

Biblioteka Główna i OJNT  
Politechniki Wrocławskiej



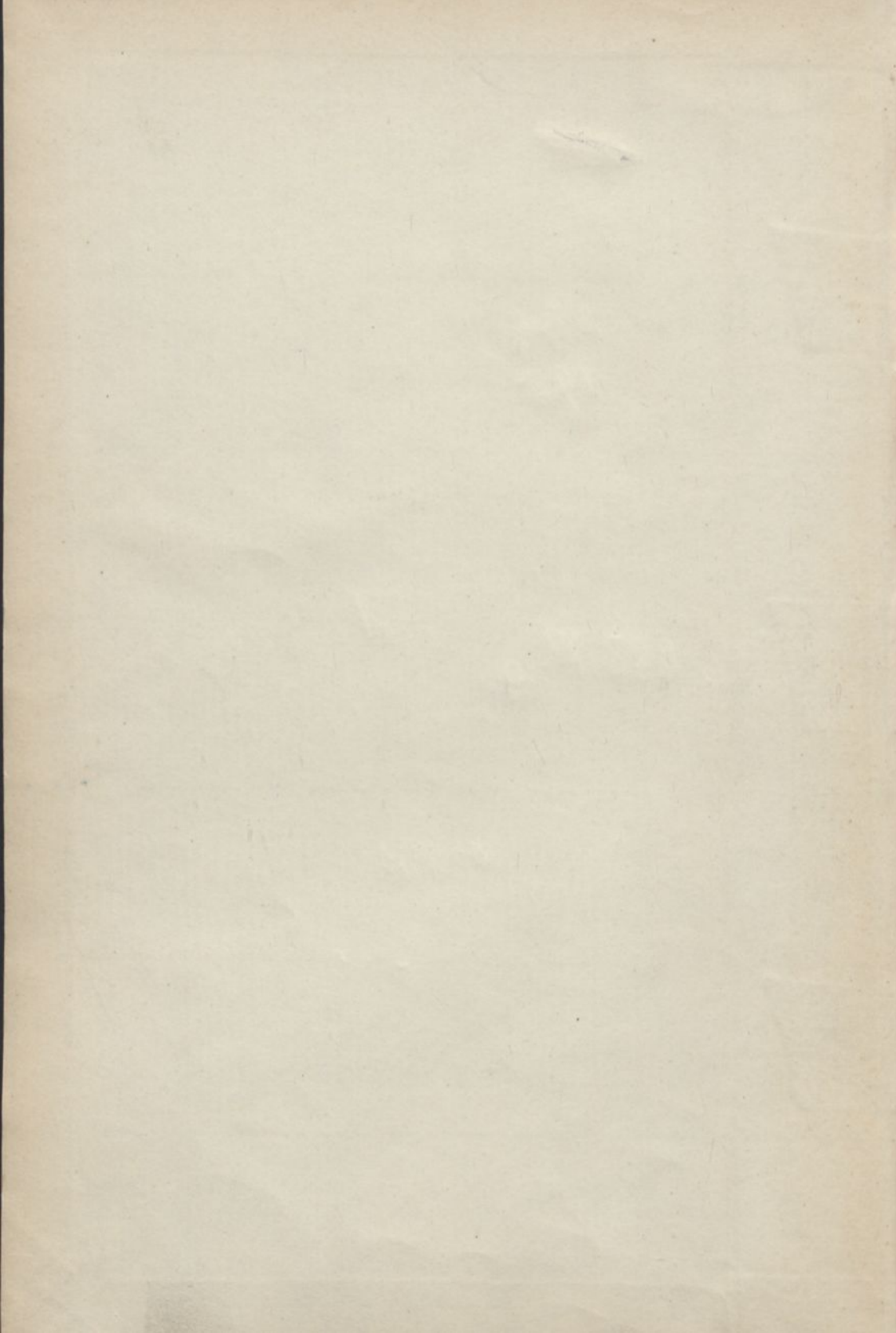
100100368743

No 988

kl







Vorträge  
über  
**Mechanik**

als Grundlage für das  
**Bau- und Maschinenwesen.**

Von

**Wilh. Keck,**

weil. Geh. Regierungsrat,  
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

**Zweiter Teil:**

**Mechanik elastisch-fester und flüssiger Körper.**

Vierte Auflage,

bearbeitet von

**Dr. Ing. Ludwig Hotopp,**

Geheimer Baurat,  
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

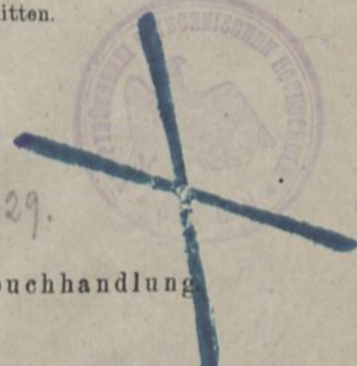
Mit 366 Holzschnitten.



1924, 1429.

Hannover.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung  
1920.



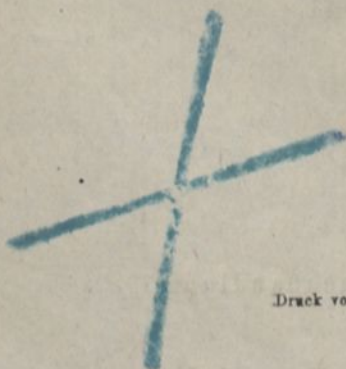




*Th. 1897/4.*



358706L/4



## Vorwort zur ersten Auflage.

---

Der vorliegende zweite Band der „Vorträge über Mechanik“ behandelt die Mechanik der elastisch-festen und der flüssigen Körper. Der Inhalt des Buches weicht von dem Lehrgang an der Technischen Hochschule zu Hannover etwas ab; es wird nämlich im Sommer des ersten Studienjahres außer der Mechanik elastisch-fester Körper noch das Gleichgewicht flüssiger Körper etwa in der Behandlungsweise des Buches erledigt, von der Bewegung flüssiger Körper können aber in der für das erste Studienjahr verfügbaren Zeit nur die einfachsten Fälle vorgetragen werden, und die eingehendere Behandlung erfolgt dann erst im Sommer des zweiten Studienjahres. Bei der Bearbeitung des Buches habe ich aber vorgezogen, die Mechanik flüssiger (und auch gasförmiger) Körper im Zusammenhange durchzuführen.

Auch in diesem Bande wurde auf die Beigabe zahlreicher vollständig durchgerechneter Beispiele besonderer Wert gelegt; denn den Studierenden der Technischen Hochschule wird die Mechanik, wenigstens soweit sie im ersten Jahre vorkommt, nur zum Zwecke der Anwendung gelehrt, und nur an gut gewählten Übungsaufgaben kann der Studierende diejenige Sicherheit erwerben, die erforderlich ist, wenn er nicht in den späteren Studienjahren bei der Berechnung seiner Entwürfe in Schwierigkeiten geraten und kostbare Zeit verlieren soll. Den Fehlern, die von den Anfängern am häufigsten begangen werden, muß schon vom ersten Studienjahr an mit allen Mitteln vorgebeugt werden. Die Kenntnis dieser besonders häufigen Fehler kann man natürlich nur gewinnen und ihnen entgegenarbeiten, wenn man in besonderen Übungsstunden einfache Zahlenaufgaben rechnen läßt und daneben mit den Professoren derjenigen Fächer, die sich auf die Mechanik stützen, stets in Fühlung bleibt



und den auf das Fach bezüglichen Wünschen und Ratschlägen derselben nach Möglichkeit entgegenkommt.

Bei der Abfassung dieses Teiles wurden besonders folgende Werke benutzt: Lehrbücher der technischen Mechanik und der Ingenieur-Mechanik von A. Ritter; Elastizität und Festigkeit von C. Bach; Hydromechanik von M. Rühlmann; Theoretische Maschinenlehre von F. Grashof, 1. Band; Mechanik von Jul. Weisbach und die Berichte desselben Verfassers über seine Untersuchungen aus dem Gebiete der Hydraulik. Der Berechnung des Winddrucks und des Luftwiderstandes wurden die neuesten wertvollen Versuche von v. Loebl zugrunde gelegt.

Zur Erleichterung der Übersicht und des Verständnisses der Formeln ist auch diesem Teil ein alphabetisches Verzeichnis der benutzten Buchstabenbezeichnungen und ein alphabetisches Inhaltsverzeichnis beigelegt.

Hannover, im Oktober 1897.

Keck.

---

## Vorwort zur zweiten Auflage.

---

Daß schon nach drei Jahren eine 2. Auflage erforderlich wurde, zeugt für die Nützlichkeit des Buches. Leider ist dessen Verfasser, kurz nachdem er die Neubearbeitung dieses II. Teiles in Angriff genommen hatte, ganz unerwartet infolge eines Schlaganfalles gestorben.

Da wir durch unsere kollegialen Beziehungen zu dem Verfasser über die Art der Bearbeitung seiner Mechanik unterrichtet sind, haben wir es übernommen, diesen II. Teil, unter Benutzung der im Nachlasse vorgefundenen Notizen, im Sinne des Verstorbenen so zu bearbeiten, daß diese 2. Auflage noch als sein eigenes Werk anzusehen ist, — und zwar übernahm Lang: die erste Abteilung „Mechanik der elastisch-festen Körper“ und Arnold: die zweite Abteilung „Mechanik der flüssigen Körper“ — wobei Geh. Reg.-Rat



Abteilung, und Professor Lang die Durchsicht der Punkte 7 bis 10 in Abschnitt B der zweiten Abteilung unterstützte.

Durch die Vollendung der 2. Auflage der Keckschen „Vorträge über Mechanik“ hoffen wir auch den Wünschen der Studierenden unserer Hochschule zu entsprechen.

So möge denn dieselbe dazu beitragen, das Andenken des zu früh geschiedenen bedeutenden Ingenieurs und hochgeschätzten Lehrers in Ehren zu halten.

Hannover, im März 1901.

**G. Lang,**  
Professor.

**H. Arnold,**  
Professor und Geh. Reg.-Rat.

---

## Vorwort zur dritten Auflage.

---

Der hiermit in seiner dritten Auflage zur Ausgabe gelangende 2. Band der „Vorträge über Mechanik“, dessen Durchsicht und Bearbeitung ich wie s. Z. die des ersten Bandes übernommen habe, hat gegenüber den ersten beiden Auflagen nur geringe Änderungen und Ergänzungen erfahren. Diese Beschränkung wurde für geboten erachtet, einerseits, weil die vom Verfasser getroffene Umgrenzung des Gesamtwerkes, die dem Zwecke desselben entsprechend sich bewährt hat, tunlichst nicht überschritten werden sollte, und andererseits, weil der Gegenstand des Abschnittes A der ersten Abteilung dieses Bandes, „Gleichgewicht elastisch-fester Körper“, bei dem in erster Linie eine Erweiterung hätte in Frage kommen können, ausführlicher in der inzwischen von mir bearbeiteten 2. Auflage der „Elastizitätslehre“ behandelt worden ist.

Eine Ergänzung hat der über Knickfestigkeit handelnde Punkt (A Ziffer 6) gefunden; u. a. durch Hinzufügung der auf Grund neuerer Versuche aufgestellten v. Tetmajerschen Formeln.

Im Abschnitt „Gleichgewicht flüssiger Körper“ sind als Beispiel Gleichgewichtsregeln für frei schwimmende Taucherglocken entwickelt.

Im übrigen muß dieser Band auch in seiner neuen Auflage noch völlig als das Werk seines Urhebers gelten.

Hannover, im September 1908.

**L. Hotopp.**

## Vorwort zur vierten Auflage.

---

Die infolge Teilnahme der studierenden Jugend am Kriege eingetretene Verzögerung im Absatz dieses Buches, wie der wissenschaftlichen Literatur überhaupt, ist nach Beendigung desselben und lebhafterer Wiederaufnahme des Lehrbetriebes an den Hochschulen alsbald ausgeglichen, so daß eine schnelle Räumung des aufliegenden Satzes eingetreten und eine beschleunigte Neuauflage auch dieses Bandes der „Vorträge über Mechanik“ erforderlich geworden ist. Die hiermit zur Ausgabe gelangende 4. Auflage weist neben unwesentlichen Änderungen nur insofern kleine Ergänzungen gegen die vorige auf, als in dem Abschnitte über das Gleichgewicht flüssiger Körper die „Kraftübertragung durch Druckwasser“ eingehender behandelt und der „Hydrostatische Gewichtsausgleich“ als neues Beispiel hinzugefügt ist.

Hannover, im November 1919.

L. Hotopp.



## Vorwort zur vierten Auflage

Die dritte Auflage des vorliegenden Buches ist seit ihrer  
Erscheinung in der ersten Auflage über ein Jahrzehnt  
vergangen. In dieser Zeit hat sich die Wissenschaft der  
Physik in hohem Maße entwickelt, und es ist daher  
angebracht, die dritte Auflage zu revidieren und  
zu ergänzen. Die vorliegende Auflage enthält  
daher eine Reihe von Änderungen, die die  
Darstellung der Physik in der vierten Auflage  
verbessern sollen. Insbesondere sind die  
Ergebnisse der neueren Forschung in  
einige Kapitel aufgenommen worden, und  
die Darstellung der Grundlagen der  
Physik ist neu geordnet worden.

Hannover, im November 1911.

L. Hottel

# Inhalt.

## Erste Abteilung.

### Mechanik der elastisch-festen Körper.

	Seite
Einleitung. Nichtstarre Körper und Massengruppen. Elastisch-feste Körper	1
<b>A. Gleichgewicht elastisch-fester Körper.</b>	
1. Allgemeines . . . . .	10
2. Zugfestigkeit hängender Stangen; Druckfestigkeit stehender Säulen .	13
3. Schub- oder Scherfestigkeit . . . . .	16
4. Biegefestigkeit . . . . .	13
a) Grundgleichungen . . . . .	19
b) Widerstandsmomente verschiedener Querschnitte . . . . .	25
c) Darstellung der Veränderlichkeit des Biegemomentes . . . . .	28
d) Balken auf zwei Stützen mit einer Einzellast . . . . .	30
e) Balken auf zwei Stützen mit mehreren Einzellasten . . . . .	32
f) Balken auf zwei Stützen mit gleichmäßig verteilter Last . . . . .	36
g) Balken auf zwei Stützen mit gleichmäßiger Belastung und mit Einzellasten . . . . .	38
h) Balken überall gleicher Sicherheit. . . . .	40
5. Biegelinie . . . . .	44
a) Einseitig eingespannter prismatischer Stab oder Balken . . . . .	46
b) Prismatischer Balken auf zwei Stützen . . . . .	49
c) Biegung von einseitig eingespannten Balken überall gleicher Sicherheit . . . . .	51
d) Prismatischer, an dem einen Ende wagrecht eingespannter, am anderen Ende unterstützter, gleichmäßig belasteter Balken . . . . .	54
e) Prismatischer, gleichförmig belasteter Balken auf drei Stützen . . . . .	59
6. Knickfestigkeit . . . . .	64
7. Verdrehungsfestigkeit (Torsionsfestigkeit) . . . . .	71
a) Stab von kreisförmigem und kreisringförmigem Querschnitte . . . . .	71
b) Stab von rechteckigem Querschnitte . . . . .	74
8. Einfache Fachwerkbalken auf zwei Stützen . . . . .	79
a) Art der Berechnung der Spannkkräfte . . . . .	79
b) Dachträger . . . . .	83
c) Ungünstige Belastungsart . . . . .	91
d) Parabolischer Fachwerkträger . . . . .	95
e) Parallel-Fachwerkträger . . . . .	98

**B. Elastisch-feste Körper in Beschleunigungszuständen.**

	Seite
1. Beschleunigte Verschiebung elastisch-fester Körper . . . . .	100
2. Gleichmäßige Drehung um eine feste Achse . . . . .	103
Spannung der Ringe eines Mühlsteins . . . . .	106
3. Ungleichförmige Drehung um eine feste Achse . . . . .	107

**C. Formänderungsarbeit elastisch-fester Körper.**

1. Arbeit der Verlängerung und Verkürzung gerader Stäbe . . . . .	109
a) Einwirkung plötzlicher Belastung . . . . .	114
b) Stab mit sprungweise veränderlichem Querschnitte . . . . .	119
2. Biegearbeit . . . . .	121
a) Prismatischer Stab . . . . .	121
b) Stab überall gleicher Sicherheit und gleicher Höhe . . . . .	124
c) Tragfedern der Fuhrwerke . . . . .	126
3. Drehungsarbeit . . . . .	132
Verdrehungsfedern . . . . .	134

**D. Stoß elastisch-fester Körper.**

1. Gerader zentraler Stoß . . . . .	138
a) Festsetzung der Stoßziffer $k$ . . . . .	142
b) Unelastischer Stoß . . . . .	144
c) Anwendung des Stoßes; Einrammen von Pfählen . . . . .	145
d) Hämmer zum Schmieden oder Nieten . . . . .	148
e) Biegung durch den Stoß eines Körpers . . . . .	149
f) Vollkommen elastischer Stoß . . . . .	152
2. Stoß sich drehender Körper . . . . .	153
Ballistisches Pendel . . . . .	155
3. Exzentrischer Stoß . . . . .	156
Mittelpunkt des Stoßes . . . . .	159
4. Schiefer zentraler Stoß . . . . .	162
5. Einige besondere Fälle des Stoßes . . . . .	164

## Zweite Abteilung.

**Mechanik der flüssigen Körper.**

Allgemeine Eigenschaften der flüssigen Körper; tropfbar-flüssige und gasförmig-flüssige Körper . . . . .	168
--	-----

**A. Gleichgewicht flüssiger Körper.**

1. Gleichgewicht flüssiger Körper ohne Einwirkung der Schwere . . . . .	171
a) Druckkräfte eines flüssigen Körpers gegen verschiebbare Kolben . . . . .	172
b) Kraftübertragung durch Druckwasser . . . . .	174
c) Hydrostatischer Gewichtsausgleich . . . . .	179
d) Druckkraft auf ein beliebiges Stück der Gefäßwand . . . . .	180
e) Wandstärke von Gefäßen und Röhren . . . . .	181



	Seite
2. Gleichgewicht tropfbar-flüssiger Körper unter Einwirkung der Schwere	183
a) Wasserspiegel. Druck in der Flüssigkeit. . . . .	183
b) Druckkraft gegen eine ebene Seitenwand. Druckmittelpunkt .	185
c) Druckkraft gegen eine rechteckige Seitenwand . . . . .	188
d) Druckkraft gegen eine ebene Mauerfläche oder Bohlwand . .	189
e) Berechnung der Riegel des Stemmtores einer Schleuse . . .	192
f) Druckmittelpunkt eines Dreiecks, eines Kreises, eines Viertelkreises . . . . .	194
g) Druckkräfte gegen krumme Flächen . . . . .	197
h) Riegel eines gekrümmten Schleusentores . . . . .	199
i) Gesamtdruck auf die Gefäßwände. Auftrieb einer Flüssigkeit	200
k) Gleichgewicht schwimmender Körper . . . . .	205
l) Tropfbar-flüssige Körper in scheinbarer Ruhe in bezug auf ein beschleunigt fortschreitendes Gefäß . . . . .	211
m) Tropfbar-flüssige Körper in gleichmäßiger Drehung um eine Achse	212
3. Gleichgewicht gasförmiger Flüssigkeiten . . . . .	219
a) Der Boyle-Mariottesche Satz . . . . .	219
b) Druckverhältnisse der Atmosphäre bei überall gleicher Temperatur	220
c) Auftrieb der Luft. Luftballon . . . . .	223
d) Satz von Gay-Lussac. Zustandsgleichung der vollkommenen Gase	225
e) Druckverhältnisse in der Atmosphäre bei gleichbleibender und veränderlicher Temperatur . . . . .	228
4. Gleichgewicht zwischen tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten . .	233
a) Barometer. Druckmesser . . . . .	233
b) Saugpumpe. Kreiselpumpe. Heber . . . . .	237
c) Taucherglocke . . . . .	240
5. Gleichförmige Drehung gasförmiger Körper um eine Achse . . . . .	243
Flügelgebläse . . . . .	243
6. Allgemeine Gleichgewichtsbedingung für Flüssigkeiten, von L. Euler.	244

### B. Bewegung flüssiger Körper.

1. Ausfluß des Wassers aus Gefäßen . . . . .	247
a) Ideelle Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge durch eine Bodenöffnung . . . . .	248
b) Ideelle Ausflußmenge durch eine Seitenöffnung . . . . .	253
c) Wirkliche Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge . . . . .	257
d) Widerstandshöhen und Widerstandsziffern . . . . .	263
e) Druckhöhenverlust infolge plötzlicher Querschnittsänderung .	265
f) Ausfluß aus einer Bodenöffnung unter veränderlicher Druckhöhe	268
g) Ausfluß aus einer Seitenöffnung bei veränderlicher Druckhöhe	274
h) Ausgleichung des Wassers in Schleusenammern . . . . .	275
i) Hydraulischer Druck . . . . .	278
k) Gesamtdruck ausströmenden Wassers auf die Gefäßwände . .	283

	Seite
1) Druck eines Wasserstrahles gegen eine denselben auffangende Fläche . . . . .	288
m) L. Eulers Grundgleichungen für die Bewegung tropfbar-flüssiger Körper ohne Reibung . . . . .	291
2. Bewegung des Wassers in Röhren . . . . .	296
a) Leitungswiderstand in geraden zylindrischen Röhren . . . . .	296
b) Benutzung der Druckmesserröhren (Piezometer) . . . . .	300
c) Widerstand in Knieröhren und gekrümmten Röhren . . . . .	302
d) Widerstand beim Durchgange durch Schieber, Hähne, Drosselklappen und Ventile . . . . .	303
e) Wasserleitung mit Verzweigung . . . . .	304
f) Widerstand in kegelförmigen Röhren . . . . .	307
g) Steighöhe springender Strahlen . . . . .	308
3. Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen . . . . .	310
a) Gleichförmige Bewegung des Wassers in Kanälen . . . . .	310
b) Querschnittsform kleinsten Widerstandes . . . . .	318
c) Geschwindigkeiten in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts . . . . .	321
d) Eintritt des Wassers in einen Kanal . . . . .	323
e) Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen	325
f) Stauhöhe an Wehren und Brückenpfeilern . . . . .	328
g) Staukurve und Stauweite . . . . .	333
4. Druck strömenden Wassers gegen feste Körper; Widerstand des Wassers gegen bewegte Körper . . . . .	344
5. Ausfluß der Gase aus Gefäßen bei geringem Überdruck . . . . .	350
6. Spezifische Wärme; Zustandsänderungen der Gase . . . . .	352
7. Ausfluß der Gase aus Gefäßen . . . . .	362
8. Bewegung der Luft in Röhren . . . . .	366
9. Wirkung der Schornsteine . . . . .	369
10. Widerstand der Luft gegen bewegte fremde Körper; Druck des Windes gegen fremde Körper . . . . .	372
—————	
Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln vorkommenden Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches	382
Alphabetisches Verzeichnis der behandelten Gegenstände . . . . .	386



## Erste Abteilung.

# Mechanik der elastisch-festen Körper.

### Einleitung.

## Nichtstarre Körper und Massengruppen. Elastisch-feste Körper.

Einen festen Körper denken wir uns aus kleinsten Teilen (Massenpunkten, Molekülen oder Molekülgruppen) zusammengesetzt, die so miteinander verbunden sind, daß sie gegenseitig Kräfte aufeinander ausüben können. Diese Kräfte zwischen den einzelnen Massenpunkten eines und desselben Körpers heißen innere Kräfte, im Gegensatz zu den äußeren Kräften, welche von anderen Körpern herrühren und (mit Ausnahme der Massenkräfte S. 9) auf den Umfang des betrachteten Körpers einwirken.

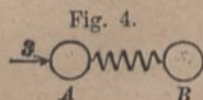
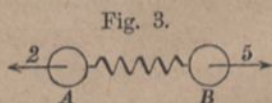
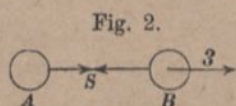
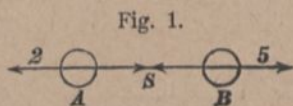
Die Möglichkeit, Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten an einem Körper zusammenzusetzen und zu zerlegen, d. h. durch andere ohne Abänderung der Bewegung des Körpers zu ersetzen, ist im 1. Teile dieses Buches nur für völlig starre Körper bewiesen. Für diese benutzten wir (1. Teil, S. 102) den Erfahrungsgrundsatz, daß zwei gleiche, in derselben Richtungslinie wirkende Kräfte entgegengesetzten Sinnes sich in ihrer Wirkung auf die Bewegung eines starren Körpers aufheben; daraus folgte die Zulässigkeit der Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft längs ihrer Richtungslinie. Auf diese Betrachtungen gründete sich die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte zu einer Einzelkraft und einem Kräftepaare (1. Teil S. 143), sowie die Lehre vom Gleichgewicht und den sechs Bedingungen für dasselbe (1. Teil, 4. Aufl., S. 178).

Eine Verlegung des Angriffspunktes einer äußeren Kraft hat stets Änderungen der inneren Kräfte des Körpers zur Folge. Auf diese kommt es aber in der Mechanik starrer Körper nicht an, weil starren Körpern eine unbegrenzte Festigkeit beigelegt wird, und weil mit dem Auftreten innerer Kräfte keine Formänderungen und daher

keine sichtbaren Wirkungen verbunden sind. Anders ist es mit Körpern oder Massengruppen, welche nicht starr sind. Sind z. B. zwei Massenpunkte  $A$  und  $B$ , deren Masse

$je = 1$  ist, durch eine starre Linie verbunden (Fig. 1) und wirken in  $A$  und  $B$  die beiden in der Richtungslinie  $AB$  liegenden Kräfte von  $2$  und  $5$  kg mit dem Sinne nach links bzw. rechts, so bringen diese an der starren Massengruppe eine Beschleunigung  $3:2 = 1,5$  m/sek<sup>2</sup> hervor (1. Teil, 4. Aufl., S. 33 u. 169). Daraus bestimmt sich die Spannkraft  $S$  der starren Linie, denn am Punkte  $B$  muß  $5 - S = 1 \cdot 1,5$ , am Punkte  $A$  ebenso  $S - 2 = 1 \cdot 1,5$  sein. Aus beiden folgt die Zugkraft  $S = 3,5$  kg. Verlegt man die Kraft  $2$  kg von  $A$  nach  $B$  (Fig. 2), so daß nun in  $B$  eine Kraft von  $3$  kg wirkt, so ändert sich dadurch in dem sichtbaren Verhalten der Massengruppe nichts; die Beschleunigung bleibt  $3:2 = 1,5$  m/sek<sup>2</sup> nach rechts. Es wird nun aber die Zugkraft  $S$  der Verbindungsgeraden  $1,5$  kg. Eine Verlegung der Kraft  $5$  kg (Fig. 1) von  $B$  nach  $A$  bedingt, wie man leicht erkennt, das Auftreten einer inneren Druckkraft  $S = 1,5$  kg in der Verbindungsgeraden.

Sind die beiden Masseneinheiten  $A$  und  $B$  aber nachgiebig, etwa durch eine elastische Feder (Fig. 3), miteinander verbunden, die vor dem Auftreten der äußeren Kräfte völlig ohne Spannkraft war, so wird mit dem Beginne der Wirkung der äußeren Kräfte eine Verlängerung der Feder und erst in Verbindung damit das Auftreten einer veränderlichen Spannkraft  $S$  erfolgen. Im ersten Augenblicke ist die Spannkraft noch Null; somit erfährt  $B$  eine Beschleunigung  $= 5$  m/sek<sup>2</sup> nach rechts,  $A$  eine solche von  $2$  m/sek<sup>2</sup> nach links. Mit diesen Beschleunigungen gehen die Massenpunkte auseinander, und mit der Verlängerung der Verbindungsgeraden entsteht dann eine, je nach der Stärke der Feder mehr oder weniger schnell anwachsende Zugkraft  $S$  in derselben. In dem Augenblicke, wo  $S = 1$  kg geworden ist, hat  $B$  die Beschleunigung  $= 4$  m/sek<sup>2</sup> nach rechts,  $A$  eine solche von  $1$  m/sek<sup>2</sup> nach links. Würde man die Kraft  $= 5$  kg von



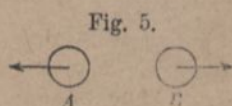


$B$  nach  $A$  verlegen (Fig. 4), so erfahre  $A$  zu Anfang eine Beschleunigung  $= 3^m/\text{sek}^2$  nach rechts,  $B$  keine Beschleunigung;  $A$  würde nach  $B$  hingedrängt, so daß die Feder zusammengedrückt und zur Äußerung einer veränderlichen, gegen beide Massenpunkte gerichteten Druckkraft veranlaßt würde. In dem Augenblicke, wo die Druckkraft  $S = 1^{\text{kg}}$ , hätte  $B$  die Beschleunigung  $= 1^m/\text{sek}^2$  nach rechts,  $A$  die Beschleunigung  $= 2^m/\text{sek}^2$  ebenfalls nach rechts;  $A$  würde also noch nach  $B$  hingedrängt. Erst wenn die Druckkraft  $S$  auf  $1,5^{\text{kg}}$  angewachsen ist, haben beide Punkte die übereinstimmende Beschleunigung  $= 1,5^m/\text{sek}^2$  wie bei starrer Verbindung. Man erkennt hieraus, daß eine Verlegung der einen Kraft von  $B$  nach  $A$  in der Bewegung der Punkte eine Änderung hervorbringt, daß also eine Zusammensetzung der beiden Kräfte, d. h. ihre Ersetzung durch eine einzige Kraft, nicht zulässig ist.

Es gibt auch Massengruppen, deren Punkte einer Vergrößerung des Abstandes voneinander keinen Widerstand entgegensetzen. Dies ist z. B. annähernd der Fall bei flüssigen Körpern. Diese lassen sich ohne nennenswerten Widerstand voneinander trennen. Man kann sich solche Massengruppen grobsinnlich vorstellen durch einzelne Kugeln ohne Verbindung. Jede derselben wird nur durch die an ihr angreifenden äußeren Kräfte beschleunigt. Gleiche Kräfte an  $A$  und  $B$  (nach Fig. 5) angebracht, bewirken beschleunigte Trennung der Punkte, aber keineswegs Gleichgewicht.

Gleiche Zugkräfte, an den Enden einer biegsamen, aber undehnbaren Kette angebracht, heben sich auf, während bei einer Umkehrung der Kräfte zu Druckkräften ein Zusammenballen der Kette zu einem Knäuel, also keinesfalls Gleichgewicht der ursprünglich ausgestreckten Kette, entsteht.

Dennoch sind die Lehren von der Zusammensetzung und dem Gleichgewichte der äußeren Kräfte an starren Körpern auch für nicht starre Körper und Massengruppen von großer Bedeutung, weil der Satz von d'Alembert (1. Teil, 4. Aufl., S. 169) und der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes (1. Teil, 4. Aufl., S. 172) nicht allein für starre Körper, sondern allgemein für jede beliebige Massengruppe gelten. Fügt man also zu den äußeren Kräften [ $K$ ] einer Massengruppe die Gruppe der Trägheitswiderstände [Ergänzungskräfte] [ $-mp$ ] hinzu (1. Teil, S. 170), so genügen diese



Kräftegruppen zusammen den Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper. Der Schwerpunkt einer beliebigen Massengruppe aber bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm zu einem Punkte vereinigt wäre und sämtliche äußeren Kräfte, parallel verschoben, an ihm angriffen. In den Fällen der Figuren 1—4 hat der Schwerpunkt der Gruppe der beiden Massenpunkte übereinstimmend die Beschleunigung  $1,5^m/\text{sek}^2$  nach rechts.

Eine beliebige Massengruppe ist im Gleichgewichte, wenn jeder einzelne Punkt derselben ruht oder eine gleichförmig geradlinige Bewegung ausführt, d. h. wenn an jedem einzelnen Massenpunkte die Beschleunigung gleich Null ist. Dann fallen die Trägheitswiderstände sämtlich fort, und es müssen die äußeren Kräfte der Massengruppe allein den Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper genügen. Hiernach gelten die Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper (1. Teil, 4. Aufl., S. 178) in unveränderter Weise auch für das Gleichgewicht nicht starrer Körper oder beliebiger Massengruppen.

Die festen Körper sind nicht starr, vielmehr erfahren sie unter Einwirkung äußerer Kräfte Formänderungen, die bei genügendem Anwachsen der Kräfte zur Zerstörung des Zusammenhanges führen können. Solange äußere Kräfte auf einen elastisch-festen Körper nicht einwirken, nehmen seine kleinsten Teile eine gewisse Normal- oder Grundstellung gegeneinander ein. Mit dem Angriff äußerer Kräfte tritt eine Änderung dieser Grundstellung ein, welche eine Formänderung zur Folge hat, und gleichzeitig werden im Innern des Körpers Kräfte wachgerufen, welche sich der Formänderung widersetzen, die Moleküle in ihre Grundstellung zurückzuführen streben. Beseitigt man die „äußeren Kräfte“, so verschwinden auch diese sogen. „inneren Kräfte“ wieder und, sofern erstere ein bestimmtes Maß nicht überschritten hatten, nimmt der Körper nach ihrer Beseitigung mehr oder weniger genau seine ursprüngliche Form wieder an. Diese Eigenschaft fester Körper nennt man ihre „Elastizität“.

Die inneren, den Zusammenhang seiner Teile und die Form des Körpers verteidigenden Spannkkräfte vermögen sich mit den auf Formänderung und Zerstörung gerichteten äußeren Kräften bis zu einer gewissen Grenze im Gleichgewicht zu erhalten. Wird diese Grenze von letzteren überschritten, so erfolgt der Bruch des



Körpers. Das Höchstmaß der inneren Kräfte, d. h. den äußersten Widerstand, den ein Körper seinem Bruche entgegenzusetzen vermag, nennt man seine „Festigkeit“.

Aufgabe der Mechanik elastisch-fester Körper ist die Ermittlung der inneren Spannungen und der Formänderung, welche an einem Körper durch äußere Kräfte hervorgebracht werden.

**Zug- und Druckelastizität.** Der einfachste Fall der elastischen Formänderung ist die Verlängerung eines geraden prismatischen Stabes durch eine in der Mittellinie des Stabes wirkende Zugkraft. Ist  $l$  die Länge des Stabes,  $F$  sein Querschnitt (beide im ungespannten Zustande gemessen), und wirken an den Endflächen, genau in der Mittellinie des Stabes, gleiche Zugkräfte  $K$  (Fig. 6), deren Größe aber zunächst ganz allmählich, von Null beginnend, anwachsen soll, so kann man in den meisten Fällen annehmen, daß sich die Kraft  $K$  annähernd gleichmäßig über den Querschnitt  $F$  verteilt, so daß

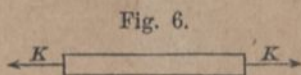


Fig. 6.

$$1) \quad \sigma = \frac{K}{F}$$

die auf die Flächeneinheit kommende Zugkraft ist. Diese Größe  $\sigma$  heißt die **Zugspannung**. Ihrem Auftreten entspricht eine gewisse Verlängerung  $\Delta l$  des Stabes. (Das Zeichen  $\Delta$  dient zur Bezeichnung kleiner Änderungen, so auch derjenigen Formänderungen, die mit der Anspannung der festen Körper verbunden sind.) Solange die Spannung  $\sigma$  eine gewisse, von der Art des Stoffes abhängige Grenze nicht überschreitet, nimmt der Stab nach Beseitigung der Spannung ziemlich genau seine ursprüngliche Länge wieder an. Diesen Grenzwert der Spannung  $\sigma$  nennt man die **Elastizitätsgrenze**; ihren Zahlwert wollen wir mit  $\varepsilon$  bezeichnen. Annähernd bis zu derselben Grenze kann man auch für die meisten technisch wichtigen Stoffe Spannung und Verlängerung verhältnismäßig annehmen.

Der Quotient  $\frac{\Delta l}{l}$ , das Verlängerungsverhältnis, oder die auf die Längeneinheit kommende Verlängerung heißt die **Dehnung** (spezifische Verlängerung)  $\varepsilon$ , und man kann jene Proportionalität schreiben:

$$2) \quad \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$



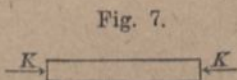
Die Größe  $E$  ist von dem Stoffe abhängig und heißt **Elastizitätsmaß** (Elastizitätsmodul). Für eine Spannung  $\sigma = 1$  wird die Dehnung  $\varepsilon = \frac{1}{E}$ . Mithin ist das Elastizitätsmaß  $E$  der reziproke Wert der Dehnung für eine Spannung  $\sigma = 1$ . Weil  $\Delta l$  und  $l$  gleichartige Größen (Längengrößen) sind, so ist ihr Verhältnis, die Dehnung  $\varepsilon$ , eine unbekannte Verhältniszahl; daher müssen  $\sigma$  und  $E$  (in Gl. 2) ebenfalls gleichartige Größen sein, d. h.  $E$  hat die Bedeutung einer Spannung für die Flächeneinheit. Für  $\sigma = E$  wird  $\varepsilon = 1$  und  $\Delta l = l$ . Daher kann man auch sagen: das Elastizitätsmaß  $E$  ist diejenige Spannung, unter deren Einflusse der Stab sich um seine ursprüngliche Länge, d. h. auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge dehnen würde, wenn der Stoff bei einer solchen Dehnung noch vollkommen elastisch bliebe. In Wirklichkeit trifft letztere Voraussetzung höchstens bei Kautschuk zu; andere Stoffe ertragen eine so bedeutende Dehnung bei weitem nicht.

Die in Gl. 2 ausgedrückte Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung wurde von dem englischen Physiker Rob. Hooke (geb. 1635, gest. 1703) im Jahre 1679 in die Mechanik eingeführt und heißt darnach das Hookesche Gesetz.

Überschreitet die Spannung  $\sigma$  die Elastizitätsgrenze  $\varepsilon$ , so wächst die Formänderung schneller als die Spannung, auch nimmt der Stab mit dem Verschwinden der Spannung nicht genau wieder die ursprüngliche Länge an; er hat vielmehr eine bleibende Verlängerung erfahren, er verhält sich nicht mehr vollkommen elastisch. Bei weiterer Zunahme der Spannung tritt schließlich ein Zerreißen des Stabes ein. Diejenige Spannung, bei der dies erfolgt, heißt die Zugfestigkeit und soll mit  $Z$  bezeichnet werden.

Kehren die Kräfte  $K$  ihre Pfeilrichtung um, so werden sie zu Druckkräften (Fig. 7) und erteilen dem Stabe, falls seine Länge nicht bedeutend im Verhältnisse zu den Querschnittsabmessungen ist, eine gleichmäßige Druckspannung

$$1 a) \quad \sigma = \frac{K}{F}$$



mit deren Auftreten eine Verkürzung verbunden ist. (Bei größerer Länge erfolgt eine seitliche Ausbiegung mit verwickelteren Verhältnissen, die unter „Knickfestigkeit“ (S. 64)

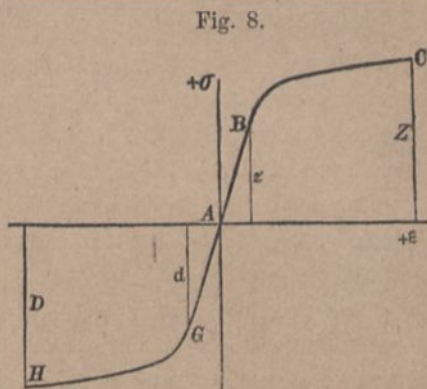
behandelt werden.) Innerhalb gewisser Grenzen kann die für Verlängerung gegebene Gl. 2 auch für die Verkürzung durch Druck benutzt werden; es ist

$$2a) \quad \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Darin ist dann  $\Delta l$  eine negative Verlängerung,  $\varepsilon$  eine negative Dehnung,  $\sigma$  eine negative Spannung. (Es ist allgemein üblich, Druckspannungen als negative, Zugspannungen als positive Spannungen zu bezeichnen.) Zug- und Druckspannungen faßt man in der gemeinsamen Bezeichnung *Längsspannung* (Normalspannung) zusammen. Das Elastizitätsmaß  $E$  kann man für Zug und Druck gleich groß annehmen. Derjenige Spannungswert, bis zu welchem die Verkürzung noch der Gleichung 2a folgt, ist die *Elastizitätsgrenze für Druck*; sie werde mit  $d$  bezeichnet. Die Druckspannung, bei der die Zerstörung erfolgt, ist die *Druckfestigkeit D*.

Trägt man die zusammengehörigen Spannungen und Dehnungen, wie sie sich

bei Versuchen ergeben, als Ordinaten und Abszissen auf, so erhält man eine Schaulinie (Fig. 8), die *Dehnungslinie*, die für Schmiedeeisen ungefähr die Form  $HGABC$  hat. Innerhalb des mittleren geraden Teiles  $GAB$  gelten die Gleichungen 2 und 2a.



Mit dem Auftreten der Zugspannungen sind neben den besprochenen Längsdehnungen auch noch Einschnürungen (Verminderung des Querschnittes) verbunden. Ebenso sind die durch Druck entstehenden Verkürzungen in der Längsrichtung von Stauchungen (Querschnittsvergrößerungen) begleitet. Diese Erscheinungen haben für die erste Einführung in das Verhalten der elastischen Körper keine besondere Wichtigkeit, finden aber in den Vorträgen über Elastizitätslehre (Keck-Hotopp) gebührende Berücksichtigung.

Diejenige Grenze, bis zu welcher die Dehnungen mit den Spannungen wieder verschwinden, wurde vorstehend *Elastizitätsgrenze* genannt und zugleich als *Grenze* bezeichnet, bis zu welcher beide verhältnisgleich sind. In Wirklichkeit weicht das Verhalten der Körper von diesem ideellen Bilde mehr



oder weniger ab, insofern jene beiden Grenzen nicht zusammenfallen. Hält man sich strenger an die Wirklichkeit, so bezeichnet man zweckmäßig die erstere Grenze als Proportionalitätsgrenze, die zweite als Elastizitätsgrenze. Über diese Verhältnisse ist u. a. nachzulesen in C. Bachs „Elastizität und Festigkeit“. Das genannte Buch enthält auch Mitteilungen über den Einfluß der Zeit auf die Formänderung und das Verschwinden derselben, über die sog. elastische Nachwirkung, auf welche wir hier nicht eingehen wollen.

Was die Maßeinheiten anlangt, so behalten wir für die Kräfte das Kilogramm bei, wie im ersten Teile. Als Längeneinheit benutzen wir in der Mechanik der elastischen Körper zweckmäßig nicht das Meter, weil Elastizitäts- und Festigkeitsgrenzen für das Quadratmeter unbequem große Zahlen ergeben. Vielmehr wählen wir meist das Zentimeter zur Einheit. Bei Stäben von verhältnismäßig großen Querschnittsabmessungen, wie Mauerpfeilern, ist zur Vermeidung unbequem großer Querschnittszahlen das Meter als Längeneinheit und die Tonne als Krafteinheit zu benutzen. Im Maschinenbau wird auch vielfach nach Millimetern gerechnet. Umrechnungen von Zentimetern auf Millimeter oder auf Meter sind so einfach, daß es nur geringer Aufmerksamkeit bedarf, sich in dieser Beziehung vor Fehlern zu schützen. Freilich muß man sich zur Regel machen, in einem gegebenen Falle sämtliche Maße, also neben den Querschnitten besonders auch die Längen, durch dieselbe Einheit auszudrücken. In dieser Beziehung machen Anfänger häufig Fehler. Der Zahl, welche eine Spannung ausdrücken soll, ist die zugrunde gelegte Kraft- und Flächeneinheit hinzuzufügen. Eine Spannung von  $700 \text{ kg/cm}^2$  (d. h.  $700 \text{ kg}$  für das Quadratcentimeter) ist gleichbedeutend mit  $7 \text{ kg/mm}^2$ , sowie mit  $7000000 \text{ kg/m}^2$  oder  $7000 \text{ t/m}^2$ .

Die freie Luft übt auf die von ihr berührten Körper einen Druck aus, welcher auf  $1 \text{ m}^2$  in der Höhe des Meeresspiegels bei mittlerem Barometerstand etwa  $10333 \text{ kg}$ , mithin auf  $1 \text{ cm}^2$  etwa  $1,0333 \text{ kg}$  beträgt. Da der Luftdruck mit zunehmender Höhe kleiner wird, so ist auch leicht eine Höhe zu finden (etwa  $264 \text{ m}$  über dem Meere), in welcher der Luftdruck im Mittel  $1 \text{ kg/cm}^2$  beträgt, und man hat es zweckmäßig gefunden, für diesen Druck die Bezeichnung **Atmosphäre** ( $1 \text{ at}$ ) im Maschinenwesen allgemein einzuführen. Diese Bezeichnung empfiehlt sich auch für die Spannungseinheit ( $1 \text{ kg/cm}^2 = 1 \text{ at}$ ), wir drücken also die Werte  $\sigma$ ,  $s$ ,  $d$ ,  $Z$ ,  $D$  und  $E$

*1 Atmosphären = 1 kg/cm<sup>2</sup>*



in Atmosphären (der Kürze wegen einfach „at“ gesprochen und geschrieben) aus, mit der Bedeutung: ein Kilogramm für  $1 \text{ cm}^2$  entsprechend  $10^4$  für  $1 \text{ m}^2$ .

Die für eine Stoffgattung geltenden Elastizitäts- und Festigkeitszahlen  $E$ ,  $\varepsilon$ ,  $d$ ,  $Z$  und  $D$  sind natürlich je nach der Güte des gerade vorliegenden Körpers schwankend. In folgender Tabelle geben wir einige Mittelwerte für die in den Beispielen vorkommenden Fälle.

Elastizitäts- und Festigkeitszahlen in at.

	Elastizitätsgrenze		Festigkeit		Elastizitätsmaß $E$
	Zug $\varepsilon$	Druck $d$	Zug $Z$	Druck $D$	
Gußeisen . . . . .	600	1600	1300	7000	1 000 000
Stabeisen . . . . .	1600	1600	3500	3500	2 000 000
Stahl . . . . .	3000	3000	5000	6000	2 200 000
Gußstahl . . . . .	4500	4500	7000	8000	2 200 000
Holz . . . . .	250	170	800	500	100 000
Glas . . . . .	340	1450	340	1450	1 000 000
Kautschuk . . . . .	20	—	30	—	10

Für Gußeisen, natürliche und künstliche Steine sowie Kautschuk scheint  $E$  mit  $\sigma$  zu wechseln; auch fehlt für diese Stoffe eine strenge Elastizitätsgrenze. Für Holz wird häufig  $E=100\,000$  gesetzt. Bei Glas fallen Elastizitäts- und Festigkeitsgrenze zusammen, d. h. Glas bleibt bis zur Zerstörung vollkommen elastisch. Bekanntlich kommen ja beim Glase bleibende Formänderungen, z. B. Verbiegungen, in kaltem Zustand nicht vor.

Die Kräfte, welche auf einen Körper oder einen Teil desselben wirken, unterscheidet man in Massenkkräfte und Flächenkräfte. Unter ersteren versteht man solche, die unmittelbar auf die Massenteilchen übertragen werden und auch der Masse verhältnismäßig sind; dazu gehören die Schwerkkräfte, auch magnetische und elektrische Kräfte, sowie die der Beschleunigung entgegenwirkenden sogen. Trägheitswiderstände [Ergänzungskräfte] ( $-mp$ ,  $-mr\omega^2$ ) (s. 1. Teil, 4. Aufl., S. 33, 94 u. 170). Die Flächenkräfte werden durch unmittelbare Berührung mittels der Flächen übertragen und sind von der Form: Flächengröße mal Kraft für die Flächeneinheit. Zu diesen gehören namentlich die inneren Kräfte fester und flüssiger Körper.

## A. Gleichgewicht elastisch-fester Körper.

### 1. Allgemeines.

Ein elastisch-fester Körper ist im Gleichgewichte, wenn seine sämtlichen Punkte sich im Gleichgewichte befinden, und dies verlangt, wie bei starren Körpern, daß der Körper entweder ruht oder eine gleichförmige geradlinige Bewegung ausführt; auch darf der Körper keine Formänderungen mehr erfahren, vielmehr muß die den inneren Spannungen entsprechende Form bereits vorhanden sein.

Ein solcher Gleichgewichtszustand liegt vor, wenn nach S. 4 die äußeren Kräfte des Körpers den Gleichgewichtsbedingungen für starre Körper genügen. Diese Gleichgewichtsbedingungen werden auch zur Ermittlung der inneren Spannkraften benutzt, indem man durch den Körper einen Schnitt führt und für einen der erhaltenen Abschnitte die Gleichgewichtsbedingungen aufstellt. Denn es muß ja, wenn der ganze Körper sich im Gleichgewichte befindet, auch jeder Teil desselben im Gleichgewichte sein. Bei dieser Untersuchung muß man an der Schnittstelle den vorherigen Zusammenhang durch Spannkraften ersetzen, die man daher auch als „Schnittkräfte“ bezeichnet hat. Die zwei Abschnitte, in welche der Körper durch den Schnitt zerlegt ist, besitzen gleiche Schnittflächen, und an jedem Flächenteilchen der einen Schnittfläche wirken Spannkraften, die gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind, wie bei dem entsprechenden Flächenteilchen der Schnittfläche des anderen Körperabschnittes. Diese Spannkraften, die für den unzertrennten Körper innere Kräfte bedeuten, gelten für die Betrachtung eines Körperabschnittes als äußere Kräfte und sind in den Gleichgewichtsgleichungen mit aufzuführen.

Das Gleichgewicht ist nur möglich, wenn der Körper durch die äußeren Kräfte nicht zerstört wird, d. h. wenn die Spannung die Grenze der Festigkeit an keiner Stelle erreicht. Soll ein Körper aber dauernd im Gleichgewichte bleiben, so darf seine Spannung nirgends die Elastizitätsgrenze überschreiten. Es würden sonst bleibende Formänderungen entstehen, die gewöhnlich nicht



zulässig sind. In den meisten Fällen der Anwendung ist die Belastung eines Körpers mehr oder weniger veränderlich. Die Erfahrung lehrt, daß, wenn ein Körper häufig über die Elastizitätsgrenze hinaus belastet wird, die Formänderungen allmählich wachsen und endlich zur Zerstörung führen.

Bei der Berechnung der „zulässigen Belastung“ eines Körpers oder der erforderlichen Abmessungen bei gegebener Belastung darf man aber noch nicht einmal die Spannung an der Elastizitätsgrenze zugrunde legen, sondern muß als zulässige Spannung einen kleineren Wert einführen, der meist nur aus der Erfahrung gewonnen werden kann. Einerseits sind nämlich die Stoffe der Körper der Abnutzung, dem Rosten, der Fäulnis u. dgl. unterworfen und erleiden deshalb Einbuße an ihrer Festigkeit. Sodann aber sind die Teile eines Bauwerkes oder einer Maschine häufig Erschütterungen und Stößen ausgesetzt, welche Schwingungen der elastischen Körper zur Folge haben. Derartige Schwingungsbewegungen sind nun stets ungleichförmig, bedeuten daher Abweichungen vom Gleichgewichtszustande. Viele Maschinenteile führen auch planmäßig beschleunigte Bewegungen aus. Die Spannungen, die in solchen Körpern wirklich auftreten, lassen sich häufig nur sehr schwer ermitteln. Man führt daher eine Berechnung unter Annahme des Gleichgewichts (eine statische Berechnung) aus, welche die Spannungen kleiner angibt, als sie wirklich sind, welche also bei Zugrundelegung der Elastizitätsgrenze als zulässiger Spannung zu geringe Querschnittsabmessungen liefern würde. Den auf diese Weise entstehenden Fehler kann man dadurch wieder ausgleichen, daß man als die in die Rechnung einzuführende Spannung  $\sigma$  nicht die Elastizitätsgrenze, sondern nur den  $n$ ten Teil derselben annimmt. Die Zahl  $n$  nennt man dann die Sicherheit gegen Überschreitung der Elastizitätsgrenze. Wäre die auf solche  $n$ fach kleinere Spannung gegründete Rechnung richtig, so würde tatsächlich nur  $1/n$  der Spannung an der Elastizitätsgrenze erreicht werden. In Wirklichkeit aber bezeichnet die Zahl  $1/n$  nur den Grad der Genauigkeit der Rechnungsgrundlagen für eine Gruppe von Fällen. Die Zahl  $n$  ist durch die Erfahrung an die Hand gegeben und beträgt je nach der Art des Bau- und Maschinenteiles 1,6, 2, 2,5, 3, 4 u. dgl. Rechnet man mit diesen Sicherheitsverhältnissen, so kann man annehmen, daß die wirkliche Spannung im ungünstigsten Falle



bis nahe an die Elastizitätsgrenze herantreten wird. Je genauer man einen Fall zu berechnen vermag, desto mehr kann sich die Zahl  $n$  der Einheit nähern. So pflegt man für Bauverbände aus Stabeisen, dessen Spannung an der Elastizitätsgrenze etwa  $1600^{\text{at}}$  beträgt, je nachdem es sich um einen mehr oder weniger stoßfreien Angriff der äußeren Kräfte (vorwiegend ruhende oder bewegliche Belastung) handelt,  $800$  bis  $1200^{\text{at}}$  oder ausnahmsweise noch mehr als zulässige Spannung  $\sigma$  einzuführen, indem man annimmt, daß die wahren Spannungen  $1\frac{1}{3}$  bis  $2$  mal so groß ausfallen werden, wie die durch statische Berechnung gefundenen. In der Wahl dieser kleinen Spannung  $\sigma$  liegt also keineswegs eine übermäßige Ängstlichkeit, die als Verschwendung getadelt werden könnte, sondern eine durch die Erfahrung als notwendig erkannte, gebotene Vorsicht, wenn man dem fraglichen Bauwerk einen langjährigen Bestand sichern und allzu umständliche genauere Rechnungen vermeiden will.

Wie groß die zulässige Spannung bei den verschiedenen Bau- und Maschinenteilen und den entsprechenden Stoffen gewählt werden darf, gehört weniger in den Rahmen der Mechanik, als in den der Lehre von den Bauverbänden und Maschinenteilen.

**Beispiel 1:** Eine Stange aus Stabeisen von  $2^{\text{m}}$  Länge und  $2^{\text{cm}} \times 10^{\text{cm}} = 20^{\text{cm}^2}$  Querschnitt kann bei  $\sigma = 700^{\text{at}}$  zulässiger Spannung eine Zugkraft von  $20 \cdot 700 = 14000^{\text{kg}}$  aufnehmen. Die entsprechende Dehnung beträgt  $\varepsilon = 700 : 2000000^{\text{kg}} = 7 : 20000 = 0,00035$ . Will man die Verlängerung  $\Delta l$  in  $\text{cm}$  haben, so drücke man die Länge  $l$  in Zentimetern  $= 200^{\text{cm}}$  aus, um zu erhalten

$$\Delta l = l \cdot \varepsilon = 200 \cdot 0,00035 = 0,07^{\text{cm}}.$$

Bis zur Elastizitätsgrenze würde der Stab durch eine Zugkraft  $K = 20 \cdot 1600 = 32000^{\text{kg}}$  gespannt werden mit einer Verlängerung  $\Delta l = 0,07 \cdot \frac{16}{7} = 0,16^{\text{cm}}$ . Zum Zerreißen würde eine Kraft von  $20 \cdot 3500 = 70000^{\text{kg}}$  erforderlich sein.

**Beispiel 2:** Eine ursprünglich spannungslose runde Eisenstange von  $2^{\text{cm}}$  Durchmesser wird an den Enden festgehalten und sodann um  $20^{\circ}\text{C}$ . abgekühlt. Wäre die Stange frei, so würde sie bei einer Ausdehnungsziffer von  $\frac{1}{80000}$  f.  $1^{\circ}\text{C}$ . eine verhältnismäßige Verkürzung  $= 20 : 80000 = 1 : 4000$  erfahren. Diese Verkürzung muß, da die Enden festgehalten sind, durch eine gleichgroße elastische Dehnung des Stabes  $\varepsilon = 1 : 4000$  wieder ausgeglichen werden. Daraus entsteht eine Spannung

$$\sigma = E\varepsilon = 2000000 : 4000 = 500^{\text{at}}$$

und eine Spannkraft  $K = \sigma F = 500 \cdot \pi = 1570^{\text{kg}}$ .

## 2. Zugfestigkeit hängender Stangen. Druckfestigkeit stehender Säulen.

Bei lotrecht hängenden, oben befestigten Stangen wird die Spannung  $\sigma$  vom Eigengewichte beeinflusst. Wirkt an der Stange (Fig. 9) von überall gleichem Querschnitt  $F$  unten eine Zugkraft  $K$ , so wird die Stange erst im Gleichgewichte sein können, nachdem eine gewisse Verlängerung stattgefunden hat, die für die Rechnung aber ohne Wichtigkeit ist. Durchschneidet man die Stange in dem Abstände  $x$  vom unteren Ende und bringt an der Schnittstelle die Spannkraft  $\sigma F$  an, so müssen  $K$ ,  $\sigma F$  und das Gewicht  $G$  des unteren Stangenteiles im Gleichgewicht sein. Ist  $\gamma$  die Dichte des Stoffes, so wird  $G = \gamma F x$ , mithin

$$\sigma F = K + \gamma F x, \text{ oder}$$

$$1) \quad \sigma = \frac{K}{F} + \gamma x.$$

Die stärkste Spannung findet sich am oberen Ende, also für  $x = l$ :

$$2) \quad \sigma_1 = \frac{K}{F} + \gamma l.$$

Die Verlängerung kann, weil die Spannung  $\sigma$  veränderlich ist, nur durch Integration gefunden werden. An der beliebigen Schnittstelle beträgt die Dehnung  $\varepsilon = \sigma / E$ ; daher die elastische Verlängerung des Teiles  $dx$  nach Gl. 2 S. 5

$$\Delta dx = \frac{\sigma}{E} dx, \text{ Zil}$$

und die Verlängerung der ganzen Stange

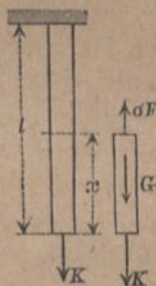
$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_0^l \sigma \cdot dx = \frac{K}{EF} l + \frac{\gamma}{E} \int_0^l x \cdot dx, \text{ woraus}$$

$$3) \quad \Delta l = \frac{K}{EF} l + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{l}{E} \left( \frac{K}{F} + \frac{\gamma l}{2} \right).$$

Bei mäßigen Längen kann das zweite Glied vernachlässigt werden.

Beispiel 1: An einem Bergwerksgestänge von  $l = 200 \text{ m} = 20\,000 \text{ cm}$  Länge (Stabeisen) wirke unten eine Zugkraft  $K = 40\,000 \text{ kg}$ . Wegen der Bewegung des Gestänges möge die zulässige Spannung nur  $\sigma_1 = 400 \text{ at}$  betragen dürfen. Es soll der erforderliche Querschnitt  $F$  berechnet werden. Wenn  $1 \text{ m}^3$  Stabeisen  $7800 \text{ kg}$  wiegt, so ist für Zentimeter  $\gamma = 7800 : 100^3 = 0,0078$  zu setzen.

Fig. 9.





Nun wird nach Gleichung 2

$$400 F = 40\,000 + 0,0078 \cdot 20\,000 F, \text{ also}$$

$$F = \frac{40\,000}{400 - 156} = 164 \text{ cm}^2.$$

Die Verlängerung beträgt (Gleichung 3)

$$\Delta l = \frac{40\,000 \cdot 20\,000}{2\,000\,000 \cdot 164} + \frac{0,0078 \cdot 20\,000^2}{2 \cdot 2\,000\,000} = 2,44 + 0,78 = 3,22 \text{ cm}.$$

Am unteren Ende beträgt die Spannung nur

$$\sigma_0 = \frac{K}{F} = \frac{40\,000}{164} = 244 \text{ at}.$$

Die Festigkeit wird daher nur ungleichmäßig ausgenutzt und zwar um so ungleicher, je länger die Stange.

Soll die Festigkeit eines Gestänges völlig ausgenutzt werden, so muß der Querschnitt nach oben hin zunehmen. Das Gesetz für die Veränderlichkeit des Querschnittes eines Gestänges überall gleicher Sicherheit findet man nach Fig. 10. Am unteren Ende wirke eine Kraft  $K$ ; diese verlangt bei einer überall gleichen Spannung  $\sigma$  einen Querschnitt  $F_0 = K : \sigma$ . In der Höhe  $x$  sei der Querschnitt  $F$ , mithin die Spannkraft  $\sigma F$ . Für das Stück von der Länge  $x$  gilt dann die Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma F = G + K.$$

Hierin ist das Gewicht  $G$  der Stablänge  $x$  unbekannt. Die Aufgabe wird aber lösbar, wenn man obige Gleichung auf beiden Seiten nach  $x$  differenziert.  $\sigma$  und  $K$  sind unveränderlich;  $F$  ändert sich um  $dF$ ,  $G$  um  $dG$ , u. zw. ist  $dG$  das Gewicht einer Scheibe von der Höhe  $dx$ , d. h.  $dG = \gamma F dx$ . Mithin wird

$$\sigma dF = \gamma F \cdot dx.$$

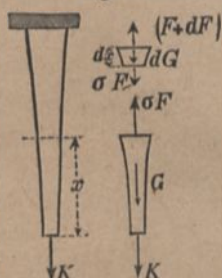
Behufs der Integration dieser Gleichung muß man die Veränderlichen trennen, d. h.  $dF$  und  $F$  auf der linken Seite vereinigen, während  $dx$  auf der rechten bleibt, also  $\frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{\sigma} dx$ . Das gibt

$$\ln. F = \frac{\gamma}{\sigma} x + C. \text{ Für } x = 0 \text{ muß } F = F_0 \text{ sein, mithin } \ln. F_0 = C.$$

Durch Abziehen folgt:

$$\ln. \left( \frac{F}{F_0} \right) = \frac{\gamma}{\sigma} x \text{ und}$$

Fig. 10.



$$4) \quad \frac{F}{F_0} = e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}$$

Nimmt man von beiden Seiten die Briggschen Logarithmen, so wird

$$5) \quad \log \frac{F}{F_0} = \log e \cdot \frac{\gamma}{\sigma} x = 0,434 \frac{\gamma}{\sigma} x.$$

Wegen der Gleichheit der Spannung ist auch die Dehnung überall dieselbe, daher die Verlängerung  $\Delta l = l \sigma : E$ .

Beispiel 2: Für ein Gestänge von derselben Länge und Belastung wie S. 13 wird bei einer ganz gleichen Spannung  $\sigma = 400 \text{ at}$ ,  $F_0 = 100 \text{ cm}^2$ . Es ist  $\gamma : \sigma = 0,0078 : 400 = 0,0000195$ , wofür wir rund  $0,00002$  setzen. Für

$$x = 5000 \text{ cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0,434 \cdot 0,1, \quad \frac{F}{F_0} = 1,105, \quad F = 110,5;$$

$$\text{für } x = 10000 \text{ cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0,434 \cdot 0,2, \quad \frac{F}{F_0} = 1,221, \quad F = 122,1;$$

$$\text{für } x = 15000 \text{ cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0,434 \cdot 0,3, \quad \frac{F}{F_0} = 1,35, \quad F = 135;$$

$$\text{für } x = 20000 \text{ cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0,434 \cdot 0,4, \quad \frac{F}{F_0} = 1,49; \quad F = 149 \text{ cm}^2.$$

Die Verlängerung wird

$$\Delta l = \frac{20000 \cdot 400}{2000000} = 4 \text{ cm} \quad (\text{gegen } 3,22 \text{ S. } 14).$$

Leicht ergibt sich hiernach auch das Gewicht  $G$  des Gestänges, weil die Spannkraft an dem oberen Querschnitte von  $149 \text{ cm}^2$  den Wert  $400 \cdot 149 = 59600 \text{ kg}$  hat, der gleich  $G + 40000 \text{ kg}$  sein muß. Daher wird  $G = 19600 \text{ kg}$ , während das Gestänge überall gleichen Querschnitts (S. 13)

$$164 \cdot 0,0078 \cdot 20000 = 25584 \text{ kg} \text{ wiegt.}$$

Alles für die Zugfestigkeit Gesagte gilt sinngemäß auch für die Druckfestigkeit, aber nur für Stäbe, bei denen keine Knickgefahr eintritt (vgl. S. 64).

Beispiel 3: Wie hoch darf ein prismatischer Steinpfeiler, der nur durch sein eigenes Gewicht belastet ist, werden, wenn  $1 \text{ m}^3$   $2000 \text{ kg}$  wiegt und die Spannung nicht über  $20 \text{ at}$  betragen soll? Ist die Höhe  $x \text{ cm}$ , die Grundfläche  $F$  in  $\text{cm}^2$  ausgedrückt, so wird, da  $\gamma = 0,002$  für  $1 \text{ cm}^3$ , das Gesamtgewicht

$$G = \gamma F x = 0,002 \cdot F x$$

und die ebenso große Spannkraft an der Grundfläche  $K = 20 F$ ; mithin wird, unabhängig von der Größe des Querschnitts  $F$ ,

$$x = 10000 \text{ cm} = 100 \text{ m}.$$

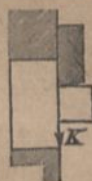
Der Querschnitt muß so groß gemacht werden, daß die Gefahr einer seitlichen Ausbiegung nicht entsteht. Die hierdurch bedingte Querschnittsform hängt aber von manchen Umständen ab, die sich nicht sämtlich rechnungsmäßig verfolgen lassen.



### 3. Schub- oder Scherfestigkeit.

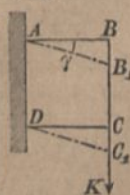
Ist ein Körper fest eingespannt und wird auf den vorspringenden Teil (Zapfen) mittels eines scherbblattartigen Körpers eine Kraft  $K$  ausgeübt (Fig. 11), so hat diese das Bestreben, den vorspringenden Zapfen von dem linksseitigen Teile des Körpers im Sinne der Kraft abzuschieben oder abzuscheren. Der Widerstand gegen Abscherung ist annähernd verhältnismäßig der abzuscherenden Fläche  $F$  und bei Eisen 0,6 bis 0,8mal so groß wie der gegen Zerreißen oder gegen Zerdrücken, wenn man von diesen Widerständen den kleineren einführt. Dementsprechend wählt man die zulässige Scherbelastung bei Eisen nur = 0,6 bis 0,8 von der zulässigen Zug- oder Druckbelastung; bei Holz längs der Fasern nur =  $\frac{1}{6}$  bis  $\frac{1}{8}$ .

Fig. 11.



Wirkt die Kraft nicht dicht an der Anhaftungsfläche, sondern in einem geringen Abstände  $l$  davon, so ist mit den Schubspannungen, die wir für die Flächeneinheit mit  $\tau$  (tangential wirkend) bezeichnen wollen, eine Formänderung verbunden, welche darin besteht, daß die zur Anhaftungsfläche ursprünglich rechtwinkligen Geraden sich um den Winkel  $\gamma$  schiefwinklig stellen (Fig. 12), so daß das Rechteck  $ABCD$  in das Rhomboid  $AB_1C_1D$  übergeht. Dieser Winkel  $\gamma$  heißt die Gleitung, indem man sich vorstellt, daß die einzelnen Querschichten  $\parallel AD$  aneinander entlang gleiten. Die Gleitung  $\gamma$  hat eine ähnliche Bedeutung wie die Dehnung  $\epsilon$  bei der Wirkung von Zug- und Druckspannungen. Wie  $\epsilon = \sigma : E$ , so ist

Fig. 12.



$$1) \quad \gamma = \tau : G.$$

also auch verhältnismäßig mit der Spannung  $\tau$ .  $G$  ist wie  $E$  eine von dem Stoff abhängige Größe, die auch mit  $E$  in einfacher Beziehung steht; es ist nämlich für isotrope Körper etwa

$$G = 0,4 E$$

anzunehmen, u. zw. heißt  $G$  das Gleitmaß oder der Gleitmodul. Die Beziehungen zwischen Schubspannungen und Längsspannungen nebst den entsprechenden Formänderungen werden eingehender behandelt in Keck, Vorträge über Elastizitätslehre.

Gl. 1, welche dem Hookeschen Gesetze für Längsspannungen (S. 6) entspricht, wurde 1837 von dem französischen Ingenieur de Saint-Venant (geb. 1797, gest. 1886) angegeben.

Die Scherfestigkeit kommt besonders bei den Nietverbindungen in Frage. Will man zwei Stäbe, in denen Längszugkräfte  $K$  wirken sollen, in der einfachsten Weise durch Niete verbinden, so versieht man jeden Stab mit einem zylindrischen Loche, legt sie so aufeinander, daß die Löcher zusammenfallen und zieht einen Nietbolzen vom Durchmesser  $d$  hindurch (Fig. 13). Sollte nun die Vernietung durch Wirkung der Kräfte  $K$  zerstört werden, so müßte die in der Berührungsebene der Stäbe liegende Querschnittfläche  $ab$ , deren Größe  $F = \frac{1}{4} d^2 \pi$  ist, abgeschert werden. Man kann daher setzen:

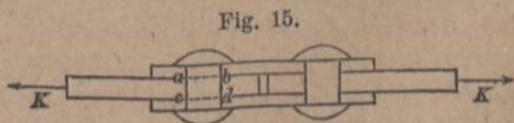
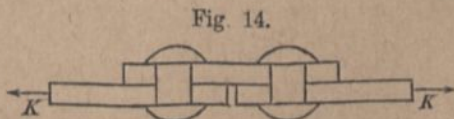
$$K = \tau F = \tau \cdot \frac{d^2 \pi}{4}.$$

Die Schubspannungen verteilen sich nicht gleichmäßig über die Abscherungsfläche;  $\tau$  ist also nur eine mittlere Schubspannung. Die Erfahrung lehrt aber, daß man in Berücksichtigung der tatsächlich bestehenden Ungleichmäßigkeit der Verteilung der Spannungen über die Querschnittsflächen und anderer hier nicht weiter zu besprechender Nebenerscheinungen (vergl. Keck-Hotopp, Vorträge über Elastizitätslehre, Bd. 1, S. 179), bei guten Nieten  $\tau = 0,8 \sigma$  setzen darf, wenn  $\sigma$  die kleinere der zulässigen Längsspannungen bedeutet. Ist für Stabeisen  $\sigma = 1000 \text{ at}$ , so kann  $\tau = 800 \text{ at}$  gesetzt werden.

Für  $d = 2 \text{ cm}$  und  $\tau = 560 \text{ at}$  wird  $K = 1760 \text{ kg}$ .

Sollen die zu verbindenden Stäbe in gleicher Flucht liegen, so legt man auf beide eine sog. Lasche und verbindet diese mit beiden Stäben (Fig. 14). Die beiden Niete liefern aber keine größere Festigkeit als das eine Niet in Fig. 13. Jeder Nietbolzen hat die Kraft  $K$  für sich allein aufzunehmen. Günstiger ist der Fall, wenn man

die zu verbindenden Stäbe beiderseits mit Laschen versieht, also die sog. doppelte Verlaschung anwendet (Fig. 15). In





diesem Falle widersteht jedes Niet gleichzeitig mit der Scherfestigkeit zweier Querschnitte; z. B.  $ab$  und  $cd$ . Denn um den linksseitigen Stab aus der Verlaschung herauszureißen, muß das linksseitige Niet an beiden Berührungsflächen zwischen dem Stabe und den Laschen abgeschert werden; für den Fall der Zerstörung würde dann der mittlere Teil des Nietbolzens in dem herausgerissenen Stabe, seine äußeren Teile in den Laschen verbleiben. Ein solcher Nietbolzen, der mit der Festigkeit zweier Querschnittsflächen widersteht, heißt ein zweisechnittiges Niet. Für Fig. 15 gilt also die Gleichung

$$K = 2 \cdot \tau \cdot \frac{1}{4} d^2 \pi.$$

Die Scherfestigkeit kommt auch in Frage bei dem Kraftaufwande zum Durchstoßen, Durchlochen oder Durchpunzen eines Stabes oder einer Platte, behufs Herstellung (Stanzen) von Nietlöchern. Es wird dann durch Maschinenkraft der Stahlstempel  $S$  (Fig. 16) niedergedrückt, so daß er den zylindrischen Körper  $abcd$  aus dem Stabe oder der Platte herausdrängt. Ist die Längsfestigkeit der Platte  $Z = D = 3500 \text{ at}$ , so ist die Scherfestigkeit  $0,8 \cdot 3500 = 2800 \text{ at}$ . Um ein Loch von  $d = 2 \text{ cm}$  Durchmesser durch die  $h = 2 \text{ cm}$  dicke Platte zu drücken, ist, weil die zylindrische Trennungsfläche  $d\pi h = 2 \cdot \pi \cdot 2$ , die Kraft

$$K = 4\pi \cdot 2800 = 35186 \text{ kg} \text{ erforderlich.}$$

Genauere Untersuchungen zeigen, daß bei dem Widerstande der Niete wie auch beim Stanzen von Löchern noch verwickeltere Spannungsvorgänge auftreten, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

#### 4. Biegefestigkeit.

##### a) Grundgleichungen.

Ein Stab sei an dem einen (linken) Ende (Fig. 17) in einer Wand oder dergl. unwandelbar befestigt (eingespannt); am äußeren Ende wirke eine Kraft  $K$ , welche die Längsachse des Stabes (d. h. die Verbindungsgrade der Schwerpunkte der Querschnitte) rechtwinklig schneidet. Die durch  $K$  und die Längsachse bestimmte Ebene sei für den Stab oder

Fig. 16.

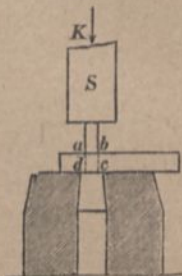
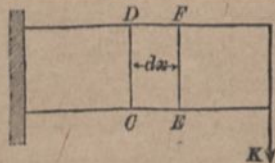


Fig. 17.



Balken eine Symmetrie-Ebene; die Symmetrierichtung der Querschnitte sei hierzu rechtwinklig.

Die Erfahrung lehrt, daß der Stab unter der Last  $K$  sich biegt; zwei ursprünglich parallele Querschnitte  $CD$  und  $EF$  im Abstände  $dx$  voneinander verdrehen sich gegeneinander und schneiden sich in der Achse  $O$  rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 18). Die oberen Schichten des Stabes haben sich verlängert, die unteren sich verkürzt. Die Verlängerung sowohl als auch die Verkürzung der Faserschichten nehmen nach dem Innern des Stabes zu ab und gehen in einer Schicht  $AGNB$ , die keinerlei Längenänderung erleidet und deshalb als „neutrale Schicht“ bezeichnet wird, ineinander über. Es wird vorausgesetzt, daß die Querschnitte  $CD$  und  $EF$  eben und rechtwinklig zur neutralen Schicht geblieben sind.\*) Die einzelnen Schichten erfahren im Zusammenhange mit den Längenänderungen Zug- und Druckspannungen, die innerhalb der Elastizitätsgrenze den Dehnungen verhältnismäßig sind. Zeichnet man das Längenteilchen  $CDFE$  des Stabes besonders heraus (Fig. 19) und legt durch  $N$  eine Ebene  $JK \parallel CD$ , so stellen die Keile zwischen  $EF$  und  $JK$  die Längenänderungen der einzelnen Schichten des Stabteilchens dar. Da nun die Schichten ursprünglich die

Fig. 18.

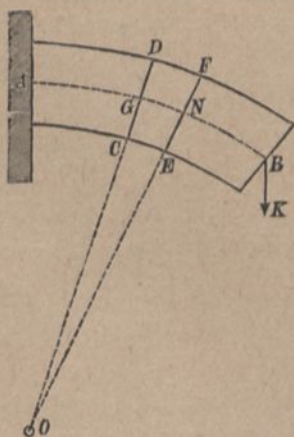
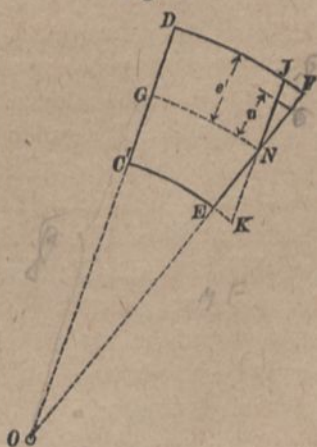


Fig. 19.



\*) Dies ist die „Hypothese von Jakob Bernoulli“, v. J. 1705; s. a. S. 43; sie wurde von Navier als Ausgangspunkt der Biegelastlehre 1821 in die technische Mechanik eingeführt und heißt daher wohl auch die „Naviersche Hypothese“.



übereinstimmende Länge  $GN = dx$  hatten, so sind die Dehnungen, folglich auch die Spannungen der einzelnen Schichten, verhältnismäßig dem Abstände  $u$  derselben von der neutralen Schicht. Ist daher  $\sigma$  die Spannung im Abstand  $u$ ,  $\sigma'$  die Spannung der äußersten Schicht im Abstand  $e'$  von der neutralen, so gilt

$$1) \quad \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{u}{e'}$$

Zugleich ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $JFN$  und  $GN O$

$$JF : GN = JN : GO.$$

$JF : GN$  ist aber ( $= JF : DJ$ ) die Dehnung  $\sigma' : E$  der obersten Schicht. Setzt man  $GO = \varrho$ , so geht die letzte Gleichung über in

$$\sigma' : E = e' : \varrho \quad \text{oder}$$

$$2) \quad \varrho = \frac{Ee'}{\sigma'}$$

Durch Gl. 1 sind die Spannungen an den verschiedenen Stellen eines Querschnitts auf diejenige am oberen Rande zurückgeführt; es kommt nun darauf an,  $\sigma'$  aus der gegebenen Kraft  $K$  zu ermitteln. Dazu dienen die Gleichgewichtsbedingungen. Betrachtet man das Stück rechts vom Schnitt  $EF$  in Fig. 18, so muß dieses den Gleichgewichtsbedingungen genügen, wobei angenommen wird, daß die Kraft  $K$  ihre ursprüngliche (lotrechte) Richtung beibehält und im Punkte  $B$  angreift (Fig. 20). Da man die Form des gebogenen Balkens zunächst nicht kennt, so ist auch die Richtung der am Schnitt  $EF$  auftretenden Spannkraft unbekannt. Weil aber in den meisten Fällen der Wirklichkeit die innerhalb der Elastizitätsgrenze liegende Biegung nur gering

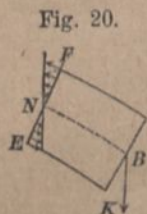
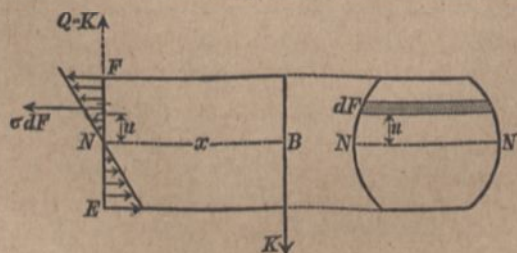


Fig. 21.

ist, so vernachlässigen wir die Formänderung bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen und nehmen die Lage und Richtung der einzelnen Kräfte so, wie sie am ungebogenen Balken sich ergeben würde. In Fig. 21 stellt also



der linke Teil das Stück des Balkens oder Stabes dar, welches im Gleichgewichte sein soll. Der rechte Teil zeigt den Querschnitt selbst.

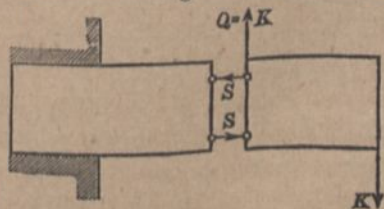
Nehmen wir aus dem Querschnitt im Abstand  $u$  von der neutralen Schicht  $NN$  einen Flächenstreifen  $dF$  heraus, so wirkt an diesem die Spannkraft  $\sigma \cdot dF$ , weil an ihm durchweg die Spannung  $\sigma$  auftritt. Derartige Spannkkräfte kommen über die ganze Querschnittshöhe vor, sind oben Zug-, unten Druckkräfte, und ihre Summe muß Null sein, weil sie die einzigen wagerechten Kräfte sind, die am betrachteten Balkenstücke (jetzt als äußere Kräfte) auftreten, also eine Summe = Null ergeben müssen. Wir haben also:  $\int \sigma dF = 0$ . Setzt man nun für  $\sigma$  nach Gleichung 1, S. 20 den Wert  $\sigma = u \cdot \sigma' : e'$ , so ergibt sich, da  $\sigma'$  und  $e'$  von  $u$  nicht abhängig sind,

$$\frac{\sigma'}{e'} \int dF \cdot u = 0, \text{ also } \int dF \cdot u = 0.$$

Dies bedeutet (1. Teil, 4. Aufl., S. 154), daß die Gerade  $NN$  im Querschnitt, von welcher aus die Abstände  $u$  gemessen sind, durch den Schwerpunkt der Querschnittsfigur gehen muß. Die Gerade  $NN$ , in welcher die neutrale Schicht einen Querschnitt schneidet, heißt die neutrale Achse oder die Spannungsnulllinie (weil an ihr die Spannung  $\sigma = 0$  ist) oder kürzer die Nulllinie des Querschnitts. Die Gleichung der wagerechten Kräfte bedingt also, daß die Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Die Mittellinie des Stabes liegt in der neutralen Schicht desselben.

Die Gleichung der lotrechten Kräfte ist aber in Fig. 21 erst erfüllt, wenn die Kraft  $K$  durch eine gleiche, aufwärts gerichtete Kraft aufgehoben wird. Die Kraft  $K$  hat außer der Biegung des Balkens auch das Bestreben, das abgeschnittene Stück längs des Schnittes nach unten zu verschieben; dem setzt sich an der Querschnittsfläche ein Schubwiderstand, eine sog. innere Querkraft  $Q = K$ , entgegen. Die aus  $Q$  sich ergebenden Schubspannungen sind in den einfacheren Fällen, wie sie in diesem Buche nur behandelt werden

Fig. 22.





sollen, unbedeutend, weshalb wir uns um diese Querkraft  $Q$  hier nicht weiter kümmern werden. In Keck-Hotopp, Vorträge über Elastizitätslehre, Teil I, 2. Aufl., S. 179 ff. findet man die näheren Untersuchungen über die Verteilung des Schubwiderstandes, bzw. der Querkraft über die Querschnittsebene.

Von der Notwendigkeit des Schub- oder Scherwiderstandes  $Q = K$  kann man sich auch noch mittels der Fig. 22 überzeugen.

Führt man im Abstand  $x$  vom freien Ende einen Schnitt und rückt den Abschnitt von der Länge  $x$  ein wenig nach rechts, so kann man die gesamte Zugkraft oberhalb der Nulllinie und die gesamte Druckkraft unterhalb derselben durch die Spannkraft  $S$  zweier wagerechter Gelenkstangen ersetzen. Hierdurch sind aber die beiden Abschnitte noch nicht steif miteinander verbunden; die Gelenkstangen verhindern zwar eine Drehung des rechtsseitigen Teils (innerhalb der Zeichenebene), nicht aber eine Parallelverschiebung nach unten; hierzu ist noch eine nach oben gerichtete Querkraft  $Q = K$  erforderlich.

In der Gleichung der Momente in bezug auf die Nulllinie  $NN$  (Fig. 21) haben wir dann  $K \cdot x$  als äußeres Moment; die innere Spannkraft  $\sigma \cdot dF$  eines Querschnittsteilchens hat den Hebelarm  $u$ , daher muß  $0 = K \cdot x - \int \sigma \cdot dF \cdot u$  oder nach Gl. 1, S. 20

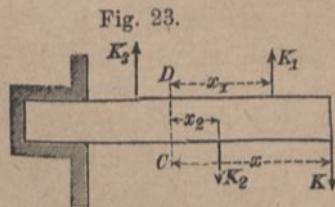
$$\frac{\sigma'}{e'} \int dF \cdot u^2 = K \cdot x \text{ sein.}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Momentensumme der an einem Querschnitt auftretenden inneren Spannkraften oder das Spannungsmoment, während die rechte Seite das Moment der äußeren biegenden Kraft in bezug auf die Nulllinie des Querschnitts ist. Dieses heißt das Biegemoment und wird mit  $\mathfrak{M}$  bezeichnet.  $\int dF \cdot u^2$  bedeutet nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 322 das geometrische Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die Nulllinie. Die Momentengleichung nimmt dann die Form an:

$$3) \quad \frac{\sigma'}{e'} J = \mathfrak{M}.$$

Die durch die Richtungslinie der Kraft  $K$  und die Mittellinie des Stabes bestimmte Ebene, welche der Voraussetzung zufolge eine Symmetrieebene des Stabes sein soll, heißt die Biegungsebene, weil die Mittellinie des Stabes auch nach der Biegung in ihr verbleibt. In diesem Falle steht die Nulllinie rechtwinklig zur Biegungsebene.

Treten in der Biegungsebene mehrere, zur Mittellinie des Stabes rechtwinklige Kräfte zugleich auf (Fig. 23), so ändert sich dadurch nichts Wesentliches. An irgendeiner Schnittstelle  $CD$  verteilen sich die Zug- und Druckspannungen wiederum nach dem Gesetze der Gl. 1 (S. 20), so daß die linke Seite der Gl. 3 dieselbe Form  $\frac{\sigma' J}{e'}$  bekommt. Die



Querkraft  $Q$  an der Schnittstelle wird nunmehr entgegengesetzt der algebraischen Summe der rechts vom Schnitte liegenden äußeren Kräfte:

$$Q = K - K_1 + K_2 = \Sigma K.$$

Das Biegemoment aber wird  $\mathfrak{M} = Kx - K_1 x_1 + K_2 x_2 = \Sigma K \cdot x$ , wobei sich das Summenzeichen  $\Sigma$  beidemal auf die Strecke vom Querschnitt bis zum rechtsseitigen Ende des Stabes erstreckt. Man kann dann sagen:

1. Die Querkraft  $Q$  des Querschnitts ist gleich der Summe der am abgeschnittenen Stück des Stabes wirkenden (lotrechten äußeren) Kräfte  $K$ .

2. Das Biegemoment  $\mathfrak{M}$  ist die Momentensumme der am abgeschnittenen Stücke des Stabes wirkenden äußeren Kräfte in bezug auf die Nulllinie des Schnittes.

Nennt man die stärkste Druckspannung am unteren Rande  $\sigma''$  und den Abstand von der Nulllinie  $e''$ , so ist wegen der Gl. 1 (S. 20)

$$4) \quad \frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{e''}{e'}$$

mithin kann nach Gl. 3 auch geschrieben werden

$$5) \quad \frac{\sigma''}{e''} J = \mathfrak{M}.$$

$\sigma'$  und  $\sigma''$  heißen die Randspannungen des Querschnitts.

Die linke Seite der Gl. 3:  $\frac{\sigma'}{e'} \cdot J$ , das sog. Spannungsmoment, enthält einen physikalischen Faktor  $\sigma'$ , während der andere Faktor  $J: e'$  nur von der Form und Größe des Querschnitts abhängt. Diesen Faktor  $\frac{J}{e'} = \mathfrak{W}'$  nennt man kurz das Widerstandsmoment des



Querschnitts, u. zw. für die Zugspannung  $\sigma'$ , während  $\frac{J}{e''}$  ebenso das Widerstandsmoment  $\mathfrak{B}''$  des Querschnitts für die Druckspannung  $\sigma''$  ist. In den meisten Fällen der Anwendung liegt der Schwerpunkt des Querschnitts und damit die Nulllinie in halber Höhe; dann ist  $e' = e''$ , wofür wir dann einfach  $e$  setzen, ebenso  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}$ . Es werden dann die Randspannungen  $\sigma' = \sigma''$  (wofür wir  $\sigma$  schreiben), und man hat

$$\text{Randspannung } \sigma = \frac{\text{Biegemoment } \mathfrak{M}}{\text{Widerstandsmoment } \mathfrak{B}}.$$

Das geometrische Trägheitsmoment einer Fläche ist vom vierten Grade ( $\text{cm}^4$ ), das Widerstandsmoment also vom dritten Grade ( $\text{cm}^3$ ).

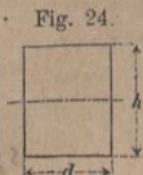
#### b) Widerstandsmomente verschiedener Querschnitte.

Für viele Fälle, namentlich für Holzbalken, ist der rechteckige Querschnitt (Fig. 24) angezeigt. Bei diesem liegt die Nulllinie in der Mitte; das Trägheitsmoment ist

(nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 322)  $J = \frac{Fh^2}{12} = \frac{d \cdot h^3}{12}$ ;

mithin ist, wegen  $e = \frac{1}{2}h$ , das Widerstandsmoment des Rechtecks

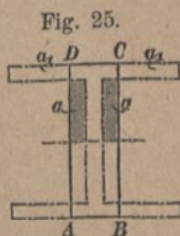
$$6) \quad \mathfrak{B} = \frac{J}{e} = \frac{F \cdot h}{6} = \frac{d \cdot h^2}{6}.$$



Da nun der Aufwand an Stoff durch den Querschnitt  $F$  bedingt wird, so sind die Widerstandsmomente von Rechtecken gleichen Inhalts ihren Höhen  $h$  verhältnismäßig. Daher empfiehlt es sich, Balken, von denen man bestimmt annehmen kann, daß sie stets nur in lotrechttem Sinne belastet werden, hochkantig zu stellen und  $h$  gegen  $d$  möglichst groß zu nehmen. Eine obere Grenze für das zulässige Verhältnis  $\frac{h}{d}$  ergibt sich aus der geringen Scherfestigkeit des Holzes (vgl. Keck-Hotopp, Elastizitätslehre).

Für  $d = 12$ ,  $h = 24$  ist  $\mathfrak{B} = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 24^2 = 1152$ ; legt man denselben Balken aber flach, so ist  $d = 24$ ,  $h = 12$  und  $\mathfrak{B} = \frac{1}{6} \cdot 24 \cdot 12^2 = 576$ , d. h. halb so groß wie vorher, dementsprechend ist auch die Tragfähigkeit nur halb so groß.

Bei gegebener Höhe  $h = 2e$  liefert ein Flächenteil  $dF$  im Abstand  $u$  von der Nulllinie zum Widerstandsmomente den Beitrag  $dF \cdot u^2 : e$ . Die Flächenteile in der Nähe der Nulllinie geben daher nur wenig Beitrag; mithin ist es bei der Verwendung von Eisen, wo man in der Wahl der Form nicht sehr beschränkt ist, vorteilhaft, diese Flächenteile fortzunehmen und in möglichst weitem Abstände von der Nulllinie anzubringen. Vom hochkantigen Rechteck  $ABCD$  (Fig. 25) gelangt man dann durch Verlegung der Flächenteile  $a$  nach  $a_1$  zu dem I-förmigen Querschnitte.



Bevor diese Form gewalzt wurde, hatte man schon Eisen der Form T, die man T-Eisen nannte: indem man sodann die I-Form als die Vereinigung zweier T-Eisen ( $\begin{matrix} \text{T} \\ \text{T} \end{matrix}$ ) ansah, führte man dafür den Namen Doppel-T-Eisen ein, verwendet dafür aber in der Schrift stets das Zeichen: I-Eisen.

Zur Berechnung des Trägheitsmoments kann der I-Querschnitt (Fig. 26) als Unterschied zweier Rechtecke  $d \cdot h$  und  $d_1 \cdot h_1$  behandelt werden, wenn man die Stärke der zur Verbindung der äußeren Teile dienenden Mittelwand  $= d - d_1$  setzt.

Daher ist

$$7) \quad J = \frac{1}{12} (d \cdot h^3 - d_1 \cdot h_1^3)$$

und weil  $e = \frac{1}{2} h$ :

$$8) \quad \mathfrak{B} = \frac{J}{e} = \frac{1}{6} \frac{d \cdot h^3 - d_1 \cdot h_1^3}{h}$$

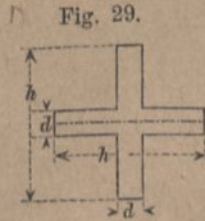
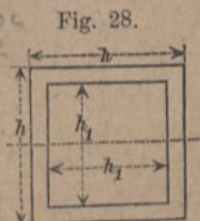
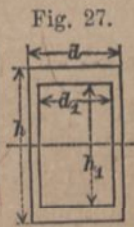
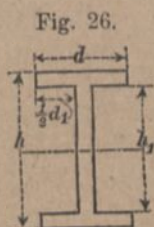
Die gleiche Formel gilt auch für das hohle Rechteck (Fig. 27).

Soll der Stab oder Balken gegen wagerechte Kräfte ebenso widerstandsfähig sein wie gegen lotrechte, so ist das Quadrat oder noch besser das hohle Quadrat (Fig. 28) angezeigt; für das volle Quadrat wird

$$9) \quad \mathfrak{B} = \frac{J}{e} = \frac{h^3}{6};$$

für das hohle Quadrat wird

$$10) \quad \mathfrak{B} = \frac{J}{e} = \frac{1}{6} \frac{h^4 - h_1^4}{h}$$



Zieht man in solchem Falle Querschnitte ohne Höhlungen vor, um den Farbenanstrich (als Schutz



gegen Rost) leicht erneuern zu können, so kommt der kreuzförmige Querschnitt (Fig. 29) in Frage. Hierfür wird

$$J = \frac{1}{12} (d \cdot h^3 + h \cdot d^3 - d^4),$$

indem man erst den Beitrag der lotrechten Rippe anschreibt, dann den der wagerechten Rippe voll hinzufügt und den Beitrag des (hierbei doppelt gerechneten) Quadrates  $d \cdot d$  abzieht. Es wird dann

$$11) \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{6} \frac{d \cdot h^3 + h \cdot d^3 - d^4}{h}.$$

Für gleichen Widerstand nach allen Richtungen eignen sich der Kreis und der Kreisring.

Für den Kreis vom Halbmesser  $r$  ist (1. Teil, 4. Aufl., S. 322)

$$12) \quad J = \frac{F r^2}{4} = \frac{r^4 \pi}{4} \quad \text{und}$$

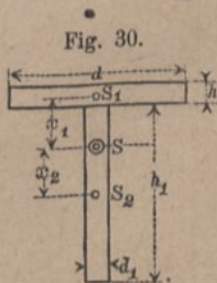
$$13) \quad \mathfrak{B} = \frac{r^3 \pi}{4}.$$

Für den Kreisring von den Halbmessern  $R$  und  $r$  ist

$$14) \quad J = \frac{1}{4} (R^4 - r^4) \pi,$$

$$15) \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{4} \frac{(R^4 - r^4) \pi}{R}.$$

Bei den bis jetzt betrachteten Querschnittsformen war die Nulllinie eine Symmetrieachse, daher  $e' = e''$  und auch  $\sigma' = \sigma''$ , d. h. die Zug- und die Druckspannung in den äußersten Lagen, die sog. „Randspannungen“ sind hierbei von gleicher Größe. Bei Gußeisen, wo die Spannungen an der Elastizitätsgrenze  $z : d$  sich verhalten wie 3 : 8, ist es angemessen, den Querschnitt so anzuordnen, daß die Sicherheit in der gezogenen Randschicht ebenso groß wird wie in der gedrückten, daß also  $\sigma' : \sigma'' = 3 : 8$ , also auch  $e' : e'' = 3 : 8$ . Das führt auf unsymmetrische Formen, von denen wir beispielsweise den  $\Gamma$ -Querschnitt (Fig. 30) betrachten wollen. Die breite Seite (der Flansch) kommt hierbei nach der gezogenen (konvexen) Seite des gebogenen Stabes.



Sind  $x_1$  und  $x_2$  die Abstände der Teilschwerpunkte  $S_1$  und  $S_2$  der Rechtecke  $d \cdot h$  und  $d_1 \cdot h_1$  vom Gesamtschwerpunkte  $S$ , so ist  $d \cdot h \cdot x_1 = d_1 \cdot h_1 \cdot x_2$  und  $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(h + h_1)$ ; daraus

$$16) \quad x_1 = \frac{d_1 \cdot h_1 (h + h_1)}{2(d \cdot h + d_1 \cdot h_1)} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{d \cdot h (h + h_1)}{2(d \cdot h + d_1 \cdot h_1)}.$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf die Nulllinie wird dann als Summe der Beiträge der beiden Rechtecke

$$J = \frac{1}{12} d \cdot h^3 + d \cdot h \cdot x_1^2 + \frac{1}{12} d_1 \cdot h_1^3 + d_1 \cdot h_1 \cdot x_2^2,$$

wofür man (nach Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, 2. Aufl., Bd. I, S. 18, Gl. 28) auch schreiben kann

$$17) \quad J = \frac{1}{12} (d \cdot h^3 + d_1 \cdot h_1^3) + \frac{d \cdot h \cdot d_1 \cdot h_1 (h + h_1)^2}{d \cdot h + d_1 \cdot h_1}.$$

Die zwei Widerstandsmomente

$$18) \quad \mathfrak{B}' = J : e' \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}'' = J : e''$$

verhalten sich demnach wie  $e'' : e'$ .

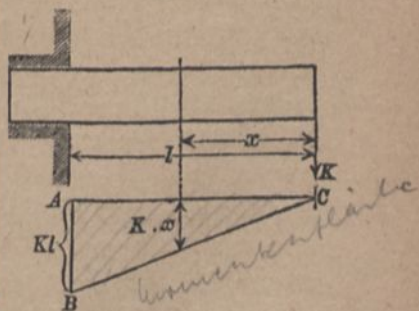
### c) Darstellung der Veränderlichkeit des Biegemomentes.

Für Balken oder Stäbe überall gleichen Querschnitts ist auch  $\mathfrak{B}$  überall gleich, mithin die stärkste Spannung  $\sigma$  an verschiedenen Schnitten verhältnismäßig mit dem Biegemomente. Die Veränderlichkeit des letzteren pflegt man bildlich darzustellen.

Wird der eingespannte Balken (Fig. 31) am freien Ende von einer Last  $K$  ergriffen, so ist für einen beliebigen Schnitt im Abstand  $x$  von  $K$  das Biegemoment  $\mathfrak{M}_x = K \cdot x$ . Trägt man diese Werte  $\mathfrak{M}_x$  als Ordinaten zu den entsprechenden

$x$  auf und verbindet die Endpunkte durch eine Linie, so schließt diese mit den Koordinaten die sogenannte Momentenfläche ein. Im vorliegenden Fall wird die Verbindungslinie der Endpunkte dargestellt durch die Gerade  $CB$ , und  $ACB$  ist die Momentenfläche.

Fig. 31.





Das größte Moment liegt daher an der Einspannungsstelle; es beträgt:

$$\mathfrak{M}_1 = K \cdot l.$$

Beispiel: Für einen Holzbalken von rechteckigem Querschnitte sei  $l = 2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$ ,  $d = 12 \text{ cm}$ ,  $h = 24 \text{ cm}$ ; für Holz ist wegen der Spannungen an der Elastizitätsgrenze, die für Zug bei 250, für Druck bei 170 at liegt, die letztere maßgebend; wählt man etwas mehr als zweifache Sicherheit, indem man als zulässige Spannung  $\sigma = 75 \text{ at}$  ( $< \frac{1}{2} \cdot 170$ ) einführt, so gilt für die zulässige Belastung  $K$  am freien Ende — vorerst unter Vernachlässigung des Eigengewichts des Balkens, vgl. S. 35 — die Gleichung

$$\sigma \cdot \mathfrak{B} = K \cdot l,$$

mithin, da nach S. 24, Gl. 6,  $\mathfrak{B} = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 24^2 = 1152$  ist,

$$K = 75 \cdot 1152 : 200 = 432 \text{ kg}.$$

Soll ein runder Schmiedeeisenstab bei 700 at stärkster Spannung dieselbe Last tragen, so gilt nach S. 26, Gl. 13, für seinen Halbmesser  $r$  die Gleichung

$$432 \cdot 200 = 700 \frac{r^3 \pi}{4}, \text{ woraus } r = 5,4 \text{ cm}.$$

Ist der Stab oder Balken gleichmäßig über seine Länge belastet mit  $p$  für die Längeneinheit (Fig. 32), und führt man einen Schnitt im Abstand  $x$  vom Ende, so hat die Gesamtlast der Strecke  $x$  die Größe  $p \cdot x$ , sie kann als Mittelkraft im Abstand  $\frac{1}{2}x$  vom Schnitte vereinigt gedacht werden; somit wird

$$\mathfrak{M} = p \cdot x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}p \cdot x^2.$$

Die Darstellung davon ist eine Parabel mit lotrechter Achse, die am freien Ende des Stabes liegt. Der Parameter ist  $1:p$ .

Greift am freien Ende des Stabes ein Kräftepaar vom Momente  $K \cdot a$  (Fig. 33) an, so ist für jeden Schnitt des Stabes das Biegemoment  $\mathfrak{M} = K \cdot a$ , weil nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 119

ein Kräftepaar in bezug auf jeden Punkt seiner Ebene das gleiche Moment hat. In diesem Fall ist die Momentenfläche ein Rechteck.

Fig. 32.

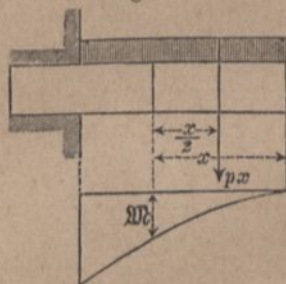
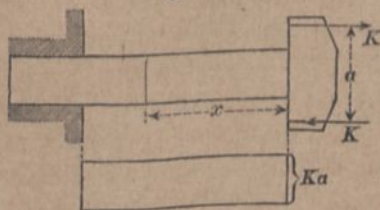
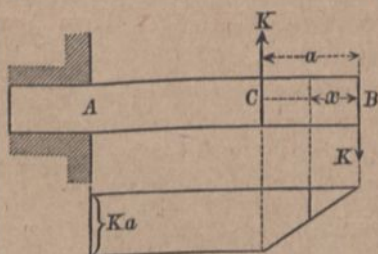


Fig. 33.



Greift das Kräftepaar  $K \cdot a$  wie in Fig. 34 an, so wird für einen Schnitt zwischen  $B$  und  $C$  das Biegemoment  $K \cdot x$  nur von der einen der beiden Kräfte  $K$  geliefert. Für einen Schnitt zwischen  $A$  und  $C$  aber liegen beide Kräfte  $K$  an dem abgeschnittenen Stücke und bilden ein Kräftepaar  $M = K \cdot a$ . Die Momentenfläche hat daher die unten in Fig. 34 gezeichnete Form.



#### d) Balken auf zwei Stützen mit einer Einzellast.

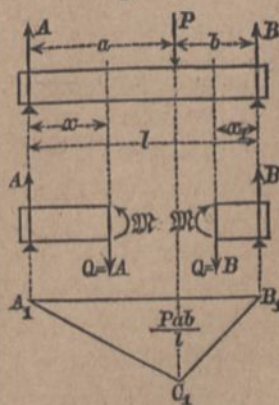
Ein Balken ruht mit seinen Enden auf zwei Stützen, deren Abstand  $l$  sei (Stützweite  $l$ , Fig. 35); er sei in den Entfernungen  $a$  und  $b$  von den Stützen durch ein Gewicht  $P$  belastet, wodurch an den Auflagern Widerstände  $A$  und  $B$  entstehen, die man als „Auflagerdrücke“ oder als „Stützendrücke“ bezeichnet. Sie ergeben sich sehr einfach (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 123), indem man die Momentengleichung in bezug auf  $B$  bzw.  $A$  aufstellt.

Es wird

$$A = P \frac{b}{l}; \quad B = P \frac{a}{l}.$$

Unter Einwirkung der Kräfte  $P$ ,  $A$  und  $B$  muß der Balken im gebogenen Zustand im Gleichgewichte sein. Nach S. 20 vernachlässigen wir aber die Biegung bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen. Führen wir im Abstand  $x$  von  $A$  einen Schnitt, so müssen beide Teile des Balkens im Gleichgewichte sein. Welches der beiden Stücke wir betrachten, ist für das Ergebnis gleichgültig; der Einfachheit wegen wählt man meist dasjenige, an dem die wenigsten Kräfte vorkommen, in vorliegendem Falle das linksseitige, welches in der Figur besonders herausgezeichnet ist und an welchem nur der Stützen-

Fig. 35.





druck  $A$  als äußere Kraft wirkt. Die Kraft  $A$  verlangt eine innere Querkraft  $Q = A$  (abwärts); diese bildet mit  $A$  ein Kräftepaar; das Biegemoment  $\mathfrak{M} = A \cdot x$ , mit dem Sinne rechtsherum, ruft ein entgegengesetzt drehendes Spannungsmoment hervor. In dem Balken liegen also die gezogenen Schichten unten, da augenscheinlich die Durchbiegung nach unten erfolgt, und die gezogenen Teile des Stabes (Balkens) stets auf der konvexen Seite der Biegung liegen. (Ein gußeiserner Balken unsymmetrischen Querschnitts müßte jetzt unten liegenden Flansch haben  $\perp$ .)

Die Formel  $\mathfrak{M} = Ax = P \frac{b}{l} x$  für das Moment gilt nur für Schnitte links von der Last. Sobald der Schnitt über die Belastungsstelle hinausrückt, kommt plötzlich die Last  $P$  links vom Schnitte zu liegen, wodurch sich eine Unstetigkeit in der Veränderlichkeit des Momentes ergibt. Für einen Schnitt rechts von der Last (im Abstand  $x_1$  von  $B$ ) betrachtet man einfacher das Stück rechts vom Schnitte. Dann wird  $\mathfrak{M} = Bx_1 = P \frac{a}{l} x_1$ . Die Momente werden wie S. 27 für beide Seiten des Balkens durch Gerade dargestellt. Für die Belastungsstelle selbst ( $x = a$ ;  $x_1 = b$ ) ergibt sich von beiden Seiten der übereinstimmende Wert

$$1) \quad \mathfrak{M}_1 = \frac{Pab}{l}$$

als das größte Moment. Als Momentenfläche erhält man daher jetzt das Dreieck  $A_1 C_1 B_1$  unten in Fig. 35. Zur Bestimmung dieses Dreiecks braucht man nur den linksseitigen Auflagerdruck  $A = P \cdot b : l$  mit dem Hebelarm  $a$  zu multiplizieren, um das Moment an der Belastungsstelle und damit den Punkt  $C_1$  der Momentenfläche zu erhalten.

Liegt die Last in der Mitte, so ist  $a = b = \frac{1}{2}l$  und

$$2) \quad \mathfrak{M}_1 = \frac{1}{4}Pl;$$

diese Formel braucht man aber für die Anwendung nicht aus der allgemeinen Gleichung 1 abzuleiten, sondern sie kann unmittelbar aus der Fig. 35 abgelesen werden. Der Auflagerdruck ist für diesen Fall offenbar auf beiden Seiten je  $= \frac{1}{2}P$ , sein Abstand von der Last (der Balkenmitte)  $\frac{1}{2}l$ , also  $\mathfrak{M} = A \cdot x = \frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{2}l = \frac{1}{4}Pl$ .

Beispiel 1: Es sollen die Querschnittsabmessungen eines Holzbalkens bestimmt werden, der bei  $3\text{ m} = 300\text{ cm}$  Spannweite und  $0,75\text{ at}$  zulässiger Spannung eine Last von  $2000\text{ kg}$  in der Mitte zu tragen hat. Es muß

$$\sigma \cdot \mathfrak{B} = \frac{P \cdot l}{4}, \text{ d. h. } 75 \times \frac{d \cdot h^2}{6} = \frac{2000 \cdot 300}{4},$$

also  $d \cdot h^2 = 12000\text{ cm}^3$  sein. Setzt man nun etwa noch das Verhältnis  $h : d = 2$  fest, so wird  $h^3 = 24000$ , mithin  
 $h = 28,8\text{ m}; d = 14,4\text{ cm}$ .

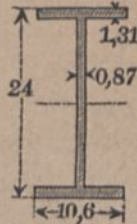
Beispiel 2: Ein Balken, dessen Querschnitt in Fig. 36 gegeben, liege auf zwei Stützen in  $4\text{ m}$  Abstand. Es soll für eine stärkste Spannung  $\sigma = 700\text{ at}$  die zulässige Einzellast in der Mitte berechnet werden. Die Maße in Fig. 36 sind  $\text{cm}$ . (Würde man versäumen, die Spannweite von  $4\text{ m}$  in  $400\text{ cm}$  umzuwandeln, so erhielte man die Tragfähigkeit 100 mal zu groß; dieser Fehler kommt erfahrungsmäßig bei Anfängern häufig vor.) Das Trägheitsmoment des Querschnittes ist in bezug auf die Querachse

$$J = \frac{1}{12} (10,6 \cdot 24^3 - 9,73 \cdot 21,38^3) = 4287\text{ cm}^4;$$

$$\mathfrak{B} = 4287 : 12 = 357\text{ cm}^2.$$

Mithin  $\frac{P \cdot 400}{4} = 700 \cdot 357$  oder  $P = 2499\text{ kg}$ .

Fig. 36.



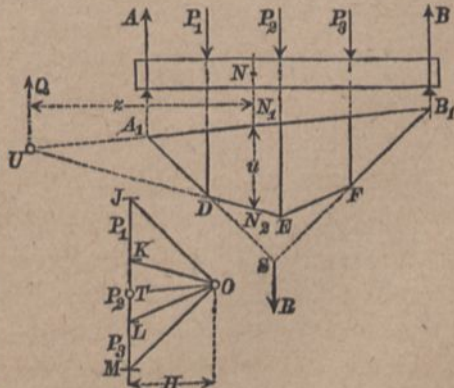
### e) Balken auf zwei Stützen mit mehreren Einzellasten.

Für mehrere Einzellasten (Fig. 37) eignet sich besonders das zeichnerische Verfahren, namentlich für die Herleitung.

Im 1. Teil, 4. Aufl., S. 113 u. 117 wurde gezeigt, wie man die Mittelkraft  $R$  paralleler Kräfte, hier der gegebenen Lasten, finden kann. Man setzt die Lasten

$P_1, P_2, P_3$  nach beliebigem Maßstabe zu einem Kräfteck  $JM$  zusammen, wählt einen beliebigen Pol  $O$  und zeichnet in einem beliebigen Punkte  $A_1$  der linksseitigen Auflagerlotrechten beginnend, ein Seileck  $A_1 D E F B_1$ , welches die rechtsseitige Auflagerlotrechte in  $B_1$  schneidet. Durch den Schnittpunkt  $S$  der Verlängerungen der äußersten Seilecksseiten  $A_1 D$  und  $B_1 F$

Fig. 37.





geht dann die Mittelkraft  $R$  der Lasten. Um nun die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  so zu bestimmen, daß sie  $R$  das Gleichgewicht halten, hat man (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 123 u. 129) nur zu  $A_1 B_1$ , der Schlußlinie des Seilecks, einen Parallelstrahl  $OT$  im Krafteck zu ziehen, dann ist  $T$  der Teilpunkt der Lasten; es ist  $TJ$  der Auflagerdruck  $A$ ,  $MT$  der Auflagerdruck  $B$ .

Will man nun für einen beliebigen, etwa zwischen  $P_1$  und  $P_2$  liegenden Schnitt  $N$  das Biegemoment bestimmen, so hat man zu bedenken, daß das Biegemoment die Summe der Momente der beiden Kräfte  $A$  und  $P_1$  (links vom Schnitt) in bezug auf  $N$  ist. Zu diesen beiden Kräften findet man aber leicht die Mittelkraft  $Q = A - P_1 = TK$  im Krafteck mit dem Sinne aufwärts. Die Lage wird bestimmt durch den Schnittpunkt der einschließenden Seileckseiten. Die einschließenden Polstrahlen sind  $OT$  und  $OK$ , die hierzu parallelen Seiten des Seilecks sind  $B_1 A_1$  und  $ED$ , welche sich in  $U$  schneiden. Nach dem Satze der Momente (1. Teil, 4. Aufl., S. 104) kann für die Momentensumme von  $A$  und  $P_1$  das Moment ihrer Mittelkraft  $Q$  gesetzt werden, d. h. es ist

$$\mathfrak{M} = Q \cdot z.$$

Nun ist das Dreieck  $UN_1 N_2 \sim OTK$ . Nennt man den rechtwinkligen Abstand des Poles  $O$  von der Lastlinie  $JM$  den Polabstand  $H$ , so gilt in den ähnlichen Dreiecken, daß die wagerechten und lotrechten Abmessungen einander verhältnismäßig sind. Oder  $z : N_1 N_2 = H : KT$ , mithin, wenn man  $N_1 N_2 = u$  setzt und  $KT$  mit  $Q$  vertauscht:

$$z : u = H : Q, \text{ oder } Q \cdot z = H \cdot u.$$

Es kann also das Biegemoment  $\mathfrak{M} = Q \cdot z$  auch durch

$$\mathfrak{M} = H \cdot u \text{ ersetzt werden.}$$

Darin ist  $H$  der Polabstand des Kraftecks, d. h. eine beliebige gewählte Kraft,  $u$  die lotrechte Ordinate des Seilecks, von der Schlußlinie aus gemessen, u. zw. im gleichen Maßstabe, nach welchem die Balkenlänge aufgetragen wurde.

Hiernach kann das Seileck  $A_1 D E F B_1$  als Momentenfläche benutzt werden. Man braucht dessen Ordinaten nur mit der Kraft  $H$  zu multiplizieren. Für die Anwendung empfiehlt es sich, als willkürliche Kraftgröße  $H$  einen runden Wert zu wählen.

Weil nun die Momentenfläche bei der Wirkung von Einzellasten ein Vieleck ist, so muß das überhaupt größte Biegemoment, das an dem Balken auftritt, stets an einem Eckpunkte des Vielecks, d. h. unter einer Last, vorkommen.

Sind nur zwei Lasten  $P_1$  und  $P_2$  auf dem Balken (Fig. 38), so führt die Rechnung rascher zum Ziele, als vorstehende zeichnerische Behandlung.

Die Auflagerdrücke werden:

$$A = \frac{P_1 b_1}{l} + \frac{P_2 b_2}{l}; \quad B = \frac{P_1 a_1}{l} + \frac{P_2 a_2}{l}.$$

An der Last  $P_1$  wird dann das Biegemoment

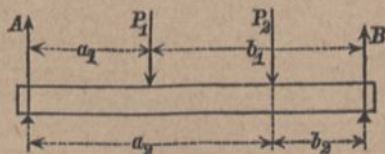
$$\mathfrak{M}_1 = A a_1 = \frac{P_1 a_1 b_1}{l} + \frac{P_2 a_1 b_2}{l},$$

an der Last  $P_2$  aber

$$\mathfrak{M}_2 = B b_2 = \frac{P_1 a_1 b_2}{l} + \frac{P_2 a_2 b_2}{l}.$$

Jedes dieser Momente besteht aus zwei voneinander unabhängigen Beiträgen, von je einer der Lasten herrührend, und da die Beziehungen für die Momente durch Einzellasten rein geradlinig sind, so muß diese Eigenschaft, die wir für die Momente an den Laststellen gefunden haben, auch für jeden anderen Schnitt gelten, wovon man sich auch leicht unmittelbar überzeugen kann. Bringt also irgendeine an bestimmter Stelle eines Balkens liegende Last an irgendeinem Schnitte des Balkens ein Moment  $\mathfrak{M}$  hervor, so bildet dieses Moment  $\mathfrak{M}$  auch die Vergrößerung des Gesamtmoments des Balkens an demselben Schnitte, wenn jene Last zu anderen schon vorhandenen Lasten hinzutritt. Dieselbe Beziehung gilt also auch für die inneren Spannungen. Beim Vorhandensein mehrerer Lasten ist die Spannung an irgendeiner Stelle des Balkens die algebraische Summe der Spannungen, die an der betreffenden Stelle von jeder einzelnen Last für sich allein hervorgebracht werden würde. Später werden wir noch sehen, daß Entsprechendes auch

Fig. 38.





bezüglich der Formänderung gilt. Dies Verhalten wird die Über-einanderlagerung oder Summierung der Wirkungen genannt.

Beispiel: Bedeuten in Fig. 39 die Längenzahlen Zentimeter, die Kräftezahlen Kilogramme, und soll das größte Moment und danach die stärkste Spannung des Balkens vom Querschnitte  $20 \times 30$  cm berechnet werden, so braucht man die Momente nur für die beiden Laststellen zu ermitteln, da ausschließlich an diesen das größte Moment zu suchen ist. Es ist

$$A = 2000 \cdot \frac{400}{500} + 1500 \cdot \frac{200}{500} = 2200 \text{ kg};$$

$$B = P_1 + P_2 - A = 3500 - 2200 = 1300 \text{ kg}.$$

Das Moment an der linksseitigen Last ist

$$\mathfrak{M}_1 = 2200 \cdot 100 = 220\,000 \text{ cmkg},$$

das andere

$$\mathfrak{M}_2 = 1300 \cdot 200 = 260\,000 \text{ cmkg}.$$

Letzteres ist mithin das größere. Leicht kann man die so bestimmte Momentenfläche auch durch Zeichnung finden, wenn man z. B. als Längenmaßstab 1:50 wählt, die Kräfte im Maßstabe  $1000 \text{ kg} = 2 \text{ cm}$  aufträgt und den Polabstand  $H = 2000 \text{ kg} = 4 \text{ cm}$  benutzt. Die Ordinaten des Seilecks sind dann auf dem Längenmaßstabe zu messen. Das Widerstandsmoment des Querschnitts ist

$$\frac{20 \cdot 30^2}{6} = 3000 \text{ cm}^3, \text{ mithin}$$

$$\sigma = 260\,000 : 3000 = 86\frac{2}{3} \text{ at}.$$

Über den Einfluß des Eigengewichtes s. S. 36.

Trägt ein Stab oder Balken auf zwei Stützen zwei gleiche Lasten  $P$  in symmetrischer Lage, wobei jede Last um  $a$  von dem nächsten Auflager absteht (Fig. 40), so muß jeder Stützendruck  $= P$  sein. An einer Laststelle ist dann das Biegemoment  $\mathfrak{M}_1 = P \cdot a$ , und die Momentenfläche ein Trapez; zwischen den beiden Laststellen hat das Moment durchweg den gleichen Wert  $P \cdot a$ , und die Länge des Stabes ist ganz ohne Einfluß auf das größte Moment. Auch wenn die Lasten  $P_1$  und  $P_2$

Fig. 39.

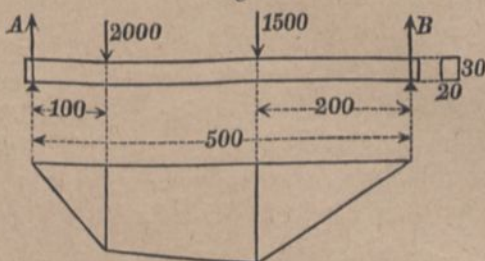
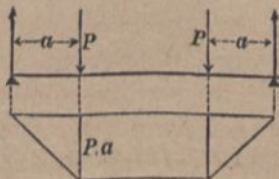


Fig. 40.



verschieden sind und keine symmetrische Lage haben, kann bei einem bestimmten Größenverhältnis und bestimmter Lage beider in allen Schnitten zwischen ihnen das Biegemoment den gleichen Wert haben.

Wäre in obigem Beispiel die linksseitige Last statt  $2000 \text{ kg}$  gleich  $3000 \text{ kg}$ , so würde  $A = 3000 \text{ kg}$  und  $B = 1500 \text{ kg}$  und  $M_1$  wie  $M_2$  je gleich  $300\,000 \text{ cmkg}$  werden.

Solche Belastungsart kommt vor bei jeder Wagenachse. Bei der Achse eines Straßenfuhrwerks (Fig. 41) liefern die außen liegenden Räder die aufwärts gerichteten Gegendrücke, während die Lasten  $P$  durch Federn auf die Achse übertragen werden. Bei den Eisenbahnwagenachsen (Fig. 42) liegen die Achslager, welche die Lasten übertragen, an den Enden, die Räder aber, welche den Gegendruck leisten, dazwischen; deshalb

biegt sich solche Achse in der Mitte nach oben durch. Der Fall der Fig. 40 kommt auch vor bei den Querträgern eiserner ein-  
gleisiger Eisenbahnbrücken. Die

Lasten  $P$  werden durch die Schienen übertragen; der Querträger stützt sich mit seinen Enden auf die beiden Hauptträger der Brücke. In allen diesen Fällen ist anzustreben, den Abstand  $a$  möglichst klein

zu machen, damit das größte Moment  $P \cdot a$  klein werde.

Fig. 41.

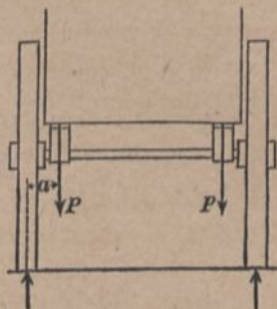
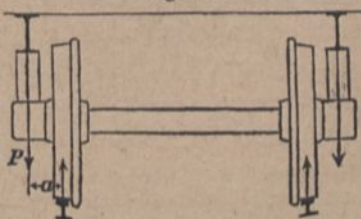


Fig. 42.



#### f) Balken auf zwei Stützen mit gleichmäßig verteilter Last.

Eine gleichmäßig verteilte Belastung erfährt jeder Balken schon durch sein Eigengewicht. Bei der Berechnung wird ein Balken an und für sich als gewichtslos betrachtet und sein Eigengewicht wie eine fremde Last behandelt. In vielen Fällen ist das Eigengewicht so unbedeutend gegenüber den sonstigen Lasten, daß es vernachlässigt werden darf, wie bisher geschehen ist.



Ist  $p$  die Belastung der Längeneinheit,  $l$  die Spannweite (Fig. 43), so wird jeder Auflagerdruck  $\frac{1}{2}p \cdot l$ ; für eine Schnittstelle im Abstand  $x$  von dem Auflager ist dann das Moment

$$1) \quad \mathfrak{M} = \frac{p l x}{2} - p x \cdot \frac{x}{2} = \frac{p x (l - x)}{2}.$$

Eine Funktion, in der das Veränderliche in der Form  $x(l-x)$  erscheint, wird (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 228) dargestellt durch ein Parabelsegment, welches die Weite  $l$  symmetrisch überspannt.

Das größte Moment ergibt sich für die Mitte,  $x = \frac{1}{2}l$ , zu

$$2) \quad \mathfrak{M}_{max} = \frac{p l^2}{8}.$$

Die Parabel hat den Parameter  $\frac{1}{p}$ . Setzt man die Gesamtlast des Balkens  $p l = P$ , so wird  $\mathfrak{M}_{max} = \frac{1}{8} P l$ . Liegt die Last als Einzelgewicht in der Mitte, so ist nach S. 30 das größte Moment  $\frac{1}{4} P l$ . Verteilt man also die Last gleichmäßig über den ganzen Träger, so vermindert sich das größte Moment auf die Hälfte, d. h. ein Balken kann doppelt soviel Last tragen, wenn dieselbe gleichmäßig verteilt ist, als wenn sie in der Mitte vereinigt wäre.

Solche gleichmäßige Belastung kommt vor bei den Straßenbrücken mit unmittelbar aufliegender Fahrbahn. Die ungünstigste Belastung wird häufig durch sog. Menschengedränge gebildet, wobei die ganze Brückenbahn mit Menschen erfüllt ist. Bei Eisenbahnbrücken ist die Belastung freilich keine gleichmäßig verteilte, weil die stark belasteten Lokomotivräder die Brückenbahn in einzelnen Punkten berühren, die auch keineswegs sich in gleichen Abständen befinden. Gleichwohl werden auch Eisenbahnbrücken oft, wenigstens annäherungsweise, auf gleichmäßige Belastung berechnet. Wir wollen nun ermitteln, welche gleichmäßige Last ein Brückenträger von  $10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$  Spannweite bei gegebenem Querschnitte erfahren darf. Der Balken oder Träger bekomme eine Höhe  $= \frac{1}{10}$  der Weite, d. h.  $h = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ , und werde als sog. Blechträger ausgebildet, da man so große Träger nicht gut mehr

Fig. 43.

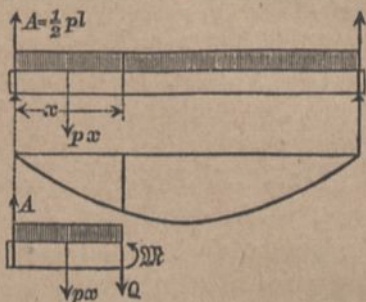
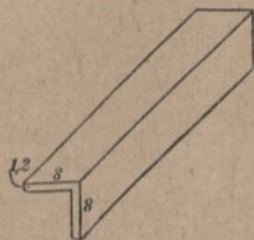
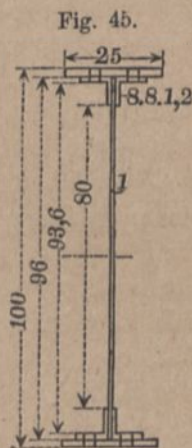


Fig. 44.



aus einem Stück walzen kann. Man sucht den Querschnitt des Balkens der I-Form zu nähern (Fig. 45). Die lotrechte Wand möge 1 cm stark, 96 cm hoch sein. Darauf und darunter legt man sog. Gurten aus Flacheisen, die hier 25 cm Breite und 2 cm Dicke erhalten mögen. Um aber diese drei, eine I-Form bildenden Teile fest miteinander zu verbinden, verwendet man sog. Winkeleisen in der Form der Fig. 44, welche zum Zusammennieten rechtwinklig aneinander stoßender Platten dienen. Der Querschnitt des hier zu verwendenden Winkeleisens sei durch die Maße 8 cm, 8 cm und 1,2 cm bestimmt; bei der Bezeichnung schreibt man diese kennzeichnenden Maße wie Faktoren hintereinander ( $\angle 8 \cdot 8 \cdot 1,2$  cm), womit aber selbstverständlich keine Multiplikation angedeutet werden soll. Die lotrechten Schenkel der beiden Winkeleisen werden mit der lotrechten Wand, die wagerechten mit den Gurten durch Niete verbunden. Die Niete bedingen Nietlöcher von 2,2 cm Durchmesser, deren Querschnitt bei der Berechnung des Trägheitsmomentes abgezogen werden muß. Die lotrechten und wagerechten Niete fallen nicht in den gleichen Querschnitt; daher brauchen wir nur die lotrechten Löcher abzuziehen. Hiernach ergibt sich für die Berechnung des Trägheitsmomentes  $J$  der Querschnitt Fig. 45. Der Ansatz macht sich verhältnismäßig bequem, wenn man die einzelnen Teile als Differenzen von Rechtecken ansieht.



Die Mittelwand bildet ein volles Rechteck von 1 cm Breite, 96 cm Höhe und dem Trägheitsmomente . . . . .  $\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 96^3 = 73\,728$ .

Die lotrechten Schenkel denken wir uns bis zu den Gurten reichend und aneinander geschoben; von dem Rechteck von 2,4 cm Breite und 96 cm Höhe denken wir uns ein solches von 80 cm Höhe abgezogen; mithin ist der Beitrag . . . . .  $\frac{1}{12} \cdot 2,4 \cdot (96^3 - 80^3) = 74\,547$ .

Von jedem wagerechten Schenkel bleibt dann noch  $8 - 1,2 = 2,2 = 4,6$  cm Breite mit den Höhen 96 bzw. 93,6 cm, mithin ist der Beitrag . . . . .  $\frac{1}{12} \cdot 9,2 \cdot (96^3 - 93,6^3) = 49\,611$ .

Die Gurten endlich liefern . . .  $\frac{1}{12} (25 - 4,4) (100^3 - 96^3) = 197\,870$ .

Das gesamte Trägheitsmoment ist  $395\,756 \text{ m}^4$ .

Das Widerstandsmoment demnach

$$W = 395\,756 : 50 = 7915 \text{ cm}^3.$$

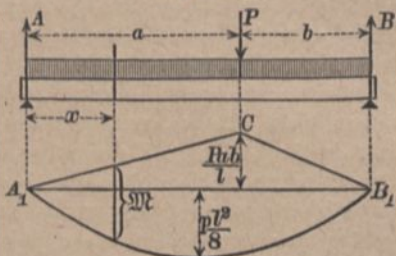
Ist  $p$  die zulässige Belastung auf 1 cm Länge,  $\sigma = 700 \text{ at}$  die zulässige Spannung, so wird  $p \frac{1000^2}{8} = 7915 \cdot 700$ , mithin  $p = 44$ ; die zulässige Gesamtlast  $p l$  einschließlich des eigenen Gewichts ist also  $44\,000 \text{ kg}$ .



g) Balken auf zwei Stützen mit gleichmäßiger Belastung und mit Einzellasten.

Bei dem Zusammenwirken einer Einzellast mit stetiger Belastung addieren sich die für jeden Einzelfall bestimmten Momente. Man vereinigt sie am einfachsten, indem man die Momentenflächen der beiden Einzelfälle nach verschiedenen Seiten von der Achse  $A_1 B_1$  (Fig. 46) aufträgt; die Summe beider Ordinaten, d. h. der lotrechte Abstand der Begrenzungslinien beider Momentenflächen gibt dann das Biegemoment  $\mathfrak{M}$ . Die Figur läßt ohne weiteres erkennen, daß, wenn  $a > b$ , das größte Moment nicht auf der Strecke  $b$  liegen kann; denn von  $B_1$  bis nach der Stelle  $C$  der Einzellast wachsen beide Momentenordinaten. Geht man über  $C$  hinaus weiter nach links, so nimmt die obere Ordinate ab, die untere zu. Das größte Moment liegt also entweder im Punkte  $C$ , oder zwischen  $C$  und der Mitte. Sind die Momentenflächen genau gezeichnet, so kann man das größte Moment leicht abgreifen. Allgemein findet man es durch Rechnung in folgender Weise:

Fig. 46.



Für irgendeinen Schnitt der Strecke  $a$  (im Abstand  $x$  von  $A$ ) ist das Moment

$$1) \quad \mathfrak{M} = Ax - \frac{1}{2} p x^2.$$

Diese Funktion erreicht einen Größtwert für

$$d\mathfrak{M}:dx = A - px = 0, \text{ d. h. für}$$

$$2) \quad x = x_1 = \frac{A}{p}.$$

Da nun  $A = \frac{pl}{2} + P \frac{b}{l}$ , so ist

$$3) \quad x_1 = \frac{l}{2} + \frac{Pb}{pl},$$

also  $x_1 > \frac{1}{2}l$ .

Setzt man den Wert der Gl. 2 in Gl. 1 ein, so entsteht

$$4) \quad \mathfrak{M}_{max} = \frac{A^2}{p} - \frac{A^2}{2p} = \frac{A^2}{2p}.$$

Diese Größe ist aber nur gültig, solange  $x_1 \leq a$ , weil rechts von  $C$  die Momentengleichung 1 nicht mehr gilt.

Gl. 4 ist also nur benutzbar für  $\frac{A}{p} \leq a$ , d. h. für  $A \leq p a$  oder

$$5) \quad \frac{Pb}{pl} \leq a - \frac{l}{2}.$$

Ist die Bedingung 5 nicht erfüllt, so gibt es für  $\mathfrak{M}$  kein analytisches Maximum (mit einer Abgeleiteten = Null), sondern einen größten absoluten Wert bei  $x = a$ , nämlich

$$6) \quad \mathfrak{M}_1 = A a - \frac{p a^2}{2} = a b \left( \frac{p}{2} + \frac{P}{l} \right).$$

Beispiel: Es sei  $l = 500$  cm;  $a = 300$  cm;  $b = 200$  cm;  $P = 100$  kg;  $p = 2$  kg/cm. Dann ist  $p \cdot \frac{1}{2} l = 500$  kg;  $P \cdot b : l = 40$  kg; also  $A = 540$  kg;

$$\frac{P a b}{l} = 40 \cdot 300 = 12\,000 \text{ cmkg},$$

$$\frac{p l^2}{8} = \frac{2 \cdot 500^2}{8} = 62\,500 \text{ cmkg}.$$

Nach Gl. 3 ist  $x_1 = 250 + \frac{40}{2} = 270$  cm;

da dies  $< a$ , so gibt es ein

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{A^2}{2p} = \frac{540^2}{4} = 270^2 = 72\,900 \text{ cmkg}.$$

Ist aber unter sonst gleichen Verhältnissen  $P = 1000$  kg, so wird

$$\frac{P \cdot b}{l} = 400; \quad A = 900 \text{ kg}; \quad \frac{P a b}{l} = 400 \cdot 300 = 120\,000 \text{ cmkg},$$

$$x_1 = 250 + \frac{400}{2} = 450;$$

da dies  $> a$ , so findet sich das größte Moment an der Stelle der Einzellast und beträgt nach Gl. 6:

$$\mathfrak{M}_1 = 300 \cdot 200 \left( 1 + \frac{1000}{500} \right) = 180\,000 \text{ cmkg}.$$

Durch Aufzeichnen der Momentenflächen und Abgreifen mit dem Zirkel erkennt man ebenfalls leicht die Stelle des größten Momentes.



Sind zwei gleiche, symmetrisch liegende Lasten  $P$  nebst einer gleichförmig verteilten Last  $p$  vorhanden (Fig. 47), so liefern die Einzellasten ein Trapez von der Höhe  $Pa$ , die gleichförmig verteilte Last ergibt eine Parabel von der Pfeilhöhe  $\frac{1}{8}pl^2$  als Momentenfläche. Das größte Moment liegt dann in der Mitte und hat den Wert

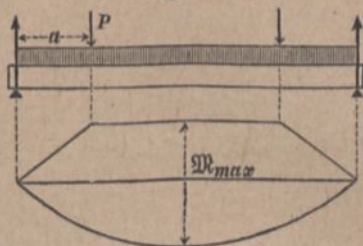


Fig. 47.

$$\mathfrak{M}_{max} = Pa + \frac{1}{8}pl^2.$$

#### h) Balken überall gleicher Sicherheit.

Bei einem prismatischen Balken ist die stärkste Spannung  $\sigma$  eines Querschnitts verhältnismäßig mit dem Biegemoment; ist letzteres also veränderlich, so wird die Festigkeit nur ungleichmäßig ausgenutzt. Soll die stärkste Spannung  $\sigma$  in sämtlichen Querschnitten des Stabes die gleiche sein, so muß das Widerstandsmoment  $\mathfrak{B}$  jedes Querschnittes verhältnismäßig mit seinem Biegemoment  $\mathfrak{M}$  sein. Ist  $\mathfrak{M}_1$  das Biegemoment an einer bestimmten Stelle (etwa das größte),  $\mathfrak{B}_1$  das Widerstandsmoment an dieser Stelle, so muß sein:

$$1) \quad \mathfrak{B} : \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1.$$

Ist der Balken eingespannt (Fig. 48) und am freien Ende durch  $K$  belastet, so ist  $\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = x : l$ , mithin muß dann für überall gleiche Sicherheit

$$2) \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_1} = \frac{x}{l} \quad \text{sein.}$$

Je nach der Wahl der Querschnittsform sind aber unendlich viele Lösungen der Aufgabe möglich. Hier soll nur der rechteckige und der Kreisquerschnitt behandelt werden.

