EINFÜHRUNG
IN DAS STUDIUM DER
THEORETISCHEN PHYSIK

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik**, **der Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die unentgeltlich in 30000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3. **B. G. Teubner.**

EINFÜHRUNG IN DAS STUDIUM

DER

THEORETISCHEN PHYSIK

INSBESONDERE IN DAS DER

ANALYTISCHEN MECHANIK

MIT EINER EINLEITUNG IN DIE

THEORIE DER PHYSIKALISCHEN ERKENNTNISS.

VORLESUNGEN

VON

DR. P. VOLKMANN

O. Ö. PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT KÖNIGSBERG I. PR.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Vorwort.

Seit Lagrange ist man gewöhnt, die analytische Mechanik als ein in sich geschlossenes System darzustellen, welches, aufgeführt auf gewissen Grundlagen nach Art eines mathematischen Systems, gestattet, aus diesen Grundlagen die Fülle der physikalischen Erscheinungen deductiv abzuleiten, die in das Gebiet der Mechanik fallen. Derartige von vorneherein in sich geschlossene Darstellungen der Mechanik, wie sie insbesondere von Mathematikern bevorzugt zu werden pflegen, haben gewiss ihren Reiz und selbstverständlich auch ihre Bedeutung für die weitere Entwickelung der Disciplin, aber sie erscheinen wenig geeignet in das Studium der theoretischen Physik einzuführen.

Von ihnen gilt das, was Hertz in der Einleitung zu seinen Principien der Mechanik S. 8 ausführt, wenn er von der Erfahrung spricht, „dass es sehr schwer ist, gerade die Einleitung in die Mechanik denkenden Zuhörern vorzutragen ohne einige Verlegenheit, ohne das Gefühl, sich hier und da entschuldigen zu müssen, ohne den Wunsch, recht schnell über die Anfänge hinwegzugelangen“. Ich kann aber darin Hertz nicht zustimmen, wenn er glaubt diese Schwierigkeit bereits der von Newton inaugurirten Darstellung der Mechanik Schuld geben zu müssen. Meine Darstellung knüpft im Grossen und Ganzen an den von Newton in seinen Principien entwickelten Gedankengang an, und ich gebe mich der Hoffnung hin, dass ich gerade durch Anschluss an Newton's Principien jene von Hertz erwähnte Verlegenheit in meinen Vorlesungen nicht aufkommen lasse. Meines Dafürhaltens — und ich kann hier hervorragende Gewährsmänner anführen, die auf demselben Standpunkt stehen: Lord Kelvin (W. Thomson) und Helmholtz — bieten Newton's Principien gerade für die Einführung noch immer das unerreichte Muster, und es haben in Deutschland in den letzten Jahrzehnten nur eine Reihe zufälliger Umstände — in erster Linie eine mangelhafte Uebersetzung — bedingt, dass man gerade zu der Einleitung von Newton's Principien nicht den Standpunkt gefunden hat, von dem aus die

Principien geschrieben sind, und von dem aus sie gerade für die gegenwärtige auf Erkenntnisskritik gerichtete Forschung so anregend und förderlich sein könnten.

Keine Behandlung der Mechanik, wie die Newton's, ist so sehr geeignet die Grundlagen der Mechanik klarzustellen und auf ihre wahren Quellen zurückzuleiten. Sucht man diese Behandlung consequent auszugestalten, dann können kaum Zweifel und Unklarheiten entstehen — wie sie z. B. Kirchhoff in der Vorrede zu seiner Mechanik hervorgehoben, „ob der Satz von der Trägheit und der Satz vom Parallelogramm der Kräfte anzusehen sind als Resultate der Erfahrung, als Axiome oder als Sätze, die logisch bewiesen werden können und bewiesen werden müssen“.

Wenn ich mit wenig Worten die durch Newton gegebene Darstellung der Grundlagen der Mechanik charakterisiren soll, dann möchte ich sie dahin zeichnen, dass ihr Werth und ihre Festigkeit mehr auf einer gegenseitigen Stützung und rückwirkenden Versicherung der einzelnen Theile des Systems beruht, als auf einer einseitigen Aufführung auf ein von vorneherein so zu sagen gegebenes oder als gegeben angenommenes Fundament. Diese Sicherung durch rückwirkende Verfestigung der Theile des Systems gegeneinander erscheint das einzig Angemessene unter sorgfältiger Rücksicht auf die hier gegebenen, tiefer liegenden erkenntnisstheoretischen Bedingungen und Verhältnisse. Die Schilderung und Charakteristik der elektrischen Theorie von Maxwell, wie sie uns Hertz in seinem bekannten Vortrag „über die Beziehungen zwischen Licht und Elektricität“ (Hertz, Werke, Bd. I, S. 346) entworfen hat, lässt sich hier ziemlich genau auf die durch Newton gegebene Darstellung der Mechanik übertragen. Wenn ich die Vorlesungen von F. Neumann, „Einleitung in die theoretische Physik“ richtig verstanden habe, bildet bei ihnen der Grundsatz der rückversichernden Verfestigung gleichfalls das Leitmotiv der Darstellung.

Eine solche im Anschluss an Newton und mit Rücksicht auf die Entwickelung der Mechanik bis auf die Gegenwart entworfene Darstellung hat nun aber nicht nur für eine Einführung in das Studium der theoretischen Physik ihren Werth, sondern darüber hinaus für die Aufdeckung der wahren Quellen unserer Erkenntniss, welche kennen zu lernen von grossem Interesse ist und auch die weitere Forschung befruchten dürfte. Diese wahren Quellen der Erkenntniss sind nicht nur in der Natur der Objecte der Forschung begründet, sondern auch in der Natur des Subjects, welches die

Forschung anstellt — vor Allem in der Natur der Sinneswerkzeuge mit ihren Grenzen und Schranken. Verhältnisse, die ebensowohl durch das Object der Forschung wie durch das Subject, das die Forschung anstellt, bedingt sind, verlieren aber dadurch an Klarheit und Uebersicht, dass man die in der Sache berechtigten und thatsächlich vorhandenen Beziehungen zum Subject verschweigt oder verleugnen will.

Darin scheint mir — naturwissenschaftlich betrachtet — der Mangel jener mathematischen Darstellungen der Mechanik seit Lagrange zu liegen, dass sie die in der Natur der Sache liegenden subjectiven Elemente der Forschung ignoriren, ein Verfahren, das ich hier mit dem Wort Objectivirung bezeichnen möchte — ein Begriff, der nicht mit der Objectivität zu verwechseln sein wird, die immer höchstes Ziel und Zierde der Forschung bleibt, und die ich für den Augenblick einmal jener Objectivirung gegenüber stellen möchte.

Gewiss kann man in der geschichtlichen Entwickelung der physikalischen Forschung eine ganze Reihe subjectiver Momente aufdecken, die vielleicht vorübergehend sich als förderlich erwiesen haben mögen, deren Ausschaltung aber doch der weitere Fortschritt bedingte. Es sind das Elemente, die der Natur des menschlichen Lebens und Wirkens entnommen auf die Deutung der anorganischen Natur übertragen wurden und doch nicht übertragen werden durften. Es ist das die Auffassung der Physik, die ich hier als anthropomorph im weiteren Sinne bezeichnen möchte, die Auffassung von der Natur, die im Alterthum ihren Ausgangspunkt nimmt und noch in manchen Bezeichnungen ihre Spuren hinterlassen hat — hierher gehört die Bezeichnung Kraft.

Dagegen dürften — zumal in einer Einführung in das Studium der allgemeinen Physik — die subjectiven Elemente nicht einfach übergangen werden, auf denen fortgesetzt die physikalische Forschung beruht hat und noch weiter beruhen wird: die menschlichen Sinne mit ihrer Natur und Beschränktheit — diese Eingangspforten der Erkenntniss (W. Thomson). Jede Darstellung einer wissenschaftlichen Disciplin will doch in erster Linie zur Forschung weiter anregen, und so dürfen die Elemente nicht ignorirt werden, durch welche nun einmal der weitere Fortschritt mit bedingt erscheint.

Nehmen wir diese subjectiven Beziehungen unserer Sinne zum äusseren Object, der Natur, der Wirklichkeit in unsere Darstellung auf, so werden wir ja natürlich auch eine solche Darstellung bis zu einem gewissen Grade als anthropomorph — wir wollen sagen im engeren Sinne des Wortes — bezeichnen können; aber diese Bezeichnung im engeren Sinne würde des Vorwurfs entbehren, den die Bezeichnung in dem vorhin erwähnten weiteren Sinne unstreitig enthält.

Eine von den menschlichen Sinnen losgelöste und ohne Beziehung auf sie dargestellte Physik ist ein Unding, eine Unaufrichtigkeit. Derselbe Vorwurf dürfte aber auch eine Physik treffen, die der Natur der menschlichen Sinneswerkzeuge nicht Rechnung trägt, die vor Allem der Begrenztheit und Beschränktheit der Sinne nicht gerecht wird, und die sich darum nicht gedrungen fühlt, sich über die Begrenztheit und Beschränktheit der Sinne zu erheben, sei es zu einer unbegrenzt genauen, der sinnlichen Wahrnehmung entsprechenden Anschauung (Postulat), sei es zu einer übersinnlichen Anschauung (Hypothese). Das erscheint als der einzige Weg, das System der Wirklichkeit in sich zu schliessen, das sinnliche Anschauung nun einmal offen lässt.

Die neueren Darstellungen der Mechanik von Hertz und Boltzmann scheinen mir übrigens auf dem besten Wege, die in der Natur der Sache liegenden, berechtigten objectiven und subjectiven Seiten der Forschung aufzunehmen, wenn sie die Aufgabe der Mechanik unter dem Gesichtspunkt einer Abbildung der Wirklichkeit erfassen. In der That kann der Gegensatz von Subject und Object in mancher Richtung sehr gut durch das Verhältniss von Bild und Gegenstand veranschaulicht werden.

Ich glaube aber empfunden zu haben, dass es sich bei jenen neueren Darstellungen eigentlich weniger um ein Abbilden der Wirklichkeit, das doch auf einem wiederholten Vergleich mit der Wirklichkeit zu Stande kommen müsste, handelt, als vielmehr um ein in sich abgeschlossenes Gemälde, zu dem das Studium der Wirklichkeit die Anregung gegeben hat. Inwieweit dieses Gemälde aber eine treue Abbildung der Wirklichkeit sein kann, kommt weniger zur Darstellung; der Vergleich des Gemäldes mit der Wirklichkeit, die Frage, ob das Gemälde ein Abbild der Wirklichkeit ist, wird vielmehr dem Leser selbst überlassen.

Ich will die Vorzüge einer solchen Darstellung, die nicht jeden Augenblick die Frage nach der Abbildung aufwirft, keineswegs verkennen. Sie beruhen darauf, dass die Grundlagen von vorneherein mit der grössten mathematischen Präcision eingeführt werden können. So brauchbar für viele Zwecke eine solche Bearbeitung der Mechanik sich ergeben möchte, so sehr sie speciell von Mathematikern bevorzugt werden dürfte, so kann sie vom physikalisch erkenntnisstheoretischen Standpunkt doch nur in Verbindung und im Vergleich mit anderen Darstellungen sich für die Physik als förderlich erweisen. Vollends dürfte sie für die Einführung in das Studium der Physik ungeeignet erscheinen, denn ohne Beziehung auf die Wirklichkeit bleibt die Herkunft der Prämissen, auf denen jenes präcise mathematische System aufgeführt wird, dunkel, und ihre Auswahl muss als willkürlich erscheinen.

Es dürfte als besonderer Reiz einer physikalischen Bedürfnissen entsprechenden Behandlung empfunden werden, bereits die Grundlagen des physikalischen Systems in engere Beziehungen zur Wirklichkeit gesetzt und im Anschluss an die geschichtliche Entwickelung der Physik dargestellt zu sehen.

Die Beziehung zur geschichtlichen Entwickelung nach dem Vorgang von E. Mach ist überhaupt ein Moment, dessen Berücksichtigung noch immer nicht die genügende Nachfolge gefunden hat. Man ist von früher her noch immer gar zu geneigt, in einer geschichtlichen Darstellung physikalischer Disciplinen eine Aneinanderreihung von Curiositäten zu vermuthen. Wenn die Naturwissenschaften Erfahrungswissenschaften sind und sein wollen, wenn man sich weiter den Begriff der Erfahrung in seiner Universalität vergegenwärtigt, hinter der die Erfahrung des Einzelnen fast verschwinden muss, dann wird allerdings für eine Einführung in das Studium der theoretischen Physik allein eine Darstellung in Betracht kommen müssen, welche sich den Schwankungen jeweiliger Darstellungen zu entziehen und die Disciplin in der Richtung zu fördern sucht, in der die Entwickelung ihrer Geschichte nach zu liegen scheint.

Es ist mir zum Schluss noch eine angenehme Pflicht der Förderung meines Werkes durch die Verlagsbuchhandlung, der Ueberwachung der Correcturen anfänglich durch Herrn Dr. phil. F. Glage, jetzt in Hamburg, dann durch Herrn stud. G. Langbein und Herrn Dr. phil. O. Dörge mit Dank zu gedenken.

Königsberg i./Pr., October 1899.

P. Volkmann.

Inhaltsverzeichniss.

I. Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntniss.

1) Orientirende Vorbemerkungen zur Charakteristik der physikalischen Erkenntnisstheorie.

		Seite
§ 1.	Nothwendigkeit eines wiederholten Kreislaufs der Erkenntniss. Die Physik ein gegenseitiges begriffliches Bezugssystem mit rückwirkender Verfestigung	2
§ 2.	Begriff der Erfahrung und ihrer Geschichte	4
§ 3.	Gegenüberstellung objectiver und subjectiver Auffassungsmomente der Erfahrung	6
§ 4.	Uebersicht über die methodischen Grundlagen und Regeln zum Aufbau des physikalischen Systems	8

2) Die allgemeinen methodischen Grundlagen der Physik.

§ 5.	Allgemeine Vorbemerkungen über die durch die Schranken der sinnlichen Wahrnehmung bedingte Erkenntniss	10
§ 6.	Charakteristik der physikalischen Postulate oder Axiome	12
§ 7.	Charakteristik der physikalischen Hypothesen	14
§ 8.	Charakteristik der speciellen physikalischen Naturgesetze	17
§ 9.	Charakteristik und Bedeutung von Terminologie, Definitionen und Präliminarien	20

3) Die allgemeinen methodischen Regeln der Physik. (Methodenlehre, Newton's Regulae philosophandi.)

§ 10.	Allgemeine Vorbemerkungen über den Werth der Regeln als Anregung für die Forschung	24
§ 11.	Charakteristik der Induction und Deduction	25
§ 12.	Charakteristik der Analyse und Synthese, der Isolation und Superposition	28
§ 13.	Charakteristik der Vergleichung und Oscillation. Analogie	30
§ 14.	Charakteristik der Regel der Oekonomie	33

4) Behandlung einiger allgemeiner erkenntnisstheoretischer Fragen für die Physik.

§ 15.	Rückblick auf die bisher entwickelten erkenntnisstheoretischen Elemente. Aufwerfen neuer Fragen, wissenschaftliche Glaubensanschauungen	36

Seite

§ 16. Die Frage nach der Causalität oder dem zureichenden Grunde und ihre Beziehung zum Kraftbegriff 37
§ 17. Auffassung und Bedeutung der physikalischen Vorgänge als eines Mechanismus 40
§ 18. Die Stellung der Mechanik als Grunddisciplin innerhalb des physikalischen Systems 41
§ 19. Literaturverzeichniss zur Theorie der physikalischen Erkenntniss . . 45

II. Die Grundlagen der Galilei-Newton'schen Mechanik und ihre Consequenzen für die Mechanik eines materiellen Punktes, beziehungsweise eines Massenpunktes.

1) Die Grundlagen der Galilei'schen Mechanik und ihre Consequenzen (Kinematik).

§ 20. Gesichtspunkte, unter denen die Galilei'sche Mechanik in Hinblick auf die Entwickelung der Wissenschaft zu behandeln ist. Der Gipfelpunkt liegt in den Begriffen der Trägheit und Beschleunigung . . . 48
§ 21. Maass und Einheit der Zeit. Postulirung des Zeitbegriffs 50
§ 22. Maass und Einheit des Raums. Postulirung des Raumbegriffs . . . 52
§ 23. Ueber Orientirung im Raum bei Bewegungsvorgängen. Postulirung des Weltäthers als absolutes Orientirungselement 53
§ 24. Der Galilei'sche Trägheitssatz und seine Consequenzen 54
§ 25. Einführung des Begriffs einer Vectorgrösse. Beziehung auf verschiedene Coordinatensysteme 55
§ 26. Zusammensetzung und Zerlegung von Vectorgrössen. Präcisirung der Regel der Superposition 56
§ 27. Einführung des Begriffs der Strecke und des Wegelementes als Vectorgrösse 58
§ 28. Einführung des Begriffs der Geschwindigkeit als Vectorgrösse. Begriff des Stosses 60
§ 29. Einführung des Begriffs der Beschleunigung als Vectorgrösse . . . 61
§ 30. Theorie der Dimensionen der physikalischen Grössen 63
§ 31. Anwendung der Galilei'schen Grundsätze auf den freien Fall in der Nähe der Erdoberfläche 65
§ 32. Anwendung der Galilei'schen Grundsätze auf den Wurf in der Nähe der Erdoberfläche 67

2) Die Grundlagen der Newton'schen Mechanik (Kinetik).

§ 33. Gesichtspunkte, unter denen die Newton'sche Mechanik in Hinblick auf die Entwickelung der Wissenschaft zu behandeln ist. Der Gipfelpunkt liegt in dem Begriff der Masse. Satz von der Erhaltung der Masse 70

Seite

§ 34. Präliminarien. Vorläufige Definitionen von Newton und ihr Verhältniss zu einander 72
§ 35. Behandlung der ersten Newton'schen Definition, den Massenbegriff betreffend, im Besonderen 74
§ 36. Die drei Newton'schen Axiomata sive Leges motus. Allgemeine orientirende Bemerkungen. Verhältniss zu den Axiomen des Euklid 77

§ 37. Das Newton'sche Trägheitsprincip 80
§ 38. Das Newton'sche Actionsprincip 81
§ 39. Das Newton'sche Reactionsprincip und sein Verhältniss zu den beiden ersten Principen 82
§ 40. Untersuchung der Frage, ob Newton die Vorstellung der Druckkräfte oder der Fernkräfte bevorzugt 84

3) Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf die Behandlung freier Bewegungen eines Massenpunktes.

§ 41. Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf den Vorgang des unelastischen Stosses zweier Massen 86

§ 42. Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf das Zweikörperproblem der Newton'schen Gravitation 88
§ 43. Die drei Integrationsmethoden der Mechanik: Schwerpunktssatz, Flächensatz, Satz von der lebendigen Kraft — angewandt auf das Zweikörperproblem 90
§ 44. Discussion und Bestimmung der Bahncurven der Planeten als Ellipsen. Einführung der excentrischen Anomalie. Ableitung der Umlaufszeit der Planeten 93

§ 45. Rückblick auf die Kepler'schen Regeln und Herleitung des Newton'schen Gravitationsgesetzes daraus 98
§ 46. Die Gravitationsconstante nach Dimension und Grösse. Der Massenbegriff der praktischen Astronomie. Theoretische Möglichkeit eine Massen- und eine Zeiteinheit aus dem Gravitationsgesetz abzuleiten 101

4) Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf die Behandlung bedingter Bewegungen eines Massenpunktes.

§ 47. Zurückführung der bedingten Bewegung auf die freie, durch Einführung einer aus den Bedingungen bestimmbaren Hülfskraft . . . 106
§ 48. Einführung und Begriff der Centripetalkraft und der Centrifugalkraft (Huygens) 109
§ 49. Theorie des mathematischen Pendels 114

Historische Uebersicht zu II 118

III. Die Mechanik eines Massensystems für discrete und continuirliche Massen.

1) Die Schwerpunktssätze und ihre Consequenzen.

Seite

§ 50. Aufstellung des Actionsprincips für die einzelnen Massenelemente eines Systems . . . 120
§ 51. Einführung des Reactionsprincips für ein Massensystem. Begriff des Schwerpunkts als Massenmittelpunkt. Die Schwerpunktssätze und der Satz von der Erhaltung des Schwerpunkts . . . 122
§ 52. Einige Sätze über den Schwerpunkt. Berechnung des Schwerpunkts einer Kugelcalotte von homogener Dichtigkeit . . . 124
§ 53. Erläuterung der Schwerpunktssätze an einigen Beispielen . . . 126

2) Die Flächensätze und ihre Consequenzen.

§ 54. Die Flächensätze und der Satz von der Erhaltung der Fläche. Einführung der Begriffe des Rotationsmoments, des Drehungsmoments und des Trägheitsmoments . . . 128
§ 55. Vergleichung der Flächensätze mit den Schwerpunktssätzen, Erweiterung des Inhalts des Reactionsprincips mit Bezugnahme auf die Flächensätze . . . 130
§ 56. Kritik der gewöhnlichen Ableitung der Flächensätze, welche § 55 durch Erweiterung des Reactionsprincips ersetzt ist. — Frage, inwieweit sich die Flächensätze auf starre Systeme mit festen Axen übertragen lassen . . . 133
§ 57. Veranschaulichung des Begriffs des Drehungsmoments. Zerlegung und Zusammensetzung von Drehungsmomenten . . . 135
§ 58. Begriff des Trägheitsmoments. Zwei allgemeine Sätze über das Trägheitsmoment . . . 139
§ 59. Berechnung des Trägheitsmoments für einige geometrisch einfache Körper von homogener Dichte in Bezug auf gewisse Axen . . . 142
§ 60. Erläuterung der Flächensätze an einigen Beispielen . . . 144

3) Der Satz von der lebendigen Kraft und seine Consequenzen.

§ 61. Der Satz von der lebendigen Kraft. Die Begriffe der lebendigen Kraft und Arbeit . . . 148
§ 62. Der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Begriff des Kreisprocesses, des conservativen Systems und der conservativen Kräfte . . . 151
§ 63. Einführung der Begriffe des Potentials, der Energie, der kinetischen und potentiellen Energie . . . 153
§ 64. Veranschaulichung der Potential- und Energiebegriffe an den Beispielen des Falls, des Wurfs, des Pendels und der Planetenbewegung 155
§ 65. Das allgemeine Princip der Energie als physikalisches Postulat. Sein Verhältniss zur Frage nach der Unmöglichkeit eines perpe-

Seite
tuum mobile und nach der ausnahmslosen Existenz conservativer Kräfte 158
§ 66. Anwendungen des allgemeinen Energieprincips auf den elastischen und den unelastischen Stoss, auf den Umsatz von kinetischer und potentieller Energie. Das mechanische Wärmeäquivalent 162

4) Zur Statik eines Massensystems.

§ 67. Allgemeine Bedingungen für das Gleichgewicht eines Massensystems. Das Dirichlet'sche Kriterium für stabile und labile Gleichgewichtszustände 166

Historische Uebersicht zu III 169

IV. Anwendungen insbesondere der Flächensätze auf Methoden- und Instrumentenlehre der praktischen Physik.

1) Allgemeine Vorbemerkungen über Wesen und Bedeutung der praktischen Physik für die wissenschaftliche Systematik und Methodik.

§ 68. Verhältniss und Aufgaben der praktischen Physik im Rahmen der allgemeinen Physik 171
§ 69. Die Bedeutung der praktischen Präcisionsmesskunst für die Physik, insbesondere für die physikalische Systematik 174
§ 70. Charakteristik der praktischen Physik als Kunst in der Ausarbeitung physikalischer Methoden und im Bau physikalischer Instrumente 177
§ 71. Verwerthung des Begriffs der Grössenordnung als Hülfsmittel der praktischen Physik im Allgemeinen und als Genauigkeitsgrenze im Besonderen 180

2) Theorie der Instrumente mit verticaler Schwingungsfähigkeit und ihrer Methoden.

§ 72. Das physikalische Pendel. Das Fadenkugelpendel 183
§ 73. Bessel's Pendeluntersuchungen. Studium der Aufhängungsart . . 186
§ 74. Studium des Einflusses des umgebenden Mediums (der Luft) . . . 189
§ 75. Das Reversionspendel. Bessel's Verbesserungen daran 191

§ 76. Die Wage; theoretische Gesichtspunkte, welche für ihre Construction maassgebend sind 196

3) Theorie der Instrumente mit horizontaler Schwingungsfähigkeit und ihrer Methoden.

§ 77. Allgemeine Uebersicht über die in diesem Abschnitt zu behandelnden Methoden 202

Seite

§ 78. Methode der unifilaren Aufhängung eines Stabes unter alleiniger Einwirkung der Torsion der Aufhängung 205
§ 79. Methode der unifilaren Aufhängung eines Magneten unter alleiniger Einwirkung des Erdmagnetismus 205
§ 80. Methode der unifilaren Aufhängung eines Magneten unter Rücksicht auf die Torsion 208
§ 81. Methode der bifilaren Aufhängung ohne Rücksicht auf die Torsion der Aufhängungsdrähte 211
§ 82. Methode der bifilaren Aufhängung unter Rücksicht auf die Torsion der Aufhängungsdrähte 213
§ 83. Gemeinsame Betrachtungen über die unifilare und bifilare Aufhängung. Methoden, Directionsmoment und Trägheitsmoment zu bestimmen . 215
§ 84. Theorie der Horizontalwage (Torsionswage) in ihrer statischen, dynamischen und ballistischen Anwendung 218
§ 85. Theorie der Astasirung magnetischer Richtsysteme 220
Historische Uebersicht zu IV 226

V. Theorie der Hydrostatik.

1) Definition der Aggregatzustände. Discussion über die für eine Theorie der Hydrostatik in Betracht kommenden Voraussetzungen.

§ 86. Möglichkeit mechanischer und thermischer Definitionen der Aggregatzustände 228
§ 87. Mechanische Definitionen des festen, flüssigen und gasförmigen Zustandes 230
§ 88. Bedeutungslosigkeit molekularer Veranschaulichungen der Aggregatzustände für unsere Zwecke 233
§ 89. Charakteristik weiterer Eigenschaften der Flüssigkeiten und ihrer theoretischen Consequenzen 235
§ 90. Specielle Gesichtspunkte für die theoretische Behandlung der Hydrostatik 238
§ 91. Bedeutungslosigkeit molekularer Anschauungen für eine mechanische Theorie der Hydrostatik 239
§ 92. Ueber nothwendige und nicht nothwendige Verwerthung der Atomistik in der Naturwissenschaft überhaupt 242

2) Die Hydrostatik in Bezug auf innere Theile der Flüssigkeiten (Hydrostatik im gewöhnlichen Sinne des Wortes).

§ 93. Einführung des Druckbegriffs in die Hydrostatik. Ableitung der Grundgleichungen der Hydrostatik (Euler). Die hydraulische Presse 246

Seite

§ 94. Einführung des Potentialbegriffs in die Hydrostatik. Die Flächen gleichen Potentials, Niveaus oder Drucks (Clairaut). Die Beziehungen zwischen Druck und Potential bei tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten 249

§ 95. Anwendung auf eine unter Einwirkung der Schwere ruhende Flüssigkeitsmenge. Satz von den communicirenden Röhren 252

§ 96. Anwendung auf eine unter Einwirkung der Schwere in einem cylindrischen Gefäss rotirende Flüssigkeitsmenge 253

§ 97. Die auf einen Körper im Innern einer Flüssigkeit ausgeübten hydrostatischen Druckkräfte und Drehungsmomente. Hülfssatz von der Verwandlung eines Raumintegrals in ein Flächenintegral 256

§ 98. Das Princip des Archimedes. Das hydrostatische Paradoxon (Stevinus) 260

3) Die Hydrostatik in Bezug auf Theile der Oberfläche und Trennungsfläche der Flüssigkeiten (Capillaritätstheorie).

§ 99. Begriff der Cohäsionskraft, des normalen Oberflächendrucks und der tangentialen Oberflächenspannung 264

§ 100. Begriff der Oberflächenenergie 267

§ 101. Beziehungen zwischen dem normalen Oberflächendruck, der tangentialen Oberflächenspannung und der Oberflächenenergie. Aufstellung eines Ausdrucks für den normalen Oberflächendruck in seiner Abhängigkeit von der Krümmung der Oberfläche 269

§ 102. Einführung der Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten 272

§ 103. Einführung des Randwinkels. F. Neumann's Satz. Physikalische Discussion über Randwinkelwerthe und ihre Bedeutung 276

§ 104. Aufstellung der hydrostatischen Gleichgewichtsbedingungen unter Rücksicht auf die Cohäsions- und Adhäsionskräfte. Minimalflächen. Die Differentialgleichung der Flüssigkeitsoberfläche unter Einwirkung der Schwere 281

§ 105. Abweichung der freien Oberfläche von der Horizontalen in Folge der Gefässwände, insbesondere bei ebener Wandung 284

§ 106. Die Erhebung (bezw. Depression) einer Flüssigkeit in einem Rohr von kreisförmigem Querschnitt (Theorie des Capillarrohres) . . . 286

§ 107. Ueber die Möglichkeit der Anstellung von Präcisionsmessungen in dem Gebiet der Capillaritätserscheinungen der Flüssigkeiten . . . 289

§ 108 Uebersicht über meine eigenen Arbeiten zum Erweise der Möglichkeit von Präcisionsmessungen auf dem Gebiet der Capillaritätserscheinungen 292

Historische Uebersicht zu V 297

VI. Einführung in die Behandlung geophysikalischer Fragen.

1) Theoretische Vorbemerkungen und Vorstudien zur Geophysik.

Seite

§ 109. Charakteristik und Stellung der Geophysik im Rahmen der physikalischen Systematik 298
§ 110. Charakteristik der in der Geophysik anzuwendenden Methoden . . 301

§ 111. Allgemeine Studien über die Lage eines Gravitationsmittelpunktes 304
§ 112. Die Gravitation von Kugelschalen und Kugeln auf äussere und innere Punkte (Newton) 307

2) Ueber den inneren Zusammenhang der Schwere und der Gravitation.

§ 113. Gleichgewichtsfigur der rotirenden Erde. Aenderung der Schwere mit der geographischen Breite. Clairaut's Satz 312
§ 114. Geophysikalische Studien über die Druckvertheilung im Innern der Erde 317
§ 115. Aenderung der Schwere in Folge lokaler Einflüsse. Die Gravitation eines Kreiscylinders auf einen Punkt der Axe. Poisson's Correction der Schwereformel 319

§ 116. Historische Rückblicke. Newton's Nachweis der Identität der Schwere und der Gravitation 322
§ 117. Ueber die directen Beweise für die Erddrehung durch die Fallversuche von Benzenberg und Reich und durch Foucault's Pendelversuch 324

§ 118. Ueber die Methoden zur Bestimmung der Gravitationsconstanten und der mittleren Dichte der Erde 327

Historische Uebersicht zu VI 331

VII. Einführung in die allgemeinen Principe der Mechanik.

1) Die Entwickelung der mechanischen Principe und ihrer Hülfsbegriffe.

§ 119. Rückblick auf die bisherige Darstellung der Mechanik nach ihrer principiellen Seite. Ziel der allgemeinen mechanischen Principe . 332

§ 120. Die Principe von D'Alembert und Lagrange, ihre Uebereinstimmung mit den Newton'schen Grundsätzen und ihre über diese Grundsätze hinausgehenden Postulirungen 334
§ 121. Die Verbindung der Principe von D'Alembert und Lagrange. Unterscheidung holonomer und nicht holonomer Systeme (Hertz). Begriff der virtuellen Verrückung (Hölder) 338
§ 122. Die Principe von Hamilton und Maupertuis (Hölder) 341

Seite

§ 123. Die Lagrange'schen Differentialgleichungen der Mechanik der ersten und zweiten Form. Die Hamilton'schen Differentialgleichungen 344

§ 124. Einführung cyklischer Coordinaten in die Lagrange'schen Differentialgleichungen. Monocyklische und bicyklische Systeme. Mechanische Analogien und Modelle 349

2) Historische Rückblicke. Fragen der Gegenwart.

§ 125. Rückblicke auf Motivirungen mechanischer Principe. Das Princip des kleinsten Zwanges von Gauss 353

§ 126. Die Postulate der Mechanik und die Darstellungen der Mechanik von Hertz und Boltzmann 357

Historische Uebersicht zu VII 364

Namenregister 365

Sachregister 367

Satzfehler.

Seite 25, Zeile 10 v. u. Man schreibe: 2) statt 1).
„ 39, „ 8 v. o. „ „ auf statt anf.
„ 47, „ 16 v. u. „ „ des Begriffes statt der Begriffe.
„ 87, „ 3 v. o. Man zeichne die Gleichung aus durch (1).
„ 87, „ 9 v. o. „ „ „ „ „ (2).
„ 223, „ 3 v. o. Man schreibe: $\pi^2 \dfrac{M}{T'^2}$ statt $\pi^2 \dfrac{T'^2}{M}$.
„ 237, „ 20 v. u. „ „ Helmholtz's statt Hemholtz's.

I. Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntniss.

1) Orientirende Vorbemerkungen zur Charakteristik der physikalischen Erkenntnisstheorie.

1. Nothwendigkeit eines wiederholten Kreislaufs der Erkenntniss. Die Physik ein gegenseitiges begriffliches Bezugssystem mit rückwirkender Verfestigung. 2. Begriff der Erfahrung und ihrer Geschichte. 3. Gegenüberstellung objectiver und subjectiver Auffassungsmomente der Erfahrung. 4. Uebersicht über die methodischen Grundlagen und Regeln zum Aufbau des physikalischen Systems.

2) Die allgemeinen methodischen Grundlagen der Physik.

5. Allgemeine Vorbemerkungen über die durch die Schranken der sinnlichen Wahrnehmung bedingte Erkenntniss. 6. Charakteristik der physikalischen Postulate oder Axiome. 7. Charakteristik der physikalischen Hypothesen. 8. Charakteristik der speciellen physikalischen Naturgesetze. 9. Charakteristik und Bedeutung von Terminologie, Definitionen und Präliminarien.

3) Die allgemeinen methodischen Regeln der Physik (Methodenlehre, Newton's Regulae philosophandi).

10. Allgemeine Vorbemerkungen über den Werth der Regeln als Anregung für die Forschung. 11. Charakteristik der Induction und Deduction. 12. Charakteristik der Analyse und Synthese, der Isolation und Superposition. 13. Charakteristik der Vergleichung und Oscillation. Analogie. 14. Charakteristik der Regel der Oekonomie.

4) Behandlung einiger allgemeiner erkenntnisstheoretischer Fragen für die Physik.

15. Rückblick auf die bisher entwickelten erkenntnisstheoretischen Elemente. Aufwerfen neuer Fragen, wissenschaftliche Glaubensanschauungen. 16. Die Frage nach der Causalität oder dem zureichenden Grunde und ihre Beziehung zum Kraftbegriff. 17. Auffassung und Bedeutung der physikalischen Vorgänge als eines Mechanismus. 18. Die Stellung der Mechanik als Grunddisciplin innerhalb des physikalischen Systems. 19. Literatur-Verzeichniss zur Theorie der physikalischen Erkenntniss.

I. 1) Orientirende Vorbemerkungen zur Charakteristik der physikalischen Erkenntnisstheorie.

§ 1. Nothwendigkeit eines wiederholten Kreislaufs der Erkenntniss. Die Physik ein gegenseitiges begriffliches Bezugssystem mit rückwirkender Verfestigung.

Ehe wir in die eigentliche Materie der Vorlesung eintreten, wird es gut sein, einige Bemerkungen über die Gesichtspunkte vorauszuschicken, von denen wir uns fortdauernd zu leiten lassen haben werden, und über welche wir uns zunächst verständigen müssen.

Es soll sich um eine Einleitung in das Studium der theoretischen Physik — oder wie ich auch sagen kann, der allgemeinen Physik — insbesondere in das der analytischen Mechanik handeln. Sie Alle haben sich bereits bis zu einem gewissen Grade mit Physik und Mechanik beschäftigt, und Sie werden auf Grund dieser Beschäftigung mit gewissen Anschauungen und Erwartungen in die Vorlesungen eintreten, von denen ich Ihnen aber gleich sagen muss, dass sie Ihnen ebensowohl förderlich und nützlich wie hemmend und schädlich sein können. Ihre Anschauungen und Erwartungen werden ebensowohl in Urtheilen wie in Vorurtheilen über Art und Weise der Behandlung bestehen, sie werden vor Allem der Läuterung bedürfen.

Einen derartigen Läuterungsprocess hat der Einzelne wie die Wissenschaft fortgesetzt durchzumachen. In einem solchen fortgesetzten Läuterungsprocess, seiner Entwickelung und Gestaltung beruht das geistige Leben des Einzelnen wie der Wissenschaft. Hört dieser Process auf, dann ist das Wissen ein todtes und abgestorbenes, dann hört die Wissenschaft auf, sie hat ihr Ende erreicht.

Dieser Läuterungsprocess wird für Sie und kann für Sie nur in dem wiederholten Versuch der Aneignung des wissenschaftlichen Systems der Physik bestehen. Der Gegenstand ist viel zu umfassend und zu schwierig, als dass die Forderung erhoben werden könnte, ich könnte Ihnen einen königlichen Weg bahnen, auf dem Sie sich mit einem Male bequem ohne allzu grosse Anstrengung das wissenschaftliche System aneignen könnten. Sie werden während Ihrer Studienzeit einen wiederholten Kreislauf unternehmen müssen, nur allmählich kann so Ihr Gesichtskreis erweitert und ein Standpunkt gewonnen werden. Die Tragweite der Grundlagen und Grundsätze wird so erst allmählich im Verlauf der Vorlesung erfasst werden, sie wird sich in Form von Rückblicken auf den hinter uns liegenden

Weg eher erschliessen, als im Vorausblick auf einen vor uns liegenden Weg, den einzuschlagen Sie vielleicht für unberechtigt halten könnten.

So kann denn auch die Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntniss, die ich Ihnen zu geben beabsichtige, gar nicht den Zweck haben, Ihren Erkenntniss-Standpunkt von vorneherein durch starre Formen festlegen zu wollen d. h. einzuengen und zu fesseln. Es handelt sich hier keineswegs um eine voraussetzungslose Disciplin — eine solche giebt es meines Dafürhaltens überhaupt nicht — es handelt sich um eine auf dem Boden der physikalischen Wissenschaft und Forschung erwachsene Disciplin. Sie werden und können daher die Tragweite dieser allgemeinen Auseinandersetzungen gar nicht anfänglich übersehen. Meine Absicht bei diesen Auseinandersetzungen wird mehr darin bestehen, Ihre Aufmerksamkeit im Voraus nach gewissen Richtungen zu schärfen, als Sie von der Zweckmässigkeit und Angemessenheit der Betrachtungsweise zu überzeugen. Ich sage hier nicht Richtigkeit — denn Richtigkeit und Wahrheit hat zunächst nur Beziehung zu einem materiellen Inhalt. Bei den folgenden Auseinandersetzungen handelt es sich aber nicht um etwas Materielles, sondern um etwas wesentlich Formelles.

Ich möchte noch weiter gehen, ich sage: Diese Auseinandersetzungen werden auf Sie um so kräftiger und stärker wirken, je mehr sie Ihren Widerspruch zu bisher unentwickelten Anschauungen in Ihnen wecken. Dadurch wird aber gerade das erzielt werden, was ich in Ihnen wachrufen möchte: Schärfung Ihrer Aufmerksamkeit nach ganz bestimmten Richtungen, damit Sie später bei den materiellen physikalischen Behandlungen in den Stand gesetzt sind, die Angemessenheit und Zweckmässigkeit unserer erkenntnisstheoretischen Betrachtungsweise rückwärts zu prüfen und anzuerkennen.

Sie können gleich hier nach dem tiefer liegenden Grunde fragen, warum für die physikalische Wissenschaft ein wiederholter Kreislauf der Erkenntniss nothwendig ist. Dieser Grund ist nach Entstehung und Betrieb der physikalischen Wissenschaft einfach darin zu sehen, dass das physikalische Begriffssystem nicht etwa aufzufassen ist als ein System, welches nach Art eines Gebäudes von unten aufgeführt wird, sondern als ein durch und durch gegenseitiges Bezugssystem, welches nach Art eines Gewölbes oder eines Brückenbogens aufgeführt wird und fordert, dass ebenso die mannigfaltigsten Bezugnahmen auf künftige Resultate bis zu einem gewissen Grade von vorneherein vorweg genommen werden müssen, wie umgekehrt bei späteren Ausführungen die mannigfaltigsten Zurückverweisungen auf frühere Verfügungen und Festsetzungen statthaben müssen. Die Physik ist kurz ein Begriffssystem mit rückwirkender Verfestigung.

In demselben Sinn und in derselben Absicht, wie im öffentlichen Leben für gesetzliche Bestimmungen erst auf Grund mehrfacher Lesungen eine angemessene Formulirung erstrebt wird, in demselben Sinne wird der Studirende auch nicht erwarten dürfen, dass die erste Lektüre dieser Vorlesungen ihm das volle Verständniss der darin niedergelegten Ideen und Absichten erschliessen wird. Mag er bei Stellen, die ihm dunkel und unverständlich erscheinen, zunächst nicht allzu lange verweilen, die zweite Lektüre des Buchs wird ihm bereits eine erhebliche Klärung der zuvor dunkeln Stellen bringen. Die Vorlesungen sind ebenso auf Grund einer wiederholten Durcharbeitung entstanden, wie sie auch auf Grund einer ebenso wiederholten Durcharbeitung beurtheilt sein wollen.

§ 2. Begriff der Erfahrung und ihrer Geschichte.

Welche Gewähr kann ich Ihnen nun bieten, dass meine Vorlesungen diesen Läuterungsprocess fördern, diesen Kreislauf der Erkenntniss zweckmässig einleiten? — diese Frage wollen wir doch gleich hier aufwerfen. Diese Frage liegt in den Naturwissenschaften, wie sie heute bestehen, sehr einfach: Diese Gewähr bietet das Studium der Geschichte der Naturwissenschaften und der Entwickelung der naturwissenschaftlichen Anschauungen.

Wir haben uns in erster Linie zu vergegenwärtigen, dass die Physik, wie alle Naturwissenschaften Erfahrungswissenschaft ist und sein will. Die Erfahrung, das heisst das empirische Studium der äusseren Naturvorgänge in Beobachtung und Experiment, nimmt in den Naturwissenschaften eine so fundamentale und breite Rolle ein, dass die Erfahrung des Einzelnen vollständig zurücktritt, ja verschwindet hinter der Erfahrung der Gesammtheit, das heisst hier hinter der Erfahrung der Männer, die vor uns und mit uns Naturwissenschaft getrieben haben und noch treiben. Die Erfahrungsbeiträge, die der Einzelne zum weiteren Ausbau der Wissenschaft liefern kann, werden stets nur als bescheidene zu bezeichnen sein — verglichen mit der Erfahrung, welche in dem bereits aufgeführten Bau und System der Wissenschaft vorliegt.

Es kommt noch eins hinzu, dass zwischen Erfahrung des Einen und Erfahrung des Andern ein himmelweiter Unterschied bestehen kann. Auf Erfahrung kann sich jeder berufen, auch der Jüngling, aber der Begriff der Erfahrung, den ich meine, hat die höchste Mannesreife in der Wissenschaft zur Voraussetzung — und auch diese Mannesreife reicht, wie die Entwickelung der Wissenschaft lehrt, in der Mehrzahl der Fälle nicht aus: den Inhalt der Erfahrung festzustellen.

Erfahrung ist nicht nur mannigfaltig, sondern auch vielgestaltig und zusammengesetzt; ihr Inhalt hängt von Bedingungen und Voraussetzungen ab, die in jedem Falle festgestellt, in keinem Falle übersehen sein wollen. Es ist einer der häufigsten Fehler und Irrthümer der Menschen, dass Erfahrungen, ihrer Bedingungen und Voraussetzungen entkleidet, als allgemeingültig hingestellt werden, wo sie einer derartigen Verallgemeinerung gar nicht fähig sind. Die Sache ist eben die, dass die Bedingungen und Voraussetzungen, unter denen Erfahrungsthatsachen eintreten, nicht auf der Oberfläche zu liegen pflegen, dass die Hauptschwierigkeit des Studiums der Erfahrungsthatsachen eben darin liegt, die Bedingungen und Voraussetzungen festzustellen, unter denen jene eintreten.

Nachdem ich so den Begriff der Erfahrung für unsere Zwecke hinlänglich fixirt zu haben glaube — möchte ich ihn Vorstellungen unseres Geistes gegenüberstellen, die ich für den Augenblick einmal als „aprioristische Vorstellungen“ bezeichnen will.[1] Während die Erfahrung mit ihren Vorstellungen erworben und innerlich angeeignet sein will, sind diese aprioristischen Vorstellungen da, sie sind vielleicht auch einmal auf einer früheren Entwickelungsstufe des Geistes erworben, ja sie sind vielleicht damals nur äusserlich angeeignet, oder es fehlt jede Rechenschaft über ihren Erwerb und die Form ihrer Aneignung. Die beim Unterricht auf der Schule und bei der Erziehung im Haus angeeigneten Vorstellungen sind solche äusserlich erworbenen Vorstellungen, denen wenigstens zunächst die tiefere Rechenschaft über ihren Erwerb fehlt — was in der Natur der Sache begründet ist.

Da jedes wissenschaftliche Studium nur da einsetzen kann, wo der elementare Unterricht aufhört, liegt es auf der Hand, dass eine

1) Ich lehne bei diesem Wort jede unmittelbare Uebernahme der Bezeichnung im Sinne anderer Autoren z. B. Kant's ab; cf. das § 9 über Terminologie Beigebrachte.

Hauptschwierigkeit bei der Einführung in das Studium darin liegen wird, den Studirenden frei zu machen von dem Zwang aprioristischer Vorstellungen, die er mitbringt — oder vielleicht auch: diese aprioristischen Vorstellungen bei ihm in das rechte Verhältniss zu dem System der Erfahrung zu setzen, um dessen Aufbau es sich handelt.

§ 3. Gegenüberstellung objectiver und subjectiver Auffassungsmomente der Erfahrung.

Auf der Thatsache, dass sich die aprioristischen Vorstellungen in uns und die Erfahrung ausser uns gegenüberstehen und keineswegs immer decken — oder wie wir uns auch ausdrücken können: Auf dem Gegensatz von den überhaupt in uns vorhandenen Vorstellungen zu den noch in uns zu bildenden Vorstellungen beruht eine gegensätzliche Auffassung der Erfahrung, die in der Natur der Sache begründet ist, und die wir hier auseinander zu setzen haben. Wir bezeichnen sie als die subjective und objective Auffassung der Erfahrung.[1])

Die subjective Auffassung der Erfahrung ist die durch die Begrenztheit unserer Sinne[2]) und unseres Fassungsvermögens bedingte Erfahrung, die der Natur der Sache nach niemals geschlossen sein kann und auch um der weiteren Fortschritte willen in der Erkenntniss der Erfahrung niemals geschlossen sein darf. Wie alles Subjective ist diese Auffassung mit Fehlern behaftet, die im Laufe der Zeit aufzudecken und dann auszumerzen sein werden. Diese subjective Auffassung ist aber darum, weil sie mit Fehlern behaftet zu sein von vorneherein zugiebt, nicht zu verwerfen. Die wissenschaftliche Forschung hängt nun einmal am Subject und kann von diesem nicht losgelöst werden.

Die objective Auffassung der Erfahrung ist die ausserhalb unserer Sinne und unseres Fassungsvermögens bestehende Thatsache der Wirklichkeit, die der Natur der Sache nach in sich geschlossen sein muss.

1) Man vergleiche für das Folgende meinen Aufsatz: Ueber die Frage nach dem Verhältniss von Denken und Sein. Wiener Sitzungsberichte II^{a} Dez. 97 S. 1103 insbes. 1110 u. folg. Dort finden sich die weiter als Citat gekennzeichneten Stellen.

2) Die Thatsache der Schranken und Begrenztheit unserer Sinne ist kein Vorwurf gegen den Schöpfer oder gegen die Zweckmässigkeit der natürlichen organischen Sinneseinrichtungen, im Gegentheil diese Schranken der Sinne sind für die Möglichkeit einer Concentration des Bewusstseins eine sehr wesentliche Voraussetzung.

Wir lassen hier ganz dahingestellt, ob die objective naturwissenschaftliche Erfahrung das Universum auch ausfüllt, ja mit Bezug auf die Existenz und Thatsache der Cultur[1]) müssen wir uns der Anschauung hingeben, dass das Universum durch die naturwissenschaftliche Erfahrung nicht allein ausgefüllt wird; aber das widerspricht nicht der Anschauung, dass das naturwissenschaftliche Erfahrungsgebiet — objectiv betrachtet — ein in sich geschlossenes lückenloses Ganzes ist. Ohne Fehler und Makel steht es als ein geschlossenes Ganzes da, darauf beruht ausschliesslich die Möglichkeit einer Naturwissenschaft.

