

**Politechnika Wroclawska
Wydział Architektury
Zakład Geometrii Wykreślnej
i Perspektywy Malarskiej**

Praca doktorska

**Struktury fraktalne
jako źródło inspiracji w kształtowaniu
formy architektonicznej**

Piotr Furmanek

Promotor :

Prof.dr hab. inż. arch. Jerzy Mroczkowski

Wrocław 2002

SPIS TREŚCI

WSTĘP	str 3
ROZDZIAŁ I FRAKTALE KLASYCZNE	str 4
ROZDZIAŁ II METODA IFS	str 16
ROZDZIAŁ III L-SYSTEMY	str 61
ROZDZIAŁ IV FRAKTALE W ARCHITEKTURZE	str 73
ROZDZIAŁ V FRAKTALE JAKO ŹRÓDŁO INSPIRACJI W KSZTAŁTOWANIU FORMY ARCHITEKTONICZNEJ	str 79
LITERATURA	str 93

WSTĘP

Jedną z najmłodszych a zarazem najbardziej dynamicznie rozwijających się aktualnie gałęzi geometrii jest geometria fraktalna . Od ponad 20 lat fraktale przyciągają uwagę nie tylko matematyków ale również przedstawiciele nauk przyrodniczych prowadzących badania nad złożonością natury i w poszukiwaniu porządku w chaotycznym świecie. Pewną miarą popularności może być liczba 560 000 stron internetowych w których pojawia się hasło " *fractal* " tworzonych nie tylko przez ludzi zajmujących się profesjonalnie nauką . Dynamiczny rozwój geometrii fraktalnej jak i związanej z nią teorii chaosu zawdzięczać można rozwojowi technik komputerowych , dzięki którym możliwa była wizualizacja pewnych struktur będących efektem przebiegu procesu dynamicznego .

Atrakcyjność graficzna tych obrazów stała się dodatkowym aspektem przyciągającym uwagę szerokiej publiczności. Jednakże traktowanie fraktali jako "pięknych obrazów " jest znacznym uproszczeniem , w miejsce którego należałoby raczej podstawić twierdzenie , że dzięki fraktalom dokonuje się pozytywnie pojmowana popularyzacja zagadnień związanych z naukami ścisłymi . Niemniej jednak w najszerszym kręgu aktualnych zainteresowań geometrią fraktalną znajdują się obiekty dwuwymiarowe generowane przy pomocy programów komputerowych takich jak Fractint czy FOE (Fractal Object Editor) . Znikomą liczbę struktur 3D stanowią głównie przestrzenne interpretacje zbiorów Gastona Julii i Benoita Mandelbrota . Ambicją niniejszej rozprawy jest wypełnienie tej luki i uzupełnienie galerii klasycznych fraktali o struktury trzywymiarowe bazujące na podstawowych elementach geometrii Euklidesowej .

Obiekty zamieszczone w niniejszej pracy zostały wygenerowane w systemach IFS (Iterated Function System) oraz L-Systemie , programem komputerowym Autodesk VIZ R 4 na drodze manualnego wielokrotnego przekształcania obiektów trójwymiarowych .Dodatkowo zaproponowano nowe , nie stosowane dotychczas , systemy generowania fraktali przestrzennych . IFS+ bazujący na tradycyjnym IFS , w którym struktura fraktala jest sumą wszystkich elementów ciągu przekształceń , oraz LV-System operujący na obiektach przestrzennych w odróżnieniu od tradycyjnego L-Systemu operującego na obiektach linearnych . Uzyskane w ten sposób fraktale poddano efektowi tak zwanej wizualizacji architektonicznej poprzez dodanie tła oraz sztafażu celem udowodnienia tezy postawionej w tytule rozprawy

ROZDZIAŁ I FRAKTALE KLASYCZNE

Rzeczywisty rozwój geometrii fraktalnej zapoczątkował francuski matematyk polskiego pochodzenia Benoit Mandelbrot definiując i wprowadzając w 1975 roku pojęcie fraktala .

Doniosłość tego wydarzenia polegała na stworzeniu teorii umożliwiającej integrację pewnych przykładów, które do tego momentu traktowane były jako obiekty wyjątkowe pewnego rodzaju matematyczne dziwolągi . Mandelbrot nazwał je fraktalami od łacińskiego słowa *fractus* (złamany , częściowy) charakteryzując je trzema właściwościami :

Definicja 1.1 [2]

- a) metoda generowania jest określona zależnością rekurencyjną
- b) wymiar najczęściej jest liczbą ułamkową
- c) cechą charakterystyczną jest samopodobieństwo

Pierwsza cecha określa zależność kolejnego wyrazu ciągu od wyrazu poprzedniego np.

$$a_{n+1} = a_n + c$$

Druga cecha dotycząca pojęcia wymiaru ma szczególne znaczenie , ponieważ w odróżnieniu od innych obiektów fraktale posiadają wymiar będący liczbą ułamkową . Dokładne omówienie pojęcia wymiaru w odniesieniu do obiektów fraktalnych zostanie dokonane w dalszej części pracy .

Ostatnia , trzecia cecha samopodobieństwa chociaż trudna do zdefiniowania w kategoriach matematycznych jest cechą najbardziej wyróżniającą fraktale spośród innych obiektów geometrycznych .

Samopodobieństwo najłatwiej jest scharakteryzować w kategoriach intuicyjnych na przykładzie kalafiora . Główna kalafiora składa się z gałązek , które po oddzieleniu od reszty przypominają główkę . Z gałązki można oddzielić jeszcze mniejsze części , które są podobne zarówno do główki jak i do gałązki , z której pochodzą . Ta własność przenosi się na trzecią a nawet na czwartą generację . W matematycznych modelach fraktali własność samopodobieństwa przenosi się na następną generację nieskończoną ilość razy .

Definiując samopodobieństwo w przypadku fraktali możemy w uproszczeniu powiedzieć , że każda część fraktala jest pomniejszoną kopią całości. [1]

Zanim jednak Benoit Mandelbrot sformułował podstawy geometrii fraktalnej, pod koniec XIX wieku powstały pierwsze obiekty których specyficzne właściwości budziły sprzeciw ówczesnego środowiska naukowego.

Jednym z pierwszych obiektów fraktalnych o fundamentalnym znaczeniu był zbiór Cantora (1883) .Cantor był niemieckim matematykiem z uniwersytetu w Halle . Prace jego są jednymi z najważniejszych w tworzeniu podstaw współczesnej

matematyki . Zbiór Cantora został po raz pierwszy opublikowany w 1883 roku jako przykład zbioru o wyjątkowych właściwościach . Jest to zbiór punktów odcinka jednostkowego , który powstaje w wyniku następującego algorytmu .

Odcinek dzielimy na trzy równe części , z których środkową usuwamy . W następnym kroku pozostałe dwie części traktujemy podobnie jak w kroku poprzednim tzn dzielimy na trzy części usuwając środkową . W granicy otrzymujemy zbiór Cantora . Ma on nieprzeliczalną liczbę punktów ale długość równą 0 . [1]

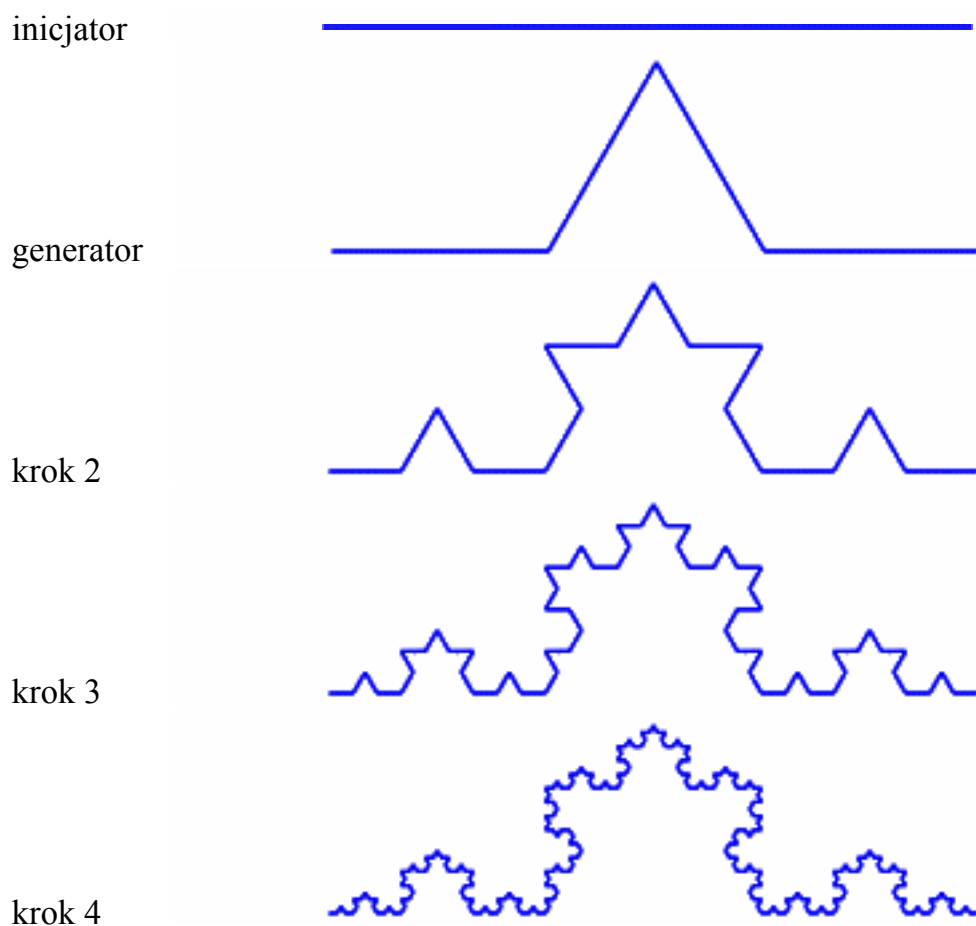


Rys 1.1 Kilka pierwszych kroków zbioru Cantora

Samopodobieństwo zbioru Cantora zakodowane jest w algorytmie tworzenia i zachodzi dla nieskończenie wielu poziomów . Każdy odcinek który powstał podczas geometrycznej konstrukcji zbioru zawiera cały zbiór pomniejszony w skali $1/3^k$ dla odpowiedniego k . Możemy zatem rozważać zbiór Cantora jako rodzinę dowolnie małych części , z których każda jest pomniejszonym całym zbiorem . [1]

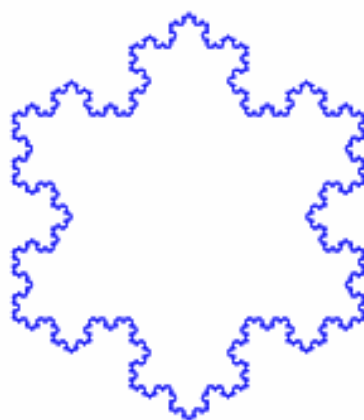
Innym przykładem jednego z wczesnych fraktali , w których występuje cecha samopodobieństwa , a który w momencie powstania traktowany był jako obiekt wyjątkowy , jest krzywa van Kocha . Jej konstrukcja zaczyna się od odcinka zwanego inicjatorem . Odcinek dzielimy na trzy równe części i usuwamy środkową , wstawiając na jej miejsce trójkąt równoboczny usuwając jednocześnie jego podstawę . Figura ta nosi nazwę generatora i składa się z czterech odcinków , z których każdy zostaje w następnym kroku poddany operacji podziału i podstawiania . [1]

Krzywa szwedzkiego matematyka Helge van Kocha powstała w 1904 roku jako nowa propozycja dla zilustrowania odkrycia nieróżniczkowalnej krzywej Weierstrassa. Nietrudno zauważyć , że obiekt znany pod nazwą krzywej van Kocha w początkowych krokach konstrukcji jest w istocie ciągiem łamanych odcinków . Jednakże przy liczbie kroków konstrukcji dążącej do nieskończoności długość odcinków składowych dąży do zera , zaś łamana " dąży do krzywej " . Krzywa ta jednak w żadnym punkcie nie jest różniczkowalna ze względu na miejsca załamań , w których nie istnieje styczna do krzywej . [1]



Rys 1.2 Kilka pierwszych kroków konstrukcji krzywej van Kocha

Pewną modyfikacją krzywej van Kocha jest gwiazdka van Kocha , której szósty krok konstrukcji zaprezentowano poniżej .



Rys 1.3 Gwiazdka van Kocha

Twórcą kolejnego klasycznego fraktala był wielki polski matematyk Waław Sierpiński (1882 – 1969) profesor matematyki we Lwowie , następnie w Warszawie. Podstawą konstrukcji geometrycznej tego obiektu jest trójkąt równoboczny , który nazwiemy inicjatorem . Środki boków trójkąta oraz jego wierzchołki wyznaczają cztery mniejsze trójkąty , z których środkowy usuwamy . W ten sposób uzyskujemy figurę nazywaną generatorem składającą się z trzech przystających trójkątów , których boki są równe połowie długości inicjatora . Trójkąt Sierpińskiego jest zbiorem punktów płaszczyzny , które pozostaną po wykonaniu nieskończenie wielu kroków konstrukcji . Samopodobieństwo jest wbudowane w proces konstrukcji . Każda z trzech części w kolejnym kroku jest dwukrotnie pomniejszoną wersją figury z poprzedniego kroku [1].



inicjator



generator – krok 1



krok 2



krok 3

Rys 1.4 Pierwsze kroki konstrukcji trójkąta Sierpińskiego

Na podobnym algorytmie powstawania oparta jest konstrukcja dywanu Sierpińskiego . Inicjatorem w tym wypadku jest kwadrat , który dzielimy na 9 przystających kwadratów , z których środkowy usuwamy . Otrzymana figura nosi nazwę generatora. W następnym kroku , każdy z pozostałych kwadratów generatora traktujemy podobnie jak kwadrat inicjatora w roku pierwszym , tzn dzielimy na 9 przystających kwadratów usuwając jednocześnie środkowy .W granicy otrzymujemy zbiór o polu równym 0 .

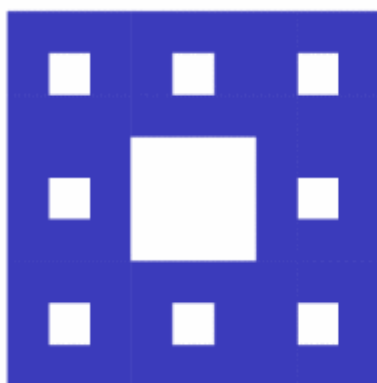
Podobnie jak w trójkącie Sierpińskiego samopodobieństwo zawarte jest w konstrukcji zbioru : każdy nowo powstający kwadrat jest pomniejszoną kopią całości . [1]



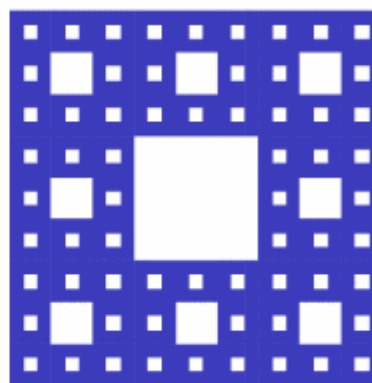
inicjator



generator - krok 1



krok 2



krok 3

Rys 1.5 Pierwsze kroki konstrukcji dywanu Sierpińskiego

Szczególnie interesujący jest fakt , że w wyniku przekroju przez środek dywanu prostą równoległą do jego boku otrzymujemy zbiór Cantora . Można zatem powiedzieć , że dywan Sierpińskiego stanowi płaszczyznowe uogólnienie zbioru Cantora .

Zaprezentowanie powyższych przykładów umożliwi sformułowanie dokładnej definicji wymiaru obiektów fraktalnych .

Przykład 1.1

Dany obiekt geometryczny pokrywamy zbiorem elementów o boku a (kwadratów dla figur płaskich , sześcianów dla obiektów przestrzennych) . Minimalna liczba elementów N niezbędnych do pokrycia obiektu jest odwrotnie proporcjonalna do wielkości a boku elementu . Można zatem zapisać :

$$N(a) \sim (1/a)^2 \text{ dla figur płaskich}$$

$$N(a) \sim (1/3)^3 \text{ dla obiektów przestrzennych [2]}$$

Definicja 1.2 [10]

Wymiarem pojemnościowym według Kołmogorowa jest wyrażenie

$$d = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\log N(a)}{\log(1/a)}$$

W konsekwencji po uproszczeniu można przyjąć :

$$d = \frac{\log N(a)}{\log(1/a)}$$

W praktyce obliczanie wymiaru najkorzystniej jest przeprowadzać na poziomie dwóch kolejnych kroków konstrukcji porównując obiekty inicjatora i generatora .

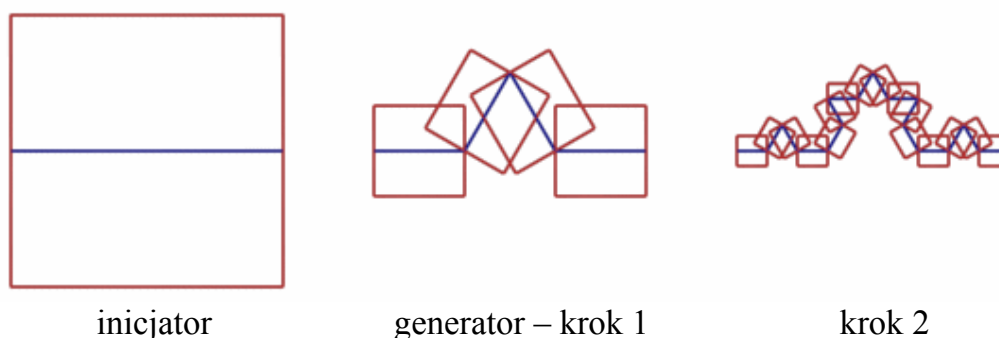
1) Krzywa Kocha

Inicjatorem jest odcinek o boku $a = 1$. Do pokrycia inicjatora potrzebny jest zatem $N = 1$ kwadrat o boku $a = 1$. Generator składa się z czterech kopii inicjatora o skali podobieństwa równej $1/3$ a zatem o długości równej $a = 1/3$.

Do pokrycia generatora potrzeba $N = 4$ kwadratów o boku $a = 1/3$

Wymiar pojemnościowy wg Kołmogorowa krzywej Kocha wynosi :

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,261859507$$



Rys 1.6 Ilustracja pomiaru krzywej van Kocha metodą Kołmogorowa

2) Zbiór Cantora

Inicjatorem jest odcinek o długości 1 . Do pokrycia inicjatora potrzebny jest kwadrat o boku 1 . Generator składa się z dwóch kopii inicjatora o skali podobieństwa $1/3$ a zatem z dwóch odcinków o boku równym $1/3$. Do pokrycia generatora potrzeba $N = 2$ kwadratów o boku $a = 1/3$.

Wymiar Kołmogorowa zbioru Cantora wynosi :

$$d = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,630929753$$

3) Trójkąt Sierpińskiego

Inicjatorem jest trójkąt o boku 1 . Do pokrycia inicjatora potrzebny jest kwadrat o boku 1 . Generator składa się z trzech kopii inicjatora o skali podobieństwa $1/2$. Do pokrycia generatora potrzeba $N = 3$ kwadratów o boku $a = 1/2$.

Wymiar Kołmogorowa trójkąta Sierpińskiego wynosi :

$$d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,584962$$

4) Dywan Sierpińskiego

Inicjatorem jest kwadrat o boku 1 . Do pokrycia inicjatora potrzebny jest kwadrat o boku 1 . Generator składa się z ośmiu kopii inicjatora o skali podobieństwa $1/3$. Do pokrycia generatora potrzebnych jest $N = 8$ kwadratów o boku $a = 1/3$.

Wymiar Kołmogorowa dywanu Sierpińskiego :

$$d = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,892789$$

Analizując powyższe wyniki można w uproszczeniu określić wymiar pojemnościowy według Kołmogorowa dla fraktali klasycznych i innych prostych obiektów fraktalnych jako wyrażenie :

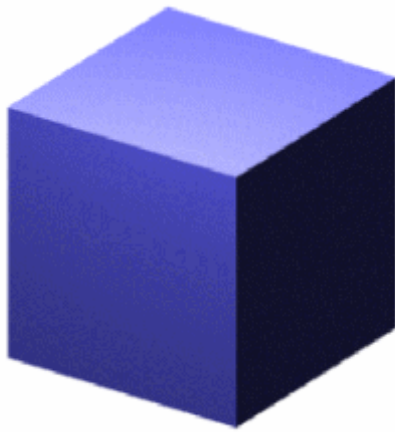
$$d = \frac{\log N}{\log 1/s}$$

gdzie N jest liczbą kopii inicjatora z których składa się generator , a s jest współczynnikiem podobieństwa kopii inicjatora .

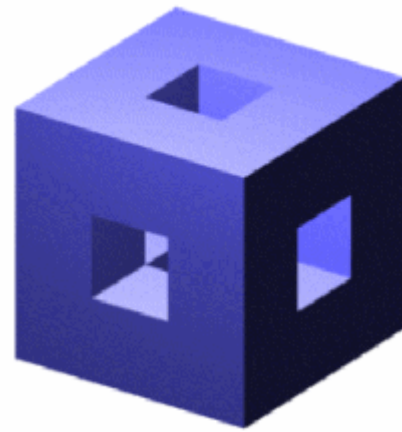
Niezależnie od przyjętej definicji można zauważyć , że wymiar pojemnościowy według Kołmogorowa dla obiektów fraktalnych , na przykładzie zaprezentowanych powyżej fraktali klasycznych , jest liczbą ułamkową co jest istotnym elementem definicji fraktala według Mandelbrota (Definicja 1.1) .

Prezentowane dotychczas fraktale dotyczyły obiektów generowanych na płaszczyźnie. Jednakże , podobnie jak istnieje płaszczyznowe uogólnienie zbioru Cantora w postaci dywanu Sierpińskiego , tak też istnieje przestrzenne uogólnienie dywanu Sierpińskiego w postaci gąbki Mengera . W obiekcie tym inicjatorem jest sześcián o boku a , który dzielimy na 27 przystających sześciánów ($3 \times 3 \times 3$) o boku $a/3$, usuwając następnie środkowe sześciány każdej ściany oraz sześcián będący środkiem obiektu (łącznie 7 sześciánów) . W ten sposób otrzymujemy obiekt nazywany generatorem . W następnym kroku pozostałe 20 sześciánów traktujemy identycznie jak inicjator w kroku pierwszym . W granicy gdy liczba kroków konstrukcji dąży do nieskończoności otrzymujemy obiekt którego objętość dąży do zera . Samopodobieństwo tego obiektu zawarte jest w konstrukcji . Każdy ze składowych sześciánów stanowi kopię całości obiektu . Wymiar pojemnościowy wynosi

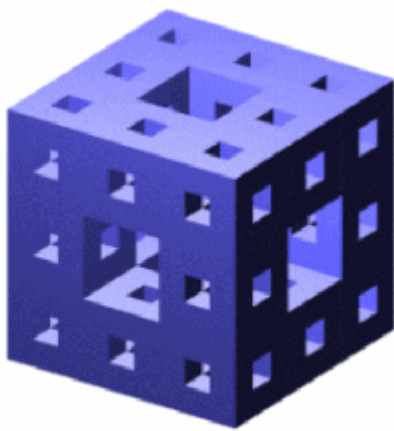
$$d = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,726833$$



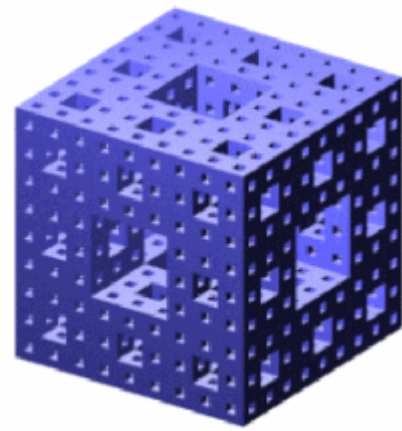
inicjator



generator – krok 1



krok 2



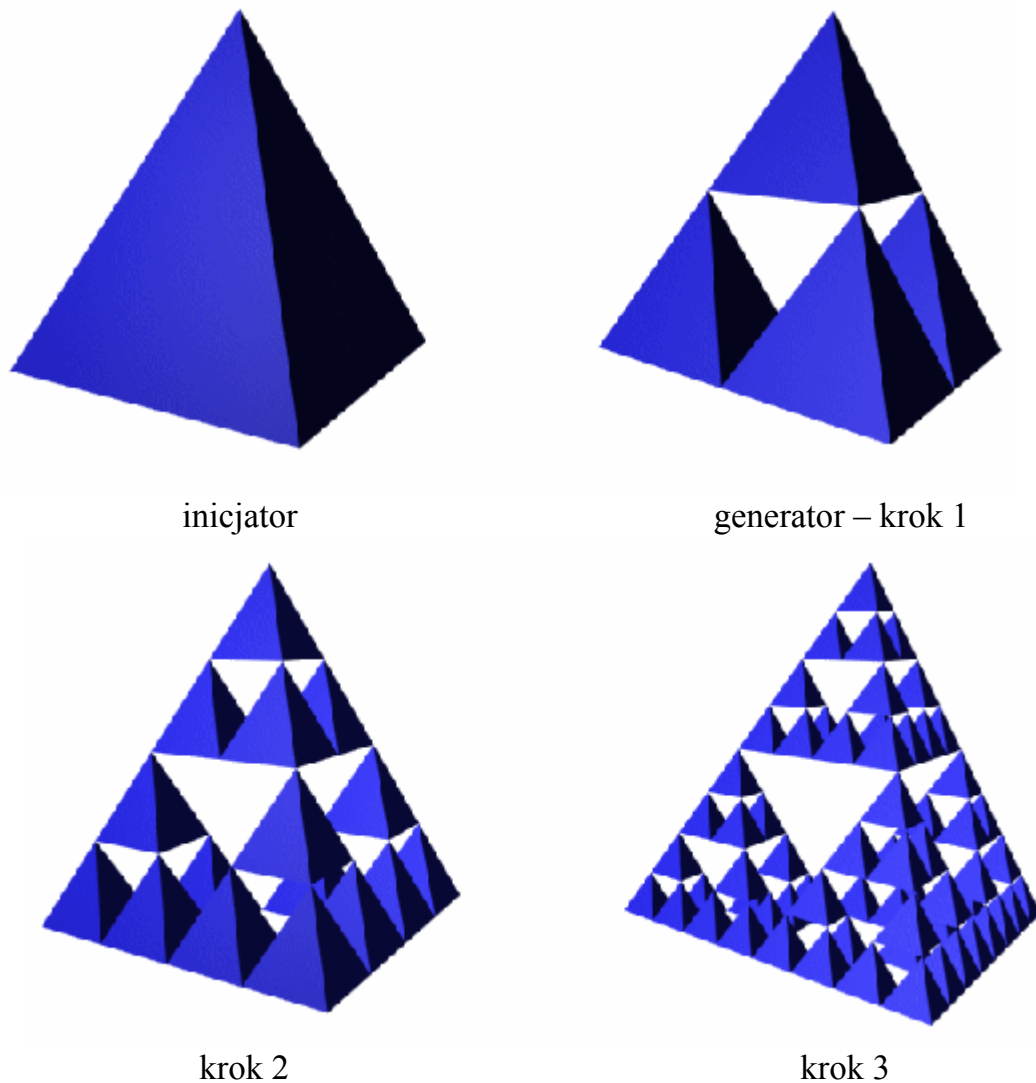
krok 3

Rys 1.7 Pierwsze kroki konstrukcji gąbki Menger

Podobnie jak istnieje przestrzenna interpretacja dywanu Sierpińskiego, istnieje również przestrzenna interpretacja trójkąta Sierpińskiego zwana piramidą Sierpińskiego. Inicjatorem tego obiektu jest czworościan foremny o boku równym a , z wnętrza którego w następnym kroku zostaje usunięty ośmiościan foremny o boku $a/2$. Powstały obiekt składa się z czterech przystających czworościanów foremnych o bokach równych $a/2$ zlokalizowanych w narożnikach inicjatora. W następnych krokach konstrukcji procedura zostaje powtórzona dla każdego z pozostałych czworościanów. Samopodobieństwo zatem jest wbudowane w proces konstrukcji. Wymiar pojemnościowy piramidy Sierpińskiego wynosi

$$d = \frac{\log 4}{\log 2} = 2,0$$

Jest to jeden z nielicznych przypadków, kiedy typowy, klasyczny obiekt fraktalny posiada wymiar pojemnościowy równy liczbie całkowitej.



Rys 1.8 Pierwsze kroki konstrukcji piramidy Sierpińskiego

Prezentując galerię klasycznych fraktali nie sposób pominąć zbiorów Julii i Mandelbrota, które zapoczątkowały dynamiczny rozwój geometrii fraktalnej. Benoit Mandelbrot nazywany ojcem geometrii fraktalnej urodził się w Polsce, w Łodzi w 1924 roku a 1936 wyemigrował wraz z rodziną do Francji. W 1945 roku Mandelbrot zainteresował się pracami słynnego francuskiego matematyka Gastona Julii (1893 – 1978), który w 1918 roku opublikował swoje dzieło *Memoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*, w którym zaprezentował zbiory nazwane później na jego cześć zbiorami Julii. [1]

Zbiory Julii powstają na płaszczyźnie zespolonej w wyniku iteracji równania

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

gdzie c jest liczbą zespoloną. Przykładowo dla wielomianu $z^2 + c$ otrzymujemy ciąg liczb zespolonych

$$z \rightarrow z^2 + c \rightarrow (z^2 + c)^2 + c \rightarrow ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c \rightarrow \dots$$

Ciąg ten tworzy w zależności od przyjętych wartości parametru c :

- ciąg nieograniczony ; jeżeli elementy ciągu opuszczają każdy okrąg ze środkiem w centrum układu współrzędnych. Ciąg ten jest zbiorem punktów, z których startując otrzymujemy ten rodzaj zachowania dla danego parametru c . Bywa on nazywany zbiorem uciekinierów U_c .
- ciąg ograniczony ; jeżeli istnieje okrąg o środku w centrum układu współrzędnych , którego elementy ciągu nigdy nie opuszczają . Ciąg ten jest zbiorem punktów , z których startując otrzymujemy ten rodzaj zachowania dla danego parametru c . Bywa on nazywany zbiorem więźniów W_c . [1]

Wspólna granica zbiorów U_c i W_c dla przyjętego parametru c stanowi zbiór Julii J_c . Prace Gastona Julii stanowiły podstawę do dalszych badań Mandelbrota , który 50 lat później dzięki technikom komputerowym odkrył zbiór zwany na jego cześć zbiorem Mandelbrota . Podstawą odkrycia zbioru jest strukturalna dychotomia zbiorów Julii polegająca na tym ,że dla dowolnie wybranego parametru c zbiór J_c i W_c jest

- albo zbiorem spójnym (jednocześnie)
- albo zbiorem niespójnym (zbiorem punktów rozproszonych)

Zbiór Mandelbrota jest zbiorem parametrów c na płaszczyźnie zespolonej C , dla których odpowiadające im zbiory Julii J_c są spójne .

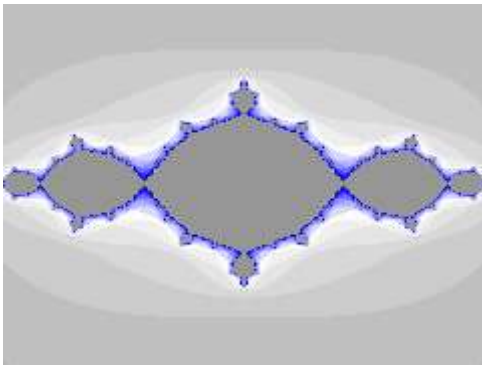
"Okolo roku 1979 Mandelbrot wpadł na pomysł , by zobaczyć , jak dychotomia ta wygląda w zbiorze parametrów c , zmieniających się na płaszczyźnie zespolonej C . Doprowadziło to do bezpośrednio do odkrycia zbioru Mandelbrota

$$M = \{ c \in C : J_c \text{ jest spójny} \}$$

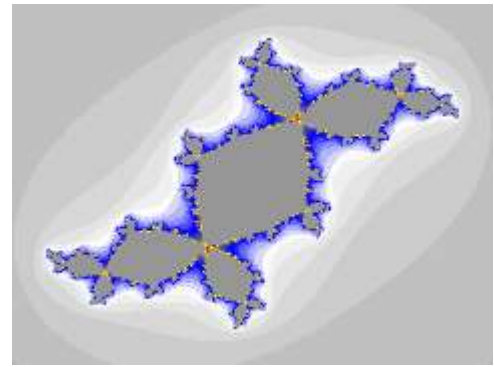
Mandelbrot zaznaczał każdy punkt (piksel na ekranie komputera) na płaszczyźnie wartości c na czarno lub na biało , w zależności od tego czy odpowiadający mu zbiór Julii był spójny , czy też był zbiorem osobnych punktów . W wyniku powstał czarno-biały obraz , który z powodu ograniczeń grafiki dostępnej w tamtych czasach , nie wyglądał ani specjalnie ani efektownie ." [1]

Obecnie dzięki rozwojowi grafiki komputerowej różnym wartościom parametru c można przypisać inny kolor dzięki czemu możemy oglądać zbiór Mandelbrota w wersji kolorowej .

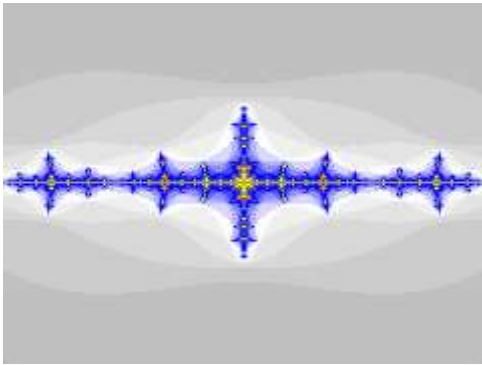
Zbiór Mandelbrota jest najpopularniejszym fraktalem , chociaż jak twierdził sam jego twórca "...nie jest on tak naprawdę fraktalem w myśl większości definicji : moglibyśmy nazwać go fraktalem brzegowym , granicznym fraktalem zawierającym wiele fraktali". Samopodobieństwo jakkolwiek inne niż w przypadku prezentowanych klasycznych fraktali jest jednak widoczne , zwłaszcza w kolejnych powiększeniach fragmentu zbioru, dostarczających niepowtarzalnych wrażeń estetycznych. Ciekawostką jest odkrycie japońskiego naukowca Mitsushiro Shishikury , który dowiódł , że wymiar fraktalny brzegu zbioru Mandelbrota jest równy 2 [14] .Prezentowane na rys 10 fragmenty zbioru Mandelbrota zostały wygenerowane za pomocą programu komputerowego Chaos 3.02 by M. Pflingsti .[CHIP nr 10/2001]



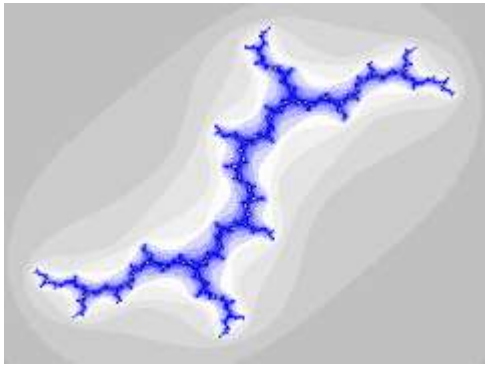
$C = -1.0$



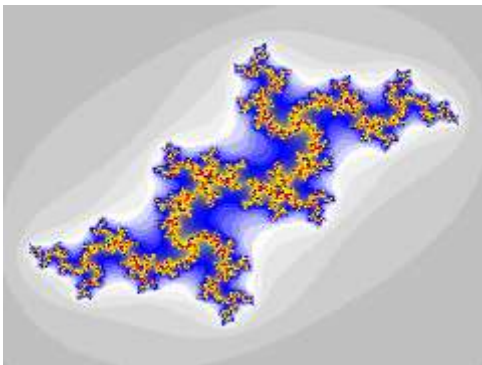
$C = -0.125 - 0.755 i$



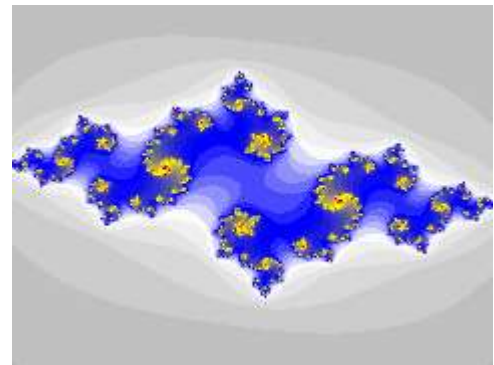
$C = -1.45$



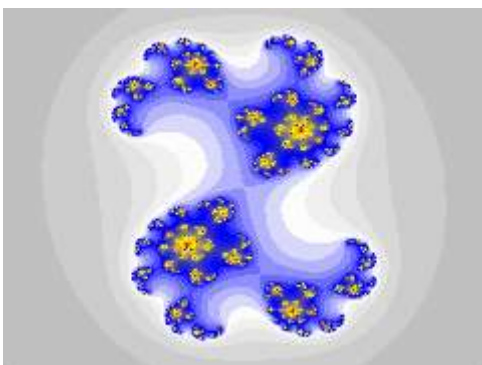
$C = -1.0 i$



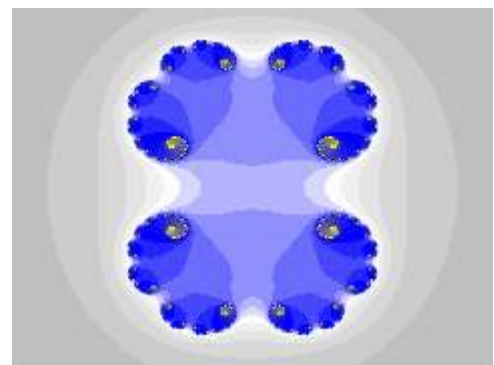
$C = -0.25 - 0.75 i$



$C = -0.83 + 0.27 i$

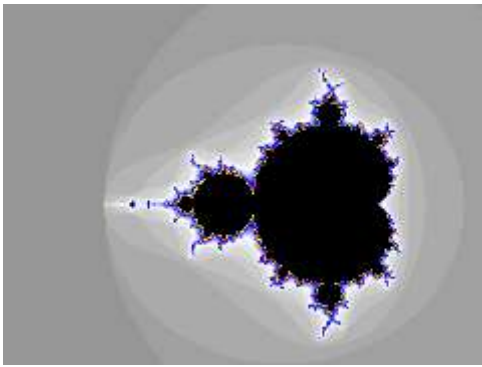


$C = 0.412 + 0.125 i$

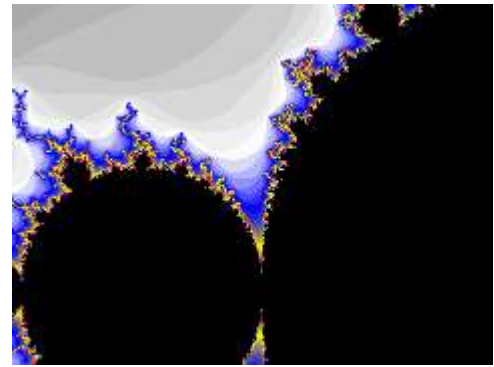


$C = 0.35$

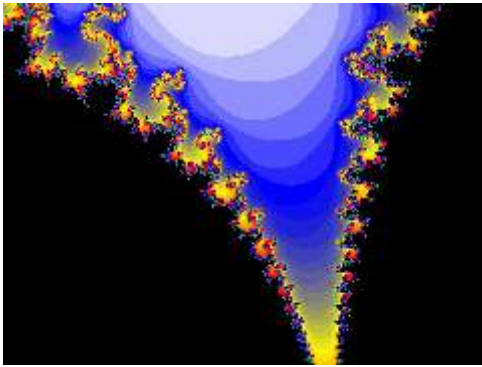
Rys 1.9 Przykłady zbiorów Julii dla wielomianu $z = z^2 + c$



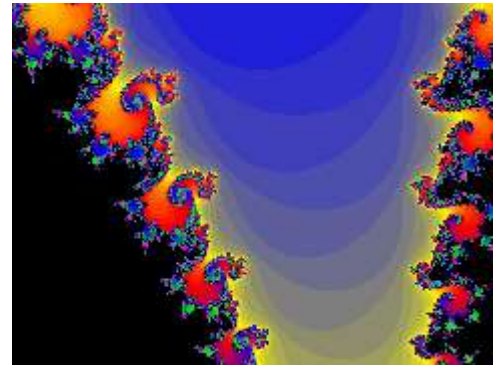
1:1



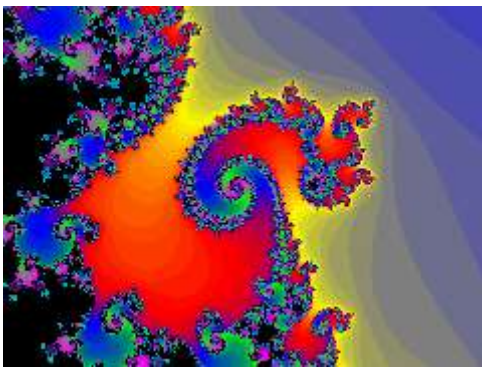
4:1



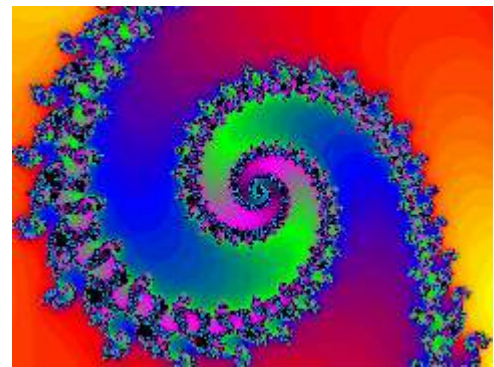
16:1



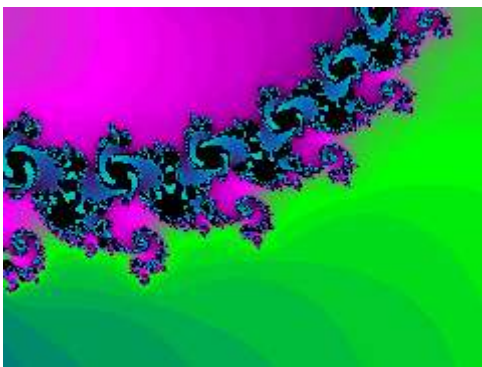
64:1



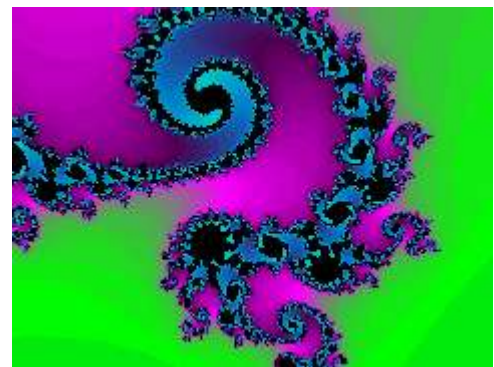
256:1



1024:1



8192:1

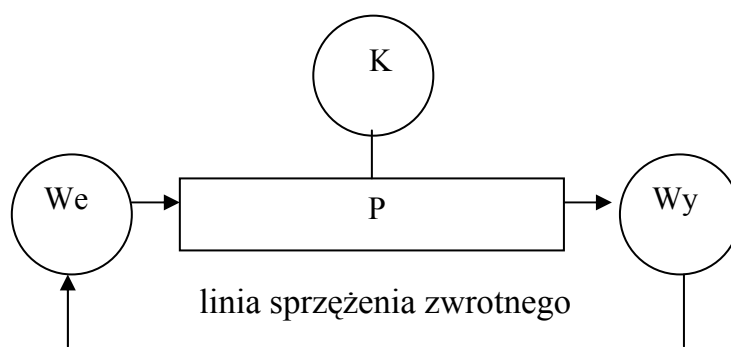


65536:1

Rys 1.10 Kolejne powiększenia zbioru Mandelbrota

ROZDZIAŁ II METODA IFS

Najbardziej rozpowszechnioną metodą generowania fraktali jest system funkcji iterowanych zwany w skrócie IFS (*iterated function system*). System ten można wyjaśnić w sensie intuicyjnym jako działanie pewnego urządzenia znanego w literaturze pod nazwą kopiarki wielokrotnie redukującej zwanej w skrócie KWR . Działanie tego urządzenia oparte jest na zasadzie sprzężenia zwrotnego zilustrowanego na poniższym schemacie .