#### I. Rechteckiger Querschnitt.

An beliebiger Stelle sei die Breite des Querschnitts  $= u$ , seine Höhe  $= v$ ; für  $x = l$  werde  $u = d$  und  $v = h$ ; dann ist  $\mathfrak{B} = \frac{1}{6}u \cdot v^2$ ;

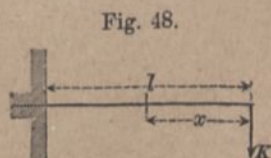


Fig. 48.

$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{6} d \cdot h^2$ , mithin nach Gl. 2

$$3) \quad \frac{u \cdot v^2}{d \cdot h^2} = \frac{x}{l}.$$

Nun kann man aber hierfür sehr verschiedene Balkenformen erhalten, je nach den weiteren Forderungen, die man stellt; es mögen hier drei solche Fälle besprochen werden:

a) Bei überall gleicher Breite  $u = d$  wird

$$4) \quad v^2 : h^2 = x : l.$$

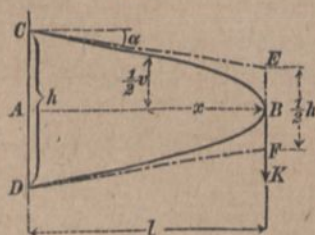
Trägt man von der Mitte aus  $\frac{1}{2}v$  nach oben und nach unten hin auf, so ergibt sich ein parabolischer Aufriß  $CDB$  (Fig. 49). Die Neigung der Parabel an beliebiger Stelle ist  $\text{tg } \varphi = \frac{1}{2}dv : dx$ . Für  $x = l$  sei  $\varphi = \alpha$ . Nach Gl. 4 wird

$$2v \cdot dv = \frac{h^2 dx}{l}, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{4} \frac{h^2}{vl} = \text{tg } \varphi.$$

Für  $x = l$  wird  $v = h$  und daher  $\text{tg } \alpha = \frac{1}{4} \frac{h}{l}$ . Legt man also in  $C$ ,  $B$  und  $D$  Berührungsgeralen an die Parabel, so bekommt man das Trapez  $CEFD$ , wobei  $EF = h - 2l \text{tg } \alpha = \frac{1}{2} CD$ . Bei überall gleichem Querschnitte  $d \cdot h$  ist der Rauminhalt des Balkens  $d \cdot h \cdot l$ , bei der parabolischen Begrenzung  $\frac{2}{3} d \cdot h \cdot l$ , während die Umschließungsform  $CEFD$  den Inhalt  $\frac{3}{4} d \cdot h \cdot l$  hat. Die parabolische Form genügt wohl für die Zug- und Druckspannungen, nicht aber für die Schubspannungen. Denn auch an dem Ende  $B$ , wo der Querschnitt  $= 0$  ist, herrscht eine Querkraft  $K$ , die eine gewisse Querschnittsfläche verlangt. Daher darf man in Wirklichkeit der parabolischen Form am freien Ende nicht ganz folgen. Insofern ist die trapezförmige Umschließung besser als die Parabelgestalt.

Fig. 49.



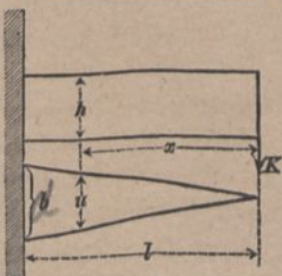


$\beta$ ) Gibt man dem Balken überall gleiche Höhe  $v = h$ , so wird aus Gl. 3:

$$5) \quad u : d = x : l,$$

d. h. der Grundriß wird nunmehr ein Dreieck (Fig. 50), der Rauminhalt  $\frac{1}{2}d \cdot h \cdot l$ . Diese Form ist also günstiger als die parabolische; übrigens war ja von vornherein zu erwarten, daß es vorteilhafter ist, die Höhe überall möglichst groß zu halten. Auch hier darf in Wirklichkeit die Breite am freien Ende nicht ganz bis auf Null abnehmen.

Fig. 50.



$\gamma$ ) Sollen die Rechteck-Querschnitte einander durchweg ähnlich bleiben, d. h.  $u : v = d : h$ , so wird aus Gl. 3:

$$6) \quad \begin{cases} v^3 : h^3 = x : l \text{ und} \\ u^3 : d^3 = x : l. \end{cases}$$

Fig. 51.

Trägt man hiernach die Höhen und Breiten auf (Fig. 51), so erhält man (vergl. 1. Teil, 4. Aufl., S. 231) als Begrenzungen im Aufriß und Grundriß Zweige von kubischen Parabeln.

Für den Aufriß gilt

$$3v^2 dv = \frac{h^3 dx}{l}, \quad \text{mithin}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \frac{dv}{dx} = \frac{h^3}{6v^2 l}$$

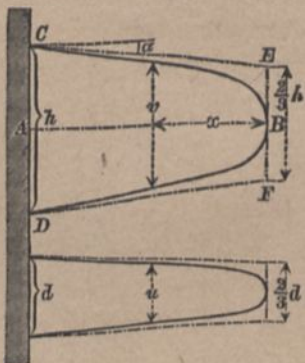
und die Neigung der Tangente im Punkt C (Fig. 51) ( $x = l$ ;  $v = h$ )

$$\operatorname{tg} a = \frac{h}{6l}.$$

Legt man um die kubischen Parabeln geradlinige Umschließungsformen, so wird die Höhe und Breite am freien Ende  $\frac{2}{3}h$  bzw.  $\frac{2}{3}d$ .

## II. Kreisförmiger Querschnitt.

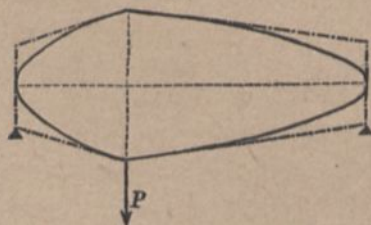
Der Halbmesser an beliebiger Stelle sei  $v$ , an der Einspannungsstelle  $r$ , so wird nach Gl. 2:  $\frac{1}{4}v^3\pi : \frac{1}{4}r^3\pi = x : l$ , oder  $v^3 : r^3 = x : l$ . Diese Gleichung entspricht der Gl. 6. Die Form des



Stabes oder Balkens wird also ein Umdrehungskörper, dessen Meridianlinie ein Zweig einer kubischen Parabel ist.

Diese Formen von Balken überall gleicher Sicherheit gelten in allen Fällen, in denen das Biegemoment sich nach geradlinigem Gesetz ändert, also auch, wenn ein Balken auf zwei Stützen eine Einzellast trägt. Genügt dann an der Laststelle ein rechteckiger Querschnitt  $d \cdot h$ , und soll die Breite überall gleich sein, so erhält man (Fig. 52) leicht die Umschließungsform, wenn man an beiden Auflagern die Höhe  $= \frac{1}{2}h$  macht. In diese lassen sich die Parabeln leicht einzeichnen. Die Unstetigkeit der Momentenfläche an der Belastungsstelle (s. Fig. 35, S. 29) hat zur Folge, daß auch die Begrenzung der Balkenform hier Knicke zeigt.

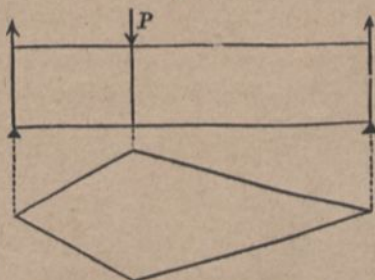
Fig. 52.



Bei gleichbleibender Höhe würde der Balken im Grundriß die Form der Fig. 53 (aus zwei Dreiecken bestehend) erhalten.

Fig. 53.

Bei kreisförmigem Querschnitte würde die Umschließungsform an den Auflagern  $\frac{2}{3}r$  als Halbmesser zeigen. Dies findet Anwendung bei Achsen, die durch das Gewicht eines schweren Rades belastet sind.



Auch für gleichförmig belastete Balken auf zwei Stützen lassen sich leicht Formen gleicher Sicherheit entwickeln. Bei rechteckigem Querschnitte überall gleicher Breite wird der Aufriß eine Ellipse.

## 5. Biegelinie.

Die Linie, nach der sich die ursprünglich gerade Achse des Stabes oder Balkens krümmt, heißt die Biegelinie. In Fig. 19



(S. 19) ist  $O$  der Krümmungsmittelpunkt der Biegelinie für die Stelle  $G$  derselben. Gemäß Gl. 2, S. 20 ist demnach

$$1) \quad \varrho = \frac{E e'}{\sigma}$$

der Krümmungshalbmesser an einer Stelle, auf welche sich  $e'$  und  $\sigma$  beziehen. Da  $E$  (vgl. S. 9) meist bedeutend größer als  $\sigma$ , so folgt aus dieser Gleichung, daß für die meisten Fälle der Anwendung der Krümmungshalbmesser verhältnismäßig groß, die Krümmung  $1:\varrho$  daher klein ausfällt, was für das Weitere von Wichtigkeit ist und durch folgende Beispiele erhärtet werden soll: Bei Stabeisen wird  $\sigma$  höchstens  $1000^{\text{at}}$ , mithin  $E:\sigma = 2000$  und  $\varrho = 2000 e'$  oder für  $e' = \frac{1}{2} h$ ,  $\varrho = 1000 h$ ; an allen Stellen, an denen  $\sigma$  kleiner ist, wird  $\varrho$  noch größer. Ein I-Träger von  $0,2^{\text{m}}$  Höhe biegt sich also nach Krümmungshalbmessern von mindestens  $200^{\text{m}}$ . Für Holz ist  $\sigma$  höchstens  $100^{\text{at}}$ , mithin  $\varrho = 1200 e' = 600 h$ , d. h. ebenfalls recht groß. An den Stellen, wo die Biegungsspannung Null, ist  $\varrho = \infty$  oder die Krümmung  $= 0$ .

Mit  $\sigma = \mathfrak{M} e' : J$  (Gl. 3, S. 22) geht Gl. 1 über in

$$2) \quad \varrho = \frac{E J}{\mathfrak{M}}; \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}}{E J}.$$

Diese Gleichung rührt von Jakob Bernoulli (geb. 27. Dezember 1654 zu Basel, gest. am 16. August 1705 daselbst) her; vgl. auch S. 19 Fußnote.

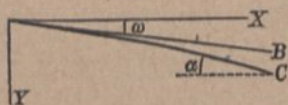
Nach den Lehren der analytischen Geometrie ist aber

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2 y}{d x^2}}{\left[1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Setzt man nun diese zwei Ausdrücke für  $\frac{1}{\varrho}$  einander gleich und beachtet, daß  $\frac{\mathfrak{M}}{J}$  eine Funktion von  $x$  ist, so ergibt sich eine Gleichung, in welcher die erste und die zweite Abgeleitete der Gleichung der Biegelinie vorkommen. Eine solche Gleichung heißt Differentialgleichung: sie ist in dem vorliegenden Falle meist nicht in geschlossener Form lösbar. Für die gewöhnlichen Fälle der Anwendung ist aber daraus eine Annäherungsgleichung von genügender Genauigkeit abzuleiten. Läßt sich die  $x$ -Achse so legen,

daß sie mit der Mittellinie  $AB$  des ungebogenen Stabes entweder parallel ist, oder nur einen sehr kleinen Winkel  $\omega$  bildet (Fig. 54), so wird auch die Neigung der meist nur schwach gekrümmten Biegelinie  $AC$  gegen die  $x$ -Achse, d. h.  $dy:dx$ , durchweg nur klein sein. Daher kann man in solchen Fällen  $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  mit der

Fig. 54.



Einheit vertauschen. Würde z. B. der größte Wert von  $dy:dx = 0,1$  (entsprechend einem Winkel  $\alpha = 6^\circ$ ), so würde doch  $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  höchstens  $1 + 0,01$ , worin man  $0,01$  gegen  $1$  vernachlässigen kann. Gl. 2 (S. 44) liefert nämlich nicht sehr genaue Werte für die Biegelinie, weil darin z. B. der Einfluß der Schubspannungen nicht berücksichtigt ist; auch kennt man die Zahl  $E$  für einen vorliegenden Balken meist nicht auf  $1\%$  genau. Die sehr runden Zahlen der Tabelle (S. 9) lassen schon darauf schließen, daß sie nur Mittelwerte sein können, von denen die wahren Zahlen zuweilen nicht unbedeutend abweichen. Solch große Werte von  $dy:dx$ , wie vorstehend angenommen, nämlich  $0,1$ , kommen aber bei guten Bauträgern selten vor; man kann also unbedenklich  $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$  setzen; dann wird

$$3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}}{EJ}.$$

Diese im Jahre 1826 von Navier, dem Begründer der wissenschaftlichen Elastizitätslehre (geb. 1785 zu Dijon, gest. 1836 zu Paris), angegebene Gleichung führt in den einfacheren Fällen nach einmaliger Integration zu  $dy:dx$  und nach nochmaliger Integration zu  $y = f(x)$ , der Gleichung der Biegelinie.

An solchen Stellen, wo das Moment  $\mathfrak{M} = 0$ , ist auch  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$  (wenn  $J > 0$ ), d. h. die Biegelinie hat dort einen Wendepunkt, ihre Krümmung ist Null.

Die Spannung  $\sigma'$  ist stets endlich; solange nun die Trägerhöhe und damit auch  $e' > 0$ , bleibt nach Gl. 1 auch  $\frac{\sigma'}{Ee'} = \frac{1}{\rho}$  endlich;

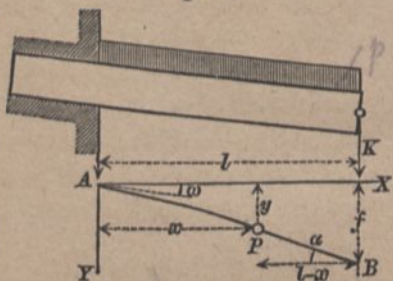


demnach kann auch  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  nicht unendlich groß werden. Die Neigung  $\frac{dy}{dx}$  der Biegelinie ändert sich daher immer stetig, nicht plötzlich, es sind in keiner Stelle der Linie zwei Tangenten möglich, die Biegelinie kann nirgends einen Knick haben.

### a) Einseitig eingespannter prismatischer Stab oder Balken.

Ein prismatischer Stab oder Balken sei an der linken Seite unwandelbar eingespannt, u. zw., der Allgemeinheit wegen, nicht völlig wagerecht, sondern mit einer kleinen Neigung  $\omega$  abwärts (Fig. 55); der Balken sei gleichmäßig mit  $p$  für die Längeneinheit der Horizontalprojektion und am Ende durch eine Kraft  $K$  lotrecht belastet. In dem unteren Teile der Fig. 55 ist die Kurve  $AB$  die Biegelinie,  $AX$  wagerecht,  $AY$  lotrecht nach unten. Die Biegung sei so gering angenommen, daß die wagerechte Länge des Stabes auch im gebogenen Zustande noch  $= l$  gesetzt

Fig. 55.



werden kann. Für einen Punkt  $P(x, y)$  der Biegelinie ist das Biegemoment, wenn man das Stück rechts von  $P$  betrachtet,

$$\mathfrak{M} = K(l-x) + \frac{p(l-x)^2}{2}.$$

Dann wird, wenn man in Gl. 3 alle Glieder mit  $E \cdot J \cdot dx$  multipliziert,

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = K(l-x) dx + \frac{p}{2} (l^2 - 2lx + x^2) dx.$$

Integriert man beide Seiten der Gleichung, so entsteht

$$4) \quad EJ \frac{dy}{dx} = K \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{p}{2} \left( l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + C.$$

Die Integrationskonstante  $C$  muß so bestimmt werden, daß für  $x=0$  auch  $dy:dx = \omega$  wird (entsprechend der Einspannung und

M. E. ...

indem man  $\operatorname{tg} \omega$  mit  $\omega$  vertauscht). Daraus folgt  $EJ\omega = C$ . Für das Neigungsverhältnis  $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$  am freien Ende, also für  $x = l$ , ergibt sich  $EJ\alpha = \frac{1}{2} Kl^2 + \frac{1}{6} pl^3 + EJ\omega$ , somit

$$5) \quad \alpha = \frac{Kl^2}{2EJ} + \frac{pl^3}{6EJ} + \omega.$$

Multipliziert man aber Gl. 4 mit  $dx$  und integriert wiederum, so ergibt sich als Gleichung der Biegelinie

$$EJy = K(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{6}x^3) + \frac{1}{2}p(\frac{1}{2}l^2x^2 - \frac{1}{3}lx^3 + \frac{1}{12}x^4) + EJ\omega x + C_1.$$

Da für  $x = 0$  auch  $y = 0$  sein muß, weil der Anfangspunkt der Koordinaten in der Biegelinie liegt, so wird  $C_1 = 0$ . Bezeichnet man die Ordinate des Endpunktes  $B$  der Biegelinie (für  $x = l$ ) mit  $f$ , so wird

$$EJf = \frac{1}{3} Kl^3 + \frac{1}{8} pl^4 + EJ\omega l, \quad \text{mithin}$$

$$6) \quad f = \frac{Kl^3}{3EJ} + \frac{pl^4}{8EJ} + \omega l.$$

Aus den Gl. 5 und 6 erkennen wir, daß auch bezüglich der Neigungen und der Ordinaten der Biegelinie die Wirkungen der einzelnen Ursachen ( $K$ ,  $p$  und  $\omega$ ) sich unabhängig voneinander summieren, wie S. 33 für die Biegemomente gezeigt wurde. (Es gilt dies aber nur, solange man bei der Aufstellung des Biegemomentes die Durchbiegung vernachlässigen darf.) Ist der Stab wagerecht eingespannt und nur durch  $K$  belastet (sind also  $\omega = 0$  und  $p = 0$ ), so wird

$$7) \quad \alpha = \frac{Kl^2}{2EJ}, \quad f = \frac{Kl^3}{3EJ};$$

ist er nur gleichmäßig belastet ( $\omega = 0$  und  $K = 0$ ), so wird

$$8) \quad \alpha = \frac{pl^3}{6EJ}, \quad f = \frac{pl^4}{8EJ}.$$

Ist der Stab gar nicht belastet, aber schräg eingespannt, so ist (selbstverständlich)  $\mathfrak{M} = 0$ ;  $1: \rho = 0$  und

$$\alpha = \omega; \quad f = \omega l.$$

Vor weiterer Anwendung der Ergebnisse möge noch die biegende Wirkung eines Kräftepaares  $\mathfrak{M}$  untersucht



werden, das am freien Ende des wagerecht eingespannten Stabes wirkt (Fig. 56).

$$\text{Es ist } EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \mathfrak{M};$$

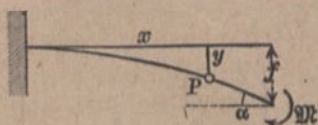
$$EJ \frac{dy}{dx} = \mathfrak{M}x + C \text{ mit } C = 0;$$

$$9) \quad \alpha = \frac{\mathfrak{M}l}{EJ}.$$

$$10) \quad EJy = \frac{1}{2} \mathfrak{M}x^2 + C_1 \text{ (mit } C_1 = 0);$$

$$11) \quad f = \frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}.$$

Fig. 56.



Um diese Werte für  $\alpha$  und  $f$  würden sich die in Gl. 5 und 6 gegebenen vergrößern, wenn in Fig. 55 noch das Kräftepaar  $\mathfrak{M}$  am freien Ende hinzugefügt würde. Gl. 10 bedeutet eine Parabel vom Parameter  $\frac{EJ}{\mathfrak{M}}$  als Biegelinie für das Kräftepaar Fig. 56. Die etwas genauere Gleichung  $\varrho = \frac{EJ}{\mathfrak{M}}$  (S. 44) würde für unveränderliches  $\mathfrak{M}$  ein unveränderliches  $\varrho$ , d. h. eine kreisförmige Biegelinie ergeben. Die Vertauschung von  $\frac{1}{\varrho}$  mit  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  hat also denselben Erfolg, wie die Vertauschung eines Kreises von großem Halbmesser  $\varrho$  mit einer Parabel vom Parameter  $\varrho$ .

Die einzelnen Einflüsse von  $K$ ,  $p$ ,  $\mathfrak{M}$  und  $\omega$  auf  $\alpha$  und  $f$  stellen wir (nach A. Ritter, Technische Mechanik) wegen der häufigen Anwendbarkeit zusammen wie folgt:

Einfluß von	auf $\alpha$	auf $f$
$K$	$\frac{Kl^2}{2EJ}$	$\frac{Kl^3}{3EJ}$
$p$	$\frac{pl^3}{6EJ}$	$\frac{pl^4}{8EJ}$
$\mathfrak{M}$	$\frac{\mathfrak{M}l}{EJ}$	$\frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}$
$\omega$	$\omega$	$l\omega$

In den auf  $p$  bezüglichen Gliedern erscheint  $l$  mit einem um 1 höheren Exponenten als in den mit  $K$  behafteten, weil  $p$  noch keine Kraft ist, sondern erst durch Multiplikation mit einer Länge zu einer Kraft wird. In dem Biegemomente war  $K$  mit einer linearen Größe multipliziert; durch die beiden Integrationen verwandelte sich diese lineare Größe in eine Größe zweiten und dritten Grades. Daraus erklären sich die Exponenten von  $l$  in den Formeln. Diese Bemerkungen erleichtern das sichere Einprägen der Tabellenwerte S. 48.

**Beispiel:** Ein Balkenräger rage aus einer Hauswand auf  $l = 2\text{ m} = 200\text{ cm}$  wagerecht hervor (Fig. 57). Am freien Ende befinde sich eine Einzellast  $K = 200\text{ kg}$ , und außerdem seien  $pl = 200\text{ kg}$  gleichmäßig über die Balkenlänge  $l$  verteilt. Wie groß sind die stärkste Spannung  $\sigma$  und die Durchbiegung  $f$  des hölzernen Balkens vom Querschnitte  $d = 12\text{ cm}$ ,  $h = 20\text{ cm}$  für  $E = 120\,000\text{ at}$ ?

Das größte Moment tritt an der Wand auf und beträgt

$$\mathfrak{M} = 200 \cdot 200 + 200 \cdot 100 \\ = 60\,000\text{ cmkg};$$

das Widerstandsmoment ist

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 20^2 = 800\text{ cm}^3, \text{ daher} \\ \sigma = 60\,000 : 800 = 75\text{ at}.$$

Das Trägheitsmoment ist  $J = \mathfrak{W} \cdot 10 = 8000\text{ cm}^4$ , daher

$$f = \frac{Kl^3}{3EJ} + \frac{pl^4}{8EJ} = \frac{200 \cdot 200^3}{3 \cdot 120\,000 \cdot 8000} + \frac{200 \cdot 200^3}{8 \cdot 120\,000 \cdot 8000} \\ = 0,76\text{ cm} = \frac{1}{263}\text{ der Länge}.$$

In vielen Fällen der Anwendung wirken die einzelnen Ursachen einander entgegen (indem vielleicht  $K$  aufwärts,  $p$  abwärts gerichtet ist), dann hat man die einzelnen Einflüsse mit teilweise entgegengesetzten Vorzeichen sinngemäß zu verbinden.

### b) Prismatischer Balken auf zwei Stützen.

Trägt ein prismatischer Balken auf zwei Stützen in der Mitte eine Einzellast (Fig. 58), so muß die Biegelinie zu einer Lotrechten durch die Mitte symmetrisch, d. h. in der Mitte bei  $C$  wagerecht sein. Für die Spannungen und Formänderungen ist es nun gleichgültig, durch welche Mittel die wagerechte Richtung bei  $C$  erzwungen wird — ob durch den Zusammenhang mit einer anderen Hälfte, oder durch feste

Fig. 57.

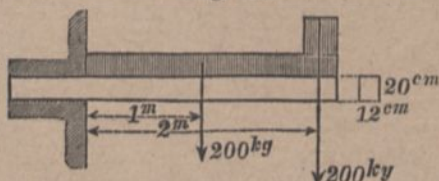
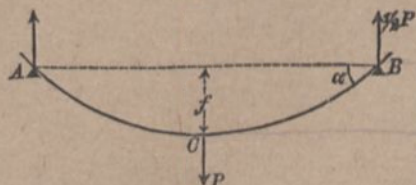


Fig. 58.





Einspannung. Daher kann man die rechtsseitige Hälfte  $CB$  ansehen, als bei  $C$  aus einer einspannenden Wand wagrecht um  $1/2 l$  hervorstehend und am freien Ende durch eine Kraft  $1/2 P$  aufwärts gebogen, infolgedessen der Punkt  $B$  um  $f$  höher liegt als der Punkt  $C$ . Man kann daher für  $f$  die Grundformel  $\frac{Kl^3}{3EJ}$  (S. 47) anwenden, nur muß man  $K$  mit  $1/2 P$ ,  $l$  mit  $1/2 l$  vertauschen. Dann wird

$$12) \quad f = \frac{1/2 P \cdot 1/8 l^3}{3EJ} = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Ebenso gilt für die Neigung  $\alpha$  (am Ende) die Formel  $\frac{Kl^2}{2EJ}$ , also

$$13) \quad \alpha = \frac{1/2 P \cdot 1/4 l^2}{2EJ} = \frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Für Zahlenrechnungen ist es in solchen Fällen meist bequemer, die stärkste Spannung  $\sigma$  einzuführen. Für diese gilt nach S. 23 und 30:

$$\sigma \frac{J}{e} = \frac{Pl}{4}, \text{ also } \frac{Pl}{4J} = \frac{\sigma}{e}.$$

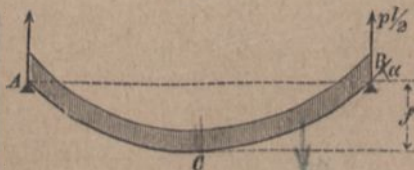
Hiermit wird aus Gl. 12 und 13:  $f = \frac{1}{12} \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{e}$ , oder, um überall Verhältnisse gleichartiger Größen zu haben:

$$14) \quad \left. \begin{aligned} \frac{f}{l} &= \frac{1}{12} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e} \\ \alpha &= \frac{1}{4} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für eine Einzellast } P \\ \text{in der Trägermitte.} \end{array}$$

Einen gleichmäßig über die ganze Länge belasteten Balken (Fig. 59) kann man ansehen als bei  $C$  wagrecht eingespannt, im Abstand  $1/2 l$  durch eine Einzelkraft  $1/2 pl$  aufwärts gebogen und durch eine gleichmäßige Belastung  $p$  abwärts gebogen. Dann wird mittels richtiger Anwendung der Tabelle auf S. 48:

$$16) \quad f = \frac{1/2 pl \cdot 1/8 l^3}{3EJ} - \frac{p \cdot 1/16 l^4}{8EJ} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ}.$$

Fig. 59.



$$\frac{Pl^3}{48EJ} - \frac{pl^4}{384EJ}$$

$$17) \quad \alpha = \frac{1/2 p l \cdot 1/4 l^2}{2 E J} - \frac{p \cdot 1/8 l^3}{6 E J} = \frac{p l^3}{24 E J}.$$

Für die stärkste Spannung gilt wieder nach S. 23 und 36:  $\sigma \frac{J}{e} = \frac{p l^2}{8}$ ; setzt man also  $\frac{p l^2}{8 J} = \frac{\sigma}{e}$  in die Gl. 16 und 17 ein, so wird

$$18) \quad \left. \frac{f}{l} = \frac{5}{48} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e} \right\} \text{für gleichförmig verteilte}$$

$$19) \quad \left. \alpha = \frac{1}{3} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e} \right\} \text{Last } p.$$

Die Gleichungen 14 und 18 können auch mit Vorteil benutzt werden, um die Randspannung  $\sigma$  aus der gemessenen Durchbiegung  $f$  ohne genaue Kenntnis der Querschnittsform zu bestimmen; nur muß das Maß  $e$ , meist die halbe Trägerhöhe, bekannt sein.

Beispiel: Sind die Verhältnisse so gewählt, daß  $\sigma = 700 \text{ at}$ ,  $E = 2\,000\,000 \text{ at}$ ;  $l:e = 20$ , so wird im Falle der Einzellast (Gl. 14 und 15):

$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00175 = 0^{\circ} 6',$$

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00058.$$

Im Falle der gleichmäßigen Belastung ergeben die Gl. 18 und 19:

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00233 = 0^{\circ} 8',$$

$$\frac{f}{l} = \frac{5}{48} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00073.$$

Bei gleichen stärksten Spannungen und gleicher Spannweite verhalten sich hiernach die Durchbiegungen infolge gleichförmiger Belastung, bzw. einer Einzellast zueinander wie  $5:4 = 1,25:1$ . Das steht in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß die Momentenflächen in beiden Fällen gleiche Pfeilhöhe haben, die eine aber parabolisch, die andere dreieckig gestaltet ist. Die aus dem Inhalte der Momentenflächen abgeleiteten Mittelwerte der Momente sind also  $2/3$  bzw.  $1/2 M_{max}$ , verhalten sich demnach wie  $4:3 = 1,33:1$ . Last  $p l$  ist  $= 2 P$ .

Bei sehr dünnwandigen  $\text{I}$ -Trägern wird die Durchbiegung wegen des Auftretens der Gleitung durch die Schubspannungen etwas größer.

6)

### c) Biegung von einseitig eingespannten Balken überall gleicher Sicherheit.

Die Krümmung der Biegelinie ist allgemein  $\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{E e}$  (S. 44, (Gl. 1). Setzt man nun die Querschnittshöhe an beliebiger Stelle  $= v$ ,



und  $e = \frac{1}{2}v$ , so wird, wenn jetzt die Randspannung  $\sigma$  in allen Querschnitten gleich groß sein soll,

$$20) \quad \frac{E}{2\sigma} \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{v}.$$

$\alpha)$  Wird dem Balken überall gleicher Sicherheit auch überall gleiche Höhe  $v = h$  gegeben, so wird nach Gl. 20 auch  $\varrho$  überall gleich, d. h. die Biegelinie ein Kreisbogen vom Halbmesser  $\frac{Eh}{2\sigma}$  (wie in dem besonderen Falle der Fig. 56, S. 48), wofür man auch eine Parabel setzen kann.

Die Durchbiegung findet man am einfachsten, indem man in Gl. 20 für  $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$  setzt und zweimal integriert. Bei wagerechter Einspannung ergibt sich dann auf ähnlichem Wege wie S. 48:

$$\frac{E}{2\sigma} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{h}; \quad \frac{E}{2\sigma} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{h} + C \text{ mit } C = 0;$$

$$\frac{E}{2\sigma} y = \frac{x^2}{2h} + C_1 \text{ mit } C_1 = 0; \quad \frac{E}{\sigma} f = \frac{l^2}{h};$$

$$\frac{f}{l} = \frac{\sigma}{E} \frac{l}{h} \text{ oder, wegen } \sigma = \frac{\mathfrak{M}_1}{J_1} \frac{h}{2},$$

wenn  $\mathfrak{M}_1$  und  $J_1$  sich auf irgendeinen, z. B. den Befestigungsquerschnitt, beziehen:  $f = \frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{2EJ_1}$ .

Erfolgt z. B. die Biegung durch eine am äußeren Ende wirkende Kraft  $K$ , so ist  $\mathfrak{M}_1 = Kl$  und

$$21) \quad f = \frac{Kl^3}{2EJ_1}.$$

Die Durchbiegung ist also wegen der dreieckigen Zuschärfung im Grundrisse (Fig. 50)  $1\frac{1}{2}$  mal so groß wie bei prismatischen Balken (Gl. 7, S. 47).

$\beta)$  Ist die Höhe  $v$  nach parabolischem Gesetze veränderlich (Fig. 49), so tritt an Stelle der Gl. 4 S. 41 mit den Bezeichnungen der Fig. 60 die folgende:

$v^2 : h^2 = (l-x) : l$  und Gl. 20 geht über in

$$\frac{E}{2\sigma} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sqrt{l}}{h} (l-x)^{-1/2}.$$

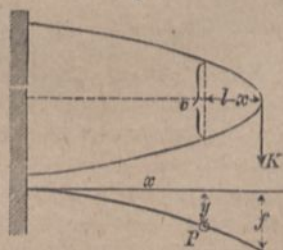


Fig. 60.

Multipliziert man mit  $dx = -d(l-x)$ , so wird nach der ersten Integration

$$\frac{E}{2\sigma} \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{l}}{h} 2\sqrt{l-x} + C,$$

bei wagerechter Einspannung ist für  $x=0$  auch  $\frac{dy}{dx} = 0$ , daher

$$C = \frac{2l}{h}; \text{ das gibt}$$

$$\frac{h}{4} \frac{E}{\sigma} \frac{dy}{dx} = l - \sqrt{l} \sqrt{l-x}.$$

Nochmalige Integration liefert

$$\frac{h}{4} \frac{E}{\sigma} y = l \cdot x + \frac{2}{3} \sqrt{l} (l-x)^{3/2} + C_1,$$

wobei  $C_1 = -\frac{2}{3} l^2$ , weil für  $x=0$  auch  $y=0$  ist.

$y=f$  für  $x=l$  gibt sodann

$$\frac{f}{l} = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{h}, \text{ oder wegen } \sigma = \frac{Kl}{J_1} \frac{h}{2}:$$

$$22) \quad f = \frac{2}{3} \frac{Kl^3}{EJ_1}.$$

In diesem Falle wird also (wegen der nach dem Ende abnehmenden Höhe) die Durchbiegung doppelt so groß wie bei prismatischen Balken (vgl. S. 47).

γ) Eine kreisförmige Biegung nach einem Halbmesser

$$\varrho = \frac{Eh}{2\sigma} = \frac{EJ_1}{\mathfrak{M}_1} = \frac{EJ_1}{K \cdot a}$$

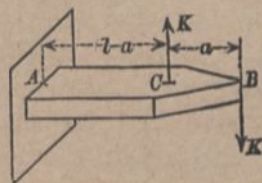
(vergl. S. 48) wird auch bei einem durch ein Kräftepaar  $Ka$  belasteten Balken von der Form der Fig. 61 eintreten. Setzt man dafür eine Parabel vom Parameter  $\varrho$ , so wird die Durchbiegung des Endpunktes  $B$  werden

$$f = \frac{l^2}{2\varrho} = \frac{K \cdot a \cdot l^2}{2EJ_1},$$

wenn  $J_1$  das Trägheitsmoment des Einspannungsquerschnittes.

Ist  $h = 2 \text{ cm}$ ,  $\sigma = 700 \text{ at}$ ,  $E = 2000000 \text{ at}$ , so wird der Krümmungshalbmesser  $\varrho = \frac{2000000 \cdot 2}{2 \cdot 700} = 2857 \text{ cm} = 28,57 \text{ m}$ .

Fig. 61.





d) Prismatischer, an dem einen Ende wagerecht eingespannter, am anderen Ende unterstützter, gleichmäßig belasteter Balken.

Der Balken rage bei  $A$  (Fig. 62) aus der einspannenden Wand hervor; der Endpunkt  $B$  liege genau in der Richtungslinie der Verlängerung des eingespannten Teiles.

Dann ist, wie wir sehen werden, der Auflagerdruck  $B$  mit alleiniger Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen nicht zu bestimmen, somit sind denn auch Biegemomente und Spannungen unbestimmt.

Der Gleichgewichtszustand des Balkens ist statisch unbestimmt. (Vergl. Bd. 1, 4. Aufl., S. 180 u. f.) In solchen Fällen führen nun die Ergebnisse der Biegelehre zur Lösung.

Um uns von der Unbestimmtheit der Aufgabe zu überzeugen, müssen wir uns zuerst die Wirkung der Einspannung klar machen, indem wir uns zunächst bei  $A$  den oberen Teil der einspannenden Wand fortdenken. Dann findet sich (Fig. 63) bei  $A$  nur eine unterstützende Kante; der Balken ist ein einfacher Träger auf zwei Stützen, biegt sich in der Mitte um die Größe  $f$  nach Gl. 16 (S. 50) durch und hat an beiden Enden eine Neigung  $\alpha$  nach Gl. 17 (S. 51) gegen die Wagerechte. Läßt man nun aber an dem links von  $A$  befindlichen Balkenstück ein links herum drehendes Kräftepaar  $\mathcal{M}_1$  wirken, welches sich, von Null beginnend, allmählich vergrößert, so wird dieses Balkenstück mehr und mehr niedergedrückt, und bei einer bestimmten Größe von  $\mathcal{M}_1$  wird die Biegelinie bei  $A$  genau wagerecht sein.

Man kann daraus schließen, daß die wagerecht einspannende Wand außer dem Auflagerdruck  $A$  auch noch ein Einspannungsmoment  $\mathcal{M}_1$  auf den Balken ausübt. Für das Gleichgewicht eines Balkens, an dem neben Kräftepaaren nur lotrechte, nicht schräge Kräfte wirken, lassen sich nicht mehr als zwei voneinander unabhängige Gleichgewichtsgleichungen aufstellen, da zu der Gleichung der wagerechten Kräfte sich keine Glieder ergeben. Zur Bestimmung der drei Unbekannten, nämlich der Auflagerkräfte  $A$  und  $B$

Fig. 62.

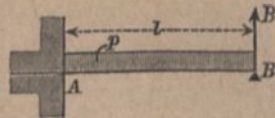
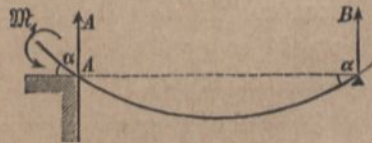


Fig. 63.



sowie des Momentes  $\mathfrak{M}_1$  (Fig. 64), hat man also nur zwei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung; die fehlende dritte Gleichung muß aus der Biegelehre entnommen werden. Man nennt daher Aufgaben der hier vorliegenden Art, bei welchen nur eine (statische) Gleichgewichtsbedingung fehlt: ein fach statisch unbestimmt. Die dritte Gleichung ergibt sich in unserm Falle sehr einfach. Die Kraft  $B$  würde den Endpunkt des bei  $A$  wagerecht eingespannten, unbelasteten Stabes nach S. 48 in die Höhe biegen

um  $\frac{Bl^3}{3EJ}$ . Wäre die Stütze  $B$  nicht vorhanden, so würde die

Belastung den Endpunkt um  $\frac{pl^4}{8EJ}$  nach abwärts biegen. Da in Wirklichkeit der Endpunkt  $B$  in gleicher Höhe mit  $A$  liegt, so heben sich beide Durchbiegungen gegenseitig auf; es wird

$$\frac{Bl^3}{3EJ} = \frac{pl^4}{8EJ} \quad \text{oder}$$

$$1) \quad B = \frac{3}{8} pl = 0,375 pl; \quad \text{somit}$$

$$2) \quad A = \frac{5}{8} pl \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_1 = p \cdot l \cdot \frac{1}{2} l - \frac{3}{8} pl \cdot l = \frac{1}{8} pl^2$$

und zwar ist  $\mathfrak{M}_1$  nach links drehend.

Diese Werte gelten aber nur, wenn die an die Biegelinie bei  $A$  gelegte Tangente genau durch den Punkt  $B$  geht, man hat dann vollkommene Einspannung, die freilich in Wirklichkeit nie genau vorkommt; geringe Abweichungen von dieser Bedingung haben großen Einfluß auf die Auflagerkräfte. Weiteres siehe Elastizitätslehre Keck-Hotopp, Bd. 1.

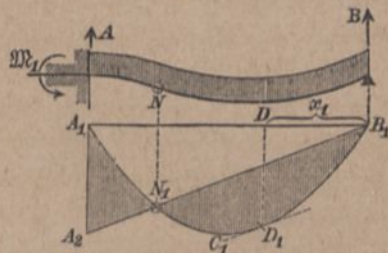
In einem Abstände  $x$  von  $B$  ist das Biegemoment

$$3) \quad \mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2} px^2 = \frac{3}{8} plx - \frac{1}{2} px^2.$$

Fügt man  $\frac{1}{8} plx$  mit  $+$  und  $-$  hinzu, so kann man auch schreiben:

$$4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{1}{2} plx - \frac{1}{2} px^2 - \frac{1}{8} plx \\ &= \frac{1}{2} px(l-x) - \frac{1}{8} plx. \end{aligned}$$

Fig. 64.





Das erste Glied der rechten Seite entspricht (nach Gl. 1 S. 36) einem auf beiden Seiten gestützten (nicht eingespannten) Balken; die entsprechende Momentenfläche ist eine Parabel  $A_1 C_1 B_1$  (Fig. 64) von der Pfeilhöhe  $\frac{1}{8} p l^2$ . Das zweite Glied wird durch die Gerade  $A_2 B_1$  dargestellt, wenn  $A_1 A_2 = \frac{1}{8} p l^2$ . Von den Ordinaten der Parabel muß man diejenigen der Geraden abziehen, um  $\mathfrak{M}$  zu erhalten. Die lotrechte Schraffierung stellt die Momentenfläche dar und zeigt die Veränderlichkeit des Momentes.

Von  $B_1$  (wo  $\mathfrak{M} = 0$ ) beginnend, nimmt das Moment zunächst zu, erreicht an der Stelle  $D_1$ , wo die Parabel || der Geraden  $A_2 B_1$  ist, ein analytisches Maximum  $\mathfrak{M}_{max}$ , nimmt dann wieder ab, wird bei  $N_1$ , wo Parabel und Gerade sich schneiden, zu Null, geht dann ins Negative über und erreicht den größten negativen Wert  $\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{8} p l^2$  an der Einspannungsstelle.

$B$  und  $N$  sind Momentennullpunkte. Im folgenden sollen bei Balken mit wechselnder Biegung die nach unten biegenden Momente, wie beim Balken auf zwei Stützen (S. 36), als positive, die nach oben biegenden Momente als negative bezeichnet werden.

Die Funktion von der Form  $\mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2} p x^2$  erreicht, wie schon S. 38 gefunden (dort war  $A$  statt  $B$  gesetzt), das Maximum

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2p} \text{ für } x_1 = \frac{B}{p};$$

das gibt für  $B = \frac{3}{8} p l$

$$5) \quad \mathfrak{M}_{max} = \frac{9}{128} p l^2 \text{ und } x_1 = \frac{3}{8} l \text{ (Punkt } D_1 \text{ Fig. 64).}$$

Setzt man  $Bx - \frac{1}{2} p x^2 = 0$ , so erhält man die Momentennullpunkte und zwar für  $x = 0$  (Punkt  $B_1$ ) und für  $x = \frac{2B}{p} = \frac{3}{4} l$  (Punkt  $N_1$ ).

Es findet sich also  $\mathfrak{M}_{max}$  mitten zwischen den beiden Momentennullpunkten. Einem Momente = 0 entspricht bei einem Balken, dessen Querschnitt ein Trägheitsmoment  $J > 0$  hat, die Krümmung = 0, und der Krümmungshalbmesser  $\varrho = \infty$  der Biegelinie.  $N_1$  entspricht daher einem Wendepunkte  $N$  der Biegelinie. Rechts von  $N$  kehrt die Biegelinie ihre konvexe Seite nach unten  $\smile$ , wie bei einem Balken auf zwei Stützen; links

von  $N$  ist die Krümmung  $\curvearrowright$  und damit auch das Moment entgegengesetzt, also negativ; vgl. S. 56.

Solche Querschnitte, an denen der Absolutwert des Biegemoments größer ist als zu beiden Seiten daneben, heißen gefährliche Querschnitte. Hier gibt es deren zwei, nämlich  $D$  und  $A$ . Beide sind aber nicht in gleichem Maße gefährlich; denn die Absolutwerte ihrer Momente  $\frac{9}{128}pl^2$  und  $\frac{1}{8}pl^2 (= \frac{16}{128}pl^2)$  verhalten sich wie 9:16. Das absolut größte Moment herrscht also an der Einspannungsstelle und ist dort negativ, sein Zahlenwert aber ebenso groß, als wenn der Balken an beiden Enden einfach gestützt wäre; das größte Moment hat sich daher infolge der Einspannung nicht vermindert, sondern nur von der Mitte nach dem Ende  $A$  verschoben und den Drehsinn verändert.

Eine Verminderung des größten Momentes (und damit auch des erforderlichen Balkenquerschnitts, oder aber eine Vermehrung der Tragfähigkeit des vorhandenen Querschnitts) läßt sich daher erreichen, wenn man die Stütze  $B$  um ein gewisses Maß nach oben schiebt. Durch dieses Aufwärtsbiegen vergrößert man den Stützendruck  $B$ ; infolgedessen wird in  $\mathfrak{M}$  (Gl. 3, S. 55) das positive Glied vergrößert, hierdurch das bisher kleinere Moment  $\mathfrak{M}_{max}$  vergrößert und der absolute Wert des negativen Momentes  $\mathfrak{M}_1$  vermindert. Man erkennt dies deutlicher, wenn man zu dem allgemeinen Ausdrucke für  $\mathfrak{M}$  (Gl. 3), der von der Höhenlage des Punktes  $B$  noch unabhängig ist,  $\mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2}px^2$ , die Größe  $\frac{1}{2}plx$  mit  $+$  und  $-$  hinzufügt, dann hat man:  $\mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2}plx + \frac{1}{2}plx - \frac{1}{2}px^2$  oder

$$6) \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{2}px(l-x) - (\frac{1}{2}pl - B)x.$$

Darin bezeichnet wieder das erste Glied der rechten Seite die unveränderte Parabel  $A_1 C_1 B_1$  (Fig. 64), während das letzte Glied wiederum durch eine Gerade dargestellt wird, deren Endordinate  $A_1 A_2$  nun aber  $= (\frac{1}{2}pl - B)l$ , d. h. von  $B$  abhängig ist, und zwar bedeutet  $A_1 A_2$  wiederum den absoluten Wert  $\mathfrak{M}_1$  des Spannungsmomentes. Man hat also

$$7) \quad \mathfrak{M}_1 = -(\frac{1}{2}pl - B)l.$$

Die günstigste Momentenfläche, d. h. diejenige, in welcher das absolut größte Moment so klein wie möglich ist, kann man zunächst zeichnerisch durch Probieren finden, indem man die



Gerade  $B_1 A_2$  solange um  $B_1$  dreht, bis die beiden lotrecht gemessenen Abstände zwischen der Geraden und der Parabel, welche die Werte  $\mathfrak{M}_{max}$  und  $\mathfrak{M}_1$  darstellen, gleich geworden sind. Eine günstigere Momentenfläche ist nicht mehr denkbar, denn jede Änderung der Richtung von  $B_1 A_2$  würde wohl das eine der beiden Momente verkleinern, das andere aber vergrößern. Hier, wie in den meisten derartigen Fällen, wo mehrere gefährliche Querschnitte vorhanden sind, kommt es also darauf an, die Momente dieser Querschnitte auszugleichen, wenn man den günstigsten Zustand herbeiführen will. Hat man die Ausgleichung zeichnerisch gefunden, so braucht man nur  $A_1 A_2 = (1/2 pl - B)l$  zu setzen und hat damit  $B$  bestimmt. — Der Weg der Rechnung bedingt, daß man das analytische Maximum von  $\mathfrak{M}$  (nach S. 56)  $\frac{B^2}{2p}$  dem Absolutwert von  $\mathfrak{M}_1$ , d. h.  $\frac{pl^2}{2} - Bl$ , gleichsetzt. Diese quadratische Gleichung liefert die beiden Lösungen  $B = pl(-1 \pm \sqrt{2})$ , von denen hier nur der positive Wert, nämlich

$$8) \quad B = pl(-1 + 1,414) = 0,414 pl$$

in Betracht kommen kann; der negative Wert würde ja  $\frac{B^2}{2p}$  sehr groß machen. Man erhält also jetzt einen um  $= 0,039 pl$  größeren Auflagerdruck, als nach Gl. 1. Da nun für diesen Auflagerdruck  $B = 0,414 pl$  die Momente  $\mathfrak{M}_{max}$  und  $\mathfrak{M}_1$  gleich werden, so berechnet man den Wert beider am einfachsten aus dem Absolutwert von  $\mathfrak{M}_1 = 1/2 pl^2 - Bl = pl^2(0,5 - 0,414) = 0,086 pl^2$ . Dem Auflagerdrucke  $B = 0,414 pl$  entspricht daher ein überhaupt größtes Moment

$$9) \quad \mathfrak{M}_{max} = -\mathfrak{M}_1 = 0,086 pl^2,$$

während für  $B = 3/8 pl$  sich  $\mathfrak{M}_1 = -1/8 pl^2 = -0,125 pl^2$  ergab. Der Absolutwert des größten Momentes ist also bei gegebener Balkenlänge und Last im Verhältnis von 125 auf 86 vermindert, somit die Tragfähigkeit auf das  $125:86 = 1,45$ fache gestiegen.

Um nun diejenige Hebung  $f$  des Punktes  $B$  gegen die Einspannungsstelle  $A$  zu finden, welche dieser Verbesserung entspricht, bringt

Fig. 65.



man an die Biegelinie die Kraft  $B = 0,414 pl$  (Fig. 65) und bekommt durch denselben Gedankengang, der auf S. 55 zur Bestimmung von  $B$  für  $f = 0$  führte, jetzt

$$f = \frac{Bl^3}{3EJ} - \frac{pl^4}{8EJ} = \frac{pl^4}{EJ} \left( \frac{0,414}{3} - \frac{1}{8} \right).$$

$$10) \quad f = 0,013 \frac{pl^4}{EJ}.$$

Um die verhältnismäßige Größe dieser Hebung einigermaßen übersehen zu können, führen wir wieder die stärkste Spannung  $\sigma$  ein, indem wir bedenken, daß das größte Moment jetzt  $0,086 pl^2$  beträgt und dieses  $= \sigma \frac{J}{e}$  sein muß, so daß  $\frac{pl^2}{J} = \frac{\sigma}{0,086e}$ . Führt man dies in Gl. 10 ein, so wird

$$11) \quad \frac{f}{l} = 0,151 \frac{\sigma l}{Ee}.$$

Setzt man wieder, wie in anderen Beispielen (S. 51)

$$\sigma = 700; E = 2\,000\,000; \frac{l}{e} = 20,$$

so wird  $\frac{f}{l} = 0,001057$ , d. h. rund  $\frac{1}{1000}$ . Eine Hebung der Stütze  $B$  um  $\frac{1}{1000}$  der Spannweite  $l$  genügt also schon, um die Tragfähigkeit des Balkens auf das 1,45fache zu erhöhen. Von diesem günstigen Ergebnisse würde man gewiß mit Vorteil Gebrauch machen, wenn man sicher wäre, den erstrebten Zustand des Balkens genau erreichen und auf die Dauer erhalten zu können. Wenn man aber die Mittel erwägt, die man zu einer derartig genauen Auflagerung eines Balkens anwenden müßte, so überzeugt man sich leicht, daß eine Balkenanordnung, deren Spannungszustand von solchen Feinheiten abhängt, trotz der Möglichkeit, rechnermäßig sehr günstige Verhältnisse zu liefern, wenig Vertrauen verdient, da durch geringe Abweichungen von der gewünschten Stützenlage eine starke Vergrößerung der Momente eintreten kann, ohne daß man es wahrzunehmen vermag. Dies ist ein Übelstand, der den meisten statisch unbestimmten Anordnungen anhaftet.

#### e) Prismatischer, gleichförmig belasteter Balken auf drei Stützen.

Wir betrachten hier nur den Fall, daß die Zwischenstütze gleiche Entfernung  $l$  von den beiden Endstützen hat. Für einen



solchen Balken (Fig. 66) kann man nur die beiden Gleichgewichtsgleichungen aufstellen:

$$1) \quad A + C + B = 2pl$$

und (in bezug auf  $C$ ):

$$Al - \frac{pl^2}{2} + \frac{pl^2}{2} - Bl = 0 \quad \text{oder}$$

$$2) \quad A = B.$$

Die noch fehlende dritte Gleichung muß wieder der Biegelinie entnommen werden; die Anordnung ist einfach statisch un-

bestimmt. Bei dieser dritten Gleichung kommt es nun wieder wesentlich auf die gegenseitige Höhenlage der Stützen an. Deshalb machen wir gleich von Anfang an die Annahme, die Mittelstütze  $C$  liege um  $c$  unter der Verbindungsgeraden der Endstützen, wobei dann  $c$  beliebig  $\geq 0$  gesetzt werden kann. Geht man mit der Mittelstütze weit genug herunter, so wird der Balken sich schließlich nur auf die End-

stützen (Fig. 67), so daß  $A = B = pl$  und  $C = 0$  wird. Schiebt man dagegen den Punkt  $C$  weit genug in die Höhe (Fig. 68), so wird der Balken sich schließlich von  $A$  und  $B$  ganz abheben und nur auf  $C$  schweben, es wird  $C = 2pl$ , und  $A = B = 0$  sein. Die Biegelinie muß in diesen drei Fällen zur lotrechten Mittel-

linie symmetrisch, d. h. in der Mitte wagrecht sein (Fig. 69), da bei gleichförmiger Belastung und gleicher Stützweite  $l$  kein Grund zur Unsymmetrie vorhanden ist. Wenn man sich nun, wie bei Fig. 58 (S. 49) die linke Hälfte wagrecht eingespannt denkt, so gleicht die rechtsseitige Hälfte  $CB$  in Fig. 69 der Fig. 65 (S. 58)

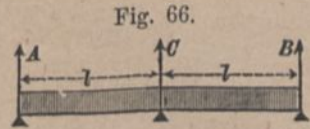


Fig. 66.

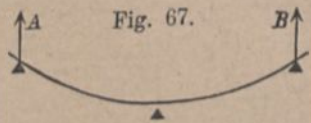


Fig. 67.

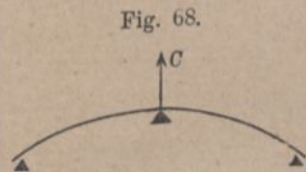


Fig. 68.

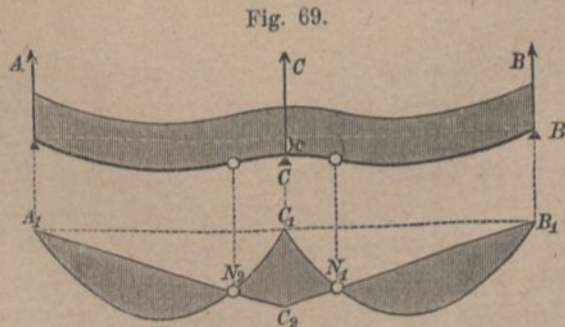


Fig. 69.

Die sämtlichen Untersuchungen von S. 57—59 lassen sich daher hier verwerten. Es wird mit  $c$  statt  $f$

$$c = \frac{Bl^3}{3EJ} - \frac{pl^4}{8EJ}, \text{ mithin}$$

$$3) \quad B = \frac{3}{8}pl + \frac{3EJc}{l^3} = A \text{ und nach Gl. 1}$$

$$4) \quad C = \frac{10}{8}pl - \frac{6EJc}{l^3}.$$

Die Momentenfläche erhält für die rechtsseitige Hälfte dieselbe Form wie in Fig. 64 (S. 55); die linksseitige Hälfte ist dazu symmetrisch.  $\mathfrak{M}_1$  wird hier das Moment über der Mittelstütze, also nach Gl. 7 S. 57.

$$5) \quad \mathfrak{M}_1 = C_1 C_2 = -(1/2 pl - B)l.$$

Den Nullpunkten  $N_1$  und  $N_2$  entsprechen wieder Wendepunkte der Biegelinie. Zwischen den Wendepunkten kehrt die Biegelinie die konvexe Seite nach oben (die Zugspannungen liegen oben), außerhalb derselben ist es umgekehrt. Mitten zwischen  $B_1$  und  $N_1$  liegt ein positives Maximalmoment, das nach S. 56 beträgt:

$$6) \quad \mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2p};$$

ebenso zwischen  $A_1$  und  $N_2$ .

Für  $c = 0$  sind alle Stützen in gleicher Höhenlage, daher  $B = 3/8 pl$ ;  $\mathfrak{M}_1 = -1/8 pl^2$  und nach Gl. 5 S. 56:  $\mathfrak{M}_{max} = 9/128 pl^2$ . Eine Senkung der Mittelstütze um  $c$  vergrößert  $B$ , vergrößert  $\mathfrak{M}_{max}$  und verkleinert gleichzeitig den Absolutwert von  $\mathfrak{M}_1$ .

Die günstigste Anordnung für den Balken wird wieder durch Ausgleichung der Momente  $\mathfrak{M}_{max}$  und  $\mathfrak{M}_1$  erreicht. Dies verlangt nach Gl. 8 (S. 58)

$$7) \quad B = 0,414 pl,$$

was nach Gl. 10 und 11 (S. 59) durch

$$8) \quad \frac{c}{l} = 0,013 \frac{pl^3}{EJ} = 0,151 \frac{\sigma l}{E e}$$

erreicht wird. Die größten Momente stellen sich dann auf

$$9) \quad \mathfrak{M}_{max} = -\mathfrak{M}_1 = 0,086 pl^2,$$

während bei Stützen in gleicher Flucht  $\mathfrak{M}_1 = -0,125 pl^2$  sein würde.



Sollen endlich die Stützendrücke gleich groß werden, also  $A = B = C = \frac{2}{3}pl$ , so ergibt Gl. 3 oder 4

$$10) \quad \frac{c}{l} = 0,0972 \cdot \frac{pl^3}{EJ}.$$

Die Stützensenkung  $c$  ist also dann 7,48 mal so groß, wie für gleiche Biegemomente.

**Beispiel:** Ein Holzbalken von  $2l = 10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$  Länge, im Querschnitte  $15 \text{ cm}$  breit und  $16 \text{ cm}$  hoch, werde von drei Arbeitern getragen, welche den Balken in den Punkten  $A$ ,  $C$  und  $B$  stützen. Es soll die Gewichtsverteilung berechnet werden für verschiedene Höhenlagen der tragenden Schultern. Der Balken hat  $10 \cdot 0,16 \cdot 0,15 = 0,24 \text{ m}^3$  Inhalt. Wiegt  $1 \text{ m}^3$   $600 \text{ kg}$ , so wird das Gesamtgewicht  $2pl = 144 \text{ kg}$ , also  $p = 0,144 \text{ kg/cm}$ . Es ist  $J = \frac{1}{12} 15 \cdot 16^3 = 5120 \text{ cm}^4$ ;  $\mathfrak{B} = 5120 : 8 = 640 \text{ cm}^3$ ;  $E = 100\,000 \text{ at}$ ,  $l = 500 \text{ cm}$ ,  $pl = 72 \text{ kg}$ .

$$\text{somit wird} \quad A = B = \frac{3}{8} \cdot 72 + \frac{3EJc}{l^3} = 27 + 12,29c;$$

$$C = \frac{10}{8} \cdot 72 - \frac{6EJc}{l^3} = 90 - 24,58c.$$

Fehlt die Mittelstütze, so wird  $A = B = 72 \text{ kg}$ ; die Durchbiegung in der Mitte ergibt sich dann für  $C = 0$  zu

$$c = 90 : 24,58 = 3,6 \text{ cm}.$$

Hält der mittlere Arbeiter also seine Schulter um dies Maß niedriger als die beiden anderen, so bekommt er gar keine Last. In diesem Falle ist das größte Moment in der Mitte

$$\frac{1}{8}p(2l)^2 = \frac{1}{2}pl^2 = \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 500 = 18\,000 \text{ cmkg}$$

und die Spannung  $\sigma = 18\,000 : 640 = 28,1 \text{ at}$ .

Sollen alle drei Schultern gleich stark tragen, soll  $A = B = C = \frac{1}{3} \cdot 144 = 48 \text{ kg}$  sein, so muß die mittlere Schulter um  $c = \frac{48 - 27}{12,29} = 1,709 \text{ cm}$  tiefer

liegen als die anderen. In diesem Falle wird nach Gl. 6, bezw. 5,  $\mathfrak{M}_{\max} = \frac{48^2}{2 \cdot 0,144} = 8000$ ,  $\mathfrak{M}_1 = -(\frac{1}{2} \cdot 72 - 48)500 = +6000$ , d. h.  $\mathfrak{M}_1$  wird jetzt ebenfalls positiv, so daß ein Wendepunkt nicht vorkommt. Die stärkste Spannung in diesem Zustande ist  $8000 : 640 = 12,5 \text{ at}$ .

Die Spannung wird am kleinsten für  $\mathfrak{M}_{\max} = -\mathfrak{M}_1$ , d. h. nach Gl. 8 für

$$c = 0,013 \frac{pl^4}{EJ} = \frac{0,013 \cdot 0,144 \cdot 500^4}{100\,000 \cdot 5120} = 0,228 \text{ cm}.$$

Dabei ist  $A = B = 0,414pl = 29,8 \text{ kg}$ ;  $C = 144 - 2 \cdot 29,8 = 84,4 \text{ kg}$ , so daß die mittlere Schulter jetzt erheblich mehr belastet ist. Das größte Moment wird  $0,086pl^2 = 3096$ , die Spannung  $3096 : 640 = 4,8 \text{ at}$ . — Für gleiche Höhenlage der Schultern, d. h.  $c = 0$ , wird  $A = B = 27 \text{ kg}$ ;  $C = 90 \text{ kg}$ ; das größte Moment  $\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{8}pl^2$ , d. h.  $\frac{1}{4}$  so groß wie für  $C = 0$ , also  $\mathfrak{M}_1 = 4500$ ,  $\sigma = 7 \text{ at}$ . — Dagegen wird  $A = B = 0$  und  $C = 144 \text{ kg}$  für  $c = -27 : 12,29$

= -2,20 cm, d. h. wenn die mittlere Schulter um 2,20 cm höher liegt als die anderen. Das größte Moment wird nun  $M_1 = \frac{1}{2} p l^2 - 0$ , d. h. ebenso groß wie für  $C=0$ , nämlich 18000 mit  $\sigma = 28,1 \text{ at}$ .

Die Spannung schwankt also in diesen betrachteten Fällen zwischen 4,8 und 28,1 at. Dem entsprechen freilich, weil ein biegsamer Holzbalken angenommen war, auch ziemlich beträchtliche Höhenverschiebungen; für einen steiferen Eisenträger würden ähnliche Spannungsunterschiede durch viel geringere Verschiebungen bewirkt werden. Kurze Balken auf mehr als zwei Stützen sind hiernach sehr empfindlich gegen Höhenverschiebungen einzelner Stützpunkte und deshalb nur mit Vorsicht zu verwenden.

Soll eine Balkenbrücke mit zwei Öffnungen gebaut werden, so hat man die Wahl, ob man (Fig. 70) Balken verwenden will, die über beide Öffnungen durchgehen, oder ob man auf dem Mittelpfeiler nebeneinander zwei Auflager anbringen und die Balken dort unterbrechen will (Fig. 71). Letzterer Fall hat den Vorzug, statisch bestimmt zu sein; wenn einer der Pfeiler sich etwas senkt, so werden dadurch die Brückenbalken nicht in Spannung geraten, vielmehr werden sie widerstandslos dem Pfeiler folgen.

Fig. 70.

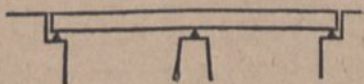
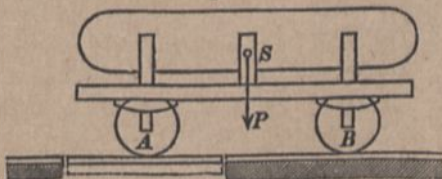


Fig. 71.



Mit der statisch bestimmten Auflagerung eines Trägers auf zwei Stützen hängt auch ein Verfahren zusammen, das Gewicht eines sehr langen, auf einem zweiachsigen Wagen befestigten Dampfkessels zu bestimmen, ohne daß eine zur Aufnahme des ganzen Wagens hinreichende Brückenwage verfügbar ist. Man fährt in diesem Falle mit der einen Achse auf die Wage (Fig. 72) und ermittelt die Last  $A$ , verfährt dann mit der anderen Achse  $B$  in derselben Weise und erhält in der Summe  $A + B$  das Gesamtgewicht  $P$  des belasteten Wagens. Für die Zulässigkeit dieses Verfahrens ist nur erforderlich, daß die Fahrbahn zu beiden Seiten der Wage nicht gar zu uneben sei, damit sich der wagerechte Abstand der Schwerpunktslotrechten von den Achsen nicht merklich ändere. Bei der Verwendung eines dreiachsigen Wagens würde dieses Vorgehen nicht brauchbar sein, weil es höchst unwahrscheinlich ist, daß die Achse, nachdem sie die Wage verlassen hat, noch dieselbe Last trägt wie bei

Fig. 72.





ihrer Stellung auf der Wage, da ja die Plattform der letzteren im belasteten Zustand stets federnd etwas nachgibt.

Bei dieser Gelegenheit möge noch ein Verfahren angegeben werden, wie man das Gewicht eines Längenmeters von einer Eisenbahnschiene oder einem gewalzten Träger bestimmen kann, wenn die vorhandene Wage zur Wägung des ganzen Stabes nicht ausreicht, der Stab aber auch nicht zerschnitten werden soll. Es sei  $l$  die Länge des ganzen Stabes oder Balkens. Von dem rechtsseitigen Ende aus messe man eine Länge  $= 1^m$  ab (Fig. 73) und bringe unter der Mitte  $B$  dieser Länge eine schneidenartige Stütze an. In der Mitte  $A$  der übrigbleibenden Länge  $(l - 1^m)$  werde in gleicher Weise eine Schneide  $A$  angebracht. Der Schwerpunkt der ganzen Schiene liegt dann um  $\frac{1}{2}l$ , die Schneide  $B$  um  $\frac{1}{2}l$  von der Schneide  $A$  entfernt; der Stützendruck  $B$  wird daher

$$B = \frac{P \cdot 0,5}{\frac{1}{2}l} = \frac{P}{l},$$

Fig. 73.

d. h. gleich dem gesuchten Gewicht von einem Längenmeter der Schiene. Dieses Gewicht kann man ermitteln, indem man die Schneide  $B$  auf die Brücke einer Wage stützt. — Zur Erklärung

diene noch folgendes: Denkt man sich die Schiene bei  $C$  durchschnitten, so befindet sich der rechtsseitige Abschnitt auf der Schneide  $B$  im (wenn auch unsicheren) Gleichgewichte, ebenso der lange Abschnitt auf der Schneide  $A$ . Verbindet man die Teile nun an der Schnittstelle  $C$  miteinander, so treten in der Verbindung keine Spannkraften auf; ebensowenig wird dies daher in der ungetrennten Schiene vorkommen. Die Schneide  $B$  trägt also nur das abgemessene (aber nicht abgetrennte) Schienenstück von  $1^m$  Länge. (Dieses Beispiel gehört eigentlich nicht zur Biegelehre, sondern in Teil 1, 3. Aufl. S. 186.)



## 6. Knickfestigkeit.

Wird ein ursprünglich völlig gerader und gleichmäßiger Stab an den Enden durch Druckkräfte  $K$  belastet (Fig. 74), die genau in die Mittellinie des Stabes fallen, so ist nur eine geradlinige Verkürzung des Stabes möglich. Dies zeigt sich auch in Wirklichkeit, solange die Länge des Stabes im Verhältnis zu seiner Querschnittsbreite nicht erheblich ist. Bei größerer Länge aber ist mit der Wirkung der Kräfte  $K$ , sobald diese in ihrer Größe eine gewisse Grenze überschreiten, erfahrungsgemäß eine seitliche Ausbiegung verbunden. Bei allmählichem Anwachsen der Kräfte  $K$  behält der Stab bis zu einer gewissen Größe der Kräfte genau seine gerade Form. Überschreiten die Kräfte jenen Grenzwert, so

tritt ziemlich plötzlich eine Zerstörung durch gleichzeitige Zusammen-  
drückung und Biegung ein, ein Vorgang, den man als „Knickung“  
bezeichnet.

Was die Entstehung dieses eigenartigen Formänderungs- und Zerstörungs-  
vorganges anlangt, so ist die erste Ursache derselben darin zu suchen, daß  
die eingangs genannten Bedingungen der völligen Geradlinigkeit und Gleich-  
mäßigkeit des Stabes und des genauen Zusammenfallens der Druckkräfte  
praktisch mit voller Schärfe nicht erfüllbar sind. Aber auch diese Möglichkeit  
vorausgesetzt, würde, wenn das Längenverhältnis des Stabes zum Querschnitt  
und die Druckkräfte gewisse Grenzen überschreiten, letztere mit den durch  
sie hervorgerufenen gleichmäßig über alle Stabquerschnitte verteilten Druck-  
spannungen, auch wenn diese weit innerhalb der Druckfestigkeit bleiben, nur  
in unsicherem (labilem) Gleichgewicht sein können, derart, daß jede durch  
irgendeine zufällige vorübergehende Ursache (Erdröhrung usw.) entstandene  
noch so kleine Ausbiegung des Stabes eine mehr oder weniger plötzlich ein-  
tretende völlige Ausbiegung bis zum Bruch des Stabes im Gefolge haben  
würde. In dieser Plötzlichkeit des Ausbiegens und Brechens liegt so recht  
eigentlich das Wesen des Knickens.

Um die im Stabe auftretenden Spannungen zu verfolgen, möge  
hier zunächst angenommen werden, der Stab habe sich um ein ge-  
wisses Maß gebogen und befinde sich im Gleichgewichte; seine  
Spannungen seien noch innerhalb der Elastizitätsgrenze. Die beiden  
Kräfte  $K$  sollen in ihrer ursprünglichen Richtung und Lage ver-  
blieben sein (Fig. 75). Führt man an irgendeiner Stelle, wo  
die Ausbiegung gleich  $y$  ist, einen Querschnitt durch den Stab  
und betrachtet das Stück unterhalb  
des Schnittes (Fig. 76), so müssen an

Fig. 74. Fig. 75.

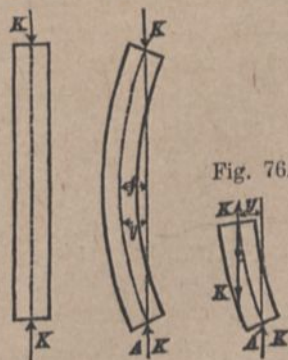


Fig. 76.

dem Schnitte innere Kräfte auftreten,  
die der bei  $A$  angreifenden Kraft  $K$  das  
Gleichgewicht halten. Wegen der Ge-  
ringfügigkeit der Biegung innerhalb der  
Elastizitätsgrenze kann man den Schnitt  
als rechtwinklig zur Richtung von  $K$   
annehmen. Die Richtungslinie von  $K$   
geht um  $y$  an dem Schwerpunkte der  
Querschnittfigur vorbei. Zur Erleichte-  
rung der Spannungsberechnung denken  
wir uns an einem Punkte des unteren  
Stabteils zwei mit  $K$  gleiche und parallele,  
aber einander entgegengesetzte Kräfte  
so hinzugefügt, daß sie durch den Schwerpunkt



der Querschnittfigur gehen; hierdurch wird an dem Gleichgewichtszustande nichts geändert. Die ursprünglich gegebene und die entgegengesetzt hinzugefügte Kraft  $K$  bilden ein Kräftepaar vom Momente  $K \cdot y$ , welches an der rechten, konkaven Seite eine Druckspannung  $\sigma = \frac{K \cdot y \cdot e}{J}$  hervorbringt. Die zweite hinzugefügte Kraft  $K$  aber ist eine durch den Schwerpunkt des Schnittes gehende Druckkraft und erzeugt eine gleichmäßig über die Schnittfläche verteilte Druckspannung  $\frac{K}{F}$ . Diese vereinigt sich mit der aus dem Biegemomente hervorgehenden Druckspannung zu der an dem Schnitt überhaupt vorkommenden größten Druckspannung

$$\sigma'' = \frac{K}{F} + \frac{Kye}{J}.$$

Nennt man  $f$  die stärkste Durchbiegung, welche in der Mitte der Länge  $l$  auftreten muß, so wird die überhaupt größte an dem Stabe vorkommende Spannung die Druckspannung  $\sigma''$ , deren absoluter Wert

$$1) \quad \sigma'' = \frac{K}{F} + \frac{Kfe}{J}.$$

Man könnte erwarten, daß die unbekannte Durchbiegung  $f$  mit Hilfe der Gleichung der Biegelinie zu ermitteln sein würde; doch gelingt ein derartiger Versuch nicht in befriedigender Weise, wie in Keck-Hotopp, Vorträge über Elastizitätslehre, ausführlich entwickelt wird. Der Grund des Mißerfolges liegt in dem Umstande, daß die Biegung nur eine Folge zufälliger Ursachen ist, deren Größe nicht zahlenmäßig feststeht, sondern nur aus der Erfahrung und den Umständen eines bestimmten Falles ermittelt werden kann.

Bei den Belastungsfällen Fig. 58 und 59 (Gl. 14, S. 50 und Gl. 18, S. 51) haben wir die Durchbiegung  $f$  eines Stabes auf die Form

$$f = \frac{1}{12} \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{e} \quad \text{bzw.} \quad \frac{5}{48} \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{e}$$

gebracht, und auf ähnliche Form läßt sie sich auch in den einfachen, in der Tabelle auf S. 48 behandelten Fällen bringen; nur hat die Ziffer vor  $\frac{\sigma}{E}$  in jedem Fall ihren besonderen Wert. Daher können wir auch bei der jetzt vorliegenden Aufgabe mit einiger

Berechtigung  $fe$  verhältnisgleich mit  $l^2$ , also etwa nach Schwarz und Rankine

$$fe = \alpha l^2 \text{ setzen.}$$

Da bei einem nachgiebigen, wenig steifen Stoffe eine starke Durchbiegung eher erwartet werden darf als bei einem verhältnismäßig starren Körper, so ist die Ziffer  $\alpha$  eine in erster Linie von dem Material abhängige Verhältniszahl, und zwar darf der Erfahrung zufolge mit einer gewissen Annäherung etwa gesetzt werden: für Stabeisen  $\alpha = 0,0001$ , für Gußeisen und Holz  $\alpha = 0,0002$ . Natürlich sind dies nur rohe Mittelwerte; eingehendere Versuche haben gezeigt, daß  $\alpha$  nicht ausschließlich nur von dem Stoffe, sondern auch noch, allerdings in nicht ganz einfacher Weise, von dem Längenverhältnis abhängt.

Hiernach wird dann aus Gl. 1:

$$\sigma'' = K \left( \frac{1}{F} + \frac{\alpha l^2}{J} \right).$$

Da der Stab die Freiheit hat, sich nach irgendeiner Richtung auszubiegen, so muß man für vorstehende Gleichung den ungünstigsten Fall, d. h. für  $J$  den kleinstmöglichen Wert annehmen. Ist der Querschnitt z. B. ein Rechteck,  $d$  die kleinere,  $h$  die größere Seite, so ist  $J = \frac{1}{12} h d^3$  zu setzen, in bezug auf die zur Kante  $h$  parallele Schwerpunktsachse. In der Richtung der kleineren Seite  $d$  ist dann die Ausbiegung zu erwarten. Führt man noch den zu  $J$  gehörigen kleinstmöglichen Trägheitshalbmesser  $i$  ein, indem man  $J = F i^2$  setzt, so wird

$$2) \quad \sigma'' = \frac{K}{F} \left( 1 + \alpha \frac{l^2}{i^2} \right), \text{ oder auch mit } n = \left( 1 + \alpha \frac{l^2}{i^2} \right)$$

$$3) \quad F = \frac{K}{\sigma''} \cdot n \text{ und } K = \frac{F \sigma''}{n}.$$

Der Klammerausdruck  $n$  wird für  $l=0$  zu Eins und wächst mit zunehmender Stablänge. Ist  $\sigma''$  die zulässige Druckspannung, so würde  $K:\sigma''$  der bei einer Berechnung auf reine Druckfestigkeit erforderliche Querschnitt sein. Der Zerknickungsfaktor  $n = 1 + \alpha \frac{l^2}{i^2}$  gibt an, in welchem Verhältnisse der Querschnitt wegen der Möglichkeit des Zerknickens vergrößert werden muß.



Die Formel Gl. 2 ist von Prof. Schwarz (Hannover und Berlin) und unabhängig von diesem Forscher auch von Professor Rankine (Glasgow) aufgestellt.

Neuere Versuche, insbesondere von v. Tetmajer haben indes ergeben, daß die Schwarz-Rankinesche Formel (Gl. 2) nicht für alle Längenverhältnisse und namentlich nicht für Stoffe, deren Zugfestigkeit wesentlich geringer ist als ihre Druckfestigkeit, befriedigend mit dem wirklichen Knickvorgange übereinstimmt. (Vergl. Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, I. Teil, S. 283.)

Während nämlich die in Gl. 2 berechnete Druckspannung  $\sigma'' = \frac{K}{F} \left( 1 + \alpha \frac{l^2}{i^2} \right)$  an der konkav gekrümmten Seite des der Knickung ausgesetzten Stabes eintritt, wirkt gleichzeitig in der äußersten Faser an der konvex gekrümmten Seite, wo die größte von der Biegung herrührende Zugspannung mit der gleichmäßig über den Querschnitt verteilten Druckspannung  $\frac{K}{F}$  zusammenfällt, im ganzen eine Zugspannung

$$4) \quad \sigma' = \frac{K}{F} \left( \alpha \frac{l^2}{i^2} - 1 \right).$$

In einer gußeisernen Säule von 800 cm Länge, 20 cm äußerem und 16 cm innerem Durchmesser, also mit einem Querschnitt von  $F = 113 \text{ cm}^2$ ,  $J = 4637 \text{ cm}^4$  und  $i = \sqrt{4637 : 113} = 6,4 \text{ cm}$ , erzeugt eine zentrische Last von 44 000 kg eine größte Druckspannung  $\sigma'' = 1600 \text{ at}$ , wobei nach Gl. 1 eine Ausbiegung  $f = 1,28 \text{ cm}$  und nach Gl. 4 gleichzeitig eine größte Zugspannung

$$4) \quad \sigma' = \frac{44000}{113} \cdot \left\{ \frac{1}{5000} \cdot \left( \frac{800}{6,4} \right)^2 - 1 \right\} = 825 \text{ at}$$

entstehen würde. Bei dem hier vorliegenden Längenverhältnis der Säule hat also in dem Augenblicke, wo infolge seitlicher Ausbiegung die Druckspannung bis zur Elastizitätsgrenze (1600 at) angewachsen ist, die Zugspannung diese Grenze (600 at) bereits weit überschritten, und die Zerstörung der Säule wird daher durch Zerreißen und nicht, wie bei Entwicklung der Schwarz-Rankineschen Formel angenommen, durch Zerdücken erfolgen. Wäre die Säule bei gleichem Querschnitt nur 670 cm lang, so würde sie nach Gl. 2 durch eine Last von 56 500 kg eine größte Druckspannung von

$$\sigma'' = \frac{56500}{113} \cdot \left[ \frac{1}{5000} \cdot \left( \frac{670}{6,4} \right)^2 + 1 \right] = 1600 \text{ at}$$

und nach Gl. 4 gleichzeitig eine größte Zugspannung

$$\sigma' = \frac{56500}{113} \cdot \left[ \frac{1}{5000} \cdot \left( \frac{670}{6,4} \right)^2 - 1 \right] = 600 \text{ at}$$

erfahren, also sowohl gegen die Elastizitätsgrenze für Druck als für Zug die gleiche Sicherheit „eins“ aufweisen. Für verhältnismäßig kürzere Säulen

würde die Sicherheit gegen Zug größer sein, die Zerstörung also durch Zerdrücken erfolgen wie in der Schwarz-Rankineschen Formel angenommen; für verhältnismäßig längere Säulen indes würde entgegen jener Annahme die Knickung zuerst, ein Zerreißen der Fasern an der konvexen Seite zur Folge haben. Darin liegt ein Mangel der sonst in ihrem Bau die Beziehung zwischen den äußeren und inneren Kräften beim Knickvorgange zutreffend ausdrückenden Schwarz-Rankineschen Formel. Die Behebung desselben könnte etwa in der Weise geschehen, daß für diejenigen Fälle, in welchen das Verhältnis  $l:i$  die Grenze überschreitet, bei der die Zerstörung anfängt durch Zerreißen zu erfolgen, ein besonderer Wert der Ziffer  $\alpha$  auf Grund der Gl. 4 durch Versuche ermittelt würde.

Nach den Versuchen von v. Tetmajer ist die Kraft  $K$ , welche einen prismatischen Stab zum Knicken bringt, bezw. der äußerste Widerstand, welchen der Stab dem Knicken entgegenzusetzen vermag,

$$5) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) Für Schweißeisen bei Längenverhältnissen von } \frac{l}{i} = 10 \\ \quad \text{bis } \frac{l}{i} = 112 \\ \qquad \qquad \qquad K = F \cdot \left( 3030 - 12,9 \frac{l}{i} \right). \\ \text{b) Für Flußeisen bei } \frac{l}{i} = 10 \text{ bis } \frac{l}{i} = 105 \\ \qquad \qquad \qquad K = F \cdot \left( 3100 - 11,4 \frac{l}{i} \right). \\ \text{c) Für Gußeisen bei } \frac{l}{i} = 5 \text{ bis } \frac{l}{i} = 80 \\ \qquad \qquad \qquad K = F \cdot \left[ 7760 - 120 \frac{l}{i} + 0,53 \left( \frac{l}{i} \right)^2 \right]. \\ \text{d) Für lufttrockenes Holz bei } \frac{l}{i} = 1,8 \text{ bis } \frac{l}{i} = 100 \\ \qquad \qquad \qquad K = F \cdot \left( 293 - 1,94 \frac{l}{i} \right). \end{array} \right.$$

Für größere Werte des Längenverhältnisses  $\frac{l}{i}$  als die in den Formeln 5 angegebenen gilt nach den v. Tetmajerschen Versuchen für den Knickwiderstand die von Euler entwickelte und nach ihm benannte Gleichung (vergl. Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, 1. Teil, S. 280)

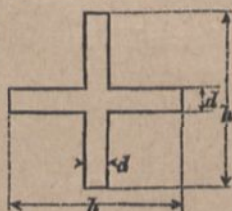
$$6) \qquad \qquad \qquad K = \frac{\pi^2 \cdot J E}{l^2}.$$



Von den in Gl. 5 und 6 berechneten äußersten Knickwiderständen ist bei der Anwendung auf Bauverbände nur  $\frac{1}{n}$  als „Zulässige Belastung“ zu wählen, wenn  $n$  die den obwaltenden Verhältnissen zu entnehmende Sicherheitsziffer bezeichnet. (Vergl. S. 11.)

Bei einem auf Knicken beanspruchten Stabe muß die Querschnittsform zweckmäßig so gewählt werden, daß bei gegebener Fläche  $F$  das Quadrat des kleinsten Trägheitshalbmessers  $i$  möglichst groß werde. Man muß den Querschnitt so anordnen, daß zwei zueinander rechtwinklige Symmetrieachsen gleich großes Trägheitsmoment liefern. Jede Abweichung von dieser Form würde wohl in einer Richtung die Steifigkeit vergrößern, aber ohne entsprechenden Nutzen für die Steifigkeit in anderer Richtung. Von allen rechteckigen Querschnitten verdient also das Quadrat den Vorzug. Der Kreis kommt bei den natürlichen Baumstämmen zur Anwendung. Bei Verwendung von Eisen wird man hohlen Querschnittsformen (Ring, hohlem Quadrat) und gerippten Formen, z. B. dem Kreuzquerschnitte mit gleichen Rippen (Fig. 77) den Vorzug geben; doch ist letzterer Querschnitt nicht so günstig, weil er bei gleichem Flächeninhalt ein viel kleineres  $J$  hat, als obige Hohlquerschnitte.

Fig. 77.



Die Zerknickungslänge  $l$  ist abhängig von der Art der Befestigung der Stabenden und wird nur bei reibungsloser Spitzenlagerung gleich der Stablänge selbst. Hierüber und hinsichtlich einer Reihe anderer Entwicklungen über Knickfestigkeit vergleiche man Keck-Hotopp, Vorträge über Elastizitätslehre. 1. Teil.

Beispiele: Für einen Schmiedeeisenstab von 100 cm Länge, dessen Querschnitt ein Quadrat von 2 cm Seite, ist  $i^2 = 2^2 : 12$ , und der Zerknickungsfaktor

$$n = 1 + 0,0001 \cdot \frac{100^2}{2^2} \cdot 12 = 4.$$

Bei 700 at zulässiger Druckspannung, d. i. etwa 5 facher Sicherheit, wird daher nach Gl. 2 die zulässige Belastung

$$K = 2^2 \cdot 700 : 4 = 700 \text{ kg.}$$

Nach Gl. 6 berechnet sich der äußerste Knickwiderstand des Stabes zu

$$\pi^2 \frac{2 \cdot 2^3 \cdot 2000000}{12 \cdot 100^2} = 2670 \text{ kg.}$$

Er vermag also die Last 700 kg mit einer

$$\frac{2670}{700} = 3,8\text{fachen Sicherheit zu tragen.}$$

Für einen kreuzförmigen Querschnitt (Fig. 77) ist nach S. 25

$$J = \frac{1}{12} d h^3 \left( 1 + \frac{d^2}{h^2} - \frac{d^3}{h^3} \right).$$

$$F = 2 d \cdot h - d^2 = d \cdot h \left( 2 - \frac{d}{h} \right).$$

Bei der Berechnung von  $i^2$  und  $n$  kann man (im Hinblick auf die Unsicherheit des Wertes  $\alpha$ ) wegen der Kleinheit von  $d:h$  dieses Glied und noch mehr seine höheren Potenzen gegen 1 vernachlässigen und hat dann angenähert

$$i^2 = \frac{J}{F} = \frac{d \cdot h^3}{12 \cdot 2 d \cdot h} = \frac{h^2}{24}, \text{ also}$$

$$n = 1 + \alpha 24 \frac{l^3}{h^3}.$$

Für Schmiedeeisen und  $l = 20 h$  ist  $n = 1 + 0,96$  oder rund  $n = 2$  (Aufrundungen sind bei der Berechnung von  $n$  sehr angebracht). Ist dann z. B.  $d = 2,5 \text{ cm}$ ,  $h = 20$ , also  $l = 400 \text{ cm}$ , so wird

$$F = 2 \cdot 2,5 \cdot 20 - 2,5^2 = 93,75 \text{ cm}^2$$

und mit  $\sigma'' = 700$  ergibt sich die zulässige Belastung

$$K = \frac{700 \cdot 93,75}{2} = 32813 \text{ kg.}$$

Ist der Stab aus Gußeisen, so wird  $\alpha$  doppelt so groß, daher für obigen Kreuzquerschnitt

$$n = 1 + 1,92 = 2,92, \text{ rund } 3.$$

Nimmt man wiederum  $\sigma'' = 700$ , so wird

$$K = \frac{700 \cdot 93,75}{3} = 21875 \text{ kg. —}$$

Nach Gl. 6 ist für den vorliegenden Stab mit  $E = 1000000$  at der äußerste Knickwiderstand

$$K = \pi^2 \cdot \frac{2,5 \cdot 20^2}{12} \cdot \frac{1000000}{400^2} = 104000 \text{ kg.}$$

Die Last von 21875 würde der gußeiserne Stab hiernach also mit einer  $104000 : 21875 = 4,8$ fachen Sicherheit zu tragen imstande sein.

Ein weiteres Zahlenbeispiel s. S. 83/84.

## 7. Verdrehungsfestigkeit (Torsionsfestigkeit).

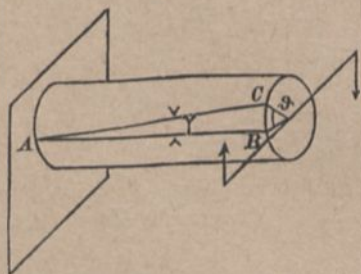
a) Stab von kreisförmigem und kreisringförmigem Querschnitte.

Greifen an beiden Enden eines Zylinders gleiche Kräftepaare von entgegengesetztem Drehsinn an, deren Ebenen rechtwinklig zur



Zylinderachse sind, so heben sich diese Paare am starren Körper bekanntlich ohne weiteres auf (1. Teil, 2. Aufl., S. 108); für den elastisch-festen Körper gilt dies aber nur unter der Voraussetzung, daß seine Widerstandsfähigkeit hinreicht und auch dann erst, nachdem eine entsprechende Formänderung stattgefunden hat. Diese Formänderung besteht in einer Verdrehung; die einzelnen Querschnittebenen verdrehen sich derartig gegeneinander, daß die ursprünglich

Fig. 78.



geraden Zylinderseiten (z. B.  $AB$ ) in sehr steile Schraubenlinien (z. B.  $AC$ ) übergehen. (In Fig. 78 ist das linksseitige Ende des Zylinders festgehalten gedacht.) Die Verdrehungen der Querschnitte gegeneinander sind als Gleitungen der einzelnen Querschnittsteile aufzufassen, mit denen das Auftreten entsprechender Schubspannungen verbunden ist. Versuche haben ferner gezeigt, daß Halbmesser eines Querschnitts auch nach der Formänderung noch geradlinig sind. Daraus folgt, daß die Gleitung in der Achse bei  $O$  (Fig. 79) Null ist und verhältnismäßig mit dem Abstände  $\varrho$  von  $O$  nach außen zunimmt. Da nun nach Gl. 1, S. 16

$$1) \quad \gamma = \frac{\tau}{G},$$

d. h. die Gleitung verhältnismäßig mit der Schubspannung ist, so muß auch die Schubspannung mit  $\varrho$  verhältnismäßig sein. Nennt man also die Schubspannung in den Abständen  $\varrho$  und  $r$  von der Mitte  $\tau_\varrho$  bzw.  $\tau$ , so ist (ähnlich wie für die Biegespannungen Gl. 1, S. 19)

$$2) \quad \tau_\varrho : \tau = \varrho : r.$$

Nimmt man aus dem kreisförmigen Querschnitt einen dünnen Ring vom Halbmesser  $\varrho$  und von der Fläche  $dF$  heraus, so tritt an diesem durchweg die gleiche Schubspannung  $\tau_\varrho$  in tangentialer Richtung, d. h. rechtwinklig zum Halbmesser  $\varrho$  auf; das gibt für die

Fig. 79.



Ringfläche  $dF$  eine gesamte innere Tangentialkraft  $dF \cdot \tau \rho$ , welche in bezug auf die Zylinderachse ein Spannungsmoment

$$d\mathfrak{M} = \tau \rho \cdot dF \cdot \rho \text{ liefert.}$$

Dies ist das der weiteren Verdrehung entgegenwirkende Moment des Ringes. Summiert man über den ganzen Querschnitt, so ist das gesamte Spannungsmoment mit Rücksicht auf Gl. 2

$$\mathfrak{M} = \frac{\tau}{r} \int dF \cdot \rho^2,$$

welches dem verdrehenden Kräftepaare gleich sein muß. Wir können daher,  $\mathfrak{M}$  unmittelbar als das Verdrehungsmoment bezeichnen. Der Wert  $\int dF \cdot \rho^2$  bedeutet nach (1. Teil, 2. Aufl., S. 274) das polare Trägheitsmoment  $J_0$  des Querschnittes in bezug auf die Achse  $O$  des Stabes. Sonach wird

$$3) \quad \frac{\tau}{r} \cdot J_0 = \mathfrak{M}.$$

Diese Formel ist ähnlich gestaltet wie die Gl. 3, S. 22, für die Biegespannung. Nur kommt hier das polare Trägheitsmoment in Frage.

Der Winkel  $\vartheta$ , um den sich der eine Querschnitt gegen einen um  $l$  davon entfernten verdreht, heißt der Verdrehungswinkel. Die Berechnung desselben folgt leicht aus Fig. 78. Die Abweichung der Schraubenlinie  $AC$  von der Geraden  $AB$  ist die der Schubspannung  $\tau$  der äußeren Mantelfläche entsprechende Gleitung; daher wird der Verdrehungsbogen  $BC = \gamma l$ . Weil aber auch  $BC = r \vartheta$ , so wird  $r \vartheta = \gamma l$  oder

$$4) \quad \vartheta = \frac{\tau l}{G r} = \frac{\mathfrak{M} l}{G J_0}$$

(entsprechend Gl. 9, S. 46).

Diese Gleichungen gelten für kreis- und kreisringförmige Querschnitte. Für Vollkreise ist (nach 1. Teil, 2. Aufl., S. 274)  $J_0 = \frac{1}{2} r^4 \pi$ , womit Gl. 3 übergeht in:

$$\tau \cdot \frac{1}{2} r^3 \pi = \mathfrak{M}.$$

Für einen Ring von den Halbmessern  $R$  und  $r$  ist

$$J_0 = \frac{1}{2} (R^4 - r^4) \pi.$$

Die Formeln 2—4 sind nicht nur für den ruhenden Zylinder, sondern auch für den gleichförmig um seine Achse sich drehenden



Zylinder verwendbar, weil die dieser Drehung entsprechenden Ergänzungskräfte (Zentrifugalkräfte) in den einzelnen Teilen des Körpers nur (meist unbedeutende) Zugspannungen hervorrufen.

**Beispiel:** Auf einer Maschinenwelle (Fig. 80) befinden sich zwei Zahnräder im Abstand  $l = 250$  cm voneinander. Am Umfange des rechtsseitigen vom Halbmesser  $= 40$  cm wirke eine Kraft  $K = 1000$  kg. Dadurch entsteht ein Drehmoment  $M = 40\,000$  cmkg, welches durch ein gleiches widerstehendes Moment am anderen Zahnrade aufgehoben werden möge. Die zulässige Schubspannung möge mit Rücksicht auf mögliche Unregelmäßigkeiten der Bewegung nur zu  $\tau = 200$  at angenommen werden, dann gilt für den erforderlichen Wellenhalbmesser  $r$

$$200 \cdot \frac{1}{2} r^3 \pi = 40\,000 \quad \text{oder} \quad \text{rund } r = 5 \text{ cm.}$$

Die elastische Verdrehung der beiden Zahnräder gegeneinander beträgt (Gl. 4) mit  $G = 0,4 E = 800\,000$  für Stabeisen

$$\vartheta = \frac{200}{800\,000} \frac{250}{5} = \frac{1}{80},$$

oder in Graden  $0^\circ 43'$ .

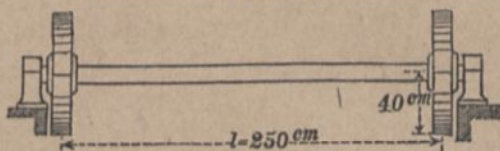


Fig. 80.

### b) Stab von rechteckigem Querschnitte.

So einfach die Drehungsfestigkeit eines zylindrischen Stabes zu berechnen war, so verwickelt werden die Verhältnisse bei Stäben anderer Querschnittsform. Ein für diese Untersuchung wichtiges Ergebnis folgt aus einer Eigenschaft der Schubspannungen an einem würfelförmigen Körper. Denkt man sich aus einem Körper, der durch schiebende, parallel der Bildebene wirkende Kräfte angegriffen ist, einen Würfel von der Seite  $= 1$  herausgeschnitten (Fig. 81) und nimmt an, daß an der oberen Fläche  $DC$  eine wagerecht nach rechts gerichtete Schubspannung  $\tau$  auftritt, der an  $AB$  eine gleiche nach links gerichtete entgegenwirkt, so fordert das Gleichgewicht gegen Drehung, daß dieses Kräftepaar durch ein gleiches entgegengesetztes aufgehoben werde. Die ersten beiden Schubspannungen  $\tau$  bedingen

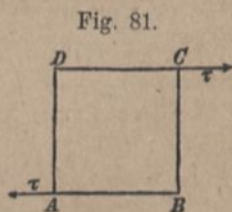


Fig. 81.

also das Auftreten von Schubspannungen gleicher Größe an den Flächen  $AD$  und  $BC$  (Fig. 82), also den Satz:

An den vier zu einer Ebene rechtwinkligen Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipedes treten in den Richtungen parallel zu jener Ebene stets gleiche Schubspannungen auf.

Gehört nun die Seitenfläche  $AD$  etwa der freien Mantelfläche eines auf Drehung beanspruchten Körpers an, so kann an dieser keine rechtwinklig zur Mantelfläche gerichtete Schubspannung auftreten, und damit wird auch die in  $AB$  rechtwinklig zu der Mantelfläche gerichtete Schubspannung Null. Hiernach müssen an einem solchen Körper die am äußeren Rande eines Querschnitts auftretenden Schubspannungen notwendig parallel der Begrenzung des Querschnittes sein. Ist aber  $ABCD$  (Fig. 83)

der rechteckige Querschnitt des Stabes mit den Seiten  $AB = b$ ,  $BC = h$ , wobei  $h \geq b$ , so kann an einer Kante, z. B. bei  $D$ , gar keine Schubspannung auftreten, weil sowohl die zu  $AD$ , wie auch die zu  $CD$  rechtwinklige Schubspannung verschwinden muß. Es folgt also das auf den ersten Blick überraschende Ergebnis, daß die von der Achse des Stabes am weitesten entfernten Querschnittsteile an den vier Ecken spannungslos sind.

Über die Veränderlichkeit der längs des Randes eines Querschnittes auftretenden Schubspannungen gibt die Größe der Gleitung an den verschiedenen Stellen der Mantelfläche des Stabes Auskunft (siehe C. Bach, Elastizität und Festigkeit). Versieht man die Mantelfläche des Stabes mit einem Netze von Quadraten und beobachtet diese, nachdem die Verdrehung stattgefunden hat, so findet man, daß die Quadrate sich im allgemeinen in Rhomben verwandelt haben. Die Abweichung der Rhomben von den Quadraten kennzeichnet unmittelbar die Gleitung an den

Fig. 82.

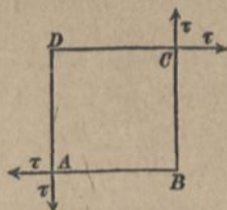
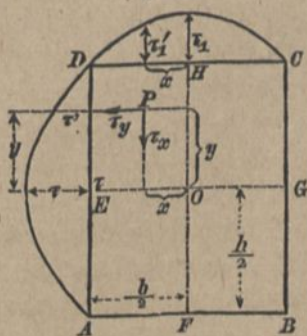


Fig. 83.





verschiedenen Stellen. Dabei bestätigt sich zunächst, daß an den Kanten  $ABCD$  die Figuren quadratisch geblieben sind. Ferner ergibt sich, daß die Gleitungen in denjenigen Punkten  $E$  und  $G$  des Umfanges, welche der Achse am nächsten liegen, am stärksten sind, während sie in den Mittelpunkten  $F$  und  $H$  der kurzen Seiten zwar auch einen Größtwert erreichen, der aber hinter dem bei  $E$  und  $G$  zurückbleibt. Die Spannungen sind mit den Gleitungen verhältnismäßig. Sind  $\tau$  und  $\tau_1$  die Schubspannungen an den Punkten  $E$  und  $H$ , so kann man diese den Entfernungen von der Achse umgekehrt proportional annehmen, d. h.

$$5) \quad \tau_1 : \tau = b : h.$$

Längs der Seitenfläche  $AD$  muß die Spannung nach einem stetigen Gesetze sich ändern; das einfachste der hier wahrscheinlichsten Gesetze ist das parabolische, das man durch die über der Sehne  $AD$  stehende Parabel darstellen kann, wenn man die Werte  $\tau'$  rechtwinklig zu ihrer Richtung als Ordinaten zu ihren Angriffspunkten aufträgt. Nimmt man diese parabolische Verteilung der Schubspannung über der Mantelfläche als gültig an, so wird für die Spannung  $\tau'$  im Abstand  $y$  von der Mitte:

$$y^2 : \frac{1}{4} h^2 = (\tau - \tau') : \tau \quad \text{oder}$$

$$6) \quad \tau' = \tau \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

Ebenso wird in einem Abstand  $x$  von der Mitte  $H$  der kürzeren Seite die Spannung

$$7) \quad \tau'_1 = \tau_1 \left( 1 - \frac{4x^2}{b^2} \right), \quad \text{oder wegen Gl. 5:}$$

$$8) \quad \tau'_1 = \tau \frac{b}{h} \left( 1 - \frac{4x^2}{b^2} \right).$$

Von  $E$  bis  $O$  und von  $H$  bis  $O$  muß die Spannung bis auf Null abnehmen, und es steht nichts im Wege, dafür ein geradliniges Gesetz anzunehmen.

Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt  $P$  des Querschnitts mit den Koordinaten  $x$  und  $y$ , so kann man die dort herrschende Spannung zerlegen in  $\tau_x$  und  $\tau_y$  rechtwinklig zu  $x$  und  $y$ . Man

kann dann mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit annehmen, daß  $\tau_x$  und  $\tau_y$  in geradliniger Beziehung zu  $\tau'$  bzw.  $\tau'_1$  stehen, d. h.

$$9) \quad \tau_x : \tau' = x : \frac{1}{2}b \quad \text{und}$$

$$10) \quad \tau_y : \tau'_1 = y : \frac{1}{2}h, \quad \text{oder}$$

$$11) \quad \tau_x = \frac{2\tau}{b} x \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \quad \text{und}$$

$$12) \quad \tau_y = 2\tau \frac{b}{h^2} y \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right).$$

Leicht überzeugt man sich, daß auch an keinem Punkte  $P$  im Innern des Querschnitts die Spannung größer als die Randspannung  $\tau$  in den Punkten  $E$  und  $G$  werden kann. An der Stelle  $P$  ist nämlich die Gesamtspannung

$$\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = \tau \sqrt{\frac{4x^2}{b^2} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2 + \frac{4b^2}{h^4} y^2 \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)^2}.$$

Setzen wir den Wert unter dem letzten Wurzelzeichen  $= U^2$ , so ist, weil

$$\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2 \leq 1 \quad \text{und} \quad \frac{4b^2}{h^4} y^2 < 1,$$

$$U^2 < \frac{4x^2}{b^2} + \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)^2, \quad \text{d. h.} \quad < \frac{4x^2}{b^2} + 1 - \frac{8x^2}{b^2} + \frac{16x^4}{b^4}, \quad \text{oder}$$

$$U^2 < 1 - \frac{4x^2}{b^2} + \frac{16x^4}{b^4}, \quad \text{d. h.} \quad < 1 - \frac{4x^2}{b^2} \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right).$$

Die Größe auf der rechten Seite ist aber jedenfalls  $\leq 1$ , mithin ist  $U$  ein echter Bruch, d. h.

$$\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} \leq \tau.$$

Es muß nun noch die stärkste Schubspannung  $\tau$  auf das Verdrehungsmoment  $\mathfrak{M}$  zurückgeführt werden. Dies geschieht mittels der Momentengleichung wie folgt:

An einem Flächenteilchen  $dF = dx \cdot dy$  bei  $P$  wirken die inneren Kräfte  $\tau_x \cdot dF$  und  $\tau_y \cdot dF$  und liefern in bezug auf die Achse  $O$  des Stabes das innere Moment  $(\tau_x x + \tau_y y) dF$ . Daher gilt für das Verdrehungsmoment

$$\mathfrak{M} = \int (\tau_x x + \tau_y y) dF \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{M} = 2\tau \int \left\{ \frac{x^2}{b} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) + \frac{b}{h^2} y^2 \left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right) \right\} dF$$

$$= 2\tau \left\{ \frac{1}{b} \int dF \cdot x^2 - \frac{4}{h^2 b} \int dF \cdot x^2 y^2 + \frac{b}{h^2} \int dF \cdot y^2 - \frac{4}{h^2 b} \int dF \cdot x^2 y^2 \right\}.$$

Nun ist  $\int dF \cdot x^2 = J_2$  das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse  $OH$ ;  $\int dF \cdot y^2 = J_1$  das Trägheitsmoment für die Achse  $OE$ ;



wird aber  $\int dF \cdot y^2 = \frac{1}{12} b h^3$  noch mit  $\frac{b}{h^2}$  multipliziert, so entsteht daraus  $\frac{b}{h^2} \int dF \cdot y^2 = \frac{1}{12} b^2 h = \frac{1}{b} J_2$ . Endlich ist noch zu lösen

$$\int dF \cdot x^2 y^2 = \int dx \cdot dy \cdot x^2 y^2.$$

Ein wagerechter Flächenstreifen liefert hierzu den Beitrag

$$y^2 dy \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2 dx = 2y^2 dy \int_0^{\frac{b}{2}} x^2 dx = y^2 dy \frac{b^3}{12},$$

die ganze Fläche also den Wert

$$\int dF \cdot x^2 \cdot y^2 = \frac{2b^3}{12} \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{b^3 h^3}{12 \cdot 12}.$$

Setzt man diese Werte oben ein, so entsteht:

$$\mathfrak{M} = \tau \left\{ \frac{4}{b} J_2 - \frac{16 b^3 h^3}{h^2 b 144} \right\} = \tau \left\{ \frac{4}{b} J_2 - \frac{4 J_2}{3 b} \right\} = 4 \tau \frac{J_2}{b} \left( 1 - \frac{1}{3} \right).$$

$$13) \quad \mathfrak{M} = \frac{8}{3} \tau \frac{J_2}{b} = \frac{4}{3} \tau \frac{J_2}{\frac{1}{2} b} = \frac{2}{9} \tau \cdot F \cdot b \quad \text{und ebenso}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{4}{3} \tau_1 \frac{J_1}{\frac{1}{2} h}, \quad \text{oder}$$

$$14) \quad \tau = \frac{3 \mathfrak{M} b}{8 J_2} = 4,5 \frac{\mathfrak{M}}{h \cdot b_2}; \quad \tau_1 = \frac{3 \mathfrak{M} h}{8 J_1} = 4,5 \frac{\mathfrak{M}}{b h^2}, \quad \text{d. h. :}$$

Bei einem auf seine Drehungsfestigkeit beanspruchten Stabe von rechteckigem Querschnitte tritt die stärkste Schubspannung  $\tau$  an denjenigen Punkten der Umfangslinie auf, welche der Stabachse am nächsten liegen, nämlich in dem Abstand  $\frac{1}{2}b$ . Für die Drehungsfestigkeit ist das auf die längere Mittellinie bezogene (kleinere) Trägheitsmoment  $J_2 = \frac{1}{12} h b^3$  maßgebend.

Beispiele: 1. Ist der Querschnitt ein Quadrat von der Seite  $d$ , so wird

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{9} F d \tau = 5,222 F^{2/3} \tau = 0,222 d^3 \tau;$$

2. beim Kreise vom Durchmesser  $d$  wird

$$\mathfrak{M} = \frac{Fr}{2} \tau = \frac{1}{4} F d \tau = 0,282 F r^{3/2} \tau = 0,2 d^3 \tau.$$

Bei gleichem Querschnitt  $F$  ist also der Kreis, bei gleicher Breite (Durchmesser = Quadratseite) das Quadrat gegen  $\mathfrak{M}$  widerstandsfähiger.

Der Verdrehungswinkel  $\vartheta$  eines Stabes von rechteckigem Querschnitte wäre nach der im Querschnittspunkte  $E$  (Fig. 83) herrschenden Spannung  $\tau$  und der daraus folgenden Gleitung  $\gamma = \tau : G$  zu  $\frac{\tau}{G} \frac{l}{1/2 b}$ , d. h. mittels Gl. 14, S. 78 zu  $\frac{3 \mathfrak{M} l}{4 G J_2}$  zu erwarten, nach der im Punkte  $H$  herrschenden Spannung  $\tau_1 = \tau \frac{b}{h}$  aber zu

$$\frac{\tau_1}{G} \frac{l}{1/2 h} = \frac{3 \mathfrak{M} l}{4 G J_1}.$$

In Wirklichkeit verdrehen sich die beiden Symmetrieachsen des Querschnitts annähernd um das arithmetische Mittel dieser beiden Werte, d. h. es ist ungefähr

$$15) \quad \vartheta = \frac{3 \mathfrak{M} l}{8 G} \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right).$$

Die beiden Symmetrieachsen bleiben zueinander rechtwinklig; die übrigen vom Mittelpunkte aus gezogenen Radien verdrehen sich um verschiedene Winkel und treten aus der ursprünglichen Querschnittebene heraus, so daß diese in eine krumme Fläche übergeht. Bessere Übereinstimmung mit Bauschingers Versuchen (Zivilingenieur 1881, S. 115 u. f.) ergibt sich noch, wenn man  $3/8 = 0,375$  (in Gl. 15) mit  $0,3$  vertauscht, also setzt:

$$\vartheta = 0,3 \frac{\mathfrak{M}}{G} \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right) l.$$

Nach Einführung von  $\mathfrak{M} = \frac{8}{3} \tau \frac{J_2}{b}$  (Gl. 13) wird hieraus

$$16) \quad \vartheta = 0,8 \frac{\tau l}{G b} \left( 1 + \frac{J_2}{J_1} \right) = 0,8 \frac{\tau l}{G b} \left( 1 + \frac{b^2}{h^2} \right).$$

## 8. Einfache Fachwerkbalken auf zwei Stützen.

### a) Art der Berechnung der Spannkkräfte.

An Stelle der S. 24 und 30 behandelten Balken, die entweder aus einem Stücke bestanden, oder, wenn auch aus Teilen zusammen-



gesetzt, doch einen möglichst stetig zusammenhängenden Körper bildeten (S. 36), kann man auch gegliederte Stabanordnungen verwenden, zu deren Grundgedanken schon die Betrachtung der Gelenkstanzen-Verbindungen (1. Teil, 4. Aufl., S. 215) geführt hatte; es sind dies die einfachen Fachwerke.

Ein einfaches Fachwerk besteht meist in einer Aneinanderreihung (Verbindung) von Gelenkstanzen-Dreiecken, von denen je zwei benachbarte eine Seite gemeinsam haben. Wir behandeln im folgenden nur dieses einfache Dreiecksfachwerk.

Wird ein Fachwerk auf Stützen gelegt, deren eine nur in einer bestimmten (lotrechten) Richtung Widerstände leisten kann, so bildet es einen Fachwerkbalken oder Fachwerkträger (Fig. 84).

Eine Stange, welche durch zwei reibungslose Gelenke mit anderen verbunden ist, erfährt, wenn die äußeren Kräfte nur in diesen Gelenkpunkten angreifen (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 219), eine Spannkraft, deren Richtungslinie in die Verbindungsgerade der beiden Gelenkpunkte fällt. Ist diese Verbindungsgerade dann zugleich die Mittellinie des Stabes, so wird letzterer nur auf reinen Zug oder

Fig. 84.



Druck beansprucht, wobei sich die Spannung in günstigster Weise gleichmäßig über den ganzen Stab verteilt. Die gedrückten Stäbe müssen freilich auf Knickfestigkeit berechnet werden. Bei einem Fachwerke mit reibungslosen Gelenken und mit Kraftangriff in den Gelenkpunkten liegen somit die inneren Spankräfte der Stäbe nach Richtung und Lage fest, nur ihre Größe muß noch ermittelt werden.

Besteht die Belastung nicht von vornherein aus Kräften, die durch die Gelenkpunkte

gehen, soll z. B. ein Fachwerkträger eine Brückenbahn tragen, die durch Menschengedränge gleichmäßig belastet wird, so ordnet man besondere

Zwischenbalken an, welche die unmittelbare Belastung aufnehmen und auf Gelenkpunkte des

Fig. 85.



Fachwerks übertragen. Diese Zwischenbalken, welche in Fig. 85 oberhalb des Fachwerks gezeichnet sind, wiewohl sie häufig nicht in dieser Höhe liegen, werden, wenn sie auch in Wirklichkeit meist miteinander in Verbindung stehen, doch für die Rechnung stets als einfache, nur von Gelenkpunkt zu Gelenkpunkt durchgehende kleine Balkenstücke behandelt. Sind diese Zwischenbalken von übereinstimmender Länge  $\lambda$  und auf die Längeneinheit mit  $p$  belastet, so erfährt der belastete Gelenkpunkt einen Druck  $P = p\lambda$ . Diese Kräfte  $P$  erzeugen die Stabspannungen des Fachwerks, wobei die Zwischenbalken nicht mehr in Betracht kommen.

Die Gelenkpunkte heißen auch Knotenpunkte oder Knoten des Fachwerks. In solchen Knoten müssen auch die Widerstände  $A$  und  $B$  der Auflager angreifen, damit die Stäbe keine Biegemomente erleiden. Eine derartige Anbringung der Auflager an den äußersten Enden, wie in Fig. 85, erscheint dem Anfänger wohl zuweilen nicht genügend sicher; jedoch ist zu bemerken, daß die hier benutzten Figuren nur das Netz der Mittellinien des Fachwerks geben, bei der körperlichen Ausbildung des Balkens wird derartig verfahren, daß zu Bedenken dieser Art kein Grund mehr vorliegt, daß aber die Auflagerkräfte dennoch durch die Endknoten gehen.

Die Stäbe, welche das Fachwerk oben und unten begrenzen, heißen seine Gurten (Obergurt bzw. Untergurt) mit den Spannkraften  $O$  und  $U$ , die dazwischen angebrachten Stäbe allgemein Wandglieder (weil sie eine volle Blechwand zwischen den Gurten ersetzen); lotrechte Wandglieder heißen Ständer (Pfosten, Vertikalen) mit den Spannkraften  $V$ , schräg gerichtete Wandglieder werden Streben oder Diagonalen genannt mit den Spannkraften  $D$ . Es ist ratsam, diese Kräfte in der Figur als Zugkräfte einzuführen. Liefert dann die Rechnung positive Werte für diese Kräfte, so treten in Wirklichkeit Zugkräfte auf; liefert sie negative Werte, so bedeutet dies Druckkräfte.

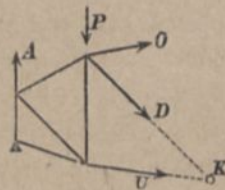
Die Berechnung der Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  geschieht ganz so wie bei vollen Balken auf zwei Stützen mittels der Momentengleichungen, da nach S. 4 auch für beliebige steif verbundene Körpergruppen die Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper Gültigkeit haben.

Zur Auffindung der einzelnen Stabkräfte zerlegt man durch einen Schnitt das Fachwerk in zwei Teile, bringt an den Schnittstellen



der Stäbe die Spannkkräfte derselben als äußere Kräfte an und stellt für einen der beiden Teile, z. B. für den linksseitigen (Fig. 86), die Gleichgewichtsbedingungen auf. Bei Kräften in der Ebene kann man drei voneinander unabhängige Gleichungen anschreiben, kann also für einen Schnitt auch drei Spannkkräfte, die nicht durch einen Punkt gehen, daraus berechnen. Bei dem einfachen Dreiecksfachwerke kann man sämtliche Stäbe durch Schnitte treffen, die im ganzen nicht mehr als drei Stäbe von unbekannter Spannung durchschneiden, so daß deren Spannkkräfte statisch bestimmbar sind.

Fig. 86.



Bei der Anwendung der drei Gleichgewichtsbedingungen in der ursprünglichen Form (Gleichung der wagerechten Kräfte, Gleichung der lotrechten Kräfte, Gleichung der Momente für irgendeinen Punkt), auf einen Fall, wie er z. B. in Fig. 86 vorliegt, würden in jeder der drei Gleichungen die drei Unbekannten  $O$ ,  $D$  und  $U$  vorkommen. Zweckmäßig ist es wie auch schon in anderen Fällen (1. Teil, 4. Aufl., S. 125 u. 126) geschehen, die Rechnung so einzurichten, daß man für jede Unbekannte nur eine Gleichung bekommt. Dies wird in solchen Fällen, wo  $O$ ,  $D$  und  $U$  verschiedene Richtungen haben, erreicht, wenn man nur Momentengleichungen anschreibt und zum Drehpunkte jedesmal den Schnittpunkt derjenigen beiden Stäbe wählt, deren Spannkraft vorläufig nicht verlangt wird. Dies ist der Grundgedanke des Verfahrens von A. Ritter (Zeitschrift des Architekten- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1861, S. 412). Zur Berechnung der Spannkraft  $O$  (Fig. 86) stellt man für die am linksseitigen Trägerstücke wirkenden Kräfte die Momentengleichung in bezug auf den Schnittpunkt  $K$  von  $D$  und  $U$  auf; dann kommen  $D$  und  $U$  in dieser Gleichung nicht vor, weil sie beide das Moment Null haben, und man hat für  $O$  eine einzige Gleichung ersten Grades.

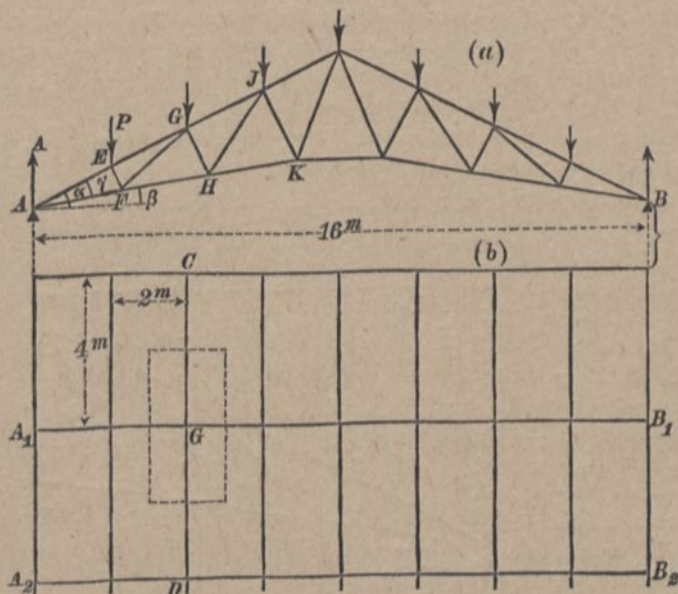
Völlig reine Fachwerksträger, d. h. solche, welche nur an den Knotenpunkten belastet sind, gibt es eigentlich nicht, weil stets noch das Eigengewicht der Stäbe als gleichförmig verteilte Last auf alle wagerecht oder schrägliegenden Stäbe biegend einwirkt. Doch sind diese Biegespannungen meist so gering, daß sie vernachlässigt werden können. Man berücksichtigt das Eigengewicht der Stäbe dadurch, daß man dasselbe je zur Hälfte auf ihre Enden übertragen denkt, und kann dann Brücken und Dachträger als reine Fachwerke behandeln.

## b) Dachträger,

auch Dachbinder oder Dachstühle genannt. Die Dachdeckung (Dachhaut) wird durch ihr Eigengewicht, sowie durch Schnee- und Winddruck belastet, die alle als gleichförmig verteilte Lasten wirken. Damit nun die Dachträger nur in den Knotenpunkten belastet werden, legt man über die Knotenpunkte Querträger, sogenannte Pfetten (ähnlich den Zwischenträgern in Fig. 85), und diese Pfetten nehmen die Dachlast entweder unmittelbar auf oder durch Vermittlung sogenannter Sparren, so daß die meisten Dachträger als reine Dreiecksfachwerke zu berechnen sind.

Beispiel 1: Berechnung der Spannkkräfte eines belgischen Dachträgers von  $16\text{m}$  Spannweite. Die Anordnung des Trägers zeigt Fig. 87 a. Im Grundrisse (Fig. 87 b) mögen die Träger  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$  um  $A_1 A_2 = 4\text{m}$  voneinander abstehen. Die Spannweite werde durch Pfetten, die über den Knotenpunkten des Obergurts liegen, in acht gleiche Teile von  $2\text{m}$  geteilt. Da die gleichmäßige Belastung des Grundrisses der Dachfläche

Fig. 87.



sich gleichmäßig über die Pfetten verteilt, und da die Pfetten für die Berechnung als Einzelträger (nur von Dachträger zu Dachträger reichend) angesehen werden, so erkennt man leicht, daß ein beliebiger Knoten  $G$  des Obergurts die Last zu tragen hat, welche auf das im Grundrisse punktierte



Rechteck von  $2^m \times 4^m = 8^m$  entfällt. Rechnet man als Gesamlast (einschließlich Schnee- und Winddruck)  $180 \text{ kg}$  für  $1^m$  Grundfläche, so ergibt sich als Last jedes Knotens des Obergurts  $P = 180 \cdot 8 = 1440 \text{ kg}$ . Die halb so große Belastung, welche auf die Endpunkte  $A$  und  $B$  kommt, beeinflusst wohl den Druck auf die stützenden Wände, bringt aber, weil sie unmittelbar auf die Stützpunkte übertragen wird, in den Fachwerkstäben keine Spannkraft hervor und bleibt deshalb bei der Berechnung der Stabkräfte am besten ganz außer Betracht. Hiernach befinden sich auf dem Träger sieben gleiche Lasten  $P$  in gleichen Abständen, so daß jeder Auflagerdruck  $A = B = \frac{7}{2}P$  wird. Es ist zweckmäßig, die Knotenlast im Laufe der Rechnung noch allgemein mit  $P$  zu bezeichnen. Am Schlusse kann dann dafür der Zahlenwert  $1440 \text{ kg}$  eingeführt werden.

Die beiden Gurte sind durch Stäbe, rechtwinklig zum Obergurt, miteinander verbunden, deren Spannkräfte wir, wenn sie auch nicht lotrecht stehen, doch mit  $V$  bezeichnen wollen. Die Spannkräfte der dazwischen eingelegten Streben mögen  $D$  heißen.

Der Obergurt habe eine Neigung  $\text{tg } \alpha = 0,5$  gegen die Wagerechte; das gibt  $\alpha = 26^\circ 34'$ ;  $\sin \alpha = 0,447$ ;  $\cos \alpha = 0,894$ ;  $\sec \alpha = 1,119$ ; dann ist der Abstand zweier Lastpunkte, welcher wagerecht gemessen  $2^m$  beträgt, in der Richtung des Obergurts  $AE = 2 \cdot 1,119 = 2,238 \text{ m}$ .

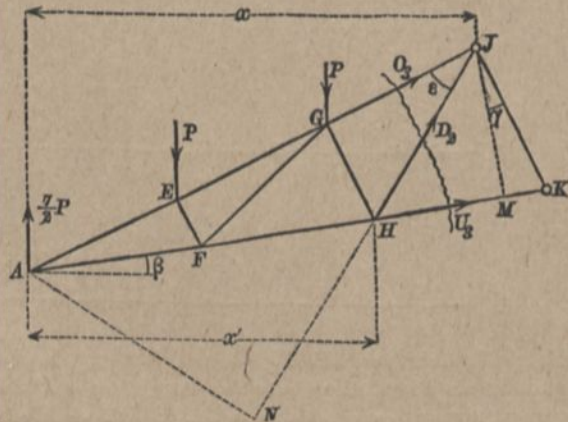
Der Untergurt habe eine Neigung  $\text{tg } \beta = \frac{1}{6}$  gegen die Wagerechte; dies gibt  $\beta = 9^\circ 28'$ ;  $\sin \beta = 0,1645$ ;  $\cos \beta = 0,9864$ ;  $\sec \beta = 1,014$ . Der Winkel  $\gamma = \angle EAF$  zwischen beiden Gurten beträgt hiernach  $17^\circ 6'$  mit  $\sin \gamma = 0,294$ ;  $\cos \gamma = 0,9568$ ;  $\sec \gamma = 1,046$ ;  $\text{tg } \gamma = 0,3076$ .

Hieraus bestimmt sich  $EF = AE \cdot \text{tg } \gamma = 2,238 \cdot 0,3076 = 0,688 \text{ m}$ , mithin  $GH = 2 \cdot 0,688 = 1,376 \text{ m}$  und  $JK = 3 \cdot 0,688 = 2,064 \text{ m}$ .

Für die Teile des Untergurts gilt dann:  $AF = AE \sec \gamma = 2,238 \cdot 1,046 = 2,341 \text{ m}$ .

Die Ermittlung der Spannkräfte soll an dem dritten Fache von links,  $GJKH$ , gezeigt werden. Führt man einen Schnitt durch dasselbe, welcher das Obergurtstück  $GJ$ , die Strebe  $HJ$  und das Untergurtstück  $HK$  trifft, so betrachtet man das links vom Schnitte verbleibende Stück (Fig.

Fig. 88.



88), bringt an den Schnittstellen die als Zugkräfte gedachten Spannkräfte

$O_3$ ,  $D_2$  und  $U_3$  an und stellt für das Gleichgewicht des linksseitigen Abschnittes drei Momentengleichungen auf.

Zur Berechnung von  $U_3$  dient der Schnittpunkt  $J$  von  $O_3$  und  $D_2$  als Drehpunkte. Dann ist  $JM \perp AK$  der Hebelarm von  $U_3$ , und zwar ist  $JM = JK \cos \gamma = 2,064 \cdot 0,9558 = 1,973 \text{ m}$ . Der wagerechte Abstand der Knotenpunkte des Obergurts beträgt  $2 \text{ m}$ , daher ist  $x = 6 \text{ m}$ , während die Lasten bei  $E$  und  $G$  die Hebelarme  $4$  bzw.  $2 \text{ m}$  haben. Es ist empfehlenswert, beim Aufschreiben der Momentengleichungen eine bestimmte Reihenfolge festzusetzen, um sich vor Auslassungen zu bewahren. Wir schreiben stets zuerst das Moment der gesuchten Spannkraft, dann dasjenige des Auflagerdrucks und schließlich diejenigen der am betrachteten Trägerstücke vorhandenen Lasten, u. zw. die rechtsdrehenden Momente mit positivem, die linksdrehenden mit negativem Vorzeichen, also

$$0 = -U_3 \cdot 1,973 + 3,5 P \cdot 6 - P \cdot 4 - P \cdot 2,$$

woraus man leicht  $U_3 = +7,60 P$

findet; das positive Zeichen bedeutet eine Zugkraft.

Zur Berechnung von  $O_3$  dient der Schnittpunkt  $H$  von  $U_3$  und  $D_2$  als Drehpunkt. Es ist  $AH = 2 AF = 4,682$ . Der wagerechte Abstand  $x'$  des Drehpunktes vom linksseitigen Auflager ist dann

$$x' = 4,682 \cdot \cos \beta = 4,682 \cdot 0,9864 = 4,62 \text{ m},$$

der Hebelarm von  $O_3$  aber  $GH = 1,376$ ; mithin

$$0 = O_3 \cdot 1,376 + 3,5 P \cdot 4,62 - P \cdot 0,62 - P \cdot 2,62 \quad \text{und daraus}$$

$$O_3 = -9,40 P, \quad \text{also Druckkraft.}$$

Zur Berechnung von  $D_2$  dient der Punkt  $A$  als Drehpunkt. Fällt man von  $A$  eine Winkelrechte  $AN$  auf die Richtung von  $D_2$ , so ist  $AN = AJ \sin \varepsilon$ . Nun ist  $AJ = 3 AE = 6,714$ ;  $\tan \varepsilon = GH : GJ = GH : AE = 1,376 : 2,288 = 0,615$ , dem ein Wert  $\sin \varepsilon = 0,524$  entspricht, mithin

$$AN = 6,714 \cdot 0,524 = 3,517.$$

Dann wird, weil der Auflagerdruck den Hebelarm Null hat:

$$0 = -D_2 \cdot 3,517 + P \cdot 2 + P \cdot 4,$$

mithin

$$D_2 = 1,7058 P, \quad \text{also Zugkraft.}$$

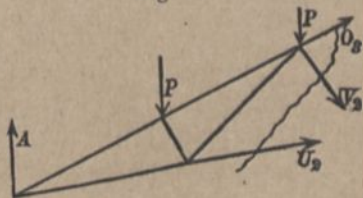
Zur Berechnung der Spannkraft  $V_2$  in dem Ständer  $GH$  muß man einen Schnitt führen, der außer diesen Ständer nur noch zwei Stäbe trifft. Dieser Bedingung genügt ein schräger, etwa in der Richtung der Streben geführter Schnitt durch  $O_3$  und  $U_3$ , wenn wir der Kürze wegen die Stäbe mit den Buchstaben ihrer Spannkräfte bezeichnen. Es entsteht dann ein linksseitiger Abschnitt nach Fig. 89. Als Drehpunkt ist wiederum  $A$  zu wählen.  $V_2$  hat den Hebelarm  $AG = 4,476$ , und man hat die Momentengleichung

$$0 = V_2 \cdot 4,476 + P \cdot 2 + P \cdot 4$$

und daraus  $V_2 = -1,84 P$  (Druckkraft).

In gleicher Weise, wie hier für die Gruppe  $U_3$ ,  $O_3$ ,  $D_2$  und  $V_2$  gezeigt, hat man die Berechnung der übrigen Spannkräfte der linksseitigen Hälfte des

Fig. 89.





Trägers durchzuführen; die Spannkkräfte der rechten sind dann der linken symmetrisch, solange Trägerform und Belastung symmetrisch sind.

Führt man schließlich  $P=1440$  kg ein, so wird  $U_3=10944$  kg;  $O_3=-13536$  kg;  $D_2=+2458$  kg;  $V_2=-1930$  kg. Die Abmessungen dieser Stäbe ergeben sich nun wie folgt: Will man die Stäbe aus Schmiedeeisen herstellen, so erfordert, bei 700<sup>at</sup> zulässiger Spannung,  $U_3$  einen Querschnitt von  $10944:700=15,63$  cm<sup>2</sup>,  $D_2$  einen solchen von  $2458:700=3,51$  cm<sup>2</sup>, dabei ist die Querschnittform gleichgültig, doch sind noch Zuschläge für Nietschwächung erforderlich. Bei den gedrückten Teilen aber, die auf Knickfestigkeit zu berechnen sind, ist auch die Länge und die Querschnittform von Einfluß.

Der Stab  $O_3$  hat eine Länge  $l=223,8$  cm. Es werde gebildet aus zwei ungleichschenkligen Winkeleisen  $10 \cdot 6,5 \cdot 1$  cm. Fig. 90 zeigt die zwei Winkeleisen eng zusammengestellt. Das kleinste  $J$  erhält man dann für die lotrechte Symmetrieachse, nämlich  $J_2=189,07$  cm<sup>4</sup>. Zur bequemern Stoßverbindung pflegt man aber die beiden  $\perp$  Eisen um mindestens 1,5 cm auseinanderzurücken; dann wird für die lotrechte Mittellinie

$$J = \frac{9 \cdot 3,5^3}{12} + \frac{1 \cdot 14,5^3}{12} - \frac{10 \cdot 1,5^3}{12} = 283,4 \text{ cm}^4.$$

Es ist nun noch zu untersuchen, ob nicht für die wagerechte Schwerpunktsachse ein noch kleineres  $J$  sich ergibt. Hierzu kann Fig. 90 unmittelbar benutzt werden, da das Auseinanderrücken auf dieses  $J$  keinen Einfluß hat. Teilt man den Querschnitt des einen Winkeleisens durch eine lotrechte Gerade in die beiden Flächenteile 5,5 und 10 cm<sup>2</sup>, deren Schwerpunkte um 4,5 cm in lotrechtem Sinne voneinander abstehen, so ist nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 319, Gl. 28 das Trägheitsmoment des einen Winkeleisens in bezug auf eine wagerechte Schwerpunktsachse

$$J = \frac{1}{12} 5,5 \cdot 1^3 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 10^3 + \frac{5,5 \cdot 10}{5,5 + 10} \cdot 4,5^2 = 155,6 \text{ cm}^4.$$

Für beide Winkeleisen zusammen wird daher  $J_1=2 \cdot 155,6=311,2$ ; demnach ergibt die Mittelachse das kleinste Trägheitsmoment  $J_2=283,4$ , und das Quadrat des kleinsten Trägheitshalbmessers wird daher

$$i_{\min}^2 = J_2 : F = 283,4 : 30,0 = 9,45 \text{ cm}^2,$$

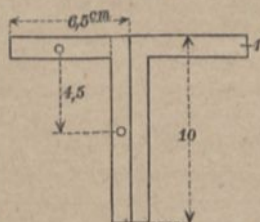
$$i_{\min} = 3,02; \quad \frac{l}{i} = \frac{223,8}{3,02} = 74 \text{ cm},$$

$$\left(\frac{l}{i}\right)^2 = 5476.$$

Die zulässige Druckbelastung des Stabes in der Längsrichtung ist daher nach Schwarz-Rankine Gl. 2, S. 67

$$K = \frac{F \sigma}{\left(1 + \alpha \frac{l^2}{i^2}\right)} = \frac{31,0 \cdot 700}{1 + \frac{5476}{10000}} = 14030.$$

Fig. 90.



Gegenüber einer wirklichen Druckkraft von 13536 kg ist also genügende Sicherheit vorhanden. Ein Zuschlag für Nietschwächung ist nicht erforderlich.

Der Ständer  $V_2$  von 137,6 cm Länge werde in ähnlicher Weise aus zwei Winkelisen 6·4·0,6 cm gebildet. Diese zwei Winkelisen sind ebenfalls um 1,5 cm auseinandergerückt; dann gibt hier aber die wagerechte Schwerpunktsachse das kleinste Trägheitsmoment  $J_2 = 40,72$ ,  $F = 11,28$ , daher kleinstes  $i = 1,9$ ;  $l : i = 72,4$  und

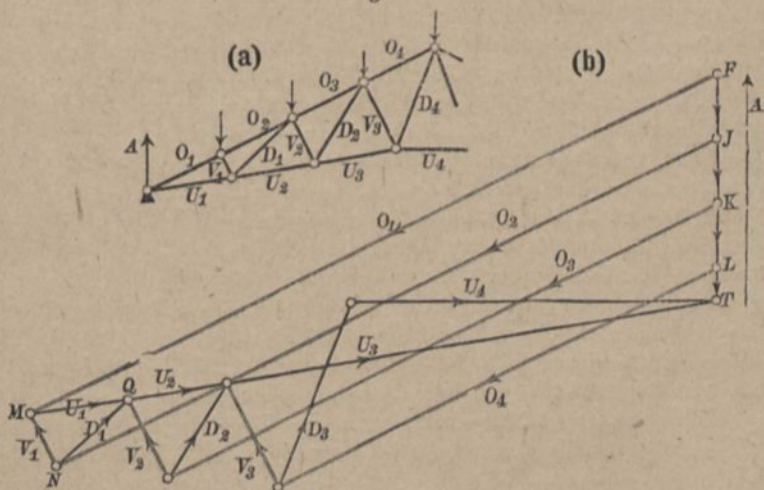
$$K = \frac{11,28 \cdot 700}{1 + \frac{72,4}{10000}} = 5170 \text{ kg.}$$

Diese zulässige Druckbelastung ist, gegenüber der wirklichen Belastung mit 1930 kg, reichlich groß; man wird aber wegen der Nietverbindungen einen kleineren Querschnitt nicht wählen.

Häufig wird man für  $O_3$  ebenfalls etwas größere Abmessungen wählen, als oben berechnet wurde, nämlich immer dann, wenn die Länge des Obergurts vom Auflager bis zum First die übliche Länge der Walzeisenstäbe nicht überschreitet. Der kleine Mehraufwand an Eisen wird dann reichlich ausgeglichen durch die Ersparnis an Stoßverbindungen. In diesem Fall ist die größte Obergurtspannung maßgebend für die Abmessungen seines Querschnitts, und diese findet sich in  $O_1$ .