Die objective Auffassung der Erfahrung ist das Ziel, dem unsere subjective Auffassung der Erfahrung zustrebt, dem sie sich beständig nähert, ohne es je zu erreichen. Die subjective Auffassung der Erfahrung ist mehr oder minder Wahrscheinlichkeit, die objective Auffassung der Erfahrung ist Wahrheit. Die subjective Auffassung der Erfahrung ist Bild, Abbild — die objective Auffassung der Erfahrung ist Gegenstand.

Je nach dem Zweck, den wir bei der jedesmaligen Darstellung verfolgen, je nach dem wir es vorziehen den objectiven oder subjectiven Standpunkt einzunehmen, „können wir uns in unseren erkenntnisstheoretischen Untersuchungen in der mannigfaltigsten Weise formuliren, in einer Weise, bei der gegensätzliche Standpunkte eingenommen zu sein scheinen, ohne dass der Natur der Sache nach von einem Gegensatz die Rede sein kann — oder wenigstens die Rede zu sein braucht. Im Gegentheil wird es sich zur Vertiefung der erkenntnisstheoretischen Untersuchung empfehlen, diese vermeintlich gegensätzlichen Standpunkte zu wechseln und sich bald dieser, bald jener Sprache zu bedienen, um den wahren erkenntnisstheoretischen Kern, der vielleicht von dem vorübergehend gewählten Standpunkt gerade unabhängig ist, in seiner Reinheit um so bewusster blosszulegen."

„Indem wir hier die Vortheile wahrnehmen, welche bei einer Reihe philosophischer Untersuchungen die Gegenüberstellung und Verwerthung der Ausdrücke: objectiv und subjectiv — a priori und a posteriori — real und ideal — mit sich bringen, weisen wir zugleich auf ein Gebiet hin, auf dem eine solche Gegenüberstellung verblasst."

---

1) Ich acceptire hier die von H. Rickert in Vorschlag gebrachte Bezeichnung in seinem Vortrag: „Culturwissenschaft und Naturwissenschaft." Freiburg i. B. 1899.

„Diese scheinbaren Gegensätze werden auf der Stufe höchster begrifflicher Durcharbeitung Identitäten. Nur muss diese Identität sich als eine Folge wirklich ernster, auf dem Grunde wechselwirkender Processe zwischen Object und Subject sich vollziehender Durcharbeitung ergeben. Wird bei diesem oscillirenden Process die Bedeutung des Realen unterschätzt, so laufen wir Gefahr, in die Betrachtungsweise eines Hegel zu verfallen, wird bei diesem oscillirenden Process die Bedeutung des Idealen (der Idee) unterschätzt, so kommen wir in materialistisches Fahrwasser, bleiben günstigenfalls rohe Empiriker."

Diese Uebertreibung des einzelnen Standpunkts kann auch in verfeinerter Weise zur Erscheinung kommen; wir können sie vielleicht mit den Bezeichnungen Subjectivirung und Objectivirung charakterisiren. Für den Naturforscher wird in dem Streben nach Objectivität der Darstellung eher die Gefahr einer Objectivirung zu befürchten sein, als das Gegentheil. Doch soll hier nicht weiter darauf eingegangen sein; Näheres über diese Objectivirung habe ich in dem Vorwort zu diesen Vorlesungen ausgeführt, und wird weiter § 16 gelegentlich der Behandlung der Frage nach der Causalität oder dem zureichenden Grunde von mir ausgeführt werden.

§ 4. Uebersicht über die methodischen Grundlagen und Regeln zum Aufbau des physikalischen Systems.

Es soll sich nun darum handeln, die methodischen Grundlagen und Regeln unter Hervorhebung ihrer objectiven und subjectiven Seiten kurz auseinanderzusetzen, durch welche das System der physikalischen Erfahrung zu Stande gekommen ist und nach den Erfolgen zu urtheilen, weiter zu Stande kommen wird.

Das Eine ist schon bemerkt, aber es mag hier noch einmal wiederholt werden; es handelt sich bei der Auseinandersetzung dieser methodischen Grundlagen und Regeln keineswegs um eine voraussetzungslose Disciplin. Die auseinanderzusetzenden Methoden sind auf dem Boden der physikalischen Forschung nach und nach entstanden und erwachsen und werden weiter darauf erwachsen. Sie können und werden indirect auch die weitere Forschung anregen, sie werden für eine allgemeine Wissenschaftslehre Beiträge liefern; in erster Linie beruht aber ihre Bedeutung auf dem Werth, den sie für die Einführung in das Studium der allgemeinen Physik haben.

Wir unterscheiden hier zwischen methodischen Grundlagen und **Regeln** in dem Sinne, dass wir unter methodischen Grundlagen allgemeine Begriffs- und Anschauungsformen verstehen, unter denen innerhalb des speciellen Gebietes der Physik Erfahrung begriffen und in ein System gebracht wird — unter methodischen Regeln allgemeine Methoden, die für die Bearbeitung und Erweiterung jedes Systems der Erfahrung eine Rolle spielen dürften.

Unter den allgemeinen methodischen Grundlagen der Physik werden wir im Besonderen behandeln:

1. Die Charakteristik der physikalischen Postulate oder Axiome.

2. Die Charakteristik der physikalischen Hypothesen (im engeren physikalischen Sinn des Wortes).

3. Die Charakteristik der physikalischen Naturgesetze.

4. Die Charakteristik und Bedeutung von Terminologie, Definitionen und Präliminarien.

Unter den allgemeinen methodischen Regeln der Physik werden wir im Besonderen behandeln:

1. Die Charakteristik der Induction und Deduction.

2. Die Charakteristik der Analyse und Synthese, der Isolation und Superposition.

3. Die Charakteristik der Vergleichung und Oscillation.

4. Die Charakteristik der Regel der Oekonomie.

Wir schliessen endlich die Behandlung einiger allgemeiner erkenntnisstheoretischer Fragen für Physik an und zwar:

1. Die Frage nach der Causalität und dem zureichenden Grunde und ihre Beziehung zum Kraftbegriff.

2. Auffassung und Bedeutung der physikalischen Vorgänge als eines Mechanismus.

3. Die Stellung der Mechanik als Grunddisciplin innerhalb des physikalischen Systems.

I. 2) Die allgemeinen methodischen Grundlagen der Physik.

§ 5. Allgemeine Vorbemerkungen über die durch die Schranken der sinnlichen Wahrnehmung bedingte Erkenntniss.

Die allgemeinen methodischen Grundlagen der Physik[1]), die im Folgenden eine Charakteristik finden sollen, sind zum grossen Theil durch die Natur unserer Sinne und sinnlichen Hülfsmittel bedingt. Die Sinne sind nun einmal und bleiben die Eingangspforten unserer naturwissenschaftlichen Erkenntniss[2]). Aber die Sinne, auch die durch Hülfsmittel verstärkten Sinne haben ihre Grenze. Es wäre ein thörichter, der Wissenschaft keineswegs angemessener Standpunkt, die Naturerkenntniss auf die Grenzen unserer sinnlichen Wahrnehmung beschränken zu wollen.

Die subjective Begrenztheit unserer Sinne hindert uns an einer vollständigen Erkenntniss der Natur, sie hindert uns das objectiv in der Natur jedenfalls vorliegende System in seiner Geschlossenheit darzustellen. Das subjectiv von uns dargestellte System ist in sich nicht geschlossen und kann in sich nicht geschlossen sein, als Ziel hat ihm aber ein objectiv in sich geschlossenes System vorzuschweben.

Wir können zur Bezeichnung der hier vorliegenden Verhältnisse versuchen ein Wort wieder in Vorschlag zu bringen, welches in seiner Bedeutung von Aristoteles an die mannigfaltigsten Wandlungen durchgemacht hat, in der Mitte des neunzehnten Jahrhunderts wegen seiner zeitweisen Nebenbedeutung in den Naturwissenschaften einen so schlechten Klang hatte, dass man es aus der naturwissenschaftlichen Terminologie ganz strich, höchstens zur Abwehr gebrauchte — das Wort Metaphysik.[3]) Man hat damals unter Metaphysik die in

1) Man vergleiche meinen Aufsatz: Hat die Physik Axiome? Erkenntnisstheoretische Studien über die Grundlagen der Physik 1894. Auch meine „Erkenntnisstheoretischen Grundzüge" 1896. S. 159—169.

2) Lord Kelvin (W. Thomson). The six gateways of knowledge 1883. Popular lectures and adresses II ed. London 1891. 1. p. 260.

3) Man vergleiche auch die Bemerkungen von Hertz Mechanik S. 27. 28.

sich müssigen Speculationen begriffen, die da einsetzen, wo die physikalische Forschung der Natur der Sache nach ihre Grenze hat, und die trotzdem die Hoffnung nicht aufgeben wollen, dass durch sie der Physik — womöglich ohne allzu starke Beziehung auf die Erfahrung — reicher Gewinn zufliesst.

Wir setzen hier das Wort Metaphysik in Beziehung zu dem subjectiven Standpunkt menschlicher Natur und Sinneswahrnehmung, die nun einmal an Schranken gebunden ist. Es giebt jedenfalls jenseits der Grenze unserer sinnlichen Wahrnehmung Vorgänge und Thatsachen. Vom objectiven Standpunkt der Naturwissenschaft kann diese sinnliche Wahrnehmungsgrenze nur als eine zufällig gegebene bezeichnet werden. Dass sie nur als eine zufällige zu bezeichnen ist, geht schon daraus zur Genüge hervor, dass sie durch jede aufgefundene Verbesserung unserer instrumentellen Hülfsmittel (Mikroskop) verschoben wird. Der psychophysische Begriff der Schwelle des Bewusstseins gehört hierher und könnte hier in seiner Bedeutung für die Erkenntniss erläutert werden.

Diese jenseits der Grenze unserer sinnlichen Wahrnehmung liegenden Vorgänge und Thatsachen können entweder dauernd jenseits jener Grenze bleiben oder sie können sie berühren, ja unter besonders günstig liegenden Umständen vielleicht überschreiten. Diesem Versagen unserer sinnlichen Wahrnehmung gegenüber eröffnen sich nun verschiedene Möglichkeiten, die der Versuch, das System der Erkenntniss zu schliessen, gewähren kann. Es werden dadurch Grundlagen für ein System der Erkenntniss geschaffen, die wir am besten unter den Stichworten: Postulat (Axiom), Hypothese, Naturgesetz erläutern und besprechen werden können.

Diese Grundlagen spielen eine besondere Rolle, im Falle die Hülfsmittel der reinen Mathematik zur theoretischen Behandlung der Physik herangezogen werden sollen. Die Stärke der Mathematik beruht auf der Präcision und Geschlossenheit ihrer Grundlagen. Wenn die sinnliche Wahrnehmung derartig präcisirte Grundlagen nicht unmittelbar darbieten kann, wie sie die Mathematik zu ihren Anwendungen fordert, dann entsteht so die logische Nöthigung, eine präcisirte Construction über die sinnliche Wahrnehmung derart zu versuchen, dass eine mathematische Behandlung des Gegenstandes möglich erscheint. Das geschieht eben durch Postulate, Hypothesen und Naturgesetze.

Die folgenden Auseinandersetzungen sind ihrer Natur gemäss abstract. Um eine grössere Anschauung mit ihnen zu verbinden, wird es sich empfehlen jedesmal von vorneherein an bestimmte Beispiele zu denken, an denen man die Tragweite der abstracten Erörterungen einer Nachprüfung unterzieht. Als solche concrete bekannte Beispiele mögen im Folgenden herangezogen werden — für die Postulate beziehungsweise Axiome: der Satz von der Erhaltung der Masse, der Galilei-Newton'sche Trägheitssatz, das Energieprincip — für physikalische Hypothesen: die Wellenanschauung von der Natur des Lichtes, sei es in ihrer elastischen, sei es in ihrer elektromagnetischen Gestaltung, die Anschauung von der atomistischen Constitution der Materie — für Naturgesetze: das Newton'sche Gravitationsgesetz, das Coulomb'sche Gesetz für elektrische und magnetische Mengen.

§ 6. Charakteristik der physikalischen Postulate oder Axiome.

Wir verstehen unter Postulat oder Axiom im weiteren Sinn Sätze oder Anschauungen, die wir für so weitgreifend und wichtig halten, dass wir sie als grundsätzliche hinstellen. Hier soll es sich zunächst um Postulate oder Axiome im engeren Sinn handeln, welche sich mehr auf Begriffe als auf Anschauungen beziehen — Postulate oder Axiome, die sich im Besonderen auf Anschauungen beziehen, nennen wir Hypothesen, diese sollen im nächsten Paragraphen behandelt werden.

Wir können die relative Richtigkeit des Satzes oder die relative Gültigkeit des Begriffs, welche bei den Postulaten oder Axiomen im engeren Sinn eine Rolle spielt, nur näherungsweise durch specielle Beobachtung und specielles Experiment nachweisen, aber wir behaupten ihre absolute universelle Richtigkeit und Gültigkeit jenseits aller durch Beobachtung und Experiment gegebenen Grenzen. Insofern unser Erkenntnissvermögen für diese Grundsätze eine objective Gültigkeit fordert, bezeichnen wir sie als Postulate, insofern sich aber diese Forderung von der Subjectivität unserer Forschung nicht trennen lässt, bezeichnen wir sie als Axiome. Objectiv genommen will das Postulat Wahrheit, Wirklichkeit sein, subjectiv genommen kann das Axiom nur Wahrscheinlichkeit, Idee sein.

Was die Herkunft eines Postulats im engeren Sinn betrifft, so nehmen wir an, dass unsere Sinne in Beobachtung und Experiment ganz richtig wahrgenommen haben, dass sie nur nicht scharf genug sind, um Beobachtung und Experiment für unbegrenzt genau zu halten; wir können vor Allem aber auch die Bedingungen, unter denen der Grundsatz gültig sein soll, nicht in der Reinheit herstellen, welche das Postulat fordert und zur Voraussetzung hat. Wir erheben uns also in den Postulaten (Axiomen) von der Begrenztheit und Beschränktheit der sinnlichen Wahrnehmung zu unbegrenzter und unbeschränkter Genauigkeit einer inneren Anschauung, die sich an die Schranken und Grenzen der äusseren Anschauung nicht gebunden erachtet; wir bleiben aber dem Inhalt und Gebiet, auf das uns die sinnliche Anschauung weist, treu — im Gegensatz zu den später zu besprechenden Hypothesen.

Diese postulirte Verschärfung der Grundsätze ist darum nöthig, weil wir auf diesen Grundsätzen das physikalische System aufführen wollen. Wir bedienen uns dabei der mathematischen Hülfsmittel und diese fordern mathematisch präcisirte Grundsätze, wie sie die sinnliche Wahrnehmung allein nicht gewähren kann.

Auch die Mathematik spricht von Postulaten (Euklid: αἰτήματα); diese liegen ganz ähnlich, wie in der Physik, nur dass für die Mathematik in diesen Postulaten die Beziehung zur Wirklichkeit nicht so im Vordergrund des Interesses steht. Im Gegentheil, indem die Mathematik z. B. in der Nicht-Euklidischen Geometrie Grundlagen und Grundsätze schafft, die eine allgemeinere Raumanschauung darbieten, als sie durch die Wirklichkeit gegeben ist, gewährt sie sehr schätzenswerthe Hülfsmittel die Sätze festzustellen, welche als Grundsätze für den wirklichen — Euklidischen — Raum gewählt werden müssen.

Die allgemeine, universelle Stellung der Postulate im physikalischen System bedingt es wohl, dass sie in sich nicht die Mittel bieten, ihren Begriffen von vorneherein einen reellen, materiellen Inhalt zu geben, im Besonderen Methoden zu gewähren, physikalische Werthe zu messen und auf einander zu beziehen. Diese Mittel bieten sich erst bei der Anwendung der Postulate auf specielle Naturerscheinungen und ihre speciellen Gesetze dar. Insofern die wiederholte Anwendung der Postulate auf die Mannigfaltigkeit der Naturerscheinungen und der Gesetze — d. h. auf die Mannigfaltigkeit sowohl, wie sie durch ein und dasselbe Gesetz unter verschiedenen Verhältnissen, als wie sie durch verschiedene Gesetze bedingt ist — keine inneren Widersprüche aufweist, gewinnen jene allgemeinen Postulate die rückwirkende Sicherung und Verfestigung, welche wir als Charakteristikum eines naturwissenschaftlichen Systems zu betrachten haben.

Man spricht in der praktischen Physik von der Verschiedenheit der Methoden, gewisse Grössen zu messen. Die Verschiedenheit der Methoden knüpft an die Mannigfaltigkeit der einzelnen Naturgesetze oder wenigstens an die Mannigfaltigkeit ihrer Aeusserungen. Der theoretische Werth der nach verschiedenen Methoden bestimmten Grössen für das gegenseitige Bezugssystem der physikalischen Wissenschaft besteht aber darin, dass durch die Uebereinstimmung dieser nach verschiedenen Methoden bestimmten Werthe dies Bezugssystem eine Stütze und Stärke erfährt, welche nicht nur auf die Verfestigung der speciellen Gesetze, sondern auch auf die der allgemeinen Grundsätze des Systems zurückwirkt.

Postulate sollen die naturgemässe Grundlage für ein gegenseitiges Bezugssystem sein, derart, dass eine besondere Bevorzugung von speciellen Begriffen und Anschauungen so weit als möglich ausgeschlossen erscheint. Die Geschichte der Wissenschaft hat gelehrt, wie wechselnd und wandelbar solche Anschauungen und Begriffe sein können, auf denen man physikalische Systeme aufgeführt hat und noch aufführt, ohne dass in vielen Fällen eigentlich von einer wirklichen Nöthigung dazu die Rede sein kann.

Diese Nöthigung der Wirklichkeit ist es, welche wir als Kriterium anzusehen haben, ob wir einem Satz, einem Begriff die bevorzugte Stellung einräumen dürfen, welche einem Postulat zukommt. In gewissem Sinne, können wir sagen, wird durch Einführung der Postulate die Sprache und die Terminologie festgelegt, in der die Formulirung der speciellen Naturgesetze sich später bewegt. Von diesem Standpunkt aus hätte es eigentlich keinen Sinn von der unbegrenzten Genauigkeit der Postulate zu sprechen, die Frage nach den Grenzen der Gültigkeit und Richtigkeit wäre dann vielmehr allein der Formulirung der speciellen Naturgesetze zuzuschreiben.

§ 7. Charakteristik der physikalischen Hypothesen.

Es handelt sich hier nicht um den Sprachgebrauch, nach dem Hypothese soviel wie Voraussetzung bedeutet, wie z. B. in der Elementargeometrie. Es handelt sich hier um den ganz speciellen physikalischen Sprachgebrauch, den wir im Anschluss an Classiker wie Newton und Laplace fixiren wollen.[1])

---

1) Der bekannte Ausspruch von Newton aus dem Schlussabschnitt seiner Principien „hypotheses non fingo" wäre hier heranzuziehen; ebenso die Antwort von Laplace auf Napoleon's Frage, weshalb in seiner Mécanique céleste der Name Gottes nicht vorkomme: „Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse". Wenn Riemann — Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass hrg. von H. Weber. Lpz. 1876. S. 493 — die Unterscheidung, welche

Eine Hypothese — im physikalischen Sinne — gehört zu den Postulaten oder Axiomen in der weiteren Bedeutung des Wortes; sie ist im Anschluss an unsere Ausführungen am Anfang des vorigen Paragraphen eine Anschauung, die wir für so weitgreifend und wichtig halten, dass wir sie als solche grundsätzlich hinstellen. Wir verstehen unter Hypothese im Speciellen die Uebertragung einer in einem physikalischen Gebiet erwachsenen und ausgebildeten Anschauung auf ein anderes physikalisches Gebiet. Wir berufen uns dabei, in anderer Weise wie bei der Präcisirung der Postulate, im engeren Sinne auf die Beschränktheit und Begrenztheit unserer Sinne. Wir nehmen hier an, dass unsere Sinne in Beobachtung und Experiment etwas wesentlich anderes wahrnehmen oder wahrzunehmen scheinen, als den der Beobachtung und dem Experiment zu Grunde liegenden elementaren Vorgängen entspricht, dass unsere Sinne den Complex der jedenfalls unter der Schwelle der Wahrnehmung stattfindenden Elementarvorgänge in eine diesen Elementarvorgängen fremde Deutung umsetzen.

Eine Hypothese ist danach unsere Vorstellung über die Wellennatur des Lichtes, hypothetisch wären danach die Fragen, ob die Wellennatur des Lichtes elastischer oder elektromagnetischer Art ist. Eine Hypothese ist die Anschauung von der atomistischen Constitution der Materie. Hypothetisch ist die Frage nach der Existenz des Weltäthers. An solchen Beispielen wird man sich das Alles klar zu machen haben, was man erkenntnisstheoretisch über Begriff und Bedeutung der physikalischen Hypothese — im engeren Sinne des Wortes — aussagen kann.

Dem Begriff der Hypothese liegt so zunächst ein ganz wesentlich subjectives Moment der Forschung zu Grunde. Die Bezeichnung und Einreihung der Optik in die Physik als selbstständige Disciplin ist danach ganz subjectiv unseren Sinnen angepasst. Objectiv genommen wäre die Optik heut zu Tage ein Theil der elektromagnetischen Theorie. Subjektiv betrachtet nimmt die physikalische Hypothese — wie die

---

Newton zwischen Bewegungsgesetzen oder Axiomen und Hypothesen macht, nicht haltbar erscheint, so wäre darauf hinzuweisen, dass für den Mathematiker das Bedürfniss einer Scheidung der wahren erkenntnisstheoretischen Grundlagen der Physik in Axiome und Hypothesen weniger dringend erscheinen mag. Riemann's „Hypothesen der Geometrie" wären in unserer Terminologie Postulate oder Axiome, doch liesse sich bei dem Schwanken des Sprachgebrauchs der Ausdruck Hypothese insofern rechtfertigen, als in der Geometrie auf das sinnliche Anschauungsvermögen Bezug genommen werden kann. — Wenig präcise wäre die Äusserung Riemann's: „Man pflegt jetzt unter Hypothese alles zu den Erscheinungen Hinzugedachte zu verstehen".

von der Wellennatur des Lichtes — einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit ein. Objectiv genommen ist die physikalische Hypothese Wahrheit, Thatsache; man denke an Wiener's photographische Fixirung stehender Lichtwellen.

Wir erheben uns also in den Hypothesen von der Beschränktheit unserer sinnlichen Anschauung zu einer übersinnlichen Anschauung und treiben damit eine wissenschaftlich durchaus zulässige Metaphysik (s. S. 11). Im Gegensatz zu den Postulaten trauen wir den Sinnen nicht zu, dass es sich um etwas Neues, unabhängig Gegebenes handelt. Wir halten Inhalt und Gebiet, auf das uns die sinnliche Anschauung hinweist, für eine Täuschung — für eine Sinnestäuschung in dem Sinne, dass unseren Eindrücken allerdings ein realer, aussen gegebener Hintergrund entspricht, nicht etwa in dem, dass es sich lediglich um eine innere Gehirnphantasie eines Kranken handelt.

Zur Aufstellung und Einführung einer Hypothese in eine bestimmte Disciplin muss, wie zur Aufstellung und Einführung eines Postulats, eine innere Nöthigung vorliegen. Eine solche innere Nöthigung kann bei einer und derselben Hypothese für die eine Disciplin bestehen, braucht darum aber noch nicht gleichzeitig für die andere Disciplin zu bestehen. Darin werden wir naturwissenschaftlich dann nicht etwa eine logische Inconsequenz zu sehen haben, sondern lediglich den Ausdruck der Thatsache, dass die der hypothetischen Anschauung zu Grunde liegende Realität für das Erscheinungsgebiet der einen Disciplin wirklich wesentlich, für das der anderen Disciplin gänzlich unwesentlich ist.

Die Atomistik bildet für die Chemie eine sehr wesentliche Grundlage, wir werden aber darum nicht behaupten können, dass die atomistische Constitution der Materie als Thatsache genommen nun für alle physikalischen Erscheinungen und Behandlungen eine wesentliche Rolle spielen müsste. Es wird für viele Gebiete, welche die Erscheinungen der ponderabeln Materie behandeln, vollkommen gleichgültig sein, ob wir hypothetische Annahmen über die Constitution der Materie machen oder nicht. In solchen Fällen werden wir auf die Einführung von Hypothesen zu verzichten haben, um innerhalb unseres gegenseitigen Bezugssystems zum Ausdruck zu bringen, dass das wissenschaftlich zu behandelnde Erscheinungsgebiet keine Beziehung weder zu der einen noch zu der anderen Hypothese aufweist.[1])

---

1) Ueber nothwendige und nicht nothwendige Verwerthung der Atomistik in der Naturwissenschaft. Wied. Ann. 61. S. 196 u. f. 1897.

Wird, ohne dass eine besondere Nöthigung dazu vorliegt, eine hypothetische Anschauung doch eingeführt oder zu Grunde gelegt, dann würden wir von einer Bevorzugung einer Anschauung zu sprechen haben, wie sie der Objectivität der Forschung nicht angemessen erscheint.

§ 8. Charakteristik der physikalischen Naturgesetze.[1])

Der Unterschied zwischen Postulat und Naturgesetz ist darin begründet, dass das Postulat ein Grundsatz für das gesammte wissenschaftliche System der Physik beziehungsweise der Mechanik sein will, während das Naturgesetz nur einen mehr oder weniger engen Kreis beherrschen will. So ordnet das Naturgesetz seinen Inhalt den Postulaten unter, es wird diesen von vornherein nicht widersprechen dürfen, es bedient sich der Sprache und Terminologie der Postulate.

Das Newton'sche Gravitationsgesetz, das Coulomb'sche Gesetz für die elektrostatischen und magnetischen Wirkungen sind gute Beispiele für das, was man unter einem Naturgesetz zu verstehen hat.

Naturgesetze fassen eine Classe von Erscheinungen unter einem Gesichtspunkt zusammen. Wir werden auch hier eine subjective und objective Seite zu unterscheiden haben. Subjectiv setzen wir einen Begriff voraus, unter dem wir die Erscheinungsclasse zu umfassen, zu begreifen suchen: Gravitation — wir setzen für diesen Begriff einen quantitativen Ausdruck an: Gravitationsgesetz — und suchen die Grenzen auf, innerhalb derer dieser quantitative Ausdruck der Genauigkeit der Beobachtungen entspricht. Objectiv ordnen wir diesen Begriff einem Thatbestande unter, der entweder durch den formulirten Ansatz für das Gesetz genau oder näherungsweise wiedergegeben ist.

Es wird wesentlich Sache der Erfahrung und des Zustandes des wissenschaftlichen Systems sein, ob wir das formulirte Gesetz für — den Thatsachen genau entsprechend oder näherungsweise entsprechend halten. In der Mehrzahl der Fälle wird die Sache so liegen, dass zunächst nur eine näherungsweise richtige Formulirung in Betracht gezogen werden dürfte. Dem Fortschritt der Wissenschaft ist dann gleich die

---

1) Man vergleiche meinen Aufsatz: Ueber Gesetze und Aufgaben der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, in formaler Hinsicht. 1892. Himmel und Erde IV, 441—461.

Richtung vorgezeichnet. Es wird dann Aufgabe der Wissenschaft sein, die Grenzen der Gültigkeit des formulirten Gesetzes immer weiter zu präcisiren, vor Allem muss die Genauigkeit angegeben werden, für welche die quantitative Formulirung garantirt werden kann. Unser wissenschaftliches Zutrauen zu einem Gesetz kann aber auch die Richtung einnehmen, dass das formulirte Naturgesetz über alle Grenzen der Erfahrung seine Gültigkeit des quantitativen Ausdrucks besitzt, dann entsteht die Frage, ob wir nicht überhaupt ein Postulat vor uns haben.

Das Princip der Energie ist ein solches Gesetz, welches thatsächlich wohl heute schon die Rolle eines Postulates einnimmt; es ist heute eine allgemein angenommene strenge Forderung, mit der wir allenthalben in die Betrachtung hineingehen — während man beim Newton'schen und Coulomb'schen Gesetz über die Frage nach der Genauigkeit des quantitativen Ausdrucks discutirt (H. Seeliger, C. Neumann). Schon Maxwell[1]) hatte die Frage aufgeworfen, wie genau wohl die 2 in dem reciproken quadratischen Ausdruck des Coulomb'schen Gesetzes garantirt werden könnte, und die Genauigkeit der eigens in dieser Richtung von ihm angestellten Messungen lassen die 2 bis auf $^1/_{50000}$ ihres Werthes richtig erscheinen.

Man hat neuerdings bisweilen versucht, das Newton'sche Gravitationsgesetz als eine Art von postulirendem Grundsatz hinzustellen, um z. B. auf ihm den Begriff der Masse zu begründen.[2]) Demgegenüber wäre darauf hinzuweisen, dass das Newton'sche Gravitationsgesetz für diesen Zweck eine zu grosse Zahl specieller Bestimmungsstücke aufweisen dürfte. Stellt man das Newton'sche Gravitationsgesetz als Postulat hin, so würde es sich fragen, ob man im Hinblick auf die Untersuchungen von Seeliger und Neumann dann unter allen möglichen Entfernungs-Verhältnissen gleiche Werthe für ein und dieselbe Masse aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz ableiten könnte; es würde die Möglichkeit vorliegen können, dass dann das auf Gegenseitigkeit aufgeführte physikalische Bezugssystem auf innere Widersprüche führt. Aber auch wenn diese Bedenken hinfällig wären, und man von dem Newton'schen Gravitationsgesetz sagen könnte, dass es nach einer Richtung das Universum beherrscht, so wäre noch darauf hinzuweisen, dass es trotzdem nicht universell genug erscheint, um die Rolle eines Postulates übernehmen zu können. Es könnte nur

1) Maxwell, Electricity and Magnetism, I. Art. 74b.

2) Mach, Carl's Repertorium, 1868. Bd. 4. S. 355.

dann diese Rolle einnehmen, wenn wirklich alle physikalischen Erscheinungen auf gravitirende Kräfte zurückzuführen wären. In dieser Anschauung läge aber eine Hypothese, zu der zunächst im Hinblick auf den Reichthum der sonst in der Physik vorkommenden Krafterscheinungen eine innere Nöthigung nicht anerkannt werden kann; im Gegentheil müsste eine solche Hypothese als künstlich bezeichnet werden. Uebrigens wären derartige Versuche auch der gegenwärtigen, durch Faraday und Maxwell aufgekommenen Anschauung entgegengerichtet, nach der Fernwirkungen auf Druckwirkungen zurükzuführen wären.

Man hat wohl zu unterscheiden zwischen der Einführung des Begriffs Masse und der Methode Massen zu messen. Das Postulat von der Erhaltung der Masse führt den Massenbegriff ein. Die Methode, Massen durch Gravitation zu messen, ist als eine unter vielen zu betrachten, welche in ihrer Uebereinstimmung das gegenseitige Bezugssystem und damit in letzter Stelle auch jenes Postulat von der Erhaltung der Masse rückwirkend zu stützen hat.

Wir resumiren: Postulate und Hypothesen haben das gemein, dass beide sich, jedes in besonderer Weise, über die Ungenauigkeit und Begrenztheit der Sinne zu unbegrenzter übersinnlicher Genauigkeit erheben. Im Begriff des Naturgesetzes liegt es, bei aller Strenge der Gültigkeit des Gesetzes die Frage nach der Genauigkeit offen zu lassen. Bei den Postulaten im engeren Sinne bleiben wir in dem sinnlichen Gebiet, auf das uns die gewöhnliche Erfahrung weist, bei der Hypothese verlassen wir es. Postulate sind allgemeine physikalische Grundsätze, denen alle speciellen physikalischen Disciplinen mit ihren Gesetzen einzeln eo ipso genügen müssen. Postulate und Naturgesetze bilden beide im Wesentlichen Begriffselemente. Hypothesen und Naturgesetze sind die Elemente, mit denen wir an die Ausarbeitung der specielleren physikalischen Disciplinen gehen; dabei übernimmt die Hypothese die Rolle eines Anschauungselements, das Naturgesetz die Rolle eines Begriffselements.

Subjectiv ausgedrückt sind[1]) „Postulate, Hypothesen, Naturgesetze unsere naturwissenschaftlich gereiften Ideen über die Erscheinungswelt der uns umgebenden Natur; sie wollen als Voraussetzungen das Reich

---

1) Man vergleiche meinen Aufsatz: Ueber die Frage nach dem Verhältniss von Denken und Sein. Wiener Sitzungsberichte IIa. December 1897. S. 1110 u. 1111.

der Erscheinungen und Thatbestände umfassen, begreifen, mindestens erläutern".

Objectiv ausgedrückt sind „Postulate, Hypothesen, Naturgesetze Thatbestände, deren Existenz der Erscheinungswelt der uns umgebenden Natur den in sich geschlossenen systematischen Charakter geben soll, welchen darzustellen Aufgabe der Wissenschaft ist"; sie sollen das Thatsächliche in seiner grössten Reinheit zum Ausdruck bringen.

§ 9. Charakteristik und Bedeutung von Terminologie, Definitionen und Präliminarien.

Haben wir so Postulate, Hypothesen und Naturgesetze als begriffsbildende Elemente charakterisirt, die zu neuen Bezeichnungen Veranlassung geben, so wird es sich überhaupt noch empfehlen, Einiges über wissenschaftliche Terminologie folgen zu lassen.

Wenn auch Terminologie für einen in der Wissenschaft Stehenden eine untergeordnete Rolle spielen mag, so lässt sich nicht leugnen, dass sie gerade für einen Anfänger von hervorragender Bedeutung ist; sie kann fördern, sie kann hemmen. Eine gute Terminologie wird von vorneherein ein guter Wegweiser sein; andererseits kann bei jeder Wandelung der Wissenschaft die bisherige Terminologie, welche an bestimmte Begriffe und Thatsachen knüpft, nicht ohne Schaden verlassen werden.

So sind oft Bezeichnungen stehen geblieben, die sich eben aus der Entwickelung der Wissenschaft in einem früheren Stadium erklären (latente Wärme!). Das wird mit ein Grund sein auch in den Naturwissenschaften stets an die geschichtliche Entwickelung der Wissenschaft anzuknüpfen und mit ihr Fühlung zu behalten. Die Terminologie wird so in vielen Fällen in Folge der Entwickelung der Wissenschaft einer Wandelung unterworfen sein. Schon aus diesem Grunde wird es sich empfehlen von Zeit zu Zeit eine Fixirung der Terminologie zu versuchen.

Ein solcher Versuch, von Zeit zu Zeit immer von Neuem an eine Fixirung der Terminologie heranzutreten, dürfte mehr dem Betriebe der Wissenschaft entsprechen, als Bezeichnungen abzuändern oder an Stelle alter Bezeichnungen ganz neue einzuführen, welche doch vielleicht nur für kurze Zeit haltbar wären. Die Beibehaltung des Wortes mit veränderlichem Begriffsinhalt dürfte mehr vor Verwirrung bewahren, als jeder Veränderung eines Begriffsinhaltes mit Aenderung der Bezeichnung zu folgen.

Es entspricht dies auch am besten dem Charakter der Sprache.[1]) Die Sprache mit ihrem Grundstamm von Wörtern will eine gegenseitige Verständigung ermöglichen; eine solche Verständigung, sofern sie sich auf Erweiterung wissenschaftlicher Anschauungen und Begriffsbildungen erstrecken will, würde unmöglich sein, falls dem Wortschatz der Sprache zu enge, eindeutige, bestimmte und feste Grenzen gesteckt wären. Es ist der Vorzug und die Stärke der Sprache, dass sie in ihren bis zu einem gewissen Grade wenig präcisen, unbestimmten und vieldeutigen Bezeichnungen in der Freiheit der Handhabung die Mittel zu einer bestimmten und eindeutigen Präcisirung hergiebt, welche vorzunehmen schliesslich nicht mehr Aufgabe der Sprache, sondern der Wissenschaft ist. In der Unbestimmtheit und Vieldeutigkeit des sprachlichen Ausdrucks liegt einerseits die Anregung für weitere Gedanken-Verbindungen und -Knüpfungen, andererseits allerdings auch die Quelle unzähliger Missverständnisse und Streitigkeiten.

Aus dieser Darstellung folgt, dass es auf der einen Seite wissenschaftlich in der Regel sehr misslich sein wird, Bezeichnungen älterer Autoren unmittelbar in einem Sinne zu übernehmen, den sie dort vielleicht gar nicht einmal haben. Auf der anderen Seite dürfte aber jeder Autor verpflichtet sein, in erster Linie an die Terminologie der Classiker zu knüpfen, er wird dafür berechtigt sein, sich gegen eine andere Deutung seiner Bezeichnung zu verwahren, als sich aus dem Zusammenhang ergiebt.[2])

Es ist ein naives d. h. des wissenschaftlichen Betriebes unkundiges Verlangen, Alles definiren zu wollen, nichts undefinirt zu lassen.[3]) Es liegt im Wesen der Erfahrungswissenschaft, dass ein gewisser Bestand von Begriffen für den Betrieb der Wissenschaft vorausgesetzt werden muss. Dieser Bestand von Begriffen wird anfänglich nur eine unvollkommene Umschreibung finden, eine Umschreibung, die erst

---

1) Man vergleiche E. Mach. Beiträge zur Analyse der Empfindungen. 1886. S. 149 u. f. Populär wissenschaftl. Vorlesungen. 1896. S. 208 u. f. Principien der Wärmelehre. 1896. S. 406 u. f. — wo sich andere, in mancher Hinsicht ähnliche Bemerkungen über Sprache finden.

2) Die einfache Uebernahme des „a priori“ Begriffs von Kant bei Hertz (Principien der Mechanik S. 53) scheint mir eine zu grosse Vertrauensseligkeit gegenüber der Autorität von Kant. — Ein sehr lehrreiches Beispiel für Begriffsänderungen ist die Wandelung des Causalitätsbegriffes; vergl. die späteren Bemerkungen darüber § 16.

3) L. Boltzmann, Ueber die Frage nach der objectiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur. Wiener Sitzungsberichte 1897.

beim Aufbau des Systems und in wiederholtem Kreislauf der Erkenntniss eine nähere Präcision finden kann.[1])

Es entspricht am besten dem Betriebe einer Erfahrungswissenschaft, in Form von Präliminarien mit der Umschreibung eines gewissen Bestandes von Grundbegriffen zu beginnen. Die Definition dieser Grundbegriffe ist dann als eine nur vorläufige, einer späteren Ergänzung bedürftige zu fassen; sie ist als solche zunächst mehr eine Nominaldefinition als eine Realdefinition. Der Präliminar-Charakter wird am besten hervorgehoben werden, wenn gleich bei der sogenannten Nominaldefinition der Grundbegriffe auf Späteres, Reales hingewiesen wird, was dem ganzen System eine rückwirkende Festigkeit giebt. Die Präliminarien in Newton's Principien (die Definitionen) sind in dieser Richtung für mich vorbildlich. Es kann nur als ein Zeichen einer Art Entfremdung angesehen werden, wenn dieser Präliminarcharakter der Newton'schen Definitionen verkannt worden ist und eigentlich seit Newton eine Wiederaufnahme oder auch nur Nachahmung nicht mehr gefunden hat.

Ist es danach in der Natur der Sache d. h. im Betriebe der Physik begründet, dass man von gewissen Nominaldefinitionen der Grundbegriffe ausgehen muss, so entspricht es weiter ebenso der Natur der Wissenschaft, dass diese anfänglichen Nominaldefinitionen im Verlaufe der Wissenschaft, wenn sie sich als brauchbar erweisen, ihren sehr realen Inhalt finden, welcher dann Veranlassung zu einer Wiederaufnahme der Definition der Grundbegriffe giebt.

Viel einfacher liegt es mit der Definition der weiteren im Verlauf der Wissenschaft sich ergebenden Begriffe. Wenn wir von untergeordneten Bezeichnungen absehen, müssen wir hervorheben, dass die physikalische Terminologie im engsten Zusammenhang mit dem Erfahrungsinhalt der Physik und ihrer begrifflichen Beherrschung zu stehen hat. Die Erklärung der Bezeichnung für Begriffsbildungen, die sich im Laufe der späteren Entwickelung der Wissenschaft vollzogen haben, macht hier viel weniger Schwierigkeit, wie die Definition der Grundbegriffe, welche sozusagen als bekannt vorausgesetzt zu werden pflegen, und mit welchen man in die Betrachtung hinein-

1) Es wird sich in vielen Fällen bei den Definitionen darum handeln, einen Begriff A in Beziehung zu einer Reihe anderer Begriffe B, C, D zu setzen. Jede Präcisirung von B, C, D wird so rückwirkend eine solche auf A zur Folge haben, und vielleicht wird auch die so gewonnene Präcisirung von A wieder auf B, C, D zurückwirken. Durch solch ein Schema kann man sich mit klar machen, was es mit dem wiederholten Kreislauf der Erkenntniss (§ 1) für eine Bewandniss hat.

geht. Vor Allem giebt die Formulirung und Aufstellung von Naturgesetzen zu Begriffsbildungen Veranlassung. In vielen Fällen liegt der Fall vor, dass ein schon vorhandener und auch definirter physikalischer Begriff durch das Naturgesetz eine unerwartet neue Beleuchtung und Präcisirung erfährt; das Naturgesetz giebt dann zu einer neuen Wiederaufnahme der Definition Veranlassung. Hierhin gehört Begriff und Definition der Temperatur und des absoluten Nullpunkts durch den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

I. 3) Die allgemeinen methodischen Regeln der Physik. (Methodenlehre. Newton: Regulae philosophandi.)[1]

§ 10. Allgemeine Vorbemerkungen über den Werth der Regeln als Anregung für die Forschung.

Hatten die Auseinandersetzungen der allgemeinen methodischen Grundlagen der Physik, insbesondere die Auseinandersetzungen über Postulate (Axiome), Hypothesen und Naturgesetze specielle Beziehungen zur naturwissenschaftlichen Erfahrung, so handelt es sich bei der Auseinandersetzung der folgenden methodischen Regeln um Methoden, die für die Bearbeitung und Erweiterung jedes Systems der Erfahrung eine Rolle spielen dürften. Wir nehmen im Folgenden aber keine Veranlassung bei der Behandlung dieser Regeln an eine andere Erfahrung als an die physikalische zu denken.

Es handelt sich hier — wohl bemerkt — um Regeln, nicht um Gesetze des Denkens und Erkennens. Indem wir das Wort Regel brauchen, wollen wir dadurch zum Ausdruck bringen, dass der nach einer bestimmten Regel angestellte Gedankenprocess keineswegs immer zu einem bestimmten positiven Ziele führen muss, dass er auch negativ verlaufen kann. Läge die Sache so, dass die nach bestimmten Regeln angestellten Betrachtungen immer zum Ziele führen müssten, dann wäre Forschung und Erkenntniss ein sehr einfaches Ding, dann könnte man von Gesetzen der Forschung und Erkenntniss sprechen — das kann man aber nicht. Regeln haben Ausnahmen, mithin eine beschränkte Gültigkeit. Gesetze haben keine Ausnahmen, sie haben eine unbeschränkte Gültigkeit, sofern nur ihre Bedingungen klar präcisirt sind.

Die methodischen Regeln sollen wesentlich nur die Anregung geben, Behandlungen und Betrachtungen in bestimmten Richtungen anzustellen. Es handelt sich hier um keine aprioristischen Methoden

---

1) Newton's Principia. Liber tertius. S. 387 der Thomson'schen Ausgabe.

der Forschung, es handelt sich um Methoden, die auf dem Boden der Erfahrungsforschung selbstständig erwachsen sind. Die Forschung hat diese Regeln durch Behandlung specieller Fälle gezeitigt; zunächst ist Fall für Fall wissenschaftlich einzeln behandelt, und nur insofern die Behandlung Erfolge aufwies, musste die Aufmerksamkeit nach der Richtung geschärft werden, dass Fragen sich aufdrängten wie die, worauf denn der Erfolg der wissenschaftlichen Behandlung in dem einen Fall beruhte, und worauf denn der Misserfolg in dem anderen Fall.

Die Grundformen des naturwissenschaftlichen Denkens und Erkennens vollziehen sich unter den Formen der Induction und Deduction. Auch hier lassen sich, wie bei der Behandlung der allgemeinen Grundlagen der Physik, objective und subjective Seiten unterscheiden. Besondere Formen, welche sich der Induction und Deduction unterordnen und welche daher eine gesonderte Besprechung für sich erfordern, sind die Formen der Analyse und Synthese, der Isolation und Superposition, die innere und äussere Oscillation und Vergleichung (Analogie) und die von E. Mach betonte Forderung der Oekonomie, welche sich bis auf Newton zurück verfolgen lässt.

§ 11. **Charakteristik der Induction und Deduction.**[1])

Die Denkformen der Induction und Deduction lassen sich beim wissenschaftlichen Betriebe kaum trennen, sie erscheinen dort mit einander verwachsen. Wenn wir sie hier trennen, so geschieht es zu ihrer Charakteristik, um sie besser in das rechte Verhältniss zu einander zu setzen.

Die Methode der Induction sucht aus der Fülle der Erfahrung gewisse Sätze und Thatsachen auf, die geeignet erscheinen möchten einem systematischen Gebäude, wie es jede Wissenschaft sein will, oder auch nur einem Theile des Gebäudes als Fundament und Grundlage im Sinne des 1) Abschnittes zu dienen. Die Methode der Deduction prüft dies so inductiv gefundene Fundament, indem sie möglichst viele Consequenzen daraus zieht und rückwärts an der Hand der Erfahrung mit der Wirklichkeit vergleicht.

1) H. v. Helmholtz. Induction und Deduction. Vorrede zum zweiten Theile des ersten Bandes der Uebersetzung von W. Thomson und Tait's „Treatise on Natural Philosophy" (1873), wieder abgedruckt in „Vorträgen und Reden" II. 1896. S. 413—421. — Man vergleiche auch mein Buch „Erkenntnisstheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften". 1896: Induction und Deduction. Dritter und vierter Vortrag. S. 39—68.

Die Methode der Induction entspricht der subjectiven Seite der naturwissenschaftlichen Forschung, indem sie aus der Fülle der Erfahrung die Fälle auswählt, die ihr zur Aufsuchung der Grundlagen als geeignet erscheinen. Die Methode der Deduction entspricht der objectiven Seite der naturwissenschaftlichen Forschung, indem sie die auf dem Wege der Induction subjectiv ausgewählten und zu Grunde gelegten Sätze als objectiv richtig hinstellt und zusieht, ob die daraus gezogenen Consequenzen die Probe der weiteren Erfahrung und der Wirklichkeit bestehen.

Beide Formen und Methoden der Forschung haben sich gegenseitig zu durchdringen und zu befruchten. Die einseitig bevorzugte Induction wird dem vorhandenen Bestande der Wissenschaft nicht genügend gerecht, sie wird, wie E. Mach sich einmal ausdrückt, keine festen Denkgewohnheiten aufkommen lassen. Die einseitig bevorzugte Deduction überschätzt die Sicherheit der nothwendiger Weise durch Induction gewonnenen Grundlagen und des vorhandenen Bestandes der Wissenschaft.

Das Ideal und Zukunftsbild des wissenschaftlichen Systems ist ein in sich geschlossener Bau, dessen Fundamente so fest und sicher sind, dass daran nichts mehr zu ändern sein wird, in ihm hätte die Induction keine Stelle mehr. Alles, was man wissen wollte, liesse sich durch Deduction ableiten. Aber das gegenwärtige System der Wissenschaft, wie es zur Zeit vorliegt, ist ein solcher in sich geschlossener Bau noch nicht, und darum hat in ihm die Induction fortgesetzt ihre Stelle und wird sie behalten.

Die Hauptschwierigkeit der weiteren Forschung besteht darin, dass es sich nicht mehr, wie am Anfang der Forschung um die Frage handeln kann, ob die Fundamente und Grundlagen richtig oder falsch sind — sondern um die Frage, inwiefern den Fundamenten und Grundlagen richtige oder falsche Bestandtheile anhaften können. In dem Zukunftsbilde des wissenschaftlichen Systems sind die Fundamente und Grundlagen vollständig richtig, ihnen haftet kein fehlerhafter Bestandtheil mehr an. Von dem gegenwärtigen System der Wissenschaft werden wir nur behaupten können, dass die vorhandenen Fundamente und Grundlagen im Wesentlichen richtig sind. Wenn wir reale Wissenschaft treiben wollen, werden wir daher gut thun, auch als Ziel der Wissenschaft nichts anderes hinzustellen, als ein im Wesentlichen richtiges System aufführen zu wollen — eine Formulirung, welche den Vorzug hat, gleich den Weg zu zeichnen, auf dem der weitere Fortschritt der Wissenschaft zu suchen ist.

