Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej
100100369989


EX LIBRIS
BIBLIOTEKI
POLITECHNIKI
WROCŁAWSKIEJ

Archiwum
E 115
m

Archiwum

EX LIBRIS
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

٥٠٧٩١

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA

HAUPTBÜCHEREI D. KÖ[illegible] TECHNISCHE HOCHSCHULE BRESLAU

VORLESUNGEN

ÜBER

THEORETISCHE PHYSIK

VON

H. VON HELMHOLTZ.

HERAUSGEGEBEN VON

ARTHUR KÖNIG, OTTO KRIGAR-MENZEL, FRANZ RICHARZ, CARL RUNGE.

BAND III.

DIE MATHEMATISCHEN PRINCIPIEN DER AKUSTIK.

HERAUSGEGEBEN VON

ARTHUR KÖNIG UND CARL RUNGE.

1911. 2252.

LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1898.

VORLESUNGEN

ÜBER

DIE MATHEMATISCHEN PRINCIPIEN DER AKUSTIK

VON

H. VON HELMHOLTZ.

HERAUSGEGEBEN VON

ARTHUR KÖNIG UND CARL RUNGE.

MIT 21 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1898.

Alle Rechte, insbesondere das Recht der Uebersetzung vorbehalten.

KGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE BRESLAU HAUPTBIBLIOTHEK DER
Inw. 19693
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA
357281 L/1

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorrede.

Als kurz vor Pfingsten 1892 Helmholtz dem Plane zustimmte, seinen ganzen Cursus der „Vorlesungen über theoretische Physik" auf Grundlage besonders dazu nachgeschriebener Stenogramme zu veröffentlichen, hatte er das für das Sommersemester angekündigte Colleg über „die mathematischen Principien der Akustik" schon längst begonnen. Um nun aber trotzdem mit der Ausführung des Planes sofort beginnen zu können, wurde für den Anfang (§§ 1 bis 29) eine im Sommer 1881 gemachte Nachschrift des einen (A. K.) der beiden Unterzeichneten zur Ausarbeitung benutzt.

Eine Schwierigkeit bot dann noch der Umstand, dafs Helmholtz in jenem Sommer 1881 den Inhalt der jetzigen §§ 30—34 nicht vorgetragen hatte, und dafs daher die erwähnte ältere Nachschrift an die erst mit § 31 beginnenden neuen wortgetreuen Stenogramme, die Herr Dr. Bruno Borchardt aufnahm, nicht genau anschlofs. Zur Ausfüllung dieser im Wesentlichen den Inhalt des § 30 umfassenden Lücke hat Herr Anton Scheye seine sehr ausführliche, wenn auch nicht ganz wörtliche stenographische Nachschrift bereitwilligst zur Verfügung gestellt, wofür ihm an dieser Stelle herzlicher Dank ausgesprochen sei.

Das Manuscript des ganzen ersten Theiles hat Helmholtz noch vorgelegen und er hat bis zum § 29, also gerade in den nach der älteren Nachschrift ausgearbeiteten Abschnitten, den Text mehrfach geändert und erweitert. Zu einer Durchsicht des siebenten Abschnittes (§§ 30—34) hat er keine Zeit mehr gefunden, obschon das betreffende Manuscript ihn Herbst 1893 auf der Reise nach Chicago begleitet hat, wo er hoffte, während der Seefahrt die erforderliche Mufse zu finden.

Die ohnehin schon knappe Zeit des Sommersemesters wurde noch weiter dadurch verkürzt, dafs Helmholtz wegen einer dienstlichen Reise die Vorlesungen bereits im Juli schliefsen mufste. Es war ihm daher nicht mehr möglich, die Schallbewegung in Röhren mit offenen Enden zu behandeln; er sprach aber sofort die Absicht aus, diesen Theil bei der späteren Veröffentlichung aus seiner früheren, den Gegenstand betreffenden Abhandlung[1]) hinzuzufügen. Die unterzeichneten Herausgeber haben nun nach HELMHOLTZ' Tode diese Absicht ausgeführt, indem sie das Vorgetragene soweit ergänzten, dafs jene Abhandlung angeschlossen werden konnte. Die ersten Paragraphen derselben mufsten dabei fortbleiben, weil sie eine unnöthige Wiederholung abgegeben hätten. Der Text der übrigen Paragraphen ist wörtlich abgedruckt und an den Gleichungen sind nur wenige formelle Aenderungen vorgenommen worden, um mit dem Vorausgehenden Uebereinstimmung herzustellen.

Berlin und Hannover, im Mai 1898.

Arthur König.
Carl Runge.

---

[1]) Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. CRELLE's Journ. f. reine u. angew. Mathematik. Bd. 57. S. 1—72 (1859). — Abgedruckt in „Wissenschaftliche Abhandlungen". Bd. 1. S. 303—382. Leipzig 1882. — Eine neue Ausgabe dieser Abhandlung hat dann Hr. A. WANGERIN in „OSTWALD's Klassiker der exakten Wissenschaften". No. 80. Leipzig 1896, veranstaltet, wo auch einige im Original enthaltene Fehler verbessert sind. Diese Ausgabe liegt unserem Abdruck zu Grunde.

Inhalt.

Einleitung.

Erster Theil.

Theorie der kleinen Oscillationen discreter Massenpunkte um eine Lage stabilen Gleichgewichtes.

Erster Abschnitt.

Die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einflufs einer elastischen Kraft ohne Berücksichtigung der Reibung.

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegungen eines beliebigen Systems von Massenpunkten unter dem Einflufs conservativer Kräfte in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage.

Dritter Abschnitt.

Die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einflufs einer elastischen Kraft und einer Dämpfung.

Vierter Abschnitt.

Die Bewegungen eines beliebigen Systems von Massenpunkten unter dem Einflufs conservativer Kräfte mit Berücksichtigung der Reibung.

Fünfter Abschnitt.

Das Mitschwingen eines einzelnen Massenpunktes.

Sechster Abschnitt.

Das Mitschwingen eines Systems von Massenpunkten.

Siebenter Abschnitt.

Der Hamilton'sche Satz. — Uebergang auf continuirlich verbreitete Massen.

Zweiter Theil.

Die Schwingungen von Saiten, elastischen Stäben und Luftsäulen.

Erster Abschnitt.

Die Schwingungen einer Saite.

Zweiter Abschnitt.

Die Schwingungen von elastischen Stäben und Luftsäulen.

Dritter Theil.

Die Schallbewegung im Raume.

Erster Abschnitt.

Die allgemeinen Formeln.

Zweiter Abschnitt.

Die Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.

EINLEITUNG.

§ 1. Die Akustik und ihre Beziehung zum Ohr.

Die Akustik, rein physikalisch, d. h. nicht mit Rücksicht auf physiologische Gesichtspunkte behandelt, ist die Lehre von den Oscillationen mit verschwindend kleinen Amplituden, wie sie in Körpern oder Körpersystemen entstehen, welche einer stabilen Gleichgewichtslage nahe sind und sich unter dem Einflufs conservativer Kräfte bewegen, die sie in die genannte Lage zurückzuführen streben. Die Natur dieser Kräfte kann übrigens sehr verschieden sein; in der That beobachten wir in Körpern von allen drei Aggregatzuständen dergleichen Oscillationen.

Die Beziehung dieser Vorgänge zum Ohr ist dadurch gegeben, dafs dieses auf einen grofsen Theil derartiger Schwingungen reagirt, und dafs wir durch das Ohr sehr leicht viel feinere Verschiedenheiten derselben erkennen können, als durch die übrigen Sinnesorgane. Uebrigens gelten die Gesetze, die wir hier kennen lernen werden, nicht blos für hörbare Schwingungen, sondern auch für viel langsamere sichtbare Schwingungen grofser Massen.

Hinsichtlich der Reactionsweise des Ohres unterscheiden wir zunächst: Geräusche und Klänge. Ein Geräusch ist auch seinem sinnlichen Eindrucke nach fortdauernd wechselnd und unregelmäfsig. Ein Klang giebt im Allgemeinen einen anhaltenden, gleichbleibenden Eindruck. Eine scharfe Grenze zu ziehen, ist aber unmöglich; oft genug mischen sich schwache Geräusche auch musikalischen Klängen bei; so können wir z. B. im Klang der Violine zeitweilig auch das Kratzen des Bogens auf den Saiten bemerken.

Die Klänge werden durch das Ohr unterschieden nach der Höhe, nach der Klangfarbe und nach der Intensität. Wir werden später (§ 3) sehen, wie diese Eigenschaften von den physikalischen Vorgängen bedingt werden.

Erster Theil.

Theorie der kleinen Oscillationen discreter Massenpunkte um eine Lage stabilen Gleichgewichtes.

Erster Abschnitt.

Die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einflufs einer elastischen Kraft ohne Berücksichtigung der Reibung.

---

§ 2. Die Bewegungsgleichung und die Form der Bewegung.

Wir wollen die Annahme machen, dafs die Kraft, welche einen Massenpunkt in seine Gleichgewichtslage zurücktreibt und dadurch die Oscillationen zu Stande kommen läfst, dem Gesetz der sogenannten elastischen Kräfte folgt, d. h. dafs sie proportional der Gröfse der Verschiebung aus der Gleichgewichtslage ist.

Der einfachste Fall liegt vor, wenn ein einzelner Punkt, dessen Masse gleich m, in der Richtung der x-Axe aus der Gleichgewichtslage, die wir in dem Punkte $x = 0$ annehmen wollen, verschoben worden ist. Dann ist die auftretende Kraft einmal in Folge der über sie gemachten Annahme gleich $-a^2 x$, wo a^2 eine stets positive Gröfse bezeichnen soll, und ferner ist sie nach dem Newton'schen Kräftemaafs auszudrücken durch $m \frac{d^2 x}{d t^2}$. Wir haben daher

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = - a^2 x \tag{1}$$

zu setzen.

Das **vollständige Integral** der Differentialgleichung (1) kann man dadurch finden, dafs man einen Multiplicator für sie sucht, der beide Seiten derselben in Differentialquotienten nach der Zeit verwandelt. Ein solcher ist $\frac{dx}{dt}$. Dann läſst sie sich in die Form bringen:

$$m \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + a^2 \cdot x \cdot \frac{dx}{dt} = 0$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2} m \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} a^2 \cdot x^2\right] = 0 \tag{1a}$$

Die letztere Gleichung sagt aus, daſs die in die eckige Klammer eingeschlossene Gröſse nicht von der Zeit abhängt. Da sie nun in unserem Falle keine andere Veränderliche enthält, ist sie constant zu setzen. Ihren constanten Werth bezeichnen wir mit $\frac{1}{2} a^2 h^2$; dann ist also

$$\tfrac{1}{2} m \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} a^2 x^2 = \tfrac{1}{2} a^2 h^2. \tag{1b}$$

In dieser Form drückt die Gleichung das Gesetz von der Constanz der Energie aus. Das erste Glied der linken Seite ist der Werth der actuellen Energie der bewegten Masse, das zweite miſst den noch vorhandenen Rest der potentiellen Energie, deren Werth für das angenommene Wirkungsgesetz der elastischen Kraft wir hier kennen lernen. Die charakteristische Eigenthümlichkeit dieser Gröſse ist die, daſs sie eine Function der Coordinaten ist, deren negativ nach einer der in ihr enthaltenen Coordinaten gebildeter Differentialquotient

$$-\frac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{2} a^2 x^2\right] = -a^2 x$$

die in Richtung der betreffenden Coordinate wirksame Kraftcomponente giebt.

Gleichung (1b) ergiebt weiter:

$$\pm \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{m}}$$

oder indem wir nach t integriren:

$$\text{arc.}\sin\left(\frac{x}{h}\right) = C + \frac{a t}{\sqrt{m}}$$

oder

$$x = h \cdot \sin\left[C + \frac{a t}{\sqrt{m}}\right] \tag{1c}$$

Da ein Sinus eines reellen Winkels immer ein echter Bruch ist, dessen Werthe zwischen $+1$ und -1 liegen, so liegt der Werth von x immer zwischen $+h$ und $-h$. Zwischen diesen beiden Punkten ist die Bewegung hin- und hergehend (oscillirend). Die Gröfse h heifst die Amplitude der Schwingung, der wechselnde Werth von x die zeitweilige Elongation des schwingenden Punktes. Wächst t um die Gröfse

$$\frac{\sqrt{m}}{a}.2\pi = T,$$

so wächst der Bogen um 2π und der Sinus bekommt wieder denselben Werth, wie zu Anfang dieser Zeit; ebenso auch x und $\frac{dx}{dt}$. Also wiederholen sich vollkommen gleiche Zustände des bewegten Körpers, nachdem einmal die Zeit T oder ein beliebiges ganzes Multiplum derselben abgelaufen ist. Man nennt T die Schwingungsdauer oder die Periode der oscillirenden Bewegung; der reciproke Werth $\frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi\sqrt{m}}$ ergiebt die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit. Den Werth der Periode und der Amplitude pflegt man immer positiv zu nehmen. Schreibt man

$$x = h.\sin 2\pi\left[\frac{t}{T} + C\right], \tag{1d}$$

so bezeichnet man C als die Phasenconstante. Diese Gröfse kann immer zwischen 0 und 1 angenommen werden, da es auf ein Vielfaches von 2π in dem Argument des Sinus nicht ankommt; sie giebt an, welcher Bruchtheil der Schwingungsperiode von dem Augenblick $t = -CT$ des Durchgangs des Punktes m durch die Gleichgewichtslage bis zum Zeitpunkt $t = 0$ vorübergegangen ist.

Man kann die Gleichung (1) auch nach einer anderen Methode integriren, indem man beachtet, dafs diese Gleichung zu einer gewissen Klasse von Differentialgleichungen gehört, die in der Physik eine ausgedehnte Anwendung finden.

Man pflegt solche Gleichungen, in denen die unbekannten veränderlichen Gröfsen selbst oder ihre Differentialquotienten erster oder höherer Ordnung, genommen nach den unabhängigen Veränderlichen, in jedem Gliede vorkommen, aber nur in erster Potenz und nicht in Producten je zweier derselben, homogene lineare Differentialgleichungen zu nennen. Für dieselben gelten folgende Sätze:

1. Wenn wir zwei Lösungen derselben Gleichung, z. B. ξ_1 und ξ_2 haben, beide als Function der unabhängigen Variablen gegeben, so ist jede homogene lineare Function von ξ_1 und ξ_2 ebenfalls eine Lösung. Denn setzen wir in die gegebene Differentialgleichung einmal ξ_1 und das andere Mal ξ_2 ein, so ergiebt sich durch Addition der entstehenden Gleichungen, dafs auch $(\xi_1 + \xi_2)$ eine Lösung derselben Differentialgleichung ist. Weil ferner Multiplication von dem Integral ξ mit irgend einem constanten Factor α oder β die Differentialgleichung nicht ungültig macht, da der Factor aus dieser sich wieder fortheben läfst, so sind auch $\alpha\xi_1$ und $\beta\xi_2$ Lösungen, und mit Berücksichtigung des eben Gesagten erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$x = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2.$$

Falls die gelöste Differentialgleichung eine Bewegungsgleichung ist, nennt man die durch die Lösung $\alpha\xi_1 + \beta\xi_2 = x$ dargestellte zusammengesetzte Bewegung eine Superposition (geometrische Addition) der durch die Lösungen $\alpha\xi_1$ und $\beta\xi_2$ dargestellten Einzelbewegungen. Weil wir in dieser zusammengesetzten Bewegung jede der componirenden Bewegungen als ungestört vorhanden betrachten können, so bezeichnet man dieses Princip auch wohl als das Princip der ungestörten Superposition der Bewegungen. — Es darf bei der Bildung dieser homogenen linearen Function aus mehreren Einzellösungen auch $\sqrt{-1}$ als Factor in den Coefficienten gebraucht werden. Denn da Gleichungen zwischen complexen Gröfsen nur erfüllt werden können, wenn sowohl die reellen wie die imaginären Theile beider Seiten der Gleichung einander gleich sind, so sagt eine solche Gleichung nichts anderes aus, als was man schon bei ihrer Bildung wufste, dafs nämlich sowohl der reelle wie der imaginäre Theil des Werthes eine Lösung darstellt. Die Rechnung wird aber in vielen Fällen durch Einführung imaginärer Glieder viel kürzer und bequemer.

2. Die Gleichung (1) ist nun offenbar eine solche homogene lineare Differentialgleichung. Aber sie hat noch eine andere Eigenthümlichkeit, welche eine besondere Integrationsmethode anwendbar macht, sie hat nämlich constante Coefficienten ihrer Glieder. Bei solchen homogenen linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten kann man particuläre Integrale immer in der Weise finden, dafs man die Unbekannte gleich setzt einer Constanten, multiplicirt mit einer Exponentialfunction der unabhängigen Variabeln, bez. wenn deren mehrere sind, mit einer solchen

Function, deren Exponent eine lineare Function der genannten Variablen ist.

Setzen wir in die Gleichung (1) den Werth

$$x = e^{pt}$$

ein, so ergiebt sich, da nunmehr

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = p^2 x$$

ist,

$$m p^2 = - a^2$$

also

$$p = \pm i \sqrt{\frac{a^2}{m}} \cdot$$

Wir erhalten daher die beiden Einzellösungen

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= e^{+ i t \sqrt{\frac{a^2}{m}}} = \cos\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) + i \sin\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) \\ \xi_2 &= e^{- i t \sqrt{\frac{a^2}{m}}} = \cos\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) - i \sin\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Nach dem, was wir soeben über die Superposition der Einzelbewegungen erfahren, ist die allgemeinste Lösung:

$$\begin{aligned} x = (\alpha + i \beta) &\left[\cos\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) + i . \sin\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right)\right] \\ &+ (\gamma + i \delta)\left[\cos\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) - i . \sin\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &= (\delta - \beta) \sin\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) + (\alpha + \gamma) \cos\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) \\ &\quad + i\left[(\alpha - \gamma) \sin\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) + (\beta + \delta) \cos\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Da in dieser Lösung nun der reelle Theil und der reelle Factor des imaginären Theiles mit Rücksicht darauf, dafs α, β, γ, δ völlig willkürlich sind, ganz übereinstimmende Form haben, so können wir die allgemeine Lösung schreiben:

$$x = F . \sin\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) + G . \cos\left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) \cdot \qquad (4)$$

Setzen wir nun

$$F = h \,.\, \cos c$$

$$G = h \,.\, \sin c$$

so wird

$$x = h \,.\, \sin \left(t \sqrt{\frac{a^2}{m}} + c \right) \tag{5}$$

übereinstimmend mit dem, was wir oben in (1d) gefunden. Durch die Combination der beiden particulären Integrale der Gleichungen (2) gelingt es also auch hier, ein vollständiges Integral zu finden, welches zwei willkürliche Constanten enthält, F und G oder h und c, über welche man so verfügen kann, daſs zur Zeit $t = 0$ der bewegte Punkt mit einer beliebig vorgeschriebenen Ablenkung x und Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ seine Bewegung beginnt.

Wir fanden seine Schwingungszahl

$$n = \frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi\sqrt{m}} \,.$$

Die hier beschriebene Bewegung ist, wie bemerkt, eine periodische, deren Periode T nur von der Masse m des Punktes und der Gröſse der elastischen Kraft a^2 abhängt. Sie wird einfache Schwingung (oder Sinusschwingung, bez. pendelartige Schwingung) genannt und läſst sich geometrisch so beschreiben:

Denken wir uns, daſs ein Punkt auf einem Kreise mit dem Radius h mit gleichförmiger Geschwindigkeit herumläuft, so ist die Projection dieser Bewegung auf einen Durchmesser eine Sinusschwingung.

Wenn unter den hier gemachten Annahmen die Bewegung einmal eingeleitet ist, so wird sie bis in die Unendlichkeit fortbestehen. Unsere Ableitung setzt aber voraus, daſs keine die Bewegung hindernden Kräfte vorhanden sind. In Wirklichkeit wird dieses nun in aller Strenge nie der Fall sein, sondern es wird immer eine Uebertragung der lebendigen Kraft an die Umgebung stattfinden (durch Reibung u. s. w.). Es kommen freilich viele Fälle vor, wo eine solche Form der Bewegung, wie wir sie hier abgeleitet haben, sich mit sehr groſser Annäherung vollzieht, weil die hindernd einwirkenden Kräfte verschwindend klein sind gegenüber der elastischen Kraft, welche die Bewegung unterhält.

§ 3. Die Beziehung der Bewegungsform zu den Eigenschaften des Klanges.

Von der Schwingungsdauer bez. der Schwingungszahl hängt das ab, was das Ohr als die Höhe des Tones empfindet, und zwar ergeben sich für die harmonischen Intervalle einfache numerische Beziehungen zwischen den Werthen der Schwingungszahlen. Es wird dieses schon von ARISTOTELES erwähnt, doch ist unbekannt, in welcher Weise er zu dieser Kenntnifs gekommen ist; PYTHAGORAS kannte nur das Verhältnifs der Saitenlängen zu den musikalischen Intervallen.

Das Verhältnifs der Schwingungszahlen ist bei den verschiedenen harmonischen Intervallen das folgende:

1 : 2	. . Octave
2 : 3	. . Quinte
3 : 4	. . Quarte
4 : 5	. . grofse Terz
5 : 6	. . kleine Terz
3 : 5	. . grofse Sext
5 : 8	. . kleine Sext.

Es ist ersichtlich, dafs man mit der Octave, der Quinte und der grofsen Terz alle anderen Intervalle unmittelbar oder mittelbar bestimmen kann; denn es ist:

$$\begin{array}{lll}
\text{Quarte} & = \text{Octave minus Quinte} & = 3 : 4 \\
\text{kleine Terz} & = \text{Quinte minus grofse Terz} & = 5 : 6 \\
\text{grofse Sext} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \left. \begin{array}{l} = \text{Octave minus kleine Terz} \\ = \text{Quarte plus grofse Terz} \end{array} \right\} & = 3 : 5 \\
\text{kleine Sext} & = \text{Octave minus grofse Terz} & = 5 : 8.
\end{array}$$

Sobald also die Schwingungszahl für einen Ton festgesetzt ist, sind die Schwingungszahlen aller anderen Töne ebenfalls gegeben.

SCHEIBLER war der Erste, der die Schwingungszahlen mit einiger Genauigkeit vergleichen lehrte. Er benutzte dazu eine subjectiv-akustische Methode (Schwebungen), während später LISSAJOUS eine optische Methode (die nach ihm benannten Schwingungsfiguren) in Anwendung brachte.

Von SCHEIBLER rührt auch die erste Festlegung der absoluten Schwingungszahl für einen bestimmten Ton her. Auf seinen Vorschlag nahm die deutsche Naturforscherversammlung im Jahre 1834 für den sogenannten Kammerton *a'* die Schwingungszahl 440 in der Secunde an. Durch den internationalen Musiker-Congrefs im Jahre 1885 wurde diese Zahl auf 435 festgesetzt. Diese Zahlen bedeuten hier die Anzahl ganzer Perioden, während deren der schwingende Punkt einen ganzen Hin- und Hergang ausführt. Die französischen Physiker rechnen meist nach halben Perioden, und haben deshalb doppelt so grofse Schwingungszahlen. Diese Sitte ist vom Uhrpendel hergenommen, welches bei jedem Durchgang durch die Gleichgewichtslage, von rechts, wie von links kommend, einen Schlag macht.

Die Schwingungszahlen der musikalisch verwendbaren Töne liegen zwischen 40 und 4000 ganzen Schwingungen, für das Ohr wahrnehmbar sind allerdings auch noch Schwingungen mit kleinerer und gröfserer Schwingungszahl; aber eine scharfe Auffassung der Intervalle ist bei ihnen nicht mehr möglich.

Die Sinusschwingungen sind nun nicht die einzigen der Zeit nach periodischen Functionen, sondern es sind für jeden Werth von T unendlich viele Formen periodischer Bewegung möglich. Sie sind aber alle zusammensetzbar aus Sinusschwingungen, und ihre Form ist die physikalische Grundlage für das, was das Ohr als Klangfarbe auffafst. Das Ohr zerlegt in der Empfindung jede periodische Bewegung, deren Schwingungszahl innerhalb der wahrnehmbaren Grenzen liegt, in nicht weiter zerlegbare Sinusschwingungen, die einfach empfunden werden. Die einfache pendelartige Schwingung ist also die Grundform, auf welche alle anderen Schwingungsformen, sowohl objectiv-mechanisch als subjectiv-akustisch, reducirt werden können.

Die oben (§ 2) gefundene Gleichung:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} a^2 x^2 = \frac{1}{2} a^2 h^2 \tag{1b}$$

giebt, wie dort schon bemerkt ist, die Werthe der Energie an. Das erste Glied der linken Seite stellt die lebendige Kraft oder die actuelle Energie dar. Das zweite Glied giebt die Quantität der Spannkräfte, die potentielle Energie an. Die wichtige mechanische Bedeutung dieser Gröfsen ist die, dafs sie die unzerstörbaren Arbeitswerthe der stattfindenden Bewegung angeben. Diese können, wie in der allgemeinen Dynamik gezeigt wird, nur dadurch verändert werden, dafs äufsere Einwirkungen auf den schwingenden Punkt stattfinden, die entweder ihm neue Arbeitsäquivalente zuführen, oder ihm die vorhandenen entziehen können. Von diesen Arbeitswerthen des schwingenden Punktes hängt nun überhaupt der

Arbeitswerth aller anderen Wirkungen ab, welche die schwingende Masse auf andere Naturkörper ausüben kann, unter anderen auf unsere Sinnesorgane, und man pflegt deshalb diesen Arbeitswerth $\frac{1}{2}a^2 . h^2$ vorzugsweise als Maafs für die Intensität des Schalles zu benutzen. Bezeichnen wir mit u die gröfste Geschwindigkeit, welche der schwingende Punkt annehmen kann, was offenbar im Punkt $x = 0$ geschieht, so ist:

$$\tfrac{1}{2} a^2 h^2 = \tfrac{1}{2} m u^2. \tag{6}$$

Die Intensität kann also auch durch die beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage eintretende lebendige Kraft gemessen werden.

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegungen eines beliebigen Systems von Massenpunkten unter dem Einflufs conservativer Kräfte in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage.

§ 4. Die allgemeinen Eigenschaften des Systems.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, eine Reihe von Eigenthümlichkeiten abzuleiten und nachzuweisen, welche in Systemen von Massenpunkten vorhanden sind, die kleine Bewegungen in der Nähe einer Lage ausführen, in welcher sie unter anderen Umständen auch in stabilem Gleichgewichte ruhen könnten.

Wir nehmen ein beliebig aus Massenpunkten zusammengesetztes mechanisches System an. Jeder Punkt sei bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit seiner Gleichgewichtslage zusammenfällt. Die Richtung der Coordinatenaxen braucht für die verschiedenen Punkte nicht dieselbe zu sein. Es ist nicht nothwendig, dafs dabei die drei Coordinaten jedes einzelnen Punktes durch die Benennung unterschieden werden, und so wollen wir sie durch $s_{\mathfrak{a}}$, $s_{\mathfrak{b}}$, $s_{\mathfrak{c}}$ u. s. w. fortlaufend durch das ganze System ausdrücken. Die Massen der einzelnen Punkte seien mit $m_{\mathfrak{a}}$, $m_{\mathfrak{b}}$, $m_{\mathfrak{c}}$ u. s. w. bezeichnet. Da nun aber jedem Punkte drei Coordinaten und also auch drei Indices zukommen, so haben wir, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Indices sind, die demselben Punkte angehören, $m_{\mathfrak{a}} = m_{\mathfrak{b}} = m_{\mathfrak{c}}$ zu setzen. Es giebt im Allgemeinen also dreimal so viel Werthe $s_{\mathfrak{a}}$ als $m_{\mathfrak{a}}$, doch kann ein Theil dadurch wegfallen, dafs gewisse Punkte, die Kräfte auf die übrigen ausüben, entweder ganz unbeweglich, oder gezwungen sind, sich auf gewissen Ebenen oder Geraden zu bewegen, die dann als Coordinatebenen oder Coordinataxen für die Lage dieser Punkte zu brauchen sind.

Es ist die Bedingung gestellt worden, dafs die auf die Massenpunkte einwirkenden Kräfte (Kräfte des Systems selbst und äufsere Kräfte) conservativ sein sollen. Diese Bedingung sagt aus, dafs jede Kraftcomponente S_a, welche einen der Punkte, m_a, in Richtung einer der Coordinaten, s_a, angreift, ihrer Gröfse nach bestimmt werde durch eine Gleichung von der Form

$$S_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial s_a}, \tag{7}$$

wo Φ als eine Function sämmtlicher Coordinaten s_a dargestellt werden kann, welche aber nicht direct die Zeit t enthalten darf. Die mechanische Bedeutung dieser Funktion Φ ist, dafs sie den Werth der Arbeit (potentiellen Energie) mifst, die aufgewendet werden mufs, um die sämmtlichen Massenpunkte m_a aus der Ruhelage in die durch die Coordinaten s_a bestimmte Lage zu bringen.

Bezeichnen wir mit dA die Arbeit, welche verwendet werden mufs, um eine Verrückung aller m_a um ds_a zu Stande zu bringen gegen die Wirkung seiner Kräfte S_a, so ist diese

$$dA = -\sum S_a \,.\, ds_a = +\sum \frac{\partial \Phi}{\partial s_a} \,.\, ds_a \,. \tag{8}$$

Da Φ nur von den s_a abhängen soll, stellt die letzte Summe die ganze Aenderung des Φ dar, und wir erhalten also

$$dA = d\Phi. \tag{8a}$$

Die durch die Gleichungen $s_a = 0$ charakterisirte Lage soll eine Ruhelage sein. Sie kann dies nur sein, wenn alle Bewegungskräfte gleich Null sind, d. h. alle $\frac{\partial \Phi}{\partial s_a} = 0$. Diese letztere Bedingung tritt ein, wenn in der Gleichgewichtslage die Function Φ ein Minimum oder ein Maximum oder auch ein sogenannter Sattelwerth, ein Minimo-Maximum ist. Wir werden gleich sehen, dafs bei der Forderung, das Gleichgewicht solle stabil sein, nur die Annahme eines Minimums zulässig ist.

§ 5. Bildung der allgemeinen Bewegungsgleichungen für unser System.

Die Bewegungsgleichung der einzelnen Punkte erhält nun nach Newton's Definition der Bewegungskraft die Form

$$m_a \cdot \frac{d^2 s_a}{d t^2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial s_a}. \tag{9}$$

Wir haben so viele Gleichungen dieser Art, als veränderliche Coordinaten vorhanden sind. Multipliciren wir die Gleichung mit $\frac{d s_a}{d t}$, so erhalten wir:

$$m_a \cdot \frac{d s_a}{d t} \cdot \frac{d^2 s_a}{d t^2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial s_a} \cdot \frac{d s_a}{d t}, \tag{9a}$$

und wenn wir die Summe über das ganze System bilden:

$$\sum_a m_a \cdot \frac{d s_a}{d t} \cdot \frac{d^2 s_a}{d t^2} = - \sum_a \frac{\partial \Phi}{\partial s_a} \cdot \frac{d s_a}{d t}. \tag{10}$$

Nun hängt aber Φ nur insofern von t ab, als die einzelnen s_a von t abhängen, so dafs

$$- \sum_a \frac{\partial \Phi}{\partial s_a} \cdot \frac{d s_a}{d t} = - \frac{d \Phi}{d t}$$

ist. Indem wir auch die linke Seite der Gleichung als vollständiges Differential umformen, ergiebt sich

$$\frac{d}{d t} \sum_a \left\{ \tfrac{1}{2} m_a \left(\frac{d s_a}{d t} \right)^2 \right\} = - \frac{d \Phi}{d t} \tag{11}$$

oder

$$\frac{d}{d t} \left[\sum_a \left\{ \tfrac{1}{2} m_a \left(\frac{d s_a}{d t} \right)^2 \right\} + \Phi \right] = 0, \tag{11a}$$

also ist:

$$\sum_a \left\{ \tfrac{1}{2} m_a \left(\frac{d s_a}{d t} \right)^2 \right\} + \Phi = \text{Const.} \tag{11b}$$

Diese Gleichung spricht das Gesetz von der Constanz der Energie aus; denn es ist das erste Glied der linken Seite gleich der lebendigen Kraft, der actuellen Energie, und, wie wir schon gesehen haben, ist Φ gleich der potentiellen Energie des Systems.

Wenn in einer bestimmten Lage das Gleichgewicht stabil sein soll, so mufs in dieser Φ immer kleiner sein, als in allen unmittelbar benachbarten Lagen, weil dann bei einer kleinen Störung der Ruhelage durch irgend einen kleinen Anstofs die dadurch erregte lebendige Kraft L, welche eine nothwendig positive Gröfse ist, um so kleiner werden mufs, je mehr sich das System aus der Gleichgewichtslage entfernt, aber keinenfalls kleiner werden kann, als Null. Daraus folgt, dafs auch die Zunahme von Φ nicht über einen gewissen kleinen Betrag hinaus gehen kann, der durch die Gröfse des Anstofses bedingt ist. Wissen wir also, dafs Φ in der Ruhelage ein Minimum ist, so kann das System bei keiner Art von Verschiebung sich über die der Zunahme des Φ entsprechenden Grenzen hinaus entfernen.

Anders liegt es, wenn Φ nicht für alle Combinationen von Verschiebungen ein Minimum ist. Denn dann kann beim Verlassen der Ruhelage die lebendige Kraft wachsen, und das System mit gesteigerter Geschwindigkeit sich aus der Ruhelage entfernen. Solches Gleichgewicht heifst labil.

Bibl. Pol. Wrocl.

§ 6. Beschränkung in der Allgemeinheit der bisherigen Annahmen.

Wir wollen nun hinsichtlich der Function Φ die beschränkende Annahme machen, dafs Φ in der Nachbarschaft der Gleichgewichtslage des Systems den allgemeinen Charakter einer Function habe, die nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sei, bez. nach der Modification dieser Reihe, die nach Mac Laurin genannt ist und die sich nur dadurch unterscheidet, dafs für den Ausgangspunkt die unabhängigen Variablen alle gleich Null gesetzt sind. Es ist dann:

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial s_{\mathfrak{a}}} \cdot s_{\mathfrak{a}} \right\} + \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_{\mathfrak{a}}\, \partial s_{\mathfrak{b}}} \cdot s_{\mathfrak{a}} \cdot s_{\mathfrak{b}} \right\} + \dots \tag{12}$$

wo die Summationen in der Weise auszuführen sind, dafs die Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ unabhängig von einander durch alle ganzzahligen Werthe laufen.

Die Werthe der $s_{\mathfrak{a}}$ sollen nun so klein gewählt werden, dafs wir die Glieder dritter Ordnung vernachlässigen können. Nun sind aber für die Gleichgewichtslage die Werthe von $\frac{\partial \Phi}{\partial s_{\mathfrak{a}}}$ alle gleich Null, und wir können aufserdem, ohne die Allgemeinheit der Lösung zu beeinträchtigen,

$$\Phi_0 = 0 \tag{13}$$

setzen, weil in den Bewegungsgleichungen nur Differentialquotienten dieser Gröſse vorkommen. Wir erhalten alsdann:

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_{\mathfrak{a}}\,\partial s_{\mathfrak{b}}}\cdot s_{\mathfrak{a}}\cdot s_{\mathfrak{b}}\right\}. \tag{14}$$

Da die hier vorkommenden zweiten Differentialquotienten alle für einen unveränderlichen Werth jeder Variablen, nämlich für $s_{\mathfrak{a}} = 0$ zu nehmen sind, so haben sie ebenfalls bestimmte constante Werthe, und wir wollen die letzte Gleichung daher schreiben:

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left\{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot s_{\mathfrak{a}}\cdot s_{\mathfrak{b}}\right\}, \tag{15}$$

wobei zu beachten ist, daſs $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = P_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial s_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial s_{\mathfrak{b}}}_{s_{\mathfrak{a}} = s_{\mathfrak{b}} = 0.}$

Bilden wir nun für ein bestimmtes $\mathfrak{a}$, das wir p nennen wollen, die Kraftcomponente in der Richtung s_p, so ist

$$S_p = -\frac{\partial \Phi}{\partial s_p} \tag{16}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\left\{P_{p,\mathfrak{a}}\cdot s_{\mathfrak{a}}\right\} - \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{b}}\left\{P_{p,\mathfrak{b}}\cdot s_{\mathfrak{b}}\right\} \tag{16a}$$

oder, da wir den Sinn der letzten Summe nicht ändern, wenn wir ihren durchgehenden Index $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}$ bezeichnen:

$$S_p = -\sum_{\mathfrak{a}}\left\{P_{p,\mathfrak{a}}\cdot s_{\mathfrak{a}}\right\}. \tag{16b}$$

Da nun ferner

$$S_p = m_p\frac{d^2 s_p}{d t^2} \tag{17}$$

ist, so erhalten wir als Bewegungsgleichung für den Punkt p

$$m_p\frac{d^2 s_p}{d t^2} = -\sum_{\mathfrak{a}}\left\{P_{p,\mathfrak{a}}\cdot s_{\mathfrak{a}}\right\}, \tag{18}$$

welche wir nunmehr, um auf den gerade näher betrachteten Massenpunkt auch wieder die früheren laufenden Indices anwenden zu können, schreiben wollen:

$$m_{\mathfrak{a}}\frac{d^2 s_{\mathfrak{a}}}{d t^2} = -\sum_{\mathfrak{b}}\left\{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot s_{\mathfrak{b}}\right\}, \tag{18a}$$

Dieser Bewegungsgleichungen sind im Allgemeinen dreimal so viel vorhanden, als Massenpunkte in dem System. Es ist oben schon darauf hingewiesen, dafs die Zahl der Gleichungen verringert wird, wenn einzelne Punkte gezwungen sind, sich auf bestimmten Linien oder Flächen zu bewegen. Dann fehlen aber auch entsprechend viele Unbekannte in den Gleichungen. Die Anzahl der veränderlichen Coordinaten wollen wir im Folgenden mit N bezeichnen.

§ 7. Aufsuchung von Integralgleichungen.

Da die Bewegungsgleichungen alle homogen und linear sind mit constanten Coefficienten, so werden sie erfüllt, indem

$$s_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}} . e^{nt} \tag{19}$$

gesetzt wird. Dann ist

$$m_{\mathfrak{a}} . n^2 . a_{\mathfrak{a}} = - \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{b}} \right\}$$

oder

$$m_{\mathfrak{a}} . n^2 . a_{\mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{b}} \right\} = 0. \tag{20}$$

Aus diesem System von N Bedingungsgleichungen sind die Verhältnisse der N Coefficienten a und aufserdem der Werth von n zu bestimmen. Da dieselben homogen und linear in Bezug auf die a sind, so würden sie für einen beliebig gewählten Werth n im Allgemeinen nur die Werthe $a_{\mathfrak{a}} = 0$ zulassen. Ausnahmen hiervon treten nur ein, wenn die Determinante der Coefficienten der $a_{\mathfrak{a}}$ gleich Null wird, was durch Wahl bestimmter Werthe des n erreicht werden kann. Wenn diese Bedingung erfüllt wird, ist eine der Gleichungen Folge der anderen, und es sind also dann nur noch $(N-1)$ Gleichungen vorhanden, aus denen $(N-1)$ Gröfsen a als Functionen der Nten bestimmt werden können. Die Gleichung, welche die Determinante gleich Null setzt, kann man direct zur Auffindung der Werthe von n^2 benutzen. Die Gleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{l}
(P_{1.1} + m_1 n^2) a_1 + P_{1.2} \cdot a_2 + P_{1.3} \cdot a_3 + P_{1.4} \cdot a_4 + \dots = 0 \\
P_{2.1} \cdot a_1 + (P_{2.2} + m_2 n^2) a_2 + P_{2.3} \cdot a_3 + P_{2.4} \cdot a_4 + \dots = 0 \\
P_{3.1} \cdot a_1 + P_{3.2} \cdot a_2 + (P_{3.3} + m_3 n^2) a_3 + P_{3.4} \cdot a_4 + \dots = 0 \\
P_{4.1} \cdot a_1 + P_{4.2} \cdot a_2 + P_{4.3} \cdot a_3 + (P_{4.4} + m_4 n^2) a_4 + \dots = 0 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots
\end{array}\right\} \tag{21}$$

Wir erhalten also als Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} (P_{1.1} + m_1 n^2), & P_{1.2}, & P_{1.3}, & P_{1.4} \dots \\ P_{2.1}, & (P_{2.2} + m_2 n^2), & P_{2.3}, & P_{2.4} \dots \\ P_{3.1}, & P_{3.2}, & (P_{3.3} + m_3 n^2), & P_{3.4} \dots \\ P_{4.1}, & P_{4.2}, & P_{4.3}, & (P_{4.4} + m_4 n^2) \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (22)$$

Die diagonalen Glieder enthalten alle n^2, folglich ist die Gleichung, wenn wir N Coordinaten haben, Nten Grades nach n^2 und giebt im Allgemeinen N Werthe von n^2. Was die Art der Wurzeln betrifft, so läfst sich zunächst zeigen, dafs dieselben nicht positiv reell sein können. Zu dem Ende beachte man, dafs, wenn n^2 reell ist, alle Coefficienten der $a_\mathfrak{a}$ in den Gleichungen (20) reell sind, und diese Gleichungen also auch nur reelle Verhältnifswerthe zwischen den einzelnen $a_\mathfrak{a}$ ergeben können. Es muss dann möglich sein, die Gleichungen (20) durch lauter reelle Werthe der $a_\mathfrak{a}$ zu befriedigen. Wenn man nun jede der Gleichungen mit demjenigen $a_\mathfrak{a}$ multiplicirt, das mit n^2 multiplicirt in dem ersten Gliede derselben vorkommt, und sie alle addirt, so erhält man:

$$n^2 . \sum_\mathfrak{a} (m_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a}^2) = - \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left[P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} . a_\mathfrak{a} . a_\mathfrak{b} \right] \qquad (22\text{a})$$

Wegen der Forderung, dafs das Gleichgewicht des Systems stabil sein solle, müssen aber die schon in Gleichung (8) implicite vorkommenden Coefficienten $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ von solcher Art sein, dafs sie, mit allen möglichen reellen Werthen multiplicirt, die man den verschiedenen Gröfsen $s_\mathfrak{a}$ beilegt, immer einen positiven Werth des Φ ergeben. Es ist dies bekanntlich der Fall, wenn die homogene Function zweiten Grades, die den Werth des Φ ausdrückt, in eine Summe von Quadraten von homogenen linearen Functionen der $s_\mathfrak{a}$ verwandelt werden kann, welche Quadrate nur mit positiven Constanten multiplicirt werden.

Daraus folgt, dafs die genannte Function auch nur positive Werthe bekommen kann, wenn man den $s_\mathfrak{a}$ die Werthe $a_\mathfrak{a}$ giebt, wie dies in der Gleichung (22a) geschehen ist. Da nun der Coefficient des n^2 in dieser Gleichung ebenfalls eine Summe von Quadraten mit positiven Coefficienten bildet, und also nur positiv sein kann, so folgt: Wenn die Wurzel n^2 der Gleichung (22) reell ist, so mufs sie negativ, d. h. das n selbst imaginär sein. Dieser Schlufs bleibt auch dann noch bestehen, wenn die Gröfsen $a_\mathfrak{a}$ complex sind. Denn da ihre Verhältnisse, wie wir eben sahen, reell sind, so müſsten sie alle als Producte eines und desselben complexen Factors mit reellen Gröſsen darstellbar sein. Hebt man das Quadrat dieses Factors auf beiden Seiten der Gleichung (22a) weg, so folgt wie oben, daſs n^2, falls es reell ist, nothwendig negativ sein muſs. Nun läſst sich aber zeigen, daſs n^2 nicht complex sein kann. Denn wäre n^2 complex, so müſste auch mindestens ein Theil der Werthe von a complex sein, wie die Gleichungen (20) erkennen lassen, und zwei conjugirten Werthen von n^2, z. B. $\varrho + \sigma i$ und $\varrho - \sigma i$, müſsten auch zwei conjugirte Werthe der Lösungen für a entsprechen, z. B. $a_\mathfrak{b} = \alpha_\mathfrak{b} + i\beta_\mathfrak{b}$ und $a'_\mathfrak{b} = \alpha_\mathfrak{b} - i\beta_\mathfrak{b}$. Schreiben wir nun die Gleichungen (21) in folgender Form:

$$\left.\begin{array}{l}
-m_1 a_1 . n^2 = P_{1.1} . a_1 + P_{1.2} . a_2 + P_{1.3} . a_3 + \dots \\
-m_2 a_2 . n^2 = P_{2.1} . a_1 + P_{2.2} . a_2 + P_{2.3} . a_3 + \dots \\
-m_3 a_3 . n^2 = P_{3.1} . a_1 + P_{3.2} . a_2 + P_{3.3} . a_3 + \dots \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots
\end{array}\right\} \qquad (21\,\mathrm{a})$$

multipliciren die erste Gleichung mit a'_1, die zweite mit a'_2 u. s. w. und addiren sämmtliche Gleichungen, so erhalten wir:

$$-n^2 \sum_\mathfrak{b} m_\mathfrak{b} \left(\alpha_\mathfrak{b}^2 + \beta_\mathfrak{b}^2\right) = \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left(P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} . a_\mathfrak{a} . a'_\mathfrak{b}\right). \qquad (21\,\mathrm{b})$$

Nun ist aber die Doppelsumme auf der rechten Seite reell, weil erstens die bei der Multiplication entstandenen imaginären Glieder, wie $\pm i P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} [\alpha_\mathfrak{a} \beta_\mathfrak{b} - \alpha_\mathfrak{b} \beta_\mathfrak{a}]$, sich bei der Summirung wieder aufheben, und die reellen Glieder, wie $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} [\alpha_\mathfrak{a} \alpha_\mathfrak{b} + \beta_\mathfrak{a} \beta_\mathfrak{b}]$, die Summe zweier nothwendig positiven Functionen bilden, wie eben vorher in Beziehung auf die entsprechende Summe in Gleichung (22a) erörtert ist. Da demnach die Summe auf der rechten Seite der Gleichung reell ist, so ist es unmöglich, daſs unsere Annahme, n^2 sei complex, richtig sein kann.

Daraus folgt also, daſs n^2 nur negativ reell sein kann; alle Wurzeln für n sind also imaginär, und wir dürfen daher allgemein

$$n^2 = -\nu^2, \quad \text{also} \quad n = \pm i . \nu$$

setzen.

§ 8. Schwingungsformen des Systems für einfache Töne, wenn alle Wurzeln n^2 der Gleichung (22) von einander verschieden sind.

Wir haben vorher gesehen, daſs wir im Allgemeinen N Werthe von n^2 aus der Gleichung (22) erhalten können. Ausnahmsweise kann es vorkommen, dafs zwei dieser Wurzeln einander gleich werden. Wenn solche Ausnahme nicht eintritt, wird durch Einsetzen eines richtig bestimmten Werthes von n in das System der Gleichungen (20) nur eine der Gleichungen eine Folge der $(N-1)$ übrigen, und aus den unabhängig von einander bleibenden übrigen $(N-1)$ Gleichungen können wir die Verhältnisse von $(N-1)$ Gröfsen $a_\mathfrak{a}$ zu einer von ihnen finden, welche Verhältnisse reell sein müssen, da alle Coefficienten der linearen Gleichungen reell sind. Das eine willkürlich gewählte a kann aber auch einen complexen Factor, wie $e^{i\gamma}$, erhalten, dann mufs derselbe aber auch allen anderen $a_\mathfrak{a}$ zukommen.

Alle diese Verhältnisse erleiden Aenderungen, wenn einer der Ausnahmefälle eintritt, und zwei oder mehrere Wurzelwerthe des n^2 einander gleich werden. Wir wollen hier zunächst den allgemeinen Fall behandeln, und in diesem und den folgenden Paragraphen die Voraussetzung festhalten, dafs beim Einsetzen des Werthes von n^2 in die Gleichungen (21) nur eine der Gleichungen Folge der anderen wird, $(N-1)$ derselben aber unabhängig von einander bestehen bleiben. Dann bekommen also die verschiedenen $s_\mathfrak{a}$ Werthe von der Form:

$$s_\mathfrak{a} = a_\mathfrak{a} \, . \, e^{i\gamma + i\nu t} \tag{23}$$

worin alle $a_\mathfrak{a}$ reell anzunehmen sind. Trennen wir die reellen und imaginären Theile, so geben uns die ersteren:

$$s_\mathfrak{a} = a_\mathfrak{a} \, . \cos(\nu t + \gamma), \tag{23a}$$

die letzteren:

$$\sigma_\mathfrak{a} = a_\mathfrak{a} \, . \sin(\nu t + \gamma). \tag{23b}$$

Beide Lösungen sind nicht wesentlich von einander verschieden, da die erstere in die Form der letzteren übergeht, wenn man $\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)$ statt γ setzt. Auch ein Wechsel im Vorzeichen des ν, wie er erlaubt ist, da $n = \pm i\nu$, wirkt nur wie eine Aenderung der Phasenconstante γ in $-\gamma$ oder γ in $-\gamma + \pi$, so dafs also die Form der Gleichung (23a) mit der einen willkürlichen Constanten γ, und dem einen willkürlichen Werth des einen a, der als Factor in $a_\mathfrak{a}$ steckt, die für den Werth ν möglichen Bewegungsformen vollständig darstellt. Die physikalische Bedeutung des ν ist, dafs es die Schwingungszahl in 2π Secunden angiebt. Man sieht übrigens aus der Gleichung (23a), dafs alle Punkte Bewegungen ausführen, deren Componenten einfache, pendelartige Schwingungen darstellen, die alle gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage durchgehen, wenn $\cos[\nu t + \gamma] = 0$, und ihre äufsersten Elongationen gleichzeitig erreichen, wenn $\cos(\nu t + \gamma) = \pm 1$.

Zu jedem Punkte gehören nun aber drei Coordinaten s_a, und da alle drei im Verhältnifs des $\cos(\nu t + \gamma)$ wachsen, so ist der Weg, den der Punkt beschreibt, eine Gerade, und die Form der Bewegung auf dieser Geraden ist eine einfache, pendelartige Schwingung.

Ein solches Integral, welches auf eine Wurzel von n Bezug nimmt, stellt eine sogenannte Eigenschwingung des Systems dar.

§ 9. Das vollständige allgemeine Integral.

Es giebt nun aber nicht nur ein solches Integral unserer Bewegungsgleichung, sondern, da wir N Werthe von n^2 haben, haben wir auch N derartige Bewegungsformen des Systems, welche alle unbeschränkt lange Zeit unverändert fortbestehen können, und von denen jede, eine Eigenschwingung des Systems darstellend, einer der N verschiedenen Wurzeln von n^2 entspricht.

Wir wollen nunmehr die den verschiedenen Eigenschwingungen des Systems entsprechenden Werthsysteme der a und n mit dem laufenden Index $\mathfrak{q}$ versehen, so dafs wir die der Schwingungszahl $n_\mathfrak{q}$ entsprechende Lösung schreiben können:

$$s_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} = b_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \cdot \sin(\nu_\mathfrak{q} \cdot t) + c_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \cdot \cos(\nu_\mathfrak{q} \cdot t), \tag{24}$$

wo $b_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} = - a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \cdot \sin\gamma_\mathfrak{q}$ und $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} = a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \cdot \cos\gamma_\mathfrak{q}$ ist, und wenn wir alle Einzellösungen zum vollständigen Integral superponiren

$$s_\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{q} F_\mathfrak{q} \cdot \left\{ b_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \cdot \sin(\nu_\mathfrak{q} \cdot t) + c_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \cdot \cos(\nu_\mathfrak{q} \cdot t) \right\} \tag{25}$$

Früher (§ 7) haben wir gesehen, dafs ein Werth von a willkürlich zu wählen ist, und dafs diese Wahl die übrigen Werthe von a proportional beeinflufst. Wir wollen, um diesem unbestimmten Factor einen festen Werth zu geben, festsetzen, dafs er so gewählt werden soll, um für jeden Einzelton $\nu_\mathfrak{q}$

$$\sum_\mathfrak{a} \left(m_\mathfrak{a} \cdot a^2_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \right) = 1 \tag{26}$$

zu machen, wo der Index $\mathfrak{q}$ anzeigt, dafs die Summation über diejenigen Werthe von a auszuführen ist, welche der $\mathfrak{q}$ ten von den N verschiedenen Werthen der Wurzeln von n^2 entsprechen.

Nunmehr können wir schreiben:

$$s_\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{q} \left\{ A_\mathfrak{q} \cdot a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \cdot \sin(\nu_\mathfrak{q} \cdot t) + B_\mathfrak{q} \cdot a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \cdot \cos(\nu_\mathfrak{q} \cdot t) \right\} \tag{27}$$

wo $A_\mathfrak{q}$, $B_\mathfrak{q}$ für $-F_\mathfrak{q} \sin \gamma_\mathfrak{q}$ und $F_\mathfrak{q} \cos \gamma_\mathfrak{q}$ geschrieben sind. Da der laufende Index $\mathfrak{q}$ bis N geht, so haben wir also $2N$ willkürliche Constanten in dieser allgemeinsten Lösung zur Verfügung.

§ 10. Anpassung des allgemeinen Integrals an einen gegebenen Anfangszustand des Systems.

Wir wollen jetzt annehmen, dafs für einen bestimmten Moment, den wir ja zum Anfangspunkt der Zeit $t = 0$ wählen können, für alle Punkte des Systems uns die Werthe der Coordinaten und der Geschwindigkeiten gegeben seien. Es tritt uns dann die Aufgabe entgegen, die Constanten des vollständigen Integrals (27) diesem Anfangszustand entsprechend zu bestimmen. Dies läfst sich verhältnifsmäfsig leicht und direct leisten.

Die für die Zeit $t = 0$ gegebenen Coordinaten seien mit $\overline{s_\mathfrak{a}}$, die Geschwindigkeiten mit $\overline{\frac{d s_\mathfrak{a}}{d t}}$ bezeichnet, wir haben dann

$$\overline{s_\mathfrak{a}} = \sum_\mathfrak{q} \left\{ B_\mathfrak{q} \cdot a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \right\} \tag{28}$$

$$\overline{\frac{d s_\mathfrak{a}}{d t}} = \sum_\mathfrak{q} \left\{ \nu_\mathfrak{q} \cdot A_\mathfrak{q} \cdot a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \right\} \tag{29}$$

Es sind nun aus diesen gegebenen Werthen die Coefficienten A und B zu bestimmen. Die Anzahl der Gleichungen genügt; denn wir haben $2N$ Coefficienten und ebenso viel Werthe von $\overline{s}$ und $\overline{\frac{d s}{d t}}$.

Zur Bestimmung des Coefficienten B_p, der der $p$ten Eigenschwingung des Systems, also der $p$ten Wurzel für n^2 entspricht, multipliciren wir die Gleichung (28) mit $m_\mathfrak{a} \cdot a_{\mathfrak{a},p}$, dann ergiebt sich:

$$m_\mathfrak{a} \cdot a_{\mathfrak{a},p} \cdot \overline{s_\mathfrak{a}} = \sum_\mathfrak{q} \left\{ B_\mathfrak{q} \cdot a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \cdot a_{\mathfrak{a},p} \cdot m_\mathfrak{a} \right\}. \tag{30}$$

und, wenn wir die Summation über das ganze System vornehmen:

$$\sum_\mathfrak{a} \left\{ m_\mathfrak{a} \cdot a_{\mathfrak{a},p} \cdot \overline{s_\mathfrak{a}} \right\} = \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{q} \left\{ B_\mathfrak{q} \cdot a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} \cdot a_{\mathfrak{a},p} \cdot m_\mathfrak{a} \right\} \tag{30a}$$

Die rechte Doppelsumme läfst sich nun wesentlich vereinfachen, wobei wir zunächst auf unsere früheren Bedingungsgleichungen (§ 7) für die Werthe von a und n zurückgreifen müssen. Dieselben lauten zufolge Gleichung (20) für irgend einen der Werthe n_ν

$$n_\nu^2 . m_{\mathfrak{a}} . a_{\mathfrak{a},\nu} = - \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} . a_{\mathfrak{b},\nu} \right\}.$$

Denken wir uns diese Gleichungen für alle $\mathfrak{a}$ aufgestellt, mit dem Factor $a_{\mathfrak{a},p}$ multiplicirt, wo p sich auf irgend einen anderen der Werthe von n^2 bezieht, und dann addirt, so erhalten wir:

$$n_\nu^2 \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} . a_{\mathfrak{a},\nu} . a_{\mathfrak{a},p} \right\} = - \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} . a_{\mathfrak{b},\nu} . a_{\mathfrak{a},p} \right\}. \tag{31}$$

Vertauschen wir nun p und ν, so bleibt die rechte Seite unverändert. Wir erhalten daher bei der Subtraction

$$(n_\nu^2 - n_p^2) . \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} . a_{\mathfrak{a},\nu} . a_{\mathfrak{a},p} \right\} = 0. \tag{31a}$$

Da wir nun hier voraussetzen, dafs alle Wurzeln für n^2 verschieden sind, so folgt

$$\sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} . a_{\mathfrak{a},\nu} . a_{\mathfrak{a},p} \right\} = 0. \tag{31b}$$

Unter Berücksichtigung dieses Ergebnisses heben sich alle diejenigen Glieder in der Gleichung (30a) auf, in denen $\mathfrak{q}$ von p verschieden ist. Wir erhalten daher

$$\sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} . a_{\mathfrak{a},p} . \overline{s_{\mathfrak{a}}} \right\} = B_p . \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} . a_{\mathfrak{a},p}^2 \right\} \tag{30b}$$

Nun haben wir aber festgesetzt, dafs

$$\sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} . a_{\mathfrak{a},p}^2 \right\} = 1$$

ist, und daher ergiebt sich

$$B_p = \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} . a_{\mathfrak{a},p} . \overline{s_{\mathfrak{a}}} \right\} \tag{30c}$$

Damit haben wir die Coefficienten B aus der Beschaffenheit des Systems und den gegebenen Anfangswerthen der Coordinaten bestimmt.

In ähnlicher Weise lassen sich die Coefficienten A aus den Werthen von $\overline{\frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t}}$ berechnen; es ergiebt sich nämlich durch eine völlig analoge Betrachtung, dafs

$$A_p = \frac{1}{\nu_p} . \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} . a_{\mathfrak{a},p} . \overline{\frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t}} \right\}. \tag{32}$$

Setzen wir die Werthe für A und B in unser allgemeines Integral ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} s_a = \sum_q \Bigg[\frac{1}{\nu_q} \cdot a_{a,q} \cdot \sin(\nu_q \cdot t) \cdot \sum_b \left\{ m_b \cdot a_{b,q} \cdot \overline{\frac{d s_b}{d t}} \right\} \\ + a_{a,q} \cdot \cos(\nu_q \cdot t) \sum_b \left\{ m_b \cdot a_{b,q} \cdot \overline{s_b} \right\} \Bigg] \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Somit ist der Werth von s_a vollständig ausgedrückt durch die für die Zeit $t = 0$ gegebenen Elongationen und Geschwindigkeiten, und es zeigt sich, dafs die von uns gefundene allgemeine Form des Integrals (25) wirklich allen beliebig gegebenen Anfangszuständen angepafst werden kann.

§ 11. Das Reciprocitätsgesetz und das Huyghens'sche Princip.

In der soeben abgeleiteten Form für s_a ist eine merkwürdige Beziehung enthalten, die allen oscillatorischen Bewegungen zukommt.

1. Sind für $t = 0$ alle Geschwindigkeiten gleich Null und ist nur eine Elongation, z. B. $s_b = S$, von Null verschieden, so ist

$$m_a \cdot s_a = \sum_q \left\{ a_{a,q} \cdot \cos(\nu_q \cdot t) \cdot m_a \cdot m_b \cdot a_{b,q} \cdot S \right\}. \tag{34}$$

Der Factor von S ist nach a und b symmetrisch; daraus folgt, dafs das Product von Masse und Elongation, $m.s$, im Punkte a dasselbe ist, wenn man den Punkt b zur Zeit $t = 0$ um S verschoben, als es im Punkte b wird, wenn man den Punkt a zur selben Zeit um S verschoben hätte. Der Punkt a wirkt also ebenso nach Ablauf der Zeit t auf Punkt b ein, wie Punkt b nach derselben Zeit auf Punkt a.

2. Wenn zur Zeit $t = 0$ alle Elongationen gleich Null sind und von den Geschwindigkeiten nur $\frac{d s_b}{d t} = S'$ von Null verschieden, so ist:

$$m_a \cdot \frac{d s_a}{d t} = \sum_q \left\{ a_{a,q} \cdot \cos(\nu_q \cdot t) \cdot m_a \cdot m_b \cdot a_{b,q} \cdot S' \right\}. \tag{35}$$

Für die Geschwindigkeiten gilt also hier dasselbe, was wir für die Elongationen fanden.

Von diesen Reciprocitätssätzen kann man in vielen Fällen nützliche Anwendung machen, besonders wenn man darauf verzichten mufs, ganz allgemein die Form der Bewegung für ein bestimmtes System zu finden.

Wenn bei einer bestimmten Eigenschwingung von der Schwingungszahl $\nu_\mathfrak{q}$ ein bestimmter Massenpunkt mit dem Index $\mathfrak{a}$ sich in der betreffenden Coordinatenrichtung nicht bewegt, so ist in derjenigen Bewegung, welche dadurch entsteht, dafs wir allein jenem Massenpunkte $\mathfrak{a}$ in dieser Coordinatenrichtung einen Anstofs geben, also ihm eine Geschwindigkeit ertheilen, jene Eigenschwingung von der Schwingungszahl $\nu_\mathfrak{q}$ als Partialschwingung nicht enthalten. Denn wenn in der Formel (33) die der betreffenden Schwingungszahl $\nu_\mathfrak{q}$ entsprechenden Glieder für beliebige Werthe von t verschwinden sollen, was auch immer für Anfangswerthe $\overline{\frac{d s_\mathfrak{b}}{d t}}$ und $\overline{s_\mathfrak{b}}$ gegeben sind, so mufs $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}}$ Null sein. Wenn nun andererseits das System dadurch in Schwingungen versetzt wird, dafs für $t = 0$ nur $\overline{\frac{d s_\mathfrak{a}}{d t}}$ oder $\overline{s_\mathfrak{a}}$ von Null verschieden ist, so kommen, weil $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} = 0$, in den Ausdrücken

$$s_\mathfrak{b} = \sum_\mathfrak{q}\left\{\frac{1}{\nu_\mathfrak{q}}\, a_{\mathfrak{b},\mathfrak{q}} \sin(\nu_\mathfrak{q} . t) . m_\mathfrak{a} . a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} . \overline{\frac{d s_\mathfrak{a}}{d t}} + a_{\mathfrak{b},\mathfrak{q}} \cos(\nu_\mathfrak{q} . t) . m_\mathfrak{a} . a_{\mathfrak{a},\mathfrak{q}} . \overline{s_\mathfrak{a}}\right\}$$

die der betreffenden Schwingungszahl $\nu_\mathfrak{q}$ entsprechenden Glieder nicht vor. Einen solchen Punkt nennt man einen „Knotenpunkt" der betreffenden Eigenschwingung. Man kann also eine Bewegung hervorrufen, welche eine bestimmte Eigenschwingung nicht enthält, sobald man einen Knotenpunkt der letzteren kennt.

Da man den Anfangspunkt der Zeit beliebig wählen kann, so können die in einem beliebigen Zeitmoment vorhandenen Verschiebungen und Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte betrachtet werden als hervorgerufen in demselben Moment, und die in Folge des gegebenen Bewegungszustandes ablaufende weitere Bewegung des Systems als eine Superposition aller derjenigen Wellenformen des Systems, welche durch die in dem genannten Zeitmoment bestehenden Elongationen und Geschwindigkeiten aller einzelnen Massenpunkte des Systems erregt werden würden (Huyghens'sches Princip).

§ 12. Behandlung als Variationsproblem.

Wir hatten das System der Gleichungen (20)

$$n^2 m_\mathfrak{a} a_\mathfrak{a} = - \sum_\mathfrak{b} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_\mathfrak{b} \right\}$$

oder

$$\nu^2 . m_\mathfrak{a} . a_\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{b} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_\mathfrak{b} \right\}. \tag{20a}$$

Multipliciren wir die Gleichungen der Reihe nach mit δa_1, δa_2 u. s. w., welche Gröſsen wir als verschwindend kleine Zusätze zu den Werthen a_1, a_2 u. s. w. betrachten und als Variationen dieser Werthe bezeichnen, und bilden die Summe des dann entstehenden Systems von Gleichungen, so haben wir:

$$\tfrac{1}{2} \nu^2 . \delta \sum_\mathfrak{a} \left\{ m_\mathfrak{a} . a_\mathfrak{a}^2 \right\} - \tfrac{1}{2} \delta \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_\mathfrak{a} \cdot a_\mathfrak{b} \right\} = 0. \tag{36}$$

Bei der Bildung der Variation des letzten Summanden ist zu bemerken, daſs

$$\sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_\mathfrak{a}\, \delta a_\mathfrak{b} \right\} = \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_\mathfrak{b}\, \delta a_\mathfrak{a} \right\};$$

denn beide Doppelsummen bezeichnen Summen derselben Glieder. Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$R = \tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{a} \left\{ m_\mathfrak{a} . a_\mathfrak{a}^2 \right\} \tag{37}$$

und

$$S = \tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_\mathfrak{a} \cdot a_\mathfrak{b} \right\}, \tag{38}$$

so ist Gleichung (36) zu schreiben:

$$\nu^2 . \delta R - \delta S = 0.$$

Hätten wir gleichzeitig die beiden Gleichungen zu erfüllen

$$\delta R = 0 \tag{39}$$

und

$$\delta S = 0, \tag{40}$$

so würden wir eine derselben mit einem willkürlichen Factor multipliciren können, der oben in (36) durch ν^2 dargestellt ist, und die beiden Gleichungen in die eine vereinigen können:

$$\nu^2 . \delta R - \delta S = 0. \tag{41}$$

Diese Gleichung sagt also aus: Wenn wir die $a_\mathfrak{a}$ so variiren, daſs $\delta R = 0$, d. h. daſs R constant bleibt, so ist auch $\delta S = 0$, d. h.

S ist ein Grenzwerth (ein Maximum, Minimum oder Maximo-Minimum), wie wir auch die a_a variiren mögen, wenn dies nur immer so geschieht, dafs R constant bleibt, und wir können also die Bedingungsgleichungen (20a) in der Form aussprechen, dafs wir die Forderungstellen, dafs bei constant bleibendem R die Doppelsumme S ein Grenzwerth werde.

Der Werth der Schwingungszahl findet sich dann aus der Gleichung $v^2 . R = S$, sobald die a^2 der genannten Bedingung gemäfs bestimmt sind.

Der hier aufgestellte Satz ist oft nützlich, um angenähert richtige Lösungen zu verbessern, namentlich wenn er auf Systeme von unendlich vielen Massenpunkten übertragen wird. Wenn man Ausdrücke mit mehreren unbestimmten Parametern hat, kommt man der richtigen Lösung möglichst nahe dadurch, dafs man diese Parameter der hier aufgestellten Bedingung gemäfs bestimmt.

§ 13. Veränderte Lösung des Problems bei Existenz gleicher Wurzeln für n^2.

Wenn die Wurzeln für n^2 nicht alle verschieden sind, so bestehen für die Factoren a_a, welche uns die Intensität der die Gesammtbewegung zusammensetzenden Einzelbewegungen angeben, zum Theil andere Bedingungen.

Bezeichnen wir die Determinante der Bedingungsgleichungen mit D und die Unterdeterminanten, in denen je eine Verticalreihe und je eine Horizontalreihe des D weggelassen sind, mit $D_{1.1}$, $D_{1.2} \ldots$, $D_{2.1}$, $D_{2.2} \ldots$, so ist, wenn wir D nach n^2 differentiiren:

$$\frac{\partial D}{\partial n^2} = m_1 D_{1.1} + m_2 D_{2.2} + m_3 D_{3.3} + \ldots . \tag{42}$$

und wenn wir mit $D_{1.1}$ multipliciren:

$$D_{1.1} \cdot \frac{\partial D}{\partial n^2} = m_1 . D_{1.1}^2 + m_2 . D_{1.1} . D_{2.2} + m_3 . D_{1.1} . D_{3.3} + \ldots . \tag{42a}$$

Nun ist aber, nach einer allgemeinen Eigenschaft der Determinanten, so oft

$$D = 0$$

ist,

$$D_{p.q} . D_{r.s} = D_{p.s} . D_{r.q},$$

also auch

$$D_{u.u} . D_{v.v} = D_{u.v} . D_{v.u} .$$

Weil aber in unserem Falle $P_{u,v} = P_{v,u}$ ist, so ist hier $D_{u,v} = D_{v,u}$; wir haben demnach

$$D_{u,u} \, . \, D_{v,v} = D^2_{u,v} \, .$$

Es verwandelt sich unsere Gleichung (42a) also in:

$$\begin{aligned} D_{1,1} \frac{\partial D}{\partial n^2} &= m_1 \, . \, D^2_{1,1} + m_2 \, . \, D^2_{1,2} + m_3 \, . \, D^2_{1,3} + \ldots . \\ &= \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} \, D^2_{1,\mathfrak{a}} \right\} \end{aligned} \tag{42b}$$

Nun ist aber, wenn zwei Wurzeln n^2 einander gleich werden:

$$\frac{\partial D}{\partial n^2} = 0 .$$

Wir erhalten daher:

$$0 = \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} \, . \, D^2_{1,\mathfrak{a}} \right\} . \tag{43}$$

Das ist aber nur möglich, wenn jede Unterdeterminante $D_{1,\mathfrak{a}}$ gleich Null ist. Dieser Beweis gilt ebenso für die Unterdeterminanten $D_{2,\mathfrak{a}}$, $D_{3,\mathfrak{a}}$ u. s. w. Es sind daher sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung gleich Null. In diesem Falle sind also zwei der aufgestellten allgemeinen Bedingungsgleichungen (21) von den übrigen abhängig, und wir können zwei Werthe von a willkürlich wählen.

§ 14. Die Form der Partialbewegungen.

Als wir lauter verschiedene Wurzeln für n^2 voraussetzten, waren zwar für $a_{\mathfrak{a}}$ auch complexe Werthe zulässig, da wir einen Werth von a ganz beliebig wählen konnten, aber ihre Verhältnisse unter einander mufsten reell sein. Wenn wir hier nun z. B. zwei gleiche Wurzeln für n^2 annehmen, können wir zwei Werthe von $a_{\mathfrak{a}}$ völlig willkürlich wählen; das Verhältnifs derselben kann also complex sein; es sei $\varrho \, . \, e^{i\omega}$. Dann haben wir z. B. für die $\mathfrak{f}$te Wurzel von ν^2

$$\left. \begin{aligned} s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} &= a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \, . \, e^{i \nu_{\mathfrak{f}} t} \\ s_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}} &= a_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}} \, . \, e^{i \nu_{\mathfrak{f}} t} = a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \, . \, \varrho \, . \, e^{i (\nu_{\mathfrak{f}} t + \omega)} \end{aligned} \right\} \tag{44}$$

Dabei können $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$, ϱ, ω beliebige Werthe haben. Nehmen wir z. B. $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$ reell an und beschränken die Ausdrücke für $s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$ und $s_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}}$ auf die reellen Theile, so wird

$$\left. \begin{aligned} s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} &= a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \, . \, \cos (\nu_{\mathfrak{f}} t) \\ s_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}} &= a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \, . \, \varrho \, . \, \cos (\nu_{\mathfrak{f}} t + \omega) \end{aligned} \right\} \tag{44a}$$

Daraus geht hervor, dafs $s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$ und $s_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}}$, wenn sie auch harmonische Bewegungen gleicher Schwingungsdauer darstellen, erstens nicht wie früher zu gleicher Zeit die Gleichgewichtslage zu passiren brauchen und zweitens jedes beliebige Amplitudenverhältnifs haben können. Es besteht im Allgemeinen eine Phasendifferenz zwischen den beiden Schwingungsformen. Dasselbe gilt von irgend zwei anderen Elongationen s_p, s_q, sofern sie der Eigenschwingung von der Schwingungszahl $\nu_\mathfrak{f}$ entsprechen:

$$\left.\begin{aligned} s_{p,\mathfrak{f}} &= [a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot A_0 + a_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}} \cdot A_1]\, e^{i\nu_\mathfrak{f} t} \\ s_{q,\mathfrak{f}} &= [a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot B_0 + a_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}} \cdot B_1]\, e^{i\nu_\mathfrak{f} t}, \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

wo $A_0\, A_1\, B_0\, B_1$ bestimmte reelle Werthe haben. Da nun $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$ und $a_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}}$ beliebige complexe Werthe haben können, so kann man die reellen Theile auf die Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} s_{p,\mathfrak{f}} &= A \cos(\nu_\mathfrak{f} t + \gamma_p) \\ s_{q,\mathfrak{f}} &= B \cos(\nu_\mathfrak{f} t + \gamma_q), \end{aligned}\right\} \qquad (45\text{a})$$

wo A, B, γ_p, γ_q irgendwelche Werthe haben können. Auch hier stellen $s_{p,\mathfrak{f}}$ und $s_{q,\mathfrak{f}}$ harmonische Bewegungen derselben Periode dar. Aber während in dem Falle ungleicher Wurzeln n^2 die Amplituden ein bestimmtes Verhältnifs hatten und kein Phasenunterschied stattfand, können hier die Amplituden beliebige Werthe haben, und die Gleichgewichtslage wird bei $s_{p,\mathfrak{f}}$ und $s_{q,\mathfrak{f}}$ im Allgemeinen zu verschiedenen Zeiten passirt.

Wenn drei gleiche Wurzeln für die Determinantengleichung existiren, werden von den zu ihnen gehörigen Coefficienten $a_\mathfrak{a}$ drei willkürlich gewählt werden können, die anderen sind dann alle bestimmt.

Wenn wir die Elongationen eines der materiellen Punkte des Systems unter Einflufs der den drei gleichen Wurzeln entsprechenden Bewegungen mit x, y, z bezeichnen, ist aus den vorstehenden Erörterungen leicht erkennbar, dafs wir diese auf die Form

$$\left.\begin{aligned} x &= [A_0 a_\mathfrak{a} + A_1 a_\mathfrak{b} + A_2 a_\mathfrak{c}]\, e^{i\nu t} \\ y &= [B_0 a_\mathfrak{a} + B_1 a_\mathfrak{b} + B_2 a_\mathfrak{c}]\, e^{i\nu t} \\ z &= [C_0 a_\mathfrak{a} + C_1 a_\mathfrak{b} + C_2 a_\mathfrak{c}]\, e^{i\nu t} \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

bringen können, wo die Coefficienten A, B, C reell sind, $a_\mathfrak{a}$, $a_\mathfrak{b}$, $a_\mathfrak{c}$ aber beliebige complexe Werthe haben können. Schreiben wir

$$\left.\begin{aligned} A_0 a_{\mathfrak{a}} + A_1 a_{\mathfrak{b}} + A_2 a_{\mathfrak{c}} &= A e^{\alpha i} \\ B_0 a_{\mathfrak{a}} + B_1 a_{\mathfrak{b}} + B_2 a_{\mathfrak{c}} &= B e^{\beta i} \\ C_0 a_{\mathfrak{a}} + C_1 a_{\mathfrak{b}} + C_2 a_{\mathfrak{c}} &= C e^{\gamma i}, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

so erhalten wir für die reellen Theile, auf die man sich ohne Verlust an Allgemeinheit beschränken kann:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos(\nu t + \alpha) = \mathfrak{A}_1 \cos\nu t + \mathfrak{A}_2 \sin\nu t \\ y &= B\cos(\nu t + \beta) = \mathfrak{B}_1 \cos\nu t + \mathfrak{B}_2 \sin\nu t \\ z &= C\cos(\nu t + \gamma) = \mathfrak{C}_1 \cos\nu t + \mathfrak{C}_2 \sin\nu t. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Hier sind die sechs Gröſsen $\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{C}_1\, \mathfrak{C}_2$ beliebig. Wir können den Formeln eine geometrische Bedeutung geben. Es zeigt sich nämlich sofort, daſs der Punkt $x\,y\,z$ in der Ebene

$$\left.\begin{vmatrix} x & y & z \\ \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_1 \\ \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{C}_2 \end{vmatrix} = 0 \right\} \tag{49}$$

oder

$$x(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_1 \mathfrak{B}_2) + y(\mathfrak{C}_1 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_2) + z(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2) = 0 \tag{49a}$$

liegt. Dieses ist aber die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten, also durch die Gleichgewichtslage des betrachteten Massenpunktes geht.

Ferner erhalten wir durch einfache Umformungen:

$$\left(\frac{\mathfrak{B}_1 x - \mathfrak{A}_1 y}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{B}_2 x - \mathfrak{A}_2 y}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2}\right)^2 = 1, \tag{50}$$

also die Gleichung eines Cylinders zweiten Grades. Seine Schnittlinie mit der eben abgeleiteten Ebene ist die Bahn, welche der Punkt beschreibt. Die im Raume thatsächlich ausgeführte Bewegung des Massenpunktes ist demnach eine Ellipse, wobei die Grenzfälle (Kreis und Gerade) mit einbegriffen sind.

§ 15. Indifferentes Gleichgewicht.

Indifferentes Gleichgewicht tritt ein, wenn für gewisse Arten von Verschiebungen s die potentielle Energie Φ constant gleich Null bleibt. Dies ist zum Beispiel für ein frei im Raume schwebendes, von äuſseren Kräften nicht angegriffenes System der Fall bei Verschiebungen seines Schwerpunktes und Drehungen um Axen, die durch den Schwerpunkt gehen, wobei die Punkte des Systems zu einander in relativer Ruhe bleiben, dann ist dauernd

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left\{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot a_{\mathfrak{a}}\cdot a_{\mathfrak{b}}\right\} = 0. \tag{51}$$

Berücksichtigen wir nun, dafs ganz allgemein

$$-n^2\sum_{\mathfrak{a}}\left\{m_{\mathfrak{a}}\cdot a_{\mathfrak{a}}^2\right\} = \sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left\{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot a_{\mathfrak{a}}\cdot a_{\mathfrak{b}}\right\},$$

so folgt daraus, dafs

$$in = \nu = 0 \tag{52}$$

und

$$T = \frac{1}{\nu} = \infty. \tag{53}$$

Oscillationen von endlicher Dauer werden also nicht entstehen, und jede einmal begonnene, sowohl fortschreitende wie drehende Bewegung erhält sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit unendlich lange.

Dritter Abschnitt.

Die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einflufs einer elastischen Kraft und einer Dämpfung.

§ 16. Die Bewegungsgleichung und ihre Lösungen.

Wir haben in dem Bisherigen nachgewiesen, dafs bei der ausschliefslichen Annahme conservativer Kräfte eine einmal eingeleitete oscillatorische Bewegung stets unverändert fortdauert. Die Erfahrung lehrt uns nun, dafs solche Bewegungen aber thatsächlich nach einiger Zeit stets erlöschen. Es müssen also in Wirklichkeit stets Ursachen vorhanden sein, die der Bewegung entgegenwirken. Bekannte Kräfte dieser Art sind gegeben in der Reibung oder in dem Widerstand der umgebenden flüssigen Medien.