Zur Bestimmung von  $O_1$  und  $U_1$  sind drei Wege möglich: Entweder legt man einen Schnitt um Knotenpunkt  $A$ , wie in Fig. 92, und kann dann  $O_1$  und  $U_1$  zeichnerisch wie in Fig. 91 b, oder zweitens durch Anschreiben der zwei

Fig. 91.



Projektionsgleichungen für lotrechte und wagerechte Kräfte ermitteln; drittens aber läßt sich auch hier das Rittersche Momentenverfahren anwenden: Um



$U_1$  zu finden, lege man den Schnitt durch  $U_1$ ,  $V_1$  und  $O_2$  (Fig. 93) und hat dann für den Momentenpunkt  $E$  (Fig. 88)  $U_1 \cdot EF \cos \gamma = A \cdot 2$ , also

$$U_1 = \frac{7P}{0,688 \cdot 0,9558} = 10,65 P = 15\,340 \text{ kg.}$$

Um  $O_1$  zu finden, lege man den Schnitt durch  $O_1$ ,  $V_1$ ,  $D_1$  und  $U_2$  und den Momentenpunkt in den Schnitt der drei Stäbe  $V_1$ ,  $D_1$  und  $U_2$  (Fig. 91), so daß alle drei das Moment Null liefern. Dann ist, nach Fig. 88,  $O_1 \cdot EF = A(2 + EF \sin \alpha) = 3,5 P \cdot 2,307$ , somit

$$O_1 = \frac{8,08 P}{0,688} = 11,73 P = 16\,890 \text{ kg.}$$

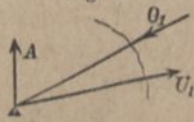
Bei der obigen Berechnung der Spannkkräfte war die Ermittlung der Stablängen und Hebelarme die zeitraubendste Arbeit. In den meisten Fällen wird man diese Längen aus einer genauen Zeichnung des Trägernetzes abgreifen und dadurch viel Zeit ersparen können. Es ist nicht zu empfehlen, bei derartigen Rechnungen eine weitgehende ziffermäßige Genauigkeit anzustreben. Denn bei der schließlichen Bestimmung der Stabquerschnitte richtet man sich nach den vorhandenen Eisensorten und muß daher meist doch aufrunden. Auch kommen bei der Ausführung ebenso leicht kleine Fehler vor, wie beim Abgreifen von einer Zeichnung. Endlich aber ist die ganze Berechnung unter Annahme eines Gleichgewichtszustandes doch nur eine Annäherung, mit der man die wirklichen Spannungen keineswegs genau ermitteln kann. Hätte man in den obigen Zahlenrechnungen die Hebelarme auf Dezimeter abgerundet, so würden sich die Spannkkräfte  $U_3 = 10\,800 \text{ kg}$ ;  $O_3 = -13\,168 \text{ kg}$ ;  $D_3 = 2469 \text{ kg}$ ;  $V_3 = -1920 \text{ kg}$  ergeben haben; die Eisenstärken würden eine Änderung nicht zu erfahren brauchen.

Am schnellsten ergeben sich die Spannkkräfte solcher einfach geformten Dachträger mittels eines rein zeichnerisch hergestellten Kräfteplanes (Fig. 91 b). Bezeichnet man, wie auf S. 82 die Knotenlast mit  $P$ , so ist der Auflagerdruck  $A = 3,5 P$ . Diese  $3\frac{1}{2}$  Lasten  $P$  sind durch  $TF = A$  dargestellt, mit den Teilen  $FJ = JK = KL = P$  und  $LT = \frac{1}{2} P$ . Man muß nun mit den Schnitten im ersten Fache am Auflager  $A$  beginnen, indem man

(Fig. 92)  $O_1$  und  $U_1$  durchschneidet, dann müssen  $A$ ,  $O_1$  und  $U_1$  im Gleichgewichte sein, also ein geschlossenes Kräfteck bilden. Zieht man durch  $T$

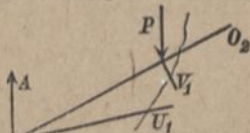
(Fig. 91 b) eine Parallele zum Untergurtstab  $U_1$ , durch  $F$  eine Parallele zum Obergurtstab  $O_1$ , so schneiden sich beide in  $M$ ;  $TFM$  ist das geschlossene Kräfteck, mithin ist  $FM$  die Größe von  $O_1$ ,  $MT$  die Größe von  $U_1$ , beide nach dem Maßstabe gemessen, in welchem  $P = FJ$  ist. In dem Kräfteck  $TFM$  müssen die Kräfte übereinstimmenden Umfassungssinn haben. Da nun die Pfeilspitze des Auflagerdrucks  $A$  von  $T$  nach  $F$  weist, so muß  $O_1$  von  $F$  nach  $M$ ,  $U_1$  von  $M$  nach  $T$  weisen. Diesem entsprechend sind die Pfeile bei  $O_1$  und  $U_1$  angebracht. Überträgt man diese Pfeilrichtungen nun nach Fig. 92 an die Schnittstellen, so erkennt man, daß  $O_1$  eine Druck-,  $U_1$  eine Zugkraft ist.

Fig. 92.



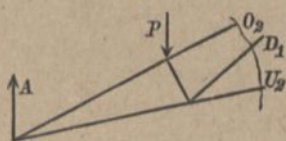
Nachdem so die Spannkraften des ersten Faches bestimmt sind, führt man einen weiteren Schnitt, doch so, daß nur zwei neue unbekannte Spannkraften auftreten. Man legt daher den Schnitt durch den soeben behandelten Stab  $U_1$  und außerdem durch  $V_1$  und  $O_2$  (Fig. 93). Dann müssen die neuen unbekannteten Kräfte  $V_1$  und  $O_2$  den bekannten:  $U_1, A, P$ , das Gleichgewicht halten, also mit ihnen wieder ein geschlossenes Kräfteck bilden. Wir betrachten  $M$  (Fig. 91 b) als Anfangspunkt mit  $MT=U_1, TF=A, FJ=P$ , ziehen von  $J$  aus eine Parallele zu  $O_2$ , von  $M$  aus eine Parallele zu  $V_1$ , welche beiden sich in  $N$  schneiden. Dann ist  $JN=O_2, NM=V_1$ . Der Umfuhungssinn ist:  $MTFJNM$ . Überträgt man die so bestimmten Pfeilrichtungen von  $O_2$  und  $V_1$  an die Schnittstellen in Fig. 93, so erkennt man beide als Druckkräfte.

Fig. 93.



Den nächsten Schnitt führt man nun zweckmäßig durch  $O_2$  und außerdem durch  $D_1$  und  $U_2$  (Fig. 94). Die bekannten Teile des jetzt zu benutzenden Kräftecks sind  $A=TF, P=FJ, O_2=JN$ .

Fig. 94.



Zwischen die Punkte  $N$  und  $T$  sind nun die neuen Kräfte  $D_1$  und  $U_2$  einzulegen. Eine von  $T$  aus gezogene Parallele zu  $U_2$  fällt mit  $TM$  zusammen,  $NQ \parallel D_1$  bestimmt daher den Punkt  $Q$ , und es ist  $NQ=D_1, QT=U_2$ ; beide erkennt man als Zugkräfte.

Die der Reihe nach zu führenden Schnitte sind im Zickzack derartig anzuordnen, daß jeder neue Schnitt ein vorher schon untersuchtes Gurtstück nochmals trifft und außerdem zwei neue Stäbe. Hiernach setzt sich der leicht verständliche Kräfteplan (Fig. 91 b) fort. Zu beachten ist nur, daß  $U_1, U_2$  und  $U_3$  teilweise aufeinander fallen, d. h. verschiedene Anfangspunkte, aber den gemeinsamen Endpunkt  $T$  haben. Die Druckkräfte sind im Kräfteplane durch Doppellinien hervorgehoben.

Weiteres über Kräftepläne für Fachwerk findet sich in Keck-Hotopp, Vorträge über Elastizitätslehre, Teil II, S. 242 u. ff., sowie in Keck, Graphische Statik, S. 65 u. ff.

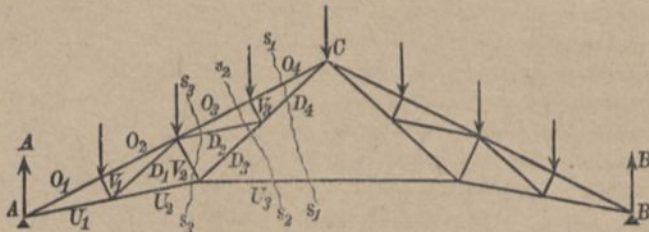
Beispiel 2: Berechnung der Spannkraften eines Wiegmannschen Dachträgers\*) von 16 m Spannweite (Fig. 95). Die Berechnung der Spannkraften  $O_1, U_1, V_1, O_2, D_1$  und  $U_2$  erfolgt ganz in derselben Weise wie beim belgischen Dachträger, und wenn, wie wir annehmen wollen, die Neigungen von  $O_1, O_2, U_1$  und  $U_2$  dieselben sind wie bei jenem (Fig. 87), so werden

\*) Dieser Dachträger wird in vielen, aber nur deutschen Lehrbüchern als „Polonceauträger“ bezeichnet, obgleich ihn der Deutsche Wiegmann 1836 erfunden und seine Berechnung 1837 gezeigt hat. Polonceau hat, allerdings ohne Kenntnis hiervon, den einfachsten Fall des Wiegmannsträgers, also ohne die Wandglieder  $V_1, D_1, D_2$  und  $V_3$  der Fig. 95 und ohne Berechnung, zuerst gebaut 1839. Die Anordnung (Fig. 95) wird in manchen deutschen Lehrbüchern als „doppelter Polonceau“ bezeichnet.



bei gleichen Lasten  $P$  auch die Spannkraften für die genannten Stäbe dieselben sein. Für die Berechnung der Stäbe  $V_2$ ,  $O_3$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  und  $V_3$  gelingt es aber nicht, von oben bis unten einen Schnitt so zu führen, daß derselbe nur drei

Fig. 95.



Stäbe zerschneidet; vielmehr ist die Zahl der vom Schnitte getroffenen Stäbe eine größere. Gleichwohl sind die Spannkraften auch dieses Trägers in leichter Weise zu finden; nur muß der Vorgang etwas abgeändert werden.

Man legt zunächst einen Schnitt  $s_1 s_1$  durch  $O_4$ ,  $D_4$  und  $U_3$  und wählt den Schnittpunkt  $C$  der beiden ersteren zum Drehpunkte. Der Hebelarm von  $U_3$  läßt sich leicht abgreifen oder berechnen und beträgt (auf Grund der Bemerkung S. 88 nach Dezimetern abgerundet)  $3,2^m$ . Dann gilt:  $0 = -U_3 \cdot 3,2 + 3,5 P \cdot 8 - P \cdot 2 - P \cdot 4 - P \cdot 6$ , also  $U_3 = 5 P$ .

$O_4$  und  $D_4$  findet man in gleicher Weise, indem man den Schnittpunkt von  $D_4$  und  $U_3$  bzw. von  $O_4$  und  $U_3$  zum Drehpunkte wählt.

Nun führt man einen Schnitt  $s_2 s_2$  durch  $O_3$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  und  $U_3$ . Weil  $U_3$  schon berechnet ist, treten an diesem Schnitte nun drei unbekannte Spannkraften auf. Um beispielsweise  $D_2$  zu berechnen, benutzt man den Schnittpunkt  $C$  von  $O_3$  und  $D_3$  als Drehpunkt und behandelt die schon bekannte Spannkraft  $U_3$  in der Momentengleichung wie eine gegebene Kraft. Der Hebelarm von  $D_2$  wird  $1,3$ , und es gilt:

$$0 = -D_2 \cdot 1,3 - U_3 \cdot 3,2 + 3,5 P \cdot 8 - P \cdot 4 - P \cdot 6, \text{ somit} \\ D_2 = 1,54 P.$$

Für die Berechnung von  $O_3$  dient der Schnittpunkt von  $D_2$  und  $D_3$  als Drehpunkt; ebenso für  $D_3$  der Schnittpunkt von  $D_2$  und  $O_3$ .

An dem Schnitte  $s_3 s_3$  kommen die Spannkraften  $O_3$ ,  $D_2$ ,  $V_2$  und  $U_2$  vor, von denen jetzt nur noch  $V_2$  unbekannt ist; wählt man  $A$  zum Drehpunkte, so verschwinden  $O_3$  und  $U_2$  aus der Momentengleichung, und die schon bekannte Spannkraft  $D_2$  wird wie eine gegebene Kraft behandelt.

Ein schräger Schnitt durch  $O_3$ ,  $V_3$ ,  $D_4$  und  $U_3$  und die Wahl des Punktes  $C$  zum Drehpunkte würde nun auch die einzige noch fehlende Spannkraft  $V_3$  ergeben; jedoch erkennt man im voraus, daß  $V_3$ , ebenso wie  $V_1$ , gleich  $-P \cos \alpha$  sein muß. Führt man nämlich um den oberen Endpunkt von  $V_3$  einen kreisförmigen Schnitt, so trennt man dadurch das in Fig. 96 besonders gezeichnete Stück aus dem Träger heraus. Dieses muß unter Einwirkung der

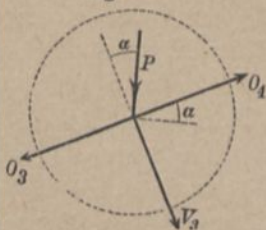
Kräfte  $P$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  und  $V_3$  im Gleichgewichte sein. Zerlegt man aber  $P$  nach der Richtung von  $V_3$  und rechtwinklig dazu in  $P \cos \alpha$  bzw.  $P \sin \alpha$ , so muß in ersterer Richtung stattfinden:

$$P \cos \alpha + V_3 = 0 \quad \text{oder}$$

$$V_3 = -P \cos \alpha.$$

(Für  $V_1$  gilt dieselbe Figur.) Nach diesen Angaben kann es dem Leser keine Schwierigkeiten machen, die sämtlichen Spannkkräfte der linken Hälfte des Wiegmannschen Dachträgers zahlenmäßig auszurechnen. — Dem Anfänger ist dringend zu raten, nach Führung eines Schnittes das links davon befindliche Trägerstück jedesmal mit den daran auftretenden Kräften besonders aufzuzeichnen, weil dadurch die sichere Aufstellung der Momentengleichung sehr erleichtert wird.

Fig. 96.



### c) Ungünstigste Belastungsart.

In den vorstehend berechneten Beispielen wurde nur eine bestimmte Belastungsart vorausgesetzt; es wurde angenommen, daß jeder Belastungspunkt eine Last  $P$  trage, die aus der stärksten überhaupt vorkommenden Belastung der Dachfläche abgeleitet ist. Diese Voraussetzung trifft für die zwei eben behandelten Dachträger zu, wie S. 93/94 sich erweisen wird. Für anders gestaltete Fachwerke trifft sie aber nicht allgemein zu, vielmehr wird sich zeigen, daß in manchen Stäben des Fachwerks die Entlastung gewisser Knotenpunkte eine Vergrößerung der Spannkkräfte herbeiführen kann.

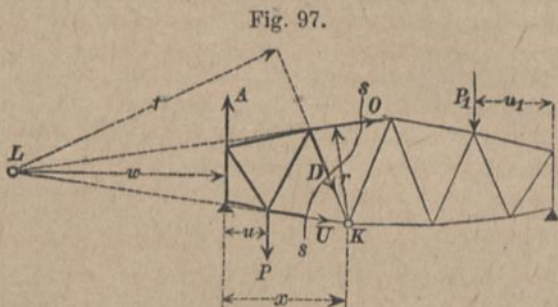
Es muß deshalb unterschieden werden zwischen der ständigen Belastung, die von dem Eigengewichte des Bauwerks und aller damit fest verbundenen Teile herrührt, und der beweglichen Belastung, die bei Dachträgern aus dem Gewichte einer Schneelage und dem Drucke des Windes, bei Brückenträgern aus dem Gewichte der die Brückenbahn befahrenden Lokomotiven, Wagen u. dergl. oder von dem Gewichte der auf der Brücke Platz findenden Menschen (Menschengedränge) und Tiere besteht. Beide Arten von Belastungen sollen annäherungsweise als gleichförmig verteilt angesehen werden; die ständige Last werde mit  $g$ , die bewegliche Last mit  $p$  für die Längeneinheit des Trägers bezeichnet, so daß, wenn der wagerechte Abstand der Lastpunkte  $= \lambda$  ist, die ständige Knotenlast  $G = g \lambda$ , die bewegliche Knotenlast  $P = p \lambda$  wird. Die Lasten  $G$  sind stets vorhanden, die Lasten  $P$  können auch



fehlen. Jede Knotenlast kann daher entweder nur aus  $G$ , oder aus  $G + P$  bestehen.

Um nun bei einem Fachwerkträger auf zwei Endstützen die Einwirkung beweglicher Lasten auf die an irgendeinem Schnitt  $ss$  auftretenden Spannkkräfte zu erkennen, denken wir uns irgendeinen Knotenpunkt links

bezw. rechts vom Schnitte mit einer beliebigen Last  $P$  bzw.  $P_1$  versehen (Fig. 97). Diese beiden Lasten treten in den Momentengleichungen, die man etwa für das links vom



Schnitte liegende Trägerstück aufstellt, in verschiedener Weise auf: beide liefern einen Beitrag zu dem Auflagerdruck  $A$  und haben hierdurch mittelbar Einfluß auf die Spannkkräfte des Schnittes; die linksseitige Last  $P$  gehört aber zu den am betrachteten Trägerstücke wirkenden Kräften und erscheint als solche auch noch unmittelbar in der Momentengleichung, während dies für  $P_1$  nicht zutrifft. Aus diesem Grunde müssen Lasten links und rechts vom Schnitte scharf auseinandergelassen werden. Die beliebigen Knotenlasten  $P$  und  $P_1$  zu beiden Seiten des Schnittes seien um  $u$  und  $u_1$  vom linken bzw. rechten Auflager entfernt. Dann ist der linksseitige Auflagerdruck

$$1) \quad A = P \frac{l-u}{l} + P_1 \frac{u_1}{l} = P - P \frac{u}{l} + \frac{P_1 u_1}{l}.$$

Zur Berechnung der Spannkraft  $O$  im Obergurt dient der Punkt  $K$  des Untergurtes im Abstand  $x$  von der linksseitigen Auflagerlotrechten als Drehpunkt, und es gilt die Momentengleichung

$$0 = Or + Ax - P(x-u)$$

oder nach Gl. 1:

$$-Or = Px - P \frac{u}{l} x + P_1 \frac{u_1}{l} x - Px + Pu,$$

woraus sich

$$-Or = Pu \left(1 - \frac{x}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{x}{l}$$

ergibt. Da nun  $x \leq l$  ist, so haben die beiden Glieder der rechten Seite übereinstimmende Vorzeichen. Zu der Druckkraft  $-O$  in irgendeinem Teile des Obergurtes tragen also Lasten links und rechts vom Schnitt in übereinstimmender Weise bei. Gleiches findet man leicht bezüglich der Zugkraft  $U$  im Untergurte. Man hat daher den Satz:

Die Druckkräfte im Obergurt und die Zugkräfte im Untergurt werden am größten, wenn alle Lastpunkte möglichst stark belastet sind.

Für die Strebe  $D$  liegt der Drehpunkt  $L$  im Schnittpunkte der Richtungen der vom Schnitte mitgetroffenen Gurtstücke. Die Momentengleichung lautet:

$$\begin{aligned} 0 &= Dt - Aw + P(w + u), \quad \text{mithin} \\ Dt &= Pw - \frac{Pu}{l}w + \frac{P_1 u_1}{l}w - Pw - Pu \\ &= -Pu \left(1 + \frac{w}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{w}{l}. \end{aligned}$$

Hiernach liefern die Lasten  $P$  und  $P_1$  zu  $D$  Beiträge von entgegengesetztem Vorzeichen. Eine Last rechts vom Schnitt erzeugt in der Strebe Zugkraft und umgekehrt. Belastungen links und rechts vom Schnitte vermindern sich also gegenseitig in ihrer Wirkung. Soll nun die Zugkraft in den Streben so groß wie möglich werden, so muß man die Lasten von positivem Einflusse, d. h. die rechtsseitigen, möglichst groß machen, und umgekehrt. Rechts vom Schnitte wird man daher die Lastpunkte durchweg mit ständiger und beweglicher  $G + P$ , links vom Schnitte nur mit ständiger Last  $G$  versehen. — Die Druckkraft in den Streben wird am größten bei entgegengesetzter Belastung, d. h. wenn links vom Schnitte volle Lasten  $G + P$ , rechts nur ständige Lasten  $G$  wirken. Solche Anordnung der Lasten nennen wir einseitige Belastungen. Dies gilt für eine von links nach rechts fallende Strebe; für eine nach rechts ansteigende Strebe ist alles entgegengesetzt, weil das Moment einer solchen Strebe entgegengesetzten Drehsinn zeigt.



Liegt der Schnitt näher an dem rechtsseitigen Auflager, so kann der Drehpunkt  $L$  rechts von der Spannweite liegen. Dies ändert aber, wie man leicht findet, nichts an den vorstehenden Ergebnissen; diese bleiben gültig, so lange der Drehpunkt außerhalb der Spannweite  $AB$  liegt.

Anders verhält sich die Sache, wenn der Drehpunkt  $L$  für eine Strebe innerhalb der Spannweite liegt (Fig. 98). Dann ist

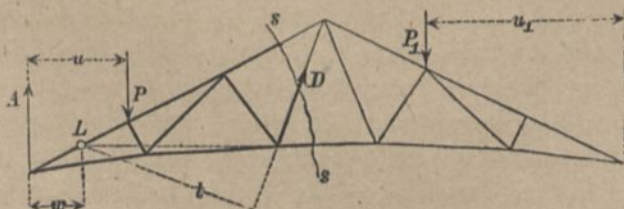
$$0 = -Dt + Aw + P(u-w),$$

oder mit Benutzung von Gl. 1:

$$\begin{aligned} Dt &= Pw - \frac{Pu}{l}w + \frac{P_1u_1}{l}w + Pu - Pw \\ &= Pu \left(1 - \frac{w}{l}\right) + P_1u_1 \frac{w}{l}. \end{aligned}$$

Weil bei der jetzt angenommenen Lage von  $L$  die Länge  $w$  stets  $\leq l$  ist, so werden in der letzten Gleichung beide Glieder der rechten Seite positiv, so daß nun, wie bei den Gurtstäben, Lasten links und rechts vom Schnitte Wirkungen von übereinstimmendem Vorzeichen hervorbringen. Ob eine bestimmte Last in einer bestimmten Strebe gerade Zug oder Druck erzeugt, ist zunächst von geringerer Wichtigkeit, als die Entscheidung der Frage, ob ein Stab auf volle oder auf einseitige Belastung berechnet werden muß. Im letzteren Falle sind dann in der Regel zwei Belastungsfälle zu untersuchen: in dem einen befindet sich bewegliche

Fig. 98.



Belastung nur auf der linken Seite, im anderen nur auf der rechten Seite. Für die Ständer, die nur besondere Fälle von Streben sind, gelten dieselben Gesetze.

Bei den meisten Fachwerkformen liegt der für die Wandglieder (Streben und Ständer) maßgebende Drehpunkt außerhalb der Spannweite; der andere Fall kommt seltener vor.

Daher hat man den Satz:

Die Spannkkräfte der Wandglieder eines einfachen Fachwerkträgers auf zwei Endstützen sind, wenn der maßgebende Drehpunkt außerhalb der Spannweite liegt, auf einseitige Belastung (das eine Mal rechts, das andere Mal links vom Schnitte) zu berechnen; wenn aber der Drehpunkt zwischen die Auflagerlotrechten fällt, so muß die Berechnung (wie bei den Gurten) für volle Belastung erfolgen.

Fällt der Drehpunkt in die linksseitige Auflagerlotrechte, so ist dies ein Grenzfall, der nach Belieben zu der einen oder anderen Gruppe von Fällen gerechnet werden kann. Man würde hiernach die betreffende Strebe auf einseitige oder auch auf volle Belastung berechnen dürfen.

Beide Berechnungen führen nämlich zu dem gleichen Ergebnisse. Irgendeine Last  $P_1$  rechts vom Schnitt wirkt auf den linksseitigen Abschnitt nur mittelbar durch seinen Beitrag zu dem Auflagerdruck  $A$  ein (s. S. 92). Da aber der Auflagerdruck  $A$  in bezug auf den in seiner Richtungslinie liegenden Drehpunkt das Moment Null hat, so haben rechtsseitige Lasten auf die betreffende Strebe  $D$  überhaupt keinen Einfluß (Fig. 99); eine einseitige Belastung links vom Schnitte hat deshalb dieselbe Wirkung, wie eine volle Belastung; und da die Rechnung mit voller Belastung bequemer ist, so kann man diese, die für die Gurtkräfte maßgebend war, auch für Ständer und Streben verwenden. Die für volle Belastung durchgeführte Berechnung der in Fig. 87, S. 83 und Fig. 95, S. 90 dargestellten Dachträger war daher richtig. Für die Streben des Mittelfaches aber mußte volle Belastung angenommen werden, weil für diese der Drehpunkt zwischen den Auflagerlotrechten liegt. — Über schiefe Belastungen durch Winddruck s. Keck, Graphische Statik, S. 71.

Fig. 99.



#### d) Parabolischer Fachwerkträger.

Beispiel: Parabolischer Fachwerkträger von  $l=24^m$  Spannweite und  $h_m=3^m$  Höhe in der Mitte. Der Obergurt sei gerade, der Untergurt einer Parabel eingeschrieben. Die Spannweite sei durch Ständer in sechs



gleiche Fache von der Länge  $\lambda=4\text{m}$  geteilt (Fig. 100). Für die Ständerhöhen  $h$  gilt dann die Parabelgleichung (s. 1. Teil, 4. Aufl., S. 228, Gl. 5)

$$h = \frac{4h_m}{l^2} x(l-x),$$

Fig. 100.

wenn  $x$  der Abstand eines Ständers von einem Auflager.

$$\begin{array}{l} \text{Für } x=4 \quad 8 \quad 12 \\ \text{wird } h=1^2/3 \quad 2^2/3 \quad 3. \end{array}$$

Für jeden der fünf Lastpunkte des Obergurts sei die ständige Last  $G=2000\text{kg}=2\text{t}$ , die bewegliche  $P=10\,000\text{kg}=10\text{t}$ . Es sollen beispielsweise die Spannkraften des zweiten Faches berechnet werden (Fig. 101).

Für die Gurtkräfte ist volle Belastung aller Lastpunkte mit  $2+10=12\text{t}$  anzunehmen; dann wird der Auflagerdruck  $A=5/2 \cdot 12=30\text{t}$ . Für den Obergurt  $O_2$  ist  $K$  der Drehpunkt und  $h_2=2^2/3\text{m}$  der Hebelarm; die Momentengleichung ergibt daher

$$0 = O_2 \cdot 8/3 + A \cdot 8 = 12 \cdot 4, \quad \text{woraus} \\ O_2 = -72\text{t}.$$

Das Neigungsverhältnis des zweiten Stückes  $U_2$  des Untergurts gegen die Wagerechte (Fig. 102) ist

$$(h_2 - h_1) : 4 = 1/4 = \text{tg } \nu,$$

dann ist  $\cos \nu = 0,9701$ ,  $\sec \nu = 1,031$ .

Der Drehpunkt für  $U_2$  ist  $K'$ , der Hebelarm daher  $h_1 \cos \nu$ ; die Momentengleichung lautet:

$$0 = -U_2 \cdot 5/3 \cos \nu + A \cdot 4; \quad \text{also} \\ U_2 = 72 : \cos \nu = 72 \cdot \sec \nu = 74,23\text{t}.$$

Für die Strebe  $D_1$  liegt der Drehpunkt  $L$  links von der Spannweite (Fig. 103), u. zw. weil die Neigung von  $U_2$ , d. h.  $\text{tg } \nu = 1/4$ , um  $4h_1 = 6^2/3 = LK'$  links von  $K'$ , oder um  $2^2/3\text{m}$  links von  $A$ . Ist  $\delta$  der Neigungswinkel von  $D_1$ , so gilt dafür  $\text{tg } \delta = h_2 : 4 = 2/3$  und  $\sin \delta = 0,5546$ . Der Hebelarm von  $D_1$  wird

$$r = LK_1 \cdot \sin \delta = 3,697\text{m}.$$

Die Strebe ist auf zwei verschiedene Belastungsarten zu berechnen: Bei einseitiger Belastung rechts vom Schnitte tragen sämtliche Lastpunkte die ständige Last  $G=2\text{t}$ , während nur die Punkte 2 bis 5 (Fig. 100) mit beweglicher Last

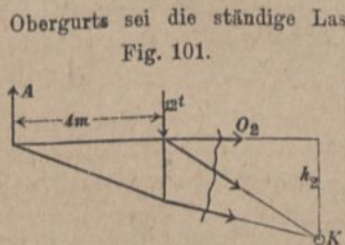
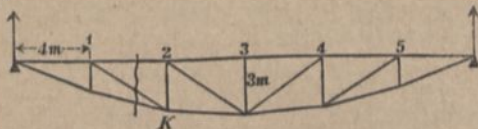


Fig. 101.

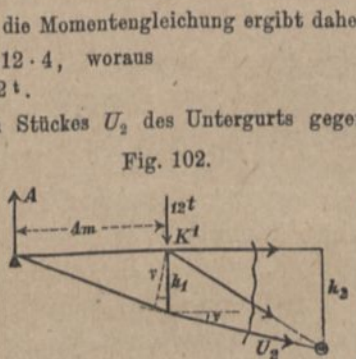


Fig. 102.

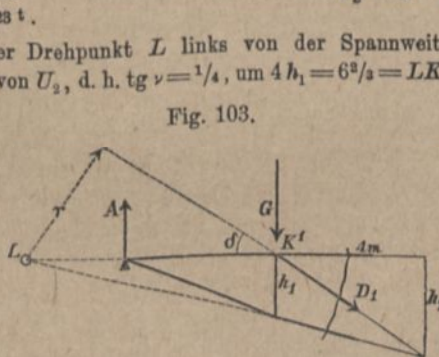


Fig. 103.

$P=10\text{ t}$ , bedeckt sind. Erstere liefern zu  $A$  den Beitrag  $\frac{5}{2} \cdot 2=5\text{ t}$ , letztere den Beitrag

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) 10 = 16\frac{2}{3}\text{ t}, \text{ so daß}$$

$$A = 5 + 16\frac{2}{3} = 21\frac{2}{3}\text{ t}$$

wird. Die Momentengleichung für  $L$  ergibt

$$0 = D_1 \cdot 3,697 - A \cdot 2\frac{2}{3} + G \cdot 6\frac{2}{3}, \text{ woraus}$$

$$D_1 = 12,02\text{ t}.$$

Bei einseitiger Belastung links vom Schnitt wird

$$A' = 5 + 10 \cdot \frac{5}{6} = 13\frac{1}{3}\text{ t}; \text{ daher Momentengleichung:}$$

$$0 = D_1' \cdot 3,697 - A' \cdot 2\frac{2}{3} + (G + P) \cdot 6\frac{2}{3}, \text{ woraus}$$

$$D_1' = -12,02\text{ t}.$$

Die Strebe  $D_1$  erfährt also, wenn die Lastengruppe  $P$  sich über den Träger bewegt, Spannkraft, die zwischen einer Zugkraft von  $12,02\text{ t}$  und einer Druckkraft von derselben Größe schwanken.

Die gleichen Belastungsarten gelten auch für den Ständer  $V_2$  (Fig. 104). Der Drehpunkt  $L$  liegt um  $x = h_2 \frac{4}{3} = 32\text{ m}$  links von  $V_2$ , um  $24\text{ m}$  links von  $A$ . Daher gilt für rechtsseitige Belastung:

$$0 = -V_2 \cdot 32 - A \cdot 24 + G \cdot 28 \text{ mit } A = 21\frac{2}{3}\text{ t}, \text{ wie bei } D_1,$$

$$\text{also } V_2 = -14,5\text{ t}.$$

Für linksseitige Belastung:

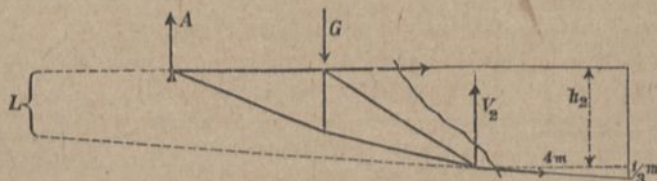
$$0 = -V_2' \cdot 32 - A' \cdot 24 + (G + P) \cdot 28 \text{ mit } A' = 13\frac{1}{3}\text{ t}, \text{ wie bei } D_1,$$

$$\text{also } V_2' = 0,5\text{ t}.$$

Die Spannkraft des Ständers schwankt demnach zwischen  $0,5\text{ t}$  Zug und  $14,5\text{ t}$  Druck.

Dieses Beispiel des parabolischen Trägers ist besonders geeignet, zu zeigen, welchen Fehler man begehen würde, wenn man die Wandglieder nur

Fig. 104.



auf volle Belastung berechnete. Es wäre dann  $A=30\text{ t}$ , und es würde nach Fig. 103, wenn man darin die Einzellast  $G$  durch  $G + P=12$  ersetzt,

$$0 = D_1 \cdot 3,697 - 30 \cdot 2\frac{2}{3} + 12 \cdot 6\frac{2}{3}, \text{ daher}$$

$$D_1 = 0; \text{ und nach Fig. 104}$$

$$0 = -V_2 \cdot 32 - 30 \cdot 24 + 12 \cdot 28, \text{ daher}$$

$$V_2 = -12\text{ t}.$$



Für volle Belastung ist also die Strebe  $D_1$  spannungslos, und das gleiche gilt für sämtliche Streben des parabolischen Trägers. Im 1. Teil, 4. Aufl., S. 230, wurde schon gezeigt, daß der parabolische Träger ohne Streben für volle Belastung im Gleichgewicht ist, daß daher diese Stäbe nur durch eine ungleichmäßige Belastung bedingt werden. Demgemäß werden nun die vorhandenen Streben bei voller Belastung spannungslos; auch haben dann die Ständer nur die Knotenlasten von oben nach den Knotenpunkten des geknickten Untergurtes zu übertragen; daraus erklärt sich der obige Wert  $V_2 = -12^t$  für volle Belastung, den man in gleicher Weise für sämtliche Ständer findet. Nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 227, ist  $H = \frac{pl^2}{8f} = \frac{pl \cdot l}{8f}$  die wagerechte Spannkraft einer solchen Stangenverbindung; dies gibt hier, wo auf 4 m Länge 12 t, auf  $l = 24$  m also 72 t kommen:

$$H = \frac{72 \cdot 24}{8 \cdot 3} = 72^t.$$

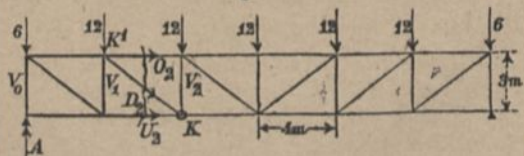
Dieser Wert gilt für die Druckkräfte in sämtlichen Stäben des Obergurtes und ist zugleich die wagerechte Seitenkraft der Zugkräfte im Untergurte.

### e) Parallelfachwerkträger.

**Beispiel:** Träger mit parallelen Gurten von  $l = 24$  m Spannweite und  $h = 3$  m Trägerhöhe (Fig. 105). Die Spannweite sei wiederum durch Ständer in 6 Fache von  $\lambda = 4$  m Länge geteilt; auch mögen die Lasten  $G = 2^t$ ,  $P = 10^t$ , dieselben sein wie im vorigen Beispiele, und nur am Obergurt angreifen.

Für die Berechnung der Gurten ist volle Belastung sämtlicher Lastpunkte anzunehmen, und zwar sind die Endpunkte des Obergurtes je mit der halben Last eines Faches, d. h. mit 1 t bzw. 5 t zu belasten. Dann ist  $A = 3 \cdot 12 = 36^t$ .

Fig. 105.



Für  $O_2$  ist  $K$  der Drehpunkt, und man findet aus der Momentengleichung

$$0 = O_2 \cdot 3 + (A - 6) \cdot 8 - 12 \cdot 4:$$

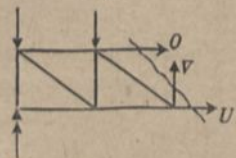
$$O_2 = -64^t.$$

Für  $U_2$  ist  $K'$  der Drehpunkt, und man findet aus

$$0 = -U_2 \cdot 3 + (A - 6) \cdot 4:$$

$$U_2 = 40^t.$$

Fig. 106.



Übrigens braucht man bei einem derartigen Parallelfachwerke mit Streben, die nach der Mitte hin abfallen, nur die Spannkraften des Obergurtes zu berechnen und kann danach diejenigen des Untergurtes ohne weiteres angeben. Führt man nämlich durch den Träger einen Schnitt in der Richtung der Streben (Fig. 106), so muß nach der Gleichung der wagerechten Kräfte  $O + U = 0$ , mithin  $U = -O$  sein, d. h. in einem Parallelfachwerke

mit Ständern haben zwei Stäbe des Ober- und Untergurtes, welche zwischen zwei Nachbarstreben liegen, gleiche, aber entgegengesetzte Spannkraft; mithin ist  $O_1 = -U_2$ ;  $O_2 = -U_3$  u. s. f.

Da der Schnittpunkt der Gurten in unendlicher Ferne liegt, so verwendet man für die Berechnung der Wandglieder eines Parallelträgers an Stelle der Momentengleichung zweckmäßig die Gleichung der lotrechten Kräfte. In dieser kommen die Gurtkräfte, weil sie wagerecht sind, nicht vor; mithin erreicht man dasselbe, was sonst mit der Momentengleichung erzielt wurde, nämlich daß man für die gesuchte Spannkraft nur eine einzige Gleichung aufzustellen braucht.

Ordnet man zur Berechnung von  $D_2$  zunächst eine Belastung rechts vom Schnitt an, so wird der linke Auflagerdruck leicht zu  $2\frac{2}{3}t$  gefunden (nämlich die ständige Last ( $1t$ ) des Endknotenpunktes mehr als auf S. 97 zur Berechnung von  $D_1$ ). Ist  $\delta$  der Neigungswinkel der Strebe gegen die Wagerechte, so ist  $D_2 \sin \delta$  die lotrechte Seitenkraft von  $D_2$ , und man erhält (Fig. 107) aus

$$0 = D_2 \sin \delta - A + 1 + 2:$$

$$D_2 \sin \delta = 19\frac{2}{3}t \text{ und,}$$

weil  $\text{tg } \delta = \frac{3}{4}$ ,  $\sin \delta = 0,6$ ,

$$D_2 = 32,78t.$$

Für einseitige Belastung links vom Schnitt ist  $A' = 19\frac{1}{3}t$ ; und aus  $0 = D_2' \sin \delta - A' + 6 + 12$  findet man leicht

$$D_2' \sin \delta = 1\frac{1}{3}t; D_2' = 2,22t.$$

Die Spannkraft der Strebe  $D_2$  schwankt also zwischen den Zugkräften 2,22 und 32,78  $t$ ; Druckkraft erfährt sie nicht, ebensowenig  $D_1$ , wohl aber  $D_3$ ; letzteres gibt Anlaß zu sogen. Gegenstreben, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Die Spannkräfte der Ständer lassen sich beim Parallelfachwerk auf die der Streben zurückführen. Führt man nämlich um einen Knoten des unbelasteten Gurtes (hier also des unteren) einen kreisförmigen Schnitt (Fig. 108) und wendet auf den herausgeschnittenen Teil die Gleichung der lotrechten Kräfte an, so kommen in dieser nur  $V$  und  $D$  vor, und es muß

$$V + D \sin \delta = 0 \text{ oder } V = -D \sin \delta \text{ sein.}$$

Am Knotenpunkte  $K$  des Untergurtes (Fig. 105) treffen  $D_2$  und  $V_2$  zusammen, mithin wird  $V_2 = -D_2 \sin \delta = -19\frac{2}{3}t$ ;  $V_2' = -1\frac{1}{3}t$ . Der Ständer  $V_2$  erfährt also eine Druckkraft, die zwischen  $1\frac{1}{3}$  und  $19\frac{2}{3}t$  schwankt.

Greifen die Lasten am Untergurt an, so ändern sich die Spannungen in den Streben und in den Ständern.

Eine eingehendere Behandlung erfahren die Fachwerke in Keck-Hotopp, Vorträge über Elastizitätslehre, Teil II, S. 242, und über Graphische Statik.

Fig. 107.

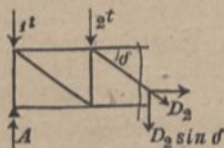
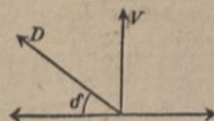


Fig. 108.





## B. Elastisch-feste Körper in Beschleunigungszuständen.

### 1. Beschleunigte Verschiebung elastisch-fester Körper.

Einem geraden Stabe werde durch eine im Schwerpunkte der vorderen Stirnfläche angreifende Zugkraft  $K$  eine Beschleunigung  $p$  erteilt (Fig. 109), Hierdurch entstehen Spannungen und Formänderungen (elastische Verlängerungen). Es wird die Annahme gemacht, die Formänderungen seien bereits derartig eingetreten, daß gegenseitige Bewegungen der einzelnen Punkte des Stabes nicht mehr erfolgen, daß vielmehr alle Teile übereinstimmende Geschwindigkeit und Beschleunigung haben. Dann müssen an dem ganzen Stabe, sowie an jedem abgeschnittenen Teile desselben nach S. 3 die Ergänzungskräfte  $[-mp]$  den wirklichen Kräften das Gleichgewicht halten, und es muß der Stab sich bei der Bewegung wie ein starrer Körper verhalten. Nach dem Satze von der Beschleunigung des Schwerpunktes (1. Teil, 4. Aufl., S. 173) ist

$$p = \frac{K}{M}, \quad \text{wobei } M = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot l$$

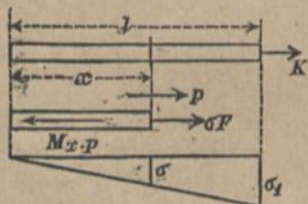
die Masse des ganzen Stabes bedeutet;  $l$  ist die Länge,  $F$  die Querschnittfläche,  $\gamma$  das Gewicht der Raumeinheit des Stabes,  $g$  die Erdbeschleunigung.

Macht man auch hier die Voraussetzung, daß die an einem Querschnitt auftretende Spannkraft sich gleichmäßig über dessen Fläche  $F$  verteile, so ist die Spannung an der Angriffsstelle der Kraft  $K$

$$1) \quad \sigma_1 = \frac{K}{F} = \frac{M}{F} p = \frac{\gamma}{g} l p = \gamma l \frac{p}{g}$$

Will man  $\sigma_1$  in Atmosphären ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ ) erhalten, so drücke man  $l$  in  $\text{cm}$  aus, und es ist dann  $\gamma$  das Gewicht eines Kubikzentimeters in  $\text{kg}$ .

Fig. 109.



Ist  $\sigma$  die Spannung eines Querschnittes im Abstand  $x$  vom freien Ende,  $M_x$  die Masse des Abschnittes von der Länge  $x$ , so muß  $\sigma F = M_x p = \frac{\gamma}{g} F x p$  sein, mithin

$$2) \quad \sigma = \gamma \frac{p}{g} \cdot x.$$

Diese mit  $x$  verhältnismäßig sich ändernde Spannung ist in Fig. 109 dargestellt. Hierbei ist die Einwirkung der Schwere nicht berücksichtigt, vielmehr angenommen, daß die Verschiebung etwa auf einer wagerechten, glatten Unterlage erfolge.

Es möge nun die in lotrechter Richtung befindliche Stange der Schwere unterliegen und durch eine oben angreifende Zugkraft  $K$  eine Beschleunigung  $p$  lotrecht aufwärts erfahren (Fig. 110). Dann ist die gesamte wirkliche Kraft in der Richtung aufwärts  $K - Mg = K - \gamma Fl$ ; die gesamte Ergänzungskraft mit dem Sinne abwärts wird  $Mp = \frac{\gamma}{g} Fl p$ , mithin

$$K = M(g + p) = \gamma Fl \left(1 + \frac{p}{g}\right)$$

und die Spannung am oberen Ende

$$3) \quad \sigma_1 = \gamma l \left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Nach dem unteren Ende des Stabes vermindert sich die Spannung  $\sigma$  wiederum nach geradlinigem Gesetze bis auf Null.

Ist die Beschleunigung  $p$  des Stabes abwärts,  $K$  aber wie vorhin aufwärts gerichtet, mithin  $p \leq g$ , so kehrt in den vorstehenden Formeln  $p$  sein Vorzeichen um, es wird

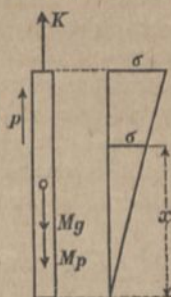
$$K = \gamma Fl \left(1 - \frac{p}{g}\right),$$

$$\sigma_1 = \gamma l \left(1 - \frac{p}{g}\right)$$

und im Abstand  $x$  vom unteren Ende

$$4) \quad \sigma = \gamma x \left(1 - \frac{p}{g}\right).$$

Fig. 110.



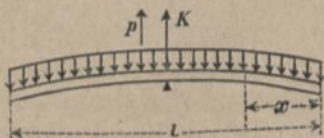


Für  $p = g$  mit  $K = 0$ , d. h. für einen frei fallenden Stab, wird  $\sigma = 0$ , d. h. ein frei fallender Stab ist spannungslos.

Dies gilt freilich nur unter der Voraussetzung, daß sich in der Stange keine von der Herstellung durch Gießen, Schmieden, Walzen, Ziehen (Drahtziehen), Drücken u. dergl. herrührende Spannungen vorfinden, die man auch wohl falsche Spannungen nennt, und die selbst dann vorhanden sein können, wenn der Stab äußeren Kräften völlig entzogen ist. In einem mit derartigen Spannungen behafteten Stabe tritt beim freien Falle derselbe Spannungszustand ein, als ob er von äußeren Kräften frei wäre; an jedem Querschnitt ist die gesamte Spannkraft Null, doch können an der Schnittfläche dann gleichwohl innere Zugkräfte und in ihrer Summe ebenso große Druckkräfte vorkommen. Solche Herstellungsspannungen lassen sich durch Ausglühen und langsames Abkühlen fast ganz beseitigen. Genauer lautet daher der obige Satz: Jeder frei (ohne Luftwiderstand) fallende Körper, auch wenn er nicht die Form eines geraden Stabes hat, ist spannungslos, abgesehen von etwaigen Herstellungsspannungen. Die Herstellungsspannungen sind in der Regel im Innern des Körpers Zug-, in der Nähe der Oberfläche aber Druckspannungen.

Wird einem prismatischen Stabe durch eine in seiner Mitte angreifende, rechtwinklig zur Stabrichtung wirkende Kraft  $K$  eine Verschiebungsbeschleunigung  $p$  erteilt (Fig. 111), so entstehen Biegespannungen. Unter der Voraussetzung, daß die diesen Spannungen entsprechenden Durchbiegungen bereits eingetreten seien, daß also Formänderungen nicht mehr vorkommen, haben sämtliche Massenteilchen des Stabes die gleiche Beschleunigung  $p$ . Die Ergänzungskräfte  $[-mp]$ , welche mit  $K$  im Gleichgewichte sein müssen, bilden eine gleichmäßig über die Länge verteilte Belastung. Ist  $F$  der Querschnitt des Stabes,  $\gamma$  wiederum das Gewicht der Körpereinheit, so kommt auf die Längeneinheit das Gewicht  $\gamma F$ , die Masse  $\gamma/g F$ , die Ergänzungskraft  $\gamma F p/g$  (dem Sinne der Beschleunigung  $p$  entgegengesetzt). An einer Schnittstelle im Abstände  $x$  vom freien Ende entsteht dann, wenn wir zunächst den biegenden Einfluß des Eigengewichts des Stabes vernachlässigen, ein Biegemoment

Fig. 111.



$$\mathfrak{M} = \gamma F \frac{p x^2}{g 2}.$$

Das größte Moment findet sich in der Angriffsstelle der Kraft  $K$  mit  $x = \frac{1}{2}l$  zu

$$5) \quad \mathfrak{M}_{max} = \gamma F \frac{p l^2}{g}.$$

Ist die Beschleunigung lotrecht aufwärts gerichtet und wirkt auch die Schwere auf den Stab, so ist, wie auf S. 101 statt  $p: g$  nunmehr  $1 + \frac{p}{g}$  einzuführen. Ist  $\mathfrak{B} = J: e$  das Widerstandsmoment des Stabquerschnitts, so wird die stärkste Spannung

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}_{max}}{\mathfrak{B}} = \frac{\gamma F l^2}{8 \mathfrak{B}} \left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Mit  $\gamma F l = P$  (Gewicht des Stabes) wird

$$\sigma = \frac{P l}{8 \mathfrak{B}} \left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser  $r$ , so wird  $\mathfrak{B} = \frac{1}{4} r^3 \pi$  und

$$6) \quad \sigma = \frac{P l}{2 r^3 \pi} \left(1 + \frac{p}{g}\right) = \frac{\gamma l^2}{2 r} \left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

**Beispiel:** Ein nahezu zylindrischer Baum von 12<sup>m</sup> Länge und 0,1<sup>m</sup> Halbmesser soll mittels eines in seiner Mitte befestigten Seiles auf ein Baugerüst gezogen werden. Das Hinaufziehen erfolge aber nicht gleichmäßig, sondern mit einer Beschleunigung  $p = \frac{1}{2}g$ . Ein Kubikmeter des Holzes wiege 600 kg, dann ergibt sich, wenn man diese Zahlen in Gl. 6 einführt, die Spannung natürlich in kg/m<sup>2</sup>, nämlich

$$\sigma = \frac{600 \cdot 12^2}{2 \cdot 0,1} \cdot 1,5 = 648\,000,$$

oder, da  $1 \text{ at} = 1 \text{ kg/cm}^2 = 10\,000 \text{ kg/m}^2$  ist (vgl. S. 8),

$$\sigma = 64,8 \text{ at}.$$

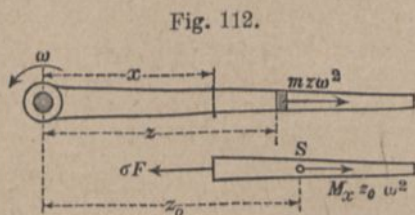
Will man  $\sigma$  unmittelbar in at erhalten, so muß man  $\gamma$  als Gewicht eines Kubikzentimeters = 600:100<sup>3</sup>,  $l = 1200 \text{ cm}$ ,  $r = 10 \text{ cm}$  einführen. Die Formel gilt auch, wenn bei etwaigem Hinablassen eine Verzögerung  $p$ , vielleicht durch Bremsung der Windevorrichtung, eintritt. Für gleichmäßige Bewegung ( $p = 0$ ) wird die Spannung nur  $\frac{2}{3} \cdot 64,8 = 43,2 \text{ at}$ .

## 2. Gleichmäßige Drehung um eine feste Achse.

Bei gleichmäßiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  (Fig. 112) erfährt ein Massenteilchen  $m$  im Abstände  $z$  von der Drehachse die Zentripetalbeschleunigung  $z\omega^2$  (1. Teil, 4. Aufl.,



S. 93); dem entspricht als Ergänzungskraft die Zentrifugalkraft  $m z \omega^2$ . Führt man im Abstand  $x$  von der Drehachse einen Schnitt, bezeichnet die entsprechende Querschnittfläche mit  $F$ , die daran auftretende Spannung mit  $\sigma$ , so muß die innere Spannkraft  $\sigma F$  den Zentrifugalkräften des Stabteiles zwischen der Schnittstelle und dem freien Ende das Gleichgewicht halten, oder es muß sein



$$1) \quad \sigma F = \omega^2 \Sigma m z = \omega^2 M_x z_0,$$

wenn  $M_x$  die Masse des abgeschnittenen Stabteiles,  $z_0$  den Abstand seines Schwerpunktes von der Drehachse bedeutet. Sind Form und Massenverteilung des Stabes bekannt, so kann man für jede Schnittstelle  $\sigma$  berechnen.

Ein prismatischer Stab von der Länge  $l$  und dem Querschnitt  $F$  ergibt hiernach

$$M_x = \gamma F (l - x) : g, \quad z_0 = \frac{1}{2} (l + x) \quad \text{und}$$

$$\sigma = \frac{\omega^2 \gamma}{g} (l - x) \frac{(l + x)}{2} = \frac{\omega^2 \gamma}{g} \cdot \frac{l^2 - x^2}{2}.$$

Führt man dann die Umfangsgeschwindigkeit  $c = l\omega$  des Stabes ein, so wird

$$2) \quad \sigma = \gamma \frac{c^2}{2g} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right),$$

worin  $\frac{c^2}{2g}$  die der Umfangsgeschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe bedeutet. Diese Spannung wird am größten für  $x = 0$ , d. h. dicht an der Achse, nämlich

$$3) \quad \sigma_{max} = \gamma \frac{c^2}{2g}.$$

Dieselbe Spannung erfährt an der Aufhängestelle ein lotrecht herabhängender prismatischer Stab oder Draht von der Dichte  $\gamma$ , wenn seine Länge  $= \frac{c^2}{2g}$  ist.

**Beispiel:** Bei welcher sekundlichen Umfangsgeschwindigkeit erhält ein um seinen Endpunkt sich drehender prismatischer Schmiedeisenstab eine Spannung von  $700 \text{ at}$ ?  $1 \text{ m}^3$  Schmiedeisen wiegt  $7800 \text{ kg} = \gamma$ . Da hier  $c$  in  $\text{m/sek.}$  verlangt wird, so müssen auch  $\sigma$ ,  $\gamma$  und  $g$  auf Meter bezogen werden. Dann ist  $\sigma = 7000000 \text{ kg/m}^2$  und nach Gl. 3  $\frac{c^2}{2g} = \frac{\sigma}{\gamma} = \frac{7000000}{7800} = \text{rund } 900 \text{ m}$ , also  $c = 133 \text{ m/sek.}$

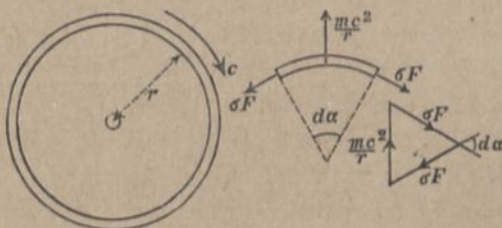
Will man mit  $\sigma = 700 \text{ kg/cm}^2$  rechnen, so muß man  $\gamma = 0,0078$ , dem Gewichte eines Kubikzentimeters und  $g = 981 \text{ cm/sek.}^2$  setzen, dann wird  $\frac{c^2}{2g} = \frac{700}{0,0078} = 90000 \text{ cm}$ ;  $c = 13300 \text{ cm/sek.}$

Ein Bleistab von der Dichte  $\gamma = 11400 \text{ kg/m}^3$  und einer Zugfestigkeit  $= 130 \text{ at}$  erreicht diese Grenze der Festigkeit bei  $\frac{c^2}{2g} = \frac{1300000}{11400} = 114 \text{ m}$  und  $c = 47 \text{ m/sek.}$

Ein Ring vom Halbmesser  $r$ , der mit der Geschwindigkeit  $c$  gleichmäßig umläuft (Fig. 113), erfährt ebenfalls Spannungen.

Schneidet man aus dem Ringe ein Teilchen vom Mittelpunktswinkel  $d\alpha$  heraus und nimmt an, daß sich die Spannkraft gleichmäßig über den Querschnitt  $F$  des Ringes verteile (was bei geringer Wandstärke zulässig ist), so entstehen an den Schnittstellen die Spannkräfte  $\sigma F$ , welche mit der Zentrifugalkraft  $m \cdot r \cdot \omega^2 = \frac{m c^2}{r}$  im Gleichgewicht sein müssen. Dann folgt aus dem Kräfteck

Fig. 113.



die Spannkräfte  $\sigma F$ , welche mit der Zentrifugalkraft  $m \cdot r \cdot \omega^2 = \frac{m c^2}{r}$  im Gleichgewicht sein müssen. Dann folgt aus dem Kräfteck

$$2 \sigma F \sin \frac{d\alpha}{2} = \sigma F \cdot d\alpha = \frac{m c^2}{r} \quad \text{und, weil}$$

$$m = \frac{\gamma}{g} r \cdot d\alpha \cdot F,$$

$$4) \quad \sigma = \gamma \frac{c^2}{g} = 2\gamma \frac{c^2}{2g},$$

d. i. das Doppelte von  $\sigma_{max}$  in Gl. 3 für den geraden Stab.



**Beispiel:** Soll ein dünner Schmiedeisening auf die Spannung  $\sigma = 700 \text{ at}$  gebracht werden, so ist dazu eine Geschwindigkeitshöhe  $\frac{c^2}{2g} = \frac{\sigma}{2\gamma} = \frac{7000000}{2 \cdot 7800} = 450 \text{ m}$ , also eine Umfangsgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{2g \cdot 459} = 94 \text{ m/sek.}$$

erforderlich. Diese Umfangsgeschwindigkeit darf von einem schmiedeisernen Schwungrade nicht überschritten werden, wenn  $\sigma = 700 \text{ at}$  als zulässige Spannungsgrenze angenommen wird. Ein Bleiring gelangt schon bei  $c = 47 \sqrt{1/2} = 47 \cdot 0,707 = 33 \text{ m/sek.}$  (vgl. das vorige Beispiel) an die Grenze der Festigkeit.

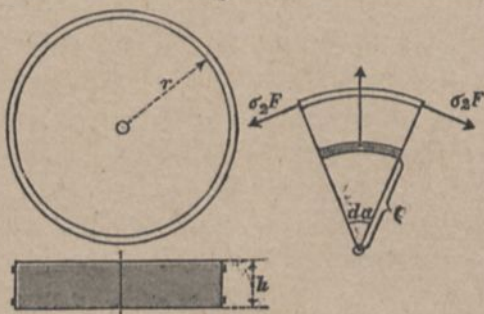
**Spannungen der Ringe eines Mühlsteines.** Einen Mühlstein pflegt man aus einzelnen Stücken zusammenzukitten, da es schwer hält, bei einem natürlichen Steine solcher Größe die wünschenswerte Gleichmäßigkeit des Gefüges zu erzielen.

Die Zugfestigkeit des zusammengesetzten Steines genügt nun aber nicht, um bei schneller Drehung den Zusammenhang zu sichern; er wird daher durch umgelegte Eisenringe vor dem Zerreißen bewahrt.

Der Mühlstein habe den Halbmesser  $r$ , die Höhe  $h$ , die Dichte  $\gamma_1$ ; es sei  $F$  der Gesamtquerschnitt der Ringe,  $\gamma$  die Dichte derselben. Bei der Berechnung der Ringspannungen setzen wir voraus, daß die Festigkeit des Steines unerheblich sei, daß also der Zusammenhalt nur durch die Ringe gesichert wird. Die Spannung  $\sigma$  der Ringe rührt mit dem Betrage  $\sigma_1 = \gamma \frac{c^2}{g}$  (Gl. 4) von der eigenen Masse her: nun muß auch

noch der Betrag  $\sigma_2$ , der durch die Masse des Steines bedingt ist, berechnet werden. Trennt man aus dem Stein einen Ausschnitt vom Mittelpunktwinkel  $d\alpha$  ab, so entspricht einem unendlich kleinen Ringteilchen vom Halbmesser  $\varrho$  eine Zentrifugalkraft  $dm \varrho \omega^2$ , mithin dem ganzen Ausschnitt eine solche von der Größe  $\omega^2 \varrho \Sigma dm$ , worin  $\varrho_0 = \frac{2}{3} r$ ;  $\Sigma dm = \frac{\gamma_1 r^2 d\alpha}{g} h = m$  (Masse des Ausschnittes).

Fig. 114.



Die Zentrifugalkraft wird daher

$$\begin{aligned} m Q_0 \omega^2 &= \frac{\gamma_1 r^2 \cdot d\alpha}{g} \frac{2}{3} h r \omega^2 \\ &= \frac{\gamma_1 h \cdot d\alpha}{g} r c^2; \end{aligned}$$

sie muß von den Spannkraften  $\sigma_2 F$  im Gleichgewichte gehalten werden. Dies führt mittels eines ähnlichen Kräftecks wie in Fig. 113 zu der Gleichung

$$\begin{aligned} \sigma_2 F \cdot d\alpha &= m Q_0 \omega^2 = \frac{\gamma_1 h \cdot d\alpha}{g} r c^2, \quad \text{woraus} \\ \sigma_2 &= \frac{\gamma_1 h r}{g} \frac{c^2}{F}, \end{aligned}$$

so daß die Gesamtspannung der Ringe wird

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{c^2}{g} \left( \gamma + \gamma_1 \frac{h r}{3 F} \right).$$

Für den erforderlichen Ringquerschnitt ergibt sich dann

$$F = \frac{1}{3} \frac{\gamma_1 h r c^2}{g \sigma - \gamma c^2}.$$

**Beispiel:** Soll für einen Mühlstein von 0,7<sup>m</sup> Halbmesser und 0,3<sup>m</sup> Höhe der Querschnitt der Ringe in cm<sup>2</sup> berechnet werden, so beziehen wir sämtliche Zahlen auf cm, setzen  $r=70$ ,  $h=30$ ,  $\gamma_1=0,0024$ ,  $\gamma=0,008$  (rund),  $g=981$ , die sekundliche Umfangsgeschwindigkeit  $c=9\text{ m}=900\text{ cm}$ , die zulässige Spannung der Eisenringe  $\sigma=200\text{ at}$  (so gering, weil ein Maschinenteil vorliegt, der nicht in fortwährender gleichmäßiger Bewegung ist, sondern bald ruht, bald umläuft, so daß auch die Spannung und somit die elastische Dehnung häufigem Wechsel unterworfen ist. Auch kommen noch Spannungen durch die Widerstände des Mahlgutes hinzu, die nicht genau angebar sind.) Man erhält daher:

$$F = \frac{1}{3} \frac{0,0024 \cdot 30 \cdot 70 \cdot 900^2}{981 \cdot 200 - 0,008 \cdot 900^2} = 7,2\text{ cm}^2.$$

Dieser Gesamtquerschnitt ist auf mehrere, zweckmäßig angeordnete Ringe zu verteilen.

### 3. Ungleichförmige Drehung um eine feste Achse.

Die Drehachse möge mittels eines Vierkantens dem Stab eine Winkelbeschleunigung  $\varepsilon$  (Fig. 115) etwa links herum erteilen; dann hat ein Massenteilchen  $m$  im Abstände  $s$  von der Achse



außer der von der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  herührenden Zentripetalbeschleunigung  $z\omega^2$  noch eine Umfangsbeschleunigung  $z\varepsilon$ . Als Ergänzungskraft tritt daher außer der Zentrifugalkraft noch eine Kraft  $mz\varepsilon$  auf, welche rechtwinklig zur Stabrichtung — in Fig. 115 abwärts — gerichtet ist. Die Spannkraften einer Schnittstelle haben daher nicht nur einer Längskraft, sondern auch quer gerichteten Kräften das Gleichgewicht zu halten; letztere verursachen ein Biegemoment und rufen an der Schnittfläche ein Spannungsmoment hervor. Die Zentrifugalkräfte bedingen eine über die Schnittfläche gleichmäßig verteilte Spannung  $\sigma_1$ , welche nach Gl. 1, S. 104 zu berechnen ist. Ist  $\sigma_2$  die stärkste Biegespannung an der Schnittstelle, und ist  $\mathfrak{B}$  das Widerstandsmoment der Querschnittsfigur, so ist  $\sigma_2 \mathfrak{B}$  das Spannungsmoment. Zum Biegemomente für Querschnitt  $x$  liefert das eine Massenteilchen  $m$  den Beitrag  $mz\varepsilon(z-x)$ . Dies ist von  $z=x$  bis  $z=l$  zu integrieren. Daher wird

$$\sigma_2 \mathfrak{B} = \mathfrak{M} = \varepsilon \int_{z=x}^{z=l} m z (z-x) dz.$$

Darin ist  $m = \frac{\gamma}{g} F_x dz$ , wenn  $F_x$  der Querschnitt im Abstände  $z$  von der Drehachse.

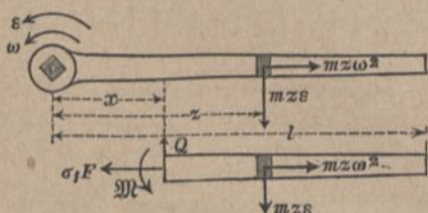
Gehen wir nun wieder zu einem prismatischen Stabe mit  $F_x = F$  und mit  $m = \frac{\gamma}{g} F \cdot dz$  über, so wird

$$\sigma_2 \mathfrak{B} = \frac{\gamma}{g} \varepsilon F \int_x^l (z^2 - xz) dz = \frac{\gamma}{g} \varepsilon F \left( \frac{l^3 - x^3}{3} - x \frac{l^2 - x^2}{2} \right).$$

Führt man die Umfangsgeschwindigkeit  $c = l\omega$  und die Umfangsbeschleunigung  $p = l\varepsilon$  ein, so wird

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \gamma \left\{ \frac{c^2}{2g} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) + \frac{p}{\mathfrak{B} l} \left( \frac{l^3 - x^3}{3} - x \frac{l^2 - x^2}{2} \right) \right\}.$$

Fig. 115.



Der gefährliche Querschnitt liegt (wie bei gleichförmiger Drehung) dicht an der Achse mit  $x = 0$ , und es wird

$$\sigma_{max} = \gamma \left( \frac{c^2}{2g} + \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{B}} \right).$$

**Beispiel:** Solchen Spannungen sind besonders Degenklingen ausgesetzt, wenn ihnen durch die Hand des Fechters eine heftige Drehbeschleunigung in der Richtung quer zur Schärfe erteilt wird. Nimmt man den Querschnitt annähernd als Rechteck, die Breite  $b = 1,5$  cm, die Dicke  $d = 0,4$  cm, die Länge  $l = 90$  cm an, so wird  $\mathfrak{B} = \frac{1}{6} F d$ . Die Spannung  $\sigma_1$  ist in solchen Fällen unbedeutend, da die einzelnen Bewegungen viel zu kurze Dauer haben, als daß bedeutende Umfangsgeschwindigkeiten  $c$  entstehen könnten. Es sind hier nur die Umfangsgeschleunigungen wichtig. Wir setzen daher

$$\sigma = \sigma_2 = \gamma \frac{p}{g} \frac{Fl^2}{3\mathfrak{B}} = \gamma \frac{p}{g} \frac{2l^2}{d} = 0,008 \cdot \frac{p}{g} \frac{2 \cdot 90^2}{0,4} = 324 \frac{p}{g}.$$

Es erfordert dies (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 325) ein Kraftmoment der Hand

$$\mathfrak{M} = \varepsilon J = \frac{1}{3} M l^2 \varepsilon = \frac{1}{3} p M l = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \gamma F l^2 = 12,96 \frac{p}{g} \text{ cmkg}.$$

Ist in einem besonderen Falle  $p = 5g$ , so wird die stärkste Spannung  $\sigma = 1620 \text{ at}$ , das Kraftmoment der Hand  $\mathfrak{M} = 64,8 \text{ cmkg}$ . Daraus erklärt es sich, daß bei einem geübten Fechter, der ein größeres  $\mathfrak{M}$  zu leisten vermag, die Klinge durch einen Lufthieb zerbrechen kann, wozu auch noch der hier nicht berücksichtigte Luftwiderstand beiträgt.

## C. Formänderungsarbeit elastisch-fester Körper.

Während unter  $B$  die infolge der beschleunigten Bewegung auftretenden Spannungen und Spannungsmomente berechnet wurden, sollen nun die Vorgänge beim Entstehen der Spannungen und Formänderungen untersucht werden. Es kommt hierbei vor allem auf die Bestimmung der bei der Formänderung von den äußeren und inneren Kräften verrichteten Arbeit, der sog. Formänderungsarbeit, an.

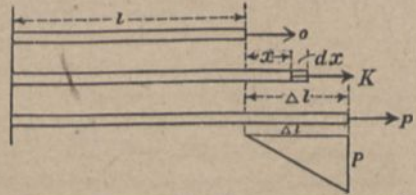
### 1. Arbeit bei der Verlängerung und Verkürzung gerader Stäbe.

Ein prismatischer Stab von der Länge  $l$  und dem Querschnitt  $F$  sei an dem einen Ende (links in Fig. 116) befestigt; am anderen freien Ende wirke eine im Schwerpunkte der Endfläche angreifende



Zugkraft  $K$ . Diese Kraft soll aber der Größe nach nicht gleichbleibend sein, sondern sie soll langsam und stetig von Null bis zu einem Werte  $P$  so anwachsen, daß sie stets mit den in den einzelnen Stabquerschnitten auftretenden Zugspannungen im Gleichgewicht bleibt, also die eintretende elastische Verlängerung des Stabes ohne eine nennenswerte Ansammlung

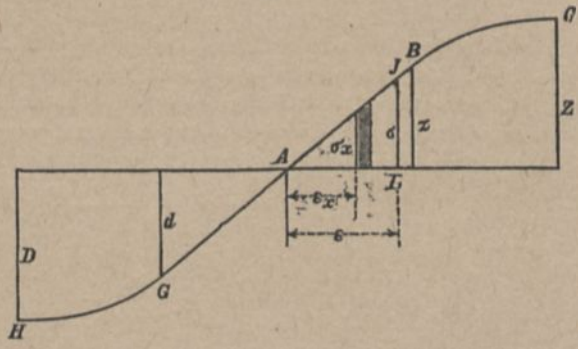
Fig. 116.



von Arbeitsvermögen in ihm erfolgt. Dem beliebigen Zwischenwerte  $K$  der veränderlichen Kraft entspreche eine Verlängerung  $x$ , mithin ein Verlängerungsverhältnis oder eine Dehnung  $\varepsilon_x = x:l$  (s. S. 7), während

Fig. 117.

dem Endwerte  $P$  der Kraft eine Verlängerung  $\Delta l$ , also eine Dehnung  $\varepsilon = \Delta l:l$  zugehöre. Bei einer unendlich kleinen Zunahme der Verlängerung  $x$  um  $dx$  verrichtet  $K$  die Arbeit



$d\mathcal{A} = K \cdot dx$ . Setzt man nun  $K = F\sigma_x$ ,  $P = F\sigma$ , so wird auch

$$d\mathcal{A} = F\sigma_x l \cdot d\varepsilon_x$$

und die Gesamtarbeit bei der Verlängerung  $\Delta l = l\varepsilon$ :

$$1) \quad \mathcal{A} = Fl \int_0^\varepsilon \sigma_x \cdot d\varepsilon_x.$$

Diese Beziehung zwischen  $\sigma_x$  und  $\varepsilon_x$  wird mittels der Dehnungsline (s. S. 7) zum Ausdrucke gebracht. Hat diese für den vorliegenden Körper die Form  $HGABC$  (Fig. 117), wobei die von  $A$  aus gemessenen Abszissen die Dehnungen  $\varepsilon_x$ , die zugehörigen Ordinaten aber die Spannungen  $\sigma_x$  bedeuten, so wird der Ausdruck  $\sigma_x \cdot d\varepsilon_x$  in der letzten Gleichung durch den schraffierten Flächestreifen der Dehnungsline (Fig. 117) dargestellt; sein Integral

ergibt daher die ganze Fläche von  $A$  bis zu dem Endwert  $\varepsilon = AL$  der erzeugten Dehnung, d. h. die Fläche  $AJL$ , so daß die zur Verlängerung um  $\Delta l = l\varepsilon$  erforderliche Arbeit wird:

$$2) \quad \mathfrak{A} = F \cdot l \cdot AJL.$$

Ist die Dehnungslinie bekannt, so kann man die Fläche  $AJL$  stets ermitteln.

Für die weiteren Entwicklungen nehmen wir ein gleichbleibendes Verhältnis zwischen Spannung und Dehnung an, setzen also voraus, daß die Spannung  $\varepsilon$  an der Elastizitäts- oder Proportionalitätsgrenze nicht überschritten werde (vgl. S. 6). Dann ist  $AJL$  ein Dreieck von der Fläche  $\frac{1}{2} \sigma \varepsilon$  (Fig. 118), so daß

$$3) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2} Fl \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l$$

wird, wofür man wegen  $\varepsilon = \sigma : E$  auch schreiben kann

$$4) \quad \mathfrak{A} = \frac{Fl \sigma^2}{2 E}.$$

Bezeichnet man den Rauminhalt  $Fl$  des Stabes mit  $V$ , so wird noch einfacher

$$5) \quad \mathfrak{A} = \frac{V \sigma^2}{2 E}.$$

Dies ist die Arbeit, welche erforderlich ist, um einen prismatischen Stab vom Rauminhalte  $V$  aus dem spannungslosen Zustand langsam in den Zustand einer überall gleichen Spannung  $\sigma$  zu versetzen.

Am leichtesten zu merken ist die Form  $\mathfrak{A} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l$ , d. h. gleich dem Inhalt des Dreiecks in Fig. 116, unten;  $\frac{1}{2} P$  ist die mittlere Kraft,  $\Delta l$  der Weg des Angriffspunktes.

Bei Gl. 5 ist zunächst auffällig, daß die Verlängerungsarbeit nicht von dem Querschnitt und der Länge des Stabes im einzelnen, sondern nur von seinem Inhalte  $V$  abhängt, daß also ein langer Stab von kleinem Querschnitte dieselbe Arbeit zur Erzeugung der Spannung  $\sigma$  erfordert, wie ein kurzer dicker Stab (Fig. 119), wenn beide nur gleichen Rauminhalt haben. Es erklärt

Fig. 118.

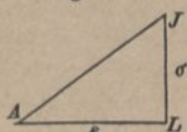
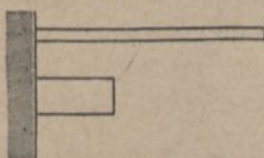


Fig. 119.





sich dies (abgesehen von der vorstehenden Ableitung) daraus, daß die Arbeit ein Produkt aus dem Wege  $\Delta l = l \sigma : E$  und dem Mittelwerte der gleichmäßig von 0 bis  $P$  anwachsenden Kraft, d. h.  $\frac{1}{2} P = \frac{1}{2} \sigma F$  ist. Bei dem dünnen, langen Stabe ist  $\frac{1}{2} P$  verhältnismäßig klein,  $\Delta l$  aber groß; bei dem dicken Stabe dagegen ist  $\frac{1}{2} P$  groß und  $\Delta l$  entsprechend kleiner, so daß das Produkt in beiden Fällen den gleichen Wert erhält.

Wendet man auf diesen Vorgang der langsamen Verlängerung das allgemeine Gesetz der Arbeit (1. Teil, 4. Aufl., S. 174, Gl. 1) an:

$$\Sigma^{1/2} m v^2 - \Sigma^{1/2} m c^2 = \Sigma \mathfrak{A}_k + \Sigma \mathfrak{A}_i,$$

so ist die Zunahme des Arbeitsvermögens = Null zu setzen, da weder zu Anfang noch zu Ende eine nennenswerte Geschwindigkeit vorhanden ist. Daher muß die Summe der äußeren und der inneren Arbeiten Null sein. Da nun die Arbeit der äußeren Kraft  $\mathfrak{A}_k = \frac{V \sigma^2}{2 E}$  gefunden wurde, so muß die Arbeit der inneren Spannkraft

$$6) \quad \mathfrak{A}_i = - \frac{V \sigma^2}{2 E} = - \frac{P}{2} \Delta l \quad \text{sein.}$$

Keht der Stab aus dem Zustande der Spannung  $\sigma$  langsam in den spannungslosen Zustand zurück, so hat die Richtung der Bewegung des Angriffspunktes der Zugkraft entgegengesetzten Sinn im Vergleiche mit dem Sinne der Kraft, mithin kehrt sich das Vorzeichen von  $\mathfrak{A}_k$  um, es wird  $\mathfrak{A}_k = - \frac{V \sigma^2}{2 E}$ ; zugleich wird dann  $\mathfrak{A}_i = + \frac{V \sigma^2}{2 E}$ .

Wird ein Stab durch eine allmählich anwachsende Druckkraft um  $\Delta l$  verkürzt, so verrichtet die Kraft eine positive Arbeit, weil bei der Verkürzung eine Bewegung des Stabendes im Sinne der Druckkraft erfolgt. Diese Arbeit berechnet man in gleicher Weise wie die Arbeit der Verlängerung zu  $\mathfrak{A} = + \frac{V \sigma^2}{2 E}$ . Die Übereinstimmung ergibt sich auch schon daraus, daß die Vertauschung der Zugspannung  $+\sigma$  mit der Druckspannung  $-\sigma$  in  $\sigma^2$  keine Änderung herbeiführt. Man hat also den Satz:

Wird ein Stab vom spannungslosen Zustand aus durch eine von 0 bis  $P$  anwachsende Zug- oder Druck-

kraft innerhalb der Elastizitätsgrenze allmählich verlängert bzw. verkürzt, so ist in beiden Fällen die äußere Arbeit positiv, die innere negativ; für die Rückkehr in den spannungslosen Zustand gilt das Entgegengesetzte. Der absolute Wert dieser Arbeiten ist

$$7) \quad \frac{V \sigma^2}{2 E}, \quad \text{wobei} \quad \sigma = \frac{P}{F}.$$

Es ist nützlich, die Verlängerungs- und Verkürzungsarbeit, welche prismatische Stäbe aus verschiedenem Stoff innerhalb der Elastizitätsgrenze ertragen können, vergleichend zusammenzustellen. Man bezieht diese Arbeiten zweckmäßig auf  $1 \text{ cm}^3$  Rauminhalt, hat also mit  $V = 1$  nur  $\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}$  zu berechnen, wobei  $\sigma = \varepsilon$  bzw.  $d$  (Spannungen an der Elastizitätsgrenze) zu setzen ist. Auf Grund der Zahlenwerte der Tabelle S. 9 ergeben sich dann folgende Arbeitswerte in  $\frac{\text{cmkg}}{\text{cm}^3}$ :

Formänderungsarbeit  $\sigma^2 : 2 E$  bis zur Elastizitätsgrenze für  $1 \text{ cm}^3$ .

Stoff	Verlängerungsarbeit	Verkürzungsarbeit
Gußeisen . . . . .	$\frac{1}{2} \frac{600^2}{1\,000\,000} = 0,18$	$\frac{1}{2} \frac{1600^2}{1\,000\,000} = 1,28$
Stabeisen . . . . .	$\frac{1}{2} \frac{1600^2}{2\,000\,000} = 0,64$	$\frac{1}{2} \frac{1600^2}{2\,000\,000} = 0,64$
Gußstahl . . . . .	$\frac{1}{2} \frac{4500^2}{2\,200\,000} = 4,6$	$\frac{1}{2} \frac{4500^2}{2\,200\,000} = 4,6$
Holz . . . . .	$\frac{1}{2} \frac{250^2}{100\,000} = 0,216$	$\frac{1}{2} \frac{170^2}{100\,000} = 0,10$
Glas . . . . .	$\frac{1}{2} \frac{340^2}{1\,000\,000} = 0,058$	$\frac{1}{2} \frac{1450^2}{1\,000\,000} = 1,05$
Kautschuk . . . . .	$\frac{1}{2} \frac{20^2}{10} = 20$	

Hierbei ist zu beachten, daß Gußstahl 7 mal soviel Arbeit ertragen kann wie Stabeisen, während seine Elastizitätsgrenze noch nicht 3 (genauer 4500:1600) mal so hoch liegt. Wo es sich daher um die Aufnahme von Arbeiten handelt, kann der kostspielige Gußstahl vorteilhafter sein als Stabeisen.



Holz ergibt größere Verlängerungsarbeit als Gußeisen; es ist in dieser Beziehung der kleine Wert von  $E$ , d. h. die größere Nachgiebigkeit von Nutzen. In erheblichem Maße günstig ist dieser Umstand beim Kautschuk. Dieser Stoff ist bei gleichem Rauminhalte dem Gußstahl etwa 4,3 mal überlegen. Kautschuk würde daher für Federanordnungen, bei denen es sich um die Aufnahme von Arbeit handelt, der vorteilhafteste Stoff sein, wenn er eine größere Dauer hätte. In früherer Zeit hat man bei den Eisenbahnfuhrwerken die Kautschukfedern in großem Umfange verwendet, hat aber gefunden, daß Kautschuk seine guten Eigenschaften zu bald verliert. Guter Kautschuk kann freilich im spannungslosen Zustande unter gewissen hier nicht weiter zu besprechenden Umständen 30 Jahre lang gut elastisch bleiben; im gespannten Zustande aber wird er bald brüchig und hart.

a) Einwirkung plötzlicher Belastung. Hängt ein Körper vom Gewichte  $Q$  ruhend am unteren Ende eines lotrechten, oben befestigten Stabes vom Querschnitt  $F$  und der Länge  $l$ , so herrscht in dem Stabe, dessen Eigengewicht wir vernachlässigen, die Spannung

$$8) \quad \sigma_0 = Q : F,$$

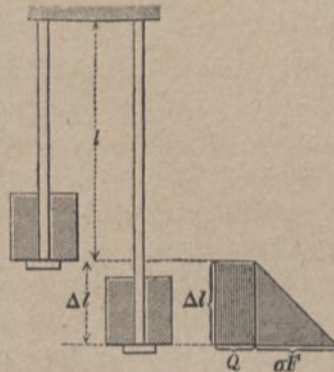
und seine elastische Verlängerung beträgt  $\Delta l_0 = \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{E}$ .

Wird aber der zu Anfang in geeigneter Weise unterstützte Körper mit dem unteren Ende des spannungslosen Stabes verbunden und dann seiner Unterstützung plötzlich beraubt, so übt der Stab im nächsten Augenblicke noch keine Kraft auf den Körper aus, weil er noch die Länge  $l$  des spannungslosen Zustandes hat. Der Körper steht also anfänglich unter alleiniger Wirkung der Schwere und wird eine lotrechte Bewegung mit der Fallbeschleunigung beginnen (Fig. 120, linke Seite). Hierbei erfährt der Stab eine zunehmende Verlängerung, also auch eine wachsende Spannkraft, die dem Gewichte  $Q$  entgegenwirkt. Aber erst, wenn der Körper um die Größe  $\Delta l_0 = \frac{Q}{E} \cdot \frac{l}{E}$  gesunken ist, hat die Spannkraft die Größe  $Q$  erreicht, so daß in diesem Augenblicke die Beschleunigung des Körpers Null beträgt. Da bis hierher die Bewegung eine beschleunigte war, so wird der Körper eine gewisse Geschwindigkeit  $c$  erlangt haben, die erst bei weiterer Verlängerung des Stabes, bei weiterem Anwachsen seiner Spannkraft, allmählich zu Null gemacht werden kann. Der Stab wird also eine größte Verlängerung  $\Delta l > \Delta l_0$ , daher auch eine stärkste Spannung  $\sigma > \sigma_0$  erfahren.

Diese Werte  $\Delta l$  und  $\sigma$  lassen sich mittels des Satzes der Arbeit berechnen.

Zu Anfang hatte der Körper die Geschwindigkeit Null, das gleiche findet statt in dem Augenblicke der stärksten Verlängerung der Stange (Fig. 120, rechte Seite); denn wenn im nächsten Zeitteilchen  $dt$  die Weglänge  $ds$  Null betragen soll, so muß  $v = ds : dt = \text{Null}$  sein. In dem Verlaufe der Abwärtsbewegung ist daher die gesamte Änderung des Arbeitsvermögens des Körpers Null, somit auch die gesamte Arbeit. Nun verrichtet das Gewicht  $Q$  die Arbeit  $Q \cdot \Delta l$ , dargestellt durch ein Rechteck. Die Arbeit der inneren Kräfte aber beträgt, wenn der Stab vollkommen elastisch bleibt, längs eines

Fig. 120.



Weges  $\Delta l$  (nach Gl. 6, S. 112):  $-\frac{V}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} = -\frac{P}{2} \cdot \Delta l$ , dargestellt durch ein Dreieck, in welchem  $P$  den (größten) Endwert der Spannkraft, d. h.  $\sigma F$  bedeutet. Die absoluten Werte beider Arbeiten, d. h. die Inhalte der beiden Figuren, müssen einander gleich sein, damit die Arbeitssumme Null werde. Also wird

$$\frac{1}{2} \sigma F \Delta l = Q \Delta l, \text{ oder}$$

9)  $\sigma = 2Q : F = 2\sigma_0$  und ebenso

10)  $\Delta l = 2\Delta l_0.$

In der tiefsten Lage beträgt die Spannkraft des Stabes  $\sigma F = 2Q$ ; der Körper steht dann einen Augenblick unter Einwirkung einer aufwärts gerichteten Mittelkraft  $2Q - Q = Q$  und erfährt dadurch eine aufwärts gerichtete Beschleunigung  $g$ . Diese Spannkraft wird so lange über die Schwere das Übergewicht haben, bis wieder die Gleichgewichtslage erreicht ist. Der Körper wird aber erst wieder die Geschwindigkeit Null haben, wenn er um  $h$  gestiegen ist, wenn die positive Arbeit des sich verkürzenden



Körpers gleich dem absoluten Werte der negativen Arbeit der Schwere, wenn also

$$\frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E} = Qh$$

geworden ist, setzt man hierin  $V = Fl$ ,  $\sigma = 2Q:F$  ein, so entsteht  $h = 2 \frac{Ql}{FE} = 2\Delta l_0 = \Delta l$ , d. h. der Körper kommt auf die ursprüngliche Höhe zurück, und nun kehren die Vorgänge der ersten Auf- und Niederbewegung fortgesetzt wieder. Eine solche, in gleicher Weise zwischen zwei Orten hin- und hergehende Bewegung nennt man eine Schwingung. Wir haben daher den Satz:

Wird ein elastischer Stab plötzlich der vollen Einwirkung eines Gewichtes unterworfen, so erfährt er dadurch eine stärkste Spannung, welche das Doppelte der Gleichgewichtsspannung beträgt. Der an dem Stabe hängende Körper führt zwischen der höchsten und tiefsten Lage Schwingungen aus, u. zw. um die Gleichgewichtslage als Mitte. Diese Schwingungen werden durch Luftwiderstand und dadurch, daß der Stab sich nicht vollkommen elastisch verhält, allmählich kleiner, und Stab und Körper gehen endlich in die Ruhe- oder Gleichgewichtslage über. Die äußere (somit auch die innere) Arbeit, welche zu verrichten ist, um den Körper  $Q$  erstmals aus der Ruhelage durch plötzliche Entfernung seiner Stützung in die tiefste Lage zu bringen, beträgt das Vierfache wie bei langsamer, bis zu  $Q$  zunehmender Belastung des Stabes. Während nämlich nach S. 110  $\mathfrak{A}_k = 1/2 Q \cdot \Delta l$  war, wird jetzt

$$11) \quad \mathfrak{A}_k = Q \cdot \Delta l = \frac{V}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} = \frac{\sigma F \cdot \Delta l}{2} = -\mathfrak{A}_i,$$

wobei aber  $\sigma$  und  $\Delta l$  doppelt so groß sind, wie bei Gl. 5 und 6 S. 111/112.

Die veränderliche, auf den Körper wirkende Gesamtkraft bringt man am deutlichsten zur Anschauung, wenn man die beiden Arbeitsflächen  $Q \cdot \Delta l$  und  $\sigma \cdot F \cdot \Delta l : 2$  der Fig. 120 mit entgegengesetztem Vorzeichen ineinander schiebt, so daß man den Unterschied der beiden Kräfte unmittelbar abmessen kann. Man erhält dann Fig. 121, welche im oberen Teil nach abwärts gerichtete,

positive, im unteren Teil nach aufwärts gerichtete, also negative Kräfte zeigt; in der Mitte ist die Gesamtkraft gleich Null. Der positive Teil dieser Darstellung der in jeder Lage wirkenden Gesamtkraft ist lotrecht, der negative Teil wagerecht geschrafft.

Derartige Fälle plötzlicher Belastung kommen in der Anwendung sehr häufig vor. Und dieser Umstand ist einer der Gründe dafür, daß man (s. S. 11) bei einer statischen Berechnung die zulässige Spannung  $\sigma_0$  erheblich kleiner als die Spannung an der Elastizitätsgrenze wählt. Wird z. B. der Querschnitt  $F$  des Stabes unter Annahme des Gleichgewichts für eine Spannung  $0,5\varepsilon$ , also  $F = Q : 0,5\varepsilon$  berechnet, so wird bei plötzlicher Belastung die wahre Spannung  $= \varepsilon$  (Elastizitätsgrenze) werden.

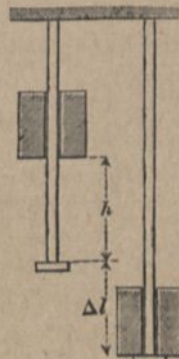
Will man ein kleines Gewicht an einen Kautschukfaden, oder ein großes an eine Hängestange, eine Kette, einen Kran derartig anhängen, daß in den genannten elastischen Körpern die stärkste Spannung nicht erheblich größer als die Gleichgewichtsspannung werde, so darf man dem Körper die anfängliche Unterstützung nicht plötzlich nehmen, sondern muß die unterstützenden Vorrichtungen (bei einem kleinen Gewichte vielleicht die Hand, bei einem größeren die Windevorrichtung) nur langsam senken. Dabei wird dann das Gewicht des Körpers allmählich auf den Faden, die Stange oder Kette übertragen, während die Stützvorrichtung in demselben Maße entlastet wird. Auf diese Weise erfährt der Körper keine nennenswerte Geschwindigkeit und wird in dem Augenblicke, wo die Spannkraft des Fadens, der Stange oder Kette gleich dem Gewichte des Körpers geworden ist, seine Senkung beenden und im Gleichgewichte verbleiben. Bei verhältnismäßig großen Lasten ist dieses Verfahren schwer anzuwenden, deshalb darf man bei der Berechnung von Hängestangen, Ketten, Kranen u. dergl. auf diesen günstigen Umstand nicht sicher rechnen und wird daher die zulässige Spannung (für ruhende Last) entsprechend klein anzusetzen haben.

Die Gleichgewichtsspannung  $\sigma_0$  wird in noch stärkerem Grad überschritten, wenn der Körper in dem Augenblicke, wo er auf den spannungslosen Stab zu wirken beginnt, schon eine Geschwindigkeit  $c$  im Sinne der Verlängerung der Stange hat, indem er, etwa mittels einer Bohrung an dem Stabe gleitend, von einer Höhe  $h$  auf einen Vorsprung am

Fig. 121.



Fig. 122.





unteren Stabende herabfällt (Fig. 122). Ist  $\Delta l$  die größte Verlängerung des Stabes, so hat nach deren Entstehung der fallende Körper seine tiefste Lage und die Geschwindigkeit Null erreicht; die Änderung des Arbeitsvermögens zwischen der höchsten und tiefsten Lage des Körpers ist also wiederum gleich Null. Da der Körper um  $h + \Delta l$  sinkt, so ergibt sich statt Gl. 11

$$12) \quad \frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E} = Q(h + \Delta l),$$

oder, mit 
$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E};$$

$$\frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E} = Qh + \frac{Q\sigma l}{E}.$$

Diese Gleichung gibt, nach  $\sigma$  aufgelöst:

$$\sigma = \frac{Ql}{V} \pm \sqrt{\frac{Q^2 l^2}{V^2} + \frac{2QhE}{V}}$$

oder, wenn man  $V = Fl$ ,  $Q:F = \sigma_0$ , also  $Q:V = \sigma_0:l$  setzt,

$$13) \quad \sigma = \sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 + 2\sigma_0 \frac{h}{l} E}.$$

(Ein negatives Zeichen vor dem Wurzelausdrucke hat für die vorliegende Aufgabe keine Bedeutung, da es sich nur um einen positiven Wert  $\sigma$  handeln kann.)

**Beispiel:** Der Eisenstab habe  $F = 4 \text{ cm}^2$  Querschnitt und  $l = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$  Länge, der Körper  $Q$  habe  $100 \text{ kg}$  Gewicht und nur  $h = 10 \text{ cm}$  Fallhöhe; dann ist die Gleichgewichtsspannung  $\sigma_0 = 25 \text{ at}$ , d. h. ganz unerheblich. Dagegen wird

$$\sigma = 25 + \sqrt{625 + 2000000} = 1439 \text{ at}.$$

Infolge der Fallhöhe von  $10 \text{ cm}$  entsteht also eine im Vergleiche mit der Ruhespannung sehr erhebliche Anstrengung des Stabes. Die entsprechende Verlängerung beträgt

$$\Delta l = \frac{1439 \cdot 500}{2000000} = 0,36 \text{ cm},$$

ist also gegen  $h = 10 \text{ cm}$  unerheblich.

Man erkennt hieraus, daß für die meisten Fälle  $\Delta l$  gegen  $h$  vernachlässigt werden darf; dann vereinfacht sich Gl. 12 zu

$$14) \quad \frac{V}{2} \frac{\sigma^2}{E} = Qh,$$

und anstatt Gl. 13 hat man genügend genau

$$15) \quad \sigma = \sqrt{2 \sigma_0 \frac{h}{l} E}.$$

In obigem Zahlenbeispiel ergibt Gl. 15 —:  $\sigma = 1414 \text{ at}$  (statt  $1439 \text{ at}$ ).

Diese Formel gilt fast genau auch für die Spannung eines an seinem oberen Ende befestigten,  $l \text{ m}$  langen Seiles (Fig. 123), mit dessen unterem Ende ein Körper vom Gewichte  $Q$  verbunden ist, falls das Seil zu Anfang nicht gerade gestreckt, sondern derartig schlaff ist, daß der vorher anderweitig unterstützt gewesene, dann aber losgelassene Körper die Höhe  $h$  durchfallen muß, bis das Seil straff wird.

Endlich findet Gl. 15 auch Anwendung für die Berechnung der Spannung des Seiles einer Dampfwinde, wenn ein Körper vom Gewichte  $Q$  mit dem anfänglich schlaffen Seile verbunden, die Winde nun aber derartig in Gang gesetzt wird, daß das Seil in dem Augenblicke, wo es straff wird, sich mit einer Geschwindigkeit  $c$  bewegt. Bezeichnet man die dieser Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe  $c^2:2g$  mit  $h$ , so muß die Arbeit  $Qh$ , welche nötig ist, um der Last  $Q$  die Geschwindigkeit  $c$  des Seiles mitzuteilen, durch die Formänderungsarbeit des Seiles von der Winde auf die Last übertragen werden. Man sieht daraus, wie leicht bei unvorsichtigem Betriebe der Winde Seilrisse entstehen können.  $c = 2 \text{ m/sek.}$  gibt  $h = 0,204 \text{ m} = 20,4 \text{ cm}$ , was für  $Q = 100 \text{ kg}$  und  $l = 5 \text{ m}$ ,  $F = 8 \text{ cm}^2$  Querschnitt bedingt, wenn die Elastizitätsgrenze nicht überschritten werden soll.

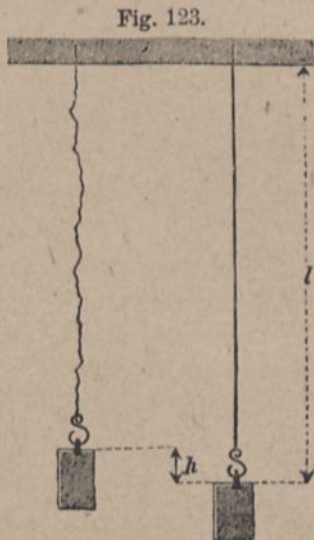


Fig. 123.

Man sieht daraus, wie leicht bei unvorsichtigem Betriebe der Winde Seilrisse entstehen können.  $c = 2 \text{ m/sek.}$  gibt  $h = 0,204 \text{ m} = 20,4 \text{ cm}$ , was für  $Q = 100 \text{ kg}$  und  $l = 5 \text{ m}$ ,  $F = 8 \text{ cm}^2$  Querschnitt bedingt, wenn die Elastizitätsgrenze nicht überschritten werden soll.

### b) Stab mit sprungweise veränderlichem Querschnitte.

Der Stab möge auf eine Länge  $l_1$  den Querschnitt  $F_1$ , auf eine Länge  $l_2$  den größeren Querschnitt  $F_2$  haben (Fig. 124).

Bringt man ihn dann in ähnlicher Weise, wie auf S. 110 beschrieben, durch eine allmählich anwachsende Zugkraft in Spannung, so wird im Querschnitt  $F_1$  die Spannung  $\sigma_1$ , im Querschnitt  $F_2$  die Spannung  $\sigma_2$  auftreten,

zwischen denen die Beziehung besteht  $\sigma_2 F_2 = \sigma_1 F_1$ , mithin

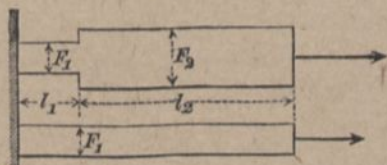


Fig. 124.



$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sigma_1}{n},$$

wenn man  $F_2 = n F_1$  setzt. Bei der Erzeugung dieser Spannungen muß die wirkende Zugkraft eine Arbeit verrichten, welche nach Gl. 5, S. 111 beträgt:

$$\mathfrak{A} = \frac{V_1}{2} \frac{\sigma_1^2}{E} + \frac{V_2}{2} \frac{\sigma_2^2}{E}$$

oder, auf  $\sigma_1$  und  $F_1$  zurückgeführt:

$$16) \quad \mathfrak{A} = \frac{\sigma_1^2}{2E} F_1 \left( l_1 + \frac{l_2}{n} \right).$$

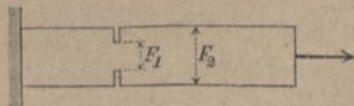
Für die Sicherheit des Stabes im Gleichgewichtszustande kommt nur der kleinste Querschnitt in Frage. Der Rauminhalt  $(F_2 - F_1) l_2$ , den der vorliegende Stab mehr enthält als ein solcher mit überall gleichem Querschnitt  $F_1$ , ist für den Ruhezustand eine Verschwendung. Für die mögliche Arbeitsleistung ist diese Verschwendung an Stoff aber sogar schädlich; denn ein Stab von der Länge  $l_1 + l_2$  und dem einheitlichen Querschnitt  $F_1$  nimmt bis zur Spannung  $\sigma_1$  eine Arbeit auf

$$17) \quad \mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E} F_1 (l_1 + l_2).$$

Da  $n > 1$ , so ist  $\mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}$ , d. h. der Stab von gleichmäßiger Stärke erträgt, bis er auf eine Spannung  $\sigma_1$  kommt, eine größere Arbeit als der ungleichmäßig starke Stab von größerer Stoffmenge. Gegen Arbeitswirkung verstärkt wird daher der ungleichmäßige Stab durch Fortnahme des für den Ruhezustand nur Überflüssigen. (Nach A. Ritter, Technische Mechanik.)

Diese Betrachtungen finden Anwendung auf einen Stab vom Querschnitt  $F_2$ , der auf eine geringe Länge  $l_1$  eingekerbt ist, d. h. durch Einsägen, Einschneiden oder auf irgend andere Weise eine Schwächung auf die Querschnittsgröße  $F_1$  erfahren hat (Fig. 125).

Fig. 125.



Es ist dann  $l_1$  gegen  $l_2$  zu vernachlässigen, und wenn man  $l_2$  als Gesamtlänge nunmehr  $l$  nennt, geht Gl. 16 über in:

$$18) \quad \mathfrak{A} = \frac{\sigma_1^2}{2E} \frac{F_1 l}{n},$$

während für den gleichmäßig auf den Querschnitt  $F_1$  gebrachten Stab

$$19) \quad \mathfrak{A}_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E} F_1 l = \frac{\sigma_1^2}{2E} \cdot \frac{V}{n}$$

wird, so daß

$$\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A} = n.$$

Die Widerstandsfähigkeit eines Stabes gegen Arbeit wird durch Einsägen auf halben Querschnitt auf  $1/4$  vermindert; man kann sie aber auf  $1/2$  des ursprünglichen Wertes wieder erhöhen, wenn man durch Wegnahme der Hälfte des Stoffes in zweckmäßiger Weise überall den gleichen Querschnitt  $F_1 = 1/2 F_2$  herstellt. Noch mehrfach wird sich das Ergebnis zeigen, daß Körper überall gleicher Sicherheit hinsichtlich der Arbeitsleistung überraschend vorteilhaft sind. Der innere Grund liegt darin, daß der zulässige Endwert  $P$  der Zugkraft durch  $F_1$  bedingt ist, daß der übermäßig große Querschnitt  $F_2$  aber die Verlängerung  $\Delta l$  vermindert, wodurch auch das Produkt  $1/2 P \cdot \Delta l = \mathfrak{A}$  eine Verminderung erfährt. Große Formänderungen sind für die Aufnahme von Arbeit vorteilhaft. Ihre Verminderung durch einzelne geschwächte Stellen wirkt sehr nachteilig. Bei Ankertauen und Ankerketten, die das Arbeitsvermögen bewegter Schiffe durch die Arbeit ihrer Spannkraft zu vernichten haben, sind Fehlstellen besonders verhängnisvoll.

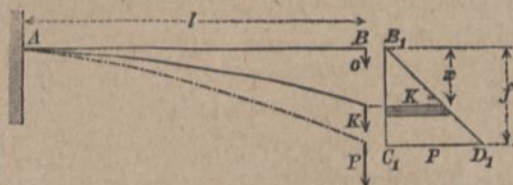
## 2. Biegearbeit.

### a) Prismatischer Stab.

Ein prismatischer, bei  $A$  (Fig. 126) wagrecht eingespannter Stab werde am freien Ende durch eine von Null ab allmählich bis auf  $P$  anwachsende Kraft gebogen.  $x$  sei die Biegung am freien Ende für einen beliebigen Zwischenwert  $K$  der Kraft;  $f$  die Durchbiegung, welche dem Endwerte  $P$  der Kraft entspricht. Da nun nach Gl. 7, S 47:

$$x = \frac{Kl^3}{3EJ},$$

Fig. 126.





d. h.  $K$  mit  $x$  verhältnisgleich, so ist die Beziehung zwischen beiden Größen wiederum ein Dreieck  $B_1 C_1 D_1$  mit  $B_1 C_1 = f$ ,  $C_1 D_1 = P$ . Das Arbeitsteilchen von  $K$  ist  $K \cdot dx$ , gleich einem Flächenstreifen des Dreiecks, die Gesamtarbeit daher gleich dem Inhalte des ganzen Dreiecks, d. h.

$$1) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2} P f;$$

es ist wieder  $\frac{1}{2} P$  der Mittelwert der veränderlichen Kraft,  $f$  die Weglänge. Weil nun

$$2) \quad f = \frac{P l^3}{3 E J},$$

$$\text{so wird zunächst} \quad \mathfrak{A} = \frac{P^2 l^3}{6 E J}$$

$$\text{und weil ferner} \quad P l = \sigma \frac{J}{e}, \quad \text{so ergibt sich}$$

$$3) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{6} \frac{J l \sigma^2}{e^2 E},$$

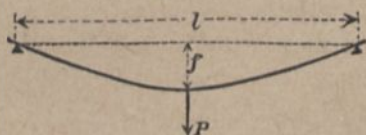
wobei  $\sigma$  die stärkste Biegespannung ist,  $J$  und  $e$  die bekannte Bedeutung (S. 23) haben. Setzt man  $J = F i^2$  (s. S. 67), wo  $i$  der Trägheitshalbmesser, so entsteht

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6} F l \frac{i^2 \sigma^2}{e^2 E} \quad \text{oder}$$

$$4) \quad \mathfrak{A} = \frac{V i^2 \sigma^2}{6 e^2 E},$$

wenn wiederum  $F l = V$  den Rauminhalt des Stabes bedeutet. Das Verhältnis  $i:e$  ist nur von der Form, nicht aber von der Größe des Querschnitts abhängig. Mithin ist bei bestimmter Querschnittsform die zur Erzeugung einer bestimmten Biegespannung  $\sigma$  erforderliche Arbeit nur noch von dem Rauminhalte  $V$  des Stabes abhängig. Mag also ein Stab mit rechteckigem Querschnitte lang oder kurz sein, mag er hochkantig oder flachliegend befestigt sein — bei gleichem Rauminhalte wird die einer bestimmten Spannung  $\sigma$  entsprechende Biegearbeit in allen diesen Fällen die gleiche sein.

Fig. 127.



Die Gültigkeit der Gl. 4 ist auch nicht auf die Befestigungsart nach Fig. 126 beschränkt, vielmehr ergibt sich der gleiche Wert, wenn man den Stab an beiden Enden unterstützt und in der Mitte belastet (Fig. 127, S. 122). Es ist nämlich wiederum  $\mathfrak{A} = \frac{1}{2} Pf$ ; setzt man hierin nach Gl. 12, S. 48

$$f = \frac{Pl^3}{48 EJ} \quad \text{und} \quad \frac{Pl}{4} = (\mathfrak{M}_{max} = \mathfrak{B} \cdot \sigma =) \frac{J}{e} \cdot \sigma,$$

so entsteht Gl. 3.

Aus denselben Gründen, die auf S. 112 entwickelt wurden, ist  $\mathfrak{A}_i = -\mathfrak{A}$  die Arbeit der inneren Spannkkräfte des gebogenen Stabes. Ebenso kehrt sich, wenn die Rückkehr zum spannungslosen Zustande erfolgt, das Zeichen von  $\mathfrak{A}$  und somit auch dasjenige von  $\mathfrak{A}_i$  um.

Hinsichtlich der Einwirkung einer plötzlichen Belastung ergibt sich in ähnlicher Weise, wie auf S. 114—116 entwickelt wurde, daß die stärkste Spannung das Doppelte der Gleichgewichtsspannung beträgt, und daß der Stab Schwingungen um die Gleichgewichtslage als Mitte ausführen wird.

Für rechteckigen Querschnitt ist  $J = \frac{1}{12} Fh^2$  (S. 24), mithin  $i^2 = \frac{1}{12} h^2$ ,  $e^2 = \frac{1}{4} h^2$ ,  $i^2 : e^2 = 1 : 3$ , folglich ergibt Gl. 4

$$5) \quad \mathfrak{A} = \frac{V}{18} \frac{\sigma^2}{E}.$$

Für kreisförmigen Querschnitt ist  $J = \frac{1}{4} Fr^2$  (S. 26),  $i^2 = \frac{1}{4} r^2$ ,  $e^2 = r^2$ , daher

$$6) \quad \mathfrak{A} = \frac{V}{24} \frac{\sigma^2}{E}.$$

Die Biegearbeit ergibt sich in diesen beiden Fällen (Gl. 5 und 6) nur zu  $\frac{1}{6}$  bzw.  $\frac{1}{12}$  der Arbeit bei der Längenänderung (S. 111, Gl. 5). Es erklärt sich dies folgendermaßen: Bei der Verlängerung herrscht an allen Stellen aller Querschnitte die gleiche Spannung  $\sigma$ , mithin wird bei einem gezogenen Stabe die Festigkeit bis zu dem gewünschten Grade vollständig ausgenutzt, während beim gebogenen Stabe die stärkste Spannung nur in dem einen Querschnitte, wo das Moment den größten Wert erreicht, vorkommt, sich in der Längsrichtung jedoch bis auf Null vermindert. Aber auch in dem Querschnitte des größten Momentes kommt die stärkste Spannung nur im größten Abstände von der Nullinie vor und nimmt nach dieser hin ebenfalls auf Null ab. Die Ausnutzung der Festigkeit ist daher bei dem gebogenen Stabe rechteckigen Querschnitts eine recht ungünstige. Beim Stabe kreisförmigen Querschnitts ist sie freilich noch etwas ungünstiger, weil bei



diesem die stärkste Spannung im gefährlichen Querschnitte nur an den beiden äußersten Punkten (oben und unten) vorkommt, beim rechteckigen Querschnitte aber doch wenigstens über zwei geraden Linien (Oberkante und Unterkante des Querschnitts) sich erstreckt.

Der Einfluß einer Verschwächung ergibt sich in ähnlicher Weise wie beim gezogenen Stabe, ist aber noch erheblicher als dort, wenn die Einkerbung an den Stellen der stärksten Spannung (oben und unten) erfolgt. Für einen Stab von rechteckigem Querschnitt ist

$$\mathfrak{A} = \frac{V \sigma^2}{18 E}. \quad \text{Wird der Stab in der}$$

Mitte (Fig. 128) oben und unten eingekerbt, so daß von der Höhe  $h$  nur der Teil  $h_1$  widerstandsfähig bleibt, das Widerstandsmoment also von  $\frac{1}{6} d h^3$  auf  $\frac{1}{6} d h_1^3$  abnimmt, so wird die stärkste Spannung an der Einkerbung  $\sigma_1 = \sigma \frac{h^3}{h_1^3}$ . Weil nun  $V$  und auch die Spannungsverhältnisse des Stabes, abgesehen von der Einkerbung, dieselben geblieben sind, so kann statt Gl. 5 geschrieben werden

$$7) \quad \mathfrak{A} = \frac{V \sigma_1^2 h_1^4}{18 E h^4}.$$

Wird also durch Einkerbung in der Mitte  $h_1 = 0,8 h$ , so ist  $h_1^4 = 0,41 h^4$ , also vermindert sich die der Spannung  $\sigma_1$  entsprechende Biegeungsarbeit auf das 0,41 fache derjenigen, welche am ungeschwächten Stab der gleichen größten Spannung entspricht.

Von diesem Umstande wird z. B. in Eisenhütten vielfache Anwendung gemacht, wenn man Eisenstäbe durch das Arbeitsvermögen von Hammerschlägen zerbrechen will. Man kerbt den Stab an der gewöhnlichen Bruchstelle mittels eines sog. Schrotmeißels ein, wonach dann der hohlgelegte Stab unter dem Hammerschlage verhältnismäßig leicht zerbricht.

### b) Stab überall gleicher Sicherheit und gleicher Höhe.

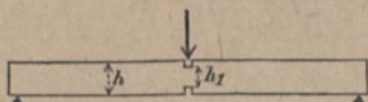
Das Ende eines wagerecht eingespannten Stabes von der Höhe  $h$  werde allmählich bis zum Wert  $P$  belastet (Fig. 129); dann erhält der Stab bei überall gleicher Sicherheit dreieckige Grundrißform (vergl. S. 42). Seine Durchbiegung wird nach S. 52, Gl. 21

$$f = \frac{P l^3}{2 E J}; \quad \text{seine Biegeungsarbeit wird daher nach S. 122, Gl. 1}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{P f}{2} = \frac{P^2 l^3}{4 E J}; \quad \text{da nun } P l = \sigma \frac{J}{e}, \quad \text{so wird}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4} \frac{J l \sigma^2}{e^2 E} = \frac{1}{4} F l \frac{i^2 \sigma^2}{e^2 E}.$$

Fig. 128.



Jetzt ist aber, wegen der Zuschärfung, der Rauminhalt  $V = \frac{1}{2} Fl$ , oder  $Fl = 2V$ , und weil wieder  $i^2 : e^2 = 1 : 3$ , so erhält man

$$8) \quad \mathfrak{A} = \frac{Pf}{2} = \frac{V \sigma^2}{6 E},$$

d. h. 3 mal so groß wie bei einem Stab von gleichem Rauminhalt  $V$ , aber mit überall gleichem Querschnitte; denn beim Stabe gleicher Sicherheit tritt die stärkste Spannung  $\sigma$  nicht nur in zwei geraden Querlinien von der Länge  $d$ , sondern längs der ganzen oberen und unteren Fläche auf.

Ein prismatischer Stab vom Rauminhalte  $V = l \cdot d \cdot h$  kann nach Gl. 5 eine Biegearbeit  $\mathfrak{A} = \frac{l \cdot d \cdot h \sigma^2}{18 E}$  aufnehmen. Wird derselbe unter Fortnahme der Raummenge  $\frac{1}{2}V$  zu einem Stabe gleicher Sicherheit umgewandelt, so ändert dies an seiner Tragfähigkeit im Gleichgewichtszustande nichts. Seine Arbeitsfähigkeit aber wird nun, weil sein Rauminhalt  $\frac{1}{2}l \cdot d \cdot h$  ist,

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{l \cdot d \cdot h \sigma^2}{12 E} = \frac{3}{2} \mathfrak{A}.$$

Die Fortnahme der Raummenge  $\frac{1}{2}V$  hat also die Widerstandsfähigkeit gegen Arbeit auf das  $1\frac{1}{2}$  fache vergrößert (vergl. den gesperrt gedruckten Satz auf S. 121).

Auch diese Beziehungen lassen sich ohne weiteres auf einen Stab von der Länge  $l$  mit zwei Endstützen ausdehnen, ganz wie S. 122. Der Grundriß des Stabes erhält dann dieselbe Form, wie bei nachstehend zu besprechender Fig. 130.

Beispiel: Eine Kugel von  $Q = 10$  kg Gewicht, die sich mit  $c = 4$  m/sek. Geschwindigkeit bewegt, soll durch eine Gußstahlfeder überall gleicher Sicherheit aufgefangen werden (Fig. 130). Welche Abmessungen muß die Feder erhalten, wenn sie bis zur Elastizitätsgrenze (4500 at) gespannt werden soll?

Fig. 129.

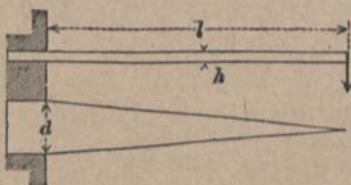
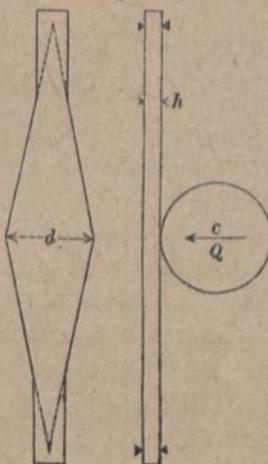


Fig. 130.





Es muß nach dem Satze der Arbeit

$$0 - \frac{Q}{g} \frac{c^2}{2} = - \frac{V}{6} \frac{\sigma^2}{E}, \text{ mithin}$$

$$V = \frac{6E}{\sigma^2} Q \frac{c^2}{2g} \text{ sein.}$$

Für Gußstahl ist nach der Tabelle (S. 113)

$$\sigma^2 : 2E = 4,6,$$

wenn man nach Zentimetern rechnet. Nun ist die Geschwindigkeitshöhe

$$h = \frac{c^2}{2g} = \frac{4^2}{2 \cdot 980} = \text{rund } 0,8 \text{ m} = 80 \text{ cm},$$

daher

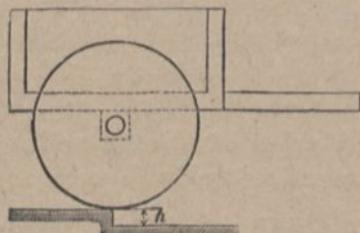
$$V = \frac{3 \cdot 10}{4,6} 80 = 522 \text{ cm}^3.$$

Wählt man vielleicht die Spannweite  $l = 100 \text{ cm}$ , die Dicke  $h = 1 \text{ cm}$ , so muß für die größte Breite  $d$  die Gleichung gelten  $100 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} d = 522$ , mithin  $d = 10,44 \text{ cm}$ . An den Enden verlangt die Sicherheit gegen Abscherung und die sichere Auflagerung eine kleine Abweichung von der ideellen Rautenform. Das Gewicht der federnden Platte beträgt etwa  $4 \text{ kg}$ . Die Masse derselben wurde bei der bisherigen Betrachtung gegenüber der Masse der Kugel vernachlässigt. Der dabei begangene Fehler kann erst auf Grund der Lehre vom Stoße (S. 138) beurteilt werden. Ohne Rücksicht auf diesen Umstand würde man zu dem Schlusse kommen, daß die Federplatte beim Zurückschwingen die Kugel mit der Geschwindigkeit  $c$  wieder fortreiben werde; in Wirklichkeit fällt die Geschwindigkeit des Rücklaufs geringer aus.

### c) Tragfedern der Fuhrwerke (Biegefedern).

Die Federn, welche die Wagenkasten der Fuhrwerke tragen, haben den Zweck, die Erschütterungen zu vermindern, welche durch Unregelmäßigkeiten der Fahrbahn verursacht werden. Fällt ein Fuhrwerk ohne Federn (Fig. 131), dessen Gewicht  $= Q$  ist, in eine Vertiefung  $h$ , so muß die Arbeit der Schwere  $Qh$  beim Aufschlagen auf den Boden der Vertiefung durch die Arbeit des Widerstandes der Fahrbahn, sowie der lotrechten Kräfte, mit denen die einzelnen Teile des Fuhrwerks aufeinander drücken, aufgehoben werden. Ist nun der Boden wenig nachgiebig, sind die Räder und das ganze Fuhrwerk sehr steif gebaut, so daß nur geringe Form-

Fig. 131.



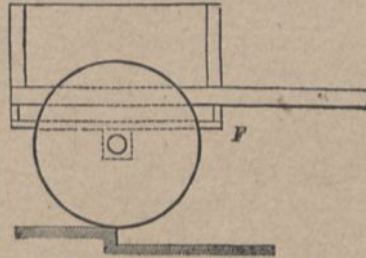
änderungen entstehen, so werden jene Kräfte, deren Arbeit  $= Qh$  sein muß, infolge ihrer geringen Weglängen sehr groß. Daraus entsteht eine örtliche Zerstörung der Fahrbahn und eine starke Anspannung der tragenden Teile des Fuhrwerkes; auch wird durch den harten Aufschlag, d. i. die starke Verzögerung, welche auf die Fallbeschleunigung folgt, die Lockerung der Verbindungen (Schrauben, Nägel) erleichtert.

Wird zwischen Achse und Wagenkasten eine biegsame Feder  $F$  eingeschaltet (Fig. 132), so wird beim Hinunterfallen nur noch die (geringere) Masse der Räder und der Achse hart aufschlagen. Der Wagenkasten mit der Last wird

dagegen längs einer größeren Weglänge aufgefangen, weil die Feder nach dem Aufschlagen der Räder sich durchbiegt und durch ihre Biegearbeit die Arbeit der Schwere aufzehrt. Infolge der beträchtlichen Vergrößerung des lotrechten Weges des Wagenkastens nach dem Aufschlagen der Räder wird nun die Größe der verzögernden Kraft so erheblich vermindert, daß an Stelle des zerstörenden, unangenehm fühlbaren und lärmenden Stoßes eine sanfte lotrechte Schwingung entsteht. Gute Federn schonen also die Fahrbahn und das Fuhrwerk, sowie die Nerven der beteiligten Menschen. Die zuweilen benutzten Kautschukreifen sind eine Fortsetzung dieser Bestrebungen, indem durch sie auch der Stoß der Räder und Achsen zu einem elastischen gemacht wird.

Die Tragfedern haben eine zweifache Aufgabe: sie müssen das Gewicht des Wagenkastens im Gleichgewichtszustande tragen, wobei sie eine Spannung  $\sigma$  erfahren, und müssen ferner im stande sein, bei einer bis zur Elastizitätsgrenze wachsenden Spannung eine Arbeit zu leisten, welche die Stöße, die durch die Unregelmäßigkeiten der Fahrbahn ohne die Wirkung der Federn entstehen würden, in elastische Schwingungen umwandelt. Die Arbeit der Längenänderung, welche nach S. 123 eine günstige Ausnutzung des Stoffes erlauben würde, ist bei Stahlfedern nicht gut zu verwerten, weil die Längenänderung zu gering ausfällt. Die Verkürzungsarbeit von Kautschukblöcken hat man bei Straßenbahnfuhrwerken früher

Fig. 132.





benutzt, aber aus den S. 114 angeführten Gründen aufgeben müssen. Daher verwendet man die Biegearbeit des Stahles, bei der eine beträchtliche Formänderung möglich ist. Hierzu eignet sich nun nach S. 125 die Balkenform überall gleicher Höhe mit gleichmäßig veränderlicher Breite, d. h. die Dreiecksfeder, besonders gut.

Eine solche Feder ist gewöhnlich in der Mitte unterstützt und an beiden

Enden durch gleiche Lasten belastet; wegen der vollkommen symmetrischen Anordnung betrachten wir zunächst nur die eine Hälfte, die an dem einen Ende als wagerecht eingespannt betrachtet werden kann (Fig. 133). Für den Ruhezustand gilt

$$1) \quad \sigma \cdot \frac{J}{e} = 2 \sigma \cdot \frac{J}{h} = \sigma \frac{d \cdot h^2}{6} = Pl.$$

Mit der Ruhelast ist nach S. 52 eine Durchbiegung

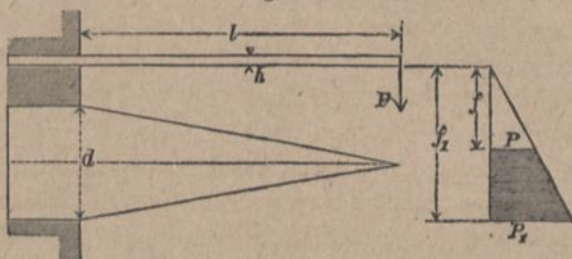
$$2) \quad f = \frac{Pl^3}{2EJ} = \frac{\sigma l^2}{Eh}$$

verbunden. Diese Gleichgewichtsbiegung  $f$  ist für spätere Arbeitsleistung nicht mehr zu verwerten, denn sie entsteht ebenso wie die Spannung  $\sigma$  schon bei dem Aufbringen der Last. Nur der Spannungsspielraum von  $\sigma$  bis zur Elastizitätsgrenze  $\varepsilon$  mit dem Arbeitswerte  $\frac{V \varepsilon^2 - \sigma^2}{6E}$  nach Gl. 8, S. 125 ist noch für die Ver-nichtung der Stöße verfügbar. Dabei vergrößert sich die Biegung auf  $f_1 = f \cdot \varepsilon : \sigma$ , der am Ende auftretende Biege-widerstand auf  $P_1 = P \cdot \varepsilon : \sigma$ . Die noch auszunutzende Biegearbeit

$$3) \quad \frac{P_1 f_1 - Pf}{2} = \frac{V \varepsilon^2 - \sigma^2}{6E}$$

wird in der Fig. 133 rechts durch das schraffierte Trapez dargestellt.

Fig. 133.



Welchen Anforderungen die Feder zu genügen hat, ist vorwiegend durch die Erfahrung ermittelt worden, und diese hat man in der Weise zum Ausdruck gebracht, daß eine einem bestimmten Zwecke angemessene Feder eine gewisse Länge  $l$  haben muß, unter der Ruhelast  $P$  nur bis zu einer gewissen Spannung  $\sigma$  beansprucht werden darf, und daß mit der Ruhelast eine bestimmte Durchbiegung  $f$  verbunden sein muß. Die Werte  $P$  und  $f$  bedingen dann nicht allein die Arbeit  $\frac{1}{2} Pf$  bis zur Belastung mit  $P$ , sondern auch zugleich, weil man  $\varepsilon : \sigma$  kennt, die noch weiter verfügbare Arbeit (nach Gl. 3).

Man kümmert sich also bei der Berechnung der Feder nicht unmittelbar um die ihr zuzumutende Arbeitsleistung, sondern bringt diese (zur Vereinfachung der Aufgabe) nur mittelbar durch die der Ruhelast entsprechende Biegung  $f$  zum Ausdrucke. Jedoch ist hiermit die Fähigkeit der Feder, die Last zu tragen und darüber hinaus noch Arbeit zu leisten, vollkommen gekennzeichnet.

Die Querschnittshöhe bestimmt sich aus Gl. 2 zu

$$4) \quad h = \frac{\sigma l^2}{E f},$$

die Breite hiernach aus Gl. 1 zu

$$5) \quad d = \frac{6 Pl}{\sigma h^2}.$$

Der Rauminhalt  $V = \frac{1}{2} d \cdot h \cdot l$  ergibt sich daher, wie es nach Gl. 8, S. 125, auch sein muß, zu  $3 Pf \frac{E}{\sigma^2}$ .

**Beispiel:** Es seien gegeben:

$$P = 1900 \text{ kg}; \quad f = 5 \text{ cm}; \quad \sigma = 4500 \text{ at};$$

$$E = 2500000 \text{ at}; \quad l = 60 \text{ cm}. \quad \text{Dann wird nach Gl. 4 und 5:}$$

$$h = \frac{4500}{2500000} \frac{60^2}{5} = 1,3 \text{ cm};$$

$$d = \frac{6 \cdot 1900 \cdot 60}{4500 \cdot 1,69} = 90 \text{ cm}.$$

Eine Feder von so großer Breite  $d$  ist für die Anwendung nicht geeignet. Sie wird daher in solcher Weise umgestaltet, daß eine zusammengesetzte Feder von geringerer Breite entsteht, die aber die gleiche Tragfähigkeit und Biagsamkeit hat wie die soeben berechnete. Man teilt die Federplatte nach Fig. 134 in eine gerade Anzahl  $2n$  (z. B. 8) parallele Streifen, vereinigt je



zwei mit gleichen Ziffern bezeichnete Teile zu einem Stück und legt die so erhaltenen Streifen nach Fig. 135 aufeinander, wobei man

zunächst über dem Ende jedes Streifens ein Klötzchen angebracht denkt, so daß die einzelnen Streifen nur dort Kräfte aufeinander ausüben können. Diese Kräfte werden mit  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  bezeichnet.

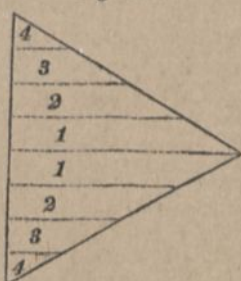


Fig. 134.



Fig. 135.



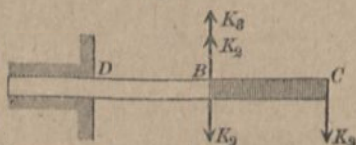
Fig. 136.

Fig. 136 zeigt die untere Ansicht der Feder, deren Breite  $\frac{d}{n}$  beträgt. Die unterste Schicht  $AB$  von der Länge  $\frac{l}{n}$  biegt sich bei  $B$  um

$$6) \quad f_3 = \frac{K_3 \left(\frac{l}{n}\right)^3}{2 E \frac{J}{n}}$$

weil der Breite  $\frac{1}{n}d$  ein Trägheitsmoment  $\frac{1}{n}J$  entspricht. Die darüber liegende Schicht muß bei  $B$  die gleiche Durchbiegung  $f_3$  zeigen, weil die zwischengelegten Klötzchen gleiche Biegung erzwingen. An dieser Schicht greift (Fig. 137) bei  $C$  die Kraft  $K_2$ , bei  $B$  die Kraft  $K_3$  an. Fügt man in  $B$  zwei gleiche entgegengesetzte  $K_2$  hinzu, so bilden die gegebene Kraft  $K_2$  bei  $C$  und die bei  $B$  entgegengesetzt hinzugefügte ein Kräftepaar  $M = K_2 \cdot \frac{1}{n}l$ , welches dem von  $D$  bis  $B$  prismatischen Stabe nach

Fig. 137.



S. 48 bei  $B$  eine Biegung um  $\frac{K_2 \left(\frac{1}{n}l\right)^3}{2 E \cdot \frac{1}{n}J}$  erteilt. Außerdem wirkt bei  $B$  nach abwärts die Kraft  $K_2 - K_3$ , die nach S. 47 bei  $B$  eine Biegung  $\frac{(K_2 - K_3) \left(\frac{1}{n}l\right)^3}{3 E \cdot \frac{1}{n}J}$  erzeugt. Setzt man die Summe beider Biegungen gleich  $f_3$  (Gl. 6), so entsteht

$$\frac{K_2}{2} + \frac{K_2}{3} - \frac{K_3}{3} = \frac{K_3}{2}, \text{ d. h. } K_3 = K_2.$$

In gleicher Weise erhält man  $K_2 = K_1$  und  $K_1 = P$ ; d. h. die an den Klötzchen übertragenen Kräfte sind sämtlich gleich der Last  $P$ . Die oberste Lage bildet (Fig. 138) einen Balken überall gleicher Sicherheit, dessen Spannung

$$\sigma = \frac{P \cdot \frac{1}{n}lc}{\frac{1}{n}J} = \frac{Plc}{J} = \frac{Plh}{2J}$$

dieselbe ist wie diejenige der Platte (s. Gl. 1, S. 128); sie biegt sich zufolge S. 53, Fig. 61 nach einem Kreisbogen vom Halbmesser

$$\rho = \frac{Eh}{2\sigma} = \frac{2500000 \cdot 1,3}{2 \cdot 4500} = 361 \text{ cm},$$

und die Durchbiegung des freien Endes beträgt

$$f = \frac{l^2}{2\rho} = \frac{\sigma l^2}{Eh}$$

wie bei der Platte (Gl. 2, S. 128). Von den übrigen Lagen gilt ähnliches. Werden die Klötzchen auf die Höhe Null vermindert, so ändert sich in der Wirkung der Federlagen nichts Wesentliches. Setzt man diese Schichtenfeder an der gedachten

Einspannungsstelle mit einer symmetrisch gestellten zusammen (Fig. 139), so entsteht eine an beiden Enden je mit  $P$  belastete

Tragfeder, die sich bei  $A$  auf ein Achslager stützt. Daß man an den freien Enden geeignete Anordnungen trifft, um die Last  $P$  sicher auflagern zu können, und daß man aus Zweckmäßigkeitsgründen den einzelnen Lagen schon im spannungslosen Zustande eine Krümmung gibt, hat auf die Wirkung keinen erheblichen Einfluß.

Der Einfachheit wegen haben wir eine Feder von nur vier Schichten dargestellt. In der Ausführung wählt man statt dessen vielleicht 10 Schichten von je 9 cm Breite.

Kommt in der Fahrbahn eine Vertiefung um  $h$  vor, in die das Rad hineinfällt, und vermehrt sich dabei die Durchbiegung der Feder um  $f_1 - f$ , so verrichtet die Schwere eine Arbeit  $P(h + f_1 - f)$ . Wird hierbei die Feder bis zur Elastizitätsgrenze beansprucht, so ist nach Gl. 3 (S. 128):

$$P(h + f_1 - f) = \frac{1}{2} (P_1 f_1 - P f).$$

Bei gutem Federstahl kann man die Elastizitätsgrenze etwa zu  $\sigma = 8000$  annehmen. Dann wird wegen  $f = 5$  cm:

$$f_1 = 5 \cdot \frac{8000}{4500} = 5 \cdot 1,78 = 8,9 \text{ cm};$$

$$P_1 = 1900 \cdot 1,78 = 3380 \text{ kg}; \text{ somit}$$

$$h = \frac{P_1 f_1 - P(2f_1 - f)}{2P} = 1,5 \text{ cm}.$$

Um diese Höhe nur darf die Achse fallen, damit die Feder nicht über die Elastizitätsgrenze hinaus beansprucht werde. Bei holprigen Wegen muß man daher  $\sigma$  kleiner annehmen.

Fig. 138.

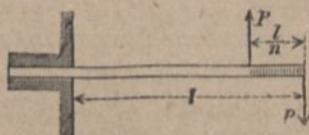
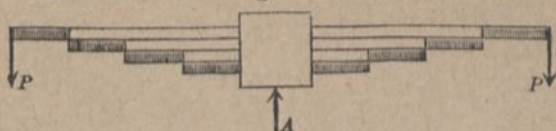


Fig. 139.





### 3. Verdrehungsarbeit.

Wirkt am freien Ende eines am anderen Ende befestigten Stabes von Zylinderform (Fig. 78, S. 72) ein von 0 bis  $\mathfrak{M}$  stetig anwachsendes Verdrehungsmoment, entspricht dem Endwerte  $\mathfrak{M}$  ein Verdrehungswinkel  $\vartheta$ , einem beliebigen Zwischenwerte  $\mathfrak{M}'$  der Verdrehungswinkel  $\varphi$ , so ist für eine Zunahme dieses Winkels um  $d\varphi$  die Arbeit (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 268)

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{M}' d\varphi.$$

Weil nun nach S. 73, Gl. 4  $\mathfrak{M}'$  mit  $\varphi$  verhältnismäßig wächst, so wird wie in den früheren ähnlichen Fällen die Gesamtarbeit

$$1) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2} \mathfrak{M} \vartheta.$$

Setzt man die Werte  $\mathfrak{M}$  und  $\vartheta$  aus Gl. 3 und 4, S. 73, ein, nämlich

$$\mathfrak{M} = \frac{\tau J_0}{r} \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{\mathfrak{M} l}{G J_0},$$

wobei  $\tau$  die stärkste Schubspannung bedeutet, so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2 J_0 l}{G r^2}$$

oder, wenn man  $J_0 = F i_0^2$  und  $F l = V$  setzt,

$$2) \quad \mathfrak{A} = \frac{V \tau^2 i_0^2}{2 G r^2}.$$

Da nun für kreisförmigen Querschnitt  $i_0^2 = \frac{1}{2} r^2$ , so entsteht

$$3) \quad \mathfrak{A} = \frac{V \tau^2}{4 G}.$$

Für rechteckigen Querschnitt von den Seiten  $b$  und  $h$  (mit  $b \leq h$ ) war (S. 78, Gl. 13)

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{9} \tau \cdot F \cdot b$$

und nach S. 79, Gl. 16

$$\vartheta = 0,8 \frac{\tau}{G} \frac{b}{l} \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right).$$

Daher wird

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \mathfrak{M} \vartheta = \frac{0,8}{9} \frac{\tau^2}{G} F l \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right) \quad \text{oder}$$

$$4) \quad \mathfrak{A} = \frac{V \tau^2}{11 G} \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right).$$

Im günstigsten Falle, für  $b = h$ , gibt dies

$$5) \quad \mathfrak{A} = \frac{V \tau^2}{5,5 G};$$

im ungünstigsten Falle aber, für  $b : h = 0$ :

$$6) \quad \mathfrak{A} = \frac{V \tau^2}{11 G}.$$

Um die Verdrehungsarbeit mit der Verlängerungsarbeit vergleichen zu können, bedenke man, daß nach S. 78 bei gleicher Sicherheit etwa  $\tau = 0,8 \sigma$  zu setzen, daß ferner  $G = 0,4 E$  ist, dann wird  $\frac{\tau^2}{G} = 1,6 \frac{\sigma^2}{E}$ .

Für den Vollzylinder ergibt sich nach Gl. 3

$$7) \quad \mathfrak{A} = 0,4 V \frac{\sigma^2}{E},$$

d. h.  $\frac{4}{5}$  der Verlängerungsarbeit (vergl. S. 111, Gl. 5). Bei einem Hohlzylinder von geringer Wandstärke ist annähernd  $i_0 = r$ , daher (nach Gl. 2)

$$8) \quad \mathfrak{A} = \frac{V \tau^2}{2 G} = 0,8 V \frac{\sigma^2}{E},$$

also noch erheblich günstiger als bei der Verlängerung. Die Drehungsarbeit eines Hohlzylinders ist hiernach die günstigste Art, unter der ein Stab Arbeit aufzunehmen vermag.