Die naturwissenschaftliche Forschung hat thatsächlich auch diesen Weg schon längst eingeschlagen, aber die Darstellungen, wie sie in Vorlesungen und selbst in Werken hervorragender Autoren üblich geworden sind, und wie sie einer über das Ziel hinausgehenden Objectivirung entsprechen, verschleiern diesen Weg und setzen das Ideal und Zukunftsbild des wissenschaftlichen Systems als erreicht hin. Diese Vorlesungen und Werke sind darum keineswegs als verfehlt zu bezeichnen. Die einseitig cultivirte Deduction, die ihnen stillschweigend zu Grunde liegt, hilft in Verbindung mit anderen Werken dazu mit, die Durchdringung von Induction und Deduction herzustellen, von der ich vorhin sagte, dass sie nothwendig sei. Jene Vorlesungen und Werke leisten nur nicht das, was sie zu leisten vorgeben: ein lebendiges Bild der Wissenschaft und ihrer Entwickelung zu geben. Sie können so auch weniger die Anregung gewähren, welche für die weitere Entwickelung der Wissenschaft nothwendig ist — eine Anregung, deren Vorlesungen nicht entbehren sollten.

Wir würden das Verhältniss der Induction und Deduction für die physikalische Forschung nur sehr unvollkommen beschrieben haben, wenn wir nicht betonen würden, dass die Deduction sich innerhalb der physikalischen Disciplinen beständig an Beziehungen zu Grössenverhältnissen zu bethätigen hat. Dadurch ist der Anwendung der reinen Mathematik die Thüre geöffnet; auf die Physik übertragen sich so alle die Vorzüge deductiver Schlussweise, welche wir innerhalb der reinen Mathematik schon längst zu schätzen gewohnt sind. Die Grundlagen, auf denen das deductive Gebäude aufzuführen ist, können so viel schärfer hervortreten und sind so inductiven Anregungen und Abänderungen leichter und offenkundiger zugänglich. Wir dürfen nicht vergessen, dass in dieser inductiven Beschäftigung mit den Grundlagen ein Hauptstück naturwissenschaftlich physikalischer Arbeit liegt und immer weiter liegen wird, über welche Mathematiker in vielen Fällen hinwegzusehen pflegen. Die Schätzung dieser inductiven Arbeit wird uns davor bewahren in den Fehler zu verfallen, der mathematischen Schärfe und Stärke des menschlichen Verstandes gegenüber die Nothwendigkeit der Sammlung immer weiteren empirischen Materials zu übersehen.

Vor Allem werden wir der Mathematik nicht den Einfluss zugestehen können, dass lediglich mathematische Gründe zur Aufnahme und Bevorzugung gewisser Elemente ausschlaggebend werden. Mag zur Zeit das eine oder andere Element der Physik für eine mathematische Präcisirung bequem liegen; die Mathematik hat sich schon oft an physikalischen Aufgaben entwickelt, es ist kein Grund einzusehen, weshalb sie sich nicht weiter an Fragen entwickeln soll, zu denen eine inductive Behandlung der Physik im Sinne Newton's die Anregung bietet. Es ist dies im Wesentlichen der Standpunkt, den Thomson Art. 453 seines Handbuchs der theoretischen Physik mit den Worten wiedergiebt: „Schwierigkeiten rein mathematischer Natur werden wir weder aufsuchen noch vermeiden“.

In diesem Sinne werden wir in vielen Fällen gut thun, die Feststellung mathematischer Eigenschaften gewisser physikalischer Functionen und Begriffe dem weiteren Ausbau des Systems zu überlassen und einer etwaigen schärferen Präcisirung derselben erst an den Stellen näher zu treten, an denen eine Nöthigung dazu vorliegt. Denn im Wesentlichen hat die Wirklichkeit die mathematischen Eigenschaften der eingeführten Functionen und Begriffe festzustellen. In vielen Fällen wird das Studium der Wirklichkeit dann das Resultat ergeben, dass manche Eigenschaft, welche wir einer Erscheinungsclasse als wesentlich zu Grunde legten — mag diese Eigenschaft nun eine wirkliche sein oder nicht — als gänzlich unwesentlich für diese Erscheinungsclasse zu betrachten ist. Es ist z. B. sehr die Frage, ob die Bedeutung der atomistischen Constitution der Materie für das physikalische System so tiefgreifend ist, dass sie schon von vorneherein als ein wesentliches Postulat der gesammten Physik und damit auch der Mechanik zu Grunde gelegt werden müsse.

§ 12. Charakteristik der Analyse und Synthese, der Isolation und Superposition.

Die unter den Formen der Induction und Deduction gekennzeichnete naturwissenschaftliche Methode erschöpft eigentlich — richtig verstanden — Alles, was sich über naturwissenschaftliche Methode sagen lässt. Es kann sich im Weiteren daher nur darum handeln, die Formen der Induction und Deduction in ihrer Anwendung auf besonders häufig vorkommende Fälle auseinander zu setzen.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Denkformen der Analyse und Synthese; dabei vertritt die Analyse mehr ein subjectives, inductives — die Synthese mehr ein objectives, deductives Moment.

Diese Denkformen gehen von der Erfahrungsthatsache aus, dass die vor uns liegende Erscheinungswelt, um deren wissenschaftliche Darstellung es sich handelt, nicht etwas Einheitliches, Untheilbares ist, im Gegentheil ein Zusammengesetztes, Vielfaches. Aufgabe der

Wissenschaft ist es, dieses in der Erfahrung vorliegende Zusammengesetzte, Vielfache in seine naturgemässen Bestandtheile zu zerlegen. Die Induction sucht diese einfachen Bestandtheile der Erscheinungswelt auf — wir nennen diesen Gedankenprocess Analyse — und die Deduction macht die Probe auf die Richtigkeit und sucht aus diesen einfachen Elementen wieder die Erscheinungswelt herzustellen, zusammenzusetzen — wir nennen diesen Gedankenprocess Synthese.

Die Naturwissenschaften bieten viele Beispiele für die Vornahmen von Analysen und Synthesen. Die chemische Forschung hat diese Namen geradezu auf ihre specifischen wissenschaftlichen Methoden übertragen.

Die physikalische Forschung hat in ihrem Verlauf immer deutlicher auf eine bestimmte Form der analytischen und synthetischen Methode und Forschung hingewiesen, welche bereits heute von so fundamentaler Bedeutung erscheint, dass hier eine Besprechung vorgenommen werden soll; ich meine die Formen der Isolation und Superposition.[1])

Ich verstehe unter Isolation den inductiven Versuch innerhalb eines zusammengesetzten Wirkungsgebietes die Elemente aufzuspüren, welche ihre Wirkung für sich unabhängig von anderen gleichzeitig bestehenden Wirkungselementen bewahren, und unter Superposition den deductiven Versuch, aus den so aufgefundenen Wirkungselementen rückwärts wieder das zusammengesetzte Wirkungsgebiet d. h. die Wirklichkeit zu erhalten.

Der Nachdruck liegt hier wesentlich auf dem „unabhängig neben einander Bestehen der Wirkungen". Im allgemeinen Fall der Analyse und Synthese, wie in der Chemie, liegt die Erscheinung vor, dass Einzelwirkungen durch ihr Zusammenbestehen sich modificiren und anders werden, als sie für sich sind.

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte, die Zusammensetzung einfacher Bewegungsvorgänge, wie sie die Akustik, Optik, Wärmeleitung aufweisen, sind typische Beispiele für die Methode der Isolation und Superposition. Diese methodischen Principe reichen sehr

1) Man vergleiche meine erkenntnisstheoretischen Grundzüge: Isolation und Superposition. Fünfter und sechster Vortrag, S. 69—97. Ergänzungen und Zusätze, S. 177—179. Die ersten Bemerkungen über Isolation und Superposition findet man in meinem Vortrag „Hat die Physik Axiome?" 1894. S. 8 des Sonderabdrucks und in meinem Aufsatz „Ueber die Bedeutung des Studiums der Bodentemperatur". 1894. Himmel und Erde VI, S. 315. — E. Mach, Mechanik, III. Aufl. S. 147, 148.

weit, sie sind unabhängig von Specialvorstellungen z. B. ob eine Fernwirkung oder Nahwirkung vorliegt, ob überhaupt die Anschauung von Kräften zu Grunde gelegt wird, oder ob es sich um Anwendung linearer Differentialgleichungen handelt.

Es mag für den ersten Augenblick so scheinen, als ob dieser Isolations- und Superpositionsprocess ein überaus einfacher ist — und er ist es auch principiell — aber doch lehrt die Geschichte der Physik, dass die Aufdeckung der Isolations- und Superpositions-Elemente sich in jedem Fall nicht so schnell und einfach vollzogen hat. Dass das Licht in einer Wellenbewegung besteht, ist verhältnissmässig früh aufgedeckt (Huygens), und doch wurde diese Vorstellung von der Emanationstheorie (Newton) auf ein Jahrhundert vollständig zurückgedrängt. In diesem Kampf der Theorieen handelte es sich im Wesentlichen darum, ob die Intensität des Lichts das naturgemässe Isolations- beziehungsweise Superpositions-Element einer Theorie des Lichtes ist oder nicht.

Die Wirklichkeit liegt darum so verwickelt, weil die Wirkungselemente, aus denen sich die einzelnen Erscheinungen bilden, in sehr verschiedenen Grössenverhältnissen auftreten, und dadurch eine Mannigfaltigkeit hervorrufen und möglich machen, die in vielen Fällen die Anschauung erwecken möchte, als handle es sich garnicht um quantitativ zu unterscheidende Verhältnisse, als handle es sich mehr um Qualitäten als um Quantitäten.

§ 13. **Charakteristik der Vergleichung und Oscillation.**[1] **(Analogie.)**

Es handelt sich hier wieder keineswegs um neue erkenntnisstheoretische Grundformen, es handelt sich vielmehr um die Charakteristik specieller, häufig wiederkehrender Methoden, welche das voraussetzen, was bereits unter Induction und Deduction, unter Isolation und Superposition mitgetheilt ist, um Methoden, welche wesentlich den Process der Induction und Deduction, der Isolation und Superposition erleichtern sollen.

Wenn es richtig ist, dass die Erkenntniss eine Beziehung zwischen dem Object der Erkenntniss und dem Subject, welches die Erkenntniss

---

1) E. Mach. Ueber das Princip der Vergleichung in der Physik 1894. Populär wissensch. Vorlesungen Lpzg. 1896 S. 251—274. — Man vergleiche auch meine erkenntnisstheoretischen Grundzüge: Vergleichende Betrachtungen. Zweiter Vortrag, S. 20—38. Ergänzungen u. Zusätze S. 175—177. — Ueber die Frage nach dem Verhältniss von Denken und Sein. Wien 1897.

zu Stande bringen will, vermittelt, dann muss zunächst darauf hingewiesen werden, dass diese Beziehung sich keineswegs in einem einfachen Gedankenprocess vollzieht — so einfach liegt die Sache nicht.

Die Erkenntniss wird auf einer beständigen, wiederholten Vergleichung zwischen Objecten ausser uns und den subjectiven Vorstellungen und Anschauungen darüber in uns beruhen. Es wird dabei eine beständige Umbildung und Anpassung[1]) unserer Vorstellungen erfolgen. Insofern diese Vergleichung eine wiederholte ist und sein muss, können wir sie als Oscillation bezeichnen.

Es entspricht durchaus dem Thatbestande — und wir wollen hier doch reale Erkenntnisstheorie darstellen, nicht ideelle — den ganzen Erkenntnissprocess als einen oscillirenden Process darzustellen, bei dem stets eine gewisse Differenz zwischen Object und unserer subjectiven wissenschaftlichen Auffassung darüber bestehen wird. Mag diese Differenz immer kleiner und kleiner werden, die subjective wissenschaftliche Auffassung wird sich nur asymptotisch dem realen Object nähern. Mag eine Erkenntniss, wie z. B. die der Gravitation, wissenschaftlich noch so gut fundirt sein, die Wissenschaft wird sich stets die Freiheit offen lassen müssen, diese gut fundirte Erkenntniss unter anderen Gesichtspunkten, als es bisher geschehen ist, zur Darstellung zu bringen.

Wenn ich früher schon darauf hinwies, dass der Erkenntnissprocess ein stets von Neuem unternommener Kreislauf sein wird und sein muss, so war das im Wesentlichen auch nur ein anderer Ausdruck für das, was ich hier als Oscillation bezeichne. Wenn ich darauf hinwies, dass unsere Erkenntniss zunächst immer nur die Erfassung des Wesentlichen und nicht des Vollständigen zum Gegenstand haben kann, dann werden wir im Bilde des oscillirenden Processes zu sagen haben, dass sich unsere Erkenntniss von Stufe zu Stufe vollständiger gestalten wird.

Nun kommt aber noch eins hinzu, was dem Process der Vergleichung und Oscillation eine weitere Ausdehnung giebt, das ist der Umstand, dass es sich in dem naturwissenschaftlichen Erkenntnissprocess nicht blos um einen Vergleich zwischen Object und Subject handelt (innerer Vergleich), sondern auch um einen Vergleich zwischen verschiedenen Objecten (äusserer Vergleich, Analogie) — einem weniger

1) E. Mach. Ueber Umbildung und Anpassung im naturwissenschaftlichen Denken 1883. Populär wissensch. Vorlesungen Lpzg. 1896 S. 231—250.

erforschten Object und einem mehr erforschten Object — oder wenn man will einen Vergleich zwischen unseren subjectiven Anschauungen und Vorstellungen über solche verschiedenen Objecte.

Es ist eine feststehende und gar nicht wegzuläugnende Thatsache, dass die physikalische Erkenntniss durch Bezugnahme scheinbar heterogener Gebiete auf einander ausserordentlich befruchtet ist, und kein Zweifel, dass sie noch weiter dadurch befruchtet werden wird. Das Studium der einfachen mechanischen Wellenbewegung und seine Uebertragung auf scheinbar zunächst gar nicht damit zusammenhängende Gebiete gehört hierher. Die akustischen Wellen lagen noch dem menschlichen Anschauungsvermögen am nächsten, ihre mechanische Natur liess sich noch leicht nachweisen. Die Wellennatur des Lichtes ist erst spät in der Wissenschaft in Aufnahme gekommen, die Vergleichung mit den elastischen Wellen gab die Triebkraft zu ihrer tieferen Ausarbeitung. Es sind zehn Jahre her, dass es Hertz gelang seine schönen elektrischen Wellenexperimente herzustellen, für welche die Triebkraft wieder die durch den Vergleich mit den optischen Wellen angeregten Gedanken bildeten, für welche noch heute die naturgemässe Auffassung die ist, dass „wir optisch denken".[1])

In diesen Beispielen, in welchen sich der Vergleich, das Bild der mechanischen Wellenbewegung als so erfolgreich und fruchtbar ergeben hat, führte eine consequent durchgeführte Analogie zu dem Resultat, dass die zunächst nur versuchsweise durchgeführte Analogie sich als Identität herausstellte. Die Lichterscheinungen halten nicht nur den Vergleich mit Wellenbewegungen aus, sie haben sich als identisch mit Wellenbewegungen und zwar elektromagnetischer Natur ergeben.

Nicht immer wird sich die Analogie im Verlaufe der Entwickelung der Wissenschaft zur Identität wandeln, sie kann auch ohne dies sich als sehr fruchtbar erweisen. Als Beispiel wären hier die neuerdings mehr in den Vordergrund tretenden sogenannten mechanischen Analogieen zu erwähnen, welche geeignet erscheinen der Mechanik eine über die frühere Stellung hinausgehende Bedeutung für die Physik anzuweisen. Ich erinnere hier an das Studium der verallgemeinerten Kreiselbewegungen, der sogenannten cyklischen Bewegungen und seine Bedeutung für die Elektricität und Wärmelehre.

Natürlich kann sich die Analogie auch als eine nur ganz äusserliche und dann unfruchtbare herausstellen. Eine solche spielt in der

1) Hertz. Schriften vermischten Inhalts Lpzg. 1895 S. 353.

Naturphilosophie des Alterthums eine Rolle; der Fehler war der, dass die Vergleichsobjecte von vorneherein falsch gewählt waren. Als solch ein Vergleichsobject wurde das organische, besonders das menschliche Leben herangezogen. Vom heutigen Standpunkt der Naturerkenntniss müssen wir das organische Leben als einen viel zu verwickelten Naturvorgang bezeichnen, um ihn für die physikalische Erscheinungswelt, die wir für einfacher halten, zu verwerthen. Wir müssen hier den Standpunkt einnehmen, dass sich nur Gleiches oder Aehnliches mit einander vergleichen lässt.

Die Physik enthält die für sie mit Nutzen und Erfolg vergleichbaren Objecte in sich und nicht ausser sich. Es ist erklärlich, dass die Physik zu einer Zeit, in der sie noch wenig ausgebildet war, die Vergleichsobjecte ausser sich suchte. So kann wohl kein Zweifel bestehen, dass der Begriff der physikalischen Kraft seinen Ursprung und seine Entstehung im Begriff der menschlichen Muskel-, beziehungsweise Arm-Kraft gehabt hat. Die weitere Entwickelung brachte es aber naturgemäss mit sich, dass die Physik den Begriff der Kraft in sich ausbildete und umgestaltete. Es kann die Frage aufgeworfen werden, ob ihr diese Ausbildung und Umgestaltung des Begriffs Kraft schon gelungen ist? Die heutige Tendenz, den Kraftbegriff ganz aus der Physik zu entfernen, lässt fast vermuthen, dass jener Process noch nicht beendet ist — jedenfalls zeigt diese Tendenz sehr deutlich das Bestreben, Vergleichsobjecte, die ausserhalb des Bereichs der Physik liegen, zu vermeiden. Die weitere Entwickelung ist dann in der Ausbildung eines eigenen, in sich geschlossenen, von der physikalischen Erfahrung getragenen Begriffssystems zu sehen.

§ 14. **Charakteristik der Regel der Oekonomie.**[1])

Ein so reiches, so verschwenderisches Material die Beobachtung der Wissenschaft zuzuführen hat, so knapp bemessen sollen die logischen Mittel sein, mit Hülfe derer der systematische Auf- und Ausbau der Wissenschaft zu erfolgen hat. Der Reichthum der materiellen Unterlage steht so in einem eigenen Contrast zu der Kargheit der formellen Gestaltung. Das ist die Regel der Oekonomie, das ist ein Hauptmittel, zur Formulirung von Naturgesetzen und damit zur Neubildung von Begriffen fortzuschreiten.

---

1) E. Mach. Die ökonomische Natur der physikalischen Forschung. Wien 1882. Populärwissenschaftliche Vorlesungen. Lpz. 1896. S. 203—230. cf. auch Newton's Regulae philosophandi. Principia Liber tertius.

Die Physik hat in der Verwerthung der Mathematik zu ihren Zwecken ein sehr vollkommenes Instrument zur Handhabung der Oekonomie. Die Mathematik bietet in sich selbst das Muster einer deductiven Methode und lässt sich in der Wahl ihrer Grundsätze (Postulate, Axiome) in hervorragendem Grade von ökonomischen Gesichtspunkten leiten. Beispiel: die Euklidische Geometrie und ihre Axiome, z. B. das Parallelen-Axiom.

Die Mathematik hat mit der Physik — was die logisch erkenntnisstheoretische Seite betrifft — eigentlich nur Postulate und Definitionen gemein, dagegen hat sie etwas den physikalischen Hypothesen und Naturgesetzen Analoges nicht aufzuweisen. Die erkenntnisstheoretischen Mittel der Physik sind darum viel reicher, als die der Mathematik, und so wird das Princip der Oekonomie in der Physik noch eine ganz andere Rolle spielen, als in der Mathematik.

Wird sich über die Postulate und Definitionen vom Standpunkt der Oekonomie in Physik und Mathematik ein Gleiches sagen lassen, so muss doch hier ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass in der Wahl und Verwerthung der unter der Bezeichnung Hypothese und Naturgesetz aufgeführten Hülfsmittel der physikalischen Forschung ganz besonders das Princip der Oekonomie zu walten hat.

Hypothesen und Naturgesetze dürfen in der Physik niemals ad hoc eingeführt und verwandt werden. Es darf nicht zu jeder neuen Erscheinung eine neue Hypothese ad hoc eingeführt werden[1]); ebenso wie nicht gleich jede auf einem speciellen Erscheinungsgebiet erwachsene Regel als Naturgesetz proclamirt werden darf. Besonders die sogenannten Regeln mit Ausnahmen sind immer ein Anzeichen dafür, dass die begriffsbildende Kraft eines Naturgesetzes noch fehlt. Vom Standpunkt des allgemeinen Begriffs, des allgemeinen Naturgesetzes stellt sich das, was früher Ausnahme der Regel war, als Specialfall dar, der unter einer besonderen Bedingung eintritt. Es ist überraschend zu sehen, wie in der Entwickelung der Wissenschaft die Verallgemeinerung des Standpunkts die Oekonomie fördert und dadurch die Begriffsbildung unterstützt und die Formulirung der Naturgesetze erleichtert (Beispiel: Die Entwickelung von den Kepler'schen Regeln (Gesetzen) zum Newton'schen Gravitationsgesetz).

Der Grundsatz der Oekonomie spielt auch noch nach einer anderen Richtung eine sehr wichtige Rolle für die Physik. Es ist im vorigen Paragraphen der Werth der Vergleichung, der Analogie für die Er-

1) Man vergleiche meine „Erkenntnisstheoretischen Grundzüge“ S. 62.

kenntniss hervorgehoben worden. Diese erkenntnisstheoretische Regel der Vergleichung findet eine sehr wesentliche Ergänzung durch die Regel der Oekonomie. Eine Vergleichung, ein Bild wird immer durch eine gewisse Verschwendung von Beiwerk charakterisirt sein. Dieses Beiwerk wird nach vielen Richtungen Anregung geben, die ebenso förderlich wie hemmend sein kann. Die Regel der Oekonomie hat die Aufgabe dieses unnöthige Beiwerk des Bildes, des Vergleichs, welches geeignet sein könnte hemmend zu wirken, zu beseitigen. Hertz hat in dieser Beziehung sehr treffend gesagt:[1]) „Die Strenge der Wissenschaft erfordert, dass wir das bunte Gewand, welches wir der Theorie überwerfen, und dessen Schnitt und Farbe vollständig in unserer Gewalt liegt, wohl unterscheiden von der einfachen und schlichten Gestalt selbst, welche die Natur uns entgegenführt und an deren Formen wir aus unserer Willkür nichts zu ändern vermögen."

1) H. Hertz. Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Lpz. 1892. S. 31. Man vergleiche auch Hertz. Principien der Mechanik. S. 37. 38.

I. 4) Behandlung einiger allgemeiner erkenntniss-theoretischer Fragen für die Physik.

§ 15. Rückblick auf die bisher entwickelten erkenntnisstheoretischen Elemente. Aufwerfen neuer Fragen. Wissenschaftliche Glaubensanschauungen.

Unsere Behandlung der methodischen Grundlagen und Regeln für den Aufbau des physikalischen Systems kann vielleicht einige Bedenken, ja Enttäuschungen hervorrufen.

Man kann einmal die Frage aufwerfen, ob denn unsere erkenntnisstheoretische Skizze einigermassen vollständig sein dürfte. Auf diese Frage können wir ganz ruhig mit Nein antworten. Wir können sagen: Vollständig wird sie schon darum nicht sein, weil eine solche Skizze immer erst auf dem Boden der bisher vorliegenden naturwissenschaftlichen Entwickelung und Forschung erwachsen und dieser Rechnung tragen kann. Sie kann höchstens beanspruchen im Wesentlichen das wiedergegeben zu haben, was sich positiv über eine Theorie der physikalischen Erkenntniss sagen lässt.

Man kann aber weiter — was noch schlimmer erscheint — die Behandlung von Fragen vermissen, die nach dem gewöhnlichen Dafürhalten im Vordergrund der Darstellung stehen müssten. Man kann sagen: Wir vermissen Auseinandersetzungen, welche in einer Theorie der naturwissenschaftlichen Erkenntniss nicht fehlen dürfen — und wir können wissenschaftliche Autoritäten anführen, welche sich dieser erkenntnisstheoretischen Elemente bedienen, deren Charakteristik wir vermissen. Wir meinen Auseinandersetzungen über das Princip der Causalität und den Satz vom zureichenden Grunde, nach dem in der Physik die Erscheinungswelt auf ihre letzten wahren Ursachen, die Kräfte zurückgeführt wird.

Diesen Fragen wollen wir in diesem Abschnitt näher treten. Es soll sich in diesem Abschnitt um höhere Fragen — wenn ich so sagen darf, um Glaubensanschauungen — handeln. Diese Fragen sind aber ebenso auf dem Boden der Erfahrung und Forschung erwachsen, wie die früher behandelten Fragen, welche den engeren wissenschaftlichen Betrieb der Physik betrafen — und darauf beruht ihre Werthschätzung. Sie scheinen geeignet der physikalischen Forschung die Grenzen anzuweisen, die jede Disciplin einmal in sich tragen muss, wenn anders sie nicht uferlos werden soll, deren jede Disciplin andererseits zur Abgrenzung gegen andere Disciplinen bedarf. Eine solche Abgrenzung erscheint auch der Natur der menschlichen Fähigkeiten angemessen zu sein, die bei aller Mannigfaltigkeit doch auch in dem einzelnen Individuum, welches die Disciplin treibt, ihre Grenze hat. Eine solche Abgrenzung schliesst die Existenz anderer Disciplinen nicht aus, sondern nur ab.

Während über die Grundlagen und Grundregeln der physikalischen Methode und ihre Charakteristik kaum abweichende Meinungen — höchstens in untergeordneten Fragen — vorgetragen werden dürften, werden in den folgenden Auseinandersetzungen die Meinungen doch wohl auseinandergehen. In der Anregung, die diese Glaubensanschauungen für eine allgemeinere Discussion gewähren dürften, liegt ihr Werth, und diese Anregung wird vor Allem einer allgemeinen Wissenschaftslehre zu Gute kommen.

§ 16. Die Frage nach der Causalität[1]) oder dem zureichenden Grunde und ihre Beziehung zum Kraftbegriff.

Das Princip der Causalität, der Satz vom zureichenden Grunde wird von Vielen für die objectivste Seite der naturwissenschaftlichen Forschung angesehen. Wir erklären diesen Satz, dieses Princip nicht nur für subjectiv in dem allgemeinen Sinne, in dem

---

1) Man vergleiche meinen Aufsatz „Causalität und Naturwissenschaft. Eine erkenntnisstheoretische Studie“ in der Zeitschrift Himmel und Erde VIII. 1896. — Sehr lehrreich ist die Wandelung der Anschauung über den Causalitätsbegriff bei einem so hervorragenden Forscher wie Helmholtz. 1847 sagt er in seinem Aufsatz über die Erhaltung der Kraft: „Der theoretische Theil unserer Wissenschaften sucht die unbekannten Ursachen der Vorgänge aus ihren sichtbaren Wirkungen zu finden; er sucht dieselben zu begreifen nach dem Gesetz der Causalität. Wir werden genöthigt und berechtigt zu diesem Geschäfte durch den Grundsatz, dass jede Veränderung in der Natur eine zureichende Ursache haben müsse“ — und 1881 bemerkt er dazu: „Ich habe mir erst später klar gemacht, dass das Princip der Causalität in der That nichts Anderes ist, als die Voraussetzung der Gesetzlichkeit aller Naturerscheinungen.“ cf. Wissenschaftliche Abhandlungen I. S. 13 u. 68.

wir das Wort subjectiv gebraucht haben, wir sprechen diesem Satz auch den subjectiven Charakter in dem speciellen Sinne ab, der ihn sonst sehr wohl befähigt hätte, in jenen Auseinandersetzungen Aufnahme zu finden.

Die subjectiven Elemente, welche in einer physikalischen Erkenntnisstheorie und Forschung eine positive Existenzberechtigung haben, waren dadurch charakterisirt, dass sie sich in Beziehung zu unseren Sinnen, den Eingangspforten der Erkenntniss setzen lassen. Die subjectiven Elemente, welche in einer physikalischen Erkenntnisstheorie und Forschung keine Existenzberechtigung haben, sind dadurch charakterisirt, dass sie eine solche Beziehung zu unseren Sinnesorganen nicht aufweisen können.

Das Princip der Causalität, der Satz vom zureichenden Grunde hat seine Wurzel in der Erscheinungswelt menschlicher Handlungen. Wenn Kant in der Kritik der reinen Vernunft „zweierlei Causalitäten unterscheidet in Ansehung dessen, was geschieht, entweder nach der Natur oder aus Freiheit", so behaupten wir, dass die Causalität nach der Freiheit (nämlich menschlicher Handlungen) die ursprüngliche ist, dass die Causalität nach der Natur eine daraus abgeleitete ist, und dass es einer besonderen Untersuchung bedarf, nachzusehen, ob diese Ableitung, diese Uebertragung aus dem Gebiet menschlicher Freiheit in das Gebiet natürlicher Nothwendigkeit berechtigt ist und sich aufrecht erhalten lässt.

Wir lassen hier die Frage nach dem Satz vom zureichenden Grunde, nach dem Princip der Causalität in der Mathematik ganz dahingestellt — das ist eine Frage für sich, es handelt sich um die Frage nach diesen Sätzen in der Naturwissenschaft, in der Physik.

Die Geschichte der Physik, die hier bis in das Alterthum hinein zu verfolgen ist, weist darauf hin, dass physikalische Erscheinungen im Bilde menschlicher Handlungen beschrieben und behandelt wurden. Das war eine Beziehungssetzung objectiver Vorgänge ausser uns zu einem subjectiven Standpunkt, dem ein tieferer Irrthum zu Grunde lag, den wir daher auch heute als unberechtigt ablehnen müssen. So wenig wir die subjective Seite naturwissenschaftlicher Forschung, die Beziehung zu den Sinneswerkzeugen des Menschen nimmt, leugnen; so sehr wir die Aufnahme und Darstellung dieser subjectiven Seite in das physikalische System nicht nur als berechtigt anerkennen, sondern sogar fordern müssen: So sehr müssen wir diese irrthümlich mit der menschlichen Natur in Beziehung gesetzte Auffassung ablehnen, sie ist es, die wir als anthropomorph im weiteren Sinne bezeichnen.

Aus dieser anthropomorphen Betrachtungsperiode stammen noch gewisse physikalische Bezeichnungen, von denen wir zu untersuchen haben werden, ob sie geeignet sein könnten, auch heute noch als Träger irrthümlicher Auffassungen Schaden anzurichten. Ich meine die Bezeichnung Kraft. Es ist kein Zweifel, dass dieser Begriff zunächst an die Anschauung menschlicher Muskelkraft anknüpfte, nicht bloss im Sinne der Möglichkeit einer momentanen Wirkungsäusserung auf die Umgebung, sondern auch im Sinne der Möglichkeit einen Kräftevorrath aufzuspeichern, der fähig wäre sich nach und nach in momentanen Wirkungsäusserungen zu entladen.

Ich meine, sobald wir diese Bezeichnungen befreien von dem anthropomorphen Verhältniss, das zwischen Ursache und Wirkung eine Beziehung aufweist, sobald wir weiter diese Bezeichnungen der reinen Präcisirung und Fixirung der physikalischen Forschung überlassen, dürfte die Beibehaltung des terminus technicus „Kraft" nichts Bedenkliches haben. Wenn ich mir unter diesem Gesichtspunkt die Entwickelung der physikalischen Forschung vergegenwärtige, kann ich nicht finden, dass dieser Entwickelung das Bestreben entnommen werden könnte, sich von dem physikalisch präcisirten Kraftbegriff zu befreien. Die Entwickelung weist nur auf die Nöthigung hin, sich von dem anthropomorphen Spiel der Anschauungsformen Ursache und Wirkung zu befreien; ist das geschehen, so wird man nicht umhin können zu bemerken, dass die Begriffe der Actio (bewegende Kraft auf die ponderable Masse, Masse mal Beschleunigung, momentane Kraftäusserung) sich als ebenso brauchbar wie die Begriffe der Energie (lebendige Kraft der ponderabeln Masse, kinetische und potentielle Energie, Arbeitsvorrath, Kraftvorrath) erwiesen haben.

Diese Bezeichnungen „Kraft" im Sinne von Actio und „Kraft" im Sinne von Energie stehen bei dieser Darstellung in engster Beziehung zu den physikalischen Grundlagen, die wir nach ihrer objectiven und subjectiven Seite als nothwendig für die Forschung anerkannt haben: Die Bezeichnung Kraft im Sinne von Actio als Ausfluss eines der Newton'schen Postulate, die Bezeichnung Kraft im Sinne von Energie als Ausfluss und Inhalt des Princips der Energie, welches ja heute gleichfalls den Rang eines Postulates einnimmt — beide Bezeichnungen wohl fähig den Inhalt einer Reihe von Naturgesetzen in angemessener Weise zu umschreiben und zum Ausdruck zu bringen.

§ 17. Auffassung und Bedeutung der physikalischen Vorgänge als eines Mechanismus.

Wir haben gesehen, dass wir in den physikalischen Vorgängen nicht nach Ursachen und Gründen zu forschen haben, sondern nach den Bedingungen, unter denen sie eintreten. Das Aufsuchen dieser Bedingungen veranlasst uns zur Vornahme der logischen und erkenntnisstheoretischen Methoden, die früher auseinandergesetzt sind. Wir könnten ja allerdings das Aufsuchen dieser Bedingungen als die causale Erforschung bezeichnen, aber dann müssten wir von dieser Bezeichnung ausdrücklich Alles das ausschliessen und fernhalten, was wir sonst mit dem Worte causal zu verbinden pflegen.

Die Natur handelt ebensowenig nach Gründen, wie nach Zwecken; das sind Begriffe, die dem Gebiet des menschlichen Handelns entlehnt sind, Begriffe, die zeitweise die physikalische Forschung wohl auch belebt haben, die aber doch in ihrem innersten Wesen für die Forschung und Erkenntniss abgelehnt werden müssen.

Die Natur, im speciellen die physikalische Natur ist, objectiv betrachtet, nichts anderes als ein naturnothwendiger Mechanismus, der beschrieben und erforscht sein will. Das ist der Begriff, der meines Dafürhaltens an die Stelle des Causalitätsbegriffs zu treten hätte — oder der, wenn wir die Bezeichnung Causalität beibehalten wollen, dieser Bezeichnung ihren wahren positiven Inhalt zu geben hätte im Gegensatz zu den negativen Seiten, die wir vorhin besprochen haben. Dadurch scheint mir die Grundlage für die naturgemässe Auffassung der physikalischen Erscheinungswelt gegeben.

Wir setzen in der physikalischen Forschung diesen objectiven, naturnothwendigen Mechanismus ausser uns in Beziehung zu einem denknothwendigen Mechanismus in uns — Logik genannt — und überzeugen uns durch den Erfolg, dass je weiter die Entwickelung der Wissenschaft fortschreitet, sich die Naturnothwendigkeiten ausser uns mit den Denknothwendigkeiten in uns in Einklang bringen lassen.

Wir wollen hier ganz dahingestellt sein lassen, worauf diese Uebereinstimmung der Gesetze des menschlichen Geistes mit den Gesetzen der Natur beruht; wir wollen hier aber wenigstens die Frage anregen, ob nicht die Naturnothwendigkeiten ausser uns für die Entwickelung und Ausbildung unseres Geistes das Ursprüngliche waren.[1])

---

1) In meinem Aufsatz: „Ueber die Frage nach dem Verhältniss von Denken und Sein" aus den Wiener Sitzungsberichten der Akademie 1897 bin ich dieser Frage näher getreten.

Eine andere Frage, die wir hier anregen wollen, ist die, ob dieser naturnothwendige Mechanismus das Universum erschöpft, ob Alles, was im Universum passirt, sich diesem naturnothwendigen Mechanismus einordnen lässt. Die Frage nach der ausnahmslosen, universellen Gültigkeit des Mechanismus — mit Recht Naturnothwendigkeit oder Naturgesetzlichkeit genannt — darf hier nicht mit der Frage verwechselt werden, ob dieser Mechanismus das Universum auch vollständig erfüllt.

Die Bezeichnung Mechanismus ist nach dem Vorgang von Lotze[1]) absichtlich so gewählt, dass sie die Anschauung nahelegt, die auch ich vertrete, dass das, was wir hier Mechanismus nennen wollen, das Universum nicht vollständig erfüllt, dass dieser Mechanismus Träger für causale und teleologische Vorgänge ist, die ein ideelles Reich für sich bilden — die Cultur. Wir brauchen darum diesen Mechanismus des naturnothwendigen Geschehens noch nicht mit Lotze für untergeordnet zu erachten; er wäre es vor Allem dann nicht, wenn er die Grundlage für die Entwickelung der denknothwendigen Beziehungen in uns wäre.

Jedenfalls will dieser naturnothwendige Mechanismus ausser uns studirt und erforscht sein. Der Cultur werden nicht die geringsten Früchte daraus zufallen.

§ 18. Die Stellung der Mechanik als Grunddisciplin innerhalb des physikalischen Systems.[2])

Wenn wir die physikalische Welt als einen Mechanismus bezeichnet haben, dessen Klarstellung Aufgabe der physikalischen Forschung sein soll, dann entsteht bei dem grossen Umfang der physikalischen Erscheinungswelt die Frage, welche speciellere physikalische Disciplin wir als Grundlage für alle anderen physikalischen Disciplinen wählen sollen, und mit welcher wir daher zweckmässig beginnen werden. Es ist lediglich Sache der Erfahrung d. h. der Entwickelung der Wissenschaft, festzustellen, welche Disciplin sich dazu eignet als Grunddisciplin hingestellt zu werden.

Die heutige Entwickelung der Elektricitätslehre könnte für den

---

1) Lotze, Mikrokosmus, Ideen zur Naturgeschichte und Geschichte der Menschheit.

2) Man vergleiche meinen Aufsatz: Ueber Newton's „Philosophiae naturalis principia mathematica" und ihre Bedeutung für die Gegenwart. 1898. Siehe das Titelverzeichniss § 19.

Augenblick vielleicht den Anschein hervorrufen, dass sie sich als Grunddisciplin wohl eignen könnte, so tief greift die Elektricitätslehre in fast alle Gebiete ein. Diese Auffassung würde jedoch der geschichtlichen Entwickelung nicht entsprechen, auf welche wir nach § 2 Werth zu legen haben. Die Geschichte der Wissenschaft weist uns vielmehr darauf hin, die Mechanik der ponderabeln Körper als diese Grunddisciplin zu betrachten. Andererseits dürfen wir die weitere Entwickelung der Physik nicht unbedingt an ihre Geschichte ketten.

Wir verfahren daher so: Indem wir der geschichtlichen Entwickelung Rechnung tragen, definiren wir hier die Mechanik als die physikalische Grunddisciplin, welche den physikalischen Einzeldisciplinen voranzuschicken ist. Diese Definition der Mechanik ist eine systematische d. h. sie hat Beziehung zu dem Aufbau des Systems. Sie trägt ebenso der bisherigen Entwickelung der Wissenschaft Rechnung, wie sie inductiv der weiteren Entwickelung vorgreift. Ihr Vorzug liegt darin, dass sie inhaltlich durchaus eine Verschiebung der materiellen Begriffe der bisherigen Mechanik zulässt.

Natürlich lässt sich die Mechanik auch noch auf unzählig viele anderen Arten definiren. Zunächst war die Mechanik nichts anderes, als eine an technische Erfahrungen sich anlehnende Disciplin: die Wissenschaft von den Hebel- und Schrauben-Wirkungen, im Alterthum nur Statik, seit Galilei auch Dynamik. Immer handelte es sich zunächst nur um die ponderable, schwere Materie und um die Wirkungen und Erscheinungen, die man durch sie hervorrufen kann. Im weiteren Verlauf sprach man dann von einer rationellen und einer technischen Mechanik. Hier handelt es sich natürlich nur um rationelle Mechanik.

Diese rationelle Mechanik erfreute sich von jeher der häufigsten und wiederholtesten Bearbeitung. Daher setzte jede vergleichende Betrachtung auch immer wieder in mechanische Vorgänge ein. Diese Bevorzugung der Mechanik liess dann die Anschauung aufkommen, welche als Aufgabe der Physik proklamirte, alle physikalischen Vorgänge auf mechanische zurückzuführen. Die Physik war dann nichts anderes als Mechanik, und wo die Sinne dieser Auffassung widerstritten, eine Mechanik verborgener Systeme.

Wir können diese materielle Auffassung von der bevorzugten Stellung der Mechanik ganz dahin gestellt sein lassen. Wir bevorzugen die logische Stellung der Mechanik innerhalb des wissenschaftlichen Systems. Diese logisch gerechtfertigte Stellung mag subjectiv erscheinen, aber diese Subjectivität ist hier kein Fehler; der Vorzug liegt in ihrer Aufrichtigkeit — während alle hier vermeintliche Objectivität, welche an Systeme mit verborgenen Eigenschaften knüpft, sich über den Grad ihrer Objectivität und Aufrichtigkeit täuschen dürfte.

Indem wir also hier die Mechanik vom logisch systematischen Standpunkt als Grundlage für alle physikalischen Einzeldisciplinen proklamiren, werden wir an die so definirte Mechanik im Gegensatz zu anderen physikalischen Disciplinen besondere Anforderungen zu stellen haben, welche auf der einen Seite eine grössere Sicherung des systematischen Aufbaus der Physik — auf der anderen Seite aber dadurch die Möglichkeit einer vielseitigeren und reicheren Anwendung gewährleisten. Diese Anforderungen werden darin bestehen, dass die Mechanik unter eigenartiger Anwendung des Princips der Oekonomie auf die speciellen Hülfsmittel der Hypothese und des Naturgesetzes bei ihrem Ausbau so weit wie irgend möglich verzichtet, die Verwerthung dieser methodischen Hülfsmittel vielmehr den speciellen Einzeldisciplinen überlässt.

Diese Einschränkung im Gebrauch physikalischer Hülfsmittel braucht die Mechanik natürlich nicht abzuhalten, ihre Grundsätze und Methoden für specielle Bedingungen auszuarbeiten; aber diese speciellen Bedingungen werden doch für die Physik immerhin allgemeine typische Bedeutung haben müssen — andernfalls Physik und Mechanik verquickt werden.

In der Kargheit der Mittel, mit denen die Mechanik hauszuhalten hat, soll sie an die Kargheit der Mittel erinnern, mit denen die Mathematik haushält. Ebenso wie die Mathematik sich aber gerade durch diese Kargheit und Allgemeinheit in ihren Grundlagen für die Physik so anwendungsfähig erweist, ebenso soll es die Mechanik thun — dazu wird es aber nöthig sein die Mechanik ähnlich streng aufzubauen wie die Mathematik. In der That kommt auch die Mechanik einer mathematischen Disciplin sehr nahe und wird von Mathematikern mit Vorliebe als solche gehandhabt.

Einen Einwand können wir hier besprechen, der unserer Auffassung und Formulirung der Mechanik entgegengehalten werden kann. Man kann sagen, es entspricht der geschichtlichen Entwickelung der Wissenschaft, auf die wir hier selbst immer so grosses Gewicht legen, die Mechanik als die Bewegungslehre der ponderabeln Materie zu definiren. Da aber die Entwickelung der Wissenschaft zu der sehr wohl begründeten Auffassung von der atomistischen Constitution der ponderabeln Materie geführt hat, so wird man der Aufnahme dieser

Hypothese — in unserer Terminologie — in die Mechanik nicht widerstreiten dürfen. Wenn thatsächlich die Materie atomistisch constituirt ist, dann wird jede systematische Behandlung, in der diese Materie eine Rolle spielt, auch jener Hypothese Rechnung tragen müssen, d. h. diese Hypothese in ihre Grundlagen aufzunehmen haben.[1])

Diesem Einwand kann formell, wie materiell begegnet werden. Formell dadurch, dass unser systematischer Aufbau der Mechanik ja so allgemein gehalten werden soll, dass er an jeder Stelle eine Specialisirung auf die atomistische Constitution der Materie zulässt. Materiell dadurch, dass die bisherige Entwickelung der Mechanik einen materiellen Nachtheil durch Ausschluss jenes hypothetischen Elementes noch nicht aufgedeckt hat. Wir werden daraus schliessen müssen, dass die atomistische Constitution der Materie, so werthvoll sie sich zur Aufdeckung specieller physikalischer und chemischer Erscheinungsclassen erwiesen hat, für grosse andere Gebiete — und dazu gehören die allgemeinen Bewegungserscheinungen der ponderabeln Materie, als gänzlich unwesentlich bezeichnet werden muss.

Indem wir an dieser Stelle den Begriff des Wesentlichen[2]) gegenüber dem Begriff des Vollständigen hervorkehren, stellen wir uns damit unter Anderem in Gegensatz zu gewissen Theilen der bekannten Kirchhoff'schen Definition der Mechanik: „Die Mechanik ist die Wissenschaft von der Bewegung; als ihre Aufgabe bezeichnen wir: die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben.“ Indem wir auf das Vollständige zu Gunsten des Wesentlichen verzichten, haben wir nichts anderes gethan, als eine für den systematischen Aufbau der Physik so wichtige formelle Mechanik hervorgehoben gegenüber einer in keiner Beziehung zum systematischen Aufbau der Physik stehenden materiellen Mechanik. Der Vorzug unserer Auffassung besteht darin, dass sie dem realen Betriebe der Wissenschaft entspricht und jedenfalls logisch in sich befriedigt, während die Kirchhoff'sche Vollständigkeit von vorneherein wegen des grossen Abstandes zwischen Ziel und Erreichtem nicht bloss logisch sondern auch materiell unbefriedigt lassen muss.

---

1) In den Vorlesungen von L. Boltzmann „über die Principe der Mechanik“ I. Theil Leipzig 1897 wird die atomistische Constitution der Materie der Mechanik zu Grunde gelegt.

2) Diese Betonung des Wesentlichen gegenüber dem Vollständigen findet man bei mir zum ersten Mal 1892 in dem Aufsatz: „Ueber Gesetze und Aufgaben der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik in formaler Hinsicht.“ Siehe das Titelverzeichniss § 19.

§ 19. Literatur-Verzeichniss zur Theorie der physikalischen Erkenntniss.

J. Newton: Philosophiae naturalis principia mathematica I. Auflage 1687, II. Auflage 1713, III. Auflage 1726. — Der Vergleich der drei Ausgaben, welche gewisse charakteristische Unterschiede aufweisen, ist nicht ohne Interesse.

H. von Helmholtz: Vorträge und Reden. Vierte Auflage. Braunschweig 1896.

— — Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. I Abtheilung 1: Die allgemeinen Grundlagen der physikalischen Wissenschaften, herausgegeben von A. König — bis jetzt nur angekündigt, ihr Inhalt mir unbekannt. Jedenfalls zeigt die Thatsache der Existenz dieser Vorlesung ebenso wie die erkenntnisstheoretische Einleitung in die Principien der Mechanik bei Hertz das gegenwärtig vorliegende Bedürfniss auf, in Physik und Mechanik mit erkenntnisstheoretischen Auseinandersetzungen zu beginnen.

Cl. Maxwell. Scientific Papers. 1890.
Man vergleiche die werthvollen Anmerkungen zu einigen dieser Abhandlungen von L. Boltzmann in Ostwald's Klassikern Nro. 69 u. 102.

E. Mach. Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch kritisch dargestellt. Dritte Auflage Lpz. 1897.

— — Beiträge zur Analyse der Empfindungen. Jena 1886.

— — Populär-Wissenschaftliche Vorlesungen. Zweite Auflage. Lpz. 1897.

— — Die Principien der Wärmelehre historisch kritisch dargestellt. Lpz. 1896.

H. Hertz. Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt. Lpz. 1894. Erkenntnisstheoretische Einleitung S. 1—49.

L. Boltzmann: Zahlreiche, leider noch nicht gesammelt erschienene Aufsätze. Ich hebe hervor:

— — Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie 1886. Almanach der Wiener Akademie 36.

— — Ueber die Methoden der theoretischen Physik 1892. Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. München.

— — Ueber die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft. Wiener Sitzungsberichte 1896.

— — Ueber die Frage nach der objectiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur. Wiener Sitzungsberichte 1897.

W. Ostwald. Lehrbuch der allgemeinen Chemie.

— — Elektrochemie, ihre Geschichte und Lehre. Lpz. 1896.

In Bezug auf das weiter unten zusammengestellte Titelverzeichniss meiner eigenen bisherigen erkenntnisstheoretischen Arbeiten vom Jahre 1892 an seien mir folgende Bemerkungen zur gegenwärtigen Orientirung gestattet:

Die in den vorstehenden Abschnitten zum ersten Male in einem systematischen Zusammenhang von mir niedergelegte Theorie einer physikalischen Erkenntniss findet nach mancher Richtung hin eine Ergänzung durch frühere Publicationen. Ich will dabei nicht verschweigen, dass ich heute natürlich nicht mehr alle darin niedergelegten Auffassungen vertreten kann. Meine Anschauungen haben sich eben auf Grund fortgesetzter Studien vertieft und entwickelt.