Rys 2. 1

Dowolny podzbiór płaszczyzny lub przestrzeni trójwymiarowej , który można nazwać zbiorem początkowym A_0 zostaje wprowadzony do pamięci We , następnie poddany działaniu procesora P , który przetwarza obraz zgodnie z przekształceniem $W (A_0)$ w efekcie czego otrzymujemy obraz A_1 . W wyniku sprzężenia zwrotnego obraz A_1 zostaje ponownie wprowadzony do pamięci We i poddany przekształceniu $W (A_1)$ w związku z czym otrzymujemy obraz A_2 . Dla n -kroków otrzymujemy obraz A_n . Działanie KWR nazywane iterowaniem kontroluje jednostka K zliczająca liczbę cykli [1] .

W ten sposób zrealizowany zostaje podpunkt a) Definicji 1.1 opisujący właściwości obiektów fraktalnych , dotyczący określenia metody generowania za pomocą zależności rekurencyjnej . Jednocześnie w sposób pośredni zrealizowany zostaje podpunkt c) Definicji 1.1 dotyczący samopodobieństwa ponieważ cecha ta jest wbudowana w proces konstrukcji zbioru .

Przekształcenie W będące podstawą działania KWR jest przekształceniem afinicznym.

Definicja 2.1 [9]

"Każde wzajemnie jednoznaczne przekształcenie przestrzeni punktowej na siebie , które zachowuje równoległość i stosunek długości wektorów równoległych , jest przekształceniem afinicznym "

Przekształcenie W stosowane w KWR może być również złożeniem przekształceń afinicznych na mocy twierdzenia :

Twierdzenie 2.1 [9]

"Superpozycja przekształceń afinicznych jest przekształceniem afinicznym , którego macierz jest iloczynem macierzy superponowanych "

Najwyższą klasą przekształceń afinicznych stanowią izometrie do których zaliczamy : translację , obrót , symetrie (środkową , osiowa , płaszczyznową) . Ogólniejszą od izometrii klasę przekształceń stanowi klasa jednokładności i podobieństwa .[9] Przy czym jednokładność jest złożeniem podobieństwa i pewnej izometrii i na odwrót podobieństwo jest złożeniem jednokładności i pewnej izometrii . Podobieństwo o skali $k = 1$ jest izometrią .[11]

Najogólniejsza klasa przekształceń afinicznych charakteryzująca się najwyższą grupą niezmienników obejmuje przekształcenie nazywane skalowaniem .[9] W odróżnieniu od podobieństwa i jednokładności w przekształceniu tym współczynnik podobieństwa nie jest jednakowy dla różnych kierunków przestrzeni Euklidesowej .

W niniejszej pracy liczbę przekształceń ograniczono do translacji , obrotu i skalowania Składanie przekształceń afinicznych w przestrzeni n-wymiarowej jest możliwe dzięki przyjęciu pewnych założeń :

- 1° Przekształcenia są przedstawiane za pomocą operatorów macierzowych
- 2° Równania opisujące przekształcenia zapisane są we współrzędnych jednorodnych
- 3° Składanie przekształceń polega na mnożeniu macierzy

Ad 1°

Dane jest przekształcenie afiniczne w którym punktowi $P (x , y)$ zostaje przyporządkowany punkt $P' (x' , y')$. Współrzędne (x , y) i (x' , y') są związane układem równań

$$\begin{aligned} x' &= a_{11} x + a_{12} y \\ y' &= a_{21} x + a_{22} y \end{aligned}$$

Przekształcenie charakteryzuje kwadratowa tablica współczynników , które występują w układzie równań . Tablica taka nazywa się macierzą i zapisujemy ją

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad T = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{gdzie } i = 1,2,\dots,m \text{ określa liczbę wierszy} \\ j = 1,2,\dots,n \text{ określa liczbę kolumn}$$

Ad 2°

Układ współrzędnych jednorodnych został stworzony dla przeprowadzenia badań w dziedzinie geometrii rzutowej .

Dowolny punkt $P (x , y)$ o współrzędnych x , y jest przyporządkowany zbiorowi trzech liczb $\langle x_1 , x_2 , x_3 \rangle$ takich , że

- dla punktu właściwego $x_3 \neq 0 , \frac{x_1}{x_3} = x , \frac{x_2}{x_3} = y$
- dla punktu niewłaściwego $x_3 = 0 , \frac{x_1}{x_2}$ określa kierunek punktu

Przy takim założeniu każdy punkt opisuje nieskończenie wiele trójek liczb o stałym stosunku $x_1 : x_2 : x_3$

Dla $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$. Zatem każdemu punktowi właściwemu odpowiada trójka liczb $\langle x, y, 1 \rangle$ [12]

Ad 3°

Mnożenie macierzy możliwe jest tylko wtedy, gdy liczba kolumn mnożnej równa jest liczbie wierszy mnożnika

Niech $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $B = [b_{ij}]_{p \times n}$

Iloczynem macierzy A i B który zapisujemy $A \circ B$ nazywamy taką macierz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$

$$\text{że } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \quad [15]$$

Przykład 2.1

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad C = A \circ B \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

Ustalenie założeń 1°, 2° pozwala przedstawić wyselekcjonowane przekształcenia afiniczne w układzie współrzędnych jednorodnych za pomocą operatorów macierzowych

T

Translacja czyli przesunięcie równoległe na płaszczyźnie R^2 jest to przekształcenie które punktowi P (x , y) przyporządkowuje punkt P' (x' , y') taki, że

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

gdzie t_x, t_y są współrzędnymi wektora przesunięcia

Układ ten można również przedstawić w postaci :

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot t_x$$

$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot t_y$$

Zgodnie z założeniem 2° punkt P na płaszczyźnie w układzie współrzędnych ma trzy współrzędne $\langle x, y, 1 \rangle$. Oznaczmy je $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$

Przekształcenie translacji na płaszczyźnie R^2 w układzie współrzędnych jednorodnych dla $x_3 = 1$ ma postać :

$$x_1' = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + t_x \cdot x_3$$

$$x_2' = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + t_y \cdot x_3$$

$$x_3' = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$$

Macierz translacji na płaszczyźnie R^2 w układzie współrzędnych jednorodnych ma postać

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R

Obrót na płaszczyźnie R^2 dokoła punktu punktu O (początek układu współrzędnych) o kąt φ jest przekształceniem w którym punktowi $P (x , y)$ zostaje przyporządkowany punkt $P (x' , y')$ taki , że :

$$x' = \cos\varphi x - \sin\varphi y$$

$$y' = \sin\varphi x + \cos\varphi y$$

Przekształcenie obrotu na płaszczyźnie R^2 o kąt φ w układzie współrzędnych jednorodnych dla $x_3 = 1$ ma postać :

$$x_1' = \cos\varphi \cdot x_1 - \sin\varphi \cdot x_2 + 0 \cdot x_3$$

$$x_2' = \sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot x_2 + 0 \cdot x_3$$

$$x_3' = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$$

Macierz obrotu na płaszczyźnie R^2 o kąt φ w układzie współrzędnych jednorodnych dla $x_3 = 1$ ma postać :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S

Skalowanie na płaszczyźnie R^2 jest to przekształcenie które punktowi $P (x , y)$ przyporządkowuje punkt $P' (x' , y')$ taki , że

$$x' = s_x \cdot x$$

$$y' = s_y \cdot y$$

gdzie s_x , s_y są współczynnikami skalowania odpowiednio wzdłuż osi x i y

Układ ten możemy również przedstawić w postaci

$$x' = s_x \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot t_x$$

$$y' = 0 \cdot x + s_y \cdot y + 1 \cdot t_y$$

Przekształcenie skalowania na płaszczyźnie R^2 w układzie współrzędnych jednorodnych dla $x_3 = 1$ ma postać :

$$x_1' = s_x \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + t_x \cdot x_3$$

$$x_2' = 0 \cdot x_1 + s_y \cdot x_2 + t_y \cdot x_3$$

$$x_3' = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$$

Macierz skalowania na płaszczyźnie R^2 w w układzie współrzędnych jednorodnych ma postać

$$R = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dzięki przedstawieniu przekształceń afinicznych za pomocą operatorów macierzowych w układzie współrzędnych jednorodnych ułatwiona jest procedura składania tych przekształceń w ujęciu geometrii analitycznej pod warunkiem zastosowania do obliczeń iloczynów macierzy, sprzętu i programów komputerowych. Należy podkreślić, że aczkolwiek na ekranie monitora obserwujemy efekty przekształceń w ujęciu grafiki wektorowej to jednak w rzeczywistości podstawą tych procedur są operacje matematyczne polegające na obliczaniu współrzędnych punktów poddawanych przekształceniom.

Złożenie przekształceń afinicznych $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$, operujących na dowolnym podziorze płaszczyzny A można zapisać

$$W(A) = W_1(A) \cup W_2(A) \cup W_3(A) \cup \dots \cup W_n(A)$$

Jeżeli A_0 będzie zbiorem początkowym, w wyniku wielokrotnego zastosowania tego samego przekształcenia $W(A)$ można otrzymać ciąg zbiorów

$$A_{k+1} = W(A_k) \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Jeżeli $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$ są przekształceniami zwężającymi, IFS wytwarza ciąg zbiorów dążących w granicy do zbioru końcowego A_∞ zwanego atraktorem danego IFS. Jest on lewostronnie niezmienniczy co można zapisać

$$W(A_\infty) = A_\infty$$

W uproszczeniu można powiedzieć, że dla $n \rightarrow \infty$ obraz zbioru A_n nie różni się od swojego lewego poprzednika tzn. obrazu zbioru A_{n-1} [1]

Innym określeniem atraktora danego IFS jest pojęcie punktu stałego przekształcenia afinicznego.

Twierdzenie 2.2 (Twierdzenie Banacha) [11]

"Jeżeli operacja T przekształcająca przestrzeń metryczną zupełną $X = (X, d)$ w siebie jest operacją zwężającą, tzn. taką, że istnieje stała h , spełniająca warunek $0 < h < 1$ taka, że dla każdego dwóch elementów x_1, x_2 należących do X zachodzi nierówność

$$d(Tx_1, Tx_2) \leq h d(x_1, x_2)$$

to istnieje dokładnie jeden punkt $p \in X$ taki, że $f(p) = p$.

Co oznacza, że odległość między obrazami dwóch punktów jest mniejsza lub równa odległości między oryginałami tych punktów pomnożonej przez liczbę $s : 0 < s < 1$

Przykład 2.2 [3]

Niech będzie dany trójkąt równoboczny o boku a jako zbiór początkowy A_0 .

KWR niech będzie urządzeniem, które wykonując kopie może obraz przeskalować oraz przesunąć na płaszczyźnie. Przekształcenie $W(A)$ jest złożeniem trzech przekształceń W_1, W_2, W_3 co możemy zapisać:

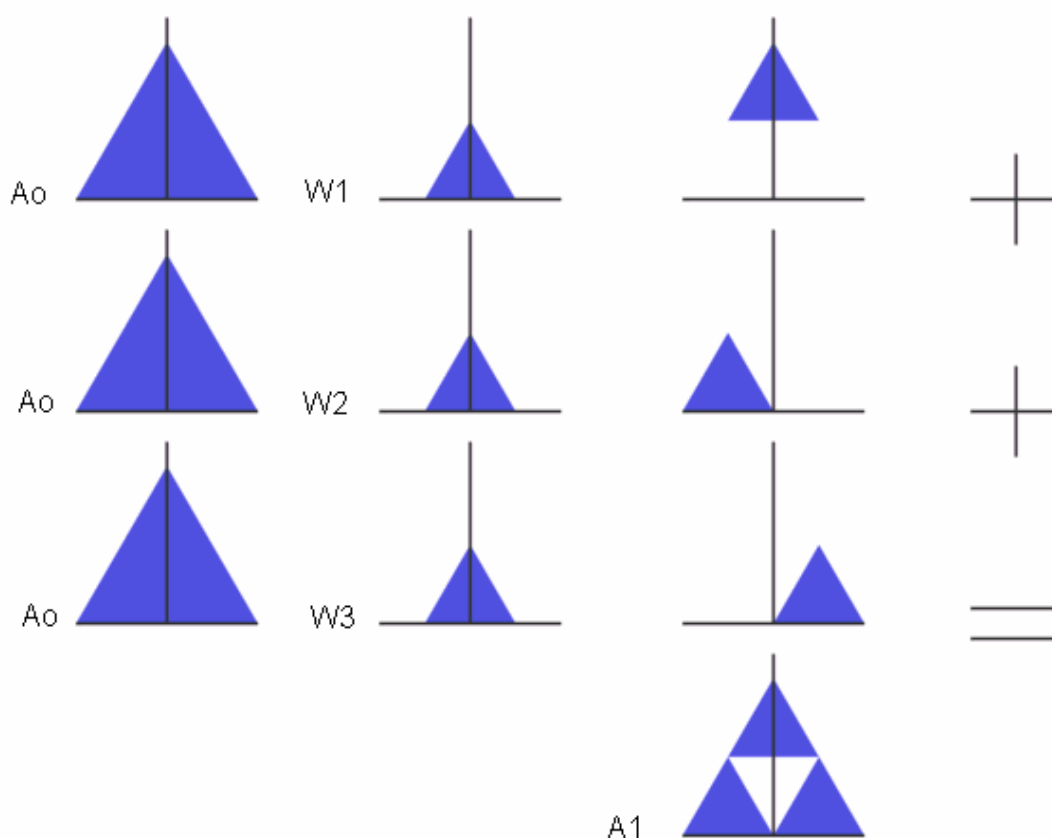
$$W(A) = W_1(A) \cup W_2(A) \cup W_3(A)$$

Parametry przekształceń W_1, W_2, W_3 określa tabela 2.1

K	skalowanie		obrót	translacja	
	s_x	s_y	φ	t_x	t_y
W_1	0,5	0,5	0	0	$\sqrt{3}/2 a$
W_2	0,5	0,5	0	-a/4	0
W_3	0,5	0,5	0	a/4	0

Tabela 2.1

Działanie KWR można dla powyższego przekształcenia zilustrować graficznie następującym rysunkiem



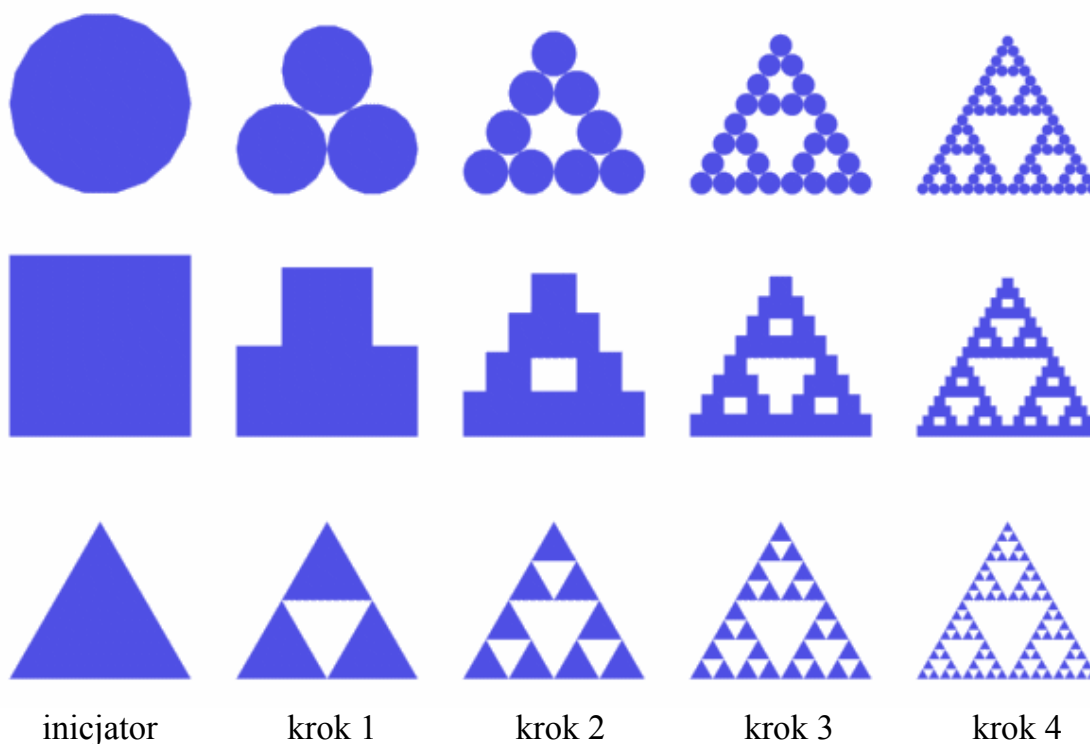
Rys 2.2 Tworzenie trójkąta Sierpińskiego za pomocą metody IFS. [3]

Przekształcając obiekt A_1 przekształceniem

$$W(A_1) = W_1(A_1) \cup W_2(A_1) \cup W_3(A_1)$$

o parametrach określonych tabelą uzyskujemy obiekt A_2 itd. Po n -krokach iteracji uzyskujemy trójkąt Sierpińskiego, który określamy mianem punktu stałego danego przekształcenia.

Cechą szczególnie charakterystyczną jest fakt, że w niezależnie od przyjętego zbioru początkowego w wyniku danego przekształcenia uzyskujemy w granicy taki sam obiekt, w naszym przypadku trójkąt Sierpińskiego będący atraktorem danego przekształcenia. Określenie, że atraktor jest obiektem lewostronnie niezmienniczym oznacza, że w wyniku przekształcenia trójkąta Sierpińskiego jako wyrazu początkowego uzyskujemy po n -krokach, również trójkąt Sierpińskiego. [3]



Rys 2.3 Trójkąt Sierpińskiego jako atraktor przekształcenia



Rys 2.4 Atraktor jako obiekt lewostronnie niezmienniczy (określenie to oznacza, że dla $n \rightarrow \infty$ obiekt A_n nie różni się od swojego lewego poprzednika tzn obiektu A_{n-1})

Jak się zatem okazuje w wyniku stosowania metody IFS otrzymaliśmy trójkąt Sierpińskiego , którego generowanie realizowane było za pomocą procedury opisowej. W podobny sposób można uzyskać inne fraktale klasyczne takie jak dywan Sierpińskiego , zbiór Cantora czy krzywą Kocha . Poniżej podano tabele parametrów przekształceń dla dywanu Sierpińskiego, krzywej Kocha i zbioru Cantora.

Przykład 2.3

Niech będzie dany kwadrat o boku a jako zbiór początkowy B_0 przekształcenia $W(B)$ będącego złożeniem ośmiu przekształceń

$$W(B) = W_1(B) \cup W_2(B) \cup W_3(B) \cup W_4(B) \cup W_5(B) \cup W_6(B) \cup W_7(B) \cup W_8(B)$$

K	skalowanie		obrót	translacja	
	s_x	s_y		t_x	t_y
W_1	1/3	1/3	0	1/3a	0
W_2	1/3	1/3	0	1/3a	1/3a
W_3	1/3	1/3	0	0	1/3a
W_4	1/3	1/3	0	-1/3a	1/3a
W_5	1/3	1/3	0	-1/3a	0
W_6	1/3	1/3	0	-1/3a	-1/3a
W_7	1/3	1/3	0	0	-1/3a
W_8	1/3	1/3	0	0	1/3a

Tabela 2.2 Parametry przekształcenia $W(B)$, którego atraktorem jest dywan Sierpińskiego

Przykład 2.4

Niech będzie dany odcinek o długości a jako zbiór początkowy G_0 przekształcenia $W(G)$ będącego złożeniem czterech przekształceń

$$W(G) = W_1(G) \cup W_2(G) \cup W_3(G) \cup W_4(G)$$

K	skalowanie		obrót	translacja	
	s_x	s_y		t_x	t_y
W_1	1/3	1/3	0	1/3a	0
W_2	1/3	1/3	0	-1/3a	0
W_3	1/3	1/3	60	-1/12a	$\sqrt{3}/12a$
W_4	1/3	1/3	-60	1/12a	$\sqrt{3}/12a$

Tabela 2.3 Parametry przekształcenia $W(G)$, którego atraktorem jest krzywa Kocha

Przykład 2.5

Niech będzie dany odcinek o długości a jako zbiór początkowy C_0 przekształcenia $W(C)$ będącego złożeniem dwóch przekształceń

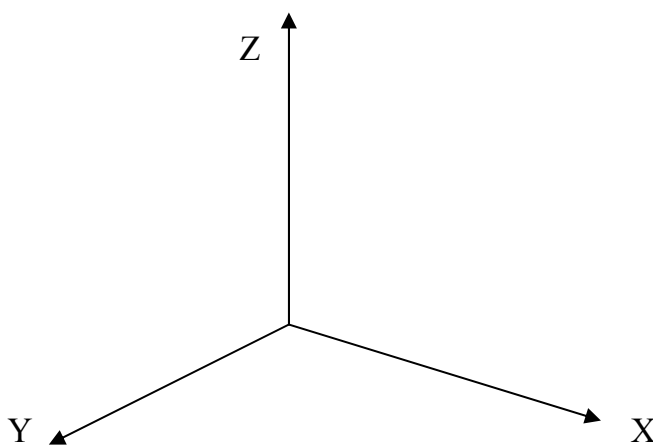
$$W(C) = W_1(C) \cup W_2(C)$$

	skalowanie		obrót	translacja	
K	s_x	s_y	φ	t_x	t_y
W_1	1/3	0	0	-1/3a	0
W_2	1/3	0	0	1/3a	0

Tabela 2.4 Parametry przekształcenia $W(C)$, którego atraktorem jest zbiór Cantora

Celem niniejszej rozprawy jest generowanie struktur fraktalnych, które mogłyby stanowić źródło inspiracji w kształtowaniu formy architektonicznej. W tym kontekście jedynie fraktale przestrzenne mogą stanowić podstawę badań i poszukiwań. Aktualnie w dostępnej literaturze brak jest odpowiednich i wystarczających przykładów dla udowodnienia postawionej tezy, a nieliczne istniejące generowane są za pomocą procedury opisowej. Dlatego też należy stworzyć system generowania struktur fraktalnych za pomocą systemu IFS w przestrzeni trójwymiarowej.

Przyjmijmy jako układ odniesienia kartezjański, ortonormalny, przestrzenny układ współrzędnych.



Rys 2.5

Podobnie jak w metodzie generowania fraktali na płaszczyźnie R^2 należy przyjąć analogiczne założenia odnoszące się do przestrzeni trójwymiarowej R^3 .

1° System funkcji iterowanych zwany w skrócie IFS jest sposobem generowania fraktali który można przyrównać do działania urządzenia nazywanego kopiarką wielokrotnie redukującą KWR

2° Przekształcenie będące podstawą działania KWR jest przekształceniem afinicznym lub złożeniem przekształceń afinicznych.

3° Przekształcenia afiniczne stosowane w IFS zapisane są w układzie współrzędnych jednorodnych

4° Przekształcenia afiniczne stosowane w IFS przedstawione są za pomocą operatorów macierzowych

5° Składanie przekształceń polega na mnożeniu macierzy

Wszystkie powyższe założenia dotyczą przestrzeni n -wymiarowej, mają zatem charakter uniwersalny i zostały dokładnie omówione przy okazji wyjaśnienia działania IFS na płaszczyźnie R^2 . Pewnego uściślenia wymaga jedynie punkt 3° dla liczby wymiarów $n = 3$.

Ad 3°

Dowolny punkt $P(x, y, z)$ o współrzędnych x, y, z jest przyporządkowany zbiorowi czterech liczb $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ takich, że:

- dla punktu właściwego $x_4 \neq 0$, $\frac{x_1}{x_4} = x$, $\frac{x_2}{x_4} = y$, $\frac{x_3}{x_4} = z$
- dla punktu niewłaściwego $x_4 = 0$ stosunek $x_1 : x_2 : x_3$ określa kierunek punktu
- dla $x_4 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, zatem każdemu punktowi właściwemu odpowiada czwórka liczb $\langle x, y, z, 1 \rangle$

Podobnie jak na płaszczyźnie, liczbę przekształceń afinicznych ograniczono do translacji obrotu i skalowania, przy czym

- przekształcenie obrotu następuje niezależnie w płaszczyźnie xy dokoła osi z , w płaszczyźnie xz dokoła osi y , lub w płaszczyźnie yz dokoła osi x
- skalowanie może być różne na kierunkach osi x, y, z

T

Translacja o wektor $[t_x, t_y, t_z]$, jest przekształceniem $W(A) = A'$, które każdemu punktowi $P(x, y, z) \in A$ przyporządkowuje punkt $P'(x', y', z') \in A'$ taki, że:

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

$$z' = z + t_z$$

gdzie t_x, t_y, t_z są współrzędnymi wektora przesunięcia

Układ ten można zapisać w postaci:

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot t_x$$

$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot t_y$$

$$z' = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + 1 \cdot t_z$$

zgodnie z założeniem 3° dla $x_4 = 1$ punkt P w przestrzeni R^3 ma współrzędne $\langle x, y, z, 1 \rangle$ które oznaczamy $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$

Przekształcenie translacji w układzie współrzędnych jednorodnych ma postać :

$$x_1' = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + t_x \cdot x_4$$

$$x_2' = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + t_y \cdot x_4$$

$$x_3' = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + t_z \cdot x_4$$

$$x_4 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4$$

Macierz przekształcenia translacji w przestrzeni R^3 w układzie współrzędnych jednorodnych ma postać :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S

Skalowanie w przestrzeni R^3 jest przekształceniem $W(A) = A'$, które każdemu punktowi $P(x, y, z) \in A$ przyporządkowuje punkt $P'(x', y', z') \in A'$ taki ,że

$$x' = s_x \cdot x$$

$$y' = s_y \cdot y$$

$$z' = s_z \cdot z$$

gdzie s_x, s_y, s_z są parametrami przekształcenia skalowania

Układ ten można zapisać w postaci :

$$x' = s_x \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z$$

$$y' = 0 \cdot x + s_y \cdot y + 0 \cdot z$$

$$z' = 0 \cdot x + 0 \cdot y + s_z \cdot z$$

zgodnie z założeniem 3^0 dla $x_4 = 1$ punkt P w przestrzeni R^3 ma współrzędne $\langle x, y, z, 1 \rangle$ które oznaczamy $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$

Przekształcenie translacji w układzie współrzędnych jednorodnych ma postać :

$$x_1' = s_x \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_2' = 0 \cdot x_1 + s_y \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_3' = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + s_z \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_4 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4$$

Macierz przekształcenia skalowania w przestrzeni R^3 układzie współrzędnych jednorodnych ma postać:

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R_x

Obrót dookoła osi x o kąt φ_x w przestrzeni R^3 jest przekształceniem $W(A) = A'$, które każdemu punktowi $P(x, y, z) \in A$ przyporządkowuje punkt $P'(x', y', z') \in A'$ taki ,że:

$$x' = x$$

$$y' = \cos\varphi_x \cdot y - \sin\varphi_x \cdot z$$

$$z' = \sin\varphi_x \cdot y + \cos\varphi_x \cdot z$$

Układ ten można zapisać w postaci :

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z$$

$$y' = 0 \cdot x + \cos\varphi_x \cdot y - \sin\varphi_x \cdot z$$

$$z' = 0 \cdot x + \sin\varphi_x \cdot y + \cos\varphi_x \cdot z$$

zgodnie z założeniem 3^o dla $x_4 = 1$ punkt P w przestrzeni R^3 ma współrzędne $\langle x, y, z, 1 \rangle$ które oznaczamy $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$

Przekształcenie obrotu R_x w układzie współrzędnych jednorodnych ma postać :

$$x_1' = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_2' = 0 \cdot x_1 + \cos\varphi_x \cdot x_2 - \sin\varphi_x \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_3' = 0 \cdot x_1 + \sin\varphi_x \cdot x_2 + \cos\varphi_x \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_4' = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

Macierz przekształcenia obrotu R_x w przestrzeni R^3 układzie współrzędnych jednorodnych ma postać:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & \sin\varphi_x & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_x & \cos\varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R_y

Obrót dookoła osi y o kąt φ_y w przestrzeni R^3 jest przekształceniem $W(A) = A'$, które każdemu punktowi $P(x, y, z) \in A$ przyporządkowuje punkt $P'(x', y', z') \in A'$ taki ,że:

$$x' = \cos\varphi_y \cdot x + \sin\varphi_y \cdot z$$

$$y' = y$$

$$z' = -\sin\varphi_y \cdot x + \cos\varphi_y \cdot z$$

Układ ten można zapisać w postaci :

$$x' = \cos\varphi_y \cdot x + 0 \cdot y + \sin\varphi_y \cdot z$$

$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z$$

$$z' = -\sin\varphi_y \cdot x + 0 \cdot y + \cos\varphi_y \cdot z$$

zgodnie z założeniem 3^o dla $x_4 = 1$ punkt P w przestrzeni R^3 ma współrzędne $\langle x, y, z, 1 \rangle$ które oznaczamy $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$

Przekształcenie obrotu R_y w układzie współrzędnych jednorodnych ma postać :

$$x_1' = \cos\varphi_y \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \sin\varphi_y \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_2' = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_3' = -\sin\varphi_y \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cos\varphi_y \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_4' = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4$$

Macierz przekształcenia obrotu R_y w przestrzeni R^3 układzie współrzędnych jednorodnych ma postać:

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R_z

Obrót dookoła osi z o kąt φ_z w przestrzeni R^3 jest przekształceniem $W(A) = A'$, które każdemu punktowi $P(x, y, z) \in A$ przyporządkowuje punkt $P'(x', y', z') \in A'$ taki, że:

$$x' = \cos \varphi_z \cdot x - \sin \varphi_z \cdot y$$

$$y' = \sin \varphi_z \cdot x + \cos \varphi_z \cdot y$$

$$z' = z$$

Układ ten można zapisać w postaci :

$$x' = \cos \varphi_z \cdot x - \sin \varphi_z \cdot y + 0 \cdot z$$

$$y' = \sin \varphi_z \cdot x + \cos \varphi_z \cdot y + 0 \cdot z$$

$$z' = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z$$

zgodnie z założeniem 3^o dla $x_4 = 1$ punkt P w przestrzeni R^3 ma współrzędne $\langle x, y, z, 1 \rangle$ które oznaczamy $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$

Przekształcenie obrotu R_z w układzie współrzędnych jednorodnych ma postać :

$$x_1' = \cos \varphi_z \cdot x_1 - \sin \varphi_z \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_2' = \sin \varphi_z \cdot x_1 + \cos \varphi_z \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_3' = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$x_4' = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4$$

Macierz przekształcenia obrotu R_z w przestrzeni R^3 układzie współrzędnych jednorodnych ma postać:

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Złożenie przekształceń afinicznych operujących na dowolnym podziorze przestrzeni R^3 można zapisać

$$W(A) = W_1(A) \cup W_2(A) \cup \dots \cup W_n(A)$$

co polega na mnożeniu macierzy

$$M = T_1 \circ \dots \circ T_n \circ S_1 \circ \dots \circ S_n \circ R_1 \circ \dots \circ R_n$$

Jeżeli A_0 będzie zbiorem początkowym, w wyniku wielokrotnego zastosowania przekształcenia $W(A)$ można otrzymać ciąg zbiorów

$$A_{k+1} = W(A_k) \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Jeżeli W_1, W_2, \dots, W_n są przekształceniami zwięzającymi, IFS wytwarza ciąg zbiorów dążący w granicy do zbioru końcowego A_∞ zwanego atraktorem danego IFS.

W opisach przykładów zastosowano oznaczenia określające typ systemu oraz liczbę porządkową przykładu np. IFS 11 . Przy określeniu przekształcenia afinicznego W zastosowano oznaczenia literowe identyfikujące przekształcenie ze zbiorem początkowym np. W(F) jest przekształceniem , w którym zbiorem początkowym jest sfera oznaczona jako F_0 . Kolejnym literom alfabetu przyporządkowano odpowiednie zbiory początkowe np. A-czworościan , B-sześcian , F-sfera itd. W zapisie przekształceń pominięto indeksy dolne kolejnych wyrazów ciągu zakładając , że z wcześniejszych fragmentów pracy wynika , że przykładowo :

$$W(A_0) = W_1(A_0) \cup W_2(A_0) \cup \dots \cup W_n(A_0) = A_1$$

$$W(A_1) = W_1(A_1) \cup W_2(A_1) \cup \dots \cup W_n(A_1) = A_2$$

⋮

$$W(A_{n-1}) = W_1(A_{n-1}) \cup W_2(A_{n-1}) \cup \dots \cup W_n(A_{n-1}) = A_n$$

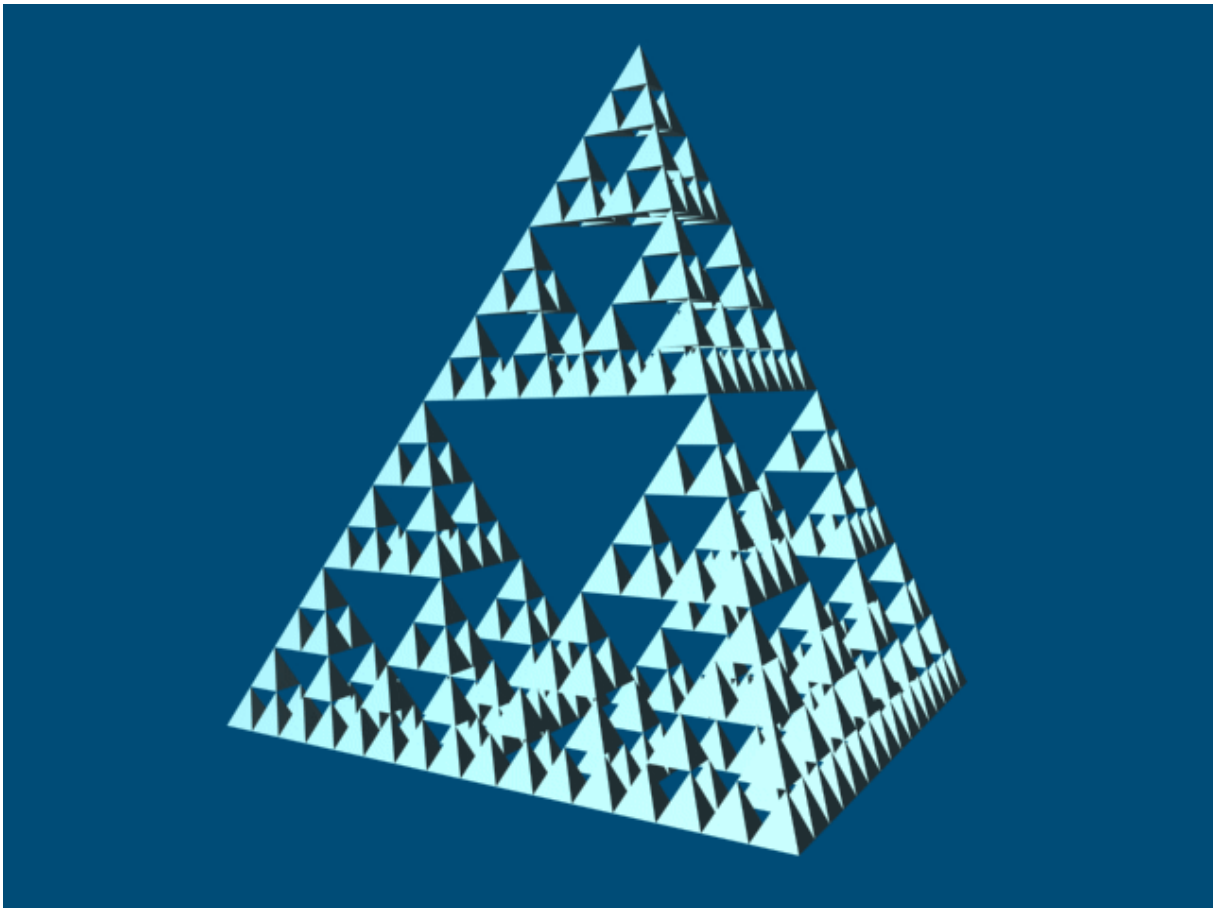
Wszystkie prezentowane w niniejszej pracy struktury fraktalne zostały wygenerowane za pomocą programu komputerowego Autodesk VIZ R4 przy użyciu następujących komend :

Inicjator

- z bocznego menu poleceń wybieramy menu *Create* (utwórz)
- wybieramy ikonę *Geometry* (tworzenie brył)
- wybieramy grupę brył *Standard Primitives* lub *Extend Primitives*
- określamy rodzaj bryły *Object Type* oraz parametry i położenie za pomocą *Keyboard Entry*, lokalizację obiektu należy zdefiniować tak , aby środek ciężkości bryły znajdował się w początku układu współrzędnych
- Generator
- tworzymy kopię inicjatora za pomocą polecenia *Clone* z menu *Edit*
- poddajemy kopię przekształceniu afinicznemu W_1 , które może być złożeniem przekształceń , dokonywanych za pomocą klawiszy *Scale* (przeskaluj) , *Move* (przesun) , *Rotate* (obróć) definiując parametry przekształceń po uaktywnieniu odpowiedniego okna prawym klawiszem myszy
- tworzymy kopię inicjatora za pomocą polecenia *Clone* z menu *Edit*
- poddajemy kopię przekształceniu afinicznemu W_2 , które może być złożeniem przekształceń *Scale* , *Move* , *Rotate* , itd. aż do wykonania wszystkich przekształceń W_n definiujących przekształcenie afiniczne
- usuwamy obiekt inicjatora poleceniem *Delete* z menu *Edit*
- scalamy wszystkie kopie używając polecenia *Select All* z menu *Edit*
- grupujemy wszystkie kopie inicjatora używając polecenia *Group*

KWR

Każdy krok iteracji przeprowadzamy zgodnie z procedurą tworzenia generatora stosując dokładnie te same parametry oraz kolejność przekształceń dla obiektu uzyskanego w poprzednim kroku np. *Group 01* . Wykonanie wszystkich przekształceń należy zakończyć poleceniem *Select All* , *Group* .



