35.

Vollständiges Lehrbuch der Ebenen Geometrie und Trigonometrie

zum

Gebrauche für zwei Lehr-Curse auf Gymnasien, wie auch zum Selbstunterrichte; mit besonderer Berücksichtigung dessen was von diesen Wissenschaften beim Offizier-Examen gefordert wird.

Verfaßt von

Elcan Marcus Hahn

Doctor der Philosophie, Lehrer der Mathematik am Magdalenischen Gymnasium und Vorsteher des technischen Instituts hieselbst.

Breslau
bei Wilibald August Holäufer
1818.

Sr. Hochwohlgebohren

dem Herrn

Ernst von Bieberstein

Königl. Preuß. Major im Ingenieur Korps, Kommandeur der vierten (Westpreußischen) und fünften (Schlesischen) Pionier-Abtheilung, Ritter des eisernen Kreutzes ꝛc.

als

Beweis

der

innigsten Hochachtung und Freundschaft

gewidmet

vom Verfasser.

Vorrede.

Giebt es auch, wie Euklid sehr richtig bemerkt, selbst für Könige keinen besondern Weg zur Mathematik, so kann doch unstreitig der vorhandene Weg durch Ausfüllung mancher Lücke, durch Hinwegräumung manches Hindernisses dem angehenden Wanderer bequemer und zugängiger gemacht werden. Freilich aber muß das Material zu dieser Ausfüllung sich mit dem vorhandenen innigst verbinden und mit demselben ein unzertrennliches Ganze bilden, wollen wir anders nicht Gefahr laufen durch vermeintliche Ergänzung eine Trennung hervorzubringen, gefährlicher als die frühere kleine Lücke war. Freilich müssen wir bei Hinwegräumung der Hindernisse darauf bedacht seyn den Grund nicht anzutasten, um nicht einer augenblicklichen

Bequemlichkeit halber einem völligen Einsturze ausgesetzt zu werden. Auch darf der Weg, soll er anders auf eine merkliche Höhe führen, sich anfänglich nur allmählich und fast unmerklich erhöhen, um den Wanderer nicht durch den Anblick einer allzugroßen Steilung zurück zu schrecken. Ist er aber erst des Steigens gewohnt, und kann er erst festen Standes nach der vorgesteckten Höhe hinaufblicken, dann mag immerhin der Weg ein wenig steil hinan gehen, er wird dennoch ohne allzu große Anstrengung zum vorgesetzten Ziele führen.

Von diesen Betrachtungen bin ich bei Bearbeitung des vorliegenden Lehrbuchs ausgegangen. Ein vieljähriger und mannigfacher Unterricht in den mathematischen Wissenschaften hat mich überzeugt, daß man anfänglich nicht deutlich genug seyn kann, um den angehenden Schüler mit den ersten Begriffen einer Wissenschaft und mit deren Eigenthümlichkeiten vertraut zu machen. Ist dieses aber erreicht, sind diese Begriffe so wie deren Verknüpfung unter einander bei ihm erst einheimisch geworden, dann mag er getrost ohne all zu sorgsame Leitung den nächsten Weg einschlagen, er wird, auf bekanntem Boden wandelnd, nur selten einen Fehltritt thun. Dieserhalb habe ich auch im ersten Kapitel des ersten Abschnitts nichts hinweg gelassen, was mir geeignet schien, den ersten Begriffen der Geometrie beim angehenden Schüler Eingang zu verschaffen. Dieserhalb habe ich auch in den folgenden Kapiteln die Theile eines jeden Satzes sorgfältig von einander geschieden, um den Schüler zu gewöhnen die Voraussetzung von der Behauptung eines Satzes zu trennen, und um ihn aufmerksam zu machen in welchem Theile der Voraussetzung und in welchen vorher gegangenen Sätzen und Definitionen er den Beweis zu jedem Theile der Behauptung eines Satzes zu suchen habe. So vorbereitet, und auf seinen ersten mühsamen Reisen an einem geregelten Schritte gewöhnt, wird er beim Vorschreiten die erlangte Spur weiter verfolgen können, weshalb ich von §. 155 an jene Trennung der Theile eines Satzes nur angedeutet habe, ohne jedoch dem Beweise die erforderliche Deutlichkeit und Gründlichkeit zu entziehen. Im zweiten Abschnitte aber, wo der Schüler unter sorgsamer Leitung über den Gang der Mathematik gehöriges Licht erhalten haben konnte, glaubte ich schon kürzer seyn zu dürfen, und manches dem eigenen Nachdenken desselben überlassen zu können.

Die meisten Lehrbücher dieser Wissenschaft, deren viele sehr schätzbar sind, beobachten einen durchaus gleichförmigen Gang. Der bessere Theil derselben, meistens dem Wege Euklids folgend, ist, wie dieser, kurz, bündig und strenge in den

Beweisen; aber diese Kürze und Bündigkeit stellt sich zu frühzeitig ein, und schrickt nicht selten den Schüler vom weiteren Vorschreiten ab. Denn was für das reifere Alter des am Nachdenken gewöhnten Mannes geeignet ist, für welches Euklid seine Elemente abgefaßt, dürfte sich schwerlich für unser Jünglingsalter eigenen. Ein anderer Theil derselben, deutlicher und faßlicher als jene, ist es gemeinhin auf Kosten der Gründlichkeit, und daher nur brauchbar dem Schüler einige Begriffe von der Auflösuug mathematischer Aufgaben zu geben, keinesweges aber ihn in den Geist der Mathematik einzuführen.

Der oben angegebene Weg schien mir daher der zweckmäßigste. Ob ich ihn erreicht habe überlasse ich Sachkennern zu entscheiden; wenigstens habe ich keine Mühe gespart allenthalben Deutlichkeit mit Gründlichkeit und Vollständigkeit zu verbinden, und mir da Kürze erlaubt, wo es ohne Beeinträchtigung eines dieser Haupterfordernisse geschehen konnte. Die Theorie der Parallelen glaube ich nach Bertrand vollkommen evident vorgetragen zu haben. Der Begriff des Unendlichen läßt sich, meiner Ansicht nach der Natur der Parallelen gemäß, hierbei schwerlich umgehen. Wir können aber in Folge der bis dahin erlangten Begriffe keine andere unendliche Größen anwenden als die Winkelflächen und Flächenstreifen, mit denen man auch hierbei vollkommen ausreicht. Wem gleichwohl diese Darstellung nicht einleuchten sollte, der kann ohne den Zusammenhang zu unterbrechen, die §§. 116 bis 123 überschlagen, den Lehrsatz des §. 124 als Grundsatz annehmen urd mit §. 125 fortfahren.

Die auf dieser Theorie beruhenden folgenden Lehren habe ich durch Einschaltung manches mir wichtig geschienenen Satzes, durch Vervollständigung manches Beweises zu ergänzen und besonders der Lehre vom Kreise, dem Einschreiben und Umschreiben der Polygone und der Berechnung der Zahl π mehr Ründung zu geben gesucht.

Die ebene Trigonometrie ist größtentheils analytisch behandelt worden, weil mir dieser Weg der Natur dieser Wissenschaft, so wie den großen Erweiterungen, deren sie fähig ist, am angemessensten schien. Vermittelst einiger der hier entwickelten Formeln lassen sich oft Sätze beweisen, welche sonst nur vermittelst der Differential- und Integralrechnung bewiesen werden könnten. Den beiden höchst wichtigen Formeln ($\sin \alpha \pm \beta$), $\cos (\alpha \pm \beta)$ habe ich einen neuen mehr analytischen Beweis gegeben, welcher mir mit der gebrauchten Methode übereinstimmender als der gewöhnliche schien.

Die beiden ersten Abschnitte dieses Lehrbuchs sind für die dritte Klasse höherer Gymnasien bestimmt. Hier, wo gewöhnlich mit dem geometrischen Unterrichte der Anfang gemacht wird, kommt es besonders darauf an, den Schüler an Gründlichkeit zu gewöhnen, und dem Lehrer dieser Klasse fällt der größte Theil des Verdienstes zu, wenn die Schüler in der folgenden zweiten Klasse den dritten und vierten Abschnitt nebst der ebenen Trigonometrie vollständig und gründlich erlernen können. Es kann dann nicht schwer werden in der ersten Klasse mit der Stereometrie, sphärischen Trigonometrie und höhern Geometrie fortzufahren.

Die ersten beiden Abschnitte enthalten auch das, was meines Wissens beim Cavallerie-Unteroffiziers-Examen gefordert wird, und das ganze Lehrbuch enthält das, was zum Offizier-Examen erforderlich ist.

Bei allem Fleiße, den ich auf die Correctur verwendet habe, war es dennoch aus mancherlei Ursachen nicht möglich die einem solchem Lehrbuche nöthige Correctheit zu erlangen. Indessen sind die Druckfehler sorgfältig aufgesucht und angezeigt, welche ich vor Durchlesung desselben zu verbessern bitte.

Breslau den 31. May 1818.

Hahn.

Inhalt.

Erster Abschnitt.
Von den geradlinigten Figuren.

Seite

Zweiter Abschnitt.
Vom Kreise.

Dritter Abschnitt.
Von den Verhältnissen und der Aehnlichkeit der Figuren.

Seite

Vierter Abschnitt.

Von der Ausmessung der Linien, Winkel und der ebenen Figuren.

Die ebene Trigonometrie.

Die Geometrie.

Allgemeine Grundsätze der Mathematik.

Wiewohl die folgenden Wahrheiten von den Größen überhaupt gelten, und daher gewöhnlich dem Unterrichte in der Arithmetik voran geschickt werden, so dürften sie doch in manchem Lehrbuche der Arithmetik nicht in der Allgemeinheit dargestellt werden, als es für den folgenden Vortrag nöthig ist; daher wir es nicht für undienlich erachten, sie hier aufzuzählen.

Erster Grundsatz.

Jede Größe ist sich selbst gleich.

Denkt man sich nehmlich eine und dieselbe Größe als zweimal vorhanden, so ist die eine derselben der andern gleich.

Zweiter Grundsatz.

Wenn zwei Dinge einander gleich sind, so kann das eine, in Rücksicht der Größe, an die Stelle des andern gesetzt werden.

Dritter Grundsatz.

Denkt man sich irgend eine Größe in Theile zerlegt, so ist das Ganze allen seinen Theilen zusammen genommen gleich, und größer als einer oder einige seiner Theile.

Vierter Grundsatz.

Wenn jede von zweien Größen A und B einer dritten C gleich ist, so müssen auch A und B einander gleich seyn.

Fünfter Grundsatz.

Wenn eine Größe größer oder kleiner ist, als eine von zweien gleichen Größen, so ist sie auch größer oder kleiner als die andere.

Sechster Grundsatz.

Was größer ist, als die größere von zweien ungleichen Größen, ist auch größer als die kleinere. Und was kleiner ist, als die kleinere von zweien ungleichen Größen, ist auch kleiner als die größere.

Siebenter Grundsatz.

Wenn zwei Größen einander gleich sind, und man setzt zur einen eben so viel als zur andern hinzu, so müssen beide Summen einander gleich seyn.

Achter Grundsatz.

Wenn zwei Größen einander gleich sind, und man setzt zur einen mehr als zur andern hinzu, so muß die erste Summe größer als die andere seyn.

Neunter Grundsatz.

Wenn zwei Größen ungleich sind, und man setzt zur größern eben so viel als zur kleinern hinzu, so muß die erste Summe größer als die andere seyn.

Um so mehr muß, wenn man zur größern mehr als zur kleinern hinzusetzt, die erste Summe größer als die zweite seyn.

Zehnter Grundsatz.

Wenn zwei Größen einander gleich sind, und man zieht von der einen eben so viel als von der andern ab, so müssen die Reste einander gleich seyn.

Zieht man hingegen von der einen mehr als von der andern ab, so bleibt da weniger übrig, wo man mehr abgezogen hat.

Eilfter Grundsatz.

Sind zwei Größen ungleich, und man zieht von der größern eben so viel als von der kleinern ab, so ist der erste Rest größer als der andere.

Zwölfter Grundsatz.

Wenn zwei Größen einander gleich sind, so ist jedes Vielfache der einen dem eben solchen Vielfachen der andern gleich.

Dreizehnter Grundsatz.

Wenn zwei Größen ungleich sind und man nimmt von der größern ein eben solches Vielfache als von der kleinern, so ist das erste Vielfache größer als das andere.

Vierzehnter Grundsatz.

Wenn zwei Größen einander gleich sind, und man nimmt von der einen den eben so vielten Theil als von der andern, so müssen diese Theile einander gleich seyn.

Fünfzehnter Grundsatz.

Wenn zwei Größen ungleich sind, und man nimmt von der größern den eben so vielten Theil als von der kleinern, so ist der erste Theil größer als der andere.

Erster Abschnitt.

Von den geradlinigten Figuren.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Begriffe von der Ausdehnung, und insbesondere von den Körpern, Flächen, Linien, Punkten, Winkeln rc.

§. 1. Erklärung.

Die Geometrie *) ist die Wissenschaft, welche die Eigenschaften der ausgedehnten Größen untersucht, und lehrt, wie man aus Größen dieser Art andere unbekannte finden kann. Sie untersucht also die Eigen-

*) Ueber den Gegenstand der Mathematik überhaupt, und eines jeden Zweiges derselben insbesondere handelt meine Einladungsschrift: Umriß der mathematischen Wissenschaften. Breslau, 1817. bei Holäufer.

schaften der Größen im Raume, und sieht bei ihren Untersuchungen vorzüglich auf die gegenseitige Lage der Theile dieser Größen, d. h. sie zieht vorzüglich die Gestalt derselben in Betrachtung.

§. 2. Erklärung.

Um die Lehren der Geometrie gehörig auffassen zu können, muß man für erst alle Eigenschaften der zu untersuchenden Gegenstände außer Acht lassen, und nur auf Größe und Gestalt derselben Rücksicht nehmen. Wiewohl nun keiner der uns bekannten physischen Körper in allen seinen Theilen von der Materie, welche ihn zusammensetzt, angefüllt ist, sondern einige mehr andere weniger durchlöchert sind, so nimmt doch der Geometer bei seinen ersten Untersuchungen keine Rücksicht hierauf, sondern betrachtet den ganzen Raum, den ein physischer Körper einzunehmen scheint, als in allen seinen Theilen von jener Materie ununterbrochen angefüllt. Eine solche Größe, deren Theile alle so zusammenhängen, daß wo ein Theil aufhört, unmittelbar ein anderer anfängt, und zwischen dem Ende des einen und dem Anfange des andern nichts ist, was nicht zu dieser Größe gehörte, nennt man eine **stetige** oder **zusammenhängende** Größe.

§. 3. Erklärung.

Denkt man sich nun von einem stetigen physischen Körper seine Materie und alle andere Eigenschaften desselben hinweg, und behält blos den von ihm eingenommenen Raum bei, so ist dieser Raum ein **geometrischer Körper**.

Ein geometrischer Körper ist also ein nach allen Richtungen, nehmlich nach Länge, Breite und Dicke oder Höhe ausgedehnter Raum.

Anmerkung. Um einen Begriff von einem geometrischen Körper zu erhalten, denke man sich eine Kugel von geschmolzenem Wachs umgeben, und die Möglichkeit, daß die Kugel herausgehoben werden könne, ohne daß das Wachs in der einmal angenommenen Form eine Aenderung erleide, so wird der innerhalb des Wachses bleibende leere Raum einen geometrischen Körper bilden. Hat man aber erst die Eigenschaften eines geometrischen Körpers gefunden, so ist es sehr leicht, dieselben auf den physischen Körper anzuwenden.

§. 4. Erklärung.

Da der geometrische Körper nur ein Theil des unendlichen Raums ist, so wird in den Gegenden, wo der Raum des Körpers aufhört, sogleich ein anderer anfangen. Man denke sich z. B. ein Gefäß zum Theil mit Wasser angefüllt, so wird in der Gegend, wo der vom Wasser eingenommene Raum aufhört, unmittelbar ein anderer anfangen. Nun aber nennen wir die Gränze eines Gegenstandes sein äußerstes, oder die Gegend, wo er aufhört, dieser Gegenstand zu seyn. Die Gränze des vom Wasser eingenommenen und des darüber fortlaufenden Raums kann also keine Dicke haben, indem sie weder einen Theil des untern, noch des obern Raums ausmachen kann; sie kann also kein Theil des Körpers, und nur nach Länge und Breite ausgedehnt seyn. Eine solche Ausdehnung nennt man eine Fläche.

Eine Fläche ist also die Gränze des Körpers, und folglich eine Ausdehnung, welche nur Länge und Breite, aber keine Dicke hat.

Anmerkung. Da man in jeder Gegend des Körpers den einen Theil desselben vom andern geschieden, also beide Theile desselben als an einander gränzend betrachten kann, so läßt sich auch in jeder Gegend des Körpers eine Fläche gelegt denken. Es wäre aber sehr irrig, wenn man den Körper als aus Flächen zusammen gesetzt betrachten wollte, welches unmöglich ist, da letztere eine Ausdehnung ganz anderer Art als der Körper ist, und jede Größe nur aus Theilen derselben Art zusammen gesetzt seyn kann.

§. 5. Erklärung.

Die Gränze zweier an einander stoßenden Flächen, welche also weder einen Theil der einen noch der andern Fläche ausmachen, und daher keine Breite haben kann; nennt man eine Linie.

Sie ist also eine Ausdehnung nach Länge ohne Breite und Dicke.

Wäre es möglich, daß die Oberfläche zweier an einander stoßenden Felder vollkommen stetige Größen wären, so würde die Gegend, wo diese an einander stoßen, ihre beiderseitige Gränze seyn, könnte weder dem einen noch dem andern zugehören, also keine Breite haben, und müßte daher eine Ausdehnung ganz anderer Art, nehmlich bloß nach der Länge und also eine Linie seyn.

Anmerkung. Eine Fläche kann, als der Linie ungleichartig, nicht aus Linien zusammen gesetzt seyn, wiewohl man sich in jeder Gegend einer Fläche eine Linie gezogen denken kann.

§. 6. Erklärung.

Die Gränze zweier an einander stoßenden Linien heißt ein Punkt. Als Gränze beider Linien kann er weder der einen noch der andern zugehören, also keine Länge haben; und da er, in der Linie befindlich, auch keine Dicke haben kann, so hat ein mathematischer Punkt weder Länge noch Breite noch Dicke.

Anmerkung. Eine Linie kann nicht aus Punkten zusammen gesetzt seyn, wiewohl man sich in jeder Stelle einer Linie die Gränze zweier an einander stoßenden Linien, also einen Punkt denken kann.

Anmerkung 2. Wiewohl es in der Natur keine für sich bestehende Ausdehnungen ohne Breite oder ohne Breite und Dicke giebt, so können gleichwohl Ausmessungen solcher Größen geschehen. Wenn z. B. der Landwirth ein Feld ausmessen läßt, so wird die Dicke des Feldes ganz außer Acht gelassen. Man bekümmert sich bloß um die äusserste Oberfläche desselben, betrachtet es als eine mathematische Fläche, ob es gleich eigentlich ein physischer Körper ist. Dieß kann als Beispiel dienen, wie leicht die abstracten Lehren der Mathematik auf wirkliche Gegenstände anwendbar sind. Wir abstrahiren nehmlich von der Dicke des Feldes und betrachten seine Oberfläche als für sich bestehend. Und so können wir uns die Fläche, Linie und den Punkt, von dem Körper, an dem allein sie wahrnehmbar sind, abgesondert denken und als für sich allein bestehend betrachten.

§. 7.

Da man sich (§. 5) in jeder Linie so viele Punkte als man will denken kann, so kann man sich auch vorstellen, daß eine Linie entstehe, wenn sich ein Punkt aus einem Orte nach einem andern bewegt. Man bezeichnet gewöhnlich einen Punkt durch einen Buchstaben. Stellt man sich daher vor, daß ein Punkt sich aus der Stelle *A* Fig. 1. nach der Stelle *B* bewegt, so kann sein durchlaufener Weg nur eine Länge oder eine Linie seyn. So klein aber auch der Weg seyn mag, den der Punkt in einem noch so kleinen Zeittheilchen durchlaufen kann, so wird dieser doch immer einige Länge haben, weil sonst der Punkt nicht aus seiner ersten Stelle gerückt seyn würde. Die ganze von diesem Punkte durchlaufene Linie wird also aus den vielen sehr kleinen Linien zusammen gesetzt seyn, welche der Punkt während seiner Bewegung nach und nach durchlaufen hat. Eine Linie kann also nicht aus Punkten zusammen gesetzt seyn.

§. 8. Erklärung.

Eine gerade Linie ist eine solche, welche zwischen zweien Punkten *A*, *B* Fig. 1. nach einerlei Richtung fortgehet. Sie wird also erzeugt, wenn ein Punkt in seiner Bewegung von der Stelle *A* aus seine anfängliche Richtung gegen *B* zu fortwährend beibehält. Wenn hingegen der als in Bewegung gedachte Punkt fortwährend seine Richtung ändert, und auch nicht in einem Moment die Richtung beibehält, welche er im nächst vorhergehenden Momente hatte, sondern sich in einer Linie wie *ACB* oder *ACB* bewegt, so wird diese eine krumme Linie genannt.

In einer krummen Linie ist also kein Theil gerade, und wenn eine Linie aus geraden und krummen Theilen zusammen gesetzt ist, so heißt sie eine vermischte Linie wie *ABCDEFGH* Fig. 2. Eine gerade Linie wird durch zwei Buchstaben bezeichnet, welche sich an ihren beiden Endpunkten befinden. So bedeutet *AB* die zwischen den Punkten *A* und *B* liegende gerade Linie.

§. 9. Forderung.

Von jedem gegebenen Punkte nach einem andern eine gerade Linie zu ziehen, und dieselbe über ihre Gränzen hinaus zu verlängern.

Es bedarf wohl kaum einer Erinnerung, daß hier nur von dem die Rede ist, was wir in Gedanken verrichten können, und es ist einleuchtend, daß wir uns durch jede zwei Punkte unserer Erdkugel durch dieselbe eine gerade Linie gezogen, und diese Linie von beiden Seiten bis an die Himmelskugel verlängert denken können.

§. 10. Grundsatz.

Wenn man von einem Punkte *A* Fig. 1. nach einem und demselben andern *B* zwei gerade Linien zieht, so werden beide ganz auf einander fallen. Denn alle Theile der ersten haben nach *B* zu einerlei Richtung, und eben diese Richtung hat jeder Theil der andern; folglich kann kein Theil der einen von der Richtung der andern abweichen, und beide Linien müssen also auf einander fallen.

§. 11. Grundsatz.

Zwei Punkte bestimmen die Lage einer geraden Linie.

Durch einen Punkt *A* Fig. 3 können verschiedene Linien *AD*, *AF*, *AH* gezogen werden. Sobald aber außer A noch ein Punkt B gegeben ist, durch welchen die zu ziehende Linie gehen soll, so ist ihre Lage bestimmt, weil jede andere durch A und B gelegte gerade Linie mit dieser zusammen fällt (§. 10).

Bei krummen Linien ist dieß nicht der Fall, indem man zwischen A und B Fig. 1. unzählige krumme Linien ziehen kann.

§. 12. Grundsatz.

Zwei gerade Linien können einander nur in einem Punkte schneiden, und daher keinen Raum einschließen.

Denn sobald zwei gerade Linien zwei Punkte gemeinschaftlich haben, müssen sie (§. 10) in eine einzige zusammen fallen.

§. 13. Erklärung.

Größen heißen einander deckend oder congruent, wenn die Gränzen der einen und alles dazwischen enthaltene, auf die Gränzen und alles dazwischen liegende der andern fallen. Das Zeichen der Congruenz ist $\overline{\underline{\backsim}}$ oder $\underline{\underline{\backsim}}$.

§. 14. Grundsatz.

Größen, welche einander decken, sind einander gleich.

Denn sie können nur in der Stelle verschieden seyn, welche sie im Raume einnehmen.

§. 15. Grundsatz.

Wenn zwei gerade Linien einander gleich sind, so sind sie auch congruent. Wenn man nehmlich den einen Endpunkt A Fig. 4. auf den Endpunkt *C*, und die Linie *AB* in der Richtung *CD* legt, so muß auch der andere Endpunkt *B* der ersten auf den andern Endpunkt *D* der andern fallen.

Denn eine gerade Linie kann von einer andern nur durch ihre Länge unterschieden seyn. Ist sie ihr also gleich, und hat sie mit derselben einerlei Anfangspunkt und einerlei Richtung, so muß sie auch mit ihr einerlei Endpunkt haben.

§. 16. Anmerkung.

Der Grundsatz §. 14 ist nicht umgekehrt wahr, nehmlich gleiche Größen müssen nicht nothwendig congruent seyn. Denn man sieht leicht ein, daß die beiden Flächen ABCD und EFGH Fig. 5. einander gleich seyn können, ohne deshalb einander zu decken. Bei den geraden Linien jedoch ist dieser Satz auch umgekehrt wahr (§. 15).

§. 17. Anmerkung.

Um eine gerade Linie auf dem Papiere bildlich darzustellen, bedient man sich des bekannten Linials, woran man mit einer fein zugespitzten Bleifeder hinfährt. Das hierdurch entstehende Bild wird zwar immer einige, wenn gleich sehr geringe Breite und Dicke haben. Es kann indessen doch dazu dienen, den Begriff einer Linie, welche sich nicht vom Körper getrennt darstellen läßt, zu versinnlichen.

Auf dem Felde wird zwischen zwei Punkten A, B, Fig. 6. eine gerade Linie gezogen (abgesteckt), wenn man in den Punkten A und B zwei Stangen gerade aufwärts stellt, und zwischen denselben eine Schnur oder eiserne Kette ausspannt. Will man diese gerade Linie nach der Gegend von C hin verlängern, so tritt jemand mit einer aufwärts gerichteten Stange in die Gegend von C hin. Eine bei A befindliche Person hält das Auge hinter der in diesem Punkte befindlichen Stange und winkt der bei

C befindlichen Person zu, die Stange rechts oder links zu rücken, so lange bis sie dem Auge hinter A nicht mehr sichtbar ist, in welchem Falle sie sich in der verlängerten Richtung der Linie AB befinden wird.

§. 18.

So wie man sich die gerade Linie als aus der Bewegung eines Punktes entstehend denken kann, eben so kann man sich auch die Entstehung einer Fläche vorstellen, wenn eine Linie sich anders als nach ihrer Richtung bewegt. Wenn sich z. B. die Linie *AB* Fig. 7. in der Richtung *AC* bewegt. Desgleichen kann man sich die Entstehung eines geometrischen Körpers vorstellen, wenn eine Fläche sich anders als nach ihrer Richtung bewegt.

§. 19. Erklärung.

Gleich wie die Linien in gerade und krumme eingetheilt werden, eben so theilt man die Flächen in ebene und krumme.

Eine ebene Fläche oder eine Ebene ist eine solche, welche allenthalben nach geraden Linien ausgedehnt ist, dergestalt, daß jede zwischen zweien auf ihr genommenen Punkten gezogene gerade Linie ganz in diese Fläche fällt. Eine krumme Fläche ist eine solche, in welcher kein Theil eben ist.

Ein sinnliches Bild von einer Ebene giebt ein Blatt Papier. Desgleichen denkt man sich die Oberfläche eines flach liegenden Feldes als eine Ebene (obgleich es nie eine Ebene seyn dürfte). Ein Beispiel von einer krummen Fläche giebt die äußerste Begränzung eines Eyes.

§. 20.

Die bisher gegebenen Begriffe von Körpern

Flächen, Linien und Punkten sind in der Geometrie, welche von den einfachsten Begriffen zu den zusammengesetzteren fortschreitet, von der höchsten Wichtigkeit, da eine richtige Auffassung derselben das Fortschreiten in dieser Wissenschaft außerordentlich erleichtert, so wie im Gegentheile unrichtige Begriffe selbst geübte Geometer zu den gröbsten Irrthümern verleitet haben.

§. 21. Erklärung.

Nachdem die eine Ausdehnung begränzenden Linien und Punkte in einer und derselben Ebene oder in verschiedenen Ebenen liegen, theilt man die Geometrie in die ebene und körperliche Geometrie. In ersterer wird vorausgesetzt, daß alle Begränzungen in einer und derselben Ebene liegen; in letzterer aber wird das Gegentheil vorausgesetzt. In der Folge wird immer vorausgesetzt werden, daß die begränzenden Linien und Punkte in einerlei Ebene liegen, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird.

§. 22. Erklärung.

Ein ebener geradlinigter Winkel ist die Neigung zweier in einerlei Ebene liegenden, und in einerlei Punkt zusammentreffenden geraden Linien *AB*, *AC*. Fig. 8.

Der Punkt *A*, worin die beiden Linien zusammen treffen, heißt sein Scheitel, und die beiden zusammen treffenden Linien *BA*, *CA* seine Schenkel.

Denkt man sich nehmlich die Linie *AC* in ihrer Richtung befestigt, und die Linie *AB* als um den Punkt *A* herum bewegbar, so kann *AB* gegen *AC* verschiedene Lagen oder Neigungen haben. Bald kann sie der Lage näher kommen, in welcher sie auf *AC* fällt, bald kann sie sich von dieser Lage entfernen, d. h. sie wird bald mehr, bald weniger gegen *AC* geneigt seyn, und diese Neigung ist es, was den von ihnen gebildeten Winkel bestimmt.

Die Größe des Winkels hängt also durchaus nicht von der Länge der Schenkel ab, indem die Theile *BA CA* der Schenkel eben die Neigung gegen einander haben als die Linien *EA*, *FA*. Sie hängt vielmehr nur von der Auseinandersperrung der Schenkel ab, und derjenige von zweien Winkeln ist größer, dessen Schenkel weiter auseinander gesperrt sind, wenn auch diese Schenkel kürzer als die des andern sind.

§. 23. Willkührlicher Satz.

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch einen kleinen Buchstaben, den man innerhalb zwischen seine Schenkel setzt, oder durch einen außerhalb an der Spitze desselben gesetzten Buchstaben, oder durch drei Buchstaben, von denen zwei an den beiden Endpunkten der Schenkel, und einer am Scheitel desselben befindlich ist. Beim Aussprechen wird der am Scheitel befindliche immer in die Mitte gesetzt. Der Winkel Fig. 8 kann also ausgesprochen werden: Der Winkel x oder der Winkel *A* oder der Winkel *BAC*.

Anstatt des Worts Winkel kann man das abgekürzte Zeichen ($\angle$) gebrauchen, und also setzen $\angle$ x, oder $\angle$ *A* oder $\angle$ *BAC*.

§. 24. Grundsatz.

Wenn zwei Winkel *ABC*, *DEF* Fig. 9 dergestalt auf einander passen, daß, nachdem der Scheitelpunkt *B* auf den Scheitelpunkt *E*, und der Schenkel *BC* auf den Schenkel *EF* gelegt ist, auch der Schenkel *BA* in der Richtung *ED* fällt, so sind sie einander gleich.

Denn da (§. 22) die Größe des Winkels nicht von der Länge seiner Schenkel abhängt, so kann man sich alle von gleicher Länge denken; alsdann aber werden alle Gränzen des einen Winkels auf die des andern fallen, und beide Winkel müssen also einander gleich seyn (§. 14).

§. 25. Grundsatz.

Wenn zwei Winkel einander gleich sind, so sind sie auch congruent.

Denn bei zweien Winkeln kann weiter nichts unterschieden seyn als ihre Neigung oder Auseinandersperrung, indem die Länge oder Kürze der Schenkel nicht in Betrachtung kömmt, welche man sich daher bei beiden gleich vorstellen kann. Denkt man sich daher den Winkel *ABC* Fig. 9 dergestalt auf *DEF* gelegt, daß der Scheitelpunkt *B* auf *E* und der Schenkel *BC* in der Richtung *EF* fällt, so muß nothwendig der Schenkel *BA* in der Richtung *ED* zu liegen kommen, weil beide Linien nur in dieser Lage dieselbe Neigung gegen ihren gemeinschaftlichen Schenkel *BC* haben können.

§. 26. Erklärung.

Wenn zwei Winkel *EBC*, *EBD* Fig. 10 einen Schenkel *EB* und den Scheitelpunkt *B* gemeinschaftlich, ihre beiden anderen Schenkel *BC*, *BD* aber in einerlei geraden Linie nach entgegengesetzten Richtungen des gemeinschaftlichen Scheitels *B* haben, so nennt man sie Nebenwinkel.

§. 27. Erklärung.

Wenn eine gerade Linie *AB* Fig. 10 auf einer andern *CD* so stehet, daß sie nach der einen Seite *BC* hin dieselbe Neigung hat als nach der andern *BD*, oder daß die Nebenwinkel *ABC*, *ABD* einander gleich sind, so sagt man *AB* stehe auf *CD* senkrecht, lothrecht, perpendiculär; und die Winkel *ABC*, *ABD* heißen rechte Winkel. Ein rechter Winkel ist also ein solcher, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist. Man bezeichnet ihn durch *R*.

Jeder Winkel, welcher größer als ein rechter ist, wie *EBD* heißt ein stumpfer, und jeder Winkel, welcher kleiner als ein rechter ist, wie *EBC* heißt ein spitzer. Beide letztere heißen auch schiefe Winkel.

§. 28. Lehrsatz.

Alle rechte Winkel sind einander gleich.

Beweis. Es seyen *ABC*, *DEF* Fig. 11 rechte Winkel, so ist, wenn man die Schenkel *CB*, *FE* nach *G* und *H* verlängert, der Winkel $ABC = ABG$ und $DEF = DEH$ (§. 27).

Man lege nun den Winkel *ABC* dergestalt auf *DEF*, daß der Punkt *B* auf *E* und die Linie *BC* auf *EF* falle, so wird ihre Verlängerung *BG* auf die Verlängerung *EH* fallen (§. 10). Fiele nun *BA* nicht auf *ED*, sondern in der Richtung *EK*, so daß *KEF* den Winkel *ABC* und *KEH* den Winkel *ABG* vorstellt, so müßte noch immer $KEF = KEH$ seyn. Nun aber ist, weil *DEF* ein rechter Winkel ist, der

$\angle DEF = DEH$; da aber der Winkel $KEH < DEH$, indem er nur ein Theil von DEH ist (Grundsatz 3), so ist auch $KEH < DEF$; um so mehr müßte also $KEH < KEF$, welches dem vorigen, daß nehmlich $KEH = KEF$ widerspricht. Folglich kann BA nicht anders als auf ED fallen, und die Winkel ABC, DEF werden also einander gleich seyn (§. 24).

§. 29. Erklärung.

Zwei Winkel, welche wie AEC, DEB Fig. 12 einen gemeinschaftlichen Scheitel E haben, und bei denen die Schenkel des einen die rückwärts verlängerten Schenkel des andern sind, heißen Scheitelwinkel.

Dergleichen Scheitelwinkel werden immer entstehen, wenn zwei gerade Linien einander schneiden, weil alle um den Durchschnittspunkt liegende Winkel diesen Punkt zum gemeinschaftlichen Scheitel haben, und die Schenkel eines jeden Winkels die rückwärts verlängerten Schenkel des ihm entgegen stehenden Winkels sind.

§. 30. Erklärung.

Zwei gerade Linien, welche wie AB, CD Fig. 13 in einerlei Ebene liegen und nie zusammen treffen, so weit man sie auch von beiden Seiten verlängern mag, heißen gleichlaufende oder parallele Linien. Zwei gerade Linien heißen zusammenlaufend oder convergirend, wenn sie wie EF und GH Fig. 14 verlängert einander schneiden. Wenn man eben diese Linien nach den entgegen gesetzten Richtungen FE, HG betrachtet, heißen sie auseinanderfahrend oder divergirend.

Es giebt noch andere gerade Linien, welche einander nie schneiden. Wenn z. B. eine dieser Linien von Osten nach Westen, und die andere in einiger Entfernung über derselben von Süden nach Norden fortgehet. Dergleichen Linien liegen nicht in einerlei, sondern in verschiedenen Ebenen, und sind also nicht parallel.

Um anzuzeigen, daß zwei gerade Linien *AB*, *CD* parallel sind, setzt man auch zwischen beide das Zeichen (♯) und schreibt also *AB* ♯ *CD*.

§. 31. Erklärung.

Eine Flächenfigur ist eine von allen Seiten begränzte Fläche. Eine ebene Figur ist eine von allen Seiten begränzte Ebene. Jede der Linien, welche eine Figur begränzt, heißt eine Seite der Figur und alle begränzenden Linien zusammen genommen nennt man ihren Umfang oder Perimeter.

So wie der Raum selbst über alle Gränzen hinaus gehen kann, so kann man sich auch eine Ebene über alle Gränzen hinaus erweitert denken. Will man nun ein bestimmtes Stück einer Ebene betrachten, so muß es allenthalben von der übrigen Ebene getrennt, und also von Gränzen eingeschlossen seyn.

Eine ebene Figur heißt geradlinigt, wenn sie Fig. 15 von lauter geraden, krummlinigt, Fig. 16, wenn sie von lauter krummen, und vermischtlinigt, Fig. 17 wenn sie von geraden und krummen Linien zugleich eingeschlossen wird. Im Folgenden wird nur von ebenen Figuren die Rede seyn, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird.

§. 32. Erklärung.

Eine Figur, worin alle Seiten und alle von diesen Seiten gebildeten Winkel einander gleich sind, heißt eine ordentliche oder reguläre Figur wie *ABC DEF* Fig. 18. Jede andere Figur, es seyen darin alle Seiten ohne die Winkel, oder alle Winkel ohne die Seiten oder auch keins von beiden gleich, heißt eine unordentliche oder irreguläre Figur.

§. 33. Erklärung.

Eine ebene Figur, welche wie Fig. 19 von einer krummen Linie begränzt wird, in welcher alle Punkte von einem bestimmten Punkte *C* innerhalb der Figur gleiche Entfernung haben, heißt ein Kreis oder Zirkel, und die den Kreis begränzende krumme Linie heißt der Umkreis oder die Peripherie des Kreises.

Der Punkt *C*, von welchem jeder Punkt der Peripherie gleiche Entfernung hat, heißt der Mittelpunkt oder das Centrum.

Jeder Theil des Umkreises heißt ein Kreisbogen wie *AED*.

Jede gerade Linie vom Mittelpunkte nach dem Umkreise gezogen, heißt der Halbmesser oder Radius.

Eine gerade Linie, welche von einem Punkte der Peripherie durch den Mittelpunkt nach einem andern Punkte der Peripherie reicht, heißt ein Durchmesser oder Diameter des Kreises, wie *AB*.

Eine Linie, welche wie *AD* zwei Punkte des Umkreises verbindet, ohne durch den Mittelpunkt zu gehen, heißt eine Sehne oder Chorde.

§. 34.

Um von der Entstehungsart des Kreises einen Begriff zu erhalten, braucht man sich bloß vorzustellen, daß eine Linie *CA* Fig. 19 sich in einer Ebene um den festen Punkt *C* herum bewege, bis sie wieder in ihre vorige Lage kommt. Der bewegliche Endpunkt *A* wird während seiner Umdrehung alle Punkte der Kreislinie durchlaufen, und jeder Punkt dieses Umkreises wird um die Linie *AC* vom Mittelpunkte entfernt seyn.

§. 35. Forderung.

Aus jedem gegebenen Punkte mit jeder gegebenen geraden Linie einen Kreis zu beschreiben.

Denn die gegebene Linie mag noch so groß seyn, so kann man sich immer vorstellen, daß sie sich in einer Ebene um den gegebenen Punkt herum bewege, bis sie wieder in ihre vorige Lage kommt.

§. 36. Grundsatz.

Alle Halbmesser eines und desselben Kreises sind einander gleich.

Denn jeder von ihnen giebt die allenthalben gleiche Entfernung des Mittelpunktes vom Umkreise an.

§. 37. Grundsatz.

Alle Durchmesser eines und desselben Kreises sind einander gleich.

Denn jeder Durchmesser besteht aus zweien Halbmessern.

§. 38. Anmerkung.

Außer der Kreislinie können noch unzählige andere krumme Linien eine Figur einschließen, wie Fig. 16. In der niedern oder Elementar-Geometrie, werden indessen außer der geraden Linie und der von ihr begränzten Figuren nur noch die Eigenschaften der Kreislinie untersucht. Die Untersuchung der Eigenschaften aller übrigen krummen Linien gehört zur höhern Geometrie.

§. 39. Erklärung.

Soll eine ebene Figur von geraden Linien eingeschlossen werden, so sind wenigstens drei solcher Linien dazu erforderlich, weil zwei gerade Linien keinen Raum einschließen können (§. 12).

Nach der Anzahl der Seiten, welche eine Figur einschließen, oder der dadurch entstehenden Winkel, wird die Figur benannt.

Sie heißt nehmlich dreiseitig oder ein Dreieck, wenn sie von dreien Seiten begränzt wird, wie *ABC* Fig. 20.

Sie heißt ein Vier- Fünf- oder Sechseck, wenn sie von vier, fünf oder sechs Seiten begränzt wird *).

Jede Figur, welche mehr als vier Seiten hat, heißt überhaupt ein Vieleck oder Polygon. Jede der das Vieleck einschließenden Seiten heißt eine Polygonseite, und der von zweien auf einander folgenden Polygonseiten eingeschlossene und einwärts gekehrte Winkel ein Poligonwinkel, wie *FAB* Fig. 18.

Eine gerade Linie, welche in einer vier- oder vielseitigen Figur die Scheitel der Winkel, welche keinen Schenkel gemein haben, mit einander verbindet, heißt eine

*) Es giebt auch ebene krummlinigte Drei- Vier- und Vielecke, welche von drei, vier und mehreren einander schneidenden krummen Linien eingeschlossen werden. In der Folge wird nur von geradlinigten die Rede seyn.

Diagonallinie. Z. B. *AD* Fig. 7 ist eine Diagonallinie.

§. 40. Erklärung.

Die Dreiecke unterscheidet man sowohl in Rücksicht der sie einschließenden Seiten als auch der von diesen Seiten gebildeten Winkel.

Rücksichtlich der Seiten nennt man ein Dreieck gleichseitig, dessen drei Seiten alle einander gleich sind, wie *ABC* Fig. 20.

Gleichschenklicht heißt ein Dreieck, welches zwei gleiche und eine ungleiche Seite hat wie *ABC* Fig. 21.

Ein ungleichseitiges Dreieck ist ein solches, worin auch nicht zwei Seiten einander gleich sind, wie *ABC* Fig. 22.

Im gleichschenklichten Dreiecke nennt man die ungleiche Seite desselben die Grundlinie oder Basis, und die beiden gleichen Seiten heißen die Schenkel des Dreiecks. Im Dreieck *ABC* Fig. 21 ist *BC* die Basis, und die Seiten *AB*, *AC* sind dessen Schenkel.

§. 41. Erklärung.

In Rücksicht auf die Winkel heißt ein Dreieck rechtwinklicht, wenn es einen rechten Winkel hat wie *ABC* Fig. 23.

Ein Dreieck ist stumpfwinklicht, wenn es einen stumpfen Winkel hat, wie *ABC* Fig. 24.

Ein spitzwinklichtes Dreieck ist ein solches, worin alle drei Winkel spitz sind, wie *ABC* Fig. 22. Beide letztere Arten Dreiecke führen auch den gemeinschaftlichen Namen schiefwinklichte.

Im rechtwinklichten Dreiecke *ABC* Fig. 23 nennt man die beiden Seiten, welche den rechten Winkel ein=

schließen wie *AB*, *BC* seine Katheten, und die dritte Seite *AC* seine Hypothenuse.

§. 42. Erklärung.

In einem Dreiecke ist ein Winkel an einer Seite anliegend, wenn diese Seite einen Schenkel des Winkels ausmacht. Ein Winkel ist einer Seite gegenüberstehend, und umgekehrt eine Seite einem Winkel gegenüberstehend, wenn die Seite keinen Schenkel des Winkels ausmacht. Im Dreiecke *ABC* Fig 22 sind die Winkel *ABC*, *ACB* an der Seite *BC* anliegend, der Winkel *BAC* aber der Seite *BC* gegenüber stehend; und eben so ist die Seite *BC* dem Winkel *BAC*, die Seite *AC* dem Winkel *ABC* gegenüberstehend.

§. 43. Erklärung.

In einer jeden geradlinigten Figur kann man jede beliebige Seite derselben als die Grundlinie oder Basis, und die ganze Figur als auf dieser Basis ruhend betrachten. Man kann daher auch in jedem ungleichseitigen Dreiecke *BAC* Fig. 22 jede beliebige Seite *BC* desselben als die Basis ansehen. Man nennt alsdann die Höhe des Dreiecks den vom Scheitel *A* des der Grundlinie gegenüberstehenden Winkels auf diese Grundlinie gefällten Perpendickel *AD*.

§. 44. Erklärung.

Die Vierecke erhalten nach der Gleichheit oder Ungleichheit der sie begränzenden geraden Linien und Winkel folgende Benennungen:

Ein Quadrat *ABCD* Fig. 25 ist ein Viereck, worin alle Seiten gleich, und alle Winkel rechte sind.

Ein Rechteck, Rectangulum oder Oblongum ist ein Viereck, worin zwar alle Winkel rechte, von den Seiten aber nur die gegenüberstehenden einander gleich sind, wie *ABCD* Fig. 7.

Eine Raute oder Rhombus ist ein Viereck, worin zwar die Seiten alle einander gleich, die Winkel aber ungleich sind, wie *ABCD* Fig. 26.

Eine länglichte Raute oder Rhomboides ist ein Viereck, worin nur die gegenüberstehenden Seiten gleich, die Winkel aber ungleich sind, wie *ABCD* Fig. 27.

Alle andere Vierecke führen den gemeinschaftlichen Namen Trapezia.

§. 45. Erklärung.

Ausgedehnte Größen heißen einander gleich, wenn sie gleichartig sind, und die eine aus eben so vielen Theilen der Art als die andere zusammen gesetzt ist: oder wenn die als Maaß *) angenommene Größe in der einen so oft enthalten ist, als in der andern. So sind *ABCD*, *EFGH* Fig. 5 einander gleich.

§. 46. Grundsatz.

Wenn man durch einen Punkt *G* innerhalb einer Figur *ABCDEF* Fig. 28 eine gerade Linie *GK* zieht, so muß sie den Perimeter der Figur in zweien Punkten schneiden.

Denn die gerade Linie kann von beiden Seiten unbegränzt verlängert werden; die Figur aber ist durch

*) S. Umriß der mathematischen Wissenschaften §. 2 u. 3.

den zusammenhängenden Perimeter begränzt. Die gerade Linie kann also in ihrer Verlängerung nicht aus dem begränzten Raume *ABCDEF* in den übrigen unbegränzten Raum treten, ohne auf jeder Seite durch den Perimeter zu gehen, und muß ihn also in zweien Punkten schneiden.

Eine durch einen Punkt innerhalb eines Kreises gezogene gerade Linie muß also dessen Peripherie in zweien Punkten schneiden.

§. 47. Grundsatz.

Wenn der Umfang einer Figur *FGHK* Fig. 28 durch einen Punkt *K* innerhalb, und durch einen Punkt *G* außerhalb einer andern Figur *ABCDE* gehet, so müssen die Perimeter beider Figuren einander wenigstens in zweien Punkten *L*. und *M*. schneiden.

Wenn also der Umfang eines Kreises durch einen Punkt innerhalb und durch einen Punkt außerhalb eines andern Kreises gehet, so müssen die Peripherien beider Kreise einander wenigstens in zweien Punkten schneiden.

§. 48. Grundsatz.

Jede gerade Linie *AB* Fig. 30 theilt die Ebene, worin sie befindlich ist, in zwei Theile, wovon der eine Theil disseits, und der andere jenseits der geraden Linie *AB* liegt. Nimmt man daher einen Punkt *C* von der einen Seite und einen Punkt *D* von der andern Seite der Linie *AB*, und beschreibt aus *C* mit der Entfernung *CD* einen Kreis *EFG*, so muß dieser die gerade Linie *AB* wenigstens in zwei Punkten *E* und *F* schneiden.

§. 49. Aufgabe.

Zwei gerade Linien *AB*, *CD* Fig. 31 sind gegeben. Man soll eine gerade Linie finden, welche ihrer Summe oder ihrer Differenz gleich ist.

Auflösung. Aus dem einen Endpunkte *A* der größern Linie beschreibe man mit einem der kleinern *CD* gleichen Halbmesser einen Kreis *EGF*, verlängere *BA* unbegränzt nach *K*, so wird der Umfang dieses Kreises, welcher von beiden Seiten der Linie *KB* liegt, diese Linie in zwei Punkten *E* und *F* schneiden, und es ist alsdann *BF* die Summe, und *BE* die Differenz der beiden gegebenen Linien.

Beweis. *AE* und *AF* sind als Halbmesser eines und desselben Kreises einander gleich (§. 36). Nun ist jede von ihnen der Linie *CD* gleich; folglich ist

$BE = AB - AE = AB - CD$ und

$BF = AB + AF = AB + CD$.

Aus dieser Construction ergiebt sich auch, wie von einer gegebenen Linie AB ein der CD gleicher Theil abzuschneiden sey.

§. 50. Aufgabe.

Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie *AB* Fig. 32 ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.

Auflösung. Aus dem Punkte *A* beschreibe man mit dem Halbmesser *AB* den Kreis *BCD*, und aus *B* mit *BA* den Kreis *ACE* (§. 35). Von dem Punkte *C*, worin beide Kreise einander schneiden, ziehe man nach *A* und *B* gerade Linien; so ist *CAB* das verlangte gleichseitige Dreieck.

Beweis. Man verlängere AB bis F, so ist (§. 36) $BA = BF$, als Halbmesser des Kreises um B, also $AF = 2\ AB$, also liegt der Punkt F außserhalb des um A beschriebenen Kreises; und da der Punkt A innerhalb dieses Kreises liegt, so muß die durch die Punkte A und F gehende Peripherie $ACEF$ die Peripherie des um A beschriebenen Kreises in zweien Punkten schneiden (§. 47).

Ist nun C ein solcher Durchschnittspunkt, so liegt er in der Peripherie eines jeden dieser Kreise, und es ist also (§. 36).

$AC = AB$ als Halbmesser des Kreises BCD, und auch

$BC = BA$ als Halbmesser des Kreises ACE;

folglich ist (Grunds. 4.)

$$AC = BC = AB;$$

mithin sind alle drei Seiten dieses Dreiecks einander gleich, und folglich das Dreieck CAB gleichseitig (§. 40)

§. 51. Anmerkung.

Die vorhergehende Aufgabe thut zugleich die Möglichkeit des gleichseitigen Dreiecks dar, welches durch eine seiner Seiten gegeben ist. Sie zeigt also, daß der in §. 40 definirte Ausdruck: „Gleichseitiges Dreieck“ Zeichen eines wirklichen Begriffes ist; und nun erst sind wir im Stande, uns dieses Begriffes zur Entdeckung andrer Wahrheiten zu bedienen.

So muß man in jedem mathematischen Vortrage immer verfahren, und wir werden daher im Folgenden allemal die Möglichkeit des Definiti entweder durch Forderung, Grundsatz oder Aufgabe darthun, und also zeigen, daß alle bisher gegebene Erklärungen Zeichen von Begriffen sind.

§. 52. Anmerkung 2.

In der Ausübung ist es nicht nöthig, die vollen Kreise BCD, ACE zu ziehen, sondern nur nach dem Augenmaaße zwei Bogen derselben DCE, GCF Fig. 33 zu ziehen, welche einander in C schneiden. Dieß gilt von allen folgenden Sätzen, wobei ähnliche Constructionen vorkommen.

Zweites Kapitel.

Von den Dreiecken, ihrer Congruenz und den Seiten und Winkeln derselben.

§. 53. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken *ABC*, *DEF* Fig. 34 zwei Seiten *AB*, *AC* des einen zweien Seiten *DE*, *DF* des andern einzeln genommen gleich sind, und der von diesen Seiten in dem einen Dreiecke eingeschlossene Winkel *BAC* dem von den gleichen Seiten im andern Dreiecke eingeschlossenen Winkel *EDF* gleich ist: so sind die Dreiecke congruent, und es ist die dritte Seite *BC* des einen Dreiecks der dritten Seite *EF* des andern, und die Winkel, welche in beiden Dreiecken gleichen Seiten gegenüber liegen, sind ebenfalls einander gleich, nehmlich $ABC = DEF$, $ACB = DFE$ und $\triangle\, ABC = \triangle\, DEF$.

Voraussetzung. $AB = DE$; $AC = DF$; $\angle BAC = \angle EDF$.

Behauptung

1) $BC = EF$, 2) $\angle ABC = DEF$,

3) $\angle ACB = DFE$, 4) $\triangle ABC = DEF$.

Vorbereitung. Man lege das Dreieck ABC dergestalt auf DEF, daß der Punkt D auf A und die Linie DE in der Richtung von AB zu liegen komme.

Beweis. Da die Linie DE der AB gleich ist, und der eine Endpunkt D auf A und die Linie DE in der Richtung AB liegt, so muß (§. 15) der andere Endpunkt E auf B fallen.

Da der Winkel $EDF = BAC$ und sein Scheitel D auf A, auch sein Schenkel DE in der Richtung AB gelegt ist, so muß (§. 25) sein zweiter Schenkel DF in der Richtung AC fallen; und da $DF = AC$, so muß (§. 15) der Endpunkt F auf den Endpunkt C fallen.

Da nun der Punkt E auf B und F auf C fällt, so muß die zwischen E und F liegende Linie EF auf die zwischen B und C liegende BC fallen (§. 10) und folglich ihr gleich seyn (§. 14).

Da ferner bewiesen ist, daß der Scheitel E des Winkels DEF auf den Scheitel B des Winkels ABC und die Schenkel des erstern auf die Schenkel des letztern fallen, so decken sie einander, und sind einander gleich. Eben so ist $\angle DFE = ACB$.

Und da alle Gränzen der einen Figur ganz auf die der andern fallen, so ist auch $\triangle ABC = \triangle DEF$ (§. 14).

§. 54. Zusatz.

Ein Dreieck ist durch einen seiner Winkel, und durch die diesen Winkel einschließenden Seiten völlig bestimmt, weil zwei Dreiecke, welche in diesen Stücken einander gleich sind, es auch in allen übrigen seyn müssen.

§. 55. Lehrsatz.

In jedem gleichschenklichten Dreiecke ABC Fig. 35 sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. Auch sind, wenn man die Schenkel AB, AC nach D und E verlängert, die hierdurch entstehenden Winkel unter der Grundlinie DBC, ECB einander gleich.

Voraussetzung. Das Dreieck ist gleichschenklicht, oder $AB = AC$.

Behauptung $\angle ABC = ACB$; $\angle DBC = ECB$.

Vorbereitung. Auf BD nehme man einen beliebigen Punkt F an, schneide von CE den Theil $CG = BF$ ab (§. 49) und ziehe FC und BG.

Beweis. Da $AB = AC$ und $BF = CG$, so ist (Grunds. 7) $AB + BF = AC + CG$ oder $AF = AG$.

In den Dreiecken ABG, ACF *) sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich. Denn die Seite AG im Dreiecke ABG ist der Seite AF im Dreiecke ACF gleich; die Seite $AB = AC$ und der

) Zu mehrerer Deutlichkeit sind in der Figur 35 diese Dreiecke sowohl, als die Dreiecke BCF, CBG Figur 35** abgesondert dargestellt worden.

Winkel bei A ist beiden Dreiecken gemein; folglich sind sie congruent, und es ist (§. 53) $FC = BG$, $\angle ACF = \angle ABG$, und $\angle AFC = AGB$.

In den Dreiecken BCF, CBG sind ebenfalls zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gleich. Denn es ist $BF = CG$, $FC = GB$ und $\angle AFC = \angle AGB$, folglich ist (§. 53) $\angle BCF = CBG$ und $FBC = BCG$, d. i. die Winkel unter der Grundlinie sind einander gleich.

Da nun (wie vorher bewiesen worden) $\angle ABG = ACF$ und $\angle CBG = BCF$, so ist (Grunds. 10) $ABG - CBG = ACF - BCF$ oder $ABC = ACB$, d. h. die Winkel an der Grundlinie sind einander gleich.

§. 56. Anmerkung.

Obiger Satz kann auch folgendermaßen vorgetragen werden: **Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten einander gleich sind, so sind auch die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel einander gleich.**

§. 57. Zusatz.

In jedem gleichseitigen Dreiecke müssen auch alle drei Winkel einander gleich seyn. Denn jede zwei dieser Winkel stehen gleichen Seiten gegenüber. Es ist also eine reguläre Figur (§. 32).

§. 58. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 36 **zwei Winkel,** ABC, ACB **einander gleich sind, so üssen auch die diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten** AC, AB **einander gleich seyn.**

Voraussetzung. $\angle ABC = \angle ACB$.
Behauptung. $AC = AB$.

Vorbereitung. Wären AC, AB nicht einander gleich, so müßte eine davon etwa AB größer als die andere AC seyn. Man schneide daher $BD = AC$ ab und ziehe DC.

In den Dreiecken ACB, DBC wären demnach zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich; denn $AC = BD$ (nach der Construction), BC beiden Dreiecken gemein und nach der Voraussetzung $\angle ABC = ACB$, folglich müßte (§. 53) die Fläche des Dreiecks DBC der des Dreiecks ABC gleich seyn, welches (Grunds. 3) unmöglich ist, indem DBC nur ein Theil von ABC ist. Folglich kann AB nicht größer als AC, und eben so wenig kann AC größer als AB seyn; folglich ist $AC = AB$.

§. 59. Zusatz.

Wenn in einem Dreiecke alle drei Winkel einander gleich sind, so müssen es auch seine Seiten seyn, weil jede zwei dieser Seiten gleichen Winkeln gegenüber stehen. Ein gleichwinklichtes Dreieck ist also eine reguläre Figur (§. 32).

§. 60. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken ABC, DEF Fig. 37 alle drei Seiten des einen den drei Seiten des andern einzeln genommen gleich sind, so sind auch die den gleichen Seiten in beiden Dreiecken gegenüber stehenden Winkel, so wie die Flächenräume beider Dreiecke einander gleich.

Voraussetzung. $AB = DE$, $AC = DF$
$BC = EF$.

Behauptung. $\angle ABC = DEF$,
$\angle BAC = EDF$, $\angle ACB = DFE$ und
$\triangle ABC = \triangle DEF$.

Vorbereitung. Könnte man darthun, daß noch ein Winkel des einen, etwa BAC einem Winkel des andern EDF gleich ist, so wären in beiden Dreiecken zwei Seiten nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich, und ihre Congruenz würde aus §. 53 folgen. Man lege daher das Dreieck DEF dergestalt an ABC, daß der Punkt F auf C, die Linie FE in der Richtung CB, also auch (§. 15) E auf B zu liegen komme, und daß die Punkte A und D auf verschiedene Seiten der Linie BC fallen; so kann der Punkt D nur eine von folgenden drei Lagen haben.

1) Kann er in der Verlängerung des Schenkels AC; 2) kann er zwischen den Schenkeln des Winkels BAC liegen, so daß eine von A nach D gezogene gerade Linie AD innerhalb dieses Winkels liegt; 3) kann D so fallen, daß die Linie AD außerhalb dieses Winkels BAC fällt.

Beweis. Erster Fall. Da $AB = DE$, so bilden die beiden Dreiecke ABC, DEF Fig. 37 ein einziges gleichschenklichtes Dreieck BAD, dessen Grundlinie AD ist, und worin (§. 55) die Winkel an der Grundlinie einander gleich sind; also ist $\angle BAC = \angle BDC$. Nun ist der Winkel BDC mit dem Winkel EDF einerlei, folglich ist $\angle BAC = EDF$. Nun war auch $BA = DE$, $AC = DF$, folglich ist (§. 53) $\triangle ABC \cong DEF$.

Zweiter Fall. Da die Linie AD Fig. 38 in=

nerhalb der Winkel BAC, BDC fällt, so ist $\angle BAC = BAD + DAC$ und $\angle BDC = BDA + ADC$. Nun ist nach der Voraussetzung $BA = BD$, also das Dreieck BAD gleichschenklicht (§. 40) und folglich (§. 55) $\angle BAD = BDA$, weil beide an der Grundlinie AD liegen. Eben so ist, weil $AC = CD$, auch $\triangle CAD$ gleichschenklicht, also (§. 55) $\angle DAC = ADC$. Folglich ist (Grunds. 7)

$$BAD + DAC = BDA + ADC$$

oder $BAC = BDC = EDF$; und da auch $AB = DE$, $AC = DF$, so sind die Dreiecke $ABC = DEF$ congruent (§. 53).

Dritter Fall. Da die Linie AD Fig. 39 ausserhalb der Winkel BAC, BDC fällt, so ist

$$\angle BAC = BAD - DAC.$$
$$\angle BDC = BDA - ADC.$$

Nun ist, weil $BA = BD$, das Dreieck BAD gleichschenklicht, und folglich (§. 55) $\angle BAD = BDA$. Eben so ist, weil $AC = CD$, auch das Dreieck CAD gleichschenklicht, also $\angle DAC = ADC$. Folglich ist (Grunds. 10)

$$BAD - DAC = BDA - ADC.$$

oder $\angle BAC = BDC = EDF$; und da auch $AB = DE$, $AC = DF$, so sind die Dreiecke ABC, DEF congruent (§. 53).

§. 61. Zusatz.

Drei Seiten bestimmen also ein Dreieck.

§. 62. Aufgabe.

Einen gegebenen geradlinigten Winkel EAF Fig. 40 zu halbiren.

Auflösung. Auf einem seiner Schenkel AE nehme man einen beliebigen Punkt B; schneide vom andern Schenkel einen Theil $AC = AB$ ab (§. 49), und ziehe BC. Auf BC setze man (§. 50) das gleichseitige Dreieck DBC, und ziehe von D nach A eine gerade Linie, so wird diese den Winkel EAF halbiren.

Beweis. Da vermöge der Construction $AB = AC$; $BD = DC$ als Seiten eines geichseitigen Dreiecks und AD den beiden Dreiecken ABD, ACD gemein ist, so sind in beiden Dreiecken alle drei Seiten einander gleich und folglich auch (§. 60) die den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel; also ist der Winkel BAD, welcher der Seite BD gegenüber stehet, dem Winkel CAD gleich, welcher der gleichen Seite CD gegenüber stehet. Da nun die Theile BAD, CAD des Winkels EAF einander gleich sind, so ist jeder die Hälfte des Ganzen; und folglich $\angle EAF$ durch die Linie AD halbirt.

§. 63. Zusatz.

Halbirt man wiederum auf die vorgeschriebene Art jede dieser Hälften, so wird der Winkel EAF in vier gleiche Theile getheilt seyn; und so kann man durch fortgesetztes Halbiren einen Winkel in 8, 16, 32 rc. gleiche Theile theilen.

§. 64. Aufgabe.

Eine gegebene begränzte gerade Linie AB Fig. 41 zu halbiren.

Auflösung. Auf AB setze man das gleichseitige Dreieck CAB (§. 50); halbire den der Linie AB gegenüber stehenden Winkel ACB durch die gerade Linie CD (§. 62); so wird diese zugleich die gegebene Linie

AB in Punkte *E* halbiren, d. h. der Theil *AE* ist dem Theile *EB* gleich.

Beweis. Die Linie *CD*, welche den Winkel halbirt, gehet zwischen seinen Schenkeln fort, und muß also die Linie *AB* in irgend einem Punkte *E* schneiden, also die Linie *AB* in zwei Theile zerlegen. Daß aber auch diese Theile einander gleich sind, erhellet aus Folgendem: In den Dreiecken *ACE*, *BCE* ist *AC* = *CB*, als Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, *CE* beiden gemein, und nach der Construction der Winkel *ACE* = *ECB*; folglich ist (§. 53) *AE* = *EB*; folglich ist die Linie *AB* in *E* halbirt.

Anmerkung. Die Halbirung des Winkels ACB geschieht ganz nach der Vorschrift des §. 62. Da jedoch auf den Schenkeln dieses Winkels bereits gleiche Theile CA, CB genommen, und deren Endpunkte durch AB verbunden sind, so brauche man nur noch auf AB unterwärts ein gleichseitiges Dreieck ADB zu setzen, oder auch die im Punkte D einander durchschneidenden Bogen zu beziehen (§. 52).

§. 65. Zusatz.

Halbirt man wiederum jede dieser Hälften, so wird die Linie *AB* in vier gleiche Theile zerlegt seyn; und so kann man durch fortgesetztes Halbiren eine gerade Linie in 8, 16, 32 ꝛc. gleiche Theile theilen.

§. 66. Aufgabe.

Auf eine unbegränzte gerade Linie *AB* Fig. 42 aus einem in ihr gegebenen Punkte *C* eine senkrechte Linie zu errichten.

Auflösung. Auf *CA* nehme man einen Punkt

D nach Belieben und schneide von CB den Theil $CE = CD$ ab. (Dieß geschieht, wenn man aus C mit CD einen Kreis beschreibt, welcher die Linie CB in E schneidet.) Auf DE setze man das gleichseitige Dreieck DFE und ziehe vom Scheitel F nach C eine gerade Linie FC, so wird diese auf AB im Punkte C senkrecht seyn.

Beweis. In den Dreiecken FCD, FCE ist $CD = CE$ nach der Construction; $FD = FE$ als Seiten eines gleichseitigen Dreiecks und FC beiden Dreiecken gemein, also in beiden alle drei Seiten gleich; folglich ist (§. 60) der Winkel FCD, welcher der Seite FD gegenüber liegt, dem Winkel FCE gleich, welcher der gleichen Seite FE gegenüber liegt. Da also die beiden Nebenwinkel FCD, FCE einander gleich sind, so stehet die Linie FC auf AB im Punkte C senkrecht (§. 27).

§. 67. Aufgabe.

Auf eine gegebene unbegränzte gerade Linie AB Fig. 43 von einem außerhalb derselben gegebenen Punkte C eine senkrechte Linie zu fällen.

Auflösung. Auf der andern Seite der Linie AB nehme man einen Punkt D nach Belieben; beschreibe (§. 35) aus C mit CD einen Kreis, so muß dieser die Linie AB in zwei Punkten G und E schneiden (§. 48); man halbire dann GE in H (§. 64), und ziehe CH, so wird diese die verlangte senkrechte Linie seyn.

Beweis. Zieht man noch CG, CE, so ist in den beiden Dreiecken CHG, CHE die Linie $CG =$

CE als Halbmesser eines und desselben Kreises (§. 36), $GH = HE$ nach der Construction und CH beiden Dreiecken gemein: folglich ist (§. 60) $\angle\ CHG = \angle\ CHE$, also diese beiden Nebenwinkel einander gleich, und folglich CH auf AB senkrecht (§. 27).

§. 68. Lehrsatz.

Jede zwei Nebenwinkel ABC, ABD Fig. 44 sind zusammen zweien rechten gleich.

Voraussetzung. Die Winkel ABC, ABD sind Nebenwinkel, d. h. sie haben den Schenkel AB und den Scheitel B gemein, und CBD bildet eine gerade Linie (§. 26).

Behauptung. $ABC + ABD = 2\ R.$

Beweis. Erster Fall. Sind diese beiden Winkel einander gleich wie ABC, ABD Fig. 10, so ist jeder derselben ein rechter (§. 27) und folglich beide zusammen zwei Rechte.

Zweiter Fall. Sind diese Winkel ungleich wie ABC, ABD Fig. 44, so errichte man (§. 66) aus B auf CD den Perpendickel BE: so ist (erster Fall)

$$EBC + EBD = 2\ R.$$

Setzt man statt EBC seine Theile $ABC + ABE$ (Grunds. 3), so ist

$$ABC + ABE + EBD = 2\ R.$$

und setzt man wiederum anstatt der Theile $ABE + EBD$ den ganzen Winkel ABD, so ist

$$ABC + ABD = 2\ R.$$

§. 69. Zusatz.

Wenn daher einer von zweien Nebenwinkeln ein spitzer, also kleiner als ein rechter ist (§. 27), so muß der andere stumpf seyn; und umgekehrt.

§. 70. Zusatz 2.

Wenn aus einem Punkte C einer geraden Linie AB Fig. 45 nach einerlei Seite derselben verschiedene Linien CD, CE, CF gezogen werden, so sind die hierdurch entstehenden Winkel ACD, DCE, ECF, FCB zusammen zweien rechten gleich. Denn

$ACD + DCE + ECF = ACF$ (Grundſ. 3)

folglich $ACD + DCE + ECF + FCB =$
$ACF + FCB = 2\,R$ (68).

§. 71. Zusatz 3.

Alle Winkel, welche um einen Punkt C Fig. 45 herum liegen, betragen zusammen vier rechte

Denn $ACD + DCE + ECF + FCB = 2\,R.$ (§.70)
und $ACG + GCH + HCB = 2\,R.$
folglich $ACD + DCE + ECF + FCB + ACG + GCH + HCB = 2\,R. + 2\,R. = 4\,R.$
(Grundſ. 7).

§. 72. Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel ABC, ABD Fig. 44, welche einen Schenkel AB und Scheitel B gemein, die beiden andern Schenkel BC, BD aber nach entgegen gesetzten Richtungen haben, zusammen zweien rechten gleich sind, so sind sie Nebenwinkel, d. h. die Schenkel BC und BD bilden eine einzige gerade Linie (§.26), und jeder derselben ist also die Verlängerung des andern.

Voraussetzung. $ABC + ABD = 2\,R.$

Behauptung. Die Linie CBD ist eine gerade, oder BD ist die Verlängerung von BC.

Beweis. Fiele die Verlängerung der CB nicht auf BD, so müßte sie entweder auf der einen oder andern Seite derselben fallen. Gesetzt sie fiele in der Richtung BF, so daß CBF eine gerade Linie wäre, so wären (§. 26) ABC und ABF Nebenwinkel und folglich

$$ABC + ABF = 2\,R \text{ (§. 68).}$$

Nun ist nach der Voraussetzung auch

$$ABC + ABD = 2\,R.$$

folglich ist (Grund. 4)

$$ABC + ABF = ABC + ABD;$$

und wenn man beiderseits den Winkel ABC hinweg nimmt (Grunds. 10)

$$ABF = ABD$$

welches unmöglich ist, indem ABD nur ein Theil von ABF ist (Grunds. 3).

Da nun auf gleiche Art erweislich ist, daß die Verlängerung der BC nicht auf die andere Seite der BD fallen kann, so muß sie nothwendig auf BD fallen, und CBD ist also eine gerade Linie.

§. 73. Lehrsatz.

Jede zwei Scheitelwinkel AEC, DEB; desgleichen AED, CEB Fig. 12 sind einander gleich.

Voraussetzung. AEC, DEB sind Scheitelwinkel, das heißt AEB und CED sind gerade Linien (§. 29).

Behauptung. $\angle AEC = DEB$.

Beweis. Da CED eine gerade Linie ist, gegen welche AE stößt, so sind AEC, AED Nebenwinkel (§. 26) und folglich (§. 68)

$$AEC + AED = 2\ R.$$

Eben so ist

$$AED + DEB = 2\ R.$$

folglich ist (Grundſ. 4)

$$AEC + AED = AED + DEB;$$

und wenn man zu beiden Seiten den Winkel AED hinwegnimmt, so ist (Grundſ. 10.)

$$AEC = DEB.$$

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß $AED = CEB$.

§. 74. Lehrsatz.

Wenn zwei gleiche Winkel AEC, DEB Fig. 12 dergestalt an einander gelegt werden, daß die Schenkel EC, ED eine gerade Linie bilden, und die beiden andern Schenkel EA, EB von verschiedenen Seiten der geraden Linie CD fallen, so sind es Scheitelwinkel, d. h. AEB muß ebenfalls eine gerade Linie seyn.

Voraussetzung. 1) $AEC = DEB$; 2) CED ist eine gerade Linie.

Behauptung. AEB ist eine gerade Linie.

Beweis. Da $AEC = DEB$, so ist, wenn zu beiden der Winkel AED hinzukommt (Grundſ. 7)

$$AEC + AED = AED + DEB.$$

Nun ist, weil CD eine gerade Linie ist (§. 68)

$$AEC + AED = 2\ R.$$

folglich auch (Grundſ. 2)

$$AED + DEB = 2\ R.$$

folglich liegen die Schenkel AE, EB dieser Winkel in einerlei geraden Linie AB (§. 72).

§. 75. Erklärung.

Zwei Winkel, welche zusammen einen rechten ausmachen, heißen Ergänzungen oder Complemente zu einander. So ist der Winkel *EBA* Fig. 10 das Complement von *EBC* und umgekehrt ist *EBC* das Complement von *EBA*.

Zwei Winkel, welche zusammen zweien rechten gleich sind, heißen Supplemente zu einander. So ist *EBC* Fig. 10 das Supplement von *EBD* und umgekehrt *EBD* das Supplement von *EBC*.

Man findet also das Complement eines Winkels, wenn man diesen Winkel von einem rechten abzieht; und sein Supplement, wenn man ihn von zweien rechten abzieht.

§. 76. Zusatz.

Wenn daher von den vier Winkeln, welche zwei einander schneidende gerade Linien *AB*, *CD* Fig. 12. um ihren Durchschnittspunkt *E* bilden einer, etwa *AEC* bekannt ist, so sind auch die übrigen bekannt. Denn $AED = 2R - AEC$; ferner ist $DEB = AEC$ und $CEB = AED$ (§. 73).

Ist daher einer von diesen vier Winkeln ein rechter, so muß auch jeder der übrigen ein rechter seyn.

Wenn also eine Linie *AB* Fig. 46 auf einer andern *CD* im Punkte *E* senkrecht stehet, so sind *CEA*, *CEB* rechte Winkel, also (§. 28) einander gleich, und folglich ist auch *CD* auf *AB* senkrecht (§. 27).

§. 77. Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreiecke *ABC* Fig. 47 eine seiner Seiten *BC* nach *D* zu verlängert, so ist der hierdurch entstehende äußere

Winkel ACD größer als derjenige innere Winkel BAC, welcher der verlängerten Seite BC gegenüber liegt.

Voraussetzung. CD ist die Verlängerung von BC; ACD ist ein äußerer Winkel; BAC ein innerer der verlängerten Seite BC gegenüber liegender Winkel.

Behauptung. $ACD > BAC$.

Vorbereitung. Man halbire AC im Punkte E (§. 64), ziehe BE und verlängere sie unbegränzt nach F zu; schneide $EF = EB$ ab (§. 49) und ziehe FC.

Beweis. In den Dreiecken EAB, FEC ist nach der Construction

$AE = EC$; $BE = EF$ und (§. 73) $\angle AEB = FEC$

als Scheitelwinkel, folglich sind (§. 53) diese Dreiecke congruent, und also

$$\angle BAE = ECF.$$

Nun ist ECF nur ein Theil von ACD, und also (Grundſ. 3)

$$ACD > ECF;$$

folglich ist auch (Grundſ. 5)

$$ACD > BAE \text{ oder } ACD > BAC.$$

§. 78. Zusatz.

Verlängert man AC nach G, so ist BCG ein äußerer Winkel und ABC der der verlängerten Seite AC gegenüber stehende innere Winkel; folglich (§. 77) $BCG > ABC$. Nun sind ACD und BCB Scheitelwinkel, also (§. 73) $ACD = BCG$. Folglich ist auch $ACD > ABC$.

Der äußere Winkel ACD ist also größer

als jeder der beiden ihm gegenüber stehenden inneren Winkel BAC und ABC.

§. 79. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ABC Fig. 48 ist die Summe irgend zweier Winkel $ABC + ACB$ kleiner als zwei Rechte.

Voraussetzung. ABC und ACB sind innere Winkel des Dreiecks ABC.

Behauptung. $ABC + ACB < 2\,R$.

Vorbereitung. Man verlängere die Seite BC, an welcher beide Winkel anliegen, nach irgend einer Seite, etwa nach D zu.

Beweis. Da ACD ein äußerer Winkel des Dreiecks ABC ist, so ist (§. 78) $ACD > ABC$; und setzt man beiderseits den Winkel ACB hinzu, so ist

$ACD + ACB > ABC + ACB$ (Grunds. 9)

Nun ist (§. 68) $ACD + ACB = 2\,R$. (als Nebenwinkel), folglich ist

$$ABC + ACB < 2\,R.$$

Auf eben die Art wird der Beweis von jeden zwei andern Winkeln des Dreiecks geführt.

§. 80. Zusatz.

In einem Dreiecke ABC Fig. 23, welches einen rechten Winkel B hat, muß jeder der übrigen Winkel spitz seyn. Denn wäre es möglich, daß einer davon, etwa C ein rechter oder ein stumpfer seyn könnte, so wäre im ersten Falle $B + C = 2\,R$, und im zweiten $B + C > 2\,R$., welches unmöglich ist (§. 79). Eben so ist in einem Dreiecke ABC Fig 24, welches einen stumpfen Winkel B hat, jeder der übrigen spitz.

§. 81. Zusatz 2.

Wenn man aus einem Punkte *E* des gemeinschaftlichen Schenkels *AB* zweier Nebenwinkel, *ABC*, *ABD* Fig. 49 auf *CD* einen Perpendickel fällt, so muß dieser auf die Seite des spitzen Winkels fallen. Denn wäre es denkbar, daß er nach der Seite des stumpfen Winkels fallen könnte, so würde ein Dreieck entstehen, welches einen rechten und zugleich einen stumpfen Winkel hätte, welches unmöglich ist (§. 80).

§. 82. Lehrsatz.

Auf eine gerade Linie kann sowohl von einem Punkte außerhalb derselben als von einem Punkte in ihr nur eine sekrechte Linie errichtet werden.

Beweis. Erster Theil. Könnte man von dem Punkte *C* Fig. 50 zwei Perpendickel *CD*, *CE* auf *AB* fällen, so wäre $CDE = R$ und auch $CED = R$. Es würde also ein Dreieck *CDE* mit zweien rechten Winkeln entstehen, welches unmöglich ist (§ 80).

Zweiter Theil. Könnte man aus dem Punkte *B* Fig. 10 zwei Perpendickel *BE*, *BA* auf *CD* errichten, so wäre $EBD = R$ und auch $ABD = R$, folglich (§. 28) $EBD = ABD$, welches unmöglich ist (Grundſ. 3).

§. 83. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken *ABC*, *abc* Fig. 51 zwei Winkel des einen zweien Winkeln des andern einzeln genommen gleich sind, nehmlich $ABC = abc$, $ACB = acb$ und die an diesen beiden Winkeln anliegende Seite

BC des einen Dreiecks der an den gleichen Winkeln liegenden Seite bc des andern gleich ist: so sind beide Dreiecke congruent und alle übrige Stücke in beiden gleich.

Voraussetzung. $\angle ABC = abc$, $\angle ACB = acb$, $BC = bc$.

Behauptung. Die Dreiecke ABC, abc sind congruent.

Vorbereitung. Könnten wir darthun, daß unter den gegebenen Bedingungen auch $AB = ab$ seyn muß, so wären in beiden Dreiecken zwei Seiten nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich, und die Dreiecke müßten also congruent seyn (§. 53). Wären nun AB, ab ungleich, so müßte eine davon, etwa AB größer seyn. Man schneide daher $BD = ab$ ab und ziehe DC.

Beweis. In den Dreiecken DBC, abc wäre hiernach $DB = ab$, $BC = bc$, $\angle DBC = abc$: folglich sind (§. 53) diese Dreiecke congruent, und daher $\angle DCB = \angle acb$.

Nun ist (Voraussſ.) $\angle ACB = \angle acb$ folglich wäre (Grundſ. 4) $\angle DCB = ACB$, welches unmöglich ist, indem DCB nur ein Theil von ACB ist (Grundſ. 3).

Da nun auf eben die Art erweislich ist, daß AB nicht kleiner als ab seyn kann, so ist

$$AB = ab \text{ und daher } \triangle ABC \cong abc.$$

§. 84. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken ABC, abc Fig. 51 zwei Winkel ABC, ACB des einen zweien Winkeln acb, abc des andern einzeln genommen gleich sind, und eine Seite AB, welche einem dieser Winkel gegenüber stehet, der Seite ab gleich ist, welche dem gleichen Winkel im andern Dreiecke gegenüber stehet, so sind diese Dreiecke congruent, und alle übrigen Stücke in beiden Dreiecken gleich.

Voraussetzung. $\angle ABC = abc$, $\angle ACB = acb$, $AB = ab$.

Behauptung. $\triangle ABC \cong abc$.

Vorbereitung. Könnte man darthun, daß unter den vorausgesetzten Bedingungen auch $BC = bc$ seyn muß, so würde die Congruenz dieser Dreiecke aus §. 53 folgen. Wären nun BC, bc ungleich, so müßte eine davon, etwa bc größer seyn; man schneide daher $bd = BC$ ab und ziehe ad.

Beweis. In den beiden Dreiecken ABC, abd wäre demnach

$$AB = ab,\ BC = bd,\ \angle ABC = abd;$$

folglich sind (§. 53) beide Dreiecke congruent und daher $\angle ACB = adb$. Nun ist nach der Voraussezzung auch

$$\angle ACB = \angle acd$$

folglich wäre (Grunds. 4) $adb = acb$, also der äussere Winkel adb dem ihm im Dreiecke acd gegenüberstehenden innern Winkel acb gleich, welches unmöglich ist (§ 77).

Da nun auf eben die Art erweislich ist, daß BC nicht größer als bc seyn kann, so ist

$BC = bc$ und folglich (§. 53) $\triangle ABC \cong abc$.

§. 85. Anmerkung.

Die beiden Sätze der §§. 83 und 84 lassen sich auch folgendermaßen in einem Satze vortragen: Wenn in zweien Dreiecken zwei Winkel des einen zweien Winkeln des andern einzeln genommen gleich sind, und überdies eine Seite des einen einer Seite des andern gleich ist, es mag diese Seite an den beiden Winkeln anliegen oder einem derselben gegenüber stehen, so sind beide Dreiecke congruent.

§. 86. Lehrsatz.

Wenn in einem gleichschenklichten Dreiecke ABC Fig. 52 vom Scheitel A des der Grundlinie BC gegenüberstehenden Winkels auf die Grundlinie ein Perpendickel AD gefällt wird, so wird dadurch sowohl dieser Winkel als auch die Grundlinie BC und die Fläche des Dreiecks ABC halbirt.

Voraussetzung. Das Dreieck ABC ist gleichschenklicht, oder $AB = AC$; ferner AD ist ein Perpendickel auf BC, oder $ADB = ADC$.

Behauptung. $BD = DC$; $\angle DAB = DAC$; $\triangle ADB = \triangle ADC$.

Beweis. Da ABC gleichschenklicht ist, so ist (§. 55) $\angle ABC = ACB$, also beide spitz (§. 79), und der Perpendickel AD fällt also (§. 81) zwischen B und C. Dieß geschehe in D.

In den beiden Dreiecken ABD, ACD ist demnach $AB = AC$: $\angle ABD = ACD$ und der $\angle ADB = ADC = R$. folglich ist (§. 84)

$$BD = DC;\ BAD = \angle CAD;\ \triangle ABD = \triangle ADC.$$

§. 87. Lehrsatz.

Wird die Mitte D der Grundlinie BC

eines gleichschenklichten Dreiecks ABC Fig. 52 mit dem Scheitel A des gegenüberstehenden Winkels durch eine gerade Linie AD verbunden, so stehet diese auf BC senkrecht, und halbirt den gegenüber stehenden Winkel BAC.

Voraussetzung. ABC ist gleichschenklicht, oder $AB = AC$; ferner D ist die Mitte der BC, oder $BD = DC$.

Behauptung. AD ist auf BC senkrecht, und $\angle BAD = DAC$.

Beweis. In den Dreiecken ABD, ADC ist $AB = AC$, $BD = DC$ und AD beiden gemein: folglich ist (§. 60)

$$\angle ADB = ADC = R. \text{ (§. 27) und } \angle BAD = DAC.$$

§. 88. Lehrsatz.

Wenn aus der Mitte D der Grundlinie BC eines gleichschenklichten Dreiecks ABC Fig. 52 auf derselben eine senkrechte Linie errichtet wird, so muß diese durch den Scheitelpunkt A des gegenüber stehenden Winkels BAC gehen.

Voraussetzung. BAC ist ein gleichschenklichtes Dreieck und D die Mitte seiner Basis.

Behauptung. Ein durch D auf BC errichteter Perpendikel gehet durch A.

Beweis. Ginge dieser Perpendikel nicht durch A, sondern nach einer andern Richtung, etwa DE, so verbinde man A mit D durch eine gerade Linie AD. Diese wird (§. 87) auf BC senkrecht seyn. Nun soll es auch DE seyn; also wären aus dem Punkte D zwei Perpendickel DA, DE auf BC errichtet, welches unmöglich ist (§. 82). Folglich muß der durch D errichtete Perpendickel durch A gehen.

§. 89. Lehrsatz.

Wenn in einem gleichschenklichten Dreiecke ABC Fig. 52 der der Grundlinie BC gegenüber stehende Winkel BAC durch eine gerade Linie AD halbirt wird, so wird diese auf der Grundlinie senkrecht stehen, und sie zugleich halbiren.

Voraussetzung. ABC ist gleichschenklicht, also $AB = AC$; und $\angle BAC$ ist halbirt oder $\angle BAD = DAC$.

Behauptung. AD ist senkrecht auf BC, und $BD = DC$.

Beweis. In den Dreiecken ABD, ACD ist $AB = AC$, AD beiden gemein und $\angle BAD = \angle DAC$: folglich ist (§. 53) $BD = DC$ und $\angle ADB = ADC$; folglich ist AD auf BC senkrecht (§. 27).

§. 90. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 53 zwei Seiten AC, AB ungleich sind, nehmlich $AC > AB$, so ist der Winkel ABC, welcher der größern Seite AC gegenüber liegt, größer als der der kleinern Seite AB gegenüber liegende Winkel ACB.

Voraussetzung. $AC > AB$.

Behauptung. $\angle ABC > ACB$.

Vorbereitung. Da $AC > AB$, so wird ein Theil der erstern der AB gleich seyn. Man schneide daher $AD = AB$ ab und ziehe BD.

Beweis. Da $AB = AD$, so ist ABD gleichschenklicht und folglich (§. 55) $\angle ADB = ABD$. Nun ist ADB der äußere Winkel am Dreiecke BDC, und daher (§. 78) $ADB > ACB$, folglich ist auch $ABD > ACB$; um so mehr ist also $\angle ABC > ACB$ (Grunds. 6).

§. 91. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 24 zwei Winkel ungleich sind, so ist die Seite, welche dem größern dieser Winkel gegenüber liegt, größer als die dem kleinern gegenüberliegende.

Voraussetzung. $\angle ABC > ACB$.

Behauptung. $AC > AB$.