Im Wesentlichen tragen die älteren Arbeiten nach meinem heutigen Dafürhalten noch zu stark die Tendenz der Objectivirung an sich (im Sinne des § 3 und des Vorworts). Sie sind darum nicht verfehlt oder unrichtig, aber sie sind einseitig; sie betonen mit Vorzug die objective Seite der Sache, während die Betonung der gleichzeitig nothwendigen Einnahme eines wechselseitig objectiven und subjectiven Standpunkts erst in den Arbeiten von 1897 an voll zum Durchbruch kommt.

Aus der Zeitschrift „Himmel und Erde.“ Naturwissenschaftliche Monatsschrift, herausgegeben von der Gesellschaft Urania:

1892. Ueber Gesetze und Aufgaben der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik in formaler Hinsicht. IV, 441—461. Aufgenommen in die Sammlung populärer Schriften, hrg. von der Gesellschaft Urania. Nro. 14.

1893. Maass und Messen. Eine historische Studie. V, 349—364. Ueber die mechanische Naturanschauung. Eine erkenntnisstheoretische Studie. VI, 57—77.

1894. Ueber die Bedeutung des Studiums der Bodentemperaturen. Ein Beispiel wissenschaftlicher Methodik. VI, 297—317. Aufgenommen in die Sammlung populärer Schriften, hrg. von der Gesellschaft Urania. Nro. 26.

1896. Causalität und Naturwissenschaft. Eine erkenntnisstheoretische Studie. VIII, 345—364.

Aus den Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i/Pr.:

1894. Hat die Physik Axiome? Erkenntnisstheoretische Studien über die Grundlagen der Physik. Sitzungsberichte 13—22.
Hermann von Helmholtz. Reden gehalten bei der Gedächtnissfeier am 7. Dez. 1894 von L. Hermann und P. Volkmann. Abhandlungen S. 63—84.

1898. Ueber das Verhältniss von Denken und Sein in der naturwissenschaftlichen Erkenntniss.
Ueber Newton's „Philosophiae naturalis principia mathematica“ und ihre Bedeutung für die Gegenwart.

Aus Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie:

1897. Ueber nothwendige und nicht nothwendige Verwerthung der Atomistik in der Naturwissenschaft Bd. 61, 196—203.

1898. Ueber das Princip von der Gleichheit der Actio und Reactio bei Newton Bd. 66, 781—784.

Aus den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Math. naturw. Classe:

1897. Ueber die Frage nach dem Verhältniss von Denken und Sein und ihre Beantwortung durch die von der Naturwissenschaft nahegelegte Erkenntnisstheorie Bd. 106, Abth. II^{a}, S. 1103—1117.

Endlich das bei B. G. Teubner in Leipzig erschienene Buch:

1896. Erkenntnisstheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. XII S. u. 181. S.

II. Die Grundlagen der Galilei-Newton'schen Mechanik und ihre Consequenzen für die Mechanik eines materiellen Punktes, beziehungsweise eines Massenpunktes.

1) Die Grundlagen der Galilei'schen Mechanik und ihre Consequenzen (Kinematik).

20. Gesichtspunkte, unter denen die Galilei'sche Mechanik in Hinblick auf die Entwicklung der Wissenschaft zu behandeln ist. Der Gipfelpunkt liegt in den Begriffen der Trägheit und Beschleunigung.

21. Maass und Einheit der Zeit. Postulirung des Zeitbegriffs. 22. Maass und Einheit des Raums. Postulirung des Raumbegriffs. 23. Ueber Orientirung im Raum bei Bewegungsvorgängen. Postulirung des Weltäthers als absolutes Orientirungselement.

24. Der Galilei'sche Trägheitssatz und seine Consequenzen. 25. Einführung des Begriffs einer Vectorgrösse. Beziehung auf verschiedene Coordinatensysteme. 26. Zusammensetzung und Zerlegung von Vectorgrössen. Präcisirung der Regel der Superposition.

27. Einführung der Begriffe der Strecke und des Wegelementes als Vectorgrösse. 28. Einführung der Begriffe der Geschwindigkeit als Vectorgrösse. Begriff des Stosses. 29. Einführung des Begriffs der Beschleunigung als Vectorgrösse.

30. Theorie der Dimensionen der physikalischen Grössen. 31. Anwendung der Galilei'schen Grundsätze auf den freien Fall in der Nähe der Erdoberfläche. 32. Anwendung der Galilei'schen Grundsätze auf den Wurf in der Nähe der Erdoberfläche.

2) Die Grundlagen der Newton'schen Mechanik (Kinetik).

33. Gesichtspunkte, unter denen die Newton'sche Mechanik in Hinblick auf die Entwickelung der Wissenschaft zu behandeln ist. Der Gipfelpunkt liegt in dem Begriff der Masse. Satz von der Erhaltung der Masse.

34. Präliminarien. Vorläufige Definitionen von Newton und ihr Verhältniss zu einander. 35. Behandlung der ersten Newton'schen Definition, den Massenbegriff betreffend, im Besonderen. 36. Die drei Newton'schen Axiomata sive Leges motus. Allgemeine orientirende Bemerkungen. Verhältniss zu den Axiomen des Euklid.

37. Das Newton'sche Trägheitsprincip. 38. Das Newton'sche Actionsprincip. 39. Das Newton'sche Reactionsprincip und sein Verhältniss zu den beiden ersten Principen.

40. Untersuchung der Frage, ob Newton die Vorstellung der Druckkräfte oder der Fernkräfte bevorzugt.

3) Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf die Behandlung freier Bewegungen eines Massenpunktes.

41. Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf den Vorgang des unelastischen Stosses zweier Massen.

42. Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf das Zweikörperproblem der Newton'schen Gravitation. 43. Die drei Integrationsmethoden der Mechanik: Schwerpunktssatz, Flächensatz, Satz von der lebendigen Kraft — angewandt auf das Zweikörperproblem. 44. Discussion und Bestimmung der Bahncurven der Planeten als Ellipsen. Einführung der excentrischen Anomalie. Ableitung der Umlaufszeit der Planeten.

45. Rückblick auf die Kepler'schen Regeln und Herleitung des Newton'schen Gravitationsgesetzes daraus. 46. Die Gravitationsconstante nach Dimension und Grösse. Der Massenbegriff der praktischen Astronomie. Theoretische Möglichkeit eine Massen- und eine Zeit-Einheit aus dem Gravitationsgesetz abzuleiten.

4) Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf die Behandlung bedingter Bewegungen eines Massenpunktes.

47. Zurückführung der bedingten Bewegung auf die freie, durch Einführung einer aus den Bedingungen bestimmbaren Hülfskraft. 48. Einführung und Begriff der Centripetalkraft und der Centrifugalkraft (Huygens). 49. Theorie des mathematischen Pendels.

II. 1) Die Grundlagen der Galilei'schen Mechanik und ihre Consequenzen (Kinematik).

§ 20. Gesichtspunkte, unter denen die Galilei'sche Mechanik in Hinblick auf die Entwickelung der Wissenschaft zu behandeln ist. Der Gipfelpunkt liegt in den Begriffen der Trägheit und Beschleunigung.

Der folgende Abschnitt enthält nicht eine Darstellung der Galilei'schen Mechanik in dem Sinne, dass sie Wort für Wort in den Werken Galilei's Belege finden liesse, aber in dem Sinne, dass sie einer consequenten Durchbildung und Ausbildung der Ideen enspricht, zu denen sich Galilei wenigstens theilweise im Verlauf seiner wissenschaftlichen Forschung hindurchgerungen hat.

Die Darstellung der Unvollkommenheiten des Galilei'schen Systems zu Zeiten Galilei's selbst hätte hier keinen Zweck. Diese Unvollkommenheiten können übrigens der Bedeutung der Galilei'schen Forschung für uns und für die Entwickelung der daran knüpfenden Wissenschaft nicht den geringsten Abbruch thun.

Wir werden den Gipfelpunkt der Galilei'schen Mechanik — in dem vorhin präcisirten Sinne des Wortes — zu sehen haben: in dem Galilei'schen Trägheitssatz und in dem daraus fliessenden Begriff der Beschleunigung.

Die Consequenzen der Galilei'schen Mechanik umfassen das, was man heute als Kinematik zu bezeichnen pflegt. Die Kinematik erweitert das mathematische System der Geometrie, welches durch den Begriff des Raumes beherrscht wird, durch den Begriff der Zeit und bedarf ausser diesen Begriffen des Raumes und der Zeit noch des Begriffes des materiellen Punktes, wobei das Materielle eigentlich nur als sinnlich wahrnehmbare Marke gebraucht wird.

Mathematisch betrachtet wird die Kinematik häufig ohne Beziehung zur Wirklichkeit und zur Erfahrung dargestellt als eine Geometrie der Bewegung, und sie lässt sich natürlich auch so darstellen. Aber die Physik fordert nach mancher Richtung eine naturwissenschaftliche Rechtfertigung des Systems der Kinematik, und diese Rechtfertigung kann nur in einer Beziehung zur Wirklichkeit und zur Erfahrung liegen. Wir werden daher schon die Grundbegriffe der Kinematik in Beziehung zu dem physikalischen System der Wirklichkeit zu setzen haben.

Der Galilei'schen Mechanik fremd ist der Begriff der Masse, diesen führt erst die Newton'sche Mechanik in seiner vollen Tragweite ein. Die Lücke, die damit die Galilei'sche Mechanik enthält, wird bereits fühlbar, wenn wir darangehen, Grundeinheiten der Zeit und des Raumes zu präcisiren, auf die ganz streng genommen die Galilei'sche Mechanik zu beziehen wäre.

Newton hat in erster Linie dazu beigetragen, die Galilei'sche Mechanik in sich consequent auszugestalten; hierhin möchte ich einen Theil der im Anschluss an seine Definitionen, mit denen er seine Principien beginnt, unter der Ueberschrift „Scholium" gegebenen Auseinandersetzungen rechnen über: Tempus absolutum vel relativum, Spatium absolutum vel relativum, Locus absolutus vel relativus, Motus absolutus vel relativus (S. 6—12 der Thomson'schen Ausgabe der Principia).

Wir wollen hier gleich mit einigen Erörterungen über Zeit, Raum, Bewegung beginnen. Die Erörterungen über Zeit und Raum von Kant als Anschauungsformen a priori sind für uns unfruchtbar, damit soll über den Werth oder Unwerth dieser Speculationen für andere Fragen nichts gesagt sein. Für uns stehen Fragen wie die im Vordergrund, worauf denn unsere Zeit- und Raummessungen beruhen, und wie wir uns denn überhaupt in Bezug auf Zeit und Raum orientiren.

§ 21. **Maass und Einheit der Zeit. Postulirung des Zeitbegriffs.**

Alle unsere Zeitmessungen sind nur relativ; es handelt sich bei ihnen um den zeitlichen Abstand eines Ereignisses oder Vorganges von einem anderen etwa beliebig zu wählenden Ereigniss oder Vorgang.

Für gewöhnliche Zeitmessungen werden unsere Pendel- und Taschenuhren genügen. Solche Zeitmessungen beruhen auf der Herstellung congruenter, mechanischer Bewegungsvorgänge, die entweder mit Hülfe der Schwerkraft auf ein im Fallen gehemmtes Gewicht oder mit Hülfe der elastischen Kraft einer gespannten Feder in Gang erhalten werden.

Die Wissenschaft erfordert unter Umständen sehr genaue Zeitmessungen in präcisirten Einheiten (Secunden), die wir in völliger Gleichheit auf technischem Wege durch unsere Pendel- und Taschenuhren niemals ganz genau, nur näherungsweise genau herstellen können, die wir daher durch Beziehung auf Bewegungsvorgänge in der Natur controliren und als einer ganz genauen Präcisirung möglich postuliren müssen.

Die Rotation der Erde um ihre Axe (Fixsterntag), die Rotation der Erde um die Sonne (Siderische Umlaufszeit) sind Zeitabschnitte, für welche wir in der Wissenschaft thatsächlich innerhalb eines Zeitraums von Jahrzehnten genaue Gleichheit annehmen. Wählen wir aber diesen Zeitraum grösser, dann treten wissenschaftliche Fragen auf, welche diese Annahme als im Widerspruch stehend mit thatsächlichen Vorgängen im Universum ergeben.

Die Erde unterliegt säcularen Abkühlungen, die in Folge der dadurch bedingten Contraction des Volumens im Sinne einer beschleunigten Rotation wirken müssen — andererseits wirken die durch Mond und Sonne hervorgerufenen Fluthwellen im Sinne einer verzögerten Rotation. Es lässt sich ohne Weiteres nicht übersehen, welches Moment überwiegt, und es entstehen so sehr schwierige Fragen nach der Constanz der Secunde in Stern- und Sonnenzeit. — Weiter: Das siderische Jahr ist in seiner Constanz bedingt durch die

Constanz der Sonnenmasse. Wenn aber beständig fremde Meteormassen auf die Sonne stürzen, dann wird die Sonnenmasse vergrössert, und dadurch würde eine beschleunigte Umlaufszeit der Erde um die Sonne bedingt sein.

Es sind sehr tiefgehende, sehr schwierige Untersuchungen, welche die Frage nach der Veränderlichkeit der Secunde zu beantworten suchen. Sie berühren die Fundamente der Astronomie und sind von Laplace, Delauny und Adams wesentlich gefördert.[1]) Ihnen liegt das Postulat zu Grunde, dass es eine absolut gleichförmig dahin fliessende Zeit giebt, die aus astronomischen Beobachtungen und Messungen in Verbindung mit verwickelten Rechnungen construirt werden kann, und auf welche bezogen unsere anderen physikalischen Postulate und Naturgesetze die denkbar einfachste Formulirung zulassen.

Ebenso wie auf diese Weise eine, über das gegenwärtige wissenschaftliche Bedürfniss hinausgehende, sehr präcisirte Construction einer Zeiteinheit aus Bewegungsvorgängen während Jahrtausenden nur durch eine gegenseitige Beziehung verschiedener astronomischer Resultate aufeinander erschlossen werden könnte, so kann auch der Nachweis der Existenz einer unabhängig von allen Bewegungsvorgängen der Natur, absolut gleichförmig dahin fliessenden Zeit nicht ohne weitere Aufstellung anderer Postulate hingestellt werden.

Darauf beruht der rein systematische Werth eines Postulates für ein wissenschaftliches System, dass die Unmöglichkeit einer praktischen Isolirung gewisser Realinhalte, beziehungsweise Thatsachen ersetzt wird durch die Nöthigung zu einer logischen Isolirung gewisser Idealinhalte, beziehungsweise Begriffe. Wenn die Erscheinungen und Vorgänge, auf denen unsere Postulate beruhen, stets nur in einer gewissen Beziehung zu einander in der Wirklichkeit auftreten, dann müssen wir für die Begriffe, die wir in diese Erscheinungen und Vorgänge hineinlegen, in erster Linie eine logische Unabhängigkeit d. h. die Möglichkeit einer logischen Isolirung fordern.

Das erscheint als der einzige Weg, um uns in dem Labyrinth der Erscheinungswelt sowohl vorläufig wie auch dauernd immer weiter zu orientiren, um ein System aufzuführen. Der Grundsatz der rückwirkenden Sicherung und Verfestigung ist in seiner Anwendung der einzige, der uns Vertrauen in die Festigkeit und Sicherheit eines unter so schwierigen Bedingungen aufzuführenden Systems geben kann.

---

1) cf. Thomson and Tait. Natural philosophy Art. 830.

§ 22. **Maass und Einheit des Raumes. Postulirung des Raumbegriffs.**

Wir denken zunächst an relative Raummessungen: Abstand zweier Punkte, Ausmessung einer begrenzten Fläche oder eines begrenzten Raumes.

Für gewöhnliche Raummessungen genügen unsere Maassstäbe oder Winkelmess-Instrumente. Solche Raummessungen beruhen auf der Vornahme räumlicher Congruenzen durch Deckung und Vergleich.

Die Wissenschaft erfordert aber unter Umständen sehr genaue Raummessungen in präcisirten Einheiten (Meter), die wir in völliger Gleichheit auf technischem Wege durch unsere Normal-Maassstäbe niemals ganz genau, nur näherungsweise genau herstellen können; wir können auch ihren Vergleich immer nur bis zu einer gewissen Grenze genau durchführen. Unter diesen Umständen müssen wir eine logisch präcisirte, unveränderliche Einheit der Länge postuliren.

Wie man bei der Zugrundelegung des Zeitmaasses schon frühe auf terrestrische Verhältnisse zurückgegangen ist, so hat man zu Zeiten der französischen Revolution in der Begründung einer Längeneinheit auch darauf zurückgehen zu müssen geglaubt und den Meter als $1/_{10000000}$ des Erdquadranten definirt. Man hat dabei die Gleichheit aller Erdquadranten und ihre Unveränderlichkeit vorausgesetzt — alles Voraussetzungen, welche sich als unzutreffend ergeben haben. Man geht darum heute in der Definition des Meters nicht mehr auf den Erdquadranten zurück, sondern definirt Meter als die Länge eines bei Paris (im bureau international des poids et des mesures) aufbewahrten und in verschiedenen Copien in den Culturländern verbreiteten Platin-Iridium-Stabes.

Aber man kann die Frage nach der Garantie aufwerfen, welche die Unveränderlichkeit der Länge dieser Stäbe bei genau vorgeschriebenen Temperaturen gewährleistet. Es sind die sogenannten Nachwirkungserscheinungen bekannt, welche nicht blos im gewöhnlichen Sinn des Wortes eine Abhängigkeit der geometrischen Dimensionen von den Temperaturverhältnissen, sondern auch eine solche bei gleicher Temperatur von der physikalischen Vorgeschichte ergeben. Hier weist die neuere Metronomik einige Fortschritte auf, indem sie in geschickter Weise die Wellenlängen des Lichtes heranzieht und verwerthet. In der That werden wir postuliren dürfen, dass unter gleichen äusseren Bedingungen die Wellenlänge einer homogenen Lichtsorte und ihre Vielfachen zu allen Zeiten dieselben Längen aufweisen werden.

Aus den Einheiten der Länge leiten wir die der Fläche und des Raumes ab.

Als Raum, in dem sich die physikalischen Erscheinungen der Wirklichkeit abspielen, postuliren wir den durch unsere Sinne uns nahegelegten ebenen Raum. Wir könnten im Sinne der Nicht-Euklidischen Geometrie auch die Möglichkeit der Existenz anderer Räume als ebener in Erwägung ziehen, etwa Räume mit einem sehr kleinen Krümmungsmaass — im Sinne des Gauss'schen Ausdrucks. Dazu hat bis jetzt aber die Wirklichkeit keine Veranlassung geboten, einen solchen Raum hypothetisch in das wissenschaftliche System aufzunehmen.

Wenn auch auf den ersten Blick eine Postulirung des Raumbegriffs weniger dringend als eine solche des Zeitbegriffs erscheinen mag, so muss doch hier hervorgehoben werden, dass strenge genommen beide Begriffe in gleicher Nothwendigkeit neben einander als Postulate bestehen.

§ 23. Orientirung im Raum bei Bewegungsvorgängen. Postulirung des Weltäthers als absolutes Orientirungselement.

Solange Objecte sinnlich gegeben sind, kann eine an ihnen vorzunehmende räumliche Ausmessung eine vielleicht praktische aber doch nicht begriffliche Schwierigkeit bereiten. Es giebt aber wissenschaftliche Fälle, in denen die Objecte, in Bezug auf welche räumliche Aussagen zu machen sind, nur theilweise sinnlich gegeben sind — Fälle, in denen die Wissenschaft die Forderung nach absoluter Orientirung d. h. nach einer Orientirung im sogenannten „leeren Raum" erheben muss.

Nehmen wir die frei im Raum schwebende Erde und den Fixsternhimmel. Rein sinnlich betrachtet wäre der Fall, dass die Erde rotirt und der Fixsternhimmel ruht, gar nicht zu unterscheiden von dem entgegengesetzten Fall, dass die Erde ruht und der Fixsternhimmel rotirt; es können auch Erde und Fixsternhimmel — sinnlich betrachtet — gleichzeitig rotiren, in welchem Falle die sinnliche Wahrnehmung sich dann auf die Differenz der Rotationen beziehen würde. Die Ausbildung des weiteren wissenschaftlichen Systems wird hier zur Entscheidung der Frage heranzuziehen sein, und diese lehrt, dass bei einer rotirenden Erde Centrifugalkräfte auftreten, die bei einer ruhenden Erde fehlen, sie giebt Experimente an die Hand: Benzenberg's Fallversuch, Foucault's Pendelversuch — Experimente, welche darthun, dass die Voraussetzung einer ruhenden

Erde die physikalische Systematik nur verwirren statt klären würde.

Wogegen rotirt denn aber nun die Erde? Der Fixsternhimmel erscheint nur als fest in Folge der grossen Entfernung der Fixsterne, wir werden uns diese auch als in Bewegung befindlich vorstellen müssen. Hier erhebt sich die Forderung nach einem übersinnlichen Orientirungselement, wir bezeichnen dieses als den Aether; wir legen diesem hier keine anderen physikalischen Eigenschaften bei, als wir gerade brauchen. Sollten sich solche in der Folge als nothwendig herausstellen, so wird dann nichts im Wege stehen, sie einzuführen.

Ein anderes Beispiel: Das Ptolemäische und das Kopernikanische Weltsystem. Rein sinnlich betrachtet erscheinen beide als gleichberechtigt. Mag für die gröberen astronomischen Erscheinungen das Kopernikanische Weltsystem einfacher erscheinen, die zwingende Nöthigung zu diesem liegt in feineren astronomischen Erscheinungen, wie in der Aberration des Lichtes der Fixsterne und vor Allem in der Geschlossenheit der Newton'schen Systematik. — Auch hier erhebt sich die Forderung nach einem übersinnlichen Orientirungselement, dem Aether.

Die Einführung dieses hypothetischen Elements erweist sich für die Physik noch weiter als fruchtbar, insofern neue Fragen aufgeworfen werden, die zum Experiment anregen — moderne Untersuchungen wie die, ob der Aether zum Sonnensystem ruht oder zu diesem eine selbstständige Bewegung hat? inwiefern der Aether an der Bewegung der Erde um die Sonne innerhalb der Erde oder auf ihrer Oberfläche Theil nimmt? — oder Untersuchungen wie die über den Unterschied der Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende und bewegte Körper (Hertz).

§ 24. Der Galilei'sche Trägheitssatz und seine Consequenzen.

Wir haben schon einleitend bemerkt, dass die Kinematik ausser den Begriffen der Zeit und des Raumes noch des Begriffs des materiellen Punktes bedarf. Indem wir uns des Ausdrucks „materieller Punkt" bedienen, wollen wir damit sagen, dass es sich in der Kinematik nicht um ganz beliebig zu denkende Bewegungen etwa eines geometrischen Punktes handelt, sondern nur um Bewegungen, die eine Beziehung zur Wirklichkeit haben, wie solche eine naturwissenschaftliche Betrachtung fordert.

Diese Beziehung zur Wirklichkeit erfordert in erster Linie Stetigkeit des Weges, insofern ein materieller Punkt nicht an einer Stelle des Raumes verschwinden und an einer endlich davon entfernten anderen Stelle des Raumes wieder erscheinen kann. Diese Beziehung zur Wirklichkeit giebt, näher präcisirt, der Trägheitssatz,[1]) dessen ausführliche Besprechung einem späteren Capitel (§ 37) vorbehalten bleiben muss, auf welchen wir aber zu einem Theil uns im voraus schon jetzt beziehen müssen.

Dieser Trägheitssatz postulirt: Jeder Körper beharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, sofern er nicht äusseren Einwirkungen unterliegt, die seinen Zustand ändern.

In diesem Trägheitssatz liegt die Forderung enthalten, die zur Beschreibung der Bewegungserscheinungen nöthig erscheinenden Bewegungsbegriffe, als da sein werden: Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung — soweit als möglich als Richtungsgrössen, als Vectoren zu fassen, oder wenn wir unsere Bewegungen auf Coordinaten beziehen wollen, ein geradliniges Coordinatensystem zu bevorzugen. Wir werden weiter der mathematischen Einfachheit halber als solches ein rechtwinkliges Coordinatensystem wählen, obwohl physikalisch betrachtet ein schiefwinkliges Coordinatensystem die gleiche innere Berechtigung hätte.

§ 25. **Einführung des Begriffs einer Vectorgrösse. Beziehung auf verschiedene Coordinatensysteme.**

Wir definiren einen Vector als einen Werth, der nach Grösse und Richtung gegeben ist, und stellen ihn in Gegensatz zu einem Skalar — das ist ein Werth, der richtungslos nur nach Grösse gegeben ist, wie z. B. die specifische Dichte der Körper.

Haben wir einen solchen Vector V und denken wir uns ihn in ein rechtwinkliges Coordinatensystem eingezeichnet, so können wir ihn auf die Coordinatenaxen x, y, z projiciren. Wir bezeichnen diese Projectionen mit V_x, V_y, V_z und nennen sie die Componenten des resultirenden Vectors V. Wir können dann schreiben:

$$(1) \qquad \begin{aligned} V_x &= V\cos(Vx), \\ V_y &= V\cos(Vy), \\ V_z &= V\cos(Vz), \end{aligned}$$

1) Wir könnten uns hier auch auf die Formulirung des Grundgesetzes von Hertz beziehen: „Jedes freie System beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geradesten Bahn“; cf. Hertz, Principien der Mechanik S. 162

$$(2)\qquad V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2, \qquad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$(3)\qquad \cos(Vx) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(Vy) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(Vz) = \frac{V_z}{V}.$$

Projiciren oder zerlegen wir den Vector V nach einer anderen Richtung ξ, so folgt aus:

$$\cos(V\xi) = \cos(Vx)\cos(\xi x) + \cos(Vy)\cos(\xi y) + \cos(Vz)\cos(\xi z),$$

$$(4)\qquad V_\xi = V\cos(V\xi) = V_x\cos(\xi x) + V_y\cos(\xi y) + V_z\cos(\xi z).$$

Dieses Resultat lässt sich in die Worte fassen: Die Projection eines Vectors V auf eine beliebige Richtung ist gleich der Summe der Projectionen der Vectorencomponenten V_x, V_y, V_z auf dieselbe Richtung.

Die Beziehung der Vectorcomponenten V_x, V_y, V_z auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem ξ, η, ζ führt so zu den Relationen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} V_x &= V_\xi\cos(x\xi) + V_\eta\cos(x\eta) + V_\zeta\cos(x\zeta), \\ V_y &= V_\xi\cos(y\xi) + V_\eta\cos(y\eta) + V_\zeta\cos(y\zeta), \\ V_z &= V_\xi\cos(z\xi) + V_\eta\cos(z\eta) + V_\zeta\cos(z\zeta). \end{aligned}$$

Bekannt aus der Theorie der Coordinatentransformation in der analytischen Geometrie sind die Relationen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \cos^2(x\xi) + \cos^2(y\xi) + \cos^2(z\xi) &= 1, \\ \cos^2(x\eta) + \cos^2(y\eta) + \cos^2(z\eta) &= 1, \\ \cos^2(x\zeta) + \cos^2(y\zeta) + \cos^2(z\zeta) &= 1. \end{aligned}$$

$$(7)\qquad \begin{aligned} \cos(x\xi)\cos(x\eta) + \cos(y\xi)\cos(y\eta) + \cos(z\xi)\cos(z\eta) &= 0, \\ \cos(x\eta)\cos(x\zeta) + \cos(y\eta)\cos(y\zeta) + \cos(z\eta)\cos(z\zeta) &= 0, \\ \cos(x\zeta)\cos(x\xi) + \cos(y\zeta)\cos(y\xi) + \cos(z\zeta)\cos(z\xi) &= 0. \end{aligned}$$

Unter Rücksicht auf diese Relationen folgt:

$$(8)\qquad V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V_\xi^2 + V_\eta^2 + V_\zeta^2.$$

Damit ist, wie sich ja eigentlich von selbst versteht, die Unabhängigkeit der Vectorgrösse vom Coordinatensystem und damit die Freiheit der Wahl des Coordinatensystems erwiesen. Das Coordinatensystem erscheint überhaupt bei dem Rechnen mit Vectorgrössen als fremdes Beiwerk.

§ 26. Zusammensetzung und Zerlegung von Vectorgrössen. Präcisirung der Regel der Superposition.

Liegen gleichzeitig mehrere Vectoren vor, welche auf denselben materiellen Punkt Beziehung haben:

$$v_1, v_2 \ldots . v_n,$$

und handelt es sich darum, durch eine Rechnungsoperation diese Vectorgrössen zusammenzusetzen, so nehmen wir für diese Rechnungsoperation als Grundsatz die Regel der Superposition in Anspruch. Durch die Anwendung dieser Regel findet unsere Definition der Vectorgrösse ihre Vertiefung; gleichzeitig tritt uns hier zum ersten Mal die Regel der Superposition (§ 12) in ihrer mathematischen Präcisirung entgegen. Diese Regel besagt, dass wir bei Beziehung auf dasselbe Coordinatensystem xyz zuerst die Componenten der einzelnen Vectorgrössen bilden:

$$\begin{array}{ccc} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{nx} & v_{ny} & v_{nz} \end{array}$$

dann die Componenten nach derselben Richtung addiren, also bilden:

$$(1) \qquad \Sigma v_{nx} = V_x, \quad \Sigma v_{ny} = V_y, \quad \Sigma v_{nz} = V_z.$$

Es ist dann der resultirende Vector nach Grösse und Richtung wieder gegeben durch:

$$(2) \qquad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\Sigma v_{nx}^2 + \Sigma v_{ny}^2 + \Sigma v_{nz}^2},$$

$$(3) \quad \cos(Vx) = \frac{V_x}{V} = \frac{\Sigma v_{nx}}{V}, \cos(Vy) = \frac{V_y}{V} = \frac{\Sigma v_{ny}}{V}, \cos(Vz) = \frac{V_z}{V} = \frac{\Sigma v_{nz}}{V}.$$

Umgekehrt kann man jeden gegebenen Vector V nach diesem Rechnungsschema in beliebige Theile $v_1, v_2 \ldots v_n$ zerlegen, eine Zerlegung, welche sich als besonders fruchtbar erweist, wenn die Theilvectoren eine Beziehung zu Thatsachen haben, die in der Wirklichkeit gegeben vorliegen.

Es muss hier zum Schluss noch einmal hervorgehoben werden, dass die Beziehung der Vectorgrössen auf ein Coordinatensystem ein fremdes Element in die Betrachtung hineinträgt, das unter Umständen zweckmässig sein kann, wieder auszuscheiden. Aus diesem Grunde wird es sich empfehlen, die Bedeutung des Rechnungsschemas für Vectorgrössen ohne Beziehung auf ein Coordinatensystem geometrisch anschaulich klar zu machen.

Wir finden eine solche geometrische Veranschaulichung in der Regel, dass wir die zusammenzusetzenden Vectoren nach einander nach Richtung und Grösse uns räumlich aufgetragen denken, d. h. in den Endpunkt des einen Vectors den Anfangspunkt des nächsten Vectors legen; wir erhalten so ein offenes räumliches Polygon, welches wir in gleichem Sinne der Richtung der einzelnen Vectoren durchschreiten können — derart etwa, dass das Innere dieses Polygons immer zur Linken liegt: Die Seite, welche dieses offene räumliche Polygon schliesst, ist dann nach Grösse und entgegengesetzter Richtung der gesuchte resultirende Vector, den wir nöthigenfalls dann nur noch parallel mit sich im Raum zu verschieben haben, derart, dass sein Anfangspunkt mit dem ursprünglichen Ausgangspunkt zusammenfällt, von dem aus wir das Polygon beschrieben haben.

Umgekehrt können wir jeden gegebenen Vector dadurch in Theilvectoren zerlegen oder zerlegt denken, dass wir ihn als schliessende Seite eines sonst beliebigen offenen räumlichen Polygons darstellen. So willkürlich die Wahl dieses Polygons erscheint, so erfolgreich wird sie sich für die Wissenschaft darstellen, wenn die Richtung der Seiten dieses Polygons in Beziehung steht zu den Verhältnissen, die durch die Wirklichkeit gegeben sind und erforscht sein wollen.

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte und seine Verallgemeinerungen bilden das bekannteste Beispiel für das hier vorgetragene Schema der Zerlegung und Zusammensetzung von Vectorgrössen.

Wir erinnern hier an das früher § 12 gelegentlich der Besprechung der Regel der Isolation und Superposition Beigebrachte. Die in der Natur uns entgegentretenden Erscheinungen stellen sich in der Mehrzahl von Fällen nicht als einheitliche, einfache, sondern als zusammengesetzte Erscheinungen dar. Es ist die Aufgabe der Naturforschung, solche zusammengesetzte Erscheinungen in ihre naturgemässen Bestandtheile zu zerlegen und diese Bestandtheile einzeln für sich zu erforschen. Divide et impera! — das ist der erste Grundsatz, mit dem man an eine Analyse der Naturerscheinungen zu schreiten hat. Der Satz von der Zerlegung und Zusammensetzung der Vectorgrössen bietet für eine solche Analyse eines der vornehmlich in der Physik gebrauchten Hülfsmittel dar.

§ 27. **Einführung des Begriffs der Strecke und des Wegelements als Vectorgrösse.**

So fremd und inhaltslos zunächst das eingeführte Rechnungsschema der Vectorgrössen erscheinen mag, so fundamental wird es sich für die weiteren kinematischen und physikalischen Betrachtungen ergeben, wenn wir jetzt dazu übergehen, die Begriffe des Wegelementes, der Geschwindigkeit und Beschleunigung eines materiellen Punktes als Vectorgrössen zu definiren und zu erläutern.

Nehmen wir zunächst den Begriff des Wegelementes.

Eine geradlinige endliche Wegstrecke ist ein Vector, denn sie hat Richtung und Grösse. Jedes endliche Stück derselben, sowie die ganze Strecke $s - s_0$ können wir nach den Coordinaten zerlegen und erhalten als Componenten von $s - s_0$, wenn wir die Richtungswinkel der Strecke gegen x, y, z mit α, β, γ bezeichnen:

(1) $x - x_0 = (s - s_0)\cos\alpha,\ y - y_0 = (s - s_0)\cos\beta,\ z - z_0 = (s - s_0)\cos\gamma.$

Ist die Wegstrecke nicht gerade, sondern krummlinig, so müssen wir uns auf ein Wegelement beschränken, welches wir so klein wählen, dass wir die Vectorbetrachtungen unmittelbar darauf übertragen können. Wir bezeichnen ein solches geradliniges Wegelement mit $\varDelta s$ und sprechen von seinen Componenten:

(2) $$\varDelta x = \varDelta s \cos\alpha, \quad \varDelta y = \varDelta s \cos\beta, \quad \varDelta z = \varDelta s \cos\gamma.$$

Es ist dann wieder:

(3) $$\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2} = \varDelta s$$

die Grösse des Wegelementes und es sind:

(4) $$\frac{\varDelta x}{\varDelta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\varDelta y}{\varDelta s} = \cos\beta, \quad \frac{\varDelta z}{\varDelta s} = \cos\gamma$$

die Richtungscosinus des Wegelementes gegen x, y, z.

Ist die Wegstrecke nicht blos krummlinig, sondern enthält sie an einzelnen Stellen auch Ecken, dann werden wir unsere Wegelemente so wählen, dass immer nur ihr Anfangspunkt oder ihr Endpunkt in eine solche Ecke fällt. Während der Curvenzug des Weges in diesem Fall noch immer continuirlich bleibt, erleidet die Richtung des Wegelementes in einer solchen Ecke eine sprunghafte, unstetige Aenderung. In jedem Fall können wir das Wegelement als eine, endlichen Strecken gegenüber, unendlich kleine Grösse erster Ordnung fassen.

Was die Bedeutung der Zusammensetzung von Wegstrecken betrifft, so können wir damit etwa folgende Vorstellung verbinden: Ein materieller Punkt bewege sich auf einer starren Oberfläche, diese Oberfläche bewege sich in einem begrenzten Raum, der eine Orientirung in sich zulässt; dieser Raum bewege sich in einem weiteren, den ersten Raum umschliessenden Raum. Die resultirende Wegstrecke ist dann die Strecke, welche der materielle Punkt in dem äussersten Raum wirklich zurücklegt.

§ 28. Einführung des Begriffs der Geschwindigkeit als Vectorgrösse. Begriff des Stosses.

Wir kommen nun zu dem Begriff der Geschwindigkeit — präcisirt ausgedrückt — zu dem Begriff der momentanen Geschwindigkeit eines materiellen Punktes.

Wir setzen das geradlinige Wegelement Δs eines materiellen Punktes in Beziehung zu dem Zeitelement Δt, in dem der materielle Punkt das Wegelement Δs zurücklegt, und definiren die Geschwindigkeit des materiellen Punktes als eine Vectorgrösse, deren Componenten sind:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Lim}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos\alpha,\\
(1)\qquad &\operatorname{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos\beta,\\
&\operatorname{Lim}\frac{\Delta z}{dt}=\frac{dz}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Erhalten wir die Werthe $\Delta x/\Delta t$, $\Delta y/\Delta t$, $\Delta z/\Delta t$ unabhängig von der Grösse der gewählten Elemente Δx, Δy, Δz, Δt, so sprechen wir von einer gleichförmigen Bewegung, beziehungsweise von einer gleichförmigen Geschwindigkeit in gerader Linie. In diesem Fall ist es nicht nöthig, die durch das Zeichen Lim. angedeutete Grenzbetrachtung anzustellen.

Erweisen sich dagegen die Werthe $\Delta x/\Delta t$, $\Delta y/\Delta t$, $\Delta z/\Delta t$ von der Grösse der gewählten Elemente Δx, Δy, Δz, Δt abhängig, dann sprechen wir von einer ungleichförmigen Bewegung, einer ungleichförmigen Geschwindigkeit, die im allgemeinen Fall auch ihre Richtung von Ort zu Ort wechseln wird. In diesem Falle ist es nöthig, die durch das Zeichen Lim. angedeutete Grenzbetrachtung anzustellen, und sie führt in jedem Falle für jede Stelle der Bahn zu bestimmten Werthen, die wir oben mit dx/dt, dy/dt, dz/dt bezeichnet haben.

Wir bezeichnen diese Grössen:

$$(2)\quad u=\frac{dx}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos\alpha,\quad v=\frac{dy}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos\beta,\quad w=\frac{dz}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos\gamma$$

als Componenten der Geschwindigkeit, und ihre Resultante:

$$(3)\qquad \sqrt{u^2+v^2+w^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\frac{ds}{dt}$$

als Geschwindigkeit, und die Richtungscosinus:

$$u/\sqrt{u^2+v^2+w^2} = \frac{dx}{ds} = \cos\alpha,$$

$$(4) \qquad v/\sqrt{u^2+v^2+w^2} = \frac{dy}{ds} = \cos\beta,$$

$$w/\sqrt{u^2+v^2+w^2} = \frac{dz}{ds} = \cos\gamma$$

als die Richtungscosinus der Geschwindigkeit.

Wir erkennen: Im Gegensatz zu dem Begriff des Wegelementes, welches wir als eine kleine Vectorgrösse erster Ordnung einführten, stellt sich der Begriff der Geschwindigkeit als eine im Allgemeinen endliche Vectorgrösse dar. Die Richtung der Geschwindigkeit eines materiellen Punktes wird bei der präcisirten Definition der Geschwindigkeit identisch mit der Richtung des Wegelementes. Ebenso wie die Wegrichtung sprunghafte, unstetige Aenderungen erfahren kann, wird also auch die Geschwindigkeitsrichtung sprunghafte, unstetige Aenderungen erfahren können, und werden diese mit jenen identisch sein.

Wir werfen nun die Frage auf, ob vielleicht auch die Geschwindigkeitsgrösse selbst sprunghafte, unstetige Aenderungen erfahren kann? Für die Vectorgrösse des Wegelementes hatte diese Frage keine Bedeutung, denn das Wegelement war von vorneherein als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung gewählt; dagegen ist die Vectorgrösse der Geschwindigkeit von uns als eine im Allgemeinen endliche Grösse erkannt, für sie werden also Aenderungen von endlicher Grösse denkbar sein. Wir verbinden mit der Erscheinung solcher endlichen Geschwindigkeitsänderungen in der Bewegung eines materiellen Punktes den Begriff und die Vorstellung des Stosses, des Impulses.

Was die Bedeutung der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten betrifft, so verweisen wir auf das gelegentlich der Zusammensetzung von Wegstrecken Gesagte. Die Betrachtungen lassen eine unmittelbare Uebertragung zu.

§ 29. Einführung des Begriffs der Beschleunigung als Vectorgrösse.

Wir kommen zu dem Begriff der Beschleunigung eines materiellen Punktes:

Bewegt sich ein materieller Punkt in geradliniger Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit, befolgt er also den Galilei'schen Trägheitssatz, dann liegt kein Bedürfniss vor, einen neuen weiteren Begriff einzuführen. Dieses Bedürfniss tritt erst auf, wenn wir die

Bewegung eines materiellen Punktes mit ungleichförmiger Geschwindigkeit in beliebiger Bahn zu analysiren haben.

Wir lassen uns dann von dem Gedanken leiten, die Grösse der Abweichung vom Galilei'schen Trägheitssatz, von der geradlinigen Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit als Vector einzuführen und diese als Beschleunigung zu definiren. Wir beziehen also die Aenderungen der Geschwindigkeitscomponenten Δu, Δv, Δw auf die Zeit Δt, in der jene stattfinden, und gehen, um bestimmte eindeutige Werthe zu erhalten, die unabhängig von der Wahl der Grösse des Zeitelements Δt sind, zur Grenze über; wir definiren so die Ausdrücke:

$$
(1)\quad \begin{aligned}
\operatorname{Lim}\frac{\Delta u}{\Delta t} &= \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\cos\alpha\right) = \frac{d^2x}{dt^2},\\
\operatorname{Lim}\frac{\Delta v}{\Delta t} &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\cos\beta\right) = \frac{d^2y}{dt^2},\\
\operatorname{Lim}\frac{\Delta w}{\Delta t} &= \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\cos\gamma\right) = \frac{d^2z}{dt^2}
\end{aligned}
$$

als die Componenten der Beschleunigung des Punktes, die Grösse:

$$
(2)\quad B = \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}
$$

als die Beschleunigung des Punktes, die Richtungscosinus:

$$
(3)\quad \frac{\frac{du}{dt}}{B} = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{B},\quad \frac{\frac{dv}{dt}}{B} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{B},\quad \frac{\frac{dw}{dt}}{B} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{B}
$$

als die Richtungscosinus der Beschleunigung eines Punktes.

Wir entnehmen aus diesen Definitionen, deren Zweckmässigkeit für die Physik in der Beziehung zum Trägheitssatz liegt, die Folge, dass die Beschleunigungsrichtung im Allgemeinen eine andere ist, als die Weg- und Geschwindigkeitsrichtung; es beruht dies darauf, dass die Richtungen des Weges und damit auch der Geschwindigkeit α, β, γ im Allgemeinen von Ort zu Ort wechseln, also auch mit der Zeit veränderlich sein werden. Nur in dem speciellen Fall, dass α, β, γ unabhängig von der Zeit wären, könnten wir in:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\cos\alpha\right),\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\cos\beta\right),\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\cos\gamma\right)
$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ vor das Differentiationszeichen ziehen und schreiben:

$$
\cos\alpha\,\frac{d^2s}{dt^2},\quad \cos\beta\,\frac{d^2s}{dt^2},\quad \cos\gamma\,\frac{d^2s}{dt^2},
$$

und nur in diesem ganz speciellen Falle wäre die Beschleunigung

d^2s/dt^2 und ihre Richtung identisch mit der Weg- und Geschwindigkeitsrichtung des materiellen Punktes. Abgesehen von diesem ganz speciellen Fall hat d^2s/dt^2 — wir könnten diese Grösse Bahnbeschleunigung nennen — keine tiefere physikalische Bedeutung; es wäre vor Allem keine Vectorgrösse, welche eine einfache Superposition zuliesse.

Wir haben uns bei unseren bisherigen Festsetzungen von der Beziehung zum Trägheitssatz leiten lassen; wir werden in einer solchen Beziehung zum Trägheitssatz auch den tiefer liegenden Grund zu sehen haben, weshalb wir die kinematischen Definitionen und Begriffe mit der Einführung der zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit abbrechen und nicht etwa noch weiter die dritten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit einführen. Würden diese in der Mechanik eine Rolle spielen, dann würde dem Trägheitssatze auch nicht die Stelle zukommen, die er thatsächlich in dem System der Mechanik einnimmt. Die Thatsache, dass die dritten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit keine Rolle in der Mechanik spielen, ist eine von denen, welche eine rückwirkende Sicherung und Bürgschaft für die Richtigkeit und Gültigkeit des Trägheitssatzes gewähren, der als Postulat von uns eingeführt wurde.

§ 30. Theorie der Dimensionen der physikalischen Grössen.

Wir haben nun schon eine ganze Reihe physikalischer Begriffe eingeführt: Länge, Zeit, Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung. Wir haben damit hinreichend Material gewonnen, um einige allgemeine Betrachtungen über physikalische Grössen anknüpfen zu können.

Wir unterscheiden zwischen Grundbegriffen und abgeleiteten Begriffen. Länge und Zeit sind Grundbegriffe, insofern sie nicht auf andere Begriffe zurückgeleitet werden können. Geschwindigkeit und Beschleunigung sind abgeleitete Begriffe, insofern sie auf die Begriffe der Länge und der Zeit zurückgeführt werden können. Um über physikalische Grössen, welche sich auf Grundbegriffe beziehen, Angaben zu machen, wird man für sie gewisse Einheiten — Grundeinheiten genannt — festsetzen müssen, in denen man sie ausdrückt. Um über physikalische Grössen, welche sich auf abgeleitete Begriffe beziehen, Angaben zu machen, wird es nicht nöthig sein, neue Einheiten festzusetzen; man wird vielmehr auf die Einheiten der Grundbegriffe, auf die Grundeinheiten zurückgehen können.

Führen wir als Grundeinheit der Länge ein gewisses Maass ein, welches wir allgemein symbolisch mit $1\,[l]$, im Speciellen z. B. mit $1\,[cm]$ d. h. „Ein Centimeter" bezeichnen können; führen wir ferner als Grundeinheit der Zeit ein gewisses Maass ein, welches wir allgemein symbolisch mit $1\,[t]$, im Speciellen z. B. mit $1\,[sec]$ d. h. „Eine Secunde" bezeichnen können, so werden wir in derselben symbolischen Bezeichnung als Einheiten der abgeleiteten Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung schreiben können:

$$\text{allgemein } 1\,[l t^{-1}], \text{ speciell } 1\,[cm\ sec^{-1}],$$
$$\text{„} \quad 1\,[l t^{-2}], \quad \text{„} \quad 1\,[cm\ sec^{-2}].$$

Der Vollständigkeit wegen mag hier gleich der weiteren Entwickelung der Vorlesung vorgegriffen und bemerkt werden, dass wir später, wenn wir den Begriff der Masse als Grundbegriff einführen, auch für die Masse ein gewisses Grundmaass als Einheit einzuführen haben werden, welches wir allgemein symbolisch mit $1\,[m]$, im Speciellen z. B. mit $1\,[gr]$ d. h. „Ein Gramm" bezeichnen können. Dieser Begriff der Masse wird in Verbindung mit den Begriffen der Länge und der Zeit ebenso abgeleitete Begriffe zu bilden gestatten, wie die Begriffe der Länge und der Zeit schon für sich gestattet haben, die abgeleiteten Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung zu bilden.

Wir bezeichnen diese Symbole nach dem Vorgang von Fourier[1]) als Dimensionen der physikalischen Begriffe beziehungsweise der physikalischen Grössen. Diese Bezeichnung ist wohl aus einer Verallgemeinerung der geometrischen Bezeichnung entstanden, nach der eine Linie ein eindimensionales, eine Fläche ein zweidimensionales, ein Körper ein dreidimensionales geometrisches Gebilde ist. In der That werden wir eine Fläche in Quadratcentimetern — symbolisch $[cm^2]$ — und einen Raum in Cubikcentimetern — symbolisch $[cm^3]$ — ausdrücken können. Die physikalischen Gebilde sind reicher ausgestattet als die geometrischen, insofern sie neben der Längendimension noch die Zeitdimension und die Massendimension enthalten können, und in den physikalischen Begriffen und Gleichungen die mannigfaltigste Verbindung zwischen diesen heterogenen Dimensionen möglich erscheint.

Jede physikalische Grösse besteht in dieser Weise, wenn sie vollständig hingeschrieben wird, aus einem Zahlenwerth und einem

1) Fourier, Théorie analytique de la chaleur. Cap. II. Section IX.

Dimensionswerth. Der Zahlenwerth ist abhängig von den zu Grunde gelegten Maasseinheiten, der Dimensionswerth giebt diese Maasseinheiten nicht nur an, sondern giebt auch über Herkunft und Beziehung des abgeleiteten Begriffs zu den Grundbegriffen Auskunft. Diese Verbindung numerischer Angaben physikalischer Grössen mit Dimensionswerthen hat den Vortheil, dass jeder Zweifel über die zu Grunde gelegten Maasseinheiten ausgeschlossen ist.