Rys 2.6 A_4 (czwarty krok iteracji) struktury IFS 01 (piramida Sierpińskiego)

Przykład 2.6

Zbiorem początkowym A_0 jest czworościan foremny o boku a .

Przekształcenie afiniczne $W(A)$ jest złożeniem przekształceń :

$$W(A) = W_1(A) \cup W_2(A) \cup W_3(A) \cup W_4(A)$$

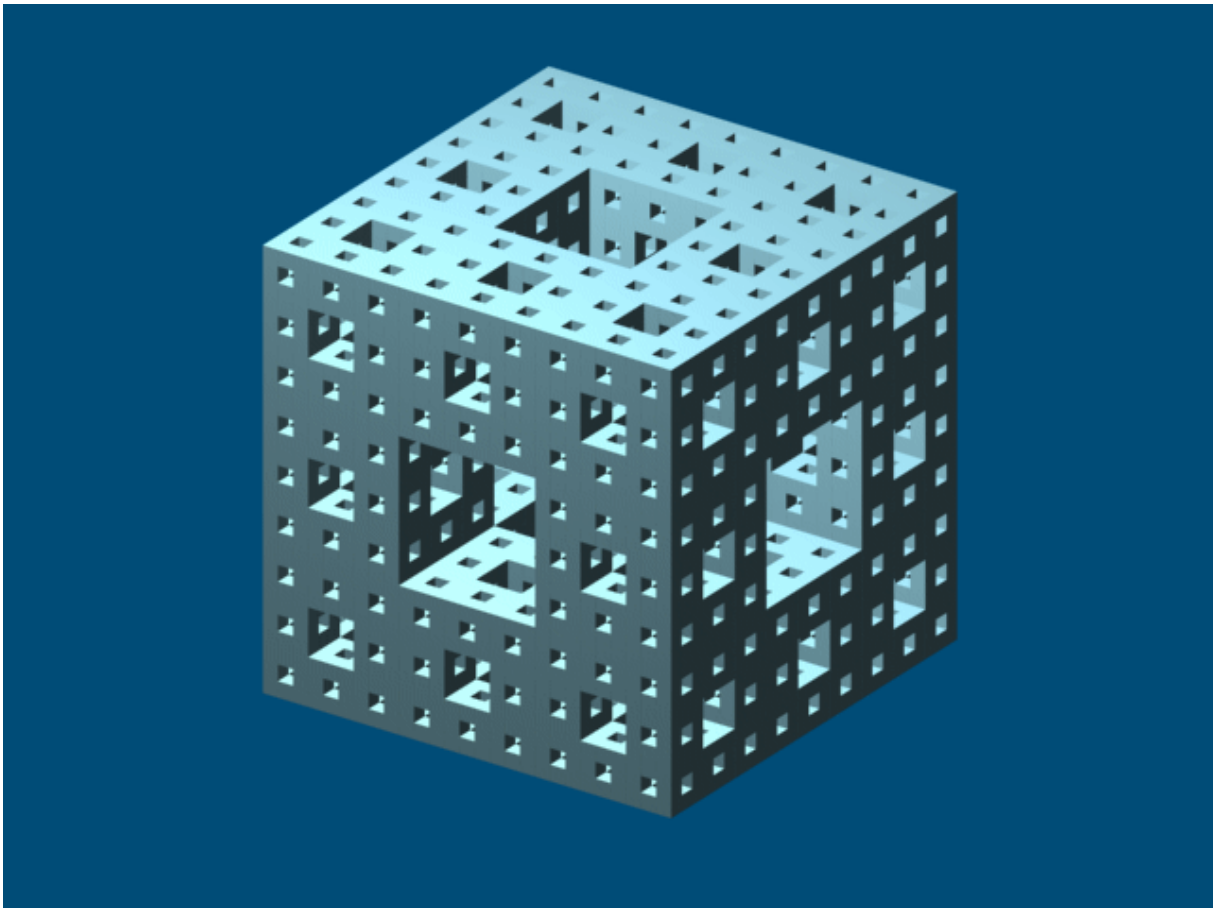
Parametry przekształceń W_1, W_2, W_3, W_4 określa tabela 2.5

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/2	1/2	1/2	0	0	$a\sqrt{6}/6$	0	0	0
W_2	1/2	1/2	1/2	0	$a\sqrt{3}/6$	0	0	0	0
W_3	1/2	1/2	1/2	$a/4$	$-a\sqrt{3}/12$	0	0	0	0
W_4	1/2	1/2	1/2	$-a/4$	$-a\sqrt{3}/12$	0	0	0	0

Tabela 2.5

Iterowanie przekształcenia $W(A) = W_1(A) \cup W_2(A) \cup W_3(A) \cup W_4(A)$ prowadzi do powstania piramidy Sierpińskiego.

Widzimy zatem, że w wyniku stosowania systemu IFS można uzyskać strukturę generowaną tradycyjnie za pomocą procedury opisowej.



Rys2.7 B_3 (trzeci krok iteracji) struktury IFS 02 (gąbka Menger) $d = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,7268$

Przykład 2.7

Zbiorem początkowym B_0 jest sześcian o boku a .

Przekształcenie afiniczne $W(B)$ jest złożeniem przekształceń :

$$W(B) = W_1(B) \cup W_2(B) \cup W_3(B) \cup W_4(B) \cup W_5(B) \cup W_6(B) \cup W_7(B) \cup W_8(B) \cup \\ \cup W_9(B) \cup W_{10}(B) \cup W_{11}(B) \cup W_{12}(B) \cup W_{13}(B) \cup W_{14}(B) \cup W_{15}(B) \cup W_{16}(B) \cup \\ \cup W_{17}(B) \cup W_{18}(B) \cup W_{19}(B) \cup W_{20}(B)$$

Parametry przekształceń $W_1(B) \cup W_2(B) \cup \dots \cup W_{20}(B)$ określa tabela 2.6

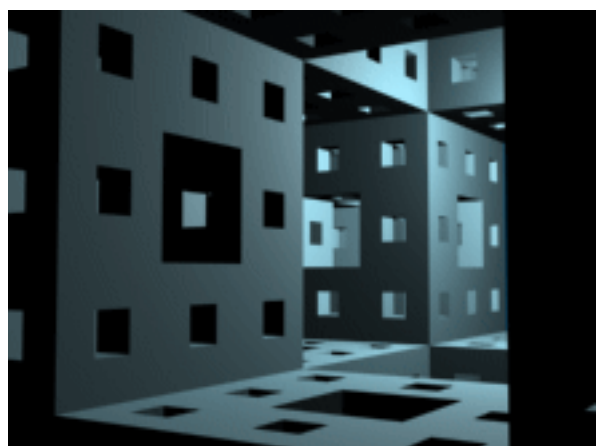
Iterowanie przekształcenia prowadzi do powstania gąbki Menger. Ze względu na dużą liczbę przekształceń i ograniczenia sprzętowe (pamięć operacyjna) możliwe było uzyskanie jedynie trzeciego kroku iteracji.

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/3	1/3	1/3	a/3	0	a/3	0	0	0
W_2	1/3	1/3	1/3	a/3	a/3	a/3	0	0	0
W_3	1/3	1/3	1/3	0	a/3	a/3	0	0	0
W_4	1/3	1/3	1/3	-a/3	a/3	a/3	0	0	0
W_5	1/3	1/3	1/3	-a/3	0	a/3	0	0	0
W_6	1/3	1/3	1/3	-a/3	-a/3	a/3	0	0	0
W_7	1/3	1/3	1/3	0	-a/3	a/3	0	0	0
W_8	1/3	1/3	1/3	a/3	-a/3	a/3	0	0	0
W_9	1/3	1/3	1/3	a/3	a/3	0	0	0	0
W_{10}	1/3	1/3	1/3	-a/3	a/3	0	0	0	0
W_{11}	1/3	1/3	1/3	-a/3	-a/3	0	0	0	0
W_{12}	1/3	1/3	1/3	a/3	-a/3	0	0	0	0
W_{13}	1/3	1/3	1/3	a/3	0	-a/3	0	0	0
W_{14}	1/3	1/3	1/3	a/3	a/3	-a/3	0	0	0
W_{15}	1/3	1/3	1/3	0	a/3	-a/3	0	0	0
W_{16}	1/3	1/3	1/3	-a/3	a/3	-a/3	0	0	0
W_{17}	1/3	1/3	1/3	-a/3	0	-a/3	0	0	0
W_{18}	1/3	1/3	1/3	-a/3	-a/3	-a/3	0	0	0
W_{19}	1/3	1/3	1/3	0	-a/3	-a/3	0	0	0
W_{20}	1/3	1/3	1/3	a/3	-a/3	-a/3	0	0	0

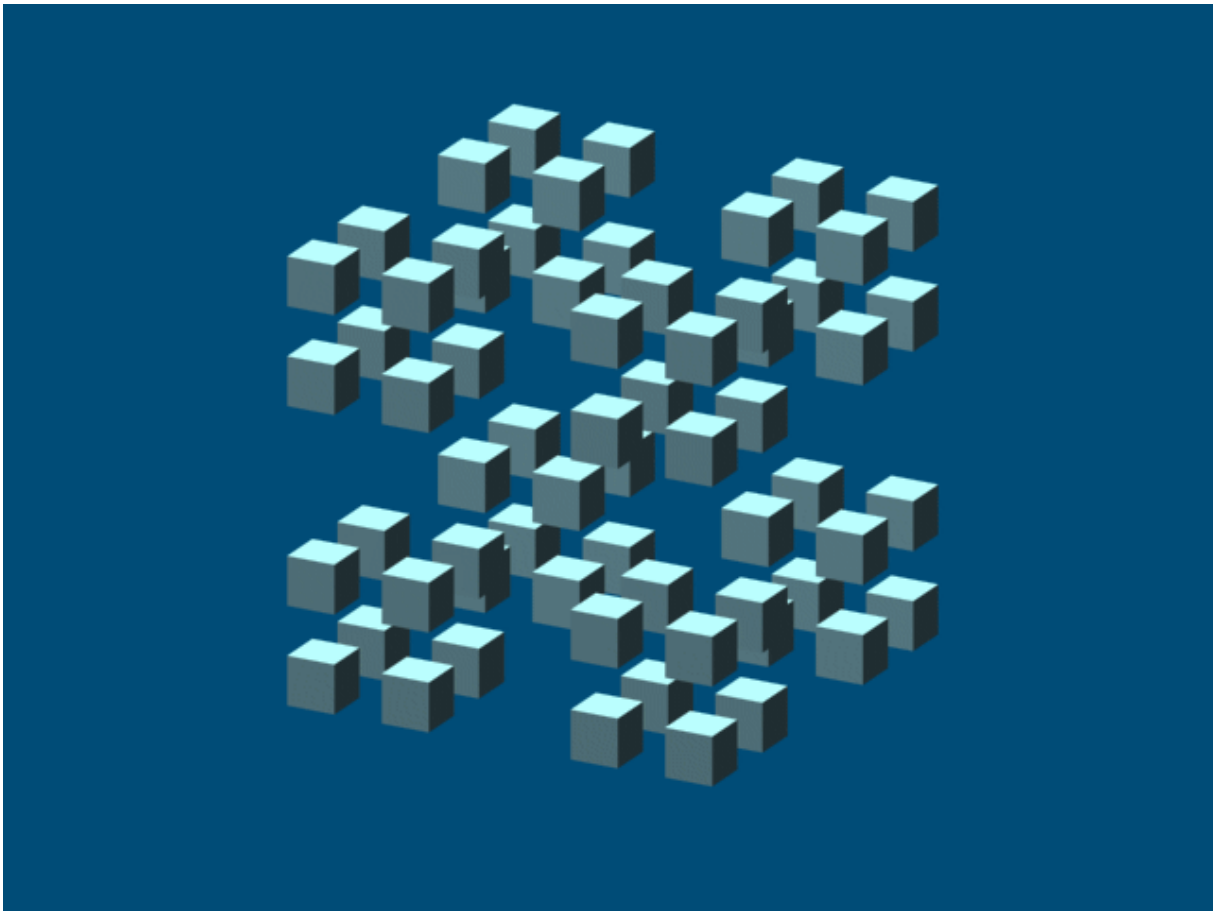
Tabela 2.6 Parametry przekształceń dla IFS 02 (gąbka Mengera)



Rys 2.8 Sciana gąbki Mengera jako dywan Sierpińskiego



Rys 2.9 Perspektywa wnętrza gąbki Mengera



Rys 2.10 B_3 (drugi krok iteracji)struktury IFS 03 , $d = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,892789$

Przykład 2.8

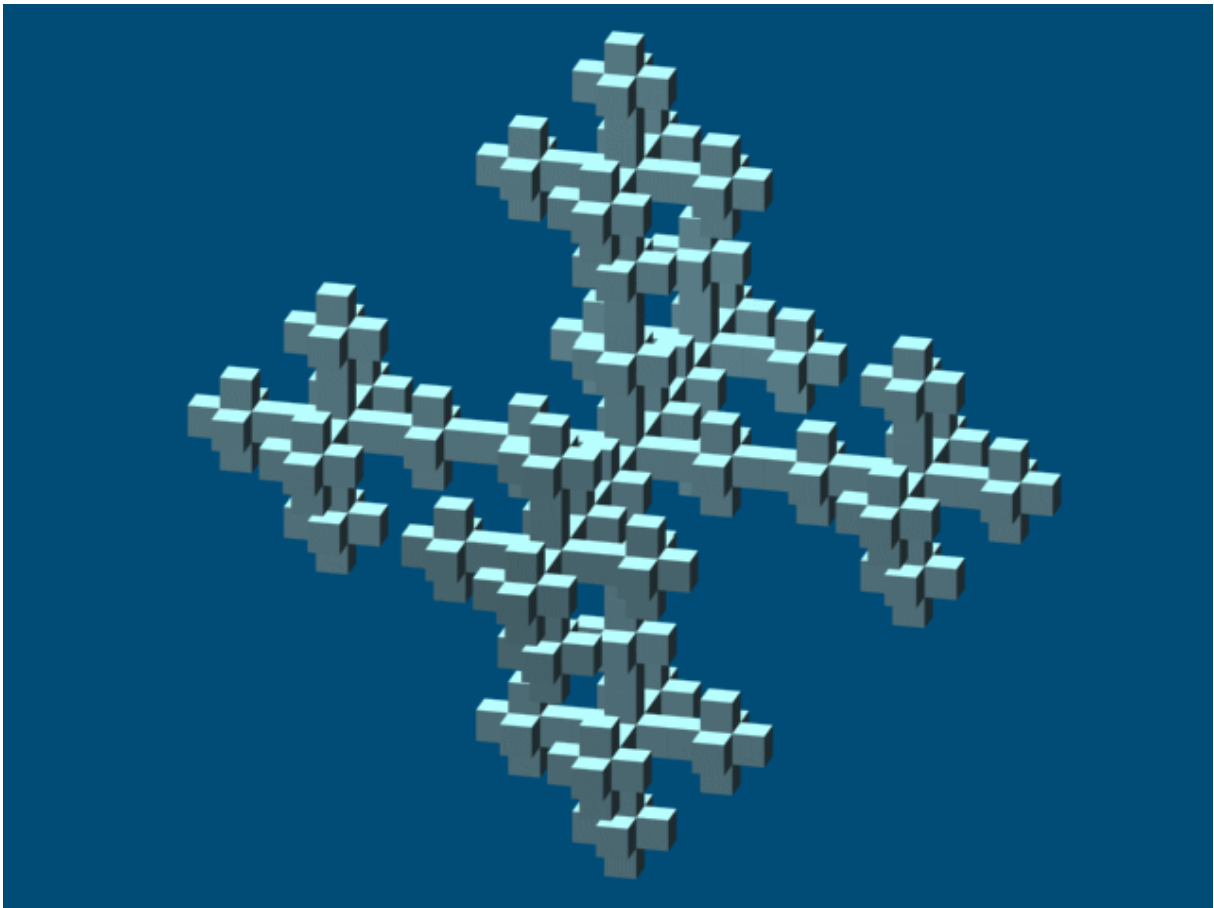
Zbiorem początkowym B_0 jest sześcian o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(B) = W_1(B) \cup W_2(B) \cup W_3(B) \cup W_4(B) \cup W_5(B) \cup W_6(B) \cup W_7(B) \cup W_8(B)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/3	1/3	1/3	a/3	-a/3	a/3	0	0	0
W_2	1/3	1/3	1/3	a/3	a/3	a/3	0	0	0
W_3	1/3	1/3	1/3	-a/3	a/3	a/3	0	0	0
W_4	1/3	1/3	1/3	-a/3	-a/3	a/3	0	0	0
W_5	1/3	1/3	1/3	a/3	-a/3	-a/3	0	0	0
W_6	1/3	1/3	1/3	a/3	a/3	-a/3	0	0	0
W_7	1/3	1/3	1/3	-a/3	a/3	-a/3	0	0	0
W_8	1/3	1/3	1/3	-a/3	-a/3	-a/3	0	0	0

Tabela 2.7 Parametry przekształceń dla IFS 03



Rys 2.11 B_3 (trzeci krok iteracji) struktury IFS 04, $d = \frac{\log 7}{\log 3} = 1,771243$

Przykład 2.9

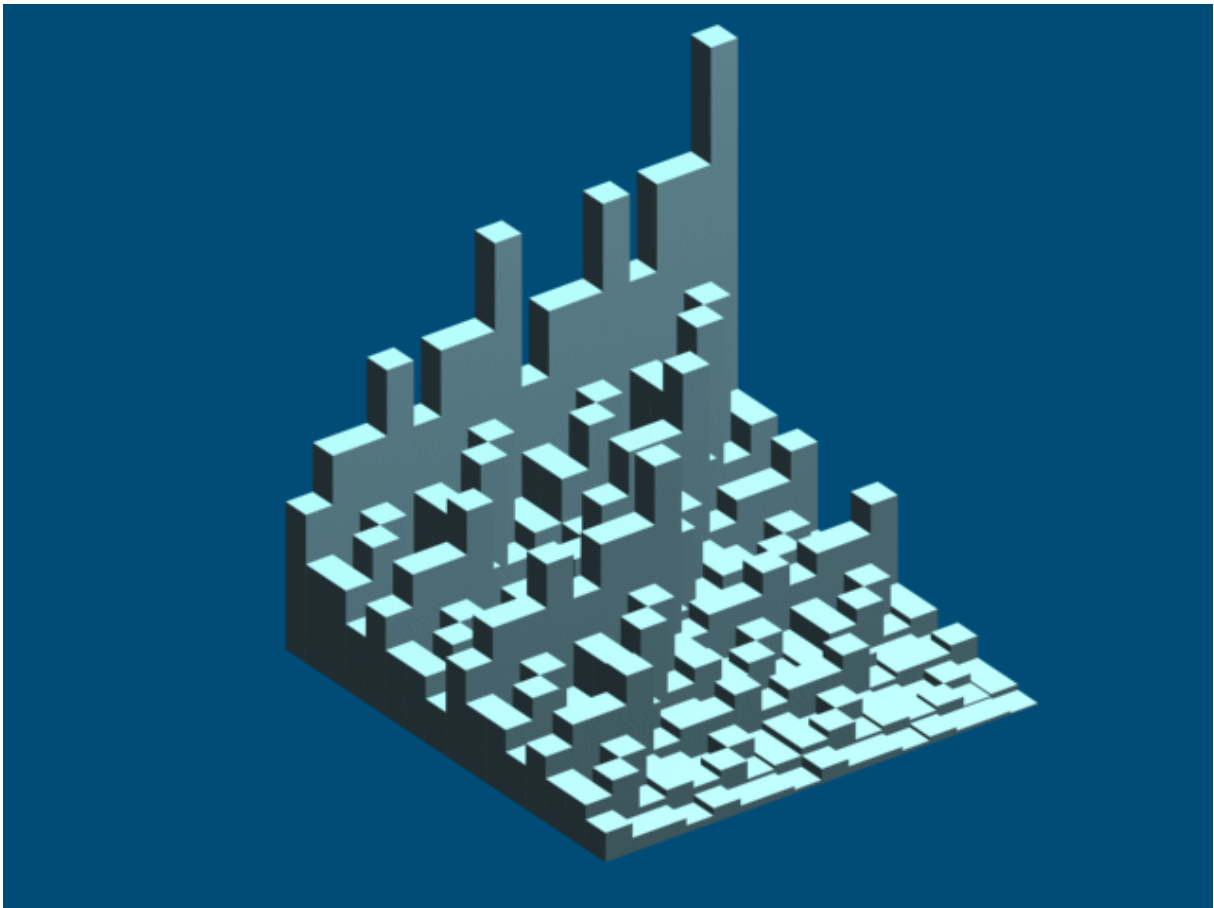
Zbiorem początkowym B_0 jest sześcian o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń:

$$W(B) = W_1(B) \cup W_2(B) \cup W_3(B) \cup W_4(B) \cup W_5(B) \cup W_6(B) \cup W_7(B)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z
W_1	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0
W_2	1/3	1/3	1/3	0	0	a/3	0	0	0
W_3	1/3	1/3	1/3	a/3	0	0	0	0	0
W_4	1/3	1/3	1/3	0	a/3	0	0	0	0
W_5	1/3	1/3	1/3	-a/3	0	0	0	0	0
W_6	1/3	1/3	1/3	0	-a/3	-a/3	0	0	0
W_7	1/3	1/3	1/3	0	0	-a/3	0	0	0

Tabela 2.8 Parametry przekształceń dla IFS 04



Rys 2.12 A_4 (czwarty krok iteracji) struktury IFS 05

Przykład 2.10

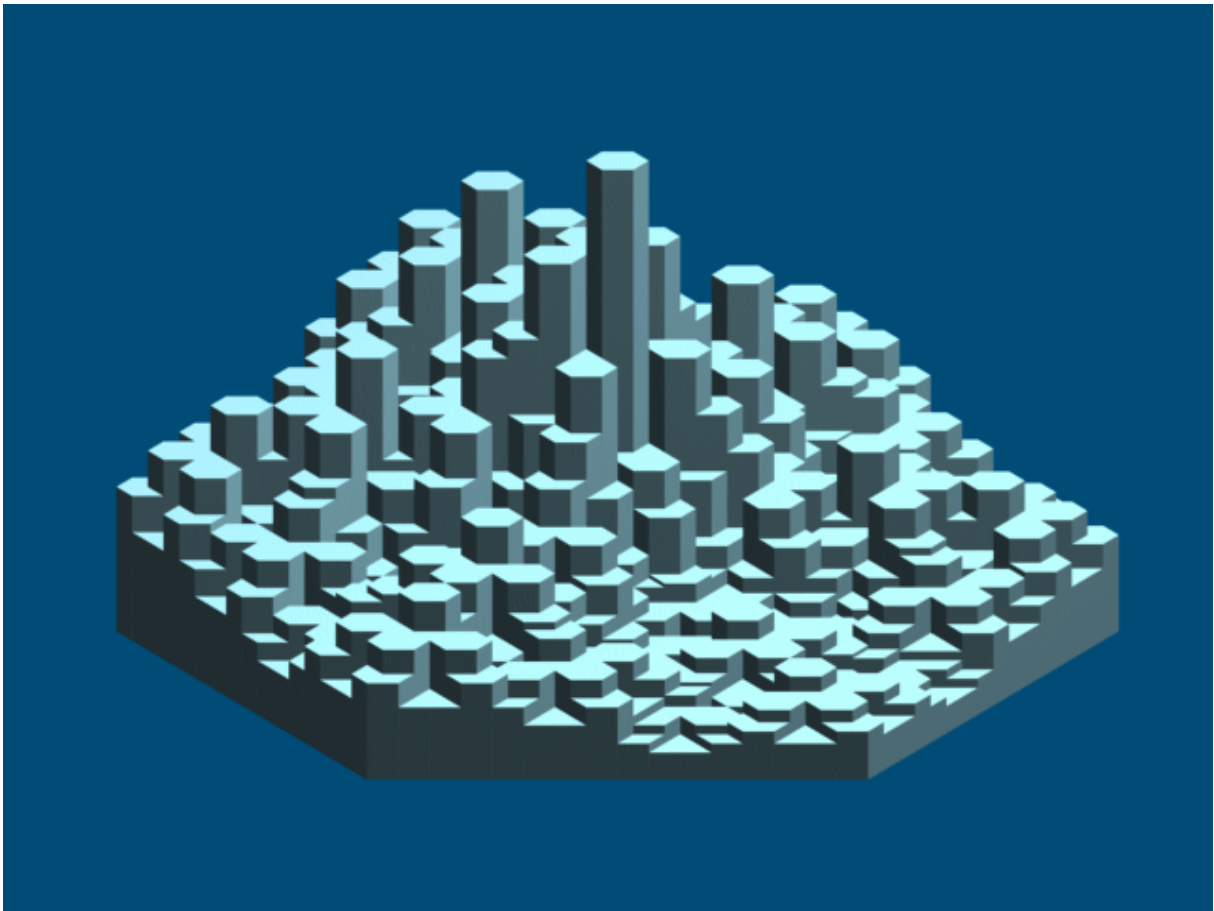
Zbiorem początkowym B_0 jest sześcian o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(B) = W_1(B) \cup W_2(B) \cup W_3(B) \cup W_4(B)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/2	1/2	1	-a/2	-a/2	0	0	0	0
W_2	1/2	1/2	3/4	-a/2	a/2	0	0	0	0
W_3	1/2	1/2	1/2	a/2	a/2	0	0	0	0
W_4	1/2	1/2	1/4	a/2	-a/2	0	0	0	0

Tabela 2.9 Parametry przekształceń dla IFS 05



Rys 2.13 C_3 (trzeci krok iteracji) struktury IFS 06

Przykład 2.11

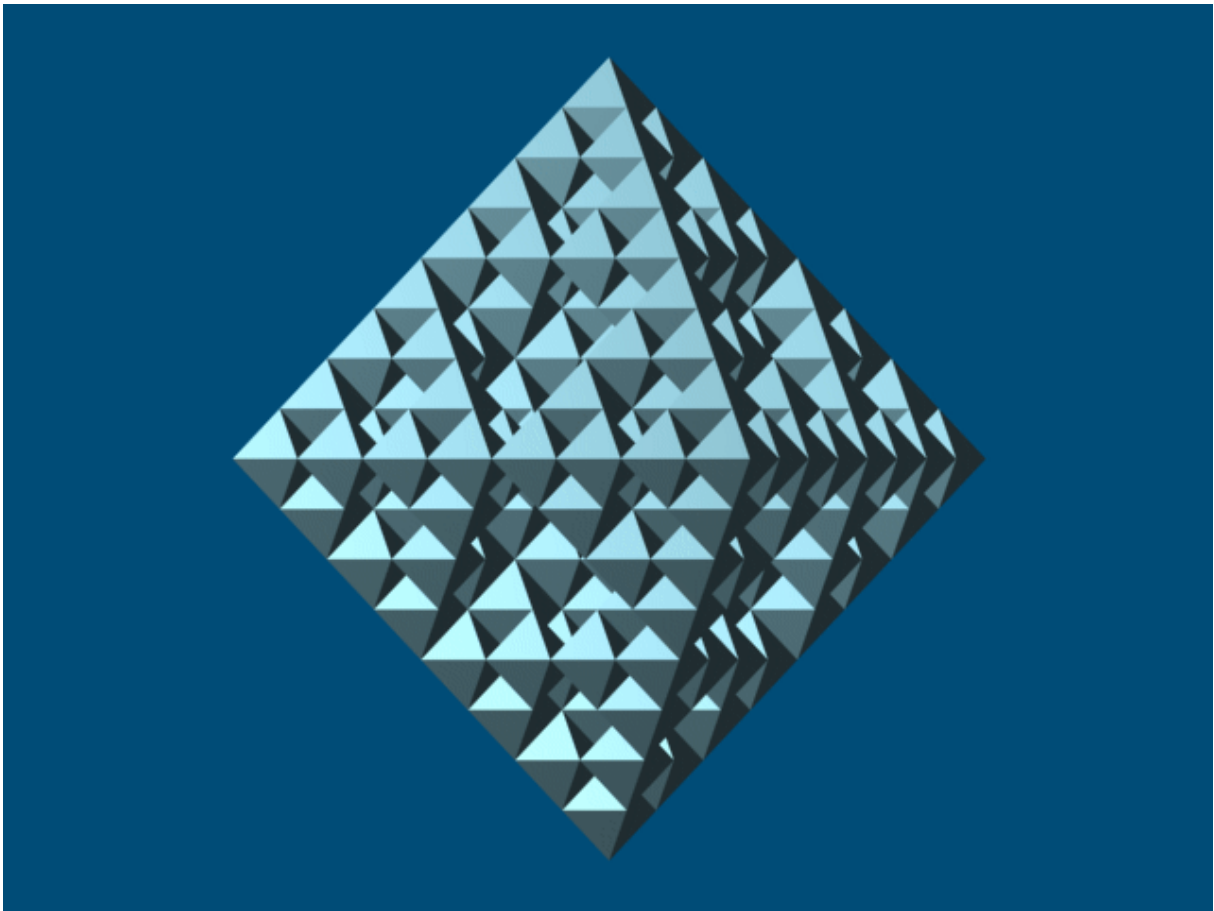
Zbiorem początkowym C_0 jest graniastosłup prawidłowy o podstawie sześciokąta foremnego o boku a . Wysokość graniastosłupa $h = a$.

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(C) = W_1(C) \cup W_2(C) \cup W_3(C) \cup W_4(C) \cup W_5(C) \cup W_6(C) \cup W_7(C)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	0,5	0,5	1	0	0	0	0	0	0
W_2	0,5	0,5	0,8	-a/2	0	0	0	0	0
W_3	0,5	0,5	0,6	-a/2	0	0	0	0	60°
W_4	0,5	0,5	0,6	-a/2	0	0	0	0	-60°
W_5	0,5	0,5	0,4	-a/2	0	0	0	0	120°
W_6	0,5	0,5	0,4	-a/2	0	0	0	0	-120°
W_7	0,5	0,5	0,2	-a/2	0	0	0	0	180°

Tabela 2.10 Parametry przekształceń dla IFS 06



Rys 2.14 D_3 (trzeci krok iteracji) struktury IFS 07 , $d = \frac{\log 10}{\log 2} = 3,321928$

Przykład 2.12

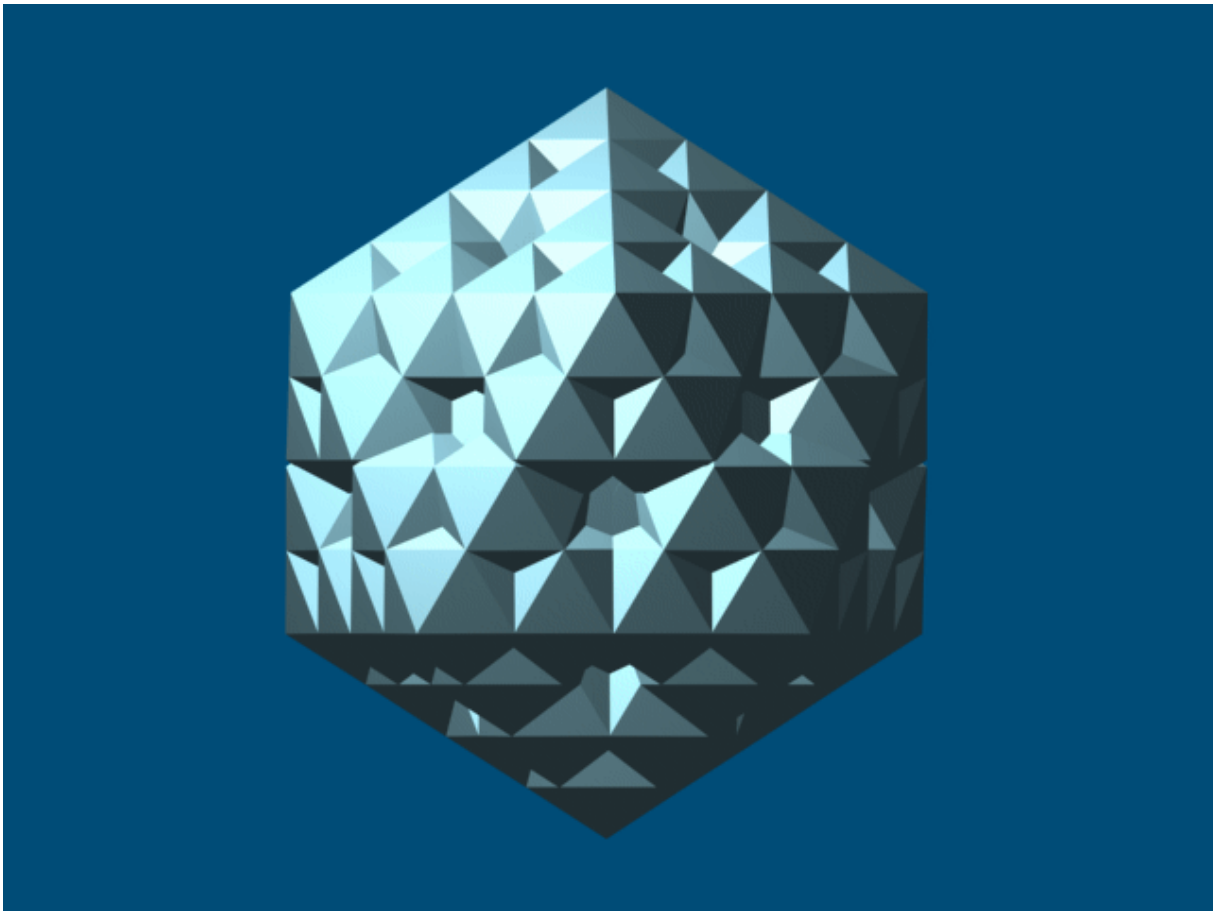
Zbiorem początkowym D_0 jest ośmiościan foremny o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(D) = W_1(D) \cup W_2(D) \cup W_3(D) \cup W_4(D) \cup W_5(D) \cup W_6(D)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z
W_1	1/2	1/2	1/2	0	0	$-a\sqrt{2}/2$	0	0	0
W_2	1/2	1/2	1/2	0	0	$a\sqrt{2}/2$	0	0	0
W_3	1/2	1/2	1/2	$-a\sqrt{2}/2$	0	0	0	0	0
W_4	1/2	1/2	1/2	$a\sqrt{2}/2$	0	0	0	0	0
W_5	1/2	1/2	1/2	0	$-a\sqrt{2}/2$	0	0	0	0
W_6	1/2	1/2	1/2	0	$a\sqrt{2}/2$	0	0	0	0

Tabela 2.11 Parametry przekształceń dla IFS 07



Rys 2.15 E_3 (trzeci krok iteracji) struktury IFS 08 , $d = \frac{\log 12}{\log 2} = 3,584962$

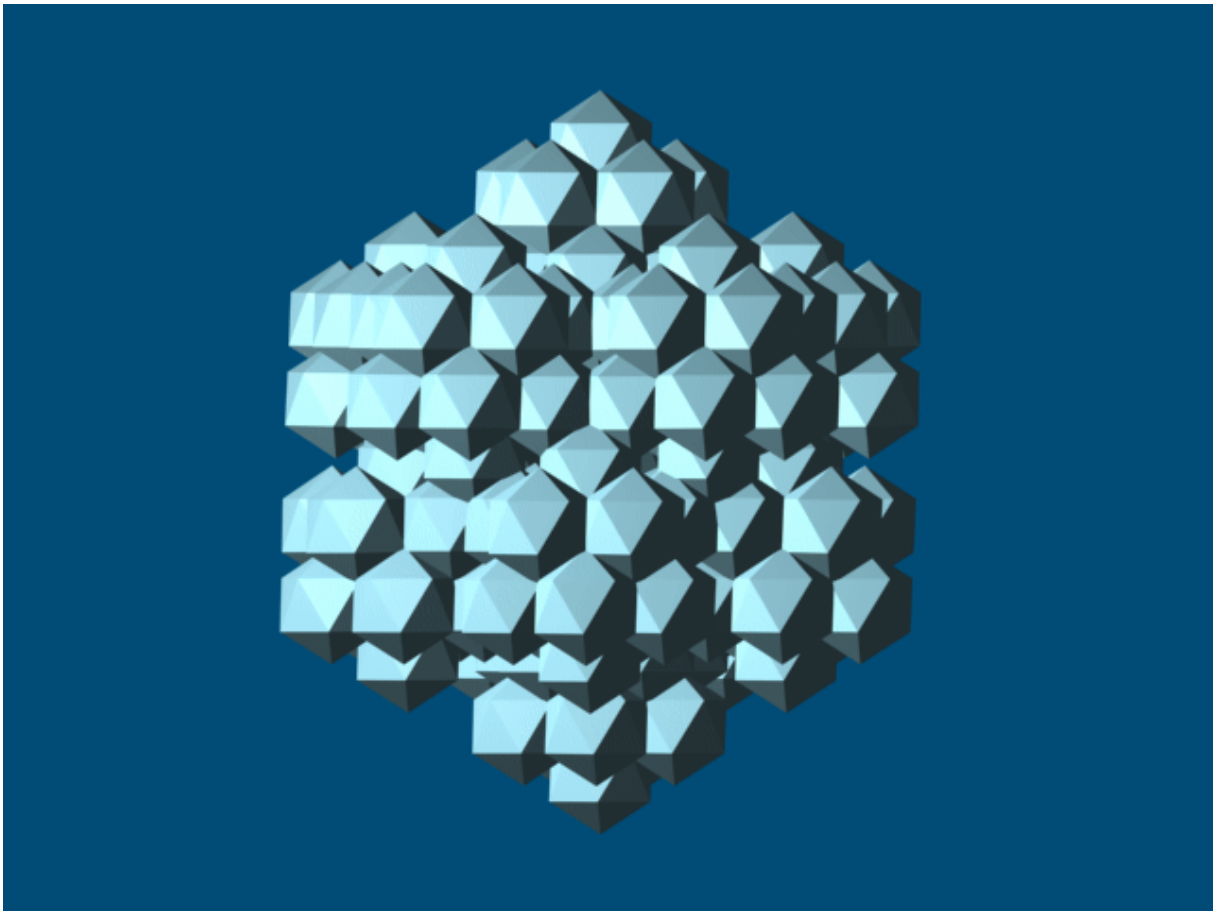
Zbiorem początkowym E_0 jest dwudziestokąt foremny o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(E) = W_1(E) \cup W_2(E) \cup W_3(E) \cup W_4(E) \cup W_5(E) \cup W_6(E) \cup W_7(E) \cup W_8(E) \cup \\ \cup W_9(E) \cup W_{10}(E) \cup W_{11}(E) \cup W_{12}(E)$$