Beweis. Wäre AC nicht größer als AB, so müßte entweder $AC = AB$ oder $AC < AB$ seyn. Im ersten Falle müßten (§. 56) die den gleichen Seiten gegenüber stehenden Winkel ABC, ACB einander gleich seyn; und im zweiten Falle müßte (§. 90) der der kleinern Seite AC gegenüber stehende Winkel ABC kleiner als ACB seyn, welches beides der Voraussezzung widerspricht. Folglich ist $AC > AB$.

§. 92. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken ABC, abc Fig. 51 ein Winkel ABC des einen einem Winkel abc des andern gleich ist, und zwei Seiten, welche diesen Winkel nicht einschließen, in beiden Dreiecken einzeln genommen einan=

der gleich sind, nehmlich $AB = ab$, $AC = ac$, so sind die Dreiecke congruent, wenn zugleich die dem gleichen Winkel gegenüber stehende Seite AC, ac, größer als die anliegende AB, ab ist.

Voraussetzung. $AB = ab$, $AC = ac$; $\angle ABC = \angle abc$ und $AC > AB$, $ac > ab$.

Behauptung. $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Vorbereitung. Könnte man darthun, daß unter den angegebenen Bedingungen $BC = bc$ seyn muß, so würde die Congruenz dieser Dreiecke aus (§. 53) folgen.

Beweis. Wären BC, bc ungleich, so müßte eine davon, etwa bc größer seyn. Man mache daher $bd = BC$ und ziehe ad.

In den Dreiecken ABC, abd wäre demnach $AB = ab$; $BC = bd$; $\angle B = \angle b$; folglich (§. 53) $ad = AC$. Da aber auch $ac = AC$, so ist (Grunds. 4) $ac = ad$.

Da $ac > ab$, so ist (§. 90) $\angle abc > acb$. Nun ist adc ein äußerer Winkel des Dreiecks abd und daher (§. 78) $adc > abc$; folglich wäre (Grund. 6) $\angle adc > acb$ und daher (§. 91)

$$ac > ad,$$

welches dem vorigen widerspricht.

Folglich ist nicht $bc > BC$; und da auf eben die Art erweislich ist, daß BC nicht größer als bc seyn kann, so ist $BC = bc$, und folglich beide Dreiecke congruent (§. 53).

§. 93. Zusatz.

Wenn daher in zweien rechtwinklichten Dreiecken außer der Hypothenuse AC, ac Fig. 54 noch eine Kathete AB, ab gleich ist, so sind die Dreiecke congruent, weil (§. 28) die rechten Winkel B, b einander gleich sind, welche (§. 80) die größten Winkel in den Dreiecken sind, und daher (§. 91) $AC > AB$ und $ac > ab$.

§. 94. Lehrsatz.

Wenn von einem außerhalb einer geraden Linie AB Fig. 55 liegenden Punkte C verschiedene gerade Linien CD, CE, CF, CG nach AB gezogen werden, so ist die senkrechte CD die kürzeste, und von den übrigen CE, CF, CG ist diejenige, welche der senkrechten näher liegt, kleiner als die entferntere. Jeder, der auf einerlei Seite DB der senkrechten CD gezogenen Linien CE, CF, CG läßt sich auf der andern Seite DA der senkrechten noch eine gleiche gerade Linie ziehen, aber auch nicht mehr als noch eine gleiche.

Erster Theil. Voraussetzung. CD ist senkrecht auf AB.

Behauptung. CD ist kürzer als jede gerade Linie, welche von C nach AB gezogen werden kann.

Beweis. Man denke sich einen Punkt E noch so nahe an D und die gerade Linie CE gezogen, so wird ein rechtwinklichtes Dreieck CDE entstehen, worin $CDE = R.$, also (§. 80) $CDE > CED$, und folglich (§. 91) $CE > CD$.

Zweiter Theil. Voraussetzung.

$DF > DE$; $DG > DF$ u. s. w.

Behauptung.

$CF > CE$; $CG > CF$ u. s. w.

Beweis. Da $DF > DE$, also die Verlängerung der letztern: so ist CEF der äußere Winkel am Dreiecke CDE, also (§. 78) $CEF > CDE$. Nun ist $CDE = R.$, und daher CEF ein stumpfer Winkel, also (§. 80) der größte Winkel im Dreieck CEF; folglich ist (§. 91) $CF > CE$.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß $CG > CF$ u. s. w.

Dritter Theil. Voraussetzung. Die Linie CD ist auf AB senkrecht.

Behauptung. Jeder der aus dem Punkte C auf der einen Seite des Perpendickels nach AB gezogenen geraden Linie, wie CE läßt sich auf der andern Seite des Perpendickels eine, aber auch nur eine gleiche gerade Linie ziehen.

Beweis. Man schneide $DH = DE$ ab und ziehe CH: so ist in den Dreiecken CDE, CDH die Linie $DE = DH$, CD beiden gemein, und $\angle CDH = CDE = R.$; folglich ist (§. 53) $CH = CE$.

Könnte man nun außer der CH noch eine der CE gleiche Linie CK ziehen, so wäre (Grundſ. 4) auch $CK = CH$, welches unmöglich ist, indem auf einerlei Seite der senkrechten keine zwei einander gleiche Linien gezogen werden können (zweiter Theil).

§. 95. Zusatz.

Aus einem Punkte C können nach einer geraden Linie AB keine drei gleiche gerade Linien gezogen werden. Denn wäre dieß möglich, so müßten wenigstens zwei dieser gleichen Linien auf einerlei Seite des Perpendickels fallen, welches unmöglich ist (§. 94). Auch folgt umgekehrt, daß gleiche Linien gleiche Entfernungen vom Perpendickel haben, ungleiche Linien aber ungleich weit vom Perpendickel entfernt sind. Ist nehmlich $CH = CE$; so muß auch $DH = DE$ seyn. Ist aber $CF > CH$, so ist auch $DF > DH$.

§. 96. Anmerkung

Die Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie ist der kürzeste Weg von diesem Punkte nach der geraden Linie. Sie wird also der aus diesem Punkte auf die gerade Linie gefällte Perpendickel seyn (§. 94. Ir Theil).

§. 97. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ABC Fig. 56 sind jede zwei Seiten zusammen größer als die dritte.

Voraussetzung. ABC ist ein Dreieck.

Behauptung. $AB + AC > BC$; $AB + BC > AC$; $BC + AC > AB$.

Vorbereitung. Man verlängere BA unbegränzt, mache $AD = AC$ und ziehe DC.

Beweis. Da $AD = AC$, so ist (§. 55) $\angle ADC = ACD$. Nun ist (Grundſ. 3) $\angle BCD > ACD$, folglich ist auch $\angle BCD > ADC$; folglich (§. 91) $BD > BC$. Nun ist $BD = BA + AD = BA + AC$; folglich ist $BA + AC > BC$.

Auf eben die Art wird der Beweis von jeden zwei andern Linien des Dreiecks geführt.

§. 98. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ABC Fig. 54 ist die Differenz irgend zweier Seiten desselben kleiner als die dritte.

Voraussetzung. ABC ist ein Dreieck.

Behauptung. $AC - AB < BC$; $AC - BC < AB$; $BC - AB < AC$.

Vorbereitung. Von der größern Seite AC schneide man $AD = AB$ ab, und ziehe BD, so ist $DC = AC - AD = AC - AB$.

Beweis. Da $AD = AB$, so ist (§. 55) $\angle ABD = ADB$, also (§. 80) beide spitz, folglich (§. 69) BDC ein stumpfer Winkel, also (§. 80) der größte Winkel im Dreiecke BDC; folglich ist (§. 91) $BC > CD$ oder $BC > AC - AB$.

Auf eben die Art wird der Beweis von der Differenz irgend zweier andern Seiten des Dreiecks geführt *).

§. 99. Lehrsatz.

Wenn man von den Endpunkten B, C der Seite BC eines Dreiecks ABC Fig. 57 nach einem innerhalb des Dreiecks genommenen Punkte, D, zwei gerade Linien BD, CD zieht, so ist die Summe dieser Linien $BD + CD$, kleiner als die Summe, $AB + AC$, der beiden übrigen Seiten des Dreiecks; der von ihnen eingeschlossene Winkel BDC aber ist größer als der von jenen eingeschlossene Winkel BAC.

Voraussetzung. Der Punkt D liegt innerhalb des Dreiecks ABC, nach welchem aus B und C die Linien BD, CD gezogen sind.

Behauptung. $BD + DC < BA + AC$,
$\angle BDC > BAC$.

*) Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des §. 97. Denn aus $AB + BC > AC$, folgt, wenn beiderseits AB abgezogen wird, $BC > AC - AB$.

Vorbereitung. Man verlängere BD bis sie die AC in E schneidet.

Beweis. Erster Theil. $BD + DC < BA + AC$. Im Dreiecke BAE ist (§. 97)

$$BA + AE > BE;$$

setzt man zu beiden Seiten EC hinzu, so ist

$$BA + AE + EC > BE + EC$$

oder $$BA + AC > BE + EC.$$

Im Dreiecke EDC ist

$$DE + EC > DC;$$

und setzt man zu beiden Seiten BD hinzu, so ist

$$BD + DE + EC > BD + DC$$

oder $$BE + EC > BD + DC.$$

Nun war $BA + AC > BE + EC$;
folglich ist (Grunds. 6) $BA + AC > BD + DC$.

Zweiter Theil. $\angle BDC > BAC$.

Am Dreiecke CDE ist BDC ein äußerer Winkel, also (§. 78) $BDC > BEC$.

Aus gleichem Grunde ist am Dreieck BAE der Winkel $BEC > BAC$;
folglich ist (Grunds. 6) $\angle BDC > BAC$.

§. 100. Aufgabe.

Es sind drei gerade Linien A, B, C Fig. 58 gegeben, von denen jede zwei zusammen größer als die dritte sind; man soll ein Dreieck beschreiben, dessen Seiten den gegebenen Linien einzeln genommen gleich seyen.

Auflösung. Man ziehe eine gerade Linie DE, welche in D begränzt, nach E zu aber unbegränzt fortläuft; mache $DF = A$, $FG = B$, $GH = C$. Aus F beschreibe man mit FD den Kreis DKL, und aus G mit GH den Kreis KLH; von K, worin beide Kreise einander schneiden, ziehe man KF, KG, so ist KFG das verlangte Dreieck.

Beweis. Da (§. 36) $FD = FK$ als Halbmesser eines und desselben Kreises KDL, und auch $FD = A$, so ist (Grunds. 4) $FK = A$. Eben so, weil $GH = GK$ und $GH = C$, so ist auch $GK = C$. Nun war auch $FG = B$. Folglich sind die Seiten des Dreiecks KFG den gegebenen Linien A, B, C gleich.

Daß aber die beiden Kreise DKL, KLH einander schneiden, erhellet aus der Bedingung, daß jede zwei Seiten zusammen größer als die dritte sind. Denn da $FD + GH > FG$, so muß, wenn der um F beschriebene Kreis die Linie FH in irgend einem Punkte m schneidet, der um G beschriebene durch einen Punkt n gehen, welcher in der Richtung mF liegt. Denn wäre es denkbar, daß dieser zweite Kreis auch durch den Punkt m gehen könnte, so wäre Gm ein Halbmesser desselben, also $Gm = GH$, und da $Fm = FD$, so wäre $Gm + mF = GH + FD$ oder $GF = GH + mF = GH + FD$, oder $GF = GH + FD$ gegen die Voraussetzung. Noch weniger kann der Durchschnittspunkt n zwischen G und m fallen, weil alsdann $GH + FD < FG$ wäre, ebenfalls gegen die Voraussetzung.

Da $FG + GH > FD$, aber $FD = Fm$, (§. 36) so ist $FG + GH > Fm$ oder $FH > Fm$, folglich liegt der Punkt H außerhalb des um F beschriebenen Kreises.

Da ferner $GF + FD > GH$, aber $GH = Gn$ (§. 36), so ist $GF + FD > Gn$ oder $GD > Gn$, folglich fällt der Punkt n zwischen m und D, also innerhalb des um F beschriebenen Kreises; und da der Punkt H außerhalb dieses Kreises liegt, so muß der durch n und H gehende Kreis LKH den Kreis KLD schneiden (§. 47).

§. 101. Anmerkung.

In der Ausübung hat man nicht nöthig, die ganzen Kreise zu ziehen, welches in dieser Figur wegen der Deutlichkeit des Beweises geschehen ist, sondern es ist hinlänglich zwei Kreisbogen zu beschreiben, welche nach dem Augenmaße zu urtheilen einander durchschneiden. Auch leuchtet von selbst ein, daß es einerlei ist, ob die drei gegebenen Linien sich von einander getrennt, oder in einem Dreiecke vereinigt befinden. Obige Auflösung lehrt daher auch, wie ein Dreieck zu zeichnen ist, welches einem andern gleich sey.

§. 102. Zusatz.

Die Auflösung der vorigen Aufgabe bleibt ungeändert, wenn auch zwei der gegebenen Linien einander gleich sind. Soll daher aus zwei geraden Linien AB, CD Fig. 59 ein gleichschenklichtes Dreieck construirt werden, dessen Basis AB werden soll, so muß der Schenkel CD größer als die Hälfte der Basis seyn, also das Doppelte dieses Schenkels größer als AB (§. 97). In diesem Falle beschreibe man aus A und B mit dem Halbmesser CD die Kreisbogen FG, HK bis sie einander in E schneiden, ziehe EA, EB, so ist EAB das verlangte Dreieck.

Wenn aber CD kleiner als die Hälfte der Linie AB ist, so werden die aus A und B beschriebenen Bogen einander nicht schneiden, und es läßt sich dann kein Dreieck aus ihnen bilden.

§. 103. Aufgabe.

An eine gegebene gerade Linie *AB* Fig. 60 an einem in ihr gegebenen Punkte *A* einen geradlinigten Winkel anzulegen, welcher einem gegebenen Winkel *cab* gleich sey.

Auflösung und Beweis. Auf den Schenkeln *ac*, *ab* des gegebenen Winkels nehme man beliebig die Punkte *d* und *e*, ziehe *de*, so entstehet ein Dreieck *ade*. Von *AB* schneide man $AE = ae$ ab, und setze hierauf (§. 100) das Dreieck *ADE* so, daß $AD = ad$, $DE = de$ werde, so sind (§. 60) diese Dreiecke congruent, und $\angle CAB = cab$.

§. 104. Anmerkung.

Da es einerlei ist, wo die Punkte d und e in den Schenkeln ac, ab genommen werden, so kann man sie auch in gleichem Abstande vom Scheitel a wählen. Man beschreibe daher aus dem Scheitel a mit einer beliebigen Zirkelöffnung ag den Bogen gf. Aus A beschreibe man mit derselben Zirkelöffnung den unbegränzten Bogen GL. Mit der Zirkelöffnung gf beschreibe man aus G einen Bogen HK, welcher den Bogen GL in F schneidet. Zieht man nun durch F die Linie AC, so wird der Winkel CAB der verlangte seyn.

§. 105. Aufgabe.

An eine gegebene Linie *AB* Fig. 61 ein Dreieck zu setzen, worin ein Winkel dem gegebenen Winkel *x*, und die diesen Winkel einschließenden Seiten den gegebenen Linien *C*, *D* gleich seyn.

Auflösung. An der geraden Linie *AB* lege man durch einen beliebigen Punkt *A* einen Winkel $FAB = x$ an (§. 103). Von seinen Schenkeln schneide man $AG = C$, $AE = D$ ab und ziehe EG; so ist EAG das verlangte Dreieck.

§. 106. Aufgabe.

Aus einem gegebenen Winkel x und zweien ungleichen Seiten A, B Fig. 62 ein Dreieck zu beschreiben, worin die größere Seite A dem gegebenen Winkel gegenüber stehe.

Auflösung. Man ziehe eine unbegränzte gerade Linie CD, und lege an einem beliebigen Punkt E derselben den Winkel $FED = x$ an (§. 103). Von FE schneide man $EH = B$ ab, und beschreibe aus H mit der Linie A einen Kreisbogen; so wird dieser die unbegränzte Linie CD in zweien Punkten G und K schneiden. Den Durchschnittspunkt G, welcher auf der Seite des gegebenen Winkels FED liegt, verbinde man mit H durch eine gerade Linie GH, so wird HEG das verlangte Dreieck seyn.

Beweis. Aus H fälle man auf CD den Perpendickel HL. Fällt dieser mit HE zusammen, welches geschieht, wenn x und daher FED ein rechter Winkel ist, so ist $HL = HE$, und da nach der Voraussetzung $A > HE$, so ist auch $A > HL$.

Fällt der Perpendickel HL nicht mit HE zusammen, so ist (§. 94) $HE > HL$ und da nach der Voraussetzung $A > HE$, so ist auch $A > HL$. In jedem Falle also muß ein aus H mit der Linie A beschriebener Kreis den verlängerten Perpendickel HL jenseits CD in einem Punkte M treffen, und dieser Kreis wird also (§. 48) die Linie CD in zwei Punkten G und K schneiden.

Von diesen Durchschnittspunkten G und K kann aber nur einer auf der Seite des gegebenen Winkels FED liegen. Denn denkt man sich HK gezogen, so ist (§. 36) $HK = HG = A$. Nun ist $A > HE$; folglich ist auch $HK > HE$, folglich (§. 95) $LK > LE$. Der zweite Durchschnittspunkt K fällt also auf der andern Seite des gegebenen Winkels FED und von den beiden durch die vorgeschriebene Construction entstehenden Dreiecken HEG, HEK wird bloß das erstere den gegebenen Winkel x enthalten. Da nun in diesem Dreiecke auch $HE = B$, $HG = A$, so ist HEG das verlangte Dreieck.

§. 107. Anmerkung.

Wenn der Winkel x ein rechter ist, und daher HL mit HE zusammen fällt, werden auch die Entfernungen EK, EG so wie die Winkel FEG, FEK als rechte einander gleich seyn und beide Dreiecke HEG, HEK werden die verlangten Stücke enthalten. Da jedoch diese Dreiecke (§. 93) congruent sind, so werden sie bloß in ihrer Lage von einander unterschieden seyn. Hieraus erhellet, wie aus der Hypothenuse und einer Kathete eines rechtwinklichten Dreiecks dasselbe zu construiren sey.

§. 108. Zusatz.

Wenn Fig. 63 die dem gegebenen Winkel x gegenüber stehende Seite B kleiner als die anliegende A, jedoch größer als der Perpendickel HL ist, so werden die nach der Construction des §. 106 entstehenden Durchschnitte G, K auf einerlei Seite des Winkels FED fallen. Denn da $HK = HG$, aber $HG < HE$, so ist auch $HK < HE$, folglich der Abstand $LK < LE$ (§. 95), folglich liegen die Punkte G und K auf einerlei Seite des gegebenen Winkels $FED = x$; und in beiden Dreiecken HEK, HEG werden die gegebenen Stücke A, B, x anzutreffen seyn. In diesem Falle giebt es also für die vorgelegte Aufgabe zwei Auflösungen, und um zu wissen, welche von beiden Auflösungen zu nehmen sey, muß in diesem Falle in der Aufgabe besonders bestimmt werden, ob das gesuchte Dreieck spitzwinklicht oder stumpfwinklicht seyn soll.

§. 109. Zusatz.

Je weniger im letztern Falle die kleinere Linie B vom Perpendickel unterschieden ist, desto kleiner ist ihr Abstand LG von diesem Perpendickel (§.95), und desto näher rücken die beiden Durchschnittspunkte G, K an einander. Ist Fig. 64 die kleinere Linie B dem Perpendickel HL gleich, so fallen beide Durchschnittspunkte G, K im Punkte L zusammen. Ein aus H mit dem Halbmesser $B = HL$ beschriebener Kreis kann mit der Linie CD nur den Punkt L gemein haben, weil jede andere von H nach CD gezogene Linie größer als HL ist (§. 94); daher der Endpunkt einer jeden solchen Linie, und folglich alle Punkte der Linie CD außerhalb dieses Kreises GLK fallen müssen. In diesem Falle giebt es nur ein Dreieck von den verlangten Eigenschaften.

Ist aber die Linie B kleiner als HL, so wird ein aus H mit dem Halbmesser B beschriebener Kreis keinen Punkt mit der Linie CD gemein haben, und in diesem Falle läßt sich aus den gegebenen Stücken kein Dreieck bilden.

§. 110. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken ABC, DEF Fig. 65 zwei Seiten des einen AB, AC zweien

Seiten des andern DE, DF einzeln genommen gleich sind, aber der von den ersteren eingeschlossene Winkel BAC größer als der von den anderen eingeschlossene EDF ist, so ist auch die dritte Seite BC des erstern Dreiecks größer als die dritte Seite EF des andern.

Voraussetzung. $AB = DE$; $AC = DF$;
$\angle BAC > EDF$.

Behauptung. $BC > EF$.

Vorbereitung. Man lege (§. 103) an diejenige Seite DE, welche nicht größer als die andere ist, im Punkte D einen Winkel $EDG = BAC$ an, so wird, da $BAC > EDF$ die Linie DG außerhalb des Winkels EDF fallen. Man schneide dann $DG = AC = DF$ ab und ziehe GF, GE.

Beweis. In den Dreiecken ABC, DEG ist $AB = DE$, $AC = DG$, $\angle BAC = EDG$, folglich ist (§. 53) $BC = EG$.

Da $DG = AC$ und auch $DF = AC$, so ist (Grundſ. 4) $DG = DF$, also DGF gleichschenklicht und folglich (§. 55) $\angle DGF = DFG$. Nun ist (Grundſ. 3) $\angle DGF > EGF$, folglich ist auch $\angle DFG > EGF$; um so mehr ist (Grundſ. 6) $EFG > EGF$. Folglich ist im Dreiecke EFG die dem größern Winkel EFG gegenüber stehende Seite EG größer als die dem kleinern Winkel EGF gegenüber stehende EF.

Nun war $EG = BC$; folglich ist $BC > EF$.

§. 111. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken ABC, DEF

Fig. 65 zwei Seiten des einen, AB, AC, zweien Seiten des andern, DE, DF einzeln genommen gleich sind, aber die dritte Seite BC des erstern größer als die dritte Seite EF des letztern ist, so ist auch der von den beiden Seiten im ersten Dreiecke eingeschlossene Winkel BAC größer als der von den gleichen Seiten im andern Dreiecke eingeschlossene Winkel EDF.

Voraussetzung. $AB = DE$; $AC = DF$; $BC > EF$.

Behauptung. $\angle BAC > EDF$.

Beweis. Wäre nicht $BAC > EDF$, so müßte entweder $BAC = EDF$ oder $BAC < EDF$ seyn. Im ersten Falle wäre (§. 53) $BC = EF$, und im zweiten Falle $BC < EF$ (§. 110), welches beides der Voraussetzung widerspricht. Folglich ist $BAC > EDF$.

Drittes Kapitel.

Von den Parallellinien und Pallelogrammen.

§. 112. Erklärung.

Wenn zwei in einerlei Ebene liegende gerade Linien *AB*, *CD* Fig. 66, sie mögen parallel oder convergirend seyn, von einer dritten *EF* in den Punkten *G*, *H* geschnitten werden, so entstehen um diese beiden Durchschnittspunkte herum acht Winkel, von denen die vier außerhalb der Parallelen befindlichen *x*; *y*, *z*, *u* äußere Winkel heißen, und die vier zwischen den Parallelen befindliche *v*, *t*, *r*, *s* innere Winke genannt werden. Jede zwei innere Winkel, welche auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegen, ohne Nebenwinkel zu seyn, wie *v* und *s*, desgleichen *r* und *t* heißen innere Wechselswinkel zu einander. Jede zwei äußere Winkel, welche von verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegen ohne Nebenwinkel zu seyn, wie *x* und *u*, desgleichen *y* und *z* heißen äußere Wechselswinkel. Jede zwei an einerlei Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel, welche ihre Oeffnung nach einerlei Seite gekehrt haben, heißen innere und äußere correspondirende Winkel. So sind x und r, desgleichen t und u correspondirende Winkel.

§. 113. Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien AB, CD Fig. 66 von einer dritten EF geschnitten werden und die Summe der hierdurch auf einerlei Seite der schneidenden Linie entstehenden innern Winkel t und s zweien rechten gleich ist, so sind diese Linien parallel.

Voraussetzung. $t + s = 2\,R.$

Behauptung. AB, CD sind parallel.

Vorbereitung. Da (§. 58) $v + t = 2\,R.$
und $r + s = 2\,R.$
so ist (Grundß. 7) $v + t + r + s = 4\,R.$
Nun ist $t + s = 2\,R.$
folglich ist auch (Grundß. 10) $v + r = 2\,R.$

Beweis. Wären AB, CD nicht parallel, sondern schnitten verlängert einander auf irgend einer Seite der EF in einem Punkte K, so würde, da alsdann GBK, HDK gerade Linien sind, ein geradlinigtes Dreieck KGH entstehen, worin die Summe zweier Winkel t, s zweien rechten gleich wäre, welches unmöglich ist (§. 79).

Da nun auf gleiche Art erweislich ist, daß diese Linien auch auf der andern Seite der EF einander nicht schneiden können, so sind sie parallel (§. 30).

§. 114. Lehrsatz.

Zwei gerade Linien AB, CD Fig. 66, welche in einer Ebene eine solche Lage haben, daß

1) die durch eine dritte sie schneidende EF entstehenden Wechselswinkel v und s einander gleich sind; oder daß

2) ein äußerer Winkel y dem ihm an derselben Seite gegenüber stehenden innern s gleich ist, sind parallel.

Erster Theil. Voraussetzung. $v = s$.
Behauptung. AB, CD sind parallel.

Beweis. Da $v = s$, so ist $v + t = s + t$. Nun ist (§. 68) $v + t = 2\,R$; folglich ist auch $s + t = 2\,R$, folglich sind (§. 113) AB, CD parallel.

Zweiter Theil. Voraussetzung. $y = s$.
Behauptung. AB, CD sind parallel.

Beweis. Da $y = s$, so ist $y + t = s + t$. Nun ist (§. 68) $y + t = 2\,R$.; folglich sind auch $s + t = 2\,R$, also (§. 113) AB, CD parallel.

§. 115. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt G Fig. 66 eine gerade Linie zu ziehen, welche einer gegebenen CD parallel sey.

Auflösung und Beweis. Auf CD nehme man willkührlich einen Punkt H; ziehe GH und lege (§. 103) an GH im Punkte G einen Winkel $HGA = GHD$ an und verlängere AG nach B, so ist (§. 114. I) AB der CD parallel.

*§. 116. Erklärung.

Die Fläche, welche von den beiden Schenkeln eines

Winkels *acd* Fig. 67 nach dem Scheitelpunkt und seitwärts hin begränzt ist, nach der Oeffnung hin aber unbegränzt fortläuft, wenn man die Schenkel *ca*, *cd* über alle Gränzen hinaus verlängert, heißt eine Winkelfläche.

*§. 117. Grundsatz.

Wenn zwei Winkel *ACD*, *acd* Fig. 67 einander gleich sind, so müssen auch ihre Winkelflächen einander gleich seyn.

Denn legt man den Winkel *ACD* dergestalt auf *acd*, daß *C* auf *c* und *CA* auf *ca* zu liegen kommt, so muß auch *CD* auf *cd* fallen (§. 25). Alle Gränzen der einen Winkelfläche, so weit man auch ihre Schenkel verlängern mag, fallen also ganz auf die Gränzen der andern und beide Flächen sind also einander gleich (§. 14).

*§. 118. Erklärung.

Die Fläche *CDFE* Fig. 67, welche zwei auf einer dritten Linie *AB* senkrechte, und daher (§. 113) parallele Linien *CD*, *EF* zwischen sich fassen, und welche daher nur noch von der Seite *DF* begränzt wird, nach *C* und *E* hin aber unbegränzt fortläuft, heißt ein senkrechter Flächenstreifen, und die Linie *DF* seine Breite.

Die unbegränzte Fläche *BGHD* Fig. 68, welche zwei Linien *BG*, *DH* zwischen sich fassen, die mit einer dritten sie schneidenden *EF* gleiche correspondirende, jedoch schiefe Winkel *EGB*, *EHD* bilden, und daher (§. 114) parallel sind, heißt ein schiefer Flächenstreifen.

*§. 119. Lehrsatz.

Zwei senkrechte Flächenstreifen *CDFE*, *GHKL* Fig. 67 von gleichen Breiten *DF*, *HK* sind einander gleich.

Voraussetzung. $\angle CDF = DFE = GHK = HKL = R$; ferner $DF = HK$.

Behauptung. Der Streifen $CDFE = GHKL$.

Beweis. Man lege *CDFE* dergestalt auf *GHKL*, daß *D* auf *H*, und *DF* auf *HK* zu liegen komme.

Da $DF = HK$, so fällt (§. 15) auch *F* auf *K*. Da $CDF = GHK$, so fällt (§. 25) *DC* auf *HG*. Da $DFE = HKL$, so fällt *FE* auf *KL*. Folglich fallen alle Gränzen der einen Fläche auf die der andern, und sind also einander gleich (§. 14).

*§. 120. Lehrsatz.

Jede Winkelfläche *acd* Fig. 67. ist größer als jeder senkrechter Flächenstreifen *CDFE*, der Winkel *acd* mag noch so klein seyn, und der Streifen *CDFE* eine noch so große Breite *DF* haben.

Voraussetzung. 1) *CDFE* ist ein senkrechter Flächenstreifen, also $\angle CDF = R$. 2) *acd* ist eine Winkelfläche.

Behauptung. $acd > CDFE$.

Beweis. Der Winkel *acd* sey noch so klein (etwa der 1000te Theil vom rechten), so wird er doch eine hinlängliche Anzahl Mahl (etwa 1001 Mahl) um den Punkt *c* an einander gelegt, wie *acd*, *dce*, *ecf* u. s. w., endlich einen Winkel *ach* erzeugen können, welcher größer als ein rechter ist. Die Winkelfläche *acd*, welche (§. 117) den Flächen *dce*, *ecf* ꝛc. gleich ist, wird also eine hinlängliche Anzahl (1001) Mahl wiederhohlt, die gleichfalls unbegränzte Winkelfläche *acb* des rechten Winkels endlich einmahl übertreffen.

Schneidet man hingegen von der verlängerten *DF* die ihr gleichen Theile *FH*, *HK* ꝛc. ab, und errichtet aus *H*, *K* ꝛc. die Perpendickel *HG*, *KL* ꝛc., so entstehen (§. 118) die senkrechten Flächenstreifen *EFHG*, *GHKL* ꝛc., welche alle einander und der Fläche *CDFE* gleich sind (§. 119). Da jedoch die Linie *DB* nach *B* zu unbegränzt fortläuft, so kann man so viele der *DF* gleiche Theile als man will abschneiden, ohne je zu Ende zu kommen. Die hierdurch entstehenden Flächenstreifen, so viele man auch derselben nehmen mag, werden nie die Winkelfläche *CDB* des rechten Winkels ausfüllen.

Wenn daher die Winkelfläche *acd* irgend eine Anzahl n mahl genommen die Fläche *acb* des rechten Winkels übertrift, so daß n . Fläche $acd >$ Fläche acb, so wird eine gleiche Anzahl n der Flächenstreifen *CDFE* die Fläche *CDB* des rechten Winkels nicht ausfüllen, so daß $n \,.\, CDFE <$ Fläche CDB.

Folglich ist (Grundſ. 6)

$$n \text{ . Fläche } acd > n \text{ . Fläche } CDFE;$$

und wenn man beiderseits durch n dividirt (Grundſ. 14)

$$\text{Fläche } acd > CDFE.$$

*§. 121. Zusatz.

Legt man also an einem Punkte *F* innerhalb des senkrechten Streifens *CDFE* einen Winkel $EFM = acd$ an, so kann die Fläche dieses Winkels, welche größer als $CDFE$ ist, nicht innerhalb dieses Streifens bleiben (Grunds. 3); sein Schenkel FM muß nothwendig aus den Gränzen dieser Fläche hinaustreten, und also die Linie CD in irgend einem Punkte schneiden.

*§. 122. Lehrsatz.

Jede Winkelfläche ist größer als jeder schiefe Flächenstreifen $BGHD$ Fig. 68.

Voraussetzung. $BGHD$ ist ein schiefer Flächenstreifen oder $\angle EGB = EHD$ und beide schief (§. 118).

Behauptung. Jede Winkelfläche ist größer als $BGHD$.

Vorbereitung. Man halbire (§. 64) GH in K, ziehe (§. 67) KM auf CD, und KL auf AB senkrecht.

Beweis. In den beiden Dreiecken KHM, KLG ist die Linie $KH = KG$, $\angle KHM = EGB = LGK$; und der $\angle KMH = KLG = R$ (§. 73); folglich ist auch (§. 84) $\angle LKG = HKM$, und der Flächenraum des Dreiecks KLG dem des Dreiecks KHM gleich. Es wird also (§. 74) ML eine gerade Linie, und der unbegränzte Flächenstreifen $BGHD$ dem senkrechten Streifen $BLMD$ gleich seyn.

Nun aber ist letzterer kleiner als jede Winkelfläche (§. 120); folglich wird auch ersterer kleiner als jede Winkelfläche seyn.

*§. 123. Zusatz.

Legt man also in einem solchen schiefen Flächenstreifen einen Winkel BGN an, so kann dessen Fläche, welche größer als die des Streifens $BGHD$ ist, nicht innerhalb dieses Raums bleiben, und die Linie GN muß also hinlänglich verlängert, die Linie HD in irgend einem Punkte schneiden.

§. 124. Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien AB, CD Fig. 69 von einer dritten EF geschnitten werden, und die Summe der beiden an einerlei Seite der EF liegenden innern Winkel DGH, GHB zusammen kleiner als zwei rechte ist, so treffen sie hinlänglich verlängert an eben dieser Seite zusammen.

Voraussetzung. $DGH + GHB < 2\,R$.

Behauptung. AB, CD sind convergirend

Vorbereitung. Man lege (§. 103) an EG in G einen Winkel $EGL = GHB$ an.

Beweis. Da $EGL = GHB$, so ist

$$EGL + LGH = GHB + LGH.$$

Nun ist (§. 68) $EGL + LGH = 2\,R$;

folglich ist auch $GHB + LGH = 2\,R$.

Da aber $DGH + GHB < 2\,R$, so ist (Grundsatz 5)

$$DGH + GHB < GHB + LGH;$$

oder wenn beiderseits GHB abgezogen wird (Grunds. 11)

$$DGH < LGH;$$

folglich fällt der Schenkel GD zwischen GL und GH.

Nun ist, weil $EGL = GHD$ (§. 114) die Linie GL $\#$ HB, und daher $LGHB$ ein Flächenstreifen; folglich muß (§§. 121, 123) GD, welche innerhalb dieses Streifens liegt, hinlänglich verlängert, die AB schneiden.

§. 125. Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien AB, CD Fig.

66 parallel sind, und von einer dritten EF in G und H geschnitten werden, so ist

1) die Summe der beiden innern an einerlei Seite liegenden Winkel t, s zweien rechten gleich.

2) Sind die innern Wechselswinkel v und s, t und r einander gleich; und

3) ist der äußere Winkel y dem ihm an derselben Seite gegenüber stehenden innern s gleich.

Erster Theil. Voraussetzung. $AB \# CD$. Behauptung. $t + s = 2\,R$.

Beweis. Wären nicht $t + s = 2\,R$, so müßte entweder $t + s < 2\,R$. oder $t + s > 2\,R$. Im ersten Falle müßten (§. 124) die Linien AB, CD nach B und D zu verlängert zusammentreffen; und im zweiten Falle wäre $v + r < 2\,R$, und beide Linien müßten nach der entgegen gesetzten Seite zusammentreffen, welches beides der Voraussetzung widerspricht. Folglich ist $t + s = 2\,R$.

Zweiter Theil. Voraussetzung. $AB \# CD$. Behauptung. Der Winkel $v = s$.

Beweis. Da $AB \# CD$, so ist (I. Theil) $t + s = 2\,R$. Nun ist auch (§. 68) $t + v = 2\,R$; folglich ist (Grundſ. 4) $t + s = t + v$, und folglich (Grundſ. 10) $s = v$.

Dritter Theil. Voraussetzung. $AB \# CD$ Behauptung. $y = s$.

Beweis. Da $AB \# CD$, so ist (II. Theil) $v = s$. Nun ist auch (§. 73) $v = y$; folglich ist (Grundſ. 4) $y = s$.

§. 126. Zusatz.

Durch einen und denselben Punkt G Fig. 69 kann man einer gegebenen Linie AB nur eine Parallele führen. Denn wäre es möglich, der AB zwei Parallele KL, CD durch den Punkt G zu legen, so wäre, da $KL \# AB$ (§. 125, III.) $\angle EGL = EHB$; und weil auch $CD \# AB$, $\angle EGD = EHB$; folglich wäre (Grundſ. 4) $EGL = EGD$, welches unmöglich iſt (Grundſ. 3).

§. 127. Zusatz.

Wenn eine Linie CD Fig. 69 eine von zweien Parallelen KL ſchneidet, ſo muß ſie auch die andere AB ſchneiden. Denn wenn ſie die AB nicht ſchnitte, ſo wäre ſie ihr parallel (§. 30). Es wären demnach durch einen und denſelben Punkt G der AB zwei Parallele KL, CD geführt, welches unmöglich iſt (§. 126).

Wenn daher auf eine von zweien Parallelen AB Fig. 68. im Punkte L ein Perpendickel LM errichtet wird, ſo muß dieſer auch die andere CD in einem Punkte M ſchneiden, und zwar unter einem rechten Winkel, weil $BLM + LMD = 2\,R$.

§. 128. Lehrſatz.

Wenn jede von zweien Linien AB, CD Fig. 71, welche nicht in einerlei Richtung liegen, einer dritten EF parallel iſt, ſo ſind ſie auch einander parallel.

Vorausſetzung. $AB \# EF$; $CD \# EF$.

Behauptung. $AB \# CD$.

Vorbereitung. Man durchſchneide AB durch eine gerade Linie GM.

Beweis. Da $AB \# EF$, so wird (§. 127) die die AB durchschneidende Linie GH auch die EF in einem Punkte K durchschneiden, und es ist (§. 125. II) $AHK = HKF$.

Da $EF \# CD$, so wird GK auch die Linie CD in einem Punkte L schneiden, und es ist (§. 125 III) $HKF = KLD$. Folglich ist (Grunds. 4) $AHK = KLD$, also bei den beiden von GM durchschnittenen Linien AB, CD die inneren Wechselswinkel gleich. Folglich ist (§. 114) $AB \# CD$.

§. 129. Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel x, y Fig. 70, deren Oeffnung nach einerlei Seite gerichtet ist, parallele Schenkel haben, so sind sie einander gleich.

Voraussetzung. $AB \# DE$; $BC \# EF$; die Oeffnungen der Winkel x, y sind nach einerlei Seite gerichtet.

Behauptung. Der Winkel $x = y$.

Vorbereitung. Man verlängere DE, so wird diese die Linie BC in einem Punkte G schneiden, weil sie die Parallele EF schneidet (§. 127).

Beweis. Da DG die Parallelen EF, BC schneidet, so ist (§. 125. III.) der äußere Winkel $x = z$; und da die Parallelen DG, AB von BC geschnitten werden, so ist der äußere Winkel $z = y$. Folglich ist (Grunds. 4) $\angle x = y$.

§. 130. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ABC Fig. 48 ist 1) der äußere Winkel ACD der Summe beider, ihm gegenüber stehenden inneren ABC, BAC gleich. 2) Ist die Summe aller drei Winkel eines Dreiecks zweien rechten gleich.

Erster Theil. Voraussetzung. ACD ist ein äußerer Winkel des Dreiecks ABC.

Behauptung. $ACD = ABC + BAC$.

Vorbereitung. Durch C ziehe man (§. 115) der AB die Parallele CE.

Beweis. Da $AB \# CE$ und von AC geschnitten werden, so ist (§. 125. II.) $\angle BAC = ACE$. Nun ist (§. 78) $ACD > BAC$; folglich ist auch $ACD > ACE$, folglich fällt CE innerhalb des Winkels ACD und theilt den Winkel ACD in zwei Theile ACE, ECD, von denen $ACE = BAC$.

Da ferner die beiden Parallelen AB, EC von BD geschnitten werden, so ist (§. 125. III.) der äußere Winkel $ECD = ABC$. Folglich

$$ACE + ECD = BAC + ABC, \text{ oder}$$
$$ACD = BAC + ABC.$$

Zweiter Theil. Voraussetzung. ACD ist ein äußerer Winkel des Dreiecks ABC.

Behauptung. $BAC + ABC + ACB = 2\,R$.

Beweis. Da $ACD = BAC + ABC$ (I. Th.) so ist, wenn ACB beiderseits hinzukommt,

$$ACD + ACB = BAC + ABC + ACB.$$

Nun ist (§. 68) $ACD + ACB = 2\,R$; folglich auch (Grunds. 4) $BAC + ABC + ACB = 2\,R$.

§. 131. Zusätze.

I. Wenn in zweien Dreiecken ABC, DEF Fig. 34 zwei Winkel des einen zweien Winkeln des andern einzeln genommen gleich sind, nehmlich $\angle B = E$, und $\angle C = F$, so muß auch der dritte Winkel des erstern dem dritten Winkel des andern gleich seyn, nehmlich $A = D$.

II. Wenn in zweien Dreiecken Fig. 34 ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist, nehmlich $A = D$, so muß auch die Summe der beiden übrigen im ersten Dreiecke der Summe der beiden übrigen Winkel im andern Dreiecke gleich seyn, nehmlich $B + C = E + F$.

III. Wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 23 ein Winkel, B, ein rechter ist, so ist die Summe der beiden übrigen, $A + C$ ebenfalls einem rechten gleich.

Und wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 23 die Summe zweier Winkel, $A + C$ dem dritten B gleich ist, so muß letzterer ein rechter seyn. Denn $A + C + B = 2\,R$. Setzen wir nun statt $A + C$ die gleiche Größe B, so ist $B + B$, oder $2\,B = 2\,R$, also (Grunds. 14) $B = R$.

IV. Kennt man in einem gleichschenklichten Dreiecke einen Winkel, so ist die Größe aller übrigen bekannt. Kennt man im Dreiecke ABC Fig. 72 den Winkel y an der Basis, so ist, da (§. 55) $y = z$, $y + z = 2\,y$, und daher $x = 2\,R - 2\,y$. Ist hingegen der Winkel am Scheitel, x, bekannt, so ist $y + z$ oder $2\,y = 2\,R - x$, und $y = \frac{2\,R - x}{2}$.

Ist nun der von den gleichen Schenkeln eingeschlossene Winkel x ein rechter, so ist $y = \frac{2\,R - R}{2} = \frac{R}{2}$ $= \frac{1}{2}\,R$ oder der Hälfte eines rechten Winkels gleich

V. Der äußere Winkel u am Scheitel eines gleichschenklichten Dreiecks ABC Fig. 72 ist doppelt so groß als jeder Winkel an der Basis. Denn $u = y + z$, Da aber $y = z$, so ist $u = 2y = 2z$.

VI. Im gleichseitigen Dreiecke ABC Fig. 20 ist $A = B = C$ (§. 57), und da $A + B + C = 2R$, so beträgt jeder von ihnen zwei Drittheil eines rechten.

§. 132. Aufgabe.

Aus zweien gegebenen Winkeln x, y, welche zusammen kleiner als zwei rechte sind, und einer gegebenen Seite AB Fig. 73. ein Dreieck zu beschreiben, worin die gegebene Seite an beiden Winkeln anliege.

Auflösung und Beweis. Auf einer unbegränzten Linie CD schneide man einen Theil $EF = AB$ ab; lege an E (§. 103) einen Winkel $FEK = x$, und an F den Winkel $EFL = y$ an; und verlängere die Schenkel EK, FL, so werden diese, da $x + y < 2R$ einander in G schneiden (§. 124) und GEF wird das verlangte Dreieck seyn.

§. 133. Aufgabe.

Aus zweien gegebenen Winkeln x, y, welche zusammen kleiner als zwei rechte sind, und einer gegebenen Seite MN Fig. 73 ein Dreieck zu beschreiben, worin die Linie MN dem Winkel y gegenüber stehe.

Auflösung. An einer unbegränzten Linie CD lege man im Punkte E einen Winkel $FEK = x$, und $CEP = y$ an. Vom Schenkel des Winkels FEG schneide man $EG = MN$ ab, und ziehe durch G die

GL der *EP* parallel, so werden *GL* und *EF* einander in einem Punkte *F* schneiden, weil *EF*, die der *GL* parallele *EP* schneidet (§. 127) und *GEF* wird das verlangte Dreieck seyn.

Beweis. Da $GE = MN$, $GEF = x$, und (§. 125. III.) $EFG = CEP = y$, welchem Winkel die Linie $GE = MN$ gegenüber stehet, so ist *GEF* das verlangte Dreieck.

§. 134. Anmerkung.

In den beiden vorhergehenden Aufgaben ist vorausgesetzt worden, daß die Summe der beiden gegebenen Winx, y kleiner als zwei rechte ist. Wenn dieß nicht der Fall ist, so läßt sich aus den gegebenen Stücken kein Dreieck construiren (§. 79).

§. 135. Lehrsatz.

In jeder geradlinigten Figur *ABCDE* Fig. 74 beträgt die Summe aller Polygonwinkel doppelt so viel rechte als die Figur Seiten hat, weniger vier rechte.

Beweis. Zieht man aus einem beliebigen innerhalb der Figur genommenen Punkte *F* nach allen Winkelspitzen des Polygons gerade Linien *FA*, *FB*, *FC* 2c., so wird die Figur hierdurch in so viele Dreiecke zerlegt als sie Seiten hat. Von den drei Winkeln eines solchen Dreiecks wie *FAB* liegen immer zwei, *FAB*, *FBA* an einer Seite der Figur und machen Theile der Polygonwinkel aus (§. 39); der dritte aber liegt um den Punkt *F*, und macht keinen Theil der Polygonwinkel aus. Die Summe aller Winkel dieser Dreiecke wird also aus allen Polygonwinkeln nebst den um den Punkt *F* herumliegenden Winkeln bestehen, welche letztere (§. 71) vier rechten gleich sind. Die Summe aller Polygonwinkel wird also gleich seyn der Summe aller Winkel dieser Dreiecke weniger vier rechten. Nun machen (§. 130) alle drei Winkel eines Dreiecks zusammen zwei rechte aus. Bezeichnen wir nun die Anzahl der Seiten des Polygons, und daher auch die Anzahl der Dreiecke durch n, so ist die Summe aller Winkel dieser Dreiecke $n \cdot 2R$, oder $2nR$. Die Summe aller Polygonwinkel ist also $n \cdot 2R - 4R = n \cdot 2R - 2 \cdot 2R = (n-2) \, 2R$.

§. 136. Anmerkung.

Wenn die Figur einwärts gehende Winkel hat, wie bei C Fig. 74, so muß für den Polygonwinkel der inwendig liegende genommen werden, welcher hier aus den Theilen FCB, FCD besteht; weil unter Polygonwinkel nur die inwendige Sperrung der an einander stoßenden Seiten verstanden wird. Ein solcher einwärts gehender Winkel, welcher größer als zwei rechte ist, heißt auch ein erhabener, converer Winkel. Ein Winkel, welcher kleiner als zwei rechte ist, wie der auswärts gehende Winkel EAB heißt, ein hohler, concaver Winkel.

§. 137. Zusatz.

Wenn die einwärtsgehenden Winkel einer Figur so beschaffen sind, daß von keinem Punkte innerhalb der Figur nach allen Winkelspitzen gerade Linien gezogen werden können, ohne die Seiten des Polygons zu durchschneiden, wie in *ABCDEFG* Fig. 75, so zerlege man sie durch Diagonalen in andere Polygone, wie hier in *ABCDG* und *EDGF*, in deren jedem ein solcher Punkt anzutreffen ist. Nun ist die Summe aller Winkel des Fünfecks $ABCDG = 2 \cdot 5\,R - 4\,R = 6\,R$; und die des Vierecks $GDEF = 2 \cdot 4\,R - 4\,R$; folglich ist die Summe aller Winkel des Siebenecks $= 10\,R = 7 \cdot 2\,R - 4\,R$.

§. 138. Lehrsatz.

Wenn man alle Seiten, AB, BC, CD rc. eines Polygons $ABCDEF$ Fig. 76, welches keine einwärts gehende Winkel hat, nach einerlei Richtung verlängert, so ist die Summe der äußeren Winkel aAB, bBC, cCD rc., welche von jeder Seite und der Verlängerung der ihr anliegenden gebildet werden, vier rechten gleich, wie groß auch die Anzahl der Seiten des Polygons seyn mag.

Beweis. Jeder äußere Winkel wie aAB beträgt mit seinem innern Nebenwinkel zusammen zwei rechte (§. 68), und diese Summe findet sich in jedem Polygon so oft wiederholt als es Seiten oder Winkel hat. Die Summe aller äußeren Winkel und aller Polygonwinkel zusammen genommen, wird also $n \cdot 2\,R$ betragen, wenn n die Anzahl der Seiten bedeutet. Da aber (§. 135) die Summe aller Polygonwinkel allein genommen $n \cdot 2\,R - 4\,R$ beträgt, so müssen alle äußere Winkel zusammen vier rechten gleich seyn.

§. 139. Zusatz.

Da in einer regulären Figur alle Polygonwinkel einander gleich sind (§. 32), und daher auch (§. 68) alle äußere Winkel einander gleich seyn müssen, so ist in einem regulären Polygon von n Seiten jeder Polygonwinkel $= \frac{n \cdot 2R - 4R}{n}$ (§. 135), und

jeder äußere Winkel $= \frac{4R.}{n}$

Es ist demnach in einem regulären

Dreiecke der Polygonw.	$= \frac{2}{3} R$;	d. Außenwink. $= \frac{4}{3} R$.
Vierecke = = = =	$= R$;	= = = = = $= R$.
Fünfecke = = = =	$= \frac{6}{5} R$;	= = = = $= \frac{4}{5} R$.
Sechsecke = = =	$= \frac{4}{3} R$;	= = = = $= \frac{2}{3} R$.
Siebenecke = = =	$= \frac{10}{7} R$;	= = = = $= \frac{4}{7} R$.

u. s. w.

§. 140. Erklärung.

Eine vierseitige Figur $ABCD$ Fig. 77, worin jede zwei einander gegenüber stehende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm. Man benennt es entweder mit vier an seinen Endpunkten befindlichen Buchstaben, wie $ABCD$, oder auch nur mit zweien an den Endpunkten der Diagonale befindlichen Buchstaben, wie AD oder BC.

§. 141. Lehrsatz.

Ein jedes Parallelogramm $ABCD$ Fig. 77 wird durch die Diagonale AD in zwei congruente Dreiecke zerlegt. Auch sind in jedem Parallelogramm die gegenüber stehenden Seiten und Winkel einander gleich.

Erster Theil. Voraussetzung. $ABCD$ ist ein Parallelogramm, d. h. $AB \# CD$, und $AC \# BD$.

Behauptung. $\triangle ABD \cong ACD$.

Beweis. Da $AB \# CD$ und von AD geschnitten werden, so ist $y = z$ als Wechselswinkel (§. 125. II). Eben so ist, weil $AC \# BD$ und von AD geschnitten werden $x = u$; und da die Seite AD den beiden

Dreiecken ABD, ACD gemein ist, so sind diese Dreiecke congruent (§. 83).

Zweiter Theil. Da $ABD \cong ABC$ (I. Theil), so ist $AB = CD$; $AC = BD$; $\angle B = C$, und da auch $y = z$, und $x = u$, so ist (Grundſ. 7) $x + y = z + u$ oder $\angle BAC = BDC$; folglich sind jede zwei gegenüber stehende Seiten und Winkel einander gleich.

§. 142. Zusatz.

Die zwischen zweien Parallelen AB, CD Fig. 77 enthaltenen Theile zweier andern Parallelen AC, BD, oder Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich; denn sie bilden mit jenen ein Parallelogramm $ABCD$.

§. 143. Zusatz.

Da alle auf die eine oder andere von zweien Parallelen gefällte Perpendickel ebenfalls zu einander parallel sind (§. 114), so werden auch alle zwischen den Parallelen AB, CD Fig. 78 liegenden Perpendickel ef, gh, kl, als Parallele zwischen Parallelen einander gleich seyn (§. 142). Parallellinien sind also allenthalben gleich weit von einander entfernt.

Betrachtet man in einem Parallelogramm $ABCD$ Fig. 77 irgend eine Seite desselben, CD, als die Grundlinie (§. 43), so werden alle aus beliebigen Punkten der gegenüber stehenden Parallelen AB auf diese Grundlinie gefällten Perpendickel, wie EF einander gleich seyn. Jeder dieser Perpendickel heißt die Höhe des Parallelogramms in Rücksicht auf die Basis CD.

§. 144. Lehrsatz.

Wenn in einem Vierecke $ABCD$ Fig. 77

jede zwei gegenüber stehende Seiten, oder jede zwei gegenüber stehende Winkel einander gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

Erster Theil. Voraussetzung. $AB = CD$ und $AC = BD$.

Behauptung. $ABCD$ ist ein Parallelogr.

Beweis. Man ziehe die Diagonale AD, so ist in den Dreiecken ABD, ACD, $AB = CD$, $AC = BD$ und AD beiden gemein; folglich ist (§. 60) $\angle x = u$ und $y = z$; folglich ist (§. 114. I.) $AC \# BD$ und $AB \# CD$; folglich ist $ABCD$ ein Parallelogramm (§. 140).

Zweiter Theil. Voraussetzung. $\angle CAB = BDC$, $\angle ACD = \angle ABD$.

Behauptung. $ABCD$ ist ein Parallelogr.

Beweis. Da $ABD = ACD$, und $CDB = CAB$, so ist $ABD + CDB = ACD + CAB$. Nun ist (§. 135) die Summe aller Winkel im Vierecke vier rechten gleich; folglich ist $ABD + CDB = 2\,R$, und folglich (§. 113) $AB \# CD$.

Eben so ist, weil auch $ACD + CDB = 2\,R$, $AC \# BD$, und folglich $ABCD$ ein Parallelogramm (§. 140).

§. 145. Lehrsatz.

Wenn in einem Vierecke $ABCD$ Fig. 77 zwei Seiten AB, CD gleich und parallel sind, so ist es ein Parallelogramm.

Voraussetzung. $AB = CD$, und $AB \# CD$.

Behauptung. Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Beweis. Man ziehe die Diagonale AD, so ist, weil $AB \# CD$ und von AD geschnitten wird, (§. 125) $\angle y = z$.

Da nun in den Dreiecken ABD, ACD auch $AB = CD$ und AD beiden gemein ist, so sind sie congruent (§. 53), und $\angle x = u$, folglich (§. 114) $AC \# BD$, und folglich ist $ABCD$ ein Parallelogramm (§. 140).

§. 146. Lehrsatz.

Wenn in einem Parallelogramm $ABCD$ Fig. 7. ein Winkel A ein rechter ist, so ist jeder der übrigen ebenfalls ein rechter, und also die Figur ein Rechteck.

Voraussetzung. $ABCD$ ist ein Parallelogramm und $\angle CAB = R$.

Behauptung. $ABCD$ ist ein Rechteck.

Beweis. Da $AB \# CD$, so ist (§. 125) $A + C = 2R$. Nun ist $A = R$, folglich auch $C = R$. Da aber (§. 141) $A = D$ und $C = B$, so ist auch $D = R$ und $B = R$, folglich $ABCD$ ein Rechteck (§. 44).

§. 147. Aufgabe.

Wenn Fig. 77. zwei an einander gränzende Seiten AC, CD eines Parallelogr. nebst dem von ihnen einzuschließenden Winkel C gegeben sind, das Parallelogramm zu zeichnen.

Auflösung. Aus den gegebenen Stücken beschreibe man (§. 105) ein Dreieck ACD; über AD beschreibe man (§. 100) ein Dreieck ABD so, daß $AB = CD$ und $BD = AC$, so ist $ABCD$ das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Da $AB = CD$ und $AC = BD$, so ist (§. 144) $ABCD$ ein Parallelogramm, welches zugleich die gegebenen Stücke enthält.

Andere Auflösung. Nachdem man auf den Schenkeln des Winkels ACD die Theile CA, CD den gegebenen Linien gleich abgeschnitten hat, ziehe man (§. 115) durch A die Linie AB der CD parallel, und durch D die Linie DB der AC parallel, so wird DB, welche die eine der Parallelen CD schneidet, auch die andere AB in einem Punkte B schneiden (§. 127) und $ABCD$ ist das verlangte Parallelogramm (§. 140).

§. 148. Zusatz.

Um aus zweien gegebenen Linien AC, CD Fig. 7 ein Rechteck zu beschreiben, worin diese Linien an einander gränzend seyen, trage man dieselben unter einem rechten Winkel C an einander, und verfahre im Uebrigen nach der Vorschrift des §. 147, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm (§. 140), worin alle Winkel rechte sind (§. 146), und folglich ein Rechteck (§. 44).

Zwei den rechten Winkel einschließende Seiten bestimmen also ein Rechteck, und man pflegt es daher nach diesen zwei Seiten zu benennen. Anstatt $ABCD$ Fig. 7 kann man auch sagen: Ein Rechteck unter den Linien AC, CD.

§. 149. Aufgabe.

Auf eine gegebene begränzte gerade Linie AB Fig. 79 ein Quadrat zu setzen.

Auflösung. Auf AB errichte man in A einen Perpendickel AC; schneide davon $AD = AB$ ab, und ziehe durch D der AB die Paralleie DE, und durch *B* der *AD* die Parallele *BE*, so wird diese die *DE* in einem Punkte *E* schneiden (§. 127) und *ABED* ist das verlangte Quadrat.

Beweis. Da *ABED* ein Parallelogramm ist, (§. 140) so sind (§. 141) die gegenüber stehenden Seiten einander gleich. Nun ist $AB = AD$, folglich *ABED* gleichseitig; und da *DAB* ein rechter Winkel ist, so sind (§. 146) alle Winkel dieser Figur rechte, und folglich *ABED* ein Quadrat (§. 44).

§. 150. Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien *ab*, *AF* Fig. 79 einander gleich sind, so müssen auch ihre Quadrate *abed*, *AFKG* einander gleich seyn.

Beweis. Man lege das Quadrat *abed* dergestalt auf *AFKG*, daß *a* auf *A*, und die Linie *ab* auf *AF* zu liegen komme. Da $ab = AF$, so fällt *b* auf *F* (§. 15); da ferner in beiden Figuren alle Winkel einander gleich sind, so fällt *ad* auf *AG*, *be* auf *FK*; da endlich $ad = AG$, $be = FK$, so fällt *d* auf *G* und *e* auf *K*, folglich *de* auf *GK* und folglich ist $abed = AFKG$ (§. 14). Auf eine gegebene gerade Linie, *ab*, kann also nur ein Quadrat *abed* gesetzt werden.

§. 151. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien *AB*, *ab* Fig. 79 ungleich sind, nehmlich $AB > ab$, so ist auch das Quadrat *ABED* der größern Linie *AB* größer als das Quadrat *abed* der kleinern *ab*.

Beweis. Da $AB = AD$ größer als *ab* ist, so schneide man von denselben die Theile $AF = AG = ab$ ab und vollende (§. 149) das Quadrat *AFKG*.

Da (§. 142) $GK = AF$, $GL = AB$, und $AB > AF$, so ist auch $GL > GK$; folglich fällt der Punkt K innerhalb $ABED$, und es ist (Grunds. 3) $ABED > AFKG$. Nun ist (§. 150) $AFKG = abed$; folglich ist (Grunds. 5) $ABED > abed$.

§. 152. Zusatz.

Wenn zwei Quadrate einander gleich sind, so müssen auch ihre Seiten gleich seyn. Denn wären ihre Seiten ungleich, so könnten die Quadrate nicht gleich seyn (§. 151).

Und wenn zwei Quadrate Fig. 79 ungleich sind, so muß auch die Seite AB des größern Quadrats $ABED$ größer als die des kleinern $abed$ seyn. Denn wäre $AB = ab$, so müßte auch (§. 150) $ABED = abed$ seyn; und wäre $AB < ab$, so wäre auch (§. 151) $ABED < abed$; beides gegen die Voraussetzung.

§. 153. Zusatz.

Da auf eine gerade Linie nur ein Quadrat gesetzt werden kann (§. 150), so benennt man auch wohl ein Quadrat nach einer seiner Seiten. So versteht man unter dem Ausdruck: das Quadrat von AB Fig. 79, das auf die Linie AB gesetzte Quadrat $ABED$. Ein Quadrat, dessen Seite AB ist, bezeichnet man durch $AB\,q.$ oder $\square\,AB$ oder auch durch AB^2, und verstehet unter jeder dieser Bezeichnungen den Flächenraum des auf die Linie AB gesetzten Quadrats.

§. 154 Lehrsatz.

Wenn zwei Parallelogramme $ABCD$, $EBCF$ Fig. 80 auf einerlei Grundlinie BC

und zwischen einerlei Parallelen AF, BC liegen, so sind sie an Flächeninhalt einander gleich, wie verschieden auch ihre Form seyn mag.

Voraussetzung. $ABCD$, $EBCF$ sind Parallelogramme, auf der gemeinschaftlichen Grundlinie BC; die Seitenlinien dieser Parallelogramme BA, BE, CD, CF endigen sich in AF; $AF \# BC$.

Behauptung. $ABCD = EBCF$.

Beweis. Rücksichtlich der Lage dieser Parallelogramme zu einander sind hierbei drei Fälle möglich. Es kann nehmlich

1) Der Punkt E zwischen A und D fallen Fig. 80.
2) Kann der Punkt E in D liegen Fig. 81.
3) Kann dieser Punkt in der Verlängerung von AD liegen Fig. 82.

Erster Fall. Da AC, BF Fig. 80 Parallelogramme sind, so ist (§. 141) $BC = AD$ und auch $BC = EF$; folglich (Grundſ. 4) $AD = EF$, folglich (Grundſ. 10) $AE = DF$. Da ferner (§. 141) $AB = CD$ und $BE = CF$, so sind die beiden Dreiecke AEB, DFC einander gleich (§. 60). Wird nun zu jedem derselben das Trapezium $EBCD$ hinzu gesetzt, so ist das Parallelogramm $ABCD = EBCF$.

Zweiter Fall. Das Dreieck ADB Fig. 81 ist aus angeführten Gründen dem Dreieck EFC gleich; folglich, wenn zu jedem das Dreieck DBC hinzukommt, so ist das Prgr. $ABCD = EBCF$.

Dritter Fall. Da Fig. 82 $BC = AD$ und $BC = EF$ (§. 141), so ist auch $AD = EF$; und wenn DE hinzukommt, ist $AE = DF$. Da ferner (§. 141) $AB = DC$, $EB = FC$, so ist (§. 60)

$\triangle AEB = \triangle DCF$. Zieht man nun beiderseits das Dreieck DGE ab, so bleibt das Trapez $ADGB = EGCF$; und setzt man beiderseits das Dreieck GBC hinzu, so ist $ABCD = EBCF$.

§. 155. Lehrsatz.

Parallelogramme $ABCD$, $EFGH$ Fig. 83 auf gleichen Grundlinien BC, FG und zwischen denselben Parallelen BG, AH sind einander gleich.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Vorbereitung. Man ziehe AF, DG.

Beweis. Da $BC = FG$ und auch (§. 141) $BC = AD$, so ist (Grundſ. 4) $FG = AD$; und da auch $FG \# AD$, so ist (§. 145) $ADFG$ ein Parallelogramm. Nun stehet $ABCD$ mit $AFGD$ auf einerlei Grundlinie AD und zwischen einerlei Parallelen AH, BG; folglich ist (§. 154) $ABCD = AFGD$. Aus gleichem Grunde ist $EFGH = AFGD$; folglich ist (Grundſ. 4) $ABCD = EFGH$.

§. 156. Zusatz.

Parallelogramme $ABCD$, $EFGH$ Fig. 83 von gleichen Grundlinien BC, FG und gleichen Höhen IK, LM sind einander gleich. Denn wenn ihre Grundlinien in einerlei geraden Linie BG gebracht werden, so werden IK, LM auf dieser senkrecht, und folglich parallel seyn (§. 113). Da aber auch $IK = LM$, so wird (§. 145) eine durch I und L gezogene Linie IL der BG parallel seyn. Folglich werden (§. 126) die durch I und L gehenden Parallelen AD, EH mit IL zusammen fallen, und AH wird eine einzige der BG

parallele gerade Linie bilden. Folglich ist (§. 155) $ABCD = EFGH$.

§. 157. Zusatz.

Man kann daher sehr leicht ein schiefwinklichtes Parallelogramm in ein Rechteck von gleichem Inhalte verwandeln, wenn man die Grundlinie des Parallelogramms zur Grundlinie des Rechtecks, und die Höhe des Parallelogramms zur Seitenlinie des Rechtecks nimmt.

§. 158. Lehrsatz.

Wenn Dreiecke DBC, EBC Fig. 82 auf einerlei Grundlinie BC stehen, und zwischen denselben Parallelen DE, BC liegen, so sind sie einander gleich.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Vorbereitung. Man verlängere DE von beiden Seiten, ziehe durch B der CD die Linie AB parallel (§. 115), und durch C der BE die Parallele CF.

Beweis. Da $AF \# BC$, so sind die Parallelogramme $ABCD$, $EBCF$ einander gleich (§. 154). Nun ist (§. 141) $\triangle DBC = \frac{1}{2} ABCD$ und $\triangle EBC = \frac{1}{2} EBCF$; folglich ist (Grundſ. 14) $\triangle DBC = EBC$.

§. 159. Zusatz.

Auf eben die Art wird bewiesen, daß Dreiecke auf gleichen Grundlinien und zwischen einerlei Parallelen, und überhaupt also Dreiecke von einerlei oder gleichen Grundlinien und Höhen einander gleich sind.

§. 160. Aufgabe.

Mehrere Dreiecke ABC, DEF, GHI Fig. 85

von gleichen Höhen Aa, Dd, Gg in ein einziges von derselben Höhe zu verwandeln, welches jenen zusammen genommmen gleich sey.

Auflösung. Auf einer beliebigen Linie LO schneide man $LM = BC$, $MN = EF$, $NO = HI$ ab; errichte aus einem beliebigen Punkt p dieser Linie einen Perpendickel pP der gegebenen Höhe Aa gleich, und ziehe PL, PN: so ist PLO das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man ziehe PM, PN, so ist, weil $LM = BC$ und $Pp = Aa$, das Dreieck $PLM = ABC$ (§. 159). Eben so ist $\triangle\ DEF = PMN$, und $\triangle\ PNO = GHI$; folglich ist (Grundſ. 7) $ABC + DEF + GHI = PLM + PMN + PNO = PLO$ (Grundſ. 3).

§. 161. Lehrsatz.

Die beiden Diagonalen AD, BC eines jeden Parallelogramms $ABCD$ Fig. 84 halbiren einander, und zerlegen das Parallelogramm in vier Dreiecke, von denen jede zwei einander entgegenstehende congruent, alle aber an Flächeninhalt einander gleich sind.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Beweis. Da $AB \# CD$, so ist (§. 125. II.) $\angle\ BAD = EDC$; $\angle\ ABE = ECD$; und da auch (§. 141) $AB = CD$, so ist (§. 83) $\triangle\ AEB \cong CED$; $AE = ED$, $BE = EC$; folglich sind beide Diagonalen halbirt.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß $\triangle\ AEC \cong BED$.

In den Dreiecken AEC, AEB ist $CE = EB$; und da sie den Scheitel A gemeinschaftlich, also einerlei Höhe haben, so ist (§. 159) $\triangle AEC = AEB$. Nun war $AEC = BED$ und $AEB = CED$; folglich sind alle vier Dreiecke einander gleich.

§. 162. Lehrsatz.

Wenn gleiche Dreiecke ABC, DBC Fig. 86 auf einerlei Grundlinie BC und an einerlei Seite derselben stehen, so muß die Linie AD, welche die Scheitel der gegenüber stehenden Winkel verbindet, der Grundlinie BC parallel seyn.

Voraussetzung . . . . Behauptung . . . .

Vorbereitung. Wäre nicht $AD \# BC$, so kann man doch (§. 115) durch A eine andere Linie AE der BC parallel führen, welche die BD in irgend einem Punkte E diesseits oder jenseits der AD schneiden muß (§. 127). Man ziehe EC.

Beweis. Da $AE \# BC$, so ist (§. 158) $\triangle ABC = EBC$. Nun ist auch $\triangle ABC = DBC$; folglich wäre (Grunds. 4) $EBC = DBC$, welches unmöglich ist (Grunds. 3). Folglich kann die der BC durch A geführte Parallele, nur durch D gehen, und es ist also $AD \# BC$.

§. 163 Zusatz.

Auf eben die Art wird bewiesen, daß gleiche Dreiecke auf gleichen in gerader Linie liegenden Grundlinien und an einerlei Seite derselben, auch zwischen einerlei Parallelen liegen müssen.

§. 164. Lehrsatz.

Wenn ein Parallelogramm $ABCD$ und

ein Dreieck *EBC* Fig. 82 auf einerlei Grundlinie *BC* und zwischen einerlei Parallelen *BC*, *AE* liegen, so ist das Parallelogramm doppelt so groß als das Dreieck.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Beweis. Zieht man die Diagonale *DB*, so ist (§. 158) $\triangle\ DBC = EBC$. Nun ist (§. 141) $ABCD = 2 \,.\, \triangle\ DBC$; folglich ist auch $ABCD = 2 \,.\, EBC$.

§. 165. Aufgabe.

Ein gegebenes Dreieck *ABC* Fig. 87 in ein Parallelogramm von gleichem Inhalte zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel *D* enthalten soll.

Auflösung Man halbire (§. 64) *BC* in *E*; lege (§. 103) an *CE* in *E* einen Winkel *CEF* an, welcher dem gegebenen Winkel *D* gleich ist; durch *A* ziehe man (§. 115) die Linie *AFG* der *BC* parallel, und durch *C* die *CG* der *FE* parallel: so ist *FECG* das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Zieht man *AE*, so sind die Dreiecke *ABE*, *AEC*, welche gleiche Grundlinien *BE*, *EC* und einerlei Höhe haben, einander gleich (§. 159). Folglich ist $\triangle\ ABC = 2 \,.\, AEC$. Nun ist (§. 164) $FECG = 2 \,.\, AEC$; folglich ist (Grundſ. 4) $FECG = ABC$; und da $\angle\ FEC = D$, so ist *FECG* das verlangte Parallelogramm.

§. 166. Zusatz.

Ist der gegebene Winkel ein rechter, so wird *FECG* ein Rechteck seyn (§. 146). Man kann also nach dem in §. 165 vorgeschriebenen Verfahren ein Dreieck in ein Rechteck von gleichem Inhalte verwandeln.

§. 167. Lehrsatz.

Wenn durch einen Punkt *K* der Diagonale *AD* eines Parallelogramms *ACBD* Fig. 88 den Seitenlinien *AB*, *AC* die Parallelen *EF*, *GH* geführt werden, nehmlich *EF* ♯ *AB* und *GH* ♯ *AC*, so sind die Ergänzungen *BK*, *KC*, d. h. diejenigen Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Beweis. Da *ABCD* ein Parallelogramm ist, so ist (§. 141) △ *ADC* = *ABD*. Da ferner (§. 140) *EH* ein Parallelogramm, so ist (§. 141) △ *AEK* = *AKH*; folglich ist (Grundſ. 10) *ADC* — *AEK* = *ABD* — *AHK*, oder Trapez. *EKDC* = Trapez. *KHBD*.

Da ferner (§. 141) △ *KDG* = *KDF*, so ist auch (Grundſ. 10) *EKDC* — *KDG* = *KHBD* — *KDF* oder *BK* = *KC*.

§. 168. Aufgabe.

Ein Parallelogramm zu beschreiben, welches dem gegebenen Dreiecke *C* Fig. 89 an Flächeninhalt gleich sey, welches ferner einen gegebenen Winkel *x* enthalte, und worin eine Seite der gegebenen Linie *MN* gleich sey.

Auflösung. Man beschreibe (§. 165) ein dem Dreiecke *C* gleiches Parallelogramm *ABED*, welches einen Winkel *ADE* = *x* enthält; verlängere *AD* bis *DF* = *MN*; ziehe (§. 115) durch *F* der *AB* eine Parallele und verlängere *BE* bis sie diese Parallele in

G schneidet; ziehe die Diagonale *FE*; so wird diese, welche die Linie *FG* schneidet, auch die ihr Parallele *AB* in irgend einem Punkte *H* schneiden. Durch *H* ziehe man der *AF* eine Parallele, und verlängere *DE*, *FG* bis sie diese Parallele in *I* und *K* schneiden: so wird *EGKI* das verlangte Parallelogramm seyn.

Beweis. Da (§. 140) *AFHK* ein Parallelogramm ist, und *FH* seine Diagonale, so ist (§. 167) das Parallelogramm $AE = EK$. Nun ist $AE = \triangle C$; folglich ist auch $EK = \triangle C$.

Da ferner (§. 129) $\angle ADE = EGK$, aber $\angle ADE = x$, so ist auch $EGK = x$.

Da endlich (§. 141) $DF = EG$, aber $DF = MN$, so ist auch $EG = MN$; folglich ist *EK* das verlangte Parallelogramm.

§. 169. Zusatz.

Hiernach läßt sich sehr leicht ein Rechteck beschreiben, welches einem gegebenen Dreieck an Flächeninhalt gleich ist, und welches eine Seite von einer gegebenen Länge hat. Denn man braucht hierzu nur in der Auflösung des vorigen §. den gegebenen Winkel *x* einem rechten gleich anzunehmen.

§. 170. Aufgabe.

Eine jede geradlinigte Figur *ABCDE* Fig. 90 in eine andere von gleichem Inhalte zu verwandeln, welche eine Seite weniger als die gegebene habe.

Auflösung. Man ziehe *BE* und durch *A* der *BE* eine Parallele (§. 115), so wird diese (§. 127) die verlängerte DE in F schneiden. Man ziehe nun BF, so ist $BFDC$ die verlangte Figur.

Beweis. Da $EB \# AF$, so ist (§. 158) $\triangle ABE = FBE$, weil beide zugleich auf einerlei Grundlinie BE stehen; folglich, wenn zu beiden Seiten $BCDE$ hinzukommt, $ABCDE = BCDF$, einer Figur, welche eine Seite weniger als die gegebene hat.

§. 171. Zusatz.

Da man diese Figur wiederum in eine andere, welche eine Seite weniger hat, verwandeln kann, so läßt sich jedes Vieleck in ein Dreieck von gleichem Inhalte verwandeln.

§. 172. Zusatz 2.

Daher läßt sich auch ein jedes Vieleck in ein Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite, also auch in ein Rechteck unter einer gegebenen Seite verwandeln (§§. 168 und 169).

§. 173. Zusatz 3.

Das Verfahren des §. 170 bleibt ungeändert, wenn auch die gegebene Figur einen einwärts gehenden Winkel wie CDE Fig. 75 hat. Man verbindet nehmlich C mit E, durch die Linie CE führt dieser durch D eine Parallele, welche in diesem Falle die Linie FE selbst, und nicht ihre Verlängerung, in H schneidet; wird sodann CH gezogen, so ist $ABCHFG$ die verlangte Figur. Denn es ist (§. 158) $\triangle DCE = HCE$; folglich $ABCEFG - DCE = ABCEFG - HCE$ oder $ABCDEFG = ABCHFG$.

§. 174. Lehrsatz.

Wenn man auf alle drei Seiten irgend eines rechtwinklichten Dreiecks ABC Fig. 92 Quadrate beschreibt (§. 149), so ist das Quadrat auf der Hypothenuse BC der Summe der beiden Quadrate auf den Katheten AB, AC gleich. Es ist nehmlich $BE = BG + CH$.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Vorbereitung. Durch A führe man (§. 115) die Linie AL der BD parallel, welche BE in zwei Theile BL, LC zerlegt, und ziehe AD, FC, AE, BK.

Könnte man nun darthun, daß $BL = BG$ und $CL = CH$, so wäre auch (Grundf. 7) $BL + CL = BG + CH$ oder $BE = BG + CH$, d. i. $BCq. = ABq. + ACq.$

Beweis. Da BG, CH Quadrate sind, so sind (§. 44) BAG, CAH rechte Winkel, folglich ist $BAG + BAC = 2\,R = BAC + CAH$; folglich liegt sowohl CA mit AG als auch BA mit AH in einerlei geraden Linie (§. 72).

Da (§. 44) $\angle FBA = R = CBD$, so ist, wenn ABC zu beiden hinzukommt, $FBA + ABC = ABC + CBD$ oder $\angle FBC = ABD$. Ferner ist in den Dreiecken FBC, ABD, $FB = AB$ und $BC = BD$ (§. 44); folglich ist (§. 53) $\triangle FBC = ABD$. Nun stehet das Dreieck FBC mit $ABFG$ auf einerlei Grundlinie FB und zwischen denselben Parallelen FB, GC und es ist daher (§. 164) $ABFG = 2 \triangle FBC$. Aus gleichem Grunde ist $BDLM = 2 \triangle ABD$, weil sie auf einerlei Grundlinie BD und zwischen denselben Parallelen BD, AL stehen; folglich ist (Grundf. 12) $ABFG = BDLM$.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß $\triangle ACE = BCK$, und daß daher $ACKH = CELM$; folglich ist (Grundſ. 7) $BG + CH = DM + ME = BEq$ oder $ABq + ACq = BCq$.

Anmerkung. Dieser für die Mathematik äußerst fruchtbare Satz heißt der Magister Matheseos oder auch der Pythagoräische Lehrsatz von seinem Erfinder Pythagoras, der deshalb ein Opfer gebracht haben soll. Man kann ihn auf vielerlei Art beweisen; schwerlich aber dürfte sich ein einfacherer Beweis finden lassen, als der hier gegebene Euklideische.

§. 175. Zusatz.

Wenn vom Quadrate der Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreiecks das Quadrat einer Kathete abgezogen wird, so bleibt das Quadrat der andern Kathete übrig. Denn aus $ABq + ACq = BCq$ folgt, wenn beiderseits ACq abgezogen wird, $ABq = BCq - ACq$ und wenn man beiderseits ABq abzieht, $ACq = BCq - ABq$ (Grundſ. 10).

§. 176. Zusatz.

Wenn in zweien rechtwinklichten Dreiecken ABC, abc Fig. 91 die Hypothenusen AC, ac einander gleich sind, aber die eine Kathete AB des einen größer als eine Kathete ab des andern ist, so muß die zweite Kathete BC des ersten kleiner als die zweite Kathete bc des andern seyn. Denn da $AC = ac$, so ist auch (§. 150) $ACq = acq$; und da $AB > ab$, so ist auch (§. 151) $ABq > abq$; folglich ist (Grundſ. 10) $ACq - ABq < acq - abq$. Nun ist (§. 175) $BCq = ACq - ABq$ und $bcq = acq - abq$;

folglich ist $BCq < bcq$ und folglich (§. 152) $BC < bc$.

177. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 93 das Quadrat der einen Seite BC der Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten AB, AC gleich ist, so ist der der ersten Seite gegenüber stehende Winkel A ein rechter.

Voraussetzung.... Behauptung....

Vorbereitung. Auf AC errichte man (§. 66) in A einen Perpendickel $AD = AB$, und ziehe CD.

Beweis. Da $AB = AD$ und daher (§. 150) $ABq = ADq$, so ist auch (Grunds. 7) $ABq + ACq = ADq + ACq$. Nun ist nach der Voraussetzung $ABq + ACq = BCq$ und in dem bei A rechtwinklichten Dreiecke DAC ist (§. 174) $ADq + ACq = CDq$; folglich ist $BCq = CDq$ und folglich (§. 152) $BC = CD$. Da nun auch $AB = AD$ und AC den beiden Dreiecken BAC, DAC gemein, so ist (§. 60) $\angle BAC = DAC$; da aber $DAC = R$, so ist auch $BAC = R$.

§. 178. Aufgabe.

Ein Quadrat zu beschreiben, welches mehreren gegebenen Quadraten zusammen gleich sey.

Auflösung und Beweis. Es seyen AB, AC CD Fig. 94 die Seiten der gegebenen Quadrate. Man setze AB, AC senkrecht auf einander und ziehe CB. so ist (§. 174) $ABq + ACq = CBq$.

Man setze ferner CD senkrecht auf CB, und ziehe DB, so ist (§. 174)

$$DBq = CDq + CBq,$$

oder wenn wir statt CBq den eben gefundenen Werth setzen $DBq = CDq + CAq + ABq$; folglich ist DB die Seite des gesuchten Quadrats, welches sich nach §. 149 construiren läßt.

Eben so verfährt man, wenn mehr als drei Quadrate gegeben sind.

§. 179. Zusatz.

Da das Verfahren des vorigen §. ungeändert bleibt, die Linien AB, AC, CD, und daher auch ihre Quadrate mögen gleich oder ungleich seyn, so kann man auch die Seite eines Quadrats finden, welches das Doppelte, Dreifache, Vierfache ꝛc. eines andern ist. Hierbei läßt sich jedoch folgendes abgekürzte Verfahren anwenden. Es sey $ABCD$ Fig. 95 das gegebene Quadrat. Man errichte auf AB den Perpendickel AE, schneide davon $A1 = AB$ ab und ziehe $B1$ so ist (§. 174) $B1q = ABq + A1q = 2\,ABq$. Man trage dann $B1$ aus A nach 2 und ziehe $B2$, so ist $B2q = A2q + ABq = B1q + ABq = 2\,ABq + ABq = 3\,ABq$. Man trage ferner $B2$ aus A nach 3; trage $B3$ aus A nach 4 und fahre auf diese Art fort: so werden $A2$, $A3$, $A4$, $A5$ ꝛc. die Seiten eines Quadrats geben, welches 2, 3, 4, 5 ꝛc. mahl so groß als das Quadrat $ABCD$ ist.

§. 180. Aufgabe.

Ein Quadrat zu beschreiben, welches der Differenz zweier gegebenen Quadrate gleich sey.

Auflösung. Es seyen AB, CD Fig. 96 die

Seiten der gegebenen Quadrate. Von AB schneide man $BE = CD$ ab und errichte aus E auf AB einen unbegränzten Perpendickel EF. Aus B beschreibe man mit dem Halbmesser BA einen Kreis, so muß dieser (§. 48) den Perpendickel EF in irgend einem Punkte G schneiden, und EG ist die Seite des gesuchten Quadrats.

Beweis. Da (§. 36) $BA = BG$, so ist auch (§. 150) $ABq = BGq$. Nun ist (§. 175) $GEq = BGq - BEq$; folglich ist auch $GEq = BAq - BEq$. Da aber $BE = CD$ und daher $BEq = CDq$: so ist

$$GEq = ABq - CDq.$$

§. 181. Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie AB Fig. 97 aus zweien Theilen AC, CB bestehet, so ist das Quadrat der ganzen Linie AB so groß als die Summe der Quadrate der einzelnen Theile AC, CB nebst zweien Rechtecken, deren jedes die Theile AC, CB zu an einander liegenden Seiten hat. Es ist nehmlich $ABq = ACq + CBq + 2 . AC . CB$.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Vorbereitung. Man beschreibe von AB das Quadrat $ABDE$ (§. 149), ziehe die Diagonale BD; durch C führe man die CF der AD parallel, und durch G ziehe man die HK der AB parallel.

Beweis. Das Quadrat $ABED$ wird hierdurch in vier Parallelogramme AG, CK, GE, HF zerlegt, welche alle rechtwinklicht seyn müssen, weil jedes derselben einen rechten Winkel hat (§. 146).

Da $AB = AD$, so ist (§. 55) $\angle ABD = ADB$; nun ist auch (§. 125. III) $\angle CGB = ADB$ folglich ist auch $CBG = CGB$; folglich ist (§. 58) $CB = CG$; und da (§. 141) $CB = GK$ und $CG = BK$, so ist CK gleichseitig und also (§. 44) CK das Quadrat von CB.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß $HF = HGq = ACq$.

Da AG unter den an einander liegenden Seiten AC, CG enthalten ist, aber $CG = CB$, so ist auch AG unter den Seiten AC, CB enthalten. Da aber (§. 167) $AG = GE$, so ist $AG + GE = 2 . AC . CB$.

Nun ist (Grundſ. 3) $ABDE = AG + CK + GE + FH$; folglich ist, wenn wir anstatt eines jeden dieser Theile seinen Werth setzen

$$ABq = ACq + CBq + 2 . AC . CB.$$

§. 182. Zusatz.

Hieraus folgt, daß in jedem Quadrate die um die Diagonale herum liegenden Parallelogramme auch Quadrate sind.

§. 183 Lehrsatz.

Wenn eine Linie BE Fig. 98 dem Unterschiede zweier andern Linien AB, AE gleich ist, so ist das Quadrat der erstern kleiner als die Summe der Quadrate beider letzteren, und zwar um zwei Rechtecke, deren jedes unter beiden letzteren Linien enthalten ist. Wenn nehmlich $EB = AB - AE$, so ist $EBq = ABq + AEq - 2 . AB . AE$.

Voraussetzung . . . . Behauptung. . .

Vorbereitung. Auf AB beschreibe man (§. 149) das Quadrat $ABCD$; ziehe die Diagonale DB; durch E ziehe man $EF \# AD$, und durch G, worin diese die Diagonale trifft, ziehe man $HI \# DC$, verlängere HI bis $IK = HG$ und ziehe $KL \# AD$.

Beweis. Da $IK = HG$, so ist (§. 156) $IL = HF$. Nun ist (§. 182) HF das Quadrat von $HG = AEq$; folglich ist auch $IL = AEq$.

Da ferner (§. 167) $AG = FI$, so ist $AG + HF = FI + IL$ oder $AF = FK$, also $AF + FK = 2 \,.\, AF$.

Nun ist $EI = AC + IL - AF - FK$; wo (§. 182) EI das Quadrat von EB, AC das Quadrat von AB, IL das Quadrat von AE, und AF das unter AD und AE oder unter AB und AE enthaltene Rechteck vorstellt; folglich ist $EBq = ABq + AEq - 2 \,.\, AB \,.\, AE$.

§. 184. Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie AB Fig. 99 in einem Punkte C in gleiche, bei D aber in ungleiche Theile getheilt ist, so ist das unter den ungleichen Stücken AD, DB enthaltene Rechteck nebst dem Quadrate des zwischen den Theilpunkten liegenden Stücks CD dem Quadrate der halben Linie CB gleich. Es ist nehmlich $AD \,.\, DB + CDq = BCq$.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Vorbereitung. Man beschreibe (§. 149) von CB das Quadrat $CEFB$ und ziehe dessen Diagonale BE. Durch D ziehe man (§. 115) DG der CE parallel; durch H, worin diese die Diagonale trifft, ziehe man KM der EF, und durch A der CE die Linie AK parallel.