Auch rechnerisch gewährt die Beachtung der Dimensionen insofern Vortheil, als jede physikalische Gleichung zu beiden Seiten dieselben physikalischen Dimensionen bis auf die Exponenten genau aufweisen muss. Man pflegt diese Forderung in dem Satze auszusprechen: Jede physikalische Gleichung muss homogen sein. Es wird sich bei umfangreichen physikalischen Rechnungen empfehlen, die zu behandelnden physikalischen Gleichungen von Zeit zu Zeit auf ihre Homogenität zu prüfen; wo dieselbe fehlt, wissen wir dann, dass ein Rechenfehler untergelaufen sein muss.

Einen weiteren Vortheil gewährt die Beachtung der Dimensionen bei dem Uebergang von einem Maasssystem zu einem anderen. Haben wir eine physikalische Grösse numerisch in bestimmten Maasseinheiten m, l, t ausgedrückt etwa zu $z\,[m^a\, l^b\, t^c]$ und handelt es sich dieselbe Grösse in anderen Maasseinheiten M, L, T auszudrücken, wobei zwischen M, L, T und m, l, t die Beziehungen bestehen mögen:

$$M = Am, \qquad L = Bl, \qquad T = Ct,$$

dann haben wir jede Grösse in dem zweiten Maasssystem ausgedrückt: $Z\,[M^a\, L^b\, T^c]$, wobei $Z = z/A^a\, B^b\, C^c$ bedeutet.

Sind die Exponenten des Dimensionswerthes a, b, c Null, so haben wir physikalisch einen reinen Zahlenwerth unabhängig von allen zu Grunde gelegten Maasseinheiten vor uns.

Wir haben so in den Dimensionen physikalisch ein für viele Zwecke sehr bequemes, praktisches, technisches Hülfsmittel geschaffen, mehr werden wir in diesen Symbolen nicht zu sehen haben.

§ 31. Anwendung der Galilei'schen Grundsätze auf den freien Fall in der Nähe der Erdoberfläche.

Die Gesetze des freien Falls sind zuerst von Galilei an der Fallrinne studirt worden. Wir knüpfen an das Resultat, welches Galilei unter anderen feststellte, dass von Anbeginn der Bewegung an gerechnet die Fallräume sich wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten. Bezeichnen wir den in der Zeit t längs der Fallrinne zurückgelegten Weg mit s, so fand Galilei experimentell, dass

$$s = at^2 \tag{1}$$

ist, wo a eine an der Fallrinne näher zu bestimmende Constante ist. Diese Constante nimmt abgesehen von anderen in Betracht zu ziehenden Factoren[1]) mit der Neigung der Fallrinne gegen die Horizontale zu, für den freien Fall ist sie ein Maximum.

Die Richtigkeit dieses Beobachtungsresultates vorausgesetzt, finden wir für die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Falls längs der Fallrinne nach unseren kinematischen Grundsätzen:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2at, \qquad B = \frac{d^2s}{dt^2} = 2a. \tag{2}$$

Die Beschleunigung längs der Fallrinne ergiebt sich also als eine Constante.

Diese Aussage erweist sich auch zur Beschreibung der freien Bewegungsvorgänge in der Nähe der Erdoberfläche als die einfachste und allumfassendste und damit als der naturgemässe Ausgangspunkt für eine Theorie derselben. Sie enthält unter Hinzuziehung der Galilei'schen kinematischen Grundsätze ebenso die Mittel, die Vorgänge des freien Falls wie die des Wurfs zu behandeln. Die Constante bezeichnen wir in diesem Falle mit g und nennen sie die Beschleunigung der Schwere; sie beträgt, wie aus Pendelbeobachtungen besonders genau abgeleitet werden kann, gegen 10 [Meter/Secunde^2].

Solange wir die Bewegung im leeren Raum vornehmen oder von dem bei der Bewegung entstehenden Luftwiderstande absehen können, ist die Gestalt und Grösse des Körpers gleichgültig; der Einfachheit der mathematischen Beziehung wegen sprechen wir von der Bewegung eines materiellen Punktes und seinen Coordinaten x, y, z. Die folgenden Behandlungen bleiben aber auch für die betreffenden Bewegungserscheinungen im lufterfüllten Raum von Werth; die Erscheinung wird dann eine zusammengesetzte. Die Behandlung einer zusammengesetzten Erscheinung erfordert die Zerlegung in die naturgemässen Bestandtheile — und einen solchen Bestandtheil bildet die Bewegung im luftleeren Raum.

Wir gehen nun von der Thatsache einer verticalen, constanten

1) Eine genaue Theorie der Galilei'schen Fallrinne nebst Angaben über die dabei erreichbare Genauigkeit findet man von mir in der Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht. VII. Jahrgang. S. 161—166. 1894.

Beschleunigung der Schwere g aus und behandeln zuerst die Theorie des verticalen freien Falls der Körper.

Wir rechnen die x- und y-Axe horizontal, die z-Axe positiv vertical nach unten in der Richtung der Schwere, und haben dann:

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = g.$$

Eine erste Integration liefert:

$$\frac{dx}{dt} = c_1, \qquad \frac{dy}{dt} = c_2, \qquad \frac{dz}{dt} = gt + c_3.$$

Beim verticalen freien Fall existiren keine anfänglichen horizontalen Geschwindigkeitscomponenten, daher bestimmen sich die Integrationsconstanten $c_1 = 0$, $c_2 = 0$; rechnen wir weiter den Fall von der Ruhelage aus, dann ist, wenn für $t = 0 : dz/dt = 0$ ist, auch $c_3 = 0$.

Die weitere Integration der Gleichungen:

$$(4) \qquad \frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = gt$$

liefert nun:

$$x = c_1', \qquad y = c_2', \qquad z = \frac{g}{2} t^2 + c_3'.$$

Die Bestimmung der hierbei auftretenden Integrationsconstanten c_1', c_2', c_3' folgt auch hier gleich Null, wenn wir den Coordinatenanfangspunkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ in die Anfangslage des Körpers (materiellen Punktes) zur Zeit $t = 0$ verlegen.

Das Resultat der theoretischen Behandlung des freien Falls ist also, dass wir in den Gleichungen:

$$(5) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = g, \qquad \frac{dz}{dt} = v = gt, \qquad z = s = \frac{g}{2} t^2$$

die Gesetze des freien Falls zu sehen haben. Die Verbindung der zweiten und dritten Gleichung gestattet die Elimination der Zeit t und gewährt das weitere bemerkenswerthe Fallgesetz

$$(6) \qquad \frac{v^2}{2} = gz \qquad \text{oder} \qquad v = \sqrt{2gz}.$$

§ 32. Anwendung der Galilei'schen Grundsätze auf den Wurf in der Nähe der Erdoberfläche.

Wir behandeln an zweiter Stelle die Theorie des Wurfs, des Fluges der Geschosse. Wir rechnen wieder die x- und y-Axe horizontal, die z-Axe wollen wir hier einmal entgegengesetzt der Richtung der Schwere vertical nach oben rechnen und haben dann:

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Eine erste Integration liefert:

$$\frac{dx}{dt} = c_1, \qquad \frac{dy}{dt} = c_2, \qquad \frac{dz}{dt} = -gt + c_3.$$

Hier existiren nun im Unterschied von dem verticalen freien Fall anfängliche horizontale Geschwindigkeitscomponenten, und es werden daher hier im Allgemeinen die Integrationsconstanten c_1, c_2, c_3 endliche Werthe haben. Es sei die anfängliche Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α — der Elevation — gegen die Horizontale geneigt; wählen wir nun die xz-Ebene so, dass in sie die anfängliche Geschwindigkeitsrichtung v_0 hineinfällt, dann wird zur Zeit $t = 0$

$$\frac{dx}{dt} = c_1 = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = c_2 = 0, \quad \frac{dz}{dt} = c_3 = v_0 \sin\alpha$$

und allgemein zu einer beliebigen Zeit t:

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha.$$

Die weitere Integration liefert:

$$x = v_0 t \cos\alpha + c_1', \quad y = c_2', \quad z = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t \sin\alpha + c_1'.$$

Legen wir, wie beim freien Fall, den Coordinatenanfangspunkt $x = 0, y = 0, z = 0$ in die Anfangslage des Körpers (des materiellen Punktes) zur Zeit $t = 0$, so bestimmen sich die Integrationsconstanten c_1', c_2', c_3' gleich Null und wir werden in den Gleichungen:

$$(3) \qquad x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = 0, \qquad z = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t \sin\alpha$$

theoretisch alles das zu suchen haben, was sich über den Wurf oder Flug eines Körpers unter Wirkung der Schwere ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand aussagen lässt:

Die Gleichung $y = 0$ lehrt zunächst, dass sich der Vorgang des Wurfs oder Fluges in einer Ebene vollzieht, in der Ebene, welche durch die anfängliche Geschwindigkeitsrichtung und die Verticale gegeben ist.

Die Elimination von t aus den beiden anderen Gleichungen liefert die Gleichung der Bahncurve, in welcher der Wurf oder Flug vor sich geht:

$$(4) \qquad z = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Das ist die Gleichung einer Parabel; eine einfache Rechnung lehrt, dass der Scheitelpunkt dieser Parabel an die Stelle:

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha, \qquad z = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

zu liegen kommt.

Weitere Fragen knüpfen sich an die Wurfweite und an die Wurfhöhe:

Die Frage nach der Wurfweite beantwortet sich dadurch, dass wir in (4) $z = 0$ setzen, wir erhalten dann für x zwei Werthe: $x = 0$, das ist der Anfangspunkt, und $x = (v_0^2/g) \sin 2\alpha$, das ist die Wurfweite, welche danach im doppelten Abstand des Abscissenwerthes für den Parabel-Scheitel liegt. Aus diesem Werth für die Wurfweite $x = (v_0^2/g) \sin 2\alpha$ folgt, dass der Körper unter Anwendung der anfänglichen Elevationen α und $\pi/2 - \alpha$ gleich weit fliegt. Der flache Schuss wird artilleristisch zur Ueberwindung verticaler Hindernisse, der steile Schuss zur Zerstörung von Gewölben verwerthet werden. Beide Elevationen fallen für $\alpha = 45^0$ in eine zusammen, für diese Elevation erreicht die Wurfweite in dem Werth $x = v_0^2/g$ ihr Maximum.

Die Beantwortung der Frage nach der grössten Wurfhöhe ergiebt sich dadurch, dass wir aus (4) $dz/dx = 0$ bilden. Es folgt für die grösste Wurfhöhe der Abscissenwerth $x = (v_0^2/2g) \sin 2\alpha$ und damit der zugehörige Ordinatenwerth $z = (v_0^2/2g) \sin^2 \alpha$; der Scheitelpunkt der Parabel ist also die Stelle der höchsten Wurfhöhe. Die Wurfhöhe wächst mit der Steilheit der anfänglichen Elevation und erreicht ein Maximum für $\alpha = 90^0$, nämlich $z = v_0^2/2g$.

II. 2) Die Grundlagen der Newton'schen Mechanik (Kinetik).

§ 33. **Gesichtspunkte, unter denen die Newton'sche Mechanik in Hinblick auf die Entwickelung der Wissenschaft zu behandeln ist. Der Gipfelpunkt liegt in dem Begriff der Masse. Satz von der Erhaltung der Masse.**

Die folgenden Auseinandersetzungen werden sich anders, als bei der Behandlung der Galilei'schen Mechanik, enge an die Darstellung Newton's schliessen. Ich kann hier nur den Aussprüchen der Herren Thomson und Tait in ihrem bekannten Handbuch der theoretischen Physik beipflichten, welche sich Art. 206 u. 242 in der Richtung äussern: „Die Einleitung zu den Principien enthält in äusserst durchsichtiger Form die allgemeine Grundlage der Dynamik. Die darin niedergelegten „Definitiones“ und „Axiomata sive Leges motus“ erfordern nur einige durch spätere Entwickelungen gewonnene Erweiterungen und erläuternde Zusätze, um für den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft zu passen und eine weit bessere Einleitung zur Dynamik zu bilden, als sogar in einigen der besten neueren Lehrbüchern sich vorfindet.“ „Wir werden die Axiomata sive Leges Motus in Newton's eigenen Worten wiedergeben. Die beiden Jahrhunderte, die verflossen sind, seit Newton sie zuerst veröffentlichte, haben nicht die Nothwendigkeit irgend eines Zusatzes oder einer Modification gezeigt.“

Das ist das Zeichen des Genius, dass er, der weiteren Entwickelung der Wissenschaft vorschauend, seine Gedanken in einer Form niederlegt, die ihre Frische und Anregung noch nach Jahrhunderten bewahrt. Allerdings werden wir zu berücksichtigen haben, dass Newton an die Galilei'sche Forschung anknüpfen konnte. Gestatten die Schriften Galilei's einen vollständigen Einblick in seine Gedankenentwickelung, überwiegt bei Galilei, der ohne Vorgänger war, noch durchaus die Induction, so stellen Newton's Principien bereits einen geklärten Standpunkt wissenschaftlicher Mannesreife dar, sie bilden bereits ein in sich vollkommen geschlossenes System, das unter Beobachtung der innigsten Verknüpfung von Induction und Deduction nach dem Grundsatz der rückwirkenden Verfestigung und Sicherung aufgeführt ist.

Das neue Moment der Newton'schen Mechanik liegt in der Einführung und Ausgestaltung des Begriffs der Masse. Dieser Begriff erweitert die Kinematik zur Kinetik. Das System der Mechanik gewinnt damit einigermaassen die Vollständigkeit von Stammbegriffen, welche es befähigen, sich mit Erfolg weiter zu entwickeln und zu gestalten.

Die Begriffe, welche die Galilei'sche Mechanik einführte: die Begriffe der Trägheit und der Beschleunigung gingen auf die Grundbegriffe des Raumes und der Zeit zurück. Der Begriff der Masse, welchen die Newton'sche Mechanik einführt, ist selbst ein Grundbegriff, der als dritter zu den früheren Grundbegriffen des Raumes, beziehungsweise der Länge und der Zeit hinzutritt.

Ebenso wie wir die Grundbegriffe des Raumes und der Zeit postuliren: Es giebt einen Raum von ganz bestimmten geometrischen Eigenschaften, in dem sich die Wirklichkeit abspielt: den Euklidischen Raum — und weiter: Es giebt eine unabhängig von allen Erscheinungen gleichmässig dahin fliessende Zeit — so werden wir auch den neu einzuführenden Massenbegriff von vorneherein mit einem Postulat verbinden müssen. Dieses Postulat ist der Satz von der Erhaltung der Masse.

Dieses Postulat von der Erhaltung der Masse wird für sich genommen zunächst genau so inhaltsleer sein, wie es das Postulat des Raumes oder der Zeit für sich ist. Auf der einen Seite fordern wir logisch die Möglichkeit der Isolirung dieser Begriffe aus der Welt der mannigfaltigen Beziehungen, welche die Wirklichkeit aufweist, auf der anderen Seite offenbart sich die systematische Bedeutung dieser Begriffe gerade in der Mannigfaltigkeit der Beziehungen, mit der diese Begriffe in der Wirklichkeit auftreten und eine Rolle spielen.

Durch die Eigenart dieser Postulate findet sich der Ausgangspunkt unserer Darstellung, dass die Physik ein System mit rückwirkender Verfestigung ist, sehr gut charakterisirt. Die Postulate sind, so zu sagen, Anweisungen, die an den Stellen eingelöst werden, an denen die Rückverweisung stattfindet.

Das Postulat von dem Satz der Erhaltung der Masse wird in diesem Sinne dann etwa so zu charakterisiren sein: Es giebt eine Grösse — die Masse — welche bei allem Wechsel der Erscheinungen sich unverändert erhält, welche auf natürlichem Wege weder zerstört noch erschaffen werden kann, deren Eigenschaften nicht a priori eingeführt werden können, sondern erforscht und studirt und in ihren mannigfachen Beziehungen zur Wirklichkeit aufgedeckt sein wollen. Wir können so an der Schwelle, wo wir den Begriff der Masse einzuführen unternehmen, diese Grösse in ihrer Existenz zunächst nur in unsicheren Linien skizziren. Je mehr wir die Wirklichkeit kennen lernen, desto deutlicher und bestimmter wird dieser Massenbegriff hervortreten und sich auch begrifflich präcisiren und numerisch messen lassen; zunächst aber fehlen uns dazu alle Mittel.

Diese provisorische, zunächst unbestimmte Fassung des Postulats ermöglicht seine universelle Verwerthung. Die einzelne Anwendung wird den Begriff der Masse in einer Richtung präcisiren lehren; wollte man aber diese Anwendung dem Ganzen zu Grunde legen, dann würde man diese Grösse wieder der Möglichkeit einer universellen Verwerthung entziehen. Man kann ihre Einführung als Postulat nur durch Bezugnahme auf Künftiges rechtfertigen.

§ 34. **Präliminarien. Vorläufige Definitionen von Newton und ihr Verhältniss zu einander.**

Wir beginnen mit den vier ersten Definitionen der Newton'schen Principien. Diese Definitionen sollen noch keinen definitiven, sondern nur einen vorbereitenden, vorläufigen Charakter tragen. Man hat diese Definitionen so aufgefasst, als hätte Newton durch diese Definitionen in endgültiger Form gewisse Hauptbegriffe festlegen wollen; thut man das, dann verkennt man den Charakter der Newton'schen Physik, welche ein System mit rückwirkender Verfestigung und Versicherung sein will und auch thatsächlich ist. Diese Definitionen sind daher, streng genommen, weder Nominal- noch Real-Definitionen, es sind Präliminarien, durch welche die Aufmerksamkeit von vorneherein auf die Beziehung und Abhängigkeit gewisser Begriffe von einander gelenkt wird. Diese Beziehung wird einer ersten, noch unvollkommenen und wenig entwickelten Stufe der physikalischen Erkenntniss entnommen. Es muss aber von vorneherein darauf hingewiesen werden, dass im Verlauf der weiteren Entwickelung diese Bezugnahme ihre weitere Rechtfertigung und Vertiefung finden wird.

Wir fassen die vier Definitionen paarweise zusammen; die lateinische Formulirung Newton's legt dies unmittelbar nahe:

I. Quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim.

II. Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim.

Zu Deutsch:

(I.) Die Quantität der Materie (die Masse) ist ein aus ihrer Dichte und ihrem Volumen gemeinsam entnommenes Maass.

(II.) Die Quantität der Bewegung ist ein aus ihrer Geschwindigkeit und ihrer Masse gemeinsam entnommenes Maass.

Weiter:

III. Materiae vis insita est potentia resistendi, qua corpus unum quodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

IV. Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Zu Deutsch:

(III.) Die der Materie innewohnende Kraft ist ein Widerstandsvermögen, durch welches jeder Körper, soweit er es vermag, in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in gerader Richtung verharrt.

(IV.) Die aufgedrückte Kraft ist eine auf die Masse ausgeübte Wirkung zur Aenderung des Zustandes der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in gerader Richtung.

Es handelt sich in diesen Definitionen um Einführung der Begriffe, welche die Galilei'sche Mechanik in ganz wesentlichen Stücken ergänzen sollen. In den Definitionen I. und II. werden die Begriffe der „quantitas materiae“ und der „quantitas motus“ einander gegenübergestellt. Die Definition I. bereitet den Begriff der Masse, den Fundamentalbegriff der Newton'schen Mechanik, vor. Mit Hülfe des Begriffs der Masse findet in Definition II. der Galilei'sche Begriff der Geschwindigkeit eines materiellen Punktes eine Bereicherung. In den Definitionen III. und IV. werden die Begriffe der „vis insita“ und der „vis impressa“ einander gegenübergestellt, sie wollen den Galilei'schen Trägheitssatz unter Bezugnahme auf den eingeführten Begriff der Masse vertiefen und bereichern. Der Präliminariencharakter der Newton'schen Definitionen, den ich schon hervorgehoben habe, findet durch Definition III. insofern eine besondere Beleuchtung, als hier der Begriff der „vis insita“ als ein nur vorübergehend gebrauchter eingeführt wird, ohne im weiteren Verlauf eine wesentliche Rolle zu spielen. Die Newton'schen Definitionen sind in dieser Hinsicht einem äusseren Gerüste vergleichbar, wie es zum Aufbau eines Gebäudes nothwendig ist. Nachdem das Gebäude aufgeführt ist, kann ohne Schaden des Gebäudes das Gerüst wieder abgebrochen werden.

Die „vis insita“ ist die passive Aeusserung der Trägheit der Materie, die „vis impressa“ ist eine active Aeusserung, welche der „vis insita“ gegenübergestellt wird. Es unterscheidet sich, wie Newton sagt, die „vis insita“ nur in der Art der Auffassung von der „vis inertiae“, welche der allgemeinere Begriff ist, zu Gunsten dessen dann in der Folge die Bezeichnung „vis insita“ ganz unterdrückt wird. Die „vis inertiae“ einer Masse lässt sich einmal passiv in Beziehung setzen zu dem Widerstand, den sie selbst äusseren Einwirkungen (vis impressa) vermöge ihrer Trägheit entgegensetzt: in dieser Form könnte sie als vis insita bezeichnet werden — sodann activ in Beziehung zu der Ueberwindung des Widerstandes, den andere Massen ihr z. B. beim Stoss entgegensetzen.

Es folgen bei Newton noch vier weitere Definitionen über die vis centripeta, diese greifen bereits über in das Gebiet der Huygens'schen Forschung und sollen daher hier nicht besprochen werden.

§ 35. Behandlung der ersten Newton'schen Definition, den Massenbegriff betreffend, im Besonderen.

Der Charakter der Definition I. dürfte von der Mehrzahl der Autoren verkannt sein, auch von Thomson, wenn er sagt, es handle sich hier eigentlich mehr um eine Definition der Dichte als der Masse. Es wird hier vor Allem zu berücksichtigen sein, was Newton selbst unter Heranziehung des Begriffs der Compressibilität zur Rechtfertigung und Erläuterung seiner Fassung der Definition I. anführt.

Der Gedankengang Newton's scheint mir folgender zu sein: Die Quantität der Materie bleibt bei allen Compressionen und Dilatationen dieselbe. An diesem Vorgang der Compression oder Dilatation kann man sich den Begriff der Dichte klar machen. Ein materieller Körper — in gasförmigem Aggregatzustand — der auf die Hälfte seines Volumens comprimirt wird, hat die doppelte Dichte. Gewinnt man so zunächst für ein und denselben materiellen Körper (für ein und dieselbe Quantität der Materie) die Formulirung, dass das Product aus Volumen und Dichte eine Constante ist, womit der Begriff der Dichte seine Präcision gefunden hat, so ist der weitere Schritt, das Product aus Volumen und Dichte auf verschiedene materielle Körper (auf verschiedene Quantitäten der Materie) auszudehnen. Unter Festsetzung einer gewissen Dichtigkeitseinheit, die wir, wenn auch nicht physisch, so doch ideell uns unter Anwendung von Compression und Dilatation für alle Körper herstellbar denken können — für gasförmige Körper bereitet diese Vorstellung die geringsten Schwierigkeiten — nennen wir dieses, auf verschiedene materielle Körper angewandte Product aus Volumen und Dichte die Masse der verschiedenen materiellen Körper.

Durch die weiteren Bemerkungen, dass man die Masse eines Körpers durch Wägung bestimmt, und dass die Masse eines Körpers dem Gewicht proportional sei, weist Newton von vorneherein darauf hin, dass man zwischen einer intellectuellen Begründung und einer experimentellen Stützung der Mechanik wesentlich unterscheiden müsse; beide Momente können naturgemäss nicht parallel gehen. Es wird sich immer empfehlen, bei der Begründung einer Disciplin an passender Stelle auf gewisse spätere Ergebnisse hinzuweisen, welche geeignet sind, eine rückwirkende Sicherung des wissenschaftlichen Systems zu gewähren.

Die Absicht Newton's bei der Formulirung der Definition I. scheint mir die zu sein: festzulegen, in welcher Bedeutung das Wort „Masse“ zunächst gebraucht werden soll, um dann zu zeigen, in welchen Beziehungen dieser so festgesetzte Begriff weiter in der Mechanik eine Rolle spielt — Beziehungen, welche die Möglichkeit gewähren, die vorläufige Definition des Massenbegriffs weiter zu präcisiren und auszugestalten.

Was die oben erwähnte, der Entwickelung der Darstellung vorgreifende Bemerkung von Newton betrifft, so lautet sie im Text:[1]) „Innotescit ea (massa) per corporis cujusque pondus: Nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur“ — zu Deutsch: „Die Masse findet ihre Bestimmung durch das Gewicht des Körpers: Denn dass die Masse dem Gewicht proportional sei, habe ich durch sehr genau angestellte Pendelbeobachtungen gefunden, wie später gezeigt werden

1) Newton Principia (Ausgabe von Thomson vom Jahre 1871. S. 1).

wird.“ Newton ist im zweiten Buch Sectio VI seiner Principien darauf zurückgekommen. Ich habe aber die Stelle nicht finden können, auf welche Bessel[1]) Bezug nimmt, wenn er mittheilt: Newton lässt Körper von verschiedener Beschaffenheit — Gold, Silber, Blei, Glas, Sand, Kochsalz, Wasser, Weitzen und Holz — in gleichen Kreisbögen schwingen und beobachtet, dass ihre Schwingungen gleichzeitig sind. Es ergiebt sich ihm daraus eine Proportionalität von Masse und Gewicht bis auf $^1/_{1000}$ genau.

Bessel[1]) hat 1832 die von Newton angeregte Frage wieder aufgenommen, und die von ihm mit verschiedenen Mineralien und Metallen (auch Meteoreisen wurde untersucht) angestellten Pendelversuche haben ergeben, dass die Proportionalität von Masse und Gewicht bis auf $^1/_{60000}$ des Werthes behauptet werden kann.

R. von Eötvös[2]) hat 1891 mit der Torsionswage diese Genauigkeitsgrenze noch weiter hinausgerückt. Seine Messungen zeigen, dass, wenn überhaupt eine Differenz in der Schwere der Körper von gleicher Masse, aber verschiedener Substanz vorhanden ist, diese zwischen Luft und Messing weniger als $^1/_{100000}$ und hinsichtlich Messing, Glas, Antimonit und Korkholz weniger als $^1/_{20000000}$ beträgt.

Wir erwähnen hier endlich noch die Messungen von Stas[3]), Kreichgauer[4]) und Landolt[5]), welche im Wesentlichen darauf zielten, das Gesammtgewicht chemisch sich umsetzender Körper vor und nach der Umsetzung zu vergleichen, und welche im Wesentlichen die Genauigkeitsgrenze der Messungen von Eötvös für die Proportionalität von Schwerkraft und Masse erreichten.

Alle diese fundamentalen Versuche und Messungen können für das wissenschaftliche System der Physik in der mannigfaltigsten Weise verwerthet werden. Wir werden sie hier in erster Linie für den

---

1) Bessel. Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht. Schumacher's Astronomische Nachrichten X, 97 (1833).

2) R. v. Eötvös. Ueber die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen. Math. u. naturwissensch. Berichte aus Ungarn VIII, 65 (1891).

3) Stas. Nouv. Recherches sur les lois des proportions chimiques 1865. S. 151. 171. 189 u. 190. — Uebersetzung von Aronstein.

4) Kreichgauer. Einige Versuche über die Schwere. Verh. d. physik. Gesellschaft zu Berlin. Sitzung vom 23. Jan. 1891. Jahrg. X. Nro. 2. S. 13.

5) Landolt. Untersuchungen über etwaige Aenderungen des Gesammtgewichts chemisch sich umsetzender Körper. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1893. S. 301 u. f.

Satz von der Erhaltung der Masse als Postulat verwerthen; denn dieser bildet die absolute Voraussetzung für alle weiteren Aussagen, welche sich auf Massen beziehen.

§ 36. Die drei Newton'schen Axiomata sive Leges motus. Allgemeine orientirende Bemerkungen. Verhältniss zu den Axiomen des Euklid.

Wir kommen nun zu dem methodischen Hauptstück der Newton'schen Mechanik, zu seinen „Axiomata sive Leges motus." Die nothwendigsten Begriffe, von denen diese Postulate handeln, haben in den vorausgeschickten Definitionen eine vorläufige Charakteristik erfahren und sollen nun in Beziehung zu einander gesetzt werden, wodurch die Möglichkeit gegeben wird, sie weiter zu präcisiren und an den speciellen Naturgesetzen mit einem realen Inhalt auszustatten:

Es sind drei Leges, welche wir mit Newton an die Spitze der Behandlung stellen:

Lex I: „Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare."

Lex II: „Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur."

Lex III: „Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi".

Zu Deutsch:

(I.) Jede Masse beharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in gerader Richtung, sofern sie nicht von äusseren Kräften gezwungen wird, ihren Zustand zu ändern.

(II.) Die Aenderung der Bewegungsgrösse ist der äusseren bewegenden Kraft proportional und findet in der Richtung statt, in der jene Kraft wirkt.

(III.) Es existirt bei jeder Wirkung immer eine gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkung: oder die Wirkungen zweier Massen auf einander sind immer gleich gross und entgegengesetzt gerichtet.

Diese Newton'schen Bewegungsgesetze sind Sätze, welche uns die Wirklichkeit nicht unmittelbar nahelegt, sondern Sätze, welche erst ein tieferes Studium der Bewegungserscheinungen der Wirklichkeit im Laufe der Entwickelung der Wissenschaft erschlossen hat. Wir werden sie passend als Grundsätze bezeichnen können. Ihre unbedingte Richtigkeit und Gültigkeit können wir auch heute weder experimentell noch theoretisch bis auf jeden beliebigen Genauigkeitsgrad direct nachweisen, wir können sie zunächst nur subjectiv vermuthen. In diesem Sinne sind diese Sätze Axiome, insofern ihnen nun aber weiter die äussere Wirklichkeit entsprechen soll: Postulate, Forderungen, mit denen wir in die Betrachtung der Natur hineingehen. Wir erheben uns in ihnen, wie das früher gelegentlich der Charakteristik der Postulate hervorgehoben ist, von einer subjectiv beschränkten Ungenauigkeit der Anschauung und Fassung zu einer objectiv unbeschränkten Genauigkeit der Anschauung und Fassung. Wir bedürfen einer solchen Präcisirung unserer mit Ungenauigkeiten behafteten subjectiven Auffassung, um das, in der Mathematik für uns vorliegende, mächtige logische Hülfsmittel mit Vortheil verwerthen zu können.

Die Festigkeit, Präcision und Sicherheit der Newton'schen Bewegungsgesetze kann daher weniger bei der Grundlegung der Mechanik ersichtlich gemacht werden, sie wird mehr Schritt für Schritt — oder wenn wir im Bilde eines Baues bleiben wollen — Stein für Stein aus der Festigkeit, Präcision und Sicherheit ihrer Consequenzen und ihrer Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit hervorgehen. Diese Sicherung wird entsprechend als eine rückwirkende, von den Consequenzen, die wir noch nicht kennen, aber ableiten werden, ausgehende zu bezeichnen sein. Insbesondere sind es für die Newton'sche Forschung die Gesetze des Stosses und der Gravitation, welche eine solche rückwirkende Verfestigung des Systems gewähren werden. Diese Gesetze des Stosses und der Gravitation sind dann aber in unserer, der Newton'schen Forschung angepassten Terminologie Naturgesetze specieller Art, die als solche sich den allgemeinen Newton'schen Bewegungsgesetzen unterordnen müssen.

Es kann sich hier bei der Aufstellung der Grundsätze, welche im Gebiet der Naturerscheinungen eine universelle Gültigkeit haben sollen, so wenig um einen mathematischen Beweis handeln, wie es sich bei Euklid's Axiomen oder Postulaten für das mathematische System der Geometrie darum handeln kann. Während aber in der Geometrie der Inhalt dieser Grundsätze als naheliegend bezeichnet werden kann, ergiebt sich in der Physik dieser Inhalt erst als die Folge eines tiefer gehenden Naturstudiums. Diese Differenz in unserer subjectiv verschiedenen Stellung zu den Fundamenten der Geometrie und der Mechanik hat noch eine weitere eigenartige Folge: Weil uns der Inhalt der Grundlagen der Euklidischen Geometrie so nahe liegt, ist es für uns gerade so überaus schwierig, nach der Regel der Oekonomie für diese die geeignete Auswahl zu treffen, welche die nothwendige, aber auch gerade nur hinreichende Zahl von Grundsätzen darbietet. Ich erinnere hier an die an und für sich schwierig liegende Frage nach der Gültigkeit des Parallelen-Axioms im Rahmen der Euklidischen Geometrie, welche sich erst vom Standpunkt der sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie leichter in das richtige Licht setzen lässt. Der Inhalt der Grundsätze, welche für das System der Mechanik in Betracht kommen, liegt von Hause aus unseren gewöhnlichen Erfahrungen und Anschauungen ferner, und es ist — so schwer es zunächst war, diesen Inhalt erst einigermaassen festzustellen — wenn dieser Inhalt erst feststand, darum leichter, ihn in seine naturgemässen Bestandtheile zu zerlegen und unter diesen eine angemessene Auswahl und Verbindung herzustellen.

Die Grundlagen des Systems der Mechanik scheinen aus diesem Grunde zur Vornahme erkenntnisstheoretischer Studien über die Begründung eines wissenschaftlichen Systems geeigneter und einfacher. Darum besteht aber für das System der Mathematik und Geometrie die gleiche Nothwendigkeit, das Studium der Grundlegung der einzelnen Disciplin vorzunehmen. Solche Untersuchungen bestehen auch für das System der reinen Mathematik, und nur der Umstand, dass solche Untersuchungen hier besonders schwierig liegen, mag es mit sich gebracht haben, dass sie weniger bekannt geworden sind und weniger Berücksichtigung gefunden haben. Es mag dies um so weniger der Fall gewesen sein, als der Inhalt der Fundamente der Mathematik von vorneherein, wie gesagt, uns näher liegt, und daher auch eher als unmittelbar gegeben dargestellt werden kann. Das ist der Grund, warum die mathematische Bildung und Erziehung unmittelbar an die deductive Aufführung des Systems zu knüpfen pflegt. Mit einer solchen deductiven Aufführung eines Systems haben wir es in der theoretischen Physik, speciell in der Mechanik genau ebenso zu thun, wie in der Mathematik. Der Unterschied ist nur der, dass hier das Bedürfniss für eine Rechtfertigung der Wahl der Grundlagen ein grösseres ist. Eine solche Rechtfertigung scheint mir aber das Newton'sche System für die Mechanik und Physik in höherem Grade zu gewähren, als irgend ein anderes — und das ist der Grund, wesshalb ich die Newton'sche Grundlegung hier so ausführlich behandle.

§ 37. Das Newton'sche Trägheitsprincip.

Wir kommen nun zur Besprechung der einzelnen „Leges motus" und ihrer Beziehungen zu einander. Die ersten beiden Bewegungsgesetze erweitern durch Einführung des Begriffs der Masse den Galilei'schen Trägheitssatz und den Galilei'schen Begriff der Beschleunigung.

Der Trägheitssatz ist, wie Newton selbst an einer anderen Stelle[1]) sagt, ein passives Princip. Die Trägheit der Massen zeigt sich im Verhältniss zu ihrer Grösse in der Tendenz, den Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in gerader Linie zu bewahren. Nehmen wir eine Aenderung dieses Zustandes wahr, so führen wir diese Aenderung auf die Einwirkung einer „vis impressa" zurück.

Die Schwierigkeit für eine experimentelle Stützung des so formulirten Trägheitssatzes liegt in der Ausschliessung dieser „vires impressae". Die Sache liegt so, dass man experimentell diese „vires impressae" für eine Begründung des Trägheitssatzes immer nur wird herabdrücken können, niemals ganz fortschaffen. In der Nähe der Erdoberfläche werden immer die Schwerkraft und Reibungs- oder Widerstandskräfte die Realisirung der Trägheit in ihrer Reinheit ohne gleichzeitiges Auftreten der vires impressae hindern. Es kann sich so zunächst immer nur mehr um eine Vermuthung, beziehungsweise subjective Ueberzeugung handeln, was ohne eine vis impressa geschehen wird, und nur, insofern die Consequenzen der Newton'schen Leges stets eine Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit aufweisen, wird rückwirkend die Sicherung gewährt werden, welche uns unsere Ueberzeugung objectiv als ein Postulat, als eine Forderung aussprechen lässt, mit der wir in die Betrachtung der Wirklichkeit hineinzugehen haben.

Man hat der Newton'schen Formulirung des Trägheitssatzes den Vorwurf gemacht, dass sie einen sehr complicirten Vorgang in sich begreife: die Bewegung eines Körpers ohne Einwirkung von Kräften — ein Vorgang, der sich eben wegen Mangels an Einfachheit nicht für die Grundlage eines wissenschaftlichen Systems empfehle, und man hat aus diesem Grunde das Trägheitsgesetz auf einen Elementartheil der ponderabeln Materie einschränken zu müssen gemeint. — Demgegenüber ist zu bemerken, dass in Lex I nur die Rede ist von Körpern, die sich in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung in ge-

1) In Newton's Optik cf. Ostwald's Klassiker Nro. 87. S. 141.

rader Richtung befinden. Natürlich ist die allgemeine Bewegung eines Körpers ohne Krafteinwirkung ein complicirter Vorgang, dieser allgemeine Fall wird aber bei der Formulirung von Lex I ausgeschlossen.

Nichtsdestoweniger wird es sich empfehlen, in der Erläuterung zu Lex I auf den allgemeinen Fall Bezug zu nehmen. So spricht Newton auch in seiner Erläuterung vom Kreisel, ohne dass es ihm hier natürlich auf eine erschöpfende Darstellung ankommen kann. Wie so häufig bei Newton haben wir in seinen Erläuterungen Hinweise auf Künftiges zu sehen. Bei aller Complication der Kreiselbewegungen können auch diese in geeigneter Weise zur Erläuterung des Trägheitssatzes herangezogen werden.

§ 38. Das Newton'sche Actionsprincip.

Dem Newton'schen Trägheitsgesetz als passivem Princip steht nun das zweite Newton'sche Bewegungsgesetz als actives Princip gegenüber. Es handelt sich hier darum, die Abweichung vom Newton'schen Trägheitssatze d. h. die Aenderung der Bewegungsgrösse als Vectorgrösse einzuführen. Ist diese Aenderung der Bewegungsgrösse eine plötzliche, so sprechen wir von einem Stoss, ist sie eine stetige, so sprechen wir von einer bewegenden Kraft.

Das zweite Newton'sche Bewegungsgesetz, das Actionsprincip, wie wir es auch nennen können, giebt uns eine Anweisung, wie wir uns Abweichungen vom Trägheitsgesetz gegenüber verhalten sollen. Hatte die vis impressa schon in Definition IV eine vorläufige Erläuterung gefunden, war sie als eine „actio" definirt, welche einen Bewegungszustand in geradliniger Richtung (bezw. einen Ruhezustand) ändert, so waren doch nähere Angaben über Grösse und Richtung der vis impressa bezw. der actio vermieden. Diese quantitativen Angaben enthält Lex II, insbesondere geben die Erläuterungen Newton's dazu Rechnungsanweisungen, wie nacheinander wirkende gleiche Kräfte auf verschiedene Massen, oder wie nacheinander wirkende verschiedene Kräfte auf gleiche Massen, oder wie eine Mehrzahl gleichzeitig wirkender Kräfte in Ansatz zu bringen sind — Anweisungen, die weiter im Corollarium I u. II bei Newton eine nähere Ausführung erfahren.

Man könnte dieser Interpretation gegenüber einwenden, dass bereits in den Definitionen, in denen Newton von der vis centripeta handelt, und die wir übergangen haben, die Beschleunigung als Kraftmaass in bestimmter Weise eingeführt ist. Demgegenüber wäre zu bemerken, dass in den „Leges“ in keiner Weise auf die specielle „vis centripeta“ Bezug genommen wird. Natürlich fällt die „vis centripeta“ und ihre Aeusserung unter die allgemeinen „Leges“, aber die „Leges“ verlangen eine allgemeinere Formulirung ohne Bezugnahme auf Centripetalkräfte oder Centralkräfte. Man wird aber sagen können, die Definitionen über die vis centripeta haben mit dazu verholfen, die allgemeine Fassung von Lex II vorzubereiten.

Wir führen nun also nach Lex II die vis impressa, die vis motrix impressa oder vielleicht besser die Actio als eine Vectorgrösse ein und fordern für sie ebenso die Anwenduug der Regel der Isolation wie der Superposition. Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist damit von vorneherein als in Lex II enthalten eingeführt. Ist die Actio kein Stossvorgang, sondern eine stetig verlaufende Wirkung, dann werden wir einfach als mathematische Formulirung des II. Bewegungsgesetzes für einen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Massenpunkt m, der einer Reihe von Einwirkungen gleichzeitig unterliegt, zu schreiben haben:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
m \frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X_n = X, \\
m \frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma Y_n = Y, \\
m \frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma Z_n = Z.
\end{aligned}
$$

Hierin bedeuten die X_n, Y_n, Z_n einzeln, in jedem Fall gegebene Kraftcomponenten, welche die Einwirkung auf m regeln. Heben sich die Einwirkungen gegen einander auf, dann liegt ein Gleichgewichtszustand vor, und wir haben

$$
(2) \qquad X = \Sigma X_n = 0, \qquad Y = \Sigma Y_n = 0, \qquad Z = \Sigma Z_n = 0.
$$

So ordnet sich bei Newton der Gleichgewichtszustand der Kräfte ebenso dem Bewegungszustand der Kräfte unter, wie die Ruhe nur ein specieller Fall der Bewegung ist.

§ 39. Das Newton'sche Reactionsprincip und sein Verhältniss zu den beiden ersten Principen.

Während die beiden ersten Bewegungsgesetze Newton's durch Einführung des Begriffs der Masse den Galilei'schen Trägheitssatz und den Galilei'schen Begriff der Beschleunigung erweitern, führt das dritte Bewegungsgesetz einen ganz neuen Gesichtspunkt in die

Behandlung, durch welchen die Zahl der Postulate erst einen gewissen Abschluss erfährt.

Dieser Grundsatz weist uns darauf hin, dass die ausschliesslich an das Studium einer Actio geknüpfte Betrachtung der Wirklichkeit unvollständig bleibt und der Natur der Sache nach unvollständig bleiben muss. Actionen, Wirkungen treten in der Natur niemals isolirt auf, mit ihnen treten stets zusammen Reactionen, Gegenwirkungen auf. Diese müssen bei einer vollständigen Untersuchung einer Erscheinung aufgesucht werden, und wenn ihre Existenz nicht gleich sichtbar und deutlich in Erscheinung treten sollte, dann muss sie gefordert werden.

Haben wir das zweite Newton'sche Bewegungsgesetz als Actionsprincip bezeichnet, so haben wir das dritte als Reactionsprincip zu bezeichnen. Während die beiden ersten Bewegungsgesetze die Aufmerksamkeit auf den Bewegungszustand einer Masse concentriren, lenkt das dritte Bewegungsgesetz die Aufmerksamkeit auf das Bestehen einer gegensätzlichen, reciproken Beziehung zwischen mindestens zwei Massen hin; wir können das hier vorliegende Princip daher vielleicht auch als Reciprocitätsprincip charakterisiren.

Bei Bewegungsvorgängen fester Körper in Gasen oder Flüssigkeiten treten Widerstands- und Reibungskräfte als Reactionen auf, die sich über grössere Räume innerhalb des widerstehenden Mediums vertheilen und eine Beschreibung der thatsächlich vorliegenden Bewegungserscheinungen sehr compliciren können. Gerade in Hinblick auf diese können wir bei einer Vergleichung der drei Newton'schen Leges sagen:

Lex I und II beziehen sich auf theoretisch sehr einfache Vorgänge, die sich praktisch, streng genommen, in ihrer Isolirung gar nicht verwirklichen lassen. Lex III bezieht sich auf theoretisch complicirte Vorgänge, die praktisch ihre beständige Verwirklichung finden. Die fruchtbare Verwerthung von Lex I und II beruht in der Folge wesentlich auf ihrer Anwendung als Elementarprincip, ihrer Anwendung auf infinitesimale Verhältnisse. Die fruchtbare Verwerthung von Lex III beruht in der Folge wesentlich auf seiner Anwendung als Integralprincip, seiner Anwendung auf endliche Verhältnisse.

Der Charakter als Postulat beruht bei Lex I und II auf der Complication, die sich einer exacten praktischen Realisirung ihres Inhalts entgegenstellt — bei Lex III auf der Complication der Vorgänge, die sich einer theoretischen Verfolgung im Einzelnen entgegenstellt.

Alle diese Erwägungen und Unterschiede erscheinen höchst überflüssig, wenn man sich nicht die Rolle vergegenwärtigt, welche das Argument der Induction bei solchen Untersuchungen zu spielen hat. Uebersieht man dieses, dann könnte man ja einfach sagen, und man hat es gesagt: Die in Lex I, II und III niedergelegten Postulate sind von vornherein für infinitesimale Verhältnisse auszusprechen. Aber dann entzieht man eben im Sinne der Newton'schen Mechanik den Inhalt dieser Postulate dem Erfahrungskreise, auf den jene nun einmal hinweisen und hinweisen müssen.

§ 40. Untersuchung der Frage, ob Newton die Vorstellung der Druckkräfte oder der Fernkräfte bevorzugt.

Die Newton'schen Bewegungsgesetze beanspruchen unabhängig von besonderen Anschauungen und Vorstellungen eine allgemeine Gültigkeit für die äussere Wirklichkeit; wie man sich ihren Inhalt zu veranschaulichen sucht, wird daher gleichgültig sein. Es ist aber nicht ohne Interesse zu verfolgen, welche Anschauungen und Vorstellungen zur naturwissenschaftlichen Begründung Newton selbst bevorzugt hat.

Da kann nun nach dem Wortlaut von Lex I und II kein Zweifel sein, dass Newton die Vorstellung der Druckkraft als der Anschauung am nächsten liegend bevorzugt; darauf deutet der wiederholt durch Definition IV eingeführte Ausdruck der „vis impressa“ oder der „vis motrix impressa“.

Dem Begriff der Druckkraft kann physikalisch gegenübergestellt werden der Begriff der Fernkraft, welcher durch Newton's Aufstellung des nach ihm benannten Gravitationsgesetzes in die Wissenschaft eingeführt ist. Wir können kurz sagen: Druckkräfte wirken auf die Fläche, Fernkräfte auf die Masse, auf das Volumen.

Die Aufstellung des Gravitationsgesetzes übte eine derartig fördernde Wirkung auf die Entwickelung der Physik und Astronomie aus, dass die Anschauung der Fernkraft bald als geläufig galt, und als nun gar die elektrischen und magnetischen Kräfte unter dem Bilde der Fernkraft aufgefasst wurden, galt der Begriff der Fernkraft als derartig anschaulich, dass es Poisson zeitgemäss schien, den Begriff der elastischen Druckkraft gleichfalls auf Fernkräfte zurückzuführen. Eine solche gegenseitige Zurückführung von Druckkräften auf Fernkräfte und umgekehrt von Fernkräften auf Druckkräfte bereitet mathematisch keine Schwierigkeit, und es kann natürlich durch eine solche Zurückführung nichts bewiesen werden betreffs der Frage, ob die physikalische Anschauung naturgemäss an Fernkräfte oder Druckkräfte anzuknüpfen haben wird.

Newton hat über die Beziehung beider Auffassungen speculirt und das Resultat seiner Bemühungen in dem Scholium generale seiner Principien niedergelegt. Auch hier bevorzugt er die Anschauung der Druckwirkung, wenn er sagt:[1] „Rationem vero harum gravitatis proprietatum ex phaenomenis nondum potui deducere et hypotheses non fingo. Quicquid enim ex phaenomenis non deducitur, hypothesis vocanda est; et hypotheses seu metaphysicae seu physicae, seu qualitatum occultarum, seu mechanicae in philosophia experimentali locum non habent. In hac philosophia propositiones deducuntur ex phaenomenis, et redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas et impetus corporum et leges motuum et gravitatis innotuerunt. Et satis est quod gravitas re vera existat et agat secundum leges a nobis expositas, et ad corporum caelestium et maris nostri motus omnes sufficiat."

1) S. 530 des von Thomson und Blackburn 1871 veranstalteten Wiederabdrucks der dritten Auflage der Principien.

II. 3) Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf die Behandlung freier Bewegungen eines Massenpunktes.

§ 41. Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf den Vorgang des unelastischen Stosses zweier Massen.