Parametry przekształceń określa tabela 2.13

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/2	1/2	1/2	0	0	0,475a	0	0	0
W_2	1/2	1/2	1/2	0	0	-0,475a	0	0	0
W_3	1/2	1/2	1/2	0,412a	0	0,206a	0	0	0
W_4	1/2	1/2	1/2	0,412a	0	0,206a	0	0	72
W_5	1/2	1/2	1/2	0,412a	0	0,206a	0	0	144
W_6	1/2	1/2	1/2	0,412a	0	0,206a	0	0	-72
W_7	1/2	1/2	1/2	0,412a	0	0,206a	0	0	-144
W_8	1/2	1/2	1/2	-0,412a	0	-0,206a	0	0	0
W_9	1/2	1/2	1/2	-0,412a	0	-0,206a	0	0	72
W_{10}	1/2	1/2	1/2	-0,412a	0	-0,206a	0	0	144
W_{11}	1/2	1/2	1/2	-0,412a	0	-0,206a	0	0	-72
W_{12}	1/2	1/2	1/2	-0,412a	0	-0,206a	0	0	-144



Rys 2.16 E_3 (trzeci krok iteracji) struktury IFS 09 , $d = \frac{\log 12}{\log 2,5} = 2,711919$

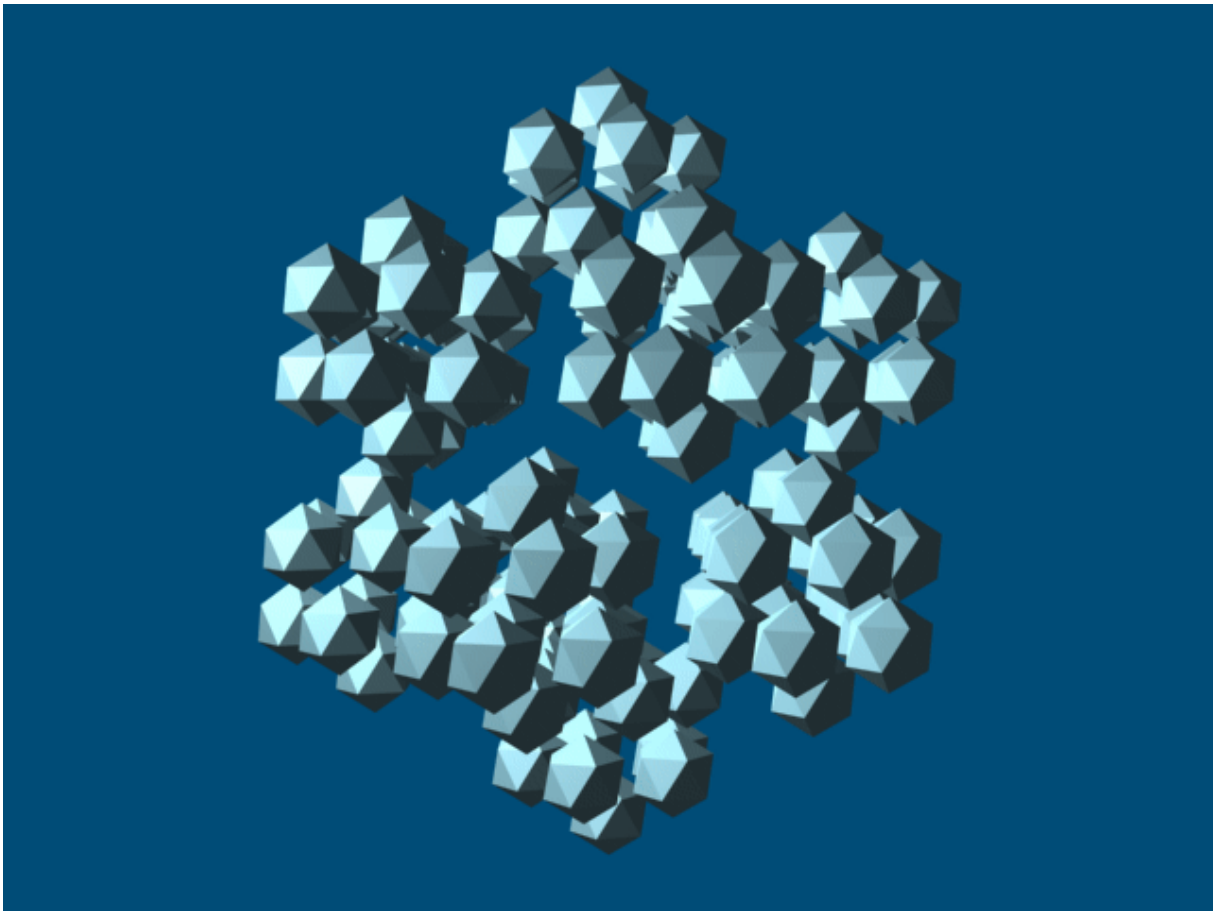
Zbiorem początkowym E_0 jest dwudziestościan foremny o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(E) = W_1(E) \cup W_2(E) \cup W_3(E) \cup W_4(E) \cup W_5(E) \cup W_6(E) \cup W_7(E) \cup W_8(E) \cup \\ \cup W_9(E) \cup W_{10}(E) \cup W_{11}(E) \cup W_{12}(E)$$

Parametry przekształceń określa tabela 2.13

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	0,4	0,4	0,4	0	0	0,571a	0	0	0
W_2	0,4	0,4	0,4	0	0	-0,571a	0	0	0
W_3	0,4	0,4	0,4	0,494a	0	0,247a	0	0	0
W_4	0,4	0,4	0,4	0,494a	0	0,247a	0	0	72
W_5	0,4	0,4	0,4	0,494a	0	0,247a	0	0	144
W_6	0,4	0,4	0,4	0,494a	0	0,247a	0	0	-72
W_7	0,4	0,4	0,4	0,494a	0	0,247a	0	0	-144
W_8	0,4	0,4	0,4	-0,494a	0	-0,247a	0	0	0
W_9	0,4	0,4	0,4	-0,494a	0	-0,247a	0	0	72
W_{10}	0,4	0,4	0,4	-0,494a	0	-0,247a	0	0	144
W_{11}	0,4	0,4	0,4	-0,494a	0	-0,247a	0	0	-72
W_{12}	0,4	0,4	0,4	-0,494a	0	-0,247a	0	0	-144



Rys 2.17 E_2 (drugi krok iteracji) struktury IFS 10 , $d = \frac{\log 12}{\log 3} = 2,261859$

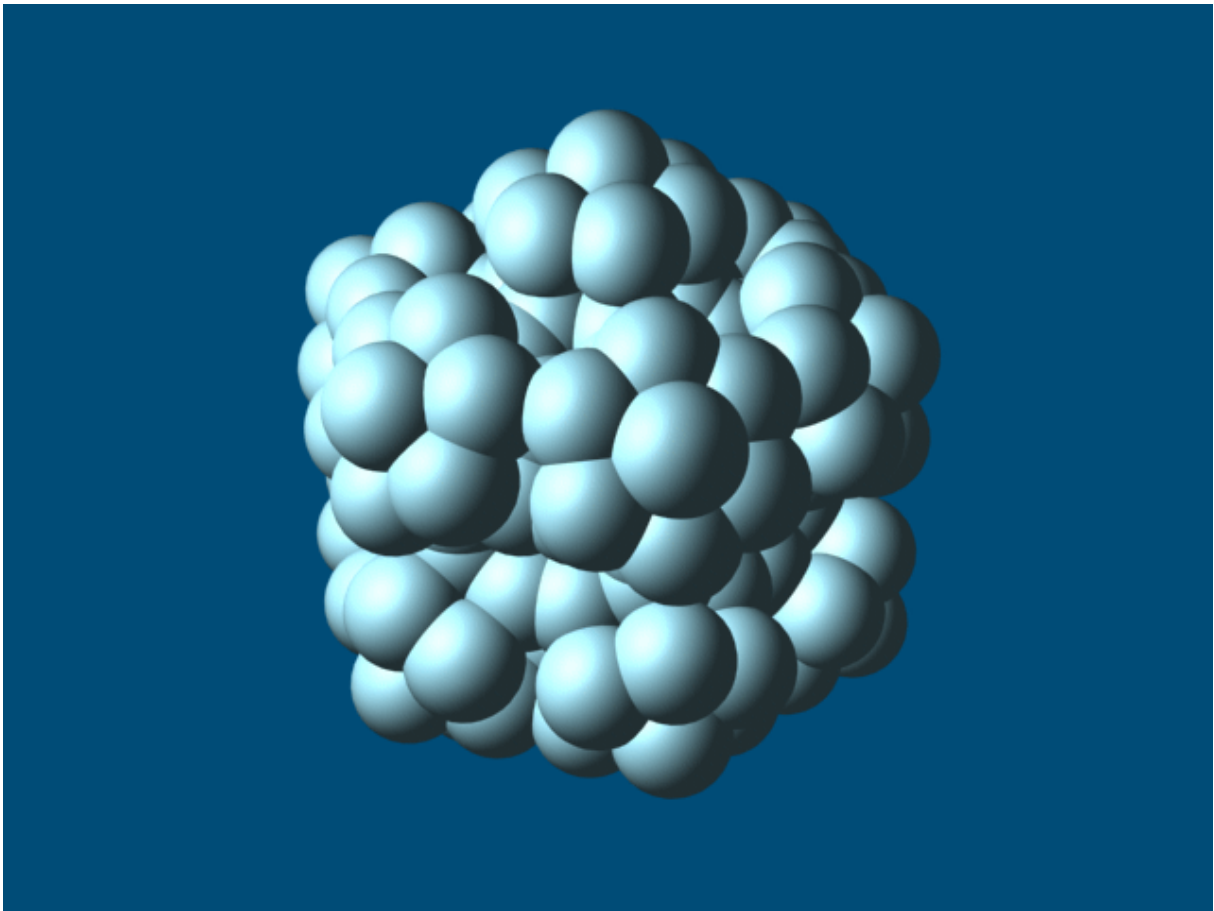
Zbiorem początkowym E_0 jest dwudziestokąt foremny o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(E) = W_1(E) \cup W_2(E) \cup W_3(E) \cup W_4(E) \cup W_5(E) \cup W_6(E) \cup W_7(E) \cup W_8(E) \cup \\ \cup W_9(E) \cup W_{10}(E) \cup W_{11}(E) \cup W_{12}(E)$$

Parametry przekształceń określa tabela 2.14

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	0,4	0,4	0,4	0	0	0,627a	0	0	0
W_2	0,4	0,4	0,4	0	0	-0,627a	0	0	0
W_3	0,4	0,4	0,4	0,544a	0	0,272a	0	0	0
W_4	0,4	0,4	0,4	0,544a	0	0,272a	0	0	72
W_5	0,4	0,4	0,4	0,544a	0	0,272a	0	0	144
W_6	0,4	0,4	0,4	0,544a	0	0,272a	0	0	-72
W_7	0,4	0,4	0,4	0,544a	0	0,272a	0	0	-144
W_8	0,4	0,4	0,4	-0,544a	0	-0,272a	0	0	0
W_9	0,4	0,4	0,4	-0,544a	0	-0,272a	0	0	72
W_{10}	0,4	0,4	0,4	-0,544a	0	-0,272a	0	0	144
W_{11}	0,4	0,4	0,4	-0,544a	0	-0,272a	0	0	-72
W_{12}	0,4	0,4	0,4	-0,544a	0	-0,272a	0	0	-144



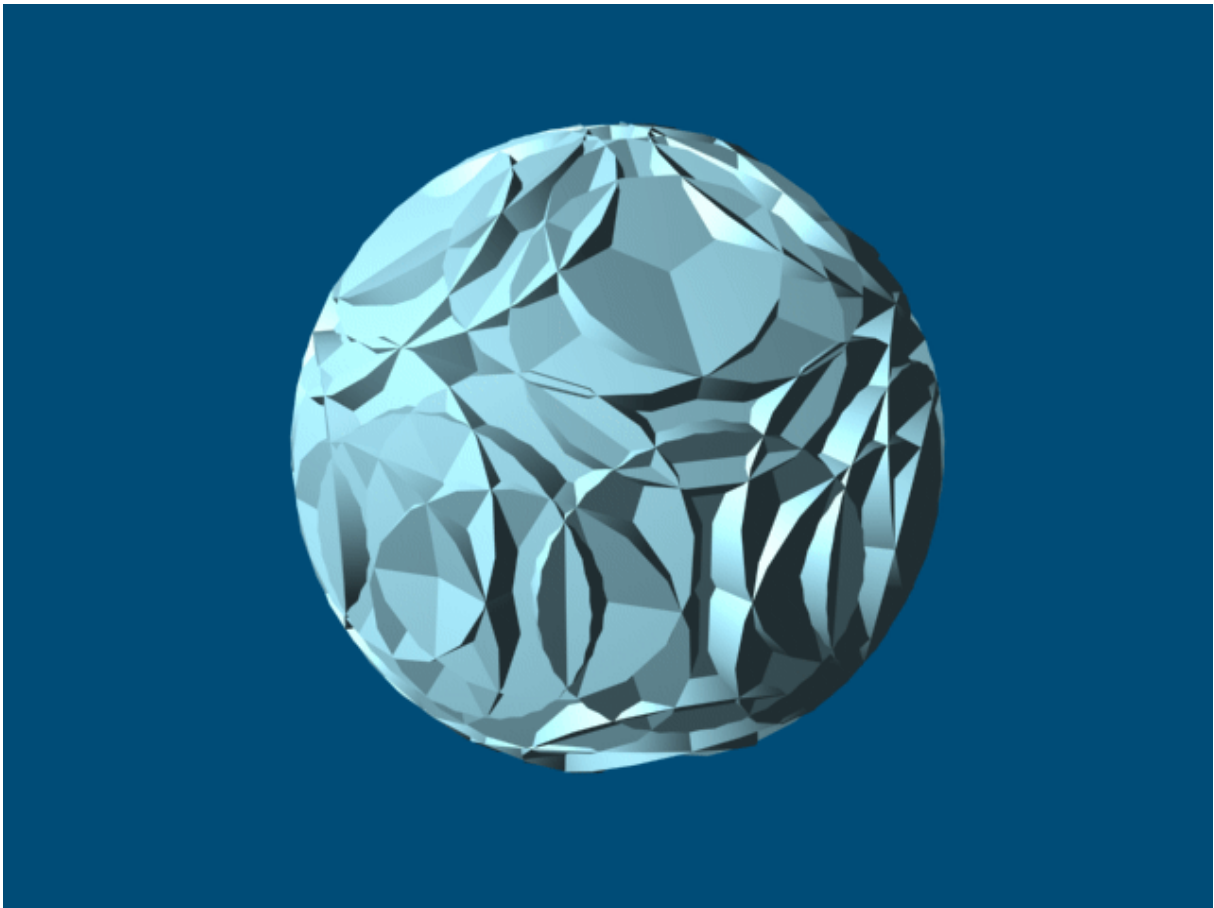
Rys 2.18 F_2 (drugi krok iteracji) struktury IFS 11, $d = \frac{\log 14}{\log 2,5} = 2,880152$

Zbiorem początkowym jest sfera o promieniu r .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń:

$$W(F) = W_1(F) \cup W_2(F) \cup W_3(F) \cup \dots \cup W_{12}(F)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	0	0
W_2	0,4	0,4	0,4	0	0	-0,6r	0	0	0
W_3	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	60	0
W_4	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	120	0
W_5	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	-60	0
W_6	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	-120	0
W_7	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	60	60
W_8	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	120	60
W_9	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	-60	60
W_{10}	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	-120	60
W_{11}	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	60	-60
W_{12}	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	120	-60
W_{13}	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	-60	-60
W_{14}	0,4	0,4	0,4	0	0	0,6r	0	-120	-60



Rys 2.19 G_3 (trzeci krok iteracji) struktury IFS 12

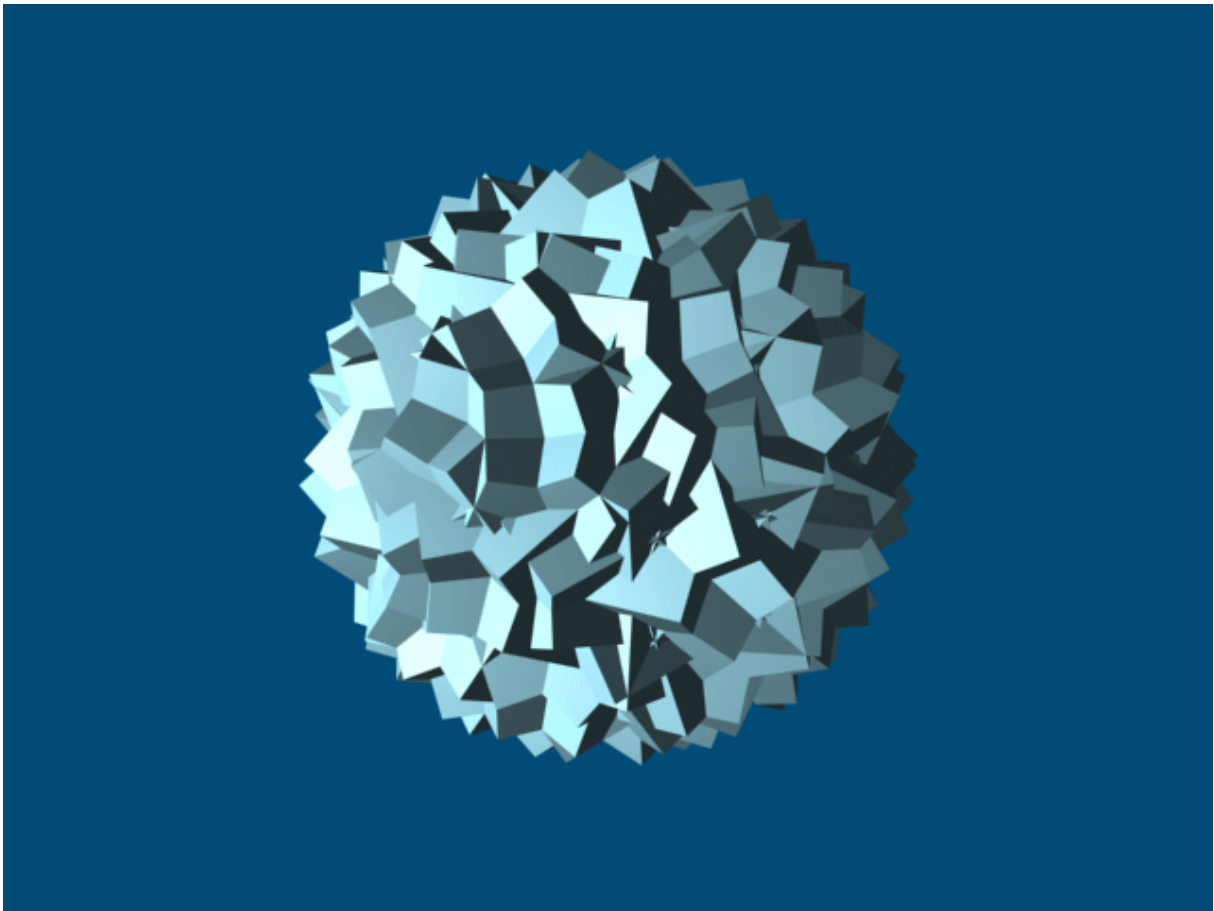
Przykład 2.17

Zbiorem początkowym G_0 jest walec o promieniu podstawy r i wysokości $2r$
 Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(G) = W_1(G) \cup W_2(G) \cup W_3(G) \cup W_4(G)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1	1	1	0	0	0	-45°	0	0
W_2	1	1	1	0	0	0	45°	0	0
W_3	1	1	1	0	0	0	0	-45°	0
W_4	1	1	1	0	0	0	0	45°	0

Tabela 2.16 Parametry przekształceń dla IFS 12



Rys 2.20 B_4 (czwarty krok iteracji) struktury IFS 13

Przykład 2.18

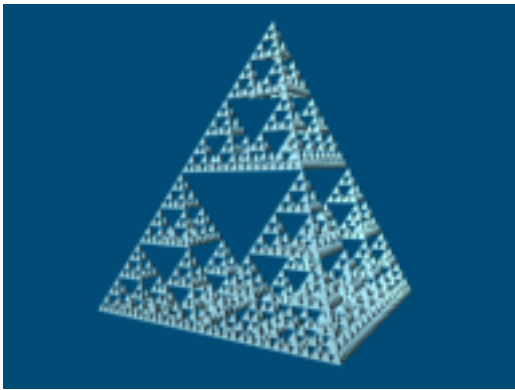
Zbiorem początkowym jest sześcian o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

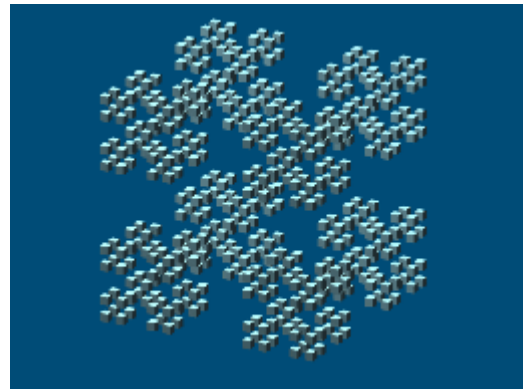
$$W(B) = W_1(B) \cup W_2(B) \cup W_3(B)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z
W_1	1	1	1	0	0	0	45°	0	0
W_2	1	1	1	0	0	0	0	45°	0
W_3	1	1	1	0	0	0	0	0	45°

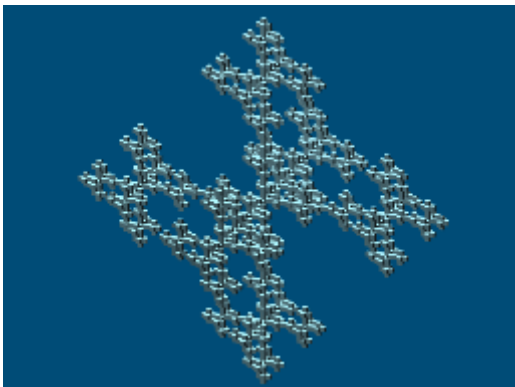
Tabela 2.17 Parametry przekształceń dla IFS 13



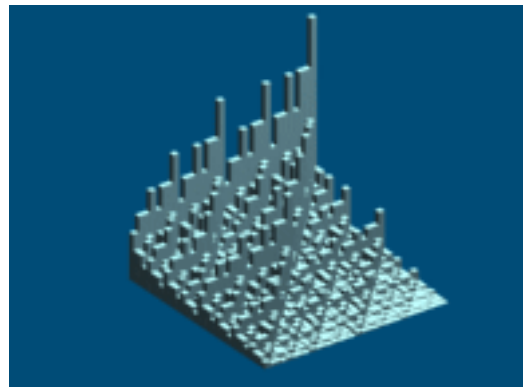
A₄ IFS 01



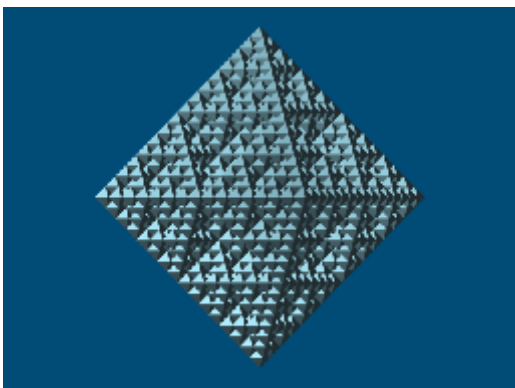
B₃ IFS 03



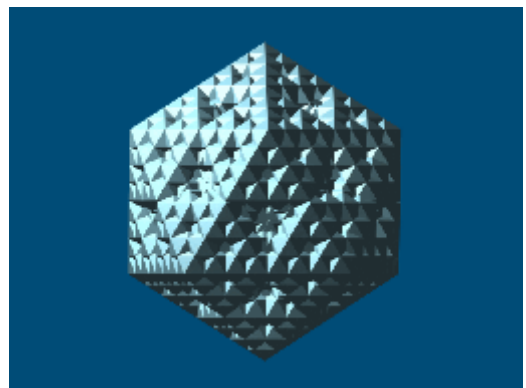
B₄ IFS 04



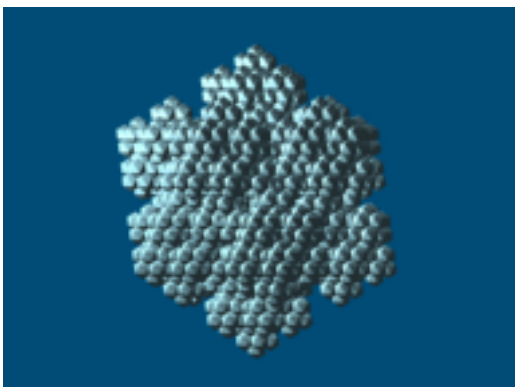
B₅ IFS 05



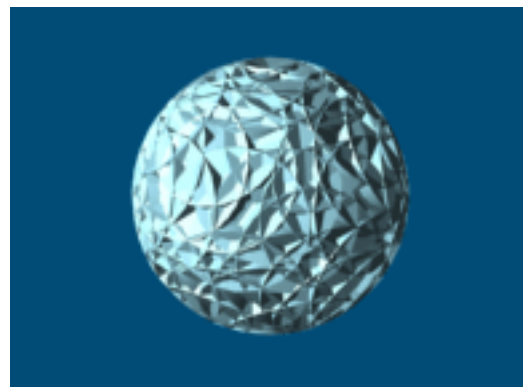
D₄ IFS 07



E₄ IFS 08



E₄ IFS 09



G₄ IFS 12

Rys 2.21 Wybrane przykłady wyższych stopni iteracji struktur IFS

Prezentowane przykłady struktur IFS są fraktalami w myśl definicji 1.1 i niezależnie od stopnia iteracji można je określić następującymi cechami :

- działanie KWR gwarantuje zależność rekurencyjną sąsiednich wyrazów zbioru
- wymiar pojemnościowy za wyjątkiem IFS 01 jest liczbą ułamkową
- cecha samopodobieństwa jest wbudowana w proces konstrukcji zbioru wynikający z zastosowania systemu IFS

W zależności od wartości współczynników skalowania s_x , s_y , s_z uzyskuje się zbiory niespójne jak IFS 03 czy IFS 10 lub spójne jak pozostałe przykłady .

Przy większej liczbie kroków iteracji $n > 4$ uzyskuje się duży stopień fragmentacji zbioru. Należnie od powyższego uzyskanie wyższego stopnia iteracji jest utrudnione ze względu na ograniczenia sprzętowe (rozmiar pamięci operacyjnej) oraz przyjęty sposób generowania obiektów .

Za korzystne w procesie kształtowania formy architektonicznej przyjęto zbiory spójne o niedużym stopniu fragmentacji i tylko takie zostały wybrane do prezentacji .

Przy zastosowaniu przekształceń zwiężających (dla współczynników s_x , s_y , $s_z < 1$ i t_x , t_y , t_z nie wykraczających poza wymiaru zbioru początkowego) objętość $V \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, co uznano za cechę niekorzystną w procesie kształtowania formy architektonicznej .

Ze względu na powyższe wnioski proponuje się nieznaczną modyfikację systemu IFS . Proponowany system IFS+ polega na sumowaniu wszystkich wyrazów ciągu A_n czyli wszystkich kroków iteracji .

$$\bigcup_{k=0}^n A_k = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Modyfikacja ta nie zmienia właściwości definicji 1. 1 gdyż w dalszym ciągu :

- zachowana jest zależność kolejnego wyrazu ciągu od wyrazu poprzedniego

$$A_n = A_{n-1} \cup A_n$$

- wymiar pojemnościowy pozostaje liczbą ułamkową co zostanie okazane na prezentowanych przykładach
- cecha samopodobieństwa wpisana jest w proces konstrukcji zbioru opierający się w dalszym ciągu na działaniu KWR i polega na powtórzeniu w różnych skalach zbioru początkowego co jest najbliższe pojęciu idei samopodobieństwa w ujęciu klasycznym

Pozytywną cechą IFS+ jest fakt , że przy $n \rightarrow \infty$ objętość zbioru V nie dąży do zera.

Ma to szczególne znaczenie w przypadku traktowania fraktali jako źródła inspiracji w procesie kształtowania formy architektonicznej .

Prezentowane struktury fraktalne IFS+ zostały wygenerowane przy pomocy programu komputerowego Autodesk VIZ R4 . W opisach przykładów zastosowano następujące oznaczenia

- IFS+ – typ systemu
- 01 , 02 , ... - liczba porządkowa
- W (...) - przekształcenie afiniczne
- (...) - literami oznaczono zbiory początkowe przypisując kolejne litery alfabetu poszczególnym obiektom

Podobnie jak w objaśnieniach do tradycyjnej metody IFS w zapisie przekształceń pominięto indeksy dolne kolejnych wyrazów ciągu .

Procedura tworzenia fraktali w systemie IFS za pomocą programu Autodesk VIZ R4 zawiera następujące kroki

Inicjator

- z bocznego menu poleceń wybieramy menu *Create* (utwórz)
- wybieramy ikonę *Geometry* (tworzenie brył)
- wybieramy grupę brył *Standard Primitives* lub *Extend Primitives*
- określamy rodzaj bryły *Object Type* oraz parametry i położenie za pomocą *Keyboard Entry*

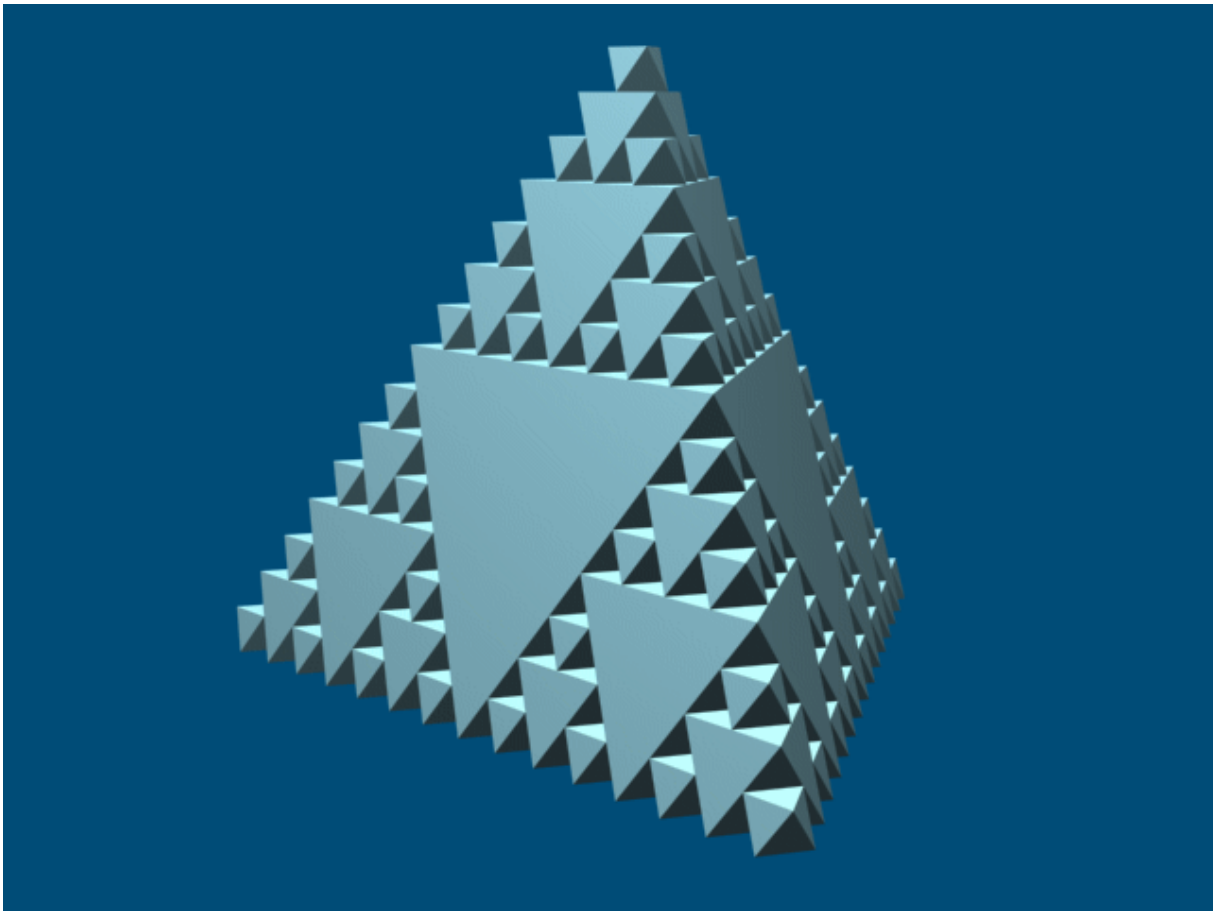
Generator

- tworzymy kopię inicjatora za pomocą polecenia *Clone* z menu *Edit*
- poddajemy kopię przekształceniu afinicznemu W_1 , które może być złożeniem przekształceń dokonywanych za pomocą klawiszy *Scale* (przeskaluj) , *Move* (przesun) , *Rotate* (obróć)
- tworzymy kopię inicjatora za pomocą polecenia *Clone* z menu *Edit*
- poddajemy kopię przekształceniu afinicznemu W_2 , które może być złożeniem przekształceń *Scale* , *Move* , *Rotate* , itd. aż do wykonania wszystkich przekształceń W_n definiujących przekształcenie afiniczne
- scalamy wszystkie kopie łącznie z obiektem inicjatora używając polecenia *Select All* z menu *Edit*
- grupujemy wszystkie obiekty używając polecenia *Group*

KWR

Każdy krok iteracji przeprowadzamy zgodnie z procedurą tworzenia generatora stosując dokładnie te same parametry oraz kolejność przekształceń dla obiektu utworzonego w poprzednim kroku iteracji np. *Group 01*. Wykonanie wszystkich przekształceń należy zakończyć poleceniem *Select All* , *Group* .

Opisana procedura różni się od procedury generowania obiektów IFS przedstawionej na stronie 29 niniejszej pracy , sumowaniem wszystkich kroków iteracji , łącznie z obiektem inicjatora (nie usuwamy obiektu inicjatora) .



Rys2.22 $D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_4$ (suma zbioru początkowego oraz trzech pierwszych kroków iteracji) struktury IFS+01

Przykład 2.19

Zbiorem początkowym D_0 jest ośmiościan foremny o boku a w położeniu szczególnym tzn spoczywający jedną ze ścian na rzutni poziomej . Warto zauważyć , że ośmiościan jest bryłą , którą usuwa się z wnętrza czworościanu foremnego w trakcie generowania piramidy Sierpińskiego według metody opisowej .

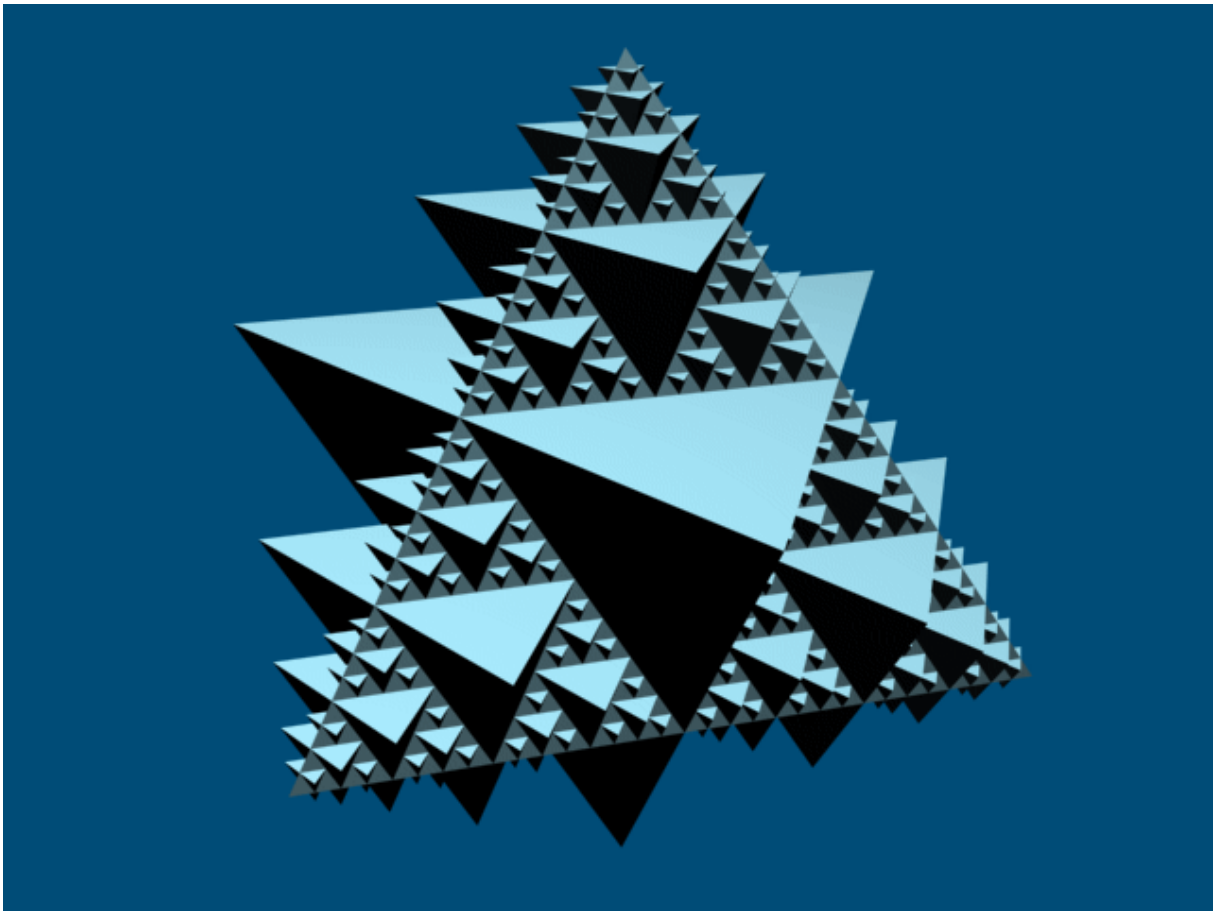
Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(D) = W_1(D) \cup W_2(D) \cup W_3(D) \cup W_4(D)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/2	1/2	1/2	0	0	$a\sqrt{6}/3$	0	0	0
W_2	1/2	1/2	1/2	0	$a\sqrt{3}/3$	0	0	0	0
W_3	1/2	1/2	1/2	$a/2$	$-a\sqrt{3}/6$	0	0	0	0
W_4	1/2	1/2	1/2	$-a/2$	$-a\sqrt{3}/6$	0	0	0	0

Tabela 2.18 Parametry przekształceń dla IFS+01

Prezentowana struktura jest sumą wszystkich elementów usuniętych w trakcie generowania piramidy Sierpińskiego .



Rys 2.23 $Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$ struktury IFS+02

Przykład 2.20

Kolejny przykład jest złożeniem dwóch przekształceń .

Zbiorem początkowym A_0 jest czworościan foremny o boku a .

