $\cot C . \sin A . \sin c = \cos c . \sin b - \sin c . \cos b . \cos A.$

Daraus ist C zu berechnen, wenn A, c und b gegeben sind.

Folgesätze. Es sei die Seite b ein Quadrant, oder $b = 90°$, so ist:

$$\cot C = \frac{\cos c}{\sin c . \sin A} = \frac{\cot c}{\sin A}$$

oder $\tan g\, C = \frac{\sin A}{\cot c} = \frac{\sin A}{\tan g\,(90° - c)}$. (§. 35)

Noch sei, in der Formel II, b ein Quadrant, so ist:

$\cos a = \sin c . \cos A.$ (§ 35)

Daraus ist die dritte Seite zu bestimmen, wenn der W. A und die einschließenden Seiten gegeben sind, wovon eine ein Quadrant ist, so wie aus der vorigen Formel der Winkel am Quadranten.

10.

Das Dreieck ACB, fig. VII, sei rechtwinklicht bei B, so fällt D in d auf SB und CdE ist ein rechter Winkel; dE sei senkrecht auf SB.

Es sei in diesem Dreiecke gegeben A und c: man soll dadurch a bestimmen. Es ist

$$\mathit{Tang}\, A = \frac{Cd}{dE};$$

$$\frac{Cd}{dE} = \frac{\sin CB}{dS . \sin AB} = \frac{\sin a}{\cos a . \sin c}$$

also $\mathit{Tang}\, A = \frac{\tan g\, a}{\sin c}$.

Daraus $\tan g\, a = \sin c . \tan g\, A.$ (§. 9).

Folges. Vertauscht man A mit C, also a mit c, so ist:

$$\mathit{Tang}\, C = \frac{\tan g\, c}{\sin a} = \frac{1}{\cot c . \sin a}$$

oder

oder $Cot\, C = cot\, c.\ sin\, a$ (§. 10).

Es sei abermal gegeben A und c: man soll dadurch C bestimmen.

Es ist aus dem Vorigen

$$sin\, c = \frac{tang\, a}{tang\, A}$$

und aus Obigem $sin\, c = \frac{sin\, a.\ sin\, C}{sin\, A}$

$$\text{Daher } \frac{tang\, a}{tang\, A} = \frac{sin\, a.\ sin\, C}{sin\, A}$$

$$\text{Oder } \frac{cos\, A}{cos\, a} = sin\, C$$

und, wenn man A mit C und also a mit c vertauscht:

$$cos\, C = sin\, A.\ cos\, c. \quad (§. 9.)$$

Beweise einiger Sätze der Projekzionslehre.

11.

Beweis, daß in der stereographischen Projekzion die Kreise sich unter denselben Winkeln schneiden, wie auf der Kugel. §. 13.

Man denke sich fig. VIII, das Auge im Punkte E der Kugel, DHIG als die Tafel, in A zwei sich unter irgend einem Winkel schneidende Kreise; AC sei die Tangente des einen Kreises, AB die des andern. Die Tangentenebne ACB muß man sich also senkrecht auf der Ebne des Auges EDFG vorstellen, so wie den Durchschnitt CB derselben mit der unbestimmt vergrößerten Ebne des Auges. Es ist a die Projekzion von A, und ca so wie ba die Projekzion der Tangenten CA und BA auf der Tafel. Es muß bewiesen werden,

werden, daß der W. cab gleich ist dem W. CAB, und daß ca die Tangente des Kreisbogens ea, so wie daß ba die Tangente des Bogens da ist.

Der Winkel RAK, als ein Rechter, ist gleich dem Winkel ERD, folglich auch gleich den Winkeln E × EaR; daher W. KAa = W. EAR, weil E = EAR; also W. KAa = KaA. Es ist also Ka = KA. Da überdieß BC auf der Ebne des Auges, oder auf KR senkrecht steht, so sind die beiden Dreiecke CaB und CAB, welche CB gemeinschaftlich und den gleichen Neigungswinkel KaA = KAa gegen Aa haben, kongruent: folglich W. CAB = cab.

