

Tadeusz Wiśniewski

**Zaawansowane metody
syntezy układów regulacji
bloku energetycznego**



Oficina Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2011

Recenzenci
Jan TALER
Krzysztof TCHOŃ

Projekt okładki
Marcin ZAWADZKI

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część niniejszej książki, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez pisemnej zgody wydawcy i właściciela praw autorskich.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2011

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
<http://www.oficyna.pwr.wroc.pl>
e-mail: oficwyd@pwr.wroc.pl
zamawianie.ksiazek@pwr.wroc.pl

ISBN 978-83-7493-621-7

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 1244/2011.

Spis treści

| | |
|--|-----|
| 1. Wstęp | 5 |
| 2. Modele matematyczne procesów termoeenergetycznych | 11 |
| 2.1. Model turbiny wielostopniowej | 14 |
| 2.2. Model bloku energetycznego | 18 |
| 2.3. Heurystyczny liniowy model bloku | 25 |
| 2.4. Podsumowanie | 28 |
| 3. Synteza nieparametryczna i parametryczna układów automatycznej regulacji bloku energetycznego | 29 |
| 3.1. Synteza korektora | 31 |
| 3.2. Wyznaczanie parametrów modelu bloku energetycznego | 39 |
| 4. Metoda całkowania wstecznego w syntezie nieliniowego regulatora adaptacyjnego | 45 |
| 5. Zastosowanie metody całkowania wstecznego do sterowania bloku energetycznego | 55 |
| 5.1. Synteza nieliniowego regulatora | 55 |
| 5.2. Synteza adaptacyjnego prawa regulacji | 63 |
| 5.3. Symulacje układu regulacji z całkowaniem wstecznym | 66 |
| 5.4. Układ z całkowaniem wstecznym i adaptacją | 69 |
| 6. Układy wykorzystujące linearyzację | 73 |
| 6.1. Przybliżenie liniowe | 74 |
| 6.2. Linearyzacja przez czystą transformację zmiennych stanu | 77 |
| 6.3. Linearyzacja przez sprzężenie zwrotne | 79 |
| 6.4. Linearyzacja przez dynamiczne sprzężenie zwrotne | 85 |
| 6.5. Linearyzacja nieregularna | 88 |
| 6.6. Rozszerzona linearyzacja nieregularna | 92 |
| 6.7. Układ regulacji turbin wielostopniowych | 96 |
| 6.8. Układ regulacji bloku energetycznego | 118 |
| 7. Podsumowanie | 137 |
| Literatura | 141 |

1. Wstęp

W ostatnich latach nastąpił rozwój teorii sterowania dotyczący syntezy nowych algorytmów regulacji, spowodowany gwałtownym rozwojem techniki komputerowej. Można bardzo łatwo przeprowadzać eksperymenty symulacyjne dla układów automatyki, a mikroprocesorowe urządzenia sterujące są w stanie wykonywać bardzo złożone algorytmy zaprojektowane przez inżynierów.

Teoria układów liniowych (opisywanych liniowymi równaniami różniczkowymi) jest bardzo dobrze poznana [Kaczorek 1999]. Dla obiektów tego typu można już syntetyzować układy regulacji spełniające żądane wymagania, natomiast teoria i praktyka układów nieliniowych nadal stanowi wyzwanie dla naukowców i inżynierów. Postęp w tej dziedzinie polega na ciągłym poszerzaniu klasy nieliniowych obiektów, dla których można konstruować poprawnie działające układy regulacji. Rozwijające się metody syntezy takich układów można podzielić na dwie zasadnicze grupy: metody heurystyczne i metody analityczne. Do metod heurystycznych należą metody sztucznej inteligencji (ang. *soft computing*), oparte na sieciach neuronowych lub logice rozmytej. Metody analityczne polegają na ścisłym wyznaczaniu prawa regulacji. Do tej grupy zalicza się metody oparte na linearyzacji przez sprzężenie zwrotne [Isidori 1995], [Nijmeijer, van der Schaft 1990], [Sastry 1999], metody oparte na funkcji Lapunowa (np. *backstepping*, czyli całkowanie wsteczne) [Krstić i in. 1995], [Isidori 1999]) oraz metody wykorzystujące model obiektu w pętli sprzężenia zwrotnego (*model based control*).

Istota linearyzacji polega na zastąpieniu modelu nieliniowego modelem liniowym z zachowaniem możliwie jak największej liczby cech modelu pierwotnego. Najprostszym sposobem wykonania linearyzacji jest zastosowanie przybliżenia liniowego. Nieliniowe funkcje występujące w równaniach rozwija się w szereg Taylora wokół wybranego punktu równowagi. Jednak przybliżenie liniowe dobrze odzwierciedla właściwości pierwotnego modelu jedynie w otoczeniu wybranego punktu równowagi. To podejście jest historycznie najstarsze i stosowano je od początków rozwoju teorii sterowania układów nieliniowych. Jednak na przełomie lat 70. i 80. ubiegłego wieku pojawiła się możliwość linearyzacji przez odpowiednie przekształcenie zmiennych stanu. Okazało się, że można tak przekształcić nieliniowy model, by był on liniowy w określonym obszarze, w którym pracuje obiekt, a nie tylko w jednym punkcie.

Pierwszy krok na tej drodze postawił Krener [1973], który podał warunki linearyzowalności przez zastosowanie czystej transformacji zmiennych stanu. Brockett [1978] rozszerzył klasę linearyzowalnych obiektów, wprowadzając ograniczone statyczne sprzężenie zwrotne. Rezultat ten został uogólniony w fundamentalnej dla linearyzacji (przez przekształcenie zmiennych stanu) pracy Jakubczyka i Respondek [1980], którzy podali warunki lokalnej linearyzowalności przez statyczne sprzężenie zwrotne. Podobny rezultat uzyskał Su [1982]. Hunt i in. [1983] sformułowali warunki globalnej linearyzowalności przez statyczne sprzężenie zwrotne.

Rozwinięto trzy rodzaje narzędzi matematycznych umożliwiających wyznaczanie linearyzacji, oparte na metodach geometrii różniczkowej (jak w cytowanych pracach), na pojęciu płaskości Fliessa, Jakubczyka [Fliess i in. 1995] bądź na rachunku zewnętrznych form różniczkowych (np. [Shadwick 1990], [Martin 1993]).

Znalezienie linearyzujących transformacji (dla zmiennych stanu i sterowań) jest jednak ograniczone do wąskiej klasy nieliniowych obiektów. Klasę linearyzowalnych obiektów udało się poszerzyć dzięki zastosowaniu dynamicznego sprzężenia zwrotnego (ang. *dynamic extension*). Możliwość ta była początkowo badana w pracach Charleta i in. [1989], [1991]. Sluis [1993] i Rouchon [1994] zaprezentowali warunki konieczne linearyzowalności tą metodą. Warunki wystarczające i konieczne podali Guay i in., [1997], korzystając z rachunku form różniczkowych.

Inną metodą poszerzenia klasy linearyzowalnych obiektów, bez zwiększania rzędu obiektu, jest linearyzacja nieregularna ([Sun, Xia 1997]).

Mimo ciągłego doskonalenia metod linearyzacja napotyka wiele przeszkód, ponieważ wyznaczenie linearyzującej transformacji wymaga w ogólnym przypadku rozwiązania układu nieliniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Mimo to opublikowano wiele udanych sposobów zastosowania linearyzacji. Najczęściej stosuje się tę technikę do obiektów mechanicznych (w tym do robotów). Ze względu na postać równań obiekty te są linearyzowalne (np. [Park i in. 2000]). Metoda jest również stosowana do sterowania silnikami elektrycznymi (np. [Chiasson 1996]) oraz do zapewnienia stabilności systemu elektroenergetycznego (np. [Lu, Sun 1989], [Gao i in. 1992], [Wang, Hill 1996]).

Metodę linearyzacji zastosowano również do obiektów, w których zachodzą procesy cieplne, przepływowe oraz chemiczne. W pracy Badmusa i in. [1996] zastosowano ją do sterowania sprężarkami osiowymi. Model sprężarki można opisać dwoma nieliniowymi równaniami. Zmiennymi stanu są strumień masy gazu oraz ciśnienie. Główną nieliniowość w tym modelu wnosi charakterystyka ciśnienie–przepływ [Kryłłowicz 2001]. W pracy Kimury i in. [1997] zastosowano linearyzację do modelu siłownika pneumatycznego w postaci gumowego sztucznego mięśnia (ang. *rubber artificial muscle*). Siłownik ten składa się z gumowej rury oplecionej siatką z tworzywa sztucznego. Podanie ciśnienia do wnętrza rury powoduje powstanie siły, która jest wielkością wyjściową. Nieliniowość wprowadza tu równanie przepływu oraz równanie stanu gazu. Rudolf [2000] zastosował linearyzację do sterowania połączonymi szeregowo reaktorami chemicznymi. Nieliniowości w tym modelu wynikają z bilansu

energii oraz ilości substancji poszczególnych reagentów. [To i in. 1995] zastosowali linearyzację do procesu destylacji rudy używanej w produkcji aluminium.

W niniejszej pracy podjęto próbę zastosowania linearyzacji do konstruowania układów regulacji procesów termoeenergetycznych. Możliwe jest również uproszczenie linearyzujących transformacji dzięki wykorzystaniu specyficznej struktury obiektu. Jak wykazali Fujimoto i Sugie [2001], linearyzacja zawiera kilka stopni swobody, które mogą być wykorzystane w odpowiedni sposób.

Okazuje się, że wyznaczanie linearyzującej transformacji w znacznej liczbie praktycznych przypadków jest możliwe. Wynika to z faktu, że rozpatrywane obiekty mają specyficzną (szeregową) strukturę [Bolek 2002b], [Bolek, Wiśniewski 2006]. Dlatego dokładnie zanalizowano metody wyznaczania linearyzacji. Procedura ta może ulec znacznemu uproszczeniu, jeśli obiekt ma odpowiedni podsystem liniowy [Bolek 2000]. Zaproponowano oryginalną procedurę wyszukiwania takiej struktury w nieliniowym obiekcie [Bolek 2003]. Zaproponowano również nową wersję metody, określoną jako nieregularna linearyzacja rozszerzona o proporcjonalne prawo sterowania ([Bolek, Sasiadek 2001], [Bolek 2002a]). Pozwala ona uzyskiwać taką samą strukturę układu regulacji nielinearyzowalnego obiektu, jak gdyby był on linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne. Bolek i Sasiadek [2002] podali warunek konieczny takiej linearyzacji dla szczególnej klasy obiektów MIMO oraz sformułowali warunek wystarczający dla obiektów o dwu wejściach [2003].

W rozdziale 2 monografii przedstawiono nieliniowe modele matematyczne procesów termoeenergetycznych, które umożliwiają zastosowanie nieliniowych układów regulacji. Do wyznaczenia linearyzacji użyto aparatu matematycznego geometrii różniczkowej, który w skrócie przedstawiono w rozdziale 6. Podano tam jedynie pojęcia niezbędne do przeprowadzenia linearyzacji. W rozdziale 6 omówiono różne rodzaje linearyzacji, poczynając od podstawowej linearyzacji przez czystą transformację zmiennych stanu, przez podstawową linearyzację przez sprzężenie zwrotne, aż do metod rozszerzających klasę linearyzowalnych obiektów, takich jak: zastosowanie dynamicznego sprzężenia zwrotnego i linearyzację nieregularną. Wyznaczanie linearyzacji wymaga przekształcania złożonych wyrażeń. Wykonanie w praktyce tych przekształceń jest możliwe dzięki zastosowaniu obliczeń symbolicznych dostępnych np. w pakiecie Matlaba [MATLAB 1997]. Procedury linearyzacji dla poszczególnych przypadków przedstawiono w postaci czytelnych algorytmów, które ilustrowano akademickimi przykładami. Okazało się, że jeżeli obiekt ma liniowy podsystem, to jest linearyzowalny przez częściowo tożsamościowy dyfeomorfizm, co może znacznie uprościć proces linearyzacji. W rozdziale 6 przedstawiono wyniki zastosowania linearyzacji do modeli nieliniowych procesów termoeenergetycznych. Linearyzację przeprowadzono według wcześniej opisanych algorytmów, zwracając uwagę na uproszczenia, jakie można uzyskać dzięki wykorzystaniu obecności liniowego podsystemu. Opracowane układy regulacji przetestowano za pomocą eksperymentów symulacyjnych z liniowymi regulatorami (PI oraz regulator stanu), których nastawy zostały dobrane do przybliżenia liniowego modelu wyznaczonego w nominalnym punkcie pracy.

W Polsce większość energii elektrycznej jest wytwarzana w elektrowniach zawodowych o mocy bloku rzędu kilkuset megawatów. Stąd też celowe jest rozwiązanie zagadnienia, które pozwoliłoby na poprawę jakości regulacji w ARCM. Prawidłowe prowadzenie bloku energetycznego umożliwia zmniejszanie emisji zanieczyszczeń w postaci tlenków azotu emitowanych do atmosfery oraz uwzględnienie zmian parametrów obiektu (np. inercji cieplnej kotła) w przypadku współspalania biomasy w kotle. W wyniku modernizacji elektrowni wprowadza się regulatory mikroprocesorowe, które umożliwiają zastosowanie nawet bardzo złożonych algorytmów.

Celem niniejszej pracy jest znalezienie sposobu wyznaczania algorytmu regulacji bloku energetycznego. Rozważono prosty model bloku energetycznego o mocy 200 MW. Za wielkości wejściowe przyjęto strumień masy paliwa oraz stopień otwarcia zaworów turbiny, a za wielkości wyjściowe moc oddawana przez turbozespół oraz ciśnienia pary przed turbiną. Najistotniejsze nieliniowości w modelu bloku wynikają z nieliniowych zależności wiążących strumień masy z ciśnieniami w turbinie parowej (równanie Flügla–Stodoli) i w przegrzewaczu (pierwiastek z różnicy ciśnień). Niektóre współczynniki modelu można określić na podstawie rozważań analitycznych – równania bilansu masy i energii. Inne współczynniki można wyznaczyć na podstawie eksperymentów przeprowadzonych na rzeczywistym obiekcie. Najtrudniejszym parametrem do wyznaczenia jest stała czasowa inercji cieplnej kotła. Jej wartość może zależeć od wartości opalowej węgla i od trybu pracy młynów. W związku z tym wartość tej stałej czasowej powinna podlegać adaptacji.

Opracowano modele bloku pracującego na sieć sztywną i na sieć wyspową. Ponieważ większość krajowych bloków energetycznych pracuje w jednym systemie, szczegółowej analizie poddano model bloku pracującego na sieć sztywną. Rozważono również model samej turbiny (jako fragment całego bloku), dla którego zaproponowano niezależne sterowanie dwoma zaworami w przeciwieństwie do stosowanego z reguły sterowania jednym zaworem.

Stosowane w praktyce sposoby regulacji blokiem energetycznym opierają się na syntezie układu regulacji na podstawie przybliżenia liniowego modelu lub na metodach heurystycznych [Sindelar 1996], [Pitscheider i in. 2000].

Syntezę nieliniowego prawa regulacji wykonano, korzystając z metody linearyzacji przez sprzężenie zwrotne oraz rekurencyjnej metody „całkowania wstecznego”, opartej na funkcji Lapunowa.

Metodą linearyzacji przez sprzężenie zwrotne można znaleźć takie przekształcenie zmiennych stanu wraz ze sprzężeniem zwrotnym, że obiekt w pewnym obszarze zmiennych stanu będzie zachowywał się jak obiekt liniowy, nie tracąc nic z dokładności. Kluczowym zagadnieniem jest znalezienie odpowiedniej funkcji wyjścia. Rząd względny, czyli liczba równań między tym wyjściem a sygnałami sterującymi, określa liczbę równań, które można zlinearyzować. Udało się określić klasę nieliniowych obiektów, dla których rząd względny jest mniejszy od liczby równań obiektu, ale mimo to można zlinearyzować wszystkie równania. Podejście to udało się zastosować do

modelu bloku pracującego na sieć wyspowa i do modelu turbiny sterowanej dwoma zaworami.

Udało się również opracować nową technikę linearyzacji obiektów o co najmniej dwu wejściach. Jeżeli obiekt nie może być zlinearyzowany za pomocą znanych metod, to można poświęcić jedno ze sterowań w celu umożliwienia linearyzacji całego układu. Oznacza to, że po zlinearyzowaniu prawo regulacji określające to sterowanie nie może być dowolne. Jednak dla zlinearyzowanego obiektu stosuje się regulację opartą na proporcjonalnym sprzężeniu od stanu. Pomysł polega na tym, aby sprzężenie zastosować przed linearyzacją do jednego ze sterowań. W niektórych przypadkach dopiero dzięki takiemu rozwiązaniu przeprowadzenie linearyzacji staje się możliwe. W projekcie sformułowano warunki wystarczające do zastosowania takiego podejścia. Sformułowanie warunków koniecznych wymaga dalszych badań. To podejście udało się zastosować do modelu bloku pracującego na sieć sztywną.

Całkowanie wsteczne polega na sukcesywnym tworzeniu funkcji Lapunowa, które pozwalają stabilizować kolejne równania obiektu. Okazało się jednak, że bezpośrednio zastosowanie metody do modelu bloku energetycznego prowadzi do prawa regulacji, którego obliczanie jest źle uwarunkowane numerycznie. Udało się jednak sformułować klasę obiektów, dla której za pomocą odpowiednich przekształceń można ominąć to źle uwarunkowanie. Model bloku pracującego na sieć sztywną należy właśnie do tej klasy.

Do prawa regulacji wyznaczonego metodą całkowanie wsteczne można łatwo dołączyć prawo adaptacji. Funkcję Lapunowa uzupełnia się o składnik zależny od błędu estymacji nieznanego parametru modelu. Pochodna tej rozszerzonej funkcji Lapunowa jest ujemna, jeśli estymata nieznanego parametru spełnia określone równanie różniczkowe. Równanie to jest wyznaczonym prawem regulacji. Jest ono na bieżąco rozwiązywane podczas pacy układu regulacji, a otrzymywany wynik służy do adaptacji głównego prawa regulacji.

W obydwu metodach wyznaczenie prawa regulacji i prawa adaptacji wymaga wielokrotnego, analitycznego obliczania pochodnych nieliniowych funkcji występujących w modelu obiektu. W przypadku kilku równań obiektu obliczenia stają się na tyle złożone, że obliczanie bez użycia metod numerycznych staje się w praktyce niemożliwe. Kontrola poprawności wykonywanych obliczeń i procedur wprowadzonych do symulacji jest żmudna. Jedynym rozwiązaniem pozwalającym na szybkie i poprawne wyznaczanie prawa regulacji jest zastosowanie obliczeń symbolicznych i to na tej samej platformie programowej, na której są później wykonywane badania symulacyjne. Zarówno obliczenia symboliczne, jak i symulacje przeprowadzono za pomocą pakietu MATLAB/Simulink. Przenoszenie wyników obliczeń symbolicznych pomiędzy różnymi programami (np. Mathematica – MATLAB) może być przyczyną trudnych do wykrycia błędów.

Wykonano badania symulacyjne pozwalające porównać trzy układy regulacji: klasyczny regulator liniowy z korektorami, regulator nieliniowy oparty na linearyzacji przez sprzężenie zwrotne oraz nieliniowy regulator oparty na metodzie całkowania

wstecznego z adaptacją. Wszystkie te algorytmy przetestowano na modelu bloku pracującego na sieć sztywną.

W rozdziale 2 przedstawiono różne warianty modeli bloku energetycznego oraz przeprowadzono symulacje porównawcze tych modeli z modelem liniowym w różnych punktach pracy.

W rozdziale 3 przedstawiono nowe techniki opracowane w celu usprawnienia syntezy i analizy klasycznych układów liniowych stosowanych w praktyce. Omówiono możliwość ułatwienia operacji porównywania rozwiązań układów automatyki bloku między sobą. Wykazano możliwość syntezy nieparametrycznej korektora zmian zadanego ciśnienia pary za kotłem oraz wskazano sposoby jego parametryzacji. Pokazano, jak można usprawnić dobór nastaw i reguł ich adaptacji dla korektora i regulatorów ciśnienia i mocy za pomocą przyborników pakietu Matlab w warunkach zmian parametrów dynamiki bloku energetycznego wywołanych np. zmianami strumienia współspalanej biomasy w kotle.

W rozdziale 4 przedstawiono podstawy teoretyczne metody całkowania wstecznego. Omówiono szczegółowo klasę obiektów, dla których wyznaczane prawo regulacji jest dobrze uwarunkowane numerycznie. Przedstawiono również sposób uzupełniania prawa regulacji o prawo adaptacji. W rozdziale 5 rozwiązano zadanie syntezy nieliniowego regulatora metodą całkowanie wstecznego poszerzoną o adaptację stałej czasowej inercji cieplnej kotła dla różnych postaci modelu bloku energetycznego.

W rozdziale 6 rozwiązano zadania syntezy nieliniowego regulatora opartego na linearyzacji przez sprzężenie zwrotne. W rozdziale tym przedstawiono także badania symulacyjne, porównujące nieliniowe układy regulacji z tradycyjnymi. Symulacje i obliczenia przeprowadzono za pomocą pakietu MATLAB/Simulink. Przeprowadzone badania poszerzają klasy nieliniowych obiektów, dla których taka synteza jest możliwa. Warto jednak zauważyć, że obydwa zadania nieliniowej syntezy udało się rozwiązać jedynie dla najbardziej uproszczonego modelu tzw. inercji cieplnej kotła. Model jest prawidłowy i może być zastosowany do syntezy układu regulacji mocy w przypadku nowoczesnych kotłów opalanych paliwem gazowym lub mazutem albo do kotłów węglowych fluidalnych, w których nie występują instalacje młynowe w torze oddziaływań regulacyjnych. Uzyskiwane w ten sposób prawa regulacji są i tak bardzo złożone w stosunku do liniowych algorytmów regulacji. Niektóre elementy pracy, np. przedstawione w rozdziale 3 i podrozdziale 6.7 można zastosować bez podanych ograniczeń.

Automatyzacja procesów przemysłowych w energetyce jest ważną dziedziną zainteresowań badawczych w Zakładzie Automatyki i Kriogeniki I-22 Politechniki Wrocławskiej. W Zakładzie wykonuje się prace związane z identyfikacją i symulacją wielowymiarowych obiektów termoenergetycznych oraz z syntezą układów sterowania. Opracowywany symulator bloku energetycznego jest doskonałony, uzupełniany o dalsze zmienne stanu. Powstają także prace z dziedziny syntezy układów sterowania oraz zbierania i weryfikacji danych do modeli użytych w badaniach symulacyjnych.

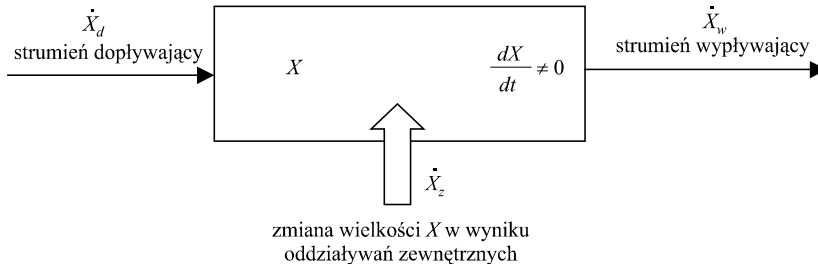
2. Modele matematyczne procesów termoenergetycznych

Proces termoenergetyczny przebiega z wymianą masy i ciepła. Zastosowanie nieliniowego modelu procesu pozwala użyć jednolitego prawa regulacji w szerokim zakresie parametrów. Konstrukcja modelu matematycznego opiera się na prawach zachowania masy, energii oraz pędu [Friedly 1975], [Wiśniewski, Chorowski 1978]. W uproszczonym podejściu bilans wielkości podlegających zachowaniu wykonuje się dla stanu ustalonego. W teorii sterowania równania algebraiczne, które otrzymuje się na podstawie tych bilansów, są nazywane równaniami statyki. Nie wystarczają one jednak do poprawnej regulacji procesu, która wymaga uwzględnienia zmiennego w czasie stopnia akumulacji wielkości podlegających zachowaniu w stanach nieustalonych. Wyrażenia związane z akumulacją wprowadzone do równań mają postać pochodnych tych wielkości po czasie, a równania stają się równaniami różniczkowymi. W teorii sterowania nazywa się je równaniami dynamiki procesu. Jeżeli można wydzielić pewną przestrzeń, w której zachodzi akumulacja wielkości podlegającej zachowaniu, to w równaniach modelu matematycznego musi pojawić się odpowiadająca jej pochodna. Taką wielkość określa się mianem zmiennej stanu. Im więcej w danym procesie wielkości podlega akumulacji, tym więcej zmiennych stanu trzeba użyć do sformułowania modelu. Rząd procesu (rząd modelu) określa liczba zmiennych stanu, które występują we wszystkich równaniach modelu matematycznego.

Jeśli akumulacja danej wielkości bilansowej zależy nie tylko od czasu, ale i od przestrzeni, to w równaniu pojawiają się pochodne cząstkowe. Taki model, w odróżnieniu od modelu o parametrach skupionych, nazywa się modelem procesu o parametrach rozłożonych [Chorowski 1978]. W niniejszej pracy do syntezy układu regulacji są używane modele o parametrach skupionych. Nawet jeżeli dany proces w formie wyjściowej będzie opisywany za pomocą równań cząstkowych, to po przeprowadzeniu odpowiednich rozważań jego opis będzie zastępowany opisem za pomocą równań zwyczajnych. Oznacza to, że w dalszej części pracy zostanie przyjęte założenie, że wielkości bilansowe są stałe w określonych przestrzeniach.

Zasadę zachowania wielkości X przedstawiono na rys. 2.1. Wielkość X jest dostarczana do (wyprowadzana z) przestrzeni bilansowej wraz ze strumieniem dopływające-

go (wypływającego) płynu. Stan wielkości X w przestrzeni bilansowej może ulegać zmianie w wyniku oddziaływania ze środowiskiem zewnętrznym. Chwilowy brak równowagi w bilansie składników prowadzi do zmiany wielkości X zakumulowanej w przestrzeni bilansowej.



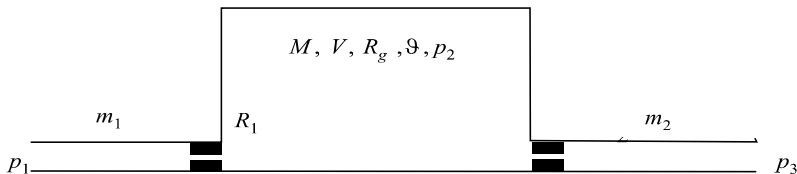
Rys. 2.1. Zasada zachowania wielkości X w przestrzeni bilansowej

Równanie bilansu wielkości X można przedstawić ogólnie w postaci

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X}_d - \dot{X}_w + \dot{X}_z. \quad (2.1)$$

Zmienną stanu opisującą stan procesu w danej chwili jest wielkość X zakumulowana w przestrzeni bilansowej. Strumienie \dot{X}_d , \dot{X}_w , \dot{X}_z są funkcjami wielkości X oraz innych wielkości zakumulowanych w układzie. Funkcje są nieliniowe, co należy uwzględnić podczas dokładnego modelowania procesu.

Charakter pojawiających się nieliniowości można wyjaśnić na przykładzie procesu, którego fragmentem jest przepływ gazu przez zbiornik o pojemności V (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Proces, w którym zachodzi przepływ gazu przez zbiornik: p_1 – ciśnienie przed zbiornikiem, p_2 – ciśnienie w zbiorniku, p_3 – ciśnienie za zbiornikiem, ϑ – temperatura w zbiorniku, R_g – indywidualna stała gazowa, m_1 , m_2 – strumień masy gazu dopływającego i wypływającego ze zbiornika, M – masa gazu zgromadzonego w zbiorniku, V – objętość zbiornika, R_1 , R_2 – opory pneumatyczne

Model matematyczny tego procesu wyznaczono na podstawie bilansu masy. Wielkością X , która podlega akumulacji w zbiorniku, jest masa gazu M . Jednak bezpośredni pomiar masy gazu jest trudny do wykonania i wykorzystania w układzie regulacji. W związku z tym przyjmuje się, że zmienną stanu w modelu jest ciśnienie p_2 . Jeśli przyjmie się założenie, że temperatura w zbiorniku jest stała, to ciśnienie

p_2 jest jednoznacznie związane z masą M przez równanie Clapeyrona. Równanie bilansu masy ma postać

$$\frac{dM}{dt} = \frac{V}{R_g \vartheta} \frac{dp_2}{dt} = m_1 - m_2 \quad (2.2)$$

Jeżeli przyjmie się, że proces przebiega w stałej temperaturze, to wartość

$$T_{zb} = \frac{V}{R_g \vartheta}$$

jest stała i ma wymiar czasu. Określa się ją mianem stałej czasowej.

Przepływ gazu jest spowodowany gradientem ciśnienia. Strumienie masy dopływającej i wypływającej ze zbiornika określa się za pomocą wzorów [Kalinowski 1994]:

$$\begin{aligned} m_1 &= R_1 \sqrt{p_2^2 - p_1^2} \\ m_2 &= R_2 \sqrt{p_3^2 - p_2^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Można przyjąć, że wartości ciśnienia p_1 i p_3 są stałe. Gdyby uznano je za zmienne stanu, musiałyby odpowiadać akumulacji masy w innych częściach bardziej złożonego procesu. Jeżeli na wlocie do zbiornika zamontuje się zawory, to opór pneumatyczny R_1 można zmieniać zgodnie z wolą projektanta układu regulacji. Wielkości R_1 można uznać za sygnał sterujący. Przyjmując standardowe w automatyce oznaczenia zmiennych stanu i sygnału sterującego ($x_1 = p_2$, $u = R_1$), otrzymuje się równania opisujące proces

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_2}{T_{zb}} \sqrt{p_3^2 - x_1^2} + \frac{u}{T_{zb}} \sqrt{x_1^2 - p_1^2} \quad (2.4)$$

Nieliniowości pojawiające się w modelu matematycznym procesu przepływu gazu przez zbiornik mają postać pierwiastka oraz iloczynu. W niektórych publikacjach ([de Mello i in. 1991], [IEEE Report 1991]) przyjmuje się założenie, że strumień masy jest proporcjonalny do pierwiastka z różnicy wartości ciśnienia). Wymaga to jednak kolejnego założenia, że gęstość gazu w procesie nie zmienia się w sposób istotny. Przyjmuje się, że jeżeli nie zmienia się ona więcej niż o rząd, to można stosować zależności:

$$\begin{aligned} m_1 &= R_1 \sqrt{p_2 - p_1} \\ m_2 &= R_2 \sqrt{p_3 - p_2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Podobne rozważania można przeprowadzić, stosując zasady zachowania energii i pędu.

Okazuje się, że modele matematyczne dynamiki wielu procesów termoeenergetycznych są nieliniowe. Jednak można zastosować do nich procedurę syntezy układu regulacji opartą na linearyzującym sprzężeniu zwrotnym oraz na transformacji zmiennych stanu. Do takich procesów można zaliczyć sterowanie wielokadłubową turbiną parową, blokiem energetycznym, przegrzewaczem pary, kompresorem, siłownikiem pneumatycznym, szeregowym układem reaktorów chemicznych.

2.1. Model turbiny wielostopniowej

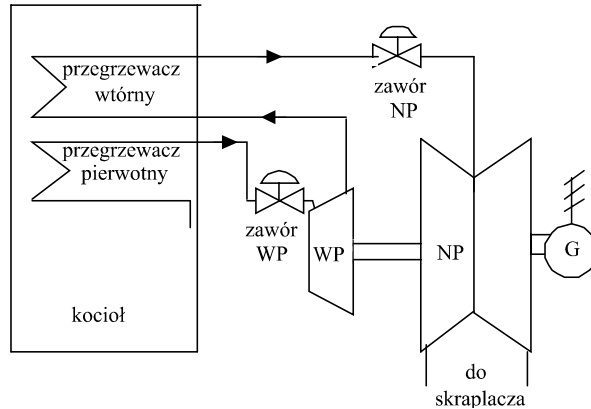
Zagadnienie sterowania turbiną (blokiem energetycznym) w systemie elektroenergetycznym łączy zjawiska mechaniczne i elektryczne. Głównym zadaniem w takim systemie jest regulacja częstotliwości. System znajduje się w stanie równowagi, jeśli moc produkowana jest równa mocy konsumowanej. Niezbilansowanie mocy powoduje zmianę częstotliwości. Równowaga jest utrzymywana przez sterowanie mocą wytwarzaną w układach mechanicznych, którymi są na przykład turbiny parowe. W systemie elektroenergetycznym tylko niewielka liczba turbin uczestniczy w regulacji częstotliwości, pozostając na ogół w tzw. gorącej rezerwie. Większość turbin pracuje, produkując nominalną wartość mocy, i ich praca nie zależy od zmian częstotliwości.

Wprawdzie procesy zachodzące podczas zmiany mocy w systemie są złożone [Machowski i in. 1997], ale ostatecznie zawory turbin otwierają się lub zamykają tak, aby osiągnąć równowagę dla zadanej częstotliwości. W wielkich systemach pracuje jednocześnie duża liczba turbin. Ułamek mocy produkowanej przez pojedynczą turbinę jest wtedy stosunkowo niewielki. Można więc przyjąć założenie, że praca pojedynczej turbiny nie wpływa na częstotliwość systemu. Mówi się wtedy, że turbina pracuje na tzw. sztywnej sieci.

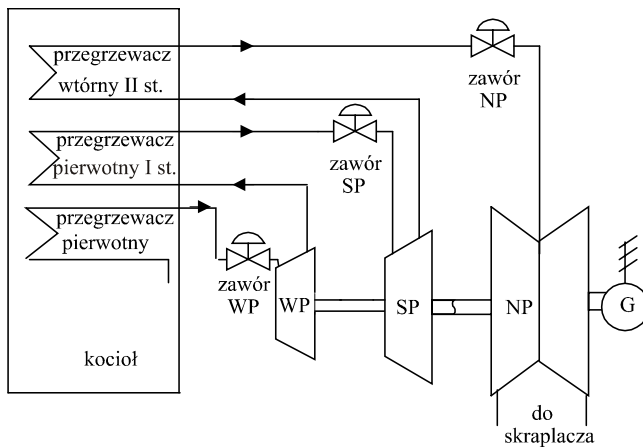
Model turbiny wielostopniowej pracującej na sztywnej sieci rozważono w niniejszym rozdziale [Bolek 2002a], [Bolek i in. 2002a]. Komplementarny przypadek, gdy turbina pracuje na sieci wyspowej, można np. znaleźć w pracach Bolka i in. [Bolek i in. 1999], [Bolek i in. 2000a]. W modelu turbiny uwzględniono jedynie część mechaniczną. Zjawiska elektryczne zachodzące w generatorze można pominąć ze względu na warunki pracy w synchronizmie w sieci sztywnej. Zagadnienie syntezy nieliniowego regulatora dla obwodu wzbudzenia generatora omawiano w pracach [Gao i in. 1992], [Wang, Hill 1996], [Lu, Sun 1989].

Schematy turbiny dwu- i trójstopniowej pokazano na rys. 2.3 i 2.4. Para wyprodukowana przez kocioł dostaje się do stopnia wysokoprężnego (WP) turbiny przez zawór WP, po czym wraca do kotła, gdzie ulega wtórnemu przegrzewowi. Następnie przez zawór niskoprężny (NP) przepływa przez stopień NP turbiny. W przypadku turbiny trójstopniowej para przepływa jeszcze dodatkowo przez stopień średnioprężny (SP). W klasycznych rozwiązaniach układów regulacji turbin jedynie zawory WP służą do

regulacji mocy, natomiast zawór NP (ewentualnie SP) jest zawsze otwarty i używa się go tylko w sytuacjach awaryjnych. Zastosowanie nieliniowego układu regulacji umożliwia wykorzystanie wszystkich zaworów w procesie regulacji mocy.



Rys. 2.3. Schemat turbiny dwustopniowej



Rys. 2.4. Schemat turbiny trójstopniowej

Model matematyczny turbiny dwustopniowej (rys. 2.5) oparto na pracach Kundura [1994], de Mello i in. [1991] oraz Bourlesa i in. [1997]. Przyjęto, że parametry pary przed i za turbiną są stałe:

$$T_H \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 \tag{2.6a}$$

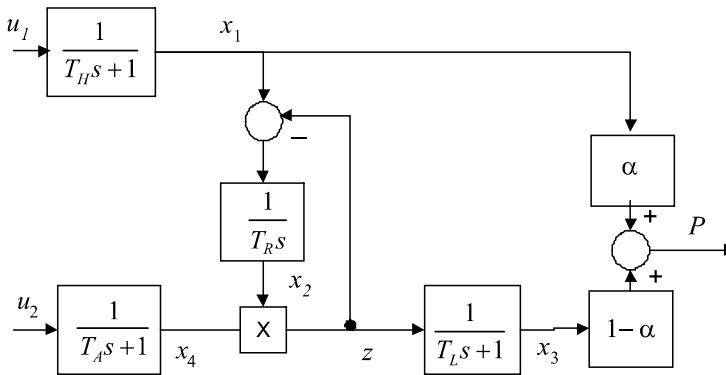
$$T_R \dot{x}_2 = x_1 - x_2 x_4 \tag{2.6b}$$

$$T_L \dot{x}_3 = -x_3 + x_2 x_4 \quad (2.6c)$$

$$T_A \dot{x}_4 = -x_4 + u_2 \quad (2.6d)$$

$$P = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_3 \quad (2.6e)$$

Poszczególne symbole oznaczają: u_1 – sygnał sterujący, położenie zaworu WP, u_2 – sygnał sterujący, położenie zaworu NP, x_1, x_3 – zmienne stanu oznaczające wartości znormalizowanych przepływów przez stopnie WP i NP turbiny, x_2 – znormalizowane ciśnienie w przegrzewaczu, x_4 – zmienna stanu oznaczająca położenie zaworu NP, T_H, T_R, T_L, T_A – stałe czasowe stopnia WP, przegrzewacza, stopnia NP oraz siłownika sterującego zaworem, α – ułamek mocy wytwarzanej przez część WP, P – moc wytwarzana przez turbinę.

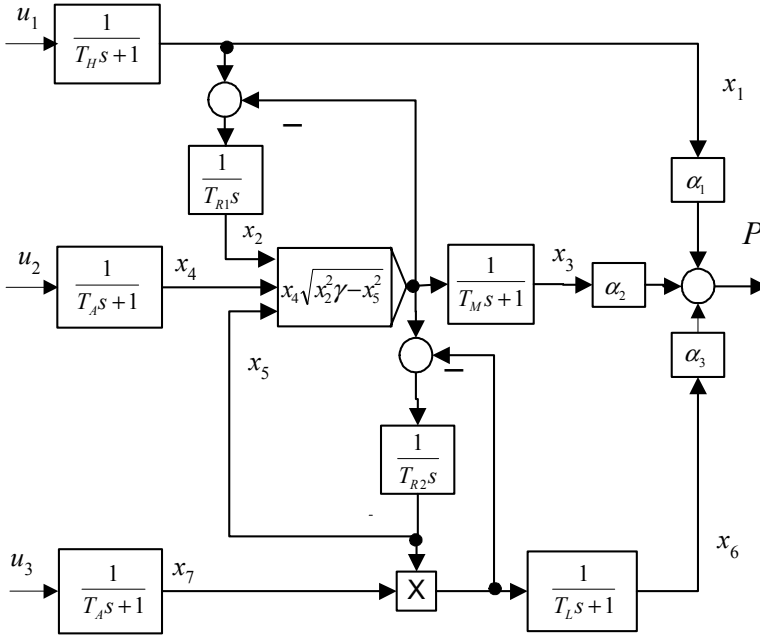


Rys. 2.5. Schemat blokowy modelu matematycznego turbiny dwustopniowej

Równanie (2.6a) określa inercję związaną ze stopniem WP turbiny. Nie pojawia się tu nieliniowość, ponieważ przyjęto założenie, że ciśnienie przed turbiną jest stałe. Stała czasowa jest związana z objętością pary w stopniu WP. Wartość tej stałej jest mała w porównaniu ze stałą czasową układu wykonawczego zaworu. W związku z tym nie modelowano dynamiki zaworu za pomocą oddzielnego równania. Przyjęto, że równ. (2.6a) opisuje łącznie dynamikę układu wykonawczego i stopnia WP.

Równanie (2.6b) opisuje akumulację pary w przegrzewaczu wtórnym. Wpływ pary z przegrzewacza jest kontrolowany przez zawór NP. Ekspansja za turbiną NP zachodzi do ciśnienia panującego w skraplaczu, które jest niższe od ciśnienia atmosferycznego. Przyjęto, że ciśnienie w skraplaczu równa się zero (próżnia). Wówczas zależność (2.3) staje się prawem Flügla–Stodoli, zgodnie z którym przepływ pary przez turbinę jest proporcjonalny do iloczynu stopnia otwarcia zaworu i ciśnienia przed turbiną [Chmielniak 1998]. Nieliniowość typu iloczyn pojawiająca się w równaniach modelu wynika z równania Flügla–Stodoli.

Równanie (2.6c) określa inercję związaną ze stopniem NP turbiny, równ. (2.6d) dotyczy dynamiki zaworu NP, równ. (2.6e) określa natomiast wielkość wyjściową, którą jest moc turbiny.



Rys. 2.6. Schemat blokowy modelu turbiny trójstopniowej

W podobny sposób tworzy się model dla turbiny trójstopniowej (rys. 2.6):

$$T_H \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 \quad (2.7a)$$

$$T_{R1} \dot{x}_2 = x_1 - x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \quad (2.7b)$$

$$T_M \dot{x}_3 = -x_3 + x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \quad (2.7c)$$

$$T_A \dot{x}_4 = -x_4 + u_2 \quad (2.7d)$$

$$T_{R2} \dot{x}_5 = x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} - x_5 x_7 \quad (2.7e)$$

$$T_L \dot{x}_6 = -x_6 + x_5 x_7 \quad (2.7f)$$

$$T_A \dot{x}_7 = -x_7 + u_3 \quad (2.7g)$$

$$P = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_6, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad (2.7h)$$

W modelu tym poszczególne symbole oznaczają: u_1 – sygnał sterujący, położenie zaworu WP, u_2 – sygnał sterujący, położenie zaworu SP, u_3 – sygnał sterujący, położenie zaworu NP, x_1, x_3, x_6 – zmienne stanu oznaczające wartości znormalizowanych przepływów przez odpowiednio stopnie WP, SP i NP turbiny, x_2, x_5 – znormalizowane ciśnienie w przegrzewaczach wtórnych I i II stopnia, x_4, x_7 – zmienne stanu oznaczające położenie zaworów SP i NP; $T_H, T_{R1}, T_{R2}, T_M, T_L, T_A$ – stałe czasowe stopnia WP turbiny, przegrzewaczy wtórnych I i II stopnia, stopni SP i NP turbiny oraz siłownika sterującego zaworem, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – ułamki mocy wytwarzanej przez część WP, SP, NP, P – moc wytwarzana przez turbinę.

W tym przypadku przyjmuje się, że przepływ pary pomiędzy stopniami WP i SP odbywa się zgodnie z równ. (2.3), czyli jest proporcjonalny do pierwiastka z różnicy kwadratów wartości ciśnienia. W zależności tej nie można pominąć ciśnienia SP. Wartości wszystkich zmiennych stanu w modelach (2.6) i (2.7) są wielkościami względnymi – odniesionymi do wartości nominalnych.

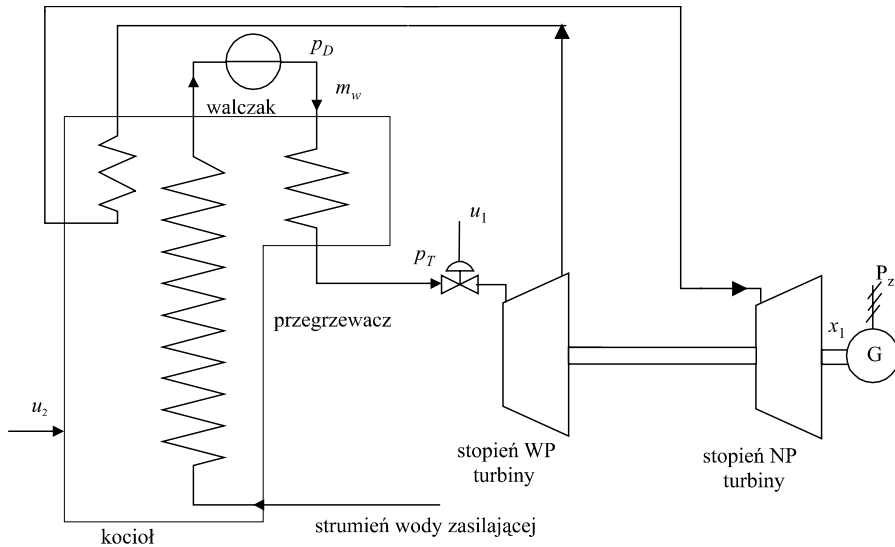
2.2. Model bloku energetycznego

Blok energetyczny jest układem złożonym z kotła parowego, turbiny parowej, zwykle wieloczęściowej (wielokadłubowej), i generatora elektrycznego. Modele matematyczne bloku energetycznego o różnej strukturze i stopniu szczegółowości można znaleźć w pracach Kundura [1994], Prasada [1999] i Neuman i in. [2000]. W niniejszej pracy oparto się głównie na modelu zalecanym przez de Mello [1991] do badań symulacyjnych. Model ten zachowuje wszystkie najważniejsze właściwości procesu z zachowaniem prostoty opisu.