Die lebendige Kraft wird scheinbar vernichtet, thatsächlich verwandelt sie sich aber in Wärme, oder sie entgeht unserer Beobachtung, indem sie übertragen wird auf das den schwingenden Körper umgebende Medium oder an diejenigen Körper, welche zur

Befestigung dienen u. s. w. Die Abgabe der Bewegung an die Luft ist besonders leicht zu erkennen, wenn die Schwingungszahl der Bewegung innerhalb der oben (§ 3) angeführten Grenzen der Schwingungszahlen der hörbaren Töne liegt. Wir sind dann in Folge der Uebertragung der Schwingungen des bewegten Körpers an unser Ohr berechtigt, den betreffenden Körper als einen tönenden zu bezeichnen. Die ganze Akustik als physiologische Wissenschaft würde ohne eine solche Abgabe der Schwingungen an die Umgebung nicht existiren.

Wir haben also, um uns den thatsächlichen Verhältnissen besser anzupassen, in die frühere Bewegungsgleichung (1) Glieder einzuführen, welche eine allmähliche Abnahme der Schwingungen bedingen. Das würden alle Kräfte thun, die dauernd der zeitigen Geschwindigkeit entgegenwirken. Die einfachste Form einer solchen Annahme ist die Einführung von Kräften, die der Geschwindigkeit proportional gesetzt werden, aber mit einem negativen Coefficienten. Auch stimmen die Folgerungen aus einer solchen Annahme mit den Erfahrungen genügend gut überein, namentlich wenn in den mitbewegten flüssigen und luftförmigen Körpern keine Wirbel entstehen, und wenn keine „klebenden Kräfte" ins Spiel kommen. Diese Ausnahmefälle wollen wir aber hier zunächst nicht weiter beachten.

Wir haben dann für einen einzelnen Punkt, dessen Masse gleich m ist, und der sich in der Richtung der x-Axe (mit der Gleichgewichtslage in $x = 0$) bewegt, die Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = - a^2 x - b \frac{d x}{d t}, \tag{54}$$

worin b stets als positiv anzunehmen ist.

Nach den allgemeinen Integrationsregeln homogener linearer Differentialgleichungen erhalten wir eine Lösung, indem wir setzen

$$x = A . e^{nt}. \tag{55}$$

Dann folgt, wenn wir für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2 x}{d t^2}$ die Werthe $\frac{dx}{dt} = n . x$ und $\frac{d^2 x}{d t^2} = n^2 x$ einsetzen:

$$m . n^2 . x = - a^2 . x - b . n . x.$$

Diese Gleichung ist nun erfüllt, wenn entweder

$$x = 0,$$

d. h. wenn gar keine Bewegung vorhanden ist, welchen Fall wir natürlich nicht weiter zu berücksichtigen haben, oder wenn

$$m . n^2 = -a^2 - b . n, \tag{56}$$

also

$$n = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m}}. \tag{56a}$$

Es giebt also zwei Werthe für n, welche der Gleichung genügen. Ob sie reell oder complex sind, hängt von der Wurzelgröfse ab. Abgesehen von der Annahme, dafs $b = 0$, die wir schon im ersten Abschnitt behandelt haben, kommen hier drei verschiedene Fälle vor.

$$b^2 < 4a^2 m,$$

$$b^2 = 4a^2 m$$

und

$$b^2 > 4a^2 m,$$

die wir nunmehr gesondert erörtern wollen.

1. Die Reibung ist so klein, dafs

$$b^2 < 4a^2 m$$

oder

$$\frac{b^2}{4m^2} < \frac{a^2}{m}.$$

Dann ist die Wurzel imaginär, und indem wir setzen

$$\alpha = \frac{b}{2m}$$

und

$$\beta = \sqrt{\frac{a^2}{m} - \frac{b^2}{4m^2}},$$

wo nunmehr α und β reelle positive Gröfsen bezeichnen, ergiebt sich

$$n = -\alpha \pm i\beta.$$

Wir erhalten daher

$$x = A . e^{nt} = A . e^{(-\alpha \pm i\beta) . t} \tag{57}$$

$$= A . e^{-\alpha t} . (\cos \beta t \pm i \sin \beta t). \tag{57a}$$

Die reelle Form der allgemeinen Lösung ist demnach

$$x = A . e^{-\alpha t} . \cos \beta t + B . e^{-\alpha t} . \sin \beta t. \tag{58}$$

Wir werden sie im folgenden Paragraphen weiter behandeln.

2. Die Reibung ist gerade so stark, dafs

$$b^2 = 4a^2 m$$

ist; dann verschwindet die Wurzel, und wir erhalten

$$n = -\frac{b}{2m}.$$

Es ist dann die allgemeine Lösung

$$x = A.e^{-\frac{b}{2m}.t} + B.t.e^{-\frac{b}{2m}.t}. \tag{59}$$

Sie geht aus der allgemeinen Lösung (58) hervor, wenn man in dieser statt der willkürlichen Constante B den Ausdruck $\frac{B}{\beta}$ einsetzt, der ebenfalls eine willkürliche Constante bezeichnet; denn lässt man nun β Null werden, so geht $\frac{\sin \beta t}{\beta}$ in t über und Gleichung (58) verwandelt sich in die Gleichung (59).

Die Bewegung besteht darin, dafs von der Anfangslage $x = A$, die zur Zeit $t = 0$ vorhanden, der Punkt sich mit wachsender Zeit entweder sofort oder nach einem einmaligen Wechsel des Bewegungssinnes asymptotisch der Ruhelage $x = 0$ nähert.

3. Die Reibung ist so grofs, dafs

$$b^2 > 4a^2 m,$$

also

$$\frac{b^2}{4m^2} > \frac{a^2}{m};$$

dann ist die Wurzel reell, und wir erhalten zwei reelle, aber stets negative Werthe für n, die wir mit n_1 und n_2 bezeichnen wollen. Die allgemeine Lösung ist dann

$$x = A.e^{n_1 t} + B.e^{n_2 t}. \tag{60}$$

In diesem Falle nähern sich, ähnlich wie im vorigen, falls der Punkt einmal aus seiner Ruhelage herausgebracht ist, die Werthe von x mit zunehmender Zeit t entweder sofort oder nach einem einmaligen Wechsel des Bewegungssinnes asymptotisch dem Werthe Null. Denn es ist

$$\frac{dx}{dt} = n_1 . A e^{n_1 t} + B . n_2 e^{n_2 t}.$$

Ein Umkehren kann nur eintreten für

$$n_1 A e^{n_1 t} + B n_2 e^{n_2 t} = 0$$

oder für

$$e^{(n_2 - n_1)t} = -\frac{n_1}{n_2} . \frac{A}{B}.$$

Da diese Gleichung nur für einen einzigen reellen Werth von t erfüllt sein kann, so ist es nicht möglich, dafs die Bewegung mehr als einmal umkehrt.

§ 17. Die Bewegungsform der gedämpften Schwingungen.

Für die Akustik hat nur der erste der behandelten Fälle, wo nämlich die Reibung so gering angenommen wurde, dafs $b^2 < 4a^2 m$ ist, praktische Bedeutung. Wir erhielten (Gleichung 58) als allgemeine Lösung

$$x = A . e^{-\alpha t} . \cos \beta t + B . e^{-\alpha t} . \sin \beta t ,$$

worin α und β reelle positive Gröfsen und A und B willkürliche Constanten bezeichneten.

Setzen wir nunmehr

$$A = R . \sin c$$

und

$$B = R . \cos c ,$$

so wird

$$x = R . e^{-\alpha t} . \sin (\beta t + c). \tag{61}$$

Wir haben hier also eine Bewegung, welche von den pendelartigen Schwingungen nur darin abweicht, dafs die Amplitude $R . e^{-\alpha t}$ keinen constanten Werth hat, sondern in Folge des in ihr enthaltenen Factors $e^{-\alpha t}$ mit der Zeit abnimmt. Es sind gedämpfte Schwingungen. Je kleiner b wird, desto kleiner wird auch α, also desto geringer ist die Abnahme der Amplitude.

Ist für einen bestimmten Werth von t die Elongation gleich Null, d. h. geht der Punkt durch die Gleichgewichtslage, so wird dieses nach der Zeit $\frac{2\pi}{\beta}$ wieder eintreten. Wir haben also die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\beta} , \tag{62}$$

und die Schwingungszahl

$$N = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} .$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{m}} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2 m}} . \tag{63}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{m}}$$

gleich der Schwingungszahl, falls keine Reibung vorhanden wäre.

Der Einflufs der Reibung bewirkt also, dafs die Schwingungszahl im Verhältnifs

$$1 : \sqrt{1 - \frac{b^2}{4\,a^2\,m}}$$

vermindert wird. Ist b nun klein gegen a, so wird die Abnahme der Schwingungszahl unbedeutend sein, besonders wenn die Masse des Punktes sehr grofs ist.

Der Factor $e^{-\alpha t}$ in dem Werthe für die Elongation in der Gleichung (61)

$$x = R \,.\, e^{-\alpha t} \,.\, \sin(\beta t + c)$$

bewirkt nun aber nicht nur eine stete Abnahme der Amplitude und constante Aenderung der Schwingungszahl im Vergleich zu den ungedämptten Schwingungen, sondern verschiebt auch den Zeitpunkt der maximalen Elongation. Bei der ungedämpften harmonischen Schwingung liegt, wie aus der Gleichung (1c) und (5) unmittelbar hervorgeht, die maximale Elongation in der Mitte zwischen zwei Durchgängen durch die Gleichgewichtslage. Um nun hier bei den gedämpften Schwingungen die Lage der maximalen Elongation, wo also $\frac{dx}{dt} = 0$ ist, zu finden, bilden wir

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \,.\, R \,.\, e^{-\alpha t} \,.\, \sin(\beta t + c) + \beta \,.\, R \,.\, e^{-\alpha t} \,.\, \cos(\beta t + c) \qquad (61\,\mathrm{a})$$

und wenn wir dieses gleich Null setzen, ergiebt sich

$$\frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{cotg}(\beta t + c). \qquad (64)$$

Da die Durchgänge durch die Gleichgewichtslage stattfinden, wenn $\sin(\beta t + c)$ gleich Null ist, so ist in dem in der Mitte zwischen beiden gelegenen Zeitmoment $\operatorname{cotg}(\beta t + c)$ gleich Null. Aus Gleichung (64) ergiebt sich nun aber, dafs im Zeitpunkt der maximalen Elongation $\operatorname{cotg}(\beta t + c)$ einen positiven Werth hat, der um so kleiner ist, je kleiner α, also je geringer die Dämpfung ist. Die Umkehr des schwingenden Punktes findet mithin nicht in der Mitte, sondern etwas näher dem vorausgegangenen Durchgang durch die Gleichgewichtslage statt. Die Abweichung ist um so geringer, je kleiner die Dämpfung; sie ist unabhängig von der Gröfse der zeitweiligen Amplitude. Zwei maximale Elongationen sind demnach stets genau durch den Zeitraum einer Schwingungsdauer von einander getrennt.

Bezeichnen wir zwei auf einander folgende Maxima von x mit $\overline{x_1}$ und $\overline{x_2}$, so ist

$$\left.\begin{aligned}\overline{x_1} &= C.e^{-\alpha t}\\ \text{und}\qquad \overline{x_2} &= C.e^{-\alpha(t+T)}\end{aligned}\right\}\qquad(65)$$

wo C für $R\sin(\beta t + c)$ geschrieben ist, oder

$$\left.\begin{aligned}\log\overline{x_1} &= \log C - \alpha t\\ \log\overline{x_2} &= \log C - \alpha(t+T).\end{aligned}\right\}\qquad(65a)$$

Daraus folgt:

$$\log\overline{x_1} - \log\overline{x_2} = \alpha.T.\qquad(65b)$$

Der Werth von α ist also aus zwei auf einander folgenden Maxima und der Schwingungszeit zu berechnen. Man nennt $\alpha.T$ das logarithmische Decrement der Schwingungen.

Ist die Dämpfung sehr gering, so können wir die durch sie verursachte Vergröſserung der Schwingungsdauer, die gegen α von zweiter Ordnung ist, vernachlässigen und für T den Werth der ungedämpften Schwingung einsetzen. Wir erhalten dann das logarithmische Decrement

$$\alpha.T = \pi\cdot\frac{b}{a\sqrt{m}}.\qquad(66)$$

Vierter Abschnitt.

Die Bewegungen eines beliebigen Systems von Massenpunkten unter dem Einfluſs conservativer Kräfte mit Berücksichtigung der Reibung.

§ 18. Die Bewegungsgleichung.

Für die ungedämpfte Bewegung eines Systems von Massenpunkten hatten wir die Gleichungen (18a)

$$m_{\mathfrak{a}}\cdot\frac{d^2 s_{\mathfrak{a}}}{dt^2} = -\sum_{\mathfrak{b}}\left\{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot s_{\mathfrak{b}}\right\}.$$

Hier ist nun ein weiteres Glied hinzuzufügen, das sich auf die Reibung bezieht. Bei jedem Punkte ist die Reibung nun sowohl bedingt durch die eigene Bewegung dieses Punktes in Bezug auf die anderen Punkte des Systems und die äufseren Körper, als auch durch die Bewegungen der anderen Punkte. Beides wird berücksichtigt, wenn wir die Bewegungsgleichung nunmehr schreiben:

$$m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 s_{\mathfrak{a}}}{d t^2} = - \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}} \right\} - \varepsilon \cdot \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \frac{d s_{\mathfrak{b}}}{d t} \right\}. \tag{67}$$

Hinsichtlich der Coefficienten Q ist zu bemerken, dafs wegen der Gleichheit von Action und Reaction

$$Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = Q_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \tag{68}$$

sein mufs, und dafs die Coefficienten $Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}$, $Q_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$ u. s. w. nur Bezug haben auf die Reibung der Massenpunkte $m_{\mathfrak{a}}$, $m_{\mathfrak{b}}$ u. s. w. gegen feste Punkte, welche dem System nicht angehören; ist das System also ein freies System, so ist

$$Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}} = Q_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} = \ldots . = 0.$$

Der Factor ε, den wir positiv annehmen, ist als Maafs der Reibung anzusehen, und durch seine Aenderung können wir jede Aenderung in der Gesammtgröfse der Reibung ausdrücken.

Multipliciren wir die Gleichung (67) mit $\frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t}$, und summiren dann nach $\mathfrak{a}$, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 s_{\mathfrak{a}}}{d t^2} \cdot \frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t} \right\} = & - \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t} \right\} \\ & - \varepsilon \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t} \cdot \frac{d s_{\mathfrak{b}}}{d t} \right\} \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Wenn wir nun mit L die actuelle, und mit Φ die potentielle Energie des Systems bezeichnen, so ist

$$\frac{d L}{d t} = \frac{d}{d t} \left[\tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} \left(\frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t} \right)^2 \right\} \right] = \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} \cdot \frac{d^2 s_{\mathfrak{a}}}{d t^2} \cdot \frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t} \right\} \tag{70}$$

und

$$\frac{d \Phi}{d t} = \frac{d}{d t} \left[\tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{a}} \cdot s_{\mathfrak{b}} \right\} \right] = \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t} \right\} \tag{71}$$

und wir erhalten daher

$$\frac{d}{d t} (L + \Phi) = - \varepsilon \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t} \cdot \frac{d s_{\mathfrak{b}}}{d t} \right\}. \tag{69a}$$

Es liegt nun in dem Wesen der Reibung, dafs die gesammte Energie des Systems mit der Zeit abnimmt; es ist also die linke

Seite dieser Gleichung negativ, und daher müssen die Coefficienten Q so beschaffen sein, dafs für alle reellen Werthe von $\frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t}$

$$\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left\{Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot\frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t}\cdot\frac{d s_{\mathfrak{b}}}{d t}\right\} > 0. \tag{72}$$

§ 19. Aufsuchung von Integralgleichungen.

Da die Gleichungen (67) homogene lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten sind, so erhalten wir Lösungen von der Form

$$s_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}} \cdot e^{n t}.$$

Setzen wir dies ein, so ergiebt sich

$$m_{\mathfrak{a}} \cdot n^2 \cdot a_{\mathfrak{a}} = -\sum_{\mathfrak{b}}\left\{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot a_{\mathfrak{b}}\right\} - \varepsilon \cdot n \sum_{\mathfrak{b}}\left\{Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot a_{\mathfrak{b}}\right\}$$

oder

$$m_{\mathfrak{a}} \cdot n^2 \cdot a_{\mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{b}}\left\{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot a_{\mathfrak{b}}\right\} + \varepsilon \cdot n \sum_{\mathfrak{b}}\left\{Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot a_{\mathfrak{b}}\right\} = 0. \tag{73}$$

Wir haben nun so viel derartige Gleichungen, als wir Werthe von $a_{\mathfrak{a}}$ haben. Die Gleichungen können nur dann bestehen, wenn entweder alle $a_{\mathfrak{a}} = 0$, d. h. wenn keine Bewegung vorhanden ist, welchen Fall wir hier ausschliefsen wollen, oder wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet, also

$$\begin{vmatrix} (n^2 m_1 + P_{1.1} + \varepsilon n Q_{1.1}), & (P_{1.2} + \varepsilon n Q_{1.2}), & (P_{1.3} + \varepsilon n Q_{1.3}) \cdots \\ (P_{2.1} + \varepsilon n Q_{2.1}), & (n^2 m_2 + P_{2.2} + \varepsilon n Q_{2.2}), & (P_{2.3} + \varepsilon n Q_{2.3}) \cdots \\ (P_{3.1} + \varepsilon n Q_{3.1}), & (P_{3.2} + \varepsilon n Q_{3.2}), & (n^2 m_3 + P_{3.3} + \varepsilon n Q_{3.3}) \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0. \tag{74}$$

Diese Gleichung ist ebenso, wie bei den ungedämpften Schwingungen eines Systems von Massenpunkten, wenn N veränderliche Coordinaten vorhanden sind, vom $(2N)$ten Grade für n. Sie kann zur Bestimmung der Werthe von n benutzt werden. Multipliciren wir jede der Gleichungen (73) mit dem im ersten Gliede vorkommenden Werthe $a_{\mathfrak{a}}$, und summiren dann über das ganze System, so erhalten wir

$$n^2 \sum_{\mathfrak{a}}\left\{m_{\mathfrak{a}}\, a_{\mathfrak{a}}^2\right\} + \sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left\{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot a_{\mathfrak{a}}\cdot a_{\mathfrak{b}}\right\} + \varepsilon . n \sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left\{Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot a_{\mathfrak{a}}\cdot a_{\mathfrak{b}}\right\} = 0. \tag{75}$$

Positive reelle Wurzeln für n können nicht vorkommen; denn dann würden in Folge der Gleichungen (73) auch alle Werthe der a

reell angenommen werden können, und damit die linke Seite der Gleichung (75) positiv sein, da die beiden Doppelsummen nach früheren Erörterungen positiv sind. Die Gleichung (75) kann also unter dieser Annahme nur dann bestehen, wenn alle $a = 0$ sind, d. h. wenn keine Bewegung vorhanden ist.

Negative reelle Wurzeln für n können aber, wie aus einer ähnlichen Ueberlegung hervorgeht, bestehen. Dann haben wir

$$s_\mathfrak{a} = a_\mathfrak{a} \,.\, e^{-\mu t},$$

wo nunmehr $a_\mathfrak{a}$ reell und μ positiv ist. Die Elongation jedes einzelnen Massenpunktes nähert sich also mit wachsender Zeit t asymptotisch dem Werthe Null. Die Bewegung des Systems ist daher eine aperiodische.

Sind complexe Wurzeln von n vorhanden, so müssen, da die Gleichung (74) nur reelle Coefficienten hat, stets conjugirte Paare vorkommen, also

$$n = \mu \pm i\nu$$

und aus den Gleichungen (73) folgt dann ferner, dafs einem solchen conjugirten Paare von n auch zwei conjugirte Systeme der Werthe von a entsprechen. Bezeichnen wir die conjugirten Werthe von a mit $a_\mathfrak{a}$ und $\alpha_\mathfrak{a}$, $a_\mathfrak{b}$ und $\alpha_\mathfrak{b}$ u. s. w., multipliciren dann jede der Gleichungen (73) mit dem entsprechenden conjugirten Werthe $\alpha_\mathfrak{a}$ und summiren wieder über das ganze System, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} n^2 \sum_\mathfrak{a} \left\{ m_\mathfrak{a} \,.\, a_\mathfrak{a} \,.\, \alpha_\mathfrak{a} \right\} + \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, \alpha_\mathfrak{a} \,.\, a_\mathfrak{b} \right\} & \\ + \varepsilon \,.\, n \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, \alpha_\mathfrak{a} \,.\, a_\mathfrak{b} \right\} = 0. & \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

Unter den Summenzeichen heben sich, wie früher (§ 7) nachgewiesen, alle imaginären Theile weg, so dafs die Summen also reelle und zwar positive Gröfsen sind. Setzen wir nun für n den Werth $\mu \pm i\nu$ ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} (\mu^2 - \nu^2 \pm 2\, i\, \mu\, \nu) \sum_\mathfrak{a} \left\{ m_\mathfrak{a} \,.\, a_\mathfrak{a} \,.\, \alpha_\mathfrak{a} \right\} + \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, \alpha_\mathfrak{a} \,.\, a_\mathfrak{b} \right\} & \\ + \varepsilon (\mu \pm i\nu) \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, \alpha_\mathfrak{a} \,.\, a_\mathfrak{b} \right\} = 0. & \end{aligned}\right\} \qquad (76\,\mathrm{a})$$

Da nun sowohl die Summe der reellen als auch der imaginären Theile dieser Gleichung, jede für sich, gleich Null sein mufs, so ergiebt sich

$$2\, i\, \mu\, \nu \sum_\mathfrak{a} \left\{ m_\mathfrak{a} \,.\, a_\mathfrak{a} \,.\, \alpha_\mathfrak{a} \right\} + \varepsilon\, i\, \nu \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, \alpha_\mathfrak{a} \,.\, a_\mathfrak{b} \right\} = 0$$

oder

$$2\mu \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} \cdot a_{\mathfrak{a}} \cdot \alpha_{\mathfrak{a}} \right\} + \varepsilon \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \alpha_{\mathfrak{a}} \cdot a_{\mathfrak{b}} \right\} = 0. \tag{77}$$

Daraus folgt:

$$\mu = -\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \alpha_{\mathfrak{a}} \cdot a_{\mathfrak{b}} \right\}}{\sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} \cdot a_{\mathfrak{a}} \cdot \alpha_{\mathfrak{a}} \right\}}. \tag{77a}$$

Weil nach unserer Festsetzung ε positiv ist, so mufs μ negativ sein, und es kann μ nur gleichzeitig mit ε, d. h. mit der Reibung verschwinden. So lange also Reibung vorhanden ist, sind rein imaginäre Werthe von n unmöglich.

Wir haben schon erwähnt, dafs einem Paare conjugirter complexer Werthe von n auch zwei Systeme conjugirter Werthe von a entsprechen müssen. Wir wollen nun festsetzen, dafs die beiden der früheren $\mathfrak{f}$ten Wurzel von n^2 entsprechenden Werthe

$$n_{\mathfrak{f}} = -\varkappa_{\mathfrak{f}} \pm i \nu_{\mathfrak{f}}, \tag{78}$$

wo wir also für μ den Werth $-\varkappa$ eingeführt haben, für den $\mathfrak{a}$ten Massenpunkt ergeben

$$a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} = \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{\pm i \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}}. \tag{79}$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned} s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} &= \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{\pm i \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}} . e^{(-\varkappa_{\mathfrak{f}} \pm i \nu_{\mathfrak{f}}) \cdot t} \\ &= \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} . \{ \cos(\nu_{\mathfrak{f}} t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \pm i \sin(\nu_{\mathfrak{f}} t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \} \\ &= \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} . \cos(\nu_{\mathfrak{f}} t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \pm i \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} . \sin(\nu_{\mathfrak{f}} t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}). \end{aligned} \tag{80}$$

Da der reelle Theil sowohl wie der imaginäre eine Lösung für $s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$ darstellt, so ist also in diesem Falle die Bewegung des Massenpunktes eine gedämpfte Sinusschwingung, deren allgemeine Form wir unter Einführung der Coefficienten $A_{\mathfrak{f}}$ und $B_{\mathfrak{f}}$ schreiben können:

$$s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} = \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} \{ A_{\mathfrak{f}} \cdot \cos(\nu_{\mathfrak{f}} . t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) + B_{\mathfrak{f}} \cdot \sin(\nu_{\mathfrak{f}} . t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \}. \tag{81}$$

$A_{\mathfrak{f}}$ und $B_{\mathfrak{f}}$ sind dabei willkürliche Constanten. Die Form solcher Schwingungen haben wir oben bei einem einzelnen unter dem Einflufs der Reibung schwingenden Massenpunkte in § 17 eingehend besprochen.

§ 20. Anpassung des allgemeinen Integrals an einen gegebenen Anfangszustand des Systems.

Das vollständige Integral für $s_{\mathfrak{a}}$ erhalten wir, indem wir sämmtliche Einzellösungen $s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$, wie sie in der letzten Gleichung (81) dargestellt sind, summiren. Es ergiebt sich also:

$$s_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{f}} \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} \left\{ A_{\mathfrak{f}} \cdot \cos(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) + B_{\mathfrak{f}} \cdot \sin(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \right\} \tag{82}$$

Die Geschwindigkeit, welche dem $\mathfrak{a}$ten Massenpunkte in jedem Momente zukommt, erhalten wir durch Differentiation nach der Zeit, so daſs

$$\left.\begin{aligned} \frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t} = \sum_{\mathfrak{f}} \Big[\varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} \cdot \Big\{ - A_{\mathfrak{f}} \cdot \big(\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot \cos(\nu_{\mathfrak{f}} t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \\ + \nu_{\mathfrak{f}} \cdot \sin(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \big) + B_{\mathfrak{f}} \cdot \big(- \varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot \sin(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \\ + \nu_{\mathfrak{f}} \cdot \cos(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \big) \Big\} \Big] \cdot \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Bezeichnen wir nun die Elongationen und die Geschwindigkeiten zur Zeit $t = 0$ mit $\overline{s_{\mathfrak{a}}}$ und $\overline{\frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t}}$, so erhalten wir

$$\overline{s_{\mathfrak{a}}} = \sum_{\mathfrak{f}} \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \left\{ A_{\mathfrak{f}} \cdot \cos\beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} + B_{\mathfrak{f}} \cdot \sin\beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \right\} \tag{84}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \overline{\frac{d s_{\mathfrak{a}}}{d t}} = \sum_{\mathfrak{f}} \Big[\varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \Big\{ - A_{\mathfrak{f}} (\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot \cos\beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} + \nu_{\mathfrak{f}} \cdot \sin\beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \\ + B_{\mathfrak{f}} (- \varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot \sin\beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} + \nu_{\mathfrak{f}} \cdot \cos\beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \Big\} \Big] \cdot \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Um den Werth von $s_{\mathfrak{a}}$ völlig zu bestimmen, haben wir zweimal so viel Coefficienten nöthig, als die nach $\mathfrak{f}$ genommene Summe Summanden hat; nach unserer früheren Festsetzung also $2N$. Nun haben wir aber auch N lineare Gleichungen (84) und ebenfalls N solcher Gleichungen (85). Daraus kann man die $2N$ Werthe der Coefficienten A und B eindeutig bestimmen.

§ 21. Die Reibung ist sehr klein.

Wir wollen uns nunmehr auf den Fall beschränken, welcher für die Akustik allein praktische Bedeutung hat, daſs nämlich die Reibung sehr gering sei. Dann hat in unseren Gleichungen ε einen sehr kleinen Werth, und zwar wollen wir die Annahme machen, dafs wir die höheren Potenzen gegenüber den niederen vernachlässigen dürfen.

Differentiiren wir die früher erhaltene Gleichung (74) nach ε und setzen $\varepsilon = 0$, so haben wir jede einzelne Horizontalreihe für sich zu differentiiren, z. B. die erste so:

$$\begin{vmatrix} 2n\dfrac{dn}{d\varepsilon}m_1 + nQ_{11}, & nQ_{12},\dots \\ P_{21} & n^2 m_2 + P_{22},\dots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

und die Summe der so entstandenen Determinanten gleich Null zu setzen. Nun kann man aus jeder differentiirten Horizontalreihe den Factor n herausziehen. Daher erhält man für $\dfrac{dn}{d\varepsilon}$ die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} 2\dfrac{dn}{d\varepsilon}m_1 + Q_{11}, & Q_{12},\dots \\ P_{21} & n^2 m_2 + P_{22},\dots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \text{etc.} \tag{86}$$

aus der sich, da n^2 für $\varepsilon = 0$ reell ist, ein reeller Werth für $\dfrac{dn}{d\varepsilon}$ ergiebt.

Bezeichnen wir nun mit n' den Werth für den Fall, dafs keine Reibung vorhanden, also $\varepsilon = 0$ ist, so können wir bis auf Glieder zweiter Ordnung

$$n = n' + \frac{dn}{d\varepsilon}\cdot\varepsilon \tag{87}$$

setzen. Im zweiten Abschnitt haben wir aber gefunden, dafs bei einem solchen System von Massenpunkten, in dem keine reibenden Kräfte wirksam sind,

$$n' = \pm i\nu$$

war, wo ν die Schwingungszahl in 2π Secunden ausdrückte, und im § 19 fanden wir, dass der reelle Theil von n negativ sein muss. Also kann $\dfrac{dn}{d\varepsilon}$ nur negativ sein. Wir setzen nun

$$\frac{dn}{d\varepsilon}\cdot\varepsilon = -\varkappa,$$

wo also $\varkappa$ in Folge unserer Annahme einer kleinen Reibung und des Nachweises, daſs $\frac{dn}{d\varepsilon}$ reell und negativ ist, eine kleine positive reelle Gröſse bezeichnet. Wir haben dann

$$n = -\varkappa \pm i\nu, \tag{87a}$$

und wenn wir dieses in unsere oben (§ 19) gefundene Lösung

$$s_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}} \,.\, e^{nt}$$

einsetzen, ergiebt sich

$$\begin{aligned} s_{\mathfrak{a}} &= a_{\mathfrak{a}} \,.\, e^{-\varkappa t \pm i\nu t} \\ &= a_{\mathfrak{a}} \,.\, e^{-\varkappa t} \,.\, (\cos \nu t \pm i \sin \nu t). \end{aligned} \tag{88}$$

Ebenso, wie bei einem einzelnen schwingenden Massenpunkte, der unter dem Einfluſs der Reibung steht, haben wir also auch hier bei jedem Punkte des Massensystems eine gedämpfte pendelartige Schwingung; die Amplitude nimmt, da $\varkappa$ dem Werthe von ε proportional, um so schneller ab, je gröſser ε ist. — Die Schwingungszahl ist aber durch die hinzugetretene Reibung innerhalb der hier befolgten Genauigkeit der Berechnung unverändert geblieben. Erst eine weiter gehende Annäherung würde ergeben, daſs sie sich um eine Gröſse zweiter Ordnung ändert (und zwar kleiner wird), wenn ε eine Gröſse erster Ordnung ist.

Nunmehr wollen wir den Einfluſs einer kleinen Aenderung auf die Gröſse der Amplituden $a_{\mathfrak{a}}$ betrachten.

Wir gehen aus von der Gleichung (73)

$$m_{\mathfrak{a}} n^2 a_{\mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, a_{\mathfrak{b}} \right\} + \varepsilon n \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, a_{\mathfrak{b}} \right\} = 0,$$

und differentiiren wiederum nach ε, indem wir auch die Aenderung der a beachten. Für $\varepsilon = 0$ erhalten wir dann:

$$\left.\begin{aligned} 2 m_{\mathfrak{a}} n \frac{dn}{d\varepsilon} \cdot a_{\mathfrak{a}} + m_{\mathfrak{a}} n^2 \frac{d a_{\mathfrak{a}}}{d\varepsilon} + \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{d a_{\mathfrak{b}}}{d\varepsilon} \right\} \\ + n \,.\, \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, a_{\mathfrak{b}} \right\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Eine solche Gleichung ist nun für jedes $\mathfrak{a}$ aufzustellen, und in dem dann entstehenden System von Gleichungen haben wir die Differentialquotienten $\frac{da}{d\varepsilon}$ als die Unbekannten zu betrachten. Die Coefficienten P und $m_{\mathfrak{a}} n^2$, mit denen diese Unbekannten multiplicirt sind, sind nun reell, während alle übrigen Glieder rein imaginär sind; denn die Werthe von m, n^2, a, $\frac{dn}{d\varepsilon}$ und $\sum_{\mathfrak{b}} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{b}} \right\}$ sind reell und n ist rein imaginär. Es müssen also die Werthe von $\frac{da}{d\varepsilon}$ sämmtlich rein imaginär sein.

Durch die Reibung kommt also zu den dem reibungsfreien System entsprechenden Werthen von a, die wir hier mit a' bezeichnen wollen, ein imaginärer Theil hinzu, der ε proportional ist; wir haben also

$$a_{\mathfrak{a}} = a'_{\mathfrak{a}} + i\beta_{\mathfrak{a}}\varepsilon, \tag{90}$$

wo $\beta_{\mathfrak{a}}$ eine reelle Gröfse ist.

Für $s_{\mathfrak{a}}$ ergiebt sich mithin

$$s_{\mathfrak{a}} = (a'_{\mathfrak{a}} + i\beta_{\mathfrak{a}}\varepsilon) \,.\, e^{-\varkappa t} \,.\, e^{\pm i\nu t} \tag{91}$$

oder

$$\begin{aligned} &= \varrho_{\mathfrak{a}} \,.\, e^{i\omega_{\mathfrak{a}}} \,.\, e^{-\varkappa t} \,.\, e^{\pm i\nu t} \\ &= \varrho_{\mathfrak{a}} \,.\, e^{-\varkappa t} \,.\, e^{i(\omega_{\mathfrak{a}} \pm \nu t)} \\ &= \varrho_{\mathfrak{a}} \,.\, e^{-\varkappa t} \,.\, \{\cos(\omega_{\mathfrak{a}} \pm \nu t) + i \,.\, \sin(\omega_{\mathfrak{a}} \pm \nu t)\}, \end{aligned} \tag{91a}$$

wo

$$\varrho_{\mathfrak{a}}^2 = a'^2_{\mathfrak{a}} + \beta_{\mathfrak{a}}^2 \varepsilon^2$$

und

$$\operatorname{tg} \omega_{\mathfrak{a}} = \frac{\beta_{\mathfrak{a}}\varepsilon}{a'_{\mathfrak{a}}}$$

ist. Die Amplitude wird also durch die Reibung, abgesehen von dem Factor $e^{-\varkappa t}$, nur um eine Gröfse zweiter Ordnung geändert und die Hauptwirkung der Reibung ist eine Phasenänderung.

Da nun $\omega_{\mathfrak{a}}$ mit dem Index $\mathfrak{a}$ sich ändert, so werden die verschiedenen Massenpunkte, sowie auch die Coordinaten desselben Massenpunktes im Allgemeinen einen Phasenunterschied gegen einander haben, und die thatsächlich ausgeführte Bewegung jedes Massenpunktes wird demnach eine Ellipse sein, wobei die Grenzfälle (Gerade und Kreis) eingeschlossen sind.

Fünfter Abschnitt.

Das Mitschwingen eines einzelnen Massenpunktes.

§ 22. Die Bewegungsgleichung und allgemeine Integrationsregeln für dieselbe.

In den bisherigen Abschnitten haben wir die Ursache, welche am Anfang der betrachteten Bewegung den Massenpunkt oder das Massenpunktsystem aus seiner Gleichgewichtslage herausbrachte, unberücksichtigt gelassen. Wir haben nur stillschweigend angenommen, dafs die Kraft, welche diese Ablenkung bewirkte, zu der Zeit, auf welche sich unsere Gleichungen bezogen, nicht mehr vorhanden war, so dafs also ausschliefslich die sogenannte elastische Kraft und die Reibung in den Bewegungsgleichungen Ausdruck fanden. Wir wollen nunmehr annehmen, dafs neben der sogenannten elastischen Kraft und der Reibung eine dauernde äufsere Einwirkung stattfindet. Es entstehen dann Schwingungen, welche unter günstigen Umständen eine beträchtliche Amplitude erhalten können. Man nennt diesen Vorgang gewöhnlich „Mitschwingen". Wir wollen ihn hier zunächst für einen einzelnen Massenpunkt behandeln, und zwar unter der Voraussetzung, dafs wir die Entfernungen aus der Gleichgewichtslage, also die Elongationen, stets als sehr klein ansehen dürfen.

Bezeichnen wir die einwirkende äufsere Kraft, welche zunächst als eine beliebige Funktion der Zeit gegeben sein mag, mit $F_{(t)}$, so haben wir die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = - a^2 x - b \frac{d x}{d t} + F_{(t)} \tag{92}$$

Ueber die Integration dieser Gleichung lassen sich zwei allgemeine Regeln aufstellen.

1. Es seien ξ_1 und ξ_2 zwei Lösungen der Gleichung, so dafs also

$$m \frac{d^2 \xi_1}{d t^2} = - a^2 \xi_1 - b \frac{d \xi_1}{d t} + F_{(t)}$$

und

$$m \frac{d^2 \xi_2}{d t^2} = - a^2 \xi_2 - b \frac{d \xi_2}{d t} + F_{(t)},$$

so erhalten wir durch Subtraction

$$m \frac{d^2}{dt^2}(\xi_2 - \xi_1) = -a^2(\xi_2 - \xi_1) - b\frac{d}{dt}(\xi_2 - \xi_1),$$

d. h. dieselbe Bewegungsgleichung, die wir im dritten Abschnitt behandelt haben, und welche sich auf das ausschliefsliche Vorhandensein der sogenannten elastischen Kraft und der Reibung bezieht. Haben wir also ein einziges Integral ξ_1 unserer Bewegungsgleichung (92) gefunden, und kennen wir das allgemeine Integral η derselben Gleichung, nachdem wir in ihr $F_{(t)} = 0$ gesetzt haben, so ist $\eta + \xi_1$ das allgemeine Integral der Gleichung (92).

2. Es sei ξ eine Lösung der Gleichung (92), so dafs also

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -a^2 \xi - b\frac{d\xi}{dt} + F_{(t)}.$$

Wir nehmen nunmehr an, dafs an Stelle der Kraft $F_{(t)}$ eine andere, etwa $G_{(t)}$, vorhanden sei, und dafs dann η eine Lösung der dann gültigen Bewegungsgleichung sei, so dafs

$$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -a^2 \eta - b\frac{d\eta}{dt} + G_{(t)}.$$

Dann erhalten wir durch Addition

$$m \frac{d^2}{dt^2}(\xi + \eta) = -a^2(\xi + \eta) - b\frac{d}{dt}(\xi + \eta) + F_{(t)} + G_{(t)}.$$

Daraus folgt also, dafs beim gleichzeitigen Einwirken zweier Kräfte die Lösung erhalten wird durch Summirung der für das Vorhandensein der einzelnen Kräfte gültigen Integrale. Es findet demnach eine vollständige Superposition der entsprechenden Bewegungen bei gleichzeitigem Einwirken mehrerer Kräfte statt.

§ 23. Umformung und Integration der Bewegungsgleichung.

Wir können nunmehr die allgemeine Function $F_{(t)}$ in unserer Gleichung (92) durch eine Summe anderer Functionen ersetzen und für jede derselben dann eine Lösung suchen.

Bei den akustischen Phänomenen ist die durch $F_{(t)}$ dargestellte Kraft im Allgemeinen eine nach der Zeit periodische Function, und diese können wir dann in eine Fourier'sche Reihe auflösen. Auch können wir uns die Glieder der Fourier'schen Reihe als die reellen (oder die imaginären) Theile von Exponentialfunctionen der Form $A.e^{nt}$ denken, wo n einen imaginären Werth hat.

Wir wollen daher $F_{(t)}$ durch $A.e^{nt}$ ersetzen und erhalten somit

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x - b\frac{dx}{dt} + A.e^{nt}. \tag{93}$$

Diese Gleichung entspricht dann einem einzelnen Gliede der Fourier'schen Reihe, in die wir $F_{(t)}$ aufgelöst haben, und nachdem wir für alle Glieder die Lösung gefunden, ergiebt sich durch Summation die Lösung für die allgemeine periodische Function $F_{(t)}$.

Ein einzelnes particuläres Integral der Gleichung (93) ist

$$x = B.e^{nt}. \tag{94}$$

Setzen wir diesen Werth ein und dividiren durch e^{nt}, so ergiebt sich

$$mn^2B = -a^2B - b.n.B + A \tag{95}$$

oder

$$B(mn^2 + a^2 + bn) = A$$

oder

$$B = \frac{A}{mn^2 + a^2 + bn}. \tag{95a}$$

Somit ist also aus den gegebenen Constanten der Gleichung der Werth von B bestimmt.

Da n nach unseren Voraussetzungen imaginär ist, so wollen wir

$$n = i\nu$$

setzen, und erhalten dann

$$B = \frac{A}{-m\nu^2 + a^2 + ib\nu}. \tag{95b}$$

Wir setzen nunmehr

$$\left.\begin{aligned} -m\nu^2 + a^2 &= \varrho.\cos c \\ \text{und}\quad b\nu &= \varrho.\sin c, \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

so dafs also

$$\varrho^2 = (a^2 - m\nu^2)^2 + b^2\nu^2 \tag{96a}$$

und

$$\operatorname{tg} c = \frac{b\nu}{-m\nu^2 + a^2} \tag{96b}$$

ist. Wir erhalten dann

$$B = \frac{A}{\varrho.e^{ic}} = \frac{A}{\varrho}.e^{-ic} \tag{95c}$$

und somit

$$x = \frac{A}{\varrho}.e^{-ic}.e^{i\nu t} = \frac{A}{\varrho}e^{i(\nu t - c)}$$

$$= \frac{A}{\varrho}[\cos(\nu t - c) + i\sin(\nu t - c)] \tag{94a}$$

Nun war aber die einwirkende Kraft

$$\begin{aligned} A \, . \, e^{nt} &= A \, . \, e^{i\nu t} \\ &= A \, . \, [\cos \nu t + i \sin \nu t]. \end{aligned}$$

Dem reellen Theile des Ausdruckes für die einwirkende Kraft entspricht auch der reelle Theil des Werthes von x. Wir sehen also, dafs durch die einwirkende pendelartige Schwingung $A \, . \cos \nu t$ der Massenpunkt m in eine pendelartige Schwingung von der Form

$$x = \frac{A}{\varrho} \cdot \cos (\nu t - c) \tag{97}$$

gebracht wird. Die Schwingungszahl ist dieselbe, aber die Amplitude im Allgemeinen verschieden; aufserdem besteht eine Verschiebung der Phase.

Das allgemeine Integral erhalten wir nun aus diesem particulären, indem wir das für $A = 0$ bestehende allgemeine Integral addiren. Nehmen wir an, dafs die Reibung gering sei, so können wir das letztere [vergl. § 17, Gleichung (61)] schreiben

$$R \, . \, e^{-\alpha t} . \sin (\beta t + c')$$

und erhalten dann hier als allgemeines Integral für den mitschwingenden Punkt

$$x = \frac{A}{\varrho} \cos (\nu t - c) + R \, . \, e^{-\alpha t} . \sin (\beta t + c'). \tag{98}$$

Die beiden willkürlichen Constanten R und c' erlauben die Bewegung für einen bestimmten Zeitpunkt einer gegebenen Elongation und Geschwindigkeit anzupassen.

Das zweite Glied hat aber in Folge des Factors $e^{-\alpha t}$ nur für den Anfang Bedeutung, es schwindet immer mehr, während das erste Glied seinen Werth beibehält.

Ist die entstandene Bewegung hörbar, so treten, wenn ν und β nahezu gleich sind, am Anfang Schwebungen auf, die aber je nach der Gröfse von α mehr oder minder schnell verlöschen, und es bleibt dann nur derjenige Ton bestehen, der der Schwingungszahl der erregenden Kraft entspricht, von dem Eigenton des erregten Punktes aber völlig unabhängig ist.

§ 24. Die Stärke des Mitschwingens.

Die dauernde Form der entstehenden Bewegung ist gegeben durch Gleichung (97)

$$x = \frac{A}{\varrho} \cdot \cos(\nu t - c)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{(a^2 - m\,\nu^2)^2 + b^2 \nu^2}} \cdot \cos(\nu t - c). \tag{97 a}$$

Setzen wir nun

$$N^2 = \frac{a^2}{m}, \tag{99}$$

wo also N die auf 2π Secunden bezogene Schwingungszahl bezeichnet, welche dem Massenpunkt m unter dem ausschliefslichen Einflufs der ihn in die Gleichgewichtslage zurücktreibenden Kraft zukommt, so wird

$$x = \frac{A}{\sqrt{m^2 (N^2 - \nu^2)^2 + b^2 \nu^2}} \cdot \cos(\nu t - c). \tag{97 b}$$

Das Mitschwingen ist also um so stärker, je genauer die Schwingungszahl der zugeleiteten Bewegung mit der Schwingungszahl der reibungsfreien Eigenbewegung des erregten Körpers übereinstimmt. Sind beide Schwingungszahlen gleich, so ist die Amplitude der entstandenen Bewegung der Dämpfung umgekehrt proportional und von der sonstigen Beschaffenheit des erregten Körpers unabhängig, da wir in diesem Falle

$$x = \frac{A}{b\,\nu} \cdot \cos(\nu t - c) \tag{100}$$

haben. Bei sehr kleinem b, d. h. bei sehr geringer Reibung würde dann die Stärke des Mitschwingens, also die Amplitude der erregten Bewegung ungemein grofs werden können. Doch ist zu beachten, dafs für diesen Fall unsere ganze Betrachtung den Bereich ihrer Gültigkeit überschreitet, da wir von der Voraussetzung kleiner Elongationen ausgegangen sind.

Ist b sehr klein, so wird schon eine geringe Abweichung in den Schwingungszahlen die Stärke des Mitschwingens sehr beeinflussen, weil das Verhältnifs von $m^2 (N^2 - \nu^2)^2 + b^2 \nu^2$ zu $b^2 \nu^2$ schnell mit $N^2 - \nu^2$ wächst.

Ist b hingegen sehr grofs, so kommt eine Differenz zwischen den Schwingungszahlen nicht so sehr in Betracht.

§ 25. Die Gröfse des Phasenunterschiedes.

Der Phasenunterschied zwischen der erregenden und der erregten oscillirenden Bewegung ist gegeben durch den Winkel c. Nehmen wir für ϱ den positiven Werth an, so ergiebt sich, dafs c innerhalb der ersten beiden Quadranten liegt, da $\varrho \,.\, \sin c = b \,.\, \nu$ ist, und somit $\sin c$ stets einen positiven Werth hat.

Wir haben ferner die Beziehung (Gleichung 96)

$$\begin{aligned} \varrho \,.\, \cos c &= -m \nu^2 + a^2 \\ &= m(N^2 - \nu^2). \end{aligned} \tag{101}$$

Ist nun

1) $N > \nu$, so ist $\varrho \,.\, \cos c$ also auch $\cos c$ positiv;

demnach liegt dann c im ersten Quadranten,

2) $N = \nu$; dann ist $\cos c = 0$, also $c = 90^0$;

3) $N < \nu$; so ist $\cos c$ negativ, und somit liegt c im zweiten Quadranten.

Die nebenstehende Fig. 1 stellt diese Verhältnisse in übersichtlicher Weise dar.

Die Gröfse des Phasenunterschiedes ist also abhängig von dem Unterschiede zwischen der Schwingungszahl des erregenden und derjenigen des Eigentones des erregten Massenpunktes. Sind die Schwingungszahlen genau gleich, so beträgt der Phasenunterschied eine Viertelschwingung. Ist die Schwingungszahl des erregenden Körpers die kleinere, so ist die Phasendifferenz geringer als eine Viertelschwingung; ist sie die gröfsere, so beträgt die Phasendifferenz mehr als eine Viertelschwingung.

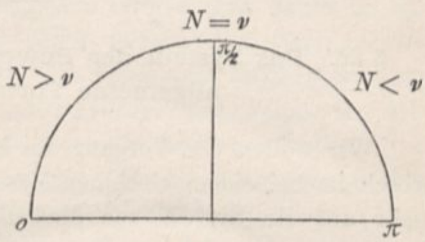

Fig. 1.

Bei geringer Reibung des erregten Massenpunktes, — und dieses ist der gewöhnlich vorkommende Fall —, folgt aus der Gleichung (96b)

$$\operatorname{tg} c = \frac{b\nu}{-m\nu^2 + a^2} = \frac{b\nu}{m(N^2 - \nu^2)}, \tag{96c}$$

dafs die Phasendifferenz c nur dann einen von Null oder 180^0 erheblich verschiedenen Werth hat, wenn N und ν sehr nahe übereinstimmen. Eine geringe Zunahme der Differenz zwischen N und ν hat, da hier nur das Verhältniſs zu dem kleinen Werthe $b\nu$ in Betracht kommt, schon eine beträchtliche Verkleinerung von $\operatorname{tg} c$ zur Folge. Bei schwacher Dämpfung ist die Phasendifferenz von den Schwingungszahlen also in ähnlicher Weise abhängig, wie die Stärke des Mitschwingens, und sie kann in diesem Falle somit als ein ziemlich empfindlicher Maaſsstab für die Stärke der Resonanz benutzt werden; bei manchen akustischen Phänomenen läſst sie sich nun mittelst optischer Beobachtungen (Lissajous'sche Figuren) leicht bestimmen, so daſs wir also auch die Stärke des Mitschwingens in einem gegebenen Falle leicht beurtheilen können.

Sechster Abschnitt.

Das Mitschwingen eines Systems von Massenpunkten.

---

§ 26. Das System der Bewegungsgleichungen und die allgemeine Form der Lösung.

Wir wollen den Vorgang des Mitschwingens, den wir im vorigen Abschnitt bei einem einzelnen Massenpunkte betrachtet haben, nunmehr auf ein System von Massenpunkten ausdehnen. Es wirken dann also neben der sogenannten elastischen Kraft und der Reibung noch äuſsere Kräfte ein.

Für diese Annahme gilt dasselbe Gesetz der Superposition der Bewegungen bei gleichzeitigem Einwirken mehrerer Kräfte, welches wir oben in § 22 für einen einzelnen mitschwingenden Massenpunkt abgeleitet haben. Wir brauchen uns daher auch hier nur auf den Fall zu beschränken, daſs die auf jeden Punkt einwirkende Kraft durch eine Function von der Form $A \cdot e^{nt}$ dargestellt werden kann.

Mit Benutzung der in den früheren Abschnitten gebrauchten Bezeichnungen besteht hier für die einzelnen das System bildenden Massenpunkte die Bewegungsgleichung:

$$m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 s_{\mathfrak{a}}}{d t^2} = - \sum_{\mathfrak{b}} (P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}}) - \varepsilon \sum_{\mathfrak{b}} \left(Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \frac{d s_{\mathfrak{b}}}{d t} \right) + A_{\mathfrak{a}} \cdot e^{nt} \qquad (102)$$

Nach Analogie der früheren Darlegungen ist zu schliefsen, dafs ein Integral dieser Gleichung sich in der Form

$$s_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}} \cdot e^{nt} \tag{103}$$

schreiben läfst. Haben wir ein einziges derartiges Integral gefunden, so sind ebenso, wie bei einem einzelnen mitschwingenden Massenpunkt, alle anderen Integrale bekannt; denn wir erhalten sie, indem wir zu dem erst gefundenen die Integrale der im vierten Abschnitt aufgestellten Gleichungen addiren.

Setzt man nun den Werth für $s_{\mathfrak{a}}$ aus Gleichung (103) in die Gleichung (102) ein, so ergiebt sich

$$m_{\mathfrak{a}} n^2 a_{\mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{b}} (P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{b}}) + \varepsilon n \sum_{\mathfrak{b}} (Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{b}}) = A_{\mathfrak{a}} \tag{104}$$

Alle diese Gleichungen, deren für das ganze System so viele aufgestellt werden können, als veränderliche Coordinaten vorhanden, sind linear nach den Gröfsen $a_{\mathfrak{a}}$, aber nicht homogen. Ist nun die Determinante dieses Gleichungssystems von Null verschieden, so lassen sich die Werthe $a_{\mathfrak{a}}$ eindeutig und linear aus den Werthen von $A_{\mathfrak{a}}$ bestimmen.

Da nun in unserem Falle die zugeleitete Bewegung eine periodische ist, so ist n eine rein imaginäre Gröfse, und daher ist die Bedingung, dafs die Determinante nicht verschwinden darf, erfüllt.

Die Lösungen von der Form der Gleichung (103) geben ein System von einfachen, pendelartigen Schwingungen, welche im Allgemeinen elliptisch sind und mit unveränderter Amplitude so lange dauern, als die Kraft einwirkt. Ihnen superponiren sich dann noch in der allgemeinen Lösung Schwingungen, welche den Eigenschwingungen des Systems entsprechen, aber, wie im vierten Abschnitt gezeigt worden, mit der Zeit verlöschen.

Durch geeignete Bestimmungen der vorkommenden Coefficienten kann der Anfangszustand des Systems gegebenen Bedingungen angepafst werden.

§ 27. Die Stärke des Mitschwingens.

Wir haben oben gesehen, dafs jedes System von discreten Massenpunkten, welche durch elastische Kräfte in ihrer Gleichgewichtslage gehalten oder wieder in diese zurückgeführt werden, im Allgemeinen so viel verschiedene Eigenschwingungen ausführen kann, als das System Veränderliche besitzt. Nunmehr wollen wir untersuchen, ob zwischen diesen Eigenschwingungen und der Stärke des Mitschwingens, welches wir jetzt betrachten, irgend welche Beziehung besteht.

Wenn zwei oder mehrere Kräfte das Mitschwingen bewirken, so haben wir bei einem einzelnen Punkte gesehen (§ 22), dafs dann die durch die einzelnen Kräfte gegebenen Bewegungen sich superponiren. Bei einem System von Massenpunkten haben wir nun dieselbe Form der Bewegungsgleichungen, und daher gilt das gleiche Gesetz auch hier.

Die Gröfse der von aufsen einwirkenden Kräfte ist hier durch das System der Coefficienten $A_\mathfrak{a}$ gegeben. Wir können nun jeden dieser Coefficienten $A_\mathfrak{a}$ in eine Reihe von Gliedern zerlegen, von denen jedes einzelne einer Eigenschwingung entspricht, die in dem Punktsystem in Folge der inneren Kräfte auftreten kann.

Bezeichnen wir mit α die Amplituden der einzelnen Massenpunkte in einem von äufseren Kräften freien System (die wir früher in § 19 u. d. folg. a genannt haben), und wählen für die verschiedenen Massenpunkte $\mathfrak{a}$ und für die verschiedenen Eigenschwingungen $\mathfrak{p}$ als laufenden Index, so können wir ein System von Gleichungen

$$m_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{p} (B_\mathfrak{p} \cdot \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}) = A_\mathfrak{a} \tag{105}$$

aufstellen, aus dem sich die Werthe $B_\mathfrak{p}$ bestimmen lassen.

Wirkt nun an Stelle von $A_\mathfrak{a}$ nur die eine Componente $m_\mathfrak{a} . B_\mathfrak{p} . \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}$ ein, welche der $\mathfrak{p}$ten Eigenschwingung des Systems entspricht, und bezeichnen wir die dann bestehende Amplitude des $\mathfrak{a}$ten Punktes mit $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}$, so haben wir anstatt der Gleichung (104) nunmehr die Gleichungen

$$m_\mathfrak{a} n^2 a_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} + \sum_\mathfrak{b} (P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{b},\mathfrak{p}}) + \varepsilon n \sum_\mathfrak{b} (Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{b},\mathfrak{p}}) = m_\mathfrak{a} . B_\mathfrak{p} . \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}. \tag{106}$$

Die früheren Gleichungen (73) lauten nunmehr mit Benutzung der jetzt eingeführten Bezeichnung

$$m_\mathfrak{a} . n_\mathfrak{p}^2 \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} + \sum_\mathfrak{b} (P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \alpha_{\mathfrak{b},\mathfrak{p}}) + \varepsilon n_\mathfrak{p} \sum_\mathfrak{b} (Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \alpha_{\mathfrak{b},\mathfrak{p}}) = 0. \tag{107}$$

Den Gleichungen (106) kann man für $\varepsilon = 0$ dadurch genügen, dafs man

$$a_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} = C_\mathfrak{p} \cdot \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} \tag{108}$$

setzt. Multiplicirt man nämlich die Gleichungen (107) mit $C_\mathfrak{p}$ und subtrahirt sie von den Gleichungen (106), so ergiebt sich:

$$C_\mathfrak{p} \cdot \left\{ (n^2 - n_\mathfrak{p}^2) . m_\mathfrak{a} . \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} + \varepsilon (n - n_\mathfrak{p}) \sum_\mathfrak{b} (Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}) \right\} = m_\mathfrak{a} . B_\mathfrak{p} . \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}. \tag{109}$$

Diese Gleichungen sind für $\varepsilon = 0$ erfüllt, wenn man setzt:

$$C_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}} \cdot \frac{1}{n^2 - n_{\mathfrak{p}}^2} \,. \tag{110}$$

Nun ist aber nach Gleichung (108) in der Gröfse der Amplitude des Mitschwingens der Coefficient $C_{\mathfrak{p}}$ als Factor enthalten, und es sagt demnach Gleichung (110) aus, dafs die Stärke des Mitschwingens abhängig ist von der Uebereinstimmung zwischen $n_{\mathfrak{p}}$ und n, also zwischen den Schwingungszahlen des Eigentones und des erregenden Tones, und ferner davon, welche Gröfse bei der Zerlegung der Gesamtamplitude $A_{\mathfrak{a}}$ des erregenden Tones in die Partialamplituden der Coefficient $B_{\mathfrak{p}}$ erhält. Fällt der Angriffspunkt einer Kraft mit dem Knotenpunkt einer Partialschwingung zusammen, so ist für diese der Coefficient $B = 0$.

Ist die Reibung nicht gleich Null, aber klein, so tritt zu dem Werthe von a ein imaginärer Theil hinzu, der, wie wir oben bei der Schwingung eines Punktes gesehen, einer Phasendifferenz entspricht, aber keine merkliche Aenderung der Intensität des Mitschwingens anzeigt. Nur wenn die Schwingungszahlen der erregenden Kraft und der Eigenschwingung des Systems ganz übereinstimmen hat die Reibung einen beträchtlicheren Einflufs.

§ 28. Das Reciprocitätsgesetz beim Mitschwingen.

Um die Werthe der Amplituden $a_{\mathfrak{a}}$ aus dem System der Gleichungen (104) zu finden, mufs man jede derselben mit der betreffenden Unterdeterminante multipliciren und dann alle addiren. Bezeichnen wir mit D die Hauptdeterminante des Systems, und bei der Berechnung von a_p die verschiedenen Unterdeterminanten mit $D_{\mathfrak{a},p}$, bei der Berechnung von a_q aber mit $D_{\mathfrak{a},q}$, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} a_p &= \frac{\sum\limits_{\mathfrak{a}} (D_{\mathfrak{a},p} \cdot A_{\mathfrak{a}})}{D} \\ \text{und} \qquad a_q &= \frac{\sum\limits_{\mathfrak{a}} (D_{\mathfrak{a},q} \cdot A_{\mathfrak{a}})}{D} \,. \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Nehmen wir nun an, dafs in dem Falle, wo wir a_p berechnen, nur die Kraft A_q, und in dem anderen Falle, wo also a_q gesucht wird, nur die Kraft A_p vorhanden ist, so reduciren sich die in diesen

Gleichungen vorkommenden Summen auf je ein Glied, und wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} a_p &= \frac{D_{q,p} \cdot A_q}{D} \\ \text{und} \qquad a_q &= \frac{D_{p,q} \cdot A_p}{D}. \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Es ist aber:

$$D_{q,p} = D_{p,q}, \tag{113}$$

weil wir bei der Anordnung des Gleichungssystems die Vertical- und Horizontalreihen mit einander vertauschen können, ohne dafs sich etwas ändert. Setzen wir

$$\frac{D_{q,p}}{D} = \frac{D_{p,q}}{D} = R, \tag{113a}$$

so folgt:

$$\left.\begin{aligned} a_p &= A_q \cdot R \\ a_q &= A_p \cdot R. \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Wirkt demnach eine oscillirende Kraft von bestimmter Gröfse in der Richtung der $q$ten Coordinate, und verursacht in Richtung der $p$ten Coordinate eine Bewegung von bestimmter Intensität, so bewirkt eine Kraft von derselben Gröfse in Richtung der $p$ten Coordinate eine der ersten an Intensität gleiche Bewegung in Richtung der $q$ten Coordinate.

Zwischen den das Mitschwingen erregenden Kräften und den erzeugten Bewegungen besteht also ein ähnliches Reciprocitätsgesetz, wie wir es oben in § 11 zwischen den Anfangselongationen bez. den Anfangsgeschwindigkeiten fanden.

Dieses Gesetz ist von grofser Wichtigkeit, weil durch dasselbe für ganze Klassen von Erscheinungen gewisse Erklärungen ausgeschlossen werden. So kommen z. B. bei der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Magnetismus und bei den Fluorescenzerscheinungen solche reciproken Beziehungen nicht vor, und wir können daher ohne weiteres schliefsen, dafs bei diesen Vorgängen Kräfte anderer Art wirken, als wir sie hier vorausgesetzt haben. In der Akustik sind es z. B. die Klirrtöne, welche diesem Reciprocitätsgesetz nicht unterworfen sind, und daher müssen sie also durch die Kräfte erzeugt werden, bei denen die Abhängigkeit der Gröfse der auftretenden in die Gleichgewichtslage zurückstrebenden Kraft ein anderes ist, als es bei sogenannten elastischen Kräften der Fall.

§ 29. Mitschwingen bei gezwungener Bewegung eines Punktes.

Wir wollen nun annehmen, dafs nur auf einen einzigen Punkt in Richtung einer Coordinate eine äufsere oscillirende Kraft einwirke, während im übrigen das ganze System ausschliefslich unter dem Einflufs seiner inneren Kräfte stehe. Diese äufsere Kraft soll aber so grofs sein, dafs sie jeden Widerstand überwältigt. Es ist dann die Bewegung in Richtung dieser einen Coordinate gegeben. Ein solcher Fall liegt z. B. vor, wenn wir eine schwingende Stimmgabel auf eine Saite setzen; dann wird der Saitenpunkt, welcher am Griff der Gabel anliegt, ohne irgend welche praktisch in Betracht kommende Reaction mitgenommen. Die Metallzungen in den Blasinstrumenten bleiben ebenfalls von der mitschwingenden, wenig widerstrebenden Luft unbeeinflufst, während die anliegenden Theile der letzteren ihre Schwingungen genau mitmachen müssen.

In diesem Falle sind die Coordinaten eines Punktes, dem wir den Index 0 beilegen wollen, als Coordinaten der Zeit gegeben, und zwar wollen wir setzen:

$$s_0 = a_0 \cdot e^{nt}, \tag{115}$$

worin n einen imaginären Werth haben soll.

Für die übrigen Punkte bestehen dann Bewegungsgleichungen, die mit den Gleichungen (67) übereinstimmen, so dafs wir, falls das ganze System aus N Punkten besteht, für $N-1$ Punkte Gleichungen von der Form

$$m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 s_{\mathfrak{a}}}{dt^2} = -\sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}} \right\} - \varepsilon \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \frac{d s_{\mathfrak{b}}}{dt} \right\} \tag{116}$$

erhalten.

Wir haben früher schon gesehen, dafs die Integrale solcher homogenen linearen Differentialgleichungen sich in der Form

$$s_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}} \cdot e^{\nu t}$$

schreiben lassen. Da nun hier der Werth von ν mit dem Werthe von n in Gleichung (115) identisch sein mufs, so erhalten wir also für die Elongationen die Werthe

$$s_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}} \cdot e^{nt}. \tag{117}$$

Setzt man diese Lösung in die Gleichungen (116) ein, so ergiebt sich

$$m_{\mathfrak{a}}\, n^2\, a_{\mathfrak{a}} = -\sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{b}} \right\} - \varepsilon n \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{a}} \right\} \cdot \tag{118}$$

Da in diesem Gleichungssystem n einen rein imaginären Werth hat, so ist die Hauptdeterminante desselben nicht gleich Null, und es können daher auch die Unterdeterminanten von je $N-1$ Verticalreihen nicht durchgängig gleich Null sein. Die Werthe der $a_{\mathfrak{a}}$ sind demnach alle durch den gegebenen Werth von a_0 zu bestimmen.

Wie die Bewegung des Systems bei sehr kleiner Dämpfung vor sich geht, kann man am besten überblicken, wenn man die Dämpfung als verschwindend klein annimmt, also $\varepsilon = 0$ setzt. Dann fällt in jeder der Gleichungen (118) das letzte Glied fort, und wir haben:

$$m\, n^2\, a_{\mathfrak{a}} = -\sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{b}} \right\}. \tag{119}$$

Wenn nun n mit der Schwingungszahl einer der Eigenschwingungen des Systems zusammenfällt, so wird eben diese Eigenschwingung entstehen, und die Amplituden für die verschiedenen Massenpunkte sind dadurch gegeben, dafs a_0 gegeben ist; denn die Verhältnisse der verschiedenen Werthe $a_{\mathfrak{a}}$ unter einander sind ja durch das Gleichungssystem bestimmt. Kennt man eine Amplitude, so kennt man alle.

Fällt gerade ein Knotenpunkt der Eigenschwingung, also ein Punkt, der die Amplitude Null haben sollte, in den Punkt, welcher der vorausgesetzten Zwangsbewegung unterworfen ist, so mufs er nun eine Bewegung mit endlicher Amplitude ausführen, d. h. es wird die Gröfse seiner Bewegung auf das Unendlichfache gesteigert, und dem entsprechend würden alle übrigen Punkte, welchen sonst bei dieser Eigenschwingung endliche Amplituden zukommen, nunmehr solche von unendlicher Gröfse haben müssen. Dieses wird nun thatsächlich durch die stets vorhandene Dämpfung verhindert; aber bei mäfsiger Reibung ist die Stärke der erregten Eigenschwingung doch immer bedeutend. Man benutzt diesen Umstand z. B., wenn die Länge einer Saite gefunden werden soll, die dem Eigenton einer Stimmgabel entspricht. Diese wird dann schwingend mit dem Griff auf die Saite aufgesetzt und so lange verschoben, bis in der letzteren ein Maximum der Eigenschwingung auftritt. Dabei ist natürlich der nicht in Betracht kommende Theil der Saite durch den aufgelegten Finger zu dämpfen.

Siebenter Abschnitt.

Der Hamilton'sche Satz. — Uebergang auf continuirlich verbreitete Massen.

§ 30. Ableitung der Hamilton'schen Gleichung mit Benutzung rechtwinkliger Coordinaten.

Bisher haben wir die allgemeinen Gesetze entwickelt, welche sich auf die verschwindend kleinen oscillatorischen Bewegungen eines Massenpunktes oder eines Systems von Massenpunkten beziehen, die sich unter dem Einfluſs conservativer Kräfte in der Nähe stabilen Gleichgewichtes befinden. Wir haben dabei die Massenpunkte als vollkommen frei betrachtet, höchstens wurden einzelne einer gezwungenen Bewegung unterworfen und dadurch zu Centren gemacht, von denen Kräfte auf die anderen Punkte einwirkten. Unter diesen Umständen konnten wir die Bewegung jedes einzelnen Punktes auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen, wobei wir dann in den einzelnen Massenpunkten keine verschiedenen Geschwindigkeiten der verschiedenen Theile zu unterscheiden hatten, sondern jeden derselben als ein untheilbares, in allen Eigenschaften in sich übereinstimmendes Ganze betrachteten.

Nun giebt es aber andere Systeme, bei denen feste Verbindungen bestehen, und zwar entweder zwischen den Massenpunkten des Systems und äuſseren Körpern, oder zwischen diesen Punkten unter einander. Es können z. B. unausdehnsame Stränge zwischen einzelnen Punkten vorkommen, oder einige der Punkte können gezwungen sein, während der Bewegung auf einer bestimmten Linie oder Fläche zu bleiben, u. s. f. Man stellt solche Eigenschaften des Systems am besten durch Gleichungen dar, in denen ausgesagt ist, daſs gewisse Beziehungen zwischen den Coordinaten unverändert bleiben sollen. In einem solchen Falle sind dann nicht alle Coordinaten der Punkte für die oscillatorische Bewegung frei, sondern die Zahl der veränderlichen Coordinaten wird reducirt um die Anzahl der Gleichungen zwischen den Coordinaten, welche die festen Verbindungen u. s. w. ausdrücken. Wenn wir in einem solchen Falle die rechtwinkligen Coordinaten festhalten wollten, so würde ein ziemlich complicirtes System von Gleichungen entstehen, und um dies zu vermeiden, kann man die Hamilton'sche Form benutzen, durch welche man die Bewegungsgleichungen als Minimalproblem ausdrücken kann.

Bezeichnen wir mit $x_\mathfrak{a}$ die Coordinate des Massenpunktes $m_\mathfrak{a}$, wobei sich auf jeden frei beweglichen Massenpunkt drei Indices $\mathfrak{a}$ beziehen, so dafs also stets je drei Werthe $m_\mathfrak{a}$ identisch sind; ferner sei Φ die potentielle Energie des Systems, dann lauten unter der Voraussetzung frei beweglicher Massenpunkte und conservativer Kräfte die Bewegungsgleichungen

$$m_\mathfrak{a}\frac{d^2 x_\mathfrak{a}}{d t^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mathfrak{a}}. \tag{121}$$

Eine unendlich kleine, von der Zeit abhängige Aenderung der Coordinate $x_\mathfrak{a}$ wollen wir mit $\delta x_\mathfrak{a}$ bezeichnen, so dafs also nun zur Zeit t die Coordinate von $m_\mathfrak{a}$ nicht mehr $x_\mathfrak{a}$, sondern $x_\mathfrak{a} + \delta x_\mathfrak{a}$ ist. Es sind natürlich diese Werthe $\delta x_\mathfrak{a}$ continuirliche Functionen der Zeit; denn wären sie dieses nicht, so würde uns jedes Mittel fehlen, über den Zeitpunkt, in dem die Discontinuität der Bewegung stattfindet, hinüber die Identität der betreffenden Massenpunkte zu beweisen. Vollziehen sich nur continuirliche Lagenänderungen, so kann man jeden einzelnen Punkt dauernd verfolgen.

Multipliciren wir die Gleichung (121) mit $\delta x_\mathfrak{a}$, und summiren über das ganze System, so ergiebt sich:

$$\sum_\mathfrak{a} m_\mathfrak{a}\,\delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{d^2 x_\mathfrak{a}}{d t^2} = -\sum_\mathfrak{a}\delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mathfrak{a}}. \tag{122}$$

Da nun die Abhängigkeit der potentiellen Energie Φ von der Zeit nur durch die Abhängigkeit der Coordinaten $x_\mathfrak{a}$ von der Zeit bedingt ist, so stellt die Summe auf der rechten Seite der letzten Gleichung die Variation von Φ dar. Bezeichnen wir sie mit $\delta\Phi$, so ist:

$$\delta\Phi = \sum_\mathfrak{a}\delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mathfrak{a}} \tag{123}$$

und wir können also schreiben:

$$\sum_\mathfrak{a} m_\mathfrak{a}\,\delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{d^2 x_\mathfrak{a}}{d t^2} = -\delta\Phi. \tag{122a}$$

Nun ist aber

$$\frac{d}{d t}\left(\delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{d x_\mathfrak{a}}{d t}\right) = \delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{d^2 x_\mathfrak{a}}{d t^2} + \frac{d x_\mathfrak{a}}{d t}\cdot\frac{d\,\delta x_\mathfrak{a}}{d t} \tag{124}$$

und wenn wir mit $m_\mathfrak{a}$ multipliciren und nach $\mathfrak{a}$ summiren:

$$\left.\begin{aligned}\sum_\mathfrak{a} m_\mathfrak{a}\cdot\frac{d}{dt}\left(\delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\right) &= \sum_\mathfrak{a} m_\mathfrak{a}\,\delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{d^2 x_\mathfrak{a}}{dt^2}\\ &+\sum_\mathfrak{a} m_\mathfrak{a}\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\cdot\frac{d\,\delta x_\mathfrak{a}}{dt}.\end{aligned}\right\}\tag{124a}$$

Die erste Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist aber mit der linken Seite der Gleichung (122a) identisch und wir erhalten daher

$$\sum_\mathfrak{a} m_\mathfrak{a}\frac{d}{dt}\left(\delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\right)-\sum_\mathfrak{a} m_\mathfrak{a}\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\cdot\frac{d\,\delta x_\mathfrak{a}}{dt}=-\delta\,\Phi.\tag{122b}$$

Ferner ist:

$$\delta\left(\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\right)^2=2\,\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\cdot\frac{d\,\delta x_\mathfrak{a}}{dt}$$

und daher ist, wenn wir mit $L_\mathfrak{a}$ den zum Index $\mathfrak{a}$ gehörigen Bruchtheil der lebendigen Kraft bezeichnen,

$$\delta L_\mathfrak{a}=\tfrac{1}{2}m_\mathfrak{a}\,\delta\left(\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\right)^2=m_\mathfrak{a}\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\cdot\frac{d\,\delta x_\mathfrak{a}}{dt}.\tag{125}$$

Summiren wir über das ganze System und bezeichnen dessen lebendige Kraft mit L, so erhalten wir

$$\delta L=\sum_\mathfrak{a} m_\mathfrak{a}\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\cdot\frac{d\,\delta x_\mathfrak{a}}{dt}\tag{125a}$$

Wir können also nunmehr die Gleichung (122b) schreiben:

$$\sum_\mathfrak{a} m_\mathfrak{a}\frac{d}{dt}\left(\delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\right)-\delta L=-\delta\,\Phi$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_\mathfrak{a} m_\mathfrak{a}\cdot\delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\right\}=\delta(L-\Phi).\tag{122c}$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit dt und integriren zwischen den Zeitgrenzen t_0 und t_1, so erhalten wir

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left\{\sum_\mathfrak{a} m_\mathfrak{a}\cdot\delta x_\mathfrak{a}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}\right\}dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta(L-\Phi).dt.\tag{122d}$$

Die unbestimmte Integration der linken Seite läſst sich leicht ausführen. Wenn wir nun durch Einschlieſsen eines Ausdrucks in zwei horizontale Striche andeuten, daſs sein Werth zwischen den angeschriebenen Grenzen zu nehmen ist, so ergiebt sich

$$\overline{\underline{\sum m_a \delta x_a \frac{d x_a}{d t}}}_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \delta (L - \Phi) . d t. \tag{122e}$$

Wir wollen nunmehr festsetzen, daſs die Variation, die bisher keinerlei Beschränkung unterlag, an den Grenzen des Integrationsintervalls, also zu den Zeiten t_0 und t_1, gleich Null sei, so daſs also hier alle Werthe von $\delta x_a = 0$ sind. Dann enthalten sämmtliche Summanden, aus denen sich die Summen zusammensetzen, welche die oberen und unteren Grenzwerthe auf der linken Seite der Gleichung bilden, den Factor Null, und es wird also diese Seite der Gleichung selbst gleich Null, so daſs demnach

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \delta (L - \Phi) d t. \tag{126}$$

Da die Grenzen der Zeit bestimmt sind, so können wir das Variationszeichen auch vor das Integralzeichen setzen und erhalten somit

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} (L - \Phi) d t \tag{126a}$$

als gewöhnliche Form der Hamilton'schen Gleichung.

Aus der Hamilton'schen Gleichung können wir nun auch wieder umgekehrt die Bewegungsgleichungen (121) ableiten, von denen wir oben ausgegangen sind. Ja es können aus der Hamilton'schen Gleichung die Bewegungsgleichungen auch noch für den Fall abgeleitet werden, daſs zwischen den Coordinaten irgend welche Bedingungsgleichungen bestehen. Setzen wir nämlich in

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} (\delta L - \delta \Phi) d t$$

den Werth für δL aus Gleichung (125a) und für $\delta \Phi$ aus Gleichung (123) ein, so ergiebt sich

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_a \left(m_a \cdot \frac{d x_a}{d t} \cdot \frac{d \delta x_a}{d t} \right) - \sum_a \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \delta x_a \right) \right\} d t. \tag{127}$$

Es sind zwar die Werthe δx_a willkürlich anzunehmende Functionen der Zeit, die nur der Einschränkung unterliegen, dafs die Gröfsen $x_a + \delta x_a$ den Bedingungsgleichungen genügen; sind aber die Werthe von x_a und δx_a einmal angenommen, so sind damit auch die Werthe der Geschwindigkeiten $\frac{d\,\delta x_a}{d\,t}$ ebenfalls gegeben, und sie können nicht mehr als willkürlich betrachtet werden.

Indem wir die erste der beiden in der Gleichung (127) vorkommenden Summen partiell integriren, ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} d\,t \sum_a \left(m_a \frac{d\,x_a}{d\,t}\frac{d\,\delta x_a}{d\,t}\right) &= \overline{\underline{\sum_a m_a \frac{d\,x_a}{d\,t}\,.\,\delta x_a}}_{t_0}^{t_1} \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} d\,t \sum_a \left(m_a \frac{d^2 x_a}{d\,t}\,.\,\delta x_a\right)\end{aligned}\right\} \tag{128}$$

Zu den Zeiten t_0 und t_1 sollen aber die Variationen δx_a gleich Null sein, und es fällt daher das erste Glied der rechten Seite fort, so dafs

$$\int_{t_0}^{t_1} d t\,.\sum_a \left(m_a \cdot \frac{d\,x_a}{d\,t} \cdot \frac{d\,\delta x_a}{d\,t}\right) = -\int_{t_0}^{t_1} d t\,.\sum_a \left(m_a \cdot \frac{d^2 x_a}{d\,t^2}\,.\,\delta x_a\right) \tag{128a}$$

wird. Setzen wir diesen Werth in Gleichung (127) ein, so erhalten wir:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} d\,t\,.\sum_a \delta x_a \left(-\,m_a \frac{d^2 x_a}{d\,t^2} - \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_a}\right). \tag{127a}$$

Daraus folgt, dafs für die den Bedingungsgleichungen genügenden Variationen

$$\sum_a \delta x_a \left(-\,m_a \frac{d^2 x_a}{d\,t^2} - \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_a}\right) = 0 \tag{127b}$$

sein mufs. Denn wäre der Ausdruck nicht Null, sondern z. B. für irgend einen Werth von t positiv, so könnte man die Gröfsen δx_a da, wo er nicht positiv wäre, gleich Null setzen und erreichte so, dafs die Gleichung (127a) nicht erfüllt wäre. Die Bedingung (127b) ist identisch mit den Bewegungsgleichungen von D'Alembert, nach dem die Kräfte

$$-\,m_a \frac{d^2 x_a}{d\,t^2} - \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_a}$$

durch die Bedigungsgleichungen im Gleichgewicht gehalten werden müssen. Sind keine Bedingungsgleichungen vorhanden, so folgen sofort die Gleichungen (121)

$$m_a \frac{d^2 x_a}{d t^2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \,.$$

§ 31. Unabhängigkeit von der Wahl der Coordinaten.