Denkt man sich eine Ebne durch die Punkte ECA, so muß sie, da sie den Kreis durch A tangirt, auch irgend einen Kreis (ea) der durch einen Punkt (a) von EA geht, berühren; also muß ihn auch ca tangiren, welche in dieser Ebne liegt. Eben so ist es, wenn AEB die Ebne, in Rücksicht auf ba. — Dieß erhellt auch daraus, daß das Auge in E jeden Punkt des Kreises, außer A, niedriger sieht, als die Punkte seiner Tangente AC oder AB.

12.

Beweis der in §. 41 gegebnen Formeln.

1. Denkt man sich das Trapez flin, fig. 24, unangebbar oder unendlich klein, so soll sich nach §. 41, fi zu in verhalten wie auf der Kugel, und der Winkel fai zu dem auf der Kugel wie m : 1. Es ist af zu bestimmen.

Der Abstand des Punkts f vom Pole sei η der Längenunterschied zweier Meridiane λ, also sein Differenzial, oder W. fal $= d\lambda$. Es ist also auf der Kugel der Bogen fi $= d\eta$ und in $= d\lambda.\ sin\ \eta$, weil $sin\ tot : sin\ \eta =$ fi : in. Es verhält sich also auf der

Kugel

Kugel das Parallelsdifferenzial zum Meridiandifferenzial wie $d\lambda . \sin \eta : d\eta$.

Auf dem Netze sei ai = x der Radius des Parallels, so ist fi = dx. Der Winkel ian soll m. $d\lambda$ sein, also ist in, welches für $\sin$ m. $d\lambda$ zu nehmen ist, = x. m. $d\lambda$. Das Verhältniß von in : if ist also auf dem Netze x. m. $d\lambda : dx$. Dieses soll jenem auf der Kugel gleich sein, daher

$$\frac{dx}{x . m d\lambda} = \frac{d\eta}{d\lambda . \sin \eta} \text{ oder } \frac{dx}{x} = \frac{m . d\eta}{\sin \eta}.$$

Folglich: $\log x = m . \log . \tan \frac{1}{2} \eta + Const.$

Durch irgend eine Annahme für den beliebigen Radius ad wird die beständige Größe bestimmt. Für den Punkt d auf der Kugel ist $\eta = 90°$; und der Quadrant des Meridians $\frac{1}{2} \pi R$. Soll also, z. B. $x = \frac{1}{2} \pi R$ sein, wenn $\eta = 90°$ ist, so wird die Gleichung:

$$\log \tfrac{1}{2} \pi R = Const.,$$

also: $\log x = m . \log \tan \frac{1}{2} \eta + \log \frac{1}{2} \pi R$,

daher $x = af = \frac{1}{2} \pi R . \tan \frac{1}{2} \eta^{m}$.

2. Sollen die Grade zweier Parallelkreise, deren Entfernungen vom Pole η und $\grave{\eta}$, das Verhältniß zum Meridiangrade haben, wie auf der Kugel, so müssen sie sich verhalten, wie $\sin \eta : \sin \grave{\eta}$. Auf dem Netze aber verhalten sie sich, wie die zugehörigen Radien x und x̀. Es muß also sein

$$\frac{\sin \grave{\eta}}{\sin \eta} = \frac{\tan \frac{1}{2} \grave{\eta}^{m}}{\tan \frac{1}{2} \eta^{m}} = \left(\frac{\tan \frac{1}{2} \grave{\eta}}{\tan \frac{1}{2} \eta}\right)^{m}.$$

Daraus findet man, wenn durch Logar. der Exponent m in einen Faktor verwandelt wird,

$$m = \frac{\log . \sin \grave{\eta} - \log . \sin \eta}{\log . \tan \frac{1}{2} \grave{\eta} - \log . \tan \frac{1}{2} \eta}.$$

13.
Beweis, daß Bonnes Projekzion die Flächen richtig darstellt.

Irgend ein Punkt i, des Netzes fig. 18, dessen Entfernung vom Pole η, wird durch $Pi = Pf = z$, und durch den Winkel $fPi = \varphi$ bestimmt.