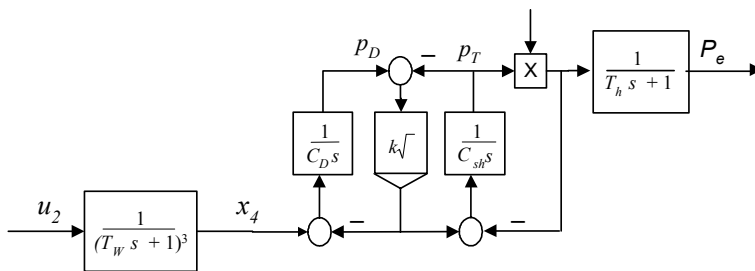
W modelu matematycznym przyjęto następujące założenia upraszczające:

- układ automatycznej regulacji (UAR) poziomu wody w walczaku pracuje dokładnie,
- można pominąć wpływ UAR spalania w kotle na wytwarzanie mocy (pary) oraz wpływ UAR temperatury pary przegrzanej na wytwarzanie mocy.

Praca na sieć sztywną oznacza praktycznie stałe obroty turbiny, co pozwala pominąć równanie dynamiki ruchu obrotowego. Uproszczony schemat technologiczny bloku z zaznaczonymi zmiennymi stanu pokazano na rys. 2.7, schemat strukturalny na rys. 2.8. Wszystkie zmienne stanu są wielkościami względnymi, odniesionymi do wartości nominalnych odpowiednich wielkości fizycznych.



Rys. 2.7. Schemat bloku energetycznego pracującego na sieć sztywną: $x_1 = P_e$ – bezwymiarowa moc elektryczna oddawana przez blok, $x_2 = p_T$ – bezwymiarowe ciśnienie przed turbiną, $x_3 = p_D$ – bezwymiarowe ciśnienie w walczaku, $x_4 = m_w$ – bezwymiarowa potencjalna wydajność parowa kotła (strumień masy), x_5, x_6 – bezwymiarowe zmienne pomocnicze związane z inercją układu paliwowego, u_1 – stopień otwarcia zaworu przed turbiną, u_2 – strumień paliwa doprowadzony do kotła, P_z – wartość zadana mocy



Rys. 2.8. Schemat strukturalny nieliniowego modelu bloku energetycznego

W schemacie strukturalnym modelu na rys. 2.8 występuje nieliniowość związana z równaniem określającym strumień masy przepływającej przez opór stały z pominięciem zmian gęstości płynu

$$m = k\sqrt{\gamma p_D - p_T}, \quad \gamma = \frac{p_{D0}}{p_{T0}} = 1,2$$

oraz uproszczone nieliniowe równanie Flüglą–Stodoli określające strumień masy przepływającej przez turbinę

$$m = u_1 \sqrt{p_T^2 - p_k^2} \approx u_1 p_T$$

gdzie p_k – ciśnienie w kondensatorze. Ciśnienie to jest prawie równe zero (5 kPa), i spełnia nierówność $p_k \ll p_T$, co potwierdza możliwość zastosowania wersji uproszczonej.

Ze schematu procesu na rys. 2.7 i odpowiednich bilansów (masy, energii i pędu) wynika schemat strukturalny obiektu (rys. 2.8) i układ równań:

$$T_h \dot{x}_1 = -x_1 + p_T u_1 \quad (2.8a)$$

$$C_{sh} \dot{p}_T = k \sqrt{\gamma p_D - p_T} - p_T u_1 \quad (2.8b)$$

$$C_D \dot{p}_D = x_4 - k \sqrt{\gamma p_D - p_T} \quad (2.8c)$$

$$T_w \dot{x}_4 = -x_4 + x_5 \quad (2.8d)$$

$$T_w \dot{x}_5 = -x_5 + x_6 \quad (2.8e)$$

$$T_w \dot{x}_6 = -x_6 + u_2 \quad (2.8f)$$

Układ równań (2.8) stanowi nieliniowy model bloku energetycznego, odpowiadający strukturze pokazanej na rys. 2.7. Równanie akumulacji masy w przestrzeniach wlotowych turbiny i w przegrzewaczach pary wtórnej generuje równanie dynamiki zmian mocy bloku $P_e = x_1$ (równ. (2.8a)). Równanie akumulacji masy w przegrzewaczach pary świeżej (równ. (2.8b)) generuje dynamikę zmian ciśnienia przed turbiną p_T . Równanie bilansu masy w walczaku (2.8c) generuje równanie dynamiki zmian ciśnienia w walczaku p_D – tzw. właściwości akumulacyjne pary w kotle scharakteryzowane stałą C_D . Równania (2.5e, f) są liniowe i określają tzw. inercję cieplną kotła, czyli dynamikę układu paliwowego od strumienia masy paliwa u_2 do potencjalnej wydajności parowej kotła x_4 . Jak już wspomniano, zakłada się idealne działanie układu zasilania kotła (regulacja poziomu w walczaku).

Inercję cieplną kotła można aproksymować pojedynczym członem inercyjnym o trzykrotnie większej stałej czasowej T_w odpowiadającej T_L . Odpowiada to zredukowanemu modelowi nieliniowemu postaci

$$\begin{aligned} T_h \dot{x}_1 &= -x_1 + p_T u_1 \\ C_{sh} \dot{p}_T &= k \sqrt{\gamma p_D - p_T} - p_T u_1 \\ C_d \dot{p}_D &= m_w - k \sqrt{\gamma p_D - p_T} \\ T_L \dot{m}_w &= -m_w + u_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

w którym wszystkie zmienne x , u , y są przyrostami względem stanu bazowego zmienionych bezwymiarowych z układu równań (2.8).

Przybliżenie liniowe modelu bloku energetycznego

Przeprowadzono linearyzację w nominalnym punkcie pracy w celu porównania w nawiązaniu do heurystycznego modelu bloku, a przede wszystkim stworzenia możliwości korzystania z uzyskanych eksperymentalnie parametrów modelu bloku.

Przybliżenie liniowe równań dynamiki bloku energetycznego (patrz rozdział 6.1 wzory (6.3) i (6.4)) powstałe w wyniku zlinearyzowania równań (2.8) wokół znamionowego punktu pracy w zapisie przestrzeni stanów mają postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_e \\ \dot{p}_T \\ \dot{p}_D \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_h} & \frac{1}{T_h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2\gamma+1}{2C_{sh}(\gamma-1)} & \frac{\gamma}{2C_{sh}(\gamma-1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2C_D(\gamma-1)} & \frac{-\gamma}{2C_D(\gamma-1)} & \frac{1}{C_D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_w} & \frac{1}{T_w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_w} & \frac{1}{T_w} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_e \\ p_T \\ p_D \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_h} & 0 \\ \frac{-1}{C_{sh}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

a równanie wyjść ma postać:

$$y = \begin{bmatrix} P_e \\ p_T \\ p_D \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_e \\ p_T \\ p_D \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Parametry modelu heurystycznego (rozd. 2.3) i przedstawionych modeli nieliniowych są powiązane i wynoszą dla testowego typowego bloku:

$$T_L = T_w = 260 \text{ s}, T_g = C_D = 120 \text{ s}, T_p = 29 \text{ s}, T_h = 7 \text{ s}, C_{sh} = 20 \text{ s}, \gamma = p_{D0}/p_{T0} = 1.2.$$

Porównanie modeli

Aby uzasadnić potrzebę stosowania nieliniowego modelu bloku energetycznego do syntezy układów automatycznej regulacji, przeprowadzono badania symulacyjne.

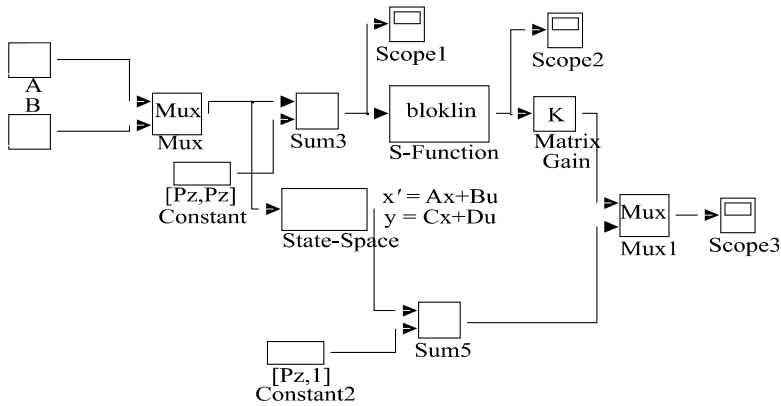
Porównano wyjścia modelu nieliniowego (moc P_e i ciśnienie przed turbiną p_T) z przybliżeniem liniowym w dwóch punktach pracy (rys. 2.9):

Dla mocy znamionowej $P_e = 1$ i trzech różnych wartości wymuszenia skokowego:

- $\Delta u_1 = -0,1$ (10% zmniejszenia otwarcia zaworu turbinowego względem stanu nominalnego),
- $\Delta u_2 = -0,1$ (10% zmniejszenia strumienia masy paliwa względem stanu nominalnego),
- $\Delta u_1 = -0,1$ i $\Delta u_2 = -0,1$ (równoczesne zmniejszenie otwarcia zaworu turbinowego i strumienia masy paliwa o 10%).

Dla mocy $P_e = 0,7$ (70% obciążenia) dla dwóch różnych wartości wymuszenia skokowego:

- $\Delta u_1 = -0,3$ (30% zmniejszenia otwarcia zaworu turbinowego względem stanu 0,7),
- $\Delta u_1 = 0,2$ (20% wzrost otwarcia zaworu turbinowego względem stanu 0,7).

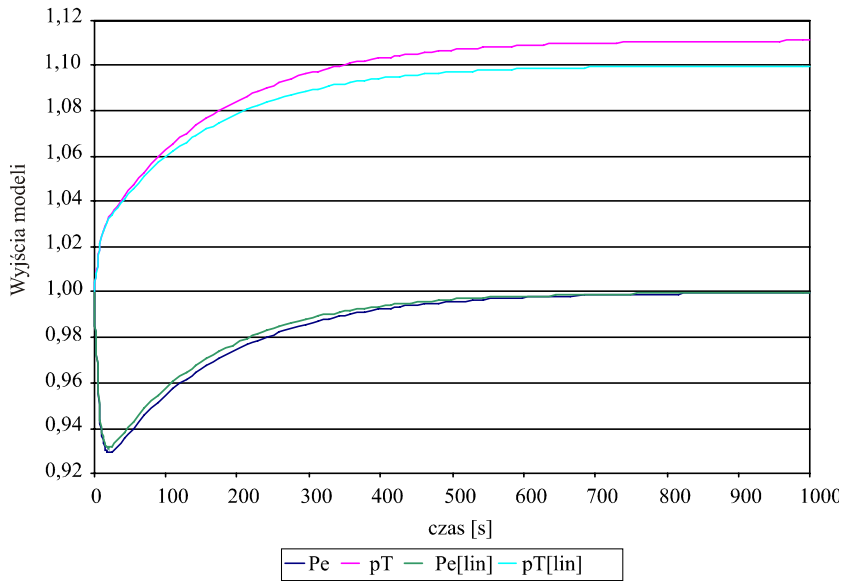


Rys. 2.9. Schemat układu do porównywania modeli bloku energetycznego

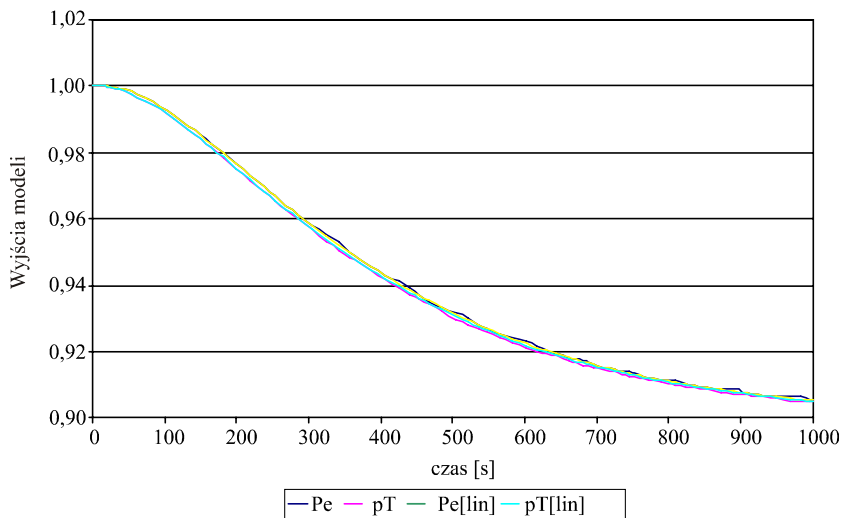
Z porównania odpowiedzi skokowych wyjść (moc P_e i ciśnienie przed turbiną p_T) modeli bloku energetycznego – nieliniowego modelu z jego przybliżeniem liniowym wyznaczanych względem stanu ustalonego w punktach $P_e = 1$ oraz $P_e = 0,7$ wynika:

- bardzo mała różnica w odpowiedziach skokowych wyjść modeli wskutek zakłócenia strumieniem paliwa (rys. 2.11),
- stosunkowo mała różnica w odpowiedziach skokowych przy małych zmianach położenia zaworu (zakłócenie 10%) (rys. 2.10),
- duża różnica w odpowiedziach skokowych (ponad 2 razy większe zmiany ciśnienia) dla modelu nieliniowego przy dużych zmianach położenia zaworu (zakłócenie -30%) i mocy startowej 70% (rys. 2.13),
- dość duża różnica w odpowiedziach skokowych (zmiany ciśnienia) dla modelu nieliniowego przy zmianach położenia zaworu (zakłócenie 20%) i mocy startowej 70% (rys. 2.13),

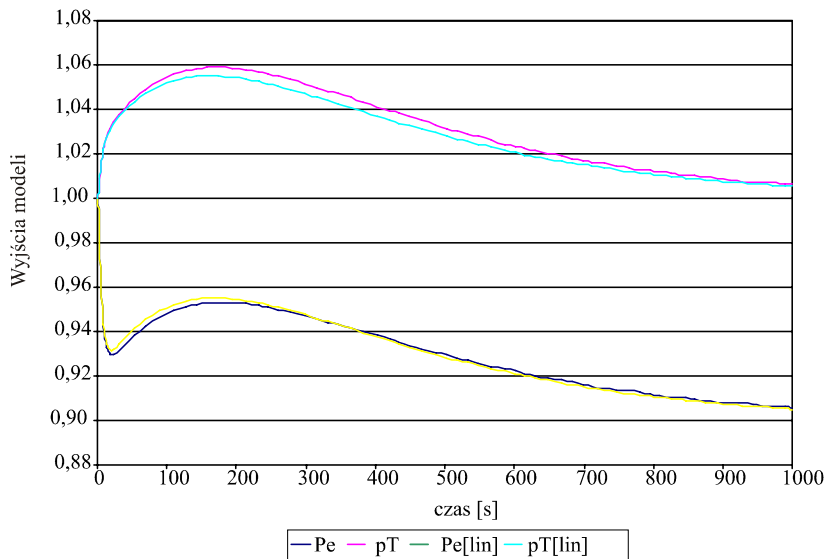
- różnica zmian mocy w odpowiedziach skokowych przy zmianach położenia zaworu modelu nieliniowego w porównaniu z jego przybliżeniem liniowym jest nieznaczna (rys. 2.12 i 2.14).



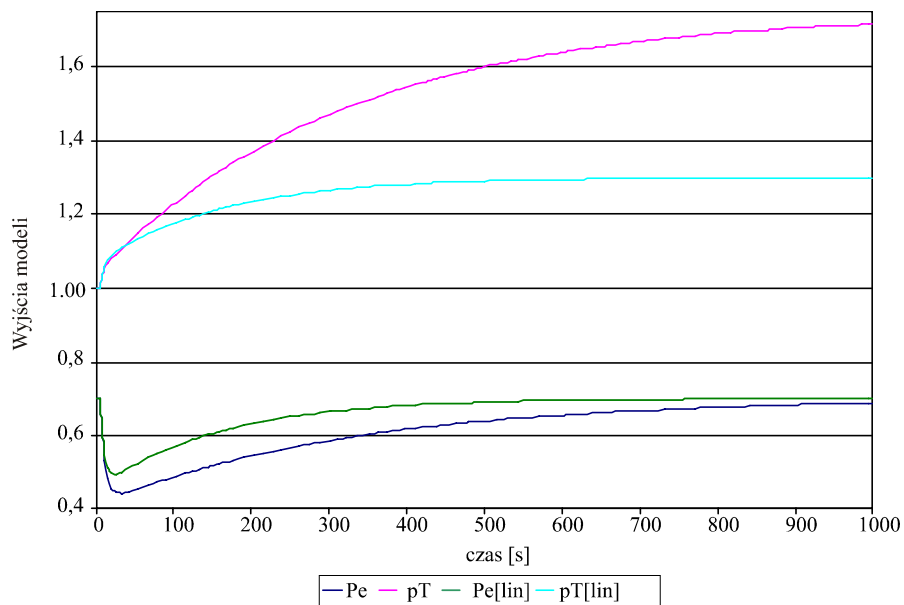
Rys. 2.10. Odpowiedzi skokowe modeli: $\Delta u_1 = -0,1*(t)$
(10% zmniejszenie otwarcia zaworu turbinowego względem stanu nominalnego)



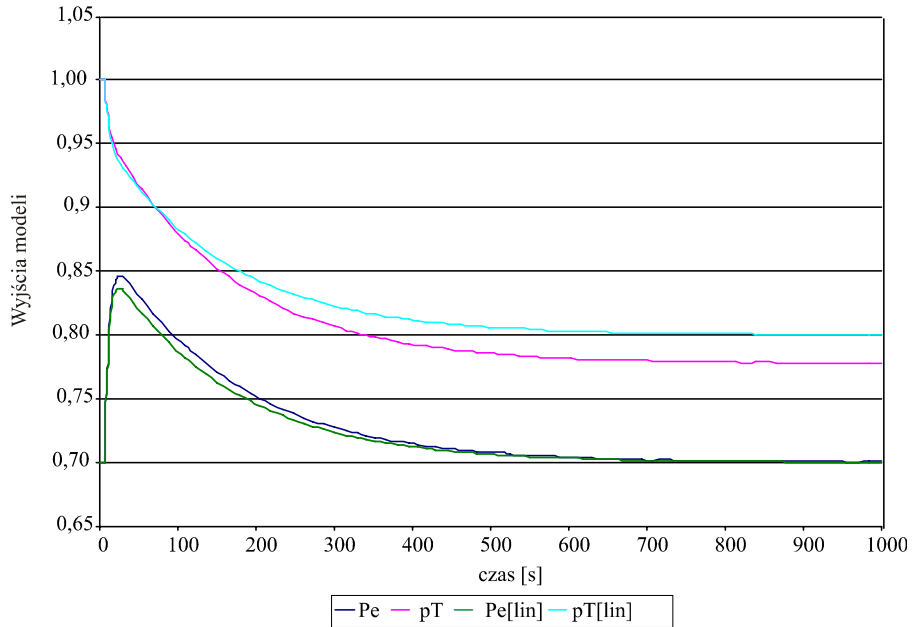
Rys. 2.11. Odpowiedzi skokowe modeli: $\Delta u_2 = -0,1$ (10% zmniejszenie strumienia paliwa względem stanu nominalnego)



Rys. 2.12. Odpowiedzi skokowe modeli: $\Delta u_1 = -0,1$ i $\Delta u_2 = -0,1$
(równoczesne zmniejszenie otwarcia zaworu turbinowego i strumienia paliwa o 10%)



Rys. 2.13. Odpowiedzi skokowe modeli: $\Delta u_1 = -0,3$
(30% zmniejszenie otwarcia zaworu turbinowego względem stanu 0,7)



Rys. 2.14. Odpowiedzi skokowe modeli: $\Delta u_1 = 0,2$
(20% zwiększenie otwarcia zaworu turbinowego względem stanu 0,7)

2.3. Heurystyczny liniowy model bloku

Parametry modelu niskiego rzędu bloku energetycznego wyznacza się głównie eksperymentalnie. Najłatwiej jest wyznaczyć tzw. akumulację T_L , inercję cieplną T_p i T_g strumienia pary w kotle. Oznacza to przyjęcie, że strumień pary M jest funkcją ciśnienia p za kotłem i obciążenia kotła L (tzn. wymuszenia L sterującego obciążeniem kotła)

$$m = m(p, L) \tag{2.12}$$

Jeżeli gwiazdką * oznaczymy względną zmianę dowolnego parametru, po linearyzacji i przekształceniu Laplace'a otrzymamy

$$\Delta m^*(s) = \frac{\Delta m(s)}{m_o} = \frac{\Delta m^*(s)}{\Delta L^*(s)} \Big|_p \Delta L^*(s) + \frac{\Delta m^*(s)}{\Delta p^*(s)} \Big|_L \Delta p^*(s) \tag{2.13}$$

lub w skrócie

$$\Delta m^* = \Delta m_p^* + \Delta m_L^* = G_L(s)\Delta L^*(s) + G_p(s)\Delta p^*(s) \tag{2.14}$$

Indeks p w przyrostach oznacza warunek zmiany od ciśnienia, a indeks L zmiany pochodzące od strumienia paliwa (obciążenia kotła)

$$G_L(s) = \left. \frac{\Delta m^*(s)}{\Delta L^*(s)} \right|_L = \frac{1}{\left(\frac{T_L}{n} s + 1 \right)^n} \quad (2.15)$$

Transmitancja $G_L(s)$ oznacza definicyjną inercję cieplną strumienia pary, transmitancja $G_L(s)$ oznacza akumulację pary w kotle:

$$G_p(s) = \left. \frac{\Delta m^*(s)}{\Delta p^*(s)} \right|_L = \frac{-T_g s}{T_p s + 1} \quad (2.16)$$

W całościowym modelu wymagane jest jednak określenie zależności strumienia pary M i ciśnienia p od obciążenia kotła L i otwarcia zaworu turbinowego A , to

$$p = p(L, A), \quad m = m(L, A) \quad (2.17)$$

W wyniku analogicznej linearyzacji uzyskuje się

$$\Delta p^* = \Delta p_A^* + \Delta p_L^* = G_1 \Delta L^* + G_2 \Delta A^* \quad (2.18)$$

$$\Delta m^* = \Delta m_A^* + \Delta m_L^* = G_I(s) \Delta L^*(s) + G_{II}(s) \Delta A^*(s)$$

Model ten można wyprowadzić z modelu *inercja cieplna–akumulacja*, korzystając z równ. (2.14)–(2.16) i równ. statycznego turbiny

$$m = cpA, \quad c = \text{const} \quad (2.19)$$

Wskutek linearyzacji równ. (2.19) uzyskano:

$$\Delta m = \frac{\partial m}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial m}{\partial A} \Delta A \quad (2.20)$$

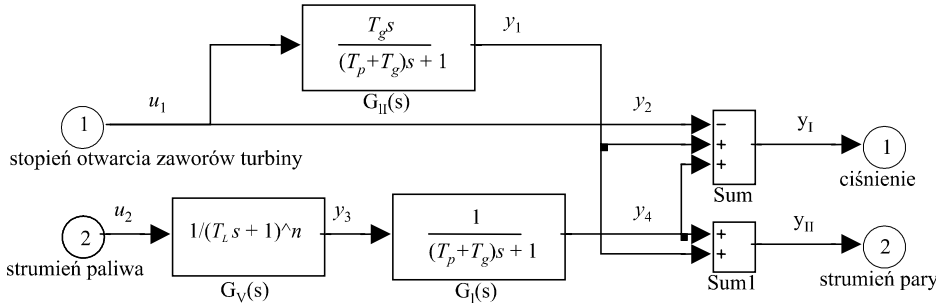
Dzieląc obustronnie przez m_o , dla punktu pracy o otrzymano:

$$\frac{\Delta m}{m_o} = \frac{cA_o}{cA_o p_o} \Delta p + \frac{cp_o}{cA_o p_o} \Delta A = \frac{\Delta p}{p_o} + \frac{\Delta A}{A_o} \quad (2.21)$$

a następnie wyznaczono zależność przyrostów względnych w postaci

$$\Delta m(s)^* = \Delta p_A^*(s) + \Delta A^*(s) \quad (2.22)$$

Po żmudnych, lecz elementarnych przekształceniach otrzymuje się model pokazany w postaci blokowej na rys. 2.5.



Rys. 2.15. Model transmitancyjny bloku energetycznego (bez części temperaturowej)
 $u_1 = \Delta A^*(s), u_2 = \Delta L^*(s), y_I = \Delta p(s)^*, y_{II} = \Delta m(s)^*$

Model heurystyczny bloku w przestrzeni stanów (w pełni równoważny modelowi pokazanemu na rys. 2.15 dla $n = 3$) powstaje przez formalne przekształcenie modelu transmitancyjnego w równania stanu.

Po wprowadzeniu parametrów a, b, c, d zależnych od T_i, T_g i T_p

$$\frac{b}{a} = \frac{(T_i + 3T_p + 3T_g)}{(T_g + T_p)T_i}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{3(T_i + T_p + T_g)}{(T_g + T_p)T_i^2}$$

$$\frac{d}{a} = \frac{3T_i + T_p + T_g}{(T_g + T_p)T_i^3}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{(T_g + T_p)T_i^3}$$

gdzie $T_i = (T_L - T_p)/3$, model w przestrzeni stanów ma postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_g + T_p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{d}{a} & -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_g + T_p} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_g}{T_g + T_p} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T_g}{T_g + T_p} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T_g}{T_g + T_p} - 1 & 0 \\ \frac{T_g}{T_g + T_p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

gdzie: $\Delta y_1 = \Delta m^*$ (przyrost strumienia pary) $\Delta y_2 = \Delta p^*$ (przyrost ciśnienia), $\Delta u_1 = \Delta A^*$ (przyrost względny otwarcia zaworu turbiny), $\Delta u_2 = \Delta L^*$ (przyrost względny strumienia paliwa).

2.4. Podsumowanie

Nieliniowość modeli opisanych procesów powoduje, że właściwości dynamiczne zmieniają się istotnie wraz ze zmianą punktu pracy. Oznacza to konieczność zastosowania takiego algorytmu sterowania, który będzie to uwzględniał. Taką możliwość stwarza linearyzacja przez transformację zmiennych stanu i sprzężenie zwrotne.

3. Synteza nieparametryczna i parametryczna układów automatycznej regulacji bloku energetycznego

W układach automatycznej regulacji (UAR) mocy nowoczesnych dużych bloków energetycznych (np. 200 MW, 360 MW itp.) występują dwa typy struktur: z prowadzącą turbiną (PT) lub z prowadzącym kotłem (PK). W układzie UAR z PT moc turbozespołu jest regulowana przez zmiany otwarcia zaworów turbiny, a ciśnienie pary przez zmiany strumienia paliwa. W UAR z PK natomiast moc turbozespołu jest regulowana przez zmiany strumienia paliwa, a ciśnienie pary przez zmiany otwarcia zaworów turbiny. W strukturze PT wykorzystanie tzw. właściwości akumulacyjnych kotła (wzór (2.19)) do szybkiego wzrostu mocy jest naturalne (przez obiekt) i najlepsze, ale przebiega ze znacznym i długotrwałym spadkiem ciśnienia w kotle, tzn. następuje rozprężenie kotła. W układzie PK natomiast łatwość regulacji ciśnienia pary (za pomocą zaworów turbiny) może być wykorzystana do poprawy jakości regulacji wtórnej mocy bloku na potrzeby automatycznej regulacji częstotliwości i mocy (ARCM) tylko przez aktywne, kontrolowane wykorzystanie właściwości akumulacyjnych kotła. Dzięki energii zakumulowanej możliwe jest bowiem szybkie wytworzenie w kotle dodatkowego strumienia pary wskutek szybkiej zmiany ciśnienia pary na wylocie z kotła, zanim pojawią się skutki zmian strumienia paliwa, obarczone dużą inercją cieplną. Jest to tzw. układ TAM z aktywnym ciśnieniem poślizgowym. Człon korekcyjny do wyznaczania zmian wartości zadanej ciśnienia pary w zależności od zmian mocy zadanej bloku może być zaprojektowany w sposób racjonalny na podstawie zaproponowanego algorytmu wyznaczania odpowiedzi skokowej idealnego korektora.

Model matematyczny bloku energetycznego użyteczny do badań symulacyjnych sprawdzających regulacyjność w systemie UAR składa się z czterech transmitancji wiążących dwa wejścia: strumień paliwa L oraz położenie zaworu turbiny A z każdym z wyjść: moc bloku N oraz ciśnienie pary za kotłem p . Charakter dynamiki we wszystkich czterech torach oraz duża różnica dynamiki toru paliwo–moc (wolnozmienny, obciążony znacznym opóźnieniem) i toru otwarcie zaworu–ciśnienie (szybkoszmienny, bez opóźnień) oraz to, że ciśnienie czasem nie musi być stabilizowane

3.1. Synteza korektora

Rozwiązanie zadania syntezy układów regulacji bloku energetycznego z korektorem składa się z następujących etapów:

- 1) doboru nastaw jednoobwodowego regulatora mocy bloku dla założonej idealnej regulacji ciśnienia (praktycznie zerowej odchyłki regulatora ciśnienia);
- 2) wyznaczenia odpowiedzi skokowej idealnego korektora wartości zadanej ciśnienia pary za kotłem zapewniającej założony przebieg odpowiedzi UAR mocy turbozespołu na skok wartości zadanej mocy (synteza nieparametryczna);
- 3) wyznaczenia nastaw korektora o zadanej strukturze opartego na wynikach obliczeń korektora idealnego (synteza parametryczna).

Rozwiązanie tak postawionego zadania odwrotnego: zakładając odpowiedź systemu (UAR mocy turbozespołu) wyznacz dynamikę (odpowiedź skokową) elementu systemu (korektora) – było możliwe dzięki specyficznej strukturze układu i zastosowaniu numerycznego odwrotnego przekształcenia Laplace’a opracowanego w Matlabie przez autora tej monografii [Chorowski i in. 1983].

Poszczególne etapy projektowania zostaną zilustrowane obliczeniami dla bloku energetycznego ciepłego o mocy 360 MW.

Ad 1. W jednoobwodowym układzie regulacji mocy bloku przyjęto kryterium aperiodycznego przebiegu odchyłki regulacji mocy na zakłócenie skokowe mocą zadaną i właściwości inercji cieplnej w torze: względny strumień paliwa L – względny strumień pary M w postaci członu inercyjnego siódmego rzędu (G_L) (równ. (2.18), $T_L = 43 \cdot 7 = 301$ s). Rolę układu ochrony młynów węglowych przed zasypaniem (zwanego też układem forsowania paliwa) spełnia w proponowanej w strukturze człon wyprzedzający K_A i spowolnione różniczkowanie z inercją w regulatorze mocy G_R ($T_{d2} = 100$ s), patrz rys. 3.5.

Ad 2. Ze względu na wymagania systemu energetycznego w ARCM moc wytwarzana bloku N po skokowej zmianie mocy zadanej N_z powinna zmieniać się początkowo bezinercyjnie do 10% zmiany, a następnie powinna aperiodycznie zdążać do wartości zadanej. Oznacza to transmitancję całego układu postaci:

$$G_g(s) = a + \frac{1-a}{Ts+1} \quad (3.1)$$

gdzie: $a = 0,1$, $T = 150\text{--}400$, s (przyjęto 300 s).

Niemal bezinercyjne zwiększenie mocy można uzyskać w wyniku dynamicznych zmian (obniżenia) ciśnienia w kotle, wywołanych działaniem korektora. Właściwości obiektu w tym torze opisują właściwości akumulacyjne kotła $G_p(s)$ (równ. (2.19)). Założono zatem transmitancję $G_g(s)$ UAR mocy z korektorem. W wyniku analizy schematu blokowego UAR mocy (rys. 3.1) wyznaczono transmitancję idealnego ko-

rektora, założywszy idealną regulację ciśnienia (co w strukturze PK jest możliwe) w postaci:

$$G_{TAM}(s) = \frac{\Delta p_z(s)}{\Delta N_z(s)} = \frac{G_g(s)(1 + G_T(s)G_L(s)G_R(s))}{G_p(s)G_T(s)} - \frac{(K_A + G_R(s))G_L(s)}{G_p(s)} \quad (3.2)$$

gdzie:

$$G_T(s) = 0,35 + \frac{0,65}{8s+1}, \quad G_R(s) = k_{p2} \left[1 + \frac{1}{T_{i2}s} + \frac{k_{d2}T_{d2}s}{T_{d2}s+1} \right]$$

$G_p(s) = -k_M T_p s / (T_p s + 1)$ jest przekształconym równ. (2.19).

Następnie wyznaczono odpowiedź skokową korektora za pomocą numerycznego odwrotnego przekształcenia Laplace'a w Matlabie [Chorowski i in. 1983] (rys. 3.3). Minimalna wartość ciśnienia $\Delta p = -0,066$ MPa/% odpowiadająca czasowi $t = 270$ s posłużyła następnie do wyznaczenia nastaw korektora o zadanej strukturze (rys. 3.4). Korektor ten daje realny przebieg zmian mocy przedstawiony na rys. 3.2.

Ad 3. Z przebiegu $\Delta p(t)$ wynika, że korektor musi mieć właściwości członu różniczkującego z inercją wyższego rzędu oraz dodatkowo posiadać równoległy człon różniczkującego z inercją I rzędu $G(s)$. Najprostszą strukturę takiego korektora daje kombinacja członów inercyjnych II rzędu. Przyjęto:

$$G_{TAM}(s) = \frac{\Delta p_z(s)}{\Delta N_z(s)} = -k_T \left[\frac{1}{(T_1 s + 1)^2} - \frac{1}{(T_2 s + 1)^2} \right] + G(s) \quad (3.3)$$

Zakładając korzystny stosunek stałych czasowych $T_2 = 2T_1$, można zadanie parametrycznej optymalizacji nastaw korektora rozwiązać analitycznie z warunku na zgodność ekstremum ciśnienia. Przyrównując pochodną równania odpowiedzi skokowej korektora o transmitancji G_{TAM} (bez członu G) do zera, otrzymano:

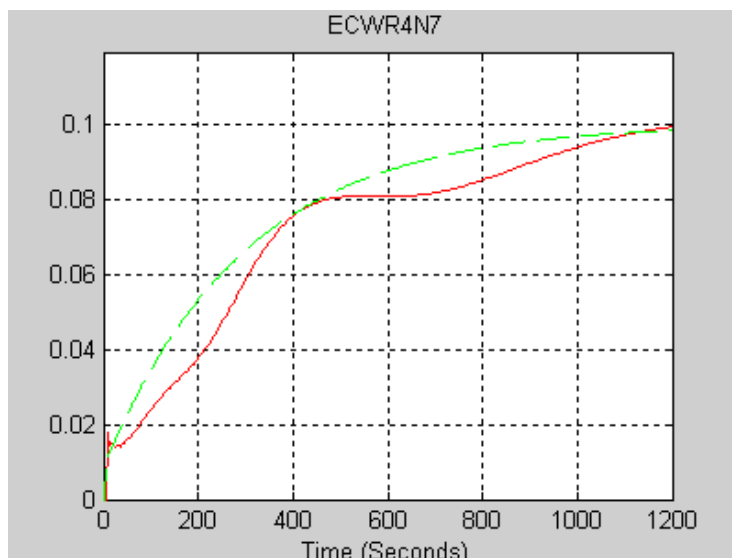
$$T_1 = \frac{t}{4 \ln 2}, \quad k_T = \frac{16 \Delta p}{3 + 4 \ln 2} \quad (3.4)$$

i obliczono parametry korektora: $T_1 = 150$ s, $k_T = -0,2$ MPa /%, $T_2 = 2T_1 = 300$ s.

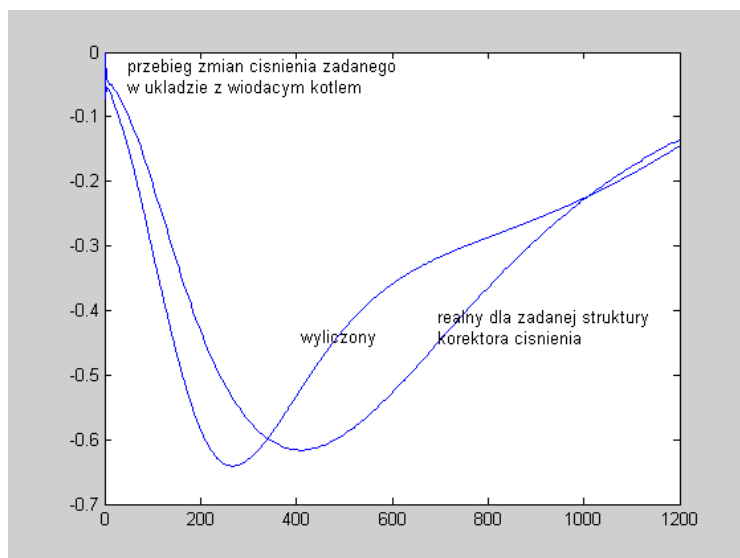
Na rysunku 3.2 pokazano oczekiwany oraz realny przebieg odpowiedzi skokowej układu regulacji mocy czynnej bloku 360 MW (przyrost mocy $\Delta N = 10\%$). W wprowadzeniu równ. (3.2) założono idealną regulację ciśnienia, co w strukturze PK jest do przyjęcia (regulacja ciśnienia przez zawory turbinowe).

Na rysunku 3.3 przedstawiono oczekiwany oraz realny przebieg odpowiedzi skokowej korektora ciśnienia uzupełnionego różniczkowaniem z inercją pierwszego rzędu, aby uzyskać gwałtowną zmianę, w chwili gdy moc zaczyna się zmieniać.

Na rysunkach 3.2, 3.3 przedstawiono przebiegi czasowe wielkości regulowanych – ciśnienia i mocy, na rys. 3.6 i 3.7 natomiast wielkości nastawiających – strumienia paliwa i otwarcia zaworów turbinowych. W badaniach symulacyjnych uwzględniono pracę układu regulacji nadążnej ciśnienia, korzystając ze schematu pokazanego na rys. 3.5.

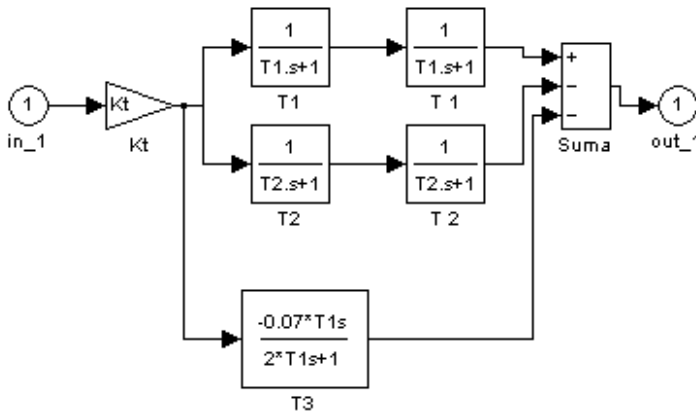


Rys. 3.2. Wyniki symulacji wartości mocy względnej: założonej (linia przerywana) i realnej (linia ciągła) dla zadanej struktury korektora (rys. 3.4) po skokowej zmianie mocy zadanej o 10%

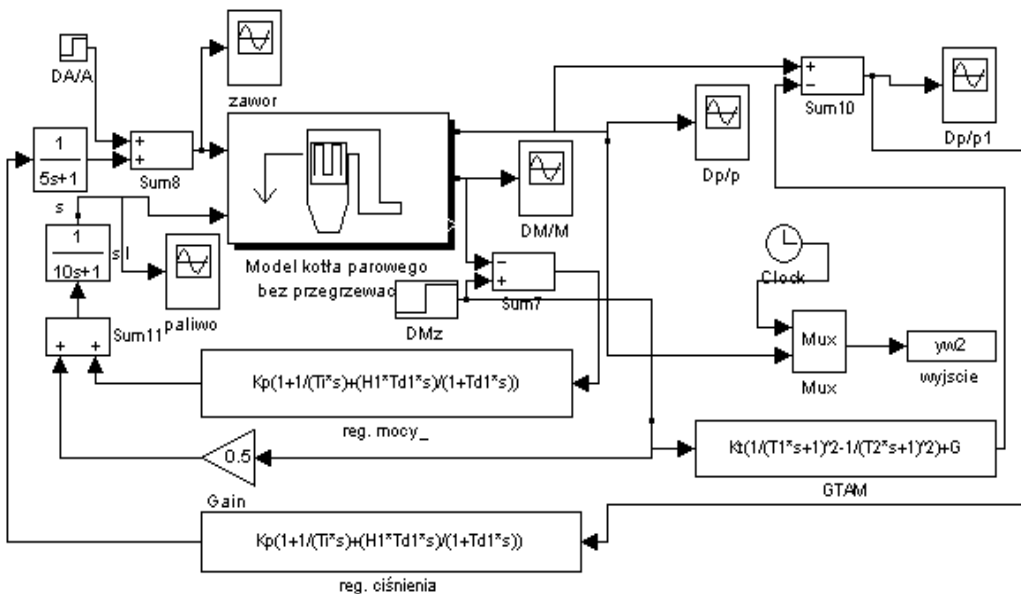


Rys. 3.3. Zmiany ciśnienia [MPa] obliczone oraz rzeczywiste dla zadanej struktury korektora (rys. 3.4) po skokowej zmianie mocy zadanej o 10%

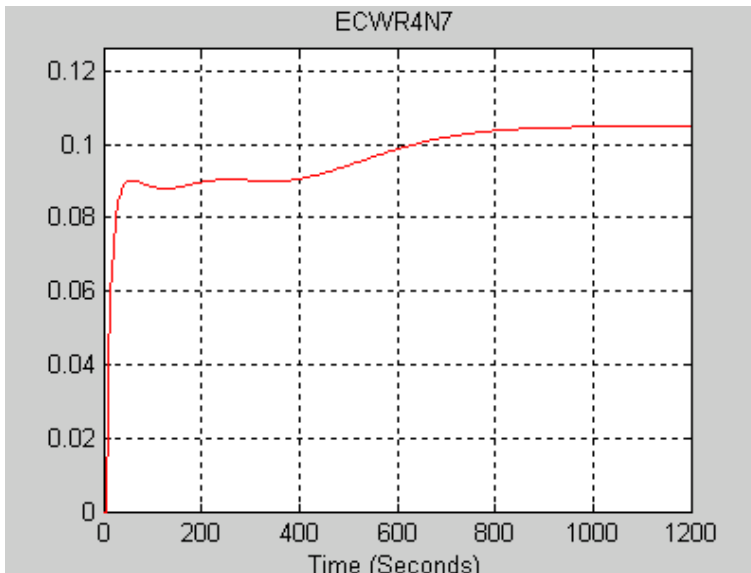
Widoczna jest znaczna poprawa jakości regulacji i korzystny dla pracy młynów przebieg zmian strumienia paliwa (niewielkie, 10-procentowe przeregulowanie ponad wartość statyczną). Zaproponowany algorytm strojenia korektora wartości zadanej ciśnienia pary ma dokładność wystarczającą w praktyce.



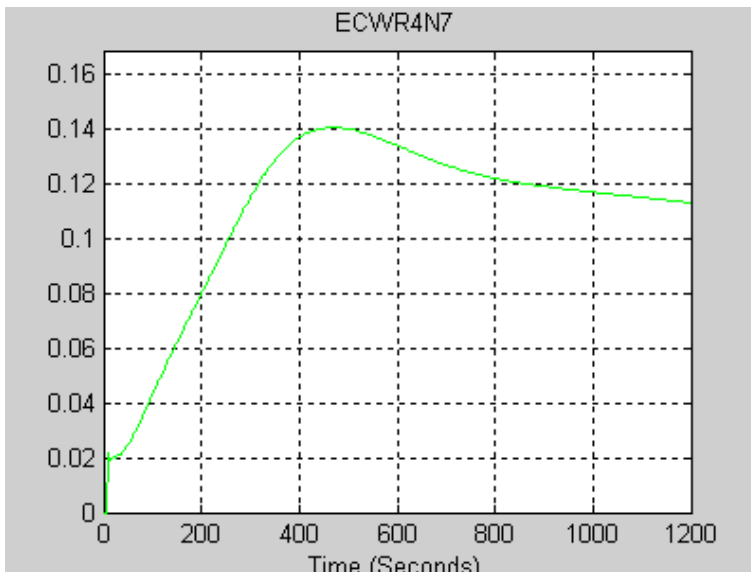
Rys. 3.4. Struktura korektora G_{TAM} (z rys. 3.5) do zmian wartości zadanej ciśnienia pary (człon T3 odpowiada za szybką zmianę ciśnienia)



Rys. 3.5. Układ badawczy do sprawdzenia syntezy nieparametrycznej UAR mocy bloku energetycznego



Rys. 3.6. Wyniki symulacji: względne zmiany strumienia paliwa po skokowej zmianie mocy zadanej o 10%



Rys. 3.7. Wyniki symulacji: zmiany względne położenia zaworu turbiny po skokowej zmianie mocy zadanej o 10%

Formułowanie praktycznych problemów optymalizacji wymaga często uwzględnienia więcej niż jednego kryterium. Kryteria te na ogół nie są wzajemnie przeliczalne, i wobec tego nie można ich sprowadzić do jednego kryterium skalarne. W real-

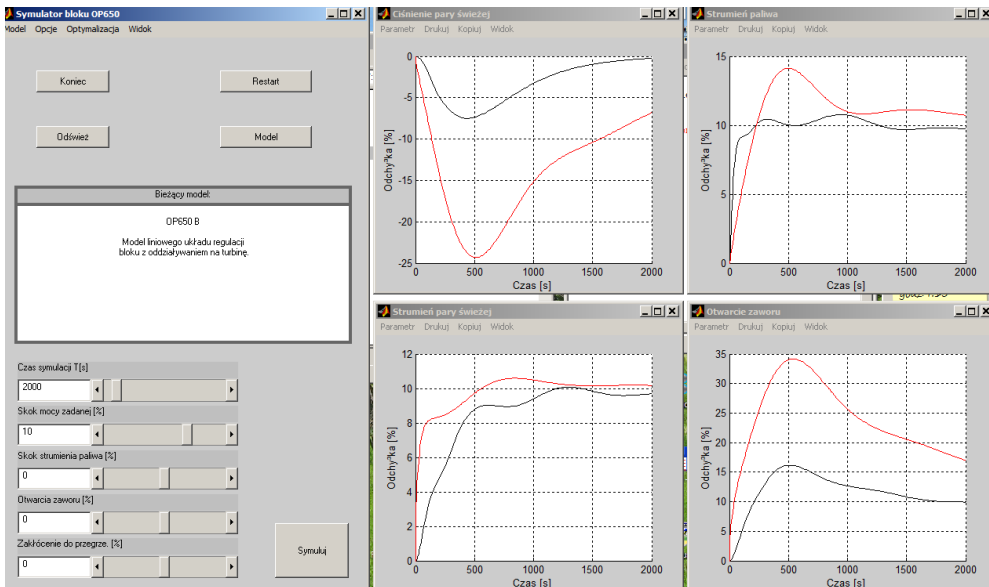
nych sytuacjach występują nie tylko kryteria nieporównywalne, lecz także kryteria wzajemnie sprzeczne.