### Verdrehungsfedern.

Gerade Verdrehungsfedern werden wohl als Türschließer an eisernen Pforten benutzt. Wählt man einen Stahlstab mit quadratischem Querschnitte von  $b = 0,4 \text{ cm}$  Seite und  $l = 120 \text{ cm}$  Länge, so erträgt derselbe bei einer zulässigen Schubspannung  $\tau = 3600 \text{ at}$  ein Drehmoment (nach S. 78, Gl. 13)

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{9} \cdot 3600 \cdot 0,4^3 = 51 \text{ cmkg},$$

welches, wenn die Türklinke  $50 \text{ cm}$  von der Drehachse entfernt ist, durch einen Kraftaufwand von  $51 : 50 = \text{rund } 1 \text{ kg}$  zum Öffnen der Pforte überwunden wird. Der Winkel  $\vartheta$ , um den die Tür gedreht werden darf, beträgt nach S. 79 mit  $G = 0,4 E = 880000 \text{ at}$

$$\vartheta = \frac{0,8 \cdot 3600}{880000} \cdot 300 \cdot 2 = \text{rund } 2, \quad \text{d. h. } \frac{2 \cdot 180}{\pi} = 115 \text{ Grad.}$$



Gewundene Verdrehungsfedern dienen in feiner Ausführung als Federwagen, in größerem Maßstabe als Tragfedern bei Straßenbahnfahrwerken und als Bufferfedern bei Eisenbahnfahrwerken. Fig. 140 stellt in Ansicht und Grundriß einen nach einem Kreise vom Halbmesser  $R$  gekrümmten Stab dar, der bei  $A$  fest eingespannt, bei  $B$  und  $B_1$  je mit einem nach dem Mittelpunkt führenden steifen Arme von der Länge  $R$  versehen ist; an den Enden dieser beiden Arme wirke je eine rechtwinklig zur Ebene des Kreises stehende Kraft  $P$ . Die Kraft  $P$  übt dann auf alle Querschnitte des gewundenen Stabstückes ein Verdrehungsmoment  $PR$  aus und erzeugt an einem Bogenteilchen  $ds$  einen Verdrehungswinkel  $d\vartheta$ , der aus Gl. 4, S. 73 bzw. Gl. 16, S. 79 folgt, wenn man  $l$  mit  $ds$  vertauscht. Bei einem Mittelpunktswinkel  $\alpha$  des Ringes hat man  $l$  mit  $R\alpha$  zu vertauschen, um den gesamten Verdrehungswinkel  $\vartheta$  zu erhalten, und  $R\vartheta$  ist dann angenähert die Verschiebung  $CC_1 = f$  des Angriffspunktes der Kraft  $P$ , solange es sich um kleine  $\vartheta$  handelt, da dann auch die Verbiegung der Arme  $BC$  und  $B_1C_1$  vernachlässigt werden darf.

Bei einer zylindrischen Schraubenfeder von  $n$  freiliegenden Windungen (Fig. 141) hat man entsprechend  $l$  mit  $2n\pi R$  zu vertauschen. Hiernach gilt für eine Feder, deren Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser  $r$ , nach S. 130:

$$9) \quad \mathfrak{M} = PR = \frac{\tau J_0}{r} = \frac{\tau r^3 \pi}{2}, \quad \text{und damit}$$

$$10) \quad f = R\vartheta = \frac{P \cdot 2n\pi R^3}{GJ_0} = P \frac{4nR^3}{G r^4} = \frac{\tau}{G} 2n\pi \frac{R^2}{r}.$$

Fig. 140.

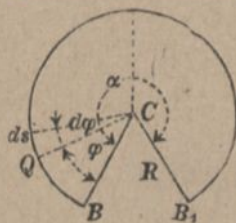
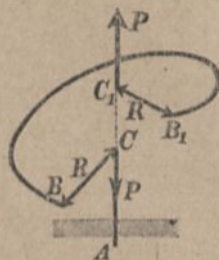
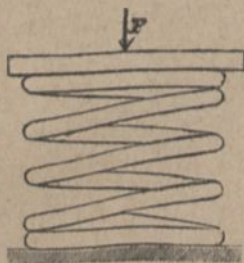


Fig. 141.



Bei der Benutzung solcher Federn zu Wagen und Kraftmessern bedingt die Verhältnisgleichheit von  $f$  und  $P$  eine gleichmäßige Teilung.

Für eine Feder von rechteckigem Querschnitt  $b \cdot h$  ist nach Gl. 13 und 16, S. 78 und 79

$$11) \quad \mathfrak{M} = PR = \frac{2}{9} \tau h b^2;$$

$$12) \quad f = R \vartheta = 1,6 \frac{\tau n \pi R^3}{G b} \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right).$$

Eine kegelförmige Schraubenfeder (Fig 142) bildet im Grundrisse eine Spirale. Für einen Punkt  $Q$  im Abstände  $\varrho$  von der Achse ist das Moment  $P\varrho$ , wechselnd von  $PR_1$  bis  $PR_2$ . Ein Bogenteilchen  $ds$  gibt einen Verdrehungswinkel

$$\frac{\vartheta}{l} ds = \frac{\vartheta}{l} \varrho \cdot d\varphi$$

(wenn  $\vartheta$  der Verdrehungswinkel für eine Länge  $l$  ist) und eine Verschiebung des Angriffspunktes von  $P$  um

$$df = \varrho \frac{\vartheta}{l} \varrho \cdot d\varphi.$$

Die Gesamtverschiebung ist also

$$f = \frac{1}{l} \int_0^{2n\pi} \vartheta \varrho^2 \cdot d\varphi.$$

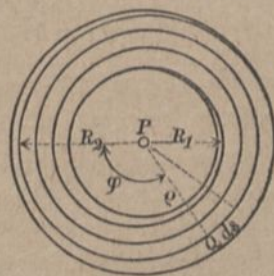
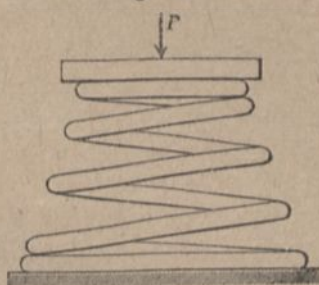
Man kann annehmen, daß  $\varrho$  sich nach einem Geradenliniengesetz ändert, d. h.

$$\frac{R_2 - \varrho}{R_2 - R_1} = \frac{\varphi}{2n\pi} \quad \text{also} \quad \varrho = R_2 - \frac{R_2 - R_1}{2n\pi} \varphi, \quad \text{so daß}$$

$$d\varrho = -\frac{R_2 - R_1}{2n\pi} d\varphi \quad \text{oder}$$

$$d\varphi = -\frac{2n\pi}{R_2 - R_1} d\varrho.$$

Fig. 142.





Für eine Feder von kreisförmigem Querschnitte (Halbmesser  $r$ ) gilt für die stärkste Spannung  $\tau$  die Gleichung

$$13) \quad \tau_{max} = \frac{2P \cdot R_2}{r^3 \pi}.$$

Ferner ist nach S. 73, Gl. 4:

$$\vartheta = \frac{P \varrho}{G J_0} l, \quad \text{daher}$$

$$f = - \frac{P}{G J_0} \frac{2n\pi}{R_2 - R_1} \int_{R_2}^{R_1} \varrho^3 d\varrho = \frac{Pn\pi}{2G J_0} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$14) \quad f = \frac{Pn\pi}{2G J_0} (R_2^2 + R_1^2)(R_2 + R_1).$$

Für eine Feder von rechteckigem Querschnitte ( $b \cdot h$  mit  $b \leq h$ ) gilt für die stärkste Spannung  $\tau$  die Gl. 14, S. 78,

$$15) \quad P R_2 = \frac{8}{3} \tau \frac{J_2}{b}, \quad \text{daher } \tau_{max} = \frac{3}{8} \cdot \frac{P \cdot R_2 \cdot b}{J_2},$$

und für die Verschiebung erhält man, wenn  $\vartheta$  aus Gl. 15, S. 79 mit 0,3 statt  $\frac{3}{8}$  eingesetzt wird,

$$16) \quad f = 0,15 \frac{Pn\pi}{G} \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right) (R_2^2 + R_1^2) (R_2 + R_1).$$

Derartige Federn (Wickelfedern) sind als Bufferfedern der Eisenbahnwagen gebräuchlich.

Beispiel: Für die zylindrische Schraubentragefeder eines Straßenbahnwagens sei  $R = 8$  cm, der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser  $r = 1$  cm, die zulässige Schubspannung  $\tau = 3600$  at;  $G = 1\,000\,000$  at;  $n = 8$ . Dann ist die zulässige Belastung nach Gl. 9

$$P = \frac{3600 \cdot 1 \cdot \pi}{2 \cdot 8} = 707 \text{ kg},$$

die entsprechende Zusammendrückung nach Gl. 10

$$f = \frac{3600}{1\,000\,000} 2 \cdot 8 \cdot \pi \cdot 64 = 11,6 \text{ cm}.$$

Die denkbar leichteste Metallfeder würde eine aus einer dünnwandigen Röhre gewundene zylindrische Schraubenfeder sein.

Weiteres über Berechnung der Federn gibt z. B. Kirsch in Ztschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1898, S. 429.

**Schlußbemerkung:** Bei sämtlichen vorstehenden Untersuchungen über Formänderungsarbeit und ihre Anwendung wurde

die Masse des elastischen Körpers vernachlässigt. Auf Grund dieser Vernachlässigung war es zulässig, die für eine langsam stetige Formänderung hergeleitete Arbeit auch auf Fälle anzuwenden, bei denen die Formänderung mit einer gewissen Plötzlichkeit erfolgt. Die Berücksichtigung der Masse des elastischen Körpers und der Beschleunigung seiner einzelnen Teile erschwert die Lösung derartiger Aufgaben in solchem Grade, daß man sich für die meisten Fälle der vorstehend entwickelten Gleichungen bedienen wird; jedoch darf man nicht übersehen, daß das Ergebnis der Rechnung nur annähernd richtig sein kann.

Eine plötzliche Belastung, jedoch ohne Stoß, hat stets Schwingungen zur Folge, bei denen die stärkste Spannung das Doppelte der Gleichgewichtsspannung beträgt. Dieses Ergebnis findet auch Anwendung auf die verschiedenen Fälle der Beschleunigungszustände elastischer Körper. Auf S. 100 wurde ausdrücklich vorausgesetzt, daß sämtliche Teile des Körpers übereinstimmende Bewegung haben. Der Körper befindet sich dann in scheinbarer Ruhe in bezug auf einen Raum, der dieselbe Bewegung ausführt. War der Körper vorher spannungslos, und treten die Kräfte, die den Beschleunigungszustand herbeiführen, plötzlich auf, so wird nur der Schwerpunkt des Körpers diejenige Beschleunigung  $p$  haben, welche S. 100 u. ff. für seine sämtlichen Teile vorausgesetzt war. Die einzelnen Teile aber werden um die scheinbare Gleichgewichtslage Schwingungen ausführen, bei denen die Spannungen auf das Doppelte der auf S. 100 u. ff. berechneten Werte anwachsen können.

Da die Formänderungen elastisch-fester Körper innerhalb der Elastizitätsgrenze den Belastungen verhältnismäßig sind, so kann die Messung der Formänderung zur Bestimmung der Belastung benutzt werden. Aus diesem Grunde finden Biege- und Verdrehungsfedern ausgedehnte Anwendung bei Kraft- und Gewichtsmessern (Federwagen, Federmanometer, Dynamometer und dgl.).

---



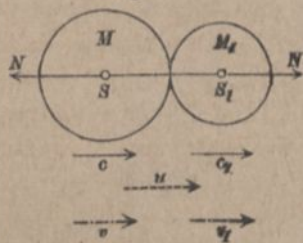
## D. Stoß elastisch-fester Körper.

Treten zwei Körper während der Bewegung miteinander in Berührung, und haben sie an der Berührungsstelle verschiedene Geschwindigkeit, so werden sie im allgemeinen gegenseitig auf ihre Bewegung einwirken, d. h. gegenseitige Kräfte aufeinander ausüben. Die hiermit zusammenhängenden Bewegungserscheinungen nennt man Stoß. Die Richtungslinie des gegenseitigen Normaldrucks zwischen den Körpern heißt die Stoßlinie. Geht die Stoßlinie durch die Schwerpunkte beider Körper, so heißt der Stoß zentral, sonst exzentrisch. Bewegen sich beide Körper rein fortschreitend, und zwar in der Richtung der Stoßlinie, so heißt der Stoß ein gerader.

### 1. Gerader zentraler Stoß.

Der stoßende Körper habe die Masse  $M$  und im Augenblicke des Zusammentreffens die Geschwindigkeit  $c$ , der getroffene Körper von der Masse  $M_1$  die kleinere Geschwindigkeit  $c_1$  (Fig. 143). Die Körper üben nun an der Berührungsstelle gegenseitige gleiche Normalkräfte  $N$  aufeinander aus und drücken sich gegenseitig zusammen, bis der Abstand der Schwerpunkte  $S$  und  $S_1$  beider Körper den kleinsten Wert erreicht hat. Bis zu diesem Augenblicke hat sich die Kraft  $N$ , von Null beginnend, stetig vergrößert. Diese Erscheinungen bilden den ersten Abschnitt der Stoßdauer. Danach erfolgt dann im zweiten Abschnitte des Stoßes eine Wiederausdehnung der Körper, wobei die Schwerpunkte sich wieder voneinander entfernen. In dem Augenblicke der stärksten Formänderung, welcher zwischen beiden Abschnitten des Stoßes liegt, haben die Schwerpunkte aufgehört, sich zu nähern und beginnen, sich voneinander zu entfernen. In diesem Zeitpunkt ist also die scheinbare (relative) Geschwindigkeit der beiden Schwerpunkte gegeneinander

Fig. 143.



Null, d. h. beide haben eine gemeinsame Geschwindigkeit  $u$ . Im zweiten Abschnitte wirkt die Kraft im allgemeinen noch fort, verzögert  $M$  noch weiter bis auf die Geschwindigkeit  $v$  und beschleunigt gleichzeitig  $M_1$  bis zur Geschwindigkeit  $v_1$ . Mit dem Eintritte dieser Geschwindigkeiten mag die gegenseitige Einwirkung ( $N$ ) aufhören und damit auch der Stoß beendet sein.

Es kommt darauf an, aus den Geschwindigkeiten  $c$  und  $c_1$  vor dem Stoße die Geschwindigkeiten  $v$  und  $v_1$  nach dem Stoße zu ermitteln.

In den Figuren sind die Geschwindigkeiten vor dem Stoße mit vollen Linien, die Geschwindigkeiten im Augenblicke der stärksten Formänderung gestrichelt, die Geschwindigkeiten nach dem Stoße strichpunktiert gezeichnet.

Sehr einfach ist die Bestimmung der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit  $u$  im Augenblicke der stärksten Formänderung. Die Verzögerung  $p$  des Schwerpunktes der stoßenden Masse  $M$  und die Beschleunigung  $p_1$  des Schwerpunktes der gestoßenen Masse  $M_1$  sind

$$p = \frac{N}{M}; \quad p_1 = \frac{N}{M_1}, \quad \text{ihr Verhältnis}$$

$$1) \quad p : p_1 = M_1 : M,$$

d. h. umgekehrt wie die Massen. Die Geschwindigkeitsänderungen von  $S$  bzw.  $S_1$  während eines Zeiteilchens sind  $p \cdot dt$  und  $p_1 dt$  und stehen in demselben Verhältnisse  $M_1 : M$ . Da dieses Verhältnis ganz unabhängig von der sehr veränderlichen Größe der Kraft  $N$  ist, so müssen in demselben unveränderlichen Verhältnis auch die Geschwindigkeitsänderungen der beiden Massen für jeden beliebigen Teil des Stoßes, sowie auch für die ganze Stoßdauer stehen. Daher für den ersten Abschnitt des Stoßes:

$$2) \quad \frac{c - u}{u - c_1} = \frac{M_1}{M};$$

für den zweiten Abschnitt:

$$3) \quad \frac{u - v}{v_1 - u} = \frac{M_1}{M};$$

für den ganzen Stoß:

$$4) \quad \frac{c - v}{v_1 - c_1} = \frac{M_1}{M}.$$



Aus Gl. 2 findet man leicht die Unbekannte

$$5) \quad u = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1}.$$

Hieraus ergeben sich die Geschwindigkeitsänderungen der beiden Massen im ersten Abschnitte des Stoßes, wenn man in  $c-u$  und  $u-c_1$  den Wert von  $u$  nach Gl. 5 einsetzt und möglichst zusammenzieht, zu

$$6) \quad c - u = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}} \quad \text{und}$$

$$7) \quad u - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}}.$$

Diese Vorgänge im ersten Abschnitte des Stoßes sind von der Beschaffenheit der Körper und von der Heftigkeit des Stoßes ganz unabhängig. Anders ist es mit den Vorgängen im zweiten Abschnitte; diese lassen sich nicht mehr mit gleicher Schärfe bestimmen, da sie wesentlich von dem Grade des elastischen Verhaltens der Körper abhängig sind, zu dessen Kennzeichnung eine Erfahrungsgröße eingeführt werden muß. Die Geschwindigkeitsänderung  $u-v$  der Masse  $M$  während des zweiten Abschnittes werde nämlich auf die Geschwindigkeitsänderung  $c-u$  derselben Masse im ersten Abschnitte bezogen durch die Festsetzung

$$u - v = k(c - u).$$

Dieses selbe Verhältnis gilt dann wegen Gl. 2 und 3 auch für die Masse  $M_1$ , d. h.

$$v_1 - u = k(u - c_1).$$

Die Verhältniszahl  $k$  heißt der Koeffizient der Stoßelastizität, wofür wir kürzer Stoßziffer sagen. Wenn die Geschwindigkeitsabnahme der Masse  $M$  im zweiten Abschnitte  $k$ mal so groß ist wie im ersten, so muß sie während beider Abschnitte das  $(1+k)$  fache derjenigen des ersten Abschnittes betragen, daher

$$8) \quad c - v = (c - u)(1 + k)$$

und ebenso die Geschwindigkeitszunahme von  $M_1$ :

$$9) \quad v_1 - c_1 = (u - c_1)(1 + k),$$

oder mit Hilfe der Gl. 6 und 7:

$$10) \quad c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k).$$

$$11) \quad v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k).$$

$c - c_1$  ist der Geschwindigkeitsunterschied der beiden Massen beim Zusammentreffen; wir wollen ihn kurz die Stoßgeschwindigkeit nennen. Von dieser ist die Heftigkeit des Stoßes abhängig. Die Nenner in Gl. 10 und 11 haben die Form  $1 +$  Verhältnis der beiden Massen, wobei diejenige Masse zuerst geschrieben wird, um deren Geschwindigkeit es sich gerade handelt.

Für die Größe  $k$  ergibt sich noch eine andere Bedeutung, wenn man die Gl. 8 und 9 zusammenzählt; es entsteht dann

$$c - v + v_1 - c_1 = (c - c_1)(1 + k) \quad \text{oder}$$

$$v_1 - v = (c - c_1)k, \quad \text{daher ist}$$

$$12) \quad k = \frac{v_1 - v}{c - c_1} = \frac{\text{Geschwindigkeitsunterschied nach dem Stoße}}{\text{Geschwindigkeitsunterschied vor dem Stoße}}.$$

Vergleicht man das gesamte Arbeitsvermögen beider Massen vor dem Stoße mit demjenigen nach dem Stoße, so ergibt sich im allgemeinen ein Unterschied, der sogen. äußere Arbeitsverlust  $\mathfrak{A}_v$ ; es ist

$$\mathfrak{A}_v = 1/2 (Mc^2 + M_1 c_1^2 - Mv^2 - M_1 v_1^2)$$

oder anders geordnet

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{A}_v &= M(c^2 - v^2) - M_1(v_1^2 - c_1^2) \\ &= M(c - v)(c + v) - M_1(v_1 - c_1)(v_1 + c_1). \end{aligned}$$

Weil nun nach Gl. 4:  $M_1(v_1 - c_1) = M(c - v)$  ist, so wird auch

$$2\mathfrak{A}_v = M(c - v)\{c + v - (v_1 + c_1)\} = M(c - v)\{c - c_1 - (v_1 - v)\}.$$

Setzt man hierin die Beziehung  $v_1 - v = (c - c_1)k$  (Gl. 12) ein, so wird  $2\mathfrak{A}_v = M(c - v)(c - c_1)(1 - k)$ , und es entsteht schließlich, wenn man noch nach Gl. 10  $c - v$  auf  $c - c_1$  zurückführt:



$$\mathfrak{A}_v = \frac{M(c-c_1)^2}{2 \left(1 + \frac{M}{M_1}\right)} (1-k^2) \quad \text{oder}$$

$$13) \quad \mathfrak{A}_v = \frac{M M_1 (c-c_1)^2}{M+M_1} \frac{1-k^2}{2}.$$

### a) Festsetzung der Stoßziffer $k$ .

1. Verhalten sich die Körper beim Stoße vollkommen elastisch, so werden sie nach Beendigung des Stoßes keine bleibende Formänderung zeigen. Die negative Arbeit der inneren Spannkkräfte bei der Zusammendrückung wird dann durch die positive Arbeit bei der Rückkehr in den spannungslosen Zustand vollständig aufgehoben. Da nun, wenn man beide Massen als eine Gruppe auffaßt,  $N$  eine innere Kraft ist und äußere Kräfte nicht vorhanden sind, so muß das Arbeitsvermögen nach dem Stoße dieselbe Größe haben wie vor dem Stoße. Es bedingt dies, daß in Gl. 13  $1-k^2=0$ , mithin  $k=1$  werde. Beim vollkommen elastischen Stoß ist also die Stoßziffer  $k=1$ . Ein Arbeitsverlust tritt nicht ein.

2. Der Gegensatz hierzu ist, daß die Körper beim Stoße sich gar nicht elastisch, sondern vielmehr vollkommen bildsam oder plastisch verhalten, daß sie nach dem Eintreten der stärksten Formänderung gar kein Bestreben haben, zur ursprünglichen Form zurückzukehren. In diesem Falle kommt der zweite Abschnitt des Stoßes gar nicht zustande; es ist sonach  $k=0$ ; die Geschwindigkeiten  $v$  und  $v_1$  werden beide  $=u$ , d. h. die beiden Körper gehen nach dem Stoße mit gleicher Geschwindigkeit  $u$  weiter. In diesem Falle besteht die Arbeitsverrichtung nur in der negativen Zusammendrückungsarbeit, die den Verlust an Arbeitsvermögen hervorruft:

$$14) \quad \mathfrak{A}_v = \frac{M M_1 (c-c_1)^2}{M+M_1} \frac{1}{2};$$

man erhält diesen Wert, indem man in Gl. 13  $k=0$  setzt. Also: beim vollkommen unelastischen Stoß ist die Stoßziffer  $k=0$ .

3. Streng genommen gibt es weder einen vollkommen elastischen noch einen vollkommen unelastischen Stoß; vielmehr sind die wirklichen Stöße unvollkommen elastisch, und es liegt  $k$  zwischen 0 und 1. Ob ein Stoß mehr oder weniger elastisch ausfällt, hängt nicht allein von der Beschaffenheit der Körper ab, sondern auch von der Heftigkeit des Stoßes, von der Stoßgeschwindigkeit  $c - c_1$ . Die Stoßziffer nähert sich um so mehr der Einheit, je elastischer die Körper sind (Elfenbein, Glas, Kautschuk), und je geringer die Heftigkeit des Stoßes ist; sie nähert sich um so mehr der Null, je bildsamer die Körper sind (Wachs, Blei, ungebrannter Ton), und je heftiger der Stoß erfolgt.

Für einen gegebenen Fall kann man die Stoßziffer  $k$  durch Versuche ermitteln. Auf einen festen Boden (Fig. 144) legt man eine Platte aus bestimmtem Stoffe, läßt eine Kugel  $M$  von ebenfalls bestimmtem Stoffe aus einer Höhe  $h$  herabfallen und beobachtet, bis zu welcher Höhe  $h_1$  sie wieder emporspringt. Um auf diesen Fall die Gl. 10 und 11 anwenden zu können, muß man zunächst beachten, daß die in diese Gleichungen einzuführende Masse  $M_1$  nicht gleich der Masse der Platte ist, daß vielmehr die Platte, weil sie auf dem unnachgiebigen Erdboden gelagert ist, für den Stoß gewissermaßen mit der ganzen Erde zusammen eine Masse  $M_1$  bildet, so daß  $M_1 : M = \infty$  oder  $M : M_1 = 0$  zu setzen ist. In allen Fällen, wo ein durch einen Stoß getroffener Körper in irgendeiner Weise unbeweglich gemacht ist, kommt dieser Umstand dadurch zum Ausdrucke, daß man  $M : M_1 = 0$  setzt, weil nur hierdurch in Gl. 11 die Geschwindigkeitsänderung  $v_1 - c_1$  zu Null gemacht wird.

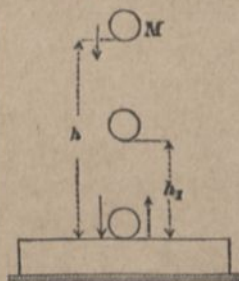
Da die Platte die Geschwindigkeit  $c_1 = 0$  hatte, so wird (Gl. 10)

$$c - v = c(1 + k) = c + ck,$$

also  $v = -ck$ . Nun ist  $c = \sqrt{2gh}$ ; das negative Zeichen von  $ck$  bedeutet, daß die Geschwindigkeit nach dem Stoße aufwärts gerichtet ist. Es wird  $v$  gemessen durch die Steighöhe

$$h_1 = \frac{v^2}{2g} = k^2 \frac{c^2}{2g} = k^2 h,$$

Fig. 144.





mithin ist

$$15) \quad k = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$$

Für vollkommen elastischen Stoß müßte  $h_1 = h$  werden; für  $h = 0$  wird  $h_1 = 0$ . Die Ergebnisse eines solchen Versuches können natürlich nur auf solche Fälle angewandt werden, wo dieselben Stoffe vorliegen wie beim Versuch und auch die Stoßgeschwindigkeit  $c - c_1$  etwa  $= \sqrt{2gh}$  ist. Der Luftwiderstand ist für kleine  $c$  zu vernachlässigen.

Für Geschwindigkeiten, wie sie auf dem Billard vorkommen, ist bei Elfenbein  $k = \frac{8}{9}$ . Für geringe Geschwindigkeiten ist bei Glas  $k = \frac{16}{10}$ , für Stahl und Kork  $\frac{8}{9}$ . Für Holz ist bei etwa 0,4<sup>m</sup> Fallhöhe  $k = \frac{1}{2}$ .

### b) Unelastischer Stoß.

Für  $k = 0$  haben beide Körper nach dem Stoße die gemeinschaftliche Geschwindigkeit

$$16) \quad v = v_1 = u = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1}$$

und einen Verlust an Arbeitsvermögen (Gl. 13, S. 142)

$$17) \quad \mathfrak{A}_v = \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{(c - c_1)^2}{2}$$

Bewegen sich die beiden Körper gegeneinander (Fig. 145), so vertausche man  $c_1$  mit  $-c_1$ ; dann wird

$$18) \quad v = v_1 = u = \frac{Mc + M_1 c_1}{M + M_1} \quad \text{und}$$

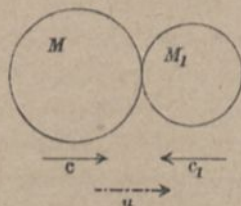
$$19) \quad \mathfrak{A}_v = \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{(c + c_1)^2}{2}$$

Sind noch beide Massen und deren Geschwindigkeiten einander gleich, so wird  $v = v_1 = 0$  und

$$20) \quad \mathfrak{A}_v = \frac{M}{2} \frac{4c^2}{2} = 2 \frac{M c^2}{2},$$

d. h. in diesem Falle geht das gesamte durch die Geschwindigkeiten der Körper bedingte Arbeitsvermögen für die äußere Bewegung verloren. Freilich verschwindet das Arbeitsvermögen nicht spurlos, vielmehr wird es zum größten Teile, wie die Arbeitsverluste durch Reibung (1. Teil, 4. Aufl., S. 314) in Wärme, zum kleineren Teil in Schallschwingungen umgewandelt.

Fig. 145.



## c) Anwendung des Stoßes; Einrammen von Pfählen.

Da die Geschwindigkeitsänderungen beim Stoße sehr schnell erfolgen, so wird die entsprechende Kraft  $N$  häufig sehr groß. Die technische Verwendung des Stoßes hat meist den Zweck, mit vergleichsweise einfachen Mitteln große Kräfte auszuüben, z. B. beim Eintreiben von Nägeln und Pfählen, beim Schmieden u. dgl. Man könnte ja einen Nagel auch durch Belastung ins Holz eindrücken; jedoch wäre dies zu umständlich und daher unzweckmäßig; die zum Eindrücken erforderliche Kraft läßt sich mittels eines Hammer-schlages in einfachster Weise hervorbringen.

Beim Eintreiben von Nägeln und dem Einrammen von Pfählen sind die Verhältnisse so beschaffen, daß man den Stoß als annähernd unelastisch ( $k = 0$ ) annehmen kann. Auch hat der getroffene Körper  $M_1$  vor dem Stoße die Geschwindigkeit  $c_1 = 0$ ; daher wird

$$21) \quad v = v_1 = u = \frac{Mc}{M + M_1},$$

der Verlust an (äußerem) Arbeitsvermögen

$$22) \quad \mathfrak{A}_v = \frac{M M_1}{M + M_1} \frac{c^2}{2} = \frac{M c^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}}.$$

Bei letzterer Schreibweise von  $\mathfrak{A}_v$  ist  $\frac{1}{2} M c^2$  das vor dem Stoße vorhandene Arbeitsvermögen; der zugehörige Faktor ist die Verhältniszahl, welche angibt, der wievielte Teil des ursprünglichen Arbeitsvermögens verloren geht. Während der sehr kurzen Stoßdauer erfolgt noch keine erhebliche Bewegung der Masse  $M_1$ ; nach dem Stoße aber gehen die Massen  $M$  und  $M_1$  mit der gemeinsamen Geschwindigkeit  $u$  weiter; der ihnen verbliebene Rest an äußerem Arbeitsvermögen

$$23) \quad \mathfrak{A}_1 = \frac{M c^2}{2} - \mathfrak{A}_v = \frac{M c^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}}$$

wird nun dazu verwendet, den Widerstand  $W$ , der sich dem Eindringen des Nagels oder Pfahles entgegensetzt, längs eines Weges  $s$ , der Eindringungstiefe, zu überwinden. Hiernach ist  $\mathfrak{A}_1$  gewissermaßen die Nutzarbeit des Stoßes, während  $\frac{1}{2} M c^2$  durch



Arbeitsaufwand erzeugt werden mußte. Man kann daher bei Stößen, die das Eintreiben eines Nagels oder Pfahles zum Zwecke haben,  $\mathfrak{A}_1 : (\frac{1}{2} M c^2)$  den Wirkungsgrad des Stoßes

$$24) \quad \eta_1 = \frac{1}{1 + \frac{M_1}{M}}$$

nennen. Dieser wird um so größer, je kleiner  $M_1 : M$ , oder je größer  $M : M_1$  ist. Es muß daher der treibende Körper möglichst schwer im Verhältnisse zum getriebenen Körper sein. Würde der Hammer nur ebenso schwer sein wie der einzutreibende Nagel, so wäre  $\eta_1$  nur 0,5, d. h. von der zum Hammerschlag aufgewandten Muskelarbeit würde nur die Hälfte nutzbar, während die andere Hälfte in schädlicher Weise unter Erzeugung von Wärme und Schall dem Nagelkopfe bleibende Formänderungen erteilen würde.

Beim Pfahlrammen läßt man einen Rammklotz vom Gewicht  $Q = Mg$  aus einer Höhe  $h$  auf den Kopf des Pfahles vom Gewichte  $Q_1 = M_1 g$  herabfallen (Fig. 146). Die zu je einem Heben des Rammklotzes aufgewandte Arbeit  $Qh$  setzt sich beim Fallen in äußeres Arbeitsvermögen  $\frac{1}{2} M c^2$  um; davon geht der Teil  $\mathfrak{A}_v$  für den Zweck verloren; mit dem Reste, der nach Gl. 23 beträgt

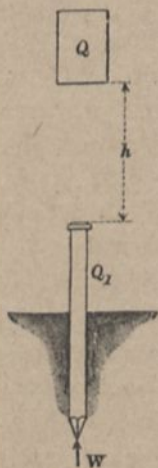
$$\mathfrak{A}_1 = Qh \cdot \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}},$$

werden beide Körper nach dem Stoße sich abwärts bewegen. Ist  $s$  die Weglänge dieser Weiterbewegung, so verrichtet die Schwere noch die Arbeit  $(Q + Q_1)s$ , während der Widerstand  $W$  des Erdreiches die Arbeit  $-Ws$  leistet. Sonach ist

$$25) \quad Ws = (Q + Q_1)s + Qh \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}}.$$

Hieraus kann man  $W$  berechnen, wenn  $s$  beobachtet wurde.

Fig. 146.



Beispiel: Ist  $Q = 1200 \text{ kg}$ ,  $Q_1 = 600 \text{ kg}$ ,  $h = 80 \text{ cm}$  und  $s = 0,5 \text{ cm}$ , so wird

$$\begin{aligned} W \cdot 0,5 &= 1800 \cdot 0,5 + \frac{1200 \cdot 80}{1,5} \\ &= 900 + 64\,000, \text{ daher} \\ W &= 129\,800 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Das Glied  $(Q + Q_1)s$  hat so unbedeutenden Einfluß, daß man genau genug

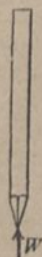
26) 
$$W s = Q h \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}}$$
 setzen kann, also

$$W = 128\,000 \text{ kg.}$$

Bis zu diesem Werte dürfte die Belastung des Pfahles steigen, ohne daß der Pfahl einsänke. Da aber vorstehende Rechnung ziemlich roh ist, so wählt man, um sicher zu gehen, als zulässige Belastung nur einen Bruchteil des nach Gl. 26 berechneten Wertes von  $W$ .

Berücksichtigung der Elastizität des Pfahles. Nach den Gleichungen 25 und 26 würde jeder Schlag von noch so geringer Fallhöhe  $h$  eine gewisse, wenn auch kleine Eindringungstiefe  $s$  des Pfahles zur Folge haben, da erst für  $h = 0$  auch  $s = 0$  wird. Dies trifft aber in Wirklichkeit nicht zu. Bis zu einem gewissen Grenzwerte  $h_0$  der Fallhöhe des Ramm-

Fig. 147.



klotzes entsteht gar keine Eindringung des Pfahles, sondern er wird nur elastisch zusammengepreßt, worauf er sich dann wieder ausdehnt. Soll sich nämlich der Pfahl vom Querschnitt  $F$  und der Länge  $l$  durch Einwirkung von oben unter Überwindung des Widerstandes  $W$  abwärts bewegen, so muß an dem unteren Ende des Pfahles eine Spannung  $\sigma = W:F$  hervorgebracht sein, und man kann mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, daß nahezu der ganze Pfahl auf diese Spannung gebracht werden muß, bevor er einsinken wird (Fig. 147). Dazu ist aber nach S. 112 eine Arbeit  $\frac{V \sigma^2}{2 E}$  erforderlich. Diese muß man von dem Arbeitsvermögen des Pfahles und des Rammklotzes abziehen, und erst der Rest ist  $= Ws$  zu setzen. Mithin wird, weil  $V = Fl$ ,

29) 
$$W s = \frac{Q h}{1 + \frac{Q_1}{Q}} - \frac{W^2 l}{2 E F}$$



Die unwirksame Fallhöhe  $h_0$  erhält man, wenn man  $s = 0$  und  $h = h_0$  setzt, d. h.

$$28) \quad \frac{Q h_0}{1 + \frac{Q_1}{Q}} = \frac{W^2 l}{2 E F}.$$

Von der Höhe  $h$  wird also nur  $h - h_0$  wirksam. Dieser Einfluß wird besonders bei langen Pfählen bedeutend.

Beispiel: Ist wiederum  $Q = 1200 \text{ kg}$ ,  $Q_1 = 600 \text{ kg}$ ,  $h = 80 \text{ cm}$ , Pfahldicke  $d = 30 \text{ cm}$ ,  $F = 700 \text{ cm}^2$ ,  $l = 10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$ ,  $E = 120\,000 \text{ at}$ ,  $s = 0,5 \text{ cm}$ , so wird

$$W \cdot 0,5 = \frac{1200 \cdot 80}{1,5} = \frac{W^2 \cdot 1000}{2 \cdot 120\,000 \cdot 700}.$$

Dies gibt rund  $W = 70\,000 \text{ kg}$ , wovon man etwa  $\frac{1}{10}$  bis  $\frac{1}{5}$ , d. h. 7000 bis 14 000 kg, als sicher zulässige Belastung des Pfahles nehmen kann. Für die unwirksame Fallhöhe wird  $\frac{1200 \cdot h_0}{1,5} = \frac{70\,000^2 \cdot 1000}{2 \cdot 120\,000 \cdot 700}$  mit  $h_0 = \text{etwa } 36 \text{ cm}$ .

Mit Berücksichtigung dieses Umstandes wird dann der Wirkungsgrad der Ramme (statt nach Gl. 24) nur sein:

$$\eta_1 = \frac{Q(h - h_0)}{Qh} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q}} = \frac{Q(h - h_0)}{(Q + Q_1)h} = \frac{80 - 36}{1,5 \cdot 80} = 0,37.$$

Durch Vergrößerung von  $h$  würde derselbe erhöht werden.

Die Anwendung vorstehender, für die Beurteilung der Tragfähigkeit eingerammter Pfähle nicht wohl zu entbehrender Formeln hat wegen der Verschiedenheit der in Frage kommenden Bodenverhältnisse mit Vorsicht zu geschehen, indem man z. B. die errechnete Tragfähigkeit, soweit möglich, bei einzelnen Pfählen durch eine Probelastung nachprüft.

#### d) Hämmer zum Schmieden oder Nieten.

Während beim Eintreiben von Nägeln, Pfählen u. dgl. die für die äußere Bewegung verlorengelassene Arbeit  $\mathfrak{A}_v$ , welche unter Erwärmung eine bleibende Formänderung erzeugt, als unerwünschter Verlust zu bezeichnen ist, besteht beim Schmieden oder Nieten in diesem äußeren Arbeitsverlust gerade das Nützliche. Der Wirkungsgrad hierfür ist nach Gl. 24 (S. 146)

$$29) \quad \eta = \frac{\mathfrak{A}_v}{\frac{1}{2} M c^2} = \frac{1}{1 + \frac{M}{M_1}}.$$

Dieser wird groß, wenn  $M_1 : M$  groß wird, d. h. wenn die getroffene Masse groß ist im Verhältnisse zur stoßenden Masse. Zu diesem Zwecke legt man das Schmiedestück auf einen schweren Amboß

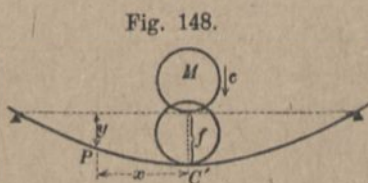
und unterstützt diesen durch einen noch schwereren Körper, die Chabotte, welche beim Dampfhämmern tief in den Erdboden reicht. Amboß und Chabotte bilden dann in bezug auf die Wirkung des Stoßes mit dem Schmiedestück eine einzige Masse  $M_1$ . Ist z. B.  $M_1 = 10 M$ , so wird  $\eta = 1:1,1 = 0,91$ , d. h. es werden 91% der aufgewandten Arbeit zur Formänderung verwandt, während 9% der Arbeit die Chabotte allmählich tiefer in den Erdboden eintreiben.

Beim Nieten muß das Niet durch einen möglichst schweren Vorhalthammer von der Masse  $M_1$  gegen Fortbewegung durch den Schlag des Niethammers tunlichst geschützt werden.

### e) Biegung durch den Stoß eines Körpers.

Dieser Fall wurde auf S. 123 unter der Voraussetzung behandelt, daß die Masse des getroffenen, auf Biegung beanspruchten Körpers vernachlässigt werden könne. Soll diese Masse dagegen berücksichtigt werden, so kann man die Aufgabe in folgender Weise behandeln. Die bisherigen Gleichungen für den Stoß setzen voraus, daß sämtliche Punkte des gestoßenen Körpers sich im Augenblicke der stärksten Zusammenpressung mit übereinstimmender Geschwindigkeit  $u$  weiter bewegten.

Wird aber ein an beiden Enden unterstützter Stab von der Masse  $M_1$  in seiner Mitte durch eine mit der Geschwindigkeit  $c$  dagegen stoßende Masse  $M$  getroffen (Fig. 148), so wird der Stab sich biegen, und die Geschwindigkeiten seiner einzelnen Punkte werden in jedem Augenblicke untereinander verschieden sein; an den Auflagern bleiben die Geschwindigkeiten Null, während sie nach der Mitte hin zunehmen. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte gibt das Verhältnis der Ordinaten der betreffenden Stellen einen Anhalt. Da die Weglängen  $y$  und  $f$  in gleichen Zeiten durchlaufen werden, so müssen die Geschwindigkeiten und ebenso auch die Beschleunigungen  $p_y$  und  $p_1$  der Punkte  $P$  und  $C$  sich verhalten wie  $y:f$ , d. h. es ist



$$p_y = p_1 \frac{y}{f}.$$



Nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (1. Teil, 4. Aufl., S. 172) ist

$$\Sigma m p_y = \Sigma Y.$$

Darin bedeutet  $\Sigma Y$  die Summe sämtlicher äußeren Kräfte der Richtung der  $p_y$ . In irgendeinem Augenblicke während des Stoßes wirkt nun an dem getroffenen Stabe im Sinne der  $p_y$  die Kraft  $N - 2A$  (Fig. 149), mithin wird

$$\Sigma m p_y = \frac{p_1}{f} \Sigma m y = N - 2A.$$

Darin ist  $m$  die Masse eines Längenteilchens, d. h. bei überall gleichem Querschnitte, den wir hier annehmen wollen,

$$m = \frac{\gamma}{g} F \cdot dx.$$

Daher entsteht

$$\frac{p_1}{f} \frac{\gamma}{g} F \int y dx = N - 2A.$$

Man könnte nun  $y:f$  aus der Gleichung der Biegelinie für den Fall einer ruhigen Belastung ableiten. Da es aber zweifelhaft ist, ob die verschiedenen Biegelinien, die in den verschiedenen Augenblicken des Stoßes sich bilden, dieselbe Form haben wie diejenige der ruhenden Last, so nehmen wir der Einfachheit wegen die Biegelinie für den Stoß als Parabel an. Dann wird  $\int y dx = \frac{2}{3} fl$ , mithin

$$p_1 \frac{\gamma}{g} Fl \frac{2}{3} = N - 2A, \text{ oder,}$$

weil  $\gamma Fl = M_1 g$  ist,

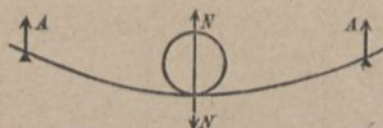
$$p_1 \cdot \frac{2}{3} M_1 = N - 2A.$$

Für den stoßenden Körper ist  $M p = N$ , mithin

$$p_1 \frac{2}{3} M_1 = M p - 2A.$$

Es ist nun nicht etwa wie im Gleichgewichtszustande  $2A = N$ ; vielmehr ist  $2A$  erheblich kleiner als  $N$ . Ist der Stoß sehr heftig, so pflanzt sich seine Wirkung nicht einmal bis zu den Stützpunkten fort; es bleibt (unter Vernachlässigung der Schwere)  $A = 0$ ; der Druck  $N$  wirkt nur außerordentlich kurze Zeit, wächst dabei zu einem verhältnismäßig großen Wert und bringt an dem Stab eine

Fig. 149.



nur örtliche zerstörende Wirkung hervor, wie man z. B. mit einer Gewehrkugel versuchen kann. In solchem Fall ist von der Ausbildung einer Biegelinie keine Rede. Aber auch bei weniger heftigem Stoße kann doch meist  $2A$  gegenüber  $N$  vernachlässigt werden, so daß

$$p:p_1 = \frac{2}{3} M_1 : M \text{ ist.}$$

Vergleicht man diese Formel mit Gl. 1, S. 139, so findet man, daß an Stelle von  $M_1$  nunmehr  $\frac{2}{3} M_1$  getreten ist. Es folgt dann in gleicher Weise wie dort für die Geschwindigkeit des Stoßpunktes im Augenblicke der stärksten Formänderung (mit  $c_1 = \text{Null}$ )

$$1) \quad u = \frac{M c}{M + \frac{2}{3} M_1},$$

während der Punkt  $P$  eine Geschwindigkeit

$$u_y = u \frac{y}{f} \text{ hat.}$$

Nehmen wir den Stoß, wie es in solchen Fällen meistens geschieht, als unelastisch an, so ist das gesamte Arbeitsvermögen beider Körper nach dem Stoße

$$\frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} \Sigma m u_y^2,$$

wofür sich in ähnlicher Weise wie oben mit  $m = \frac{M_1}{l} \cdot dx$

$$\frac{u^2}{2} \left( M + \frac{M_1}{f^2 l} \int y^2 dx \right)$$

ergibt. Nun ist  $\frac{1}{2} \int y^2 dx \cdot y$  das statische Moment der Parabelfläche in bezug auf die Sehne,  $= \frac{2}{3} f l \cdot \frac{2}{5} f$  (1. Teil, 4. Aufl., S. 161), mithin  $\int y^2 dx = \frac{8}{15} f^2 l$ ; also wird das Arbeitsvermögen

$$2) \quad \frac{u^2}{2} (M + \frac{8}{15} M_1)$$

oder, wenn man den obigen Wert für  $u$  (Gl. 1) einsetzt und bedenkt, daß das Arbeitsvermögen in Biegearbeit umgewandelt wird, nach Gl. 4 S. 122

$$3) \quad \frac{M c^2}{2} \frac{1 + \frac{8}{15} \frac{M_1}{M}}{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{M_1}{M}\right)^2} = \frac{V \sigma^2 i^2}{6 E e^2}.$$

Die Umständlichkeit dieser Formel steht nicht im Verhältnisse zur Sicherheit ihrer Grundlagen. Innerhalb ziemlich weiter Grenzen



( $M_1 : M = 1/10$  bis  $10$ ) kann man dafür annäherungsweise einfacher schreiben

$$4) \quad \frac{M c^2}{2} \frac{1}{\left(1 + 0,8 \frac{M_1}{M}\right)} = \frac{V \sigma^2 i^2}{6 E e^2}.$$

**Beispiel:** Auf die Mitte einer Bohle von  $1^m$  Spannweite,  $24\text{ cm}$  Breite,  $5\text{ cm}$  Stärke (Fig. 150) falle ein Gewicht von  $50\text{ kg}$ . Wie groß darf die Fallhöhe  $h$  sein, damit die Bohle nicht über  $170\text{ at}$  gespannt werde? Wiegt  $1\text{ cbm}$  Holz  $600\text{ kg}$ , so wird das Gewicht der Bohle

$$Q_1 = 1 \cdot 0,24 \cdot 0,05 \cdot 600 = 7,2\text{ kg}.$$

Es wird  $1/2 M c^2 = Q h$ .

Die obigen Gleichungen gelten für einen Stoß in waagrechter Richtung, bei dem die Schwere keine Arbeit verrichtet.

Beim lotrecht abwärts erfolgenden Stoß aber verrichtet die Schwere eine Arbeit, während die Bohle sich um  $f$  durchbiegt. Das Gewicht  $Q$  leistet die Arbeit  $Q f$ , das Gewicht  $Q_1$  der Bohle aber  $2/3 Q_1 \cdot f$ , weil ein beliebiges Teilchen der Bohle nur um  $y$  sinkt (vgl. S. 149, Fig. 148). Nun beträgt die Durchbiegung der Bohle bei  $\sigma = 170\text{ at}$  nach S. 50, Gl. 14:

$$f = \frac{1}{12} \frac{170}{120\,000} \frac{100^2}{2,5} = 0,47\text{ cm},$$

daher wird nach Gl. 4 (mit  $i^2 : e^2 = 1/3$ , vgl. S. 122)

$$\frac{50 h}{1 + 0,8 \cdot \frac{7,2}{50}} + 0,47 \left(50 + \frac{2}{3} 7,2\right) = \frac{12\,000}{18} \frac{170^2}{120\,000}$$

oder  $h = 3\text{ cm}$ .

Im Ruhezustande entspricht der Belastung mit  $50\text{ kg}$  nur eine Spannung

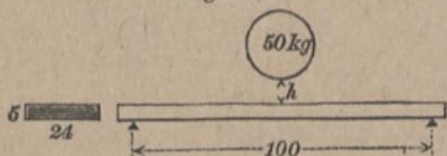
$$\sigma = \frac{50 \cdot 100 \cdot 6}{4 \cdot 24 \cdot 5^2} = 12,5\text{ at},$$

und schon durch einen Fall der Last von  $3\text{ cm}$  Höhe steigt die Spannung auf das  $13,6$  fache. Hiernach ist es begreiflich, daß man die in Gleichgewichtsberechnungen einzusetzenden Spannungen oft nur sehr gering annehmen darf, wenn Stöße der Last zu erwarten sind.

### f) Vollkommen elastischer Stoß.

Je kleiner die Stoßgeschwindigkeit  $c - c_1$  und je elastischer die Körper sind, um so mehr wird sich  $k$  dem Wert  $1$  nähern

Fig. 150.



Für  $k = 1$  wird nach Gl. 10/11, S. 141

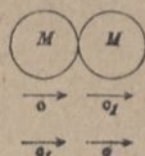
$$1) \quad c - v = 2 \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1}}; \quad v_1 - c_1 = 2 \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M}}.$$

Sind die Massen einander gleich, wie es bei Billardkugeln annähernd zutrifft (Fig. 151), so wird

$$c - v = c - c_1, \quad \text{d. h. } v = c_1, \\ v_1 - c_1 = c - c_1, \quad \text{d. h. } v_1 = c;$$

d. h. es vertauschen die Massen ihre Geschwindigkeiten. Sind die Kugeln im Aussehen nicht verschieden, so sieht man die Wirkung des Stoßes kaum. Denn mit der Geschwindigkeit  $c$ , die vorher die eine Kugel hatte, bewegt sich auch nach dem Stoß eine Kugel weiter, ebenso mit der Geschwindigkeit  $c_1$  die andere, gerade wie wenn sich die Kugeln durchdrungen hätten.

Fig. 151.



Dieser Fall findet auch Anwendung auf Eisenbahnwagen, wenn dieselben beim Verschieben mit geringer Stoßgeschwindigkeit aufeinander treffen; denn bei geringer Heftigkeit des Stoßes verhalten sich die Bufferfedern ziemlich elastisch. Bei ungleichen Massen sind die Gl. 1 anzuwenden.

Fig. 152.

Stößt ein Körper gegen eine ruhende und unbewegliche elastische Wand (Fig. 152), so muß (wie S. 143)  $M_1 : M = \infty$  gesetzt werden. Dann wird

$$c - v = \frac{2c}{1 + 0}, \quad \text{d. h. } v = -c.$$



Der Körper wird also mit der gleichen Geschwindigkeit von der Wand zurückgeworfen, mit der er dieselbe traf.

## 2. Stoß sich drehender Körper.

Zwei Körper drehen sich um feste Parallelachsen  $A$  und  $A_1$  und treffen derartig zusammen, daß zwischen ihnen ein gegenseitiger Druck  $N$  auftritt, der rechtwinklig zu der Ebene beider Drehachsen steht und diese Ebene in  $P$  schneidet (Fig. 153). Dann ist  $P$  der Stoßpunkt; er sei von  $A$  und  $A_1$  um  $a$  bzw.  $a_1$  entfernt. Die Umfangsgeschwindigkeiten beider Körper am Stoßpunkte mögen  $c$  bzw.  $c_1$  betragen. Diese Geschwindigkeiten sind der Unterscheidung



wegen auf dem Drehungskreise angedeutet, ebenso die Geschwindigkeiten  $v$  und  $v_1$  nach dem Stoß (an der rechten Seite der Figur). Der Druck  $N$  erteilt der stoßenden Masse eine im Stoßpunkte gemessene Umfangsverzögerung  $p = \frac{N}{\mu}$  und der gestoßenen Masse an derselben Stelle eine Umfangsbeschleunigung  $p_1 = \frac{N}{\mu_1}$ , wenn  $\mu$  und  $\mu_1$  die auf den Stoßpunkt bezogenen Massen der beiden Körper sind (1. Teil, 4. Aufl., S. 317). Hiernach ist

$$1) \quad p : p_1 = \mu_1 : \mu.$$

Diese Gleichung entspricht der Gl. 1, S. 139, für den geraden zentralen Stoß freier Körper; nur treten an die Stelle der wahren Massen  $M_1$  und  $M$  hier die auf  $P$  bezogenen Massen  $\mu_1$  und  $\mu$ , welche den Bedingungen  $J = \mu a^2$ ,  $J_1 = \mu_1 a_1^2$  genügen, wenn  $J$  und  $J_1$  die Trägheitsmomente der Körper in bezug auf die Drehachsen sind. Hiernach ergeben sich auch für die Geschwindigkeitsänderungen während des Stoßes die Gleichungen in derselben Weise wie Gl. 10 und 11, S. 141, wenn man auch in diesen  $M$  und  $M_1$  mit  $\mu$  und  $\mu_1$  vertauscht; nämlich

$$2) \quad c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu}{\mu_1}} (1 + k),$$

$$3) \quad v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{\mu}} (1 + k).$$

Ist der stoßende Körper aber ein freier Körper, der sich in der Richtung der Stoßlinie fortschreitend bewegt und dessen Schwerpunkt auf der Stoßlinie liegt (Fig. 154), so gelten obige Gleichungen mit der Abänderung, daß für  $\mu$  wieder die wahre Masse  $M$  eintritt.

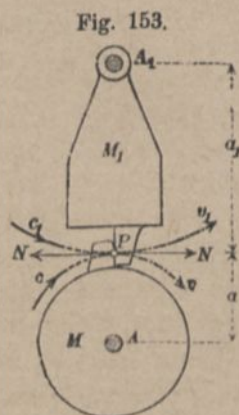
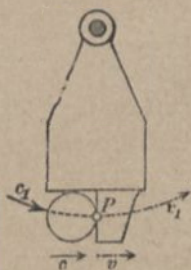


Fig. 154.



## Ballistisches Pendel.

Diese Vorrichtung hat Ähnlichkeit mit Fig. 155 und ist in früherer Zeit benutzt worden, um aus der Bewegung des Pendels nach dem Stoße die Geschwindigkeit  $c$  des dagegen abgefeuerten Geschosses  $M$  zu berechnen. Diese Einrichtung ist ein so vorzügliches Beispiel zu den eben behandelten Vorgängen, daß sie hier besprochen werden soll, wiewohl sie jetzt in der Anwendung durch vollkommenere Vorrichtungen ersetzt ist.

Das Pendel hat an der Stelle, gegen die das Geschöß abgefeuert wird, einen vorn offenen, eisernen Kasten, der mit trockenem Ton, weichem Holz u. dgl. gefüllt ist, so daß das Geschöß darin stecken bleibt und der Stoß als unelastisch

( $k=0$ ) angesehen werden kann. Vor dem Stoß ist das Pendel in Ruhe. Daher wird nach Gl. 2 und 3, S. 154 oder nach Gl. 5, S. 140

$$4) \quad v = v_1 = u = \frac{M c}{M + \mu_1}.$$

Bei der Drehbewegung des Pendels nach dem Stoße möge dasselbe einen Winkel  $\alpha$  beschreiben, bis es seine Geschwindigkeit verloren hat und zurückschwingt. Ist nun sein Schwerpunkt  $S_1$  um  $e_1$  von der Drehachse entfernt, so hebt sich dieser bei der Drehung um  $h = e_1 (1 - \cos \alpha)$ . Dann ist nach dem Satze der Arbeit

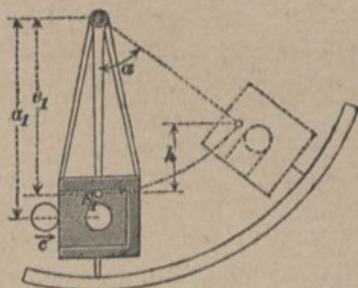
$$5) \quad (M + \mu_1) \frac{v_1^2}{2} = (M g a_1 + M_1 g e_1) (1 - \cos \alpha);$$

die linke Seite ist das Arbeitsvermögen von Pendel und Geschöß nach dem Stoße, die rechte Seite der absolute Wert der Arbeit der Schwerkraft beim Ausschlage des Pendels.

Bei der Ausführung mußte das Pendel stets sehr schwer sein im Verhältnisse zum Geschosse, so daß  $M$  gegen  $M_1$  und  $\mu_1$  zu vernachlässigen ist. Zur Vereinfachung der Formeln empfiehlt es sich, schon jetzt diese Vernachlässigung vorzunehmen. Dann wird aus Gl. 4 und 5:

$$6) \quad M^2 c^2 = 2 M_1 \mu_1 g e_1 (1 - \cos \alpha).$$

Fig. 155.





Die auf den Abstand  $a_1$  bezogene Masse  $\mu_1$  kann nun ebenfalls durch einen Versuch ermittelt werden, indem man das Pendel schwingen läßt und seine Schwingungsdauer  $t$  beobachtet. Für diese gilt (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 328)

$$t = \pi \sqrt{\frac{J_1}{M_1 g e_1}} = \pi \sqrt{\frac{\mu_1 a_1^2}{M_1 g e_1}}, \text{ so daß}$$

$$\mu_1 = \frac{M_1 a e_1 t^2}{a_1^2 \pi^2}.$$

Die Einführung dieses Wertes in Gl. 6 liefert

$$M^2 c^2 = \frac{2 M_1^2 g^2 e_1^2 t^2 (1 - \cos \alpha)}{a_1^2 \pi^2}.$$

Setzt man nun noch, um Wurzel ausdrücke zu vermeiden,

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \text{ so wird}$$

$$c = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \frac{g t M_1 e_1}{\pi M a_1}.$$

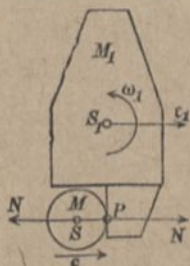
Beispiel: Es sei  $M_1 = 500 M$ ,  $t = 1,6 \text{ sek}$ ;  $M_1 e_1$  kann nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 329, Fig. 390 gemessen werden; es sei  $e_1 = 2,2 \text{ m}$ . Der untere Zeiger des Pendels bewegt sich in einem geschlitzten Gradbogen, der vor dem Versuche mit Talg ausgestrichen wurde, so daß man, wenn das Pendel wieder zur Ruhe gekommen ist,  $\alpha$  bequem ablesen kann; es sei  $\alpha = 18^\circ$ . Die Stelle, wo das Geschloß eingedrungen, sei um  $a_1 = 2,7 \text{ m}$  von der Drehachse entfernt. Dann wird

$$c = 2 \sin 9^\circ \cdot 9,81 \cdot \frac{1,6}{\pi} 500 \cdot \frac{2,2}{2,7} = 637 \text{ m}.$$

### 3. Exzentrischer Stoß.

Die Masse  $M$  stoße derartig gegen die Masse  $M_1$ , daß der Stoßdruck  $N$  wohl durch den Schwerpunkt  $S$  von  $M$ , nicht aber durch den Schwerpunkt  $S_1$  von  $M_1$  gehe, sondern von diesem einen Abstand  $a_1$  habe (Fig. 156). Dann wird  $M_1$  durch  $N$  eine Winkelbeschleunigung erfahren; aus diesem Grunde wollen wir annehmen, daß  $M_1$  vor dem Stoße schon eine Drehbewegung habe. Eine Achse durch  $S_1$ , rechtwinklig zur Bildebene, sei für  $M_1$  eine freie Achse; um diese drehe sich der Körper vor dem Stoße mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$ . Die Bildebene sei eine Ebene  $E$ , welche durch den Schwerpunkt  $S_1$  rechtwinklig zu jener Achse  $S_1$  gelegt ist; in

Fig. 156.



ihr befinde sich der Stoßpunkt  $P$  und auch der Stoßdruck  $N$ . Der Körper  $M_1$  habe vor dem Stoße noch eine Verschiebungsgeschwindigkeit  $c_1$ , parallel mit  $N$ . Für den Körper  $M$  sei der Stoß gerade und zentral; seine Geschwindigkeit sei, wie früher,  $c$ .

Der leichteren Vorstellung wegen denken wir uns den Körper  $M_1$  starr und nur  $M$  elastisch. Der Punkt  $P$  des gestoßenen Körpers hat vor dem Stoße die Geschwindigkeit

$$c_1 = c_1 + a_1 \omega_1.$$

Im ersten Abschnitte des Stoßes wird sich der Punkt  $S$  dem Punkte  $P$  nähern, im zweiten sich wieder von ihm entfernen. Im Augenblicke der

stärksten Zusammenpressung haben  $P$  und  $S$  gleiche Geschwindigkeit  $u$ . In diesem Zeitpunkte habe  $M_1$  die Verschiebungsgeschwindigkeit  $u_1$ ,

die Winkelgeschwindigkeit  $\varphi_1$ , so daß  $u = u_1 + a_1 \varphi_1$  sein muß. Nach dem Stoße habe  $M$  die Geschwindigkeit  $v$ ,  $M_1$  die Verschiebungsgeschwindigkeit  $v_1$ , die Winkelgeschwindigkeit  $\psi_1$ , die Geschwindigkeit am Stoßpunkte  $v_1 = v_1 + a_1 \psi_1$ . In Fig. 157 sind die Geschwindigkeitszustände in diesen drei Zeitpunkten dargestellt.

In irgendeinem Augenblicke des Stoßes hat  $M$  die Verzögerung

$$1) \quad p = \frac{N}{M},$$

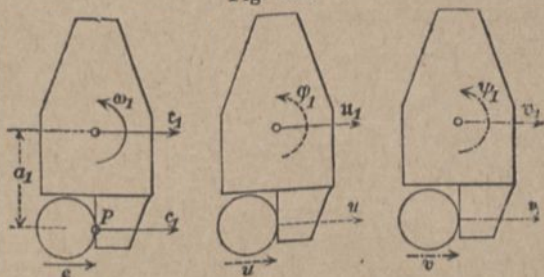
der Schwerpunkt  $S_1$  (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 213) die Beschleunigung

$$2) \quad p_1 = \frac{N}{M_1},$$

$M_1$  (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 325 mit  $\mathfrak{M} = Na_1$ ) die Winkelbeschleunigung

$$3) \quad \varepsilon_1 = \frac{N}{\mu_1 a_1}$$

Fig. 157.





(wenn  $J_1 = \mu_1 a_1^2$  das Trägheitsmoment der Masse  $M_1$  in bezug auf die Schwerpunktsachse  $S_1$  ist). Der Punkt  $P$  der Masse  $M_1$  hat somit die Gesamtbeschleunigung

$$p_1 = \dot{p}_1 + a_1 \varepsilon_1 = N \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1} \right).$$

Hieraus ergeben sich die Verhältnisse

$$p : \dot{p}_1 = M_1 : M,$$

$$p : a_1 \varepsilon_1 = \mu_1 : M,$$

$$p : p_1 = \frac{1}{M} : \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1} \right).$$

Ebenso wie diese Beschleunigungen müssen sich auch die entsprechenden Geschwindigkeitsänderungen im ersten Abschnitte des Stoßes verhalten. Also

$$4) \quad (c - u) : (u_1 - c_1) = M_1 : M,$$

$$5) \quad (c - u) : a_1 (\varphi_1 - \omega_1) = \mu_1 : M,$$

$$6) \quad (c - u) : (u - c_1) = \frac{1}{M} : \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{\mu_1} \right).$$

Gleichung 6 liefert unmittelbar

$$u = \frac{c \left( \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1} \right) + c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}} \quad \text{und danach wird}$$

$$7) \quad c - u = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}}.$$

In Verbindung mit Gl. 4 entsteht dann

$$8) \quad u_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M_1}{M} + \frac{M_1}{\mu_1}},$$

während Gl. 5 und 7 ergeben

$$9) \quad a_1 (\varphi_1 - \omega_1) = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{M} + \frac{\mu_1}{M_1}}.$$

Die Geschwindigkeitsänderungen innerhalb der ganzen Dauer des Stoßes erhält man nun, indem man die des ersten Abschnittes noch mit  $1 + k$  multipliziert. Daher

$$10) \quad c - v = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}} (1 + k),$$

$$11) \quad v_1 - c_1 = \frac{c - c_1}{1 + \frac{M}{M_1} + \frac{M}{\mu_1}} (1 + k),$$

$$12) \quad a_1(\psi_1 - \omega_1) = \frac{c - c_1}{1 + \frac{\mu_1}{M} + \frac{\mu_1}{M_1}} (1 + k).$$

Das Bildungsgesetz dieser Gleichungen 10–12 ist fast ebenso einfach wie das der Gleichungen für den geraden zentralen Stoß (S. 141). Es kommen hier drei Geschwindigkeitsänderungen in Frage: die der stoßenden Masse  $M$ , die des Schwerpunktes der gestoßenen Masse  $M_1$  und die Änderung der Umfangsgeschwindigkeit der Drehung um die Schwerpunktsachse  $S_1$ , gemessen am Stoßpunkte, wobei  $\mu_1$  als träge Masse auftritt. Die rechten Seiten der Gleichungen enthalten übereinstimmend im Zähler die Stoßgeschwindigkeit  $c - c_1$  und den Faktor  $1 + k$ . Die Nenner erhalten also Summanden 1 und zwei Verhältnisse unter den Massen  $M$ ,  $M_1$  und  $\mu_1$ . Diese Verhältnisse sind derartig geordnet, daß stets diejenige Masse, um deren Geschwindigkeit sich's gerade handelt, in diesem Verhältnisse den Zähler bildet, während die beiden anderen Massen die Nenner darstellen. Wenn man in diesem Sinne die entstehenden Gleichungen überblickt, kann man sie leicht aus dem Kopfe anschreiben.

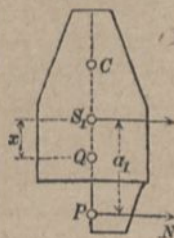
### Mittelpunkt des Stoßes.

Ein beliebiger, zwischen  $S_1$  und  $P$  im Abstand  $x$  von  $S_1$  befindlicher Punkt  $Q$  der Masse  $M_1$  (Fig. 158) erfährt eine gesamte Tangentialbeschleunigung  $p_x$ , welche sich aus der Verschiebungsbeschleunigung  $p_1$  und der Drehungsbeschleunigung  $x \varepsilon_1$  zusammensetzt; es ist  $p_x = p_1 + x \varepsilon_1$ , oder nach Gl. 2 und 3, S. 157:

$$p_x = N \left( \frac{1}{M_1} + \frac{x}{\mu_1 a_1} \right).$$

Zwischen  $P$  und  $S_1$  ist  $p_x > p_1$ ; in  $S_1$  ist  $p_x = p_1$ , während die Punkte der über  $S_1$  hinaus verlängerten

Fig. 158.





Geraden  $PS_1$  einem negativen  $x$  entsprechen, so daß  $p_s < p_1$  wird. Für einen Punkt  $C$  heben sich die Beschleunigungen  $p_1$  und  $CS_1 \cdot \varepsilon_1$  gerade auf, wenn nämlich

$$\frac{N}{M_1} = \frac{N}{\mu_1} \frac{CS_1}{a_1} \quad \text{oder}$$

$$CS_1 = \frac{\mu_1 a_1}{M_1}, \quad \text{mithin}$$

$$CP = \frac{\mu_1 a_1}{M_1} + a_1 = \frac{\mu_1 a_1^2 + M_1 a_1^2}{M_1 a_1} \quad \text{ist.}$$

Da nun  $\mu_1 a_1^2$  das Trägheitsmoment für die Schwerpunktsachse, so ist der Zähler der letzten Gleichung das Trägheitsmoment  $J_P$  in bezug auf eine Achse  $P$ , rechtwinklig zur Bildebene, während der Nenner das statische Moment für dieselbe Achse darstellt. Somit ist (1. Teil, 4. Aufl., S. 328)

$$13) \quad CP = l = \frac{J_P}{M_1 a_1}$$

die Schwingungslänge für den an der Achse  $P$  als Pendel aufgehängten Körper oder wegen der Vertauschbarkeit von Drehachse und Schwingungsachse auch für ein bei  $C$  aufgehängtes Pendel mit der Schwingungsachse  $P$ . Sämtliche Punkte der rechtwinklig zur Bildebene durch  $C$  gelegten Geraden erfahren übereinstimmend die Beschleunigung Null. War die Masse  $M_1$  nun vor dem Stoß in Ruhe, so werden die Punkte der Geraden  $C$  auch durch den Stoß nicht aus der Ruhe gebracht werden, während alle anderen Punkte in Beschleunigung geraten. Befestigt man daher den Körper an der Achse  $C$ , so wird diese durch einen Stoß bei  $P$  keine Einwirkung erfahren. Aus diesem Grunde nennt man  $C$  die unempfindliche Achse und  $P$  den Mittelpunkt des Stoßes in bezug auf die Achse  $C$ . Dabei wurde vorausgesetzt, daß die rechtwinklig zur Bildebene, d. h. parallel mit  $C$  liegende Schwerpunktsachse  $S_1$ , eine freie Achse sei (1. Teil, 4. Aufl., S. 338) und daß  $P$  in der zu dieser Achse rechtwinkligen Schwerpunktschwerpunktsachse liege.

Diese Beziehung ist wichtig für Körper, welche um Achsen drehbar sind und durch den Stoß von Daumen oder dergl. bewegt werden sollen (Aufwerfhämmer); greift der Daumen im Mittelpunkte des Stoßes an, so wird die Achse durch den Stoß nicht beeinflusst.

Auch bei Werkzeugen, die durch einen Schlag getroffen, oder mit denen Schläge ausgeübt werden, ist es vorteilhaft, die führende Hand bei dem „Unempfindlichkeitspunkt“  $C$  angreifen zu lassen, wenn bei  $P$  der Schlag erfolgt, damit die Hand keine Erschütterung (Prellung) empfinde. Hiernach sind die Längen der Stiele der Schlagwerkzeuge zu bemessen.

Beispiel: Der gestoßene Körper sei ein gerader Stab; zu dem im unteren Viertelpunkte gegebenen Stoßpunkte  $P$  soll die unempfindliche Achse  $C$  gesucht werden. Es wird nach Gl. 13

$$l = \frac{J_P}{M_1 a_1} = \frac{M_1 \cdot \frac{1}{12} h^2 + M_1 \cdot \frac{1}{16} h^2}{M_1 \cdot \frac{1}{4} h} = \frac{7}{12} h,$$

d. h.  $C$  liegt um  $(\frac{7}{12} - \frac{1}{4}) h = \frac{1}{3} h$  über der Stabmitte  $S_1$ .

Faßt man die Stange bei  $C$  mit der Hand, so wird ein bei  $P$  geführter Stoß der Hand nicht fühlbar werden. Das Gleiche gilt, wenn man den Stab bei  $P$  erfaßt und der Schlag bei  $C$  erfolgt.

Es sollen nun auch die Geschwindigkeitsänderungen berechnet werden, welche entstehen, wenn gegen die ruhende Stange bei  $P$  eine kugelförmige Masse  $M$  mit der Geschwindigkeit  $c$  stößt. Der Stoß werde als unelastisch und die Masse  $M$  gleich der Masse  $M_1$  vorausgesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} k &= 0, & \omega_1 &= 0, \\ c_1 &= 0, & M_1 &= M, \\ c_1 &= 0, & \mu_1 &= \frac{4}{3} M_1 \end{aligned}$$

und nach den Gl. 10—12 (S. 159)

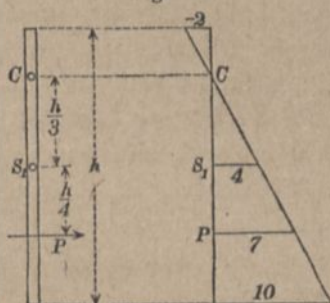
$$c - v = \frac{c}{1 + 1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11} c; \quad v = \frac{7}{11} c.$$

$$v_1 = \frac{c}{1 + 1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{11} c,$$

$$a_1 \psi_1 = \frac{c}{1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{3}{11} c.$$

Da die Umfangsgeschwindigkeiten der Drehung an den verschiedenen Stellen mit dem Abstände  $x$  vom Schwerpunkte verhältnismäßig, so ist die Darstellung der Gesamtgeschwindigkeiten eine Gerade. Trägt man in  $P$  und  $S_1$  die Geschwindigkeiten  $v$  und  $v_1$  durch Ordinaten 7 und 4 auf (Fig. 158), so ergibt sich eine Gerade, die die Stange in dem Unempfindlichkeitspunkte  $C$  schneidet.

Fig. 159.





#### 4. Schiefer zentraler Stoß.

Die Schwerpunkte der beiden Körper mögen im Augenblicke des Zusammentreffens Geschwindigkeiten  $c$  und  $c_1$  haben, die mit der durch beide Schwerpunkte gehenden Stoßlinie die Winkel  $\alpha$  und  $\alpha_1$  bilden (Fig. 160). Man kann die Geschwindigkeiten zerlegen in  $c \cos \alpha$  und  $c_1 \cos \alpha_1$  nach der Richtung der Stoßlinie und  $c \sin \alpha$  bzw.  $c_1 \sin \alpha_1$  rechtwinklig dazu. Dann werden die Geschwindigkeitsänderungen in der Richtung der Stoßlinie, die unter Einwirkung des Stoßdruckes  $N$  entstehen, völlig nach den Regeln des geraden zentralen Stoßes zu beurteilen sein. In der Richtung rechtwinklig zur Stoßlinie wird zwischen den Kugeln in Wirklichkeit ein Reibungswiderstand auftreten, dessen Berücksichtigung die Aufgabe ziemlich verwickelt macht. Wir wollen

jedoch hier diese Reibung vernachlässigen, bzw. die Körper als völlig glatt betrachten. Unter dieser Voraussetzung tritt dann rechtwinklig zur Stoßlinie keine Kraft auf, so daß die Seitengeschwindigkeiten  $c \sin \alpha$  und  $c_1 \sin \alpha_1$  unverändert verbleiben. Nennt man  $v$  und  $v_1$  die Geschwindigkeiten nach dem Stoße mit den Neigungswinkeln  $\beta$  und  $\beta_1$  gegen die Stoßlinie, so wird nunmehr nach Gl. 10 und 11, S. 141

$$1) \quad c \cos \alpha - v \cos \beta = \frac{c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k),$$

$$2) \quad v_1 \cos \beta_1 - c_1 \cos \alpha_1 = \frac{c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k),$$

$$3) \quad v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

$$4) \quad v_1 \sin \beta_1 = c_1 \sin \alpha_1.$$

Stoß gegen eine ruhende Kugel. War  $M_1$  zu Anfang in Ruhe, d. h.  $c_1 = 0$  (Fig. 161), so wird

Fig. 160.

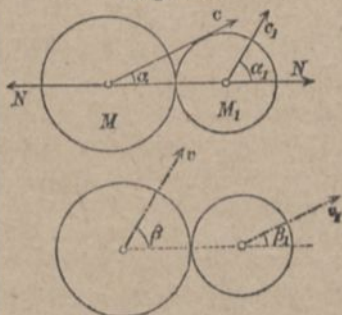
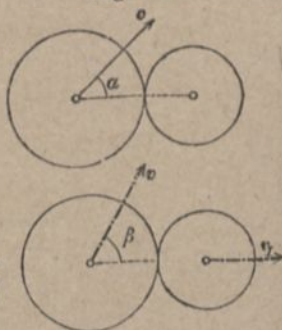


Fig. 161.



$$c \cos \alpha - v \cos \beta = \frac{c \cos \alpha}{1 + \frac{M}{M_1}} (1 + k),$$

$$v_1 \cos \beta_1 = \frac{c \cos \alpha}{1 + \frac{M_1}{M}} (1 + k),$$

$$v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

$v_1 \sin \beta_1 = 0$ , also  $\beta_1 = 0$ , und  $v_1 = v_1 \cos \beta_1$ . Die getroffene Kugel bewegt sich nach dem Stoß in der Richtung der gemeinschaftlichen Normalen der Berührungsstelle. Haben die Kugeln gleiche Massen, ist also  $M = M_1$ , so wird

$$5) \quad v \cos \beta = \frac{1}{2} c \cos \alpha (1 - k),$$

$$6) \quad v \sin \beta = c \sin \alpha, \text{ daher}$$

$$7) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - k},$$

$$8) \quad v_1 = \frac{1}{2} c \cos \alpha (1 + k).$$

Bei unelastischem Stoße wird  $k = 0$ , daher  $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$ . Ist (Fig. 162)  $AB = c$ ,  $\sphericalangle BAC = \alpha$ ,  $AC = c \cos \alpha$ , so wird, wenn man  $AD = DC$  macht,  $DB = v$ ,  $DC = v_1$  nach Richtung und Größe.

Bei vollkommen elastischem Stoße aber wird  $k = 1$ , daher  $v \cdot \cos \beta = 0$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $v = c \sin \alpha$ ,  $v_1 = c \cos \alpha$ ; Fig. 163 ergibt daher  $v = CB$ ,  $v_1 = AC$ , nach Größe und Richtung. Beide Kugeln bewegen sich also nach dem Stoße unter rechtem Winkel auseinander.

Stoß einer Kugel gegen eine feste Wand. Mit  $c_1 = 0$  und  $M_1 = \infty$  geht Gl. 1 über in:

$$c \cos \alpha - v \cos \beta = c \cos \alpha (1 + k)$$

oder:

$$v \cos \beta = -c \cos \alpha \cdot k; \text{ ferner}$$

$$v \sin \beta = c \sin \alpha,$$

$$\text{mithin } \operatorname{tg}(-\beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{k}.$$

Fig. 162.

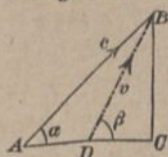


Fig. 163.

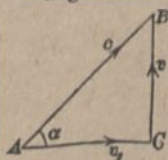


Fig. 164.

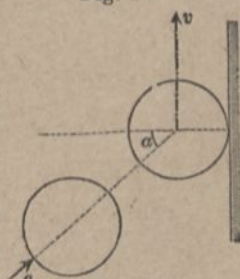
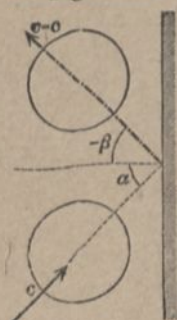


Fig. 165.





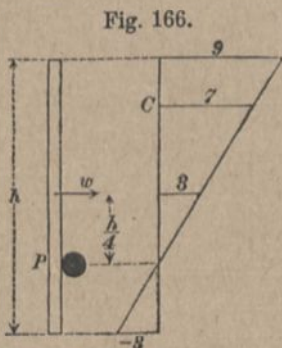
Für unelastischen Stoß ergibt sich (mit  $k=0$ )  $v \cos \beta = 0$ , also  $-\beta = 90^\circ$  und  $v = c \sin \alpha$ , d. h. die Seitengeschwindigkeit, rechtwinklig zur Wand, geht verloren, es bleibt nur die Seitengeschwindigkeit in der Richtung der Wand erhalten (Fig. 164).

Für elastischen Stoß wird (mit  $k=1$ ):  $v \cos \beta = -c \cos \alpha$  und  $-\beta = \alpha$ , daher  $v = -c$ , d. h. die Kugel wird von der festen Wand ohne Verlust an Geschwindigkeit so zurückgeworfen, wie ein Lichtstrahl von einem Spiegel (Fig. 165); Ausfall- und Einfallwinkel sind einander gleich.

### 5. Einige besondere Fälle des Stoßes.

Es mögen hier noch einige Fälle des Stoßes betrachtet werden, auf welche die entwickelten Formeln scheinbar nicht, oder nicht unmittelbar passen, die aber doch durch ähnliche Betrachtungen, wie sie im vorstehenden zur Anwendung gelangten, zur Lösung geführt werden können.

1. Ein fortschreitender Stab stößt gegen ein festes Hindernis. Ein Stab von der Länge  $h$  bewege sich mit der überall gleichen Geschwindigkeit  $w$  und treffe im unteren Viertelpunkte  $P$  auf eine unwandelbar befestigte Querstange (Fig. 166). Es soll die Bewegung des Stabes nach dem Stoß untersucht werden.



Die Querstange ist wegen ihrer Unbeweglichkeit als eine unendlich große Masse aufzufassen. Die Gleichungen 11 und 12, S. 159, sind auf diesen Fall anwendbar; man hat darin

$$c = 0, \quad c_1 = w, \quad c_1 = w,$$

$$\omega_1 = 0, \quad M = \infty, \quad \mu_1 = \frac{4}{3} M_1$$

zu setzen und erhält für unelastischen Stoß ( $k=0$ )

$$v_1 - w = \frac{-w}{1 + \frac{3}{4}}; \quad v_1 = \frac{3}{7} w;$$

$$a_1 \psi_1 = \frac{-w}{1 + \frac{4}{3}} = -\frac{3}{7} w;$$

$$v_1 = v_1 + a_1 \psi_1 = \frac{3}{7} w - \frac{3}{7} w = 0.$$

Neben der Stange sind die Geschwindigkeiten als Vielfache von  $\frac{1}{7}w$  dargestellt.

Man kann diese Aufgabe auch lösen, indem man die Bewegung des Stabes auffaßt als scheinbare Ruhe in bezug auf einen mit der Geschwindigkeit  $w$  fortschreitenden Raum. Die Masse  $M = \infty$  bewegt sich dann mit der Geschwindigkeit  $w$  gegen den ruhenden Stab. Mit den hiernach erhaltenen Geschwindigkeiten hat man dann die Geschwindigkeit  $w$  des Raumes in geeigneter Weise wieder zu verbinden.

2. Ein fortschreitend gleitender Würfel stößt mit seiner vorderen unteren Kante gegen ein Hindernis (Fig. 167). Der Körper muß dann eine Drehung um die Kante  $A$  ausführen; diese betrachten wir aber als das Ergebnis einer Verschiebung des Schwerpunktes mit der Geschwindigkeit  $v$  rechtwinklig zu  $AS$  (Fig. 168) und einer Drehung um die zur Bildebene rechtwinklige Schwerpunktsachse  $S$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , wodurch mit  $r\omega = v$  der Punkt  $A$  die Geschwindigkeit Null bekommt. Wir zerlegen  $v$  in die Seitengeschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$ , die hier offenbar gleich sein müssen. Da nun die Geschwindigkeit  $v_2$  durch den Stoß neu entsteht, so muß neben der Kraft  $N_1$  auch noch eine Kraft  $N_2$  auftreten (Fig. 167). Das Gewicht des Würfels wird gegenüber den Kräften  $N_1$  und  $N_2$  vernachlässigt. Die Würfelkante sei  $d = 2e$ . Das Trägheitsmoment des Würfels in bezug auf die Achse  $S$  findet man (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 322) leicht zu

$$\frac{1}{6} M d^2 = \frac{2}{3} M e^2,$$

also ist die auf den Abstand  $e$  bezogene Masse  $\mu = \frac{2}{3} M$ . Während des Stoßes erfährt der Schwerpunkt des Würfels eine Beschleunigung

$$p_1 = \frac{N_1}{M} \quad \text{und} \quad p_2 = \frac{N_2}{M}$$

Fig. 167.

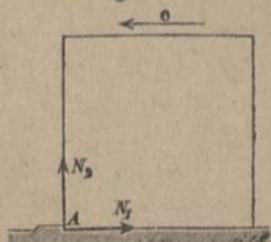
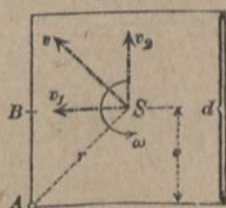


Fig. 168.





im Sinne dieser Kräfte; die Winkelbeschleunigung ist (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 000)

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{J} = \frac{N_1 \cdot e - N_2 \cdot e}{\mu \cdot e^2}$$

und daher die Umfangsbeschleunigung im Abstand  $e$  von  $S$

$$e\varepsilon = \frac{N_1 - N_2}{\mu} = \frac{3}{2} \frac{N_1 - N_2}{M}$$

Diese Beschleunigungen stehen in den Verhältnissen

$$p_1 : p_2 = N_1 : N_2,$$

$$p_2 : e\varepsilon = 2 N_2 : 3 (N_1 - N_2).$$

Da der Punkt  $B$  aber in lotrechter Richtung die Beschleunigung  $p_2 - e\varepsilon$  erfährt, welche (annähernd)  $= 0$  sein muß, so ergibt sich  $2 N_2 = 3 (N_1 - N_2)$ , d. h.  $N_2 = \frac{3}{5} N_1$ . Hiernach wird

$$p_1 : p_2 = 5 : 3, \quad p_2 = e\varepsilon.$$

Setzt man nun an Stelle der Beschleunigungen die entsprechenden Geschwindigkeitsänderungen, so erhält man

$$(c - v_1) : v_2 = 5 : 3,$$

oder weil nach Fig. 168  $v_2 = v_1$  sein muß,

$$v_1 = v_2 = \frac{3}{8} c = e\omega; \quad v = v_1 \sqrt{2}.$$

Das Arbeitsvermögen nach dem Stoße beträgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= \frac{1}{2} (M v^2 + \mu e^2 \omega^2) = \frac{1}{2} M (2 v_1^2 + \frac{2}{8} v_1^2) \\ &= \frac{1}{2} M c^2 \cdot \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Soll der Würfel nach dem Stoße sich überschlagen, nicht wieder zurückfallen, so muß  $\mathfrak{A}_1 \geq$  Arbeit der Schwere beim völligen Aufkippen sein, d. h.

$$\frac{1}{2} M c^2 \cdot \frac{3}{8} \geq M g e (\sqrt{2} - 1) \quad \text{oder}$$

$$\frac{c^2}{2g} \geq 1,1 e.$$

3. Wirkung von Fäden statt einer Berührung der Körper. Sind die Körper durch einen anfangs schlaffen Faden verbunden, so werden in dem Augenblicke, wo der Faden straff wird, durch seine Spannkraft ähnliche Wirkungen auf die Körper ausgeübt, wie bei unmittelbarer Berührung durch Stoß. Daher gelten in dem Falle der Fig. 169 für  $v$  und  $v_1$  die Gleichungen 10 und 11

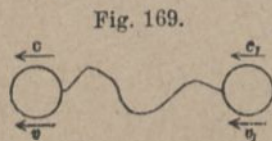
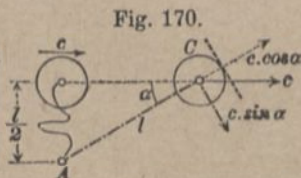


Fig. 169.

S. 159. Ist der Faden mit einem Körper  $M$  in Verbindung, am anderen Ende aber unwandelbar befestigt, so wirkt die Befestigung wie eine feste Wand ( $M_1 = \infty$ ). Für unelastischen Faden ist  $k = 0$ , für vollkommen elastischen Faden  $k = 1$  zu setzen.

**Beispiel:** Ein Körper bewegt sich fortschreitend mit der Geschwindigkeit  $c$  auf einer Geraden (Fig. 170). Ein undehnbarer Faden von der Länge  $l$  sei mit dem Körper verbunden und bei  $A$  in einem Abstand  $0,5l$  von der Geraden befestigt. In dem Augenblicke, wo der Faden straff wird, vernichtet seine Spannkraft die Seitengeschwindigkeit  $c \cos \alpha$ , so daß sich der Körper nun mit der Geschwindigkeit  $c \sin \alpha = 0,5c$  in einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt  $A$  weiterbewegt. Der Faden wirkt im Augenblicke des Straffwerdens ebenso, als ob der Körper bei  $C$  unelastisch gegen eine feste Wand stieße, welche zu  $l = AC$  rechtwinklig ist.

Jedes ruckweise Anziehen mittels eines undehnbaren Seiles ist mit einem Arbeitsverluste verbunden.





## Zweite Abteilung.

**Mechanik der flüssigen Körper.****Allgemeine Eigenschaften der flüssigen Körper;  
tropfbar-flüssige und gasförmig-flüssige  
Körper.**

Ein fester Körper hat im spannungslosen Zustand eine bestimmte Form, und jeder Änderung derselben setzen sich innere Widerstandskräfte entgegen. Ein flüssiger Körper aber setzt weder einer Trennung noch einer Verschiebung seiner Teile einen merklichen Widerstand entgegen; es kommen in ihm Zug- und Schubspannungen nicht vor, auch besteht zwischen den einzelnen Teilen des flüssigen Körpers keine merkliche Reibung. Wohl aber zeigen die flüssigen Körper einen Widerstand gegen Verkleinerung des Rauminhaltes, ihre einzelnen Teile vermögen daher Druckkräfte auszuüben und aufzunehmen.

Die flüssigen Körper zerfallen in tropfbar-flüssige und gasförmig-flüssige. Ein tropfbar-flüssiger Körper hat, wenn er der Einwirkung äußerer Kräfte entzogen ist, einen bestimmten endlichen Rauminhalt, ohne das Bestreben, sich auszudehnen. Ein gasförmiger Körper aber hat im allgemeinen das Bestreben, sich unbegrenzt auszudehnen und kann nur durch äußere Druckkräfte auf einen endlichen Rauminhalt beschränkt werden.

Ein verschiedenes Verhalten zeigen die beiden Arten flüssiger Körper gegenüber einer Vergrößerung der äußeren Druckkräfte. Ein tropfbar-flüssiger Körper erleidet dabei eine nur sehr kleine Verminderung seines Rauminhaltes, so daß man ihn als einen Körper von unveränderlichem Rauminhalt, also auch von

unveränderlicher Dichte ansehen kann. Bei einem gasförmigen Körper aber hat eine merkliche Vergrößerung der äußeren Druckkräfte auch eine merkliche Zusammendrückung zur Folge, Rauminhalt und Dichte sind durchaus veränderlich.

Der Satz d'Alemberts (1. Teil, 4. Aufl., S. 169), wonach die Gruppe der äußeren Kräfte  $[K]$  und die Gruppe der den Beschleunigungen  $p$  der einzelnen Teilchen entsprechenden Trägheitswiderstände  $[-m p]$  zusammen den Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper unterworfen sind, gilt auch für flüssige Körper.

Trennt man einen flüssigen Körper (Fig. 171) durch eine Schnittfläche  $xy$  in zwei Teile, so werden letztere längs der Schnittfläche gegenseitig Normaldrücke aufeinander ausüben. Auf ein Flächenteilchen  $dF$  komme die Druckkraft  $dD$ , dann ist

$$p = \frac{dD}{dF}$$

der Flüssigkeitsdruck für die Flächeneinheit. Es läßt sich zeigen, daß dieser Druck  $p$  in einem Punkte  $A$  des Körpers (Fig. 172) in bezug auf alle durch diesen Punkt gelegten Schnittebenen dieselbe Größe hat, oder daß in einem Punkt einer Flüssigkeit der Druck für die Flächeneinheit nach allen Richtungen derselbe ist.

Man lege durch den Punkt  $A$  zwei Ebenen  $E$  und  $E_1$ , die den Winkel  $\alpha$  miteinander bilden. Im Abstände  $dx$  von  $A$  füge man noch eine dritte zu  $E$  rechtwinklige Ebene  $FF$  hinzu. Dann wird dadurch ein dreiseitiges Prisma herausgeschnitten; die Bildebene und eine dazu im Abstände  $dy$  parallel gelegte Ebene trennen davon ein Teilchen (Fig. 173) ab, dessen drei bei  $B$  rechtwinklig zueinander stehende Kanten  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$  sind. An der

Fig. 171.

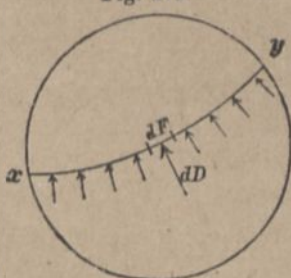
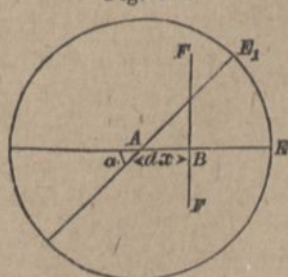


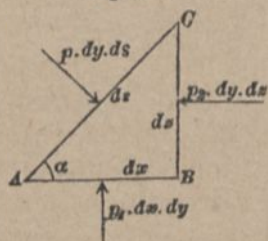
Fig. 172.





Fläche  $AB$  von der Größe  $dx \cdot dy$  herrsche ein Einheitsdruck  $p_1$ , also eine Druckkraft  $p_1 \cdot dx \cdot dy$ , ebenso an der Fläche  $BC$  ein Einheitsdruck  $p_2$ , eine Druckkraft  $p_2 \cdot dy \cdot dz$  und an der Fläche  $AC$  ein Einheitsdruck  $p$ , eine Druckkraft  $p \cdot dy \cdot ds$ . (Die Druckkräfte an den beiden der Bildebene parallelen Schnittebenen kommen nicht in Betracht, da wir nur die Seitenkräfte in den Richtungen  $dx$  und  $dz$  untersuchen wollen.) Diese Druckkräfte sind unendlich klein zweiter Ordnung; der Rauminhalt des Prismas mit  $\frac{1}{2} dx dy dz$  und zugleich Maße und Gewicht desselben sind aber unendlich

Fig. 173.



klein dritter Ordnung, das Gewicht verschwindet daher gegen die Druckkräfte und kann auf deren Beziehung zueinander nicht einwirken. Hat das Flüssigkeitsteilchen eine Beschleunigung  $q$ , so bleibt auch seine Ergänzungskraft  $-mq$  als unendlich klein dritter Ordnung außer Betracht; daher müssen die Druckkräfte für sich allein den Gleichgewichtsbedingungen genügen. Da nun  $p$  mit  $p_1$  den Winkel  $\alpha$  bildet, so entstehen die Bedingungen:

$$p dy ds \sin \alpha = p_2 dy dz$$

$$p dy ds \cos \alpha = p_1 dx dy,$$

und weil  $dz = ds \sin \alpha$ ,  $dx = ds \cos \alpha$  ist, ergibt sich

1)

$$p = p_2 = p_1.$$

Dreht man die im Punkte  $A$  (Fig. 172) rechtwinklig zur Bildebene stehende Kante  $dy$  um  $AB$ , so bekommt das Prisma eine andere Richtung, die Ebene  $FF$  aber mit dem Einheitsdrucke  $p_2$  behält ihre Lage. Läßt man schließlich  $dx$  zu Null werden, so ist  $FF$  eine ebenfalls durch  $A$  gehende Ebene, und es gilt dann, daß der Einheitsdruck im Punkt  $A$  in bezug auf eine ganz beliebig gewählte, durch den Punkt  $A$  gelegte Ebene  $E_1$  dieselbe Größe hat, wie der Einheitsdruck in bezug auf die Ebene  $F$  von bestimmter Richtung.

## A. Gleichgewicht flüssiger Körper.

Man bezeichnet einen flüssigen Körper als im Gleichgewichte befindlich, wenn seine sämtlichen Teilchen entweder in wirklicher Ruhe sind, oder doch in scheinbarer Ruhe in bezug auf einen gleichförmig geradlinig fortschreitenden Raum, womit also eine gegenseitige Bewegung der Flüssigkeitsteilchen, d. h. eine Formänderung des Körpers ausgeschlossen ist. Sämtliche Teilchen haben übereinstimmend die Beschleunigung Null, somit verschwinden sämtliche Ergänzungskräfte  $[-mp]$ , und es müssen die äußeren Kräfte denselben Bedingungen genügen, wie für das Gleichgewicht eines starren Körpers, d. h. man kann sich jeden beliebigen Teil eines flüssigen Körpers, für dessen Gleichgewicht man die Bedingungen sucht, in einen starren Körper verwandelt denken, wobei aber die anzubringenden Kräfte den Eigenschaften flüssiger Körper entsprechen müssen.

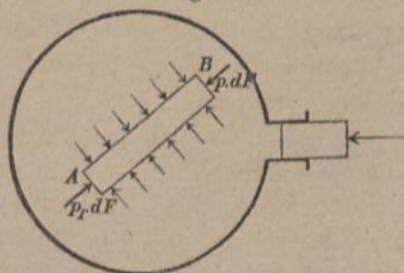
### 1. Gleichgewicht flüssiger Körper ohne Einwirkung der Schwere.

Ist ein im Gleichgewichte befindlicher tropfbar-flüssiger oder gasförmiger Körper ringsum von Gefäßwänden umschlossen, die auf ihn Druckkräfte ausüben, so hat das Eigengewicht des flüssigen Körpers auf seine Druckverhältnisse in vielen Fällen der Anwendung einen so unbedeutenden Einfluß, daß es der Vereinfachung wegen geraten ist, diesen Einfluß ganz zu vernachlässigen.

In dem Gefäße (Fig. 174)

befinde sich Flüssigkeit im Gleichgewicht. Um eine Beziehung zwischen den Einheitsdrücken  $p_1$  und  $p$  bei  $A$  und  $B$  zu finden, denken wir uns ein von  $A$  nach  $B$  reichendes gerades Prisma vom Querschnitte  $dF$  erstarrt. Das umgebende Wasser übt auf alle Flächen rechtwinklige Druckkräfte aus, u. zw. auf die Endflächen

Fig. 174.





die Kräfte  $p_1 dF$  bzw.  $p dF$ . Bilden wir die Gleichung der Kräfte-  
summe in der Richtung  $AB$ , so kommen dabei die Druckkräfte  
gegen die Seitenflächen des Prismas nicht in Betracht, und da bei  
Vernachlässigung des Eigengewichts keine Massenkräfte wirken  
(vgl. S. 170), so wird einfach

$$p_1 dF = p dF, \text{ d. h. } p_1 = p.$$

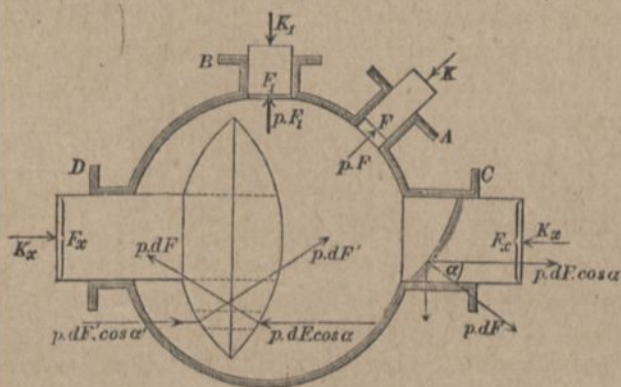
Da nun  $A$  und  $B$  beliebig gelegene Punkte des flüssigen Körpers  
sind, so gilt, mit Rücksicht auf S. 170, der Satz:

In einem flüssigen Körper, der ohne Einwirkung  
von Massenkräften im Gleichgewicht ist, hat der Ein-  
heitsdruck an allen Stellen im Innern und an der Ober-  
fläche und nach allen Richtungen gleiche Größe. Statt  
des Wortes Einheitsdruck, d. h. Druck auf die Flächeneinheit, soll  
künftig kürzer Druck gesagt werden, während die auf irgendeine  
Flächengröße kommende Kraft mit dem Worte Druckkraft be-  
zeichnet werden möge; in ähnlicher Weise wurden in der Mechanik  
elastisch-fester Körper die Worte Spannung und Spannkraft unter-  
schieden. Man nennt diesen Druck auch wohl hydrostatischen Druck.

### a) Druckkräfte eines flüssigen Körpers gegen verschiebbare Kolben.

An einem Gefäße (Fig. 175) seien zylindrische Ansatzröhren  
angebracht, welche von genau passenden, aber reibungslos beweglich

Fig. 175.



gedachten Kolben abgeschlossen werden. Wird durch irgendwelche  
Druckkraft gegen einen Kolben in dem flüssigen Körper ein Druck  $p$

erzeugt und soll der flüssige Körper im Gleichgewichte verbleiben, so muß  $p$  überall gleich sein. Sind  $F$  und  $F_1$  die Querschnittflächen der Kolben  $A$  und  $B$ , so bekommt der Kolben  $A$  eine Druckkraft  $pF$ , der Kolben  $B$  eine Druckkraft  $pF_1$ . Die Druckkräfte auf die Kolben verhalten sich also wie die Querschnittflächen der Kolben, und ebenso große, aber nach dem Innern des Gefäßes gerichtete Kräfte  $K = pF$  und  $K_1 = pF_1$  müssen von außen auf die Kolben wirken.

Ist der Kolben  $C$  an der der Flüssigkeit zugekehrten Seite von einer krummen Fläche begrenzt, so hat der Umstand, daß diese größer ist als die rechtwinklige Querschnittfläche des Kolbens und des Ansatzrohres keinen Einfluß auf die Größe der wirksamen Kolbenkraft, wie folgende Überlegung zeigt: Betrachten wir die Mittellinie des Rohres als  $x$ -Achse, so möge die Druckkraft gegen ein Flächenteilchen  $dF$  mit der  $x$ -Richtung den Winkel  $\alpha$  bilden. Es läßt sich  $p \cdot dF$  zerlegen in eine Seitenkraft  $p \cdot dF \cdot \cos \alpha$  in der  $x$ -Richtung, und in eine dazu rechtwinklige. Die letztere drückt den Kolben gegen die Wand der Ansatzröhre und wird durch deren Festigkeit aufgehoben. Wirksam gegen den Kolben, d. h. eine mögliche Bewegung anstre bend, ist nur die Seitenkraft  $p \cdot dF \cdot \cos \alpha$ . Derselbe Winkel  $\alpha$ , den die Normale zu  $dF$  mit der  $x$ -Richtung bildet, findet sich auch zwischen der Fläche  $dF$  und der  $yz$ -Ebene, die rechtwinklig zur Achsenrichtung des Rohres steht. Daher ist  $dF \cdot \cos \alpha$  die rechtwinklige Projektion von  $dF$  auf die Querschnittebene des Rohres, oder, wie man auch sagen kann, die rechtwinklige Projektion in der  $x$ -Richtung; wir bezeichnen dieselbe mit  $dF_x = dF \cdot \cos \alpha$ . Die gesamte Endfläche des Kolbens liefert daher einen wirksamen Druck

$$K_x = p \int dF_x = p \cdot F_x,$$

wenn  $F_x$  die rechtwinklige Querschnittfläche der Röhre oder die darauf rechtwinklige Projektion der Endfläche des Kolbens ist, wobei die Projektionsrichtung in die Achsenrichtung der Röhre fällt.

Auch wenn der Kolben, wie bei  $D$ , sich im Innern des Gefäßes erweitert und über den zylindrischen Teil hinausragt, wird dadurch seine wirksame Kraft nicht geändert. Ein Flächenteilchen  $dF$  dieses überstehenden Teiles liefert in der  $x$ -Richtung eine Seitenkraft  $p \cdot dF \cdot \cos \alpha = p \cdot dF_x$ . Die projizierenden Linien, welche in der Richtung des Ansatzrohres von dem Umfange des Flächenteilchens  $dF$



ausgehen, treffen die Oberfläche der Kolbenerweiterung aber noch einmal und schneiden aus ihr ein Flächenteilchen  $dF'$  heraus, welches eine Druckkraft  $p \cdot dF'$  und eine Seitenkraft in der Richtung des Rohres  $p \cdot dF' \cdot \cos \alpha' = p \cdot dF_{\kappa}$  erfährt. Diese Seitenkraft ist der von  $dF$  gelieferten gleich und entgegengesetzt und hebt sich damit auf. In gleicher Weise liefern sämtliche der Flüssigkeit ausgesetzte Oberflächenteile des Kolbens, die beim rechtwinkligen Projizieren in der Längsrichtung des Ansatzrohres paarweise aufeinander fallen, keinen Beitrag zur wirksamen Kolbenkraft. Es bleibt als wirksame Druckfläche des Kolbens nur dessen rechtwinklige Querschnittsfläche  $F_{\kappa}$  mit der wirksamen Kolbenkraft

$$1) \quad K_{\kappa} = p \cdot F_{\kappa}$$

übrig, auch geht  $K_{\kappa}$  durch den Schwerpunkt von  $F_{\kappa}$ , gerade so, als ob der Kolben dem Wasser eine rechtwinklige Querschnittsfläche  $F_{\kappa}$  als Endfläche zukehrte.

### b) Kraftübertragung durch Druckwasser.

Wenn einer von den in Fig. 175 angedeuteten Kolben, etwa der mit  $A$  bezeichnete, unter verschwindend geringer Vergrößerung der auf ihn wirkenden äußeren Gleichgewichtskraft  $K$  langsam gegen das Innere des Gefäßes um ein Maß  $s_K$  vorgetrieben würde, so müßte unter der Voraussetzung, daß die Füllung aus einer tropfbaren, also raumbeständigen Flüssigkeit besteht, einer der übrigen Kolben, etwa der Kolben  $B$  um ein solches Maß  $s_{K_1}$  zurückweichen, daß der Gesamtrauminhalt unverändert bleibt; es müßte die Bedingung erfüllt sein

$$1) \quad F \cdot s_K = F_1 \cdot s_{K_1}.$$

Unter der weiteren Annahme, daß das Gleichgewicht durch diesen Vorgang nicht wesentlich gestört wird, muß ferner sein

$$2) \quad \frac{K}{K_1} = \frac{F}{F_1}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt, wenn man sie zusammen multipliziert, nach entsprechender Ordnung

$$3) \quad (K_1 \cdot s_{K_1}) : (K \cdot s_K) = 1.$$

Der Quotient linksseits Gl. 3 drückt das Verhältnis der Arbeitsmengen aus, welche die Kräfte  $K$  und  $K_1$  im positiven und nega-

tiven Sinne bei der Verschiebung des Flüssigkeitskörpers leisten. Bei der zunächst vorausgesetzten völligen Reibungslosigkeit der Verschiebung sind nach Gl. 3 beide Arbeitsmengen, die am Kolben  $A$  aufgewandte  $K \cdot s_K$  und die am Kolben  $B$  wiedergewonnene  $K_1 \cdot s_{K_1}$  einander völlig gleich. Dieser Vorgang einer vollkommenen Arbeitsübertragung vom Kolben  $A$  nach dem Kolben  $B$  würde auch dann noch völlig derselbe bleiben, wenn die zylindrischen Räume, in denen beide Kolben sich verschieben, anstatt durch das zwischenliegende Gefäß durch eine eingefügte Rohrleitung verbunden wären (vgl. Fig. 176).

Nun besteht zwar die Möglichkeit, die Kolben so genau einzupassen, daß sie bei dichtem Schluß wenigstens nahezu reibungslos beweglich bleiben. In den meisten Fällen der Anwendung ist jedoch die Einfügung einer sogen. Dichtung, etwa eines Ringes aus Leder von  $\Omega$ -förmigem Querschnitt, erforderlich, wie solche in der in Fig. 176 dargestellten Wasserdruckpresse und in Fig. 177 skizziert ist. Die in den  $\Omega$ -förmigen Hohlraum des „Lederstulps“ hineintretende Flüssigkeit preßt dessen Schenkel mit dem in ihr herrschenden Druck  $p$  nach innen gegen die Kolben und nach außen an die Zylinderwand, wodurch der erforderliche dichte Schluß erreicht wird, gleichzeitig aber auch eine der Verschiebung der Kolben entgegenwirkende Reibung entsteht. Die Kraft  $K$ , die den Kolben  $A$  vorwärtschiebt, hat jetzt neben der entgegenwirkenden Druckkraft der Flüssigkeit auch noch die aus der Dichtung entstehende Reibung zu überwinden. Bei der Höhe  $h$  des Dichtungsringes ist die Druckkraft, die dessen innere Schenkel gegen den Kolben preßt, gleich  $\pi \cdot d \cdot h \cdot p$  und mit  $f$  als Reibungsziffer der Kolbenoberfläche gegen den Lederstulp der Reibungswiderstand in axialer Richtung  $T = \pi \cdot d \cdot h \cdot p \cdot f$ . Die zum Vortreiben des Kolbens

Fig. 176.

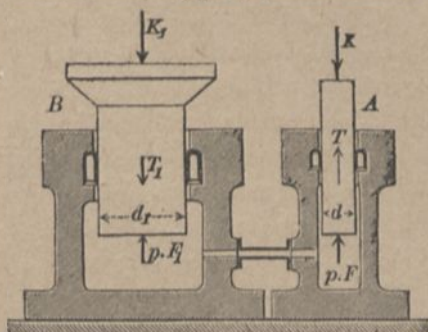
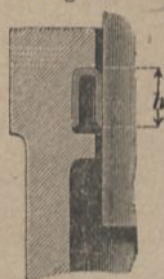


Fig. 177.





erforderliche Kolbenkraft muß daher sein

$$4) \quad \dots K = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot p + \pi \cdot d \cdot h \cdot p \cdot f = \frac{\pi}{4} d^2 p \left( 1 + \frac{4h}{d} \cdot f \right).$$

An dem von der Flüssigkeit zurückgetriebenen Kolben  $B$  wirkt der Reibungswiderstand gleichsinnig mit der widerstehenden Kolbenkraft  $K_1$ . Für diesen „getriebenen“ Kolben gilt daher die Gleichung

$$5) \quad \dots K_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2 p}{4} - \pi d_1 h_1 \cdot p f = \frac{\pi \cdot d_1^2 p}{4} \left( 1 - \frac{4h_1}{d_1} \cdot f \right).$$

Da man für das Verhältnis  $h:d$  bzw.  $h_1:d_1$  für verschiedene Kolben etwa denselben Wert annehmen kann und auch kein Anlaß vorliegt, die Reibungsziffer  $f$  für den einen Kolben anders wie für den andern anzunehmen, so kann man überhaupt das zweite Glied in den Klammern rechtsseits der Gleichungen (4 und 5)  $4hf:d = 4h_1f:d_1$  durch einen Erfahrungswert  $\varepsilon$  ausdrücken. Damit erhält man für den „treibenden Kolben“

$$4a) \quad K = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 p (1 + \varepsilon)$$

und für den „getriebenen“

$$5a) \quad K_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot p (1 - \varepsilon).$$

Die Gl. 1 zwischen den Kolbenquerschnitten und den Kolbenwegen bleibt auch jetzt noch gültig. Aus ihr folgt

$$6) \quad \frac{s_{K_1}}{s_K} = \frac{F}{F_1} = \frac{d^2}{d_1^2}$$

und durch Division der Gleichungen 4a und 5a

$$7) \quad \frac{K_1}{K} = \frac{d_1^2 \cdot (1 - \varepsilon)}{d^2 (1 + \varepsilon)}.$$

Die Multiplikation der Gleichungen 6 und 7 liefert

$$8) \quad \frac{s_{K_1} \cdot K_1}{s_K K} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Arbeitsaufwand}} = \eta,$$

wobei man unter  $\eta$  den Wirkungsgrad der Einrichtung versteht.

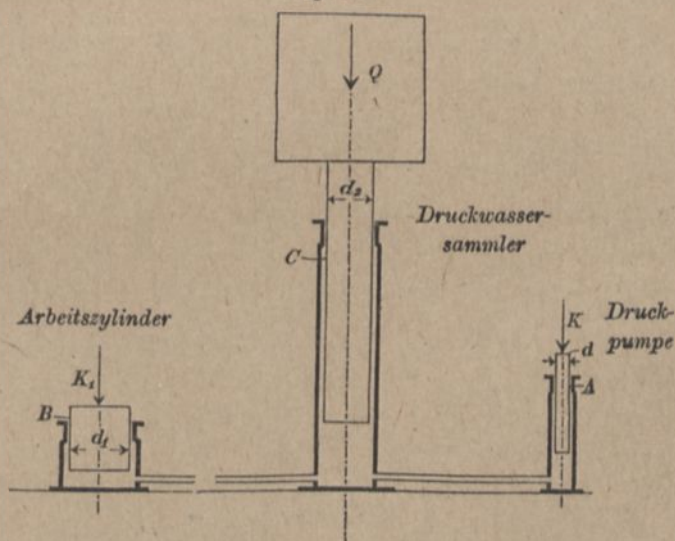
Unter der Voraussetzung mittlerer Verhältnisse kann man annehmen  $\frac{h}{d} = \frac{h_1}{d_1} = \frac{1}{8}$ ,  $f = \frac{1}{10}$ ; dann wird  $\varepsilon = 0,05$ , und nach Gl. 7  $K_1 : K = \text{rd. } 0,90 \cdot d_1^2 : d^2$ , nach Gl. 8  $\eta = \text{rd. } 0,90$ ; 10 v. H.

des Arbeitsaufwandes gehen durch Reibung verloren. Soll am Kolben  $B$  ein Widerstand  $K_1 = 10^t$  überwunden werden und ist  $d:d_1 = 0,10$ , so muß die am Kolben  $A$  angreifende Kraft

$$K = \frac{K_1}{0,90} \cdot \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 = \frac{10}{0,90} \cdot 0,10^2 = \text{rd. } 0,111^t = 111 \text{ kg}$$

sein. Bei einer Druckwasserkraftanlage pflegen gleichzeitig mehrere Arbeitszylinder  $B$  in Benutzung zu sein. Um dann einen Ausgleich zwischen den durch die Preßpumpe  $A$  erzeugten und in den Arbeitszylindern  $B$  verbrauchtem Druckwasser herbeizuführen, pflegt man zwischen beide einen Druckwassersammler, d. i. einen dritten mit einem verschieblichen Kolben verschlossenen Zylinders  $C$  einzufügen. Der Kolben dieses Zylinders wird dann mit einem solchen Gewicht  $Q$  belastet, daß bei seinem Niedergange der gewünschte „Betriebsdruck“  $p$  entsteht (vgl. Fig. 178). Das dazu erforderliche Be-

Fig. 178.



lastungsgewicht berechnet sich nach Gl. 4 a zu

$$9) \quad Q = \frac{\pi}{4} d_2^2 \cdot p (1 + \varepsilon).$$

Mit  $p = 50 \text{ at}$ ,  $d_2 = 30 \text{ cm}$  und  $\varepsilon = 0,05$  wird

$$Q = \frac{3,14}{4} \cdot 30^2 \cdot 50 \cdot (1,05) = \text{rd. } 37\,000 \text{ kg} = 37^t.$$



Steigt beim Ansammeln von Druckwasser in  $C$  durch den Betrieb der Pumpe  $A$  der Kolben in  $C$  mit seinem Belastungsgewicht  $Q$ , so erhöht sich der Druck von  $p$  auf ein Maß  $p_1$ , für das jetzt die Gleichung gilt

$$10) \quad Q = \frac{\pi}{4} \cdot d_2^2 p_1 (1 - \varepsilon),$$

Aus Gl. 9 und 10 folgt

$$11) \quad p_1 = p \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Ist beispielsweise  $p = 50^{\text{at}}$  angenommen, so wird mit  $\varepsilon = 0,05$ ,  $p_1 = 50 \cdot \frac{1,05}{0,95} = \text{rd. } 55^{\text{at}}$ . Um den Kolben  $C$  zum Steigen zu bringen, muß die Preßpumpe  $A$  den Druck  $p_1$  erzeugen; die aufzuwendende Kolbenkraft  $K$  muß demnach sein unter Beachtung der Gl. (11)

$$12) \quad K = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot p_1 (1 + \varepsilon) = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot p \frac{(1 + \varepsilon)^2}{1 - \varepsilon}.$$

Mit  $d = 10^{\text{cm}}$ ,  $p = 50^{\text{at}}$ ,  $\varepsilon = 0,05$  wird

$$K = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 \cdot 50 \cdot \frac{1,05^2}{0,95} = \text{rd. } 4555^{\text{kg}}.$$

Um mit dem Kolben des Arbeitszylinders  $B$  einen Widerstand  $K_1$  zu überwinden, muß er nach Gl. 5 a einen Durchmesser erhalten von der Größe

$$13) \quad d_1 = \sqrt{\frac{4 K_1}{\pi \cdot p \cdot (1 - \varepsilon)}}.$$

Für  $K_1 = 100^{\text{t}}$ ,  $p = 50^{\text{at}}$  und  $\varepsilon = 0,05$ , wird

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 100\,000}{3,14 \cdot 50 \cdot 0,95}} = \text{rd. } 52^{\text{cm}}.$$

Durch die Zwischenfügung des Druckwassersammlers  $C$  ist der Wirkungsgrad der Kraftübertragung verringert. Für die einander entsprechenden Arbeitswege der Kolben  $A$  und  $B$  gilt noch die Gl. 6; die Gl. 7 lautet jetzt aber unter Beachtung der Gl. 12

$$14) \quad \dots \frac{K_1}{K} = \frac{d_1^2 (1 - \varepsilon)^2}{d^2 (1 + \varepsilon)^2}$$

und durch Multiplikation der Gl. 6 mit Gl. 14 folgt

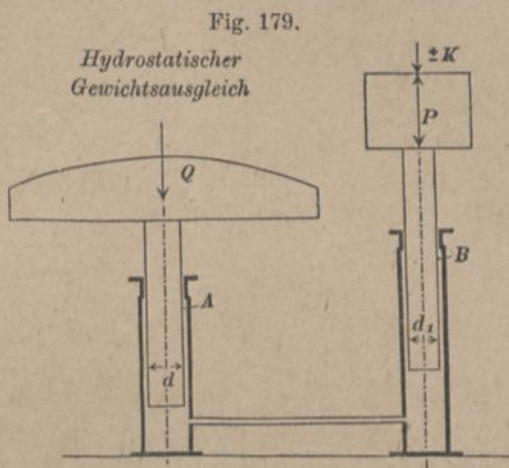
$$15) \quad \dots \frac{s_{K_1} \cdot K_1}{s_K \cdot K} = \frac{(1 - \varepsilon)^2}{(1 + \varepsilon)^2} = \eta.$$

Mit  $\varepsilon = 0,05$  wird  $\eta = \left(\frac{0,95}{1,05}\right)^2 = \text{rd. } 0,82$ .

### c) Hydrostatischer Gewichtsausgleich.

Ein solcher kann mit Vorteil angewandt werden, wenn es auf die periodische Hebung und Senkung irgendeines schweren Körpers von konstantem Ge-

wicht  $Q$ , etwa einer „Beweglichen Brücke“ oder ähnliches ankommt (vgl. Fig. 179). Der Kolben eines Zylinders  $A$  trage das Gewicht  $Q$  und sei mit einem zweiten Zylinder  $B$  durch eine Rohrleitung verbunden, dessen Kolben durch ein Gegengewicht  $P$  belastet ist. Beide Zylinder wie die sie verbindende Rohrleitung seien zwischen den



abschließenden Kolben mit Wasser gefüllt.

Das Gegengewicht  $P$ , wie eine an diesem angreifende, wechselweise auf- oder abwärts gerichtete Kraft  $K$  sollen nun so bestimmt werden, daß die beabsichtigte gleichmäßige, langsame Auf- und Abwärtsbewegung des Gewichtes  $Q$  zustande kommt. Beim Steigen des Kolbens  $A$  mit dem Gewichte  $Q$  gilt für das Gleichgewicht des ersteren die Gleichung

$$1) \quad Q = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot p(1 - \varepsilon).$$

Für das Gleichgewicht des nun sinkenden Kolbens  $B$  mit dem Gegengewicht  $P$  und der jetzt abwärts gerichteten Kraft  $K$  gilt die Gleichung

$$2) \quad P + K = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 \cdot p(1 + \varepsilon).$$



Aus beiden Gleichungen erhält man nach Beseitigung von  $p$  und entsprechender Ordnung

3)  $P + K = Q \left( \frac{d_1}{d} \right)^2 \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$

Wird jetzt die Kraft  $K$  aufwärts gerichtet, der Kolben  $B$  zum Steigen und der Kolben  $A$  zum Sinken gebracht, so tritt im Gefäßsystem ein anderer Druck  $p_1$  ein. Die Gleichgewichtsbedingungen für beide Kolben lauten jetzt

4)  $Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot p_1 (1 + \varepsilon),$

5)  $P - K = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot p_1 (1 - \varepsilon),$

woraus folgt

6)  $P - K = Q \cdot \left( \frac{d_1}{d} \right)^2 \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}.$

Die Lösung der Gleichungen 3 und 6 für  $P$  und  $K$  liefert

7)  $P = Q \cdot \left( \frac{d_1}{d} \right)^2 \cdot \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$  und

8)  $K = Q \cdot \left( \frac{d_1}{d} \right)^2 \cdot \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}.$

Mit  $d_1 : d = 1$  und  $\varepsilon = 0,05$  wird  $P = 1,005 Q$  und  $K = 0,10 Q$ .

#### d) Druckkraft auf ein beliebiges Stück der Gefäßwand.

Soll das Gesamtergebnis der Druckkräfte auf ein Stück  $BCD$  (Fig. 180) der Wandung eines Gefäßes, in dem der Druck  $p$  herrscht, bestimmt werden, so bedenke man, daß ein Flächenteilchen die Druckkraft  $p \cdot dF$  erfährt, die mit drei rechtwinkligen Achsen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bilden möge. Dann bekommt man gerade so, als ob  $BCD$  die Endfläche eines in der  $x$ -Richtung verschiebbaren Kolbens wäre, in dieser Achsenrichtung eine gesamt Kraft

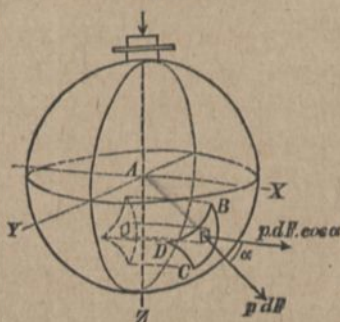
1)  $D_x = p \sum dF \cdot \cos \alpha = p \cdot F_x,$

ebenso in den beiden anderen Achsenrichtungen

2)  $D_y = p \sum dF \cdot \cos \beta = p \cdot F_y,$

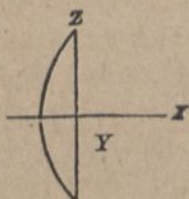
$D_z = p \sum dF \cdot \cos \gamma = p \cdot F_z.$

Fig. 180.



Darin bezeichnen  $F_x$ ,  $F_y$  und  $F_z$  die Projektionen der gedrückten Flächen auf die  $yz$ -, die  $xz$ - und die  $xy$ -Ebene, oder die rechtwinkligen Projektionen in den Richtungen der  $x$ -, der  $y$ - und der  $z$ -Achse, wobei die etwa paarweise aufeinander fallenden Projektionen von Flächenteilchen fortzulassen sind. Die Seitenkräfte gehen durch die Schwerpunkte der entsprechenden Projektionsflächen  $F_x$ ,  $F_y$  und  $F_z$  hindurch und werden sich im allgemeinen nicht zu einer Einzelkraft zusammensetzen lassen, sondern daneben noch ein Achsenmoment liefern. Gehört die Fläche freilich einer Kugel an, so gehen die einzelnen Kräfte  $p \cdot dF$  sämtlich durch deren Mittelpunkt und liefern eine durch denselben Punkt gehende Einzelkraft.

Fig. 181.



Auch noch in solchen Fällen, wo die Begrenzungslinie des Flächenstückes eine ebene Kurve ist, lassen sich die Druckkräfte zu einer Einzelkraft  $D$  zusammensetzen. Legt man dann nämlich die  $yz$ -Ebene in die Ebene dieser Kurve (Fig. 181), so heben sich beim Projizieren in der  $y$ - und in der  $x$ -Richtung die Flächen gegenseitig auf, weil sie sämtlich paarweise aufeinander fallen. Es ist  $F_y = F_x = 0$ , daher auch  $D_y = D_x = 0$ , mithin der Gesamtdruck 4)

$$D = D_z = p F_z.$$

Darin ist  $F_z$  die ebene Fläche der Umgrenzungslinie, und  $D$  geht durch deren Schwerpunkt.

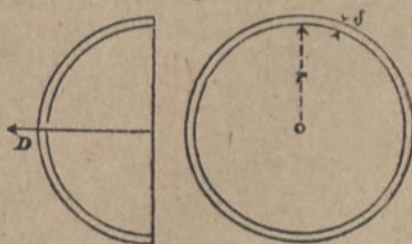
### e) Wandstärke von Gefäßen und Röhren.

Wird ein kugelförmiges Gefäß (Fig. 182) vom Halbmesser  $r$  und der Wandstärke  $\delta$  nach einem größten Kreise durchgeschnitten, so übt die darin befindliche Flüssigkeit, bei einem Drucke  $p$  für die Flächeneinheit, auf die eine Halbkugelfläche eine Kraft  $D$  aus, welche nach vorstehender (Gl. 4, mit  $F_z = r^2 \pi$ , sein muß:

$$D = p r^2 \pi.$$

Diese Kraft muß durch die Spannkraft der ringförmigen Schnittfläche im Gleichgewichte gehalten werden.

Fig. 182.





Hinsichtlich der Spannungen in der Wand werde hier die vereinfachte Annahme gemacht, daß sie sich gleichmäßig über die Dicke  $\delta$  verteilen und überall den Wert  $\sigma$  haben. Da nun die Schnittfläche  $= 2r\pi\delta$  ist, so wird:

$$2r\pi \cdot \delta \cdot \sigma = p \cdot r^2\pi \quad \text{oder}$$

$$1) \quad \delta = \frac{r p}{2 \sigma} \quad \text{mit } \frac{p r^2 \pi}{2 r \pi \delta \sigma}$$

Eine zylindrische Röhre (Fig. 183) vom Halbmesser  $r$ , der Wandstärke  $\delta$ , dem inneren Drucke  $p$ , der Länge  $l$  erfährt die stärksten Spannungen an irgendeiner durch ihre Achse gelegten Schnittebene. Für die gesamte Druckkraft gegen die eine Hälfte ist die Fläche  $F_s = 2rl$  maßgebend mit  $D = 2prl$ . Unter der auch hier gemachten Voraussetzung überall gleicher Spannung  $\sigma$  (vgl. weiter unten) ergibt sich an jeder der beiden Schnittflächen die Spannkraft  $\sigma \cdot \delta \cdot l$ , daher wird

$$2 \sigma \cdot \delta \cdot l = 2 p \cdot r \cdot l, \quad \text{und}$$

$$2) \quad \delta = r \frac{p}{\sigma},$$

d. h. doppelt so groß wie beim kugelförmigen Gefäße.

Gl. 2 ist wahrscheinlich zuerst von Mariotte angegeben worden.

Die Formeln 1 und 2 geben für kleine Werte von  $p$  so geringe Wandstärken, wie sie aus Gründen der Herstellung und Handhabung nicht zulässig sind. Daher fügt man jenen noch einen Zusatzwert  $+c$  bei, der sich nur nach Ausführungsrücksichten bestimmt. Bei Gefäßen und Röhren aus Gußeisen beträgt etwa

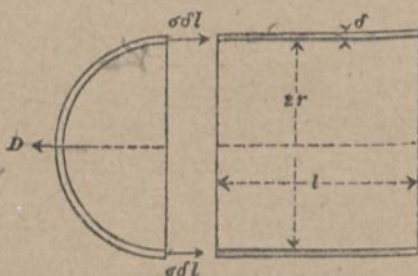
$$3) \quad c = 0,7 \text{ cm.}$$

Beispiel: Soll ein gußeisernes Wasserleitungsrohr von  $r = 20 \text{ cm}$  auf einen inneren Druck  $p = 10 \text{ at}$  berechnet werden, und wählt man wegen der in einer Wasserleitung unvermeidlichen Stöße die Spannung  $\sigma$  nur  $= 250 \text{ at}$ , so wird nach Gl. 2 und 3

$$\delta = 20 \frac{10}{250} + 0,7 = 1,5 \text{ cm.}$$

Gültigkeitsgrenze für Gl. 1 bis 3. Diese Formeln gelten nur für kleine Werte von  $p : \sigma$ . Für größere Drücke, wie sie bei den Zylindern von Wasserdrukpressen und besonders bei Kanonenrohren vorkommen, ist die Voraussetzung überall gleicher Spannung selbst annäherungsweise nicht mehr zutreffend, vielmehr ergeben genauere Rechnungen, daß die Spannung an

Fig. 183.



der Innenseite des Rohres stets größer ist als an den übrigen Stellen. Kanonenrohre erleiden denn auch die ersten Risse stets an der Innenwandung, und man untersucht sie daraufhin mittels eines Spiegels, um sie rechtzeitig außer Gebrauch setzen zu können.

Die genaue Berechnung derartiger zylindrischer Gefäße für höheren Innen- und Außendruck findet sich in Keck-Hotopp, Elastizitätslehre, II. Teil S. 58.

**Bemerkung.** Die bisherigen Entwicklungen galten (mit Ausnahme der Regeln für die Kraftübertragung durch Druckwasser) vereint für tropfbare und gasförmige Körper. Da bei den weiteren Betrachtungen aber auch die Schwere zu berücksichtigen ist, und zwischen den tropfbaren und gasförmigen Körpern der wesentliche Unterschied besteht, daß erstere eine unveränderliche, letztere aber eine sehr veränderliche Dichte haben, so müssen weiterhin die tropfbaren und die gasförmigen Körper getrennt behandelt werden. Wir wollen zunächst die tropfbaren Körper, die nach S. 167 als nicht zusammendrückbar betrachtet werden können, besprechen.

## 2. Gleichgewicht tropfbar-flüssiger Körper unter Einwirkung der Schwere.

### a) Wasserspiegel. Druck in der Flüssigkeit.

Soll die in einem oben offenen Gefäße befindliche Flüssigkeit unter Einwirkung der Schwere, als einziger Massenkraft, im Gleichgewichte sein, so muß die obere freie Fläche, der Wasserspiegel, eine wagerechte Ebene bilden, d. h. rechtwinklig zu der herrschenden Massenkraft stehen.

Um dies zu beweisen, nehmen wir zunächst den Gleichgewichtszustand bei beliebiger noch unbestimmter Oberfläche  $AB$  (Fig. 184) an. Von einem beliebigen Punkte  $P$  im Innern ausgehend, umgrenzen wir ein Wasserprisma  $PQ$ , von der Länge  $l$  und der Neigung  $\alpha$  gegen die Wagerechte. Der Querschnitt des Prismas sei  $dF$ , sein Gewicht  $\gamma \cdot dF \cdot l$ .

Ist  $p$  der Druck im Punkte  $P$ , so wirkt hier eine Längskraft  $p \cdot dF$  auf das Prisma. Denkt man sich das Prisma erstarrt, und die

Fig. 184.

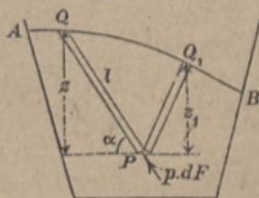
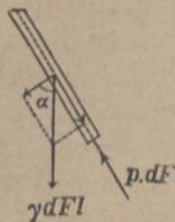


Fig. 184 a.





umgebende Flüssigkeit ihrerseits auch, wobei aber an den Langflächen, entsprechend der Natur der flüssigen Körper, nur Normaldrücke auftreten können, so liefert das Gewicht  $\gamma \cdot dF \cdot l$  in der Längsrichtung des Prismas gemäß der Zerlegung (Fig. 184 a) die Seitenkraft  $\gamma \cdot dF \cdot l \cdot \sin \alpha$ , und wenn die Oberfläche keinen Druck erfährt, muß

$$p \cdot dF = \gamma \cdot dF \cdot l \cdot \sin \alpha$$

sein. Wird der Höhenunterschied der beiden Punkte  $P$  und  $Q$ , d. h.  $l \sin \alpha = z$  gesetzt, so folgt

$$1) \quad p = \gamma z.$$

Wenn man nun von  $P$  aus nach einem anderen Punkte  $Q_1$  der Oberfläche ein Prisma  $PQ_1$  abtrennt, so erhält man für dessen Gleichgewicht ebenso  $p_1 = \gamma z_1$ . Da sich die Flüssigkeit im Gleichgewicht befinden soll, muß nach S. 169 der Druck im Punkte  $P$  nach allen Richtungen  $PQ$ ,  $PQ_1$  . . . derselbe, somit  $p = p_1$  und daher auch  $z = z_1$  sein; d. h. die Höhe der verschiedenen Punkte der Oberfläche über der Wagerechten, die durch irgendeinen Punkt im Innern der Flüssigkeit gezogen wird, muß die gleiche sein, der Wasserspiegel muß also eine wagerechte Ebene bilden.

Gl. 1 enthält das Gesetz des Druckes für eine im Gleichgewichte befindliche Flüssigkeit unter Einwirkung der Schwere. Eine Flüssigkeitssäule von der Grundfläche  $= 1 \text{ m}^2$  und der Höhe  $= z \text{ m}$  hat ein Gewicht  $\gamma z$ , wenn  $\gamma$  das Gewicht von  $1 \text{ m}^3$  bedeutet, und bringt dadurch den Druck  $p = \gamma z$  hervor. Man nennt deshalb auch  $z = p : \gamma$  die auf eine Flüssigkeit von der Dichte  $\gamma$  bezogene Druckhöhe.

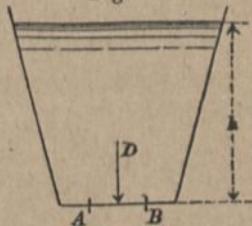
Ist z. B.  $\gamma$  in  $\frac{1}{\text{m}^3}$  ausgedrückt, so erhält man  $p$  in  $\frac{1}{\text{m}^2}$  und  $z = p : \gamma$  in  $\text{m}$ . Um  $p$  in  $\text{at}$  auszudrücken, ist aber  $\frac{1}{10}$  des Wertes  $p$  zu nehmen. Einer Druckhöhe von  $z \text{ m}$  entspricht daher ein Druck von  $\gamma \cdot z \frac{1}{\text{m}^2} = \frac{1}{10} \gamma \cdot z \text{ at}$ .

Eine wagerechte Ebene im Innern der Flüssigkeit hat an allen Stellen dieselbe Tiefe unter dem Wasserspiegel, ist daher eine Fläche überall gleichen Druckes, eine sog. Niveau-Fläche.

Auf eine wagerechte Bodenfläche (Fig. 185) verteilt sich der Druck gleichmäßig. Ein Bodenstück  $AB$  von der Fläche  $F$  in der Tiefe  $h$  unter dem Wasserspiegel erfährt eine Druckkraft  $D$ , die durch den Schwerpunkt der Fläche  $F$  hindurchgeht. Diese Kraft ist

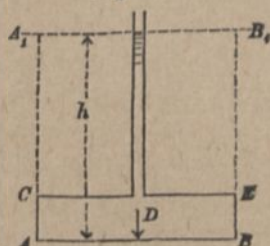
unabhängig von der Form des Gefäßes und der Menge des Wassers

Fig. 185.