Die Meridiane der Karte laufen im Pole p der Karte zusammen; Pp ist also eine unveränderliche Größe (a), und $pf = \eta$, (in Teilen des Kugelradius Eins), weil die Meridiangrade denen auf der Kugel gleich sind. Es ist also

$$Pi = z = a + \eta.$$

Der Punkt i sei λ Grade vom mittelsten Meridian, so ist nach §. 25

$$\varphi = \frac{\lambda . \sin \eta}{z}.$$

Man denke sich nun einen mit if konzentrischen Bogen, diesem unendlich nahe, so ist die Fläche zwischen beiden (das Differenzial des unbestimmten Vierecks fike) ein Kreisringstück, dessen Halbmesser z und $z + dz$ sind. Dieses Element ist also $\frac{\pi}{180} . \varphi\, zdz$, das ist, nach jenen Gleichungen

$$\frac{\pi}{180} . \lambda\, d\eta . \sin \eta,$$

und sein Integral: $Const. - \frac{\pi}{180} \lambda . \cos \eta$

ist der Inhalt des unbestimmt großen Vierecks.

Die Entfernung vom Pole des Punktes k sei $\grave{\eta}$, so soll dieß Integral Null sein, wenn $\grave{\eta} = \eta$, daher ist $Const = \frac{\pi}{180} . \lambda . \cos \grave{\eta}$, also die Fläche fike

$$\frac{\pi}{180} . \lambda\, (\cos \grave{\eta} - \cos \eta).$$

Die

Die ganze Kugelzone zwischen if und ke ist nach §. 31 : $2\pi(\cos \eta' - \cos \eta)$, also ist das Stück derselben, dessen Projekzion ifke sein soll, $= \frac{\lambda}{360}$. $2\pi(\cos \eta' - \cos \eta)$, das ist, ebenfalls

$$\frac{\pi}{180} . \lambda (\cos \eta' - \cos \eta).$$

Da nun die Fläche gfhe aus demselben Grunde der ihr entsprechenden auf der Kugel gleich ist, so ist auch die Fläche igkh und jede andre der ihr entsprechenden auf der Kugel gleich.

Diese Gleichheit hängt nicht von z ab, denn es verschwindet durch jene Substitution aus dem Differenzial der Fläche. Folglich findet sie auch statt bei Flamsteeds Projekzion (einer Art der Bonnischen), für welche z unendlich ist.

(Die Gleichung der Sinuslinie für rechtw. Koordinaten, der Meridiane nach Flamsteed, ist $y = \lambda . \sin \eta$, (der Bogen η ist die Absciße), daher das Flächendifferenzial $y d\eta = \lambda . \sin \eta . d\eta$, folglich $S. y d\eta = Const. - \lambda . \cos \eta$.)

14.

Beweis der Formel für AB, §. 33.

Es sei ε die Breite eines Punkts auf der Kugel, deren Radius r, und dem Meridianbogen ε entspreche die Länge AB = x auf dem Meridiane der Karte; wächst dieser um dx, so wachse jener Bogen um sein Element $r d\varepsilon$. Nun ist, nach Merkator, ein Parallelbogen auf der Kugel zur entsprechenden Länge auf der Karte, wie $\cos \varepsilon : 1$, und da dieß Verhältniß auch das der kleinsten Teile oder Elemente der Meridiane sein soll, so ist:

$$\frac{dx}{r\, d\varepsilon} = \frac{1}{\cos \varepsilon} \text{ oder } dx = \frac{r\, d\varepsilon}{\cos \varepsilon},$$

daher $x = r. \ln. \tang (45° + \frac{1}{2} \varepsilon)$.