W dotychczasowych rozważaniach wybierano jedno kryterium optymalności, natomiast pozostałe uwzględniano ewentualnie w sposób ukryty w ograniczeniach. „Rozwiązanie optymalne”, o ile istniało, zostało już a priori wybrane na początku procesu poszukiwania optimum. Stawiając problem optymalizacji z uwzględnieniem wielu kryteriów, mamy szansę odrzucenia w procesie optymalizacji rozwiązań niekonkurencyjnych, a także dokonać kompromisowego wyboru z wielu rozwiązań optymalnych w wyniku wprowadzenia preferencji kryterialnych lub uwzględnienia dodatkowych informacji.

Pojęcie kompromisu optymalnego wprowadzono w ekonomii. Trudności w rozwiązywaniu problemów z wieloma kryteriami jakości omija się w ten sposób, że poszczególnym kryteriom przypisuje się współczynniki wagowe i w ten sposób formułuje jedno zastępcze kryterium optymalności, w którym udział poszczególnych kryteriów jest wyrażony przez ich współczynniki wagowe. Metoda sprowadzania problemu wielokryterialnego do jednego kryterium zastępczego nosi nazwę *skalaryzacji*. Nie usuwa jednak ona wielu trudności, a tylko zastępuje je innymi. Powstaje np. problem wyboru współczynników.

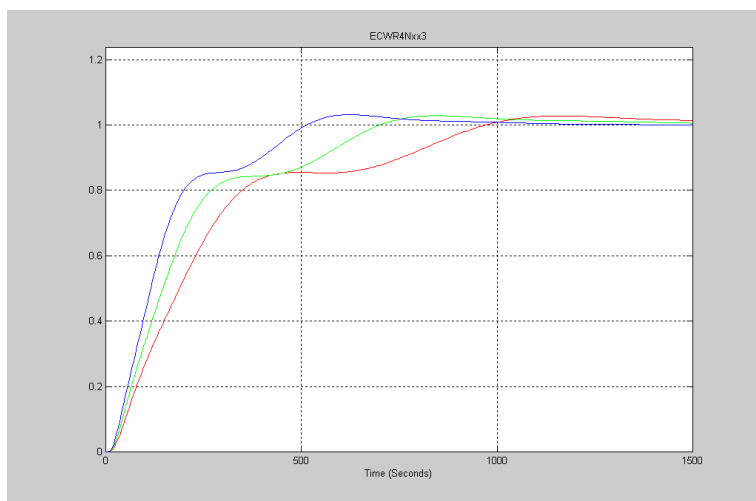
Przykłady i analiza porównawcza algorytmów regulacji

Autor monografii opracował symulator bloku energetycznego, pozwalający porównywać różne struktury i dobierać w nich nastawy regulatorów mocy ciśnienia i temperatury (rys. 3.8).

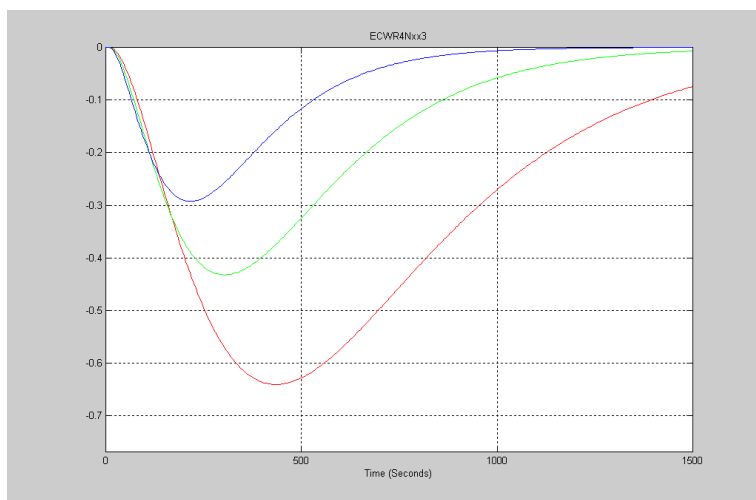


Rys. 3.8. Symulator UAR bloku energetycznego

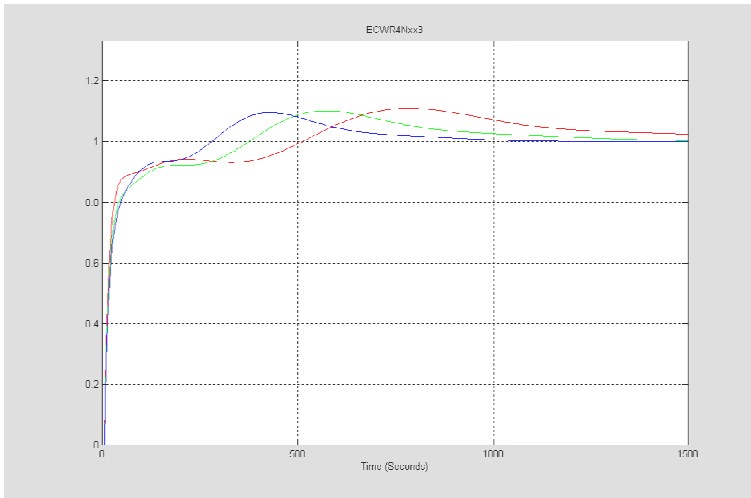
Przykładem wykorzystania symulatora będzie znalezienie reguł adaptacji nastaw klasycznych regulatorów PID (z różniczkowaniem z inercją) w układzie z prowadzącym kotłem (PK) w warunkach zmian wartości stałej czasowej inercji cieplnej T_L . Wykorzystano procedurę Matlaba NCD (ang. *Nonlinear Control Design*) Blockset, ilustrując jej wyniki na rys. 3.9–3.11.



Rys. 3.9. Zmian mocy (strumienia pary) po skokowej zmianie mocy zadanej (rzęd inercji cieplnej $n = 4$) dla $B = 0,5$ (kolor niebieski), $B = 0,7$ (kolor zielony) i $B = 1$ (kolor czerwony)



Rys. 3.10. Zmiany ciśnienia po skokowej zmianie mocy zadanej dla $B = 0,5$ (kolor niebieski), $B = 0,7$ (kolor zielony) i $B = 1$ (kolor czerwony)



Rys. 3.11. Zmiany strumienia paliwa po skokowej zmianie mocy zadanej dla $B = 0,5$ (kolor niebieski), $B = 0,7$ (kolor zielony) i $B = 1$ (kolor czerwony)

Inercję cieplną zdefiniowano jako:

$$B = \frac{T_L}{T_{Ln}}$$

Aproksymowane zależności nastaw korektora i regulatorów od względnej inercji cieplnej B mają postać:

- nastawy korektora TAM (o najprostszej strukturze):
 $K_t = 2B$, $T_1 = 160B$, $T_2 = 310(B - 0,05)$,
- nastawy regulatora ciśnienia:
 $k_p = 7$, $T_i = 25B$, $H = 0,1$, $T_d = 10B$,
- nastawy regulatora mocy:
 $k_p = 0,75(1 - (1 - B) \cdot 0,33)$, $T_i = 190(B - 0,05)$, $H = 0,1$, $T_d = 80B$.

Przyjęto typowe parametry akumulacji w kotle: $T_g = 120$ s, $T_p = 29$ s zaś wartość sumarycznej stałej czasowej inercji cieplnej zmieniano od $T_L = 186$ s dla spalania wyłącznie węgla do 266 s (w przypadku współspalaniu biomasy)

W przypadku układu automatycznej regulacji (UAR) bloku z prowadzącą turbiną PT regulator mocy oddziałuje na zawór turbinowy, a uchyb ciśnienia (D_p/p) oddziałuje na strumień paliwa. Układ ten umożliwi niemal natychmiastowy przyrost mocy kosztem energii zakumulowanej w kotle. Zmiana mocy zadanej powoduje otwarcie zaworu turbinowego i wzrost strumienia pary dopływającego do turbiny.

Zalecane stosowanie technologii współspalania biomasy ma na celu:

- zmniejszenie emisji do atmosfery zanieczyszczeń, takich jak: CO_2 , SO_2 , pyłu lotnego i metali ciężkich zawartych w węglach,

- produkcję i sprzedaż tzw. „zielonej energii”,
- obniżenie kosztów opłat za korzystanie ze środowiska naturalnego.

Powoduje to zmiany dynamiki i statyki procesu wytwarzania mocy bloku.

W przypadku częściej stosowanej struktury UAR bloku z prowadzącą turbiną wzrost parametru sumarycznej inercji cieplnej kotła T_L spowodowany dodaniem biomasy do paliwa w młynach sprawia, że obiekt będący wielowymiarowym układem dynamicznym (MIMO) można regulować, stosując słuszną na ogół procedurę optymalizacji nastaw dla przypadku najgorszej dynamiki obiektu (maksimum T_L). Przebiegi sygnałów sterujących są na granicy dopuszczalnych lub stosuje się adaptację nastaw w układzie otwartym z wykorzystaniem np. globalnych funkcji wrażliwości [Wiśniewski 1973], [Wierzbicki 1977].

Możliwe jest także znalezienie innych prostych reguł strojenia regulatorów zarówno w tradycyjnych strukturach UAR bloku z wiodącym kotłem i wiodącą turbiną, jak i w ich zmodyfikowanych wersjach (np. struktury PK2 i PT2).

W wyniku poszukiwań optymalizacyjnych z użyciem przybornika Matlab NCD wyznaczono nastawy regulatorów UAR bloku z wiodącą turbiną: regulatora mocy sterującego zaworem turbiny i nastawy regulatora ciśnienia sterującego strumieniem paliwa do kotła [Wiśniewski 2008].

3.2. Wyznaczanie parametrów modelu bloku energetycznego

Inercja cieplna kotła (równ. (2.18)) jest związana z dynamiką na drodze paliwo–spalanie–ciepło–para wodna (tzn. młyny, palenisko, parownik). Wiąże się z nią brak możliwości uzyskania szybkiej zmiany strumienia ciepła doprowadzanego do czynnika (mieszaniny parowo–wodnej) i związanej z tym wydajności parowej kotła

$$G_L(s) = \frac{\Delta m^*(s)}{\Delta L^*(s)} \Big|_L = \frac{1}{\left(\frac{T_L}{n}s + 1\right)^n} \quad (3.5)$$

Wartość stałej czasowej inercji T_L można wyznaczyć na wiele sposobów. Dogodnym sposobem jest obliczanie pola nad wykresem zmian względnej mocy bloku lub wydajności kotła po skokowym wymuszeniu strumieniem paliwa pod stałym ciśnieniem regulowanym zaworem turbinowym. Metoda ta jest godna polecenia zwłaszcza dla odpowiedzi rzeczywistego obiektu, gdy skutek zakłóceń wykresy nie są „gładkie” i trudno zastosować inne metody.

Dla inercji I rzędu:

$$\int_0^{\infty} (1 - \eta(t)) dt = \int_0^{\infty} e^{-t/T} dt = -T e^{-t/T} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-T) = T \quad (3.6)$$

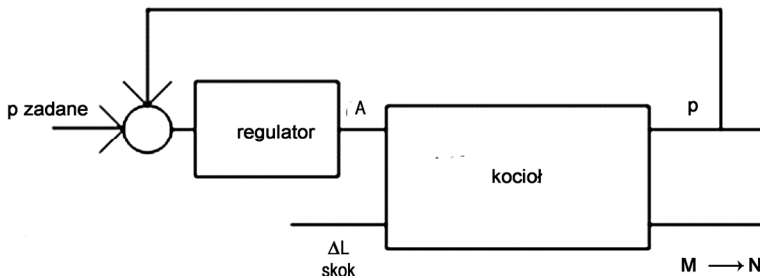
gdzie:

$$\eta(t) = \frac{\Delta y(t)}{\Delta y_{\infty}} = 1 - e^{-t/T}$$

Dla inercji n -tego rzędu zależność ta przedstawia się następująco:

$$\int_0^{\infty} (1 - \eta(t)) dt = T = n T_i \quad (3.7)$$

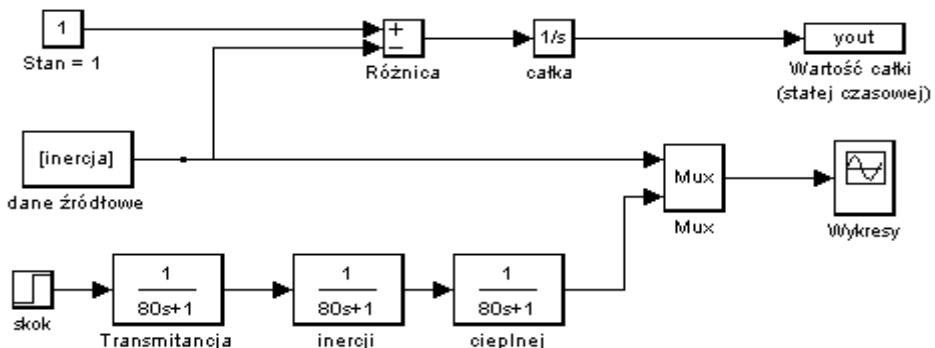
Stałą czasową inercji cieplnej T_L wyznacza się z przebiegu wydajności kotła albo z mocy generatora, dla stałego ciśnienia lub stopnia otwarcia zaworu turbiny w strukturze pokazanej na rys. 3.12.



Rys. 3.12. Układ z wiodącym kotłem w przypadku wyznaczania inercji cieplnej T_L

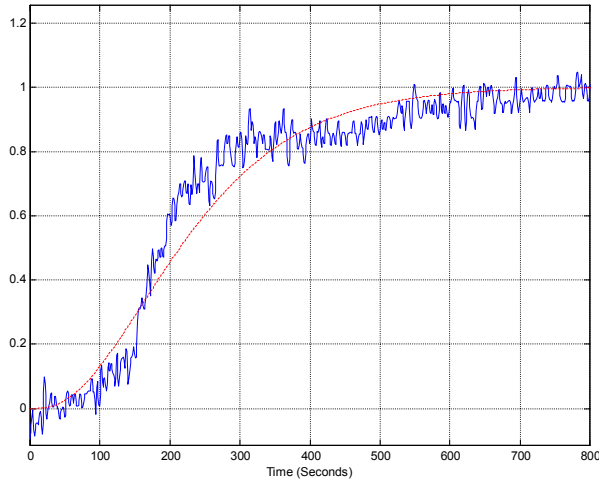
Przykład 1

Stała czasowa inercji cieplnej T_g oraz T_i została wyznaczona eksperymentalnie. Przedstawiony na rys. 3.13 układ zawiera blok: dane źródłowe, odtwarzający rzeczywisty przebieg przejściowy wywołany zakłóceniem strumienia paliwa dla stałego położeniu zaworu.



Rys. 3.13. Układ do wyznaczenia stałej czasowej inercji cieplnej

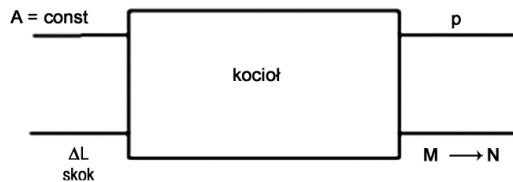
Za pomocą bloku wartość całki w programie Matlab odczytano wartość stałej T równej $T_L = 243,3$ s. Do zamodelowania tego przebiegu użyto inercji trzeciego rzędu ($n = 3$) o stałej czasowej $T_i = T_L/3$. Ostatecznie przyjęto $T_i = 81$ s. Oba przebiegi – rzeczywisty i modelowy pokazano na rys. 3.14.



Rys. 3.14. Przebieg rzeczywisty (kolor niebieski) i odpowiedź modelu inercji cieplnej (kolor czerwony)

Przykład 2

Układ badawczy w przypadku otwartych UAR pokazano na rys. 3.15, a przebiegi sygnałów z eksperymentu na rzeczywistym obiekcie na rys. 3.16.



Rys. 3.15. Układ w przypadku otwartych UAR do wyznaczenia sumy $T_L + T_g$

Na podstawie wykresu mocy generatora po skokowej zmianie strumienia paliwa w górę (bez regulacji ciśnienia), możemy wyznaczyć współczynniki modelu. W programie AutoCad (pasek Zapytania/Pole) splanimetrowano pole nad wykresem przebiegu mocy. Po pomnożeniu przez współczynnik skali:

$$I = \int_0^{t \max} N(\tau) d\tau = 7546 \text{ MW}\cdot\text{s}$$

$$G_{L^*}(s) = \frac{\Delta m^*(s)}{\Delta L^*(s)} \Big|_A = \frac{1}{\left(\frac{T}{n}s + 1\right)^n} \Rightarrow T = T_L + T_g$$

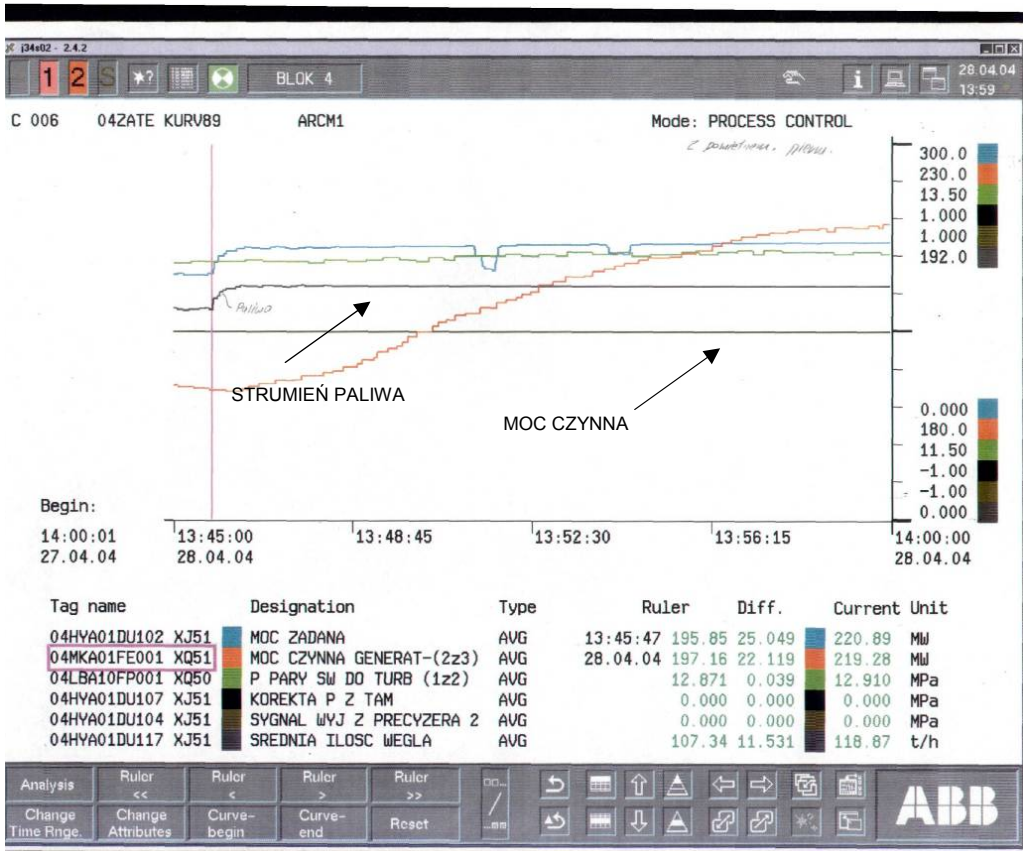
Zmiana mocy wywołana skokową zmianą strumienia paliwa wynosi

$$\Delta N = 22 \text{ MW}$$

a współczynnik:

$$T = T_L + T_g = \frac{I}{\Delta N} = 343 \text{ s}$$

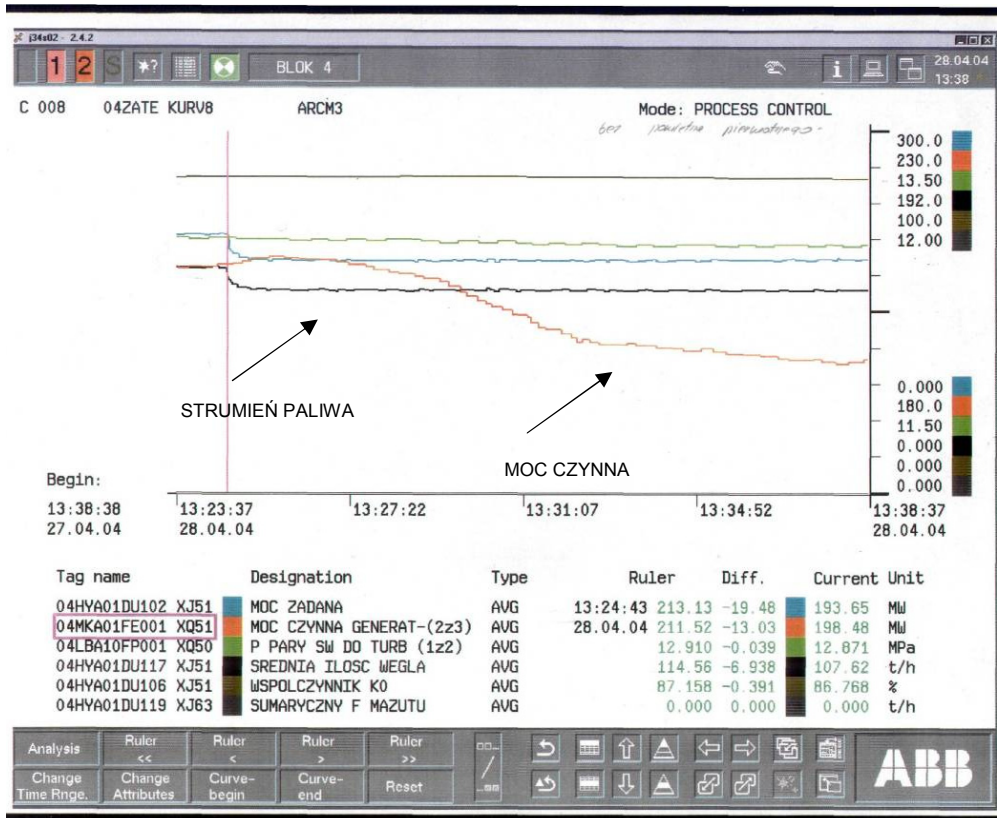
Aby wyznaczyć inercję cieplną T_L , należy wyrugować współczynnik T_g pojemności cieplnej (wyznaczony z innego eksperymentu), a następnie podzielić przez rząd inercji przyjętego modelu (np. dla rzędu $n = 3$, $T_i = T_L/3$).



Rys. 3.16. Zmiany mocy $N(t)$ po skokowej zmianie w górę strumienia paliwa

Przykład 3

Na rysunku 3.17 przedstawiono przebiegi sygnałów eksperymentu na rzeczywistym obiekcie. Na podstawie wykresu mocy generatora po skokowej zmianie strumienia paliwa w dół możemy wyznaczyć współczynniki.



Rys. 3.17. Zmiany mocy przy skokowej zmianie w dół strumienia paliwa

W programie AutoCad (pasek Zapytania/Pole) splanimetrowano pole nad wykresem przebiegu mocy. Po wymnożeniu przez współczynnik skali (jednostki):

$$I = \int_0^{t_{\max}} N(\tau) d\tau = 7455 \text{ MW}\cdot\text{s}$$

Zmiana mocy wywołana skokową zmianą strumienia paliwa wynosi

$$\Delta N = 15 \text{ MW}$$

a współczynnik

$$T = T_L + T_g = \frac{I}{\Delta N} = 497 \text{ s}$$

Aby wyznaczyć inercję cieplną T_L , należy wyrugować współczynnik T_g pojemności cieplnej (wyznaczony z innego eksperymentu), a następnie podzielić przez rząd inercji przyjętego modelu (np. dla rzędu $n = 3$, $T_i = T_L/3$).

Wyznaczenie stałych czasowych pojemności cieplnej kotła

Pojemność (akumulacja) cieplna kotła związana z pojemnością cieplną masy (metal i wody–pary) objawia się tym, że energia dostarczana (ustalona przez brak zmian strumienia paliwa) nie musi się równać energii wyprowadzanej, a wydajność kotła rośnie przejściowo (patrz równ. (2.19))

$$G_p(s) = \frac{\Delta m^*(s)}{\Delta p^*(s)} \Big|_L = \frac{-T_g s}{T_p s + 1}$$

Wyznaczenie stałych czasowych T_g i T_p jest bardziej skomplikowane niż wyznaczenie stałej czasowej inercji cieplnej. Dokonano tego analitycznie, a także dzięki wykonaniu eksperymentu polegającego na skokowej zmianie ciśnienia zadanej przed turbiną na obiekcie rzeczywistym, a następnie modelowaniu równocześnie w programie Matlab–Simulink. W niniejszej pracy przyjęto następujące wartości stałych czasowych: $T_g = 120 \text{ s}$, $T_p = 29 \text{ s}$. Akumulacja, zwana inaczej pojemnością cieplną kotła, jest inną właściwością dynamiczną kotła. Objawia się ona chwilowym zwiększeniem wydajności kotła bez zmian strumienia paliwa.

4. Metoda całkowania wstecznego w syntezie nieliniowego regulatora adaptacyjnego

Poza bardzo szczególnymi przypadkami nie potrafimy rozwiązywać nieliniowych równań różniczkowych, co stanowi przeszkodę w konstruowaniu układów regulacji dla obiektów nieliniowych. Tę trudność można ominąć przez zastosowanie różnych metod:

1) przybliżenia liniowego, polegającego na rozwinięciu nieliniowych funkcji wokół punktu pracy w szereg Taylora,

2) linearyzacji przez zmianę bazy (2a) lub przez sprzężenie zwrotne (2b),

3) wyznaczenie nieliniowego prawa regulacji na podstawie funkcji sterowania Lapunowa (ang. *backstepping*, w języku polskim nazywany całkowaniem wstecznym, nadaje się do obiektów o nieznanym parametrach).

Całkowanie wsteczne jest rekurencyjną procedurą, która pozwala wyznaczyć sterowanie dla nieliniowego obiektu w połączeniu z funkcją Lapunowa, gwarantującą stabilność [Krstić et al. 1995], [Freeman, Kokotović 1996], [Qu 1998], [Isidori 1999]. Rozważmy przykład zaczerpnięty z fundamentalnej pracy [Krstić et al. 1995]. Rozważmy obiekt sterowania:

$$\dot{x} = \theta\varphi(x) + u \quad (4.1)$$

gdzie $\varphi(x)$ jest znaną nieliniową funkcją, θ – nieznanym parametrem stałym.

Zastosowany odpowiedni statyczny regulator:

$$u = -cx - \kappa x\varphi^2(x) \quad (4.2)$$

powoduje, że zamknięty układ sterowania jest pierwszego rzędu:

$$\dot{x} = -cx - \kappa x\varphi^2(x) + \theta\varphi(x) \quad (4.3)$$

Wybierając funkcję Lapunowa $V(x) = x^2/2$, mamy zależność określającą jej pochodną postaci:

$$\dot{V} \leq -cx^2 + \frac{\theta^2}{4\kappa} \quad (4.4)$$

Oznacza to, że rozwiązanie $x(t)$ jest zbieżne do przedziału

$$|x| \leq \frac{|\theta|}{2\sqrt{kc}} \quad (4.5)$$

i nie jest zbieżne do zera. Aby uzyskać lepszą jakość regulacji, zastosujemy dynamiczny regulator z adaptacją. Jeśli parametr θ jest dokładnie znany, to sterowanie

$$u = -\theta\phi(x) - c_1x, \quad c_1 > 0, \quad (4.6)$$

mogłoby sprawić, że pochodna $V_0(x) = x^2/2$ byłaby ujemnie określona: $\dot{V}_0(x) = -c_1x^2$.

Oczywiście prawo regulacji (równ. (4.6)) nie może być zastosowane, jeśli θ nie jest znane. Można wówczas zastosować formułę, gdzie zamiast parametru θ wystąpi jego estymata $\hat{\theta}$

$$u = -\hat{\theta}\phi(x) - c_1x \quad (4.7)$$

Wstawiając równ. (4.7) do równ. (4.1), uzyskujemy:

$$\dot{x} = -c_1x + \tilde{\theta}\phi(x) \quad (4.8)$$

Pochodna $V_0(x) = x^2/2$, gdy błąd parametru

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} \quad (4.9)$$

ma postać

$$\dot{V}_0 = -c_1x^2 + \tilde{\theta}x\phi(x) \quad (4.10)$$

Drugi człon jest niezdefiniowany i zawiera nieznaną błąd parametru $\tilde{\theta}$. Nie możemy zatem wnioskować o stabilności równ. (4.6).

Aby skonstruować poprawnie prawo regulacji, należy dodać kwadrat błędu parametru do funkcji Lapunowa

$$V_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 \quad (4.11)$$

gdzie $\gamma > 0$ jest parametrem adaptacji

$$\dot{V}_1(x) = x\dot{x} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -c_1x^2 + \tilde{\theta}x\phi(x) + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -c_1x^2 + \tilde{\theta}\left(x\phi(x) + \frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{\theta}}\right) \quad (4.12)$$

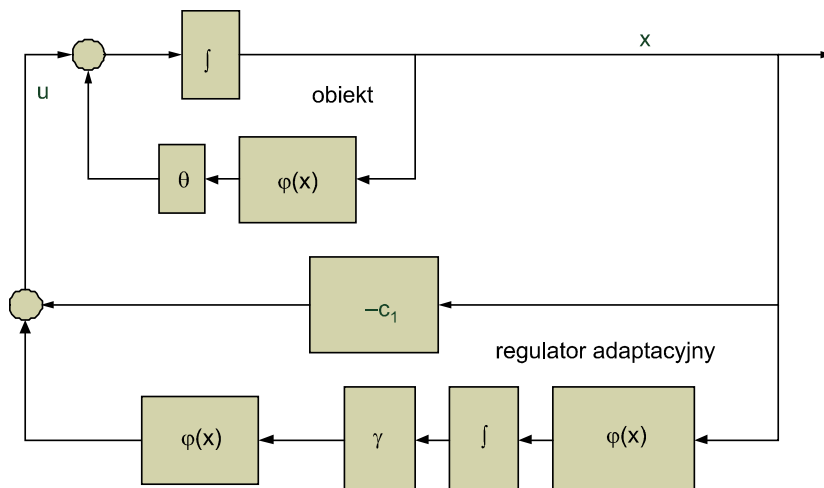
Drugi człon jest nadal niezdefiniowany, bo zawiera nieznaną błąd parametru. Jednak sytuacja jest lepsza niż w przypadku równ. (4.10), bo mamy do dyspozycji pochodną błędu

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\tilde{\theta}} = \gamma x \varphi(x) \quad (4.13)$$

co daje

$$\dot{V}_1(x) = -c_1 x^2 \leq 0 \quad (4.14)$$

Wynikowy system sterowania adaptacyjnego składa się z obiektu (4.1) ze sterowaniem (4.7) i prawem adaptacji (4.13), co ilustruje rys. 4.1.



Rys. 4.1. Układ sterowania adaptacyjnego według równań (4.1) (4.7) i (4.13).
Rysunek sporządzony według rys. 3.1 [Krstić et al. 1995, s. 90]

System sterowania adaptacyjnego w nieco dogodniejszej formie po skorzystaniu z równ. (4.8) i (4.13)

$$\dot{x} = -c_1 x + \tilde{\theta} \varphi(x) \quad (4.15)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma x \varphi(x)$$

jest równoważny pojęciowo, lecz ma znaczenie tylko teoretyczne. Wyrugowanie sygnału sterowania u przez podstawienie równ. (4.7) do (4.1) i pojawienie się sygnałów parametru θ i błędu $\tilde{\theta}$ jego estymacji raczej utrudnia stosowanie w praktyce.

Ponieważ $\dot{V}_1(x) = -c_1 x^2 \leq 0$, więc punkt równowagi równań (4.15) $x = 0$, $\tilde{\theta} = 0$ jest globalnie stabilny. Adaptacyjny nieliniowy regulator, który to zagwarantuje, jest dany przez układ na rys. 4.1 lub równoważny układ na rys. 3.2 w pracy [Krstić et al. 1995] według równania (4.15). Warto zauważyć, że na rys. 4.1 występuje operacja całkowania w strukturze regulatora, co uzasadnia nazwę całkowanie wsteczne.

Uogólniając rozważania jednowymiarowego obiektu (SISO) na przypadek obiektów wielowymiarowych (MIMO), otrzymuje się:

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u, \quad x \in R^n, \quad u \in R \quad (4.16)$$

gdzie \mathbf{f} , \mathbf{g} są gładkimi funkcjami wektorowymi o odpowiednich wymiarach.

W i -tym kroku syntezy znana jest funkcja Lapunowa V_i , która stabilizuje pierwsze i równań. Dla funkcji tej jest określone wirtualne sterowanie α_i . Jedną ze zmiennych stanu w $(i + 1)$ równaniu jest przyjmowana jako kolejne wirtualne sterowanie. Wyznacza się je tak, aby pochodna kolejnej funkcji Lapunowa V_{i+1} była ujemna. Klasy obiektów, dla których można zastosować tę procedurę, podano w [Krstic et al. 1995]. Jedną z takich klas, określaną jako *strict-feedback systems*, określa układ:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})x_n \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dla obiektów tych zmienne stanu mogące stanowić wirtualne sterowanie pojawiają się sukcesywnie w kolejnych równaniach. Można zdefiniować bardziej ogólną klasę obiektów (4.3), określaną jako *pure feedback systems*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Krstic et al. [1995] stwierdzili, że procedurę całkowania wstecznego można zastosować niezależnie od struktury gładkich funkcji f_i . Jednak bardziej dokładna analiza procedury doprowadza do wniosków, że obliczanie sygnału sterującego na podstawie wyznaczonego w ten sposób prawa regulacji może być źle uwarunkowane numerycznie. Po wprowadzeniu oznaczeń (4.19), (4.20) zostanie rozważona iteracja $(i + 1)$

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \quad \dot{X}_k = F_k(X_k, x_{k+1}) \quad \text{dla} \quad k = 1, \dots, n \quad (4.19)$$

gdzie

$$\alpha_i(x_1, \dots, x_i) \quad - \text{wirtualne sterowanie dla } i = 1, \dots, n-1, \alpha_0 = 0 \quad (4.20)$$

Funkcja Lapunowa i jej pochodna w kroku $(i + 1)$ jest określona za pomocą równań (4.21) i (4.22)

$$V_{i+1}(X_{i+1}) = V_i(X_i) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - \alpha_i(X_i))^2 \quad (4.21)$$

$$\dot{V}_{i+1}(X_{i+1}) = \dot{V}_i(X_i) + (x_{i+1} - \alpha_i(X_i)) \left(f_{i+1}(X_{i+1}) - \frac{\partial \alpha_i}{\partial X_i} F_i(X_{i+1}) \right) \quad (4.22)$$

Odpowiednie składniki są dodawane i odejmowane tak, aby pochodna V_i była ujemna:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i+1}(X_{i+1}) = & -W_i(X_i) + (x_{i+1} - \alpha_i(X_i)) \left(f_{i+1}(X_{i+1}) - \frac{\partial \alpha_i}{\partial X_i} F_i(X_{i+1}) \right) \\ & + (x_i - \alpha_{i-1}(X_{i-1})) (f_i(X_i, x_{i+1}) - f_i(X_i, \alpha_i)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

gdzie $W_i(X_i) > 0$.

Można zauważyć, że funkcja \bar{f}_i jest gładka, jeżeli f_i jest gładka

$$f_i(X_i, x_{i+1}) - f_i(X_i, \alpha_i) = \bar{f}_i(X_i, x_{i+1})(x_{i+1} - \alpha_i) \quad (4.24)$$

W istocie \bar{f}_i jest ilorazem różnicowym w odniesieniu do zmiennej $i + 1$, ale bezpośrednie obliczenie \bar{f}_i z równ. (4.25) jest źle uwarunkowane numerycznie [Bolek, Sasiadek 2001], gdy x_{i+1} dąży do α_i

$$\bar{f}_i(X_i, x_{i+1}) = \frac{f_i(X_i, x_{i+1}) - f_i(X_i, \alpha_i)}{(x_{i+1} - \alpha_i)} \quad (4.25)$$

Procedura ta działa poprawnie, tylko gdy składnik $x_{i+1} - \alpha_i$ może być wyciągnięty przed nawias z lewej strony równ. (4.24). Klasę nieliniowych obiektów (inną niż (4.17)), dla których jest to możliwe, zbadano w niniejszej pracy (rozdz. 5). Klasa ta jest związana z procesami, w których występuje przepływ płynów. Wprowadza to nieliniowość typu pierwiastek kwadratowy.

W celu dokończenia kroku $i + 1$ procedury *backstepping* składnik $x_{i+1} - \alpha_i$ w równ. (4.23) jest wyciągnięty przed nawias

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i+1}(X_{i+1}) &= -W_i(X_i) + (x_{i+1} - \alpha_i(X_i)) \\ &\times \left(f_i(X_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(X_{i+2}) - \frac{\partial \alpha_i}{\partial X_i} F_i(X_{i+1}) \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

W drugim nawiasie równ. (4.26) zmienna x_{i+2} jest traktowana jako kolejne wirtualne sterowanie α_{i+1} . Wybiera się je tak, aby cały składnik był ujemny

$$\left(f_i(X_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(X_{i+1}, \alpha_{i+1}) - \frac{\partial \alpha_i}{\partial X_i} F_i(X_{i+1}) \right) = -c_{i+1}(x_{i+1} - \alpha_i(X_i)) \quad (4.27)$$

dla pewnego $c_{i+1} > 0$.

Klasa obiektów (4.17) może być rozszerzona do klasy

$$\dot{x}_i = h_{i1}(X_i) + a_i \left(h_{i2}(X_i) x_{i+1}^m + h_{i3}(X_i) \right)^k, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.28)$$

gdzie a_i – pewien niezerowy współczynnik, $h_{ij}(X_i)$ – gładkie funkcje, m – liczba naturalna;

- warunek (i): jeżeli k jest liczbą naturalną, to nie nakłada się żadnych dodatkowych warunków na h_{i2}, h_{i3} ,
- warunek (ii): jeżeli k jest niezerową liczbą wymierną, to dla wszystkich X_{i+1} nakłada się warunek

$$h_{i2}(X_i) x_{i+1}^m + h_{i3}(X_i) > 0$$

Lemat 4.1. Dla obiektów klasy (4.28) sterowanie otrzymane za pomocą procedury całkowania wstecznego jest dobrze uwarunkowane numerycznie.

Dowód. Należy udowodnić, że składnik zawierający funkcję $\bar{f}_i(X_{i+1})$ nie zawiera dzielenia przez zero w prawie sterowania wyznaczonym w kroku $(i + 1)$. Zanalizujmy równ. (4.24).

Przypadek 1. Jeżeli k jest liczbą naturalną, to otrzymuje się

$$\begin{aligned} f_i(X_i, x_{i+1}) - f_i(X_i, \alpha_i) &= a_i \left((h_{i2}(X_i) x_{i+1}^m + h_{i3}(X_i))^k \right. \\ &\quad \left. - (h_{i2}(X_i) \alpha_i^m + h_{i3}(X_i))^k \right) = a_i h_{i2}(X_i) (x_{i+1} - \alpha_i) \\ &\times (x_{i+1}^{m-1} + x_{i+1}^{m-2} \alpha_i + \dots + \alpha_i^{m-1}) A = \bar{f}_i(X_{i+1}) (x_{i+1} - \alpha_i) \end{aligned} \quad (4.29)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
A &= \left(h_{i2}(X_i)x_{i+1}^m + h_{i3}(X_i) \right)^{k-1} + \left(h_{i2}(X_i)x_{i+1}^m + h_{i3}(X_i) \right)^{k-2} \\
&\quad \times \left(h_{i2}(X_i)\alpha_i^m + h_{i3}(X_i) \right) + \dots + \left(h_{i2}(X_i)x_{i+1}^m + h_{i3}(X_i) \right) \\
&\quad \times \left(h_{i2}(X_i)\alpha_i^m + h_{i3}(X_i) \right)^{k-2} + \left(h_{i2}(X_i)\alpha_i^m + h_{i3}(X_i) \right)^{k-1}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Okazało się, że możliwe jest wyciągnięcie składnika $x_{i+1} - a_i$ przed nawias bez dzielenia przez zero w $\bar{f}_i(X_{i+1})$.

Przypadek 2a. Jeżeli $k = \frac{p}{q}$ jest dodatnią liczbą wymierną, to można zastosować zależność:

$$\begin{aligned}
a^{p/q} - b^{p/q} &= (a - b)B \\
B &= \frac{a^{(p-1)/q} + a^{(p-2)/q}b^{1/q} + \dots + a^{2/q}b^{(p-2)/q} + b^{(p-1)/q}}{a^{(q-1)/q} + a^{(q-2)/q}b^{1/q} + \dots + a^{2/q}b^{(q-2)/q} + b^{(q-1)/q}} \\
p, q &\in \mathbf{N}, \quad a, b \in \mathbf{R}_+
\end{aligned} \tag{4.31}$$

W tym przypadku

$$\bar{f}_i(X_{i+1}) = a_i h_{i2}(X_i) \left(x_{i+1}^{m-1} + x_{i+1}^{m-2} \alpha_i + \dots + \alpha_i^{m-1} \right) B \tag{4.32}$$

Jeżeli $a = [h_{i2}(X_i)x_{i+1}^m + h_{i3}(X_i)]$, $b = [h_{i2}(X_i)\alpha_i^m + h_{i3}(X_i)]$ oraz przyjmie się B zdefiniowanym jak w (4.16), to a, b są dodatnie ze względu na warunek (ii) i dlatego mianownik B jest niezerowy.

Przypadek 2b. Jeżeli k jest ujemną liczbą wymierną

$$\begin{aligned}
&f_i(X_i, x_{i+1}) - f_i(X_i, \alpha_i) \\
&= a_i \left(\frac{1}{[h_{i2}(X_i)x_{i+1}^m + h_{i3}(X_i)]} - \frac{1}{[h_{i2}(X_i)\alpha_i^m + h_{i3}(X_i)]} \right) B
\end{aligned} \tag{4.33}$$

to a, b w B są takie same jak w (4.32). B jest dobrze określone, ponieważ a, b są dodatnie ze względu na warunek (ii). Po wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymuje się.

$$\begin{aligned}
&f_i(X_i, x_{i+1}) - f_i(X_i, \alpha_i) \\
&= a_i \left(\frac{-h_{i2}(X_i)(x_{i+1} - \alpha_i)(x_{i+1}^{m-1} + x_{i+1}^{m-2}\alpha_i + \dots + \alpha_i^{m-1})}{[h_{i2}(X_i)x_{i+1}^m + h_{i3}(X_i)][h_{i2}(X_i)\alpha_i^m + h_{i3}(X_i)]} \right) B
\end{aligned} \tag{4.34}$$

oraz

$$\bar{f}_i(X_{i+1}) = a_i \left(\frac{-h_{i2}(X_i)(x_{i+1}^{m-1} + x_{i+1}^{m-2}\alpha_i + \dots + \alpha_i^{m-1})}{[h_{i2}(X_i)x_{i+1}^m + h_{i3}(X_i)][h_{i2}(X_i)\alpha_i^m + h_{i3}(X_i)]} \right) B \quad (4.35)$$

Mianownik wyrażenia w głównym nawiasie jest niezerowy dzięki warunkowi (ii).

Uwaga. Klasa rozważanych obiektów jest odpowiednia do procesów, w których zachodzi przepływ płynów. W procesach takich za zmienne stanu przyjmuje się wartości ciśnienia panującego w różnych częściach obiektu. Strumień masy jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z różnicy ciśnienia, jeżeli można pominąć zmianę gęstości

$$m = \beta \sqrt{p_2 - p_1} \quad (4.36)$$

Jeżeli zmiana gęstości ma znaczenie, to przepływ jest proporcjonalny do pierwiastka z różnicy kwadratów wartości ciśnienia (4.37).

$$m = \beta \sqrt{p_2^2 - p_1^2} \quad (4.37)$$

gdzie: m – strumień masy płynu, p_1 – niższe ciśnienie (ujście), p_2 – wyższe ciśnienie (źródło), β – współczynnik związany z oporem.

Prawo regulacji uzyskane metodą całowania wstecznego można przystosować do sytuacji wymagającej adaptacji niektórych parametrów. Adaptacji można dokonać, tworząc równania różniczkowe, których rozwiązaniem jest bieżąca estymata nieznanego parametru. Syntezę adaptacyjnego prawa regulacji rozpoczyna się od wyznaczenia prawa regulacji w przypadku znajomości adaptowanych parametrów (ang. *certainly equivalence*) [Kstić et al. 1995], [Ioannou, Sun 1996], [Feng, Lozano 1999].

Niech obiekt będzie opisany równaniem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta} + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (4.38)$$

Zakłada się, że można znaleźć prawo regulacji $u = u_c(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ stabilizujące układ (4.38) na podstawie funkcji Lapunowa $V_c(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ (indeks c pochodzi od ang. *certainly*). Gdy wartość $\boldsymbol{\theta}$ jest nieznaną, prawo regulacji może być obliczane tylko na podstawie estymaty $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Wprowadza się błąd adaptacji $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Funkcję Lapunowa uwzględniającą adaptację otrzymuje się, uzupełniając funkcję V_c o składnik zależny od błędu adaptacji

$$V_a(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = V_c(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 \quad (4.39)$$

gdzie γ – współczynnik adaptacji.