Wie wir gesehen haben, ist in der Hamilton'schen Gleichung eigentlich nichts enthalten, was nicht auch schon die Newton'schen Bewegungsgleichungen aussagen. Ihre grofse Bedeutung liegt darin, dafs die Hamilton'sche Form unabhängig von der Wahl des Coordinatensystems ist. Es wird nur ausgesagt, dafs die Bewegung des betreffenden Punktes von der Anfangslage bis in die Endlage so geschehen soll, dafs die lebendige Kraft, vermindert um die potentielle Energie, ein Minimum wird. Bei der Variation, die hier vorausgesetzt ist, sollen die Werthe von x variirt werden, und deren Variationen hatten wir mit δx bezeichnet. Es war vorbehalten, dafs letztere beliebige Functionen der Coordinaten und der Zeit sein sollten; nur mufsten sie continuirliche Functionen der Zeit, im Anfangs- und Endzustande gleich Null sein und die variirten Coordinaten mufsten den Bedingungsgleichungen genügen. Die Gleichung hatten wir nun zwar für ein rechtwinkliges Coordinatensystem entwickelt; aber sie gilt auch ebenso, wenn wir dafür andere Coordinaten wählen. Nur ist darauf Gewicht zu legen, dafs die Lage jedes einzelnen Punktes zu der gegebenen Zeit durch sie vollkommen bestimmt ist. Es sind z. B. Irrthümer dadurch vorgekommen, dafs man geglaubt hat, als Coordinaten die Länge eines bisher zurückgelegten Weges benutzen zu dürfen, dessen Länge aber von der eingeschlagenen Art der Bewegung abhängt. Dann ist es aber nicht der augenblickliche Werth der Coordinaten, welcher die Lage der Punkte bestimmt, sondern man würde auch noch den Weg kennen müssen, auf welchem der betreffende Punkt in diese Lage gekommen ist. Wir können aber wohl statt der rechtwinkligen Coordinaten irgend welche Beziehungen zwischen den Punkten oder den Winkeln, welche die Verbindungslinien der Punkte mit einander oder mit festen Flächen bilden, oder sogar körperliche Volumina zur Bestimmung benutzen.

§ 32. Einführung allgemeiner Coordinaten. — Die Gleichung von Lagrange.

Wir wollen nun zu ganz allgemeinen Coordinaten übergehen, welche mit $p_{\mathfrak{b}}$ bezeichnet werden sollen. Dann wird die geforderte Bedingung, daſs die Coordinaten $p_{\mathfrak{b}}$ die Lage der Punkte vollständig bestimmen, erfüllt sein, wenn die Gröſsen $x_{\mathfrak{a}}$ als Functionen der $p_{\mathfrak{b}}$ bestimmt werden können. Es ist dabei möglich, daſs die Gleichungen, welche zwischen den Gröſsen $x_{\mathfrak{a}}$ und $p_{\mathfrak{b}}$ bestehen, mehrdeutige und mehrfache Wurzeln haben. Dieses ist kein Hinderniſs, falls nur die Gleichungen der Art sind, daſs sämmtliche Werthe der Gröſsen $x_{\mathfrak{a}}$ durch die Gröſsen $p_{\mathfrak{b}}$ ausgedrückt werden. Dabei sollen die Gröſsen p von einander unabhängig sein. Wenn N die Anzahl der Coordinaten ist und r die Zahl der Bedingungsgleichungen zwischen den $x_{\mathfrak{a}}$ ist, so ist $N-r$ die Zahl der Gröſsen p. Dann wird also, wenn wir die Gröſsen x als Functionen der Gröſsen p bestimmen können, Φ, welches eine Function der x ist, durch Einsetzung der neuen Werthe für x, als Function der p dargestellt werden können.

Ist $x_{\mathfrak{a}}$ als Function der Gröſsen p gegeben, so wird der Werth von $\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{d t}$ sich zusammensetzen aus Gliedern von der Form $\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial p} \cdot \frac{d p}{d t}$, weil die $x_{\mathfrak{a}}$ nur insofern von t abhängen, als die Gröſsen p von t abhängig sind. Wir erhalten den Werth von $\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{d t}$ demnach, wenn wir jene Glieder für die verschiedenen p bilden und dann summiren. Dann erhalten wir:

$$\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{d t} = \sum_{\mathfrak{b}} \left[\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial p_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{d p_{\mathfrak{b}}}{d t} \right]. \tag{129}$$

Der Werth für die lebendige Kraft ergiebt sich, indem wir diese Summen quadriren, jede mit der Masse $\frac{m_{\mathfrak{a}}}{2}$ multipliciren, und dann wieder über das ganze System summiren, so daſs also

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ m_{\mathfrak{a}} \left[\sum_{\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial p_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{d p_{\mathfrak{b}}}{d t} \right) \right]^2 \right\}. \tag{130}$$

Wenn wir nun die Quadrate dieser Summen bilden, so bekommen wir homogene Ausdrücke zweiten Grades nach $\frac{d p_{\mathfrak{b}}}{d t}$. Die lebendige Kraft L wird also im Allgemeinen dargestellt durch eine Summe, welche homogen vom zweiten Grade nach $\frac{d p_{\mathfrak{b}}}{d t}$ ist, und zwar durch eine Doppelsumme, die nach den Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ fortläuft. Die Glieder haben die Form $\frac{d p_{\mathfrak{a}}}{d t} \cdot \frac{d p_{\mathfrak{b}}}{d t}$, und ihre Coefficienten werden Gröſsen sein, welche die Differentialquotienten $\frac{d p}{d t}$ nicht mehr enthalten, und welche aus den Coefficienten $m_{\mathfrak{a}}$ und den Quadraten, bez. den Doppelproducten der Gröſsen $\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial p_{\mathfrak{b}}}$ zusammengesetzt sind. Wir wollen sie mit $F_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}}$ bezeichnen. Dann ist die lebendige Kraft:

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} F_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}} \cdot \frac{d p_{\mathfrak{a}}}{d t} \cdot \frac{d p_{\mathfrak{b}}}{d t}. \tag{130a}$$

Für die Differentialquotienten $\frac{d p}{d t}$ wollen wir nun die Bezeichnung q mit Benutzung der laufenden Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einführen. Der Ausdruck für die lebendige Kraft formt sich dadurch um in

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} [F_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}} \cdot q_{\mathfrak{a}} \cdot q_{\mathfrak{b}}]. \tag{130b}$$

Es ist also eine Function zweiten Grades der $\frac{d p}{d t}$ oder q, deren Coefficienten von den p abhängen, d. h. irgend welche Functionen derselben sind.

Wenn wir daher die Variationen für die Hamilton'sche Gleichung ausführen, und zwar zunächst nur nach einer der Coordinaten, die wir mit $p_{\mathfrak{c}}$ bezeichnen wollen, so ist zu berücksichtigen, daſs in den Coefficienten $F_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}}$ der Werth von $p_{\mathfrak{c}}$ enthalten ist. Es treten also zunächst Glieder von der Form $\delta p_{\mathfrak{c}} \cdot \frac{\partial F_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{c}}} \cdot q_{\mathfrak{a}} \cdot q_{\mathfrak{b}}$ auf. Ferner aber ist, wenn wir während der Bewegung $p_{\mathfrak{c}}$ ändern, damit auch $q_{\mathfrak{c}}$ geändert. Demnach kommen noch weitere Glieder von der Form $F_{\mathfrak{c}, \mathfrak{b}} \cdot q_{\mathfrak{b}} \cdot \delta \left(\frac{d p_{\mathfrak{c}}}{d t} \right)$ hinzu. Da nun aber

$$\delta \left(\frac{d p_{\mathfrak{c}}}{d t} \right) = \frac{d}{d t} (\delta p_{\mathfrak{c}}),$$

so können wir diese Glieder schreiben: $F_{\mathfrak{c}, \mathfrak{b}} \cdot q_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{d}{d t} (\delta p_{\mathfrak{c}})$. Um die Variation auf das ganze System auszudehnen, haben wir noch nach $\mathfrak{b}$

zu summiren. Wir erhalten also unter der Voraussetzung, dafs sich die Variation auf $p_\mathfrak{c}$ beschränkt:

$$\delta L = \tfrac{1}{2}\sum_\mathfrak{a}\sum_\mathfrak{b}\left[\frac{\partial F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\partial p_\mathfrak{c}}\cdot q_\mathfrak{a}\cdot q_\mathfrak{b}\cdot \delta p_\mathfrak{c}\right] + \sum_\mathfrak{b}\left[F_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\cdot q_\mathfrak{b}\cdot \frac{d\,\delta p_\mathfrak{c}}{d\,t}\right]. \tag{131}$$

Der Factor $\frac{1}{2}$ ist bei der zweiten Summe wegzulassen, weil bei der Differentiation nach einem bestimmten $q_\mathfrak{c}$ der Factor 2 auftritt, gegen den $\frac{1}{2}$ sich weghebt.

Wird nun nach $p_\mathfrak{c}$ variirt, so ist

$$\delta\,\Phi = \delta p_\mathfrak{c}\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,p_\mathfrak{c}}. \tag{132}$$

Da die HAMILTON'sche Gleichung nun für alle Variationen $\delta p_\mathfrak{c}$ gelten soll, so gilt sie auch, wenn wir nur nach $p_\mathfrak{c}$ variiren und, indem wir aus den Gleichungen (131) und (132) die Werthe für δL und $\delta\,\Phi$ in Gleichung (126) einsetzen, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \int_{t_0}^{t_1}\Bigg\{&\tfrac{1}{2}\sum_\mathfrak{a}\sum_\mathfrak{b}\left(\frac{\partial F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\partial p_\mathfrak{c}}\cdot q_\mathfrak{a}\cdot q_\mathfrak{b}\cdot \delta p_\mathfrak{c}\right)\\ &+\sum_\mathfrak{b}\left(F_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\cdot q_\mathfrak{b}\cdot\frac{d\,\delta p_\mathfrak{c}}{d\,t}\right) - \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,p_\mathfrak{c}}\cdot\delta p_\mathfrak{c}\Bigg\}\,d\,t.\end{aligned}\right\} \tag{133}$$

Die zweite Summe, in welcher die Differentialquotienten von $\delta p_\mathfrak{c}$ vorkommen, können wir durch partielle Integration umformen. Es ist dann:

$$\left.\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\sum_\mathfrak{b}\left[F_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\cdot q_\mathfrak{b}\cdot\frac{d}{d\,t}(\delta p_\mathfrak{c})\right].\,d\,t &= \sum_\mathfrak{b}\overline{\underline{[\delta p_\mathfrak{c}\,.\,F_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\cdot q_\mathfrak{b}]}}\\ &\quad-\int_{t_0}^{t_1}\delta p_\mathfrak{c}\,\frac{d}{d\,t}\,[\sum_\mathfrak{b} F_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\cdot q_\mathfrak{b}]\,d\,t,\end{aligned}\right\} \tag{134}$$

wo die Einschliefsung des ersten Ausdrucks auf der rechten Seite in zwei horizontale Striche wieder bezeichnet, dafs für ihn die Differenz zwischen den beiden Integrationsgrenzen der Zeit zu nehmen ist. Nach den Festsetzungen, die wir gemacht haben, ist zur Zeit t_0 und t_1 die Lage der Punkte des Massensystems fest bestimmt, so dafs für diese beiden Zeitmomente die Werthe von $\delta p_\mathfrak{c}$

gleich Null sind. Daher fällt das erste Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung fort, und wir erhalten also:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{c},\,\mathfrak{b}}\cdot q_{\mathfrak{b}}\cdot\frac{d}{dt}(\delta p_{\mathfrak{c}})\right]dt = -\int_{t_0}^{t_1}\delta p_{\mathfrak{c}}\,\frac{d}{dt}\left\{\sum_{\mathfrak{b}}[F_{\mathfrak{c},\,\mathfrak{b}}\cdot q_{\mathfrak{b}}]\right\}.dt. \quad (134\text{a})$$

Setzt man diesen Werth in Gleichung (133) ein, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \int_{t_0}^{t_1}\delta p_{\mathfrak{c}}\Bigg\{-\frac{\partial\Phi}{\partial p_{\mathfrak{c}}} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left[\frac{\partial F_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{c}}}\cdot q_{\mathfrak{a}}\cdot q_{\mathfrak{b}}\right] \\ -\frac{d}{dt}\left[\sum_{\mathfrak{b}}F_{\mathfrak{c},\,\mathfrak{b}}\cdot q_{\mathfrak{b}}\right]\Bigg\}dt. \end{aligned}\right\} \quad (133\text{a})$$

Wir haben also hier ein Integral über die Zeit, welches gleich Null gesetzt wird, und in welchem jedes Glied mit dem Factor $\delta p_{\mathfrak{c}}$ versehen ist. Dieser Factor ist aber vollkommen willkürlich, er mufs nur eine continuirliche Function der Zeit sein; das Integral kann also nur dann verschwinden, wenn

$$0 = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left[\frac{\partial F_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{c}}}\cdot q_{\mathfrak{a}}\cdot q_{\mathfrak{b}}\right] - \frac{d}{dt}\sum[F_{\mathfrak{c},\,\mathfrak{b}}\cdot q_{\mathfrak{b}}] - \frac{\partial\Phi}{\partial p_{\mathfrak{c}}}. \quad (135)$$

Diese Gleichung können wir nun mit Benutzung des in Gleichung (130b) aufgestellten Ausdruckes für die lebendige Kraft

$$L = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}[F_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}\cdot q_{\mathfrak{a}}\cdot q_{\mathfrak{b}}]$$

umformen. Es ist nämlich L insofern eine Function der Werthe $p_{\mathfrak{c}}$, als diese in den Coefficienten F stecken; wenn wir also die Gröfsen q und p für die hier vorkommende Differentiation als unabhängig von einander betrachten, so erhalten wir:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left[\frac{\partial F_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{c}}}\cdot q_{\mathfrak{a}}\cdot q_{\mathfrak{b}}\right] = \frac{\partial L}{\partial p_{\mathfrak{c}}}. \quad (130\text{c})$$

Thatsächlich sind die Werthe von p und q ja auch unabhängig von einander; denn bei jeder Lage des Systems würde jeder Punkt des Systems eine besondere Geschwindigkeit haben können. Die p beziehen sich auf die Lage, die q auf die Aenderung der Lage, also sind es von einander unabhängige Gröfsen, die den Zustand des Systems durch Lage und Bewegung der Punkte in dem gegebenen Augenblick bestimmen.

Das zweite Glied der Gleichung könnten wir ebenfalls einfacher schreiben, indem wir berücksichtigen, dafs auf Grund einer der bei der Gleichung (131) angestellten völlig analogen Betrachtung

$$\sum_{\mathfrak{b}} [F_{\mathfrak{c},\,\mathfrak{b}} \cdot q_{\mathfrak{b}}] = \frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{c}}}. \tag{130d}$$

Wir können nunmehr die Gleichung (135) schreiben:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial p_{\mathfrak{c}}} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{c}}}\right] - \frac{\partial \Phi}{\partial p_{\mathfrak{c}}}. \tag{135a}$$

Damit haben wir die Form der Bewegungsgleichung für allgemeine Coordinaten gefunden. Sie wird als die Gleichung von Lagrange bezeichnet. Es bestehen so viele derartige Gleichungen, als Indices $\mathfrak{c}$, d. h. als unabhängig veränderliche Coordinaten vorhanden sind. Durch sie wird die Lage des Systems in jedem Augenblicke vollständig bestimmt.

Wenn keine Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $x_{\mathfrak{a}}$ bestehen, so können wir statt der $p_{\mathfrak{c}}$, die ja beliebige Coordinaten sind, die rechtwinkligen Coordinaten setzen. Dann wird das erste Glied gleich

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\left[\tfrac{1}{2} m_{\mathfrak{a}} \left(\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}\right)^2\right] \tag{136}$$

und fällt fort, weil weder $m_{\mathfrak{a}}$ noch $\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}$ von $x_{\mathfrak{a}}$ abhängig sind. Das zweite Glied wird:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}\right)}\right] &= -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \left(\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}\right)}\left(\tfrac{1}{2} m_{\mathfrak{a}} \left(\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}\right)^2\right)\right] \\ &= -\frac{d}{dt}\left(m_{\mathfrak{a}} \frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}\right) \\ &= -m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{dt^2} \end{aligned} \tag{137}$$

und endlich ist das dritte Glied dann gleich $-\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}}$. Setzen wir nun diese Werthe in Gleichung (135a) ein, so ergiebt sich:

$$0 = m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{dt^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}}$$

oder

$$m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}}.$$

Das ist aber dieselbe Form der Bewegungsgleichung, welche wir für rechtwinklige von einander unabhängige Coordinaten aufgestellt hatten. Damit ist nachgewiesen, daſs in der LAGRANGE'schen Form der Bewegungsgleichung die NEWTON'sche Form enthalten ist.

§ 33. Anwendung auf verschwindend kleine Bewegungen in der Nähe stabilen Gleichgewichts.

Wir wollen nun zunächst voraussetzen, daſs die eintretenden Verschiebungen und Geschwindigkeiten unendlich klein sind.

Die Differentialquotienten $\frac{\partial L}{\partial p_{\mathfrak{a}}}$ bestehen dann nach Gleichung (130c) aus Producten zweiten Grades von unendlich kleinen Gröſsen, da die Geschwindigkeiten auch in ihrem Maximum verschwindend klein sind. Sie fallen daher fort im Vergleich zu dem Gliede, in welchem der Differentialquotient $\frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{a}}}$ vorkommt, und welches Gröſsen enthält, die unendlich klein vom ersten Grade sind. Differentiiren wir

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{a}}} = \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot q_{\mathfrak{b}} \right\}$$

nach der Zeit, so müssen wir zunächst in jedem Gliede der Summe den ersten Factor, das F, differentiiren. Da dieser Differentialquotient aber eine lineare homogene Function der Gröſsen q wird, so werden sich hier wieder Producte bilden, die vom zweiten Grade unendlich klein sind; hingegen sind die weiteren Glieder, bei denen $q_{\mathfrak{b}}$ nach der Zeit differentiirt wird, vom ersten Grade unendlich klein. Wir erhalten daher unter der hier gemachten Voraussetzung für Gleichung (135a) nunmehr

$$0 = -\sum_{\mathfrak{b}} \left(F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{d q_{\mathfrak{b}}}{d t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_{\mathfrak{a}}}, \tag{138}$$

wobei nur statt des Index $\mathfrak{c}$ der Buchstabe $\mathfrak{a}$ gesetzt ist.

Betrachten wir nun ebenso wie bei der Benutzung rechtwinkliger Coordinaten Φ als Function der p, und gehen von einer festen Anfangslage, nämlich der Lage des stabilen Gleichgewichts, aus, so können wir Φ in eine TAYLOR'sche Reihe entwickeln und erhalten, wenn wir den Werth von Φ in der Gleichgewichtslage mit Φ_0 und die in Folge der Bewegung eintretende Aenderung der Werthe von $p_\mathfrak{a}$ mit $\pi_\mathfrak{a}$ bezeichnen

$$\Phi = \Phi_0 + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{a}} \cdot \pi_\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_\mathfrak{a} \partial p_\mathfrak{b}} \pi_\mathfrak{a} \pi_\mathfrak{b} + \cdots \tag{139}$$

Nun hatten wir uns schon früher in § 6 davon überzeugt, dafs bei stabilem Gleichgewicht die Glieder, in denen die ersten Potenzen der Verschiebungen vorkommen, gleich Null sein müssen, was ja auch das bekannte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten aussagt. Das zweite Glied der Gleichung (139) fällt also, wenn wir, was von jetzt an geschehen soll, voraussetzen, dafs das System in seiner ursprünglichen Lage im stabilen Gleichgewicht sein soll, fort. Die zweite Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichts besteht darin, dafs in dem folgenden Gliede, welches die Producte zweiter Ordnung von den Verschiebungen π enthält, die Coefficienten so beschaffen sein müssen, dafs die gesammte Summe immer nothwendig eine positive Function ist. Diese Coefficienten sind als constant zu betrachten, da sie denjenigen Werthen der Differentialquotienten entsprechen, welche für die Gleichgewichtslage gelten.

Wir wollen nun für diese Coefficienten eine vereinfachte Bezeichnungsweise einführen und, indem wir zugleich die höheren Glieder weglassen, schreiben:

$$\Phi = \Phi_0 + \tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} [A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \pi_\mathfrak{a} \cdot \pi_\mathfrak{b}]. \tag{140}$$

Da nun π der veränderliche Theil der Coordinaten ist, dieser aber hier allein in Betracht kommt, so ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \pi}$$

und demnach

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{a}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_\mathfrak{a}} = \sum_\mathfrak{b} [A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \pi_\mathfrak{b}]. \tag{140a}$$

Indem wir diesen Werth benutzen und ferner berücksichtigen, dafs

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{d^2 \pi}{dt^2}$$

ist, erhält Gleichung (138) nunmehr die Form

$$0 = -\sum_\mathfrak{b} [A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \pi_\mathfrak{b}] - \sum_\mathfrak{b} \left[F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \frac{d^2 \pi_\mathfrak{b}}{dt^2} \right]. \tag{141}$$

Eine solche Gleichung ist für jeden Index $\mathfrak{a}$ des Systems aufzustellen.

Mit unseren früheren entsprechenden Gleichungen (127b) stimmt hierin das von der potentiellen Energie herrührende Glied völlig überein; aber das andere Glied war dort einfacher, weil bei den rechtwinkligen Coordinaten in dem Gliede der lebendigen Kraft nur die einfachen Quadrate vorkommen, und an Stelle der $F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ dort die Massen der zu bewegenden Punkte stehen. Dort kam in jeder Gleichung nur die Beschleunigung nach einer Coordinate vor, während hier das Gleichungssystem dadurch anders ist, dafs in jeder dieser Gleichungen die Beschleunigung nach jeder Coordinate vorkommt.

Wenn wir berücksichtigen, dafs dieses System von Bewegungsgleichungen linear und homogen nach den Werthen von $\pi_{\mathfrak{b}}$ und ihren Differentialquotienten ist, und dafs die vorkommenden Coefficienten constant sind, so besteht eine unbeschränkte Möglichkeit der Superposition der einzelnen Integrale, die sich für dieses System ergeben.

Wir werden nun auch hier (vergl. § 7) Integrale finden können, indem wir setzen

$$\pi_{\mathfrak{b}} = B_{\mathfrak{b}} . e^{int}. \tag{142}$$

Führt man diese Lösung in die Gleichung (141) ein, so erhalten wir

$$0 = \sum_{\mathfrak{b}} B_{\mathfrak{b}} . \left(A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - n^2 F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\right). \tag{143}$$

Dadurch ist ein System von linearen Gleichungen gegeben, aus denen das Verhältnifs der Coefficienten $B_{\mathfrak{b}}$ zu bestimmen ist. Wir haben so viele Gleichungen als veränderliche Coordinaten, und damit auch, als Unbekannte $B_{\mathfrak{b}}$ vorhanden sind; es werden also die Verhältnisse der $B_{\mathfrak{b}}$ zu finden sein, wenn die Determinante dieser Gleichungen gleich Null ist; einer der Werthe $B_{\mathfrak{b}}$ ist aber willkürlich anzunehmen. Indem wir die Determinante dieses Gleichungssystems gleich Null setzen, finden wir die Werthe für n^2, und zwar bekommen wir deren so viele, als wir laufende Indices $\mathfrak{b}$ haben. Die ganze weitere Behandlungsweise wird also dieselbe wie früher (§ 7 u. f.), und wir sehen, dafs die für rechtwinklige Coordinaten durchgeführte Behandlung des Problems sich auf beliebige Coordinaten übertragen läfst.

§ 34. Uebergang zu continuirlich verbreiteten Massen.

Geht man nun von dem bisher betrachteten System discreter Massenpunkte auf ein continuirliches System über, so tritt der Nutzen dieser neuen Umformung der Bewegungsgleichungen besonders hervor. Da wir dann gewissermaſsen ein System von unendlich vielen Massenpunkten haben, so ist die Zahl der Coordinaten eine unendliche, wodurch eine gewisse Schwierigkeit entsteht. Wir können zwar auch bei den Systemen mit continuirlichen Massen die Differentialgleichungen aufstellen, dann die einzelnen particulären Integrale solcher Differentialgleichungen finden und, indem wir die Bewegungen, welche diesen einzelnen particulären Integralen entsprechen, superponirt denken, sehr verschiedene Bewegungsformen herstellen; aber wir können nicht sicher die Entwicklung einer gegebenen Anfangsform- und Anfangsgeschwindigkeit des Systems in eine Reihe ausführen, welche aus den einzelnen particulären Integralen zusammengesetzt ist. Bei einem System aus vereinzelten Massenpunkten hatten wir so viel verschiedene Integrale für die Bewegung, als wir veränderliche Coordinaten hatten, und wir konnten in jedem Falle einfache Methoden angeben, wie die Bewegung ausfallen würde, wenn das System von einer beliebigen Anfangslage mit beliebig gegebenen Geschwindigkeiten ausginge. Wir hatten willkürliche Coefficienten für die particulären Integrale zur Verfügung, welche dieses immer ermöglichten, und es lieſs sich sogar eine directe Methode angeben, um die Coefficienten für die Integrale zu finden. Aber sobald die Anzahl der Integrale unendlich wird, ist wenigstens nicht immer der Beweis zu geben, daſs die gefundene Reihe auch wirklich die gegebene Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit darstellt. Die Methoden, welche dabei benutzt werden, sind ähnlich wie die, welche wir bei einer endlichen Anzahl von Massenpunkten gebraucht haben. Man kommt im Allgemeinen nicht weiter, als nachzuweisen, daſs eine bestimmte Reihe die richtige ist, falls die Bewegung durch das gegebene System von particulären Integralen dargestellt werden kann, nicht aber dahin, nachzuweisen, daſs eine bestimmte Reihe wirklich den Werth darstellt. Es giebt freilich einzelne Fälle, wo man auch für eine unendliche Anzahl von Massenpunkten diesen Beweis führen kann.

Zweiter Theil.

Die Schwingungen von Saiten, elastischen Stäben und Luftsäulen.

Erster Abschnitt.

Die Schwingungen einer Saite.

§ 35. Die Saite als System einer endlichen Anzahl discreter Massenpunkte betrachtet.

Die Theorie der Saitenbewegung wollen wir zunächst unter der Voraussetzung entwickeln, dafs die Saite zusammengesetzt ist aus äquidistanten Massenpunkten, die in endlicher, wenn auch beliebig grofser Zahl vorhanden sind, und zwischen denen eine Kraft thätig ist, welche sie gegen einander hinzieht; dann werden sich diese so zu legen streben, dafs ihre Entfernungen von einander am kürzesten sind. Sie liegen dann in einer geraden Linie. Wir wollen den ersten Punkt, welcher befestigt und unbeweglich sein soll, mit dem Index 0 und den letzten mit ($\mathfrak{n}$) bezeichnen. Das sind also $\mathfrak{n}$ Intervalle zwischen $\mathfrak{n}+1$ Punkten. Ferner nehmen wir an, dafs die Kraft, welche die Punkte gegen einander zieht, die Natur einer elastischen Kraft hat. Wenn die Punkte aus der geraden Linie herausgerückt sind, wobei sie im Allgemeinen nach allen drei Dimensionen verschoben sein können, so wird die Entfernung je zweier benachbarter Punkte geändert, und zwar würde, wenn wir die Entfernung zweier benachbarter Punkte nach der Verschiebung mit ds, die Entfernung in der Gleichgewichtslage mit dx und mit ξ, η, ζ die Verschiebungen bezeichnen, zu setzen sein

$$ds_{\mathfrak{a}}^2 = (dx + \xi_{\mathfrak{a}} - \xi_{\mathfrak{a}-1})^2 + (\eta_{\mathfrak{a}} - \eta_{\mathfrak{a}-1})^2 + (\zeta_{\mathfrak{a}} - \zeta_{\mathfrak{a}-1})^2, \qquad (144)$$

wo sich die Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}-1$ auf zwei beliebige benachbarte

Punkte und $d s_a$ resp. $d x$ auf den Abstand dieser beiden Punkte beziehen.

Die Kraft, welche ein solcher elastischer Faden hervorbringt, und welche einer äufseren Kraft, die seine Form zu ändern strebt, entgegenwirkt, ist der Verlängerung proportional. Die ursprüngliche Gleichgewichtslage des Systems ist nun aber nicht ohne Kräfte, weil die gespannte Saite immer noch auf die Enden einwirken wird. Wenn wir also den Ausdruck der Kräftefunction bilden wollen, so würde bei einem elastischen Faden die Kraft zu setzen sein gleich der Summe einer Constanten, die wir, weil sie die Spannung repräsentirt, mit S bezeichnen, und der Zunahme dieser Spannung, welche durch die Verlängerung eintritt. Bezeichnen wir die Verlängerung, welche die Saite erleidet, d. h. den Bruchtheil, um welchen ihre Länge geändert ist, mit λ, ferner den Querschnitt der Saite mit Q und den Elasticitätscoefficienten mit E, so können wir die Zunahme der Spannung durch $E . Q . \lambda$ ausdrücken. Dann erhalten wir also als Werth der Kraft

$$K = S + E . Q . \lambda. \tag{145}$$

Wenn wir die Arbeit finden wollen, welche in dem Saitenstück $d x$ gebraucht wird, wenn es auf $d x\,(1 + \lambda)$ verlängert wird, müssen wir $d x . \int K d \lambda$ bilden und erhalten dann

$$\left.\begin{aligned} \Phi = d x . \int K . d \lambda &= d x \int S . d \lambda + d x . \int E . Q . \lambda . d \lambda \\ &= d x . S . \lambda + d x . E Q \frac{\lambda^2}{2} . \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

Wir können nun in der Gleichung (144) den Werth λ einführen, indem wir berücksichtigen, dafs

$$d s_a = d x\,(1 + \lambda).$$

Wir erhalten dann

$$d x^2 (1 + \lambda)^2 = (d x + \xi_a - \xi_{a-1})^2 + (\eta_a - \eta_{a-1})^2 + (\zeta_a - \zeta_{a-1})^2 \tag{147}$$

oder wenn wir die Wurzel ausziehen,

$$d x (1 + \lambda) = (d x + \xi_a - \xi_{a-1}) \sqrt{1 + \frac{(\eta_a - \eta_{a-1})^2 + (\zeta_a - \zeta_{a-1})^2}{(d x + \xi_a - \xi_{a-1})^2}} \tag{147a}$$

Die Wurzel entwickeln wir nach dem binomischen Satz:

$$d x (1 + \lambda) = (d x + \xi_a - \xi_{a-1}) \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2}(\eta_a - \eta_{a-1})^2 + \frac{1}{2}(\zeta_a - \zeta_{a-1})^2}{(d x + \xi_a - \xi_{a-1})^2} + \ldots \right\} \tag{147b}$$

Die weiteren Glieder wollen wir vernachlässigen, weil $\xi_a - \xi_{a-1}$, $\eta_a - \eta_{a-1}$, $\zeta_a - \zeta_{a-1}$ verschwindend klein im Verhältnifs zu dx vorausgesetzt werden. Es ist daher auch im Nenner $\xi_a - \xi_{a-1}$ gegen dx zu vernachlässigen, und nach der Division mit dx ergiebt sich somit

$$\left.\begin{aligned} 1+\lambda &= 1+\frac{\xi_a-\xi_{a-1}}{dx}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\eta_a-\eta_{a-1}}{dx}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\zeta_a-\zeta_{a-1}}{dx}\right)^2 \\ \text{oder} \qquad \lambda &= \frac{\xi_a-\xi_{a-1}}{dx}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\eta_a-\eta_{a-1}}{dx}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\zeta_a-\zeta_{a-1}}{dx}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{147c}$$

Setzt man diesen Werth in den durch Gleichung (146) erhaltenen Ausdruck für Φ ein, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \Phi = S.(\xi_a-\xi_{a-1})+\tfrac{1}{2}S.dx.\left(\frac{\eta_a-\eta_{a-1}}{dx}\right)^2+\tfrac{1}{2}S.dx.\left(\frac{\zeta_a-\zeta_{a-1}}{dx}\right)^2 \\ +\frac{E.Q}{2}.dx.\left(\frac{\xi_a-\xi_{a-1}}{dx}\right)^2, \end{aligned}\right\} \tag{146a}$$

da die weiteren Glieder als unendlich klein von höherer Ordnung weggelassen werden können.

Die ganze Kräftefunction ergiebt sich nun, indem über alle einzelnen Theile von $a = 1$ bis $a = n$ summirt wird.

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \sum_a \Big\{ S(\xi_a-\xi_{a-1})+\tfrac{1}{2}S\frac{(\eta_a-\eta_{a-1})^2}{dx} \\ &\quad +\tfrac{1}{2}S\frac{(\zeta_a-\zeta_{a-1})^2}{dx}+\frac{EQ}{2}\frac{(\xi_a-\xi_{a-1})^2}{dx}\Big\} \\ &= S(\xi_n-\xi_0)+\sum_a\Big\{\tfrac{1}{2}S.\frac{(\eta_a-\eta_{a-1})^2}{dx} \\ &\quad +\tfrac{1}{2}S\frac{(\zeta_a-\zeta_{a-1})^2}{dx}+\frac{EQ}{2}\frac{(\xi_a-\xi_{a-1})^2}{dx}\Big\} \end{aligned}\right\} \tag{146b}$$

Hieraus ergeben sich die Kräfte, welche in Richtung der ξ, η oder ζ auf den Punkt a wirken. Sie sind gleich den negativen Differentialquotienten von Φ nach ξ_a, η_a, ζ_a. Die Bewegungsgleichungen erhalten wir, indem wir die Kräfte den mit der Masse m des Punktes multiplicirten zweiten Differentialquotienten

$$m\frac{d^2\xi_a}{dt^2}, \quad m\frac{d^2\eta_a}{dt^2}, \quad m\frac{d^2\zeta_a}{dt^2}$$

gleich setzen. So ergiebt sich zunächst für ξ_α

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{d^2\xi_\alpha}{dt^2} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\alpha} = -\frac{EQ}{dx}(\xi_\alpha-\xi_{\alpha-1})+\frac{EQ}{dx}(\xi_{\alpha+1}-\xi_\alpha)\\
&= \frac{EQ}{dx}\left\{\xi_{\alpha+1}-2\xi_\alpha+\xi_{\alpha-1}\right\}\\
&\text{und in analoger Weise:}\\
m\frac{d^2\eta_\alpha}{dt^2} &= +\frac{S}{dx}\left[\eta_{\alpha+1}-2\eta_\alpha+\eta_{\alpha-1}\right].\\
&\text{und}\\
m\frac{d^2\zeta_\alpha}{dt^2} &= \frac{S}{dx}\cdot\left[\zeta_{\alpha+1}-2\zeta_\alpha+\zeta_{\alpha-1}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (148)$$

Das sind drei in ihrer Form übereinstimmende Gleichungen, die über die Bewegung nach den drei Coordinatenrichtungen Aufschlufs geben; sie unterscheiden sich nur durch verschiedene Coefficienten. Bei den auf die y-Axe und z-Axe bezüglichen Gleichungen kommt nur die Spannung S in Betracht, während für die x-Axe die elastische Kraft der Saitensubstanz allein vom Einflufs ist.

Wir hatten schon in der allgemeinen Theorie der oscillatorischen Bewegungen von Systemen von Massenpunkten gesehen, dafs Lösungen derartiger Gleichungen sich in der Form

$$\xi_\alpha = a_\alpha \,.\, e^{int}$$

darstellen lassen. Setzen wir solche Lösungen für $\xi_{\alpha+1}$, ξ_α und $\xi_{\alpha-1}$ ein und dividiren durch $\frac{E.Q}{dx}$, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{mn^2dx}{E.Q}a_\alpha &= a_{\alpha+1}+a_{\alpha-1}-2a_\alpha\\
&\text{oder}\\
0 &= a_{\alpha+1}+a_{\alpha-1}-\left(2-\frac{mn^2dx}{E.Q}\right)a_\alpha\,.
\end{aligned}\right\} \quad (149)$$

In der Bewegungsgleichung für die η- und ζ-Verschiebungen haben wir

$$0 = a_{\alpha+1}+a_{\alpha-1}-\left(2-\frac{mn^2}{S}dx\right)a_\alpha.$$

Damit wir alle drei Systeme gemeinsam behandeln können, wollen wir für $2-\frac{mn^2}{E.Q}dx$ resp. $2-\frac{mn^2}{S}dx$ die Bezeichnung $q+\frac{1}{q}$ einführen. Wird $q = e^{i\omega}$ gesetzt, so ist

$$q+\frac{1}{q} = 2\cos\omega.$$

Die Gleichung

$$0 = a_{\mathfrak{a}+1} + a_{\mathfrak{a}-1} - \left(q + \frac{1}{q}\right) . a_{\mathfrak{a}} \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots \mathfrak{n} - 1) \quad (149\,\mathrm{a})$$

ist also eine gemeinsame Form, unter welche die Gleichungen für alle drei Coordinaten passen. Diese Gleichungen sind nach den a homogen und linear, und zwar sind eben so viele Gleichungen, wie zu suchende Gröfsen a vorhanden; denn a_0 und $a_{\mathfrak{n}}$ sind Null.

Sollen die Gröfsen a nicht sämmtlich Null sein, so mufs die Determinante des Gleichungssystems verschwinden. Das liefert eine Gleichung für q und damit für die Schwingungszahl der möglichen Oscillationen.

Wir schreiben die Gleichung nun in anderer Form, indem wir einige Glieder auf die andere Seite bringen:

$$\left.\begin{aligned} a_{\mathfrak{a}+1} - q . a_{\mathfrak{a}} &= - a_{\mathfrak{a}-1} + \frac{1}{q} a_{\mathfrak{a}} \\ &= \frac{1}{q} [a_{\mathfrak{a}} - q . a_{\mathfrak{a}-1}]. \end{aligned}\right\} \quad (150)$$

Nun stehen auf beiden Seiten dieser Gleichung dieselben Zusammenfügungen von den zu suchenden Gröfsen, und zwar hat das zweite Glied den um 1 kleineren Index, als das erste, und rechts ist noch der ganze Ausdruck durch q dividirt. Nun ist leicht einzusehen, dafs wir diesen Ausdruck, dessen Indices um 1 geringer sind, in derselben Weise auf einen Ausdruck zurückführen können, dessen Indices noch um eine weitere Einheit kleiner sind:

$$a_{\mathfrak{a}} - q . a_{\mathfrak{a}-1} = \frac{1}{q} [a_{\mathfrak{a}-1} - q . a_{\mathfrak{a}-2}],$$

mithin

$$a_{\mathfrak{a}+1} - q\, a_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{q^2} [a_{\mathfrak{a}-1} - q . a_{\mathfrak{a}-2}],$$

und so können wir weiter gehen und erhalten schliefslich:

$$a_{\mathfrak{a}+1} - q . a_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{q^{\mathfrak{a}}} [a_1 - q . a_0]. \quad (151)$$

Da der Endpunkt, der den Index 0 trägt, gar nicht verschoben werden soll, so ist $a_0 = 0$.

Alle Gröfsen a können somit durch a_1 ausgedrückt werden. Um $a_{\mathfrak{a}+1}$ auszudrücken, multipliciren wir die Gleichungen mit Potenzen von q und schreiben:

$$a_{\mathfrak{a}+1} - q \,.\, a_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{q^{\mathfrak{a}}}\, a_1$$

$$q \,.\, a_{\mathfrak{a}} - q^2 \,.\, a_{\mathfrak{a}-1} = \frac{1}{q^{\mathfrak{a}-2}}\, a_1$$

$$q^2 \,.\, a_{\mathfrak{a}-1} - q^3 \,.\, a_{\mathfrak{a}-2} = \frac{1}{q^{\mathfrak{a}-4}}\, a_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots$$

$$q^{\mathfrak{a}-1} a_2 - q^{\mathfrak{a}} \,.\, a_1 = \frac{1}{q^{\mathfrak{a}-2\mathfrak{a}+2}}\, a_1 = q^{\mathfrak{a}-2} \,.\, a_1$$

Wenn wir diese Reihe von Gleichungen addiren, so bleibt auf der linken Seite nur das erste Glied von der ersten Gleichung und das letzte Glied von der letzten Gleichung stehen und es wird:

$$a_{\mathfrak{a}+1} - q^{\mathfrak{a}} \,.\, a_1 = \frac{1}{q^{\mathfrak{a}}} \,.\, a_1 \left(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2\mathfrak{a}-2}\right). \tag{152}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} a_{\mathfrak{a}+1} &= \frac{1}{q^{\mathfrak{a}}} \cdot a_1 \left(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2\mathfrak{a}-2} + q^{2\mathfrak{a}}\right) \\ &= \frac{a_1}{q^{\mathfrak{a}}} \cdot \frac{1 - q^{2\mathfrak{a}+2}}{1 - q^2}, \end{aligned}\right\} \tag{152a}$$

was auch in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$a_{\mathfrak{a}+1} = a_1 \cdot \frac{\dfrac{1}{q^{\mathfrak{a}+1}} - q^{\mathfrak{a}+1}}{\dfrac{1}{q} - q}. \tag{152b}$$

Die Gröfse a_1 selbst bleibt willkürlich, da in einem solchen System von linearen homogenen Gleichungen immer nur das Verhältnifs aller einzelnen Unbekannten zu einer derselben bestimmt werden kann. Um nun den Werth von q wirklich zu finden, müssen wir noch die zweite Grenzbedingung hinzufügen. Diese besteht darin, dafs das andere Ende der Saite ebenfalls fest bleiben soll, dafs also $a_{\mathfrak{n}} = 0$ ist. Für $\mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{n}$ erhalten wir:

$$a_{\mathfrak{n}} = a_1 \cdot \frac{\dfrac{1}{q^{\mathfrak{n}}} - q^{\mathfrak{n}}}{\dfrac{1}{q} - q} = 0\,.$$

Nun mufs a_1 von Null verschieden sein, wenn die Punkte sich überhaupt bewegen sollen; $a_\mathfrak{n}$ kann daher nicht anders gleich Null sein, als dafs $\frac{\frac{1}{q^\mathfrak{n}} - q^\mathfrak{n}}{\frac{1}{q} - q} = 0$ ist.

Wenn wir nun $q = e^{i\omega}$ setzen, so erhalten wir für ω die Gleichung:

$$\frac{e^{i\mathfrak{n}\omega} - e^{-i\mathfrak{n}\omega}}{e^{i\omega} - e^{-i\omega}} = \frac{2i \sin(\mathfrak{n}\omega)}{2i \sin(\omega)} = \frac{\sin(\mathfrak{n}\omega)}{\sin\omega} = 0. \tag{153}$$

Die Bedingung $\sin(\mathfrak{n}\omega) = 0$ verlangt, dafs $\mathfrak{n}\omega$ gleich einem ganzen Vielfachen von π ist

$$\mathfrak{n}\omega = \mathfrak{b}\pi,$$

wo $\mathfrak{b}$ eine ganze Zahl bedeuten soll. Mithin ist

$$q = e^{i\frac{\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}}} \tag{154}$$

Es kann $\mathfrak{b}$ die ganze Reihe der ganzen Zahlen durchlaufen mit Ausnahme der Vielfachen von $\mathfrak{n}$, wofür auch $\sin\omega$ verschwindet und daher die Gleichung

$$\frac{\sin(\mathfrak{n}\omega)}{\sin\omega} = 0$$

nicht mehr erfüllt ist. Für q erhalten wir nur $2\mathfrak{n} - 2$ von einander verschiedene Werthe, weil $\mathfrak{b} + 2\mathfrak{n}$ denselben Werth ergiebt wie $\mathfrak{b}$.

Setzen wir den Werth von q in den Ausdruck von $a_{\mathfrak{a}+1}$ ein, so ergiebt sich:

$$a_{\mathfrak{a}+1} = a_1 \cdot \frac{\sin(\mathfrak{a}+1)\frac{\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}}}{\sin\frac{\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}}}. \tag{155}$$

Nun ist der Index $\mathfrak{a} + 1$ gleich der Anzahl der Intervalle von dem Anfangspunkt der Saite bis zu dem Punkte $\mathfrak{a} + 1$. Bezeichnen wir daher die Entfernung vom Anfangspunkt bis zu diesem Punkte mit x und die Länge der ganzen Saite mit l, so ist

$$\frac{\mathfrak{a}+1}{\mathfrak{n}} = \frac{x}{l}$$

und mithin

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{a}+1} = a_1 \cdot \frac{\sin \frac{x}{l} \mathfrak{b} \pi}{\sin \frac{\mathfrak{b} \pi}{\mathfrak{n}}}. \tag{155a}$$

Wir haben hiermit eine ganze Reihe von Schwingungsformen der Saite erhalten. Ist z. B. $\mathfrak{b} = 1$, so tritt ein zweiter Nullpunkt erst ein, wenn $x = l$ ist. Dann ist die Form, in welcher die Saite ausgewichen, ohne Knotenpunkt (Fig. 2*a*). Ist $\mathfrak{b} = 2$, so wird eine Form der Saite entstehen, welche in der halben Länge einen Knoten-

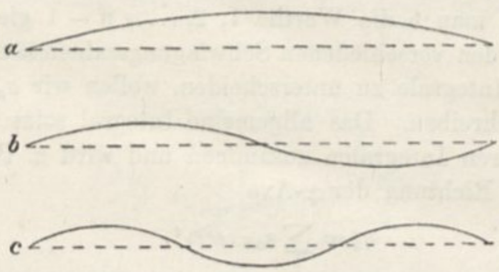

Fig. 2 *a*, *b*, *c*.

punkt besitzt (Fig. 2*b*). Ist $\mathfrak{b} = 3$, so bekommen wir eine Form mit zwei Knotenpunkten (Fig. 2*c*) u. s. w. Dabei brauchen die Knotenpunkte nicht mit den materiellen Punkten zusammenzufallen.

Die Schwingungszahl n hing mit q und ω durch die Gleichung zusammen

$$\left.\begin{aligned} & 2 - \frac{m n^2}{E.Q} dx = q + \frac{1}{q} = 2.\cos\omega \\ \text{oder} \quad & \\ & 2 - \frac{m n^2}{S} dx = q + \frac{1}{q} = 2\cos\omega \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} & 2(1-\cos\omega) = 4.\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{m n^2}{EQ} dx \\ \text{oder} \quad & \\ & 4\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{m n^2}{S} dx \end{aligned}\right\} \tag{156a}$$

Wenn wir die Wurzel ausziehen, so erhalten wir für die Schwingungszahl n die Bestimmung:

$$\left.\begin{aligned} & \pm\sqrt{\frac{m\,dx}{E.Q}}\cdot n = 2\sin\frac{\mathfrak{b}\pi}{2\mathfrak{n}} \\ \text{oder} \quad & \\ & \pm\sqrt{\frac{m\,dx}{S}}\cdot n = 2\sin\frac{\mathfrak{b}\pi}{2\mathfrak{n}}. \end{aligned}\right\} \tag{157}$$

Der Gröfse $\mathfrak{b}$ sind dabei, wie wir oben sahen, die Werthe 1, 2, ... $2\mathfrak{n}-1$, mit Ausnahme von $\mathfrak{n}$ beizulegen. Die Zahl dieser Werthe kann noch auf die Hälfte eingeschränkt werden, wenn wir beachten, dafs $\mathfrak{b}$ und $2\mathfrak{n}-\mathfrak{b}$ entgegengesetzte Werthe von

$$\sin(\mathfrak{a}+1)\frac{\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}}$$

liefern, dafs also für zwei sich zu $2\mathfrak{n}$ ergänzende Werthe von $\mathfrak{b}$ sowohl die positiv zu nehmende Schwingungszahl n wie auch der Ausdruck von $a_{\mathfrak{a}+1}$ dieselben sind. Man erhält also alle Schwingungsformen, wenn man $\mathfrak{b}$ die Werthe 1, 2, ..., $\mathfrak{n}-1$ giebt.

Um die den verschiedenen Schwingungszahlen n entsprechenden particulären Integrale zu unterscheiden, wollen wir $a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ statt $a_{\mathfrak{a}}$ und $n_{\mathfrak{b}}$ statt n schreiben. Das allgemeine Integral setzt sich dann aus den particulären Integralen zusammen und wird z. B. für die Verschiebung in Richtung der y-Axe

$$\eta_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \cdot e^{i n_{\mathfrak{b}} t}. \tag{158}$$

Die $\mathfrak{n}-1$ Gröfsen $a_{1\mathfrak{b}}$ können dabei ganz beliebige reelle oder complexe Werthe haben. Dann sind die übrigen Gröfsen $a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ nach der Gleichung (155) durch Multiplication von $a_{1\mathfrak{b}}$ mit bestimmten Factoren zu berechnen. Oder, wie wir auch sagen können, wenn den Gröfsen $a_{1\mathfrak{b}}$ irgend welche bestimmte von Null verschiedene Werthe beigelegt werden und die zugehörigen Werthe von $a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ berechnet sind, so erhält man die allgemeine Lösung, indem man die sämmtlichen Gröfsen $a_{1\mathfrak{b}}, a_{2\mathfrak{b}} \ldots . a_{\mathfrak{n}-1,\mathfrak{b}}$ mit einem beliebigen reellen oder complexen Factor $F_{\mathfrak{b}} . e^{i\gamma_{\mathfrak{b}}}$ multiplicirt. Wir wollen nun den Gröfsen $a_{1\mathfrak{b}}$ die festen Werthe $\sin\frac{\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}}$ geben, dann wird nach der Gleichung (155)

$$a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sin\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}}. \tag{159}$$

Die allgemeine Lösung nimmt dann die Form an

$$\eta_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}} F_{\mathfrak{b}} \sin\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}} e^{i(n_{\mathfrak{b}}t+\gamma_{\mathfrak{b}})} \tag{160}$$

oder wenn wir uns auf den reellen Theil beschränken

$$\left.\begin{aligned} \eta_{\mathfrak{a}} &= \sum_{\mathfrak{b}} F_{\mathfrak{b}} \cdot \sin\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}} . \cos(n_{\mathfrak{b}}t+\gamma_{\mathfrak{b}}) \\ &= \sum_{\mathfrak{b}} F_{\mathfrak{b}} \cdot \sin\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}} . (\cos\gamma_{\mathfrak{b}}\cos n_{\mathfrak{b}}t - \sin\gamma_{\mathfrak{b}}\sin n_{\mathfrak{b}}t) \end{aligned}\right\} \tag{160a}$$

oder endlich in Uebereinstimmung mit der Gleichung (27)

$$\eta_\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{b} \left\{ A_\mathfrak{b} . \sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}} \sin \mathfrak{n}_\mathfrak{b} t + B_\mathfrak{b} . \sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}} \cos \mathfrak{n}_\mathfrak{b} t \right\} \tag{160b}$$

wo $A_\mathfrak{b}$ und $B_\mathfrak{b}$ für $-F_\mathfrak{b} \sin \gamma_\mathfrak{b}$ und $F_\mathfrak{b} \cos \gamma_\mathfrak{b}$ geschrieben sind und mithin beliebige reelle Werthe bedeuten. Analoge Gleichungen gelten für $\xi_\mathfrak{a}$ und $\zeta_\mathfrak{a}$.

Die Werthe der Constanten $A_\mathfrak{b}$ und $B_\mathfrak{b}$ lassen sich bestimmen, sobald für $t = 0$ die Werthe von η_a und $\frac{d\eta_a}{dt}$ gegeben sind. Für $t = 0$ wird nämlich

$$\left.\begin{aligned} \eta_\mathfrak{a} &= \sum_\mathfrak{b} \left[B_\mathfrak{b} \sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}} \right]. \\ \frac{d\eta_\mathfrak{a}}{dt} &= \sum_\mathfrak{b} \left[\mathfrak{n}_\mathfrak{b} A_\mathfrak{b} \sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}} \right]. \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

Wir nehmen also im Anfangszustand der Saite d. h. in dem Augenblicke $t = 0$ die Elongation jedes Punktes und seine Geschwindigkeit in Richtung der beweglichen Coordinate als gegeben an. Dieselben Formeln gelten auch für die beiden andern Coordinatenrichtungen. Der einzige Unterschied besteht darin, daſs für die Longitudinalschwingungen in der Gleichung für die Schwingungszahl die Constante S durch $E.Q$ zu ersetzen ist.

Die Constanten $A_\mathfrak{b}$ und $B_\mathfrak{b}$ finden wir nun nach der in § 10 dargelegten Weise. Wir multipliciren die Gleichung (161) für den Anfangswerth von $\eta_\mathfrak{a}$ mit $\sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\pi}{\mathfrak{n}}$ und addiren über $\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots . \mathfrak{n} - 1$:

$$\sum_\mathfrak{a} \left[\eta_\mathfrak{a} . \sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\pi}{\mathfrak{n}} \right] = \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left[B_\mathfrak{b} . \sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}} . \sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\pi}{\mathfrak{n}} \right], \tag{162}$$

$\mathfrak{c}$ bedeutet dabei irgend eine der Zahlen 1, 2, ... $\mathfrak{n} - 1$.

Indem wir $B_\mathfrak{b}$ heraussetzen, wird:

$$\sum_\mathfrak{a} \left[\eta_\mathfrak{a} . \sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\pi}{\mathfrak{n}} \right] = \sum_\mathfrak{b} B_\mathfrak{b} \sum_\mathfrak{a} \left[\sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}} . \sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\pi}{\mathfrak{n}} \right]. \tag{162a}$$

Das Product der Sinus können wir in eine Differenz zweier Cosinus verwandeln, so daſs

$$\sum_\mathfrak{a} \left[\sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\pi}{\mathfrak{n}} \sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\pi}{\mathfrak{n}} \right] = \sum_\mathfrak{a} \tfrac{1}{2} \cos \frac{\mathfrak{a}\pi(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})}{\mathfrak{n}} - \sum_\mathfrak{a} \tfrac{1}{2} \cos \frac{\mathfrak{a}\pi(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})}{\mathfrak{n}}. \tag{163}$$

Nun ist leicht zu sehen, dafs die rechte Seite der Gleichung verschwindet, sobald $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{b}$ verschieden ist. Denn es ist:

$$1 + e^{i\omega} + e^{2i\omega} + \ldots + e^{(2\mathfrak{n}-1)i\omega} = \frac{1 - e^{2\mathfrak{n}i\omega}}{1 - e^{i\omega}}.$$

Setzt man für ω irgend ein Vielfaches von $\frac{\pi}{\mathfrak{n}}$ ein, so wird

$$e^{2\mathfrak{n}i\omega} = 1,$$

mithin

$$1 + e^{i\omega} + e^{2i\omega} + \ldots + e^{(2\mathfrak{n}-1)i\omega} = 0$$

oder, wenn man mit $e^{-\mathfrak{n}i\omega}$ multiplicirt:

$$e^{-\mathfrak{n}i\omega} + e^{-(\mathfrak{n}-1)i\omega} + \ldots + 1 + \ldots + e^{(\mathfrak{n}-1)i\omega} = 0.$$

Der reelle Theil allein liefert die Gleichung

$$\cos(\mathfrak{n}\,\omega) + 1 + 2\sum_{\mathfrak{a}} \cos \mathfrak{a}\,\omega = 0,$$

wo $\mathfrak{a}$ die Werthe 1, 2, ... $\mathfrak{n} - 1$ durchläuft. Setzen wir einmal $\omega = \frac{\pi(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})}{\mathfrak{n}}$ und einmal $\omega = \frac{\pi(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})}{\mathfrak{n}}$ und bilden die Differenz, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})\pi - \cos(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\pi + \sum\limits_{\mathfrak{a}} \cos\frac{\mathfrak{a}\pi(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})}{\mathfrak{n}} - \sum\limits_{\mathfrak{a}} \cos\frac{\mathfrak{a}\pi(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})}{\mathfrak{n}} = 0 \\ \text{also} \\ \qquad \sum\limits_{\mathfrak{a}} \cos\frac{\mathfrak{a}\pi(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})}{\mathfrak{n}} - \sum\limits_{\mathfrak{a}} \cos\frac{\mathfrak{a}\pi(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})}{\mathfrak{n}} = 0. \end{array}\right\} \tag{164}$$

Ist aber $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$, so wird

$$\sum_{\mathfrak{a}} \tfrac{1}{2} \cos\frac{\mathfrak{a}\pi(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})}{\mathfrak{n}} - \sum_{\mathfrak{a}} \tfrac{1}{2} \cos\frac{\mathfrak{a}\pi(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})}{\mathfrak{n}} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{n}. \tag{165}$$

Mithin geht die Gleichung (162a) über in

$$\sum_{\mathfrak{a}} \left[\eta_{\mathfrak{a}} \sin\frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,\pi}{\mathfrak{n}}\right] = B_{\mathfrak{c}} \cdot \frac{\mathfrak{n}}{2}. \tag{162b}$$

Für die Geschwindigkeit kann man die analogen Rechnungen vornehmen.

Für $t = 0$ haben wir

$$\frac{d\eta_{\mathfrak{a}}}{dt} = \sum_{\mathfrak{b}} \mathfrak{n}_{\mathfrak{b}} A_{\mathfrak{b}} \sin\frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\pi}{\mathfrak{n}}. \tag{166}$$

Multipliciren wir mit $\sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\pi}{\mathfrak{n}}$ und addiren über alle Werthe $\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots \mathfrak{n} - 1$, so ergiebt sich

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{d\eta_{\mathfrak{a}}}{dt} \sin \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\pi}{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{c}} A_{\mathfrak{c}} \frac{\mathfrak{n}}{2}. \tag{167}$$

Auf diese Weise sind die sämmtlichen Constanten einem beliebig gegebenen Anfangszustande angepafst.

Wenn wir nun zu einer unendlichen Anzahl von Saitenpunkten übergehen, dann läfst sich für den Fall einer unbelasteten Saite, welche von durchaus gleichmäfsiger Beschaffenheit in ihrer ganzen Länge ist, dieselbe Methode anwenden. Die Summe, welche die Lösung darstellt, geht in eine unendliche Reihe über, von der sich aber nachweisen läfst, dafs sie convergirt und wirklich den gesuchten Werth repräsentirt. Bei der Zerlegung der Saite in eine Anzahl discreter Massenpunkte sind wir nicht an den Fall der gleichmäfsigen Beschaffenheit gebunden. Wenn wir z. B. den Punkt in der Mitte stärker belasten als die übrigen, so können wir allerdings die Schwingungsformen und Perioden nach derselben Methode finden. Ja wir können nicht nur die Punkte ungleich belasten, wir können auch ihre Entfernungen ungleich weit annehmen. Die Methode bleibt auch dann noch anwendbar, nur läfst sich die Elimination nicht mehr in der einfachen Weise durchführen wie in dem betrachteten Falle.

§ 36. Die Saite als continuirlicher Körper betrachtet.

Wir hatten die potentielle Energie unserer hypothetischen Saite dargestellt (Gleichung 146b) durch eine Summe von Gliedern von der Form

$$S(\xi_{\mathfrak{a}} - \xi_{\mathfrak{a}-1}) + \tfrac{1}{2} S \frac{(\eta_{\mathfrak{a}} - \eta_{\mathfrak{a}-1})^2}{dx} + \tfrac{1}{2} S \frac{(\zeta_{\mathfrak{a}} - \zeta_{\mathfrak{a}-1})^2}{dx} + \tfrac{1}{2} E.Q \frac{(\xi_{\mathfrak{a}} - \xi_{\mathfrak{a}-1})^2}{dx}$$

Lassen wir die discreten Massenpunkte in eine continuirliche Saite übergehen, so werden wir in dem Ausdruck für die potentielle Energie die Differenzen $\xi_{\mathfrak{a}} - \xi_{\mathfrak{a}-1}$, $\eta_{\mathfrak{a}} - \eta_{\mathfrak{a}-1}$, $\zeta_{\mathfrak{a}} - \zeta_{\mathfrak{a}-1}$ in die Differentiale $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ zu verwandeln haben und erhalten

$$\left\{ S.\frac{\partial \xi}{\partial x} + \tfrac{1}{2} S \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \tfrac{1}{2} S \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \tfrac{1}{2} E.Q \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \right\} dx. \tag{168}$$

Die gesammte potentielle Energie Φ ist gleich dem Integral über x

$$\Phi = \int dx \left\{ S \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \tfrac{1}{2} S \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \tfrac{1}{2} S \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \tfrac{1}{2} E \cdot Q \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \right\} \tag{169}$$

Bedeutet nun μ die Masse der Längeneinheit der Saite, so ist $dx . \mu$ die Masse des Stückes dx. Die lebendige Kraft der Saite ist daher gleich

$$\mathfrak{L} = \int \frac{dx . \mu}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2 \right\}. \tag{170}$$

Die Bewegungsgleichungen der Saite ergeben sich nun aus dem Hamilton'schen Princip, dafs die Variation des nach der Zeit von t_0 bis t_1 genommenen Integrals über $\Phi - \mathfrak{L}$ verschwinden mufs:

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\Phi - \mathfrak{L} \right].$$

Um zunächst $\delta \Phi$ zu bilden, haben wir die Coordinaten ξ, η, ζ zu variiren:

$$\delta \Phi = \int dx \left\{ \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + S \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} + S \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} + E . Q \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} \right\} \tag{171}$$

Das erste Glied läfst sich einfach integriren. $\delta \xi$ am oberen und $\delta \xi$ am unteren Ende sind beide gleich Null, also ist die Differenz gleich Null. Die folgenden Glieder sind durch partielle Integration umzugestalten.

$$\int \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} dx = \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta \eta - \int \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \delta \eta \, dx$$

$$\int \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} dx = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \delta \zeta - \int \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \delta \zeta \, dx$$

$$\int \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} dx = \frac{\partial \xi}{dx} \delta \xi - \int \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta \xi \, dx.$$

Die ersten Glieder der rechten Seiten verschwinden, wenn wir die Grenzen des Integrals einführen, da die Enden der Saite festliegen sollen. Auf diese Weise ergiebt sich:

$$\delta \Phi = - \int dx \left[\delta \eta \cdot S \frac{\partial^2 \eta}{dx^2} + \delta \zeta \cdot S \frac{\partial^2 \zeta}{dx^2} + E \cdot Q \delta \xi \cdot \frac{\partial^2 \xi}{dx^2} \right]. \tag{171a}$$

Die Variation $\delta \mathfrak{L}$ ergiebt sich in ähnlicher Weise.

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \mathfrak{L}\, dt = \iint dx \,.\, \mu \,.\, dt \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta \eta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta \zeta}{\partial t} \right\}. \tag{172}$$

Durch partielle Integration über t wird

$$\int dt \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \delta \xi - \int dt \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi$$

und analoge Gleichungen gelten für η und ζ. Beachtet man nun, dafs nach den Regeln des HAMILTON'schen Princips $\delta \xi$, $\delta \eta$, $\delta \zeta$ an den Zeitgrenzen t_0 und t_1 verschwinden, so ergiebt sich:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \mathfrak{L}\, dt = -\iint dx \cdot \mu \cdot dt \left\{ \delta \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \delta \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \delta \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right\} \tag{172a}$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\Phi - \mathfrak{L} \right] = \iint dx\, dt \Big[\Big(\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - E \cdot Q \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Big) \delta \xi \\ + \Big(\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - S \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \Big) \delta \eta + \Big(\mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - S \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Big) \delta \zeta \Big]. \end{aligned}\right\} \tag{173}$$

Die Variationen über die ganze Saite sind nur der einen Bedingung unterworfen, dafs sie continuirlich sein müssen, sowohl nach x als nach t. Eine Discontinuität nach x würde bedeuten, dafs an einer Stelle die Saite zerrissen wäre, und bei einer Discontinuität in der Zeit würde sie in der Zeit zerreifsen. Es würden die Saitenpunkte an einem Orte in einem gewissen Augenblick verschwinden und an einem andern wieder auftreten, was beides ausgeschlossen sein mufs.

Da nun die Variation des Integrals für alle Arten von Variationen gleich Null sein mufs, so folgt, dafs an jeder Stelle der Saite und in jedem Zeitpunkte der Coefficient von $\delta \xi$ gleich Null ist, das heifst

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - E \cdot Q \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \tag{174}$$

Denn wenn er an irgend einem Punkte der Saite und zu irgend einer gegebenen Zeit von 0 verschieden wäre, so würden wir die entsprechende Variation $\delta \xi$ von gleichem Zeichen machen und $\delta \eta = \delta \zeta = 0$ setzen können. Dann würde das Integral über lauter positive Glieder genommen sein und nicht gleich Null sein können. Ebenso folgt, dafs

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - S\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} &= 0 \\ \mu\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - S\frac{\partial^2\zeta}{d x^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (174\text{a})$$

Diese drei Gleichungen hätten wir auch unmittelbar aus den Gleichungen erhalten können, durch welche die Bewegung der discreten Massenpunkte gegeben wird. Wenn wir z. B. in der Gleichung (148)

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{E\cdot Q}{dx}[\xi_{a+1} + \xi_{a-1} - 2\xi_a]$$

m durch $\mu\, dx$ ersetzen, so können wir sie in der Form schreiben

$$\mu\frac{d^2\xi}{dt^2} = E\cdot Q\,\frac{\dfrac{\xi_{a+1}-\xi_a}{dx} - \dfrac{\xi_a - \xi_{a-1}}{dx}}{dx}.$$

Geht nun $\xi_{a+1} - \xi_a$ in $d\xi$ über, so verwandelt sich

$$\frac{\xi_{a+1}-\xi_a}{dx} - \frac{\xi_a - \xi_{a-1}}{dx}$$

in das Differential des Differentialquotienten. Mithin geht die rechte Seite in $E\cdot Q.\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ über.

Die drei Bewegungsgleichungen haben für alle drei Coordinaten dieselbe Form. Der einzige Unterschied ist der, dafs in der Differentialgleichung für ξ das Product $E\cdot Q$ (Elasticitätsmodul mal Querschnitt) steht, wo in den Differentialgleichungen für η und ζ die Spannung steht. Die Longitudinalschwingungen der Saite hängen also von dem Elasticitätsmodul ab, während für die Querschwingungen nur die Spannung der Saite in Betracht kommt. Wenn wir irgend eine der drei Functionen ξ, η, ζ mit φ bezeichnen, so können wir die drei Differentialgleichungen auf die gemeinsame Form bringen

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad (174\text{b})$$

deren allgemeines Integral wir nun suchen wollen.

Setzen wir φ gleich einer beliebigen Function von $x + at$ oder von $x - at$, so ist die Differentialgleichung erfüllt. Denn es wird alsdann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \pm a \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Da nun die Differentialgleichung linear und homogen ist, so wird auch die Summe zweier Integrale wieder ein Integral sein. Bezeichnen daher $F(x + at)$ und $G(x - at)$ zwei beliebige Functionen von $x + at$ oder $x - at$, so ist

$$\varphi = F(x + at) + G(x - at) \tag{175}$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Es läfst sich zeigen, dafs dies das vollständige Integral der Differentialgleichung ist, d. h. es ist darin die Bewegung der Saite für jeden beliebig gegebenen Anfangszustand in Bezug auf Elongation und Geschwindigkeit enthalten. Es können im Anfangszustand die Werthe von φ und von $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für alle Saitenpunkte ganz beliebig gegeben werden.

Für $t = 0$ wird nämlich

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= F(x) + G(x) \\ \text{und} \qquad \frac{d\varphi}{dt} &= a F'(x) - a G'(x). \end{aligned}\right\} \tag{176}$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = F'(x) + G'(x). \tag{177}$$

Mithin ist für $t = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} + a \frac{d\varphi}{dx} &= 2 a F'(x), \\ a \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi}{dt} &= 2 a G'(x). \end{aligned}\right\} \tag{178}$$

Wir können also, wenn uns die Werthe von φ und von $\frac{d\varphi}{dt}$ zu Anfang der Zeit gegeben sind, die Werthe $F'(x)$ und $G'(x)$ daraus finden, d. h. die Differentialquotienten der Functionen F und G genommen nach x, und wenn wir diese Differentialquotienten haben, so können wir durch eine einfache Quadratur die Functionen F und G selbst finden, welche nun die weitere Bewegung bestimmen, indem wir in F an Stelle von x das $x + at$ und in G an Stelle von x das $x - at$ setzen. Nur ist zu bemerken, dafs wir noch nicht auf die Endpunkte der Saite Rücksicht genommen haben, welche wir wie bisher als fest ansehen wollen.

Es ergiebt sich sogleich, wie wir die Bedingung der Endpunkte erfüllen können, sobald wir die physikalische Bedeutung der Functionen F und G erörtern.

Betrachten wir zunächst die Function $G(x - at)$ an irgend einem bestimmten Punkt der Saite zu irgend einer bestimmten Zeit.

Der Werth von $G(x - at)$ wird offenbar ungeändert bleiben, wenn x und at um gleich viel wachsen; denn es behält alsdann $x - at$ denselben Werth. Bezeichnet x_1 den neuen Punkt der Saite und t_1 den neuen Zeitpunkt, so ist

$$x_1 - x = a(t_1 - t)$$

und

$$G(x_1 - at_1) = G(x - at).$$

G wird also für die Zeit t_1 am Punkte x_1 denselben Werth haben, den es zur Zeit t am Punkte x hatte, d. h. also, dieser Werth wird zu einer etwas späteren Zeit an einem etwas entfernteren Punkte der Saite wieder erscheinen, und es läfst sich auch durch die Gleichung $x_1 - x = a(t_1 - t)$ für jeden zwischen liegenden Zeitpunkt die Stelle der Saite angeben, wo dieser Werth in dem Augenblick vorhanden sein wird. Die Entfernung $x_1 - x$ ist proportional der Zeit $t_1 - t$, und der Proportionalitätsfactor a ist die Geschwindigkeit, mit der dieser betreffende Werth von G auf der Saite fortläuft. Er läuft auf der Saite in der Richtung der positiven x mit der Geschwindigkeit a entlang.

In der andern Function, $F(x + at)$, hat die Geschwindigkeit den entgegengesetzten Werth $-a$, und es wird dies anzeigen, dafs der betreffende Werth von F mit der Geschwindigkeit a, aber in Richtung der negativen x auf der Saite entlang läuft. Wir können so die Saitenbewegung, so lange die Endpunkte noch nicht in Betracht kommen, als das Fortlaufen zweier Wellen darstellen, einmal in Richtung des wachsenden x, und einmal in Richtung des abnehmenden x. Wenn wir uns zur Zeit $t = 0$ die Function F für alle Werthe von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ gegeben und durch eine Curve, deren Ordinaten gleich F sind, dargestellt denken, so werden wir diese Curve in der Richtung des abnehmenden x mit der Geschwindigkeit a zu verschieben haben, um $F(x + a t)$ zu erhalten. Aehnlich werden wir die Curve $G(x)$ in der Richtung des wachsenden x mit der Geschwindigkeit a zu verschieben haben, um $G(x - a t)$ zu erhalten. Die Ordinaten beider fortlaufenden Curven geben zusammen den Werth von φ.

Soll nun an dem einen Endpunkt $x = 0$ der Werth von φ beständig Null sein, so mufs stets

$$F(a t) + G(- a t) = 0 \tag{179}$$

sein oder da $a t$ jeden beliebigen Werth darstellt,

$$- F(x) = G(- x), \tag{179a}$$

d. h., es müfste die Curve $G(x)$ gleich der Curve sein, die wir erhalten, wenn wir die Curve $F(x)$ an der x-Axe spiegeln und das Spiegelbild noch einmal an der y-Axe spiegeln.

Soll auch der andere Endpunkt $x = l$ fest sein, so mufs

$$F(l + a t) + G(l - a t) = 0 \tag{180}$$

sein oder, da $a t$ jeden beliebigen Werth h annimmt,

$$- F(l + h) = G(l - h); \tag{180a}$$

d. h., es mufs die Curve $G(x)$ aus der Curve $F(x)$ hervorgehen dadurch, dafs wir diese erst an der x-Axe spiegeln und dann das Spiegelbild noch einmal an einer Parallelen zur y-Axe durch $x = l$ spiegeln. Oder wie wir auch sagen können, gleich weit von 0 aber auf verschiedenen Seiten von 0 müssen die Wellen $F(x)$ und $G(x)$ entgegengesetzte Ordinaten haben, und gleich weit von l aber auf verschiedenen Seiten von l müssen die Wellen $F(x)$ und $G(x)$ ebenfalls entgegengesetzte Ordinaten haben. Daraus folgt, dafs alles bestimmt ist, sobald $F(x)$ für $x = 0$ bis $x = 2 l$ gegeben ist. Denn aus den Werthen

$$F(x) \text{ für } x = 0 \text{ bis } 2 l$$

folgen die Werthe von $G(x)$ für $x = 2 l$ bis $x = 0$, weil

$$F(l + h) = - G(l - h).$$

Aus den Werthen von $G(x)$ für $x = 0$ bis $2 l$ folgen nun wieder die Werthe von $F(x)$ für $x = 0$ bis $- 2 l$, weil $F(- x) = - G(x)$ etc. Und zwar ergiebt sich

$$F(l + h) = - G(l - h) = F(- l + h)$$

oder

und daher

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= F(x - 2 l) \\ G(x) &= G(x + 2 l). \end{aligned}\right\} \tag{181}$$

Die Curven $F(x)$ und $G(x)$ müssen sich also periodisch wiederholen in Perioden, die gleich der doppelten Saitenlänge sind. Die Curven sind vollständig bestimmt, wenn von einer Curve eine Periode gegeben ist.

Lassen wir diese beiden periodischen Wellen in entgegengesetzten Richtungen entlang laufen, so wird sich also die Bewegung der Saite ebenfalls periodisch wiederholen, und zwar nach Verlauf der Zeit, welche die Wellen brauchen, um die doppelte Saitenlänge zu durchlaufen, also nach der Zeit $T = \frac{2l}{a}$. Damit ist nicht ausgeschlossen, dafs die Bewegung sich schon in kürzerer Zeit wiederholt. In der That kann $F(x)$ z. B. eine halb so grofse Periode besitzen. Dann wird die Bewegung sich schon in der halben Zeit wiederholen.

Neben solchen Bewegungen, welche die Schwingungsperiode $T = \frac{2l}{a}$ haben, werden also auch solche vorkommen können, in denen T nur $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ .... so grofs ist. Wenn zwei Wellen von der halben Periode sich entgegen laufen, so werden sie in der Mitte der Saite sich zu Null zusammensetzen, und dieser Punkt kann dann ebenso als fest betrachtet werden, wie die Enden, ohne die Bewegung der beiden Hälften zu ändern. Das Entsprechende gilt von Wellen, deren Periode $^1/_3$, $^1/_4$ .... so grofs ist.

Wenn wir verschieden lange, aber gleich gespannte Saiten von gleichem Gewicht der Längeneinheit mit einander vergleichen, so wird die Geschwindigkeit auf allen die gleiche sein; denn es ist $a^2 = \frac{S}{\mu}$. Daraus folgt, dafs für eine doppelt so lange Saite die längste Schwingungsperiode doppelt so lang ist, und überhaupt, dafs für gleich gespannte und gleich beschaffene Saiten die Schwingungszeit der Länge der Saite proportional ist. Das giebt auf die praktische Akustik übertragen das Gesetz, dafs, wenn wir eine Saite verkürzen, die Schwingungsdauer in demselben Verhältnifs wie die Saitenlänge abnimmt. Die Schwingungszahl ist also der Saitenlänge umgekehrt proportional.

Die Beziehung zwischen den beiden Wellen

$$F(x + at)$$

und

$$G(x - at)$$

kann man sich auch in folgender Weise vorstellen. Zur Zeit $t = 0$ seien $F(x)$ und $G(x)$ für die Werthe $x = 0$ bis l gegeben. Betrachten wir nun irgend eine Stelle x_0 der Saite, so drückt $F(x + at)$ aus, dafs die in dem Augenblick $t = 0$ an der Stelle x_0 befindliche Ordinate $F(x_0)$ mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der negativen x auf der Saite entlang rückt, und $G(x - at)$ drückt aus, dafs die in dem Augenblick $t = 0$ an der Stelle x_0 befindliche Ordinate $G(x_0)$ mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der positiven x-Axe entlang rückt. Der erste Werth erreicht zur Zeit $t_0 = \frac{x_0}{a}$ das Ende $x = 0$, der andere Werth erreicht zur Zeit

$$\frac{T}{2} - t_0 = \frac{l - x_0}{a},$$

das Ende $x = l$. Wir stellen uns nun vor, dafs beide Werthe an den Enden reflectirt werden in der Art, dafs sie ins Entgegengesetzte übergehen und mit der Geschwindigkeit a wieder zurücklaufen. Der erste Werth ist dann nach der Reflexion durch

$$- F(at - x)$$

der zweite nach der Reflexion durch

$$- G\left(a\left(\frac{T}{2} - t\right) + l - x\right) = - G(2l - at - x)$$

dargestellt. Nun war in Folge der festen Enden (Gleichungen 179a und 181)

$$- F(at - x) = G(x - at)$$

$$- G(2l - at - x) = - G(- at - x) = F(x + at).$$

Wir können daher diese Bedingungen so aussprechen, dafs wir sagen, die erste Welle geht bei ihrer Reflexion in die zweite und die zweite geht bei ihrer Reflexion in die erste über. Nach zweimaliger Reflexion geht jede Welle wieder in sich selbst über.

Im Allgemeinen ist eine Periode also erst dann vollendet, wenn die Wellen einmal hin und zurück gelaufen sind, also die doppelte Saitenlänge zurückgelegt haben.

§ 37. Die Darstellung der Schwingungen als Summe von Sinusschwingungen.

Nun können wir aber auch auf unsere Bewegungsgleichung die Methode anwenden, die wir bei einer discreten Anzahl von Massenpunkten angewendet haben und setzen:

$$\varphi = h . e^{int}, \tag{182}$$

wo h eine Function von x sein soll. Wenn wir diesen Ausdruck für φ in die Differentialgleichung einsetzen, so bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -n^2.h.e^{int}.\\
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2h}{dx^2}.e^{int},\\
\text{also}\quad & -n^2 h e^{int} = a^2\frac{d^2h}{dx^2}e^{int}\\
\text{oder}\quad & -n^2 h = a^2\frac{d^2h}{dx^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{183}$$

Das ist nun wieder eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir dadurch lösen können, dafs wir setzen:

$$h = c.e^{i\lambda x}. \tag{184}$$

Wenn wir diesen Werth in die Differentialgleichung für h einsetzen, so bekommen wir:

$$-n^2.c.e^{i\lambda x} = -c.\lambda^2 a^2 e^{i\lambda x},$$

so dafs unsere Bedingungsgleichung bleibt:

$$n^2 = \lambda^2 a^2, \qquad n = \pm\lambda.a. \tag{185}$$

Das ist die einzige Gleichung, die zwischen den Constanten zu bestehen braucht.

Dann erhält also φ die Form

$$\varphi = c.e^{i\lambda x + int} = c.e^{i(\lambda x + nt)} = c.e^{i\lambda(x\pm at)}. \tag{186}$$

Hierin kann c auch einen complexen Werth haben. Schreiben wir c in der Form:

$$c = g.e^{if},$$

so bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= g.e^{i[\lambda(x\pm at)+f]}\\
&= g.\cos[\lambda(x\pm at)+f] + ig\sin[\lambda(x\pm at)+f].
\end{aligned}\right\} \tag{187}$$

Sowohl der reelle wie der imaginäre Theil kann als Integral der Gleichung benutzt werden. Sie sind beide wesentlich von derselben Form. Denn da f eine willkürliche Constante ist, so kann man die Phase um einen rechten Winkel ändern, wodurch der Sinus in den Cosinus übergeht.