Setzt

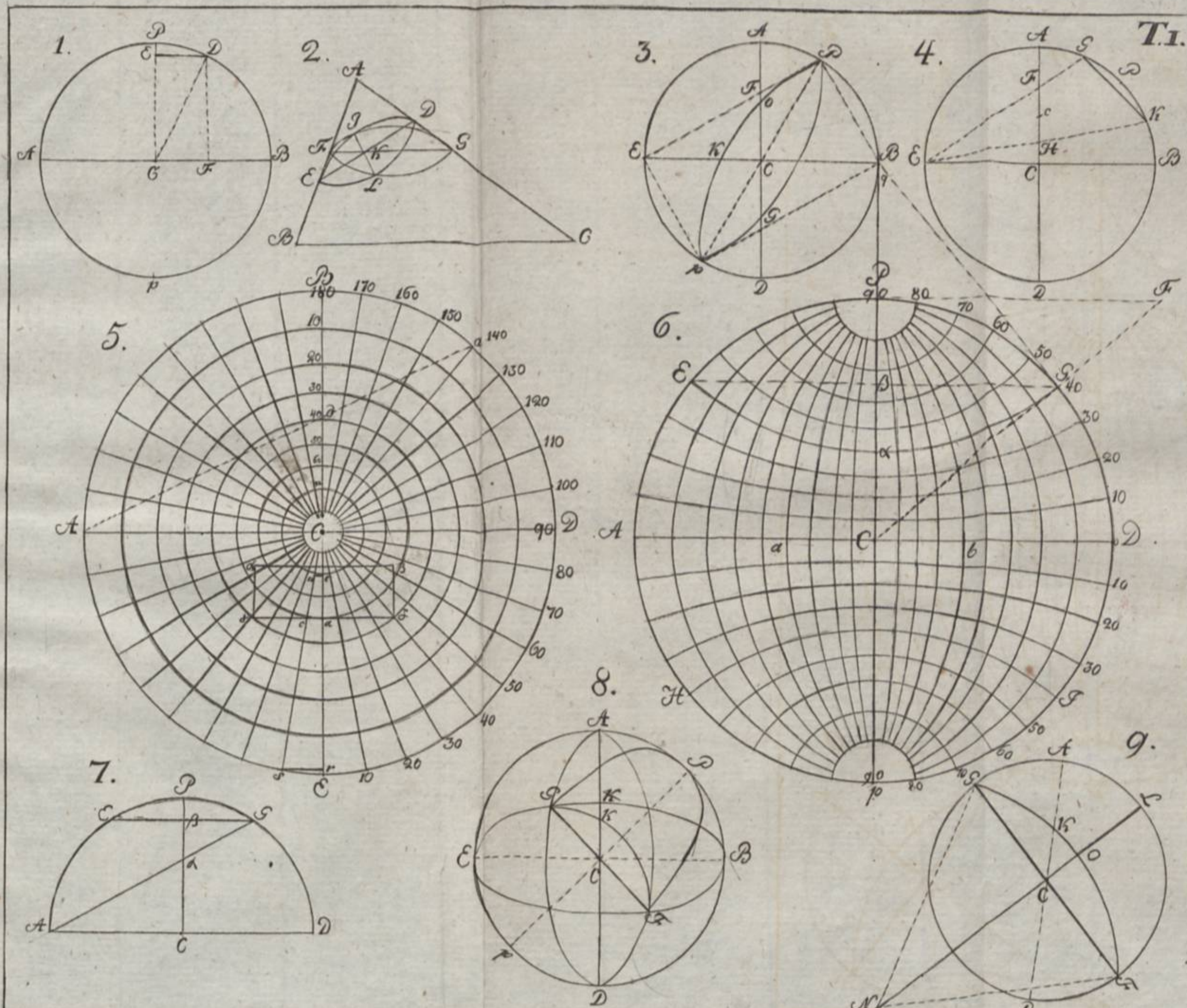
Setzt man $r = 859{,}436$ Meilen, und statt des natürlichen Logarithmen den briggischen, das ist, 2,30258... *log vulg.*, so erhält man die obige Formel, welche AB, für jeden Werth von ε, ohne jene mühsame Summirung der Sekanten giebt. Um die Multiplikazion zu vermeiden, nimmt man den Log. des Log. der Tangente; *log* $1978{,}92 = 3{,}2964295$.

Verbesserungen.