Zakłada się, że adaptowany parametr jest stały, chociaż nieznan. Oznacza to, że $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$. Obliczając pochodną adaptacyjnej funkcji Lapunowa, otrzymuje się

$$\dot{V}_a(\mathbf{x}, \hat{\theta}) = \dot{V}_c(\mathbf{x}, \hat{\theta}) - \frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{\theta}} \hat{\theta} \quad (4.40)$$

Sterowanie $u = u_c(\mathbf{x}, \hat{\theta})$ nie zapewnia tego, że pierwszy składnik pochodnej funkcji V_a będzie ujemny, ponieważ w równaniu obiektu nie występuje $\hat{\theta}$, lecz θ . Wykonując przekształcenia polegające na jednoczesnym dodawaniu i odejmowaniu odpowiednich składników do równ. (4.40), można doprowadzić do postaci

$$\dot{V}_a(\mathbf{x}, \hat{\theta}) = -W(\mathbf{x}, \hat{\theta}) + W_0(\mathbf{x}, \hat{\theta}, \tilde{\theta}) - \frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{\theta}} \hat{\theta} \quad (4.41)$$

gdzie funkcja $W(\mathbf{x}, \hat{\theta})$ jest dodatnio określona.

Kolejnym etapem przekształcania jest wyciągnięcie przed nawias z dwu ostatnich wyrazów składnika $\tilde{\theta}$

$$\dot{V}_a(\mathbf{x}, \hat{\theta}) = -W(\mathbf{x}, \hat{\theta}) + \tilde{\theta} \left(W_1(\mathbf{x}, \hat{\theta}) - \frac{1}{\gamma} \dot{\hat{\theta}} \right) \quad (4.42)$$

W_1 , W_0 funkcje wynikające z wykonania odpowiednich przekształceń.

Pochodna funkcji Lapunowa staje się ujemna, jeśli ostatni wyraz w równ. (4.42) zostanie wyeliminowany, co uzyskuje się przez wprowadzenie prawa adaptacji

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma W_1(\mathbf{x}, \hat{\theta}) \quad (4.43)$$

W ten sposób uzyskano równanie różniczkowe, które rozwiązywane podczas regulacji obiektu daje estymatę nieznanego parametru θ .

Warunkiem prowadzenia poprawnej adaptacji jest tzw. warunek ciągłego pobudzania [Ioannou, Sun 1996]. Oznacza to, że adaptacja nie następuje, gdy obiekt znajduje się w stanie ustalonym. Adaptacja może zachodzić jedynie podczas przebiegów przejściowych.

5. Zastosowanie metody całkowania wstecznego do sterowania bloku energetycznego

5.1. Synteza nieliniowego regulatora

Model obiektu (równanie (2.9))

$$\begin{aligned} T_h \dot{x}_1 &= -x_1 + p_T u_1, & C_{sh} \dot{p}_T &= k\sqrt{\gamma p_D - p_T} - p_T u_1 \\ T_w \dot{m}_w &= -m_w + u_2, & C_D \dot{p}_D &= m_w - k\sqrt{\gamma p_D - p_T} \end{aligned} \quad (5.1)$$

ma punkt równowagi:

$$u_2 = m_w = k\sqrt{\gamma p_D - p_T} = p_T u_1 = x_1 \quad (5.2)$$

Równowaga układu może być osiągnięta dla dowolnej wartości mocy x_1 i ciśnienia przed turbiną p_T . Celem pracy układu regulacji jest produkowanie zadanej mocy P_z pod stałym ciśnieniem w walczaku $p_T = 1$. Aby usytuować punkt równowagi dla tych wartości, należy w układzie regulacji wprowadzić odpowiednie działania całkujące. Równania mają wtedy postać

$$\begin{aligned} T_h \dot{x}_1 &= -x_1 + p_T u_1, & C_{sh} \dot{p}_T &= k\sqrt{\gamma p_D - p_T} - p_T u_1 \\ T_{i1} \dot{e}_1 &= x_1 - P_z, & C_D \dot{p}_D &= m_w - k\sqrt{\gamma p_D - p_T} \\ T_{i2} \dot{e}_2 &= p_T - 1, & T_w \dot{m}_w &= -m_w + u_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

T_{i1}, T_{i2} – stałe czasowe integratorów.

W punkcie równowagi zmienne stanu osiągną wartości

$$x_1 = m_w = P_z, \quad p_T = 1, \quad p_D = \frac{k^2 + P_z^2}{\gamma k^2} \quad (5.4)$$

W stanie równowagi sterowania muszą mieć one wartości

$$u_1 = \frac{P_z}{p_T}, \quad u_2 = P_z, \quad p_T = 1 \quad (5.5)$$

Aby uprościć obliczenia, przesuwa się punkt równowagi do początku układu nowych współrzędnych, oznaczanych tyldą. Można też łatwo wyeliminować nieliniowość związaną ze sterowaniem u_1

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1 + P_z \\ p_T &= \tilde{p}_T + 1 \\ u_1 &= \frac{\tilde{u}_1 + P_z}{\tilde{p}_T + 1} \\ p_D &= \tilde{p}_D + \frac{k^2 + P_z^2}{\gamma k^2} \\ m_w &= \tilde{m}_w + P_z \\ u_2 &= \tilde{u}_2 + P_z \end{aligned} \quad (5.6)$$

Układ równań w nowych współrzędnych jest następujący:

$$\begin{aligned} T_h \dot{\tilde{x}}_1 &= -\tilde{x}_1 + \tilde{u}_1 \\ T_{i1} \dot{\tilde{e}}_1 &= \tilde{x}_1 \\ T_{i2} \dot{\tilde{e}}_2 &= \tilde{p}_T \end{aligned} \quad (5.7a)$$

$$\begin{aligned} C_{sh} \dot{\tilde{p}}_T &= k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} - \tilde{u}_1 - P_z \\ C_{D} \dot{\tilde{p}}_D &= \tilde{m}_w + P_z - k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} \\ T_w \dot{\tilde{m}}_w &= -\tilde{m}_w + \tilde{u}_2 \end{aligned} \quad (5.7b)$$

Zasady syntezy oparte na metodzie całkowania wstecznego opisano w rozdz. 4. W pierwszym kroku synteza regulatora zostanie przeprowadzona dla pierwszych trzech równań (5.7a), które są liniowe; zmienna \tilde{p}_T będzie traktowana jako pierwsze wirtualne sterowanie α_1 . Liniowy podukład (5.7a) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_h} & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{i1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_h} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{i2}} \end{bmatrix}$$

Dla tego podukładu wyznacza się regulator liniowo-kwadratowy, rozwiązując odpowiednie równanie Riccatiego. Dodatkowo określona, symetryczna macierz \mathbf{P} , która jest rozwiązaniem tego równania, może być użyta do skonstruowania funkcji Lapunowa (5.9), której pochodna jest ujemna (klasyczny wynik w teorii sterowania)

$$V_3 = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (5.9)$$

Wyznaczone na tej podstawie sygnały sterujące mają następującą postać:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

czyli wirtualne sterowanie wyznaczone w tym kroku jest równe

$$\alpha_1 = \mathbf{g}_2 \mathbf{x} \quad (5.11)$$

W kolejnym kroku procedury całkowania wstecznego funkcję Lapunowa uzupełnia się składnikiem zawierającym różnicę między wirtualnym sterowaniem a rzeczywistą zmienną

$$V_4 = V_3 + \frac{1}{2} (\tilde{p}_T - \alpha_1)^2 \quad (5.12)$$

Za wirtualne sterowanie w tym kroku wybiera się zmienną \tilde{p}_T . Prawo regulacji związane z nią należy tak dobrać, aby pochodna funkcji V_4 była ujemnie określona

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + (\tilde{p}_T - \alpha_1) (\dot{\tilde{p}}_T - \dot{\alpha}_1) \\ &= \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \mathbf{x} \\ \tilde{p}_T \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \mathbf{x} \\ \tilde{p}_T \end{bmatrix} \right) + (\tilde{p}_T - \alpha_1) (\dot{\tilde{p}}_T - \dot{\alpha}_1) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Rozpisując pierwszy składnik i dodając człony, które zależą od wyznaczonego wirtualnego sterowania, nie zaś od zmiennej \tilde{p}_T , otrzymuje się

$$\begin{aligned}
\dot{V}_4 = & (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + (\mathbf{b}_2 \tilde{p}_T)^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{x}) + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{b}_2 \tilde{p}_T) \\
& + (\tilde{p}_T - \alpha_1) (\dot{\tilde{p}}_T - \dot{\alpha}_1) + (\mathbf{b}_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{b}_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{x}) - (\mathbf{b}_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} \\
& - \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{b}_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \left((\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{g})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{g}) \right) \mathbf{x} + (\mathbf{b}_2 \tilde{p}_T)^T \mathbf{P} \mathbf{x} \\
& + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{b}_2 \tilde{p}_T) - (\mathbf{b}_2 \alpha_1)^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{b}_2 \alpha_1) + (\tilde{p}_T - \alpha_1) (\dot{\tilde{p}}_T - \dot{\alpha}_1)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Ponieważ \mathbf{P} i \mathbf{g} wynikają z rozwiązania równania Riccatiego, więc pierwszy składnik w równ. (5.14) jest na pewno mniejszy od pewnej ujemnie określonej funkcji $-W_3$. Z pozostałych składników wyciąga się czynnik $(\tilde{p}_T - \alpha_1)$ przed nawias

$$\begin{aligned}
\dot{V}_4 \leq & -W_3 + (\tilde{p}_T - \alpha_1) (2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_2 + \dot{\tilde{p}}_T - \dot{\alpha}_1) \\
= & -W_3 + (\tilde{p}_T - \alpha_1) \left(2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_2 + \frac{1}{C_{sh}} \left(k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} - \tilde{u}_1 - P_z \right) - \dot{\alpha}_1 \right)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

W równaniu tym zmienną \tilde{p}_D (wirtualne sterowanie α_2) należy wyznaczyć tak, aby drugi składnik sumy był równy $-c_4 (\tilde{p}_T - \alpha_1)^2$, gdzie $c_4 > 0$, czyli

$$2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_2 + \frac{1}{C_{sh}} \left(k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} - \tilde{u}_1 - P_z \right) - \dot{\alpha}_1 = -c_4 (\tilde{p}_T - \alpha_1) \tag{5.16}$$

$$\sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} = \frac{C_{sh} (-c_4 (\tilde{p}_T - \alpha_1) - 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_2 + \dot{\alpha}_1) + \tilde{u}_1 + P_z}{k} \tag{5.17}$$

Równanie (5.17) ma sens tylko wtedy, gdy prawa strona jest dodatnia. Można stwierdzić, że w pewnym otoczeniu punktu równowagi wszystkie zmienne stanu są równe zero, a o znaku tego wyrażenia decyduje moc zadana P_z . Wielkość otoczenia zostanie rozpatrzona w innym miejscu. Podnosząc obustronnie do kwadratu ostatnie równanie, otrzymuje się wyrażenie określające wirtualne sterowanie α_2

$$\alpha_2 = \tilde{p}_D = \frac{k^2 \tilde{p}_T - P_z^2 + \left(C_{sh} (-c_4 (\tilde{p}_T - \alpha_1) - 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_2 + \dot{\alpha}_1) + \mathbf{g}_1 \mathbf{x} + P_z \right)^2}{\gamma k^2} \tag{5.18}$$

Pochodną pierwszego wirtualnego sterowania α_1 po czasie oblicza się analitycznie:

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial (\mathbf{g}_2 \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{p}_T \end{bmatrix} \right) = \mathbf{g}_2 \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \mathbf{x} \\ \tilde{p}_T \end{bmatrix} \right) \tag{5.19}$$

W kolejnym kroku funkcję Lapunowa uzupełnia się o składnik zawierający różnicę pomiędzy ciśnieniem w walczaku \tilde{p}_D a wirtualnym sterowaniem α_2

$$V_5 = V_4 + \frac{1}{2}(\tilde{p}_D - \alpha_2)^2 \quad (5.20)$$

W celu uzyskania ujemnej pochodnej funkcji V_5 , zmienna \tilde{m}_w zostanie użyta jako kolejne wirtualne sterowanie

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 &= \dot{V}_4 + (\dot{\tilde{p}}_D - \dot{\alpha}_2)(\tilde{p}_D - \alpha_2) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + (\dot{\tilde{p}}_T - \dot{\alpha}_1)(\tilde{p}_T - \alpha_1) + (\dot{\tilde{p}}_D - \dot{\alpha}_2)(\tilde{p}_D - \alpha_2) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Po wykorzystaniu przekształceń wykonanych w poprzednim kroku i wprowadzeniu odpowiedniego składnika zawierającego wirtualne sterowanie α_2 otrzymuje się

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 &= \mathbf{x}^T \left(\mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{g}) + (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{g})^T \mathbf{P} \right) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_2 (\tilde{p}_T - \alpha_1) \\ &\quad + (\tilde{p}_T - \alpha_1) \left(\frac{k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} - \mathbf{g}_1 \mathbf{x} - P_z}{C_{sh}} - \dot{\alpha}_1 \right) \\ &\quad + (\tilde{p}_T - \alpha_1) \left(\frac{k \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} - \mathbf{g}_1 \mathbf{x} - P_z}{C_{sh}} - \dot{\alpha}_1 \right) \\ &\quad - (\tilde{p}_T - \alpha_1) \left(\frac{k \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} - \mathbf{g}_1 \mathbf{x} - P_z}{C_{sh}} - \dot{\alpha}_1 \right) \\ &\quad + (\tilde{p}_D - \alpha_2)(\dot{\tilde{p}}_D - \dot{\alpha}_2) \\ \dot{V}_5 &= -W_3 - c_4(\tilde{p}_T - \alpha_1)^2 + \\ &\quad + \frac{k}{C_{sh}}(\tilde{p}_T - \alpha_1) \left(\sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} - \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} \right) \\ &\quad + (\tilde{p}_D - \alpha_2)(\dot{\tilde{p}}_D - \dot{\alpha}_2) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Kolejną trudnością w dalszych obliczeniach jest wyciągnięcie z drugiego składnika przed nawias czynnika $(\tilde{p}_D - \alpha_2)$. Równanie obiektu nie jest liniowe względem wirtualnego sterowania α_2 . W rozdziale 4 rozważono to zagadnienie w sposób szczegółowy. W ogólnym przypadku wyciągnięcie takiego składnika przed nawias powo-

duje, że obliczanie prawa regulacji według takiej zależności jest źle uwarunkowane numerycznie. Można wskazać klasę obiektów (do której należy rozważany tu model), dla której możliwe jest uniknięcie niestabilności numerycznej przez zastosowanie odpowiednich przekształceń.

Wyrażenie znajdujące się w składniku w drugiej linii sumy można przekształcić w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\gamma\tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} - \sqrt{\gamma\alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} \\
 &= \frac{\gamma\tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2 - \left(\gamma\alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2\right)}{\sqrt{\gamma\tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} + \sqrt{\gamma\alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2}} \\
 &= \frac{\gamma(\tilde{p}_D - \alpha_2)}{\sqrt{\gamma\tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} + \sqrt{\gamma\alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2}}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

zatem

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_5 = & -W_3 - c_4(\tilde{p}_T - \alpha_1)^2 \\
 & + (\tilde{p}_D - \alpha_2) \left(\frac{k\gamma}{C_{sh}} \frac{(\tilde{p}_T - \alpha_1)}{\sqrt{\gamma\tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} + \sqrt{\gamma\alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2}} + \dot{\tilde{p}}_D - \dot{\alpha}_2 \right)
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Wirtualne sterowanie $\alpha_3 = \tilde{m}_w$ należy tak dobrać, aby

$$\frac{k\gamma}{C_{sh}} \frac{(\tilde{p}_T - \alpha_1)}{\sqrt{\gamma\tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} + \sqrt{\gamma\alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2}} + \dot{\tilde{p}}_D - \dot{\alpha}_2 = -c_5(\tilde{p}_D - \alpha_2) \tag{5.26}$$

Wstawiając wyrażenie określające $\dot{\tilde{p}}_D$, otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{C_D} \left(-k\sqrt{\gamma\tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} + \tilde{m}_w + P_z \right) \\
 &= -c_5(\tilde{p}_D - \alpha_2) - \frac{k\gamma}{C_{sh}} \frac{(\tilde{p}_T - \alpha_1)}{\sqrt{\gamma\tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} + \sqrt{\gamma\alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2}} + \dot{\alpha}_2
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_w = \alpha_3 = & -c_5 C_D (\tilde{p}_D - \alpha_2) + k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - p_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} - P_z \\ & - \frac{C_D k \gamma}{C_{sh}} \frac{(\tilde{p}_T - \alpha_1)}{\sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} + \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2}} + C_D \dot{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Wyrażenie określające $\dot{\alpha}_2$ oblicza się analitycznie. Ze względu na jego rozmiar nie zostało tutaj przytoczone

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \tilde{p}_T} \dot{\tilde{p}}_T \quad (5.29)$$

Funkcja Lapunowa przyjmuje ostateczną postać przez dodanie kolejnego składnika

$$V = V_6 = V_5 + \frac{1}{2} (\tilde{m}_w - \alpha_3)^2 \quad (5.30)$$

Pochodną funkcji V trzeba uczynić funkcją ujemną przez wybór odpowiedniego, tym razem rzeczywistego, sterowania \tilde{u}_2

$$\begin{aligned} \dot{V}_6 = \dot{V}_5 + & (\tilde{m}_w - \alpha_3) (\dot{\tilde{m}}_w - \dot{\alpha}_3) \\ = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + & (\tilde{p}_T - \alpha_1) (\dot{\tilde{p}}_T - \dot{\alpha}_1) \\ & + (\tilde{p}_D - \alpha_2) (\dot{\tilde{p}}_D - \dot{\alpha}_2) + (\tilde{m}_w - \alpha_3) (\dot{\tilde{m}}_w - \dot{\alpha}_3) \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_6 = \mathbf{x}^T \left(\mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{g}) + (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{g})^T \mathbf{P} \right) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_2 (\tilde{p}_T - \alpha_1) \\ + (\tilde{p}_T - \alpha_1) \left(\frac{1}{C_{sh}} \left(k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} - \mathbf{g}_1 \mathbf{x} - P_z \right) - \dot{\alpha}_1 \right) \\ + (\tilde{p}_T - \alpha_1) \left(\frac{1}{C_{sh}} \left(k \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} - \mathbf{g}_1 \mathbf{x} - P_z \right) - \dot{\alpha}_1 \right) \\ - (\tilde{p}_T - \alpha_1) \left(\frac{1}{C_{sh}} \left(k \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} - \mathbf{g}_1 \mathbf{x} - P_z \right) - \dot{\alpha}_1 \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
& + (\tilde{p}_D - \alpha_2) \left(\frac{1}{C_D} \left(-k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} + \tilde{m}_w + P_z \right) - \dot{\alpha}_2 \right) \\
& + (\tilde{m}_w - \alpha_3) \left(\frac{1}{T_w} (-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2) - \dot{\alpha}_3 \right)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_6 = & -W_3 + (\tilde{p}_T - \alpha_1) \left(2\mathbf{x}^T \mathbf{Pb}_2 (\tilde{p}_T - \alpha_1) + \frac{1}{C_{sh}} \right. \\
& \times \left. \left(k \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} - \mathbf{g}_1 \mathbf{x} - P_z \right) - \dot{\alpha}_1 \right) \\
& + \frac{k}{C_{sh}} (\tilde{p}_T - \alpha_1) \left(\sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} - \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} \right) \\
& + (\tilde{p}_D - \alpha_2) \left(\frac{1}{C_D} \left(-k \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} + \tilde{m}_w + P_z \right) - \dot{\alpha}_2 \right) \\
& + (\tilde{m}_w - \alpha_3) \left(\frac{1}{T_w} (-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2) - \dot{\alpha}_3 \right)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_6 = & -W_3 - c_4 (\tilde{p}_T - \alpha_1)^2 \\
& + (\tilde{p}_D - \alpha_2) \left(\frac{k\gamma}{C_{sh}} \frac{(\tilde{p}_T - \alpha_1)}{\sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} + \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{C_D} \left(-k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} + \tilde{m}_w + P_z \right) - \dot{\alpha}_2 \right) \\
& + (\tilde{p}_D - \alpha_2) \left(\frac{k\gamma}{C_{sh}} \frac{(\tilde{p}_T - \alpha_1)}{\sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} + \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{C_D} \left(-k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} + \alpha_3 + P_z \right) - \dot{\alpha}_2 \right)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
& -(\tilde{p}_D - \alpha_2) \left(\frac{k\gamma}{C_{sh}} \frac{(\tilde{p}_T - \alpha_1)}{\sqrt{\gamma\tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} + \sqrt{\gamma\alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{C_D} \left(-k\sqrt{\gamma\tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k}\right)^2} + \alpha_3 + P_z \right) - \dot{\alpha}_2 \right) \\
& + (\tilde{m}_w - \alpha_3) \left(\frac{1}{T_w} (-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2) - \dot{\alpha}_3 \right)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Po podstawieniu wyrażenia określającego α_3 do trzeciego składnika oraz po uproszczeniu składnika drugiego i czwartego otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_6 = & -W_3 - c_4 (\tilde{p}_T - \alpha_1)^2 - c_5 (\tilde{p}_D - \alpha_2)^2 \\
& + (\tilde{m}_w - \alpha_3) \left(\frac{1}{C_D} (\tilde{p}_D - \alpha_2) + \frac{1}{T_w} (-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2) - \dot{\alpha}_3 \right)
\end{aligned} \tag{5.35}$$

W ostatnim składniku sterowanie \tilde{u}_2 dobiera się tak, aby zachodziła równość:

$$\frac{1}{C_D} (\tilde{p}_D - \alpha_2) + \frac{1}{T_w} (-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2) - \dot{\alpha}_3 = -c_6 (\tilde{m}_w - \alpha_3) \tag{5.36}$$

$$\tilde{u}_2 = \tilde{m}_w - T_w \left(c_6 (\tilde{m}_w - \alpha_3) + \frac{1}{C_D} (\tilde{p}_D - \alpha_2) - \dot{\alpha}_3 \right) \tag{5.37}$$

W ten sposób wyznaczono sterowania \tilde{u}_1 , \tilde{u}_2 metodą całkowania wstecznego. Zależność określającą $\dot{\alpha}_3$ wyznacza się w sposób analityczny.

5.2. Synteza adaptacyjnego prawa regulacji

Synteza adaptacyjnego prawa regulacji zostanie przeprowadzona dla modelu bloku energetycznego z działaniami całkującymi (5.3). Pierwszym etapem jest wyznaczenie prawa regulacji, w przypadku gdy wszystkie współczynniki są znane (certainty equivalence). Można zatem wykorzystać rezultaty uzyskane w poprzednim rozdziale.

Aby nie powtarzać uczynionych poprzednio kroków, opis syntezy rozpocznie się od modelu w postaci (5.7).

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{b}_2 \mathbf{g}_1) \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 \tilde{p}_T \\
\dot{\tilde{p}}_T &= \frac{1}{C_{sh}} \left(k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} - \mathbf{g}_1 \mathbf{x} - P_z \right) \\
\dot{\tilde{p}}_D &= \frac{1}{C_D} \left(\tilde{m}_w + P_z - k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} \right) \\
\dot{\tilde{m}}_w &= \rho (-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

wektory \mathbf{x} , \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 oraz macierz \mathbf{A} są określone zależnościami (5.8), wektor \mathbf{g}_1 wynika z syntezy liniowego prawa regulacji dla zmiennej \tilde{u}_1 , ρ – nieznaną odwrotność stałej czasowej T_w . Wartość ρ będzie podlega estymacji. Prawo regulacji wyznacza się na podstawie estymaty $\hat{\rho}$ tego parametru. Prawo regulacji określone, gdy ρ jest znane, przedstawiono w (5.39). Należy zauważyć, że sterowanie \tilde{u}_2 zależy będzie od estymaty $\hat{\rho}$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \mathbf{g}_2 \mathbf{x} \\
\alpha_2 &= \frac{k^2 \tilde{p}_T - P_z^2 + \left[C_{sh} \left(-c_4 (\tilde{p}_T - \alpha_1) - 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{b}_2 + \dot{\alpha}_1 \right) + \mathbf{g}_1 \mathbf{x} + P_z \right]^2}{\gamma k^2} \\
\alpha_3 &= -c_5 C_D (\tilde{p}_D - \alpha_2) + k \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} - P_z \\
&= \frac{C_D k \gamma (\tilde{p}_T - \alpha_1)}{C_{sh} \sqrt{\gamma \tilde{p}_D - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2} + \sqrt{\gamma \alpha_2 - \tilde{p}_T + \left(\frac{P_z}{k} \right)^2}} + C_D \dot{\alpha}_2 \\
\tilde{u}_2 &= \tilde{m}_w - \hat{\rho} \left(c_6 (\tilde{m}_w - \alpha_3) + \frac{1}{C_D} (\tilde{p}_D - \alpha_2) - \dot{\alpha}_3 \right)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

gdzie c_4 , c_5 , c_6 – stałe, dodatnie współczynniki określające udział poszczególnych składników w funkcji Lapunowa. Pochodne $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$, $\dot{\alpha}_3$ są obliczane analitycznie.

Celem syntezy prawa adaptacji jest wyznaczenie równania różniczkowego

$$\dot{\hat{\rho}} = \tau(\mathbf{x}, \tilde{p}_T, \tilde{p}_D, \tilde{m}_w, \hat{\rho}) \tag{5.40}$$

pozwalającego na bieżąco obliczać wartość estymaty $\hat{\rho}$ parametru ρ . Uzyskuje się to na podstawie funkcji Lapunowa uzupełnionej o składnik zależny od błędu adaptacji

$$V_a = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\tilde{p}_T - \alpha_1)^2 + \frac{1}{2} (\tilde{p}_D - \alpha_2)^2 + \frac{1}{2} (\tilde{m}_w - \alpha_3)^2 + \frac{|\rho|}{2\beta} (\rho - \hat{\rho})^2 \tag{5.41}$$

gdzie β – współczynnik określający szybkość adaptacji.

Prawo adaptacji należy tak dobrać, aby pochodna funkcji Lapunowa była ujemnie określona

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = & \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + (\tilde{p}_T - \alpha_1)(\dot{\tilde{p}}_T - \dot{\alpha}_1) + (\tilde{p}_D - \alpha_2)(\dot{\tilde{p}}_D - \dot{\alpha}_2) \\ & + (\tilde{m}_w - \alpha_3)(\dot{\tilde{m}}_w - \dot{\alpha}_3) + \frac{|\rho|}{\beta}(\rho - \hat{\rho})(\dot{\rho} - \dot{\hat{\rho}}) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Ponieważ ρ jest stałym parametrem, więc $\dot{\rho} = 0$. Następnie przeprowadza się przekształcenia podobne jak w przypadku pełnej znajomości wszystkich parametrów (równ. (5.9)–(5.35))

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = & -W_3 - c_4(\tilde{p}_T - \alpha_1)^2 - c_5(\tilde{p}_D - \alpha_2)^2 \\ & + (\tilde{m}_w - \alpha_3) \left(\frac{1}{C_D}(\tilde{p}_D - \alpha_2) + \rho(-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2) - \dot{\alpha}_3 \right) - \frac{|\rho|}{\beta}(\rho - \hat{\rho})\dot{\hat{\rho}} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Do równania (5.43) dodaje i odejmuje się wyrażenie zawierające estymatę nieznanego parametru

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = & -W_3 - c_4(\tilde{p}_T - \alpha_1)^2 - c_5(\tilde{p}_D - \alpha_2)^2 \\ & + (\tilde{m}_w - \alpha_3) \left(\frac{1}{C_D}(\tilde{p}_D - \alpha_2) + \rho(-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2) - \dot{\alpha}_3 \right) - \frac{|\rho|}{\beta}(\rho - \hat{\rho})\dot{\hat{\rho}} \\ & + (\tilde{m}_w - \alpha_3) \left(\frac{1}{C_D}(\tilde{p}_D - \alpha_2) + \hat{\rho}(-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2) - \dot{\alpha}_3 \right) \\ & - (\tilde{m}_w - \alpha_3) \left(\frac{1}{C_D}(\tilde{p}_D - \alpha_2) + \hat{\rho}(-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2) - \dot{\alpha}_3 \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Do trzeciego składnika wstawia się sterowanie \tilde{u}_2 z równ. (5.39). Z drugiego i czwartego wiersza wyciąga się przed nawias składnik $(\rho - \hat{\rho})$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -W_3 - c_4(\tilde{p}_T - \alpha_1)^2 - c_5(\tilde{p}_D - \alpha_2)^2 - c_6(\tilde{m}_w - \alpha_3)^2 \\ & + (\tilde{m}_w - \alpha_3)(-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2)(\rho - \hat{\rho}) - \frac{|\rho|}{\beta}(\rho - \hat{\rho})\dot{\hat{\rho}} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Wyrażenia zawierające nieznaną składnik ρ zostaną wyeliminowane, jeżeli będzie spełniona równość

$$(\tilde{m}_w - \alpha_3)(-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2) - \frac{|\rho|}{\beta}\dot{\hat{\rho}} = 0 \quad (5.46)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = \beta |\rho|^{-1} (\tilde{m}_w - \alpha_3)(-\tilde{m}_w + \tilde{u}_2) \quad (5.47)$$

Po uwzględnieniu zależności określającej sterowanie \tilde{u}_2 otrzymuje się

$$\dot{\hat{\rho}} = -\beta \frac{|\rho|}{\hat{\rho}} (\tilde{m}_w - \alpha_3) \left(c_6 (\tilde{m}_w - \alpha_3) + \frac{1}{C_D} (\tilde{p}_D - \alpha_2) - \dot{\alpha}_3 \right) \quad (5.48)$$

Ponieważ $\rho > 0$, więc przyjmuje się $\frac{|\rho|}{\hat{\rho}} = \text{sgn}(\rho) = 1$ [Krstić *et al.* 95]. Prawo adaptacji jest określone zależnością

$$\dot{\hat{\rho}} = \tau(\mathbf{x}, \tilde{p}_T, \tilde{p}_D, \tilde{m}_w) = -\beta (\tilde{m}_w - \alpha_3) \left(c_6 (\tilde{m}_w - \alpha_3) + \frac{1}{C_D} (\tilde{p}_D - \alpha_2) - \dot{\alpha}_3 \right) \quad (5.49)$$

5.3. Symulacje układu regulacji z całkowaniem wstecznym

Obiekt nieliniowy jest scharakteryzowany za pomocą układu równ. (2.3). Parametry modelu są takie same. Nieliniowe prawo regulacji (5.37) zapisano w procedurze sterowania (rys. 5.1). Informację o zmianie wartości zadanej P_z wprowadza się od razu do bloku generującego sygnały sterujące.

Dla liniowej części obiektu zastosowano liniowe sprzężenie zwrotne od stanu przy kwadratowym wskaźniku jakości. Macierze we wskaźniku jakości są równe

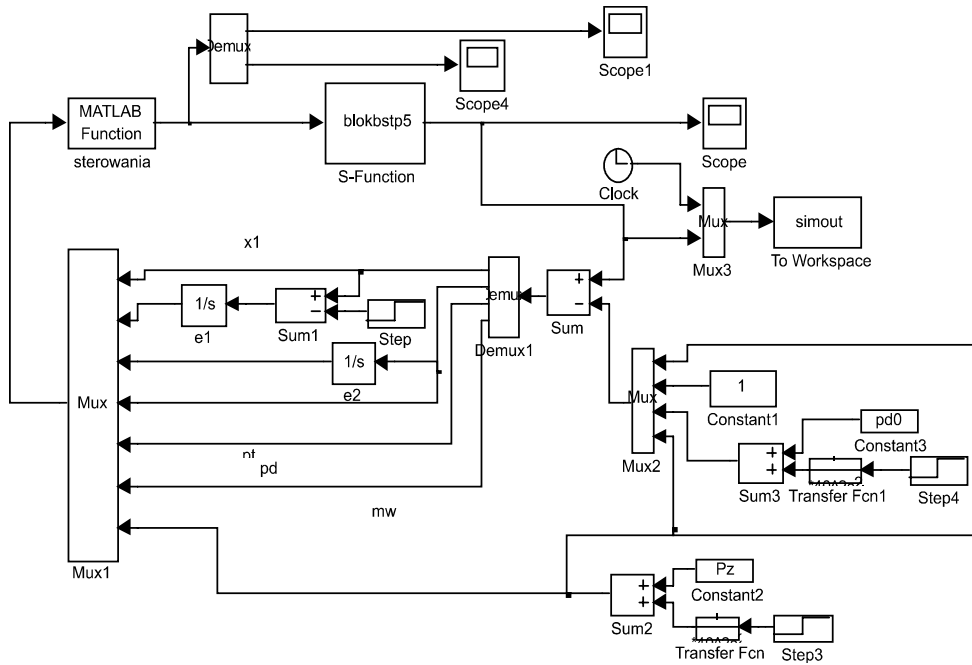
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-8} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = 1000 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Wartości własne części liniowej są następujące:

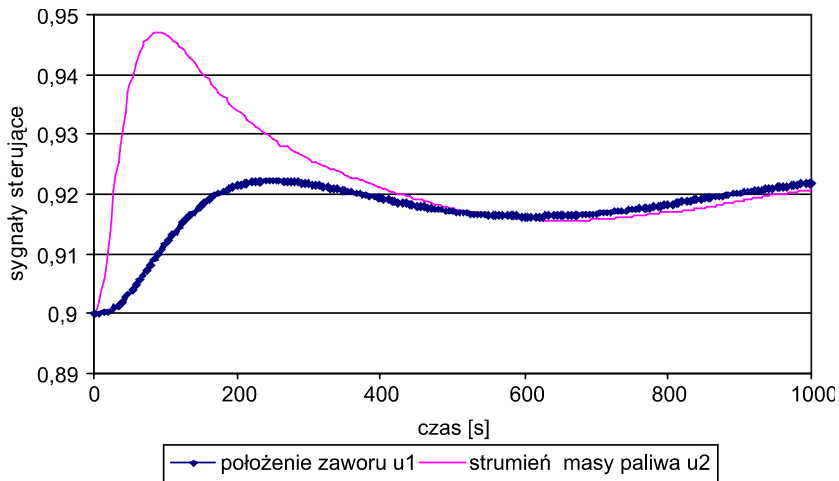
$$\begin{aligned} & -0,14244 \\ & -0,01182 \\ & -2,6352 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

- Wartości stałych czasowych integratorów: $T_{i1} = 0,6$ s, $T_{i2} = 1,2$ s.
- Wartości współczynników w funkcji Lapunowa (6.35) wynoszą: $c_4 = 0,23$, $c_5 = 0,001$, $c_6 = 0,00001$.

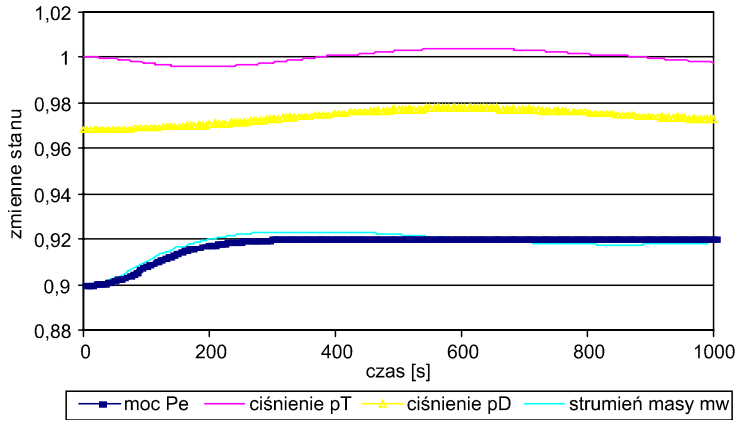
Należy podkreślić, że układ regulacji był bardzo wrażliwy na wartość współczynnika c_4 .



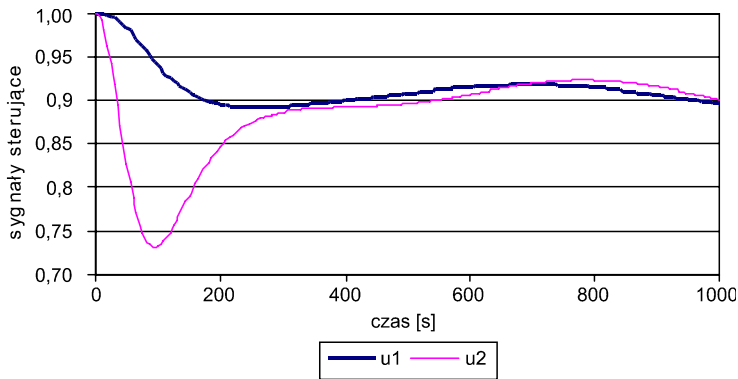
Rys. 5.1. Schemat modelu do badania układu regulacji (UAR) z całkowaniem wstecznym



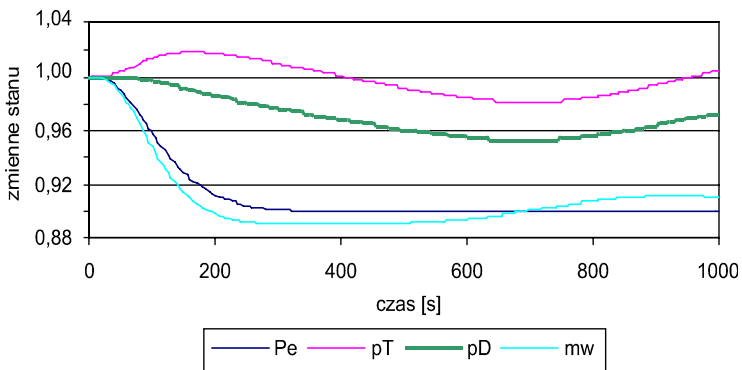
Rys. 5.2. UAR z całkowaniem wstecznym, sygnały sterujące bloku energetycznego, zmiana mocy zadanej P_2 o 2% od 0,90 do 0,92



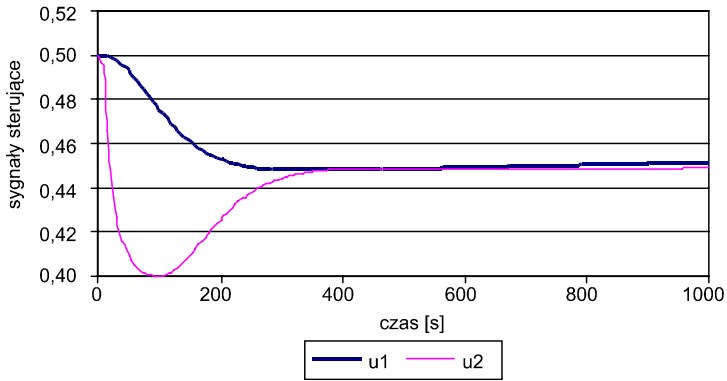
Rys. 5.3. UAR z całkowaniem wstecznym, zmienne stanu bloku energetycznego, zmiana mocy zadanej P_2 o 2% od 0,90 do 0,92



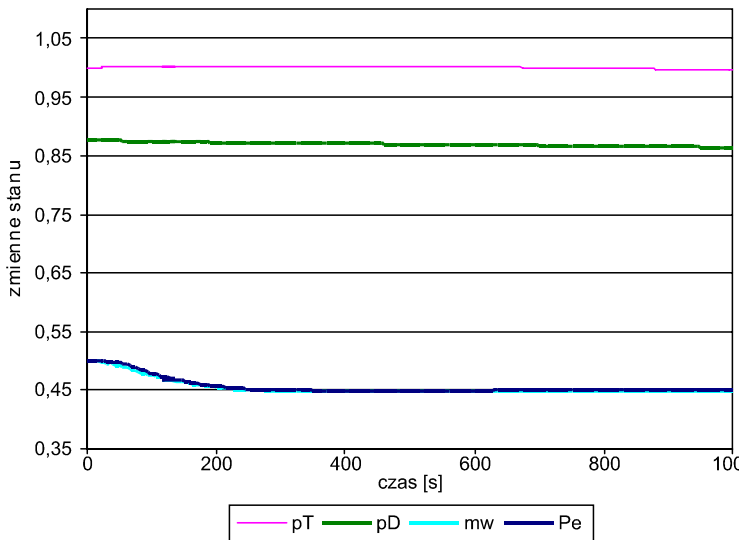
Rys. 5.4. UAR z całkowaniem wstecznym, sygnały sterujące bloku energetycznego, zmiana mocy zadanej P_2 o 10% od 1,0 do 0,90



Rys. 5.5. UAR z całkowaniem wstecznym, zmienne stanu bloku energetycznego, zmiana mocy zadanej P_2 o 10% od 1,0 do 0,90



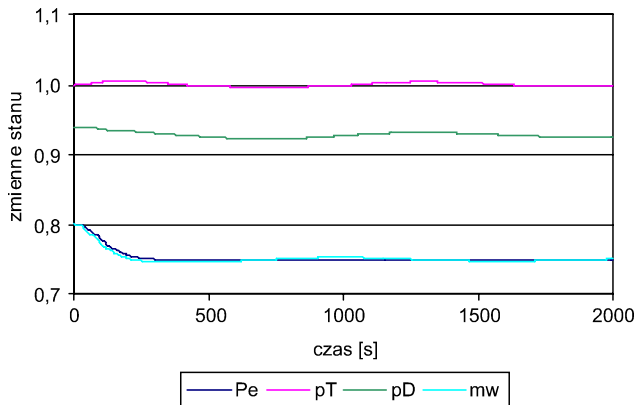
Rys. 5.6. UAR z całkowaniem wstecznym, sygnały sterujące bloku energetycznego, zmiana mocy zadanej P_z o 5% od 0,50 do 0,45



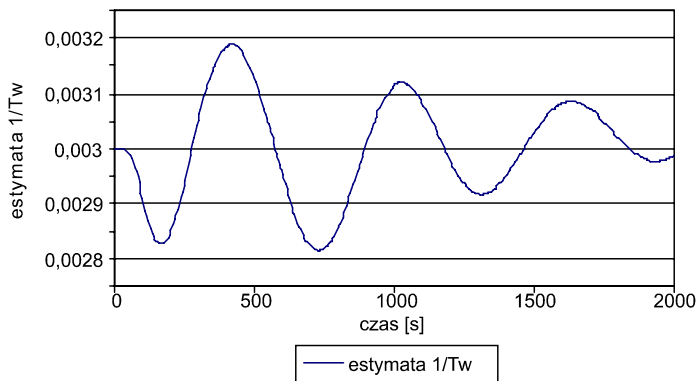
Rys. 5.7. UAR z całkowaniem wstecznym, zmienne stanu bloku energetycznego, zmiana mocy zadanej P_z o 5% od 0,50 do 0,45

5.4. Układ z całkowaniem wstecznym i adaptacją

Obiekt nieliniowy jest scharakteryzowany układem równań (2.3). Parametry modelu i parametry prawa regulacji są jak w p. 5.3. Prawo adaptacji (5.49) zostało zrealizowane za pomocą S -funkcji pod nazwą adaptacja. Adaptowanym parametrem jest odwrotność stałej czasowej inercji cieplnej kotła. Jej rzeczywista wartość wynosiła:

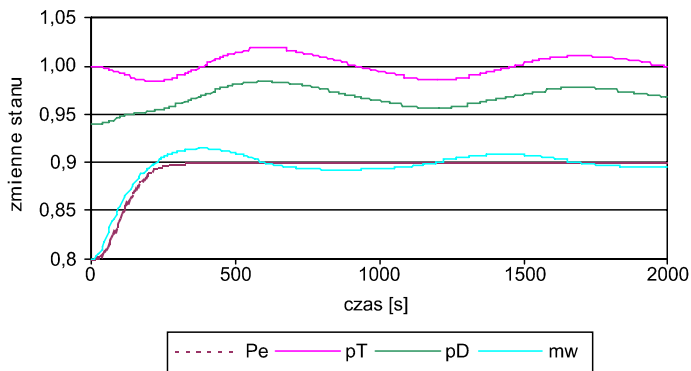


Rys. 5.10. UAR z adaptacją, zmienne stanu bloku energetycznego

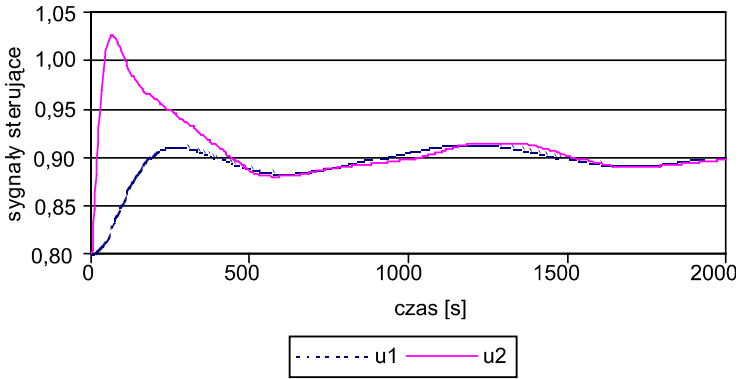


Rys. 5.11. UAR z adaptacją, estymata ($1/T_w$) inercji cieplnej bloku energetycznego

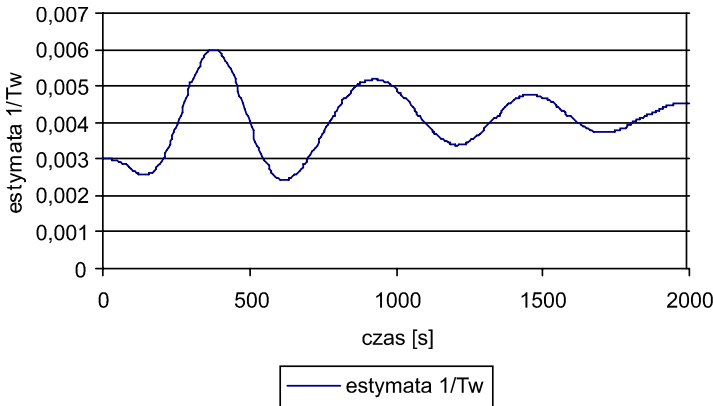
Drugi eksperyment
Zmiana mocy zadanej P_z o 10% od 0,80 do 0,90



Rys. 5.12. UAR z adaptacją, zmienne stanu bloku energetycznego



Rys. 5.13. UAR z adaptacją, sygnały sterujące bloku energetycznego



Rys. 5.14. UAR z adaptacją, estymata ($1/T_w$) inercji cieplnej bloku energetycznego, zmiana mocy zadanej P_z o 10% od 0,80 do 0,90

Najszybsze zmiany mocy można było uzyskać za pomocą układu całkowania wstecznego wyznaczonego dla uproszczonego modelu inercji cieplnej kotła. Układ osiągał nową wartość zadaną po ok. 200–300 sekundach bez przeregulowania (rys. 5.10).