Da das Ende der Saite $x = 0$ in Ruhe sein soll, so haben wir zwei einander entgegenlaufende Wellen zu nehmen, die sich bei $x = 0$ zu Null zusammensetzen, z. B.

$$\sin \lambda (x + a t) + \sin \lambda (x - a t) = 2 \sin \lambda x . \cos \lambda a t$$

oder auch

$$\cos \lambda (x - a t) - \cos \lambda (x + a t) = 2 \sin \lambda x . \sin \lambda a t.$$

Jedes dieser Integrale möge mit einem constanten Factor multiplicirt werden. Dann geben sie zusammen das Integral:

$$\varphi = A \sin \lambda x . \cos \lambda a t + B \sin \lambda x . \sin \lambda a t.$$

Diese Form ist am geschicktesten für die Bildung der zusammengesetzten Ausdrücke. Hier ist φ also aus zwei Schwingungen zusammengesetzt, von denen die eine den Cosinus der Zeit und die andere den Sinus der Zeit enthält, so dafs sie um ein Viertel einer Undulation gegen einander verschoben sind. Die Amplitude enthält beide Male den Factor $\sin \lambda x$. Seinen gröfsten Werth hat $\sin \lambda x$ für $\lambda x = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{\pi}{2} + 2 \mathfrak{a} \pi$. Dagegen ist $\sin \lambda x = 0$ in allen denjenigen Stellen, wo $\lambda x = \mathfrak{a} \pi$ ist. Zwei solche Nullpunkte müssen mit den Endpunkten der Saite zusammenfallen, wenn diese fest sein sollen. Dadurch sind zwei Nullpunkte gegeben. Es braucht nun zwischen diese kein anderer Nullpunkt hineinzufallen, so dafs in dem Falle die ganze Länge der Saite einer halben Periode entspricht; aber es kann auch eine beliebige Anzahl von Nullpunkten in das Innere der Saite zwischen die beiden Enden fallen. Dann würde eine Reihe von Stellen auf der Saite existiren, wo die Amplitude des schwingenden Punktes gleich Null ist. Das sind Ruhepunkte, die in der Akustik als Knotenpunkt bezeichnet werden, weil die schwingende Saite den Anblick gewährt, als wäre

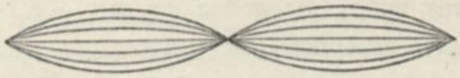

Fig. 3.

der Raum, den sie bestreicht, von vielen Fäden erfüllt, die in dem Knotenpunkt zusammengefafst erscheinen (Fig. 3).

Es können beliebig viele Knotenpunkte vorkommen, und für jede Schwingungsart wird die Schwingungsdauer T gleich $\frac{2\pi}{\lambda a}$ sein, d. h. gleich der Zeit, welche die Welle gebraucht, um eine Wellenlänge, das ist die einer Periode entsprechende Entfernung $\frac{2\pi}{\lambda}$ zurückzulegen.

Für den Grundton entspricht die Länge der Saite der halben Wellenlänge, so dafs also die Länge l der Saite gleich $\frac{\pi}{\lambda}$, also $\lambda = \frac{\pi}{l}$ und $T = \frac{2l}{a}$ zu setzen ist.

Wenn die Saitenlänge mehreren halben Wellenlängen entspricht, so ist $\lambda = \frac{\pi \cdot \mathfrak{a}}{l}$, wo $\mathfrak{a}$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und

$$T = \frac{2l}{\mathfrak{a}a} = \frac{2\pi}{n}. \tag{189}$$

Den Grundton erhalten wir für $\mathfrak{a} = 1$; gröfsere Werthe von $\mathfrak{a}$ liefern die Obertöne, welche mehrere Knotenpunkte in der Länge der Saite bilden. Die Zahl $\mathfrak{a}$ ist gleich der Anzahl der Wellenlängen, welche auf der Länge $2l$, der doppelten Länge der Saite, vorkommen. Die Schwingungszahl $\frac{n}{2\pi}$ ist der Zahl $\mathfrak{a}$ proportional, so dafs also die Schwingungszahlen der Töne in dem Verhältnifs wachsen, wie die Anzahl der schwingenden Saitenabtheilungen auf der Saite wächst. Wenn wir die Schwingungszahl des Grundtones für $\mathfrak{a} = 1$ mit N bezeichnen, so werden die Schwingungszahlen der Obertöne, bei denen die Saite in 2, 3, ... Abtheilungen schwingt, gleich $2N$, $3N$, ... Wenn z. B. der tiefste Ton c ist, so ist der zweite $\overline{c}$, der dritte $\overline{g}$, d. i. die höhere Quinte zu $\overline{c}$, der vierte die Octave zum zweiten $\overline{\overline{c}}$, der fünfte zu diesem die grofse Terz $\overline{\overline{e}}$, der sechste die Octave zum dritten $\overline{\overline{g}}$, der siebente ist ein Ton, der in der gewöhnlichen Skala der Musik nicht vorkommt; er ist ziemlich nahe dem Ton, der als $\overline{\overline{b}}$ zu bezeichnen wäre, die kleine Terz von $\overline{\overline{g}}$, aber etwas tiefer, wir wollen ihn mit $-\overline{\overline{b}}$ bezeichnen; der achte ist die Octave zum vierten $\overline{\overline{\overline{c}}}$.

Es ist also eine ganz bestimmte Reihe von Tönen auf der Saite gegeben. Es hängt das damit zusammen, dafs, wie uns das allgemeine Integral der Differentialgleichung lehrte, die Bewegung einer Saite, die an beiden Enden befestigt ist, nothwendig eine periodische sein mufs. Eine periodische Bewegung ist zu bezeichnen als eine Bewegung, bei der sich in auf einander folgenden gleichen Zeiträumen genau dieselbe Bewegung wiederholt. Die Art der Bewegung innerhalb einer einzelnen Periode kann dabei ganz beliebig sein.

Nun liefs uns das allgemeine Integral $F(x + at) + G(x - at)$ schliefsen, dafs nach derjenigen Zeit, in welcher die doppelte Saitenlänge einmal von einer Welle durchlaufen wird, die sich mit ihrer durch die Spannung gegebenen Geschwindigkeit fortpflanzt, sich die ganze Bewegung genau so wiederholen mufs, wie das erste Mal. Daraus allein folgt die Zerlegung der Saitenbewegung in harmonische Töne, deren Schwingungszahlen der Reihe der ganzen Zahlen proportional sind. Der Begriff einer periodischen Bewegung erfordert nämlich nur, dafs irgend etwas, was in der ersten Periode geschehen ist, genau ebenso sich in der zweiten wiederholt. Aber darunter kann auch der Fall vorkommen, dafs schon in der ersten Periode diese Bewegung sich zweimal wiederholt. Dann würde immerhin noch eine weitere Wiederholung der Bewegung ein drittes und viertes Mal zusammen genommen eine genaue Wiederholung der ersten Doppelgruppe von Wellen sein, und wir würden überhaupt jede Bewegung, welche wir nach irgend einer kleinsten Periode, die wir an ihr unterscheiden können, als periodische betrachten, auch als periodisch nach der doppelten Periode betrachten können, weil, nachdem die doppelte Periode ausgelaufen ist, sich in der dritten und vierten genau dasselbe wiederholt, was in der ersten und zweiten vorgekommen ist. Ebenso können wir sie auch als periodisch nach der dreifachen Periode betrachten u. s. f. Wir können somit jede periodische Function auch betrachten als periodisch nach jeder ganzen Anzahl ihrer Perioden. So können wir eine Saitenbewegung, welche die Schwingungszahl der Octave besitzt, auch als periodisch nach der Periode des Grundtones betrachten und dasselbe gilt von den anderen Obertönen. Weiter ist leicht einzusehen, dafs, wenn man mehrere Bewegungen addirt, die alle die gleiche Periode besitzen, eine Summe herauskommen mufs, welche dieselbe Periode besitzt, weil nämlich in der zweiten dieser Perioden genau dieselben Glieder sich addiren, welche in der ersten sich addirt haben. Daher können wir die ganze periodische Bewegung als eine Summe von vielen Schwingungsformen betrachten, welche alle nach der Periode des Grundtones der Saite als periodisch betrachtet werden können. Eine Summe aus Gliedern von der Form

$$A \sin \lambda x . \cos \lambda a t + B \sin \lambda x . \sin \lambda a t,$$

wo λ die Werthe

$$\frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \frac{3\pi}{l}, \ldots\ldots$$

hat, stellt eine mögliche Schwingungsform der Saite dar, weil alle

Glieder nach der Periode des Grundtons als periodisch betrachtet werden können. Dafs wir hier eine unendliche Anzahl von Schwingungszahlen erhalten, hängt damit zusammen, dafs wir unendlich viele schwingende Punkte haben. Bei einer endlichen Anzahl von Punkten ist auch die Anzahl der Schwingungszahlen endlich.

Wir werden nun weiter diese Summe dahin zu untersuchen haben, ob sie alle möglichen Schwingungen der Saite darstellt, ob sie sich also jedem gegebenen Anfangszustand der Saite anpassen läfst. Zu dem Ende wird aber die ganze Reihe der unendlich vielen Glieder nöthig sein, so dafs die Schwingung durch eine unendliche Reihe dargestellt wird.

Dabei begegnen wir der mathematischen Schwierigkeit, im gegebenen Fall zu beweisen, dafs die Reihe convergent ist.

Wir wollen daher einige allgemeine Betrachtungen über die Convergenz dieser Reihen vorausschicken.

§ 38. Die Convergenz unendlicher Reihen und besonders der Fourier'schen Reihen.

Wenn wir eine Reihe haben, die aus lauter positiven Gliedern besteht, die sich alle addiren, so wird nothwendig bei der Hinzufügung jedes einzelnen Gliedes die Summe gröfser werden, und wir werden dabei nur zu untersuchen haben, ob die Summe nicht über jeden endlichen Werth hinauswächst, wenn wir nach einander alle Glieder hinzusetzen. Thut sie das nicht, so mufs sie einen bestimmten Werth haben, dem wir durch eine hinreichende Anzahl von Gliedern beliebig nahe kommen. Dabei ist es nicht von Belang, in welcher Reihenfolge wir die Glieder zusammensetzen. Dasselbe gilt von einer Reihe von negativen Gliedern. Wenn wir aber eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern haben, so sind wir ihrer Summe nur sicher, wenn die positiven Glieder für sich und die negativen für sich eine endliche Summe geben oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die Summe der absoluten Beträge aller Glieder endlich ist. Dann ist die Summe der Reihe gleich der Differenz zwischen der Summe der positiven und der negativen Glieder. Wenn aber die positiven Glieder für sich und die negativen für sich eine unendliche Summe geben, dann kann die Reihe wohl noch einen Werth besitzen; aber er ist von der Anordnung der Glieder abhängig, und man kann durch passende Umstellung der Glieder jeden beliebigen Werth für die Reihe herausbringen. Gesetzt z. B., wir hätten eine solche Reihe, deren positive Glieder für sich und deren negative Glieder für sich eine unendliche Summe haben, und wir wollten die Reihe so summiren, dafs die Zahl p herauskommt, so fangen wir an, positive Glieder zu addiren, bis p zum ersten Mal überschritten ist. Dann müssen wir also die Summe wieder verkleinern, indem wir von den negativen Gliedern so viele hinzufügen, bis wieder die Summe zum ersten Mal kleiner wird als p. Dies mufs jedenfalls möglich sein, da die Summe aller negativen Glieder unendlich ist. Die Anordnung der positiven Glieder unter sich wie die der negativen Glieder unter sich möge dabei nicht gestört sein. Dann fangen wir wieder an, die positiven Glieder zu brauchen, bis p abermals überschritten ist, dann wieder die negativen etc., und wenn die Glieder von der Art sind, dafs sie, je weiter wir fortgehen, immer kleiner und kleiner werden, so werden die Differenzen, mit denen wir den Werth von p nach der einen oder andern Seite überschreiten, kleiner und kleiner, und wir werden uns, wenn wir weit genug fortgehen, dem Werthe p mit jeder beliebigen Genauigkeit nähern. Sobald die Anordnung der Glieder bestimmt ist, kann eine solche Reihe also einen bestimmten Werth haben. So z. B. ist

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots\dots$$

gleich der Reihe von positiven Gliedern

$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\dots,$$

was sofort erhellt, wenn wir je zwei aufeinander folgende Glieder der ersten Reihe zusammenziehen. Diese hat einen von der Anordnung der Glieder unabhängigen Werth. Aber die erste Reihe kann bei passender Anordnung der Glieder jeden beliebigen Werth annehmen.

Wenn wir bei einer physikalischen Untersuchung auf die erste Reihe stiefsen, so müfste, wenn sie überhaupt einen Sinn haben soll, durch die physikalischen Umstände bedingt sein, dafs die Summation in der bestimmten Reihenfolge auszuführen wäre. Allerdings würden wir durch die Zusammenfassung von je zwei Gliedern eine Reihe erhalten, die von der Anordnung der Glieder unabhängig ist. Aber dadurch ist auch ausgeschlossen, dafs wir eine willkürliche Anzahl positiver Glieder und daraufhin eine beliebige Anzahl negativer Glieder etc. summiren. Eine Reihe, bei der die Summe der positiven Glieder allein und der negativen allein endlich ist, deren Werth also von der Anordnung der Glieder ganz unabhängig ist, nennen wir unbedingt convergent.

Derselbe Begriff kann auch auf Integrale, sowohl auf einfache wie auf mehrfache Integrale, und auf unendliche Reihen von Integralen ausgedehnt werden. Auch da kommt es wieder darauf an, ob wir, wenn wir sämmtliche positive Integrationselemente für sich und die negativen für sich integriren, einen endlichen Werth bekommen. Wenn beide eine endliche Summe geben, so ist auch die Differenz zwischen ihnen bestimmt und endlich; und dann dürfen wir auch die Regeln der Addition brauchen und können die Ordnung der Integration oder die einzelnen Theile der Integration in beliebiger Reihenfolge ausführen, ohne dafs der Werth des Integrals sich dabei ändert. Sowie wir aber einfache oder mehrfache Integrale haben, bei denen die positiven Theile für sich eine unendliche Summe geben, und die negativen Theile für sich ebenfalls, so ist der Werth des gesammten Integrales zweifelhaft, weil wir dann die Form $\infty - \infty$ haben. Er kann ein bestimmter sein für eine bestimmte Art der Ausführung der Integration; aber er ist nicht unabhängig von der Reihenfolge der Ausführung der Operationen.

Wir kehren nach diesen allgemeinen Erörterungen zu der oben gestellten Frage zurück, ob die unendliche Reihe

$$\varphi = \sum_{\mathfrak{a}} \left[A_{\mathfrak{a}} \sin \frac{\pi x \mathfrak{a}}{l} \cdot \cos \frac{\pi a \mathfrak{a}}{l} t + B_{\mathfrak{a}} \sin \frac{\pi x \mathfrak{a}}{l} \sin \cdot \frac{\pi a \mathfrak{a}}{l} t \right] \tag{190}$$

auf jeden beliebigen Anfangszustand der Saite pafst, sowohl in Bezug auf die Lage der Saite zur Zeit $t = 0$, als auf die Geschwindigkeit der einzelnen Saitenpunkte in demselben Augenblick.

Für $t = 0$ würden alle Glieder wegfallen, welche den Sinus der Zeit enthalten, dagegen die Cosinus würden gleich 1 werden, und die Elongationen des Anfangszustandes würden dargestellt werden durch eine Summe

$$\varphi_0 = \sum_{\mathfrak{a}} \left[A_{\mathfrak{a}} \sin \frac{\pi x \mathfrak{a}}{l} \right] \tag{190a}$$

und die Geschwindigkeiten durch die Summe

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \sum_{\mathfrak{a}} \left[B_{\mathfrak{a}} \cdot \frac{\pi a . \mathfrak{a}}{l} \sin \frac{2 \pi x \mathfrak{a}}{l} \right]. \tag{190b}$$

Es wird also zu fragen sein, ob wir die Constanten $A_{\mathfrak{a}}$ und $B_{\mathfrak{a}}$ so bestimmen können, dafs φ_0 und $\frac{d\varphi_0}{dt}$ einem beliebig gegebenen Anfangszustand entsprechen. Die beiden Aufgaben sind mathematisch von genau derselben Art; denn in dem Ausdruck für $\frac{d\varphi_0}{dt}$ können wir $B_\mathfrak{a}$ mit $\frac{\pi a \mathfrak{a}}{l}$ zusammenfassen. Wir brauchen also nur die erste Aufgabe zu betrachten.

Um die Gröfsen $A_\mathfrak{a}$ zu bestimmen, verfahren wir ähnlich wie im Fall einer endlichen Anzahl von Punkten. Wir multipliciren φ_0 mit $\sin\frac{\pi x p}{l}$, wo p irgend eine ganze Zahl ist und summiren über alle Saitenpunkte, oder mit anderen Worten, wir integriren von 0 bis l. Dann ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^l \varphi_0 \cdot \sin\frac{\pi x p}{l}\, dx &= \sum \int_0^l \left\{ A_\mathfrak{a} \cdot \sin\frac{\pi x \mathfrak{a}}{l} \cdot \sin\frac{\pi x p}{l} \right\} dx \\ &= \sum \int_0^l \left\{ \frac{A_\mathfrak{a}}{2} \left[\cos\frac{\pi x (p-\mathfrak{a})}{l} - \cos\frac{\pi x (p+\mathfrak{a})}{l} \right] \right\} dx. \end{aligned}\right\} \quad (191)$$

Dabei ist aber vorausgesetzt, dafs der Werth von φ durch eine solche unendliche Reihe dargestellt werden kann, die den richtigen Werth von φ ergiebt und sich Glied für Glied integriren läfst. Wir wissen noch nicht, ob eine solche Summe existirt, aber falls es eine solche Reihe giebt, so mufs es diejenige Reihe sein, deren Coefficienten wir in der folgenden Weise finden. Es ist

$$\int_0^l \cos\frac{\pi x \lambda}{l}\, dx = \overline{\underline{\frac{l}{\pi \lambda} \sin\frac{\pi x \lambda}{l}}} = 0,$$

sobald λ eine von Null verschiedene ganze Zahl ist. Es fallen also alle Integrale der rechten Seite der Gleichung (191) fort, mit Ausnahme des einen, bei dem $p = \mathfrak{a}$ ist. Die rechte Seite reducirt sich damit auf

$$A_p \cdot \frac{l}{2},$$

so dafs also

$$A_p = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0 \sin\frac{\pi x p}{l}\, dx$$

sein mufs, wenn überhaupt eine solche Reihe für φ_0 existirt. Die weitere Frage ist aber, ob die Reihe, welche in dieser Weise gefunden wird, auch den richtigen Werth hat.

Da die hier vorkommende Zerlegung einer periodischen Function in eine sogenannte Fourier'sche Reihe, also in eine Reihe, die nach Vielfachen der Sinus oder Cosinus eines Winkels fortläuft, in vielen Theilen der Physik eine grofse Rolle spielt, so wollen wir die Aufgabe ein wenig allgemeiner fassen. Wir wollen für die Function φ_0 die Grenzbedingung fallen lassen, dafs φ_0 an den Enden der Saite verschwindet und annehmen, dafs wir irgend eine periodische Function, die innerhalb der Periode ganz willkürlich verläuft, darzustellen hätten.

Wir versuchen nun, die Function φ darzustellen als eine Summe von der Form

$$\varphi = \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ A_{\mathfrak{a}} \cdot \cos \frac{\pi x \mathfrak{a}}{l} + B_{\mathfrak{a}} \cdot \sin \frac{\pi x \mathfrak{a}}{l} \right\}, \quad (\mathfrak{a} = 0, 1, 2, \ldots). \tag{192}$$

Das würde jedenfalls immer eine periodische Function sein, da φ denselben Werth annimmt, wenn x um $2l$ wächst; denn dann wächst der Bogen um $2\pi\mathfrak{a}$, und da $\mathfrak{a}$ eine ganze Zahl ist, so bekommt also jede dieser trigonometrischen Functionen denselben Werth wieder. Jedenfalls würde in dieser Form eine sehr grofse Mannigfaltigkeit von periodischen Functionen dargestellt werden können, weil für jeden Werth des Index $\mathfrak{a}$ zwei Coefficienten willkürlich gewählt werden können. Nun können wir wie oben zeigen, dafs, wenn es eine convergente Reihe giebt, welche die Function φ darstellt und sich Glied für Glied integriren läfst, wir die Coefficienten $A_{\mathfrak{a}}$ und $B_{\mathfrak{a}}$ durch eine einfache Integrationsoperation finden können. Multipliciren wir mit $\sin \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}$ und integriren über eine ganze Periode x_0 bis $x_0 + 2l$, so erhalten wir auf der rechten Seite Glieder von den folgenden beiden Formen:

$$\left.\begin{aligned}
&A_{\mathfrak{a}} \int_{x_0}^{x_0+2l} \cos \frac{\pi x \mathfrak{a}}{l} \cdot \sin \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} \, dx \\
&\qquad = \frac{A_{\mathfrak{a}}}{2} \int_{x_0}^{x_0+2l} dx \left[\sin \frac{\pi x (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})}{l} - \sin \frac{\pi x (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{l} \right] \\
&\text{und} \\
&B_{\mathfrak{a}} \int_{x_0}^{x_0+2l} \sin \frac{\pi x \mathfrak{a}}{l} \cdot \sin \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} \, dx \\
&\qquad = \frac{B_{\mathfrak{a}}}{2} \int_{x_0}^{x_0+2l} dx \left[\cos \frac{\pi x (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{l} - \cos \frac{\pi x (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})}{l} \right].
\end{aligned}\right\} \tag{193}$$

Das erste Integral ist unter allen Umständen Null. Das zweite ist auch Null, ausgenommen, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} > 0$ ist. In diesem Falle wird es gleich $B_\mathfrak{b} . l$. Mithin wird für $\mathfrak{b} > 0$

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2l} \varphi \sin\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}\, dx = B_\mathfrak{b} . l. \tag{194}$$

Aehnlich ergeben sich die Coefficienten A. Es ist nur nöthig, mit $\cos\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}$ zu multipliciren und über eine Periode zu integriren. Auf der rechten Seite erhalten wir dann Glieder von den beiden Formen:

$$\left.\begin{aligned} &A_\mathfrak{a}\int\limits_{x_0}^{x_0+2l} \cos\frac{\pi x \mathfrak{a}}{l} \cdot \cos\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}\, dx \\ &\qquad = \frac{A_\mathfrak{a}}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+2l} dx \left[\cos\frac{\pi x(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{l} + \cos\frac{\pi x(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}{l}\right] \\ \text{und}\quad & \\ &B_\mathfrak{a}\int\limits_{x_0}^{x_0+2l} \sin\frac{\pi x \mathfrak{a}}{l} \cdot \cos\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}\, dx \\ &\qquad = \frac{B_\mathfrak{a}}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+2l} dx \left[\sin\frac{\pi x(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}{l} + \sin\frac{\pi x(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{l}\right] \end{aligned}\right\} \tag{195}$$

Von diesen Integralen verschwindet das zweite unter allen Umständen. Das erste verschwindet ebenfalls, ausgenommen wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist. In diesem Falle hat es für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} > 0$ den Werth

$$A_\mathfrak{b} . l$$

und für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = 0$ den Werth

$$A_0 . 2l,$$

so daſs sich ergiebt

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{x_0}^{x_0+2l} \varphi \cos\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}\, dx = A_\mathfrak{b} . l \text{ für } \mathfrak{b} > 0 \\ \text{und}\quad & \\ &\int\limits_{x_0}^{x_0+2l} \varphi\, dx = A_0 . 2l \end{aligned}\right\} \tag{196}$$

Nun fragt es sich aber, ob die Reihe, die wir auf diese Weise finden, convergent ist, und zwar ob sie unbedingt convergent ist.

Die Convergenz der Reihe hängt von der Gröſse der Coefficienten ab und diese sind hier durch ein Integral dargestellt, das über das Product der Function φ mit einer trigonometrischen Function genommen ist, die positive oder negative Zeichen würde haben können. Wir nehmen an, daſs die Function φ_x entweder endlich ist oder aber, falls sie an irgend einer Stelle unendlich wird, daſs sie nur integrirbar unendlich wird. Das heiſst, es soll das Integral der Function endlich bleiben, auch wenn die Function unendlich wird, wie z. B. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.\sqrt{x}.$

Dann ist weiter klar, daſs der absolute Betrag des Integrals steigen würde, wenn wir sämmtliche Elemente des Integrals positiv nehmen und noch mehr steigen würde, wenn der Cosinus oder Sinus, mit dem das positiv genommene φ unter dem Integral multiplicirt ist, durch 1 ersetzt wird, so daſs also die Coefficienten $A_{\mathfrak{b}}$ und $B_{\mathfrak{b}}$ kleiner als $\frac{1}{l} . \int\limits_{x_0}^{x_0+2l} \varphi\, dx$ und mithin jedenfalls endlich sind. Das genügt aber nicht für die Convergenz der Reihe, sondern wir müssen auch noch nachweisen, daſs die Coefficienten hinreichend schnell abnehmen, so daſs die Summe der Reihe, auch wenn wir die absoluten Werthe der Glieder nehmen, endlich wird. Zu dem Ende wollen wir die Ausdrücke, die wir für $A_{\mathfrak{b}}$ und $B_{\mathfrak{b}}$ gefunden haben, durch partielle Integration umgestalten.

Es ist (Gleichung 196)

$$A_{\mathfrak{b}} \cdot l = \int\limits_{x_0}^{x_0+2l} \varphi \cdot \cos \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} dx$$

$$= \overline{\underline{\varphi \cdot \frac{l}{\pi \mathfrak{b}} \cdot \sin \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}}} - \int\limits_{x_0}^{x_0+2l} dx \cdot \frac{l}{\pi \mathfrak{b}} \cdot \sin \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \tag{197}$$

und ebenso

$$B_{\mathfrak{b}} \cdot l = \int\limits_{x_0}^{x_0+2l} \varphi \sin \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} dx$$

$$= -\overline{\underline{\varphi \cdot \frac{l}{\pi \mathfrak{b}} \cos \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}}} + \int\limits_{x_0}^{x_0+2l} dx \cdot \frac{l}{\pi \mathfrak{b}} \cos \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \tag{198}$$

Hier ist zunächst vorausgesetzt, daſs φ stetig sei, und daſs der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dx}$ gebildet werden kann und dem Integral einen Sinn giebt. Wollen wir den Fall einschlieſsen, daſs φ an einer Stelle x_1 oder auch an mehreren Stellen einen Sprung macht, so zerlegen wir z. B. das Integral

$$\int_{x_0}^{x_0+2l} \varphi \cdot \cos \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} \, dx$$

in die beiden Theile

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi \cos \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} \, dx + \int_{x_1}^{x_0+2l} \varphi \cos \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} \, dx .$$

Wenn wir dann beide Integrale durch partielle Integration umgestalten, so tritt in dem Ausdruck für $A_{\mathfrak{b}}\, l$ noch die Differenz zwischen den Werthen hinzu, die

$$\varphi \cdot \frac{l}{\pi \mathfrak{b}} \cdot \sin \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}$$

auf den beiden Seiten von x_1 annimmt, d. i. der Sprung, den dieser Ausdruck macht, wenn x in zunehmendem Sinne durch x_1 hindurchgeht. Das Analoge gilt von dem Ausdruck für $B_{\mathfrak{b}}\, l$. Hierin ist auch der Fall einbegriffen, wo φ an den Enden der Periode nicht die gleichen Werthe hat. In diesem Falle ist

$$\overline{\underline{\varphi \cdot \frac{l}{\pi \mathfrak{b}} \cos \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}}}$$

von Null verschieden, während es sonst verschwindet.

Wenn wir auf den Ausdruck für $A_{\mathfrak{b}}\, l$ noch ein Mal partielle Integration anwenden, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} -\int_{x_0}^{x_0+2l} dx \frac{l}{\pi \mathfrak{b}} \sin \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} \frac{d\varphi}{dx} &= \overline{\underline{\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{l^2}{(\pi \mathfrak{b})^2} \cdot \cos \frac{\pi \mathfrak{b} x}{l}}} \\ &\quad - \int_{x}^{x_0+2l} dx \cdot \left[\frac{d^2\varphi}{dx^2} \cdot \frac{l^2}{(\pi \mathfrak{b})^2} \cos \frac{\pi \mathfrak{b} x}{l} \right] \end{aligned}\right\} \quad (199)$$

und für $B_{\mathfrak{b}}\, l$ ergiebt sich ein analoger Ausdruck.

Der erste durch die Integration gewonnene Theil würde nur unter den Umständen von Null verschieden sein, wenn $\frac{d\varphi}{dx}$ Sprünge macht. Wenn φ selbst einen Sprung macht, so würde die Curve selbst zerrissen sein und an einem Punkte von kleinerem zu höherem Werthe übergehen oder umgekehrt (Fig. 4). Wenn der Differential-

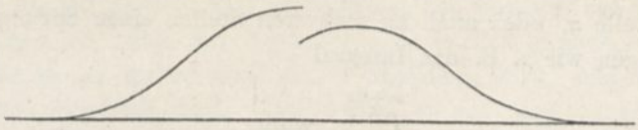

Fig. 4.

quotient einen Sprung macht, würde die Richtung der Curve eine plötzliche Aenderung erleiden, d. h. die Curve würde eine Ecke bilden (Fig. 5).

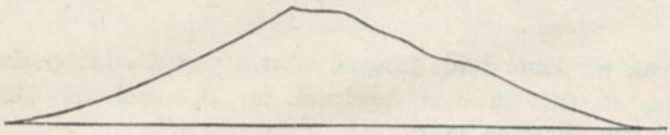

Fig. 5.

Wenn wir bei der Voraussetzung stehen bleiben, dafs die Function φ keine Sprünge macht, so wird der Ausdruck für $A_{\mathfrak{b}}\, l$ sowohl wie der für $B_{\mathfrak{b}}\, l$ im Nenner $\mathfrak{b}^2$ enthalten, und zwar auch dann noch, wenn $\frac{d\varphi}{dx}$ einen Sprung macht. Wenn also $\frac{d\varphi}{dx}$ in den einzelnen Theilen des Integrals, die durch die Sprungstelle getrennt sind, eine endliche Grenze nicht übersteigt, so werden $A_{\mathfrak{b}}$ und $B_{\mathfrak{b}}$ mit wachsendem Index wie $1/\mathfrak{b}^2$ abnehmen; oder genauer gesprochen, es läfst sich eine constante Zahl C angeben, so dafs $A_{\mathfrak{b}}$ und $B_{\mathfrak{b}}$ für alle Werthe von $\mathfrak{b}$ dem absoluten Betrage nach kleiner sind als $C/\mathfrak{b}^2$. Wenn auch der erste Differentialquotient keine Sprünge macht und der zweite Differentialquotient endlich bleibt, so folgt durch nochmalige partielle Integration, dafs $A_{\mathfrak{b}}$ und $B_{\mathfrak{b}}$ mit wachsendem $\mathfrak{b}$ mindestens wie $1/\mathfrak{b}^3$ abnehmen u. s. w. Mit andern Worten die Intensität der höheren harmonischen Theiltöne nimmt um so rascher ab, je öfter man differentiiren kann, ohne dafs die Ableitungen discontinuirlich werden.

Es seien nun $A_{\mathfrak{b}}$ und $B_{\mathfrak{b}}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{C}{\mathfrak{b}^{\mathfrak{n}}},$$

so läfst sich zeigen, dafs die Reihe für φ unbedingt convergirt, sobald $\mathfrak{n} > 1$ ist.

Die einzelnen Glieder

$$A_{\mathfrak{b}} \cos \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} + B_{\mathfrak{b}} \sin \frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}$$

in der Reihe für φ sind dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$2 \frac{C}{\mathfrak{b}^{\mathfrak{n}}},$$

so dafs von irgend einem Werthe von $\mathfrak{b}$, den wir mit p bezeichnen wollen, die Summe der absoluten Beträge kleiner ist als

$$2\,C\left(\frac{1}{p^{\mathfrak{n}}} + \frac{1}{(p+1)^{\mathfrak{n}}} + \frac{1}{(p+2)^{\mathfrak{n}}} + \ldots\right).$$

Diese Reihe ist für $\mathfrak{n} = 1$ divergent, aber für $\mathfrak{n} > 1$ läfst sich zeigen, dafs sie convergirt. Sobald φ selbst unstetig und daher $\mathfrak{n} = 1$ wäre, würde die Reihe für φ nicht unbedingt convergent sein. Sobald aber φ stetig ist, wird $\mathfrak{n}$ mindestens gleich 2.

Um zu zeigen, dafs die Reihe

$$\frac{1}{p^{\mathfrak{n}}} + \frac{1}{(p+1)^{\mathfrak{n}}} + \ldots$$

convergirt, sobald $\mathfrak{n}$ gröfser als 1 ist, schreiben wir $1 + \varepsilon$ statt $\mathfrak{n}$ und betrachten das Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{a}-1/2}^{\mathfrak{a}+1/2} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\, dx.$$

Integrirt giebt dies Integral

$$-\frac{1}{\varepsilon}\,\overline{\underline{\frac{1}{x^{\varepsilon}}}} = -\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{(\mathfrak{a}+\frac{1}{2})^{\varepsilon}} - \frac{1}{(\mathfrak{a}-\frac{1}{2})^{\varepsilon}}\right]$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon\,\mathfrak{a}^{\varepsilon}}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2\mathfrak{a}}\right)^{\varepsilon}} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2\mathfrak{a}}\right)^{\varepsilon}}\right].$$

Entwickelt man

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2\mathfrak{a}}\right)^{\varepsilon}} \text{ und } \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2\mathfrak{a}}\right)^{\varepsilon}}$$

nach dem binomischen Satz, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_{\mathfrak{a}-1/2}^{\mathfrak{a}+1/2} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\, dx = -\frac{1}{\varepsilon\,.\,\mathfrak{a}^{\varepsilon}}\Big[1 - \frac{\varepsilon}{1}\cdot\frac{1}{2\,\mathfrak{a}} + \frac{\varepsilon\,.(\varepsilon+1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{(2\,\mathfrak{a})^2} - + \ldots \\ -\left(1 + \frac{\varepsilon}{1}\cdot\frac{1}{2\,\mathfrak{a}} + \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{(2\,\mathfrak{a})^2} + \ldots\right)\Big] \end{aligned}\right\} (200)$$

Es heben sich in der Klammer die Glieder der geraden Potenzen von $\frac{1}{2\mathfrak{a}}$ fort, und die übrig bleibenden ergeben

$$-\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{a}}+2.\frac{\varepsilon.(\varepsilon+1).(\varepsilon+2)}{1.2.3}.\frac{1}{(2\mathfrak{a})^3}+\ldots\right)$$

mithin

$$\int\limits_{\mathfrak{a}-1/2}^{\mathfrak{a}+1/2}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}dx=\frac{1}{\mathfrak{a}^{1+\varepsilon}}+\frac{2}{\mathfrak{a}^{\varepsilon}}\frac{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}{1.2.3}.\frac{1}{(2\mathfrak{a})^3}+\ldots \tag{200a}$$

Alle Glieder auf der rechten Seite sind positiv, mithin ist:

$$\int\limits_{\mathfrak{a}-1/2}^{\mathfrak{a}+1/2}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}dx>\frac{1}{\mathfrak{a}^{1+\varepsilon}}.$$

Bildet man diese Ungleichung für $\mathfrak{a}=p,\ p+1,\ p+2,\ldots,\ p+r$, und addirt die linken Seiten und die rechten Seiten, so ergiebt sich:

$$\int\limits_{p-1/2}^{p+r+1/2}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}dx>\frac{1}{p^{\mathfrak{n}}}+\frac{1}{(p+1)^{\mathfrak{n}}}+\ldots+\frac{1}{(p+r)^{\mathfrak{n}}} \tag{201}$$

Denn die Intervalle der Integrale schliefsen aneinander an und die Summe aller Integrale läfst sich daher als ein Integral schreiben.

Lassen wir r unendlich werden, so ist

$$\int\limits_{p-1/2}^{\infty}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}dx>\frac{1}{p^{\mathfrak{n}}}+\frac{1}{(p+1)^{\mathfrak{n}}}+\ldots\ldots$$

Wenn das Integral ausgeführt wird, so wird unter der Voraussetzung, dafs $\varepsilon>0$ ist, der Werth für die obere Grenze Null, und es ergiebt sich

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{(p-\frac{1}{2})^{\varepsilon}}>\frac{1}{p^{\mathfrak{n}}}+\frac{1}{(p+1)^{\mathfrak{n}}}+\ldots. \tag{202}$$

Es convergirt mithin die Reihe

$$\frac{1}{p^{\mathfrak{n}}}+\frac{1}{(p+1)^{\mathfrak{n}}}+\ldots.$$

und wird für hinreichend grofse Werthe von p beliebig klein.

Damit ist gezeigt, dafs die Summe der Glieder

$$A_{\mathfrak{b}}\cos\frac{\pi x\mathfrak{b}}{l}+B_{\mathfrak{b}}\sin\frac{\pi x\mathfrak{b}}{l}$$

unbedingt convergirt. Aber es ist noch nicht gezeigt, daſs diese Summe die gegebene Function φ wirklich darstellt. Das hängt noch an der unbewiesenen Voraussetzung, daſs φ in eine solche Summe überhaupt entwickelt werden kann.

Um den noch fehlenden Nachweis zu liefern, wollen wir eine andere Summe einführen, die aus der Summe der Glieder

$$A_\mathfrak{b}\cos\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} + B_\mathfrak{b}\sin\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}$$

dadurch entsteht, daſs wir jedes Glied mit

$$e^{-\varepsilon\mathfrak{b}}$$

multipliciren.

Für kleine Werthe von ε wird der Factor $e^{-\varepsilon\mathfrak{b}}$ erst für hohe Werthe von $\mathfrak{b}$ merklich von 1 verschieden. Die Glieder mit hohem Index werden durch den Factor verkleinert, während die Glieder mit niedrigem Index nahezu ungeändert bleiben. Für $\varepsilon = 0$ geht die neue Summe in die alte über und zwar continuirlich, so daſs für hinreichend kleine Werthe von ε der Werth der neuen Summe beliebig wenig von dem der alten abweicht. Denn da die unbedingte Convergenz der ersten Summe nachgewiesen ist, so werden für beide Summen die Glieder von einem bestimmten Index an beliebig wenig ausmachen. Für kleinere Indices aber stimmen die Glieder beider Summen für hinreichend kleine Werthe von ε beliebig genau überein und mithin auch die Werthe der ganzen Summen. Wir bezeichnen die neue Summe mit φ_{1x} und definiren also:

$$\varphi_{1x} = \sum_{\mathfrak{b}=0}^{\mathfrak{b}=\infty}\left[e^{-\varepsilon\mathfrak{b}}.A_\mathfrak{b}.\cos\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} + e^{-\varepsilon\mathfrak{b}}.B_\mathfrak{b}.\sin\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}\right]. \tag{203}$$

Die Reihe φ_{1x} convergirt für $\varepsilon > 0$ und beliebige Werthe von x auch dann noch unbedingt, wenn $A_\mathfrak{b}$ und $B_\mathfrak{b}$ mit wachsendem Index nicht beliebig klein werden, wofern sie nur endliche Grenzen nicht überschreiten. Denn, wenn die absoluten Beträge von $A_\mathfrak{b}$ und $B_\mathfrak{b}$ kleiner als c sind, so ist

$$A_\mathfrak{b}\cos\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} + B_\mathfrak{b}\sin\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als $2\,c$.

Wird nun q für $e^{-\varepsilon}$ geschrieben, so ist der absolute Betrag von

$$e^{-\varepsilon\mathfrak{b}}A_\mathfrak{b}\cos\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l} + e^{-\varepsilon\mathfrak{b}}B_\mathfrak{b}\sin\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}$$

kleiner als

$$2\,c\,.\,q^\mathfrak{b}$$

und die Summe von irgend einem Index p an kleiner als

$$2c(q^p + q^{p+1} \dots)$$

oder, da $q < 1$ ist, kleiner als

$$2c\frac{q^p}{1-q},$$

was für hinreichend grofse Werthe von p beliebig klein ist.

Die Reihe φ_{1x} ist also z. B. auch dann unbedingt convergent, wenn φ einen Sprung macht.

In die Reihe für φ_{1x} setzen wir nunmehr die Integrale (196) für $A_\mathfrak{b}$ und $B_\mathfrak{b}$ ein, indem wir aber für die Integrationsvariable statt x einen anderen Buchstaben s schreiben

$$A_\mathfrak{b} = \frac{1}{l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s \cos\frac{\pi s \mathfrak{b}}{l}\, ds \quad (\mathfrak{b} > 0)$$

$$B_\mathfrak{b} = \frac{1}{l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s \sin\frac{\pi s \mathfrak{b}}{l}\, ds$$

und

$$A_0 = \frac{1}{2l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s\, ds.$$

So erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{1x} = \frac{1}{2l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s\, ds + \frac{1}{l}\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\infty}\Bigg[\cos\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s \cos\frac{\pi s \mathfrak{b}}{l}\, ds \\ + \sin\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s \sin\frac{\pi s \mathfrak{b}}{l}\, ds\Bigg] e^{-\varepsilon \mathfrak{b}}. \end{aligned}\right\} \quad (204)$$

Die Reihenfolge der Integration und Summation dürfen wir bei der nachgewiesenen unbedingten Convergenz der Summe vertauschen und schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{1x} = \frac{1}{l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s \Bigg[\tfrac{1}{2} + \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\infty}\Bigg(\cos\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}\cos\frac{\pi s \mathfrak{b}}{l} \\ + \sin\frac{\pi x \mathfrak{b}}{l}\sin\frac{\pi s \mathfrak{b}}{l}\Bigg) e^{-\varepsilon \mathfrak{b}}\Bigg] ds. \end{aligned}\right\} \quad (204\text{a})$$

Das ist:

$$\varphi_{1x} = \frac{1}{l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s \left[\tfrac{1}{2} + \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\infty} \cos\frac{\pi(s-x)}{l}\mathfrak{b} . e^{-\varepsilon\mathfrak{b}}\right] ds, \tag{204b}$$

oder wenn wir $\dfrac{e^{\frac{\pi(s-x)}{l}\mathfrak{b}.i} + e^{-\frac{\pi(s-x)}{l}\mathfrak{b}.i}}{2}$ für $\cos\dfrac{\pi(s-x)}{l}\mathfrak{b}$ einführen:

$$\varphi_{1x} = \frac{1}{2l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s \left[1 + \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\infty}\left(e^{-\varepsilon\mathfrak{b}+\frac{\pi(s-x)}{l}\mathfrak{b}i} + e^{-\varepsilon\mathfrak{b}-\frac{\pi(s-x)}{l}\mathfrak{b}i}\right)\right] ds. \tag{204c}$$

Die Summe unter dem Integralzeichen besteht aus zwei geometrischen Reihen, die eine nach Potenzen von

$$e^{-\varepsilon+\frac{\pi(s-x)}{l}i},$$

die andere nach Potenzen von

$$e^{-\varepsilon-\frac{\pi(s-x)}{l}i}$$

fortschreitend. Beide Gröfsen sind für $\varepsilon > 0$ dem absoluten Betrage nach kleiner als 1, so dafs die Summenformel

$$\frac{q}{1-q} = q + q^2 + q^3 \ldots$$

anwendbar ist. Dadurch erhalten wir die Form:

$$\varphi_{1x} = \frac{1}{2l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s \left[1 + \frac{e^{-\varepsilon+\frac{\pi(s-x)}{l}i}}{1-e^{-\varepsilon+\frac{\pi(s-x)}{l}i}} + \frac{e^{-\varepsilon-\frac{\pi(s-x)}{l}i}}{1-e^{-\varepsilon-\frac{\pi(s-x)}{l}i}}\right] ds. \tag{204d}$$

Bringt man nun den Ausdruck in der eckigen Klammer auf gemeinsamen Nenner, so ergiebt sich:

$$\varphi_{1x} = \frac{1}{2l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{1-2e^{-\varepsilon}\cos\frac{\pi(s-x)}{l}+e^{-2\varepsilon}}\, ds \tag{204e}$$

oder auch:

$$\varphi_{1x} = \frac{1}{2l}\int\limits_{s_0}^{s_0+2l} \varphi_s \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2+4e^{-\varepsilon}\sin^2\frac{\pi(s-x)}{2l}}\, ds. \tag{204f}$$

Für kleine Werthe von ε sind $1-e^{-2\varepsilon}$ und $1-e^{-\varepsilon}$ nahezu gleich Null. Beide Ausdrücke sind von der ersten Ordnung gegen ε. Der Zähler des Bruches

$$\frac{1-e^{-2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2+4e^{-\varepsilon}\sin^2\frac{\pi(s-x)}{2l}}$$

wird also nahezu gleich Null sein, während der Nenner nur dann sehr klein sein wird, wenn auch $\sin^2\frac{\pi(s-x)}{2l}$ sehr klein, was innerhalb der Werthe $s=s_0$ bis s_0+2l nur für den Werth $s=x$ und die unmittelbar benachbarten der Fall sein wird. Der Bruch wird also aufser für diese Werthe von s für hinreichend kleine Werthe von ε beliebig wenig von Null verschieden sein, so dafs also alle Elemente des Integrals sehr wenig zu seinem Werthe beitragen mit Ausnahme derjenigen, für die s in der Nähe von x liegt. Für $s=x$ wird der Bruch sehr grofs von der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon}$, so dafs diese Theile des Integrals in der Nähe von $s=x$ einen endlichen Beitrag geben, obwohl das Intervall für hinreichend kleine Werthe von ε beliebig klein ist. Wenn man s als Abscisse und

$$\frac{1-e^{-2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2+4e^{-\varepsilon}\sin^2\frac{\pi(s-x)}{2l}}$$

als Ordinate aufträgt, so erhält man eine Curve, wie Fig. 6 sie zeigt.

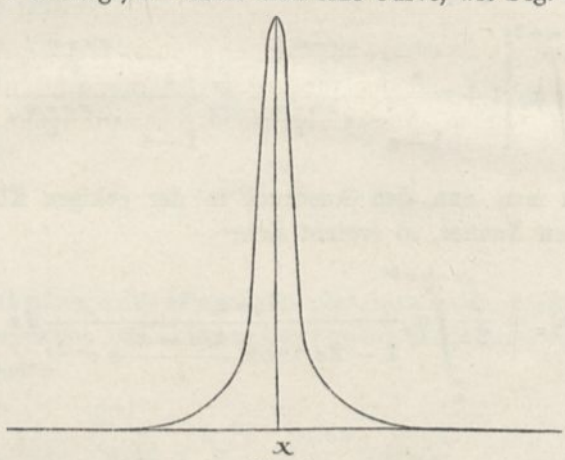

Fig. 6.

Je kleiner ε ist, desto schneller wird bei $s=x$ der Werth des Bruches nach beiden Seiten abfallen, und in endlicher Entfernung von dieser Stelle wird er verschwindend kleine Werthe erhalten. Die Ordinate der Curve ist überall positiv und von der Fläche zwischen ihr und der s-Axe in dem Intervall s_0 bis $s_0 + 2l$, werden wir unten zeigen, dass sie gleich $2l$ ist. Alle Flächentheile, deren Abscissen s nicht unmittelbar in der Nähe von x liegen, werden mit ε unmerklich klein, so dafs die Fläche über einem kleinen den Werth x einschliefsenden Intervall etwa $x - \delta$ bis $x + \delta$ unmerklich wenig von dem Werthe $2l$ der ganzen Fläche abweicht. Wird das Integral

$$\frac{1}{2l}\int \varphi_s \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2 + 4e^{-\varepsilon}\sin^2\frac{\pi(s-x)}{2l}}\, ds$$

nur über dieses den Werth x einschliefsende Intervall erstreckt, so erhält man für hinreichend kleine Werthe von ε, wie klein auch jenes Intervall festgesetzt sei, einen Integralwerth, der unmerklich wenig von φ_{1x} verschieden ist.

Nun liegt

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi_s \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2 + 4e^{-\varepsilon}\sin^2\frac{\pi(s-x)}{2l}}\, ds$$

zwischen den beiden Werthen, die man erhält, wenn man φ_s durch den gröfsten und den kleinsten Werth ersetzt, den es in dem Intervall annimmt. Da der gröfste und der kleinste Werth bei der Kleinheit des Intervalls und der vorausgesetzten Stetigkeit von φ_s beide sehr wenig von φ_x verschieden sind, so wird also φ_{1x} sehr wenig von

$$\varphi_x \cdot \frac{1}{2l} \cdot \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2 + 4e^{-\varepsilon}\sin^2\frac{\pi(s-x)}{2l}}\, ds$$

abweichen.

Von dem Integral kann man nun zeigen, dafs es bei festgesetztem δ für hinreichend kleine Werthe von ε beliebig wenig von $2l$ verschieden ist. Zu dem Ende führen wir die Variable

$$\mathfrak{z} = \operatorname{tg}\frac{\pi(s-x)}{2l}$$

an Stelle von s in das Integral ein.

Dann ist

$$\frac{d\mathfrak{z}}{1+\mathfrak{z}^2} = \frac{\pi}{2l} ds$$

und

$$\sin^2 \frac{\pi(s-x)}{2l} = \frac{\mathfrak{z}^2}{1+\mathfrak{z}^2}$$

und somit ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{1-e^{2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2+4e^{-\varepsilon}\sin^2\frac{\pi(s-x)}{2l}} ds &= \int \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2(1+\mathfrak{z}^2)+4e^{-\varepsilon}\mathfrak{z}^2}\cdot\frac{2l}{\pi}\cdot d\mathfrak{z} \\ &= \int \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2+(1+e^{-\varepsilon})^2\mathfrak{z}^2}\cdot\frac{2l}{\pi}\cdot d\mathfrak{z} \\ &= \frac{2l}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+e^{-\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}}\cdot\mathfrak{z}\right)\end{aligned}\right\} (205)$$

Die Grenzen $x-\delta$ und $x+\delta$ liefern für $\mathfrak{z}$ die Werthe $\pm \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\delta}{2l}\right)$. Ist nun δ festgesetzt und wird jetzt ε hinreichend klein gemacht, so wird

$$\frac{1+e^{-\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\delta}{2l}\right)$$

beliebig grofs und $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+e^{-\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi\delta}{2l}\right)$ wird beliebig wenig von $\frac{\pi}{2}$ verschieden. Mithin ist

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2+4e^{-\varepsilon}\sin^2\frac{\pi(s-x)}{2l}} ds$$

mit beliebiger Genauigkeit gleich $2l$ und φ_{1x} ist mit beliebiger Genauigkeit gleich φ_x.

Wenn φ_s an der Stelle $s=x$ einen Sprung machte, aber in dem Intervall $x-\delta$ bis x sowohl wie in dem Intervall x bis $x+\delta$ stetig wäre, so kann man zeigen, dafs φ_{1x} beliebig wenig von dem arithmetischen Mittel der beiden Werthe bei x abweicht. Man braucht nur das Integral über $x-\delta$ bis $x+\delta$ in zwei Theile zu theilen

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{x-\delta}^{x} \varphi_s \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2 + 4e^{-\varepsilon}\sin^2\dfrac{\pi(s-x)}{2l}}\,ds$$

$$+\frac{1}{2l}\int\limits_{x}^{x+\delta} \varphi_s \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{(1-e^{-\varepsilon})^2 + 4e^{-\varepsilon}\sin^2\dfrac{\pi(s-x)}{2l}}\,ds$$

und auf jeden Theil dieselbe Betrachtung anzuwenden. Sind φ_x' und φ_x'' die beiden Werthe von φ_x, so ist der eine Theil des Integrals beliebig wenig von $\frac{\varphi_x'}{2}$, der andere beliebig wenig von $\frac{\varphi_x''}{2}$ verschieden und φ_{1x} also beliebig wenig vom arithmetischen Mittel $\frac{\varphi_x' + \varphi_x''}{2}$. Ist φ_x stetig, so geht φ_{1x} in den Werth φ_x über, wenn $\varepsilon = 0$ wird. Zugleich aber haben wir gesehen, daſs die Reihe, durch welche φ_{1x} definirt ist, für $\varepsilon = 0$ in die Reihe

$$\sum\left(A_\mathfrak{b}\cos\frac{\pi x\mathfrak{b}}{l} + B_\mathfrak{b}\sin\frac{\pi x\mathfrak{b}}{l}\right)$$

übergeht. Da nun diese Reihe convergent ist, so ist damit bewiesen, daſs ihr Werth gleich dem Werth sein muſs, in den φ_{1x} für $\varepsilon = 0$ übergeht, d. i. gleich φ_x.

Dadurch ist nun also nachgewiesen, daſs die Reihe

$$\sum\left(A_\mathfrak{b}\cos\frac{\pi x\mathfrak{b}}{l} + B_\mathfrak{b}\sin\frac{\pi x\mathfrak{b}}{l}\right),$$

wo die Werthe von A und B in der oben (Gleichung 196) angegebenen Weise aus den Werthen von φ gefunden werden, wirklich gleich φ_x ist. Wir haben einen umständlichen Weg einschlagen müssen, um die Richtigkeit unserer Reihe nachzuweisen. Es gelang, durch den Zusatz eines Factors zu jedem Gliede, durch den dann die Summation der Cosinus und Sinus von Bögen, welche die ganzen Vielfachen der Gröſse $\frac{\pi x}{l}$ waren, ausgeführt werden konnte. Sehr viel schwieriger wird die Erörterung, wenn man statt der ganzen Zahlen in den Vielfachen etwa eine Reihe von Irrationalzahlen hat. Selbst wenn man in solchen Fällen unter der Voraussetzung, daſs die gegebene Function in eine solche Reihe entwickelt werden kann, die Coefficienten aufzufinden im Stande ist, so gelingt es doch nur in den allerseltensten Fällen, nachzuweisen, dafs die Reihe nun wirklich den Werth der Function hat, den man herstellen will, und also auch die Frage zu entscheiden, ob die gegebene Function so entwickelt werden kann.

§ 39. Die Schwingungen gezupfter Saiten.

Es soll nun in einigen einzelnen Fällen für eine gegebene Anfangslage der Saite ihre Bewegung dargestellt werden.

Zunächst möge das Beispiel der sogenannten gezupften Saite behandelt werden. Die Saite sei wie bisher von der Länge l vorausgesetzt, und es werde angenommen, dafs man durch Anlegen eines Stiftes oder auch der Fingerspitze einen Punkt der Saite seitwärts gezogen hat, an welchem dann die Saite eine Ecke bildet. Wird die ungestörte Ruhelage der Saite zur x-Axe gewählt und das eine Ende zum Coordinatenanfangspunkt, so soll a die Abscisse des Punktes sein, in dem die Saite im Anfangszustande eine Ecke bildet (Fig. 7).

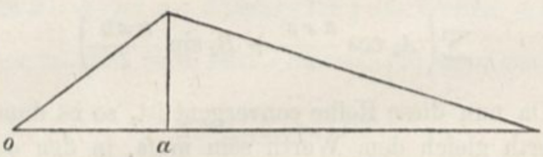

Fig. 7.

Wenn man nun losläfst, so dafs die Saite frei wird, so kommt sie ins Schwingen. Die Saiteninstrumente der alten Griechen wurden in dieser Weise erregt, und die Saiten der Zither, der Guitarre und der Harfe werden noch heute so erregt. Nun können wir zunächst die Bewegung, welche hierauf folgen wird, durch die zwei willkürlichen Functionen darstellen, welchen vorwärts und rückwärts auf der Saite fortlaufende Wellen entsprechen. Wir wollen hier nur eine seitliche Verschiebung η eines jeden einzelnen Punktes der Saite annehmen und erörtern. Dann würde also, wie wir gesehen haben, im allgemeinen Falle

$$\eta = F_{x+at} + G_{x-at}$$

sein, und die Geschwindigkeit im Anfang würde darzustellen sein durch

$$\frac{d\eta}{dt}_{t=0} = a \, . \, F'_x - a \, . \, G'_x$$

Aber die Anfangsgeschwindigkeit soll in unserem Falle Null sein. Daraus folgt, dafs für beliebige Werthe von x

$$F'_x = G'_x$$

ist, und dafs also auch $F_{(x)}$ und $G_{(x)}$ selbst sich nur um eine Constante unterscheiden. Die Constante können wir aber zu $F_{(x)}$ oder $G_{(x)}$ hinzuschlagen und $F_{(x)} = G_{(x)}$ setzen. Jede einzelne Function würde dann für die Anfangszeit durch die Hälfte der in Fig. 7 gezeichneten seitlichen Ausweichung gegeben werden, und es würden zwei gleichliegende Wellen über einander liegen, die aber nun nach entgegengesetzten Richtungen hinlaufen. Jenseits der Befestigungspunkte müssen diese Wellen, wie wir oben sahen, periodisch fortgesetzt werden, so dafs jenseits des Nullpunktes zwischen 0 und $-l$ und

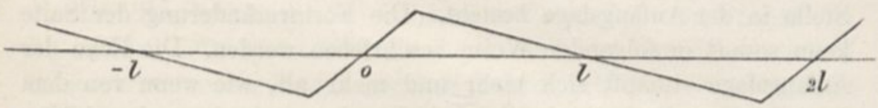

Fig. 8.

ebenso jenseits des Punktes $x = l$ zwischen l und $2l$ die entgegengesetzten Ausbiegungen stattfänden, weil an den Enden der Saite immer gleiche und entgegengesetzte Wellen einander begegnen müssen (Fig. 8).

Wenn Wellen dieser Art im ersten Moment der Bewegung sich decken, und nun zwei Wellen dieser Art von der halben Höhe der

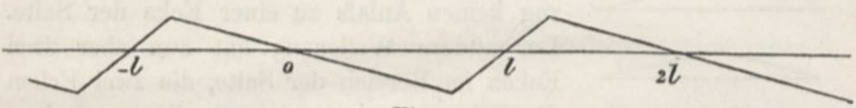

Fig. 9.

anfänglichen Saitenausbiegung in entgegengesetzter Richtung einander entgegenlaufen, so wird, wenn eine halbe Schwingungsdauer vergangen ist, die entgegengesetzte Stellung eingetreten sein. Beide Wellen sind wieder zur Deckung gekommen in der in Fig. 9 gezeichneten Lage. Die entsprechende Saitenlage bildet mit der Anfangslage ein Parallelogramm (Fig. 10).

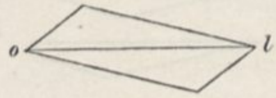

Fig. 10.

Wenn für irgend eine Zwischenlage die Ordinaten der beiden entgegengesetzt laufenden Wellenzüge addirt werden, so müssen sie eine gebrochene Linie für die Saite ergeben, die ihre Ecken bei denselben Abscissen hat, wo die Wellen selbst Ecken bilden. Denn zwei lineare Functionen geben addirt wieder eine lineare Function. Gehen wir von der Anfangslage aus und lassen nun die beiden Wellenzüge auseinanderrücken, so müssen die Projectionen der Ecken auf die Abscissenaxe in jedem Augenblick gleich weit von der Stelle abstehen, wo sie in der Anfangslage zusammenfallen. So lange keine dieser Projectionen ein Ende der Saite erreicht hat, entsprechen ihnen je eine Ecke der Saite. Jede dieser Ecken liegt auf der Anfangslage der Saite. Denn die Ordinate des einen Wellenzuges hat an der Ecke jedes Mal denselben Werth, während die Ordinate des anderen ebensoviel abgenommen hat, wie der Unterschied der beiden Ordinaten der Saitenanfangslage an der betreffenden Stelle und im Maximum beträgt. Dadurch wird die Summe der Ordinaten der beiden Wellenzüge gleich der Ordinate, die an der betreffenden Stelle in der Anfangslage besteht. Die Formveränderung der Saite kann soweit in folgender Weise beschrieben werden. Die Ecke der Anfangslage stumpft sich mehr und mehr ab, wie wenn von dem Dreieck, das die Saite in ihrer Anfangslage mit der x-Axe bildet, an der Ecke mehr und mehr abgeschnitten wird. Die Saite bildet eine aus drei geraden Stücken gebildete gebrochene Linie. Die beiden Ecken rücken auf der Anfangslage der Saite nach den Enden zu, so dafs sie immer gleich weit von der gröfsten Ordinate der Anfangslage entfernt bleiben. Erreicht die eine Ecke das Ende der Saite, so giebt nun zunächst der betreffende Wellenzug keinen Anlafs zu einer Ecke der Saite. Der andere Wellenzug hat nun aber zwei Ecken im Bereich der Saite, die zwei Ecken der Saite verursachen. Jede liegt auf einer der Langseiten des Parallelogramms, das die Anfangslage der Saite mit der nach der halben Schwingungsperiode eintretenden Lage bildet. Die beiden Ecken schreiten nach der gleichen Seite mit gleicher Geschwindigkeit fort, bis die vordere das Ende der Saite erreicht. Dann verschwindet diese Ecke, und es erscheint dafür wieder eine durch den ersten Wellenzug veranlafste, die sich in der entgegengesetzten Richtung auf der kurzen Seite des Parallelogramms fortbewegt, die der Saitenlage nach Verlauf einer halben Schwingungsperiode angehört. Die beiden Ecken nähern sich und laufen schliefslich nach Verlauf einer halben Schwingungsperiode zu-

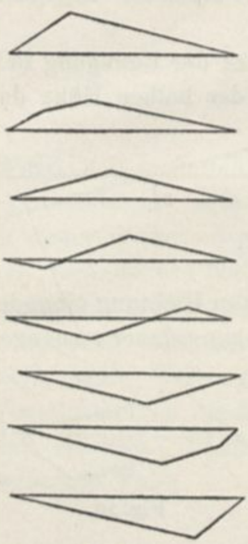

Fig. 11.

sammen (Fig. 11). Nun wiederholen sich dieselben Saitenlagen in umgekehrter Reihenfolge. Die Saite besteht also, abgesehen von der ersten und letzten Lage, aus drei geradlinigen Stücken. Das mittlere Stück rückt mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit über das Parallelogramm hinweg und wieder zurück. Man kann diese Art der Bewegung auch an einer sehr langen und recht hellen Saite, welche als Lichtlinie auffällt, wenigstens für die erste Zeit der Schwingungen, mit dem Auge erkennen.

Nach einiger Zeit kommen Reibung und Steifigkeit der Saite in Betracht, die dann bewirken, dafs die Ecken sich schnell abstumpfen und rundlich werden. In dieser Beziehung unterscheiden sich die Schwingungen der wirklichen Saiten von denen der theoretisch dargestellten.

Die Beschreibung, die wir hier von der Saitenbewegung vermittelst der willkürlichen Functionen, mit welchen die Saitenbewegung ausgedrückt werden kann, gegeben haben, erlaubt nun aber noch nicht die verschiedenen einfachen Töne herauszufinden, welche von dem Ohre bei einer solchen Erregung der Saite gehört werden. Um diese zu finden, müssen wir die Zerlegung in die Fourier'sche Reihe vornehmen.

Für unseren Fall haben wir nach § 37 die seitliche Ausweichung in der Form

$$\eta = \sum\left[A_\mathfrak{a} . \sin\frac{\pi \mathfrak{a} x}{l} . \cos\frac{2\pi \mathfrak{a} t}{T}\right] \tag{206}$$

darzustellen. Die Glieder, welche $\sin\frac{2\pi \mathfrak{a} t}{T}$ enthalten, verschwinden, weil $\frac{d\eta}{dt}$ für $t = 0$ für beliebige Werthe von x Null sein soll.

Wenn der Anfangswerth von η mit η_0 bezeichnet wird, so haben wir die Coefficienten $A_\mathfrak{a}$ so zu bestimmen, dafs

$$\eta_0 = \sum\left[A_\mathfrak{a} . \sin\frac{\pi \mathfrak{a} x}{l}\right]. \tag{206a}$$

D. h. wir haben unsere Coefficienten $A_\mathfrak{a}$ zu setzen

$$A_\mathfrak{a} = \frac{2}{l}\int_0^l \eta_0 . \sin\frac{\pi \mathfrak{a} x}{l} dx. \tag{207}$$

Bei der Ableitung der Formel (193) hatten wir über die ganze Periode $2l$ integrirt. Das kommt hier aber auf dasselbe hinaus, da in der zweiten Periodenhälfte sowohl η_0 wie $\sin\frac{\pi\mathfrak{a}x}{l}$ das entgegengesetzte Zeichen haben, so dafs

$$\int_0^{2l} \eta_0 \sin\frac{\pi\mathfrak{a}x}{l}\,dx = 2\int_0^{l} \eta_0 \sin\frac{\pi\mathfrak{a}x}{l}\,dx.$$

Nun ist in diesem Falle η_0 durch eine Curve dargestellt, die aus zwei geraden Linien besteht. Innerhalb des aufsteigenden Theiles von $x = 0$ bis $x = a$ haben wir:

$$\eta_0 = \frac{x.h}{a},$$

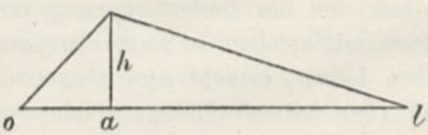

Fig. 12.

wenn h das Maximum der Elongation bezeichnet (Fig. 12); und auf dem zweiten absteigenden Theile der Saite ist:

$$\eta_0 = \frac{h.(l-x)}{l-a}.$$

Mithin wird

$$A_\mathfrak{a} = \frac{2}{l}\int_0^a \frac{h}{a}.x\sin\frac{\pi\mathfrak{a}x}{l}dx + \frac{2}{l}\int_a^l \frac{h}{l-a}.(l-x).\sin\frac{\pi\mathfrak{a}x}{l}dx. \qquad (207\text{a})$$

Durch partielle Integration bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned} A_\mathfrak{a} = &-\frac{2}{l}.\frac{l}{\pi\mathfrak{a}}.\overline{\underline{\frac{h}{a}.x.\cos\frac{\pi\mathfrak{a}x}{l}}} + \frac{2}{l}.\frac{l}{\pi\mathfrak{a}}.\frac{h}{a}\int_0^a \cos\frac{\pi\mathfrak{a}x}{l}\,dx \\ &-\frac{2}{l}.\frac{h}{l-a}.\frac{l}{\pi\mathfrak{a}}.\overline{\underline{(l-x).\cos\frac{\pi\mathfrak{a}x}{l}}} \\ &\qquad -\frac{2}{l}.\frac{h}{l-a}.\frac{l}{\pi\mathfrak{a}}\int_a^l \cos\frac{\pi\mathfrak{a}x}{l}\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (207\text{b})$$

Was zunächst die beiden integrirten Glieder betrifft, so heben sie sich weg, da das erste zwischen den Grenzen 0 und x zu nehmende gleich

$$-\frac{2h}{\pi\mathfrak{a}}.\cos\frac{\pi a\mathfrak{a}}{l},$$

das zweite zwischen den Grenzen a und l zu nehmende gleich

$$+\frac{2h}{\pi a}\cdot\cos\frac{\pi\mathfrak{a}a}{l}$$

ist. Von den Integralen ergiebt das erste:

$$\frac{2}{\pi\mathfrak{a}}\cdot\frac{h}{a}\cdot\frac{l}{\pi\mathfrak{a}}\cdot\left[\sin\frac{\pi\mathfrak{a}x}{l}\right]_0^a.$$

das zweite

$$-\frac{2}{\pi\mathfrak{a}}\cdot\frac{h}{l-a}\cdot\frac{l}{\pi\mathfrak{a}}\left[\sin\frac{\pi\mathfrak{a}x}{l}\right]_a^l.$$

Mithin ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}A_\mathfrak{a} &= \frac{2}{\pi\mathfrak{a}}\cdot\frac{h}{a}\cdot\frac{l}{\pi\mathfrak{a}}\cdot\sin\frac{\pi\mathfrak{a}a}{l}+\frac{2}{\pi\mathfrak{a}}\cdot\frac{h}{l-a}\cdot\frac{l}{\pi\mathfrak{a}}\cdot\sin\frac{\pi\mathfrak{a}a}{l}\\ &\text{oder}\\ A_\mathfrak{a} &= \frac{2h}{\pi^2\mathfrak{a}^2}\cdot\sin\frac{\pi\mathfrak{a}a}{l}\left[\frac{l}{a}+\frac{l}{l-a}\right].\end{aligned}\right\}\qquad(207\,\mathrm{c})$$

Das ist also der Factor, welcher bei dem $\mathfrak{a}$ten Ton der Saite auftritt. Er ist h proportional, d. h. proportional der gröſsten Abweichung, die man der Saite zu Anfang gegeben hat, wie sich das von selbst versteht. Ferner ist er umgekehrt proportional $\mathfrak{a}^2$, dem Quadrat der Ordnungszahl. Wir haben oben (§ 38) gesehen, daſs dadurch die Reihe unbedingt convergent ist.

Der Factor $\frac{l}{a}+\frac{l}{l-a}$ läſst erkennen, daſs die Amplitude der Schwingung für den einzelnen Ton sich dem Unendlichen nähern würde, wenn die Ecke der Anfangslage nach dem einen oder dem andern Ende der Saite verlegt wird. Das würde aber auch gleichzeitig in der That eine unendlich starke Zerrung an der Ecke bedeuten und würde einer Zerreiſsung der Saite entsprechen. Es geht daraus hervor, daſs, abgesehen von anderen Verhältnissen, die einzelnen Töne um so stärker sein werden, je mehr man sich dem einen oder dem anderen Ende der Saite nähert. In der Mitte der Saite erhält der Factor $\frac{l}{a}+\frac{l}{l-a}$ seinen kleinsten Werth, den Werth 4.

Endlich ist der Factor $\sin\frac{\pi\mathfrak{a}a}{l}$ in dem Ausdruck für $A_\mathfrak{a}$ zu betrachten. Er zeigt an, daſs, wenn der gezupfte Punkt für den betreffenden Saitenton, dessen Amplitude wir suchen, ein Knotenpunkt ist, die Amplitude verschwindet. Es bestätigt sich an diesem einzelnen Beispiele die Regel, die oben für die allgemeinen schwingenden Systeme abgeleitet ist, dafs, wenn man Schwingungen in einem Punkt des Systems erregt, der bei einem der betreffenden Eigentöne nicht in Schwingungen geräth, der betreffende Ton nicht erregt wird. Wenn man eine Saite im Knotenpunkte irgend eines ihrer Obertöne in Bewegung setzt, so kommt der betreffende Oberton nicht zu Stande. Um also einen an Obertönen reichen Klang der Saite zu haben, ist es rathsam, dafs man sich möglichst dem Ende nähert. Man kann an jedem Flügel sich von der Richtigkeit dieser Ueberlegung überzeugen. Wenn man nämlich einen Ton anschlägt und zugleich eine Fingerspitze auf die Saite legt, so kann man dabei verschiedene Obertöne dämpfen und sich überzeugen, welche Obertöne vorhanden sind. Es zeigt sich, dafs diejenigen Obertöne zum Vorschein kommen, welche ihre Knotenpunkte nicht zu nahe an der von dem Hammer angeschlagenen Stelle haben. Man kann denjenigen Ton nicht hervorbringen, dessen Knotenpunkt vom Hammer getroffen wird. Die Erregung der Claviersaite stimmt allerdings nicht mit der Erregung der gezupften Saite überein, aber der allgemeine Satz umfafst auch diesen Fall. Auf dem Monochord, der Harfe, der Zither oder der Guitarre läfst sich die Thatsache auch für die gezupfte Saite leicht constatiren. Wenn man sich zwei Knotenpunkte bezeichnet, die demselben Tone angehören, in dem einen die Saite zupft und unmittelbar nachher durch schnelle Berührung mit dem weichen Finger in dem andern dämpft, so nimmt man dadurch alle diejenigen Schwingungen der Saite fort, welche in dem zweiten Punkt keinen Knotenpunkt haben. Wäre nun der betreffende Ton in der Schwingung der Saite enthalten, so müfste er auch nach der Dämpfung bestehen bleiben. Die Thatsache, dafs er nach der Dämpfung nicht gehört wird, beweist, dafs er nicht mit erregt worden ist. Der Klang der Saite, welcher durch Zupfen herausgebracht wird, ist, wie die Zerlegung in die Fourier'sche Reihe zeigt, reich an Obertönen, etwa so reich, wie er bei den verschiedenen Anschlagsweisen werden kann, welche bei der Saite, ohne ihre Continuität zu zerstören, vorkommen können. Uebrigens ist die Art der Saite, die Härte des berührenden Körpers und die Schärfe der Spitze, mit welcher man arbeitet, von entschiedenem Einflufs auf den Klang der Saite. Das rührt zum Theil von der Steifigkeit der Saite her, zum Theil auch von ihrer Dicke, die mit der Steifigkeit zusammenhängt. Die vollkommen eckige Figur auf der Saite würde nämlich nur zu Stande kommen können, wenn die Saite absolut biegsam wäre. Das ist sie aber nicht; sie hat immer eine gewisse elastische Festigkeit, kleine Stücke der Saite sind ungefähr wie ein elastischer Stab zu betrachten, der, wenn er gekrümmt wird, zwar der Biegung nachgiebt, aber doch immer sich in einer Curve biegt, und zwar wird die Krümmung der Curve um so geringer sein, je fester die Seite ist, d. h. je mehr sie der Biegung Widerstand leistet. Das thut sie um so mehr, je dicker sie ist. Diese Umstände werden bewirken, daſs die Curve an der Ecke ausgeglichen ist, daſs man nicht eine wahre geometrische Ecke hat; und je mehr die Curve ausgeglichen ist, desto mehr sind die höheren Obertöne geschwächt, wie wir oben gesehen haben. Es sind z. B. die dünnen Saiten der Zither sehr viel biegsamer, als die dickeren metallenen und die Darmsaiten der Guitarre oder die langen Saiten der Harfe. Deshalb ergeben die Saiten der Zither immer einen viel schärferen Ton, welcher also anzeigt, daſs eine groſse Zahl der höheren Obertöne mit ansprechen. Wenn man eine dünne metallene Saite mit einer metallenen Spitze anschlägt, so erhält man einen klimpernden Ton, während man bei dem Anschlag mit dem Finger auf einer etwas dickeren Darmsaite einen verhältniſsmäſsig milderen und musikalischeren Ton bekommt, der keine Schärfe hat, weil durch die angegebenen Umstände die Intensität der höheren Obertöne vermindert wird. Denn nur durch die Ecke, durch die Unstetigkeit im Differentialquotienten ergab sich die langsame Abnahme von $A_\mathfrak{a}$ proportional $\frac{1}{\mathfrak{a}^2}$. Sobald die Unstetigkeit wegfällt, nehmen die Coefficienten proportional einer höheren Potenz von $\mathfrak{a}$ ab.

§ 40. Die Schwingungen gestrichener Saiten.

Die Theorie der Violinsaiten schlieſst sich an diese Rechnung unmittelbar an. Allerdings können wir die Bewegung der Violinsaite nicht als ein rein mechanisches Problem behandeln, weil wir von vorne herein keine klare mechanische Definition von der Art und Weise geben können, wie die Saite in Bewegung gesetzt und in Bewegung erhalten wird.

Bei einer Violinsaite wird eine periodische Erregung der Saite dadurch hervorgebracht, daſs unter leichtem Drucke der Bogen an der Saite entlang streicht. Die Violinsaiten sind ja meistentheils Darmsaiten, also verhältniſsmäſsig leicht, und der Violinbogen ist etwas klebrig gemacht dadurch, dafs er mit Harz eingerieben ist, so dafs ein leichter Grad des Anklebens zwischen Bogen und Saite stattfindet. Wir müssen nun, da eine klare mechanische Definition der Wirkung des Bogens nicht gegeben werden kann, durch Beobachtungen seinen Einflufs bestimmen.

Wenn man mit einem Vibrationsmikroskop oder auf andere Weise irgend eine Stelle an der Violinsaite betrachtet, während die Saite nahe ihrem Ende, wie es auf der Violine geschieht, gestrichen wird, so sieht man folgendes. Die Stelle der Saite geht in solcher Weise hin und her, dafs wenn die Zeit zur horizontalen Abscisse und die Ausweichung zur Ordinate gemacht wird, die Bewegung innerhalb einer Periode durch eine gebrochene Linie dargestellt ist, die in der halben Periode dieselbe Form hat wie die gezupfte Saite in der Anfangslage und in der zweiten Hälfte die der ersten Hälfte entgegengesetzten Ordinaten in umgekehrter Reihenfolge enthält (Fig. 13). Vorausgesetzt ist dabei ein Streichen des Bogens von

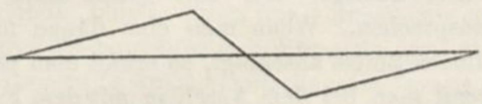

Fig. 13.

der Art, dafs der Grundton der Saite deutlich erklingt. Es ist nämlich auch möglich, durch eine gewisse Art des Streichens Flageolett-Töne auf der Saite hervorzubringen, bei denen die Saite also in Abteilungen schwingt und der Grundton nicht gehört wird. Es ist nicht nothwendig, um einen Flageolett-Ton hervorzubringen, die Saite in einem Knotenpunkte des betreffenden Tones zu berühren, wenn es auch die Sicherheit des Flageolett-Tons erhöht. Ein solches Streichen soll also ausgeschlossen sein.