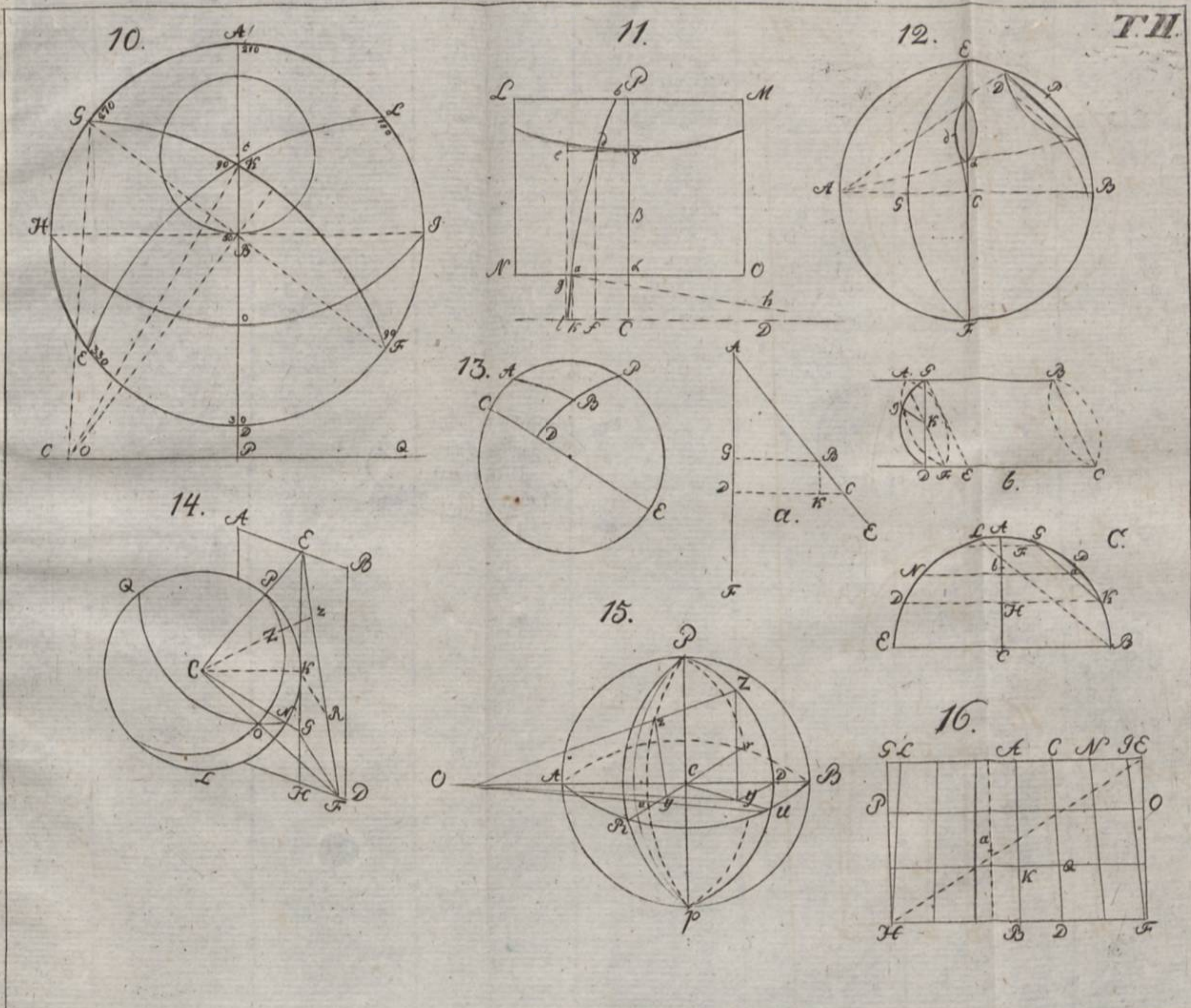
S. 13 lese man: $\grave{\lambda}$ statt λ.
S. 22 Z. 18: stereogr. Entw. statt persp. —
S. 20 Z. 3: $\dfrac{b}{\sin \lambda . \, tg \frac{1}{2} \eta}$.
S. 28 Z. 25: $2\varrho =$
S. 32 Z. 10: Tangente der Entf. v. Mittelp. der Karte.
S. 33 Z. 11: $r . \cos \varepsilon . \cos \lambda$.
S. 46 Z. 4 von unten: W. an P.
S. 51 Z. 16: Kegelfläche.
S. 62 Z. 20: R (*sin* ..
S. 65 Z. 11: $\sec 42°$. — Z. 12: $+ \sec 44°$ statt .... $\sec 45°$. —
Z. 13: Man kann
S. 80 Z. 7: $2 R . \sin \frac{1}{2} n . \sin n$.
S. 85 Z. 2: Polarprojekzion §. 54.
S. 87 Z. 4: das nfache.
S. 89 Z. 11: $af = 1{,}0403$. — Z. 2 von unten: $R \sqrt{2}$ statt RK.
S. 90 Z. 15: cn statt cn. — Z. 7: Endpunkte.
S. 91 Z. 7 von unten: Kegelfläche.
S. 92 Z. 3: W. (1 g f).
S. 94 Z. 24: Entwerfungsart der mittelste Parallel.
S. 110 Z. 14: einem Bruche. — Z. 20: nach der Addition, statt: ohne d. Abz.