Wir wenden die Newton'schen Grundsätze zuerst auf den unelastischen Stoss zweier materieller Körper an, die wir der Einfachheit der mathematischen Beziehung wegen wieder als materielle Punkte in die Rechnung einführen. Die Massen der beiden Punkte, zu deren Bestimmung eine Methode bis jetzt allerdings nicht angegeben wurde — der Natur der Sache entsprechend auch nicht angegeben werden konnte — seien m_1 und m_2, ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoss v_1 und v_2. Damit ein Stoss überhaupt zu Stande kommt, ist es natürlich nothwendig, dass sich beide Massen treffen. Wir behandeln den speciellen Fall, dass sich beide Massen auf einer Linie bewegen und entweder eine Bewegung gegen einander oder eine Bewegung hinter einander haben, bei der die eine Masse die andere einholt. Der unelastische Stoss ist dadurch charakterisirt, dass beide Massen nach dem Stoss zusammenbleiben und eine gemeinsame Geschwindigkeit v annehmen oder auch im Speciellen jede Geschwindigkeit vernichten.

Die Anwendung des ersten Newton'schen Grundsatzes, des Trägheitsprincips, gewährt die Folgerung, dass beide Massen m_1, m_2 ihre anfänglichen Geschwindigkeiten v_1, v_2 bis zum Stossvorgang nach Grösse und Richtung behalten.

Die Anwendung des zweiten Newton'schen Grundsatzes, des Actionsprincips, setzt die Actio des Stosses von m_2 auf m_1 zu: $m_1 (v_1 - v)$, die Actio des Stosses von m_1 auf m_2 zu: $m_2 (v_2 - v)$ an.

Die Anwendung des dritten Newton'schen Grundsatzes, des Reactionsprincipes, fasst den Stoss von m_1 auf m_2 als Reactio auf, wenn der Stoss von m_2 auf m_1 als Actio gefasst wird — und umgekehrt den Stoss von m_2 auf m_1 als Reactio, wenn der Stoss von

m_1 auf m_2 als Actio gefasst wird; sie fordert, dass beide gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet in Ansatz gebracht werden, also:

$$m_1 (v_1 - v) = - m_2 (v_2 - v).$$

Wir können aus dem Resultat, welches das Reactionsprincip gewährt hat, eine Reihe von Folgerungen entnehmen:

Sind die Massen m_1, m_2 irgendwie — unter Hinzuziehung später zu entwickelnder Methoden — gegeben, so folgt für die resultirende Geschwindigkeit nach dem Stossvorgange

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Setzen wir diesen Werth für v in den Actionswerth ein, so folgt für die Grösse der Actio:

$$m_1 (v_1 - v) = - m_2 (v_2 - v) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

Man erkennt hieraus: die Grösse des Stosses zweier Massen ist abhängig von der Grösse beider Massen und beider anfänglichen Geschwindigkeitswerthe.

Eine weitere Folgerung hat die Angabe einer Methode zum Ziel, das Verhältniss der aufeinander stossenden Massen zu bestimmen. Werden die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stossvorgang also v_1, v_2, v gemessen, so folgt: $m_1/m_2 = (v - v_2)/(v_1 - v)$. Wählen wir die anfänglichen Geschwindigkeiten v_1, v_2 so, dass die nach dem Stossvorgang resultirende Geschwindigkeit verschwindet, dann wird: $m_1/m_2 = - v_2/v_1$. Die Massen stehen im umgekehrten Verhältniss zu den Geschwindigkeiten, mit denen sie auf einander stossen müssen, um die resultirende Geschwindigkeit Null zu ergeben. Praktisch sind alle diese Methoden zur Massenbestimmung natürlich sehr unvollkommen; ihr Werth ist mehr ein theoretischer. Die abstracten Newton'schen Grundsätze geben ihrer Natur nach keine Methoden, Massen zu vergleichen, und können solche nicht geben; erst die Anwendung auf concrete Naturvorgänge gewährt solche, und das wird in theoretisch sehr brauchbarer Weise am Vorgang des unelastischen Stosses erläutert.

Wir schliessen diese theoretischen Betrachtungen des unelastischen Stosses mit dem Hinweis, dass unsere Theorie keinen Bezug auf die speciellen Vorgänge während des Stosses genommen hat. Die Aufmerksamkeit wurde ausschliesslich auf die Vorgänge vor und nach dem Stossvorgange concentrirt, und auf diese wurden die Newton'schen Grundsätze angewandt.

§ 42. Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf das Zwei-Körperproblem der Newton'schen Gravitation.

Wir gehen nun dazu über, die Newton'schen Grundsätze auf die Bewegungsvorgänge der Planeten um die Sonne unter Voraussetzung der Gültigkeit des Newton'schen Gravitationsgesetzes anzuwenden; und zwar beschränken wir uns der Einfachheit halber, wo es uns in erster Linie darauf ankommt, die Anwendung der Newton'schen Grundsätze kennen zu lernen, auf das sogenannte Zweikörperproblem: Bewegung eines Planeten um die Sonne ohne Rücksicht auf die Existenz der anderen Planeten. Eine vollständige Betrachtung würde uns auch die Einführung der anderen Planeten mit ihren gravitirenden Wirkungen als nothwendig erscheinen lassen. Der Erfolg spricht aber dafür, dass die folgende Betrachtung des Zweikörperproblems bereits das Wesentlichste der Planetenbewegung wiedergiebt. Das Dreikörper- oder das Mehrkörperproblem und seine Anwendung auf das Planetensystem hat vorwiegend astronomisches Interesse — übrigens giebt es auch zur Zeit noch keine strenge mathematische Lösung des Dreikörperproblems; die zur Zeit vorliegenden Lösungen sind Näherungslösungen, welche sich an die Lösung des Zweikörperproblems mehr oder weniger anlehnen.

Der Einfachheit der mathematischen Beziehung wegen führen wir Sonne und Planet wieder als materielle Punkte in die Rechnung. Wir dürfen dies, da die Entfernungen, in denen sich die Planeten von der Sonne halten, so gross sind, dass für die Mehrzahl der anknüpfenden und einschlägigen Fragen die Ausdehnung der Sonne und der Planeten dagegen nicht in Betracht kommt. Wir greifen hier — streng genommen — späteren Entwickelungen der Vorlesung vor.

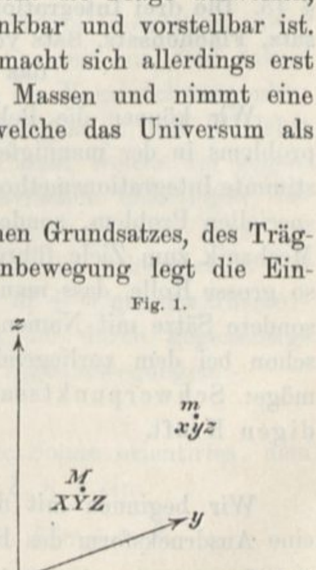
Die Massen der Sonne und des Planeten seien M und m; zu ihrer Bestimmung bietet sich zunächst direct keine Möglichkeit dar. Wir überlassen es der Theorie der Planetenbewegung und ihren Consequenzen, ob sich aus ihr heraus die Möglichkeit darbieten wird, diese Massen zu bestimmen. Die Anwendung der Newton'schen Grundsätze fordert jedenfalls, dass wir feste Grössen als Massen für Sonne und Planet einführen.

Was das Newton'sche Gravitationsgesetz betrifft, das hier zum ersten Mal in der Rechnung auftreten soll, so ist schon früher bemerkt, dass wir dieses als ein specielles Naturgesetz aufzufassen haben, welches sich als solches den Newton'schen Grundsätzen unterordnen muss, diesen also nicht widersprechen darf, welches darum aber nicht mit diesen Grundsätzen selbst verquickt werden darf. Es wird um so sorgfältiger von diesen auseinanderzuhalten sein, wenn wir hier an neuere Untersuchungen von Hugo Seeliger und Carl Neumann erinnern, welche die Möglichkeit von Grenzen oder Schranken für die Gültigkeit des Gesetzes in Erwägung ziehen. Gesetze mit beschränkter Gültigkeit können aber unmöglich für die Grundlegung eines wissenschaftlichen Systems als geeignet erachtet werden, dazu sind Postulate nöthig, deren unbeschränkte Gültigkeit wir behaupten müssen. Wenn wir hier das Newton'sche Gravitationsgesetz einführen, dann wollen wir an ihm als an einem Beispiel die Tragweite der Newton'schen Grundsätze erproben.

Das Newton'sche Gravitationsgesetz besagt, dass zwei ponderable Massenpunkte m_1, m_2 in der Entfernung r mit einer Kraft (Actio) in der Richtung der Verbindungslinie im Sinne einer Näherung aufeinander wirken, welche proportional $m_1 m_2/r^2$ oder welche gleich $f\,m_1 m_2/r^2$ ist, wo f ein Factor bedeutet, dessen Grösse wesentlich von den zu Grunde liegenden Maasseinheiten abhängt. Wir werfen hier nicht die Frage auf, wie das Newton'sche Gravitationsgesetz gefunden ist, wir rechnen hier mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz als einer durch die Natur gegebenen Voraussetzung. Erst am Ende dieses Abschnitts wollen wir auch die historische Entwickelung würdigen, wie das Gravitationsgesetz gewonnen ist. Wir wollen auch nicht die Frage aufwerfen, wie eine solche Wirkung in die Ferne denkbar und vorstellbar ist. Thatsache ist: diese Wirkung ist da. Sie macht sich allerdings erst deutlich bemerkbar bei hinlänglich grossen Massen und nimmt eine kolossale Stärke erst bei den Massen an, welche das Universum als Sonne und Planeten erfüllen.

Die Anwendung des ersten Newton'schen Grundsatzes, des Trägheitsprincips, auf die Theorie der Planetenbewegung legt die Einführung eines im Raume festen geradlinigen Coordinatensystems nahe, der Einfachheit der mathematischen Darstellung wegen: eines rechtwinkligen. Die Coordinaten der Sonne — als Punkt genommen — seien X, Y, Z entsprechend der Masse M, die Coordinaten des Planeten — gleichfalls als Punkt genommen — seien x, y, z entsprechend der Masse m.

Fig. 1.



Die Anwendung des zweiten Newton'schen Grundsatzes, des

Actionsprincips, setzt die Componenten der Actionen auf M und auf m in Verbindung mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz in der Form an:

$$
(1)\quad \begin{aligned}
M\frac{d^2X}{dt^2} &= f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{x-X}{r}, & m\frac{d^2x}{dt^2} &= -f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{x-X}{r},\\
M\frac{d^2Y}{dt^2} &= f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{y-Y}{r}, & m\frac{d^2y}{dt^2} &= -f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{y-Y}{r},\\
M\frac{d^2Z}{dt^2} &= f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{z-Z}{r}, & m\frac{d^2z}{dt^2} &= -f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{z-Z}{r}.
\end{aligned}
$$

Die Anwendung des dritten Newton'schen Grundsatzes, des Reactionsprincips, führt hier zu keiner neuen Gleichung. Es zeigt sich, dass die Gleichungen, welche das Reactionsprincip fordert:

$$
(2)\quad M\frac{d^2X}{dt^2} = -m\frac{d^2x}{dt^2},\quad M\frac{d^2Y}{dt^2} = -m\frac{d^2y}{dt^2},\quad M\frac{d^2Z}{dt^2} = -m\frac{d^2z}{dt^2},
$$

hier bereits identisch erfüllt sind. Es liegt das daran, dass in der ganzen Fassung des Newton'schen Gravitationsgesetzes, nach dem die Wirkung zweier Massen M und m aufeinander im Sinne einer Näherung der Massen gleich $f\,Mm/r^2$ gesetzt wird, der nothwendigen Gültigkeit des Reactionsprincips bereits Rechnung getragen ist.

§ 43. Die drei Integrationsmethoden der Mechanik: Schwerpunktssatz, Flächensatz, Satz von der lebendigen Kraft — angewandt auf das Zwei-Körperproblem.

Wir können die Behandlung der Gleichungen des Zweikörperproblems in der mannigfaltigsten Weise angreifen. Es sind ganz bestimmte Integrationsmethoden, welche nicht blos bei dem vorliegenden speciellen Problem, sondern auch in den allgemeinen Problemen der Mechanik zum Ziele führen, und diese spielen in der Mechanik eine so grosse Rolle, dass man die Resultate, zu denen sie führen, als besondere Sätze mit Namen bezeichnet hat — Sätze, auf welche daher schon bei dem vorliegenden speciellen Problem hingewiesen werden möge: Schwerpunktssatz, Flächensatz, Satz von der lebendigen Kraft.

Wir beginnen mit dem Schwerpunktssatz, welcher sich als eine Ausdrucksform des Reactionsprincips darstellt.

Die Addition der horizontal in einer Reihe stehenden Gleichungen des Zweikörperproblems führt zu den Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} M\frac{d^2X}{dt^2}+m\frac{d^2x}{dt^2}&=0,\\ M\frac{d^2Y}{dt^2}+m\frac{d^2y}{dt^2}&=0,\\ M\frac{d^2Z}{dt^2}+m\frac{d^2z}{dt^2}&=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen eine sofortige zweimalige Integration zu:

$$(2)\qquad \begin{aligned} MX+mx&=c_1t+c_1',\\ MY+my&=c_2t+c_2',\\ MZ+mz&=c_3t+c_3'.\end{aligned}$$

Sie geben Veranlassung, einen neuen geometrischen Punkt einzuführen, dessen Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ durch die Gleichungen definirt werden mögen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} MX+mx&=(M+m)\,\bar{x},\\ MY+my&=(M+m)\,\bar{y},\\ MZ+mz&=(M+m)\,\bar{z}.\end{aligned}$$

Wir nennen diesen so definirten Punkt: den Massenmittelpunkt, vulgär den Schwerpunkt der Massen M und m — eine Bezeichnung, die sich inhaltlich vollkommen mit dem deckt, was man sonst in der Physik Schwerpunkt nennt, worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Jedenfalls sagt unsere zweimal durchgeführte Integration etwas über die Bewegung des Schwerpunkts des Systems aus, und darum ist zur Bezeichnung der Integrationsmethode der Name Schwerpunktssatz eingeführt. Die Verbindung der Gleichungen (2) und (3) lehrt nämlich: Der Schwerpunkt von Sonne und Planet, welche der gegenseitigen Einwirkung der Newton'schen Gravitation unterliegen, bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie im Weltraum fort. Anders ausgedrückt: Für die im Schwerpunkt von Sonne und Planet vereinigt gedachten Massen $M+m$ gilt das Galilei-Newton'sche Trägheitsprincip unbeschadet der durch gegenseitige Wirkung von Sonne und Planet bedingten Eigenbewegungen.

Wir führen jetzt ein in Bezug auf die Sonne orientirtes, dem x, y, z System paralleles Coordinatensystem ξ, η, ζ ein:

$$(4)\qquad \xi=x-X,\qquad \eta=y-Y,\qquad \zeta=z-Z.$$

Die Subtraction der in einer horizontalen Linie stehenden Gleichungen des Zweikörperproblems § 42 (1) ergiebt dann:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
\frac{d^2(x-X)}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{x-X}{r^3}, & \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{\xi}{r^3},\\
\frac{d^2(y-Y)}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{y-Y}{r^3}, & \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{\eta}{r^3},\\
\frac{d^2(z-Z)}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{z-Z}{r^3}, & \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -f(M+m)\frac{\zeta}{r^3}.
\end{aligned}
$$

Führen wir zur Abkürzung der Bezeichnung jetzt ein:

$$(6)\qquad \gamma = f(M+m)$$

und verfügen über die Orientirung des x, y, z bezw. des ξ, η, ζ Systems, welche bisher beliebig gewählt war, derart, dass Sonne, Planet und relative Bewegungsrichtung des Planeten zur Sonne in der $\xi\eta$-Ebene liegen, dann wird $\zeta = 0$; liegt nämlich die relative Bewegungsrichtung des Planeten zur Sonne in einem Augenblick in der $\xi\eta$-Ebene, dann wird sie nach den Newton'schen Grundsätzen in Verbindung mit dem Gravitationsgesetz dauernd in die $\xi\eta$-Ebene fallen. Die weitere Behandlung des Zweikörperproblems concentrirt sich so auf die beiden Differentialgleichungen:

$$(7)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\gamma\frac{\xi}{r^3}, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\gamma\frac{\eta}{r^3}.$$

Die zweite durch den Namen des Flächensatzes charakterisirte Integrationsmethode besteht nun darin, dass wir die erste der beiden Gleichungen (7) mit η, die zweite mit ξ multipliciren und beide Gleichungen von einander subtrahiren. Wir erhalten dann:

$$(8)\qquad \xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0.$$

Diese Gleichung lässt eine unmittelbare Integration zu:

$$(9)\qquad \xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} = c,$$

und damit ist der Flächensatz gegeben; seine Bedeutung ergiebt sich in grösserer Klarheit, wenn wir Polar-Coordinaten an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten ξ, η einführen:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= r\cos\varphi, & d\xi &= dr\cos\varphi - r d\varphi \sin\varphi,\\
\eta &= r\sin\varphi, & d\eta &= dr\sin\varphi + r d\varphi\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung (9) führt dann auf:

$$(11)\qquad r^2\frac{d\varphi}{dt} = c,$$

eine Gleichung, welche besagt, dass der Radiusvector von Sonne nach

Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume bestreicht. Jedenfalls stellt sich die Integrationsconstante c bei der Planetenbewegung als eine endliche Grösse dar. Dagegen würde c in dem Gravitationsproblem verschwinden, in dem die gravitirenden Massen sich in der Richtung ihrer Verbindungslinie bewegen.

Die dritte durch den Namen des Satzes von der lebendigen Kraft charakterisirte Integrationsmethode besteht darin, dass wir die Gleichungen (7) der Reihe nach mit $d\xi$, $d\eta$ bezw. $(d\xi/dt)\, dt$, $(d\eta/dt)\, dt$ multipliciren und addiren:

$$\frac{d\xi}{dt}\, d\,\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\, d\,\frac{d\eta}{dt} = -\gamma\,\frac{\xi d\xi + \eta d\eta}{r^3} = -\gamma\,\frac{dr}{r^2}. \tag{12}$$

Die Integration liefert:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right) = \frac{\gamma}{r} - h\,^{1)} \tag{13}$$

oder in den Polarcoordinaten (10):

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) = \frac{\gamma}{r} - h. \tag{14}$$

Man versteht unter lebendiger Kraft einer Masse m in der Mechanik das halbe Product der Masse in ihr Geschwindigkeitsquadrat. Multipliciren wir die Gleichung (14) mit der Masse des Planeten m, so steht auf der linken Seite die lebendige Kraft des Planeten, und danach führt die Integrationsmethode ihren Namen. Wenn sich in der Gleichung (14) m heraushebt, so hängt das mit der Eigenart der Gravitation zusammen, der Masse proportional zu wirken. Wir werden später gelegentlich der allgemeinen mechanischen Probleme sehen, dass sich in dem allgemeinen Satz der lebendigen Kraft die Masse nicht herausheben wird.

§ 44. Discussion und Bestimmung der Bahncurven der Planeten als Ellipsen. Einführung der excentrischen Anomalie. Ableitung der Umlaufszeit der Planeten.

Wir knüpfen eine weitere Discussion an die Gleichungen (11) und (14) des letzten Paragraphen:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c, \tag{1}$$

1) Wir bezeichnen die Integrationsconstante hier mit $-h$ in specieller Rücksicht auf die Planetenbewegung, indem wir der weiteren Behandlung vorgreifen. cf. nächsten Paragraph.

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2\gamma}{r} - 2h. \tag{2}$$

Die Elimination von $d\varphi/dt$ liefert die weitere Gleichung:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{c^2}{r^2} + \frac{2\gamma}{r} - 2h. \tag{3}$$

Berücksichtigen wir, dass nach (2) $2\gamma/r - 2h$ stets positiv ist, so folgt aus (3), dass mit abnehmendem r dr/dt sich der Null nähert und diese auch irgendwo erreicht, falls nicht der specielle Fall vorliegt, dass $c = 0$ ist; dann liegt aber überhaupt keine Planetenbewegung vor, dann handelt es sich um den centralen Fall einer Masse m gegen M. Es folgt also, dass wir für

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{-\frac{c^2}{r^2} + \frac{2\gamma}{r} - 2h} \tag{4}$$

das doppelte Vorzeichen werden berücksichtigen müssen; wir werden nur zu untersuchen haben, wann das obere und wann das untere Zeichen zu wählen ist. Da nun dt, das Zeitelement, stets positiv ist, wird dr mit der Wurzel gleiches Vorzeichen haben müssen, und beide werden bei der Stetigkeit der Bewegung auch gleichzeitig durch Null hindurchgehen müssen; an dieser Stelle wird sich aber der gleichzeitige Vorzeichenwechsel von dr und der Wurzel vollziehen. Suchen wir diese Stelle auf:

Diese Stelle ist durch die Wurzeln der Gleichung gegeben:

$$\Phi = -\frac{c^2}{r^2} + \frac{2\gamma}{r} - 2h = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 2hc^2}}{c^2}.$$

Wäre nun die Integrationsconstante h (cf. § 43 (13)) negativ, so würde die eine Wurzel $1/r$ positiv, die andere negativ sein. Da aber eine Entfernung nur positiv sein kann, so würde der negativen Wurzel $1/r$ keine physikalische Bedeutung zukommen können; es würde dann Φ und damit dr/dt in (4) oder dr nur einmal das Vorzeichen wechseln, die Bahn würde also keine geschlossene, wie z. B. bei der Ellipse, sondern eine offene wie bei der Parabel oder Hyperbel sein. Hier wäre also die Stelle, wo sich die Theorie der Kometen von der der Planeten abzuzweigen hätte.[1])

---

1) Es liegt nicht in der Absicht der Vorlesung, auf diese Eventualitäten hier genauer einzugehen. Man sehe die Darstellung anderer Autoren wegen der Theorie der Kometenbahnen ein.

Die Planetenbahnen sind erfahrungsgemäss geschlossene Bahnen, für sie kann also die Integrationsconstante h (cf. § 43 (13)) nicht negativ sein, und darum haben wir der Behandlung vorgreifend dort gleich geschrieben $\gamma/r - h$. Es muss ferner für die Planetenbewegung $\gamma^2 - 2hc^2 > 0$ sein, denn nur dann sind die beiden Wurzeln $1/r$ der Gleichung $\Phi = 0$ positiv, und der Ausdruck dr/dt in (4) kann wiederholt das Vorzeichen wechseln, wie es der Planetenbewegung entspricht, bei der eine abwechselnde Näherung und Entfernung der Planeten von der Sonne stattfindet.

Wir sind nun genügend vorbereitet, die Bahngleichung für die Planetenbewegung aufzustellen. Die Elimination von dt aus (1) und (3) liefert:

$$(5)\quad d\varphi = \frac{c\,dr}{\pm r^2\sqrt{-\frac{c^2}{r^2} + 2\frac{\gamma}{r} - 2h}} = -\frac{c\,d\varrho}{\pm\sqrt{-c^2\varrho^2 + 2\gamma\varrho - 2h}}, \text{ wo } \varrho = \frac{1}{r}.$$

Die Integration führt auf:

$$(6)\quad \varphi - \varphi_0 = -\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{c\,d\varrho}{\sqrt{-c^2\varrho^2 + 2\gamma\varrho - 2h}} = \left| \operatorname{arc\,cos} \frac{c^2\varrho - \gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 2hc^2}} \right|_{\varrho_0}^{\varrho}.$$

Hierin sind ϱ_0, φ_0 ebenso zusammengehörige Werthe, wie es ϱ, φ sind. Wir haben noch freie Verfügung, welches zusammengehörige Werthepaar ϱ, φ wir als ϱ_0, φ_0 wählen wollen; wir wählen ϱ_0 so, dass dafür der arc cos verschwindet, dann ist:

$$\frac{c^2\varrho_0 - \gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 2hc^2}} = 1, \text{ also } \varrho_0 = \frac{1}{r_0} = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 2hc^2}}{c^2}.$$

Es war dies aber einer der Werthe, für welche Φ gleich Null wurde, und zwar war es der grössere Werth von $1/r$, also der kleinere Werth von r, für den dr sein Zeichen ändert; d. h. der Radiusvector ist für diesen Werth nach dem Perihel, nach der Sonnennähe gerichtet. Rechnen wir von diesem Radiusvector den Polarwinkel φ, dann haben wir $\varphi_0 = 0$, und die Gleichung (6) wird:

$$(7)\quad \cos\varphi = \frac{\frac{c^2}{r} - \gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 2hc^2}}, \quad r = \frac{\frac{c^2}{\gamma}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2hc^2}{\gamma^2}}\cos\varphi}.$$

Das aber ist die Gleichung einer Ellipse in Polarcoordinaten. Es ist damit die Thatsache, dass die Planeten in Ellipsen die Sonne umkreisen, als eine Folge des Newton'schen Gravitationsgesetzes unter Hinzuziehung der Newton'schen Grundsätze abgeleitet.

Zwischen der grossen Axe a, der kleinen Axe b und der Excentricität e einer Ellipse besteht nun bekanntlich die Beziehung $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, und es ist die Gleichung einer Ellipse in diesen Grössen:

$$(8) \qquad r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \cos\varphi} = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\varphi}.$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit (7) liefert:

$$(9) \qquad c^2 = \frac{b^2}{a} \cdot \gamma = a(1-e^2)\gamma, \qquad 2h = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{\gamma}{a}.$$

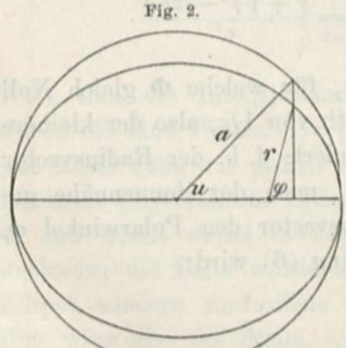
Unser nächstes Ziel ist die Beziehung zwischen dem Polarwinkel φ — der wahren Anomalie, wie der terminus technicus in der Astronomie lautet — und der Zeit t aufzustellen; im Besonderen einen Ausdruck für die Umlaufszeit T der Planeten um die Sonne zu gewinnen.

Wir knüpfen an die Gleichung (1) und setzen darin für r den Ausdruck (8), dann folgt unter Entnahme des Ausdrucks für c aus (9):

$$dt = \frac{r^2}{\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\sqrt{\gamma}}\, d\varphi = \frac{a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}.$$

Wir wählen den Anfangspunkt der Zeit so, dass für $t = 0$ $\varphi = 0$ ist, und gewinnen damit den Integralausdruck:

Fig. 2.



$$(10) \qquad t = \frac{a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\gamma}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}.$$

Wir führen zur Behandlung dieses Integrals die excentrische Anomalie u ein, die wir in folgender Weise definiren: Wir schlagen um die grosse Halbachse der Bahnellipse einen Kreis und denken uns auf diesem Kreise die Bewegung eines fingirten Planeten vor sich gehend, der mit dem wirklichen Planeten auf der Bahnellipse gleichzeitig Perihel und Aphel passirt; des Näheren ist die Lage des fingirten Planeten in jedem

Augenblick durch Verlängerung und Schnitt des Lothes vom wirklichen Planeten auf die grosse Axe mit jenem Kreise gegeben. Die excentrische Anomalie u ist dann der Winkel, den die Verbindungslinie von Kreismittelpunkt und fingirtem Planeten mit der grossen Axe bildet.

Nach dieser Definition haben wir zwischen excentrischer Anomalie u, wahrer Anomalie φ und Radiusvector r von Sonne nach Planet die Beziehung:

$$a \cos u - ae = r \cos \varphi \tag{11}$$

oder, wenn wir aus (8) r durch φ ersetzen:

$$(\cos u - e)\,(1 + e \cos \varphi) = (1 - e^2) \cos \varphi,$$

also:

$$\cos \varphi = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}, \qquad \sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin u}{1 - e \cos u}.$$

Aus:

$$d\left(\frac{1}{1 + e \cos \varphi}\right) = d\left(\frac{1 - e \cos u}{1 - e^2}\right)$$

folgt weiter:

$$\frac{e \sin \varphi \, d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \frac{e \sin u \, du}{1 - e^2},$$

mithin:

$$\frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \frac{1 - e \cos u}{(1 - e^2)^{3/2}}\, du.$$

Es wird damit die Gleichung (10):

$$t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\gamma}} \int_0^u (1 - e \cos u)\, du = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\gamma}} (u - e \sin u). \tag{12}$$

Indem nun für $\varphi = 2\pi$ $u = 2\pi$ ist, folgt die Umlaufszeit des Planeten T:

$$T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\gamma}} \cdot 2\pi$$

oder der Werth γ, cf. § 43 (6):

$$\gamma = f(M + m) = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}. \tag{13}$$

Das Verhältniss des Cubus der grossen Axen zum Quadrat der Umlaufszeit der Planeten — dieses Verhältniss, welches im dritten Kepler'schen Gesetz eine Rolle spielt — ergiebt sich danach als im

Wesentlichen durch die Sonnenmasse, genauer durch die Summe der Massen aus Sonne und Planet bedingt.

§ 45. Rückblick auf die Kepler'schen Regeln und Herleitung des Newton'schen Gravitationsgesetzes daraus.

Der bisher von uns eingeschlagene Weg, welcher den Inhalt des Newton'schen Gravitationsgesetzes zum Ausgangspunkt wählte, hat den Vorzug, direct und schnell ohne Umwege in die Theorie der Planetenbewegung einzuführen, welche dem gegenwärtigen Standpunkt der Wissenschaft entspricht. Nun, wo das Ziel als erreicht angesehen werden kann, ist es im höchsten Grade lehrreich, einen Rückblick auf die wissenschaftliche Entwickelung zu werfen, welche zur Aufstellung des Newton'schen Gravitationsgesetzes führte.

Das geschichtliche Studium eines Problems bildet eine wesentliche Vertiefung in das Problem selbst, aber es setzt auch eine grössere Reife voraus. Solche historischen Studien führen einer Erkenntnisstheorie dankbares Material zu und gewähren uns die Anregung, wie wir zu verfahren haben, um für weniger bekannte Probleme die Angriffspunkte einer exacten Behandlung zu finden.

Die Geschichte der Entdeckung des Newton'schen Gravitationsgesetzes knüpft an die drei Kepler'schen Regeln, — auch schlechtweg häufig als Gesetze benannt, — welche der astronomischen Beobachtung entnommen waren:

1. Der von der Sonne nach dem Planeten gezogene Radiusvector beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

2. Die Bahn jedes Planeten ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

3. Für verschiedene Planeten verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Cuben der grossen Axen.

Wir stellen uns die Aufgabe, unter Einführung der allgemeinen Newton'schen Grundsätze den theoretischen Werth dieser Kepler'schen Regeln zu untersuchen, insbesondere ihre Beziehung zu dem speciellen Newton'schen Gravitationsgesetze aufzudecken.

Die Kepler'schen Regeln legen zunächst die Einführung unseres relativen Coordinatensystems ξ, η nahe. Die erste Kepler'sche Regel ist nichts anderes als unser Flächensatz § 43 (9); befindet sich der Planet zur Zeit t an der Stelle ξ, η, zur Zeit $t + dt$ an der Stelle

$\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, dann haben wir nach der ersten Kepler'schen Regel:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \xi & \xi + d\xi \\ \eta & \eta + d\eta \end{vmatrix} = \xi d\eta - \eta d\xi = c dt.$$

Es folgen daraus die Gleichungen:

$$(2)\qquad \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} = c, \qquad \xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0.$$

Führen wir in (2) das Newton'sche Actionsprincip ein, so erhalten wir $m\, d^2\xi/dt^2 : m\, d^2\eta/dt^2 = \xi : \eta$.

$$(3)\qquad \begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= R\frac{\xi}{r}, \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} &= R\frac{\eta}{r}. \end{aligned}$$

Die hierin als Proportionalitätsfactor auftretende Grösse R erkennen wir in ihrer physikalischen Bedeutung als Ausdruck für die aufzusuchende Gravitationskraft, welche sich hier zunächst als Centralkraft in der Richtung des Radiusvector von Sonne nach Planet wirkend darstellt.

Der weitere Schritt ist, diese Kraft R in der Richtung der Verbindungslinie wirkend als Function der Entfernung darzustellen und dem Vorzeichen nach richtig zu bestimmen. Die Möglichkeit dazu eröffnet die zweite Kepler'sche Regel in Verbindung mit den aus der ersten Kepler'schen Regel gezogenen Consequenzen (3):

Wir beziehen die durch die zweite Kepler'sche Regel gegebene Bahnellipse auf Polarcoordinaten:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\varphi}, \qquad r = -e\xi + a(1-e^2)$$

und bilden:

$$(4)\qquad \frac{d^2r}{dt^2} = -e\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{R}{m}\frac{e\xi}{r} = \frac{R}{m}\left(1 - \frac{a(1-e^2)}{r}\right).$$

Wir bilden zweitens einen Ausdruck für d^2r/dt^2, ausgehend von $r^2 = \xi^2 + \eta^2$ und von

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\xi}{r}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\eta}{r}\frac{d\eta}{dt},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{\xi}{r}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\eta}{r}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\left(\xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt}\right)\right\} \\ &= \qquad \frac{R}{m} \qquad + \frac{1}{r^3}\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)^2. \end{aligned}$$

In Verbindung mit (1) folgt so:

(5) $$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{R}{m} + \frac{c^2}{r^3}.$$

Die Vergleichung der Gleichungen (4) und (5) liefert nun die Gleichung:

(6) $$R = -\frac{c^2}{a(1-e^2)} \cdot \frac{m}{r^2}.$$

Mit dieser Gleichung (6) ist die aus der ersten Kepler'schen Regel abgeleitete Centralkraft als eine Anziehungskraft umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung wirkend erkannt.

Zur Verwerthung der dritten Kepler'schen Regel führen wir in (1) nun die Umlaufszeit T ein. Der Flächeninhalt der Bahnellipse ist bekanntlich $ab\pi$, es wird also nach (1):

$$\frac{c}{2} T = ab\pi = a^2 \sqrt{1-e^2}\,\pi,$$

$$c = \frac{2a^2\sqrt{1-e^2}}{T}\pi.$$

Diesen Werth von c in (6) eingesetzt, erhalten wir:

(7) $$R = -4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{m}{r^2}.$$

Die dritte Kepler'sche Regel besagt nun, dass für alle Planeten das Verhältniss (a^3/T^2) dasselbe ist; die Verbindung dieses Umstandes mit dem Newton'schen Reactionsprincip legt die Auffassung nahe, in dieser Grösse, welche für alle Planeten dieselbe sein soll, eine der Sonne individuelle Constante zu sehen. Wir haben bisher auf Grund der Kepler'schen Regeln immer nur von einer Anziehungskraft der Sonne auf die Planeten gesprochen, nach dem Newton'schen Reactionsprincip müssen wir dann ebenso von einer Anziehungskraft der Planeten auf die Sonne sprechen.

Das Reactionsprincip ist es also, welches uns veranlasst, in $4\pi^2 a^3/T^2$ eine der Sonnenmasse proportionale Constante zu sehen. Indem wir jetzt setzen:

(8) $$fM = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2},$$

f als Gravitationsconstante, M als Sonnenmasse ansehen, haben wir nach Form und Inhalt richtig das Newton'sche Gravitationsgesetz als Folge der drei Kepler'schen Regeln abgeleitet.

Von besonderem Interesse ist der Vergleich der Gleichung (8) mit der entsprechenden Gleichung unserer exacten Theorie § 44 (13):

$$f(M+m) = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}. \tag{9}$$

In dieser Relation liegt eine Correctur der dritten Kepler'schen Regel, welche zeigt, dass streng genommen nicht $4\pi^2\, a^3/T^2$, sondern $4\pi^2\, a^3/T^2\,(1 + m/M)$ eine Constante für alle Planeten ist. Es muss aber hervorgehoben werden, dass die Annäherung, welche die dritte Kepler'sche Regel an die Wirklichkeit liefert, schon eine sehr bedeutende ist, insofern m/M klein gegen 1 ist. Als Grund der Abweichung haben wir den Umstand namhaft zu machen, dass die Kepler'schen Regeln die Einführung eines relativen Coordinatensystems sofort nahelegten, während die Newton'schen Grundsätze erfordern, mit einem absoluten Coordinatensystem zu beginnen.

Wir erkennen: Das Newton'sche Gesetz stellt gegenüber den Kepler'schen Regeln nicht nur formal einen Fortschritt dar, sondern auch material, insofern es die Aussagen der dritten Kepler'schen Regel verbessert. Aber das werden wir trotzdem sagen können: Die Bedeutung der Kepler'schen Regeln und damit die Grösse Kepler's für die Entwickelung der Wissenschaft erscheint erst durch die Newton'sche Forschung im hellsten Lichte. Wir erblicken diese darin, dass die Kepler'schen Regeln sich als die nothwendigen und gerade hinreichenden Bedingungen zur Aufstellung des Newton'schen Gravitationsgesetzes nach den Untersuchungen dieses Paragraphen ergeben haben.

§ 46. Die Gravitationsconstante nach Dimension und Grösse. Der Massenbegriff der praktischen Astronomie. Theoretische Möglichkeit eine Massen- und eine Zeiteinheit aus dem Gravitationsgesetz abzuleiten.

Die Kepler'schen Regeln stellen nach unseren Untersuchungen vom Standpunkt der praktischen Astronomie, welche nur mit Winkel- und Zeitmessungen, allenfalls noch mit Längenmessungen zu thun hat, in gewissem Sinne für das Zweikörperproblem das höchste erreichbare Ziel dar; denn der Massenbegriff, dessen Einführung eine weitere Präcisirung, wie wir gesehen haben, gestattet, ist der praktischen Astronomie fremd. Diesen Massenbegriff hat erst, wie die Untersuchung der Kepler'schen Regeln im vorigen Paragraphen lehrte, die Anwendung der Newton'schen Grundsätze hineingebracht.

Vom Standpunkt der praktischen Astronomie wird daher auch kein Bedürfniss vorliegen, unsere Constante des Newton'schen Gravitationsgesetzes f einzuführen. Wir werden entsprechend den Gleichungen § 45 (8) und (9) den durch die dritte Kepler'sche Regel nahegelegten Ausdruck $4\pi^2 a^3/T^2$ als astronomische Sonnenmasse selbst definiren können, welche auf diese Weise wesentlich als Rechnungsausdruck zur Abkürzung eingeführt erscheint, und welche, wie wir wissen, um so präciser einen constanten Ausdruck darstellt, auf einen je kleineren Planeten der Ausdruck $4\pi^2 a^3/T^2$ bezogen wird.

Der in der dritten Kepler'schen Regel enthaltene Ausdruck lässt sich weiter direct auf die Planetenmassen übertragen, welche von Monden umkreist werden, und ist damit vom Standpunkt der praktischen Astronomie das einfachste und genauste Mittel gegeben, die Masse der Planeten in ihrem Verhältniss zur Sonnenmasse zu bestimmen. Hat ein Planet keinen Trabanten, und handelt es sich um die Bestimmung seiner Masse im Verhältniss zu der Masse der Sonne oder handelt es sich um die Bestimmung der Masse eines Trabanten, so ist die Astronomie auf wesentlich verwickeltere und ungenauere Mittel angewiesen, diese Constante zu bestimmen; es müssen dann Näherungsmethoden herangezogen werden, welche das Drei-Körperproblem zur Zeit gewährt.

In der That, hat ein Planet einen Trabanten, dessen grosse Axe (a), dessen Umlaufszeit (T) ist, dann liefert unmittelbar die Gleichung (8) des vorigen Paragraphen, gleichviel ob wir $f = 1$ setzen oder nicht:

$$fM = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \qquad fm = 4\pi^2 \frac{(a)^3}{(T)^2},$$

mithin:

$$M : m = \frac{a^3}{T^2} : \frac{(a)^3}{(T)^2}.$$

Wenn wir in diesem astronomischen Sinne die Massen von Sonne und Planet einführen, dürfen wir an den Ausdruck $4\pi^2 a^3/T^2$ nicht die physikalische Forderung der Homogenität des Ausdrucks als Masse erheben. Diese Homogenität kommt erst hinein, wenn wir wieder die Gravitationsconstante f mit ihrer physikalischen Dimension einführen. Welches ist diese Dimension?

Wir haben:

$$R = f\frac{Mm}{r^2}\,[mlt^{-2}],$$

mithin:

$$f = [m^{-1}l^3t^{-2}].$$

Die numerische Bestimmung dieser Grösse ist eine wesentlich physikalisch-praktische Aufgabe, zu deren Lösung später Methoden angegeben werden sollen; hier sei nur vorgreifend bemerkt, dass ihr Werth in dem *gr.-*, *cm.-*, *sec.*-Maasssystem etwa beträgt:

$$f = 67 \cdot 10^{-9}\,[gr^{-1}\,cm^3\,sec^{-2}].$$

Die physikalische Constante des Newton'schen Gravitationsgesetzes ist also keine reine Zahl, sondern ein wesentlich von den zu Grunde gelegten Maasseinheiten für Masse, Länge und Zeit abhängiger physikalischer Werth. Dieser Werth stellt sich uns als eine sehr kleine Grösse dar, was damit zusammenhängt, dass der Newton'schen Gravitation für gewöhnliche Massen eine ausserordentlich geringe Wirkung entspricht — eine Wirkung, welche erst bedeutend wird, wenn so grosse Massen im Spiel stehen, wie solche in der Erde und den himmlischen Körpern vorliegen.

Die Kenntniss des Werthes von f befähigt uns näher, den Werth, welchen wir vorhin als Sonnenmasse definirten, in bekannten Massenmaassen z. B. Kilogramm auszudrücken; doch soll darauf hier nicht eingegangen werden.

Von physikalisch grösserem Interesse erscheint die Möglichkeit, die Kenntniss von f zu benutzen, um ein neues Einheitssystem für unsere Maasse, unabhängig von terrestrischen Verhältnissen zu begründen:

Legen wir z. B. *cm.* und *sec.* als Längen- und Zeiteinheit zu Grunde, so könnten wir auf Grund des Newton'schen Gravitationsgesetzes eine Masseneinheit dadurch definiren, dass wir sagen: Zwei Masseneinheiten seien Massen, welche nach dem Gravitationsgesetz auf einander wirkend in der Einheit der Entfernung die Einheit der Beschleunigung hervorrufen. Diese Masseneinheit würde sich bestimmen aus:

$$f\frac{m^2}{1^2} = m \cdot 1, \qquad m = \frac{1}{f}[gr] = \frac{10^9}{67}[gr] = 15000 \text{ Kilogramm.}$$

Wir könnten in ähnlicher Weise auf das Newton'sche Gravitationsgesetz eine Zeiteinheit begründen, worauf Helmholtz[1]) aufmerksam gemacht hat: Wenden wir den bekannten Ausdruck für die dritte Kepler'sche Regel

$$fM = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}$$

---

1) Helmholtz. Wissenschaftliche Abhandlungen II. S. 996.

auf eine homogene Kugel an, auf deren Oberfläche ein Trabant mit verschwindender Masse ohne Reibung gleitet, und ist δ die Dichte der Kugel, also $M = 4\pi/3 \cdot a^3\delta$, dann wird

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{f\delta}}.$$

Die Umlaufszeit des kleinen Trabanten ergiebt sich also unabhängig von der Grösse der Kugel, allein abhängig von der Dichte der Kugelmasse. Diese Umlaufszeit ist es, welche man als Ausgangspunkt zur Wahl einer Zeiteinheit nehmen könnte, und welche nach unserer Anschauung unabhängig von allen säcularen und terrestrischen Aenderungen zu allen Zeiten als dieselbe zu betrachten wäre. Wählen wir $\delta = 1$, die Dichte des Wassers, so bestimmt sich T zu etwa 3,3 Stunden.

Die Einführung solcher Einheiten hat aber nur einen theoretischen Werth. Praktisch müssen wir fordern, dass Einheiten mindestens so genau herstellbar sind, als sie unter einander verglichen werden können. Davon kann aber bei der Unsicherheit, mit der die Bestimmung des Werthes f behaftet ist, sowohl in Bezug auf die oben definirte Masseneinheit wie in Bezug auf die oben definirte Zeiteinheit nicht die Rede sein.

Wir dürfen übrigens die Einführung solcher Einheiten auch theoretisch nicht überschätzen. Die Einführung der Einheit ist nicht ohne Weiteres mit der Einführung des Begriffs auf gleiche Stufe zu stellen. Physikalische Begriffe von so fundamentaler und weittragender Bedeutung, wie es der Begriff der Masse ist, dürfen nicht durch specielle Naturgesetze, sondern müssen durch Postulate eingeführt werden. Das Postulat, welches den Begriff der Masse fixirt, ist der Satz von der Erhaltung der Masse.

Nun könnnte man vielleicht sagen: das Newton'sche Gravitationsgesetz ist gar kein specielles Gesetz in unserem Sinne, es ist gleichfalls ein Postulat, und damit liesse sich dann vielleicht die Begründung des Massenbegriffs darauf rechtfertigen. Diese Auffassung des Newton'schen Gravitationsgesetzes widerspricht aber der bisherigen Entwickelung der Wissenschaft und dürfte auch neueren Untersuchungen über die Grenzen des Gesetzes nicht gerecht werden. Es giebt eine ganze Reihe von Erscheinungsgebieten, welche nicht unter das Newton'sche Gravitationsgesetz fallen, und das ist eben die Bedeutung eines Postulats, eines Grundsatzes, dass er auf alle Erscheinungen anwendbar bleibt und bleiben soll.

Es ist richtig: das physikalische System ist ein gegenseitiges begriffliches Bezugssystem. Bei der Mannigfaltigkeit der Beziehungen ist es daher natürlich und auch angebracht, den Versuch zu machen, diese Beziehungen bald mehr auf die eine, bald mehr auf die andere Erscheinungsclasse zu stützen; aber man darf dann den Ausgangspunkt des Systems nicht aus dem Auge verlieren und muss berücksichtigen, dass Postulate eine gleiche, gemeinsame Beziehung zu allen Erscheinungsclassen haben sollen.

II. 4) Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf die Behandlung bedingter Bewegungen eines Massenpunktes.

§ 47. Zurückführung der bedingten Bewegung auf die freie durch Einführung einer aus den Bedingungen bestimmbaren Hülfskraft.

Die Anwendung der Galilei-Newton'schen Grundsätze bezog sich bisher auf Fälle, in denen die Wirkung auf Massen beziehungsweise auf Massenpunkte frei ohne Hinderniss und ohne besondere Nebenbedingung erfolgen konnte. Wir erweitern jetzt an der Hand einiger Beispiele die Betrachtung auf solche Fälle, in denen die Freiheit der Bewegung beschränkt ist, in denen für die Bewegung des Punktes noch gewisse Bedingungen irgendwie vorgeschrieben sind, z. B. eine Fläche überhaupt nicht oder nur nach einer Seite verlassen zu können, und sprechen in solchen Fällen von bedingter Bewegung im Gegensatz zu der bisher behandelten freien Bewegung.

Wollen wir die Newton'schen Grundsätze auf die bedingte Bewegung eines Massenpunktes anwenden, so können wir nun so verfahren, dass wir die gegebenen Bedingungen durch Kräfte zu ersetzen versuchen, die gerade denselben Effect hervorrufen würden wie die gegebenen Bedingungen. Bestehen die Bedingungen z. B. darin, dass der Punkt bei seinen Bewegungen eine gewisse Fläche nicht durchdringen kann, so würde durch solch eine Bewegung die Festigkeit der Fläche in einer gewissen Stärke in Anspruch genommen werden, der materielle Punkt würde mit einer gewissen Kraft in der Richtung der Normale auf die Fläche drücken; betrachten wir für den Augenblick diesen Druck auf die Fläche als Actio, so würde den Newton'schen Grundsätzen gemäss nach einer Reactio zu suchen sein: diese Reactio wäre der Gegendruck der Fläche gegen den Punkt, welcher den Punkt zwingt, auf ihr zu bleiben, und diese Reactio wäre die Kraft, welche wir an Stelle der als Bedingung gegebenen Fläche einführen könnten, welche in jedem Augenblick in Verbindung mit den ursprünglich frei gegebenen Kräften dem materiellen Punkte identisch dieselbe Bewegung ertheilen würde, wie sie bei der bedingten Bewegung vorliegt.

Bleiben wir im Bilde einer festen Fläche als gegebener Bedingung, so wird die Sache in der Regel so liegen, dass die Fläche mit einer grösseren Festigkeit behaftet ist, als eine solche beansprucht wird; die von uns an Stelle der Bedingung zu setzende Normalkraft ist aber nicht grösser und nicht kleiner als der Antheil der Gesammtfestigkeit, der beansprucht wird.

Es seien X, Y, Z die Componenten der auf den Massenpunkt m direct wirkenden Kraft, $\varphi(x, y, z) = 0$ die gegebene Oberfläche, welche der Massenpunkt nicht verlassen soll, N die für jede Stelle zu bestimmende Normalkraft, welche die Festigkeit der Fläche gerade soweit in jedem Augenblick ersetzt, als sie in Anspruch genommen wird, n die in der Richtung von N gezogene Normale zur Fläche, dann liefern die Newton'schen Grundsätze für die Bewegung des Massenpunktes die Gleichungen:

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N\cos(nx),\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N\cos(ny),\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N\cos(nz).
\end{aligned}
$$

Nun werden in der Theorie der krummen Oberflächen die Gleichungen abgeleitet:

$$
(2)\qquad \begin{aligned}
\cos(nx) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2},\\
\cos(ny) &= \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2},\\
\cos(nz) &= \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Schreiben wir jetzt zur Abkürzung:

$$
\lambda = N\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2},
$$

so erhalten wir als Differentialgleichungen der bedingten Bewegung aus (1):

$$
(3)\qquad \begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Die Bestimmung von λ und damit von N würde sich in der einfachsten Weise ergeben, wenn wir die Gleichung der gegebenen Oberfläche $\varphi = 0$ zweimal nach t differentiiren und darin die Werthe für d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, d^2z/dt^2 aus (3) einsetzen. Wir hätten dann eine Gleichung, in der λ oder N als einzige Unbekannte vorkäme.