An verschiedenen Stellen der Saite ist das Verhältnifs der beiden geraden Linien, die eine halbe Periode ausmachen, ein verschiedenes, und die maximale Ausweichung ist eine andere; aber die allgemeine Form ist die gleiche, dieselbe wie die einer gezupften Saite. Wir können daher dieselben Rechnungen, die uns die Anfangslage der gezupften Saite in eine Fourier'sche Reihe entwickelten, dazu verwenden, um hier die Bewegung eines Punktes der Saite in einer Fourier'schen Reihe darzustellen. Die Zeit tritt dabei an die Stelle der Längenausdehnung und die Periode der Bewegung tritt an die Stelle der doppelten Saitenlänge. Bezeichnen wir die Periode der Bewegung mit T, den Theil der Periode bis zur maximalen Ausweichung mit τ, und die maximale Ausweichung mit h, so haben wir nach der früheren Formel (206a, 207c) zu schreiben:

$$\eta = \sum \frac{2h}{\pi^2 \mathfrak{a}^2} \sin \frac{2\pi \mathfrak{a} \tau}{T} \left[\frac{T}{2\tau} + \frac{T}{T-2\tau}\right] \sin \frac{2\pi \mathfrak{a} t}{T} \tag{208}$$

Die Zeit ist dabei von dem Augenblick an gerechnet, in dem η im wachsenden Sinne durch Null hindurchgeht. Soll dies zu irgend einer andern Zeit t_0 geschehen, so müssen wir $t - t_0$ an Stelle von t schreiben:

$$\eta = \sum \frac{2h}{\pi^2 \mathfrak{a}^2} \sin \frac{2\pi \mathfrak{a} \tau}{T} \left[\frac{T}{2\tau} + \frac{T}{T-2\tau}\right] \sin \frac{2\pi \mathfrak{a}}{T} (t - t_0). \tag{209}$$

Die Einführung von t_0 ist nothwendig, wenn dieselbe Formel die Bewegung jedes Saitenpunktes darstellen soll. Da wir von vornherein nicht wissen können, dafs für denselben Werth von t gleichzeitig alle Punkte der Saite die Gleichgewichtslage passiren, so mufs in der Formel die Möglichkeit ausgedrückt sein, dafs es nicht der Fall ist, dafs also t_0 von Punkt zu Punkt andere Werthe hat. Ebenso können h und τ von Punkt zu Punkt andere Werthe haben oder, was auf dasselbe hinaus kommt, t_0, h, τ sind als Functionen von x anzusehen. Nun haben wir andererseits (§ 37) gesehen, dafs die Bewegung der ganzen Saite in der Form

$$\eta = \sum A_\mathfrak{a} \sin \frac{\pi \mathfrak{a} x}{l} \sin \frac{2\pi \mathfrak{a}}{T} t + \sum B_\mathfrak{a} \sin \frac{\pi \mathfrak{a} x}{l} \cos \frac{2\pi \mathfrak{a}}{T} t$$

darstellbar sein mufs. Da nun die Entwicklung in die Fourier'sche Reihe eindeutig ist, so folgt, wenn wir $\sin \frac{2\pi \mathfrak{a}}{T}(t - t_0)$ in

$$\sin \frac{2\pi \mathfrak{a}}{T} t . \cos \frac{2\pi \mathfrak{a}}{T} t_0 - \cos \frac{2\pi \mathfrak{a}}{T} t . \sin \frac{2\pi \mathfrak{a}}{T} t_0$$

zerlegen,

$$\left.\begin{aligned} A_\mathfrak{a} \sin \frac{\pi \mathfrak{a} x}{l} &= \frac{2h}{\pi^2 \mathfrak{a}^2} \cdot \sin \frac{2\pi \mathfrak{a} \tau}{T} \left[\frac{T}{2\tau} + \frac{T}{T-2\tau}\right] \cos \frac{2\pi \mathfrak{a}}{T} t_0 \\ B_\mathfrak{a} \sin \frac{\pi \mathfrak{a} x}{l} &= -\frac{2h}{\pi^2 \mathfrak{a}^2} \cdot \sin \frac{2\pi \mathfrak{a} \tau}{T} \left[\frac{T}{2\tau} + \frac{T}{T-2\tau}\right] \sin \frac{2\pi \mathfrak{a}}{T} t_0. \end{aligned}\right\} \tag{210}$$

Hierin dürfen h, τ, t_0 nur von x, nicht von $\mathfrak{a}$, dagegen $A_\mathfrak{a}$ und $B_\mathfrak{a}$ nur von $\mathfrak{a}$, nicht von x abhängig sein. Dividirt man die linken Seiten durch einander und ebenso die rechten Seiten, so ergiebt sich

$$\frac{A_\mathfrak{a}}{B_\mathfrak{a}} = -\operatorname{cotg} \frac{2\pi \mathfrak{a}}{T} t_0. \tag{211}$$

Daraus folgt, dafs t_0 nicht von x abhängig sein kann, und da es auch nicht von $\mathfrak{a}$ abhängt, so hat es überall denselben Werth, der durch passende Wahl des Anfangspunktes der Zeit gleich Null gemacht werden kann. Dann wird $B_\mathfrak{a} = 0$ und

$$A_\mathfrak{a} \sin\frac{\pi \mathfrak{a} x}{l} = \frac{2h}{\pi^2 \mathfrak{a}^2} \sin\frac{2\pi \mathfrak{a} \tau}{T} \left[\frac{T}{2\tau} + \frac{T}{T - 2\tau}\right]. \tag{212}$$

Schreibt man diese Gleichung für $\mathfrak{a} = 1$ und für $\mathfrak{a} = 2$ und bildet den Quotient der linken und den der rechten Seiten, so ergiebt sich

$$\frac{A_2}{A_1} \cos\frac{\pi x}{l} = \frac{1}{4} \cos\frac{2\pi\tau}{T}. \tag{213}$$

Nun zeigt die Beobachtung, dafs für $x = 0$ auch $\tau = 0$ wird. Mithin ist

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{4}$$

und daher

$$\cos\frac{\pi x}{l} = \cos\frac{2\pi\tau}{T}. \tag{214}$$

Diese Gleichung aber kann, da $x < l$ und $2\tau < T$ ist, nicht anders erfüllt sein, als wenn

$$\frac{x}{l} = \frac{2\tau}{T} \tag{215}$$

ist. Daraus folgt nun endlich

$$A_\mathfrak{a} = \frac{2h}{\pi^2 \mathfrak{a}^2} \cdot \left[\frac{T}{2\tau} + \frac{T}{T - 2\tau}\right]. \tag{216}$$

Es ist also $h\left[\frac{T}{2\tau} + \frac{T}{T - 2\tau}\right]$ nicht nur von $\mathfrak{a}$, sondern auch von x unabhängig. Bezeichnen wir den Werth dieses Ausdrucks mit $4P$, so ist P der Werth, den h in der Mitte der Saite hat. Denn in der Mitte der Saite ist $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}$, also $\frac{2\tau}{T} = \frac{1}{2}$ und

$$\left[\frac{T}{2\tau} + \frac{T}{T - 2\tau}\right] = 4.$$

Somit ergiebt sich also schliefslich

$$\eta = \frac{8P}{\pi^2} \sum \frac{1}{\mathfrak{a}^2} \sin\frac{\pi \mathfrak{a} x}{l} \sin\frac{2\pi \mathfrak{a} t}{T} \tag{217}$$

als vollständiger Ausdruck für die Schwingung der ganzen Saite. Er besagt, dafs in jedem Augenblick t die Saite dieselbe Form hat wie die gezupfte Saite in ihrer Anfangslage. Denn für die Anfangslage fanden wir oben (206, 207 c) die Zerlegung

$$\eta = \frac{2h}{\pi^2}\left[\frac{l}{a} + \frac{l}{l-a}\right] \cdot \sum \frac{1}{\mathfrak{a}^2} \sin\frac{\pi \mathfrak{a} a}{l} \cdot \sin\frac{\pi \mathfrak{a} x}{l},$$

was mit dem Ausdruck für $t = 0$ bis $t = \frac{T}{2}$ übereinstimmt, wenn $\frac{a}{l} = \frac{2t}{T}$ und

$$h = \frac{4P}{\frac{l}{a} + \frac{l}{l-a}} \tag{218}$$

gesetzt wird.

Bei $x = a$ liegt die Ecke der Saite. Die Ecke der Saite rückt also in der halben Periode von $x = 0$ bis $x = l$. Die Gröfse h ist die Ordinate der Ecke. Es besteht mithin zwischen der Abscisse a und der Ordinate h die Gleichung zweiten Grades:

$$h = \frac{4P}{l^2} a(l-a), \tag{218a}$$

die einen durch die Enden der Saite laufenden Parabelbogen darstellt. Dieser Parabelbogen wird in der halben Periode von der Ecke der Saite durchlaufen. In der andern Hälfte der Periode würde man $\frac{a}{l}$ gleich $2 - \frac{2t}{T}$ und $h = -\frac{4P}{\frac{l}{a} + \frac{l}{l-a}}$ zu setzen haben, um die Uebereinstimmung mit dem Ausdruck zu erzielen. Das heifst, die Ecke läuft auf dem entgegengesetzten Parabelbogen

$$h = -\frac{4P}{l^2} a(l-a) \tag{219}$$

wieder zurück.

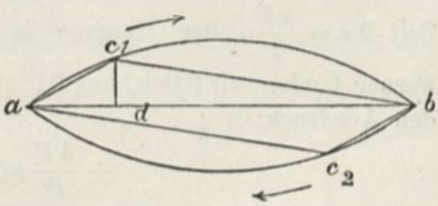

Fig. 14.

Die Bewegung der Saite läfst sich also kurz so beschreiben, dafs in Fig. 14 der Fufspunkt d der Ordinate ihrer Ecke mit constanter Geschwindigkeit auf der Linie ab hin- und hereilt, während der Eckpunkt selbst die parabolischen Bögen ac_1b und bc_2a nach einander durchläuft und die Saite in den beiden geraden Linien ac_1 und bc_1 oder ac_2 und bc_2 ausgespannt ist.

Nun übt die Saite durch ihre Spannung einen Zug auf ihren Befestigungspunkt aus. Auf der Violine liegt der eine Befestigungspunkt auf dem Stege der Violine, der andere auf dem Stege am Handgriff. Während die Ecke auf dem oberen Parabelbogen liegt, ist der Zug nach oben gerichtet, springt aber plötzlich in einen nach unten gerichteten Zug, wenn die Ecke auf den unteren Parabelbogen tritt. Dieser plötzlich wechselnde Zug ist es nun im Wesentlichen, welcher auf den Resonanzboden der Saite wirkt. Es ergiebt sich dieses auch schon aus folgender Beobachtung.

Sind die Enden einer Saite an einer vollständig starren Unterlage befestigt, so hört man, wenn man die Saite in Schwingungen setzt, fast gar keinen Ton; geht aber die Saite über einen Steg, der auf einer breiten elastischen Fläche liegt, so wird der Ton der Saite kräftig an die Luft übertragen. Es ist also der Endpunkt der Saite, der wesentlich die Erschütterung des Resonanzbodens hervorbringt und dadurch den Ton in der Luft erzeugt.

Man kann die Bewegung der Violinsaite auch dadurch erläutern, dafs man sie in zwei gegen einander ziehende Wellenzüge zerlegt, aus denen, wie oben gezeigt wurde, jede Schwingungsform der Saite zusammengesetzt werden kann. Für irgend einen beliebigen Punkt der Saite im Abstand x von dem einen Ende besteht nach dem, was wir oben fanden, die Bewegung in einem Hin- und Hergang mit zwei verschiedenen constanten Geschwindigkeiten. Die Ausweichung η wächst von dem Augenblick, wo die Ecke auf dem unteren Parabelbogen die Abscisse x besitzt, bis zu dem Augenblick, wo sie auf dem oberen Parabelbogen die Abscisse x besitzt; die Ausweichung nimmt ab von diesem letzten Zeitpunkt, bis die Ecke wieder auf dem unteren Parabelbogen zur Abscisse x gelangt. Wir fanden oben, dafs die Ecke ihre Abscisse mit constanter Geschwindigkeit $\frac{2l}{T}$ ändert. Der Hingang vollzieht sich mithin in der Zeit $2\tau = \frac{xT}{l}$, der Hergang in der Zeit $T - 2\tau = \frac{(l-x)T}{l}$. Ferner fanden wir (Gleichung 218a) für die äufsersten Werthe von η den Ausdruck:

$$\pm \frac{4P}{l^2} x(l-x).$$

Wenn wir daher den Nullpunkt der Zeit t in den Augenblick verlegen, wo η im wachsenden Sinne durch Null geht, so haben wir für den Hingang

$$\left.\begin{aligned} \eta : t &= \frac{8P}{l^2}\,x(l-x) : \frac{xT}{l} \\ \text{oder} \qquad \eta &= \frac{8P}{l} \cdot \frac{l-x}{T} \cdot t \quad (t = -\tau \text{ bis } +\tau) \end{aligned}\right\} \tag{220}$$

und für den Hergang

$$\left.\begin{aligned} \eta : \frac{T}{2} - t &= \frac{8P}{l^2}\,x(l-x) : \frac{(l-x)T}{l} \\ \text{oder} \qquad \eta &= \frac{8P}{l} \cdot \frac{x}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t\right) \quad (t = +\tau \text{ bis } T-\tau). \end{aligned}\right\} \tag{221}$$

Von $t = -\tau$ bis $t = +\tau$ gilt der erste Ausdruck für η und von $t = +\tau$ bis $t = T - \tau$ der zweite. In dem darauf folgenden Intervall $t = T - \tau$ bis $T + \tau$ wieder der erste und von $t = T + \tau$ bis $t = 2T - \tau$ wieder der zweite, wo aber statt t der Ueberschufs über die erste Periode, also $t - T$, einzusetzen ist, u. s. w.

Um nun die Bewegung der Saite aus zwei einander entgegenziehenden Wellenzügen zusammenzusetzen, mufs η in der Form

$$\eta = F(x + at) + G(x - at)$$

dargestellt werden, wo die Function $F(x)$ und $G(x)$ beide die Periode $2l$ besitzen. Daraus ergiebt sich durch Differentiation nach x und t:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= F' + G' \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= aF' - aG' \end{aligned}\right\} \tag{222}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} &= 2aF' \\ a\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial t} &= 2aG'. \end{aligned}\right\} \tag{223}$$

Nun ist für den ersten Ausdruck von η, also für die Zeit $t = -\tau$ bis $t = +\tau$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{8P}{l}\frac{t}{T}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{8P}{l}\frac{l-x}{T} \tag{224}$$

und daher

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{8P}{T} - \frac{8P}{lT}(x + at) \\ a\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{8P}{T} + \frac{8P}{lT}(x - at). \end{aligned}\right\} \tag{225}$$

Für den zweiten Ausdruck von η, also für die Zeit $t = \tau$ bis $t = T - \tau$, ist:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{8P}{lT}\left(\frac{T}{2} - t\right), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{8P}{lT}x \tag{226}$$

und daher

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{a8P}{2l} - \frac{8P}{lT}(x + at) \\ a\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{a8P}{2l} + \frac{8P}{lT}(x - at). \end{aligned}\right\} \tag{227}$$

Nun ist aber a die Geschwindigkeit, mit der die Wellen entlang ziehen und daher gleich $\frac{2l}{T}$. Mithin haben wir, indem dieser Werth für a in die Gleichungen (227) eingesetzt wird, auch für die Zeit $t = \tau$ bis $t = T - \tau$

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{8P}{T} - \frac{8P}{lT}(x + at) \\ a\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{8P}{T} + \frac{8P}{lT}(x - at). \end{aligned}\right\} \tag{227a}$$

Der Ausdruck für $a\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t}$ hat also in den beiden Intervallen $-\tau$ bis $+\tau$ und τ bis $T - \tau$, das heifst in der ganzen Periode $-\tau$ bis $T - \tau$ dieselbe Form

$$\frac{8P}{T} - \frac{8P}{lT}(x + at). \tag{228}$$

Da $\tau = \frac{xT}{2l} = \frac{x}{a}$ ist, so durchläuft $x + at$ in dieser Periode die Werthe 0 bis $2l$. Für gröfsere und kleinere Werthe von $x + at$ wiederholen sich diese Werthe von $a\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t}$ periodisch mit der Periode $2l$.

Der Ausdruck für $a\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial t}$ hat in den Intervallen $-\tau$ bis $+\tau$ und τ bis $T - \tau$ nicht dieselbe Form. Aber wenn wir statt des ersten Intervalles $-\tau$ bis $+\tau$ das um eine ganze Periode weiter liegende Intervall $T - \tau$ bis $T + \tau$ betrachten, so haben wir statt t zu setzen $t - T$ und erhalten

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{8P}{T} + \frac{8P}{lT}(x - at + aT) \\ &= +\frac{8P}{T} + \frac{8P}{lT}(x - at). \end{aligned}\right\} \tag{229}$$

Das ist derselbe Ausdruck, der auch in dem Intervall τ bis $T-\tau$ gilt. Mithin ist in der ganzen Periode τ bis $T+\tau$ der Ausdruck

$$a\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{8P}{T}+\frac{8P}{lT}(x-at). \tag{230}$$

In dieser Periode durchläuft $x-at$ die Werthe 0 bis $-2l$. Für gröfsere und kleinere Werthe von $x-at$ wiederholen sich diese Werthe von $a\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial t}$ mit der Periode $2l$.

Nun fanden wir oben (Gleichungen 223):

$$a\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial t}=2aF'(x+at)$$

$$a\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial t}=2aG'(x-at).$$

Für die Werthe von $x+at$ zwischen 0 und $2l$ ist also

$$2aF'(x+at)=\frac{8P}{T}-\frac{8P}{lT}(x+at)$$

oder, wenn $x+at$ durch z bezeichnet wird,

$$2aF'(z)=\frac{8P}{T}-\frac{8P}{lT}z$$

und daher

$$2aF(z)=\frac{8P}{T}z-\frac{8P}{lT}\cdot\frac{z^2}{2}+C_1=\frac{8P}{2lT}z(2l-z)+C_1.$$

Für die Werthe von $x-at$ zwischen 0 und $-2l$ ist

$$2aG'(x-at)=\frac{8P}{T}+\frac{8P}{lT}(x-at)$$

oder, wenn $x-at$ durch w bezeichnet wird,

$$2aG'(w)=\frac{8P}{T}+\frac{8P}{lT}w$$

und daher

$$2aG(w)=\frac{8P}{T}w+\frac{8P}{lT}\cdot\frac{w^2}{2}+C_2$$

$$=\frac{8P}{2lT}w(2l+w)+C_2.$$

Die Constanten C_1 und C_2 sind nur der Bedingung unterworfen, dafs $F(x+at)+G(x-at)$ für $x=0$ und $x=l$ verschwinden müssen.

Daraus folgt $C_1 + C_2 = 0$. Im Uebrigen sind C_1 und C_2 beliebig, weil es nur auf die Summe $F(x + at) + G(x - at)$ ankommt. Es hindert also nichts, C_1 und C_2 beide gleich Null zu setzen.

Dann hat man also für $z = 0$ bis $z = 2l$

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \frac{P}{l^2} z(2l - z) \\ \text{und für } w = 0 \text{ bis } w &= -2l \\ G(w) &= \frac{P}{l^2} w(2l + w). \end{aligned}\right\} \quad (231)$$

Für $t = 0$ wollen wir $F(x + at)$ und $G(x - at)$ als Ordinaten zur Abscisse x auftragen; dann erhalten wir die beiden gegen einander ziehenden Wellenzüge. Zwischen $x = 0$ und $x = 2l$ liefert $F(x)$ den Parabelbogen $\frac{P}{l^2} x(2l - x)$, der über der x-Axe steht und die Punkte $x = 0$ und $x = 2l$ verbindet. Dieser Parabelbogen ist nun periodisch zu wiederholen. Andererseits liefert $G(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = -2l$ den Parabelbogen $\frac{P^2}{l^2} x(2l + x)$, der unter der x-Axe

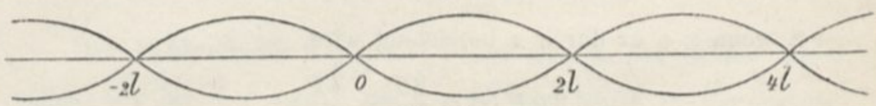

Fig. 15.

hängt und die Punkte $x = 0$ und $x = -2l$ verbindet. Auch dieser ist periodisch zu wiederholen (Fig. 15).

Läfst man diese beiden Reihen von Parabelbogen mit der Geschwindigkeit a gegen einander ziehen, addirt ihre beiden Ordinaten algebraisch für jede Abscisse zwischen 0 und x, so erhält man in jedem Augenblick die betreffende Gestalt der schwingenden Violinsaite. Die Abscisse der Ecke, welche die Violinsaite in jedem Augenblick bildet, fällt dabei immer mit der Abscisse eines der

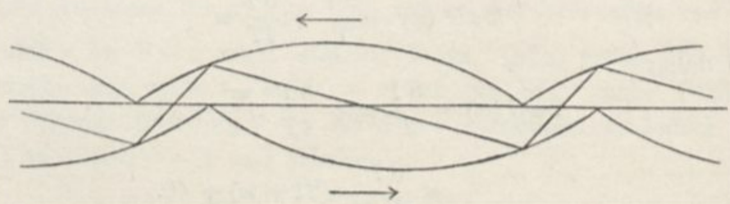

Fig. 16.

Punkte zusammen, wo zwei benachbarte Parabelbögen zusammenstofsen (Fig. 16).

Bei unsern bisherigen Betrachtungen haben wir vorausgesetzt, dafs die Enden der Saite vollkommen in Ruhe bleiben. Unter dieser Voraussetzung wird die Bewegung nur eine sehr geringe Störung erfahren, und der Bogen wird nur eine sehr geringe Arbeit zu leisten brauchen, um die Bewegung zu unterhalten. Es wird dabei ein kaum wahrnehmbarer Ton hervorgebracht. Nun sind aber, wie schon oben erwähnt, bei der Violine die Enden der Saite nicht völlig fest und dürfen es nicht sein, wenn ein kräftiger Ton hervorgebracht werden soll. Ein Theil der Energie der Saite mufs fortgesetzt an die Luft abgeleitet werden, um die Energie für die Schallbewegung herzugeben. Das eine Ende der Saite liegt bei den Streichinstrumenten auf dem Steg, der sich auf den elastischen Resonanzboden stützt. Der Resonanzboden ist in mäfsigem Grade nachgiebig. Er ist es, der mit breiter Fläche auf die Luft wirkt und sie in ausgiebige Bewegung setzt. Dadurch wird fortgesetzt Energie abgeleitet, die durch die Kraft des Bogens ersetzt werden mufs, wenn die Bewegung unterhalten werden soll.

Die Wirkung des Bogens haben wir uns so vorzustellen, dafs die Saite an der Stelle, wo der Bogen angreift, in dem einen Theil der Schwingungsperiode sich mit derselben constanten Geschwindigkeit wie der Bogen bewegt, der an ihr haftet, in dem anderen kürzeren Theil der Schwingungsperiode dagegen vom Bogen abspringt und sich frei bewegt. Schon ein minimales Abspringen der Saite vom Bogen genügt, um die Saite vollkommen frei zu machen und jede Einwirkung des Bogens aufzuheben.

An den Enden der Saite findet, wie schon oben auseinandergesetzt wurde, ein plötzlicher Wechsel in der Richtung des Zuges statt, den die gespannte Saite auf ihre Befestigungspunkte ausübt. Denn während die Ecke der Saite auf dem oberen Parabelbogen liegt, ist der Zug nach oben gerichtet, dagegen nach unten, wenn die Ecke auf dem unteren Parabelbogen liegt. Wenn nun das Ende der Saite einen geringen Grad von Beweglichkeit hat, so wird es in dem Momente des Ueberganges z. B. von oben nach unten fortgeschoben werden. Dabei wird die Saite, welche zwischen den bis-

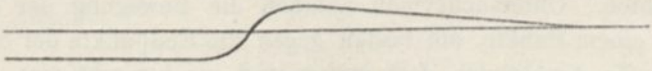

Fig. 17.

herigen beiden Lagen ihrer Endpunkte ausgespannt war, wenn der eine Endpunkt sehr schnell ein Stück fortgeschoben wird, in eine gewundene Lage übergehen, und es wird offenbar nun von dem Endpunkte aus eine Welle, ein Knick nach dem andern Ende der Saite ablaufen müssen (Fig. 17).

Dadurch wird eine Bewegung hervorgebracht, welche sich nicht der des Bogens anschliefst; sondern, wenn dieser Knick (Fig. 17) an der Streichstelle der Saite vorbeiläuft, dann wird der Saitenpunkt, der den Bogen berührt, eine andere Bewegung machen müssen, als der Bogen, und die Saite wird, wenn sie bis dahin am Bogen anhaftete, abreifsen können oder anhaften, wenn sie frei war. Dieses Abreifsen oder Anhaften wird nach der Zeit geschehen müssen, welche verfliefst von dem Moment, wo die Ecke das Ende der Saite passirt, bis wo die Welle die gestrichene Stelle erreicht. Da die Welle mit der Geschwindigkeit $a = \frac{2l}{T}$ entlang läuft, so stimmt diese Zeit überein mit der Zeit, welche die Ecke der Saite gebraucht, um wieder bis zur gestrichenen Stelle zu kommen. Das Abreifsen oder Anhaften würde darnach also zu derselben Zeit stattfinden, wo die Ecke die gestrichene Stelle passirt, was mit der oben auseinandergesetzten Vorstellung von der Wirkungsart des Bogens übereinstimmt. Nun kommen nebensächliche Störungen in der Bewegung der Saite dadurch vor, dafs immer an dem einen Ende der Saite ein Theil der Schwingungen verloren geht. So müssen wir die Bewegung als die einer gedämpften Saite betrachten, und zwar wird diese Dämpfung sich auf alle Obertöne der Saite beziehen.

Wir haben nun bei den allgemeinen Erörterungen schon gesehen, dafs durch eine periodische Kraft, von der Periode des Grundtones, welche in einem Knotenpunkt eines Obertones angreift, die Bewegung, die diesem Obertone entspricht, nicht unterstützt werden kann. Es folgt daraus, dafs, wenn man in einem Knotenpunkt eines der möglichen Töne der Saite streicht, in der Schwingungsfigur der Saite oder in der Bewegung der Saite dann dieser Oberton fehlen wird. Darin ist eine Modification der Saitenbewegung enthalten, wie wir sie bisher beschrieben haben; denn in der bisher dargestellten Bewegung sind alle Obertöne der Saite vertreten, wie die Formel (216) zeigt. Diese Aenderung läfst sich mit dem Vibrationsmikroskop beobachten. Untersucht man nämlich die Bewegung der Saite in irgend einem Punkte, am besten gegen die Endpunkte der Saite hin, obwohl die Amplituden dort gering sind, so bemerkt man eine geringe Abweichung von der bisher beschriebenen Bewegung, die, wenn die Zeit als Abscisse aufgetragen wird, aus zwei geraden Linien bestand. Es treten nämlich secundäre Zacken auf (Fig. 18) und zwar meistentheils so, dafs nur eine Periode dieser secundären Zacken auf das kurze Ende fällt. Diese Zacken lassen sich nun darauf zurückführen, daſs einer der Obertöne der Saite nicht von dem Bogen unterstützt werden kann, weil er in einem der Knotenpunkte des Obertones angreift, während der Oberton, falls er anfänglich vorhanden war, durch Dämpfung verschwindet. Aus den neueren

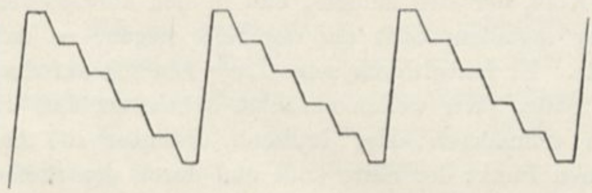

Fig. 18.

Untersuchungen von Krigar-Menzel und Raps geht hervor, daſs, wenn in dem Knotenpunkte selbst gestrichen wird, der betreffende Oberton ganz weg bleibt; wenn aber in der Nähe des Knotenpunktes gestrichen wird, der betreffende Oberton nicht etwa schwach, sondern im Gegentheil stark hervortritt.

Abgesehen von diesen Abweichungen erklären sich die Hauptzüge der an den Violinsaiten beobachteten Erscheinungen auf die dargelegte Weise. Es ist dabei zu bemerken, daſs die auf den Saiten durch Streichen hervorgebrachten Töne bei weitem am reinsten und musikalischsten sind. Andere Körper können zwar auch durch Streichen zum Tönen gebracht werden; denn es ist auch da immerhin möglich, daſs der Bogen sich während eines Theiles der Zeit, in der eine solche Schwingung ausgeführt wird, an eine Bewegung des Körpers anschlieſst. Vollständig ist es aber nur möglich, wenn die einzelnen Töne des Körpers wie bei der Saite harmonisch zu einander sind. Dann kann ein solcher tönender Körper Schwingungen ausführen, welche vollkommen periodisch sind, und wo auch die Nebentöne zum Vorschein kommen, ohne die Periodicität zu stören. Wenn aber Schwingungszahlen der Nebentöne zu der des Grundtones in irrationalem Verhältniſs stehen, dann setzen sich ihre Schwingungen nicht zu einer vollkommen periodischen Bewegung zusammen, und dann ist auch kein vollständiges Anschlieſsen des Bogens an den Körper möglich.

§ 41. Die Schwingungen der Claviersaiten.

Die Claviersaiten werden dadurch in Bewegung gesetzt, daſs sie durch den Schlag der Hämmer getroffen werden, und zwar meistentheils an einer Stelle, die ziemlich nahe am Ende der Saite liegt. Der Schlag des Hammers ist ein Stofs, allerdings nicht von einer ganz harten elastischen Masse, sondern in unseren neueren Clavieren von einer weichen Fläche, da der Kopf des Hammers mit weichem Leder überzogen ist. In den älteren Clavieren, den sogenannten Spinets war es dagegen ein metallner Stift mit ziemlich schmalem Kopf, der sich anlegte, und in den allerältesten Formen blieb dieser metallene Stift auf der Seite liegen, so dafs er den Steg bildete. Er hatte durch seine Lage Einflufs auf die Höhe des Tones der Saite. Wir wollen zunächst annehmen, dafs wir es hier mit einem schmäleren oder breiteren Hammer zu thun hätten, welcher einen Punkt der Saite trifft und durch den Stofs ihm eine Geschwindigkeit mittheilt. Der Stofs harter Körper geschieht ja so schnell und ist auf so kurze Zeit begrenzt, dafs der gestofsene Körper, welcher dabei in Bewegung gesetzt wird, eigentlich diese Bewegung anfängt und seine volle Geschwindigkeit erreicht, ohne dafs er dabei seinen Ort wesentlich verändert hat. Man kann mit guter Annäherung an die Wirklichkeit annehmen, dafs die gestofsene Stelle der Saite plötzlich eine Geschwindigkeit bekommt.

Es sei nun η die Seitenabweichung, so ist, wie oben in § 37 gezeigt wurde,

$$\eta = \sum_{\mathfrak{a}} [A_{\mathfrak{a}} \cdot \sin p\,\mathfrak{a}\,x \cdot \cos n\,\mathfrak{a}\,t + B_{\mathfrak{a}} \cdot \sin p\,\mathfrak{a}\,x \cdot \sin n\,\mathfrak{a}\,t],$$

vorausgesetzt, dafs die Enden der Saite fest sind. Es ist dabei, wenn l die Saitenlänge bezeichnet, p für $\frac{\pi}{l}$ geschrieben. Wenn nun die Saite nach unserer Annahme im Zeitpunkt $t = 0$, wo sie angeschlagen wird, sich noch nicht wesentlich von ihrer Gleichgewichtslage entfernt hat, so werden die Anfangswerthe von η für $t = 0$ auch gleich Null sein, und daraus folgt, dafs alle Coefficienten $A_{\mathfrak{a}}$ verschwinden und nur der zweite Theil der Reihe stehen bleibt, so dafs

$$\eta = \sum B_{\mathfrak{a}} \cdot \sin p\,\mathfrak{a}\,x \cdot \sin n\,\mathfrak{a}\,t \tag{232}$$

Daher ist die Geschwindigkeit durch die Formel gegeben:

$$v = \frac{d\eta}{dt} = \sum n\,\mathfrak{a}\,B_{\mathfrak{a}} \cdot \sin p\,\mathfrak{a}\,x \cdot \cos n\,\mathfrak{a}\,t. \tag{233}$$

Wenn nun die Geschwindigkeit v zur Zeit $t = 0$ als Function von x gegeben ist, so sind demgemäfs die Coefficienten $B_{\mathfrak{a}}$ zu bestimmen. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, das v nur in einem sehr schmalen Theil der Saite von Null verschieden ist. Dann erhalten wir den Coefficienten B_q aus der Gleichung:

$$\int_0^l v \cdot \sin pqx \,.\, dx = \frac{l}{2} B_q \cdot nq. \tag{234}$$

In dem Falle, dafs die angeschlagene Stelle sehr klein ist, wie es bei den alten Spinets der Fall ist, werden wir in dem Integral den trigonometrischen Factor $\sin(pqx)$ mit dem Werthe einsetzen können, welchen er im Mittelpunkte der geschlagenen Stelle hat. Ist die geschlagene Stelle bei $x = a$, so bekommen wir also

$$\sin pqa \cdot \int v\, dx \cdot = \frac{l}{2} B_q \cdot nq. \tag{234a}$$

Unter diesen Umständen würde das Integral von dem Index q unabhängig sein, und es würde einen bestimmten Werth haben, der die Intensität des Stofses darstellt und mit I bezeichnet werden möge.

Die Coefficienten sind also:

$$\frac{\sin pqa}{q} \cdot I = \frac{l}{2} B_q \cdot n. \tag{234b}$$

Wir bekommen also in diesem Falle eine Reihe von Coefficienten, welche bei steigenden Werthen von q nur wie die erste Potenz von q abnehmen. Wenn wir streng vorgehen und annehmen wollten, dafs nur ein einziger Punkt der Saite gestofsen wäre und Geschwindigkeit bekommen hätte, dann würden wir eine nicht unbedingt convergente Reihe haben. In einem solchen Falle werden nothwendig die hohen Obertöne verhältnifsmäfsig sehr stark werden. Es ist nun auch der Klang einer solchen mit Metallstiften angeschlagenen Saite stark klimpernd; das ist eine Klangfarbe, welche auf eine grofse Menge von Obertönen hinweist. Anders ist es, wenn mit einem weichen Hammer angeschlagen wird, also eine breitere Stelle in Bewegung versetzt wird. Um unbedingt convergente Reihen zu erhalten, wollen wir diesen Fall behandeln, wobei man dann die Ausdehnung der getroffenen Stelle so eng machen kann, wie man will. Wir wollen annehmen, dafs die von der Mitte des Hammers getroffene Stelle am stärksten in Bewegung gesetzt wird, und dafs von dort aus nach beiden Seiten hin die Anfangsgeschwindigkeit abnimmt. Bei der weichen Beschaffenheit des Hammers können wir im Allgemeinen nicht genau angeben, wie die Geschwindigkeit vertheilt sein wird. Man erkennt, dafs bei den tieferen Theiltönen, für die $\sin pax$

innerhalb des vom Hammer getroffenen Stückes nur sehr wenig veränderlich ist, es keinen wesentlichen Unterschied machen wird, wie die verschiedenen Theile der gestofsenen Stelle in Geschwindigkeit versetzt werden. Für die Wellen mit kurzen Wellenlängen dagegen, für welche $\sin p\mathfrak{a}x$ in der Breite der gestofsenen Stelle mehrfach sein Zeichen wechseln kann, wird ein grofser Theil des Integrals $\int v \sin p\mathfrak{a}x . dx$ sich wegheben dadurch, dafs positive und negative Glieder hinter einander folgen. Wir können uns einen Ausdruck bilden, welcher anzeigt, dafs wir es mit einer Geschwindigkeit zu thun haben, welche an der Stelle $x = a$ ihr Maximum hat und in geringer Entfernung davon schnell abnimmt. Wir können z. B. für $x = a - \frac{\pi}{2h}$ bis $x = a + \frac{\pi}{2h}$

$$v = \mathfrak{b} . \cos [h(x-a)]$$

setzen, worin $\mathfrak{b}$ die Amplitude der Stofscurve bezeichnet, und

$$v = 0$$

aufserhalb dieses Intervalls annehmen.

Dann wird

$$\frac{l}{2} . B_q . n . q = \mathfrak{b} \int_{a-\frac{\pi}{2h}}^{a+\frac{\pi}{2h}} \sin p q x . \cos [h(x-a)]\, dx \tag{235}$$

oder

$$\frac{l}{2} B_q . n . q = \frac{\mathfrak{b}}{2} \int_{a-\frac{\pi}{2h}}^{a+\frac{\pi}{2h}} \{\sin[(pq+h)x - ah] + \sin[(pq-h)x + ah]\} dx \tag{235a}$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{l}{2} . B_q . n . q = -\frac{\mathfrak{b}}{2} . \frac{1}{pq+h} & \overline{\underline{\cos [(pq+h)x - ah]}} \\ -\frac{\mathfrak{b}}{2} . \frac{1}{pq-h} & . \overline{\underline{\cos [(pq-h)x + ah]}}. \end{aligned}\right\} \tag{235b}$$

Werden die Grenzen eingesetzt, so liefert der erste Cosinus:

$$\cos\left(pq\left[a + \frac{\pi}{2h}\right] + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(pq\left[a - \frac{\pi}{2h}\right] - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -2 \sin pqa . \cos \frac{pq\pi}{2h}$$

und der zweite Cosinus:

$$\cos\left(pq\left[a+\frac{\pi}{2h}\right]-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(pq\left[a-\frac{\pi}{2h}\right]+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= +2\sin pqa \,.\, \cos\frac{pq\pi}{2h}.$$

Also wird die Gleichung (235b)

$$\frac{l}{2}B_q\,.\,n.q = +\mathfrak{b}\,.\,\frac{1}{pq+h}\sin pqa\,.\cos\frac{pq\pi}{2h}$$

$$-\mathfrak{b}\,.\,\frac{1}{pq-h}\,.\sin pqa\,.\cos\frac{pq\pi}{2h}$$

$$=\mathfrak{b}\sin pqa\,.\left[\frac{1}{pq+h}-\frac{1}{pq-h}\right].\cos\frac{pq\pi}{2h}$$

$$=-\mathfrak{b}\,.\sin pqa\,.\,\frac{2h}{p^2q^2-h^2}\,.\cos\frac{pq\pi}{2h}. \qquad (235\text{c})$$

Mithin

$$B_q = -\frac{2}{l}\cdot\frac{\mathfrak{b}\,.\sin pqa}{nq}\cdot\frac{2h}{q^2p^2-h^2}\,.\cos\frac{pq\pi}{2h}. \qquad (235\text{d})$$

Man ersieht daraus, dafs für die gröfseren Werthe von q die Coefficienten B_q abnehmen wie q^3. In der Reihe für die Geschwindigkeit werden die Coefficienten abnehmen wie q^2. In der That haben wir hier keine Sprünge in der Geschwindigkeit, sondern die Sprünge betreffen erst die zweiten Differentialquotienten, welche an den Rändern der Curve plötzlich Null werden. Ferner ergiebt sich aus dem Ausdruck für B_q, dafs es verschwindet, wenn $\sin pqa = 0$ wird, a also gleich einem Vielfachen von $\frac{l}{q}$ ist, d. h. wenn der Anschlag in einem Knotenpunkt des q^{ten} Tones erfolgt, desjenigen Tones, dessen Amplitude wir hier eben betrachten. Es werden also diejenigen Töne nicht zum Vorschein kommen, deren Knotenpunkt angeschlagen wird. Das giebt uns schon ein Mittel, um zu vermeiden, dafs die hohen Obertöne entstehen. Die Obertöne nehmen im Allgemeinen an Stärke ab. Der siebente und achte Oberton, die etwas mehr als einen ganzen Ton auseinander liegen, sind etwa die tiefsten unter den Obertönen, die den Klang weniger musikalisch machen, die als Dissonanzen wirken. Schlägt man nun die Saite zwischen dem Knotenpunkt des siebenten und achten Obertones an, so wird $\sin pqa$ für $q = 7$ und $q = 8$ klein und der siebente und achte Ton werden relativ schwach werden. Deshalb ist in der That bei den modernen Clavieren eine solche Anschlagsstelle gewählt. Wenn man die Art, wie der Hammer stöfst, seine Breite und Weichheit richtig regulirt, so wird man bewirken können, dafs die Geschwindigkeit innerhalb der gestofsenen Stelle von Punkt zu Punkt in gewisser Weise sich verändert, und dadurch kann man die Intensität der hervorgerufenen Obertöne reguliren. Die Begleitung des Grundtones durch die ersten vollkommen harmonischen Obertöne ist im Ganzen vortheilhaft. Es werden niedrigere Obertöne sein, deren Anschlag man zu begünstigen sucht, und meistentheils sind die neueren Claviere so eingerichtet, dafs der dritte und vierte Oberton durch die passende Wahl der Weichheit des Hammers begünstigt werden.

Man kann also die Klangfarbe der Claviertöne dadurch verändern, dafs man den Hammer mehr oder weniger breit und hart macht. Härtere Hämmer und schmalere Hämmer werden im Allgemeinen höhere Obertöne geben. Man gebraucht sie namentlich da, wo man schärfere Töne hervorbringen will, Töne mit mehr Obertönen, welche zwar nicht ganz weich klingen, aber mehr durchdringende Kraft haben. Bei Concert-Flügeln werden die Hämmer deshalb etwas härter gemacht, während man bei Flügeln, die im Zimmer gebraucht werden, weichere Töne vorzieht und daher auch weichere und breitere Hämmer benutzt.

Es wird auch oft von Variationen der Klangfarbe gesprochen, die durch den Anschlag hervorgebracht werden. Man kann in der That auf demselben Clavier durch eine geänderte Anschlagsweise andere Töne hervorlocken. Möglicher Weise kann dieses davon herrühren, dafs bei gröfserer Geschwindigkeit, welche keinen Druck mehr hinter sich hat, — wenn also der Spieler so auf die Tasten schlägt, dafs der Hammer in die Höhe schnellt und die Saite erreicht, ohne dafs die Taste noch weiter gedrückt wird, — die Vertheilung der Geschwindigkeiten längs der gestofsenen Stelle eine andere ist als bei anderer Anschlagsweise.

Die stärkere Fülle der Obertöne am Clavier kann man leicht prüfen, wenn man den Anschlag auf die Tasten bei gehobenem Dämpfer des Instruments macht und sich dann auf der Saite die Knotenpunkte sucht. Sie sind sehr leicht zu finden. Man braucht nur eine Taste wiederholt anzuschlagen und den Finger auf der Saite zu verschieben, um die Stellen herauszufinden, welche man berühren mufs, damit der eine oder andere Oberton ungestört zum Vorschein kommt. Dadurch kann man auch die relative Stärke der Obertöne kennen lernen; die Octave ist meistentheils sehr kräftig und gewöhnlich auch noch der dritte Oberton, während vom vierten ab die Intensität merklich nachläfst. Man kann übrigens das Clavier, dessen Dämpfer man aufgehoben hat, auch benutzen, um herauszubringen, welche Obertöne in den Tönen vorkommen, die im Zimmer entweder von anderen Musikinstrumenten oder von der menschlichen Stimme erregt werden, da die Saiten des Claviers leise mitschwingen. Man kann das Schwingen entweder fühlen oder auch hören, nachdem der fremde Ton aufgehört hat. Man kann es z. B. benutzen, um die Obertöne aus den zusammengesetzten Tönen der menschlichen Stimme, aus den Vocaltönen heraus zu hören. Wenn man nämlich mit kräftiger Stimme auf eine der Noten des Claviers, nachdem man das Pedal gehoben hat, so dafs sämmtliche Saiten frei schwingen können, in der genauen Tonhöhe den Vokal *a* ins Clavier singt, so hört man das Clavier nachklingen, und zwar antwortet es deutlich mit dem Vocal *a* und bei *o* mit dem Vocal *o*. Die Vocale *a*, *o*, *u* sind ziemlich gut herauszubringen, *ä*, *ö*, *i* sind undeutlicher. Man kann sich auf diese Weise leicht überzeugen, dafs Zusammensetzungen solcher Töne, die als Obertöne in den gesungenen Vocalen vorkommen, in der angegebenen Weise die Vocalfarbe, also den eigenthümlichen Charakter des Klanges, bedingen, der die verschiedenen Vocale der menschlichen Stimme von einander unterscheidet. Es ist nur ganz wesentlich, dafs man genau die Tonhöhe der betreffenden Claviersaite trifft.

§ 42. Die Schwingungen belasteter Saiten.

Wir wollen nun die Schwingungen einer Saite betrachten, welche nicht gleichmäfsig in ihrer Länge ist, sondern an einer Stelle eine kleine Belastung hat. Man braucht bei einer dünnen Metallsaite nur ein ganz kleines Wachskügelchen auf einen Punkt der Saite anzukleben, so findet man, dafs dann die Saite erstens natürlich tiefer klingt, weil eine gröfsere Masse zu bewegen ist, aber dafs sie auch ganz eigenthümlich verdorben klingt. Sie hat einen kesselähnlichen Klang erhalten statt des hellen, klaren, harmonischen, den sie bisher hatte, und wenn man die Obertöne untersucht, findet man, dafs sie irrationale Verhältnisse der Schwingungszahlen besitzen.

Die Bewegungsgleichungen lassen sich leicht bilden. Wir werden auch hier die Enden der Saite als fest zu betrachten haben und wollen die x-Coordinaten von dem Ende M (Fig. 19) an rechnen und die Entfernung des Gewichts von diesem Anfangspunkt mit a bezeichnen.

Vom Punkte M bis zu dem belasteten Punkte hin haben wir es mit einer Bewegung zu thun, welche für eine freie Saite gilt,

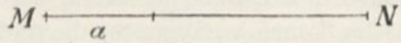

Fig. 19.

nämlich, wenn die Geschwindigkeit für $t = 0$ als verschwindend klein vorausgesetzt wird,

$$\overset{0<x<a}{\eta_1 = A \cdot \sin p\,x \cdot \cos n\,t} \tag{236}$$

und für den Theil zwischen der belasteten Stelle und dem Ende N ebenso:

$$\overset{a<x<l}{\eta_2 = B \cdot \sin p\,(l-x) \cdot \cos n\,t} \tag{237}$$

Hierin sind p, welches die Wellenlänge bestimmt, und n, die Schwingungszahl, durch die Gleichung verbunden $n = p \cdot c$, wo c die Geschwindigkeit bezeichnet, mit der eine Welle auf der Saite entlang läuft.

Wir wissen schon aus allgemeinen Sätzen, dafs das Integral von der Art sein mufs, dafs keine Phasendifferenz zwischen den verschiedenen Theilen existirt. Dann wird in dem Punkte a selbst das η_a einmal ausgedrückt durch

$$\eta_a = A \cdot \sin p\,a \cdot \cos n\,t \tag{238a}$$

und andrerseits durch

$$\eta_a = B \cdot \sin p\,(l-a) \cdot \cos n\,t \cdot \tag{238b}$$

Das Verhältnifs $A:B$ wird daher durch die Gleichung gegeben sein:

$$A \cdot \sin p\,a = B \cdot \sin p\,(l-a) \cdot \tag{239}$$

Wir können also setzen:

$$A = \frac{C}{\sin p\,a} \qquad B = \frac{C}{\sin p\,(l-a)}.$$

Nun wird aufserdem für den beschwerten Punkt eine besondere Bewegungsgleichung aufzustellen sein. Wenn die Saite abgelenkt ist und in dem beschwerten Punkte einen Knick macht, so werden beide Enden der Saite, wenn sie eine nach oben gehende Ecke bilden, durch ihre Spannung einen Zug ausüben, der eine abwärts gerichtete Componente hat. Wir werden also, wenn m die Masse der beschwerten Stelle bezeichnet, $m\frac{d^2\eta}{dt^2}$ gleich der Summe der beiden Componenten zu setzen haben, welche diesen Punkt nach abwärts zu ziehen suchen. Es bezeichne S die Spannung der Saite. Hier kommt aber von der Spannung nur die Componente in Betracht, welche nach abwärts gerichtet ist. Wir werden also die Spannung mit dem Sinus des Winkels α multipliciren müssen, welchen die Saite mit der Horizontallinie bildet. Nun ist aber $\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\eta}{dx}$ und da α ein sehr kleiner Winkel ist, da wir nur kleine Elongationen der Saite betrachten wollen, werden wir den Sinus mit der Tangente vertauschen können und setzen:

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2} = S\left(-\frac{d\eta_1}{dx} + \frac{d\eta_2}{dx}\right) \tag{240}$$

Für $\eta_1 = A\sin p\,x\cos n\,t$ und $\eta_2 = B\sin p\,(l-x)\cos n\,t$ erhalten wir demnach an der Stelle $x = a$, wenn für A und B die gefundenen Ausdrücke eingesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} -m\cdot C\cdot n^2\cdot\cos nt = S\Big(&-p\frac{C}{\sin p\,a}\cos p\,a \\ &-\frac{p\,C}{\sin p\,(l-a)}\cdot\cos p\,(l-a)\Big)\cos n\,t, \end{aligned}\right\} \tag{241}$$

oder indem wir beide Seiten durch $C\cos n\,t$ dividiren:

$$-m\,n^2 = S\left(-\frac{p\,.\cos p\,a}{\sin p\,a} - \frac{p\,.\cos p\,(l-a)}{\sin p\,(l-a)}\right). \tag{241a}$$

Nun ist aber $n = p\,.\,c$, daher ergiebt sich die Gleichung

$$-m\,.\,p\,.\,c^2 = S\left(-\frac{\cos p\,a}{\sin p\,a} - \frac{\cos p\,(l-a)}{\sin p\,(l-a)}\right) \tag{241b}$$

oder

$$m\,p\,c^2 = S\cdot\big(\operatorname{cotg} p\,a + \operatorname{cotg} p\,(l-a)\big) = S\frac{\sin p\,l}{\sin p\,a\sin p(l-a)}\cdot \tag{241c}$$

Aus dieser Gleichung kann p und damit die Schwingungszahl n bestimmt werden. Die Anzahl und Lage der Wurzeln läſst sich einigermaſsen dadurch übersehen, daſs wir uns beide Seiten der Gleichung graphisch dargestellt denken durch Ordinaten zu der Abscisse p. Die linke Seite ist durch eine gerade Linie dargestellt, die je nach dem Werthe von $m\,c^2$ mehr oder weniger steil ansteigt von $p = 0$ bis $p = \infty$. Auf der rechten Seite haben wir 2 Cotangenten von Bögen, welche beide proportional p steigen, aber mit verschiedenen Factoren. Nun ist die Cotangente unendlich, wenn der Bogen Null ist, nimmt mit wachsendem Bogen ab und wird, wenn die halbe Peripherie abgelaufen ist, negativ unendlich. Dann wiederholt sich periodisch derselbe Verlauf. Tragen wir zunächst die beiden Cotangenten der rechten Seite für sich auf, so ist die Periode der einen gleich $\frac{\pi}{a}$, die der andern gleich $\frac{\pi}{l-a}$ zu setzen. An den Stellen, wo eine der beiden Cotangenten unendlich wird, wird nothwendig auch die Summe unendlich und zwar in derselben Weise, so dafs bei der Unendlichkeitsstelle der Werth der Summe mit wachsendem p von $-\infty$ auf $+\infty$ springt. Zwischen zwei auf einander folgenden Unendlichkeitsstellen mufs daher die Summe alle Werthe zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen und die Curve, welche die rechte Seite darstellt, mufs in jedem dieser Intervalle die gerade Linie schneiden, welche die linke Seite darstellt. Da ferner der Differentialquotient

$$-\frac{a}{\sin^2 p\,a}-\frac{l-a}{\sin^2 p\,(l-a)}$$

nur negative Werthe hat, so liegt zwischen zwei Unendlichkeitsstellen nur ein einziger Schnittpunkt. Jeder Schnittpunkt entspricht einer Wurzel der Gleichung.

Etwas einfacher wird die Uebersicht, wenn man annimmt, dafs die beiden Intervalle gleich sind, dafs also das Gewicht in der Mitte der Saite liegt. Dann wird die rechte Seite der Gleichung in $2\,S \operatorname{ctg} \frac{p\,l}{2}$ übergehen.

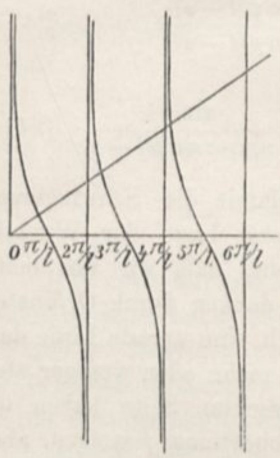

Fig. 20.

Die graphische Darstellung ist durch Fig. 20 gegeben. Es ist leicht zu sehen, dafs in den späteren Intervallen diese Schnittpunkte sehr hohen Werthen der betreffenden Cotangenten entsprechen, also nahezu den Werthen von $\frac{p\,l}{2}$ angehören, für die der Werth der Cotangente unendlich wird, so dafs also für die höheren Töne sehr nahe $\frac{p\,l}{2} = \mathfrak{a}\,\pi$ und mithin sehr nahe $\sin\frac{p\,l}{2} = 0$ wird. Der Werth von p wird immer etwas gröfser sein müssen als $\frac{2\,\mathfrak{a}\,\pi}{l}$.

Durch die Kenntnifs dieses ersten Näherungswerthes findet man nun auf folgende Weise rasch die genaueren Werthe von p. Man setzt in der Gleichung

$$m p c^2 = 2 S \operatorname{cotg} \frac{p l}{2}$$

auf der linken Seite für p den Näherungswerth $\frac{2 \mathfrak{a} \pi}{l}$ ein und bestimmt einen zweiten Näherungswerth p_1, so dafs

$$m \frac{2 \mathfrak{a} \pi}{l} c^2 = 2 S \operatorname{cotg} \frac{p_1 l}{2}$$

und zugleich p_1 ein wenig gröfser ist als $\frac{2 \mathfrak{a} \pi}{l}$. Den so gefundenen zweiten Näherungswerth setzt man abermals in die linke Seite der Gleichung ein und bestimmt einen dritten Näherungswerth p_2, so dafs

$$m p_1 c^2 = 2 S \operatorname{cotg} \frac{p_2 l}{2}$$

und zugleich p_2 nur wenig von p_1 verschieden ist, was immer möglich sein mufs. So fortfahrend nähert man sich alsbald einem festen Werth p, für den

$$m p c^2 = 2 S \operatorname{cotg} \frac{p l}{2} \cdot$$

Für die niederen Töne, welche die Saite hervorbringt, führt die Rechnung nicht so schnell zum Ziel.

Der kleinste Werth von p ist, wie aus Fig. 20 entnommen werden kann, kleiner als $\frac{\pi}{l}$ · Der Werth $\frac{\pi}{l}$ selber würde dem Grundton der unbelasteten Saite entsprechen. Es wird also durch die Belastung der Grundton tiefer, wie sich auch dadurch erklärt, dafs die Saite durch die Belastung ein gröfseres Trägheitsmoment bekommt und ihre Bewegung langsamer geschehen mufs. Je höhere Obertöne man betrachtet, um so mehr nähern sich die Werthe von p den Werthen, die bei unbelasteter Saite den ungeraden Obertönen entsprechen. Alle geraden Obertöne können, da sie in dem belasteten Punkt einen Knotenpunkt haben, ungestört auch auf der belasteten Saite bestehen.

Das physikalisch Wichtigste an diesen Ueberlegungen ist, dafs, wie wir uns hier überzeugen, schwingende Körper vorkommen können, welche irrationale Tonverhältnisse haben. Eine ganz kleine Aenderung in der Massenvertheilung kann einen harmonisch tönenden Körper in einen unharmonischen verwandeln. Dem Ohr verräth sich dieses dadurch, dafs hier bei der Saite eine Klangfarbe entsteht, die man als kesselartig zu bezeichnen pflegt, und die einen weit weniger angenehmen Eindruck auf das Ohr macht, als die regelmäfsigen Töne der unbelasteten Saite. Die gesammten Bewegungen einer belasteten Saite können nicht mehr periodisch sein, da die Perioden der Nebentöne, welche auf ihr erregt werden können, in irrationalem Verhältnifs zu der Periode des Grundtones stehen. Dadurch hört eben der musikalische Charakter auf. Man kann auch die Methode nicht mehr brauchen, welche wir entwickelt haben, um die Convergenz einer Reihe zu beweisen, die den Anfangszustand der Saite darstellt. Man kann zwar eine solche belastete Saite von einem beliebig gewählten Anfangszustand ausgehen lassen, und es läfst sich auch, wenn man weifs, dafs der Anfangszustand der Saite durch eine nach den Sinus der Obertöne entwickelte Reihe dargestellt werden kann, die Methode übertragen, welche man braucht, um die Coefficienten zu finden; aber der Convergenzbeweis und der Beweis, dafs die Reihe wirklich den verlangten Werth giebt, läfst sich in diesen Fällen nicht in derselben Weise führen. Es wird dabei sehr darauf ankommen, dafs man keines von den Gliedern vergifst. Man mufs sich überzeugen, dafs es nun nicht noch andere Werthe der Schwingungsdauer giebt als die, welche man als Wurzeln der irrationalen Gleichung gefunden hat, sonst würde die Lösung unvollständig sein.

Man kann sagen, dafs die Körper, welche harmonische Obertöne geben, eine Ausnahme bilden, und dafs bei Weitem die meisten Körper, welche im Stande sind, elastische Schwingungen auszuführen, Glocken, Platten etc., unharmonische Obertöne geben. Wenn man ihre Gestalt verändern kann, wie das z. B. bei den Glocken dadurch geschieht, dafs man die Verhältnisse der Dicke verändert und etwa den Grund der Glocke und den Schlagring dick, und dazwischen die Wände dünn macht, so kann man empirisch die Form herausfinden, bei welcher die ersten Obertöne harmonisch werden, und die Glocke verhältnifsmäfsig einen guten Klang hat.

§ 43. Die Mittheilung der Schwingungen einer Saite an den Resonanzboden und an die Luft.

Nun ist noch auf einen andern Fall, welcher die Schwingungen der Saiten betrifft, einzugehen, der ebenfalls gewisse wichtige Eigenthümlichkeiten hat. Wir wollen annehmen, wir hätten eine Saite, die auf einen beweglichen Steg aufgesetzt sei, der auf dem Resonanzboden liegt, und dieser Resonanzboden soll mit einer breiten

Fläche auf die Luft wirken, so daſs von der Saite zuerst der Steg erschüttert wird, und von diesem die Luft. Es wird dann also von dem Ende der Saite lebendige Kraft auf die Luftmasse des Zimmers hinüber geleitet werden, und diese lebendige Kraft wird nothwendig der Saite verloren gehen.

Die Kraft, mit der die Saite auf den Steg, den wir bei $x = l$ annehmen, drückt, ist die senkrecht zur x-Axe gerichtete Componente der Spannung S. Diese ist gleich der Spannung multiplicirt mit dem Sinus des Winkels, den die Saite mit der x-Axe macht. Für kleine Winkel können wir statt des Sinus die Tangente nehmen und also die Kraft gleich

$$-S\frac{d\eta}{dx}$$

setzen. Das Zeichen ist so gewählt, daſs die Kraft in Richtung der wachsenden η positiv gerechnet wird.

Die Kraft bringt eine Bewegung des Steges hervor. Zugleich wirkt auf die Bewegung des Steges eine elastische Kraft, die von der Biegung des elastischen Resonanzbodens herrührt, auf dem der Steg ruht. Wir setzen sie der Excursion des Steges proportional und haben das Zeichen so zu bestimmen, daſs die so dargestellte Kraft den Steg in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt. Endlich setzen wir den Luftwiderstand der Geschwindigkeit des Steges proportional und in seiner Richtung der Geschwindigkeit entgegengesetzt. Ist m die bei $x = l$ bewegte Masse, so haben wir die Grenzbedingung

$$m\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -S\frac{\partial\eta}{\partial x} - f^2\eta - g^2\frac{\partial\eta}{\partial t} \text{ (für } x = l). \qquad (242)$$

Wir wollen annehmen, daſs am anderen Ende der Saite eine gezwungene Bewegung mitgetheilt wird durch einen Körper, der hinreichende Masse und Festigkeit hat, um die Saite so mitzunehmen, daſs der Widerstand der Saite gegen die Schwingung des aufgesetzten Körpers verschwindet. Nahehin ist diese Bedingung erfüllt, wenn man die Saite an irgend einer Stelle dadurch begrenzt, daſs man den Stiel einer Stimmgabel aufsetzt, dem man am äuſsersten Ende die Form eines Saitensteges gegeben hat. Man schärft den Stiel mit der Feile zu, so daſs er eine scharfe Kante bildet und macht dann einen kleinen Einschnitt in die scharfe Kante, in dem die Saite einliegen kann. Es ist vortheilhaft, daſs man von der Hand, welche die Stimmgabel hält, noch einen Finger benutzt, um die Saite an den Stiel anzudrücken. Man hebt dadurch gleichzeitig auch die Schwingungen auf, welche dieser Theil der Saite ausführen könnte. Dadurch bewirkt man, dafs der Berührungspunkt der Stimmgabel zum Endpunkt der Saite wird.

Die Stimmgabel ist ein Körper von sehr viel gröfserer Masse und sehr grofser Festigkeit, der durch seine Schwingungen mit grofser Kraft hin- und hergetrieben wird. Es wird dadurch das Ende der Saite durch eine überwiegende Kraft erschüttert, und wir werden also bei $x = 0$ den Werth von η der Bewegung der Stimmgabel entsprechend zu setzen haben, was wir so ausdrücken können:

$$\eta = A \sin n t \quad (\text{für } x = 0).$$

Im Uebrigen geschieht die Bewegung der Saite nach der Differentialgleichung

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

wie im § 36 gezeigt wurde.

Um dieser Differentialgleichung und zugleich den Grenzbedingungen zu genügen, setzen wir

$$\eta = A \cos p x \,.\, \sin n t + F \sin p x \,.\, \sin n t + G \sin p x \,.\, \cos n t, \tag{243}$$

wo A, F, G zu bestimmende Constanten sind und p für $n \,.\, \sqrt{\frac{\mu}{S}}$ geschrieben ist. Für $x = 0$ erhalten wir

$$\eta = A \sin n t,$$

wie die eine Grenzbedingung es verlangt. Es ist daher nur noch der zweiten Grenzbedingung bei $x = l$ zu genügen. Diese ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} &- m n^2 [A \cos p l \sin n t + F \sin p l \sin n t + G \sin p l \cos n t] \\ &= + p S A \sin p l \sin n t - p S F \cos p l \sin n t - p S G \cos p l \cos n t \\ &\quad - f^2 A \cos p l \sin n t - f^2 F \sin p l \sin n t - f^2 G \sin p l \cos n t \\ &\quad - n g^2 A \cos p l \cos n t - n g^2 F \sin p l \cos n t + n g^2 G \sin p l \sin n t \end{aligned}\right\} \tag{244}$$

Sowohl die Coefficienten von $\sin n t$ wie auch diejenigen von $\cos n t$ müssen auf beiden Seiten einander gleich sein.

Mithin ist

$$\left.\begin{aligned} - m n^2 [A \cos p l + F \sin p l] &= (p S A - f^2 F + n g^2 G) \sin p l \\ &\quad - (p S F + f^2 A) \cos p l \\ - m n^2 G \sin p l &= - (f^2 G + n g^2 F) \sin p l \\ &\quad - (p S G + n g^2 A) \cos p l \end{aligned}\right\} \tag{245}$$

Das sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten F und G. Sie können auf die Form gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned} &[(f^2 - m n^2)\sin p l + p S \cos p l]\,.\,F - n g^2 \sin p l\,.\,G \\ &\qquad = [p S \sin p l - (f^2 - m n^2)\cos p l]\,.\,A \\ &[(f^2 - m n^2)\sin p l + p S \cos p l]\,.\,G + n g^2 \sin p l\,.\,F \\ &\qquad = - n g^2 \cos p l\,.\,A \end{aligned}\right\} \tag{245 a}$$

Definiren wir die Hilfsgröfsen C und k durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f^2 - m n^2 &= C \cos k \\ pS &= C \sin k \end{aligned}\right\} \tag{246}$$

so können wir schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &C \sin(p l + k)\,.\,F - n g^2 \sin p l\,.\,G = - C \cos(p l + k)\,.\,A \\ &C \sin(p l + k)\,.\,G + n g^2 \sin p l\,.\,F = - n g^2 \cos p l\,.\,A \end{aligned}\right\} \tag{245 b}$$

Nach F und G aufgelöst, liefern diese Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} F &= - \frac{C^2 \sin(2 p l + 2 k) + n^2 g^4 \sin 2 p l}{C^2 \sin^2(p l + k) + n^2 g^4 \sin^2 p l}\,\frac{A}{2} \\ G &= - \frac{n g^2 C \sin k}{C^2 \sin^2(p l + k) + n^2 g^4 \sin^2 p l}\,A\,. \end{aligned}\right\} \tag{247}$$

Der Factor g^2, dem der Luftwiderstand proportional ist, kann bei Streichinstrumenten als klein vorausgesetzt werden. Grofse Werthe von $\frac{F}{A}$ und $\frac{G}{A}$ ergeben sich nur dann, wenn $\sin(p l + k)$ klein ist. Nur dann wird also die Saite zu starkem Mitschwingen durch die Stimmgabel angeregt. Ist die elastische Kraft f^2, mit welcher der Resonanzboden den Steg in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, grofs, so dafs $f^2 - m n^2$ grofs gegen $p S$ wird, so ist k in Folge der Gleichungen (246) klein und $\sin(p l + k)$ wird nahezu mit $\sin p l$ übereinstimmen.

Die Bedingung des starken Mitschwingens geht daher für kleine Werthe von k in die Bedingung über, dafs $\sin p l$ klein sein mufs. Das heifst nichts anderes, als dafs der Ton der Stimmgabel mit einem der Eigentöne der Saite übereinstimmen mufs, die der Saitenlänge von der Stimmgabel bis zum Stege entsprechen.

Praktisch ist die Sache deshalb wichtig, weil man bei passender Einrichtung der Saite, die also auf einem relativ festen Stege liegen mufs, sehr leicht mit einer Stimmgabel, deren Stiel man wie einen Steg zurecht gefeilt hat, durch Hin- und Hergleiten an der Saite diejenige Saitenlänge auffinden kann, welche mit der Stimmgabel isochron schwingt. Da schwillt nämlich der Ton der Saite sehr stark an. Den Stimmgabelton hört man sehr wenig; dagegen wird der Ton der Saite sehr stark hörbar. Aufserdem ist zu berücksichtigen, dafs die Stimmgabel nur unharmonische Obertöne hat und eben deshalb nur der Grundton der Schwingungen und nicht ihre Obertöne, an den Resonanzboden des Instruments übertragen werden kann. Man mufs nur darauf achten, dafs man mit dem Finger hinreichend stark gegendrückt, so dafs kein Klirren zwischen der Stimmgabel und der Saite entsteht. Wenn solches Klirren entsteht, d. i. ein Springen der Stimmgabel, wobei die Saite losgelassen wird, so giebt das Schwingungen, welche nicht aus einer einzigen Sinus-Schwingung bestehen, sondern es treten noch hohe harmonische Obertöne hinzu. Das giebt sich auch sehr leicht durch die Klangfarbe zu erkennen. Die Klirrtöne sind verhältnifsmäfsig scharf und dadurch leicht von den Tönen zu unterscheiden, welche ohne Klirren auf die Saite übertragen werden. Man erhält natürlich dieselben verstärkenden Töne, wenn man die doppelte Länge der Saite nimmt und die Stimmgabel auf den entfernteren Knotenpunkt einsetzt. Wenn es aber darauf ankommt, die Saitenlänge zu bestimmen, welche dem Tone der Stimmgabel entspricht, mufs man die kürzeste Saitenlänge suchen, welche starkes Mitschwingen hervorruft.

Zweiter Abschnitt.

Die Schwingungen von elastischen Stäben und Luftsäulen.

---

§ 44. Die Longitudinalschwingungen eines elastischen Stabes.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung für die Saite in § 36 hatten wir vorausgesetzt, dafs auch longitudinale Verschiebungen in Richtung der x-Axe, der Länge der Saite, vorkommen können. Wir hatten die entsprechende Verschiebung mit ξ bezeichnet und dann die Bewegungsgleichung (174) gefunden, welche wir in der Form

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

schreiben können, wenn $a^2 = \dfrac{E\,Q}{\mu}$ gesetzt wird.

Dieselben Verhältnisse liegen nun vor bei der Bewegung eines elastischen Stabes, der ja auch nicht nothwendig eine Biegung zu erleiden braucht, sondern bei dem auch allein Longitudinalbewegungen vor sich gehen können. Die obige Form der Differentialgleichung ist, wie wir schon sahen, dieselbe wie diejenige für die transversalen Schwingungen einer Saite. Daraus geht hervor, dafs wir die Integralformen, die wir für die transversalen Schwingungen einer Saite gefunden haben, auf den Fall der Longitudinalschwingungen eines elastischen Stabes unmittelbar übertragen können.

Es ergiebt sich wie früher:

$$\xi = F(x + at) + G(x - at),$$

wo a seine Bedeutung als Fortpflanzungsgeschwindigkeit zeigt. Es werden also in dem Stabe einzelne Theile gegen ihre Nachbartheile verschoben, und diese Verschiebungen werden sich in der Form von Wellen fortsetzen, die theils nach dem einen, theils nach dem andern Ende ablaufen.

Was nun den Einflufs der Enden des Stabes betrifft, so können diese verschiedenen Bedingungen unterworfen sein.

Erstens können sie ganz festgelegt sein, wie bei der Saite, so dafs sie keine Bewegungen in der Richtung des Stabes machen können. Dann erhalten wir gerade wie oben

$$\xi = F(x + at) - F(at - x)$$

und

$$0 = F(at + l) - F(at - l),$$

wo $x = 0$ dem einen Ende, $x = l$ dem andern Ende des Stabes entspricht. Die Bewegung ist aus zwei einander entgegenlaufenden Wellenzügen zusammengesetzt, und wir können den Einflufs eines festen Endes des Stabes in Bezug auf die Wellenzüge dadurch bezeichnen, dafs wir sagen, jede ans Ende laufende Welle wird entgegengesetzt reflectirt, so dafs longitudinale Schwingungen, welche in einem gewissen Momente gegen das Ende gerichtet sind, am Stabende mit Longitudinalschwingungen zusammentreffen, welche die entgegengesetzte Richtung haben. Dadurch wird die gesammte Verschiebung am Stabende gleich Null.

Es sind nun aber auch andere Bedingungen möglich. Eine Saite, bei welcher wir Querschwingungen beobachten wollten, mufste gespannt sein und daher mufsten die Enden festgelegt werden, um den Zug anzubringen, der auf die Saite einwirkt; aber einen longitudinal schwingenden Stab brauchen wir nicht zu spannen, um diese Art von Schwingungen möglich zu machen. Deshalb kann ein solcher Stab auch mit freien Enden schwingen. An einem freien Ende des Stabes kann keine Verdichtung und Verdünnung stattfinden, also auch keine Druckkraft entstehen, welche auf den Stab wirkt, und es mufs daher die Kraft, die auf das freie Ende des Stabes einwirkt, gleich Null sein. Nun war der Druck in einem Querschnitt proportional $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ gefunden.

Dieser Differentialquotient drückt, wenn er positiv ist, die relative Verlängerung, wenn er negativ ist, die relative Verkürzung aus. Die Kraft, die auf den Querschnitt wirkt, ist dieser Verlängerung oder Verkürzung proportional. Damit nun $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ an dem Ende Null sei, haben wir ξ aus zwei entgegengesetzt laufenden Wellen zusammenzusetzen, von denen die eine die Reflexion der andern ist, aber nicht mit entgegengesetztem ξ wie im ersten Fall, sondern mit gleichem ξ. Wenn z. B. bei $x = 0$ ein freies Ende liegt, so ist zu setzen:

$$\xi = F(x + at) + F(at - x);$$

denn es ist dann $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ für $x = 0$ für alle Werthe von t gleich Null.

Daraus folgt eine gewisse Verschiedenheit in dem Verhalten der schwingenden Stäbe, je nachdem beide Enden fest gelegt oder beide frei sind, oder das eine fest gelegt und das andere frei. Haben wir einen Stab, der an beiden Enden befestigt ist, wie es die betrachtete Saite war, so wird eine Welle, die gegen das eine Ende läuft, von diesem Ende entgegengesetzt zurückgeworfen werden, wird nach dem andern Ende fortlaufen, und wieder entgegengesetzt reflectirt werden, so dafs sie dann schliefslich in derselben Gestalt, in der sie ausgegangen ist, wieder ankommt. Es wird also eine ganze Periode vollendet sein, nachdem die Welle zweimal die Länge des Stabes durchlaufen hat, und die Dauer der gröfsten Periode für die Schwingung eines solches Stabes wird also durch die Zeit gegeben sein, welche die Welle braucht, um zweimal die Länge des Stabes zu durchlaufen. Nun ist es natürlich auch möglich, dafs der Stab sich in zwei Hälften theilt, in denen gleiche Wellen laufen, so dafs die Zwischenzeit halbirt wird, oder dafs der Stab sich in drei Theile theilt u. s. f. Aehnliche Verhältnisse bestehen, wenn der Stab an beiden Enden frei ist. Wenn wir dann eine Welle betrachten, die gegen das Ende des Stabes abläuft, so wird sie reflectirt werden, aber in derselben Gestalt, nur wird sie nach der Reflexion sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen. Wenn sie wieder an die erste Stelle kommt, so wird noch nicht derselbe Zustand eingetreten sein, weil die Welle in der entgegengesetzten Richtung läuft. Sie mufs erst zum zweiten Mal am andern Ende reflectirt werden, um mit dem gleichen Sinn der Elongation auch gleiche Fortpflanzungsrichtung zu bekommen. Wenn sie dann einmal hin und her gegangen ist, also die Länge des Stabes zweimal durchlaufen hat, so wird der ganze Stab wieder in den alten Zustand zurückversetzt sein. Die Periode des Grundtons ist also die Zeit, in welcher die Länge des Stabes zweimal durchlaufen ist. Anders verhält es sich, wenn das eine Ende des Stabes fest gemacht und das andere frei ist. Dann wird eine Welle, die gegen das freie Ende abläuft, an diesem in der Weise reflectirt, dafs sie dieselbe Elongation bekommt, aber nach dem festen Ende des Stabes zurückläuft. Hier wird sie mit entgegengesetzter Elongation reflectirt werden. Wenn daher die Welle wieder an ihrem ersten Platze ankommt, so wird sie sich von ihrem früheren Zustand dadurch unterscheiden, dafs sie jetzt die entgegengesetzten Elongationen hat. Sie mufs nun erst noch einmal nach dem freien Ende laufen, wieder zurückgeworfen werden und erst, wenn sie zum zweiten Mal vom festen Ende des Stabes zurückgeworfen ist, und also zweimal ganz hin und her gelaufen ist, d. h. viermal die Länge des Stabes durchlaufen hat, wird sie wieder den ersten Zustand des Stabes vollständig repräsentiren. Daraus folgt, dafs ein Stab, dessen eines Ende frei, dessen anderes Ende befestigt ist, Längsschwingungen ausführen wird, welche eine doppelt so lange Periode haben, als die des an beiden Enden festgemachten oder an beiden Enden freien Stabes. Diese Ueberlegung wir dnun auch in der That durch den Versuch bestätigt: einseitig befestigte Stäbe geben tiefere Töne.

Auch aus der Form des Integrals kann derselbe Schlufs gezogen werden.

Es war

$$\xi = F(x + at) + G(x - at).$$

Soll nun bei $x = 0$ ein festes Ende sein, so folgt

$$F(at) + G(-at) = 0$$

und, da t ganz beliebig ist, so ergiebt sich daraus

$$G(x - at) = -F(at - x),$$

mithin

$$\xi = F(x + at) - F(at - x). \tag{248}$$

Soll nun bei $x = l$ ein freies Ende liegen, so mufs, da

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = F'(x + at) + F'(at - x),$$

die Bedingung erfüllt sein

$$F'(l + at) + F'(at - l) = 0, \tag{249}$$

oder, wenn z für $at - l$ geschrieben wird,

$$F'(z + 2l) = -F'(z). \tag{249a}$$

Daraus folgt:

$$F(z + 2l) = -F(z) + \text{Const.} \tag{250}$$

und folglich

$$F(z + 4l) = F(z). \tag{251}$$

Die Periode der Bewegung ist daher gleich $\frac{4l}{a}$, also doppelt so grofs wie in dem Falle, wo beide Enden fest oder beide Enden frei sind und ebenso grofs wie die Periode eines Stabes mit zwei festen oder zwei freien Enden, dessen Länge $2l$ ist. Ueberhaupt ist der Ausdruck für ξ von gleicher Form wie der Ausdruck, den wir bei einem Stabe von der Länge $2l$, bei dem beide Enden frei oder beide Enden fest sind, erhalten haben. Nur kommt hier noch die Bedingung für F hinzu, dafs

$$F(z + 2l) = -F(z) + \text{Const.}$$

ist, die bei dem Stab mit zwei festen oder zwei freien Enden nicht erfüllt zu sein braucht. Indem wir die Constante in zwei gleiche Theile theilen, können wir die Gleichung auch in der Form

$$F(z + 2l) - \frac{C}{2} = -\left(F(z) - \frac{C}{2}\right) \tag{250a}$$

schreiben. Nun läfst sich $-\frac{C}{2}$ mit in die Definition der Function F aufnehmen. Dann haben wir

$$F(z + 2l) = -F(z), \tag{250b}$$

während ξ denselben Ausdruck behält:

$$\xi = F(x + at) - F(at - x).$$

Entwickelt man $F(x)$ in eine Fourier'sche Reihe

$$F(x) = \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ A_{\mathfrak{a}} \cos \frac{\mathfrak{a} \pi x}{2l} + B_{\mathfrak{a}} \sin \frac{\mathfrak{a} \pi x}{2l} \right\},$$

so fallen infolge der Gleichung (250b) A_0 und alle Glieder weg, deren Periode gleich $2l, \frac{2l}{2}, \frac{2l}{3}, \cdots$ ist, und nur diejenigen bleiben übrig, deren Periode gleich $4l, \frac{4l}{3}, \frac{4l}{5}, \frac{4l}{7}, \cdots$ ist. Umgekehrt, wenn $F(x)$ nur aus Gliedern der letzten Art zusammengesetzt ist, so ist die Bedingung (250b) erfüllt. Daher können wir sagen, daſs ein Stab von der Länge l mit einem festen Ende bei $x = 0$ und einem freien Ende bei $x = l$ sich, was seine longitudinalen Schwingungen betrifft, gerade so bewegt wie die eine Hälfte eines Stabes von der Länge $2l$, der bei $x = 0$ und $x = 2l$ fest ist, wenn alle Töne, die bei $x = l$ einen Knotenpunkt haben, nicht miterregt werden.

Durch die Gleichungen (248) und (251) ist auch die Bewegung eines Stabes dargestellt, der bei $x = -l$ und $x = +l$ freie Enden hat. Denn da

$$F'(x + 2l) = - F'(x),$$

oder auch

$$F'(x + l) = - F'(x - l),$$

so wird $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ bei $x = -l$ und $x = +l$ verschwinden. Die Bewegung eines Stabes von der Länge l mit einem festen und einem freien Ende ist daher auch gleich der Bewegung der einen Hälfte eines Stabes von der Länge $2l$, dessen Enden beide frei sind.

Man kann durch die Longitudinalschwingungen von Stäben sehr reine harmonische Töne hervorbringen. Nur ist zu bemerken, daſs eine Befestigung eines Punktes des Stabes nicht immer ganz vollkommen erreicht werden kann, weil die steiferen Stäbe, deren Material den Wellen eine schnelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit giebt, wie Stahl oder Glas, verhältniſsmäſsig schwer sind und mit ziemlich groſser Kraft auf ihre Befestigungsstelle einwirken, so daſs man die Befestigungsstelle schon sehr massig und stark einrichten muſs, wenn man erzielen will, daſs keine merkliche Erschütterung des befestigten Theiles eintritt. Viel leichter ist es immer zu machen, daſs man den Stab mit zwei freien Enden schwingen läſst und nun nur einen Knotenpunkt desselben als Befestigungspunkt benutzt. Man kann ihn zwischen den Fingern halten. Dadurch wird der

Stab nicht gehindert, seine Schwingungen frei auszuführen, weil der festgehaltene Punkt eben in Ruhe bleibt und von den Schwingungen nicht afficirt wird. Aber bei sehr leichten Stäben, z. B. aus Tannenholz, die man zu der sogenannten Holzharmonika braucht, kann man auch die Enden hinreichend sicher befestigen. Es ist dieses deshalb bequem, weil man die Stäbe nicht noch besonders zu halten braucht, während man sie anstreicht.

Genau dieselben Fälle hat man bei Torsionsschwingungen von runden Stäben zu unterscheiden. Wenn runde Stäbe an einem Ende eingeklemmt sind, kann man sie durch Reiben mit dem Violinbogen oder auch mit dem nassen Finger (bei kurzen Stahlstäben geht es sehr gut mit dem Violinbogen) in Torsionsschwingungen versetzen. Dabei ist die Kraft, welche das eine Element gegen das andere in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, den Unterschieden der Drehungswinkel proportional. Wenn wir die letzteren mit ω bezeichnen und die Länge des Stabes als Coordinate nehmen, so ist die potentielle Energie proportional $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2$. Man bekommt ähnliche Gleichungen wie die bisherigen, wenn man $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$ mit dem Trägheitsmoment μ für den Querschnitt des Stabes multiplicirt und gleich einer Constanten ε multiplicirt mit $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$ setzt:

$$\mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \varepsilon \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \tag{252}$$

Die Gleichung wird ebenso abgeleitet wie die der Saitenschwingungen und der Longitudinalschwingungen von Stäben, wo $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$ der potentiellen Energie proportional war. An einem freien Ende können keine Kräfte wirken, da mufs $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$, und an dem eingeklemmten Ende $\omega = 0$ sein. Dadurch ergeben sich also genau dieselben Bedingungsgleichungen für die Torsionsschwingungen der Stäbe. Man würde da auch darauf rechnen müssen, harmonische Obertöne zu bekommen, wenigstens bei sehr langen Stäben, nämlich den ersten, dritten, fünften u. s. w. Ton bei Stäben, welche an einem Ende frei, am andern eingeklemmt sind, und gleichzeitig auch die geraden Obertöne bei solchen Stäben, welche an beiden Enden eingeklemmt, oder welche an beiden Enden frei sind, wobei man aber eine Stelle des Stabes festhalten mufs, in die ein Knotenpunkt fällt. Praktisch werden übrigens fast nur die Stäbe der sogenannten WHEATSTONE'schen Stabharmonika gebraucht, Stäbe, welche in festen Holzgestellen mit Resonanzboden stecken und mit dem Violinbogen gestrichen werden.