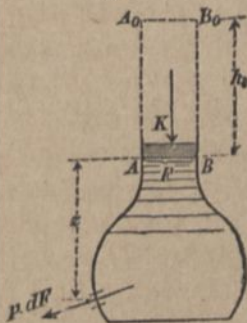
in demselben, und nur abhängig von der Höhenlage des Wasserspiegels. Mittels eines engen Rohres (Fig. 186), welches sich an die Decke eines Gefäßes anschließt, kann man, wenn man Gefäß und Rohr mit Wasser füllt, gegen den Boden  $AB$  vom Flächeninhalt  $F$  eine Druckkraft  $D = \gamma \cdot F \cdot h$ , d. h. gleich dem Gewichte eines Wasserkörpers  $ABB_1A_1$ , ausüben. Die Decke  $CE$  des Gefäßes erfährt dagegen eine aufwärts gerichtete Druckkraft  $D_1 =$  dem Gewichte eines Wasserprismas, das, über der Decke stehend, bis zur Höhe  $A_1B_1$  reicht. Der Druck  $D_1$  hat das Bestreben, Decke und Seitenwände des Gefäßes von der Bodenwand nach oben hin abzureißen. Die Mittelkraft von  $D$  und  $D_1$  ist dann das Gewicht der wirklich vorhandenen Wassermenge.

Fig. 186.



Ist (Fig. 187) der Wasserspiegel von dem Flächeninhalte  $F$  nicht frei, sondern wird auf ihn, vielleicht mittels eines Kolbens, eine Kraft  $K$  übertragen, entsprechend einem Drucke  $p_0 = K : F$  und einer Druckhöhe  $h_0 = p_0 : \gamma$ , so kann man, weil es für die Wirkung einer Kraft gleichgültig ist, ob sie durch einen Kolben oder durch das Gewicht einer Wassermasse erzeugt wird, die Wirkung des Kolbens auch ersetzen durch Höherlegung des Wasserspiegels um die Größe  $h_0$ . Man denkt sich also die wahre Oberfläche  $AB$  mit dem darauf lastenden Kolben ersetzt durch die ideelle freie Oberfläche  $A_0B_0$  und kann alle Druckverhältnisse im Gefäß auf diese beziehen. In einer Tiefe  $z$  unter  $AB$  herrscht dann ein Druck  $p = \gamma(z + h_0)$ .

Fig. 187.



### b) Druckkraft gegen eine ebene Seitenwand. Druckmittelpunkt.

Das ebene Wandstück  $GE$  (Fig. 188) erfährt über seine ganze Fläche  $F$  parallele Druckkräfte, die stetig, aber ungleichmäßig verteilt sind. Auf ein Flächenteilchen  $dF$  in der Tiefe  $z$  unter dem Wasserspiegel kommt die Kraft

$$1) \quad dD = \gamma \cdot dF \cdot z,$$



mithin wird die gesamte Druckkraft  $D = \gamma \sum dF \cdot z$ , wofür man nach der Lehre vom Schwerpunkte (1. Teil, 4. Aufl., S. 154, Gl. 6) schreiben kann

$$2) \quad D = \gamma F z_0,$$

wenn  $z_0$  die Tiefe des Schwerpunktes  $S$  von  $F$  unter dem Wasserspiegel bedeutet. Die Druckhöhe  $z_0$  des Schwerpunktes von  $F$  ist also die mittlere Druckhöhe für die ganze Fläche, nach welcher die Größe der gesamten Druckkraft  $D$  berechnet werden kann.

Verteilen sich die Kräfte gleichmäßig über  $F$ , so ginge die Mittelkraft  $D$  durch den Schwerpunkt  $S$  der Fläche, da aber der Druck  $p$  mit der Tiefe  $z$  zunimmt, so muß  $D$  tiefer liegen als der Schwerpunkt  $S$  der Fläche.

Derjenige Punkt  $C$ , in welchem die Druckkraft  $D$  die Fläche  $F$  schneidet, heißt **Druckmittelpunkt**.

Um ihn zu finden, benutzen wir Fig. 189. In der Seitenwand  $ABE$  ist ein Flächenstück  $F$  abgegrenzt. Der Wasserspiegel schneide die Wand in der wagerechten Geraden  $AX$ ; rechtwinklig dazu liegt in der Fläche die Achse  $AY$ , welche mit der Lotrechten den Winkel  $\alpha$  bilde. Ein Flächenteilchen  $dF$  habe die Koordinaten  $x$  und  $y$ , dann ist seine lotrechte Tiefe unter Wasser  $z = y \cos \alpha$ . Ebenso gilt für die lotrechte Tiefe  $z_0$  des Schwerpunktes  $S$  unter Wasser, wenn  $y_0$  seine parallel mit  $AY$  gemessene Ordinate ist,

$$z_0 = y_0 \cos \alpha.$$

Der gesuchte Druckmittelpunkt  $C$  habe die Koordinaten  $x_m$  und  $y_m$ . Es muß nun nach 1. Teil, 4. Aufl.,

S. 105, in bezug auf irgendeine Achse das Moment der Mittelkraft  $D$  gleich der Momentensumme der Einzelkräfte  $dD$  sein. Dies gibt für die Achse  $AX$ :  $D y_m = \int dD \cdot y$  oder mit Hilfe von Gl. 1 und 2:

$$\gamma F y_0 \cos \alpha \cdot y_m = \gamma \cos \alpha \int dF \cdot y^2.$$

Fig. 188.

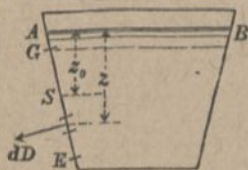
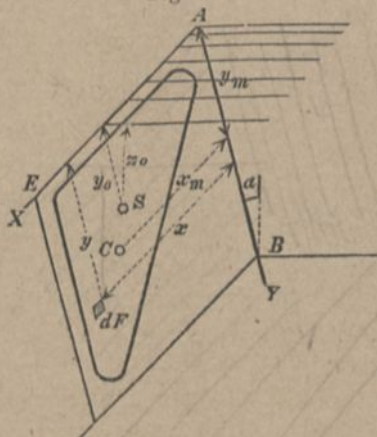


Fig. 189.



Da nun  $\int dF y^2$  das Trägheitsmoment  $J_x$  der Fläche  $F$  in bezug auf die Wasserspiegelachse  $AX$  bedeutet,  $Fy_0$  aber das statische Moment  $S_x$  derselben Fläche auf dieselbe Achse, so wird

$$3) \quad y_m = \frac{J_x}{S_x} = \frac{\int dF \cdot y^2}{F y_0}.$$

Dies ist (1. Teil, 4. Aufl., S. 328) die Schwingungslänge der Fläche  $F$ , falls sie als eine materielle Fläche um die Achse  $AX$  als Pendel schwingend gedacht wird.

Für die Achse  $AY$  ergibt sich

$$D x_m = \int dD \cdot x \quad \text{oder} \\ F \gamma \cdot y_0 \cos \alpha x_m = \gamma \cos \alpha \int dF \cdot x y.$$

$\int dF \cdot x y$  ist aber das Zentrifugalmoment  $C_{xy}$  der Fläche  $F$  (1. Teil, 4. Aufl., S. 337) somit

$$4) \quad x_m = \frac{C_{xy}}{S_x} = \frac{\int dF \cdot x y}{F y_0}.$$

Die Lage des Druckmittelpunktes  $C$  ist durch die Gl. 3 und 4 bestimmt; der Winkel  $\alpha$  kommt darin nicht vor; wenn sich daher die Seitenwand um die Wasserspiegelachse  $AX$  dreht, so behält der Druckmittelpunkt  $C$  in ihr seine Lage bei. Wir nehmen daher im folgenden den Winkel  $\alpha = 0$  an, betrachten also die Seitenwand als lotrecht, so daß dann  $z = y$  wird.

Legt man durch den Schwerpunkt  $S$  (Fig. 190) eine wagerechte Achse und nennt  $v$  den rechtwinkligen Abstand des Druckmittelpunktes  $C$  von der Schwerpunktsachse, so ergibt sich aus Gl. 3, weil  $J_x = J_s + F y_0^2$  (1. Teil, 4. Aufl., S. 317)

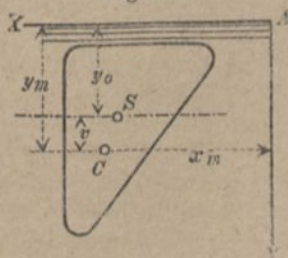
$$y_0 + v = \frac{J_s + F y_0^2}{F y_0} = \frac{J_s}{F y_0} + y_0,$$

$$5) \quad \text{also } v = \frac{J_s}{F y_0}.$$

Erleidet nun der Wasserspiegel eine Parallelverschiebung nach oben, so bleibt  $J_s$  unverändert; mit zunehmendem  $y_0$  wird aber  $v$  kleiner und kleiner; für  $y_0 = \infty$  wird  $v = 0$ . Dies ist auch selbstverständlich, da, wenn die Fläche in unendlicher Tiefe liegt, die Druckverteilung an ihr als gleichmäßig angesehen werden kann,

Die Lage der  $AY$  war bisher beliebig. Ist diese Achse eine Symmetrieachse für die Figur  $F$ , so wird  $C = \int dF \cdot x y = 0$

Fig. 190.





(1. Teil, 4. Aufl., S. 337) und damit auch  $\alpha_m = 0$ . Es liegt dann der Druckmittelpunkt auf dieser Symmetrieachse.

### c) Druckkraft gegen eine rechteckige Seitenwand.

Für das Rechteck (Fig. 191) ist (1. Teil, 4. Aufl., S. 320)  $J_s = 1/12 F h^2$ , daher nach Gl. 5, S. 187

$$1) \quad v = \frac{h^2}{12 y_0}.$$

Der Druckmittelpunkt liegt auf der lotrechten Mittellinie des Rechtecks. Wird  $y_0 = \infty$ , so wird  $v = 0$ ; rückt der Wasserspiegel aber abwärts, und zwar so weit, daß er die Oberkante des Rechtecks trifft, so ist  $y_{0min} = 1/2 h$ , dafür wird  $v_{max} = 1/6 h$ , d. h. der Druckmittelpunkt liegt dann bei  $C_1$  im unteren Drittelpunkte der lotrechten Mittellinie der Fläche. Wasserspiegel und Druckmittelpunkt bewegen sich hiernach stets in demselben Sinne; beide nach oben oder beide nach unten. Während aber der Wasserspiegel von der Oberkante des Rechtecks bis zu  $y_0 = \infty$  nach oben rückt, verschiebt sich der Druckmittelpunkt  $C$  dieser Wandfläche nur um  $1/6 h$  von der tiefsten Lage nach ihrem Schwerpunkte.

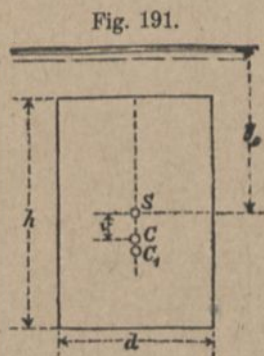


Fig. 191.

Beispiel:  $d = 1 \text{ m}$ ,  $h = 3 \text{ m}$ ,  $y_0 = 2 \text{ m}$ , gibt  $F = 3 \text{ m}^2$ ; ist  $\gamma$  das Gewicht von  $1 \text{ m}^3$  Wasser  $= 1000 \text{ kg}$ , so wird  $D = 1000 \cdot 3 \cdot 2 = 6000 \text{ kg}$ , und

$$v = \frac{9}{12 \cdot 2} = \frac{3}{8} \text{ m}.$$

### Selbsttätige Klappe.

Das Verhalten des Druckmittelpunktes bei steigendem Wasserspiegel kann benutzt werden für eine Klappe, die sich selbsttätig öffnet, sobald der Wasserspiegel eine bestimmte Höhenlage überschreitet, indem man durch den zu der Grenzlage  $W$  des Wasserspiegels gehörigen Druckmittelpunkt  $C$  (Fig. 192)

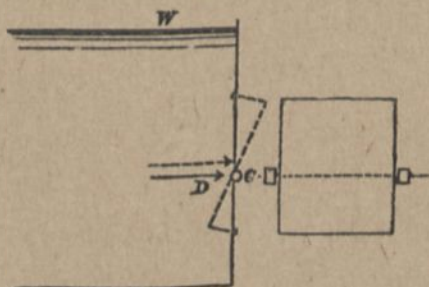


Fig. 192.

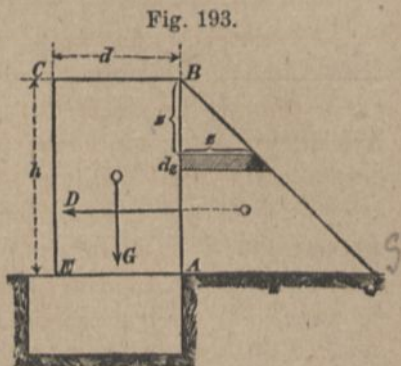
eine wagerechte Drehachse für die rechtwinklige Klappe legt. Solange der Wasserspiegel unterhalb  $W$  verbleibt, bleibt auch die Druckkraft  $D$  unterhalb

der Achse  $C$  und drückt die Klappe gegen die obere und untere Anschlagfläche. Überschreitet der Wasserstand aber die Grenze  $W$ , so rückt  $D$  in die punktierte Lage oberhalb  $C$ , öffnet die Klappe und läßt das Wasser abfließen.

#### d) Druck gegen eine ebene Mauerfläche oder Bohlwand.

Ist die Mauer  $ABCE$  (Fig. 193) auf der rechten Seite bis zur Oberkante mit Wasser in Berührung und betrachtet man ein Längenstück der Mauer  $= 1 \text{ m}$ ,

rechtwinklig zur Bildebene, so haben wir als gedrückte Fläche ein Rechteck von der Breite 1 und der Höhe  $h$ ; der Wasserspiegel geht durch die Oberkante der Druckfläche, daher geht  $D$  (nach S. 188) durch den unteren Drittelpunkt der lotrechten Mittellinie der Fläche. In einer Tiefe  $z$  beträgt die auf die Einheit der Höhe kommende Kraft  $p = \gamma z$ . Setzt man  $\gamma = 1^t$ , so wird  $p = z$  und die Darstellung des veränderlichen  $p$  erfolgt durch eine unter  $45^\circ$  geneigte Gerade  $BG$ . Die Druckkraft auf ein Höhentheilchen  $dz$  ist daher



$$dD = z dz,$$

und gleich dem wagerechten Flächenstreifen des gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks  $ABG$ . Die Gesamtkraft  $D$  wird dargestellt durch die Fläche des Dreiecks  $\frac{1}{2}h^2$  und greift in der Höhe des Schwerpunktes dieser Fläche an.

$D = \frac{1}{2}\gamma h^2$  liefert in bezug auf die Außenkante  $E$  der Mauer das Umsturmmoment

1)

$$D \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}\gamma h^3, = \frac{1}{2} \gamma \cdot h^2 \cdot \frac{h}{3}$$

während bei einer Dichte  $\gamma_1$  des Mauerwerks das Standsicherheitsmoment (1. Teil, 4. Aufl., S. 214)

2)

$$G \cdot \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\gamma_1 d^2 h$$

beträgt. Die Sicherheit der Mauer gegen Kanten erfordert:

$$\frac{1}{2}\gamma_1 d^2 h > \frac{1}{6}\gamma h^3 \quad \text{oder}$$

3)

$$\frac{d}{h} > \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\gamma}{\gamma_1}}$$

*d = Dicke der Mauer*



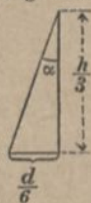
Der Verschiebung der Mauer durch  $D = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot h^2$  setzt sich die Reibung  $f \cdot G = f \cdot \gamma_1 \cdot d \cdot h$  entgegen ( $f =$  Reibungsziffer), mithin muß auch sein:

$$f \gamma_1 d \cdot h > \frac{1}{2} \gamma h^2, \quad \text{d. h.}$$

$$4) \quad \frac{d}{h} > \frac{1}{2f} \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Hat das Mauerwerk keine erhebliche Zugfestigkeit und soll ein Öffnen der Fugen vermieden werden, so muß die Mittelkraft aus  $D$  und  $G$  die untere Fuge  $AE$  in einem Punkte schneiden, der nicht außerhalb des mittleren Drittels der Mauerstärke  $AE = d$  liegt. (Den Beweis hierfür s. Kock, Vorträge über Elastizitätslehre, I. Teil, S. 231). Soll der Angriffspunkt dieser Mittelkraft gerade an der Grenze des mittleren Drittels, d. h. um  $\frac{1}{6}d$  von der Mitte entfernt liegen, so muß nach Fig. 194 die Beziehung stattfinden:

Fig. 194.



$$\frac{1}{6}d : \frac{1}{3}h = \operatorname{tg} \alpha = D : G, \quad \text{oder}$$

$$5) \quad \frac{d}{h} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}.$$

Beispiel: Für  $\gamma_1 = 2\gamma$  und  $f = 0,6$  geben die Gleichungen

$$3) \quad d > h \sqrt{\frac{1}{6}}, \quad \text{oder} \quad d > 0,41 h;$$

$$4) \quad d > 0,42 h;$$

$$5) \quad d = 0,7 h.$$

Die letztere Bedingung erfordert also eine bedeutende Stärke.

Eine Bohlenwand (Fig. 195) stütze sich gegen wagerechte Balken, sog. Riegel, die, auf eine Spannweite  $l$  freiliegend, sich wiederum gegen lotrechte Pfähle legen. Die mit Bohlen überdeckten Riegel werden gleichmäßig über ihre Länge belastet; es soll für einen um  $s$  unter Wasser liegenden Riegel  $F$  die Belastung  $q$  für die Längeneinheit ermittelt werden.

Die beiden benachbarten Riegel mögen von dem betrachteten um  $a_1$  und  $a_2$  abstehen. Hinsichtlich der Kraftübertragung denken wir uns die Bohlen an jedem Riegel durchschnitten; sie wirken dann als statisch bestimmte Träger auf zwei Stützen. Für das Bohlenstück  $CF = a_1$  von der Länge Eins, rechtwinklig zur Aufrißfigur, bildet die noch



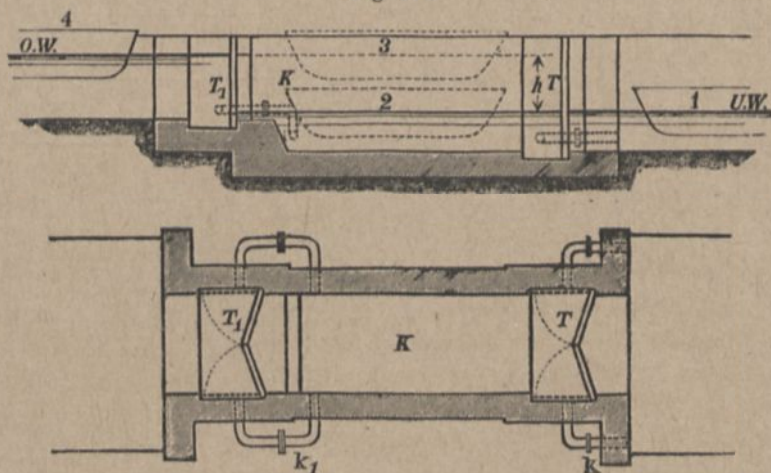


## e) Berechnung der Riegel des Stemmtores einer Schleuse.

Eine Schiffsschleuse (Fig. 196) dient zum Heben eines Schiffes aus einer Kanalhaltung mit dem Wasserstand  $U.W.$  in eine andere mit höherem Wasserstande  $O.W.$ , oder zum Senken eines Schiffes von  $O.W.$  bis  $U.W.$  Sie besteht aus den Obertoren  $T_1$  und den Untertoren  $T$  mit einer dazwischenliegenden Kammer  $K$ , welche durch verschließbare Kanäle  $k_1$  und  $k$  mit  $O.W.$  oder  $U.W.$  verbunden werden kann.

Soll ein Schiff (Lage 1) aus  $U.W.$  nach  $O.W.$  befördert werden, so schließt man die oberen Kanäle  $k_1$  und öffnet die unteren  $k$ , wodurch der

Fig. 196.



Wasserstand in der Kammer  $K$  auf die Höhe von  $U.W.$  gesenkt wird; nun kann man das Untertor  $T$  leicht öffnen, da es von beiden Seiten gleichen Wasserdruck hat, und das Schiff in die Kammer (Lage 2) ziehen. Dann schließt man das Untertor  $T$  und die unteren Kanäle  $k$ , öffnet die oberen  $k_1$ , wodurch Wasser in die Kammer einströmt, bis deren Wasserstand in gleicher Höhe mit  $O.W.$  steht. Hierbei wird das schwimmende Schiff mit dem Wasserspiegel um  $h$  gehoben (Lage 3). Jetzt kann das Obertor  $T_1$  leicht geöffnet und das Schiff aus der Kammer nach  $O.W.$  (Lage 4) übergeführt werden.

Die Tore sind zweiflügelig. Jeder Flügel dreht sich um eine lotrechte, an einer Seitenwand liegende Achse; seine Länge ist etwas größer als die halbe Weite der Kammer. Beide Flügel fallen daher, wenn sie sich in der Mitte der Schleuse berühren, nicht in dieselbe Ebene, sondern bilden miteinander einen stumpfen, nach dem Oberwasser gekehrten Winkel. Der höhere Wasserstand auf der  $O.W.$ -Seite preßt daher die Flügel selbsttätig zusammen; die Flügel stemmen sich gegeneinander und gegen die Seitenwände und heißen deshalb Stemmtore. Im Grundrisse der Fig. 196 sind die Tore im geschlossenen Zustande ausgezogen, im offenen punktiert; die Kreisbogen bezeichnen die Drehungswege der Flügelenden.

Der Flügel eines hölzernen Stemmtores (Fig. 197 Ansicht, Fig. 198 Grundriß) hat nun hinsichtlich der Kraftleistung einige Verwandtschaft mit einem Fach der bei Fig. 195 besprochenen Bohlwand; nur tritt das Aneinanderstemmen neu hinzu.

Das Rahmenwerk besteht aus der Drehsäule (Wendesäule)  $w$ , der Schlagsäule  $s$  und den wagerechten Riegeln  $r$ , die an der Oberwasserseite mit Bohlen bekleidet sind. Die Spannweite  $l$  eines Riegels ist zu rechnen von der Achse der Wendesäule bis zur Schleusenmitte. Seine Be-

lastung für die Längeneinheit ist nach Gl. 2 oder 3 (S. 191) zu bemessen. Die gegenseitige Druckkraft  $K$ , welche die unter dem Winkel  $180^\circ - 2\alpha$  (Fig. 199) gegeneinander gepreßten Riegel durch Vermittelung der Schlagsäulen aufeinander ausüben, muß rechtwinklig zur lotrechten Mittelebene der Schleuse sein. Außerdem wirkt an den Riegeln der Widerstand  $W$  der Wendesäule und die Last  $ql$ . Diese drei Kräfte müssen sich im Gleichgewichte halten, also durch einen Punkt gehen. In bezug auf die Wendesäule wird  $Kl \sin \alpha = \frac{1}{2} ql^2$ , mithin  $K = \frac{ql}{2 \sin \alpha}$ , und ebenso groß ist auch  $W$ , weil  $K$  und  $W$  symmetrisch zur Mitte des Riegels liegen.

Man kann nun (Fig. 200)  $K$  zerlegen in  $K \cos \alpha$  und  $K \sin \alpha$ . Letztere Seitenkraft, gleich  $\frac{1}{2} ql$ , entspricht dem Auflagerdruck eines einfachen Balkens mit der Belastung  $q$ , erzeugt mit ihr ein größtes Biegemoment in der Mitte  $= \frac{1}{8} ql^2$ , und eine Biegespannung

$$1) \quad \sigma_1 = \frac{\frac{1}{8} ql^2}{\frac{1}{6} db^2} = \frac{3}{4} \frac{ql^2}{db^2},$$

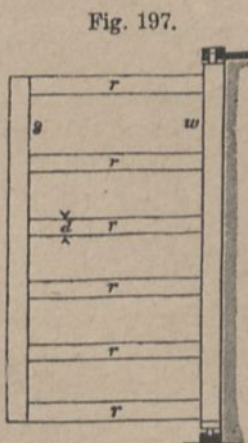


Fig. 197.

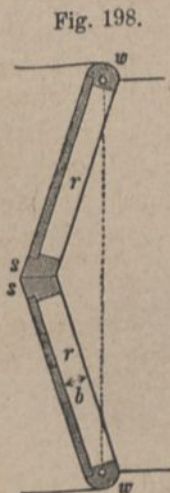


Fig. 198.



Fig. 199.



wenn  $d$  die lotrechte,  $b$  die wagerechte Abmessung des rechtwinkligen Riegelquerschnitts ist.

Die Kraft  $K \cos \alpha = \frac{1}{2} q l \cot \alpha$  soll für den Riegel als einfache Druckkraft längs seiner Mittellinie angesehen werden, da wegen der meist starken Querschnittsabmessungen der Riegel eine erhebliche Ausbiegung derselben nicht anzunehmen ist. Hiernach ergibt sich eine überall gleiche Druckspannung

$$2) \quad \sigma_2 = \frac{q l \cot \alpha}{2 d b}.$$

Da die Biegungsspannung  $\sigma_1$  auf der *O.W.*-Seite als Druck, auf der *U.W.*-Seite als Zug auftritt, so wird die stärkste Spannung

$$3) \quad \mp \sigma = \sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{q l}{2 d b} \left( \frac{3 l}{2 b} \pm \cot \alpha \right).$$

Beispiel: Für eine Schleuse von 6,8 m Weite sei  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{6}$ ,  $l = 3,2 \text{ m} = 320 \text{ cm}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ,  $a = 0,9 \text{ m}$ ,  $d = 20 \text{ cm}$ ,  $b = 40 \text{ cm}$ . Dann ist für jeden unter *U.W.* liegenden Riegel (nach Gl 3, S. 191)

$$q = 1000 \cdot 0,9 \cdot 2 = 1800 \text{ kg/m},$$

und

$$q l = 1800 \cdot 3,2 = 5760 \text{ kg}.$$

Um  $\sigma$  in  $\text{at}$  zu erhalten, führen wir  $d$ ,  $b$  und  $l$  in  $\text{cm}$  ein, also nach Gl. 3:

$$- \sigma = \frac{5760}{2 \cdot 20 \cdot 40} \left( \frac{3 \cdot 320}{2 \cdot 40} + 6 \right) = 3,6 (12 + 6) = 64,8 \text{ at Druck}$$

und

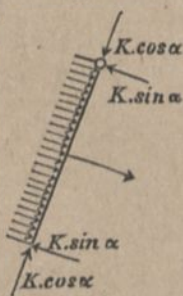
$$+ \sigma = 3,6 (12 - 6) = 21,6 \text{ at Zug}.$$

Die Spannungsverteilung im Querschnitte ist also eine sehr ungleichmäßige.

## f) Druckmittelpunkt eines Dreiecks, eines Kreises, eines Viertelkreises.

1. Dreieck.  $\alpha$ ) Grundlinie oben und parallel dem Wasserspiegel (Fig. 201). In diesem Falle gibt es im allgemeinen keine Symmetrieachse, aber gleichwohl ist Gl. 4 (S. 187) entbehrlich, weil man leicht erkennt, daß der Druckmittelpunkt auf der Mittellinie  $DE$  liegen muß, da über jeden wagerechten Streifen des Dreiecks eine gleichmäßige Kraftverteilung stattfindet, so daß der

Fig. 200.



Druckmittelpunkt jedes Streifens in seiner Mitte liegt. Es handelt sich also nur noch um die Größe

$$v = \frac{J_s}{F y_0} = \frac{F h^2}{18 F y_0} = \frac{h^2}{18 y_0}$$

(s. 1. Teil, 4. Aufl., S. 320). Sinkt der Wasserspiegel bis an die Oberkante des Dreiecks mit  $y_{0 \min} = \frac{1}{3} h$ , so wird

$$v_{\max} = \frac{1}{6} h,$$

d. h. es liegt der Druckmittelpunkt dann in der Mitte der Mittellinie  $DE$ .

$\beta$ ) Liegt die Spitze des Dreiecks oben (Fig. 202), so wird in gleicher Weise  $v = \frac{h^2}{18 y_0}$ . Rückt aber der Wasserspiegel bis zur Spitze herab, so ist  $y_{0 \min} = \frac{2}{3} h$ , daher  $v_{\max} = \frac{1}{12} h$  mit  $C$  im unteren Viertelpunkte von  $ED$ .

2. Kreis. Es ist (Fig. 203)

$$v = \frac{J_s}{F y_0} = \frac{r^2}{4 y_0}$$

Für  $y_{0 \min} = r$  wird  $v_{\max} = \frac{1}{4} r$  (Punkt  $C_1$ ).

3. Viertelkreis. Um auch die Anwendung der Gl. 4 (S. 187) zu zeigen, wählen wir nun den Viertelkreis (Fig. 204), dessen Druckmittelpunkt etwas mehr Rechnung erfordert, als die obigen einfachen Beispiele.

Der Wasserspiegel liege parallel mit dem oberen begrenzenden Halbmesser  $BC$  in einer Höhe  $n r$  darüber. Der Schwerpunkt der Halbkreisfläche liegt (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 159) um

$$\frac{4}{3\pi} r = a = 0,424 r$$

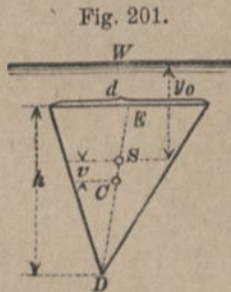


Fig. 201.

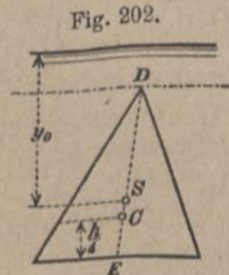


Fig. 202.

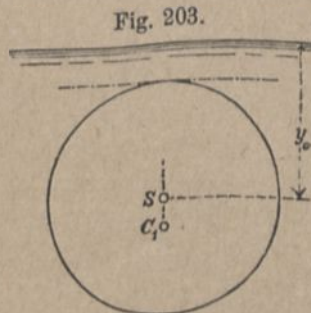


Fig. 203.

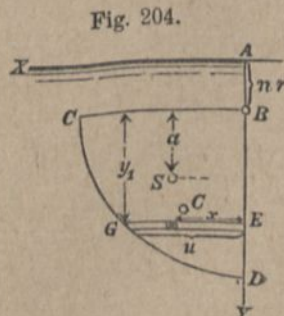


Fig. 204.



vom Mittelpunkte entfernt. In dem gleichen Abstände von  $BC$  und  $BD$  muß auch der Schwerpunkt der Viertelkreisfläche liegen. Mithin ist

$$y_0 = a + nr = r \left( \frac{4}{3\pi} + n \right).$$

Das Trägheitsmoment einer Kreisfläche in bezug auf einen Durchmesser ist  $\frac{1}{4} F_1 r^2$ , wenn  $F_1$  die Fläche des Kreises bedeutet. Dazu liefern die 4 Viertelkreise je ein Viertel; sonach muß das Trägheitsmoment des Viertelkreises  $BCD$  in bezug auf  $BC$  gleich  $\frac{1}{4} F r^2$  sein, wenn  $F = \frac{1}{4} F_1$  die Fläche  $BCD$  bedeutet. Das Trägheitsmoment  $J_s$  in bezug auf die wagerechte Schwerpunktsachse ist sonach

$$J_s = F \left( \frac{r^2}{4} - a^2 \right) = F r^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right).$$

Daher wird nach Gl. 5 (S. 187):

$$1) \quad v = \frac{J_s}{F \cdot y_0} = r \frac{\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}}{\frac{4}{3\pi} + n}.$$

Zur Ermittlung von  $x_m$  nach Gl. 4 (S. 187) wollen wir vorerst das Zentrifugalmoment  $C$  berechnen. Es empfiehlt sich, dasselbe auszudrücken durch das etwas bequemere Zentrifugalmoment  $C_B$  in bezug auf  $BC$  und  $BD$ . Mit  $y = y_1 + nr$  wird

$$\begin{aligned} C &= \int dF x y = \int dF x (y_1 + nr) \\ &= \int dF x y_1 + nr \int dF x, \text{ somit} \end{aligned}$$

$$2) \quad C = C_B + nr F x_0 = C_B + F \frac{4}{3\pi} nr^2.$$

Ein Flächenteilchen  $dF = dx \cdot dy$  liefert zu  $C_B$  den Beitrag  $dx \cdot dy \cdot x y_1$ . Sämtliche Flächenteilchen des Streifens  $EG$  von der Breite  $u$  haben übereinstimmende  $y_1$  und  $dy$ , liefern also zusammen den Beitrag

$$y_1 dy \int_0^u dx = \frac{1}{2} y_1 \cdot dy \cdot u^2,$$

mithin der ganze Viertelkreis

$$C_B = \frac{1}{2} \int_0^r y_1 dy \cdot u^2.$$

Hierin ist  $dy = dy_1$ ; ferner  $u^2 = r^2 - y_1^2$ , wodurch

$$C_B = \frac{1}{2} r^2 \int_0^r y_1 dy_1 - \frac{1}{2} \int_0^r y_1^3 dy_1 = \frac{1}{8} r^4, \text{ oder}$$

$$C_B = \frac{F \cdot r^2}{2\pi}, \text{ und damit}$$

$$3) \quad C = Fr^2 \left( \frac{1}{2\pi} + \frac{4}{3} \frac{n}{\pi} \right) \text{ wird.}$$

Nunmehr ergibt sich

$$4) \quad x_m = \frac{C}{Fy_0} = r \frac{\frac{1}{2\pi} + \frac{4}{3} \frac{n}{\pi}}{\frac{4}{3\pi} + n} = r \frac{3 + 8n}{8 + 6n\pi}$$

oder, wenn in Zähler und Nenner durch  $n$  geteilt wird:

$$5) \quad x_m = r \frac{\frac{3}{n} + 8}{\frac{8}{n} + 6\pi}$$

Für  $n = \infty$  wird (nach Gl. 1)  $v = 0$  und Gl. 5 geht über in

$$x_m = \frac{4}{3\pi} r = 0,424 r,$$

d. h. Punkt  $C$  fällt mit  $S$  zusammen, wie es sein muß (vgl. S. 187).

Für  $n = 0$  wird (nach Gl. 1)

$$v = \left( \frac{3}{16} \pi - \frac{4}{3\pi} \right) r = 0,165 r, \text{ und nach Gl. 4:}$$

$$x_m = \frac{3}{8} r = 0,375 r;$$

(Punkt  $C$  in Fig. 204).

### g) Druckkräfte gegen krumme Flächen.

Durch den freien Wasserspiegel sei die Ebene  $AXY$  gelegt (Fig. 205), die  $AZ$  gehe lotrecht abwärts. Es sollen die Druckkräfte des Wassers gegen die gekrümmte Fläche  $BEC$  (etwa Kugeloktant mit dem Mittelpunkt  $C$ ) bestimmt werden. Ein Flächenteilchen  $dF$  bei  $P$  in der Tiefe  $z$  unter dem Wasserspiegel erfährt eine Druckkraft  $\gamma \cdot dF \cdot z$ , welche mit den Achsen die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\delta$  bilden möge. Durch rechtwinklige Zerlegung erhält man



$$dD_x = \gamma \cdot dF \cdot \cos \alpha \cdot z = \gamma \cdot z \cdot dF_x,$$

$$dD_y = \gamma \cdot dF \cdot \cos \beta \cdot z = \gamma \cdot z \cdot dF_y,$$

$$dD_z = \gamma \cdot dF \cdot \cos \delta \cdot z = \gamma \cdot z \cdot dF_z,$$

worin  $dF_x$ ,  $dF_y$ ,  $dF_z$  die rechtwinkligen Projektionen von  $dF$  in der Richtung der  $x$ , der  $y$  bzw.  $z$  bedeuten. Da die Projektion  $dF_x$  in derselben Tiefe  $z$  unter Wasser liegt wie  $dF$ , so bedeutet  $dD_x$  auch die Druckkraft gegen die Projektionsfläche, demnach ist die ganze Kraft in der  $x$ -Richtung

$$D_x = \gamma \int z \cdot dF_x$$

die gesamte Druckkraft, die auf die ebene Projektion  $F_x = B_1 C_1$  der gekrümmten Fläche kommen würde und deren Größe und Lage nach S. 185—197 zu bestimmen ist. Gleiches gilt bezüglich der Seitenkraft

$$D_y = \gamma \int z \cdot dF_y.$$

Dabei ist noch zu bemerken, daß diejenigen Flächen, welche beim Projizieren in einer der beiden wagerechten Richtungen paarweise aufeinanderfallen, nicht mit in Betracht kommen.

Anders verhält es sich mit der Seitenkraft  $dD_z$ , weil beim Projizieren von  $dF$  auf eine beliebige wagerechte Ebene die Höhenlage des Flächenteilchens  $dF$  nicht mit der seiner Projektion  $dF_z$  übereinstimmt. Wohl aber bedeutet  $\gamma \cdot z \cdot dF_z$  das Gewicht derjenigen Flüssigkeitssäule, die vom Flächenteilchen  $dF$  bis zum Wasserspiegel reicht. Daher ist auch

$$D_z = \gamma \int z \cdot dF_z$$

das Gewicht der lotrecht über der gedrückten Fläche stehenden Wassermasse  $ABEG$  (Fig. 205) und geht durch deren Schwerpunkt.

Fig. 205.

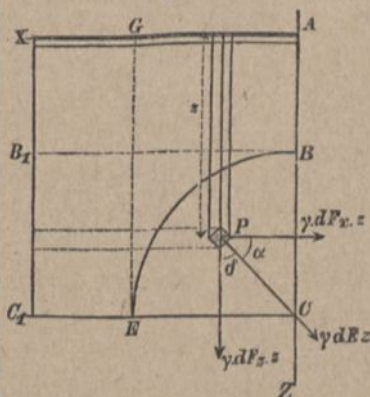
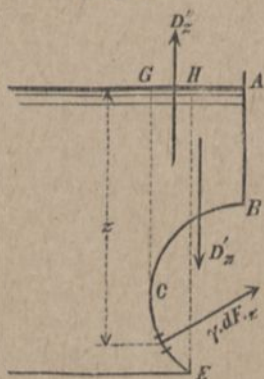


Fig. 206.



Ist jedoch die Fläche  $BCE$  (Fig. 206) so gestaltet, daß ein Teil  $CE$  derselben schräg aufwärts gerichtete Teildrücke erfährt, so liefert diese zu  $D_2$  einen aufwärts gerichteten Beitrag  $D'_2$ , gleich und entgegengesetzt dem Gewichte eines gedachten Wasserkörpers  $CGHE$ , der von der Fläche  $CE$  bis zum Wasserspiegel reichen würde, und durch dessen Schwerpunkt geht, während der Beitrag  $D'_2$  der Fläche  $BC$  wie vorhin bestimmt wird.

### h) Riegel eines gekrümmten Schleusentores.

Die Riegel eines ebenen Schleusentores (S. 193) wurden sehr ungleichmäßig gespannt. Geht man für größere Schleusenbreiten zu eisernen Toren über, so kann man durch die Wahl gekrümmter Riegel und Tore eine bessere Ausnutzung der Festigkeit, d. h. eine gleichmäßigere Spannung, erreichen. Es soll die Bedingung gesucht werden, unter welcher ein Riegel in wagerechter Ebene überall eine gleichmäßig über den Querschnitt verteilte Druckkraft erfährt.

Ist (Fig. 207)  $AB = ds$  ein Teilchen des Riegels mit dem Krümmungshalbmesser  $\varrho$  und dem Mittelpunktswinkel  $d\vartheta$ , ferner  $q$  die auf die Längeneinheit kommende, nach S. 191 zu bemessende Belastung, so müssen nach obiger Bedingung an den Schnittstellen die zentrischen Druckspannkraften  $S$  und  $S + dS$  auftreten. Das Gleichgewicht erfordert  $S = S + dS$ , d. h.  $dS = 0$ , oder  $S$  überall gleich. Ferner ist gemäß dem Krafteck in Fig. 207:

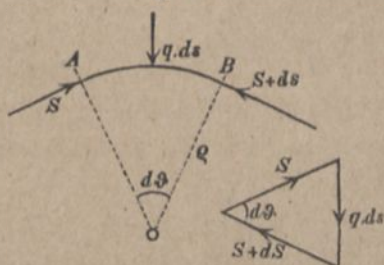
$$S \sin \frac{1}{2} d\vartheta = \frac{1}{2} q ds \quad \text{oder, wegen } \sin d\vartheta = d\vartheta,$$

$$S d\vartheta = q ds = q \varrho d\vartheta, \quad \text{daher}$$

$$1) \quad S = q \varrho.$$

Da nun  $S$  überall gleich war, so muß wegen der Unveränderlichkeit von  $q$  auch  $\varrho$  über die ganze Länge des Riegels denselben Wert haben, d. h. der Riegel muß kreisförmig sein.

Fig. 207.





Zwischen den Wendesäulen  $A$  und  $B$  (Fig. 208) im Abstände  $2a$  sind nun verschiedene Kreisbögen möglich. Für einen Halbmesser  $\rho$  und einen halben Mittelpunktswinkel  $\alpha$  ist die Bogenlänge  $AC = \rho\alpha$ , die halbe Weite  $a = \rho \sin \alpha$ . Einer Spannkraft  $S = q\rho$  entspricht ein Querschnitt  $F = q\rho : \sigma$ , wenn  $\sigma$  die zulässige Spannung, daher ist der Rauminhalt des Riegels eines Flügels

$$2) \quad V = F \rho \alpha = \frac{q}{\sigma} \rho^2 \alpha = \frac{q}{\sigma} a^2 \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Soll  $V$  möglichst klein werden, so muß nach der Regel vom Minimum

$$0 = \sin^2 \alpha - \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{oder}$$

$$3) \quad \operatorname{tg} \alpha = 2 \alpha \quad \text{sein.}$$

Dieser Bedingung genügt ein Winkel  $\alpha = 66^\circ 47'$  mit  $\sin \alpha = 0,919$ ; dafür wird  $\rho = a : 0,919 = 1,088 a$ , und

$$F = \frac{q}{\sigma} \rho = 1,088 a \frac{q}{\sigma}.$$

Praktischen Gebrauch macht man von dieser Untersuchung nicht; sie ist nur eine Übungsaufgabe der angewandten Mathematik.

### i) Gesamtdruck auf die Gefäßwände. Auftrieb einer Flüssigkeit.

Befindet sich in einem oben offenen Gefäße (Fig. 209) ein flüssiger Körper im Gleichgewichte, so wirkt an der Flüssigkeit vom Rauminhalte  $V$  als Massenkraft das Gewicht  $G = \gamma V$  lotrecht abwärts, durch den Schwerpunkt  $S$  der Flüssigkeit gehend. Ist  $D$  der Gesamtdruck der Gefäßwände gegen die Flüssigkeit, d. h. die gesamte Oberflächenkraft, so muß  $D$  mit  $G$  im Gleichgewichte sein, also  $D = G = \gamma V$  lotrecht aufwärts durch den Schwerpunkt der Flüssigkeit gehen. Der Gesamtdruck des flüssigen Körpers auf die Gefäßwände ist nach dem Gesetze der Wechselwirkung das Entgegengesetzte von  $D$ , d. h. nach Größe, Richtung und Lage völlig

übereinstimmend mit dem Gewichte  $G$  des flüssigen Körpers. Der Angriffspunkt von  $D$  fällt indes im allgemeinen nicht mit dem Schwerpunkte des flüssigen Körpers zusammen. Seitendrucke  $D_x$  und  $D_y$  kommen hier nicht in betracht, weil beim Projizieren der

Fig. 208.

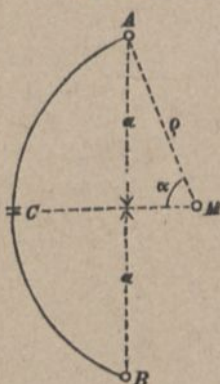
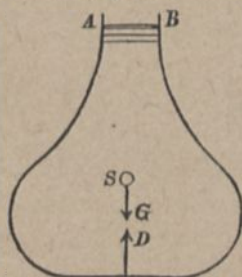


Fig. 209.



gesamten inneren Oberflächen des Gefäßes auf eine lotrechte Ebene die Teilchen paarweise aufeinanderfallen. Ist das Gefäß z. B. von prismatischer Form mit ebener wagerechter Bodenfläche, so erscheinen die Druckkräfte gleichmäßig über diese verteilt und ihre Mittelkraft  $D$  geht durch den Schwerpunkt der Fläche.

Umgrenzen wir in einem größeren, im Gleichgewichte befindlichen flüssigen Körper einen beliebigen Teil  $BCE$  (Fig. 210), so müssen an diesem ebenfalls die gesamte Massenkraft  $G$  und der Gesamtdruck  $A$  aller ihn umgebenden Flüssigkeitsteilchen sich aufheben, d. h. es muß  $A = G = \gamma V$ , aufwärts gerichtet sein und durch den Schwerpunkt des Körpers  $V$  gehen. Vertauscht man nun den Flüssigkeitsteil  $BCE$  mit einem anderen Körper, dessen Oberfläche genau mit der Umgrenzung  $BCE$  übereinstimmt, so übt die umgebende Flüssigkeit auf den eingetauchten Körper ganz dieselben Kräfte aus, wie auf den etwa erstarrt gedachten Teil  $BCE$  des flüssigen Körpers, mithin ist der Gesamtdruck der Flüssigkeit gegen einen in sie eingetauchten Körper



$$1) \quad A = \gamma V.$$

Diese Kraft heißt der **Auftrieb**. Sie ist ganz unabhängig von der Massenverteilung des eingetauchten Körpers, lediglich bedingt durch den Flüssigkeitskörper, dessen Stelle der feste Körper einnimmt, also durch die von dem festen Körper verdrängte Flüssigkeitsmenge.

Der Auftrieb einer Flüssigkeit gegen einen in dieselbe eingetauchten Körper ist lotrecht aufwärts gerichtet, gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeitsmenge, geht durch deren Schwerpunkt, hat diesen aber nicht zum Angriffspunkte.

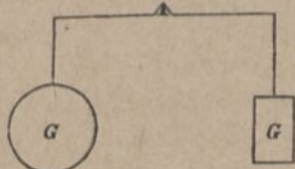
Diese Regel gilt sowohl für einen völlig, als auch für einen nur teilweise eingetauchten Körper. In letzterem Falle bedeutet  $V$  den Rauminhalt des unter Wasser befindlichen Teiles des eingetauchten Körpers. Befindet sich der eingetauchte Körper ganz unter Wasser und ist er nicht zusammendrückbar, so ist der Auftrieb unabhängig von der Tiefe des Körpers unter Wasser, weil nach S. 169 die Dichte  $\gamma$  unveränderlich ist.

Sind das Gewicht des Körpers und sein Auftrieb einander gleich, so befindet er sich hinsichtlich der lotrechten Kräfte im unentschiedenen Gleich-



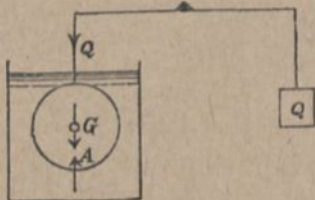
gewicht. Ist der Körper homogen, fällt sein Schwerpunkt mit dem des von ihm verdrängten Flüssigkeitskörpers zusammen, so befindet er sich überhaupt und in jeder Lage im unentschiedenen Gleichgewicht. Liegt bei einem nicht homogenen Körper dessen Schwerpunkt lotrecht unter dem des verdrängten Flüssigkeitskörpers, so befindet er sich gegenüber angreifenden Drehmomenten in sicherem (stabilem) Gleichgewicht, d. h., er kehrt, nachdem etwa vorübergehend ein Moment auf ihn gewirkt und ihn aus der bezeichneten Richtung gedreht hat, sich selbst überlassen, wieder in dieselbe zurück. Auftrieb und Gewicht bilden ein zurückdrehendes Kräftepaar. Liegt dagegen der Schwerpunkt des Körpers lotrecht über dem des verdrängten Flüssigkeitskörpers, so befindet sich der Körper bezüglich der von ihm eingenommenen Richtung in unsicherem Gleichgewicht.

Fig. 211.



Hängt man einen Körper vom Gewichte  $G$  an eine gleicharmige Waage (Fig. 211), so muß an der anderen Seite derselben ein gleiches Gewicht  $G$  angebracht werden, um den Körper im Gleichgewichte zu halten. Ist aber (Fig. 212) der an der Waage hängende Körper vom Rauminhalte  $V$  ganz in eine Flüssigkeit von der Dichte  $\gamma$  eingetaucht und ist sein Gewicht  $G$  größer als der Auftrieb  $A$ , so ist nur ein Gewicht  $Q$  nötig, um dem jetzt noch vorhandenen abwärts gerichteten Gewichte des Körpers

Fig. 212.



$$2) \quad Q = G - A$$

das Gleichgewicht zu halten. Dieses Gewicht  $Q$  heißt das scheinbare oder relative Gewicht des Körpers in bezug auf die Flüssigkeit.

Die Wägung eines Körpers im eingetauchten Zustande ersetzt in manchen Fällen eine Bestimmung des Rauminhaltes. Kennt man nämlich  $V$ , so ist damit auch der Auftrieb  $A = \gamma V = G - Q$  gegeben. Ist es aber nicht tunlich,  $V$  durch Messung zu bestimmen, so führt die Ermittlung des wahren und des scheinbaren Gewichtes ( $G$  und  $Q$ ) zum Ziele, denn es ist

$$3) \quad V = A : \gamma = (G - Q) : \gamma.$$

Damit hat man denn auch die mittlere Dichte  $\gamma_1$  des eingetauchten Körpers, nämlich

$$4) \quad \gamma_1 = \frac{G}{V} = \gamma \frac{G}{G - Q},$$

oder, wenn er homogen ist, seine wahre Dichte.

Bekanntlich verwandte schon Archimedes (281—212 vor Chr.), der das Wesen des Auftriebes beim Baden erkannte, die doppelte Wägung, um festzustellen, wieviel Gold und wieviel Silber in der Krone des Hiero von Syrakus enthalten sei. Ist  $V_1$  die Raummengé Goldes von der Dichte  $\gamma_1$ ,  $V_2$  die Raummengé Silbers von der Dichte  $\gamma_2$  in der Krone, so ist deren wahres Gewicht

$$5) \quad G = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2.$$

Der Auftrieb des Wassers (Dichte  $\gamma$ ) ist  $A = \gamma(V_1 + V_2)$ , mithin das scheinbare Gewicht

$$6) \quad Q = G - \gamma(V_1 + V_2).$$

Diese beiden Gleichungen 5 und 6 können nach den Unbekannten  $V_1$  und  $V_2$  aufgelöst werden:

$$7) \quad V_1 = \frac{G \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma}\right) + \frac{\gamma_2}{\gamma} Q}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

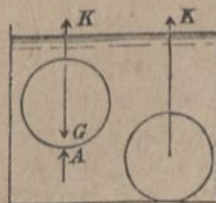
Um  $V_2$  zu erhalten, braucht man in Gl. 7 nur die Indizes 1 und 2 miteinander zu vertauschen.

Steht ein Gefäß mit Wasser auf einer Wagschale und taucht man mit dem Finger in das Wasser, so muß die Wagschale sich senken. Der Finger erfährt von dem Wasser einen Auftrieb  $A$ , und dieselbe Kraft übt der Finger auf das Wasser und somit auf das Gefäß nach unten aus. Ist  $V$  der eingetauchte Rauminhalt,  $F$  der Querschnitt des Gefäßes in der Höhe des Wasserspiegels, so steigt ja auch das Wasser im Gefäße um  $\Delta h = V:F$ , dadurch wächst der lotrechte Druck auf das Gefäß um  $\gamma F \Delta h = \gamma V$ , d. h. genau um den Auftrieb. Ähnlich ist es, wenn man ein Stück Holz oder einen Fisch auf oder in das Wasser setzt; der lotrechte Druck auf das Gefäß ist dann, wenn wieder Gleichgewicht herrscht, genau um das Gewicht des Holzes oder Fisches gewachsen.

Eine Kraft  $K = Q = G - A = G - \gamma V$ , die einen unter Wasser befindlichen Körper in der Schwebe hält (Fig. 213), genügt auch, denselben langsam und gleichmäßig im Wasser aufwärts zu bewegen (bei schneller Bewegung entstehen Bewegungswiderstände, die von der Geschwindigkeit abhängig sind). Auch wenn der Körper auf dem Boden des Gefäßes liegt, ihn aber nur in einzelnen Punkten oder Linien, nicht in Flächen, berührt, wird eine aufwärts gerichtete, die Größe  $Q = G - \gamma V$  nicht wesentlich überschreitende Kraft  $K$  hinreichen, den Körper vom Boden empor zu heben.

Zweifelhaft kann man aber über die Größe der zum Emporheben vom Boden erforderlichen Kraft  $K$  sein, wenn der Körper den Boden des Gefäßes mittels einer größeren Fläche berührt.

Fig. 213.





In dem Falle der Fig. 214 lastet auf der oberen Fläche des Körpers eine Druckkraft  $\gamma F h$ , und es muß mindestens

$$8) \quad K = G + \gamma \cdot F \cdot h$$

sein, um den Körper vom Boden abzuheben, wenn an der unteren Fläche des Körpers kein Wasserdruck wirkt.

Letztere Annahme wird aber in den meisten Fällen nicht zutreffen. Befand sich in dem Gefäße schon Wasser, bevor der Körper auf den Boden gesenkt wurde, so wird unter ihm eine dünne Wasserschicht verbleiben, die den Wasserdruck auf die untere Fläche überträgt, so daß nur

$$9) \quad K = G + \gamma \cdot F \cdot h - \gamma \cdot F \cdot h' = G - \gamma \cdot V$$

zum Heben erforderlich ist.

Wird der Körper auf den Boden des leeren Gefäßes gelegt und dann erst mit Wasser übergossen, so ist es doch leicht möglich, daß infolge kleiner Unebenheiten, Poren u. dgl. an dem Körper oder am Boden, Wasser unter den Körper dringt und Formel 9 gültig bleibt. Nur in solchen Fällen, wo Körper und Boden ohne Poren, sauber bearbeitet und trocken aufeinander geschliffen sind, wird das nachträglich eingegossene Wasser wahrscheinlich nicht unter den Körper dringen können, so daß Formel 8 anzuwenden wäre.

Derartige Erwägungen sind erforderlich, wenn es sich z. B. um die Standsicherheit des Widerlagers einer gewölbten Brücke handelt (Fig. 215). Steht das Widerlager im Trocknen, so hat man das wahre Gewicht  $G$  desselben mit dem Kämpferdrucke  $W$  des Gewölbes (und dem etwaigen Erddrucke) zusammensetzen, um daraus die für die Sicherheit des Widerlagers maßgebende Mittelkraft  $R$  zu erhalten. Ist das Bauwerk aber dem Hochwasser  $H \cdot W$  ausgesetzt, so hat man zu erwägen, ob es wahrscheinlich ist, daß das Wasser in die Fugen oder unter die Grundfläche des

Fig. 214.

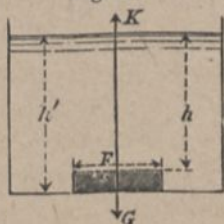
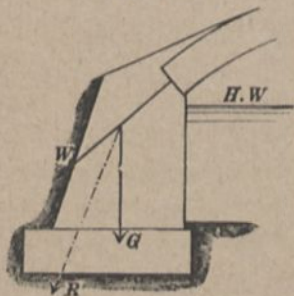


Fig. 215.



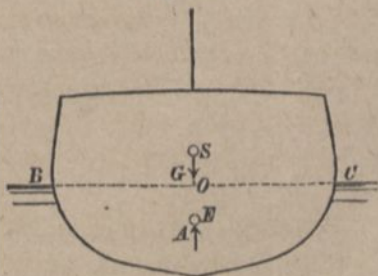
Mauerwerks dringen kann. In diesem Falle würde, wenn auch die Hinterfüllungserde vom Wasser durchzogen ist, der unter Wasser befindliche Teil des Mauerwerks nur mit seinem scheinbaren Gewichte  $Q = G - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma)V$ , d. h. bei  $\gamma_1 = 2\gamma$  nur mit der Hälfte seines Gewichtes einzuführen sein.

Bei kiesigem Boden wird das Wasser wohl Wege finden, um, wenn auch nicht sofort, doch mit der Zeit, unter dem Grundmauerwerke mit seinem vollen Drucke zu wirken, wogegen auch eine das Mauerwerk umschließende Spundwand nicht schützen kann. Bei felsigem Untergrunde dürfte es öfter gelingen, das Mauerwerk mit Zementmörtel dem Felsen wasserdicht anzuschließen. Es hängt somit von der Beschaffenheit des Untergrundes und der sorgfältigen Ausführung des Grundbaues ab, ob man im einzelnen Falle den Wasserdruck außer acht lassen darf.

### k) Gleichgewicht schwimmender Körper.

Ist die mittlere Dichte  $\gamma_1$  eines Körpers kleiner als die Dichte  $\gamma$  des Wassers, so fällt sein scheinbares Gewicht  $Q = G - A = \gamma_1 V - \gamma V = (\gamma_1 - \gamma)V$  negativ aus. Der Körper wird daher, wenn er nicht durch eine besondere abwärts gerichtete Kraft  $K = Q$  niedergehalten wird, sich aus dem Wasser erheben, auf dem Wasser schwimmen (Fig. 216) und wird im Gleichgewichte sein, wenn der Auftrieb  $\gamma V$  des eingetauchten Teiles  $V$ , die Wasserverdrängung (kurzweg Verdrängung oder Displacement), sich mit dem wahren

Fig. 216.



Gewichte  $G$  des Körpers im Gleichgewichte hält. Dazu ist erforderlich, daß  $\gamma V = G$  sei und daß der Schwerpunkt  $S$  des Körpers mit dem Schwerpunkt  $E$  der verdrängten Wassermasse  $V$ , beziehungsweise mit dem Angriffspunkte des Auftriebes in derselben Lotrechten liege. Die Gerade  $SE$  im Körper heißt die Schwimmachse, die zu ihr rechtwinklige Ebene  $BOC$  des Körpers, welche im Gleichgewichte mit dem Wasserspiegel zusammenfällt, wird die Schwimmebene genannt.



Es soll nun die Sicherheit eines schwimmenden Schiffes gegen Umkippen untersucht werden. Das Schiff habe eine Symmetrieebene, die durch die Schwimmachse  $SE$  geht.

Die Standsicherheit des Schiffes verlangt, daß, wenn infolge eines etwa durch seitlichen Winddruck hervorgerufenen Kippmomentes eine Schiefstellung des Schiffskörpers erfolgt, sofort auch ein auf Rückdrehung gerichtetes Standsicherheitsmoment entsteht, das, mit der Schiefstellung anwachsend, dem Kippmoment gegenüber in irgendeiner noch erträglichen Lage des Schiffskörpers Gleichgewicht herstellt und nach dem Verschwinden des Kippmomentes den Körper wieder in seine normale Schwimmlage zurückdreht. Bei richtiger Gestaltung des Schiffskörpers entsteht das erforderliche Standsicherheitsmoment dadurch, daß mit der Schiefstellung des Körpers die nach Rauminhalt sich gleichbleibende Verdrängung ihre Form und Lage zu dem Körper so ändert, daß ihr Schwerpunkt  $E$  aus der Lotrechten durch den Körperschwerpunkt  $S$  nach der Richtung der Kippbewegung hin heraustritt, etwa von  $E$  nach  $E_1$  gelangt, das Gewicht des Schiffes und der gleich große Auftrieb also ein Kräftepaar bilden.

Wir nehmen nun Schiefstellung um einen Winkel  $\vartheta$  an und setzen voraus, daß in dieser Lage Gleichgewicht zwischen dem Kippmoment  $\mathfrak{M}$  und dem Standsicherheitsmoment besteht, ausgedrückt durch die Gleichung

$$\mathfrak{M} = G \cdot \overline{SP} = G \cdot \overline{SM} \sin \vartheta,$$

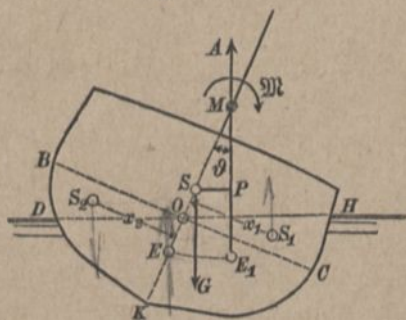
wofür man, da  $\vartheta$  klein ist, auch schreiben kann

$$1) \quad \mathfrak{M} = G \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta.$$

Die Länge  $\overline{SM}$  ist danach für die Standsicherheit des Schiffes maßgebend. Sie kann aus der Form desselben, der Verdrängung und dem Abstände  $ES = e$  des Schwerpunktes der letztern von dem des Schiffskörpers mit Ladung wie folgt ermittelt werden:

Das aus einer Schiefstellung des Schiffes zurückdrehende Standsicherheitsmoment (Gl. 1) kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß mit derselben ein Keilstück  $V_1 = DOB$  aus-

Fig. 217.



taucht und ein gleich großes  $HOC$  eintaucht, links von  $O$  also eine abwärts gekehrte und rechts eine gleich große aufwärts gerichtete Kraft, d. h. ein Kräftepaar mit dem (in bezug auf Fig. 217) links drehenden Moment  $V_1(x_1 + x_2) \cos \vartheta$  wirksam wird. Diese Wirkung tritt zu der des ursprünglichen Auftriebes, dessen Angriffspunkt lotrecht durch  $E$  gerichtet ist und der mit dem Gewicht zusammen ein Kräftepaar vom rechtsdrehenden Moment  $\overline{ES} \cdot \sin \vartheta \cdot V = e \cdot \vartheta \cdot V$  bildet. Das infolge der Schiefstellung entstandene rückdrehende Standsicherheitsmoment drückt sich also mit  $\cos \vartheta = 1$  auch aus durch die Gleichung

$$2) \quad \mathfrak{M} = V_1(x_1 + x_2) - V \cdot e \vartheta.$$

Aus Gl. 1 und 2 folgt, da  $x_1 = x_2$  und  $G = V$  gesetzt werden kann,

$$3) \quad SM = \frac{2 V_1 x_1}{V \cdot \vartheta} - e.$$

Die Größe  $V_1 x_1$  ist von der Gestalt der Wasserlinie des Schiffes (Fig. 218) abhängig. Ist in einem Abstände  $z$  von der Vorderkante die halbe Breite in der Schwimmebene  $y$ , so liefert ein Längenteilchen  $dz$  zu  $V_1$  einen Beitrag  $\frac{1}{2} y^2 \cdot \vartheta \cdot dz$  und zu  $V_1 x_1$  annähernd einen Beitrag  $\frac{1}{2} y^2 \cdot \vartheta \cdot \frac{2}{3} y \cdot dz = \frac{1}{3} y^3 \cdot \vartheta \cdot dz$ , so daß

$$V_1 x_1 = \frac{1}{3} \vartheta \int y^3 \cdot dz$$

wird. Nun ist aber  $\frac{1}{3} y dz \cdot y^2$  das Trägheitsmoment des in Fig. 218 schraffierten Teilchens der Schwimmfläche in bezug auf ihre Längsachse (1. Teil, 4. Aufl., S. 319). Also ist das Trägheitsmoment der ganzen Schwimmfläche in bezug auf ihre Längsachse

$$4) \quad \mathfrak{I} = \frac{2}{3} \int y^3 \cdot dz, \text{ so daß}$$

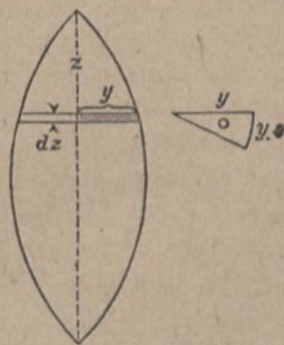
$$2 V_1 \cdot x_1 = \mathfrak{I} \cdot \vartheta \text{ wird.}$$

Führt man dies in Gl. 3 ein, so ergibt sich

$$5) \quad SM = \frac{\mathfrak{I}}{V} - e. \quad //$$

Die Länge  $SM$  ist hiernach bei kleinem Neigungswinkel  $\vartheta$  von diesem Winkel unabhängig, d. h. der Punkt  $M$  hat auf der Schwimm-

Fig. 218.





achse eine bestimmte Lage und wird, weil er, von  $E$  aus betrachtet, bei sicherem Gleichgewichte jenseits des Schwerpunktes  $S$  liegt, auch als Krümmungsmittelpunkt der Bahnlinie  $EE_1$  angesehen werden kann, die der Punkt  $E$  bei der Kippbewegung des Schiffes beschreibt, das Metazentrum ( $\mu\epsilon\tau\alpha =$  jenseits), und seine Höhe  $SM$  über  $S$  die metazentrische Höhe genannt. Das Standsicherheitsmoment ist sonach

$$6) \quad \mathfrak{M} = \gamma V \left( \frac{\mathfrak{Z}}{V} - e \right) \vartheta.$$

Ist der schwimmende Körper ein Prisma von der Länge  $l$ , ist  $F$  der Querschnitt der Verdrängung  $V = Fl$  und  $b$  die Breite in der Schwimmebene, so wird  $\mathfrak{Z} = \frac{1}{12} lb^3$ , daher

$$7) \quad SM = \frac{b^3}{12F} - e.$$

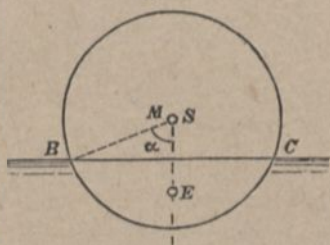
Die Länge  $SM$  ist jedoch nur für geringe Neigungswinkel von deren Größe unabhängig. Für die stärkeren Bewegungen der Seeschiffe darf ein festes Metazentrum nicht angenommen werden.

Hat der Schwimmkörper die Form eines liegenden Zylinders oder einer Kugel, erhält der eingetauchte Raum die Verdrängung  $V$ , demnach die Gestalt eines Zylinder- oder Kugelabschnittes, so ändert eine Drehung die Form von  $V$  gar nicht; es geht der Auftrieb stets durch die Achse des Zylinders bzw. den Mittelpunkt der Kugel (Fig. 219). Ist der Körper ein Zylinder oder eine Kugel überall gleicher Dichte  $\gamma_1$ , so fallen Schwerpunkt  $S$  und Metazentrum  $M$  zusammen; ein derartiger Körper schwimmt also in unentschiedenem Gleichgewichte; er setzt einer Drehung keinen Widerstand entgegen und kehrt auch nicht in die ursprüngliche Lage zurück, ist daher als Schiffsform unbrauchbar.

Für die Eintauchung eines Zylinders (Fig. 219) gilt die Gleichung  $r^2 \pi \gamma_1 = r^2 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) \gamma$ . Diese Gleichung läßt sich nach  $\alpha$  nur durch Probieren auflösen, nach  $\gamma_1 : \gamma$  aber mit:

$$8) \quad \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{2\alpha - \sin \alpha}{2\pi}.$$

Fig. 219.



Soll  $\alpha = 60^\circ = \frac{1}{3}\pi$  werden, so muß

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{\frac{2}{3}\pi - 0,866}{2\pi} = 0,195 \text{ sein.}$$

Für einen homogenen Halbzylinder (Fig. 220) ist die metazentrische Höhe  $SM = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$  (1. Teil, 4. Aufl., S. 159). Die Eintauchtiefe ist bedingt durch

$$\frac{1}{2} r^2 \pi \gamma_1 = r^2 (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) \gamma \text{ oder}$$

$$9) \quad \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\pi}.$$

Soll jetzt  $\alpha = 60^\circ$  werden, so muß  $\gamma_1 : \gamma = 2 \cdot 0,195 = 0,39$  sein.

Für ein homogenes rechtwinkliges Parallelepiped (Fig. 221) von der Höhe  $h$ , der Breite  $b$ , der Dichte  $\gamma_1$  gilt für die Eintauchtiefe  $z$  die Gleichung

$$\gamma z b = \gamma_1 h b, \text{ d. h.}$$

$$10) \quad z = h \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Der Schwerpunkt  $S$  des Körpers liegt um  $\frac{1}{2}h$ , der Schwerpunkt  $E$  der Verdrängung um  $\frac{1}{2}z$  vom Boden entfernt, mithin ist

$$e = ES = \frac{1}{2}(h - z) = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right).$$

Dann wird nach Gl. 7 mit  $F = bz$

$$SM = \frac{b^3}{12bz} - e = \frac{b^2}{12h} \frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right),$$

$$11) \quad SM = \frac{h}{12} \left( \frac{b^2}{h^2} \frac{\gamma}{\gamma_1} - 6 \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right) \right).$$

Damit  $SM > 0$  werde, d. h. Standsicherheit vorhanden sei, muß

$$12) \quad \frac{b}{h} > \sqrt{6 \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)}$$

und für Holz mit  $\gamma_1 = 0,6\gamma$

$$\frac{b}{h} > \sqrt{6 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 1,2 \text{ sein.}$$

Ist aber  $b = 8h$  (Fig. 222) und wiederum  $\gamma_1 = 0,6\gamma$ , so wird

$$SM = \frac{h}{12} \left( \frac{64}{0,6} - 6 \cdot 0,4 \right) = 8,7h.$$

Fig. 220.

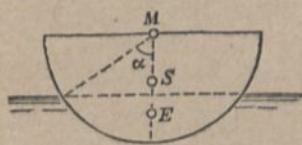
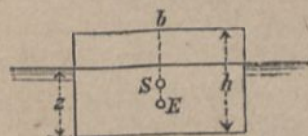


Fig. 221.





Ein solcher floßartiger Körper hat also eine große metazentrische Höhe und bedeutende Standsicherheit. Jedoch gilt dies nur, solange von den Oberkanten  $J$  und  $K$  keine unter Wasser, von den Unterkanten  $N$  und  $L$  keine über Wasser liegt. Bei stärkeren Neigungen, wie sie in unruhigem Wasser leicht vorkommen, ist die Standsicherheit geringer.

Bei neu gebauten Schiffen wird die metazentrische Höhe  $SM$  zuweilen durch einen sog. Krängungs- (d. h. Neigungs-) Versuch (Fig. 223) ermittelt. Das Schiff möge anfänglich gerade geschwommen haben. Wird nun eine schwere Last  $P$  etwa von  $B$  um die Entfernung  $x$  nach  $D$  verschoben, so ist die Fortnahme von  $B$  gleichbedeutend mit der Anbringung einer dort aufwärts gerichteten Kraft  $P$ , während bei  $D$  eine gleiche abwärts gerichtete Kraft auftritt. Die Verschiebung bewirkt demnach ein Kräftepaar  $Px$ . Entsteht dabei eine Schrägstellung um den Winkel  $\vartheta$ , der mittels eines Lotes am Mastbaum abgelesen werden kann, so ist nach Gl. 1

$$G \cdot \overline{SM} \cdot \vartheta = P \cdot x, \text{ mithin}$$

$$13) \quad SM = \frac{P \cdot x}{G \cdot \vartheta}.$$

Beispiel: Für ein Seeschiff betrage die Verdrängung  $V = 10000 \text{ m}^3$ , dann ist, weil für Seewasser  $\gamma = 1025 \text{ kg/m}^3$ ,  $G = 10250 \text{ t}$ . Wird eine schwere Last (etwa ein Geschütz) von  $P = 20 \text{ t}$  und  $5 \text{ m}$  seitwärts verschoben und entsteht dadurch eine Neigung  $\vartheta = \frac{1}{2}^\circ = 0,0087$ , so folgt

$$SM = \frac{20}{10250} \frac{5}{0,0087} = 1,11 \text{ m}.$$

Fig. 222.

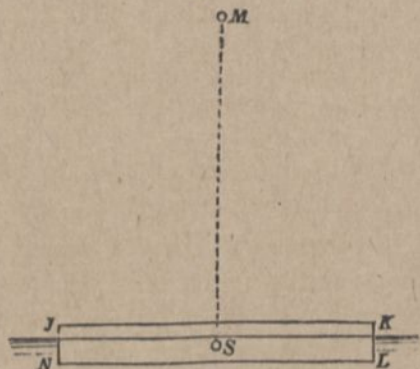
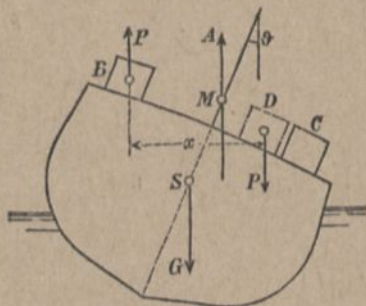


Fig. 223.



Wie groß die metazentrische Höhe für Schiffe verschiedenen Zweckes sein muß, ist lediglich durch Erfahrung festgestellt worden. Bei transatlantischen Dampfern genügt schon eine metazentrische Höhe von 0,3 m; Segelschiffe müssen wegen des Segeldruckes und Kriegsschiffe wegen des Abfeuerns der Geschütze eine große Standsicherheit (oder Steifigkeit) haben, daher etwa  $SM=1\text{ m}$ . Ein zu großes Steifigkeits- oder Standsicherheitsmoment ist für die Festigkeit des Schiffes, welche dieses Moment aufnehmen muß, nicht vorteilhaft, hat auch starke Winkelbeschleunigungen und daher heftige, unangenehme Bewegungen zur Folge, während ein Schiff von geringer Steifigkeit weniger angegriffen wird und sanftere, weniger schädliche Bewegungen ausführt.

#### l) Tropfbar flüssige Körper in scheinbarer Ruhe in bezug auf ein beschleunigt fortschreitendes Gefäß.

Das Gefäß (Fig. 224) möge eine gleichbleibende Beschleunigung  $q$  mit der Neigung  $\alpha$  aufwärts haben. Soll nun eine Flüssigkeit darin in scheinbarer Ruhe verbleiben,

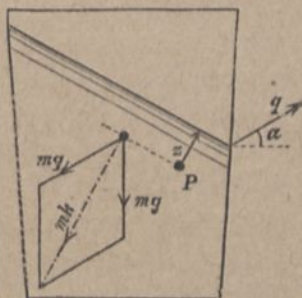
also nicht hin und her schwanken, so muß an jedem Massenteilchen Gleichgewicht der Kräfte herrschen, nachdem die Ergänzungskraft  $-mq$  (1. Teil, 4. Aufl., S. 90) hinzugefügt ist. Setzt man nun die Schwere  $mg$  mit  $-mq$  zusammen, so entsteht eine Mittelkraft  $mk$ . Dies ist jetzt die gesamte Massenkraft, welche mit den Oberflächenkräften im Gleichwichte sein muß. An die Stelle der einzigen Massenkraft  $mg$  im wirklichen Ruhezustande tritt nun in jeder Beziehung  $mk$ . Der Wasserspiegel muß daher jetzt rechtwinklig zur Richtung von  $mk$  stehen.

Für den Druck  $p$  in einem rechtwinkligen Abstände  $z$  vom Wasserspiegel gilt  $p \cdot dF = \frac{\gamma}{g} dF \cdot zk$ , weil ein Prisma von der Höhe  $z$  und der Grundfläche  $dF$  die Masse  $\frac{\gamma}{g} dF \cdot z$  hat; also

$$1) \quad p = \frac{\gamma}{g} k z.$$

Ist  $q$  schräg nach unten gerichtet (Fig. 225), so kann  $k$  auch wagrecht, der Wasserspiegel also lotrecht werden. Dazu ist erforderlich, daß  $q \sin \alpha = g$  wird.

Fig. 224.





Bei lotrecht aufwärts gerichtetem  $q$  wird

$$k = g + q; \quad p = \gamma \left(1 + \frac{q}{g}\right) z.$$

Bei lotrecht abwärts gerichtetem  $q$  wird

$$k = g - q; \quad p = \gamma \left(1 - \frac{q}{g}\right) z.$$

Für  $q = g$  wird in diesem Falle

$$k = 0 \quad \text{und} \quad p = 0.$$

Wenn also ein Gefäß mit Wasser im luftleeren Raume frei fällt, so übt das Wasser keinen Druck auf die Gefäßwände aus. Lassen wir deshalb das Gefäß ganz fort, so daß das Wasser im luftleeren Raume frei fällt, so ist auch jetzt unter den bisherigen Voraussetzungen das Wasser drucklos und ohne Bestreben, eine bestimmte Form anzunehmen. In Wirklichkeit aber herrscht in dem Wasser eine sog. Oberflächenspannung; diese hat das Bestreben, einen Körper kleinster Oberfläche, d. h. eine Kugel, zu bilden; unter ihrer Einwirkung entsteht die Bildung kugelförmiger Tropfen. Allerdings würde auch die gegenseitige Massenanziehung der Teilchen eines flüssigen Körpers eine Tropfenbildung herbeiführen, doch ist diese (1. Teil, 4. Aufl., S. 58) so klein, daß sie bei Körpern geringer Größe gegenüber der Oberflächenspannung verschwindet.

Ist die Beschleunigung  $q > g$  und lotrecht abwärts gerichtet, so hat jedes Teilchen das Bestreben, mit der Beschleunigung  $k = q - g$  gegen die obere Fläche des Gefäßes zu fallen (1. Teil, 4. Aufl., S. 91). Scheinbare Ruhe ist dann nur möglich bei oben befindlichem Boden und unten befindlichem wagerechten Wasserspiegel (Fig. 226).

Fig. 225.

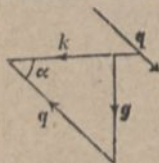


Fig. 226.



### m) Tropfbar flüssige Körper in gleichmäßiger Drehung um eine Achse.

Setzt man ein Gefäß, in dem sich eine Flüssigkeit befindet, in Drehung um seine lotrechte Achse, so nimmt der flüssige Körper nicht sofort an der Drehung Teil. Beim Fehlen jedes Reibungswiderstandes zwischen Gefäß und Flüssigkeit würde letztere durch Drehung des Gefäßes überhaupt nicht mitgenommen werden, sondern in Ruhe verbleiben. Da aber in Wirklichkeit eine gewisse Reibung

stattfindet, so wird durch schnelle Drehung des Gefäßes auch die Flüssigkeit bald in nahezu die gleiche Drehgeschwindigkeit versetzt.

Die in einem ruhenden zylindrischen Gefäße befindliche Flüssigkeit kann aber auch durch eine mit Flügeln versehene Welle, mittels einer oben angebrachten Riemenscheibe, in gleichmäßiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  erhalten werden (Fig. 227). Dann hat man an jedem Massenteilchen  $m$  zu der wirklichen Massenkraft  $mg$  (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 93) noch die Zentrifugalkraft  $m x \omega^2$  hinzuzufügen (wenn  $x$  der Abstand des Massenteilchens von der Achse ist), um die gesamte Massenkraft  $mk$  zu erhalten. Letztere schließt mit der Wagerechten einen Winkel  $\alpha$  ein, für den gilt

$$1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{x \omega^2}.$$

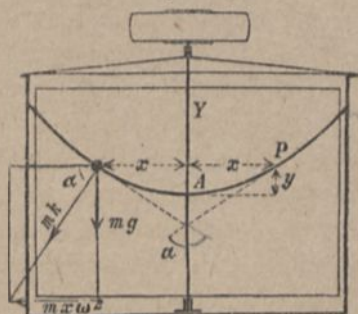
Liegt das Massenteilchen an der Oberfläche und denkt man sich die übrige Masse, außer jenem Teilchen, zu einem festen, völlig glatten Körper erstarrt, so muß die Fläche, damit das Teilchen auf ihr in scheinbarer Ruhe verbleibe, rechtwinklig zu der Massenkraft  $mk$  stehen, d. h. jenen Winkel  $\alpha$  mit der Lotrechten einschließen. Da die Verhältnisse für alle Punkte einer wagerechten Ebene, die in dem gleichen Abstände  $x$  von der Achse sich befinden, dieselben sind, so muß die Oberfläche eine Umdrehungsfläche sein, deren Meridianlinie im Abstände  $x$  von der Achse eine Neigung  $\alpha$  gegen die Drehachse hat. Für  $x=0$  ist (nach Gl. 1)  $\alpha=90^\circ$ ; mit wachsendem  $x$  verkleinert sich  $\alpha$  und die Kurve wird steiler. Legt man durch den Punkt  $A$ , in welchem die Kurve die Drehachse schneidet, ein Achsenkreuz, sind  $x$  und  $y$  die Koordinaten eines Punktes  $P$  der Kurve, so ist das Neigungsverhältnis der Tangente im Punkte  $P$  gegen die Lotrechte  $AY$

$$\operatorname{tg} \alpha = dx : dy.$$

Verbindet man hiermit Gl. 1, so wird

$$\omega^2 x dx = g dy \quad \text{oder} \\ d(1/2 \omega^2 \cdot x^2) = d(g \cdot y).$$

Fig. 227.





Sind nun die Differentiale zweier Größen einander gleich, so unterscheiden sich die Größen selbst um eine von den Veränderlichen unabhängige Größe  $C$ ; mithin wird

$$2) \quad \frac{1}{2}\omega^2 \cdot x^2 = g \cdot y + C.$$

Die Größe  $C$  ist abhängig von der willkürlichen Lage des Anfangspunktes  $A$ . Hier ist Punkt  $A$  so gelegt, daß er der gesuchten Kurve angehört mit den Koordinaten  $x=0$  und  $y=0$ . Die allgemeine Gleichung 2 muß also für  $x=0$  und  $y=0$  gültig bleiben. Daraus entsteht die Bedingung  $0=0+C$ , d. h.  $C=0$  und

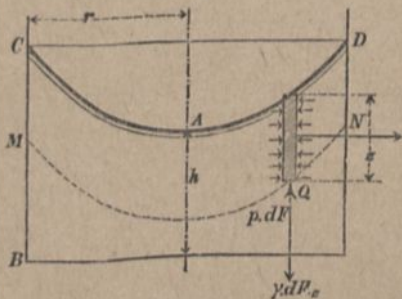
$$3) \quad x^2 = \frac{2g}{\omega^2} y \quad \text{oder} \quad y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel mit lotrechter Achse vom Parameter  $g:\omega^2$ , übereinstimmend mit der Form des sich drehenden Armes (1. Teil, 4. Aufl., S. 96, Fig. 90), auf dem ein Massenpunkt an jeder Stelle in scheinbarer Ruhe verbleiben soll; die freie Oberfläche ist sonach ein Umdrehungsparaboloid. Je größer  $\omega$  ist, desto kleiner wird der Parameter, desto steiler stellt sich die Parabel in einem gewissen Abstände von der Achse. Da  $\omega x = v$  die Umfangsgeschwindigkeit der Drehung an der Stelle  $P$  ist, so ist die Höhe  $y$  dieses Punktes über dem tiefsten Punkt  $A$ , nach der zweiten Fassung der Gl. 3, gleich der Geschwindigkeitshöhe  $\frac{v^2}{2g}$  der Drehgeschwindigkeit  $\omega x$  des Punktes.

Fig. 228.

Um den Druck  $p$  an irgendeinem Punkte  $Q$  der sich drehenden Flüssigkeit zu ermitteln, trennen wir (Fig. 228) ein lotrecht, von  $Q$  bis zur Oberfläche reichendes Prisma heraus. An dessen Grundfläche  $dF$  wirkt die Druckkraft  $p \cdot dF$  aufwärts; diese muß gleich dem Gewichte

$\gamma \cdot dF \cdot z$  des Prismas sein, wenn  $Q$  in der lotrechten Tiefe  $z$  unter



der Oberfläche liegt. Die Zentrifugalkraft des Prismas kommt in der Gleichung der lotrechten Kräfte nicht vor, also ist

$$4) \quad p = \gamma z.$$

Für überall gleiche  $z$  bekommt auch  $p$  überall denselben Wert. Flächen gleichen Druckes haben also in allen Punkten gleiche lotrechte Tiefe unter der Oberfläche, d. h. dieselbe Form  $MN$  wie die Oberfläche  $CD$ ; sie sind nur in lotrechtem Sinne dagegen verschoben.

Liegt der tiefste Punkt  $A$  der Oberfläche um  $h$  über dem Boden, so tritt der stärkste Druck im Gefäße bei  $B$  auf und hat die Größe

$$5) \quad p_1 = \gamma \cdot \overline{BC} = \gamma \left( h + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right),$$

wenn  $r$  der Drehungshalbmesser von  $B$  oder  $C$  ist.

Beispiel: Ein zylindrisches Gefäß (Fig. 229) von der Weite  $2R$  und der Tiefe  $H$  sei ursprünglich auf eine Höhe  $c$  mit ruhender Flüssigkeit gefüllt. Wie groß muß die Drehungsgeschwindigkeit  $v = \omega R$  am Umfange werden, damit die Flüssigkeit bis zum Rande steige?

Bildet sich bei der Drehung im Gefäße ein vollständiges Paraboloid als Oberfläche, liegt also der tiefste Punkt  $A$  des Paraboloides noch um  $h$  über dem Boden, so ist, weil der Inhalt eines Paraboloides (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 166) halb so groß wie der des umschriebenen Zylinders ist, die Flüssigkeitsmenge im Gefäße

$$R^2 \pi (H - \frac{1}{2}(H - h)) = \frac{1}{2} R^2 \pi (H + h);$$

diese muß  $= R^2 \pi c$ , also  $H + h = 2c$  sein. Nach Gl. 3 ist aber

$$H - h = \frac{v^2}{2g}; \quad \text{mithin}$$

$$2H = 2c + \frac{v^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$6) \quad \frac{v^2}{2g} = 2(H - c).$$

Gleichung 6 gilt nur, solange  $c \geq \frac{1}{2}H$ .

Für  $c = \frac{1}{2}H$  wird nämlich  $h = 0$ . — War das Gefäß aber anfänglich weniger als zur Hälfte gefüllt, also  $c < \frac{1}{2}H$ , so kommt, wenn die Flüssigkeit zum oberen Rande steigt, der untere Teil des Paraboloides mit dem Punkte  $A$  nicht mehr zur Ausbildung. Der Flüssigkeitskörper nimmt eine Querschnittsform an, wie sie in Fig. 230 links gezeichnet ist, während die rechte Hälfte der Figur den Ruhezustand darstellt.

Fig. 229.

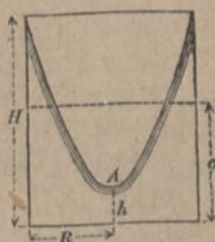
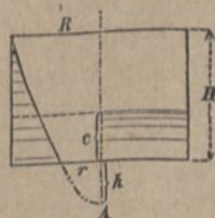


Fig. 230.





Nach Fig. 230 berechnet sich der Flüssigkeitsinhalt zu  $V = R^2 \pi H - \frac{1}{2} R^2 \pi (H+h) + \frac{1}{2} r^2 \pi h = R^2 \pi c$ . Wegen  $r^2 : R^2 = h : (H+h)$  wird

$$\frac{R^2 H}{2} - \frac{R^2 h}{2} + \frac{R^2 h^2}{2(H+h)} = R^2 c \text{ oder}$$

$$H^2 = 2c(H+h), \text{ und}$$

$$\text{weil } \frac{v^2}{2g} = H+h \text{ ist,}$$

7)

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{H^2}{2c}; \quad h = \frac{v^2}{2g} - H.$$

Für  $c > \frac{1}{2} H$  gilt Gl. 6, für  $c < \frac{1}{2} H$  Gl. 7, für  $c = \frac{1}{2} H$  geben beide Gleichungen übereinstimmend  $\frac{v^2}{2g} = H$ .

Für  $c = \frac{2}{3} H$  gibt Gl. 6:  $\frac{v^2}{2g} = \frac{2}{3} H$ ; der Punkt  $A$  (Fig. 229) bleibt um  $h = \frac{1}{3} H$  über dem Boden.

Für  $c = \frac{1}{3} H$  gibt Gl. 7:  $\frac{v^2}{2g} = \frac{3}{2} H$ ; der tiefste Punkt  $A$  des nach unten fortgesetzten Paraboloides liegt (Fig. 230) um  $\frac{1}{2} H$  unter dem Boden; ferner wird  $r^2 : R^2 = \frac{1}{3}$ , oder  $r = 0,577 R$ .

In den vorstehenden Beispielen wurde eine bestimmte Flüssigkeitsmenge in dem Gefäße angenommen, so daß das Steigen am

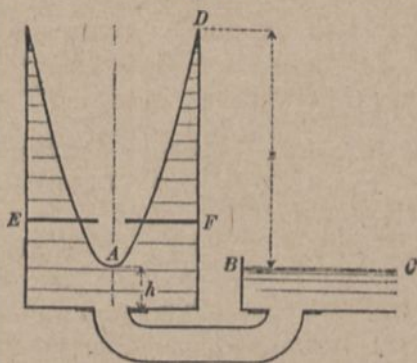
Umfang eine Senkung in der Mitte zur Folge haben mußte.

Steht aber (Fig. 231) die Mitte des Bodens des zylindrischen Gefäßes, in welchem das Wasser durch Flügel in Drehung um die lotrechte Achse des Gefäßes versetzt wird (die Flügel sind in der Figur fortgelassen), durch eine Röhre mit einem größeren Gefäße in Verbindung, so wird der Punkt  $A$  mit dem

Wasserspiegel  $BC$  in gleicher Höhe liegen müssen, wenn das Wasser im Verbindungsrohr in Ruhe bleiben soll. Bei einer Umfangsgeschwindigkeit  $v$  des Wassers am Rande wird dann dessen

höchster Punkt  $D$  um  $s = \frac{v^2}{2g}$  über  $BC$  liegen, so daß die Vorrichtung ein Mittel darstellt, Wasser zu heben. Bringt man etwas

Fig. 231.



unterhalb  $D$  einen Überlauf an, so hat man eine Art von Kreiselpumpe. Doch genügt die Geschwindigkeit  $v = \sqrt{2gs}$  noch nicht zu deren Betriebe, d. h. zur Bewegung des Wassers durch die Pumpe hindurch, sondern nur zum Halten des Wassers im gehobenen Zustande. Für den Betrieb, für wirkliche Wasserförderung, würde eine größere Geschwindigkeit  $v$  erforderlich sein, deren Entwicklung aber über den Rahmen dieses Buches hinausgeht.

In den Druckverhältnissen des flüssigen Körpers (Fig. 231) wird nichts geändert, wenn man bei  $EF$  eine Platte einschiebt, sie mit dem Gefäßmantel fest verbindet und den darüber befindlichen Teil des Gefäßes und der Flüssigkeit fortnimmt. Es entsteht dann eine Vorrichtung (Fig. 232), bei welcher der am Umfange herrschende Druck sich dadurch bemerkbar machen wird, daß das Wasser in einem seitlichen Rohre sich bis  $D$  über das Unterwasser erheben wird, wenn  $v = \sqrt{2gs}$  gemacht wird.

Der starke Druck, der sich durch große Umfangsgeschwindigkeit erzeugen läßt, findet Anwendung bei den Schleudermaschinen (Zentrifugen), welche zum Auspressen des Wassers aus nasser Wäsche, des Saftes aus Zuckerrübenbrei u. dgl. benutzt werden. Bei diesen Maschinen (Fig. 233) wird der innere, mit durchlöcherter Wandung versehene Zylinder durch eine von unten mit ihm verbundene Welle in so schnelle Drehung gesetzt, daß von der paraboloidischen Oberfläche nur ein kleines, sehr steil ansteigendes Stück zur Ausbildung gelangt. Als flüssigen Körper wollen wir uns Rübenmasse denken, welche

Fig. 232.

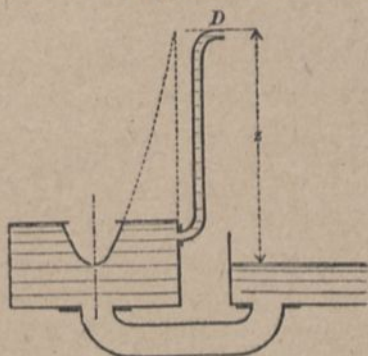
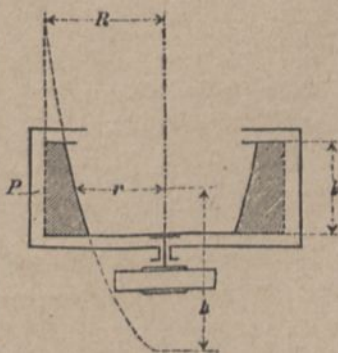


Fig. 233.



den schraffierten ringförmigen



Körper bildet, der annäherungsweise als ein Ring von der Wandstärke  $R-r$  angesehen werden kann. Der drehbare Zylinder (die Trommel) ist von einem festen Gehäuse umgeben, in welches der Saft durch die Öffnungen des Mantels eintritt. Der Druck an dem Punkte  $P$  der Trommel beträgt

$$p = \gamma \left( \frac{v^2}{2g} - h \right) \quad \text{oder}$$

$$\text{weil (nach Gl. 3)} \quad h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \frac{r^2}{R^2} \quad \text{ist,}$$

$$8) \quad p = \gamma \frac{v^2}{2g} \frac{R^2 - r^2}{R^2}.$$

Ist  $b$  die Höhe der Trommel, so ist der stärkste Druck am unteren Rande noch um  $\frac{1}{2}\gamma b$  größer; doch ist dieser Unterschied unbedeutend.

Beträgt ferner das Gewicht der eingefüllten Rübenmasse  $Q = \gamma (R^2 - r^2) \pi b$ , so kann

$$p = \frac{Q}{R^2 \pi b} \frac{v^2}{2g}$$

geschrieben werden oder, wenn man den Inhalt der ganzen Trommel  $R^2 \pi b = V$  setzt, auch

$$9) \quad p = \frac{Q}{V} \frac{v^2}{2g}.$$

Der Druck  $p$  ist also mit der Ladung  $Q$  der Trommel verhältnismäßig.

Beispiel: Für eine Schleudermaschine sei  $R = 0,5 \text{ m}$ ,  $b = 0,5 \text{ m}$ , die Ladung  $Q = 160 \text{ kg}$ , der Rauminhalt  $V = 0,5^2 \pi \cdot 0,5 = 0,393 \text{ m}^3$ . Die Maschine mache 1000 Umdrehungen in der Minute, dann ist  $v = \frac{1}{6} \cdot 314 = 52,3 \text{ m/sek}$ , also  $\frac{v^2}{2g} = 140 \text{ m}$  und  $p = \frac{160}{0,393} \cdot 140 = 57\,000 \text{ kg/m}^2 = 5,7 \text{ kg/cm}^2 = 5,7 \text{ at}$ . Die Wandung der Trommel muß also einen inneren Druck von  $5,7 \text{ at}$  aushalten. Das Mantelblech erfährt eine Spannung  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ , worin  $\sigma_1 = 2\gamma_1 \frac{v^2}{2g}$  (s. S. 102, Gl. 4) durch die eigene Masse des Bleches,  $\sigma_2 = p \frac{R}{\delta}$  (s. S. 177, Gl. 2) durch den inneren Druck  $p$  entsteht. Ist  $\gamma_1 = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $\delta = 5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m}$ , so wird

$$\begin{array}{r} \sigma_1 = 2 \cdot 7800 \cdot 140 = 2\,184\,000 \\ \sigma_2 = 57\,000 \cdot 100 = 5\,700\,000 \\ \hline \sigma = \qquad \qquad \qquad 7\,884\,000 \text{ kg/m}^2 \end{array}$$

oder  $\sigma = 788 \text{ at}$ . Diese erhebliche Anspannung macht es erklärlich, daß

derartige Schleudermaschinen in ähnlicher Weise wie Dampfkessel einer sorgfältigen Überwachung unterliegen; besonders muß mit Rücksicht auf Gl. 9 eine Überladung (zu großes  $Q$ ) vermieden werden.

### 3. Gleichgewicht gasförmiger Flüssigkeiten.

Während tropfbar flüssige Körper nahezu unveränderlichen Rauminhalt zeigen, ist der Rauminhalt der Gase in hohem Maße veränderlich. Wie man das Verhalten elastisch-fester Körper mit Hilfe von Elastizitätsgesetzen beurteilen konnte, so gibt es für Gase einfache Gesetze, denen ihr äußeres Verhalten unterworfen ist. Eine Änderung des Rauminhaltes einer Gasmenge kann erfolgen durch eine Änderung seiner Temperatur oder seines Druckes oder auch beider zugleich; die Beziehung zwischen diesen Größen heißt die Zustandsgleichung.

Es empfiehlt sich, die allgemeinen Gesetze über die Raumänderung auf eine bestimmte Menge eines Gases, nämlich auf  $1 \text{ kg}$  zu beziehen. Der Rauminhalt, den  $1 \text{ kg}$  eines Gases in irgendeinem Zustande einnimmt, heißt der Einheitsraum oder das spezifische Volumen und wird mit  $v$  bezeichnet. Die Dichte, d. h. das Gewicht von  $1 \text{ m}^3$ , wird auch hier mit  $\gamma$  bezeichnet. Da nun Dichte mal Rauminhalt gleich dem Gewichte ist, so wird  $\gamma \cdot v$  das Gewicht des Einheitsraumes  $v$ , d. h.  $\gamma v = 1 \text{ kg}$  sein. Es besteht also die Grundgleichung:

$$1) \quad \gamma v = 1 \quad \text{oder} \quad v = 1 : \gamma.$$

#### a) Der Boyle-Mariottesche Satz.

Bei gleichbleibender Temperatur ändert sich die Dichte eines Gases verhältnismäßig mit dem Drucke, der Einheitsraum also umgekehrt verhältnismäßig mit dem Drucke.

Beziehen sich nämlich Druck  $p_1$ , Einheitsraum  $v_1$  und Dichte  $\gamma_1$  auf einen Anfangszustand und  $p$ ,  $v$ ,  $\gamma$  auf einen anderen Zustand eines Gases, so ist zufolge der Erfahrung

$$2) \quad \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v},$$

oder es ist (nach Gl. 1)  $p v = \frac{p}{\gamma}$  eine unveränderliche Größe, solange die Temperatur unverändert erhalten wird.



Dies Verhalten der Gase ist vom Engländer Boyle (geb. 1626 zu Lismore in Irland, gest. 1691 zu London) im Jahre 1662 entdeckt, 1679 von dem Franzosen Mariotte (geb. 1620 zu Bourgogne, gest. zu Paris 1684), durch viele Versuche bestätigt worden und wird meist nach letzterem benannt.

Wird also ein Gas auf  $\frac{1}{5}$  seines ursprünglichen Raumes zusammengedrückt, mithin seine Dichte um das Fünffache vergrößert, so erhöht sich sein Druck ebenfalls auf das Fünffache — jedoch nur unter der Voraussetzung, daß das Gas nachher dieselbe Temperatur zeigt wie vorher.

In den meisten Fällen findet beim Zusammendrücken eine Temperaturerhöhung statt, infolgedessen der Satz dann nicht gültig ist. Nur wenn man durch besondere Vorkehrungen die Temperaturänderung verhindert, darf der Satz zur Anwendung gebracht werden.

### b) Druckverhältnisse der Atmosphäre bei überall gleicher Temperatur ( $0^{\circ}$ C.).

Die Atmosphäre übt auf alle mit ihr in Berührung befindlichen Körper einen Druck aus, der in der Höhe des Meeresspiegels im Mittel  $p_0 = 10333 \text{ kg/m}^2$  beträgt. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man (Fig. 234) einen Kolben in einem Zylinder vom Querschnitt  $F$  bei geöffnetem Hahne  $h$  abwärts schiebt, bis sämtliche Luft unter dem Kolben entfernt ist, und dann nach Schließung des Hahnes den Kolben in die Höhe zu ziehen versucht. Es setzt sich dem, abgesehen von Reibungswiderständen, ein Widerstand  $K = p_0 F$  entgegen, der nur von der Wirkung der Luft auf die obere Kolbenfläche herrühren kann.

$1 \text{ m}^3$  Luft hat bei diesem Drucke  $p_0$  und bei  $0^{\circ}$  C. ein Gewicht  $\gamma_0 = 1,293 \text{ kg}$ .

Ebenso wie im Wasser muß auch in der Luft der Druck nach oben hin abnehmen, allerdings nach einem anderen Verhältnisse, weil die Dichte der Luft veränderlich ist. Betrachten wir eine Luftsäule von  $1 \text{ m}^2$  Querschnitt, die vom Meeresspiegel lotrecht in die Höhe sich erstreckt (Fig. 235), so kann man nach S. 170 auch auf diese die Gleichgewichtsbedingungen für starre Körper

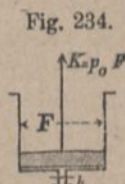


Fig. 234.

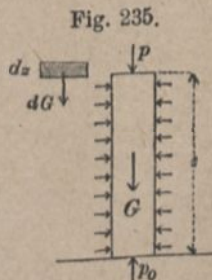


Fig. 235.

anwenden. Ist  $p$  der Luftdruck in einer Höhe  $z$  über dem Meeresspiegel, so wirken an der Luftsäule von der Höhe  $z$  die lotrechten Kräfte  $p_0$ ,  $p$  und das Gewicht  $G$ ; die Seitendrucke kommen nicht in Frage, wenn wir  $p$  berechnen wollen. Es ist demnach

$$1) \quad p = p_0 - G.$$

Wäre die Dichte überall  $\gamma_0$ , so könnte man  $G = \gamma_0 z$  setzen; dies ist aber hier nicht zulässig, weil mit  $p$  auch  $\gamma$  nach oben hin abnimmt. Die Differentiation der Gl. 1 nach  $z$  gibt

$$\frac{dp}{dz} = 0 - \frac{dG}{dz}.$$

Nennt man  $\gamma$  die Dichte der Luft in der Höhe  $z$ , so ist  $dG$  das Gewicht eines Höhentheilchens  $dz$  der Säule, daher  $dG = \gamma dz$ . Hiernach wird

$$2) \quad dp = -\gamma dz$$

Weil nun nach dem Boyleschen Satze (Gl. 2, S. 219)  $\gamma : \gamma_0 = p : p_0$  ist, so folgt

$$dp = -\frac{\gamma_0}{p_0} p dz, \quad \text{oder}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma_0}{p_0} dz.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$\ln(p) = -\frac{\gamma_0}{p_0} z + C.$$

Nennt man  $p_1$  und  $p_2$  die Atmosphärendrucke in den Höhen  $z_1$  und  $z_2$  über dem Meeresspiegel, so wird

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\frac{\gamma_0}{p_0} (z_1 - z_2) = \frac{\gamma_0}{p_0} (z_2 - z_1),$$

oder der Höhenunterschied  $h = z_2 - z_1$ , der dem Verhältnisse  $p_1 : p_2$  entspricht:

$$3) \quad h = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Diese Formel kann zum barometrischen Höhenmessen benutzt werden, freilich nur als erste Annäherung, weil darin überall gleiche Temperatur der Luftsäule angenommen ist.

Für  $0^\circ \text{ C.}$  ist

$$p_0 : \gamma_0 = 10\,333 : 1,293 = 7992 \text{ m,}$$

wofür man mit genügender Annäherung  $8000 \text{ m}$  schreiben darf. Will man sich Briggischer Logarithmen bedienen, so hat man, weil

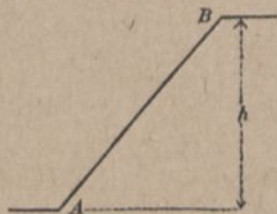


der natürliche Log. größer ist als der Briggsche, noch den Faktor  $2,30259 = \log 10$  hinzuzufügen und erhält rund

$$4) \quad h = 18400 (\log p_1 - \log p_2).$$

Es ist für die Anwendung dieser Gleichung nicht erforderlich, daß die beiden Punkte, deren Höhenunterschied man ermitteln will, in einer Lotrechten liegen. Die Gleichung ist ebenso gut auf die Punkte  $A$  und  $B$  (Fig. 236) anwendbar, wenn nur zwischen beiden ein schräges Luftprisma gleicher Temperatur im Ruhestande sich befindet. Der Luftdruck wird bekanntlich mittels Barometers durch eine Quecksilbersäule ausgedrückt. Da der Luftdruck mit jener Säule verhältnismäßig ist, so kann man in dem Verhältnisse  $p_1 : p_2$  unmittelbar die Barometer-Ablesungen anstatt der Drücke benutzen.

Fig. 236.



Beispiel 1: Es sei  $p_1 = 749,2 \text{ mm}$ ,  $p_2 = 692,7 \text{ mm}$  Quecksilbersäule, dann ist

$$h = 18400 (\log 749,2 - \log 692,7) = 628 \text{ m.}$$

Später (S. 231) werden wir dasselbe Beispiel mit Rücksicht auf verschiedene Temperaturen in  $A$  und  $B$  behandeln.

Beispiel 2: Auf Seite 8 wurde statt des Druckes von  $1,0333 \text{ kg/cm}^2 = 10333 \text{ kg/m}^2$  für die Atmosphäre der runde Wert von  $1 \text{ kg/cm}^2 = 10000 \text{ kg/m}^2$  eingeführt. Es soll mittels der Gl. 4 berechnet werden, in welcher Höhe über dem Meere dieser Druck bei  $0^\circ \text{ C.}$  etwa stattfindet.

Hiernach ergibt sich

$$h = 18400 (\log 10333 - \log 10000) = 264 \text{ m,}$$

d. i. etwa die Höhe von Ilseburg am Fuße des Brockens (s. 1. Teil, 4. Aufl., S. 100).

Zu einem Höhenunterschiede  $h = 100 \text{ m}$  gehört nach Gl. 4 ein Wert

$$\log \left( \frac{p_1}{p_2} \right) = \frac{100}{18400} = 0,0054348,$$

oder  $p_1 : p_2 = 1,01259$ . In dem gleichen Verhältnis ändert sich auch die Dichte, d. h. nur um etwa  $1/20$ . Man kann daher für alle Fälle, bei denen es nicht auf große Genauigkeit ankommt, für Luftsäulen bis zu  $100 \text{ m}$  Höhe die Dichte als überall gleich betrachten.

Mit überall gleicher Dichte  $\gamma = 1,293$  gerechnet, würde auf  $100 \text{ m}$  Höhe ein Unterschied des Luftdruckes von  $129,3 \text{ kg/m}^2$  sich ergeben; wenn also  $p_1 = 10333$ , so würde  $p_2 = 10204$ , und das Verhältnis  $p_1 : p_2 = 1,01264$ , welches von dem obigen genaueren Werte nur sehr wenig abweicht.

Diese Übereinstimmung hängt auch damit zusammen, daß in der Reihe

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots$$

für kleine  $x$  annähernd  $\log(1+x) = x$  ist, so daß, wenn also  $p_1 : p_2$  nur wenig von 1 verschieden ist,

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{p_1}{p_2} - 1 = \frac{p_1 - p_2}{p_2}$$

gesetzt werden kann. Damit geht, wenn man  $p_1 = p_0$  setzt, Gl. 3 über in

$$h = \frac{p_0}{\gamma_0} \frac{p_0 - p_2}{p_2} = \frac{p_0 - p_2}{\gamma_2} \quad (\text{annähernd}).$$

### c) Auftrieb der Luft. Luftballon.

In genau derselben Weise wie bei einem von Wasser umgebenen Körper ergibt sich auch für die von der Luft umhüllten Körper ein Auftrieb der Luft, gleich und entgegengesetzt dem Gewichte der verdrängten Luftmasse. Genau genommen, muß bei der Ermittlung des Gewichtes und des Schwerpunktes der verdrängten Luftmasse auf die Veränderlichkeit der Dichte Rücksicht genommen werden. Hat aber der verdrängende Körper keine sehr große Höhenausdehnung, so kann man nach S. 222, für seinen Bereich, die Dichte  $\gamma$  der Luft meist als überall gleich ansehen und demgemäß den Auftrieb (wie auf S. 201)

$$1) \quad A = \gamma V$$

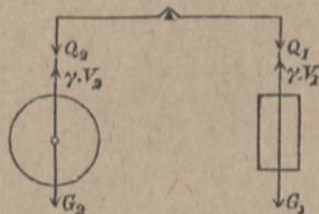
setzen, wenn  $V$  der Rauminhalt des Körpers ist.

Da die Dichte  $\gamma$  der Luft mit der Höhe abnimmt, wird auch der Auftrieb  $A$  mit zunehmender Höhe immer geringer.

Wägt man also von Luft umgebene Körper (Fig. 237), so wird, wenn der Zeiger der Wage auf Null steht, dadurch nicht die Gleichheit der wahren Gewichtes und somit der Massen beider Körper, sondern die Gleichheit der scheinbaren Gewichtes (s. S. 202) bewiesen. Auf der rechten Seite wirkt auf die Wage  $Q_1 = G_1 - \gamma V_1$ , auf der linken Seite  $Q_2 = G_2 - \gamma V_2$ . Ist  $V_2 > V_1$ , so muß  $G_2 > G_1$  sein, wenn  $Q_1 = Q_2$  ist.

Bringt man die Wage unter die Glocke einer Luftpumpe und vermindert durch allmähliches Auspumpen der Luft die Dichte  $\gamma$ , so wird  $Q_2$  schneller zunehmen

Fig. 237.





als  $Q_1$ , der Körper von größerem Rauminhalt und geringerer Dichte also sinken.

**Beispiel:** Ein Körper von Holz ( $\gamma_2 = 750 \text{ kg/m}^3$ ) werde in der Luft ( $\gamma = 1,3$ ) mit einem Gewichtsstücke von Eisen ( $\gamma_1 = 7500$ ) so abgewogen, daß der Zeiger der Wage auf Null zeigt. Welches ist das Verhältnis der beiden Massen?

Die Wage beweist

$$V_1 (7500 - 1,3) = V_2 (750 - 1,3).$$

Daher ist

$$\frac{V_2 \cdot 750}{V_1 \cdot 7500} = \frac{7500 - 1,3}{(750 - 1,3) \cdot 10} = 1,00156.$$

In diesem Verhältnis ist die Masse des Holzkörpers größer als die des eisernen Gewichtsstückes.

Bei feinen Wägungen muß daher, besonders bei sehr leichten Körpern, die augenblickliche Dichte der Luft berücksichtigt werden.

**Luftballon.** Ist das Gewicht eines Körpers kleiner als der Auftrieb der ihn umgebenden Luft, so tritt an die Stelle des scheinbaren Gewichtes eine Steigkraft  $K = \gamma V - G$ . Bedeutet  $V$  den Rauminhalt eines mit leichtem Gase von der Dichte  $\gamma'$  (bei  $0^\circ \text{ C.}$  und mittlerem Atmosphärendrucke  $p_0 = 10\,333 \text{ kg/m}^3$ ) gefüllten Ballons, so wird, wenn das Gewicht der Gasfüllung  $\gamma' V$  besonders eingeführt und  $G'$  das Gewicht aller übrigen Teile (Hülle, Tauwerk, Gondel, Ausrüstung, Besatzung, Ballast) ist, deren Rauminhalt gegenüber  $V$  vernachlässigt werden darf, die Steigkraft bei der Stellung dicht über dem Erdboden

$$2) \quad K_0 = V(\gamma - \gamma') - G'.$$

Beim Steigen nimmt der Druck und die Dichte der Luft ab. Wäre der Ballon fest geschlossen und undehnbar, so würde die Dichte  $\gamma'$  des Gases unverändert erhalten. Es bliebe dann aber, wenn wir überall gleiche Temperatur in der Luft annehmen, der innere Druck so groß wie zu Anfang, d. h. größer als der verminderte äußere Luftdruck in der erstiegenen Höhe. Einem solchen inneren Überdrucke darf man wegen der Gefahr des Zerreißen den Ballon nicht aussetzen. Deshalb wird an der Hülle des Ballons ein Sicherheitsventil angebracht, welches so eingerichtet ist, daß es den Druck im Innern nicht erheblich über den Außendruck steigen läßt. Infolgedessen wird dann auch die Dichte des Gases sich in gleichem Verhältnisse mit dem äußeren Druck ändern.

Ist der Luftdruck am Boden  $p_1$ , in einer Höhe  $h$  aber  $p_2$ , so beträgt in dieser Höhe die Steigkraft noch:

$$3) \quad K = V(\gamma - \gamma') \frac{p_2}{p_1} - G'.$$

Die Steigkraft hört auf, wenn

$$V(\gamma - \gamma') \frac{p_2}{p_1} = G' \quad \text{oder}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma - \gamma')}{G'}$$

geworden ist. Dem entspricht bei einer überall gleichen Temperatur von  $0^\circ$  C. eine Steighöhe (Gl. 4, S. 222)

$$4) \quad h = 18\,400 \log \left( \frac{V(\gamma - \gamma')}{G'} \right).$$

Beispiel: Ein Ballon von  $700 \text{ m}^3$  Rauminhalt werde mit Leuchtgas von der Dichte  $\gamma' = 0,45$  gefüllt. Das Gewicht der Hülle, des Tauwerks, der Gondel, der Ausrüstung, des Ballastes und der Besatzung betrage  $G' = 500 \text{ kg}$ , dann ergibt sich die Steigkraft über dem Erdboden (Gl. 2) zu

$$K_0 = 700(1,29 - 0,45) - 500 = 83 \text{ kg}.$$

Diese Größe hat die Spannkraft des Haltetaues, welches den Ballon am Boden festhält. Die Steighöhe des Ballons wird nach Gl. 4:

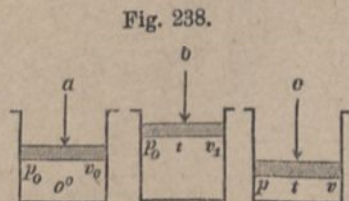
$$h = 18\,400 \log \frac{V(\gamma - \gamma')}{G'} \\ = 18\,400 \log 1,176 = 1295 \text{ m}.$$

Bei Füllung mit Wasserstoff ( $\gamma' = 0,09$ ) wird  $K_0 = 340 \text{ kg}$ ,  $h = 4146 \text{ m}$ . (Vgl. a. S. 232.)

#### d) Satz von Gay-Lussac. Zustandsgleichung der vollkommenen Gase.

Der Satz des französischen Physikers Gay-Lussac (geb. 1778 zu Leonard, gest. 1850 zu Paris), aufgestellt im Jahre 1802, bezieht sich auf die Ausdehnung der Gase durch Temperaturerhöhung bei gleichbleibendem Drucke.

Wird  $1 \text{ kg}$  Gas von  $0^\circ$  C. Temperatur, vom Rauminhalte  $v_0$  und dem Drucke  $p_0$  (Fig. 238 a) auf  $t^\circ$  C. unter gleichbleibender Kolbenbelastung, d. h. gleichbleibendem Drucke  $p_0$  erwärmt, so erfolgt eine





Ausdehnung auf den Einheitsraum  $v_1$  (Fig. 238, b) und es ist das Ausdehnungsverhältnis

$$1) \quad \frac{v_1 - v_0}{v_0} = \alpha t \quad \text{oder} \quad v_1 = v_0 (1 + \alpha t),$$

worin  $\alpha$ , die Ausdehnungsziffer, nicht allein für ein bestimmtes Gas unveränderlich ist, sondern sogar für alle Gase denselben Zahlenwert

$$\alpha = 0,003665 = 1 : 273$$

hat. Gl. 1 ergibt den Satz von Gay-Lussac: Die Ausdehnung eines Gases ist verhältnismäßig der Temperaturerhöhung.

Verstärkt man nun den Druck des Gases durch Erhöhung der Kolbenbelastung auf  $p$ , so wird der Einheitsraum sich auf  $v$  vermindern (Fig. 236, c) und wenn man diese Änderung künstlich so regelt, daß bei ihr keine Änderung der Temperatur des Gases erfolgt, so gilt für sie der Boylesche Satz

$$2) \quad v : v_1 = p_0 : p.$$

Verbindet man die Gl. 1 und 2, so entsteht

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t) = p_0 v_0 \alpha \left( \frac{1}{\alpha} + t \right),$$

oder mit Einführung des Zahlenwertes für  $\alpha$

$$pv = \frac{p_0 v_0}{273} (273 + t).$$

Bei einem bestimmten Drucke  $p_0$  und einer Temperatur von  $0^\circ \text{C}$ . hat nun  $1 \text{ kg}$  eines Gases einen bestimmten Raum  $v_0$ , daher ist  $p_0 v_0 : 273$  für ein bestimmtes Gas eine gegebene Größe, die mit  $R$  bezeichnet wird, also

$$3) \quad R = \frac{p_0 \cdot v_0}{273} \quad \text{und demgemäß}$$

$$4) \quad pv = R (273 + t).$$

Für  $t = -273$  wird die rechte Seite und somit  $pv = 0$ . Da der Raum von  $1 \text{ kg}$  Gas nicht wohl Null werden kann, so muß  $p = 0$  werden; d. h. bei einer Temperatur von  $-273^\circ \text{C}$ . würde der Druck  $p$  und somit das Ausdehnungsbestreben des Gases aufhören, wenn die Erfahrungssätze von Boyle und Gay-Lussac noch für Wärme-

grade, die von den Temperaturen der Versuche so weit entfernt liegen, gültig wären. Diese Temperatur von  $-273^{\circ}$  C. nennt man den absoluten Nullpunkt und bezeichnet die nach Celsiusgraden von diesem Nullpunkt aus gezählte Temperatur

$$5) \quad T = 273 + t$$

als die absolute Temperatur. Man erhält die absolute Temperatur eines Körpers in Celsiusgraden, indem man zu seiner vom Gefrierpunkte des Wassers aus gezählten Temperatur  $t$  in Celsiusgraden 273 hinzuzählt. Dem Gefrierpunkte des Wassers  $t = 0^{\circ}$  entspricht die absolute Temperatur  $T = 273^{\circ}$ .

Mit Gl. 5 erhält nun Gl. 4 die überraschend einfache Form

$$6) \quad p v = R T.$$

Diese Gleichung heißt die Zustandsgleichung der Gase. Sie gilt für die Gase ziemlich genau, so lange sich dieselben weit vom Verflüssigungspunkte befinden, während in der Nähe desselben sich erhebliche Abweichungen zeigen. In den folgenden Anwendungen auf Luft und andere Gase setzen wir eine vollkommene Gültigkeit der Gl. 6 voraus und nennen die Gase in diesem Sinne vollkommene Gase, indem wir uns vorstellen, das Gas sei unendlich weit von der Verflüssigung entfernt.

Den Festwert  $R$  findet man, indem man Gl. 6 auf einen bestimmten Zustand  $p$ ,  $v$ ,  $T$  anwendet. Da nun trockene atmosphärische Luft bei  $t = 0^{\circ}$  C. oder  $T = 273^{\circ}$  und bei einem Drucke  $p_0 = 10333 \text{ kg/m}^2$  eine Dichte  $\gamma_0 = 1,293$ , daher einen Einheitsraum  $v_0 = 1:1,293$  hat, so wird für trockene Luft:

$$R = \frac{10333}{1,293 \cdot 273} = 29,27.$$

Für mittelfeuchte Luft ist	$R = 29,37$ ,
„ Wasserdampf	$R = 46,95$ ,
„ Kohlensäure	$R = 19,20$ .

Wird eine Luftmenge fest eingeschlossen, so daß sie sich nicht ausdehnen kann, so muß  $v$  unverändert bleiben. Erhöht man nun die Temperatur, so muß nach Gl. 6 der Druck  $p$  verhältnismäßig der absoluten Temperatur  $T$  sich ändern:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1}.$$



War zu Anfang  $T_1 = 0 + 273$ , nachher  $T = 100 + 273 = 373$ , so wird

$$\frac{p}{p_1} = \frac{373}{273} = 1,366.$$

Hatte die Luft ursprünglich den Atmosphärendruck, so wird sie nach Erhöhung der Temperatur um  $100^\circ$  einen Druck von 1,366 Atmosphären ausüben. Hierauf beruht die Heißluftmaschine.

Bleibt die Luftmenge aber einem gleichbleibenden Druck  $p$  unterworfen, so wird sie bei einer Temperaturerhöhung sich ausdehnen, u. zw. wird nach Gl. 6 der Einheitsraum  $v$  mit der absoluten Temperatur  $T$  verhältnismäßig sich ändern:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{T}{T_1}.$$

Bei einer Temperaturerhöhung von  $0 + 273$  auf  $100 + 273$  wird also  $v$  auf das 1,366fache wachsen. Betrug die Dichte ursprünglich  $\gamma_1 = 1,293$ , so wird sie abnehmen auf  $\gamma = 1,293 : 1,366 = 0,9466$ . Auf dieser Verdünnung der Luft durch Erwärmung beruht bekanntlich der Luftballon von Mongolfier (1783), sowie das Aufsteigen warmer Luft in kalter.

#### e) Druckverhältnisse in der Atmosphäre bei gleichbleibender und veränderlicher Temperatur.

Der Grundgedanke davon ist schon auf S. 221 behandelt worden. Die dort entwickelten Gleichungen setzen die überall gleiche Temperatur von  $0^\circ$  C. voraus. Hier soll nun auch der Einfluß irgendeiner konstanten und einer veränderlichen Temperatur berücksichtigt werden. Für ein Luftteilchen von der Höhe  $dz$  galt die Gleichgewichtsbedingung (S. 221, Gl. 2)

$$dp = -\gamma dz;$$

setzt man darin nach Gl. 1, S. 219 und Gl. 6, S. 227

$$\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{RT}, \quad \text{so folgt}$$

$$1) \quad dp = -\frac{p}{RT} dz.$$

Bei gleichbleibender Temperatur  $T$  erhält man durch Integration der Gl. 1, wenn man sie in die Form bringt,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dz}{RT},$$

$$\ln(p) = -\frac{z}{RT} + C.$$

Ist in einer Höhe  $z = h_1$ ,  $p = p_1$ , so wird

$$C = \ln(p_1) + \frac{h_1}{RT},$$

womit vorstehende Gleichung übergeht in

$$2) \quad \ln\left(\frac{p_1}{p}\right) = \frac{z - h}{RT};$$

oder in Briggschen Logarithmen ausgedrückt und für  $z - h_1 = h$  gesetzt

$$3) \quad h = \frac{RT}{\log e} (\log p_1 - \log p).$$

Diese Gleichung stellt das Gesetz der Veränderlichkeit des Druckes  $p$  mit der Höhe  $h$  dar und kann zu genaueren barometrischen Höhenmessungen benutzt werden. Mit  $R = 29,37$  und  $\log e = 0,4342$  wird

$$4) \quad h = 67,63 \cdot T (\log p_1 - \log p).$$

$T = 273^\circ$ , d. i.  $t = 0^\circ$  ergibt wieder wie S. 222, Gl. 4

$$h = 18\,400 \cdot (\log p_1 - \log p);$$

$T = 288^\circ$ , d. i.  $t = 15^\circ$ , liefert dagegen ein

$$h = 19\,500 \cdot (\log p_1 - \log p).$$

Eine bequemere Zahlenrechnung für  $h$  erhält man wie folgt:

Nach S. 223 ist angenähert

$$h = \frac{p_1 - p}{\gamma}$$

und wenn man  $\gamma$  als die dem mittleren Drucke  $\frac{p_1 + p}{2}$  entsprechende Dichte der Luft ansieht, nach S. 228

$$\gamma = \frac{p_1 + p}{2RT}.$$

Die Verbindung dieser beiden Gleichungen ergibt

$$4a) \quad h = 2RT \cdot \frac{p_1 - p}{p_1 + p} = 58,74 T \frac{p_1 - p}{p_1 + p}.$$

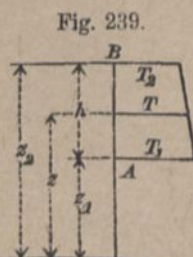
Will man die Veränderlichkeit der Temperatur  $T$  mit der Höhe berücksichtigen, so kann man mit Annäherung dafür ein lineares Gesetz annehmen und mit Bezug auf Fig. 239 etwa setzen

$$5) \quad T_1 - T = \tau(z - z_1);$$

darin bedeutet

$$6) \quad \tau = \frac{T_1 - T_2}{z_2 - z_1}$$

die Temperaturabnahme nach oben auf 1<sup>m</sup> Höhe.





Nun wird nach Gl. 5

$$dT = -\tau dz, \quad \text{oder:} \quad dz = -\frac{dT}{\tau}.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so entsteht

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{R\tau} \frac{dT}{T};$$

mithin, wenn man zwischen den Grenzen  $p_2$  und  $p_1$  bzw.  $T_2$  und  $T_1$  integriert:

$$7) \quad \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{1}{R\tau} \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right),$$

oder nach Fig. 239 und Gl. 6 und 7:

$$h = z_2 - z_1 = \frac{T_1 - T_2}{\tau} = R(T_1 - T_2) \frac{\ln p_1 - \ln p_2}{\ln T_1 - \ln T_2}.$$

Für das Verhältnis der natürlichen Logarithmen kann man auch das der Briggschen setzen, also

$$8) \quad h = R(T_1 - T_2) \frac{\log p_1 - \log p_2}{\log T_1 - \log T_2}.$$

Für trockene Luft wurde auf S. 227 der Festwert  $R = 29,27$  ermittelt. Für feuchte Luft ändert sich diese Zahl. Für die Verhältnisse Deutschlands kann man mittelfeuchte Luft annehmen, also in obiger Formel  $R = 29,37$  setzen.

**Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Schwere.** Während in der Nähe der Erdoberfläche das Gewicht von

$1^m$  Luft  $\gamma = \frac{p}{RT}$  ist (S. 228), beträgt es in

großer Höhe (Fig. 240), wenn man seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde  $z$  und den Erdhalb-

messer  $r$  nennt:  $\gamma = \frac{p}{RT} \frac{r^2}{z^2}$  (s. 1. Teil, 4. Aufl,

S. 61). Daher wird aus Gl. 1:

$$dp = -\frac{p}{RT} \cdot \frac{r^2}{z^2} \cdot dz, \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{r^2}{RT} \frac{dz}{z^2},$$

$$\text{also} \quad \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{r^2}{RT} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) = \frac{r^2}{RT} \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2}.$$

Fig. 240.



Ist nun  $z_1 = r$ ,  $z_2 - z_1 = h$ , so folgt

$$\ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) = \frac{r^2}{RT} \frac{h}{r(r+h)} = \frac{h}{1 + \frac{h}{r}} \frac{1}{RT} \quad \text{und}$$

$$9) \quad \frac{h}{1 + \frac{h}{r}} = RT \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right).$$

Der Vergleich mit Gl. 3 zeigt, daß die rechten Seiten übereinstimmen, und daß nur links  $h$  durch  $\frac{h}{1 + \frac{h}{r}}$  ersetzt ist.

Wegen  $r = 6370000$  weicht der letztere Wert meist von  $h$  nicht wesentlich ab.

Beispiel 1: Es sei wie in dem Beispiel 1 auf S. 222: am unteren Punkte  $p_1 = 749,2 \text{ mm}$ , am oberen  $p_2 = 692,7 \text{ mm}$ , außerdem aber die Temperatur

$$\text{unten } t_1 = 14,4^\circ, \quad T_1 = 287,4,$$

$$\text{oben } t_2 = 10,6^\circ, \quad T_2 = 283,6; \quad T_1 - T_2 = 3,8;$$

dann wird nach Gl. 5

$$h = 29,37 \cdot 3,8 \frac{\log 749,2 - \log 692,7}{\log 287,4 - \log 283,6} = 657,4 \text{ m}$$

(gegen  $628 \text{ m}$  für  $t_1 = t_2 = 0$ ).

Mit  $T = \frac{1}{2}(287,4 + 283,6) = 285,5$  liefert Gl. 4

$$h = 67,63 \cdot 285,5 (\log 749,2 - \log 692,7) = 657,5 \text{ m},$$

also fast dasselbe wie vorstehend.

Gl. 4 a liefert mit  $T = (287,4 + 283,6)^{1/2} = 285,5^\circ$

$$h = 58,74 \cdot 285,5^\circ \frac{749,2 - 692,7}{749,2 + 692,7} = 658,3 \text{ m},$$

d. h. etwa  $1 \text{ m}$  zuviel, was aber bei der sonstigen Unsicherheit dieses Meßverfahrens nicht erheblich ist.

Aus Gl. 9 endlich wird in Verbindung mit dem Ergebnis nach Gl. 4:

$$\frac{h}{1 + \frac{h}{6370000}} = 657,5, \quad \text{oder}$$

$$h \left( 1 - \frac{657,5}{6370000} \right) = 657,5, \quad \text{d. h.}$$

$$h = 657,6 \text{ m}.$$

Ist  $t$  ungefähr  $10^\circ \text{ C.}$  und  $p$  ungefähr  $760 \text{ mm}$ , so entspricht einer Abnahme des Barometerstandes um  $1 \text{ mm}$  Quecksilbersäule, nach Gl. 4 a, ein Höhenunterschied von rund  $11 \text{ m}$ .



Beispiel 2: Steighöhe eines Luftballons mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Temperatur. Sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_1'$  die Dichten der Außenluft und der Füllung am Erdboden, wo der Druck und die Temperatur  $p_1$  und  $T_1$  betragen und beziehen sich  $\gamma_2$ ,  $\gamma_2'$ ,  $p_2$  und  $T_2$  auf die Grenze der Steighöhe  $h$ , so gilt für letztere (nach S. 224) die Bedingung

$$K=0 \quad \text{oder} \quad V(\gamma_2 - \gamma_2') = G'.$$

Wir nehmen an, daß im Ballon dieselbe Temperatur und derselbe Druck herrsche wie außen. Dann ist nach der Zustandsgleichung (S. 228) wegen  $\gamma = 1 : v$ , wenn  $R'$  den Festwert für die Gasfüllung bedeutet,

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{R T_1}, \quad \gamma_1' = \frac{p_1}{R' T_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{p_2}{R T_2}, \quad \gamma_2' = \frac{p_2}{R' T_2};$$

daher 
$$\gamma_2 - \gamma_2' = (\gamma_1 - \gamma_1') \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}, \quad \text{und}$$

$$V(\gamma_2 - \gamma_2') = V(\gamma_1 - \gamma_1') \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = G';$$

oder 
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1') T_1}{G' T_2}.$$

Setzt man diesen Wert in Gl. 7, so entsteht

$$\log \left( \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1') T_1}{G' T_2} \right) = \frac{1}{R\tau} \log \left( \frac{T_1}{T_2} \right).$$

Daraus folgt: 
$$\log \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{G'} = \log \left( \frac{T_1}{T_2} \right) \left( \frac{1}{R\tau} - 1 \right) \quad \text{oder}$$

$$10) \quad \log \left( \frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{1}{\frac{1}{R\tau} - 1} \log \left( \frac{V(\gamma_1 - \gamma_1')}{G'} \right).$$

Hierdurch ist das Verhältnis der Temperaturen unten und an der Grenze der Steighöhe bestimmt. Kennt man nun die Temperaturabnahme  $\tau$  auf 1<sup>m</sup> Höhe, so ist

$$11) \quad h = \frac{T_1 - T_2}{\tau}.$$

Für das Beispiel auf S. 225 ist:  $V=700$ ,  $\gamma_1=1,29$ ,  $\gamma_1'=0,45$ ,  $V(\gamma_1 - \gamma_1')=588$ ,  $G'=500$ . Nimmt man auf 100<sup>m</sup> Höhe eine Abnahme der Temperatur um 0,5°, d. h.  $\tau=0,005$  an, so wird für  $R=29,37$

$$\log \left( \frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{1}{\frac{200}{29,37} - 1} \log 1,176 \quad \text{und} \quad T_2 = 0,972 T_1.$$

Beträgt nun die Temperatur unten  $T_1=283$ , so wird hiernach  $T_2=275,1$ ,  $T_1 - T_2=7,9^\circ$ , mithin

$$h = 7,9 \cdot 200 = 1580 \text{ m.}$$

Eine etwas unrichtige Schätzung von  $\tau$  beeinflusst das Ergebnis der Rechnung nur wenig, weil  $\tau$  sowohl in Gl. 10, als auch in Gl. 11 vorkommt. Mit  $\tau = 0,006$ , wird z. B.  $h = 1608$  m, gegen  $h = 1580$  m mit  $\tau = 0,005$ .

Zur Erleichterung der Berechnung dienen Jordans Barometrische Höhentafeln. (Hannover 1896. Helwing.)

## 4. Gleichgewicht zwischen tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

### a) Barometer. Druckmesser.

Die Atmosphäre übt auf die Erdoberfläche in der Höhe des Meeresspiegels einen Druck  $p_0 = 10\,333$  kg/m<sup>2</sup> aus (s. S. 220), also auch auf die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit. Dieser Druck  $p_0$  kann durch das Gewicht einer Flüssigkeitssäule von der Höhe  $h_0 = p_0 : \gamma$  ersetzt werden, worin  $\gamma$  die Dichte der Flüssigkeit ist. Für Wasser ist  $\gamma = 1000$ , daher

$$h_0 = \frac{10\,333}{1000} = 10,333 \text{ m,}$$

d. h. eine Wassersäule von 10,333 m Höhe drückt durch ihr Gewicht ebenso stark wie die Atmosphäre.

Wird in dem Gefäße (Fig. 241) aus dem rechtsseitigen, oben geschlossenen Rohre die darin befindliche Luft entfernt, so wird in dem luftleeren Rohre der Wasserspiegel um  $h_0 = 10,333$  m ansteigen und Gleichgewicht in der Flüssigkeit herrschen, weil auf der linken freien Wasserfläche des Gefäßes der Atmosphärendruck  $p_0$  lastet, welcher der Flüssigkeitssäule  $h_0$  das Gleichgewicht hält.

Besteht die Flüssigkeit aus Quecksilber mit  $\gamma = 13\,600$ , so wird

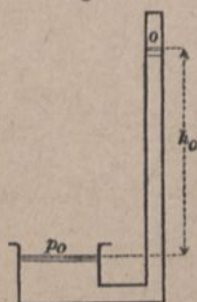
$$h_0 = \frac{10\,333}{13\,600} = 0,76 \text{ m bei } 0^\circ \text{ C.}$$

Dem mittleren Atmosphärendruck am Meeresspiegel entspricht also eine Quecksilbersäule von 760 mm Höhe.

Jede Änderung des Luftdruckes gibt sich durch Änderung von  $h_0$  zu erkennen. Darauf beruht das **Barometer** (von βαρός, schwer)

Der im Maschinenwesen eingeführten Atmosphäre von 10000 kg/m<sup>2</sup> entsprechen  $10\,000 : 13\,600 = 0,735 \text{ m} = 735 \text{ mm}$  Quecksilbersäule.

Fig. 241.





Für die Wettersäule zu Hannover, welche 57 m über dem Meere liegt, berechnet sich bei überall gleicher Temperatur von 10° C. der Druck  $p_2$  nach Gl. 4, S. 229, indem man darin  $h=57$ ,  $T=283$ ,  $p_1=760$  setzt; es wird

$$\log p_2 = \log 760 - \frac{57}{67,63 \cdot 283}$$

und  $p_2 = 754,8 \text{ mm}$  Quecksilbersäule.