Parametry przekształcenia $W(A)$ określa tabela 2.19

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1	1	1	0	0	$a\sqrt{6}/6$	0	180°	180°

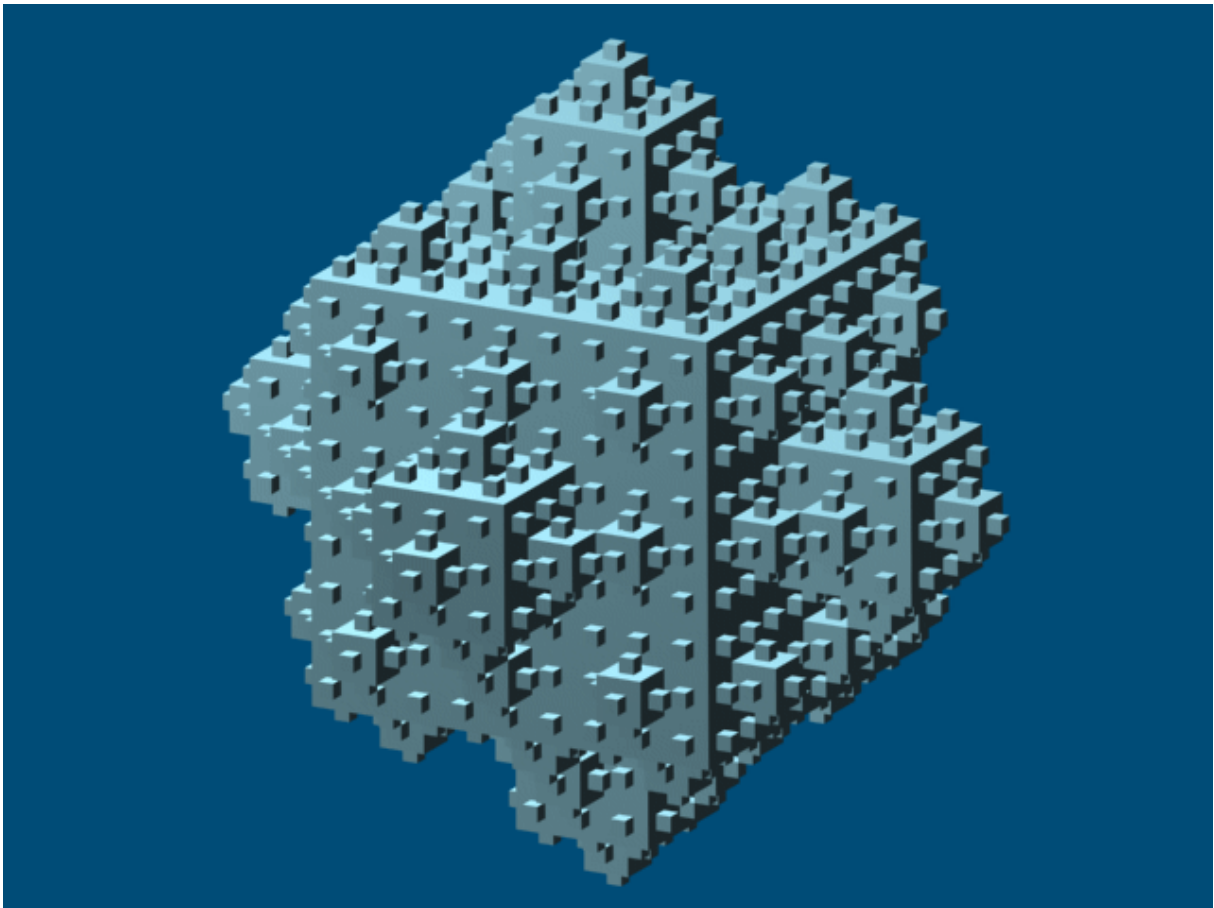
W wyniku przekształcenia uzyskujemy $W_1(A_0) = A_1$

Suma zbiorów $A_0 \cup A_1 = Z_0$ jest zbiorem początkowym przekształcenia afinicznego :

$$W(Z) = W_1(Z) \cup W_2(Z) \cup W_3(Z) \cup W_4(Z)$$

Parametry przekształceń W_1, W_2, W_3, W_4 określa tabela 2.20

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/2	1/2	1/2	0	0	$a\sqrt{6}/6$	0	0	0
W_2	1/2	1/2	1/2	0	$a\sqrt{3}/6$	0	0	0	0
W_3	1/2	1/2	1/2	$a/4$	$-a\sqrt{3}/12$	0	0	0	0
W_4	1/2	1/2	1/2	$-a/4$	$-a\sqrt{3}/12$	0	0	0	0



Rys 2.24 $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$ struktury IFS+03

Przykład 2.21

Zbiorem początkowym B_0 jest sześcian o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$\begin{aligned}
 W(B) = & W_1(B) \cup W_2(B) \cup W_3(B) \cup W_4(B) \cup W_5(B) \cup W_6(B) \cup W_7(B) \cup W_8(B) \\
 & \cup W_9(B) \cup W_{10}(B) \cup W_{11}(B) \cup W_{12}(B) \cup W_{13}(B) \cup W_{14}(B) \cup W_{15}(B) \cup W_{16}(B) \\
 & \cup W_{17}(B) \cup W_{18}(B) \cup W_{19}(B) \cup W_{20}(B) \cup W_{21}(B) \cup W_{22}(B) \cup W_{23}(B) \cup W_{24}(B) \\
 & \cup W_{25}(B) \cup W_{26}(B)
 \end{aligned}$$

Parametry przekształceń $W_1(B) \cup W_2(B) \cup \dots \cup W_{26}(B)$ określa tabela 2.21

Iterowanie przekształcenia $W(B)$ prowadzi do powstania struktury będącej pewną przestrzenną interpretacją gąbki Menger'a. W uproszczeniu można powiedzieć, że różnica polega na dodawaniu pomniejszych kopii wyrazu początkowego w miejscach, w których w gąbce następowало usuwanie elementów. Wymiar pojemnościowy struktury wynosi :

$$d = \frac{\log 33}{\log 3} = 3,182658$$

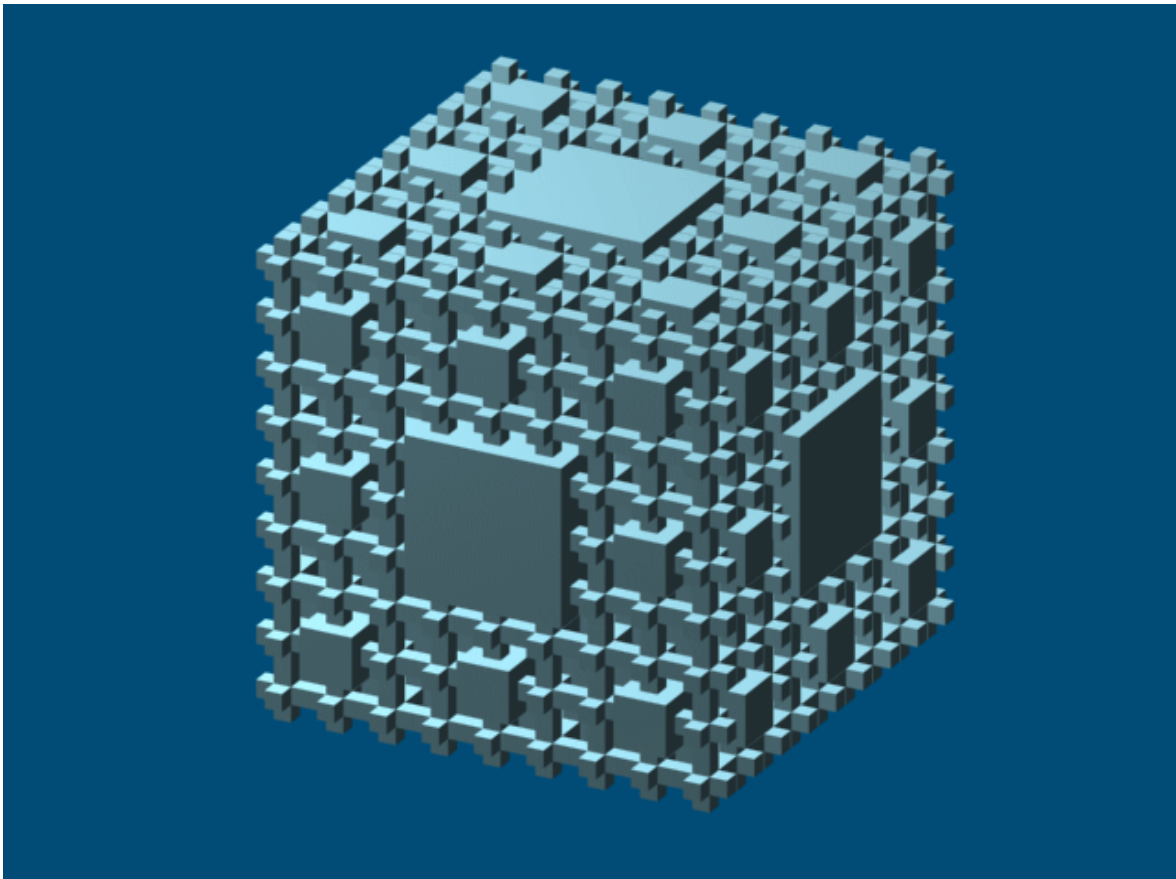
	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/3	1/3	1/3	a/3	0	a/3	0	0	0
W_2	1/3	1/3	1/3	a/3	a/3	a/3	0	0	0
W_3	1/3	1/3	1/3	0	a/3	a/3	0	0	0
W_4	1/3	1/3	1/3	-a/3	a/3	a/3	0	0	0
W_5	1/3	1/3	1/3	-a/3	0	a/3	0	0	0
W_6	1/3	1/3	1/3	-a/3	-a/3	a/3	0	0	0
W_7	1/3	1/3	1/3	0	-a/3	a/3	0	0	0
W_8	1/3	1/3	1/3	a/3	-a/3	a/3	0	0	0
W_9	1/3	1/3	1/3	a/3	a/3	0	0	0	0
W_{10}	1/3	1/3	1/3	-a/3	a/3	0	0	0	0
W_{11}	1/3	1/3	1/3	-a/3	-a/3	0	0	0	0
W_{12}	1/3	1/3	1/3	a/3	-a/3	0	0	0	0
W_{13}	1/3	1/3	1/3	a/3	0	-a/3	0	0	0
W_{14}	1/3	1/3	1/3	a/3	a/3	-a/3	0	0	0
W_{15}	1/3	1/3	1/3	0	a/3	-a/3	0	0	0
W_{16}	1/3	1/3	1/3	-a/3	a/3	-a/3	0	0	0
W_{17}	1/3	1/3	1/3	-a/3	0	-a/3	0	0	0
W_{18}	1/3	1/3	1/3	-a/3	-a/3	-a/3	0	0	0
W_{19}	1/3	1/3	1/3	0	-a/3	-a/3	0	0	0
W_{20}	1/3	1/3	1/3	a/3	-a/3	-a/3	0	0	0
W_{21}	1/3	1/3	1/3	2a/3	0	0	0	0	0
W_{22}	1/3	1/3	1/3	-2a/3	0	0	0	0	0
W_{23}	1/3	1/3	1/3	0	2a/3	0	0	0	0
W_{24}	1/3	1/3	1/3	0	-2a/3	0	0	0	0
W_{25}	1/3	1/3	1/3	0	0	2a/3	0	0	0
W_{26}	1/3	1/3	1/3	0	0	-2a/3	0	0	0

Tabela 2.21 Parametry przekształceń dla IFS+03

Struktura prezentowana na rysunku 2.24 jest sumą zbioru początkowego oraz pierwszych trzech kroków iteracji :

$$\bigcup B_n = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

Można zatem nazwać ją addytywnym wariantem gąbki Mengera .



Rys 2.25 $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ struktury IFS+04

Przykład 2.22

Kolejny przykład jest strukturą generowaną za pomocą złożenia dwóch przekształceń .
Zbiorem początkowym B_0 jest sześcian o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(B) = W_1(B) \cup W_2(B) \cup W_3(B) \cup W_4(B) \cup W_5(B) \cup W_6(B) \cup W_7(B)$$

Parametry przekształceń określa tabela 2.22

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0
W_2	1/3	1/3	1/3	0	0	a/3	0	0	0
W_3	1/3	1/3	1/3	a/3	0	0	0	0	0
W_4	1/3	1/3	1/3	0	a/3	0	0	0	0
W_5	1/3	1/3	1/3	-a/3	0	0	0	0	0
W_6	1/3	1/3	1/3	0	-a/3	-a/3	0	0	0
W_7	1/3	1/3	1/3	0	0	-a/3	0	0	0

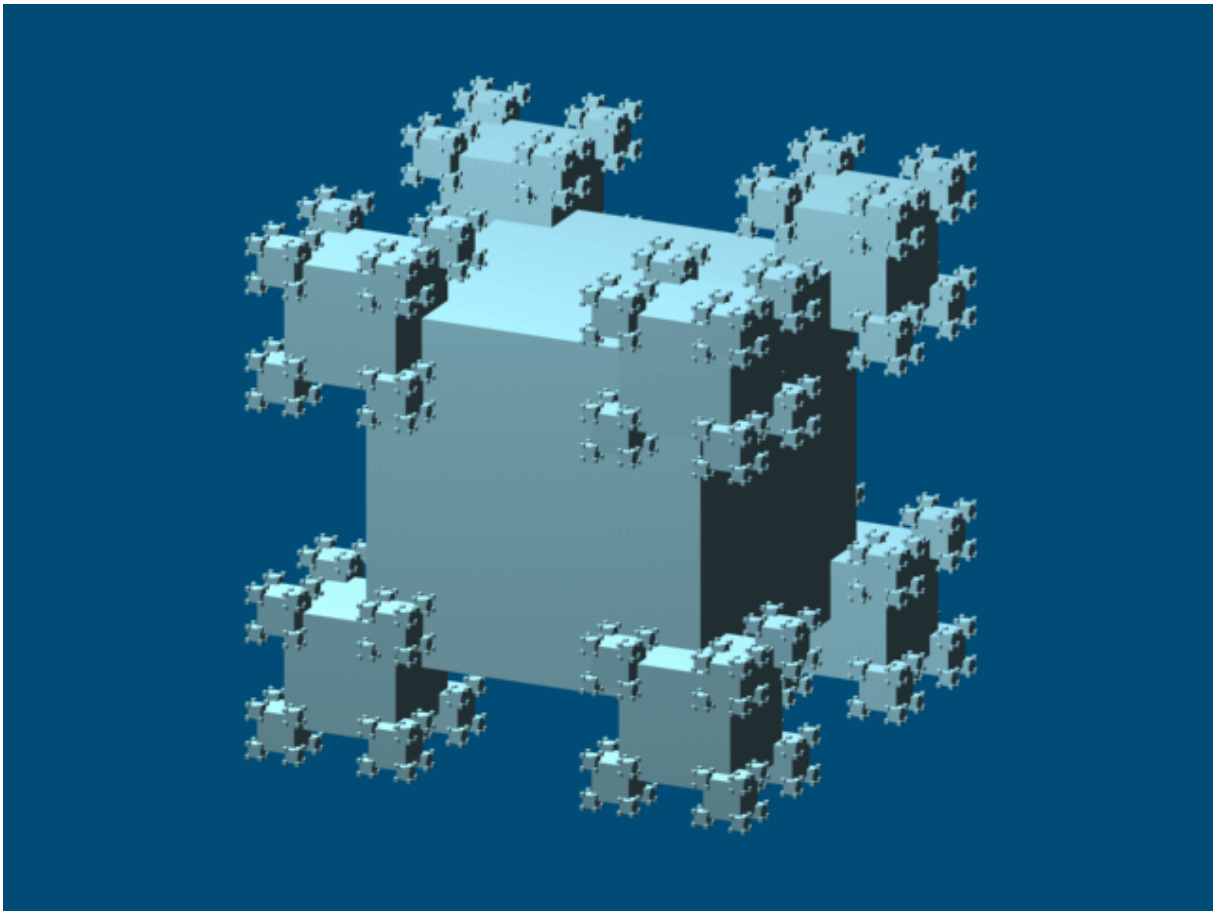
W wyniku przekształcenia $W(B_0) = B_1$ otrzymujemy zbiór , który poddajemy w następnym kroku przekształceniu :

$$W(B_1) = W_1(B_1) \cup W_2(B_1) \cup W_3(B_1) \cup \dots \cup W_{18}(B_1) \cup W_{19}(B_1) \cup W_{20}(B_1)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/3	1/3	1/3	a/3	0	a/3	0	0	0
W_2	1/3	1/3	1/3	a/3	a/3	a/3	0	0	0
W_3	1/3	1/3	1/3	0	a/3	a/3	0	0	0
W_4	1/3	1/3	1/3	-a/3	a/3	a/3	0	0	0
W_5	1/3	1/3	1/3	-a/3	0	a/3	0	0	0
W_6	1/3	1/3	1/3	-a/3	-a/3	a/3	0	0	0
W_7	1/3	1/3	1/3	0	-a/3	a/3	0	0	0
W_8	1/3	1/3	1/3	a/3	-a/3	a/3	0	0	0
W_9	1/3	1/3	1/3	a/3	a/3	0	0	0	0
W_{10}	1/3	1/3	1/3	-a/3	a/3	0	0	0	0
W_{11}	1/3	1/3	1/3	-a/3	-a/3	0	0	0	0
W_{12}	1/3	1/3	1/3	a/3	-a/3	0	0	0	0
W_{13}	1/3	1/3	1/3	a/3	0	-a/3	0	0	0
W_{14}	1/3	1/3	1/3	a/3	a/3	-a/3	0	0	0
W_{15}	1/3	1/3	1/3	0	a/3	-a/3	0	0	0
W_{16}	1/3	1/3	1/3	-a/3	a/3	-a/3	0	0	0
W_{17}	1/3	1/3	1/3	-a/3	0	-a/3	0	0	0
W_{18}	1/3	1/3	1/3	-a/3	-a/3	-a/3	0	0	0
W_{19}	1/3	1/3	1/3	0	-a/3	-a/3	0	0	0
W_{20}	1/3	1/3	1/3	a/3	-a/3	-a/3	0	0	0

Tabela 2.23 Parametry przekształceń dla IFS+04

Prezentowana na rysunku 2.25 struktura jest sumą zbiorów $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ i jednocześnie sumą wszystkich usuniętych w trakcie generowania gąbki Mengera elementów .



Rys 2.26 $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ struktury IFS+05

$$d = \frac{\log 35}{\log 3} = 3,236217$$

Przykład 2.23

Zbiorem początkowym B_0 jest sześcian o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

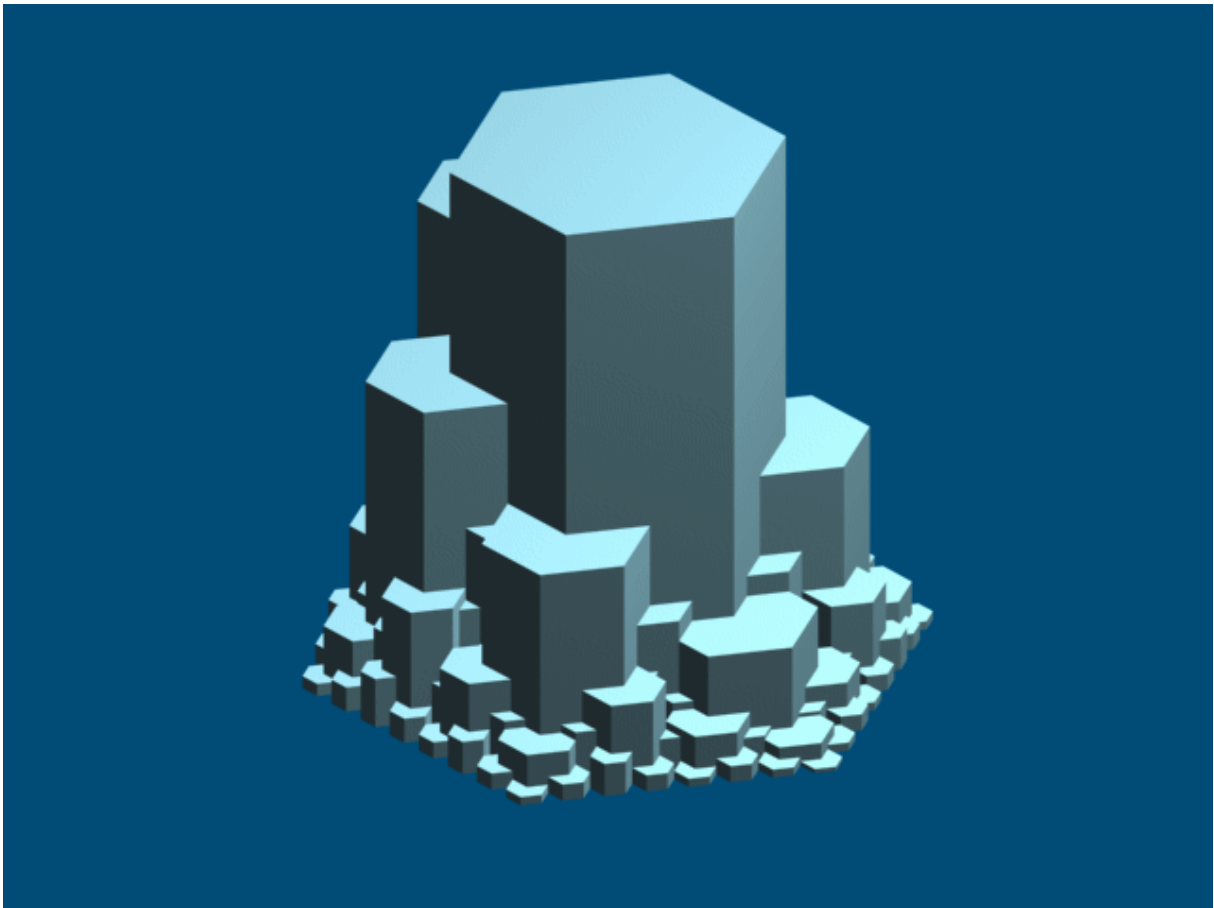
$$W(B) = W_1(B) \cup W_2(B) \cup W_3(B) \cup W_4(B) \cup W_5(B) \cup W_6(B) \cup W_7(B) \cup W_8(B)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/3	1/3	1/3	a/2	-a/2	a/2	0	0	0
W_2	1/3	1/3	1/3	a/2	a/2	a/2	0	0	0
W_3	1/3	1/3	1/3	-a/2	a/2	a/2	0	0	0
W_4	1/3	1/3	1/3	-a/2	-a/2	a/2	0	0	0
W_5	1/3	1/3	1/3	a/2	-a/2	-a/2	0	0	0
W_6	1/3	1/3	1/3	a/2	a/2	-a/2	0	0	0
W_7	1/3	1/3	1/3	-a/2	a/2	-a/2	0	0	0
W_8	1/3	1/3	1/3	-a/2	-a/2	-a/2	0	0	0

Tabela 2.24 Parametry przekształceń dla IFS+05

Prezentowana struktura jest sumą zbioru początkowego oraz czterech pierwszych

kroków iteracji
$$\bigcup B_n = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$$



Rys 2.27 $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ struktury IFS+06

Przykład 2.24

Zbiorem początkowym C_0 jest graniastosłup sześciokątny prawidłowy o krawędzi podstawy a i wysokości $h = 2a$.

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

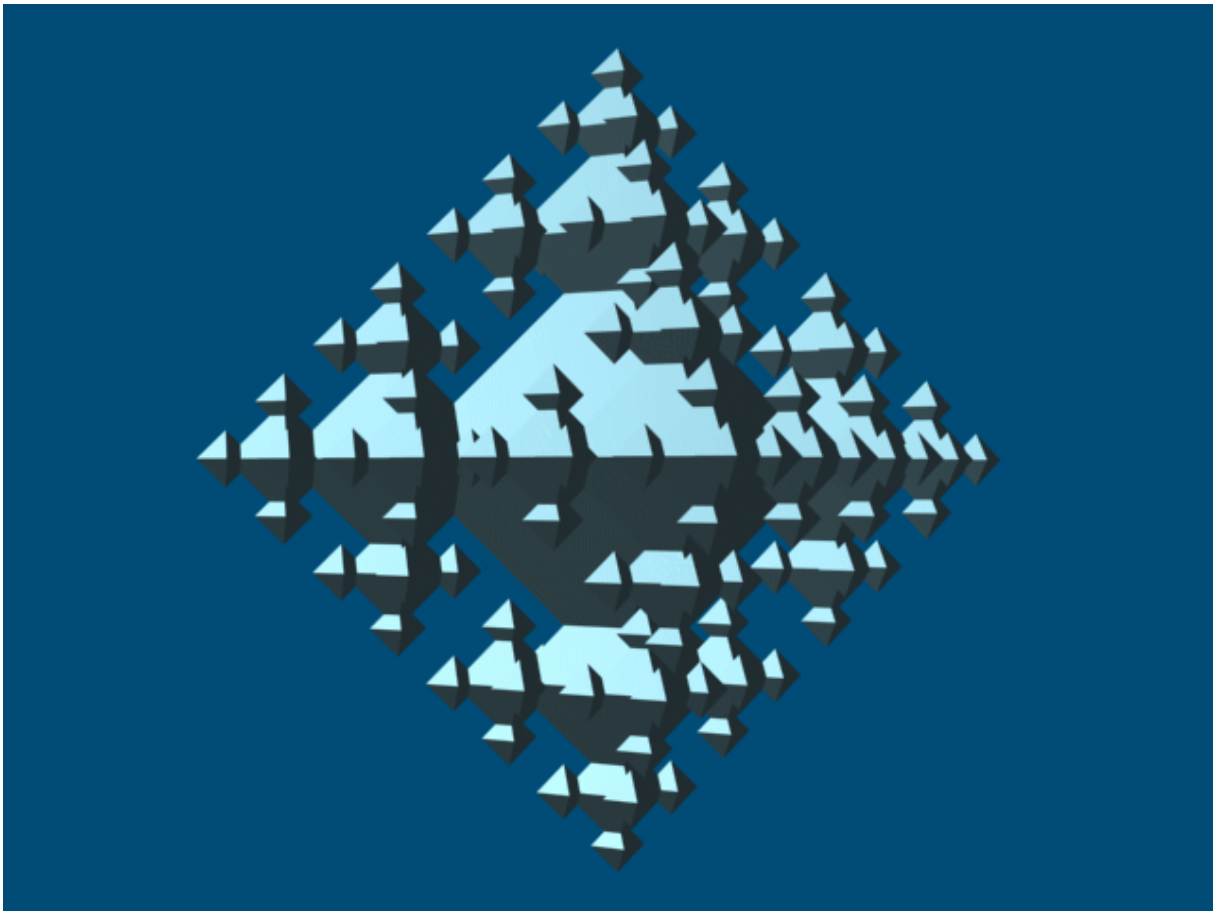
$$W(C) = W_1(C) \cup W_2(C) \cup W_3(C) \cup W_4(C) \cup W_5(C) \cup W_6(C) \cup W_7(C)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	0,5	0,5	1	0	0	0	0	0	0
W_2	0,5	0,5	0,2	a	0	0	0	0	0
W_3	0,5	0,5	0,4	a	0	0	0	0	60°
W_4	0,5	0,5	0,4	a	0	0	0	0	-60°
W_5	0,5	0,5	0,6	a	0	0	0	0	120°
W_6	0,5	0,5	0,6	a	0	0	0	0	-120°
W_7	0,5	0,5	0,8	a	0	0	0	0	180°

Tabela 2.25 Parametry przekształceń dla IFS+06

Prezentowana struktura jest sumą zbioru początkowego C_0 i czterech pierwszych kroków iteracji

$$\bigcup C_n = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$



Rys 2.28 $D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$ struktury IFS+07

$$d = \frac{\log 12}{\log 2} = 3,584962$$

Przykład 2.25

Zbiorem początkowym D_0 jest ośmiościan foremny o boku a

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

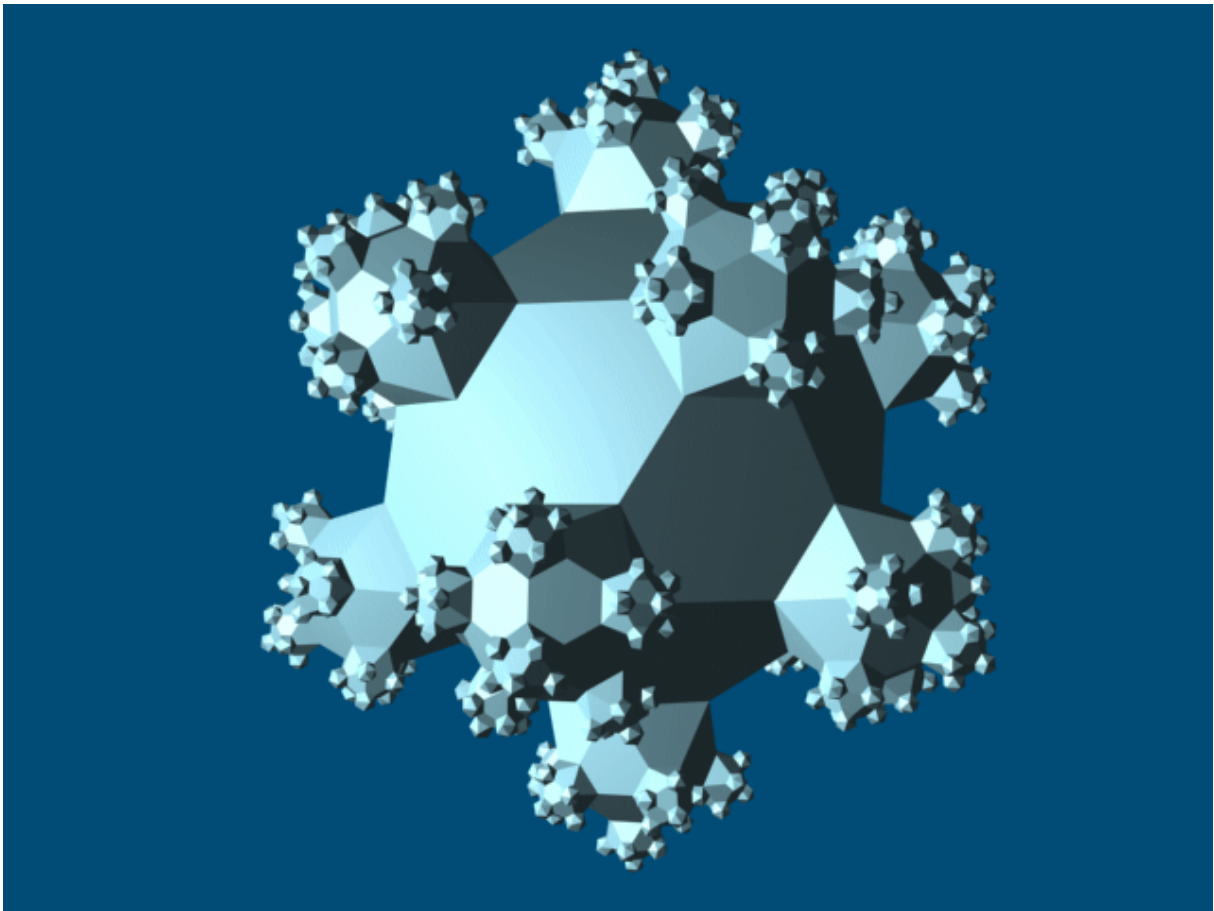
$$W(D) = W_1(D) \cup W_2(D) \cup W_3(D) \cup W_4(D) \cup W_5(D) \cup W_6(D)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/2	1/2	1/2	$a\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
W_2	1/2	1/2	1/2	$-a\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
W_3	1/2	1/2	1/2	0	$a\sqrt{2}$	0	0	0	0
W_4	1/2	1/2	1/2	0	$-a\sqrt{2}$	0	0	0	0
W_5	1/2	1/2	1/2	0	0	$a\sqrt{2}$	0	0	0
W_6	1/2	1/2	1/2	0	0	$-a\sqrt{2}$	0	0	0

Tabela 2.26 Parametry przekształceń dla IFS+07

Prezentowana struktura jest sumą zbioru początkowego oraz trzech pierwszych kroków iteracji

$$\bigcup D_n = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$$



Rys 2.29 $E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$ struktury IFS+08

$$d = \frac{\log 39}{\log 3} = 3,334717$$

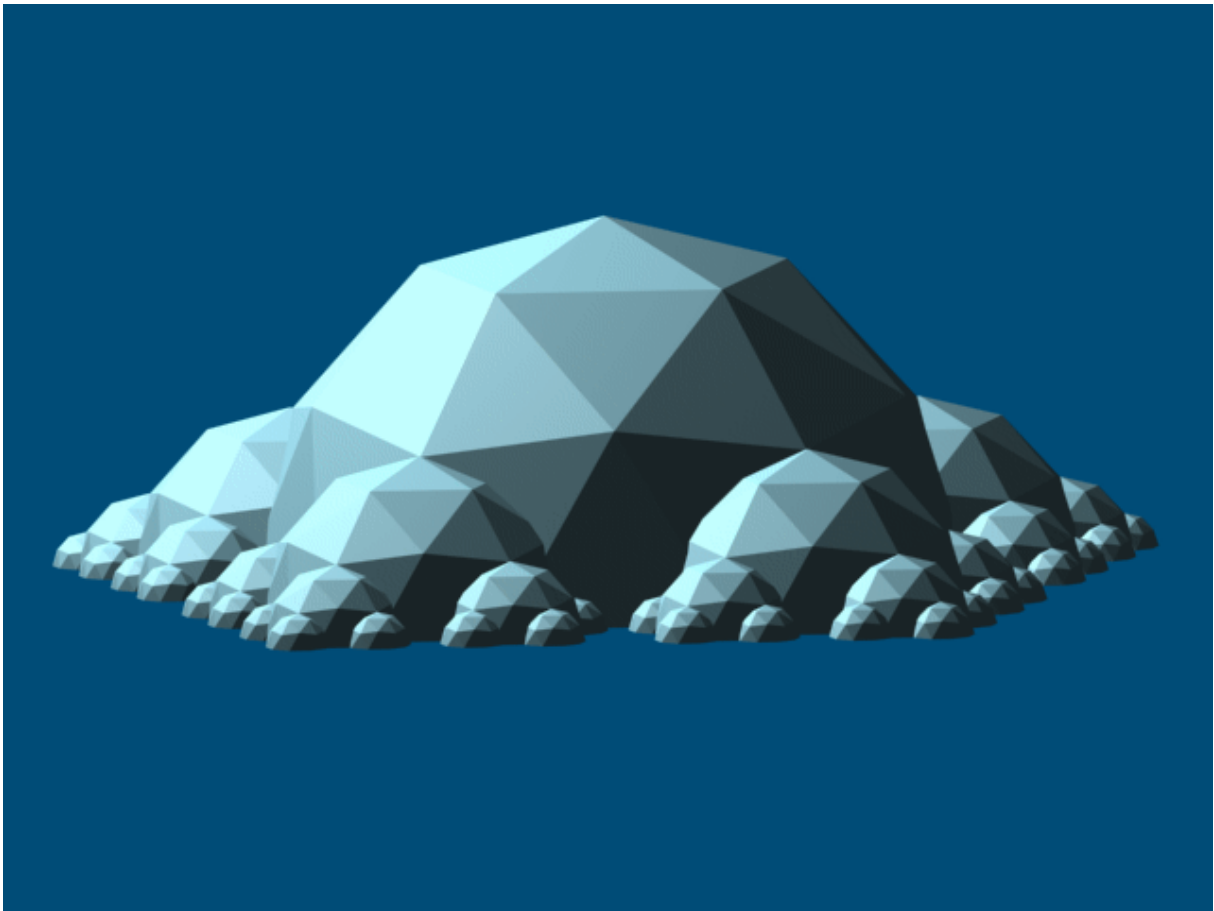
Zbiorem początkowym E_0 jest dwudziestościan foremny o boku a .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(E) = W_1(E) \cup W_2(E) \cup W_3(E) \cup W_4(E) \cup W_5(E) \cup W_6(E) \cup W_7(E) \cup W_8(E) \cup \\ \cup W_9(E) \cup W_{10}(E) \cup W_{11}(E) \cup W_{12}(E)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/3	1/3	1/3	0	0	0,951a	0	0	180°
W_2	1/3	1/3	1/3	0	0	-0,951a	0	0	180°
W_3	1/3	1/3	1/3	0	0	0,951a	0	63°	0
W_4	1/3	1/3	1/3	0	0	0,951a	0	63°	72°
W_5	1/3	1/3	1/3	0	0	0,951a	0	63°	144°
W_6	1/3	1/3	1/3	0	0	0,951a	0	63°	-72°
W_7	1/3	1/3	1/3	0	0	0,951a	0	63°	-144°
W_8	1/3	1/3	1/3	0	0	-0,951a	0	63°	0
W_9	1/3	1/3	1/3	0	0	-0,951a	0	63°	72°
W_{10}	1/3	1/3	1/3	0	0	-0,951a	0	63°	144°
W_{11}	1/3	1/3	1/3	0	0	-0,951a	0	63°	-72°
W_{12}	1/3	1/3	1/3	0	0	-0,951a	0	63°	-144°

Tabela 2.27 Parametry przekształceń dla IFS+08



Rys 2.30 $H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3$

Przykład 2.27

Zbiorem początkowym H_0 jest kopuła geodezyjna o promieniu r oparta na połowie dwudziestościanu foremnego, z drugim stopniem podziału krawędzi wielościanu.

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

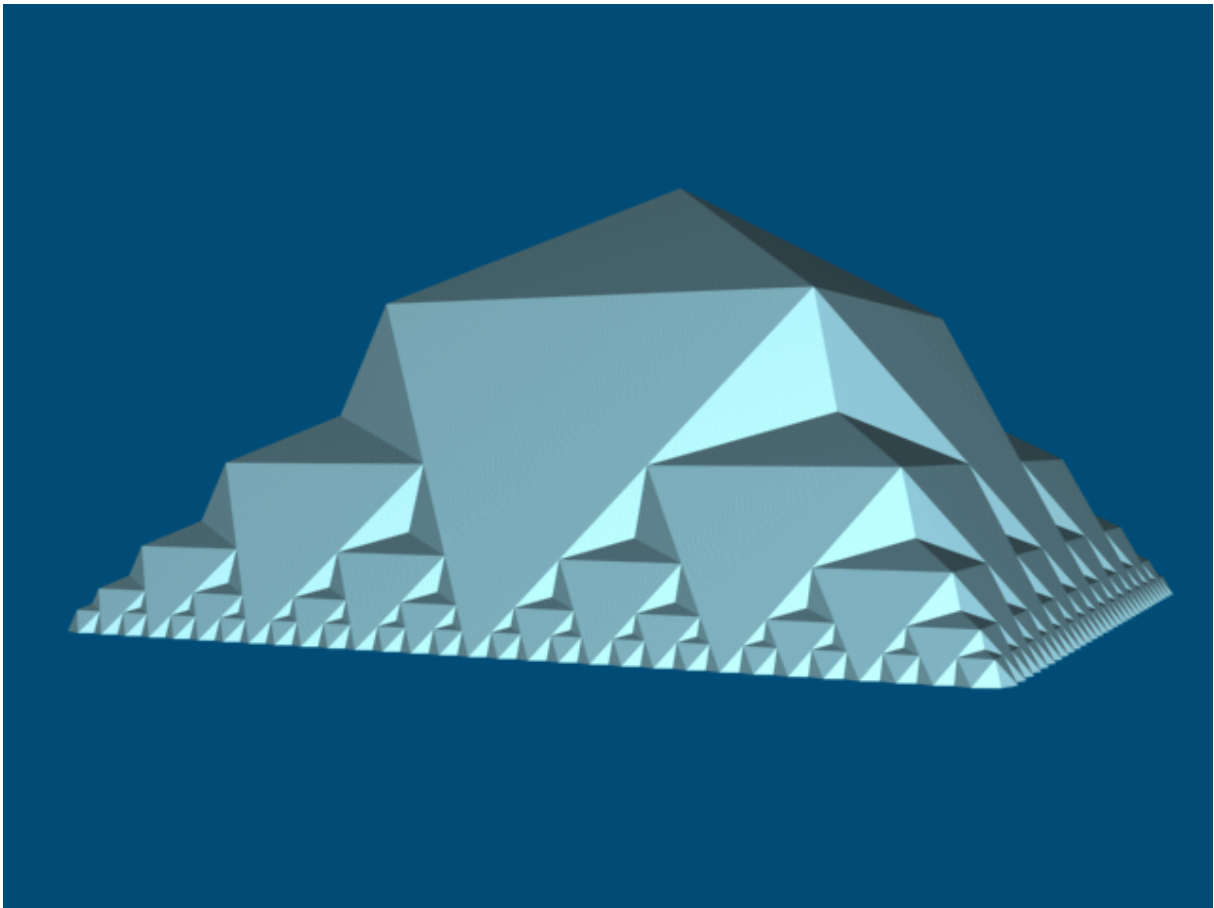
$$W(H) = W_1(H) \cup W_2(H) \cup W_3(H) \cup W_4(H) \cup W_5(H)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	0,45	0,45	0,45	0,6r	0	0	0	0	0
W_2	0,45	0,45	0,45	0,6r	0	0	0	0	72°
W_3	0,45	0,45	0,45	0,6r	0	0	0	0	144°
W_4	0,45	0,45	0,45	0,6r	0	0	0	0	-72°
W_5	0,45	0,45	0,45	0,6r	0	0	0	0	-144°

Tabela 2.28 Parametry przekształceń dla IFS+09

Prezentowana struktura jest sumą zbioru początkowego oraz trzech pierwszych kroków iteracji

$$\bigcup H_n = H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3$$



Rys 2.31 $K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$

Przykład 2.28

Zbiorem początkowym K_0 jest kopuła geodezyjna o promieniu r oparta na połowie ośmiościanu foremnego, z drugim stopniem podziału krawędzi wielościanu.