Beweis. Da (§. 167) $CH = HF$, so ist, wenn DM hinzukommt, $CM = DF$ (Grundſ. 7). Nun ist, weil $AC = CB$, (§. 156) $AL = CM$; folglich ist (Grundſ. 4) $AL = DF$; und wenn beiderseits CH hinzukommt, $AH = CH + DF$; und wenn noch LG hinzukommt,

$$AH + LG = CH + DF + LG = CEFB$$
(Grundſ. 3)

Nun ist AH das unter AD und DH, oder unter AD und DB enthaltene Rechteck, weil (§. 182) $DH = DB$; ferner ist (§. 182) LG das Quadrat von EG, also (§. 150) dem Quadrate von CD gleich; und $CEFB$ ist das Quadrat von CB; folglich ist

$$AD \,.\, DB + CDq = CBq.$$

§. 185. Zusatz.

Da Fig. 99 $CBq = AD \,.\, DB + CDq$, so ist, wenn man beiderseits CDq hinweg nimmt (Grundsatz 10) $CBq - CDq = AD \,.\, DB$. Nun ist $AD = AC + CD$, oder weil $AC = CB$, $AD = BC + CD$; und $BD = BC - CD$. Folglich ist $CBq - CDq = (BC + CD)\ (BC - CD)$. Die Differenz zweier Quadrate CF, LG Fig. 99 ist also einem Rechtecke AH gleich, dessen eine Seite AD der Summe der Seiten $BC + CD$ dieser Quadrate, und dessen andere Seite DH der Differenz $BC - CD$ der Seiten eben dieser Quadrate gleich ist.

§. 186. Zusatz.

Da Fig. 99 $DH = DB$, so ist $AD + DH = AD + DB = AB$; und da auch $CB + CE = CB + CA = AB$, und überdieß in jedem Parallelogramm die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind (§. 141), so wird das Rechteck AH mit dem Quadrat CF gleichen Perimeter haben. Nun ist $BCq = AH + CDq$ (§. 184).

Wenn daher ein Quadrat und ein Rechteck gleichen Umfang haben, so ist der Flächenraum des Quadrats größer als der des Rechtecks, und zwar um immer **das Quadrat des Unterschiedes CD der dieses Rechteck einschließenden Seiten AD, DH,** und der Seiten des Quadrats.

§. 187. Zusatz.

Je weniger die Seiten eines Rechtecks von einander unterschieden sind, desto weniger wird auch sein Flächeninhalt von dem des Quadrats, welches mit ihm einerlei Perimeter hat, unterschieden seyn.

Wenn daher zwei Rechtecke gleichen Perimeter haben, so schließt dasjenige einen größeren Raum ein, dessen Seiten weniger von einander unterschieden sind.

§. 188. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 22 der Winkel B spitz ist, so ist das Quadrat der diesem Winkel gegenüber liegenden Seite

AC kleiner als die Summe der Quadrate der diesen Winkel einschließenden Seiten AB, BC, und zwar ist dieser Unterschied doppelt so groß als ein Rechteck, welches unter irgend einer der den Winkel B einschließenden Seiten, BC und der Linie BD enthalten ist, welche zwischen dem Scheitel dieses Winkels und dem Perpendickel AD liegt, welcher vom Scheitel des der Linie BC gegenüber stehenden Winkels auf diese Linie gefällt wird. Es ist nehmlich $ACq = ABq + BCq - 2 \,.\, BC \,.\, BD$.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Beweis. Rücksichtlich der Lage des Perpendikels AD sind hier zwei Fälle möglich. Er kann nehmlich entweder innerhalb des Dreiecks fallen, wie ABC Fig. 22 oder außerhalb desselben wie ABC Fig. 100.

Erster Fall. Im Dreiecke ABC Fig. 22 ist (§. 174) $ACq = ADq + DCq$. Nun ist (§. 175) $ADq = ABq - BDq$; folglich ist, wenn dieser Werth statt ADq gesetzt wird, $ACq = ABq - BDq + DCq$.

Da aber $DC = BC - BD$, und daher (§. 183) $DCq = BCq + BDq - 2\,BC \,.\, BD$, so ist

$$ACq = ABq - BDq + BCq + BDq - 2\,BC \,.\, BD$$

oder, da $- BDq$ und $+ BDq$ einander aufheben

$$ACq = ABq + BCq - 2 \,.\, BC \,.\, BD.$$

Zweiter Fall. Im Dreiecke ABC Fig. 100 ist (§. 174) $ACq = ADq + CDq$. Nun ist (§. 175) $ADq = ABq - BDq$; folglich ist

$$ACq = ABq - BDq + CDq.$$

Da aber $CD = BD - BC$ und daher (§. 183) $CDq = BDq + BCq - 2 . BD . BC$, so ist $ACq = ABq - BDq + BDq + BCq - 2 . BD . BC$, oder $ACq = ABq + BCq - 2 . BD . BC$.

§. 189. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 100 ein Winkel ACB stumpf ist, so ist das Quadrat der diesem Winkel gegenüber liegenden Seite AB größer als die Summe der Quadrate der diesen Winkel einschließenden Seiten AC, CB; und zwar ist der Unterschied, um welchen jenes Quadrat die Summe dieser Quadrate übertrift, doppelt so groß als ein Rechteck, welches unter irgend einer der den Winkel ACB einschließenden Seiten BC, und der Linie CD enthalten ist, welche zwischen dem Scheitel dieses Winkels und dem Perpendickel AD liegt, welcher vom Scheitel des der Linie BC gegenüber stehenden Winkels auf diese Linie gefällt wird. Es ist nehmlich $ABq = ACq + BCq + 2 . BC . CD$.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Beweis. Im Dreiecke ABD ist (§. 174) $ABq = ADq + BDq$. Nun ist $BD = CD + CB$, und daher (§. 181) $BDq = CDq + CBq + 2 . CD . CB$; folglich ist

$$ABq = ADq + CDq + CBq + 2 . CD . CB.$$

Da aber (§. 174) $ADq + CDq = ACq$, so ist $ABq = ACq + CBq + 2 . CD . CB$.

§. 190. Zusatz.

Wenn in einem Dreiecke das Quadrat irgend einer Seite größer als die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten ist, so ist der dieser Seite gegenüber stehende Winkel ein stumpfer. Wenn aber das Quadrat einer Seite kleiner als die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten ist, so ist der dieser Seite gegenüber liegende Winkel ein spitzer.

§. 191. Aufgabe.

Es ist ein Rechteck $ABCD$ Fig. 101 gegeben; man soll die Seite eines Quadrats finden, welches mit diesem Rechtecke gleichen Flächeninhalt habe.

Auflösung. Man verlängere AD bis $BE = BD$, halbire AE in F und beschreibe aus F mit FA den Kreis AGE; verlängere BD bis G: so ist BG die Seite des gesuchten Quadrats.

Beweis. Man ziehe FG. Da AE im Punkte F in gleiche, und in B in ungleiche Theile getheilt ist, so ist (§. 184) $AB \cdot BE + BFq = FEq$; oder da $BE = BD$ und (§. 36) $FE = FG$,

$$AB \cdot BD + BFq = FGq.$$

Nun ist auch (§. 174)

$$BGq + BFq = FGq;$$

folglich ist (Grundſ. 4)

$$AB \cdot BD + BFq = BGq + BFq;$$

und wenn man beiderseits BFq hinweg nimmt, so ist (Grundſ. 10) $AB \cdot BD = BGq$;

folglich ist BG die Seite des gesuchten Quadrats.

§. 192. Erklärung.

Eine Figur quadriren heißt ein Quadrat finden, welches eben so viel Flächeninhalt als die gegebene Figur habe.

§. 193. Zusatz.

Da man (§. 172) jede gegebene geradlinigte Figur in ein Rechteck verwandeln kann, und dieses sich wiederum (§. 191) in ein Quadrat verwandeln läßt, so läßt sich auch jede gegebene geradlinigte Figur quadriren.

Zweiter Abschnitt.
Vom Kreise.

Erstes Kapitel.
Von den Linien beim Kreise.

§. 194. Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise *ABD*, *abd* Fig. 102 gleiche Halbmesser *AC*, *ac* haben, so müssen sie einander gleich seyn.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Vorbereitung. Man denke sich den Kreis *adb* dergestalt auf *ADB* gelegt, daß der Mittelpunkt *c* des ersten auf den Mittelpunkt *C* des andern zu liegen komme.

Beweis. Da $AC = ac$, und daher (§. 36) jeder Abstand des Punktes *C* von der Peripherie *ABD* jedem Abstande des Punktes *c* von der Peripherie *abd* gleich ist, so werden (§. 15) alle Punkte der einen Peripherie auf die der andern fallen. Beide Kreise werden also einander decken, und folglich gleich seyn (§. 14).

§. 195. Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise *ABD*, *abd* Fig. 103 ungleiche Halbmesser *AC*, *aC* haben, so ist derjenige Kreis, *ABD*, größer, dessen Halbmesser *AC* größer ist.

Voraussetzung .... Behauptung ....

Vorbereitung. Man lege den Kreis *abd* dergestalt auf *ABD*, daß ihre beiden Mittelpunkte in C auf einander zu liegen kommen.

Beweis. Da $Ca < CA$, so liegt der Punkt *a* innerhalb des Kreises *ABD*; und aus gleichem Grunde fällt jeder Punkt der Pheripherie *abd* innerhalb *ABD*; die Fläche des Kreises *abd* ist also nur ein Theil von *ABD*, und folglich (Grundſ. 3) $ABD > abd$.

§. 196. Zusatz.

Wenn zwei Kreise einander gleich sind, so müssen auch ihre Halbmesser gleich seyn. Denn wären diese ungleich, so könnten die Kreise nicht gleich seyn (§.195).

Und wenn einer von zweien Kreisen größer als der andere ist, so hat der größere einen größern Halbmesser als der andere. Denn wäre der Halbmesser des ersten Kreises dem des andern gleich, so müßten auch beide Kreise einander gleich seyn (§. 194); und wäre der Halbmesser des ersten Kreises kleiner als der des andern, so müßte auch die Fläche des erstern kleiner als die des andern seyn (§. 193); beides gegen die Voraussetzung.

§. 197. Erklärung.

Gleiche Kreise sollen in der Folge diejenigen heißen, welche gleiche Halbmesser haben; ungleiche Kreise aber diejenigen, welche verschiedene Halbmesser haben

§. 198. Erklärung.

Kreise *ABD*, *abd* Fig. 103 heißen concentrisch, wenn sie aus einem und demselben Mittelpunkte *C* mit verschiedenen Halbmessern *CA*, *Ca* beschrieben sind. Excentrische Kreise sind solche, welche verschiedene Mittelpunkte haben, wie *ABH*, *KLH* Fig. 104.

§. 199. Erklärung.

Kreise schneiden einander, wenn die Pheripherie des einen zum Theil innerhalb, und zum Theil außerhalb der Peripherie des andern fällt, wie *abe*, *abg* Fig. 111.

Kreise berühren einander, wenn ihre Peripherien irgendwo zusammen stoßen, ohne einander zu schneiden. Sie berühren einander von innen, wenn die Pheripherie des einen Kreises ganz innerhalb der Peripherie des andern liegt, wie *ABH*, *KLH* Fig. 104. Sie berühren einander von außen, wenn die Pheripherie des einen Kreises ganz außerhalb der Peripherie des andern liegt, wie *ABH*, *FGH* Fig. 104.

§. 200. Lehrsatz.

Kreise, welche einander schneiden, können nicht einerlei Mittelpunkt haben.

Beweis. Könnten zwei einander schneidende Kreise wie *abe*, *abg* Fig. 111 einerlei Mittelpunkt *K* haben, so würde eine von diesem gemeinschaftlichen Mittelpunkte nach einem der Durchschnittspunkte, *a* gezogene gerade Linie *Ka* ihr gemeinschaftlicher Halbmesser seyn. Beide Kreise hätten also einerlei Mittelpunkt und einerlei Halbmesser. Sie müßten daher (§. 194) ganz auf einander fallen, und könnten also einander nicht schneiden, welches gegen die Voraussetzung ist.

§. 201. Zusatz.

Auf eben die Art beweiset man, daß Kreise, welche einander von inwendig berühren, nicht einerlei Mittelpunkt haben können.

§. 202. Lehrsatz.

Concentrische Kreise können keinen Punkt mit einander gemein haben, und also weder einander schneiden noch berühren.

Beweis. Könnten die concentrischen Kreise *ABD*, *abd* Fig. 103 außer dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte *C* noch einen Punkt gemein haben, so würde dieser in der Peripherie beider Kreise liegen, und ein aus *C* nach diesem Punkte gezogene gerade Linie wäre ein gemeinschaftlicher Halbmesser beider Kreise. Sie müßten also (§. 194) ganz auf einander fallen, und wären nicht von einander unterschieden.

§. 203. Lehrsatz.

Eine gerade Linie kann einen Kreis nur in zwei Punkten schneiden.

Erster Fall. Gehet die gerade Linie *AD* Fig. 102 durch den Mittelpunkt *C*, so kann sie mit dem Umkreise nur die beiden Durchschnittspunkte *A* und *D* gemein haben. Denn durchschnitte sie ihn in noch einem Punkte E, so daß auch E in des Kreises Peripherie läge, so wäre CE ein Halbmesser dieses Kreises; und da es auch CA ist, so wäre (§. 36) $CE = CA$, welches unmöglich ist (Grundſ. 3).

Zweiter Fall. Wäre es möglich, daß eine andere nicht durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie den Umkreis in drei Punkten schnitte, so müßten die aus dem Mittelpunkte nach diesen drei Durchschnittspunkten gezogenen geraden Linien, als Halbmesser eines und desselben Kreises einander gleich seyn. Man könnte also aus einem und demselben Punkte nach der schneidenden geraden Linie drei gleiche gerade Linien ziehen, welches unmöglich ist (§. 95).

§. 204. Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie NL Fig. 102 die Peripherie eines Kreises schneidet, so ist jeder Punkt derselben, welcher wie G zwischen den beiden Durchschnittspunkten N u. K liegt, dem Mittelpunkte näher als der Halbmesser beträgt, und der Theil NK liegt daher ganz innerhalb des Kreises. Jeder Punkt derselben aber, welcher wie L in der Verlängerung von NK liegt, hat eine größere Entfernung vom Mittelpunkte als der Halbmesser beträgt, und die Verlängerungen der NK liegen daher außerhalb des Kreises.

Beweis. Denkt man sich aus dem Mittelpunkte C die Halbmesser CN, CK, und auf NK die senkrechte CF gezogen; so ist (§. 36) $CN = CK$, also CNK gleichschenklicht, und der Perpendickel CF fällt

(§. 81) zwischen N und K. Ferner ist (§. 94) CF die kürzeste nach NK gezogene Linie und $CG < CK$. Nun ist (§. 36) $CK = CH$, folglich ist $CG < CH$; folglich liegt der Punkt G innerhalb des Kreises.

Eben so ist (§. 94) $CL > CK$; aber $CK = CM$ (§. 36); folglich ist $CL > CM$, also liegt der Punkt L außerhalb des Kreises.

§. 205. Lehrsatz.

Jeder Durchmesser *ad* Fig. 102 theilt die Peripherie und die Kreisfläche in zwei völlig gleiche Theile.

Beweis. Da *ad* ganz innerhalb des Kreises liegt, so theilt sie dessen Fläche in zwei Theile *adea*, *adba*. Denkt man sich nun den einen Theil dergestalt auf den andern gelegt, daß der Punkt *d* des einen Theils auf dem Punkt *d* des andern, und *da* in der Richtung der *da* im andern Theile gelegt wird, und daß beide Theile nach einerlei Seite der *da* gekehrt sind, so muß auch (§. 15) *c* auf *c* und *a* auf *a* fallen. Aber auch jeder Punkt des Bogens *aed* muß auf einen Punkt des Bogens *abd*, und daher der ganze Bogen *aed* auf *abd* fallen, weil sonst nicht die Entfernungen aller Punkte dieser Bogen vom Mittelpunkte *c* einander gleich seyn könnten. Diese Bogen *aed*, *abd* werden daher (§. 14) einander gleich seyn, und da die Gränzen der Fläche *adea* auf die der Fläche *abda* fallen, so decken beide Flächen einander und sind also einander gleich (§. 14).

§. 206. Erklärung.

Eine Fläche *afeda*, welche Fig. 102 von einem

Durchmesser *ad* und der halben Peripherie *aed* begränzt wird, heißt ein **Halbkreis**.

Eine Fläche *fedf* Fig. 102, welche von einer Sehne *df* und dem in den Punkten *f*, *d* sich endigenden Bogen *fed* begränzt wird, heißt ein **Kreisabschnitt** oder **Segment**. Die Sehne *fd* ist die **Basis** des Abschnitts.

Jede von zweien Halbmessern, *cd*, *cf* und dem dazwischen liegenden Bogen *fed* Fig. 102 begränzte Fläche *cdefc* heißt ein **Kreisausschnitt** oder **Sector**.

§. 207. Lehrsatz.

Jede Sehne *df* Fig. 102 **theilt den Kreis, so wie die Peripherie in zwei ungleiche Theile, von denen derjenige der größte ist, in welchem sich der Mittelpunkt** *c* **befindet.**

Beweis. Man denke sich durch den einen Endpunkt, *d* der Sehne einen Durchmesser *dca* gezogen, so ist (§. 205) der Halbkreis $abda = aeda$; folglich $fabdf > aeda$; folglich um so mehr $fabdf > fedf$.

Eben so wird bewiesen, daß der Bogen *fabd* größer als *fed* ist.

§. 208. Zusatz.

Zu jeder Sehne *fd* Fig. 102 gehören also zwei auf ihr als Basis ruhende Bogen *fabd*; *fed* und zwei Abschnitte *fabdf* und *fedf*.

§. 209. Lehrsatz.

I. **Wenn aus dem Mittelpunkte** *C* **eines Kreises** *ABE* Fig. 105 **auf irgend eine Sehne** *AB* **ein Perpendickel** *CD* **gefällt wird, so halbirt dieser die Sehne im Punkte** *D*.

II. Wird die Mitte der Sehne *D* mit dem Mittelpunkte *C* durch eine gerade Linie *CD* verbunden, so stehet diese auf der Sehne *AB* senkrecht.

III. Wird aus der Mitte *D* der Sehne ein Perpendickel errichtet, so muß dieser durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

Beweis. Denkt man sich aus dem Mittelpunkte *C* nach *A* und *B* Halbmesser gezogen, so sind diese einander gleich, und es entstehet ein gleichschenklichtes Dreieck *CAB*, dessen Basis die Sehne *AB* ist, und worin *C* der Scheitelpunkt des der Basis gegenüber stehenden Winkels ist. Es folgt alsdann die Wahrheit des ersten Theils dieses Satzes aus §. 86; die des zweiten Theils aus §. 87, und die des dritten aus §. 88.

§. 210. Lehrsatz.

Zwei in einem Kreise gezogene Sehnen *AB*, *CD* Fig. 106 können einander nicht wechselseitig halbiren.

Beweis. Wäre es denkbar, daß beide Sehnen einander in einem Punkte *E* halbirten, so würde (§. 209. II.) eine aus *F* nach *E* gezogene gerade Linie *FE* auf *EB* senkrecht seyn. Aus gleichem Grunde müßte *FE* auf *ED* senkrecht seyn. Es sind daher auch umgekehrt *BE*, *DE* auf *EE* senkrecht (§. 76), welches unmöglich ist (§. 82).

Eben so wenig können ein Durchmesser und eine Sehne einander wechselseitig halbiren.

§. 211. Aufgabe.

Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises *ABG* Fig. 107 zu finden.

Auflösung und Beweis. Man ziehe beliebig eine Sehne AB, halbire sie (§. 64) in D, errichte (§. 66) aus D auf AB einen Perpendickel und verlängere ihn bis er von beiden Seiten die Peripherie in E und F trift, so muß dieser (§. 209. III.) durch des Kreises Mittelpunkt gehen, also EF ein Durchmesser seyn, in dessen Mitte der Mittelpunkt des gegebenen Kreises liegt. Halbirt man also EF in C (§. 64), so ist dieser der gesuchte Mittelpunkt.

§. 212. Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien AB, BC Fig. 108 u. 109 einander schneiden, und man errichtet aus einem in jeder dieser Linien beliebig genommenen Punkte G, F auf jeder derselben einen Perpendickel KL, HK, so müssen diese Perpendickel verlängert einander schneiden.

Beweis. Die eine der schneidenden Linien AB kann entweder dem Perpendickel HK auf der andern parallel seyn, oder nicht.

Erster Fall. Es sey Fig. 108 $AB \# HK$: so muß (§. 127) die Linie LK, welche die AB schneidet, auch die ihr parallele HK schneiden.

Zweiter Fall. Es sey Fig. 109 nicht $AB \# HK$: so muß AB, hinlänglich verlängert, die KH in irgend einem Punkte M, unter irgend einem Winkel BMF schneiden. Dieser Winkel BMF kann kein rechter seyn, weil sonst im Dreiecke BFM zwei rechte Winkel, BMF, BFM wären, welches unmöglich ist (§. 80). Er muß also ein schiefer seyn. Da nun $KGB = R$, so ist entweder $KGB + KMB < 2R$, oder $KGB + KMB > 2R$. In jedem Falle müssen also (§. 124) die von GM durchschnittenen Linien LK, HK einander an irgend einer Seite der GM schneiden.

213. Aufgabe.

Durch drei gegebene Punkte A, B, G Fig. 107, welche nicht in einerlei geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben; oder aus dem gegebenen Bogen ABG den Kreis zu vollenden.

Auflösung und Beweis. Man verbinde diese Punkte durch die geraden Linien AB, BG; halbire die erste in D und die andere in H; errichte aus D auf AB den Perpendickel EF, und aus H auf BG den Perpendickel HK, so werden diese Perpendickel einander in einem Punkte C schneiden (§. 212); und da (§. 209. III.) in jedem dieser Perpendickel der Mittelpunkt des gesuchten Kreises befindlich seyn muß, so wird C der Mittelpunkt, und jede der Entfernungen CA, CB, CG der Halbmesser des gesuchten Kreises seyn.

§. 214. Zusatz.

Da die beiden Perpendickel EF, HK Fig. 107 einander nur in einem Punkte C schneiden können (§. 12) und hierdurch sowohl der Mittelpunkt C als auch der Halbmesser CB bestimmt wird, so läßt sich durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nur ein einziger Kreis ziehen, und alle Kreise, deren Peripherien drei Punkte gemeinschaftlich haben, fallen zusammen (§. 194).

Durch drei Punkte a, b, g Fig. 110, welche in gerader Linie liegen, läßt sich kein Kreis beschreiben, weil kein Punkt denkbar ist, von welchem nach den Punkten a, b, g der geraden Linie ag drei gleiche

Halbmesser gezogen werden könnten (§. 95). Dies zeigt auch die vorhergehende Construction. Denn wenn man ab, bg in d und h halbirt, und die Perpendickel df, hk errichtet, so werden diese, welche auf einer und derselben geraden Linie ag senkrecht stehen, einander parallel seyn, weil $fdh + khd = 2\,R$ (§. 113). Beide Perpendickel werden also keinen Durchschnittspunkt haben, welcher als Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises genommen werden könnte.

§. 215. Zusatz.

Man kann daher auch den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises ABG Fig. 107 finden, wenn man zwei nicht parallele Sehnen BA, BG zieht, diese in D und H halbirt, und darauf die Perpendickel DF, HK errichtet, deren Durchschnittspunkt C der gesuchte Mittelpunkt seyn wird.

§. 216. Lehrsatz.

Zwei Kreise abe, abg Fig. 111 können einander nur in zweien Punkten schneiden, und die durch die Mittelpunkte beider Kreise gezogene gerade Linie cd gehet durch die Mitte k der die durchschnittspunkte a, b verbindenden geraden Linie und stehet darauf senkrecht.

Beweis. Erster Theil. Hätten zwei Kreise drei Punkte gemein, so müßten sie zusammen fallen (§. 214) und könnten nicht einander schneiden.

Zweiter Theil. Durch beider Kreise Mittelpunkte ziehe man die gerade Linie cd und durch beide Durchschnittspunkte die Linie ab. Ferner ziehe man die Halbmesser ca, cb, da, db.

In den Dreiecken acd, bcd ist (§. 36) $ca = cb$, $da = db$ und cd beiden gemein: folglich ist (§. 60) $\angle\, acd = bcd$, folglich wird im gleichschenklichten Dreiecke cab die Grundlinie ab von cd senkrecht halbirt (§. 89).

§. 217. Lehrsatz.

Wenn die Peripherien zweier Kreise aeb, abg Fig. 111 zwei Punkte a, b gemein haben, so schneiden sie einander in diesen Punkten.

Beweis. Da die Punkte a, b in den Peripherien beider Kreise liegen, so wird die sie verbindende gerade Linie ab eine gemeinschaftliche Sehne seyn (§. 33). Halbirt man diese nun im Punkte k und errichtet darauf den Perpendickel fh, so muß dieser (§. 209. III.) durch die Mittelpunkte c, d beider Kreise gehen. Zieht man nun ca, cb, da, db, so werden, da a auf der einen und b auf der andern Seite der cd liegt, Dreiecke acd, bcd entstehen, worin (§. 97) jede zwei Seiten zusammen größer als die dritte sind, und die aus c mit ca und aus d mit da beschriebenen Kreise müssen also einander schneiden (§. 100).

§. 218. Zusatz.

Kreise, welche einander innerhalb oder außerhalb berühren, können nur einen Punkt gemein haben. Denn sobald sie zwei Punkte gemein haben, müssen sie einander schneiden (§. 217).

§. 219. Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise einander innerhalb oder außerhalb berühren, so gehet die Li=

nie, welche beider Mittelpunkte verbindet, durch den Berührungspunkt. Und wenn man von dem Mittelpunkte des einen Kreises nach dem gemeinschaftlichen Berührungspunkt eine gerade Linie zieht, so gehet diese verlängert durch den Mittelpunkt des andern.

Beweis. Ersten Theils erster Fall. Die Kreise ABC, ADE Fig. 113 berühren einander innerhalb im Punkte A.

Wären nun die Mittelpunkte dieser beiden Kreise F und G, so daß die diese Punkte verbindende Linie FG verlängert nicht durch den Berührungspunkt A gienge, so müßte sie, da beide Kreise nur den Punkt A gemein haben (§. 218), jeden dieser Kreise in einem Punkte D, H schneiden. Man ziehe AF, AG.

Da F der Mittelpunkt des einen Kreises ist, so ist (§. 36) $FA = FH$. Nun ist (§. 97) $FA < GF + GA$; folglich ist auch $FH < FG + GA$; oder, wenn man beiderseits FG hinweg nimmt (Grundsatz 10) $GH < GA$; um so mehr ist (Grunds. 6) $GD < GA$. Nun aber ist G der Mittelpunkt des Kreises ADE, und folglich (§. 36) $GD = GA$, welches dem vorigen widerspricht. Demnach muß die die Mittelpunkte beider Kreise verbindende gerade Linie durch den Berührungspunkt gehen.

Ersten Theils zweiter Fall. Die Kreise ABC, ADE Fig. 112 berühren einander außerhalb in einem Punkte A.

Wären nun die Mittelpunkte dieser Kreise F und G, so daß die sie verbindende Linie FG nicht durch den Berührungspunkt gienge, so muß sie, da (§. 218) beide Kreise nur den einen Punkt A gemein haben, die Peripherien beider Kreise in zwei Punkten C, D schneiden (§. 46). Zieht man nun AG, AF, so entsteht ein Dreieck AFG, worin (§. 97) $AF + AG > FG$. Nun ist (§. 36) $FA = FC$ und $GA = GD$, folglich wäre $FC + GD > FG$, welches unmöglich ist (Grundſ. 3). Demnach gehet die die Mittelpunkte beider Kreise verbindende gerade Linie durch den Berührungspunkt.

Zweiter Theil. Gienge die von H nach A gezogene gerade Linie HAK nicht durch des andern Kreises ADE Mittelpunkt, so sey ein anderer Punkt G sein Mittelpunkt. Zieht man nun von G nach H eine gerade Linie, so muß diese durch den Berührungspunkt A gehen (erster Theil). Nun gehet auch HK durch A. Folglich hätten die beiden geraden Linien HAK, HAG zwei Punkte H und A gemein, welches unmöglich ist (§. 12). Demnach kann der Mittelpunkt des Kreises ADE nur in der verlängerten HA liegen.

§. 220. Lehrsatz.

Wenn die die Mittelpunkte H, K zweier Kreise ABC, ADE Fig. 112 verbindende gerade Linie HK durch einen den Peripherien beider Kreise gemeinschaftlichen Punkt A gehet, so müssen beide Kreise einander in diesem Punkte berühren.

Beweis. Wenn diese Kreise einander nicht berührten, so müßten sie einander schneiden, und die gerade Linie HK, welche beider Kreise Mittelpunkte verbindet, müßte (§. 216) durch die Mitte der die beiden Durchschnittspunkte verbindenden geraden Linie, und also durch keinen den Peripherien beider Kreise gemeinschaftlichen Punkt gehen, welches gegen die Voraussetzung ist; folglich müssen beide Kreise einander im gemeinschaftlichen Punkte berühren.

§. 221. Aufgabe.

Es sind zwei Punkte *H*, *K* Fig. 112 gegeben. Man soll aus ihnen zwei Kreise beschreiben, welche einander von außen oder innen berühren.

Auflösung und Beweis. Erster Theil. Man verbinde *H* und *K* durch eine gerade Linie *HK*, nehme auf ihr einen beliebigen Punkt *A* an und beschreibe aus *H* mit *HA* den Kreis *ABC* und aus *K* mit *KA* den Kreis *ADE*, so werden diese beiden Kreise einander in *A* berühren, weil die ihre Mittelpunkte verbindende Linie durch einen ihren Peripherien gemeinschaftlichen Punkt *A* gehet (§. 220), und zwar von außen, weil sonst auch der Mittelpunkt des Kreises *ADE* innerhalb des Kreises *ABC* fallen müßte (§. 199).

Zweiter Theil. Man ziehe *KH*, verlängere sie nach irgend einer Seite, nehme auf der Verlängerung einen beliebigen Punkt *L* an und beschreibe aus *H* mit *HL* den Kreis *ABC* und aus *K* mit *KL* den Kreis *MLN*, so werden (§. 220) beide Kreise einander in *L* berühren, und zwar von innen, weil sonst der Mittelpunkt *H* des Kreises *ABC* außerhalb des Kreises *MLN* liegen müßte (§. 199).

§. 222 Lehrsatz.

Wenn von einem Punkte *C* innerhalb

eines Kreises ABF Fig. 107 mehr als zwei gleiche gerade Linien CA, CB, CG nach des Kreises Umfang gezogen werden können, so ist es der Mittelpunkt des Kreises.

Vorbereitung. Man ziehe AB, BG; halbire sie in D und H; ziehe CD, CH und verlängere sie von beiden Seiten bis E, F, K, L.

Beweis. In den Dreiecken ACD, BCD ist nach der Voraussetzung $CA = CB$, ferner $AD = DB$ und CD beiden gemein: folglich ist (§. 60) $CDA = CDB = R$ (§. 27); folglich gehet EF durch den Mittelpunkt des Kreises (§. 209 III). Aus gleichem Grunde muß auch der Mittelpunkt in KL liegen. Da nun die beiden Linien EF, KL nur den Punkt C gemein haben können (§. 12), so ist dieser des Kreises Mittelpunkt.

§. 223. Lehrsatz.

In jedem Kreise $ABCD$ Fig. 114 ist der Durchmesser AD die größte Linie. Unter den übrigen ist jede dem Mittelpunkte nähere BC größer als die entferntere FG. Und umgekehrt ist von zweien in einem Kreise gezogenen Sehnen BC, FG die größere BC dem Mittelpunkte näher als die kleinere FG.

Vorbereitung. Aus dem Mittelpunkte E fälle man auf BC, FG die Perpendickel EH, EK und ziehe EB, EC, EF.

Beweis. Erster Theil. Da (§. 36) $AE = EB$ und $ED = EC$, so ist $AE + ED = EB + EC$, oder $AD = BE + EC$. Nun ist (§. 97) $BE + EC > BC$; folglich ist auch $AD > BC$, also der Durchmesser die größte im Kreise gezogene Linie.

Zweiter Theil. Voraussetzung. BC ist dem Mittelpunkte näher als FG oder die Entfernung $EH < EK$.

Behauptung. $BC > FG$.

In den rechtwinklichten Dreiecken BEH, FEK sind die Hypothenusen EB, EF einander gleich (§.36), aber die eine Kathete EH kleiner als EK, folglich ist (§.176) $BH > FK$. Nun ist (§.209) $BC = 2BH$ und $FG = 2FK$; folglich ist (Grundſ. 13) $BC > FG$.

Dritter Theil. Voraussetzung. Die Sehne $BC > FG$.

Behauptung. Die Entfernung der erstern vom Mittelpunkte $EH < EK$.

Da $BC > FG$, und (§. 209) $BH = \frac{1}{2} BC$, $FK = \frac{1}{2} FG$; so ist auch $BH > FK$. Nun sind in den rechtwinklichten Dreiecken BEH, FEK die Hypothenusen BE, FE einander gleich (§. 36); folglich muß (§. 176) die zweite Kathete EH des ersten kleiner als die zweite Kathete EK des andern seyn.

§. 224. Zusatz.

Wenn in einem Kreise zwei Sehnen einander gleich sind, so sind sie gleich weit vom Mittelpunkte entfernt. Denn wären diese Entfernungen vom Mittelpunkte ungleich, so könnten die Sehnen nicht gleich seyn (§. 223. II). Und umgekehrt sind in jedem Kreise gleich weit vom Mittelpunkte entfernte Sehnen einander gleich. Denn wären sie ungleich, so könnten sie keine gleiche Entfernung vom Mittelpunkte haben (§. 223. III).

§. 225. Erklärung.

Eine gerade Linie, welche wie *qr* Fig. 111 an den Kreis irgendwo in *g* anstößt, ohne von seinem Umfange etwas hinweg zu nehmen, so weit man sie auch von beiden Seiten verlängern mag, heißt eine Berührungslinie oder Tangente des Kreises. Jede andere Linie, welche wie *lgm* durch den Kreis gehet, heißt eine Schneidende oder Secante des Kreises.

§. 226. Lehrsatz.

Wenn man auf eines Kreises Halbmesser *dg* Fig. 111 in dessen Endpunkt *g* einen Perpendickel *gq* errichtet, so ist dieser eine Tangente des Kreises und fällt ganz außerhalb desselben. Jede andere durch *g* gezogene gerade Linie aber, welche wie *gl* mit dem Halbmesser *dg* einen spitzen Winkel bildet, schneidet den Kreis auf dieser Seite.

Beweis. Erster Theil. Man nehme auf *qr* einen Punkt *p* noch so nahe an *g* und ziehe *dp*, welche die Peripherie des Kreises in irgend einem Punkte *o* trifft: so ist doch (§. 94) der Perpendickel $dg < dp$. Nun ist (§. 36) $dg = do$; folglich ist $do < dp$. Also liegt jeder Punkt wie *p*, und folglich die ganze Linie *qr* außerhalb des Kreises, und ist also eine Tangente desselben (§. 225).

Zweiter Theil. Aus *d* fälle man auf *gl* den Perpendickel *dn*, so fällt dieser (§. 81) auf die Seite des spitzen Winkels *dgl*, und es ist (§. 94) $dn < dg$. Nun ist (§. 36) $dg = do$, folglich ist $dn < do$. Es liegt also der Punkt *n* innerhalb des Kreises, und die durch n gehende Linie gl muß den Kreis in zwei Punkten schneiden (§. 46).

§. 227. Zusatz.

Wenn eine gerade Linie qr Fig. 111 einen Kreis in einem Punkte g berührt, so muß der aus dem Mittelpunkte d nach dem Berührungspunkte g gezogene Halbmesser auf der Tangente senkrecht seyn. Denn stände er nicht darauf senkrecht, so daß dgq kein rechter Winkel wäre, so müßte er entweder ein spitzer oder ein stumpfer seyn. Im ersten Falle müßte (§. 226, II.) die Linie qr den Kreis auf der Seite des Winkels dgq schneiden; und im zweiten Falle wäre dgr ein spitzer Winkel, und die Linie qr müßte den Kreis auf der Seite dieses Winkels schneiden, und könnte also keine Tangente desselben seyn.

§. 228. Zusatz.

Wenn man auf der Berührungslinie qr Fig. 111 aus dem Berührungspunkt g einen Perpendickel gd errichtet, so muß er durch den Mittelpunkt des Kreises gehen. Denn läge der Mittelpunkt nicht in diesem Perpendickel, so sey es irgend ein anderer Punkt f. Zieht man nun aus dem Mittelpunkt f nach dem Berührungspunkte g eine gerade Linie, so ist (§. 227) fg auf qr senkrecht. Nun soll auch gd auf qr senkrecht seyn, welches unmöglich ist (§. 82). Folglich kann der Mittelpunkt nur in der Linie gd liegen.

§. 229. Aufgabe.

Aus einem in der Peripherie eines Kreises gegebenen Punkte g Fig. 111 demselben eine Tangente zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Aus dem Mittelpunkte *d* ziehe man nach dem gegebenen Punkte eine gerade Linie *gd*, und errichte darauf aus *g* den Perpendickel *gr*, so ist dieser (§. 226) die verlangte Tangente.

§. 230. Zusatz.

Wenn zwei Kreise *ABH*, *KLH* oder *ABH*, *FGH* Fig. 104 einander im Punkte *H* berühren, so haben sie in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente. Denn führt man (§. 229) dem Kreise *ABH* durch den Punkt *H* eine Tangente *MN*, so ist diese auch auf dem Halbmesser des andern Kreises senkrecht (§§. 219. 220), und folglich eine Tangente desselben (§. 226).

Und wenn zwei Kreise im Punkte *H* eine gemeinschaftliche Tangente *MN* haben, so berühren sie einander in diesem Punkte. Denn ein aus *H* auf der gemeinschaftlichen Tangente errichteter Perpendickel gehet (§. 228) durch beider Kreise Mittelpunkte, und diese Kreise müssen also einander berühren (§. 220).

§. 231. Aufgabe.

Von einem außerhalb eines Kreises *BCD* Fig. 115 gegebenen Punkte *A* demselben eine Tangente zu führen.

Auflösung. Man suche des gegebenen Kreises Mittelpunkt *E*, beschreibe aus *E* mit dem Halbmesser *EA* den Kreis *AFG*, und ziehe *EA*, so wird diese den gegebenen Kreis in einem Punkte *D* schneiden. Aus *D* errichte man auf *AE* einen Perpendickel und verlängere ihn, bis er den Kreis durch *A* in einem Punkte *F* trifft. Man verbinde dann *F* und *E* durch eine gerade Linie, welche den gegebenen Kreis in einem Punkte B schneidet, und ziehe AB, so ist diese die verlangte Tangente.

Beweis. In den Dreiecken ABE, FDE ist (§. 36) $AE = EF$, $EB = ED$ und AEF beiden gemein: folglich ist (§. 53) $ABE = FDE$. Nun ist $FDE = R$, folglich auch $ABE = R$, folglich AB eine Tangente des Kreises BCD (§. 226).

Anmerkung. Verlängert man DF rückwärts, so wird sie den Kreis AFG in noch einem Punkte K schneiden, und es läßt sich auf gleiche Art auf der andern Seite noch eine Tangente AH ziehen. Mehr als diese zwei Tangenten aber können aus dem gegebenen Punkte nicht gezogen werden.

§. 232. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Linie MN Fig. 104 in einem gegebenen Punkte H berühre und zugleich durch einen andern gegebenen Punkt O gehe.

Auflösung. Aus H errichte man auf MN den Perpendickel HG; man verbinde dann H und O durch eine gerade Linie HO, halbire sie in P und errichte darauf aus P einen Perpendickel: so wird der Punkt E, worin dieser Perpendickel die Linie HG schneidet, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises seyn.

Beweis. Da der gesuchte Kreis die Linie MN in H berühren soll, so muß dessen Mittelpunkt im Perpendickel HG liegen (§. 228). Da ferner der gesuchte Kreis durch H und O gehen soll, so ist HO

eine Sehne desselben, und der aus deren Mitte *P* errichtete Perpendickel muß durch des Kreises Mittelpunkt gehen (§. 209. III). Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises kann also nur im Durchschnitte der beiden Linien *HG*, *PE* liegen (§. 12).

Anmerkung. Hat der gegebene Punkt eine solche Lage, daß er, wie G in dem auf MN aus H errichteten Perpendickel fällt, so wird HG, welche durch den Mittelpunkt des durch H und G zu legenden Kreises gehen muß, ein Durchmesser desselben seyn, und man braucht sie also nur zu halbiren, um den gesuchten Mittelpunkt E zu erhalten.

§. 233. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen andern *ABH* Fig. 104 in einem gegebenen Punkte *H* berühre und zugleich durch einen zweiten gegebenen Punkt *O* gehe.

Auflösung. Man verbinde *H* und *O* durch eine gerade Linie und errichte aus deren Mitte *P* einen Perpendickel *PE*. Man verbinde dann den Mittelpunkt *C* des gegebenen Kreises mit *H* durch eine gerade Linie und verlängere sie, bis sie den Perpendickel *PE* in einem Punkte *E* schneidet, so ist dieser der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Beweis. Da der gesuchte Kreis durch *H* und *O* gehen soll, so ist *HO* eine Sehne desselben, und *PE* gehet durch dessen Mittelpunkt. Da ferner der gesuchte Kreis den gegebenen in *H* berühren soll, so liegt dessen Mittelpunkt in *CH* (§. 219. II). Er kann also nur im Durchschnitte *E* dieser beiden Linien liegen.

Anmerkung. Wenn der gegebene Punkt O außerhalb des Kreises eine solche Lage hat, daß, nachdem man CH, HO gezogen, der Winkel CHO = R, so ist die Aufgabe unmöglich, weil in diesem Falle GHP + HPE = 2 R, und daher HG, PE parallel sind (§. 113). Wenn aber der Punkt O innerhalb des gegebenen Kreises liegt, so läßt sich die Aufgabe immer nach der vorgeschriebenen Construction auflösen.

Zweites Kapitel.

Von Winkeln in und an dem Kreise.

§. 234. Erklärung.

Ein Winkel am Mittelpunkte eines Kreises oder ein Centriwinkel *BEC* Fig. 116 ist ein solcher, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt, und dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind. Ein Winkel am Umfange des Kreises oder ein Peripheriewinkel *BAC* ist ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie des Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind. Beide Arten Winkel stehen auf dem zwischen ihren Schenkeln enthaltenen Bogen *BC*.

§. 235. Erklärung.

Ein Winkel im Abschnitte *BAEDB* Fig. 118 ist ein solcher, dessen Scheitel im Umfange des diesem Abschnitte zugehörigen Bogens liegt, und dessen Schenkel durch die Endpunkte *B*, *D* der Sehne des Abschnitts gehen. So sind *BAD*, *BED* Winkel im Abschnitte *BAEDB*.

Ein Winkel im Halbkreise ist ein solcher, dessen Scheitel in der Peripherie liegt, und dessen Schenkel durch die Endpunkte des Durchmessers gehen.

§. 236. Lehrsatz.

Jeder Centriwinkel ist doppelt so groß als der Peripheriewinkel, welcher mit ihm auf einerlei Bogen desselben Kreises stehet.

Beweis. Erster Fall. Der Mittelpunkt des Kreises *E* Fig. 116 liege in einem Schenkel des Peripheriewinkels *BAF* und der Centriwinkel sey *BEF*.

Da (§. 36) $EB = EA$, so ist das Dreieck *EAB* gleichschenklicht und *AB* seine Basis. Folglich ist (§. 131. V.) der äußere Winkel am Scheitel $BEF = 2\,BAF$.

Zweiter Fall. Der Mittelpunkt *E* des Kreises Fig. 116 liege zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels *BAC*, und der Centriwinkel sey *BEC*.

Man ziehe vom Scheitel *A* des Peripheriewinkels nach dem Mittelpunkte *E* eine gerade Linie *AE* und verlängere sie nach *F*: so liegt der Mittelpunkt *E* auf einem gemeinschaftlichen Schenkel der Peripheriewinkel *BAF*, *FAC*, und es ist (erster Fall)

$$FEC = 2\,FAC,$$
$$FEB = 2\,FAB,$$

folglich $FEC + BEF = 2\,FAC + 2\,FAB$, oder

$$BEC = 2\,BAC.$$

Dritter Fall. Der Mittelpunkt *E* falle außerhalb des Peripheriewinkels *BAC* Fig. 117 und der Centriwinkel sey *BEC*.

Man ziehe vom Scheitel *A* nach dem Mittelpunkte *E* eine gerade Linie *AE* und verlängere sie bis *F*: so liegt der Punkt E im gemeinschaftlichen Schenkel der Peripheriewinkel FAC, FAB und es ist (erster Fall)

$$FEC = 2\,FAC,$$
$$FEB = 2\,FAB,$$

folglich $FEC - FEB = 2FAC - 2FAB$, oder

$$BEC = 2\,BAC.$$

§. 237. Lehrsatz.

Alle Winkel in einerlei Kreisabschnitt sind einander gleich.

Erster Fall. Wenn beide Winkel, wie BAD, BED Fig. 118 im größern Abschnitte $BAED$ liegen.

Vorbereitung. Man suche des Kreises Mittelpunkt F, welcher (§. 207) innerhalb dieses Abschnitts liegen muß, und ziehe FB, FD.

Beweis. Da (§. 236) $BFD = 2\,BAD$;
und auch $BFD = 2\,BED$,
so ist (Grunds. 4) $2\,BAD = 2\,.\,BED$,
also (Grunds. 14) $BAD = BED$.

Zweiter Fall. Die beiden Winkel BGD, BHD Fig. 118 liegen im kleinern Abschnitte $BGHDB$.

Beweis. Man ziehe GH, so liegen die Winkel GBH, GDH im größern Abschnitte $GADHG$ und sind folglich (erster Fall) einander gleich. Nun sind auch in den Dreiecken BKG, DKH die Winkel BKG, DKH als Scheitelwinkel einander gleich (§. 73); folglich ist auch (§. 131. I.) $BGD = BHD$.

§. 238. Zusatz.

Alle Peripheriewinkel BAD, BED Fig. 118, welche auf einerlei Bogen BGD stehen, sind einander gleich. Denn zieht man die Sehne BD, so stehen sie in einerlei Abschnitt $BAEDB$.

§. 239. Lehrsatz.

Wenn in zweien gleichen Kreisen *AGB*, *DHE* Fig. 119, also auch in einem und demselben Kreise, zwei Centriwinkel *ACB*, *DFE* einander gleich sind, so stehen sie auf gleichen Bogen *AKB*, *DLE*. Sind aber in gleichen Kreisen zwei Centriwinkel *ACM*, *DFE* ungleich, so stehet der größere *ACM* auf einem größern Bogen als der kleinere *DFE*.

Erster Theil. Voraussetzung. 1) Die Kreise *ABG*, *DEH* sind gleich, d. h. $CA = DF$ (§. 197). 2) $\angle ACB = DFE$.

Behauptung. Der Bogen $AKB = DLE$.

Vorbereitung. Man lege den Kreis *DEH* dergestalt auf *ABG*, daß der Punkt *F* auf *C* und *FD* auf *CA* zu liegen komme.

Beweis. Da $FD = CA$, so fällt (§. 15) *D* auf *A* und (§. 194) die ganze Peripherie *DEH* auf *ABG*. Da ferner $DFE = ACB$, so fällt (§. 25) *FE* auf *CB*, und (§. 15) *E* auf *B*. Folglich decken die Bogen *DLE*, *AKB* einander, und sind folglich gleich (§. 14).

Zweiter Theil. Voraussetzung. 1) Die Kreise *ABG*, *DEH* sind gleich. 2) $\angle ACM > DFE$.

Behauptung. Der Bogen $AKM > DLE$.

Vorbereitung. Wie im ersten Theile.

Beweis. Da $FD = CA$, so fällt *D* auf *A*, und die Peripherie *DEH* auf *ABG*. Da ferner $ACM > DFE$, so fällt *FE* zwischen *AC*, *CM* und trifft den Bogen *AM* in einem Punkte *B* zwischen *A* und M. Es ist demnach (Grundſ. 3) Bogen $AKM > AKB$ oder $AKM > DLE$.

§. 240. Zuſatz.

I. Wenn in zweien gleichen Kreiſen Fig. 119 zwei Bogen AKB, DLE einander gleich ſind, ſo müſſen auch die auf ihnen ruhenden Centriwinkel ACB, DFE einander gleich ſeyn. Denn wären dieſe ungleich, ſo könnten die ihnen zugehörigen Bogen nicht gleich ſeyn (§. 239. II).

II. Und wenn in gleichen Kreiſen zwei Bogen AKM, DLE ungleich ſind, ſo ruhet auf dem größern AKM ein größerer Centriwinkel als auf dem kleinern. Denn wäre $ACM = DFE$, ſo müßte auch (§. 239. I.) Bogen $AKM = DLE$ ſeyn; und wäre $ACM < DFE$, ſo müßte auch (§. 239. II.) der Bogen $AKM < DLE$ ſeyn, welches beides gegen die Vorausſetzung iſt. Folglich iſt $ACM > DFE$.

§. 241. Lehrſatz.

Wenn in zweien gleichen Kreiſen Fig. 119, alſo auch in einerlei Kreiſe, zwei Sehnen AB, DE einander gleich ſind, ſo ſind auch die dazu gehörigen Bogen einerlei Art (d. h. welche beide zugleich größer oder kleiner als die halbe Peripherie ſind), wie AKB, DLE einander gleich.

Und wenn in gleichen Kreiſen zwei Bogen AKB, DLE einander gleich ſind, ſo ſind auch die ihnen zugehörigen Sehnen AB, DE gleich.

Vorbereitung. Man ziehe CA, CB, FD, FE.

Beweis. Erster Theil. Da $CA = FD$, $CB = FE$, und nach der Voraussetzung $AB = DE$; so ist (§. 60) $\angle ACB = DFE$ und folglich (§. 239) der Bogen $AKB = DLE$.

Zweiter Theil. Wenn die Bogen AKB, DLE einander gleich sind, so ist (§. 240. I.) auch $\angle ACB = DFE$; und da auch AC, CB, FD, FE einander gleich sind, so ist (§. 53) $AB = DE$.

§. 242. Lehrsatz.

I. Wenn in zweien gleichen Kreisen Fig. 119 zwei Sehnen AM, DE ungleich sind, so gehört zur größern Sehne AM ein größerer Bogen als zur kleinern, wenn beide Bogen kleiner als der Halbkreis sind.

II. Und wenn in zweien gleichen Kreisen zwei Bogen vorerwähnter Art AKM, DLE ungleich sind, so ist die dem größern Bogen AKM zugehörige Sehne AM größer als die dem kleinern Bogen DLE zugehörige DE.

Erster Theil. Voraussetzung. 1) Die Kreise AMG, DEH sind gleich. 2) $AM > DE$.

Behauptung. Der Bogen $AKM > DLE$.

Vorbereitung. Man suche beider Kreise Mittelpunkte und ziehe CA, CM, FD, FE.

Beweis. Da $AC = FD$, $CM = FE$, aber $AM > DE$: so ist (§. 111) $\angle ACM > DFE$, und folglich (§. 239) der Bogen $AKM > DLE$.

Zweiter Theil. Voraussetzung. 1) Die Kreise sind gleich. 2) Der Bogen $AKM > DLE$.

Behauptung. $AM > DE$.

Vorbereitung. Wie im ersten Theile.

Beweis. Da $AKBM > DLE$, so ist (§ 240) $\angle ACM > DFE$. Nun ist $AC = FD$, $CM = FE$: folglich ist (§. 110) $AM > DE$.

Anmerkung. Die Sätze der §§. 239, 240, 241 gelten auch von den Peripheriewinkeln AGB, DHE, ihren Sehnen und Bogen, weil (§. 236) jeder Peripheriewinkel die Hälfte des mit ihm auf einerlei Bogen ruhenden Centriwinkels ist.

§. 243. Lehrsatz.

Wenn in zweien gleichen Kreisen, also auch in einerlei Kreise, die Bogen AKB, DLE Fig. 119 einander gleich sind, so sind auch die ihnen zugehörigen Ausschnitte $ACBK$, $DFEL$; desgleichen die von ihnen und den zugehörigen Sehnen gebilderen Abschnitte einerlei Art $ABKA$, $DELD$, so wie die Winkel in diesen Abschnitten einander gleich.

Beweis. Erster Theil. Man lege beide Ausschnitte dergestalt auf einander, daß F auf C und FD in der Richtung CA zu liegen komme, so fällt wegen der Gleichheit der Halbmesser CA, FD der Punkt D auf A; und da wegen der Gleichheit der Bogen AKB, DLE auch $\angle ACB = DFE$ (§.240.I.), so fällt (§. 25) FE auf CB und E auf B. Da also beide Ausschnitte einander decken, so sind sie gleich (§.14).

Zweiter Theil. In den Dreiecken ACB, DFE ist $AC = FD$, $CB = FE$ und (§. 240. I.) $\angle ACB = DFE$, folglich ist (§. 53) das Dreieck $ACB = DFE$. Nun ist auch (erster Theil) der Ausschnitt $ACBK = DFEL$, folglich ist (Grundś. 10) $ACBK$

— $ACB = DFEL - DFE$ oder der Abschnitt $ABKA = DELD$.

Dritter Theil. Da diese Abschnitte congruent sind, so werden sie auf einander gelegt, ganz zusammen fallen, und ihre Winkel müssen (§. 237) einander gleich seyn.

§. 244. Aufgabe.

Einen gegebenen Kreisbogen AEB Fig. 120 und einen gegebenen Kreisabschnitt $AEBA$ zu halbiren.

Auflösung. Man halbire dessen Sehne AB in D, und errichte darauf aus D den Perpendickel DE, so ist der Bogen $AE = BE$ und die Fläche $ADEA = BDEB$.

Beweis. Man suche (§. 213) des Bogens Mittelpunkt C, und verlängere ED, welche (§. 209. III.) durch diesen Mittelpunkt C gehen muß. Man ziehe ferner CA, CB.

In den Dreiecken CDA, CDB ist (§. 36) $CA = CB$, CD beiden gemein und $AD = BD$: folglich ist (§. 60) die Fläche $ADC = BDC$ und der Winkel $ACD = BCD$; also sind (§. 239) die Bogen AE, EB und daher auch (§. 243) die Ausschnitte $ACEA$, $BCEB$ einander gleich. Nun war auch $\triangle ADC = BDC$; folglich ist $ACEA - ADC = BCEB - BDC$, oder $ADEA = BDEB$.

§. 245. Zusatz.

Ein aus dem Mittelpunkt C eines Kreises auf eine Sehne AB desselben gefällter Perpendickel CDE

wird also den dazu gehörigen Bogen halbiren, weil er diese Sehne zugleich halbirt (§. 209. I).

Anmerkung. Durch fortgesetztes Halbiren kann man einen Kreisbogen in 4, 8, 16, 32 ꝛc. gleiche Theile theilen.

§. 246. Lehrsatz.

Die zwischen zweien parallelen Sehnen *AB*, *FG* Fig. 120 liegenden Bogen *AF*, *BG* eines und desselben Kreises; desgleichen die zwischen einer Tangente *KL* und einer ihr parallelen Sehne, *AB* enthaltenen Bogen *AE*, *BE* sind einander gleich.

Beweis. Erster Theil. Man fälle aus dem Mittelpunkte *C* auf *AB* den Perpendickel *CD* und verlängere ihn bis *E*: so wird dieser, da *FG* ♯ *AB*, auch die Linie *FG* in *H* senkrecht schneiden (§. 127), und es ist (§. 245) der Bogen $AE = BE$, und, weil *CH* auch auf *FG* in deren Mitte senkrecht stehet, der Bogen $FE = GE$; folglich ist (Grunds. 10) $AE - FE = BE - GE$ oder $AF = BG$.

Zweiter Theil. Man verbinde den Berührungspunkt *E* mit dem Mittelpunkte *C* durch eine gerade Linie, *CE*, so ist diese (§. 227) auf *KL* senkrecht; und da *AB* ♯ *KL*, so stehet auch (§. 125) *CE* auf *AB* senkrecht, folglich wird der Bogen *AEB* im Punkte *E* halbirt (§. 245).

§. 247. Zusatz.

Wenn umgekehrt zwei Bogen *AF*, *BG* eines und desselben Kreises Fig. 120 einander gleich sind, so müssen die Sehnen *AB*, *FG*, welche sie zwischen sich fassen, parallel seyn. Denn wäre nicht $AB \# FG$, so könnte man doch (§. 115) durch den Punkt A eine andere Linie An der FG parallel führen, und es wäre (§. 246) $Gn = AF$. Nun ist auch nach der Voraussetzung $BG = AF$; folglich wäre (Grunds. 4) $GB = Gn$, welches unmöglich ist (Grunds. 3).

Auf gleiche Art beweiset man, daß, wenn aus dem Berührungspunkte E der Tangente KL zwei gleiche Bogen EA, EB abgeschnitten werden, die ihre Endpunkte verbindende Sehne AB der KL parallel seyn muß.

§. 248. Lehrsatz.

Wenn alle Winkelspitzen eines Vierecks $ABCD$ Fig. 121 in der Peripherie eines Kreises liegen, so ist die Summe je zweier gegenüberstehenden Winkel desselben zweien rechten gleich. Es ist nehmlich $DAB + DCB = 2R = ADC + ABC$.

Beweis. Man ziehe die Diagonalen AC, DB, so ist (§. 238) $\angle ADB = ACB$, weil beide auf einerlei Bogen AB stehen. Eben so sind die auf einerlei Bogen DA stehenden Winkel DBA, DCA einander gleich. Folglich ist (Grunds. 7) $ADB + DBA = ACB + DCA$, oder $ADB + DBA = DCB$. Kommt nun zu beiden Seiten der Winkel BAD hinzu, so ist

$$ADB + DBA + BAD = DCB + BAD.$$

Nun ist (§. 130) $ADB + DBA + BAD = 2R$; folglich ist (Grunds. 4) $DCB + BAD = 2R$.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß $ADC + ABC = 2R$.

§. 249. Lehrsatz.

Wenn in einem Vierecke *ABCD* Fig. 121 jede zwei gegenüber stehende Winkel zusammen zweien rechten gleich sind, so läßt sich ein Kreis beschreiben, welcher durch alle Winkelspitzen desselben geht.

Beweis. Man beschreibe (§. 213) durch irgend drei Winkelspitzen desselben, *B*, *A*, *D* einen Kreis. Gienge dieser nicht durch den vierten Punkt *C*, so müßte er die Linie *DC* oder ihre Verlängerung in irgend einem Punkte *F* oder *E* schneiden. Gesetzt es geschehe in *F*, so ziehe man *BF*.

Da bei dieser Annahme die vier Punkte *B*, *A*, *D*, *F* in der Peripherie eines Kreises liegen, so ist im Vierecke *ABFD* (§. 248) $BAD + BFD = 2\,R$. Nun ist nach der Voraussetzung auch $BAD + BCD = 2\,R$; folglich ist (Grundf. 4)

$$BAD + BFD = BAD + BCD$$

folglich (Grundf. 10) $BFD = BCD$, also im Dreiecke *BFC* der äußere Winkel *BFD* dem ihm gegenüber stehenden innern *BCD* gleich, welches unmöglich ist (§. 78).

Da nun auf gleiche Art erweislich ist, daß ein durch *B*, *A*, *D* gelegter Kreis nicht durch einen Punkt *E* diesseits von *C* gehen kann, weil alsdann am Dreiecke *BCE* der äußere Winkel *BCD* dem ihm gegenüber stehenden innern *BED* gleich seyn müßte, so muß er durch den Punkt *C* gehen.

§. 250. Zusatz.

Wenn in einem Vierecke nicht die Summe je zweier gegenüber stehenden Winkel zweien rechten gleich ist, so läßt sich durch dessen Winkelspitzen kein Kreis legen. Denn ließe sich dadurch ein Kreis legen, so müßte (§. 248) die Summe jener Winkel zweien rechten gleich seyn.

Und läßt sich durch die Winkelspitzen eines Vierecks kein Kreis legen, so kann nicht die Summe je zweier gegenüber stehenden Winkel desselben zweien rechten gleich seyn, weil, wenn dies der Fall wäre, durch dessen Winkelspitzen ein Kreis gelegt werden könnte (§. 249).

Anmerkung. Durch fünf gegebene Punkte, also auch durch die Winkelspitzen eines Fünfecks läßt sich nur dann ein Kreis legen, wenn durch jede beliebige vier Punkte desselben ein Kreis gelegt werden kann. Eben so wird sich durch sechs gegebene Punkte ein Kreis legen lassen, wenn er durch jede beliebige fünf Punkte derselben gezogen werden kann u. s. w.

§. 251. Lehrsatz.

1) Jeder Winkel, im Halbkreise, wie *BAD* Fig. 122 ist ein rechter. 2) Jeder Winkel im größern Abschnitte *ABEGDA* ist ein spitzer. 3) Jeder Winkel im kleinern Abschnitte *AFDA* ist ein stumpfer.

Beweis. Erster Theil. Der Winkel *BAD* liege im Halbkreise *BAFDB*.

Man ziehe nach dem Mittelpunkte *C* die gerade Linie *AC* und verlängere sie bis *G*, so ist (§. 236) $BCG = 2\,BAG$; $DCG = 2\,DAG$; folglich ist (Grundſ. 7) $BCG + DCG = 2\,BAG + 2\,DAG$

$= 2\,BAD$. Nun ist (§. 68) $BCG + DCG = 2\,R$, folglich ist (Grunds. 4) $2\,BAD = 2\,R$, also $BAD = R$.

Zweiter Theil. Der Winkel AED liege im größern Abschnitte.

Man suche den in diesem Abschnitte liegenden Mittelpunkt C. Ziehe den Durchmesser DCB, und verbinde B mit A durch eine gerade Linie.

Da die Peripheriewinkel ABD, AED auf einerlei Bogen AFD stehen, so sind sie (§. 238) einander gleich. Nun ist, weil BD ein Durchmesser ist, der Winkel BAD, als Winkel im Halbkreise, ein rechter (I. Theil), und daher im rechtwinklichten Dreiecke DAB der Winkel ABD ein spitzer (§. 80). Folglich ist auch AED ein spitzer Winkel.

Dritter Theil. Der Winkel AFD liege im kleinern Abschnitte $AFDA$: so ist, wenn man aus einem beliebigen Punkte E des Bogens $ABGD$ nach A und D gerade Linien zieht, der Winkel AED im größern Abschnitte und also (zweiter Theil) ein spitzer. Nun ist (§. 248) $AFD + AED = 2\,R$; folglich ist AFD ein stumpfer Winkel.

§. 252. Zusatz.

Man kann daher auch von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte A Fig. 123 demselben eine Tangente ziehen, wenn man diesen Punkt mit dem Mittelpunkte C des Kreises durch eine gerade Linie verbindet, diese in B halbirt; aus B mit BC oder BA einen Kreis beschreibt, welcher den gegebenen in zwei Punkten D, E schneidet (§. 47), und aus A nach D und E gerade Linien zieht, da alsdann jede dieser Linien die gesuchte Tangente seyn wird. Denn zieht man CE, CD, so sind AEC, ADC, als Winkel im Halbkreise, $AECA$, $ADCA$, rechte Winkel (§. 251), und folglich AE, AD Tangenten des Kreises um C (§. 226).

§. 253. Aufgabe.

Aus dem Endpunkte B einer geraden Linie BA Fig. 124 auf derselben einen Perpendickel zu errichten.

Auflösung und Beweis. Auf irgend einer Seite von AB nehme man einen Punkt C nach Belieben an und beschreibe aus C mit dem Halbmesser CB einen Kreis. Berührt dieser Kreis die Linie AB im Punkte B, so ist (§. 227) CB der verlangte Perpendickel. Schneidet aber dieser Kreis die Linie AB in noch einem Punkte D, so ziehe man den Durchmesser DCE, verbinde E mit B durch eine gerade Linie, so wird diese auf BA senkrecht seyn, weil (§. 251) EBD, als Winkel im Halbkreise ein rechter ist.

§. 254. Lehrsatz.

Wenn aus dem Berührungspunkte B der Tangente EF eines Kreises ABC Fig. 125 eine Sehne BD nach dem Kreise gezogen wird, so ist jeder der Winkel, welche diese Sehne mit der Tangente bildet, dem Winkel im entgegen stehenden Abschnitte gleich. Es ist nehmlich $\angle DBF$ dem Winkel im Abschnitte DAB, und DBE dem Winkel im Abschnitte DCB gleich.

Vorbereitung. Aus B errichte man auf EF den Perpendickel BA; im Bogen DB nehme man nach Belieben einen Punkt C und ziehe AD, DC, CB.

Beweis. I) Da BA auf EF im Berührungspunkte B senkrecht stehet, so enthält sie (§. 228) den Mittelpunkt des Kreises, und ADB ist, als Winkel im Halbkreise, einem rechten gleich (§. 251); folglich ist (§. 131. III.) $ABD + BAD = R$. Nun ist auch $ABD + DBF = R$; folglich ist (Grundſ. 4) $ABD + BAD = ABD + DBF$, oder wenn beiderseits ABD hinweg genommen wird, $BAD = DBF$. Nun ist BAD ein Winkel im Abschnitte $DABD$, also (§. 237) jedem Winkel in diesem Abschnitte gleich. Folglich ist es auch (Grundſ. 2) der Winkel DBF.

II) Da (§. 68) $DBF + DBE = 2R$, und auch (§. 248) $BAD + BCD = 2R$, so ist (Grundsatz 4) $DBF + DBE = BAD + BCD$. Nun ist (I) $DBF = BAD$, folglich ist (Grundsatz 10) $DBE = DCB$, also (§. 237) jedem Winkel im Abschnitte DCB gleich.

§. 255. Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie AB Fig. 126 u. 127. einen Kreisabschnitt zu setzen, welcher einen gegebenen Winkel C enthalte.

Auflösung. Erster Fall. Der gegebene Winkel C sey $= R$ Fig. 126.

Man halbire AB in F, und beschreibe aus F mit FA den Halbkreis AEB: so ist (§. 251) der Winkel $AEB = R = C$.

Zweiter Fall. Der gegebene Winkel C Fig. 127 sey kein rechter.

Vorbereitung. An den Punkt A der gegebenen Linie AB lege man einen Winkel $BAD = C$ an, errichte auf AD in A den Perpendickel AE, halbire

AB in F, errichte in F auf AB den Perpendickel FG und ziehe GB: so wird ein aus G mit GA beschriebener Kreis auch durch B gehen. Denn in den Dreiecken AFG, BFG ist $AF = FB$, FG beiden gemein und $AFG = BFG = R$, folglich ist (§. 53) $GA = GB$.

Man beschreibe aus G mit GA einen Kreis, so wird $AHBA$ der verlangte Abschnitt seyn.

Beweis. Da $DAE = R$, und AE ein Durchmesser des Kreises, so ist (§. 226) AD eine Tangente des Kreises ABE im Punkte A. Da nun aus eben diesem Punkte eine Sehne AB des Kreises gezogen, so ist (§. 254) DAB = dem Winkel im Abschnitte $AHBA$. Nun aber ist $DAB = C$; folglich ist (Grungs. 4) der Winkel AHB im Abschnitte $= C$.

§. 256. Aufgabe.

Von einem gegebenen Kreise ABC Fig. 128 einen Abschnitt hinweg zu nehmen, welcher einen gegebenen Winkel D enthalte.

Auflösung. Man lege durch einen beliebigen Punkt B dieses Kreises eine Tangente EBF; an FB setze man den Winkel $FBC = D$: so wird $CABC$ der verlangte Abschnitt seyn.

Beweis. Nimmt man jenseits des Winkels FBC einen beliebigen Punkt A des Bogens CAB, und zieht AB, AC, so ist (§. 254) $BAC = CBF$; da aber $CBF = D$, so ist auch $BAC = D$.

§. 257. Lehrsatz.

Wenn in einem Kreise $AGBC$ Fig. 106 zwei Sehnen AB, CD einander innerhalb schneiden, so ist jeder Winkel am Durchschnittspunkte E einem Peripheriewinkel gleich, welcher auf der Summe der zwischen den Schenkeln dieses Winkels und deren Verlängerung enthaltenen Bogen desselben Kreises stehet. Es ist nehmlich DEB einem Peripheriewinkel auf der Summe der Bogen BD, AC, und AED einem Peripheriewinkel auf der Summe der Bogen AD, CB gleich.

Beweis. Man ziehe durch A der CD eine Parallele AG und aus einem beliebigen Punkte H des Bogens BG nach B und G gerade Linien: so ist (§. 125. III.) $BED = BAG$, und weil (§. 68) $BED + AED = 2R$, und (§. 248) auch $BAG + BHG = 2R$, ist $BED + AED = BAG + BHG$, also (Grundſ. 10) $AED = BHG$.

Nun stehet BAG auf dem Bogen $BG = BD + DG$, und weil (§. 246) $DG = AC$, so ist BAG einem Peripheriewinkel auf der Summe der Bogen BD, AC gleich. Folglich ist auch BED einem solchen Peripheriewinkel gleich.

Eben so steht BHG auf dem Bogen $GAB = GA + AC + CB = GA + GD + CB = AD + CB$. Also ist auch AED einem Peripheriewinkel auf der Summe dieser Bogen AD, CB gleich.

§. 258. Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen BD, CE Fig. 129 einander außerhalb des Kreises in einem Punkte A schneiden, so ist der von ihnen eingeschlossene Winkel BAC einem Peripheriewinkel gleich, welcher auf der Differenz, $BC - DE$, der zwischen seinen Schenkeln enthaltenen Bogen BC, DE stehet.

Beweis. Durch D ziehe man DF der AC parallel, so ist (§. 125. III.) $BAC = BDF$. Nun ist BDF ein Peripheriewinkel auf dem Bogen $BF = BC - CF = BC - DE$, weil (§. 246) $FC = DE$. Folglich ist BAC einem eben solchen Peripheriewinkel gleich.

§. 259. Lehrsatz.

Wenn eine Sehne CE und eine Tangente GA Fig. 129 einander in einem Punkte A schneiden, so ist der von ihnen eingeschlossene Winkel CAG einem Peripheriewinkel gleich, welcher auf der Differenz, $CG - GE$, der zwischen seinen Schenkeln enthaltenen Bogen CG, GE stehet.

Beweis. Man ziehe durch E der AG die Parallele EH, so ist (§. 125. III.) $CAG = CEH$, einem Peripheriewinkel auf dem Bogen $CH = CG - GH = CG - EG$, weil (§. 246. II.) die zwischen der Tangente und der ihr parallelen Sehne enthaltenen Bogen GE, GH einander gleich sind.

§. 260. Lehrsatz.

Wenn zwei Tangenten GA, KA Fig. 129 einander in einem Punkte A schneiden, so ist der von ihnen eingeschlossene Winkel KAG einem Peripheriewinkel gleich, welcher auf der Differenz $KFG - KEG$ der zwischen seinen Schenkeln enthaltenen Bogen steht.

Beweis. Zieht man aus A eine beliebige Secante AC des Kreises, so ist (§. 259) $CAG =$ einem Peripheriewinkel auf $GC - GE$, und $CAK =$ einem Peripheriewinkel auf $CK - KE$. Folglich ist, $CAG + CAK$ oder KAG einem Peripheriewinkel auf $CG + CK - (GE + EK)$ oder auf $KFG - KEG$ gleich.

Drittes Kapitel.

Von den in dem Kreise eingeschriebenen und den um denselben beschriebenen Figuren.

§. 261. Erklärung.

Eine geradlinigte Figur *abcde* Fig. 130 ist in einer geradlinigten Figur *ABCDE* eingeschrieben, wenn jede Winkelspitze der ersten Figur in einer Seite der letzteren liegt.

Eine geradlinigte Figur *ABCDE* heißt um eine geradlinigte Figur *abcde* Fig. 130 beschrieben, wenn jede Seite der ersten Figur durch eine Winkelspitze der andern geht.

§. 262. Erklärung.

Eine geradlinigte Figur *abcde* Fig. 130 heißt in dem Kreise eingeschrieben, wenn der Kreis durch jede Winkelspitze derselben geht.

Eine geradlinigte Figur *ABCDE* Fig. 130 heißt um den Kreis beschrieben, wenn jede ihrer Seiten den Kreis berührt.

§. 263. Erklärung.

Ein Kreis ist in einer geradlinigten Figur *ABCDE* Fig. 130 eingeschrieben, wenn jede ihrer Seiten den Kreis berührt.

Ein Kreis ist um eine Figur *abcde* Fig. 130 beschrieben, wenn dessen Peripherie durch jede Winkelspitze der Figur geht.

§. 264. Erklärung.

Eine gerade Linie *ab* Fig. 130 heißt in dem Kreise eingetragen, wenn ihre Endpunkte in der Peripherie des Kreises liegen.

§. 265. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis *ABC* Fig. 131 eine gerade Linie einzutragen, welche einer gegebenen geraden Linie *D*, (die jedoch nicht größer als Durchmesser ist), gleich sey.

Auflösung. Man ziehe einen Durchmesser *CB*. Ist dieser der gegebenen Linie gleich, so ist das verlangte geschehen. Ist dieser aber größer als *D*, so schneide man $CE = D$ ab, beschreibe aus *C* mit *CE* einen Kreis *AEF* und ziehe *AC*, so ist diese die verlangte Linie.

Beweis. Da (§. 36) $CA = CE$ und auch $CE = D$; so ist (Grunds. 4) $CA = D$ und (§. 264) in dem Kreise *ABC* eingetragen.

§. 266. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis *ABC* Fig. 132 ein Dreieck einzuschreiben, welches dem gegebenen Dreiecke *DEF* gleichwinklicht sey.

Auflösung. Man nehme in der Peripherie des Kreises einen beliebigen Punkt A an, lege dadurch (§. 229) eine Tangente GAH, und an eben diesem Punkte (§. 103) die Winkel $HAC = E$, $GAB = D$: so wird, wenn BC gezogen wird, ABC das verlangte Dreieck seyn.

Beweis. Da (§. 254) $\angle\ HAC = ABC$, aber $HAC = E$, so ist auch (Grunds. 4) $ABC = E$, Aus gleichen Gründen ist $\angle\ ACB = D$; folglich ist (§. 131. I.) das Dreieck ABC dem Dreiecke DEF gleichwinklicht, und (§. 262) im Kreise ABC eingeschrieben.

§. 267. Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis ABC Fig. 133 ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke DEF gleichwinklicht sey.

Auflösung. Man verlängere EF nach G und H, ziehe einen beliebigen Halbmesser KB und mache $BKA = DEG$, $BKC = DFH$, so können keine zwei der Halbmesser KB, KA, KC in gerader Linie liegen, und müssen also einander in K schneiden.

Denn jeder der Winkel DEG, DFH, ist als äußerer Winkel den beiden gegenüber stehenden innern des Dreiecks gleich, also (§. 79) kleiner als zwei rechte. Folglich ist auch jeder der Winkel BKA, $BKC < 2\,R$. Beide Winkel BKA, BKC zusammen aber sind größer als zwei rechte, weil (§. 79) $DEF + DFE < 2\,R$; folglich ist (§. 71) $AKC < 2\,R$.

Man lege dann (§. 229) durch A, B, C Tangenten des Kreises, so werden diese (§. 212) einander in L, M, N schneiden und das Dreieck LMN wird das verlangte seyn.

Beweis. Die Winkel des Vierecks $AMBK$ betragen zusammen vier rechte (§. 135); da nun (§.227) $MAK + MBK = 2R$: so ist (Grunds. 10) $AKB + M = 2R = DEG + DEF$. Da aber $AKB = DEG$, so ist (Grunds. 10) $AMB = DEF$.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß $BNC = DFE$; folglich ist (§. 131. I.) das Dreieck LMN dem Dreiecke DEF gleichwinklicht, und (§. 262) um den Kreis ABC beschrieben.

§. 268. Aufgabe.

In ein gegebenes Dreieck ABC Fig. 134 einen Kreis einzuschreiben.

Auflösung. Man halbire beliebige zwei Winkel B, C durch BD, CD, welche (§.124) einander in einem Punkte D schneiden müssen. Aus D fälle man auf die Seiten BA, AC, CB die Perpendickel DE, DF, DG: so wird ein aus D mit einem dieser Perpendickel DE beschriebener Kreis der verlangte seyn.

Beweis. Da nach der Construction der Winkel $EBD = DBF$, $\angle DEB = DFB = R$, und $BD = BD$: so ist (§. 84) $DE = DF$. Aus gleichem Grunde ist $DF = DG$. Da solchergestalt die drei Perpendickel einander gleich sind, so gehet der aus D mit einem derselben DE beschriebene Kreis auch durch die Endpunkte F, G der beiden übrigen; und da bei E, F, G rechte Winkel sind, so sind (226) AB, AC, BC Tangenten des Kreises, und folglich ist (§. 263) der Kreis EFG im Dreiecke ABC eingeschrieben.

§. 269. Aufgabe.

Um ein gegebenes Dreieck ABC Fig. 136 einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung und Beweis. Da (§. 263) der zu beschreibende Kreis durch alle drei Winkelspitzen des Dreiecks gehen muß, so kommt die Aufgabe mit der des §. 213 überein, und die vorgelegte Aufgabe wird aufgelöset, wenn man beliebige zwei Seiten AB, AC des Dreieckes durch DF, EF in D und E senkrecht halbirt und aus dem Durchschnitte F dieser Perpendickel mit einer der Entfernungen FA, FB, FC einen Kreis beschreibt.

§. 270. Lehrsatz.

Wenn die Peripherie eines Kreises $abcde$ Fig.130 in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt wird, so bilden die je zwei auf einander folgende Theilpunkte verbindenden geraden Linien ab, bc, cd rc. ein in diesem Kreise eingeschriebenes reguläres Polygon von so vielen Seiten als die Peripherie Theile hat.

Beweis. Da die Bogen ab, bc, cd rc. einander gleich sind, so sind (§. 241) auch deren Sehnen ab, bc, cd rc. einander gleich, also ist die Figur gleichseitig.

Da ferner der Bogen $ae = bc$, so ist (Grundſ. 7) $ae + ab = ab + bc$ oder der Bogen $eab = abc$, und daher (§. 243) der Winkel im Abschnitte eab dem Winkel im Abschnitte abc gleich. Da nun auf gleiche Art erweislich ist, daß auch die übrigen Polygonwinkel einander gleich sind, so ist (§. 32) $abcde$ eine reguläre Figur und (§. 262) im Kreise eingeschrieben.

§. 271. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis ein reguläres

Polygon von einer gegebenen Anzahl Seiten einzuschreiben, vorausgesetzt die Peripherie des Kreises lasse sich in so viele gleiche Theile theilen als das Polygon Seiten haben soll.

Auflösung und Beweis. Man theile die Peripherie des Kreises *abcde* Fig. 130 in so viele gleiche Bogen als das Polygon Seiten haben soll; verbinde je zwei auf einander folgende Theilpunkte durch die geraden Linien *ab*, *bc*, *cd* ꝛc., so wird (§. 270) *abcde* das verlangte Polygon seyn.

§. 272. Aufgabe.

Wenn in einem Kreise ein reguläres Polygon *abcde* Fig. 130 von irgend einer Anzahl Seiten eingeschrieben ist, in denselben Kreis ein reguläres Polygon von doppelt so vielen Seiten als das gegebene einzuschreiben.

Auflösung. Man halbire (§. 244) die Bogen *ab*, *bc*, *cd* ꝛc. in *f*, *g*, *h* ꝛc.; verbinde jeden Theilpunkt mit den zunächst liegenden Winkelspitzen der gegebenen Figur durch gerade Linien *af*, *fb*, *bg* ꝛc.: so wird *afbgchdkel* das verlangte Polygon seyn.

Beweis. Da *abcde* ein reguläres Polygon ist, und daher (§. 32) alle Sehnen *ab*, *bc*, *cd* u. s. w. einander gleich sind, so sind auch (§. 241) die Bogen *ab*, *bc*, *cd* u. s. w. einander gleich. Es sind daher auch (Grundſ. 14) deren Hälften, nehmlich die Bogen *af*, *fb*, *bg* u. s. w. einander gleich. Folglich ist (§. 270) *afbgchdkel* das verlangte Polygon.

§. 273. Aufgabe.

Wenn in einem Kreise ein reguläres

Polygon *afbgchdkel* Fig. 130 von irgend einer geraden Anzahl Seiten eingeschrieben ist, in denselben Kreis ein reguläres Polygon von halb so vielen Seiten als das gegebene einzuschreiben.

Auflösung. Man verbinde die Endpunkte der einen jeden Polygonwinkel einschließenden Sehnen durch eine gerade Linie, wie *ab*, *bc*, *cd* u. s. w.: so wird *abcde* das verlangte Polygon seyn.

Beweis. Da *afbgchdkel* eine reguläre Figur ist, und daher (§. 32) die Sehnen *af*, *fb*, *bg* u. s. w. einander gleich sind, so sind es auch (§. 241) die Bogen *af*, *fb*, *bg* u. s. w. Es sind daher auch (Grundsatz 12) die doppelten Bogen *ab*, *bc*, *cd* u. s. w. einander gleich. Folglich ist (§. 270) *abcde* das verlangte Polygon.

§. 274. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis *ABCD* Fig. 137 ein Quadrat einzuschreiben.

Auflösung. Man setze zwei Durchmesser *AC*, *BD* senkrecht auf einander und verbinde deren Endpunkte durch *AB*, *BC*, *CD*, *DA*: so ist *ABCD* das verlangte Quadrat.

Beweis. Da (§. 28) alle Winkel um *E*, als rechte, einander gleich sind, so sind es auch (§. 239) die vier Bogen *AB*, *BC*, *CD*, *DA*; folglich ist (§. 270) *ABCD* ein reguläres im Kreise eingeschriebenes Viereck oder ein Quadrat (§. 44).

§. 275. Zusatz.

Halbirt man die Bogen *BA*, *AD* u. s. w. in *F*, *G* ꝛc. und zieht *BF*, *FA*, *AG*, *GD* ꝛc., so läßt sich

(§. 272) in den gegebenen Kreis ein reguläres Achteck einschreiben; und so kann man durch fortgesetztes Halbiren der Bogen in jeden gegebenen Kreis ein reguläres 16=, 32=, 64eck ꝛc. einschreiben.

§. 276. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis *ABDG* Fig. 135 ein reguläres Sechseck einzuschreiben.

Auflösung. Man ziehe einen Durchmesser *GD*, und beschreibe aus *D* mit *DC* einen Kreis *ECBH*. Man ziehe *CB*, *CE*, verlängere sie bis *F* und *A* und ziehe *AB*, *BD*, *DE* u. s. w., so wird *ABDEFG* das verlangte Sechseck seyn.

Beweis. Da nach der Construction die Dreiecke *ECD*, *DCB* gleichseitig sind (§. 50), so ist (§. 131. VI.) jeder der Winkel ECD, $DCB = \frac{2}{3} R$; folglich ist, weil (§. 68) $ECB + BCA = 2 R$, auch $BCA = \frac{4}{3} R$. Da nun (§. 73) $ECD = ACG$, $DCB = GCF$ und $ACB = FCE$: so sind alle um *C* herumliegende sechs Winkel, daher auch (§. 239) die Bogen *AB*, *BD*, *DE* ꝛc. einander gleich. Folglich ist (§. 270) *ABDEFG* die verlangte Figur.

§. 277. Zusatz.

Da das Dreieck *DBC* gleichseitig ist, daher $DB = BC$: so ist die Seite des in einem Kreise einzuschreibenden regulären Sechsecks dem Halbmesser eben dieses Kreises gleich. Man kann daher auch in einen Kreis ein reguläres Sechseck einschreiben, wenn man aus einem in dessen Peripherie beliebig genommenen Punkte den Halbmesser sechsmahl herum trägt.

§. 278. Zusatz 2.

Zieht man AD, DF, FA, so giebt (§. 273) ADF ein in demselben Kreise eingeschriebenes reguläres Dreieck. Auf ähnliche Art kann man (§. 272) in dem gegebenen Kreise ein reguläres Polygon von 12, 24, 48 u. s. w. Seiten einschreiben.

§. 279. Lehrsatz.

Wenn man die Peripherie eines Kreises $abcde$ Fig. 130 in irgend eine Anzahl (jedoch mehr als zwei) gleicher Theile ab, bc, cd rc. theilt und durch die Theilpunkte a, b, c rc. dem Kreise Tangenten EA, AB, BC, CD führt, so bilden diese ein um den Kreis beschriebenes reguläres Polygon von eben so vielen Seiten als der Kreis Bogentheile hat.

Vorbereitung. Aus dem Mittelpunkte O des Kreises ziehe man die Halbmesser Oa, Ob, Oc rc., so werden (§. 240) die hierdurch um O entstehenden Winkel alle einander gleich seyn, weil es die Bogen ab, bc rc. sind. Da nun, nach der Voraussetzung, deren Anzahl wenigstens drei seyn muß, und (§. 71) alle um O herumliegende Winkel zusammen vier rechte betragen, so kann jeder dieser Winkel nicht mehr als $\frac{4}{3} R$ betragen, und jede zwei der Linien Oa, Ob, Oc rc. werden einander in O schneiden. Es müssen daher (§. 212) die auf jedem der Halbmesser senkrechten Tangenten, AB, BC, CD rc. einander in B, C, D rc. schneiden. Man ziehe OA, OB, OC rc.

Beweis. In den rechtwinklichten Dreiecken OAa, OAb ist (§. 36) $Oa = Ob$, und OA beiden gemein, folglich ist (§. 93) $Aa = Ab$, $\angle AOb = AOa$; $\angle OAb$

$= OAa$. Es ist also $\angle bOa = 2 . AOa$; $\angle bAa = 2 . OAb$. Aus gleichem Grunde ist $\angle bOc = 2 . BOb$ und $bBc = 2 . OBb$. Nun sind die Bogen ab, bc und daher (§. 240) die Winkel aOb, bOc gleich; es ist daher (Grundſ. 14) $\angle AOb = BOb$.

In den Dreiecken AOb, BOb ist demnach $\angle AOb = BOb$, $\angle AbO = BbO = R$, und Ob beiden gemein: folglich ist (§. 83) $Ab = Bb$ und $\angle OAb = OBb$. Da nun $Ab = Bb$, also $AB = 2 . Ab$ und eben so erweislich ist, daß $AE = 2 . Aa$, so ist, weil nach Obigem $Ab = Aa$ (Grundsatz 12) $AB = AE$. Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch alle übrigen Seiten der Figur einander gleich sind.

Da ferner $OAb = OBb$, daher (Grundſ. 12) $2 . OAb = 2 . OBb$, und nach Obigem $aAb = 2 . OAb$, $bBc = 2\ OBb$: so ist $aAb = bBc$. Auf eben die Art wird bewiesen, daß alle übrigen Polygonwinkel dieser Figur einander gleich sind. Folglich ist (§. 32) $ABCDE$ eine reguläre Figur und (§. 262) um den Kreis beschrieben.