Uzyskanie tak dobrych właściwości układu w przypadku metody całkowania wstecznego do syntezy układu regulacji mocy bloku energetycznego wymagało jednak bardzo dużych zmian sygnału sterującego paliwem (rys. 5.9), co nie jest korzystne dla młynów zasilających kocioł. Układ całkowania wstecznego z adaptacją wykazywał zarówno dłuższy czas ustalania się stanu ustalonego mocy, jak i powolną zbieżność estymaty nieznanego parametru obiektu i zależną od znaku zakłócenia mocą zadaną (rys. 5.11–5.14).

6. Układy wykorzystujące linearyzację

W przedstawionych przykładach zastosowania linearyzacji wykorzystano przekształcenie zmiennych stanu i sprzężenie zwrotne do syntezy układów regulacji w wybranych procesach termoeenergetycznych. Modele matematyczne tych procesów omówiono w rozdziale 2. Działanie wyznaczonych nieliniowych układów regulacji porównano z działaniem typowych układów liniowych na podstawie eksperymentów symulacyjnych.

Rozważane obiekty energetyczne można opisać nieliniowymi równaniami różniczkowymi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (6.1)$$

gdzie: $\mathbf{x} \in X \subset \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} \in U \subset \mathbf{R}^m$ są wektorami stanu i sterowania, $\mathbf{F}(\cdot, \cdot): X \times U \rightarrow \mathbf{R}^n$ jest gładkim odwzorowaniem.

W teorii sterowania najlepiej poznano zasady analizy i syntezy układu regulacji dla obiektów liniowych

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (6.2)$$

gdzie \mathbf{A} , \mathbf{B} są macierzami o stałych współczynnikach o wymiarach $n \times n$ oraz $n \times m$.

Obiekty (6.2) stanowią podzbiór obiektów klasy (6.1) dla $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$. Interesujące jest pytanie, czy można dla obiektów nieliniowych przeprowadzić synteze układu regulacji metodami opracowanymi dla obiektów liniowych. Zagadnienie to określa się mianem linearyzacji obiektu nieliniowego. Należy przy tym odpowiedzieć na pytanie, kiedy i jak można przeprowadzić linearyzację oraz w jakich warunkach pracy obiektu linearyzacja ta jest poprawna.

Istnieją dwa podejścia do linearyzacji. Jedno jest klasyczne, oparte na zastosowaniu przybliżenia liniowego, drugie to podejście stosunkowo nowe, oparte na zastosowaniu przekształcenia zmiennych stanu i sprzężenia zwrotnego. Podejście to wynika ze stwierdzenia, że nieliniowość w modelu obiektu nie jest jego zasadniczą cechą, lecz pojawia się w równaniach jedynie ze względu na „niewłaściwy” wybór zmiennych stanu.

W dalszej części rozdziału wprowadzono definicje precyzujące poszczególne rodzaje linearyzacji oraz warunki wystarczające i konieczne do jej przeprowadzenia.

6.1. Przybliżenie liniowe

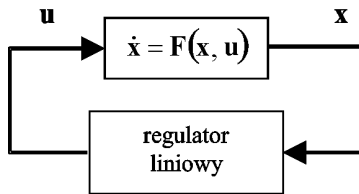
Niech $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$ określa stan równowagi układu (równ. (4.1)), tzn. $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0}$. Bez straty ogólności można przyjąć, że $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. Funkcję $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ można rozwinąć w szereg Taylora wokół tego punktu i zastąpić ją przybliżeniem liniowym, pomijając składniki wyższych rzędów

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cong \left[\left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}}} \right] \mathbf{x} + \left[\left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}}} \right] \mathbf{u} \quad (6.3)$$

Otrzymuje się przybliżenie liniowe układu (4.1) w zapisie (4.2), gdzie:

$$\mathbf{A} = \left[\left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}}} \right] \quad \text{oraz} \quad \mathbf{B} = \left[\left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{0} \\ \mathbf{u}=\mathbf{0}}} \right] \quad (6.4)$$

Projektując układ regulacji na podstawie przybliżenia liniowego, nie wprowadza się do jego struktury żadnych dodatkowych elementów.



Rys. 6.1. Schemat struktury układu regulacji wyznaczonego na podstawie przybliżenia liniowego

Regulator liniowy, którego schemat pokazano na rys. 6.1, projektuje się tak, jakby obiekt był liniowy, pomijając wszelkie nieliniowości. Przybliżenie to dobrze oddaje właściwości dynamiczne układu jedynie wokół punktu równowagi.

Jeśli posługujemy się metodą linearyzacji przez sprzężenie zwrotne, należy zdefiniować pochodną i nawias Liego.

Niech $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ oraz $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ będą odwzorowaniami $\mathbf{f}, \mathbf{g}: X \rightarrow \mathbf{R}^n, \mathbf{x} \in X \subset \mathbf{R}^n$. Odwzorowania te można zapisać w postaci wektorów kolumnowych. Nazywa się je również polami wektorowymi

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Niech $\omega(\mathbf{x})$ będzie kowektorem, czyli wektorem wierszowym o wymiarze $1 \times n$, którego składowymi są funkcje gładkie

$$\omega(\mathbf{x}) = [\omega_1(\mathbf{x}) \quad \omega_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \omega_n(\mathbf{x})]$$

Kowektorem o szczególnym znaczeniu jest gradient. Oznacza się go jako $d\lambda$ lub $\nabla_x \lambda$. Każda składowa i -tego kowektora jest pochodną cząstkową funkcji λ po i -tej zmiennej x_i . $d\lambda$ nazywa się również formą różniczkową pierwszego rzędu

$$d\lambda(\mathbf{x}) = \nabla_x \lambda(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]$$

Używa się również bardziej zwartej zapisu

$$d\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

Przejdzie między wektorami a kowektorami (i odwrotnie) odbywa się za pomocą operacji transponowania. Transponowany kowektor jest wektorem kolumnowym

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \omega^T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \omega_1(\mathbf{x}) \\ \omega_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \omega_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Niech $\lambda(\mathbf{x})$ będzie gładką, skalarną funkcją n zmiennych; $\mathbf{x} \in X \subset \mathbf{R}^n$.

Definicja 6.1. Pochodna Liego $L_r \lambda(\mathbf{x})$ funkcji $\lambda(\mathbf{x})$ wzdłuż pola $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ jest zdefiniowana jako

$$L_r \lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Jeżeli pochodną Liego oblicza się wielokrotnie, to stosuje się oznaczenie

$$L_r^i \lambda(\mathbf{x}) = L_r(L_r^{i-1} \lambda(\mathbf{x}))$$

$$L_r^0 \lambda(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})$$

Pochodne Liego można wyznaczać wzdłuż różnych pól wektorowych. Stosuje się wówczas oznaczenia

$$L_g L_r \lambda(\mathbf{x}) = L_g(L_r \lambda(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(L_r \lambda(\mathbf{x}))}{\partial x_i} g_i(\mathbf{x})$$

Kolejnym fundamentalnym pojęciem jest nawias Liego

Definicja 6.2. Nawias Liego dwóch pól wektorowych $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ jest określony zależnością

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

gdzie

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

oznaczają macierze Jacobiego dla $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. □

W celu uproszczenia zapisu będzie pomijane oznaczenie zależności od \mathbf{x} .

Nawias Liego można obliczać wielokrotnie, co prowadziłoby do zapisu $[\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \dots, [\mathbf{f}, \mathbf{g}] \dots]]$. Dla skrócenia zapisu stosuje się oznaczenie

$$ad_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g} = [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}}^{k-1} \mathbf{g}] \quad \text{dla } k > 0$$

$$ad_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g} = \mathbf{g}$$

Nawias Liego ma następujące właściwości:

- Jest dwuliniowy nad zbiorem liczb rzeczywistych. Niech $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ będą polami wektorowymi, a r_1 , r_2 – liczbami rzeczywistymi. Zachodzą wtedy zależności

$$[r_1 \mathbf{f}_1 + r_2 \mathbf{f}_2, \mathbf{g}_1] = r_1 [\mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1] + r_2 [\mathbf{f}_2, \mathbf{g}_1]$$

$$[\mathbf{f}_1, r_1 \mathbf{g}_1 + r_2 \mathbf{g}_2] = r_1 [\mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1] + r_2 [\mathbf{f}_1, \mathbf{g}_2]$$

- Jest skośnie symetryczny; $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ – pola wektorowe

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}]$$

- Spełnia tożsamość Jacobiego; $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ – pola wektorowe

$$[\mathbf{f}, [\mathbf{g}, \mathbf{p}]] + [\mathbf{g}, [\mathbf{p}, \mathbf{f}]] + [\mathbf{p}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]] = \mathbf{0}$$

Dla tak zdefiniowanych operacji różniczkowych zachodzą zależności:

1. Jeśli $\alpha(\mathbf{x})$ i $\lambda(\mathbf{x})$ są funkcjami skalarnymi, a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ jest polem wektorowym, to

$$L_{\alpha\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})(L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}))$$

2. Jeśli $\alpha(\mathbf{x})$ i $\beta(\mathbf{x})$ są funkcjami skalarnymi, a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ są polami wektorowymi, to

$$[\alpha\mathbf{f}, \beta\mathbf{g}] = \alpha\beta[\mathbf{f}, \mathbf{g}] + \alpha(L_{\mathbf{f}}\beta)\mathbf{g} - \beta(L_{\mathbf{g}}\alpha)\mathbf{f}$$

3. Jeśli $\lambda(\mathbf{x})$ jest funkcją skalarną, a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ są polami wektorowymi, to

$$L_{[\mathbf{f}, \mathbf{g}]} \lambda(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{g}}\lambda(\mathbf{x}) - L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x})$$

4. Jeśli $\lambda(\mathbf{x})$ jest funkcją skalarną, a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ jest polem wektorowym, to

$$L_{\mathbf{f}}d\lambda(\mathbf{x}) = d(L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}))$$

6.2. Linearyzacja przez czystą transformację zmiennych stanu

Transformacja zmiennych stanu jest podstawowym narzędziem pozwalającym zastąpić obiekt nieliniowy obiektem liniowym nie tylko w jednym punkcie, lecz w obszarze X . Zastosowanie transformacji zmiennych stanu rozważa się dla klasy obiektów afinicznych (6.5), które stanowią podzbiór wszystkich gładkich obiektów nieliniowych (6.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (6.5)$$

gdzie:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})]$$

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_{1i}(\mathbf{x}) \\ g_{2i}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_{ni}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, m$$

Wektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ bywa nazywany dryfem. Zakłada się, że rząd macierzy $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ jest stały i wynosi m w całym obszarze $X \subset \mathbf{R}^n$.

Zmienne stanu można przekształcić za pomocą transformacji (6.6), która jest dyfeomorfizmem

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} \in Z \subset \mathbf{R}^n \quad (6.6)$$

Po zastosowaniu tego przekształcenia do obiektu (6.5) otrzymuje się

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{d\mathbf{T}(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial\mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial\mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}) \quad (6.7)$$

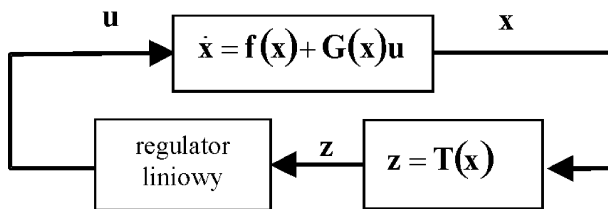
Prawa strona równania (6.7) zależy od \mathbf{x} . Ponieważ transformacja (6.6) jest dyfeomorfizmem, więc $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})$. Dlatego równanie (6.7) przyjmuje ostatecznie postać

$$\dot{\mathbf{z}} = \left. \frac{\partial\mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{f}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) + \left. \frac{\partial\mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{G}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \mathbf{u} \quad (6.8)$$

Definicja 6.3. Obiekt (6.5) jest linearyzowalny przez czystą transformację zmiennych stanu w obszarze X , jeżeli można tak dobrać transformację $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, że równanie (6.8) będzie liniowe, czyli dla każdego $\mathbf{x} \in X$ będą spełnione warunki

$$\left. \frac{\partial\mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{f}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) = \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad \left. \frac{\partial\mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{G}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) = \mathbf{B} \quad (6.9)$$

Oznacza to, że obiekt (6.5) jest transformowalny do postaci (6.2). Obiekt nieliniowy można zatem traktować jak obiekt liniowy w całym obszarze X , w którym dyfeomorfizm (6.6) jest dobrze określony, a nie tylko w pobliżu jednego punktu jak w przybliżeniu liniowym. W strukturze układu regulacji pojawia się nieliniowa transformacja zmiennych stanu (rys. 6.2). \square



Rys. 6.2. Schemat struktury układu regulacji z linearyzacją przez transformację zmiennych stanu

Warunki linearyzowalności przez czystą transformację zmiennych stanu zostały sformułowane po raz pierwszy w pracy Krenera [1973].

Twierdzenie 6.1. Obiekt (6.5) jest linearyzowalny lokalnie przez czystą transformację zmiennych stanu wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie obszaru $\mathbf{x} \in X$ zachodzi:

1. Wymiar dystrybucji $\dim \Delta(\mathbf{x}) = n$, gdzie $\Delta = \text{span} \{ad_f^q g_i(\mathbf{x}); 1 \leq i \leq m, 1 \leq q \leq n-1\}$,
2. $[ad_f^q g_i(\mathbf{x}), ad_f^r g_j(\mathbf{x})] = 0$ dla wszystkich $1 \leq i, j \leq m$ oraz $0 \leq q \leq n-1, 0 \leq r \leq n$. □

Okazuje się, że znalezienie takiej transformacji jest możliwe tylko dla stosunkowo wąskiej klasy obiektów nieliniowych. Rozszerzenie tej klasy można uzyskać przez zastosowanie sprzężenia zwrotnego.

6.3. Linearyzacja przez sprzężenie zwrotne

Drugim podstawowym narzędziem służącym do linearyzacji jest sprzężenie zwrotne. Pojęcie *linearyzacja przez sprzężenie zwrotne* oznacza, że zastosowano transformację zmiennych stanu (6.6) oraz w pętli sprzężenia zwrotnego wprowadzono zależność (6.10), którą określa się jako linearyzujące sprzężenie zwrotne. Takie podejście do linearyzacji uważa się za standardowe, dlatego jego warianty określa się za pomocą bardziej rozbudowanego nazewnictwa. Linearyzacja przeprowadzona za pomocą jedynie sprzężenia zwrotnego nazywa się linearyzacją przez czyste sprzężenie zwrotne – analogicznie do linearyzacji przez czystą transformację zmiennych stanu. Jeśli w pętli sprzężenia zwrotnego zamiast statycznej zależności (6.10) wprowadzi się człon dynamiczny, to ten wariant nazywać się będzie linearyzacją przez dynamiczne sprzężenie zwrotne (podr. 6.4). Zależność (6.10) określa się również mianem transformacji sygnałów sterujących

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (6.10)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \alpha_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(\mathbf{x}) & \dots & \beta_{1m}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1}(\mathbf{x}) & \dots & \beta_{mm}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$ są wektorem i macierzą zawierającą gładkie funkcje, które pozostają

w dyspozycji projektanta układu regulacji, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ jest wektorem nowych sygnałów

sterujących.

Po zastosowaniu transformacji (6.6) i sprzężenia zwrotnego (6.10), równanie obiektu przyjmuje postać

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \quad (6.11)$$

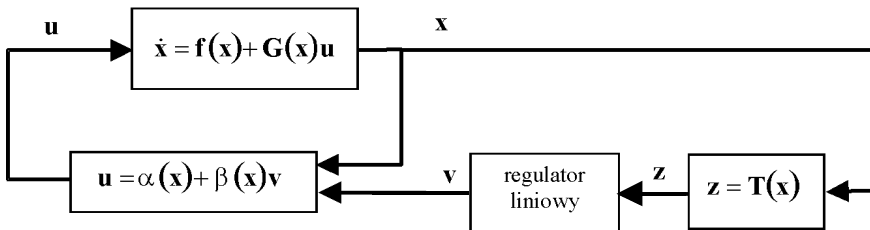
Po zmianie zmiennych stanu po prawej stronie równ. (6.11) otrzymuje się równanie obiektu w postaci

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} = & \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{f}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) + \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{G}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \\ & + \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{G}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Definicja 6.4. Obiekt (6.5) jest linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne w obszarze X , jeżeli można tak dobrać $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$, aby równanie (6.12) było liniowe, czyli dla każdego $\mathbf{x} \in X$ będą spełnione warunki

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{f}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) + \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{G}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) &= \mathbf{A} \mathbf{z} \quad (6.13) \\ \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{G}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) &= \mathbf{B} \quad \square \end{aligned}$$

Projektant układu regulacji ma do dyspozycji trzy elementy: $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ i $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$, co pozwala przeprowadzić linearyzację dla większej klasy nieliniowych obiektów. Struktura układu regulacji staje się jednak bardziej złożona (rys. 6.3).



Rys. 6.3. Schemat struktury układu regulacji z linearyzacją przez transformację zmiennych stanu i sprzężenie zwrotne

Warunki linearyzowalności przez sprzężenie zwrotne można określić za pomocą rzędu względnego. Chociaż warunki te nie są bezpośrednio weryfikowalne, to jednak

pokazują istotę procesu linearyzacji. Najpierw zostanie omówiony przypadek linearyzacji obiektu o jednym wejściu. Dla $m = 1$ przyjmuje się oznaczenie $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (6.14)$$

Twierdzenie 6.2. Obiekt (6.14) jest linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne, jeśli istnieje skalarna funkcja wyjścia $h(\mathbf{x})$, taka że rząd względny r jest równy rzędowi obiektu n w każdym punkcie obszaru X [Isidori 1995]. \square

Funkcję $h(\mathbf{x})$ spełniającą ten warunek nazywa się wyjściem linearyzującym. Dowod warunków wystarczającego, który wyjaśnia istotę samego procesu linearyzacji, zostanie przytoczony poniżej.

Dowód warunku wystarczającego. Ponieważ rząd względny jest równy n , więc zachodzą zależności

$$L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \dots = L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{n-2}h(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{oraz} \quad L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{n-1}h(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (6.15)$$

Niech pierwszą nową zmienną stanu będzie $z_1 = h(\mathbf{x})$. Jej pochodna jest równa

$$\dot{z}_1 = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{f}}h + uL_{\mathbf{g}}h$$

Równość $L_{\mathbf{g}}h = 0$ wynika z równ. (6.15). W związku z tym pochodna z_1 nie zależy od sygnału sterującego i może być wybrana jako kolejna, nowa zmienna stanu z_2

$$z_2 = \dot{z}_1 = L_{\mathbf{f}}h$$

Obliczając kolejną pochodną, otrzymuje się

$$\dot{z}_2 = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{f}}^2h + uL_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h$$

Wyraz $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h$ przy sygnale sterującym u jest równy zero, co wynika również z równ. (6.15). Obliczając w ten sposób kolejne pochodne, można zdefiniować przekształcenie $\mathbf{T}(\mathbf{x})$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{i-1}h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{n-1}h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Równanie obiektu w nowych współrzędnych ma postać

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2, \\
 \dot{z}_2 &= z_3, \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_i &= z_{i+1}, \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= L_f^n h(\mathbf{x}) + u L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Wszystkie równania (6.17), poza ostatnim, są liniowe. Jednak w dyspozycji projektanta układu regulacji jest jeszcze sygnał sterujący. Można go tak dobrać, aby ostatnie równanie zależało liniowo od nowego sygnału sterującego v . Wtedy linearyzujące sprzężenie zwrotne ma postać

$$u = \frac{v - L_f^n h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x})} \tag{6.18}$$

Mianownik równ. (6.18) jest niezerowy dzięki odpowiedniej wartości rzędu względnego równ. (6.15), zatem to prawo regulacji jest dobrze określone. Wyrażenia $\alpha(\mathbf{x})$, $\beta(\mathbf{x})$ ze wzoru (6.10) przyjmują postać

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_f^n h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x})}, \quad \beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x})}$$

Obiekt staje się liniowy w nowych współrzędnych \mathbf{z} i z nowym sygnałem sterującym v , przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \tag{6.19}$$

Jeśli ponadto okaże się, że $L_f^n h(\mathbf{x}) = 0$ oraz $L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x}) = \text{const}$, to do linearyzacji nie trzeba już stosować sprzężenia zwrotnego (6.18); wystarczy transformacja zmiennych stanu (6.16).

Twierdzenie 6.2 pokazuje, jak ważnym pojęciem w linearyzacji jest rząd względny. Kluczowym zagadnieniem jest znalezienie takiej funkcji $h(\mathbf{x})$, która może stanowić podstawę do konstrukcji dyfeomorfizmu (6.16), więc $h(\mathbf{x})$ musi być rozwiązaniem układu nieliniowych cząstkowych równań różniczkowych

$$L_{\mathbf{g}}h = L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h = \dots = L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{n-2}h = 0 \quad \text{oraz} \quad L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{n-1}h \neq 0 \quad (6.20)$$

Po uwzględnieniu właściwości pochodnej Liego i nawiasu Liego otrzymuje się

$$L_{\mathbf{g}}h = L_{ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}}h = \dots = L_{ad_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}}h = 0 \quad (6.21)$$

czyli

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} ad_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g} &= 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Wynika stąd, że gradient $h(\mathbf{x})$ musi anihilować dystrybucję $\Delta_{n-2} = \text{span}\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}\}$. Twierdzenie Frobeniusa daje odpowiedź na pytanie, kiedy znalezienie takiego $h(\mathbf{x})$ jest możliwe – dystrybucja Δ_{n-2} musi być inwolutywna.

Weryfikowalne warunki linearyzowalności obiektu (6.14) przez statyczne sprzężenie zwrotne formułuje twierdzenie 6.3.

Twierdzenie 6.3 [Isidori 1995]. Obiekt (6.14) jest linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne w obszarze X wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie $\mathbf{x} \in X$:

1. Dystrybucja $\Delta_{n-2}(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{g}(\mathbf{x}), ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}(\mathbf{x}), \dots, ad_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}(\mathbf{x})\}$ jest inwolutywna.
2. Dystrybucja $\Delta_{n-1}(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{g}(\mathbf{x}), \dots, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}(\mathbf{x}), ad_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g}(\mathbf{x})\}$ ma wymiar n . \square

Analogiczne twierdzenia można sformułować dla obiektu (6.5) o wielu wejściach.

Twierdzenie 6.4 [Isidori 1995]. Obiekt o wielu wejściach (6.5) jest linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne w obszarze X , jeżeli istnieje m funkcji skalarnych $h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x)$, takich że wektor rzędów względnych $[r_1, r_2, \dots, r_m]$ istnieje w każdym punkcie $\mathbf{x} \in X$ oraz $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$. \square

Twierdzenie nie określa metody wyznaczania wspomnianych funkcji, nie pozwala również rozstrzygać, czy dany obiekt jest linearyzowalny. Weryfikowalnych warunków linearyzowalności obiektów dostarcza twierdzenie 6.5.

Twierdzenie 6.5 [Jakubczyk, Respondek 1980]. Definiuje się dystrybucje Δ_i dla obiektu (6.5)

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}, \\ \Delta_1 &= \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m, \text{ad}_f \mathbf{g}_1, \dots, \text{ad}_f \mathbf{g}_m\}, \\ &\vdots \\ \Delta_{n-1} &= \text{span}\{\text{ad}_f^k \mathbf{g}_j : 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}.\end{aligned}$$

Obiekt (6.5) jest linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne w obszarze X wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie $\mathbf{x} \in X$:

1. Dla każdego $0 \leq i \leq n-1$ dystrybucja Δ_i ma stały wymiar.
2. Dystrybucja Δ_{n-1} ma wymiar n .
3. Dla każdego $0 \leq i \leq n-2$ dystrybucja Δ_i jest inwolutywna. □

Dla obiektu (6.5) transformacja zmiennych stanu ma postać

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_{r_1} \\ \vdots \\ z_{r_1+\dots+r_{m-1}+1} \\ \dots \\ z_{r_1+\dots+r_{m-1}+r_m} \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_m(\mathbf{x}) \\ \dots \\ L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

a linearyzujące sprzężenie zwrotne

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_f^{r_2} h_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ L_f^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (6.24a)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (6.24b)$$

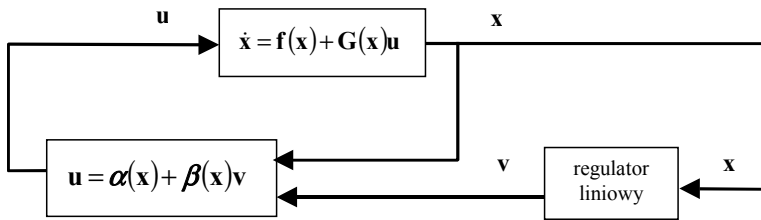
Linearyzacja przez czystą transformację zmiennych stanu jest szczególnym przypadkiem linearyzacji przez sprzężenie zwrotne. Warunek (2) twierdzenia 6.1 implikuje inwolutywność dystrybucji Δ_i dla każdego $0 \leq i \leq n-2$, co stanowi warunek (3) twierdzenia 6.5. Również istnienie odpowiedniego wektora rzędów względnych (twierdzenie 6.4) jest warunkiem koniecznym linearyzacji przez czystą transformację.

W przypadku linearyzacji przez czystą transformację stanu transformacja ta ma także postać równ. (6.23), natomiast zależności (6.24) muszą przyjąć postać

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \quad (6.25)$$

gdzie \mathbf{B} jest macierzą o stałych współczynnikach.

Uproszczoną wersją linearyzacji jest linearyzacja przez czyste sprzężenie zwrotne (rys. 6.4). Stanowi ona szczególnie przypadek linearyzacji przez sprzężenie zwrotne. W tej sytuacji dyfeomorfizm (6.6) jest przekształceniem tożsamościowym.



Rys. 6.4. Schemat struktury układu regulacji z linearyzacją przez czyste sprzężenie zwrotne

Po zastosowaniu czystego sprzężenia zwrotnego (6.10) do obiektu (6.5) otrzymuje się równanie obiektu w postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) \mathbf{v}. \quad (6.26)$$

Definicja 6.5. Obiekt (6.5) jest linearyzowalny przez czyste sprzężenie zwrotne w obszarze X , jeśli można tak dobrać $\alpha(\mathbf{x})$, $\beta(\mathbf{x})$, że równanie (6.26) będzie liniowe, tzn. dla każdego $\mathbf{x} \in X$ będą spełnione warunki

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \quad (6.27)$$

6.4. Linearyzacja przez dynamiczne sprzężenie zwrotne

Dalsze poszerzenie klasy linearyzowalnych obiektów można uzyskać przez zastosowanie członu dynamicznego w sprzężeniu zwrotnym. Metodę tę określa się również mianem rozszerzenia dynamicznego. Wprowadza się q nowych zmiennych stanu \mathbf{w} , które spełniają równanie

$$\dot{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \mathbf{v} \quad (6.28)$$

w którym

$$\mathbf{w} \in \mathbf{R}^q$$

$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_q \end{bmatrix}$ jest wektorem nowych zmiennych stanu, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ – wektorem nowych sygnałów sterujących,

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \eta_1(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ \vdots \\ \eta_q(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \xi_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) & \cdots & \xi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{q1}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) & \cdots & \xi_{qm}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ są wektorem i macierzą zawierającą gładkie funkcje, które pozostają w dyspozycji projektanta układu regulacji.

Rząd rozszerzonego obiektu wynosi $n + q$. Należy wykonać transformację wszystkich zmiennych stanu

$$\mathbf{z} = \mathbf{T} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right), \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^{n+q} \quad (6.29)$$

Styczne, linearyzujące sprzężenie zwrotne może zależeć także od zmiennych \mathbf{w}

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \mathbf{v}. \quad (6.30)$$

Równanie obiektu po dokonaniu transformacji (6.29) i zastosowaniu sprzężeń zwrotnych (6.28) i (6.29) ma postać

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \frac{d\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{w}} \dot{\mathbf{w}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{w})) \\ &+ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{w}} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{w}} \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \right) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (6.31)$$

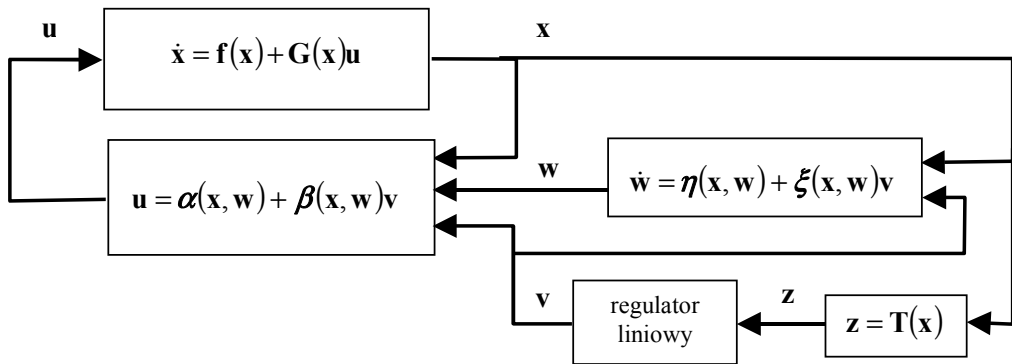
Definicja 6.6. Obiekt (6.5) jest linearyzowalny przez dynamiczne sprzężenie zwrotne w obszarze $X \subset \mathbf{R}^{n+q}$, jeżeli można tak dobrać $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, że równ. (6.31) będzie liniowe, czyli będą spełnione warunki (6.32)

w każdym punkcie $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \in X \subset \mathbf{R}^{n+q}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{w}} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} & \left[\mathbf{f}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) + \mathbf{G}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}))\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \right] \\ & + \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{w}} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) = \mathbf{A}\mathbf{z} \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{w}} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{G}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}))\boldsymbol{\beta}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) + \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{w}} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) = \mathbf{B}$$

Zastosowanie dynamicznego sprzężenia zwrotnego powiększa klasę linearyzowalnych obiektów, jednak ceną, jaką trzeba za to zapłacić, jest wzrost złożoności układu (rys. 6.5), a zwłaszcza wzrost rzędu układu.



Rys. 6.5. Schemat struktury układu regulacji z linearyzacją przez dynamiczne sprzężenie zwrotne

Zastosowanie linearyzacji przez dynamiczne sprzężenie zwrotne zostało zaproponowane pod koniec lat 80. ubiegłego wieku w pracach Chenga [1987] oraz Charlet i in. [1989]. Charlet i in. udowodnili, że jeżeli obiekt o jednym wejściu jest linearyzowalny przez dynamiczne sprzężenie, to jest również linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne. Oznacza to, że rozpatrywanie linearyzacji dynamicznej ma sens tylko dla obiektów o wielu wejściach.

Jeżeli okazuje się, że dla pewnych sterowań rząd względny jest za mały, by przeprowadzić linearyzację, to można w ciągu sterowań uwzględnić odpowiednie człony dynamiczne (np. ciąg integratorów), które umożliwią uzyskanie wymaganego rzędu względnego. W pracy Charlet i in. [1991] sformułowano warunki wystarczające dla linearyzacji dynamicznej

Twierdzenie 6.6. Obiekt (6.5) jest linearyzowalny przez dynamiczne sprzężenie zwrotne wtedy, gdy istnieją takie liczby całkowite

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}, \quad 0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_m, \quad q = \sum_{i=1}^m \mu_i$$

oraz dystrybucje (uwzględniając ewentualną zmianę numeracji wejść)

$$\Delta_0(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) : \mu_k = 0\}$$

$$\Delta_{i+1}(\mathbf{x}) = \Delta_i(\mathbf{x}) + \text{ad}_f^i \Delta_0(\mathbf{x}) + \text{span}\{\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) : \mu_k = i + 1\}$$

takie że w każdym punkcie $\mathbf{x} \in X \subset \mathbf{R}^n$:

1. $\Delta_i(\mathbf{x})$ są inwolutywne i mają stały wymiar dla $0 \leq i \leq n + \mu_m - 1$;
2. $\dim \Delta_{n+\mu_m+1}(\mathbf{x}) = n$;
3. $[\mathbf{g}_j(\mathbf{x}), \Delta_i(\mathbf{x})] \subset \Delta_{i+1}(\mathbf{x})$ dla wszystkich $j, 1 \leq j \leq m$, takich że $\mu_j \geq 1$ oraz dla wszystkich $i, 0 \leq i \leq n + \mu_m - 1$. □

6.5. Linearyzacja nieregularna

W metodach linearyzacji wykorzystujących sprzężenie zwrotne wektor nowych sygnałów sterujących \mathbf{v} ma wymiar taki sam jak wektor pierwotnych sygnałów sterujących \mathbf{u} . Można jednak rozważyć sytuację (6.33), kiedy \mathbf{v} będzie miał inną liczbą składowych niż \mathbf{u}

$$\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}^{\tilde{m}} \quad \tilde{m} < m$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{v}} \tag{6.33}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \alpha_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}(\mathbf{x}) & \dots & \beta_{1,\tilde{m}}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{\tilde{m},1}(\mathbf{x}) & \dots & \beta_{\tilde{m},\tilde{m}}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m,1}(\mathbf{x}) & \dots & \beta_{m,\tilde{m}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \text{rz} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = \tilde{m}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{\tilde{m}} \end{bmatrix}$$

Definicja 6.7. Obiekt (6.5) jest linearyzowalny nieregularnie przez statyczne sprzężenie zwrotne, jeżeli można tak dobrać $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ $n \times n$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ $m \times 1$, $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$ $m \times \tilde{m}$ oraz $\tilde{m} < m$, że spełnione będą warunki (6.13), a rozmiar macierzy \mathbf{B} jest równy $n \times \tilde{m}$. □

Zasadniczą trudnością w linearyzacji przez sprzężenie zwrotne jest, żeby macierz \mathbf{B} (6.13) przy wektorze $\tilde{\mathbf{v}}$ była stała. Jeżeli wymiar wektora $\tilde{\mathbf{v}}$ jest mniejszy niż wektora

\mathbf{u} , to macierz \mathbf{B} będzie miała mniejszy rozmiar $m \times \tilde{m}$, czyli łatwiej można spełnić warunki (6.13). Nie ma zatem sensu wprowadzać większej liczby sygnałów sterujących niż w układzie pierwotnym. Rozszerzenie klasy linearyzowalnych obiektów można uzyskać jedynie przez zmniejszenie liczby sygnałów sterujących.

Linearyzację nieregularną rozważa się przede wszystkim dla obiektów nielinearyzowalnych przez regularne sprzężenie zwrotne. W obiektach nielinearyzowalnych przez sprzężenie zwrotne, ale linearyzowalnych nieregularnie, sygnały sterujące można podzielić na dwie grupy:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{\tilde{m}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_{\tilde{m}+1} \\ \dots \\ u_{\tilde{m}+\bar{m}} \end{bmatrix}, \quad \bar{m} + \tilde{m} = m \quad (6.34)$$

Sygnałom sterującym $\bar{\mathbf{u}}$ są przypisane sztywne prawa regulacji (6.35), natomiast sygnałom sterującym $\tilde{\mathbf{u}}$ przypisuje się prawo regulacji (6.36) zależne od nowych sygnałów sterujących $\tilde{\mathbf{v}}$

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \bar{\alpha}_{\bar{m}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \tilde{\alpha}_{\tilde{m}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{1,1}(\mathbf{x}) & \dots & \tilde{\beta}_{1,\tilde{m}}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\beta}_{\tilde{m},1}(\mathbf{x}) & \dots & \tilde{\beta}_{\tilde{m},\tilde{m}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \quad (6.36)$$

Linearyzacja nieregularna obiektu, który jest nielinearyzowalny przez regularne sprzężenie zwrotne, jest możliwa, ponieważ części sygnałów sterujących $\bar{\mathbf{u}}$ przypisano sztywne prawa regulacji, których już nie można zmieniać po linearyzacji. Oznacza to, że nie można ich zastosować na przykład w procesie strojenia zlinearyzowanego obiektu.

Do wykazania prawdziwości powyższych rozważań zostanie wykorzystane pojęcie częściowej linearyzacji.

Definicja 6.8. Obiekt (6.5) jest częściowo linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne w obszarze X , jeśli dla każdego $\mathbf{x} \in X$ istnieje dyfeomorfizm $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ oraz sprzężenie zwrotne $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) \mathbf{v}$, takie że obiekt w nowych współrzędnych można podzielić na część liniową i nieliniową:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{z}} &= \tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{z}}(\bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}) + \tilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{z}}(\bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{z}} \in \mathbf{R}^{\bar{n}}, \quad \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{R}^{\tilde{n}}, \quad \bar{n} + \tilde{n} = n$$

Twierdzenie 6.7 [Isidori 1995]. Jeżeli istnieją takie skalarne funkcje $h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})$, że wektor rzędów względnych $r_1 + \dots + r_m = \bar{n} < n$, to obiekt (6.5) jest częściowo linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne i wymiar liniowego podsystemu w nowych współrzędnych wynosi \bar{n} .

Marino [1986] pokazał, że dla każdego obiektu (6.5) można znaleźć takie linearyzujące transformacje, dla których rozmiar liniowego podsystemu w równ. (6.37) będzie maksymalny \bar{n} . Oznacza to, że nie można znaleźć innych funkcji wyjścia $h'_1(\mathbf{x}), \dots, h'_m(\mathbf{x})$, dla których wymiar liniowego podsystemu byłby większy od \bar{n} . W linearyzacji nieregularnej zwiększenie wymiaru liniowego podsystemu można uzyskać przez zmniejszenie liczby sygnałów sterujących. Sygnały sterujące \mathbf{v} dzieli się na dwie grupy

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}^{\bar{m}}, \quad \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}^{\tilde{m}}, \quad \bar{m} + \tilde{m} = m \quad (6.38)$$

Części nowych sygnałów sterujących przypisuje się zależność od zmiennych stanu i pozostałych sterowań

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{T}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{v}}) \quad (6.39)$$

Zwiększenie wymiaru liniowego podsystemu w równ. (6.37) może nastąpić tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$ nie będzie zależało od sygnałów sterujących, a tylko od zmiennych stanu. Istnieje wtedy możliwość, że kolejne pochodne Liego funkcji $h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})$ nie będą zależały od sygnałów sterujących, co umożliwi zdefiniowanie kolejnych zmiennych stanu, które będą obecne w liniowym podsystemie.

Możliwość taka istnieje tylko wtedy, gdy sterowania $\tilde{\mathbf{v}}$ nie występują w podsystemie liniowym i gdy sygnały $\bar{\mathbf{v}}$ nie zależą od $\tilde{\mathbf{v}}$. Oznacza to, że obiekt (6.37) ma strukturę

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{z}}} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{0}\tilde{\mathbf{v}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}} &= \tilde{\mathbf{f}}_z(\bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}) + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{z1}(\bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}) & \tilde{\mathbf{G}}_{z2}(\bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.40)$$

a prawo sterowania (6.39) ma postać

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{z}) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{T}(\mathbf{x})) \quad (6.41)$$

Jeśli $\tilde{m} > 0$, to po wstawieniu równ. (6.41) do (6.40) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{z}}} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{z}) \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}} &= (\tilde{\mathbf{f}}_z(\bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}) + \tilde{\mathbf{G}}_{z1}(\bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}})\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{z})) + \tilde{\mathbf{G}}_{z2}(\bar{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Dla obiektu (6.42) można dalej poszukiwać maksymalnego liniowego podsystemu. Jeśli postępując iteracyjnie w ten sposób, otrzyma się $\bar{n} = n$, to obiekt (6.5) będzie linearyzowalny nieregularnie.

Jeśli obiekt częściowo zlinearyzowany ma mieć strukturę (6.40), to linearyzujące go sprzężenie zwrotne musi mieć postać (6.43). Ponieważ muszą istnieć takie pierwotne sygnały sterujące $\bar{\mathbf{u}}$, które będą zależały tylko od $\bar{\mathbf{v}}$, a nie będą zależały od $\tilde{\mathbf{v}}$, więc

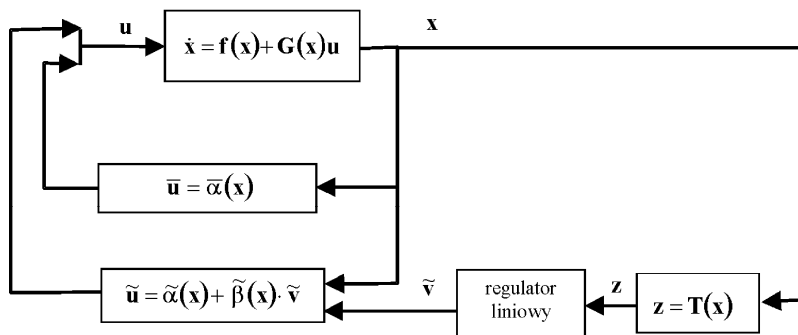
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{11}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta}_{12}(\mathbf{x}) & \boldsymbol{\beta}_{22}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Na podstawie równ. (6.41) otrzymuje się (6.44) w postaci (6.35) i (6.36)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \alpha_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \alpha_{\bar{m}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\beta}_{11}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{T}(\mathbf{x})) \\ \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{v}} &= \begin{bmatrix} \alpha_{m+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \alpha_{\bar{m}+\bar{m}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\beta}_{12}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{T}(\mathbf{x})) + \boldsymbol{\beta}_{22}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Jeżeli do przeprowadzenia linearyzacji nieregularnej trzeba wykonać wiele iteracji, to w każdym kroku jest zachowana struktura częściowo linearyzującego sprzężenia zwrotnego (6.43).

Sygnalom $\bar{\mathbf{u}}$ przypisane są sztywne prawa regulacji (6.35), których już nie można zmieniać podczas strojenia zlinearyzowanego obiektu. W pozostałych torach sterowania $\tilde{\mathbf{u}}$ wprowadza się prawa sterowania zależne od $\tilde{\mathbf{v}}$, które umożliwiają użycie tych torów podczas strojenia zlinearyzowanego obiektu. Strukturę układu z linearyzacją nieregularną przedstawiono na rys. 6.6.



Rys. 6.6. Schemat struktury układu regulacji z linearyzacją nieregularną

Podobnie jak linearyzację przez dynamiczne sprzężenie zwrotne linearyzację nieregularną można stosować tylko do obiektów o wielu wejściach. Jeśli rząd względny dla danego wejścia jest zbyt mały, to wejściu temu przypisuje się sztywną zależność.

Zastosowanie linearyzacji nieregularnej po raz pierwszy zaproponowali Charlet i in. [1989]. Warunki wystarczające linearyzowalności nieregularnej przez statyczne sprzężenie zwrotne sformułowali Sun i Xia [1997]. Kwestia sformułowania warunków koniecznych i wystarczających w tym przypadku jest otwarta.

Twierdzenie 6.8. Obiekt (6.5) jest linearyzowalny nieregularnie przez statyczne sprzężenie zwrotne wtedy, gdy:

1. Istnieją takie liczby całkowite

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}, \quad 0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_m \leq n$$

oraz dystrybucje (uwzględniając zmianę numeracji wejść)

$$\Delta_0(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) : \mu_k = 0\}$$

$$\Delta_{i+1}(\mathbf{x}) = \Delta_i(\mathbf{x}) + ad_f \Delta_i(\mathbf{x}) + \text{span}\{\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) : \mu_k = i+1\}$$

takie że w każdym punkcie $\mathbf{x} \in X \subset \mathbf{R}^n$.

2. $\Delta_i(\mathbf{x})$ jest inwolutywna i ma stały wymiar dla $0 \leq i \leq n-1$.
3. $\text{rank} \Delta_{n-1}(\mathbf{x}) = n$.
4. $[\mathbf{g}_j(\mathbf{x}), \Delta_i(\mathbf{x})] \subset \Delta_{i+1}(\mathbf{x})$ dla wszystkich j , $1 \leq j \leq m$, takich że $1 \leq \mu_j \leq n-1$ oraz dla wszystkich i , $0 \leq i \leq n-3$. □

6.6. Rozszerzona linearyzacja nieregularna

Dotychczas opisane (podr. 6.4 i 6.5) próby poszerzenia klasy obiektów linearyzowalnych wiązały się z wprowadzeniem pewnych utrudnień podczas konstruowania układu regulacji. Podczas linearyzacji dynamicznej zwiększał się rząd układu, a podczas linearyzacji nieregularnej nie wszystkie dostępne sygnały sterujące były w pełni wykorzystane. Naturalnym prawem regulacji, które stosuje się do zlinearyzowanego obiektu, jest proporcjonalne sprzężenie zwrotne od zmiennych stanu – w tym przypadku od nowych zmiennych stanu.

Można zatem zaproponować modyfikację linearyzacji nieregularnej. Polega ona na przypisaniu do części sterowań proporcjonalnego prawa regulacji względem nowych zmiennych. Okazuje się, że istnieje taka klasa obiektów, dla której po zastosowaniu transformacji zmiennych i statycznego sprzężenia zwrotnego, prawo regulacji pojawia się dalej w sposób liniowy.