Fig. 15 soll der punkt. Bogen Pp durch den Durchschnittspunkt u der L. Rr und CU gehen; auch fällt der nächste Bogen linker Hand weg, und die L. Zz geht durch O.

Fig. 18 soll A wie fig. 17 stehen. — Fig. I fehlt H zw. K u. G.

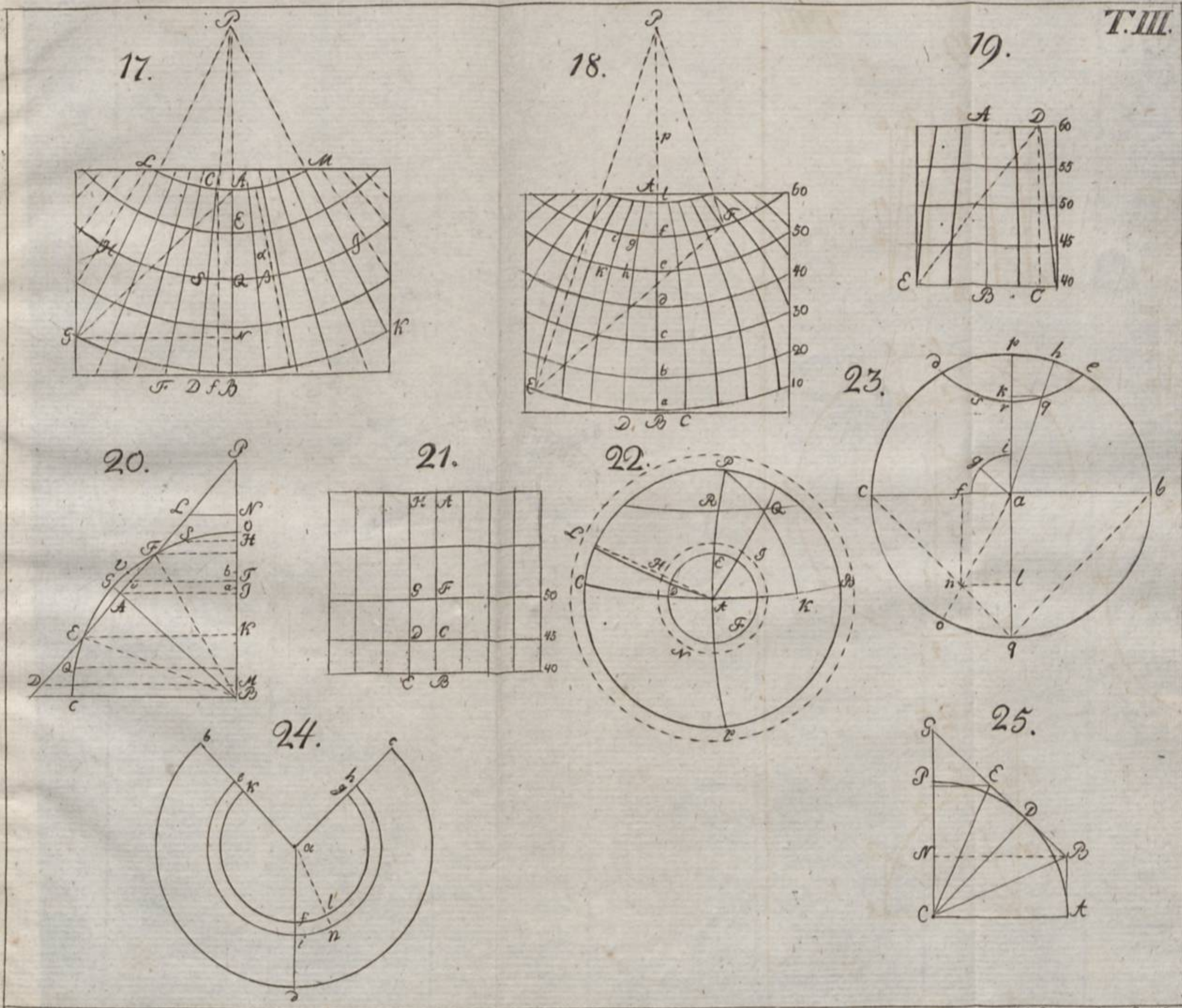


W. Springer sc. Liegnitz

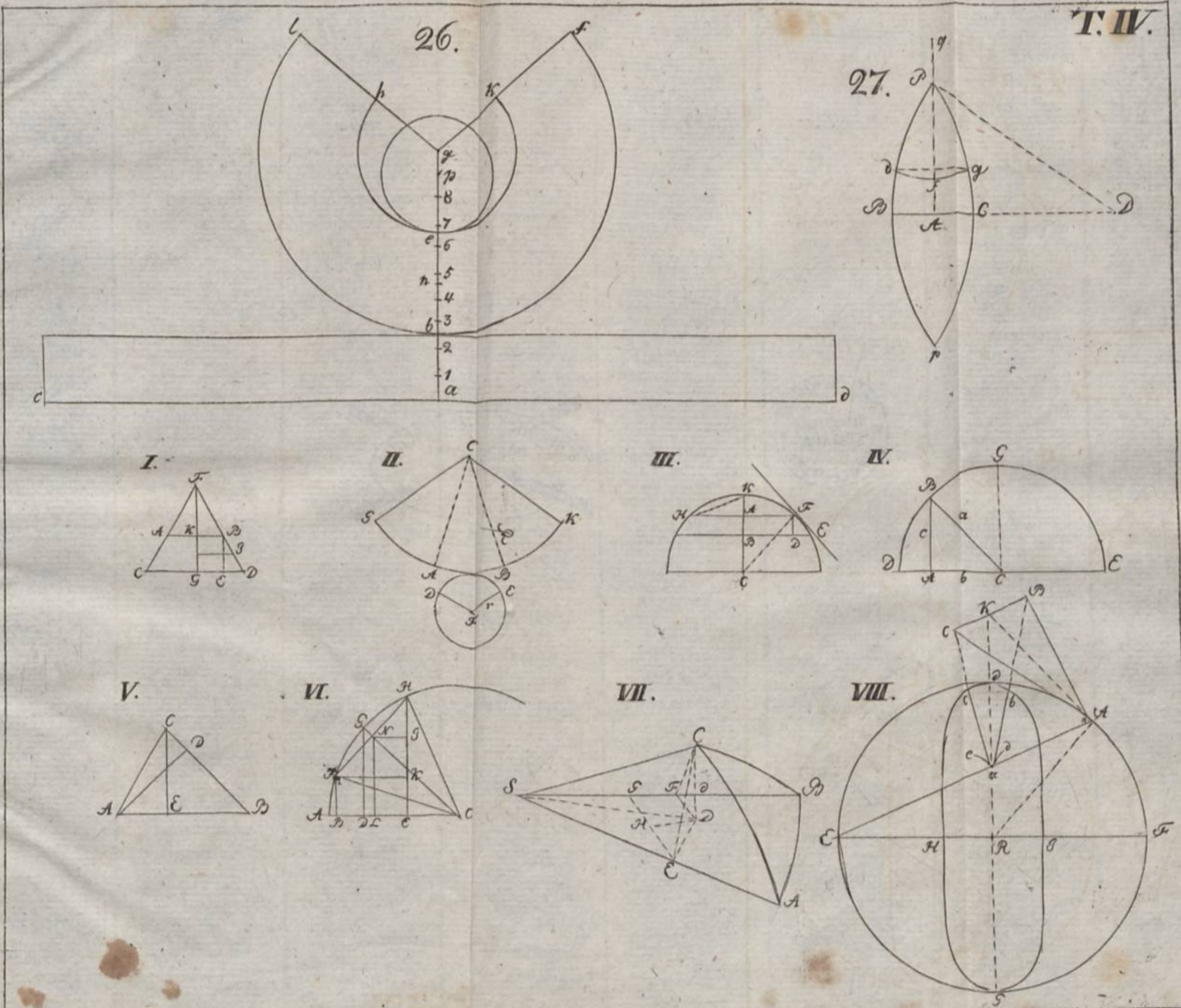


W. Springer sc. Liegnitz.

T. III.



W. Springer sc. Liegnitz.



W. Springer sc. Liegnitz.