§. 280. Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis $abcde$ Fig. 130 ein reguläres Polygon von irgend einer Anzahl Seiten zu beschreiben, vorausgesetzt seine Peripherie lasse sich in so viele gleiche Theile theilen als das Polygon Seiten haben soll.

Auflösung und Beweis. Man theile die Peripherie des Kreises in so viele gleiche Theile ab, bc, cd ꝛc. als das Polygon Seiten haben soll; ziehe durch die Theilpunkte a, b, c ꝛc. die Tangenten EA, AB, BC ꝛc. und verlängere sie bis sie einander schneiden: so ist (§. 279) $ABCDE$ das verlangte Polygon.

§. 281. Zusatz.

Da sich die Peripherie eines jeden Kreises (§. 274) in vier, und (§. 276) in sechs gleiche Theile theilen läßt, so läßt sich um jeden gegebenen Kreis ein Quadrat und ein reguläres Sechseck, desgleichen (§. 273) ein reguläres Dreieck beschreiben. Eben so läßt sich (§. 272) um jeden gegebenen Kreis ein reguläres 8-, 16-, 32eck, desgleichen ein 12-, 24-, 48eck ꝛc. bebeschreiben.

§. 282. Aufgabe.

Um ein gegebnes reguläres Polygon $abcde$ Fig. 130 einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man halbire irgend zwei auf einander folgende Winkel aed, edc durch die Linien eO, dO, so müssen diese einander in O schneiden. Denn es ist (§. 139) $aed = \frac{2nR - 4R}{n} = 2R - \frac{4R}{n}$, also kleiner als zwei rechte, folglich dessen Hälfte $deO < R$. Eben so ist $edO < R$, also $deO + edO < 2R$; folglich müssen (§. 224) eO, dO einander in irgend einem Punkte O schneiden. Man beschreibe nun aus O mit Oe einen Kreis, so wird dieser der verlangte seyn.

Beweis. Man ziehe Oc, Ob, Oa.

Da (§. 32) die Polygonwinkel aed, edc einander gleich sind, so sind es auch ihre Hälften Oed, Ode, folglich ist (§. 58) $Oe = Od$.

In den Dreiecken Oed, Odc ist (§. 32) $de = dc$,

Od beiden gemein und $\angle\ Ode = Odc$: folglich ist (§. 53) $Oc = Oe = Od$ und $\angle\ Ocd = Oed = \frac{1}{2}\ aed = \frac{1}{2}\ dcb$ (§. 32). Auf eben die Art wird bewiesen, daß Ob, Oa den Linien Oe, Od rc. gleich sind. Es wird also der aus O mit Oe beschriebene Kreis durch die Winkelspitzen a, b, c rc. der Figur gehen, und folglich (§. 263) um sie beschrieben seyn.

§. 283. Zusatz.

Man kann also in jedem regulären Polygon einen Punkt O finden, welcher von allen Winkelspitzen des Polygons gleiche Entfernung hat, und dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des Polygons; er ist zugleich der Mittelpunkt des um dieses Polygon zu beschreibenden Kreises. Jeder Winkel am Mittelpunkte des Polygons, dessen Schenkel durch zwei auf einander folgende Winkelspitzen dieses Polygons gehen, wie aOb heißt ein Centriwinkel desselben.

§. 284. Zusatz.

Jede gerade Linie Oa Fig. 130, welche vom Mittelpunkte eines regulären Polygons nach dem Scheitel a eines seiner Polygonwinkel bae gezogen wird, halbirt diesen. Und umgekehrt muß jede Linie, welche wie Oa einen Polygonwinkel bae halbirt, durch den Mittelpunkt O des regulären Polygons gehen.

§. 285. Lehrsatz.

Wenn aus dem Mittelpunkte O eines regulären Polygons $abcde$ Fig. 130 nach allen Winkelspitzen desselben gerade Linien Oa, Ob, Oc gezogen werden, so wird das Polygon in so viele congruente gleichschenklichte Dreiecke *Oab*, *Obc*, *Ocd* ꝛc. zerlegt, als es Seiten hat.

Beweis. Da *O* der Mittelpunkt der Figur ist, so ist (§. 283) $Oa = Ob = Oc$ ꝛc. Die Dreiecke *Oab*, *Obc*, *Ocd* sind also gleichschenklicht (§. 40); und da überdies (§. 32) die Polygonseiten *ab*, *bc*, *cd* ꝛc. einander gleich sind, so müssen (§. 60) jene Dreiecke auch congruent seyn.

§. 286. Zusatz.

Da alle die gleichschenklichten Dreiecke *Oab*, *Obc*, *Ocd* ꝛc. die Polygonseiten zu Grundlinien, und den Mittelpunkt des Polygons zum gemeinschaftlichen Scheitel haben, so gelten von ihnen auch alle in §§. 86, 87, 88, 89 bewiesene Sätze; und es folgt daraus:

I. Ein aus dem Mittelpunkte *O* eines regulären Polygons *abcde* Fig. 130 auf irgend eine seiner Seiten *ae* gefällter Perpendickel *On* halbirt diese Seite und den ihr zugehörigen Centriwinkel *aOe* (§. 86).

II. Eine aus dem Mittelpunkte eines regulären Polygons nach der Mitte der Polygonseite *ae* gezogene gerade Linie *On* stehet auf letzterer senkrecht und halbirt den Centriwinkel *aOe* (§. 87).

III. Ein aus der Mitte *n* der Polygonseite *ae* errichteter Perpendickel gehet durch den Mittelpunkt *O* des Polygons und halbirt den Centriwinkel *aOe* (§. 88).

IV. Jede gerade Linie *On*, welche den

Centriwinkel aOe eines regulären Polygons halbirt, stehet auf der diesem Winkel zugehörigen Polygonseite ae senkrecht, und halbirt sie.

§. 287. Zusatz.

Man kann daher auch den Mittelpunkt eines regulären Polygons $abcde$ Fig. 130 finden, wenn man zwei auf einander folgende Polygonseiten ae, ed in n und m halbirt; und darauf Perpendickel nO, mO errichtet, welche (§. 212) einander schneiden müssen, weil (§. 139) $\angle aed = 2R - \frac{4R}{n}$, also $< 2R$; und da (§. 286. III.) jeder derselben durch den Mittelpunkt des Polygons geht, so kann dies nur ihr Durchschnittspunkt O seyn. Jede aus O nach dem Scheitel e eines Polygonwinkels gezogene gerade Linie Oe, giebt (§. 283) den Halbmesser des um das Polygon zu beschreibenden Kreises.

§. 288. Lehrsatz.

Alle Centriwinkel aOb, bOc, cOd ꝛc. irgend eines regulären Polygons $abcde$ Fig. 130 sind einander gleich; und jeder derselben beträgt mit einem Polygonwinkel zusammen genommen zwei Rechte.

Beweis. Die Centriwinkel stehen in den (§. 285) congruenten Dreiecken um O den gleichen Polygonseiten ab, bc, cd gegenüber und müssen also (§. 60) einander gleich seyn; und da sie (§. 71) zusammen vier rechten gleich sind, so beträgt jeder derselben $\frac{4R}{n}$, wenn n die Anzahl der Seiten des regulären Polygons bezeichnet.

Nun aber beträgt (§. 139) der Polygenwinkel irgend eines regulären Polygons von n Seiten $2R - \frac{4R.}{n}$ Folglich beträgt der Polygonwinkel nebst dem Centriwinkel $2R - \frac{4R}{n} + \frac{4R}{n} = 2R.$

§. 289. Lehrsatz.

Wenn man aus dem Mittelpunkte O eines regulären Polygons $abcde$ Fig. 130 auf jede Polygonseite einen Perpendickel Om, On ꝛc. fällt, so sind alle diese Perpendickel, welche zugleich die Höhen der um O herum liegenden congruenten Dreiecke geben, einander gleich.

Beweis. Denkt man sich um dieses Polygon einen Kreis beschrieben, so sind die Polygonseiten ae, ed ꝛc. Sehnen dieses Kreises; und da sie (§. 32) alle einander gleich sind, so haben sie (§. 224) gleiche Entfernungen vom Mittelpunkte.

Dieser Abstand des Mittelpunktes eines regulären Polygons von irgend einer seiner Seiten heißt sein Apothema, oder der kleine Halbmesser.

§. 290. Zusatz.

Da (§. 289) alle Höhen On, Om der Dreiecke Oae, Oed ꝛc. Fig. 130 einander gleich sind: so ist (§. 160) jedes reguläre Polygon $abcde$ einem Dreiecke gleich, welches dessen Perimeter zur Grundlinie und sein Apothema Om zur Höhe hat.

§. 291. Aufgabe.

In ein gegebenes reguläres Polygon $ABCDE$ Fig. 130 einen Kreis einzuschreiben.

Auflösung. Man halbire irgend zwei auf einander folgende Polygonseiten AB, BC in b und c, und errichte darauf die Perpendickel bO, cO, bis sie einander in O schneiden. Beschreibe aus O mit Ob einen Kreis, so wird dieser der verlangte seyn.

Beweis. Man fälle aus O auf BC, CD DE ꝛc. die Perpendickel Oc, Od, Oe.

Da (§. 287) O der Mittelpunkt des Polygons ist, so sind (§. 289) die Perpendickel Oa, Ob, Oc ꝛc. einander gleich. Ein aus O mit einem dieser Perpendickel Ob beschriebener Kreis muß also durch die Punkte c, d, e ꝛc. gehen. Da nun die Polygonseiten AB, BC, CD auf den Halbmessern dieses Kreises in deren Endpunkten senkrecht stehen, und daher (§. 226) Tangenten des Kreises $abcde$ sind, so ist (§. 263) dieser Kreis in dem Polygon $ABCDE$ eingeschrieben.

§. 292. Zusatz.

Da (§. 286. I.) die Endpunkte a, b, c ꝛc. der Perpendickel Oa, Ob, Oc ꝛc. in der Mitte der Polygonseiten AE, AB, BC ꝛc. liegen, so wird der in ein reguläres Polygon $ABCDE$ eingeschriebene Kreis jede Polygonseite in deren Mitte berühren.

§. 293. Aufgabe.

In ein gegebenes reguläres Polygon $ABCDE$ Fig. 130 ein reguläres Polygon von eben so vielen Seiten einzuschreiben.

Auflösung. Man halbire die Seiten des gegebenen Polygons in den Punkten a, b, c, d, e und verbinde jede zwei auf einander folgende Theilpunkte durch eine gerade Linie ab, bc ꝛc., so wird $abcde$ das verlangte reguläre Polygon seyn.

Beweis. Man schreibe (§. 291) in das gegebene Polygon einen Kreis ein, so muß dieser (§. 292) durch die Theilpunkte *a*, *b*, *c* ꝛc. gehen. Man ziehe ferner aus dem Mittelpunkte *O* die Linien *Oa*, *OA*, *Ob* *OB* ꝛc.

Da (§. 288) die Winkel *AOE*, *AOB*, *BOC* ꝛc. einander gleich sind und (§. 286 II) jeder dieser Winkel durch eine der Linien *Oa*, *Ob*, *Oc* ꝛc. halbirt wird, so sind alle Winkel um *O*, nehmlich *AOa*, *AOb*, *BOb*, *BOc* ꝛc. einander gleich. Es sind daher auch (Grundsatz 12) die Winkel *aOb*, *bOc*, *cOd* ꝛc. und daher auch (§.239) die Bogen *ab*, *bc*, *cd* ꝛc. einander gleich. Folglich ist (§.270) *abcde* ein reguläres Polygon, und (§. 261) in *ABCDE* eingeschrieben.

§. 294. Aufgabe.

Um ein gegebenes reguläres Polygon *abcde* Fig. 130 ein reguläres Polygon von eben so vielen als das gegebene zu beschreiben.

Auflösung. Man beschreibe (§. 282) um das gegebene Polygon einen Kreis und ziehe (§. 229) durch die Scheitelpunkte *a*, *b*, *c* ꝛc. diesem Kreise Tangenten, so werden diese in *A*, *B*, *C* ꝛc. einander schneiden und *ABCDE* wird das verlangte Polygon seyn.

Beweis. Da *abcde* ein reguläres Polygon, und daher (§. 32) $ab = bc = cd$ ꝛc., so sind auch (§.241) die Bogen *ab*, *bc*, *cd* einander gleich; also ist die Peripherie des Kreises in den Punkten *a*, *b*, *c*, *d* in so viele gleiche Theile getheilt, als das gegebene Polygon Seiten haben soll. Folglich ist (§. 279) *ABCDE* ein reguläres Polygon von eben so vielen Seiten, und (§.261) um *abcde* beschrieben.

Dritter Abschnitt.
Von den Verhältnissen und der Aehnlichkeit der Figuren.

Erstes Kapitel.
Lehnsätze aus der Arithmetik.

§. 295. Erklärung.

Größen von einerlei Art, *AB*, *CD* Fig. 138 heißen commensurabel, wenn entweder die eine *CD* durch öfteres Aneinanderfügen der zweiten *AB* erzeugt werden kann wie Fig. 138, oder wenn *cd* wie Fig. 139 zwar nicht durch die andere *ab* selbst, jedoch durch einen gewissen genau messenden Theil derselben (hier den dritten) erzugt werden kann; das heißt wenn entweder die eine Größe *AB* selbst, oder ein genau messender Theil von ihr ein Maaß *) der andern *CD* ist.

*) S. Umriß der mathematischen Wissenschaften §. 2.

Größen heißen incommensurabel, wenn kein Theil der einen, so klein man ihn auch nehmen mag, die andere erzeugen kann, oder ein Maaß der andern ist.

§. 296. Zusatz.

Wenn zwei Größen commensurabel sind, so läßt sich, wenn man die eine *AB* derselben als Einheit annimmt, die andere *CD* durch eine abstracte, ganze oder gebrochene, d. h. durch eine rationale Zahl ausdrücken. Ist nehmlich Fig. 138 die *AB* selbst ein Maaß der andern *CD*, so läßt letztere sich durch eine ganze Zahl (hier durch 4) ausdrücken. Ist aber Fig. 139 ein aliquoter Theil *ag* der einen *ab* ein Maaß der andern *cd*, wie hier der dritte Theil der *ab*, so läßt sich die andere *cd* durch einen Bruch ausdrücken, welcher angiebt, wie oft der dritte Theil der *ab* auf *cd* getragen werden kann, und welcher hier $\frac{14}{3}$ ist.

Der Theil *ag*, welcher die *cd* mißt, wird, weil er auch ein Maaß von *ab* ist, das gemeinschaftliche Maaß der Größen *ab*, *cd* seyn.

Sind aber zwei Größen *ab*, *ce* Fig. 139 incommensurabel, so läßt sich, wenn die eine *ab* als Einheit angenommen wird, die andere *ce* weder durch eine ganze noch durch eine gebrochene Zahl ausdrücken, d. h. sie ist eine irrationale Zahl. Man kann jedoch dem Werthe derselben so nahe kommen, als man nur immer will.

Denn gesetzt *ag* sey der hunderte Theil der Größe *ab*, und lasse, nachdem er 479 mahl von *cd* hinweg genommen worden ist, einen Rest *de*, welcher kleiner als *ag* ist, so wird $ce > 479 \cdot ag$ und $ce < 480 \cdot ag$ seyn; oder weil $ag = \frac{1}{100}\, ab$, $ce > \frac{479}{100}\, ab$ und

$ce < \frac{480}{100}\,ab$. Nimmt man nun ab als Einheit an, so ist $ce > \frac{479}{100}$ und $ce < \frac{480}{100}$. Die Zahl, welche die Linie ce ausdrückt, muß also zwischen $\frac{479}{100}$ und $\frac{480}{100}$ liegen und also um weniger als $\frac{1}{100}$ von jeder dieser Zahlen unterschieden seyn.

Ist $ag = \frac{1}{1000}\,ab$, und kann diese Größe 4795 mahl auf ce getragen werden, bis ein Rest $de < ag$ bleibt, so ist die Zahl, welche die Größe de ausdrückt, größer als $\frac{4795}{1000}$ und kleiner als $\frac{4796}{1000}$. Ihr Werth wird also um weniger als $\frac{1}{1000}$ von jeder der Zahlen $\frac{4795}{1000}$, $\frac{4796}{1000}$ unterschieden seyn. Und so kann man, wenn man sich ab in eine noch größere Anzahl gleicher Theile getheilt denkt, für ce eine Zahl erhalten, welche von ihrem wahren Werthe um so wenig als man will unterschieden ist.

§. 297. Erklärung.

Das (geometrische) Verhältniß einer Größe cd zu einer andern ihr gleichartigen ab ist die Bestimmung wieviel die Größe cd von der andern ab enthält.

Die Zahl, welche den Werth der Größe cd gegen ab bestimmt, wird also dieses Verhältniß anzeigen, und diese Zahl heißt der Exponent des Verhältnisses.

§. 298. Zusatz.

Das Verhältniß zweier commensurablen Größen wird also eine rationale Zahl zum Exponenten haben (§. 296), und man nennt dann das Verhältniß selbst ein rationales Verhältniß.

Das Verhältniß zweier incommensurablen Größen wird eine irrationale Zahl zum Exponenten haben (§.296) und man nennt dann das Verhältniß selbst ein irrationales Verhältniß.

§. 299. Willkührlicher Satz.

Da (§. 297) der Exponent des Verhältnisses einer Größe A zu einer andern B angiebt, wieviel Theile der B die Größe A enthalte, also wie oft B in A enthalten ist, so bezeichnet man das Verhältniß durch das gewöhnliche Divisionszeichen, indem man die als Einheit genommene Größe in die Stelle des Divisors setzt. Es wird also $A : B$ das Verhältniß der Größe A zu B bedeuten; und bezeichnen wir dessen Exponenten durch q, so ist $q = \frac{A}{B}$; $A = Bq$, $B = \frac{A}{q}$. So ist der Exponent des Verhältnisses $4 : 20 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$; der Exponent von $8\sqrt{2} : 4 = \frac{8\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}$ $= 2,82842 \ldots$

In jedem Verhältnisse heißt das links befindliche Glied, das **Vorderglied**, und das rechts befindliche das **Hinterglied des Verhältnisses**. In $20:4$ ist 20 das Vorderglied und 4 das Hinterglied.

§. 300. Erklärung.

Ein Verhältniß $A : B$ **ist einem andern** $C : D$ **gleich**, wenn die Größe A eben so viele Theile der ihr gleichartigen B als C Theile der D enthält, oder wenn die Exponenten beider Verhältnisse gleich sind. So sind die Verhältnisse $20 : 4$ und $15 : 3$ einander gleich, weil der Exponent beider 5 ist.

Ein Verhältniß $A : B$ ist größer als ein anderes $C : D$, wenn A mehr Theile von B als C Theile der D enthält, also wenn der Exponent des ersten größer als der des andern ist. Z. B. das Verhältniß $28 : 4$ ist größer als $15 : 3$, weil bei ersterem der Exponent 7, beim zweiten aber 5 ist.

Sind daher zwei Größen A und B einander gleich, so hat jede von ihnen zu einer und derselben dritten C einerlei Verhältniß. Sind aber zwei Größen A, B ungleich: so hat die größere A zur dritten C ein größeres Verhältniß als die kleinere B zu C.

Umgekehrt hat eine Größe C zu jeder von zweien gleichen Größen A, B einerlei Verhältniß, zu ungleichen Größen aber ein ungleiches Verhältniß: zur größern ein kleineres als zur kleinern. Z. B. $5 : 15 < 5 : 10$.

Man bezeichnet sowohl die Gleichheit als die Ungleichheit zweier Verhältnisse dadurch, daß man die bekannten Zeichen der Gleichheit und Ungleichheit zwischen sie setzt und schreibt: also $20 : 4 = 15 : 3$; $28 : 4 > 15 : 3$.

§. 301. Lehrsatz.

Werden die beiden Glieder eines Verhältnisses $A : B$ mit einerlei Zahl m multiplicirt oder durch einerlei Zahl n dividirt, so ist sowohl das Verhältniß der Producte $mA : mB$ als das der Quotienten $\frac{A}{n} : \frac{B}{n}$ dem gegebenen Verhältnisse gleich.

Beweis. Der Exponent des Verhältnisses $A : B$ ist (§. 299) $= \frac{A}{B}$, und eben so der des Verhältnisses $mA : mB = \frac{mA}{mB}$. Da aber $\frac{mA}{mB} = \frac{A}{B}$, so haben beide Verhältnisse gleiche Exponenten, und sind also einander gleich (§. 300).

Desgleichen ist (§. 299) der Exponent des Verhältnisses $\frac{A}{n} : \frac{B}{n} = \frac{A}{n} \times \frac{n}{B} = \frac{A}{B}$, also dieses Verhältniß dem Verhältniß $A : B$ gleich.

Werden z. B. die beiden Glieder des Verhältnisses 8 : 24 durch 2 multiplicirt oder dividirt, so ist jedes der Verhältnisse 16 : 48 und 4 : 12 dem gegebenen Verhältnisse 8 : 24 gleich, indem der Exponent eines jeden $\frac{1}{3}$ ist.

§. 302. Lehrsatz.

Jedes Verhältniß irgend zweier Größen $A : B$ ist einem Verhältnisse in abstracten Zahlen gleich, dessen Vorderglied der Exponent q des gegebenen Verhältnisses und dessen Hinterglied die Einheit ist. Es ist nehmlich $A : B = q : 1$.

Beweis. Der Exponent q des gegebenen Verhältnisses sey irgend eine Zahl, z. B. $\frac{14}{3}$, so zeigt er an, wie viele Theile der Größe B in A enthalten sind (§. 297); und eben so viele Theile der Einheit enthält dieser Exponent q ($\frac{14}{3}$) selbst; folglich ist (§. 300) $A : B = q : 1 = \frac{14}{3} : 1$, oder, wenn wir (§. 301) beide Glieder des Verhältnisses $\frac{14}{3} : 1$ mit 3 multipliciren $A : B = 14 : 3$.

§. 303. Lehrsatz.

Wenn jedes von zweien Verhältnissen $A : B$, $C : D$ einem dritten $E : F$ gleich ist, so sind sie auch einander gleich.

Beweis. Der Exponent des Verhältnisses $A : B$ ist dem des Verhältnisses $E : F$ gleich (§. 300), und eben so ist der Exponent des Verhältnisses $C : D$ dem von $E : F$ gleich; folglich haben (Grundſ. 4) die Verhältnisse $A : B$, $C : D$ gleiche Exponenten und sind also einander gleich (§. 300).

§. 304. Erklärung.

Ein Verhältniß heißt aus zweien oder mehreren andern zusammen gesetzt, wenn sein Vorderglied dem Producte aller Vorderglieder, und sein Hinterglied dem Producte aller Hinterglieder der gegebenen Verhältnisse gleich ist. So ist das Verhältniß $4 \times 5 : 16 \times 15$ oder $20 : 240$ aus den beiden Verhältnissen $4 : 16$ und $5 : 15$ zusammen gesetzt. Eben so ist das Verhältniß $abc : def$ aus den Verhältnissen $a : d$, $b : e$, $c : f$ zusammen gesetzt.

Um anzuzeigen, daß ein Verhältniß aus mehreren andern zusammen gesetzt sey, setzt man zwischen die zusammensetzenden Verhältnisse das Zeichen $+$. Also $20 : 240 = (4 : 16) + (5 : 15)$; $abc : def = (a : d) + (b : e) + (c : f)$.

§. 305. Zusatz.

Bei der Zusammensetzung der Verhältnisse müssen die Glieder derselben als abstracte Zahlen betrachtet werden (welches (§. 302) immer geschehen kann), weil sonst keine Multiplication der gleichnahmigen Glieder statt findet.

§. 306. Zusatz.

Der Exponent eines aus mehreren Verhältnissen zusammen gesetzten Verhältnisses ist dem Producte der Exponenten der zusammensetzenden Verhältnisse gleich.

Denn ist $abc : def = (a : d) + (b : e) + (c : f)$ so ist (§. 299) der Exponent des zusammengesetzten Verhältnisses $= \frac{abc}{def}$; die Exponenten der zusammensetzenden Verhältnisse aber sind $\frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f}$ (§. 299) und ihr Product ist $\frac{abc}{def}$, also dem Exponenten des zusammen gesetzten Verhältnisses gleich.

Beispiel. Der Exponent $\frac{1}{12}$ des Verhältnisses 20 : 240, welches aus den Verhältnissen 4 : 16 und 5 : 15 zusammen gesetzt ist, ist dem Producte $\frac{4}{16} \times \frac{5}{15} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ der Exponenten eben dieser Verhältnisse gleich.

§. 307. Erklärung.

Wenn ein Verhältniß aus mehreren gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt wird, so heißt es ein **vervielfachtes Verhältniß** von jedem der es zusammen setzenden. Insbesondere heißt ein Verhältniß ein **quadratisches**, wenn es aus zwei gleichen Verhältnissen, ein **cubisches**, wenn es aus drei, ein **biquadratisches Verhältniß**, wenn es aus vier gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt ist u. s. w. So z. B. ist das aus den beiden gleichen Verhältnissen 12 : 4 und 6 : 2 zusammen gesetzte Verhältniß 72 : 8 das quadratische Verhältniß von 12 : 4 oder von 6 : 2. Eben so ist das aus den drei gleichen Verhältnissen 12 : 4, 6 : 2, 9 : 3 zusammen gesetzte Verhältniß 648 : 24 das cubische Verhältniß von 12 : 4, von 6 : 2 oder von 9 : 3., welches folgendermaßen angezeigt wird: $72 : 8 = 2 . (12 : 4)$; $648 : 24 = 3 . (12 : 4)$.

§. 308. Zusatz.

Der Exponent des quadratischen Verhältnisses ist also dem Quadrate des Exponenten eines der zusammen setzenden, der Exponent eines cubischen Verhältnisses der dritten Potenz des Exponenten eines der einfachen Verhältnisse gleich, und so wird der Exponent irgend eines vervielfachten Verhältnisses gefunden, wenn man den Exponenten eines der einfachen Verhältnisse auf diejenige Potenz erhebt, welche deren Anzahl angiebt.

Der Exponent von 72 : 8 oder 9 ist also das Quadrat des Exponenten 3 des Verhältnisses 12 : 4; der Exponent von 648 : 24 oder 27 ist der Cubus des Exponenten 3 eben dieses Verhältnisses u. s. w.

§. 309. Erklärung.

Die Gleichheit zweier Verhältnisse $a : b$, $c : d$ oder 6 : 3 und 18 : 9 nennt man eine Proportion und bezeichnet sie dadurch, daß man zwischen beide Verhältnisse das Gleichheitszeichen setzt, wie $a : b = c : d$; $6 : 3 = 18 : 9$. Zu einer Proportion gehören also vier Glieder, welche proportionirte Größen heißen, und (§. 300) so beschaffen sind, daß die erste Größe eben so viele Theile der zweiten enthält als die dritte Theile der vierten hat. Hat also die erste Größe q Theile der zweiten, so wird auch die dritte q Theile der vierten enthalten. Man kann daher durch $aq : a = bq : b$ jede Proportion darstellen, wo q jede ganze gebrochene oder irrationale Zahl bedeuten kann.

Die vier Glieder einer Proportion brauchen nicht alle gleichartig zu seyn, wenn nur jede zwei Glieder, welche ein Verhältniß bilden, gleichartig sind. So sind die Verhältnisse 20 Morgen : 4 Morgen und 1000 rthl. : 200 rthl. einander gleich und bilden also eine Proportion.

Von den Gliedern einer Proportion nennt man das erste und dritte ihre Vorderglieder, das zweite und vierte aber ihre Hinterglieder. Beide Vorderglieder, so wie beide Hinterglieder heißen auch gleichnahmige Glieder. Auch nennt man das erste und vierte Glied die äußeren Glieder, das zweite und dritte aber die mittleren Glieder.

§. 310. Erklärung.

Eine Proportion heißt eine zusammenhängende oder stetige, wenn deren mittlere Glieder einander gleich sind, wie $a : b = b : c$; $4 : 12 = 12 : 36$. Jedes der mittlern Glieder b heißt die mittlere Proportionalgröße zwischen den beiden äußeren a, c; und das letzte Glied c heißt die dritte Proportionalgröße zu den beiden ersten a, b.

§. 311. Lehrsatz.

Wenn alle vier Glieder einer Proportion $aq : a = bq : b$, $24 : 8 = 6 : 2$ gleichartig oder abstracte Zahlen sind, so kann man die mittleren Glieder verwechseln und dafür setzen $aq : bq = a : b$; $24 : 6 = 8 : 2$.

Beweis. Die beiden Glieder $aq : bq$ entstehen aus den Gliedern des Verhältnisses $a : b$, wenn man sie mit q multiplicirt. Es ist also (§. 301) $aq : bq = a : b$.

§. 312. Lehrsatz.

Werden die beiden Glieder eines Verhältnisses irgend einer Proportion $aq : a = bq : b$; $24 : 8 = 6 : 2$ als abstracte Zahlen betrachtet, so ist das Product der äußeren Glieder dem Producte der mittleren gleich. Es ist nehmlich $aq \times b = bq \times a$ $24 \times 2 = 8 \times 6$.

Beweis. Das Product der äußeren Glieder ist $aq \times b = aqb$ und hat zu seinen Factoren das zweite Glied, den Exponenten und das vierte Glied. Das Product der mittleren Glieder $a \times bq = abq$ hat dieselben Factoren. Beide Producte müssen also einander gleich seyn.

§. 313. Zusatz.

In einer stetigen Proportion, deren Glieder abstracte Zahlen sind, wie $a : b = b : c$, $4 : 12 = 12 : 36$ ist daher das Product der äußeren Glieder dem Quadrate des mittlern gleich, also $ac = b^2$, $4 \times 36 = 12 \cdot 12 = 12^2$.

§. 314. Aufgabe.

Zu drei gegebenen Zahlen a, b, c (24, 6, 8) die vierte Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Man multiplicire die zweite und dritte der gegebenen Zahlen in einander und dividire deren Product bc, $6 \cdot 8$ durch das erste Glied, so wird dieser Quotient $\frac{bc}{a}$, $\frac{6 \cdot 8}{24}$. die gesuchte Zahl seyn.

Beweis. Bezeichnen wir die gesuchte Zahl durch x, daß nehmlich $a : b = c : x$, so ist (§. 312) $a \cdot x = b \cdot c$, also $x = \frac{b \cdot c}{a}$.

§. 315. Zusatz.

Zu zweien Zahlen a, b findet man die dritte Proportionalzahl, wenn man das Quadrat der zweiten durch die erste dividirt. Denn aus $a : b = b : x$ folgt (§. 314) $x = \frac{b^2}{a}$.

§. 316. Zusatz.

Zu zweien Zahlen a, b findet man die mittlere Proportionalzahl x, wenn man aus dem Producte $a \cdot b$ dieser Zahlen die Quadratwurzel zieht. Denn aus $a : x = x : b$ folgt (§. 313) $x^2 = a \cdot b$, also $x = \sqrt{a \cdot b}$.

§. 317. Lehrsatz.

Wenn zwei Producte, deren jedes aus zwei Factoren besteht, einander gleich sind, nehmlich $a \times d = b \times c$, $24 \times 3 = 8 \times 9$, so läßt sich aus ihnen eine Proportion bilden, indem man die Factoren des einen Products zu äußeren, und die Factoren des andern Products zu mittleren Gliedern nimmt. Es ist nehmlich $a : b = c : d$, $24 : 8 = 9 : 3$.

Beweis. Da $a \times d = b \times c$, so ist $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Es ist aber (§. 299) $\frac{a}{b}$ der Exponent des Verhältnisses $a : b$ und $\frac{c}{d}$ der Exponent des Verhältnisses $c : d$, folglich ist (§. 300) $a : b = c : d$.

§. 318. Zusatz.

Wenn daher das Product zweier Factoren dem Quadrate einer Zahl gleich ist, nehmlich $a \times d = b^2$, $12 \times 3 = 6 \cdot 6$, so ist diese Zahl die mittlere Proportionalzahl zwischen den Factoren jenes Products. Es ist nehmlich $a : b = b : d$; $12 : 6 = 6 : 3$.

§. 319. Zusatz.

In jeder Proportion $a : b = c : d$, $24 : 6 = 8 : 2$, lassen sich die Glieder umkehren und die Proportion $b : a = d : c$, $6 : 24 = 2 : 8$ wird noch immer statt finden, weil auch in dieser umgekehrten Proportion das Product der äußeren Glieder dem der mittleren gleich ist (§. 317).

§. 320. Lehrsatz.

In jeder Proportion $a : b = c : d$, $24 : 6 = 8 : 2$, deren Glieder gleichartig oder abstracte Zahlen sind, verhält sich

1) die Summe der beiden Vorderglieder zur Summe der beiden Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede, nehmlich

$a + c : b + d = a : b$; $24 + 8 : 6 + 2 = 24 : 6$,

2) verhält sich die Differenz des ersten und dritten Gliedes zur Differenz des zweiten und vierten Gliedes, wie das erste Glied zum zweiten, nehmlich:

$$a - c : b - d = a : b;\ 24 - 8 : 6 - 2 = 24 : 6.$$

Beweis. Der gemeinschaftliche Exponent der Verhältnisse in der gegebenen Proportion sey q, so ist $a = bq$ und $c = dq$ (§. 299)

Die Proportionen

$$a + c : b + d = a : b$$
$$a - c : b - d = a : b$$

verwandeln sich also in

$$bq + dq : b + d = bq : b$$
$$bq - dq : b - d = bq : b$$

in deren jeder das Vorderglied gleich viel, nehmlich q Theile seines Hintergliedes hat.

§. 321. Zusatz.

Aus $a + c : b + d = a : b$;

$$24 + 8 : 6 + 2 = 24 : 6$$

und $a - c : b - d = a : b$;

$$24 - 8 : 6 - 2 = 24 : 6$$

folgt (§. 303)

$a + c : b + d = a - c : b - d$;

$$24 + 8 : 6 + 2 = 24 - 8 : 6 - 2;$$

In jeder Proportion vier gleichartiger Größen verhält sich die Summe beider Vorderglieder zur Summe beider Hinterglieder, wie die Differenz der beiden Vorderglieder zur Differenz beider Hinterglieder.

§. 322. Lehrsatz.

In jeder Proportion $a : b = c : d$, $24 : 6 = 8 : 2$ verhält sich

1) die Summe des ersten und zweiten Gliedes zum zweiten, wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zum vierten, nehmlich $a + b : b = c + d : d$; $24 + 6 : 6 = 8 + 2 : 2$.

2) die Differenz des ersten und zweiten

Gliedes verhält sich zum zweiten, wie die Differenz des dritten und vierten Gliedes zum vierten, nehmlich $a - b : b = c - d : d$; $24 - 6 : 6 = 8 - 2 : 2$.

Beweis. Es sey q der Exponent der Verhältnisse in der gegebenen Proportion, so ist $a = bq$ und $c = dq$ (§. 299).

Die Proportionen

$$a + b : b = c + d : d$$

und $$a - b : b = c - d : d$$

verwandeln sich also in

$$bq + b : b = dq + d : d$$

und $$bq - b : b = dq - d : d$$

oder $$b(q + 1) : b = d(q + 1) : d$$

und $$b(q - 1) : b = d(q - 1) : d.$$

In beiden Proportionen haben die sie bildenden Verhältnisse gleiche Exponenten, nehmlich in der ersten $q + 1$ und in der andern $q - 1$; und die Richtigkeit dieser Proportionen folgt also aus (§. 300 u. 309).

§. 323. Lehrsatz.

In jeder Proportion $a : b = c : d$, $24 : 6 = 8 : 2$ verhält sich

1) die Summe des ersten und zweiten Gliedes zum ersten Gliede wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zum dritten, nehmlich:

$$a + b : a = c + d : c;\ 24 + 6 : 24 = 8 + 2 : 8.$$

2) Die Differenz des ersten und zweiten Gliedes verhält sich zum ersten Gliede wie

die Differenz des dritten und vierten Gliedes zum dritten, nehmlich:

$$a - b : a = c - d : c;\ 24 - 6 : 24 = 8 - 2 : 8.$$

Beweis. Es sey q der Exponent der Verhältnisse der gegebenen Proportion, so ist (§. 299) $b = \frac{a}{q} = \frac{1}{q} \cdot a$ und $d = \frac{c}{q} = \frac{1}{q}\, c$;

Und die Proportionen

$$a + b : a = c + d : c$$
$$a - b : a = c - d : c$$

verwandeln sich in

$$\frac{1}{q} a + a : a = \frac{1}{q} c + c : c \text{ oder}$$
$$a\left(\frac{1}{q} + 1\right) : a = c\left(\frac{1}{q} + 1\right) : c \text{ und}$$
$$\frac{1}{q} a - a : a = \frac{1}{q} c - c : c \text{ oder}$$
$$a\left(\frac{1}{q} - 1\right) : a = c\left(\frac{1}{q} - 1\right) : c,$$

in deren jeder das Vorderglied gleich viele Theile seines Hintergliedes hat.

§. 324. Lehrsatz.

Wenn man die Glieder zweier oder mehrerer Proportionen nach der Ordnung in einander multiplicirt, so werden die hieraus entstehenden Producte in eben der Ordnung proportionirt seyn.

Verhält sich nehmlich

$a : b = c : d$	$2 : 6 = 4 : 12$
$e : f = g : h$	$5 : 10 = 9 : 18$
$k : l = m : n$	$3 : 4 = 6 : 8$

so ist auch

$aek : bfl = cgm : dhn$; $2 . 5 . 3 : 6 . 10 . 4$
$= 4 . 9 . 6 : 12 . 18 . 8$
oder $30 : 240 = 216 : 1728$.

Beweis. Die Exponenten der Verhältnisse $a : b$, $e : f$, $k : l$ seyen nach der Ordnung p, q, r: so ist (§. 306) der Exponent des zusammen gesetzten Verhältnisses $aek : bfl$ dem Producte pqr der Exponenten gleich; und eben diesen Exponenten pqr muß auch das zusammen gesetzte Verhältniß $cgm : dhn$ haben; folglich ist (§. 300)

$$aek : bfl = cgm : dhn.$$

§. 325. Zusatz.

Sind daher vier Zahlen in Proportion nehmlich: $a : b = c : d$; $24 : 6 = 8 : 2$, so wird auch eine Proportion bleiben, wenn man jedes Glied derselben in die zweite, dritte rc. Potenz erhebt. Denn aus,

$a : b = c : d$; $24 : 6 = 8 : 2$

folgt, wenn man jedes Glied derselben durch das gleichnahmige der Proportion

$a : b = c : d$; $24 : 6 = 8 : 2$ multiplicirt,

$a^2 : b^2 = c^2 : d^2$; $24^2 : 6^2 = 8^2 : 2^2$ (§. 324).

Eben so wird der Beweis von der dritten, vierten und jeder Potenz der Glieder einer Proportion geführt.

§. 326. Lehrsatz.

Sind vier Zahlen in Proportion, nehmlich $a : b = c : d$; $24 : 6 = 8 : 2$, so stehen auch die gleichnahmigen Wurzeln dieser Größen in eben der Ordnung in Proportion, nehmlich:

$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$;
$\sqrt{24} : \sqrt{6} = \sqrt{8} : \sqrt{2}$;
$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$;
$\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2}$;
u. s. w.

Beweis. Wäre nicht $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$, so sey eins dieser Verhältnisse größer als das andere, etwa $\sqrt{a} : \sqrt{b} > \sqrt{c} : \sqrt{d}$. Folglich ist (§. 300) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} > \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$ und daher, wenn man beide Größen ins Quadrat erhebt, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Nun ist (§. 300) $\frac{a}{b}$ der Exponent des Verhältnisses $a : b$, und $\frac{c}{d}$ der des Verhältnisses $c : d$, also wäre $a : b > c : d$, welches gegen die Voraussetzung ist. Folglich ist

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}.$$

Eben so wird der Beweis von jeder andern Wurzel der Glieder einer Proportion geführt.

§. 327. Lehrsatz.

Wenn ein äußeres und ein mittleres Glied einer Proportion einem äußern und einem mittlern Gliede einer andern Proportion gleich ist, so bilden die beiden übrigen Glieder der ersten mit den beiden Gliedern der andern in der hingeschriebenen Ordnung eine Proportion. Ist nehmlich:

$$a : b = c : d;\quad 3 : 6 = 5 : 10$$
$$\underline{g : b = f : d;\quad 12 : 6 = 20 : 10}$$

so ist auch $a : c = g : f$; $3 : 5 = 12 : 20$.

Beweis. Verwechselt man in beiden Proportionen die mittleren Glieder (§. 311), so ist

$$a : c = b : d;\ 3 : 5 = 6 : 10$$
$$\underline{g : f = b : d;\ 12 : 20 = 6 : 10;}\ \text{folglich (§.303)}$$
$$a : c = g : f;\ 3 : 5 = 12 : 20.$$

§. 328. Lehrsatz.

Wenn die beiden äußeren Glieder einer Proportion den beiden äußeren Gliedern der andern, oder die beiden mittleren Glieder einer Proportion den beiden mittleren der andern, oder auch die beiden äußeren Glieder der einen Proportion den beiden mittleren der andern gleich sind, so läßt sich eine Proportion bilden, indem man die beiden übrigen Glieder der einen Proportion zu äußeren, und die beiden übrigen Glieder der andern Proportion zu mittleren Gliedern nimmt. Ist nehmlich:

$$a : b = c : d \qquad 3 : 6 = 5 : 10$$
$$\text{und } \underline{f : a = d : g \qquad 2 : 3 = 10 : 15}$$
$$\text{so ist auch } b : f = g : c \qquad 6 : 2 = 15 : 5.$$

Beweis. Da (§.312) $bc = ad$; $6 . 5 = 3 . 10$ und auch $fg = ad$, $2 . 15 = 3 . 10$, so ist auch $bc = fg$, $6 . 5 = 2 . 15$; folglich (§.317)

$$b : f = g : c;\ 6 : 2 = 15 : 5.$$

§. 329. Lehrsatz.

Wenn das vierte Glied einer Proportin dem dritten Gliede einer andern gleich ist, so verhält sich das Product beider ersten Glieder zum Producte beider zweiten Glieder wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten Gliede der zweiten. Ist nehmlich

$$a : b = c : d; \quad 3 : 6 = 5 : 10$$
und $$f : g = d : h; \quad 4 : 8 = 10 : 20$$
so ist auch $$af : bg = c : h \quad 3 . 4 : 6 . 8 = 5 : 20.$$

Beweis. Da (§. 324)

$$af : bg = cd : dh; \quad 3 . 4 : 6 . 8 = 5 . 10 : 20 . 10$$
und (§. 301)
$$cd : dh = c : d; \; 5 . 10 : 20 . 10 = 5 : 20$$
so ist auch (§. 303)
$$af : bg = c : d; \; 3 . 4 : 6 . 8 = 5 : 20.$$

§. 330. Zusatz.

Wenn daher mehrere Proportionen so beschaffen sind, daß das vierte Glied einer jeden dem dritten Gliede der nächstfolgenden gleich ist, so verhält sich das Product aller ersten Glieder zum Producte aller zweiten wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten Gliede der letzten. Ist nehmlich

$$a : b = m : n \qquad 3 : 6 = 5 : 10$$
$$e : f = n : p \qquad 2 : 4 = 10 : 20$$
$$g : h = p : q \qquad 5 : 7 = 20 : 28$$
$$k : l = q : r \qquad 6 : 9 = 28 : 42$$
so ist auch $$aegk : bfhl = m : r; \; 3 . 2 . 5 . 6 : 6 . 4 . 7 . 9 = 5 : 42.$$

§. 331. Zusatz.

In jeder stetigen Proportion $a : b = b : c$; $4 : 6 = 6 : 9$ verhält sich das erste Glied zum dritten, wie das Quadrat des ersten zum Quadrat des zweiten Gliedes, nehmlich

$$a : c = a^2 : b^2; \quad 4 : 9 = 4^2 : 6^2 = 16 : 36.$$

Denn multiplicirt man die Proportion

$$a : b = b : c; \quad 4 : 6 = 6 : 9$$

durch $b : c = b : c; \quad 6 : 9 = 6 : 9;$ so ist

(§. 329) $a : c = b^2 : c^2; \quad 4 : 9 = 6^2 : 9^2$

Nun ist auch (§. 325)

$$a^2 : b^2 = b^2 : c^2; \quad 4^2 : 6^2 = 6^2 : 9^2$$

folglich ist (§. 303)

$$a : c = a^2 : b^2; \quad 4 : 9 = 4^2 : 6^2.$$

§. 332. Lehrsatz.

Sind mehrere Verhältnisse einander gleich, nehmlich $a : b = c : d = e : f = g : h$, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede, nehmlich

$$a + c + e + g : b + d + f + h = a : b = c : d \text{ ꝛc.}$$

Beweis. Da $a : b = c : d$, so ist (§. 320)

$a + c : b + d = c : d$; aber $c : d = e : f$

folglich ist (§. 303)

$a + c : b + d = e : f$, also (§. 320)

$$a + c + e : b + d + f = e : f = g : h$$

folglich $a + c + e + g : b + d + f + h = g : h = a : b$ ꝛc.

§. 333. Lehrsatz.

Wenn zwei Größen A, a ungleich sind, so ist immer ein Vielfaches der kleinern a möglich, welches größer als die größere A ist.

Beweis. Erster Fall. Wenn die größere der beiden Größen ein Vielfaches der kleinern ist, wenn

z. B. *CD* Fig. 138 das *m*fache (etwa das Tausendfache) von *AB* ist, so ist klar, daß wenn die kleinere Größe $m + 1$ mahl (1001 mahl) an einander gesetzt wird, eine Größe *FE* erzeugt werden muß, welche größer als *CD* ist, indem der Theil *FG* derselben schon der *AB* gleich ist.

Zweiter Fall. Die größere *cd* der beiden gegebenen Größen *ab*, *cd* Fig. 139 sey kein Vielfaches der kleinern *ab*; so muß doch die kleinere eine gewisse Anzahl *m* mahl (etwa 1000 mahl) in der größern von *c* bis *f* enthalten seyn und einen Theil *fd* übrig lassen, welcher kleiner als *ab* ist, so daß $cd > m \, . \, ab$ $(> 1000 \, . \, ab)$ und $cd < (m + 1) \, . \, ab$, $(< 1001 \, . \, ab)$. Setzt man also die kleinere Größe *ab* $(m + 1)$ mahl (1001 mahl) an einander, so muß eine Größe *kh* entstehen, welche größer als *cd* ist.

§. 334 Lehrsatz.

Wenn zwei Größen *AB*, *CD* Fig. 138 ungleich sind, so ist immer ein gewisser genau messender Theil der größern *CD* möglich, welches kleiner als die kleinere *AB* der gegebenen Größen ist, so klein auch *AB* seyn mag.

Beweis. Man suche (§. 333) ein Vielfaches *FE* von *AB*, welches größer als *CD* ist. Dies sey das *r*fache, so daß $r \, . \, AB > CD$. Nehmen wir nun von beiden Seiten den *r*ten Theil, so ist (Grundsatz 15) $\frac{r \, . \, AB}{r} > \frac{CD}{r}$, oder $AB > \frac{CD}{r}$. Folglich ist der *r*te Theil der *CD* kleiner als *AB*.

§. 335. Lehrsatz.

Wird von einer Größe *CD* Fig. 140 die

Hälfte ED genommen; von dieser Hälfte wiederum die Hälfte FD; von dieser Hälfte FD wiederum die Hälfte GD und so fort, so muß man nach einer bestimmten Anzahl von Halbirungen auf einen Theil HD kommen, welcher kleiner als irgend eine gegebene der CD gleichartige Größe AB ist, so klein auch diese letztere seyn mag.

Beweis. Es sey r die Zahl, welche (§. 334) den Theil der CD bestimmt, welcher kleiner als AB ist, nehmlich $\frac{CD}{r} < AB$.

Nimmt man nun die angezeigte Halbirung an der Größe CD r mahl vor, so wird diese in $r + 1$ ungleiche Theile zerlegt werden, von denen jeder kleiner als sein nächstvorhergehender, und also kleiner als jeder der vorhergehenden ist; nehmlich $FE < CE$, $GF < FE$ u. s. w. Der letzte Theil DH ist also kleiner als $\frac{DC}{r+1}$, also um so mehr kleiner als $\frac{CD}{r}$. Nun war $\frac{CD}{r} < AB$; folglich ist (Grundſ. 6) $DH < AB$.

Nach r Halbirungen wird also gewiß ein Theil DH erhalten, welcher kleiner als AB ist.

§. 336. Zusatz.

Nimmt man also von einer Größe mehr als die Hälfte, vom Reste wiederum mehr als die Hälfte, vom zweiten Reste wiederum mehr als die Hälfte hinweg und so fort, so muß gewiß zuletzt ein Rest bleiben, welcher kleiner als irgend eine gegebene noch so kleine gleichartige Größe ist.

Zweites Kapitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen gerader Linien und der Aehnlichkeit geradlinigter Figuren.

§. 337. Lehrsatz.

Wenn man auf eine gerade Linie *AG* Fig. 141 beliebig gleiche Theile *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* trägt, und durch die Theilpunkte *B*, *C*, *D*, *E*, *F* parallele Linien *BH*, *CI*, *DK*, *EL*, *FM* ziehet, bis sie eine durch den Punkt *A* unter einem beliebigen Winkel mit *AG* gelegte Linie *AN* treffen, so wird der Theil *AM* dieser letztern Linie in den Punkten *H*, *I*, *K*, *L*, *M* in eben so viele einander gleiche Theile getheilt seyn, als die Linie *AF* in den Punkten *B*, *C*, *D*, *E*, *F* getheilt ist.

Beweis. Durch die Punkte *H*, *I*, *K*, *L* ziehe man (§. 115) der *AF* die Parallelen *Hc*, *Id*, *Ke*, *Lf*: so sind (§. 140) *Bc*, *Cd*, *De*, *Ef* Parallelogramme und es ist (§. 141) $Hc = BC$; $Id = CD$; $Ke = DE$; $Lf = EF$. Da aber $AB = BC = CD = DE = EF$: so ist auch $AB = Hc = Id = Ke = Lf$.

In den Dreiecken ABH, HcI ist $AB = Hc$, $\angle BAH = cHI$ als innerer und äußerer an einerlei Seite liegender Winkel (§. 125. III) und $\angle AHB = HIc$: folglich ist (§. 84) $AH = HI$.

Auf eben die Art wird bewiesen, daß die Dreiecke HIc, IKd, KLe, LMf einander congruent sind, und daß also $AH = HI = IK = KL = LM$.

§. 338. Aufgabe.

Eine gegebene begränzte gerade Linie AM Fig. 141 in eine beliebige Anzahl (etwa 5) gleicher Theile zu theilen.

Auflösung und Beweis. An AM lege man in A eine unbegränzte gerade Linie AG unter einem beliebigen Winkel an; trage darauf einen nach Belieben angenommenen Theil AB so oft, als die Anzahl der Theile angiebt, in welche AM zerlegt werden soll; verbinde den letzten Theilpunkt F mit dem Endpunkte M der einzutheilenden Linie AM durch eine gerade Linie, und ziehe durch die Theilpunkte B, C, D, E, der Linie FM die Parallelen BH, CI, DK, EL, so wird (§. 337) AM in den Punkten H, I, K, L in 5 gleiche Theile zerlegt seyn.

§. 339. Aufgabe.

Es sind zwei gerade Linien ab, cd Fig. 142 gegeben; man soll das gemeinschaftliche Maaß derselben, und das Verhältniß der einen Linie zur andern finden.

Auflösung und Beweis. Man trage die kleinere *cd* so oft es angehet auf die größere. Hier wird sich finden, daß sie dreimahl in derselben von *a* bis *e* enthalten ist und den Rest *eb* läßt, so daß

$$ab = 3\,cd + eb.$$

Man trage nun den Rest *eb* auf *cd*; dieser ist darin viermahl enthalten und läßt den Rest *fd*, so daß

$$cd = 4\,eb + fd.$$

Man trage ferner diesen zweiten Rest *fd* auf *eb*; und da er darin einmahl enthalten ist und den Rest *gb* läßt, so wird man haben

$$eb = fd + gb.$$

Wird endlich *gb* auf *fd* getragen, so findet sie sich darin genau dreimahl enthalten, so daß

$$fd = 3\,gb.$$

Gehet man von diesem Werthe auf die übrigen zurück, so findet man

$$fd = 3\,gb; \quad eb = 4\,gb;$$
$$cd = 19\,gb; \quad ab = 61\,gb;$$

woraus sich ergiebt, daß der letzte Rest *gb* das gemeinschaftliche Maaß der beiden Linien *ab*, *cd*, daß er in der ersten 61mahl, und in der zweiten 19mahl enthalten ist, und daß sich folglich *ab* zu *cd* wie 61 zu 19 verhält (§. 302).

Durch dieses Verfahren wird man immer zum größten gemeinschaftlichen Maaße gelangen, wenn die beiden gegebenen Linien commensurabel sind. Sind sie aber incommensurabel, und haben also gar kein gemeinschaftliches Maaß, so kann man mit Hülfe der Instrumente sich diesem Verhältnisse so weit nähern als es deren Vollkommenheit zuläßt; mit dem Verstande aber kann die Annäherung so weit getrieben werden, daß der Unterschied des wahren Verhältnisses von dem gefundenen so klein werde als man nur immer will. Will man z. B. das Verhältniß beider Linien bis auf ein Milliontheil richtig haben, so braucht man nur (§. 338) *cd* in eine Million gleiche Theile zu theilen, und einen solchen Theil auf *ab* zu tragen.

§. 340. Lehrsatz.

Parallelogramme *ABCD*, *FFGH* Fig. 143 von gleicher Höhe *kb*, *op* verhalten sich wie ihre Grundlinien *AB*, *EF*.

Beweis. Die Grundlinien *AB*, *EF* sind entweder commensurabel oder incommensurabel.

Erster Fall. Sind sie commensurabel, so suche man (§. 339) ihr gemeinschaftliches Maaß $Ab = Ef$, und trage es sowohl auf *AB* als auf *EF*. Gesetzt es läßt sich auf *AB* *m* mahl (5 mahl) und auf *EF* *n* mahl (3 mahl) tragen, so ist

$$1)\ AB : EF = m\,Ab : n\,Ab = m : n$$
$$(= 5 : 3) . (§. 302).$$

Man ziehe dann durch alle Theilpunkte wie *b*, *f* rc. der Seitenlinie *AD* und *HE* parallele Linien, so wird (§. 156) das Parallelogramm *ABCD* in eben so viele einander gleiche Parallelogramme wie *AbcD* zerlegt seyn als die Grundlinie *AB* Theile hat. Denn alle diese Parallelogramme haben gleiche Grundlinien und dieselbe Höhe. Es ist demnach

$$ABCD = m \times . AbcD = 5 \times AbcD.$$

Aus gleichem Grunde ist

$$EFGH = n \times EfgH = n \times AbcD$$
$$= 3 \times AbcD.$$

Folglich ist

2) $ABCD : EFGH = m \times AbcD : n \times AbcD$
$= m : n = 5 : 3.$

Wird diese Proportion mit der obigen (1) zusammengehalten, so ist (§. 303) $ABCD : EFGH = AB : EF$.

Zweiter Fall. Sind AB, EF Fig. 144 incommensurabel, so kann doch das Verhältniß der Parallelogramme $ABCD$, $EFGH$ weder größer noch kleiner als das ihrer Grundlinien AB, EF seyn.

Denn wäre es möglich, daß

$$ABCD : EFGH = AB : EK,$$

wo EK größer als EF ist, so theile man (§. 334 u. 338) AB in eine Anzahl so kleiner gleicher Theile, daß jeder Theil kleiner als FK werde und trage einen solchen Theil von E gegen F zu: so muß nothwendig ein Theilpunkt f zwischen F und K fallen. Führt man durch diesen Punkt der EH die Parallele fg, wodurch das Parallelogramm $EfgH$ entstehet, so ist, weil AB, EF nach der Construction commensurabel sind,

$$ABCD : EfgH = AB : Ef \text{ (1r Fall).}$$

Vergleicht man diese Proportion mit der angenommenen

$$ABCD : EFGH = AB : EK,$$

so folgt (§. 327)

$$EFGH : EfgH = EK : Ff.$$

Nun ist $EK > Ef$, folglich müßte auch (§. 300) $EFGH > EfgH$ seyn, welches unmöglich ist.

Wäre es möglich, daß

$$ABCD : EFGH = AB : EK'$$

wo $EK' < EF$, so könnte man eben so AB in so kleine Theile theilen, daß ein Theilpunkt f' zwischen K' und F fallen müßte; und führt man durch f' der

EH die Parallele $f'g'$ so erhält man für die Parallelogramme $ABCD$, $Ef'g'H$, deren Grundlinien AB, Ef' commensurabel sind (1r Fall)

$$ABCD : Ef'g'H = AB : Ef'.$$

Nun ist angenommen

$$ABCD : EFGH = AB : EK'$$

folglich ist

$$EFGH : Ef'g'H = EK' : Ef'.$$

Da aber $EK' < Ef'$, so müßte auch $EFGH < Ef'g'H$ seyn, welches unmöglich ist.

Da also das Verhältniß der Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$ weder größer noch kleiner als das von AB zu EF seyn kann, so ist

$$ABCD : EFGH = AB : EF.$$

§. 341. Lehrsatz.

Dreiecke ABC, FGH Fig. 145 von gleichen Höhen AD, FI verhalten sich wie ihre Grundlinien BC, GH.

Beweis. Durch C und A ziehe man der AB und BC die Parallelen CE, AE; desgleichen durch H und F der FG und GH die Parallelen HK, FK; so ist (§. 141) $ABC = \frac{1}{2}\, ABCE$ und $FGH = \frac{1}{2}\, FGHK$, folglich

$$ABC : FGH = \tfrac{1}{2}\, ABCE : \tfrac{1}{2}\, FGHK$$
$$= ABCE : FGHK \text{ (§. 301).}$$

Nun ist (§. 340)

$$BC : GH = ABCE : FGHK.$$

folglich ist (§. 303) $ABC : FGH = BC : GH$.

§. 342. Lehrsatz.

Parallelogramme $ABCD$, $EFGH$ Fig. 146

von gleichen Grundlinien, CD, GH verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis. Aus C und D fälle man auf AB die Perpendickel CI, DK, und aus G, H auf EF die Perpendickel GL, HM: so ist (§. 154) das Rechteck $IKCD$ = dem Parallelogramm $ABCD$, und $LGHM$ = $EFGH$, folglich ist

$$ABCD : EFGH = IKCD : LGHM.$$

In den beiden Rechtecken $IKCD$, $LGHM$ kann man CI, GL als die Grundlinien und $CD = GH$ als die Höhen betrachten, folglich ist (§. 340)

$$IKCD : LGHM = CI : GL.$$

Diese Proportion mit der vorhergehenden verglichen, giebt (§. 303)

$$ABCD : EFGH = CI : GL.$$

§. 343. Zusatz.

Durch eine ähnliche Construction wie im §. 341 läßt sich darthun, daß sich Dreiecke von gleichen Grundlinien wie ihre Höhen verhalten.

§. 344. Lehrsatz.

Parallelogramme $ABCD$, $EFGH$ Fig. 147 von verschiedenen Grundlinien und verschiedenen Höhen sind im zusammmen gesetzten Verhältnisse ihrer Grundlinien und Höhen. Das heißt, wenn man die beiden Grundlinien nach ihrem gemeinschaftlichen Maaße mißt, und also ihr Verhältniß in abstracten Zahlen ausdrückt, und eben so das Verhältniß der Höhen durch abstracte Zahlen angiebt, so werden sich die Parallelogramme verhalten, wie das Product der Vorderglieder jener beiden Verhältnisse zum Producte ihrer Hinterglieder. Es ist nehmlich

$$ABCD : EFGH = \begin{cases} (CD : GH) \\ + (IK : LM) \end{cases}$$

$$= CD \,.\, IK : GH \,.\, LM.$$

Beweis. Von ML schneide man einen Theil $MN = IK$ ab und ziehe durch N der GH die Parallele OP: so entstehet ein Parallelogramm $OPGH$, welches mit $ABCD$ gleiche Höhe hat, und es ist demnach (§. 340)

$$ABCD : OPGH = CD : GH.$$

Eben so hat das Parallelogramm $OPGH$ mit $EFGH$ einerlei Grundlinie und es ist demnach (§. 342)

$$OPGH : EFGH = MN : LM = IK : LM.$$

Wird aus diesen beiden Proportionen eine zusammen gesetzt, so ist (§. 329)

$$ABCD : EFGH = (CD : GH) + (IK ; LM)$$

$$CD \times IK : GH \times LM.$$

Anmerkung. Nur in dem angeführten Sinne, daß nehmlich die Glieder des Verhältnisses der Grundlinien und der Höhen als abstracte Zahlen angesehen werden, kann man sagen, daß Parallelogramme sich eben so verhalten wie die Producte aus ihren Grundlinien in die ihnen zugehörigen Höhen. In jedem andern Sinne würde dieser Ausdruck eine Ungereimtheit enthalten, indem bei jeder Multiplication der Multiplicator eine abstracte Zahl seyn muß, und daher keine zwei Linien in einander multiplicirt werden können.

§. 345. Zusatz.

Jede zwei Quadrate $ABED$, $abed$ Fig. 79 sind also im zweifachen oder quadratischen Verhältniß ihrer Seiten. Denn es ist (§. 344) $ABED : abed = (AB : ab) + (AD : ad) = (AB : ab) + (AB : ab) = 2 . (AB : ab) = AB^2 : ab^2$.

Anmerkung. Das zweifache Verhältniß zweier Linien, AB, ab in abstracten Zahlen, werden wir immer durch 2 (AB : ab) oder $AB^2 : ab_2$ andeuten. Dahingegen ABq : abq das Verhältniß der Quadrate von AB, ab bezeichnen soll. Es ist also $ABq : abq = AB^2 : ab^2$.

§. 346. Zusatz.

Auch Dreiecke, als Hälften der Parallelogramme sind im zusammen gesetzten Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen.

§. 347. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke *ABC* Fig. 148 eine Linie *DE* irgend einer Seite, *BC* desselben parallel geführt wird, so werden die beiden andern Seiten dieses Dreiecks in den Punkten *D* und *E* proportional geschnitten. Es verhält sich nehmlich

$$AD : DB = AE : EC.$$

Beweis. Man ziehe *BE* und *DC*, so sind die Dreiecke *BED*, *CED*, welche auf einerlei Grundlinie *DE* und zwischen einerlei Parallelen *DE*, *BC* stehen, einander gleich (§. 158) und es ist also (§. 300)

$$AED : BED = AED : CED.$$

Nun haben die Dreiecke, *AED*, *BED*, welche im Punkte *E* zusammenlaufen, einerlei Höhe, und es ist also (§. 341)

$$AED : BED = AD : DB.$$

Aus gleichem Grunde ist

$$AED : CED = AE : EC,$$

folglich ist (§. 303)

$$AD : DB = AE : EC.$$

§. 348. Zusatz.

Aus dieser Proportion folgt auch

$AD : AE = DB : EC$ (§. 311)

ferner $AD + DB : AE + EC = AD : AE$ (§. 320)

oder $AB : AC = AD : AE$.

Auch $AB : AC = AB - AD : AC - AE$

$= BD : EC$ (§. 320).

§. 349. Zusatz.

Jede zwei Linien AB, CD Fig. 149 werden von drei Parallelen AC, EF, BD proportional geschnitten, so daß $CF : FD = AE : EB$. Denn zieht man durch C der AB die Parallele CH, so ist (§. 141) $AE = CG$ und $EB = GH$. Nun ist im Dreiecke CHD (§. 347)

$CG : GH = CF : FD$. Folglich ist auch

$AE : EB = CF : FD$.

Aus dieser Proportion folgen auch alle in §. 348 angeführte Abänderungen.

§. 350. Lehrsatz.

Wenn die beiden Seiten AB, AC eines Dreiecks ABC Fig. 148 von einer Linie DE, so geschnitten werden, daß $AD : DB = AE : EC$, so ist DE der dritten Seite BC parallel.

Beweis. Man ziehe BE, DC, so ist (§. 341)

$$AD : DB = \triangle ADE : \triangle DEB$$

und $$AE : EC = \triangle ADE : \triangle DEC.$$

Da aber nach der Voraussetzung

$$AD : DB = AE : EC,$$

so ist auch (§. 303)

$$ADE : DEB = ADE : DEC,$$

folglich ist (§. 300)

$$\triangle DEB = \triangle DEC.$$

Da nun diese beiden gleichen Dreiecke auf einerlei Grundlinie ED stehen, so müssen sie auch (§. 162) zwischen einerlei Parallelen liegen, folglich ist ED der CB parallel.

§. 351. Lehrsatz.

Wenn ein Winkel A eines Dreiecks ABC Fig. 150 von einer geraden Linie AD halbirt wird, so schneidet diese hinlänglich verlängert, die gegenüber stehende Seite BC den beiden einschließenden Seiten AB, AC proportional, so daß $BD : DC = BA : AC$.

Beweis. Man ziehe (§. 115) durch C der AD die Linie CE parallel und verlängere sie bis sie die verlängerte BA in E schneidet (§. 127), so ist, da die Parallelen AD, EC von AC geschnitten werden (§. 125 II), $ACE = CAD = BAD$. Nun ist, weil eben diese Parallelen von BE geschnitten werden (§. 125 III), $AEC = BAD$; folglich ist (Grunds. 4) $ACE = AEC$, mithin (§. 58) $AC = AE$.

Da nun, weil im Dreiecke BEC die Linie AD der CE parallel geführt ist (§. 347)

$$BD : DC = BA : AE,$$

so ist auch

$$BD : DC = BA : AC.$$

§. 352. Lehrsatz.

Wenn irgend eine Seite BC eines Dreiecks ABC Fig. 150 im Punkte D den beiden übrigen Seiten BA, AC proportional geschnitten wird, so daß $BD : DC = BA : AC$ so wird die von diesem Punkte nach dem Scheitel des gegenüber stehenden Winkels BAC geführte gerade Linie AD diesen Winkel halbiren.

Beweis. Man ziehe, wie im vorhergehenden Satze die CE der AD parallel, so ist (§. 347)

$$BD : DC = BA : AE,$$

Nun ist angenommen $BD : DC = BA : AC$; folglich ist $AE = AC$, also (§ 55) $AEC = ACE$. Nun ist (§. 125 III) $BAD = AEC = ACE$; und auch (§. 125 II) $DAC = ACE$; folglich ist $BAD = DAC$; mithin BAC von AD halbirt.

§. 353. Erklärung.

Geradlinigte Figuren $ABCDE$, $abcde$ Fig. 158 heißen ähnliche Figuren, wenn sie bei gleich vielen Seiten so beschaffen sind, daß ihre in der Ordnung auf einander folgende Winkel einzeln genommen gleich, nehmlich $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$, und die in beiden Figuren zwischen zwei gleichen Winkeln liegenden Seiten proportional sind; nehmlich $AB : ab = BC : bc = CD : cd$ ꝛc. Die gleichen Winkel heißen auch gleichnahmige Winkel, und die zwischen zweien gleichnahmigen Winkeln liegenden Seiten gleichnahmige Seiten. So sind A und a, B und b ꝛc. gleichnahmige Winkel, so wie AB und ab, BC und bc ꝛc. gleichnahmige Seiten.

Die zwischen zweien gleichnahmigen Winkeln in beiden Figuren liegenden Diagonalen, wie EC, ec heißen **gleichnahmige Diagonalen.**

Die von gleichnahmigen Seiten und gleichnahmigen Diagonalen begränzten Dreiecke, wie ACE und ace, ABC, abc, heißen **ähnlichliegende Dreiecke.** Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ($\backsim$).

§. 354. Zusatz.

Geradlinigte Figuren, welche auf einander gelegt, auf einander passen, sind (§. 14) gleich und (§. 353) ähnlich. Daher sind alle congruente Dreiecke zugleich ähnlich.

§. 355. Zusatz.

Jede zwei reguläre Polygone von einer gleichen Anzahl (n) Seiten sind ähnliche Figuren. Denn alle Winkel sind in denselben gleich, indem (§. 139) jeder derselben $= 2R - \frac{4R}{n}$, und alle Seiten, welche (§. 32) in jedem derselben einander gleich sind, sind daher auch proportionirt.

§. 356. Lehrsatz.

Wenn zwei Figuren $ABCDE$, $abcde$ Fig. 158 einer dritten $fghkl$ ähnlich sind, so sind sie auch einander ähnlich.

Beweis. Da $ABCDE \backsim fghkl$, so ist (§. 353) $\angle A = \angle f$, und auch $\angle a = f$, folglich ist $\angle A = a$. Eben so beweiset man, daß $\angle = b$, $\angle C = c$ ꝛc.

Aus der angenommenen Aehnlichkeit folgt ferner

$AB : BC = fg : gh$, und $ab : bc = fg : gh$, folglich (§. 303) $AB : BC = ab : bc$.

Auf gleiche Art beweiset man, daß $BC : CD = bc : cd$ ꝛc. und folglich sind $ABCDE$, $abcde$ einander ähnlich (§. 353).

§. 357. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken ABC, DEF Fig. 151 zwei Winkel des einen zweien Winkeln des andern einzeln genommen gleich sind, nehmlich $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, und daher auch (§. 131) $\angle A = \angle D$, so sind die gleichnahmigen Seiten proportionirt. Nehmlich

$$AB : AC = DE : DF,$$
$$AB : BC = DE : EF,$$
$$AC : BC = DF : EF.$$

Beweis. Von AB schneide man $AG = DE$ ab und ziehe GH der BC parallel, so ist (§. 125 III) $\angle AGH = B = E$, $AHG = C = F$; und da auch $AG = DE$, so ist (§. 84) $\triangle AGH \cong DEF$; folglich ist $AH = DF$ und $GH = EF$.

Da GH und BC parallel sind, so ist (§. 347)

$$AB : AC = AG : AH = DE : DF.$$

Ziehet man nun durch G die Linie GK der AC parallel, so ist aus gleichem Grunde

$$BC : BA = KC : AG = GH : AG$$
$$= EF : DE.$$

Wird diese Proportion $BC : AB = EF : DE$
mit der vorigen $AB : AC = DE : DF$
zusammen gehalten, so findet man (§. 329)

$$BC : AC = EF : DF$$

§. 358. Zusatz.

Führt man daher in einem Dreiecke ABC Fig. 151 irgend einer Seite BC eine Parallele GH, so ist das dadurch abgeschnittene Dreieck AGH dem ganzen ABC ähnlich (§. 353).

§. 359. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken ABC, DEF Fig. 151 die gleichnahmigen Seiten nach der Ordnung einerlei Verhältniß zu einander haben, nehmlich $AB : DE = AC : DF = BC : EF$, so sind die Dreiecke ähnlich, und daher die Winkel, welche den einander proportionirten Seiten gegenüber stehen, oder die gleichnahmigen Winkel einander gleich.

Beweis. Von AB schneide man $AG = DE$ ab, und ziehe durch G die GH der BC und GK der AC parallel, so ist (§. 347)

$$AB : AC = AG : AH.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$AB : AC = DE : DF = AG : DF.$$

Da nun in diesen beiden Proportionen die drei ersten Glieder gleich sind, so ist auch (§. 300)

$$AH = DF.$$

Ferner ist (§. 347)

$$AB : BC = AG : KC = AG : GH$$

aber auch nach der Voraussetzung

$$AB : BC = DE : EF = AG : EF$$

folglich ist $GH = EF$; mithin (§. 60) die Dreiecke AGH. DEF congruent, und also ähnlich (§. 354).

Nun ist (§. 358) $AGH \backsim ABC$, und ihm also gleichwinklicht; folglich ist auch (§. 356) $DEF \backsim ABC$ und demselben gleichwinklicht (§. 353).

§. 360. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken ABC, DEF Fig. 151 ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist, nehmlich $BAC = EDF$, und die einschließenden Seiten des einen dasselbe Verhältniß zu einander haben als die einschließenden Seiten des andern, nehmlich $AB : AC = DE : DF$, so sind die Dreiecke einander ähnlich und diejenigen Winkel gleich, welche gleichnahmigen Seiten gegenüber liegen.

Beweis. Von AB schneide man $AG = DE$ ab, und ziehe GH der BC parallel, so ist (§. 347)

$$AB : AC = AG : AH.$$

Aber auch nach der Voraussetzung

$$AB : AC = DE : DF = AG : DF,$$

folglich ist (§. 300) $AH = DF$, und da auch der $\angle A = \angle D$, so sind die Dreiecke AGH, DEF congruent (§. 53).

Nun ist (§. 358) $\triangle AGH \backsim \triangle ABC$, folglich ist auch (§. 356) das Dreieck $DEF \backsim ABC$.

§. 361. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken ABC, DEF Fig. 151 ein Winkel des einen ABC einem Winkel des andern DEF gleich ist, und die an diesem Winkel anliegende Seite zu der ihm gegenüberstehenden in einem Dreiecke dasselbe Verhältniß hat als im andern, nehmlich $AB : AC = DE : DF$, so sind die Dreiecke einander ähnlich, wenn überdies die dem gleichen Winkel gegenüberstehende Seite AC größer als die anliegende AB ist.

Beweis. Auf AB nehme man $AG = DE$, und ziehe GH der BC parallel: so ist (§. 347).

$$AB : AC = AG : AH$$

und $\triangle AGH \backsim ABC$ (§. 358).

Nun ist nach der Voraussetzung

$$AB : AC = DE : DF,$$

folglich ist

$$AG : AH = DE : DF.$$

Nun ist $AG = DE$, folglich ist auch $AH = DF$. Da also $AG = DE$, $AH = DF$ und $\angle AGH = \angle B = \angle DEF$, so sind (§. 92) die Dreiecke AGH, DEF in dem Falle congruent, wenn $DF > DE$.

In jedem Falle aber ist (§. 358) $AGH \backsim ABC$, folglich ist für den angeführten Fall auch $ABC \backsim DEF$ (§. 356).

§. 362. Zusatz.

Da im rechtwinklichten Dreiecke die Hypotenuse immer größer als jede Kathete desselben ist, so werden jede zwei rechtwinklichte Dreiecke ABC, abc Fig. 152 einander ähnlich seyn, wenn sich die Hypotenuse zur Kathete in dem einen Dreiecke eben so verhält wie im andern, wenn nehmlich

$$AC : AB = ac : ab$$

oder $AC : BC = ac : bc.$

§. 363. Lehrsatz.

Wenn man vom Scheitel A des rechten Winkels eines rechtwinklichten Dreiecks ABC Fig. 153 auf die Hypotenuse BC den Perpendickel AD fällt, so wird

1) Dieser Perpendickel das Dreieck in

zwei andere ABD, ACD zerlegen, welche sowohl einander als dem ganzen Dreieck ABC ähnlich sind.

2) Ist dieser Perpendickel die mittlere Proportionallinie zwischen den hierdurch entstehenden Abschnitten BD, DC der Hypotenuse, nehmlich $BD : AD = AD : DC$.

3) Ist jede Kathete die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Hypotenuse und dem ihr zunächst liegenden Abschnitte, so daß

$$BD : BA = BA : BC$$
$$CD : CA = CA : BC.$$

Beweis. Erster Theil. In den beiden Dreiecken ABC, ABD ist der Winkel $BAC = ADB = R$, und der Winkel B beiden gemein, also ist auch $ACB = BAD$. Demnach sind diese Dreiecke gleichwinklicht, folglich ihre Seiten proportionirt (§. 357).

Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch $\angle ABC = \angle CAD$, und daß das Dreieck $ACD \backsim \triangle ABC$.

Da nun die beiden Dreiecke ABD, ACD einem dritten ABC ähnlich sind, so müssen sie (§. 356) auch einander ähnlich seyn.

II. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD, ADC und der Gleichheit der Winkel BAD, BCA folgt (§. 353)

$$BD : DA = DA : DC.$$

III. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC, ABD und dem gemeinschaftlichen Winkel B folgt (§. 353)

$$BC : BA = BA : BD.$$

Eben so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC, ACD und der Gleichheit der Winkel ABC, CAD (§. 353)

$$BC : CA = CA : CD.$$

§. 364. Zusatz.

Aus den stetigen Proportionen $BD : AD = AD : DC$; $BD : BA = BA : BC$ und $CD : CA = CA : BC$ folgt (§. 331)

1) $BD : DC = BD^2 : DA^2 = BDq : DAq$ (§. 345),
2) $BD : BC = BD^2 : BA^2 = BDq : BAq$,
3) $CD : BC = CD^2 : CA^2 = CDq : CAq$.

§. 365. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie AB Fig. 154 nach eben dem Verhältnisse zu theilen als eine andere Linie AC getheilt ist.

Auflösung. Es sey AC in D und E getheilt, und an AB unter einem beliebigen Winkel ABC gelegt. Man ziehe BC und durch D und E die DF und EG der BC parallel: so sind F und G die gesuchten Durchschnittspunkte.

Beweis. Zieht man noch durch D die DK der AB parallel, so sind FH, HB Parallelogramme und daher (§. 141) $DH = FG$, $HK = GB$.

Im Dreiecke DKC ist (§. 347)

$$CE : ED = KH : HD = BG : GF,$$

und im Dreiecke AGE ist

$$ED : DA = GF : FA,$$

folglich sind die Abschnitte BG, GF, FA den Abschnitten CE, ED, DA proportionirt.

§. 366. Aufgabe.

Zu dreien gegebenen geraden Linien A, B, C Fig. 155 die vierte Proportionallinie zu finden.

Auflösung und Beweis. Man lege zwei gerade Linien DE, DF unter einem beliebigen Winkel an einander, mache $DG = A$, $GE = B$, $DH = C$; ziehe GH und mit dieser durch E die EF parallel, so ist (§. 347) $DG : GE = DH : HF$ oder $A : B = C : HF$; folglich ist HF die vierte Proportionallinie.

Andere Auflösung. Man lege DE, DF unter einem beliebigen Winkel an einander; mache $DG = A$, $DK = B$, $DH = C$; ziehe GH und dieser durch K die Parallele KL, so ist DL die gesuchte Linie. Denn es ist (§. 348) $DG : DK = DH : DL$; oder $A : B = C : DL$.

§. 367. Zusatz.

Das Verfahren und der Beweis des vorhergehenden §. bleiben ungeändert, wenn B und C einander gleich sind, also zu zweien Linien A, B die dritte Proportionallinie zu finden ist. Man braucht dann nur bei voriger Construction $DH = GE = B$ zu nehmen, und es wäre dann $DG : GE = GE : HF$, oder $A : B = B : HF$.

§. 368. Zusatz.

Sucht man wiederum zu B und HF die dritte Proportionallinie, und fährt auf diese Art fort, so kann man mehrere Linien finden, welche in zusammenhängenden Verhältnissen stehen.

§. 369. Aufgabe.

Zwischen zwei gegebenen Linien AB, BC Fig. 156 die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auflösung. Man setze AB, BC in einerlei geraden Linie an einander, beschreibe über AC einen Halbkreis, und errichte auf AC in B den Perpendickel BD: so ist dieser die gesuchte mittlere Proportionallinie.

Beweis. Zieht man noch AD, CD; so ist (§. 251) $ADC = R$, und folglich (§. 363) $AB : BD = BD : BC$.

Andere Auflösung. Man trage Fig. 157 die kleinere der gegebenen Linien auf die größere von A bis C; setze auf AB einen Halbkreis, und errichte aus C auf AB einen Perpendickel, welcher den Halbkreis in D trifft. Ziehe AD, so ist diese die verlangte mittlere Proportionallinie zwischen AB und AC.

Denn zieht man DB, so ist (§. 363) $AB : AD = AD : AC$.

§. 370. Lehrsatz.

Wenn man in zweien ähnlichen Figuren $ABCDE$, $abcde$ Fig. 158 aus den Scheitelpunkten der gleichnahmigen Winkel C, c nach allen Winkeln der Figur Diagonallinien zieht, so werden beide Figuren dadurch in ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke zerlegt.

Beweis. Da wegen der Aehnlichkeit beider Figuren $\angle B = \angle b$ und (§. 353) $AB : BC = ab : bc$; so ist (§. 360) $\triangle ABC \backsim abc$, also (§. 353) $\angle BAC = bac$ und

$$AB : AC = ab : ae.$$

Da (§. 353) $BAE = bae$ und $BAC = bac$, so ist $BAE - BAC = bae - bac$ oder $CAE = cae$, und da

$$AB : AE = ab : ae$$

und $AC : AB = ac : ab$

so ist (§. 329) $AC : AE = ac : ae$, folglich sind (§. 360) die Dreiecke CAE, cae ähnlich.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß alle folgende Dreiecke CED, ced u. s. w. ähnlich sind.

§. 371. Lehrsatz.

Wenn zwei Figuren $ABCDE$, $abcde$ Fig. 158 sich durch Diagonallinien in ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke zerlegen lassen, so sind sie selbst ähnlich.

Beweis. Da $\triangle ABC \backsim abc$, so ist (§. 363) $\angle BAC = \angle bac$, und aus gleichem Grunde $\angle CAE = \angle cae$, folglich $BAC + CAE = bac + cae$, oder $BAE = bae$. Auf gleiche Art beweiset man, daß $AED = aed$, $EDC = edc$, u. s. w.

Ferner ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke BAC, bac (§. 353) $AB : AC = ab : ac$;

und weil $ACE \backsim ace$.

$$AC : AE = ac : ae$$

folglich (§. 329) $AB : AE = ab : ae$.

Auf gleiche Art beweiset man, daß $AE : ED : DC = ae : ed : dc$, und folglich sind (§. 353) beide Figuren ähnlich.

§. 372. Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie EF Fig.

159 ein dem Dreiecke ABC ähnliches Dreieck dergestalt zu setzen, daß EF der BC ähnlich liegend sey.

Auflösung I. Man lege an EF den Winkel $FED = ABC$, und $EFD = ACB$ an, verlängere die Schenkel bis sie einander in D schneiden, so ist (§. 357) $\triangle DEF \backsim ABC$.

Auflösung II. Man lege in E den Winkel $FED = CBA$ an; suche zu BC, BA, EF die vierte Proportionallinie ED (§. 366) und ziehe DF, so ist (§. 360) $\triangle DEF \backsim ABC$.

Auflösung III. Man suche zu BC, BA, EF die vierte Proportionallinie ED (§. 366); desgleichen suche man zu BC, AC, EF die vierte Proportionallinie DF. Aus diesen beiden Linien nebst EF beschreibe man das Dreieck DEF, so ist dieses (§. 359) dem $\triangle ABC$ ähnlich.

Anmerkung. Alle diese Auflösungen werden am leichtesten bewerkstelliget, wenn man von CB den Theil CG = EF abschneidet, und durch G der AB die Parallele GH führt, da denn das $\triangle$ HGC dem $\triangle$ ABC ähnlich ist (§. 358).

§. 373. Aufgabe.

Auf eine gegebene Linie bc Fig. 160 ein dem Vielecke $ABCDE$ ähnliches Vieleck dergestalt zu setzen, daß bc der BC ähnlich liegend sey.

Auflösung I. Man ziehe die Diagonalen CA, CE; setze (§. 372) auf bc ein dem Dreiecke ABC ähnliches Dreieck abc, wodurch der Punkt a bestimmt wird. Auf ac setze man ein dem Dreiecke ACE ähnliches Dreiecke *ace* und so fort: so werden die Viel-ecke *ABCDE*, *abcde* aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und ähnlich liegender Dreiecke zusammengesetzt, und folglich (§. 371) einander ähnlich seyn.

Auflösung II. Von *CB* schneide man $Cb' = cb$ ab, und ziehe durch b' der *BA* die Parallele $b'a'$. Eben so ziehe man durch a' der *AE* die Parallele $a'e'$; durch e' der *ED* die Parallele $e'd'$, so ist (§. 371) das Vieleck $a'b'Cd'e'$ dem Vielecke *ABCDE* ähnlich.

Anmerkung. Bei dieser Auflösung haben wir alle Diagonalen aus einem und demselben Winkel gezogen. Man kann indessen die Vielecke auf verschiedene Arten in Dreiecke zerlegen, unter denen vorzüglich der Fall einer Erwähnung verdient, wo alle Winkel des Vielecks, C, D, E Fig. 158 mit den Endpunkten A, B einer Seite desselben AB verbunden werden.

Die Lage dieser Punkte gegen AB ist offenbar bestimmt, sobald die Dreiecke ABC, ABD, ABE gegeben sind, und man sieht leicht, daß zur Bestimmung eines Vielecks eine Anzahl Dreiecke erfordert wird, welche um zwei Einheiten geringer als die Anzahl der Seiten des Vielecks ist.

Es läßt sich ferner auf ähnliche Art, wie im §. 371 und 372, darthun, daß die Vielecke ABCDE, abcde ähnlich seyn müssen, sobald die Dreiecke ABC und abc; ABD und abd, ABE und abe ähnlich und ähnlich liegend sind, und daß umgekehrt diese Dreiecke ähnlich seyn müssen, sobald es die Vielecke sind. Dieser Satz findet besonders in der Feldmeßkunst häufige Anwendung.

§. 374. Erklärung.

Zwei Punkte *M* und *m* sind gegen zwei ähnliche Figuren *ABCD*, *abcd* Fig. 161 ähnlichliegend, wenn die aus diesen Punkten nach den Winkelspitzen der Figuren gezogenen geraden Linien MA, MB, MC, ma, mb, mc rc. mit den gleichnahmigen Seiten der Figur ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke MAB, mab; MBC, mbc rc. begränzen. Es mögen übrigens die Punkte M, m innerhalb oder außerhalb beider ähnlichen Figuren liegen.

Zwei gerade Linien MN, mn sind gegen zwei ähnliche Figuren $ABCD$, $abcd$ Fig. 162 **ähnlich liegend**, wenn sie von ähnlich liegenden Punkten M, m; N, n begränzt werden.

§. 375. Lehrsatz.

Wenn man in zweien ähnlichen Figuren $ABCD$, $abcd$ Fig. 161 auf irgend zwei gleichnahmige Seiten desselben BC, bc die ähnlichen Dreiecke BCM, bcm setzt, so sind M und m ähnlich liegende Punkte beider Vielecke.

Beweis. Da $ABCD \backsim abcd$, so ist $\angle ABC = abc$ und $AB : BC = ab : bc$.

Ferner ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke BCM, bcm der $\angle MBC = mbc$
und $BC : BM = bc, bm$;

folglich ist $ABC - MBC = abc - mbc$,

oder $\angle ABM = abm$ und (§. 329)

$$AB : BM = ab : bm,$$

folglich ist (§. 360) $ABM \backsim abm$.

Auf gleiche Art beweiset man, daß $ADM \backsim adm$ daß $CDM \backsim cdm$ u. s. w.

§. 376. Lehrsatz.