W celu lepszego zilustrowania istoty rozszerzonej linearyzacji nieregularnej zostanie przedstawiona struktura układu regulacji z obiektem o dwóch wejściach, który jest linearyzowany różnymi metodami. Do zlinearyzowanego obiektu stosuje się proporcjonalne sprzężenie zwrotne od stanu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2 \quad (6.45)$$

Jeśli obiekt (6.45) jest linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne, to w zlinearyzowanym obiekcie są dostępne dwa sygnały sterujące v_1, v_2 , do których stosuje się proporcjonalne sprzężenie zwrotne od stanu

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{b}_1 v_1 + \mathbf{b}_2 v_2 = \mathbf{Az} + [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] \begin{bmatrix} k_{11}, \dots, k_{1n} \\ k_{21}, \dots, k_{2n} \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (6.46)$$

k_{ij} – współczynniki proporcjonalnego sprzężenia zwrotnego, $i = 1, 2; j = 1, \dots, n$.

Niech obiekt (6.45) nie będzie linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne, ale przez dynamiczne sprzężenie zwrotne. W zlinearyzowanym obiekcie nadal są dostępne dwa sygnały sterujące v_1, v_2 , do których stosuje się proporcjonalne sprzężenie zwrotne od stanu

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{b}_1 v_1 + \mathbf{b}_2 v_2 = \mathbf{Az} + [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] \begin{bmatrix} k_{11}, \dots, k_{1n}, \dots, k_{1,n+q} \\ k_{21}, \dots, k_{2n}, \dots, k_{2,n+q} \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (6.47)$$

gdzie k_{ij} – współczynniki proporcjonalnego sprzężenia zwrotnego, $i = 1, 2; j = 1, \dots, n + q$, ale nowy wektor stanu \mathbf{z} jest większy o q zmiennych.

Niech obiekt (6.45) nie będzie linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne, ale będzie linearyzowalny nieregularnie. W zlinearyzowanym obiekcie jest dostępny tylko jeden sygnał sterujący v_1 , do którego stosuje się proporcjonalne sprzężenie zwrotne od stanu (6.48). Nowy wektor stanu \mathbf{z} ma wymiar n (taki sam jak wektor \mathbf{x})

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{b}_1 v_1 = \mathbf{Az} + \mathbf{b}_1 [k_1, \dots, k_n] \mathbf{z} \quad (6.48)$$

gdzie k_i – współczynniki proporcjonalnego sprzężenia zwrotnego, $i = 1, \dots, n$.

Niech obiekt (6.45) nie będzie linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne, ale będzie linearyzowalny nieregularnie w sposób rozszerzony. W zlinearyzowanym obiekcie jest dostępny tylko jeden sygnał sterujący v_1 . Do drugiego sygnału jest już przypisane proporcjonalne sprzężenie zwrotne od stanu

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{b}_1 v_1 + \mathbf{b}_2 [k_{21}, \dots, k_{2n}] \mathbf{z} = \mathbf{Az} + [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] \begin{bmatrix} k_{11}, \dots, k_{1n} \\ k_{21}, \dots, k_{2n} \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (6.49)$$

gdzie k_{ij} – współczynniki proporcjonalnego sprzężenia zwrotnego, $i = 1, 2; j = 1, \dots, n$. Nowy wektor stanu \mathbf{z} ma wymiar n (taki sam jak wektor \mathbf{x}).

Okazuje się, że w rozszerzonej linearyzacji nieregularnej można otrzymać taką samą strukturę układu regulacji, jak gdyby obiekt był linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne. Prawe strony wzorów (6.46) oraz (6.49) są takie same.

Rozszerzoną linearyzację nieregularną definiuje się w sposób ogólny dla obiektu o wielu wejściach. Przez $\bar{\mathbf{u}}$ oznaczono tę część sygnałów sterujących, którym przyporządkowano liniowe prawo regulacji, przez $\tilde{\mathbf{u}}$ – pozostałe sygnały sterujące

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{\tilde{m}} \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \tilde{u}_i \in \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \text{ dla } i = 1, \dots, \tilde{m} < m, \text{ niech } \bar{m} = m - \tilde{m}$$

Przy takim podziale, zmieniając ewentualnie numerację, wektor sygnałów sterujących można zapisać jako $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix}$, a sam obiekt jako

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + [\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \quad \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Spośród nowych zmiennych stanu wybiera się zmienne $\bar{\mathbf{z}}$, które posłużą do konstrukcji liniowego prawa regulacji.

$$\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_k \end{bmatrix}$$

gdzie $\bar{z}_i \in \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ dla $i=1, \dots, k \leq n$.

Do obiektu stosuje się transformację zmiennych stanu o postaci (6.6) oraz sprzężenia zwrotne

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{K} \bar{\mathbf{z}} \quad (6.51a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{v}} \quad (6.51b)$$

gdzie: $\mathbf{K} (\bar{m} \times k)$ – macierz stałych współczynników wzmocnienia, $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}^{\tilde{m}}$ – wektor nowych sygnałów sterujących.

Po dokonaniu transformacji zmiennych stanu oraz zastosowaniu (6.51) obiekt w nowych współrzędnych ma postać

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} = & \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{f}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) + \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{z}} \\ & + \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \cdot \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) + \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \tilde{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (6.52)$$

Definicja 6.9. Obiekt (6.5) jest linearyzowalny nieregularnie w rozszerzony sposób, jeżeli można tak dobrać $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x})$ i \mathbf{K} , że równanie (6.52) będzie liniowe, czyli spełnione będą warunki

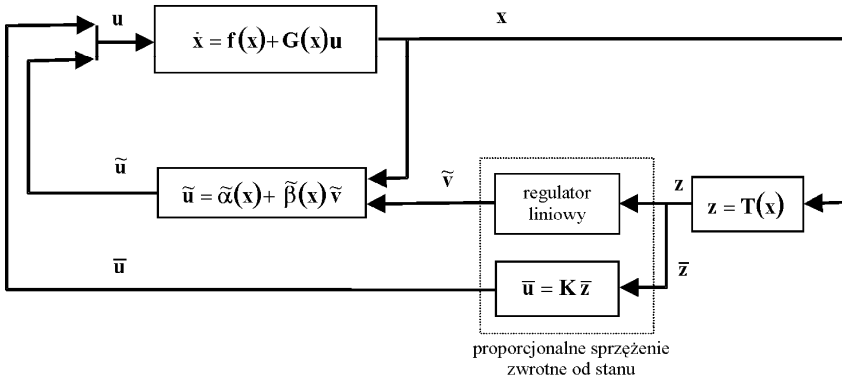
$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \mathbf{f}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) + \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) &= \mathbf{A}\mathbf{z} \\ \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) &= \mathbf{B}_1 \\ \left. \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) &= \mathbf{B}_2 \end{aligned} \quad (6.53)$$

gdzie $\mathbf{B}_1(n \times k)$, $\mathbf{B}_2(n \times (n - k))$ – macierze o stałych współczynnikach. □

Obiekt po zlinearyzowaniu przyjmuje postać

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}_1\mathbf{K}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{v}}. \quad (6.54)$$

Poprzez sygnały sterujące $\bar{\mathbf{u}}$ można stroić układ regulacji za pomocą współczynników macierzy \mathbf{K} . Do sygnałów sterujących $\tilde{\mathbf{v}}$ można przypisać dowolne prawo regulacji. Jeśli zastosuje się proporcjonalne sprzężenie od stanu, to wszystkie sygnały sterujące będą miały ten sam typ prawa regulacji. Wtedy dobór wzmacnień można przeprowadzić jednocześnie dla wszystkich sygnałów sterujących, korzystając np. z metody syntezy regulatora liniowo kwadratowego.



Rys. 6.7. Schemat struktury układu regulacji z rozszerzoną linearyzacją nieregularną

Dotychczas dla linearyzacji rozszerzonej nie udało się sformułować warunków wystarczających i koniecznych dla obiektu w ogólnej postaci (6.5). W pracach Bolka i Sasiadka [2002, 2003] sformułowano warunki, kiedy omówioną linearyzację można przeprowadzić dla obiektów o specjalnej strukturze. W rozpatrzonych do tej pory

przypadkach obiekt zawsze musiał mieć w swojej strukturze liniowy podsystem. Na przykład dla obiektu o dwu wejściach potrzebna jest struktura

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{g}}_1(\tilde{\mathbf{x}})u_1 + \tilde{\mathbf{g}}_2(\tilde{\mathbf{x}})u_2\end{aligned}\quad (6.55)$$

w której $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{\tilde{n}}$, u_1, u_2 – sygnały sterujące.

6.7. Układ regulacji turbin wielostopniowych

Model matematyczny turbiny dwustopniowej jest określony za pomocą równ. (2.6). Jest to obiekt zawierający cztery zmienne stanu ($n = 4$) oraz dwa sygnały sterujące ($m = 2$). Wprowadzając standardowe oznaczenia, otrzymuje się obiekt w postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2 \quad (6.56)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_H}x_1 \\ \frac{1}{T_R}(x_1 - x_2x_4) \\ \frac{1}{T_L}(-x_3 + x_2x_4) \\ -\frac{1}{T_A}x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \end{bmatrix}$$

Warunki linearyzowalności przez statyczne sprzężenie zwrotne wymagają sprawdzenia wymiaru i inwolutywności dystrybucji $\Delta_0, \dots, \Delta_3$.

$$\Delta_0 = \text{span} \{ \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \end{bmatrix} \right\} \quad (6.57)$$

Δ_0 ma stały wymiar $\dim \Delta_0 = 2$ i jest inwolutywna, ponieważ pola wektorowe $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ są stałe

$$\Delta_1 = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \text{ad}_f \mathbf{g}_1, \text{ad}_f \mathbf{g}_2\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{T_H^2} \\ -\frac{1}{T_R} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_R} \frac{1}{T_A} x_2 \\ -\frac{1}{T_L} \frac{1}{T_A} x_2 \\ \frac{1}{T_H^2} \end{bmatrix} \right\} \quad (6.58)$$

Δ_1 ma stały wymiar $\dim \Delta_1 = 4$ we wszystkich punktach \mathbf{R}^4 poza $x_2 = 0$. Zmienna x_2 oznacza w modelu ciśnienie w przegrzewaczu. Jej wartość musi być zawsze dodatnia. W całym zakresie rzeczywistej pracy obiektu dystrybucja Δ_1 ma stały wymiar. Δ_1 jest także inwolutywna, ponieważ jej rząd jest pełny, $\dim \Delta_1 = n = 4$. Dwie pozostałe dystrybucje Δ_2, Δ_3 mają zatem pełny rząd i są inwolutywne. Obiekt (6.56) jest linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne. Inny sposób polega na próbie znalezienia struktury z liniowym podsystemem. Obie metody porównano w pracy [Bolek 2002b].

Otrzymuje się $m_1 > 0$ dla $\kappa = 0$

$$m_1 = n - \text{rank}(\Delta_0) = 4 - 2 = 2 \quad (6.59)$$

Należy znaleźć dwie niezależne funkcje $h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x})$, których gradienty anihilują dystrybucję Δ_0 . Ponieważ druga i trzecia składowa (wektorów \mathbf{g}_1 i \mathbf{g}_2 rozpinających tę dystrybucję) jest zerowa, więc wybór tych funkcji jest oczywisty

$$h_1(\mathbf{x}) = x_2, \quad h_2(\mathbf{x}) = x_3 \quad (6.60)$$

Jeśli $m_1 = m$, to w tym miejscu kończy się algorytm.

Przyjmuje się, że dwie pierwsze nowe zmienne stanu z_1, z_2 są równe tym funkcjom. Dwie pozostałe zmienne oblicza się jako odpowiednie pochodne Liego

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_2 = L_f h_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_R} (x_1 - x_2 x_4) = z_3 \\ \dot{z}_3 &= L_f^2 h_1(\mathbf{x}) + L_{g_1} L_f h_1(\mathbf{x}) u_1 + L_{g_2} L_f h_1(\mathbf{x}) u_2 \\ &= -\frac{1}{T_R T_H} x_1 - \frac{1}{T_R^2} (x_1 - x_2 x_4) x_4 + \frac{1}{T_R T_A} x_2 x_4 + \frac{1}{T_R T_H} u_1 - \frac{1}{T_R T_A} x_2 u_2 = v_1 \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_3 = L_f h_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_L} (-x_3 + x_2 x_4) = z_4 \\ \dot{z}_4 &= L_f^2 h_2(\mathbf{x}) + L_{g_1} L_f h_2(\mathbf{x}) u_1 + L_{g_2} L_f h_2(\mathbf{x}) u_2 \\ &= \frac{1}{T_L^2} (x_3 - x_2 x_4) + \frac{1}{T_L T_R} (x_1 - x_2 x_4) x_4 - \frac{1}{T_L T_A} x_2 x_4 + \frac{1}{T_L T_A} x_2 u_2 = v_2 \end{aligned} \quad (6.61)$$

Ostatecznie transformacja przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \frac{1}{T_R}(x_1 - x_2 x_4) \\ \frac{1}{T_L}(-x_3 + x_2 x_4) \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

a linearyzujące sprzężenia zwrotne

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{T_L x_1 - T_H x_3 + T_H x_2 x_4 + T_H T_L^2 v_2 + T_H T_L T_R v_1}{T_L} \\ u_2 &= -\frac{T_A T_L x_1 x_4 - T_A T_L x_2 x_4^2 + T_A T_R x_3 - (T_A + T_L) T_R x_2 x_4 - T_A T_L^2 T_R v_2}{T_L T_R x_2} \end{aligned} \quad (6.63)$$

W innej metodzie poszukuje się liniowego podsystemu. Przedstawiono działanie algorytmu dla jednego wybranego podziału sterowań, gdzie poszukiwanie liniowego podsystemu kończy się sukcesem:

Krok 1. Istnieją trzy możliwe podziały sterowań $3 = 2^m - 1$. Jest to liczba wszystkich możliwych podzbiorów zbioru dwuelementowego ($m = 2$) bez zbioru pustego. W nieliniowym podsystemie musi być przynajmniej jedno sterowanie.

Zanalizujmy podział sterowań, który umożliwi znalezienie odpowiedniego liniowego podsystemu

$$\bar{\mathbf{u}} = u_1, \quad \bar{m} = 1, \quad \tilde{\mathbf{u}} = u_2, \quad \tilde{m} = 1$$

Macierz $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{b}}$ ma stałe składowe elementy

$$\tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \quad \bar{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x})$$

Krok 2. Ponieważ jedynie czwarta składowa wektora $\tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x})$ jest niezerowa, więc wstępny podział zmiennych stanu jest następujący:

$$\bar{I} = \{1, 2, 3\}, \quad \tilde{I} = \{4\}, \quad \bar{n}_0 = 3 > 1 = \tilde{m}$$

Krok 3. Tabela rzędów względnych

| $f_i(\mathbf{x}), i \in \bar{I}$ | $rd(f_i, \bar{\mathbf{g}}_1)$ | $rd(f_i, \tilde{\mathbf{g}}_1)$ |
|--|-------------------------------|---------------------------------|
| $f_1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{T_h} x_1$ | 1 | ∞ |
| $f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_R}(x_1 - x_2 x_4)$ | 1 | 1 |
| $f_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_L}(x_3 + x_2 x_4)$ | 2 | 1 |

Krok 4. Ponieważ jest tylko jedno sterowanie w nieliniowym podsystemie, więc F_k są jednoelementowe, $k = 1, 2, 3$; $F_k = [f_k]$.

Krok 5. Warunek odpowiedniego wektora rzędów względnych jest spełniony tylko dla $F_3 = [f_3]$. Macierz $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ ma tylko jeden niezerowy wiersz, natomiast $r_1(3) = 1$. Podział wstępny jest zatem również podziałem ostatecznym

$$\bar{I}(3) = \{1, 2, 3\}, \quad \tilde{I}(3) = \{4\}$$

Krok 6. Funkcje $f_1(\mathbf{x})$ oraz $f_2(\mathbf{x})$ muszą być kombinacjami liniowymi zmiennych stanu x_1, x_2, x_3 oraz f_3 .

$$f_1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{T_h} x_1$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_R} x_1 - \frac{1}{T_R} x_3 + \frac{T_L}{T_R} f_3(\mathbf{x})$$

Krok 7, 8. Ponieważ jest tylko jedno k , więc nie trzeba wybierać maksymalnego liniowego podsystemu.

Krok 9. Z funkcji f_3 wydziela się część nieliniową $\tilde{f}(\mathbf{x}) = x_2 x_4$, która jest linearyzującym wyjściem dla nieliniowego podsystemu.

□

Obiekt (6.56) można zatem zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_H} & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{T_R} \\ \frac{1}{T_L} \end{bmatrix} x_2 x_4 + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \quad (6.64)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{T_A} x_4 + \frac{1}{T_A} u_2$$

Oznaczenia są następujące:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_H} & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{T_R} \\ \frac{1}{T_L} \end{bmatrix}, \quad \psi(\mathbf{x}) = x_2 x_4, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = x_4, \quad \bar{\mathbf{u}} = u_1, \quad \tilde{\mathbf{u}} = u_2, \quad \bar{n} = 3, \quad \tilde{n} = 1$$

Rząd względny między $\psi(\mathbf{x})$ a u_2 jest równy $r_1 = 1 = \tilde{n}$. W tym przypadku linearyzująca transformacja ma postać

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_2 x_4 \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

a sprzężenie zwrotne

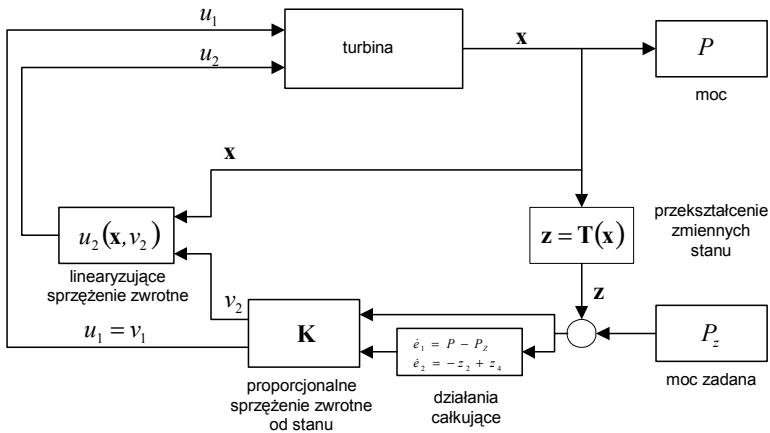
$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = \frac{T_A T_R v_2 - T_A x_1 x_4 + T_A x_2 x_4^2 + T_R x_2 x_4}{T_R x_2} \quad (6.66)$$

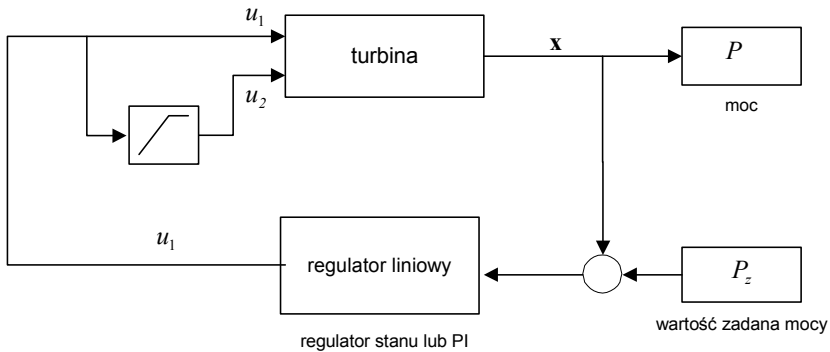
Jak można zauważyć, równ. (6.65) i (6.66) są znacznie prostsze od (6.62) i (6.63). Dla tak zlinearyzowanego obiektu utworzono układ regulacji. Wprowadzono działania całkujące (dodatkowe zmienne stanu e_1, e_2), które przesunęły punkt równowagi, tak by turbina pracowała z zadaną mocą oraz by w stanie ustalonym zawór NP był całkowicie otwarty. Wartość mocy zadanej P_z określa punkt równowagi układu regulacji. W punkcie tym wszystkie nowe zmienne stanu \mathbf{z} mają wartość równą P_z , a dodatkowe zmienne $e_1 = e_2 = 0$. Do tak zmodyfikowanego obiektu zastosowano regulator liniowo-kwadratowy. Ze względu na obecność w pętli sprzężenia zwrotnego transformacji (6.65) oraz (6.66), układ ten będzie określany jako nieliniowy.

W pracy Bolka i in. [2002a] przedstawiono badania symulacyjne, na podstawie których porównano działanie nieliniowego układu regulacji ze standardowymi, liniowymi układami opartymi na regulatorze PI i przestrzeni stanu. Schematy odpowiednich układów przedstawiono na rys. 6.8 i 6.9. W standardowych układach sterowanie prowadzi się tylko za pomocą zaworu WP. Położenie zaworu NP jest wtedy sztywno związane z położeniem zaworu WP za pomocą relacji (6.67) dla $a = 0,7$.

$$u_2 = \begin{cases} \frac{1}{a} u_1 & \text{dla } u_1 \in (0, a) \\ 1 & \text{dla } u_1 \in (a, 1) \end{cases} \quad (6.67)$$



Rys. 6.8. Schemat nieliniowego układu regulacji



Rys. 6.9. Schemat liniowych układów regulacji

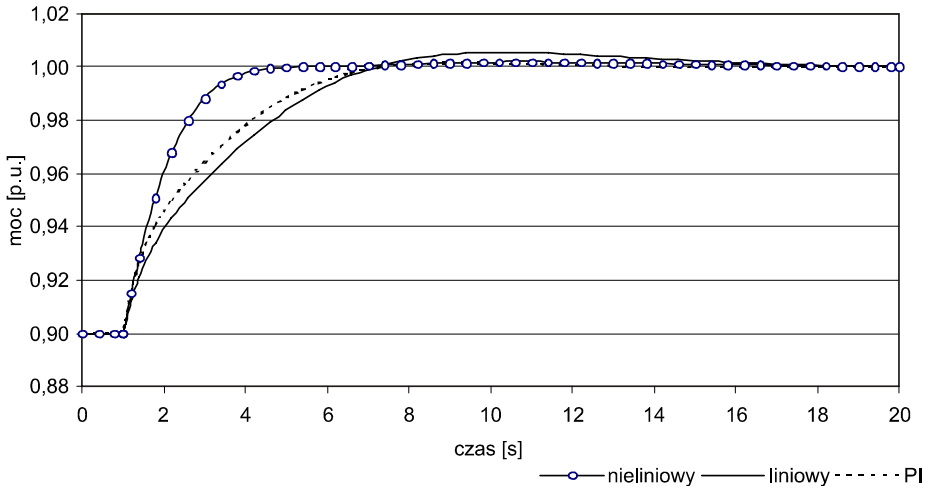
Wartości wszystkich zmiennych stanu są wielkościami względnymi odniesionymi do wartości nominalnych, dlatego wyraża się je w jednostkach [p.u.] (ang. *per unit*).

Zakres normalnej pracy obydwu zaworów leży w przedziale (0, 1,1] p.u. Stopień otwarcia zaworu WP $u_1 = 1$ odpowiada nominalnej wartości mocy $P_z = 1$. Zakłada się, że zawór może otworzyć się jeszcze o 10% więcej w czasie maksymalnego przyrostu mocy. Przyjęto następujące wartości stałych czasowych (w sekundach): $T_H = 0,8$, $T_R = 4$, $T_L = 1,2$, $T_A = 0,6$.

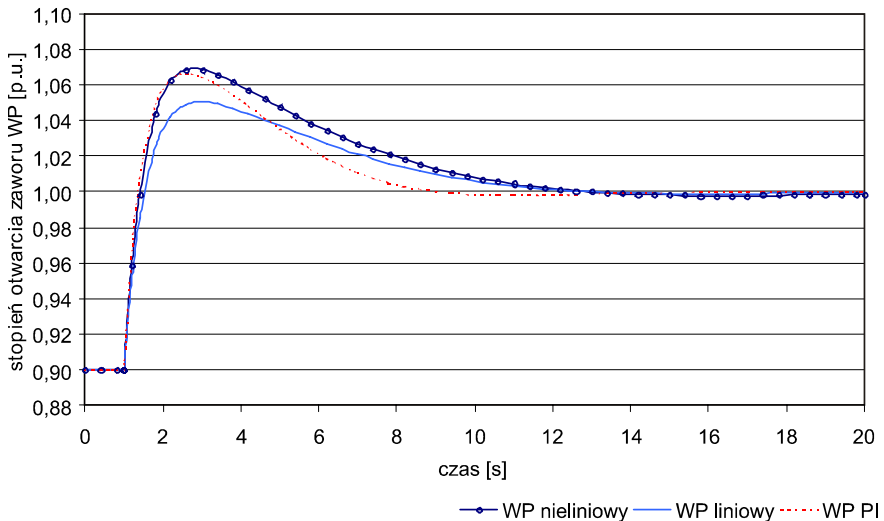
Poniżej przedstawiono wyniki eksperymentów symulacyjnych 6.1–6.4. Układ przed pobudzeniem znajduje się w stanie ustalonym i produkuje moc o zadanej wartości. W dwu pierwszych eksperymentach wynosi ona $P_z = 0,9$ p.u. W dwóch kolejnych

$P_z = 0,7$ p.u. Eksperymenty polegają na skokowej zmianie wartości zadanej mocy o 0,1 w chwili $t = 1$ s. Wartości współczynników wzmocnienia dobrano tak, aby przemieszczenia siłowników sterujących zaworami były podobne. Przebiegi przejściowe mocy oraz stopni otwarcia zaworów pokazano na rys. 6.10–6.21.

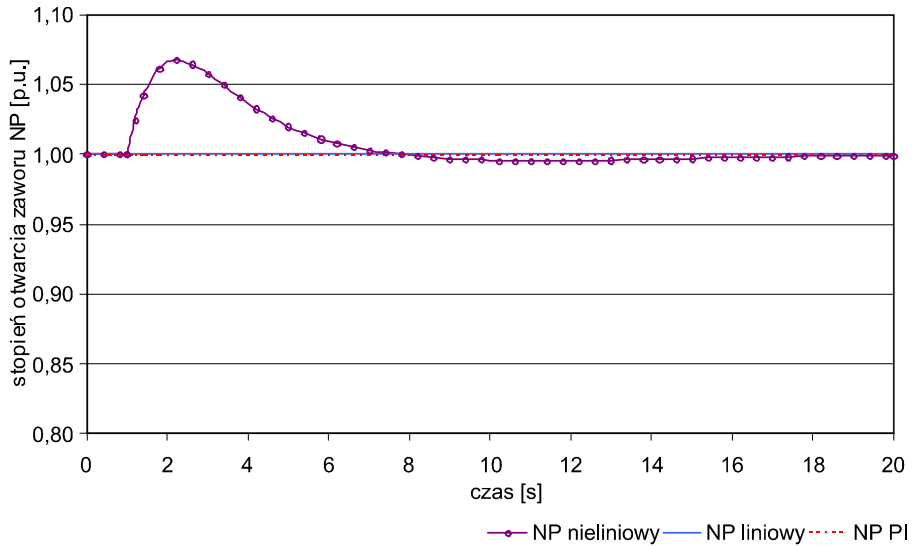
Eksperyment 6.1 Zmiana wartości zadanej mocy od 0,9 p.u. do 1,0 p.u.



Rys. 6.10. Przebiegi przejściowe mocy

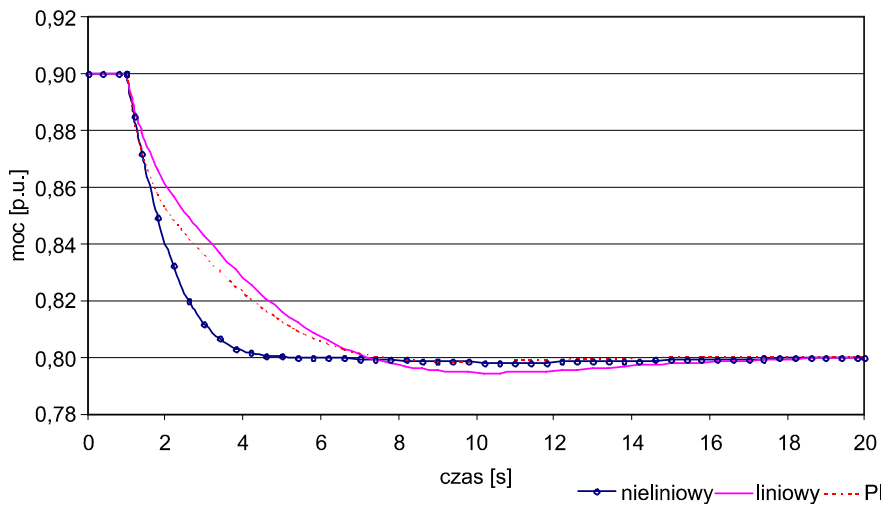


Rys. 6.11. Przebiegi przejściowe stopnia otwarcia zaworu WP

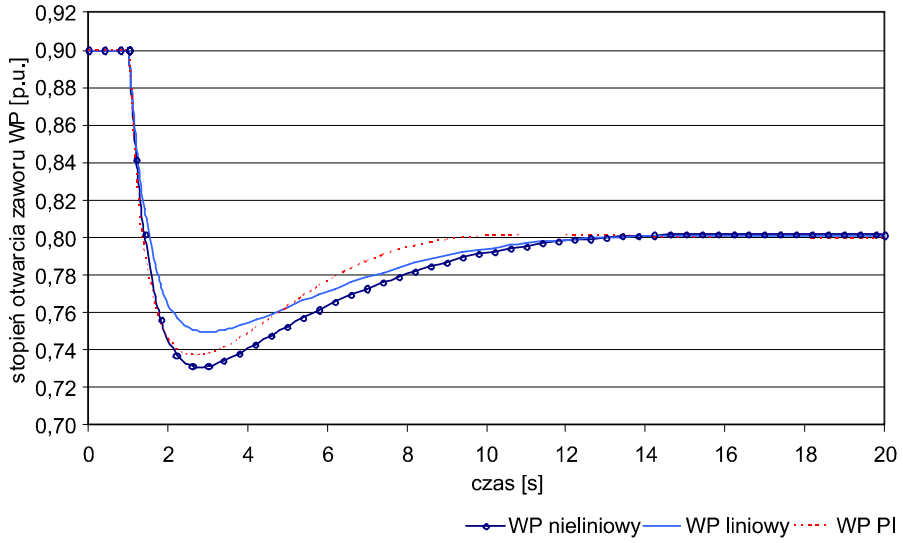


Rys. 6.12. Przebiegi przejściowe stopnia otwarcia zaworu NP

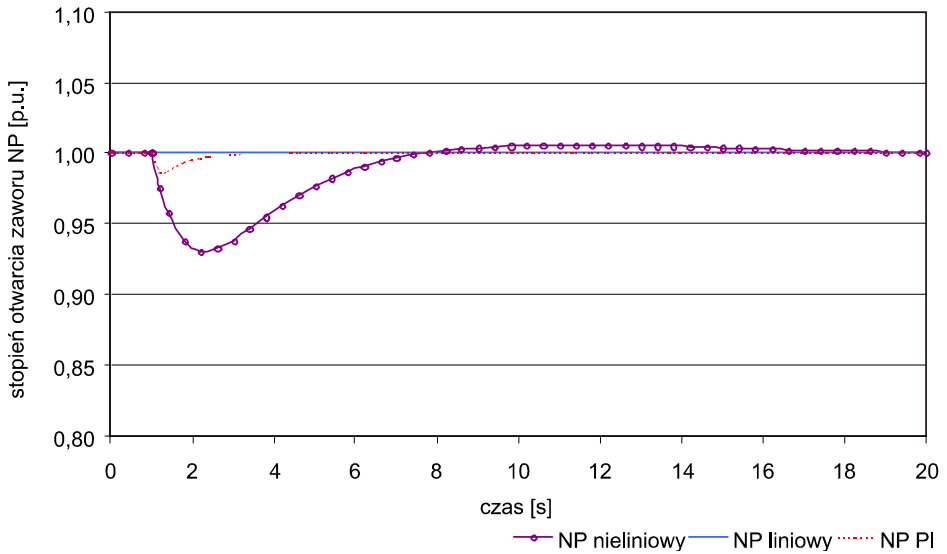
Eksperyment 6.2 Zmiana wartości zadanej mocy od 0,9 p.u. do 0,8 p.u.



Rys. 6.13. Przebiegi przejściowe mocy

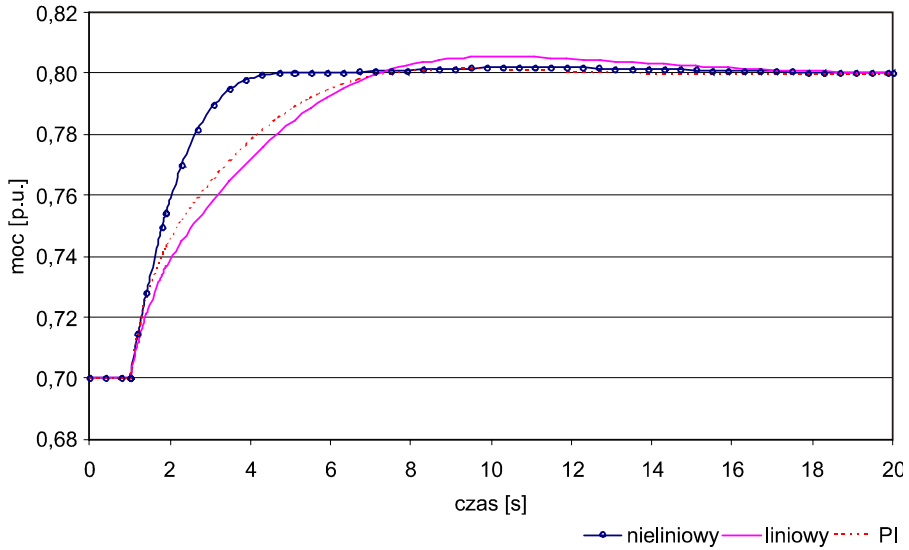


Rys. 6.14. Przebiegi przejściowe stopnia otwarcia zaworu WP

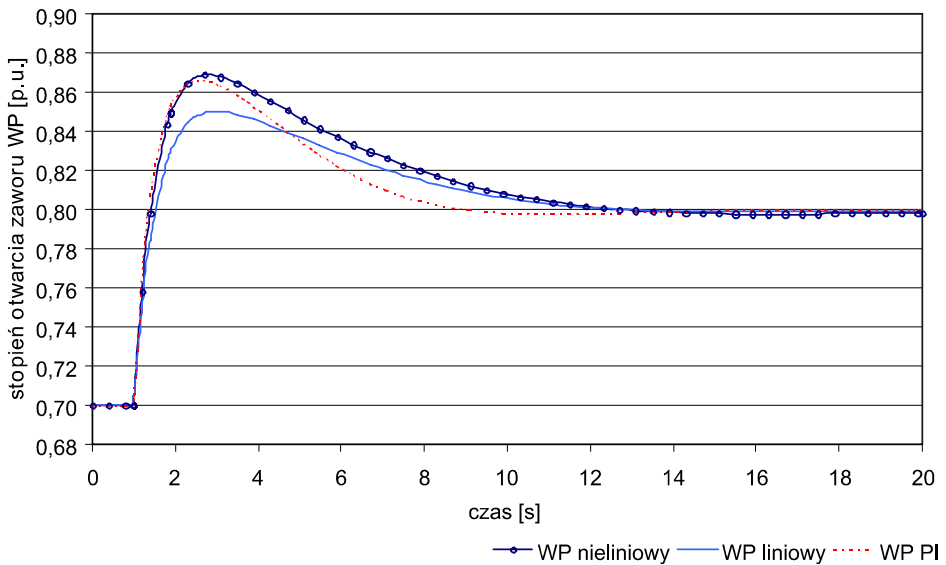


Rys. 6.15. Przebiegi przejściowe stopnia otwarcia zaworu NP

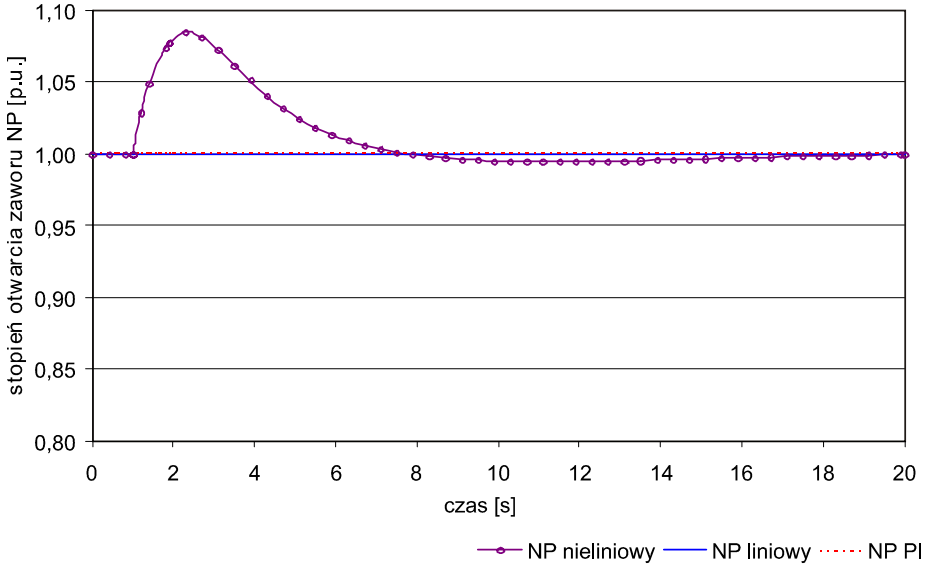
Eksperyment 6.3 Zmiana wartości zadanej mocy od 0,7 p.u. do 0,8 p.u.



Rys. 6.16. Przebiegi przejściowe mocy

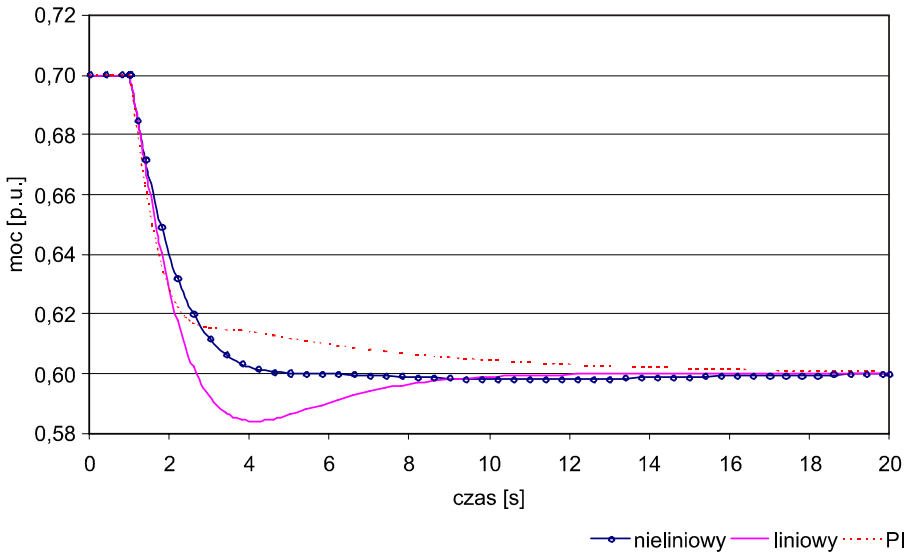


Rys. 6.17. Przebiegi przejściowe stopnia otwarcia zaworu WP

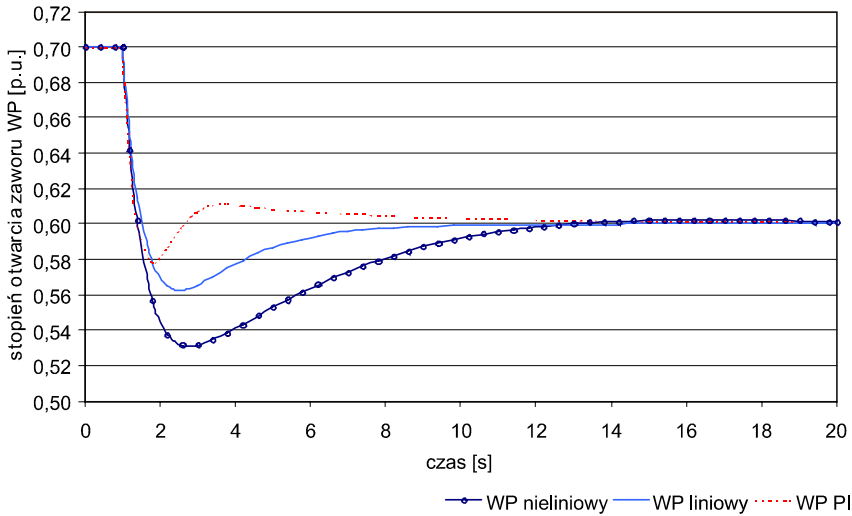


Rys. 6.18. Przebiegi przejściowe stopnia otwarcia zaworu NP

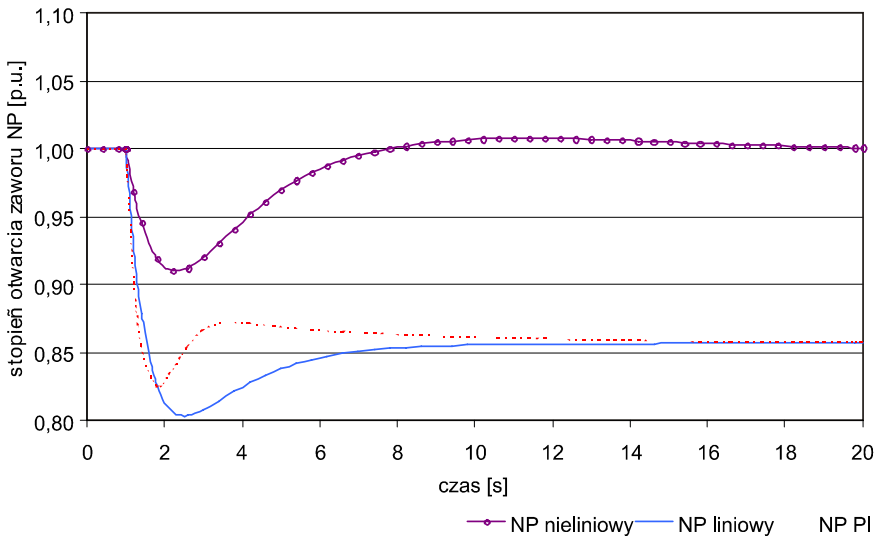
Eksperyment 6.4 Zmiana wartości zadanej mocy od 0,7 p.u. do 0,6 p.u.



Rys. 6.19. Przebiegi przejściowe mocy



Rys. 6.20. Przebiegi przejściowe stopnia otwarcia zaworu WP



Rys. 6.21. Przebiegi przejściowe stopnia otwarcia zaworu NP

Zastosowanie nieliniowego układu regulacji opartego na linearyzacji przez sprzężenie zwrotne pozwoliło uzyskać taką samą jakość regulacji w całym zakresie pracy obiektu. W układach liniowych następuje pogorszenie jakości regulacji, gdy obiekt pracuje z dala od nominalnego punktu pracy.

Podobne rozważania można przeprowadzić dla modelu turbiny trójstopniowej. Dla tego przypadku przedstawiono jedynie syntezę linearyzującej transformacji i sprzężenia zwrotnego, przede wszystkim w celu pokazania różnicy w postaci trans-

formacji otrzymanej klasycznym sposobem oraz otrzymanej dzięki znalezieniu odpowiedniego liniowego podsystemu. W związku z tym nie zamieszczono eksperymentów symulacyjnych.

Model matematyczny turbiny trójstopniowej jest określony za pomocą równ. (2.7). Obiekt zawiera siedem zmiennych stanu ($n = 7$) oraz trzy sygnały sterujące ($m = 3$), czyli jest obiektem o wielu wejściach. Wprowadzając standardowe oznaczenia, jak w równ. (2.7), otrzymuje się obiekt w postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) u_2 + \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) u_3 \quad (6.68)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_H} x_1 \\ \frac{1}{T_{R1}} (x_1 - x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}) \\ \frac{1}{T_M} (-x_3 + x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}) \\ \frac{1}{T_A} x_4 \\ \frac{1}{T_{R2}} (x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} - x_5 x_7) \\ \frac{1}{T_L} (-x_6 + x_5 x_7) \\ -\frac{1}{T_A} x_7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \end{bmatrix}$$

Warunki linearyzowalności przez statyczne sprzężenie zwrotne podane w twierdzeniu 6.5 wymagają sprawdzenia wymiaru i inwolutywności dystrybucji $\Delta_0, \dots, \Delta_6$

$$\Delta_0 = \text{span} \{ \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3 \} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \end{bmatrix} \right\} \quad (6.69)$$

Δ_0 ma stały wymiar $\dim \Delta_0 = 3$ i jest inwolutywna, ponieważ pola wektorowe \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 , \mathbf{g}_3 są stałe

$$\Delta_1 = \text{span} \{ \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, ad_f \mathbf{g}_1, ad_f \mathbf{g}_2, ad_f \mathbf{g}_3 \}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \frac{1}{T_H} \\ -\frac{1}{T_H T_{R1}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{T_A T_{R1}} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ -\frac{1}{T_A T_M} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ \frac{1}{T_A^2} \\ \frac{1}{T_A T_{R2}} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A T_{R2}} x_5 \\ -\frac{1}{T_A T_L} x_5 \\ \frac{1}{T_A^2} \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (6.70)$$

Δ_1 ma stały wymiar $\dim \Delta_1 = 6$ i jest inwolutywna dla wszystkich \mathbf{x} , dla których $\gamma x_2^2 - x_5^2 > 0$. Warunek ten jest spełniony, gdyż para przepływa przez turbinę od koła do skraplacza, a nie odwrotnie.

Kolejne dystrybucje $\Delta_2, \dots, \Delta_6$ mają już pełny wymiar i są trywialnie inwolutywne. Obiekt (6.68) jest zatem linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne.