Auf die Theorie der Biegungsschwingungen elastischer Stäbe wollen wir nicht näher eingehen, sondern nur bemerken, dafs man auch die gewöhnlichen Saiten, wenn man streng verfahren will, immer als Stäbe betrachten mufs, die zwar eine Spannung haben, aber daneben auch noch vermöge ihrer Festigkeit einen Widerstand gegen die Verbiegung leisten.

§ 45. Die Schwingungen einer Luftsäule.

Die eben dargelegte für elastische feste Stäbe gültige Betrachtungsweise kann nun mit wenig Aenderungen auf Luftsäulen übertragen werden, welche in cylindrische Röhren eingeschlossen sind. Sie sind ebenfalls als elastische Massen zu betrachten, welche, wenn sie irgendwo durch Längsverschiebungen in den Röhren zusammengedrängt werden, eine Widerstandskraft erregen und, wo sie gedehnt werden, einen verminderten Druck erhalten, und deshalb immer ihre Dichtigkeit auszugleichen streben.

Luftsäulen mit festen Enden zeigen die Phänomene sehr leicht. Man versetzt z. B. die Luft in Glasröhren in Schwingungen. Die Enden sind dabei mit Stopfen versehen, von denen der eine mit einem Stabe verschoben werden kann, so dafs man die Länge der Luftsäule verändern und dadurch die Röhren auf eine gewünschte Tonhöhe abstimmen kann. Die Luft im Innern wird meistens dadurch in Schwingungen gesetzt, dafs man den Stab, an dem der als Endverschlufs dienende Kork befestigt ist, durch Reiben in Längsschwingungen versetzt. Die Länge der Luftsäule wird dann durch mehr oder weniger tiefe Einschiebung des Korkes geändert, bis der zugeleitete Ton einem Eigenton der Luftsäule entspricht. Dann entstehen sehr starke Schwingungen, und wenn man trockene Pulver in die Röhre gestreut hat, so werden diese in heftige Bewegung versetzt und zeigen ihre schwingenden Abtheilungen, so dafs man diese Methode vielfach benutzen kann, um die Schwingungen sichtbar zu machen und die Wellenlänge für bestimmte Töne zu messen.

Man findet, dafs diese an beiden Seiten gesperrten Luftsäulen mit beliebiger Anzahl ihrer Abtheilungen schwingen können, welche immer einer halben Wellenlänge der Luft entsprechen. Anders ist es bei einer Luftsäule mit einem offenen Ende. Man kann die offenen Enden einer Luftsäule nicht als ganz frei von fremden Kräften betrachten, weil in der That hier die Schallbewegung in den freien Raum übergeht. Es ist klar, daſs die Luft am Ende einer solchen Röhre sehr viel freier ist, als die eingesperrte Luft im Innern; aber sie ist nicht absolut frei, und dadurch entstehen kleine Abweichungen von den Gesetzen, die bei einem Stabe gelten, dessen eines Ende frei ist. Wir werden später auf diesen Umstand zurückkommen.

Dritter Theil.

Die Schallbewegung im Raume.

Erster Abschnitt.

Die allgemeinen Formeln.

§ 46. Die hydrodynamischen Gleichungen und das Wellenpotential.

Bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen für die Schallbewegung können wir den Einfluſs der Schwerkraft vernachlässigen, weil die Luft unter dem Einfluſs der Schwerkraft schon im Gleichgewichtszustande ist, und wir nur die Kräfte zu betrachten haben, welche Abweichungen vom Gleichgewichtszustande hervorbringen, d. h., es kommt nur auf die Aenderungen des Luftdruckes an. Der Druck ist diejenige Kraft, welche vermöge der Elasticität auf die Einheit der Fläche ausgeübt wird. Wenn wir ihn mit p bezeichnen, und ein Flächenstück $dy\,dz$ betrachten, so ist $p\,dy\,dz$ der Druck, der von beiden Seiten her auf diese Fläche ausgeübt wird. Dieser Druck ist also eine Kraft, bei der die verschiedenen Lufttheilchen oder die Luftmassen diesseits und jenseits der Fläche sich im Gleichgewichte halten. Wenn wir aber ein parallelepipedisches Volumen betrachten, so wird der Druck auf der einen Seitenfläche im Allgemeinen von dem auf der gegenüberliegenden Seitenfläche sich unterscheiden. In Folge dessen wird Bewegung eintreten. Wenn wir auf der Seitenfläche $dy\,dz$ bei x den Druck $p\,dy\,dz$ haben, so wird er auf der gegenüberliegenden Fläche bei $x + dx$ gleich $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz$ sein. Ist $\frac{\partial p}{\partial x}$ positiv, so wird der Druck bei $x + dx$, der das Volumtheilchen in der Richtung der abnehmenden x zu treiben strebt, über den Druck bei x, der es in der Richtung der wachsenden x zu treiben strebt, überwiegen. Es wird also die Kraft

$$X = -\frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

übrig bleiben, die auf das Volumtheilchen wirkt.

Bei negativen Werthen von $\frac{\partial p}{\partial x}$ giebt derselbe Ausdruck die übrig bleibende Kraft an, die aber dann in der Richtung der wachsenden x wirkt, wie das positive Zeichen der Kraft es anzeigt.

Ist ε die Dichtigkeit an der betreffenden Stelle, so dafs $\varepsilon\, dx\, dy\, dz$ die Masse des Volumtheilchens darstellt, so mufs die Kraft X gleich dem Product aus der Masse $\varepsilon\, dx\, dy\, dz$ und ihrer Beschleunigung sein.

Sollen nun die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w oder die Strömungscomponenten, wie wir sie auch nennen können, als Functionen der Coordinaten x, y, z der betreffenden Stelle des Raumes und der Zeit betrachtet werden, also unter u die Geschwindigkeit parallel der x-Axe verstanden werden, welche dem in dem Augenblick t an der Stelle x, y, z befindlichen Flüssigkeitstheilchen zukommt, so ist die Beschleunigung des Flüssigkeitstheilchens nicht etwa gleich $\frac{\partial u}{\partial t}$ zu setzen; denn $\frac{\partial u}{\partial t}$ würde die Aenderung von u messen, die an der betreffenden Stelle stattfindet. Wir haben aber hier die Beschleunigung, d. h. die Aenderung der Geschwindigkeit zu suchen, welche das fortschreitende Partikelchen hat. Dieses ändert mit der Zeit seinen Ort. Zur Zeit $t + dt$ sind seine Coordinaten gleich $x + u dt$, $y + v dt$, $z + w dt$ geworden.

Wenn wir dies berücksichtigen, so ergiebt sich für die Aenderung der Geschwindigkeitscomponente in der Zeit dt der Ausdruck

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u \cdot dt + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v \cdot dt + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w \cdot dt,$$

und daher für die Beschleunigung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Diesen Ausdruck, den wir mit $\left(\frac{du}{dt}\right)$ bezeichnen wollen, haben wir mit $\varepsilon\, dx\, dy\, dz$ zu multipliciren und gleich $-\frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz$ zu setzen.

Heben wir auf beiden Seiten $dx\,dy\,dz$ fort, so bleibt die Gleichung

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon v\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{253}$$

Die analogen beiden Gleichungen gelten für die anderen beiden Componenten.

Bei der Schallbewegung haben wir es nun mit Bewegungen zu thun, bei denen wir u, v, w als verschwindend kleine Gröfsen betrachten dürfen. Auch ihre Differentialquotienten betrachten wir als verschwindend klein; d. h. also, es dürfen nicht sehr schnelle Aenderungen in den Werthen von u, v, w beim Uebergang von einem Punkt zu einem benachbarten oder von einem Zeitpunkt zu einem benachbarten vorkommen. Dann sind die drei letzten Theile der linken Seite der Gleichung (253) kleine Gröfsen zweiter Ordnung und können gegen die Gröfsen erster Ordnung vernachläfsigt werden. Wir haben daher bei der Schallbewegung das Recht, $\left(\frac{du}{dt}\right)$ durch $\frac{\partial u}{\partial t}$ zu ersetzen. So erhalten wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}, \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= \varepsilon\frac{\partial v}{\partial t}, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= \varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{254}$$

Nun müssen wir noch eine vierte Bewegungsgleichung bilden, welche die Aenderung der Dichtigkeit ausdrückt. Die Aenderung der Masse $\varepsilon\,dx\,dy\,dz$, die in dem Volumen $dx\,dy\,dz$ enthalten ist, kann nur von der Aenderung der Dichtigkeit ε abhängen. Denn das Volumen bleibt dasselbe, da x, y, z die Coordinaten eines festen Punktes sein sollen. Die Aenderung der Masse in der Zeit dt ist gleich $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\cdot dx\,dy\,dz\,.\,dt$. Diese Aenderung mufs gleich sein der Masse, die in der Zeit dt in das Volumen einströmt, vermindert um die Masse, die in der gleichen Zeit ausströmt. Was einströmt und ausströmt können wir aber leicht berechnen. Durch die Fläche $dy\,dz$ strömt bei x in der Zeit dt die Masse $\varepsilon u\,dy\,dz\,dt$, durch die entgegengesetzte Fläche bei $x + dx$ strömt die Masse $\left(\varepsilon u + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x}dx\right)dy\,dz\,dt$.

Das Vorzeichen giebt an, ob die Strömung in der Richtung der positiven oder der negativen x-Axe vor sich geht.

Der Unterschied $\frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} dx\,dy\,dz\,dt$ ist gleich der Masse, welche durch die beiden zur x-Axe senkrechten Seitenflächen aus dem Parallelepipedon ausströmt, vermindert um die Masse, welche durch sie einströmt. Analog stellen $\frac{\partial(\varepsilon v)}{\partial y} dx\,dy\,dz\,dt$ bezw. $\frac{\partial(\varepsilon w)}{\partial z} dx\,dy\,dz\,dt$ die Massen dar, die durch die zur y-Axe bezw. z-Axe senkrechten Seitenflächen in der Zeit dt ausströmen, vermindert um die durch dieselben Flächen einströmenden Massen. Mithin haben wir

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dx\,dy\,dz\,dt = -\frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} dx\,dy\,dz\,dt - \frac{\partial(\varepsilon v)}{\partial y} dx\,dy\,dz\,dt \\ - \frac{\partial(\varepsilon w)}{\partial z} dx\,dy\,dz\,dt.\end{aligned}\right\} \quad (255)$$

und wenn wir den Factor $dx\,dy\,dz\,dt$ wegheben:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon u) - \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon v) - \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon w). \quad (255\text{a})$$

Für den Fall verschwindend kleiner Geschwindigkeiten ist nun aber zu berücksichtigen, dafs auch die Unterschiede der Dichtigkeit verschwindend klein sein werden. Wir werden also anstatt ε einen Ausdruck von der Form $\varepsilon_0 + \delta\varepsilon$ gesetzt denken können, wo ε_0 constant und $\delta\varepsilon$ zwar veränderlich, aber sehr klein und ebenso die Differentialquotienten von $\delta\varepsilon$ sehr klein sein sollen. Wir können dann die Producte der Differentialquotienten von $\delta\varepsilon$ mit u, v, w weglassen, und, indem wir die Gleichung (255a) durch $-\varepsilon$ dividiren, schreiben:

$$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (256)$$

Diese Gleichung tritt noch zu den drei Gleichungen (254) hinzu.

Der Druck p, der in den Gleichungen (254) vorkommt, wird als Function der Dichtigkeit ε vorausgesetzt. Daher ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}.$$

Da nun ε bei der Schallbewegung sich nur wenig ändert, so werden wir $\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}$ als constant betrachten können. Denn für kleine Aenderungen von ε werden wir bis auf Gröfsen zweiter Ordnung jede

Function von ε als eine lineare betrachten können. Der Druck nimmt mit wachsendem ε jedenfalls zu. Daher wird $\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}$ einen positiven Werth haben, und wir wollen, um dies anzudeuten, a^2 dafür schreiben. Dann können wir also setzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{257}$$

Wenn wir nun diese Ausdrücke in die Gleichungen (254) einführen, so gehen diese über in

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -a^2 \frac{\partial}{\partial x}(\log \varepsilon) = -a^2 \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -a^2 \frac{\partial}{\partial y}(\log \varepsilon) = -a^2 \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -a^2 \frac{\partial}{\partial z}(\log \varepsilon) = -a^2 \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}. \end{aligned}\right\} \tag{258}$$

Nach der Gleichung (256) ist ferner:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\log \varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{259}$$

Daraus läſst sich nun leicht eine Gleichung bilden, in welcher nur noch $\log \varepsilon$ oder $\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ vorkommt. Dazu wird die Gleichung nach t differentiirt. Die Werthe $\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t\, \partial z}$ können wir uns aber aus den Gleichungen (258) bilden, indem wir die erste nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differentiiren. Das giebt:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\log \varepsilon) = -a^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log \varepsilon) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\log \varepsilon) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\log \varepsilon) \right\} \tag{260}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\log \varepsilon) &= a^2 \cdot \Delta (\log \varepsilon) \\ \text{und ebenso} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) &= a^2 . \Delta \left(\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right), \end{aligned}\right\} \tag{260a}$$

wo die Summe der zweiten Differentialquotienten, die auch in anderen Theilen der mathematischen Physik eine grofse Rolle spielt, mit dem Zeichen $\varDelta$ bezeichnet ist.

Wenn $\log \varepsilon$ oder $\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ aus der Gleichung (260a) gefunden ist, so finden wir aus den Gleichungen (258) die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$. Wir würden also durch eine Integration nach der Zeit u, v, w selbst erhalten.

Wir können den Gleichungen noch eine andere Form geben, indem wir u, v, w als Differentialquotienten einer Function ausdrücken. Durch Integration der Ausdrücke für $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ in den Gleichungen (258) erhalten wir nämlich:

$$\left.\begin{aligned} u &= -a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_{t_0}^{t} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\, dt\right\} + C_1 \\ v &= -a^2 \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int_{t_0}^{t} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\, dt\right\} + C_2 \\ w &= -a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left\{\int_{t_0}^{t} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\, dt\right\} + C_3, \end{aligned}\right\} \quad (261)$$

wo C_1, C_2, C_3 von t unabhängig sind, jedoch x, y, z enthalten können. Wenn nun die Bewegung aus dem Ruhezustand entsteht, so würde der Werth von t_0 so angenommen werden können, dafs zu der betreffenden Zeit u, v, w überall Null sind. Dann müssen C_1, C_2, C_3 für alle Werthe von x, y, z Null sein, und wir haben, wenn

$$\varphi = -a^2 \int_{t_0}^{t} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\, dt$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (262)$$

Man nennt φ das Geschwindigkeitspotential oder auch das Wellenpotential.

Die Gleichung (259) geht in eine Differentialgleichung für φ über. Denn es ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - a^2 \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0},$$

mithin:

$$- \frac{\partial \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

und daher:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \cdot \varDelta \varphi. \tag{263}$$

Es ergiebt sich also für die Function φ dieselbe Differentialgleichung, wie für die Gröfse $\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$.

Die Aenderungen der Dichtigkeit sind bei den Schallbewegungen relativ zur Dichte selbst klein. Wir können $\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$ die Verdichtung nennen. Bezeichnen wir die Verdichtung mit $\mathfrak{h}$, so ist:

$$\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \log (1 + \mathfrak{h})$$

und, da $\mathfrak{h}$ klein ist, kann $\log (1 + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ gesetzt werden.

Mithin ist:

$$\mathfrak{h} = - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{263a}$$

§ 47. Ebene Wellen.

Den Fall, bei dem die Luftbewegung in einer Röhre in der Art vor sich geht, dafs die ganzen Querschnitte der Röhre sich übereinstimmend bewegen, haben wir schon besprochen. Es sind dann, wenn die Röhre der x-Axe parallel angenommen wird, $\log \varepsilon$ und φ nur Functionen einer Variabeln x. Dadurch reducirt sich $\varDelta \varphi$ auf den zweiten Differentialquotienten von φ nach x, und wir erhalten die schon oben auf anderem Wege abgeleitete Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Wir fanden oben das Integral dieser Differentialgleichung in der Form:

$$\varphi = F(x + at) + G(x - at),$$

wobei a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist.

Da $a^2 = \dfrac{\partial p}{\partial \varepsilon}$ gesetzt war, so ergiebt sich also, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle in elastischen Flüssigkeiten, wie die Luft eine ist, wie es aber auch tropfbare Flüssigkeiten sind, insofern sie compressibel sind, immer gleich der Quadratwurzel aus dem Differentialquotienten des Druckes genommen nach der Dichtigkeit ist.

Aus der Definition von φ folgt, dafs an denjenigen Stellen der Luftsäule, wo keine Geschwindigkeit, keine Verschiebung der Theilchen stattfindet, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ sein mufs; denn $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ ist selbst die Geschwindigkeit. Wenn also die Enden der Röhre geschlossen sind, so würde für beliebige Werthe von t an den Enden $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ sein müssen, das heifst also, wenn wir uns die Werthe von φ als Ordinaten einer Curve aufgetragen denken, so würden die Maxima und Minima der Curve diejenigen Stellen darstellen, wo die Röhre geschlossen sein kann.

Bilden die Werthe von φ eine Sinuscurve, so kann die Länge einer an beiden Enden geschlossenen Röhre nur gleich einer ganzen Anzahl von halben Wellenlängen sein. Ist sie gleich $\mathfrak{a}$ halben Wellenlängen, so schwingt die Röhre in $\mathfrak{a}$ Abtheilungen, die auch durch feste, unendlich dünne Wände getrennt werden könnten, ohne die Bewegung zu ändern. Das ist die Schwingungsart in den Kundt'schen Röhren. Wenn wir dagegen freie Enden in dem Sinne haben könnten, dafs an den freien Enden keine Aenderungen des Druckes stattfinden, dann würde an dem freien Ende

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

sein. Nun ist aber zu bemerken, dafs eine Röhre mit offenem Ende, in welcher Schallbewegungen vor sich gehen, nothwendig Schall abgiebt, und diese Abgabe des Schalles an die Luft kann nur dadurch geschehen, dafs am Ende der Röhre noch Druckänderungen stattfinden. Es kann also an dem Ende der Röhre nicht unmittelbar $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ sein; denn sonst wäre keine Kraft vorhanden, die die äufsere Luftmasse in Erschütterung setzen könnte. Wir müssen daher annehmen, dafs eine gewisse geringe Druckänderung stattfindet.

Die ebenen Wellen, die zur Oeffnung hinziehen, müssen in kugelförmige Wellen übergehen, um sich im Raume zu verbreiten; dabei sind die ersten von der ebenen Gestalt abweichenden Wellen noch auf ziemlich enge Flächen beschränkt, welche für alle Mündungen nicht gleich grofs sind. Die Folge ist nun, dafs die Reflexion des Schalles an den Enden so geschieht, als wenn die reflectirende Fläche in einer gewissen Entfernung von der Oeffnung des Rohres stände. Die Länge des Rohres, bis zu dieser ideellen Reflexionsfläche, sei als „die reducirte Länge“ der Röhre bezeichnet, während „die wahre Länge“ bis zur wirklichen Mündung des Rohres geht. Die Untersuchung dieses Falles macht gröfsere Hilfsmittel der Analyse nothwendig. Es ergiebt sich, wie wir weiter unten sehen werden, dafs z. B. bei den cylindrischen Röhren, deren Wand im rechten Winkel abgeschnitten ist, der Unterschied zwischen der wahren und reducirten Länge gleich dem mit $\frac{\pi}{4}$ multiplicirten Radius des Rohres ist. Die Differenz wird geringer, wenn das Rohr sich trompetenförmig erweitert, und dadurch der Uebergang zu Kugelwellen erleichtert wird, indem die Wellen schon früher anfangen, in Kugeln überzugehen, und bei einer gewissen trompetenartigen Form kann diese Differenz sogar gleich Null werden. Die Rechnung läfst sich aber nur für wenige Formen der Röhre durchführen.

Die Amplitude der zurückgeworfenen Wellen ist niemals so grofs, wie die der ankommenden Wellen, weil ein Theil der Wellenbewegung nach aufsen hin verloren geht, so dafs dadurch an dem Ende der Oeffnung kleine Differenzen entstehen, und die Regel, dafs man an dem Ende eines offenen Rohres den Druck gleich Null zu setzen hat, gilt nur genähert.

Bei den elastischen Stäben hingegen findet am freien Ende eines Stabes eine vollständige Reflexion der Schwingungen statt, indem hier nichts von der Bewegung verloren geht. Da ist eben der Stab zu Ende, und es ist kein weiteres Material vorhanden aufser der leichten Luft, welches noch in Erschütterung versetzt werden könnte. Das ist aber bei der Luft nicht der Fall, sondern wir müssen das Ende einer Luftsäule wie ein gedämpftes Ende betrachten. Die Energie der austretenden Schallbewegung geht ja der Energie der Luftsäule verloren, und aufserdem ist der Druck nicht vollständig constant, sondern es findet nur zwischen dem Druck und der Geschwindigkeit am Ende ein gewisses Verhältnifs statt, das durch die weitere Ausbreitung des Rohres bedingt wird. Abgesehen von diesem Umstand stimmen die Beobachtungen bei den offenen Orgelpfeifen mit der Regel überein, die von den elastischen Stäben hergenommen ist. Für die gedackten Pfeifen können wir eine beliebige Anzahl von schwingenden Abtheilungen bilden, jede eine halbe Wellenlänge lang. Für Pfeifen aber, die ein offenes und ein geschlossenes Ende haben, mufs die reducirte Länge immer eine viertel Wellenlänge Ueberschufs ergeben über eine Anzahl halber Wellenlängen, so dafs wir immer nur eine ungerade Anzahl von viertel Wellenlängen darin haben können. Um die Wellenlänge bei offenen Röhren zu bestimmen, kann man so verfahren, dafs man zwei Pfeifen vergleicht, welche verschiedene Länge, aber gleichen Querschnitt haben. Sind die Pfeifen zunächst völlig gleich, so setzt man auf die eine ein Ansatzstück und wählt die Länge dieses Ansatzstückes so, dafs der erste Oberton der verlängerten Röhre genau mit dem Grundton der unverlängerten übereinstimmt, dann mufs die Verlängerung gerade eine halbe Wellenlänge betragen. Es läfst sich dadurch der Einflufs des Umstandes eliminiren, dafs ein Unterschied zwischen der reducirten und wahren Länge besteht.

Was die Geschwindigkeit des Schalles betrifft, so würde, wenn die Luft bei ihrer Verdichtung und Verdünnung keine Temperaturänderungen erlitte, der Druck nach dem Mariotte'schen Gesetze als direct proportional der Dichtigkeit zu betrachten sein. Wir würden eine Gleichung von der Form $p = a^2 \cdot \varepsilon$ haben, und der Ausdruck $\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}$ würde einfach die Constante a^2 geben, die im Mariotte'schen Gesetze vorkommt. Oder wenn wir schreiben $p : p_0 = \varepsilon : \varepsilon_0$, wo p_0 der Druck im Ruhezustande und ε_0 die zugehörige Dichtigkeit ist, so würde a^2 das Verhältnifs sein, welches zwischen Druck und Dichtigkeit in der Ruhe vorkommt. Nun zeigt sich aber, dafs bei jeder Verdichtung der Luft auch eine Erwärmung stattfindet. Wir müssen dabei berücksichtigen, dafs die Schallbewegungen bei tieferen Tönen Wellenlängen bis zu 20 Meter haben und die bei höheren immer noch von mehreren Centimetern, und dafs hier eine Ausgleichung der Temperatur innerhalb solcher Dimensionen in den kurzen Zeiträumen von $^1/_{32}$ bis $^1/_{1000}$ Sekunde nicht sehr merklich sein wird, wenigstens bei den tieferen Wellen nicht. Die Abhängigkeit zwischen Druck und Dichtigkeit ist daher nahezu diejenige, welche für die adiabatischen Aenderungen stattfindet, d. h. für diejenigen Aenderungen, bei welchen keine Wärme der Luft fortgeleitet wird.

Wir bezeichnen mit c die specifische Wärme bei constantem Druck, d. h. diejenige Wärmemenge, welche die Masseneinheit des Gases zu sich nehmen mufs, damit die Temperatur um einen Grad steigt, wenn bei der Erwärmung der Druck constant bleibt, d. h. das Gas sich frei ausdehnen kann, und wir bezeichnen mit γ andererseits die specifische Wärme bei constantem Volumen, wo wir dieselbe Temperaturänderung in dem Gase vornehmen, aber es in ein festes Gefäfs einschliefsen, welches sich nicht ausdehnen läfst. Dann wird nämlich bei der Temperaturänderung gleichzeitig der Druck gesteigert werden; aber dieser Druck wird den Widerstand des Gefäfses nicht überwinden, und das Gas wird sein Volumen behalten. Dann ist die Abhängigkeit zwischen Druck und Dichtigkeit

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/c} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{1/\gamma}. \tag{264}$$

Daraus folgt, wenn wir den Logarithmus bilden:

$$\frac{1}{c}(\log p - \log p_0) = \frac{1}{\gamma}(\log \varepsilon - \log \varepsilon_0), \tag{264a}$$

und wenn wir die Gleichung differentiiren:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{dp}{p} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \tag{265}$$

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{c}{\gamma} \cdot \frac{p}{\varepsilon}, \tag{265a}$$

d. h. $\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}$ ist gleich $\frac{c}{\gamma}$, multiplicirt mit demjenigen Werthe, welcher beim MARIOTTE'schen Gesetz eintreten würde.

Danach ist also die Schallgeschwindigkeit durch die Erwärmung des Gases, wie sie durch die Zusammendrückung zu Stande kommt, eine andere als sie es sein würde, wenn die Abhängigkeit zwischen Druck und Dichtigkeit nach dem MARIOTTE'schen Gesetze stattfände. Die Thatsache, dafs die Schallbewegung von dem Werthe $\sqrt{\frac{p}{\varepsilon}}$ abweicht, ist schon von NEWTON bemerkt worden.

Bei anderen Flüssigkeiten kennen wir die specifischen Wärmen noch nicht so genau wie für die Luft; wir können also nur die Schallgeschwindigkeit empirisch bestimmen und rückwärts daraus auf das Verhältnifs der specifischen Wärmen schliefsen.

§ 48. Kugelförmige Wellen.

Die allgemeine Differentialgleichung (263):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

wird befriedigt, wenn wir setzen:

$$\varphi = \frac{\psi(r - a t)}{r},$$

wo ψ eine beliebige Function von $r - a t$ und r die Entfernung des variablen Punktes $x y z$ von einem festen Punkte $x_0 y_0 z_0$ bedeutet.

Dies läfst sich am Uebersichtlichsten zeigen, wenn man für $r - a t$ eine besondere Bezeichnung σ einführt. Dann wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d \psi}{d \sigma} \cdot \frac{d \sigma}{d t} = -\frac{a}{r} \cdot \frac{d \psi}{d \sigma} \tag{266}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{d^2 \psi}{d \sigma^2}. \tag{267}$$

Andererseits ist

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

und

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_0}{r}.$$

Mithin:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x - x_0}{r} = \frac{x - x_0}{r}\left[-\frac{1}{r^2}\psi + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{d\sigma}\right] \tag{268}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{1}{r}\left[-\frac{1}{r^2} \cdot \psi + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\psi}{d\sigma}\right] + \frac{(x - x_0)^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d\psi}{d\sigma}\right] \\
&= \frac{1}{r}\left[-\frac{1}{r^2}\psi + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{d\sigma}\right] + \frac{(x - x_0)^2}{r}\left[-\frac{1}{r^3}\frac{d\psi}{d\sigma} + \frac{3\psi}{r^4}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} - \frac{2}{r^3}\frac{d\psi}{d\sigma}\right] \\
&= \frac{1}{r} \cdot \left[-\frac{\psi}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\psi}{d\sigma}\right] \\
&\qquad + \frac{(x - x)^2}{r} \cdot \left[\frac{3\psi}{r^4} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2\psi}{d\sigma^2} - \frac{3}{r^3} \cdot \frac{d\psi}{d\sigma}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{269}$$

Die Ausdrücke für die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ gehen aus diesem Ausdruck hervor, wenn $x - x_0$ durch $y - y_0$ oder $z - z_0$ ersetzt wird.

Daraus ergiebt sich die Summe:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{3}{r}\left[-\frac{\psi}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{d\sigma}\right] + \left[\frac{3\psi}{r^4} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\psi}{d\sigma^2}\right.\\ &\quad \left. - \frac{3}{r^3}\frac{d\psi}{d\sigma}\right]\cdot\frac{1}{r}\cdot[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]\\ &= -\frac{3\psi}{r^3} + \frac{3}{r^2}\frac{d\psi}{d\sigma} + \left[\frac{3\psi}{r^4} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right]\cdot\frac{1}{r}\cdot r^2\\ &= \frac{1}{r}\frac{d^2\psi}{d\sigma^2}.\end{aligned}\right\}\tag{270}$$

Folglich ist

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r}\cdot\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} = a^2 \Delta\varphi. \tag{271}$$

Bei der Ableitung der Gleichung $\Delta\varphi = \frac{1}{r}\cdot\frac{d^2\psi}{d\sigma^2}$ sind Ausdrücke gegen einander weggehoben, welche r im Nenner haben. Wir müssen beachten, dafs diese Glieder für $r = 0$ unendlich grofs werden, und es daher für diesen Fall nicht ohne Weiteres richtig ist, sie gegen einander fortzuheben. Für den Punkt $r = 0$ bleibt daher die Erfüllung der Differentialgleichung zweifelhaft. Da a hier in der Differentialgleichung nur in der zweiten Potenz vorkommt, so mufs der Ausdruck $\frac{\psi(r - at)}{r}$ eine Lösung der Differentialgleichung bleiben, wenn man a in $-a$ verwandelt; $\varphi = \frac{\psi(r + at)}{r}$ mufs also auch eine Lösung der Differentialgleichung sein.

Da nun die Differentialgleichung homogen ist, so wird die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung sein. Mithin erhalten wir die allgemeinere Lösung:

$$\varphi = \frac{F(r - at)}{r} + \frac{G(r + at)}{r}, \tag{272}$$

wo F und G zwei willkürliche Functionen sind.

Eine Function von $(r - at)$ bezeichnet, wie wir schon oben sahen, eine Art der Veränderung, welche mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der wachsenden r fortschreitet. Das Einzige, was gegen die bisher betrachteten Fälle ebener Wellen geändert ist, besteht darin, dafs der Nenner r vorkommt, welcher anzeigt, dafs die Amplitude der Bewegung mit steigender Entfernung abnimmt. Es sind also durch $\frac{F(r-at)}{r}$ kugelförmige Wellen dargestellt, die mit der Geschwindigkeit a von dem Mittelpunkt $r = 0$ auslaufen, indem ihre Amplitude im Verhältnifs $\frac{1}{r}$ immer kleiner wird. Ebenso stellt $\frac{G(r+at)}{r}$ kugelförmige Wellen dar, welche aus der Entfernung gegen den Mittelpunkt fortlaufen, und deren Amplitude in dem Maafse, als sie sich dem Mittelpunkt der Bewegung nähern, proportional $\frac{1}{r}$ zunimmt.

Diese beiden Wellenbewegungen zusammen stellen eine Lösung der Differentialgleichung für alle Theile des unendlichen Raumes dar, mit Ausnahme des Mittelpunktes der Kugel. In dem Mittelpunkt müssen noch andere Bedingungen eintreffen, dort mufs ein Erregungspunkt sein, d. h. es mufs lebendige Kraft auf die Masse übertragen werden, oder für die zurücklaufenden Wellen mufs lebendige Kraft von dem Medium weggenommen werden und auf ein anderes Medium übergehen. Der Mittelpunkt ist demnach ein Punkt, in welchem besondere Einwirkungen stattfinden müssen, wenn sich diese Bewegung ausbilden soll.

Die Componente der Geschwindigkeit für die auslaufenden Wellen ist in der Richtung des Radius gleich:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{F'}{r} - \frac{F}{r^2}. \tag{273}$$

Der eine Theil $\frac{F'}{r}$ nimmt wie $\frac{1}{r}$, der andere Theil $-\frac{F}{r^2}$ wie $\frac{1}{r^2}$ mit steigender Entfernung ab. Wenn die Wellen in sehr grofse Entfernung gekommen sind, wo r sehr grofs ist, so verschwindet der zweite Theil gegen den ersten, und daher haben wir die Regel, dafs in grofsen Entfernungen die Geschwindigkeiten wie $\frac{1}{r}$ abnehmen. Dasselbe gilt auch von den zum Mittelpunkt hinlaufenden Kugelwellen.

Aus diesen Ausdrücken für Kugelwellen, die der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t} = a^2 \Delta \varphi$ genügen, lassen sich sehr leicht andere Lösungen bilden, indem man die Differentialgleichung, welche ja im ganzen Raume mit Ausnahme des erregenden Punktes erfüllt ist, nach den verschiedenen Coordinaten differentiirt, und zwar in beliebiger Wiederholung. Jeder der Differentialquotienten der für φ gefundenen Ausdrücke giebt eine neue Form für die Ausbreitung der Wellen. Wird die Gleichung z. B. nach x differentiirt, so können wir das Resultat in der Form schreiben:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = a^2 \Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right),$$

da wir die Reihenfolge der Differentiationen vertauschen können.

Ist daher φ irgend eine Lösung der Differentialgleichung, so ist $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung, welche für alle diejenigen Punkte gelten wird, wo $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ endliche Werthe hat. Es können dabei Ausnahmspunkte eintreten, in denen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ unendlich wird, namentlich, wenn Discontinuitätsflächen in der Lösung vorkommen. Aber soweit solche Ausnahmen nicht eintreten, stellt $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ eine zweite Integralform dar.

Statt nach x kann man nun auch nach einer der anderen Veränderlichen differentiiren und jeden der Differentialquotienten kann man noch beliebig oft differentiiren, entweder nach derselben oder nach einer anderen Variabeln; freilich nur so lange, als wir bei der Bildung dieser Differentialquotienten nicht auf Discontinuitäten stofsen, in denen die weiteren Differentialquotienten nicht mehr eindeutig zu bilden sind. Auf diese Weise kann aus

$$\varphi = \frac{F(r - a t)}{r}$$

die Lösung abgeleitet werden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{F(r - a t)}{r}\right] \cdot \frac{x - x_0}{r}. \tag{274}$$

Für $\frac{x - x_0}{r}$ können wir auch $\cos \alpha$ setzen; dann ist α der Winkel, welchen die Linie r mit der x-Axe bildet, so dafs wir also diese Gleichung auch schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{F(r - a t)}{r}\right] \cdot \cos \alpha \\ &= \cos \alpha \left[\frac{F'}{r} - \frac{F}{r^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{274a}$$

Dabei zeigt sich, dafs, wenn nach einer Richtung positive Werthe des $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ herauslaufen, nach der entgegengesetzten Seite negative herauslaufen werden; denn $\cos \alpha$ wechselt sein Zeichen, wenn α sich um 180^0 ändert. Ferner zeigt sich, dafs in dem rechten Winkel zur x-Axe keine Wirkung herauslaufen wird. Die Wellen verbreiten sich zwar kugelförmig, aber nicht mehr gleichmäfsig nach allen Richtungen, sondern nach einer Seite positiv, nach der andern negativ, und dazwischen, in der Aequatorialzone, wird keine Veränderung der Dichtigkeit stattfinden.

Jeder neue Differentialquotient, den man nach x, y, z bildet, giebt eine neue Vertheilung der Wellen, so dafs man auf diese Weise eine sehr grofse Anzahl von Wellenformen bilden kann, welche alle von einem Mittelpunkte auslaufen, aber mit sehr verschiedener Vertheilung nach den verschiedenen Richtungen des Raumes hin. Dabei ist darauf aufmerksam zu machen, dafs die Glieder, welche höhere Potenzen von r im Nenner haben, in grofser Entfernung gegen diejenigen verschwinden, welche die niederen Potenzen von r im Nenner haben. Bei jeder Differentiation schieben sich höhere Potenzen von $\frac{1}{r}$ ein, während doch immer auch die erste Potenz noch stehen bleibt. Beim zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ z. B. erhielten wir oben in Gleichung (269) die Glieder

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{F''}{r} \cos^2 \alpha + (1 - 3\cos^2 \alpha)\frac{F'}{r^2} - (1 - 3\cos^2 \alpha)\frac{F}{r^3}\,.$$

Das erste Glied stellt eine kugelförmige Welle dar, die nach allen Richtungen das gleiche Vorzeichen hat. Die anderen beiden Glieder dagegen entsprechen kugelförmigen Wellen, die in verschiedenen Richtungen verschiedenes Vorzeichen haben, bei denen also jede Kugelfläche nach dem Vorzeichen des Gliedes in Abtheilungen zerfällt. In grofser Entfernung überwiegt das erste Glied $\frac{F''}{r} \cos^2 \alpha$, das im Nenner die niedrigste Potenz von r enthält. Ein solches Glied, das nur die erste Potenz von r im Nenner hat, bleibt bei allen Differentiationen bestehen. Es enthält im Zähler einen Differentialquotienten von F und ein Product von Potenzen der Richtungscosinus. Es ergiebt sich daraus, dafs in sehr grofser Entfernung auf einem Stück fortschreitender Wellenfläche, welches einem begrenzten Theil der Kugel entspricht und dann beinahe eben geworden ist, die Fortbewegung einfach in Richtung des r geschieht. In einer grofsen Entfernung werden also die einzelnen Theile der Wellenflächen mit den Intensitäten, die sie haben, einfach in gerader Linie fortschreiten. Dadurch würde also die Schallbewegung sich dann schliefslich bei sehr weiter Ausbreitung einer Bewegung annähern, wie wir sie dem Lichte zuschreiben, wobei jedes Stück der Wellenfläche sich nur in gerader Linie oder senkrecht zu der Richtung der Wellenfläche gleichsam in einem Strahle fortschiebt. Die Zertheilung in Strahlen würde nur für Wellen gelten, die aus grofser Entfernung gekommen sind, und deren begrenztere Kugelstücke schon nahehin Ebenen geworden sind.

Man kann den Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ noch einer kleinen Umformung unterwerfen, wodurch derselbe eine andere, eine deutlichere physikalische Bedeutung bekommt. Statt nach x zu differentiiren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x - x_0}{r}$$

kann man die Differentiation auch nach x_0 ausführen. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x_0 - x}{r}$$

und mithin:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}.$$

Der Differentialquotient von φ nach x_0 kann nun auch betrachtet werden, als der durch $d x_0$ dividirte Unterschied der zwei Functionen φ, die zwei neben einander liegenden Erregungspunkten $x_0 + d x_0$, y_0, z_0 und $x_0 \, y_0 \, z_0$ angehören.

Wenn wir uns zwei benachbarte Erregungscentren vorstellen und die Wellen, die von ihnen ausgehen, bei dem einen Centrum dem Werthe $\frac{\varphi}{d x_0}$, beim andern $- \frac{\varphi}{d x_0}$ entsprechen lassen, so kann $- \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ als der Superposition beider Wellenzüge entsprechend betrachtet werden. Aehnliches gilt von den zweiten Differentialquotienten, die dann zwei benachbarten Paaren von Erregungscentren entsprechen.

So kann man überhaupt alle diese Wellenformen, welche durch Differentiation entstehen, betrachten als von einer Gruppe theils positiver, theils negativer Erregungspunkte herrührend, die in einem engen Raume zusammen liegen. Auch wird es dann verständlich, warum die Intensität in verschiedenen Richtungen verschieden ist. Bei $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ z. B. ist in dem einen Theil des Raumes der eine Punkt näher, der $\frac{\varphi}{d x_0}$ entspricht, in dem andern der andere, der $-\frac{\varphi}{d x_0}$ entspricht. Dazwischen kommen Raumpunkte vor, welche gleich weit von beiden entfernt sind, und wo daher $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = 0$ ist.

§ 49. Der Green'sche Satz und das Huyghens'sche Princip.

Die bisher betrachteten Wellen- oder Geschwindigkeitspotentiale, so nennt man die Lösungen der Gleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$, beziehen sich nun immer auf die Wellen, die von einem Punkte ausgehen oder zu einem Punkte hinlaufen. Wir müssen noch das vollständige Integral aufzustellen suchen, das einem beliebig gegebenen Anfangszustande entspricht, und zwar sowohl in Bezug auf Vertheilung der Dichtigkeit, als auch in Bezug auf die Anfangsgeschwindigkeiten. Das läfst sich nun in der That bewerkstelligen, gerade, wie wir es bei den mechanischen Systemen gezeigt haben, welche aus einer Anzahl discreter Punkte zusammengesetzt sind, die unter dem Einflufs der gegenseitig ausgeübten Kräfte einer Gleichgewichtslage nahe sind. Da haben wir gesehen, dafs wir die Bewegung zusammensetzen konnten aus den einzelnen Bewegungen, welche durch die Anfangserschütterung oder Anfangselongation jedes einzelnen Punktes für sich entstehen würden. Die Art der Addition wird hier aber etwas anders. Da wir hier continuirliche Massen haben, so wird an Stelle der Addition eine Integration der Wirkungen, die von continuirlich vertheilten Centren ausgehen, treten. Nun ist für diese Art der Integration ein in der Physik viel gebrauchter Satz nothwendig, der sogenannte Green'sche Satz, der übrigens nichts anderes ist, als eine Methode partieller Integration für continuirliche, beliebig begrenzte Räume. Wenn man auf beiden Seiten über einen beliebig begrenzten Raum integrirt, so ist

$$\int \frac{d}{dx}\left[\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}\right] dx\, dy\, dz = \int \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right] dx\, dy\, dz \quad (275)$$

Auf der linken Seite können wir die Integration nach x ausführen und bekommen

$$\int \overline{\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}}\, d y\, d z .$$

Das Zeichen $\overline{\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}}$ bedeutet dabei die Differenz der Grenzwerthe für den höchsten und niedrigsten Werth von x, welche für das betreffende Werthepaar y, z vorkommen. Ferner ist $d y\, d z$ der Querschnitt des prismatischen Raumes, auf den sich für jedes der vorkommenden Werthepaare y, z die Integration über x bezieht. Der prismatische Raum ist an den Seiten von Linien begrenzt, die der x-Axe parallel laufen und an seinen beiden Enden von Stücken der Oberfläche des ganzen Integrationsgebietes.

Bezeichnet $d\omega$ eines dieser Oberflächenstücke, so ist $d y\, d z$ gleich der Projection von $d\omega$ auf die $y z$-Ebene. Denkt man sich auf $d\omega$ eine Normale in das Integrationsgebiet hinein errichtet, dann ist der Winkel zwischen dieser Normale und der x-Axe an dem Ende des prismatischen Raumes, der dem kleinsten Werth von x entspricht, spitz, an dem anderen stumpf (Fig. 21).

Wird der Winkel mit α bezeichnet, so ist $d\omega . \cos\alpha$, je nachdem α spitz oder stumpf ist, gleich $+ d y\, d z$ oder $- d y\, d z$.

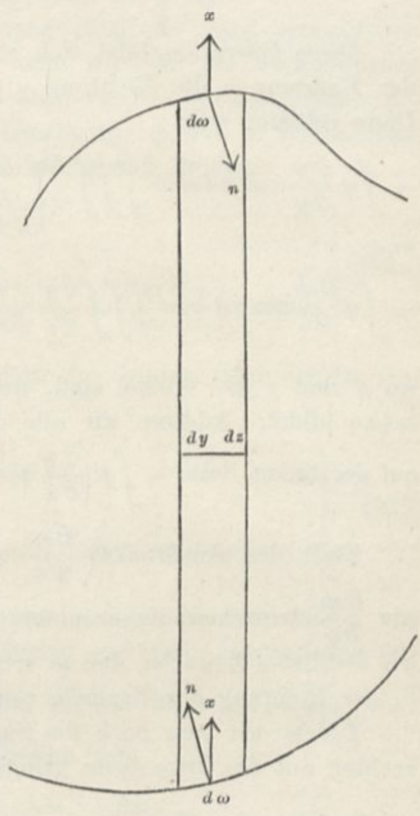

Fig. 21.

Daher können wir die Differenz $\overline{\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}}\, d y\, d z$ durch die Summe der beiden Werthe ausdrücken, die der Ausdruck $- \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos\alpha\, d\omega$ an den beiden Enden des prismatischen Raumes annimmt.

Mithin wird das ganze Integral über die sämmtlichen prismatischen Räume gleich dem über die ganze Oberfläche des Integrationsgebietes erstreckten Integral $-\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \alpha \, d\omega$.

Und wir erhalten die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} -\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \alpha \, d\omega = \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx\, dy\, dz \\ + \iiint \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \, dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right\} \quad (275\text{a})$$

Diese Operation läſst sich ebenso ausführen, indem wir statt der Richtung x die Richtung y oder die Richtung z substituiren. Dann erhalten wir:

$$-\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \beta \, d\omega = \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \, dx\, dy\, dz + \iiint \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \, dx\, dy\, dz$$

und

$$-\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos \gamma \, d\omega = \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \, dx\, dy\, dz + \iiint \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \, dx\, dy\, dz,$$

wo β und γ die Winkel sind, welche die Normale mit der y- und z-Axe bildet. Addiren wir alle drei Gleichungen, so erhalten wir auf der linken Seite $-\int \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos \gamma \right) d\omega$.

Statt des Ausdruckes $\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos \gamma$ können wir $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ schreiben, da er nichts Anderes bedeutet, als den durch dn dividirten Zuwachs, den ψ erfährt, wenn man um das Stück dn in der Richtung der Normale von $d\omega$ aus ins Innere geht.

Indem wir nun noch die Summe der zweiten Glieder von der rechten auf die linke Seite bringen, erhalten wir die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} -\int \varphi \frac{\partial \psi}{d n} d\omega - \iiint \varphi \,.\, \Delta \psi \, dx\, dy\, dz \\ = \iiint \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] dx dy dz. \end{aligned}\right\} (276)$$

Damit nun aber diese Rechnungsweise erlaubt sei, muſs vorausgesetzt werden, daſs die Gröſse φ und die Differentialquotienten von φ und ψ, die hier vorkommen, einen endlichen eindeutigen

Sinn haben innerhalb der ganzen Ausdehnung der Integration. Die Functionen dürfen nicht mehrdeutig sein; man darf auch auf Umwegen nicht zu anderen Werthen kommen. Von der Gröſse φ kommen in Betracht diese selbst und ihre ersten Differentialquotienten, von der Gröſse ψ diese selbst und ihre ersten und zweiten Differentialquotienten. Es ist auch zu bemerken, daſs wir hier auf verschiedenen Wegen zu den einzelnen Flächenstücken $d\omega$ kommen; einmal sind wir von der yz-Ebene ausgegangen in der Richtung der x-Axe, ein anderes Mal von der xz-Ebene in der Richtung der y-Axe oder von der xy-Ebene in der Richtung der z-Axe.

Die rechte Seite der Gleichung (276) ist ganz symmetrisch nach den Functionen φ und ψ; wenn wir also die Voraussetzung der Eindeutigkeit und Endlichkeit auch auf die zweiten Differentialquotienten von φ ausdehnen, so können wir φ und ψ vertauschen, ohne daſs die rechte Seite der Gleichung sich ändert:

$$\left.\begin{aligned}-\int\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\omega-\iiint\psi\,.\,\Delta\varphi\,.\,dx\,dy\,dz\\=\iiint\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right].dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right\}\quad(276\,\mathrm{a})$$

Mithin sind auch die linken Seiten der beiden Gleichungen einander gleich:

$$\left.\begin{aligned}-\int\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\omega-\iiint\varphi\,\Delta\psi\,dx\,dy\,dz\\=-\int\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\omega-\iiint\psi\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right\}\quad(277)$$

Hier wollen wir nun die Voraussetzung einführen, daſs φ und ψ Wellenpotentiale seien; dann können wir statt $\Delta\varphi$ und $\Delta\psi$ einsetzen $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ und $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$. Indem wir nun noch auf beiden Seiten über t von t_0 bis t_1 integriren, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}-\int_{t_0}^{t_1}dt\int\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\omega-\frac{1}{a^2}\int_{t_0}^{t_1}dt\iiint\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dx\,dy\,dz\\=-\int_{t_0}^{t_1}dt\int\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\omega-\frac{1}{a^2}\int_{t_0}^{t_1}dt\iiint\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right\}\quad(278)$$

Die zweiten Integrale jeder Seite können wir partiell integriren und finden, wenn wir der Kürze halber das Raumelement $dx\,dy\,dz$

mit dS bezeichnen und für den Raum nur ein Integrationszeichen schreiben, auf der linken Seite

$$\left.\begin{aligned} & -\frac{1}{a^2}\int_{t_0}^{t_1} dt \int \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\, dS \\ & = -\frac{1}{a^2}\Bigg[\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dS\Bigg]_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{a^2}\int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dS. \end{aligned}\right\} \tag{279}$$

Eine analoge Umformung ergiebt sich für das zweite Integral der rechten Seite.

Setzen wir diese Werthe ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} & -\int_{t_0}^{t_1} dt \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\omega - \frac{1}{a^2}\Bigg[\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dS\Bigg]_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{a^2}\int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dS \\ & = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, \partial\omega - \frac{1}{a^2}\Bigg[\int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dS\Bigg]_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{a^2}\int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t}\, dS \end{aligned}\right\} \tag{278a}$$

oder wenn das dritte Integral auf beiden Seiten gehoben wird:

$$\left.\begin{aligned} & -\int_{t_0}^{t_1} dt \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\omega - \frac{1}{a^2}\Bigg[\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dS\Bigg]_{t_0}^{t_1} \\ & = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\omega - \frac{1}{a^2}\Bigg[\int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dS.\Bigg]_{t_0}^{t_1} \end{aligned}\right\} \tag{278b}$$

Das erste Integral jeder Seite ist über die ganze Zeit zu erstrecken, bezieht sich aber nur auf die Begrenzung des Raumes; das zweite Integral hingegen ist über den ganzen Raum zu erstrecken, bezieht sich aber nur auf die Grenzen der Zeit.

Wenn Punkte oder Flächen vorkommen, in denen φ und ψ und ihre ersten und zweiten Differentialquotienten der Voraussetzung der Endlichkeit nicht genügen, so dürfen sie nicht zum Integrationsgebiet gehören. Punkte schaltet man aus durch eine geschlossene Fläche, z. B. durch eine Kugelfläche, die man dann beliebig eng zusammenziehen kann. So sind z. B. Unstetigkeitspunkte von φ und ψ auszuschalten; denn sie sind als Stellen aufzufassen, wo die ersten Differentialquotienten unendlich werden. Ebenso sind Unstetigkeitsstellen der ersten Differentialquotienten auszuschalten. Bilden die Unstetigkeitspunkte Flächen, so kann man sie zu den Grenzen des Raumes rechnen, wobei aber beide Seiten für sich zu betrachten sind.

Nun wollen wir für ψ eine bestimmte Function annehmen und wollen setzen:

$$\psi = \frac{F(r + a t)}{r},$$

wo r die Entfernung von irgend einem bestimmten Punkte sein soll, der bei dieser Function als Wellenerregungspunkt anzusehen ist. Statt $r + a t$ wollen wir der Kürze halber wie früher σ schreiben, so dafs also:

$$\psi = \frac{F(\sigma)}{r}.$$

Da wird in demjenigen Punkte, von dem aus die Werthe von r gerechnet werden, und in dem $r = 0$ wird, die Function ψ unendlich grofs werden, weil an einem solchen Punkte für einen constanten Werth von r nicht dauernd $F(\sigma)$ gleich Null sein kann; denn σ enthält auch noch die Zeit, und ändert am selben Orte nothwendig seinen Werth mit der Zeit, so dafs es keinen constanten Werth repräsentiren kann. Wir müssen deshalb den Punkt, wo $r = 0$ ist, umgeben denken von einer Kugel, die wir beliebig klein annehmen können. Dadurch bekommen wir in der Gleichung (278b) noch ein Grenzintegral, das sich auf die Kugelfläche bezieht. Wir wollen ferner annehmen, dafs die Function $F(\sigma)$ nur für absolut sehr kleine Werthe von σ einen merklich von Null verschiedenen Werth hat. Wir können einen solchen Ausdruck für $F(\sigma)$ angeben, dafs die Werthe von σ, für welche $F(\sigma)$ merklich von Null verschieden ist, absolut beliebig klein sind, zugleich aber doch $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F d\sigma$ einen von Null verschiedenen, nicht beliebig klein werdenden Werth habe. Es würde z. B. die Annahme genügen:

$$F = \frac{1}{\pi} \frac{h}{h^2 + \sigma^2}. \tag{279}$$

Wenn h sehr klein ist, wird F für kleine Werthe von σ^2 sehr grofs, und nimmt mit wachsendem σ^2 rasch bis zu beliebig kleinen Werthen ab. Der Werth von $F(\sigma)$ unterscheidet sich nur in einem sehr schmalen Intervall merklich von Null — in einem um so schmaleren Intervall, je kleiner h ist. Dabei ist:

$$\int_{-\sigma_1}^{+\sigma_1} F(\sigma)\,d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_{-\sigma_1}^{+\sigma_1} \frac{h\,d\sigma}{h^2+\sigma^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\sigma_1}^{+\sigma_1} \frac{d\left(\frac{\sigma}{h}\right)}{1+\left(\frac{\sigma}{h}\right)^2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1}{h}\right). \quad (280)$$

Der Werth des Integrals ist also, sobald nur σ_1 grofs gegen h ist, ohne dafs σ_1 schon absolut grofs zu sein braucht, beliebig wenig von dem Werthe für $\sigma_1 = \infty$ verschieden, der gleich 1 ist.

Nun wollen wir den Ausdruck $\frac{F(\sigma)}{r}$ für ψ in die Gleichung (278b) einführen, wobei aber das Oberflächenintegral auch über die kleine Kugel zu erstrecken ist, die den Punkt $r = 0$ aus dem Integrationsgebiet ausschliefst. Berechnen wir zunächst den Werth des Integrals

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\omega$$

für die Oberfläche der kleinen Kugel. Dort ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{F(\sigma)}{r^2} + \frac{F'(\sigma)}{r};$$

denn die ins Innere des Integrationsgebietes gerichtete Normale fällt in die Richtung des wachsenden Radius. Statt des Flächenelementes $d\omega$ der kleinen Kugel wollen wir das Flächenelement $d\Omega$ einer concentrischen Kugel vom Radius 1 einführen. Dann ist $d\omega = r^2\, d\,\Omega$. Es mifst also $d\,\Omega$ die Oeffnung des Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkt liegt, und dessen Basis $d\omega$ ist.

Dann wird

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\omega = \int_{t_0}^{t_1} dt \int \varphi\, F(\sigma)\, d\,\Omega - \int_{t_0}^{t_1} dt \int \varphi\, F'(\sigma) \,.\, r\, d\,\Omega.$$

Da $F'(\sigma)$ für alle Werthe von σ einen endlichen Werth hat und φ ebenfalls endlich vorausgesetzt ist, so wird das zweite Integral beliebig klein, wenn die Kugel hinreichend klein gemacht wird. Das zweite Integral fällt daher fort. In dem ersten Integral wollen wir statt t die Gröfse

$$\sigma = r + a\,t$$

als Veränderliche einführen. Da r constant ist, so wird $d\sigma = a\,d\,t$ und wir erhalten:

$$\frac{1}{a}\int\limits_{r+a t_0}^{r+a t_1} d\,\sigma \,.\int \varphi\, F(\sigma)\, d\,\Omega.$$

In der Function φ mufs ebenfalls t durch $\frac{\sigma - r}{a}$ ersetzt gedacht werden. Da nun φ als stetig vorausgesetzt wird, so wird es für jeden gegebenen Werth von σ seinen Werth auf der Oberfläche der kleinen Kugel nur sehr wenig ändern. Für eine hinreichend kleine Kugel ist also φ nur als Function von σ anzusehen. Daher wird das Integral für $r = 0$ gleich:

$$\frac{1}{a}\int\limits_{a t_0}^{a t_1} .\,\varphi\, F(\sigma)\,.\,4\pi\, d\,\sigma.$$

In der Function φ ist dabei $r = 0$ zu setzen. Nun ist $F(\sigma)$ nur für Werthe von σ, die in der Nähe von $\sigma = 0$ liegen, merklich von Null verschieden. Daher wird auch das Product

$$\varphi\,.\,F(\sigma)$$

nur bei $\sigma = 0$ merklich von Null verschieden sein. Es macht daher bei der vorausgesetzten Stetigkeit von φ nur einen beliebig kleinen Unterschied, wenn für φ der Werth gesetzt wird, den es für $\sigma = 0$ annimmt. Dann aber kann φ aus dem Integral herausgezogen werden. Da nun ferner

$$\int\limits_{a t_0}^{a t_1} F(\sigma)\, d\,\sigma,$$

sobald der Zeitpunkt $t = 0$ zwischen t_0 und t_1 liegt, beliebig wenig von 1 verschieden ist, so ist der ganze Ausdruck für hinreichend kleine Werthe von h beliebig wenig von

$$\frac{1}{a}\cdot 4\pi\,.\,\varphi$$

verschieden.

Das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung (278b)

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1} d\,t \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\,\omega$$

wird über die kleine Kugel erstreckt verschwinden. Denn wenn wieder $d\,\omega = r^2\, d\,\Omega$ gesetzt wird, so ergiebt sich

$$-\int_{t_0}^{t_1} d\,t \int \frac{F(\sigma)}{r}\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,n}\,r^2\,d\,\Omega = -\int_{t_0}^{t_1} d\,t \int F(\sigma)\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,n}\,r\,d\,\Omega,$$

was bei der vorausgesetzten Endlichkeit von $\dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,n}$ für $r=0$ Null wird.

Die Oberflächenintegrale der Gleichung (278b) sind jetzt also nur noch auf die äufsere Grenze des Integrationsgebietes zu beziehen. Die Gleichung kann jetzt geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4\pi}{a}\,\varphi_{\substack{t=0\\ r=0}} &= \frac{1}{a^2}\int \overline{\left.\varphi\frac{\partial\,\psi}{\partial\,t} - \psi\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,t}\,d\,S\right.}^{\,t_1}_{\,t_0} \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} d\,t\int\left(\varphi\frac{\partial\,\psi}{\partial\,n} - \psi\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,n}\right)d\,\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (281)$$

Die Gleichung liefert uns also den Werth von φ zur Zeit $t=0$ und an der Stelle $r=0$. Wollen wir den Werth von φ an einer anderen Stelle des Raumes wissen, so müssen wir in der Function ψ das r auf diese Stelle des Raumes beziehen. Wollen wir den Werth von φ nicht in dem Augenblick $t=0$, sondern zu einer anderen Zeit t' haben, so brauchen wir in dem Ausdruck $\psi = \dfrac{F(\sigma)}{r}$ nur σ gleich $r + a(t-t')$ zu setzen; dann wird $\sigma = 0$ für $r=0$ und $t=t'$ und das über die Oberfläche der kleinen Kugel genommene Integral

$$-\int_{t_0}^{t_1} d\,t\int \varphi\frac{\partial\,\psi}{\partial\,n}\,d\,\omega$$

liefert beim Zusammenziehen der Kugel den Werth $\dfrac{4\pi}{a}\,\varphi_{\substack{t=t'\\ r=0}}$.

Es mufs aber t' zwischen t_0 und t_1 liegen, damit $\displaystyle\int_{a t_0}^{a t_1} F(\sigma)\,d\,\sigma$ gleich 1 wird. Die Gleichung (281) liefert uns mithin den Werth $\dfrac{4\pi}{a}\,\varphi_{\substack{t=t'\\ r=0}}$, wenn auf der rechten Seite

$$\psi = \frac{F\big(r + a(t-t')\big)}{r}$$

gesetzt wird.

Es ist dann also

$$\left.\begin{aligned}\frac{4\pi}{a}\varphi_{\substack{t=t'\\ r=0}} &= \frac{1}{a^2}\int \Big[\varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big]_{t_0}^{t_1} dS\\ &\quad+\int_{t_0}^{t_1} dt\int\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\omega.\end{aligned}\right\}\qquad(281\,\mathrm{a})$$

Wenn wir uns die Begrenzung des Raumes so weit hinausgeschoben denken, daſs die Erregung des Schalles in dem betrachteten Zeitraum t_0 bis t_1 noch nicht bis zur Grenze gelangt ist, so sind an der Grenze φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ gleich Null, und es verschwinden in Folge dessen die Oberflächenintegrale.

Von dem Raumintegral betrachten wir zunächst den Theil

$$\frac{1}{a^2}\int\Big[\varphi\frac{d}{dt}\left(\frac{F(\sigma)}{r}\right)\Big]_{t_0}^{t_1} dS.$$

Denken wir uns den Raum durch concentrische Kugelflächen um den Punkt $r = 0$ und durch Kegel, die ihre Spitze bei $r = 0$ haben, zertheilt, so ist

$$dS = r^2 . d\Omega\, dr$$

und wir erhalten

$$\frac{1}{a^2}\int\Big[\varphi\frac{d}{dt}\left(\frac{F(\sigma)}{r}\right)\Big]_{t_0}^{t_1} r^2 d\Omega\, dr = \frac{1}{a^2}\int\Big[\varphi . a F'(\sigma) r\, d\Omega\, dr\Big]_{t_0}^{t_1}.$$

Nun ist $F'(\sigma)$ ebenso wie $F(\sigma)$ nur in der Nähe von $\sigma = 0$ merklich von Null verschieden. Da $t = t'$ zwischen t_0 und t_1 liegen soll, so ist $t_1 - t'$ positiv, und da $\sigma = r + a(t - t')$ und r nicht negativ sein kann, so kann für $t = t_1$ der Werth von σ nicht Null werden. Mithin verschwindet $F'(\sigma)$ für $t = t_1$ und wir brauchen nur die untere Grenze $t = t_0$ zu beachten

$$-\frac{1}{a^2}\int\varphi . a . F'\big(r + a(t_0 - t')\big)\, r\, d\,\Omega\, dr.$$

In der Function φ ist dabei auch $t = t_0$ zu setzen. Hier wird die Sache insofern anders, als nun r Werthe haben kann, für die $r + a(t_0 - t')$ sehr klein und daher $F'\big(r + a(t_0 - t')\big)$ von merklicher Gröſse wird.

Diesen Ausdruck wollen wir partiell nach r integriren und erhalten:

$$-\frac{1}{a}\int \varphi . F . r . d\Omega + \frac{1}{a}\int F\frac{d}{dr}(r . \varphi) . dr\, d\Omega.$$

Hierin ist t überall gleich t_0 gesetzt und in dem ersten Integral mufs r den gröfsten der in dem betreffenden Kegel von der Oeffnung $d\Omega$ vorkommenden Werthe von r bedeuten. Für diesen gröfsten Werth von r wird nun aber nach der Voraussetzung $r + a(t_0 - t')$ erheblich gröfser als Null sein müssen. Denn $a(t_0 - t')$ ist zwar negativ; kann aber r nicht aufheben, weil $a(t' - t_0)$ der Weg ist, den eine Welle in der Zeit zwischen t_0 und t' zurücklegt und nach unserer Voraussetzung die Grenze so weit entfernt sein soll, dafs eine Erregung innerhalb des betrachteten Zeitintervalls t_0 bis t' noch nicht bis zur Grenze hat gelangen können. Mithin ist in dem ersten Integral F unmerklich klein und ebenso verschwindet nach der Voraussetzung φ an der Grenze, mithin fällt das erste Integral weg.

Von dem zweiten Theil des Raumintegrals (281a)

$$-\frac{1}{a^2}\int \overline{\underline{\psi\frac{\partial\varphi}{\partial t}}}_{t_0}^{t_1} dS = -\frac{1}{a^2}\int \overline{\underline{F\frac{\partial\varphi}{\partial t}}}_{t_0}^{t_1} r\, dr\, d\Omega$$

verschwindet ebenso wie beim ersten Theil der Werth für die obere Grenze $t = t_1$. Von der Gleichung bleibt demnach

$$\frac{4\pi}{a}\varphi_{\substack{t=t'\\ r=0}} = \frac{1}{a^2}\int\left[a\frac{d}{dr}(r\varphi) + r\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]F\, dr\, d\Omega \tag{282}$$

wo auf der rechten Seite $t = t_0$ gesetzt ist.

Nun ist $F(r + a(t_0 - t'))$ nur bei $r = -a(t_0 - t')$ merklich von Null verschieden. Wenn wir daher in

$$a\frac{d}{dr}(r\varphi) + r\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$r = -a(t_0 - t')$ setzen, so wird der Werth des Integrals dadurch nicht merklich geändert. Dann ist aber

$$a\frac{d}{dr}(r\varphi) + r\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

von r ganz unabhängig und für die Integration über r eine Constante. Führen wir nun statt r die Gröfse

$$\sigma = r + a(t_0 - t')$$

als Variable ein, so erhalten wir:

$$\int\left[a\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)+r\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]F(\sigma)\,d\sigma\,d\Omega,$$

wobei σ von $a(t_0-t')$ bis zu dem gröfsten Werthe läuft, den $r+a(t_0-t')$ im Integrationsgebiet annimmt. Dieser Werth mufs positiv sein, weil nach der Voraussetzung die Grenzen so weit liegen, dafs eine Welle sie in der Zeit t_0 bis t_1, also auch in der Zeit t_0 bis t' noch nicht erreichen kann, der Weg $-a(t_0-t')$ also kleiner sein mufs, als der gröfste Werth von r in jeder beliebigen Richtung. Mithin liegt der Werth $\sigma=0$ zwischen den Integrationsgrenzen und daher wird bei Integration über σ

$$\int\left[a\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)+r\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]F(\sigma)\,d\sigma\,d\Omega$$

beliebig wenig von

$$\int\left[a\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)+r\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]d\Omega$$

verschieden, und für den Grenzwerth $h=0$ in dem Ausdruck für $F(\sigma)$ erhalten wir endlich:

$$\frac{4\pi}{a}\varphi_{\substack{t=t'\\r=0}}=\frac{1}{a^2}\int\left[a\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)+r\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{\substack{t=t_0\\r=-a(t_0-t')}}d\Omega \tag{283}$$

oder

$$4\pi a\,\varphi_{\substack{t=t'\\r=0}}=\int\left[a\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)+r\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{\substack{t=t_0\\r=-a(t_0-t')}}d\Omega \tag{283a}$$

Diese Gleichung können wir anschaulich deuten, indem wir bemerken, dafs das Integral der rechten Seite über die Oberfläche einer Kugel vom Radius $a(t'-t_0)$ erstreckt ist. Dieser Radius ist gerade gleich dem Wege, den eine Schallwelle in der Zeit $t'-t_0$ zurücklegen würde. Eine Welle, die zur Zeit t_0 von einem Punkt der Kugeloberfläche ausgeht, würde also gerade in dem Augenblick t' in dem betrachteten Punkt $r=0$ eintreffen. Es ist also der Werth von φ zur Zeit t' im Punkte $r=0$ zusammengesetzt aus Wellen, die zur Zeit t_0 von den Punkten der Kugeloberfläche ausgegangen sind und nun zur Zeit t' alle zugleich im Punkte $r=0$ eintreffen. Diese Wellen sind gegeben, wenn zur Zeit t_0 die Werthe von φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ auf der Kugelfläche gegeben sind.

Wir definirten oben, Gleichung (261), das Wellenpotential φ durch die Gleichung

$$\varphi = -a^2 \int_{t_0}^{t} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\, dt,$$

so dafs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -a^2 \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

ist. Es sind also φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ mit der Dichtigkeit gegeben, $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ dagegen ist nach den Gleichungen (261) die Componente der Geschwindigkeit in der Richtung des Radius r.

Wir können also sagen, dafs sowohl durch die Geschwindigkeiten der Lufttheilchen, wie durch die Verdichtungen Wellen erregt werden, die zur Zeit t_0 von der Oberfläche der Kugel vom Radius $a(t' - t_0)$ ausgehend, nun zu der gegebenen Zeit t' Wirkungen in dem gegebenen Punkte hervorrufen.

Wenn wir nun die Voraussetzung fallen lassen, dafs die Begrenzung des Raumes so weit hinausgerückt ist, um von den Schallwellen in der Zeit t_0 bis t_1 noch nicht erreicht zu sein, so kommen in der Gleichung (281 a) auch die Oberflächen-Integrale in Betracht. Diese Integrale lassen sich nun ganz ähnlich so umbilden, wie die bisher gebildeten Integrale. Sie unterscheiden sich aber darin wesentlich von den bisher betrachteten Integralen, dafs in ihnen auch nach der Zeit integrirt wird.

Ihre physikalische Bedeutung ist, dafs von den Grenzflächen wieder Schallerregungen ausgehen, die auf die Bewegung in jedem Punkt des Raumes einwirken. Im Uebrigen wird nun durch die Art der Festigkeit der Grenzfläche bestimmt, wie die Erregungen dort vor sich gehen. So wird z. B. bei einer festen Grenzfläche, welche durch die Luft nicht von ihrer Stelle gedrängt werden kann, nothwendig $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, das ist die Componente der Geschwindigkeit senkrecht zur Grenzfläche, überall Null sein müssen, weil hier keine Bewegung der Luft in die feste Fläche hinein, und auch kein Loslösen von der Grenzfläche stattfinden kann.

Wir wollen die Annahme machen, dafs der Raum, über welchen in der Gleichung (281 a) die Integration ausgedehnt wird, endlich sei, und dafs die Zeit t_0 so weit zurückgelegt werde, dafs für den gröfsten im Raume vorkommenden Werth von r immer noch $r + a(t_0 - t')$

negativ ist. Dann verschwindet auf der rechten Seite der Gleichung (281 a) das Raumintegral, weil σ für $t = t_1$ positiv und für $t = t_0$ negativ ist und mithin ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ im ganzen Raume für beide Zeitpunkte unmerklich klein sind. Wir erhalten daher unter dieser Annahme:

$$4\pi \varphi_{\substack{t=t'\\r=0}} = a\int_{t_0}^{t_1} dt \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\omega, \tag{284}$$

wo wieder

$$\psi = \frac{F(r + a(t - t'))}{r},$$

und wo $d\omega$ ein Element der Grenzfläche bedeutet. Der Raum ist dabei ganz beliebig, wofern nur überall die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

erfüllt ist, und die Function φ sowohl wie ihre ersten und zweiten Differentialquotienten, so weit diese vorkommen, endliche Werthe hat. Setzen wir für ψ seinen Werth und führen wir bei der Differentiation nach n die Entfernung r ein, so geht die Gleichung (284) über in:

$$4\pi \varphi_{\substack{t=t'\\t=0}} = a\int_{t_0}^{t_1} dt \int \left[\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(\sigma)}{r}\right) - \frac{F(\sigma)}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] \frac{\partial r}{\partial n} d\omega. \tag{284a}$$

Für $\frac{\partial r}{\partial n}$ kann auch der Cosinus des Winkels geschrieben werden, den die Normale mit der Richtung des Radius r macht. Die Differentiation nach r wollen wir ausführen und können dann schreiben:

$$4\pi \varphi_{\substack{t=t'\\r=0}} = a\int_{t_0}^{t_1} dt \int \left[-\frac{\varphi}{r^2} F(\sigma) + \frac{\varphi}{r} F'(\sigma) - \frac{F(\sigma)}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] \frac{\partial r}{\partial n} d\omega. \tag{284b}$$

Statt t wollen wir die Veränderliche $\sigma = r + a(t - t')$ einführen:

$$4\pi \varphi_{\substack{t=t'\\r=0}} = \int_{r+a(t_1-t')}^{r+a(t_0-t')} d\sigma \int \left[-\frac{\varphi}{r^2} F(\sigma) + \frac{\varphi}{r} F'(\sigma) - \frac{F(\sigma)}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] \frac{\partial r}{\partial n} . d\omega, \tag{284c}$$

wo auch in der Function φ die Variable t durch $t' + \frac{\sigma - r}{a}$ zu ersetzen ist.

Nun wird wieder $F(\sigma)$ nur bei $\sigma = 0$ merklich von Null verschieden sein. Daher wird in dem ersten und dritten Theile des Integrals

$$-\int d\sigma \int \varphi \cdot \frac{1}{r^2} \cdot F(\sigma) \frac{\partial r}{\partial n} d\omega - \int d\sigma \int \frac{F(\sigma)}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\omega$$

keine merkliche Aenderung bewirkt, wenn in φ der Werth von σ gleich Null gesetzt wird. Dann läſst sich die Integration über σ ausführen und da die Grenzen $r + a(t_0 - t')$ bis $r + a(t_1 - t')$ den Werth Null einschlieſsen, so erhalten wir, weil

$$\int F(\sigma) d\sigma = 1$$

ist, für den ersten und dritten Theil des Integrals den Ausdruck:

$$-\int \left[\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right]_{t = t' - \frac{r}{a}} \frac{\partial r}{\partial n} d\omega,$$

wo für t der Werth $t' - \dfrac{r}{a}$ eingesetzt ist, der σ zum Verschwinden bringt. Den zweiten Theil $\int d\sigma \cdot \int \varphi \cdot \frac{1}{r} \cdot F'(\sigma) \frac{\partial r}{\partial n} d\omega$ formen wir durch partielle Integration um, indem wir zunächst die Variable t beibehalten; wir erhalten dann

$$\overline{\underline{\int \varphi F(\sigma) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\omega}}_{t_0}^{t_1} - \int dt \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} F(\sigma) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\omega,$$

denn $F'(\sigma)$ ist gleich $\dfrac{1}{a} \dfrac{\partial F(\sigma)}{\partial t}$. Das erste Integral ist für die obere Grenze Null, da $r + a(t_1 - t')$ positiv ist. Da wir angenommen haben, daſs kein Theil der Grenze so weit entfernt sei, daſs die Entfernung den Werth $-a(t_0 - t')$ von dem betreffenden Punkte übertreffe, so wird der Werth des ersten Integrals auch für die untere Grenze Null.

Führen wir in das zweite Integral jetzt wieder σ anstatt t ein, so erhalten wir:

$$-\frac{1}{a} \int d\sigma \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} F(\sigma) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\omega.$$

Bei der Integration über σ kommen wieder nur die Werthe in der Nähe von Null in Betracht. Wir können in $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ daher

$$t = t' - \frac{r}{a}$$

setzen und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für die Integration über σ als constant betrachten. Dann wird das Integral gleich

$$-\frac{1}{a}\int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} d\omega .$$

Mithin erhalten wir im Ganzen:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\,\varphi_{\substack{t=t'\\ r=0}} &= -\int \left[\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{ar}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_{t=t'-\frac{r}{a}} \frac{\partial r}{\partial n} d\omega \\ &= -\int \left[\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{ar}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_{t=t'-\frac{r}{a}} \frac{\partial r}{\partial n} d\omega - \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{t=t'-\frac{r}{a}} d\omega . \end{aligned}\right\} \quad (284\text{d})$$

Der Werth $\frac{r}{a}$ entspricht der Zeit, die eine Welle braucht, um von dem betreffenden Punkt der Grenze nach dem Punkt zu gelangen, in dem der Werth von φ berechnet werden soll. Da nun für t der Werth $t' - \frac{r}{a}$ eingesetzt wird, so setzt sich demnach der Werth von φ zur Zeit $t = t'$ aus den Werthen zusammen, die φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ an den Punkten der Grenzfläche vor $\frac{r}{a}$ Zeiteinheiten besafsen.

Der Zustand eines Theilchens der Grenzfläche, das in der Entfernung r von dem betrachteten Punkte $r = 0$ liegt, schickt seine Einwirkungen nach dem betrachteten Punkte, und diese treffen nach Verlauf der Zeit $\frac{r}{a}$ dort ein. Die Einwirkungen, die zur Zeit $t' - \frac{r}{a}$ von dem Theilchen ausgehen, treffen also zur Zeit t' ein und setzen den Werth von φ zusammen.

Die Oberflächen fester Körper, die in dem Integrationsraume liegen, müssen mit zur Grenzfläche gerechnet werden. Denn die ersten Differentialquotienten von φ ändern sich beim Uebergange in das Innere des Körpers, wo keine Bewegung mehr stattfindet, im Allgemeinen sprungweise, und die zweiten Differentialquotienten sind hier mithin nicht als endlich zu betrachten. An der Grenze des festen Körpers ist, wie schon oben bemerkt wurde, die Geschwindigkeitscomponente in Richtung der Normale gleich Null, und es fällt daher in der Gleichung (284d) an der Grenze des festen Körpers der Theil fort, welcher $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ enthält.

Indem wir die physikalische Bedeutung der Raum- und Flächenintegrale der Gleichung (281a) zusammenfassen, können wir sagen, dafs von jedem Punkte des Raumes, in dem die Luft eine von Null verschiedene Geschwindigkeit oder Verdichtung besitzt, Einwirkungen ausgehen, die eine gewisse Zeit brauchen, um sowohl nach dem Punkte zu gelangen, für welchen wir das Schallpotential suchen, als auch nach den Punkten der Grenzfläche, und dafs wieder von den Punkten der Grenzfläche Wirkungen auslaufen, welche unter Umständen auch den Punkt erreichen können, für welchen wir die Gesammtwirkung suchen, und dafs also möglicher Weise zu den directen Einwirkungen von den ursprünglich erregten Punkten noch solche secundäre an den Grenzflächen reflectirte Wirkungen hinzu kommen können. Auf diese Weise wird es möglich sein, dafs die directen und die secundären Wirkungen zu sehr verschiedenen Zeiten eintreffen.

Diese secundären Wirkungen werden als Echo bezeichnet. Die Schnelligkeit der directen Ausbreitung bezieht sich immer auf die gerade Linie. Allerdings dürfen wir die Schallbewegung nicht in Strahlen zerlegen, wie es beim Lichte der Fall ist; die gerade Linie kommt nur in Betracht, insofern sie den kürzesten Weg angiebt, in welchem zuerst Einwirkungen eintreten können. Es findet aber keine Zerlegung in Strahlen statt, wie z. B. in der Optik, wo jeder Strahl, der von der Lichtquelle ausgeht, als geradlinig betrachtet werden kann, auch wenn er durch Oeffnungen und durch Spalte führt, oder an Ecken und Kanten vorbeigeht. Das ist ja auch schon beim Licht nicht streng zutreffend. Die Lehre von der Beugung des Lichtes umfafst diejenigen Verhältnisse, bei denen starke und merkliche Abweichungen von dem Gesetz der Ausbreitung der Wellen in Strahlen eintreten, aber sonst kann man bei einer grofsen Zahl von Erscheinungen des Lichtes die Bewegung als Ausbreitung selbstständiger Strahlen auffassen, welche nicht von ihren Nachbarstrahlen abhängig sind. Beim Schall ist es insofern anders, als unter den gewöhnlichen Verhältnissen eine solche Zerlegung auch nicht annähernd richtig ist. Ferner sind auch die Zeitunterschiede sehr viel auffallender als beim Licht, welches sich mit so grofser Geschwindigkeit bewegt, dafs wir mit unserem Auge nicht die Zeiträume wahrnehmen können, welche zwischen dem directen Einfall eines Strahles und späteren Reflexionen oder Uebergängen auf gekrümmten Wegen eintreten. Der Unterschied rührt wesentlich von dem Unterschied der Wellenlänge her.

Denken wir uns eine feste Wand mit einer Oeffnung. Auf der einen Seite sei eine Schallquelle und die Schallbewegung erreiche die Wand und pflanze sich durch die Oeffnung nach dem jenseitigen freien Raum fort, so können wir uns durch die Oeffnung eine ideale Grenzfläche durchgelegt denken, wodurch der jenseitige Raum von dem diesseitigen abgesperrt wird. Nach der Gleichung (281a), in der wir den jenseitigen Raum zum Integrationsgebiet machen, lassen sich die in ihm entstehenden Schallwirkungen zusammensetzen aus Erregungen, die schon in diesem Raume vorhanden waren, deren Wirkungen nun in irgend einem Punkte zusammenkommen und in Wirkungen, die von der Grenze des Integrationsgebietes ausgehen.