Wenn in zweien ähnlichen Vielecken $ABCD$, $abcd$ Fig. 162 zwei Punkte M, N der

einen Figur zweien Punkten m, n der andern ähnlich liegend sind, so verhält sich die gerade Linie MN, welche die beiden ersten verbindet, zur Linie mn, welche die beiden andern verbindet, wie irgend eine Seite AB der ersten Figur zu der ihr gleichnahmigen ab der zweiten.

Beweis. Da M und m, so wie N und n ähnlich liegende Punkte sind, so ist (§. 374) $\triangle\, MAB \backsim mab$ und $\triangle\, NAB \backsim nab$; also ist (§. 353) $\angle\, MAB = mab$ und $\angle\, NAB = nab$. Folglich ist

$$MAB - NAB = mab - nab,$$

oder $\angle\, MAN = man$.

Ferner ist (§. 353)

$$MA : AB = ma : ab,$$

und $AB : AN = ab : an$

folglich ist (§. 329) $MA : AN = ma : an$,
also (§. 360) $\triangle\, MAN \backsim \triangle\, man$, und daher

$$MN : AM = mn : am$$

Nun ist auch (§. 353) $AM : AB = am : ab$
folglich ist (§. 329) $MN : AB = mn : ab$
oder $MN : mn = AB : ab$.

§. 377. Lehrsatz.

Die Umkreise oder die Perimeter ähnlicher Figuren $ABCDE$, $abcde$ Fig. 138 verhalten sich wie irgend zwei gleichnahmige Seiten AB, ab, oder wie die gleichnahmigen Diagonalen.

Beweis. Da $ABCDE \backsim abcde$, so ist (§. 353) $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea$, folglich (§. 332)

$$AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab.$$

§. 378. Lehrsatz.

Aehnliche Dreiecke ABC, abc Fig. 163 verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten.

Beweis. Man fälle von C und c die Perpendickel CD, cd, so sind (§. 357) die Dreiecke ACD, acd einander ähnlich, weil $\angle A = a$ und $\angle ADC = adc = R$. Es ist also (§. 353)

$$CD : cd = AC : ac;$$

da aber $ACB \backsim acb$, so ist auch

$$AB : ab = AC : ac.$$

Wird aus diesen beiden Proportionen eine zusammengesetzt, so ist (§. 324)

$$CD \times AB : cd \times ab = AC^2 : ac^2 = ACq : acq.$$

Nun ist (§. 346)

$$\triangle ABC : \triangle abc = CD \times AB : cd \times ab,$$

folglich ist

$$\triangle ABC : abc = AC^2 : ac^2 = ACq : acq$$
$$= ABq : abq = BCq : bcq.$$

§. 379. Lehrsatz.

Aehnliche Figuren $ABCDE$, $abcde$ Fig. 185 verhalten sich wie die Quadrate gleichnahmiger Seiten oder wie die Quadrate gleichnahmiger Diagonalen.

Beweis I. Da $ABCDE \backsim abcde$, so ist (§. 353) $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea$; folglich (§. 325) $AB^2 : ab^2$

$= BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$.

Da ferner (§. 370) $ADE \backsim ade$, so ist (§. 378) $ADE : ade = AD^2 : ad^2$.

Aus gleichem Grunde ist

$$ADC : adc = AD^2 : ad^2$$

folglich ist (§. 303)

$$ADE : ade = ADC : adc$$

oder verbunden (§. 321)

$$ADE + ADC : ade + adc = ADC : adc = AC^2 : ac^2,$$

oder $ACDE : acde = AC^2 : ac^2$.

Nun ist auch (§. 378)

$$\triangle\, ABC : abc = AC^2\ ac^2$$

folglich ist

$$ACDE : acde = ABC : abc$$

oder verbunden (§. 321)

$$ACDE + ABC : acde + abc = ABC : abc$$

das heißt $ABCDE : abcde = ABC : abc$.

Nun ist (§. 378)

$$ABC : abc = BC^2 : bc^2 = AC^2 : ac^2$$

folglich ist (§. 303)

$$ABCDE : abcde = BC^2 : bc^2 = AC^2 : ac^2.$$

§. 380. Lehrsatz.

Wenn man über den drei Seiten eines rechtwinklichten Dreiecks ABC Fig. 164 ähnliche und ähnlich liegende Figuren X, Y, Z beschreibt, so ist die über der Hypotenuse beschriebene Figur Z der Summe der auf beiden Katheten beschriebenen Figuren X und Y gleich.

Beweis. Da die Figuren einander ähnlich sind, so ist (§. 379)

$$X : Y = ABq : BCq$$

folglich $X + Y : Y = ABq + BCq : BCq$

Nun ist $Y : Z = BCq : ACq$

folglich (§. 329) $X + Y : Z = ABq + BCq : ACq$

Da aber (§. 174) $ABq + BCq = ACq$,

so ist auch (§. 300)

$$X + Y = Z.$$

§. 381. Aufgabe.

Zwei ähnliche Figuren sind gegeben, man soll eine dritte beschreiben, welche den beiden gegebenen zusammen genommen gleich und jeder von ihnen ähnlich sey.

Auflösung. Man setze zwei gleichnahmige Seiten AB, BC Fig. 164 der beiden gegebenen Figuren unter einem rechten Winkel an einander, und verbinde ihre beiden anderen Endpunkte durch eine gerade Linie AC. Setze auf diese Linie (§. 373) ein Vieleck, welches jedem der gegebenen ähnlich, und worin AC den Linien AB, BC gleichnahmig ist, so wird diese (§. 380) den beiden gegebenen zusammen genommen gleich seyn.

§. 382. Zusatz.

Eben so läßt sich eine Figur beschreiben, welche dreien oder mehreren gegebenen ähnlichen Figuren zusammen genommen gleich, und jeder von ihnen ähnlich ist.

§. 383. Aufgabe.

Zwei ähnliche Figuren sind gegeben, man soll eine dritte finden, welche dem Unterschiede derselben gleich, und jeder von ihnen ähnlich ist.

Auflösung. Auf eine beliebige Seite der kleinern Figur errichte man in deren Endpunnkt einen unbegränzten Perpendickel. Mit der ähnlich liegenden Seite der größern Figur beschreibe man aus dem andern Endpunkte der kleinern Seite einen Kreisbogen, welcher den unbegränzten Perpendickel in irgend einem Punkte schneidet: so ist die auf dem abgeschnittenen Theil des Perpendickels beschriebene ähnliche und ähnlich liegende Figur die gesuchte.

Die ausführlichere Construction und der Beweis sind mit Zuziehung des §. 380 wie im ersten Abschnitte (§. 180).

Drittes Kapitel.

Von den Proportionen beim Kreise.

§. 384. Lehrsatz.

Wenn in einem Kreise $ADBC$ Fig. 106 zwei Sehnen AB, CD einander in E schneiden, so sind die Abschnitte AE, EB der einen Sehne die äußeren Glieder einer Proportion, von welcher die Abschnitte CE, ED der andern Sehne die inneren Glieder sind. Es ist nehmlich $AE : EC = ED : EB$.

Beweis. Man ziehe AC, DB.

In den Dreiecken AEC, DEB ist (§. 238) $\angle CAE = BDE$, weil beide auf einerlei Bogen CB stehen und (§. 73) $\angle AEC = DEB$; folglich ist (§. 357) $\triangle AEC \backsim BED$, und folglich ist (§. 353) $AE : EC = ED : EB$.

§. 385. Zusatz.

Wird daher eine Sehne AB Fig. 107 von einem Durchmesser EF in D senkrecht geschnitten, so ist

(§. 209 I) $AD = DB$, und folglich $ED : AD = AD : DF$, welches bereits (§. 363) auf andere Art bewiesen worden ist.

§. 386. Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen BD, CE Fig. 129 außerhalb des Kreises in einem Punkte A zusammentreffen, so sind die ganzen Linien AB, AC im umgekehrten Verhältnisse ihrer außerhalb liegenden Abschnitte AE, AD. Es ist nehmlich $AB : AC = AE : AD$.

Beweis. Man ziehe BE, DC.

In den Dreiecken AEB, ADC ist (§. 238) der Winkel $ABE = ACD$, weil beide auf dem Bogen DE stehen, und $\angle BAC$ beiden gemein, folglich ist (§. 357) $\triangle AEB \backsim ADC$, und daher $AB : AC = AE : AD$.

§. 387. Lehrsatz.

Wenn von einem außerhalb eines Kreises genommenen Punkte A zwei gerade Linien AE, AD Fig. 165 nach dem Kreise gezogen werden, von denen die eine ihn in E berührt, und die andere ihn in F und D schneidet, so ist die Berührungslinie AE die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante AD und ihrem außerhalb des Kreises liegenden Abschnitte AF. Es ist nehmlich $AD : AE = AE : AF$.

Beweis. Man ziehe ED, EF.

Da AE eine Tangente und EF eine Sehne des Kreises ist, so ist (§. 254) $\angle AEF = ADE$. Nun ist der Winkel EAD den beiden Dreiecken AEF, ADE gemein, folglich ist (§. 357) $\triangle AEF \backsim ADE$, und daher $AD : AE = AE : AF$.

§. 388. Lehrsatz.

Wenn zwei von einem Punkte A Fig. 165 nach einem Kreise gezogene Linien, von denen die eine AD den Kreis schneidet, und die andere ihn in einem Punkte E trift, so beschaffen sind, daß die anstoßende AE die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante AD und ihrem außerhalb liegenden Abschnitte AF ist, so ist AE eine Tangente des Kreises.

Beweis. Aus A ziehe man (§. 231) eine Tangente AB, und aus dem Mittelpunkt C des Kreises ziehe man CE, CA, CB.

Da nach der Voraussetzung $AD : AE = AE : AF$ und (§. 387) $AD : AB = AB : AF$, so ist (§. 312) $AD . AF = AB^2 = AE^2$ und daher $AB = AE$. Nun ist auch (§. 36) $CE = CB$ und AC den beiden Dreiecken ACE, ACB gemein, folglich ist (§. 60) $\angle AEC = ABC$. Da aber (§. 227) $ABC = R$, so ist auch $AEC = R$; folglich ist (§. 226) AE eine Tangente des Kreises.

§. 389. Lehrsatz.

Wird in einem Dreiecke vom Scheitel C Fig. 166 irgend eines seiner Winkel auf die gegenüberstehende Seite AB ein Perpendickel CD gefällt, so verhält sich die Summe der zwischen den Endpunkten A, B dieser Linie und dem Perpendickel enthaltenen Abschnitte AD, DB zur Summe der beiden diesen Winkel einschließenden Seiten AC, CB wie sich die Differenz eben dieser Seiten zur Differenz jener Abschnitte verhält. Es ist nehmlich $AD + DB : AC + CB = AC - CB : AD - DB$.

Beweis. Erster Fall. Der Perpendickel CD falle innerhalb des Dreiecks wie in ABC.

Aus C beschreibe man mit dem kleinern Schenkel CB einen Kreis, welcher die Grundlinie in G und den andern Schenkel in F schneidet, und verlängere AC bis E.

Da (§. 209) $DG = DB$ und (§. 36) $CE = CF = CB$, so ist $AB = AD + DB$, $AG = AD - DG = AD - BD$, $AE = AC + CE = AC + CB$ und $AF = AC - CF = AC - CB$.

Nun ist (§. 386) $AB : AE = AF : AG$; folglich ist

$$AD + DB : AC + CB = AC - CB : AD - DB.$$

Zweiter Fall. Wenn der Perpendickel CD, wie im Dreiecke ACG Fig. 166 außerhalb des Dreiecks fällt, so werden die zwischen den Endpunkten der Grundlinie und dem Perpendickel enthaltenen Abschnitte AD, GD seyn; ihre Summe ist also $AD + DG = AB$ und ihre Differenz $AD - DG = AG$. Construction und Beweis sind übrigens wie im ersten Falle.

§. 390. Aufgabe.

Eine gegebene begränzte gerade Linie AB Fig. 167 nach dem äußern und mittlern Verhältniß zu theilen; das heißt sie so zu theilen, daß der größere Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleinern Abschnitte werde.

Auflösung. Auf AB errichte man (§. 253) aus einem ihrer Endpunkte A einen Perpendickel $AE = \frac{1}{2} AB$; aus E beschreibe man mit EA einen Kreis; ziehe BEF, welche den Kreis in D schneidet, und mache $BC = BD$: so ist C der gesuchte Theilungspunkt, so daß $AB : BC = BD$: so ist C der gesuchte Theilungspunkt, so daß $AB : BC = BC : AC$.

Beweis. Da BA auf AE senkrecht stehet, so ist sie (§. 226) eine Tangente des Kreises, und daher (§. 387)

$$BD : AB = AB : BF$$

oder (§. 310) $AB : BD = BF : AB$;

folglich (§. 322) $AB - BD : BF - AB = BD : AB$.

Nun aber ist $AB - BD = AB - BC = AC$ und $BF - AB = BF - 2 \cdot AE = BF - FD$ (§. 36) $= BD = BC$;

folglich ist, wenn diese Werthe in die vorhergehende Proportion gesetzt werden

$$AC : BC = BC : AB.$$

§. 391. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte C, D Fig. 170 gehe und eine der Lage nach gegebene unbegränzte gerade Linie AB berühre.

Auflösung. Man verbinde C und D durch eine gerade Linie.

Erster Fall. Ist Fig. 169 CD der AB parallel, so halbire man CD in E, errichte darauf aus E einen Perpendickel EF und lege (§. 213) durch C,

F, D einen Kreis, so wird dieser der verlangte, und F sein Berührungspunkt seyn.

Beweis. Da die Sehne DC in E halbirt ist, so gehet (§. 209) der Perpendickel FE durch den Mittelpunkt G, und FG ist also ein auf DC senkrechter Halbmesser; er muß daher auch (§. 127) die der CD parallele AB in F senkrecht schneiden. Folglich ist (§. 226) AB eine Tangente des durch C, D gehenden Kreises.

Zweiter Fall. Wenn Fig. 170 CD der AB nicht parallel ist, so verlängere man sie bis sie die AB in A schneidet, suche (§. 369 II) zwischen AC und AD die mittlere Proportionale AE; trage sie auf AB von A bis F, und lege (§. 213) durch F, C D einen Kreis, so wird dieser der verlangte seyn.

Beweis. Da nach der Construction $AD : AE = AE : AC$ und $AE = AF$, so ist $AD : AF = AF : AC$. Folglich ist (§. 388) AF eine Tangente des durch C und D gehenden Kreises CFD.

§. 392. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis AEF Fig. 168 ein reguläres Zehneck einzuschreiben.

Auflösung. Man theile (§. 390) den Halbmesser AC im Punkte D nach dem äußern und mittlern Verhältniß, so wird der größere Abschnitt CD die Seite des gesuchten Zehnecks seyn.

Beweis. Man trage (§. 265) in den gegebenen Kreis die Linie $AB = CD$ ein und ziehe BC, BD.

Da nach der Construction $AD : DC = DC : AC$, aber $AB = DC$ und (§. 36) $AC = BC$, so ist auch

$$AD : DC = AB : BC;$$

folglich (§. 352) $\angle ABD = DBC$.

Ferner ist in den Dreiecken ABD, ABC der Winkel A beiden gemein und die ihn einschließenden Seiten proportional, nehmlich $AD : AB = AB : AC$; folglich ist (§. 360) $\triangle ABD \backsim ABC$ und daher der $\angle ABD = ACB$; nun war auch $\angle ABD = DBC$, folglich ist $ACB = \frac{1}{2} ABC = \frac{1}{2} CAB$, weil (§. 55) $\angle ABC = BAC$. Es ist also (§. 130) $ACB = \frac{2R}{5} = \frac{4R}{10}$.

Da nun (§. 288) der Centriwinkel eines regulären Zehnecks $\frac{4R}{10}$ beträgt, so ist ACB dieser Centriwinkel, also $AB = CD$ die Seite des eingeschriebenen Zehnecks.

§. 393. Zusatz.

Verbindet man die Punkte B und F, F und H u. s. w. durch gerade Linien, so erhält man (§. 273) ein im Kreise eingeschriebenes Fünfeck, und nach §.244 kann man durch fortgesetztes Halbiren der Bogen AB, BE ꝛc. in den Kreis ein reguläres 20=, 40=, 80eck ꝛc. einschreiben.

§. 394 Anmerkung.

Aus §. 270 folgt, daß das Einschreiben regulärer Polygone in den Kreis, auf die Eintheilung der Peripherie in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zurückkommt. Die bisher gegebenen Verfahrungsarten, um in einen Kreis ein reguläres Polygon von 4, 8, 16, 32 ꝛc.; desgleichen von 3, 6, 12, 24 ꝛc., oder von 5, 10, 20, 40 ꝛc. Seiten einzuschreiben, dienen zugleich die Peripherie des Kreises nach den Zahlen dieser verschiedenen Reihen einzutheilen.

Trägt man nun aus einem Punkte A Fig. 168 in den Kreis die Seite Aa des regulären Sechsecks und zugleich die Seite AB des regulären Zehnecks ein, so ist der Bogen Aa = $\frac{1}{6}$ der Peripherie, und der Bogen AB = $\frac{1}{10}$ der Peripherie, also wird Ba = Aa — AB = $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ der Peripherie seyn. Man kann daher auch (§. 270) in den Kreis ein reguläres 15eck, und daher durch fortgesetztes Halbiren der Bogen, ein regelmäßiges 30=, 60=, 120eck rc. einschreiben.

§. 395. Lehrsatz.

Wenn zwei ähnliche Figuren *ABCDE*, *abcde* Fig. 171 in Kreisen eingeschrieben sind, so verhalten sich ihre Perimeter wie die Durchmesser oder Halbmesser dieser Kreise, ihre Flächenräume aber wie die Quadrate dieser Halbmesser oder Durchmesser.

Beweis. Man suche die Mittelpunkte F, f beider Kreise; ziehe die Durchmesser AG, ag, desgleichen die Linien AC, ac, BG, bg.

Erster Theil. Da $ABCDE \backsim abcde$, so ist auch (§. 370) $\triangle\ ABC \backsim abc$ und daher (§. 353) $\angle\ BCA = bca$. Nun sind (§. 238) die Winkel BCA, BGA, als auf einerlei Bogen AB ruhend, einander gleich, und aus gleichem Grunde ist $bca = bga$; folglich ist $\angle\ BGA = bga$. Ferner ist (§. 251) $\angle\ ABG = R = abg$, folglich ist (§. 357) $\triangle\ ABG \backsim abg$, und daher

$$AB : ab = AG : ag = AF : af.$$

Nun ist (§. 377)

$$AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab.$$

Folglich ist (§. 303)

$AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AG : ag = AF : af.$

Zweiter Theil. Da $AB : ab = AG : ag = AF : af$ (erster Theil), so ist (§. 325)

$$AB^2 : ab^2 = AG^2 : ag^2 = AF^2 : af^2.$$

Nun ist (§. 379) $AB^2 : ab^2 = ABCDE : abcde$; folglich ist (§. 303)

$$ABCDE : abcde = AG^2 : ag^2 = AF^2 : af^2.$$

§. 396. Zusatz.

Da (§. 355) alle reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl einander ähnlich sind, so verhalten sich ihre Perimeter wie die Durchmesser oder Halbmesser, und ihre Flächenräume wie die Quadrate der Durchmesser oder Halbmesser der um sie beschriebenen oder der in ihnen eingeschriebenen Kreise.

§. 397. Zusatz.

Ist daher ein reguläres Polygon *abcde* Fig. 130 in einem Kreise eingeschrieben, und ein anderes *ABCDE* um denselben beschrieben, so verhält sich der Perimeter des eingeschriebenen zu dem des umschriebenen Polygons wie der kleine Halbmesser *Om* des einen zum kleinen Halbmesser *Od* des andern, oder $= Om : Ok$, weil (§. 36) $Od = Ok$. Hingegen der Flächenraum $abcde : ABCDE = Om^2 : Od^2 = Om^2 : Ok^2$.

§. 398. Lehrsatz.

Ist in einem Kreise ein reguläres Polygon von irgend einer Anzahl (n) Seiten eingeschrieben, und man schreibt in denselben Kreis ein reguläres Polygon von doppelt so vielen ($2n$) Seiten ein, so ist der Perimeter des letztern größer als der des erstern.

Wird hingegen um einen Kreis ein reguläres Polygon von n Seiten und zugleich um denselben Kreis ein Polygon von $2n$ Seiten beschrieben, so ist der Perimeter des letztern kleiner als der des erstern.

Beweis. Es sey ab Fig. 172 die Seite eines im Kreise eingeschriebenen Polygons von n Seiten; O sey der Mittelpunkt und Oa, Ob Halbmesser dieses Kreises; so ist der Bogen $aa'b$ der n' Theil der Peripherie dieses Kreises; die durch a und b gehenden Tangenten sind (§. 279) Seiten, und die Theile Aa, Ab sind (§. 286 I) Hälften dieser Seiten.

Man ziehe OA und hierauf aus a' die senkrechte $A'B'$. Auch ziehe man aa', $a'b$.

Da (§. 284) $\angle AOa = AOb$, und daher (§. 239) der Bogen $aa' = a'b$, so sind die Linien $aa' = a'b$ Seiten eines eingeschriebenen Polygons von $2n$ Seiten; $A'B'$ ist die Seite eines umschriebenen Polygons von $2n$ Seiten, $A'a$, $B'b$ sind Hälften dieser Polygonseite (§. 279) und die Bogen aa', $a'b$ sind Theile, deren die ganze Peripherie $2n$ enthält.

Es ist also der

Perimeter des eingeschr. Polyg. von n Seiten $= n \times ab$
— — — von $2n$ Seiten $= n \times (aa' + a'b)$
Perim. des umschr. Polyg. von n Seiten $= n \times (Aa + Ab)$
— — — von $2n$ Seiten $= n \times (aA'B'b)$
Peripherie des Kreises von $2n$ Seiten $= n \times$ Bogen $aa'b$.

Nun ist (§. 97) $aa' + a'b > ab$; folglich ist auch (Grundsf. 12) $n \times (aa' + a'b) > n \times ab$.

Ferner ist (§. 97) $A'B' < AA' + AB'$ und daher (Grundſ. 9) $aA' + A'B' + B'b < aA' + AA' + AB' + B'b$ oder

$$aA'B'b < aA + Ab;$$

folglich iſt auch $n \times aA'B'b < n \times (aA + Ab)$.

§. 399. Lehrſatz.

Bei jedem Kreiſe laſſen ſich zwei reguläre Polygone, ein eingeſchriebenes und ein umſchriebenes von der Beſchaffenheit finden, daß die Differenz ihrer Perimeter kleiner als jede gegebene Linie iſt, ſo klein dieſe letztere auch ſeyn mag.

Beweis. Es ſey der Perimeter des umſchriebenen Polygons $ABCDE$ Fig. 130 $= P$ und der des eingeſchriebenen $abcde = p$; ſo iſt (§. 397)

$$P : p = Od : Om = Ok : Om$$

folglich $P - p : P = Ok - Om : Ok = mk : Ok$;

und daher (§. 314) $P - p = \frac{mk \times P}{Ok} = \frac{mk}{Ok} \times P$.

Man kann aber mk ſo klein nehmen, daß der Theil $\frac{mk}{Ok} \times P$ kleiner als jede gegebene Linie wird. Denn geſetzt dieſes ſey für einen gewiſſen Werth von mk noch nicht erreicht, ſo kann man doch (§. 335) durch fortgeſetzte Halbirung des Halbkreiſes auf einen aliquoten Theil der Peripherie kommen, welcher kleiner als der Bogen ekd iſt, und der dieſem Bogen correſpondirende Abſtand der Sehne von der Peripherie wird kleiner als mk ſeyn.

Die Differenz $P - p$ kann daher kleiner als jede gegebene noch ſo kleine Größe werden.

§. 400 Zusatz.

Da (§. 398) die Peripherien der umschriebenen Polygone desto mehr abnehmen, je mehr sie sich dem Kreise nähern, indeß die der eingeschriebenen Kreise unter denselben Umständen immer zunehmen, so ist offenbar die Peripherie des Kreises kleiner als der Perimeter eines jeden umschriebenen, und größer als der eines eines jeden eingeschriebenen Polygons. Diese Peripherie wird also von einem jeden dieser Perimeter um weniger unterschieden seyn, als die Differenz dieser letzteren selbst beträgt.

Da nun (§. 399) die Differenz dieser Polygone kleiner als jede gegebene Größe werden kann, so läßt sich immer ein reguläres Polygon, es sey ein eingeschriebenes oder ein umschriebenes von der Beschaffenheit finden, daß die Differenz zwischen seinem Perimeter und der Peripherie des Kreises kleiner als jede gegebene noch so kleine Größe sey.

§. 401. Aufgabe.

Es sind zwei concentrische Kreise *ABE*, *Kd'N* Fig. 173 gegeben; man soll in den größern *ABE* ein reguläres Polygon von gerader Seitenzahl einschreiben, dessen Perimeter den kleinern Kreis nicht berühre.

Auflösung. Man ziehe den Halbmesser *CO*, errichte darauf in *K* einen Perpendickel und verlängere ihn bis *H* und *L*, so ist (§. 226) *HL* eine Tangente des Kreises *Kd'N*, welche von der äußern Peripherie einen bestimmten Bogen *HOL* abschneidet. Man halbire (§. 244) den Bogen *PDO* und setze diese Halbirung fort; so kommt man (§. 335) irgend einmahl auf einen aliquoten Theil, *BO*, der Peripherie, welcher kleiner als *HO* ist. Man fälle aus *B* auf *PO* einen Perpendickel *BM*, verlängern ihn bis *A* und ziehe *AO*, *OB*, so sind dieses Seiten des gesuchten Polygons.

Beweis. Da *BA*, *HL* parallel sind und letztere den Kreis *Kd'N* berührt, so kann ihn *BA* nicht berühren, noch weniger also berühren ihn die Seiten *BO*, *OA*. Wird nun die Seite *BO* in den Kreis *ABF* herum getragen, so wird (§. 270) ein reguläres Polygon von gerader Seitenzahl entstehen, welches den Kreis *Kd'N* nicht berühren kann.

§. 402. Lehrsatz.

Die Peripherien zweier Kreise *ade*, *Kd'N* Fig. 173. verhalten sich wie ihre Halbmesser *cd*, *Cd'*.

Beweis. Es sey die Peripherie des einen Kreises $= k$ und die des andern $= k'$. Wäre nun nicht $k : k' = cd : Cd'$, so sey $k : k' = cd : CD$, wo entweder $CD > Cd'$ oder $CD < Cd'$.

Erster Fall. Es sey $CD > Cd'$. Man beschreibe aus *C* mit *CD* einen Kreis, *ODE*, welcher (§. 198) dem Kreise *Kd'N* concentrisch seyn wird; trage (§. 401) in letztern ein reguläres Polygon *ABDEFG* ein, welches den Kreis *Kd'N* nicht berührt, und trage in den Kreis *ade* ein reguläres Polygon *abdefg* von gleicher Seitenzahl ein: so ist, wenn man den Perimeter des letztern Polygons durch *p* und den des erstern durch *p'* bezeichnet (§. 396)

$$p : p' = cd : CD$$

Nun ist auch nach der Annahme

$k : k' = cd : CD$; folglich wäre
(§. 303) $k : k' = p : p'$.
welches (§. 300) unmöglich ist, indem $k > p$, hingegen $k' < p$.

Zweiter Fall. Wäre $k : k' = cd : X$, wo $X < Cd'$, so gäbe es doch zu den drei Linien X, cd, Cd' eine vierte Proportionallinie Z, (§. 366) so daß $X : cd = Cd' : Z$ oder (§. 311) $X : Cd' = cd : Z$, wo (§. 300) $Z > cd$, weil nach der Voraussetzung $Cd' > X$. Kehren wir die Proportion $k : k' = cd : X$ um, so daß $k' : k = X : cd$ und vergleichen diese mit $X : cd = Cd' : Z$, so folgt (§. 300)

$$k' : k = Cd' : Z,$$

welches unmöglich ist (erster Fall) indem $Z > cd$. Folglich ist

$$k : k' = cd : Cd'.$$

§. 403. Lehrsatz.

Kreisflächen $ABCD$, $EFGH$ Fig. 174 verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser BD, FH, oder wie die Quadrate ihrer Halbmesser BS, FU.

Beweis. Wäre nicht $BDq : FHq =$ Fläche $ABCD$: Fläche $EFGH$, so sey $BDq : FHq =$ Fläche $ABCD$: Fläche R, so daß entweder der Flächenraum $R < EFGH$ oder $R > EFGH$.

Ersten Theils erster Fall. Es sey $R <$ Fl. $EFGH$ und $BDq : FHq =$ Fl. $ABCD : R$.

Man beschreibe (§. 274) in den Kreis $EFGH$ das Quadrat $EFGH$ ein, so ist dieses größer als der Halbkreis. Denn wenn man durch die Punkte E, F, G, H, Tangenten zieht, so ist (§. 164) das innere Quadrat

EFGH die Hälfte des äußern. Nun ist (Grundsatz 3) der Kreis kleiner als das äußere Quadrat; folglich ist das innere Quadrat größer als der Halbkreis.

Man halbire die Bogen *EF*, *FG*, *GH*, *HE*, in den Punkten *I*, *K*, *L*, *M* und ziehe *EI*, *IF*, *FK*, *KG*, *GL*, *LH*, *HM*, *ME* : so ist jedes der hierdurch entstandenen Dreiecke *IFE*, *KGF*, *LHG* 2c. größer als der Abschnitt worin es befindlich ist. Denn werden durch die Punkte I, *K*, *L*, *M* Tangenten gezogen und die Parallelogramme vollendet, so ist (§. 164) jedes der genannten Dreiecke die Hälfte des Parallelogramms, worin es befindlich ist. Nun ist jeder Kreisabschnitt kleiner als das dazugehörige Parallelogramm; folglich ist jedes der genannten Dreiecke größer als die Hälfte des dazu gehörigen Abschnitts.

Wird die Halbirung der Kreisbogen fortgesetzt, und bei jeder Halbirung obige Construction wiederholt, so bleiben (§. 335) endlich einmahl Kreisabschnitte, etwa die auf den Linien *EI*, *IF*, FK 2c. übrig, welche zusammen kleiner sind als der Ueberschuß des Kreises *EFGH* über die Fläche *R*. Folglich ist das hierdurch erhaltene Polygon $EIFKGLHM > R$.

Man beschreibe nun in den Kreis *ABCD* ein dem erhaltenen Polygone ähnliches Polygon *ANBOCPDQ*: so ist (§. 395)

$BDq : FHq =$ Polyg. ANB : Polyg. EIF.

Nun war angenommen

$BDq : FHq =$ Kreis $ABCD : R$;

Folglich ist (§. 303)

Kr. $ABCD : R =$ Pol. ANB : Polyg. EIF.

Nun aber ist Kreis $ABCD >$ Polyg. ANB, und daher (§. 300). auch $R >$ Polyg. EIF, welches dem Vorigen, daß $R < EIF$ widerspricht. Demnach ist nicht $BDq : FHq =$ Kr. $ABCD : R$, wenn $R <$ Kr. $EFGH$.

Aus eben den Gründen ist auch nicht $FHq : BDq$ = Kreis $EFGH : Z$, wenn die Fläche $Z <$ Kr. $ABCD$.

Ersten Theils zweiter Fall. Es sey die Fläche $R >$ Kr. $EFGH$, und $BDq : FHq =$ Kr. $ABCD : R$, daher auch $FHq : BDq = R :$ Kr. $ABCD$: so muß es doch zu den drei Flächen R, $ABCD$, $EFGH$ eine vierte Proportionalfläche Z geben, so daß

$$R : \text{Kr. } ABCD = \text{Kr. } EFGH : Z,$$

worin (§. 300) $Z <$ Kr. $ABCD$, weil Kr. $EFGH < R$.

Nun ist angenommen

$$FHq : BDq = R : \text{Kr. } ABCD;$$

folglich wäre (§. 303)

$$FHq : BDq = \text{Kr. } EFGH : Z,$$

welches nach dem ersten Falle unmöglich ist, weil $Z <$ Kr. $ABCD$.

Demnach kann die Proportion

$BDq : FHq =$ Kr. $ABCD : R$ nicht statt finden, so lange $R <$ Kr. $EFGH$ oder $R > EFGH$. Folglich ist

$$BDq : FHq = \text{Kr. } ABCD : \text{Kr. } EFGH.$$

Zweiter Theil. Da $BD = 2\,BS$: und $FH = 2\,FU$ so ist $BD : FH = BS : FU$, und daher (§. 325)

$$BDq : FHq = BSq : FUq.$$

Nun ist (erster Theil)

$$BDq : FHq = \text{Kr. } ABCD : \text{Kr. } EFGH.$$

Folglich ist (§. 303) Kr. $ABCD$: Kr. $EFGH$ $= BSq : FUq$.

§. 404. Zusatz.

Kreise $ABCD$, $EFGH$ sind im zusammen gesetzten Verhältnisse ihrer Halbmesser und Peripherien. Denn es seyen ihre Halbmesser R, r; ihre Peripherien K, k und ihre Flächenräume Q, q, so ist (§. 402)

$$K : k = R : r$$

und auch $R : r = R : r$

folglich ist (§. 324) $KR : kr = R^2 : r^2$. Nun ist auch (§. 403) $Q : q = R^2 : r^2$; folglich ist (§. 303) $Q : q = KR : kr = (K : k) + (R : r)$.

§. 405. Lehrsatz.

Wenn man auf alle drei Seiten eines rechtwinklichten Dreiecks ABC Fig. 175 Kreise setzt, so ist der Kreis auf der Hypothenuse der Summe der Kreise auf den beiden Katheten gleich.

Beweis. Der Kreis auf der Hypothenuse sey $= Z$ und die Kreise auf den Katheten seyen X und Y, so ist (§. 403)

$$X : Y = ABq : ACq$$

folglich (§. 322)

$$X + Y : Y = ABq + ACq : ACq.$$

Ferner ist (§. 403)

$$Y : Z = ACq : BCq.$$

Wird aus beiden letzten Proportionen eine zusammen gesetzt, so ist

$$X + Y : Z = ABq + ACq : BCq.$$

Nun ist (§. 174) $ABq + ACq = BCq$;

folglich ist auch (§. 300)

$$X + Y = Z.$$

§. 406. Zusatz.

Wie ein Kreis zu beschreiben sey, welcher der Summe oder Differenz zweier gegebenen Kreise gleich sey ist aus (§. 178 und 180) leicht abzunehmen.

Anmerkung.

Die Mondförmigen Flächen $ADBX$, $AECY$ Fig. 175 sind zusammen dem rechtwinklichten Dreiecke ABC gleich. Denn der Halbkreis $BACB$ = Halbkr. $BDAB$ + Halbkr. $AECA$; und zieht man von beiden die gmeinschaftlichen Abschnitte $AXBA + AYCA$ ab, so bleibt $\triangle ABC = ADBX + AECY$.

§. 407. Lehrsatz.

Die Kreisfläche $abde$ ꝛc. Fig. 176 ist einem Dreiecke lmn gleich, welches eine der Peripherie P dieses Kreises gleiche gerade Linie mn zur Grundlinie und den Halbmesser desselben zur Höhe hat.

Beweis. Wäre das Dreieck lmn nicht der Kreisfläche abd gleich so ist entweder $lmn <$ Kreis abd oder $lmn >$ Kreis abd.

Erster Fall. Wenn $lmn <$ Kr. abd. Man beschreibe (§. 403) in den Kreis ein reguläres Polygon $abdefg$ ein, dessen Differenz vom Kreise kleiner werde als die Differenz zwischen dem gegebenen Dreiecke lmn und dem Kreise, so daß Polyg. $abdefg > \triangle lmn$.

Bezeichnen wir den Perimeter dieses Polygons durch p, so ist es (§. 290) einem Dreiecke oqr gleich, welches

$rq = p$ zur Grundlinie und den kleinern Halbmesser $ch = or$ zur Höhe hat. Es ist daher (§. 346)

$$\triangle\, oqr : \triangle\, lmn = or \times qr : lm \times mn$$
$$= or \times p : lm \times P.$$

Da aber (§. 94) $ch < cd$ oder $or < lm$ und (§. 400) $p < P$, so ist auch $or \times p < lm \times P$, und daher $oqr < lmn$, oder Polyg. $abdefg < lmn$ welches der Annahme, daß $abdefg > lmn$ widerspricht. Folglich ist nicht lmn kleiner als der Kreis abd.

Zweiter Fall. Wäre $\triangle\, lmn >$ Kr. abd so kann man auf ähnliche Art wie in (§. 403) um den Kreis ein Polygon $a'b'd'e'f'g'$ beschreiben, welches kleiner als lmn ist. Dieses Polygon ist einem Dreiecke $o'q'r'$ gleich, welches den Perimeter $q'r' = p'$ zur Grundlinie und den Halbmesser $cd = o'r'$ zur Höhe hat, und es ist (§. 346)

$$o'q'r' ; lmn = o'r' \times r'q' : lm \times mn$$
$$= o'r' \times p' : lm \times P.$$

Da aber, $o'r' = cd = lm$ hingegen (§. 400) $p' > P$, so ist auch $o'r' \times p' > lm \times P$, und daher (§. 300) $o'q'r' > lmn$ oder Polyg. $a'b'd'e'f'g' > \triangle\, lmn$, welches der Annahme daß Polyg. $a'b'd'e'f'g < lmn$ widerspricht.

Da also das $\triangle\, lmn$ weder kleiner noch größer als der Kreis abc seyn kann, so ist es ihm gleich.

§. 408. Lehrsatz.

Wenn man aus den Scheitelpunkten O und O' zweier Winkel AOC, $A'O'C'$ Fig. 177) mit einerlei Halbmesser zwei Kreisbogen, AC, $A'C'$ beschreibt, so ist das Verhältniß der

zwischen den Schenkeln eines jeden Winkels enthaltenen Bogen dem dieser Winkel gleich.

Beweis. Man suche auf ähnliche Art, wie in (§. 339) das gemeinschaftliche Maaß der Bogen AC, $A'C'$, so sind diese entweder commensurabel oder incommensurabel.

Erster Fall. Sind sie commensurabel, ist etwa der gemeinschaftliche Bogen AB in AC, m (5) mahl und in $A'C'$, n (3) mahl enthalten, so ist,

$AC : A'C' = 5 . AB = 3 . AB = 5 : 3$ (§. 302)

Da ferner die Bogentheile AB, BD, DE ꝛc. desgleichen $A'B'$, $B'D'$, $D'C'$, einander gleich sind, so sind auch (§. 240) die Centriwinkel AOB, BOD, DOE ꝛc. desgleichen $A'O'B'$, $B'O'D'$, $D'O'C'$ einander gleich, und es ist also

$\angle AOC = 5 . AOB$ und $\angle A'O'C' = 3 . AOB$, und daher $AOC : A'O'C' = 5 . AOB : 3 . AOB = 5 : 3$.

Wird diese Proportion mit der obigen

$$AC : A'C' = 5 : 3$$

verglichen, so ist (§. 303)

$$\angle AOC : A'O'C' = AC : A'C'.$$

Zweiter Fall. Sind die Bogen AC, $A'C'$ incommensurabel, so kann doch das Verhältniß der Winkel AOC, $A'O'C'$ weder größer noch kleiner als das der Bogen $AC : A'C'$ seyn.

Denn wäre Fig. 178 $AOC : A'O'C' = AC : Ad$, wo der Bogen $Ad > A'C'$, so halbire man (§. 244) den Bogen AC und setze diese Halbirung fort, bis man (§. 335) auf einen Bogen kommt, der kleiner als $C'd$ ist. Man trage diesen Theil von A' auf $A'd$, so muß nothwendig ein Theilpunkt e zwischen C' und d fallen.

Zieht man nun $O'e$, so ist, weil AC, $A'e$ commensurabel sind (erster Fall)

$$AOC : A'O'e = AC : A'e.$$

Nun ist nach der Voraussetzung

$$AOC : A'O'C' = AC : A'd;$$

folglich ist (§. 327)

$$A'O'C' : A'O'e = A'd : A'e.$$

Nun ist $A'd > A'e$ und daher auch (§. 300) $A'O'C' > A'O'e$, welches unmöglich ist (Grundſ. 3).

Wäre $AOC : A'O'C' = AC : A'd'$,

wo $A'd' < A'C'$, so muß, wenn man wie im vorhergehenden verfährt, ein Theilpunkt e' zwischen d' und C' fallen, und es ist (erster Fall)

$$AOC : A'O'e' = AC : A'e'.$$

Nun ist auch

$$AOC : A'O'C' = AC : A'd';$$

folglich wäre (§. 327)

$$A'O'C' : A'O'e' = A'd' : A'e'.$$

Nun ist $A'e' > A'd'$ und daher auch (§. 300) $A'O'e' > A'O'C'$, welches (Grundſ. 3) unmöglich ist. Folglich ist

$$AOC : A'O'C' = AC : A'C'.$$

§. 409. Zusatz.

Jede zwei Peripheriewinkel FAB, BAC, Fig. 117. verhalten sich wie die zwischen ihren Schenkeln enthaltenen Bogen FB, BC desselben Kreises. Denn zieht man die Halbmesser EB, EC, so ist (§. 236)

$$FEB = 2. FAB, \quad BEC = 2. BAC.$$

Nun ist (§. 408) $FEB : BEC = FB : BC$; folglich ist auch (§. 301)

$$FAB : BAC = FB : BC.$$

§. 410. Zusatz.

Ist Fig. 179 $ACF = R = aCf$, also (§. 274) der Bogen AF oder af der vierte Theil der Peripherie oder ein Quadrant, so ist

$$ACB : ACF = AB : AF = ab : af.$$

§. 411. Zusatz.

Denkt man sich den rechten Winkel in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt, so wird der mit irgend einem Halbmesser zwischen den Schenkeln des rechten Winkels beschriebene Quadrant durch die Schenkel der Winkeltheile in eben so viele gleiche Theile zerlegt; und so viele Winkeltheile irgend ein Winkel ACB vom rechten enthält, eben so viele Bogentheile wird AB vom Quadranten ABF, und ab vom Quadranten abf enthalten. Der Bogen ist daher das natürlichste Maaß des Winkels.

§. 412. Willkührlicher Satz.

Man denkt sich gewöhnlich den rechten Winkel in 90 gleiche Winkeltheile zerlegt und nennt einen solchen Theil einen Winkelgrad. Eben so denkt man sich den mit irgend einem Halbmesser zwischen den Schenkeln des rechten Winkels beschriebenen Quadranten in 90, also die ganze Peripherie in 360 gleiche Theile zerlegt, und nennt einen solchen Theil einen Bogengrad.

Jeden Winkelgrad denkt man sich wiederum in 60 gleiche Theile getheilt, welche Winkelminuten heißen, und eben so denkt man sich jeden Bogengrad in 60 gleiche Bogen zerlegt, welche Bogenminuten heißen. Die Minute wird so wohl beim Bogen als beim Winkel in 60 Secunden, die Secunde in 60 Tertien rc. eingetheilt.

Man bezeichnet den Grad durch (°), die Minute durch ('), die Secunde durch ('') rc. So z. B. bedeutet 27°. 45'. 29''. 38''' einen Winkel oder Bogen von 27 Graden 45 Minuten 29 Secunden und 38 Tertien.

Ein Winkelgrad ist demnach $= \frac{1}{90} R$;

eine Winkelminute $= \frac{1}{60 . 90} R = \frac{1}{5400} R$,

eine Winkelsecunde $= \frac{1}{90 . 60 . 60} R = \frac{1}{324000} R$.

Bezeichnen wir die Peripherie eines Kreises durch P und den Quadranten durch Q, so ist ein Bogengrad $= \frac{1}{90} Q = \frac{1}{360} P$

eine Bogenminute $= \frac{1}{90 . 60} Q = \frac{1}{360 . 60} P$

$= \frac{1}{21600} P$

u. s. w.

Da hiernach die Winkelgrade, Minuten und Secunden, eben solche Theile des rechten Winkels, als die Bogengrade, Minuten rc. Theile des Quadranten sind so hat man den Unterschied zwischen Winkel= und Bogengraden nicht besonders anzumerken nöthig.

§. 413. Lehrsatz.

Wenn in ungleichen Kreisen ADF, adf Fig. 179. Die Winkel am Mittelpunkte ACD, acd einander gleich sind, so verhalten sich die Längen der zwischen ihren Schenkeln ent=

haltenen Bogen AD, ad, wie die Peripherien, oder wie die Halbmesser dieser Kreise.

Beweis. Es sei die Peripherie des aus C mit $CA = R$ beschriebenen Kreises $= P$. und die Peripherie das mit $Ca = r$ beschriebenen $= p$, so ist (§. 408).

$$\text{Bogen } AD : P = \angle\, ACD : 4\, R$$
$$\text{und Bogen } ad : p = \angle\, aCd : 4\, R$$

folglich ist (§. 303) Bog. $AD : P =$ Bog. $ad : p$ oder (§. 311)

$$\text{Bog. } AD : \text{Bog. } ad = P : p.$$

Nun ist (§. 402) $P : p = R : r$;

folglich ist. Bog. AD : Bog. $ad = R : r$.

§. 414. Lehrsatz.

Werden zwischen den Schenkeln zweier ungleichen Winkel acd, ACK Fig. 179 aus deren Scheitelpunkte mit verschiedenen Halbmessern Ca, CA die Kreisbogen ad, AK beschrieben, so sind die Längen dieser Bogen im zusammengesetzten Verhältnisse dieser Winkel und der ihnen zugehörigen Halbmesser. Es ist nehmlich

$$\text{Bog. } ad : \text{Bog. } AK = (\angle\, aCd : ACK) + (Ca : CA).$$

Beweis. Man lege an aC in C einen Winkel $aCl = aCd$ an, so ist (§. 239) $al = ad$, und (§. 408)

$$al : ak = \angle\, aCl : aCk,$$
$$\text{und (§. 413) } ak : AK = aC : AC$$

folglich (§. 329) $al : AK = (\angle\, aCl : aCK) + (aC : AC)$, Nun ist $al = ad$ und $\angle aCl = aCd$; folglich ist $ad : AK = (\angle aCd : aCK) + (aC : AC)$.

§. 415. Lehrsatz.

Wenn zwischen den Schenkeln zweier ungleichen Winkel ACL, aCk, Fig. 179 aus deren Scheitelpunkte mit ungleichen Halbmessern die Bogen AL, ak beschrieben werden, so ist das Verhältniß der Winkel ACL, ack aus dem directen Verhältnisse der Bogen AL, ak und dem umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser zusammengesetzt.

Beweis. Man mache den Winkel $aCl = ACL$, so ist (§. 408)

$$\angle ACL : ACK = \text{Bog. } AL : \text{Bog. } AK.$$

Es ist aber auch (§. 413)

$$\text{Bog. } AK : ak = AC : aC;$$

also Bogen $AK = \frac{AC}{aC} . a\,k$;

folglich ist, wenn wir diesen Werth von AK in obige Proportion setzen

$$\angle ACL : ACK = \text{Bog. } AL : \frac{AC}{aC}\, ak$$
$$= AL \,.\, aC : ak \,.\, AC$$
$$= (AL : ak) + (aC : AC).$$

§. 416. Lehrsatz.

Ausschnitte ACB, ACD Fig. 179 eines und desselben Kreises oder auch gleicher Kreise verhalten sich wie die ihnen zugehörigen Bogen AB, AD.

Beweis. Man suche das gemeinschaftliche Maaß beider Bogen.

Erster Fall. Sind sie commensurabel, so trage man deren gemeinschaftliches Maaß AE von A bis B, m (3) mahl, von A bis D, n (5) mahl und ziehe nach den Theilpunkten E, G, H gerade Linien; so sind, weil die Bogen AE, EG ꝛc. einander gleich sind, auch (§. 243) die Ausschnitte ACE, ECG, BCH ꝛc. einander gleich.

Es ist also Ausschn. $ACB = 3 \times ACE$ und
$$ACD = 5 \times ACE$$
und daher Ausschn. ACB : Ausschn. $ACD = 3 : 5$.
Nun ist auch
$$\text{Bogen } AB : AD = 3 : 5;$$
folglich ist (§. 303)
$$\text{Ausschn. } ACB : \text{Ausschn. } ACD = \text{Bog. } AB : \text{Bog. } AD.$$

Zweiter Fall. Sind die Bogen AB, AD incommensurabel, so läßt sich auf gleiche Art wie in §. 408 beweisen, daß das Verhältniß der Ausschnitte weder größer noch kleiner als das ihrer Bogen seyn kann.

§. 417. Zusatz.

Der Ausschnitt ACD Fig. 179 verhält sich zur ganzen Kreisfläche wie der Bogen AD zur ganzen Peripherie des Kreises. Denn zieht man auf CA den Perpendickel CF, so ist $ACF = R$, der Ausschnitt $ACFA$ ein Quadrant; und es ist (§. 416)
$$ACDA : ACFA = AD : AF$$
und daher (§. 301)
$$ACDA : 4\ ACFA = AD : 4\ AF,$$

wo 4 $ACFA$ die ganze Kreisfläche und 4 AF die ganze Peripherie ausdrückt.

§. 418. Lehrsatz.

Jeder Kreisausschnitt $dced$ Fig. 176 ist einem Dreieck lmt gleich, dessen Grundlinie mt der Länge des Bogens de, und dessen Höhe lm dem Halbmesser cd des Ausschnitts gleich ist.

Beweis. Man denke sich mt so weit verlängert bis mn der Peripherie P des Kreises Q gleich werde, zu welchem der Ausschnitt $dced$ gehört und ziehe ln: so ist (§. 341)

$$lmn : lmt = mn : mt = P : \text{Bog. } de;$$

Nun ist auch (§. 417)

$$Q : \text{Ausschn. } dced = P : \text{Bog. } de;$$

folglich ist (§. 303)

$$Q : \text{Ausschn. } dced = \triangle\, lmn : \triangle\, lmt.$$

Da aber (§. 407) $Q = \triangle\, lmn$, so ist auch (§. 300)

$$\text{Ausschn. } dced = \triangle\, lmt.$$

§. 419. Erklärung.

Zwei Kreisbogen al, AD Fig. 179 sind einander ähnlich, wenn der eine eben so viele Theile der ihm zugehörigen Peripherie enthält als der andere, oder wenn beide gleich viel Grade, Minuten, Secunden rc. enthalten.

Ausschnitte $ACDB$, $aCdb$ oder Abschnitte $AMLA$, $amla$ Fig. 179 sind einander ähnlich, wenn die ihnen zugehörigen Bogen ähnlich sind.

§. 420. Zusatz.

Wenn zwei Bogen ABD, aml Fig. 179 ähnlich sind, so müssen die ihnen zugehörigen Centriwinkel ACD, aCl einander gleich seyn. Denn wären diese ungleich, so könnten (§. 413) die Bogen nicht einerlei Anzahl Grade haben, also nicht einander ähnlich seyn.

§. 421. Lehrsatz.

Aehnliche Ausschnitte $ACDB$, $aClm$ Fig. 179 verhalten sich wie die Quadrate der ihren Bogen zugehörigen Halbmesser AC, aC oder wie die Quadrate der ihren Bogen zugehörigen Sehnen AD, al.

Auch ähnliche Abschnitte $ABDA$, $amla$ Fig. 179 verhalten sich wie die Quadrate der ihren Bogen zugehörigen Halbmesser AC, aC oder wie die Quadrate der diesen Bogen zugehörigen Sehnen AD, al.

Beweis. Erster Theil. Es seyen die Flächenräume der beiden Ausschnitte A und a; die Flächen der ihnen zugehörigen Kreise seyen Q, q; ihre Halbmesser R, r; so ist (§. 417)

$$A : Q = \text{Bog. } AD : P$$

und $$a : q = \text{Bog. } al : p;$$

da aber die Bogen AD, al ähnlich sind, und daher (§. 419) gleich viele Theile ihrer Peripherie enthalten, so ist (§. 300)

$$\text{Bog. } AD : P = \text{Bog, } al : p;$$

Folglich (§. 303) $A : Q = a : q$;
oder (§. 311) $A : a = Q : q$,
Nun ist (§. 403) $Q : q = R^2 : r^2$;
folglich ist (§. 303) $A : a = R^2 : r^2$.

Da ferner wegen der Aehnlichkeit der Bogen ABD, aml auch (§. 413) die Centriwinkel ACD,

aCl gleich sind, und überdieß (§. 36) $AC : CD = aC : Cl$, so sind (§. 360) die Dreiecke ACD, aCl ähnlich und es ist $AC : aC = AD : al$; folglich (§. 325)

$$ACq : aCq = ADq : alq; \text{ oder } R^2 : r^2 = AD^2 : al^2;$$

Nun war auch $A : a = R^2 : r^2$;
folglich ist (§. 303) $A : a = AD^2 : al^2$.

Zweiter Theil. Da $A : a = R^2 : r^2$, und auch (§. 378) wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ACD, aCl;

$$\triangle ACD : \triangle aCl = AC^2 : aC^2 = R^2 : r^2,$$

so ist (§. 303)

$$A : a = \triangle ACD : \triangle aCl;$$

folglich (§. 320)

$$A - \triangle ACD : a - \triangle aCl = A : a$$

oder Abschn. $ABDA$: Abschn. $amla = A : a$,
Nun ist $A : a = R^2 : r^2 = AD^2 : al^2$;
folglich ist (§. 303)

$$\text{Abschn.} = ABDA : \text{Abschn. } amla = R^2 : r^2 = AD^2 : al^2.$$

Vierter Abschnitt.

Von der Ausmessung der Linien, Winkel und der ebenen Figuren.

Erstes Kapitel.

Die Ausmessung der Linien und Winkel.

§. 422. Erklärung.

All unser Messen bestehet im Aufsuchen des Verhältnisses einer gegebenen Größe zu einer andern, ihr gleichartigen und als bekannt woraus gesetzten Größe, welche dann das Maaß heißt *).

Das Maaß einer Linie muß also eine Linie, das eines Winkels muß ebenfalls ein Winkel, und das Maaß einer Fläche muß eine Fläche seyn.

*) S. Umriß der mathem. Wissenschaften §. 2 und 3.

§. 423. Willkührlicher Satz.

Zur Ausmessung der Längen bedient man sich fast aller Orten ungefähr die Länge des Fußes eines erwachsenen Menschen, weshalb dieses Maaß selbst ein Fuß oder Schuh heißt. Dieser Fuß ist jedoch an verschiedenen Orten verschieden, und dessen Länge in jedem Orte durch die Gesetze bestimmt. Um daher das Fußmaaß eines Orts in das eines andern verwandeln zu können, hat man den Pariser Fuß, welcher einer der größten ist, in 144 gleiche Theile getheilt, und durch sorgfältige Untersuchungen bestimmt wie viele solcher Theile der Fuß eines jeden Orts enthält. Die Resultate dieser Untersuchungen findet man in verschiedenen Büchern zusammen getragen, unter andern in Vega's logarithmisch Trigonometrische Tafeln Bd. 2. Seite 345. daselbst findet man z. B.

Ein Aachner Fuß	= 128,5	Pariser Linien
" Amsterdammer	= 125,5	
" Berliner	= 127,3	
" Breslauer	= 126,0	
" Frankfurt a. M.	= 127,0	
" Leipziger	= 125,3	
" Rheinländischer	= 139,13	
u. s. w.		

§. 424. Willkührlicher Satz.

Die Unterabtheilungen der zum Längenmaaße angenommenen Einheit sind selbst an einem und demselben Orte nicht immer gleich. Bei geometrischen Berechnungen wird fast aller Orten der Fuß in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien, die Linie in 10 Scrupel rc. eingetheilt. Desgleichen nennt man eine Länge von 10 Fuß eine **Ruthe**.

Zur Bezeichnung dieser Maaße bedient man sich bei den Ruthen eines o; bei den Fußen eines Strichs ($'$); bei den Zollen zweier Striche ($''$) rc. so daß 128°. $7'$. $9''$. $4'''$. 6^{IV}. eben so viel als 128 Ruthen, 7 Fuß, 9 Zoll, 4 Linien und 6 Scrupel bedeutet; welche Bezeichnung jedoch nicht mit der gleichen Bezeichnung der Grade, Minuten, Secunden rc. verwechselt werden darf.

Diese Eintheilung der Ruthe in 10 Fuß, des Fußes in 10 Zoll rc. heißt die **Dezimaleintheilung**; im Gegensatze der an vielen Orten beim technischen Gebrauche üblichen **Duodezimaleintheilung**, bei welcher dieselbe Einheit höherer Gattung in 12 den Einheiten der nächst niedrigern Gattung gleiche Theile zerlegt wird; also die Ruthe in 12 Fuß, der Fuß in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien rc.

§. 425.

Um das Dezimalmaaß, (welches man auch wegen seiner Anwendung in der Feldmeßkunst das **Feldmaaß** nennt), und Duodezimalmaaß, welches auch das **Werkmaaß** heißt, mit einander vergleichen zu können, ist es zur bequemern Uebersicht, am vortheilhaftesten die Unterabtheilungen dieser Maaße in Tafeln zu bringen, und nimmt man bei beiden Arten von Maaßen die Ruthe gleich groß an, so entstehen hieraus folgende Tafeln:

Dezimal-Maaß.

Ruthe	Fuß	Zoll	Linien	Scrupel
1	10	100	1000	10000
	1	10	100	1000
		1	10	100
			1	10

Duodezimal-Maaß.

Ruthe	Fuß	Zoll	Linien	Scrupel
1	12	144	1728	20736
	1	12	144	1728
		1	12	144
			1	12

Aus diesen Tafeln ergiebt sich folgende Vergleichung zwischen dem Feldmaaß und Werkmaaß

10 Feld Fuß = 12 Werkfuß
100 Feld Zoll = 144 W. Zoll
1000 Feld Linien = 1728 W. Linien
10000 Feld Scrup. = 20736 W. Scrupel.

§. 426. Zusatz.

Hätte man bei beiden Arten von Maaßen den Fuß gleich groß angenommen, so würde aus den hierüber anzufertigenden Tafeln folgende Vergleichung hervorgehen.

10 F. Zoll = 12 W. Zoll
100 F. Linien = 144 W. Linien
1000 F. Scrup. = 1728 W. Scrupel
u. s. w.

§. 427. Aufgabe.

Dezimal und Duodezimal-Maaß in einander zu verwandeln.

Auflösung. Man bringe die gegebene Zahl auf ihre kleinste Gattung von Einheiten; suche in beiden vorstehenden Vergleichungstafeln, wie sich diese Gattung Einheiten des gegebenen Maaßes mit der gleichnahmigen Gattung des andern Maaßes vergleicht: so läßt sich das Gesuchte durch die Regeldetrie finden.

Erstes Beispiel. Man soll $87^{\circ}.\ 8'.\ 9''$ Dezimalmaaß in Duodezimalmaaß verwandeln, wenn bei beiden Arten von Maaßen die Ruthe gleich groß angenommen wird.

Man verwandle die gegebene Zahl in $8789^{d\,''}$; und da sich aus der vorstehenden Vergleichungstafel ergiebt, daß

$$100^{d\,''} = 144^{dd\,''},$$

wo *d* das Dezimal- und *dd* das Duodezimalmaaß bezeichnet, so findet man folgende Proportion:

$$100^{d\,''} : 8789^{d\,''} = 144^{dd\,''} : X^{dd\,''};$$

und folglich (§. 314)

$$X = \frac{8789 \times 144}{100} dd'' = 12656{,}16 dd''.$$

Die $12656^{dd''}$ werden in Fuß und Ruthen verwandelt, wenn man nach einander mit 12 Dividirt; und die $0{,}16^{dd''}$ werden in Linien, Scrupel ꝛc. verwandelt, wenn man sie wiederholentlich mit 12 multiplizirt. Es sind demnach

$$8789^{d''} = 12656{,}16^{dd''} = 87^{\circ}.\ 10^{I}.$$
$$8^{II}.\ 1^{III}.\ 11{,}04^{IV}.$$

Zweites Beispiel. Man soll, in der Voraussetzung, daß die Ruthen bei beiden Maaßen gleich groß sind, $87^{\circ}.\ 10^{I}.\ 8^{II}.\ 1^{III}.\ 11{,}04^{IV}$ Duodezimalmaaß in Dezimalmaaß verwandeln.

Auflösung. Man verwandle die gegebene Zahl durch wiederholte Multiplication durch 12 in lauter Scrupel; und läßt man die 87°, welche in beiden Fällen gleiche Größe haben, während der Verwandlung hinweg, so sind die

$10^{I}.\ 8^{II}.\ 1^{III}.\ 11{,}04^{IV} = 18455{,}04 dd^{IV}$; und durch die Proportion

$$20736 : 18455{,}04 = 10000^{dIV} : X^{dIV}$$

findet man nach geschehener Reduction

$$18455{,}04^{ddIV} = 8'9''d;$$

folglich

$$87^{\circ}.\ 10\ .\ 8^{I}.\ 1^{III}.\ 11{,}04^{ddIV} = 87^{\circ}.\ 8'.\ 9''d.$$

Anmerkung. Hätte man in beiden vorstehenden Beispielen den Fuß bei beiden Arten von Maaßen von gleicher Größe angenommen, so würde das Verfahren ungeändert bleiben; nur würde man ein anderes Resultat erhalten, weil in diesem Falle die Vergleichungszahlen der verschiedenen Maaße von den vorigen verschieden sind.

§. 428. Aufgabe.

Die Maaße verschiedener Länder und Provinzen in einander zu verwandeln.

Auflösung. Man suche nach den in (§. 423) angeführten Tafeln die Vergleichungszahlen zwischen den Maaßen beider Oerter, so läßt sich das gesuchte Resultat durch die Regeldetrie finden, wie folgendes Beispiel zeigt,

Es seyen 687 Berliner Fuß in Breslauer zu verwandeln, so ist (§. 423)

1 Breslauer Fuß = 126,0 Par. Linien
1 Berliner Fuß = 127,3 " "

folglich

1 Bresl. F. : 1 Berl. F. = 1260 : 1273;

also (§. 312)

1273 Bresl. F. = 1260 Berl. Fuß;

wodurch man folgende Proportion erhält,

1260 Berl. F. : 687 Berl. F.
= 1273 Bresl. F. : X Bresl. F.;

folglich $X = \frac{687 \cdot 1273}{1260} = 694{,}08$ Bresl. F.

Anmerkung. In mehreren Büchern, und besonders in Nelkenbrechers Taschenbuch der Münz-Maaß und Gewichtskunde, findet man diese Vergleichungszahlen berechnet. In wiefern es vortheilhaft sey bei diesen Rechnungen die Logarithmen anzuwenden, muß die Beschaffenheit der Rechnung selbst zeigen.

§. 429. Willkührlicher Satz.

Zur Ausmessung der Linien auf dem Felde bedient man sich in vielen Fällen eines hölzernen Stabs, auf welchem die einzelnen Fuße und deren Unterabtheilungen aufgetragen sind, welcher daher ein Maaßstaab heißt.

Denkt man sich auf gleiche Art, eine auf dem Papiere willkührlich gezogene gerade Linie, auf ähnliche Art wie der erwähnte Maaßstab eingetheilt, so werden die Theile dieser Linie eben das im Kleinen vorstellen, was die Theile jenes Maaßstabes im Großen angeben. Eine auf diese Art eingetheilte Linie nennt man, weil ihre Theile ungleich kleiner als beim wirklichen Maaßstabe ausfallen, einen verjüngten Maaßstab.

Es ist begreiflich, daß die Unterabtheilungen auf dem verjüngten Maaßstabe sehr klein ausfallen müssen, und öfter so klein, daß sie sich nicht unmittelbar mit dem gewöhnlichen Zirkelinstrument von demselben abnehmen lassen. Man hat daher ein Mittel erfunden dieses gleichwohl bewerkstelligen zu können, wie aus folgendem erhellen wird.

§. 430. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie, z. B. vier Zoll in sehr viele, etwa 1000, gleiche Theile zu theilen, oder einen verjüngten Maaßstab zu verfertigen.

Auflösung. Man ziehe Fig. 180 eine gerade Linie AB von der verlangten Größe, etwa vier Zoll, und theile sie in 10 gleiche Theile; in A und B errichte man die senkrechten AC und BD, trage auf jede derselben von A gegen C und von B gegen D 10 gleiche Theile von beliebiger Länge auf; durch diese Punkte ziehe man 10 gerade Linien, welche alle der AB parallel seyn werden. Auf die letzte derselben, nehmlich auf CD trage man wiederum von C gegen D einen der Theile der AB, welcher sich 10 mahl darauf tragen läßt, und genau bis D reichen muß. Die Theilungspunkte der beiden Linien AB, CD verbinde man durch die geraden Linien ab, 100 d, 200 e ꝛc. Man theile ferner den ersten Theil Ab und CA der gegebenen Linien AB und der ihr Parallelen CD in 10 gleiche Theile, und ziehe durch diese Theilungspunkte die Querlinien (Transrarsalen) am, 10 n ꝛc. Endlich schreibe man die Zahlen hin, wie sie in Fig. 180 zu sehen sind: so ist die Linie AB in 1000 gleiche Theile getheilt. Nehmlich 7 p enthält 7, a 10 enthält 10, a 30 enthält 30, 7 v enthält 37, a 100 enthält 100 und a 500 enthält 500 solcher Theile, deren die Linie AB tausend enhält; oder es ist $7\,p = \frac{7}{1000}\,BA$, $7\,v = \frac{37}{1000}\,BA$, u. s. w.

Beweis. In den Dreiecken abm und $a\,7\,p$ ist $ab : bm = a\,7 : 7p$ oder

$$ab : a7 = bm : 7p;$$

nun aber ist $ab : a7 = 10 : 7$ folglich ist (§. 303)

$$10 : 7 = bm : 7p.$$

Ferner ist $bm = \frac{1}{10}\,Ab = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}\,AB = \frac{1}{100}\,AB$; es ist also $10 : 7 = \frac{1}{100}\,AB : 7p$, und folglich $7p = \frac{7}{1000}\,AB$. Eben so leicht ist es einzusehen, daß $7v = \frac{37}{1000}\,AB$. Denn es ist $7v = 7p + pv$, nun aber ist $7p = \frac{7}{1000}\,AB$ und $pv = n\,30 = \frac{3}{10}\,aC = \frac{3}{100}\,CD = \frac{30}{1000}\,AB$;

folglich ist $7v = \frac{7}{1000} AB + \frac{30}{1000} AB = \frac{37}{1000} AB$ rc. Auf eben die Art sieht man ein, daß $xv = 537$ ist. Denn es ist $xv = x7 = 7p + pv' = 500 + 7 + 30 = 537$ rc.

§. 431. Zusatz.

Aus der eben erklärten Einrichtung dieses Maaßstab's, ergiebt sich die Art wie man von demselben eine verlangte Anzahl Theile mit dem gewöhnlichen Zirkel abnehmen könne. Will man z. B. 530 solcher Theile haben, deren 1000 auf AB gehen, so setze man die eine Spitze des Zirkels in 500 ein, und öffne denselben bis dessen andere Spitze 30 erreicht. Sollte eine Linie von 537 Theilen abgetragen werden, so eröffne man den Zirkel von x bis v. Wären endlich nur $536\frac{1}{2}$ Theile abzunehmen, so müßten die Zirkelspitzen in der Mitte der zwei Parallelen 66 und 77, und zwar die eine auf der senkrechten 500 h, und die andere Spitze auf der transversalen 30 v, eingesetzt werden, rc.

§. 432. Zusatz.

Wenn man umgekehrt wissen will, wie viel Theile eine gegebene gerade Linie auf diesem Maaßstabe abschneide, so fasse man diese Linien zwischen den Zirkel, und übertrage diese Oeffnung des Zirkels dergestalt auf die Linie CD, daß die erste Spitze auf einem der Theilungspunkte 200, 300 rc. eingesetzt ist, die zweite aber zwischen C und a eintrift. Sollte nun diese zweite Spitze zwischen C und a genau in einem Theilungspunkte z. B. in 30, und die erste in 500 eintreffen, so würde die gegebene Linie = 530 seyn. Sollte hingegen diese zweite Spitze zwischen zwei Theilungspunkte, z. B. zwischen 30 und 40 eintreffen, so rücke man mit dem Zirkel so lange parallel herunter, bis diese Spitze genau auf eine Transversale eintrift. Ereignet sich nun dieses in v, nehmlich wenn die eine Spitze in v auf der Transversale 30, die andere aber auf der Parallele 77 in x eintrift, so enthält die gegebene gerade Linie 537 Theile. Würden hingegen die Spitzen nur in der Mitte der Parallelen 66 und 77, jedoch auf der senkrechten 500 und der Transversale 30 eintreffen, so würde auch die gegebene Linie nur $536\frac{1}{2}$ = 536,5 Theile enthalten.

Sollte die gegebene Linie, welche auf diesem Maaßstabe zu untersuchen ist, größer als *CD* seyn, so wird nur der 2te, 3te oder 4te Theil davon auf den Maaßtab getragen, und diese Zahl mit 2, 3 oder 4 multiplizirt, um die Theile der ganzen gegebenen Linie zu erhalten.

§. 433.

Läßt man nun die Linie *Ca* 100 Fuß, 100 Zoll, 100 Linien rc. bedeuten, so ist *ABDC* ein verjüngter Maaßstab von 1000 Fuß, 1000 Zoll, 1000 Linien rc. Bedeutet *bm* eine Ruthe, so werden die Parallelen Theilchen im Dreiecke *amb* Dezimal-Fuß bedeuten. Bedeutet *bd* eine Ruthe und daher *bm* ein Dezimal-Fuß, so werden jene Theilchen Dezimalzoll bedeuten. Der angefertigte verjüngte Maaßstab giebt in diesem Falle einen Dezimalmaaßstab.

Wollte man einen Duodezimal-Maaßstab anfertigen, so bliebe das Verfahren ungeändert, nur daß man

Ab in 12 gleiche Theile zerlegen, und auf AC anstatt 10 nunmehr 12 beliebig gleiche Theile tragen müßte.

§. 434.

Mit Hülfe des verjüngten Maaßstabes ist man im Stande mehrere geometrische Aufgaben mit Leichtigkeit aufzulösen, wenn beim Resultat nicht die größte Schärfe verlangt wird. Will man z. B. das Verhältniß zweier gegebenen Linien in Zahlen finden, so untersuche man wie viel Theile eines und desselben verjüngten Maaßstabes eine jede dieser Linien enthält. Gesetzt die eine enthalte 457 und die ander 673 Theile, so ist ihr Verhältniß $= 457 : 673$.

Will man zwischen zwei gegebenen geraden Linien a, b, eine mittlere Proportionallinie x finden, so daß $a : x = x : b$, so messe man beide Linien a, b auf einerlei Maaßstab, multiplizire die gefundenen Zahlen in einander, ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel und nehme die Anzahl der Theile dieser Wurzel von demselben Maaßstabe, so hat man die gesuchte Linie. Es sey. z. B. $a = 381$, $b = 576$, so ist $x = \sqrt{ab} = \sqrt{381 \cdot 576} = 468{,}4$, wo für man $468\frac{1}{2}$ Theile vom Maaßstabe abnehmen kann.

Da sich eine jede Linie vom Maaßstabe abnehmen läßt, und daher als eine Zahl betrachtet werden kann, so läßt sich auch jede bei den geraden Linien vorkommende Aufgabe mit Hülfe des verjüngten Maaßstabes auflösen, sobald man den Werth der gesuchten Linie arithmetisch zu bestimmen weiß.

§. 435.

Zur Ausmessung der Winkel muß (§. 422) das

Maaß ebenfalls ein Winkel seyn, wozu man sich entweder des rechten Winkel selbst, oder eines Winkelgrades, Minute, Secunde ꝛc. bedient (§. 412). Um daher die Größe eines Winkels zu bestimmen, könnte man auf einer durchsichtigen Materie den rechten Winkel in seine einzelnen Grade, Minuten ꝛc. theilen, und dieses Maaß dergestalt auf den zu messenden Winkel legen, daß der Scheitelpunkt und ein Schenkel des Winkels mit dem des Maaßes zusammen fallen, da denn diejenige Theilungslinie des Maaßes, welche den zweiten Schenkel des gegebenen Winkels deckt, seine Größe in Graden, Minuten ꝛc. angeben würde.

Oder, weil (§. 411) der zwischen den Schenkeln eines Winkels beschriebene Kreisbogen eben so viele Theile des Quadranten enthält als der Winkel Theile des rechten, so könnte man die Größe eines Winkels *ACD* Fig. 179 bestimmen, wenn man zwischen seinen Schenkeln und den Schenkeln des rechten Winkels *ACF* mit einerlei Halbmesser die Bogen *AD*, *AF* beschreibt, und auf ähnliche Art wie in §. 339. das Verhältniß dieser Bogen sucht.

Man könnte aber auch den Bogen *AF* in seine einzelnen Grade, Minuten, Secunden ꝛc. theilen, und sehen wie viele dieser Bogentheile zwischen die Schenkel des Winkels *ACD* fallen. Da jedoch die Anwendung dieser Methode bei jedem einzelnen Winkel viel zu mühsam wäre, so hat man ein Instrument zur Messung der Winkel erfunden, welches daher ein Winkelmesser oder Transporteur heißt, dessen Einrichtung auf den angeführten Gründen beruhet, wie aus folgendem hervor gehet.

§. 436. Aufgabe.

Einen Transporteur zu construiren

Auflösung. Man nehme eine gerade Linie AB Fig. 181 von beliebiger Größe, halbire sie in D, und beschreibe mit DA, DB den Halbkreis ACB. Aus D errichte man auf AB den Perpendickel CD, so sind (§. 144) die Bogen AC, BC Quadranten.

Aus C schneide man mit dem Halbmesser CD den Bogen CL ab, so ist dieser $= \frac{1}{6}$ der ganzen Peripherie und hält also 60 Grad; folglich hat der Bogen BL 30 Grad. Eben so schneide man aus B mit demselben Halbmesser den Bogen BH ab, welcher 60° hat, und CH hält also 30°. Der Quadrant CB ist also in den Punkten H und L in drei gleiche Theile getheilt. Auf eben die Art verfahre man im Quadranten AC, welcher durch die Punkte F, K in drei gleiche Theile zerlegt wird.

Man theile dann jeden dieser Theile in zwei gleiche Theile, so wird der Quadrant in 6 gleiche Theile zerlegt, oder von 15° zu 15° abgetheilt seyn.

Jeden dieser Bogen zerlege man durchs Versuchen in drei gleiche Theile, indem uns die bisherigen Lehren kein Mittel an die Hand geben einen Bogen in 3 gleiche Theile zu theilen, so wird der Quadrant von 5° zu 5° abgetheilt seyn.

Zerlegt man nun jeden dieser Bogen wiederum in fünf gleiche Theile, so hat man den 90ten Theil des Quadranten oder einen Grad, und die halbe Pheripherie wird also in ihre 180 Grade abgetheilt seyn.

§. 437. Zusatz.

Stellt man sich mit der halben Peripherie ACB

Fig. 181 noch drei concentrische Kreise gezogen vor, um die einzelnen Grade desto bequemer abzählen zu können, und setzt man, daß *AB* die Schärfe eines Lineals *ABTZ* sey, welches mit dem Halbkreise aus einem Stücke bestehet, und worin der Mittelpunkt *D* dieses Halbkreises besonders bemerkt ist, so hat man einen Begriff von der Einrichtung des in (§. 435) erwähnten Transporteurs. Die beigesetzten Zahlen geben die Menge der Grade an und sind einmahl von *A* durch *C* nach *B*, und das andere mahl rückwärts von *B* durch *C* nach *A* geschrieben, so daß der Anfang und das Ende der Abtheilung in den Durchmesser *AB* fällt. Hierdurch giebt der Transporteur mit der Größe eines Winkels zugleich die seines Nebenwinkels an.

§. 438. Aufgabe.

Einen geradlinigten auf dem Papiere gezeichneten Winkel *RDS* Fig. 181 vermittelst des Transporteurs zu messen.

Auflösung. Man lege den Transponteur dergestalt an den gegebenen Winkel, daß sein Mittelpunkt *D* auf der Spitze des Winkels, und die Schärfe des Lineals *AB* auf einen Schenkel *DS* dieses Winkels falle. Man zähle nun die Grade auf dem Bogen des Transporteurs, welcher zwischen diesem und dem andern Schenkel *DR* des zu messenden Winkels fällt, indem man von *N* zu zählen anfängt: so hat man zugleich (§. 412) die Anzahl Grade, welche der zu messende Winkel enthält. In der Zeichnung hält dieser Winkel 45° die dabei stehende Zahl 135 giebt die Anzahl Grade seines Nebenwinkels *VDR*. Eben so bestimmt die

Zahl 124 die Größe des Winkels QDS; und die dabei stehende Zahl 56 die seines Nebenwinkels QDV.

Fällt bei dieser Messung der Schenkel DR zwischen zwei Theilstrichen des Transporteurs, so muß man nach dem Augenmaaße bestimmen, ob das, was der zu messende Winkel über einer Anzahl Grade enthält, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ Grad ist, und dieses, in Minuten verwandelt, zur beobachteten Anzahl Grade hinzusetzen.

§. 439. Aufgabe.

An eine gegebene gerade Linie DS und einem in ihr gegebenen Punkte D vermittelst des Transporteurs einen Winkel anzulegen, welcher eine gegebene Anzahl Grade und Minuten enthalte.

Auflösung. Man lege den Transporteur dergestalt an DS an, daß dessen Mittelpunkt auf D, und die Schärfe des Lineals an DS zu liegen komme. Man zähle nun, von DS angerechnet die gegebene Anzahl von Graden fort, z. B. 45°, wenn der Winkel so viele Grade enthalten soll, und steche an dem Bogen des Transporteurs, bei dem letzten der gezählten Grade, also hier bei dem 45ten einen Punkt x ab; ziehe durch D und x eine gerade Linie: so wird (§. 412) der Winkel xDS der verlangte seyn.

Sind aber außer den Graden auch Minuten gegeben, etwa 10, 15, 20 Minuten, so berechne man, welchen Theil des Grades diese Minuten ausmachen, ob sie nehmlich $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{3}$ Grad ausmachen, und rükke nach dem Augenmaaße den abgestochenen Punkt x um eben so viel auf dem nächsten Theilpunkte weiter.

§. 440. Aufgabe.

Die Periepherie eines Kreises abc Fig. 130 vermittelst des Transporteurs in eine gegebene Anzahl, (etwa $n = 5$) gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man dividire 360° durch die Anzahl ($n = 5$) der Theile, worin die Peripherie zerlegt werden soll. Sodann nehme man in der Peripherie einen beliebigen Punkt a an, ziehe den Halbmesser Oa, und lege (§. 439) an Oa in O einen Winkel aOe an, welcher die gefundene Anzahl Grade hat, so wird (§. 412) der Bogen ale eben so viele Grade haben, und daher der verlangte $n$te Theil der Peripherie seyn. Trägt man nun die Sehne ae n mahl (5 mahl) herum, so wird der Kreis in n (5) gleiche Theile zerlegt seyn.

§. 441. Zusatz.

In so weit sich nun vom Transporteur jede gegebene Anzahl von Graden, Minuten, Secunden rc. abtragen läßt, kann man auch mit Hülfe desselben in und um jeden gegebenen Kreis ein reguläres Polygon von jeder gegebenen Anzahl Seiten beschreiben, indem (§. 270 und 279) die Einschreibung oder Umschreibung der regulären Polygone beim Kreise lediglich von der Eintheilung der Peripherie in eine jede gegebene Anzahl gleicher Theile abhängt.

§. 442. Zusatz.

In eben der Voraussetzung, daß man vom Transporteur jede beliebige Anzahl von Graden, Minuten, Secunden rc. abnehmen könne, läßt sich auch auf jede gegebene gerade Linie ein reguläres Polygon von jeder beliebigen Seitenzahl setzen.

Es sey z. B. auf die Linie *ed* Fig. 130. ein reguläres Fünfeck zu setzen: so berechne man dessen Polygonwinkel, Dieser beträgt (§. 139) $\frac{6R}{5} = \frac{6 \cdot 90^\circ}{5} = 108^\circ$; seine Hälfte ist 54°.

Man lege nun (§. 439) an jeden der Endpunkte *e*, *d* der gegebenen Linie einen Winkel *deO*, *edO* an, welcher dem halben Polygonwinkel gleich ist, also hier 54°: so müssen (§. 284) die Linien *eO*, *dO* einander im Mittelpunkte *O* des Polygons schneiden. Beschreibt man nun aus *O* mit dem Halbmesser *Oe* oder *Od* einen Kreis, so wird sich die Seite *ed* so viel mahl in diesem Kreise herumtragen lassen als das Polygon Seiten haben soll (hier 5 mahl) und *abcde* wird das verlangte reguläre Fünfeck seyn.

§. 443. Zusatz

Um bei der Construction der in §. 440, 441, 442 aufgelösten Aufgaben der jedesmaligen Berechnung des Centri- und Polygonwinkels überhoben zu seyn, kann man sich, danach (§. 139.) jeder Polygonwinkel eines Polygons von *n* Seiten $= 2R - \frac{4R}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$

und §. (288) jeder Centriwinkel $= \frac{4R}{n} = \frac{360^\circ}{n}$, ein für alle mahl eine Tabelle anfertigen, worin diese Winkel, so wie die halben Polygonwinkel der am häufigsten vorkommenden Polygone berechnet sind wie nachstehendes Schema zeigt.

Nahmen der Vielecke.	Centriwinkel.	Polygonwinkel.	Halbe Polygonwinkel.
Dreieck .	120°. — . —	60°. — . —	30°. — . —
Viereck .	90. — . —	90. — . —	45. — . —
Fünfeck .	72. — . —	108. — . —	54. — . —
Sechseck	60. — . —	120. — . —	60. — . —
Siebeneck	$51°.25'.42\frac{6}{7}''$	$128.34'.17\frac{1}{7}''$	$64.\ 17'.8\frac{4}{7}''$
Achteck .	45. — . —	135. — . —	67. 30 —

u. s. w.

§. 444. Zusatz.

Wendet man diese Art der Winkelmessung auf die Lehre von den Dreiecken an, und nimmt also nicht wie früher hin den rechten Winkel selbst, sondern seine einzelnen Grade, Minuten rc. als Einheit, so lassen sich alle diese Sätze anders vortragen, wenn man 90° anstatt des Ausdrucks: rechter Winkel; 180° anstatt des Ausdrucks: zwei rechte, 60° anstatt des Ausdrucks: zwei Drittheil rechte rc. setzt. So z. B. kann der §. 68 auch folgendermaßen vorgetragen werden:

Jede zwei Nebenwinkel betragen zusammen 180°.

71. Alle Winkel, welche um einen Punkt herum liegen betragen zusammen 360°.

§. 130. In jedem Dreieck beträgt die Summe aller drei Winkel 180°, und eben so alle in §. 131 hieraus gefolgerten Sätze.

Auch kann man mit Hülfe des Transporteurs und verjüngten Maaßstabes aus dreien ein Dreieck bestim=

menden, und in Zahlen gegebenen Stücken, die übrigen unbekannten Stücke in Zahlen angeben, wenn man die gegebenen Längen von einem beliebigen Maaßstabe abnimmt, aus diesen und den gebenen Winkeln nach den Lehren des ersten Abschnitts ein Dreieck construirt, und die übrigen Längen dieses Dreiecks nach demselben Maaßstabe mißt. Es sey z. B. aus drei Linien, von denen die eine 6° 7'. 2'', die andere 4°. 8'. 9'' und die dritte 6°. 3'. 7'' lang seyn soll, ein Dreieck zu construiren: so nimmt man diese Längen vom einerlei verjüngten Maaßstabe ab, construirt daraus (§. 100) ein Dreieck, und mißt dessen Winkel mit Hülfe des Transporteurs: und eben so verfährt man in den übrigen Fällen.

Zweites Kapitel.

Von der Ausmessung ebener Figuren.

§. 445. Erklärung.

Zur Ausmessung einer Fläche muß (§. 422) das Maaß ebenfalls eine Fläche seyn *). Man wählt hierzu gemeiniglich ein Quadrat, dessen Seiten bald einen Zoll, bald einen Schuh, bald eine Ruthe, und zuweilen auch bei Bestimmung sehr großer Flächen, eine Meile beträgt. Die erste Fläche heißt ein Quadratzoll, die zweite ein Quadratfuß, die dritte eine Quadratruthe ꝛc.

Eine Fläche ausmessen heißt also bestimmen, wie viel mahl die als Maaß angenommene Fläche in der auszumessenden enthalten sey, oder wie viel Quadratruthen, Quadratfuß, Quadratzoll ꝛc. sie enthält.

*) S. Umriß der mathematischen Wissenschaften §. 3 und 4.

Man bezeichnet die Quadratruthe durch ($\square^\circ$), den Quadratfuß durch ($\square'$), den Quadratzoll durch ($\square''$) rc., indem man nehmlich dem Zeichen $\square$ die Bezeichnung der Längenmaaße oberhalb beisetzt. Es bedeutet demnach 5 $\square^\circ$, 89 $\square'$, 47 $\square''$ u. s. w. 5 Quadratruthen, 89 Quadratfuß, 47 Quadratzoll u. s. w.

§. 446. Zusatz.

Die Unterabtheilungen der Flächenmaaße stehen mit den der Längenmaaße in der engsten Verbindung. Es sey z. B. *ABCD* Fig. 182 eine Quadratruthe, so ist *AB* eine Längenruthe. Ihr zwölfter *AE* ist dann ein Duodezimalzoll, und die Fläche *AEFG* ein Duodezimalquadratzoll.

Nun sind (§. 379) die Quadrate *AEFG*, *ABCD*, als ähnliche Figuren im zweifachen Verhältnisse ihrer Seiten *AE*, *AB*, und da $AE : AB = 1 : 12$, so ist

$$AEFG : ABCD = 2 \,.\, (1 : 12) = 1^2 : 12^2$$
$$\text{oder } 1\,\square' : 1\,\square^\circ = 1 : 144.$$

und multiplizirt man die äußeren und mittleren Glieder in einander, so ist

$$1\,\square^\circ = 144\,\square'.$$

Dieß lehrt auch der bloße Anblick der Figur. Denn der Quadratfuß ist in dem Rechtecke *GB* zwölf mahl enthalten; und da die Quadratruthe zwölf solcher Rechtecke wie *BG* enthält, so wird sie 12 x 12 oder 144 Quadrate wie *AEFG* enthalten.

Wenn *AB* Fig. 182 einen Längenfuß, und daher *AE* einen Duodezimalzoll bedeutet, so ist *ABCD* ein Duodezimalquadratfuß, *AEFG* ein Duodezimalquadratzoll, und durch ähnliche Schlüsse wie im Vorhergehenden findet man

$1\,\square' = 144\,\square''$; $1\,\square'' = 144\,\square'''$ u. s. w.

Die Quadratruthe hat demnach $144\,\square' = 144 \cdot 144\,\square'' = 20736\,\square''$ und $20736 \cdot 144 = 2985984\,\square'''$.