W celu znalezienia odpowiedniej transformacji, próba zastosowania najmocniejszego narzędzia w postaci algorytmu 5.1 kończy się niepowodzeniem

$$\dot{\mathbf{x}} = ad_f \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_A T_{R1}} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ -\frac{1}{T_A T_M} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ \frac{1}{T_A^2} \\ \frac{1}{T_A T_{R2}} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

Dla obiektu o wielu wejściach stosuje się poniższy algorytm:

Krok 1–3. Dopiero dla $\kappa = 1$ i $k = 1$ zachodzi $m_1 = n - \text{rank}(\Delta_1) = 7 - 6 = 1 > 0$.

Krok 4. Należy znaleźć funkcję $h_1(\mathbf{x})$, której gradient anihiluje Δ_1 . Niestety w tym wypadku nie można skorzystać wprost z lematu 5.1 lub lematu 5.2. Można spróbować rozwiązać układ równań (5.43), mając nadzieję, że rozwiązanie będzie stanowiło różniczkę linearyzującej funkcji. W tym wypadku układ równań (5.43) przyjmuje postać

$$[\omega_1(\mathbf{x}), \dots, \omega_7(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{1}{T_H^2} \\ -\frac{1}{T_H T_{R1}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{T_A T_{R1}} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ -\frac{1}{T_A T_M} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ \frac{1}{T_A^2} \\ \frac{1}{T_A T_{R2}} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A T_{R2}} x_5 \\ -\frac{1}{T_A T_L} x_5 \\ \frac{1}{T_A^2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

Okazuje się, że rozwiązanie tego układu ma postać

$$\begin{aligned} \omega_1(\mathbf{x}) &= 0 \\ \omega_2(\mathbf{x}) &= 0 \\ \omega_3(\mathbf{x}) &= -a \frac{T_M}{T_L} \\ \omega_4(\mathbf{x}) &= 0 \\ \omega_5(\mathbf{x}) &= a \frac{T_{R2}}{T_L} \\ \omega_6(\mathbf{x}) &= a \\ \omega_7(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.73)$$

Ponieważ wszystkie składowe rozwiązania są stałe dla $a = 1$, więc warunek (5.44) jest spełniony i na podstawie (6.73) można wyznaczyć funkcję $h_1(\mathbf{x})$, która przyjmuje postać

$$h_1(\mathbf{x}) = -\frac{T_M}{T_L} x_3 + \frac{T_{R2}}{T_L} x_5 + x_6 \quad (6.74)$$

Krok 5.

$$1 = m_1 < m = 3, \text{ więc } k = 2, \kappa = 0$$

Druga iteracja. Krok 2.

$$m_2 = n - \text{rank}(\Delta_0) - \sum_{j=1}^1 (2-j+1)m_j = 7 - 3 - (2-1+1) \cdot 1 = 2$$

Krok 3.

$$m_2 > 0$$

Krok 4. Należy znaleźć dwie liniowo niezależne i nietrywialne funkcje $h_i(\mathbf{x})$ o indeksach $m_1 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2$, czyli $i = 2, 3$. Gradienty tych funkcji muszą anihilować dystrybucję $\Delta_0 + \Omega^T$.

$$\Omega = \text{span} \{dh_1(\mathbf{x}), dL_r h_1(\mathbf{x})\}$$

czyli

$$\Delta_0 + \Omega^T = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_A} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{T_M}{T_L} \\ 0 \\ \frac{T_{R2}}{T_L} \\ \frac{1}{T_L} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{T_L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Po rozwiązaniu układu analogicznego do (6.72) otrzymuje się rozwiązanie zależne od dwóch parametrów a, b :

$$\begin{aligned} \omega_1(\mathbf{x}) &= 0, & \omega_2(\mathbf{x}) &= a, & \omega_3(\mathbf{x}) &= b, & \omega_4(\mathbf{x}) &= 0 \\ \omega_5(\mathbf{x}) &= -b \frac{(T_L - T_M)}{T_{R2}}, & \omega_6(\mathbf{x}) &= b, & \omega_7(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.75)$$

Jeśli parametry a, b nie zależą od \mathbf{x} , to przyjmując pary $(a, b) = (1, 0)$ oraz $(a, b) = (0, 1)$, otrzymuje się dwie niezależne funkcje

$$\begin{aligned} h_2(\mathbf{x}) &= x_2 \\ h_3(\mathbf{x}) &= x_3 - \frac{(T_L - T_M)}{T_{R2}} x_5 + x_6 \end{aligned} \quad (6.76)$$

Krok 5. Ponieważ $m_1 + m_2 = 3 = m$, następuje koniec algorytmu. \square

Linearyzująca transformacja ma postać

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\Gamma} h_1(\mathbf{x}) \\ L_{\Gamma}^2 h_1(\mathbf{x}) \\ h_2(\mathbf{x}) \\ L_{\Gamma} h_2(\mathbf{x}) \\ h_3(\mathbf{x}) \\ L_{\Gamma} h_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{T_M}{T_L} x_3 + \frac{T_{R2}}{T_L} x_5 + x_6 \\ -\frac{1}{T_L} (x_3 - x_6) \\ -\frac{1}{T_L T_M} x_3 - \frac{1}{T_L T_M} x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} - \frac{1}{T_L} x_6 + \frac{1}{T_L} x_5 x_7 \\ x_2 \\ \frac{1}{T_{R1}} (x_1 - x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}) \\ x_3 - \frac{T_L - T_M}{T_{R2}} x_5 + x_6 \\ \frac{T_{R2}}{T_M (T_L - T_M)} (x_3 - x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}) \\ + \frac{1}{T_{R2}} (x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} - x_5 x_7) + \frac{T_{R2}}{T_L (T_L - T_M)} (x_5 x_7 - x_6) \end{bmatrix}$$

a sprzężenie zwrotne

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^2 h_1 & L_{g_2} L_f^2 h_1 & L_{g_3} L_f^2 h_1 \\ L_{g_1} L_f h_2 & L_{g_2} L_f h_2 & L_{g_3} L_f h_2 \\ L_{g_1} L_f h_3 & L_{g_2} L_f h_3 & L_{g_3} L_f h_3 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_f^3 h_1 \\ L_f^2 h_2 \\ L_f^2 h_3 \end{bmatrix} \right) \quad (6.78)$$

$$L_{g_1} L_f^2 h_1 = 0, \quad L_{g_2} L_f^2 h_1 = \frac{1}{T_L T_M T_A} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}, \quad L_{g_3} L_f^2 h_1 = -\frac{1}{T_L^2 T_A} x_5$$

$$L_{g_1} L_f h_2 = \frac{1}{T_{R1} T_M}, \quad L_{g_2} L_f h_2 = -\frac{1}{T_{R1} T_A} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}, \quad L_{g_3} L_f h_2 = 0$$

$$L_{g_1} L_f h_3 = 0, \quad L_{g_2} L_f h_3 = \frac{1}{T_A} \left(\frac{1}{T_{R2}} - \frac{T_{R2}}{(T_L - T_M) T_M} \right) \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}$$

$$L_{g_3} L_f h_3 = \frac{1}{T_A} \left(\frac{T_{R2}}{(T_L - T_M) T_M} - \frac{1}{T_{R2}} \right) x_5$$

Wyrażenia opisujące $L_f^3 h_1, L_f^2 h_2, L_f^2 h_3$ są natomiast zbyt rozbudowane, aby przytoczyć je w całości. Łatwo pokazać globalny dyfeomorfizm przekształcenia (6.77).

Dla porównania zostanie przeprowadzona linearyzacja, w której wykorzystuje się liniowy podsystem.

1. Obiekt (6.68) ma trzy wejścia. Istnieje $7 = 2^m - 1$ możliwych podziałów sterowań. Od razu zostanie rozpatrzony przypadek, który umożliwi wykrycie liniowego podsystemu

$$\bar{\mathbf{u}} = u_1, \quad \bar{m} = 1, \quad \bar{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{m} = 2, \quad \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{g}}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_3(\mathbf{x})$$

W tym przypadku macierz $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{b}}$ jest wektorem o stałych współczynnikach.

2. Tylko czwarta składowa $\tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x})$ oraz siódma składowa $\tilde{\mathbf{g}}_2(\mathbf{x})$ są niezerowe. Wstępny podział sterowań jest następujący:

$$\bar{I} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

$$\tilde{I} = \{4, 7\}$$

$$\bar{n}_0 = 5 > 2 = \tilde{m}$$

3. Tabela rzędów względnych

| $f_i(\mathbf{x})$ | $rd(f_i, \tilde{\mathbf{g}}_1)$ | $rd(f_i, \tilde{\mathbf{g}}_1)$ | $rd(f_i, \tilde{\mathbf{g}}_2)$ |
|--|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $f_1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{T_H} x_1$ | 1 | ∞ | ∞ |
| $f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_{R1}} (x_1 - x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2})$ | 1 | 1 | 2 |
| $f_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_M} (-x_3 + x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2})$ | 2 | 1 | 2 |
| $f_5(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_{R2}} (x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} - x_5 x_7)$ | 2 | 1 | 1 |
| $f_6(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_L} (-x_6 + x_5 x_7)$ | 3 | 2 | 1 |

Nie ma takiego j , że rzędy względne między wszystkimi f_i oraz $\tilde{\mathbf{g}}_j$ są równe nieskończoności.

4. Jest $\frac{\bar{n}_0!}{(\bar{n}_0 - \bar{m})!} = \frac{5!}{3!} = 20$ możliwych linearyzujących wektorów F_k , $k = 1, \dots, 20$.

$$F_1 = [f_1, f_2], \quad F_2 = [f_1, f_3], \quad F_3 = [f_1, f_5], \quad F_4 = [f_1, f_6]$$

$$F_5 = [f_2, f_1], \quad F_6 = [f_2, f_3], \quad F_7 = [f_2, f_5], \quad F_8 = [f_2, f_6]$$

$$F_9 = [f_3, f_1], \quad F_{10} = [f_3, f_1], \quad F_{11} = [f_3, f_5], \quad F_{12} = [f_3, f_6]$$

$$F_{13} = [f_5, f_1], \quad F_{14} = [f_5, f_2], \quad F_{15} = [f_5, f_3], \quad F_{16} = [f_5, f_6]$$

$$F_{17} = [f_6, f_1], \quad F_{18} = [f_6, f_2], \quad F_{19} = [f_6, f_3], \quad F_{20} = [f_6, f_5]$$

5. Warunek stałego wymiaru Δ_i jest spełniony tylko dla trzech kombinacji, czyli dla $k \in \{11, 12, 16\}$

$$F_{11} = [f_3, f_5], \quad \mathbf{r}(11) = [r_1(11) \quad r_2(11)] = [1 \quad 1]$$

$$F_{12} = [f_3, f_6], \quad \mathbf{r}(12) = [r_1(12) \quad r_2(12)] = [1 \quad 1]$$

$$F_{16} = [f_5, f_6], \quad \mathbf{r}(16) = [r_1(16) \quad r_2(16)] = [1 \quad 1]$$

Dla wszystkich k z tego zbioru macierz $\mathbf{D}_k = [\tilde{\mathbf{g}}_1 \quad \tilde{\mathbf{g}}_2]$ ma taką samą postać i taką samą liczbę niezerowych wierszy równą

$$r_1(k) + r_2(k) = 2, \quad \bar{I}(k) = \{1, 2, 3, 5, 6\}, \quad \tilde{I}(k) = \{4, 7\}$$

6. Dla $k = 11$, funkcje f_1, f_2, f_6 muszą być liniowymi kombinacjami $x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, f_3, f_5$.

$$f_1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{T_H}(x_1)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_{R1}}(x_1 - x_4\sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}) = \frac{1}{T_{R1}}(x_1) - \frac{1}{T_{R1}}(x_3) - \frac{T_M}{T_{R1}}f_3(\mathbf{x})$$

$$f_6(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_L}(-x_6 + x_5x_7) = \frac{1}{T_L}(x_3) - \frac{1}{T_L}(x_6) - \frac{T_M}{T_L}f_3(\mathbf{x}) + \frac{T_M}{T_{R2}}f_5(\mathbf{x})$$

- dla $k = 12$, funkcje f_1, f_2, f_5 muszą być liniowymi kombinacjami $x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, f_3, f_6$

$$f_1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{T_H}(x_1)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_{R1}}(x_1 - x_4\sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}) = \frac{1}{T_{R1}}(x_1) - \frac{1}{T_{R1}}(x_3) - \frac{T_M}{T_{R1}}f_3(\mathbf{x})$$

$$f_5(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_{R2}}(x_4\sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} - x_5x_7) = \frac{1}{T_{R2}}(x_3) - \frac{1}{T_{R2}}(x_6) + \frac{T_M}{T_{R2}}f_3(\mathbf{x}) - \frac{T_L}{T_{R2}}f_6(\mathbf{x})$$

- dla $k = 16$, funkcje f_1, f_2, f_3 muszą być liniowymi kombinacjami $x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, f_5, f_6$

$$f_1(\mathbf{x}) = -\frac{1}{T_H}(x_1)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_{R1}}(x_1 - x_4\sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}) = \frac{1}{T_{R1}}(x_1) - \frac{1}{T_{R1}}(x_6) - \frac{T_{R2}}{T_{R1}}f_5(\mathbf{x}) - \frac{T_L}{T_{R1}}f_6(\mathbf{x})$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{T_M}(-x_3 + x_4\sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}) = -\frac{1}{T_M}(x_3) + \frac{1}{T_M}(x_6) + \frac{T_{R2}}{T_M}f_5(\mathbf{x}) + \frac{T_L}{T_M}f_6(\mathbf{x})$$

W tych wszystkich przypadkach funkcje te są odpowiednimi kombinacjami liniowymi, więc $\bar{I} = \{11, 12, 16\}$.

7. Dla wszystkich $k \in \bar{I}$ liniowy podsystem ma taką samą liczbą zmiennych.

8. Wybiera się $k^* = 12$.

9. Po wydzieleniu części nieliniowej, linearyzujące wyjścia z dokładnością do stałego współczynnika mają postać

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4\sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ x_5x_7 \end{bmatrix} \quad (6.79)$$

Obiekt (6.68) można zatem zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_H} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{R1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{T_{R1}} & 0 \\ \frac{1}{T_M} & 0 \\ \frac{1}{T_{R2}} & -\frac{1}{T_{R2}} \\ 0 & \frac{1}{T_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ x_5 x_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \\
 \begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_A} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.80}$$

Oznaczenia są w tym przypadku następujące:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_7 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}} = u_1, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{n} = 5, \quad \tilde{n} = 2, \quad \bar{m} = 1, \quad \tilde{m} = 2$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ x_5 x_7 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = [\tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2] = \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{T_A} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_A} \end{bmatrix} \right]$$

Transformacja zmiennych stanu ma postać

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \\ x_5 x_7 \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

Linearyzujące sprzężenie zwrotne ma postać

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} L_{g_1} \psi_1 & L_{g_2} \psi_1 \\ L_{g_1} \psi_2 & L_{g_2} \psi_2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_f \psi_1 \\ L_f \psi_2 \end{bmatrix} \right) \quad (6.82)$$

$$L_f \psi_1 = \frac{x_4 \left(\gamma T_A T_{R2} x_1 x_2 - T_{R1} T_{R2} (\gamma x_2^2 - x_5^2) + T_A T_{R1} x_5^2 x_7 - T_A x_4 (\gamma T_{R2} x_2 + T_{R1} x_5) \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} \right)}{T_A T_{R1} T_{R2} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}}$$

$$L_f \psi_2 = \frac{1}{T_{R2}} x_7 (x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} - x_5 x_7) - \frac{1}{T_A} x_5 x_7$$

$$L_{g_2} \psi_1 = \frac{\gamma T_A T_{R2} x_1 x_2 - T_{R1} T_{R2} (\gamma x_2^2 - x_5^2) + T_A T_{R1} x_5^2 x_7 - 2x_4 (\gamma x_2 + x_5) \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}}{T_A^2 T_{R1} T_{R2} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}}$$

$$L_{g_3} \psi_1 = \frac{x_4 x_5^2}{T_A T_{R2} \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}}, \quad L_{g_2} \psi_2 = \frac{x_7 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2}}{T_A T_{R2}}$$

$$L_{g_3} \psi_2 = \frac{T_A x_4 \sqrt{\gamma x_2^2 - x_5^2} - 2T_A x_5 x_7 - T_{R2} x_5}{T_A^2 T_{R2}}$$

Jak można zauważyć, transformacja (6.81) jest znacznie prostsza niż (6.77). W transformacji (6.81) przekształceniu podlegają tylko dwie zmienne stanu, podczas gdy w (6.77) przekształceniu podlegają sześć zmiennych stanu. We wzorze (6.82) wystarczy odwrócić macierz o wymiarze 2×2 , natomiast we wzorze (6.78) odwracana macierz ma wymiar 3×3 .

6.8. Układ regulacji bloku energetycznego

Punkt równowagi modelu bloku pracującego na sieć sztywną (2.9) jest określony czterema równaniami algebraicznymi

$$\begin{aligned}
 -x_1 + p_T u_1 &= 0 \\
 k\sqrt{\gamma p_D - p_T} - p_T u_1 &= 0 \\
 m_w - k\sqrt{\gamma p_D - p_T} &= 0 \\
 -m_w + u_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.83}$$

Równania (6.83) zawierają sześć zmiennych niezależnych: cztery zmienne stanu oraz dwa sygnały sterujące. Oznacza to, że punkt równowagi może być osiągnięty dla różnych wartości mocy produkowanej przez blok i dla różnych wartości ciśnienia przed turbiną. Wartości wszystkich zmiennych stanu są wartościami względnymi odniesionymi do wartości nominalnych [p.u.].

Celem konstruowania układu regulacji jest stabilizowanie mocy bloku na zadanej wartości P_z (która może zmieniać się zgodnie z wymaganiami systemu elektroenergetycznego) oraz stabilizowanie ciśnienia przed turbiną na wartości nominalnej $p_{T0} = 1$. W związku z tym wprowadza się dwa działania całkujące, które stabilizują moc i ciśnienie przed turbiną na zadanych wartościach

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= x_1 - P_z \\
 \dot{e}_2 &= p_T - p_{T0}
 \end{aligned} \tag{6.84}$$

Obiekt, który ma podlegać linearyzacji ma postać

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

dla standardowych oznaczeń obiektu o wielu wejściach

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ p_T \\ p_D \\ m_w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_h} x_1 \\ x_1 - P_z \\ p_T - p_{T0} \\ \frac{k}{c_{sh}} \sqrt{\gamma p_D - p_T} \\ \frac{1}{c_D} (m_w - k\sqrt{\gamma p_D - p_T}) \\ -\frac{1}{T_w} m_w \end{bmatrix} \tag{6.85a}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_h} p_T & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_{sh}} p_T & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_w} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (6.85b)$$

W tym wypadku rząd obiektu $n = 6$. Liczba wejść $m = 2$. Definiuje się dystrybucje

$$\Delta_i = \text{span}\{ad_f^k \mathbf{g}_1, ad_f^k \mathbf{g}_2 : 0 \leq k \leq i\} \text{ dla } i = 0, 1, \dots, 5 \quad (6.86)$$

Obiekt byłby linearyzowalny, jeśli byłyby spełnione odpowiednie założenia.

Dystrybucja $\Delta_0 = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ ma stały wymiar 2, równy liczbie wejść dla $p_T \neq 0$.

Należy sprawdzić inwolutywność, tzn. czy nawias Liego składników Δ_0 należy dalej do Δ_0

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_1 - \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_2 = \mathbf{0}_{6 \times 6} \mathbf{g}_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{sh}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{g}_2 = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (6.87)$$

Dystrybucja Δ_0 jest zatem inwolutywna.

Dla dystrybucji $\Delta_1 = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ad_f \mathbf{g}_1, ad_f \mathbf{g}_2\}$ pola wektorowe $ad_f \mathbf{g}_1$ oraz $ad_f \mathbf{g}_2$ mają postać

$$ad_f \mathbf{g}_i = [\mathbf{f}, \mathbf{g}_i] = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_h^2} p_T + \frac{k}{C_{sh} T_h} \sqrt{\gamma p_D - p_T} \\ -\frac{1}{T_h} p_T \\ \frac{1}{C_{sh}} p_T \\ -\frac{k}{2C_{sh}^2} \left(\frac{p_T}{\sqrt{\gamma p_D - p_T}} + 2\sqrt{\gamma p_D - p_T} \right) \\ \frac{k}{2C_{sh} C_D} \frac{p_T}{\sqrt{\gamma p_D - p_T}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.88)$$

$$ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_2 = [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{C_D T_w} \\ \frac{1}{T_w^2} \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

Dystrybucja Δ_1 nie jest inwolutywna, ponieważ $[\mathbf{g}_1, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}_1] \notin \Delta_1$. Oznacza to, że obiekt (6.85) nie jest linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne. Jednym ze sposobów umożliwienia przeprowadzenia linearyzacji jest zastosowanie rozszerzenia dynamicznego. Sygnałami wyjściowymi dla bloku energetycznego są moc i ciśnienie przed turbiną. W układzie (6.85) sygnały te poddano całkowaniu w celu ich stabilizacji na zadanym poziomie. W związku z tym, za wyjścia do poszukiwania rozszerzenia dynamicznego przyjmuje się funkcje

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= e_1 \\ h_2(\mathbf{x}) &= e_2 \end{aligned} \quad (6.90)$$

Znajdowanie rozszerzenia dynamicznego odbywa się dalej według następującego algorytmu

Iteracja 1. Krok 1.

$$\tilde{n} = 6, \quad \tilde{m} = 2$$

$$L_{\mathbf{g}_1} h_1 = L_{\mathbf{g}_1} h_2 = L_{\mathbf{g}_2} h_1 = L_{\mathbf{g}_2} h_2 = 0$$

Jednak już w kolejnych pochodnych Liego pojawia się u_1 , macierz $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ ma zatem postać

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}} h_1 & L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}} h_1 \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}} h_2 & L_{\mathbf{g}_2} L_{\mathbf{f}} h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_h} p_T & 0 \\ -\frac{1}{C_{sh}} p_T & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ jest stały dla dodatnich wartości ciśnienia i wynosi

$$\tilde{r} = 1 < 2 = \tilde{m}$$

Krok 2. W tym wypadku od razu ($\tilde{m} - \tilde{r} = 1$) ostatnia kolumna macierzy $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ jest równa zero, czyli macierz operacji elementarnych ζ ma postać

$$\zeta = [\zeta_1 \quad \zeta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 3. W torze pierwszego sygnału sterującego ($\tilde{r} = 1$) wprowadza się działanie całkujące

$$\mathbf{u} = \zeta \begin{bmatrix} w_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{w}_1 = v_1$$

gdzie w_1 – nowa zmienna stanu, v_1, v_2 – nowe sygnały sterujące.

Krok 4. Modyfikuje się obiekt (6.85), używając ponownie tych samych oznaczeń

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ p_T \\ p_D \\ m_w \\ w_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_h} x_1 + \frac{1}{T_h} p_T w_1 \\ x_1 - P_Z \\ p_T - p_{T0} \\ \frac{k}{C_{sh}} \sqrt{\gamma p_D - p_T} - \frac{1}{C_{sh}} p_T w_1 \\ \frac{1}{C_D} (m_w - k \sqrt{\gamma p_D - p_T}) \\ -\frac{1}{T_w} m_w \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.91a)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_w} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (6.91b)$$

Iteracja 2. Krok 1.

$$\tilde{n} = 7, \quad \tilde{m} = 2$$

$$L_{g_1} h_1 = L_{g_1} h_2 = L_{g_2} h_1 = L_{g_2} h_2 = L_{g_1} L_f h_1 = L_{g_1} L_f h_2 = L_{g_2} L_f h_1 = L_{g_2} L_f h_2 = 0$$

Jednak w kolejnych pochodnych Liego pojawia się u_1 , macierz $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ ma zatem postać

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^2 h_1 & L_{g_2} L_f^2 h_1 \\ L_{g_1} L_f^2 h_2 & L_{g_2} L_f^2 h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_h} p_T & 0 \\ -\frac{1}{C_{sh}} p_T & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ jest stały dla dodatnich wartości ciśnienia i wynosi

$$\tilde{r} = 1 < 2 = \tilde{m}$$

Krok 2. Jak w poprzedniej iteracji ζ ma postać

$$\zeta = [\zeta_1 \quad \zeta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 3. W torze pierwszego sygnału sterującego ($\tilde{r} = 1$) wprowadza się działanie całkujące

$$\mathbf{u} = \zeta \begin{bmatrix} w_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{w}_2 = v_1$$

gdzie: w_2 – nowa zmienna stanu, v_1, v_2 – nowe sygnały sterujące.

Krok 4. Modyfikuje się obiekt (6.91), używając ponownie tych samych oznaczeń

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ p_T \\ p_D \\ m_w \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_h} x_1 + \frac{1}{T_h} p_T w_1 \\ x_1 - P_Z \\ p_T - p_{T0} \\ \frac{k}{C_{sh}} \sqrt{\gamma p_D - p_T} - \frac{1}{C_{sh}} p_T w_1 \\ \frac{1}{C_D} (m_w - k \sqrt{\gamma p_D - p_T}) \\ -\frac{1}{T_w} m_w \\ w_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_w} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.92)$$

Używając nowych oznaczeń otrzymuje się

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ p_T \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} p_D \\ m_w \\ w_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{n} = 4, \quad \tilde{n} = 3, \quad \bar{m} = 0, \quad \tilde{m} = 2$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_T w_1 \\ k\sqrt{\gamma p_D - p_T} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = [\tilde{\mathbf{g}}_1 \quad \tilde{\mathbf{g}}_2] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_w} \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Transformacja zmiennych stanu ma teraz postać

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ p_T \\ p_T w_1 \\ \psi_1 \\ L_f \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ p_T \\ p_T w_1 \\ \frac{k}{2C_{sh}C_D} \cdot \frac{C_D p_T w_1 + \gamma C_{sh} m_w - (C_D + \gamma C_{sh}) k \sqrt{\gamma p_D - p_T}}{\sqrt{\gamma p_D - p_T}} \\ k\sqrt{\gamma p_D - p_T} \end{bmatrix} \quad (6.94)$$

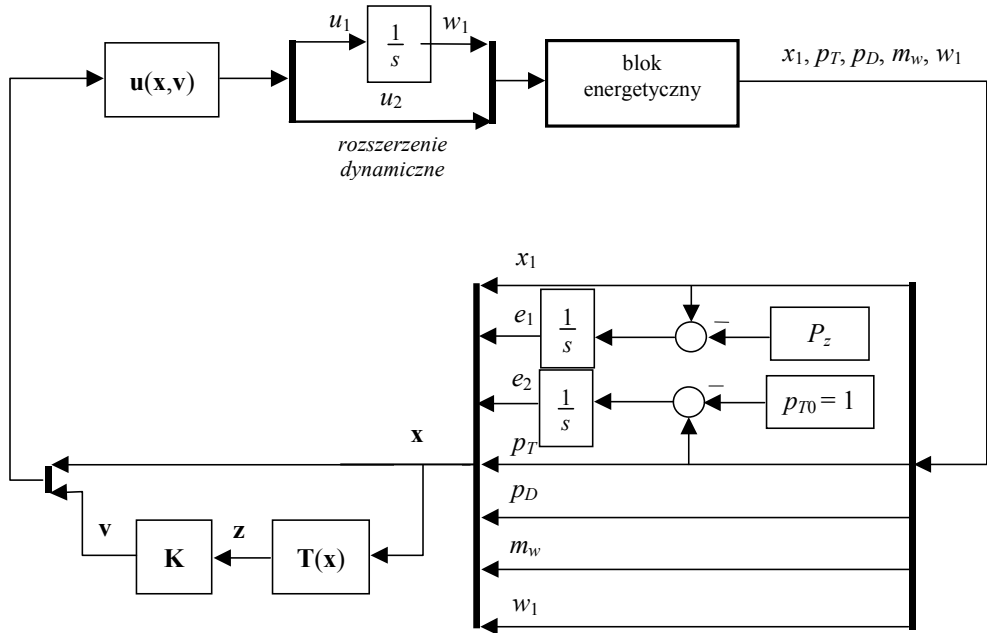
Linearyzujące sprzężenie zwrotne ma postać

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f \psi_1 & 0 \\ L_{g_1} \psi_2 & L_{g_2} \psi_2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_f^2 \psi_1 \\ L_f \psi_2 \end{bmatrix} \right) \quad (6.95)$$

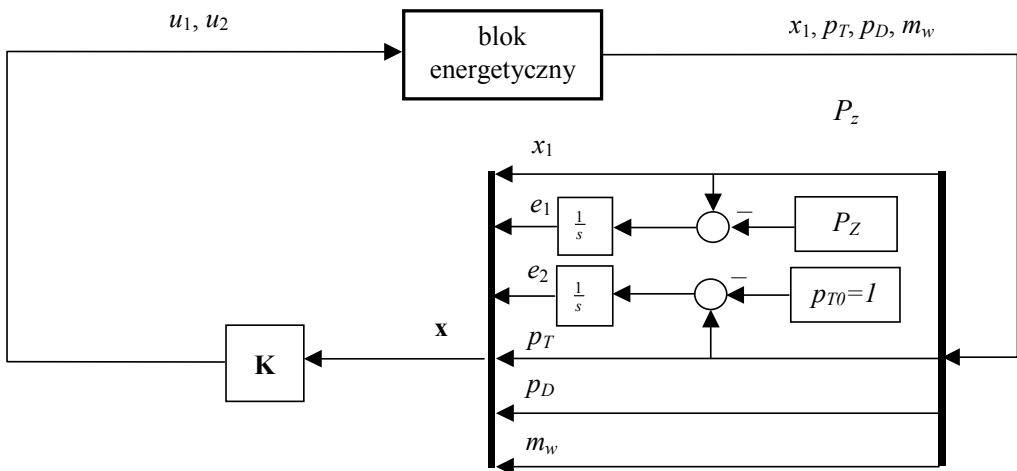
Tak przeprowadzona linearyzacja prowadzi do schematu układu regulacji przedstawionego na rys. 6.22.

Przeprowadzono badania symulacyjne, których celem było porównanie układu regulacji opartego na linearyzacji z dwoma liniowymi układami regulacji. Pierwszym z nich był proporcjonalny regulator stanu (rys. 6.23), którego wzmacnienie dobrano dla przybliżenia liniowego w nominalnym punkcie pracy modelu bloku energetycznego. Drugim był układ regulacji z wiodącą turbiną oparty na regulatorach PID (rys. 6.24).

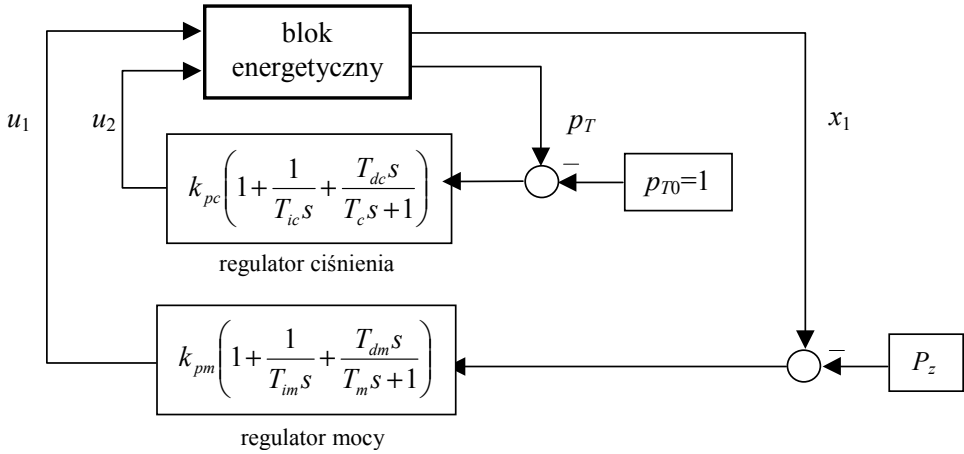
Układy regulacji testowano, zmieniając o 10% wartość mocy zadanej. Układy nastrojono tak, by 70% zadanego przyrostu mocy następowało już po 50 s. Uzyskuje się to dzięki wykorzystaniu akumulacji pary w kotle. Założono dalej, że odchyłka dynamiczna sygnałów sterujących nie może przekraczać 10% zakresu podczas przebiegów przejściowych wywołanych taką zmianą mocy.



Rys. 6.22. Schemat układu regulacji bloku energetycznego opartego na linearyzacji



Rys. 6.23. Schemat układu regulacji z proporcjonalnym sprzężeniem zwrotnym od stanu

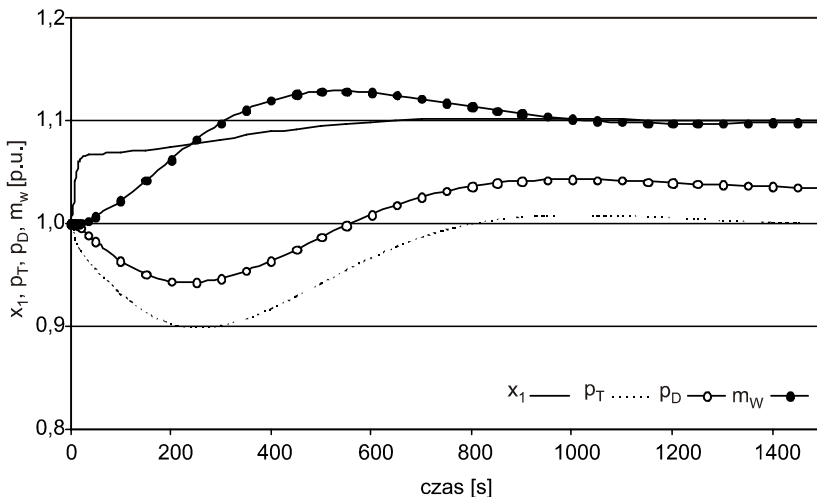


Rys. 6.24. Schemat klasycznego układu regulacji z wiodącą turbiną

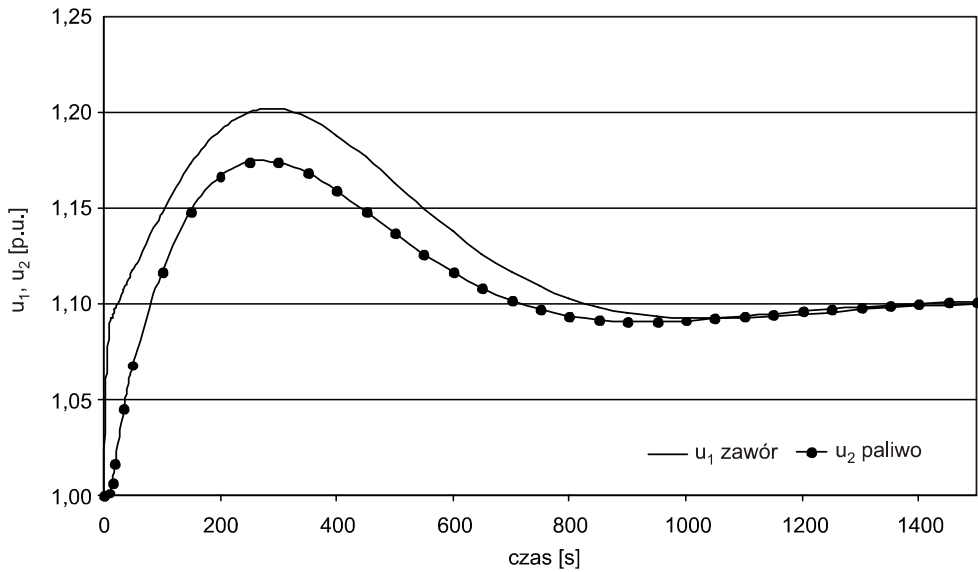
Eksperymenty symulacyjne wykonano dla następujących stałych: $T_h = 7$ s, $C_d = 120$ s, $C_{sh} = 20$ s, $T_w = 260$ s, $\gamma = 1,2$, $k = 1/\sqrt{\gamma-1}$.

Eksperyment 6.5

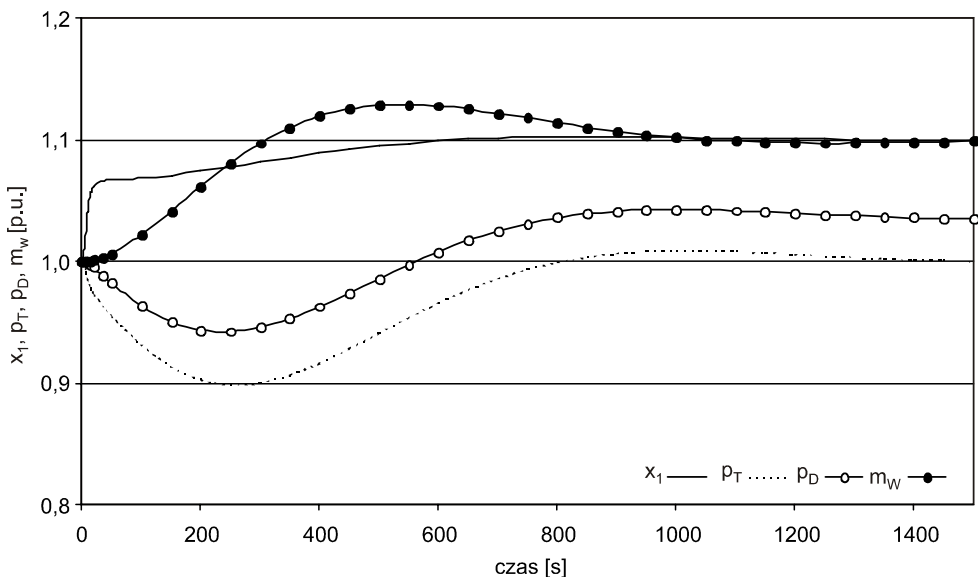
Blok znajduje się w nominalnym punkcie pracy $P_z = 1$ p.u, po czym następuje zwiększenie mocy zadanej do $P_z = 1,1$ p.u.



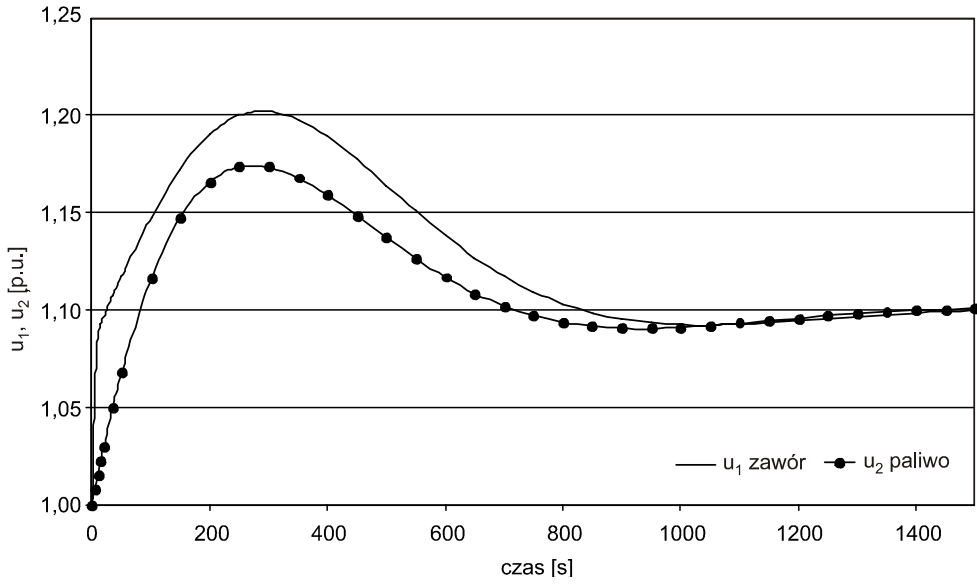
Rys. 6.25. Przebiegi przejściowe zmiennych stanu bloku energetycznego w układzie regulacji z linearyzacją podczas zwiększenia zadanej mocy



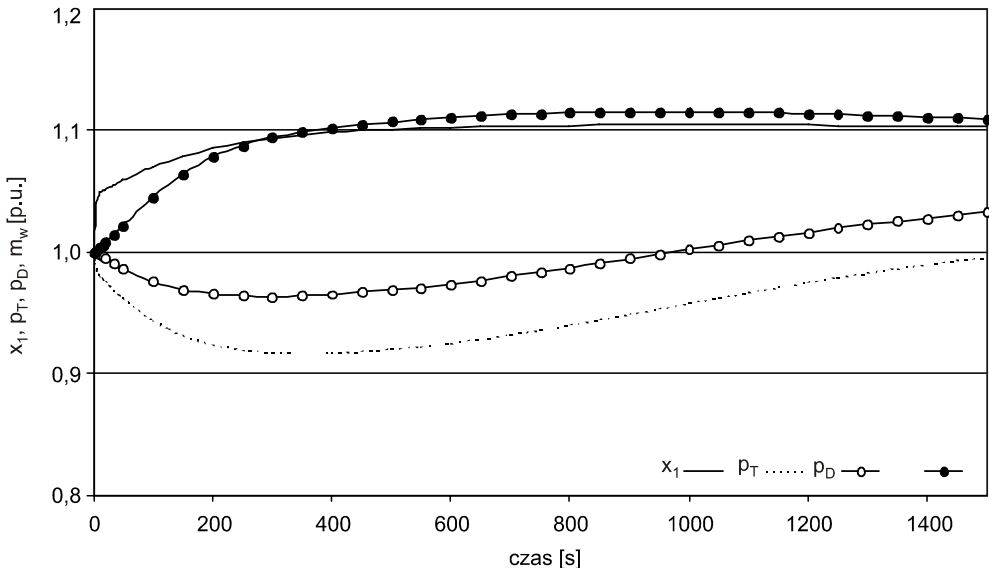
Rys. 6.26. Przebiegi przejściowe sygnałów sterujących bloku energetycznego w układzie regulacji z linearyzacją podczas zmiany zadanej mocy



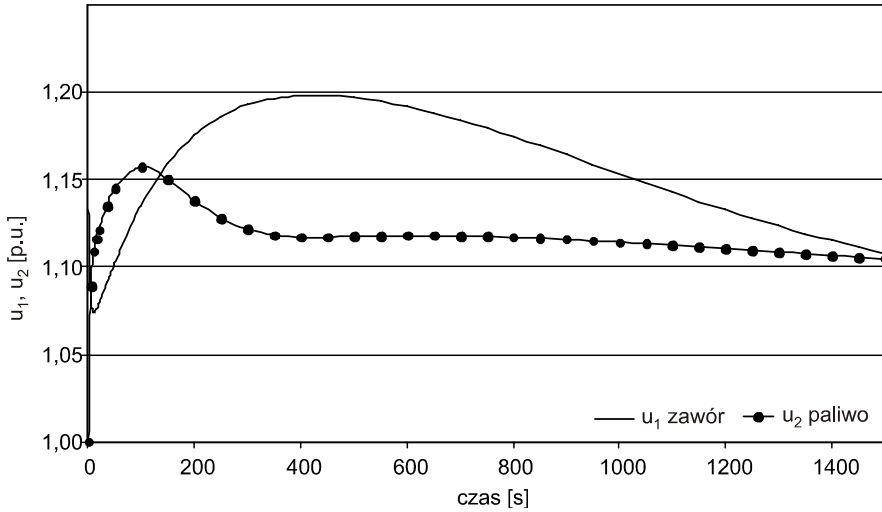
Rys. 6.27. Przebiegi przejściowe zmiennych stanu bloku energetycznego w układzie z proporcjonalnym regulatorem stanu podczas zwiększenia zadanej mocy



Rys. 6.28. Przebiegi przejściowe sygnałów sterujących bloku energetycznego w układzie z proporcjonalnym regulatorem stanu podczas zwiększenia zadanej mocy



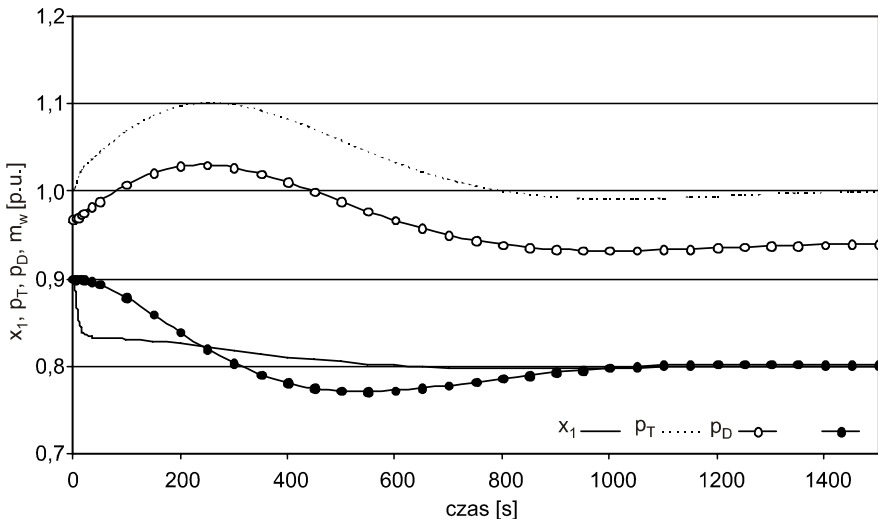
Rys. 6.29. Przebiegi przejściowe zmiennych stanu bloku energetycznego w układzie z regulatorami PID podczas zwiększenia zadanej mocy



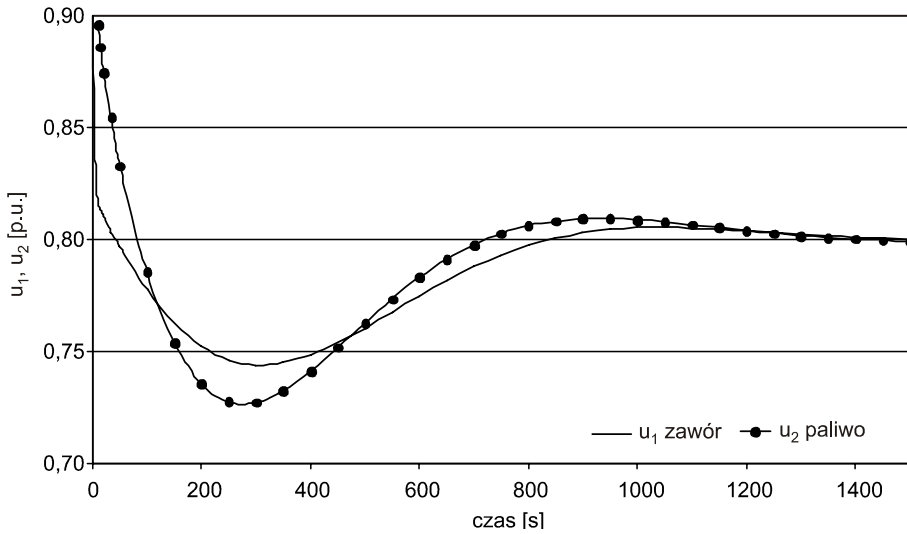
Rys. 6.30. Przebiegi przejściowe sygnałów sterujących bloku energetycznego w układzie z regulatorami PID podczas zwiększenia zadanej mocy

Eksperyment 6.6

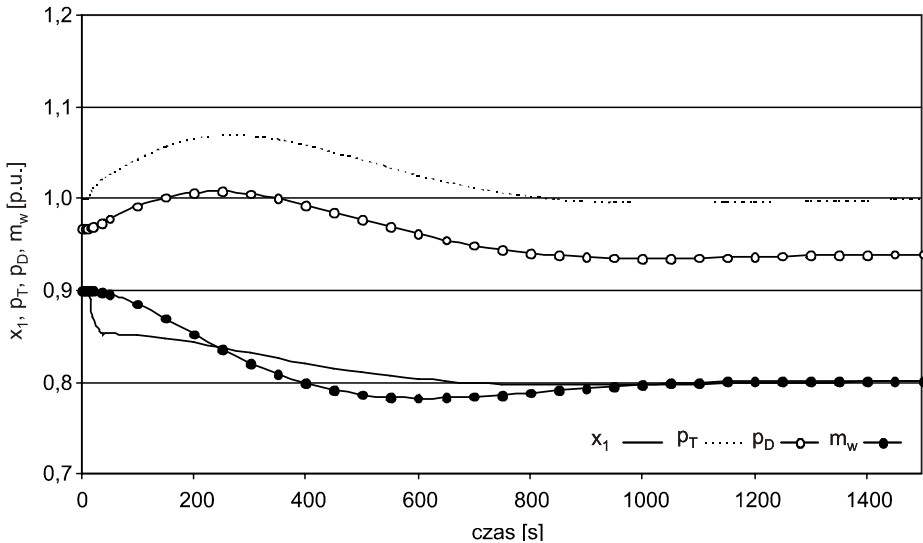
Blok pracuje z mocą $P_z = 0,9$ p.u., po czym następuje zmniejszenie mocy zadanej do $P_z = 0,8$ p.u.