Nehmen wir nun an, es habe eine Zeit existirt, wo dieser Raum noch nicht erschüttert gewesen ist, dann können also in diesen Raum zunächst keine Einwirkungen eintreten, die von der ursprünglichen Erregung dieses Raumes abhängen; aber sobald die Schallanstöfse, die von der Schallquelle ausgehen, die ideale Fläche in der Oeffnung erreichen, so werden nun von hier aus die erschütterten Punkte dieser Grenzfläche wie ursprünglich Schall erregende Punkte betrachtet werden können, und zwar nach den Regeln, die wir bei unseren Integrationen gefunden haben. Es werden theils die Verdichtungen $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ hier neue Systeme von Schallwellen erregen, theils aber auch die Geschwindigkeiten $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$. Es läfst sich nun also, wenn man die Dichtigkeit und die Geschwindigkeiten in jedem Punkte der Grenzfläche kennt, mittelst unserer Integrale die Schallbewegung im jenseitigen Raume vollständig berechnen. Wenn die verschiedenen Punkte der Grenzfläche gleichzeitig durch eine Schallwelle erregt werden, so dafs gleiche Phasen der Bewegung eintreten, sowohl der Verdichtung, wie der Geschwindigkeit, so werden die verschiedenen Einwirkungen von den einzelnen Punkten der Oeffnung nach dem Punkte hinüber gehen, für den wir die Schallbewegung berechnen wollen. Aber die Wege werden im Allgemeinen verschieden lang sein. Von dem nächsten Punkt werden daher spätere Einwirkungen noch zu der gleichen Zeit eintreffen, wie frühere Einwirkungen von entfernteren Punkten aus.

Wenn wir die Wege von der Schallquelle in gerader Linie bis zu einem Punkt der Grenzfläche und von da in gerader Linie bis zu dem Punkte, in dem wir die Schallbewegung untersuchen, so werden je nach den Unterschieden in der Länge, die von der Schallquelle ausgehenden Erregungen auf den verschiedenen Wegen auch zu verschiedenen Zeiten in dem betrachteten Punkte eintreffen und andererseits werden die Einwirkungen, die in dem betrachteten Punkte von den verschiedenen Punkten der Grenzfläche aus zugleich eintreffen, nicht zu gleicher Zeit von der Schallquelle ausgegangen sein.

Nun wird es von der Länge der Schallwellen abhängen, ob die zugleich eintreffenden Einwirkungen sich unterstützen oder sich schwächen. Wenn die Wegunterschiede viele Wellenlängen betragen, so werden die zugleich eintreffenden Einwirkungen sich gegenseitig stark beeinträchtigen. Wenn dagegen die Wegunterschiede unterhalb einer viertel Wellenlänge bleiben, so werden sich die Einwirkungen im Ganzen unterstützen.

Dies wird der Fall für jede Lage des betrachteten Punktes sein, sobald die Öffnung klein ist gegen die Wellenlänge. In der Optik sowohl wie in der Akustik haben wir jenseits einer Oeffnung, die enger ist, als eine viertel Wellenlänge, nach allen Richtungen hin eine Ausbreitung der Erregung.

Der Unterschied besteht nur darin, dafs wir es beim Schall mit grofsen Wellenlängen, beim Licht dagegen mit aufserordentlich kleinen zu thun haben. Während z. B. für die Lichtstrahlen die Oeffnungen unserer Thüren und Fenster als sehr weite Oeffnungen angesehen werden müssen, gehören sie für den Schall schon zu den engen Oeffnungen, jenseits deren starke Ausbreitung eintritt. Auf diesem Umstand beruht es, dafs Schall und Licht sich in so verschiedener Weise ausbreiten, dafs wir daran gewöhnt sind, den Schall um die Ecke gehen zu hören, und gar nicht auf geradlinige Schallfortpflanzung angewiesen sind, aufser in den ganz besonders ausgezeichneten Fällen, wenn wir es mit sehr hohen Tönen zu thun haben. Die Ausbreitung sehr hoher Töne kommt der des Lichtes schon viel näher. Da können wir in der That den Schallschatten beobachten, der den Schall vollständig abschneidet. Die Schwierigkeiten der Probleme, um die es sich hier handelt, und die zum Theil nicht vollständig gelöst werden können, hängen nun davon ab, dafs bei Anwesenheit von Grenzflächen man sich diejenige Art der Vertheilung der Schall erregenden Punkte an den Grenzflächen erst suchen mufs, welche den Grenzbedingungen genügt, z. B. der Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ an der festen Grenzfläche. Das sind ähnliche Aufgaben, wie die Berechnung der elektrischen oder magnetischen Vertheilung an gegebenen Leitern von unregelmäfsiger Form. Sie können noch nicht durch sichere Methoden gelöst werden, die in allen Fällen zum Ziele führen. Wir sind meistens darauf angewiesen, uns Lösungen zu suchen, die einigermafsen den Grenzbedingungen genügen, und verschiedene solche Lösungen mit willkürlichen Constanten multiplicirt zusammenzusetzen, die wir dann so bestimmen, dafs die Summe sich den Bedingungen möglichst gut anfügt. Wir haben aber keine sicheren Methoden, das zu machen, ausgenommen für einzelne besondere Klassen von Grenzflächen.

Bei der Zurückwerfung des Schalles an ebenen Flächen kommt Folgendes in Betracht. Wenn man auf der einen Seite einen Schall erregenden Punkt hat und man sich einen ganz gleichen Schall erregenden Punkt hinter der Fläche denkt, der in demselben Lothe liegt, welches man von dem wirklich Schall erregenden Punkt auf die ebene Fläche fällen kann, und ebenso weit von der Fläche entfernt, so werden in der Wand entgegen gesetzte Bewegungen zusammenstofsen, und die Componenten, welche normal zur Wand fallen, werden sich gegenseitig aufheben. Durch die Annahme also, dafs die reflectirten Wellen sich gerade so verhalten, als kämen sie von dem Spiegelbild des Schall erregenden Punktes, wird der Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ genügt. Das sind die gewöhnlichen Fälle des Echos.

§ 50. Das Huyghens'sche Princip für Töne von bestimmter Höhe.

Für specielle Probleme ist es gut, die bisher angenommene Allgemeinheit des Wellenpotentials φ einzuschränken. Als Function der Zeit möge φ die Form

$$A \sin(2\pi n t + \gamma)$$

haben, wo A und γ von t unabhängig, aber Functionen von x, y, z sein können, n dagegen von x, y, z und t unabhängig sein soll. Ein solches Wellenpotential stellt einen gleichmäfsig anhaltenden Ton von n Schwingungen in der Zeiteinheit dar. Intensität und Phase sind Functionen des Ortes. Eine solche Form von φ wollen wir mit Φ oder Ψ bezeichnen. Wir haben dann:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi^2 n^2 \Phi.$$

Die partielle Differentialgleichung (263), der das Wellenpotential genügen mufs, geht also über in

$$a^2 \Delta \Phi + 4\pi^2 n^2 \Phi = 0$$

oder, wenn wir durch a^2 dividiren und

$$\frac{2\pi n}{a} = k$$

setzen,

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0. \tag{285}$$

Diese Gleichung mufs für beliebige Werthe von t erfüllt sein. Wenn wir daher in dem Ausdruck für Φ den Sinus zerlegen und schreiben

$$\Phi = \Psi' \cos 2\pi n t + \Psi'' \sin 2\pi n t,$$

wo

$$A \sin\gamma = \Psi'$$

und

$$A \cos\gamma = \Psi''$$

gesetzt ist, so müssen auch Ψ' und Ψ'' für sich der Differentialgleichung genügen. Denn für $t = 0$ ist $\Phi = \Psi'$ und für $t = \frac{1}{4n}$ ist $\Phi = \Psi''$. Die Constante $k = \frac{2\pi n}{a}$ hängt mit der Wellenlänge des Tones zusammen. Denn, da $\frac{1}{n}$ die Zeitdauer einer Schwingung und a die Geschwindigkeit des Schalles ist, so ist $\frac{a}{n}$ der Weg, den eine Welle während einer Schwingungsdauer zurücklegt. Mithin ist

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{286}$$

wo λ die Wellenlänge bedeutet. Dadurch, dafs die Abhängigkeit des Wellenpotentials von t festgesetzt ist, verschwindet t aus der Differentialgleichung, und wir haben es nur noch mit der Abhängigkeit des Wellenpotentials von x, y, z zu thun. Die Betrachtungen, die uns in den Gleichungen (281a) und (284) zur Darstellung des

Werthes von φ zu irgend einer Zeit und an irgend einem Orte führten, können jetzt in einfacherer Weise durchgeführt werden. Bezeichnen nämlich Φ und Ψ irgend zwei Functionen, die in einem gegebenen Raume mit ihren ersten und zweiten Differentialquotienten endliche Werthe haben, so fanden wir oben Gleichung (277)

$$\left.\begin{aligned} &\int \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\omega + \iiint \Psi \Delta \Phi \, dx\, dy\, dz \\ &\quad = \int \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\omega + \iiint \Phi \Delta \Psi dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right\} \tag{287}$$

Genügen nun Φ und Ψ in dem ganzen Integrationsraume der Gleichung (285), so wird

$$\Psi \Delta \Phi = \Phi \Delta \Psi = -k^2 \Phi \Psi.$$

Mithin heben sich die zweiten Integrale auf beiden Seiten fort und wir erhalten:

$$\int \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\omega = \int \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\omega. \tag{287a}$$

Dies ist die Gleichung, die an die Stelle der Gleichung (278b) tritt. Dort trat eine Integration nach t ein, die hier überflüssig ist. Aus ihr kann nun sogleich das Aequivalent für die Gleichung (284d) abgeleitet werden.

Setzen wir nämlich

$$\Phi = \frac{\cos kr}{r},$$

wo r die Entfernung des Punktes x, y, z von einem beliebigen Punkte α, β, γ des Integrationsraumes bezeichnet, so genügt Φ der Gleichung (285); denn

$$\frac{\cos k(r - at)}{r}$$

stellt, wie wir oben (§ 47) sahen, eine kugelförmige Welle dar und ist zugleich von der speciellen Form, die wir hier betrachten. Es ist aber zu beachten, dafs im Punkte α, β, γ die Function Φ nicht mehr endlich ist. Dieser Punkt ist daher vom Integrationsgebiet auszuschliefsen. Er wird durch eine kleine Kugel ausgeschlossen, über deren Oberfläche die Integrale (Gleichung 287) ebenfalls zu erstrecken sind. Bezeichnet nun wieder wie oben $d\Omega$ die Oeffnung eines unendlich schmalen Kegels, der seine Spitze im Punkte α, β, γ hat, so ist für die Kugeloberfläche

$$d\omega = r^2 d\Omega,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

und

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

und es wird für die Kugeloberfläche

$$\int \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\omega = -\int \Psi (\cos kr + kr \sin kr)\, d\Omega$$

$$\int \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\omega = r \int \cos kr \frac{\partial \Psi}{\partial r} d\Omega.$$

Wird nun die Kugel sehr klein, so haben Ψ und $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ auf der Kugel nahezu dieselben Werthe, die sie im Mittelpunkt haben. Bezeichnen wir daher den Werth von Ψ im Punkte α, β, γ mit Ψ_α, so geht das erste Integral in den Werth

$$-\Psi_\alpha \int d\Omega = -4\pi \Psi_\alpha$$

über. Das zweite Integral dagegen verschwindet. Mithin folgt aus der Gleichung (287)

$$\int \Psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega - \int \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{\cos kr}{r} d\omega = 4\pi \Psi_\alpha, \tag{288}$$

wo die Integrale über die Begrenzung des Raumes zu erstrecken sind.

Wenn sämmtliche Dimensionen des Raumes sehr klein gegen die Wellenlänge sind, kann kr gegen 1 vernachlässigt werden, so oft r die Entfernung zweier innerhalb des Raumes gelegener Punkte ist. Unter diesen Umständen verwandelt sich die Gleichung (288) in

$$\int \Psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega - \int \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{d\omega}{r} = 4\pi \Psi_\alpha.$$

Bei dieser Weglassung unendlich kleiner Gröfsen wird also Ψ eine Function, welche der Gleichung $\Delta \Psi = 0$ genügt, und es folgt daraus, dafs man in Räumen, deren Dimensionen gegen die Wellenlänge verschwindend klein sind, statt der Functionen, die der Gleichung

$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ genügen, stets unendlich wenig davon unterschiedene Functionen finden kann, die der Gleichung $\Delta\Psi = 0$ genügen. Setzen wir andererseits in der Gleichung (287) für Φ eine Function ein, die in dem ganzen Raume der Differentialgleichung (285) genügt und mit ihren ersten und zweiten Differentialquotienten endlich bleibt, wie z. B.

$$\Phi = \frac{\sin kr}{r},$$

so wird

$$\int \Psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\sin kr}{r}\right) d\omega - \int \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{\sin kr}{r} d\omega = 0. \tag{289}$$

Von der linken Seite der Gleichung (288) können wir uns eine anschauliche Vorstellung machen. Es ist nämlich

$$-\int \frac{d\Psi}{dn} \frac{\cos kr}{r} d\omega$$

das Wellenpotential einer Schicht von Erregungspunkten, welche über die Oberfläche ausgedehnt sind. Denn $-\frac{\partial \Psi}{\partial n} d\omega$ hat die Form $A \sin(2\pi n t + \gamma)$, wobei A die Intensität der Bewegung des Erregungspunktes mifst.

Ferner ist $\int \Psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega$ anzusehen als das Potential einer Doppelschicht von Erregungspunkten. Denken wir uns nämlich eine zweite Fläche in einem kleinen Abstand ε innerhalb der ersten construirt und beide mit Erregungspunkten von solcher Intensität bedeckt, dafs für ein Element $d\omega$ der ersten das Wellenpotential gleich $-\frac{\Psi d\omega}{\varepsilon}\frac{\cos kr}{r}$ und für das entsprechende Element $d\omega'$ der zweiten das Wellenpotential gleich $\frac{\Psi' d\omega'}{\varepsilon}\frac{\cos kr'}{r'}$, so ist das Wellenpotential für beide zusammen

$$\frac{\Psi' d\omega'}{\varepsilon}\frac{\cos kr'}{r'} - \frac{\Psi d\omega}{\varepsilon}\frac{\cos kr}{r}.$$

Wird nun die Intensität und Phase der beiden Erregungspunkte gleich angenommen, so ist $\Psi' d\omega' = \Psi d\omega$ und das Wellenpotential erhält die Form

$$\Psi d\omega \cdot \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\cos kr'}{r'} - \frac{\cos kr}{r}\right).$$

Dies geht, wenn wir den Abstand ε unendlich klein werden lassen, über in

$$\Psi d\omega \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos kr}{r}\right).$$

Die Formel (288) besagt also, dafs jede eindeutige Function Ψ, die in allen Theilen eines Raumes mit ihren ersten und zweiten Differentialquotienten endliche Werthe hat und der Gleichung

$$\varDelta \Psi + k^2 \Psi = 0$$

genügt, sich als Geschwindigkeitspotential von Erregungspunkten ausdrücken läfst, die blofs längs der Oberfläche des Raumes ausgebreitet sind.

§ 51. Die Intensität der Erregung einer einfachen Schicht von Erregungspunkten.

Wenn das Wellenpotential nur einer einfachen Schicht von Erregungspunkten entspricht, so gilt dieselbe Relation zwischen der Intensität der Erregung und den Differentialquotienten des Potentials nach der Normale, welche für die Potentialfunctionen elektrischer Massen in Bezug auf die Dichtigkeit der Belegung stattfindet.

Setzen wir

$$\Psi = \int p \frac{\cos kr}{r} d\omega, \tag{290}$$

wo $d\omega$ das Flächenelement einer beliebigen Fläche Ω bezeichnet und p eine Function, die sich in der Fläche continuirlich ändert, und untersuchen die ersten Differentialquotienten von Ψ für solche Punkte x, y, z des Raumes, welche der Fläche Ω unendlich nahe liegen.

Wir setzen ferner:

$$\frac{\cos kr}{r} = f_r + \frac{1}{r},$$

$$\Psi = \Psi' + \Psi'',$$

$$\Psi' = \int p f_r d\omega,$$

$$\Psi'' = \int p \frac{1}{r} d\omega.$$

Ψ' ist jedenfalls endlich, wenn p und die Gröfse der Fläche Ω endlich sind, da f_r immer endlich ist. Dafs Ψ'' unter denselben Bedingungen endlich ist, ist aus der Theorie der elektrischen Potentialfunctionen bekannt, ebenso dafs Ψ'' auf beiden Seiten dicht an der Fläche dieselben Werthe hat. Dafs letzteres auch mit Ψ' und also auch mit Ψ der Fall sei, ist leicht zu ersehen, da f_r, auch wenn man durch die Schicht selbst hindurchgeht, sich immer nur continuirlich ändern kann. Dagegen wissen wir, dafs die Differentialquotienten von Ψ'' an der Fläche einen endlichen Sprung ihres Werthes erleiden, während leicht zu erkennen ist, dafs die von Ψ' an der Fläche continuirlich sein müssen. Denken wir uns durch eine geschlossene Linie, die in unendlich kleiner Entfernung den Fufspunkt des von x, y, z auf die Fläche Ω gefällten Lothes umgiebt, ein Stück Ω_0 aus der Fläche herausgeschnitten und das Integral $\int p f_r d\omega$ getheilt in Ψ'_0, welches über die Fläche Ω_0, und Ψ'_1, welches über den Rest der Fläche ausgedehnt ist, so dafs

$$\Psi' = \Psi'_0 + \Psi'_1.$$

Nun ist die Gröfse

$$\frac{d f_r}{d x} = -\frac{k^2}{2}\,\frac{x-\alpha}{r}$$

für unendlich kleine Werthe von r, bleibt also endlich, macht aber einen Sprung, wenn man von positiven Werthen von $x-\alpha$ durch $r=0$ nach negativen übergeht, ist dagegen continuirlich, wenn man nicht durch $r=0$ hindurchgeht. Letzteres geschieht nun keinenfalls, wenn man in Ψ'_1 die Werthe von x, y, z sich ändern läfst. Dagegen ist $\frac{d\Psi'_0}{dx}$, wo allerdings ein Sprung eintreten würde, unendlich klein als das Integral einer endlichen Gröfse, über eine unendlich kleine Fläche genommen, und wir können deshalb seinen Werth gegen $\frac{d\Psi'_1}{dx}$ und $\frac{d\Psi''}{dx}$ vernachlässigen. Folglich sind die Differentialquotienten von Ψ', welches gleich $\Psi'_0 + \Psi'_1$ ist, continuirlich, und die von Ψ müssen an der Fläche Ω einen Sprung von derselben Gröfse wie die von Ψ'' machen. Bezeichnen wir die von der Fläche ab nach beiden Seiten hingehenden Normalen mit $n_,$ und $n_{,,}$, so ist bekanntlich

$$\frac{d\Psi''}{dn_,} + \frac{d\Psi''}{dn_{,,}} = -4\pi p,$$

und daraus folgt, dafs auch

$$\frac{d\Psi}{dn_,} + \frac{d\Psi}{dn_{,,}} = -4\pi p. \tag{290a}$$

§ 52. Das Wellenpotential aufserhalb einer gegebenen Fläche.

Wir wollen nun annehmen, dafs das Wellenpotential Ψ einer Schallbewegung entspreche, die im Unendlichen unmerklich wird. Dann wird es möglich sein, eine Kugelfläche so grofs zu construiren, dafs auf und aufserhalb der Kugelfläche Ψ und $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ unmerklich klein sind. Ist ϱ der Radius der Kugel, so wollen wir annehmen, dafs Ψ von der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$ sei. Das stimmt überein mit den Erörterungen, die in § 47 über kugelförmige Wellen angestellt sind. Der Differentialquotient $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ ist dann von der Ordnung $\frac{1}{\varrho^2}$. Ist nun S die Oberfläche eines Raumes, aufserhalb dessen Ψ überall der Differentialgleichung (285) genügt und mit seinen ersten und zweiten Differentialquotienten endlich ist, so können wir die Gleichung (288) auf den Raum zwischen S und der grofsen Kugelfläche anwenden. Die Integrale sind dabei über die Fläche S und über die Kugelfläche zu erstrecken. Es läfst sich dann zeigen, dafs die Integrale über die Kugelfläche verschwinden.

Es wird nämlich hier

$$d\omega = \varrho^2 d\,\Omega,$$

wenn $d\,\Omega$ wie früher die Oeffnung eines unendlich schmalen Kegels bedeutet, der seine Spitze im Coordinatenanfangspunkt hat. Ferner ist $\frac{1}{r}$ von der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$. Nun nähert sich $\frac{\varrho}{r}$ für grofse Werthe von ϱ dem Werthe 1; mithin wird

$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{\cos k r}{r}\, d\omega = \frac{1}{\varrho} \int \varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial n} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \cos k r \,.\, d\,\Omega$$

mit wachsendem ϱ beliebig klein.

Ferner ist

$$\begin{aligned}\int \Psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos k r}{r}\right) d\omega &= -\int \Psi \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{\cos k r}{r}\right) \varrho^2 d\,\Omega \\ &= \frac{1}{\varrho} \int \varrho \Psi \frac{\cos k r}{r^2} \cdot \varrho^2 \frac{\partial r}{\partial \varrho}\, d\,\Omega \\ &\quad + \int \Psi . k . \frac{\sin k r}{r} \frac{\partial r}{\partial \varrho} \varrho^2 d\,\Omega .\end{aligned}$$

Das erste Integral der rechten Seite wird beliebig klein, da $\frac{\varrho}{r}$ und $\frac{\partial r}{\partial \varrho}$ mit wachsendem ϱ sich dem Werthe 1 nähern und $\varrho \Psi$ endlich bleibt.

Das zweite Integral

$$\int \Psi k \frac{\sin k r}{r} \frac{\partial r}{\partial \varrho} \varrho^2 d\,\Omega$$

wird ebenfalls beliebig klein, wie man auf folgende Weise erkennt. Die Gleichung (289) gilt ebenfalls, wenn sie auf die Begrenzung S und die Kugelfläche bezogen wird. Mithin mufs die Integration

$$\int \Psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\sin k r}{r}\right) d\omega - \int \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{\sin k r}{r} d\,\omega$$

erstreckt über die Kugelfläche für beliebige Werthe von ϱ immer denselben Werth ergeben, vorausgesetzt, dafs ϱ nur so grofs ist, dafs die Kugelfläche die Fläche S umfafst. Der Differentialquotient nach ϱ mufs also verschwinden.

Nun ist

$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{\sin k r}{r} \varrho^2 d\,\Omega$$

schon von der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$, der Differentialquotient also von der Ordnung $\frac{1}{\varrho^2}$. Ferner ist

$$\int \Psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\sin k r}{r}\right) \varrho^2 d\,\Omega = \int \Psi \frac{\sin k r}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \varrho} \varrho^2 d\,\Omega$$

$$- \int \Psi k \frac{\cos k r}{r} \frac{\partial r}{\partial \varrho} \varrho^2 d\,\Omega.$$

Der erste Theil der rechten Seite wird ebenfalls von der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$, der Differentialquotient also auch beliebig klein. Es bleibt also nur der Differentialquotient von

$$\int \Psi k \frac{\cos k r}{r} \frac{\partial r}{\partial \varrho} \varrho^2 d\Omega$$

zu betrachten. Da

$$\frac{\partial r}{\partial \varrho} = 1 + \text{Glieder von der Ordnung } \frac{1}{\varrho},$$

so ist es nur nöthig

$$\int \Psi k \frac{\cos k r}{r} \varrho^2 d\,\Omega$$

zu differentiiren, denn der Unterschied ist von der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$. Von den verschiedenen Theilen dieses Differentialquotienten werden

$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} k \frac{\cos k r}{r} \varrho^2 d\,\Omega,$$

$$-\int \Psi k \frac{\cos k r}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \varrho} \varrho^2 d\Omega,$$

$$\int \Psi k \frac{\cos k r}{r} 2\,\varrho\, d\,\Omega$$

mit wachsendem ϱ beliebig klein. Mithin gilt dasselbe von dem letzten Theil

$$-\int \Psi k^2 \frac{\sin k r}{r} \frac{\partial r}{\partial \varrho} \varrho^2 d\,\Omega.$$

Damit ist gezeigt, dafs bei der Darstellung von Ψ_a die Integrale über die Kugelfläche sämmtlich verschwinden und nur die Integration über S übrig bleibt. Die Gleichung (288) gilt also auch dann, wenn der Punkt, in dem wir den Werth von Ψ_a bestimmen wollen, aufserhalb der Grenzfläche liegt, über welche die Integrale erstreckt sind, wofern nur Ψ aufserhalb dieser Grenzfläche bis ins Unendliche der Differentialgleichung (285) genügt, mit seinen ersten und zweiten Ableitungen im Endlichen endlich ist und im Unendlichen von der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$ verschwindet.

Sind z. B. irgend welche Schallcentren gegeben, die wir uns in eine Fläche eingeschlossen denken wollen, und sind aufserdem eine Reihe von festen Körpern vorhanden, so kann man die Gleichung (288) zur Darstellung des Wellenpotentials in jedem beliebigen Punkte des freien Raumes aufserhalb jener Fläche anwenden. Die Integrale sind alsdann über jene Fläche und über die Begrenzungen der festen Körper zu erstrecken. Hier ist der Natur der Sache nach $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$, dort mufs aber aufser Ψ auch $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ bekannt sein. Die Normale n ist dabei in den freien Raum hinein zu ziehen.

Wendet man die Gleichung (288) auf theilweis zusammenstofsende Räume $S_,$ und $S_{,,}$ an, indem man die Elemente ihrer nicht gemeinsamen Oberfläche mit $d\omega_,$ und $d\omega_{,,}$, die des gemeinsamen Stückes ihrer Oberfläche mit $d\omega_0$ bezeichnet, unter $n_,$ die nach dem Inneren von $S_,$, unter $n_{,,}$ die nach dem Inneren von $S_{,,}$ gerichteten Normalen dieser Flächenelemente versteht, so hat man,

$$\text{wenn innerhalb } S_, \quad \Delta \Psi_, + k^2 \Psi_, = 0,$$
$$\text{und innerhalb } S_{,,} \quad \Delta \Psi_{,,} + k^2 \Psi_{,,} = 0,$$

der Punkt α, β, γ, von dem die Entfernungen r gerechnet werden, aber innerhalb $S_,$ liegt, und wir unter dem Integralzeichen $[d\omega_, + d\omega_0]$ schreiben, wo die Integration über sämmtliche Elemente $d\omega_,$ und sämmtliche $d\omega_0$ ausgedehnt werden soll:

$$4\pi \Psi_{,\alpha} = \int \Psi_, \frac{d}{dn_,}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)[d\omega_, + d\omega_0] - \int \frac{d\Psi_,}{dn_,}\frac{\cos kr}{r}[d\omega_, + d\omega_0],$$

$$0 = \int \Psi_{,,} \frac{d}{dn_{,,}}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)[d\omega_{,,} + d\omega_0] - \int \frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}}\frac{\cos kr}{r}[d\omega_{,,} + d\omega_0].$$

Wenn nun an der gemeinsamen Trennungsfläche beider Räume

$$\Psi_, = \Psi_{,,}, \quad \frac{d\Psi_,}{dn_,} = \frac{d\Psi_{,,}}{dn_,} = -\frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}}$$

ist, so giebt die Addition beider Gleichungen, da $dn_, = -dn_{,,}$:

$$4\pi \Psi_{,\alpha} = \int \Psi_, \frac{d}{dn_,}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega_, - \int \frac{d\Psi_,}{dn_,}\frac{\cos kr}{r} d\omega_,$$
$$+ \int \Psi_{,,} \frac{d}{dn_{,,}}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega_{,,} - \int \frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}}\frac{\cos kr}{r} d\omega_{,,}.$$

Die Function $\Psi_,$ erscheint also hier als Potential von Punkten ausgedrückt, die an der nicht gemeinsamen Oberfläche der Räume $S_,$ und $S_{,,}$ liegen, während die Punkte der gemeinsamen Trennungsfläche ganz aus dem Integral verschwinden. Genau denselben Ausdruck erhält man aber für $\Psi_{,,}$, wenn man den Punkt α, β, γ in den Raum $S_{,,}$ verlegt. Es sind also in diesem Falle $\Psi_{,}$ und $\Psi_{,,}$ Potentiale derselben aufserhalb des gemeinsamen Raumes $S_{,}$ und $S_{,,}$ liegenden Erregungspunkte, und beide Functionen müssen continuirlich in einander übergehen.

Wenn wir also im Folgenden für das Geschwindigkeitspotential in verschiedenen Theilen eines zusammenhängenden Luftraumes verschiedene Ausdrücke $\Psi_{,}$ und $\Psi_{,,}$ werden wählen müssen, wird die Continuität an der Grenzfläche hergestellt sein, wenn in allen Punkten derselben

$$\Psi_{,} = \Psi_{,,}$$

und

$$\frac{d\Psi_{,}}{dn_{,}} = \frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,}} \text{ oder } = -\frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}}.$$

§ 53. Das Verhalten des Wellenpotentials im Unendlichen.

Die Gleichung (288) kann man benutzen, um das Verhalten von Ψ im Unendlichen darzustellen. Bezeichnet $\mathfrak{r}$ den Abstand des Flächenelements $d\omega$ vom Coordinatenanfangspunkt, ϱ den Abstand des Punktes α, β, γ vom Coordinatenanfangspunkt und ϑ den Winkel zwischen beiden Radien, so ist:

$$r^2 = \varrho^2 + \mathfrak{r}^2 - 2\varrho\mathfrak{r}\cos\vartheta$$

$$r = \varrho - \mathfrak{r}\cos\vartheta + \text{Glieder von der Ordnung } \frac{1}{\varrho}.$$

Mithin

$$\frac{\cos kr}{r} = \frac{\cos(k\varrho - k\mathfrak{r}\cos\vartheta)}{\varrho} + \text{Glieder von der Ordnung } \frac{1}{\varrho^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) = -k\frac{\sin kr}{r}\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\cos kr}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}$$

$$= -k\frac{\sin(k\varrho - k\mathfrak{r}\cos\vartheta)}{\varrho}\frac{\partial r}{\partial n} + \text{Glieder von der Ordn.} \frac{1}{\varrho^2}.$$

Mit Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\varrho^2}$ wird also nach Gleichung (288)

$$4\pi\Psi_a = -\int \Psi \frac{k\sin(k\varrho - k\mathfrak{r}\cos\vartheta)}{\varrho}\frac{\partial r}{\partial n}d\omega$$

$$-\int\frac{\partial\Psi}{\partial n}\frac{\cos(k\varrho - k\mathfrak{r}\cos\vartheta)}{\varrho}d\omega$$

$$= \frac{\sin k\varrho}{\varrho} \cdot \left[-\int \Psi k \cos(k\mathfrak{r}\cos\vartheta) \frac{\partial r}{\partial n} d\omega \right.$$

$$\left. - \int \frac{\partial \Psi}{\partial n} \sin(k\mathfrak{r}\cos\vartheta)\, d\omega \right]$$

$$+ \frac{\cos kr}{\varrho} \left[\int \Psi k \sin(k\mathfrak{r}\cos\vartheta) \frac{\partial r}{\partial n} d\omega \right.$$

$$\left. - \int \frac{\partial \Psi}{\partial n} \cos(k\mathfrak{r}\cos\vartheta)\, d\omega \right].$$

Die Gröſsen in den Klammern sind nicht mehr von ϱ, sondern nur von der Richtung des Radius ϱ und von t abhängig. Bestimmen wir zwei Gröſsen A und c, so daſs die Gröſsen in der Klammer gleich

$$A\cos c \text{ und } A\sin c$$

sind, so ist

$$4\pi\,\Psi_a = A\,\frac{\sin(k\varrho + c)}{\varrho}. \tag{291}$$

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Werth von t, das in Ψ noch vorkommt. Nun sollte aber Ψ die Form haben

$$\Psi = \Psi' \cos 2\pi n t + \Psi'' \sin 2\pi n t.$$

Für $t = 0$ ist $\Psi = \Psi'$, für $t = \frac{1}{4n}$ ist $\Psi = \Psi''$. Mithin erhält man für $t = 0$ und $t = \frac{1}{4n}$ aus der Gleichung (291):

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\,\Psi_a' &= A'\,\frac{\sin(k\varrho + c')}{\varrho} \\ 4\pi\,\Psi_a'' &= A''\,\frac{\sin(k\varrho + c'')}{\varrho}, \end{aligned} \right\} \tag{291a}$$

wo A', A'', c', c'' nicht mehr von t, sondern nur von der Richtung des Radius ϱ abhängen.

Nun multiplicire man die erste der Gleichungen (291a) mit $\cos 2\pi n t$, die zweite mit $\sin 2\pi n t$, so kann die Summe auf die Form gebracht werden:

$$\left. \begin{aligned} \Psi = \mathfrak{A}\,&\frac{\cos[k\varrho - 2\pi n t + \mathfrak{c}]}{\varrho} \\ + \mathfrak{A}'\,&\frac{\cos[k\varrho + 2\pi n t + \mathfrak{c}']}{\varrho}. \end{aligned} \right\} \tag{292}$$

Das erste Glied stellt ins Unendliche laufende Kugelwellen, das zweite Glied aus dem Unendlichen kommende Kugelwellen dar. Sollen keine aus dem Unendlichen kommende Schallwellen vorhanden sein, so würde bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\varrho^2}$

$$\Psi = \mathfrak{A} \frac{\cos [k\varrho - 2\pi n t + \mathfrak{c}]}{\varrho} \tag{292a}$$

zu setzen sein.

Ist der Raum durch irgend eine unendlich ausgedehnte Fläche nach einer Richtung begrenzt, so ist diese Betrachtung nicht unmittelbar anwendbar, weil dann Ψ nicht überall aufserhalb einer endlichen Fläche den Bedingungen der Gleichung (288) genügt. Es ist ja nur auf der einen Seite der Fläche definirt. Wohl aber läfst sich einfach der Fall behandeln, wo der Raum durch eine unendliche Ebene begrenzt ist, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Man braucht sich zu den Erregungspunkten nur noch ihre Spiegelbilder hinter der Ebene hinzu zu denken, von beiden zusammen das Geschwindigkeitspotential zu nehmen, so erfüllt dies die Bedingung, dafs an der Ebene $\frac{d\Psi}{dn} = 0$ sei, und es lassen sich auf ein solches Geschwindigkeitspotential dieselben Betrachtungen anwenden, als wenn nur endliche feste Körper in der Nähe wären.

Unter diesen Umständen ist also die Grenzbedingung, welche für die unendlich entfernten Theile des freien Raumes aufzustellen ist, die, dafs das Bewegungspotential Ψ dort die in Gleichung (292a) angegebene Form habe.

§ 54. Das Reciprocitätsgesetz.

Setzen wir jetzt voraus, dafs Ψ das Geschwindigkeitspotential eines Schallwellenzuges sei, der in dem Punkte a erregt wird, in dessen Nachbarschaft sich eine beliebige Anzahl fester begrenzter Körper befinden möge, so dafs nur an dieser Stelle Ψ unendlich werde wie

$$A \frac{\cos k r_a}{r_a} \cos 2\pi n t$$

sonst überall endlich und stetig bleibe, und in der unendlich grofsen Entfernung ϱ von derselben Form wie in Gleichung (292a) sei. Aufserdem möge an der Oberfläche der festen Körper die Gleichung

$\frac{d\Psi}{dn} = 0$ stattfinden. Es sei ferner Φ das Geschwindigkeitspotential einer Schallbewegung, die im Punkte b erregt worden ist, so dafs Φ in unendlich kleiner Entfernung von b unendlich wird wie

$$\Phi = A \frac{\cos k r_b}{r_b} \cos 2\pi n t,$$

in unendlicher Entfernung ϱ dagegen

$$\Phi = \mathfrak{B} \frac{\cos[k\varrho - 2\pi n t + \mathfrak{b}]}{\varrho}$$

sei, wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{b}$ nach verschiedenen Richtungen vom Anfangspunkte der Coordinaten aus verschiedene Werthe haben; übrigens mufs Φ wie Ψ überall sonst endlich sein, und an der Oberfläche der festen Körper $\frac{d\Phi}{dn} = 0$.

Wir wenden nun die Gleichung (287) auf einen Raum S an, der durch eine mit dem unendlich grofsen Radius ϱ um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebene Kugelschale umschlossen ist, von welchem wir nur ausschliefsen alle die Theile, welche durch die festen Körper eingenommen sind. Für die Integration an den Punkten a und b, wo Ψ und Φ unendlich grofs werden, findet dieselbe Betrachtung wie bei Gleichung (288) statt. Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega \\ &\qquad = 4\pi A[\Psi_b \cos 2\pi n t - \Phi_a \cos 2\pi n t], \end{aligned}\right\} \tag{293}$$

wo Ψ_b den Werth von Ψ im Punkte b, und Φ_a den von Φ im Punkte a bezeichnet. Die Integration nach $d\omega$ ist sowohl über die Oberflächen der vorhandenen festen Körper auszudehnen, an denen aber $\frac{d\Phi}{dn} = \frac{d\Psi}{dn} = 0$, so dafs diese Theile wegfallen, als auch über die Oberfläche der Kugel. Hier wird nun:

$$\Psi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\Psi}{dn} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} k \sin(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})}{\varrho^2}.$$

Wenn wir nun bedenken, dafs Ψ und Φ von der Form sein müssen:

$$\Psi = \Psi' \cos 2\pi n t + \Psi'' \sin 2\pi n t,$$

$$\Phi = \Phi' \cos 2\pi n t + \Phi'' \sin 2\pi n t,$$

wo Ψ', Φ', Ψ'' und Φ'' von der Zeit unabhängige Gröfsen sind, so wird

$$\Psi_b \cos 2\pi n t - \Phi_a \cos 2\pi n t$$
$$= \tfrac{1}{2}[\Psi'_b - \Phi'_a] + \tfrac{1}{2}[\Psi'_b - \Phi'_a]\cos 4\pi n t + \tfrac{1}{2}[\Psi''_b - \Phi''_a]\sin 4\pi n t.$$

Da nun die Gleichung (293) für jeden Werth von t erfüllt sein mufs, so mufs einzeln gleich sein:

$$\Psi'_b - \Phi'_a = 0,$$
$$\Psi''_b - \Phi''_a = 0,$$
$$\int \frac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})\,d\omega}{\varrho^2} = 0,$$

also auch

$$\left.\begin{aligned}\Psi_b &= \Psi'_b \cos 2\pi n t + \Psi''_b \sin 2\pi n t\\ &= \Phi'_a \cos 2\pi n t + \Phi''_a \sin 2\pi n t = \Phi_a.\end{aligned}\right\} \quad (293\text{a})$$

Daraus geht der wichtige Satz hervor: Wenn in einem mit Luft gefüllten Raume, der theils von endlich ausgedehnten festen Körpern begrenzt, theils unbegrenzt ist, im Punkte a Schallwellen erregt werden, so ist das Geschwindigkeitspotential derselben in einem zweiten Punkte b ebenso grofs, als es in a sein würde, wenn nicht in a, sondern in b Wellen von derselben Intensität erregt würden. Auch ist der Unterschied der Phasen des erregenden und erregten Punktes in beiden Fällen gleich.

Aus der nach der Gleichung (292a) gemachten Bemerkung geht hervor, dafs dasselbe noch gilt, wenn der Raum von einer unendlichen Ebene theilweise begrenzt ist. Ist Φ das Geschwindigkeitspotential von Schallwellen, die eine gröfsere Zahl von Erregungspunkten b_1, b_2, ..., b_m haben, also von der Form

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_m,$$

wo Φ_m das Potential der in b_m erregten Schallwellen ist, so wird

$$\Sigma[\Psi_{b_m}] = \Sigma[\Phi_{m,a}]. \quad (293\text{b})$$

In dem Falle, wo die durch Ψ dargestellte Schallbewegung nicht davon herrührt, dafs ein tönender Punkt a sich im freien Raume befindet, sondern dafs an irgend einem Oberflächenelemente der Begrenzung des Luftraumes, das wir mit $d a$ bezeichnen wollen, $\frac{d\Psi_a}{dn}$ nicht Null, sondern

$$\frac{d\Psi_a}{dn} = B\cos 2\pi n t$$

ist, so wird aus der Gleichung (293):

$$4\pi A \Psi_b = -B \Phi_a da. \tag{293c}$$

Dieser Satz kann dazu dienen, um in solchen Fällen, wo man die Schallbewegung der Luft vollständig nur für gewisse besondere Lagen des schallerregenden Punktes bestimmen kann, doch wenigstens für alle anderen Lagen eines oder beliebig vieler schallerregender Punkte die Erregung in jenen ersten Stellen des Raumes zu bestimmen. Namentlich ist der Satz wichtig, wenn man die Schallbewegung für eine jede entfernte Lage des tönenden Punktes bestimmen kann, weil man dann rückwärts auch für jede andere Lage des tönenden Punktes die Fernwirkung bestimmen kann, auf die es bei den akustischen Versuchen meistens allein ankommt.

Zweiter Abschnitt.

Die Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.

---

§ 55. Wellen in offener Röhre.

Wir gehen nun zu der Aufgabe über, die Bewegung der Luft am offenen Ende einer cylindrischen Röhre zu bestimmen, wenn im Innern der Röhre durch irgend eine Ursache ebene Wellen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen in der Secunde entsprechen, zu Stande gekommen sind, und sich die Bewegung durch die Mündung der Röhre der äufseren Luft mittheilt, welche übrigens zunächst durch keine anderen Schall erregenden Kräfte afficirt sein möge.

Die Form der Röhre sei im Allgemeinen cylindrisch von beliebigem Querschnitte; nur in geringer Entfernung von der Mündung möge dieselbe von der cylindrischen Form abweichen dürfen. Wir schliefsen also Röhren mit trompetenförmigen oder halb gedeckten Mündungen in unsere Untersuchung ein. Uebrigens setzen wir voraus, dafs sowohl die Dimensionen der Oeffnung, wie auch die Länge des nicht cylindrischen Theils der Röhre gegen die Wellenlänge verschwindend klein seien. Den äufseren Raum denken wir uns der Einfachheit wegen nach einer Seite begrenzt durch eine unendliche Ebene, welche senkrecht gegen den cylindrischen Theil der Röhrenwand gerichtet ist, und in welcher die Röhrenmündung selbst liegt. Diese Ebene sei die yz-Ebene, die Röhre befinde sich auf Seite der negativen x, deren Axe im Innern der Röhre liegen und dem cylindrischen Theile ihrer Wand parallel sein soll. Auf Seite der positiven x sei der Luftraum unbegrenzt. Nach der gemachten Annahme betrachten wir ky und kz als verschwindend klein gegen 1, wenn y und z Coordinaten eines Punktes der Röhrenmündung sind, und ebenso kx, wenn x einem Punkte des nicht cylindrischen Theils der Röhrenwand angehört.

Unsere Voraussetzungen über die Natur der Bewegung, welche wir untersuchen wollen, drücken sich nun in folgenden Gleichungen aus. Erstens nehmen wir an, dafs irgendwo in der Röhre sich ein Abschnitt befinde, zwischen welchem und der Mündung keine äufseren Kräfte auf die Luftmasse einwirken, und in welchem das Geschwindigkeitspotential Ψ unendlich wenig verschieden sei von der Form

$$\Psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos 2\pi n t$$
$$+ \left(\frac{\mathfrak{A}}{k}\sin kx + \mathfrak{B}\cos kx\right)\sin 2\pi n t.$$

Dies ist die allgemeinste Form, welche ebene Wellen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen angehören, haben können. Zur weiteren Vereinfachung wollen wir gleich den Anfang der Zeit t so festsetzen, was offenbar immer möglich ist, dafs $\mathfrak{A} = 0$ wird, und somit Ψ in dem besagten Abschnitte der Röhre die Form erhält:

$$\Psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos 2\pi n t + \mathfrak{B}\cos kx \sin 2\pi n t. \tag{294}$$

Auf Seite der positiven x denke man sich zwei halbe Kugelflächen von sehr grofsem Radius construirt, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt. Zwischen beiden soll Ψ die Form kugeliger Wellen haben, die in den unendlichen Raum hinauslaufen, nämlich, wenn wir, wie früher, die Entfernung vom Anfang der Coordinaten mit ϱ bezeichnen:

$$\Psi = M\frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho} - M_1\frac{\sin(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho}, \tag{294a}$$

wo M und M_1 unabhängig von ϱ, aber möglicher Weise abhängig von den Winkeln sind, die ϱ mit den Coordinatenaxen bildet.

Jenseits der äufseren jener beiden Kugelflächen mag noch ein Raum liegen, wo die Schallbewegung erst beginnt, aber zwischen der Region der ebenen Wellen in der Röhre, deren Bewegung in der Gleichung (294) gegeben ist, und der Region der Kugelwellen von der Form (294a) soll die Stärke und Phase der Luftschwingungen stationär geworden sein, also Ψ hier überall von der Form sein:

$$\Psi = \Psi' \cos 2\pi n t + \Psi'' \sin 2\pi n t, \tag{294b}$$

worin Ψ' und Ψ'' Functionen der Coordinaten, aber unabhängig von der Zeit sind und in diesem ganzen Theile des Luftraumes die Bedingung erfüllen:

$$0 = k^2 \Psi + \varDelta \Psi.$$

Endlich mufs noch längs der ganzen Wand der Röhre und an dem Theile der yz-Ebene, welcher nicht von der Röhrenmündung ein genommen ist, sein:

$$\frac{d\Psi}{dn} = 0. \tag{294c}$$

Wir wollen nun die Beziehungen zwischen den Coefficienten A, B, $\mathfrak{B}$, M und M_1 der Gleichungen (294) und (294a) mittelst des erweiterten Green'schen Theorems aufsuchen.

Die erste Anwendung der Gleichung (287) machen wir auf den inneren Raum der Röhre, diesen von der Ebene der Mündung bis zu einer damit parallelen Ebene genommen, welche in der Region der ebenen Wellen liegt. Die Function Φ der Gleichung (287) setzen wir hier:

$$\Phi = \cos kx.$$

Da sowohl Φ wie Ψ die Gleichung (285) erfüllen innerhalb des hier betrachteten Raumes, so reducirt sich Gleichung (287) auf

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 0. \tag{287a}$$

Nun ist $\frac{d\Psi}{dn}$ nur an der Mündung und in dem Querschnitte der Röhre von Null verschieden, dort ist es gleich $-\frac{d\Psi}{dx}$, hier gleich $+\frac{d\Psi}{dx}$. Es wird also:

$$\int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = -\cos 2\pi n t \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} d\omega - \sin 2\pi n t \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} d\omega$$
$$+ Q(A\cos kx - Bk\sin kx)\cos kx \cos 2\pi n t$$
$$- Q\mathfrak{B} k \sin kx \cos kx \sin 2\pi n t.$$

Durch den Horizontalstrich $\overline{\Psi}$ oder $\frac{d\overline{\Psi}}{dx}$ sollen hier und fortan die Werthe bezeichnet werden, welche die betreffenden Functionen in der Ebene der Röhrenmündung haben. Mit Q ist die Gröfse des Querschnitts des cylindrischen Theils der Röhre bezeichnet. Dagegen ist $\frac{d\Phi}{dn}$ am cylindrischen Theile der Röhrenwand und in der Oeffnung der Röhre gleich Null. Von Null verschieden ist es nur in dem Querschnitte der Röhre, wo es den Werth $-k\sin kx$ hat, und in dem nicht cylindrischen Theile der Röhrenwand. Nennt man den Winkel, den die nach innen gerichtete Normale der Röhrenwand mit den positiven x bildet, β, so ist, da

$$\frac{d\Phi}{dy} = \frac{d\Phi}{dz} = 0,$$

$$\frac{d\Phi}{dn} = \cos\beta \frac{d\Phi}{dx} = -k\sin kx\cos\beta.$$

Wir haben also:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega = -Q(A\sin kx + kB\cos kx)\sin kx\cos 2\pi n t$$
$$- Qk\mathfrak{B}\cos kx\sin kx\sin 2\pi n t$$
$$- k\cos 2\pi n t . \int \Psi' \sin kx\cos\beta\, d\omega$$
$$- k\sin 2\pi n t . \int \Psi'' \sin kx\cos\beta\, d\omega.$$

Wenn man diese Werthe der Integrale in die Gleichung (287a) einführt, und einzeln die mit $\cos 2\pi n t$ und die mit $\sin 2\pi n t$ multiplicirten Glieder gleich Null setzt, so erhält man

$$AQ = \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} d\omega - k\int \Psi' \sin kx\cos\beta\, d\omega, \tag{295}$$

$$0 = \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} d\omega - k\int \Psi'' \sin kx\cos\beta\, d\omega. \tag{295a}$$

In beiden Gleichungen ist das erste Integral über die ganze Oeffnung der Röhre zu nehmen, das zweite über die Wand der Röhre, doch wollen wir gleich bemerken, dafs an allen Stellen, wo $\cos\beta$ von Null verschieden ist, kx nach unserer Annahme eine verschwindend kleine Gröfse wird. In rein cylindrischen Röhren mit ganz offener oder theilweis gedeckter Mündung fallen diese letzteren Integrale ganz weg.

Die zweite Anwendung des Theorems (287) machen wir auf den freien Raum auf Seite der positiven x, der einerseits begrenzt gedacht wird durch die yz-Ebene, andererseits durch eine um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt construirte halbe Kugelfläche, welche in die Region der kugeligen Wellen fällt. Innerhalb dieses Raumes liege der Punkt, dessen Coordinaten α, β, γ sind. Die Entfernung des Punktes x, y, z von ihm sei $r_{,}$, während $r_{,,}$ die Entfernung von dem Punkte sei, dessen Coordinaten $-\alpha$, β, γ sind, und der aufserhalb des hier betrachteten Raumes liegt. Die Function Φ der Gleichung (287) setzen wir

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\frac{\cos(kr_{,} - 2\pi n t)}{r_{,}} + \tfrac{1}{2}\frac{\cos(kr_{,,} - 2\pi n t)}{r_{,,}}.$$

Indem wir nun die Gleichung (287) anwenden mit Beachtung des in (288) berücksichtigten Umstandes der Unstetigkeit von Φ im Punkte α, β, γ, erhalten wir:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 2\pi \Psi_a \cos 2\pi n t, \qquad (295\text{b})$$

wo Ψ_a den Werth von Ψ im Punkte α, β, γ bezeichnet.

Wie im Falle der Gleichung (293) wird die Gröfse

$$\Psi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\Psi}{dn}$$

an der weit entfernten Kugelfläche eine von der Zeit unabhängige Gröfse, ebenso natürlich auch das Integral dieser Gröfse über die Kugelfläche, welches wir mit $\mathfrak{C}$ bezeichnen wollen. An der yz-Ebene dagegen ist $\frac{d\Phi}{dn}$ überall gleich Null, ebenso $\frac{d\Psi}{dn}$ überall mit Ausnahme der Oeffnung, wo es gleich $\frac{d\overline{\Psi}}{dx}$ ist; Φ aber bekommt den Werth:

$$\overline{\Phi} = \frac{\cos(kr_{,} - 2\pi n t)}{r_{,}},$$

weil an der yz-Ebene $r_, = r_{,,}$ ist. So erhalten wir die Gleichung:

$$\mathfrak{C} - \int \frac{d\,\overline{\Psi}}{d\,x} \frac{\cos(k\,r_, - 2\pi\,n\,t)}{r_,} d\,\omega = 2\pi\,\Psi_a \cos 2\pi\,n\,t. \tag{295c}$$

Setzen wir nun nach Gleichung (294b)

$$\Psi = \Psi' \cos 2\pi\,n\,t + \Psi'' \sin 2\pi\,n\,t,$$

so können wir in der Gleichung (295c), welche für alle Werthe von t erfüllt sein mufs, die Quadrate und Producte von $\cos 2\pi\,n\,t$ und $\sin 2\pi\,n\,t$ durch $\cos 4\pi\,n\,t$ und $\sin 4\pi\,n\,t$ ausdrücken und dann einzeln gleich Null setzen: 1) die Glieder, welche nach der Zeit constant sind, 2) die Glieder, welche mit $\cos 4\pi\,n\,t$ multiplicirt sind, und 3) die mit $\sin 4\pi\,n\,t$ multiplicirten, und erhalten dadurch folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{C} &= \pi\,\Psi'_a + \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}\frac{\cos k\,r_,}{r_,} + \frac{d\,\overline{\Psi''}}{d\,x}\frac{\sin k\,r_,}{r_,}\right) d\,\omega, \\
0 &= \pi\,\Psi'_a + \tfrac{1}{2}\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}\frac{\cos k\,r_,}{r_,} d\,\omega - \tfrac{1}{2}\int \frac{d\,\overline{\Psi''}}{d\,x}\frac{\sin k\,r_,}{r_,} d\,\omega, \\
0 &= \pi\,\Psi''_a + \tfrac{1}{2}\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}\frac{\sin k\,r_,}{r_,} d\,\omega + \tfrac{1}{2}\int \frac{d\,\overline{\Psi''}}{d\,x}\frac{\cos k\,r_,}{r_,} d\,\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{295d}$$

Die Integrationen sind über die Oeffnung der Röhre auszudehnen. Durch die beiden letzten Gleichungen ist der Werth der Functionen Ψ' und Ψ'' für alle Punkte des Raumes auf Seite der positiven x gegeben, wenn die Werthe von $\frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}$ und $\frac{d\,\overline{\Psi''}}{d\,x}$ in der Oeffnung der Röhre bekannt sind. Die erste Gleichung folgt aus den beiden anderen mittelst des Theorems (288). Der Werth von Ψ_a wird demnach:

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_a = &- \frac{1}{2\pi}\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}\frac{\cos(k\,r_, - 2\pi\,n\,t)}{r_,} d\,\omega \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int \frac{d\,\overline{\Psi''}}{d\,x}\frac{\sin(k\,r_, - 2\pi\,n\,t)}{r_,} d\,\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{295e}$$

Wenn wir statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten einführen, nämlich

$$\alpha = \varrho \cos\omega, \quad \beta = \varrho \sin\omega \cos\vartheta, \quad \gamma = \varrho \sin\omega \sin\vartheta,$$

so wird in unendlich grofser Entfernung ϱ vom Anfangspunkte der Coordinaten mittelst einer ähnlichen Umformung, wie sie in § 53 ausgeführt ist:

$$\Psi = M\frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho} - M_1\frac{\sin(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho}, \tag{294a}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} M &= -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{d\overline{\Psi}}{dx}\cos k\varepsilon + \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\sin k\varepsilon\right)dy\,dz,\\ M_1 &= -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\cos k\varepsilon - \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\sin k\varepsilon\right)dy\,dz,\\ &\varepsilon = y\sin\omega\cos\vartheta + z\sin\omega\sin\vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{295f}$$

und wo die Integrationen über die Oeffnung der Röhre auszudehnen sind.

Eine dritte Anwendung des erweiterten GREEN'schen Satzes machen wir auf den Raum, welcher zwischen einem Querschnitte der Röhre in der Region der ebenen Wellen und einer halben Kugelfläche in der Region der kugeligen Wellen liegt. Für die Functionen Ψ und Φ der Gleichung (287) setzen wir Ψ' und Ψ'' und haben wie in Gleichung (287a):

$$\int\Psi'\frac{d\Psi''}{dn}d\omega - \int\Psi''\frac{d\Psi'}{dn}d\omega = 0.$$

Da längs der ganzen festen Wand des Raumes $\frac{d\Psi'}{dn} = \frac{d\Psi''}{dn} = 0$, so ist die Integration nur über den Querschnitt der Röhre und die Halbkugel auszudehnen. Im Querschnitt ist:

$$\Psi' = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx,$$

$$\Psi'' = \mathfrak{B}\cos kx,$$

$$\Psi'\frac{d\Psi''}{dx} - \Psi''\frac{d\Psi'}{dx} = -A\mathfrak{B}.$$

An der Kugelfläche ist:

$$\Psi' = M\frac{\cos k\varrho}{\varrho} - M_1\frac{\sin k\varrho}{\varrho},$$

$$\Psi'' = M\frac{\sin k\varrho}{\varrho} + M_1\frac{\cos k\varrho}{\varrho},$$

$$-\Psi'\frac{d\Psi''}{d\varrho} + \Psi''\frac{d\Psi'}{d\varrho} = -\frac{k(M^2 + M_1^2)}{\varrho^2}.$$

Wenn man die Integrale nimmt, wird:

$$0 = A\mathfrak{B}\,Q + k\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\,\omega \int_0^{2\pi} d\,\vartheta\,(M^2 + M_1^2)\sin\omega\,. \tag{295g}$$

Endlich wenden wir noch das Theorem (287) auf den inneren Raum der Röhre an, von der Ebene der Mündung bis zu einem Querschnitt in der Region der ebenen Wellen für die Function Ψ' und

$$\Phi = \sin k\,x\,,$$

$$\int \Psi' \frac{d\,\Phi}{d\,n}\,d\,\omega - \int \Phi \frac{d\,\Psi'}{d\,n}\,d\,\omega = 0\,. \tag{287a}$$

Am Querschnitte der Röhre wird

$$\Psi' \frac{d\,\Phi}{d\,x} - \Phi \frac{d\,\Psi'}{d\,x} = k\,B\,.$$

An der Wand der Röhre wird $\frac{d\,\Psi'}{d\,n} = 0$, an ihrer Mündung $\Phi = 0$, so dafs das zweite Integral der Gleichung (287a) verschwindet. Im ersten wird an der Wand der Röhre:

$$\frac{d\,\Phi}{d\,n} = k\,.\cos k\,x\,.\cos\beta\,,$$

an der Mündung $\frac{d\,\Phi}{d\,n} = -\,k$. Also haben wir:

$$Q\,B + \int \Psi' \cos k\,x \cos\beta\,d\,\omega - \int \overline{\Psi'}\,d\,\omega = 0\,, \tag{295h}$$

wo das erste Integral über den nicht cylindrischen Theil der Röhrenwand auszudehnen ist, so weit cos β sich von Null unterscheidet, das zweite über die Oeffnung der Röhre.

Wir haben jetzt in den Gleichungen (295), (295a), (295d), (295f), (295g), (295h) die Werthe der Coefficienten A, B, $\mathfrak{B}$, M, M_1 und der Functionen Ψ' und Ψ'' im freien Raume zurückgeführt auf Integrale, in denen nur die Werthe vorkommen, welche Ψ', Ψ'' und ihre Differentialquotienten theils in der Mündung der Röhre selbst, theils an dem nicht cylindrischen Theile ihrer Wand haben. Wir wollen jetzt die Vereinfachungen dieser Ausdrücke einführen, welche daraus herfliefsen, dafs die Dimensionen der Mündung und die Länge des nicht cylindrischen Theiles der Röhre unserer Annahme nach gegen die Wellenlänge verschwindend klein sein sollen. Vernachlässigen wir Gröfsen von der Ordnung $k\varepsilon$ gegen 1, so nehmen unsere Gleichungen (295), (295a) und (295f) folgende Gestalt an:

$$A\,Q = \int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}\,d\,\omega\,, \tag{296}$$

$$0 = \int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}\,d\,\omega - k^2 \int \Psi'\,x\cos\beta\,d\,\omega\,, \tag{296a}$$

$$M = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}\,d\,\omega = -\frac{1}{2\pi}\,A\,Q\,. \tag{296b}$$

Für den Werth von M_1 ist zu bemerken, dafs das von k unabhängige Glied desselben $\int \frac{d\,\overline{\Psi''}}{d\,x}\,d\,\omega$ nach Gleichung (296a) selbst eine verschwindend kleine Gröfse ist, dafs ferner auch das mit der ersten Potenz von k multiplicirte $\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}\,\varepsilon\,d\,\omega$ der Null gleich gemacht werden kann, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten, über den bisher nur bestimmt ist, dafs er in der Oeffnung der Röhre liegen solle, in den Schwerpunkt einer Masse verlegt, welche mit der Dichtigkeit $\frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}$ über die Fläche der Oeffnung verbreitet ist; also reducirt sich der Werth von M_1 auf verschwindend kleine Gröfsen, nämlich

$$M_1 = \frac{-k^2}{2\pi}\int \Psi''\,x\cos\beta\,d\,\omega + \frac{k^2}{4\pi}\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}\,\varepsilon^2\,d\,\omega\,. \tag{296c}$$

Wir werden also M_1 gegen M vernachlässigen und letzteres als unabhängig von den Winkeln ω und ϑ betrachten dürfen, also aus Gleichung (295g) erhalten:

$$A\,\mathfrak{B}\,Q = -2\pi\,k\,M^2,$$

oder mit Berücksichtigung von

$$A\,Q = -2\,\pi\,M, \tag{296b}$$

$$\mathfrak{B} = k\,M = -\frac{k}{2\,\pi}\,A\,Q\,, \tag{296d}$$

endlich:

$$Q\,B = \int \overline{\Psi'}\,d\,\omega - \int \Psi'\cos\beta\,d\,\omega. \tag{296e}$$

Da nun übrigens nach Gleichung (295d) in der Ebene der Mündung mit Vernachlässigung kleiner Gröſsen

$$\overline{\Psi'} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{dx}\frac{d\omega}{r}$$

und nach Gleichung (296b)

$$M = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{dx}\,d\omega = -\frac{1}{2\pi}A\,Q,$$

so sind M oder $A\,Q$ und $\varepsilon\,\overline{\Psi'}$ Gröſsen von gleicher Ordnung. Nun können wir also die Gleichung (296e) schreiben:

$$Q\,B = \pm\int\int \Psi'\,dy\,dz,$$

wo die Integration über alle Werthe von z und y auszudehnen ist, welche der Oeffnung und Wand der Röhre angehören, und das + Zeichen sowohl an der Oeffnung als an denjenigen Theilen der Wand zu nehmen ist, deren Normale mit den negativen x einen spitzen Winkel bildet, das − Zeichen an den Theilen, deren Normale mit den positiven x einen spitzen Winkel bildet. $Q\,B$ ist also gleich den Werthen von Ψ' in der Nähe der Oeffnung, integrirt über eine Fläche von der Gröſse Q; also ist B von der Gröſsenordnung $\overline{\Psi'}$ oder $\frac{A\,Q}{\varepsilon}$. Wenn also der Querschnitt der Röhre von derselben Ordnung kleiner Gröſsen wie die Oeffnung, d. h. von der Ordnung ε^2 ist, ist B von der Ordnung $A\,\varepsilon$. Genauer läſst sich bei der Allgemeinheit unserer Annahmen das Verhältniſs $\frac{B}{A}$ nicht bestimmen. Wir werden später bei den Beispielen sehen, daſs es von der Form der Mündung abhängt, von welcher wir das Verhältniſs $\frac{\mathfrak{B}}{A}$ unabhängig gefunden haben, und daſs es nicht merklich von dem Werthe von k abhängt, so lange der Querschnitt der Röhre und die Länge des nicht cylindrischen Theiles als verschwindend gegen die Wellenlänge zu betrachten sind. Ist übrigens die Oeffnung der Röhre sehr klein gegen den Querschnitt, so kann $\frac{B}{A}$ jeden beliebigen gröſseren Werth erreichen.

Innerhalb der tieferen Theile der Röhre ist also, wenn wir setzen

$$\frac{kB}{A} = -\operatorname{tang} k\alpha, \tag{296f}$$

$$\Psi = \frac{A}{k\cos k\alpha}\sin k(x-\alpha)\cos 2\pi n t \tag{296g}$$

$$-\frac{AkQ}{2\pi}\cos kx \sin 2\pi n t,$$

und dazu gehört die Bewegung in den entfernten Stellen des freien Raumes, indem wir M_1 gegen M vernachlässigen,

$$\Psi = -\frac{AQ}{2\pi}\frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho}, \tag{296h}$$

in welchen beiden Gleichungen A eine willkürliche Constante ist, und α für jede besondere Röhrenform besonders bestimmt werden mufs.

Die Natur des hier behandelten Problems wird noch klarer, wenn man auf den Grenzfall übergeht, wo $k = 0$ wird. Dann werden die beiden Functionen Ψ' und Ψ'' von einander unabhängig, und es entstehen aus unserem Problem folgende zwei Aufgaben:

1) Es ist eine Function Ψ' zu suchen, welche in dem ganzen betrachteten Raume der Bedingung genügt, dafs

$$\Delta \Psi' = 0,$$

welche für grofse negative x übergeht in $Ax + B$, für grofse positive in $-\frac{AQ}{2\pi\varrho}$, und für die längs der ganzen festen Wand $\frac{d\Psi'}{dn} = 0$ ist. Es ist dies mathematisch dieselbe Aufgabe, als hätten wir einen homogenen elektrischen Leiter von der Gestalt unseres Luftraumes, welchen ein elektrischer Strom von bestimmter Intensität (AQ, wenn das Leitungsvermögen des Stoffes gleich 1 ist) durchfliefst, der aus dem cylindrischen Theile in den unendlichen Raum übergeht. Wir nennen bekanntlich den Leitungswiderstand zweier Leiter gleich, wenn bei gleicher Intensität des Stromes ihre Endflächen Flächen constanten Potentials sind und dieselbe Differenz des Potentials zeigen. Nun ist in irgend einem Querschnitte des cylindrischen Theiles die Potentialfunction $Ax + B$, für unendliche Entfernung im freien Raume Null. Denken wir uns dagegen den cylindrischen Leiter cylindrisch fortgesetzt und überall die Potentialfunction gleich $Ax + B$, so wird sie Null, wenn $x = -\frac{B}{A} = \alpha$. Es ist also $-(x-\alpha)$ die Länge eines cylindrischen Leiters von demselben Material, welcher denselben elektrischen Widerstand bietet, wie der Leiter von Gestalt unseres Luftraumes, gerechnet von einem Querschnitt des cylindrischen Theiles in der Entfernung $-x$ von der Mündung bis in unendliche Entfernung im freien Raume. Nach der in der Elektricitätslehre gebräuchlichen Terminologie würde also $-(x-\alpha)$ die reducirte Länge jenes Leiters genannt werden können, und wir wollen dieselbe Benennung auch hier brauchen. Die Constante B oder α verschwindet also nicht mit k zugleich, obgleich andererseits einzusehen ist, dafs sie meistens nicht grofs sein kann, da der Widerstand unendlich ausgedehnter Leiter, wie der der Erde, immer sehr klein ist verglichen mit dem Widerstande cylindrischer Leiter von demselben Material, aus denen die Elektricität in den unendlichen Leiter ausströmt, und es folgt auch weiter aus den bekannten Theoremen über Elektricitätsleitung, dafs α desto gröfser werden mufs, je enger die Mündung der Röhre gemacht wird, was sich auch in den akustischen Versuchen durch die Veränderung des Tones der Röhren zeigt, dessen Abhängigkeit vom Werthe von α wir unten feststellen werden.

Wenn die Oeffnung sehr klein und kreisförmig ist, während die den Cylinder schliefsende Wand in ihrer Nähe nahehin eben ist, läfst sich annehmen, dafs der Widerstand hauptsächlich nur von den dicht bei der Oeffnung gelegenen Theilen herrührt, wo die Bahn der Strömung am engsten ist. Der Widerstand einer kreisförmigen Oeffnung vom Radius R in einer isolirenden Ebene, welche zwei unendlich ausgedehnte Leiter von einander trennt, ist aber, ausgedrückt durch die Länge l eines Cylinders vom Querschnitt Q:

$$l = \frac{Q}{2R}, \tag{296i}$$

und dies würde in diesem Falle auch der Werth von $-\frac{B}{A}$ sein.

2) Es ist eine Function $\frac{1}{k}\,\Psi''$ zu suchen, welche im ganzen betrachteten Raume der Bedingung genügt, dafs $\Delta\,\Psi'' = 0$, welche für grofse Entfernungen von der Mündung sowohl auf Seite der negativen wie der positiven x wird:

$$\frac{1}{k}\,\Psi'' = -\frac{A\,Q}{2\pi}$$

und längs der ganzen festen Wand des Luftraumes $\frac{d\Psi''}{dn} = 0$. Offenbar ist unter diesen Umständen Ψ'' im ganzen Raume constant.

Hierbei wird dann ersichtlich, dafs in der Oeffnung nicht blofs, wie wir schon gesehen, die Gröfse $\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}\,d\,\omega$, sondern auch $\frac{d\,\overline{\Psi'}}{d\,x}$ selbst mit k zugleich verschwindet.

§ 56. Form der Wellen in der Röhre.

Die bisher gewonnenen Sätze lassen nun eine Reihe allgemeiner Folgerungen ziehen nicht blofs über die Lage der Schwingungs-Minima und -Maxima (Knoten und Bäuche der Schwingungen) und die davon abhängende Höhe der natürlichen Töne der Röhre, die wir als Töne **stärkster Resonanz** charakterisiren können, sondern sie geben uns für eine Reihe besonderer Erregungsweisen der Töne auch bestimmte Auskunft über die Stärke und Phasen der in der Röhre erregten Schwingungen.

Die Geschwindigkeit der Lufttheilchen ist, aus Gleichung (296g) berechnet:

$$\frac{d\,\Psi'}{d\,x} = \frac{A}{\cos k\,\alpha}\cos k(x-\alpha)\cos 2\,\pi\,n\,t + \frac{A\,k^2\,Q}{2\,\pi}\sin k\,x \sin 2\,\pi\,n\,t \tag{297}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\,\Psi'}{d\,x} = J\cos(2\,\pi\,n\,t + \tau), \\ &\text{wenn} \\ &J = A\sqrt{\frac{\cos^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\,\alpha} + \frac{k^4\,Q^2}{4\,\pi^2}\sin^2 k\,x}, \\ &\operatorname{tang}\tau = -\frac{k^2\,Q\sin k\,x\cos k\,\alpha}{2\,\pi\cos k\,(x-\alpha)}. \end{aligned}\right\} \tag{297a}$$

Die Werthe von x, für welche J^2 ein Maximum oder Minimum wird, werden gefunden durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} 2\,k\,(x-\alpha) = \frac{k^4\,Q^2\sin k\,\alpha\cos^3 k\,\alpha}{2\,\pi^2\left(1 - \frac{k^4\,Q^2}{4\,\pi^2}\cos 2\,k\,\alpha\,.\cos^2 k\,\alpha\right)}. \tag{297b}$$

Wenn x_0 ein Werth ist, der, für x gesetzt, diese Gleichung erfüllt, so wird sie auch erfüllt durch

$$x = x_0 + \mathfrak{a}\,\frac{\lambda}{4} = x_0 + \frac{\mathfrak{a}\,\pi}{2\,k},$$

worin $\mathfrak{a}$ eine beliebige negative oder positive Zahl bezeichnet. Die Maxima und Minima der Schwingung liegen also in der Röhre um Viertelwellenlängen von einander entfernt. Sie liegen aber nicht nothwendig um ein genaues Vielfaches einer Viertelwellenlänge von der Oeffnung der Röhre entfernt. Wenn, wie wir im Folgenden immer annehmen wollen, $k^2 Q$ eine unendlich kleine Gröfse ist, so wird mit Vernachlässigung der kleinen Gröfsen zweiter Ordnung die Gleichung (297 b):

$$\operatorname{tang} 2k(x-\alpha) = 0.$$

Dann wird J^2 ein Maximum $J_{,}^2$, wenn

$$k(x-\alpha) = \mathfrak{a}\pi, \text{ also } \cos k(x-\alpha) = \pm 1,$$

$$J_{,}^2 = \frac{A^2}{\cos^2 k\alpha},$$

und J^2 wird ein Minimum $J_{,,}^2$, wenn

$$k(x-\alpha) = (\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2})\pi, \text{ also } \cos k(x-\alpha) = 0,$$

$$J_{,,}^2 = A^2 \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \cos^2 k\alpha.$$

Denken wir uns die ebenen Wellen bis zur Mündung der Röhre fortgesetzt, so würde in der kleinen Entfernung α vor der Oeffnung ein Maximum der Schwingung liegen. Denken wir uns die Entfernungen der Querschnitte der Röhre von diesem um die Länge α vor der Oeffnung in der Axe der Röhre gelegenen Punkte gezählt und nennen diese Entfernungen die reducirten Längen des betreffenden Röhrenstücks, so erhalten wir Maxima der Schwingung überall, wo die reducirte Länge gleich einem geraden Vielfachen der Viertelwellenlänge, und Minima der Schwingung (Knotenflächen), wo die reducirte Länge der Röhre einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge gleich ist. In den Knotenflächen herrscht aber nicht absolute Ruhe, sondern die Bewegung wird nur sehr klein.

Am Orte der Maxima der Schwingung wird tang τ gleich einer unendlich kleinen Gröfse, also $\tau = \mathfrak{a}\pi$, am Orte der Minima wird $\operatorname{tang}\tau = \infty$, also $\tau = (\mathfrak{a}+\frac{1}{2})\pi$, folglich sind die Phasen der Bewegung am Orte der Maxima und Minima um eine Viertelschwingungsdauer verschieden.

Nach Gleichung (263a) ist die Verdichtung der Luft, wo keine äufseren Kräfte wirken:

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{a^2}\frac{d\Psi}{dt},$$

also in unserem Falle:

$$\mathfrak{h} = \frac{A}{a\cos k\alpha}\sin k(x-\alpha)\sin 2\pi n t + \frac{A k^2 Q}{2\pi a}\cos k x \cos 2\pi n t \qquad (298)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{h} = L\sin(2\pi n t + \tau_,), \\ &\text{wenn} \\ &L = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{\sin^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2 \cos^2 k x}{4\pi^2}}, \\ &\operatorname{tang}\tau_, = \frac{k^2 Q \cos k x \cos k\alpha}{2\pi \sin k(x-\alpha)}. \end{aligned}\right\} \qquad (298\text{a})$$

Die Bedingungsgleichung, welche die Werthe von x giebt, für welche L^2 ein Maximum oder Minimum wird, ist dieselbe wie Gleichung (297b), welche oben für die Grenzwerthe von J^2 aufgestellt ist; aber wo letzteres ein Maximum ist, wird L^2 ein Minimum, und umgekehrt. Wo L^2 ein Maximum, wird $\operatorname{tang}\tau_, = 0$ (oder vielmehr gleich einer verschwindend kleinen Gröfse), also:

$$\mathfrak{h} = \pm\frac{A}{a\cos k\alpha}\sin 2\pi n t, \qquad \frac{d\Psi}{dx} = \pm\frac{A k^2 Q \cos k\alpha}{2\pi}\sin 2\pi n t,$$

wo L^2 ein Minimum ist, wird $\operatorname{tang}\tau_, = \infty$,

$$\mathfrak{h} = \pm\frac{A k^2 Q \cos k\alpha}{2\pi a}\cos 2\pi n t, \qquad \frac{d\Psi}{dx} = \pm\frac{A}{\cos k\alpha}\cos 2\pi n t.$$

An diesen Stellen also fällt das Maximum der Verdichtung mit dem Maximum der Geschwindigkeit in der Zeit zusammen, nicht aber an den zwischenliegenden Stellen. Denn, wo weder $\sin k(x-\alpha)$ noch $\cos k(x-\alpha)$ der Null nahe sind, sind sowohl $\operatorname{tang}\tau$ als $\operatorname{tang}\tau_,$ sehr kleine Gröfsen, und es wird also nahehin

$$\mathfrak{h} = L\sin 2\pi n t, \qquad \frac{d\Psi}{dx} = J\cos 2\pi n t,$$

so dafs hier die Maxima des Druckes und der Geschwindigkeit nahehin um eine Viertel-Undulationszeit auseinanderfallen.

Denkt man sich die ebenen Wellen bis zur Oeffnung der Röhre, wo $x = 0$, fortgesetzt, so wird dort $\operatorname{tang}\tau = 0$, dagegen

$$\operatorname{tang}\tau_, = -\frac{k^2 Q}{2\pi}\operatorname{cotang} k\alpha.$$

Nun ist im Allgemeinen $\operatorname{tang} k\alpha$ eine kleine Gröfse erster Ordnung, $k^2 Q$ eine solche zweiter Ordnung, also $\operatorname{tang}\tau_,$ sehr klein und $\tau_,$ nahe an Null. Aber es kann auch für besondere Röhrenformen

$\alpha = 0$ werden, dann würde $\tau_, = \frac{1}{2}\pi$. Im ersteren Falle würden in der Oeffnung die Maxima der Geschwindigkeit und der Verdichtung um eine Viertel-Undulation der Zeit nach aus einander liegen, im zweiten Falle zusammenfallen. POISSON's Voraussetzung, dafs die Verdichtung in der Oeffnung gleich der Geschwindigkeit, multiplicirt mit einer sehr kleinen Constanten, sei, ist also nur in einem besonderen Falle richtig, den er allerdings als den allgemeinen betrachtete. Auch in diesem Falle ist sie übrigens nur richtig, wenn man sich erlaubt, die ebenen Wellen bis zur Mündung der Röhre fortgesetzt zu denken, aber nicht, wenn man die wirklich in der Oeffnung stattfindenden mittleren Werthe der Geschwindigkeit und Verdichtung nimmt.

Was die Lage der einzelnen Wellenphasen in einem gegebenen Augenblicke betrifft, so finden wir die Lage der Geschwindigkeitsmaxima in der Region der ebenen Wellen, indem wir $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$ setzen, oder auch $\Psi = 0$, da hier $\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0$. Also

$$0 = \frac{A}{k}\cos 2\pi n t \sin kx + [B\cos 2\pi n t + \mathfrak{B}\sin 2\pi n t]\cos kx;$$

daraus folgt als Bedingung unter Berücksichtigung der Gleichungen (296f) und (296g)

$$\operatorname{tang} kx = \operatorname{tang} k\alpha + \frac{k^2 Q}{2\pi}\operatorname{tang} 2\pi n t. \tag{298b}$$

Wenn $t = 0$, wird

$$\operatorname{tang} kx = \operatorname{tang} k\alpha.$$

Die Maxima der Geschwindigkeit liegen dann, wo $-(x-\alpha) = \mathfrak{a}\lambda$, die Minima, wo $-(x-\alpha) = (\mathfrak{a}+\frac{1}{2})\lambda$. Wenn nun t wächst, so bleibt, weil $k^2 Q$ eine verschwindend kleine Gröfse ist, doch immer noch $\operatorname{tang} kx$ unmerklich wenig verschieden von $\operatorname{tang} k\alpha$, also die Lage der Maxima und Minima unverändert, so lange $\operatorname{tang} 2\pi n t$ endliche Werthe hat. Wenn aber t sich dem Werthe einer Viertel-Schwingungsdauer nähert, wird auch $\operatorname{tang} kx$ gleichzeitig mit $\operatorname{tang} 2\pi n t$ erst $+\infty$, dann $-\infty$, dann aber, so wie $\operatorname{tang} 2\pi n t$ endliche negative Werthe erreicht hat, wird $\operatorname{tang} kx$ wieder gleich $\operatorname{tang} k\alpha$, und so bleibt es wieder während beinahe einer halben Schwingungsdauer stationär, so lange $\operatorname{tang} 2\pi n t$ endlich bleibt. So oft nun $\operatorname{tang} kx$ vom Werthe $\operatorname{tang} k\alpha$ auf $+\infty$ wächst, dann von $-\infty$ durch die negativen Werthe bis 0 und wieder auf $\operatorname{tang} k\alpha$

übergeht, mufs kx um π wachsen und x selbst um $\frac{1}{2}\lambda$. So wird also ein Maximum, welches zur Zeit $t = 0$ da liegt, wo die reducirte Länge $\mathfrak{a}\lambda$ beträgt, um die Zeit $t = \frac{1}{4n}$ schnell übergehen auf die reducirte Länge $(\mathfrak{a} - \frac{1}{2})\lambda$, hier beinahe stillstehen bis $t = \frac{3}{4n}$, dann schnell fortschreiten auf $(\mathfrak{a} - 1)\lambda$ u. s. w.