Folgende Tabelle erleichtert sehr den Ueberblick der verschiedenen Unterabtheilungen des Duodezimalquadratmaaßes.

$\square^\circ$	$\square'$	$\square''$	$\square'''$
1	144	20736	2985984
	1	144	20736
		1	144

Stellt man eben die Betrachtungen bei dem Dezimalmaaße an, so ergiebt sich leicht, daß, weil alsdann die Seite der Quadratruthe zehn der Seite des Quadratfußes gleiche Theile hat, folgende Proportion statt haben muß

$$1\,\square' : 1\,\square^\circ = 1^2 : 10^2 = 1 : 100$$

mithin (§. 312)

$$1\,\square^\circ = 100\,\square',$$

und man sieht leicht ein, daß der Dezimalquadratfuß 100 Dezimal-Quadratzoll, der Quadratzoll 100 Quadratlinien u. s. w. enthält. Diese Unterabtheilungen lassen sich folgendermaaßen ordnen.

$\square^{\circ}$	$\square'$	$\square''$	$\square'''$
1	100	10000	1000000
	1	100	10000
		1	100

Aus der Zusammenstellung dieser Tafel mit der vorigen, erhält man, wenn das Dezimalquadratmaaß durch $d\square$ und das Duodezimalmaaß durch $dd\square$ bezeichnet wird, und wenn die Längenruthe bei beiden Arten von Maaßen gleich groß angenommen wird, daher auch (§. 150) die Quadratruthen als gleich angenommen werden, nachstehende Vergleichungen.

$$100\ d\ \square' = 144\ dd\ \square'$$
$$10000\ d\ \square'' = 20736\ dd\ \square''$$
$$1000000\ d\ \square''' = 2985984\ dd\ \square'''$$

u. s. w.

§. 447. Aufgabe.

Eine im Dezimalquadratmaaße ausgedrückte Zahl in Duodezimalquadratmaaß, und umgekehrt zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle die vorgelegte Zahl in ihre kleinste Gattung von Flächen-Einheiten; suche aus den vorhergehenden Vergleichungstafeln, wie viel eine bestimmte Anzahl Einheiten dieser Benennung des einen Maaßes in den von gleicher Banennung im andern Maaße betragen, so läßt sich das gesuchte durch die Regeldetrie finden.

Es seyen z. B. 75 □° 89 □′ 97 □″ Dezimalmaaß in Daodezimalmaaß zu verwandeln: so erwäge man, daß 75 □° = 7500 □′ zu diesen noch 89 □′ hinzu gesetzt, giebt 7589 □′. Diese in Quadratzolle verwandelt, erhält man 758900 □″, welche mit den 97 □″ zusammen genommen 758997 □″ betragen. Da nun nach obiger Vergleichungstafeln 10000 *d* □″ = 20736 *dd* □″, so erhält man folgende Proportion:

$$\overset{d\,\square''}{10000} : \overset{d\,\square''}{758997} = \overset{dd\,\square''}{20736} : \overset{dd\,\square''}{X},$$

mithin ist

$$X = \frac{758997 \cdot 20736}{10000} = 1573856{,}1792\ dd\,\square''$$

oder, wenn man wiederholentlich mit 144 dividirt, erhält man

75 □°. 129 □′. 80,18 □″ Duodezimalmaaß

Man hätte auch die 75 □°, welche bei beiden Maaßen gleich groß sind, während der Rechnung hinweg lassen, und nur die 89 □′. 97 □″ verwandeln können, wodurch man dasselbe Resultat auf leichtere Art erhalten könnte.

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn Duodezimalquadratmaaß in Dezimalquadratmaaß verwandelt werden soll.

§. 448. Aufgabe.

Jede gegebene Anzahl Quadratfuße eines Orts in die eines andern zu verwandeln, wenn das Verhältniß des Längenfußes dieser beiden Oerter bekannt ist. Es seyen z. B.

698 Bresl. □' in Rheinländische zu verwandeln.

Auflösung. Aus dem Verhältnisse der Längenfuße beider Oerter suche man auf nachstehende Art eine Vergleichung ihrer Flächenfuße zu erhalten, worauf die verlangte Verwandlung nach der Regeldetrie geschehen kann.

Da nehmlich

1 Bresl. F : 1 Rheinl. F. = 126 : 139.13

und (§. 379) jede zwei Quadrate im zweifachen Verhältniß ihrer Seiten stehen, so ist

1 Bresl. □' : 1 Rheinl. □' = $126^2 : 139{,}13^2$

folglich (§. 312)

$139{,}13^2$ Bresl. □' = 126^2 Rheinl. □';

und daher

$139{,}13^2$ Bresl. □' : 698 Bresl. □' =
126^2 Rheinl. □' : X Rheinl. □'

folglich

$$X = \frac{126^2}{139{,}13} \times 698 \text{ Rheinl. □'}$$

Wenden wir hierbei die Logarithmen an, so ist

$$\log X = 2 \log 126 + \log 698 - 2 \log 139{,}13$$
$$= 2{,}7577548;$$

also $X = 472{,}24$ Rheinl. □'.

§. 449. Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Rechtecks $ABCD$ Fig. 183 zu berechnen.

Auflösung. Man messe zwei an einander gränzende Seiten AB, BC, desselben nach einerlei Maaß, d. h. man drücke beide zugleich in Fußen oder beide zugleich in Zollen 2c. aus; multiplizire diese beiden Zahlen in einander, so giebt das Product an wie viele mahl ein Quadrat, von eben der Benennung in dem Rechtecke $ABCD$ enthalten ist.

Ist z. B, $AB = 6'$ und $BC = 4'$, so zeigt das Product $6.\ 4 = 24$ an, daß der als Maaß genommene Quadratfuß $AEFG$ im Rechtecke $ABCD$ 24 mahl enthalten ist.

Beweis. Es sey die Grundlinie des Rechtecks $AB = g$, dessen Höhe $BC = h$; sein Flächeninhalt $= Q$. Ferner sey die Seite AE des als Flächenmaaß angenommenen Quadrats $AEFG = m$; so ist auch die Höhe AG dieses Quadrats $= m$, und bezeichnen wir dessen Flächeninhalt durch q, so ist (§. 344)

$$\overset{\square F}{m.\ m : g.\ h} = \overset{\square F}{q : Q}$$

Da aber $m = 1$, indem m die Längen = Einheit vorstellt, und $q = 1\ \square F$, so ist

$$1 : g.\ h = 1\ \square F' : Q\ \square';$$

folglich ist (§. 312)

$$Q = g.\ h \text{ Quadratfuß.}$$

Die Richtigkeit des hier in aller Strenge bewiesenen Satzes, ergiebt sich auch beim bloßen Anblick der Figur, wenn man erwägt, daß das Quadrat $AEFG$ in dem Streifen $ABHG$ so viel mahl enthalten ist, als die Grundlinie AB Längen = Einheit hat (hier 6 mahl); und da daß Rechteck vier solcher Streifen hat, so viele nehmlich als die Höhe BC Einheiten enthält, so muß das Rechteck $6.\ 4 = 24$ solcher Quadrate wie $AEFG$ enthalten.

§. 450. Zusatz.

Der Inhalt Q eines Quadrats dessen Seite $= s$

wird gefunden, wenn man die Zahl, welche die Länge einer seiner Seiten angiebt durch sich selbst multiplizirt; oder $Q = s. s$ weil jedes Quadrat als ein Rechteck von gleichen Seiten anzusehen ist. Ist z. B. die Seite eines Quadrats im Dezimalmaaß $= 7°,9' = 7,9°$, so ist dessen Inhalt $Q = 7,9 \times 7,9 \,\square° = 62,41 \,\square°$ $= 62 \,\square°.\ 41 \square°$.

§. 451. Zusatz.

Aus $Q = g.\ h$ folgt, (Grunds. 14)

$$g = \frac{Q}{h} \text{ und } h = \frac{Q}{g}$$

Wenn daher der Inhalt eines Rechtecks nebst seiner Höhe gegeben ist, so findet man die Basis wenn man den Flächenraum durch die Höhe dividirt. Auf gleiche Art findet man aus dem Inhalte nebst der Grundlinie die Höhe.

Eben so folgt aus $s. s = Q$

$$s = \sqrt{Q}.$$

Wenn daher der Flächeninhalt eines Quadrats gegeben ist, so findet man seine Seite, wenn man aus der Zahl, welche den Flächeninhalt angiebt die Quadratwurzel zieht. Ist z. B. der Inhalt eines Quadrats $= 62 \,\square°.\ 41 \,\square' = 62,41 \,\square°$, so ist dessen Seite

$$s = \sqrt{62,41} = 7,9° = 7°.\ 9'.$$

§. 452. Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines schiefwinklichten Parallelogramms *ACDB* Fig. 146 zu berechnen.

Auflösung. Man messe dessen Grundlinie $CD = g$ und dessen Höhe $DK = h$ nach einerley Maaß;

multiplizire beide in einander, so giebt deren Product $CD \times DK = g.\, h$ den verlangten Flächeninhalt Q; oder $Q = g.\, h$.

Beweis. Man fälle von C und D auf AB die Perpendickel CI, DK, so ist (§. 155) das Rechteck $ICDK$ dem Parallelogramm $ABDC$ gleich. Nun ist (§. 449) $ICDK = g.\, h$; folglich ist auch der Inhalt des Parallelogramms $ABDC$ oder $Q = g.\, h$

Hieraus folgt, wie in (§. 449)

$$g = \frac{Q}{h};\ h = \frac{Q}{g}.$$

I. Beispiel. Es sey $g = 728^\circ.\ 7'.\ 3''$; $h = 24^\circ.\ 3'.\ 6''$ Dezimalmaaß, so kann $g = 728{,}73^\circ$ und $h = 24{,}36^\circ$ gesetzt werden, und dieß giebt

$$Q = 728{,}73 \times 24{,}36 = 17751{,}8628\ \square^\circ;$$

folglich ist der gesuchte Inhalt $17751\,\square^\circ,\ 86\,\square'.\ 28\,\square''$.

Anmerkung. Wäre $g = 728'.\ 7''.\ 3'''$; $h = 24'.\ 3''.\ 6'''$ Dezimalmaaß, so wäre $Q = 17751{,}8628\ \square'$ oder $17751\ \square'.\ 86\ \square''$, $28\ \square'''$, wobei $17751\ \square'$ eben so viel als $177\ \square^\circ$. $51\ \square'$ betragen.

II. Beispiel. Es sey $g = 291^\circ\ 5'.\ 11''$, $h = 21^\circ\ 3'\ 7''$ Duodezimalmaaß; so verwandle man zuförderst die Fuße, Zoll u. s. w., welche hinter den Ruthen stehen in Dezimalbrüche, indem man die Fuße durch 12, die Zolle durch 144 ꝛc. dividirt.

Da nun $\frac{5}{12} = 0{,}416666$, und $\frac{11}{144} = 0{,}076389$, so ist $g = 291^\circ,\ 493055$ und auf eben die Art findet man $h = 21^\circ,\ 298611$, folglich

$$Q = 291{,}493055 \times 21.298611.$$
$= 6208{,}397188\ \square^\circ$ oder $6208\ \square^\circ.\ 57\square'\ 28\ \square''$;

indem man den Dezimalbruch 0,397188 nach einander mit 144 multiplizirt.

§. 453. Aufgabe.

Den Flächenraum eines gegebenen Dreiecks *ABC* Fig. 163 zu finden.

Auflösung. Man nehme eine beliebige Seite *AB* desselben als Grundlinie an, fälle hierauf die Höhe *CD*. Multiplizire die Zahlen in einander, welche die Längen der Grundlinie und Höhe in einerlei Maaß ausgedrückt angeben, und Dividire deren Product durch 2. Oder wenn wir $AB = g$, $CD = h$ setzen, und den Flächenraum des Dreiecks durch F bezeichnen, ist

$$F = \frac{g \cdot h}{2}.$$

Beweis. Jedes Dreieck ist (§. 164) der Hälfte eines Parallelogramms von derselben Grundlinie und Höhe gleich. Nun ist (§. 452) der Inhalt eines solchen Parallelogramms $= g \cdot h$ folglich ist der des Dreiecks $= \frac{g \cdot h}{2}$.

§. 454. Zusatz.

Aus $F = \frac{g \cdot h}{2}$ folgt (Grundſ. 12)

$2 F = g \cdot h$ und daher (Grundſ. 14)

$$g = \frac{2 \cdot F}{h};\ h = \frac{2 \cdot F}{g}.$$

Wenn daher der Flächenraum und die Grundlinie eines Dreiecks bekannt ist, so findet man dessen Höhe, wenn man den doppelten Flächenraum durch die Grundlinie dividirt; wobei jedoch das Längenmaaß der Grundlinie mit der Fläche des Dreiecks einerlei Benennung haben muß.

Auf gleiche Art kann man aus dem Flächeninhalte und der Höhe eines Dreiecks seine Grundlinie finden.

Beispiel I. Es sey $F = 127 \square^\circ.\ 32 \square'.\ 57 \square''$ Dezimalmaaß, also $= 127{,}3257 \square^\circ$ und $g = 37^\circ.\ 7'.\ 5'' = 37{,}75^\circ$, so ist

$$h = \frac{2 \times 127{,}3257}{37{,}75} = \frac{254{,}6514}{37{,}75} = 6{,}745^\circ$$

oder die gesuchte Höhe des Dreiecks ist 6 Ruthen, 7 Fuß, 4 Zoll, 5 Linien Dezimalmaaß.

Beispiel II. Es sey im Duodezimalmaaße $F = 213 \square^\circ\ 67 \square'.\ 37 \square''$; $g = 31^\circ.\ 9'.\ 3''$ so verwandle man zuförderst die Quadratfuße und Quadratzolle in Dezimalbrüche der Quadratruthe, indem man die Quadratfuße durch 144, die Quadratzolle hingegen durch 20736 dividirt, so wird

$$F = 213{,}467062 \square^\circ, \text{ und } g = 31{,}770833^\circ$$

und hieraus folgt.

$$h = \frac{2 \times 213{,}467062}{31{,}770833} = \frac{426{,}934124}{31{,}770833} = 13{,}438.$$

oder, wenn man hierbei den Dezimalbruch nach und nach mit 12 multiplizirt ist $h = 13^\circ.\ 5'.\ 3''$ Duodezimalmaaß.

§. 455. Aufgabe.

Den Inhalt eines Trapeziums *ABDC* Fig. 149, worin die beiden Seiten *AC*, *BD* parallel sind, zu berechnen.

Auflösung. Man multiplizire die halbe Summe der parallelen Seiten *AC*, *BD* durch die Höhe *ON* des Trapeziums, so wird dieses Product den verlangten Inhalt geben. Setzen wir also $BD = G$, $AC = g$ und $MN = h$, so ist der Flächenraum

$$F = h \, . \, \frac{G + g}{2}$$

Beweis. Zieht man die Diagonale AD, so wird das Trapezium in zwei Dreiecke ABD, ACD zerlegt, der Inhalt des ersten ist (§. 453) $= \frac{h \, . \, G}{2}$, und der des Dreiecks ACD ist, wenn wir $AC = g$ als die Grundlinie betrachten $= \frac{h \, . \, g}{2}$;

folglich ist $ABD + ACD = \frac{h \, . \, G}{2} + \frac{h \, . \, g}{2}$

$$= \frac{h \, . \, G + h \, . \, g}{2} = \frac{h \, (G + g)}{2}$$

Beispiel. Es sey $G = 625'. \, 9''. \, 8'''$; $g = 123'. \, 7''. \, 5'''$; $h = 22'. \, 3'. \, 1'''$, so ist

$$F = 22{,}31 \left(\frac{625'98 + 123',75}{2} \right) =$$

$$22{,}31 \times 374{,}865 \, \square' = 8363{,}23815 \, \square' \text{ oder}$$
$$F = 83 \, \square^{\circ}. \, 63 \, \square' \, 23 \, \square''. \, 81 \, \square'''.$$

§. 456. Zusatz.

Aus $F = h. \, \frac{G + g}{2}$ folgt ferner

$$2 \, F = h \, (G + g), \text{ also}$$

$$h = \frac{2 \, F}{G + g}; \quad G = \frac{2 \, F}{h} - g \text{ und}$$

$$g = \frac{2 \, F}{h} - G.$$

§. 457. Zusatz.

Zieht man durch die Mitte O der Linie AD Fig. 149. den Paralellen Seiten AC, BD eine parallele Linie KL, so ist diese $= \frac{AC + BD}{2}$. Denn da $KL \# AC \# BD$, so ist (§. 358)

$$AD : AO = BD : KO = AC : OL.$$

Da nun $AO = \frac{1}{2} AD$, so ist auch (§. 300)

$$KO = \tfrac{1}{2} BD \text{ und } OL = \tfrac{1}{2} AC;$$

folglich $KO + OL$ oder $KL = \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} AC$

$$= \frac{BD + AC}{2} = \frac{G + g}{2}.$$

Man findet daher auch den Inhalt eines Trapeziums mit zweien Parallelen Seiten, wenn man die durch die Mitte O seiner Diagonale AD geführte Parallele KL mit der Höhe MN desselben multiplizirt.

§. 458. Aufgabe.

Ein jedes gegebenes Viereck $ABCD$ Fig. 184 zu berechnen.

Auflösung. Man ziehe die Diagonale BD des gegebenen Vierecks, nehme sie zur gemeinschaftlichen Grundlinie der Dreiecke ABD, BCD, worin das Viereck $ABCD$ zerfällt worden, und fälle auf diese Grundlinie aus A und C die Perpendickel AE, CF, welche für die Höhen dieser Dreiecke angenommen werden: so ist wenn $BD = g$, $AE = H$ und $CF = h$ gesetzt wird. (§. 453)

$$\triangle ABD = \frac{g \cdot H}{2}; \quad \triangle BDC = \frac{g \cdot h}{2};$$

folglich $ABD + CBD$, oder der Flächenraum des Vierecks $ABCD$

$$F = \frac{g \cdot H}{2} + \frac{g \cdot h}{2} = g\left(\frac{H+h}{2}\right).$$

oder der Flächenraum eines Vierecks wird gefunden, wenn man eine beliebige Diagonale desselben durch die halbe Summe der Entfernungen der beiden übrigen Scheitel des Vierecks von dieser Diagonale multiplizirt.

§. 459. Zusatz.

Aus $F = g.\ \frac{H+h}{2}$ folgt

$2\,F = g.\ (H + h)$, und daher

$$g = \frac{2\,F}{H+h};\ H = \frac{2\,F}{g} - h;\ h = \frac{2\,F}{g} - H;$$

woraus sich immer von den vier Größen F, g, H, h, eine bestimmen läßt, wenn drei derselben bekannt sind.

§. 460. Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines jeden Vielecks *ABCDEFG* Fig. 185 zu berechnen.

Auflösung. Man zerlege das Vieleck durch Diagonalen in lauter Dreiecke, berechne alle diese Dreiecke, indem man die Grundlinie eines jeden mit seiner halben Höhe multiplizirt, und addire alle gefundenen Inhaltszahlen zusammen, so erhält man den Inhalt des Vielecks.

Zur Verkürzung der Arbeit kann man jedesmal, wo es sich thun läßt, zweien Dreiecken eine gemeinschaftliche Grundlinie geben. So z. B. kann man das

Vieleck $ABCDEFG$ Fig. 185 in die Dreiecke BAG, BCG, DCG, DFG, DEF zerlegen, von denen das erste und zweite die Linie BG, das dritte und vierte aber DG zur gemeinschaftlichen Grundlinie haben. Man hat alsdann, wenn die übrigen Perpendickel gezogen werden.

$$\text{Polyg. } ABCDEFG = \tfrac{1}{2}\Big(Aa \,.\, BG + Cc \,.\, BG$$

$$+ Cd \,.\, DG + Ff \,.\, DG + Ee \,.\, DF\Big).$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big((Aa + Cc)BG + (Cd + Ff)DG + Ee \,.\, DF\Big).$$

Beispiel. Es sey $BG = 61^{\circ}.\ 5'$, $DG = 75^{\circ}.\ 9'.\ 3''$, $DF = 67^{\circ}.\ 3'$. $Aa = 15^{\circ}.\ 7'$, $Cc = 28^{\circ}.\ 0'.\ 9''$, $Cd = 21^{\circ}.\ 1'.\ 7''$, $Ff = 22^{\circ}$, $Ee = 16^{\circ}.\ 8'$: so ist der Inhalt des Siebenecks $ABCDEFG$ $= 3550{,}81155\ \square^{\circ} = 3550\ \square^{\circ}.\ 81\ \square'.\ 15\ \square''.\ 50\ \square'''$.

§. 461. Aufgabe.

Den Flächenraum eines regulären Polygons zu finden.

Auflösung. Es sey die Länge einer Seite dieses Polygons in Zahlen ausgedrückt $= s$, der Abstand der Seite vom Mittelpunkte der Figur, oder ihr kleinster Halbmesser $= a$, die Anzahl seiner Seiten $= n$; so ist der Perimeter des regulären Polygons $= n.\ s$, und wird der Flächenraum desselben durch F bezeichnet, so ist

$$F = \frac{n.\ a.\ s.}{2}.$$

oder der Flächenraum eines regulären Polygons wird gefunden, wenn man die gegebene Seite mit deren Abstande vom Mittelpunkte der Figur multiplizirt, und dieß Product wiederum mit der halben Anzahl der Seiten multiplizirt.

Beweis. Nach (§. 290) ist der Inhalt eines jeden regulären Polygons einem Dreiecke gleich, welches den Perimeter $n.s$ zur Grundlinie und den kleinsten Halbmesser, b zur Höhe hat. Nun ist (§. 453) der Inhalt eines solchen Dreiecks $= \frac{n.\ a.\ s.}{2}$; folglich ist auch der Inhalt des Polygons, $F = \frac{n.\ a.\ s.}{2}$.

Beispiel. Es sey ein reguläres Zehneck zu berechnen, dessen Seite $s = 618'$ und dessen Abstand $a = 951'$, so ist

$$F = \frac{10 \cdot 951 \cdot 618}{2} = 5 \cdot 951 \cdot 618$$

$$= 2938590 \,\square' = 29385 \,\square^{\circ}.\ 90 \,\square'.$$

§. 462. Zusatz.

Aus $F = \frac{n.\ a.\ s.}{2}$ folgt

$$a = \frac{2F}{n.s};\ s = \frac{2F}{n.a};\ n = \frac{2F}{a.s}.$$

§. 463. Aufgabe.

Aus zweien gegebenen Seiten eines rechtwinklichten Dreiecks *ABC* Fig. 54. die dritte Seite zu berechnen.

Auflösung. Erster Fall. Sind die beiden Katheten AB, BC gegeben, so messe man jede derselben nach einerlei Maaß, erhebe jede der Zahlen, welche die Katheten angeben in die zweite Potenz, addire diese Quadratzahlen und ziehe aus deren Summe die Quadratwurzel, so hat man die Länge der Hypothenuse in eben dem Maaße ausgedrückt.

Zweiter Fall. Ist die Länge der Hypothenuse AC und eine Kathete, AB in Zahlen gegeben, so ziehe man, nachdem beide Linien auf einerlei Gattung von Einheiten gebracht sind, von der Quadratzahl der Hypothenuse AC die Quadratzahl der gegebenen Kathete AB ab, ziehe aus dem Reste die Quadratwurzel, so hat man die Länge der andern Kathete BC.

Beweis. Da (§. 174) $ACq = ABq + BCq$ und daher (§ 450) $AC \times AC = AB \times AB + BC \times BC$ oder $AC^2 = AB^2 + BC^2$; so ist $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$; $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$ $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$

Beispiel. Es sey $AB = 12$, $BC = 16$, so ist $AC = \sqrt{(12.12 + 16.16)} = \sqrt{(144 + 256)} = \sqrt{400} = 20$.

§. 464. Zusatz.

Ist im vorigen §. $\sqrt{AB^2 + BC^2}$ irrational, so hat die Hypothenuse kein gemeinschaftliches Maaß mit ihren Katheten, und die Linien AB und AC, so wie BC und AC sind incommensurabel.

Dieß ist besonders der Fall bei der Diagonale BD eines Quadrats $ABED$ Fig. 97 und dessen Seite DE. Denn setzen wir $DE = EB = a$, so ist (§.463) $BD = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}.\sqrt{a^2}$

$= a\sqrt{2}$. Es verhält sich also $DE : DB = a : a\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$; und da $\sqrt{2}$ irrational ist, so sind DE, DB incommensurabel.

Anmerkung. Nehmen wir DE Fig. 97 als Einheit an, so ist DB $= \sqrt{2}$. Solchergestalt giebt die Geometrie den Werth der incommensurablen Größe $\sqrt{2}$ ganz genau an, den man mit Hülfe der Zahlen nur durch Näherung erhalten kann. Diese Genauigkeit existirt jedoch nur in Gedanken. Denn wollte man BE mit BD vergleichen, um deren Verhältniß nach dem Verfahren des (§. 339) zu finden, so würde man nur ein annährendes Resultat erhalten, welches bei weitem nicht so genau als das aus den Zahlen hergeleitete seyn wird.

§. 465. Zusatz.

Mit Zuziehung des (§. 178) kann man auch die Seite eines Quadrats berechnen, welches mehreren Quadraten zusammen genommen gleich sey; und daher auch die Seite eines Quadrats, welches 2, 3, 4 ꝛc. mahl so groß als ein gegebenes sey.

§. 466. Aufgabe.

Aus den gegebenen Seiten und Diagonalen eine geradlinigten Figur $ABCD$ Fig. 190, die gleichnahmigen Seiten einer Figur zu berechnen, welche der gegebenen ähnlich sey, und deren Flächenraum $\frac{n}{m}$ $\left(\text{etwa } \frac{3}{5}\right)$ der gegebenen enthalte.

Auflösung. Man multiplizire die Quadratwurzel aus dem gegebenen Bruche $\frac{n}{m}$ mit irgend einer Seite $AB = a$ des gegebenen Polygons, so giebt dieses Product die gesuchte gleichnahmige Seite x; oder

$$x = a . \sqrt{\frac{n}{m}} = a . \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}.$$

Soll also die gesuchte Figur $\frac{3}{5}$ der gegebenen enthalten so ist

$$x = a . \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}774 . a$$

Beweis. Der Inhalt des gegebenen Vielecks sey $= Q$, so ist der des gesuchten $= \frac{n}{m} Q$; und da (§. 379) ähnliche Polygone sich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten verhalten so ist

$$Q : \frac{n}{m} Q = a^2 : x^2;$$

oder, wenn beide Glieder des ersten Verhältnisses mit m multiplizirt, und mit Q dividirt werden. (§. 301)

$$m : n = a^2 : x^2;$$

oder (§. 326)

$$\sqrt{m} : \sqrt{n} = a : x;$$

also

$$x = a . \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

Geometrische Construction. Man theile die gegebene Seite AB in m (5) gleiche Theile, und setze darauf den Halbkreis AFB. Aus dem $n$ten (3ten) Theilpunkt E errichte man den Perpendickel EF, und ziehe AF. Aus A beschreibe man mit AF einen Kreisbogen FG: so ist AG die der AB gleichnahmige Seite im gesuchten Polygon.

Beweis. Man setze (§. 373) auf AG ein Polygon $AGHK$ welches dem Polygon $ABCD$ ähnlich ist und ziehe FB, so ist im rechtwinklichten Dreiecke AFB (§. 363)

$$AB : AF = AF : AE$$

oder, weil $AF = AG$

$$AB : AG = AG : AE;$$

folglich ist (§. 364)

$$AB : AE = AB^2 : AG^2$$

oder, weil $AE = \frac{n}{m} AB$

$$AB : \frac{n}{m} AB = 1 : \frac{n}{m} = AB^2 : AG^2$$

Nun ist (§. 379)

$$ABCD : AGHK = AB^2 : AG^2$$

folglich ist (§. 303)

$$1 : \frac{n}{m} = ABCD : AGHK;$$

folglich

$$AGHK = \frac{n}{m} ABCD.$$

§. 467. Zusatz.

Setzen wir in dem Bruch $\frac{n}{m}$ dem Nenner $m = 1$, so wird, wenn wir nach einander $n = 2, 3, 4, 5$ u. s. w. setzen, der Bruch $\frac{n}{m}$ jedes Vielfache der Einheit anzeigen. Setzen wir hingegen $n = 1$ und nach einander $m = 2, 3, 4. 5$:c. so wird jener Bruch jeden Theil der Einheit angeben.

Die Auflösung des §. 466. lehrt also auch die gleichnahmige Seite eines Polygons zu finden, welches einem gegebenen ähnlich sey, und entweder ein gewisses Vielfaches oder ein gewisser Theil des gegebenen sey.

§. 468. Aufgabe.

Aus dem Halbmesser eines Kreises und der Seite eines in demselben eingeschriebenen regulären Polygons, die Seite eines andern regulären Polygons zu finden, welches sich in eben den Kreis einschreiben läßt und doppelt so viel Seiten als das gegebene hat.

Auflösung. Es sey AB Fig. 186 eine Seite des gegebenen im Kreise ABD eingeschriebenen Polygons und O der Mittelpunkt dieses Kreises. Man fälle aus O auf AB den Perpendickel OB', verlängere ihn bis D, und ziehe AB', so ist (§. 245) der Bogen $AB' = \frac{1}{2} AB'B$ und daher (§. 272) AB' die Seite eines regulären Polygons von doppelt so vielen Seiten als das gegebene. Man ziehe noch AD.

Da (§. 251) $\angle B'AD = R$ und AE auf $B'D$ senkrecht steht, so ist (§. 363)

$$B'E : AB' = AB' : B'D;$$

und daher

$$AB'^2 = B'D \times B'E = 2.\, B'O \times B'E;$$

da aber $B'E = B'O - EO$, und da ferner in dem rechtwinklichten Dreiecke AEO die Seite $EO = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{B'O^2 - AE^2}$ (§. 463) auch (§. 209) $AE = \frac{1}{2} AB$, so ist

$$B'E = B'O - \sqrt{\left(\overline{B'O}^2 - \overline{\tfrac{1}{2} AB}^2\right)};$$

und daher

$$AB'^2 = 2 \cdot B'O \times B'E =$$

$$2 \cdot B'O \left(B'O - \sqrt{(B'O^2 - \tfrac{1}{4} AB^2}\right).$$

Nimmt man nun den Halbmesser $B'O$ des Kreises, worin die Vielecke eingeschrieben sind für die Einheit an und setzt also $B'O = 1$, so ist

$$\overline{AB'}^2 = 2\left(1 - \sqrt{[1 - (\tfrac{1}{2} AB)^2]}\right).$$

Setzen wir nun die Seite des gegebenen Polygons, $AB = a$, und die Seite AB' des Polygons von doppelt so vielen Seiten $= a'$, so ist

$$a'^2 = 2\left(1 - \sqrt{[1 - (\tfrac{1}{2} a)^2]}\right)$$

$$= 2\left(1 - \sqrt{(1 + \tfrac{1}{2} a)(1 - \tfrac{1}{2} a)}\right).$$

Theilt man ferner den Bogen AB' im Punkte B'' in zwei gleiche Theile und setzt die gerade Linie $AB'' = a''$, so ist aus gleichem Grunde

$$a''^2 = 2\left(1 - \sqrt{[1 - (\tfrac{1}{2} a')^2]}\right).$$

$$= 2 - 2\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)}$$

$$= 2 - 2\sqrt{\left(\frac{4 - a^2}{4}\right)}$$

$$= 2 - \sqrt{(4 - a^2)}$$

und so fort.

§. 469. Aufgabe.

Aus der Seite ae eines im Kreise abc Fig. 130 eingeschriebenen regulären Poly=

gons und dem Halbmesser Oa dieses Kreises die Seite AE eines um diesen Kreis beschriebenen regulären Polygons von eben so vielen Seiten zu finden.

Auflösung. Man ziehe Oa, OE; so ist (§. 286) $\angle OaE = R$ und $aE = \frac{1}{2} AE$. Eben so ist

$$\angle Ona = R \text{ und } On = \tfrac{1}{2}\, ae.$$

In den Dreiecken Oan, OEa ist demnach $\angle Ona = OaE = R$ und $\angle aOE$ beiden gemein, folglich ist (§. 357) $\triangle Oan \backsim \triangle OaE$ und daher

$$On : an = Oa : aE$$

oder $On : \frac{1}{2}\, ae = Oa : \frac{1}{2}\, AE$;

oder, wenn beide Hinterglieder mit 2 multiplizirt werden

$$On : ae = Oa : AE;$$

folglich ist

$$AE = \frac{Oa \times ae}{On}$$

Nun ist $On = \sqrt{(Oa^2 - an^2)} = \sqrt{Oa^2 - (\frac{1}{2}\, ae)^2}$;
folglich ist

$$AE = \frac{Oa \times ae}{\sqrt{\left(Oa^2 - (\frac{1}{2}\, ae)^2\right)}}.$$

Setzen wir den Halbmesser des Kreises $Oa = 1$, die Seite des eingeschriebenen Polygons oder $ae = a$ und die correspondirende Seite AE des umschriebenen Polygons $= A$, so ist

$$A = \frac{1 \,.\, a}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\, a^2\right)}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{4 - a^2}{4}}} =$$

$$= \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{(4 - a^2)}}.$$

§. 470. Aufgabe.

Das Annäherungs-Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zu seiner Peripherie zu finden.

Auflösung. Da (§. 402) dieses Verhältniß bei jedem Kreise dasselbe ist, so wollen wir es für einen bestimmten durchmesser = 1 berechnen; und bezeichnen wir den Exponenten dieses unveränderlichen Verhältnisses durch π, so wird die Zahl π die Peripherie eines Kreises ausdrücken, dessen Durchmesser = 1.

Man berechne nun den Perimeter eines in eben dem Kreise eingeschriebenen Polygons und zugleich (§. 469) den Perimeter des diesem correspondirenden umschriebenen Polygons: so erhält man zwei Gränzen, zwischen denen die Zahl π liegen muß. Denn es ist (§. 400) die Peripherie π dieses Kreises größer als der Perimeter des eingeschriebenen und kleiner als der des umschriebenen Polygons.

Man berechne nun (§. 469) den Perimeter eines eingeschriebenen, und den eines umschriebenen Polygons von doppelt so vielen Seiten: so wird (§. 398) die Zahl π zwischen engere Gränzen fallen, so daß ihre Differenz vom Perimeter der letzteren Polygone geringer als die vorige Differenz ist.

Fährt man nun mit Verdopplung der Seiten fort, so kann man endlich (§. 399) zwei correspondirende Polygone erhalten, deren Perimeter von der Zahl π um weniger abweichen als als der Grad der Genauigkeit erfordert, mit welchem man die Peripherie zu erhalten beabsichtigt.

Wenden wir diese Betrachtungen auf die in einem Kreise, dessen Halbmesser = 1 eingeschriebenen und umschriebenen regulären Polygone von 6, 12, 24, 48 ꝛc. Seiten an und setzen wie vorhin die Seite irgend eines eingeschriebenen Polygons = a; die des correspondirenden umschriebenen = A und endlich die Seite eines eingeschrienenen Polygons von doppelt so vielen Seiten = a', so ist (§. 469)

$$A = \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{(4-a^2)}} = \frac{2a}{\sqrt{4-a^2}}$$

und (§. 468)

$$a' = \sqrt{\left(2\left(1-\sqrt{1-\tfrac{1}{4}a^2}\right)\right)}$$
$$= \sqrt{(2-\sqrt{4-a^2})}.$$

Fangen wir mit dem eingeschriebenen Sechseck an, so ist (§. 277)

$$a = 1 \text{ und } A = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Der Perimeter des eingeschriebenen Sechsecks ist also $6 \times 1 = 6$, der des umschriebenen Sechsecks wird $6 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}$ seyn; und die Peripherie des Kreises wird zwischen beiden Zahlen liegen.

Bezeichnen wir ferner durch a', a'', a''' ꝛc. die Seiten der eingeschriebenen Polygone von 12, 24, 48 ꝛc. Seiten und durch A', A'', A'' ꝛc. die Seiten der correspondirenden umschriebenen Polygone, und setzen wir zur Abkürzung

$$r' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4-a'^2},\ r'' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4-a''^2}$$
$$r''' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4-a'''^2} \text{ ꝛc.}$$

und erwägt man daß, weil der Halbmesser des Kreises $= 1$, auch (§. 402) die Peripherie desselben $= 2\,\pi$ seyn muß, so erhält man vermittelst der vorhergehenden Formeln

$$a' = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}; \quad A' = \frac{a'}{r'}; \quad 2\,\pi \left(\begin{matrix} > 12\, a' \\ < 12\, A' \end{matrix} \right.$$

$$a'' = \sqrt{(2 - 2\, r')}; \quad A'' = \frac{a''}{r''}; \quad 2\,\pi \left(\begin{matrix} > 24\, a'' \\ < 24\, A'' \end{matrix} \right.$$

$$a''' = \sqrt{(2 - 2\, r'')}; \quad A''' = \frac{a'''}{r'''}; \quad 2\,\pi \left(\begin{matrix} > 48\, a''' \\ < 48\, A''' \end{matrix} \right.$$

Hierdurch findet man nach einander

$$\sqrt{3} = 1{,}73205080756887$$

a^{I}	$= 0{,}517638090205$	$12\ a^{\mathrm{I}}$	$= 6{,}2116571$
r^{I}	$= 0{,}965925826289$	$12\ A^{\mathrm{I}}$	$= 6{,}4307806$
a^{II}	$= 0{,}261052384440$	$24\ a^{\mathrm{II}}$	$= 6{,}2652572$
r^{II}	$= 0{,}991444861374$	$24\ A^{\mathrm{II}}$	$= 6{,}3193199$
a^{III}	$= 0{,}130806258460$	$48\ a^{\mathrm{III}}$	$= 6{,}2787004$
r^{III}	$= 0{,}997858923234$	$48\ A^{\mathrm{III}}$	$= 6{,}2921724$
a^{IV}	$= 0{,}065438165643$	$96\ a^{\mathrm{IV}}$	$= 6{,}2820639$
r^{IV}	$= 0{,}999464857476$	$96\ A^{\mathrm{IV}}$	$= 6{,}2855292$
a^{V}	$= 0{,}032723463253$	$192\ a^{\mathrm{V}}$	$= 6{,}2829049$
r^{V}	$= 0{,}999866137909$	$192\ A^{\mathrm{V}}$	$= 6{,}2837461$
a^{VI}	$= 0{,}016362279208$	$384\ a^{\mathrm{VI}}$	$= 6{,}2831152$
r^{VI}	$= 0{,}999966535917$	$384\ A^{\mathrm{VI}}$	$= 6{,}2833260$
a^{VII}	$= 0{,}008181208052$	$768\ a^{\mathrm{VII}}$	$= 6{,}2831678$
r^{VII}	$= 0{,}999991633444$	$768\ A^{\mathrm{VII}}$	$= 6{,}2832203$
a^{VIII}	$= 0{,}004090612582$	$1536\ a^{\mathrm{VIII}}$	$= 6{,}2831809$
r^{VIII}	$= 0{,}999997908359$	$1536\ A^{\mathrm{VIII}}$	$= 6{,}2831941$
a^{IX}	$= 0{,}002045307361$	$3072\ a^{\mathrm{IX}}$	$= 6{,}2831842$
r^{IX}	$= 0{,}999999477089$	$3072\ A^{\mathrm{IX}}$	$= 6{,}2831875$
a^{X}	$= 0{,}001022653814$	$6144\ a^{\mathrm{X}}$	$= 6{,}2831850$
r^{X}	$= 0{,}999999869272$	$6144\ A^{\mathrm{X}}$	$= 6{,}2831858$
a^{XI}	$= 0{,}000511326924$	$12288\ a^{\mathrm{XI}}$	$= 6{,}2831852$
r^{XI}	$= 0{,}999999967318$	$12288\ A^{\mathrm{XI}}$	$= 6{,}2831854$

Aus dieser Tafel sieht man wie die Perimeter der eingeschriebenen und umschriebenen Polygone sich immer mehr nähern. Die Perimeter der correspondirenden Polygone von 12288 Seiten sind nur um zwei Einheiten der siebenten Dezimalordnung von einander unterschieden

Die sieben ersten Ziffern, welche beiden gemein sind, müssen nothwendigerweise zur Peripherie des Kreises gehören, deren Länge folglich 6,283185 beträgt, welches wenigstens bis auf ein Milliontheilchen richtig ist.

Nimmt man für die Peripherie des Kreises das Mittel zwischen dem Perimeter des eingeschriebenen und dem des umschriebenen Polygons von 12288 Seiten, so erhält man 6,2831853, in welchem Werthe auch die letzte Ziffer noch richtig ist. Das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie ist also $= 2 : 6{,}2831853$ oder, wenn man beide Glieder des Verhältnisses durch 2 dividirt (§. 301) $= 1 : 3{,}1415926$. Es ist also die Zahl 3,1415926, ein annäherender Werth des Verhältnisses, welches wir oben durch π bezeichnet haben.

Verwandeln wir diese Zahl

$$\pi = 3{,}1415926 = \frac{31415926}{100000000}$$

in einen zusammenhängenden Bruch, so erhalten wir folgende verkürzte Werthe:

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215}\ \text{ꝛc.}$$

Archimedes blieb bei einem eingeschriebenen und umschriebenen Polygon von 96 Seiten stehen, und fand, daß die Peripherie des Kreises $< 3\frac{10}{70}$ und $> 3\frac{10}{71}$ wäre, welches das so sehr bekannte Verhältniß $1 : 3\frac{1}{7}$ oder $7 : 22$ giebt. Nach ihm hat man die Genauigkeit viel weiter getrieben; allein unter den verschiedenen bekannten Verhältnissen verdient das von $113 : 355$ seiner Einfachheit und Genauigkeit wegen besondere Aufmerksamkeit. Denn, in Dezimalbrüchen aufgelöset, giebt es 3,1415929, welches Resultat bis zur siebenten Dezimalstelle richtig ist, und dieß Verhältniß kann überdieß leicht im Gedächtnisse behalten werden, indem es aus den ersten drei ungeraden Zahlen 11, 33, 55 zusammen gesetzt ist.

Ludolph von Cölln hat dieses Verhältniß bis auf 32 Dezimalziffern berechnet, und nach ihm ist

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950.$$

In Vega's größeren und kleineren Tafeln findet man diese Zahl bis auf 143 Dezimalstellen, von ihm selbst berechnet. In den meisten Fällen der Ausübung aber ist es genügend, wenn man hiervon die ersten fünf Dezimalstellen nimmt, und also $\pi = 3,14159$ oder $\pi = \frac{355}{113}$ setzt. *)

§. 471. Zusatz.

Die Bildung der vorhergehenden Tafel ist nicht das beförderndste Mittel zum Werthe der Seite des letzten im Kreise eingeschriebenen Polygons zu gelangen. Man kann durch eine halbe Anzahl Wurzelausziehungen zu demselben Resultate gelangen, wenn man statt der Seiten der eingeschriebenen Polygone, die Sehnen

*) Die Nachforschungen der englischen Gelehrten in Indien, haben uns mit einem Verhältnisse der Peripherie des Kreises zum Durchmesser bekannt gemacht, welches viel älter als das Archimedische zu seyn scheint, und bei weitem genauer als dieses ist; nehmlich = 3927 : 1250. Es befindet sich in einem Werke der Braminen, betitelt Ayeen Abkery, welches sich vom grauesten Alterthum herschreibt. Dieses Verhältniß auf Dezimaltheile gebracht, giebt 3,1416. Es ist also bis auf ein Zehntausendtheilchen richtig, und correspondirt mit einem Polygon von 768 Seiten.

BC, BC', $B''C$ Fig. 186 derjenigen Bogen berechnet, welche die Bogen AB, AB', AB'' zur halben Peripherie ergänzen. Denn zieht man den Durchmesser AC, so sind (§. 251) die Winkel ABC, $AB'C$, $AB''C$, als Winkel im Halbkreise, rechte Winkel, und daher (§. 463)

$$BC = \sqrt{(AC^2 - AB^2)};\ B'C = \sqrt{(AC^2 - AB'^2)}.$$

Nimmt man nun den Halbmesser AO für die Einheit und setzt

$$AB = a,\ AB' = a',\ BC = b,\ B'C = b',$$

so ist $AC = 2$, und daher

$$b = \sqrt{(4 - a^2)},\ b' = \sqrt{(4 - a'^2)};$$

und da (§. 468)

$$a' = \sqrt{\left(2 - \sqrt{(4 - a^2)}\right)}$$

so erhält man

$$a' = \sqrt{(2 - b)} \text{ oder } a'^2 = 2 - b.$$

Setzt man diesen Werth in den von b, so erhält man

$$b' = \sqrt{\left(4 - (2 - b)\right)} = \sqrt{(2 + b)}.$$

Man erhält aus dem Werthe von b den von b', wenn man aus $b + 2$ die Quadratwurzel zieht. Aus völlig gleichem Grunde ist

$$b'' = \sqrt{(2 + b')},$$

wenn man durch b'' die Sehne $B''C$ des Bogens bezeichnet, welcher den Bogen AB'', als der Hälfte des Bogens AB' zum Halbkreise ergänzt.

Gehet man nun von $a = 1$ aus, so ist

$$b = \sqrt{3} = 1{,}7320508075$$

$$b^{I} = \sqrt{2 + 1{,}7320508075} = 1{,}9318516525$$

$$b^{II} = \sqrt{2 + 1{,}9318516525} = 1{,}9828897227$$

$$b = \sqrt{2 + 1{,}9828897227} = 1{,}9957178465$$

$$b^{IV} = \sqrt{2 + 1{,}9957178465} = 1{,}9989291749$$

$$b^{V} = \sqrt{2 + 1{,}9989291749} = 1{,}9997322758$$

$$b^{VI} = \sqrt{2 + 1{,}9997322758} = 1{,}9999330678$$

$$b^{VII} = \sqrt{2 + 1{,}9999330678} = \sqrt{3{,}9999330678}$$

und da b zu einem Sechseck gehört, so wird b^{I} zu einem 12eck, b^{II} zu einem 24eck, b^{III} zu einem 48eck, b^{IV} zu einem 96eck, b^{V} zu einem 192, b^{VI} zu einem 384 und b^{VII} zu einem 768eck gehören. Bezeichnen wir nun die Seite dieses letztern durch a^{VII}, so erhält man

$$a^{VII} = \sqrt{(4 - b^{VII2})} = \sqrt{4 - 3{,}9999330678}$$

$$= \sqrt{0{,}0000669322} = 0{,}0081812.$$

Multiplizirt man nun diese Zahl durch 768, so erhält man den Perimeter eines eingeschriebenen regulären Polygons von 768 Seiten eben so wie in der Tafel des (§. 470) woraus sich dann das correspondirende umschriebene leicht berechnen läßt.

§. 472. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Durchmesser d oder Halbmesser r eines Kreises, seinen Umfang p in Zahlen zu finden.

Auflösung und Beweis. Da (§. 470) der Exponent des beständigen Verhältnisses der Peripherie eines Kreises zu ihrem Durchmesser durch die Zahl $\pi = 3{,}1415926$

bestimmt wird, und daher (§ 299) $\frac{p}{d} = \pi$, so ist (Grunds. 12)

$$p = d.\,\pi = 2\,r\,\pi$$

Die Peripherie eines Kreises wird also gefunden, wenn man die Zahl π mit dessen Durchmesser, oder dessen doppelten Halbmesser multiplizirt.

Beispiel. Der Durchmesser eines Kreises sey $= 2731'$, so ist seine Peripherie $= 2731 \times 3{,}14159' = 8579{,}7'$.

Anmerkung. Je größer der Durchmesser eines Kreises ist, desto mehr Stellen des Dezimalbruchs der Zahl π müssen bei der Rechnung gebraucht werden, wenn man dessen Peripherie einigermaaßen genau erhalten will.

§. 473. Zusatz.

Aus $p = d.\,\pi$ folgt (Grunds. 14)

$$d = \frac{p}{\pi} = \frac{1}{\pi}.\,p.$$

Man findet daher aus der gegebenen Peripherie eines Kreises dessen Durchmesser, wenn man die Peripherie durch die beständige Verhältnißzahl $\pi \triangleq 3{,}1415926$ dividirt.

Eben so folgt aus $p = 2r\pi$

$$r = \frac{p}{2\pi}$$

Man findet also den Halbmesser eines Kreises, wenn man dessen Peripherie durch $2\pi = 2 \times 3{,}1415926$ dividirt.

Beispiel. Es sey die Peripherie eines Kreises $= 132'\ 3''.\ 2'''$; so ist sein Durchmesser $= \frac{13232'''}{3{,}14159}$ $= 4212''' = 42'.\ 1''.\ 2'''$.

Der Halbmesser wird gefunden, wenn man vom gefundenen Resultate die Hälfte nimmt.

§. 474. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises die Länge eines in Graden, Minuten, Secunden &c. ausgedrückten Bogens desselben Kreises zu finden.

Auflösung. Der Halbmesser des gegebenen Kreises sey $= r$, die gegebene Anzahl der Grade eines Bogens $= \varphi$, und die Länge des Bogens in denselben Einheiten ausgedrückt, worin der Halbmesser gegeben ist $= l$: so ist (§. 472) die Peripherie des mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises $= 2r\pi$; nun ist (§. 408)

$$360^\circ : \varphi = 2r\pi : l;$$

folglich ist

$$l = \frac{2\pi r \varphi}{360} = \frac{\pi r \varphi}{180}.$$

Anmerkung. Wenn φ außer den Graden auch noch Minuten und Secunden enthält, so muß man den gegebenen Bogen in Minuten oder Secunden verwandeln, und die 180° im Nenner mit 60 oder 60. 60 multipliziren, um sie ebenfalls in Minuten oder Secunden zu verwandeln.

Auch kann man, wenn man es für besser hält, die Minuten und Secunden in Dezimaltheile eines Grades verwandeln, und die 180 im Nenner ungeändert lassen.

Beispiel. Es sey die Länge l eines Kreisbogens von $37^\circ.\ 19'$ zu finden, dessen Halbmesser $13'.\ 4''$ beträgt, so ist:

$$l = \frac{\pi.\ 134''.\ 2239}{180.\ 60} = 87''.\ 2'''.$$

§. 475. Zusatz.

Aus $l = \frac{\pi\ r\ \varphi}{180}$ folgt

$$\varphi = \frac{180°.\ l}{r\ \pi};\ r = \frac{180°\ l}{\pi\ \varphi}.$$

Beispiel I. Wie viel Grade, Minuten und Secunden hält ein Kreisbogen, dessen Länge 25′ 7″ ist, wenn der Halbmesser, zu welchem er gehört, = 19′. 3″. 7‴.

Antw. 76°. 1′. 11″.

Beispiel II. Wie groß muß der Halbmesser eines Kreises seyn, in welchem ein Bogen von 25°. 3′. 49″ eine Länge von 247′ 8″ hat.

Antw. 566′. 4″. 7‴.

§. 476. Aufgabe.

Die Anzahl Grade eines Bogens zu finden, welcher seinem Halbmesser gleich ist.

Auflösung und Beweis. Es sey die Länge dieses Bogens = l, die Anzahl Grade, welche er faßt = φ, und der Halbmesser des Kreises = r: so ist (§. 475)

$$\varphi = \frac{180°\ .\ l.}{\pi\ .\ r}.$$

Da aber $l = r$, so ist

$$\varphi = \frac{180}{\pi} = \frac{1}{\pi}\ 180° = 57{,}2958°$$

beinahe 57,3°

Ein Kreisbogen, welcher seinem Durchmesser gleich ist hält also sehr nahe 114,6°.

Jeder Kreisbogen, welcher seinem Halbmesser oder seinem Durchmesser gleich ist, zählt also in jedem Kreise eine gleiche Anzahl Grade.

§. 477. Aufgabe.

Eine gerade Linie zu zeichnen, welche der halben Peripherie des Kreises ziemlich nahe gleich werde.

Auflösung. Man setze Fig. 187 die beiden durchmesser AB, DE senkrecht auf einander; halbire den Halbmesser CB in F, ziehe DF und verlängere sie bis sie die Peripherie des Kreises in G schneidet. Aus G fälle man GH auf DE senkrecht, verlängere sie und mache $KI = KG$. Hierauf halbire man CH in L, nehme $LM = GH$ und beschreibe damit einen Kreisbogen um L welcher GH in M schneidet: so wird die Linie IM der halben Peripherie des Kreises sehr nagleich seyn.

Beweis. Es sey der halbmesser des Kreises $= 1$, so ist $CF = \frac{1}{2} = 0, 5$, also $DF = \sqrt{(DC^2 + CF^2} \sqrt{(1 + 0, 25)} = \sqrt{1, 25}$. Ferner ist (§. 384)

$$DF : AF = FB : FG;$$

und (§. 347) $DF : DC = FG : CH$;

folglich (§. 329)

$$DF^2 : AF \,.\, DC = BF : CH;$$

oder

$$1{,}25 : 1{,}5 \times 1 = 0{,}5 : CH;$$

$$\text{also } CH = \frac{0{,}75}{1{,}25} = 0{,}6.$$

Da ferner $DC : CF = DH : HG$

oder $1 : 0{,}5 = 1{,}6 : : HG$,

so ist $HG = 0{,}8$; $GK = 1{,}6$ und $GI = 3, 2$.

Ferner ist $LH = \frac{1}{2}\ CH = 0{,}3$ und $LM = GH = 0{,}8$; folglich ist (§. 463)

$$HM = \sqrt{(0{,}64 - 0{,}09)} = \sqrt{0{,}55} = 0{,}74161985 \text{ und } MG = 0{,}05838015.$$

also

$MI = 3{,}2 - 0{,}05838015 = 3{,}14161985$; die wahre Länge der halben Periph. ist $= 3{,}1415926$ also MI nur um 0,0000272 des Halbmessers zu groß, ein so geringer Unterschied, daß er selbst in den größten Zeichnungen nicht bemerkt werden kann.

§. 478. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Halbmesser oder Durchmesser eines Kreises seinen Flächeninhalt zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Es sey der Durchmesser des Kreises $= d$, sein Halbmesser $= r$, seine Peripherie $p =$ und sein Inhalt $= q$: so ist (§. 472)

$$p = d\pi = 2r\pi.$$

Da nun (§. 407) der Kreis einem Dreiecke gleich ist, welches eine der Peripherie gleiche gerade Linie zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat, so ist (§. 453) der Inhalt dieses Dreiecks, also der des Kreises

$$q = \frac{1}{4}\ dp = \frac{1}{2}\ rp;$$

und setzen wir statt p den eben gefundenen Werth, so ist

$$q = \frac{1}{4}\ dd\pi = \frac{1}{4}\ \pi dd = \frac{1}{2}\ r.\ 2r\pi = r^2\ \pi.$$

Der Flächeninhalt eines Kreises wird also gefunden, wenn man den vierten Theil der Zahl π mit der Quadratzahl des Durchmessers multiplizirt;

oder wenn man die Zahl π selbst mit dem Quadrate des Halbmessers multiplizirt.

Anmerkung. Da der Bruch $\frac{\pi}{4}$ bei den Kreisrechnungen häufig vorkommt, so ist es vortheilhaft den Werth dieses Bruchs ein für allemahl zu berechnen und man findet

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}785398163397448.$$

Anmerkung 2. Da der Inhalt des Kreises, dessen Durchmesser d ist $= 0{,}785\ d^2$ und der Inhalt des um eben diesen Kreis beschriebenen Quadrats $= dd = d^2$ (§. 450): so verhält sich der Inhalt des Kreises zu dem des umschriebenen Quadrats $= 0{,}785\ d^2 : d^2 = 0{,}785 : 1 = 785 : 1000$, wenn man beiderseits mit 1000 multiplizirt.

Beispiel I. Es sey der Durchmesser eines Kreises = 127 Fuß, so ist sein Inhalt $= \frac{1}{4}\pi .\ 127 .\ 127 = 0{,}785398 .\ 127 .\ 127 . = 12667{,}6870\ \Box'$; d. i. eine Kreisfläche, deren Durchmesser 127′ ist, beträgt 12667 □′, 68 □″ 70 □‴.

Beispiel II. Es sey der Durchmesser eines Kreises, $d = 42'.\ 1''.\ 2'''$. so ist sein Inhalt

$$q = \frac{\pi}{4} \cdot 4212'''^2 . = 0{,}785398 \times 4212 \times 4212$$
$$= 1393\ \Box',\ 37\ \Box''\ 04\ \Box'''.$$

§. 479. Aufgabe.

Aus der gegebenen Peripherie p eines Kreises, dessen Flächeninhalt q zu finden.

Auflösung. Es sey der Durchmesser dieses Kreises $= d$, so ist (§. 473)

$$= \frac{p}{\pi} \text{ und } d^2 = \frac{p^2}{\pi^2}$$

Da nun (§. 478) $q = \frac{\pi}{4} d^2$, so ist auch

$$q = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p^2}{\pi^2} = \frac{p^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} p^2.$$

Man findet also den Flächenraum eines Kreises, wenn man die Quadrathzahl seiner Peripherie mit dem Bruch $\frac{1}{4\pi} = 0{,}079577471545947$ multiplizirt.

Beispiel. Es sey der Umkreis p eines Kreises $= 573$ Fuß, so ist

$$q = 0{,}079577 \times 573^2 = 26127{,}59.$$

der Flächenraum dieses Kreises beträgt also 261 □°. 27 □′. 59 □″.

§. 480. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Flächenraum q eines Kreises, dessen Durchmesser d oder Halbmesser r zu finden.

Auflösung. Da (§. 478)

$$q = \frac{\pi}{4} d^2 = \pi r^2;$$

so ist, wenn man im ersten Falle mit $\frac{\pi}{4}$, und im zweiten mit π dividirt

$$d^2 = \frac{4q}{\pi}; \quad r^2 = \frac{q}{\pi}$$

und daher

$$d = \sqrt{\frac{4q}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{q}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}}\sqrt{q}$$

$$r = \sqrt{\frac{q}{\pi}} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \sqrt{q}.$$

Der Durchmesser eines Kreises wird also gefunden, wenn man die Quadratwurzel aus seinem Flächeninhalte mit $2 \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ $= 1{,}128379167$ multiplizirt.

Beispiel. Es sey ein Kreis zu beschreiben, dessen Inhalt $3765 \square'.\ 18 \square''$ betragen soll, so ist sein Durchmesser

$$d = 1{,}12837 \cdot \sqrt{376518} = 69'.\ 2''.\ 4'''$$

und der Halbmesser

$$r = 0{,}56428 \cdot \sqrt{376518} = 34'.\ 6''.\ 2'''.$$

§. 481. Aufgabe.

Den Durchmesser eines Kreises zu berechnen, welcher mehreren Kreisen zusammen genommen gleich sey.

Auflösung. Man erhebe jeden der gegebenen Durchmesser ins Quadrat, addire diese Quadratzahlen und ziehe aus deren Summe die Quadratwurzel, so wird diese den Durchmesser des gesuchten Kreises geben.

Beweis. Es seyen a, b, c, d, die Durchmesser der gegebenen Kreise und D der Durchmesser des gesuchten Kreises, so sind (§. 478). Die Flächenräume der gegebenen Kreise

$$\frac{\pi}{4} \cdot a^2,\ \frac{\pi}{4} \cdot b^2,\ \frac{\pi}{4} \cdot c^2,\ \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

also deren Summe

$$= \frac{\pi}{4} a^2 + \frac{\pi}{4} b^2 + \frac{\pi}{4} c^2 + \frac{\pi}{4} d^2$$

$$= \frac{\pi}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Der Inhalt des gesuchten Kreises ist $\frac{\pi}{4} D^2$.
Folglich ist

$$\frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2);$$

und wenn man beiderseits mit $\frac{\pi}{4}$ dividirt,

$$D^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2);$$

folglich

$$D = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}.$$

Was hier vom Durchmesser bewiesen worden gilt auch vom Halbmesser. Wenn nehmlich α, β, γ, δ, die Halbmesser der gegebenen Kreise angeben und der des gesuchten Kreises durch R bezeichnet wird, so ist

$$R = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)}.$$

Auf ähnliche Art findet man den Durchmesser eines Kreises, welcher der Differenz zweier gegebenen Kreise gleich ist.

Beispiel I. Es sind drei Kreise gegeben; der Durchmesser des ersten ist $= 14'. 3''$; der des zweiten $= 8', 9''$ und der des dritten $= 12'. 7''$. Wie groß ist der Durchmesser d eines Kreises, welcher diesen dreien gleich ist,

Antw.

$$d = \sqrt{(143^2 + 89^2 + 127^2)} = 210{,}94''$$
$$\text{oder } d = 21'. 0''. 9'''. 4^{\text{IV}}.$$

§. 482. Aufgabe.

Es sind die Halbmesser $AC = R$ und $CF = r$ zweier concentrischen Kreise ABG, DEF Fig. 188 gegeben. Man soll den Halbmesser ϱ eines Kreises finden, dessen

Flächeninhalt dem Unterschiede beider Kreise, und also der Fläche des zwischen beiden Peripherien enthaltenen kreisförmigen Ringes gleich sey.

Auflösung. Da (§. 478) der Kreis $ABG = R^2 \pi$, der Kr. $DEF = r^2 \pi$, und der Inhalt des gesuchten Kreises $= \varrho^2 \pi$: so ist Kr. ABG — Kreis DEF oder

$$\varrho^2 \pi = R^2 \pi - r^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi;$$
$$= (R + r) (R - r) \pi$$

Der Inhalt des gesuchten Kreises, also auch der des kreisförmigen Ringes wird also gefunden, wenn man die Summe der Halbmesser mit ihrer Differenz, und dieses Product mit der Zahl π multiplizirt.

Ferner folgt aus

$$\varrho^2 \pi = (R + r) (R - r) \pi;$$

wenn man beiderseits durch π dividirt

$$\varrho^2 = (R + r) (R - r);$$

und folglich

$$\varrho = \sqrt{(R + r) (R - r)}.$$

Der Halbmesser eines dem kreisförmigen Ringe gleichen Kreises wird also gefunden, wenn man die Summe der Halbmesser mit ihrer Differenz multiplizirt und aus dem Producte die Quadratwurzel zieht.

Beispiel. Es sey $R = 117'. 9''$, $r = 87'. 7''$ so ist

$$\varrho = \sqrt{(1179'' + 877) (1179 - 877)}$$
$$= \sqrt{(2056 \times 302)} = 787{,}97'.$$
$$= 78'. 7''. 9'''. 7^{\text{IV}}$$

§. 483. Zusatz.

Aus $\varrho^2 = (R + r)(R - r)$ folgt (§. 318)

$$R + r : \varrho = \varrho : R - r$$

der gesuchte Halbmesser ist also die mittlere Proportionale zwischen der Summe und der Differenz der gegebenen Halbmesser.

Errichtet man daher im Endpunkte D des kleinern Halbmessers CD einen Perpendickel DG und verlängert ihn bis er die Peripherie des Kreises in G trift, so ist DG der Halbmesser eines dem kreisförmigen Ringe gleichen Kreises.

Denn zieht man AG, GB, so ist (§. 251) AGB ein rechter Winkel, und daher (§. 363)

$$AD : DG = DG : DB;$$

da aber $AD = AC + CD = R + r$,

und $DB = CB - CD = R - r$, so ist

$$R + r : DG = DG : R - r.$$

§. 484. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Halbmesser $CD = r$ eines Kreises DHK Fig. 189 den Halbmesser x eines Kreises zu finden, dessen Flächeninhalt $\frac{n}{m}$ (etwa $\frac{3}{4}$) des gegebenen Kreises enthalte.

Auflösung. Man multiplizire die Quadratwurzel des gegebenen Bruchs, $\frac{n}{m}$ mit dem in Zahlen gegebenen Halbmesser, so giebt dieses Product den Halbmesser x des gesuchten Kreises; oder

$$x = r \cdot \sqrt{\frac{n}{m}} = r \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$$

Soll also der gesuchte Kreis $\frac{3}{4}$ des gegebenen enthalten, so ist

$$x = r \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86604 \cdot r$$

Beweis. Der Inhalt des gegebenen Kreises sey $= Q$, so ist der des gesuchten $= \frac{n}{m} Q$; und da (§. 403) die Flächenräume der Kreise sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten, so ist

$$Q : \frac{n}{m} Q = r^2 : x^2;$$

oder wenn beide Glieder des ersten Verhältnisses mit m multiplizirt, und mit Q dividirt werden (§. 301)

$$m : n = r^2 : x^2;$$

oder (§. 326)

$$\sqrt{m} : \sqrt{n} = r : x;$$

also $x = r \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$.

Auflösung durch Construction. Man theile (§. 338) den gegebenen Halbmesser in m gleiche Theile, und setze darauf einen Halbkreis CFD. Aus dem Endpunkte des $n$ten Theils, vom Mittelpunkte an gezählt, errichte man den Perpendickel FL und ziehe CF, so ist diese der Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Zieht man noch FD, so ist im rechtwinklichten Dreiecke CFD (§. 363)

$$CD : CF = CF : CL$$

oder weil (§. 36) $CF = CG$,

$$CD : CG = CG : CL;$$

folglich ist (§. 331)

$$CD : CL = CD^2 : CG^2$$

oder weil $CL = \frac{n}{m} CD$,

$$CD : \frac{n}{m} CD = 1 : \frac{n}{m} = CD^2 : CG^2;$$

Nun ist (§. 403)

$$\text{Kr. } DHK : FLG = CD^2 : CG^2;$$

folglich ist (§. 303).

$$1 : \frac{n}{m} = \text{Kr. } DHK : \text{Kr. } FLG;$$

folglich

$$FLG = \frac{n}{m} . DHK.$$

Beispiel. Es sey $\frac{n}{m} = \frac{3}{4}$: so theile man den Halbmesser CD in 4 gleiche Theile, setze darauf einen Halbkreis und errichte aus dem dritten Theilspunkt L einen Perpendickel LF, so ist, wenn man CF zieht, diese der Halbmesser eines Kreises, welcher $\frac{3}{4}$ mahl so viel Flächenraum als der gegebene hat.

Anmerkung. Wenn $\frac{n}{m}$ ein unächter Bruch etwa $\frac{7}{4}$ wäre, so bleibt die Construction im wesentlichen dieselbe, nur daß man den Halbkreis nicht auf den Halbmesser, sondern auf die Linie setzt, welche die größere Anzahl Theile angiebt. Wir werden also den Halbmesser CD Fig. 190 in 4 gleiche Theile theilen; hierauf von C nach M 7 solcher Theile tragen; auf CM

einen Halbkreis setzen, und aus D den Perpendickel DF errichten, da denn CF der Halbmesser eines Kreises ist, dessen Flächeninhalt $\frac{7}{4}$ von dem des Kreises DHK enthält.

§. 485. Zusatz

Setzen wir in dem Bruch $\frac{n}{m}$ den Nenner $m = 1$, so wird, wenn wir nach einander $n = 2, 3, 4, 5$ ꝛc. setzen, der Bruch $\frac{n}{m}$ jedes Vielfache der Einheit anzeigen. Setzen wir hingegen $n = 1$ und nach einander $m = 2, 3, 4, 5$ ꝛc. so wird jener auch jeden Theil der Einheit anzeigen können.

Die Auflösung des §. 484 lehrt uns also den Halbmesser eines Kreises zu finden, welcher entweder ein gewisses Vielfaches oder ein gewisser Theil eines gegebenen Kreises ist.

§. 486. Aufgabe.

Aus dem in Graden, Minuten ꝛc. gegebenen Winkel ACL Fig. 179 und dem Halbmesser CA eines Kreisausschnitts $ACLM$, dessen Flächeninhalt zu berechnen.

Auflösung. Man berechne §. 474) die Länge des Bogens AL dieses Ausschnitts, multiplizire diese Zahl mit der Hälfte des Halbmessers CA, so wird (§. 418) dieses Product den Inhalt des Ausschnitts geben.

Es sey nun die Anzahl der Grade des Winkels ACL oder des Bogens $AL = \varphi$; die Länge dieses

Bogens $= l$; der Halbmesser desselben $= r$, und sein Flächeninhalt $= q$; so ist (§. 474)

$$l = \frac{\varphi}{180} \pi r.$$

Da aber (§. 418) jeder Kreisausschnitt einem Dreiecke gleich ist, welches den Bogen zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat, so ist (§. 453)

$$q = \frac{l \cdot r}{2} = \cdot \frac{\varphi r^2 \pi}{360} = \frac{\varphi}{360} \cdot r^2 \pi;$$

Bezeichnen wir nun den Bruch $\frac{\varphi}{360,}$ welcher bestimmt, was für einen Theil der gegebene Bogen von der Peripherie ausmacht durch n, so ist

$$q = n \cdot r^2 \pi.$$

Beispiel. Der Halbmesser eines Kreises sey $= 8''. 4'''$; der Winkel eines Ausschnitts desselben halte $28^\circ. 5'$; so ist sein Inhalt

$$q = \frac{1685'}{360 \cdot 60} \cdot 84^2 \cdot 3{,}14159$$
$$= 1729 \,\square''' = 17 \,\square''. \; 29 \,\square'''.$$

§. 487. Zusatz.

Aus $q = \dfrac{\varphi \pi r^2}{360}$

folgt

$$\varphi = \frac{360 \cdot q}{\pi r^2}; \; r = \sqrt{\frac{360 \cdot q}{\pi \varphi}}.$$

Man kann daher auch aus dem Flächeninhalte und dem Halbmesser des Kreisausschnitts die Anzahl Grade finden, welche dessen Bogen faßt; und umgekehrt kann man aus dem Flächeninhalte eines Kreisausschnitts nebst der Anzahl Grade desselben den Halbmesser des dazu gehörigen Kreises finden.

§. 488. Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Kreisabschnitts $AMLA$ Fig. 179 zu berechnen, wenn außer dem Halbmesser AC und der Anzahl Grade des Bogens AML noch die Basis AL gegeben ist.

Auflösung. Man berechne (§. 486) den Flächeninhalt des Ausschnitts $CAML$; berechne ferner (§. 453) den Inhalt des Dreiecks ACL: so ist

Abschn. $AMLA$ = Ausschn. $ACLM - \triangle ACL$.

Das Dreieck ACL läßt sich folgendermaßen berechnen. Man fälle aus C auf AE den Perpendickel CN: so ist (§. 209) $AN = \frac{1}{2} AL$ und (§. 463)

$$CN = \sqrt{(AC^2 - AN^2)}$$
$$= \sqrt{(AC^2 - \tfrac{1}{4} AL^2)};$$

daher (§. 453)

$$\triangle ACL = AN \times CN$$
$$= \tfrac{1}{2} AL \sqrt{(AC^2 - \tfrac{1}{4} AL^2)}.$$

oder setzen wir den Halbmesser $AC = r$ und $AL = s$; so ist

$$\triangle ACL = \frac{s}{2}\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} s^2}$$
$$= \frac{s}{2}\sqrt{(r + \tfrac{1}{2} s)(r - \tfrac{1}{2} s)}.$$

§. 489 Anmerkung.

Die bisher gegebenen Lehren bieten uns die Mittel dar jede gegebene geradlinigte, kreisförmige oder aus kreisförmigen Theilen zusammen gesetzte Figur sowohl durch Rechnung als durch Construction so nahe zu quadriren, daß die Abweichung geringer als jede gegebene noch so kleine Größe werden kann. Es ist daher überflüßig nach einer noch strengern Genauigkeit zu streben.

Die ebene Trigonometrie.

Erstes Kapitel.

Von den trigonometrischen Functionen und Hülfslinien.

§. 1. Erklärung.

Wie man, wenn von den sechs in einem Dreiecke vorkommenden Stücken drei, unter denen wenigstens eine Seite befindlich ist, gegeben sind, die übrigen durch Zeichnung finden könne, ist bereits in der ebenen Geometrie gezeigt worden (Geom. §§. 100, 105, 106, 132, 133). Auch ist (Geom. §. 444) gezeigt worden, wie man, wenn die ein Dreieck bestimmenden Stücke in Zahlen gegeben sind, auch die übrigen Stücke mit Hülfe des Transporteurs und verjüngten Maaßstabes in Zahlen bestimmen könne. Da jedoch der Grad der Genauigkeit, welchen die Instrumente gewähren, ihrer Unvollkommenheit wegen nur sehr gering ist, und desto geringer seyn muß, je öfter man bei der Auflösung einer Aufgabe diese Instrumente anzuwenden hat, so war man darauf bedacht, auf die Bestimmung der Dreiecke die Rechnung anzuwenden, durch welche man jeden beliebigen Grad von Genauigkeit erlangen kann. Man hat daher unter dem Nahmen der ebenen Trigonometrie *) eine Wissenschaft erfunden, welche lehrt, wie man aus den ein ebenes Dreieck bestimmenden und in Zahlen gegebenen Stücken, die übrigen Stücke desselben durch Rechnung finden kann.

§. 2. Erklärung.

Da gerade Linien und Winkel, als ungleichartige Größen nicht mit einander verglichen werden können, so hat man anstatt der Winkel selbst andere Größen in die Rechnung eingeführt, welche mit der Veränderung des Winkels zugleich Veränderungen erleiden. Es bewege sich z. B. die gerade Linie AC Fig. 1 in einer Ebene um den festen Punkt C herum und beschreibe nach und nach die Bogen AB, AB', AB'', welche (Geom. §. 411) das Maaß der hierdurch entstandenen Winkel ACB, ACB', ACB'' sind: so werden die aus den Endpunkten B, B' B'' dieser Bogen auf den Halbmesser AC gefällten Perpendickel BP, $B'P'$, $B''P''$ dergestalt von der Größe des Winkels ACB abhängen, daß sie mit dessen Veränderung ebenfalls Veränderungen erleiden. Gehet nehmlich der Winkel ACB, zu welchem der Perpendickel BP gehört, in ACB' über, wozu nunmehr der Perpendickel $B'P'$ gehört, so ist (Geom. §. 176) $B'P' > BP$, weil in den rechtwinklichten Dreiecken BCP, $B'CP'$ die Hypothenusen, BC, $B'C$ gleich, hingegen die eine Kathete $CP' < CP$.

---

*) Ueber die Eintheilung der Trigonometrie s. Umriß der mathem. Wissenschaften §§ 6 und 9.

Eine solche Größe, welche von einer andern dergestalt abhängt, daß sie sich mit Veränderung dieser letztern zugleich ändert, und also größer oder kleiner wird, wenn letztere größer wird, heißt **eine Function** dieser letztern. So ist die Zahl, welche die Größe der Linie BP gegen den Halbmesser BC ausdrückt, oder der Exponent des Verhältnisses $BP : BC$ oder $\frac{BP}{BC}$ eine Function des Winkels ACB, weil diese Zahl desto größer wird, je mehr sich den Winkel ACB dem rechten ACD nähert. Eben so ist der Exponent des Verhältnisses $CP : BC$ oder $\frac{CP}{BC}$ eine Function des Winkels ACB, weil dieser Exponent desto kleiner wird, je näher der Winkel ACB dem rechten kommt.

Diejenigen Functionen der Winkel, welche zur Bestimmung der Seiten und Winkel eines Dreiecks dienen, heißen **trigonometrische Functionen**.

§. 3. Erklärung.

Es sey $ACE = \alpha$ Fig. 2 irgend ein Winkel. Man fälle aus beliebigen Punkten B, B', B'' eines seiner Schenkel CE auf den andern CA die Perpendikel BP, $B'P'$, $B''P''$, so ist in den hierdurch entstehenden rechtwinklichten Dreiecken BPC, $B'P'C$, $B''P''C$ das Verhältniß des Perpendickels zu der ihm zugehörigen Hypothenuse $BP : BC$, $B'P' : B'C$, $B''P'' : B''C$ beständig, und daher der Exponent eines jeden dieser Verhältnisse $\frac{BP}{BC}$, $\frac{B'P'}{B'C}$, $\frac{B''P''}{B''C}$ eine unveränderliche abstracte Zahl. Denn da der Winkel $BPC = B'P'C = B''P''C = R$ und $\angle \alpha$ allen diesen Dreiecken gemein ist, so sind sie (Geom. §. 357) einander ähnlich und daher die gleichnahmigen Seiten proportional. Dieser Exponent $\frac{BP}{BC}$, welcher bei einem und demselben Winkel ungeändert bleibt, aber mit der Veränderung des Winkels α zugleich eine Aenderung erleidet, und daher (§. 2) eine Function dieses Winkels ist, heißt der Sinus des Winkels ECA und wird abgekürzt durch $sin.\ ECA$ oder $sin.\ \alpha$ bezeichnet. Es ist also

$$sin.\ \alpha = \frac{BP}{BC}.$$

Der Sinus eines Winkels ECA ist demnach der Exponent des beständigen Verhältnisses der diesem Winkel gegenüber stehenden Kathete zur Hypothenuse des rechtwinklichten Dreiecks, welches entstehet, wenn man aus einem beliebigen Punkte eines seiner Schenkel auf den andern Schenkel oder dessen Verlängerung einen Perpendickel fällt.

§. 4. Erklärung.

Der Exponent des Verhältnisses $PC : BC$ Fig. 2 oder der Bruch $\frac{PC}{BC}$ heißt der Cosinus des Winkels EAC. Eben so ist der Exponent des Verhältnisses $\frac{pc}{bc}$ Fig. 3 der Cosinus des stumpfen Winkels acc'

Man bezeichnet ihn abgekürzt durch *Cos. ACE*, und es ist also

$$Cos.\ ACE = \frac{CP}{BC},\ Cos.\ ace = \frac{pc}{bc}.$$

Der Cosinus eines Winkels ist demnach der Exponent des beständigen Verhältnisses der diesem Winkel anliegenden Kathete zur Hypothenuse des rechtwinklichten Dreiecks, welches entstehet, wenn man aus einem beliebigen Punkte eines seiner Schenkel auf den andern Schenkel oder dessen Verlängerung einen Perpendickel fällt.

§. 5. Erklärung.

Der Exponent des beständigen Verhältnisses $BP : PC$ Fig. 2 oder $bp : pc$ Fig. 3 heißt die Tangente des Winkels *ACE* oder *ace*, und wird bezeichnet durch *tang. ACE* oder *tang. ace*.

Die Tangente eines Winkels ist demnach der Exponent des beständigen Verhältnisses der diesem Winkel gegenüber stehenden Kathete zur anliegenden Kathete des rechtwinklichten Dreiecks, welches entstehet, wenn man aus einem beliebigen Punkte eines seiner Schenkel auf dessen andern Schenkel einen Perpendickel fällt.

§. 6. Erklärung.

Der Exponent des Verhältnisses $\frac{PC}{BP}$ Fig. 2 heißt die Cotangente des Winkels *ACE*, und wird bezeichnet durch *Cot. ACE*. Eben so ist Fig. 3 *Cot. ace* $= \frac{pc}{bp}$. Die ausführliche Definition der Cotangente ergiebt sich, mit einiger Modification aus §. 5.

Der Exponent des Verhältnisses $BC : PC$ oder $\frac{BC}{PC}$ Fig. 2. heißt die Secante des Winkels *ACE*; eben so ist in Fig. 3. $\frac{bc}{pc}$ die Secante des Winkels *ace*, und wird bezeichnet durch *sec. ACE*.

Der Exponent des Verhältnisses $\frac{BC}{BP}$ Fig. 2 oder $\frac{bc}{bp}$ Fig. 3 heißt die Cosecante des Winkels *ACE* oder *ace*, und wird bezeichnet durch *Cosec. ACE*.

§. 7. Erklärung.

Außer den angeführten trigonometrischen Functionen als *sin., cos, tang., cot, sec* und *cosec.* pflegt man noch den Sinus Versus und Cosinus Versus dazu zu rechnen, und versiehet unter ersterem die Differenz zwischen der Einheit und dem Cosinus eines Winkels; unter letzterem aber die Differenz zwischen der Einheit und dem Sinus des Winkels, und bezeichnet erstern durch *sin. v.*, letztern durch *cos. v.* so daß

$$sin.\, v.\, ACE = 1 - cos\, ACE$$
$$cos.\, v.\, ACE = 1 - sin\, ACE.$$

§. 8. Recapitulation.

Setzen wir in dem rechtwinklichten Dreiecke *ABC*

Fig. 4 die Seite $AB = b$, $AC = p$, die Hypothenuse $BC = h$, den Winkel $ABC = \alpha$ und $ACB = \beta$, so ist

1) $sin. \quad \alpha = \frac{p}{h}$; 9) $sin. \quad \beta = \frac{b}{h}$

2) $cos. \quad \alpha = \frac{b}{h}$; 10) $cos. \quad \beta = \frac{p}{h}$

3) $tang. \quad \alpha = \frac{p}{b}$; 11) $tang. \quad \beta = \frac{b}{p}$

4) $cot. \quad \alpha = \frac{b}{p}$; 12) $cot. \quad \beta = \frac{p}{b}$

5) $sec. \quad \alpha = \frac{h}{b}$; 13) $sec. \quad \beta = \frac{h}{p}$

6) $cosec. \quad \alpha = \frac{h}{p}$; 14) $cosec. \quad \beta = \frac{h}{b}$

7) $sin\ v. \quad \alpha = 1 - \frac{b}{h}$; 15) $sin.\ v. \ \beta = 1 - \frac{p}{h}$

8) $cos.\ v. \ \alpha = 1 - \frac{p}{h}$; 16) $cos.\ v. \ \beta = 1 - \frac{b}{h}$

§. 9. Zusatz.

Werden beide Theile einer jeden der vorstehenden Gleichungen mit ihrem Nenner multiplizirt, so erhalten wir

1) $p = h \ . \ sin. \ \alpha$ 7) $b = h \ . \ sin. \ \beta$
2) $b = h \ . \ cos. \ \alpha$ 8) $p = h \ . \ cos. \ \beta$
3) $p = b \ . \ tang. \ \alpha$ 9) $b = p \ . \ tang. \ \beta$
4) $b = p \ . \ cot. \ \alpha$ 10) $p = b \ . \ cot. \ \beta$
5) $h = b \ . \ sec. \ \alpha$ 11) $h = p \ . \ sec. \ \beta$
6) $h = p \ . \ cosec. \ \alpha$ 12) $h = b \ . \ cosec. \ \beta$.

Die Gleichungen für den *sin. v.* und *cos. v.* haben wir ausgelassen, weil diese Functionen nur äußerst selten in der Rechnung vorkommen.

Hätten wir nun Tafeln, worin man für jeden Winkel seinen Sinus, Cosinus und überhaupt jede ihm zugehörige trigonometrische Function auf eben die Art berechnet findet, wie für die Zahlen ihre Logarithmen, so wären wir schon im Stande vermittelst vorstehender Gleichungen aus jeden zwei gegebenen Stücken eines rechtwinklichten Dreiecks jedes der übrigen Stücke zu berechnen.

Es sey z. B. im rechtwinklichten Dreiecke ABC Fig. 4 der Winkel $\alpha = 35° \ 27'$; $h = 46$ Ruthen, man soll die Höhe p finden: so würde man unter obigen Gleichungen diejenige aufsuchen, worin α und h in einem Theile und p im andern Theile vorkommen. Diese Gleichung ist (§. 9).

$$p = h \, . \, sin. \, \alpha = 46 \, . \, sin \, 35° . \, 27'.$$

Finden wir nun in den erwähnten Tafeln

$$sin. \, 35° . \, 27' = 0{,}57999,$$

so ist $p = 46 \, . \, 0{,}57999 = 26°{,}67954$ oder beinahe 26 Ruthen 6 Fuß 8 Zoll.

Zweites Beispiel. Es sey gegeben $\alpha = 35° . \, 27'$; $b = 37° . \, 4' . \, 7'' . \, 2''' = 37{,}472$ Ruthen, so suche man, um p zu finden, unter obigen Gleichungen diejenige, worin α und b sich in einem Theile befinden und p im andern Theile. Diese Gleichung ist (§. 9. III.)

$$p = b \, . \, tang \, \alpha = 37{,}472 \, . \, tang \, 35° . \, 27'.$$

Geben nun die Tafeln $tang \, 35° . \, 27' = 0{,}71197$, so findet man,

$$p = 37°{,}472 \, . \, 0{,}71197 = 26° . \, 6' . \, 8''.$$

wie oben.

Dergleichen Tafeln sind wirklich berechnet, und heißen trigonometrische Tafeln, wegen ihres besondern Gebrauchs in der Trigonometrie, wiewohl man sich ihrer auch bei anderen Rechnungen außer den trigonometrischen bedienen kann. Wie aber dergleichen Tafeln zu berechnen seyen, werden wir im Folgenden zeigen.

Anmerkung. Da die durch die Formeln dieses §. bezeichneten Regeln sowohl bei der Auflösung der Dreiecke als auch bei andern Rechnungen von häufigem Gebrauch sind, so ist es vortheilhaft sich mit denselben vertraut zu machen. Es folgt nehmlich (aus 1 und 3): daß in jedem rechtwinklichten Dreiecke die Größe einer seiner Katheten gefunden wird, wenn man den Sinus des dieser Kathete gegenüberstehenden Winkels mit der Hypothenuse, oder wenn man die Tangente dieses gegenüber stehenden Winkels mit der andern Kathete multiplizirt.

Aus (2 und 4) folgt, daß im rechtwinklichten Dreiecke der Werth einer Kathete gefunden wird, wenn man den Cosinus des dieser Kathete anliegenden spitzen Winkels mit der Hypothenuse, oder die Cotangente dieses anliegenden Winkels mit der andern Kathete multiplizirt.

Aus 5 und 6 gehet hervor, daß in jedem rechtwinklichten Dreiecke der Werth der Hypothenuse gefunden wird, wenn man die Secante eines seiner spitzen Winkel mit der daran liegenden Kathete, oder, wenn man die Cosecante eines spitzen Winkels mit der diesem Winkel gegenüber stehenden Kathete multiplizirt.

§. 10. Zusatz.