**Druckmesser.** (Manometer, von *μανός*, dünn.) Wie man den Atmosphärendruck durch eine Flüssigkeitssäule mißt, so kann man auch die Pressungen anderer (tropfbarer oder gasförmiger) Flüssigkeiten durch damit im Gleichgewichte befindliche Flüssigkeitssäulen messen und mit dem Atmosphärendrucke vergleichen.

Soll der Druck  $p$  des in dem Behälter  $B$  (Fig. 240) befindlichen Dampfes oder Gases gemessen werden, so verbindet man mit dem Behälter einen oben bei  $A$  offenen Druckmesser. Dann wirkt bei  $A$  der Atmosphärendruck  $p_0$  und bei  $C$ , in einer Tiefe  $z$  unter dem Flüssigkeitsspiegel bei  $A$ , der Druck  $p = p_0 + \gamma z$ , wenn  $\gamma$  die Dichte der Meßflüssigkeit ist. Es folgt

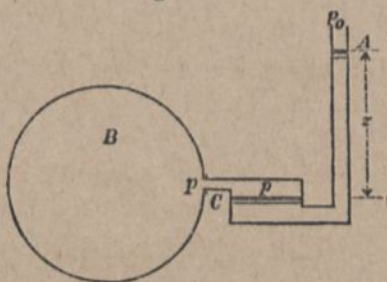
$$1) \quad p - p_0 = \gamma z$$

und mit  $p_0 = \gamma h_0$

$$2) \quad \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{z}{h_0}.$$

$p - p_0$  ist der Überdruck im Behälter  $B$  gegen die Atmosphäre und  $(p - p_0) : p_0$  der in Atmosphären ausgedrückte Überdruck.

Fig. 242.



Jeder Atmosphäre Überdruck ( $10000 \text{ kg/m}^2$ ) entspricht eine Quecksilbersäule von  $735 \text{ mm}$ ; zum Messen von 10 Atmosphären ist daher eine Säule von  $7,35 \text{ m}$  erforderlich. Derartige Druckmesser eignen sich deshalb nur für feststehende, nicht für bewegliche Dampfessel. Bei letzteren benutzt man Federmanometer, die den Druck aus der elastischen Formänderung einer Gefäßwand erkennen lassen. Die Teilung solcher Federmanometer läßt sich aber nicht berechnen, sondern muß vielmehr durch Vergleichung mit einem offenen Quecksilber-Druckmesser gefunden werden. Das Quecksilber befindet sich in einer Eisenröhre; ein auf ihm schwimmendes Eisenstück ist durch eine über eine Rolle laufende Schnur mit einem in

bequemer Höhe befindlichen Zeiger verbunden, so daß man Hebung und Senkung des Quecksilberspiegels aus der Bewegung des Zeigers zu erkennen vermag.

Für geringen Überdruck, wie er z. B. in den Röhren für Leuchtgas herrscht, benutzt man Wasser als Meßflüssigkeit und drückt auch den Überdruck nicht in <sup>at</sup>, sondern in <sup>mm</sup> Wassersäule aus; 1 <sup>mm</sup> Wassersäule entspricht  $\frac{1}{10000}$  Atmosphäre, da 1 <sup>at</sup> mit 10 <sup>m</sup> Wassersäule gleichbedeutend ist; 25 <sup>mm</sup> Wassersäule entspricht daher  $\frac{1}{400}$  <sup>at</sup>.

Zum Messen von Drücken in Kondensatoren, Feuerzügen, Schornsteinen u. dgl., welche kleiner sind als der Atmosphärendruck, dienen Minderdruck-Messer (Vakuummeter) (Fig. 243). Es ist

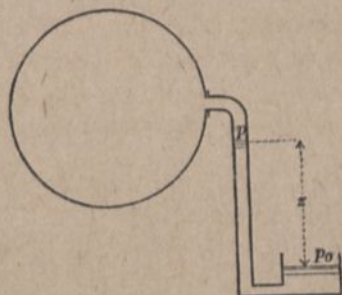
$$p + \gamma z = p_0, \text{ oder}$$

$$p_0 - p = \gamma z \text{ und mit } p_0 = \gamma h_0$$

$$3) \quad \frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{z}{h_0};$$

letzteres ist der Minderdruck in Atmosphären.

Fig. 243.

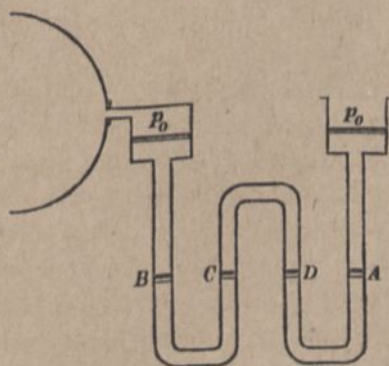


**Zusammengesetzter Druckmesser geringerer Höhe.** Die mehr-

fach auf und nieder gebogenen Röhren (Fig. 244) sind im unteren

Teile (unter *AB*) mit Quecksilber, im oberen Teile mit einer leichteren Flüssigkeit, etwa Wasser oder Glycerin, gefüllt. Bei gleichen Drücken  $p_0$  in beiden oberen Gefäßen steht das Quecksilber in allen Röhren bis zu der Wagerechten *AB*. Wächst der Druck aber auf der linken Seite von  $p_0$  auf  $p$  (Fig. 245), während rechts der Atmosphärendruck  $p_0$  wirksam bleibt, so senkt sich bei *B* das Queck-

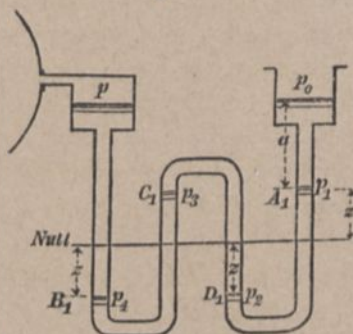
Fig. 244.





silber um  $z$ , steigt daher bei  $C$  und sinkt bei  $D$  um das gleiche Maß  $z$ , muß also schließlich bei  $A$  um  $z$  steigen, wenn die Röhren überall gleiche Weite haben, weil die Flüssigkeiten nicht zusammen-drückbar sind.

Fig. 245.



Die oberen Gefäße werden hierbei also so weit vorausgesetzt, daß ihre Flüssigkeitsspiegel nicht wesentlich schwanken. Die Dichte der schwereren Flüssigkeit sei  $\gamma_1$ , die der leichteren  $\gamma$ .

Es ist dann bei  $A_1$  der Druck  $p_1 = p_0 + \gamma a$ , bei  $D_1$  der Druck  $p_2 = p_1 + 2\gamma_1 z = p_0 + \gamma a + 2\gamma_1 z$ , bei  $C_1$  der Druck  $p_3 = p_2 - 2\gamma z = p_0 + \gamma(a - 2z) + 2\gamma_1 z$ , bei  $B_1$  der Druck  $p_4 = p_3 + 2\gamma_1 z = p_0 + \gamma(a - 2z) + 4\gamma_1 z$  und schließlich der im oberen, linksseitigen Gefäße vorhandene Druck  $p = p_4 - \gamma(a + 2z) = p_0 + 4(\gamma_1 - \gamma)z$ . Aus letzterem folgt der Überdruck in <sup>1st</sup>:

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{4(\gamma_1 - \gamma)z}{\gamma_1 h_0} = 4 \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}\right) \frac{z}{h_0},$$

wenn  $h_0$  diejenige Höhe der Flüssigkeit mit der größeren Dichte  $\gamma_1$  ist, welche dem Atmosphärendruck  $p_0$  entspricht. Man erkennt leicht, daß, wenn statt 4 Röhren  $2n$  Röhren in entsprechender Weise hintereinander geschaltet sind,

$$4) \quad \frac{p - p_0}{p_0} = 2n \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}\right) \frac{z}{h_0} \quad \text{wird.}$$

Für  $\gamma_1 = 13\,600$  (Quecksilber),  $\gamma = 1000$  (Wasser),  $h_0 = 735 \text{ mm}$  (1<sup>st</sup>) ergibt sich

$$\frac{p - p_0}{p_0} = 2n \left(1 - \frac{1}{13,6}\right) \frac{z}{735} = 2n \frac{z}{793},$$

und mit  $2n = 8$ ,

$$z = \frac{p - p_0}{p_0} \cdot 91 \text{ mm};$$

hier erfordert also 1<sup>st</sup> nur 99 mm Teilungshöhe der Quecksilbersäule, gegen 735 mm beim einfachen Druckmesser.

## b) Saugpumpe. Kreiselpumpe. Heber.

$AB$  (Fig. 246) sei der Wasserspiegel eines Brunnens. In einem zylindrischen Rohre, dessen unteres Ende ins Wasser taucht, befindet sich ein beweglicher dicht schließender Kolben. Der Druck des Wassers im Brunnen und in dem unterhalb des Kolbens befindlichen Teile des Rohres ist am einfachsten zu berechnen, wenn man sich in der Höhe  $h_0$  über dem wahren Wasserspiegel einen Wasserspiegel  $A_1 B_1$  denkt, auf den kein Atmosphärendruck wirkt. Ist durch das Spiel der (in der Figur nicht gezeichneten) Ventile — nach einer gewissen Zahl von Kolbenhüben — die Luft aus dem Rohrteile unterhalb des Kolbens entfernt, so herrscht hier, in der Höhe  $z$  über  $AB$ , also in der Tiefe  $h_0 - z$  unter  $A_1 B_1$  ein Druck

$$1) \quad p_1 = \gamma(h_0 - z).$$

Befindet sich oberhalb des Kolbens noch kein Wasser, so wirkt dort der Atmosphärendruck  $p_0$ . Ist  $F$  der Querschnitt der Röhre, so ist an dem Kolben eine aufwärts gerichtete Kraft

$$2) \quad K = (p_0 - p_1) F = \gamma F z$$

für den Ruhezustand, sowie für langsame gleichmäßige Aufwärtsbewegung erforderlich, gerade so, als ob die Wassersäule von der Höhe  $z$  nicht unterhalb des Kolbens von dem Atmosphärendrucke in der Schwebelage erhalten würde, sondern auf dem Kolben lastete.

Die Gl. 2 für  $K$  gilt aber nur so lange, wie Gl. 1 für  $p_1$  einen positiven Wert ergibt, d. h. für  $z \leq h_0$ , oder so lange sich die untere Kolbenfläche höchstens um  $h_0$  über dem Wasserspiegel  $AB$  befindet. Für  $z > h_0$  würde nach Gl. 1 der Druck  $p_1$  negativ. Negative Flüssigkeitsdrücke gibt es aber nicht, da Flüssigkeiten keine nennenswerte Zugfestigkeit haben. Mithin hört bei wachsendem  $z$  die Gültigkeit der Gl. 1 mit  $z = h_0$

Fig. 246.

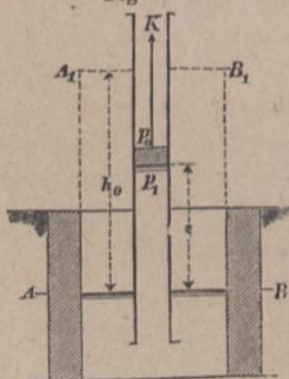
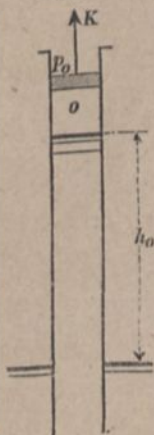


Fig. 247.

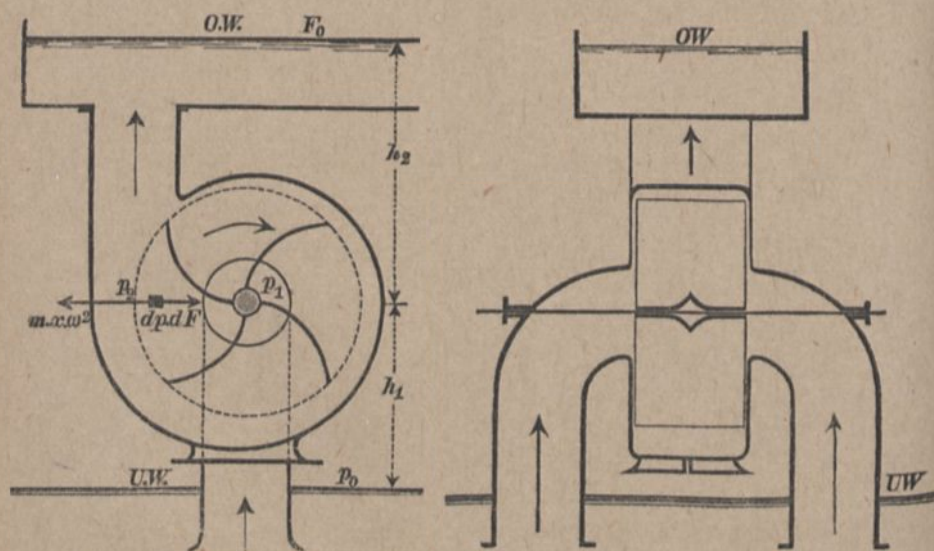




auf. Für  $z > h_0$  bleibt der Druck unter dem Kolben Null, das Wasser drückt nicht mehr gegen den Kolben, folgt ihm nicht mehr bei seiner Aufwärtsbewegung, sondern verbleibt in der Höhe  $h_0$  über dem Wasserspiegel des Brunnens stehen (Fig. 247), und unter dem Kolben entsteht (abgesehen von der Verdampfung des Wassers) ein druckloser Raum, so daß nunmehr unveränderlich  $K = \gamma F h_0$  bleibt. Das Aufsaugen einer Flüssigkeit ist daher nur bis zu der dem Atmosphärendrucke entsprechenden Flüssigkeitshöhe  $h_0$  (bei Wasser bis etwa  $10^m$ ) möglich.

**Kreiselpumpe (Zentrifugalpumpe).** Auf S. 217 wurde gezeigt, daß Wasser durch schnelle Drehung um eine lotrechte Achse auf eine Höhe  $z$  (Fig. 232) gehoben werden konnte und daß die erforderliche Umfangsgeschwindigkeit  $v = \sqrt{2gz}$  sein müsse. Bei den zum Wasserfördern bestimmten Kreiselpumpen (Fig. 248) erfolgt die Drehung meist um eine wagerechte Achse, die oberhalb

Fig. 248.



des Unterwassers  $U.W.$  liegt, so daß das Wasser auf eine gewisse Höhe angesogen und dann weiter emporgedrückt wird. Es läßt sich zeigen, daß die Beziehung  $v = \sqrt{2gz}$  auch bei dieser Anordnung gültig bleibt.

Die wagerechte Drehachse liege um  $h_1$  über dem Unterwasser, um  $h_2$  unter dem Oberwasser.

Betrachtet man ein Teilchen  $m$  der in gleichmäßiger Drehung begriffenen Wassermasse, welches auf dem wagerechten Halbmesser im Abstand  $x$  von der Drehachse liegt, nennt  $dx$  seine Länge in der Richtung  $x$ ,  $dF$  den Querschnitt in lotrechter Ebene, so ist die Ergänzungskraft  $m \cdot x \cdot \omega^2 = \frac{\gamma}{g} dF \cdot dx \cdot x \cdot \omega^2$ . Ist  $p$  der Druck im Abstände  $x$  von der Achse, so wächst dieser nach außen auf die Länge  $dx$  um  $dp$ . Daher muß sein

$$dp \cdot dF = \frac{\gamma}{g} \cdot dF \cdot dx \cdot x \cdot \omega^2 \quad \text{oder}$$

$$dp = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot x \cdot dx.$$

Sind die Drücke für  $x = r$  und  $x = 0$  bzw.  $p_2$  und  $p_1$ , so wird

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{2g} r^2 \omega^2.$$

Nun ist

$$p_1 = p_0 - \gamma h_1; \quad p_2 = p_0 + \gamma h_2,$$

daher (mit  $r\omega = v$ )

$$1) \quad h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g},$$

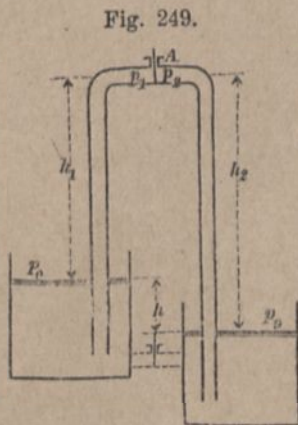
oder wenn man den Höhenunterschied zwischen Unter- und Oberwasser  $h_1 + h_2 = h$  setzt,

$$2) \quad v = \sqrt{2gh},$$

wie S. 217 gefunden. Mit dieser Geschwindigkeit  $v$  kann man das Wasser in den Röhren im Ruhezustande erhalten, so daß es nicht herabsinkt. Zur Wasserförderung muß  $v$  größer werden.

Die Saughöhe  $h_1$  muß hierbei kleiner sein, als  $h_0$  (vgl. S. 238).

Heber. Das Heberrohr (Fig. 249) tauche mit seinen unteren Enden in 2 Gefäße, deren Wasserspiegel um  $h = h_2 - h_1$  verschieden hoch liegen, wobei zunächst  $h_1 < h_2 < h_0$  sein soll. Das Heberrohr sei vollständig mit Flüssigkeit gefüllt und bei  $A$  durch einen Schieber dicht geschlossen; dann





wird die Flüssigkeit des Hebers in Ruhe sein. An der linken Seite des Schiebers herrscht ein Druck

$$p_1 = p_0 - \gamma h_1 = \gamma (h_0 - h_1),$$

an der rechten Seite desselben ein Druck

$$p_2 = p_0 - \gamma h_2 = \gamma (h_0 - h_2);$$

der Schieber erfährt daher einen Überdruck

$$1) \quad p_1 - p_2 = \gamma (h_2 - h_1) = \gamma h$$

von links nach rechts, gerade so, wie es in dem punktiert ange deuteten, die Gefäße unmittelbar verbindenden Rohre der Fall sein würde. Wird der Schieber im Heberrohr entfernt, so muß also Wasser von links nach rechts hinüberfließen.

Senkt man bei geschlossenem Schieber  $A$  das rechte Gefäß, so daß  $h_2 = h_0$  wird, während  $h_1 < h_0$  bleibt, so wird  $p_2 = 0$  und der Schieber erleidet von links den Überdruck

$$2) \quad p_1 = p_0 - \gamma \cdot h_1 = \gamma (h_0 - h_1),$$

der größer ist, als nach Gl. 1 und auch unverändert bleibt, wenn  $h_2 > h_0$  wird, weil dann rechts vom Schieber ein luftleerer Raum entsteht. Demnach muß in solchen Fällen Wasser durch den Heber fließen, sobald der Schieber geöffnet wird. — Senkt man nun aber das linke Gefäß, so daß  $h_1 = h_0$  wird, während  $h_1 < h_2$  bleibt, so wird auch der Überdruck  $p_1 = 0$  und die Heberwirkung hört auf. Die Saughöhe  $h_1$  eines Hebers muß daher ebenfalls stets kleiner sein, als die dem Atmosphärendruck entsprechende Flüssigkeitshöhe  $h_0$  (s. S. 238).

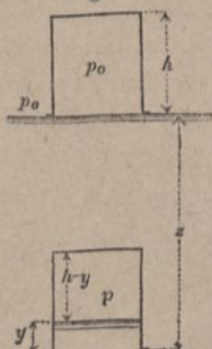
### c) Taucherglocke.

Ein oben geschlossenes, unten offenes Gefäß (Fig. 250), welches mit Luft gefüllt ist, werde um die Tiefe  $z$  im Wasser niedergesenkt; dann wird Wasser von unten auf eine Höhe  $y$  in dem Gefäße (der Glocke) emporsteigen und man wird aus der Höhe  $y$  auf die Tiefe  $z$  schließen können.

Die Luft wird durch das eintretende Wasser von  $p_0$  auf  $p$  zusammengedrückt, und wenn man annimmt, daß die Temperatur der Luft sich nicht ändert, so gilt nach dem Boyle'schen Satze (S. 219)

$$1) \quad p : p_0 = h : (h - y).$$

Fig. 250.



Außerdem ist aber (wegen der Tiefe  $z$  unter Wasser)

$$2) \quad p = p_0 + \gamma(z - y).$$

Hieraus folgt, mit  $p_0 = \gamma h_0$ :

$$3) \quad z = h_0 \left( \frac{h}{h - y} - 1 \right) + y = y \left( \frac{h_0}{h - y} + 1 \right).$$

**Beispiel:** Soll das Wasser höchstens bis zur Mitte der Glocke steigen, ist also  $y = \frac{1}{2}h$ , so darf die Senkungstiefe nach Gl. 3 nur

$$z = h_0 + \frac{1}{2}h$$

sein; zugleich wird der Druck in der Glocke  $p = 2p_0$ .

Soll der Glockenraum aber in beliebiger Tiefe  $z$  wasserfrei bleiben, so muß  $y = 0$  und der Luftdruck in der Glocke nach Gl. 2 stets  $p = p_0 + \gamma z = \gamma(h_0 + z)$  sein, was durch Zuführung künstlich verdichteter Luft zu ermöglichen ist. (Taucherapparate, Druckluftgründung.)

Wie die Größe des Luftraums in der Taucherglocke, so ist auch der Auftrieb, der auf diese wirkt, von der Tiefe  $z$  abhängig. Nehmen wir an, daß in irgendeiner Tiefe  $z$  der Auftrieb und das Gewicht der Glocke einander gleich sind, die Glocke sich also selbst überlassen hinsichtlich der lotrechten Kräfte im Gleichgewicht befindet, so kann dieses nur ein unsicheres (labiles) sein. Wird nämlich die Glocke etwa durch einen vorübergehenden lotrechten Kraftangriff nach auf- oder abwärts um ein geringes aus ihrer Lage verschoben, so vergrößert oder verkleinert sich der Luftraum und damit der Auftrieb und die Glocke steigt beschleunigt auf- oder abwärts.

Größere Taucherglocken werden zuweilen lediglich durch Vergrößerung oder Verkleinerung des Luftraumes, d. h. durch Hineinpumpen oder Auslassen von Luft, auf- oder abwärts bewegt. Dabei kann der bezüglich der lotrechten Kräfte unsichere Gleichgewichtszustand der Glocke eine Gefährdung derselben und der etwa in ihr befindlichen Personen mit sich bringen. Dieser Gefahr kann man vorbeugen, wenn man den bei derart großen Taucherglocken für den Ein- und Ausgang von Personen und das Ein- und Ausbringen von Sachen, Baumaterial usw. erforderlichen Schachtaufbau (Fig. 250a) mit hinreichend großem Querschnitt ausführt. Folgende Betrachtung soll darüber Aufschluß geben:

Das sichere Gleichgewicht bezüglich der lotrechten Kräfte verlangt, daß die Glocke nebst Schachtaufbau so lange in einer



bestimmten Tiefenlage  $z$  verharrt, als nicht durch Ein- und Auslassen von Luft ein planmäßiges Steigen oder Sinken herbeigeführt wird. Ohne eine solche Vermehrung oder Verminderung des Luftinhaltes muß die Glocke, wenn sie etwa durch vorübergehenden Kraftangriff im lotrechten Sinne um etwas aus ihrer Lage bewegt wird, sich selbst überlassen, dahin zurückkehren, d. h. es muß einer jeden noch so kleinen Aufwärtsbewegung eine Auftriebsverminderung und jeder Abwärtsbewegung eine Auftriebsvermehrung entgegenwirken. Das wird erreicht, wenn das Verhältnis des äußeren Schachtquerschnittes  $f$  zum lichten Querschnitt  $F$  der Glocke einen bestimmten Kleinstwert nicht unterschreitet. Wächst nämlich die Tauchtiefe  $z$  um  $dz$ , so vermehrt sich die Wasserverdrängung um  $f \cdot dz$  und der Auftrieb um  $f \cdot dz \cdot \gamma$ . Gleichzeitig tritt aber infolge der elastischen Zusammendrückung der Luft in der Glocke eine Auftriebsverminderung um  $dy \cdot F$ , und also im ganzen eine Auftriebsänderung um  $f \cdot dz - F \cdot dy$  ein, und zwar muß diese nach obigem größer als Null sein. Daraus folgt die Bedingung

$$4) \quad \frac{f}{F} > \frac{dy}{dz}.$$

Zwischen  $dy$  und  $dz$ , die ersichtlich stets gleichsinnig im Vorzeichen sind, besteht nach S. 240 die Beziehung

$$\frac{h_0 + z + dz - y - dy}{h_0 + z - y} = \frac{(h - y) F}{(h - y - dy) \cdot F'}$$

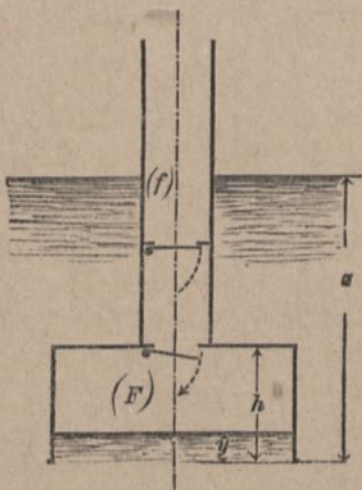
woraus folgt

$$5) \quad \frac{dy}{dz} = \frac{h - y}{h + h_0 + z}.$$

Danach drückt sich die Bedingung für das in jeder Höhenlage sichere Gleichgewicht der Glocke aus durch die Beziehung

$$6) \quad \frac{f}{F} > \frac{h - y}{h + h_0 + z}.$$

Fig. 250 a.



Den größten Wert nimmt das Verhältnis  $f:F$  für die höchste in Frage kommende Lage der Taucherglocke, d. h. für die kleinste Tauchtiefe  $z$  an, und diese Lage ist daher maßgebend für jenes Verhältnis, oder, wenn der erforderliche Querschnitt  $F$  der Glocke durch den Verwendungszweck gegeben ist, für den Schachtquerschnitt  $f$ .

## 5. Gleichförmige Drehung gasförmiger Körper um eine Achse.

### Flügelgebläse.

Ein Flügelgebläse (Fig. 251) hat in seinem Wesen große Ähnlichkeit mit der Kreiselpumpe (S. 238). An der Drehachse herrsche durch freie Verbindung mit der Außenluft der Druck  $p_1$ , am äußeren Umfange betrage der Druck  $p_2$ .

Für ein Massenteilchen  $m$  im Abstände  $x$  von der Achse gilt wieder wie auf S. 239

$$dp = \frac{\gamma}{g} \omega^2 x dx.$$

Für die weitere Behandlung ist jetzt nur

die Veränderlichkeit von  $\gamma$  zu berücksichtigen. Nach dem Boyleschen

Satze ist  $p = p_0 \frac{\gamma}{\gamma_0}$ , daher

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{\omega^2}{g} x dx.$$

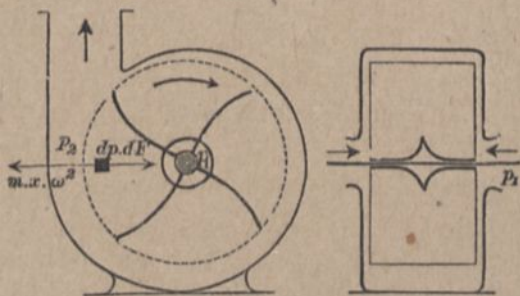
Integriert man zwischen den Grenzen  $p_2$  (für  $x = r$ ) und  $p_1$  (für  $x = 0$ ), so wird (mit  $\omega r = v$ )

$$1) \quad \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = \frac{\gamma_0 \omega^2 r^2}{p_0 2g} = \frac{\gamma_0 v^2}{p_0 2g}.$$

Für  $0^\circ \text{ C.}$  und  $p_0 : \gamma_0 = 8000^m$  (S. 221), erhält man

$$2) \quad \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = \frac{1}{8000} \frac{v^2}{2g}.$$

Fig 251.





Beispiel: Macht das Flügelrad von  $r = 0,5^m$  in der Minute 800 Umdrehungen, so ist  $v = \frac{800 \cdot 0,5 \cdot 2\pi}{60} = 41,89^m/\text{sek}$ ; dem entspricht eine Geschwindigkeitshöhe von  $90^m$ ; sonach wird

$$\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{90}{8000} = 0,01125, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1,0113 \quad \text{und}$$

$$p_2 = (1 + 0,0113)p_1.$$

Der Druck in dem Flügelrade ändert sich also nur um 0,0113 oder etwa  $\frac{1}{88}$ , daher kann auch die Dichte annähernd als gleichbleibend betrachtet werden, so daß man für die meisten Fälle mit genügender Annäherung (in Übereinstimmung mit S. 239) schreiben kann

$$p_2 - p_1 = \gamma_1 \frac{v^2}{2g}, \quad \text{oder mit } \frac{p_1}{\gamma_1} = 8000$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{1}{8000} \frac{v^2}{2g}, \quad \text{also mit } \frac{v^2}{2g} = 90^m$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{1}{8000} \frac{v^2}{2g} = 1,01125 \quad \text{und}$$

$$p_2 = (1 + 0,01125)p_1.$$

Es folgt dies auch aus Gl. 1, wenn man mit Rücksicht darauf, daß  $\frac{p_2}{p_1}$  nur wenig von der Einheit abweicht,  $\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \ln(1+x)$  annähernd  $= x = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$  setzt (vgl. S. 223).

Der Unterschied beider Werte für  $p_2$  ist also sehr gering.

Mit dem angegebenen Flügelgebläse erreicht man nur einen Überdruck von rund  $\frac{1}{89}$  Atmosphäre, gemessen durch  $\frac{10000}{89} = 113^m$  Wassersäule. Dieser Druck genügt für Schmiedefener.

## 6. Allgemeine Gleichgewichtsbedingung für Flüssigkeiten von L. Euler.

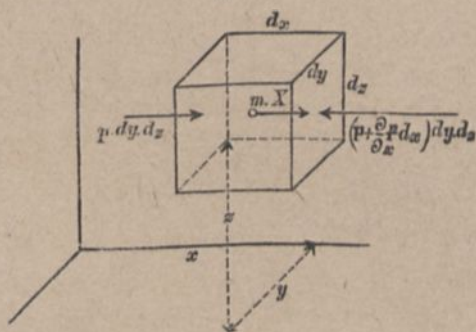
Auf ein Massenteilchen  $m = \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz$  (Fig. 252) wirke eine Massenkraft, welche in der Form  $R \cdot m$  geschrieben und dadurch schon als eine Massenkraft gekennzeichnet wird;  $R$  ist die Beschleunigung, welche das Teilchen durch die Kraft erfahren würde. Der Druck betrage an der Stelle  $x, y, z$ , wo das Teilchen sich befindet,  $p$ ; dann ist

$$1) \quad p = f(x, y, z)$$

eine Funktion von  $x, y$  und  $z$ , da der Druck in der Flüssigkeit im allgemeinen von Punkt zu Punkt wechseln wird.

Die Beschleunigung  $R$  der Massenkraft werde nach den Achsenrichtungen in  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  zerlegt; dann wirkt auf das Teilchen in der  $x$ -Richtung die Massenkraft  $X \cdot m$ . An der linken Seitenfläche von der Größe  $dy \cdot dz$  wirkt die Oberflächenkraft  $p \cdot dy \cdot dz$ . Beim Übergange von der linken nach der rechten Seitenfläche ändert sich  $x$  um  $dx$ , während  $y$  und  $z$  dieselben bleiben; somit wächst auch der Druck

Fig. 252.



um das partielle Differential  $\frac{\partial p}{\partial x} dx$ . Das Gleichgewicht des Teilchens verlangt daher in der  $x$ -Richtung:

$$X \cdot m = \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{oder}$$

$$X \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{\gamma}{g} X dx = \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

In gleicher Weise gilt für die anderen Achsenrichtungen

$$\frac{\gamma}{g} Y dy = \frac{\partial p}{\partial y} dy,$$

$$\frac{\gamma}{g} Z dz = \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Durch Zusammenzählen der 3 Gleichungen entsteht auf der rechten Seite das vollständige Differential  $dp$  des Druckes, nämlich

$$2) \quad \frac{\gamma}{g} (X dx + Y dy + Z dz) = dp.$$

Sind  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  als Funktionen von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  gegeben, so führt die Integration der Gl. 2 zu dem Gleichgewichtsdrucke  $p$  (Gl. 1).



Vertauscht man aber in Gl. 2 die rechte Seite  $dp$  mit Null, so drückt (da  $\gamma$  nicht Null sein kann)

$$3) \quad (Xdx + Ydy + Zdz) = 0$$

die Bedingung aus, für solche Zusammenstellungen der Koordinaten  $x, y, z$ , welche einem gleichbleibenden Drucke  $p$  entsprechen. Die hierdurch bezeichneten Punkte in der Flüssigkeit bilden eine Fläche überall gleichen Druckes oder eine Niveaulfläche, deren Gleichung durch Integration von Gl. 3 erhalten und

$$4) \quad f(x, y, z) = \text{Const.}$$

geschrieben werden kann. Die Funktion hat dieselbe Form wie in Gl. 1. Jedem anderen Werte der Const. entspricht eine andere Niveaulfläche mit einem anderen Drucke.

Die Niveaulflächen stehen in einer einfachen Beziehung zur Richtung der Massenkraft  $R \cdot m$ . An einem Punkte  $P$  innerhalb einer im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit (Fig. 253) bilde  $R$  mit den Achsen die Richtungswinkel  $\alpha, \beta, \delta$ .  $PQ$  sei ein beliebiges Kurventeilchen  $ds$ , welches in einer durch  $P$  gelegten Niveaulfläche liegen soll;  $ds$  habe die Richtungswinkel  $\alpha_1, \beta_1, \delta_1$ .

Dann gilt für den Winkel  $\vartheta$  zwischen  $R$  und  $ds$  die Gleichung

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \delta \cdot \cos \delta_1.$$

Nun sind  $X, Y, Z$  die Projektionen von  $R$ ;  $dx, dy, dz$  diejenigen von  $ds$  auf die drei Achsen, mithin ist

$$\begin{aligned} R \cos \alpha &= X; & R \cos \beta &= Y; & R \cos \delta &= Z; \\ ds \cos \alpha_1 &= dx; & ds \cos \beta_1 &= dy; & ds \cos \delta_1 &= dz. \end{aligned}$$

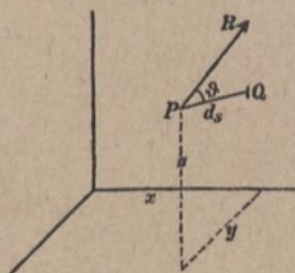
Daher wird

$$R ds \cos \vartheta = X dx + Y dy + Z dz.$$

Weil nun für Kurventeilchen innerhalb einer Niveaulfläche die Gl. 3 gilt, so muß

$$5) \quad R ds \cos \vartheta = 0, \quad \text{d. h. } \vartheta = 90^\circ \quad \text{sein.}$$

Fig. 253.



Oder:

Eine Niveaufläche steht in jedem ihrer Punkte rechtwinklig zu der für den betreffenden Punkt gültigen Massenkraft  $R \cdot m$ .

Diese allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen sind von Leonhard Euler (geb. zu Basel 1707, gest. zu Petersburg 1783) im Jahre 1755 entwickelt worden.

Aus vorstehendem Satze folgt unmittelbar, daß, wenn die Schwere die einzige Massenkraft ist, die Niveauflächen wagerechte Ebenen sind (S. 183).

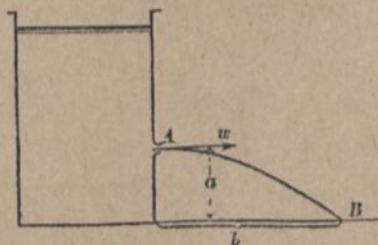
Da die freie Oberfläche einer Flüssigkeit ebenfalls eine Niveaufläche ist, so finden auch die Entwicklungen über die Gestalt der freien Oberfläche (S. 183/84) hier noch eine festere Begründung.

## B. Bewegung flüssiger Körper.

### 1. Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.

Wird in der Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefäßes (Fig. 254) bei  $A$  eine kleine Öffnung frei gemacht, so entsteht ein ausfließender Wasserstrahl. Die einzelnen Wasserteilchen führen eine parabolische Wurfbewegung aus (1. Teil, 4. Aufl., S. 00). Ist  $w$  die wagerechte Geschwindigkeit, mit der ein Wasserteilchen bei  $A$  das Gefäß verläßt,  $a$  die Höhe von  $A$  über dem Boden,  $t$  die Zeit der Bewegung von  $A$  bis  $B$ , so wird

Fig. 254.





unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes  $a = \frac{1}{2}gt^2$ ;  $b = wt$ ,  
mithin

$$1) \quad \frac{b}{w} = \sqrt{\frac{2a}{g}},$$

so daß bei bekanntem  $a$  aus der Sprungweite  $b$  des Strahles die Ausflußgeschwindigkeit  $w$  berechnet werden kann.

War die Öffnung geschlossen, demnach alles im Gefäße befindliche Wasser in Ruhe, und macht man die Öffnung plötzlich frei, so wird die ganze im Gefäße befindliche Wassermasse in Beschleunigung geraten; die Geschwindigkeit, mit der die einzelnen aufeinander folgenden Wassertropfen aus der Öffnung treten, ist nicht die gleiche, sondern eine allmählich wachsende; daher wächst auch die Sprungweite  $b$ . Jedoch lehrt die Erfahrung, daß die Veränderung von  $b$  und  $w$  sehr schnell erfolgt, daß sich schon nach sehr kurzer Zeit (meist schon nach 1 Sekunde) eine bestimmte Sprungweite  $b$  und somit eine bestimmte Geschwindigkeit  $w$  gebildet hat, die nun unverändert dieselbe bleibt, wenn der Wasserspiegel im Gefäße durch Zufluß stets auf gleicher Höhe erhalten wird. Gleichzeitig hiermit werden sich nun an allen Stellen des Gefäßes dauernde Bewegungs- und Druckverhältnisse gebildet haben.

Diesen Zustand nennt man **Beharrungszustand**. In allen nachfolgenden Untersuchungen nehmen wir an, daß der Beharrungszustand eingetreten sei und lassen die höchst verwickelten Verhältnisse vor dem Eintritte desselben, die meist noch nicht einmal 1 Sekunde währen, außer acht.

Zunächst wird das Wasser als eine vollkommen reibungslose Flüssigkeit angesehen, auch wird angenommen, daß das Gefäß an allen Stellen zwischen Wasserspiegel und Öffnung von Wasser erfüllt sei, also keine leeren Räume enthalte. (Unter welchen Bedingungen letztere bei der Bewegung des Wassers vorkommen, wird später erörtert.) Auch sollen plötzliche Querschnittsänderungen im Gefäß vorläufig noch nicht angenommen werden.

#### a) Ideelle Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge durch eine Bodenöffnung.

Das Wasser ergieße sich (Fig. 255) durch eine in wagerechter Ebene liegende Öffnung  $DC = F$ . Das Gefäß habe von der Mitte

des Wasserspiegels bis zur Mitte der Ausflußöffnung eine Mittel-  
linie und verenge sich nach der Öffnung hin allmählich. Dann  
wird man annehmen können, daß  
die durch die Öffnung  $F$  aus-  
tretenden Wasserteilchen mit  
gleichen Geschwindigkeiten durch  
den Öffnungsquerschnitt hin-  
durchgehen. Es tritt während  
eines Zeitteilchens  $dt$  ein pris-  
matischer Wasserkörper  $F \cdot w \cdot dt$   
unten aus. Dessen Masse sei  
das Massenteilchen

$$m = \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot w \cdot dt$$

1)

$$= \frac{\gamma}{g} \cdot F_0 \cdot w_0 \cdot dt.$$

Letzteres folgt daraus, weil das  
gleiche Massenteilchen  $m$  oben  
verschwinden muß; denn ist  $F_0$

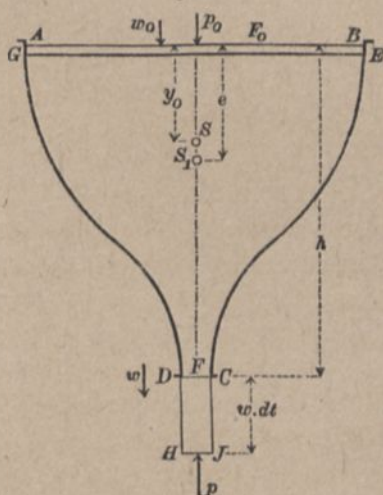
der Querschnitt des Wasserspiegels,  $w_0$  die Geschwindigkeit, mit  
der er sinkt, so muß offenbar  $F_0 \cdot w_0 \cdot dt = F \cdot w \cdot dt$  sein.

Wir wollen nun den Satz der Arbeit (1. Teil, 4. Aufl., S. 000)  
auf die im Gefäße befindliche Wassermasse, u. zw. für ein Zeit-  
teilchen  $dt$  anwenden. Hinsichtlich des Zuflusses im Wasserspiegel  
werde angenommen, daß der Spiegel zuerst während der Zeit  $dt$   
um  $w_0 \cdot dt$ , d. h. von  $AB$  nach  $GE$  sinkt und daß dann plötzlich  
eine Wasserschicht  $ABEG$  zum Ersatze wieder aufgebracht werde.  
Der Wasserkörper  $GECD$ , der zu Anfang und zu Ende des Zeit-  
teilchens vorhanden war, habe die Masse  $M$  und wegen des Be-  
harrungszustandes ein unveränderliches Arbeitsvermögen  $E$ .

Die gesamte Wassermasse im Gefäß ist dann  $M + m$ , wovon  $m$   
sich zu Anfang oben vorfindet, nach der Zeit  $dt$  aber unten. Die-  
selbe Stelle des Gefäßes wird nacheinander von verschiedenen  
Massenteilchen eingenommen, die an dieser Stelle stets die gleiche  
Geschwindigkeit haben und nur durch andere vertauscht sind.

Zu Ende des Zeitteilchens  $dt$  ist das gesamte Arbeitsvermögen  
der Wassermasse  $M + m$  offenbar:  $E + \frac{1}{2}mw^2$ , zu Anfang aber,

Fig. 255.





wo die Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $w_0$  sich oben befand:  $E + \frac{1}{2}mw_0^2$ . Daher entsteht in dem Zeiteilchen  $dt$  eine Zunahme an Arbeitsvermögen

$$2) \quad \frac{1}{2}m(w^2 - w_0^2).$$

Diese muß der Arbeit aller wirkenden Kräfte gleich sein.

Der Schwerpunkt  $S_1$  von  $M$  liege um  $e$  unter  $AB$ . Dann gilt für die Tiefe  $y_0$  des Schwerpunktes  $S$  von  $M + m$  zu Anfang des Zeiteilchens  $dt$ :

$$(M + m)y_0 = Me + m \cdot \frac{1}{2}w_0 dt,$$

da der Körper  $GEB A$  die Höhe  $w_0 dt$  hat. Nach der Zeit  $dt$  liege der Schwerpunkt um  $y_0 + dy_0$  unter  $AB$ , dann ist aus denselben Gründen

$$(M + m)(y_0 + dy_0) = Me + m(h + \frac{1}{2}w dt),$$

wenn  $h$  die Höhe des Wasserspiegels über der Öffnung ist. Daher wird

$$(M + m)dy_0 = m(h + \frac{1}{2}w dt - \frac{1}{2}w_0 dt)$$

und, wenn man rechts die unendlich kleinen Größen gegen  $h$  vernachlässigt,  $(M + m)dy_0 = mh$ . Das Gewicht von  $M + m$  verrichtet also in der Zeit  $dt$  die Arbeit (1. Teil, 4. Aufl., S. 168)

$$3) \quad (M + m)g dy_0 = mgh.$$

Steht nun der Wasserspiegel unter einem Drucke  $p_0$ , die Öffnung unter dem Drucke  $p$ , so verrichten die Kräfte  $p_0 F_0$  und  $p F$  während der Zeit  $dt$  die Arbeit

$$4) \quad p_0 F_0 w_0 dt - p F w dt = mg \frac{p_0 - p}{\gamma}$$

wegen der Beziehungen in Gl. 1.

Die Schwerkraft und die Drücke  $p_0$  und  $p$  leisten daher während der Zeit  $dt$  zusammen die Arbeit

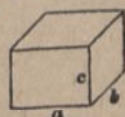
$$5) \quad mg \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right).$$

Die Druckkräfte des Gefäßes gegen die Wassermasse verrichten keine Arbeit, da sie überall rechtwinklig zur Bewegungsrichtung stehen. Die inneren Kräfte im Wasser leisten aber

ebenfalls keine Arbeit, denn sie sind reine Normalkräfte, die einem Gleiten keinen Widerstand entgegensetzen und nur bei einer Änderung des Rauminhaltes Arbeit verrichten könnten.

Trennt man nämlich an einer Stelle, wo der Druck  $p'$  herrscht, ein kleines Parallelepipid  $a \cdot b \cdot c$  heraus, (Fig. 256), so verrichten die Druckkräfte, wenn die Seiten sich um  $da$ ,  $db$ ,  $dc$  vergrößern, die Arbeit

Fig. 256.



$$-p'(b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc).$$

Da aber  $V = a \cdot b \cdot c$  und  $dV = b \cdot c \cdot da + a \cdot c \cdot db + a \cdot b \cdot dc$  ist, wird die Arbeit der Druckkräfte

$$-p' dV = 0,$$

weil bei Wasser  $dV = 0$  ist.

Durch Gleichstellung der Werte Gl. 2 und Gl. 5 ergibt sich

$$I) \quad m \left( \frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2} \right) = mg \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right),$$

welche als Grundgleichung aller Ausflußbewegungen gilt. Die linke Seite enthält die Zunahme, welche das Arbeitsvermögen der im Gefaße enthaltenen Wassermasse in der Zeit  $dt$  erleidet, die rechte Seite die gleichzeitig verrichtete Arbeit. Dabei bezeichnet  $m$  das Massenteilchen, welches während der Zeit  $dt$  unten ausströmt und gleichzeitig auch durch alle Querschnitte des Gefaßes hindurchgeht. Später etwa zu berücksichtigende Widerstandsarbeiten oder Arbeitsverluste können in Gl. I leicht hinzugefügt werden; aus diesem besonderen Grunde ist der gemeinsame Faktor  $m$  noch nicht gestrichen worden.

Will man aber  $w$  berechnen, so bedenke man, daß nach Gl. 1

$$F_0 w_0 = F w, \quad \text{daher} \quad w_0 = w \frac{F}{F_0} \quad \text{ist.}$$

Damit entsteht nach Gl. 1:

$$w^2 \left( 1 - \frac{F^2}{F_0^2} \right) = 2g \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right), \quad \text{oder}$$

$$6) \quad w = \sqrt{\frac{2g \left( h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \right)}{1 - \frac{F^2}{F_0^2}}}.$$



Diese Geschwindigkeit bezeichnen wir als ideale Ausflußgeschwindigkeit, weil bei ihrer Berechnung die Reibung vernachlässigt wurde; die wirkliche Geschwindigkeit ist kleiner (s. S. 257). Es ist  $p_0 - p$  der Druckunterschied zwischen Wasserspiegel und Öffnung.  $\frac{p_0 - p}{\gamma}$  die entsprechende Wassersäule; diese tritt zu  $h$  hinzu und bildet mit ihr die gesamte wirksame Druckhöhe.

In den weitaus meisten Fällen ist  $p = p_0$ . Da es sich nun nicht empfiehlt, wegen der selten vorkommenden Fälle ungleicher Drücke stets mit einer unbequemen Formel zu rechnen, wollen wir  $\frac{p_0 - p}{\gamma}$  als mit in  $h$  steckend betrachten, so daß in Zukunft  $h$  die ganze wirksame Druckhöhe bedeuten soll. Dann wird einfacher

$$7) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{F^2}{F_0^2}}}$$

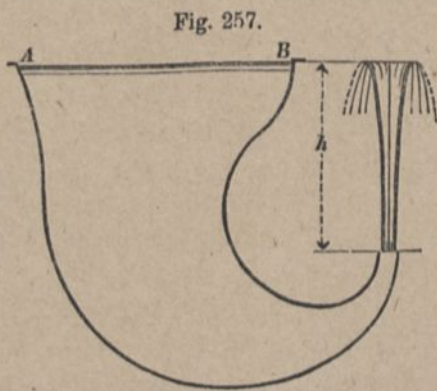
In den meisten Fällen ist auch die Ausflußöffnung  $F$  klein, gegen die Wasserspiegelfläche  $F_0$ , so daß in Gl. 7 die Größe  $F^2 : F_0^2$  gegen 1 vernachlässigt und einfach

$$8) \quad w = \sqrt{2gh}$$

gesetzt werden kann.

In diesem Falle ist die ideale Ausflußgeschwindigkeit gleich der Fallgeschwindigkeit, welche einer Fallhöhe gleich der wirksamen Druckhöhe entspricht; oder die Geschwindigkeitshöhe des Ausflusses ist dann gleich der wirksamen Druckhöhe  $h$ .

Die vorstehenden Formeln gelten auch noch für den Fall der Fig. 257, wo der Strahl lotrecht aufwärts austritt. Hierin liegt auch eine einfache Prüfung der Rechnung; denn der mit der Geschwindigkeit  $w$  austretende Strahl müßte ohne Widerstände die



Höhe  $\frac{w^2}{2g} = h$  erreichen, d. h. zur Höhe des Wasserspiegels  $AB$  ansteigen. Reibung des Wassers im Gefäße und Luftwiderstand außerhalb desselben vermindern aber die Steighöhe.

Taucht das Gefäß nach Fig. 258 in ein Unterwasser ein, so ist die Eintauchungstiefe als eine Gegendruckhöhe aufzufassen, so daß als wirksame Druckhöhe nur der Höhenunterschied  $h$  der beiden Wasserspiegel gilt.

Da in jedem Zeiteilchen  $dt$  eine Raummengung  $F \cdot w \cdot dt$  austritt, so ist die ideale sekundliche Ausflußmenge in Raumeinheiten ( $m^3$ )

$$9) \quad Q = F \cdot w = F \sqrt{2gh}.$$

### b) Ideale Ausflußmenge durch eine Seitenöffnung.

Befindet sich die Öffnung in lotrechter Ebene, so gelten die vorstehenden Gleichungen nur dann für diesen Fall, wenn die Öffnung so geringe Höhererstreckung hat (Fig. 259), daß man für alle Punkte der Öffnung die gleiche Ausflußgeschwindigkeit  $w$  annehmen darf, so daß der ausfließende Wasserkörper wiederum ein Prisma bildet. Es paßt für diesen Fall die Entwicklung der Gl. I (S. 251) vollständig, wenn man dabei die Höhe  $h$  vom Wasserspiegel bis zum Schwerpunkte der Öffnung rechnet.

Hat die Öffnung aber eine größere Höhererstreckung, so ist die Annahme einer überall gleichen Ausflußgeschwindigkeit nicht mehr zulässig. Man denkt sich nun (Fig. 260) aus der Öffnung  $F$  einen wagerechten Streifen von der Höhe  $dz$ , der Breite  $x$  und der Fläche  $dF = x \cdot dz$ , welcher um  $z$  unter dem Wasserspiegel liegt,

Fig. 258.

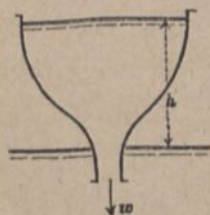


Fig. 259.

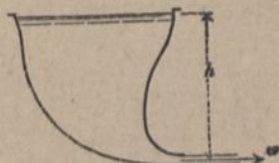
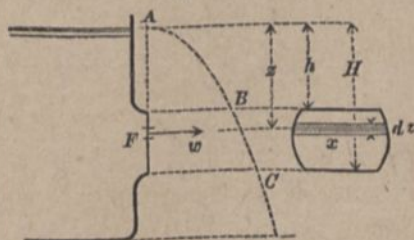


Fig. 260.



welcher um  $z$  unter dem Wasserspiegel liegt,



herausgenommen, berechnet für diesen Streifen die Ausflußgeschwindigkeit  $w = \sqrt{2gz}$  und die sekundliche Ausflußmenge in Raumeinheiten ( $m^3$ )

$$dQ = dF \cdot w = dF \cdot \sqrt{2gz}.$$

Die Summation der Ausflußmengen für die sämtlichen Streifen der Öffnung gibt dann die gesamte Ausflußmenge

$$1) \quad Q = \sqrt{2g} \int dF \sqrt{z} = \sqrt{2g} \int_{z=h}^{z=H} x \sqrt{z} \cdot dz,$$

wenn Ober- und Unterkante der Öffnung um  $h$  bzw.  $H$  unter dem Wasserspiegel liegen.

Die Geschwindigkeit  $w = \sqrt{2gz}$  läßt sich durch eine Parabel  $ABC$  mit lotrechter Achse und vom Parameter  $g$  darstellen. Die sekundliche Wassermenge ist offenbar ein prismatischer Wasserkörper, dessen Querschnitt die Ausflußöffnung, und dessen äußere Begrenzung die parabolische Zylinderfläche  $BC$ , rechtwinklig zur Bildebene, ist.

**Vereinfachung der Berechnung.** Die Integration der Gl. 1 ist nur möglich, wenn die Form der Öffnung gegeben, also  $x = f(z)$ , bekannt ist. Liegt die Öffnung aber einigermaßen tief unter dem Wasserspiegel, so läßt sich das Parabelstück  $BC$  annähernd mit einer Geraden vertauschen, also eine mittlere Geschwindigkeit und eine mittlere Druckhöhe  $z_0$ , nämlich diejenige des Schwerpunktes  $S$  der Öffnung (Fig. 261) einführen, wie folgende Betrachtung zeigt:

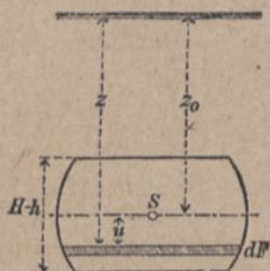
Dem Streifen  $dF$  in der Tiefe  $u$  unter dem Schwerpunkte entspricht eine Druckhöhe  $z = z_0 + u$ , und eine Ausflußmenge

$$\begin{aligned} dQ &= dF \sqrt{2gz} = dF \sqrt{2g(z_0 + u)} \\ &= dF \sqrt{2gz_0} \left(1 + \frac{u}{z_0}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

oder, nach der binomischen Reihe

$$dQ = dF \sqrt{2gz_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{u}{z_0} - \frac{1}{8} \frac{u^2}{z_0^2} + \dots \right\}.$$

Fig. 261.



Ist nun die Höhe der Öffnung  $H - h \leq 1/2 z_0$ , so wird, wenn der Schwerpunkt ziemlich in der Mitte der Höhe liegt, der größte Wert von  $u \leq 1/4 z_0$ , daher in diesem Fall  $\frac{u}{z_0} \leq \frac{1}{4}$ , mithin das dritte Glied der binomischen Reihe

$$\frac{1}{8} \frac{u^2}{z_0^2} \leq \frac{1}{128},$$

also so klein, daß man es vernachlässigen kann. Benutzt man daher von der binomischen Reihe nur die beiden ersten Glieder, so wird

$$dQ = \sqrt{2gz_0} \left\{ dF + \frac{1}{2} \frac{dF \cdot u}{z_0} \right\} \quad \text{und}$$

$$Q = \sqrt{2gz_0} \left\{ F + \frac{1}{2z_0} \int dF \cdot u \right\}.$$

Es ist aber in bezug auf den Schwerpunkt  $\int dF \cdot u = 0$ , also

$$2) \quad Q = F \sqrt{2gz_0},$$

Diese von der Form der Öffnung ganz unabhängige, daher sehr bequeme Gleichung ist also anwendbar, wenn

$$3) \quad 2(H - h) \leq z_0,$$

d. h., wenn die Tiefe  $z_0$  des Schwerpunktes der Öffnung unter dem Wasserspiegel, mindestens gleich der doppelten Höhe der Öffnung ist.

**Beispiel:** Ein prismatisches Gefäß (Fig. 262) stehe auf wagrechtem Boden und sei bis zu einer Höhe  $h$  mit Wasser gefüllt. In welcher Tiefe  $z$  unter dem Wasserspiegel muß eine kleine Öffnung angebracht werden, damit der Strahl möglichst große Sprungweite  $b$  habe?

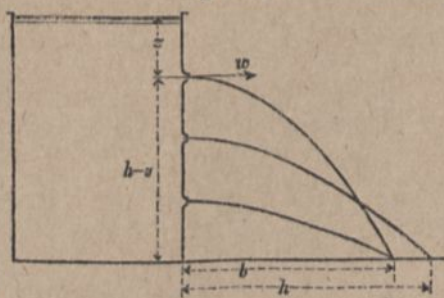
Je tiefer man die Öffnung legt, um so größer wird  $w$ , um so kleiner aber die Höhenentwicklung der Parabel, und umgekehrt. Mit

$w = \sqrt{2gz}$  und  $a = h - z$  wird nach Gl. 1, S. 248:

$$b = 2\sqrt{(h-z)z}.$$

Hierin sind  $z$  und  $h - z$  vertauschbar. Eine Öffnung in der Tiefe  $z = 1/4 h$  gibt also dieselbe Sprungweite wie eine solche in  $z = 3/4 h$ . Seinen größten Wert erreicht

Fig. 262.





aber  $b$  für  $z = \frac{1}{2}h$ . Denn  $(h-z)z$  ist der Inhalt eines Rechtecks vom Umfange  $2h$ . Ein Rechteck von gegebenem Umfange hat aber seinen größten Inhalt, wenn es die Form eines Quadrats von der Seite  $\frac{1}{2}h$  besitzt; dann ist  $F = \frac{1}{4}h^2 = (h-z)z$ , mithin  $z = \frac{1}{2}h$  und  $b_{max} = h$ . Es entsteht dann die Wurfparabel größter Wurfweite (1. Teil, 4. Aufl., S. 55), welche den Boden unter  $45^\circ$  schneidet.

**Rechteckige Seitenöffnung.** Mit unveränderlichem  $x = b$  (s. Fig. 260, S. 253) erhält man nach Gl. 1 die ideelle Ausflußmenge durch eine rechteckige Seitenöffnung:

$$4) \quad Q = b \sqrt{2g} \int_h^H z^{3/2} dz = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \{H^{3/2} - h^{3/2}\}.$$

Reicht die Öffnung bis zum Wasserspiegel, so hat man einen freien Überfall, und es wird mit  $h = 0$ , dessen ideelle Ausflußmenge:

$$5) \quad Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} H^{3/2} = \frac{2}{3} b H \sqrt{2gH}.$$

Beispiel: Für die Schützenöffnung eines Gerinnes (Fig. 263) sei  $b = 1\text{ m}$ ,  $h = 1,4\text{ m}$ ,  $H = 2\text{ m}$ ; dann liefert Gl. 4:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 4,43 \{ 2,83 - 1,66 \} \\ = 3,455 \text{ m}^3/\text{sek}.$$

Es ist in diesem Falle  $2(H-h) = 1,2\text{ m} < z_0 = 1,7\text{ m}$ , daher auch die Annäherungsformel Gl. 2, anwendbar; sie ergibt:

$$Q = 0,6 \cdot 4,43 \cdot \sqrt{1,7} = 3,466 \text{ m}^3/\text{sek};$$

der Unterschied beider Rechnungen ist also nur unerheblich.

(Über die wirkliche Ausflußmenge dieses Zahlenbeispiels s. S. 260.)

Anmerkung. Man kann die Annäherungsformel Gl. 2:  $Q = F \sqrt{2g z_0}$  auch über die Grenze der Gl. 3:  $2(H-h) = z_0$  hinaus ohne wesentlichen Fehler anwenden. Denn sogar für den freien Überfall mit  $z_0 = \frac{1}{2}H$  ergibt sie

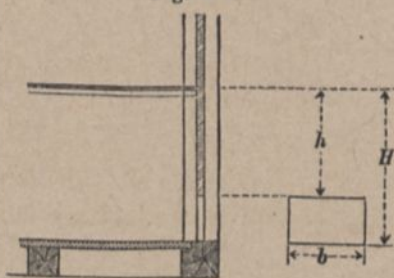
$$Q = b H \sqrt{2g \cdot 0,5 H} = 0,707 b H \sqrt{2gH},$$

während die genaue Gl. 5

$$Q = 0,667 b H \sqrt{2gH}$$

liefert, so daß selbst in diesem äußersten Falle der Unterschied nur 6% beträgt.

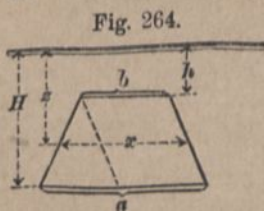
Fig. 263.



Trapezförmige Seitenöffnung. Nach Fig. 264 ist

$$\frac{x-b}{a-b} = \frac{z-h}{H-h}, \quad \text{oder}$$

$$x = b + \frac{a-b}{H-h}(z-h).$$



Die genaue Gl. 1 ergibt dann

$$Q = \sqrt{2g} \int_h^H \left\{ b + \frac{a-b}{H-h}(z-h) \right\} z^{1/2} dz$$

$$= \sqrt{2g} \left\{ \frac{2}{3} \frac{bH-a h}{H-h} (H^{3/2} - h^{3/2}) + \frac{2}{5} \frac{a-b}{H-h} (H^{5/2} - h^{5/2}) \right\} \quad \text{oder}$$

$$6) \quad Q = \frac{2\sqrt{2g}}{H-h} \left\{ \frac{bH-a h}{3} (H^{3/2} - h^{3/2}) + \frac{a-b}{5} (H^{5/2} - h^{5/2}) \right\}.$$

Diese Formel ist schon so verwickelt, daß man meist die Annäherungsformel Gl. 2 vorziehen wird.

### c) Wirkliche Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge.

**Geschwindigkeitsziffer** (Geschwindigkeitskoeffizient). Die bisherigen Formeln wurden entwickelt unter der Annahme reibungsloser Flüssigkeit. Für eine kleine Öffnung ergab sich danach die ideelle Ausflußgeschwindigkeit (Gl. 8, S. 252) zu

$$w = \sqrt{2gh}.$$

Die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit ist wegen der Reibungswiderstände, die im Gefäß auftreten, kleiner und wird erhalten, indem man den ideellen Wert noch mit einer Berichtigungszahl, der sog. Geschwindigkeitsziffer  $\varphi$  ( $< 1$ ), multipliziert. Dann ist in Wirklichkeit

$$1) \quad w = \varphi \sqrt{2gh}.$$

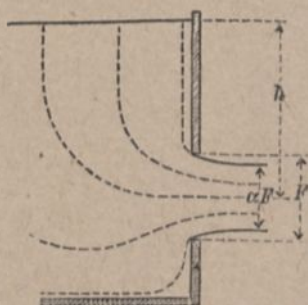
Diese Geschwindigkeitsziffer  $\varphi$  weicht nur wenig von der Einheit ab, beträgt bei kleiner Druckhöhe  $\varphi = 0,96$ , wächst aber nach Versuchen von Weisbach (Freiberg i. S.) mit zunehmender Druckhöhe bis auf 0,99 an. Wir werden in den weiteren Beispielen stets mit

$$2) \quad \varphi = 0,96 \quad \text{rechnen.}$$



**Einschnürung (Kontraktion). Ausflußziffer (Ausflußkoeffizient).**  
 In einem Gefäße, dessen Wände sich nach der Ausflußöffnung hin allmählich zusammenziehen, wie Fig. 255 (S. 249), Fig. 257 (S. 252), Fig. 259 (S. 253), fließen die einzelnen Wasserteilchen in parallelen Linien durch die Öffnung und bilden sog. Stromlinien oder Wasserfäden, welche die Öffnung rechtwinklig schneiden, so daß die sekundliche Ausflußmenge  $Q = F \cdot w$  als ein Prisma vom Querschnitte  $F$  angesehen werden kann. Befindet sich aber die Öffnung in einer ebenen Wand (Fig. 265), so fließen die Wasserteilchen in ganz verschiedenen Richtungen der Öffnung zu, wie in der Figur durch Stromlinien angedeutet ist. Diejenigen Teilchen, welche an der Wand entlang strömen, können ihre Bewegungsrichtung nicht plötzlich um  $90^\circ$  ändern (weil jeder Knick in der Bahnlinie eine unendlich große Normalbeschleunigung, d. h. unendlich große Kräfte erfordern würde), sondern gehen in gekrümmten Bahnlinien um die Innenkante der Öffnung herum. Erst außerhalb des Gefäßes in einer gewissen Entfernung von dem Öffnungsquerschnitte  $F$  haben sich die Wasserfäden wieder parallel gelagert und bilden einen Strahlquerschnitt  $\alpha F$ .

Fig. 265.



Diese Erscheinung heißt die Einschnürung (Kontraktion) des Strahles, und die Größe  $\alpha$  ( $< 1$ ), mit der man den Öffnungsquerschnitt  $F$  multiplizieren muß, um den Querschnitt  $\alpha F$  des zusammengezogenen Strahles zu erhalten, heißt Einschnürungsziffer (Kontraktionskoeffizient).

Mit der wirklichen Geschwindigkeit  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  (Gl. 1) wird daher die wirkliche Ausflußmenge:

$$3) \quad Q = \alpha \cdot F \cdot w = \alpha \cdot \varphi F \sqrt{2gh}.$$

In dieser Gleichung kommt das Produkt  $\alpha \varphi$  zweier Berichtigungsziffern vor, das man zu einer Größe

$$4) \quad \mu = \alpha \cdot \varphi$$

vereinigen kann, welche Ausflußziffer (Ausflußkoeffizient) genannt

wird, weil man die ideelle Ausflußmenge  $F\sqrt{2gh}$  Gl. 9 S. 253) noch mit  $\mu$  multiplizieren muß, um das wirkliche  $Q$  zu erhalten, also die wirkliche Ausflußmenge:

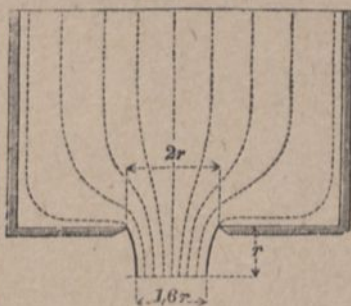
$$5) \quad Q = \mu \cdot F \cdot \sqrt{2gh}.$$

Während die Geschwindigkeitsziffer  $\varphi$  nur wenig schwankt, auch nur wenig von der Einheit abweicht, ist die Einschnürungsziffer  $\alpha$  und somit auch die Ausflußziffer  $\mu = \alpha\varphi$  von vielen Umständen abhängig, z. B. auch von der Dicke und Beschaffenheit der Wandung, in welche die Öffnung eingeschnitten ist. Bestimmte Erscheinungen treten auf, wenn die Öffnung sich in dünner Wand befindet oder wenn der Einfluß des Öffnungsrandes durch Zuschärfung nach Fig. 266 nahezu beseitigt ist. Befindet sich dann außerdem die Öffnung verhältnismäßig weit von den Gefäßwänden entfernt, so kann man für diesen Grundfall der Einschnürung ziemlich bestimmt setzen:

$$6) \quad \alpha = 0,64 \text{ und } \mu = 0,96 \cdot 0,64 = 0,61.$$

Ist die Öffnung ein Kreis vom Durchmesser  $2r$ , so erfolgt eine Einschnürung des Strahls auf  $1,6r$ , u. zw. befindet sich dieselbe im Abstände  $r$  von der Mündung (Fig. 266).

Fig. 266.



Über die Ausflußziffern für rechteckige Seitenöffnungen in dünner Wand haben die französischen Artillerieoffiziere Poncelet und Lesbros 1828—1834 Versuche angestellt. (Ausführlichere Angaben findet man in Rühlmanns Hydromechanik.) Dabei wurde die Höhe  $h$  des Wasserspiegels über der Oberkante der Öffnung in einer solchen Entfernung von der Wand gemessen, wo der Spiegel noch wagerecht war, während er nach der Wand zu sich etwas senkte. Es kommt dabei wesentlich auf die Größe der kleineren Seite  $b$  der Öffnung an, gleichgültig, ob dieselbe lotrecht oder wagerecht gerichtet ist. Einige Ergebnisse der Versuche enthält folgende Tabelle:



Ausflußziffer  $\mu$  für rechtwinklige Seitenöffnungen in dünner Wand.

Höhe $h$ des Wasserspiegels über der Oberkante der Öffnung	$\mu$ bei kleinster Seite der Öffnung von:		
	0,05 m	0,1 m	0,2 m
0,10	0,631	0,615	0,600
0,15	0,631	0,616	0,600
0,20	0,630	0,617	0,601
0,30	0,630	0,618	0,602
0,40	0,629	0,618	0,603
0,50	0,628	0,617	0,604
0,60	0,628	0,617	0,604
0,70	0,627	0,617	0,605
0,80	0,627	0,616	0,605
0,90	0,626	0,616	0,605
1,00	0,626	0,615	0,605
1,20	0,624	0,614	0,604
1,40	0,621	0,612	0,603
1,60	0,618	0,611	0,602
1,80	0,615	0,609	0,602
2,00	0,613	0,607	0,601
3,00	0,606	0,603	0,601

Mit diesen Ziffern  $\mu$  ist also die rechte Seite der Gl. 4, S. 256 noch zu multiplizieren, um die wirkliche Ausflußmenge zu erhalten. Es wird damit:

$$7) \quad Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \{H^{3/2} - h^{3/2}\}.$$

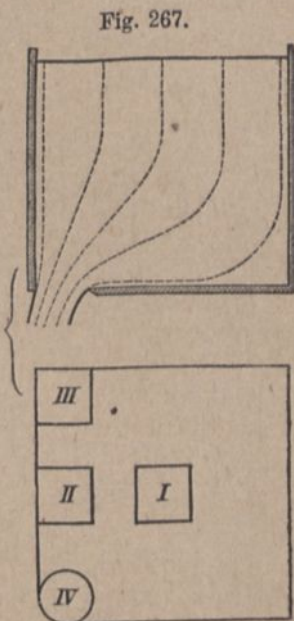
**Schützenöffnungen.** Befindet sich die Öffnung nicht in dünner Wand, wird sie vielmehr, wie bei Schützen, durch rechtwinklig zugeschnittene Bretter gebildet, so kann man, wenn die Unterkante der Öffnung hoch über der Sohle liegt,  $\mu = 0,6$ , wenn sie mit dieser in gleicher Höhe liegt  $\mu = 0,68$  im Mittel setzen.

Für das Beispiel auf S. 256 (Fig. 263) würde also mit  $\mu = 0,68$  die wirkliche sekundl. Ausflußmenge werden:  $Q = 0,68 \cdot 3,455 = 2,35 \text{ m}^3$ .

**Unvollständige Einschnürung** (partielle Kontraktion) findet statt, wenn die Öffnung an einem Teil ihres Umfanges von Wänden umschlossen wird (Fig. 267, Öffnung II, III u. IV), so daß an

diesen Stellen ein seitliches Zuströmen und eine Ablenkung von Wasserfäden nicht vorkommt, also die Ursache der Einschnürung teilweise fortfällt. Der Strahl bekommt infolge und nach Art dieser Ungleichmäßigkeit eine abweichende Richtung, und die Ausflußziffer, also auch die Ausflußmenge wird größer.

Ist  $u$  der ganze Umfang der Öffnung,  $m \cdot u$  derjenige Teil des Umfanges, an welchem die Öffnung von Wänden eingefasst ist, so ist nach Versuchen von Bidone (1831) und Weisbach die für solche Fälle anzuwendende Ausflußziffer  $\mu_p$  von der Größe  $m$  abhängig. Ist  $\mu_0$  die Ausflußziffer unter sonst gleichen Verhältnissen für den Grundfall (daß die Öffnung nach allen Richtungen weit genug von den Gefäßwänden entfernt ist), d. h. für eine Öffnung I im Grundrisse (Fig. 267), so gilt:



für rechteckige Öffnungen

$$8) \quad \mu_{pr} = \mu_0 (1 + 0,155 m),$$

für kreisförmige Öffnungen

$$9) \quad \mu_{pk} = \mu_0 (1 + 0,128 m).$$

Es wird daher:

für die Öffnung II mit  $m = 1/4$

$$\mu_p = 1,039 \mu_0;$$

für die Öffnung III mit  $m = 1/2$

$$\mu_p = 1,078 \mu_0;$$

für die Öffnung IV mit  $m = 1/4$

$$\mu_p = 1,032 \mu_0.$$

**Unvollkommene Einschnürung.** Auch wenn die Wandungen nicht ganz an den Rand der Öffnung herantreten, sondern sich von allen Seiten der Öffnung nur nähern, kann eine Verminderung der Einschnürung entstehen. Für den Grundfall war vorausgesetzt, daß die Öffnung von allen Wänden verhältnismäßig weit entfernt,



also binnenseits der Öffnung ein großer Querschnitt, und daher eine geringe Geschwindigkeit vorhanden ist (Fig. 268). Verengt sich aber das Gefäß nach der Mündung zu, so daß das Wasser der Öffnung mit größerer Geschwindigkeit zuströmt, so vermindert sich der Einfluß der in der Quer- richtung zufließenden Strom- fäden und damit die Ein- schnürung.

Ist  $F$  der Öffnungsquer- schnitt (Fig. 269),  $F:n$  der Querschnitt vor der Öffnung (worin  $n$  ein echter Bruch), so ist die Ausflußziffer  $\mu_u$  bei un- vollkommener Einschnürung zurückzuführen auf  $\mu_0$  in dem entsprechenden Grundfalle (mit  $n=0$ ). Über das Verhältnis  $\mu_u:\mu_0$  hat Weisbach (Freiberg in Sachsen) im Jahre 1842 Versuche an- gestellt und deren Ergebnisse durch Potentialgleichungen dargestellt.

Danach ist für kreisförmige Öffnungen

$$10) \quad \mu_{uk} = \mu_0 [1 + 0,04564 (14,821^n - 1)],$$

für rechteckige Öffnungen

$$11) \quad \mu_{ur} = \mu_0 [1 + 0,076 (9^n - 1)].$$

Dafür kann man annähernd setzen

bei kreisförmiger Öffnung

$$12) \quad \mu_{uk} = \mu_0 (1 + 0,126n + 0,06n^2 + 0,427n^3)$$

mit den Ergebnissen:

$n =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{\mu_{uk}}{\mu_0} =$	1,014	1,031	1,055	1,087	1,131	1,189	1,264	1,358	1,473	1,613

bei rechteckiger Öffnung

$$13) \quad \mu_{ur} = \mu_0 (1 + 0,175n + 0,06n^2 + 0,373n^3)$$

mit den Ergebnissen:

$n =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{\mu_{ur}}{\mu_0} =$	1,019	1,040	1,068	1,104	1,149	1,207	1,279	1,369	1,478	1,608

Fig. 268.

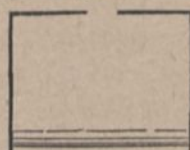
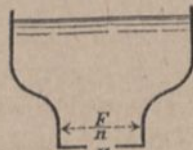


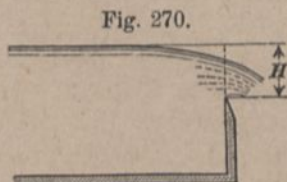
Fig. 269.



**Ausflußziffer  $\mu$  für rechteckige Überfälle.** Nach der ideellen Überfallmenge Gl. 5, S. 256 ergibt sich die wirkliche Überfallmenge

$$14) \quad Q = \frac{2}{3} \mu b H \sqrt{2gH},$$

wenn  $\mu$  die Ausflußziffer,  $b$  die Breite des Überfalles und  $H$  die Höhe des ungesenkten Wasserspiegels über der Unterkante der Öffnung bedeutet (Fig. 270). Für die Ziffer  $\mu$  gilt nach Versuchen der französischen Artillerieoffiziere Poncelet und Lesbros folgende Tabelle, wobei zu bemerken ist, daß die Öffnung sich in dünner lotrechter Wand befand und daß die Höhe  $H$  in mindestens 1 m Abstand von der Öffnung gemessen wurde. Durch die Senkung des Wasserspiegels in der Nähe der Öffnung wird der Strahlquerschnitt vermindert; dieser Einfluß ist in der Zahl  $\mu$  mit berücksichtigt.



**Ausflußziffer  $\mu$  für rechteckige Überfälle in dünner lotrechter Wand.**

$H$	$\mu$ für	
	$b = 0,2 \text{ m}$	$b = 0,6 \text{ m}$
0,02 m	0,626	
0,04	0,611	
0,06	0,602	0,618
0,08	0,596	
0,10	0,593	0,606
0,15	0,590	0,600
0,20	0,585	0,593
0,30		0,587
0,40		0,587
0,50		0,587
0,60		0,585

**d) Widerstandshöhen und Widerstandsziffern.**

Auf S. 257 wurde die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  aus der ideellen  $= \sqrt{2gh}$  abgeleitet durch Multi-



plication der letzteren mit einer Geschwindigkeitsziffer  $\varphi < 1$ . Mit Rücksicht darauf, daß bei der ideellen Ausflußbewegung die wirksame Druckhöhe  $h$  sich in eine gleiche Geschwindigkeitshöhe  $\frac{w^2}{2g}$  umsetzte, kann man die Beziehung zwischen den beiden Geschwindigkeiten auch so auffassen, daß bei der wirklichen Geschwindigkeit  $w$  von der wirksamen Druckhöhe  $h$  ein gewisser Teil  $z_0$  durch Reibung aufgezehrt und daher für die Erzeugung von Geschwindigkeit unwirksam gemacht wird. Man hat hiernach

$$h - z_0 = \frac{w^2}{2g} \quad \text{oder}$$

$$1) \quad h = \frac{w^2}{2g} + z_0.$$

Da nun der Erfahrung zufolge

$$w = \varphi \sqrt{2gh}, \quad \text{also} \quad h = \frac{1}{\varphi^2} \frac{w^2}{2g} \quad \text{ist, so wird}$$

$$2) \quad z_0 = \frac{w^2}{2g} \left( \frac{1}{\varphi^2} - 1 \right).$$

Man setzt

$$3) \quad \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \zeta_0$$

und bezeichnet  $\zeta_0$  als Widerstandsziffer für die Reibung im Gefäße. Mit  $\varphi = 0,96$  (Gl. 2, S. 257) wird

$$4) \quad \zeta_0 = 0,085.$$

Der durch Reibung verursachte Druckhöhenverlust

$$5) \quad z_0 = \zeta_0 \frac{w^2}{2g}$$

heißt die Widerstandshöhe infolge der Reibung im Gefäße. Mit diesem Werte wird nach Gl. 1:

$$6) \quad h = \frac{w^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g},$$

worin die gesamte wirksame Druckhöhe  $h$  zerlegt erscheint, in denjenigen Teil  $\frac{w^2}{2g}$ , der zur Erzeugung der wirklichen Geschwindigkeit  $w$  zur Verwertung kommt, und in die Widerstandshöhe der Gefäßreibung  $\zeta_0 \cdot \frac{w^2}{2g}$ .

Daraus ergibt sich dann die wirkliche Geschwindigkeit

$$7) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0}},$$

die mit  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  gleichbedeutend ist, da nach Gleichung 3  $\varphi = 1 : \sqrt{1 + \zeta_0}$  ist.

Die Benutzung der Widerstandshöhen wird besonders nützlich, wenn man es mit einer verwickelteren Wasserbewegung zu tun hat, bei der verschiedene Druckhöhenverluste in Frage kommen.

e) Druckhöhenverlust infolge plötzlicher Querschnittsänderung.

$\alpha$ ) Plötzliche Erweiterung. In einem GefaÙe (Fig. 271) sei im Wasserspiegel der Querschnitt  $F_0$ , die Geschwindigkeit  $w_0$ ; in einer Zwischenwand befinde sich eine Öffnung  $F_1$ , welche eine Einschnürung auf  $\alpha_1 F_1$  mit einer Geschwindigkeit  $w_1$  verursacht; dann folge eine plötzliche Erweiterung des GefaÙes auf  $F_2$  mit einer Geschwindigkeit  $w_2$ ; die Ausflußöffnung habe die Größe  $F$ , der unterhalb derselben eingeschnürte Strahl den Querschnitt  $\alpha F$  mit der Geschwindigkeit  $w$ . Seitlich des eingeschnürten Strahles  $\alpha_1 F_1$  befindet sich Wasser, welches nur Wirbelbewegungen ausführt, an der regelmäßig strömenden Bewegung aber nicht teilnimmt. Da während einer Zeiteinheit durch alle Querschnitte die gleiche Wassermenge hindurchströmt, so muß

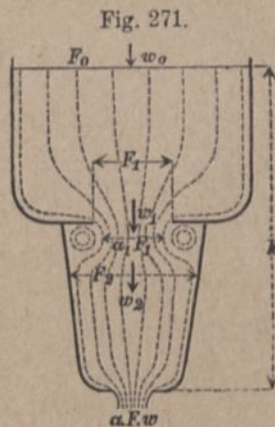


Fig. 271.

$$1) \quad F_0 w_0 = \alpha_1 F_1 w_1 = F_2 w_2 = \alpha F w$$

sein, und da  $\alpha_1 F_1 < F_2$  ist, so muß  $w_1 > w_2$  sein. Es trifft somit unterhalb der Zwischenwand das mit der Geschwindigkeit  $w_1$  strömende Wasser auf eine mit geringerer Geschwindigkeit  $w_2$  vorausgehende Wassermasse, wobei ein Verlust an Arbeitsvermögen durch Stoß verbunden ist.

In der Hauptgleichung I, S. 251, war  $mg$  das während eines Zeiteilchens  $dt$  durch irgendeinen (d. h. jeden) Querschnitt strömende Wassergewicht,  $mgh$  die während derselben Zeit von



dem Gewichte der gesamten im Gefaße befindlichen Wassermasse verrichtete Arbeit. Im Anschluß an die betreffende Entwicklung (S. 250) soll nun der während der Zeit  $dt$  durch Stoß herbeigeführte Verlust an Arbeitsvermögen berechnet werden. Man stellt sich die Sache so vor, als ob die Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $w_1$  auf eine mit der Geschwindigkeit  $w_2$  vorausgehende Masse  $M_2$  stieße; da nun Wasser nahezu unzusammendrückbar ist, so beträgt der Verlust an Arbeitsvermögen während der Zeit  $dt$  nach Gl. 13, S. 142 mit  $k=0$

$$\frac{m \cdot M_2 (w_1 - w_2)^2}{m + M_2} \cdot \frac{1}{2}$$

Wenn  $m$  gegen  $M_2$  sehr klein ist, kann dafür  $m \frac{(w_1 - w_2)^2}{2}$  geschrieben werden; setzt man dies  $= mgz_1$ , so ist  $z_1$  der durch den Stoß verursachte Druckhöhenverlust, u. zw.

$$2) \quad z_1 = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}, \quad \text{d. h.}$$

der durch eine plötzliche Querschnittsvergrößerung erzeugte Druckhöhenverlust ist gleich der Geschwindigkeitshöhe, welche der relativen Stoßgeschwindigkeit entspricht.

Will man hiernach die Ausflußgeschwindigkeit  $w$  für den Fall der Fig. 271 berechnen, so zerlege man die wirksame Druckhöhe  $h$  in ihre einzelnen Teile, wofür sie verbraucht wird:  $\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}$  ist der zur Erzeugung von Geschwindigkeit verwertete

Teil;  $\zeta_0 \frac{w^2}{2g}$  wird durch Reibung,  $\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$  durch Stoß aufgezehrt,

Also ist

$$3) \quad h = \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g} + \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$$

Nach Gl. 1 ist nun  $w_0 = w \frac{\alpha F}{F_0}$ ,  $w_1 = w \frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}$ ,  $w_2 = w \frac{\alpha F}{F_2}$ ,

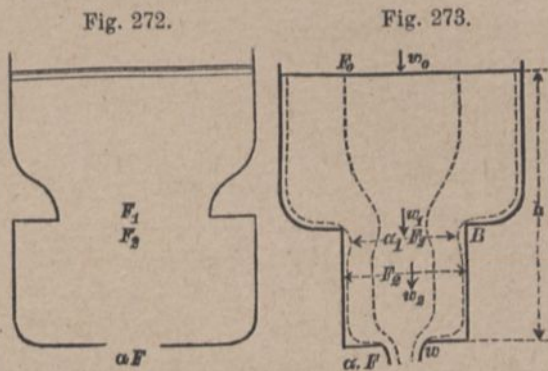
mithin  $h = \frac{w^2}{2g} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \alpha^2 F^2 \left( \frac{1}{\alpha_1 F_1} - \frac{1}{F_2} \right)^2 \right\}$ , oder

$$4) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \alpha^2 F^2 \left( \frac{1}{\alpha_1 F_1} - \frac{1}{F_2} \right)^2}}$$

Befinden sich die Öffnungen  $F_1$  und  $F$  in dünner Wand, wie bei Fig. 271, so darf man meist  $\alpha = \alpha_1 = 0,64$  setzen.

In dem Falle der Fig. 272 dagegen wäre  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha = 0,64$  zu setzen. Würde die Ausflußöffnung  $F$  durch allmähliche Verengung wie in Fig. 255 (S. 249) gebildet, so hätte man auch  $\alpha = 1$  zu setzen.

$\beta$ ) Plötzliche Verengung, wie bei  $B$  (Fig. 273), würde einen Stoßverlust nicht erzeugen, wenn nicht dicht unter der Verengung eine Einschnürung und gleich nachher wieder eine Ausdehnung des Strahles auf den Gefäßquerschnitt erfolgte. An der Verengung bei  $B$



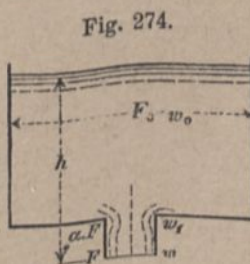
ist zunächst der Strahlquerschnitt  $\alpha_1 F_1$  und die Geschwindigkeit  $w_1$ , unmittelbar darunter aber  $F_2$  bzw.  $w_2$ , daher  $\alpha_1 w_1 = w_2$  und der Stoßverlust

$$\frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} = \frac{w_2^2}{2g} \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2 = \frac{w^2}{2g} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot F^2}{F_2^2} \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2.$$

Sonach wird aus Gl. 4

$$5) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{\alpha^2 F^2}{F_0^2} + \zeta_0 + \frac{\alpha^2 F^2}{F_2^2} \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2}}.$$

Schließt sich an ein Gefäß unten ein kurzes zylindrisches Ansatzrohr (Fig. 274) ohne Abrundung oder Abschrägung beim Anschlusse, so entsteht beim Eintritt in das Rohr eine Strahleinschnürung auf  $\alpha F$  mit sogleich folgender Ausweitung auf den Querschnitt  $F$ . Hier ist



$$6) \quad h = \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \zeta_0 \cdot \frac{w^2}{2g} + \frac{(w_1 - w)^2}{2g},$$



ferner  $w_0 = wF : F_0$  und  $w_1 = w : \alpha$ ; somit wird, wenn  $F_0$  sehr groß gegen  $F$  ist, und demnach  $w_0 = w \cdot F : F_0$  vernachlässigt werden kann,

$$7) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}}$$

Mit  $\zeta_0 = 0,085$ ,  $\alpha = 0,64$  wird

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0,085 + 0,32}} = 0,84 \sqrt{2gh},$$

wogegen bei gut abgerundetem Ansatz (Fig. 275)  $w = 0,96 \sqrt{2gh}$  sein würde.

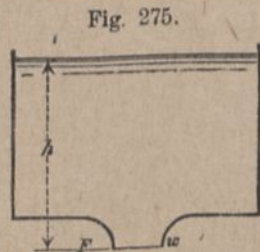


Fig. 275.

### f) Ausfluß aus einer Bodenöffnung unter veränderlicher Druckhöhe.

Die Formel  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  gilt unter der Voraussetzung, daß die Bodenöffnung klein ist und daß genügender Zufluß erfolgt, um die Druckhöhe unveränderlich zu erhalten, sowie unter der Annahme, daß der Beharrungszustand bereits eingetreten sei. Findet der Zufluß nun nicht in richtiger Menge oder gar nicht statt, so ändert sich die Höhenlage des Wasserspiegels und damit die Druckhöhe. Annäherungsweise verwendet man für die nun veränderliche Ausflußgeschwindigkeit  $w$  dieselbe Gleichung wie für den Beharrungszustand, indem man mit veränderlicher Druckhöhe  $z$  einfach  $w = \varphi \sqrt{2gz}$ , setzt.

$\alpha$ ) Allmähliche Entleerung ohne Zufluß. Zu Anfang, zur Zeit  $t = 0$ , sei  $F_0$  der Wasserspiegel in der Höhe  $h$  über der Öffnung  $F$  (Fig. 276); nach  $t$  Zeiteinheiten sei die Druckhöhe auf  $z$  vermindert und der Wasserspiegel von der Größe  $F_z$ ; dann ist die augenblickliche Ausflußgeschwindigkeit  $w = \varphi \sqrt{2gz}$ , und während des nächsten Zeiteilchens  $dt$  die Ausflußmenge

$$1) \quad dQ = \mu F \sqrt{2gz} \cdot dt.$$

Um hieraus  $dt$  als Differentialfunktion von  $z$  finden zu können, bedenke man, daß in dem Zeiteilchen  $dt$  der Wasserspiegel um  $dz$  sinkt, daß dieses

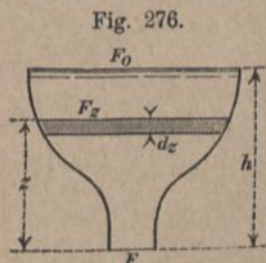


Fig. 276.

$dz$  aber mit negativem Zeichen zu schreiben ist, weil  $z$  mit wachsendem  $t$  abnimmt. Der sinkende Wasserspiegel beschreibt in der Zeit  $dt$  den Raum  $-F_z \cdot dz$ , und diese Größe muß  $= dQ$  sein. Aus

$$2) \quad \mu F \sqrt{2gz} dt = -F_z dz \quad \text{wird dann}$$

$$3) \quad dt = -\frac{F_z dz}{\mu F \sqrt{2gz}}$$

Daher ist zur Veränderung der Druckhöhe von  $h$  auf  $z$  die Zeit

$$4) \quad t = -\frac{1}{\mu F \sqrt{2g}} \int_h^z \frac{F_z dz}{Vz} = \frac{1}{\mu F \sqrt{2g}} \int_z^h \frac{F_z dz}{Vz}$$

erforderlich, weil den Zeitwerten  $t=0$  und  $t=t$  bzw. die Werte  $z=h$  und  $z=z$  entsprechen.

**Entleerung eines prismatischen Gefäßes** (Fig. 277). Mit  $F_z = F_0$  wird nach Gl. 4

$$5) \quad t = \frac{F_0}{\mu F \sqrt{2g}} \int_z^h z^{-1/2} dz = \frac{2F_0}{\mu F \sqrt{2g}} (V\sqrt{h} - V\sqrt{z})$$

und für völlige Entleerung mit  $z=0$

$$6) \quad t = \frac{2F_0 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}}$$

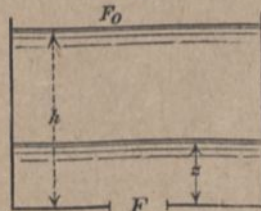
Multipliziert man nun in Zähler und Nenner mit  $\sqrt{h}$ , so kann man im Zähler den ursprünglichen Gefäßinhalt  $V = F_0 h$ , im Nenner die dem anfänglichen Zustand entsprechende sekundliche Ausflußmenge  $Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$  einführen, und erhält

$$7) \quad t = 2 \frac{V}{Q_0}$$

Beispiel:  $F_0 = 1 \text{ m}^2$ ,  $h = 1 \text{ m}$ ,  $F = 0,08^2 \frac{\pi}{4} = 0,0051 \text{ m}^2$ ,  $z=0$  und  $\mu = 0,6$  gibt  $V = 1 \text{ m}^3$ ,  $Q_0 = 0,0135 \text{ m}^3$  und  $t = 148,2 \text{ sek}$ .

Behalte die Druckhöhe den ursprünglichen Wert  $h$ , so würde der Ausfluß einer dem Gefäßinhalt  $V$  gleichen Wassermenge die Zeit  $t = V:Q_0$  erfordern; wegen der kleiner werdenden Druckhöhe erfordert die Entleerung also das Doppelte jener Zeit.

Fig. 277.





Wasseruhr mit zylindrischem Gefäße (Fig. 278). Ein Zylinder von 0,391 m Weite und 1 m Höhe habe im Boden eine kreisförmige Öffnung von 0,002 m Durchmesser und gut abgerundetem kurzen Mundstücke, so daß  $\alpha = 1$  und  $\mu = \alpha \varphi = 0,96$  gesetzt werden kann. Die allmähliche Senkung des Wasserspiegels soll zur Zeitmessung benutzt werden. — Gl. 5 wird in diesem Falle

$$t = \frac{2 \cdot 0,391^2}{0,96 \cdot 0,002^2 \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}) = 18\,060 (\sqrt{h} - \sqrt{z})$$

Ist die ursprüngliche Höhe des Wasserspiegels über der Mündung  $h = 1$  m, so wird für eine beliebige Zeit  $t$

$$\sqrt{z} = 1 - \frac{t}{18\,000}.$$

Hiernach kann man für Werte von  $t$ , die je um  $1/2$  Stunde abnehmen, leicht  $z$  berechnen.

$$t = 1/2 \text{ Stunde} = 1800 \text{ sek} \text{ gibt } z = 0,81 \text{ m}$$

$$t = 1 \text{ „ } = 3600 \text{ sek „ } z = 0,64$$

$$t = 1 1/2 \text{ „ } z = 0,49$$

$$t = 2 \text{ „ } z = 0,36$$

$$t = 2 1/2 \text{ „ } z = 0,25$$

$$t = 3 \text{ „ } z = 0,16$$

$$t = 3 1/2 \text{ „ } z = 0,09$$

$$t = 4 \text{ „ } z = 0,04$$

Für die letzten Teile der Entleerung trifft übrigens Gl. 5 nicht mehr zu (hat nur ideellen Wert), weil sich zuletzt um die Öffnung ein Strudel und in der Mitte der Öffnung ein von Wasser nicht erfüllter Trichter bildet, so daß der Ausfluß verlangsamt wird.

Entleerung eines trichterförmigen Gefäßes. Das untere Ende des kegelförmigen Gefäßes (Fig. 279) sei zu einer Öffnung  $F$  erweitert, die in der Höhe der geometrischen Spitze des Kegels liegt.

Es ist  $F_z = x^2 \pi$ ,  $F_0 = r^2 \pi$ ,  $x : r = z : h$ , also  $F_z = F_0 \cdot z^2 : h^2$  und (nach Gl. 4)

$$\begin{aligned} 8) \quad t &= \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} \int_z^h z^{3/2} dz \\ &= \frac{2}{5} \frac{F_0}{\mu F h^2 \sqrt{2g}} (h^{5/2} - z^{5/2}); \end{aligned}$$

für  $z = 0$  wird dann mit  $V = 1/3 r^2 \pi h$  und  $Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$ :

$$9) \quad t = \frac{6}{5} \frac{V}{Q_0} = 1,2 \frac{V}{Q_0}.$$

Fig. 278.

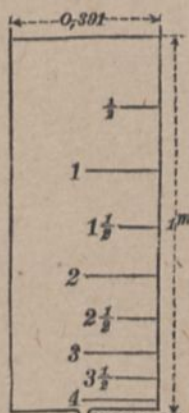
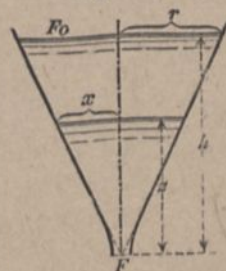


Fig. 279.



Für die Entleerung eines halbkugelförmigen oder halb-ellipsoidischen (bis zum größten Querschnitte gefüllten) Beckens findet man

$$10) \quad t = \frac{7}{5} \frac{V}{Q_0} = 1,4 \frac{V}{Q_0},$$

für die Entleerung eines paraboloidischen Gefäßes

$$11) \quad t = \frac{4}{3} \frac{V}{Q_0} = 1,33 \frac{V}{Q_0}.$$

Die Gl. 7, 9 10 und 11 lassen erkennen, daß der Zahlenfaktor für ein prismatisches Gefäß = 2, für jedes nach unten verengte Gefäß aber < 2 ist; er nähert sich um so mehr der Einheit, je schneller sich das Gefäß nach unten verengt. Beim Beginne des Ausflusses sinkt nämlich der Wasserspiegel schnell; mit abnehmender Druckhöhe und Geschwindigkeit geht aber der weitere Ausfluß langsamer von statten, u. zw. um so langsamer, je mehr das Gefäß nach unten verhältnismäßig weit ist, so daß noch ziemlich viel Wasser bei der geringen Geschwindigkeit ausfließen muß.

### Gefäßform für gleichmäßige Senkung des Wasserspiegels.

Die Geschwindigkeit, mit der der Wasserspiegel sinkt, ist nach Gl. 3

$$12) \quad v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F V \sqrt{2gz}}{F_z};$$

soll  $v$  sich nicht ändern, sondern gleich dem Anfangswerte

$$v_0 = \frac{\mu F V \sqrt{2gh}}{F_0} = \frac{Q_0}{F_0}$$

bleiben, so muß

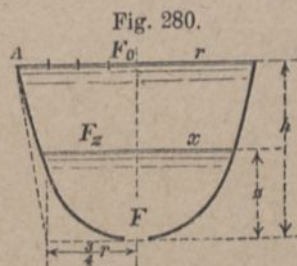
$$13) \quad \sqrt{z} : \sqrt{h} = F_z : F_0 \text{ sein.}$$

Soll die Innenfläche des Gefäßes (Fig. 280) eine Umdrehungsfläche sein, so wird mit

$$14) \quad \begin{aligned} F_z &= x^2 \pi \quad \text{und} \quad x^2 : r^2 = \sqrt{z} : \sqrt{h} \\ x^4 : r^4 &= z : h. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Meridianlinie, die man eine Parabel vierten Grades nennt. Eine bei  $A$  an die Meridianlinie gelegte Tangente hat gegen die lotrechte Achse ein Neigungsverhältnis  $\frac{1}{4}r:h$ . Der Inhalt des Gefäßes ist

$$V = \pi \int_0^h x^2 dz = \frac{\pi r^2}{\sqrt{h}} \int_0^h \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} F_0 h.$$





Die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels beträgt  $v_0 = \frac{Q_0}{F_0}$ ,  
 die (ideelle) Zeit der vollständigen Entleerung  $t = \frac{h}{v_0} = \frac{F_0 h}{Q_0}$ ,  
 oder, weil  $F_0 h = \frac{3}{2} V$  ist:

$$15) \quad t = \frac{3}{2} \frac{V}{Q_0} = 1,5 \frac{V}{Q_0}.$$

Ist die Meridianlinie der Innenwand eines Gefäßes eine Parabel  $n$ ten Grades mit  $x^n : r^n = x : h$ , so ist das Neigungsverhältnis einer bei  $A$  angelegten Tangente gegen die Achse  $\frac{1}{n} r : h$ , der Inhalt des Gefäßes

$$16) \quad V = \frac{F_0 h}{\frac{2}{n} + 1};$$

die (ideelle) Zeit der Entleerung

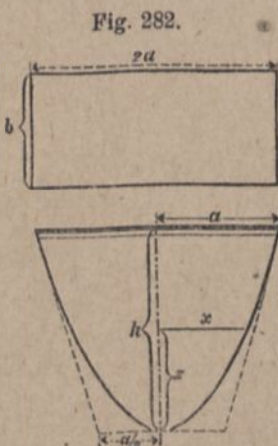
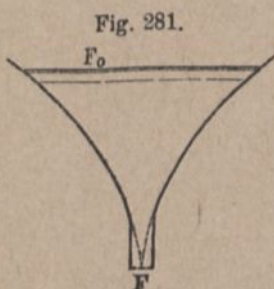
$$17) \quad t = \frac{4 + 2n}{4 + n} \frac{V}{Q_0}.$$

$n = \frac{1}{2}$  (Fig. 281) gibt

$$18) \quad t = \frac{10}{9} \frac{V}{Q_0} = 1,1 \frac{V}{Q_0}.$$

Will man ein Gefäß mit gleichförmig sinkendem Wasserspiegel als Wasseruhr benutzen und für die Anbringung der Teilung eine ebene Wand zur Verfügung haben, so kann man die Gefäßform auch derartig anordnen, daß die wagerechten Querschnitte Rechtecke sind, deren Länge durchweg  $= b$ , während die Breite  $2x$  veränderlich ist. (Fig. 282.) Dann muß, wenn die Breite am oberen Rande  $2a$  ist, (nach Gl. 13)  $x : h = b^2 x^2 : b^2 a^2 = x^2 : a^2$  sein. Bei dieser Anordnung folgt die halbe Breite  $x$  in der einen Ansicht dem Gesetze einer gewöhnlichen (quadratischen) Parabel mit  $V = \frac{2}{3} F_0 h$  und  $t = \frac{3}{2} \frac{V}{Q_0}$ .

Dieses Gefäß hat also denselben Inhalt und dieselbe Ausflußzeit, wie das Umdrehungsgefäß Fig. 280.



**β) Ausfluß unter veränderlicher Druckhöhe, bei Zufluß von oben.** Erfolgt ein Zufluß von  $q^{m^3}/_{sek}$  (Fig. 283), so besteht die Ausflußmenge  $dQ = \mu F V \sqrt{2gz} dt$  (Gl. 1), während der Zeit  $dt$ , aus dem der Senkung des Wasserspiegels  $F_z$  um  $-dz$  entsprechenden Wasserkörper  $-F_z dz$  und dem Zuflusse  $q dt$ ; sonach ist hier statt Gl. 2 zu setzen:

$$\mu F V \sqrt{2gz} dt = -F_z dz + q dt;$$

die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels wird jetzt

$$19) \quad v = \frac{-dz}{dt} = \frac{\mu F V \sqrt{2gz} - q}{F_z}, \quad \text{somit}$$

$$20) \quad dt = -\frac{F_z dz}{\mu F V \sqrt{2gz} - q} \quad \text{und}$$

$$21) \quad t = -\int_h^z \frac{F_z dz}{\mu F V \sqrt{2gz} - q} = \int_z^h \frac{F_z dz}{\mu F V \sqrt{2gz} - q}.$$

Für ein prismatisches Gefäß mit  $F_z = F_0$  (Fig. 284) wird

$$22) \quad t = \frac{F_0}{\mu F V \sqrt{2g}} \int_z^h \frac{dz}{\sqrt{z} - \frac{q}{\mu F V \sqrt{2g}}}.$$

Behufs der Integration setze man

$$\frac{q}{\mu F V \sqrt{2g}} = \sqrt{a}, \quad \sqrt{z} = y,$$

dann ist, wegen  $q = \mu F V \sqrt{2ga}$ , die Größe  $a$  diejenige Druckhöhe, bei welcher die sekundl. Ausflußmenge gerade gleich dem Zuflusse  $q$  sein würde, und  $dz = 2y dy$ . Ferner schreibe man

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{y dy}{y - \sqrt{a}} &= 2 \int \frac{y - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{y - \sqrt{a}} dy = \\ 2 \int dy + 2\sqrt{a} \int \frac{dy}{y - \sqrt{a}} &= 2y + 2\sqrt{a} \ln(y - \sqrt{a}) \end{aligned}$$

Fig. 283.

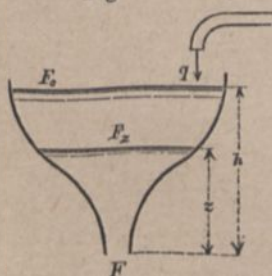
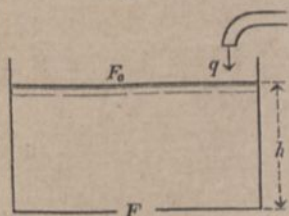


Fig. 284.





$$= 2\sqrt{z} + 2\sqrt{a} \ln(\sqrt{z} - \sqrt{a}), \text{ daher}$$

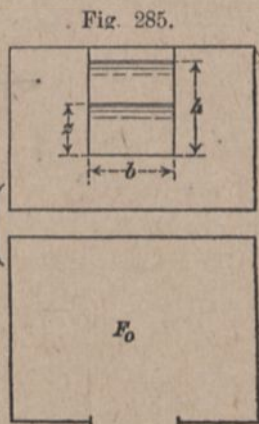
$$23) \quad t = \frac{2F_0}{\mu F \sqrt{2g}} \left\{ \sqrt{h} - \sqrt{z} + \sqrt{a} \cdot \ln \frac{\sqrt{h} - \sqrt{a}}{\sqrt{z} - \sqrt{a}} \right\}.$$

In diesem Falle ist wegen des sekundlichen Zuflusses  $q$  eine völlige Entleerung des Gefäßes unmöglich; denn für  $z = a$ , d. h. für  $\mu F \sqrt{2gz} = q$  wird zwar nach Gl. 19 die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels  $v = 0$ , zugleich wird aber auch für  $z = a$  in Gl. 23 der Nenner des letzten Gliedes  $= 0$ , d. h. die Zeit  $t = \infty$ .

### g) Ausfluß aus einer Seitenöffnung bei veränderlicher Druckhöhe.

Vorstehende, für den Ausfluß aus Bodenöffnungen entwickelte Gleichungen für teilweise Entleerung gelten annähernd auch für den Ausfluß aus niedrigen Seitenöffnungen, solange der Wasserspiegel oberhalb der Öffnung verbleibt.

Wir betrachten nun einen rechteckigen Kasten (Fig. 285) von der Grundfläche  $F_0$ , der sich, ohne Zufluß zu erhalten, durch einen rechteckigen Ausschnitt einer Seitenwand entleeren möge. Zu Anfang ( $t = 0$ ) stehe das Wasser um  $h$ , nach der Zeit  $t$  um  $z$  über der Unterkante des Ausschnittes.



Dann ist während des nächsten Zeitteilchens  $dt$  die Abflußmenge nach Gl. 14, S. 263:  $dQ = \frac{2}{3} \mu b z dt \sqrt{2gz}$ ; andererseits ist:  $dQ = -F_0 dz$ , somit

$$1) \quad dt = -\frac{3}{2} \frac{F_0}{\mu b V \sqrt{2g}} \frac{dz}{z \sqrt{z}} \quad \text{und}$$

$$2) \quad t = -\frac{3}{2} \frac{F_0}{\mu b V \sqrt{2g}} \int_h^z \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{3F_0}{\mu b V \sqrt{2g}} \left( \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right).$$

$z = 0$  verlangt  $t = \infty$ . Hiernach ist also eine Entleerung bis zur Unterkante des Einschnittes in endlicher Zeit nicht möglich, der Wasserspiegel nähert sich nur asymptotisch der Unterkante.

Beim Ausflusse durch eine Bodenöffnung des Kastens ergab sich für völlige Entleerung (Gl. 6, S. 269) ein endlicher Zeitwert. Der Grund der Verschiedenheit beider Fälle ist folgender: Bei einer Bodenöffnung ist gegen das Ende des Ausflusses die Druckhöhe unendlich klein, die Öffnung endlich, die sekundl. Ausflußmenge unendlich klein; daher kann die unendlich kleine noch vorhandene Wassermenge in endlicher Zeit ausfließen. — Bei einer Seitenöffnung wird aber mit der Druckhöhe auch der Querschnitt des ausfließenden Strahles unendlich klein, die sekundliche Ausflußmenge daher unendlich klein zweiter Ordnung, so daß zum Ausfließen der unendlich kleinen letzten Wassermenge eine unendlich große Zeit nötig ist. Übrigens wird schon während einer endlichen Zeit die über der Unterkante der Öffnung noch vorhandene Wasserschicht so dünn, daß sie tatsächlich nicht mehr fließt.

Beispiel: Es sei die Grundfläche des Gefäßes  $F_0 = 3 \text{ m}^2$ , die Breite des Einschnittes  $b = 0,1 \text{ m}$ , die ursprüngliche Wasserhöhe  $h = 1 \text{ m}$ ,  $\mu = 0,6$ . Dann wird

$$t = \frac{3 \cdot 3}{0,6 \cdot 0,1 \cdot 4,43} \left( \frac{1}{\sqrt{z}} - 1 \right) = 33,9 \left( \frac{1}{\sqrt{z}} - 1 \right).$$

Für  $z = 0,25 \text{ m}$  ist  $t = 33,9 \text{ sek}$ ;

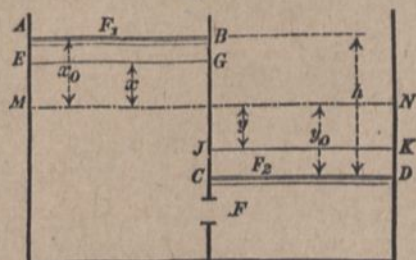
für  $z = 0,01 \text{ m}$  ist  $t = 9 \cdot 33,9 = 305,1 \text{ sek}$ ;

für  $z = 0,0001 \text{ m}$  ist  $t = 99 \cdot 33,9 = 3356 \text{ sek}$ .

### h) Ausgleichung des Wassers in Schleusenammern.

Sind 2 Schleusenammern (Fig. 286) mit den Grundflächen  $F_1$  und  $F_2$  durch eine beiderseits unter Wasser liegende Schützenöffnung  $F$  verbunden, so wird, wenn die Wasserstände  $AB$  und  $CD$  der Kammern zu Anfang einen Höhenunterschied  $h$  hatten, nach einer gewissen Zeit in beiden Kammern sich ein Ausgleichswasserspiegel  $MN$  bilden, der von den ursprünglichen Wasserspiegeln um  $x_0$

Fig. 286.



bezw.  $y_0$  absteht. Nach  $t$  Sekunden seien die beiden Wasserspiegel  $EG$  und  $JK$  um  $x$  bzw.  $y$  vom Ausgleich entfernt; dann ist im



Zeitpunkt  $t$  die wirksame Druckhöhe  $x + y$ , daher die Durchflußgeschwindigkeit in der Schützenöffnung

$$w = \varphi \sqrt{2g(x+y)}$$

und die Durchflußmenge während der Zeit  $dt$

$$dQ = \mu F a t \sqrt{2g(x+y)}.$$

Nun ist offenbar wegen  $F_1 x = F_2 y$  und  $F_1 x_0 = F_2 y_0$ ,

$$1) \quad x + y - y \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right); \quad h = x_0 + y_0 = y_0 \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right);$$

ferner, weil in der Zeit  $dt$  die Tiefe sich um  $-dy$  ändert,

$$dQ = \mu F dt \sqrt{2gy \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right)} = -F_2 dy; \quad \text{mithin}$$

$$2) \quad dt = \frac{-F_2 dy}{\mu F \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1} \cdot \sqrt{y}}$$

Für  $t=0$  ist  $y=y_0$ ; für  $t=t_1$  ist  $y=0$ , wenn  $t_1$  die Zeit bis zur Ausgleichung bedeutet, also

$$3) \quad t_1 = \frac{F_2}{\mu F \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1}} \int_0^{y_0} y^{-1/2} dy = \frac{2F_2 \sqrt{y_0}}{\mu F \sqrt{2g} \sqrt{\frac{F_2}{F_1} + 1}}$$

oder wegen Gl. 1 mit  $y_0 = h \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right)$

$$4) \quad t_1 = \frac{2F_2 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g} \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right)}$$

und, mit  $\sqrt{h}$  in Zähler und Nenner multipliziert:

$$5) \quad t_1 = \frac{2F_2 h}{\mu F \sqrt{2gh} \left( \frac{F_2}{F_1} + 1 \right)}$$

Multipliziert man in Zähler und Nenner mit  $F_1 : F_2$ , so kann man auch schreiben:

$$6) \quad t_1 = \frac{2F_1 h}{\mu F \sqrt{2gh} \left( 1 + \frac{F_1}{F_2} \right)}$$

Die ganze überströmende Wassermenge beträgt

$$V = F_2 y_0 = \frac{F_2 h}{\frac{F_2}{F_1} + 1},$$

und da die sekundl. Durchflußmenge zu Anfang

$$Q_0 = \mu F \sqrt{2gh}$$

war, so folgt aus Gl. 5 (wie in Gl. 7, S. 269):

$$7) \quad t_1 = 2 \frac{V}{Q_0}.$$

Für 2 gleich große Schleusenammern wird mit  $F_1 = F_2$  die überströmende Wassermenge  $V = \frac{1}{2} \cdot F_2 h$ , und nach Gl. 5:

$$8) \quad t_1 = \frac{F_2 \cdot h}{\mu \cdot F \sqrt{2gh}}.$$

Füllt sich eine Schleusenammer aus einem ausgedehnten Oberwasser, für welches  $F_1 = \infty$  zu setzen ist (Fig. 287), so wird  $V = F_2 h$  und nach Gl. 5:

$$9) \quad t_1 = \frac{2 F_2 h}{\mu F \sqrt{2gh}},$$

also doppelt so groß, wie für  $F_1 = F_2$  (Gl. 8).

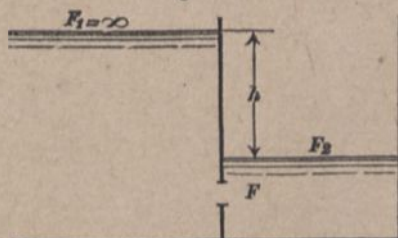
Ähnliches gilt bei der Entleerung einer Schleusenammer in ein ausgedehntes Unterwasser, weil dann nur  $F_1$  mit  $F_2$  zu vertauschen ist.

**Beispiel:** Es sei (Fig. 286)  $F_1 = F_2 = 400 \text{ m}^2$ ,  $F = 0,5 \text{ m}^2$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ,  $\mu = 0,6$ . — Dann ist für die Ausgleichung der Wasserspiegel  $y_0 = \frac{1}{2} h = 1 \text{ m}$ , also  $V = 400 \text{ m}^3$ ,  $Q_0 = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 4,43 \sqrt{2} = 1,88 \text{ m}^3$ , und nach Gl. 7 und 8:

$$t_1 = 426 \text{ sek.} = 7,1 \text{ min.}$$

Ist (nach Fig. 287) nur eine Schleusenammer von derselben Größe wie in dem berechneten Beispiel vorhanden, so erfordert eine Füllung aus dem Oberwasser nach Gl. 9 die doppelte Zeit  $2t_1 = 14,2 \text{ min}$ , ebenso auch die Entleerung der Kammer nach dem Unterwasser.

Fig. 287.





Die Berechnung dieser Zeiten ist von Bedeutung für die Beurteilung der Leistungsfähigkeit einer Schleuse.

### i) Hydraulischer Druck.

Ist das in Fig. 288 dargestellte Gefäß unten geschlossen, oben dem Drucke  $p_0$ , etwa dem Atmosphärendruck ausgesetzt, so beträgt in einem Querschnitte  $MN$ , der um  $y$  unter dem Wasserspiegel liegt, der hydrostatische Druck nach S. 183

$$p_1 = p_0 + \gamma y,$$

wenn  $\gamma$  das Gewicht der Körpereinheit (eines Kubikmeters) Wasser ist. Findet aber eine Ausflußbewegung statt, so tritt eine bedeutende Änderung in den Druckverhältnissen ein. Der im Bewegungszustande herrschende Druck wird der hydrodynamische oder hydraulische Druck genannt, und möge mit  $p$  bezeichnet werden. Wir berechnen denselben unter der Annahme, daß der Beharrungszustand eingetreten sei, daß also für die Geschwindigkeiten und die Druckhöhe Gl. I, S. 251 gelte, aber mit Berücksichtigung der Widerstände.

Für das ganze Gefäß besteht daher die Beziehung

$$1) \quad h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + z_h;$$

darin soll  $z_h$  die gesamte Widerstandshöhe oder den gesamten Druckhöhenverlust zwischen Wasserspiegel und Mündung bedeuten. Sind (wie in Fig. 288) keine plötzlichen Querschnittsänderungen vorhanden, so ist  $z_h = z_0$  (Gl. 2, S. 264), anderenfalls wären noch entsprechende  $z_1$  (Gl. 2, S. 266) hinzuzufügen.

Betrachtet man aber nur die Wassermenge zwischen  $AB$  und  $MN$ , so ist  $w_1$  die Ausflußgeschwindigkeit,  $p$  der Gegendruck; nennt man dann  $z_y$  die auf die Höhe  $y$  kommende Widerstandshöhe, so wird, entsprechend der Gl. 1:

$$2) \quad y + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + z_y \quad \text{oder}$$

Fig. 288.



$$3) \quad \frac{p}{\gamma} = \left( \frac{p_0}{\gamma} + y \right) - \left( \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right) - z_y.$$

Mit  $p$  als hydraulischem Druck ist  $p:\gamma$  die hydraulische Druckhöhe bei  $MN$ , während  $\left( \frac{p_0}{\gamma} + y \right)$  die hydrostatische Druckhöhe daselbst darstellt; man hat daher den Satz:

Beim Hindurchfließen des Wassers durch ein Gefäß ist unter der Voraussetzung, daß der Beharrungszustand besteht und das Gefäß überall von Wasser erfüllt ist, in irgendeinem Querschnitte, die hydraulische Druckhöhe gleich der hydrostatischen, vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen an der betreffenden Stelle und im Wasserspiegel, sowie außerdem vermindert um die zwischen beiden Stellen sich ergebende Widerstandshöhe.

Vernachlässigt man die Widerstandshöhe  $z_y$ , so kann man wegen  $F_0 w_0 = F_1 w_1 = \alpha F w$  auch schreiben

$$4) \quad \frac{p}{\gamma} = \left( \frac{p_0}{\gamma} + y \right) - \frac{w_0^2}{2g} \left( \frac{F_0^2}{F_1^2} - 1 \right).$$

Ist an der Stelle  $MN$  (Fig. 288) der Querschnitt  $F_1 < F_0$ , so ist die Differenz der Geschwindigkeitshöhen positiv, mithin die hydraulische Druckhöhe kleiner als die hydrostatische, u. zw. um so mehr, je kleiner der Querschnitt  $F_1$  ist. An den Stellen aber, wo  $F_1 > F_0$  ist, wird dementsprechend die hydraulische Druckhöhe größer als die hydrostatische.

Dadurch also, daß man die vorher geschlossene Öffnung freimacht, vermindert man den Druck auf die Gefäßwände in allen den Querschnitten des Gefäßes, die kleiner sind als der Wasserspiegelquerschnitt; während man ihn in allen Querschnitten verstärkt, die größer sind als der Wasserspiegelquerschnitt. Nur in solchen Querschnitten, die mit dem Wasserspiegelquerschnitt gleiche Größe haben, entsteht durch Eintritt der Bewegung keine Änderung des Druckes.

Sind die Querschnitte  $F$  und  $F_1$  klein gegen  $F_0$  und ist  $p = p_0$ , so kann man  $w_0^2$  gegen  $w_1^2$  vernachlässigen, so daß

$$\left( \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right) = \frac{w_1^2}{2g} = \frac{w^2}{2g} \cdot \frac{\alpha^2 F^2}{F_1^2} = h \frac{\alpha^2 F^2}{F_1^2}$$



wird; wenn ferner an der Mündung keine nennenswerte Einschnürung vorkommt, also  $\alpha = 1$  gesetzt werden kann, erhält man nach Gl. 3, bei Vernachlässigung von  $z_y$ ,

$$5) \quad \frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - h \frac{F^2}{F_1^2}.$$

Eine Verkleinerung des Querschnittes  $F_1$  kann eine bemerkenswerte Verminderung des hydraulischen Druckes hervorbringen. Es kann sogar  $p < p_0$ , d. h. der innere Druck kleiner als der äußere Luftdruck werden, wenn

$$6) \quad y < h \frac{F^2}{F_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{y}} \quad \text{ist.}$$

Durch eine bei  $F_1$  in der Wand angebrachte Öffnung würde in diesem Falle nicht etwa Wasser herausfließen, sondern durch den überwiegen den Druck der äußeren Atmosphäre Luft ins Innere des Gefäßes hineingedrückt oder, wie man dann zu sagen pflegt, von dem strömenden Wasser angesogen werden. Der Überschuß des äußeren Druckes gegen den inneren kann durch einen etwa mit Wasser gefüllten Minderdruckmesser (s. Fig. 243, S. 235) kenntlich gemacht werden.

Wenn der äußere Überdruck die Wassersäule  $x$  (Fig. 289) im Gleich-

gewichte hält, so ist  $\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - x$ ,

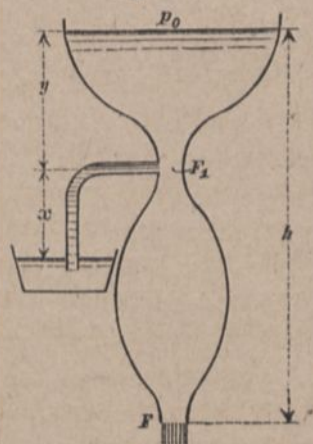
also nach Gl. 5:

$$7) \quad -x = y - h \frac{F^2}{F_1^2} \quad \text{oder} \quad x + y = h \frac{F^2}{F_1^2}.$$

Ist aber  $x + y < h \frac{F^2}{F_1^2}$ , so wird der äußere Atmosphärendruck das Wasser in dem seitlichen Meßrohr aufwärts und in das Gefäß drücken, oder der innere Minderdruck das Wasser aus dem kleinen Nebengefäß ansaugen und mit fortführen. Dieses Ansaugen findet statt, wenn

$$8) \quad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{x+y}} \quad \text{ist.}$$

Fig. 289.



Auf diesem Verhalten beruht die Wirkungsweise des Saughebers oder der Saugstrahlpumpe (Fig. 290). Das zum Betriebe dienende

Wasser fließt aus dem Gerinne *A* abwärts durch eine Röhre, welche sich zu einer engen Düse  $F_1$  zusammenzieht. Diese wird von einem Gehäuse umschlossen, an welches sich nach unten das Saugrohr, nach links das Ausgußrohr anschließt. Denkt man sich zunächst bei  $F_1$  eine Wand, welche von dem Rande der Düse nach der Wand des Aus-

gußrohres reicht, also das Saugrohr von letzterem trennt (in der Figur punktiert), so hat man ein von *A* bis *B* reichendes Durchflußgefäß, in welchem  $F_1$  eine enge Stelle bildet, so daß dort ein innerer Minderdruck entsteht. Denkt man sich nun das Saugrohr voll Wasser, so wird, wenn die Bedingung der Gl. 8 erfüllt ist, das Wasser des Saugrohres gegen die gedachte Abschlußwand drücken, also, wenn letztere nun fortgedacht wird, von dem Wasserstrahle der Düse angesogen und nach *B* mitgenommen werden.

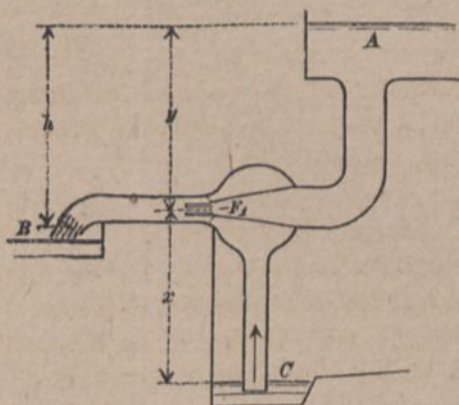
Diese Saugheber, bei denen nicht selten das Wasser einer Wasserleitung als Kraftquelle dient, haben den Vorteil, keine beweglichen Maschinenteile zu enthalten und deshalb keiner besonderen Wartung zu bedürfen.

Nach Gl. 5 kann man durch fortgesetzte Verkleinerung des Querschnittes  $F_1$  die hydraulische Druckhöhe selbst bis auf Null vermindern; dies tritt ein, d. h. es wird  $p : \gamma = 0$ , wenn

$$9) \quad \frac{F_1}{F} = \sqrt{\frac{h}{y + \frac{p_0}{\gamma}}} \text{ ist.}$$

Macht man jedoch  $F_1$  noch kleiner, als es der Gl. 9 entspricht, so würde rechnermäßig der hydraulische Druck negativ werden.

Fig. 290.





Weil aber negative Drücke in vollkommen flüssigen Körpern unmöglich sind, so hört für

$$10) \quad \frac{F_1}{F} < \sqrt{\frac{h}{y + \frac{p_0}{\gamma}}}$$

die Gültigkeit der Gl. 5 und damit auch die Gültigkeit der Hauptgleichung I (S. 251) für die Ausflußgeschwindigkeit, aus welcher die Gleichung für den hydraulischen Druck entstand, auf. Innerhalb desjenigen Gefäßtheiles, der der Bedingung nach Gl. 10 entspricht, pressen sich die Wasserteilchen nicht gegen die Wandung, füllen daher das Gefäß nicht vollkommen aus, sondern fallen in dem drucklosen Raume frei herunter. An derjenigen Stelle des Gefäßes, wo der Druck  $p$  wieder positiv zu werden beginnt, bildet sich ein neuer Wasserspiegel  $QR$  (Fig. 291). Man sagt in solchem Falle: „die Wassersäule reißt ab“. Denkt man sich das Gefäß aus einem biegsamen Stoffe, etwa Blei, so kann man durch Zusammendrücken leicht einen so kleinen Querschnitt  $F_1$  hervorbringen, daß diese Trennung stattfindet. Dadurch wird aber zugleich die Ausflußmenge vermindert; denn an dem engen Querschnitt  $F_1$  ergibt sich jetzt, weil daselbst der Gegendruck Null herrscht, eine Geschwindigkeit

$$w_1 = \sqrt{2g\left(y + \frac{p_0}{\gamma}\right)};$$

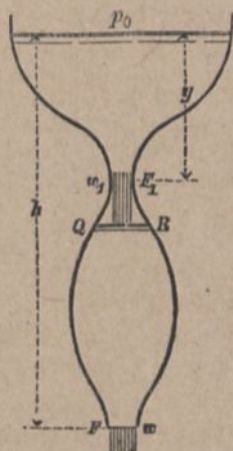
und sonach an der unteren Öffnung die Geschwindigkeit

$$w = w_1 \frac{F_1}{F} = \frac{F_1}{F} \sqrt{2g\left(y + \frac{p_0}{\gamma}\right)};$$

diese ist aber  $< \sqrt{2gh}$ , wenn die Bedingung der Gl. 10 erfüllt ist.

Die Hauptgleichung I (S. 251) für die ideelle Ausflußgeschwindigkeit gilt demnach nur, wenn der nach Gl. 3 berechnete Druck  $p$  an allen Stellen des Gefäßes sich positiv ergibt.

Fig. 291.



Beispiel: Schließt sich an ein weites Gefäß von 1<sup>m</sup> Wassertiefe scharfkantig ein lotrecht Rohr von 12<sup>m</sup> Länge (Fig. 292), so gilt in einer Tiefe  $y > 1$  m für den hydraulischen Druck  $p$  (Gl. 5), wegen  $F_1 = F$ ,

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + y - h;$$

$$\text{also ist } p \begin{cases} \leq 0 \\ > 0 \end{cases} \text{ für } y \begin{cases} \leq h - \frac{p_0}{\gamma} \\ > h - \frac{p_0}{\gamma} \end{cases},$$

d. h. in diesem Falle, mit  $h = 13$  m und  $\frac{p_0}{\gamma} = h_0 = 10$  m, für  $y \leq 3$  m. Die Röhre wird daher nur in ihrer unteren Länge  $h - y = h_0 = 10$  m mit Wasser ausgefüllt; oben, wo das Rohr sich dem Gefäß anschließt, reißt die Wassersäule ab. Beim Eintritt in das Rohr wird die Geschwindigkeit

$$w_1 = \varphi \sqrt{2g(1 + h_0)} = 0,96 \sqrt{2g \cdot 11} = 14,1 \text{ m/sek.},$$

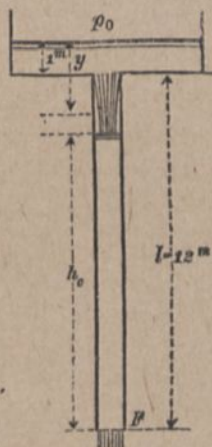
die sekundl. Wassermenge, wegen der Einschnürung am scharfen Rande,

$$Q = 0,64 \cdot 14,1 \cdot F = 9,02 F;$$

daher ist am unteren Ende die wirkliche Ausfließgeschwindigkeit

$$w = \frac{Q}{F} = 9,02 \text{ m/sek.}$$

Fig. 292.

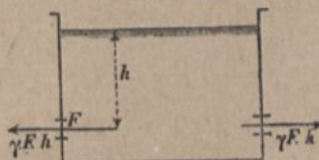


k) Gesamtdruck ausströmenden Wassers auf die Gefäßwände.

Befindet sich das Wasser in einem Gefäß in Ruhe (Fig. 293), so heben sich die Druckkräfte  $\gamma F h$  auf zwei einander gegenüber liegende parallele Wandflächenstücke

auf. — Entfernt man aber das rechtsseitige Flächenstück  $F$ , so wird nun die nach links gerichtete Kraft  $\gamma F h$  nicht mehr aufgehoben; das Gefäß erfährt jetzt einen überschüssigen Seitendruck nach links, während rechts das Wasser auszuströmen beginnt.

Fig. 293.

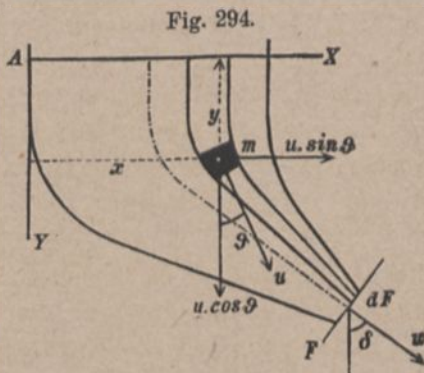


Mit der Ausbildung des Beharrungszustandes der Ausfließbewegung vergrößert sich, wie gezeigt werden soll, der einseitige Druck fast auf das Doppelte der hydrostatischen Druckkraft.

Zur Entwicklung benutzen wir ein Gefäß (Fig. 294) mit einer ziemlich bestimmt erkennbaren einfach gekrümmten Mittellinie; diese sei oben lotrecht, bilde aber an der Mündung mit der



Lotrechten einen Winkel  $\delta$ . Man trenne aus der Wassermenge des Gefäßes einen Stromfaden heraus, der an der Öffnung  $F$  den Querschnitt  $dF$  hat und alle diejenigen Wasserteilchen enthält, welche demnächst infolge gegenseitiger Verdrängung durch den Öffnungsteil  $dF$  ausfließen werden. Diejenige Wassermasse, welche durch  $dF$  während der Zeit  $dt$  ausströmt, welche daher gleichzeitig auch durch jeden anderen Querschnitt des Wasserfadens fließen muß, sei das Massenteilchen



$$1) \quad m = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot dF \cdot w \cdot dt.$$

Hierin ist  $w$  die mittlere Geschwindigkeit des Ausflußstrahles. Ein solches Massenteilchen des Stromfadens mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  habe die Geschwindigkeit  $u$ , die mit der Lotrechten den Winkel  $\vartheta$  bilde. Die Seitengeschwindigkeiten des Massenteilchens sind dann

$$\frac{dx}{dt} = u \sin \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = u \cos \vartheta,$$

die entsprechenden Beschleunigungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(u \sin \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(u \cos \vartheta)}{dt},$$

und die entsprechenden Ergänzungskräfte (Trägheitswiderstände)

$$\frac{m \cdot d(u \sin \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{m \cdot d(u \cos \vartheta)}{dt}$$

mit dem Sinne nach links, bzw. nach oben.

Für die ganze Masse des Stromfadens ergeben sich dann die Ergänzungskräfte

$$2) \quad dX = \frac{m}{dt} \int_{w_0, 0}^{w, \delta} d(u \sin \vartheta) \quad \text{bzw.} \quad dY = \frac{m}{dt} \int_{w_0, 0}^{w, \delta} d(u \cos \vartheta).$$

Diese Ergänzungskräfte bezeichnen wir noch als Differentiale, weil die Masse des Stromfadens unendlich klein ist;  $m$  ist konstant, weil es diejenige Masse bezeichnet, die in einem Zeiteilchen  $dt$  durch jeden Querschnitt des Stromfadens geht;  $dt$  ist für obige Integrale auch konstant, weil die Integration sich über die Länge des Stromfadens erstreckt, von der Zeit aber unabhängig ist.  $m \cdot dt$  bedeutet nun die Masse, welche in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt des Stromfadens fließt; nach Gl. 1 ist

$$\frac{m}{dt} = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot dF \cdot w.$$

Für die Integrale in Gl. 2 gelten die unteren Grenzwerte:  $u = w_0$  und  $\vartheta = 0$  im Wasserspiegel, die oberen:  $u = w$  und  $\vartheta = \delta$  an der Mündung. Bei Herstellung der unbestimmten Integrale heben sich Integral- und Differentialzeichen auf; daher wird

$$dX = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot dF \cdot w (w \sin \delta - 0)$$

$$dY = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot dF \cdot w (w \cos \delta - w_0).$$

Nehmen wir  $w_0$  als sehr klein an, was für die meisten Fälle zutrifft, so werden die Ergänzungskräfte für die ganze Wassermenge im Gefäß erhalten, indem man  $dF$  mit  $F$  vertauscht, nämlich

$$X = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2 \cdot \sin \delta,$$

3)

$$Y = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2 \cdot \cos \delta.$$

Die Lage dieser beiden Kräfte hängt von der Form des Gefäßes ab und hat gewöhnlich kein besonderes Interesse. An irgendeinem Punkt angreifend gedacht, lassen sie sich zu einer Mittelkraft

$$4) \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha \cdot F \cdot w^2$$

zusammensetzen, die mit der Lotrechten einen Winkel  $\varepsilon$  bildet, mit

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{X}{Y} = \operatorname{tg} \delta.$$

Die gesamte Ergänzungskraft  $R$  hat hiernach mit  $w$  gleiche Lage, aber entgegengesetzten Richtungssinn. Mit ihr müssen die äußeren Kräfte, die auf die Wassermasse im Gefäße wirken, im Gleichgewichte sein; es sind dies die Schwere  $M \cdot g$  und der Druck der



Gefäßwände gegen das Wasser. Nennt man  $H$  den wagerechten nach rechts gerichteten,  $V$  den lotrechten aufwärts gerichteten Druck der Gefäßwände gegen das Wasser, so ist

$$H = X = \frac{\gamma}{g} \alpha F w^2 \sin \delta,$$

5)

$$V = Mg - Y = M \cdot g \frac{\gamma}{g} \alpha F w^2 \cos \delta.$$

Nach dem Satze der Wechselwirkung (1. Teil, 4. Aufl., S. 35) übt das Wasser auf die Gefäßwände die Kräfte  $H$  und  $V$  nach links bzw. abwärts aus. Bei geschlossener Mündung ( $w = 0$ ) war  $H = 0$ ,  $V = Mg$ ; mithin kann man die Sache so ansehen, wie wenn als Folge der Ausflußbewegung im Beharrungszustande zwei Druckkräfte  $X$  und  $Y$  entstehen, die von dem strömenden Wasser auf das Gefäß ausgeübt werden und zu den im Ruhezustande wirkenden Druckkräften hinzukommen.  $X$  hat entgegengesetzten Sinn mit  $w \sin \delta$ ,  $Y$  bildet eine Verminderung des Bodendruckes. Die Gesamtkraft  $R$ , entgegengesetzten Sinnes mit  $w$ , heißt die Reaktion des ausfließenden Wassers.