Im freien Raume dagegen bewegen sich die Maxima der Geschwindigkeit mit der gleichmäfsigen Fortpflanzungsgeschwindigkeit a vorwärts. In den entfernteren Theilen des freien Raumes liegen sie zur Zeit $t = 0$, wo $\varrho = (\mathfrak{b} + \frac{1}{4})\lambda$. Der Abstand zweier Maxima der Geschwindigkeit, von denen eines im freien Raume in der x-Axe, das andere in der Röhre gelegen ist, zur Zeit $t = 0$ ist $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{4})\lambda - \alpha$. Da bis zur Zeit $t = \frac{1}{4n}$ das Maximum in der Röhre fast ganz still steht, das im freien Raume um $\frac{1}{4}\lambda$ fortschreitet, so wächst die Entfernung beider Maxima bis auf nahehin $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{2})\lambda - \alpha$, geht dann ziemlich schnell zurück auf $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\lambda - \alpha$, um während der nächsten halben Schwingungsdauer wieder auf $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{2})\lambda - \alpha$ zu steigen, und bewegt sich so immer zwischen den genannten Grenzen.

Mit der Verdichtung verhält es sich ähnlich. Ihre Maximalwerthe werden gegeben durch die Gleichung:

$$\operatorname{cotang} kx = -\operatorname{tang} k\alpha + \frac{k^2 Q}{2\pi} \operatorname{cotg} 2\pi n t. \tag{298c}$$

Zur Zeit $t = \frac{1}{4n}$ ist $\operatorname{cotg} 2\pi n t = 0$, und die Maxima der Verdichtung liegen, wo die reducirte Länge der Röhre $(\mathfrak{a} - \frac{1}{4})\lambda$ beträgt. Diese Lage behalten sie auch unverändert bis nahehin $t = \frac{2}{4n}$, wo $\operatorname{cotg} 2\pi n t$ unendlich grofs wird. Dann rücken sie schnell vorwärts bis $(\mathfrak{a} - \frac{3}{4})\lambda$. In den entfernteren Theilen des freien Raumes liegen sie, wenn $t = \frac{1}{4n}$, da, wo $\varrho = (\mathfrak{b} + \frac{1}{2})\lambda$. Ihr Abstand von denen in der Röhre beträgt also dann $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{4})\lambda - \alpha$, wächst allmählich auf $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{2})\lambda - \alpha$, sinkt schnell auf $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\lambda - \alpha$, wächst dann wieder allmählich u. s. w. Sowohl die Maxima des Druckes wie der Geschwindigkeit haben ihren gröfsten Werth in der Röhre, wenn sie stillstehen, ihren kleinsten, wenn sie vorwärts eilen. Uebrigens eilen die Maxima der Geschwindigkeit vorwärts zu den Zeiten und an den Orten, wo die des Druckes stillstehen, und umgekehrt.

Stärke der Resonanz in der Röhre. Denkt man sich die Röhre nur bis $x = -l$ reichend und ihr Ende im Bereiche der ebenen Wellen gelegen, so kann die Erschütterung der Luft in der Röhre entweder an diesem Ende mitgetheilt werden, oder von der vorderen Oeffnung der Röhre her, indem ein Schallwellenzug gegen die Mündung der Röhre schlägt. Was zunächst den ersten Fall betrifft, so kann nach Feststellung der Form der ebenen Wellen leicht der Fall behandelt werden, wo die Röhre durch irgend eine Platte von beliebiger Masse geschlossen ist, welche durch irgend eine elastische Kraft (z. B. einer über die Mündung der Röhre ausgespannten Membran) in ihrer Lage gehalten und durch eine beliebige periodisch wirkende Kraft in Erschütterung versetzt wird. Es läfst sich dann für jede Röhrenform und Tonhöhe, für welche der Werth der Constanten α bekannt ist, sowohl die Form der ebenen Wellen als der Kugelwellen in den entfernteren Theilen des freien Raumes vollständig angeben. Hier genüge es, nur kurz den Fall zu erwähnen, wo eine Bewegung von bestimmter Geschwindigkeit mitgetheilt wird, der also praktisch etwa dem Falle entspricht, wo eine Stimmgabel die Schlufsplatte der Röhre erschüttert.

Die Geschwindigkeit der der Schlufsplatte mitgetheilten Bewegung sei

$$G \cos(2\pi n t + \tau_{,,}),$$

wo wir unter $\tau_{,,}$ eine willkürliche Constante verstehen, mittelst deren wir den Anfang von t passend bestimmen. Dann mufs sein für $x = -l$:

$$\frac{d\Psi}{dx} = J\cos(2\pi n t + \tau) = G\cos(2\pi n t + \tau_{,,}),$$

also

$$G = J = A\sqrt{\frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2}\sin^2 kl}, \tag{299}$$

$$\operatorname{tang}\tau_{,,} = \operatorname{tang}\tau = \frac{k^2 Q \sin kl \cos k\alpha}{2\pi\cos k(l+\alpha)}. \tag{299a}$$

Das Geschwindigkeitspotential in den ferneren Theilen des freien Raumes ist

$$\Psi = M\frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho},$$

wo nach Gleichung (296b)

$$M = -\frac{AQ}{2\pi}.$$

Es läfst sich also A und M aus G und l bestimmen. A, das Schwingungsmaximum in der Röhre, und ebenso M, die Intensität der Kugelwellen im freien Raume, wird bei constantem G, also bei constanter Bewegung der Schlufsplatte der Röhre, am gröfsten, wenn der Factor von A in Gleichung (299) am kleinsten ist, d. h. wenn

$$\cos k(l+\alpha)=0\,,\qquad k(l+\alpha)=(\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2})\pi\,.$$

Dann ist

$$A=\frac{2\pi}{k^2 Q\cos k\alpha}G=\frac{\lambda^2}{2\pi Q\cos k\alpha}G,$$

$$M=-\frac{\lambda^2}{4\pi^2\cos k\alpha}G,$$

$$\tau=(-1)^{\mathfrak{a}}\tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Die stärkste Resonanz der Röhre und der stärkste Schall im freien Raume findet also statt, wenn die Bewegung der Luft am Orte einer Knotenfläche mitgetheilt wird. Die Stärke der Schallwellen wird dabei sehr grofs, aber keineswegs unendlich. Denn damit der im Nenner der Werthe von A und M stehende $\cos k\alpha$ Null werde, müfste die Fläche der Oeffnung gleich Null werden. Dabei zeigt sich zugleich, dafs die Resonanz sowohl in der Röhre als auch im freien Raume desto mächtiger wird, je enger die Oeffnung der Röhre ist. Wenn, wie gewöhnlich, $k\alpha$ klein ist, kann $\cos k\alpha=1$ gesetzt werden. Dann ist die Wirkung im freien Raume unabhängig von der Form der Röhre. Die Vibrationen der Schwingungsmaxima in der Röhre und der um ganze Wellenlängen von der Oeffnung entfernten Wellen im freien Raume unterscheiden sich dabei von denen der mitgetheilten Bewegung um eine Viertel-Undulation.

Das Minimum der Resonanz tritt ein, wenn der Factor von A im Werthe von G in Gleichung (299) sein Maximum erreicht, d. h. wenn

$$\cos k(l+\alpha)=\pm 1\,,\qquad k(l+\alpha)=\mathfrak{a}\pi\,;$$

dann wird mit Weglassung kleiner Gröfsen

$$G\cos k\alpha=A\,,\quad \tau=\mathfrak{a}\pi\,,\quad M=-\frac{QG\cos k\alpha}{2\pi}\,.$$

Die Wirkung im freien Raume ist also, je nach dem Werthe von α, gleich oder kleiner, als wenn gar keine Röhre vorhanden wäre, und die erschütterte Schlufsplatte der Röhre einen Theil der übrigens festen yz-Ebene bildete.

Die grofse Verschiedenheit der Schallstärke in der Luft bei gleicher Excursionsweite der schwingenden Endplatte der Röhre, von der die Wellen erregt werden, kann überraschen. Sie beruht darauf, dafs, wenn auch die Excursion der Schwingungen dieselbe bleibt, doch die Arbeit, die die schwingende Platte durch die Bewegung der Luft leistet, eine aufserordentlich verschiedene ist, je nachdem sie gegen verdichtete oder nicht verdichtete Luft sich vorwärts bewegen mufs. Bei stärkster Resonanz findet am Ende der Röhre auch der stärkste Wechsel von Verdichtung und Verdünnung statt.

Gehen wir jetzt über zu dem anderen Falle, wo der Schall im freien Raume in gröfserer Entfernung von der Oeffnung der Röhre erregt wird, letztere aber an der Stelle $x = -l$ fest geschlossen ist. Da die in dem tönenden Punkte, dessen Coordinaten α, β, γ seien, erregten Wellen von der festen yz-Ebene reflectirt werden, müssen wir uns die Bewegung im freien Raume zusammengesetzt denken aus den Wellen, welche der tönende Punkt erregt, und denen, welche sein Spiegelbild, dessen Coordinaten $-\alpha$, β, γ sind, erregen würde. Setzen wir das Geschwindigkeitspotential Φ dieser Bewegung auf Seiten der positiven x im freien Raume

$$\Phi = H\left[\frac{\cos(kr_{,} - 2\pi n t + c)}{r_{,}} + \frac{\cos(kr_{,,} - 2\pi n t + c)}{r_{,,}}\right], \tag{300}$$

wo $r_{,}$ die Entfernung vom Punkte α, β, γ und $r_{,,}$ die von seinem Spiegelbilde $-\alpha$, β, γ bedeutet, so ist an der ganzen yz-Ebene

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0\,.$$

Ist der tönende Punkt weit von der Oeffnung der Röhre entfernt und diese klein gegen die Wellenlänge, so können wir die kleinen Verschiedenheiten des Werthes von Φ in verschiedenen Punkten der Oeffnung vernachlässigen und hier setzen:

$$\overline{\Phi} = G\cos(2\pi n t + \tau_{,,}),$$

wo

$$G = \frac{2H}{r_{,}},$$

$$\operatorname{tang}\tau_{,,} = -\operatorname{tang}(kr_{,} + c)\,.$$

Innerhalb der Röhre setzen wir dann:

$$\Phi = G\cos kx\cos(2\pi n t + \tau_{,,})\,. \tag{300a}$$

Dann ist Φ an der Oeffnung continuirlich und $\frac{d\Phi}{dx}$ innen und aufsen eben da gleich Null. Innerhalb der Röhre können wir bei dieser Annahme $\frac{d\Phi}{dn} = 0$ setzen, indem wir die verschwindend kleinen Werthe, welche es am nicht cylindrischen Theile der Röhre annimmt, vernachlässigen. Nur am verschlossenen Ende ist $\frac{d\Phi}{dx}$ im Allgemeinen nicht gleich Null. Hier müssen wir setzen:

$$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} = 0$$

und das Geschwindigkeitspotential im ganzen Raume $\Phi + \Psi$, wo Ψ das von uns früher bestimmte Bewegungspotential der ebenen Wellen in der Röhre, die in den freien Raum übergehen, ist. Dadurch ist allen Bedingungen der Aufgabe genügt. Wir haben also für $x = -l$:

$$-kG\sin kl\cos(2\pi nt + \tau_{,,}) = J\cos(2\pi nt + \tau), \qquad \text{(300b)}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \tau_{,,} &= \tau + \pi, \\ kG\sin kl = J &= A\sqrt{\frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2}\sin^2 kl}\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(300c)}$$

Das Minimum von A bei gleichen Werthen von G tritt offenbar ein, wenn $\sin kl = 0$; dann wird $A = 0$, und die Bewegung im freien Raume so, als wäre die Mündung der Röhre gar nicht in der yz-Ebene vorhanden. Das Maximum aber tritt ein, wenn $\cos k(l+\alpha) = 0$; dann wird:

$$A = G \cdot \frac{2\pi}{kQ},$$

und wieder wird beim Maximum der Resonanz der Phasenunterschied von einer Viertel-Undulation zwischen den erregenden Wellen und den erregten eintreten. Das Maximum der Resonanz in der an einem Ende geschlossenen Röhre tritt also in beiden Fällen, sowohl wenn der Schall vom geschlossenen, als wenn er vom offenen Ende her der Luft der Röhre mitgetheilt wird, ein, wenn die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfaches der Viertel-Wellenlänge ist. Aus dem Reciprocitätsgesetz des Schalles, welches in Gleichung (293a) ausgesprochen ist, läfst sich nun dasselbe Gesetz auch für jede andere Lage des tönenden Punktes ableiten. Es pafst auf unseren Fall direct die Form, welche wir dem Gesetze in Gleichung (293c) gegeben haben. Die dortige Constante A, welche der Intensität des tönenden Punktes b entspricht, indem dort Φ unendlich wird, wie

$$\Phi = A\frac{\cos kr_b}{r_b}\cos 2\pi nt,$$

wollen wir gleich 1 setzen. Der Werth von $\frac{d\Psi}{dn}$ ist in Gleichung (293 c) an der erschütterten Stelle da der Wand gleichgesetzt worden:

$$\frac{d\Psi_a}{dn} = B \cos 2\pi n t.$$

Am Grunde der Röhre ist $\frac{d\Psi_a}{dn} = \frac{d\Psi_a}{dx}$, und in dem Falle, wo der Boden der Röhre erschüttert wird, von uns in den Gleichungen (299) und (299 a) gesetzt worden:

$$\frac{d\Psi_a}{dx} = G \cos(2\pi n t + \tau_{,,});$$

wir haben also die Constante B der Gleichung (293 c) mit G zu vertauschen und im Ausdrucke für Ψ statt $2\pi n t$ zu schreiben $2\pi n t - \tau_{,,}$. Aufserdem ist in dem Falle unserer Anwendung nicht blofs ein einziges Flächenelement da erschüttert worden, sondern der ganze Boden der Röhre; wir müssen also über diesen integriren, und erhalten so:

$$4\pi \Psi_b = -G \int \Phi_a \, d\omega, \tag{301}$$

wo die Integration über den Boden der Röhre auszudehnen ist. Ist nun der tönende Punkt vom Boden der Röhre nur weit genug entfernt, dafs hier ebene stehende Wellen entstehen können, also Φ hier von der Form ist:

$$\Phi = f \cos k(l + x) \cos(2\pi n t + c),$$

so wird aus Gleichung (301):

$$4\pi \Psi_b = -f G Q \cos(2\pi n t + c),$$

$$4\pi [\Psi_b' \cos(2\pi n t - \tau_{,,}) + \Psi_b'' \sin(2\pi n t - \tau_{,,})] = -f G Q \cos(2\pi n t + c),$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi(\Psi_b' \cos \tau_{,,} - \Psi_b'' \sin \tau_{,,}) &= -f G Q \cos c, \\ 4\pi(\Psi_b' \sin \tau_{,,} + \Psi_b'' \cos \tau_{,,}) &= f G Q \sin c, \end{aligned}\right\} \tag{301 a}$$

$$4\pi \sqrt{(\Psi_b')^2 + (\Psi_b'')^2} = f G Q.$$

Nun ist der Werth der Functionen Ψ' und Ψ'' für jeden Punkt b proportional der in den Gleichungen (294) bis (300) vorkommenden Constanten A, deren Verhältnifs zu G für eine bestimmte Röhrenlänge gegeben ist in Gleichung (299). Also ist bei wechselnder

Röhrenlänge auch f proportional dem Verhältnifs $\frac{A}{G}$. Dies Verhältnifs wird, wie aus Gleichung (299) hervorgeht, ein Maximum, wenn

$$l + \alpha = (2\mathfrak{a} + 1)\tfrac{1}{4}\lambda.$$

Daraus folgt also, dafs auch bei einer beliebigen Lage des tönenden Punktes die ebenen Wellen im Innern der Röhre, wenn dergleichen überhaupt entstehen, das Maximum ihrer Intensität erreichen, wenn die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfaches der Viertel-Wellenlänge ist.

Die ebenen Wellen im Innern einer an beiden Seiten offenen Röhre lassen sich mittelst der aufgestellten Probleme behandeln, wenn die Mündungen der Röhre nach der von uns gemachten Annahme in zwei parallelen festen Ebenen liegen, die den Luftraum in zwei Theile trennen, und der Schall auf der einen Seite von einem weit entfernten tönenden Punkte ausgeht. Auf der einen Seite dieser Wand setzt man das Geschwindigkeitspotential gleich der in den Gleichungen (294) bis (296) gebrauchten Function Ψ auf der anderen Seite gleich der in den Gleichungen (300) bis (300c) vorkommenden Form $\Phi + \Psi$, welche der Resonanz einer Röhre entspricht, in welche der Schall von der offenen Mündung eintritt. Man hat dann nur die Coefficienten der ebenen Wellen in der Röhre in diesen beiden Ausdrücken des Geschwindigkeitspotentials so zu bestimmen, dafs hier beide Funktionen identisch werden. Da das weiter keine Schwierigkeiten macht, möge das Gesagte genügen. Die Resonanz in der Röhre wird am stärksten, wenn die reducirte Länge der Röhre, an welcher man die Correctionen für beide Mündungen anzubringen hat, ein Vielfaches der halben Wellenlänge ist.

§ 57. Reducirte Länge verschiedener Röhrenformen.

Wir wollen schliefslich noch eine Reihe von Röhrenformen aufsuchen, für welche mit den bis jetzt bereiten Hülfsmitteln der Analysis sich die Luftbewegung in der Mündung und die reducirte Länge vollständig wenigstens für Schallwellen von so grofser Wellenlänge bestimmen läfst, dafs gegen diese die Dimensionen der Röhrenöffnung, ihres Querschnitts und des von der Cylindergestalt abweichenden Theiles der Mündung verschwinden. Die Wand der Röhre sei übrigens eine Rotationsfläche, welche in kleiner Entfernung von der kreisförmigen Mündung, deren Radius R sei, übergeht in einen Cylinder von kreisförmigem Querschnitt, dessen Radius wir R_1 nennen wollen. Wir setzen ferner voraus, dafs auch die Bewegung der Luft überall symmetrisch um die Axe der Röhre vor sich gehe. Wir können nun im Allgemeinen nicht so zu Werke gehen, dafs wir eine bestimmte Röhrenform annehmen und dazu die Potentiale der Bewegung suchen, sondern wir müssen umgekehrt von der Potentialfunction ausgehen und die dazu gehörige Röhrenform bestimmen, was sich in jedem Falle ausführen läfst. Nur müssen wir eben solche Formen der Potentialfunction suchen, welche Röhren geben, die in kleiner Entfernung von der Mündung in Cylinder übergehen.

Dem Bewegungspotentiale der Luft haben wir die Form gegeben:

$$\Psi = \Psi' \cos 2\pi n t + \Psi'' \sin 2\pi n t.$$

Für die tieferen Theile der Röhre haben wir in Gleichung (296g) gefunden:

$$\Psi'' = -\frac{AkQ}{2\pi} \cos kx. \tag{296k}$$

Im freien Raume ist aber, wenn wir $\frac{d\overline{\Psi''}}{dx} = 0$ setzen, welches, wie wir oben schon gefunden haben, mit k verschwindet, nach Gleichung (295d):

$$\Psi'' = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\sin k r_{,}}{r_{,}} d\omega,$$

welches innerhalb der Mündung, wo wir $k r_{,}$ verschwinden lassen dürfen, wird:

$$\overline{\Psi''} = -\frac{k}{2\pi} \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} d\omega = -\frac{AkQ}{2\pi}. \tag{296l}$$

Sowohl Gleichung (296k) wie Gleichung (296l) giebt innerhalb der Mündung den gleichen Werth von $\overline{\Psi''}$ und den Werth Null für $\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}$. Sie gehen also an der Mündung der Röhre continuirlich in einander über. Längs der festen Wände des Luftraumes geben beide $\frac{d\Psi''}{dn} = 0$, nur an dem nicht cylindrischen Theile der Röhrenwand wird dieser Differentialquotient nicht genau Null, aber verschwindend klein. Es ist also Ψ'' unter dieser Annahme eine continuirliche Function, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet, und kann unmittelbar berechnet werden, nachdem Ψ' gefunden ist.

Die Function Ψ' hat im freien Raume die Form:

$$\left.\begin{aligned} \Psi' &= \int h \frac{\cos k r}{r} d\omega, \\ \text{wo} \qquad h &= -\frac{1}{2\pi}\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}. \end{aligned}\right\} \tag{302}$$

Im Innern der Röhre werden wir ihr eine andere analytische Form Ψ_i geben müssen, welche die Eigenschaft haben mufs:

1) Im Innern der Röhre die Bedingung zu erfüllen:

$$\Delta\Psi_i + k^2\Psi_i = 0, \tag{302a}$$

2) für grofse negative Werthe von x folgende Form anzunehmen:

$$\Psi_i = \frac{A}{k}\sin k x + B\cos k x, \tag{302b}$$

3) an der Fläche der Oeffnung den Bedingungen zu genügen:

$$\overline{\Psi_i} = \overline{\Psi'} \quad \text{und} \quad \frac{d\overline{\Psi_i}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} = -2\pi h. \tag{302c}$$

Dann wird die Form der Röhre gefunden durch die Bedingung, dafs an der Wand

$$\frac{d\Psi_i}{dn} = 0, \tag{302d}$$

welche Form aber noch der Bedingung genügen mufs, dafs nur für solche Werthe von x, welche gegen die Wellenlänge λ verschwindend klein sind, die Fläche eine merkliche Neigung gegen die x-Axe haben darf, weil wir vorher auch

$$\frac{d\cos k x}{dn} = 0$$

gesetzt haben längs der ganzen Ausdehnung der Röhrenwand, und weil nur unter dieser Bedingung die Form der Röhrenwand von der Wellenlänge unabhängig gefunden wird. Indem wir setzen:

$$\varrho\cos\omega = y, \qquad \varrho\sin\omega = z,$$

und berücksichtigen, dafs nach der Voraussetzung Ψ nur eine Function von ϱ und x, nicht von ω sein soll, wird Gleichung (302a):

$$\frac{d^2\Psi_i}{dx^2} + \frac{d^2\Psi_i}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho} + k^2\Psi_i = 0. \tag{302e}$$

Wir setzen:

$$\Phi = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx + \Sigma \left[E_m e^{+x\sqrt{m^2 - k^2}} U_{(m\varrho)} \right], \tag{303}$$

wo E_m beliebige Constanten, $U_{(m\varrho)}$ folgende Function bedeutet:

$$U_{(m\varrho)} = 1 - \frac{m^2 \varrho^2}{2.2} + \frac{m^4 \varrho^4}{2.2.4.4} - \frac{m^6 \varrho^6}{2.2.4.4.6.6} \text{ u. s. w.}, \tag{303a}$$

und unter dem Summenzeichen für m diejenigen Werthe zu setzen sind, welche $\frac{d U_{(m\varrho)}}{d\varrho} = 0$ machen, wenn $\varrho = R_1$. Dann ist Φ eine Function, welche der Differentialgleichung (302e) Genüge leistet und an der Wand einer cylindrischen Röhre vom Radius R_1 auch der Bedingung genügt, dafs $\frac{d\Phi}{dn} = 0$. In dem Exponenten von e mufs der Wurzel immer das positive Vorzeichen gegeben werden, wenn die Röhre unendlich lang ist, damit Φ für unendliche negative x endlich bleibt. Ist die Röhre aber irgendwo abgeschlossen, so sind auch negative Vorzeichen der Wurzel zu nehmen, und die Coefficienten derselben so zu bestimmen, dafs die Grenzbedingungen an dem geschlossenen Ende erfüllt werden. Da übrigens der kleinste Werth von mR_1, der die Bedingung $\frac{dU}{d\varrho} = 0$ für $\varrho = R_1$ erfüllt, 3,83171, der zweite 7,01751 ist, während die folgenden sich allmählich der Gröfse $(a + \frac{1}{4})\pi$ nähern, so nehmen alle diese Exponentialfunctionen schnell ab, wenn man sich von dem Ende der Röhre entfernt, an welchem sie einen merklichen Werth haben, und so oft die Länge der Röhre beträchtlich grofs gegen den Durchmesser ist, werden sie in der Mitte oder am anderen Ende derselben zu vernachläfsigen sein. Es wird also im Allgemeinen genügen, dafs wir uns auf die Glieder beschränken, für welche die Wurzel im Exponenten ein positives Vorzeichen hat. Da übrigens mR_1 nach dem Gesagten eine endliche, kR_1 aber eine verschwindend kleine Zahl ist, so können wir in dem Exponenten k^2 gegen m^2 vernachläfsigen und setzen

$$\Phi = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx + \Sigma \{ E_m e^{mx} U_{(m\varrho)} \}. \tag{303b}$$

Diese Function erfüllt also allerdings die Forderung der Gleichungen (302a) und (302b), welche wir oben für die Function Ψ_i aufgestellt haben, sie wird aber im Allgemeinen nicht der dritten Bedingung (302c) entsprechen, dafs, wenn wir setzen:

$$\frac{d\overline{\Phi}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi'}}{dx},$$

auch sei:

$$\overline{\Phi} = \overline{\Psi'} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\frac{\cos kr}{r}\,d\omega,$$

oder, da innerhalb der Oeffnung kr unendlich klein ist, kann man diese Bedingung auch darauf reduciren, dafs sein müfste:

$$\overline{\Phi} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Phi}}{dx}\frac{d\omega}{r}.$$

Wäre diese letztere Bedingung durch besondere Annahmen über die Gröfse der Coefficienten erfüllt, so würde die Gestalt der Röhre einfach cylindrisch sein. Es liefs sich aber keine Methode finden, um die Coefficienten dieser Bedingung gemäfs zu bestimmen und somit die Aufgabe für ganz cylindrische Röhren streng zu lösen. Auch läfst sich einsehen, dafs die Convergenz der Reihe für Φ in Gleichung (303) für diesen Fall eine sehr langsame sein würde, da die Geschwindigkeit der Lufttheilchen $\frac{d\Phi}{dx}$ am Rande der Oeffnung, die durch eine scharfe rechtwinklige Kante begrenzt sein würde, unendlich grofs wie $(R-\varrho)^{-\frac{1}{3}}$ werden müfste, und daher die Reihe für $\frac{d\Phi}{dx}$ für den Werth $\varrho = R$ und $x = 0$ überhaupt nicht convergiren kann.

Wir fügen deshalb zu Φ noch eine andere Function hinzu, die in gröfserer Entfernung von der Oeffnung verschwindet, also auch nur in der Nähe der Oeffnung Einflufs auf die Gestalt der Röhre ausübt, aber die Continuität an der Oeffnung herstellt.

Bezeichnen wir der Einfachheit wegen die Potentialfunction einer auf der Kreisfläche der Oeffnung mit der Dichtigkeit h verbreiteten Masse mit P_h, also

$$P_h = \int h\frac{\cos kr}{r}\,d\omega, \tag{304}$$

dieses Integral über die ganze Fläche der Oeffnung genommen. Wenn die Distanz des Punktes, für welchen wir P_h bestimmen, von der Oeffnung klein ist, so ist $\cos kr = 1$ und

$$P_h = \int \frac{h\,d\omega}{r}. \tag{304a}$$

Setzen wir ferner

$$h = i + l, \tag{305}$$

$$i = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{\Phi}}{dx}, \tag{305a}$$

und bestimmen wir l so, dafs in der Fläche der Oeffnung

$$\overline{P_l} = \tfrac{1}{2}\overline{\Phi}, \tag{305b}$$

was sich immer ausführen läfst, weil die Vertheilung einer Masse auf einer Kreisscheibe, die an der Oberfläche dieser Scheibe eine Potentialfunction von gegebener Gröfse giebt, nach bekannten Methoden gefunden werden kann. Setzen wir ferner auf Seite der positiven x, wie schon oben geschehen:

$$\Psi' = P_h = P_i + P_l \tag{305c}$$

in der Röhre, also für negative x:

$$\Psi_i = \Phi + P_i - P_l, \tag{305d}$$

so genügen die Functionen Ψ' und Ψ_i allen für sie gestellten Bedingungen. Dafs nämlich Ψ' im freien Raume und Ψ_i im Innern der Röhre der Bedingung genügen:

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0. \tag{302a}$$

ist aus der Bildungsweise dieser Functionen klar. Dafs Ψ_i für grofse Werthe von $-x$ übergeht in

$$\Psi_i = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx,$$

erhellt daraus, dafs P_i und P_l in einer gegen die Oeffnung der Röhre grofsen Entfernung unendlich klein werden, Φ aber wirklich in jene Form übergeht. Da ferner nach der Gleichung (305b) in der Fläche der Oeffnung

$$\overline{P_l} = \tfrac{1}{2}\overline{\Phi},$$

wird

$$\overline{\Psi'} = \overline{\Psi_i} = \overline{P_i} + \overline{P_l}. \tag{305e}$$

Da ferner an der Fläche der Oeffnung

$$\frac{dP_i}{dn} = -2\pi i = \tfrac{1}{2}\frac{d\overline{\Phi}}{dx}$$

und auf der Seite der positiven x

$$\frac{dP}{dn} = \frac{d\overline{P}}{dx},$$

auf Seite der negativen aber

$$\frac{dP}{dn} = -\frac{d\overline{P}}{dx},$$

so ist

$$\frac{d\overline{\Psi}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi_i}}{dx} = \frac{dP_i}{dn} + \frac{dP_l}{dn} = -2\pi(i+l). \tag{305f}$$

Somit sind die gestellten Bedingungen (302a), (302b) und (302c) erfüllt.

Die Form der Röhrenwand wird endlich durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{d\Psi_i}{dn} = 0. \tag{302d}$$

Da wir die Bedingung gemacht haben, dafs, wenn r eine innerhalb des nicht cylindrischen Theiles der Röhre liegende Entfernung ist, $k^2 r^2$ gegen 1 zu vernachlässigen sei, können wir, entsprechend der zur Gleichung (288) gemachten Bemerkung, in dieser Gleichung der Röhrenwand $k = 0$ setzen, werden dann aber natürlich auch die Aufgabe nur für solche Werthe von k als gelöst betrachten dürfen, für welche diese Bedingung erfüllt ist. Dann ist also für diesen Zweck in der Nähe der Röhrenmündung zu setzen statt (303b):

$$\Phi = Ax + B + \sum\{E_m e^{mx} U_{(m\varrho)}\}, \tag{306}$$

$$P_i = \int \frac{i\,d\omega}{r}, \quad P_l = \int \frac{l\,d\omega}{r}, \tag{304a}$$

$$i = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{\Phi}}{dx}, \quad \overline{P_l} = \tfrac{1}{2}\overline{\Phi}, \qquad \text{(305a), (305b)}$$

$$\Psi_i = \Phi + P_i - P_l. \tag{305d}$$

In der That sind dann auch alle diese Functionen von einer solchen Form, dafs sich ihr Werth in der Nähe der Mündung nicht ändert dadurch, dafs man $k = 0$ setzt. Die Bedingung (302d) ergiebt, dafs die Röhrenwand eine zu allen Flächen, deren Gleichung $\Psi_i =$ Const. ist, orthogonale Rotationsfläche sein mufs, oder wenn wir die Gleichung der Röhrenwand (und überhaupt der Strömungscurven) ausdrücken durch

$$\varrho\chi = \text{Const.},$$

so mufs sein:

$$\frac{d\Psi_i}{dx}\frac{d(\varrho\chi)}{dx} + \frac{d\Psi_i}{d\varrho}\frac{d(\varrho\chi)}{d\varrho} = 0. \tag{306a}$$

Zu bemerken ist noch, dafs man, um die Form der Function Φ festzustellen, die Gröfse des Radius des cylindrischen Theiles der Röhre R_1 bestimmen mufs, weil von dessen Gröfse die in der Summe vorkommenden Werthe von m abhängen. Um P_i und P_l zu finden, mufs wiederum die Gröfse des Radius der Oeffnung R festgestellt sein, und schliefslich, wenn man die Röhrenform aus der Gleichung $\frac{d\Psi_i}{dn} = 0$ bestimmt, wird die Stromescurve, welche von dem Rande der Oeffnung ausgeht, nicht nothwendig in einen Cylinder vom Radius R_1 übergehen. Um dies nun zu bewirken, mufs man eine der Constanten von Φ durch die oben gefundene Gleichung

$$AQ = -2\pi M \tag{296b}$$

bestimmen, worin in unserem Falle Q der Querschnitt der Röhre

$$Q = \pi R_1^2,$$

$$M = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi}}{dx}\, d\omega = \int (i + l)\, d\omega.$$

Daraus folgt:

$$AR_1^2 = -2\int (i + l)\, d\omega. \tag{306b}$$

Wenn R und R_1 gegeben sind, giebt diese Gleichung eine Bedingung, welche durch die Coefficienten des Ausdrucks für Φ in Gleichung (306) erfüllt werden mufs, so dafs einer von ihnen durch die anderen bestimmt werden kann.

§ 58. Einfachste Röhrenformen.

Wir wollen endlich noch die Röhrenformen berechnen, welche den einfachsten Annahmen über die Function Φ entsprechen. Setzen wir

$$\Phi = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx, \tag{307}$$

so wird nach Gleichung (305a):

$$i = -\frac{A}{4\pi}, \quad \int i\, d\omega = -\tfrac{1}{4}AR^2, \tag{307a}$$

und in der Ebene der Mündung nach Gleichung (305b):

$$\overline{P_l} = \tfrac{1}{2}B, \tag{307b}$$

woraus nach bekannten Sätzen über Elektricitätsvertheilung auf einer leitenden Kreisscheibe folgt, dafs

$$l = \frac{B}{2\pi^2 \sqrt{R^2 - \varrho^2}}, \quad \int l\, d\omega = \frac{BR}{\pi}. \tag{307c}$$

Somit folgt aus Gleichung (306b):

$$A R_1^2 = \tfrac{1}{2} A R^2 - \frac{2}{\pi} B R. \tag{307d}$$

Den Unterschied α der wahren und reducirten Röhrenlänge haben wir oben definirt durch die Gleichung (296f):

$$-\frac{kB}{A} = \operatorname{tang} k\alpha.$$

Da $k\alpha$ eine sehr kleine Gröfse ist, so oft das Verhältnifs $R_1 : R$ endlich ist, können wir in diesem Falle annähernd setzen:

$$\alpha = -\frac{B}{A} = \frac{\pi}{2}\frac{R_1^2}{R} - \frac{\pi}{4} R, \tag{307e}$$

wodurch für die hier in Betracht kommenden Röhrenformen der Unterschied zwischen wahrer und reducirter Länge gegeben ist, wenn die Radien des Cylinders und seiner Mündung bestimmt sind. Die reducirte Länge der Pfeife ist gleich der wahren, also $\alpha = B = 0$, wenn $R = R_1 \sqrt{2}$.

Wenn die Mündung ebenso weit ist wie der Cylinder, also $R = R_1$, wird $\alpha = \frac{\pi}{4} R$ und $B = -\frac{\pi}{4} RA$. Wenn R sehr klein gegen R_1 ist, wird annähernd

$$\frac{B}{A} = -\frac{\pi R_1^2}{2R} = -\frac{Q}{2R},$$

wie es schon oben für diesen Fall in Gleichung (296i) gefunden ist. Unter diesen Umständen kann natürlich nicht die abgekürzte Form der Gleichung (307e) für die Gleichung (296f) angewendet werden.

Die Bedeutung der Function χ der Gleichung (306a), welche zur Bestimmung der Strömungscurven dient, setzen wir durch folgende Gleichung fest:

$$\varrho\chi = \int_0^{\varrho} \frac{d\Psi_i}{dx} \varrho\, d\varrho, \tag{308}$$

worin unter dem Integralzeichen x einen constanten Werth behält. Daraus folgt zunächst:

$$\frac{d}{d\varrho}(\varrho\chi) = \varrho\frac{d\Psi_i}{dx}, \tag{308a}$$

$$\frac{d}{dx}(\varrho\chi) = \int_0^\varrho \frac{d^2\Psi_i}{dx^2}\varrho\, d\varrho.$$

Da wir nun für unseren jetzt vorliegenden Zweck uns erlauben durften, in den Functionen Φ, P_i und P_l [s. die Gleichungen (306) und (304a)], aus denen Ψ_i zusammengesetzt ist, $k = 0$ zu setzen, so reducirt sich die Gleichung (302e) in der Nähe der Mündung auf:

$$\frac{d^2\Psi_i}{dx^2} = -\frac{d^2\Psi_i}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho},$$

und wir erhalten also:

$$\frac{d}{dx}(\varrho\chi) = -\int_0^\varrho \left(\varrho\frac{d^2\Psi_i}{d\varrho^2} + \frac{d\Psi_i}{d\varrho}\right)d\varrho,$$

$$\frac{d}{dx}(\varrho\chi) = -\varrho\frac{d\Psi_i}{d\varrho}; \tag{308b}$$

aus den Gleichungen (308a) und (308b) folgt, dafs die Function χ der Bedingung genügt:

$$\frac{d(\varrho\chi)}{d\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho} + \frac{d(\varrho\chi)}{dx}\frac{d\Psi_i}{dx} = 0, \tag{306a}$$

und dafs in einer durch die x-Axe gelegten Ebene die Curven

$$\varrho\chi = \text{Const.}$$

orthogonal sind zu den Curven

$$\Psi_i = \text{Const.},$$

erstere also Stromescurven sind.

Wenn wir in die Gleichung (308) für Ψ_i setzen:

$$\Psi_i = \Phi + P_i - P_l, \tag{305d}$$

so können wir auch χ ähnlich zerfällen:

$$\chi = \chi_0 + \chi_{,} - \chi_{,,}, \tag{309}$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho\chi_0 &= \int\limits_0^\varrho \frac{d\Phi}{dx}\varrho\, d\varrho, \\ \varrho\chi_{,} &= \int\limits_0^\varrho \frac{dP_i}{dx}\varrho\, d\varrho, \\ \varrho\chi_{,,} &= \int\limits_0^\varrho \frac{dP_l}{dx}\varrho\, d\varrho. \end{aligned}\right\} \tag{309a}$$

Da sich Φ hier reducirt auf

$$\Phi = Ax + B,$$

so ist

$$\chi_0 = \tfrac{1}{2}A\varrho. \tag{309b}$$

Um die Berechnung von $\chi_{,}$ abzukürzen, werde Folgendes bemerkt. Es sei W eine Potentialfunction, die auf Seite der negativen x der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{d^2W}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dW}{d\varrho} = 0,$$

und ferner sei

$$P_i = \frac{dW}{dx}, \tag{309c}$$

so ist

$$\varrho\chi_{,} = \int\limits_0^\varrho \frac{d^2W}{dx^2}\varrho\, d\varrho = -\int\limits_0^\varrho \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\frac{dW}{d\varrho}\right)d\varrho = -\varrho\frac{dW}{d\varrho}. \tag{309d}$$

Nun ist P_i die Potentialfunction einer Masse, die mit der constanten Dichtigkeit $-\frac{A}{4\pi}$ auf einer Kreisscheibe vom Radius R ausgebreitet ist. Die Gleichung (309c) erfüllen wir, wenn wir W zur Potentialfunction eines soliden Cylinders machen, dessen Basis die kreisförmige Röhrenmündung ist, und der von $x = 0$ bis $x = +\infty$ reicht und mit Masse von der constanten Dichtigkeit $-\frac{A}{4\pi}$ gefüllt ist. Man braucht sich nur den Cylinder um ein unendlich kleines Stück in der Richtung der positiven x verschoben zu denken und die neue

Masse so wie die neue Potentialfunction von der früheren abzuziehen, so erhält man das angegebene Resultat. Die Gleichung (309 d) kann man aber schreiben, weil $y = \varrho \cos \omega$:

$$\chi_{,} \cos \omega = -\frac{dW}{d\varrho} \cos \omega = -\frac{dW}{dy}. \tag{309e}$$

Es ist aber $-\frac{dW}{dy}$ die Potentialfunction der Oberfläche des Cylinders, die mit Masse von der Dichtigkeit $-\frac{A}{4\pi}\cos\omega$ bedeckt ist, wie sich wieder leicht ergiebt, wenn man den Cylinder in Richtung der negativen y unendlich wenig verschoben denkt. Also läſst sich $\chi_{,}$ unmittelbar finden:

$$\chi_{,} = -\frac{A}{4\pi}\int_0^\infty da \int_0^{2\pi} \frac{R\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{(x-a)^2 + (\varrho - R\cos\omega)^2 + R^2\sin^2\omega}}. \tag{310}$$

Der Werth, mit Hülfe elliptischer Integrale ausgedrückt, ist folgender:

$$\left.\begin{aligned} \chi_{,} = \frac{AR}{\pi}\Big\{ & \frac{\varkappa_{,}\cos\vartheta}{\varkappa^2\sqrt{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\vartheta}}(K-E) \\ & - \frac{\varkappa_{,}\sin\vartheta}{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\vartheta}\left[\tfrac{1}{2}\pi + (K-E)F'_\vartheta - KE'_\vartheta\right]\Big\} - c, \end{aligned}\right\} \tag{310a}$$

worin gesetzt ist:

$$\varkappa^2 = \frac{4R\varrho}{x^2 + (R+\varrho)^2}, \quad \varkappa_{,}^2 = 1 - \varkappa^2, \quad \varkappa_{,}\sin\vartheta = \pm\frac{R-\varrho}{R+\varrho}$$

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega}}, \quad E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega}\, d\omega,$$

$$F'_\vartheta = \int_0^\vartheta \frac{d\omega}{\sqrt{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\omega}}, \quad E'_\vartheta = \int_0^\vartheta \sqrt{1-\varkappa_{,}^2\sin^2\omega}\, d\omega,$$

$$c = \frac{AR^2}{4\varrho}, \quad \text{wenn } \varrho > R,$$

$$c = \frac{A\varrho}{4}, \quad \text{wenn } R > \varrho,$$

oder in beiden Fällen:

$$c = \frac{AR}{4}\,\frac{1-\varkappa_{,}\sin\vartheta}{1+\varkappa_{,}\sin\vartheta}.$$

Uebrigens ist für $\sin\vartheta$, für $\cos\vartheta$, wie für $\varkappa$, immer der positive Werth zu nehmen, der sich aus den obigen Formeln ergiebt.

Endlich ergiebt sich $\chi_{,,}$ leicht aus den bekannten Sätzen über Potentialfunctionen, die durch elliptische Coordinaten ausgedrückt sind. Setzen wir

$$x = R\mu s,$$

$$\varrho = R\sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1+s^2},$$

so ist die Potentialfunction P_l einer Scheibe, auf welcher selbst die Potentialfunction constant gleich $\frac{1}{2}B$ ist:

$$P_l = \frac{B}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{s}\cdot$$

Die Linien $\mu = C$ sind confocale Hyperbeln und orthogonal gegen die Linien $s = C$, welche confocale Ellipsen sind. Da die letzteren in unserem Falle Curven gleichen Potentials sind, sind die Linien $\mu = C$ Strömungscurven, und wir brauchen die Gröfse $\varrho\chi_{,,}$ nur für den Scheitelpunkt derselben in der Scheibe zu bestimmen, so mufs sie denselben Werth in der ganzen Länge haben.

An der Scheibe selbst wird $s = 0$, für sehr kleine Werthe von s und negative x wird:

$$-\mu = \sqrt{1-\frac{\varrho^2}{R^2}}, \qquad s = -\frac{x}{\sqrt{R^2-\varrho^2}},$$

$$P_l = -\frac{B}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{R^2-\varrho^2}}{x},$$

$$\frac{d\overline{P_l}}{dx} = +\frac{B}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2-\varrho^2}},$$

$$\varrho\chi_{,,} = \int_0^\varrho \frac{d\overline{P_l}}{dx}\varrho\, d\varrho = \frac{BR}{\pi}(1+\mu). \tag{311}$$

Um μ in den bei den elliptischen Integralen gebrauchten Hülfsgröfsen auszudrücken, dient, wenn ϑ für $\varrho > R$ negativ genommen wird, die Gleichung:

$$-\mu = \sqrt{\frac{2\varkappa_{,}(1+\sin\vartheta)}{(1+\varkappa_{,})(1+\varkappa_{,}\sin\vartheta)}}\,.$$

Somit haben wir denn in den Gleichungen (309b), (310) und (311) die Werthe von χ_0, $\chi_,$ und $\chi_{,,}$, und die Gleichung der Strömungscurven wird:

$$\varrho(\chi_0 + \chi_, - \chi_{,,}) = \text{Const.}$$

Soll die Strömungscurve der Röhrenwand entsprechen, so mufs sie durch den Rand der Oeffnung gehen, und die Constante ist:

$$\text{Const.} = \int\limits_0^R \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\varrho\, d\varrho = \tfrac{1}{2} A R_1^2;$$

folglich wird die Gleichung der Röhrenwand:

$$\varrho(\chi_0 + \chi_, - \chi_{,,}) = \tfrac{1}{2} A R_1^2. \tag{311b}$$

Um die Röhrenform zu erhalten, für welche die Differenz zwischen der wahren und reducirten Länge verschwindet, müssen wir $B = 0$, $R = R_1\sqrt{2}$ setzen, dann verschwindet auch $\chi_{,,}$, und die Gleichung der Röhrenwand reducirt sich auf:

$$\varrho\chi_, = \tfrac{1}{2} A (R_1^2 - \varrho^2).$$

Es giebt dies eine Röhre mit trompetenförmigem, schwach erweitertem Ende. Die Krümmung der Wand ist überall nach innen convex, und ihr Krümmungshalbmesser, der vom cylindrischen Theile an gegen die Mündung allmählich abnimmt, wird am Rande der Oeffnung zuletzt unendlich klein.

Macht man den Radius der Oeffnung gleich dem der Röhre, so nähert sich die Form der Röhre am meisten einem reinen Cylinder. Es wird dann die Differenz zwischen der reducirten und wahren Länge der Röhre, wie schon oben bemerkt, gleich $\frac{1}{4}\pi R$. Da in diesem Falle die Gröfse

$$\varkappa_,^2 \sin^2\vartheta = \frac{(R-\varrho)^2}{(R+\varrho)^2}$$

immer sehr klein bleibt, und also auch $\sin\vartheta$ für alle nicht zu kleinen Werthe von $\varkappa_,$ sehr klein bleibt, kann man zur Berechnung der Röhrenform von $\varkappa = 0$ bis $\varkappa = \sin 89^0$ die höheren Potenzen als die erste von $\varkappa_, \sin\vartheta$ und als die zweite von $\sin\vartheta$ vernachlässigen. Die so vereinfachte Gleichung für die Röhrenwand, aus der man $\sin\vartheta$ für eine Reihe von Werthen von $\varkappa_,$ leicht mit Hülfe der Tafeln von LEGENDRE berechnen kann, ist:

$$0 = \frac{4\varkappa_{,}}{\pi\varkappa^2}(K - E) - \sqrt{\frac{2\varkappa_{,}}{1+\varkappa_{,}}}$$

$$+ \varkappa_{,} \sin\vartheta \left\{ \frac{8\varkappa_{,}}{\pi\varkappa^2}(K-E) + 6 + \frac{1-\varkappa_{,}}{\sqrt{2\varkappa_{,}(1+\varkappa_{,})}} \right\}$$

$$- \varkappa_{,} \sin^2\vartheta \left\{ \frac{2}{\pi\varkappa^2}(K-E) - \frac{4E}{\pi} - \frac{1}{4\sqrt{2\varkappa_{,}(1+\varkappa_{,})}} \right\}.$$

Aus den zusammengehörigen Werthen von $\varkappa_{,}$ und ϑ lassen sich endlich x und ϱ berechnen, deren Werthe in diesem Falle sind:

$$\frac{\varrho - R}{R} = \frac{2\varkappa_{,}\sin\vartheta}{1 - \varkappa_{,}\sin\vartheta},$$

$$\frac{x}{R} = -\frac{2\varkappa_{,}\cos\vartheta}{\varkappa(1 - \varkappa_{,}\sin\vartheta)}.$$

In der folgenden Tabelle bedeutet demnach $\frac{\varrho - R}{R}$ den Abstand zwischen der Wand unserer Pfeifenform und der des Cylinders, ausgedrückt in Theilen des Radius, und ebenso $-\frac{x}{R}$ den Abstand der betreffenden Stelle von der Oeffnung, ausgedrückt in Theilen des Radius.

ang. sin $\varkappa_{,}$	ϑ	$\frac{\varrho - R}{R}$	$-\frac{x}{R}$
0°	90°	0	0
1°	26° 2′	0,0153	0,03161
2°	15° 42′	0,0187	0,06787
3°	10° 59′	0,0197	0,10392
4°	8° 14′	0,0198	0,13979
5°	6° 26′	0,0193	0,17556
6°	5° 9′	0,0186	0,21132
7°	4° 13′	0,0177	0,24708
8°	3° 30′	0,0168	0,28291
9°	2° 56′	0,0159	0,31888
10°	2° 29′	0,0149	0,35496
15°	1° 11′ 40″	0,0107	0,53867
20°	0° 37′ 50″	0,0075	0,73058
25°	0° 21′ 0″	0,0051	0,93502
30°	0° 12′ 0″	0,0035	1,15668

In gröfserer Entfernung von der Scheibe findet man:

$$\frac{\varrho - R}{R} = \frac{1}{32}\frac{R^4}{x^4}.$$

Am schnellsten ändert die Curve ihre Natur dicht an der Oeffnung. Zwischen $\varkappa_{,} = 0$ und $\varkappa_{,} = \sin 1^0$ kann man folgende annähernd richtige Gleichung brauchen:

$$0 = \log\left(\frac{4}{\varkappa_{,}}\right) - 1 + \operatorname{tang}\vartheta\,(\tfrac{3}{2}\pi + \vartheta) - \frac{\pi}{4\sqrt{\varkappa_{,}}\sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\vartheta)}.$$

Wenn $\varkappa_{,}$ sehr klein wird, verschwindet $\log\varkappa_{,}$ gegen $\frac{1}{\sqrt{\varkappa_{,}}}$, und $\operatorname{tang}\vartheta$ mufs sehr grofs, ϑ nahe gleich $\frac{1}{2}\pi$ werden, dann ist:

$$0 = \operatorname{tang}\vartheta - \frac{1}{8\sqrt{\varkappa_{,}}},$$

oder

$$\frac{\varrho - R}{-x} = \frac{\sqrt{2R}}{8\sqrt[4]{(\varrho - R)^2 + x^2}},$$

oder, da x auch sehr klein gegen $\varrho - R$ werden mufs,

$$(\varrho - R)^3 = \frac{1}{32}Rx^2.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt, dafs die Wandfläche die verlängerte Ebene der Oeffnung an deren Rande tangirt und hier einen unendlich kleinen Krümmungshalbmesser hat.

§ 59. Tonhöhe von Resonatoren.

Das verallgemeinerte Theorem von Green liefert uns auch einige allgemeine Gesetze der Schallbewegung für solche Hohlkörper, deren sämmtliche Dimensionen verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind, und die mit einer oder mehreren Oeffnungen versehen sind, deren Flächeninhalt sehr klein gegen die ganze Oberfläche des Hohlraumes ist. Da solche Hohlkörper mit kleinen Oeffnungen beim Anblasen oder durch Resonanz sehr tiefe Töne geben, so ist die erstere Bedingung für diese ihre tiefsten Töne immer erfüllt.

Wenn Ψ das Geschwindigkeitspotential im Innern des überall begrenzten Raumes S darstellt, der keine tönende Punkte enthalten soll, und der Punkt α, β, γ, von welchem ab die Entfernung r gerechnet wird, innerhalb des Raumes S liegt, so ist nach Gleichung (289)

$$\int \frac{\sin kr}{r} \frac{d\Psi}{dn} d\omega = \int \Psi \frac{d}{dn} \left(\frac{\sin kr}{r} \right) d\omega .$$

Wenn nun alle Dimensionen des Raumes S gegen die Wellenlänge verschwindend klein sind, so können wir kr gegen 1 vernachlässigen, so oft r, wie hier der Fall ist, die Entfernung zweier Punkte, die innerhalb S gelegen sind, bezeichnet. Wir setzen also:

$$\frac{\sin kr}{r} = k - \frac{k^3 r^2}{2 \cdot 3} .$$

Dies, in die obige Gleichung eingeführt, giebt:

$$\int \frac{d\Psi}{dn} d\omega = \frac{k^2}{2 \cdot 3} \int \frac{d\Psi}{dn} r^2 d\omega - \frac{k^2}{3} \int \Psi r \frac{dr}{dn} d\omega . \tag{312}$$

Nehmen wir jetzt an, der Raum S sei von einer festen Wand umgeben, in der nur eine oder einige Oeffnungen seien, an der festen Begrenzung sei überall $\frac{d\Psi}{dn} = 0$, in den sämmtlichen Oeffnungen aber habe $\frac{d\Psi}{dn}$ endliche positive Werthe. Das Verhältnifs der Fläche sämmtlicher Oeffnungen zur ganzen Oberfläche des Raumes S sei $\eta^2 : 1$, und η eine verschwindend kleine Gröfse, so ist das Integral $\int \frac{d\Psi}{dn} d\omega$ von derselben Ordnung kleiner Gröfsen wie η^2, das erste Integral rechts $\frac{k^2}{2 \cdot 3} \int \frac{d\Psi}{dn} r^2 d\omega$ aber von der Ordnung $k^2 r^2 \eta^2$, also zu vernachläfsigen. Lassen wir nun k immer mehr sich der Null nähern, so mufs dabei offenbar das Integral $\int \Psi r \frac{dr}{dn} d\omega$ und also auch die Function Ψ selbst immer gröfser und gröfser werden. Bezeichnen wir $k^2 \Psi$ mit χ, so würde χ eine Function sein, die bei abnehmendem k von constanter Gröfsenordnung bleibt, und in eine Function übergeht, welche der Differentialgleichung $\Delta \chi = 0$ in ganzer Ausdehnung des Raumes S genügt, und für welche an der ganzen Oberfläche des Raumes S $\frac{d\chi}{dn} = 0$. Daraus folgt nach den bekannten Sätzen über elektrische Potentialfunctionen, dafs χ im ganzen Raume S constant sein müsse.

Dementsprechend wollen wir nun zeigen, dafs, wenn die Dimensionen des Raumes S überall endlich sind, d. h. wenn man den Raum S nicht durch eine unendlich kleine Schnittfläche in zwei Theile von endlicher Gröfse zerlegen kann, dafs dann Ψ höchstens in unendlich kleinen Theilen des Raumes S von der Ordnung η^2 sich um endliche Theile seiner Gröfse von einer Constanten C unterscheiden könne. Wenn Ψ und seine ersten Differentialquotienten nämlich, wie es hier sein soll, innerhalb S überall continuirlich und eindeutig sind, so ist, wie bekannt:

$$\iiint\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$

$$=-\int\Psi\frac{d\Psi}{dn}d\omega-\iiint\Psi\Delta\Psi\,dx\,dy\,dz,$$

wo die dreifachen Integrale über den ganzen Raum S auszudehnen sind. Berücksichtigt man, dafs $k^2\Psi+\Delta\Psi=0$, und denkt man sich weiter beide Seiten der Gleichung mit einer constanten Gröfse ε^2 multiplicirt, die so gewählt sein soll, dafs $\varepsilon^2\Psi$ eine endliche Gröfse ist, wozu nach Gleichung (312) ε^2 von gleicher Ordnung mit $\frac{k^2 r}{\eta^2}$ sein mufs, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^2\iiint\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz\\&=-\varepsilon^2\int\Psi\frac{d\Psi}{dn}d\omega+k^2\varepsilon^2\iiint\Psi^2\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right\}\quad(312\text{a})$$

Da nun die Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwindend klein von der Ordnung η^2 sind, so ist es auch das dreifache Integral links. Da hier aber unter dem Integralzeichen eine überall positive Gröfse steht, so können die Werthe von $\varepsilon\frac{d\Psi}{dx}$, $\varepsilon\frac{d\Psi}{dy}$ und $\varepsilon\frac{d\Psi}{dz}$ im Allgemeinen selbst nur von derselben Ordnung kleiner Gröfsen wie η sein, oder wenigstens nur in Theilen des Raumes S, welche selbst von der Ordnung η^2 sind, endlich werden.

Nun denke man die Flächen construirt, welche der Gleichung

$$\Psi=\text{Const.}$$

entsprechen, und für den Theil des Raumes S, welcher zwischen zwei beliebigen solchen Flächen liegt, bilde man das Integral

$$\varepsilon \iiint \sqrt{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2}\, dx\, dy\, dz = \Xi. \tag{312b}$$

Nach dem Vorausgesagten kann dies Integral nur von derselben Ordnung kleiner Gröfsen wie η sein. Man kann nun die Integration so ausführen, dafs man zuerst diejenigen Theile des Integrals zusammennimmt, welche zwischen zwei unendlich nahen Potentialflächen liegen. Es sei $d\omega$ ein Flächenelement einer solchen Fläche, in der das Potential den Werth Ψ hat, dn die Entfernung zwischen $d\omega$ und der nächsten Fläche, an der der Werth des Potentials $\Psi + d\Psi$ ist, dann ist $d\omega\, dn$ ein Element des Volumens und

$$\sqrt{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2}\, d\omega\, dn = d\Psi\, d\omega,$$

also

$$\Xi = \varepsilon \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} d\Psi \int d\omega,$$

wenn Ψ_0 und Ψ_1 die Werthe von Ψ an den äufsersten Potentialflächen sind, zwischen denen man integrirt. Für jeden Werth von Ψ ist nun $\int d\omega$ gleich dem Flächeninhalt Q desjenigen Theiles der betreffenden Potentialfläche, der innerhalb des Raumes S liegt. Also wird

$$\Xi = \varepsilon \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} Q\, d\Psi,$$

worin Q als Function des Werthes von Ψ anzusehen ist. Wenn nun Q überall endlich ist, darf die Differenz $\varepsilon\Psi_0 - \varepsilon\Psi_1$, innerhalb deren die Variable sich ändert, nur von der Ordnung η sein, da der Werth von Ξ von der Ordnung η ist; oder es mufs, wenn $\varepsilon\Psi_0 - \varepsilon\Psi_1$ endlich ist, innerhalb dieses Intervalles Q von der Ordnung η sein. Da nun nach unserer Voraussetzung der Raum S nicht eine solche Gestalt haben darf, dafs man ihn durch eine unendlich kleine Schnittfläche in zwei Theile von endlichem Volumen theilen kann, wie das z. B. der Fall sein würde, wenn er aus zwei durch ein röhrenförmiges Stück verbundenen Hohlräumen bestände, so folgt aus dem Gesagten, dafs nur in unendlich kleinen Theilen desselben, und namentlich auch nur in unendlich kleinen Theilen seiner Oberfläche, der Werth von $\varepsilon\Psi$ um eine endliche Gröfse von einem constanten Werthe C abweichen könne.

Nach diesen Bemerkungen reducirt sich die Gleichung (312) auf

$$\int \frac{d\Psi}{dn} d\omega = -\frac{k^2 C}{3}\int r\frac{dr}{dn} d\omega = k^2 C S. \tag{312c}$$

Wenn wir nämlich die vom Punkte α, β, γ auf die Tangentialebene von $d\omega$ gefällte Normale n nennen, ist $\frac{dr}{dn} = -\frac{n}{r}$, und $-\frac{1}{3}r\frac{dr}{dn}d\omega = \frac{n\,d\omega}{3}$ gleich dem Volumen eines Kegels, dessen Grundfläche $d\omega$ und dessen Spitze α, β, γ ist. Deshalb ist

$$-\tfrac{1}{3}\int r\frac{dr}{dn}d\omega = S.$$

Setzen wir jetzt voraus, der Raum S habe eine Oeffnung, die in einem nahehin ebenen Theile der Wand gelegen sei, dessen Ebene wir äufserlich unendlich verlängert und den freien Raum nach einer Seite begrenzend voraussetzen, wählen wir, wie früher, diese Ebene als Ebene der yz und verlegen den Anfangspunkt der Coordinaten in die Oeffnung selbst. Nehmen wir ferner an, dafs die Vibrationen des Hohlraumes erregt werden durch einen Schallwellenzug, der gegen die Oeffnung schlägt. Wir müssen nun an der Oeffnung den Werth von Ψ so bestimmen, dafs er aufsen und innen continuirlich wird und im Innern in einer gegen die Dimensionen der Oeffnung grofsen Entfernung in den constanten Werth $C\cos 2\pi nt$ übergeht.

Es sei h eine Gröfse, welche in verschiedenen Punkten der Oeffnung des Hohlraumes verschiedene Werthe hat. Wir setzen, indem wir die Integration über die Fläche der Oeffnung ausdehnen, für den freien Raum:

$$\left.\begin{aligned}\Psi &= \int h\frac{\cos(kr - 2\pi nt)}{r}d\omega \\ &+ H\cos kx\cos 2\pi nt + J\cos kx\sin 2\pi nt.\end{aligned}\right\} \tag{313}$$

Dieses Geschwindigkeitspotential stellt einen Zug ebener Wellen dar, die, an der yz-Ebene reflectirt, sich in stehende verwandeln, und ein System fortschreitender Wellen, welche von der Oeffnung ausgehen. Statt der unendlich ausgedehnten ebenen Wellen läfst sich übrigens ebenso gut die etwas allgemeinere Voraussetzung der

Gleichung (300) hier anwenden, dafs nämlich die Wellen von einem weit von der Oeffnung entfernten tönenden Punkte ausgehen, dann bekommen sie, wie dort gezeigt, dicht vor der Oeffnung die in Gleichung (313) angenommene Form.

An der yz-Ebene ist aufserhalb der Oeffnung $\frac{d\Psi}{dx} = 0$, in der Oeffnung:

$$\frac{d\overline{\Psi}}{dx} = -2\pi h \cos 2\pi n t \tag{313a}$$

und annähernd:

$$\overline{\Psi} = \left[\int \frac{h}{r} d\omega + H\right] \cos 2\pi n t + \left[k\int h\, d\omega + J\right] \sin 2\pi n t. \tag{313b}$$

Innerhalb des Raumes S setzen wir dagegen:

$$\Psi = \left[C - \int \frac{h \cos k r}{r} d\omega\right] \cos 2\pi n t. \tag{313c}$$

Dann ist in der Oeffnung:

$$\frac{d\overline{\Psi}}{dx} = -2\pi h \cos 2\pi n t, \tag{313d}$$

$$\overline{\Psi} = \left[C - \int \frac{h\, d\omega}{r}\right] \cos 2\pi n t. \tag{313e}$$

Die Werthe von $\frac{d\overline{\Psi}}{dx}$ aus den Gleichungen (313a) und (313d) sind identisch. Damit auch die von $\overline{\Psi}$ aus den Gleichungen (313b) und (313e) identisch seien, mufs sein:

$$J + k\int h\, d\omega = 0, \tag{313f}$$

$$C - H = 2\int \frac{h\, d\omega}{r}. \tag{313g}$$

Es mufs also die Gröfse h für die einzelnen Punkte der Oeffnung so bestimmt werden, dafs ihre Potentialfunction innerhalb der Oeffnung constant wird. Die Bedingung endlich, dafs $\frac{d\Psi}{dn} = 0$ ist längs der Oberfläche von S mit Ausnahme der Mündung, wird durch die Gleichung (313c) erfüllt, wenn die Wand, in der die Oeffnung sich befindet, so weit merklich eben ist, als das Potential von h nicht gegen C verschwindet.

Endlich wird für diesen Fall die Gleichung (312c):

$$2\pi \int h\, d\omega = k^2 C S. \tag{313h}$$

Aus (313f) und (313h) folgt:

$$J = -\frac{k^3 C S}{2\pi}. \tag{313i}$$

Nennen wir nun M die Masse, welche nöthig ist, um, auf der Fläche der Oeffnung passend vertheilt, in dieser die Potentialfunction constant gleich 1 zu machen, so ist

$$\int h\, d\omega = \tfrac{1}{2}(C - H) M, \tag{313k}$$

da die Dichtigkeit h nach Gleichung (313g) den Potentialwerth $\frac{1}{2}(C - H)$ hervorbringt. Wir haben also nach Gleichung (313f):

$$J + \tfrac{1}{2} k (C - H) M = 0. \tag{313l}$$

Das Maximum des Potentials der stehenden Wellen im freien Raume ist $\sqrt{H^2 + J^2}$, das Maximum in dem Hohlkörper S ist C. Aus den Gleichungen (313i) und (313l) folgt:

$$\frac{H^2 + J^2}{C^2} = \left(1 - \frac{k^2 S}{\pi M}\right)^2 + \left(\frac{k^3 S}{2\pi}\right)^2.$$

Dieses Verhältnifs erreicht seinen Minimalwerth, die Resonanz wird also am stärksten, wenn das erste der beiden Quadrate, gegen welches im Allgemeinen das zweite verschwindend klein ist, gleich Null wird. Die Bedingung für das Maximum der Resonanz ist also:

$$\pi M = k^2 S, \tag{314}$$

oder wenn wir statt k seinen Werth setzen, durch die Schwingungszahl n und die Schallgeschwindigkeit a ausgedrückt,

$$k = \frac{2\pi n}{a},$$

so ist:

$$n^2 = \frac{a^2 M}{4\pi S}. \tag{314a}$$

Ist die Oeffnung kreisförmig, so ist infolge der Gleichungen (307b) und (307c):

$$M = \frac{2R}{\pi},$$

oder, wenn wir die Fläche der Oeffnung mit s bezeichnen:

$$s = \pi R^2, \qquad M = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{s}{\pi}},$$

$$n = \frac{a\sqrt[4]{s}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi^5}\sqrt{S}}.$$

Wenn wir für die Schallgeschwindigkeit den Werth 332 260 mm (entsprechend 0° und trockner Luft) nehmen, so wird

$$n = 56174\frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}},$$

während Sondhauss aus seinen Versuchen für n die empirische Formel für kreisförmige und quadratische Oeffnungen herleitet:

$$n = 52400\frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}},$$

worin nur der von Sondhauss gegebene Zahlencoefficient halbirt ist, weil Sondhauss nach der Art der französischen Physiker die Schwingungszahlen der Töne doppelt so hoch nimmt, als es nach unserer Bezeichnungsweise geschieht.

Noch besser stimmt die Berechnung für einige Versuche von Wertheim, bei denen das Verhältniſs der Oeffnung zum Volumen des Hohlkörpers noch kleiner ist, als bei den Versuchen von Sondhauss. Ich habe aus den Versuchen, welche er mit drei verschiedenen Glaskugeln angestellt hat[1]), deren Volumen durch Eingieſsen von Wasser verkleinert wurde, diejenigen nach der theoretischen Formel berechnet, bei welchen der Durchmesser der Oeffnung weniger als $\frac{1}{10}$ des Durchmessers einer Kugel war, deren Volumen dem des Hohlraumes gleich ist, und setze die Zahlen hierher, um zu zeigen, wie gut die theoretische Formel mit den Versuchen übereinstimmt.

---

[1]) Annales de Chimie et de Physique, Sér. 3, Tome XXXI, p. 428.

	Durchmesser der Oeffnung	Volumen des Hohlraumes in Cubikcentimetern	$2n$ beobachtet	$2n$ berechnet	Δ
Erste Kugel: Volumen 6528 ccm Temperatur 24° $a = 346\,550$	20 mm	6528	184,2	193,1	0,020
		5712	206,4	206,4	0,000
		4896	218,8	222,9	0,008
		4080	232,9	244,2	0,021
Zweite Kugel: Volumen 2030 ccm Temperatur 18° $a = 343\,030$	10 mm	2030	234,9	242,3	0,013
		1827	262,6	255,5	−0,012
		1624	285,1	270,9	−0,022
		1421	300,5	290,3	−0,015
		1218	320,0	312,9	−0,010
		1015	345,0	342,7	−0,003
		812	372,6	383,2	+0,008
		609	416,3	442,5	0,026
	15 mm	2030	286,0	296,8	0,016
		1827	298,7	322,8	0,020
Dritte Kugel: Volumen 715 ccm Temperatur 20° $a = 344\,210$	6 mm	715	328,2	317,4	−0,015
		615	340,4	342,2	+0,002
		515	373,7	374,0	0,000
		415	416,3	416,6	0,000
		315	481,2	478,2	−0,003
		215	581,8	578,8	−0,002
		115	766,5	791,4	+0,014
	10 mm	715	384,4	409,7	0,028
		615	411,6	441,8	0,031

Zur Erleichterung der Vergleichung sind in der letzten Rubrik unter Δ die Logarithmen des berechneten n, dividirt durch das beobachtete n, hinzugefügt. Der Logarithmus des halben Tones $\frac{16}{15}$ beträgt 0,028. Die Werthe von Δ zeigen, dafs nur bei den verhältnifsmäfsig zur Oeffnung kleineren Werthen des Volumens die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung sich einem halben Tone nähert.

Für Ellipsen von der Excentricität ε und der grofsen Axe R ist die Masse M, welche, auf der Fläche passend vertheilt, in dieser das constante Potential 1 giebt[1]),

$$M = \frac{R}{K_\varepsilon},$$

[1]) S. Clausius in Poggendorff's Annalen LXXXVI, S. 161.

worin K_ε das ganze elliptische Integral erster Gattung für den Modul ε bezeichnet. Es wird also nach Gleichung (314a) für Hohlräume mit einer elliptischen Oeffnung:

$$n^2 = \frac{a^2 R}{4\pi K S},$$

oder wenn man den Flächeninhalt s der elliptischen Oeffnung einführt und setzt:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1-\varepsilon^2},$$
$$s = \pi R^2 \varepsilon_1,$$

so wird:

$$n = \sqrt{\frac{\pi}{2K\sqrt{\varepsilon_1}}} \cdot \frac{a\sqrt[4]{s}}{\sqrt[4]{\pi^5}\sqrt{2S}}.$$

Der Werth von n^2 ist also von dem für eine kreisförmige Oeffnung gültigen durch den Factor $\frac{\pi}{2K\sqrt{\varepsilon_1}}$ verschieden, und da dieser Factor gröfser ist als 1, so wird der Ton einer elliptischen Oeffnung von gleicher Fläche etwas höher als der einer kreisförmigen.

Hat der Hohlraum noch eine zweite Oeffnung, die ebenfalls in einem nahehin ebenen Theile der Wand liegt, so setze man für den äusseren vor ihr liegenden Raum:

$$\Psi = \int h_1 \frac{\cos(kr - 2\pi n t + \tau)}{r} d\omega,$$

in dem ihr benachbarten Theile des inneren Raumes

$$\Psi = \left[C_1 - \int \frac{h_1 \cos kr}{r} d\omega\right] \cos(2\pi n t - \tau)$$
$$+ k \int h_1 \, d\omega \,.\, \sin(2\pi n t - \tau).$$

Es sind, wie vorher, an der Oeffnung die Werthe von $\frac{d\overline{\Psi}}{dn}$ übereinstimmend, die Werthe von $\overline{\Psi}$ werden:

$$\overline{\Psi} = \int \frac{h_1 \, d\omega}{r} \cdot \cos(2\pi n t - \tau) + k \int h_1 \, d\omega \sin(2\pi n t - \tau),$$

$$\overline{\Psi} = \left[C_1 - \int \frac{h_1 \, d\omega}{r}\right] \cos(2\pi n t - \tau) + k \int h_1 \, d\omega \sin(2\pi n t - \tau).$$

Es mufs also sein:

$$C_1 = 2 \int \frac{h_1 \, d\omega}{r},$$

und setzen wir, wie bei der ersten Oeffnung in Gleichung (313k):

$$\int h_1\, d\omega = \tfrac{1}{2} C_1 M_1 ,$$

so wird in den von der Oeffnung entfernteren Stellen des inneren Raumes:

$$\Psi = C_1 \cos(2\pi n t - \tau) + \tfrac{1}{2} k C_1 M_1 \sin(2\pi n t - \tau).$$

Dies mufs aber gleich werden dem früher festgesetzten Werthe von Ψ im Innern der Kugel:

$$\Psi = C \cos 2\pi n t .$$

Daraus folgt, dafs

$$C_1 [\cos\tau - \tfrac{1}{2} k M_1 \sin\tau] = C,$$
$$\sin\tau + \tfrac{1}{2} k M_1 \cos\tau = 0 .$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dafs τ sehr klein ist, und demgemäfs aus der ersten, dafs mit Vernachläfsigung kleiner Gröfsen

$$C = C_1 .$$

Nun wird aus Gleichung (312c):

$$\int \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 2\pi \int h\, d\omega + 2\pi \int h_1\, d\omega = k^2 C S$$

oder:

$$\pi M(C - H) + \pi M_1 C = k^2 C S ; \tag{315}$$

dazu:

$$J = -\frac{k^3 C S}{2\pi},$$

$$\frac{H^2 + J^2}{C^2} = \frac{(\pi(M + M_1) - k^2 S)^2}{\pi^2 M^2} + \frac{k^6 S^2}{4\pi^2} . \tag{315a}$$

Damit $\frac{H^2 + J^2}{C^2}$ ein Minimum werde, und die stärkste Resonanz eintrete, setzen wir

$$\pi (M + M_1) = k^2 S , \tag{315b}$$

durch welche Gleichung die Tonhöhe der stärksten Resonanz bestimmt ist, wie es in Gleichung (314) für eine Oeffnung geschehen war. Diese Gleichung stimmt, wenn die Oeffnungen geometrisch ähnlich sind, mit dem von Sondhauss aus den Versuchen abgeleiteten Gesetze. Sind beide Oeffnungen congruent, so verhält sich die Schwingungszahl des Körpers zu der desselben Körpers mit einer Oeffnung, wie $\sqrt{2} : 1$. Der Ton ist also im ersten Falle um eine verminderte Quinte höher als im zweiten Falle, was genau mit einigen Versuchen von Sondhauss[1]) übereinstimmt.

[1]) Poggendorff's Annalen LXXXI, S. 366.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Von den

VORLESUNGEN
ÜBER
THEORETISCHE PHYSIK
VON
H. VON HELMHOLTZ
HERAUSGEGEBEN VON
ARTHUR KÖNIG, OTTO KRIGAR-MENZEL, FRANZ RICHARZ, CARL RUNGE

6 Bände

erschien gleichzeitig mit diesem III. Band:

Band I, Abtheilung 2. **Dynamik discreter Massenpunkte,** herausgegeben von Otto Krigar-Menzel. Preis M. 15.—
gebunden M. 16.50

1897 erschien:

Band V. **Die Elektromagnetische Theorie des Lichts,** herausgegeben von Arthur König und Carl Runge. Preis M. 14.—
gebunden M. 15.50

Demnächst werden erscheinen:

Band I, Abtheilung 1. **Die allgemeinen Grundlagen physikalischer Wissenschaften,** herausgegeben von Arthur König.

Band II. **Dynamik continuirlich verbreiteter Massen,** herausgegeben von Otto Krigar-Menzel.

Band VI. **Theorie der Wärme,** herausgegeben von Franz Richarz.

Band IV. **Elektrodynamik und Theorie des Magnetismus,** herausgegeben von Otto Krigar-Menzel.

Aus den Besprechungen des V. Bandes:

Electrotechn. Zeitschr. Wir begnügen uns damit, der Genugthuung Ausdruck zu geben, dass Helmholtz's werthvolle Vorlesungen in dieser Weise erhalten bleiben, und wünschen dem Unternehmen guten Fortgang und guten Erfolg.

Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterricht. Der Leser dieses Werkes wird, selbst wenn er mit dem Gegenstand desselben vollständig vertraut ist, eine Fülle von Anregungen und neuen Gesichtspunkten finden. War es ja doch ein characteristisches Merkmal der Helmholtz'schen Arbeitsmethode, sich stets alles auf seine eigne Weise zurechtzulegen, auf eigenem Wege zu wandeln. Wenn nun auch diese Wege nicht immer die kürzesten und gangbarsten sind, so wird doch die weise Belehrung, die unfehlbar aus dem Umstande entspringt, dass man den Weg unter Führung eines Helmholtz zurücklegt, für alle Mühe entschädigen.

Science. The lectures will be extremely useful to students of physics all over the world.

Hochschul-Nachrichten. Der Werth dieser Veröffentlichung wird noch dadurch erhöht, dass eine Reihe von bisher nicht publicirten Untersuchungen, welche Helmholtz in seine Vorlesungen einzustreuen pflegte, zur allgemeinen Kenntnis gelangt, und dass wir so auch gewissermassen das wissenschaftliche Vermächtniss des grossen Forschers zu lesen bekommen.

Cultura. La grande importanza di questa pubblicazione non ha bisogno di essere dimostrata. Si può ancora notare, che in queste lezioni sono in parte esposti dei risultati scientifici, che il grande scienziato altrove non ha messi in luce. Per l'importanza di questo quinto volume ora apparso si ricordi, che non esiste una esposizione completa dell' ottica in base alla teoria elettro-magnetica della luce.

Gaea. Der schwierigen Arbeit haben sich die Herausgeber mit Liebe und Verständniss unterzogen und damit der wissenschaftlichen Welt ein Geschenk von höchstem Werte gemacht.

Electrical Engineering. The costliest monument of metal or stone that could have been erected to Helmholtz by his disciples would never have perpetuated the memory of the great master as eloquently as these written pages that are destined to propagate his doctrines in all lands.

Naturwissenschaftliche Rundschau. Erfreulich ist es, dass nunmehr durch die Gesammtausgabe der Vorlesungen die ausführliche Darstellung des Helmholtz'schen Gedankenganges der Nachwelt erhalten bleiben wird.

Revue d'électricité. Il serait superflu de recommander un livre qui porte le nom de Helmholtz.

Die Natur. Jedenfalls haben die Herausgeber ihre mühevolle Aufgabe mit Geschick gelöst und ein Werk geschaffen, dessen Studium allen zu empfehlen ist, die sich eine gründliche Kenntniss der neueren Theorie verschaffen wollen.

Zeitschr. f. österr. Gymnasien. Die Physiker seien auf die bedeutungsvolle Schrift, die eine zusammenfassende Darstellung der Optik auf Grundlage der electromagnetischen Lichttheorie ist, an welcher es bisher gefehlt hat, aufmerksam gemacht und ihnen das Studium des Werkes, welches ohne jegliche Schwierigkeiten stattfinden kann, bestens empfohlen; dieses dürfte wohl zu den genussreichsten auf dem Gebiete der theoretischen Physik gehören.

Die Post. Das Buch ist eine Perle in der physikalischen Weltliteratur, ein neues Blatt in dem Ruhmeskranze seines Verfassers. Die Eigenart der Helmholtzschen Denkweise tritt auf jeder Seite scharf hervor, wie denn überhaupt das ganze Buch ein echtes Spiegelbild seines gewaltigen Geistes ist, in dem die Mathematik die gesammte Anschauung der Dinge beherrschte.

Literar. Centralblatt. Mit ausserordentlicher Freude ist das Werk zu begrüssen, dessen Erscheinen mit dem vorliegenden Bande beginnt . . . Die unvergleichliche Meisterschaft, mit der Helmholtz seinen Stoff anzufassen und darzustellen versteht, die bei grösster mathematischer Strenge doch nie versagende physikalische Anschaulichkeit seines Vortrags machen das Lesen des Buches ebenso genussreich wie lehrreich. Mit der Erwartung der gleichen Vorzüge kann man dem Erscheinen der anderen Bände entgegensehen. So wird das vollendete Werk ein schönes Denkmal Helmholtz'schen Geistes sein, des Geistes, in dem sich das naturwissenschaftliche Denken unserer Zeit wirklich in seiner höchsten Form verkörpert hat, und dessen Gedankengänge eben darum der Nachwelt nicht sorgfältig und vollständig genug übermittelt werden können.

F.V.

wrocław
POLITECHNIKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
357281 L/1