Vergleichen wir die in §. 8 aufgezählten trigonometrischen Functionen mit einander, so finden wir daß

$$\sin\alpha = \frac{p}{h} = \cos\beta$$

$$\sin\beta = \frac{b}{h} = \cos\alpha$$

$$\tang\alpha = \frac{p}{b} = \cot.\ \beta$$

und daß überhaupt im rechtwinklichten Dreiecke *ABC* Fig. 4. jede trigonometrische Function irgend eines seiner spitzen Winkel die Co-Function des andern spitzen Winkels dieses Dreiecks ist; daß z. B. $\sec\beta = \operatorname{cosec}\alpha$ ꝛc. Erwägen wir nun, daß (Geom. §. 131. III) die beiden Winkel α und β (§. 75) Complemente zu einander sind, daß also

$$\alpha = 90^\circ - \beta, \text{ und } \beta = 90 - \alpha,$$

so erhalten wir wenn wir in §. 8 statt β den Ausdruck *Compl.* α, und *Compl.* β anstatt α setzen

$$\cos\ \alpha = \sin\ \beta = \sin.\ Compl.\ \alpha$$
$$\cot\ \alpha = \tang.\beta = \tang.\ Compl.\ \alpha$$
$$\operatorname{cosec}\ \alpha = \sec.\ \beta = \sec\ Compl\ \alpha, \text{ u. s. w.}$$

woraus sich ergiebt, daß die Benennungen Cosinus, Cotangente, Cosecante nur abgekürzte Benennungen für *sin Compl.*, *tang. Compl.*, *sec. Compl.* ꝛc. sind. Setzen wir ferner in §. 8 anstatt β seinen Werth $90^\circ - \alpha$, so erhalten wir

$$\sin.\ \alpha = \cos.\ \beta = \cos.\ (90^\circ - \alpha)$$
$$\cos.\ \alpha = \sin.\ \beta = \sin.\ (90^\circ - \alpha)$$
$$\tang.\ \alpha = \cot.\ \beta = \cot.\ (90^\circ - \alpha)$$
$$\cot.\ \alpha = \tang.\ \beta = \tang.\ (90^\circ - \alpha)$$

$$sec.\ \alpha = cosec.\ \beta = cosec\ (90^\circ - \alpha)$$
$$cosec.\ \alpha = sec.\ \beta = sec.\ (90^\circ - \alpha)$$
$$sin.\ v.\ \alpha = cos.\ v.\ \beta = cos.\ v.\ (90^\circ - \alpha)$$
$$cos.\ v.\ \alpha = sin.\ v.\ \beta = sin.\ v.\ (90^\circ - \alpha)$$

woraus sich ergiebt, daß man nur die trigonometrischen Functionen aller Winkel bis 45° zu berechnen braucht, um die der Winkel bis 90° zu erhalten. So ist z. B.

$$sin.\ 50^\circ = cos.\ (90^\circ - 50^\circ) = cos.\ 40^\circ;$$
$$tang.\ 75^\circ = cot.\ (90^\circ - 75^\circ) = cot.\ 15^\circ$$ u. s. w.

§. 11. Lehrsatz.

I. Die Tangente irgend eines Winkels $ABC = \alpha$ Fig. 4 ist dem Quotienten des Sinus dividirt durch den Cosinus dieses Winkels gleich, oder $tang\ \alpha = \frac{sin.\ \alpha}{cos.\ \alpha}$.

II. Die Cotangente irgend eines Winkels α ist dem Quotienten des Cosinus dividirt durch den Sinus dieses Winkels gleich oder $cot.\ \alpha = \frac{cos.\ \alpha}{sin.\ \alpha}$.

Beweis. I. Da (§. 8)

$sin.\ \alpha = \frac{p}{h}$ und $cos\ \alpha = \frac{b}{h}$ so ist

$$\frac{sin.\ \alpha}{cos.\ \alpha} = \frac{p}{h} : \frac{b}{h} = \frac{p}{h} \times \frac{h}{b} = \frac{p}{b}.$$

Nun war auch $tang\ \alpha = \frac{p}{b}$;

folglich ist $tang\ \alpha = \frac{sin.\ \alpha}{cos.\ \alpha}$.

II. Eben so ist

$$\frac{\cos.\ \alpha}{\sin.\ \alpha} = \frac{b}{h} : \frac{p}{h} = \frac{b}{h} \times \frac{h}{p} = \frac{b}{p};$$

und da auch (§. 8) $\cot.\ \alpha = \frac{b}{p}$,

so ist

$$\cot.\ \alpha = \frac{\cos.\ \alpha}{\sin.\ \alpha}.$$

§. 12. Lehrsatz.

Die Secante eines Winkels α ist dem Quotienten der Einheit durch den Cosinus dieses Winkels gleich, oder $\sec \alpha = \frac{1}{\cos.\ \alpha}$. Die Cosecante eines Winkels α ist dem Quotienten der Einheit durch den Sinus dieses Winkels gleich, oder $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin.\ \alpha}$.

Beweis. Es ist (§. 8. II) $\cos\ \alpha = \frac{b}{h}$,

und daher $\frac{1}{\cos\ \alpha} = 1 : \frac{b}{h} = 1 \times \frac{h}{b} = \frac{h}{b}$.

Nun ist auch (§. 8. V.) $\sec\ \alpha = \frac{h}{b}$,

folglich ist

$$\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha}.$$

Eben so ist (§. 8. I.) $\sin\ \alpha = \frac{p}{h}$, und

daher $\frac{1}{\sin\ \alpha} = 1 : \frac{p}{h} = 1 \times \frac{h}{p} = \frac{h}{p}$.

Da aber auch (§. 8. VI) $cosec\ \alpha = \frac{h}{p}$, so ist

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sin\ \alpha}.$$

§. 13. Lehrsatz.

Der Sinusversus eines Winkels α ist der Differenz zwischen der Einheit und dem Cosinus dieses Winkels gleich, oder

$$sin.\ v.\ \alpha = 1 - cos\ \alpha.$$

Der Cosinusversus eines Winkels ist der Differenz zwischen der Einheit und dem Sinus dieses Winkels gleich oder

$$cos.\ v.\ \alpha = 1 - sin\ \alpha.$$

Beweis. Dieses folgt unmittelbar aus der im §. 7 gegebenen Erklärung vom *sin. vers.* und *cos. vers.*

§. 14. Bemerkung.

Da nach §. 11, 12 und 13 alle trigonometrische Functionen irgend eines Winkels von seinem Sinus und Cosinus abhängen, und sich aus diesen letzteren durch die einfachsten Rechnungsarten herleiten lassen, so haben wir blos nöthig die Sinus und Cosinus aller Winkel bis 45° zu berechnen, um daraus die trigonometrischen Functionen aller Winkel bis 90° zu bestimmen (§. 10).

§. 15. Lehrsatz.

Das Quadrat des Sinus nebst dem Quadrate des Cosinus irgend eines Winkels

α ist immer der Einheit gleich; oder
$sin.^2 \alpha + cos.^2 \alpha = 1$ *).

Beweis. Im rechtwinklichten Dreiecke ABC Fig. 4 ist $sin. \alpha = \frac{p}{h}$; $cos. \alpha = \frac{b}{h}$ folglich ist.

$$sin.^2 \alpha + cos.^2 \alpha = \frac{p^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \frac{p^2 + b^2}{h^2}.$$

Da aber (Geom. §. 174) $p^2 + b^2 = h^2$: so ist

$$sin.^2 \alpha + cos.^2 \alpha = \frac{h^2}{h^2} = 1.$$

§. 16. Zusatz.

Hieraus folgt

$$cos.^2 \alpha = 1 - sin.^2, \text{ also}$$
$$cos. \alpha = \sqrt{(1 - sin.^2 \alpha)};$$
$$sin.^2 \alpha = 1 - cos.^2 \alpha; \text{ und daher}$$
$$sin. \alpha = \sqrt{(1 - cos.^2 \alpha)}.$$

Man findet also aus dem gegebenen Sinus eines Winkels seinen Cosinus, wenn man das Quadrat des Sinus von der Einheit abzieht, und aus dem Reste die Quadratwurzel nimmt.

Auf gleiche Art findet man aus dem gegebenen Cosinus eines Winkels seinen Sinus.

---

*) Um irgend eine Potenz einer trigonometrischen Function anzuzeigen werden wir immer den Exponenten oberhalb der Benennung dieser Function setzen. So bedeutet $tang^3 \alpha$ die dritte Potenz der Tangente von α u. s. w.

§. 17. Bemerkung.

Da man aus dem Sinus eines Winkels seinen Cosinus, und aus diesen beiden alle übrige trigonometrische Functionen herleiten kann, so hat man nur nöthig die Sinus aller Winkel bis 45° zu wissen, um daraus die trigonometrischen Functionen aller Winkel bis 90° zu bestimmen. Daher pflegt man auch die trigonometrischen Tafeln gemeinhin Sinustafeln zu nennen, obgleich sie außer dem Sinus noch andere Functionen angeben.

§. 18. Erklärung.

Es sey AC Fig. 1 ein unbeweglicher Schenkel eines Winkels ACB, dessen anderer Schenkel $BC = AC$ sich vom Punkte A aus um den Punkt C als Mittelpunkt herum bewegt bis er in die Lage CD kommt: so wird der Winkel ACB, so wie der ihn messende Bogen AB nach und nach jede Anzahl Grade von 0° bis 90° fassen.

Man errichte durch den Anfangspunkt A der Bogen AB, AB' AB'' eine unbegränzte Tangente AG, fälle aus B, B', B'' ꝛc. auf CA die Perpendickel BP, $B'P'$, $B''P''$ ꝛc. und verlängere die Halbmesser CB, CB', CB'' bis sie die Tangente in T, T', T'', treffen, so werden (§. 3) die Verhältnisse $\frac{BP}{CB}$, $\frac{B'P'}{CB'}$ ꝛc. die Sinus aller möglichen Winkel von 0° bis 90° angeben.

Die Verhältnisse $\frac{BP}{PC}$, $\frac{B'P'}{P'C}$ ꝛc. oder die ihnen wegen der Aehnlichkeit der Driecke CPB, CAT (§. 358) gleichen Verhältnisse $\frac{AT}{CA}$, $\frac{AT'}{CA}$ ꝛc. werden alle Tangenten von 0° bis 90° angeben.

Die Verhältnisse $\frac{BC}{PC}$, $\frac{B'C}{P'C}$ ꝛc. oder die gleichen Verhältnisse $\frac{CT}{CA}$, $\frac{CT'}{CA}$ ꝛc. werden die Secanten aller Winkel von 0° bis 90 bestimmen.

Der Verhältnisse $\frac{AP}{AC}$ ꝛc. $= \frac{AC - PC}{AC}$ $= 1 - \frac{PC}{AC} = 1 - \frac{PC}{BC} = 1 - cos.\ ACB$ $= sin.\ v.\ ACB$ werden die Sinus Versus aller Winkel angeben.

Nehmen wir nun den Halbmesser AC als Einheit an und setzen in obige Verhältnisse $AC = 1 = BC$, so ist

$$sin.\ ACB = \frac{BP}{BC} = \frac{BP}{1} = BP.$$

$$tang.\ ACB = \frac{BP}{PC} = \frac{AT}{AC} = \frac{AT}{1} = CT$$

$$sec.\ ACB = \frac{BC}{PC} = \frac{CT}{AC} = \frac{CT}{1} = CT$$

$$sin.\,v.\ ACB = \frac{AP}{AC} = \frac{AP}{1} = AP.$$

In diesem Falle ist die Linie BP selbst der Sinus, AT die Tangente, CT die Secante und AP der Sinusversus des Winkels ACB oder des Bogens AB.

Hiernach wäre der Sinus eines Winkels ACB oder eines mit dem Halbmesser 1 zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Bogens

AB, der von einem Endpunkte *B* dieses Bogens auf den durch den Anfangspunkt *A* gehenden Halbmesser *CA* gefällte Perpendickel *PB*.

Die Tangente eines Winkels *ACB* oder eines Bogens *AB* ist der Theil *AT* der durch den Anfangspukt *A* geführten unbegränzten Tangente *AG*, welchen die durch beide Endpunkte des Bogens gehenden Halbmesser zwischen sich fassen.

Die Secante *) eines Winkels *ACB* oder eines Bogens *AB* ist die gerade Linie welche aus dem durch den Endpunkt *B* dieses Bogens gezogenen und bis an die durch den Anfangspunkt *A* geführte Tangente verlängerten Halbmesser *CT* bestehet.

Der Sinus Versus eines Winkels *ACB* oder eines Bogens *AB* ist der Theil *AP* des Halbmessers *AC*, welcher zwischen dem Endpunkte des Sinus und dem Anfangspunkte des Bogens liegt.

§. 19. Erklärung.

Wird ferner aus dem Endpunkte *B* des Bogens *AB* auf den Halbmesser *CD* ein Perpendickel *BE* gefällt, durch *D* eine Tangente des Kreises geführt, und

---

*) Die trigonometrische Tangente und Secante ist von der geometrischen wohl zu unterscheiden. Die geometrische Tangente und Secante sind (Geom. §. 225) unbegränzte Linien; dahingegen die trigonometrische Tangente und Secante, Linien von bestimmter Größe sind.

der Halbmesser CB so weit verlängert bis er diese Tangente in H trift, so ist (§. 18)

$$\begin{aligned} BE = CP &= sin.\ DCB = sin.\ DB \\ DH &= tang.\ DCB = tang.\ DB \\ CH &= sec.\ DCB = sec.\ DB \\ DE &= sin.v.\ DCB = sin.v.\ DB. \end{aligned}$$

Da aber (Geom. §. 75) die Winkel ACB, DCB, und daher auch die Bogen AB, DB Complemente zu einander sind, so ist (§. 10)

$$\begin{aligned} BE = PC &= sin.\ DCB = cos.\ ACB \\ DH &= tang.\ DCB = cot.\ ACB \\ CH &= sec.\ DCB = cosec.\ ACB \\ DE &= sin.v.\ DCB = cos.v.\ ACB. \end{aligned}$$

Der Cosinus eines Bogens ist also der Sinus des Complements dieses Bogens, und demjenigen Theile CP des Halbmessers AC gleich, welcher zwischen dem Mittelpunkte des Bogens und dem Endpunkte des Sinus liegt.

Eben so ist die Cotangente, Cosecante und der Cosinus Versus eines Winkels oder Bogens nichts anders als die Tangente, Secante und der Sinus Versus des Complements eben dieses Winkels oder Bogens.

Alle die Linien, welche, wie BP; CP, AT ꝛc. den Sinus, Cosinus, die Tangente, und überhaupt die trigonometrischen Functionen repräsentiren, führen den gemeinschaftlichen Nahmen der trigonometrischen Hülfslinien.

Man nennt daher auch die Linie BP als Linie betrachtet, den linearischen Sinus des Winkels ACB oder des Bogens AB; hingegen die abstracte

Zahl, welche den Sinus dieses Winkels angiebt, und welche für den Halbmesser $AC = 1$ durch die Linie BP repräsentirt wird, den numerischen Sinus. Eben so ist Linie AT die linearische Tangente; hingegen die Zahl, welche die Größe der Linie AT gegen AC angiebt, die numerische Tangente des Winkels ACB.

§. 20. Zusatz.

Beschreibt man aus einem Punkte C Fig. 5 mit dem Halbmesser $CA = 1$ einen Kreis ABD und aus demselben Mittelpunkte mit einem andern Halbmesser $CA' >$ oder < 1 einen andern Kreis $A'B'D'$ und zieht an diesem letztern die den trigonometrischen Hülfslinien BP, AT, BE 2c. ähnlich liegenden Linien $B'P'$, $A'T'$, $B'E'$ 2c. so wird jede dieser letzteren Linien so viel mahl größer oder kleiner seyn als die ihr correspondirende im ersten Kreise so viel mahl der Halbmesser $A'C$ größer oder kleiner als AC ist. Denn wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CPB, $CP'B'$, CAT, $CA'T'$, CBE, $CB'E'$ 2c. (§. 358) ist

$$B'P' : BP = B'C : BC = A'C : AC$$
$$= A'T' : AT.$$

Wollen wir daher, wie gewöhnlich geschieht, die Linie $B'P'$ den Sinus des Bogens $A'B'$, die Linie $A'T'$ die Tangente des Bogens $A'B'$ nennen 2c., so muß, wenn die Größe dieser Hülfslinien bestimmt seyn soll, nicht nur der Bogen $A'B'$ in Graden, Minuten 2c, sondern noch überdieß der Halbmesser des Kreises gegeben seyn, zu welchem dieser Bogen gehört; man sagt daher: $B'P'$ ist der Sinus des Winkels ACB für den Halbmesser $A'C$; BP ist der Sinus eben dieses Winkels für den Halbmesser

AC ꝛc. Bei den numerischen Functionen des Winkels ACB, welche für den Halbmesser $AC = 1$ hier durch BP, AT ꝛc. angedeutet sind, braucht die Größe des Halbmessers nicht weiter bemerkt zu werden.

Man pflegt daher auch die, die numerischen Functionen repräsentirenden Linien BP, AT ꝛc. den natürlichen Sinus, die natürliche Tangente ꝛc. des Winkels ACB zu nennen, und bezeichnet sie durch *Sin nat.* ACB, *tang. nat.* ACB; hingegen nennt man die zu einem größern oder kleinern Halbmesser gehörigen Linien $B'P'$, AT'' ꝛc. den künstlichen Sinus, die künstlichen Tangente des Winkels ACB, und bezeichnet sie durch *sin. art.* ACB, *tang. art.* ACB ꝛc.

§. 21. Aufgabe.

Aus dem natürlichen Sinus, Cosinus Tangente ꝛc. den künstlichen Sinus, Cosinus, Tangente ꝛc. für einen gegebenen Halbmesser (r) zu finden.

Und umgekehrt, aus dem für einen gewissen Halbmesser r berechneten künstlichen Sinus, Cosinus ꝛc. den natürlichen zu finden.

Auflösung. Erster Theil. Man multiplizire jede natürliche trigonometrische Function durch den gegebenen Halbmesser, so erhält man die Größe der gleichnahmigen künstlichen Linie. Es ist also für den Halbmesser r:

$$sin.\ art.\ \alpha = r\ .\ sin.\ nat.\ \alpha;$$
$$cos.\ art.\ \alpha = r\ .\ cos.\ nat.\ \alpha;$$
$$tang.\ art.\ \alpha = r\ .\ tang.\ nat.\ \alpha;$$
$$cot.\ art.\ \alpha = r\ .\ cot.\ nat.\ \alpha;\ \text{ꝛc.}$$

Zweiter Theil. Man findet jede natürliche Hülfslinie, wenn man die gleichnahmige künstliche durch den ihr zugehörigen Halbmesser dividirt. Es ist also:

$$sin.\ nat.\ \alpha = \frac{sin.\ art.\ \alpha}{r};$$

$$cos.\ nat.\ \alpha = \frac{cos.\ art.\ \alpha}{r};$$

$$tang.\ nat.\ \alpha = \frac{tang.\ art.\ \alpha}{r};$$

$$cot.\ nat.\ \alpha = \frac{cot.\ art.\ \alpha}{r};$$

2c.

Beweis. Es sey der Halbmesser CA Fig. 5 $= 1$, der Halbmesser $CA' = r$, der Winkel $ACB = \alpha$; so ist (§. 18)

$$BP = sin.\ nat.\ \alpha; \quad AT = tang.\ nat.\ \alpha$$
$$B'P' = sin.\ art.\ \alpha; \quad A'T' = tang.\ art.\ \alpha.$$

Nun ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CBP und $CB'P'$, CAT und $CA'T'$

$$BP : B'P' = CB : CB' = 1 : r$$
$$AT : A'T' = CA : CA' = 1 : r$$

2c.

oder

$$sin.\ nat.\ \alpha : sin.\ art.\ \alpha = 1 : r$$
$$tang.\ nat.\ \alpha : tang.\ art.\ \alpha = 1 : r$$

2c.

folglich ist (Geom. §. 312)

$$sin.\ art.\ \alpha = r\ sin.\ nat.\ \alpha;$$
$$tang.\ art.\ \alpha = r\ .\ tang.\ nat.\ \alpha.$$

2c. und daher auch

$$sin.\ nat.\ \alpha = \frac{sin.\ art.\ \alpha}{r};$$

$$tang.\ nat.\ \alpha = \frac{tang.\ art.\ \alpha}{r}.$$

u. s. w.

Beispiel. Es sey der natürliche Sinus eines Winkels von 12° = 0,2079117; man soll den künstlichen Sinus eben dieses Winkels für den Halbmesser 10000 finden: so ist

$$sin.\ art.\ 12° = 10000 \times 0,2079117 = 20791,17.$$

Der Sinus dieses Winkels für den Halbmesser 10000000 ist = 2079117 rc.

§. 22. Erklärung.

Eine Reihe von Zahlen, welche die Größe der zu einerlei Halbmesser gehörigen trigonometrischen Linien für alle Winkel von 0° bis 90° von Minute zu Minute oder noch genauer angeben, nennt man ein trigonometrisches System. Das natürliche trigonometrische System ist alsdann dasjenige, welches für den Halbmesser = 1 berechnet ist; alle übrige nennt man künstliche trigonometrische Systeme.

§. 23. Zusatz.

Hat man ein für alle mahl das natürliche trigonometrische System berechnet, so kann man (§. 21) sehr leicht jedes künstliche System daraus finden, indem man nur jede trigonometrische Linie des natürlichen Systems mit dem Halbmesser des künstlichen multiplizirt. Dieser Halbmesser heißt alsdann der Modulus des Systems, zu welchem er gehört. In der Folge wird nur von den natürlichen trigonometrischen Linien die

Rede seyn, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird.

§. 24. Bemerkung.

Aus dem Vorhergehenden gehet hervor, daß wir sowohl im natürlichen als in jedem künstlichen System die trigonometrischen Hülfslinien aller Winkel bis 90° zu berechnen im Stande sind, so bald wir nur diese Linien im natürlichen System für alle Winkel bis 45° berechnet haben. Aus dem Folgendem wird sich ergeben, daß man aus den trigonometrischen Functionen aller Winkel bis 90° durch eine geringe Modification auch die Functionen aller Winkel über 90° erhalten kann. Bevor wir aber dieses zeigen können, ist es nöthig einige Begriffe von der Lage der Linien gegen einander zu geben.

§. 25. Erklärung.

Aus der Arithmetik ist bekannt, daß man von zweien entgegengesetzten Größen jede beliebige derselben als positiv betrachten kann, da alsdann die andere negativ ist. Stellen wir uns von Osten nach Westen eine unbegränzte gerade Linie vor, und betrachten diese Richtung als positiv, so wird die entgegen gesetzte Richtung von Westen nach Osten negativ seyn. Wir können also dieselbe Linie bald als positiv, bald als negativ betrachten, nachdem wir sie in der einen oder der andern Richtung nehmen. Setzen wir aber in dieser Linie einen Punkt fest, von welchem an die eine oder andere Richtung gerechnet werden soll, so ist hierdurch der positive und negative Theil derselben bestimmt. Nehmen wir z. B. auf der Linie *AK* Fig. 6 einen festen Punkt

C und betrachten alle in der Richtung CA abgeschnittenen Theile als positiv, so werden die in der Richtung CK abgeschnittenen Theile negativ seyn. Eben so werden, wenn wir die aus dem Punkte C auf der Linie CD abgeschnittenen Theile als positiv betrachten, die auf der Linie CD'' abgeschnittenen Theile negativ seyn. Desgleichen werden, wenn man die aus A auf AT abgeschnittenen Theile als positiv betrachtet, die auf AT'' abgeschnittenen negativ seyn.

Stellen wir uns ferner vor, der Schenkel CA Fig. 6. bewege sich um den Punkt C als Mittelpunkt, von dem Punkte A aus in der Richtung AB und beschreibe nach einander alle mögliche Winkel, ACD ACB'' 2c. so werden, wenn die Winkel nach dieser Richtung als positiv betrachtet werden, die von demselben Schenkel durch eine entgegengesetzte Bewegung in der Richtung $AB^{IV}D''$ beschriebenen Winkel negativ seyn. Haben also die beiden Winkel ACB, ACB^{VI} eine gleiche Anzahl Grade, so ist $ACB^{VI} = - ACB$. Aus gleichem Grunde $DCB'' = - DCB$, wenn die Anzahl Grade eines jeden dieser Winkel von D an gezählt wird.

§. 26. Zusatz.

Betrachten wir nun alle trigonometrische Linien der Winkel bis 90° als positiv, so werden die der größern Winkel, welche mit jenen einerlei Lage haben, ebenfalls positiv, diejenigen aber, welche eine entgegengesetzte Lage haben, werden negativ seyn.

Da also der Sinus PB positiv ist, so werden alle vom andern Schenkel der von CA beschriebenen Winkel auf AK gefällte Perpendickel positiv seyn, wenn sie mit PB von einerlei Seite der AK liegen; negativ aber, wenn sie auf der entgegen gesetzten Seite derselben liegen.

Der Cosinus des Winkels ACB oder der Sinus des Winkels DCB ist die Linie BE oder CP und alle Cosinus fangen in einem Punkte E oder C der Linie DD'' an. Es werden also alle Cosinus, welche mit BE auf einerlei Seite der DD'' liegen, positiv, die auf der entgegen gesetzten Seite der DD'' liegenden aber negativ seyn.

Die Tangente eines Winkels wird von der durch den Anfangspunkt A geführten unbegränzten Tangente abgeschnitten, und für $ACB < 90°$ in der Richtung AT. Jede Tangente eines Winkels, welche in derselben Richtung AT fällt, wird also positiv, und jede in der entgegen gesetzten Richtung AT'' liegende Tangente wird negativ seyn.

Eben so ist, wenn wir D als den Anfangspunkt des Winkels DCB betrachten, die Tangente DH dieses Winkels oder die Cotangente des Winkels ACB positiv, und eben so alle in derselben Richtung fallende Cotangenten; die nach der entgegen gesetzten Richtung DH'' fallenden Cotangenten aber negativ.

Die Secante und Cosecante wird vom Scheitelpunkte des Winkels oder dem Mittelpunkte des Kreises an gerechnet. Diese werden positiv seyn, wenn sie, wie bei einem Winkel unter 90° aus dem Mittelpunkte C nach dem Endpunkte B des Bogens gezogen und bis an die Tangente verlängert wird, so daß der andere Schenkel CB des Winkels ACB einen Theil derselben ausmacht. Die Secante wird im Gegentheile negativ seyn, wenn sie vom Endpunkte B'' des Bogens ADB'

durch den Mittelpunkt C bis an die Tangente AT'' gezogen wird, so daß, wie beim stumpfen Winkel ACB'', der andere Schenkel CB'' dieses Winkels keinen Theil der Secante CT'' ausmacht.

§. 27. Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel ACB, ACB'' Fig. 6. einander zu 180° ergänzen, so sind ihre Sinus sowohl in Ansehung der Größe als der Lage einander gleich; die Cosinus aber zwar einander gleich jedoch entgegen gesetzt, und daher der Cosinus des stumpfen Winkels negativ, wenn der des spitzen als positiv angenommen wird.

Beweis. Erster Theil.

Da $ACB + ACB'' = 2\ R$ und (Geom. §. 68) $ACB'' + B''CK = 2\ R$, so ist $ACB + ACB'' = ACB'' + B''CK$; folglich $ACB = B''CK$. Ferner ist (§. 3)

$sin.\ ACB = \frac{BP}{BC}$; $sin.\ ACB'' = \frac{B''P''}{B''C}$. Da aber in den Dreiecken BCP, $B''CP''$ die Seite $BC = B''C$, $\angle\ BCP = B''CP''$ und $\angle\ BPC = B''P''C = R$, so ist (Geom. §. 84) $BP = B''P''$ und $PC = P''C$, also $\frac{BP}{BC} = \frac{B''P''}{B''C}$, oder $sin.\ ACB = sin.\ ACB''$; und da die beiden Linien BP, $B''P''$ auf einerlei Seite der Linie AK fallen, so haben sie auch einerlei Zeichen.

Zweiter Theil. Da (§. 25) $CP'' = -CP$, so ist auch $\frac{CP''}{CB''} = -\frac{CP}{CB}$. Nun ist (§. 4)

$$\frac{Cp''}{CB''} = \cos ACB'' \text{ und } \frac{Cp}{CB} = \cos ACB;$$

folglich ist

$$\cos ACB'' = - \cos ACB.$$

Bezeichnen wir nun den Winkel ACB durch α, so ist $ACB'' = 180° - \alpha$ und daher

$$\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$$
$$\cos (180° - \alpha) - \cos \alpha.$$

Anmerkung. Das Complement des stumpfen Winkels ACB″ zum rechten muß in einem ganz entgegen gesetzten Sinne als beim spitzen Winkel genommen werden. Das Complement des spitzen Winkels ACB Fig 6 ist der Winkel DCB, welcher zu ersterem hinzu gesetzt werden muß, um den rechten Winkel ACD zu erzeugen. Das Complement des stumpfen Winkels ACB″ ist der Winkel DCB″, welcher von ersterem hinweg genommen werden muß, um den rechten Winkel ACD zu erzeugen, Beide Winkel DCB, DCB″ werden einander gleich seyn, wenn ACB = ACB″; nur wird das zweite Complement negativ seyn, wenn man das erste als positiv betrachtet.

§. 28. Lehrsatz.

Werden alle trigonometrischen Functionen bis 90° oder im ersten Quadranten als positiv betrachtet, so ist der Sinus und Cosinus eines Winkels zwischen 180° und 270° dem Sinus und Cosinus seines Ueberschusses über 180° gleich, aber entgegen gesetzt. Bedeutet nehmlich α einen spitzen Winkel, so ist $\sin. (180° + \alpha) = - \sin. \alpha$; $\cos. (180° + \alpha) = - \cos. \alpha$.

Der Sinus und Cosinus eines Winkels zwischen 270° und 360° ist dem Sinus und

Cosinus des ihn zu 360° ergänzenden spitzen Winkels gleich, nur sind die Sinus dieser beiden Winkel einander entgegen gesetzt. Es ist nehmlich, wenn α einen spitzen Winkel bedeutet, $sin. (360° - \alpha) = - sin. \alpha;$

$$cos. (360° - \alpha) = cos. \alpha.$$

Beweis. Erster Theil. Es sey ACB''' Fig. 6 ein erhabener Winkel, worin der Theil $B'''CK = ACB = \alpha$: so ist $ACB''' = 180 + \alpha$. Fällt man aus B und B''' auf AK die Perpendickel BP, $B'''P''$, und auf DD'' die Perpendickel BE, $B'''E''$; so sind (Geom. §. 84) die Dreiecke CBP, $CB'''P''$; congruent und (§ 25) $B'''P'' = - BP$; $B'''E'' = - BE$ oder $CP'' = - CP$,

also $\frac{B'''P''}{CB'''} = - \frac{BP}{BC}$; $\frac{CP''}{CB'''} = - \frac{CP}{CB}$.

Nun ist (§. 3)

$\frac{B'''P''}{CB'''} = sin. (180° + \alpha)$; $\frac{BP}{CB} = sin. \alpha$;

und (§. 4) $\frac{CP''}{CB'''} = cos. (180° + \alpha)$

$\frac{CP}{CB} = cos. \alpha$; folglich ist

$$sin. (180° + \alpha) = - sin. \alpha;$$
$$cos (180° + \alpha) = - cos. \alpha.$$

Zweiter Theil. Es sey ACB^{IV} Fig. 6 ein erhabener Winkel, dessen Ergänzung ACB^{IV} zu 360° dem spitzen Winkel $ACB = \alpha$ gleich ist, so daß $ACB^{IV} = 360° - \alpha$. Fället man aus B^{IV} und B auf AK die Perpendickel $B^{IV}P$, BP und auf DD' die Perpendickel $B^{IV}E''$, BE, so ist (§. 25)

$$B^{IV}P = - BP, B^{IV}E'' = BE,$$

und daher $\frac{B^{IV}P}{B^{IV}C} = -\frac{BP}{BC}$; $\frac{B^{IV}E''}{B^{IV}C} = \frac{BE}{BC}$.

Es ist aber (§. 3) $\frac{B^{IV}P}{B^{IV}C} = sin\,(360^\circ - \alpha)$;

$\frac{BP}{BC} = sin\ \alpha$; $\frac{B^{IV}E''}{B^{IV}C} = \frac{PC}{B^{IV}C} = cos\,(360^\circ - \alpha)$

und $\frac{BE}{BC} = \frac{PC}{BC} = cos\ \alpha$, folglich ist

$$sin\,(360^\circ - \alpha) = - sin\ \alpha;$$
$$cos\,(360^\circ - \alpha) = cos\ \alpha.$$

Anmerkung. Rücksichtlich des Zeichens hat man daher nur zu merken, daß der Sinus im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten negativ ist; daß der Cosinus hingegen im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten aber negativ ist.

§. 29. Zusatz.

Hieraus folgt allgemein

$$sin\,(180^\circ + \alpha) = - sin\ \alpha$$
$$cos\,(180^\circ + \alpha) = - cos\ \alpha,$$

es mag α ein spitzer oder stumpfer Winkel seyn, d. h. es mag der ganze Winkel zwischen 180° und 270° oder zwischen 270° und 360° fallen.

§. 30. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden folgt ferner, daß jede zwei Winkel, welche einander zu 360° ergänzen gleiche Cosinus und gleiche Sinus haben, nur das ihre Sinus einander entgegen gesetzt sind. Es ist nehmlich

$$sin\,(360^\circ - \alpha) = - sin\ \alpha$$
$$cos\,(360^\circ - \alpha) = cos\ \alpha,$$

es mag α ein spitzer oder ein stumpfer Winkel seyn. So ist z. B.

$$\sin 290^\circ = -\sin 70^\circ;\ \cos 290^\circ = \cos 70^\circ$$
$$\sin 220^\circ = -\sin 140^\circ;\ \cos 220^\circ = \cos 140^\circ.$$

§. 31. Lehrsatz.

Die Tangenten und Cotangenten zweier Winkel, welche einander zu 180° oder zu 360° ergänzen sind einander gleich aber entgegen gesetzt; nehmlich

$$\tan (180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$
$$\cot (180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$
$$\tan (360^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$
$$\cot (360^\circ - \alpha) = -\cot \alpha.$$

Beweis. Es ist (§. 11) $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$; und $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$. Nun ist (§. 27)

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$
$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

folglich ist

$$\frac{\sin (180^\circ - \alpha)}{\cos (180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

oder $\tan (180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ (§. 11);

und $\frac{\cos (180^\circ - \alpha)}{\sin (180^\circ - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

oder $\cot (180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$ (§. 11).

Eben so ist (§. 30)

$$\sin (360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$$
$$\cos (360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

folglich ist

$$\frac{\sin(360° - \alpha)}{\cos(360° - \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

oder $tang\,(360° - \alpha) = -\,tang\,\alpha$ (§. 11);

und $\frac{\cos(360° - \alpha)}{\sin(360° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

oder

$$\cot(360° - \alpha) = -\cot\alpha.$$

§. 32. Zusatz.

Ueberhaupt wird die Tangente oder Cotangente in allen den Fällen positiv seyn, wo der Sinus und Cosinus zugleich positiv oder zugleich negativ sind, hingegen wird die Tangente oder Cotangente negativ, wenn vom Sinus und Cosinus der eine positiv und der andere negativ ist. Es ist daher (§. 28) die Tangente oder Cotangente im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten aber negativ.

Dieß lehrt auch die Betrachtung der Figur. Denn es sey Fig. 6 $ACB + ACB'' = 2\,R$ und der Winkel ACB spitz, so ist (§. 11) $tang\,ACB = \frac{AT}{AC}$, hingegen $tang\,ACB'' = \frac{AT''}{AC}$. Denn da ACB'' ein stumpfer Winkel, und daher $CAT + ACB'' > 2\,R$, so können (Geom. §. 124) die Linien TA, $B''C$ einander nur auf der entgegen gesetzten Seite in T'' schneiden, und $\frac{AT''}{AC}$ ist die Tangente des Winkels ACB''. Nun ist (§. 25) $AT'' = - AT$, und daher

$$\frac{AT''}{AC} = - \frac{AT}{AC}, \text{ folglich ist}$$

$$tang\ ACB'' = - tang\ ACB.$$

Eben so ist die Cotangente des Winkels ACB oder die Tangente des Winkels DCB dem auf der durch D geführten Tangente abgeschnittenen Theil DH proportional, die Cotangente des Winkels ACB'' hingegen ist dem auf der entgegengesetzten Seite abgeschnittenen Theil DH'' proportional.

Aehnliche Betrachtungen lehren, daß die Tangenten der Winkel zwischen 180° und 270°, wie beim erhabenen Winkel ACB''', positiv seyn müssen, weil die ihnen proportionalen Linien in der Richtung AT abgeschnitten werden; daß hingegen die Tangenten aller Winkel zwischen 270° und 360°, wie beim erhabenen Winkel ACB^{IV}, negativ sind, weil die ihnen proportionalen Linien in der Richtung AT'' abgeschnitten werden.

Eben so ist die Cotangente eines Winkels zwischen 180° und 270° wie ACB''' positiv, weil die ihr proportionale Linie DH auf der durch den Anfangspunkt D des ihn zu 90° ergänzenden Winkels DCB''' geführten Tangente in derselben Richtung DH wie im ersten Quadranten abgeschnitten wird. Die Cotangente eines Winkels zwischen 270° und 360°, wie ACB^{IV}, ist negativ, weil die ihr proportionalen Linien durch den zweiten Schenkel CB^{IV} des Winkels in der entgegengesetzten Richtung DH'' abgeschnitten werden.

Anmerkung. Das Complement eines erhabenen Winkels wie ACB''' muß eben so wie beim stumpfen Winkel subtractiv genommen werden, und ist also der Winkel DCB''', welcher von dem gegebenen ACB''' hinwegge- nommen einen rechten giebt. Die Cotangente eines sol- chen Winkels ACB''' ist die Tangente des Complements DCB''' und der Linie DH proportional, welche von der durch den Anfangspunkt D des Complements geführten Tangente durch den andern Schenkel CB''' abgeschnitten wird. Eben so ist der erhabene Winkel DCB^{IV} das Com- plement des erhabenen Winkels ACB^{IV}, und die Cotan- gente dieses letztern oder die Tangente des Winkels DCB^{IV} wird vom zweiten Schenkel CB^{IV} dieses Winkels auf der durch D geführten Tangente in der Richtung DH'' abge- schnitten.

§. 33. Zusatz.

Aus dem Vorhergehenden folgt

$$tang\,(180° + \alpha) = -\,tang\,(180° - \alpha)$$
$$= +\,tang\,\alpha$$
$$cot\,(180° + \alpha) = -\,cot\,(180° - \alpha)$$
$$= +\,cot\,\alpha$$

(§. 31).

§. 34. Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel einander zu 180° er- gänzen, so sind ihre Cosecanten völlig gleich; ihre Secanten aber sind zwar an Größe gleich, aber entgegen gesetzt; nehmlich

$$cosec\,(180° - \alpha) = cosec\,\alpha$$
$$sec\,(180° - \alpha) = -\,sec\,\alpha$$

Wenn hingegen zwei Winkel einander zu 360° ergänzen, so sind ihre Secanten völlig gleich, ihre Cosecanten aber der Größe nach gleich, jedoch entgegen gesetzt; nehmlich

$$sec\,(360 - \alpha) = sec\,\alpha$$
$$cosec\,(360° - \alpha) = -\,cosec\,\alpha.$$

Beweis. Erster Theil. Es ist (§. 27)

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha;$$

und daher

$$\frac{1}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha};$$
$$\frac{1}{\cos(180° - \alpha)} = -\frac{1}{\cos\alpha}$$

nun ist (§. 12)

$$\frac{1}{\sin(180° - \alpha)} = \operatorname{cosec}(180° - \alpha),$$
$$\frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$$
$$\frac{1}{\cos(180° - \alpha)} = \sec(180° - \alpha),$$
$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

folglich ist:

$$\operatorname{cosec}(180° - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$$
$$\sec(180° - \alpha) = -\sec\alpha.$$

Zweiter Theil. Es ist (§. 28).

$$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha;$$

und daher

$$\frac{1}{\sin(360° - \alpha)} = -\frac{1}{\sin\alpha};$$
$$\frac{1}{\cos(360° - \alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Nun ist (§. 12)

$$\frac{1}{\sin(360^\circ - \alpha)} = \operatorname{cosec}(360^\circ - \alpha)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\frac{1}{\cos(360^\circ - \alpha)} = \sec(360^\circ - \alpha);$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha.$$

folglich ist

$$\sec(360^\circ - \alpha) = \sec \alpha$$
$$\operatorname{cosec}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha.$$

§. 35. Zusatz.

Da der Werth der Secante lediglich von dem des Cosinus, der Werth der Cosecante aber von dem des Sinus abhängt (§. 12), so wird die Secante in allen den Fällen positiv oder negativ seyn, wo der Cosinus positiv oder negativ ist; die Cosecante aber wird mit dem Sinus zugleich positiv oder negativ werden. Es wird daher (§. 28) die Secante im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten aber negativ seyn; die Cosecante hingegen wird im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten aber negativ seyn.

Dieß lehrt auch die Betrachtung der Figur, wenn man erwägt, daß die den Secanten proportionalen Linien vom Scheitel des Winkels an auf dem als beweglich gedachten Schenkel abgeschnitten werden und positiv sind, wenn dieser Schenkel einen Theil derselben ausmacht, negativ aber, wenn sie in entgegengesetzter Richtung dieses

Schenkels fallen. Ist nun *ACB* Fig. 6 ein Winkel im ersten Quadranten, also ein spitzer, so ist (§. 18) *CT* der Secante dieses Winkels proportional, und zugleich auf dem andern Schenkel dieses Winkels selbst. Ist *ACB''* ein stumpfer Winkel, so werden die Linien *TA*, *B''C* einander unterhalb in *T''* schneiden; die Secante *CT''* dieses Winkels ist nunmehr nicht auf dem zweiten Schenkel *CB''* des gegebenen Winkels, sondern auf dessen Verlängerung in der Richtung *B''C* genommen und daher negativ.

Die Cosecante des Winkels *ACB* ist der Linie *CH* proportinal und liegt auf dem andern Schenkel des Winkels selbst. Die Cosecante des stumpfen Winkels *ACB''* ist der Linie *CH''* proportional und liegt ebenfalls auf dem andern Schenkel *CB''* des Winkels *ACB''* selbst. Sie ist also ebenfalls positiv. Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch beim dritten und vierten Quadranten anstellen.

§. 36. Zusatz

Aus dem Vorhergehenden folgt

$$sec\ (180^\circ + \alpha) = -\ sec\ \alpha$$
$$cosec\ (180 + \alpha) = -\ cosec\ \alpha.$$

§. 37. Lehrsatz.

Betrachten wir alle Winkel, welche durch die Bewegung des Schenkels *CA* Fig. 6 von dem Punkte *A* aus in der einen Richtung *AB* entstehen, wie *ACB* als positiv, und daher (§. 27) alle Winkel nach entgegen gesetzter

Richtung wie ACB^{IV} als negativ, so daß $ACB^{IV} = - ACB = - \alpha$, so ist

$sin\ (-\alpha) = - sin\ \alpha;\ cos\ (-\alpha) = + cos\ \alpha.$
$tang(-\alpha) = - tang\ \alpha;\ cot\ (-\alpha) = - cot\ \alpha$
$sec\ (-\alpha) = + sec\ \alpha;\ cosec(-\alpha) = - cosec\ \alpha.$

Beweis. Da (§. 25 $B^{IV}P = - BP$, so ist $\frac{B^{IV}P}{B^{IV}C} = - \frac{BP}{BC}$. Nun ist (§. 3) $\frac{B^{IV}P}{B^{IV}C} =$ $sin\ (-\alpha)$ und $\frac{BP}{BC} = sin\ \alpha$;

folglich ist $sin\ (-\alpha) = - sin\ \alpha.$

Eben so wird der Beweis von den übrigen Theilen des Satzes geführt.

Zweites Kapitel.

Von der Berechnung der trigonometrischen Functionen und der Vergleichung derselben unter einander.

§. 38. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Sinus und Cosinus zweier Winkel α, β den Sinus und Cosinus ihrer Summe oder ihrer Differenz zu finden.

Auflösung. Es ist

$$\text{I} \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta. \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta. \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta. \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \end{cases}$$

Beweis. I. Es sey Fig. 7 $ABC = \alpha$; $DBC = \beta$ und daher $ABD = \alpha + \beta = \gamma$. Man fälle aus einem beliebigen Punkte E des äußersten

Schenkels BD auf jeden der übrigen einen Perpendickel EF, EH, und durch den Punkt F ziehe man FG der EH und FI der AB parallel: so ist (§. 3)

$$\sin \gamma = \frac{EH}{EB} = \frac{HI + EI}{EB} = \frac{FG + EI}{EB}.$$

$$= \frac{FG}{EB} + \frac{EI}{EB}.$$

Es ist aber (§. 9)

$$FG = FB \sin \alpha \text{ und}$$
$$EI = EF \cos FEI = EF \cos \alpha,$$

weil in den Dreiecken EKF, BKH der $\angle BKH = EKF$, $\angle BHK = EFK = R$ und daher (Geom. §. 131) $FEK = KBH = \alpha$; folglich ist

$$\sin \gamma = \frac{FB}{EB} \sin \alpha + \frac{EF}{EB} \cos \alpha$$

Nun ist (§. 8) $\frac{FB}{EB} = \cos \beta$ und $\frac{EF}{EB} = \sin \beta$; folglich ist

$$\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta)$$
$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Ferner ist $\cos \gamma = \frac{BH}{BE} = \frac{BG - GH}{BE}$

$= \frac{BG - FI}{BE} = \frac{BG}{BE} - \frac{FI}{BE}$. Nun ist (§. 9)

$$BG = BF \cos \alpha; \quad FI = EF \sin \alpha;$$

folglich ist

$$\cos \gamma = \frac{BF}{BE} \cos \alpha - \frac{EF}{BE} \sin \alpha.$$

Da aber (§. 8)

$$\frac{BF}{BE} = \cos\beta \text{ und } \frac{EF}{BE} = \sin\beta, \text{ so ist}$$

$$\cos\gamma = \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

II. Es sey Fig. 8 $ABC = \alpha$, $CBD = \beta$ und daher $ABD = \gamma = \alpha - \beta$. Man fälle aus einem Punkte E des innerhalb liegenden Schenkels BD auf jeden der andern Schenkel einen Perpendickel EF, EH; führe durch F der EH eine Parallele FG, und durch E der AB eine Parallele EI: so ist

$$\sin\gamma = \sin(\alpha - \beta) = \frac{EH}{EB} = \frac{FG - FI}{EB}$$

$$= \frac{FG}{EB} - \frac{FI}{EB}.$$ Da aber (§. 9)

$$FG = FB\sin\alpha, \; FI = EF\cos\alpha;$$

weil $EFI + IFB = R = IFB + \alpha$, und daher $EFI = \alpha$: so ist auch

$$\sin\gamma = \frac{FB}{EB}\sin\alpha - \frac{EF}{EB}\cos\alpha.$$

Nun ist (§. 8)

$$\frac{FB}{EB} = \cos\beta \text{ und } \frac{EF}{EB} = \sin\beta;$$

folglich ist

$$\sin\gamma = \sin(\alpha - \beta$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Ferner ist

$$\cos\gamma = \frac{BH}{EB} = \frac{BG + GH}{EB} = \frac{BG}{EB} + \frac{EI}{EB}.$$

Da aber $BG = BF \cos\alpha$ und $EI = EF \sin\alpha$, so ist

$$\cos\gamma = \frac{BF}{EB}\cos\alpha + \frac{EF}{EB}\sin\alpha;$$

oder, weil (§. 8) $\frac{BF}{EB} = \cos\beta$ und $\frac{EF}{EB} = \sin\beta$,

$\cos\gamma = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

§. 39. Zusatz.

Aus dem Werthe für $\sin(\alpha + \beta)$ folgt, wenn wir $\beta = \alpha$ setzen, $\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$ oder $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, und aus dem Werthe für $\cos(\alpha + \beta)$ folgt, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Wird ferner $\beta = 2\alpha$ gesetzt, so ist

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha \text{ und}$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

und eben so kann man den Sinus und Cosinus eines jeden vielfachen Winkels finden.

§. 40. Aufgabe.

Aus den gegebenen Tangenten zweier Winkel α, β die Tangente ihrer Summe oder ihrer Differenz zu finden.

Auflösung. Es ist

$$\tang(\alpha + \beta) = \frac{\tang\alpha + \tang\beta}{1 - \tang\alpha . \tang\beta}$$

und

$$\tang(\alpha - \beta) = \frac{\tang\alpha - \tang\beta}{1 + \tang\alpha . \tang\beta}.$$

Beweis. Es ist (§. 11)

$$tang\ (\alpha + \beta) = \frac{sin\ (\alpha + \beta)}{cos\ (\alpha + \beta)}.$$

Da aber (§. 38)

$$sin\ (\alpha + \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta$$

und $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha\ sin\ \beta$:
so ist

$$tang\ (\alpha + \beta) = \frac{sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha\ sin\ \beta}.$$

Dividiren wir Zähler und Nenner dieses Bruchs durch $cos\ \alpha\ cos\ \beta$, und erwägen, daß $\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = tang\ \alpha$, $\frac{sin\ \beta}{cos\ \beta} = tang\ \beta$: so ist

$$tang\ (\alpha + \beta) = \frac{tang\ \alpha + tang\ \beta}{1 - tang\ \alpha \,.\, tang\ \beta}.$$

Aus gleichem Grunde ist

$$tang\ (\alpha - \beta) = \frac{sin\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sin\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta + sin\ \alpha\ sin\ \beta}$$

$$= \frac{tang\ \alpha - tang\ \beta}{1 + tang\ \alpha\ tang\ \beta}.$$

§. 41. Zusatz.

Setzen wir in dem Werthe von $tang\ (\alpha + \beta)$ den Winkel $\beta = \alpha$, so ist

$$tang\ 2\ \alpha = \frac{2\ tang\ \alpha}{1 - tang^2\ \alpha}.$$

§. 42. Zusatz.

Auf gleiche Art wie in (§. 40) findet man

$$cot\ (\alpha + \beta) = \frac{cot\ \alpha\ .\ cot\ \beta - 1}{cot\ \alpha + cot\ \beta}$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \,.\, \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}.$$

Diese Resultate lassen sich auch aus den Formeln des §. 40 herleiten wenn man erwägt, daß (§. 11)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 : \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; \text{ und}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1 : \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Denn es ist

$$\frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} = 1 : \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \,.\, \tan\beta} \text{ oder}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{1 - \tan\alpha \,.\, \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta};$$

und dividiren wir Zähler und Nenner durch $\tan\alpha \,.\, \tan\beta$, so ist

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{1}{\tan\alpha \,.\, \tan\beta} - 1}{\dfrac{1}{\tan\beta} + \dfrac{1}{\tan\alpha}}$$

$$= \frac{\cot\alpha \,.\, \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}.$$

Eben so wird bei den übrigen Fällen verfahren.

§. 43. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Sinus und Cosinus eines Winkels α den Sinus und Cosinus der Hälfte dieses Winkels zu finden.

Auflösung. Es ist

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos\alpha}{2}\right)}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos \alpha}{2}\right)}.$$

Beweis. Nach (§. 39) ist

$\cos 2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, und daher

$$\cos \alpha = \cos^2 \tfrac{1}{2} \alpha - \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Da aber (§. 16) $\cos^2 \frac{1}{2} \alpha = 1 - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$, so ist

$$\cos \alpha = 1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha - \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha$$
$$= 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha.$$

also $2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = 1 - \cos \alpha$ und

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{2};$$

folglich ist

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right)}.$$

Eben so ist, wenn wir in der Gleichung $\cos \alpha = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$ anstatt $\sin^2 \frac{1}{2} \alpha$, dessen Werth, $1 - \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$ setzen,

$\cos \alpha = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - 1 + \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha - 1;$

und daher

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \alpha = 1 + \cos \alpha; \cos^2 \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

folglich $\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos \alpha}{2}\right)}$

Dieß lehrt auch die geometrische Betrachtung. Denn es sey Fig. 9 $AM = \alpha$ irgend ein mit dem Halbmesser $CA = 1$ beschriebener Bogen. Wird dieser im Punkte N halbirt und der Halbmesser CN gezogen, so wird dieser auch die Sehne AM in Q halbiren, und es ist (§. 18) $AQ = \sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} AM;$

$$CQ = \cos \tfrac{1}{2} \alpha = \tfrac{1}{2} A'M.$$

$MP = \sin\alpha$, $CP = \cos\alpha$. Nun ist (Geom. §. 463) $AM^2 = PM^2 + AP^2$ oder, da $AM = 2 \sin \frac{1}{2}\alpha$, und $AP = 1 - \cos\alpha$

$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \sin^2\alpha + (1 - \cos\alpha)^2$$
$$= \sin^2\alpha + 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha;$$

oder, weil $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (§. 15)

$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = 2 - 2\cos\alpha; \text{ folglich}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2 - 2\cos\alpha}{4} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos\alpha}{2}\right)}.$$

Eben so ist $A'M^2 = (2\,CQ)^2 = MP^2 + A'P^2$ oder, weil $CQ = \cos\frac{1}{2}\alpha$

$$4 \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \sin^2\alpha + (1 + \cos\alpha)^2$$
$$= \sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha$$
$$= 2 + 2\cos\alpha$$

folglich

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2 + 2\cos\alpha}{4} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}.$$

folglich $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos\alpha}{2}\right)}$.

§. 44. Zusatz.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß der Sinus irgend eines Bogens AN der Hälfte der Sehne AM des doppelten Bogens ANM gleich ist, und daß umgekehrt die Sehne irgend eines Bogens AM dem doppelten Sinus des Bogens AN der Hälfte von ANM gleich ist. Man kann daher sobald die Sinus bekannt sind daraus die Chorden bestimmen, und umgekehrt.

Es ist also überhaupt
$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ chord 2α; chord $2\alpha = 2\sin\alpha$.

§. 45. Zusatz.

Aus $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)}$ und

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)}$$

folgt

$$\tang\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{(1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Anmerkung. Da man aus dem gefundenen Sinus und Cosinus der Hälfte eines Bogens wiederum den Sinus und Cosinus der Hälfte dieser Hälfte oder des vierten Theils vom gegebenen Bogen bestimmen kann, und so fort, so läßt sich aus dem gegebenen Sinus und Cosinus eines Bogens, der Sinus und Cosinus eines Bogens finden, welcher $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ rc. des gegebenen enthält.

§. 46. Zusatz.

Wir sind nunmehr im Stande die trigonometrischen Functionen aller Winkel zu berechnen. Es bewege sich der Halbmesser $CA = 1$ Fig. 1. um den Punkt C herum, und beschreibe nach einander alle mögliche Winkel: so fällt, wenn noch der Schenkel CB auf CA liegt, der Punkt B auf A und mit dem Endpunkte P des Perpendickels zusammen. In diesem Falle ist $BP = 0$, eben so wie der Bogen AB oder der Winkel ACB in diesem Falle $= 0$ ist. Es ist daher auch $\frac{BP}{BC} = \frac{0}{BC} = 0$. Oder

$$\sin 0° = 0.$$

Die Linie CP nähert sich desto mehr dem Halbmesser CA, je näher der Punkt B gegen A rückt; und wenn B mit A zusammen fällt, wird $CP = CA = CB$; folglich $\frac{CP}{CB} = 1$; oder

$$\cos 0° = 1.$$

Wenn der Schenkel CB sich der Lage CD und also der Winkel ACB dem rechten nähert, so kommt auch die Linie BP dem Halbmesser CD immer näher bis sie bei 90° mit CD zusammen fällt. In diesem Falle ist also $\frac{BP}{BC} = \frac{BP}{CD} = 1$. Der Sinus nimmt also von 0° bis 90° immer zu bis er bei 90° der Einheit, oder in einem künstlichem System dem Halbmesser gleich wird. Die Sinus aller Winkel bis 90° sind also ächte Brüche, weshalb man den Sinus von 90° auch den Sinus totus oder ganzen Sinus nennt.

Die Linie CP wird desto kleiner, je mehr sich der Winkel ACB dem rechten nähert; und wenn der Schenkel CB mit CD zusammen fällt ist $CP = 0$, folglich auch $\frac{CP}{CB} = 0$. Es ist also

$$\sin 90° = 1; \cos 90° = 0.$$

Wird der Winkel ACB größer als ein rechter, so nimmt sein Sinus wiederum ab und wird desto kleiner je mehr sich der Winkel ACB'' zweien rechten nähert, bis er, wenn der Punkt B'' in F fällt, wiederum $= 0$ wird. Der Cosinus des stumpfen Winkels nimmt von 90° bis 180° wieder zu, ist jedoch negativ, weil (§. 27) alle Cosinus im zweiten Quadranten negativ werden, bis er bei 180° der negativen Einheit gleich wird, so daß

$$\sin 180° = 0;\quad \cos 180° = -1$$

Durch ähnliche Betrachtungen findet man

$$\sin 270° = -1;\quad \cos 270° = 0$$
$$\sin 360 = 0;\quad \cos 360° = 1.$$

§. 47. Zusatz.

Da (§. 11) $tang\ \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, (§. 12), so folgt $tang\ 0° = \frac{0}{1} = 0$; $\cot 0° =$

$$tang\ 90° = \frac{1}{0} = \infty$$

(wo das Zeichen ∞ eine unendliche Größe bezeichnet)

$$tang\ 180° = \frac{0}{-1} = 0;\ \cot 180° = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$tang\ 270° = \frac{-1}{-0} = \infty;\ \cot 270° = \frac{-0}{-1} = 0$$

$$\sec\ 0° = \frac{1}{1} = 1;\ cosec\ 0° = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\sec\ 90° = \frac{1}{0} = \infty;\ cosec\ 90° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec\ 180° = \frac{1}{-1} = -1;\ cosec\ 180° = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\sec\ 270° = \frac{1}{-0} = -\infty;\ cosec\ 270° = \frac{1}{-1} = -1$$

Dieß lehrt auch die Betrachtung der Fig. 6. Denn wenn der Winkel ACB sehr klein ist, so nimmt die Tangente AT, so wie die Secante CT immer mehr ab; wenn CB mit CA zusammen fällt, oder für den Winkel $ACB = 0$ ist $AT = 0$ und $CT = CA = 1$. Nimmt der Spitze Winkel ACB zu, so wächst seine Tangente AT und Secante CT. Wenn ACB dem rechten sehr nahe ist, werden Tangente und Secante sehr groß seyn; und wird $ACB = 90°$, so sind (Geom. §. 113) CB, AT parallel. Man kann sich ihren Durchschnittspunkt in keiner endlichen Entfernung denken, und jede derselben ist also unendlich groß.

Die Cotangente DH, so wie die Cosecante CH des spitzen Winkels ACB werden desto größer je mehr der Winkel ACB abnimmt, und desto kleiner, je mehr sich dieser Winkel dem rechten nähert. Wird $ACB = 0$, so sind DH und CH parallel und also unendlich groß. Wird $ACB = 90°$, so ist $DH = 0$ und $CH = CD = 1$.

Wie der Winkel ACB einen rechten übersteigt, erhält die Tangente AT wiederum eine endliche Größe, wird jedoch negativ, und nimmt bis 180° ab. Eben so ihre Secante CT'' (§. 32). Bei 180° ist wiederum die Tangente $AT'' = 0$ und die Secante $CT'' = CA = -1$ (§. 32)

Die Cotangente DH'' eines stumpfen Winkels ist negativ (§. 32) und eine desto größere negative Größe je mehr sich der stumpfe Winkel zweien rechten nähert. Hat er 180° erreicht, so ist die Cotangente DH'' dem zweiten Schenkel CK parallel und also unendlich groß, jedoch negativ.

Die Cosecante CH'' des stumpfen Winkels ACB'' ist positiv (§. 35) und wird desto größer, je größer der stumpfe Winkel ACB'' wird. Hat er 180° erreicht, so ist die Cosecante der Cotangente DH'' parallel und daher unendlich groß.

Aehnliche Betrachtungen bestätigen auch die oben aufgestellten Sätze für die trigonometrischen Functionen eines Winkels von 270°.

§. 48. Lehrsatz.

Der Sinus eines Winkels von 30° ist $= \frac{1}{2} = 0{,}5$. und $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Der Sinus eines Winkels von 45° $= \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071068$, und eben so groß ist auch der Cosinus eines Winkels von 45°.

Beweis. Erster Theil. Da (§. 39) $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$: so ist, wenn wir $3\alpha = 90°$ und daher $\alpha = 30°$ setzen

$$\cos 90° = 0 = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha;$$

oder $\cos^3 \alpha = 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$;

und wenn wir durch $\cos \alpha$ dividiren

$$\cos^2 \alpha = 3 \sin^2 \alpha = 4 \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

folglich $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 4 \sin^2 \alpha$

Nun ist (§. 15) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$; folglich ist

$$4 \sin^2 \alpha = 1; \text{ also } \sin^2 \alpha = \frac{1}{4};$$

und daher

$$\sin \alpha = \sin 30° = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} = 0{,}5.$$

Zweiter Theil. Da (§. 43)

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

so ist, wenn wir $\frac{1}{2}\alpha = 45°$ und daher $\alpha = 90°$ setzen

$$\sin 45^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 90^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0}{2}}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707106781186.$$

Eben so ist (§. 43)

$$\cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 90^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0}{2}}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Dieß läßt sich auch folgendermaaßen darthun. I. Es sey AB Fig. 6 ein mit dem Halbmesser $AC = 1$ beschriebener Bogen von 30°. Man nehme $AB^{IV} = AB$ und ziehe BB^{IV}: so enthält der Bogen BAB^{IV} 60° und es ist (Geom. §. 209) $BP = \frac{1}{2}\,BB^{IV}$ und auf CA senkrecht. Da aber (Geom. 277) $BB^{IV} = CB$, als Sehne eines Winkels von 60°, so ist $BP = \frac{1}{2}CB$, und daher $\frac{BP}{BC} = \frac{\frac{1}{2}\,BC}{BC} = \frac{1}{2}$. Nun ist (§. 3)

$$\sin ACB = \frac{BP}{BC};\ \text{folglich ist}$$

$$\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2};\ \cos 30^\circ = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4})}$$
$$= \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

II. Es enthalte der Winkel ACB Fig. 6. 45°. Man nehme den Bogen $AB^{IV} = AB$ und ziehe BB^{IV} und CB^{IV}: so ist der Winkel $BCB^{IV} = 90°$. Ferner ist $BB^{IV} = 2\,BP$, und daher $BB^{IV2} = 4\,BP^2$. Nun ist auch $BB^{IV2} = BC^2 + B^{VI}C^2 = 2\,BC^2$; folglich ist

$$4\,BP^2 = 2\,BC^2,\ \text{also}\ \frac{BP^2}{BC^2} = \frac{2}{4}.$$

$$\text{folglich}\ \frac{BP}{BC} = \sin 45^\circ = \sqrt{\tfrac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

§. 49. Zusatz.

Aus dem Vorhergehenden folgt:

$$tang\ 30^\circ = \frac{sin\ 30^\circ}{cos\ 30^\circ} = \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$tang\ 45^\circ = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}} = 1.$$

§. 50. Aufgabe.

Wenn die Sinus und Cosinus aller Winkel bis 30° berechnet sind, daraus die Sinus und Cosinus aller Winkel bis 45° zu finden.

Auflösung. Es ist

$$sin\ (30^\circ + \beta) = cos\ \beta - sin\ (30^\circ - \beta)$$
$$cos\ (30^\circ + \beta) = cos\ (30^\circ - \beta) - sin\ \beta.$$

Setzt man also $\beta = 1, 2, 3 \ldots$ bis 15°, so kann man den Sinus und Cosinus eines jeden Winkel zwischen 30° und 45° finden. Z. B.

$$sin\ 38^\circ = sin\ (30^\circ + 8^\circ) = cos\ 8^\circ - sin\ 22^\circ;$$
$$cos\ 38^\circ = cos\ (30^\circ + 8^\circ) = cos\ 22^\circ - sin\ 8^\circ.$$

Beweis. Da (§. 38)

$$sin\ (30^\circ + \beta) = sin\ 30^\circ\ cos\ \beta + cos\ 30^\circ\ sin\ \beta$$
$$sin\ (30^\circ - \beta) = sin\ 30^\circ\ cos\ \beta - cos\ 30^\circ\ sin\ \beta$$

so ist

$$sin\ (30^\circ + \beta) + sin\ (30^\circ - \beta)$$
$$= 2\ sin\ 30^\circ\ cos\ \beta.$$

Da aber (§. 48) $sin\ 30^\circ = \tfrac{1}{2}$ und daher $2\ sin\ 30^\circ = 1$: so ist

$$sin\ (30^\circ + \beta) + sin\ (30^\circ - \beta) = cos\ \beta$$

folglich $sin\ (30^\circ + \beta) = cos\ \beta - sin\ (30^\circ - \beta)$.

Eben so ist (§. 38)

$\cos(30^\circ - \beta) = \cos 30^\circ \cos\beta + \sin 30^\circ \sin\beta$

$\cos(30^\circ + \beta) = \cos 30^\circ \cos\beta - \sin 30^\circ \sin\beta.$

Ziehen wir die untere Gleichung von der obern ab, so ist

$$\cos(30^\circ - \beta) - \cos(30^\circ + \beta)$$
$$= 2 \sin 30^\circ \sin\beta = \sin\beta;$$

folglich

$$\cos(30^\circ + \beta) = \cos(30^\circ - \beta) - \sin\beta.$$

§. 51. Zusatz.

Wir brauchen daher nur die Sinus und Cosinus aller Winkel bis 30° zu berechnen um daraus die trigonometrischen Functionen aller Winkel zu finden, und hierzu dienen uns die in §. 43 ausgedrückten Regeln. Denn setzen wir in den Ausdrücken

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}; \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

den Winkel $\alpha = 45^\circ$, und daher (§. 48)

$\cos\alpha = 0{,}7071067811\,86$, so findet man

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sin 22^\circ . 30' = 0{,}38268343236\,5$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \cos 22^\circ . 30' = 0{,}92387953251\,1$$

Gehet man von diesen letzteren Werthen aus, so wird man vermittelst derselben Formel zu den Werthen von

$$\sin\frac{22^\circ . 30'}{2} = \sin 11^\circ . 15' \text{ und}$$

$$\cos\frac{22^\circ . 30'}{2} = \cos 11^\circ . 15'$$

gelangen. Aus diesem letztern erhält man

$$sin\,\frac{11^\circ\,.\,15'}{2} = sin\;5^\circ.\;37'.\;30'' \text{ und}$$

$$cos\,\frac{11^\circ\,.\,15'}{2} = cos\;5^\circ.\;37'.\;30''.$$

Aus diesem findet man wiederum

$$sin\,\frac{5^\circ.\;37'.\;30''}{2} = sin\;2^\circ.\;48'.\;45'' \text{ und}$$

$$cos\,\frac{5^\circ.\;37'.\;30''}{2} = cos\;2^\circ.\;38'.\;45'';$$

und wenn man so fortfährt jeden Winkel oder Bogen zu halbiren, so wird man den Sinus und Cosinus eines sehr kleinen Winkels oder Bogens erhalten. Bei der vierzehnten Halbirung des rechten Winkels gelangt man zu einem Bogen, welcher $\frac{1}{16384}$ des Quadranten ausmacht, und dieser Bogen ist so klein, daß er in den ersten zwölf Dezimalstellen von seinem Sinus nicht unterschieden ist.

§. 52. Zusatz.

Stellen wir die durch die vorerwähnten Halbirungen berechneten Sinus und Cosinus zusammen, und berechnen auch die correspondirenden Tangenten, so werden wir finden, daß die Differenz zwischen dem Sinus und der dazu gehörigen Tangente desto kleiner wird, je kleiner der Winkel wird, und daß daher der Sinus und die Tangente eines sehr kleinen Winkels erst etwa in der zehnten oder zwölften Dezimalstelle von einander abweichen. Dieß erhellet auch aus Fig. 6. Denn es sey ABB^{IV} ein mit dem Halbmesser $AC = 1$ beschriebener Kreis, BB^{IV} die Seite eines darin eingeschriebenen regulären Polygons, BCB^{IV} der dazu gehörige Centriwinkel. Fällt man nun CP auf BB^{IV} senkrecht, und errichtet aus A den Perpendickel TT'', so ist diese Linie die Seite des correspondirenden umschriebenen Polygons. Ferner ist $BP = \sin ACB = \frac{1}{2} BB^{IV}$, und $AT = \operatorname{tang} ACB = \frac{1}{2} TT''$. Nun aber ist die Differenz der beiden Linien TT'', BB^{IV} desto kleiner, je kleiner BB^{IV}, oder je kleiner der Winkel BCB^{IV} wird. Den setzen wir $BB^{IV} = a$, $TT'' = A$, so ist (Geom. §. 469) $A = \frac{a}{\sqrt{(1 - \frac{1}{4} a^2)}}$. Der Nenner dieses Bruchs nähert sich desto mehr der Einheit, je mehr $\frac{1}{4} a^2$ abnimmt, oder je kleiner a ist, und desto mehr nähert sich der Werth von a dem von A, oder dessen Hälfte BP der von AT. Da nun (Geom. §. 400) der Bogen $BAB^{IV} < TT''$ und $BAB^{IV} > BB^{IV}$, und daher der Bogen $AB < AT$ und $AB > BP$: so müssen, wenn der Werth der Tangente und der Sinus eines kleinen Bogens AB in einer gewissen Anzahl ihrer ersten Ziffern einander gleich sind, diese ersten Ziffern zugleich einen annähernden Werth für den Bogen geben. Nimmt man z. B.

$$AB = \frac{1}{8192} \text{ vom Quadranten} = 0^\circ, 0', 32'', 8'''$$

so ist

$$\operatorname{tang} \frac{1}{8192} R = \operatorname{tang} 0^\circ. 0'. 32''. 8''' = 0{,}000191749$$

$$\text{und} \sin \frac{1}{8192} R = \sin 0^\circ. 0'. 32''. 8''' = 0{,}000191747$$

welche bloß in der zehnten Dezimalziffer von einander unterschieden sind. Wir können also schließen, daß dieser Sinus von seinem Bogen in den ersten acht Ziffern nicht unterschieden ist, und daß folglich die eben angegebene Zahl zugleich den annähernden Werth des Bogens ausdrückt.

§. 53. Zusatz.

Hieraus folgt: daß die Sinus solcher kleiner Winkel oder Bogen sich eben so wie ihre Bogen oder Winkel verhalten, und dieß giebt uns ein Mittel an die Hand den Sinus von 1′ oder $\frac{1}{5400}$ des rechten Winkels zu berechnen, wenn man folgende Proportion ansetzt:

$$sin \frac{1}{8192} : sin \frac{1}{5400} = \frac{1}{8192} : \frac{1}{5400}$$
$$= 0{,}0001917 : sin\ 1'.$$

oder $5400 : 8192 = 0{,}0001917 : sin\ 1'$.

folglich

$$sin\ 1' = \frac{8192 \times 0{,}0001917}{5400} = 0{,}0002908.$$

Wollte man den Sinus dieses Winkels bis auf mehr, etwa auf zwölf Ziffern, berechnen, so müßte man auf diesem Wege so weit fortfahren, bis man zu einem Bogen gelangt, dessen Sinus und Tangente in den ersten zwölf Dezimalziffern übereinkommen.

Um hiervon zu größeren Winkeln zu gelangen kann man sich folgender Formeln bedienen

$$sin\ 2\ \alpha = 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha$$
$$cos\ 2\ \alpha = cos^2\ \alpha - sin^2 \alpha,$$
$$sin\ (\alpha \pm \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta \pm cos\ \alpha\ sin\ \beta$$
$$cos\ (\alpha \pm \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta \mp sin\ \alpha\ sin\ \beta.$$

Setzt man $\alpha = 1'$, so erhält man

$$\sin 2' = 2 \sin 1' \cos 1'$$
$$\cos 2' = \cos^2 1' - \sin^2 1'.$$

Setzt man ferner $\alpha = 1$, $\beta = 2$, so erhält man vermittelst der beiden letztern

$$\sin 3' = \sin 2' \cos 1' + \cos 2' \sin 1'.$$
$$\cos 3' = \cos 2' \cos 1' - \sin 2' \sin 1',$$

und so fort kann man nach einander die Sinus und Cosinus aller Winkel finden und in Tafeln bringen.

Leichtere Methoden zur Berechnung der trigonometrischen Functionen vermittelst convergirender Reihen giebt uns die höhere Analysis an die Hand.)

§. 54. Bemerkung.

Aus dem im §. 38. bewiesenen Satze lassen sich noch unzählige wichtige Folgerungen ziehen, von denen wir die am häufigsten vorkommenden hier aufzählen wollen.

1) Wenn man die beiden Gleichungen

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

addirt, so erhält man

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta;$$

woraus folgt

$$\sin \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2} \sin(\alpha - \beta);$$

2) Zieht man die zweite der obigen Gleichungen von der ersten ab, so findet man

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta,$$

und folglich

$$\sin \beta \cos \alpha = \tfrac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \tfrac{1}{2} \sin(\alpha - \beta).$$

Setzt man $\beta = \alpha$, so geben diese Formeln nebst der vorhergehenden

$$\cos \alpha \sin \alpha = \tfrac{1}{2} \sin 2 \alpha.$$

3) Werden die beiden Gleichnngen

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$
$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

addirt, so erhält man

$$\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta,$$

und daher

$$\cos \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2} \cos (\alpha - \beta).$$

Ist $\alpha = \beta$, so erhält man

$$\cos^2 \alpha = \tfrac{1}{2} \cos 2 \alpha + \tfrac{1}{2} = \frac{\cos 2 \alpha + 1}{2},$$

weil $\cos (\alpha - \beta) = \cos 0° = 1$ (§. 46).

4) Ziehet man in III. die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man

$$\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

und daher

$$\sin \alpha \sin \beta = \tfrac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \tfrac{1}{2} \cos (\alpha + \beta).$$

Ist $\alpha = \beta$, so findet man

$$\sin^2 \alpha = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2 \alpha = \frac{1 - \cos 2 \alpha}{2}.$$

§. 55.

Es sey $\alpha + \beta = a$ und
$\alpha - \beta = b$,
so ist, wenn man diese beiden Gleichungen addirt,

$$2 \alpha = a + b \text{ und } \alpha = \tfrac{1}{2} (a + b).$$

Ziehet man hingegen die zweite Gleichung von der ersten ab, so ist

$$2 \beta = a - b \text{ und } \beta = \tfrac{1}{2} (a - b).$$

Setzen wir nun diese Werthe von α und β in die im Vorgehenden für $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\alpha$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$ erhaltenen Ausdrücke, so findet man

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b) = \tfrac{1}{2}(\sin a + \sin b)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}(a+b) = \tfrac{1}{2}(\sin a - \sin b)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b) = \tfrac{1}{2}(\cos a + \cos b)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b) = \tfrac{1}{2}(\cos b - \cos a).$$

Dividirt man die erste der vorstehenden Formeln durch die zweite, so erhält man

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\,.\,\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)\,.\,\cos\frac{1}{2}(a+b)} =$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}.\ \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}.$$

Erwägt man nun, daß (§. 11) $\dfrac{\sin A}{\cos A}$

$= \tang A$ und $\dfrac{\cos A}{\sin A} = \cot A = \dfrac{1}{\tang A}$ (§. 41)

so erhält man

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}.$$

Auf eben die Art findet man aus den beiden letzten der vorstehenden vier Gleichungen,

$$\frac{\cos b - \cos a}{\cos a + \cos b} = \tang\tfrac{1}{2}(a+b)\,.\,\tang\tfrac{1}{2}(a-b)$$

§. 56. Zusatz.

Die Gleichung $\dfrac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}(a-b)} = \dfrac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$, woraus folgt, daß die Summe der Sinus zweier Bogen oder Winkel sich zu ihrer Differenz verhält, wie die Tangente der halben Summe dieser Bogen zur Tangente der halben Differenz derselben, kann auch unmittelbar durch eine geometrische Construction erhalten werden.

Denn wenn *AM*, *AN* Fig. 10 die mit einem der Einheit gleichen Halbmesser beschriebenen Bogen a und b ausdrücken, so ist $MP = \sin a$, $NQ = \sin b$. Ziehet man nun *NC* der *AB* parallel und verlängert *MP* bis *M'*, so ist

$$MR = MP - NQ = \sin a - \sin b$$
$$M'R = M'P + NQ = \sin a + \sin b.$$

Man beschreibe nun aus *C* als Mittelpunkt mit einem der Einheit gleichen Halbmesser *CD* einen Bogen *EDG* und führe durch den Punkt *D* eine Tangente dieses Kreises: so sind (§. 18) *DF* und *DH* die Tangenten der Bogen *DE* und *DG*, von denen die Winkel *MCN*, *M'CN* gemessen werden; und da auch diese Winkel, als Peripheriewinkel, die Hälften der Bogen *NM*, *NM'* zu ihrem Maaße haben, so ist:

$$DE = \tfrac{1}{2}\, MN = \tfrac{1}{2}\,(a - b)$$
$$DG = \tfrac{1}{2}\, M'N = \tfrac{1}{2}\,(a + b),$$

und daher

$$DF = \operatorname{tang} DE = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,(a - b)$$
$$DH = \operatorname{tang} DG = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,(a + b).$$

Da aber *MM'* und *FH* parallel sind, so ist $M'R : MR = DH : DF$, oder

$$\sin a + \sin b : \sin a - \sin b = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,(a + b) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,(a - b).$$

§. 57. Zusatz.

Da es sehr nöthig ist sich mit den bisher entwikksten Formeln vertraut zu machen, so wollen wir sie hier zusammen stellen.

1) $\sin\ \alpha = \cos(90° - \alpha)$; $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$;
$tang\,\alpha = \cot(90° - \alpha)$; 2c. (§. 10).

2) $tang\,\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha$; (§. 11).
$\cot\ \alpha = \cos\alpha : \sin\alpha$

3) $\sec\ \alpha = 1 : \cos\alpha$; $cosec\,\alpha = 1 : \sin\alpha$ (§. 12)

4) $sin\,v.\alpha = 1 - \cos\alpha$;
$cos\,v.\alpha = 1 - \sin\alpha$ (§. 13)

5) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$ (15)

6) $\left.\begin{array}{l} sin.\ art.\ \alpha = r.\ sin.\ nat.\ \alpha \\ cos.\ art.\ \alpha = r.\ cos\ nat.\ \alpha,\ \text{2c.} \end{array}\right\}$ (§. 21)
$\left.\begin{array}{l} sin.\ nat.\ \alpha = sin.\ art.\ \alpha : r \\ cos.\ nat.\ \alpha = cos.\ art.\ \alpha : r\ \text{2c.} \end{array}\right\}$ (§. 21).

7) $\left.\begin{array}{l} \sin(180° \mp \alpha) = \pm \sin\alpha \\ \cos(180° \mp \alpha) = - \cos\alpha \end{array}\right\}$ (§. 27 und 29)

8) $\left.\begin{array}{l} \sin(360° - \alpha) = - \sin\alpha \\ \cos(360° - \alpha) = \cos\alpha \end{array}\right\}$ (§. 30)

9) $tang\,(180° \mp \alpha) = \mp\, tang\,\alpha$ (§. 31)
$\cot\ (180° \mp \alpha) = \mp \cot\alpha$ (§. 33)
$tang\,(360° - \alpha) = - tang\,\alpha$
$\cot\ (360° - \alpha) = - \cot\ \alpha$ (§. 31)

10) $\sec\ (180° \mp \alpha) = - \sec.\ \alpha$ (§. 34 u. 36)
$cosec\,(180° \mp \alpha) = \pm\, cosec\,\alpha$ (§. 34 u. 36)
$\sec\ (360° - \alpha) = \sec\ \alpha$
$cosec\,(360° - \alpha) = - cosec\,\alpha$ (34).

11) $\sin\ (-\alpha) = - \sin\alpha$;
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ 2c. (§. 37)

12) $\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\end{array}\right)$ (§. 38).

13) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\left.\begin{array}{l}\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha \\ \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha\end{array}\right)$ (§. 39)

14) $\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta}{1 \mp \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\beta}$ (§. 40)

15) $\operatorname{tang} . 2\alpha = 2 . \operatorname{tang}\alpha : (1 . - \operatorname{tang}^2\alpha)$ (§. 41)

16) $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha . \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$. (§. 42).
$\operatorname{tang}. \alpha = 1 : \cot\alpha$; $\cot. \alpha = 1 : \operatorname{tang}\alpha$. (§. 42).

17) $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$; $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$
(§. 43).

18) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{chord} 2\alpha$;
$\operatorname{chord}\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha$. (§. 44).

19) $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$. (§. 45)

18) $\left.\begin{array}{l}\sin. 0^\circ = 0;\ \cos 0^\circ = \sin 90^\circ = 1 \\ \sin. 180^\circ = 0;\ \cos 180^\circ = -1 \\ \sin. 270^\circ = -1;\ \cos. 270^\circ = 0 \\ \sin. 360^\circ = 0;\ \cos. 360^\circ = 1\end{array}\right\}$ (§. 46).

19) $\left.\begin{array}{l}\operatorname{tang}. 0^\circ = \cot. 90^\circ = 0 \\ \operatorname{tang}. 90^\circ = \cot. 0^\circ = \infty \\ \operatorname{tang}. 180^\circ = 0;\ \cot. 180^\circ = -\infty \\ \operatorname{tang}. 270^\circ = \infty;\ \cot. 270^\circ = 0.\end{array}\right\}$ (§. 47).

$$\left.\begin{array}{l} 20)\ sec.\ 0^\circ = cosec.\ 90^\circ = 1. \\ cosec.\ 0^\circ = sec.\ 90^\circ = \infty \\ sec.\ 180^\circ = -1;\ cosec\ 180^\circ = \infty \\ sec.\ 270^\circ = -\infty;\ cosec\ 270^\circ = -1 \end{array}\right\}\ (\S.\ 47).$$

$$\left.\begin{array}{l} 21)\ sin.\ 30^\circ = \tfrac{1}{2};\ cos.\ 30^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \\ sin.\ 45^\circ = cos.\ 45^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right)\ (\S.\ 48).$$

$$22)\ tang.\ 30^\circ = \tfrac{1}{3}\sqrt{3};\ tang\ 45^\circ = cot\ 45^\circ = 1.$$
(§. 49).

$$\left.\begin{array}{l} 23)\ sin\ (30^\circ + \beta) = cos\ \beta - sin\ (30^\circ - \beta) \\ cos\ (30^\circ + \beta) = cos\ (30^\circ - \beta) - sin\ \beta \end{array}\right)\ (\S. 50)$$

$$\left.\begin{array}{l} 24)\ sin\ \alpha\ cos\ \beta = \tfrac{1}{2}\ sin\ (\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}\ sin\ (\alpha - \beta) \\ 25)\ cos\ \alpha\ sin\ \beta = \tfrac{1}{2}\ sin\ (\alpha + \beta) - \tfrac{1}{2}\ sin\ (\alpha - \beta) \\ 26)\ cos\ \alpha\ cos\ \beta = \tfrac{1}{2}\ cos\ (\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}\ cos\ (\alpha - \beta) \\ 27)\ sin\ \alpha\ sin\ \beta = \tfrac{1}{2}\ cos\ (\alpha - \beta) - \tfrac{1}{2}\ cos\ (\alpha + \beta) \end{array}\right\}\ (\S.\ 54).$$

$$\left.\begin{array}{l} 28)\ sin\ \alpha + sin\ \beta = 2\ sin\ \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\ cos\ \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ 29)\ sin\ \alpha - sin\ \beta = 2\ cos\ \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\ sin\ \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ 30)\ cos\ \alpha + cos\ \beta = 2\ cos\ \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\ cos\ \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ 31)\ cos\ \alpha - cos\ \beta = -2\ sin\ \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\ sin\ \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{array}\right\}\ (\S.\ 55)$$

$$32)\ \frac{tang.\ \tfrac{1}{2}\ (\alpha + \beta)}{tang.\ \tfrac{1}{2}\ (\alpha - \beta)} = \frac{sin\ \alpha + sin\ \beta}{sin\ \alpha - sin\ \beta}\quad (\S.\ 55)$$

$$33)\ tang\ \tfrac{1}{2}\ (\alpha + \beta) . tang\ \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{cos\ \beta - cos\ \alpha}{cos\ \alpha + cos\ \beta}.$$

§. 58.

Bevor wir zur Anwendung der bisher entwickelten Lehren auf die Auflöung der Dreiecke schreiten, ist es noch nöthig zu bemerken, daß man bei der Auflösung trigonometrischer Aufgaben größtentheils die Logarithmen anzuwenden, und daher die erhaltenen Resultate dergestalt zu umformen sucht, daß man mit Leichtigkeit die Logarithmen zu ihrer Berechnung anwenden könne. Nun aber sind, wie aus dem Vorhergehenden hinlänglich erhellet, die Sinus und Cosinus aller Winkel im natürlichen System ächte Brüche, und daher ihre Logarithmen negativ. Man hat daher, um diesem auszuweichen, bei den meisten Rechnungen ein künstliches System eingeführt, dessen Modulus 10000000000 ist. Die Logarithmen der trigonometrischen Functionen in diesem Systeme werden um 10 größer seyn als die correspondirenden im natürlichen System. Denn es sey irgend eine Function im natürlichem System $= f$, ihr Logarithmus $= l$; die correspondirende Function im künstlichen System $= F$; ihr Logarithmus $= L$ und der Modulus dieses Systems $= r$ ($= 10000000000$): so ist (§. 21)

$$F = r \cdot f = 10000000000 \cdot f$$
$$\log. F = \log r + \log f =$$
$$= \log 10000000000 + \log. f = 10 + \log f.$$

Umgekehrt findet man aus dem Logarithmus einer Function im erwähnten künstlichen System den der correspondirenden Function im natürlichen System, wenn man von ersterem 10 abziehet. Denn aus

$$Log. F = \log. r + \log. f \text{ folgt}$$
$$\log. f = \log F - \log r.$$

Da jedoch die meisten dieser Tafeln nur die Logarithmen der Hülfslinien der in Graden und Minuten gegebenen Winkel enthalten, so wollen wir noch zeigen, wie dieser zu finden ist, wenn der Winkel auch Secunden enthält.

§. 59. Aufgabe.

Mit Hülfe der gemeinen Tafeln den Logarithmus einer trigonometrischen Function zu finden, welche zu einem Winkel gehört, der außer Graden und Minuten auch noch Secunden enthält.

Auflösung. Man nimmt hierbei auf ähnliche Art wie beim Gebrauch der Logarithmen den Satz an: daß die Differenzen der Logarithmen zweier Winkel den Differenzen dieser Winkel proportional seyen, so lange diese Differenz der Winkel nicht über eine Minute beträgt. Diese Voraussetzung ist bei kleinen Winkeln ziemlich unrichtig, aber der Fehler wird immer geringer, je größer die Winkel werden, und nimmt was die Logarithmen der Sinus betrift, immer mehr ab, je näher die Winkel dem rechten kommen. Die Logarithmen der Tangenten anbelangend, nimmt der Fehler zwar wieder zu, wenn der Winkel nicht viel mehr von 90° unterschieden ist; indessen kann man doch in den meisten Fällen der Ausübung diese Voraussetzung beibehalten, wenn man nicht die größte Schärfe sucht.

Da man nun in den gewöhnlichen Tafeln die Logarithmen der trigonometrischen Functionen für alle einzelne Minuten des Quadranten hat, so nimmt man die Differenz zwischen den beiden Logarithmen, welche mit der gleichnahmigen trigonometrischen Functionen des nächst größern und nächst kleinern Winkels zusammen gehören, und schließt: wie sich 60″ zur gegebenen Anzahl Secunden verhalten, eben so verhält sich die gefundene Differenz der Logarithmen zur vierten Zahl, die man zum nächst kleinern Logarithmus addiren muß, wenn die trigonometrische Function mit dem Winkel wächst, wie der Sinus, die Tangente und Secante unter 90°. Wenn aber diese Function abnimmt indem der Winkel wächst, wie der Cosinus, die Cotangente und Cosecante, so muß man die gefundene vierte Zahl vom nächst größern Logarithmus abziehen.