Man kann Gl. 4, wenn man  $Q = \alpha F w$  als sekundl. Ausflußmenge einführt, auch schreiben

$$6) \quad R = \frac{\gamma}{g} Q w.$$

Ferner ist auch

$$7) \quad R = 2 \gamma \cdot \alpha \cdot F \cdot \frac{w^2}{2g},$$

und wenn man  $w^2 = \varphi^2 \cdot 2gh$  einsetzt,

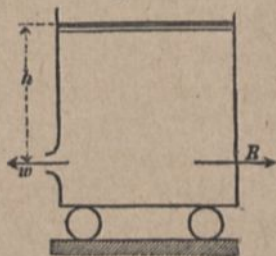
$$8) \quad R = 2 \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot F \cdot \varphi^2 \cdot h \\ = 2 \cdot \varphi \cdot \mu \cdot \gamma \cdot F \cdot h.$$

Findet (wie in Fig. 294) an der Mündung keine Einschnürung statt, so ist  $\mu = \varphi$ , und weil  $\varphi^2$  nicht viel von der Einheit abweicht, erreicht  $R$  fast das Doppelte der hydrostatischen Druckkraft  $\gamma F h$  gegen die Mündung, wie S. 284 gesagt wurde.

Hat  $w$  wagerechte Richtung (Fig. 295), so wird, mit  $\delta = 90^\circ$ ,  $R = 2 \varphi \cdot \mu \cdot \gamma \cdot F \cdot h$  ebenfalls wagerecht.

Eine gleichförmige Verschiebung des Gefäßes ändert an den Kräften nichts. Es wird  $w = \varphi \sqrt{2gh}$  die scheinbare (relative) Ausflußgeschwindigkeit des Wassers in bezug auf das Gefäß;

Fig. 295.



macht man daher das Gefäß leicht beweglich, so wird der Seitendruck  $R$  des ausfließenden Wassers einen ebenso großen Widerstand überwinden können.

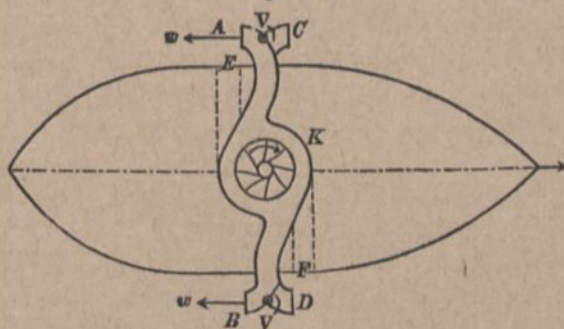
Beispiel: Auf einem Eisenbahnwagen sei ein Wasserbehälter angebracht, der unten eine Seitenöffnung mit gut abgerundetem Mundstück von  $0,12^m$  Durchmesser enthält. Der Wasserspiegel liege um  $h = 3^m$  über der Öffnung. Das ausfließende Wasser erzeugt gegen das Gefäß und somit gegen den Wagen, nach Gl. 8, eine wagerechte Druckkraft  $= 3 \cdot 1000 \cdot 0,12^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,96^2 \cdot 2 = rd. 63^kg$ . Ist für die Bewegung des Eisenbahnwagens die Widerstandsziffer  $= \frac{1}{170}$  (s. 1. Teil, 4. Aufl., S. 302), so darf der Wagen ein Gesamtgewicht  $= 170 \cdot 63 = 10710^kg$  haben, wenn er durch den Wasserausfluß in langsamer Bewegung erhalten werden soll.

Vorstehendes Beispiel entspricht keinem wirklichen Gebrauche.

#### Tatsächliche

Anwendung aber findet der Wasserstrahl zum Betriebe von Schiffen, sog. Strahlschiffen oder Reaktionsschiffen (vgl. Ztschr. des Vereins Deutscher Ingenieure 1876 S. 65). — Eine durch eine Dampf-

Fig. 296.



maschine getriebene Kreiselpumpe  $K$  (Fig. 296) saugt durch eine Öffnung im Schiffsboden Wasser an und preßt dieses in Röhren, aus denen es in wagerechter Richtung zur Ausströmung gelangt. Der beim Ausfließen auf die Röhren und somit auf das Schiff ausgeübte Rückdruck dient zum Forttreiben des Schiffes. Beim Vorwärtsfahren (nach rechts) strömt das Wasser nach rückwärts aus den Öffnungen  $A$  und  $B$ . Durch Umstellung von Klappen  $V$  kann man den Ausfluß auch bei  $C$  und  $D$  bewirken, um das Schiff zeitweise rückwärts zu treiben. Ausfluß bei  $A$  und  $D$  bewirkt Rechtsdrehung, bei  $B$  und  $C$  Linksdrehung des Schiffes ohne Zuhilfenahme des Steuers. Die hieraus ersichtliche gute Steuerfähigkeit des Strahlschiffes hat zur Folge gehabt, daß



diese Schiffsanordnung, welche sich für den gewöhnlichen Schiffsverkehr nicht vorteilhaft erwies, in neuerer Zeit für Rettungsboote Anwendung gefunden hat (s. Génie civil, 11. September 1892, S. 332 und 27. April 1895, S. 407; Engineering, 11. Oktober 1895, S. 411). Ausflußrohre  $E$  und  $F$  (punktiert) geben die Möglichkeit, auch in der Querrichtung Triebkräfte wirksam zu machen, was in der Nähe eines hilfsbedürftigen Schiffes von Wichtigkeit sein kann.

### l) Druck eines Wasserstrahles gegen eine denselben auffangende Fläche.

Trifft ein Wasserstrahl mit der Geschwindigkeit  $w$  in der Nähe der Mündung auf eine feste Fläche (Fig. 297), so erfährt der Strahl eine Änderung seiner Form, indem die einzelnen Stromfäden abgelenkt werden; da nun zu jeder Größen- oder Richtungsänderung der Geschwindigkeit eine Kraft erforderlich ist, so muß die feste Fläche auf den Wasserstrahl Kräfte ausüben.

Die Fläche sei zunächst rechtwinklig zu  $w$ , dann wird der Strahl sich nach allen Seiten auf der Fläche ausbreiten und wird nahezu einen Umdrehungskörper bilden, dessen Achse in der Mittellinie des Strahles liegt. Die Abweichung, welche durch die Einwirkung der Schwere herbeigeführt wird, kann unter der Voraussetzung, daß der Abstand zwischen der festen Fläche und der Mündung klein ist, vernachlässigt werden; dann darf man annehmen, daß die Wasserteilchen ihre Geschwindigkeit nur der Richtung nach ändern. Dort, wo die Achse des Strahles die Fläche trifft, entstehen Wirbelbewegungen, die keine besondere Beachtung erfordern.

Ein Längenteilchen eines Stromfadens (Fig. 298) habe wieder, wie auf S. 284, die Masse

$$m = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot dF \cdot w dt$$

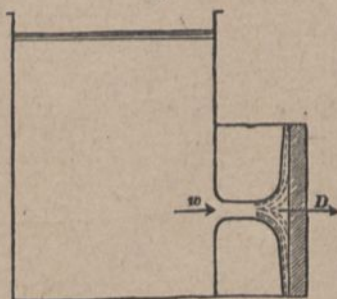


Fig. 297.

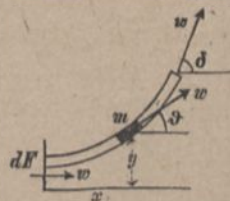


Fig. 298.

und die Koordinaten  $x$  und  $y$ , dann wird

$$\frac{dx}{dt} = w \cos \vartheta, \quad \frac{dy}{dt} = w \sin \vartheta;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(w \cos \vartheta)}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(w \sin \vartheta)}{dt},$$

mit den Ergänzungskräften

$$-m \cdot \frac{d(w \cos \vartheta)}{dt} \quad \text{und} \quad -m \frac{d(w \sin \vartheta)}{dt}.$$

Letztere wird durch den Beitrag eines anderen Stromfadens, der zum betrachteten symmetrisch ist, aufgehoben; die Ergänzungskraft in der  $x$ -Richtung wird für den ganzen Stromfaden, wenn derselbe eine gesamte Ablenkung  $\delta$  erfährt,

$$dX = -\frac{m}{dt} \int_0^\delta d(w \cos \vartheta) = -\frac{m}{dt} w (\cos \delta - 1) = \frac{m}{dt} w (1 - \cos \delta).$$

Darin ist  $\frac{m}{dt}$  wieder die Wassermasse, welche sekundlich durch den Querschnittsteil  $dF$  strömt. Ist nun  $Q$  die sekundliche Wassermenge der ganzen Mündung in  $m^3$ , die sekundliche Masse also  $\gamma Q : g$ , so wird die Ergänzungskraft für den ganzen Strahl

$$X = \frac{\gamma}{g} Q w (1 - \cos \delta)$$

mit dem Sinne nach rechts; ebenso groß, aber dem Strahl entgegen gerichtet, ist die äußere Kraft, die die Fläche auf den Strahl behufs der Ablenkung ausübt.

Die Kraft  $D$  (Fig. 297), mit welcher der Strahl auf die Fläche wirkt, stimmt nach dem Satze der Wechselwirkung mit  $X$  überein, ist also

$$1) \quad D = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot w (1 - \cos \delta).$$

Ist die Fläche eben und groß genug, daß der Strahl sich völlig auf ihr auszubreiten vermag, so kann man  $\delta = 90^\circ$  annehmen, und es wird dann

$$2) \quad D = \frac{\gamma}{g} Q w,$$

d. h. ebenso groß wie (nach Gl. 6, S. 286) der Rückdruck des ausfließenden Wassers auf das Gefäß. — Befestigt man daher die Platte



an dem Gefaße, so geben der Rückdruck auf das Gefäß und der Druck des Strahles gegen die Platte die Summe Null, so daß das Ganze, in wagerechtem Sinne leicht beweglich gemacht, nicht in Bewegung geraten wird.

Der Druck  $D$  des im Beharrungszustande befindlichen Strahles gegen die Platte (S. 288) ist also fast doppelt so groß wie der Druck auf die Platte sein würde, wenn sie die Mündung verschlösse.

Wird der Strahl nach Fig. 299 gegen die Spitze eines Kegels geführt, so ist in Gl. 1 für  $\delta$  etwa der Neigungswinkel der Kegelseiten gegen die Achse zu setzen.

Ist jedoch dem Strahl die hohle Seite einer Umdrehungsfläche entgegengestellt (Fig. 300), so hat man in Gl. 1  $\cos \delta$  mit  $\cos(\pi - \delta) = -\cos \delta$  zu vertauschen, weil die Stromfäden im ganzen um  $(\pi - \delta)$  abgelenkt werden, und es ist

$$3) \quad D = \frac{\gamma}{g} Q w (1 + \cos \delta).$$

Weicht aber die Fläche mit der Geschwindigkeit  $c$  im Sinne des Strahles aus, so ist in den vorstehenden Gleichungen an Stelle von  $w$  selbstverständlich die scheinbare (relative) Geschwindigkeit  $(w - c)$  des Strahles in bezug auf die Fläche einzuführen; es wird in diesem Falle, mit  $Q = \alpha \cdot F(w - c)$ , aus Gl. 1

$$4) \quad D = \frac{\gamma}{g} \alpha F (w - c)^2 (1 - \cos \delta),$$

und, für  $\delta = 90^\circ$ , aus Gl. 2

$$5) \quad D = \frac{\gamma}{g} \cdot \alpha F (w - c)^2.$$

Ist die den Strahl auffangende, mit der Geschwindigkeit  $c$  ( $\parallel w$ ) ausweichende Ebene (Fig. 301) gegen die Richtungen von  $w$  und  $c$  um den Winkel  $\varepsilon$  geneigt, so zerlegt man die scheinbare Geschwindigkeit  $(w - c)$  in die Seitengeschwindigkeiten  $(w - c) \cos \varepsilon$  parallel der Ebene und  $(w - c) \sin \varepsilon$  rechtwinklig dazu. Erstere hat, abgesehen

Fig. 299.



Fig. 300.

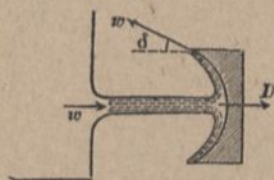
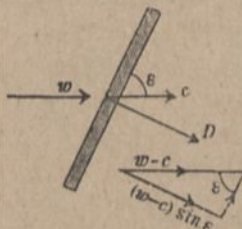


Fig. 301.



von der Reibung, die wir vernachlässigen, keine Einwirkung auf die Ebene, und letztere bewirkt, da vollkommene Flüssigkeiten nur rechtwinklige Druckkräfte ausüben, einen Normaldruck

$$6) \quad D = \frac{\gamma}{g} \alpha \cdot F(w-c)^2 \sin \varepsilon.$$

m) L. Eulers Grundgleichungen für die Bewegung tropfbarflüssiger Körper ohne Reibung.

Ein Punkt  $P$  (Fig. 302) des flüssigen Körpers, dessen Koordinaten  $x, y, z$  sind, bewege sich während des Zeiteilchens  $dt$  nach  $P_1$ ; projiziert man dann  $PP_1 = ds$  in der Richtung der drei Achsen, so erhält man die drei Projektionen  $dx, dy$  und  $dz$ . Das Parallelepiped dieser drei Seiten enthalte das Massenteilchen

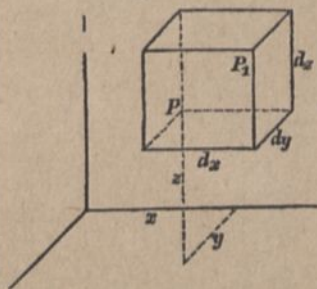
$$m = \frac{\gamma}{g} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Die Geschwindigkeit desselben sei

$$w = \frac{ds}{dt}, \text{ zerlegt in}$$

$$w_x = \frac{dx}{dt}, \quad w_y = \frac{dy}{dt}, \quad w_z = \frac{dz}{dt}.$$

Fig. 302.



Der bei der Bewegung herrschende (also hydraulische) Druck im Punkt  $P$  werde  $p$  genannt. Dieser Druck  $p$  ist an einer Stelle  $P$  nach allen Richtungen derselbe (vergl. S. 169), wechselt aber in dem flüssigen Körper von Ort zu Ort und ist auch im allgemeinen mit der Zeit veränderlich. Auf das Massenteilchen  $m$  wirke eine Massenkraft  $m \cdot R$  mit den Seitenkräften  $m \cdot X, m \cdot Y$  und  $m \cdot Z$ .

In der Richtung der  $x$ -Achse wirkt auf das Massenteilchen  $m$  auf der linken Seite des Parallelepipeds, mit dem Sinne nach rechts, die Druckkraft  $p \cdot dy \cdot dz$ , auf der rechten Seite des Parallelepipeds, wo der Druck auf die Flächeneinheit  $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$  beträgt, mit dem Sinne nach links, die Kraft  $(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy \cdot dz$ . Endlich wirkt



nach rechts die Massenkraft  $m \cdot X$ . Daher wird die Beschleunigung in der  $x$ -Richtung:

$$\frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{m} \quad \text{oder, weil}$$

$$m = \frac{\gamma}{g} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{ist,}$$

$$1) \quad \frac{dw_x}{dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{g}{\gamma}.$$

Die Geschwindigkeit  $w$  in dem Punkte  $P$  des flüssigen Körpers ist nun im allgemeinen eine Funktion von  $x, y, z$  und  $t$ , und weil bei der Bewegung von  $P$  nach  $P_1$  sich alle diese vier Größen ändern, so ist  $dw_x$  (in Gl. 1) ein totales Differential, mithin

$$dw_x = \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + \frac{\partial w_x}{\partial y} dy + \frac{\partial w_x}{\partial z} dz + \frac{\partial w_x}{\partial t} dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 1:

$$\frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \left\{ \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial t} \right\},$$

oder mit

$$\frac{dx}{dt} = w_x, \quad \frac{dy}{dt} = w_y, \quad \frac{dz}{dt} = w_z,$$

$$2) \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \left\{ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_x}{\partial t} \right\};$$

ebenso ergibt sich für die beiden anderen Achsenrichtungen:

$$3) \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \left\{ w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_y}{\partial t} \right\}.$$

$$4) \quad \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \left\{ w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial t} \right\}.$$

In den Raum des Parallelepipedes  $PP_1$  tritt während der Zeit  $dt$  links durch den Querschnitt  $dy \cdot dz$  mit der Geschwindigkeit  $w_x$  die Raummenge  $dy \cdot dz \cdot w_x \cdot dt$  ein, rechts aber wegen der Geschwindigkeit  $w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx$  die Menge  $dy \cdot dz \cdot \left( w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx \right) \cdot dt$  aus. Der Überschuß des Abflusses in der  $x$ -Richtung ist also:

$$dy \cdot dz \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dt.$$

Ebenso beträgt der Überschuß des Abflusses in der  $y$ -Richtung:

$$dx \cdot dz \cdot \frac{\partial w_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dt,$$

und in der  $z$ -Richtung:

$$dx \cdot dy \cdot \frac{\partial w_z}{\partial z} \cdot dz \cdot dt.$$

Der Gesamtüberschuß beträgt mithin:

$$dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \cdot \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right).$$

Unter der Annahme nun, daß sich innerhalb des flüssigen Körpers kein leerer Raum befinde und daß die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar sei, muß der das Massenteilchen enthaltende Raum unveränderlich, d. h. vorstehender Gesamtüberschuß Null sein, oder

$$5) \quad \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichung heißt die Kontinuitätsgleichung.

Man kann letztere Gleichung auch noch in anderer Weise ableiten: Der Rauminhalt des Massenteilchens  $m$  ist  $dx \cdot dy \cdot dz$ ; soll dieser mit der Zeit sich nicht ändern, so muß

$$6) \quad \frac{\partial (dx \cdot dy \cdot dz)}{\partial t} = 0 \quad \text{oder}$$

$$7) \quad dy \cdot dz \frac{\partial dx}{\partial t} + dx \cdot dz \cdot \frac{\partial dy}{\partial t} + dx \cdot dy \cdot \frac{\partial dz}{\partial t} = 0$$

sein. Darin bedeutet  $\partial dx$  die Zunahme der Länge  $dx$  während der Zeit  $dt$ .

Da nun die Geschwindigkeit in der  $x$ -Richtung im Punkte  $P$  mit den Koordinaten  $x, y, z$  die Größe  $w_x$ , im Punkte  $P_1$  aber die Größe  $w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} dx$  hat,

so muß sich die Kante  $dx$  während der Zeit  $dt$  um  $\frac{\partial w_x}{\partial x} dx \cdot dt$  vergrößern, mithin ist obiges

$$\partial dx = \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dt; \quad \text{ebenso}$$

$$\partial dy = \frac{\partial w_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dt \quad \text{und}$$

$$\partial dz = \frac{\partial w_z}{\partial z} \cdot dz \cdot dt.$$

Hiernach wird aus Gl. 7:

$$dx \cdot dy \cdot dz \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = 0,$$

was ebenfalls zu Gl. 5 führt.



Die Gl. 2–7 sind die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung reibungsloser tropfbar-flüssiger Körper, welche Leonhard Euler (s. S. 247) gleichfalls im Jahre 1755 aufgestellt hat.

Es soll nun angenommen werden, daß der Beharrungszustand eingetreten sei, d. h. daß an jeder Stelle des Gefäßes oder Raumes, in dem die Flüssigkeit sich bewegt, die Geschwindigkeit  $w$  und der Druck  $p$  von der Zeit unabhängig, also nur Funktionen von  $x$ ,  $y$  und  $z$  seien. Ebenso sollen auch die Beschleunigungen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  nur Funktionen des Ortes sein.

Multipliziert man Gl. 1 mit  $w_x dt = dx$ , so wird

$$w_x \cdot dw_x = X \cdot dx - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{d(w_x^2)}{2} = X dx - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Ebenso gilt:

$$\frac{d(w_y^2)}{2} = Y dy - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad \text{und}$$

$$\frac{d(w_z^2)}{2} = Z dz - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Weil nun  $p$  eine  $f(x, y, z)$ , so ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp;$$

mithin ergibt die Addition obiger drei Gleichungen, mit

$$w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2,$$

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = X dx + Y dy + Z dz - \frac{g}{\gamma} dp.$$

Ist nun an einer Stelle mit den Koordinaten  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  die Geschwindigkeit  $w_0$  und der Druck  $p_0$  vorhanden, so ergibt die Integration

$$8) \quad \frac{w^2}{2} - \frac{w_0^2}{2} = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X dx + Y dy + Z dz) - \frac{g}{\gamma} (p - p_0).$$

In dem besonderen Falle des Ruhezustandes ist  $w = w_0$ , auch geht der hydraulische Druck  $p$  über in den hydrostatischen Druck  $p$ , und man hat in Übereinstimmung mit Gl. 2, S. 245:

$$0 = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (X dx + Y dy + Z dz) - \frac{g}{\gamma} (p - p_0).$$

Hiernach kann man

$$\int_{x_0 y_0 z_0}^{x y z} (X dx + Y dy + Z dz) \quad \text{mit} \quad \frac{g}{\gamma} (p - p_0)$$

vertauschen, wenn  $p$  und  $p_0$  die hydrostatischen Drücke an den Stellen  $x, y, z$  und  $x_0, y_0, z_0$  sind, die den gegebenen Massenkräften im Ruhezustand entsprechen. Durch deren Einführung vereinfacht sich Gl. 8 zu

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - p_0}{\gamma} - \frac{p - p_0}{\gamma}$$

Bezieht sich die Geschwindigkeit  $w_0$  auf einen freien Wasserspiegel, so ist dort der hydraulische Druck  $p_0$  gleich dem hydrostatischen Drucke  $p_0$ , mithin wird

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = \frac{p - p_0}{\gamma} \quad \text{oder}$$

$$9) \quad \frac{p}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} = \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right)$$

Wir haben hiermit das Gesetz der hydraulischen Druckhöhe (s. S. 279) auf anderem Wege erhalten.

Ist noch die Schwere die einzig wirkende Massenkraft und richtet man die positive  $y$ -Achse lotrecht abwärts, so ist

$$p = p_0 + \gamma y \quad \text{also}$$

$$\frac{p}{\gamma} = \left( \frac{p_0}{\gamma} + y \right) - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right)$$

Hat man also ein Gefäß, aus dem das Wasser durch eine um  $h$  unter dem Wasserspiegel liegende Öffnung mit der Geschwindigkeit  $w$  ausströmt und herrscht an der Mündung ein Gegendruck  $p_m$ , so ist auch der hydraulische Druck  $p$  dort  $= p_m$ , und man erhält für  $y = h$ :

$$\frac{p_m}{\gamma} = \left( \frac{p_0}{\gamma} + h \right) - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right)$$

oder die bekannte Gleichung (S. 278)

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} = h + \frac{p_0 - p_m}{\gamma}$$

An die Stelle der Kontinuitätsgleichung (Gl. 5, S. 293) tritt hier

$$F_0 w_0 = F w$$



## 2. Bewegung des Wassers in Röhren.

### a) Leitungswiderstand in geraden zylindrischen Röhren.

Beim Durchfließen einer längeren Röhre vom Querschnitt  $F$  zeigt sich ein besonderer Widerstand, ein besonderer Druckhöhenverlust oder eine Widerstandshöhe  $z$  (s. S. 264). Dieser von der Reibung herrührende Widerstand folgt wesentlich anderen Gesetzen als der Reibungswiderstand fester Körper (I. Teil, 4. Aufl., S. 235). Er ist nämlich unabhängig von dem Drucke des Wassers, nahezu verhältnismäßig mit der Berührungsfläche und mit dem Quadrate der Geschwindigkeit  $w$ , also auch mit der Geschwindigkeitshöhe  $\frac{w^2}{2g}$ . Ist  $u$  der innere Umfang des Röhrenquerschnittes, so berühren sich in einer Röhre von der Länge  $l$  das Wasser und die Wandung in einer Fläche  $u \cdot l$ . Der Reibungswiderstand  $W$  in der Röhre läßt sich daher schreiben

$$1) \quad W = \kappa u l \frac{w^2}{2g}.$$

Um die entsprechende Widerstandshöhe  $z$  zu finden, berechnen wir (nach S. 265/66) die während eines Zeiteilchens  $dt$  verrichtete Widerstandsarbeit  $d\mathcal{A}$ , und setzen

$$d\mathcal{A} = mgz,$$

wobei  $m$  wieder diejenige Wassermasse bedeutet, welche während der Zeit  $dt$  jeden Querschnitt durchströmt. Bei einer Geschwindigkeit  $w$  ist  $w \cdot dt$  der Gleitweg des Wassers in der Röhre während der Zeit  $dt$ , mithin  $d\mathcal{A} = W \cdot w \cdot dt$ ; ferner ist  $mg = \gamma \cdot F \cdot w \cdot dt$ , daher wird

$$z = \frac{d\mathcal{A}}{mg} = \kappa \cdot u \cdot l \frac{w^2}{2g} \frac{w dt}{\gamma \cdot F \cdot w \cdot dt}, \quad \text{oder}$$

$$2) \quad z = \frac{\kappa u l w^2}{\gamma F 2g}.$$

Bezeichnet man mit  $\beta$  die Widerstandsziffer für Wasser in Röhren beliebiger Querschnittsform und setzt  $\kappa = \gamma \beta$ , so wird

$$3) \quad z = \beta \frac{u l w^2}{F 2g}.$$

Für zylindrische Röhren vom inneren Durchmesser  $d$  ist im besonderen  $u = d \cdot \pi$ ,  $F = \frac{1}{4} d^2 \pi$ , mithin

$$\frac{u}{F} = \frac{4}{d} \quad \text{und} \quad z = \beta 4 \frac{l w^2}{d 2g}$$

oder, wenn man für diesen besonders häufigen Fall

$$4) \quad 4\beta = \lambda$$

setzt, und  $\lambda$  als Widerstandsziffer zylindrischer Wasserleitungsrohren bezeichnet,

$$5) \quad z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}.$$

Nach Dupuit kann als erste Annäherung angenommen werden:

$$6) \quad \lambda = 0,03.$$

Eingehendere Versuche haben aber gezeigt, daß  $\lambda$  nicht nur mit dem Grade der Rauigkeit der inneren Röhrenfläche sich ändert, sondern auch noch in gewisser Weise von der Röhrenweite  $d$  und der Geschwindigkeit  $w$  abhängt, daß also die vorläufig angegebene Proportionalität des Widerstandes  $W$  mit der Fläche  $u \cdot l$  und dem Quadrate der Geschwindigkeit nicht genau zutrifft.

Nach ausgedehnten Versuchen des französischen Ingenieurs Darcy vom Jahre 1857 ist für neue eiserne oder bleierne Röhren nach Fortlassung entbehrlicher Ziffern:

$$7) \quad \lambda = \left( 0,02 + \frac{0,0005}{d} \right);$$

so daß  $\lambda$  nur von  $d$  und nicht auch von  $w$  abhängig wäre.

G. Hagen (Berlin) hat aus eigenen und Darcys Versuchen eine Formel abgeleitet, die auf die Temperatur des Wassers Rücksicht nimmt. Es möge hier nur der abgerundete Wert für eine Temperatur von  $10^{\circ}$  Celsius angegeben werden:

$$8) \quad \lambda = 0,0236 + \frac{0,00008}{d w}.$$

Innerhalb der gewöhnlich vorkommenden Grenzen für  $d$  und  $w$  schwankt  $\lambda$  nach Gl. 8 nur zwischen 0,024 und 0,027, so daß man (nach Grashof, Theoretische Maschinenlehre, 1. Bd., S. 483), wenn man wegen etwaiger Unreinigkeit der Röhren den Mittelwert noch mit etwa 1,2 multipliziert, wieder zu  $\lambda = 0,03$  (Gl. 6) gelangt.

Für Holzröhren, wie sie im Gebirge noch vorkommen, pflegt man etwa  $\lambda = 0,035$ , für Röhren, die durch feste Niederschläge aus dem Wasser stark verunreinigt sind,  $\lambda = 0,04$  zu setzen, außerdem im letzteren Fall noch eine Querschnittsverminderung zu berücksichtigen.



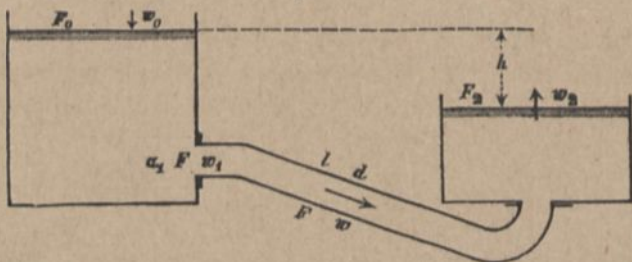
Es sei noch erwähnt, daß der franz. Ing. Flamant (s. Annales des ponts et chaussées 1892, Sept., S. 301)

$$9) \quad \lambda = \frac{m}{\sqrt[4]{d w}}$$

entwickelt hat, worin für glatte Röhren aus Blei, Glas, Schmiedeseisen  $m = 0,0102$  bis  $0,0122$ , für neue Gußeisenröhren  $m = 0,0145$ ; für gebrauchte Gußeisenröhren  $m = 0,0181$  zu setzen ist.

Sind 2 Gefäße (Fig. 303) durch eine Röhre von der Weite  $d$ , der Länge  $l$  und dem Querschnitt  $F$  miteinander verbunden, so ermittelt man die Geschwindigkeit  $w$  in der Röhre, indem man (wie auf S. 266) die wirksame Druckhöhe in die einzelnen Teile

Fig. 303.



zerlegt, wozu sie verwendet wird. Dabei verfolgt man die Wasserbewegung vom Ober- bis zum Unterwasser, um keine Widerstandshöhe zu übersehen. Das Unterwasser ist als Mündung zu betrachten, daher ist an Stelle der beiden ersten Glieder der rechten Seite von Gl. 3, S. 266 zu schreiben:  $\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}$ . An Widerstandshöhen kommen in Betracht: zuerst der Reibungsverlust im Obergefäße mit  $\zeta_0 \frac{w_1^2}{2g}$ , sodann der Stoßverlust bei scharfkantigem Anschlusse der Röhre (S. 267) mit  $\frac{(w_1 - w)^2}{2g}$ , dann der Reibungsverlust in der Röhre mit  $\lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}$ , ferner der Stoßverlust beim Übertritte des Wassers aus der engen Röhre in das Untergefäß mit  $\frac{(w - w_2)^2}{2g}$ , endlich der Reibungsverlust im Untergefäß, wie bei umgekehrter

Bewegung, mit  $\zeta_0 \frac{w^2}{2g}$ . Sonach wird

$$10) \quad h = \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w_1^2}{2g} + \frac{(w_1 - w)^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} + \frac{(w - w_2)^2}{2g} + \zeta_0 \frac{w^2}{2g}.$$

Um die verschiedenen Geschwindigkeiten auf  $w$  zurückzuführen,

setze man  $w_2 = \frac{w F}{F_2}$ ,  $w_0 = w \frac{F}{F_0}$ ,  $w_1 = \frac{w}{\alpha_1}$ ; dann wird

$$11) \quad 2gh = w^2 \left\{ \frac{F^2}{F_2^2} - \frac{F^2}{F_0^2} + \zeta_0 \frac{1}{\alpha_1^2} + \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2 + \lambda \frac{l}{d} + \left( 1 - \frac{F}{F_2} \right)^2 + \zeta_0 \right\}.$$

Ist nun, wie gewöhnlich, der Röhrenquerschnitt  $F$  sehr klein gegenüber  $F_0$  und  $F_2$ , so verschwinden die beiden ersten Glieder des Klammerausdrucks, der vorletzte Summand wird = 1, und man erhält

$$12) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0 \left( \frac{1}{\alpha_1^2} + 1 \right) + \left( \frac{1}{\alpha_1} - 1 \right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}}.$$

Mit  $\zeta_0 = 0,085$  (s. S. 264) und  $\alpha_1 = 0,64$  wird dann (rund)

$$13) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1,6 + \lambda \frac{l}{d}}}.$$

Beispiel:  $h = 2 \text{ m}$ ,  $l = 20 \text{ m}$ ,  $d = 0,1 \text{ m}$  und  $\lambda = 0,03$  gibt

$$w = \sqrt{\frac{2g \cdot 2}{1,6 + 0,03 \cdot 200}} = 2,27 \text{ m},$$

$$Q = \frac{1}{4} d^2 \pi \cdot w = 0,018 \text{ m}^3.$$

Den Einfluß der Widerstände zeigt der Vergleich von  $w$  mit  $\sqrt{2g \cdot 2} = 6,25 \text{ m}$ .

Soll die erforderliche Röhrenweite  $d$  bei gegebener sekundl. Wassermenge  $Q$ , gegebenen  $h$  und  $l$  berechnet werden, so bedenke man, daß

$$Q = \frac{d^2 \pi}{4} w = \frac{d^2 \pi}{4} \sqrt{\frac{2gh}{1,6 + \lambda \frac{l}{d}}}$$

ist, woraus sich



$$14) \quad d^5 = \frac{16 Q^2}{\pi^2 2 g h} (1,6 d + \lambda l)$$

ergibt. Man löst diese Gleichung nach  $d$  auf, indem man vorläufig auf der rechten Seite das Glied  $1,6 d$  vernachlässigt, hiermit einen Annäherungswert

$$15) \quad d = \sqrt[5]{\frac{16 Q^2 \lambda l}{\pi^2 2 g h}}$$

oder für  $\lambda = 0,03$  (Gl. 6)

$$16) \quad d = 0,3 \sqrt[5]{\frac{Q^2 l}{h}}$$

erhält, und diesen dann auf der rechten Seite der Gl. 14 einführt.

Setzt man für eine Leitung, die mit Sicherheit für längere Zeit, d. h. auch nachdem sich Niederschläge in den Röhren festgesetzt haben, die Wassermenge  $Q$  liefern soll, in Gl. 15 aber den Wert  $\lambda = 0,04$  und, wegen der Verengung des Querschnittes,  $5/4 Q$  statt  $Q$ , so erhält man

$$17) \quad d = 0,35 \sqrt[5]{\frac{Q^2 l}{h}}$$

**Beispiel:** Eine Rohrleitung soll  $Q = 0,01 \text{ m}^3/\text{sek}$  liefern bei einer Länge  $l = 100 \text{ m}$  und einer verfügbaren Druckhöhe  $h = 2 \text{ m}$ . Wie groß muß  $d$  sein? Nach Gl. 16 ist vorläufig

$$d = 0,3 \sqrt[5]{\frac{0,01^2 \cdot 100}{2}} = 0,104 \text{ m}.$$

Hiermit wird aus Gl. 14

$$d = \frac{16 \cdot 0,01^2}{\pi^2 \cdot 2 g \cdot 2} (1,6 \cdot 0,104 + 0,03 \cdot 100)$$

und  $d = 0,105 \text{ m}$ , also nur sehr wenig größer als der vorläufige Wert, so daß schon Gl. 16 in den meisten Fällen genügt. — Nach Gl. 17 dagegen erhält man für Röhren, in denen leicht Niederschläge entstehen können,

$$d = 0,35 \sqrt[5]{\frac{0,01^2 \cdot 100}{2}} = 0,121 \text{ m}.$$

### b) Benutzung der Druckmesserröhren (Piezometer).

Strömt Wasser durch ein Leitungsrohr mit der Geschwindigkeit  $w$ , und bringt man an den Stellen  $A$  und  $B$  (Fig. 304) des Leitungsrohres lotrechte Beobachtungsröhren an, so wird in diesen

das Wasser, dem hydraulischen Druck entsprechend, bis zu den Höhen  $x_1$  und  $x_2$  sich erheben und in diesen Höhen in Ruhe verbleiben. Solche Röhren heißen deshalb Druckmesser oder Piëzometer. (Letzterer Name kommt von dem griechischen Worte  $\pi\acute{\epsilon}\zeta\omega =$  drücken.) Nach Gl. 3, S. 279 ist für die Stelle  $A$ , welche um  $y_1$  unter dem Oberwasser liegt,

$$x_1 = \left( \frac{p_0}{\gamma} + y_1 \right) - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right) - z_1,$$

wenn  $z_1$  die Summe der Widerstandshöhen zwischen dem Oberwasser und der Stelle  $A$  ist. — Ebenso gilt dann für die Stelle  $B$

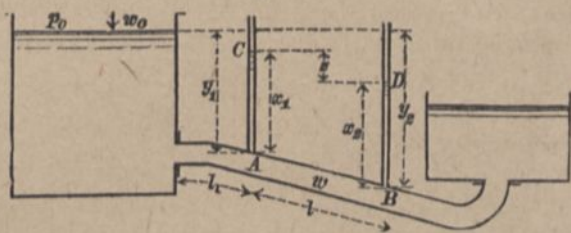
$$x_2 = \left( \frac{p_0}{\gamma} + y_2 \right) - \left( \frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right) - z_2.$$

Zieht man von dieser Gleichung die vorige ab, so entsteht:

$$x_2 - x_1 = y_2 - y_1 - (z_2 - z_1) \quad \text{oder} \\ (y_2 - x_2) - (y_1 - x_1) = (z_2 - z_1).$$

Nun ist  $(y_2 - x_2)$  die Tiefe des Druckmesserstandes  $D$  unter dem Oberwasser,  $(y_1 - x_1)$  diejenige des Druckmesserstandes  $C$ . Der Unterschied beider gibt den Höhenunterschied  $z = z_2 - z_1$  der Druckmesser-

Fig. 304



Wasserspiegel  $C$  und  $D$ . Es bedeutet aber  $z = z_2 - z_1$  die auf die Strecke  $AB = l$  entfallende Widerstandshöhe; mithin wird die zwischen zwei Stellen  $A$  und  $B$  einer Röhrenleitung auftretende Widerstandshöhe unmittelbar gemessen durch den Höhenunterschied der Wasserspiegel der in  $A$  und  $B$  angebrachten Druckmesserröhren.

Zu berechnen ist diese Widerstandshöhe für eine Rohrleitung von der Länge  $l$  und dem Durchmesser  $d$ , nach Gl. 5, S. 297:

$$z = \lambda \frac{l w^2}{d 2g}.$$



Solche Druckmesser sind benutzt worden zur Ermittlung der Ziffer  $\lambda$ ; aber auch zur Messung derjenigen Widerstandshöhen, die in einer Rohrleitung durch Richtungsänderungen, Abstellvorrichtungen (Schieber, Hähne, Ventile, Klappen) u. dgl. verursacht werden.

### c) Widerstand in Knieröhren und gekrümmten Röhren.

Erfährt eine Röhre einen scharfen Knick um einen Winkel  $2\delta$  (Fig. 305), wie solches bei Holzröhren vorkommt, so kann das Wasser dieser plötzlichen Richtungsänderung nicht folgen; vielmehr wird unmittelbar nach dem Knick eine Einschnürung und Wiederausbreitung des Wasserquerschnitts erfolgen, was nach S. 267 einen Stoßverlust erzeugt. Versuche, welche Weisbach darüber angestellt hat, sind durch die Formel

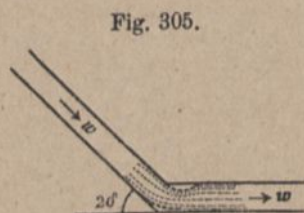


Fig. 305.

$$1) \quad \zeta_2 = 0,9457 \sin 2\delta + 2,047 \sin 4\delta$$

zum Ausdrucke gebracht, wenn  $\zeta_2 \frac{w^2}{2g}$  die Widerstandshöhe bedeutet.

$$\delta = 10^\circ \text{ gibt } \zeta_2 = 0,046,$$

$$\delta = 20^\circ \quad \text{„} \quad \zeta_2 = 0,139,$$

$$\delta = 30^\circ \quad \text{„} \quad \zeta_2 = 0,364,$$

$$\delta = 40^\circ \quad \text{„} \quad \zeta_2 = 0,740,$$

$$\delta = 45^\circ \quad \text{„} \quad \zeta_2 = 0,984.$$

Für Krümmen, deren Mittellinie nach einem Viertelkreise vom Halbmesser  $\rho$  geformt ist, gilt mit derselben Bedeutung

$$2) \quad \zeta_2 = 0,131 + 1,847 \left( \frac{1/2 d}{\rho} \right)^{3,5}.$$

$$\text{Für } \frac{1/2 d}{\rho} = 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6$$

$$\text{wird } \zeta_2 = 0,138 \quad 0,158 \quad 0,206 \quad 0,294 \quad 0,440.$$

Entspricht die Krümmung nicht einem Viertelkreise, sondern einem Mittelpunktswinkel von  $\delta^\circ$ , so setzt man die Widerstandshöhe

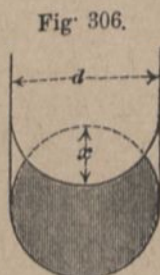
$$3) \quad z = \zeta_2 \frac{\delta}{90} \frac{w^2}{2g}.$$

### d) Widerstand beim Durchgange durch Schieber, Hähne, Drosselklappen und Ventile.

Diese Widerstände beruhen sämtlich auf Einschnürung des Wasserquerschnitts. — Weisbachs Versuche vom Jahre 1842 haben zu folgenden Ergebnissen geführt.

Schieber in kreisförmigem Rohre:

Ist  $F$  der Querschnitt des unverengten Rohres,  $w$  die Geschwindigkeit in demselben,  $F_1$  der durch den Schieber verengte Querschnitt,  $\zeta_3 \frac{w^2}{2g}$  die Widerstandshöhe, so ist nach (Fig. 306) bei

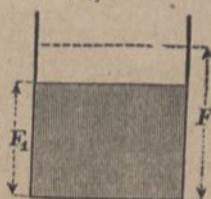


$\frac{x}{d}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{F_1}{F}$	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
$\zeta_3$	0,07	0,26	0,81	2,06	6,52	17,0	97,8

Schieber im Rohre von rechteckigem Querschnitte (Fig. 307):

Fig. 307.

$\frac{F_1}{F}$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\zeta_3$	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193.



Hahn mit kreisförmiger Durchgangsöffnung (Fig. 308):

Stellwinkel $\delta$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$65^\circ$	$82^\circ$
$\frac{F_1}{F}$	0,850	0,692	0,535	0,385	0,250	0,137	0,091	0
$\zeta_3$	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486	$\infty$

Hahn mit rechteckiger Durchgangsöffnung (Fig. 308):

Stellwinkel $\delta$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$67^\circ$
$\frac{F_1}{F}$	0,849	0,687	0,520	0,352	0,188	0
$\zeta_3$	0,31	1,84	6,16	20,7	95,3	$\infty$



Drosselklappe in kreisförmigem Rohre (Fig. 309):

Fig. 308.

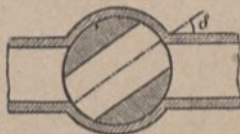


Fig. 309.



Stellwinkel $\delta =$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$90^\circ$
$\zeta_3 =$	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751	$\infty$

Drosselklappe in rechteckigem Rohre (Fig. 309):

Stellwinkel $\delta =$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$90^\circ$
$\zeta_3 =$	0,45	1,34	3,54	9,27	24,9	77,4	368	$\infty$

Für Kegelventile (Fig. 310) ist mit  $F_1$  als kleinstem Durchflußquerschnitt

Fig. 310.

Fig. 311.

$$\zeta_3 = \left( 1,537 \frac{F}{F_1} - 1 \right)^2.$$



Klappenventile (Fig. 311) für die Öffnung im Ventilsitz

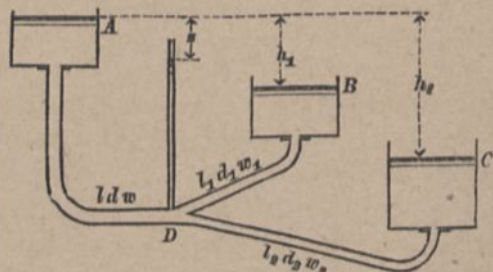
$$F_2 = 0,535 F,$$

und $\delta =$	$70^\circ$	$60^\circ$	$50^\circ$	$45^\circ$	$40^\circ$	$35^\circ$	$30^\circ$	$25^\circ$	$20^\circ$	$15^\circ$
$\zeta_3 =$	1,7	3,2	6,5	9,5	14	20	30	42	62	90.

### e) Wasserleitung mit Verzweigung.

Von einem Hauptbehälter  $A$  (Fig. 312) werden zwei Stellen  $B$  und  $C$  mit Wasser versorgt. Von  $A$  bis  $D$  führe ein Hauptrohr von der Länge  $l$  und der Weite  $d$ . Hier teile sich das Rohr in die Zweige von den Abmessungen  $l_1, d_1$  und  $l_2, d_2$ . Zur Berechnung

Fig. 312.



der nach  $B$  und  $C$  fließenden Wassermengen  $Q_1$  und  $Q_2$  denke man sich an der Verzweigungsstelle  $D$  ein Druckmesserrohr angebracht, dessen Wasserspiegel um  $z$  unter dem Oberwasser liegen möge. Dann ist  $z$

die wirksame Druckhöhe von  $A$  bis  $D$  für die Geschwindigkeit  $w$ ; unter Vernachlässigung der Krümmungswiderstände wird nach Gl. 13, S. 299:

$$1) \quad z = \frac{w^2}{2g} \left( 1,6 + \lambda \frac{l}{d} \right).$$

Wenn der Übergang aus dem Hauptrohr in die beiden Zweige allmählich erfolgt, und die Unterschiede der Geschwindigkeiten  $w$ ,  $w_1$  und  $w_2$  gering sind, kann man die hieraus entstehenden Druckhöhenverluste wegen ihrer Kleinheit vernachlässigen. Von  $D$  bis  $B$  ist dann  $h - z$  die wirksame Druckhöhe, welche zur Überwindung der Röhrenreibung und der Gefäßreibung (s. S. 298) dient, daher

$$2) \quad h_1 - z = \frac{w_1^2}{2g} \left( \zeta_0 + \lambda \frac{l_1}{d_1} \right);$$

ebenso ergibt sich für die Zweigleitung von  $D$  bis  $C$ :

$$3) \quad h_2 - z = \frac{w_2^2}{2g} \left( \zeta_0 + \lambda \frac{l_2}{d_2} \right).$$

Hierzu kommen noch die Gleichungen der Wassermengen:

$$4) \quad Q_1 + Q_2 = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot w;$$

$$5) \quad Q_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot w_1;$$

$$6) \quad Q_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4} \cdot w_2.$$

In diesen sechs Gleichungen sind unbekannt:  $z$ ,  $w$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $Q_1$  und  $Q_2$ ; die Zahl der Unbekannten ist ebenso groß, wie die Zahl der Gleichungen, die Aufgabe somit lösbar. Man kann also berechnen, wie viel Wasser nach  $B$  und  $C$  fließt.

Soll umgekehrt die Wasserleitung erst entworfen werden, so hat man die Aufgabe, die Röhrendurchmesser  $d$ ,  $d_1$  und  $d_2$  so zu bestimmen, daß sie nach  $B$  und  $C$  die verlangten Wassermengen  $Q_1$  und  $Q_2$  liefern. In den auch hier zu verwendenden Gleichungen 1—6 sind aber jetzt sieben Größen unbekannt, nämlich  $z$ ,  $w$ ,  $d$ ,  $w_1$ ,  $d_1$ ,  $w_2$  und  $d_2$ , d. h. die Aufgabe ist unbestimmt und nur lösbar, wenn man für eine der Größen einen Wert im voraus annimmt, etwa  $w = 1^m$  bis  $1,2^m$ . Daß die Aufgabe verschiedene Lösungen zuläßt, erkennt man auch unmittelbar durch folgende Überlegung: Nehmen wir an, die Röhrenweiten  $d = 0,3^m$ ,  $d_1 = 0,2^m$ ,  $d_2 = 0,1^m$



genügen den gestellten Bedingungen; würde man nun  $d$  vergrößern, vielleicht auf  $0,4^m$ , so würde jetzt, wenn  $d_1$  und  $d_2$  unverändert blieben, nach  $B$  und  $C$  mehr Wasser fließen als bisher; durch entsprechende Verkleinerung von  $d_1$  und  $d_2$  würde man aber diesen Überschuß wieder in Wegfall bringen können und erhielte somit drei andere Weiten  $d'$ ,  $d'_1$  und  $d'_2$ , die ebenfalls die Aufgabe zu erfüllen vermöchten.

Für lange Röhrenleitungen kann man in Gl. 1 den Summanden 1,6, in den Gl. 2 und 3 den Summanden  $\zeta_0$  vernachlässigen und erhält statt der Gl. 1–3:

$$7) \quad s = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

$$8) \quad h_1 - s = \lambda \frac{l_1}{d_1} \frac{w_1^2}{2g},$$

$$9) \quad h_2 - s = \lambda \frac{l_2}{d_2} \frac{w_2^2}{2g}.$$

Wenn man nun zur Bestimmung der Röhrenweite die Geschwindigkeit  $w$  im Hauptrohr annimmt, so ist nach Gl. 7 der Wert  $s$  ermittelt, ebenso die Weite  $d$  des Hauptrohres nach Gl. 4. Da nun auch  $h_1 - s$  und  $h_2 - s$  bekannt sind, so liefern Gl. 5 u. 8:

$$10) \quad d_1 = \sqrt[5]{\frac{16 Q_1^2 \lambda l_1}{\pi^2 2g (h_1 - s)}};$$

ebenso Gl. 6 und 9:

$$11) \quad d_2 = \sqrt[5]{\frac{16 Q_2^2 \lambda l_2}{\pi^2 2g (h_2 - s)}}.$$

Vertauscht man, wegen voraussichtlicher Niederschläge in den Röhren, in Gl. 10:  $Q_1$  mit  $^{5/4}Q_1$  und setzt  $\lambda = 0,04$ , so bekommt man übereinstimmend mit Gl. 17, S. 300

$$12) \quad d_1 = 0,35 \sqrt[5]{\frac{Q_1^2 l_1}{h_1 - s}}$$

ebenso aus Gl. 11

$$13) \quad d_2 = 0,34 \sqrt[5]{\frac{Q_2^2 l_2}{h_2 - s}}.$$

Beispiel: Es sei  $Q_1 = 0,1^m^3/s.$ ,  $Q_2 = 0,03^m^3/s.$ ,  $l = 300^m$ ,  $l_1 = 200^m$ ,  $l_2 = 500^m$ ,  $h_1 = 12^m$ ,  $h_2 = 6^m$ ; ferner werde angenommen  $w = 1^m$  und  $\lambda = 0,04$  (wegen etwaiger Niederschläge).

Dann wird mit  $Q = \frac{5}{4} (Q_1 + Q_2)$

nach Gl. 4:  $\frac{d^2 \pi}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4} \cdot 0,18 = 0,16$  und  $d = 0,45 \text{ m}$ ,

nach Gl. 7:  $z = 0,04 \frac{300}{0,45} \frac{1}{2g} = 1,36 \text{ m}$ ,

nach Gl. 12:  $d_1 = 0,35 \sqrt[5]{\frac{0,1^2 \cdot 200}{10,64}} = 0,25 \text{ m}$ ,

nach Gl. 13:  $d_2 = 0,35 \sqrt[5]{\frac{0,03^2 \cdot 500}{4,64}} = 0,22 \text{ m}$ .

### f) Widerstand in kegelförmigen Röhren.

Verengt sich ein Rohr der Länge  $l_1$  von der (der Geschwindigkeit  $w$  entsprechenden) Weite  $d$  kegelförmig auf die Weite  $d_1$  (Fig. 313), so gelten für die Weite  $y$  in einem Abstand  $x$  von der weiteren Öffnung die Beziehungen:

1)  $d - y = \frac{d - d_1}{l_1} x$  mit  $-dy = \frac{d - d_1}{l_1} dx$ , und

2)  $w_x = w \frac{d^2}{y^2}$ .

Auf ein Längenteilchen  $dx$  kommt nach Gl. 5, S. 297 die Widerstandshöhe

$$\begin{aligned} ds &= \lambda \frac{dx w_x^2}{y 2g} = \lambda dx \frac{w^2 d^4}{2g y^5} \\ &= -\frac{\lambda l_1 w^2}{d - d_1} \frac{d^4}{2g} y^{-5} dy, \end{aligned}$$

daher auf die ganze Länge

$$\begin{aligned} s &= -\frac{\lambda l_1 w^2}{d - d_1} \frac{d^4}{2g} \int_d^{d_1} y^{-5} dy \\ &= \frac{\lambda l_1 w^2 d^4}{d - d_1} \frac{1}{4} \left( \frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d^4} \right) \quad \text{oder} \end{aligned}$$

3)  $s = \lambda \frac{w^2 l_1}{2g d} \left( \frac{1}{4} \frac{d^4}{d_1^4} - \frac{1}{4} \right)$ .





Der letzte Klammernausdruck gibt an, in welchem Verhältnisse der Widerstand sich vergrößert im Vergleiche mit einem zylindrischen Rohre von der Weite  $d$  und der Länge  $l_1$ .

$$4) \quad \left( \frac{1}{4} \frac{\frac{d^4}{d_1^4} - 1}{1 - \frac{d_1}{d}} \right) \cdot l_1 = l$$

heißt die ideelle (vergrößerte) Länge des Mundstücks für den Rohrdurchmesser  $d$ ,

Beispiel: Es wird für  $\frac{d_1}{d} = \frac{1}{2} : s = \lambda \frac{w^2}{2g} 7,5 \frac{l_1}{d}$  und  $l = 7,5 l_1$ ,

für  $\frac{d_1}{d} = \frac{1}{5} : s = \lambda \frac{w^2}{2g} 195 \frac{l_1}{d}$  und  $l = 195 l_1$ .

### g) Steighöhe springender Strahlen.

Ein Strahl, der mit der Geschwindigkeit  $w_2$  aus einer Mündung lotrecht emporsteigt (Fig. 314), würde im luftleeren Raum eine Höhe  $h_s = \frac{w_2^2}{2g}$  erreichen. Infolge des Luftwiderstandes vermindert sich die erreichbare Höhe auf

$$1) \quad h_s = \eta \frac{w_2^2}{2g}.$$

Die Ziffer  $\eta$  hängt teils von der Form des Mundstücks ab, weil diese Einfluß darauf hat, ob der Strahl gut geschlossen bleibt oder sich zerteilt; teils ist  $\eta$  auch noch von  $w_2^2$  abhängig.

Es soll hier auf das Verhalten der springenden Strahlen nicht näher eingegangen, sondern nur angeführt werden, daß man als rohe Annäherung an Versuche von Weisbach

$$2) \quad \eta = 1 - 0,01 \frac{w_2^2}{2g} \text{ setzen kann.}$$

Beispiel: Von einem Behälter (Fig. 314) führe ein Rohr von 20 m Länge und 0,02 m Weite zu einem lotrechten kegelförmigen Mundstücke von 0,15 m Länge und 0,01 m Weite; es soll die Steighöhe des Springstrahls berechnet werden. Die wirksame Druckhöhe sei 8 m.

Nach Gl. 10 u. Gl. 11, S. 299 wird, mit  $w_0 = 0$  und sinngemäßer Fortlassung der beiden letzten Glieder, wenn in  $l$  zugleich die ideelle (vergrößerte)

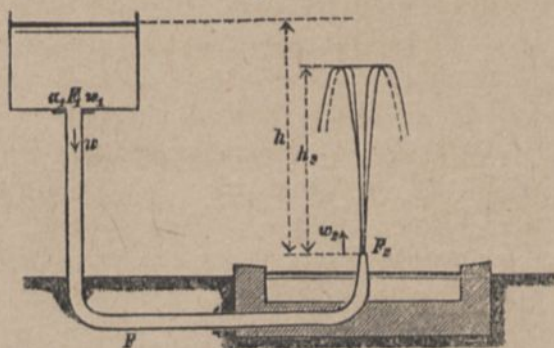
Länge des Mundstücks (s. Gl. 4, S. 308) enthalten ist, die Geschwindigkeit in der Hauptröhre

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{F^2}{F_2^2} + \zeta_0 \frac{1}{\alpha_1^2} + \left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}}$$

und die Geschwindigkeit des Springstrahls (mit  $\zeta_0 = 0,085$ ,  $\alpha_1 = 0,64$ ,  $\lambda = 0,08$ )

$$w_2 = \frac{F}{F_2} w = \frac{F}{F_2} \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{F}{F_2}\right)^2 + 0,21 + 0,32 + 0,08 \frac{l}{d}}}$$

Fig. 314.



Da der Durchmesser des Mundstücks  $d_2 = 0,01$  m ist, wird für  $d_2 = 0,5$  d, nach S. 308:

$$l = 20 + 7,5 \cdot 0,15 = 21,125 \text{ m}$$

also:  $w_2 = 4 \sqrt{\frac{2g \cdot 8}{16 + 0,53 + 0,08 \cdot 1056}} = 7,2 \text{ m}$ .

Dann ist  $\frac{w_2^2}{2g} = 2,64 \text{ m}$  und  $\eta = 1 - 0,026 = 0,974$ ,

somit die Steighöhe  $h_2 = 0,974 \cdot 2,64 = 2,57 \text{ m}$ .

Der sekundliche Wasserverbrauch ist

$$Q = 0,01^2 \frac{\pi}{4} \cdot 7,2 = 0,000565 \frac{\text{m}^3}{\text{sek}} = 0,565 \frac{\text{l}}{\text{sek}}$$

Verengt sich aber das Mundstück auf  $d_2 = 0,2$  d = 4 mm, so wird nach S. 308:

$$l = 20 + 195 \cdot 0,15 = 49 \text{ m};$$

also:  $w_2 = 25 \sqrt{\frac{2g \cdot 8}{625 + 0,53 + 0,08 \cdot 2450}} = 11,84 \text{ m}$ .

$$\frac{w_2^2}{2g} = 7,1 \text{ m} \text{ und } \eta = 1 - 0,071 = 0,93,$$

somit die Steighöhe  $h_2 = 0,93 \cdot 7,1 = 6,6 \text{ m}$ ,



und der sekundliche Wasserverbrauch

$$Q = 0,004^2 \frac{\pi}{4} \cdot 11,84 = 0,0001487 \frac{\text{m}^3}{\text{sek}} = 0,1487 \frac{1}{\text{sek}}.$$

Die stärkere Verengung des Mundstücks hat also die Sprunghöhe erheblich vergrößert, den Wasserverbrauch aber bedeutend vermindert.

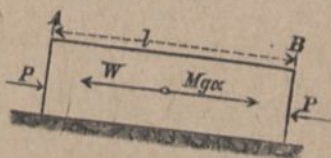
### 3. Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen.

#### a) Gleichförmige Bewegung des Wassers in Kanälen.

Soll die in einem offenen Kanal im Beharrungszustande befindliche Wasserbewegung gleichförmig, also die Geschwindigkeit  $w$  in allen Querschnitten die gleiche sein, so muß auch die Sohle des Kanals überall dieselbe Neigung  $\alpha$  und der vom Wasser erfüllte Querschnitt  $F$  überall dieselbe Größe und Form haben. Bei überall gleicher Querschnittsform des Kanalbettes gibt sich also die gleichförmige Wasserbewegung durch eine überall gleiche Wassertiefe  $t$  im Längenschnitte zu erkennen.

In einer ganz von Wasser erfüllten Röhre ist die Gleichförmigkeit oder Ungleichförmigkeit der Bewegung allein dadurch bedingt, ob der Röhrenquerschnitt überall gleich ist oder nicht; ein oben offenes Kanalbett kann aber vom Wasser auf verschiedene Höhe erfüllt werden, so daß dessen Bewegung nur unter bestimmten Bedingungen gleichförmig erfolgen wird.

Fig. 315.



Nehmen wir den Widerstand  $W$ , den das Wasser bei seiner Fortbewegung in einem offenen Kanal zu überwinden hat, einstweilen wieder, wie bei den Röhren, proportional mit der Berührungsfläche und mit der Geschwindigkeitshöhe an, so ergibt sich, wenn man (Fig. 315) einen Wasserkörper vom Querschnitt  $F$  und der Länge  $l$  betrachtet, und  $u$  der benetzte Umfang des Querschnitts ist, in Übereinstimmung mit Gl. 1, S. 296:  $W = \kappa u l \frac{w^2}{2g}$ .

Wenn wegen der Kleinheit des Neigungswinkels  $\alpha$  dessen Sinus gleich dem Bogen gesetzt werden kann, ist die Seitenkraft der Schwere:  $Mg\alpha$ .

Da nun die Druckkräfte  $P$  an den beiden Querschnitten  $A$  und  $B$  sich offenbar aufheben, so muß bei gleichförmiger Bewegung:

$$1) \quad Mg\alpha = W,$$

$$\text{oder} \quad \gamma Fl\alpha = \kappa ul \frac{w^2}{2g} \quad \text{sein.}$$

Setzt man, wie auf S. 296,  $\kappa = \gamma\beta$ , so wird

$$2) \quad \alpha = \beta \frac{u w^2}{F 2g}$$

mit  $\beta$  als Widerstandsziffer der Wasserbewegung in Kanälen. Wegen der maßgebenden Bedeutung des Quotienten  $F:u$  hat man diesen besonders bezeichnet, und nennt

$$3) \quad \frac{F}{u} = r$$

die mittlere hydraulische Tiefe oder den hydraulischen Radius. Hiermit wird das für gleichmäßige Bewegung nötige Gefällverhältnis

$$4) \quad \alpha = \frac{\beta w^2}{r 2g},$$

oder die dem Gefäße  $\alpha$  entsprechende Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{\frac{2gr\alpha}{\beta}}.$$

Man pflegt gewöhnlich

$$5) \quad \sqrt{\frac{2g}{\beta}} = k$$

zu setzen, und schreibt demgemäß

$$6) \quad w = k\sqrt{r\alpha}.$$

Ebenso wie bei der Bewegung des Wassers in Röhren ist auch hier die Annahme für  $W$  nicht genau zutreffend und deshalb auch  $\beta$  und das daraus folgende  $k$  keine völlig konstante oder etwa nur von der Regelmäßigkeit des Bettes abhängige Größe.

Bei der Berechnung von Röhrenweiten hat die Veränderlichkeit von  $\lambda = 4\beta$  keine sehr große Wichtigkeit. Man muß sich nur hüten, die Widerstände zu unterschätzen, während eine Überschätzung zwar eine etwas reichlichere Rohrweite liefert, die aber zumeist keine erheblichen Mehrkosten verursacht und die Leistungs-



fähigkeit der Leitung für eine um so längere Zeit sichert. Zudem hat man in einer Röhrenleitung das Wasser mittels der Abstellvorrichtungen stets in der Gewalt, in einem oben offenen Kanal oder Fluß aber nicht.

Ist bei einem Kanal oder Flusse das Gefällverhältnis  $\alpha$  zu groß, so entsteht eine Geschwindigkeit, die größer ist, als beabsichtigt oder erwartet war, infolge dessen kann möglicherweise das Kanal- oder Flußbett beschädigt und auch die Wassertiefe vielleicht für etwaige Schifffahrt oder für Rücksichten der Landwirtschaft zu klein werden, während der entgegengesetzte Fall eine Überschwemmung herbeiführen kann. Da man das Wasser in Kanälen und Flüssen nur durch die Mittel der Wissenschaft beherrschen kann, hat man sich seit etwa 150 Jahren mit Anwendung großer Kosten bemüht, für die Ziffer  $k$  befriedigende Gesetze aufzufinden.

Der ostfriesische Baubeamte Brahms erkannte zuerst 1753, wie es möglich sei, daß das Wasser beim Abwärtsfließen eine gleichförmige Bewegung ausführen könne, und gelangte zu der Gl. 6, indem er den Widerstand mit  $w^2$  verhältnißgleich setzte. Zu demselben Ergebnisse kam 1775 der franz. Ingenieur Chézy. Eytelwein (geb. 1764, gest. 1848), der 21 Jahre an der Spitze des preußischen Bauwesens stand, bestimmte für die Ziffer  $k$  einen Zahlenwert, der, in Metermaß umgerechnet, auf

$$k = 50$$

abgerundet werden kann.

Mit bedeutenden Mitteln wurden dann 1850—60 in Nordamerika unter Leitung der Ingenieure Humphreys und Abbot umfassende Messungen im Mississippi und seinen Nebenflüssen angestellt. Diese Flüsse verursachten nämlich fast alljährlich verheerende Überschwemmungen, und zur Verbesserung der Wasserläufe bedurfte man vor allem der Kenntnis der Bewegungsgesetze. Die von den amerikanischen Ingenieuren aufgestellte Formel ist sehr verwickelt, sie lautet, auf Metermaß bezogen:

$$7) \quad w = \left\{ \sqrt{0,0025 m + \sqrt{68,72 r_1 \sqrt{\alpha} - 0,05 \sqrt{m}}} \right\}^2$$

$$\text{mit } m = \frac{0,933}{\sqrt{r + 0,457}} \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{F}{u + b},$$

wenn  $b$  die Breite des Wasserspiegels bedeutet. Humphreys und Abbot glaubten nämlich auch einen verzögernden Einfluß der über dem Wasserspiegel befindlichen Luft annehmen zu sollen, weshalb in der Hilfsgröße  $r_1$  der Gesamtumfang  $u + b$  vorkommt.

Sehr umfassende Versuche wurden auch im Auftrage der französischen Regierung in den Jahren 1856—64 unter der Leitung von Darcy und nach dessen Tode von Bazin angestellt. Diese Versuche erstreckten sich auf Gerinne, Kanäle und Flüsse der verschiedensten Art. Bazin faßte die Ergebnisse in die Formel zusammen:

$$8) \quad w = \sqrt{\frac{r a}{m + \frac{n}{r}}}$$

oder, wenn man die Grundform der Gl. 6 beibehält, also  $w = k\sqrt{r a}$  setzt:

$$9) \quad k = \frac{1}{\sqrt{m + \frac{n}{r}}}$$

und wegen Gl. 5 die Widerstandsziffer

$$10) \quad \beta = \frac{2g}{k^2} = 2g \left( m + \frac{n}{r} \right).$$

Hierin ist (übereinstimmend mit Gl. 7, S. 312) die Abhängigkeit der Ziffer  $k$  bzw.  $\beta$  von der hydraulischen Tiefe  $r$  dargestellt, während  $m$  und  $n$  Zahlen bedeuten, die von der Beschaffenheit der Kanalwände, bzw. des Flußbettes abhängen. Es gelten:

1. für gehobeltes Holz oder Zement:

$$m = 0,00015; \quad n = 0,0000045;$$

2. für ungehobeltes Holz, Quader oder Ziegel:

$$m = 0,00019; \quad n = 0,0000133;$$

3. für Bruchsteinmauerwerk:

$$m = 0,00024; \quad n = 0,00006;$$

4. für Erde:

$$m = 0,00028; \quad n = 0,00035;$$

5. für größeres Geschiebe:

$$m = 0,00040; \quad n = 0,00070;$$



Diese Formeln sagen aus, der Widerstand sei wohl mit dem Quadrate der Geschwindigkeit verhältnissgleich, nicht aber einfach mit der Größe der Berührungsfläche, sondern stehe zu dieser in einer verwickelteren Beziehung.

Die Formeln von Humphreys und Abbot und die von Bazin ergänzen sich und schließen sich auch gegenseitig aus. Erstere ist aus den Messungen an großen Strömen gewonnen, in denen sich das Wasser trotz des geringen Gefälles  $\alpha$ , wegen der großen Tiefe  $r$ , mit großer Geschwindigkeit bewegt und paßt auch nur für solche, während dagegen Bazins Formel sich auf kleinere Gewässer ( $r < 6^m$ ) mit stärkerem Gefälle bezieht.

Im Jahre 1869 haben sich nun die schweizerischen Ingenieure Ganguillet und Kutter der Aufgabe unterzogen, die Ergebnisse der Geschwindigkeitsmessungen in Nordamerika und in Frankreich in eine einzige Formel von allgemeinerer Gültigkeit zusammenzufassen. Danach ist, wenn man die Form  $w = k\sqrt{r\alpha}$  beibehält,

$$11) \quad k = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{\alpha}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{\alpha}\right) \frac{n}{\sqrt{r}}}$$

Hierin ist die Abhängigkeit der Ziffer  $k$  vom Gefälle  $\alpha$ , von der hydraulischen Tiefe  $r$  und von der Rauigkeit  $n$  des Bettes dargestellt; man hat zu setzen:

1. für gehobeltes Holz oder Zement:  $n = 0,010$ ;
2. für ungehobeltes Holz:  $n = 0,012$ ;
3. für Quader oder Ziegel:  $n = 0,013$ ;
4. für Bruchsteine:  $n = 0,017$ ;
5. für Erde:  $n = 0,025$ ;
6. für gröberes Geschiebe oder Wasserpflanzen:  $n = 0,030$ .

Bei den meisten einschlägigen Aufgaben des Wasserbaues handelt es sich (besonders in Deutschland) um kleinere und mittlere

Wasserläufe, d. h. um Fälle des Anwendungsgebietes der Bazinschen Formel, welche zumeist auch wegen ihrer einfacheren Gestalt bevorzugt wird.

Die Bazinsche Formel ergibt für Kanäle und Flüsse in Erde für verschiedene Größen  $r$ , die Werte  $k$  und  $\beta = 2g:k^2$ , wie folgende Tabelle zeigt:

Werte  $k$  und  $\beta$  nach der Bazinschen Formel für Kanäle und Flüsse in Erde.

$r$	$k$	$\beta$
0,1	16,3	0,0742
0,2	22,2	0,0397
0,3	26,3	0,0284
0,4	29,4	0,0226
0,5	31,9	0,0192
0,6	34,0	0,0169
0,7	35,8	0,0153
0,8	37,3	0,0141
0,9	38,7	0,0131
1,0	39,8	0,0124
1,1	40,9	0,0117
1,2	41,8	0,0112
1,3	42,7	0,0108
1,4	43,4	0,0104
1,5	44,1	0,0101
1,6	44,8	0,0098
1,7	45,4	0,0095
1,8	45,9	0,0093
1,9	46,4	0,0091
2,0	46,9	0,0089
2,5	48,8	0,0082
3,0	50,2	0,0078
4,0	52,2	0,0072
5,0	53,5	0,0069
6,0	54,4	0,0066



Beispiel 1: Ein Graben in Erde vom Querschnitte nach Fig. 316 hat ein Gefällverhältnis  $\alpha = 0,000441$ . Bei dem Böschungswinkel  $\varphi = 31^\circ$  ist  $\operatorname{tg} \varphi = 0,6$ ,  $\sec \varphi = 1,17$ ,  $\sin \varphi = 0,515$ ,  $\operatorname{cosec} \varphi = 1,942$ . Dann ist die mittlere Breite

$$= 1,35 + \frac{0,9}{0,6} = 2,85 \text{ m,}$$

der Querschnitt

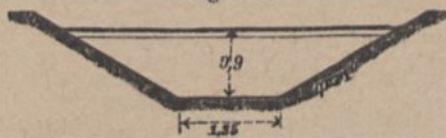
$$F = 2,85 \cdot 0,9 = 2,565 \text{ m}^2,$$

der benetzte Umfang  $u =$

$$1,35 + 2 \cdot 0,9 \cdot \operatorname{cosec} \varphi = 4,85 \text{ m,}$$

daher  $r = 2,565 : 4,85 = 0,529 \text{ m}$ .

Fig. 316.



Nach Messungsergebnissen war die mittlere Geschwindigkeit  $w = 0,467 \text{ m}$ . Es sollen damit die Ergebnisse der vorstehenden Formeln verglichen werden. Es ist

$$\sqrt{r \alpha} = \sqrt{0,529 \cdot 0,000441} = 0,01527.$$

Nach Eytelwein wäre

$$k = 50 \quad \text{und} \quad w = 0,763 \text{ m.}$$

Nach Humphreys und Abbot wäre

$$m = \frac{0,933}{\sqrt{0,529 + 0,437}} = 0,94; \quad r_1 = \frac{2,565}{4,85 + 4,35} = 0,279 \quad \text{und} \quad w = 0,563 \text{ m.}$$

Nach Bazin wäre

$$k = \frac{1}{\sqrt{0,00028 + \frac{0,00035}{0,528}}} = 32,57 \quad \text{und} \quad w = 0,497 \text{ m.}$$

Nach Ganguillet und Kutter wäre

$$k = \frac{23 + 40 + \frac{0,00155}{0,000441}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{0,000441}\right) \frac{0,025}{\sqrt{0,529}}} = 34,80 \quad \text{und} \quad w = 0,531 \text{ m.}$$

Hiernach schließt sich die Bazinsche Formel dem Ergebnisse der Messung am besten an, dann folgen die schweizerische und die amerikanische Formel schon mit großen Abweichungen, während die Eytelweinsche Formel einen viel zu großen Wert ergibt.

Beispiel 2: Die Elbe hatte bei Altengamm oberhalb Hamburg bei Hochwasser im März 1881 eine Wasserspiegelbreite  $b = 587,4 \text{ m}$ , einen benetzten Umfang  $u = 591,4 \text{ m}$ , einen Flächeninhalt  $F = 3132,7 \text{ m}^2$ , mithin  $r = 5,297 \text{ m}$ . Das Gefällverhältnis betrug  $\alpha = 0,000152$ . Die mittlere Geschwindigkeit wurde zu  $w = 1,17 \text{ m}$  gemessen. Es ist

$$\sqrt{r \alpha} = \sqrt{5,297 \cdot 0,000152} = 0,02838.$$

Nach Eytelwein wäre

$$k = 50 \quad \text{und} \quad w = 1,42 \text{ m.}$$

Nach Humphreys und Abbot wäre

$$m = \frac{0,933}{\sqrt{5,297 + 0,457}} = 3,389; \quad r_1 = \frac{3132,7}{591,4 + 587,4} = 2,658 \text{ m} \quad \text{und} \quad w = 1,42 \text{ m.}$$

Nach Bazin wäre

a) für  $m = 0,00028$  und  $n = 0,00035$ :

$$k = \frac{1}{\sqrt{0,00028 + \frac{0,00035}{5,297}}} = 53,8 \quad \text{und} \quad w = 1,53 \text{ m.}$$

b) für  $m = 0,00040$  und  $n = 0,00070$ :

$$k = \frac{1}{\sqrt{0,00040 + \frac{0,00070}{5,297}}} = 43,3 \quad \text{und} \quad w = 1,23 \text{ m.}$$

Nach Ganguillet und Kutter wäre

a) für  $n = 0,025$ :

$$k = \frac{23 + 40 + \frac{0,00155}{0,000152}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{0,000152}\right) \frac{0,025}{\sqrt{5,297}}} = 53,8 \quad \text{und} \quad w = 1,53 \text{ m.}$$

b) für  $n = 0,030$ :

$$k = \frac{23 + 33,3 + \frac{0,00155}{0,000152}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{0,000152}\right) \frac{0,030}{\sqrt{5,297}}} = 46,4 \quad \text{und} \quad w = 1,32 \text{ m.}$$

Auch in diesem Falle liefern die Formeln sämtlich zu große Ergebnisse; am besten schließt sich der Messung wieder die Bazinsche Formel mit den Werten unter b an, während die Werte unter a mit denen der schweizerischen Formel gleiche Ergebnisse zeigen.

In beiden Beispielen stimmen die Ergebnisse der Messung mit denen der Formeln, selbst der am besten passenden, nicht befriedigend überein. — Es hat eben jeder Kanal, jeder Bach, jeder Teil eines Flusses seine besondere Eigentümlichkeit, seinen besonderen Rauheitsgrad, d. h. seine besonderen Ziffern  $m$  und  $n$  (nach Bazin) bzw.  $n$  (nach Ganguillet und Kutter), die der Wasserbautechniker, der sich mit dem Gewässer zu beschäftigen hat, entweder durch Messungen feststellen oder nach dem Augenschein auf Grund genauerer Kenntnis anderer Wasserläufe zunächst abschätzen muß.



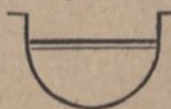
Die Eigentümlichkeiten eines Flusses lassen sich nicht in allgemeine Formeln mit feststehenden Widerstandsziffern zwingen. Auch ist zu bedenken, daß Unregelmäßigkeiten in der Bewegung des Wassers, Wirbel u. dgl. häufig die Messung erschweren und ihre Richtigkeit beeinträchtigen, so daß zuweilen auch deren Ergebnisse von der Wirklichkeit nicht unerheblich abweichen können. Schließlich aber muß betont werden, daß die vorstehenden Formeln sich nur auf eine dem Beharrungszustande entsprechende, **gleichförmige** Bewegung beziehen, d. h. an die Bedingung geknüpft sind, daß sich das Gefälle des Flusses und der vom Wasser eingenommene Querschnitt in Form und Größe auf eine gewisse Länge des Flusses nicht erheblich ändern. Diese Bedingung wird sehr häufig nicht erfüllt sein, und manche Abweichung zwischen Messung und Formel wird man auf diesen Umstand zurückzuführen haben. Die Behandlung der dann vorhandenen ungleichförmigen Bewegung erfolgt weiter unten. — Besteht kein Beharrungszustand, ist also die sekundliche Wassermenge  $Q$  eines Querschnitts veränderlich, so treten besondere Erschwerungen für die Berechnung ein, welche hier nicht erörtert werden können.

#### b) Querschnittsform kleinsten Widerstandes.

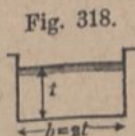
Hat ein Kanal den Zweck, einer Wasserkraftmaschine (Wasserrad oder Turbine) das Betriebswasser zuzuführen, so kommt es darauf an, von dem ganzen zur Verfügung stehenden Gefälle für den Zuleitungskanal möglichst wenig zu verbrauchen, damit für die Kraftmaschine möglichst viel Gefälle übrig bleibe. Da nun nach Gl. 4, S. 311 das erforderliche Gefälleverhältnis mit  $r = F:u$  umgekehrt proportional ist, so wird diejenige Form des vom Wasser erfüllten Kanalquerschnitts am günstigsten sein, bei welcher  $r$  möglichst groß, d. h. bei gegebener Querschnittsfläche  $F$  der vom Wasser benetzte Umfang  $u$  möglichst klein ist.

Da von allen Figuren gegebenen Flächeninhalts der Kreis den geringsten Gesamtumfang hat, so wird, weil bei einem Kanale nur der vom Wasser benetzte Umfang in Frage kommt, der Halbkreis die Kanalform kleinsten Widerstandes sein (Fig. 317), welche annähernd für den unteren Teil des Querschnitts gemauerter Entwässerungskanäle auch Anwendung findet.

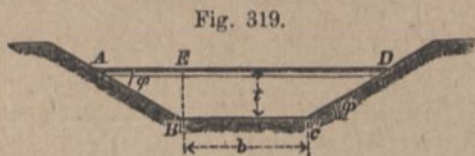
Fig. 317.



Für rechteckige Querschnitte liefert das halbe Quadrat (Fig. 318) den kleinsten Widerstand, da das ganze Quadrat von allen Rechtecken gegebener Fläche den kleinsten Umfang hat.



Für Kanäle in Erde ist der Böschungswinkel  $\varphi$  der Seitenwände durch die Beschaffenheit des Erdreichs bedingt; Sohlenbreite  $b$  und Wassertiefe  $t$  (Fig. 319) sind so zu wählen, daß bei gegebener Fläche  $F$  der benetzte Umfang  $u$  möglichst klein werde. Da nun  $AE = t \cdot \cot \varphi$  ist, so ist die mittlere Breite  $= b + t \cdot \cot \varphi$ , daher



$$1) \quad F = t(b + t \cot \varphi)$$

und, weil  $AB = t : \sin \varphi$  ist, der benetzte Umfang

$$2) \quad u = b + \frac{2t}{\sin \varphi}.$$

Durch Gl. 1 ist die Sohlenbreite bedingt zu

$$b = \frac{F}{t} - t \cot \varphi; \text{ hiermit wird}$$

$$3) \quad u = \frac{F}{t} - t \cot \varphi + \frac{2t}{\sin \varphi} = \frac{F}{t} + t \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Damit nun  $u$  als  $f(t)$  ein Minimum werde, muß

$$4) \quad \frac{du}{dt} = -\frac{F}{t^2} + \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = 0, \text{ d. h.}$$

$$5) \quad t = \sqrt{\frac{F \sin \varphi}{2 - \cos \varphi}}$$

sein. Daß dieser Wert  $u$  zu einem Minimum und nicht zu einem Maximum macht, ist unmittelbar daraus ersichtlich, daß für  $t = 0$  der Umfang  $u$  nach Gl. 3 unendlich groß wird.

Ein einfaches Verhältnis zwischen Sohlenbreite  $b$  und Wassertiefe  $t$  ergibt sich, wenn man aus Gl. 1 bildet

$$\frac{F}{t^2} = \frac{b}{t} + \cot \varphi$$



und diesen Wert in Gl. 4 einsetzt; dann wird

$$\frac{b}{t} + \cot \varphi = \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad \text{oder}$$

$$\frac{b}{t} = 2 \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = 2 \frac{2 \sin^2(1/2 \varphi)}{2 \sin^{1/2} \varphi \cdot \cos^{1/2} \varphi}, \quad \text{d. h.}$$

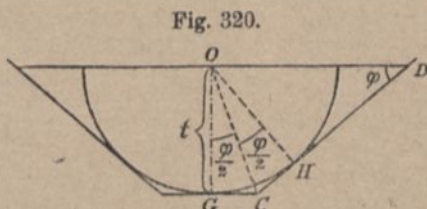
$$6) \quad \frac{b}{t} = 2 \operatorname{tg} (1/2 \varphi).$$

Diese Gleichung bedeutet, daß der vom Wasser erfüllte Querschnitt ein, einem Halbkreise vom Halbmesser  $t$  umschriebenes Trapez sein muß. Denn bei einem solchen (Fig. 320) ist

$$\sphericalangle GOH = \varphi,$$

$$\sphericalangle GOC = 1/2 \varphi, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{1/2 b}{t} = \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} \right),$$



übereinstimmend mit Gl. 6.

Für  $\varphi = 90^\circ$  entsteht wieder das halbe Quadrat (Fig. 318).

Die Rechnung führt also darauf, daß man sich der überhaupt günstigsten Halbkreisform so weit zu nähern habe, wie die vorhandenen Bedingungen es zulassen.

Nach Fig. 320 ist ferner:

$$F = 2 \cdot (\triangle GOC + \triangle COD) = t \cdot (GC + CD), \quad \text{d. h.}$$

$$7) \quad F = t \cdot \frac{u}{2}.$$

Also ist bei der günstigsten Kanalform die mittlere hydraulische Tiefe

$$8) \quad r = \frac{F}{u} = \frac{t}{2}$$

unabhängig von  $\varphi$ .

Somit wird nach der Bazinschen Formel

$$9) \quad w = \sqrt{\frac{1/2 t \alpha}{m + \frac{2n}{t}}} = \frac{t}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{1/2 t m + n}}$$

oder das erforderliche Gefällverhältnis

$$10) \quad \alpha = w^2 \left( \frac{2m}{t} + \frac{4n}{t^2} \right) = w^2 \left( \frac{m}{r} + \frac{n}{r^2} \right).$$

**Beispiel:** Ein Zuleitungskanal soll sekundlich  $Q = 2 \text{ m}^3$  Wasser liefern; die Geschwindigkeit werde, damit einerseits keine Beschädigung der Kanalwände, andererseits keine Absetzung von Sinkstoffen erfolge, zu  $w = 0,5 \text{ m}$  gewählt, so daß  $F' = 4 \text{ m}^2$  werden muß. Es soll hiernach die Querschnittsform kleinsten Widerstandes bestimmt werden, unter Annahme eines Böschungswinkels  $\varphi = 30^\circ$ .

$$\text{Gl. 6 bestimmt} \quad \frac{b}{t} = 2 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = 0,536.$$

$$\text{Nach Gl. 5 wird} \quad t = \sqrt{\frac{4 \cdot \sin 30^\circ}{2 - \cos 30^\circ}} = 1,33 \text{ m},$$

$$\text{also} \quad b = 0,536 \cdot 1,33 = 0,71 \text{ m}.$$

Nach Gl. 8 ist dann  $r = 0,665$  und nach Gl. 10 das erforderliche Gefällverhältnis

$$\alpha = 0,25 \left( \frac{0,00028}{0,665} + \frac{0,00035}{0,665^2} \right) = 0,001212 = 1 : 825.$$

Großer Wert ist dieser Rechnung nicht beizulegen, da in Wirklichkeit auch die ebenfalls von Breite und Tiefe abhängigen Kosten des Kanals mit in Frage kommen.

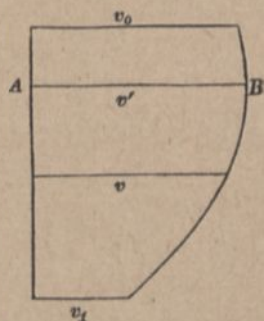
### c) Geschwindigkeiten in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts.

Im vorstehenden wurde die Bewegung des Wassers in einem Kanale oder Flusse so aufgefaßt, als ob die Wassermasse wie ein starrer prismatischer Körper abwärts glitte, als ob alle Teile dieses Körpers die gleiche Geschwindigkeit  $w$  hätten. — In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall, vielmehr ist die Geschwindigkeit der Wasserteilchen an verschiedenen Stellen des Querschnitts eine verschiedene. Infolge der Reibung werden die nahe den Wandungen befindlichen Wasserteilchen zurückgehalten und fließen langsamer als die entfernteren. Im Wasserspiegel gibt sich bei Messungen ein sog. Stromstrich zu erkennen, wo die Geschwindigkeit größer ist als zu beiden Seiten. — Auch haben die Messungen ergeben, daß selbst in jeder Lotrechten des Querschnitts die Geschwindigkeiten von Punkt zu Punkt verschieden sind. Stellt man diese durch wagerechte Ordinaten von der Lotrechten aus dar, so ergibt sich eine Kurve, die sog. Geschwindigkeitskurve (Fig. 321). Diese ist mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit eine Parabel mit wagerechter Achse. Würde am Wasserspiegel gar kein Widerstand auftreten, so müßte die Achse  $AB$  der Parabel wohl im Wasserspiegel liegen.



Bei ruhiger Luft bietet diese aber dem Wasser einen, wenn auch geringen Widerstand, der bewirkt, daß man die größte Geschwindigkeit  $v'$  einer Lotrechten etwas unter Wasser findet. Stromaufwärts wehender Wind schiebt die Achse der Parabel nach unten, stromabwärts wehender Wind nach oben. Die Höhenlage der Achse ist daher schwankend. Kennt man die Geschwindigkeit  $v$  an drei verschiedenen Stellen einer Lotrechten, so ist damit die Parabel bestimmt, weil man hieraus den Parameter der Parabel, die Höhenlage ihrer Achse und den Abstand  $AB = v'$  ihres Scheitels von der Lotrechten berechnen kann.

Fig. 321.



Ist  $dF$  ein Teilchen der Querschnittsfläche,  $v$  die zugehörige Geschwindigkeit, so ist  $dQ = dF \cdot v$  die zugehörige sekundliche Wassermenge, dargestellt durch ein wagerechtes Prisma vom Querschnitte  $dF$  und der Länge  $v$ . — Denkt man sich zu allen Flächenteilchen die entsprechende Geschwindigkeit rechtwinklig aufgetragen, so entsteht ein Körper, dessen lotrechte in der Stromrichtung geführte Schnitte die Geschwindigkeitsflächen (Fig. 321) sind und dessen Inhalt die sekundliche Gesamtwassermenge  $Q$  darstellt. Verwandelt man diesen Körper in ein gerade abgeschnittenes Prisma vom Querschnitt  $F$ , so ist seine Länge

$$1) \quad w = \frac{Q}{F}$$

die mittlere Geschwindigkeit des Querschnitts, auf welche sich die Erörterungen S. 310—321 durchweg beziehen.

Wert kann die Beziehung zwischen der größten Oberflächengeschwindigkeit  $v_{0 \max}$  im Stromstrich und der mittleren Geschwindigkeit  $w$  des ganzen Querschnittes gewinnen, wenn es sich darum handelt, aus der alleinigen Messung von  $v_{0 \max}$  die Wassermenge  $Q$ , wenn auch nur roh, zu bestimmen. Die einfachste, wenn auch sehr unverlässliche, derartige Formel ist

$$2) \quad w = \frac{3}{4} v_{0 \max}$$

während Bazin aus seinen Versuchen abgeleitet hat

$$3) \quad w = v_{0 \max} - 14 \sqrt{r \alpha},$$

oder, weil nach Gl. 6, S. 311,  $\sqrt{r \alpha} = w : k$  ist,

$$w = v_{0 \max} - 14 \frac{w}{k}, \quad \text{oder}$$

$$4) \quad w = \frac{v_{0 \max}}{1 + \frac{14}{k}} = v_{0 \max} \frac{k}{k + 14}.$$

Für Kanäle in Erde gilt für verschiedene Werte von  $r$ :

$r$ (Meter)	$\frac{w}{v_{0 \max}} = \frac{k}{k + 14}$	$r$ (Meter)	$\frac{w}{v_{0 \max}} = \frac{k}{k + 14}$
0,1	0,537	1,2	0,749
0,2	0,613	1,3	0,753
0,3	0,653	1,4	0,756
0,4	0,678	1,6	0,762
0,5	0,695	1,8	0,766
0,6	0,709	2,0	0,770
0,7	0,719	2,5	0,777
0,8	0,727	3,0	0,782
0,9	0,734	4,0	0,788
1,0	0,740	5,0	0,792
1,1	0,745	6,0	0,795

Beispiel: In dem ersten Beispiel auf S. 316 war  $r = 0,529$ , und nach Bazin  $k = 32,57$ , daher wird

$$w : v_{0 \max} = \frac{32,57}{32,57 + 14} = 0,699.$$

In dem zweiten Beispiele auf S. 316/17 mit  $r = 5,297$  war nach Bazin mit den Werten unter a:  $k = 53,8$ , daher wird

$$w : v_{0 \max} = \frac{53,8}{53,8 + 14} = 0,793.$$

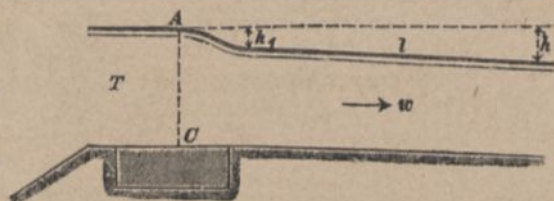
#### d) Eintritt des Wassers in einen Kanal.

Soll aus einem Teiche oder sonstigen Wasserbehälter  $T$  (Fig. 322) durch einen Ufereinschnitt  $AC$  und einen anschließenden



Kanal eine sekundliche Wassermenge  $Q$  entnommen werden und ist auf eine Länge  $l$  ein Wasserspiegelgefälle  $h$  verfügbar, so darf

Fig. 322.



man nicht etwa voraussetzen, daß das Wasser im Kanal eine Tiefe  $AC$  annehmen werde. Vielmehr wird ein Teil  $h_1$  des Gefälles beim Eintritte des Wassers in den Kanal dazu verbraucht, dem Wasser, das im Teiche fast in Ruhe war, die Kanalgeschwindigkeit  $w$  zu erteilen; es ist  $h_1 = \frac{w^2}{2g}$ , und erst der Rest  $h - h_1$  dient zur Überwindung der Reibung im Kanal und darf, wenn durch ein gleichmäßiges Kanalprofil eine gleichförmige Bewegung erzielt wird, gleichmäßig auf die Länge  $l$  verteilt werden. Da  $w$  noch unbekannt ist, so kann man die Rechnung folgendermaßen durchführen: Das ganze Gefälle  $h$  zerlegt sich in  $h_1 = \frac{w^2}{2g}$  und den Teil  $\alpha l = \beta \frac{l w^2}{r 2g}$  (s. Gl. 4, S. 311); es ist also

$$1) \quad h = \frac{w^2}{2g} + \beta \frac{l w^2}{r 2g} = \frac{w^2}{2g} \left( 1 + \beta \frac{l}{r} \right).$$

$$2) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \beta \cdot \frac{l}{r}}}.$$

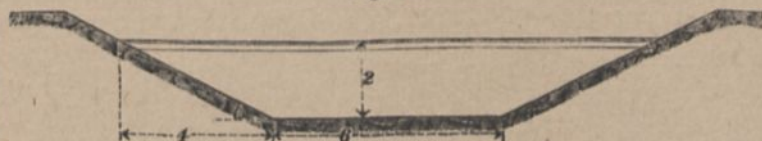
Da für gleichförmige Bewegung  $\frac{w^2}{2g} = \frac{\alpha r}{\beta}$  ist, ergibt sich auch:

$$h = \frac{\alpha r}{\beta} \left( 1 + \beta \frac{l}{r} \right) = \alpha \left( \frac{r}{\beta} + l \right), \text{ und}$$

$$3) \quad \alpha = \frac{\beta h}{r + \beta l}.$$

**Beispiel:** Aus einem Behälter soll mittels eines Kanales (Fig. 323) von 6 m Sohlenbreite, 2 m Tiefe und einem Böschungswinkel  $\varphi = 26,5^\circ$  ( $\operatorname{tg} \varphi = 0,5$ ,

Fig. 323.



$\sin \varphi = 0,447$ ) Wasser entnommen werden. Auf  $l = 5000$  m Länge steht ein Gefälle  $h = 1$  m zur Verfügung.

Es ist  $F = 2 \cdot (6 + 4) = 20$  m<sup>2</sup>,  $u = 6 + 2 \cdot 2 : 0,447 = 14,95$  m,  $r = 20 : 14,95 = \text{rund } 1,3$  m. Dann wird nach Bazin (vergl. S. 313 und 315)

$$\beta = 2g \left( 0,00028 + \frac{0,00035}{1,3} \right) = 0,0108 \quad \text{und damit} \quad \alpha = \frac{0,0108}{1,8 + 54} = \frac{1}{5120}$$

Demnach ist  $\alpha \cdot l = 0,977$  m das auf den Kanal zu verteilende Gefälle, während  $h_0 = 0,023$  m zur Erzeugung der Eintrittsgeschwindigkeit  $w = 0,68$  m/s. dient. Der Kanal wird daher sekundlich  $Q = 20 \cdot 0,68 = 13,6$  m<sup>3</sup> Wasser liefern.

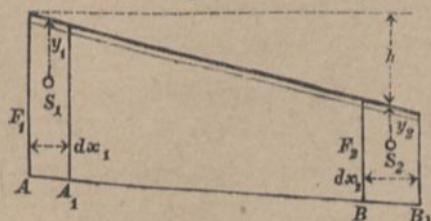
### e) Ungleichförmige Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen.

Das äußere Kennzeichen einer im Beharrungszustande befindlichen ungleichförmigen Wasserbewegung ist, daß sich der Wasserquerschnitt  $F$  wohl an ein und derselben Stelle nicht ändert, aber an verschiedenen Stellen eine ungleiche Größe zeigt. Bei regelmäßiger Form des Wasserlaufes wird dann an verschiedenen Stellen eines Längenschnittes die Wassertiefe  $t$  verschieden groß, also der Wasserspiegel der Kanalsohle nicht parallel sein.

Es läßt sich zeigen, daß in diesem Falle das Gefälle der Oberfläche das für die Arbeit der Schwere maßgebende, wirksame Gefälle ist.

Wir betrachten die zwischen den Schnitten  $A$  und  $B$  (Fig. 324) befindliche Wassermenge, die nach einem Zeitteilchen die Lage  $A_1 B_1$  einnimmt. Es möge die an diesem Wasserkörper während

Fig. 324.





der Bewegung von  $AB$  nach  $A_1 B_1$  verrichtete Arbeit der Schwere und des Wasserdrucks berechnet werden. Ist der obere Querschnitt  $F_1$ , der untere  $F_2$  und nennt man  $AA_1 = dx_1$ ,  $BB_1 = dx_2$ , so muß  $F_1 dx_1 = F_2 dx_2$  sein. Die Arbeit der Schwere ist offenbar so anzusehen, als ob das Massenteilchen

$$m = \frac{\gamma}{g} F_1 dx_1 = \frac{\gamma}{g} F_2 dx_2$$

aus der oberen Lage mit dem Schwerpunkt  $S_1$  in die untere mit dem Schwerpunkt  $S_2$  gerückt sei; diese Arbeit ist dann

$$mg(h + y_2 - y_1).$$

Die Verteilung des Druckes über einen Querschnitt erfolgt nahezu nach den Regeln für einen im Gleichgewichte befindlichen Wasserkörper, da der nach S. 279 zu beurteilende verminderte Einfluß der Beschleunigung gewöhnlich außerordentlich unbedeutend ist. Dann treten am oberen und unteren Schnitte die Druckkräfte  $\gamma F_1 y_1$  bzw.  $\gamma F_2 y_2$  auf, mit den Arbeiten  $\gamma F_1 y_1 dx_1$  bzw.  $-\gamma F_2 y_2 dx_2$ , deren Arbeitssumme wegen  $mg = \gamma F_1 dx_1 = \gamma F_2 dx_2$  sich auch schreiben läßt:

$$mg(y_1 - y_2).$$

Addiert man diese zu obiger Arbeit der Schwerkraft, so entsteht als Ergebnis

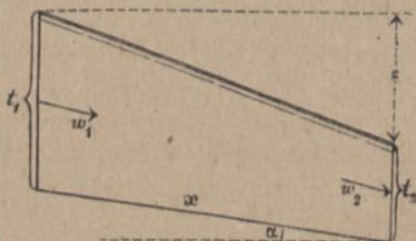
$$mgh,$$

also eine Arbeit entsprechend dem wirksamen Gefälle  $h$ , wie oben behauptet wurde.

Bei der ungleichförmigen Bewegung zerfällt das Gefälle  $z$  (Fig. 325) in einen Teil, der zur Geschwindigkeitsänderung  $w_1$  in  $w_2$  dient (s. S. 266), und in einen Teil zur Überwindung der Kanalwiderstände (s. S. 311).

Hat man daher für eine nicht sehr lange Strecke  $x$  eines Wasserlaufes das Gefälle  $z$  der Oberfläche, die Neigung  $\alpha$  der Sohle, die Wassertiefen  $t_1$  und  $t_2$ , oben und unten gemessen, und die diesen Wassertiefen entsprechenden Querschnittswerte  $F_1$ ,  $u_1$

Fig 325.



bezw.  $F_2$ ,  $u_2$  ermittelt, so ist, wenn  $u$ ,  $F$  und  $w$  die veränderlichen Werte der Kanalstrecke bedeuten,

$$z = \left( \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} \right) + \beta x \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}.$$

Sind nun  $t_1$  und  $t_2$  nicht viel voneinander abweichend, so kann man in dem letzten Gliede für  $u$ ,  $F$  und  $w$  die arithmetischen Mittel setzen, d. h.

$$u = 1/2(u_1 + u_2); \quad F = 1/2(F_1 + F_2); \quad w = 1/2(w_1 + w_2).$$

Bedenkt man noch, daß

$$Q = F_1 w_1 = F_2 w_2, \quad \text{also } w_1 = \frac{Q}{F_1}, \quad w_2 = \frac{Q}{F_2} \quad \text{ist,}$$

so wird

$$\begin{aligned} z &= \frac{Q^2}{2g F_2^2} - \frac{Q^2}{2g F_1^2} + \beta x \frac{u_1 + u_2}{F_1 + F_2} \left( \frac{Q}{F_1} + \frac{Q}{F_2} \right)^2 \frac{1}{8g} \\ &= \frac{Q^2}{2g} \left\{ \frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \beta x \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2} \right\}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die sekundliche Wassermenge

$$1) \quad Q = \frac{\sqrt{2g z}}{\sqrt{\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} + \beta x \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4 F_1^2 F_2^2}}}.$$

**Beispiel:** In einem Wasserlaufe von dem Bettquerschnitte Fig. 323, S. 325, sei an einer Stelle die Wassertiefe  $2\text{ m}$ , an einer um  $200\text{ m}$  stromabwärts gelegenen Stelle  $1,95\text{ m}$ ; das Oberflächengefälle betrage für diese Strecke  $0,1\text{‰}$ . Dann berechnet sich  $u_1 = 14,95\text{ m}$ ,  $F_1 = 20\text{ m}^2$ ;  $u_2 = 14,72$ ,  $F_2 = 19,3\text{ m}^2$ ;  $r = \text{im Mittel } \frac{39,3}{29,67} = \text{rund } 1,33\text{ m}$ , daher  $\beta = 0,0106$ ; und

$$Q = \frac{\sqrt{2g \cdot 0,1}}{\sqrt{\frac{1}{19,3^2} - \frac{1}{20^2} + 0,0106 \cdot 200 \cdot \frac{29,67 \cdot 39,3}{4 \cdot 20^2 \cdot 19,3^2}}} = 21,62 \text{ cm}^3.$$

Hätte man nur den oberen Querschnitt  $F_1$  berücksichtigt und die Bewegung als eine gleichmäßige mit dem Gefällverhältnis  $\alpha = 0,1 : 200 = 0,0005$  angesehen, so hätte sich nach Bazin, S. 308, mit  $r = 1,33$ ;  $k = 42,9$ , also

$$w = 42,9 \sqrt{1,33 \cdot 0,0005} = 1,109 \quad \text{und} \quad Q = 20 \cdot 1,109 = 22,18 \text{ m}^3$$

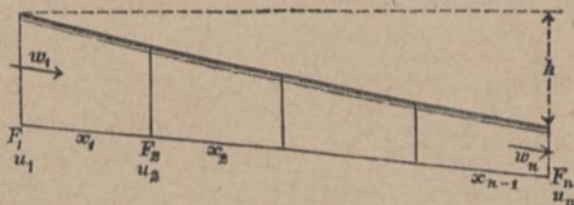
ergeben.



Steht eine längere Strecke des Wasserlaufes zur Verfügung, so ist es rätlich, die Strecke in mehrere Teile zu zerlegen, in jedem Teile die erforderlichen Messungen auszuführen und auf jeden Teil die Gl. 1 anzuwenden. Aus den so erhaltenen Werten für  $Q$  nimmt man dann das arithmetische Mittel.

Ist aber das Gefälle nicht für jeden einzelnen Teil, sondern nur für die ganze eingeteilte Strecke bekannt (Fig. 326), so kann

Fig. 326.



man auch nur eine einzige Gleichung aufstellen, in welche die Summe der nach obiger Weise berechneten Widerstandshöhen der einzelnen Teile eingeführt wird; es ist dann

$$h = \left( \frac{w_n^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} \right) + \Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

$$= \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_1^2} + \Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2} \right)$$

und danach

$$2) \quad Q = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_1^2} + \Sigma \beta \cdot x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2}}}$$

darin bedeutet:

$$\Sigma \beta x \frac{u}{F} \frac{1}{F^2} = \beta_1 x_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2)}{4F_1^2 F_2^2}$$

$$+ \beta_2 x_2 \frac{(u_2 + u_3)(F_2 + F_3)}{4F_2^2 F_3^2} + \dots$$

### f) Stauhöhe an Wehren und Brückenpfeilern.

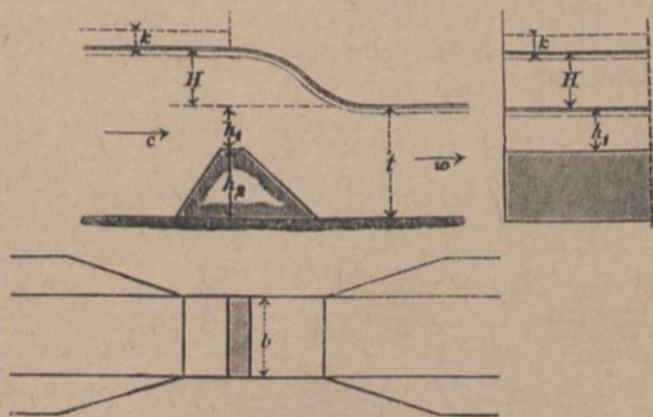
Der Zweck eines Wehres ist, die Wasseroberfläche eines Baches oder Flusses oberhalb des Wehres zu heben (anzustauen), um entweder für die Flößerei und die Schifffahrt genügende Wassertiefe

zu erhalten, oder aber das angestaute Wasser zur Bewässerung der angrenzenden Ländereien und zum Betrieb von Wasserkraftmaschinen (Wasserräder, Turbinen) zu benutzen. Es wird zumeist ein Teil  $Q_2$  des angestauten Wassers mittels eines Betriebskanales abgeleitet, so daß dann von der ganzen sekundlichen Wassermenge  $Q$  des Flusses nur  $Q_1 = Q - Q_2$  über das Wehr fließt.

Das Wehr ist ein durch die ganze Breite des Flusses reichender und über die Flußsohle sich erhebender dammartiger Einbau. Liegt dessen Krone tiefer als die Wasseroberfläche unterhalb des Wehres, so heißt dieses ein Grundwehr, im anderen Falle ein Überfallwehr.

a) Grundwehr. Am Wehre sei der Durchflußquerschnitt zu einem Rechtecke von der Breite  $b$  zusammengezogen (Fig. 327). Die Wehrkrone liege um  $h_1$  unter dem Unterwasser, dessen Tiefe

Fig. 327.



dicht unter dem Wehre  $t$  betrage, und  $h_2$  sei die Höhe des Wehrkörpers, so daß  $h_1 + h_2 = t$  ist. Das Oberwasser sei durch den Einbau des Wehres um die Stauhöhe  $H$  gehoben. Die Geschwindigkeit des ungestauten Wassers betrage  $w$ , die des gestauten Wassers oberhalb des Wehres  $c$ . — Den Einfluß der Zuflußgeschwindigkeit  $c$  auf die Durchflußmenge berücksichtigt man dadurch, daß man das Oberwasser um die Geschwindigkeitshöhe  $k = \frac{c^2}{2g}$  gehoben denkt. Da die Wehrkrone beiderseitig unter Wasser liegt, so teilt man die Höhe der Durchflußöffnung in zwei Teile, nämlich  $H$



und  $h_1$ . Für  $H$  betrachtet man den Durchfluß als einen Ausfluß ins Freie, für  $h_1$  als einen Ausfluß unter Wasser.

Dann ist die sekundl. Durchflußmenge für den oberen Teil nach Gl. 7 S. 260:

$$1) \quad Q_1' = \frac{2}{3} \mu_1 b \sqrt{2g} \{ (H+k)^{3/2} - k^{3/2} \},$$

und für den unteren Teil, weil alle Punkte desselben unter der gemeinsamen Druckhöhe  $H+k$  stehen:

$$2) \quad Q_1'' = \mu_2 b h_1 \sqrt{2g(H+k)}.$$

Für die gesamte Durchflußmenge  $Q_1 = Q_1' + Q_1''$  gilt also:

$$3) \quad Q_1 = \frac{2}{3} \mu_1 b \sqrt{2g} \{ (H+k)^{3/2} - k^{3/2} \} + \mu_2 b h_1 \sqrt{2g(H+k)}.$$

Nimmt man  $^{2/3}\mu_1 = 0,57$  und  $\mu_2 = 0,62$  an, so wird

$$4) \quad h_1 = \frac{Q_1}{0,62 b \sqrt{2g(H+k)}} - 0,92 \frac{(H+k)^{3/2} - k^{3/2}}{\sqrt{H+k}},$$

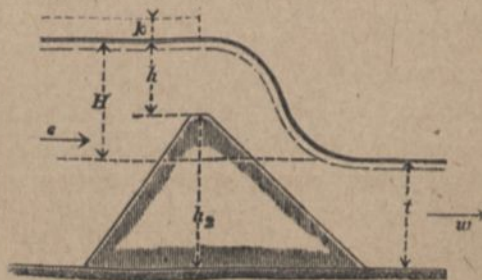
und demgemäß

$$5) \quad h_1 = t - h_2.$$

Diese Gleichungen sind nur gültig, solange sie für  $h_1$  einen Wert  $> 0$  ergeben. Andernfalls muß die Wehrkrone sich über das Unterwasser erheben, und man bekommt ein Überfallwehr. Zur vorläufigen Untersuchung, ob das herzustellende Wehr ein Grundwehr oder ein Überfallwehr sein muß, pflegt man  $h_2 = t$ , also  $h_1 = 0$  anzunehmen und  $k$  zu vernachlässigen; dann ergibt sich

6)  $Q_1 \geq 0,57 b H \sqrt{2gH}$   
als Bedingung für ein Grundwehr bezw. Überfallwehr.

Fig. 328.



$\beta$ ) Überfallwehr (Fig. 328). Die Wehrkrone liegt über dem Unterwasser, der Wasserabfluß erfolgt nur ins Freie. Nennt man

die Strahldicke über dem Wehre  $h$ , so ist nach Gl. 1:

$$7) \quad Q_1 = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \{ (h+k)^{3/2} - k^{3/2} \}, \text{ also}$$

$$8) \quad h = \left\{ \frac{3/2 Q_1}{\mu b \sqrt{2g}} + k^{3/2} \right\}^{2/3} - k,$$

und demgemäß

$$9) \quad h_2 = H + t - h.$$

Beispiel: Für einen Fluß sei  $w = 1 \text{ m/s}$ ,  $t = 2 \text{ m}$ ,  $F = 24 \text{ m}^2$ ,  $Q = 24 \text{ m}^3$ . Mittels eines Wehres soll ein Aufstau um  $H = 0,5 \text{ m}$  herbeigeführt werden, das Wehr soll  $10 \text{ m}$  Breite erhalten, auch sollen oberhalb des Wehres  $2 \text{ m}^2$  abgeleitet werden, so daß nur  $22 \text{ m}^3$  über das Wehr fließen.

Die Bedingung wird:

$$22 > 0,57 \cdot 10 \cdot 0,5 \sqrt{2g \cdot 0,5} = 8,92,$$

d. h. es muß ein Grundwehr erbaut werden.

Für die Geschwindigkeit  $c$  oberhalb des Wehres gilt annähernd:

$$c = \frac{1 \cdot 2}{2 + 0,5} \cdot \frac{22}{24} = 0,73 \text{ und damit für } \frac{c^2}{2g} = k = 0,03 \text{ m}.$$

Dann wird nach Gl. 4:

$$h_1 = \frac{22}{0,62 \cdot 10 \sqrt{2g \cdot 0,53}} - 0,92 \frac{0,53^{3/2} - 0,03^{3/2}}{\sqrt{0,53}} = 0,6 \text{ m}.$$

Der Wehrkörper muß also  $h_2 = t - h_1 = 1,4 \text{ m}$  Höhe erhalten.

Bei Vernachlässigung von  $k$  würde sich  $h_1 = 0,67 \text{ m}$  ergeben.

Soll unter sonst gleich bleibenden Verhältnissen eine Stauhöhe  $H = 2 \text{ m}$  erreicht werden, so wird Bedingung 6:

$$22 < 0,57 \cdot 10 \cdot 2 \sqrt{2g \cdot 2} = 71,86,$$

d. h. das Wehr wird ein Überfallwehr. Es ist nun

$$c = \frac{1 \cdot 2}{2 + 2} \cdot \frac{22}{24} = 0,46 \text{ und } k = 0,011 \text{ m}.$$

Gl. 8 liefert:

$$h = \left\{ \frac{22}{0,57 \cdot 10 \cdot 4,43} + 0,011^{3/2} \right\}^{2/3} - 0,011 = 0,9 \text{ m}.$$

Die Höhe des Wehrkörpers wird dann  $h_2 = 2 + 2 - 0,9 = 3,1 \text{ m}$ .

Bei Vernachlässigung von  $k$  würde sich

$$h = \left( \frac{22}{0,57 \cdot 10 \cdot 4,43} \right)^{2/3} = 0,91 \text{ m} \text{ ergeben.}$$

2) Stau durch den Einbau von Brückenpfeilern. Werden in einen Fluß von der Breite  $B$  und der Tiefe  $t$  (Fig. 329), welcher mit der Geschwindigkeit  $w$  die sekundliche Wassermenge  $Q$



führt, Brückenpfeiler eingebaut, welche die Durchflußbreite auf die Größe  $b$  einschränken, so wird dadurch ein Anstau  $H$  verursacht. Es ist die für ein Grundwehr abgeleitete Gl. 3 zu benutzen, wenn man die Höhe des Wehrkörpers gleich Null, also  $h_2 = 0$ ,  $h_1 = t$  und zugleich  $Q_1 = Q$  setzt.

Dann wird

$$10) \quad Q = \frac{2}{3} \mu_1 b V \sqrt{2g} \left\{ (H+k)^{3/2} - k^{3/2} \right\} + \mu_2 b t V \sqrt{2g(H+k)},$$

mit

$$k = \frac{c^2}{2g}; \quad c = \frac{Q}{B(H+t)}.$$

Ist die zulässige Stauhöhe  $H$  gegeben, so kann man aus obiger Gleichung die erforderliche lichte Weite  $b$  berechnen, wenn man noch, wegen übereinstimmender Durchflußverhältnisse,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  setzt:

$$11) \quad b = \frac{Q}{\mu V \sqrt{2g} \left\{ \frac{2}{3} (H+k)^{3/2} - \frac{2}{3} k^{3/2} + t V \sqrt{H+k} \right\}}.$$

Die Auflösung der Gl. 10 nach  $H$  ist umständlich. Prof. Dr. Mehmke (Stuttgart) hat in der Zeitschrift *Civilingenieur* 1889, S. 623, angegeben, daß, wenn man

$$\frac{Q}{B V \sqrt{2g}} = \alpha,$$

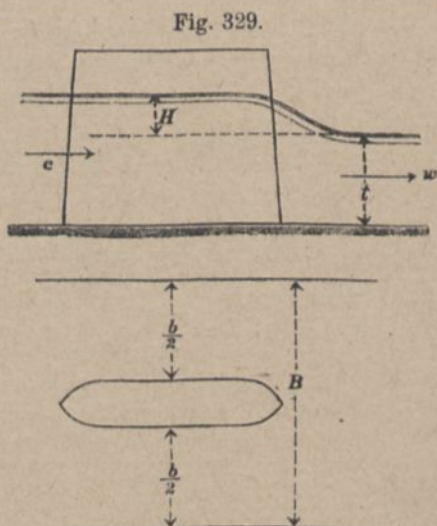
$$\frac{Q}{\mu b V \sqrt{2g}} = \beta$$

setzt, die Annäherungsgleichung

$$12) \quad \frac{2}{3} H + t = \frac{V \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{V H}$$

benutzt werden kann.

Für Pfeiler mit spitzen Vor- und Hinterköpfen kann  $\mu = 0,95$ , für stumpf abgeschnittene Pfeiler  $\mu = 0,85$  angenommen werden.



**Beispiel:** Ein Fluß führe bei 2 m Wassertiefe und 50 m Breite 100 m<sup>3</sup> in der Sekunde. Auf welches Maß darf die Lichtweite eingeschränkt werden, wenn eine Stauhöhe  $H = 0,02$  m zulässig ist?

Es ist dann die Geschwindigkeit oberhalb der Pfeiler

$$c = \frac{100}{50 \cdot 2,02} = 0,99 \text{ m} \quad \text{und} \quad k = 0,05 \text{ m};$$

Gl. 11 gibt:

$$b = \frac{100}{0,95 \cdot 4,43 \left\{ \frac{2}{3} 0,07^{3/2} - \frac{2}{3} 0,05^{3/2} + 2\sqrt{0,07} \right\}} = 44,5 \text{ m}$$

Berechnet man hiernach Gl. 12 mit den Hilfsgrößen  $\alpha$  und  $\beta$ , so liefert die linke Seite 2,013, die rechte Seite 2,015; der Unterschied ist also unbedeutend.

Bei gewölbten Brücken sind vorstehende Gl. 10, 11 und 12 nur für Wasserstände bis zur Kämpferhöhe anwendbar; bei Eintauchung der Brückengewölbe ist die Näherungsgleichung

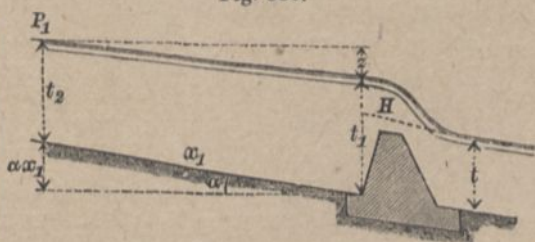
$$13) \quad Q = \mu \cdot F \cdot \sqrt{2g(\varepsilon_0 + k)}$$

sinngemäß zu benutzen (s. Gl. 2, S. 255 und das Beispiel S. 256).

### g) Staukurve und Stauweite.

Will man erfahren, in welcher Weise der Stau oberhalb eines Wehres allmählich abnimmt, so benutzt man, in Voraussetzung einer regelmäßigen Form des Wasserlaufes, für die hier stattfindende verzögerte Bewegung, den Rechnungsgang der ungleichförmigen Bewegung des Wassers, wie auf S. 327.

Fig. 330.



Unmittelbar oberhalb des Wehres (Fig. 330) beträgt die Tiefe

$$t_1 = t + H,$$

welcher ein Querschnitt  $F_1$ , ein benetzter Umfang  $u_1$ , eine Geschwindigkeit  $w_1$  entspricht. Wählt man weiter aufwärts eine Tiefe  $t_2$ , welche etwas kleiner ist als  $t_1$  und bezeichnet die ent-



sprechenden Querschnittsgrößen mit  $F_2$  und  $u_2$ , die Geschwindigkeit mit  $w_2$ , so ist:

$$1) \quad z = \left( \frac{w_1^2}{2g} - \frac{w_2^2}{2g} \right) + \beta_1 x_1 \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}$$

oder

$$2) \quad z = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_2^2} \right) + \beta_1 x_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2) Q^2}{4 F_1^2 F_2^2} \frac{1}{2g}$$

Ist  $\alpha$  die Neigung der Sohle des Wasserlaufes, so muß auch

$$3) \quad z = \alpha x_1 + t_2 - t_1 = \alpha x_1 - (t_1 - t_2) \quad \text{sein.}$$

Vereinigt man diese Gleichung mit der vorstehenden und löst nach  $x_1$  auf, so ergibt sich

$$4) \quad x_1 = \frac{(t_1 - t_2) - \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2} \right)}{\alpha - \beta_1 \frac{(u_1 + u_2)(F_1 + F_2) Q^2}{8g F_1^2 F_2^2}}$$

als Abstand vom Wehre, in welchem die Wassertiefe  $t_2$  vorhanden ist. Hierdurch liegt der Punkt  $P_1$  der Staukurve fest.

Man wählt dann wiederum weiter aufwärts eine etwas kleinere Wassertiefe  $t_3$  und sucht den zugehörigen Abstand  $x_2$  von der Stelle mit der Wassertiefe  $t_2$ , indem man aus Gl. 4 eine neue Gleichung bildet, deren Indizes durchweg um eine Einheit größer sind, und erhält damit einen Punkt  $P_2$  der Staukurve. Dieses Verfahren wäre so lange fortzusetzen, bis man an die Staugrenze mit  $t_n = t$  gelangt. Durch die Verbindung der einzelnen Punkte  $P$  ist die Staukurve bestimmt.

$L = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$  liefert schließlich die gesuchte Stauweite. Da diese theoretisch für  $t_n = t$  im Unendlichen liegt (s. S. 337), und es in der praktischen Anwendung nur auf die Grenze der noch merkbaren Erhebung des Wasserspiegels ankommt, so begnügt man sich zumeist mit der Ermittlung der praktischen Stauweite für  $t_n - t = 1^{\text{cm}}$  bis etwa  $3^{\text{cm}}$  (s. S. 343).

**Beispiel:** Das Bett eines Wasserlaufes habe einen trapezförmigen Querschnitt nach Fig. 323, S. 325, mit einem Böschungswinkel  $\varphi = 26,5^\circ$  ( $\text{tg } \varphi = 0,5$ ,  $\sin \varphi = 0,447$ ). Die Neigung der 6 m breiten Sohle betrage  $\alpha = 1:5000$ . Bei der ursprünglich gleichmäßigen Bewegung möge die Wassertiefe  $t = 2$  m gewesen sein; dem entspricht  $F = 20 \text{ m}^2$ ,  $u = 14,95 \text{ m}$ ,  $r = 1,3 \text{ m}$  und nach S. 315  $\beta = 0,0108$ ,  $k = 42,7$ , daher eine Geschwindigkeit  $w = 42,7 \sqrt{\frac{1,3}{5000}}$

= 0,69 m/sek und eine Wassermenge  $Q = 13,8 \text{ m}^3/\text{sek}$ . Durch ein Wehr möge eine Stauhöhe  $H = 0,5 \text{ m}$  hervorgebracht sein, so daß die Wassertiefe oberhalb des Wehres 2,5 m beträgt (Fig. 331). Es soll zunächst berechnet werden, in welchem Abstand  $x_1$  die Tiefe 2,4 m ist?

Für  $t_1 = 2,5 \text{ m}$  wird  $F_1 = 27,5 \text{ m}^3$ ,  
 $u_1 = 17,20 \text{ m}$ .

Für  $t_2 = 2,4 \text{ m}$  wird  $F_2 = 25,92 \text{ m}^3$ ,  
 $u_2 = 16,72 \text{ m}$ .

Für diese Strecke ist dann

$r_1 = \frac{F_1 + F_2}{u_1 + u_2} = 1,6 \text{ m}$  und  $\beta_1 = 0,0098$ . Hiernach folgt aus Gl. 4:

$$x_1 = \frac{0,1 - \frac{13,8^2}{19,62} \left( \frac{1}{25,92^2} - \frac{1}{27,5^2} \right)}{0,0002 - \frac{0,0098 \cdot 33,95 \cdot 53,42 \cdot 13,8^2}{8 \cdot 9,81 \cdot 27,5^2 \cdot 25,92^2}} = 854,7 \text{ m}.$$

Nunmehr kann ermittelt werden, in welchem Abstände  $x_2$  weiter oberhalb die Tiefe 2,3 m beträgt?

Setzt man  $t_3 = 2,3 \text{ m}$ , so wird  $F_3 = 24,68 \text{ m}^3$ ,  $u_3 = 16,29 \text{ m}$ ,  $r_2 = \frac{F_2 + F_3}{u_2 + u_3} = 1,5$  und  $\beta_2 = 0,0101$ .

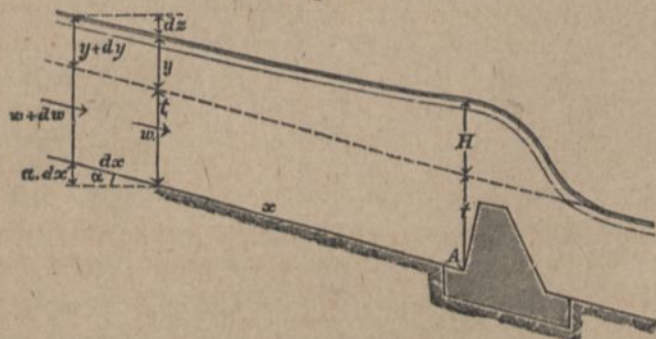
Gl. 4 ergibt

$$x_2 = \frac{0,1 - \frac{13,8^2}{19,62} \left( \frac{1}{24,38^2} - \frac{1}{25,92^2} \right)}{0,0002 - \frac{0,0101 \cdot 33,04 \cdot 50,3 \cdot 13,8^2}{8 \cdot 9,81 \cdot 24,38^2 \cdot 25,92^2}} = 1001 \text{ m}.$$

In gleicher Weise bestimmt man die weiteren Punkte der Staukurve.

Gleichung der Staukurve für einen rechteckigen Kanal von großer Breite und geringer Wassertiefe. Für diesen Fall läßt

Fig. 332.



sich die Gleichung der Staukurve folgendermaßen entwickeln. Es sei  $b$  die Breite und  $t$  die Tiefe des ungestauten Wassers, also  $b \cdot t = F_0$ ,



ferner annähernd  $b = u_0$ , daher  $t = F_0 : b$  auch annähernd gleich  $r_0 = F_0 : u_0$  (vergl. S. 311).  $H$  bedeute die Stauhöhe am Wehre bei  $A$  (Fig. 332),  $y$  die Stauhöhe und  $w$  die mittlere Geschwindigkeit im Abstand  $x$  vom Wehre; im weiteren Abstände  $dx$  sei die Stauhöhe  $y + dy$  (wobei  $dy$  negativ), und die Geschwindigkeit  $w + dw$ . Kommt auf die Strecke  $dx$  ein Höhenunterschied  $dz$  des Wasserspiegels und ein Gefälle  $\alpha \cdot dx$  der Sohle, so ist nach Gl. 1, S. 334:

$$dz = \frac{w^2}{2g} - \frac{(w + dw)^2}{2g} + \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} dx$$

$$= -\frac{w dw}{g} + \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} dx.$$

Ferner ist nach Fig. 332

$$dz = dy + \alpha \cdot dx, \quad \text{also}$$

$$dy + dx \left( \alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} \right) = -\frac{w dw}{g} \quad \text{oder}$$

$$1) \quad dx = -\frac{dy + \frac{w dw}{g}}{\alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}}.$$

Aus dieser Gleichung kann  $dw$  entfernt werden; es ist

$$w = \frac{Q}{b(t + y)}; \quad dw = -\frac{Q dy}{b(t + y)^2} = -\frac{w}{t + y} \cdot dy,$$

$$\text{also:} \quad w dw = -\frac{w^2}{t + y} dy.$$

Setzt man dies in Gl. 1 ein, so entsteht

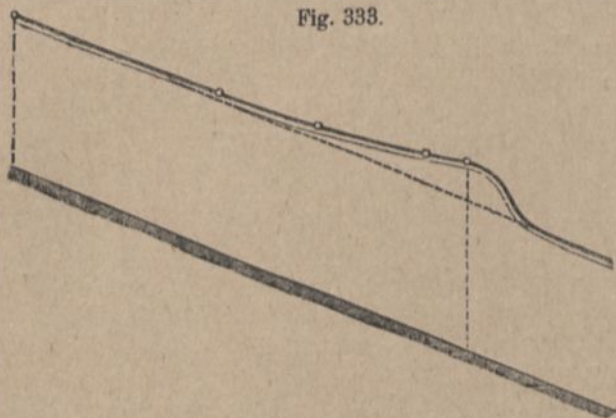
$$2) \quad dx = -\frac{1 - \frac{w^2}{g(t + y)}}{\alpha - \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g}} dy.$$

Mit wachsendem  $x$  nimmt die Wassertiefe  $t + y$  allmählich ab, die Geschwindigkeit  $w$  daher allmählich zu; somit verkleinern sich auf der rechten Seite der Gl. 2 mit zunehmendem  $x$  sowohl der Zähler wie der Nenner. Wird der Nenner zu Null, während der Zähler noch größer ist als Null, so geschieht dies für

$$\alpha = \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g},$$

d. h. für diejenige Stelle, wo die Bewegung des Wassers eine gleichförmige ist (s. Gl. 2, S. 311); dort ist  $\frac{dy}{dx} = 0$ , d. h. die Staukurve hat sich dem ungestauten Wasser wieder angeschmiegt. Es

Fig. 333.



bedeutet dies den gewöhnlichen Fall, daß der Stau sich nach oben hin nur allmählich (ins Unendliche) verliert, weil die Staukurve ihre konvexe Seite nach unten kehrt (Fig. 333).

Wird aber für irgendeine Stelle, in Gl. 2 der Zähler zu Null, während der Nenner noch größer ist als Null, so wird

$$\frac{dy}{dx} = -\infty,$$

d. h. es steht an dieser Stelle (*B*, Fig. 334) der Wasserspiegel (nahezu) lotrecht und bildet einen Wassersprung oder eine

Fig. 334.



Wasserschwelle. Dieser Fall wurde zuerst von dem Italiener Bidone 1820, später aber auch von Jul. Weisbach (Freiberg in



Sachsen) in Kanälen mit großem Gefällverhältnisse beobachtet. Es verschwindet also der Stau nicht allmählich, sondern bei  $B$  plötzlich, wenn daselbst

$$3) \quad \frac{w^2}{2g} = \frac{t+y}{2}$$

oder die Geschwindigkeitshöhe gleich der halben Wassertiefe, und gleichzeitig

$$\alpha > \beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} \text{ ist.}$$

Wegen Gl. 3, und weil annähernd  $\frac{F}{u} = t+y$  ist, muß  $\alpha > \frac{1}{2}\beta$  sein, damit ein Wassersprung entstehe; dies bedingt, wenn im Mittel  $\beta = 0,008$  gesetzt wird,  $\alpha > 0,004 = 1:250$ , d. h. ein ungewöhnlich großes Gefällverhältnis.

Die Höhe des Sprunges läßt sich nach Fig. 335 in folgender Weise annähernd berechnen: Es ist

$$vt' = w_0 t, \text{ ferner}$$

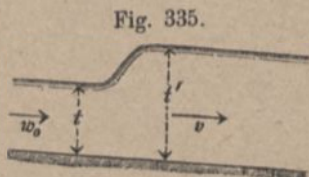
$$t - t' = \frac{v^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}$$

und daraus

$$4) \quad t' = \frac{1}{2} \frac{w_0^2}{2g} + \sqrt{\frac{w_0^2}{2g} t + \frac{1}{4} \left(\frac{w_0^2}{2g}\right)^2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, in Übereinstimmung mit Gl. 3, daß ein Wassersprung mit  $t' > t$  nur dann entsteht, wenn  $\frac{w_0^2}{2g} > \frac{t}{2}$  ist.

Um nun die Form der Staukurve im einzelnen zu erfahren, muß man in Gl. 2 die Veränderlichen  $w$ ,  $F$  und  $u$  durch  $y$  ausdrücken. Beziehen sich  $t$ ,  $w_0$ ,  $F_0$ ,  $u_0$  auf das ungestaute, gleichmäßig fließende Wasser,  $(t+y)$ ,  $w$ ,  $F$  und  $u$  auf das gestaute Wasser, so ist  $w^2 = w_0^2 \frac{t^2}{(t+y)^2}$ , ferner nach den Regeln der gleichmäßigen Bewegung, wenn man wegen der großen Breite  $u = u_0 = b$  setzt (gemäß S. 336),



$$\frac{w_0^2}{2g} = \frac{\alpha F_0}{\beta u_0} = \frac{\alpha b t}{\beta b} = \frac{\alpha}{\beta} t \quad \text{und}$$

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{t^3}{(t+y)^2}, \quad \text{sonach mit} \quad \frac{F}{u} = t + y$$

$$\beta \frac{u}{F} \frac{w^2}{2g} = \alpha \frac{t^3}{(t+y)^3}.$$

Hiermit wird aus Gl. 2

$$dx = -dy \sqrt{\frac{1 - 2 \frac{\alpha}{\beta} \frac{t^3}{(t+y)^3}}{\alpha \left(1 - \frac{t^3}{(t+y)^3}\right)}} \quad \text{oder}$$

$$5) \quad -\alpha dx = dy \frac{(t+y)^3 - 2 \frac{\alpha}{\beta} t^3}{(t+y)^3 - t^3}.$$

Behufs der Integration ist auf der rechten Seite eine Zerlegung in Teilbrüche erforderlich, jedoch muß, weil der Zähler nach  $y$  von demselben Grade ist wie der Nenner, durch teilweise Division erreicht werden, daß der Zähler von geringerem Grade wird. Fügt man im Zähler  $(-t^3 + t^3)$  hinzu, so entsteht nach einmaliger Division:

$$-\alpha dx = dy \left\{ 1 + \frac{t^3 \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)}{(t+y)^3 - t^3} \right\} \quad \text{oder}$$

$$6) \quad -\alpha dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) \frac{t^3}{(t+y)^3 - t^3} dy.$$

Weil  $(t+y)^3 - t^3 = 3t^2y + 3ty^2 + y^3 = y(3t^2 + 3ty + y^2)$  ist, so kann der letzte Bruch geschrieben werden

$$\frac{t^3}{(t+y)^3 - t^3} = \frac{t^3}{y(3t^2 + 3ty + y^2)}.$$

Die Zerlegung dieser gebrochenen Funktion in Teilbrüche muß, weil die Gleichung  $3t^2 + 3ty + y^2 = 0$  imaginäre Wurzeln hat, in der Form geschehen:

$$\frac{t^3}{y(3t^2 + 3ty + y^2)} = \frac{A}{y} + \frac{Py + Q}{3t^2 + 3ty + y^2}.$$

Nach Fortschaffung der Nenner wird hieraus

$$7) \quad t^3 = 3t^2A + 3tAy + Ay^2 + Py^2 + Qy.$$

Soll diese Gleichung für jeden Wert von  $y$  bestehen, so muß zunächst stattfinden für  $y=0$ :  $t^3 = 3t^2A$ , d. h.  $A = \frac{1}{3}t$ . Ebenso ergibt die erste Abge-



leitete der Gl. 7 nach  $y$ :  $0 = 3tA + 2Ay + 2Py + Q$  und für  $y=0$ :  $Q = -3tA = -t^2$ . Die zweite Abgeleitete  $0 = 2A + 2P$  gibt schließlich  $P = -A = -\frac{1}{3}t$ . Hiernach wird

$$\frac{t^2}{y(3t^2 + 3ty + y^2)} = \frac{t}{3y} - \frac{\frac{1}{3}ty + t^2}{3t^2 + 3ty + y^2}.$$

Nun kann man Gl. 6 schreiben:

$$8) \quad -\alpha dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)t \left\{ \frac{1}{3} \frac{dy}{y} - \frac{1}{6} \frac{2y + 6t}{3t^2 + 3ty + y^2} dy \right\}.$$

Das Differential des letzten Nenners ist aber  $(3t + 2y)dy$ , daher zerlegen wir den letzten Zähler in  $2y + 3t$  und  $3t$ , um zu erhalten:

$$9) \quad -\alpha dx = dy + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)t \left\{ \frac{1}{3} \frac{dy}{y} - \frac{1}{6} \frac{d(3t^2 + 3ty + y^2)}{3t^2 + 3ty + y^2} dy - \frac{t}{2} \frac{dy}{3t^2 + 3ty + y^2} \right\}.$$

Setzt man zur Integration des letzten Gliedes vorübergehend  $y = z + a$ , so wird  $3t^2 + 3ty + y^2 = 3t^2 + 3tz + 3ta + z^2 + 2az + a^2$ ; sollen nun die Glieder mit dem Faktor  $z$  verschwinden, so muß  $3t + 2a = 0$ , d. h.  $a = -\frac{3}{2}t$ ;  $z = y + \frac{3}{2}t$  sein. Dann wird  $3t^2 + 3ty + y^2 = 3t^2 - \frac{9}{2}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + z^2 = \frac{3}{4}t^2 + z^2$  und

$$10) \quad \frac{dy}{3t^2 + 3ty + y^2} = \frac{dz}{\frac{3}{4}t^2 + z^2} = \frac{2}{t\sqrt{3}} d\left(\arctg \frac{2z}{t\sqrt{3}}\right) \\ = \frac{2}{t\sqrt{3}} d\left(\arctg \left(\frac{2y}{t\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)\right).$$

Die Integration der Gl. 9 ergibt dann mit Benutzung von Gl. 10:

$$11) \quad \alpha x = -y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)t \left\{ -\frac{1}{3} \ln y + \frac{1}{6} \ln(3t^2 + 3ty + y^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{y}{t} + \sqrt{3}\right) \right\} + \text{Const.}$$

Vereinigt man in dem Klammerausdrucke die beiden Logarithmen, indem man

$$-\frac{1}{3} \ln y = -\frac{1}{6} \ln y^2 = +\frac{1}{6} \ln \frac{1}{y^2}$$

setzt, und führt zur Abkürzung die Bezeichnung

$$12) \quad \frac{1}{6} \ln \left(3 \frac{t^2}{y^2} + 3 \frac{t}{y} + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{y}{t} + \sqrt{3}\right) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

ein (s. die Tabelle auf S. 342), so wird

$$13) \quad \alpha x = -y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)t \cdot f\left(\frac{y}{t}\right) + \text{Const.}$$

Weil nun der Abstand  $x$  vom Wehr aus gemessen ist, wo  $y = H$ , so wird

$$0 = -H + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)t \cdot f\left(\frac{H}{t}\right) + \text{Const.}$$

sonach schließlich durch Abziehen

$$14) \quad \alpha x = H - y + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)t \left\{ f\left(\frac{y}{t}\right) - f\left(\frac{H}{t}\right) \right\}.$$

Kommt oberhalb des Wehres kein Wassersprung vor, ist also  $\alpha < \frac{1}{2}\beta$  und daher in Gl. 14 der Faktor  $\left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) > 0$ , so ergibt sich für  $y = 0$ , weil nach Gl. 12 für  $\frac{y}{t} = 0$  die  $f\left(\frac{y}{t}\right) = \infty$  wird, die Strecke  $x = \infty$ ; d. h. in diesem meist vorkommenden Falle erstreckt sich die Wirkung des Staus nach oben hin ins Unendliche: die Staukurve schmiegt sich nach oben hin dem ungestauten Wasserspiegel asymptotisch an. In diesem Falle hat Gl. 14 unbeschränkte Gültigkeit für die Staukurve oberhalb des Wehres, d. h. für  $y \leq H$  (der Stauhöhe am Wehre).