Soll die gegebene Oberfläche $\varphi(x, y, z) = 0$ für die Freiheit der Bewegung nur ein einseitiges Hinderniss bilden, dann wäre festzustellen, an welcher Stelle der Bahn λ beziehungsweise N das Vorzeichen wechselt. An der Stelle, welche diesem Vorzeichenwechsel entspricht, würde dann der materielle Punkt die gegebene Fläche verlassen, und von hier ab würde die Bewegung aufhören, eine bedingte zu sein, von hier ab würde sie frei sein.

Soll die Bedingung der Bewegung durch eine Raumcurve gegeben sein, so können wir diese Raumcurve als Schnitt zweier Oberflächen auffassen:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0$$

und wir werden normal zu diesen Flächen zwei Kräfte substituiren können, welche zusammen gerade hinreichen, die in jedem Augenblick in Anspruch genommene Festigkeit der Raumcurve zu ersetzen: N_1 und N_2. Die Newton'schen Grundsätze führen hier zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N_1\cos(n_1x) + N_2\cos(n_2x) = X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ (4) \quad m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N_1\cos(n_1y) + N_2\cos(n_2y) = Y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N_1\cos(n_1z) + N_2\cos(n_2z) = Z + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial z}, \end{aligned}$$

wobei λ und μ Abkürzungen darstellen für:

$$\lambda = N_1 \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2},$$

$$\mu = N_2 \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2}.$$

Die zweimalige Differentiation der Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ nach t würde hier die Mittel bieten, λ und μ einzeln bestimmen zu können.

Es handelt sich im Vorhergehenden um Klarlegung der Methode, nach der die Newton'schen Grundsätze auf bedingte Bewegungen in einigen allgemeinen typischen Fällen angewandt werden können.

Es sollen damit selbstverständlich die Bedingungen in ihrer Möglichkeit nicht erschöpft werden. Eine Erweiterung der Bedingungen würde z. B. darin liegen, dass φ oder ψ auch noch die Zeit t enthielten. Die Bedingungen könnten aber auch noch anders analytisch gegeben sein.

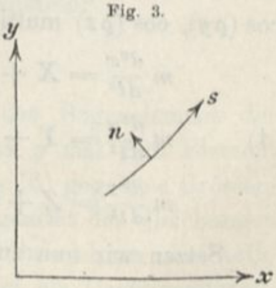
Die Methode der Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf die bedingte Bewegung können wir kurz dahin charakterisiren, dass wir die bedingte Bewegung versuchen auf die freie durch Einführung einer zu bestimmenden Hülfskraft zurückzuführen.

§ 48. Einführung und Begriff der Centripetalkraft und der Centrifugalkraft (Huygens).

Wir haben im vorigen Paragraphen auf Methoden hingewiesen, um die Bestimmung der Normalkräfte zu ermöglichen, durch welche die jedesmal vorliegenden Bedingungen ersetzt werden können. In diesem Paragraphen wollen wir versuchen, für Grösse und Richtung dieser Normalkräfte kinematisch-geometrische Anschauungen zu gewinnen.

In welcher Richtung wir solche zu suchen haben werden, können wir uns bereits ohne Rechnung klar machen, wenn wir an die Bewegung eines Massenpunktes auf einer vorgeschriebenen Curve ohne Einwirkung äusserer Kräfte denken. Wäre die Bewegung keine bedingte, so würde der Punkt dem Trägheitssatz folgen; die Festigkeit der Curve hindert ihn daran, und wir können dann vermuthen, dass jene einzuführenden Normalkräfte um so grösser in Ansatz zu bringen sein werden, je grösser die Geschwindigkeit ist, und je stärker die Curve von der Richtung einer geraden Linie abweicht; überdies wird die Richtung der Normalkraft nach dem Innern der concaven Seite der Curve gerichtet sein.

Fig. 3.



Wir wollen zunächst, im Falle die Bewegung in einer ebenen Curve vor sich zu gehen gezwungen ist, die Normalkraft durch die erwähnten Elemente auszudrücken versuchen. Wir haben dann an die beiden ersten Gleichungen § 47 (1) anzuknüpfen; multipliciren wir diese der Reihe nach mit $-dy/ds = \cos(nx)$, $+dx/ds = \cos(ny)$ und addiren sie:

$$
(1)\qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N\cos(nx) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N\cos(ny) \end{aligned} \qquad \left| \qquad \begin{aligned} -\frac{dy}{ds} &= \cos(nx) \\ \frac{dx}{ds} &= \cos(ny), \end{aligned} \right.
$$

so folgt:

$$
\begin{aligned}
m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{ds}\right) &= X\cos(nx) + Y\cos(ny) + N, \\
&= R\left(\cos(Rx)\cos(nx) + \cos(Ry)\cos(ny)\right) + N, \\
(2)\qquad &= R\cos(Rn) + N.
\end{aligned}
$$

Hierin bedeutet R die resultirende äussere Kraft auf den Massenpunkt, deren Componenten X, Y sind. Der Ausdruck auf der linken Seite steht nun ferner in einer sehr einfachen Beziehung zu dem Krümmungsradius ϱ einer ebenen Curve. Wir können nämlich schreiben:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho} &= \frac{d^2y}{dx^2}\Big/\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^{\,3} = \frac{dx^3}{ds^3}\,\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} \\
&= \left(\frac{dx}{ds}\right)^3 \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{dt^2}\right).
\end{aligned}
$$

Die Gleichung (2) kann daher in der Form geschrieben werden:

$$
(3)\qquad \frac{m}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = R\cos(Rn) + N.
$$

Diese Gleichung entspricht unseren vorher ausgesprochenen Absichten. Ehe wir jedoch zu ihrer Discussion schreiten, wollen wir zunächst ihre Allgemeingültigkeit für die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Raumcurve erweisen; wir knüpfen zu diesem Zweck an die Gleichungen § 47 (4), welche wir der Reihe nach mit $\cos(\varrho x)$, $\cos(\varrho y)$, $\cos(\varrho z)$ multipliciren und addiren:

$$
(4)\qquad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N_1\cos(n_1x) + N_2\cos(n_2x) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N_1\cos(n_1y) + N_2\cos(n_2y) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N_1\cos(n_1z) + N_2\cos(n_2z) \end{aligned} \qquad \left| \qquad \begin{aligned} &\cos(\varrho x) \\ &\cos(\varrho y) \\ &\cos(\varrho z). \end{aligned} \right.
$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
\xi &= dy\,d^2z - dz\,d^2y, \\
\eta &= dz\,d^2x - dx\,d^2z, \\
\zeta &= dx\,d^2y - dy\,d^2x,
\end{aligned}
$$

so wird in der Theorie der Raumcurven gezeigt, dass

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}/ds^3,$$

$$\cos(\varrho x) = (\eta dz - \zeta dy)/ds\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

$$\cos(\varrho y) = (\zeta dx - \xi dz)/ds\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

$$\cos(\varrho z) = (\xi dy - \eta dx)/ds\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Bilden wir nun den Zähler von:

$$d^2x\cos(\varrho x) + d^2y\cos(\varrho y) + d^2z\cos(\varrho z),$$

so erhalten wir dafür:

$$d^2x(\eta dz - \zeta dy) + d^2y(\zeta dx - \xi dz) + d^2z(\xi dy - \eta dx) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Die linke Seite der Gleichung (4) giebt so nach der vorgeschriebenen Behandlung

$$\frac{m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{dt^2 \cdot ds \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = m\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}{dt^2 \cdot ds} = \frac{m}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Wir erhalten auf diese Weise aus (4), der Gleichung (3) entsprechend, für die gezwungene Bewegung eines Massenpunktes auf einer Raumcurve:

$$\frac{m}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = R\cos(R\varrho) + N, \tag{5}$$

wo:

$$N = N_1\cos(n_1\varrho) + N_2\cos(n_2\varrho).$$

Der allgemeine Typus der Gleichungen (3) und (5) ist damit in seiner Uebereinstimmung erkannt, und wir können zur Discussion schreiten; zunächst lenken wir die Aufmerksamkeit auf die hier uns zum ersten Mal entgegentretende Grössencombination:

$$\frac{m}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = m\varrho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{6}$$

Wir haben hierin $ds = \varrho d\varphi$ gesetzt, d. h. das Bogenelement der gegebenen Curve gleich dem Krümmungsradius ϱ mal dem Element des Polarwinkels φ. Diese durch die Gleichung (6) gegebene Grössencombination stellt, wie ja auch aus der Homogenität der Gleichungen (3) und (5) hervorgeht, eine Kraft dar; wir bezeichnen die Actio nach dem Krümmungsmittelpunkt hin gerichtet als Centripetalkraft, wir bezeichnen die Reactio von dem Krümmungsmittelpunkt weg gerichtet als Centrifugalkraft.

Die physikalische Anschauung für diese Kräfte, wie sie die Behandlung der bedingten Bewegung mit sich gebracht hat, folgt besonders einfach, wenn wir in (3) und (5) die äussere Kraft R für den Augenblick gleich Null setzen. Die Centrifugalkraft stellt sich dann als directe Folge der Trägheit, als Druck gegen die gegebene vorgeschriebene Curvenbahn dar, welche die Masse zwingt, von der geradlinigen Trägheitsbahn abzuweichen — die Centripetalkraft als Gegendruck der Curve gegen den sich bewegenden Massenpunkt, durch welchen wir die Behandlung der bedingten Bewegung auf die freie Bewegung zurückführen können.

Die Ausarbeitung der Anschauung ist wichtig genug, um noch ein anderes Beispiel zur Erläuterung heranzuziehen: wir wählen die Kreisschleuder. Die Centrifugalkraft ist es, welche hier den Faden spannt — wieder eine Aeusserung der Trägheit, die an die Festigkeit des Fadens Anforderungen stellt — andererseits ist es die Spannung des Fadens, welche den geschleuderten Körper zwingt, die gerade Bahn des Trägheitssatzes zu verlassen, und welche hier die Centripetalkraft darstellt.

Die Centripetalkraft und die Centrifugalkraft ist in ihrer Abhängigkeit von den Bewegungselementen zuerst von Huygens erkannt und in die Wissenschaft eingeführt worden. Sie ist nach (6) der Masse proportional; wenn wir die Geschwindigkeit der Masse selbst ins Auge fassen, ist sie ferner dem Geschwindigkeitsquadrat direct, dem Krümmungsradius umgekehrt proportional; fassen wir die in jedem Augenblick vorhandene Winkelgeschwindigkeit, bezogen auf den Krümmungsmittelpunkt und die Schmiegungsebene der Raumcurve, ins Auge, dann ist sie dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit und dem Krümmungsradius direct proportional.

Haben wir in dieser Weise die Bedeutung der Centripetalkraft und der Centrifugalkraft veranschaulicht, so können wir nun zur weiteren Discussion auf die Gleichungen (3) und (5) zurückgehen. Wir können danach die Normalkraft, welche die Festigkeit der Bahn — soweit sie in Anspruch genommen wird — zu ersetzen im Stande ist, ausdrücken durch:

$$(7) \qquad N = \frac{m}{\varrho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - R\cos(R\varrho).$$

Diese Normalkraft ist nach dem Reactionsprincip gleich und entgegengesetzt der Kraft, mit der die Masse bei ihrer Bewegung die Bahn drückt.

Die Festigkeit einer concaven Bahn kann ersetzt gedacht werden durch die Centripetalkraft, hierzu ist subtractiv oder additiv die Normalcomponente der von aussen wirkenden Kraft R hinzuzufügen, je nachdem diese Normalcomponente nach dem Krümmungsmittelpunkt hin oder von dem Krümmungsmittelpunkt weg gerechnet ist.

Die Festigkeit einer concaven Bahn wird beansprucht durch die Centrifugalkraft, hierzu ist subtractiv oder additiv die Normalcomponente der von aussen wirkenden Kraft R hinzuzufügen, je nachdem diese Normalcomponente nach dem Krümmungsmittelpunkt hin oder von dem Krümmungsmittelpunkt weg gerechnet ist.

Die Begriffe der Centripetal- und der Centrifugalkraft sind von uns bei der Behandlung der bedingten Bewegung eingeführt und bisher auch von uns nur hinsichtlich einer bedingten Bewegung verwandt. Die Bezeichnung findet sich aber gelegentlich auch in Bezug auf die freie Bewegung verwandt. Wir haben dann in der Gleichung (3) oder (5) $N = 0$ zu setzen und erhalten dann in:

$$m \frac{v^2}{\varrho} = R \cos (R\varrho)$$

das Resultat: Die Centrifugalkraft hält der Kraftcomponente nach dem Krümmungsmittelpunkt das Gleichgewicht, diese Kraftcomponente wäre dann entsprechend als Centripetalkraft zu deuten.

Wir führen bei dieser Ausdrucksweise, so zu sagen, das dynamische Problem auf das statische zurück und denken uns rein statisch die Centrifugalkraft angebracht. Das geschieht z. B. auch bei den Problemen der rotirenden Flüssigkeitsbewegungen.

In diesem übertragenen Sinne können wir von der Centrifugalkraft z. B. auch bei den Planeten- oder Mondbewegungen sprechen. Betrachten wir für den Augenblick der Einfachheit halber einmal die Bahn des Mondes um die Erde als Kreisbahn, so haben wir die Centrifugalkraft gleich und entgegengesetzt der Newton'schen Gravitationskraft zu setzen, welche wir als Centripetalkraft rechnen, das liefert:

$$(9) \qquad m \frac{v^2}{R} = f \frac{mM}{R^2},$$

eine Gleichung, die in der Geschichte der Newton'schen Forschung eine Rolle gespielt hat, als es sich um den Nachweis handelte, dass die Schwere gegen die Erde nichts anderes als ein specieller Fall der Gravitation sei.

§ 49. Theorie des mathematischen, in einer Ebene schwingenden Pendels.

Wir machen eine Anwendung von den Grundsätzen der Behandlung der bedingten Bewegung auf die Theorie des einfachen, sogenannten mathematischen Pendels. Wir verstehen darunter die bedingte Bewegung eines Massenpunktes auf einer kreisförmigen Bahn unter Einwirkung der Schwere. Auf welche Weise die Bewegung im Kreise dabei erzwungen wird, ob durch einen gewichtslos gedachten Faden oder durch eine Kreisrinne, in der die Bewegung des Massenpunktes reibungslos gedacht wird, ist dabei gleichgültig.

Der Abstand des Massenpunktes vom Drehpunkt des Pendels sei l. Wir legen die x-Axe horizontal, die y-Axe vertical in der Richtung der Schwere nach unten; bezeichnen bei einer beliebigen Pendellage die Coordinaten des Massenpunktes m mit x, y, dann lautet die Bedingungsgleichung in diesem Fall

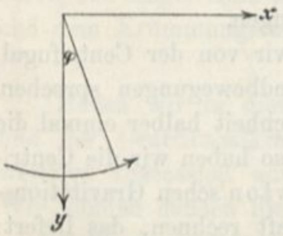
$$\psi(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0 \tag{1}$$

und die Anwendung der Gleichungen § 47 (3) liefert:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x} &&= 2\lambda x, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \lambda\frac{\partial\psi}{\partial y} + mg &&= 2\lambda y + mg. \end{aligned} \tag{2}$$

Zwingen uns die Galilei-Newton'schen Grundsätze, die Grundgleichungen in rechtwinkligen Coordinaten hinzuschreiben, so legen die Bedingungen der Aufgabe, nach der die Bewegung des Massenpunktes im Kreise vor sich gehen soll, nahe, von den rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten überzugehen. Wir haben:

Fig. 4.



$$\begin{aligned} x &= l\sin\varphi, & \frac{dx}{dt} &= l\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \\ y &= l\cos\varphi, & \frac{dy}{dt} &= -l\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \tag{3}$$

Führen wir noch zur Abkürzung $\lambda' = \lambda/m$ ein, so werden die Gleichungen (2) in Polarcoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= l\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} - l\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\lambda' l\sin\varphi, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -l\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} - l\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\lambda' l\cos\varphi + g, \end{aligned}$$

und die Elimination von λ' liefert die fundamentale Differentialgleichung der Pendelbewegung:

$$(4) \qquad l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi.$$

Die dem Satz von der lebendigen Kraft analoge Integrationsmethode führt hier unmittelbar auf:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\cos\varphi + c.$$

Für die Bestimmung der Integrationsconstante werden wir den Fall der Schleuder von dem des Pendels zu unterscheiden haben. Der Fall der Schleuder ist dadurch charakterisirt, dass an keiner Stelle der Kreisbahn die Winkelgeschwindigkeit verschwinden wird, der Fall des Pendels dadurch, dass es solche Stellen giebt.

Wir beschränken uns hier auf den Fall des Pendels, es sei $\varphi = \varphi_0$ die Stelle der grössten Elongation, an der das Pendel umkehrt, an der also die Geschwindigkeit Null vorliegt, dann haben wir:

$$0 = \frac{g}{l}\cos\varphi_0 + c$$

und damit:

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Wir erkennen: es wird dann auch für $\varphi = -\varphi_0$ die Geschwindigkeit Null werden, d. h. das Pendel schwingt zwischen den Amplituden $+\varphi_0$ und $-\varphi_0$ hin und her. Das Pendel giebt keine Abnahme der Amplitudenweite, solange wir keine anderen Kräfte als die Schwere einführen; erst die Einführung von Widerstandskräften der Luft oder von Reibungskräften der Aufhängung würde theoretisch die Mittel bieten, eine Abnahme der Amplitudenweiten zu ergeben.

Die Gleichung (5) führt weiter auf:

$$(6) \qquad dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\varphi}{\pm\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}, \quad t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\pm\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}.$$

Wir haben dabei t von der grössten Elongation $\varphi = \varphi_0$ an gerechnet und haben weiter das Vorzeichen der Quadratwurzel ähnlich wie § 44 (4) stets so zu wählen, dass dt positiv ist. Bei der ersten Schwingung nimmt φ von $+\varphi_0$ bis $-\varphi_0$ ab, bei der zweiten von $-\varphi_0$ bis $+\varphi_0$ zu u. s. w. Für alle geraden Schwingungen wird danach das positive, für alle ungeraden Schwingungen das negative Zeichen der Wurzel zu wählen sein.

Wir werden danach für die Schwingungsdauer T, d. h. für die Zeit einer Schwingung von $+\varphi_0$ bis $-\varphi_0$, zu setzen haben:

$$T = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

(7)

$$= 2\sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}.$$

Wir suchen zunächst im Anschluss an diese Formel (7) den Ausdruck für die Schwingungsdauer bei unendlich kleiner Amplitude auf und bezeichnen diese mit T_0.

Insofern $\cos\varphi = 1 - \varphi^2/1\cdot 2 + \varphi^4/1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 - \cdots$ ist, erhalten wir dann aus (7) für kleine Amplituden:

(8) $$T_0 = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \left| \arcsin\frac{\varphi}{\varphi_0} \right|_0^{\varphi_0} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Für endliche Amplituden führt die Behandlung von (7) auf ein sogenanntes elliptisches Integral, für welches in der Theorie der elliptischen Functionen, welche hier aber nicht als bekannt vorausgesetzt werden sollen, eine Normalform festgesetzt ist.

Führen wir einen Hülfswinkel ψ ein, definirt durch:

(9) $$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\psi,$$

so führen einige kleine Nebenrechnungen den Ausdruck (7) auf:

(10) $$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}}.$$

Ein solches Integral, wie es hier auftritt, wird in der Theorie der elliptischen Functionen als ein vollständiges Integral erster Gattung bezeichnet. Wir wollen hier das Integral durch Entwickelung in eine Reihe lösen, die um so stärker convergent sein wird, je kleiner die Amplitude φ_0 ist. Berücksichtigen wir, dass:

$$\left(1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4\frac{\varphi_0}{2}\sin^4\psi + \cdots,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \sin^{2m}\psi = \frac{1\cdot 3 \cdots (2m-1)}{2\cdot 4 \cdots 2m}\cdot\frac{\pi}{2},$$

so folgt aus (10) unter Berücksichtigung von (8):

$$T = T_0\left(1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \cdots\right). \tag{11}$$

Diese Gleichung gestattet, die Schwingungsdauer eines Pendels in ihrer Abhängigkeit von der Amplitude φ_0 zu bestimmen.

Die Gleichung (11), welche hier im Anschluss an die Theorie des mathematischen Pendels entwickelt ist, spielt auch sonst in der Physik eine Rolle; wir werden im IV. Abschnitt Gelegenheit haben, uns wiederholt darauf zu beziehen, wenn wir die Theorie der Instrumente mit verticalen und horizontalen Schwingungen und ihre Methoden behandeln werden.

Um die Anschauung zu vertiefen, mag hier schon auf eine Tabelle in Gauss' Werken, Bd. V, S. 322 verwiesen werden, in der bei $T_0 = 20$ Secunden der allgemeine Ausdruck T für eine Reihe grösserer Amplituden φ_0 berechnet ist. Gauss führt den Ausdruck $2\varphi_0$ in seine Tabelle ein und nennt ihn den Schwingungsbogen. Die Tabelle lautet:

Schwingungsbogen in Graden:	Schwingungsdauer in Secunden:
1	20,0001
2	20,0004
4	20,0015
6	20,0034
8	20,0061
10	20,0095
20	20,0381
30	20,0860
60	20,3482
120	21,4636
180	23,6068

Man vergleiche auch die Tabelle 21 in F. Kohlrausch, Praktische Physik, Lpzg. 1896, S. 477.

Historische Uebersicht zu II.

(Man vergleiche die historische Einleitung in Lagrange Mécanique analytique Part. II Dynamique, auch das Biographisch-Literarische Handwörterbuch von J. C. Poggendorff.)

Galileo Galilei 1564—1642.
Johann Kepler 1571—1630.
Christian Huygens 1629—1695.
Isaac Newton 1642—1726.

G. Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e ai movimenti locali. 4° Leida 1638. — (Hierin die Fallgesetze, welche vom Jahre 1602 und 1604 datiren.) Ostwald's Klassiker Nro. 11, 24 u. 25.

J. Kepler. Astronomia nova, s. physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis, ex observationibus Tychonis Brahe. fol. Heidelbergae 1609. (Hierin die zwei ersten der nach ihm benannten Gesetze der Planetenbewegung.)

— — Harmonices mundi, Libri V etc. fol. Lincii 1619. (Hierin das dritte nach ihm benannte Gesetz der Planetenbewegung.)

C. Huygens. Horologium oscillatorium. fol. Paris 1673. (Darin die Lehre vom einfachen Pendel und von der Centrifugalkraft.)

I. Newton. Philosophiae naturalis principia mathematica. 4° London. I. Auflage 1687. II. Auflage 1713. III. Auflage 1726.

III. Die Mechanik eines Massensystems für discrete und continuirliche Massen.

1) Die Schwerpunktssätze und ihre Consequenzen.

50. Aufstellung des Actionsprincips für die einzelnen Massenelemente eines Systems. 51. Einführung des Reactionsprincips für ein Massensystem. Begriff des Schwerpunkts als Massenmittelpunkt. Die Schwerpunktssätze und der Satz von der Erhaltung des Schwerpunkts. 52. Einige Sätze über den Schwerpunkt. Berechnung des Schwerpunkts einer Kugelcalotte von homogener Dichtigkeit. 53. Erläuterung der Schwerpunktssätze an einigen Beispielen.

2) Die Flächensätze und ihre Consequenzen.

54. Die Flächensätze und der Satz von der Erhaltung der Fläche. Einführung der Begriffe des Rotationsmoments, des Drehungsmoments und des Trägheitsmoments. 55. Vergleichung der Flächensätze mit den Schwerpunktssätzen. Erweiterung des Inhalts des Reactionsprincips mit Bezugnahme auf die Flächensätze. 56. Kritik der gewöhnlichen Ableitung der Flächensätze, welche § 55 durch Erweiterung des Reactionsprincips ersetzt ist. — Frage, inwieweit sich die Flächensätze auf starre Systeme mit festen Axen übertragen lassen. 57. Veranschaulichung des Begriffs des Drehungsmoments. Zerlegung und Zusammensetzung von Drehungsmomenten. 58. Begriff des Trägheitsmoments. Zwei allgemeine Sätze über das Trägheitsmoment. 59. Berechnung des Trägheitsmoments für einige geometrisch einfache Körper von homogener Dichte in Bezug auf gewisse Axen. 60. Erläuterung der Flächensätze an einigen Beispielen.

3) Der Satz von der lebendigen Kraft und seine Consequenzen.

61. Der Satz von der lebendigen Kraft. Die Begriffe der lebendigen Kraft und der Arbeit. 62. Der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Begriff des Kreisprocesses, des conservativen Systems und der conservativen Kräfte. 63. Einführung der Begriffe des Potentials, der Energie, der kinetischen und potentiellen Energie. 64. Veranschaulichung der Potential- und Energiebegriffe an den Beispielen des Falls, des Wurfs, des Pendels und der Planetenbewegung. 65. Das allgemeine Princip der Energie als physikalisches Postulat. Sein Verhältniss zur Frage nach der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile und nach der ausnahmslosen Existenz conservativer Kräfte. 66. Anwendungen des allge-

meinen Energieprincips auf den elastischen und den unelastischen Stoss, auf den Umsatz von kinetischer und potentieller Energie. Das mechanische Wärmeäquivalent.

4) Zur Statik eines Massensystems.

67. Allgemeine Bedingungen für das Gleichgewicht eines Massensystems. Das Dirichlet'sche Kriterium für stabile und labile Gleichgewichtszustände.

III. 1) Die Schwerpunktssätze und ihre Consequenzen.

§ 50. Aufstellung des Actionsprincips für die einzelnen Massenelemente eines Systems.

Wir haben bisher die Anwendung der Newton'schen Grundsätze auf Massenpunkte beschränkt. Wir gehen jetzt zur Anwendung dieser Grundsätze auf Massensysteme über, wollen aber zunächst weiter keine Verfügung über die Beschaffenheit dieser Massensysteme treffen; ob dieselben aus discreten Massenpunkten oder aus continuirlichen Massenanordnungen bestehen, ist gleichgültig.

In dem Ausdruck „Massensystem" liegt eine an und für sich willkürliche Abgrenzung gewisser gegebener Massen gegenüber anderen Massen. Die Frage der Abgrenzung ist nur eine Frage der Zweckmässigkeit für das jedesmal vorliegende Problem. Eine Reihe von Bezeichnungen stehen zu einer solchen Abgrenzung in Beziehung: die Bezeichnungen „Innen" und „Aussen", „innere Kräfte" und „äussere Kräfte". So sind innere Kräfte solche Kräfte, die durch die Natur des Massensystems gegeben sind, äussere Kräfte solche Kräfte, die nicht dadurch gegeben sind.

Wir wollen weiter auch über die Natur der Kräfte keine besonderen Annahmen machen, im Besonderen wollen wir im Gegensatz zu den üblichen Darstellungen die Annahme vermeiden, dass die inneren Kräfte ausschliesslich Centralkräfte sind, welche in der Richtung der Verbindungslinie zweier Massenelemente wirken und für sich das Reactionsprincip befolgen.

Wir wenden nun das Newton'sche Actionsprincip nach der Reihe auf alle Massenelemente des Systems an. Bezeichnen wir diese Massenelemente mit $m_1, m_2, \cdots$, ihre Coordinaten mit $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $\cdots$, die X-Componenten der äusseren Kräfte auf sie mit $X_1, X_2, \cdot\cdot$, allgemein mit X; die X-Componenten der inneren Kräfte auf sie mit $X_{1i}, X_{2i}, \cdot\cdot$, allgemein mit X_i; dann führt das Newton'sche Actionsprincip für die X-Componente der Wirkung, wenn die Bewegung des Massensystems eine freie ist, der Reihe nach auf die Gleichungen:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_1 + X_{1i},\\
m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= X_2 + X_{2i},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Analoge Gleichungen gelten für die Y- und Z-Componenten der Wirkung.

Ist die Bewegung des Massensystems nicht frei, sondern bedingt[1]), dann führt das Newton'sche Actionsprincip für die X-Componente der Wirkung — analog den Gleichungen § 47 (3) oder (4) — der Reihe nach auf Gleichungen von der Form:

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_1 + X_{1i} + \Sigma \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x},\\
m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= X_2 + X_{2i} + \Sigma \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Analoge Gleichungen gelten für die Y- und Z-Componenten der Wirkung.

Es soll sich nun im Folgenden nicht um eine vollständige, erschöpfende Behandlung dieser Differentialgleichungen etwa in dem Sinne handeln, in dem wir das Zweikörperproblem für die Newton'sche Gravitation (§§ 42—44) durchführen konnten — diese wäre analytisch unmöglich — es soll sich vielmehr nur um Ableitung einiger allgemein gültiger Sätze handeln, welche unabhängig von der Natur der in jedem einzelnen Falle gerade vorliegenden, speciellen Kräfte — wie es das Newton'sche Gravitationsgesetz ist — ausgesprochen werden können. Bei der Ableitung dieser allgemeinen Sätze werden uns die Integrationsmethoden von wesentlichem Nutzen sein, welche wir im Speciellen gelegentlich der Behandlung des Zweikörperproblems für die Newton'sche Gravitation § 43 bereits kennen gelernt haben. Diese Integrationsmethoden wurden schon dort mit den Namen: Schwerpunktssatz, Flächensatz, Satz von der lebendigen Kraft ausgezeichnet — wir können jetzt hinzufügen: unter Hinblick auf die nun vorzunehmende allgemeine Behandlung.

---

1) Auf den Unterschied zwischen holonomen und nicht holonomen Systemen soll in dem Abschnitt über die mechanischen Principe eingegangen werden.

§ 51. Einführung des Reactionsprincips für ein Massensystem. Begriff des Schwerpunkts als Massenmittelpunkt. Die Schwerpunktssätze und der Satz von der Erhaltung des Schwerpunkts.

Die durch den Schwerpunktssatz vorgeschriebene Integrationsmethode, welche wir § 43 an dem speciellen Fall des Zweikörperproblems der Newton'schen Gravitation kennen gelernt haben, knüpft an die freie Bewegung eines Massensystems und schreibt vor, dass wir die Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen für die X-Componenten der Wirkung auf die einzelnen Massenelemente — gleichviel ob dieselben discret oder continuirlich das System erfüllen — addiren beziehungsweise integriren, dass wir weiter dasselbe für die Y- und Z-Componenten der Wirkung thun.

Das Reactionsprincip von Newton[1]) bedingt dann, dass ganz unabhängig von der Natur und dem Charakter der Kräfte die Summe aller X-Y-Z-Componenten der inneren Kräfte verschwindet, dass also:

$$(1) \qquad \Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Z_i = 0.$$

Es resultiren so die Gleichungen:

$$(2) \qquad \sum m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X, \quad \sum m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y, \quad \sum m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z,$$

hierin beziehen sich die Summen rechter Hand aber nur noch auf die äusseren Kräfte.

Wir führen nun, entsprechend den Gleichungen § 43 (3), einen Punkt ein, den wir nach dem Vorgang von Daniel Bernoulli (Traité du flux et reflux, Kap. I) Massenmittelpunkt nennen, der aber gewöhnlich Schwerpunkt genannt wird. Wir bezeichnen die Coordinaten dieses Punktes mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ und definiren sie durch die Gleichungen:

$$(3) \qquad \bar{x}\Sigma m = \Sigma m x, \quad \bar{y}\Sigma m = \Sigma m y, \quad \bar{z}\Sigma m = \Sigma m z.$$

Die Coordinaten dieses so definirten Punktes ergeben, dass es sich in der That hier um einen Punkt handelt, dessen Lage nicht durch die Existenz irgend welcher Kräfte wie z. B. der Schwere bedingt ist, sondern dessen Lage rein aus der Configuration des Massensystems folgt, wodurch die Bezeichnung Massenmittelpunkt ihre innere Rechtfertigung findet. Der Name Schwerpunkt kann nur insofern zugelassen werden, als die Schwere auf kleinere Massen in allen

1) Man vergleiche meine Note: Ueber das Princip von der Gleichheit der Actio und Reactio bei Newton, 1898. Wied. Ann. 66, S. 781—784.

Theilen mit gleicher Stärke gleichgerichtet angreift, hier also die Begriffe Massenmittelpunkt und Kräftemittelpunkt sich speciell decken werden, was allgemein nicht der Fall ist.

In der That: angewandt auf die Schwere werden die Gleichungen (2), wenn z in die Richtung der verticalen Wirkung der Schwere fällt:

$$\Sigma m x'' = 0, \quad \Sigma m y'' = 0, \quad \Sigma m z'' = \Sigma m g,$$

oder unter Rücksicht auf (2):

$$\bar{x}'' = 0, \quad \bar{y}'' = 0, \quad \bar{z}'' = g.$$

Die letzte Gleichung besagt aber, dass für die Schwere der Kräftemittelpunkt und der Massenmittelpunkt identisch sind. Unterstützt man den Schwerpunkt eines starren Körpers, so entzieht man diesen dadurch der Schwere.

Die Verbindung der Gleichungen (2) und (3) liefert nun die Gleichungen:

$$(4) \qquad \bar{x}'' \Sigma m = \Sigma X, \quad \bar{y}'' \Sigma m = \Sigma Y, \quad \bar{z}'' \Sigma m = \Sigma Z,$$

und diese Gleichungen enthalten den sogenannten allgemeinen Schwerpunktssatz, diese Gleichungen sind die sogenannten Schwerpunktssätze. Sie besagen: Der Schwerpunkt irgend eines Systems von Massen oder Massenpunkten, auf welches äussere und innere Kräfte wirken, bewegt sich so, als ob in ihm die Gesammtmasse des Systems vereinigt wäre, und als ob auf diese im Schwerpunkt vereinigt gedachte Gesammtmasse die Gesammtheit der äusseren Kräfte wirke.

Wirken keine äusseren Kräfte, sind also:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

so nimmt der Schwerpunktssatz die besondere Form des Satzes von der Erhaltung des Schwerpunkts an. Es folgt dann aus den Gleichungen (4):

$$(5) \qquad \bar{x}'' = 0, \quad \bar{y}'' = 0, \quad \bar{z}'' = 0,$$

und diese Gleichungen können wir dahin interpretiren, dass wir sagen: Im Falle keine äusseren Kräfte wirken, befolgt die im Schwerpunkt des Systems vereinigt gedachte Gesammtmasse den Galilei-Newton'schen Trägheitssatz. Der Schwerpunkt bewegt sich dann also mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf geradliniger Bahn in Bezug auf den von Newton postulirten absoluten Raum (Weltäther), oder er ruht.

§ 52. Einige Sätze über den Schwerpunkt. Berechnung des Schwerpunkts einer Kugelcalotte von homogener Dichtigkeit.

Wir wollen uns jetzt in den § 51 (3) eingeführten Begriff des Massenmittelpunkts beziehungsweise des Schwerpunkts vertiefen. Die Definition desselben war gegeben durch:

$$(1) \qquad \bar{x}\Sigma m = \Sigma mx, \quad \bar{y}\Sigma m = \Sigma my, \quad \bar{z}\Sigma m = \Sigma mz.$$

Diese Definitionsgleichungen erscheinen nach dem Schema gebildet, nach dem sonst in der Mathematik und Physik Mittelwerthe berechnet werden. Die Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ erscheinen als die Mittelwerthe aller Coordinaten x, y, z, jede Coordinate mit einem der Masse entsprechenden Factor multiplicirt. Der Name Massenmittelpunkt erscheint daher auch nach der Richtung geschickt gewählt, dass er die Beziehung zu einem gewissen Mittelwerth andeutet.

Für diese Definition des Massenmittelpunkts ist es ganz gleichgültig, ob das Massensystem, in Bezug auf welches vom Massenmittelpunkt gesprochen werden soll, den Raum discret oder stetig erfüllt. Im letzten Falle treten in (1) an Stelle der Summenzeichen Integrale, und wir haben:

$$(1^a) \qquad \bar{x}\int dm = \int dm \cdot x, \quad \bar{y}\int dm = \int dm \cdot y, \quad \bar{z}\int dm = \int dm \cdot z.$$

Wir wollen nun für das Coordinatensystem xyz ein anderes $\xi\eta\zeta$ einführen, gegeben durch die Beziehungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \xi &= a + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta &= b + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ \zeta &= c + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Gehen wir zur Berechnung des Massenmittelpunkts in diesen neuen Coordinaten über, so führt die erste Gleichung von (2) auf:

$$\begin{aligned} \Sigma m\xi &= a\Sigma m + \alpha_1 \Sigma mx + \alpha_2 \Sigma my + \alpha_3 \Sigma mz, \\ \bar{\xi}\Sigma m &= a\Sigma m + \alpha_1 \bar{x}\Sigma m + \alpha_2 \bar{y}\Sigma m + \alpha_3 \bar{z}\Sigma m, \\ \bar{\xi} &= a \quad + \alpha_1 \bar{x} \quad + \alpha_2 \bar{y} \quad + \alpha_3 \bar{z}. \end{aligned}$$

Wir erkennen: wir können aus den Gleichungen (2) für die Coordinatentransformation sofort die Beziehungen für die Coordinaten des Massenmittelpunkts hinschreiben. Der Massenmittelpunkt transformirt sich hinsichtlich seiner Coordinaten wie jeder andere beliebige Punkt, er wird also geometrisch unabhängig von der Wahl des zu Grunde gelegten Coordinatensystems sein. Das Coordinatensystem erscheint auch hier, wie schon bei früheren Gelegenheiten, als ein fremdes Beiwerk.

Verlegen wir den Coordinatenanfangspunkt in den Massenmittelpunkt selbst, sodass in (1) $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$ ist, so erhalten wir als Charakteristikum, dass die Hauptcoordinatenaxen durch den Massenmittelpunkt gehen, die Gleichungen:

$$(3) \qquad \Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0, \quad \Sigma mz = 0.$$

Diese Relationen legen es nahe, dass unter Umständen Formeln der theoretischen Physik erheblich vereinfacht werden können, wenn wir in ihnen den Massenmittelpunkt als Coordinatenanfangspunkt wählen.

Es wird sich im Weiteren nun empfehlen, an der Hand einiger einfacher Beispiele nach Veranschaulichung des Begriffs des Massenmittelpunkts oder Schwerpunkts zu streben.

Haben wir zwei Massenpunkte mit den Massen m_1, m_2, bezeichnen wir die Linie, auf der diese Massen liegen, als die x-Axe und die Coordinaten dieser Massen, von einem beliebigen Anfangspunkt gerechnet, mit x_1, x_2, dann ist die Coordinate des zugehörigen Schwerpunkts $\bar{x}$ gegeben durch:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Wir können hieraus ableiten:

$$\bar{x} - x_1 = \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2}, \quad x_2 - \bar{x} = \frac{m_1 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2},$$

$$\bar{x} - x_1 : x_2 - \bar{x} = m_2 : m_1.$$

Der Schwerpunkt theilt also in diesem Fall den Abstand der beiden Massenpunkte im umgekehrten Verhältniss der beiden Massen.

In manchen Fällen kann die Berechnung des Schwerpunkts eines Systems dadurch erleichtert werden, dass man an die Lage des Schwerpunkts von Theilen des Systems anknüpfen kann. Wir wollen uns zerlegt denken $\Sigma m = \Sigma m_h + \Sigma m_i$ und haben dann:

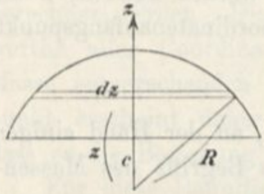
$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} = \frac{\Sigma m_h x_h + \Sigma m_i x_i}{\Sigma m} = \frac{\bar{x}_h \Sigma m_h + \bar{x}_i \Sigma m_i}{\Sigma m}.$$

Diese Gleichung besagt — die Rechnung in derselben Weise für die y- und z-Coordinate durchgeführt gedacht: Der Schwerpunkt eines Systems ist gleich dem Schwerpunkt aus einzelnen Massensummen, die punktförmig in den einzelnen Theilschwerpunkten vereinigt gedacht werden.

Unsere Definition des Massenmittelpunkts oder Schwerpunkts (1) deckt sich vollkommen mit der Definition der elementaren Lehrbücher; sie leistet nur mehr, insofern sie auch in verwickelteren Fällen die Lage dieses Punktes zu berechnen gestattet.

Bestimmen wir z. B. die Lage des Schwerpunkts einer homogenen Kugelcalotte von der Dichte 1: Wir fällen vom Kugelmittelpunkt (Radius R) auf die Basis der Kugelcalotte eine Senkrechte z und zerlegen die Kugelcalotte parallel zur Basis in eine Reihe Kreisscheiben von der Dicke dz. Der Abstand der Basisfläche vom Mittelpunkt sei c. Es kann dann zunächst kein Zweifel sein, dass der Schwerpunkt der Kugelcalotte auf der z-Axe selbst liegen wird. Wir haben uns daher nur mit $\bar{z}$ selbst zu beschäftigen und dieses wird nach der Definition (1)

Fig. 5.



$$\bar{z} = \frac{\int\limits_c^R \pi\,(R^2 - z^2)\,z\,dz}{\int\limits_c^R \pi\,(R^2 - z^2)\,dz} = \frac{\left|\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right|_c^R}{\left|R^2 z - \frac{z^3}{3}\right|_c^R}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\,(R^2 - c^2)^2}{\frac{1}{3}\,(R - c)^2\,(2R + c)} = \frac{3}{4}\,\frac{(R + c)^2}{2R + c}.$$

Wir haben bei dieser Rechnung wesentlich vorausgesetzt, dass die Dichte 1 die Kugelcalotte gleichförmig erfüllt. In der Wirklichkeit wird in der Mehrzahl der Fälle diese Voraussetzung experimentell zu prüfen sein. Es werden daher praktische Methoden, den Schwerpunkt einer Masse zu bestimmen, von Bedeutung sein; diese werden in der Experimentalphysik gelehrt und beziehen sich in der Regel auf die Prüfung von Gleichgewichtslagen in verschiedenen Punkten unterstützter Massen unter Einwirkung der Schwere.

§ 53. **Erläuterung der Schwerpunktssätze an einigen Beispielen.**

Die Schwerpunktssätze sind wichtig genug, um sie an der Hand einer Reihe von einfachen Beispielen zu erläutern:

Nehmen wir die Geschossbahn einer in ihrer Bahn platzenden Granate. Im Augenblick der Explosion unterliegt die Granate der Wirkung innerer Kräfte; wie auch die Stücke in Folge der Explosion auseinandergehen, das eine wissen wir nach unseren Schwerpunktssätzen, dass der Schwerpunkt der einzelnen Stücke solange die parabolische Bahn, welche wir § 32 kennen gelernt haben, weiter beschreiben wird, als die Stücke sich noch weiter frei bewegen, und als der Luftwiderstand keine Rolle spielt.

Nehmen wir das Planetensystem, das ist ein System mit inneren Kräften; die äusseren Kräfte, herrührend von den Fixsternen, sind als verschwindend zu betrachten. Es gilt also der Satz von der Erhaltung des Schwerpunkts, d. h. der Schwerpunkt des Planetensystems bewegt sich bei allen Configurationen des Systems im Newton'schen Raum mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie, oder er ruht.

Die Gültigkeit der Schwerpunktssätze hat wesentlich die Existenz eines freien Massensystems zur Voraussetzung. Wir werden zu berücksichtigen haben, dass die Mehrzahl der Massensysteme, welche wir auf der Erdoberfläche zu beobachten Gelegenheit haben, bedingte Systeme sind. Die Fortbewegungserscheinungen auf der Erdoberfläche sind wesentlich bedingt durch die Mannigfaltigkeit der Reibungskräfte und Widerstandskräfte; ohne diese, auf einer absolut glatten Bahn, wäre es unmöglich, den Schwerpunkt eines ruhenden Systems in Bewegung zu setzen. Die Lebewesen: Menschen, Thiere hätten wir hierbei als Systeme innerer Kräfte anzusehen. Beim Sturz eines Lebewesens aus der Höhe hat dieses, trotz der Fähigkeit, innere Kräfte zu entfalten, nicht die Möglichkeit, auf die Bewegung seines Schwerpunkts irgend einen Einfluss auszuüben, so lange Reibungs- oder Widerstandskräfte ausser Spiel bleiben.

III. 2) Die Flächensätze und ihre Consequenzen.

§ 54. Die Flächensätze und der Satz von der Erhaltung der Fläche. Einführung der Begriffe des Rotationsmoments, des Drehungsmoments und des Trägheitsmoments.

Die durch den Flächensatz vorgeschriebene Integrationsmethode, welche wir § 43 (8) an dem speciellen Fall des Zweikörperproblems der Newton'schen Gravitation kennen gelernt haben, knüpft ebenso wie der Schwerpunktssatz an die freie Bewegung eines Massensystems. Wir hatten es bei dem damals vorliegenden speciellen Fall von vorneherein nur mit Bewegungen zu thun, die in einer Ebene stattfinden, und operirten entsprechend nur mit zwei Gleichungen.

Wir haben es hier mit $3n$ Gleichungen von der Form § 50 (1) zu thun, wo n die Anzahl Massenelemente bedeutet, aus denen wir unser System zusammensetzen. Für ein Massenelement, beziehungsweise einen Massenpunkt m_h gelten die Gleichungen:

$$(1) \quad m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} = X_h + X_{hi}, \quad m_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} = Y_h + Y_{hi}, \quad m_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} = Z_h + Z_{hi},$$

hierin bezieht sich $X_h Y_h Z_h$ auf die Gesammtheit der Componenten aller äusseren Kräfte, $X_{hi} Y_{hi} Z_{hi}$ auf die Gesammtheit der Componenten aller inneren Kräfte, die in dem Massenelement m_h des Systems ihren Angriffspunkt haben.

Wir fassen nun in den Flächensätzen die Gleichungen (1) paarweise in der Art zusammen, dass wir z. B. die zweite Gleichung mit z_h, die dritte mit y_h — also der z- und y-Coordinate des Massenelements m_h — multipliciren und dann von einander abziehen; wir erhalten so:

$$(2) \quad m_h \left(y_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} - z_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right) = Z_h y_h - Y_h z_h + (Z_{hi} y_h - Y_{hi} z_h).$$

Die weitere paarweise Zusammenfassung der Gleichungen (1) entsprechender Art ergiebt Gleichungen, die wir aus (2) durch cyklische Vertauschung erhalten können. Solche Gleichungen können wir nun für jedes Massenelement hinschreiben, und erhalten so im Ganzen $3n$ Gleichungen — gerade so viele, wie sie in dem Typus der Gleichungen (1) vorliegen. Während aber jene einzeln auf die x, y, z-Coordinate Bezug haben, beziehen sich diese einzeln auf die yz-, zx-, xy-Ebene.

Wir denken uns nun die n Gleichungen (2), welche auf die yz-Ebene Bezug haben, untereinander geschrieben und addirt, beziehungsweise integrirt, ebenso die Gleichungen, welche auf die zx- und xy-Ebene Bezug haben, dann erhalten wir:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
\sum m_h\left(y_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} - z_h \frac{d^2 y_h}{dt^2}\right) &= \sum (Z_h y_h - Y_h z_h) \\
&\quad + \sum (Z_{hi} y_h - Y_{hi} z_h), \\
\sum m_h\left(z_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} - x_h \frac{d^2 z_h}{dt^2}\right) &= \sum (X_h z_h - Z_h x_h) \\
&\quad + \sum (X_{hi} z_h - Z_{hi} x_h), \\
\sum m_h\left(x_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} - y_h \frac{d^2 x_h}{dt^2}\right) &= \sum (Y_h x_h - X_h y_h) \\
&\quad + \sum (Y_{hi} x_h - X_{hi} y_h).
\end{aligned}
$$

Führen wir für jede der drei Coordinatenebenen yz, zx, xy Polarcoordinaten ein und setzen z. B. $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, dann können wir bilden:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= -r\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + \cos\varphi\,\frac{dr}{dt} \qquad \Big| \quad z = r\sin\varphi, \\
\frac{dz}{dt} &= r\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\,\frac{dr}{dt} \qquad \Big| \quad y = r\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Multipliciren wir nun die erste Gleichung mit $z = r\sin\varphi$, die zweite mit $y = r\cos\varphi$ und subtrahiren beide Gleichungen von einander, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= r^2\frac{d\varphi}{dt}, \\
\frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= y\frac{d^2 z}{dt^2} - z\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right).
\end{aligned}
$$

Geben wir den Polarcoordinaten, welche sich auf die yz-Ebene beziehen, den Index 1, den anderen, welche sich auf die zx- und xy-Ebene beziehen, die Indices 2 und 3, so lassen sich die Gleichungen (3) mit Fortlassung der Indices h in der Form schreiben:

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\sum mr_1^2\frac{d\varphi_1}{dt}$$
$$=\sum(Zy-Yz)+\sum(Z_iy-Y_iz),$$

(4)
$$\frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\sum mr_2^2\frac{d\varphi_2}{dt}$$
$$=\sum(Xz-Zx)+\sum(X_iz-Z_ix),$$

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\sum mr_3^2\frac{d\varphi_3}{dt}$$
$$=\sum(Yx-Xy)+\sum(Y_ix-X_iy).$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen besteht darin, dass aus ihnen die Möglichkeit dreier weiterer Integrationen ersichtlich ist. Wir belegen die Gleichungen (3) und (4) daher mit besonderem Namen und bezeichnen sie als Flächensätze, im Speciellen sprechen wir von den Flächensätzen bezogen auf die x-, y- und z-Axe.