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

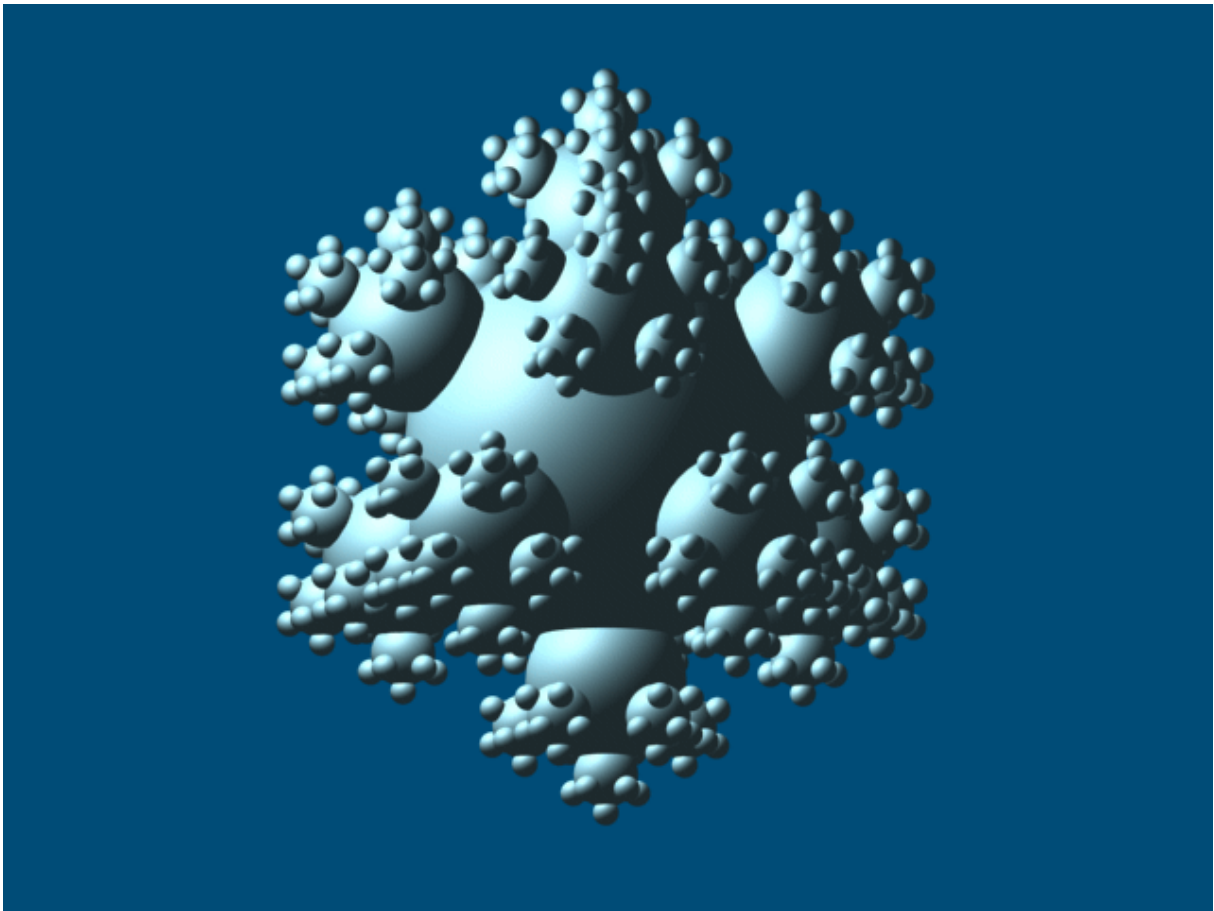
$$W(K) = W_1(K) \cup W_2(K) \cup W_3(K) \cup W_4(K)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z
W_1	1/2	1/2	1/2	$r/\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
W_2	1/2	1/2	1/2	0	$r/\sqrt{2}$	0	0	0	0
W_3	1/2	1/2	1/2	$-r/\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
W_4	1/2	1/2	1/2	0	$-r/\sqrt{2}$	0	0	0	0

Tabela 2.29 Parametry przekształceń dla IFS+09

Prezentowana struktura jest sumą zbioru początkowego oraz czterech pierwszych kroków iteracji

$$\bigcup K_n = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$$



Rys 2.32 $F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3$ struktury IFS+10

$$d = \frac{\log 39}{\log 3} = 3,334717$$

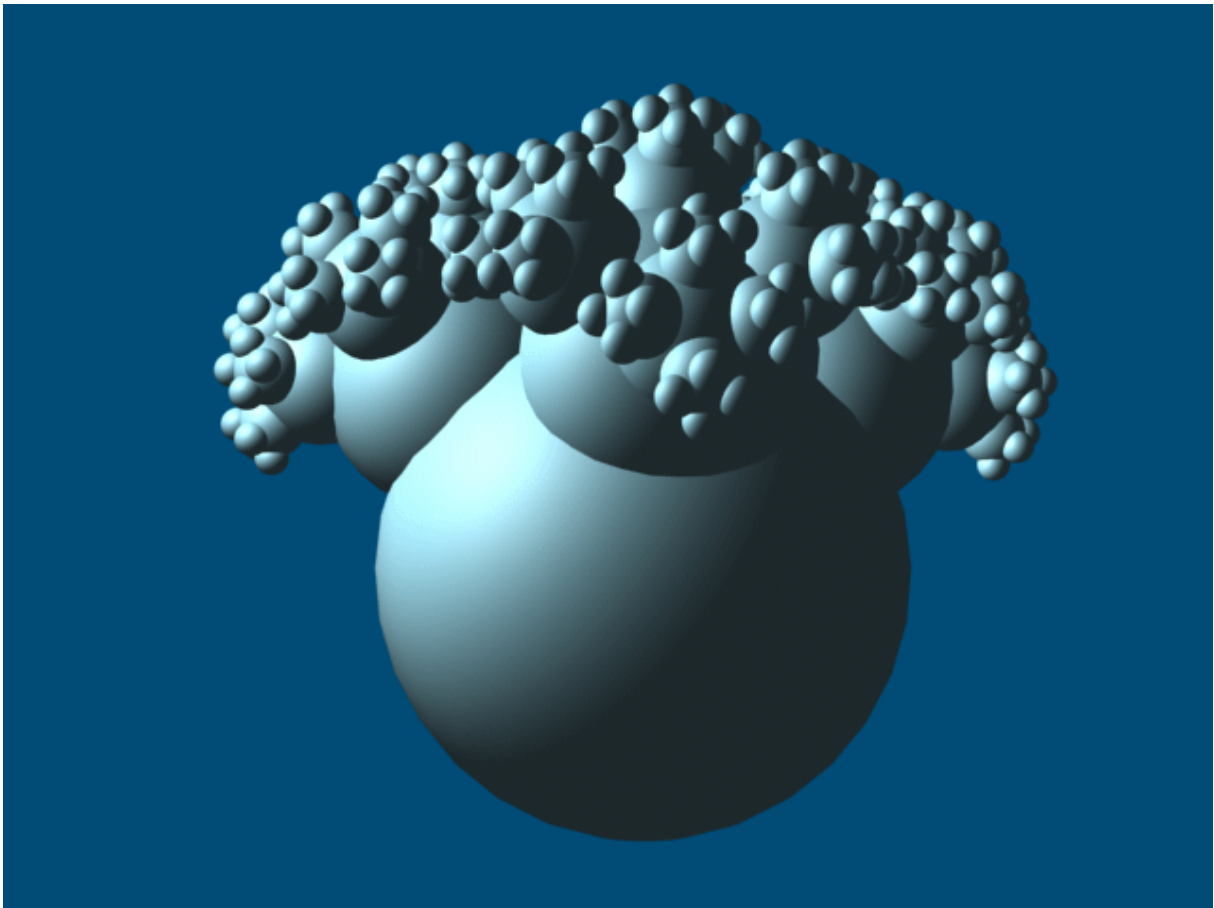
Zbiorem początkowym F_0 jest sfera o promieniu r .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(F) = W_1(F) \cup W_2(F) \cup W_3(F) \cup W_4(F) \cup W_5(F) \cup W_6(F) \cup W_7(F) \cup W_8(F) \cup \\ \cup W_9(F) \cup W_{10}(F) \cup W_{11}(F) \cup W_{12}(F)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/3	1/3	1/3	0	0	r	0	0	180°
W_2	1/3	1/3	1/3	0	0	$-r$	0	0	180°
W_3	1/3	1/3	1/3	0	0	r	0	63°	0
W_4	1/3	1/3	1/3	0	0	r	0	63°	72°
W_5	1/3	1/3	1/3	0	0	r	0	63°	144°
W_6	1/3	1/3	1/3	0	0	r	0	63°	-72°
W_7	1/3	1/3	1/3	0	0	r	0	63°	-144°
W_8	1/3	1/3	1/3	0	0	$-r$	0	63°	0
W_9	1/3	1/3	1/3	0	0	$-r$	0	63°	72°
W_{10}	1/3	1/3	1/3	0	0	$-r$	0	63°	144°
W_{11}	1/3	1/3	1/3	0	0	$-r$	0	63°	-72°
W_{12}	1/3	1/3	1/3	0	0	$-r$	0	63°	-144°

Tabela 2.30 Parametry przekształceń dla IFS+10



Rys 2.33 $F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3$ struktury IFS+11

Przykład 2.30

Zbiorem początkowym F_0 jest sfera o promieniu r .

Przekształcenie afiniczne jest złożeniem przekształceń :

$$W(F) = W_1(F) \cup W_2(F) \cup W_3(F) \cup W_4(F)$$

	skalowanie			translacja			obrót		
	s_x	s_y	s_z	t_x	t_y	t_z	φ_x	φ_y	φ_z
W_1	1/2	1/2	1/2	0	0	r	0	45°	0
W_2	1/2	1/2	1/2	0	0	r	0	45°	90°
W_3	1/2	1/2	1/2	0	0	r	0	45°	180°
W_4	1/2	1/2	1/2	0	0	r	0	45°	-90°

Tabela 2.31 Parametry przekształceń dla IFS+11

Prezentowana struktura jest sumą zbioru początkowego oraz trzech pierwszych kroków iteracji

$$\bigcup F_n = F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3$$

ROZDZIAŁ III L-SYSTEMY

Inną z podstawowych metod generowania fraktali jest system Lindenmayera nazywany w skrócie L-systemem. Jego twórca Aristid Lindenmayer prowadząc badania w dziedzinie biologii stworzył w 1968r formalizm służący do opisu wzrostu roślin. Wraz z rozwojem teorii L-system został wzbogacony o aspekty geometryczne i stał się uniwersalnym narzędziem nie tylko w zakresie modelowania roślin ale również do tworzenia fraktali, których kształt jest funkcją wzrostu w czasie. [4]

Podstawową ideą L-systemu jest reguła przepisowywania zwana również regułą podstawiania. Jej działanie można zaprezentować w kategoriach intuicyjnych za pomocą następującego przykładu:

Przykład 3.1 [4]

Rozważmy ciąg, zbudowany z elementów a i b , które mogą w danym ciągu występować wiele razy. Każdemu elementowi przypisana jest jedna reguła podstawiania P . Zapis $P : a \rightarrow b$ oznacza, że element a jest zastępowany elementem b , zaś zapis $P : b \rightarrow ab$ oznacza, że element b jest zastępowany dwuelementowym ciągiem ab . Proces podstawiania rozpoczyna się od wyrazu początkowego zwanego aksjomatem ω . Tak skonstruowane założenia pozwalają na wygenerowanie następującego przykładowego ciągu elementów.

```

a
|
b
└
a b
|  |
b  a b
└  |  |
a b b a b
|  |  |  |  |
bababaab
```

Powyższy przykład należy do najprostszej klasy bezkontekstowych i deterministycznych L-systemów zwanych DOL-systemami, w których reguły podstawiania zależą jedynie od pojedynczych odizolowanych symboli (tzn obecność sąsiednich elementów nie wpływa na regułę podstawiania), a każdemu elementowi przyporządkowana jest jedna i tylko jedna reguła podstawiania.

Drugą, obok reguły podstawiania, ideą L-systemów jest metoda zapisu konstrukcji fraktala opierająca się na graficznej interpretacji ciągu znaków. Metoda ta znana jest w literaturze pod nazwą grafiki żółwia, której twórcą był Seymour Papert. Metoda ta po raz pierwszy została użyta do modelowania wzrostu roślin przez Przemysława

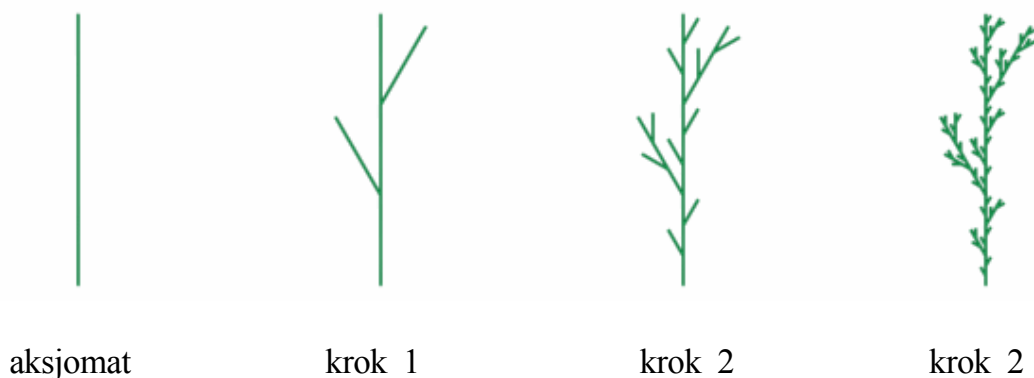
Prusinkiewicza w 1986 roku i od tego momentu stała się uniwersalną metodą opisu generowania fraktali za pomocą L-systemów . [4]

Główną ideą grafiki żółwia jest graficzna interpretacja ciągu znaków w postaci poleceń wydawanych specjalnie tresowanemu żółwiowi . Narzędziem tej metody jest ogon żółwia, który kreśli linie proste na płaszczyźnie zgodnie z zadawanymi poleceniami . Skrócona lista poleceń za pomocą których można uzyskać najprostsze fraktale następująca ;

- F - poruszaj się krokiem o stałej długości > 0
rysuj linię od poprzedniej pozycji do nowej
 - f - poruszaj się krokiem o stałej długości > 0 ,
bez rysowania linii
 - + - obróć się w lewo o stały kąt δ
 - - obróć się w prawo o stały kąt δ
 - [- napotkanie tego polecenia powoduje zapamiętanie bieżącego stanu żółwia
 -] - napotkanie tego polecenia powoduje powrót żółwia do stanu przed symbolem [
 - [...] - pomiędzy tymi symbolami występują polecenia definiujące konstrukcję gałęzi
- [4]

Przykład 3.2 [1]

aksjomat $\omega : F$
 reguła podstawiania $P : F \rightarrow F [+ F] F [- F] F$
 parametr $+ - : \delta = 30^\circ$



Rys 3.1 Pierwsze kroki konstrukcji L-systemu generującego fraktal przypominający wyglądem chwast

Przy pomocy L-systemu możliwe jest generowanie także klasycznych fraktali na przykład krzywej van Kocha . Parametry L-systemu dla krzywej Kocha są następujące :

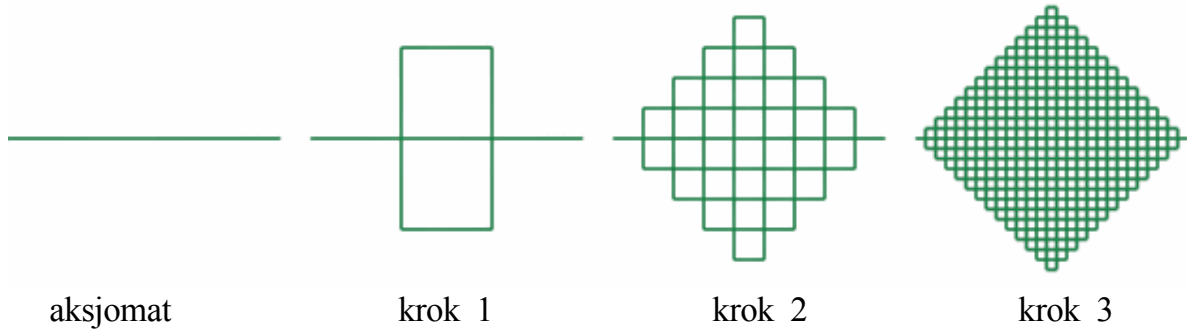
Przykład 3.3 [1]

aksjomat $\omega : F$
 reguła podstawiania $P : F \rightarrow F + F - - F + F$
 parametr $+ - : \delta = 60^\circ$

Inną klasycznym fraktalem który można wygenerować za pomocą L-systemu jest krzywa Giuseppe Peano . Jest to przykład krzywej wypełniającej kwadrat , która nie przecina samej siebie . Parametry L-systemu dla krzywej Peano są następujące :

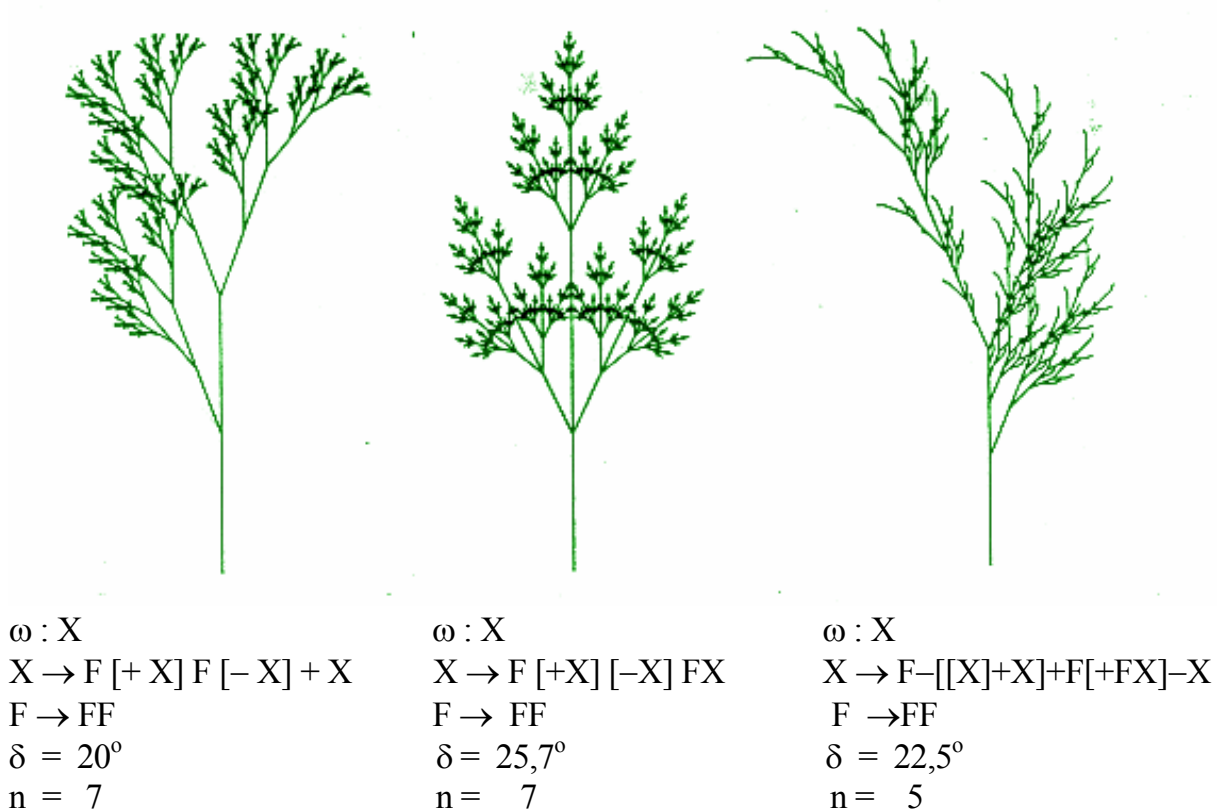
Przykład 3.4 [1]

aksjomat $\omega : F$
 reguła podstawiania $P : F \rightarrow F F + F + F + F F$
 parametr $+ - : \delta = 90^\circ$



Rys 3.2 Pierwsze kroki konstrukcji krzywej Giuseppe Peano

Tradycyjnie jednak L-systemy stosowane są do opisu wzrostu roślin . Działanie odwrotne czyli wykorzystanie L-systemów do tworzenia fraktali dostarcza przykładów zadziwiającego podobieństwa generowanych struktur do obiektów istniejących w naturze.



Rys 3.3 Fraktalne chwasty generowane przy pomocy L-systemów [4]

Należy zauważyć , że w przedstawionych przykładach w trakcie stosowania reguły podstawiania dokonuje się automatyczne przeskalowanie podstawianych elementów , co jest charakterystyczne dla najprostszych nieparametryzowanych L-systemów . Precyzyjny zapis uwzględniający współczynniki skalowania kroków żółwia stosowany jest w parametryzowanych L-systemach , którymi jednak nie będziemy zajmować się w niniejszej pracy ze względu na znikomą przydatność L-systemowych struktur w procesie kształtowania formy architektonicznej , co zostanie okazane w dalszej części pracy .

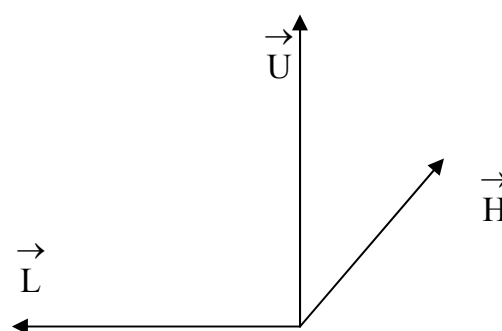
Interpretacja grafiki żółwia może być realizowana w w przestrzeni trójwymiarowej . Ideę tą rozwinęli Abelson i diSessa w pracy "Geometria żółwia" (*Turtle Geometry*) . Koncepcja zorientowania żółwia w przestrzeni polega na wyznaczeniu trzech wektorów

\vec{H} , \vec{L} , \vec{U} wskazujących :

\vec{H} (*heading*) – głowę żółwia

\vec{L} (*left*) - kierunek w lewo

\vec{U} (*up*) - kierunek do góry



Kompletna lista poleceń stosowanych w trójwymiarowej grafice żółwia przybiera postać :

F – poruszaj się krokiem o stałej długości > 0

rysuj linię od poprzedniej pozycji do nowej

f – poruszaj się krokiem o stałej długości > 0 ,
bez rysowania linii

+ – obrót dokoła wektora \vec{U} o kąt α (żółw skręca w lewo)

- – obrót dokoła wektora \vec{U} o kąt α (żółw skręca w prawo)

& – obrót dokoła wektora \vec{L} o kąt β (żółw unosi się)

^ – obrót dokoła wektora \vec{L} o kąt β (żółw obniża się)

/ – obrót dokoła wektora \vec{H} o kąt γ (żółw obraca się dokoła własnej osi w prawo)

\ – obrót dokoła wektora \vec{H} o kąt γ (żółw obraca się dokoła własnej osi w lewo)

[– napotkanie tego polecenia powoduje zapamiętanie bieżącego stanu żółwia

] – napotkanie tego polecenia powoduje powrót żółwia do stanu przed symbolem [

[...] – pomiędzy tymi symbolami występują polecenia definiujące konstrukcję gałęzi

[4]

Należy zauważyć , że polecenia wydawane żółwiowi dotyczą orientacji związanej z lokalnym układem współrzędnych w którym porusza się żółw i który przemieszcza się razem z żółwiem .

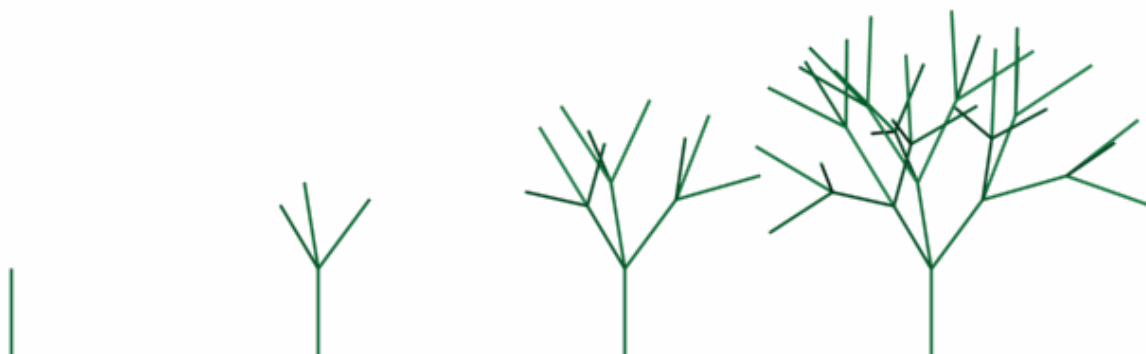
Przykład 3.4

$\omega : \& \& \& F$

$P_1 : F \rightarrow F [\& F] [/ \& F] [\backslash \& F]$

$\& = 30^\circ$

$\backslash / = 120^\circ$



Rys 3.4 Jeden z najprostszyc trójwymiarowych L-systemów



Rys 3.5 Fraktalne drzewa [4]

Powyższe przykłady zostały wygenerowane za pomocą parametryzowanych L-systemów, w których definiuje się i różnicuje wartości liczbowe wydawanych poleceń oraz wprowadza się element prawdopodobieństwa losowego podejmowanych przez żółwia kroków. Załączenie pełnej listy reguł podstawiania oraz objaśnienie wszystkich oznaczeń wykracza poza ramy pracy.

W niniejszej pracy będziemy zajmowali się najprostszymi odmianami L-systemów w przestrzeni trzywymiarowej. Ze względu na cel pracy, którym jest badanie struktur fraktalnych stanowiących źródło inspiracji w kształtowaniu formy architektonicznej, wprowadza się modyfikację polegającą na stosowaniu elementów stereometrycznych jako składników budujących strukturę. Dla odróżnienia od tradycyjnego L-systemu operującego na odcinku zmodyfikowany system będziemy określać mianem LV-systemu.

Lista poleceń LV-systemu , stosowanych w niniejszej pracy przybiera postać :

- F – poruszaj się krokiem o stałej długości > 0
zbuduj element A (pozostaw po sobie ślad w postaci elementu A)
- f – poruszaj się krokiem o stałej długości > 0 ,
(bez pozostawiania śladu)
- + – obrót dokoła wektora \vec{U} o kąt α (żółw skręca w lewo)
- – obrót dokoła wektora \vec{U} o kąt α (żółw skręca w prawo)
- & – obrót dokoła wektora \vec{L} o kąt β (żółw unosi się)
- ^ – obrót dokoła wektora \vec{L} o kąt β (żółw obniża się)
- / – obrót dokoła wektora \vec{H} o kąt γ (żółw obraca się dokoła własnej osi w prawo)
- \ – obrót dokoła wektora \vec{H} o kąt γ (żółw obraca się dokoła własnej osi w lewo)
- [– napotkanie tego polecenia powoduje zapamiętanie bieżącego stanu żółwia
-] – napotkanie tego polecenia powoduje powrót żółwia do stanu przed symbolem [
- [...] – pomiędzy tymi symbolami występują polecenia definiujące konstrukcję gałęzi

Jak zatem widać modyfikacji ulega polecenie F. W miejsce tradycyjnego "rysuj linię" wprowadzono polecenie "zbuduj element A" . W praktyce oznacza to , że żółw zamiast rysować ogonem linię , pozostawia za sobą ślad w postaci elementu A , którym może być dowolna bryła trójwymiarowa , której wymiary skoordynowane są z długością kroku żółwia . Polecenia wydawane żółwiowi dotyczą orientacji związanej z lokalnym układem współrzędnych w którym porusza się żółw i który przemieszcza się razem z żółwiem .

W dalszej części zaprezentowano jedynie niektóre z uzyskanych w trakcie pracy badawczej przykładów , ponieważ analiza ich przydatności jako źródła inspiracji w kształtowaniu formy architektonicznej wykazała niewielkie możliwości stosowania struktur LV-systemowych jako elementów imitujących obiekty architektoniczne .

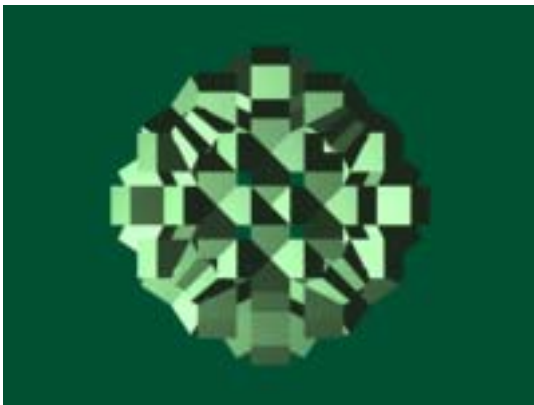
Prezentowane przykłady zostały wygenerowane za pomocą LV-systemów zgodnie z przyjętymi wcześniej założeniami :

- Żółw startuje z pozycji pionowej tzn wektor lokalnego układu współrzędnych związanego z żółwiem skierowany jest ku górze
- aksjomat ω : F oznacza ,że żółw porusza się krokiem długości a i zostawia za sobą ślad w postaci sześciianu o boku a
- w opisie parametrów zastosowano uproszczenia polegające na pominięciu przesunięć o nieznaczących wartościach związanych z koniecznością dopasowania krawędzi elementów

Wszystkie przykłady zostały wygenerowane przy pomocy programu komputerowego Autodesk VIZ R4 .



Rys 3.6 LV 01 perspektywa



Rys 3.7 LV 01 rzut poziomy



Rys 3.8 LV 01 rzut pionowy

$\omega : F$
 $F \rightarrow F [\wedge F] [\backslash \wedge F] [\backslash \backslash \wedge F] [/\wedge F]$
 $\wedge : \beta = 45^\circ$
 $\backslash / : \gamma = 90^\circ$
 $n = 4$



Rys 3.9 LV 02 perspektywa

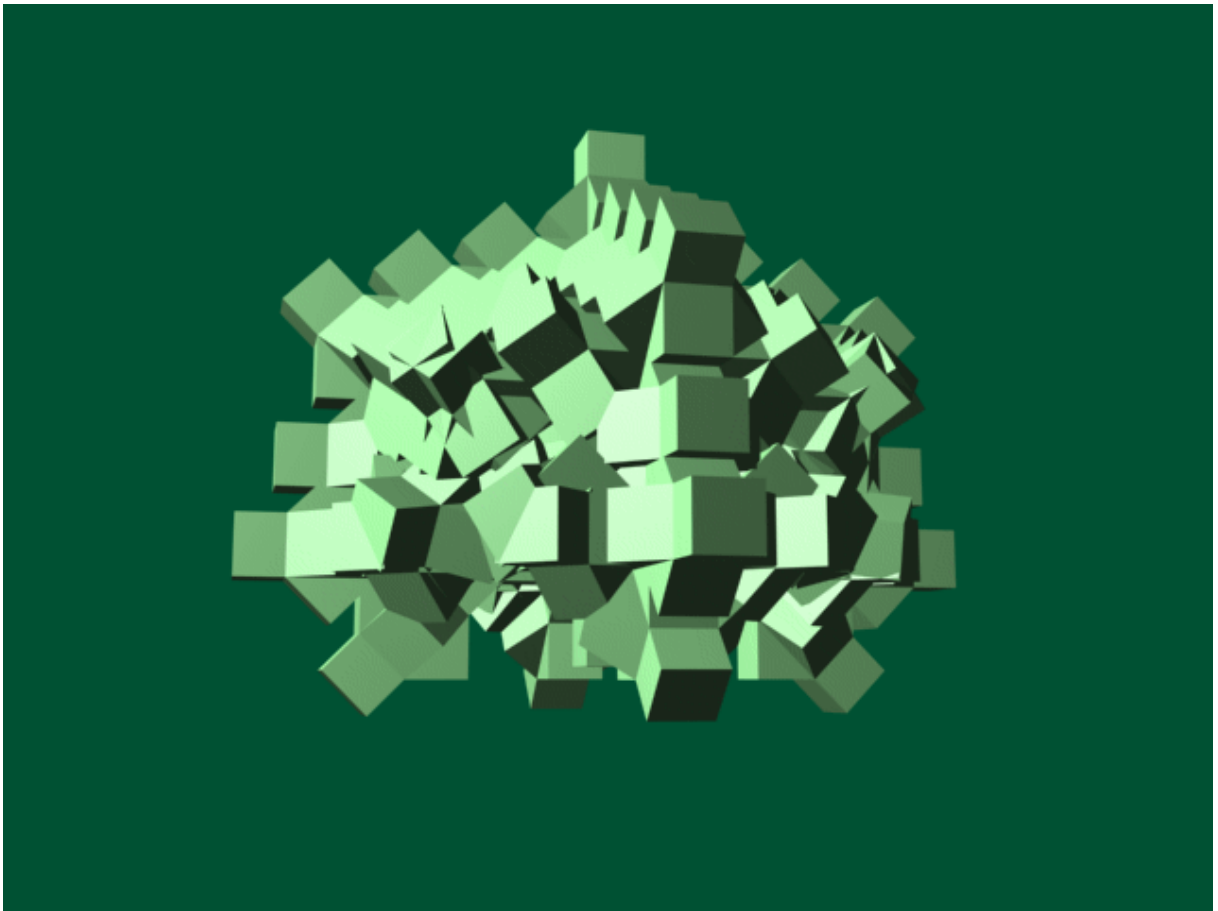


Rys 3.10 LV 02 rzut poziomy



Rys 3.11 LV 02 rzut pionowy

$\omega : F$
 $F \rightarrow F [\wedge F] [\backslash \wedge F] [\backslash \backslash \wedge F] [/\wedge F]$
 $\wedge : \beta = 30^\circ$
 $\backslash / : \gamma = 90^\circ$
 $n = 3$



Rys 3.12 LV 03 perspektywa



Rys 3.13 LV 03 rzut poziomy



Rys 3.14 LV 03 rzut pionowy

$\omega : F$
 $F \rightarrow FF[\wedge F][/\wedge F][//\wedge F][\backslash\wedge F]F$
 $\wedge : \beta = 45^\circ$
 $\backslash/ : \gamma = 90^\circ$
 $n = 3$



Rys 3.15 LV 04 perspektywa

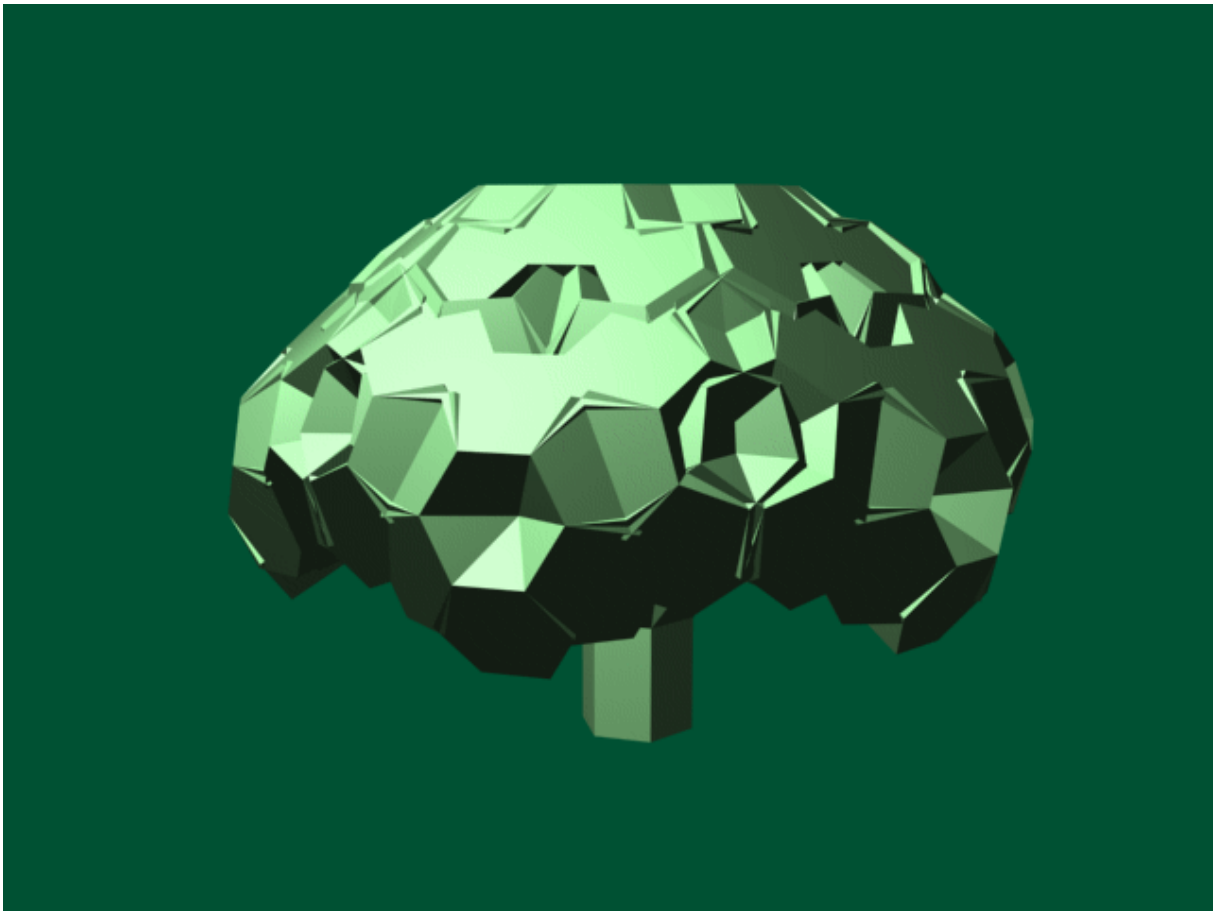


Rys 3.16 LV 04 rzut poziomy

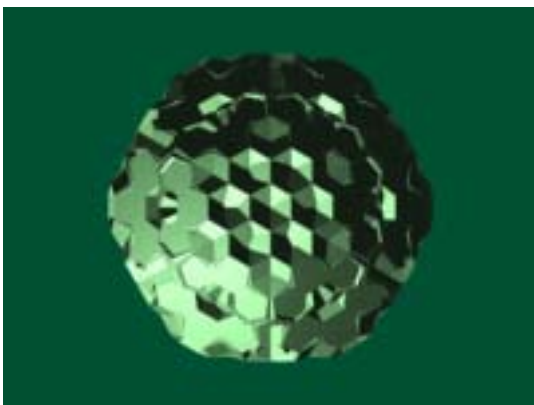


Rys 3.17 LV 04 rzut pionowy

$\omega : F$
 $F \rightarrow FF[\wedge F]F[/\wedge F]F[//\wedge F]F[\backslash\wedge F]F$
 $\wedge : \beta = 45^\circ$
 $\backslash : \gamma = 90^\circ$
 $n = 3$



Rys 3.18 LV 05 perspektywa

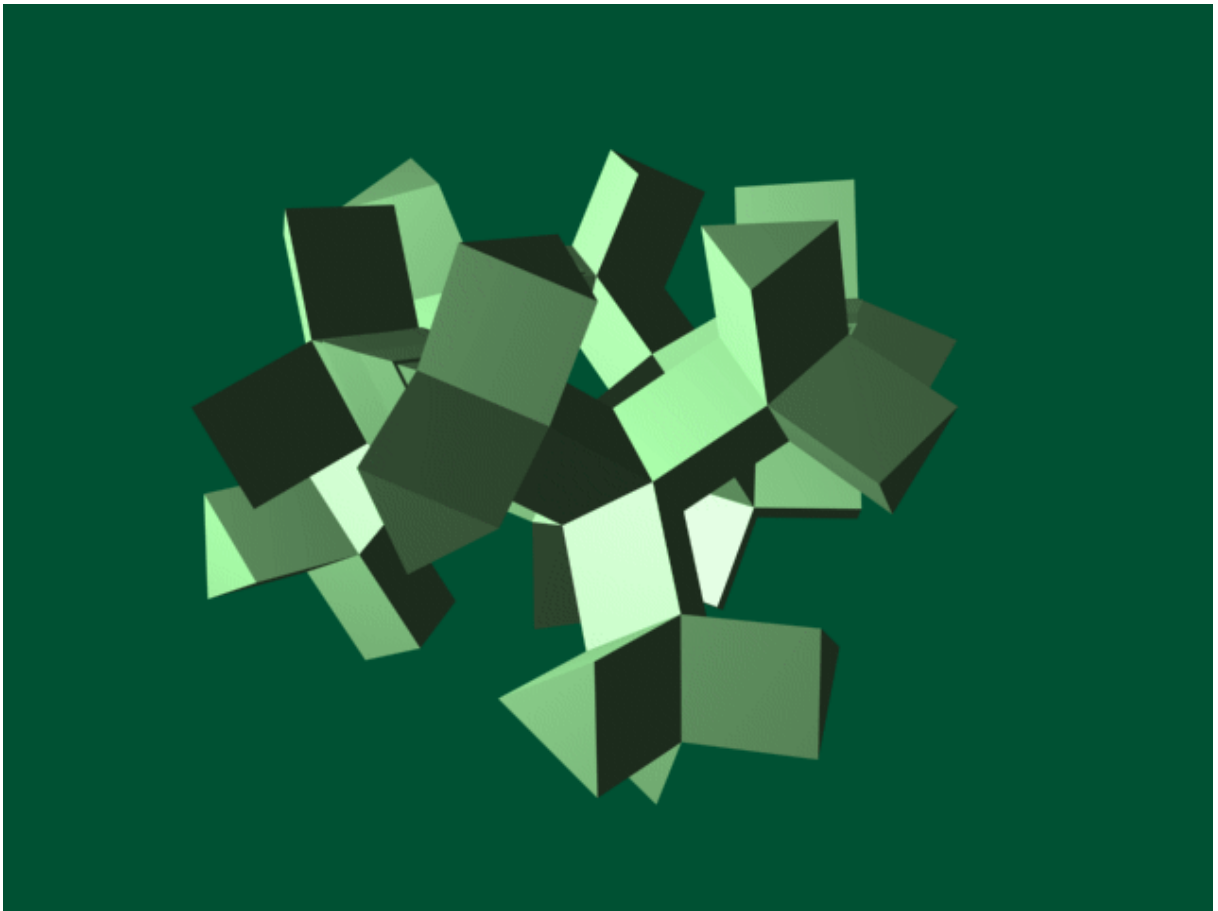


Rys 3.19 LV 05 rzut pionowy

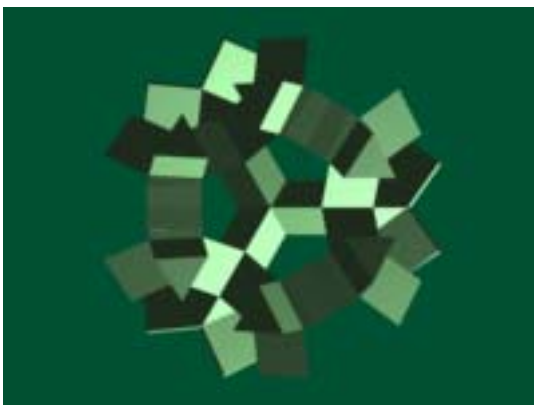


rys 3.20 LV 05 rzut pionowy

$F \rightarrow F [\wedge F] [\backslash \wedge F] [\backslash \backslash \wedge F] [\backslash \backslash \backslash \wedge F] [/\wedge F] [//\wedge F]$
 $\omega : F$ (graniastosłup prawidłowy o podstawie sześciokątnej o boku a i $h = 2a$)
 $\wedge : \beta = 30^\circ$
 $\backslash / : \gamma = 60^\circ$
 $n = 3$



Rys 3.21 LV 06 perspektywa



Rys 3.22 LV 06 rzut poziomy



Rys 3.23 LV 06 rzut pionowy

$\omega : F$ (graniastosłup prawidłowy o podstawie trójkątnej o boku a i $h = a$)

$F \rightarrow F [\wedge F] [\backslash \wedge F] [/ \wedge F]$

$\wedge : \beta = 70,53^\circ$

$\backslash / : \gamma = 120^\circ$

$n = 3$

ROZDZIAŁ IV FAKTALE W ARCHITEKTURZE

Od momentu stworzenia podstaw teorii fraktali badania w tych kierunkach odbywały się w wielu dziedzinach równoległe . Odkrycia dotyczące fraktalnej geometrii natury zapoczątkowane i opublikowane w pracy "*Fractal geometry of nature*"[5] (Fraktalna geometria natury) przez Benoita Mandelbrota , sprowokowały naukowców wielu dziedzin do głębszej analizy przedmiotu ich badań . Fala zainteresowań nie ominęła dziedzin zajmujących się teorią architektury .