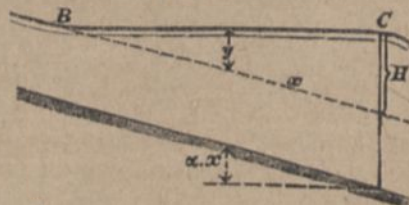
Kommt aber wegen  $\alpha > \frac{1}{2}\beta$  ein Wassersprung vor, steigt also an einer Stelle das Wasser plötzlich von der Tiefe  $t$  auf die größere Tiefe  $t'$  an, welche nach Gl. 4 zu berechnen ist, so gilt Gl. 14 nur von dem Wehr aufwärts bis zum Wassersprunge, dessen Lage man mittels Gl. 14 berechnen kann, indem man  $y = t' - t$  setzt.

In dem Grenzfall  $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ , zwischen den beiden vorstehend erörterten Fällen, wird in Gl. 14 der Faktor  $\left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) = 0$ , daher einfach

$$15) \quad \alpha x = H - y;$$

die Staulinie wird eine wagerechte Gerade  $BC$  (Fig. 336), und geht in den ungestauten Wasserspiegel nicht durch allmähliche Anschmiegung, sondern mittels eines (ein wenig abgerundeten) Knickes bei  $B$  über.

Fig. 336.





Die Größen  $f\left(\frac{y}{t}\right)$ , welche in die Gl. 14 einzusetzen sind, können aus folgender Tabelle entnommen werden:

Tabelle zur Berechnung der Staukurven.\*)

$\frac{y}{t}$	$f\left(\frac{y}{t}\right)$	$\frac{y}{t}$	$f\left(\frac{y}{t}\right)$
0	$\infty$	$\frac{1}{5}$	1,3866
0,01	2,3261	$\frac{1}{4}$	1,3267
0,02	2,0983	$\frac{1}{3}$	1,2539
0,03	1,9664	$\frac{1}{2}$	1,1616
0,04	1,8738	$\frac{2}{3}$	1,1050
0,05	1,8026	1	1,0387
0,06	1,7451	1,5	0,9890
0,07	1,6970	2	0,9632
0,08	1,6556	2,5	0,9482
0,09	1,6196	3	0,9384
0,10	1,5875	3,5	0,9317
0,13	1,5092	4	0,9270
$\frac{1}{6}$	1,4538	$\infty$	0,9080

Die Berechnung der Tabellenwerte möge beispielsweise für  $\frac{y}{t} = \frac{1}{4}$  gezeigt werden.

Hierfür ist nach Gl. 12:

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{6} \ln(3 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{4} + \sqrt{3} \right) \\
 &= \frac{1}{6} \cdot 2,902585 \cdot \log 61 + 0,57735 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2,0207.
 \end{aligned}$$

Der Tangente 2,0207 entspricht ein Winkel von  $63^{\circ} 43'$ , ein Bogen = 1,111 193. Daher wird, weil  $\log 61 = 1,785 330$  ist:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0,635 1457 + 0,577 35 \cdot 1,111 193 = 1,3267.$$

**Beispiel 1:** Die Breite eines nahezu rechtwinkligen Wasserlaufes sei  $b=100$  m, die Tiefe des ungestauten Wassers  $t=2$  m, die Stauhöhe am Wehre  $H=0,5$  m, das Gefällverhältnis  $\alpha=0,0002$ . Die mittlere Tiefe oberhalb

\*) Eine anderweite Tabelle zur bequemen Berechnung der Stauweiten veröffentlicht Danckwerts in der Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen Jahrgang 1903 S. 257.

des Wehres beträgt  $(2 + 2,5) \cdot 0,5 = 2,25 \text{ m}$ , daher ist im Mittel  $r = 225 : 104,5 = 2,15 \text{ m}$ ; das gibt rund  $\beta = 0,009$  (vergl. S. 315).

$$\text{Es ist } \frac{H}{t} = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{H}{t}\right) = 1,3267.$$

$$\text{Ferner wird } 1 - \frac{2\alpha}{\beta} = 1 - \frac{0,0004}{0,009} = 0,9556.$$

Setzt man nun  $y_1 = 0,4 \text{ m} = 0,2t = \frac{1}{5}t$ , so ergibt sich nach vorstehender Tabelle  $f(0,2) = 1,3866$ , mithin nach Gl. 14:

$$x_1 = 5000 \left\{ 0,5 - 0,4 + 2 \cdot 0,9556 (1,3866 - 1,3267) \right\} = 1072 \text{ m}.$$

Da die Tabelle zwischen  $\frac{y}{t} = 0$  und  $\frac{y}{t} = 0,25$  13 Werte enthält, so kann man aus ihr 13 Punkte, also außer dem soeben berechneten  $(x_1, y_1)$  noch 12, leicht ableiten.

Bemerkung. Geringe Stauhöhen, die nicht größer sind, als die gewöhnlichen kleinen welligen Unebenheiten der Wasseroberfläche, pflegt man zumeist unbeachtet zu lassen, so daß sich dann statt der ideellen Stauweite  $= \infty$  eine endliche, etwa dem Werte  $y_0 = 0,01t$  entsprechende, begrenzte Stauweite  $x_0$  ergibt (s. S. 334).

Für vorstehendes Beispiel ergibt sich mit  $y_0 = 0,01 \cdot 2 = 0,02 \text{ m}$ :

$$x_0 = 5000 \left\{ 0,5 - 0,02 + 1,9112 (2,3261 - 1,3267) \right\} = 11950 \text{ m}.$$

Zwischen  $y_1 = 0,4$  und  $y_0 = 0,02 \text{ m}$  sollen hier nur noch  $y_2 = 0,2 \text{ m} = 0,1t$  und  $y_3 = 0,1 = 0,05t$  berechnet werden. Dann ist

$$x_2 = 5000 \left\{ 0,5 - 0,2 + 1,9112 (1,5875 - 1,3267) \right\} = 3902 \text{ m},$$

$$x_3 = 5000 \left\{ 0,5 - 0,1 + 1,9112 (1,8026 - 1,3267) \right\} = 6547 \text{ m}.$$

Diese Staukurve ist in Fig. 333, S. 337 gezeichnet; die Längen sind in 1 : 200 000, die Höhen in 1 : 100 dargestellt.

Beispiel 2: Ein gemauerter rechteckiger Kanal von  $b = 0,325 \text{ m}$  Breite habe eine Sohlenneigung  $\alpha = 0,023$ . Es bewege sich darin Wasser gleichförmig mit einer Wassertiefe  $t = 0,064 \text{ m}$  und einer sekundlichen Wassermenge  $Q = 0,0351 \text{ m}^3$ ; dann ist mit  $F = 0,325 \cdot 0,064 = 0,0208 \text{ m}^2$

$$w_0 = 0,0351 : 0,0208 = 1,688 \text{ m}$$

$$\frac{w_0^2}{2g} = 0,145 \text{ m},$$

d. h. bedeutend größer als die halbe Wassertiefe; mithin ist als Folge einer weiter unten bewirkten Aufstauung ein Wassersprung zu erwarten. Für dessen Höhe liefert Gl. 4:

$$t' = 0,073 + \sqrt{0,145 \cdot 0,064 + 0,073^2} = 0,194 \text{ m}.$$

In Wirklichkeit war nach der Messung Bidones, der an diesem Kanale Versuche anstellte,  $t' = 0,189$ , was also gut übereinstimmt.

Es werde für die weitere Rechnung  $t' = 0,19$ , also die Stauhöhe dort zu  $y_0 = 0,19 - 0,064 = 0,126 \text{ m}$  angenommen.



Die größte Stauhöhe wurde zu  $H = 0,216^m$  gemessen. Dann kann man die Entfernung  $x_0$  des Sprunges von dem Orte der größten Stauhöhe nach Gl. 14 berechnen. Es ist (gemäß S. 339)

$$\frac{2\alpha}{\beta} = \frac{w_0^2}{gt} = \frac{0,145 \cdot 2}{0,064} = 4,5,$$

$$\frac{H}{t} = \frac{0,216}{0,064} = 3,375; \quad \frac{y_0}{t} = \frac{0,126}{0,064} = \text{rund } 2.$$

$f\left(\frac{H}{t}\right) = f(3,375)$  wird durch Interpolation aus der Tabelle S. 342 erhalten zu  $0,9934$ , mithin

$$0,023 x_0 = 0,216 - 0,126 - 3,5 \cdot 0,064 (0,9932 - 0,9934)$$

und  $x_0 = 3,6^m$ , während Bidones Messung etwa  $x_0 = 3,5^m$  ergab.

Für  $\frac{y_1}{t} = 3$  oder  $y_1 = 0,192$  wird

$$0,023 x_1 = 0,216 - 0,192 - 0,224 (0,9934 - 0,9934)$$

mit  $x_1 = 1^m$ .

Für  $\frac{y_2}{t} = 2,3$  oder  $y_2 = 0,16$  wird

$$0,023 x_2 = 0,216 - 0,16 - 0,224 (0,9432 - 0,9934)$$

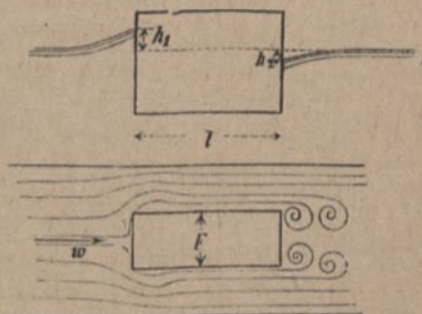
mit  $x_2 = 2,3^m$ .

Dieser Wassersprung ist in Fig. 334, S. 337 gezeichnet; die Längen sind in 1:100, die Höhen in 1:20 dargestellt.

#### 4. Druck strömenden Wassers gegen feste Körper; Widerstand des Wassers gegen bewegte Körper.

Bei scheinbarer (relativer) Ruhe des Wassers gegen einen in dasselbe eingetauchten festen Körper heben sich die wagerechten Seitenkräfte des Wasserdrucks gegen den Körper auf. Strömt aber das Wasser mit einer Geschwindigkeit  $w$  gegen den ruhenden Körper (Fig. 337), so werden die einzelnen, ohne Anwesenheit des Körpers parallel verlaufenden Stromfäden gezwungen, den Körper zu umfließen, sich in gekrümmten Bahnen zu bewegen, wozu Kräfte erforderlich sind. Das Wasser staut sich an der Vorderseite um

Fig. 337.



$h_1$  auf, während an der Rückseite eine Vertiefung  $h_2$  entsteht; es erfolgt daher auf der Vorderseite eine Vergrößerung, auf der Rückseite eine Verminderung des Druckes gegenüber dem Ruhezustande um  $P_1$  bzw.  $P_2$ . Die Gesamtwirkung der Strömung besteht daher in einer Kraft  $D$  im Sinne der Geschwindigkeit  $w$ , und zwar ist

$$1) \quad D = P_1 + P_2.$$

Der Verlauf der Stromfäden ist theoretisch nicht festzustellen. In Anlehnung aber an die Formel für den Druck eines Wasserstrahls gegen einen festen Körper (S. 288) kann man setzen:

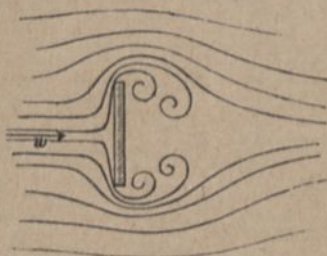
$$P_1 = \zeta_1 \gamma F \frac{w^2}{2g}; \quad P_2 = \zeta_2 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

wenn  $\gamma$  die Dichte der Flüssigkeit,  $F$  den größten Querschnitt des eingetauchten Teiles des festen Körpers, rechtwinklig zur Geschwindigkeit  $w$  gemessen, und  $\zeta$  eine von der Form des Körpers abhängige Ziffer bedeuten. Für ein Prisma mit ebenen, rechtwinklig zu  $w$  stehenden Endflächen kann mit einiger Wahrscheinlichkeit  $\zeta_1 = 1$  gesetzt, d. h. angenommen werden, daß die Druckvermehrung  $P_1$  an der Vorderseite einer Druckhöhe

$$h_1 = \frac{w^2}{2g}$$

entspricht, während  $\zeta_2$  von der Länge  $l$  des Prismas, in der Stromrichtung gemessen, abhängig ist.

Fig. 338.



Bei einer dünnen Platte (Fig. 338) ist die Druckverminderung an der Rückseite am stärksten; man setze etwa für

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0,03 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$\zeta_2 = 0,86 \quad 0,46 \quad 0,35 \quad 0,33 \quad 0,34.$$

Die Gesamtwirkung der Strömung auf einen prismatischen Körper kann also geschrieben werden:

$$2) \quad D = \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g}$$



mit  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ ; es ist dann für

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0,03 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$\zeta = 1,86 \quad 1,46 \quad 1,35 \quad 1,33 \quad 1,34.$$

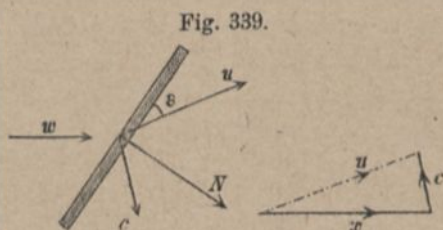
Der Widerstand ruhenden Wassers gegen prismatische, mit der Geschwindigkeit  $w$  in der Richtung der Prismenachse bewegte Körper ist ebenfalls nach den Gl. 1—3 zu beurteilen. Es wären dafür sogar die gleichen Ziffern zu erwarten; aus noch unbekanntem Gründen ist aber die Ziffer  $\zeta_2$  kleiner, während  $\zeta_1$  ebenfalls = 1 gesetzt werden kann. Es ist für

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0,03 \quad 1 \quad 3 \quad 6$$

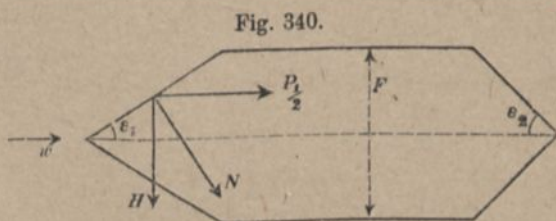
$$\zeta_2 = 0,43 \quad 0,17 \quad 0,10 \quad 0,10$$

$$\zeta = 1,43 \quad 1,17 \quad 1,10 \quad 1,10.$$

Hat die vom Wasser getroffene Platte (Fig. 339) selbst eine Geschwindigkeit  $c$ , so kommt für den Druck  $N$  gegen die Platte, der bei Vernachlässigung von Reibung und Adhäsion nur rechtwinklig zur Platte sein kann, die scheinbare (relative) Geschwindigkeit  $u$  des Wassers gegen die Platte in Frage. Bildet diese mit der Platte den Winkel  $\varepsilon$ , so hat die Seitengeschwindigkeit  $u \cos \varepsilon$  des Wassers parallel zur Platte keinen Einfluß; es



wird der Druck  $N$  nur durch die Seitengeschwindigkeit  $u \sin \varepsilon$  rechtwinklig zur Platte bedingt.



Ist wiederum  $F$  die Größe der Platte, so wird auf Grund der Gl. 2:

$$3) \quad N = \zeta' F \frac{u^2 \sin^2 \varepsilon}{2g}.$$

Ist ein prismatischer Körper (Fig. 340) vorn und hinten durch je einen Keil mit lotrechten Seitenebenen und den halben Keil-

winkeln  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  zugeschärft, so wird, weil die eine Fläche des Vorderkeils die Größe  $\frac{F}{2 \sin \varepsilon_1}$  hat, der Normaldruck gegen diese

$$N = \zeta_1 \gamma \cdot \frac{F}{2 \sin \varepsilon_1} \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1$$

Diese Kraft kann man zerlegen in eine Querkraft  $H$ , die durch die entgegengesetzte, von der anderen Keilfläche herrührende, aufgehoben wird, und in eine Längskraft

$$N \sin \varepsilon_1 = \zeta_1 \gamma \frac{F}{2} \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1 = 1/2 \cdot P_1.$$

Weil die zweite Fläche des Vorderkeils eine ebenso große, gleichgerichtete Kraft liefert und beide zusammen die Druckvergrößerung  $P_1$  an der Vorderseite (infolge der Strömung) bilden, ist

$$4) \quad P_1 = \zeta_1 \gamma F \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_1.$$

Gegenüber Gl. 2 wird also durch den Faktor  $\sin^2 \varepsilon_1$  die Verminderung der Kraft  $P_1$  durch die Zuschärfung der Vorderseite ausgedrückt.

Die Zuschärfung der Rückseite hat einen ähnlich verkleinernden Einfluß auf die Kraft  $P_2$ , so daß man

$$5) \quad P_2 = \zeta_2 \gamma F \frac{w^2}{2g} \sin^2 \varepsilon_2,$$

mithin den Gesamtdruck des bewegten Wassers gegen den Körper

$$6) \quad D = (\zeta_1 \sin^2 \varepsilon_1 + \zeta_2 \sin^2 \varepsilon_2) \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

setzen kann.

Für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 45^\circ$  wird z. B.

$$D = \frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta_2) \gamma F \frac{w^2}{2g} = \frac{1}{2} \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

also bei  $\frac{l}{V F} = 6$ , mit  $\zeta = 1,1$ :

$$D = 0,55 \gamma F \frac{w^2}{2g}.$$



Würde unter sonst gleichen Umständen  $\varepsilon_2 = 90^\circ$ , der Körper also hinten nicht zugespitzt sein, so erhielte man

$$D = (0,5 + 0,1) \gamma F \frac{w^2}{2g} = 0,6 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

während  $\varepsilon_1 = 90^\circ$ ,  $\varepsilon_2 = 45^\circ$ , d. h. Zuschärfung nur am hinteren Ende,

$$D = (1 + 0,055) \gamma F \frac{w^2}{2g} = 1,055 \gamma F \frac{w^2}{2g}$$

liefern würde.

Sind Vorder- und Hinterfläche des Körpers gekrümmt, so wendet man die vorstehenden Rechnungen auf ein als eben betrachtetes Flächenteilchen an und findet den Gesamtdruck  $D$  durch Integration.

Ist die Vorderfläche eine Zylinderfläche vom Halbmesser  $r$  und der Höhe  $h$ , so wird (Fig. 341) für ein Flächenteilchen  $dF = ds \cdot h$  derselben, welches mit  $w$  den Winkel  $\vartheta$  bildet und die Mittelpunktskoordinaten  $x$  und  $y$  hat:

$$7) \quad dN = \zeta_1 \gamma dF \frac{w^2 \sin^2 \vartheta}{2g},$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\zeta_1 \gamma \frac{w^2}{2g} = p_1 \text{ setzt:}$$

$$dN = p_1 dF \sin^2 \vartheta.$$

Die Seitenkraft in der Richtung von  $w$  wird dann:

$$8) \quad dP_1 = p_1 dF \sin^3 \vartheta,$$

während die andere Seitenkraft  $dH$  ohne Bedeutung ist. Weil nun

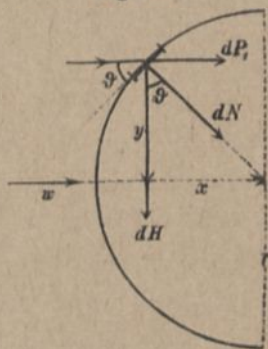
$dF = h \cdot ds$ ,  $\sin \vartheta = \frac{x}{r} = \frac{dy}{ds}$  und  $x^2 = r^2 - y^2$  ist, so wird

$$dP_1 = p_1 h \frac{x^2}{r^2} dy = p_1 \frac{h}{r^2} (r^2 - y^2) dy.$$

Für die halbzylindrische Vorderfläche hat man  $y$  zwischen den Grenzen  $y = -r$  und  $y = +r$  oder doppelt von  $y = 0$  bis  $y = r$  zu nehmen, mithin

$$P_1 = 2 p_1 \frac{h}{r^2} \int_0^r (r^2 - y^2) dy = 2 p_1 \frac{h}{r^2} \frac{2}{3} r^3.$$

Fig. 341.



Da nun die Querschnittsfläche des Körpers  $F = 2rh$  ist, so wird

$$9) \quad P_1 = \frac{2}{3} p_1 F = \frac{2}{3} \cdot \zeta_1 \cdot \gamma \cdot F \cdot \frac{w^2}{2g},$$

d. h. es wird infolge der halbzyllindrischen Abrundung der Überdruck  $P_1$  gegenüber dem auf eine ebene Fläche  $F$  (Gl. 2) auf  $\frac{2}{3}$  verkleinert. — Für einen Vollzylinder (Fig. 342) ist dann an der Rückseite ebenso der Minderdruck

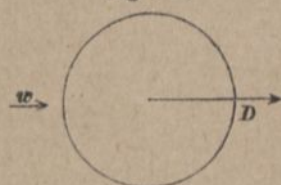
$$P_2 = \frac{2}{3} p_2 F, \quad \text{wenn}$$

$$p_2 = \zeta_2 \gamma \frac{w^2}{2g} \quad \text{bedeutet,}$$

daher der gesamte Druck

$$10) \quad D = \frac{2}{3} \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g}.$$

Fig. 342.



Ist die Vorderfläche des Körpers eine Halbkugelfläche, so wird, wie für den Zylinder (Gl. 9)

$$dP_1 = p_1 dF \sin^3 \vartheta.$$

Da nun  $\vartheta$  für alle Teile der Kugelzone  $QQ_1$  (Fig. 343) den gleichen Wert hat, so kann als  $dF$  sogleich die ganze Zone

$$dF = 2\pi y ds = 2r\pi dx$$

(wegen  $ds = r \cdot dx : y$ ) eingeführt werden.

Dann wird mit

$$\sin \vartheta = \frac{x}{r};$$

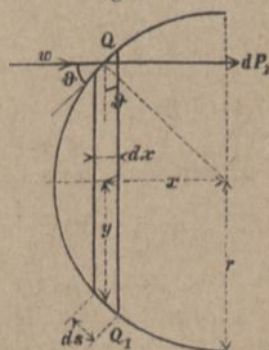
$$dP_1 = p_1 \frac{2r\pi}{r^3} x^3 dx.$$

Dies gibt, für die Halbkugel zwischen den Grenzen  $x = 0$  und  $x = r$  integriert:

$$P_1 = p_1 \cdot \frac{2\pi}{r^2} \int_0^r x^3 dx$$

$$11) \quad = \frac{1}{2} p_1 r^2 \pi = \frac{1}{2} p_1 F,$$

Fig. 343.



d. h. die halbkugelförmige Abrundung vermindert den Überdruck  $P_1$  gegenüber dem für eine ebene Fläche auf die Hälfte,



Für eine Kugel ist dann an der Rückseite ebenso  $P_2 = \frac{1}{2} \rho_2 F$ , daher der gesamte Druck

$$12) \quad D = \frac{1}{2} \rho F = \frac{1}{2} \zeta \gamma F \frac{w^2}{2g}.$$

Soll die Kraft  $D$  die Kugel in ruhendem Wasser mit der Geschwindigkeit  $w$  gleichmäßig bewegen, so wäre (wenn man die für Prismen gefundenen Zahlen auch hier anwendet) nach S. 346, mit

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = \frac{2r}{r\sqrt{\pi}} = 1,128,$$

$\zeta = 1,16$  zu wählen. Hiermit würde dann

$$D = 0,58 \gamma F \frac{w^2}{2g},$$

während Versuche im Mittel die Ziffer 0,54 statt 0,58 ergeben haben.

## 5. Ausfluß der Gase aus Gefäßen bei geringem Überdruck.

Innerhalb eines großen Gefäßes (Fig. 344) befinde sich ein Gas unter dem Drucke  $p_1$  und der absoluten Temperatur  $T_1$ ; dann ist dessen Dichte  $\gamma_1$  bzw. dessen Einheitsraum  $v_1$  (Gl. 1, S. 219) auf Grund der Zustandsgleichung (Gl. 6, S. 227) bestimmt:

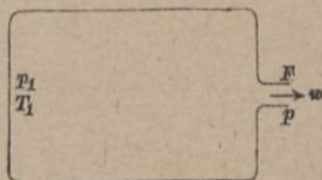
$$1) \quad \gamma_1 = \frac{1}{v_1} = \frac{p_1}{R T_1}.$$

Außerhalb des Gefäßes herrsche der Druck  $p$ . Dann kann man, falls  $p_1 : p$  nicht viel größer als 1 ist, annehmen, daß das aus einer kleinen Öffnung  $F$

strömende Gas beim Ausströmen den Druck  $p$  annimmt. Mit dieser Druckverminderung ist nicht allein eine Verminderung der Dichte, sondern auch eine Verminderung der Temperatur verbunden. Bei nur geringem Unterschiede der Drücke  $p_1$  und  $p$  möge aber die Dichteverminderung einstweilen unberücksichtigt bleiben, also angenommen werden, daß das Gas mit der Dichte  $\gamma_1$  auch zum Ausflusse gelange.

Unter dieser Annahme verschwindet der wesentliche Unterschied zwischen Gasen und tropfbar-flüssigen Körpern, und es kann

Fig. 344.



nun wie für den Ausfluß des Wassers auch für den Ausfluß der Gase die Gl. 6, S. 251 angewandt werden, welche wegen der Kleinheit der Öffnung  $F$  lautet:

$$w = \sqrt{2g \left( h + \frac{p_1 - p}{\gamma_1} \right)}.$$

Der Druck  $p_1$  nimmt wohl im Gefäße von oben nach unten etwas zu, jedoch sehr unbedeutend. Bezeichnet man mit  $p_1$  den Druck des Gases in der Höhe der Ausflußöffnung, so ist in obiger Gleichung  $h=0$  zu setzen, die nicht unmittelbar zu messende Dichte  $\gamma_1$  nach Gl. 1 einzuführen, und ebenso wie beim Ausflusse von Wasser eine Geschwindigkeitsziffer  $\varphi$  hinzuzufügen, welche nach Grashof (Theoretische Maschinenlehre, 1. Band, S. 585) auf Grund Weisbachscher Versuche zu etwa

$$2) \quad \varphi = 0,98$$

angenommen werden kann. Hiernach wird

$$3) \quad w = \varphi \sqrt{2g R T_1 \left( 1 - \frac{p}{p_1} \right)}.$$

Bei der Berechnung der sekundlichen Ausflußmenge ist noch zu berücksichtigen, daß beim Ausflusse von Gasen, aus denselben Gründen wie bei Wasser, im allgemeinen eine Einschnürung vorkommt, daß der Strahlquerschnitt also  $= \alpha F$  zu setzen ist.

Bei kreisförmiger Öffnung in dünner Wand kann

$$\alpha = 0,65,$$

mithin die Ausflußziffer

$$\mu = \alpha \cdot \varphi = 0,64$$

gesetzt werden.

Bei Gasen pflegt man die sekundliche Ausflußmenge in Kilogrammen auszudrücken, weil bei der Angabe nach Kubikmetern stets noch die Dichte außerdem anzugeben wäre, um die Ausflußmenge bestimmt zu kennzeichnen.

Die sekundlich ausfließende Gewichtsmenge ist dann

$$G = \gamma_1 \alpha \cdot F \cdot w \quad \text{oder}$$

$$4) \quad G = \frac{p_1}{R T_1} \mu F \sqrt{2g R T_1 \left( 1 - \frac{p}{p_1} \right)}.$$

Diese Gleichung gilt aber nur für sehr geringen Überdruck.



**Beispiel:** Der Außendruck  $p$  betrage  $1^{\text{at}}$ , entsprechend einer Quecksilbersäule von 735 mm (s. S. 233). In einem Gefäße befinde sich Luft von  $t_1 = 10^{\circ} \text{C}$ . oder  $T_1 = 283^{\circ}$  und einem Drucke  $p_1 = 765 \text{ mm}$  Quecksilbersäule. In der Gefäßwand befinde sich ein rundes Loch von  $1 \text{ cm}^2 = 0,0001 \text{ m}^2$  Größe. Es sollen die sekundliche Geschwindigkeit und Gewichtsmenge der ausströmenden Luft berechnet werden. Mit  $R = 29,27$  (s. S. 227) und  $\varphi = 0,98$  wird nach Gl. 3:

$$w = 0,98 \sqrt{2g \cdot 29,27 \cdot 283 \left(1 - \frac{735}{765}\right)} = 78 \text{ m/s.}$$

Mit

$$\gamma_1 = \frac{10000}{29,27 \cdot 283} \frac{765}{735} = 1,2565$$

und  $\alpha = 0,65$  ergibt sich nach Gl. 4:

$$G = 1,2565 \cdot 0,65 \cdot 0,0001 \cdot 78 = 0,00637 \text{ kg/s.}$$

## 6. Spezifische Wärme; Zustandsänderungen der Gase.

Die Temperatur eines Körpers, also auch eines Gases, kann man erhöhen, indem man dem Körper, etwa mittels einer Heizung, Wärme zuführt. Die Menge der Wärme wird nach Wärmeeinheiten gemessen. — Unter einer Wärmeeinheit (*WE*) versteht man in der Technik diejenige Wärmemenge, welche nötig ist, um  $1 \text{ kg}$  Wasser unter  $1^{\text{at}}$  Druck von  $0^{\circ} \text{C}$ . auf  $1^{\circ} \text{C}$ . zu erwärmen. Die nach Wärmeeinheiten gemessene Wärmemenge wird mit  $Q$  (Quantum) bezeichnet.

Die Anzahl der Wärmeeinheiten, welche  $1 \text{ kg}$  irgendeines Stoffes erfordert, um dessen Temperatur um  $1^{\circ} \text{C}$ . zu erhöhen, heißt die **spezifische Wärme** oder die **Wärmekapazität** dieses Stoffes.

Die spezifische Wärme eines Gases zeigt sich verschieden, je nachdem das Gas bei der Wärmezuführung

1. in einem Gefäße von unveränderlichem Rauminhalte  $v$  festgehalten wird, oder aber

2. sich unter einem unveränderlichen Drucke  $p$  (etwa dem eines belasteten, reibungslosen Kolbens) auszudehnen vermag.

Die spezifische Wärme für unveränderliches spezifisches Volumen  $v$ , also auch für unveränderliche Dichte  $\gamma = 1 : v$  (s. S. 219), werde mit  $c$ , diejenige für unveränderlichen Druck  $p$  mit  $c_1$  bezeichnet. Beide sind für ein bestimmtes Gas feste Werte, unabhängig von der Temperatur.

Die durch Versuche ermittelten Größen  $c$  und  $c_1$  haben ergeben, daß für ein bestimmtes Gas stets  $c < c_1$  ist. So ist z. B. für atmosphärische Luft  $c = 0,1684$ ;  $c_1 = 0,2375$ . — Man erklärt diese Erscheinung daraus, daß bei der Temperaturerhöhung unter gleichzeitiger Ausdehnung des Gases, etwa durch Verschiebung eines das Gas abschließenden Kolbens, von dem Gase auf diesen Kolben eine mechanische Arbeit übertragen wird, daß also diese Ausdehnungsarbeit einen Teil der zugeführten Wärmemenge erfordert, während der noch verbleibende Rest der zugeführten Wärmemenge zur Erhöhung der Temperatur, d. h. zur Vermehrung des inneren Arbeitsvermögens des Gases verwendet wird.

Befindet sich  $1 \text{ kg}$  Gas in einem Zylinder (Fig. 345) vom Querschnitt  $F$  und füllt es in diesem eine Höhe  $x$  aus, so ist sein Rauminhalt

$$v = F \cdot x.$$

Das Gas übt auf den Kolben eine Kraft  $p \cdot F$  aus. Bei einer Verschiebung des Kolbens um  $dx$  nach oben überträgt das Gas an den Kolben eine Arbeit

$$d\mathfrak{A} = p \cdot F \cdot dx,$$

oder mit  $F \cdot dx = dv$ ,

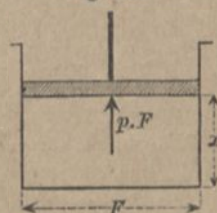
$$1) \quad d\mathfrak{A} = p \cdot dv.$$

Dies ist die Ausdehnungsarbeit bei einer unendlich kleinen Vergrößerung des spezifischen Volumens. Zwischen dieser Arbeit und der auf sie verwendeten Wärmemenge  $dQ$  besteht nach den Lehren der Physik ein festes Verhältnis. Überhaupt sind Wärme und Arbeit gleichwertig. Mag Wärme  $Q$  in Arbeit  $\mathfrak{A}$  umgewandelt werden, wie bei der Dampfmaschine, der Heißluft- und Gaskraftmaschine, oder mag äußeres Arbeitsvermögen  $\mathfrak{A}$  in Wärme  $Q$  übergehen, wie bei der Reibung oder beim Stoße (siehe 1. Teil, 4. Aufl., S. 314 und S. 144), — immer besteht zwischen beiden das feste Verhältnis:

$$3) \quad Q = A \cdot \mathfrak{A}.$$

Der Festwert  $A$  heißt der Wärmewert der Arbeitseinheit, und bezeichnet die Anzahl der Wärmeeinheiten, die durch  $1 \text{ mkg}$  erzeugt werden können; — der reziproke Wert  $1:A$  heißt der

Fig. 345.





Arbeitswert der Wärmeeinheit, und bezeichnet die Anzahl der Meterkilogramme, die mit  $1^{WE}$  gleichwertig sind.

Messungen der verschiedensten Art haben ergeben:

$$3) \quad A = \frac{1^{WE}}{424} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{A} = 424 \text{ mkg.}$$

Der Wärmezustand oder innere Zustand eines Teilchens eines Körpers, insbesondere eines Gases, ist bedingt durch seine Temperatur  $t$ , seinen Druck  $p$  und sein spezifisches Volumen  $v$ , von denen aber zwei die dritte bestimmen, weil zwischen ihnen eine feste Beziehung, die Zustandsgleichung  $t = f(p, v)$  besteht, welche für Gase mit  $T = 273 + t$ , nach S. 227 die einfache Form hat:

$$4) \quad T = \frac{p \cdot v}{R}.$$

$R$  ist für jedes Gas ein besonderer Festwert, ausgedrückt durch:

$$R = \frac{p \cdot v}{T} = \frac{p}{\gamma T}.$$

Wenn man verschiedene Gase auf gleiche Temperatur, z. B. den Gefrierpunkt des Wassers  $t_0 = 0^\circ$  oder  $T_0 = 273^\circ$ , und auf gleichen Druck, z. B. den Atmosphärendruck  $p_0 = 760 \text{ mm}$  Quecksilbersäule bringt, so ist  $R$  verhältnisgleich mit den diesem Zustande entsprechenden spezifischen Volumen  $v_0$ , oder umgekehrt verhältnisgleich mit den entsprechenden Dichten  $\gamma_0$  der verschiedenen Gase. Da unter dieser Voraussetzung für trockene atmosphärische Luft (nach S. 227)  $\gamma_0 = 1,2932$  und  $R = 29,27$  ist, so ergibt sich für Wasserstoff mit  $\gamma_0 = 0,08957$  dessen Festwert zu:

$$R = \frac{29,27 \cdot 1,2932}{0,08957} = 422,6.$$

Nach dem Vorstehenden, besonders nach Gl. 4, bestimmen  $p$  und  $v$  schon vollständig den Wärmezustand eines Gasteilchens.

Es soll nun die Wärmemenge berechnet werden, die man einem Kilogramm Gas von überall gleichem Wärmezustande zuführen muß, damit das Gas eine unendlich kleine Zustandsänderung erfahre. In Gl. 4 erscheint  $T$  als Funktion der zwei Veränderlichen  $p$  und  $v$ ; die teilweisen Differentiale sind somit

$$5) \quad \frac{\partial T}{\partial p} dp = \frac{v}{R} dp \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial v} dv = \frac{p}{R} dv.$$

Bei gleichzeitiger Änderung von  $p$  und  $v$  ist dann das vollständige Differential von  $T$ :

$$6) \quad dT = \frac{v}{R} dp + \frac{p}{R} dv.$$

In Fig. 346 ist eine unendlich kleine totale Zustandsänderung angedeutet, welche durch Zuführung der Wärmemenge  $dQ$  bewirkt

Fig. 346.

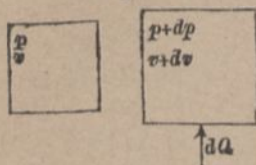
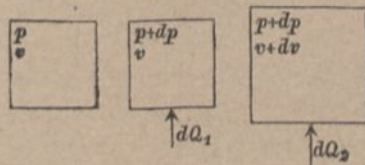


Fig. 347.



wird. Diese kann in zwei aufeinanderfolgende partielle Änderungen (Fig. 347) zerlegt werden. Die erste Änderung bei gleichbleibendem Volumen  $v$  erfordere die Wärmemenge  $dQ_1$ ; bei dieser ändert sich  $T$  nur partiell nach  $p$  um

$$\frac{\partial T}{\partial p} dp = \frac{v}{R} dp;$$

hierbei kommt die spezifische Wärme  $c$  in Frage, und es ist nach der Bedeutung von  $c$  (S. 352)

$$dQ_1 = c \frac{\partial T}{\partial p} dp = c \frac{v}{R} dp.$$

Die zweite Änderung bei dem nun gleichbleibenden Druck  $p + dp$  erfordere die Wärmemenge  $dQ_2$ ; für diese gilt mit der spezifischen Wärme  $c_1$ , unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Größe zweiter Ordnung,

$$dQ_2 = c_1 \frac{\partial T}{\partial v} dv = c_1 \frac{p}{R} dv.$$

Die ganze erforderliche Wärmemenge ist dann

$$7) \quad dQ = dQ_1 + dQ_2 = c \frac{v}{R} dp + c_1 \frac{p}{R} dv.$$

Nach Gl. 6 ist  $\frac{v}{R} dp = dT - \frac{p}{R} dv$ , also kann man auch schreiben:

$$8) \quad dQ = c \cdot dT + (c_1 - c) \frac{p}{R} dv.$$



Hierin bedeutet  $c \cdot dT$  diejenige Wärmemenge, welche zur Erhöhung der Temperatur verwendet wird, während  $(c_1 - c) \frac{p}{R} dv$  diejenige Wärmemenge bezeichnet, die zur Ausdehnungsarbeit  $d\mathcal{A} = p dv$  nötig ist. Daher ergibt sich  $\frac{c_1 - c}{R}$  als diejenige Größe  $A$  (Gl. 2, S. 353), mit der die Arbeit  $d\mathcal{A}$  zu multiplizieren ist, um die entsprechende, d. h. gleichwertige Wärmemenge  $dQ$  zu liefern; also ist

$$9) \quad A = \frac{c_1 - c}{R}.$$

Für jedes Gas steht  $c_1$  und  $c$  in einem bestimmten Verhältnis (s. S. 348), das man mit  $n$  bezeichnet, also wird mit

$$10) \quad \frac{c_1}{c} = n,$$

$$11) \quad A = c \frac{(n-1)}{R}.$$

Für Luft ist  $n = 1,405$ , für Sauerstoff  $n = 1,40$ , für Stickstoff, Wasserstoff und Kohlenoxyd  $n = 1,405$ , d. h. für diejenigen Gase, die unter gewöhnlichen Umständen weit von dem Flüssigkeitszustande entfernt sind, kann man ziemlich übereinstimmend  $n = 1,41 (= \sqrt{2})$  setzen.

Da für Luft (S. 353)  $c_1 = 0,2375$  und  $c = 0,1684$  ist, folgt mit  $n = 1,41$  und  $R = 29,27$  aus Gl. 11:

$$A = \frac{0,1684 \cdot 0,41}{29,27} = \text{rund } \frac{1}{424}, \text{ wie in Gl. 3.}$$

Nun kann Gl. 8 auch geschrieben werden:

$$12) \quad dQ = c \cdot dT + A \cdot p \cdot dv = c \cdot dT + A \cdot d\mathcal{A}.$$

Hat ein Gas zu Anfang den Druck  $p_1$ , den Einheitsraum  $v_1$ , die absolute Temperatur  $T_1$  und gehen diese Werte auf irgendeine Weise über in  $p_2$ ,  $v_2$  und  $T_2$ , so ist dazu eine Wärmezuführung

$$13) \quad Q = c(T_2 - T_1) + A \int_{v_1}^{v_2} p dv = c(T_2 - T_1) + A \cdot \mathcal{A}$$

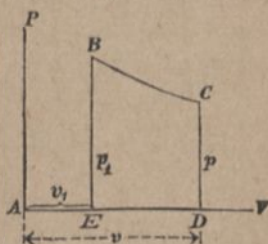
erforderlich. Sind die Temperaturen zu Anfang und zu Ende gleich ( $T_1 = T_2$ ), so entspricht die zuzuführende Wärme genau der geleisteten Ausdehnungsarbeit, d. h. man erhält in diesem Falle

$Q = A \cdot \mathfrak{A}$  in Wärmeeinheiten, indem man die in Meterkilogrammen ausgedrückte Arbeit  $\mathfrak{A}$  durch 424 teilt.

Die während einer Zustandsänderung, d. h. einer Änderung der Größen  $p$  und  $v$ , von dem Gase geleistete Ausdehnungsarbeit  $\mathfrak{A}$  und die zuzuführende Wärmemenge  $Q$  hängen aber nicht nur von den Anfangs- und Endwerten der Größen  $p$  und  $v$  ab, sondern werden noch im besonderen durch die Art bedingt, in welcher die gleichzeitige Änderung von  $p$  und  $v$  vor sich geht, denn  $\mathfrak{A} = \int p \, dv$  hat nur dann einen bestimmten Wert, wenn  $p$  als Funktion von  $v$  bekannt ist.

Ist eine Gleichung zwischen  $p$  und  $v$  gegeben, so ist dadurch  $p$  auf  $v$  und somit, nach der Zustandsgleichung (Gl. 4), auch  $T$  auf  $v$  zurückgeführt. Trägt man (Fig. 348)  $v$  als Abszisse,  $p$  als Ordinate auf, so erhält man als Darstellung der Zustandsänderung die sog. Zustandskurve  $BC$ . Die Arbeit  $\mathfrak{A} = \int p \, dv$  wird dann gemessen durch die Fläche  $BCDE$  der Zustandskurve.

Fig. 348.



**Zustandsänderung bei gleichbleibender Temperatur (isothermische Zustandsänderung).** Wird der Vorgang so geregelt, daß bei veränderlichem  $v$  die Temperatur  $T$  unverändert  $= T_1$  bleibt, so wird, weil anfänglich  $T_1 = \frac{p_1 v_1}{R}$

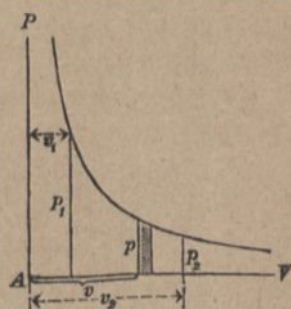
war und später  $T_1 = \frac{p v}{R}$  ist,

$$14) \quad p \cdot v = p_1 \cdot v_1 \quad \text{oder} \quad \frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v},$$

übereinstimmend mit dem Boyle-Mariotteschen Satze (Gl. 2, S. 219), der ja für gleichbleibende Temperatur gilt. — Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten; ihre Darstellung in Fig. 349

heißt die isothermische Zustandskurve. Jedem Punkte  $p_1, v_1$  der Ebene  $APV$  entspricht ein bestimmter Wert  $p_1 v_1 = RT_1$ .

Fig. 349.





Für verschiedene Werte von  $T_1$  erhält man verschiedene Zustandskurven. Denkt man sich die allgemeine Zustandsgleichung  $p \cdot v = RT$  mit den 3 veränderlichen Koordinaten  $p$ ,  $v$  und  $T$  so dargestellt, daß die  $T$  lotrecht zur wagerechten Ebene der  $p v (APV)$  aufgetragen werden, so erhält man die für jedes bestimmte Gas durch den Festwert  $R$  bestimmte Zustandsfläche. Schneidet man diese Zustandsfläche durch wagerechte Ebenen in den Höhen  $T_1, T_2, T_3 \dots$ , so ergeben sich als Schnittlinien die diesen Temperaturen entsprechenden isothermischen Zustandskurven. (Fig. 349.)

Die Ausdehnungsarbeit für  $1^{kg}$  eines Gases vom Rauminhalte  $v_1$  auf den Rauminhalt  $v_2$  ist

$$\mathfrak{A} = \int_{v_1}^{v_2} p \, dv,$$

oder mit  $p = \frac{p_1 \cdot v_1}{v}$ .

$$15) \quad \mathfrak{A} = p_1 \cdot v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right),$$

wofür man auch schreiben kann

$$16) \quad \mathfrak{A} = p_1 v_1 \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right) = RT_1 \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right) = p_1 v_1 \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right).$$

Diese Zustandsänderung mit gleichbleibendem  $T = T_1$  wird nur dann erfolgen, wenn für jede unendlich kleine Ausdehnung  $dv$  dem Gase nur die der Arbeit  $d\mathfrak{A} = p \, dv$  entsprechende Wärmemenge  $dQ = A \cdot d\mathfrak{A}$  zugeführt wird (nach Gl. 12 mit  $dT = 0$ ). Da  $d\mathfrak{A} = p \cdot dv$  durch den schraffierten Flächenstreifen in Fig. 349 dargestellt erscheint, so ist ersichtlich, daß bei gleichmäßiger Änderung von  $v$  die Wärmezuführung zu Anfang stärker sein muß als später.

Bei einer Zusammendrückung von  $v_2$  auf  $v_1$  muß die Arbeit  $\mathfrak{A}$  als Verdichtungsarbeit von außen auf das Gas übertragen werden; in diesem Falle ist die Arbeit  $\mathfrak{A}$ , welche der Gasdruck auf den Kolben überträgt, und somit auch  $Q$ , negativ, d. h. es muß dem Gase die Wärmemenge  $Q$  entzogen werden (etwa durch Kühlwasser).

**Beispiel:** Ein Kilogramm Luft habe die Temperatur  $t_1 = 10^\circ$  oder  $T_1 = 283^\circ$ , den Druck  $p_1 = 50000 \text{ kg/m}^2 = 5 \text{ at}$ , also den Rauminhalt  $v_1 = R T_1 : p_1 = 0,16567 \text{ m}^3$ . Bei der Ausdehnung auf  $v_2 = 5 v_1$ , wobei unter Gleichhaltung der Temperatur  $T_2 = T_1$  der Druck auf  $p_2 = 1/5 p_1$  abnimmt, wird nach Gl. 16 von dem Gase die Arbeit

$$\mathfrak{A} = 50000 \cdot 0,16567 \ln(5) = 13323 \text{ mkg}$$

geleistet, d. h. eigentlich nur übertragen, denn geliefert wird die Arbeit aus der nach Gl. 2 zuzuführenden Wärmemenge

$$Q = \frac{13323}{424} = 31,42 \text{ WE.}$$

Preßt man das Gas wieder zusammen und entzieht fortwährend soviel Wärme, daß die Temperatur stets  $t = 10^\circ$  verbleibt, so muß man die Arbeit  $\mathfrak{A} = 13323 \text{ mkg}$  aufwenden, die aber in Form von Wärme mit  $Q = 31,42 \text{ WE}$  an das etwaige Kühlwasser übergeht.

**Zustandsänderung bei gleichbleibendem Druck.** Bei gleichbleibendem  $p = p_1$  wird die Zustandskurve eine der  $v$ -Achse parallele Gerade (Fig. 350), daher

$$17) \quad \mathfrak{A} = p_1(v_2 - v_1) = R(T_2 - T_1).$$

Die Temperaturänderung folgt der Gleichung

$$18) \quad \frac{T}{T_1} = \frac{v}{v_1}$$

(Satz von Gay-Lussac, S. 226).

Somit wird nach Gl. 13 die zuzuführende Wärmemenge

$$Q = c(T_2 - T_1) + A \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = (T_2 - T_1)(c + AR),$$

oder wegen  $A = \frac{c_1 - c}{R}$  (Gl. 9):

$$19) \quad Q = c_1(T_2 - T_1),$$

und mit

$$T = \frac{pv}{R}$$

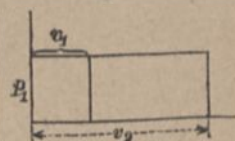
$$20) \quad Q = c_1 \frac{p_1}{R} (v_2 - v_1),$$

wie nach der Bedeutung von  $c_1$  selbstverständlich ist.

**Zustandsänderung bei gleichbleibendem Raume.** Diese wird durch eine zur  $p$ -Achse parallele Gerade dargestellt (vgl. Fig. 350). Es ist in diesem Falle

$$21) \quad \frac{T}{T_1} = \frac{p}{p_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = 0.$$

Fig. 350.





Nach Gl. 13 wird

$$22) \quad Q = c(T_2 - T_1) = c \frac{v_1}{R} (p_2 - p_1);$$

wie die Bedeutung von  $c$  entspricht.

**Zustandsänderung ohne Zuführung oder Entziehung von Wärme (adiabatische Zustandsänderung).** Denkt man sich das Gas in einem Zylinder mit beweglichem Kolben befindlich, dessen Wandungen für Wärme undurchlässig sind, und den Kolben nach außen verschoben, so ändert sich unmittelbar  $v$  und als Folge davon  $p$  und  $T$ . Diese Änderung heißt nach dem Vorschlage des schottischen Ingenieurs Professor Rankine (geb. 1820 zu Edinburg, gest. 1872 zu Glasgow) adiabatische Zustandsänderung (von *ἀδιάβατος* = undurchdringlich), deren Bedingung also ist, daß die zugeführte Wärmemenge für jedes Zeitteilchen Null sei, d. h. nach Gl. 7:

$$dQ = 0 = c \frac{v}{R} dp + c_1 \frac{p}{R} dv.$$

Daraus wird mit

$$\frac{c_1}{c} = n$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{c_1}{c} \frac{dv}{v} = -n \frac{dv}{v} \quad \text{und}$$

$$23) \quad \frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^n.$$

Diese Gleichung heißt der Poissonsche Satz; — ihre Darstellung gibt die adiabatische Zustandskurve. Während beim Boyleschen Satze (Gl. 14) der Exponent der rechten Seite = 1 ist, hat er hier den Wert  $n = 1,41$ .

Da nun  $p_1 v_1 = R T_1$  und  $p v = R T$ , also  $\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1} \frac{v_1}{v}$  ist, so wird für die Temperaturänderung

$$24) \quad \frac{T_1}{T} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Aus Gl. 13 ergibt sich mit  $Q = 0$ :

$$25) \quad \mathfrak{A} = \frac{c}{A} (T_1 - T_2).$$

Bei der Ausdehnung des Gases wird für  $v_2 > v_1$ , nach Gl. 24,  $p_2 < p_1$  und  $T_2 < T_1$ ; es folgt daher eine Temperaturabnahme; die Ausdehnungsarbeit wird auf Kosten des inneren Arbeitsvermögens, d. h. der Temperatur, verrichtet. Bei der Zusammendrückung auf einen kleineren Raum erfolgt dagegen eine Erhöhung des Druckes sowie der Temperatur. Die von außen zur Zusammendrückung aufgewandte Arbeit setzt sich vollständig in inneres Arbeitsvermögen, Erhöhung der Temperatur, um.

**Beispiel 1:** Ein Kilogramm Luft habe die Temperatur  $t_1 = 10^\circ$  oder  $T_1 = 283^\circ$ , den Druck  $p_1 = 50000 \text{ kg/m}^2$ , also den Rauminhalt  $v_1 = R T_1 : p_1 = 0,16567 \text{ m}^3$ . Bei einer adiabatischen Ausdehnung auf  $v_2 = 3 v_1$  vermindert sich der Druck nach Gl. 23 auf  $p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41} = 0,2125 p_1 = 10625 \text{ kg/m}^2$ , und die Temperatur nach Gl. 24 auf  $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,41} = 0,6373 T_1 = 180^\circ$ , entsprechend  $t^2 = -93^\circ$ . Es entsteht also eine überraschend große Abkühlung von  $103^\circ \text{ C}$ . Die Ausdehnungsarbeit beträgt (Gl. 25)

$$W = 0,1684 \cdot 424 \cdot 103 = 7354 \text{ mkg}.$$

**Bemerkung.** Die unter Umständen sehr bedeutende Temperaturverminderung, welche Luft bei einer adiabatischen Druckverminderung erleidet, kann zur Kühlung von Räumen nur verwertet werden, wenn die Luft unter Verrichtung von Arbeit in dem Zylinder einer Kaltluftmaschine den geringeren Druck angenommen hat.

**Beispiel 2:** Hatte 1 kg Luft anfänglich den Druck  $p_1 = 10000 \text{ kg/m}^2$ , die Temperatur  $t_1 = 15^\circ$  oder  $T_1 = 288^\circ$  und den Rauminhalt  $v_1$ , und wird diese Luftmenge ohne Wärmeentziehung auf  $v_2 = \frac{1}{5} v_1$  verdichtet, so wird

$$\frac{p_2}{p_1} = 5^{1,41} = 9,67 \text{ daher } p_2 = 96700 \text{ kg/m}^2,$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 5^{0,41} = 1,98 \text{ daher } T_2 = 570^\circ \text{ oder } t_2 = 284^\circ.$$

Es entsteht also eine Wärmezunahme um  $269^\circ \text{ C}$ .

(Zinn kommt bei  $230^\circ$  zum Schmelzen, Blei bei  $330^\circ$ .)

Die Zusammendrückungsarbeit ergibt sich zu

$$W = 0,1684 \cdot 424 \cdot 269 = 19207 \text{ mkg}.$$

Die Bedingungen für eine adiabatische Zustandsänderung sind annähernd erfüllt, wenn ohne besondere Vorkehrungen eine Raumänderung schnell erfolgt. Dann ist keine Zeit zur Wärmemitteilung



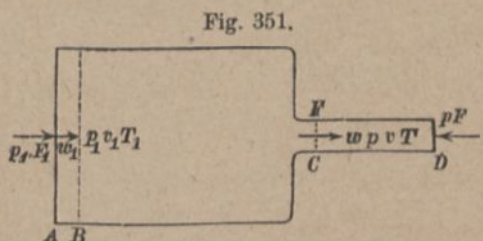
vorhanden; das Gas ist bei Leistung einer Arbeit auf sein eigenes Arbeitsvermögen, d. h. seine eigene Wärme angewiesen, und muß andererseits eine empfangene äußere Arbeit in Wärme umsetzen.

Geht eine Zustandsänderung aber in einem nicht besonders geschützten dünnwandigen Metallgefäße sehr langsam vor sich, so kann man annehmen, das eingeschlossene Gas habe stets annähernd die Temperatur der äußeren Luft. Diese bewirkt dann die erforderliche Zuführung oder Entziehung von Wärmemenge, also eine isothermische Zustandsänderung.

## 7. Ausfluß der Gase aus Gefäßen.

In einem großen Gefäße (Fig. 351) befinde sich Gas von dem Zustande  $p_1, v_1, T_1$ . Bei  $C$  finde aus der Öffnung  $F$  ein Ausfluß mit der Geschwindigkeit  $w$  statt. Der Zustand des Gases in der

Öffnung sei  $p, v, T$ . Zur Erhaltung des Beharrungszustandes denken wir uns die Rückwand des Gefäßes durch einen Kolben von der



Größe  $F_1$  ersetzt, der durch die Kraft  $p_1 \cdot F_1$  mit der sehr kleinen Geschwindigkeit  $w_1$  vorwärts bewegt wird, also in der Zeit  $dt$  um  $AB = w_1 \cdot dt$  vorrückt. Auch nehmen wir an der Öffnung eine Röhre von der Länge  $CD = w \cdot dt$  an, in der ein Kolben unter einer Gegenkraft  $p \cdot F$  zurückweicht. Dann findet sich im Gefäße zwischen  $A$  und  $B$  das Massenteilchen  $m$  von dem Gewichte

$$mg = \gamma_1 F_1 w_1 dt = \frac{F_1 w_1 dt}{v_1},$$

entsprechend demjenigen in der Röhre zwischen  $C$  und  $D$  mit

$$mg = \frac{F \cdot w \cdot dt}{v}.$$

Die Zunahme an Arbeitsvermögen in der Zeit  $dt$  beträgt, weil  $w_1$  sehr klein gegen  $w$  ist:  $\frac{mw^2}{2}$ .

Die Kräfte  $p_1 \cdot F_1$  und  $p \cdot F$  leisten gleichzeitig die Arbeit:

$$p_1 \cdot F_1 \cdot w_1 \cdot dt - p \cdot F \cdot w \cdot dt = mg(p_1 v_1 - p v) = mg \cdot R(T_1 - T).$$

In der Zeit  $dt$  erfährt das Gasgewicht  $mg$  eine Temperaturverminderung  $T_1 - T$ , für welche man die Gleichungen der adiabatischen Zustandsänderung (s. S. 360) annehmen kann, also

$$1) \quad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Die dieser Temperaturverminderung entsprechende Wärmemenge beträgt nach S. 356 für 1 kg des Gases  $c(T_1 - T)$ , für das Gewicht  $mg$  also  $mg \cdot c(T_1 - T)$ , und kommt dem Arbeitsvermögen der Ausströmung zugute mit:  $mg \frac{c}{A}(T_1 - T)$ .

Daher wird die Zunahme an Arbeitsvermögen:

$$\frac{mw^2}{2} = mg \cdot R(T_1 - T) + mg \frac{c}{A}(T_1 - T),$$

und danach

$$\frac{w^2}{2g} = (T_1 - T) \left(R + \frac{c}{A}\right).$$

Mit  $\frac{c}{A} = \frac{R}{n-1}$  (Gl. 11, S. 356) und Berücksichtigung der Gl. 1, ergibt sich also

$$2) \quad \frac{w^2}{2g} = (T_1 - T) R \frac{n}{n-1} = R \frac{n}{n-1} T_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist als die wirksame Druckhöhe zu bezeichnen, welche sich bei Vernachlässigung der Reibung und der sonstigen Widerstände in die Geschwindigkeitshöhe  $\frac{w^2}{2g}$  umsetzt.

Die sekundliche Gewichtsmenge des ausströmenden Gases ist nach S. 351 mit Berücksichtigung der Widerstände, wegen  $\gamma = 1 : v$ ,

$$G = \mu \cdot F \cdot \frac{w}{v}.$$

Führt man hierin für  $w$  den Wert aus Gl. 2, und nach Gl. 23, S. 360,  $v = v_1 \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{n}}$  ein, so wird

$$3) \quad G = \mu \cdot F \sqrt{2g R \frac{n}{n-1} \cdot T_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{v_1^2}}.$$



Hiernach ist  $G^2$  verhältnisgleich mit

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{(n+1)}{n}},$$

ein Ausdruck, der zu einem Maximum wird, für

$$4) \quad \frac{p}{p_1} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Hiermit ergibt sich

$$5) \quad G_{max} = \mu F \sqrt{2g \frac{n}{n+1} \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}} \frac{R \cdot T_1}{v_1^2}},$$

worin auch  $\frac{R \cdot T_1}{v_1^2} = \frac{p_1}{v_1} = \frac{p_1^2}{R T_1}$  gesetzt werden kann.

Mit  $n = 1,41$ ,  $\frac{1}{n} = 0,709$ ,  $\frac{n-1}{n} = 0,291$ ,  $\frac{n}{n-1} = 3,44$  und

$\frac{n}{n+1} = 0,585$  wird

$$6) \quad \frac{p}{p_1} = 0,5265$$

und für Luft mit  $R = 29,27$ :

$$7) \quad G_{max} = \mu F \cdot 0,3972 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}}.$$

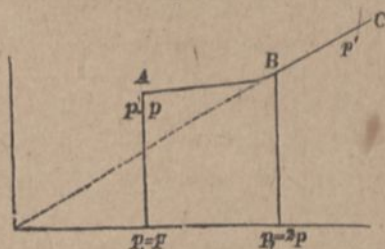
Stellt man sich nun vor, der Druck im Gefaße bliebe unverändert  $p_1$ , der Außendruck  $p$  aber nehme ab, so wird nach Gl. 1 auch die Temperatur  $T$  der ausströmenden Luft abnehmen und nach Gl. 2 die Geschwindigkeit  $w$  zunehmen. Da hierbei nach Gl. 23, S. 360, das Volumen  $v$  zunimmt, die Dichte  $\gamma$  sich also vermindert, so wird, trotz des Wachsens der sekundlich ausströmenden Raummenge, das ausströmende Gewicht  $G$  nur zunehmen, solange  $\frac{p}{p_1} > 0,5265$  ist. Bei noch weiterer Abnahme von  $p$  wird aber  $G$  wieder kleiner, und nach Gl. 3 müßte für  $p = 0$ , d. h. für die Ausströmung in einen leeren Raum, auch  $G = 0$  werden.

In Wirklichkeit trifft dies aber nicht zu; denn nach Gl. 24, S. 360, würde für  $p = 0$  zugleich  $v = \infty$  (oder  $\gamma = 0$ ), und  $T = 0$

werden, und so weit reicht die Gültigkeit der Zustandsgleichung der Gase nicht; auch trifft die Annahme nicht zu, daß in demjenigen Querschnitt, in welchem die Geschwindigkeit  $w$  herrscht, der Druck des ausströmenden Gases gleich dem im Außenraume stattfindenden Drucke  $p$  sei; vielmehr herrscht dort ein Druck  $p' > p$ .

Über diesen Druck  $p'$  hat Professor Fliegner in Zürich Versuche angestellt (s. Civilingenieur 1874). Nimmt der Druck  $p_1$  im Gefaße, von  $p_1 = p$  beginnend, allmählich zu, so ist anfangs  $p' = p$  (Fig. 352), für  $p_1 = 2p$  wird  $p' = 0,5767p$ , und bleibt dann für noch weiter wachsendes  $p_1$

Fig. 352.



unverändert  $p' = 0,5767p_1$ . Das Gesetz der Veränderlichkeit von  $p'$  folgt also dem Zuge  $ABC$ . Für die schwach gekrümmte Kurve  $AB$  kann man annähernd eine Gerade  $AB$  setzen.

Hiernach wäre

$$8) \quad p' = p + 0,1534(p_1 - p) \text{ gültig für } p_1 = p \text{ bis } p_1 = 2p,$$

$$9) \quad p' = 0,5767p_1 \text{ gültig für } p_1 > 2p.$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeit  $w$  hat man sonach in Gl. 1 und 2, statt  $p$  den Druck  $p'$  aus Gl. 8 oder Gl. 9 einzuführen.

Zugleich fand Fliegner, daß die Reibungswiderstände in einem großen Gefaße verschwindend klein sind, so daß  $\varphi = 1$  und  $\mu = \alpha$  gesetzt werden kann. (Vergl. S. 351).

Die sekundlich ausfließende Gewichtsmenge beträgt nach Fliegners Versuchen:

$$\text{für } p_1 < 2p: \quad G = \alpha F \cdot 0,790 \sqrt{\frac{p(p_1 - p)}{T_1}},$$

10)

$$\text{für } p_1 > 2p: \quad G = \alpha F \cdot 0,395 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}} \text{ (vergl. Gl. 7),}$$

worin  $p$  und  $p_1$  in  $\text{kg/m}^2$  einzusetzen sind.



Beispiel: Wie auf S. 352 sei:  $p = 735 \text{ mm}$  und  $p_1 = 765 \text{ mm}$  Quecksilbersäule, d. h.  $p = 735 \cdot 13,6 = 9996 \text{ kg/m}^2$  und  $p_1 = 765 \cdot 13,6 = 10404 \text{ kg/m}^2$ , ferner  $T_1 = 283^\circ$ , und  $F = 0,0001 \text{ m}^2$ ; dann wird, wegen  $p_1 > 2p$ , nach Gl. 8:

$$p' = 10059, \text{ somit } \frac{p'}{p_1} = 0,9668.$$

Aus Gl. 1 folgt, mit  $p'$  statt  $p$ :  $\frac{T}{T_1} = 0,9668^{0,001}$  und  $T = 280,2^\circ$ , also  $(T_2 - T) = 2,8^\circ$  Temperaturabnahme.

Es ergibt damit Gl. 2:

$$w = \sqrt{2g \cdot 29,27 \cdot 3,44 \cdot 2,8} = 74,4 \text{ m/sek}$$

gegen  $78 \text{ m/sek}$  nach S. 352.

Die sekundliche Gewichtsmenge ist nach Gl. 10 mit  $\alpha = 0,65$ :

$$G = 0,65 \cdot 0,0001 \cdot 0,79 \sqrt{\frac{9996 \cdot 408}{283}} = 0,0068 \text{ kg/sek}$$

gegen  $0,00687 \text{ kg/sek}$  auf S. 352.

Bemerkung. Die Temperaturverminderung, welche Luft beim freien Ausströmen aus einem Gefäße erfährt, läßt sich nicht benutzen. — Es wird nämlich die mit großer Geschwindigkeit ausströmende Luft in dem Außenraume, infolge von Reibung, schließlich wieder zur Ruhe kommen, und dabei wird das der Geschwindigkeit entsprechende Arbeitsvermögen wieder in Wärme umgesetzt.

### 8. Bewegung der Luft in Röhren.

Die Luft erfährt beim Durchströmen einer Röhre, infolge des Reibungswiderstandes, eine Verminderung ihres Druckes um  $\Delta p$ .

Wie bei der Bewegung des Wassers (S. 297) eine Widerstandshöhe  $z = \lambda \frac{l w^2}{d 2g}$  eingeführt wurde, so setzt man hier, wenn  $\gamma$  die Dichte der Luft bedeutet, die Druckverminderung

$$\Delta p = \gamma \cdot z = \gamma \cdot \lambda \cdot \frac{l w^2}{d 2g}.$$

Man kann dann auch, wegen  $\gamma = \frac{1}{v} = \frac{p}{RT}$ , schreiben:

$$1) \quad \Delta p = \frac{p}{RT} \lambda \frac{l w^2}{d 2g}.$$

Nach Versuchen von Prof. Ledoux (Annales des mines 1892, Nov., S. 541) beträgt im Mittel  $\lambda = 0,0179$  oder abgerundet:

$$2) \quad \lambda = 0,018.$$

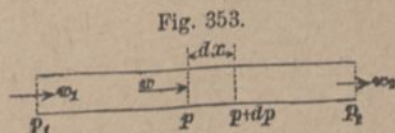
Beispiel: Eine Leitung von  $d = 0,25^m$  Weite und  $l = 1000^m$  Länge führe Luft von im Mittel  $20^\circ \text{ C.}$  ( $T = 293^\circ$ ) mit einer Geschwindigkeit  $w = 6 \text{ m/sek.}$ , aus einem Behälter mit einem Drucke  $p_1 = 60\,000 \text{ kg/m}^2$ , in einen Tunnel zum Betriebe von Bohrmaschinen. Der Druckverlust der Leitung ist nach Gl. 1:

$$\Delta p = \frac{60\,000}{29,27 \cdot 293} \cdot 0,018 \cdot \frac{1000 \cdot 6^2}{0,25 \cdot 2 \cdot g} = 924 \text{ kg/m}^2;$$

am Ende der Leitung beträgt der Druck also noch  $59\,076 \text{ kg/m}^2$ .

Wenn man voraussetzt, daß infolge von Wärmeleitung durch die Röhrenwand eine Temperaturveränderung der Luft nicht vorkommt, so ist mit der Druck-

abnahme der Luft eine Vergrößerung ihres Einheitsraumes  $v$  verbunden. (Boylescher Satz.) Im Beharrungszustande muß nun



sekundlich das gleiche Luftgewicht  $\gamma F w = \frac{F w}{v}$  durch alle Querschnitte der Röhren hindurchströmen. Gelten daher (Fig. 353)  $p_1, v_1, w_1$  für den Anfang,  $p_2, v_2, w_2$  für das Ende und  $p, v, w$  für eine beliebige Stelle der Röhre, so ist:

$$\frac{w}{v} = \frac{w_1}{v_1} \quad \text{und wegen} \quad \frac{v}{v_1} = \frac{p_1}{p}, \quad w = \frac{w_1 p_1}{p};$$

ferner nach Gl. 1, weil  $p$  mit wachsendem  $x$  abnimmt,

$$3) \quad -dp = \frac{p}{RT} \lambda \frac{dx w^2}{d \cdot 2g} = \frac{p}{RT} \frac{\lambda}{d} dx \frac{w_1^2 p_1^2}{2g p^2} \quad \text{also}$$

$$-p dp = \frac{\lambda}{d} \frac{p_1^2}{RT} \frac{w_1^2}{2g} dx.$$

Dies gibt 
$$p_1^2 - p_2^2 = 2 \frac{\lambda l p_1^2 w_1^2}{d RT 2g} \quad \text{oder}$$

$$p_2 = p_1 \sqrt{1 - \frac{2\lambda l w_1^2}{RT d 2g}}.$$



Ist der Unterschied zwischen  $p_1$  und  $p_2$  gering, so kann man für den Wurzelausdruck die beiden ersten Glieder der binomischen Reihe setzen, und erhält

$$5) \quad p_2 = p_1 \left( 1 - \frac{\lambda}{RT} \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2g} \right);$$

dies stimmt, weil  $\Delta p = p_1 - p_2$  ist, mit Gl. 1 überein.

Streng genommen, müßte auch noch die zur Vergrößerung der Geschwindigkeit erforderliche Druckhöhe berücksichtigt werden. Dann erhält man, weil einem negativen  $dp$  eine negative Druckhöhe  $dz$  entspricht:  $-\gamma \cdot dz = -dp$ , und mit Berücksichtigung der Gl. 3:

$$-dz = -\frac{RT}{p} dp = \lambda \frac{dx}{d} \frac{w^2}{2g} + \frac{d(w^2)}{2g}, \quad \text{oder wegen } w = w_1 \frac{p_1}{p},$$

$$-dp = \frac{\lambda p}{RT} \frac{dx}{d} \frac{w_1^2 p_1^2}{2g p^2} - \frac{w_1^2}{g} p_1^2 \frac{dp}{p^3} \frac{p}{RT}, \quad \text{mithin}$$

$$-p dp = \frac{\lambda}{RT} \frac{p_1^2 w_1^2}{d} dx - \frac{w_1^2 p_1^2}{g RT} \frac{dp}{p} \quad \text{und}$$

$$p_1^2 - p_2^2 = 2\lambda \frac{l}{d} \frac{p_1^2 w_1^2}{RT} + 4 \frac{p_1^2 w_1^2}{RT} \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right).$$

Hieraus wird

$$6) \quad \frac{p_2^2}{p_1^2} = 1 - \frac{w_1^2}{2g} \frac{1}{RT_1} \left( 2\lambda \frac{l}{d} + 4 \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \right).$$

Bemerkung. In Gl. 6 ist der letzte Summand in der Klammer gegen den ersten meist verschwindend klein; so wird mit den Werten des Beispiels auf S. 367

$$\frac{p_1}{p_2} = \text{rund } \frac{60}{59} = 1,017, \quad \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) = 0,017,$$

und der Klammerausdruck:

$$\left( 2 \cdot 0,018 \cdot \frac{1000}{0,25} + 4 \cdot 0,017 \right) = (144 + 0,68).$$

Bei Vernachlässigung der zweiten Klammergröße übergeht aber Gl. 6 in Gl. 4.

Gl. 4 liefert mit den Zahlen desselben Beispiels:

$$p_2 = 60000 \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 0,018 \cdot 1000}{29,27 \cdot 293} \frac{6^2}{0,25 \cdot 19,63}} = 59070 \text{ kg/m}^2,$$

gegen  $p_2 = 59076 \text{ kg/m}^2$  nach Gl. 1.

Es genügt daher für die meisten Fälle die einfache Gl. 1.

## 9. Wirkung der Schornsteine.

Die Wirkung der Schornsteine beruht auf der Verminderung der Dichte der Luft oder der Gase durch Erwärmung. — Am oberen Ende des Schornsteins (Fig. 354) habe die Außenluft den Zustand  $p, v, T$ . In dem Raume  $ABCD$  sei durch Heizung oder dgl. die Temperatur auf den Mittelwert  $T_1$  gebracht. Die Dichte  $\gamma = 1/v$  der äußeren Luft gelte auf die Schornsteinhöhe  $h$  als überall gleich (s. S. 222), dann ist nach Gl. 18, S. 359 auch im Schornsteine der Einheitsraum durchschnittlich  $v_1 = v \frac{T_1}{T}$ . Der Druck der äußeren Luft in der Höhe  $AB$  beträgt daher:

$$p + \frac{h}{v}.$$

Der Raum unterhalb  $AB$  stehe mit der äußeren Luft in freier Verbindung.

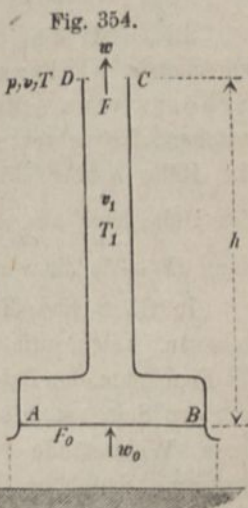
Bezeichnen wir, wie S. 362, mit  $mg$  das Luftgewicht, welches in der Zeit  $dt$  durch jeden Querschnitt des Schornsteins geht, so ist

$$1) \quad mg = \frac{F_0 \cdot w_0 \cdot dt}{v_1} = \frac{F \cdot w \cdot dt}{v_1}.$$

Die Zunahme an Arbeitsvermögen während der Zeit  $dt$  beträgt (ähnlich wie auf S. 250):  $m \frac{w^2}{2} - m \frac{w_0^2}{2}$ , wovon aber  $m \cdot \frac{w_0^2}{2}$  wegen der Kleinheit von  $w_0$  vernachlässigt werden kann.

Die Arbeit der Schwere ist in diesem Falle negativ:  $= -mgh$ , weil die Masse  $m$  aufsteigt und oben aus dem Schornsteine tritt. Der Druck gegen  $AB$  leistet die Arbeit:

$$\left(p + \frac{h}{v}\right) F_0 \cdot w_0 \cdot dt = \left(p + \frac{h}{v}\right) \cdot mg \cdot v_1,$$





und der Druck gegen  $CD$  dagegen die Arbeit:

$$-p \cdot F \cdot w \cdot dt = -p \cdot mg \cdot v_1.$$

Daher ist

$$m \frac{w^2}{2} = -mg \cdot h + \left(p + \frac{h}{v}\right) mg \cdot v_1 - pmg \cdot v_1 \quad \text{oder}$$

$$2) \quad \frac{w^2}{2g} = h \left(\frac{v_1}{v} - 1\right) = h \left(\frac{T_1}{T} - 1\right) = h_s.$$

Dies ist die der ideellen Austrittsgeschwindigkeit entsprechende wirksame Saughöhe oder Auftriebhöhe des Schornsteins. Man kann sich von ihr leicht eine Vorstellung machen: Betrachtet man eine Luftsäule von der Temperatur  $T$  und der Höhe  $h$  (Fig. 355) und dehnt diese durch Erwärmung auf  $T_1$  der Höhe nach aus, so bekommt sie die Höhe  $h_1 = h \frac{T_1}{T}$ . Es ist dann  $(h_1 - h)$  die wirksame Saughöhe  $h_s$ .

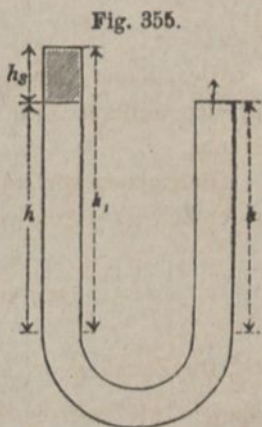
In Gl. 2 sind die beträchtlichen Widerstände unberücksichtigt gelassen, welche die Rauchgase auf ihrem Wege durch den Rost, die Feuerzüge, den Zuleitungskanal (Fuchs) und den Schornstein selbst erleiden. Alle diese Widerstände vermindern die wirksame Saughöhe  $h_s$  um eine Widerstandshöhe  $z$  (vergl. S. 264), so daß für die wirkliche Austrittsgeschwindigkeit an Auftriebhöhe verbleibt:

$$3) \quad \frac{w^2}{2g} = h_s - z = h \left(\frac{T_1}{T} - 1\right) - z.$$

Für die Berechnung der Widerstandshöhe  $z$ , als Teil der Geschwindigkeitshöhe  $\frac{w^2}{2g}$ , kommen folgende Widerstandsziffern in Betracht:

a) für die Reibung im Schornstein, dessen Höhe  $h$  und dessen Querschnitt gewöhnlich rund oder ein regelmäßiges Vieleck vom Durchmesser  $d$  ist:  $\lambda \frac{h}{d}$ .

Für unberußtes Mauerwerk beträgt die Reibungsziffer  $\lambda = 0,03$  und für berußtes Mauerwerk  $\lambda = 0,04$ .



b) Für die Zuleitungskanäle, deren Länge  $l$  und deren mittlerer Querschnitt  $F$  mit dem Umfange  $u$  ist:  $\beta \cdot \frac{u}{F} \cdot l$ .

Für unberußtes Mauerwerk beträgt  $\beta = 0,0075$  und für berußtes Mauerwerk  $\beta = 0,01$ .

c) Bei Richtungsänderungen in den Feuerkanälen, die an den Schornstein anschließen, gelten nach Rietschel\*):

für ein scharfes rechtwinkliges Knie:  $\zeta = 1,5$ ; für ein abgerundetes rechtwinkliges Knie:  $\zeta = 1,0$ ; für ein Knie von  $135^\circ$ :  $\zeta = 0,6$ ; für plötzliche Richtungsänderungen um  $180^\circ$ :  $\zeta = 1,5$  bis  $2,5$ .

d) Der Rost mit der Brennstoffsicht bietet den bedeutendsten Widerstand mit:  $\varrho = 6$  bis  $12$ , je nach der Art des Rostes und des Brennstoffes.

Es ist somit die ganze Widerstandshöhe

$$4) \quad z = \frac{w^2}{2g} \left( \lambda \cdot \frac{h}{d} + \beta \cdot \frac{u}{F} l + \Sigma \zeta + \varrho \right),$$

und daher schließlich nach Gl. 3:

$$5) \quad \frac{w^2}{2g} \left( 1 + \lambda \cdot \frac{h}{d} + \beta \cdot \frac{u}{F} l + \Sigma \zeta + \varrho \right) = h_2 = h \left( \frac{T_1}{T} - 1 \right).$$

Hiernach kann für eine gegebene Schornsteinhöhe  $h$  die Austrittsgeschwindigkeit  $w$  der Rauchgase, oder umgekehrt für eine geforderte Austrittsgeschwindigkeit  $w$  (nicht unter  $4 \text{ m}$ ) die erforderliche Schornsteinhöhe  $h$  berechnet werden.

**Beispiel:** Ein zylindrischer Schornstein von  $h = 30 \text{ m}$  Höhe habe kreisförmigen Querschnitt von  $d = 0,6 \text{ m}$  Weite. An den Schornstein schließen sich  $30 \text{ m}$  lange Feuerkanäle vom Querschnitt  $1 \text{ m} \times 0,3 \text{ m}$ , in denen zwei abgerundete Umbiegungen von  $180^\circ$  ( $\zeta = 1,5$ ) und ein scharfes rechtwinkliges Knie ( $\zeta = 1,5$ ) vorkommen. Die Widerstandsziffer des Rostes sei  $\rho = 9$ . Die mittlere innere Temperatur betrage  $T_1 = 200 + 273 = 473^\circ$ , die äußere  $T = 10 + 273 = 283^\circ$ . Es soll die Ausströmungsgeschwindigkeit berechnet werden.

Die wirksame Saughöhe beträgt nach Gl. 2:

$$h_2 = 30 \left( \frac{473}{283} - 1 \right) = 20,14 \text{ m},$$

die Widerstandshöhe nach Gl. 4, für berußtes Mauerwerk:

$$z = \frac{w^2}{2g} \left( 0,04 \cdot \frac{30}{0,6} + \frac{0,01 \cdot 2 (1 + 0,3) \cdot 30}{0,3} + 2 \cdot 1,5 + 1,5 + 9,0 \right) = 18,1 \frac{w^2}{2g}$$

\*) Vergl. G. Lang „Der Schornsteinbau“.



Daher wird nach Gl. 5:  $\frac{w^2}{2g}(1 + 18,1) = 20,14$  und

$$w = \sqrt{\frac{2g \cdot 20,14}{19,1}} = 4,5 \text{ m.}$$

Im Sommer mit  $T = 300^\circ$  wird  $w = 4,3 \text{ m.}$

## 10. Widerstand der Luft gegen bewegte fremde Körper; Druck des Windes gegen fremde Körper.

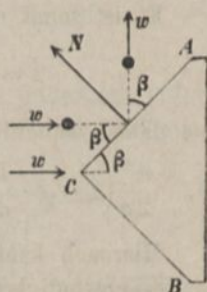
Wird eine ebene, etwa kreisförmige Fläche  $AB$  mit niedrigem Rand (Fig. 356) einem mit der Geschwindigkeit  $w$  rechtwinklig dagegen strömenden Wind ausgesetzt, so kann man nach Versuchen von Obergeringieur Friedr. Ritter v. Loeßl (siehe dessen Werk „Die Luftwiderstands-Gesetze“, Wien 1896) annehmen, daß vor der Platte ein ruhender Luftkörper, der sog. Stauhügel  $ABC$  sich bildet. Die Seitenflächen desselben bilden mit der Plattenebene an allen Stellen Winkel von  $90^\circ - \beta$ . Der Stauhügel hat bei kreisförmiger Platte die Form eines Kegels, bei quadratischer Platte die Form einer Pyramide, bei rechteckiger Platte diejenige eines Walmdaches, kurz in allen Fällen diejenige Form, in welcher ein Sandkörper mit dem Böschungswinkel (Reibungswinkel)  $90^\circ - \beta$  auf der wagerecht liegenden Platte verbleiben würde, wenn Sand in Übermaß darauf geschüttet wird, bis er nach allen Seiten abfließt.

v. Loeßl hat gefunden, daß der Winkel  $\beta = 45^\circ$  ist.

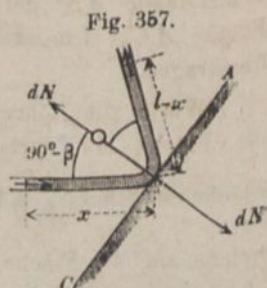
An der Mantelfläche des ruhend gedachten Lufthügels prallen die bewegten Luftteilchen elastisch ab. Nach der Lehre vom schiefen elastischen Stoße (s. S. 163) prallen die Luftteilchen mit derselben Geschwindigkeit  $w$  ab, mit der sie dagegen strömten, und zwar in einer Richtung, die von der Rechtwinkligen zur Stauhügelfläche um den Winkel  $90^\circ - \beta$  abweicht. Für  $\beta = 45^\circ$  prallen demnach die Luftteilchen parallel zur Platte von dem Stauhügel ab. (Fig. 356.)

Der Druck, der bei diesem Abprallen auf den Stauhügel ausgeübt wird, läßt sich nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes (I. Teil, 4. Aufl., S. 172) berechnen.

Fig. 356.



In einem Knierohre (Fig. 357) vom Querschnitte  $dF$ , dessen Schenkel in der Richtung der zuströmenden und abprallenden Luftteilchen liegen, befinde sich eine Flüssigkeit, welche in der Röhre eine Länge  $l$  einnimmt, mit den Längen  $x$  und  $l-x$  auf die beiden Schenkel verteilt. Bezeichnet man den rechtwinkligen Abstand des Schwerpunktes dieser Flüssigkeit von der Fläche  $AC$  mit  $y_0$ , so ist nach der Lehre vom Schwerpunkte



$$y_0 \cdot l = x \cdot \frac{x}{2} \sin \beta + (l-x) \frac{l-x}{2} \sin \beta$$

$$= \sin \beta \left( x^2 + \frac{l^2}{2} - lx \right).$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergibt

$$l \cdot dy_0 = \sin \beta (2x \cdot dx - l \cdot dx).$$

Schreitet aber die Flüssigkeit in der Röhre mit der Geschwindigkeit  $w$  fort, so ist  $w dt = -dx$ , mithin  $dx = -w \cdot dt$ , also

$$l \cdot \frac{dy_0}{dt} = -\sin \beta (2xw - lw);$$

aus nochmaliger Differentiation folgt

$$l \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 2 \sin \beta \cdot w^2 \quad \text{und danach}$$

$$\frac{\gamma}{g} dF \cdot l \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 2 \frac{\gamma}{g} dF \sin \beta \cdot w^2.$$

Bezeichnet man die in jeder Sekunde durch einen Röhrenquerschnitt strömende Flüssigkeitsmasse  $\frac{\gamma}{g} dF \cdot w$  mit  $m$ , so wird

$$1) \quad \frac{\gamma}{g} dF \cdot l \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 2m \sin \beta \cdot w.$$

Die linke Seite der Gl. 1 enthält die Masse der gesamten betrachteten Flüssigkeit, multipliziert mit der Seitenbeschleunigung ihres Schwerpunktes in der Richtung rechtwinklig zur Fläche  $AC$ . Dies ist (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 172) gleich der Summe aller



äußeren Kräfte in derselben Achsenrichtung, d. h. gleich dem Widerstande  $dN$  der Röhre in der Richtung rechtwinklig zur Fläche  $AC$ . Umgekehrt wird  $dN$  als Druck auf die Fläche  $AC$  übertragen.

Würde die Röhre vom Querschnitte  $dF$  sich geradlinig durch die Fläche  $AC$  fortsetzen (Fig. 358), so würde sie aus dieser Fläche ein Stück  $\frac{dF}{\sin \beta}$  herauschneiden. Die Kraft  $2m \sin \beta \cdot w$  (Gl. 1), welche auf die Fläche  $\frac{dF}{\sin \beta}$  kommt, erzeugt für die Flächeneinheit einen Druck

$$2) \quad p = \frac{2m \sin^2 \beta \cdot w}{dF} = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta.$$

Dieser Druck herrscht an allen Stellen des in Ruhe befindlichen Stauhügels; mithin überträgt der Stauhügel auf die Platte von der Größe  $F$  (Fig. 358) eine Druckkraft

$$3) \quad D = 2 \frac{\gamma}{g} \sin^2 \beta \cdot w^2 \cdot F.$$

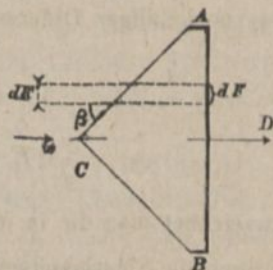
Weil nun für den vorliegenden Fall  $\beta = 45^\circ$  gefunden wurde, so ist  $\sin^2 \beta = 1/2$  und

$$4) \quad D = \frac{\gamma}{g} F w^2.$$

Diese Formel hat v. Loeßl bei seinen Versuchen bestätigt gefunden für ebene Platten, die mit einem erhöhten Rande umgeben sind, sowie auch für gekrümmte Flächen, z. B. halbe Hohlkugeln, deren hohle Seite dem Winde zugekehrt ist.

Gl. 4 gibt den größten möglichen Winddruck auf eine Fläche, deren Projektion in der Richtung des Windes die Größe  $F$  hat, und gilt auch für unebene Flächen, wenn nur die Unebenheiten nicht so stark hervortreten, daß sie die Bildung des Stauhügels beeinträchtigen. Der Rauheitsgrad der Fläche würde daher höchstens in der Nähe der Ränder Einfluß auf die Größe des Winddrucks haben.

Fig. 358.



Dagegen vermindert sich der Winddruck auf Flächen ohne erhöhte Ränder; v. Loeßl fand hierfür:

$$5) \quad D = \kappa \cdot \frac{\gamma}{g} F \cdot v^2,$$

mit  $\kappa = 0,83$  für ebene Kreisflächen,

$\kappa = 0,86$  „ „ Quadratflächen,

$\kappa = 0,92$  „ „ Rechteckflächen vom Seitenverhältnis 1 : 2

$\kappa = 0,94$  „ „ „ „ „ „ 1 : 4.

Wird der Winddruck von der Fläche  $F$  eines geraden, nicht sehr langen, prismatischen Körpers, anstatt von einer Platte  $F$ , aufgenommen, so bleibt Gl. 5 ebenfalls gültig.

Eine Druckverminderung oder eine Saugwirkung an der Rückseite der Fläche hat v. Loeßl nicht gefunden; doch lassen genaue hydro-dynamische Untersuchungen keinen Zweifel darüber, daß eine solche in gewissem Grade vorhanden ist. Zu einer endgültigen Klärung dieser Vorgänge ist es indes bislang noch nicht gekommen.

**Druck gegen schief gestellte Flächen.** Bildet die Platte mit der Windrichtung den Winkel  $\alpha$ , so entsteht nach v. Loeßls Versuchen ebenfalls ein Stauhügel, dessen Neigungswinkel  $\beta$  gegen die Windrichtung aber von  $\alpha$  abhängt. Es hat sich nämlich gezeigt, daß bei einer bestimmten Neigung  $\alpha$  der Platte gegen die Windrichtung (Fig. 359), die Neigung  $\beta$  der Seitenflächen des Stauhügels gegen die Windrichtung ringsum zwar dieselbe ist, daß  $\beta$  aber mit  $\alpha$  zu- und abnimmt. Den beobachteten Werten genügt danach die Beziehung:

$$6) \quad \operatorname{tg} \beta = \sin \alpha,$$

so daß für

$$\alpha = 90^\circ \quad \beta = 45^\circ$$

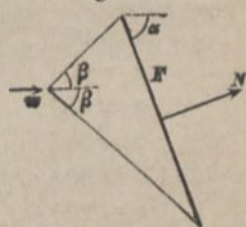
$$\alpha = 60^\circ \quad \beta = 41^\circ$$

$$\alpha = 35^\circ \quad \beta = 30^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ \quad \beta = 26\frac{1}{2}^\circ$$

$$\alpha = 0^\circ \quad \beta = 0^\circ \quad \text{wird.}$$

Fig. 359.



Nach Gl. 6 ist  $\beta$  leicht zeichnerisch zu ermitteln (Fig. 360).



Ist nun  $F$  die Größe der schief gestellten Fläche, so ist ihre Projektion in der Richtung des Windes  $F \sin \alpha$ . Wendet man daher die Entwicklung (S. 373) auf diesen Fall sinngemäß an, so ergibt sich für den Druck  $p$  im Stauhügel (Fig. 359) wiederum der Wert der Gl. 2:

$$7) \quad p = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta;$$

mithin erhält auch die Platte  $F$  die rechtwinklige Druckkraft

$$8) \quad N = 2 \frac{\gamma}{g} F w^2 \sin^2 \beta.$$

Da nun  $\sin^2 \beta = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$  ist, so wird mit  $\operatorname{tg} \beta = \sin \alpha$  (Gl. 6):

$$9) \quad N = 2 \frac{\gamma}{g} \frac{F w^2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}.$$

v. Loebl gelangt dagegen auf andere Weise zu der Formel:

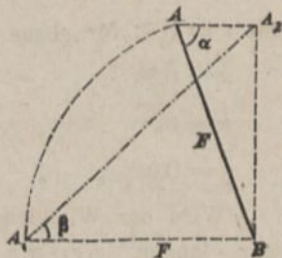
$$10) \quad N = \frac{\gamma}{g} F w^2 \sin \alpha,$$

so daß sich die Werte  $\frac{2 \cdot \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$  und  $\sin \alpha$  gegenüberstehen.

Für verschiedene Winkel  $\alpha$  liefern diese Werte folgende Ergebnisse:

Winkel	$\frac{2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$	$\sin \alpha$
$\alpha = 90^\circ$	1	1
$\alpha = 60^\circ$	0,857	0,866
$\alpha = 45^\circ$	0,667	0,707
$\alpha = 35^\circ$	0,494	0,574
$\alpha = 30^\circ$	0,400	0,500
$\alpha = 20^\circ$	0,210	0,342
$\alpha = 10^\circ$	0,059	0,174
$\alpha = 0^\circ$	0	0

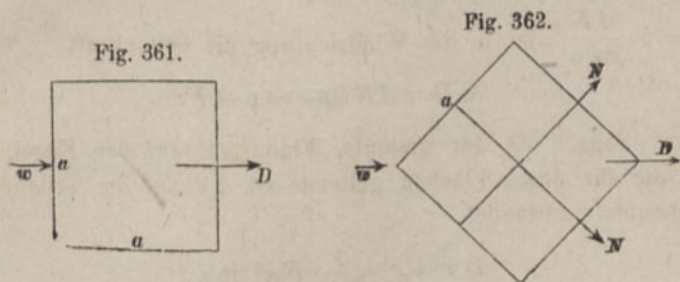
Fig. 360.



Hiernach ergibt Gl. 10 (v. Loeßl) durchweg größere Winddrücke als Gl. 9.

Die Unterschiede sind bei kleinem Winkel  $\alpha$  (unter  $35^\circ$ ) erheblich, dagegen bei größerem Winkel  $\alpha$  (über  $35^\circ$ ) nur gering, weshalb sich für  $\alpha > 35^\circ$  die Anwendung der einfacheren Gl. 10 (v. Loeßl) empfiehlt.

**Beispiel:** Der Winddruck  $D$  gegen einen Schornstein oder Pfeiler, dessen Grundriß ein Quadrat von der Seite  $a$  und dessen Höhe  $h$  ist, beträgt:



1) wenn der Wind die eine Seitenfläche rechtwinklig trifft (Fig. 361) nach Gl. 4:

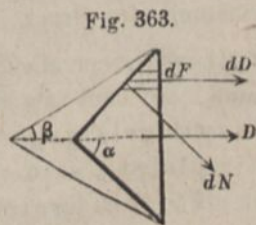
$$D = \frac{\gamma}{g} a h w^2,$$

2) wenn der Wind in der Richtung der Diagonale, d. h. „über Eck“ weht (Fig. 362), wobei jede der beiden getroffenen, schrägen Seitenflächen  $a \cdot h$  nach Gl. 10 den Normaldruck  $N$  bekommt, und beide  $N$  die Mittelkraft  $D$  geben:

$$D = N\sqrt{2} = \frac{\gamma}{g} a h w^2 0,707 \cdot \sqrt{2} = \frac{\gamma}{g} a h w^2.$$

Der Winddruck ist danach also in beiden Fällen gleich groß.

**Druck gegen eine kegelförmige Fläche.** Weht der Wind in der Achsenrichtung des Kegels gegen dessen Spitze und ist  $\alpha$  der Winkel der Kegelseiten gegen die Achse (Fig. 363), so bildet sich vor dem Kegel ebenfalls ein Stauhügel mit dem halben Winkel  $\beta$  an der Spitze. Der Druck in diesem Staakegel wird dann wie in Gl. 2 gefunden,



$$p = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta.$$



Nach Gl. 8 und Gl. 10 kann (wenn  $\alpha > 35^\circ$  ist) für ebene Flächen  $2 \sin^2 \beta = \sin \alpha$  gesetzt werden, so daß

$$11) \quad p = \frac{\gamma}{g} w^2 \sin \alpha$$

wird. Ist nun  $F$  die Grundfläche des Kegels, so entspricht einem Teilchen  $\frac{dF}{\sin \alpha}$  der Mantelfläche eine Projektion  $dF$  in der Grundfläche. Auf die Mantelfläche  $\frac{dF}{\sin \alpha}$  kommt dann ein Normaldruck  $dN = p \cdot \frac{dF}{\sin \alpha}$ , der in der Windrichtung die Seitenkraft

$$dD = dN \sin \alpha = p \cdot dF$$

liefert. Sonach ist der gesamte Winddruck auf den Kegel, wenn man die für ebene Flächen geltende Gl. 11 auf die Teilchen des Kegelmantels anwendet,

$$12) \quad D = p F = \frac{\gamma}{g} \cdot F w^2 \sin \alpha.$$

Nach v. Loeßls Versuchen ist  $D$  tatsächlich etwas kleiner, nämlich

$$13) \quad D = 0,83 \frac{\gamma}{g} F w^2 \sin \alpha. \quad (\text{Vergl. Gl. 5.})$$

Diese Formel gilt auch für ein zylindrisches Geschoß mit kegelförmiger Zuspitzung, aber nur, wenn  $\alpha > 35^\circ$  ist (s. S. 377).

Für  $\alpha < 30^\circ$  führt die obige Annahme, daß  $2 \sin^2 \beta = \sin \alpha$  gesetzt werden könne, zu dem widersinnigen Ergebnisse  $\beta = \alpha$ .

**Druck gegen eine Zylinderfläche.** Für diesen Fall hat v. Loeßl die Form des Stauhügels nicht untersucht. Da aber aus der Neigung  $\beta$  der Seitenfläche des Stauhügels gegen die Windrichtung, der Druck im Stauhügel nach Gl. 2 zu  $p = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta$  folgt und  $p$  an allen Stellen des Hügels den gleichen Wert haben muß, so muß auch die Neigung der Oberfläche des Stauhügels gegen die Windrichtung an allen Stellen die gleiche sein.

Für einen Kreiszyylinder vom Halbmesser  $r$  und von der Höhe  $h$  mit lotrechter Achse stellt sich im Grundrisse der Stauhügel

nach Fig. 364 vor den Zylinder; derjenige Teil der Mantelfläche des Zylinders, gegen welche der Stauhügel drückt, hat in der Windrichtung eine rechtwinklige Projektion  $F_x = AB \cdot h = 2r \cdot h = 2r \cos \beta \cdot h = F \cdot \cos \beta$ , wenn  $F = 2r \cdot h$  den Achsenschnitt des Zylinders bezeichnet. Es wird dann die Druckkraft in der Windrichtung nach Gl. 3

$$D = p \cdot F_x$$

$$14) \quad = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta F \cos \beta.$$

Die Größe dieser Kraft hat v. Loebl zu

$$15) \quad D = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{g} w^2 F$$

gefunden (vgl. S. 349 für den Druck strömenden Wassers), wonach

$$2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta \cos \beta = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{g} w^2 \quad \text{oder}$$

$$\sin^2 \beta \cos \beta = \frac{1}{3}$$

wird. Dieser Gleichung entspricht rund

$$16) \quad \beta = 45^\circ,$$

weil für diesen Winkel

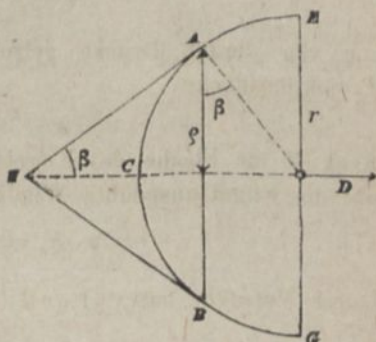
$$\sin^2 \beta \cos \beta = \frac{1}{3} \cdot 0,707 = 0,3535$$

ist, was von  $\frac{1}{3}$  nur wenig abweicht.

Die Seitenflächen  $AE$  und  $BG$ , die von dem Winde unmittelbar getroffen werden, liefern zu  $D$  einen so geringen Beitrag, daß er für manche Zwecke vernachlässigt werden kann.

Ein Halbzylinder würde nach vorstehendem, wenn er mit der krummen Fläche dem Winde entgegengestellt wird, gemäß Gl. 15 nur etwa  $\frac{2}{3}$  soviel Druckkraft erfahren, als wenn er (Gl. 4) mit der ebenen Fläche dem Winde rechtwinklig zugekehrt ist. Doch würde gerade in solchem Falle die Saugwirkung auf der Rückseite erheblich ins Gewicht fallen.

Fig. 364.





**Druck gegen eine Kugelfläche.** In diesem Falle bildet sich vor der Kugel ein Staukegel, welcher im Grundriß der Fig. 364 entspricht, mit dem Drucke

$$p = 2 \frac{\gamma}{g} w^2 \sin^2 \beta;$$

die von diesem Drucke getroffene Kugelhaube  $ACB$  hat die Projektionsfläche

$$F_x = Q^2 \pi = r^2 \cos^2 \beta \pi = F \cdot \cos^2 \beta,$$

wenn  $F$  die Fläche des Kugeldurchschnittes ist. Daher wird die auf die Kugel ausgeübte Windkraft

$$17) \quad D = p \cdot F_x = 2 \frac{\gamma}{g} F w^2 \beta \cdot \cos^2 \beta.$$

Durch Versuche hat v. Loeßl gefunden

$$18) \quad D = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g} F w^2, \text{ so daß}$$

$$\sin^2 \beta \cos^2 \beta = \frac{1}{6}, \text{ also } \sin 2\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

wird. Dies gibt

$$19) \quad \beta = 27^\circ 22'.$$

Die Schlankheit dieses Kegels ist überraschend;  $\beta = 45^\circ$  würde

$$D = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} F w^2 \text{ liefern, wie bei strömendem Wasser (S. 349).}$$

**Beispiel I:** Für eine ebene, dem Winde rechtwinklig entgegenstehende Platte von der Fläche  $F = 1 \text{ m}^2$  ist nach Gl. 4 der Winddruck  $p = \frac{\gamma}{g} w^2$ .

Bei  $10^\circ \text{ C.}$  Luftwärme ergibt sich  $\gamma = 1,29 \cdot \frac{273}{283} = 1,24$ ,  $\frac{\gamma}{g} = 0,127$ , also rund

$$20) \quad p = 0,13 \cdot w^2.$$

Demnach wird für:

mäßigen Wind	mit $w = 5 \text{ m}$ :	$p = 3 \text{ kg/m}^2$ .
frischen Wind	„ $w = 10 \text{ m}$ :	$p = 13$ „
starken Wind	„ $w = 17 \text{ m}$ :	$p = 38$ „
Sturm	„ $w = 25 \text{ m}$ :	$p = 81$ „
Orkan	„ $w = 35 \text{ m}$ :	$p = 159$ „
stärksten Orkan	„ $w = 50 \text{ m}$ :	$p = 325$ „

**Bemerkung.** Bei der Berechnung der Standsicherheit von Bauwerken kommt in Frage, welchen größten Windstärken das Bauwerk wahrscheinlich ausgesetzt sein wird. Als Mittelwert kann für Deutschland

$$21) \quad p = 150 \text{ kg/m}^2$$

angenommen werden; in der Nähe der Meeresküste kann der Größtwert aber auf das Doppelte bis  $p = 300 \text{ kg/m}^2$  steigen!

Von erheblicher praktischer Tragweite ist jedoch der Umstand, daß Windstöße von besonders großer Stärke nur von so kurzer Dauer zu sein pflegen, daß sie aus diesem Grunde regelrecht konstruierten Bauwerken nicht schaden können. Beim Betriebe beweglicher Brücken braucht man aus gleichem Grunde erfahrungsgemäß nur mit Windkräften von höchstens  $50 \text{ kg/m}^2$  zu rechnen.

**Beispiel 2:** Wie hoch darf eine hölzerne Säule von  $r = 0,3 \text{ m}$  Halbmesser sein, damit sie bei einem Winddruck  $p = 150 \text{ kg/m}^2$  an der Grenze der Stand-sicherheit sei (Fig. 365). Es ist:

$$F = 2r \cdot h = 0,6 \cdot h,$$

die Windkraft nach Gl. 15

$$D = \frac{2}{3} \cdot 150 \cdot 0,6h,$$

das Gewicht der Säule bei einer Dichte  $\gamma_1 = 750$ ,

$$G = 0,8^2 \pi \cdot h \cdot 750.$$

Für den Grenzzustand der Ruhe ist (nach 1. Teil, 4. Aufl., S. 212)

$$D \cdot \frac{h}{2} = G \cdot 0,3, \text{ also}$$

$$h = \frac{0,6 G}{D} = 2,12 \text{ m}.$$

Fig. 365.

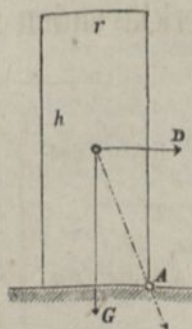
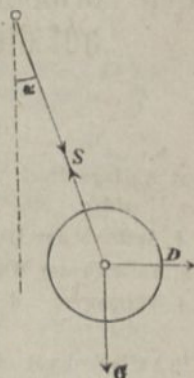


Fig. 366.



**Beispiel 3:** Eine Holz-kugel vom Halbmesser  $r = 0,2 \text{ m}$  und der Dichte  $\gamma_1 = 750$  sei an einem Faden aufgehängt (Fig. 366). Bei welcher Neigung  $\alpha$  des Fadens gegen die Lotrechte wird Gleichgewicht herrschen, wenn die Kugel außer ihrem Gewicht einen Winddruck  $p = 200 \text{ kg/m}^2$  erfährt?

Es ist nach Gl. 18

$$D = \frac{1}{3} \cdot 200 \cdot 0,2^2 \pi, \text{ ferner } G = 750 \cdot \frac{4}{3} \cdot 0,2^3 \pi,$$

daher

$$\text{tg } \alpha = \frac{D}{G} = \frac{1}{3}.$$





## Alphabetisches Verzeichnis und Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben unter Hinweis auf die erklärenden Seiten des Buches.

- A* Auflagerdruck der linken Endstütze. 29.
- A* Auftrieb der Luft. 223.
- A* Auftrieb des Wassers. 201.
- A* Wärmewert der Arbeitseinheit. 354.
- B* Auflagerdruck der rechten Endstütze. 29.
- C* Auflagerdruck der Mittelstütze. 59.
- D* Druck eines Wasserstrahles. 291.
- D* Druckfestigkeit. 7.
- D* Druck strömenden Wassers. 345.
- D* Spannkraft einer Strebe eines Fachwerkes. 81.
- D* Winddruck. 374.
- E* Elastizitätsmaß. 5.
- F* Ausflußöffnung. 248.
- F* mit Flüssigkeit erfüllter Querschnitt einer Röhre oder eines Kanales. 296. 310.
- F* Querschnitt eines Stabes. 6.
- F<sub>1</sub>* Wasserspiegelfläche eines Gefäßes. 249.
- F<sub>1</sub>* und *F<sub>2</sub>* Wasserspiegelfläche im Ober- und Unterwasser bei verbundenen Gefäßen. 275.
- G* Eigengewicht eines Körpers oder Körperteiles. 14.
- G* Gleitmaß. 16.
- G<sub>1</sub>* Gewicht der Nebenteile des Luftballons. 224.
- H* Höhe des Wasserspiegels über der Unterkante einer Seitenöffnung. 253.
- H* Polabstand des Kraftecks. 31.
- H* Stauhöhe. 328.
- J* Trägheitsmoment eines Querschnitts. 22.
- J<sub>0</sub>* polares Trägheitsmoment eines Querschnitts. 72.
- K* äußere Kraft. 4.
- M* Masse eines Körpers. 99.
- O* Spannkraft im Obergurt eines Fachwerks. 80.
- P* Einzellast. 29.
- Q* Gewicht. 113.
- Q* Querkraft. 21.
- Q* scheinbares Gewicht eines von Flüssigkeit umgebenen Körpers. 202.
- Q* sekundliche Ausflußmenge in m<sup>3</sup>. 253. 259.
- Q* Wärmemenge. 353.
- R* Massenkraft der Masseneinheit. 244.
- R* Reaktion ausfließenden Wassers. 285.
- R* Ziffer der Zustandsgleichung der Gase. 226. 354.

- S* innere Spannkraft. 2.  
*T* absolute Temperatur. 227.  
*T<sub>1</sub>* absolute Temperatur des Gases in einem Gefäße. 350.  
*T<sub>1</sub>* absolute Temperatur in einem Schornstein. 369.  
*U* Spannkraft im Untergurt eines Fachwerks. 80.  
*V* Rauminhalt eines Stabes. 110  
*V* Spannkraft eines Ständers eines Fachwerks. 80.  
*WE* Wärmeeinheit. 352.  
*X, Y, Z* Massenkraft der Masseneinheit. 245.  
*Z* Zugfestigkeit. 6.
- a* Abstand einer Last vom linken Auflager eines Balkens. 29.  
*a<sub>t</sub>* Atmosphäre = 1 kg/cm<sup>2</sup>. 8.  
*b* Abstand einer Last vom rechten Auflager eines Balkens. 29.  
*b* Bodenbreite eines Kanals. 319.  
*b* Breite eines Körpers. 209.  
*b* Durchflußbreite. 329, 332.  
*c* Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers. 329.  
*c* und *c<sub>1</sub>* Geschwindigkeiten vor dem Stoße. 138.  
*c* Spezifische Wärme bei unverändertem Rauminhalte. 352.  
*c<sub>1</sub>* spezifische Wärme bei gleichbleibendem Drucke. 352.  
*cm* Zentimeter. 8.  
*d* Breite. 24.  
*d* Druckspannung an der Elastizitätsgrenze. 7.  
*d* Durchmesser eines Kolbens. 174.  
*d* Durchmesser eines Nietes. 17.  
*d* Röhrenweite. 296.  
*e* Abstand der am stärksten gespannten Stelle *e* eines Querschnitts von der Nulllinie. 19.  
*e* Abstand des Schwerpunkts eines Schiffes von dem Schwerpunkte seiner Verdrängung. 206.
- e<sub>1</sub>* Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse. 154.  
*f* Durchbiegung. 46.  
*f* Reibungsziffer. 190.  
*g* Fallbeschleunigung. 101.  
*h* Höhe einer Körpers. 209.  
*h* Höhe eines Querschnitts. 24.  
*h* Höhe des Wasserspiegels über der Oberkante einer Seitenöffnung. 251.  
*h* Schornsteinhöhe. 369.  
*h* wirksame Druckhöhe. 252.  
*h<sub>0</sub>* dem Atmosphärendruck gleichwertige Flüssigkeitssäule. 233.  
*h<sub>2</sub>* Wehrhöhe. 329.  
*i* Trägheitshalbmesser. 66, 68.  
*k* Geschwindigkeitshöhe des Zuflusses. 329.  
*k* Stoßziffer. 141.  
*kg* Kilogramm. 8.  
*kg/cm<sup>2</sup>* Kilogramm für 1 Quadratcentimeter. 8.  
*l* Länge eines Stabes, eines Balkens. 4, 27.  
*l* Röhrenlänge. 296.  
*Δl* elastische Verlängerung. 5.  
*m* Massenteilchen. 244.  
*n* = *c<sub>1</sub>* : *c*. 356.  
*n* Knickungsfaktor. 66.  
*m, n* Rauheitsziffern. 313.  
*p* Belastung der Längeneinheit. 28.  
*p* Beschleunigung eines Körpers. 99.  
*p* Druck an der Mündung eines Gefäßes. 250, 350.  
*p* Flüssigkeitsdruck für die Flächeneinheit. 168.  
*p<sub>0</sub>* Atmosphärendruck. 233.  
*p<sub>0</sub>* Druck am Wasserspiegel eines Gefäßes. 249.  
*p<sub>1</sub>* Druck des Gases in einem Gefäße. 349.  
*p'* Druck eines Gases an der Ausflußmündung. 365.  
*q* Beschleunigung eines Gefäßes mit Wasser. 211.



- $\text{cm}^2$  Quadratcentimeter. 8.  
*r* Halbmesser eines Kreises. 26.  
*r* mittlere hydraulische Tiefe. 311.  
*t* Hebelarm einer Strebenkraft. 91.  
*t* Schwingungsdauer eines Pendels. 155.  
*t* Temperatur. 225.  
*t* Wassertiefe. 318.  
*t* Zeit der Entleerung eines Gefäßes. 269.  
*t<sub>1</sub>* Zeit der Füllung und Entleerung von Schleusen. 276.  
*u* Abstand einer Last vom linken Auflager eines Trägers. 91.  
*u* Geschwindigkeit beim Stoße im Augenblick der stärksten Formänderung. 138.  
*u* lotrechte Ordinate des Seilecks. 32.  
*u* veränderliche Querschnittsbreite. 41.  
*u* von der Flüssigkeit berührter Umfang des Röhren- oder Kanalquerschnitts. 296, 310.  
*u<sub>1</sub>* Abstand einer Last vom rechten Auflager eines Trägers. 90.  
*v* Einheitsraum (spez. Volumen). 219.  
*v* veränderliche Querschnittshöhe. 40.  
*v<sub>0</sub>* Geschwindigkeit im Wasserspiegel eines Flusses. 322.  
*v* und *v<sub>1</sub>* Geschwindigkeiten nach dem Stoße. 138.  
*v<sub>0</sub>* Abstand des Schnittpunktes der Gurtrichtungen (an einer Schnittstelle eines Trägers) von der linken Auflagerlotrechten. 90.  
*w* Ausflußgeschwindigkeit. 247.  
*y* Stauhöhe. 335.  
*z* Eintauchungstiefe. 209.  
*z* Widerstandshöhe von Röhren und Kanälen. 296, 327.  
*z* Zugspannung an der Elastizitätsgrenze. 6.  
*z<sub>0</sub>* Druckhöhe des Schwerpunkts einer Seitenöffnung. 254.  
*z* Ausdehnungsziffer der Gase. 227.  
*z* Biegungswinkel. 44.  
*z* Einschnürungsziffer. 258, 351.  
*z* Gefällverhältnis einer Kanal- oder Flußstrecke. 310.  
*z* Knickziffer. 65.  
*z* Widerstandsziffer von Röhren und Kanälen. 296, 311.  
*z* Dichte eines Gases. 219.  
*z* Dichte eines Körpers. 99.  
*z* Gleitung. 16.  
*z* Döhnung. 5.  
*z* Neigung einer Ebene gegen einen Wasserstrahl oder Wasserstrom. 290, 346.  
*z* Winkelbeschleunigung. 107, 156.  
*z<sub>0</sub>* Widerstandsziffer der Reibung des Wassers im Gefäße. 264.  
*z* und *z<sub>1</sub>* Wirkungsgrad des Stoßes. 145, 147.  
*z* Neigungswinkel. 210.  
*z* Verdrehungswinkel. 71.  
*z* Länge eines Faches im Fachwerk. 79.  
*z* Widerstandsziffer kreisförmiger Röhren. 296, 367.  
*z* auf einen Abstand *z* bezogene Masse. 149.  
*z* Ausflußziffer. 258, 351.  
*z<sub>0</sub>k* Ausflußziffer bei unvollständiger Einschnürung für kreisförmige Öffnung. 251.  
*z<sub>0</sub>r* desgl. für rechteckige Öffnung. 261.  
*z<sub>0</sub>k* Ausflußziffer bei unvollkommener Einschnürung für kreisförmige Öffnung. 262.  
*z<sub>0</sub>r* desgl. für rechteckige Öffnung. 262.  
*z* Krümmungshalbmesser der Biegelinie. 20, 43.  
*z* Längsspannung. 5, 6.  
*z* und *z''* stärkste Zug- und Druckspannung an einem Querschnitte. 22, 23.

- |  |  |
|--|--|
| <p><math>\tau</math> Schubspannung. 16.</p> <p><math>\varphi</math> Böschungswinkel einer Kanalwand. 319.</p> <p><math>\varphi</math> Geschwindigkeitsziffer. 257, 351.</p> <p><math>\psi_1</math> Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoße. 156.</p> <p><math>\omega</math> Einspannungswinkel. 45.</p> <p><math>\omega</math> Winkelgeschwindigkeit. 103, 213.</p> <p><math>\omega_1</math> Winkelgeschwindigkeit vor dem Stoße. 156.</p> <p><math>\mathfrak{A}</math> Arbeit. 109.</p> <p><math>\mathfrak{S}</math> geometrisches Trägheitsmoment einer Schwimmfläche. 207.</p> | <p><math>\mathfrak{M}</math> Biegemoment. 22.</p> <p><math>\mathfrak{M}</math> Standsicherheitsmoment. 206.</p> <p><math>\mathfrak{M}</math> Verdrehungsmoment 71.</p> <p><math>\mathfrak{M}_1</math> Einspannungsmoment. 53.</p> <p><math>\mathfrak{W}</math> Widerstandsmoment eines Querschnitts. 23.</p> <p><math>c_1</math> Geschwindigkeit des Schwerpunkts vor dem Stoße. 156.</p> <p><math>p</math> hydraulischer Druck. 278.</p> <p><math>p</math> Winddruck auf <math>1 \text{ m}^2</math>. 374.</p> <p><math>v_1</math> Geschwindigkeit des Schwerpunkts nach dem Stoße. 156.</p> |
|--|--|



## Alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

(Die Ziffern geben die Seitenzahlen an.)

- Adiabatische Zustandsänderung. 360.  
 Arbeit  $\mathcal{A}$  bei der Längenänderung eines Stabes. 109.  
 Arbeitswert der Wärmeeinheit  $1/A$ . 354.  
 Atmosphäre  $\alpha$  als Spannungsmaß. 8.  
 Atmosphärendruck, Veränderlichkeit desselben. 220.  
 Auftrieb der Luft. 223.  
 Auftrieb des Wassers. 201.  
 Ausdehnungsziffer  $\alpha$  der Gase. 226.  
 Ausfluß der Gase. 350, 362.  
 Ausfluß des Wassers. 247.  
 Ausflußgeschwindigkeit  $w$ . 251.  
 Ausflußmenge  $Q$  (sekundliche). 253.  
 Ausflußziffer  $\mu$ . 258.
- Balken auf drei Stützen. 59.  
 Balken auf zwei Stützen. 29.  
 Balken überall gleicher Sicherheit. 39.  
 Ballistisches Pendel. 154.  
 Barometer. 233.  
 Barometrisches Höhenmessen. 221, 228.  
 Bazins Formel. 313.  
 Beharrungszustand. 248.  
 Belastung, plötzliche. 113.  
 Bewegung, beschleunigte, elastisch-fester Körper. 99.  
 Bewegung der Luft in Röhren. 366.  
 Bewegung des Wassers in Kanälen. 310.
- Bewegung des Wassers in Röhren. 29 6  
 Bewegung, ungleichförmige, des Wassers. 325.  
 Biegung  $f$ . 46.  
 Biegearbeit. 120.  
 Biegefedern. 125.  
 Biegefestigkeit. 18.  
 Biegelinie. 43.  
 Biegemoment  $M$ . 22, 27.  
 Biegespannung  $\sigma, \sigma', \sigma''$ . 19, 22, 23.  
 Boyle-Mariottescher Satz. 219.  
 Brückenpfeiler, Stau derselben. 331.
- Dachträger. 82.  
 Dehnung  $\varepsilon$ . 5.  
 Dehnungslinie. 7.  
 Deplacement s. Verdrängung.  
 Dichte  $\gamma$  der Gase. 219.  
 Drehung s. a. Verdrehung.  
 Drehung elastisch-fester Körper. 102, 106.  
 Drehung flüssiger Körper. 312.  
 Drosselklappe. 304.  
 Druck  $D$  strömenden Wassers. 344.  
 Druckfestigkeit  $D$ . 7, 13.  
 Druckhöhenverlust  $z_1$  infolge plötzlicher Querschnittsänderung. 265.  
 Druck, hydraulischer, p. 278.  
 Druck, hydrostatischer, p. 171.

- Druckkraft auf eine Gefäßwand. 180, 186.
- Druckkraft ruhenden Wassers gegen krumme Flächen. 180, 299.
- Druckmesser. 234.
- Druckmesserröhren. 300.
- Druckmittelpunkt. 185.
- Druckspannung  $\sigma$ . 6.
- Druckwassersammler. 177.
- Eingespannter, am Ende unterstützter Balken. 53.
- Einheitsraum  $v$  der Gase. 219.
- Einschnürung (Kontraktion). 258.
- Einschnürung, unvollkommene. 261.
- Einschnürung, unvollständige. 260.
- Elastizität. 4.
- Elastizitätsgrenze für Zug und Druck,  $z$  bezw.  $d$ . 6, 7.
- Elastizitäts- und Festigkeitszahlen. 9.
- Elastizitätsmaß (-modul)  $E$ . 5.
- Elastisch-feste Körper. 4.
- Entleerung eines Gefäßes. 268.
- Ergänzungskräfte. 9.
- Eulers Gleichgewichtsbedingungen für Flüssigkeiten. 244.
- Eulers Gleichungen für die Bewegung von Flüssigkeiten. 291.
- Fachwerkbalken. 78.
- Federn. 125, 132.
- Festigkeitszahlen. 8.
- Fläche gleichen Druckes. 170, 233.
- Flächenkräfte. 9.
- Flügelgebläse. 243.
- Flüsse, Wasserbewegung in -n. 310.
- Flüssigkeiten, Mechanik der. 167.
- Formänderungsarbeit. 108.
- Gase, Gleichgewicht derselben. 219.
- Gase, Einheitsraum  $v$  derselben. 219.
- Gase, Zustandsgleichung. 227.
- Gay-Lussacscher Satz. 225.
- Gebläse, Flügel-. 243.
- Gefäßwandstärke. 181.
- Geschwindigkeitskurve. 322.
- Geschwindigkeitsziffer  $\varphi$ . 257, 351.
- Gestänge überall gleicher Sicherheit. 14.
- Gewicht, scheinbares, in bezug auf Wasser. 202.
- Gewichtsausgleich, hydrostatischer. 179.
- Gleichgewicht der Gase. 219.
- Gleichgewicht elastisch-fester Körper. 9.
- Gleichgewicht flüssiger Körper. 167.
- Gleitung  $\gamma$ . 16.
- Gleitmaß  $G$ . 16.
- Hähne. 303.
- Heber. 241. Saugheber. 281.
- Höhenmessen, barometrisches. 221, 228.
- Isothermische Zustandsänderung. 357.
- Kanäle, Bewegung des Wassers in Kanälen. 310.
- Kanalquerschnitt kleinsten Widerstandes. 318.
- Klappe, selbsttätige. 188.
- Knickfestigkeit. 63.
- Knickungsfaktor  $n$ . 66.
- Knickziffer  $\alpha$ . 65.
- Knieröhren. 302.
- Kontraktion (Einschnürung). 258.
- Kraftübertragung durch Druckwasser. 174.
- Kräfte, innere und äußere. 1, 9.
- Kräfteplan eines Fachwerks. 87.
- Kreiselpumpe. 238.
- Kropfröhren. 302.
- Kühlung von Räumen. 361.
- Lochen. 18.
- Luftballon. 223, 232.
- Luft, Bewegung in Röhren. 366.
- Luft, Dichte derselben. 220.
- Luftwiderstand  $D$ . 372.



- Manometer. 234.  
 Mariottescher Satz. 219.  
 Massenkräfte. 9.  
 Metazentrum. 208.  
 Mittelpunkt des Stoßes. 158.  
 Mittelpunkt des Wasserdrucks. 185.  
 Momentenfläche. 27.  
 Mühlstein, Spannung der Ringe um einen. 105.  
  
 Nachwirkung, elastische. 8.  
 Niveaufäche. 184, 246.  
 Nulllinie. 21.  
  
 Parabelträger. 94.  
 Parabelfachwerkträger. 97.  
 Pendel, ballistisches. 154.  
 Pfähle, Einrammen derselben. 144.  
 Pfeiler, Stau derselben. 331.  
 Piezometer. 300.  
 Poissons Satz. 360.  
 Presse, Wasserdruck-. 173.  
 Proportionalitätsgrenze. 7.  
 Pumpe, Kreisel-. 238.  
 Pumpe, Saug-. 237.  
 Pumpe, Saugstrahl-. 281.  
 Punzen. 18.  
  
 Querkraft  $Q$ . 21.  
 Querträger oder Zwischenbalken. 35, 79.  
  
 Rammen. 144.  
 Reaktion ausfließenden Wassers. 286.  
 Reaktionsschiff. 282.  
 Röhren, Bewegung der Luft in. 366.  
 Röhren, Bewegung des Wassers in. 296.  
 Röhren, Knie- und Kropf-. 302.  
 Röhrenwandstärke. 181.  
  
 Saugheber. 281.  
 Saugpumpe. 237.  
 Saugstrahlpumpe. 281.  
 Scherfestigkeit. 15.  
 Schieber. 303.  
 Schleudermaschine. 217.  
 Schleusenammern, Füllung und Entleerung derselben. 275.  
 Schleusentore, Riegel derselben. 192.  
 Schornstein. 369.  
 Schubfestigkeit. 15.  
 Schubspannung  $\tau$ . 16.  
 Schwache Stellen. 119, 123.  
 Schwimmaschine. 205.  
 Schwimmende Körper. 205.  
 Seileck als Momentenfläche. 32.  
 Spezifisches Volumen  $v$  der Gase. 219.  
 Spezifische Wärme  $c$  und  $c_1$ . 352.  
 Springbrunnen. 309.  
 Springstrahl. 308.  
 Standsicherheit schwimmender Körper. 205.  
 Stanzen. 18.  
 Statisch unbestimmte Aufgaben. 53.  
 — Nachteile derselben. 58.  
 Stauhöhe. 328.  
 Staukurve. 335.  
 Stauweite  $x_0$ . 333, 341.  
 Stoßbelastung. 113, 148.  
 Stoß, elastischer. 151.  
 Stoß, exzentrischer. 155.  
 Stoß, gerader, zentraler. 137.  
 Stoßlinie. 137.  
 Stoßmittelpunkt. 158.  
 Stoß, schiefer. 161.  
 Stoß sich drehender Körper. 152.  
 Stoß, unelastischer. 143.  
 Stoßverlust. 265.  
 Stoßziffer  $k$ . 141.  
 Strahlschiff. 287.  
 Strömendes Wasser, Druck desselben. 344.  
  
 Taucherglocke. 240.  
 Temperatur, absolute,  $T$ . 227.  
 Torsion s. Verdrehung.  
 Trägerquerschnitt  $\bar{I}$ . 25, 36.  
 Tragfedern. 115.  
 Trägheitsmoment eines Querschnitts  $J$ . 22.

- Ventile. 304.  
 Verdrängung  $V$ . 205.  
 Verdrehungsarbeit. 131.  
 Verdrehungsfestigkeit. 70.  
 Verdrehungsfedern. 132.  
 Verdrehungswinkel  $\theta$ . 71.  
 Verlängerung, elastische,  $\Delta l$ . 5.  
 Vernietung. 17.  
  
**W**agenachse. 34, 35.  
 Wägung eines langen Stabes. 63.  
 Wägung eines zweiachsigen Wagens. 62.  
 Wandstärke. 281.  
 Wärmeeinheit  $WE$ . 352.  
 Wärmekapazität  $c$  und  $c_1$ . 352.  
 Wärmemenge  $Q$ . 352.  
 Wärmewert  $A$  der Arbeitseinheit. 354.  
 Wärme, spezifische,  $c$  und  $c_1$ . 352.  
 Wasserdruckpresse. 173.  
 Wasserleitung mit Verzweigung. 304.  
 Wasserschwelle. 337.  
 Wasserspiegel. 183, 211, 213.  
  
 Wassersprung. 337.  
 Wasserstrahl, Druck eines, gegen eine Fläche. 288.  
 Wasseruhr. 270.  
 Wehre. 328.  
 Widerstandsmoment  $\mathfrak{B} = J : e$  eines Querschnitts. 23.  
 Widerstandsziffer  $\zeta_0$  für Reibung des Wassers im Gefäß. 263.  
 Wiegmannscher Dachträger. 88.  
 Winddruck  $D$ . 372.  
  
**Z**entrifuge. 217.  
 Zugfestigkeit  $Z$ . 7, 13.  
 Zugspannung  $\sigma$ . 5.  
 Zustandsänderung, adiabatische. 360.  
 Zustandsänderung eines Gases. 352.  
 Zustandsänderung, isothermische. 357.  
 Zustandsgleichung der Gase. 227, 345.  
 Zwischenbalken oder Querträger. 35, 79.





## Helwingsche Verlagsbuchhandlung in Hannover.

(Gegründet vor 1606.)

In unserem Verlage erschienen folgende weiteren Werke von

### Wilhelm Keck,

weil. Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule in Hannover.

#### **Vorträge über Mechanik** als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen.

Band 1: **Mechanik starrer Körper.** Fünfte Auflage, bearbeitet von Dr. Ludwig Hotopp. 1920. Mit 433 Holzschnitten. Preis M. 19.20, gebunden M. 25.20.

Band 3: **Allgemeine Mechanik.** Zweite Auflage, bearbeitet von Dr. Ludwig Hotopp. 1915. Mit 235 Holzschnitten. Preis M. 15.40, gebunden M. 21.60.

#### **Vorträge über Elastizitätslehre** als Grundlage für die Festigkeitsberechnung der Bauwerke. Zweite vermehrte Auflage, neu bearbeitet von Dr. Ludwig Hotopp.

I. Teil: Mit 209 Holzschnitten. Preis M. 11.20, gebunden M. 12.50.

II. Teil: Mit 214 Holzschnitten. Preis M. 14.—, gebunden M. 15.40.

==== Eine neue Auflage wird nicht vor 1921 erscheinen. ====

**Fragen** über die wichtigsten Gegenstände aus dem Gebiet der Mechanik. 4. Auflage. Preis M. 0.70.

==== Unter der Presse befindet sich: ====

### **Vorträge über Hebezeuge.**

Von

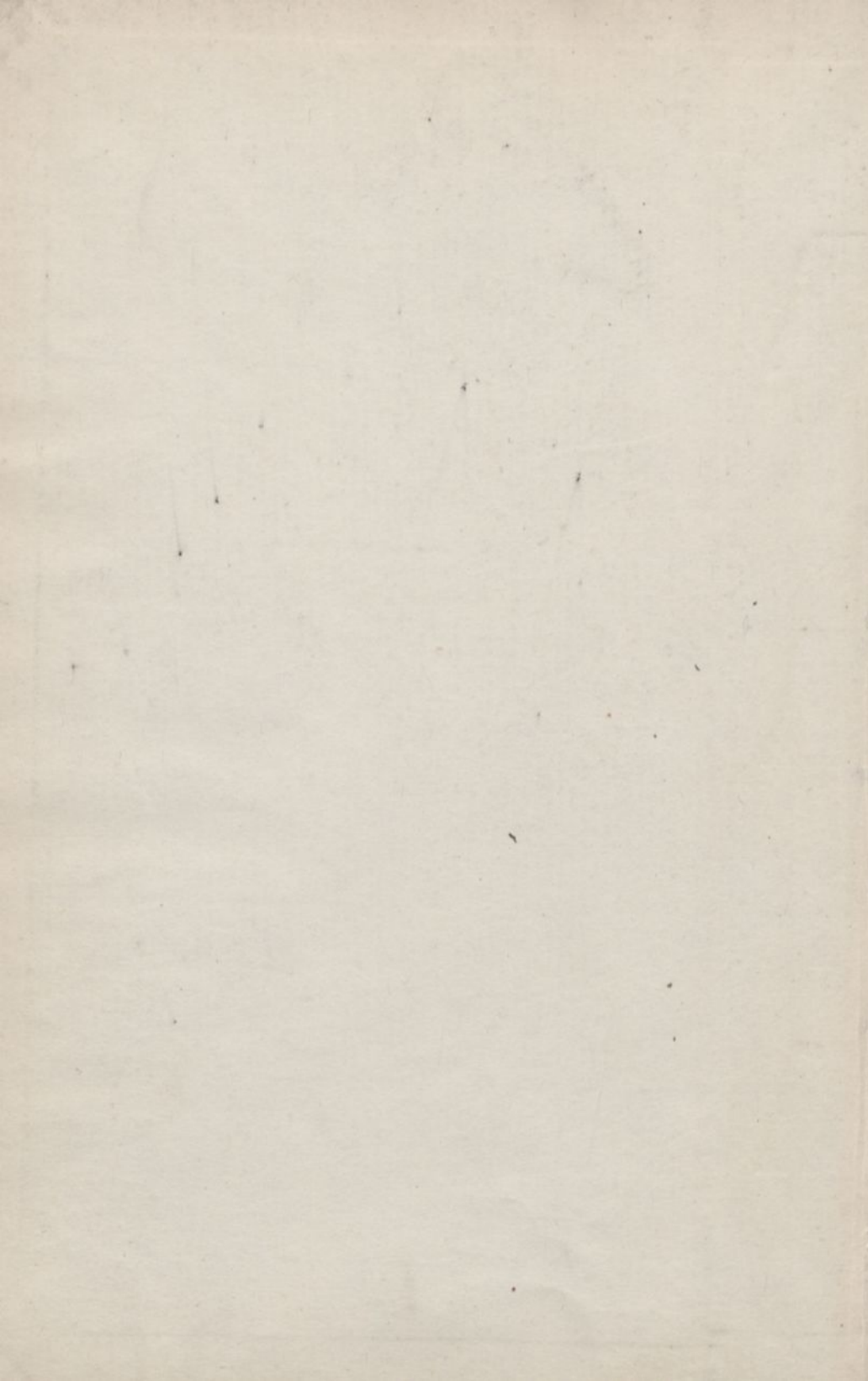
Ludwig Klein,

Geheimer Regierungsrat, Professor an der Techn. Hochschule in Hannover.

==== Mit zahlreichen Abbildungen. ====













BIBLIOTEKA GŁÓWNA

358706L/1