Beispiel. Man suche den *log. sin* 53°. 28′. 54″: so ist

$$\begin{array}{r} \log.\ \sin\ 53°.\ 29' = 9{,}9050852 \\ \log.\ \sin\ 53°.\ 28' = \underline{9{,}9049916} \\ \text{Differenz}\ .\ .\ .\ 936 \end{array}$$

also schließt man

$$60'' : 54'' = 936 : 842.$$

Da nun $\log.\ \sin\ 53°.\ 28' = 9{,}9049916$,
so ist die vierte Zahl für $54'' = \underline{\quad + 842}$
also $\log.\ \sin.\ 53°.\ 28'.\ 54'' = 9{,}9050758.$

Eben so findet man den Logarithmus der Tangente dieses Winkels.

$$\begin{array}{r} \text{Es ist } \log.\ \text{tang.}\ 53°.\ 29' = 10{,}1305269 \\ \log.\ \text{tang.}\ 53°.\ 28' = \underline{10{,}1302628} \\ \text{Differenz}\ .\ .\ .\ 2641; \end{array}$$

Also

$$60'' : 54'' = 2641 : 2377$$

Da nun $\text{tang.}\ 53°.\ 28' = 10{,}1302628$
so ist die vierte Zahl für $54'' = \underline{\quad + 2377}$
also $\log.\ \text{tang.}\ 53°.\ 28'.\ 54'' = 10{,}1305005.$

Den Logarithmus des Cosinus und der Cotangente dieses Winkels findet man auf ähnliche Art.

Es ist $log. cos. 53^\circ . 28' = 9{,}7747288$
$log. cos. 53^\circ . 29' = 9{,}7745583$

Differenz . . 1705.

Aber $60'' : 54'' = 1705 : 1534$, und weil
$log. cos. 53^\circ . 28' = 9{,}7747288$
so ist für $54'' = -1534$

also $log. cos. 53^\circ . 28' . 54'' = 9{,}7745754$.

Ferner ist $log. cot. 53^\circ . 28' = 9{,}8697372$
$log. cot. 53 . 29 = 9{,}8694731$

Differenz . . 2641

Nun ist $60'' : 54'' = 2641 : 2376$

Weil aber $log. cot. 53^\circ . 28'' = 9{,}8697372$
und für $54'' = -2376$

so ist $log. cot. 53^\circ . 28' . 54'' = 9{,}8694996$

In den bereits angeführten Vega'schen, auch in den Schulzischen Tafeln findet man diese Differenzen bereits berechnet, daß man also nicht nöthig hat sie aufzusuchen. Die besondere Einrichtung dieser Tafeln ist in deren Einleitung deutlich angegeben.

§. 60. Aufgabe.

Den Winkel zu finden, welcher einem solchen Logarithmus einer trigonometrischen Function zugehört, der in den Tafeln selbst nicht vorkommt.

Auflösung. Man darf nur die Vorschriften des vor. §. umkehren. Man muß unter den Logarithmen der Sinus, Tangenten u. s. w. ein Paar aufsuchen, zwischen denen der gegebene Logarithmus, als zwischen zweien Gränzen enthalten ist. Man nehme dann die

Differenz dieser beiden Gränzen sowohl als auch des gegebenen Logarithmus vom nächst kleinern, und schließe: die Differenz der beiden Gränzen verhält sich zur Differenz des gegebenen Logarithmus vom nächst kleinern, wie 60″ zur vierten Zahl. Dieß giebt eine Anzahl von Secunden, die man zu dem Winkel addirt, der dem nächst kleinern Logarithmus zugehört, wofern die trigonometrische Function mit dem Winkel wächst; im Gegentheil aber wird sie von demselben abgezogen.

Es sey der Logarithmus des Sinus eines Winkels = 9,9426938, man sucht den dazu gehörigen Winkel. Dieser Logarithmus fällt zwischen den Logarithmen der Sinus von 61°. 12, und 61°. 13′; denn es ist:

$$\begin{array}{lr} log\ sin\ 61°.\ 13' = & 9{,}9427255 \\ log\ sin\ 61°.\ 12' = & 9{,}9426561 \\ \hline \text{Differenz} \quad . & .\ 694 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{Der gegebene } log = & 9{,}9426938 \\ log\ sin\ 61°.\ 12' = & 9{,}9426561 \\ \hline \text{Differenz} \quad . & .\ 377 \end{array}$$

Nun findet sich

694 : 377 = 60″ : 32″, also ist der gesuchte Winkel = 61°. 12′. 32″.

Es sey der Logarithmus der Tangente eines Winkels = 10,1948376; so sind die Gränzen:

$$\begin{array}{lr} log.\ tang.\ 57°.\ 27' = & 10{,}1949767 \\ log.\ tang.\ 57°.\ 26' = & 10{,}1946981 \\ \hline \text{Differenz} \quad . & .\ 2786. \end{array}$$

Der gegebene *Log*	=	10,1948376
log. tang. 57°. 26′	=	10,1946981
Differenz	. .	1395.

Man findet hiernach

2786 : 1395 = 60″ : 30″; also ist der gesuchte Winkel = 57°. 26′. 30″.

Es sey der Logarithmus des Cosinus eines Winkels = 9,8807832: so sind die Gränzen

log. cos. 40° 32′	=	9,8808296
log. cos. 40°. 33′	=	9,8807215
Differenz	. .	1081.
Der gegebene *Log.*	=	9,8807832
log. cos. 40°. 33′	=	9,8807215
Differenz	. .	617.

Nun findet man

1081 : 617 = 60″ : 34″; also ist der gesuchte Winkel 40°. 33′ — 34″ = 40°. 32′. 26″.

Es sey der Logarithmus der Cotangente eines Winkels = 9,7766384: so sind die Gränzen

log. cot. 59°. 7′	=	9,7767685
log. cot 59°. 8′	=	9,7764816
Differenz	. .	2869.
Der gegebene *Log.*	=	9,7766384
log. cot. 59°. 8′	=	9,7764816
Differenz	. .	1568.

Nun findet man

2869 : 1568 = 60″ : 32″, also ist der gesuchte Winkel = 59°. 8′ — 32″ = 59°. 7′. 28″.

Drittes Kapitel

Von der Auflösung der Dreiecke.

Vom rechtwinklichten Dreiecke.

§. 61. Aufgabe.

Aus zweien Stücken eines rechtwinklichten Dreiecks, worunter wenigstens eine Seite befindlich ist, die übrigen Stücke zu berechnen.

Auflösung. Die in §. 8 und 9 entwickelten Formeln, so wie die in der Anmerkung zu §. 9. angeführten Regeln, geben uns die Mittel an die Hand den Forderungen der vorstehenden Aufgabe in jedem Falle zu genügen, den einzigen Fall ausgenommen, wo aus zweien Seiten des rechtwinklichten Dreiecks die dritte zu berechnen ist, dessen Auflösung im §. 463. der Geometrie zu finden ist. Alle die Formeln des §. 8 und 9 sind auch ganz für die Anwendung der Loga=

rithmen geeignet. Es wird daher hinlänglich seyn die Auflösung einiger Fälle an einigen Beispielen zu zeigen.

I. Im rechtwinklichten Dreiecke ABC Fig. 4 ist die Hypothenuse $BC = 2360'$ und der spitze Winkel $ABC = 34° \; 20'$ gegeben; man soll jede der Katheten berechnen.

Setzen wir nun ein für alle mahl die Hypothenuse $BC = h$ den spitzen Winkel $ABC = \alpha$; die diesem Winkel gegen über stehende Kathete $= p$ und dessen anliegende Kathete $= b$: so ist

$$p = h. \sin \alpha \; (§. 9, I); \quad b = h. \cos \alpha \; (§. 9 \; II).$$

$$log. \; p = log. \; h + log. \sin \alpha;$$
$$log. \; b = log. \; h + log. \cos \alpha.$$
$$log. \; h = log. \; 2360 = 3,3729120$$
$$log. \sin 34°. \; 20' \quad = 0,7512842 - 1$$
$$log. \; p \quad = 3,1241962$$

also $p = AC = 1331,5$ Fuß. Eben so wird $AB = 1948,8$ gefunden.

Anmerkung. Rechnen wir nach dem im (§. 58) angeführten künstlichen System, so müssen wir, da die Formeln des §. 8 und 9 für das natürliche System berechnet sind, den Werth der in diesen Formeln vorkommenden trigonometrischen Functionen vorher in die des künstlichen Systems verwandeln. Bezeichnen wir nun die trigonometrischen Functionen im natürlichen System mit kleinen Anfangsbuchstaben, die gleichnahmige Function im künstlichen System mit großen Buchstaben, und den Modulus des Systems durch r, so ist (§. 21)

$$\sin \alpha = \frac{\text{Sin } \alpha}{r}; \; \cos \alpha = \frac{\text{Cos } \alpha}{r}; \text{ ꝛc.} \quad \text{Hier ist}$$

$$\text{Fig. 4, } AC = p = \frac{h. \text{ Sin } \alpha}{r}; \; AB = b = \frac{h. \text{ Cos } \alpha}{r} \text{ ꝛc.}$$

$\log.\ p = \log.\ h + \log.\ \mathrm{Sin}\ \alpha - \log.\ r$

$\log.\ b = \log.\ h + \log.\ \mathrm{Cos}\ \alpha - \log.\ r$, und jede dieser Katheten wird folgendermaaßen berechnet werden

$$
\begin{array}{lcl}
\log.\ h = \log.\ 2360 & = & 3{,}3729120 \\
\log.\ \mathrm{Sin}.\ 34^\circ.\ 20' & = & 9{,}7512842 \\
\hline
 & & 13{,}1241962. \\
\log.\ r & = & 10{,}0000000\ (\S.\ 58) \\
\hline
\log.\ p & = & 3{,}1241962
\end{array}
$$

und $p = AC = 1331{,}5$ wie oben.

Eben so wird bei den übrigen Rechnungen verfahren. Wir werden indessen im Folgenden immer nach dem natürlichen System rechnen.

§. 62. Beispiel II.

In dem rechtwinklichten Dreiecke ABC Fig. 4 ist der Winkel α nebst einer Kathete $AB = b$ gegeben; man soll die andere Kathete und die Hypothenuse desselben bestimmen: so ist, da mit dem Winkel α zugleich $\beta = 90^\circ - \alpha$ gegeben ist

$$AC = p = b\ \mathrm{tang}\ \alpha\ (\S.\ 9.\ \mathrm{III}) = \frac{b\ .\ \mathrm{Tang}\ \alpha}{r}\ (\S.\ 21)$$

$$BC = h = b\ \sec\ \alpha = \frac{b}{\cos\ \alpha}\ (\S.\ 12) = b : \frac{\mathrm{Cos}\ \alpha}{r}$$

$$= b\ \frac{r}{\mathrm{Cos}\ \alpha} = \frac{b\ .\ r}{\mathrm{Cos}\ \alpha} = \frac{b\ .\ r}{\mathrm{Sin}\ \beta}.$$

Eben so ist, wenn α und p gegeben wäre

$$AB = b = p\ \mathrm{tang}\ \beta = p\ \cot\ \alpha = \frac{p\ .\ \mathrm{Cot}\ \alpha}{r}$$

$$BC = h = p\ .\ \mathrm{cosec}\ \alpha = p : \sin\ \alpha = p : \frac{\mathrm{Sin}\ \alpha}{r}$$

$$= p\ .\ \frac{r}{\mathrm{Sin}\ \alpha} = \frac{p\ r}{\mathrm{Sin}\ \alpha}$$

Es sey z. B. $\alpha = 54°.\ 20'$; $p = 4524'$: so ist

$$\log p = \log 4524 = 3{,}6555226$$
$$\log \sin 54°.\ 20' = 0{,}9097821 - 1$$
$$\log BC = \log h = 3{,}7457405$$

also $BC = 5568{,}6$ Fuß

oder nach der Formel $h = \frac{p\ r}{Sin\ \alpha}$

$$\log r = 10{,}0000000$$
$$\log 4524 = 3{,}6555226$$
$$13{,}6555226$$
$$\log \sin 54°.\ 20' = 9{,}9097821$$
$$\log BC = 3{,}7457405$$

also $BC = 5568{,}6$ Fuß.

§. 63. Beispiel III.

Im rechtwinklichten Dreiecke ABC Fig. 4 sey gegeben die Hypothenuse $BC = h$ und eine Kathete $AB = b$; man soll die Winkel und die dritte Seite desselben bestimmen: so ist, (§. 4)

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{b}{h};\ \text{und}$$

$$p = b . \tang \alpha = b \cot \beta \ (\text{§. } 10)$$

oder

$$\frac{Cos\ \alpha}{r} = \frac{Sin\ \beta}{r} = \frac{b}{h};\ \text{also}$$

$$Cos\ \alpha = Sin\ \beta = \frac{b\ r}{h};$$

$$\text{und } p = \frac{b\ Tang\ \alpha}{r} = \frac{b\ Cot\ \beta}{r}.$$

Man kann auch p unmittelbar finden. Denn es ist (Geom. §. 463)

$$p = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{[(h+b)(h-b)]}$$ und

$$log.\ p = \tfrac{1}{2}\,[log.\ (h+b) + log.\ (h-b)].$$

§. 64. Zusatz.

Aus $p = h \cdot sin\ \alpha$ folgt $\frac{p}{h} = \frac{sin\ \alpha}{1}$ und, daher 1) $p : h = sin\ \alpha : 1.$

Eben so folgt aus $b = h\ cos\ \alpha = h\ sin\ \beta$

2) $b : h = sin\ \beta : 1.$

Aus $p = \frac{h\ Sin\ \alpha}{r}$ und $b = \frac{h \,.\, Cos\ \alpha}{r}$ ergiebt sich

3) $p : h = Sin\ \alpha : r;$

4) $b : h = Sin\ \beta : r.$

Aus $p = b\ tang\ \alpha = b \cdot \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = b\ \frac{sin\ \alpha}{sin\ \beta}$

folgt 5) $p : b = sin\ \alpha : sin\ \beta$

Eben so folgt aus $p = \frac{b\ Tang\ \alpha}{r}$

$$= b \cdot \frac{Sin\ \alpha}{r} : \frac{Cos\ \alpha}{r} = b \cdot \frac{Sin\ \alpha}{Cos\ \alpha} = b\ \frac{Sin\ \alpha}{Sin\ \beta}.$$

6) $p : b = Sin\ \alpha : Sin\ \beta.$

Erwägt man nun, daß (§. 46) der Sinus des rechten Winkels im natürlichen System der Einheit, und in jedem künstlichen System dem Modulus r dieses Systems gleich ist, so folgt, wenn wir in obige sechs Proportionen anstatt 1 oder r den Ausdruck Sinus totus setzen, der allgemein fruchtbare Satz. In jedem rechtwinklichten Dreiecke verhalten sich jede zwei Seiten zu einander, wie die nach irgend einem System berechneten Sinus der diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel, auf welchem die Auflösung aller möglichen beim rechtwinklichten Dreiecke vorkommenden Fälle beruhet. Soll z. B. aus b und α Fig. 4 die Kathete p gefunden werden, so setzt man folgende Proportion an:

$$\sin\beta : \sin\alpha = b : p$$

oder $\cos\alpha : \sin\alpha = b : p$; also

$$p = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = b \tan g\, \alpha \text{ wie in (§. 63).}$$

§. 65. Beispiel IV.

Im rechtwinklichten Dreieck ABC Fig. 4. seyen die beiden Katheten b und p gegeben; man sucht die Hypothenuse h und die beiden spitzen Winkel α, β: so ist (Geom. §. 463)

$$h = \sqrt{(b^2 + p^2)}$$

$$\tan g\, \alpha = \frac{p}{b} \text{ (§. 8); } \tan g\, \beta = \frac{b}{p}.$$

Da jedoch der Werth von h nicht leicht durch Logarithmen zu berechnen ist, so bestimme man erstlich den Winkel α aus der Formel $\tan g\, \alpha = \frac{p}{b}$, da sich dann der Werth von h nach (§. 62) finden läßt; nehmlich $h = p : \sin\alpha$.

Es sey $BA = 300'$, $AC = 400'$: so ist

$$\log. \tan g\, \alpha = \log. \frac{p}{b} = \log p - \log b$$

$$\begin{array}{rl} \log.\ 400 &= 2{,}6020600 \\ \log.\ 300 &= 2{,}4771213 \\ \hline \log.\ \tan g\, \alpha &= 0{,}1249387. \end{array}$$

$$\alpha = 52^\circ.\ 7'.\ 48''$$

$$h = \frac{p}{\sin \alpha}$$

$$\begin{array}{lcl} \log.\ p = \log.\ 400 & = & 2{,}6020600 \\ \log.\ \sin 52^\circ.\ 7'.\ 48'' & = & 0{,}9030894 - 1 \\ \hline \log BC = \log h & = & 2{,}6989706 \end{array}$$ 3

$$AC = 500 \text{ Fuß.}$$

Von schiefwinklichten Dreiecken.

§. 66. Lehrsatz.

In jedem schiefwinklichten Dreiecke ABC Fig. 11. verhalten sich jede zwei Seiten zu einander wie die Sinus der diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel.

Beweis. Es sey $BC = a$, $AC = b$ und $AB = c$. Man fälle aus B auf AC den Perpendikel BD: so ist (§. 61)

$$BD = AB \sin A = c \sin A.$$

Aus gleichem Grunde ist im rechtwinklichten Dreiecke BDC

$$BD = BC \sin C = a \sin C.$$

Setzen wir diese beiden Werthe von BD einander gleich so ist

$$c \sin A = a \sin C$$

und folglich (Geom. §. 317)

$$a : c = \sin A : \sin C,$$

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß

$$a : b = \sin A : \sin B$$

und $b : c = \sin B : \sin C.$

§. 67. Zusatz.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß

$$AB \sin A = BC \sin C;\ AB \sin B = AC \sin C$$
$$BC \sin B = AC \sin A;$$

daß also in jedem schiefwinklichten Dreiecke das Product aus irgend einer Seite in den Sinus eines daran liegenden Winkels dem Producte aus dem Sinus des dieser Seite gegenüber stehenden Winkels in die dem ersten Winkel gegenüber stehende Seite gleich ist.

§. 68. Aufgabe.

Wenn in einem schiefwinklichten Dreiecke *ABC* Fig. 11 eine Seite und zwei Winkel gegeben sind, die übrigen Stücke dieses Dreiecks zu berechnen.

Auflösung. Da (Geom. §. 131) mit den beiden Winkeln zugleich der dritte gegeben ist, so wird die gegebene Seite immer einem bekannten Winkel gegenüber stehen. Man multiplizire daher die gegebene Seite mit dem Sinus des der gesuchten Seite gegenüber stehenden Winkels, und dividire dieses Product durch den Sinus des der gegebenen Seite gegenüber stehenden Winkels, so findet man die gesuchte Seite.

Beweis. Es sey im Dreiecke *ABC* Fig. 11 die Seite *AC* nebst den beiden Winkeln *A* und *B* gegeben, so wird hierdurch auch $C = 180° - (A + B)$ bekannt seyn, und es ist (§. 67)

$$AC \sin C = AB \sin B;$$
$$AC \sin A = BC \sin B.$$

folglich

$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B}$; $BC = \frac{AC \sin A}{\sin B}$.

Beispiel. Es sey $AC = 10070$ Fuß.
$A = 57° \ 54'. \ 45''$ und $C = 53°. \ 14'. \ 3''$: so ist
$B = 180° - (A + C) = 68°. \ 51'. \ 12''$

$$\log AB = \log AC + \log \sin C - \log \sin B$$

$$\begin{array}{rl} \log. \ 10070 = & 4,0030295 \\ \log. \sin. \ 53°. \ 14'. \ 3'' = & 0,9036804 - 1 \\ \hline & 3,9067099 \\ \log. \sin \ 68°. \ 51'. \ 12'' = & 0,9697233 - 1 \\ \hline \log AB = & 3,9369866 \\ AB = & 8649,4. \end{array}$$

Eben so ist

$$\log BC = \log AC + \log \sin A - \log \sin B.$$

$$\begin{array}{rl} \log \ 10070 = & 4,0030295 \\ \log \sin \ 57°. \ 54'. \ 45'' = & 0,9280053 - 1 \\ \hline & 3,9310348 \\ \log \sin \ 68°, \ 51'. \ 12'' = & 0,9697233 - 1 \\ \hline \log BC = & 3,9613115 \\ BC = & 9147,7 \text{ Fuß}. \end{array}$$

§. 69. Aufgabe.

Aus zweien in einem schiefwinklichten Dreiecke gegebenen Seiten nebst einem Winkel, welcher einer dieser Seiten gegenüber stehet, die übrigen Stücke zu bestimmen.

Auflösung. Man multiplizire den Sinus des gegebenen Winkels mit der gegebenen ihm anliegenden Seite und dividire dies Product durch die ihm gegenüber stehende Seite, so erhält man den Sinus des der ersten Seite gegenüber stehenden Winkels, und folglich diesen Winkel selbst. Hat man aber erst diesen Winkel gefunden, so läßt sich die dritte Seite nach (§. 68) berechnen.

Beweis. Es seyen in dem Dreiecke *ABC* Fig. 11 die beiden Seiten *BA*, *BC* nebst dem Winkel *C* gegeben so ist (§. 67) $BC . \sin C = AB . \sin A$ und $\sin A = \frac{BC . \sin C}{AB}$;

$$\log \sin A = \log BC + \log \sin C - \log AB.$$

Beispiel. Es sey $AB = 5394$ Fuß, $C = 56°. 30'$ und $CB = 4876$: so ist

$$\log \sin A = \log . 4876 + \log \sin 56°. 30' - \log 5394.$$

$$\log 4876 = 3{,}6880637$$
$$\log \sin 56°. 30' = 0{,}9211066 - 1$$
$$3{,}6091703$$
$$\log 5394 = 3{,}7319109$$
$$\log \sin A = 0{,}8772594 - 1$$

und $A = 48°. 55'. 16'$.

Die dritte Seite *AC* ist (§. 68) $= \frac{AB \sin B}{\sin C}$.

$$\log 5394 = 3{,}7319109$$
$$\log \sin B = \log \sin 74°. 34' 44'' = 0{,}9839362 - 1$$
$$3{,}7158471$$
$$\log \sin 56°\ 30' = 0{,}9211066 - 1$$
$$\log AC = 3{,}7947405$$
$$AC = 6233{,}6 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung. Da (§. 27) jeder Sinus zu zweien Winkeln, nehmlich zu einem spitzen und dem ihn zu 180° ergänzenden stumpfen gehört, so kann auch der im vorigen Beispiele für log sin A gefundene Werth eben sowohl dem spitzen Winkel 48°. 55'. 16'' als dessen Supplement 231°. 4'. 44'' zugehören. Da jedoch in der angeführten Aufgabe die Seite AB größer als CB angenommen, und daher [(Geom. §. 90) der Winkel C größer] als A seyn muß, so kann in diesem Falle der Winkel A nur spitz seyn, es mag C ein spitzer oder stumpfer Winkel seyn. In diesem Falle ist also die Aufgabe bestimmt und man erhält, sowohl für den dritten Winkel B als auch für die dritte Seite AC nur einen Werth. Wenn aber in der obigen Aufgabe die dem gegebenen Winkel gegenüber stehende Seite kleiner als die anliegende ist, wenn z. B. AB = 5394 Fuß BC = 4876' und der $\angle$ A = 48°. 55'. 16'. gegebene wäre, so kann der Winkel C eben so wohl ein stumpfer als spitzer seyn; der aus den beiden Winkeln A und C hergeleitete Winkel B wird daher ebenfalls zwei Werthe erhalten, je nachdem man den Winkel C spitz oder stumpf annimmt; und die durch den Winkel B bestimmte dritte Seite AC wird, ebenfalls zwei Werthe erhalten. In diesem Falle ist die Aufgabe unbestimmt, und es muß noch aus andern Umständen bestimmt werden, ob das Dreieck spitzwinklicht oder stumpfwinklich seyn soll. (Man vergleiche hiermit Geom. §. 108).

Die Ausrechnung giebt $\sin. C = \frac{AB \sin A}{BC}$

$$\begin{array}{rl}
\log 5394 & = 3{,}7319109 \\
\log \sin A & = 0{,}8772594 - 1 \\
\hline
& 3{,}6091703 \\
\log 4876 & = 3{,}6880637 \\
\hline
\log \sin C & = 0{,}9211066 - 1
\end{array}$$

C = 56°. 30'

oder C = 123°. 30'.

Setzen wir C = 56°. 30′; so findet man

$$B = 180^\circ - (A + C) = 74^\circ.\ 34'.\ 44''$$

und $AC = \frac{AB\ .\ \sin B}{\sin C} = 6233{,}6$

wie oben.

Setzen wir hingegen C = 123°. 30° so ist

$$B = 180^\circ - (A + C) = 7^\circ.\ 34'.\ 44''$$

und $AC = \frac{AB\ .\ \sin B}{\sin C} = 851{,}17$ Fuß.

§. 70. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke *ABC* Fig. 11. verhält sich die Summe irgend zweier Seiten *AC*, *AB* zu ihrer Differenz wie die Tangente der halben Summe der diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel *ABC*, *ACB* sich zur Tangente ihrer halben Differenz verhält; nehmlich

$$AC + AB : AC - AB =$$
$$\tang \tfrac{1}{2}(B + C) : \tang \tfrac{1}{2}(B - C).$$

Beweis. Da (§. 66)

$$AC : AB = \sin B : \sin C,$$

so ist auch (Geom. §. 323)

$$AC + AB : AC - AB =$$
$$\sin B + \sin C : \sin B - \sin C.$$

Nun ist (§. 56)

$$\sin B + \sin C : \sin B - \sin C =$$
$$\tang \tfrac{1}{2}(B + C) : \tang \tfrac{1}{2}(B - C);$$

folglich ist (Geom. §. 303)

$$AC + AB : AC - AB =$$
$$\tang \tfrac{1}{2}(B + C) : \tang \tfrac{1}{2}(B - C).$$

§. 71. Zusatz.

Man kann daher aus zweien Seiten AC, AB nebst dem eingeschlossenen Winkel A die beiden übrigen Winkel B und C finden, wenn man

1) den gegebenen Winkel A von 180° abzieht, wodurch man (Geom. §. 131 I.) die Summe der Winkel $B + C$ erhält; sodann

2) zur Summe der gegebenen Seiten $AC + AB$, ihrer Differenz $AC - AB$ und der Tangente der halben Summe der Winkel $B + C$ die vierte Proportionalzahl sucht, wodurch man (§. 70) $tang\ \frac{1}{2}(B - C)$, und also den Winkel $\frac{1}{2}(B - C)$ erhält. Wird dann

3) diese halbe Differenz $\frac{1}{2}(B - C)$ zur halben Summe hinzugesetzt, so findet man den größern Winkel B; wird aber die halbe Differenz von der halben Summe der Winkel abgezogen, so findet man den kleinern Winkel C. Denn es ist

$$\tfrac{1}{2}(B + C) = \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{2}(B - C) = \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}C;$$

wird nun beiderseits addirt, so ist

$$\tfrac{1}{2}(B + C) + \tfrac{1}{2}(B - C) =$$
$$\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}C = B;$$

zieht man hingegen die untere Gleichung von der obern ab, so ist

$$\tfrac{1}{2}(B + C) - \tfrac{1}{2}(B - C) =$$
$$\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C = C.$$

§. 72. Aufgabe.

Wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 11. zwei Seiten AB, AC nebst dem eingeschlossenen Winkel BAC gegeben sind, die dritte Seite BC zu berechnen.

Auflösung I. Man bestimme nach (§. 71) die beiden übrigen Winkel B und C des Dreiecks, so läßt sich die dritte Seite nach (§. 68) finden.

Beispiel. Es sey $AC = 693$ Fuß, $AB = 539$ Fuß, $A = 41°. 37'$: so ist

$$AC + AB = 1232', \quad AC - AB = 154'$$
$$B + C = 180° - 41°. 37' = 138°. 23'$$
$$\tfrac{1}{2}(B + C) = 69°. 11'. 30'' \text{ und}$$

$$tang \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{(AC - AB)\, tang \tfrac{1}{2}(B + C)}{AC + AB} =$$
$$\frac{154\ tang\ 69°. 11'. 30''}{1232}$$

$$\begin{array}{rl} log\ 154 & = 2,1875207 \\ log.\ tang\ 69°. 11'. 30'' & = 0,4201812 \\ \hline & \ 2,6077019 \\ log\ 1232 & = 3,0906107 \\ \hline log.\ tang\ \tfrac{1}{2}(B - C) & = 0,5170912 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}C & = 18°. 12'. 26'' \\ \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C & = 69°. 11'. 30'' \\ \hline B & = 87°. 23'. 56'' \\ C & = 50°. 59'. 4'' \end{array}$$

Die Seite BC ist (§. 68) $= \frac{AB \sin A}{\sin C}$

$$= \frac{539 \sin 41°. 37'}{\sin 50°. 59'\ 4''}$$

$$\begin{aligned}
\log 539 &= 2{,}7315888 \\
\log \sin 41^\circ.\ 37' &= 0{,}8222621 - 1 \\
\hline
& \ 2{,}5538509 \\
\log \sin 50^\circ.\ 59'.\ 4'' &= 0{,}8904071 - 1 \\
\hline
\log BC &= 2{,}6634438 \\
BC &= 460{,}73 \text{ Fuß.}
\end{aligned}$$

§. 73.

Auflösung II. Man dividire die größere der gegebenen Seiten, AC, durch die kleinere AB, so wird dieser Quotient einen unächten Bruch geben. Da nun (§. 49) $tang\ 45^\circ = 1$ und Tangente $90^\circ = \infty$, so wird jener Bruch der Tangente irgend eines Winkels zwischen 45° und 90° gleich seyn. Man suche nun den dieser Tangente zugehörigen Winkel, welchen wir durch α bezeichnen wollen.

Von diesem Winkel α ziehe man 45° ab und multiplizire die Tangente des Restes, nehmlich $(\alpha - 45^\circ)$ mit der Cotangente der Hälfte des gegebenen Winkels, so giebt dieses Product die Tangente der halben Differenz der beiden gesuchten Winkel, wodurch dann jeder dieser beiden Winkel nach (§. 72.) bestimmt werden kann.

Wenn daher Fig. 11 die beiden Seiten AC, AB nebst dem Winkel A gegeben sind, wo $AC > AB$, so setzt man $\frac{AC}{AB} = tang\ \alpha$, sucht in den Tafeln den Winkel α und $tang\ (\alpha - 45^\circ)$ auf, da denn

$$tang\ \tfrac{1}{2}\,(B - C) = tang\ (\alpha - 45^\circ)\ cot\ \tfrac{1}{2}\,A.$$

Beweis. Es ist (§. 49)

$$tang\ (\alpha - 45^\circ) = \frac{tang\ \alpha - tang\ 45^\circ}{1 + tang\ \alpha\ .\ tang\ 45^\circ};$$

da aber $tang\ \alpha = \frac{AC}{AB}$ und (§. 49) $tang\ 45° = 1$:

so ist $tang\ (\alpha - 45°) = \frac{\frac{AC}{AB} - 1}{1 + \frac{AC}{AB}}$;

und multipliziren wir alle Glieder des Zählers und Nenners dieses Bruchs durch AB, so ist

$tang\ (\alpha - 45°) = \frac{AC - AB}{AC + AB}$.

Ferner ist $A = 180° - (B + C)$ also

$\frac{1}{2} A = 90° - \frac{1}{2} (B + C)$

und daher (§. 10) $cot\ \frac{1}{2} A = tang\ \frac{1}{2} (B + C)$;

folglich $cot\ \frac{1}{2} A \cdot tang\ (\alpha - 45°) =$

$\frac{AC - AB}{AC + AB} \cdot tang\ \frac{1}{2} (B + C)$.

Nun ist (§. 70)

$\frac{AC - AB}{AC + AB} \cdot tang\ \frac{1}{2} (B + C) =$

$tang\ \frac{1}{2} (B - C)$.

folglich ist

$cot\ \frac{1}{2} A \cdot tang\ (\alpha - 45°) = tang\ \frac{1}{2} (B - C)$.

Beispiel. Es sey wie in Auflös. I.

$AC = 693$ Fuß, $AB = 539$ F. u. $A = 41°.\ 37'$,

so ist

$log\ AC = log\ 693 = 2,8407332$
$log\ AB = log\ 539 = 2,7315888$

$log\ tang\ \alpha = 0,1091444$
$\alpha = 52°.\ 7'.\ 30''$
$\alpha - 45° = 7°.\ 7'.\ 30''$

$$\log \text{tang } 7^\circ.\ 7'.\ 30'' = 0{,}0969090 - 1$$
$$\log \cot 20^\circ.\ 48'.\ 30'' = 0{,}4201812 - 1$$
$$\log \text{tang } \tfrac{1}{2}(B - C) = 0{,}5170902 - 1$$
$$\tfrac{1}{2}(B - C) = 18^\circ.\ 12'.\ 26''$$

wie in der Auflösung I. Diese Auflösung ist besonders in den Fällen anwendbar, wo nicht die beiden Seiten des Dreiecks selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben sind, und wird in der Astronomie häufig gebraucht.

§. 74.

Man kann auch aus den beiden Seiten eines Dreiecks nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die dritte Seite unmittelbar finden. Es sey im Dreiecke ABC Fig. 11 die Seite $BC = a$, $AC = b$ nebst dem eingeschlossenen Winkel $ACB = C$ gegeben und die dritte Seite $AB = c$ zu finden. Man fälle aus B auf AC den Perpendickel BD: so ist (Geom. §. 463)

$$AB^2 = AD^2 + DB^2.$$

Nun ist (§. 9) $DB = BC \sin C = a \sin C$ und $AD = AC - CD = b - a \cos C$ folglich ist

$$AB^2 = c^2 = (a \sin C)^2 + (b - a \cos C)^2$$

oder $c^2 = a^2 \sin^2 C + b^2 - 2\, ab \cos C + a^2 \cos^2 C$;

Da aber

$$a^2 \sin^2 C + a^2 \cos^2 C =$$
$$a^2 (\sin^2 C + \cos^2 C) = a^2 \text{ (§. 15)}$$

so ist $c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C$

und folglich

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C)}.$$

§. 76. Aufgabe.

Wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 11. alle drei Seiten $BC = a$, $AC = b$ und $AB = c$ gegeben sind, daraus die Winkel desselben zu bestimmen.

Auflösung. Man ziehe von der halben Summe aller drei Seiten jede der den gesuchten Winkel einschließenden Seiten nach einander ab, und multiplizire diese beiden Reste in einander. Dieses Product dividire man durch das Product der den gesuchten Winkel einschließenden Seiten und ziehe aus dem erhaltenen Quotienten die Quadratwurzel: so giebt diese den Sinus der Hälfte des gesuchten Winkels, wodurch dann dieser gefunden werden kann.

Wird z. B. Fig. 11. der Winkel C gesucht, so findet man, wenn $a + b + c = f$ gesetzt wird

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2} f - a)(\frac{1}{2} f - b)}{ab}}.$$

Beweis. Da (§. 74)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$: so folgt, wenn wir statt $\cos C$ dessen Werth $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C$ setzen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab + 4\,ab \sin^2 \tfrac{1}{2} C$$
$$= (a - b)^2 + 4\,ab \sin^2 \tfrac{1}{2} C;$$

folglich

$$4\,ab \sin^2 \tfrac{1}{2} C = c^2 - (a - b)^2$$
$$= (c + a - b)(c - a + b);$$

also

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{(c + a - b)(c - a + b)}{4\,ab}$$

$$= \frac{\frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{c-a+b}{2}}{ab}$$

Es ist aber leicht einzusehen, daß

$\frac{c+a-b}{2} = \frac{c+a+b}{2} - b$; und daß

$\frac{c-a+b}{2} = \frac{c+a+b}{2} - a$;

bezeichnen wir nun die Summe $a+b+c$ durch f und setzen vorstehende Werthe in obige Gleichung, so ist

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{(\frac{1}{2} f - a)(\frac{1}{2} f - b)}{ab}$$

und endlich

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2} f - a)(\frac{1}{2} f - b)}{ab}}$$

Beispiel. Es sey $a = 460{,}73$ Fuß, $b = 693$ Fuß und $c = 539'$, so ist

$f = a + b + c = 1692{,}73$ F.

$\frac{1}{2} f = 846{,}365'$; $\frac{1}{2} f - a = 385{,}635'$

$\frac{1}{2} f - b = 153{,}365'$

$$\begin{array}{rl}
\log 385{,}635 = & 2{,}5861765 \\
\log 153{,}365 = & 2{,}1857263 \\
\hline
 & 4{,}7719028 \\
\log 460{,}73 = 2{,}6634465 & \\
\log 693 \quad = 2{,}8407332 & \\
\hline
 & 5{,}5041797 \\
\hline
 & 0{,}2677231 - 1 \\
\hline
\log \sin \tfrac{1}{2} C = & 0{,}6338615 - 1 \\
\tfrac{1}{2} C = & 25^\circ.\ 29'.\ 32'' \\
C = & 50^\circ.\ 59'.\ 4''.
\end{array}$$

§. 77. Zusatz.

Aus $\sin^2 \frac{1}{2} C = \frac{(\frac{1}{2} s - a)(\frac{1}{2} s - b)}{a b}$ folgt die Proportion

$$a b : (\tfrac{1}{2} s - a) = (\tfrac{1}{2} s - b) : \sin^2 \tfrac{1}{2} C$$

und diese nebst den Proportionen

$$a : b = \sin A : \sin B \text{ (§. 66)},$$

$$a + b : a - b = \tang \tfrac{1}{2} (A + B) : \tang \tfrac{1}{2} (A - B)$$

(§. 70) enthalten alle Hülfsmittelzur Auflösung sowohl der rechtwinklichten als schiefwinklichten Dreiecke.

Aufgaben zur Uebung.

§. 78. Aufgabe.

Aus zweien in einem Dreiecke ABC Fig. 11. gegebenen Seiten $BC = a$, $AC = b$ nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel $ACB = \alpha$, den Flächeninhalt, Q, desselben zu berechnen.

Auflösung. Man fälle den Perpendickel BD: so ist (§. 9)

$$BD = BC \sin C = a \sin \alpha$$

und $Q = \frac{BD \cdot AC}{2}$ (Geom. §. 453) $= \frac{a b \sin \alpha}{2}$.

Es sey z. B. $BC = a = 1728$ Ruthen

$AC = b = 783°$ und $ACB = \alpha = 53°. 30'$:

so ist $Q = \frac{1728 \cdot 773 \cdot \sin 53°. 30'}{2} = 543818{,}7 \square°$.

§. 79. Aufgabe.

Wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 11. alle Winkel $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$ nebst einer Seite $AC = b$ gegeben sind, den Flächeninhalt Q desselben zu berechnen.

Auflösung. Es ist (§. 78)

$$Q = \frac{AB \,.\, AC \sin \alpha}{2} = \frac{AB \,.\, b \sin \alpha}{2};$$

da aber (§. 68)

$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B} = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta};$$

so ist $Q = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta} \cdot \frac{b \sin \alpha}{2} = \frac{b^2 \sin \alpha \sin \gamma}{2 \sin \beta}.$

Beispiel. Es sey $\alpha = 99^\circ.\ 59'.\ 49''$
$\gamma = 53^\circ.\ 30'$, daher $\beta = 26^\circ.\ 30'.\ 11''$ und
$b = 783^\circ$: so ist

$$Q = \frac{783 \cdot 783 \,.\, \sin 99^\circ.\ 59'.\ 49''.\ \sin 53^\circ.\ 30'}{2 \sin 26^\circ,\ 30',\ 11''}$$

$$= 543818{,}7 \text{ wie in §. 78.}$$

§. 80. Aufgabe.

Wenn in einem Dreiecke ABC Fig. 11. alle drei Seiten $BC = a$, $AC = b$ und $AB = c$ gegeben sind, dessen Flächeninhalt Q zu finden.

Auflösung. Man multiplizire die halbe Summe der drei Seiten mit den Differenzen zwischen dieser halben Summe und jeder der gegebenen Seiten; ziehe aus diesem Producte die Quadratwurzel, so wird diese den verlangten Flächeninhalt geben. Setzen wir also $\frac{a + b + c}{2} = s$, so ist

$$Q = \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}.$$

Beweis. Da (§. 74)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C,$$

so ist

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$

folglich

$$1 + \cos C = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$

$$= \frac{2\,ab + a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab};$$

oder I. $1 + \cos C = \frac{(a + b)^2 - c^2}{2\,ab}$

$$= \frac{(a + b + c)\,(a + b - c)}{2\,ab}$$

Eben so ist

$$\text{II. } 1 - \cos C = 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$

$$= \frac{2\,ab - a^2 - b^2 + c^2}{2\,ab} = \frac{c^2 - (a - b)^2}{2\,ab}$$

$$= \frac{(c + a - b)\,(c - a + b)}{2\,ab}.$$

Wird die Gleichung I mit II multiplizirt, so erhält man

$$(1 + \cos C)\,(1 - \cos C) = 1 - \cos^2 C = \sin^2 C$$

$$= \frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(c+a-b)\,(c-a+b)}{4\,a^2\,b^2}$$

Wird nun $a + b + c = 2\,s$ gesetzt, und erwägt man, daß $a + b - c = a + b + c - 2\,c = 2\,s - 2c = 2\,(s - c)$;

daß $c + a - b = c + a + b - 2\,b = 2\,(s - b)$

und $c - a + b = c + a + b - 2\,a = 2\,(s - a)$:

so ist

$$\sin^2 C = \frac{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4a^2b^2}$$

$$= \frac{16 \cdot s(s-a)(s-b)(s-c)}{4a^2b^2};$$

folglich $\sin C = \frac{4\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}}{2ab}$.

Nun ist (§. 78)

$$Q = \frac{ab}{2} \sin C; \text{ folglich ist}$$

$$Q = \frac{ab}{2} \cdot \frac{2\sqrt{[s(s-a)(s-b)(-c)]}}{ab}$$

oder $Q = \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$.

Beispiel. Es sey $a = 1728°$,

$b = 783°$, $c = 1410{,}48°$: so ist $s = \frac{a+b+c}{2}$
$= 1960{,}74°$; $s - a = 232{,}74$; $s - b = 1177{,}74°$
$s - c = 550{,}26°$ und
$Q = \sqrt{(1960{,}74 \times 232{,}74 \times 1177{,}74 \times 550{,}26)}$
$= 543818{,}7$.

§. 81. Aufgabe.

Die Höhe eines Gegenstandes, etwa eines Thurms *AB* Fig. 12 zu bestimmen, wenn der niedrigste Punkt *B* desselben mit einem gewählten Standpunkte, *C*, nicht in einerlei Horizontalebene liegt, vorausgesetzt, daß man von diesem Standpunkte *C* nach dem Fuße des Gegenstandes *B* hinmessen kann.

Auflösung. Man messe die Linie $CB = a$, und bestimme in *C* den Elevationswinkel $ACD = \alpha$ und den Depressionswinkel $BCD = \beta$: so ist
$ACB = \alpha + \beta$; $CAB = 90° - \alpha$; $CBA = 90° - \beta$.

Im Dreiecke ACB ist (§. 68)

$$AB = \frac{CB \sin ACB}{\sin CAB} = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin(90^\circ - \alpha)};$$

da aber (§. 10) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, so ist

$$AB = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha}.$$

Beispiel. Es sey $CB = a = 4509{,}5$ $\alpha = 32^\circ.\ 4'$, $\beta = 15^\circ,\ 28'$: so ist $AB = 3925{,}4$.

§. 82. Zusatz.

Wenn C mit B in einerlei Horizontalebene liegt ist $\beta = 0$; in diesem Falle ist

$$AB = \frac{a \sin(\alpha + 0)}{\cos \alpha} = \frac{a \sin \alpha}{\cos \alpha} = a \tang \alpha.$$

Liegt aber Fig. 13. der Punkt B höher als C, so ist der Winkel β negativ und $ACB = ACD - BCD = \alpha - \beta$; folglich

$$AB = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}.$$

§. 83. Aufgabe.

Die Entfernung zweier Gegenstände A B. Fig. 14 zu bestimmen, wenn man zu keinem derselben hinkommen kann.

Auflösung. Man wähle eine Standlinie CD, aus deren Endpunkten man nach den Endpunkten A, B der gesuchten Entfernung hin visiren kann; messe die Linie $CD = a$ und zugleich die Winkel $ACD = \alpha$, $BCD = \beta$; $BDC = \gamma$, $ADC = \delta$: so hat man im Dreiecke ACD den Winkel $CAD = 180^\circ - \alpha - \delta$ und im Dreieck BCD den Winkel $CBD = 180^\circ - \gamma - \beta$. In dem Dreiecke ACD lassen sich aus der Seite a und allen Winkeln (§. 68) die Seiten AD und AC, berechnen; eben so kann man im Dreiecke BCD die Seiten BC, BD berechnen. Hat man nun die Seiten AD, AC, BC, BD, so kann man, da auch der $\angle\ ACB = \alpha - \beta$ und $ADB = \gamma - \delta$ bekannt ist, (§. 72) die Seite AB entweder aus dem Dreiecke ACB oder ADB bestimmen.

Setzen wir nun zur Abkürzung den Winkel $CAD = A$, $CBD = B$: so ist (§. 68)

$$AC = \frac{a \sin\delta}{\sin A},\quad BC = \frac{a \sin\gamma}{\sin B},$$

und (§. 74)

$$AB = \surd\,(AC^2 + BC^2 - 2 \,.\, AC \,.\, BC \cos ACB)$$

$$= \surd\left(\frac{a^2 \sin\delta^2}{\sin A^2} + \frac{a^2 \sin\gamma^2}{\sin B^2} - 2\, a^2 \frac{\sin\delta}{\sin A} \,. \times \frac{\sin\gamma}{\sin B} \cos(\alpha - \beta)\right) =$$

$$a \surd \left\{\left(\frac{\sin\delta}{\sin A}\right)^2 + \left(\frac{\sin\gamma}{\sin B}\right)^2 - 2\frac{\sin\delta}{\sin A} \,. \times \frac{\sin\gamma}{\sin B} \cos(\alpha - \beta)\right\}.$$

Wiewohl hier die unter dem Wurzelzeichen befindlichen Theile einzeln berechnet werden müssen, so wird doch die Rechnung dadurch abgekürzt, daß man die Logarithmen von $\frac{\sin\delta}{\sin A}$, $\frac{\sin\gamma}{\sin B}$, welche in den beiden ersten Theilen vorkommen, auch beim Dritten benutzen kann.

Beispiel. Es sey $a = 2145{,}7'$ $\alpha = 127°\ 26'$; $\beta = 54°.\ 19'$; $\gamma = 119°.\ 11'$ $\delta = 36°.\ 48'$: so ist $A = 15°.\ 46'$, $B = 6°.\ 30'$ und $AB = 15835{,}32$ Fuß.

§. 84. Aufgabe.

Drei Oerter A, B, C Fig. 15. deren Lage bekannt ist, können aus einem vierten in derselben Ebene liegenden Orte D gesehen, auch daselbst die Winkel, welche die Gesichtslinien DA, DB, DC mit einander bilden, gemessen werden; man soll die Entfernung des Orts D von jedem der Oerter A, B, C, so wie seine Lage gegen dieselben bestimmen.

Auflösung. Es sey $AB = a$, $BC = b$ $\angle ABC = \alpha$, der gemessene Winkel $ADB = \beta$, $BDC = \gamma$: man soll die Entfernungen DA, DB, DC, so wie die Winkel DAB, DCB bestimmen.

Wäre nur noch der Winkel BAD bekannt, so hätte man in dem Vierecke $ABCD$ die drei Winkel BAD, ABC, ADC, und folglich (Geom. (§. 135) auch den vierten BCD. In jedem der Dreiecke ABD, CBD wären alsdann eine Seite nebst zweien Winkeln bekannt und die übrigen Stücke müssen sich also nach §. 68 bestimmen lassen.

Setzen wir nun diesen unbekannten Winkel $BAD = \varphi$; so ist (Geom. §. 135)

$$BCD = 360° - ABC - ADC - BAD$$
$$= 360° - \alpha - \beta - \gamma - \varphi$$
$$= 360° - (\alpha + \beta + \gamma) - \varphi;$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$360° - (\alpha + \beta + \gamma) = \mu: \text{ so ist}$$
$$\angle BCD = \mu - \varphi.$$

Aus den Winkeln BAD, BDA und der Seite AB des Dreiecks ABD erhält man (§. 68)

$$BD = \frac{a \sin \varphi}{\sin \beta};$$

und aus den Winkeln BCD, BDC nebst der Seite BC des Dreiecks BDC findet man (§. 68)

$$BD = \frac{b \sin (\mu - \varphi)}{\sin \gamma}.$$

Werden diese beiden Werthe von BD einander gleich gesetzt, so ist

$$\frac{a \sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{b \sin (\mu - \varphi)}{\sin \gamma}$$

folglich $a \sin \gamma \sin \varphi = b \sin \beta \sin (\mu - \varphi)$ oder, weil (§. 38)

$$\sin (\mu - \varphi) = \sin \mu \cos \varphi - \cos \mu \sin \varphi,$$

$$a \sin \gamma \sin \varphi = b \sin \beta (\sin \mu \cos \varphi - \cos \mu \sin \varphi).$$

Dividirt man beide Theile dieser Gleichung durch $\sin \varphi$: so ist

$$a \sin \gamma = b \sin \beta (\sin \mu \cot \varphi - \cos \mu);$$

folglich $\sin \mu \cot \varphi = \frac{a \sin \gamma}{b \sin \beta} + \cos \mu$

und daher

$$\cot \varphi = \frac{a \sin \gamma}{b \sin \beta \sin \mu} + \cot \mu.$$

Hat man aber erst den Winkel φ gefunden, so ist (§. 68)

$$AD = \frac{AB \sin ABD}{\sin ADB} = \frac{a \sin [180^\circ - (\beta + \varphi)]}{\sin \beta}$$

$$= \frac{a \sin (\beta + \varphi)}{\sin \beta},$$

weil (§. 27) $\sin [180^\circ - (\beta + \varphi)] = \sin (\beta + \varphi)$

$$BD = \frac{a \sin \varphi}{\sin \beta};$$

$$CD = \frac{BC \sin CBD}{\sin BDC}$$

oder, weil

$$CBD = CBA + BAD + ADB$$
$$- (DBA + BAD + ADB)$$
$$= \alpha + \varphi + \beta - 180°$$
$$CD = \frac{b \sin(\alpha + \varphi + \beta - 180°)}{\sin \gamma}.$$

Beispiel. Es sey $a = 87'$, $b = 80{,}5'$
$\alpha = 167°.\ 30'$; $\beta = 30°.\ 45$, und $\gamma = 23°.\ 15'$:
so ist

$$BAD = \varphi = 82°.\ 39'; \; AD = 156{,}16'$$
$$BD = 168{,}76, \text{ und } CD = 200{,}25'.$$

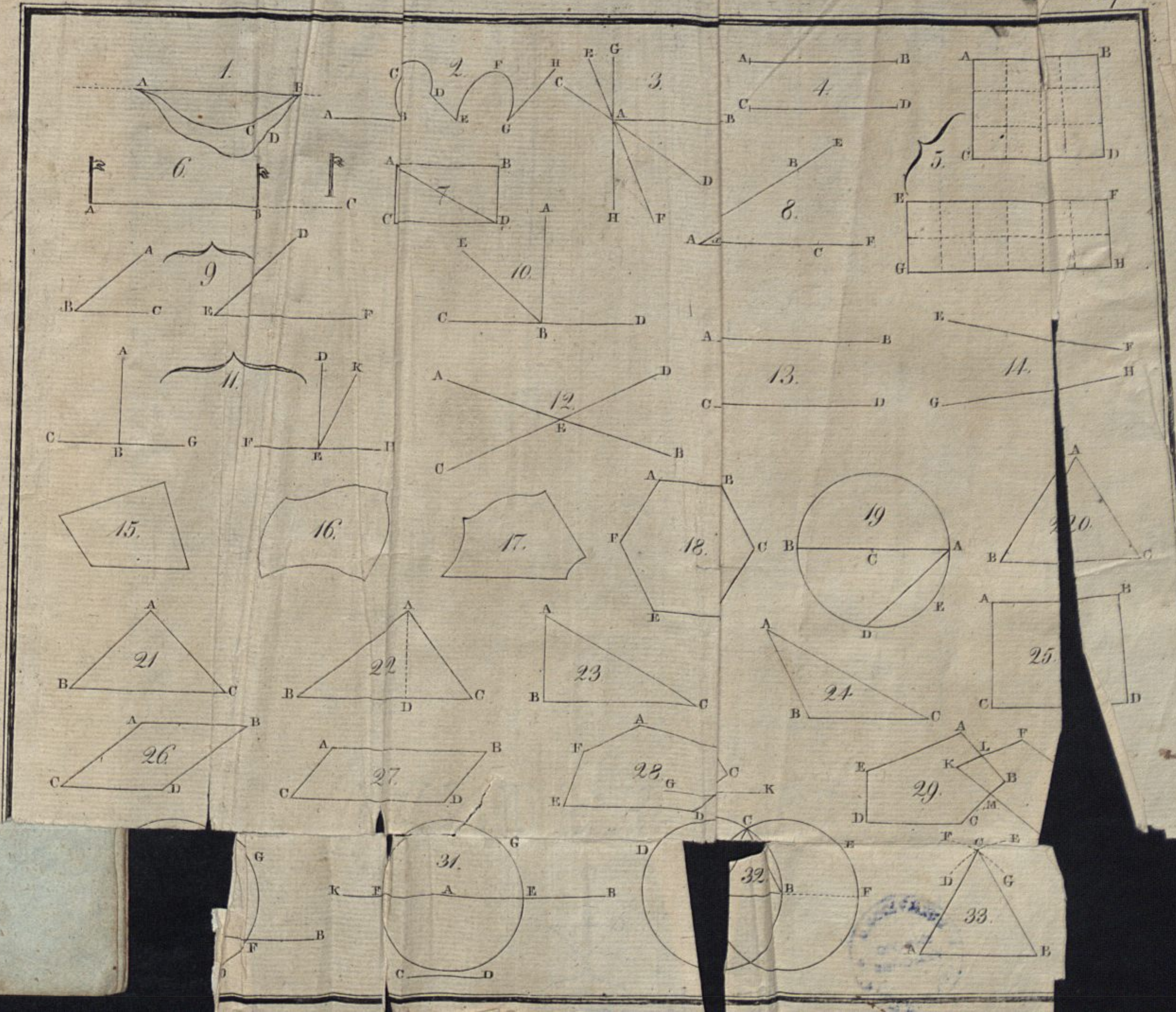
Geometrische Construction. Nachdem die drei Punkte A, B, C Fig. 15 ihrer Lage nach aufgetragen sind, setze man (Geom. §. 255) auf AB einen Kreisabschnitt ADB, welcher den gemessenen Winkel β, und auf BC einen Kreisabschnitt BDC, welcher den Winkel γ enthält: so wird der Durchschnittspunkt D beider Kreise ADB, CDB der gesuchte seyn. Denn zieht man die Linien DA, DB, DC, so ist $\angle ADB = \beta$, $BDC = \gamma$, also $ADC = \beta + \gamma$; und aus keinem andern Punkte als D können nach A und C gerade Linie gezogen werden, welche einen Winkel $= \alpha + \beta$ einschließen.

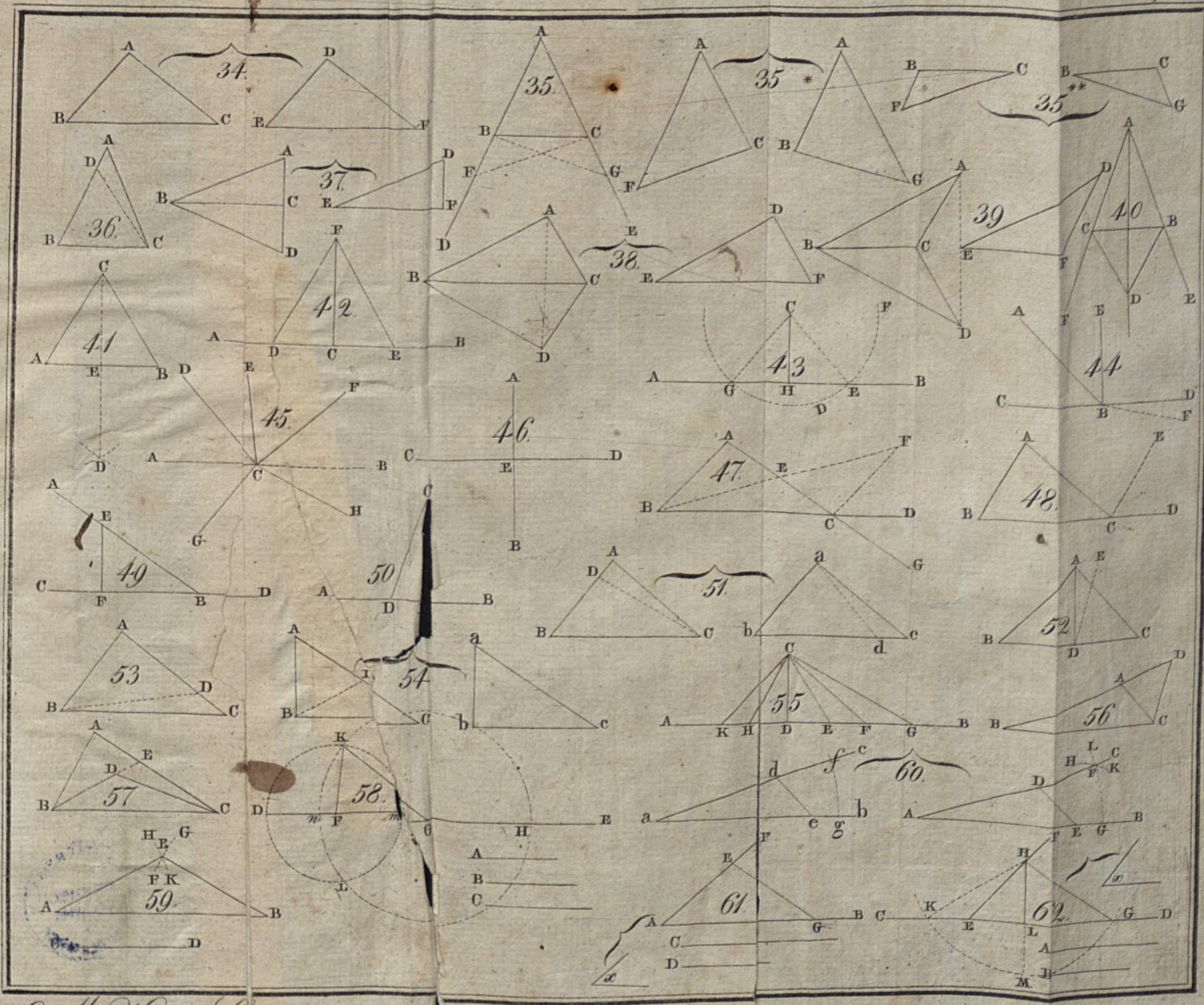
Eine genauere Erörterung der verschiedenen Fälle dieser für die practische Meßkunst höchst wichtigen Aufgabe, so wie die Auflösung anderer interessanten Aufgaben, findet man in der schätzbaren: Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch, Berlin bei Heinrich Fröhlich, welche angehenden Geometern nicht genug empfohlen werden kann.

Druckfehler.

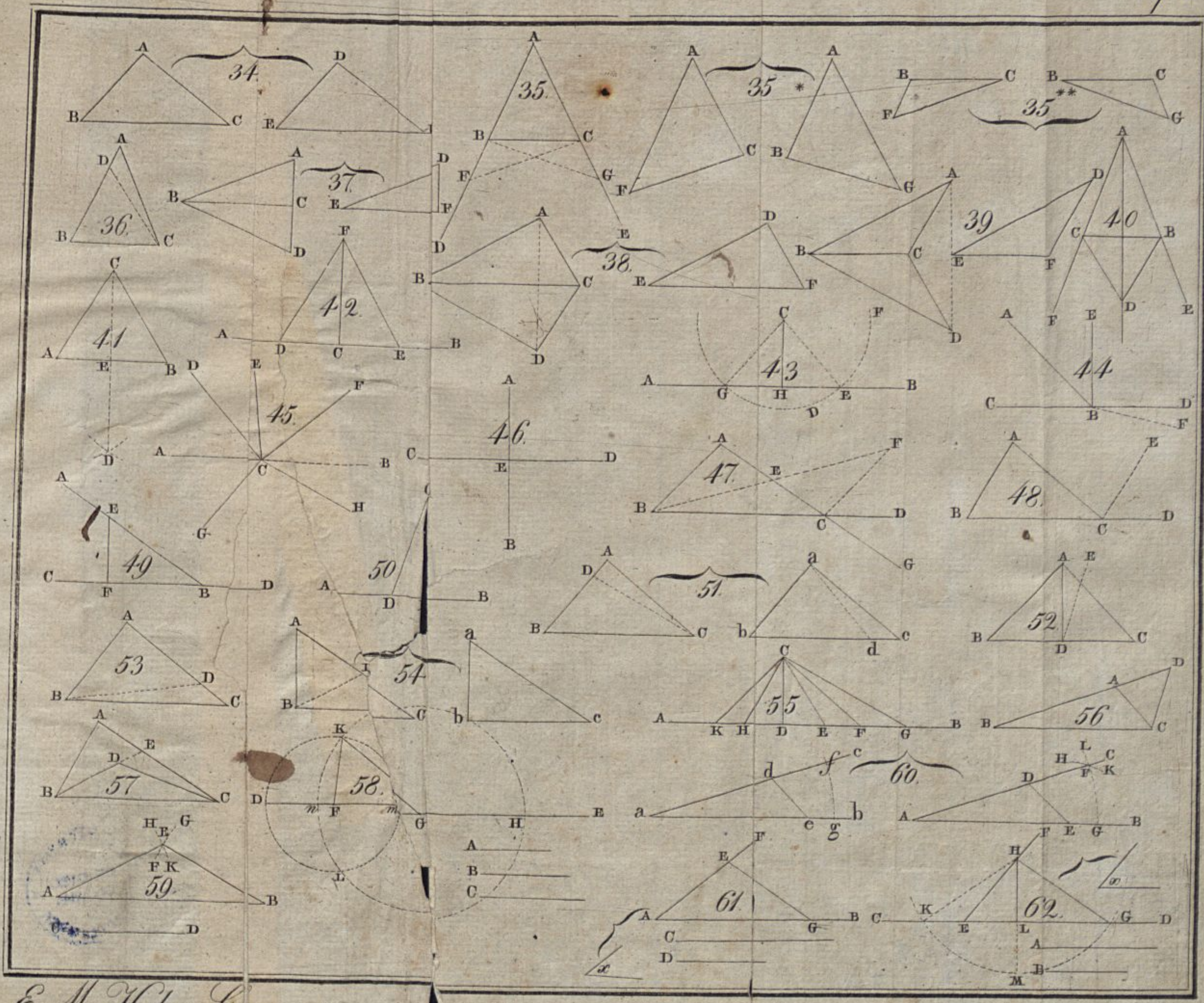
Seite.	Zeile	anstatt	lese man
12	7 von unten	oder ACB	oder ADB
29	11 v. o.	Fig. 28	Fig. 29.
33	5 v. u.	andern, und	andern gleich, und
36	2. v. u.	üssen	müssen
39	11	ABC =	ABC,
41	17	brauche	braucht
41	20	beziehen	ziehen
48	4. v. u.	BCB	BCG
51	1. v. u.	acb, abc	abe, acb
52	7. v. u.	§. 77	§. 78
63	20	desselben.	desselben,
71	2	Pallelogrammen	Parallelogrammen
71	11	Winke	Winkel
72	15	§. 58.	§. 68.
77	18	§. 73	§. 28
78	7 v. u.	GHD	GHB
89	3	ABC	ADC
104	16	CF	CH
105	3	BEq	BE.
111	7 v. u.	(BC + CD) (BC − CD)	(BC + CD) . (BC − CD)
113	18	ABC	ADC
113	4 v. u.	ABC	ADC,
115	14	AD	AB.
124	7 v. u.	EE	EF
127	10 v. u.	durchschnittspunke	Durchschnittspunkte
129	14	gienge	ginge
130	13	Mittelpunkte	Mittelpunkt.
135	10 v. u.	f	s
135	9 v. u.	f	s
135	8 v. u.	fg	sg
151	14	Kreis	Kreis
160	16	als Durchmesser	als der Durchmesser
161		In Fig. 133. fehlt in	mehreren Abdrücken der Mittelpunkt K
178	8	de	ce
191	14	$\frac{1}{q}a - a$, $\frac{1}{q}c - c$	$a - \frac{1}{q}a$, $c - \frac{1}{q}c$
191	15	$\frac{1}{q} - 1$	$1 - \frac{1}{q}$

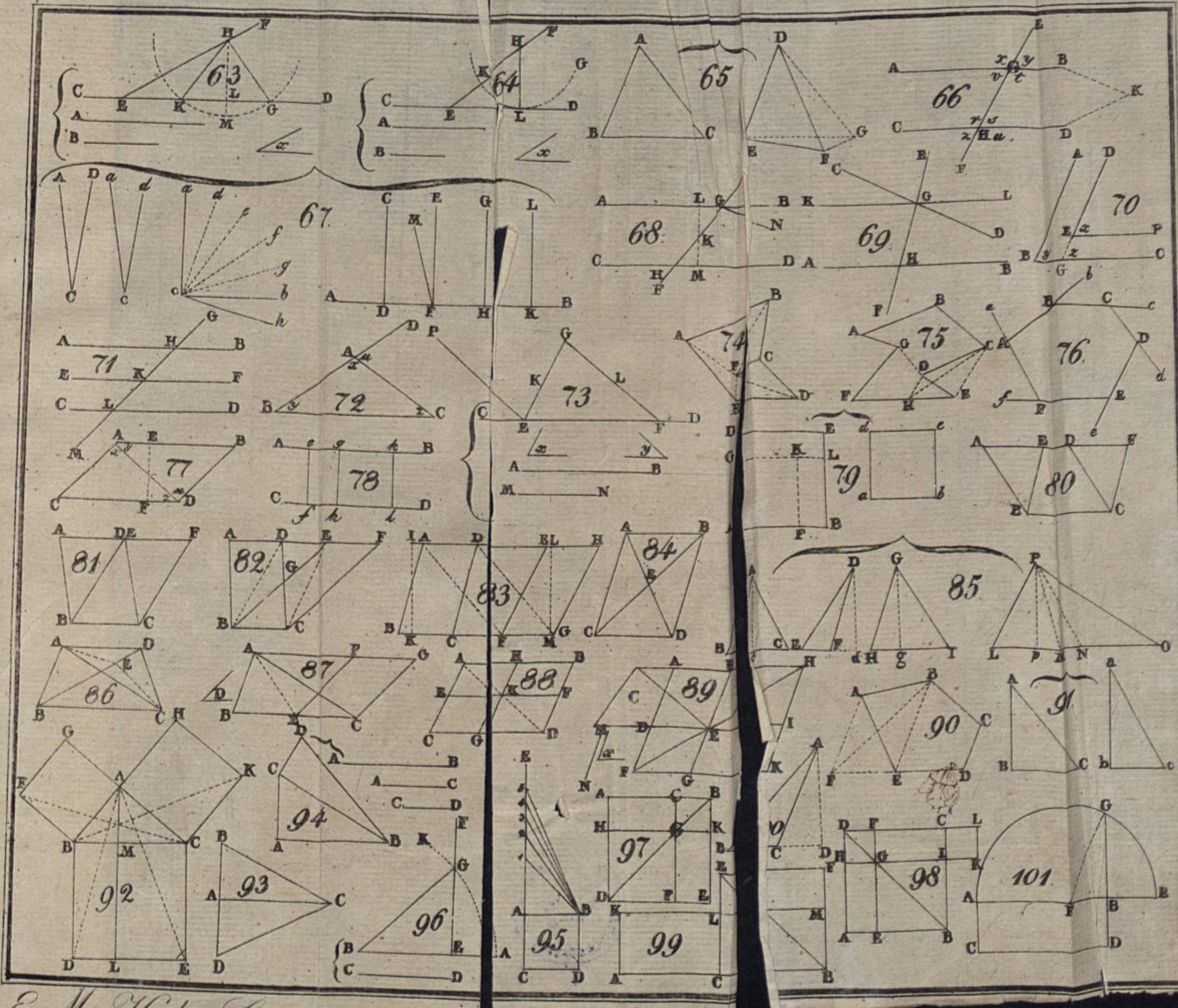
Seite	Zeile	anstatt	lese man
194	4 v. u.	Proportin	Proportion
199	7	Fig. 141	Fig. 192
200	14	Fig. 141	Fig 192
202	8	FFGH	EFGH
02	9	kb	kl
04	4	Efg'H	Ef'g'H
211	3 v. u.	$\angle = b$	$\angle B = b$
225	7 v. u.	Fig. 185	Fig. 158,
238	13	Seiten	Seiten des um den Kreis beschriebenen Polygons
243	8	als der Abschnitt	als die Hälfte des Abschnitts
253	9	ack	aCk
255	19	dccd	dced
257	19	Abschn. = ABDA	Abschn. ABDA
258	9	woraus	voraus
259	19	Berliner = 127,3	Berliner = 137,3
266	4	Ab und CA	Ab und Ca
266	7	Transrarsalen	Transversalen
267	8	$xv = x7 = 7p + pv$	$xv = x7 + 7p + pv$
267	18	transrersalen	transversalen
271	7	§. 144	§. 244
275	2	danach	da nach
283	19	$\frac{126^2}{139,13}$	$\frac{126^2}{139,13^2}$
288	1 v. u.	ON	MN
293	10	b	a
295	23	Fig. 190	Fig. 191
296	18	$a.\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$	$a.\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$
300	7	und On $= \frac{1}{2}$ ae	und an $= \frac{1}{2}$ ae
314	1 v. u.	$= \frac{p}{\pi}$	$d = \frac{p}{\pi}$
339	11	$1 - \sin^2$	$1 - \sin^2 \alpha$
351	23	$\frac{BP}{BC} = \frac{B''P'}{B''C}$	$\frac{BP}{BC} = \frac{B''P''}{B''C}$
352	7	$\cos(180^\circ - \alpha) - \cos\alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
352	18	ACB = ACB''	ACB = KCB
406	7	851,17	853,12
411	2	0,4201812 — 1	0,420181a
413	9 v. u.	§. 473	§. 73.

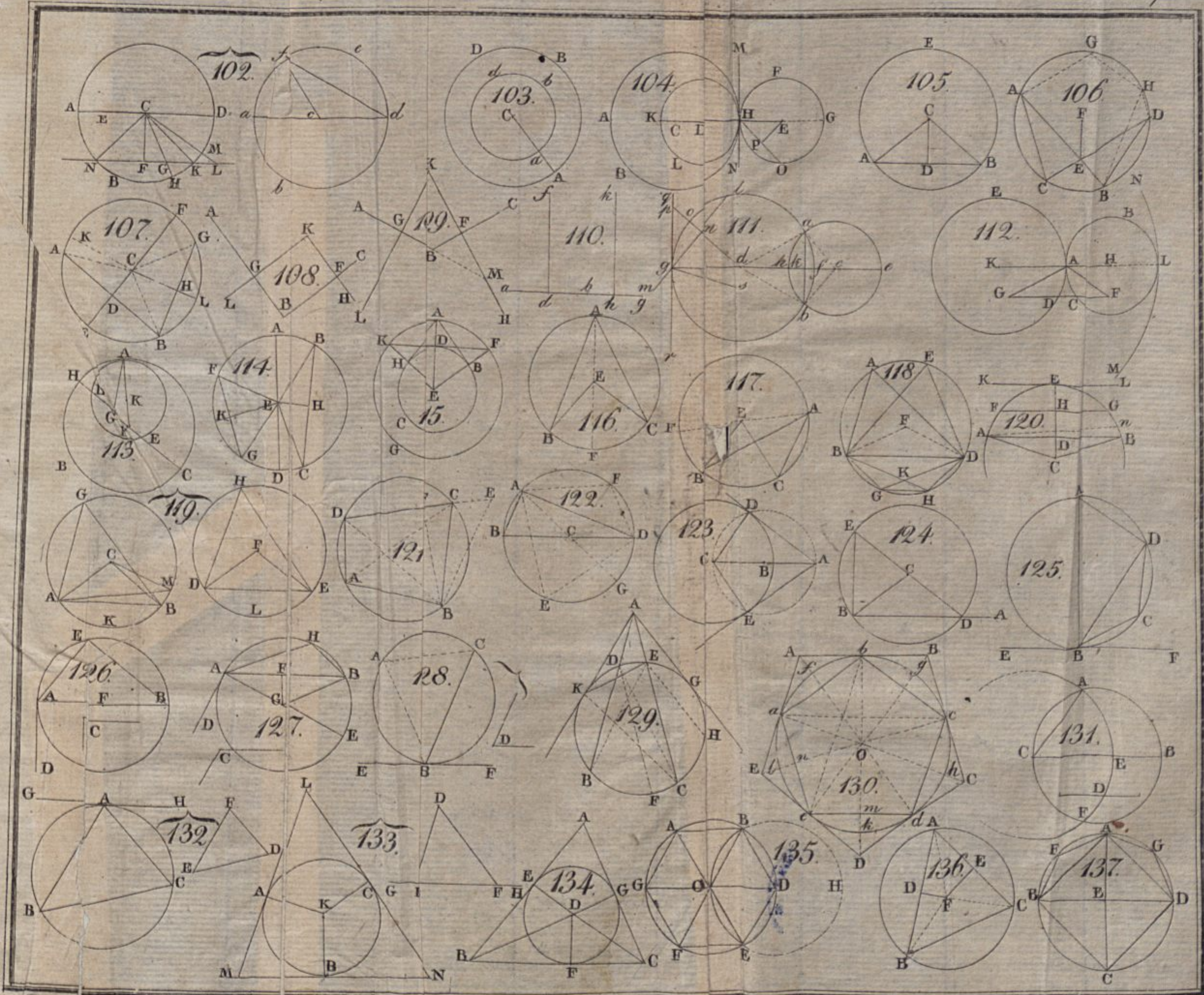

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
31.
32.
33.



E. M. Hahns Geometrie

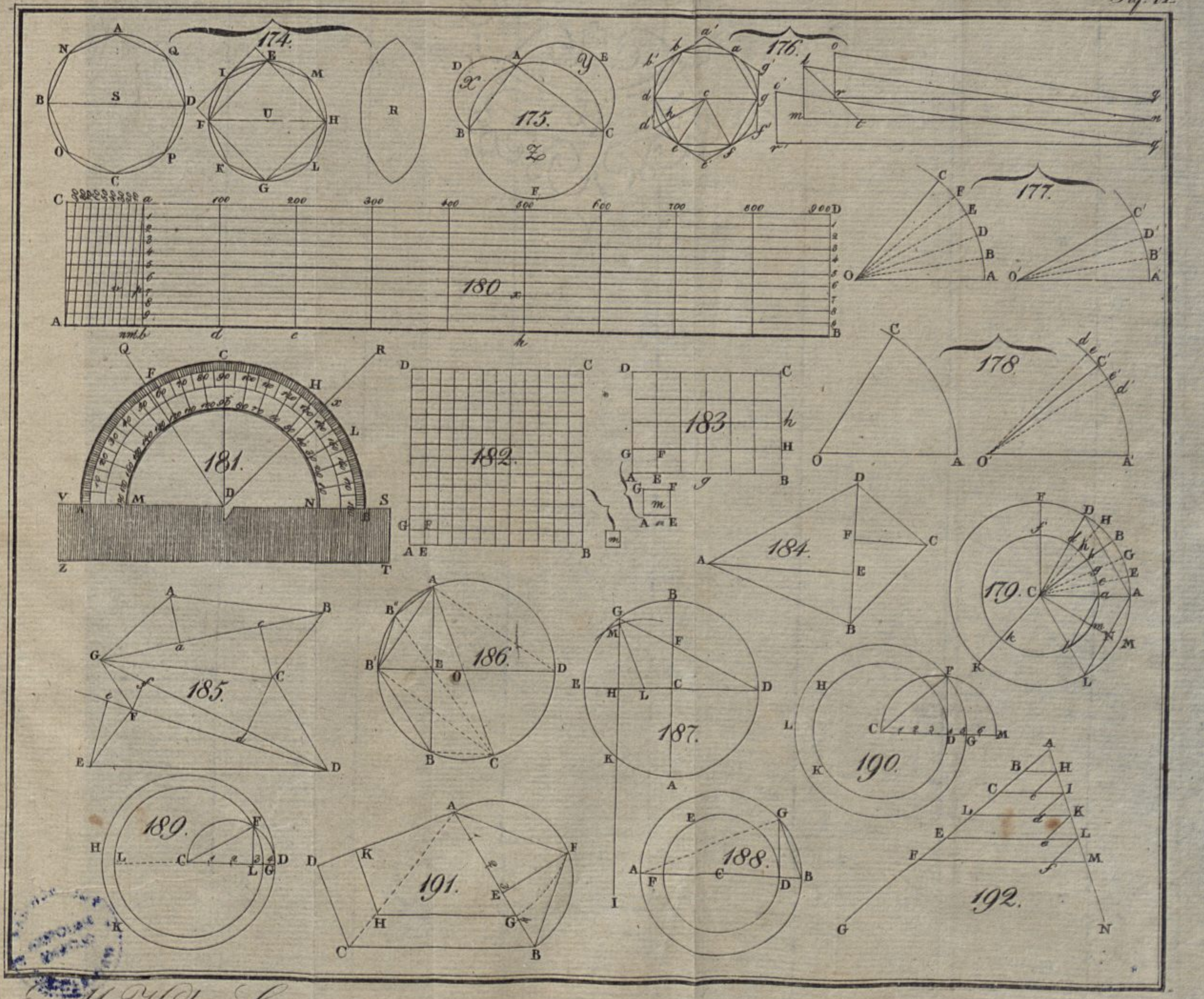

34.
35.
35 *
35 **
36.
37.
38.
39
40
41
42
43
44
45.
46.
47.
48.
49
50
51.
52.
53
54.
55
56.
57
58.
59.
60.
61.
62.


63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
101

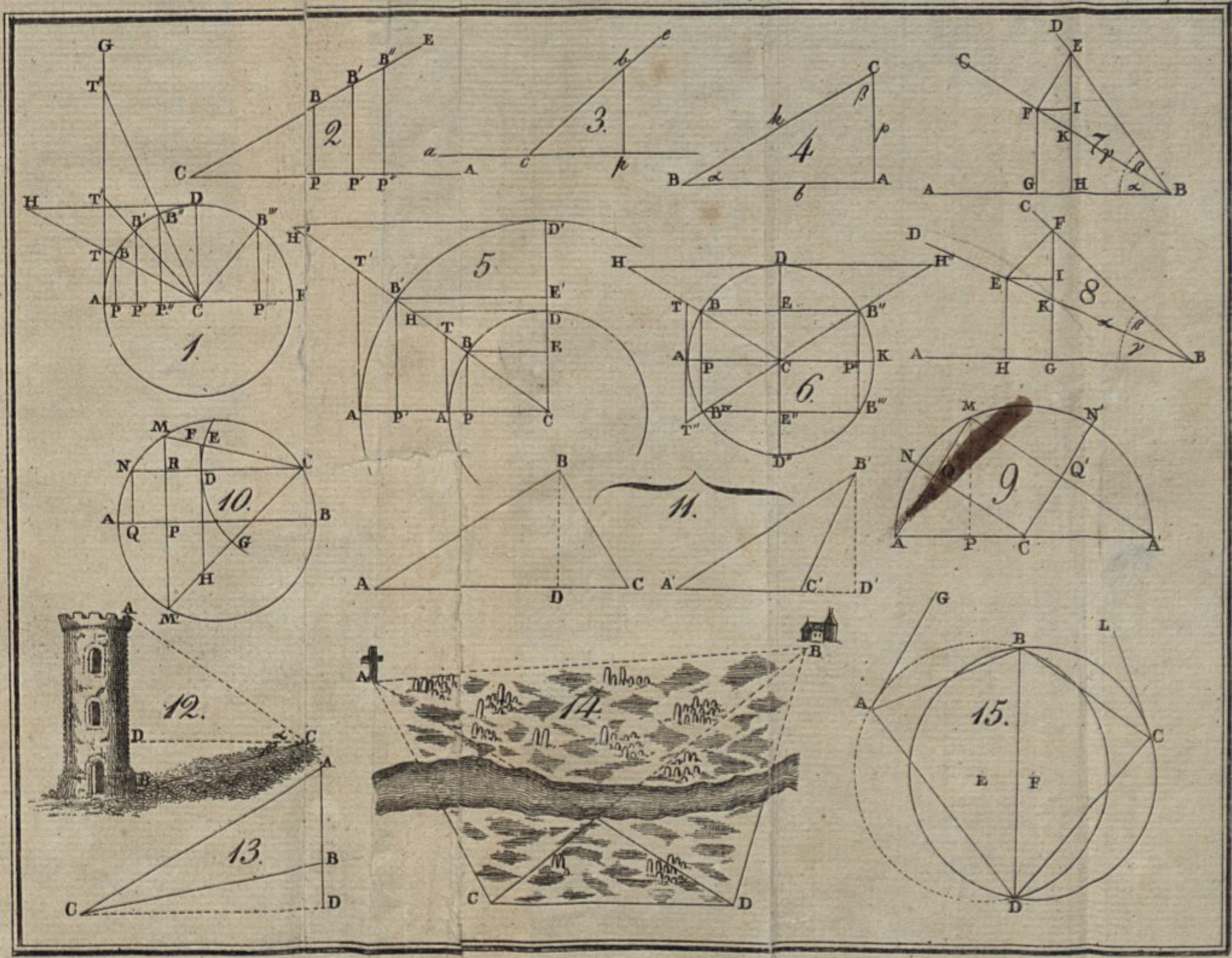


E. M. Hahns Geometrie

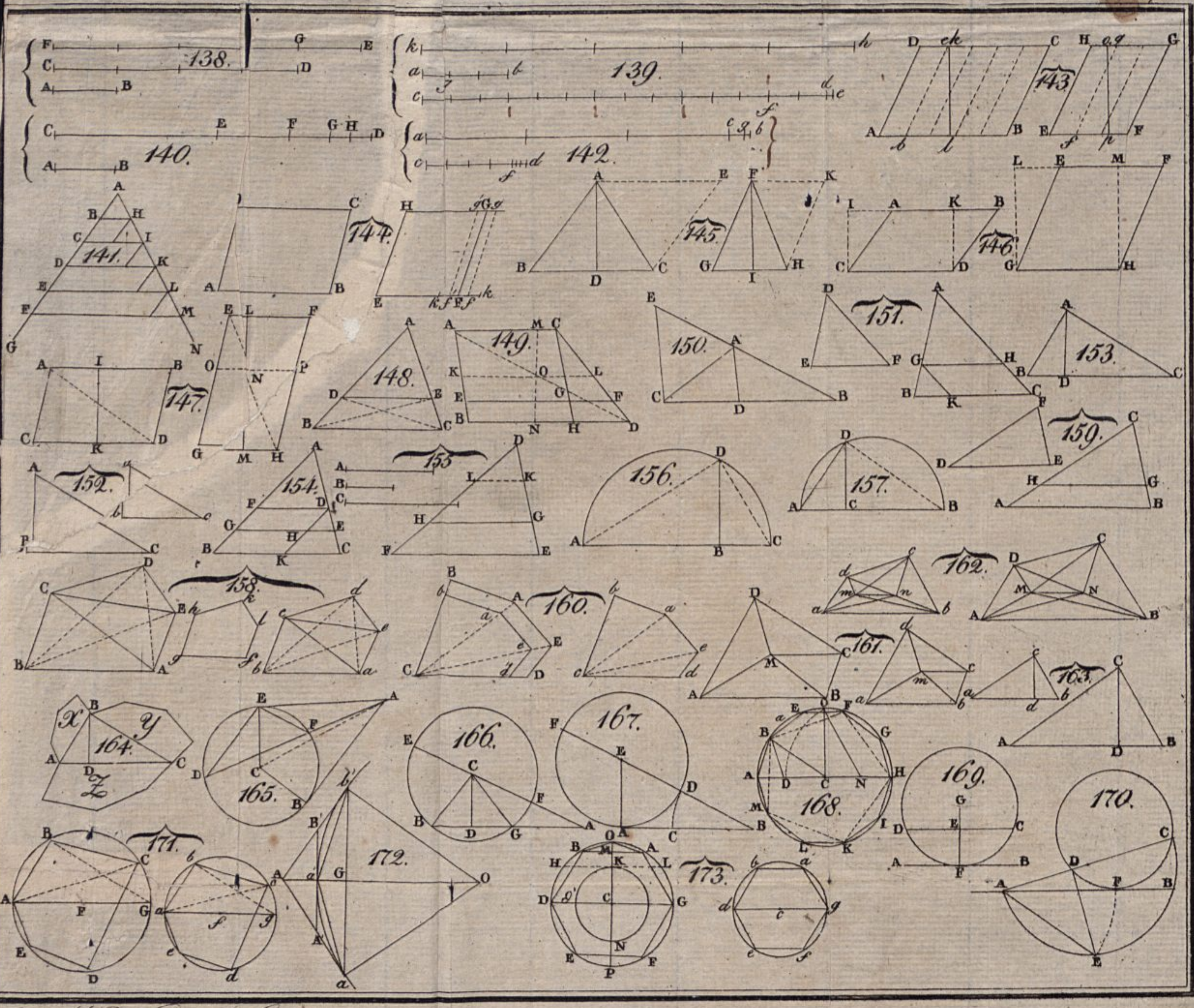
E. M. Hahns Geometrie.



E. M. Hahns Geometrie.



E. M. Hahns Trigonometrie



E. M. Hahns Geometrie

Ein einziges Mädchen [illegible]
meine Bekanntschaft [illegible]
[illegible] welche [illegible]
[illegible] sie sagte [illegible]
ein Blatt [illegible]
[illegible] Briefe [illegible]
[illegible] Briefe und den Brief
[illegible]
[illegible] ein [illegible]
7 [illegible] Kranz [illegible]
[illegible] Geschichte [illegible]
[illegible] ich [illegible]
wenn ich [illegible]
[illegible] einen Drittheil [illegible]
[illegible]
[illegible] bleiben [illegible]
Mädchen [illegible]
[illegible]
[illegible]

143