Fakt , że forma architektoniczna niejednokrotnie jest inspirowana przez naturę oraz to , że natura w swej istocie posiada fraktalną budowę może tłumaczyć fakt , że na kilkaset lat przed odkryciem fraktali , w architekturze pojawiły się budowle o charakterze fraktalnym .

Manifestacyjny charakter fraktalnej budowy obiektów architektonicznych możemy zaobserwować w hinduskiej architekturze sakralnej . W większości prezentowanych przykładów fraktalny charakter hinduskich świątyń i obelisków polega na wielokrotnym powtórzeniu pierwotnego kształtu w coraz mniejszej skali przez osiem a nawet więcej poziomów . Struktura geometryczna tych obiektów jest zbliżona do fraktali uzyskiwanych w systemie IFS .



Rys 4.1 Świątynia Jagadambe XI w Khajuraho (Indie) [16]



Rys 4.2 Candi Lara Jongrang IX w Prambanan (Indonesia) [16]

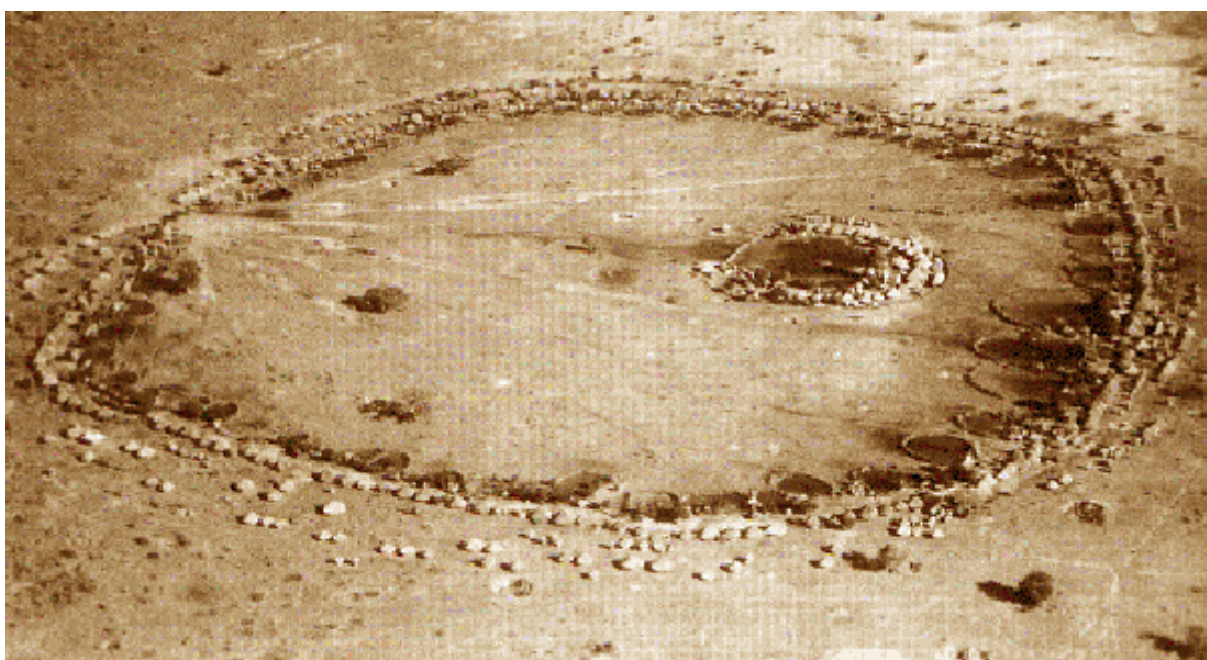


Rys 4.3 Świątynia Kandiraya Mahadeva XI w. Khajuraho (Indie) [16]

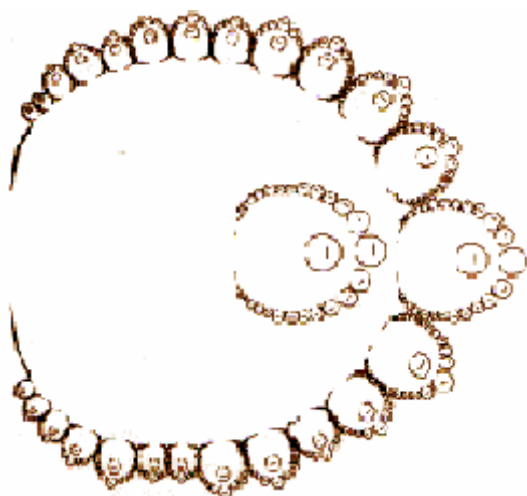
Według Williama Jacksona , profesora Uniwersytetu Yale "...idealna forma sugeruje nieskończoność wznoszących się transcendentalnie poziomów egzystencji i świadomości umiejscawiając świętą głębię wewnątrz ..." . W swoich rozważaniach William Jackson sugeruje , że fraktalny charakter hinduskiej architektury jest odbiciem fraktalnej istoty kosmologii hinduizmu przytaczając na potwierdzenie prawdziwości swojej teorii cytując z *Bhagavad Gita* : "Wszechświat jest jak dojrzały owoc świadomości (*cit*) . Jest gałąź , która niesie tysiące takich owoców . Jest drzewo , które ma tysiące takich gałęzi . Jest las z tysiącem takich drzew . Jest górzyste terytorium z tysiącem takich lasów . Jest układ słoneczny z tysiącem takich terytoriów . Jest wszechświat z tysiącem takich układów słonecznych . I jest wiele takich wszechświatów zawartych w granicach czegoś jak atom w granicach atomu " [13]

Wiele interesujących przykładów fraktali w sztuce afrykańskiej dostarcza Ron Eglash w swojej pracy *African fractals* (Afrykańskie fraktale) . Pomędzy przykładami ornamentyki o charakterze fraktalnym (Rys 4.6) w pracy tej można znaleźć bardzo interesujący przykład układu urbanistycznego osady Ba-Ili w Południowej Zambii . Strukturę tej osady można opisać w sposób następujący : każde rozszerzenie domostwa stanowi zagroda o kształcie pierścienia przypominająca pióro . Na jednym końcu pierścienia znajduje się brama blisko której znajdują się budynki składowe . Posuwając się dokoła pierścienia budynki stają się narastająco większe , aż do największego domu znajdującego się naprzeciw bramy , w którym mieszka ojciec rodziny.

Tak więc zagroda posiada określony kształt , strukturę oraz orientację przestrzenną wyznaczoną przez oś : brama – dom ojca . Układ urbanistyczny osady jest repliką zagrody powtórzoną w większej skali . Osada ma kształt pierścienia składającego się z zagród . Na jednym końcu znajduje się brama , blisko której występują małe zagrody . W miarę posuwania się dokoła pierścienia zagrody stają się narastająco większe , aż do największej zagrody wodza posiadającej strukturę identyczną jak pozostałe zagrody . Konsekwencją jest również pierścieniowy kształt domostwa , w którym naprzeciw wejścia znajduje się rodzinny ołtarz . Tak więc struktura urbanistyczna osady Ba-Ili wynikająca z hierarchii socjalnej nosi cechy samopowtarzalności w zakresie formy , struktury i orientacji społecznej a jej układ jest najbardziej zbliżony do fraktali uzyskiwanych w wyniku działania kopiarki wielokrotnie redukującej . [7]



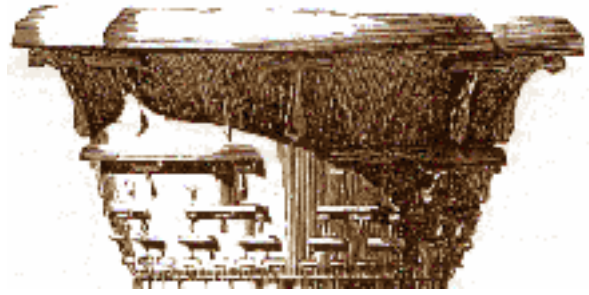
Rys 4.4 Widok z lotu ptaka osady Ba-Ili [7]



Rys 4.5 Schemat osady Ba-Ili [7]



Rys 4.6 Motyw trójkąta Sierpińskiego w afrykańskiej sztuce dekoracyjnej [7]



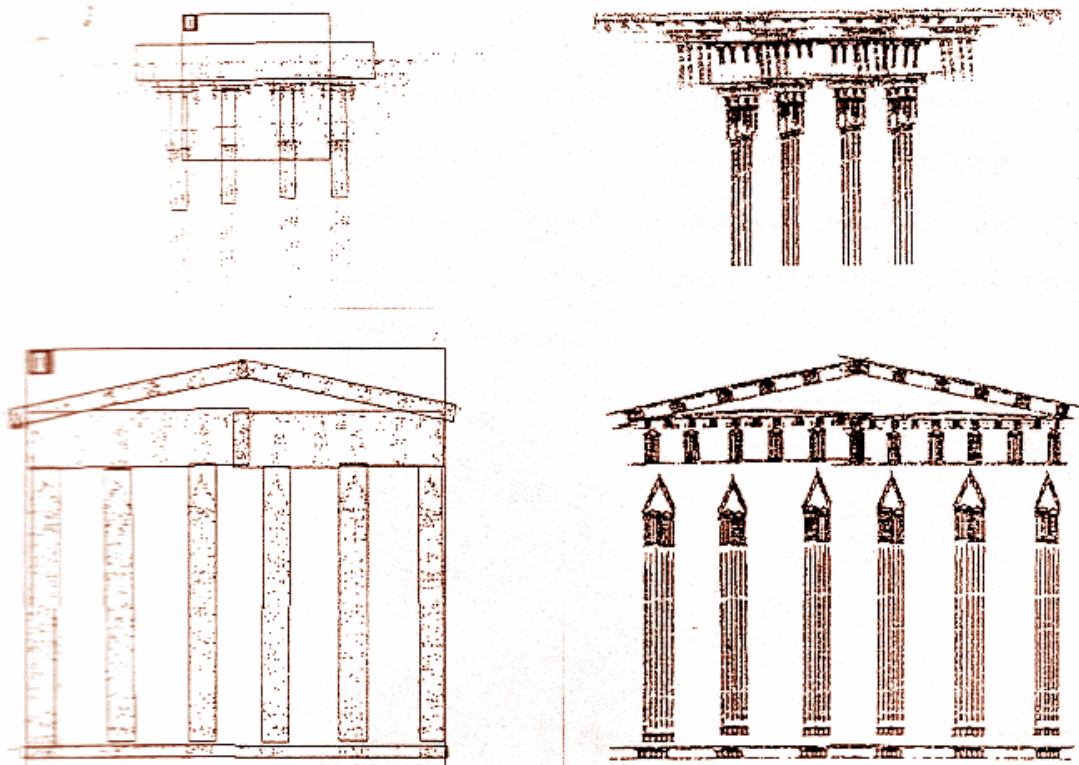
Rys 4.7 Głowica kolumny (Egipt) [7]

Innym interesującym przykładem detalu architektonicznego jest głowica kolumny świątyni egipskiej , w której powtarza się motyw płatków kwiatu lotosu ułożonych na kształt zbioru Cantora . [7]

Również w architekturze europejskiej można znaleźć przykłady które dostarczają dowodów na to , że idea samopowtarzalności jako metoda kształtowania formy architektonicznej była stosowana na długo przed powstaniem teorii fraktali .

Carl Bovill , profesor Uniwersytetu Maryland (USA) podaje przykład frontonu świątyni doryckiej jako efektu działania kopiarki wielokrotnie redukującej .

Jeżeli grupa kolumn podtrzymujących nadproże jest elementem poddanym przekształceniu IFS , rezultatem przekształcenia jest wygląd żłobionych kolumn podtrzymujących złożone belkowanie . Tak więc każda kolumna jest horyzontalnie zredukowanym obrazem całej świątyni . Poddając kolumny dalszemu działaniu kopiarki wielokrotnie redukującej otrzymujemy obraz wyjściowy w postaci tryglifów a w czwartym kroku iteracji uzyskujemy mutule . [6]

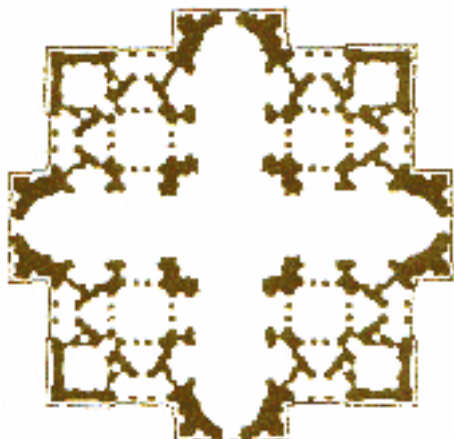


Rys 4.8 Fronton świątyni doryckiej jako efekt działania KWR [6]

Innego przykładu w postaci rzutu Bazyliki Św. Piotra w Rzymie dostarcza historyk sztuki Uniwersytetu Yale , George Hersey . W historii architektury projekt Bramantego zwykło się opisywać jako bazylikę na planie greckiego krzyża z kopułą nad skrzyżowaniem naw i symetrycznie umiejscowionymi dodatkowymi kopułami . Cytując Herseya należałoby opisać ten projekt w sposób następujący :

"...symetryczne zgrupowania w wewnętrznych narożnikach utworzonych przez ramiona krzyża są czterema miniaturami greckiego krzyża , które wspólnie tworzą główną bryłę kościoła . Ramiona tych czterech krzyży składają się z dalszych pomniejszych i ich narożniki z kolei są wypełnione mniejszymi kaplicami i niszami . Innymi słowy plan Bramantego może być nazwany fraktalem , w którym kształt greckiego krzyża został powtórzony w różnych skalach ..."

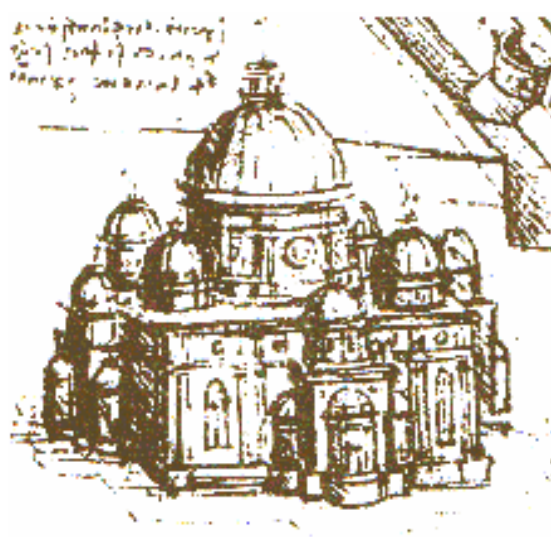
George Hersey przy okazji prezentacji projektu Bramantego przypomina inne , nie zrealizowane projekty Bazyliki Św. Piotra w Rzymie , w których zastosowana została idea samopowtarzalności : projekt Giorgia i projekt Leonarda daVinci , w których występują cztery poziomy powtarzających się w coraz mniejszej skali kopuł .[17]



Rys 4.9 Rzut Bazyliki św. Piotra wg projektu Bramantego [17]



Rys 4.10 Projekt Giorgia [17]



Rys 4.11Projekt Leonarda daVinci[17]

O silnych związkach teorii fraktali z procesem kształtowania formy architektonicznej może świadczyć fakt doszukiwania się cech samopodobieństwa w konstrukcji wieży Eiffle'a przez samego twórcę teorii fraktali Benoita Mandelbrota . W swojej fundamentalnej pracy "Fraktalna geometria natury" na str. 131-132 napisał :

"...twierdę , że na długo przed Kochem , Peano , Sierpińskim , Gustaw Eiffel w swojej wieży zbudowanej w Paryżu świadomie zastosował ideę fraktalnej krzywej pełnej punktów węzłowych ." [5]

Niezależnie od słuszności skojarzeń Mandelbrota możliwe jest wygenerowanie struktury fraktalnej nawiązującej kształtem do słynnej wieży , czego dowodem jest struktura przedstawiona na rys 4.12 . Obiekt ten powstał w wyniku złożenia tradycyjnego IFS składającego się z czterech przekształceń , a następnie przekształcony w kilku krokach iteracji w systemie IFS+ .



Rys 4.12 Struktura fraktalna jako imitacja wieży Eiffle'a

ROZDZIAŁ V STRUKTURY FRAKTALNE JAKO ŹRÓDŁO INSPIRACJI W KSZTAŁTOWANIU FORMY ARCHITEKTONICZNEJ

Formą architektoniczną nazywamy układ skoordynowanych elementów powstałych jako wynik działania człowieka w dziedzinie kształtowania przestrzeni , polegającej na projektowaniu wznoszeniu i artystycznym kształtowaniu wszelkiego rodzaju budowli . Definiowanie formy architektonicznej jako układu elementów implikuje tezę , że forma architektoniczna prawie zawsze zbudowana jest z części wśród których możemy wyróżnić "formę-matkę" oraz "formy-części" .

Podstawowymi kryteriami kształtowania architektonicznego są tendencje do :

- spoistości form
- geometryzacji
- liczby ograniczonej
- silnych uformowań

Klasyfikacja form ze względu na "spójnię wewnętrzną" dzieli formy na formy spoiste oraz formy swobodne . Formą spoistą nazywamy formę, której cechy są dobitne i jednoznaczne , a usunięcie jednej z części powoduje zaburzenie układu . Formą swobodną nazywamy formę , której części są ze sobą lekko związane .

Badania psychologiczne dowodzą , że człowiek dąży do form spoistych . Objawia się to między innymi inklinacjami do wyszukiwania form spoistych na przykład w konstelacjach gwiazd , które w rzeczy samej są formami swobodnymi i organizowaniu ich w gwiazdozbiory . Innym przykładem może być kojarzenie znanych z doświadczenia form ze swobodnym kształtem chmur na niebie .Przykład ten również zdradza istnienie dążności do spoistych uformowań . [8]

Warto nadmienić , że nie tylko człowiek ma tendencje do form spoistych . Jako ciekawostkę można przytoczyć klasyczne doświadczenie w psychologii postaci z sójką szukającą pożywienia . Na trawniku umieszczono doniczki , pod którymi znajdowało się pożywienie dla ptaka . Przy swobodnym ustawieniu doniczek ptak nie mógł trafić do właściwej doniczki . W sytuacji gdy doniczki zostały ustawione w jakąś formę spoistą a pożywienie umieszczono w miejscu dla tej formy ważnym , na przykład w środku krzyża lub doniczki wyrwanej z obrębu koła , sójka trafiała w sposób bezbłędny i natychmiastowy . [8]

W historii architektury formy spoiste były prawie wyłącznym przedmiotem badań . W opisach kategorii estetycznych Witruwiusz podaje wyłącznie reguły komponowania form spoistych . Wskazaniami do osiągnięcia form spoistych są w pracach Witruwiusza pojęcia *ordinatio*, *dispositio* , *eurythmia*,*symetria* .Również estetycy renesansu główny nacisk kładli na formy spoiste . Alberti przez pojęcie *concinntas* rozumie harmonię , która "powinna być jasna we wszystkich częściach jak i w kompozycji dzieła " . Według Albertiego środkiem przez który dochodzi się do harmonii jest symetria , gdyż dzięki niej "części i całość są w pokrewieństwie do

siebie i tworzą jedność , zaś Wolfflin uważa regularność , symetrię , proporcje i harmonię za istotę formy i twierdzi , że "wymaganie symetrii wynika z układu naszego ciała . [8]

Tendencję do geometryzacji form możemy określić inklinacją do zdecydowanych kierunków przestrzeni – pionu , poziomu zamiast odchylenia czy ukosu , wyboru wielokąta foremego zamiast nieforemego , wybór okręgu zamiast nieokreślonego owalu . Tendencja ta ma charakter psychologiczny i jest również spotykana w świecie fauny (pszczoły budują plaster miodu o charakterystycznej geometrii opartej na sześciokącie foremnym) .

Tendencja do liczby ograniczonej oznacza inklinację do form , które składają się z ograniczonej liczby elementów , przy czym liczba ta jest zależna od naszej percepcji wzrokowej . Jesteśmy w stanie natychmiast zauważyć i podświadomie policzyć 3 ,4 elementy , natomiast większą liczbę elementów $n > 6$ określamy jako wiele .

Tendencja do silnych uformowań ma związek ze spoistością formy . W formach spoistych części są zależne od uformowania całości a ich siła przesuwają się całkowicie całej formy . Formą silną nazywamy formę , która posiada cechy ważności dzięki swej pozycji w stosunku do układów otaczających . Formę taką nazywamy zamiennie formą silnie uformowaną . Formą słabą nazywamy formę , która nie zajmuje w otoczeniu pozycji wyjątkowej . Formę taką nazywamy zamiennie formą uformowaną .

Środkami do osiągnięcia spoistości form są między innymi symetria , respektowanie hierarchii form oraz wprowadzanie rytmu . [8]

Symetria jest najprostszym i najbardziej znanym środkiem ukształtowania form spoistych . Dobitność symetrii powoduje uległość i podporządkowanie jej dyscyplinie, tak , że komponowanie odbywa się prawie odruchowo .

Hierarchia form zakłada kulminację coraz bardziej skomplikowanych form . Spoistość formy wzrasta wraz z komplikacją w przypadku gdy komplikacja odbywa się w sposób kontrolowany , na przykład opisany pewnym algorytmem . W przypadku struktur fraktalnych algorytm ten jest opisany zależnością rekurencyjną .

Rytm polega na szeregowaniu form o tej samej wielkości i na zasadzie jednej i tej samej wytycznej . Rytm jest tym bardziej spoisty im bardziej jednoznacznie łączą się w nim elementy jednakowe . Z zagadnieniem rytmu wiąże się również aspekt rozumienia rytmu jako symetrii i symetrii jako rytmu . Symetrie przechodzą w rytmy wówczas gdy liczba elementów mieści się w granicach określonych przez tendencję do liczby ograniczonej . Rytm z sześciu elementów znajduje się na granicy pomiędzy symetrią a rytmem . [8]

Przedstawienie powyższej teorii , której obszernie fragmenty pochodzą z pracy Juliusza Żórawskiego " O budowie formy architektonicznej " [8] pozwala na przeanalizowanie przydatności struktur fraktalnych jako elementów kształtujących formę architektoniczną .

Struktury generowane przy pomocy systemu IFS są formami spójnymi, w których formowanie polega na sumowaniu części i zestawianiu ich według powtarzającego się algorytmu składania przekształceń afinicznych dzięki czemu "część i całość są w pokrewieństwie do siebie i tworzą jedność"[8]. Struktury fraktalne charakteryzuje wielopłaszczyznowa symetria będąca podstawową dyscypliną kształtowania form spójnych. Usunięcie dowolnego elementu struktury powoduje zaburzenie układu. Podstawowe bryły geometryczne stosowane jako zbiory początkowe ciągu przekształceń afinicznych odpowiadają inklinacji do geometryzacji form. Wraz z wzrostem liczby kroków iteracji wzrasta komplikacja formy, która odbywa się w sposób kontrolowany przez stosowanie złożenia tych samych przekształceń afinicznych. Jednakże przy większej liczbie kroków iteracji symetrie przechodzą w rytmy o zbyt dużej liczbie elementów co powoduje niejednoznaczność w odniesieniu do ważności i wyróżnieniu "formy-matki".

Wada ta natomiast zanika w przypadku struktur generowanych za pomocą systemu IFS+ ponieważ obiekt inicjatora stanowi kulminację i dominantę formalną sumy wyrazów ciągu tworzących formę. Powtarzające się w coraz mniejszej skali, kopie inicjatora, których zależność opisana jest wzorem matematycznym wprowadza wrażenie harmonii "jasnej we wszystkich częściach i kompozycji dzieła"[8]. Dzięki zaakcentowaniu inicjatora jako dominanty układu zostaje wprowadzona jednoznaczność co do ważności elementu głównego co wzmacnia siłę formy. Istniejące rytmy dotyczą elementów o tej samej skali, należących do jednego kroku iteracji i najczęściej spełniają wymóg liczby ograniczonej.

Podobnie jak w przykładach IFS pojawia się wielopłaszczyznowa symetria, która jest podstawową dyscypliną w kształtowaniu form spójnych. Wybór podstawowych brył geometrycznych jako wyrazów początkowych ciągu zbiorów jest zgodne z inklinacją do geometryzacji form.

Wyżej wymienione cechy decydujące o spójności formy jednocześnie stanowią o jej silnym uformowaniu. Niezależnie od otaczających układów struktury fraktalne, zwłaszcza generowane za pomocą systemu IFS+ mogą odgrywać rolę dominanty urbanistycznej.

Struktury tworzone za pomocą LF-systemu pomimo wprowadzenia modyfikacji polegającej na zastąpieniu odcinka elementem trzywymiarowym w dalszym ciągu przypominają struktury roślinne. Istnienie wielopłaszczyznowej symetrii decyduje o spójności formy, spełnione jest również dążenie do geometryzacji, jednakże w większości struktur zanika zjawisko rytmu poprzez nadmierne zagęszczenie elementów. Zaburzony jest również proces hierarchizacji formy w której brak jest dominanty a całość pomimo stosowania określonych algorytmów generowania struktury sprawia wrażenie chaosu.

Na podstawie powyższej analizy można stwierdzić, że struktury fraktalne generowane za pomocą systemu IFS a zwłaszcza IFS+ są dobrym źródłem inspiracji w kształtowaniu nieznanych dotąd form architektonicznych.

Na poparcie tej tezy zaprezentowano fotorealistyczne wizualizacje wybranych struktur fraktalnych stosując charakterystyczne dla opracowań architektonicznych zabiegi formalne polegające na dodaniu sztafażu.

Przykład R 01 powstał w oparciu o strukturę IFS 05. Brak wyróżnionej dominanty układu decyduje o swobodnym charakterze formy, której nieznaczną spoistość podkreślają wielokrotne rytmy. Forma ta może być przykładem dzielnicy biurowej w wielkomiejskiej przestrzeni zurbanizowanej.

Przykład R 02 stanowi fragment struktury IFS+03. Związki pomiędzy elementami określone za pomocą procedury składania przekształceń afinicznych decydują o spoistości bryły. O silnym uformowaniu układu dodatkowo decyduje kulminacja w postaci obiektu głównego. Całość może sugerować przykład zabudowy mieszkaniowej wielorodzinnej w środowisku miejskim.

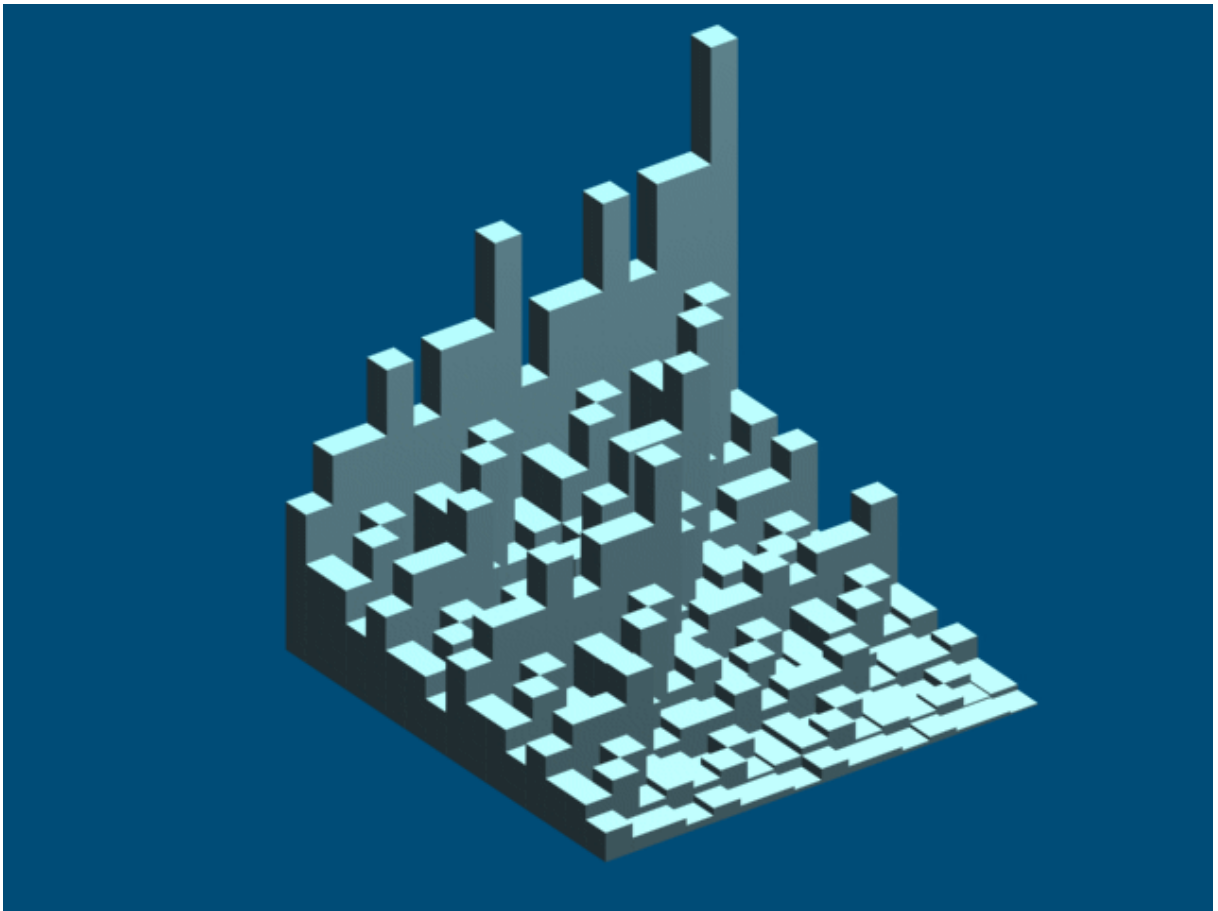
Przykład R 03 jest czwartym krokiem iteracji struktury IFS+10. Dominantę układu stanowi obiekt inicjatora, którym w tym wypadku jest kopuła geodezyjna oparta na połowie dwudziestościanu foremego. Kopie inicjatora występujące w układzie w coraz mniejszej skali, wprowadzają hierarchizację form, decydującą o spoistości formy. Obiekt może być przykładem hali widowiskowej o silnym uformowaniu, stanowiącej dominantę dla dowolnego układu urbanistycznego.

Przykład R 04 podobnie jak R 03 powstał jako struktura generowana za pomocą systemu IFS+ w oparciu o kopułę geodezyjną. Cechy decydujące o spoistości formy są zatem analogiczne jak w przypadku poprzedniego przykładu. Obiekt może pełnić funkcję nie tylko hali widowiskowej. Na prezentowanym renderingu strukturę IFS+09 przedstawiono jako stację meteorologiczną.

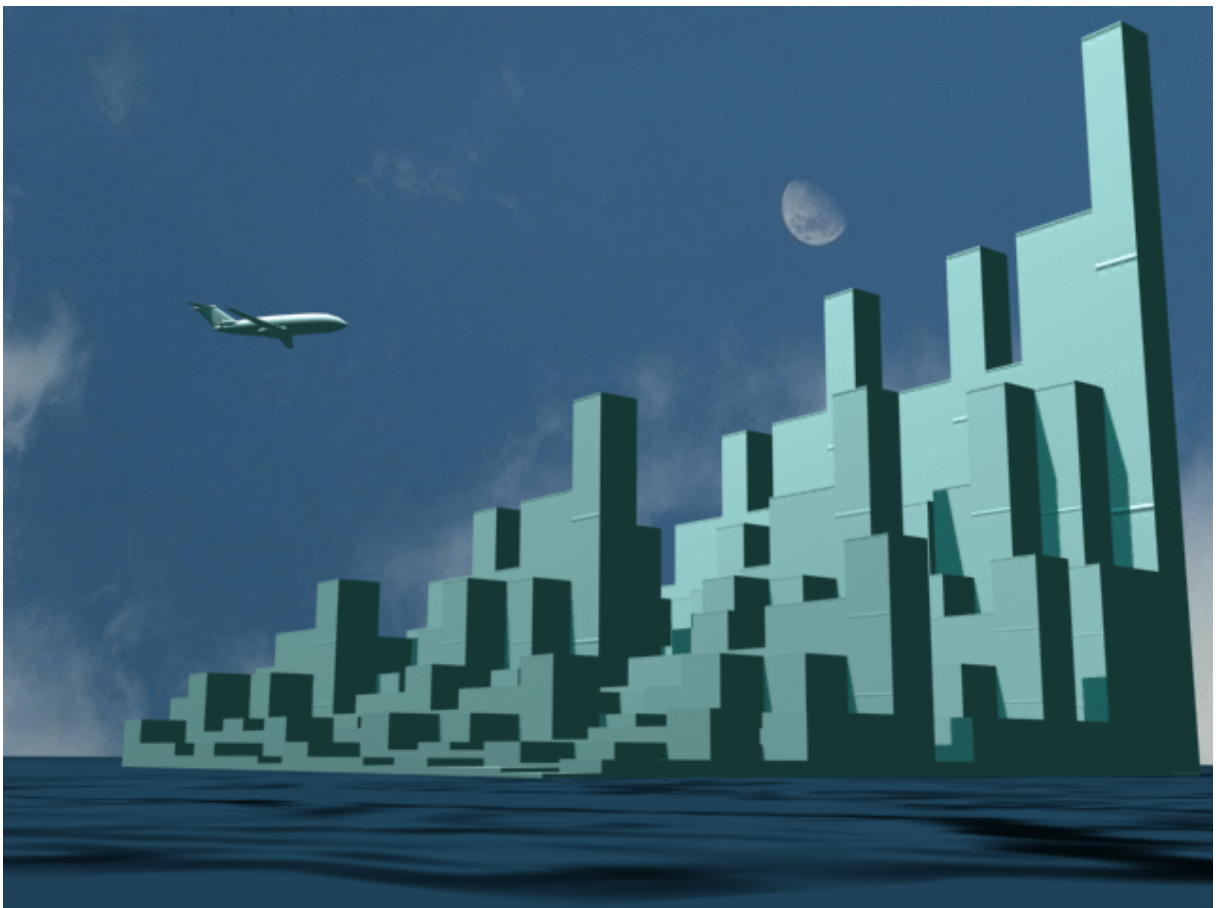
Przykład R 05 powstał jako rezultat stosowania systemu IFS+, którego zbiorem początkowym jest graniastosłup prawidłowy o podstawie sześciokątnej. Dzięki zaakcentowaniu inicjatora jako dominanty układu została wprowadzona jednoznaczność co do ważności elementu głównego. Obiekt może być przykładem budynku biurowego w przestrzeni miejskiej.

Przykład R 06 podobnie jak przykład poprzedni jest fraktalem powstałym w wyniku wielokrotnego przekształcania graniastosłupa prawidłowego o podstawie sześciokątnej. W odróżnieniu od R 05 został wygenerowany za pomocą systemu IFS w związku z czym osiągnięto formę o mniejszej spoistości. Na prezentowanym renderingu przedstawiono obiekt o funkcji sakralnej.