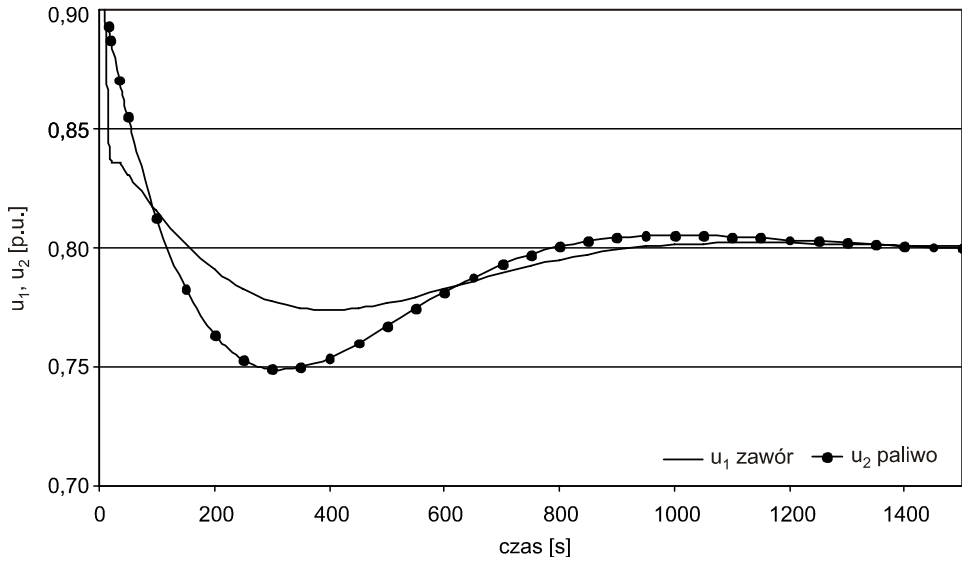
Rys. 6.31. Przebiegi przejściowe zmiennych stanu bloku energetycznego w układzie regulacji z linearyzacją podczas zmniejszenia zadanej mocy



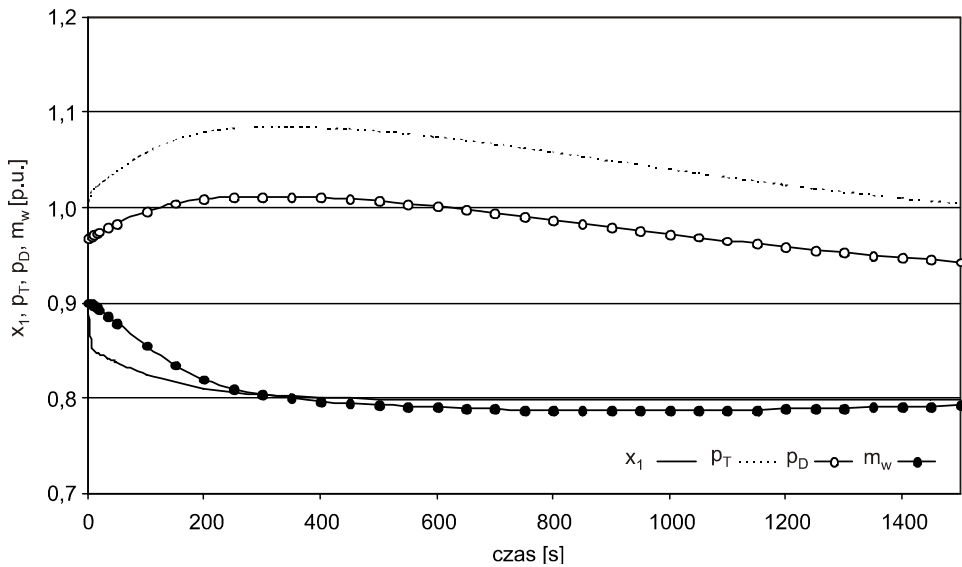
Rys. 6.32. Przebiegi przejściowe sygnałów sterujących bloku energetycznego w układzie regulacji z linearyzacją podczas zmniejszenia zadanej mocy



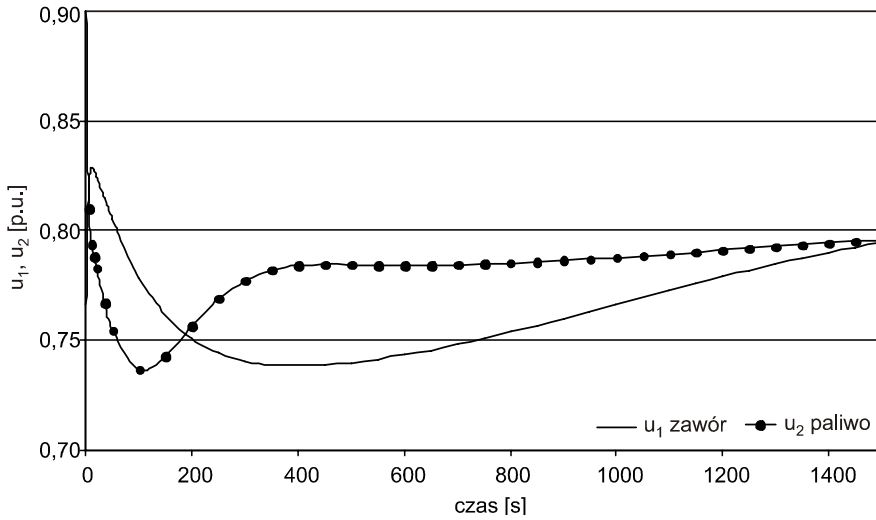
Rys. 6.33. Przebiegi przejściowe zmiennych stanu bloku energetycznego w układzie z proporcjonalnym regulatorem stanu podczas zmniejszenia zadanej mocy



Rys. 6.34. Przebiegi przejściowe sygnałów sterujących bloku energetycznego w układzie z proporcjonalnym regulatorem stanu podczas zmniejszenia zadanej mocy



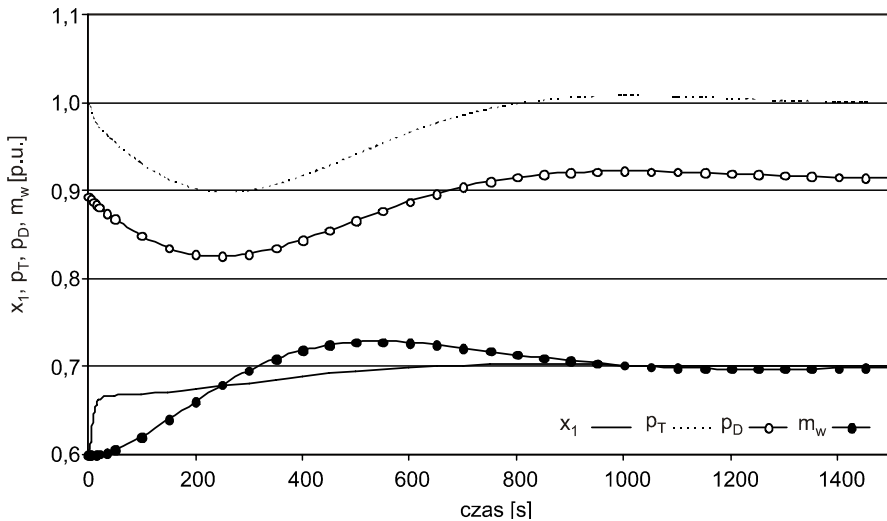
Rys. 6.35. Przebiegi przejściowe zmiennych stanu bloku energetycznego w układzie z regulatorami PID podczas zmniejszenia zadanej mocy



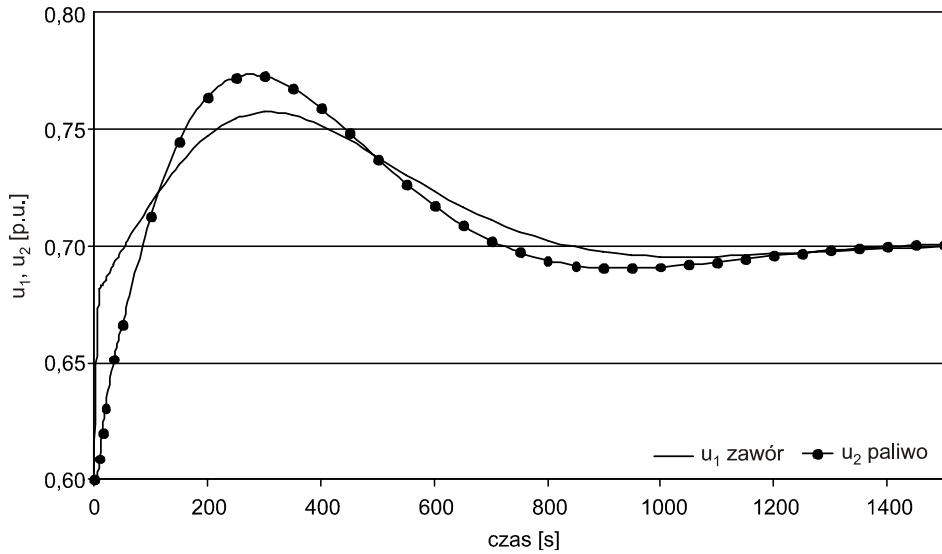
Rys. 6.36. Przebiegi przejściowe sygnałów sterujących bloku energetycznego w układzie z regulatorami PID podczas zmniejszenia zadanej mocy

Eksperyment 6.7

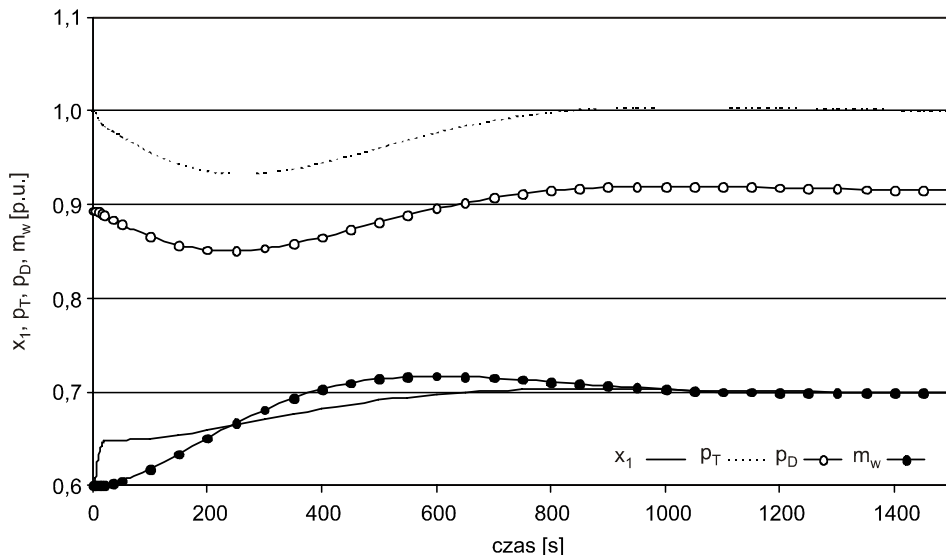
Blok pracuje z mocą $P_z = 0,6$ p.u., po czym następuje zwiększenie mocy zadanej do $P_z = 0,7$ p.u.



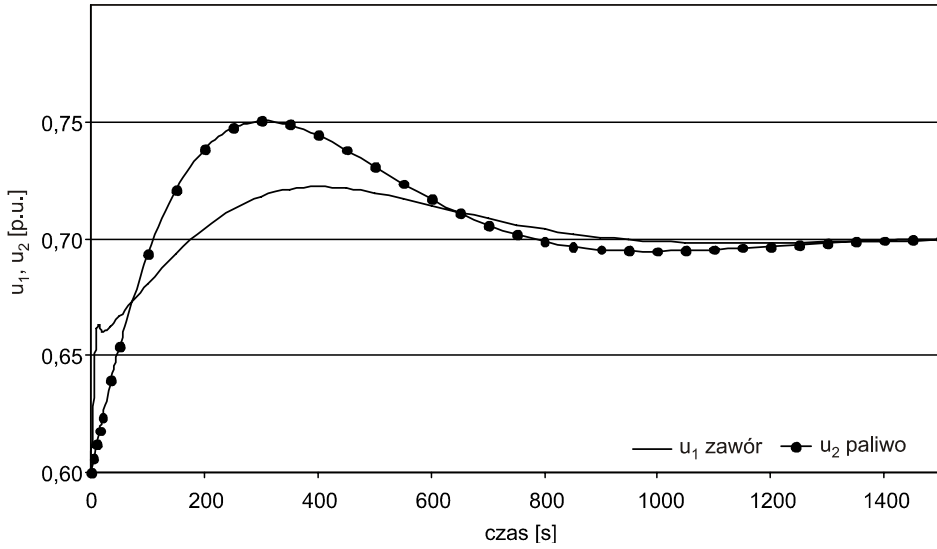
Rys. 6.37. Przebiegi przejściowe zmiennych stanu bloku energetycznego w układzie regulacji z linearyzacją podczas zwiększenia zadanej mocy



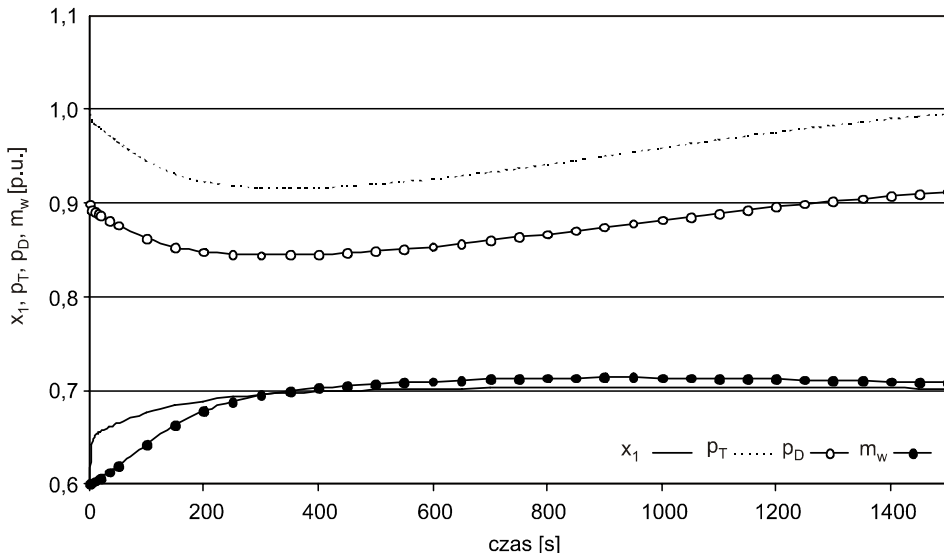
Rys. 6.38. Przebiegi przejściowe sygnałów sterujących bloku energetycznego w układzie regulacji z linearyzacją podczas zwiększenia zadanej mocy



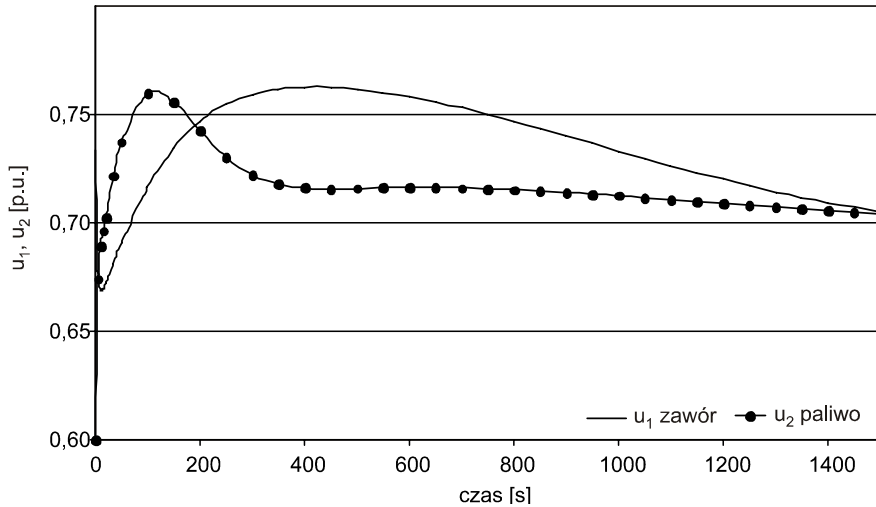
Rys. 6.39. Przebiegi przejściowe zmiennych stanu bloku energetycznego w układzie z proporcjonalnym regulatorem stanu podczas zwiększenia zadanej mocy



Rys. 6.40. Przebiegi przejściowe sygnałów sterujących bloku energetycznego w układzie z proporcjonalnym regulatorem stanu podczas zwiększenia zadanej mocy



Rys. 6.41. Przebiegi przejściowe zmiennych stanu bloku energetycznego w układzie z regulatorami PID podczas zwiększenia zadanej mocy



Rys. 6.42. Przebiegi przejściowe sygnałów sterujących bloku energetycznego w układzie z regulatorami PID podczas zwiększenia zadanej mocy

We wszystkich eksperymentach symulacyjnych przebiegi przejściowe mocy mają taki sam charakter. Najpierw następuje szybka zmiana wynosząca kilkadziesiąt procent zadanej zmiany. Uzyskuje się to dzięki szybkiemu oddziaływaniu na zawór turbinowy, co umożliwia wykorzystanie energii pary zakumulowanej w kotle. Dalszy przyrost mocy jest możliwy dopiero po zmianie strumienia paliwa.

Przebiegi przejściowe w eksperymencie 6.5 w nominalnym punkcie pracy dla układu regulacji z linearyzacją oraz układu opartego na przybliżeniu liniowym są prawie identyczne, gdyż przybliżenie liniowe jest dokładne w pobliżu nominalnego punktu pracy. W tabeli 6.1 zestawiono parametry przebiegów przejściowych dla poszczególnych eksperymentów, takie jak: P_{50} [%] – procent przyrostu żądanej zmiany mocy po 50 s, $u_{1\max}$, $u_{2\max}$ – maksymalne wartości odchyłek dynamicznych sygnałów sterujących odniesione do nowego stanu ustalonego.

Tabela 6.1. Parametry przebiegów przejściowych układów regulacji bloku energetycznego

| Eksperyment | Typ układu | P_{50} [%] | $u_{1\max}$ [p.u.] | $u_{2\max}$ [p.u.] |
|-------------|----------------------|--------------|--------------------|--------------------|
| 6.5 | linearyzacja | 67 | 0,101 | 0,073 |
| | regulacja stanu | 66 | 0,102 | 0,073 |
| | wiodąca turbina, PID | 58 | 0,100 | 0,057 |
| 6.6 | linearyzacja | 67 | 0,056 | 0,073 |
| | regulacja stanu | 47 | 0,026 | 0,051 |
| | wiodąca turbina, PID | 63 | 0,060 | 0,063 |
| 6.7 | linearyzacja | 67 | 0,056 | 0,073 |
| | regulacja stanu | 49 | 0,022 | 0,050 |
| | wiodąca turbina, PID | 65 | 0,062 | 0,055 |

W przebiegach przejściowych dla mocy innej niż nominalna układ z proporcjonalnym regulatorem oparty na przybliżeniu liniowym nie wykorzystuje w pełni akumulacji pary, ruch zaworem jest mniejszy, a co za tym idzie wartość mocy osiągnięta po 50 s jest mniejsza niż dla układu opartego na linearyzacji.

Szybkość zmian sygnału sterującego otwarciem zaworu jest znacznie większa od szybkości zmian sygnału sterującego paliwem. Ta właściwość dobrze odpowiada możliwościom rzeczywistych układów wykonawczych. Zawór turbiny można przestawić stosunkowo szybko, natomiast szybkie zwiększenie strumienia paliwa nie jest wskazane ze względu na możliwość zablokowania się zasobników z pyłem węglowym.

Układ z regulatorami PID (z wiodącą turbiną) udało się tak nastroić, że przebiegi przejściowe mocy i ciśnienia są porównywalne z przebiegami pozostałych układów, ale przebiegi przejściowe sygnałów sterujących są wówczas nie do zaakceptowania.

Układ ten wymagał zarówno gwałtownej reakcji zaworu turbinowego, jak i strumienia paliwa w pierwszych sekundach po skokowej zmianie mocy zadanej (bardzo duże wartości du_2/dt) – por. np. rys. 6.36 i 6.42 oraz rys. 6.32 i 6.38. Tak szybka zmiana, zwłaszcza strumienia paliwa, jest niedopuszczalna, gdyż mogłaby doprowadzić do zablokowania młynów węglem; młyny te są zabezpieczane specjalnymi układami przed gwałtownym wzrostem obciążenia. Takiej wady jest pozbawiony układ oparty na linearyzacji, co stanowi o jego przewadze (rys. 6.32).

7. Podsumowanie

W monografii porównano nieliniowe modele i algorytmy sterowania blokiem energetycznym pracującym na sieć sztywną i na sieć wypową oraz nieliniowy model turbiny sterowanej dwoma zaworami. Porównano charakterystyki skokowe modelu bloku pracującego na sieć sztywną z jego przybliżeniem liniowym uzyskanym wokół nominalnego punktu pracy. Stwierdzono, że dla obciążenia bloku mniejszego od nominalnego o kilkadziesiąt procent występują znaczne rozbieżności tych charakterystyk, zwłaszcza gdy zakłócenie jest wywołane zmianą położenia zaworu. W modelu nieliniowym można było zaobserwować dwukrotnie większe zmiany ciśnienia. Symulacje te potwierdziły konieczność syntezy nieliniowego układu regulacji.

Blok energetyczny może pracować pod różnym obciążeniem (produkowanej mocy) i ciśnieniem przed turbiną. Oznacza to, że równania modelu mogą osiągać stan ustalony dla różnych wartości P_e oraz p_T . Wartość produkowanej mocy P_e musi być równa wartości zadanej przez Krajową Dyspozycję Mocy P_s , natomiast ciśnienie jest zwykle utrzymywane na poziomie wartości nominalnej z dynamicznymi zmianami w stanach przejściowych po zmianie mocy zadanej. W związku z tym w układzie regulacji należy zastosować dwa działania całkowujące, które pozwolą spełnić te wymagania. Problem polega jednak na tym, że model bloku pracującego na sieć sztywną jest łatwo linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne. Wprowadzenie dodatkowych integratorów uniemożliwia natomiast przeprowadzenie linearyzacji w klasyczny sposób. Opracowano jednak nową technikę linearyzacji, która pozwala ominąć te trudności.

Kolejną metodą syntezy nieliniowego układu regulacji jest całkowanie wsteczne (rozdz. 4 i 5). Okazało się, że zastosowanie w sposób klasyczny tej metody prowadzi do wyznaczenia prawa regulacji, które jest źle uwarunkowane numerycznie. Wynika to z występowania w modelu nieliniowości związanych z przepływem płynu, jakim jest przegrzana para wodna. Udało się sformułować klasę obiektów, dla których za pomocą odpowiednich przekształceń można ominąć złe uwarunkowanie numeryczne prawa regulacji.

Prawa regulacji uzyskane zarówno dzięki linearyzacji przez sprzężenie zwrotne, jak i metodą całkowania wstecznego wyznaczano, na podstawie obliczeń symbolicznych za pomocą programu MATLAB, co umożliwiało łatwe przenoszenie wyników do procedur symulujących działanie układu regulacji.

Badania symulacyjne przeprowadzono dla modelu bloku pracującego na sieć sztywną. Porównano działanie trzech układów: klasycznego – opartego na regulatorach PID z korektorami, nieliniowego – opartego na linearyzacji przez sprzężenie zwrotne oraz nieliniowego – opartego na metodzie całkowania wstecznego. Układy regulacji były pobudzane skokową zmianą mocy zadanej dla różnych warunków początkowych. We wszystkich przypadkach regulator liniowy dawał gorszą jakość regulacji. Najszybszą zmianę mocy można było uzyskać za pomocą układu całkowania wstecznego. Układ osiągał nową wartość zadaną po ok. 200–300 s bez przeregulowań. W przypadku układu regulacji opartego na linearyzacji przez sprzężenie zwrotne nowy stan ustalony mocy był osiąganym bez przeregulowania, ale w znacznie dłuższym czasie. W układzie z regulatorem liniowym stan ustalony był osiąganym z przeregulowaniami i po czasie porównywalnym z układami z linearyzacją.

Uzyskanie tak dobrych właściwości układu całkowania wstecznego wymagało jednak bardzo dużych zmian sygnału sterującego paliwem, co nie jest korzystne dla młynów zasilających kocioł. W pozostałych układach zmiany sygnałów sterujących nie były tak znaczne. Można jeszcze spróbować innego nastrojenia układu całkowania wstecznego, tak aby czas regulacji był dłuższy, a zmiany sygnałów sterujących – mniejsze. Jak dotąd nie ma jeszcze narzędzi analitycznych, które pozwoliłyby uzyskać to w sposób jednoznaczny. Tę część eksperymentów można podsumować tak, że układy nieliniowe regulacji okazały się lepsze w całym zakresie zmian mocy podczas normalnej pracy bloku energetycznego.

W rozdziale 2 przedstawiono model, a w rozdziale 6 zaproponowano nieliniowy układ jednoczesnego sterowania zaworami WP i NP turbiny dwustopniowej. W rozdziale 6.1 opisano jego badania symulacyjne. Nieliniowy układ regulacji wykazuje przydatność w szerokim zakresie zmian mocy, co zilustrowano na dwóch przykładach zamieszczonych w rozdziale 6. Proponowany algorytm umożliwia precyzyjne wykorzystanie zaworu niskoprężnego.

W rozdziale 2 przedstawiono różne warianty modeli bloku energetycznego oraz przeprowadzono symulacje porównawcze tych modeli z modelem liniowym w różnych punktach pracy.

W rozdziale 3 przedstawiono nowe techniki opracowane w celu usprawnienia syntezy i analizy klasycznych układów liniowych stosowanych w praktyce. Omówiono możliwość ułatwienia operacji porównywania rozwiązań układów automatyki bloku między sobą. Wykazano możliwość syntezy nieparametrycznej korektora zmian zadanej ciśnienia pary za kotłem oraz wskazano sposoby jego parametryzacji. Pokazano również sposoby usprawnienia doboru nastaw i reguł ich adaptacji dla korektora i regulatorów ciśnienia i mocy za pomocą przyborników pakietu Matlab w warunkach zmian parametrów dynamiki bloku energetycznego wywołanych np. zmianami strumienia współspalanej biomasy w kotle.

Rozwijane w ostatnich latach metody analityczne pozwalają syntetyzować nieliniowe układy regulacji. Opracowano i zbadano również adaptacyjny układ regulacji oparty na metodzie całkowania wstecznego (rozd. 4 i 5), w którym adaptowanym

parametrem była nieznana stała czasowa inercji cieplnej kotła. Adaptowany parametr był wynikiem rozwiązywania na bieżąco odpowiedniego równania różniczkowego. Na tej podstawie zmieniano parametry prawa regulacji. Z przeprowadzonych symulacji wynika, że wartość adaptowanego parametru zbliżała się do wartości rzeczywistej, jednak nigdy jej nie osiągała. Wynika to z faktu, że warunkiem adaptacji jest ciągłe pobudzanie układu. Ponieważ układ regulacji szybko osiągał nowy stan ustalony, adaptacja odbywała się głównie na początku przebiegu przejściowego. Pomimo niedokładnej znajomości adaptowanego parametru cały układ regulacji zachowywał się poprawnie. Nowa wartość zadanej mocy była osiągana po takim samym czasie jak w poprzednich eksperymentach, jednak pojawiały się już wolne oscylacje.

Układy regulacji oparte na nieliniowych algorytmach wykazują swoją wyższość nad liniowymi dzięki temu, że opierają się na dokładnym, nieliniowym modelu obiektu, który jest słuszny w całym zakresie pracy. Dodatkową ich zaletą jest, stwierdzona symulacyjnie, mniejsza ich wrażliwość na zmiany parametrów statyki i dynamiki obiektu (np. wzrostu parametru T_L inercji cieplnej w przypadku współspalania biomasy w kotle) w porównaniu do klasycznych układów liniowych.

W rozdziale 6 rozwiązano zadania syntezy nieliniowego regulatora opartego na linearyzacji przez sprzężenie zwrotne. Określono również klasy obiektów, które są szczególnie łatwo linearyzowalne przez sprzężenie zwrotne. W tych przypadkach nie trzeba rozwiązywać nieliniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, ani też nie trzeba znajdować odpowiednich kodystrybucji. Takie podejście zastosowano do linearyzacji modelu bloku pracującego na sieć wyspowa i modelu turbiny sterowanej dwoma zaworami.

W rozdziale tym przedstawiono także badania symulacyjne porównujące nieliniowe układy regulacji z tradycyjnymi. Symulacje i obliczenia przeprowadzono za pomocą pakietu MATLAB/Simulink. Prowadzone w tej pracy badania poszerzają klasy nieliniowych obiektów, dla których taka synteza jest możliwa, jednak warto zauważyć, że obydwa zadania nieliniowej syntezy udało się rozwiązać jedynie dla najbardziej uproszczonego modelu pierwszego rzędu, tzw. inercji cieplnej kotła. Taki model inercji cieplnej kotła jest jednak prawidłowy i może być zastosowany do syntezy układu regulacji mocy w przypadku kotłów opalanych paliwem gazowym lub mazutem albo do nowoczesnych kotłów węglowych fluidalnych (CFB), w których nie występują instalacje młynowe w torze oddziaływań regulacyjnych i niski rząd modelu inercji cieplnej jest dopuszczalny. Uzyskiwane w ten sposób prawa regulacji są i tak bardzo złożone w stosunku do liniowych algorytmów regulacji. Niektóre elementy pracy, np. rozdział 3 i podrozdział 6.7 jest możliwy do zastosowania bez podanych ograniczeń.

Wraz z dalszym rozwojem techniki linearyzacji i sprzętu mikroprocesorowego regulatory będą w stanie obliczać sygnały sterujące według coraz bardziej złożonych algorytmów, co nie byłoby możliwe z wykorzystaniem klasycznych regulatorów analogowych.

Literatura

- ASTROM K.J., BELL R.D. (2000), *Drum boiler dynamics*, *Automatica*, 36, 363–378.
- BADMUS O.O., CHOWDHURY S., NETT C.N. (1996), *Nonlinear control of surge in axial compression systems*, *Automatica*, 32, 1, 59–70.
- BLACH L., PIKSA A. (1971), *Aproksymacja transmitancji przegrzewacza pary przy modelowaniu analogowym*, *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, 10, 456–458.
- BOLEK W., J SAŚIADEK., WIŚNIEWSKI T. (1999), *Synteza nieliniowego regulatora dla turbiny parowej*, 13 Krajowa Konf. Automatyki, Opole, 369–372.
- BOLEK W., SAŚIADEK J., WIŚNIEWSKI T. (2000a), *Two-valve control of a large steam turbine*, IFAC Symposium on Power Plants and Power Systems Control, Bruksela, 406–411.
- BOLEK W., SAŚIADEK J., WIŚNIEWSKI T. (2000b), *Linearization of non-linear MIMO model of a large power plant station*, Proc. American Control Conf., Chicago, June 28–30, 4435–4436.
- BOLEK W. (2000), *Feedback linearization of thermal plants*, Proc. 6th MMAR Conf., Międzyzdroje, 305–310.
- BOLEK W., SAŚIADEK J., WIŚNIEWSKI T. (2000a), *Two-valve control of a large steam turbine*, IFAC Symposium on Power Plant and Power Systems Control, Bruksela, 406–411.
- BOLEK W., SAŚIADEK J., WIŚNIEWSKI T. (2000b), *Linearization of non-linear model of large power plant station*, Proc. American Control Conf., Chicago, June 2000, 4435–4436 [CD ROM].
- BOLEK W. (2001), *Nieliniowy regulator dla turbiny parowej dużej mocy*, *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, 4, 18–20.
- BOLEK W., SAŚIADEK J. (2001), *Feedback linearization of multi-input thermal plants*, Proc. American Control Conf., Arlington, Virginia, June 25–27, 4270–4275.
- BOLEK W. (2002a), *Nowa metoda linearyzacji obiektów o dwu wejściach*, 14 Krajowa Konf. Automatyki, Zielona Góra, 77–80.
- BOLEK W. (2002b), *The serial structure of the plant in feedback linearization*, Proc. 8th MMAR Conf., Szczecin, 1275–1280.
- BOLEK W., SAŚIADEK J. (2002), *A new feedback linearization method for MIMO plants*, Congress IFAC 2002, Barcelona, July, 1674 [CD-ROM].
- BOLEK W., WIŚNIEWSKI T. (2002), *Modelowanie procesu przegrzewu pary świeżej w kotle BB-1150*, 14 Krajowa Konf. Automatyki, Zielona Góra, 987–992.
- BOLEK W., SAŚIADEK J., WIŚNIEWSKI T. (2002a), *Two valve control of a large steam turbine*, *Control Eng. Practice*, 10, 4, 365–377.
- BOLEK W., ŚLIFIRSKA E., WIŚNIEWSKI T. (2002b), *Obserwator strumieni ciepła w przegrzewaczu kotła BP-1150*, Konf. Energetyka 2002, Wrocław, 121–126.
- BOLEK W. (2003), *The algorithm for the detection of linear subsystem in feedback linearization*, Proc. 9th MMAR Conf., Międzyzdroje, 467–471.

- BOLEK W., SAŚIADEK J. (2003), *Extended non-regular feedback linearization*, Proc. American Control Conf., Denver, Colorado, 3543–3548.
- BOLEK W., WIŚNIEWSKI T. (2006), *Linearyzacja przez sprzężenie zwrotne w syntezy algorytmów regulacji dla obiektów termoeenergetycznych*, Oficyna Wydawnicza PWr., Wrocław.
- BOURLES H., COLLEDANI F., HOURY M.P. (1997), *Robust speed governor control for small signal and transient stability*, IEEE Trans. Power Systems, PWRS-12, 1, 129–135.
- BROCKETT R.W. (1978), *Feedback invariants for nonlinear systems*, Proc. 7th IFAC World Congress, Helsinki, Finland, 1115–1120.
- CHARLET B., LEVINE J., MARINO R. (1989), *On dynamic feedback linearization*, Systems Control Lett., 13, 143–151.
- CHARLET B., LEVINE J., MARINO R. (1991), *Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization*, SIAM J. Control and Optimization, 29, 1, 38–57.
- CHIASSON J. (1996), *Nonlinear controllers for an induction motor*, Control Eng. Practice, 4, 7, 977–990.
- CHMIELNIAK T. (1998), *Turbiny ciepłone: podstawy teoretyczne*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- CHOROWSKI B. (1978), *Metoda wyznaczania dynamicznych właściwości ciepłych bloków energetycznych*, Pr. Nauk. Instytutu Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów, 21, seria: Monografie nr 5, Politechnika Wroclawska.
- CHOROWSKI B., ŚLIFIRSKA E., WIŚNIEWSKI T. (1983), *O pewnych właściwościach odwrotnego numerycznego przekształcenia Laplace'a*, Pomiary, Automatyka, Kontrola, 29, 5, 147–149.
- DI BENEDETTO M.D., GRIZZLE J.W., MOOG C.H. (1989), *Rank invariants of nonlinear systems*, SIAM J. Control Optimization, 27, 658–672.
- FENG G., LOZANO R. (1999), *Adaptive control systems*, Newnes Oxford.
- FREEMAN R.A., KOKOTOVIC P.V., (1996), *Robust Nonlinear Control Design*, Birkhauser, Berlin.
- FLIESS M., LEVINE J., MARTIN P., ROUCHON P. (1995), *Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples*, Int. J. Control, 61, 6, 1327–1361.
- FRIEDLY J.C. (1975), *Analiza dynamiki procesów*, WNT, Warszawa.
- FUJIMOTO K., SUGIE T. (2001), *Freedom in coordinate transformation for exact linearization and its application to transient behavior improvement*, Automatica, 37, 137–144.
- GAO L., CHEN L., FAN Y., MA H. (1992), *A non-linear control designs for power systems*, Automatica, 28, 5, 975–979.
- GARDNER R.B., SHADWICH W.F. (1992), *The GS algorithm for exact linearization to Brunovsky normal form*, IEEE Trans. Automatic Control, 37, 2, 224–230.
- GUAY M., MCLELLAN P.J., BACON D.W. (1997), *A condition for dynamic feedback linearization of control-affine nonlinear systems*, Int. J. Control, 68, 1, 87–106.
- HANUS B. (1965), *Vereinfachte Nachbildung des Regelverhaltens eines Dampferhitzers am Analogrechner*, Regelungstechnik, nr 1.
- HUNT R.L., SU R., MEYER G. (1983), *Global transformation of nonlinear systems*, IEEE Trans. Automatic Control, 28, 24–31.
- IEEE Report (1991), *Dynamic models for fossil fuelled steam units in power system studies*, IEEE Trans. Power Systems, 6, 2, 753–761.
- IOANNOU P., SUN J. (1996), *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall, New York.
- ISIDORI A. (1995), *Nonlinear control systems*, t. 1, Springer, London.
- ISIDORI A. (1999), *Nonlinear control systems*, t. 2, Springer, London.
- ISIDORI A., RUBERTI A. (1984), *On the synthesis of linear responses for nonlinear system*, Systems Control Lett., 4, 17–22.
- JAKUBCZYK B., RESPONDEK W. (1980), *On linearization of control systems*, Bull. Acad. Polon. Sci., 27, 9–10, 517–522.
- KACZOREK T. (1999), *Teoria sterowania i systemów*, PWN, Warszawa.
- KALINOWSKI E. (1994), *Termodynamika*, Oficyna Wydawnicza PWr., Wrocław.

- KIMURA T., HARA S., FUJITA T., KAGAWA T. (1997), *Feedback linearization for pneumatic systems with static friction*, Control Eng. Practice, 5, 10, 1385–1394.
- KRENER A.J. (1973), *On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems*, SIAM J. Control, 11, 4, 670–676.
- KRSTIĆ M., KANNELAKOPOULOS I., KOKOTOVIĆ P. (1995), *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Wiley, New York.
- KRYŁOWICZ W. (2001), *Badania niestatecznej pracy jednostopniowej sprężarki promieniowej*, Wyd. Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- KUNDUR P. (1994), *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill, New York.
- LASKOWSKI R., LEWANDOWSKI J. (2008), *Wybrane modele matematyczne w diagnostyce i symulacji procesów cieplno-przepływowych w instalacjach energetycznych*, Wydawnictwo Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacji, Warszawa.
- LU Q., SUN Y.Z. (1989), *Non-linear stabilising control of multi machine systems*, IEEE Trans. Power Systems, 4, 1, 236–241.
- MACHOWSKI J., BIAŁEK J.W., BUMBY J.R. (1997), *Power Systems Dynamics and Stability*, Wiley, New York.
- MARINO R. (1986), *On the largest feedback linearizable subsystem*, Systems Control Lett., 6, 5, 345–351.
- MARTIN P. (1993), *A geometric sufficient condition for flatness of systems with m inputs and $m+1$ states*, Proc. of 32nd CDC, San Antonio, Texas, 3431–3436.
- MATLAB User's Guide* (1997), Symbolic Math Toolbox, MathWorks Inc., Natick, MA, USA.
- DE MELLO F.P. (1991), *Boiler models for system dynamic performance studies*, IEEE Trans. Power Systems, 6, 1, 66–73.
- NEUMAN P., SULC B., DLOUHY T. (2000), *Non-linear model of coal fired steam boiler applied to engineering simulator*, IFAC Symposium Power Plants and Power Systems Control, Bruksela, 53–61.
- NIJMEIJER H., VAN DER SCHAFT A.J. (1990), *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer.
- PARK K.C., CHUNG H., LEE J.G. (2000), *Point stabilization of mobile robots via state-space exact feedback linearization*, Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 16, 353–363.
- PARUCHURI V.P., RHINEHART R.R. (1994), *Experimental demonstration of non-linear model based control of a heat exchanger*, Proc. American Control Conf., Baltimore, Maryland, 3533–3537.
- PRASAD G., SWIDENBANK E., HOGG B.W. (1999), *A novel performance monitoring for economical thermal power plant operation*, IEEE Trans. Energy Conversion, 14, 3, 802–809.
- PRASAD G. (1999), *A novel hierarchical approach to plant-wide control of a thermal power unit*, IFAC Symposium on Power Plant and Power Systems Control 2000, Bruksela, 449–455.
- PROFOS P. (1966), *Untersuchungen über die optimale Einstellung der Überhitzer Temperaturreglers*, BWK, 18, 7, 326–332.
- RAHMAN M.H.R.F., DEVANATHAN R. (1995), *Feedback linearization of a heat exchanger*, Systems Control Lett., 26, 203–209.
- RIGGS J.B., CURTNER K., FOSLIEN W. (1995), *Comparison of two advanced steam temperature controllers for coal-fired boilers*, Computers Chem. Eng., 19, 5, 541–550.
- ROUCHON P. (1994), *Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization*, J. Math. Syst. Estim. Control, 4, 257–260.
- RUDOLF J., DELALEAU E. (1998), *Control of flat systems by quasi static feedback of generalised states*, Int. J. Control, 71, 5, 745–765.
- RUDOLF J. (2000), *Flatness based control by quasi-static feedback illustrated on a cascade of two chemical reactors*, Int. J. Control, 73, 2, 115–131.
- SASTRY S., (1999), *Nonlinear systems: Analysis, stability and control*, Springer, New York.
- SHADWICK W.F. (1990), *Absolute equivalence and dynamic feedback linearization*, Systems Control Lett., 15, 35–39.

- SLUIS W.M. (1993), *A necessary condition for dynamic feedback linearization*, Systems Control Lett., 21, 277–283.
- SU R. (1982), *On the linear equivalents of nonlinear systems*, Systems Control Lett., 2, 48–52.
- SUN Z., XIA X. (1997), *On nonregular feedback linearization*, Automatica, 33, 7, 1339–1344.
- TO L.C., TADE M.O., KRAETZL M., LE PAGE G.P. (1995), *Nonlinear control of a simulated industrial evaporation process*, J. Process Control, 5, 3, 173–182.
- WANG Y., HILL D. (1996), *Robust non-linear co-ordinated control of power systems*, Automatica, 32, 4, 611–618.
- WIERZBICKI A. (1977), *Modele i wrażliwość układów sterowania*, WNT, Warszawa.
- WIŚNIEWSKI T. (1973), *Problem rozszerzenia zakresu działania układów automatyki kotłowej*. Praca dypl. magist., Politechnika Wroclawska, Wydział Mechaniczno-Energetyczny.
- WIŚNIEWSKI T., CHOROWSKI B. (1978), *Nieliniowe modele matematyczne przepływowych wymienników ciepła*, Pr. Nauk. Inst. Techniki Ciepłej PWr., 16, ser. Studia i Materiały 12.
- WIŚNIEWSKI T. (1994), *Synteza wielowymiarowych układów automatyki bloku energetycznego do potrzeb ARCM*, 12 Krajowa Konf. Automatyki, Gdynia, 464–470.
- WIŚNIEWSKI T. (2006), *Wpływ parametrów dynamiki kotła na nastawy korektora i regulatorów ciśnienia i mocy bloku energetycznego*, Arch. Energ. 36 Międzynarodowa Konf. Naukowo-Techniczna Energetyka 2006, Wrocław, 8–10 listopada 2006, 243–250.
- WIŚNIEWSKI T. (2008), *Optymalizacja parametrów regulatorów w odpornej strukturze układów automatycznej mocy bloku energetycznego przy współpalaniu biomasy w kotle*, Międzynarodowa Konf. Naukowo-Techniczna Energetyka 2008, Wrocław, 13, 2/2, 241–247.