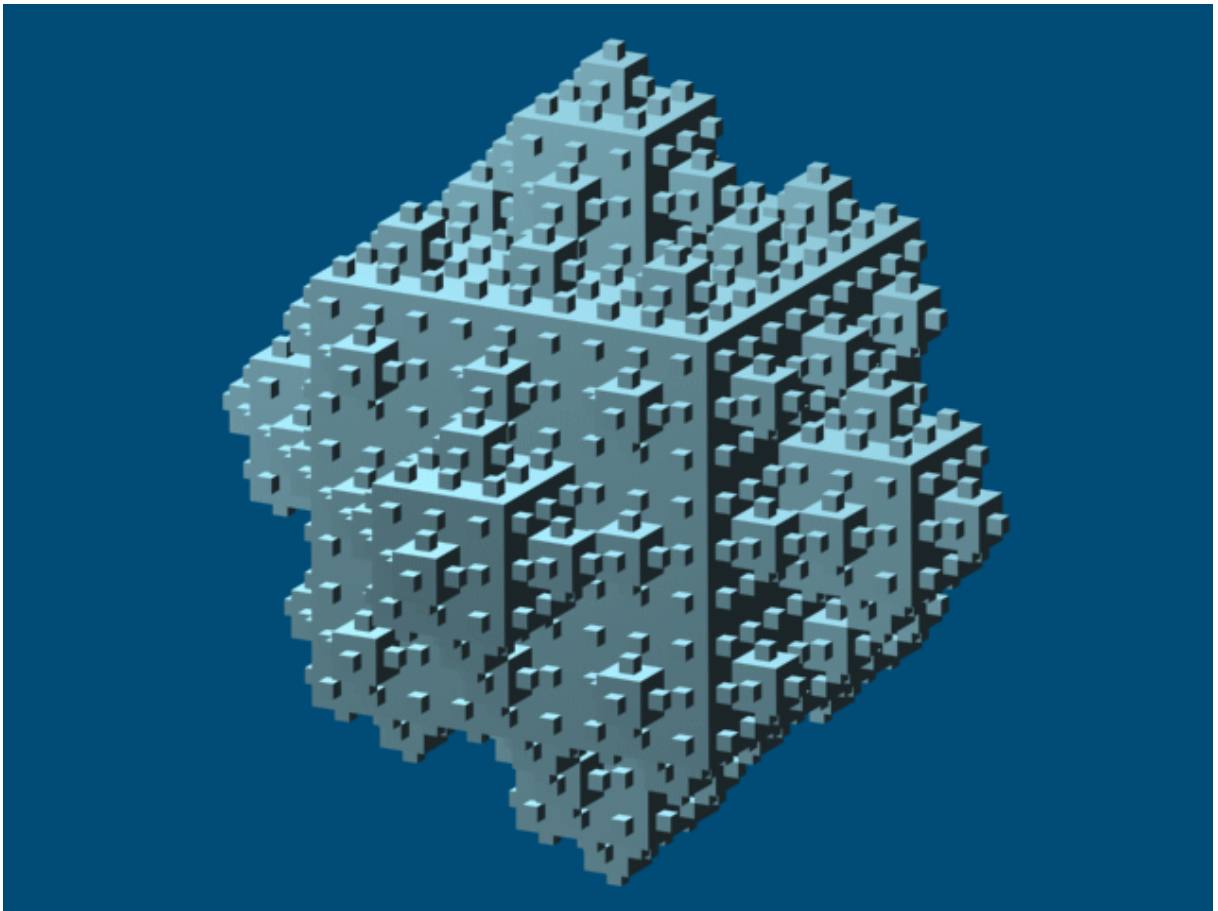
Propozycje funkcji dla pozostałych przykładów zostały umieszczone w objaśnieniach do poszczególnych wizualizacji. Niezależnie od przedstawianych propozycji prezentowane struktury fraktalne mogą stanowić formę architektoniczną dla dowolnej funkcji obiektu budowlanego.



IFS 05 jako...



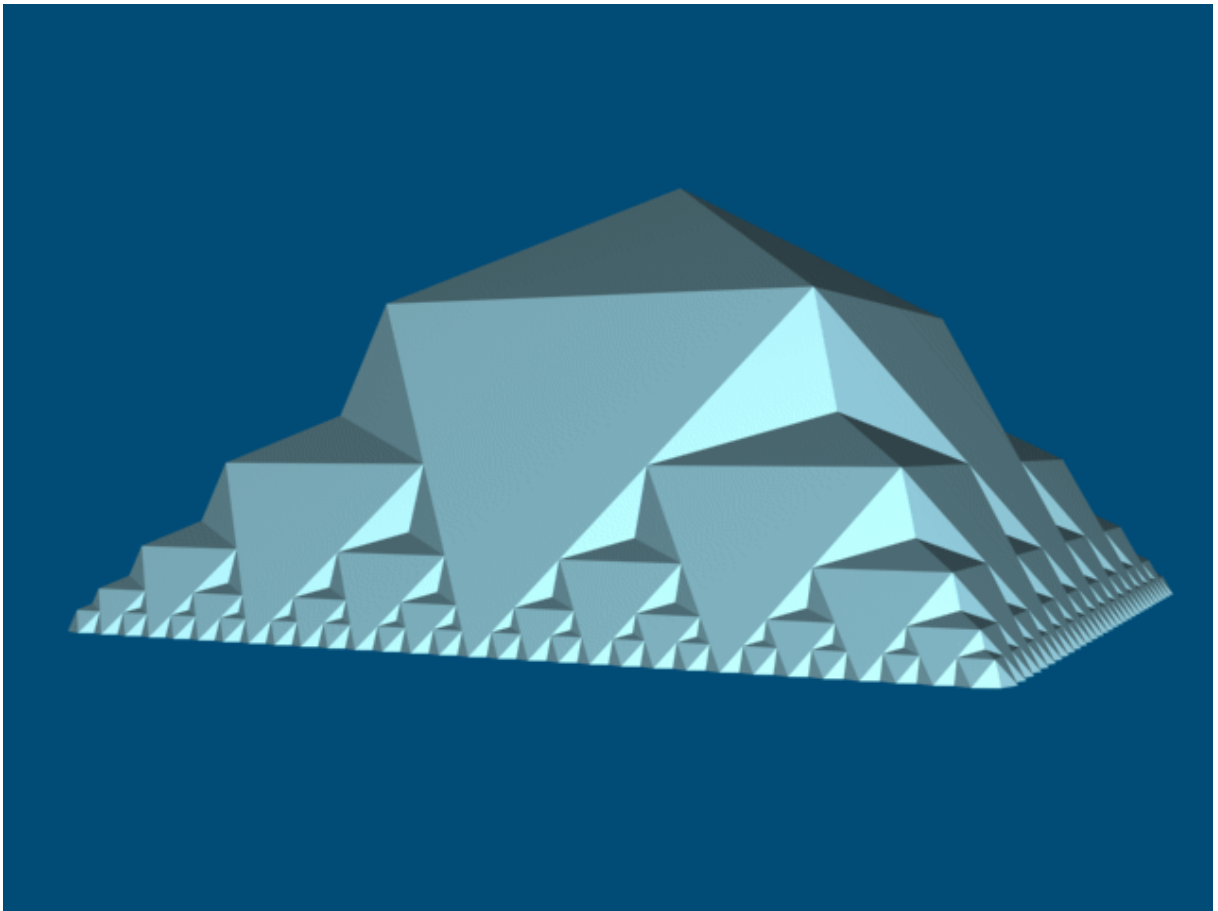
R 01 przykład dzielnicy biurowej w przestrzeni zurbanizowanej



Fragment IFS+03 jako...



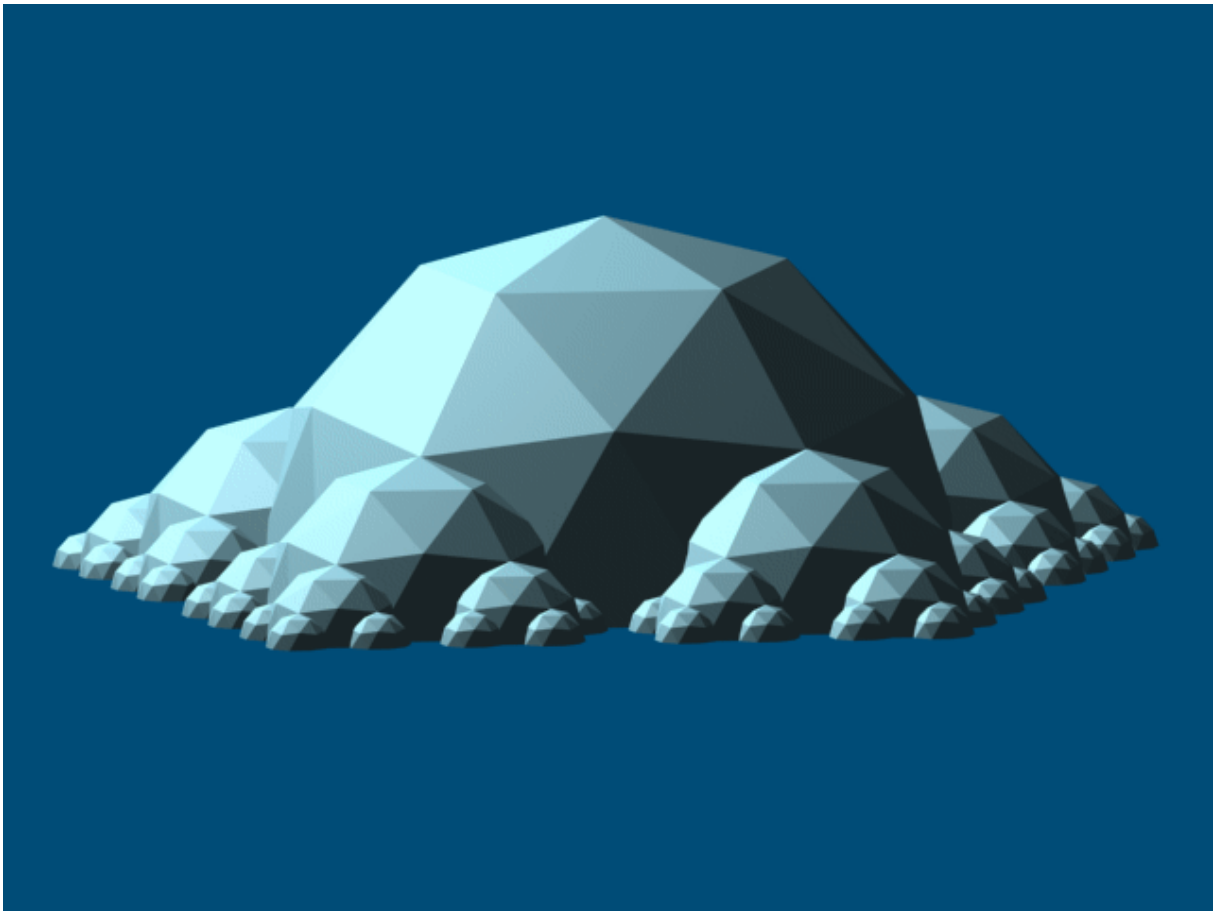
R 02 przykład zabudowy mieszkaniowej wielorodzinnej w środowisku miejskim



IFS+10 jako...



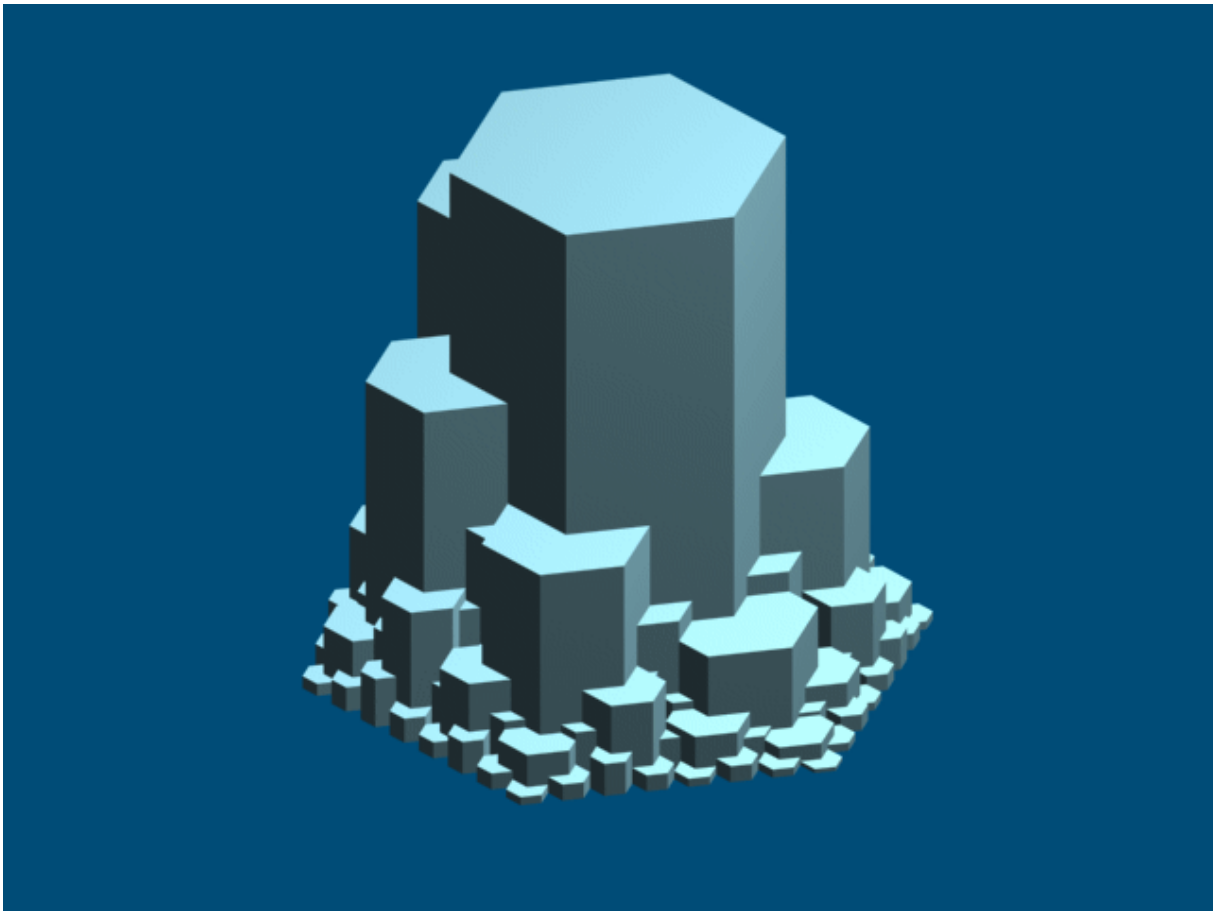
R 03 przykład hali widowiskowej



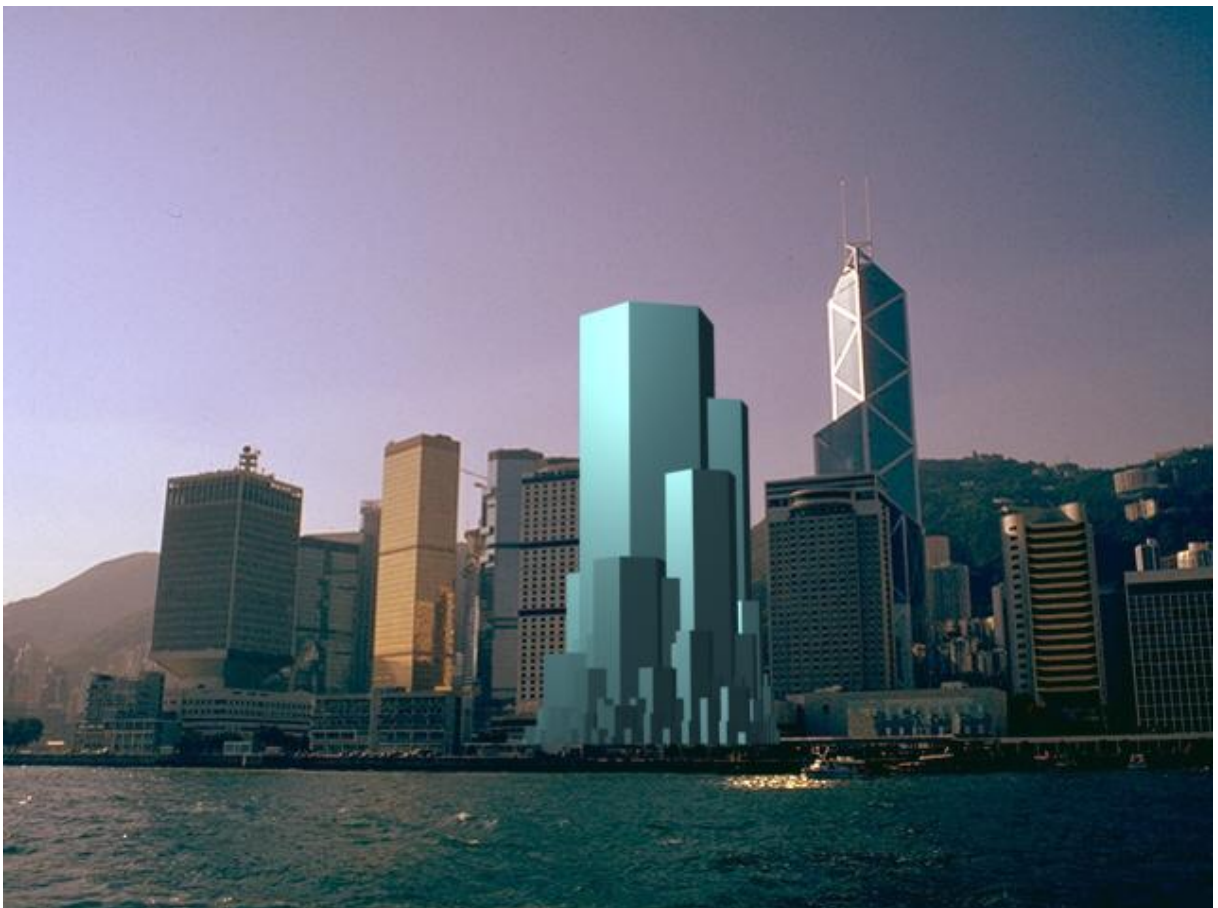
IFS+09 jako...



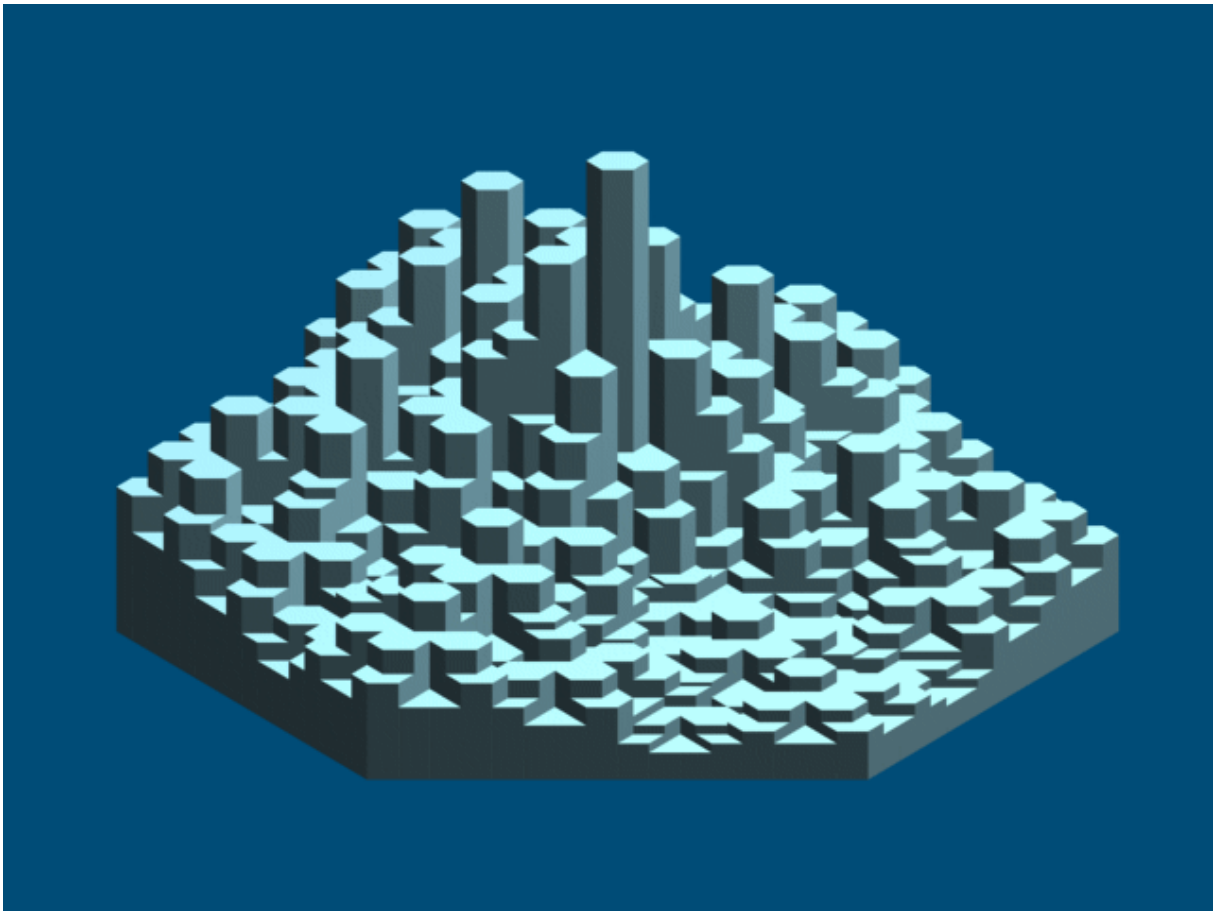
R 04 przykład stacji polarnej



IFS+ 06 jako...



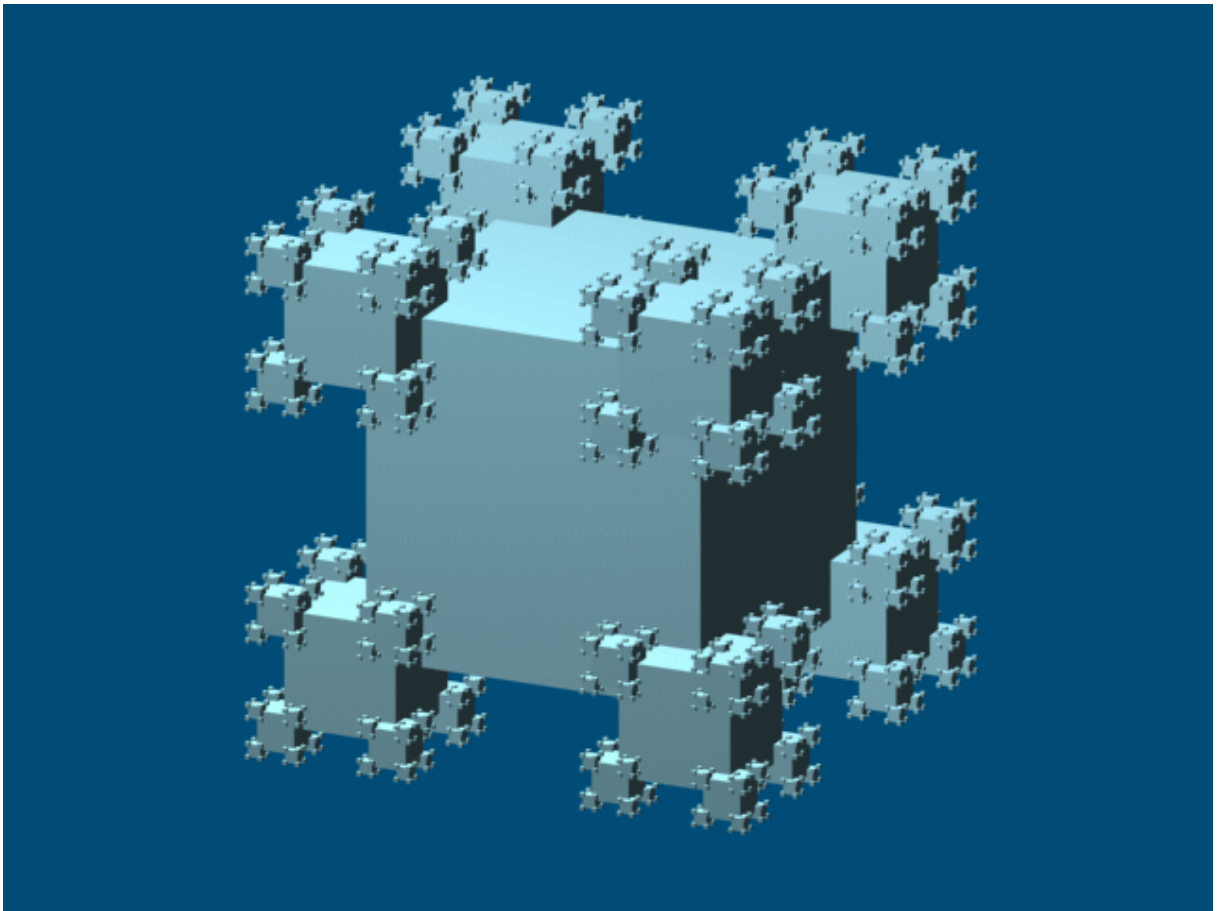
R 05 przykład budynku biurowego



IFS 06 jako...



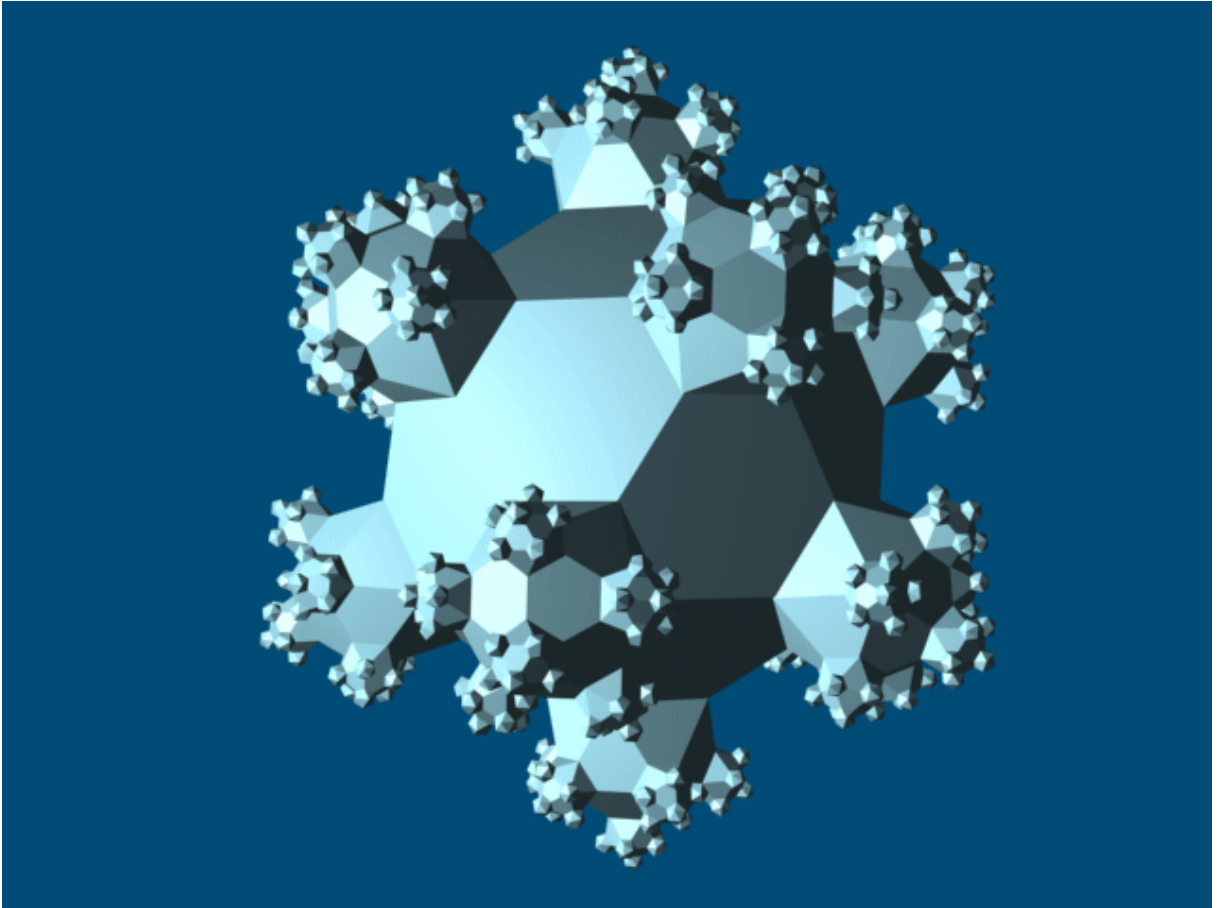
R 06 przykład obiektu o funkcji sakralnej



IFS+ jako...



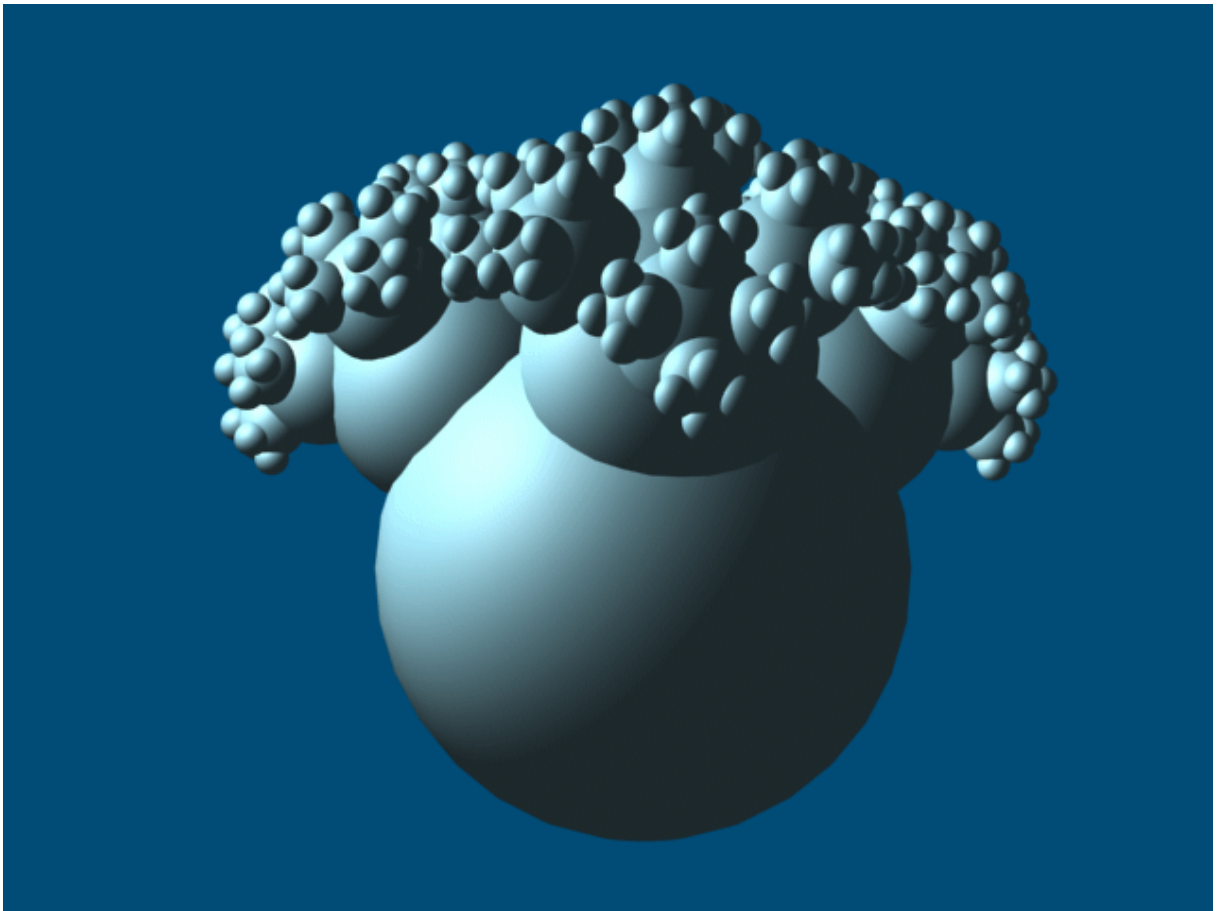
R07 przykład zakładu karnego



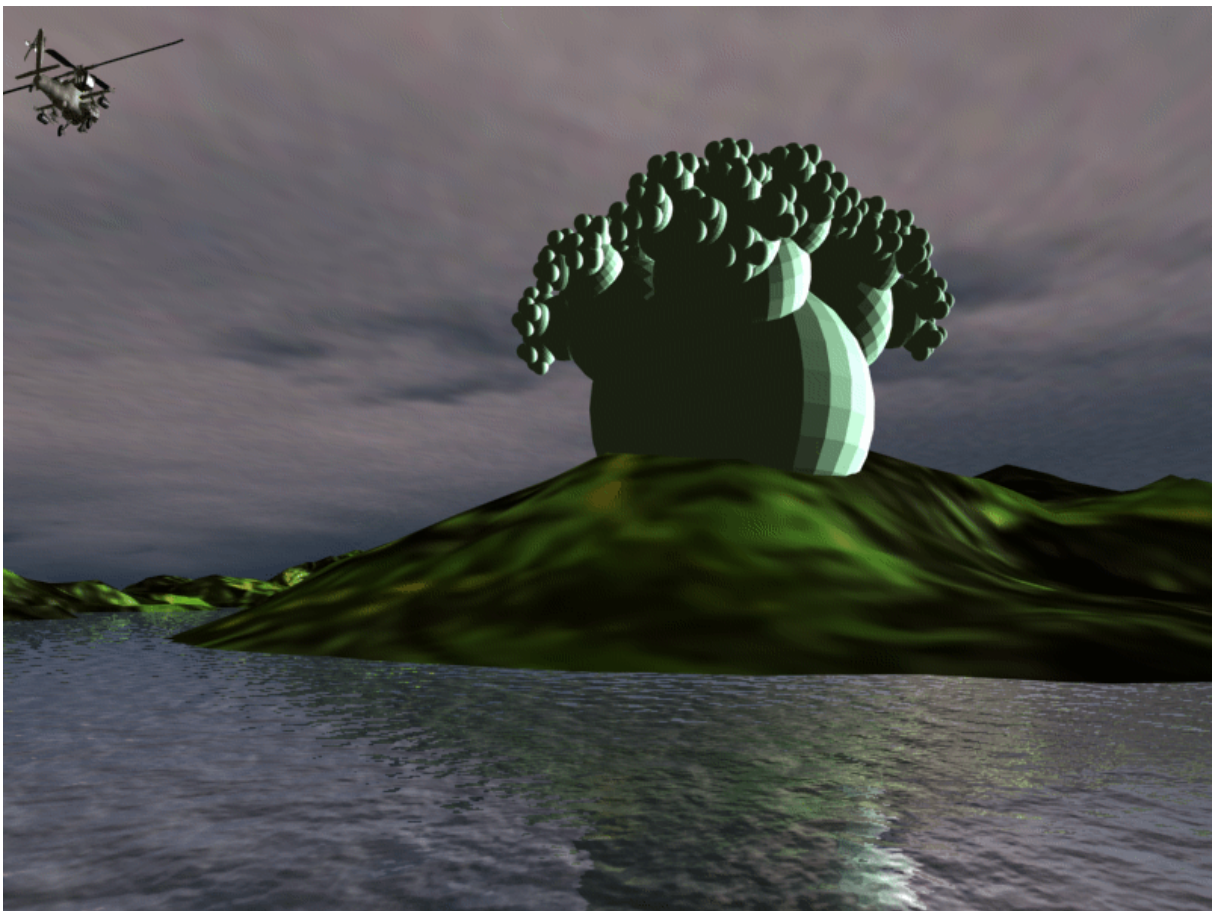
IFS+08 jako...



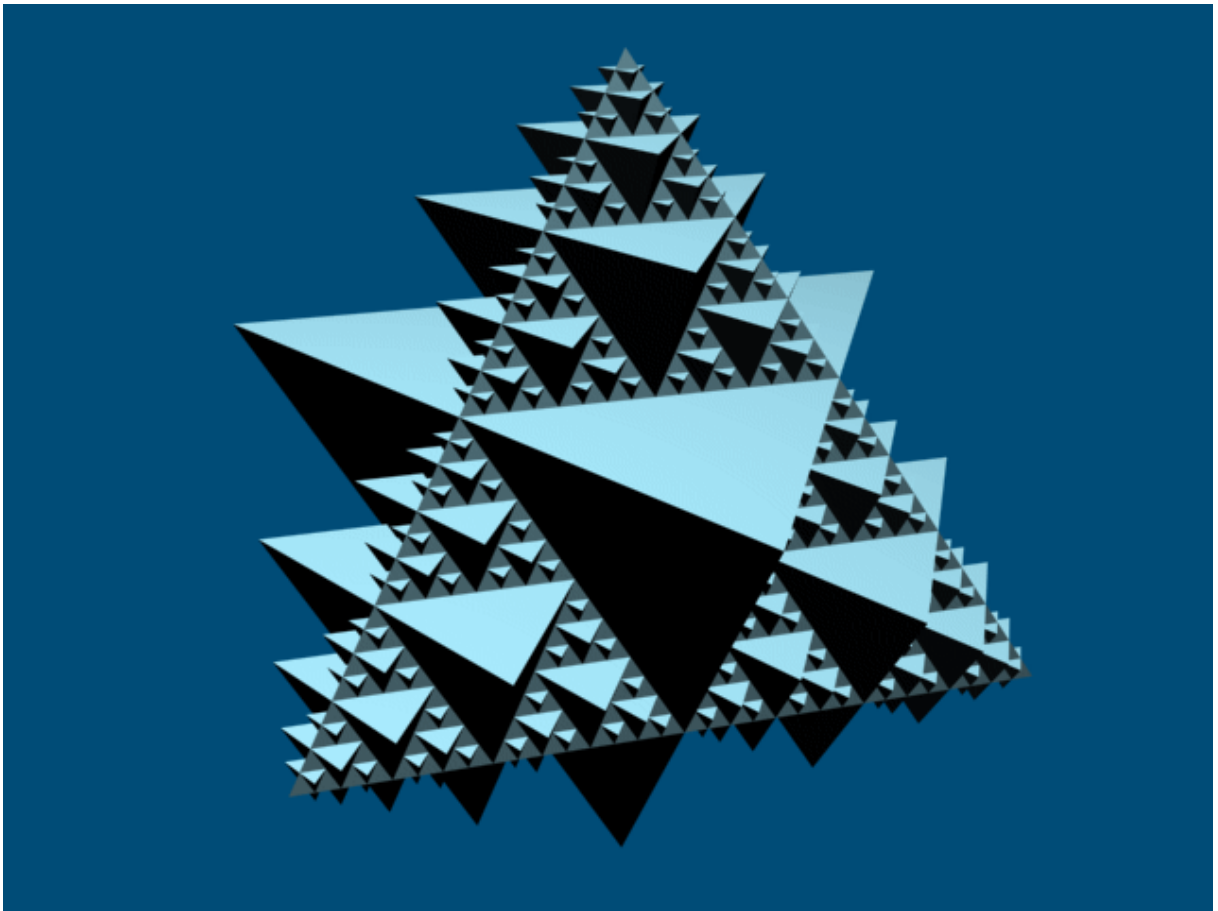
R08 przykład obserwatorium meteorologicznego



IFS+11 jako ...



R09 przykład architektury organicznej o konstrukcji pneumatycznej



IFS+02 jako ...



R10 przykład hotelu wysokogórskiego

LITERATURA

- [1] H. –O. Peitgen , H. Jurgens , D. Saupe ; *Granice chaosu , Fraktale*
Wydawnictwa Naukowe PWN , Warszawa 1995
- [2] J. Kudrewicz , *Fraktale i chaos*
Wydawnictwa Naukowo Techniczne , Warszawa 1993
- [3] P. Pierański , *Fraktale , od geometrii do sztuki*
Ośrodek Wydawnictw Naukowych , Poznań 1992
- [4] P. Prusinkiewicz , A. Lindenmayer , *The Algorithmic Beauty of Plants*
Springer-Verlag , New York 1990
- [5] B. B. Mandelbrot , *The Fractal Geometry of Nature*
W. H. Freeman and Co. , New York 1982
- [6] C. Bovill , *Fractal Geometry in Architecture and Design*
Birkhauser , Boston 1996
- [7] R. Eglash , *African Fractals*
Rutgers University Press , 1999
- [8] J. Żórawski , *O budowie formy architektonicznej*
Arkady , Warszawa 1973
- [9] K. Borsuk , *Geometria analityczna wielowymiarowa*
Państwowe Wydawnictwa Naukowe , Warszawa 1976
- [10] M. Stark , *Geometria analityczna z wstępem do geometrii wielowymiarowej*
Państwowe Wydawnictwa Naukowe , Warszawa 1972
- [11] I. Dziubiński , T. Świątkowski , *Poradnik matematyczny*
Państwowe Wydawnictwa Naukowe , Warszawa 1980
- [12] I.O. Angell , *Wprowadzenie do grafiki komputerowej*
Wydawnictwa Naukowo Techniczne , Warszawa 1988
- [13] W. Jackson , *Other shore fractals : Hindu transcendence symbols
and the modelling of wholeness .*
<http://classes.yale.edu/>
- [14] R. Courant , H. Robbins , *Co to jest matematyka?*
 Prószyński i S-ka, Warszawa 1998
- [15] J. Piszczala , M. Piszczala , B. Wojcieszyn , *Matematyka z zadaniami*
Państwowe Wydawnictwa Naukowe , Warszawa 1981
- [16] American Institute of Indian Studies , Center for Electronic Text and Image ,
University of Pennsylvania Library
- [17] *The Fractal Geometry Summer Workshop*
<http://classes.yale.edu/>