Wir bezeichnen ferner die Ausdrücke auf den linken Seiten der Gleichungen der Flächensätze unter dem Differentiationszeichen d/dt als Rotationsmomente, bezogen auf die x-, y-, z-Axe als Drehungsaxe, die Ausdrücke auf der rechten Seite als Drehungsmomente, bezogen auf die x-, y-, z-Axe als Drehungsaxe.

Verschwinden die Ausdrücke für die Drehungsmomente auf der rechten Seite, so nehmen die Flächensätze die besondere Form des Satzes von der Erhaltung der Fläche an. Die Möglichkeit dreier weiterer Integrationen ist dann ohne Weiteres in dem Falle ersichtlich, dass das System ein starres ist. In diesem Falle treten die Ausdrücke Σmr_1^2, Σmr_2^2, Σmr_3^2 als constante Werthe auf, für welche sich ihrer späteren physikalischen Bedeutung wegen eine besondere Bezeichnung empfiehlt. Wir nennen sie die Trägheitsmomente des starren Körpers bezogen auf die x-, y-, z-Axe.

§ 55. Vergleichung der Flächensätze mit den Schwerpunktssätzen. Erweiterung des Inhalts des Reactionsprincips unter Bezugnahme auf die Flächensätze.

Die Flächensätze haben uns auf eine Fülle neuer Begriffe geführt, deren Bedeutung wir uns klar zu machen und zu veranschaulichen haben werden. Ehe wir dazu übergehen, nehmen wir einen Vergleich der Schwerpunktssätze mit den Flächensätzen und ihrer Behandlung auf.

Da muss uns vor Allem auffallen, dass wir uns für die Vereinfachung der Schwerpunktssätze auf das Newton'sche Reactionsprincip berufen konnten, insofern wir § 51 (1) gesetzt haben:

$$(1) \qquad \Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Z_i = 0.$$

Es wirft sich nun hier die Frage auf, ob wir nicht unter gleicher Berufung auf das Reactionsprincip in § 54 (4) setzen können:

$$(2) \qquad \Sigma(Z_i y - Y_i z) = 0, \quad \Sigma(X_i z - Z_i x) = 0, \quad \Sigma(Y_i x - X_i y) = 0.$$

Könnten wir es, so hätten wir den grossen Vortheil gewonnen, auf dem Standpunkt des § 50 stehen bleiben zu dürfen, nach dem wir es vermeiden, über die Natur der Kräfte irgend eine besondere Annahme zu machen. Es handelt sich hier wohlgemerkt nicht um die Frage, welche Kräfte wir uns mathematisch als möglich denken können, sondern um die Frage, welche Kräfte wir als in der Natur wirklich vorhanden zu postuliren haben. Postulirt nun schon das Newton'sche Reactionsprincip in der Form der Gleichungen (1) für die in der Natur vorliegenden Kräfte einen ganz besonderen Charakter, so ist es nur ein Schritt auf dem nämlichen Wege weiter, diesen besonderen Charakter der in der Wirklichkeit vorliegenden Kräfte enger dahin zu präcisiren, dass auch die Gleichungen (2) allgemein erfüllt sein sollen — unabhängig von irgend welchen specielleren Vorstellungen über die Wirkungsart der Kräfte. Wir werden die Behauptung der allgemeinen Gültigkeit der Gleichungen (2) als ein Postulat im Sinne des § 6 anzusehen haben und bezeichnen dieses Postulat als eine Erweiterung des Reactionsprincips.[1]) Der Charakter des Reactionsprincips als Integralprincip oder Summationsprincip bleibt dadurch unberührt, gewinnt dadurch im Gegentheil noch eine neue Seite.

Die bisher vorliegende Erfahrung dürfte nirgends einen Widerspruch mit dieser Postulirung aufweisen. Wo eine Verletzung von (2) vorzuliegen scheint, dürfte es sich wesentlich um bedingte Systeme

1) Diese und die folgenden Formulirungen waren von mir niedergeschrieben, als ich bemerkte, dass sich diese meine Auffassung der Flächensätze im Wesentlichen deckt mit der von Helmholtz vorgetragenen; cf. Vorlesungen über die Dynamik discreter Massenpunkte, Lpzg. 1896, S. 159 u. f. — Wie die von meinem hochgeehrten Collegen Herrn Professor Schönflies während seiner Studienzeit geführten Hefte ergeben, lässt sich diese Auffassung bei Helmholtz bis zum Jahre 1873 zurückverfolgen. Helmholtz las im Winter 1873/74 über theoretische Physik.

handeln, in denen die Bedingungen nicht vollständig durch Kräfte ersetzt sind. Der Vorzug dieser Postulirung liegt in der Anregung für die Forschung, in der fortgesetzten Freiheit der Anschauung über die Kräfte der Natur, die im Sinne der Auffassung eines Newton, Faraday und Maxwell keineswegs die ausschliessliche Zurückführung auf Centralkräfte fordert, und formell auch in der Parallelität der Schwerpunkts- und Flächensätze, deren Beachtung uns noch weiter von Nutzen sein wird.

Unter Annahme dieses so erweiterten Reactionsprincips als Postulat nehmen die Flächensätze § 54 (4) die Form an:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\sum mr_1^2\frac{d\varphi_1}{dt}=\sum(Zy-Yz),\\
(3)\quad&\frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\sum mr_2^2\frac{d\varphi_2}{dt}=\sum(Xz-Zx),\\
&\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\sum mr_3^2\frac{d\varphi_3}{dt}=\sum(Yx-Xy).
\end{aligned}$$

In dieser Form nehmen wir von Neuem den Vergleich mit den Schwerpunktssätzen auf:

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X,\quad \sum m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y,\quad \sum m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma Z.$$

Wir erkennen auf der rechten Seite: den Kraftcomponenten parallel der x-, y-, z-Axe in den Schwerpunktssätzen entsprechen in den Flächensätzen die Drehungsmomente um die x-, y-, z-Axe — oder wie wir nun auch, der weiteren Untersuchung vorgreifend, sagen wollen — die Componenten der Drehungsmomente, bezogen auf die x-, y-, z-Axe als Drehungsaxe. Auf der linken Seite entsprechen, insbesondere bei starren Systemen, den Beschleunigungscomponenten parallel der x-, y-, z-Axe in den Schwerpunktssätzen die Winkelbeschleunigungen um die x-, y-, z-Axe in den Flächensätzen und den Massen m (Trägheitsquantitäten) in den Schwerpunktssätzen die Trägheitsmomente mr_1^2, mr_2^2, mr_3^2, bezogen auf die x-, y-, z-Axe, in den Flächensätzen.

Wollen wir die Parallele zwischen den Schwerpunktssätzen und Flächensätzen noch weiter durchführen, so können wir dem Begriff des Schwerpunkts eines Systems — definirt durch:

$$\bar{x}\Sigma m=\Sigma mx,\quad \bar{y}\Sigma m=\Sigma my,\quad \bar{z}\Sigma m=\Sigma mz,$$

entsprechend den Begriff der Trägheitsradien (Gyrationsradius) einführen, definirt durch:

$$\bar{r}_1^2\Sigma m=\Sigma mr_1^2,\quad \bar{r}_2^2\Sigma m=\Sigma mr_2^2,\quad \bar{r}_3^2\Sigma m=\Sigma mr_3^2.$$

Die physikalische Bedeutung dieser Radien besteht einfach darin, dass man in ihrem Endpunkt die Gesammtmasse des Systems vereint anbringen kann, um ein gleich grosses Trägheitsmoment zu erhalten, als es dem Trägheitsmoment des Systems entspricht.

§ 56. Kritik der gewöhnlichen Ableitung der Flächensätze, welche § 55 durch Erweiterung des Reactionsprincips ersetzt ist. — Frage, in wieweit sich die Flächensätze auf starre Systeme mit festen Axen übertragen lassen.

Gewöhnlich pflegt man das Verschwinden der Drehungsmomente der inneren Kräfte § 54 (4):

$$(1) \quad \Sigma(Z_i y - Y_i z) = 0, \quad \Sigma(X_i z - Z_i x) = 0, \quad \Sigma(Y_i x - X_i y) = 0,$$

unter der Voraussetzung abzuleiten, dass die inneren Kräfte X_i, Y_i, Z_i Centralkräfte sind, welche das Reactionsprincip in der alten — also nicht erweiterten — Fassung erfüllen, dass also die inneren Kräfte aus Entfernungskräften zwischen den einzelnen Massenelementen bestehen, die in der Richtung der Verbindungslinie gleich und entgegengesetzt wirken.[1])

Dieser Auffassung entsprechend hätten wir die Drehungsmomente, welche nach (1) verschwinden sollen, besser in der Form von Doppelsummen zu schreiben, etwa:

$$(2) \quad \Sigma\Sigma(Z_{hk} y_h - Y_{hk} z_h), \quad \Sigma\Sigma(X_{hk} z_h - Z_{hk} x_h), \quad \Sigma\Sigma(Y_{hk} x_h - X_{hk} y_h).$$

Hierin hätten wir den ersten Index h auf das Massenelement m_h zu beziehen, auf welches die elementare Centralwirkung ausgeübt wird, den zweiten Index k auf das Massenelement m_k, von dem die elementare Centralwirkung ausgeht.

In der That, nehmen wir z. B. den ersten Ausdruck

$$\Sigma\Sigma(Z_{hk} y_h - Y_{hk} z_h),$$

so fassen wir in dieser Doppelsumme die Glieder:

$$(3) \quad Z_{hk} y_h - Y_{hk} z_h + Z_{kh} y_k - Y_{kh} z_k$$

paarweise zusammen; hierin beziehen sich die Componenten X_{hk}, Y_{hk}, Z_{hk} auf die resultirende Kraft R_{hk}, welche von dem Massenelement

---

1) L. Boltzmann. Vorlesungen über die Principe der Mechanik, Lpzg. 1897, S. 104. — W. Voigt. Elementare Mechanik, Lpzg. 1898, S. 121 u. f. u. Compendium der theoretischen Physik, Lpzg. 1895, Bd. I, S. 37 u. f. — Bei G. Kirchhoff, Mechanik, IV. Vorlesung § 5, bleibt die Ableitung der Flächensätze sogar auf starre Körper beschränkt.

m_k ausgeht und auf m_h wirkt; X_{kh}, Y_{kh}, Z_{kh} auf die resultirende Kraft R_{kh}, welche von dem Massenelement m_h ausgeht und auf m_k wirkt. Da die Kräfte R_{hk}, R_{kh} Centralkräfte sein sollen, können wir für (3) schreiben:

$$R_{hk}\frac{z_k - z_h}{r_{hk}} y_h - R_{hk}\frac{y_k - y_h}{r_{hk}} z_h - R_{kh}\frac{z_h - z_k}{r_{kh}} y_k + R_{kh}\frac{y_h - y_k}{r_{kh}} z_k.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich aber auf:

$$(R_{hk} + R_{kh})\frac{z_k y_h - z_h y_k}{r_{hk}},$$

und dieser Ausdruck wäre wegen des Reactionsprincips, welches nach der gewöhnlichen Anschauung die Centralkräfte einzeln zu befolgen hätten, Null, indem

$$R_{hk} + R_{kh} = 0.$$

Wenn nun auch den Centralkräften eine grosse Bedeutung in der Physik zuzusprechen ist, so werden wir in Hinblick auf die Gesammtheit der in der Natur vorliegenden Kräfte uns doch nicht auf den Standpunkt stellen können, dass der Charakter der Centralkräfte der allgemeine Typus für alle in der Natur vorkommenden Kräfte ist. Schon die ältere Theorie der elektromagnetischen Fernwirkung weist in dem von Laplace im Anschluss an die Beobachtungen von Biot und Savart aufgestellten Elementargesetz Kräfte auf, die nicht in der Richtung der Verbindungslinie ihrer Elemente wirken. Auch in der Begründung der Elasticitätstheorie und der Hydrodynamik dürfte es heute mindestens als ein Umweg zu bezeichnen sein, wenn an die Existenz irgend welcher hypothetischer Centralkräfte angeknüpft wird.

Es mag auch darauf noch hingewiesen werden, dass in der gewöhnlichen Darstellung das Verschwinden der Drehungsmomente (1) beziehungsweise (2) nicht nur unter Voraussetzung eines sehr speciellen Charakters von Elementarkräften abgeleitet wird, sondern dass dabei das Newton'sche Reactionsprincip nur in einer sehr speciellen Form angewandt erscheint — nicht in der Form eines Integralprincips oder Summationsprincips, welches es unstreitig ist, und als welches es § 51 (1) dargestellt erscheint. Unsere Darstellung § 55 hat den Vorzug, dass nicht nur das Newton'sche Reactionsprincip in seiner alten Form, sondern auch die von uns proponirte Erweiterung des Reactionsprincips sich als ein Integral- beziehungsweise Summationsprincip darstellt. Der Vorzug dieser Auffassung liegt darin, dass damit den Flächensätzen für den Aufbau des wissenschaftlichen Systems eine fundamentale Rolle zugewiesen erscheint, wie solche in ihrer Weise den Schwerpunktssätzen zukam.

Wir schliessen an die Gleichung (1) noch eine Bemerkung: Der Ableitung der Flächensätze lag bis jetzt die Voraussetzung eines freien Systems zu Grunde (cf. § 54 Anfang). Nun beziehen sich die Flächensätze, wie wir gesehen haben, auf Drehungsvorgänge, und es entsteht die Frage — bei der Bedeutung und Verwerthung von gelagerten Axen als Drehungsaxen für Wissenschaft und Technik —, inwiefern sich etwa die Flächensätze auch auf derartig bedingte Systeme übertragen liessen.

Ersetzen wir die Bedingungen im Sinne des § 47 durch Hülfskräfte, dann ist natürlich kein Zweifel, dass, wenn wir diese Kräfte als solche in die Rechnung einführen, wieder die Flächensätze gelten werden. Führen wir die geometrische Drehungsaxe als eine der Coordinatenaxen ein, z. B. die x-Axe, so erkennen wir aus der ersten der Gleichungen (6): Die Kräfte, welche wir an Stelle der Bedingungen eingeführt haben, werden ein Drehungsmoment ausüben, wenn sie in einem endlichen Abstand von der geometrischen Drehungsaxe ihren Angriffspunkt haben — das wird z. B. der Fall sein, wenn die Drehungsaxe eines Rades ein Kreiscylinder ist und in einem Hohlcylinder von gleichem Radius lagert. Wir werden dieses Drehungsmoment in vielen Fällen als klein betrachten können, wenn durch Schmiermittel dafür gesorgt ist, die Reibung auf ein Minimum herabzusetzen. Ist aber die Drehungsaxe, wie beim physikalischen Pendel, eine scharfe Schneide, die auf einer ebenen Unterlage aufliegt, dann greifen die etwa einzuführenden Hülfskräfte an einem verschwindenden Hebelarm an und können kein Drehungsmoment ausüben.

§ 57. Veranschaulichung des Begriffs des Drehungsmoments. Zerlegung und Zusammensetzung von Drehungsmomenten.

Die Begriffe des Drehungsmoments, Rotationsmoments, Trägheitsmoments sind bisher rein rechnerisch im Anschluss an die durch die Flächensätze gegebene Behandlung eingeführt. Noch fehlt die rechte Anschauung, die wir mit diesen Begriffen zu verbinden haben werden. Die Ausarbeitung der Anschauung nach der einen oder anderen Richtung soll im Folgenden wenigstens eingeleitet werden.

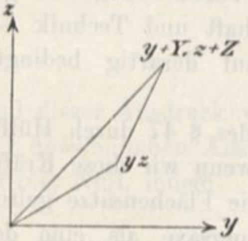
Wir beginnen mit den analytischen Ausdrücken für die Drehungsmomente, bezogen auf die x-, y-, z-Axe:

$$\Sigma(Zy - Yz), \quad \Sigma(Xz - Zx), \quad \Sigma(Yx - Xy),$$

und versuchen zunächst dem Ausdruck $(Zy - Yz)$ eine einfache geometrische Deutung zu geben.

Wir denken uns in die yz-Ebene den Punkt y, z eingezeichnet; von diesem Punkte nach Grösse und Richtung die Resultante der Componenten Y, Z aufgetragen, können wir ein Dreieck zeichnen, dessen Eckpunkte die Coordinaten haben: $0, 0$, y, z, $y + Y, z + Z$. Der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks wird dann nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie dargestellt durch $(Zy - Yz)$, andererseits ist dieser doppelte Flächeninhalt gleich dem Product aus Grundlinie und Höhe.

Fig. 6.



Wählen wir die Verbindungslinie der Punkte $0, 0$, y, z, also den Abstand des Massenpunktes von der x-Axe als Grundlinie und bezeichnen diesen Abstand als Hebelarm, dann gewinnen wir so für das Drehungsmoment $(Zy - Yz)$ um die x-Axe die Anschauung: Das Drehungsmoment einer Kraft um eine Axe ist gleich dem Product aus dem Hebelarm, an dessen Ende die Kraft angreift, multiplicirt mit der Kraftcomponente senkrecht zum Hebelarm.

Gehört der Massenpunkt x, y, z, in dem die Kraftcomponenten X, Y, Z angreifen, einem starren Körper an, und wählen wir die Verbindungslinie der Punkte y, z, $y + Y, z + Z$ als Grundlinie des zuvor behandelten Dreiecks, dann folgt die weitere Anschauung, dass wir den Angriffspunkt der Kraft Y, Z beliebig in der Richtung der Kraft verlegen können, ohne das Drehungsmoment $Zy - Yz$ in seiner Grösse zu ändern, und dass das Drehungsmoment einer Kraft um eine Axe gleich ist dem Product aus der Kraft und dem kürzesten Hebelarm dazu, d. h. dem Hebelarm senkrecht zur Kraft.

Wir suchen nun weiter Beziehungen auf, welche sich zwischen Drehungsmomenten, bezogen auf die rechtwinkligen Coordinatenaxen x, y, z, und Drehungsmomenten, bezogen auf die rechtwinkligen Coordinatenaxen ξ, η, ζ, nachweisen lassen, vorausgesetzt, dass beide Coordinatensysteme denselben Anfangspunkt haben und durch Drehung zur Deckung gebracht werden können. Bezeichnen wir die Componenten einer resultirenden Kraft R nach x, y, z, mit X, Y, Z, die Componenten derselben Kraft R nach ξ, η, ζ mit Ξ, H, Z, so gelten zwischen den Ξ, H, Z und X, Y, Z als Vectorcomponenten dieselben Gleichungen wie zwischen ξ, η, ζ und x, y, z. Es entsteht die Frage: welche Beziehungen werden nun zwischen den Drehungsmomenten

$$D_\xi = Z\eta - H\zeta, \quad D_\eta = \Xi\zeta - Z\xi, \quad D_\zeta = H\xi - \Xi\eta$$

und den Drehungsmomenten

$$D_x = Zy - Yz, \quad D_y = Xz - Zx, \quad D_z = Yx - Xy$$

bestehen?

Es sei:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \xi &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, & \Xi &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \\ \eta &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, & H &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, \\ \zeta &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, & Z &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z, \end{aligned}$$

dann ist:

$$\begin{aligned} D_\xi = Z\eta - H\zeta &= \begin{vmatrix} \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z & \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \\ \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z & \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \end{vmatrix} \\ &= \alpha_1 D_x + \alpha_2 D_y + \alpha_3 D_z. \end{aligned}$$

In dieser Weise ergiebt sich:

$$(2) \qquad \begin{aligned} D_\xi &= \alpha_1 D_x + \alpha_2 D_y + \alpha_3 D_z, \\ D_\eta &= \beta_1 D_x + \beta_2 D_y + \beta_3 D_z, \\ D_\zeta &= \gamma_1 D_x + \gamma_2 D_y + \gamma_3 D_z. \end{aligned}$$

Wir erhalten also zwischen den Drehungsmomenten D_ξ, D_η, D_ζ und D_x, D_y, D_z genau dieselben Beziehungen, wie wir sie in (1) zwischen X, Y, Z und Ξ, H, Z erhalten haben. Diese Parallelität giebt uns ein Recht, in derselben Weise von den Componenten und der Resultante des Drehungsmoments zu sprechen, wie wir von den Componenten und der Resultante einer Kraft sprechen. Wir werden uns dabei aber den Unterschied zu vergegenwärtigen haben, dass Kräfte Vectorgrössen, Drehungsmomente keine Vectorgrössen sind. Für die Rechnung können wir jedoch diesen Unterschied dadurch zurücktreten lassen, dass wir die Drehungsmomente nach ihrer Grösse symbolisch in irgend einem Längenmaass uns auf die zugehörige Drehungsaxe aufgetragen denken und mit dieser symbolischen Länge wie mit einer Vectorgrösse rechnen.

In der Physik kommen auch sonst Fälle vor, in denen man Grössen, die auf Drehung Bezug haben, und die keine Vectorgrössen sind, symbolisch in der soeben erwähnten Art als Vectorgrössen behandelt. Wir wollen solche Grössen mit dem Namen Pseudovectorgrössen oder um die Beziehung zum Begriff der Drehung wiederzugeben — nach dem Vorgang von E. Wiechert — als Rotoren bezeichnen. Um über den Sinn der Richtung eines Rotors in Beziehung zu dem Sinn der Drehung keinen Zweifel aufkommen zu lassen, setzen wir fest: Wir rechnen den Rotor auf der Drehungsaxe in der Richtung, an welche man angelehnt — die Richtung gehe von den Füssen zum Kopf — die Drehung zu Fussende entgegengesetzt dem Uhrzeiger (von rechts nach links) vor sich gehen sieht.

Nach diesen Festsetzungen können wir den Gleichungen (2) unmittelbar entnehmen, dass die Resultante der Drehungsmomente — das resultirende Drehungsmoment — D unabhängig von der Wahl des Coordinatensystems, welches hier daher wieder als fremdes Beiwerk erscheint, sich darstellt aus den Gleichungen:

$$D^2 = D_\xi^2 + D_\eta^2 + D_\zeta^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2,$$

und dass die Axe, auf welche dieses Drehungsmoment D zu beziehen ist, die Richtungscosinus hat:

$$\cos(Dx) = \frac{D_x}{D}, \quad \cos(Dy) = \frac{D_y}{D}, \quad \cos(Dz) = \frac{D_z}{D}.$$

Unsere Betrachtungen und Veranschaulichungen über Drehungsmomente übertragen sich nun unmittelbar auf die Rotationsmomente. Die linken Seiten der Gleichungen § 55 (3) sind ganz ebenso zusammengesetzt wie die rechten Seiten dieser Gleichungen, an denen wir unsere Anschauungen über den Begriff des Drehungsmoments ausbildeten. Diese linken Seiten sind aber die Differentialquotienten der Rotationsmomente nach der Zeit.

Die Rotationsmomente stellen sich auf diese Weise ebenso wie die Drehungsmomente als Rotoren dar, sie beziehen sich auf Axen, und es giebt eine Axe, für welche das Rotationsmoment ein Maximum ist, für welche also das resultirende Rotationsmoment in Betracht kommt. Für eine Axe senkrecht dazu verschwindet das Rotationsmoment.

Ist das System ein starres, dann ist die Axe, für welche das Rotationsmoment ein Maximum ist, die wirkliche Drehungsaxe.

§ 58. Begriff des Trägheitsmoments. Zwei allgemeine Sätze über das Trägheitsmoment.

Wir wollen uns jetzt in den, Ende des § 54 eingeführten, Begriff des **Trägheitsmoments** vertiefen. Wir verstehen unter Trägheitsmoment eines Massenpunktes, bezogen auf eine Axe: das Product aus der Masse des Punktes in das Quadrat des Abstandes dieses Punktes von der Axe; unter Trägheitsmoment eines starren Massensystems, bezogen auf eine Axe: die Summe über alle Trägheitsmomente der einzelnen Massenelemente, bezogen auf diese Axe. Ob die Massen des Systems den Raum discret oder continuirlich erfüllen, ist dabei ganz gleichgültig. Es treten dann nur an Stelle der Summen:

$$\Sigma m r_1^2 = \Sigma m (y^2 + z^2), \quad \Sigma m r_2^2 = \Sigma m (z^2 + x^2),$$
$$\Sigma m r_3^2 = \Sigma m (x^2 + y^2)$$

die Integrale:

$$\int dm r_1^2 = \int dm (y^2 + z^2), \quad \int dm r_2^2 = \int dm (z^2 + x^2),$$
$$\int dm r_3^2 = \int dm (x^2 + y^2).$$

Auch für die beiden folgenden allgemeinen Sätze über Trägheitsmomente ist die zu Grunde gelegte Anschauung der Discretion oder Continuität der Materie gleichgültig beziehungsweise unwesentlich.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Grösse des Trägheitsmoments eines starren Massensystems mit der Aenderung der Axe, auf welche es bezogen werden soll, ändert. Wir wollen einmal Parallelverschiebungen, sodann Drehung der Axe um einen Punkt vornehmen, darauf können wir dann jede beliebige Axenänderung zurückführen:

1) Wir knüpfen an den Ausdruck für das Trägheitsmoment eines starren Massensystems um die x-Axe: $\Sigma m (y^2 + z^2)$. Parallel zur x-Axe liege die ξ-Axe, in dem Punkte $y = b$, $z = c$ schneide diese ξ-Axe die yz-Ebene. Für ein Massenelement, welches, bezogen auf das x-, y-, z-System, die Coordinaten y, z und, bezogen auf das ξ-, η-, ζ-System, die Coordinaten η, ζ hat, gelten dann die Beziehungen:

$$y = b + \eta, \quad z = c + \zeta,$$

also können wir das Trägheitsmoment um die x-Axe schreiben:

$$\Sigma m (y^2 + z^2) = \Sigma m (b^2 + c^2) + \Sigma m (\eta^2 + \zeta^2) + 2b \Sigma m \eta + 2c \Sigma m \zeta.$$

Wählen wir jetzt die ξ-Axe derart, dass sie durch den Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) des Systems hindurchgeht, so werden dann nach § 52 (3):

$$\Sigma m\eta = 0, \quad \Sigma m\zeta = 0,$$

und wir erhalten die einfache Beziehung:

$$(1) \qquad \Sigma m(y^2 + z^2) = (b^2 + c^2)\,\Sigma m + \Sigma m(\eta^2 + \zeta^2).$$

Diese Gleichung enthält den Satz: Das Trägheitsmoment eines starren Systems um eine beliebige Axe (x) ist gleich dem Trägheitsmoment der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Gesammtmasse des Systems, bezogen auf dieselbe Axe (x), vermehrt um das Trägheitsmoment des starren Systems um eine zur ursprünglichen Axe (x) parallel gerichtete Axe (ξ), die durch den Schwerpunkt geht.

Wollen wir also wissen, wie sich das Trägheitsmoment eines Körpers um eine Axe bei Parallelverschiebungen der Axe im Raum ändert, so werden wir zunächst das Trägheitsmoment um eine zur gegebenen Axe parallel gerichtete Axe durch den Schwerpunkt aufsuchen. Der eben formulirte Satz vermittelt dann in der denkbar einfachsten Weise den Uebergang der Berechnung des Trägheitsmoments von einer Axe zu einer dazu parallel gerichteten anderen.

2) Wir wollen nun Drehungen der Axe um einen Punkt vornehmen und knüpfen an die bekannten Formeln für die Coordinatentransformation mit gleichem Anfangspunkt:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \xi &= x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma, \\ \eta &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ \zeta &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2. \end{aligned}$$

Wir wollen sehen, in welcher Weise sich die Berechnung des Trägheitsmoments $\Sigma m(\eta^2 + \zeta^2)$ um die ξ-Axe auf die Trägheitsmomente

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m(z^2 + x^2), \quad C = \Sigma m(x^2 + y^2)$$

um die x-, y-, z-Axe zurückführen lässt. Es ist:

$$\begin{aligned} \eta^2 + \zeta^2 &= x^2(1 - \cos^2\alpha) + y^2(1 - \cos^2\beta) + z^2(1 - \cos^2\gamma) \\ &\quad + 2xy(\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2) \\ &\quad + 2yz(\cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2) \\ &\quad + 2zx(\cos\gamma_1\cos\alpha_1 + \cos\gamma_2\cos\alpha_2) \\ &= x^2(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + y^2(\cos^2\gamma + \cos^2\alpha) + z^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) \\ &\quad - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha. \end{aligned}$$

Es wird so das Trägheitsmoment um die ζ-Axe: $\mathsf{M} = \Sigma m(\eta^2 + \zeta^2)$

$$(3)\quad \begin{aligned}\mathsf{M} &= \cos^2\alpha\, \Sigma m(y^2+z^2) + \cos^2\beta\, \Sigma m(z^2+x^2) + \cos^2\gamma\, \Sigma m(x^2+y^2)\\ &\quad - 2\cos\beta\cos\gamma\, \Sigma myz - 2\cos\gamma\cos\alpha\, \Sigma mzx - 2\cos\alpha\cos\beta\, \Sigma mxy.\end{aligned}$$

Setzen wir in (3) M symbolisch gleich dem reciproken Quadrat eines Radiusvectors $1/\varrho^2$, denken uns diesen Radiusvector in den Richtungen α, β, γ gegen die Coordinaten x, y, z aufgetragen und betrachten diese Richtungen im Anschluss an die Gleichungen (2) als veränderlich, dann stellt die Gleichung (3) in derselben Symbolik die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoides, bezogen auf den Coordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt, dar, und an diesem Ellipsoid können wir uns alles das klar machen, was sich über Aenderungen des Trägheitsmoments mit Drehung der Axe um den Coordinatenanfangspunkt sagen lässt. Dass es sich wesentlich um ein Ellipsoid handelt, geht daraus hervor, dass die Coefficienten der quadratischen Glieder der Gleichung (3) als Trägheitsmomente um die x-, y-, z-Axe wesentlich positiv sind.

Der Radiusvector nach irgend einem Punkt der Oberfläche des Ellipsoides stellt die reciproke Quadratwurzel des Trägheitsmoments dar, aufgetragen auf die Axe, auf welche es sich bezieht. Die Hauptaxen des Ellipsoides, welche auf einander senkrecht stehen, stellen nach ihrer Richtung die drei auf einander senkrechten Drehungsaxen dar, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum oder Minimum ist, und nach ihrer Grösse die reciproken Quadratwurzeln aus diesen Maxima und Minima.

Beziehen wir das „Trägheitsellipsoid“, wie wir es nennen können, auf seine Hauptaxen x, y, z, so fallen in der Gleichung (3) die doppelten Producte heraus, und es bleibt:

$$(4)\qquad \mathsf{M} = \frac{1}{\varrho^2} = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

worin A, B, C die vorhin eingeführten Abkürzungen bedeuten:

$$A = \Sigma m(y^2+z^2),\quad B = \Sigma m(z^2+x^2),\quad C = \Sigma m(x^2+y^2).$$

Das Trägheitsmoment um eine beliebige Axe ist danach bestimmt durch die Trägheitsmomente A, B, C um die Hauptaxen des Ellipsoides: die Hauptträgheitsmomente — wie man sie nennt. Die Axen, auf welche diese Hauptträgheitsmomente zu beziehen sind, nennt man die Hauptträgheitsaxen. Die Hauptträgheitsaxen sind ihrer Lage nach also dadurch charakterisirt, dass für sie ist:

$$(5)\qquad \Sigma myz = 0,\quad \Sigma mzx = 0,\quad \Sigma mxy = 0.$$

Diese Relationen legen es nahe, dass die Einführung der Hauptträgheitsaxen die Formeln, welche sich auf Drehbewegungen beziehen, unter Umständen erheblich vereinfachen kann — eine Vereinfachung, die dann unter Einführung des Schwerpunkts als Coordinatenanfangspunkt bisweilen noch weiter getrieben werden kann, indem dann weiter ist:

$$\Sigma mx = 0, \ \Sigma my = 0, \ \Sigma mz = 0.$$

In vielen Fällen wird man die Lage der Hauptträgheitsaxen nach der geometrischen Gestalt von vorneherein angeben können, z. B. für ein Ellipsoid, für einen Cylinder, für ein Prisma.

§ 59. Berechnung des Trägheitsmoments für einige geometrisch einfache Körper von homogener Dichte in Bezug auf gewisse Axen.

Wir schliessen an die Sätze über das Trägheitsmoment die Berechnung des Trägheitsmoments für einige geometrisch besonders einfache Körper von homogener Dichte in Bezug auf gewisse Axen.

1) Berechnung des Trägheitsmoments einer kreisförmigen Scheibe in Bezug auf eine senkrecht zur Scheibe durch den Mittelpunkt gelegte Axe.

Wir führen in der Ebene der Kreisscheibe vom Mittelpunkt aus Polarcoordinaten ϱ und φ ein. Der Radius der Kreisscheibe sei R, die Dicke der Scheibe sei Δ, die Dichte ε, dann drückt sich in Polarcoordinaten das Massenelement dm durch $\varepsilon \Delta \varrho d\varrho d\varphi$ aus, also wird das Trägheitsmoment:

$$(1) \qquad \mathsf{M} = \int \varrho^2 dm = \varepsilon \Delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \varrho^3 d\varrho = \varepsilon \Delta \frac{\pi R^4}{2}.$$

Führen wir noch die Gesammtmasse der Kreisscheibe

$$M = \varepsilon \Delta \pi R^2$$

ein, so können wir ausdrücken:

$$(1^a) \qquad \mathsf{M} = M \frac{R^2}{2}.$$

2) Berechnung des Trägheitsmoments eines Kreiscylinders in Bezug auf die Cylinderaxe.

Wir denken uns den Cylinder senkrecht zur Axe in Scheiben zerlegt von der Dicke dz. Die Höhe des Cylinders sei h, dann erhalten wir das Trägheitsmoment des Cylinders im Anschluss an (1):

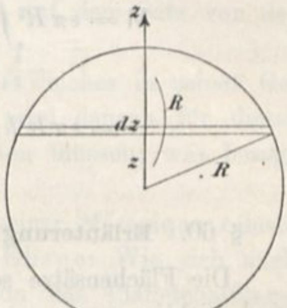
$$(2) \qquad \mathsf{M} = \varepsilon \frac{\pi R^4}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dz = \varepsilon h \frac{\pi R^4}{2} = M \frac{R^2}{2},$$

wo $M = \varepsilon h \pi R^2$ die Gesammtmasse des Cylinders bedeutet.

3) Berechnung des Trägheitsmoments einer Kugel in Bezug auf einen Durchmesser.

Wir zerlegen die Kugel in Scheiben von der Dicke dz senkrecht zum Durchmesser, wir rechnen z zum Kugelmittelpunkt; der Radius der einzelnen Scheibe ist dann

Fig. 7.



$$\sqrt{R^2 - z^2},$$

und das Trägheitsmoment der Kugel wird im Anschluss an (1):

$$\mathsf{M} = \varepsilon \frac{\pi}{2} \int_{-R}^{+R} (R^2 - z^2)^2 dz$$

$$(3) \qquad = \varepsilon \frac{\pi}{2} \int_{-R}^{+R} (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4)\, dz$$

$$= \varepsilon \frac{\pi}{2} \left[R^4 z - \frac{2}{3} R^2 z^3 + \frac{z^5}{5} \right]_{-R}^{+R} = \varepsilon \frac{\pi}{2} R^5 \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{8}{15} \varepsilon R^5 \pi,$$

oder wieder die Gesammtmasse der Kugel $M = \frac{4}{3} \varepsilon R^3 \pi$ eingeführt:

$$(3^a) \qquad \mathsf{M} = \frac{2}{5} M R^2.$$

4) Berechnung des Trägheitsmoments einer Kreisscheibe in Bezug auf einen Durchmesser.

Das Massenelement drückt sich wie bei (1) aus durch $\varepsilon \Delta \varrho \, d\varrho \, d\varphi$, der Abstand des Massenelementes von dem Durchmesser ist dann $\varrho \sin \varphi$, und das Trägheitsmoment wird:

$$(4) \qquad \mathsf{M} = \varepsilon \Delta \int_0^R \int_0^{2\pi} \varrho^3 \sin^2 \varphi \, d\varrho \, d\varphi = \varepsilon \Delta \frac{\pi R^4}{4} = M \frac{R^2}{4}.$$

5) Berechnung des Trägheitsmoments eines Cylinders in Bezug auf eine zur Cylinderaxe senkrechte Axe durch den Mittelpunkt.

Wir zerlegen den Cylinder wieder in Kreisscheiben von der Dicke dz. Das Trägheitsmoment einer Scheibe, die um z von der Axe entfernt ist, ist dann unter Verbindung von (4) mit § 58 (1)

$$\varepsilon\pi R^2 dz\left(\frac{R^2}{4}+z^2\right).$$

Das Trägheitsmoment des Cylinders ist also:

$$\mathsf{M} = \varepsilon\pi R^2\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dz\left(\frac{R^2}{4}+z^2\right) = \varepsilon\pi R^2\left(\frac{R^2}{4}h+\frac{h^3}{12}\right)$$

$$= \varepsilon\pi R^2 h\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) = M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right).$$

§ 60. **Erläuterung der Flächensätze an einigen Beispielen.**

Die Flächensätze sowie der Satz von der Erhaltung der Fläche sind wichtig genug, um sich ihren Inhalt und ihre physikalische Bedeutung an der Hand einer Reihe von Beispielen zu veranschaulichen.

Das Planetensystem und die Erde bieten eine Reihe solcher sehr schönen Beispiele:

Nehmen wir einen Planeten, z. B. die Erde, so unterliegt diese der gravitirenden Einwirkung von Sonne, Mond und anderen Planeten. Würde die Erde eine homogene Kugel sein oder aus homogenen, concentrischen Kugelschichten bestehen, so werden wir später erkennen, dass dann äussere Drehungsmomente, herrührend von der Gravitation der anderen Himmelskörper, nicht ausgeübt werden könnten. Nun ist die Erde weder eine homogene Kugel, noch besteht sie aus concentrischen homogenen Kugelschichten, es werden also äussere Drehungsmomente ausgeübt werden, und es fragt sich, welches die astronomischen Erscheinungen sind, die hier den Flächensätzen entsprechen.

Diese Erscheinungen sind in der Astronomie bekannt unter dem Namen der Präcession und Nutation. Ihre genauere Theorie ist zu schwierig, um in einer einleitenden Vorlesung behandelt zu werden. Die Erscheinung besteht darin, dass die Erdaxe im Laufe der Jahrzehnte, Jahrhunderte und Jahrtausende sich nicht parallel bleibt. In Folge der Nutation beschreibt die Erdaxe am Fixsternhimmel kleine Kreise mit einer Periode von circa 19 Jahren, diese Erscheinung kommt ausschliesslich unter Einwirkung des Mondes zu Stande. In Folge der Präcession beschreibt die Erdaxe am Fixsternhimmel einen grossen Kreis mit einer Periode von circa 26000 Jahren, diese Erscheinung kommt durch Einwirkung von Sonne, Mond und Planeten zu Stande. In Folge der Präcession wird nach 12000 Jahren α Lyrae den Namen Nordpolarstern führen müssen und nicht α Ursae minoris.

Sind die Erscheinungen der Präcession und Nutation interessante Beispiele für die Flächensätze, so wollen wir weiter einige Erscheinungen im Sonnensystem besprechen, welche auf dem Satz von der Erhaltung der Fläche beruhen.

Das Planetensystem ist ein System, auf welches in seiner Gesammtheit äussere Kräfte nicht wirken; es wird danach für dieses der Satz von der Erhaltung der Fläche gelten müssen; was besagt aber dieser Satz?

Er enthält die zuerst von Laplace in seiner Mécanique céleste aufgedeckte Thatsache der invariabelen Ebene: Wie sich auch im Laufe der Zeiten die innere Configuration des Planetensystems gestalten möge, es giebt für alle Zeiten eine unveränderlich sich erhaltende Ebene, durch welche die Richtung einer Axe bestimmt wird; in Bezug auf diese ist das Rotationsmoment des Planetensystems ein Maximum.

Wir werden auch den Satz von der Erhaltung der Fläche auf die einzelnen Planeten und auf die Erde anwenden können. Waren die Präcession und Nutation Erscheinungen, in denen die Existenz äusserer Drehungsmomente hervortrat, so giebt es doch andere astronomische Erscheinungen, auf welche diese äusseren Drehungsmomente nicht einwirken, und in Bezug auf diese wird man als von einer Anwendung des Satzes von der Erhaltung der Fläche sprechen können.

Die Erde ist wie jeder Planet ein frei rotirender Körper, das heisst, es werden auf ihre Drehungsaxe in Summa keine Druckkräfte wirken dürfen. Als solche Druckkräfte würden sich die Centrifugalkräfte äussern müssen; damit ihre Summe Null ist, müsste sein:

$$(1) \quad \sum mr\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sum mr = 0, \quad \text{d. h.} \sum mr = 0.$$

Hierin bedeutet $(d\varphi/dt)$ die Winkelgeschwindigkeit der rotirenden Erde, $\Sigma mr = 0$ besagt aber unter Bezug von § 51 (3) oder § 52 (3), dass die freie Rotationsaxe durch den Schwerpunkt gehen muss. Diese freie Rotationsaxe wird nach § 57 dadurch charakterisirt sein, dass das für sie berechnete Rotationsmoment ein Maximum ist.

Der Satz von der Erhaltung der Fläche besagt nun: wenn wir von den Erscheinungen der Präcession und Nutation absehen, wird die freie Rotationsaxe in ihrer Lage zum Fixsternhimmel erhalten, im Besonderen ist bezogen auf diese Axe

$$\sum mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \sum mr^2 = \text{Const.} \tag{2}$$

So beruht denn im Wesentlichen die Constanz der Umdrehungszeit der Erde um ihre Axe — mit andern Worten die Constanz unserer Zeiteinheit, der Secunde — auf der Thatsache des Satzes von der Erhaltung der Fläche. Dabei ist wesentlich die Unveränderlichkeit des Trägheitsmoments der Erde um ihre Axe Σmr^2 vorausgesetzt. Die säculare Abkühlung der Erde bedingt nun eine Contraction des Erdkörpers und damit eine Verkleinerung des Trägheitsmoments, der Satz von der Erhaltung der Fläche in der Form (2) fordert dann eine Vergrösserung der Drehgeschwindigkeit der Erde und damit eine Verkürzung der Secunde als Zeiteinheit. Es ist schon früher § 21 darauf hingewiesen, dass dieser Vergrösserung der Rotationsgeschwindigkeit der Erde ein verzögerndes Moment in der Fluthreibung entgegenwirkt. Auf diese können wir aber unseren Satz von der Erhaltung der Fläche nicht anwenden, denn die Erscheinungen der Ebbe und Fluth beruhen wieder wesentlich auf der Existenz äusserer Kräfte — herrührend von Mond und Sonne — und solche äusseren Kräfte schliesst die Anwendung des Satzes von der Erhaltung der Fläche aus.

Die Flächensätze, beziehungsweise der Satz von der Erhaltung der Fläche finden eine sehr schöne Veranschaulichung an der Erscheinung der fallenden Katze, die, wie sie auch fällt, stets auf die Füsse zu stehen kommt, und an dem Vorgang der Schaukel, die durch geschickte Flächenbewegungen in Gang gesetzt werden kann.

Bei dem ersten Beispiel handelt es sich um die Frage, ob eine frei fallende Katze durch geeignete Bewegung ihrer Gliedmaassen die Fähigkeit hat, durch Drehung ihrem Körper eine veränderte Lage zu geben; dass sie keine Fähigkeit hat, ihren Schwerpunkt zu ändern, sahen wir bereits § 53. Wir ziehen zur Beantwortung der Frage die Gleichungen § 55 (3) heran. Wenn die Katze mit ihren Gliedmaassen derart Flächen beschreibt, dass die Gliedmaassen wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehren, dann werden sich die Gleichungen § 55 (3) reduciren auf solche von der Form:

$$(3)\qquad \frac{d}{dt}\sum mr^2\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum mr^2\frac{d\varphi}{dt} = \text{Const.}$$

Gleichungen, welche trotz des verwandten Aussehens mit (2) doch eine andere physikalische Bedeutung haben. Wir können diese Summe als wesentlich aus zwei Theilen bestehend betrachten: der eine Theil bezieht sich auf die Masse der bewegten Gliedmaassen, welche in dem einen Sinne eine Fläche beschrieben haben; der andere Theil wird auf die Gesammtmasse des Körpers zu beziehen sein, welche in dem entgegengesetzten Sinne eine Fläche beschreibt, deren Grösse durch die Massenvertheilung des Körpers bedingt ist. Besonders anschaulich wird diese Auseinandersetzung in dem Falle, in dem in (3) die Constante = 0 zu setzen ist, d. h., in dem der fallende Körper keine anfängliche Drehgeschwindigkeit aufwies.

Auch das Ingangsetzen einer Schaukel durch Eigenbewegung des Schaukelnden beruht darauf, dass der Schaukelnde im geeigneten Moment mit seinen Gliedmaassen Flächen beschreibt, die durch eine Flächenbewegung der gesammten Schaukel in entgegengesetztem Sinn ihre Compensation finden.

III. 3) Der Satz von der lebendigen Kraft und seine Consequenzen.

§ 61. Der Satz von der lebendigen Kraft. Die Begriffe der lebendigen Kraft und der Arbeit.

Die durch den Satz von der lebendigen Kraft vorgeschriebene Integrationsmethode, welche wir § 43 an dem speciellen Fall des Zweikörperproblems der Newton'schen Gravitation kennen gelernt haben, können wir an die Gleichungen für die bedingte Bewegung eines Massensystems § 50 (2) knüpfen. Indem wir zunächst äussere und innere Kräfte nicht auseinander halten, können wir für jedes Massenelement unseres Systems einzeln Gleichungen von der Form ansetzen:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum X + \sum \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x},\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum Y + \sum \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y},\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= \sum Z + \sum \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Multipliciren wir nun die einzelnen Gleichungen mit den Wegcomponenten jedes einzelnen Punktes dx, dy, dz und summiren sie, so folgt:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\frac{m}{2}\, d\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) &= \sum (X dx + Y dy + Z dz)\\
&\quad + \sum \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz\right).
\end{aligned}
$$

In dem Falle nun die Bedingungen $\varphi(x, y, z) = \text{Const.}$ die Zeit nicht enthalten, folgt $(\partial\varphi/\partial x)\, dx + (\partial\varphi/\partial y)\, dy + (\partial\varphi/\partial z)\, dz = 0$, es verschwindet also die zweite Summe auf der rechten Seite, welche die Bedingungen enthält. Summiren wir weiter die Gleichungen (2), wie wir sie für jeden Massenpunkt des Systems hinschreiben können, über alle Massenelemente des Systems, so erhalten wir:

$$(3) \qquad d\sum \frac{m}{2}v^2 = \sum\sum(Xdx + Ydy + Zdz),$$

oder von einem bestimmten Anfangspunkt der Zeit t_0 bis zu einem beliebigen Zeitpunkt t integrirt — vorausgesetzt, dass eine solche Integration glatt durchführbar ist:

$$(4) \qquad \sum \frac{m}{2}v^2 - \sum_0 \frac{m}{2}v_0^2 = \int_{t_0}^{t} \sum\sum(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Diese beiden Gleichungen (3) und (4) bezeichnet man mit dem Namen: Satz von der lebendigen Kraft.

Wie die Schwerpunkts- und Flächensätze uns auf eine Reihe fundamentaler Begriffe geführt haben, die wir unserer Anschauung näher zu bringen versuchten, so werden wir uns nun auch mit den Ausdrücken zu beschäftigen haben, welche uns in ihrer allgemeinsten Form in (4) zum ersten Male entgegentreten, dem Ausdruck $\Sigma mv^2/2$ auf der linken Seite und dem Ausdruck $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ auf der rechten Seite. Wir knüpfen an diese Ausdrücke die Begriffe der lebendigen Kraft und der Arbeit, welche wir hier als reine Bezeichnungen (termini technici) einführen.

Wir verstehen unter lebendiger Kraft eines Massenpunktes: das halbe Product aus der Masse des Punktes und dem Quadrat der Geschwindigkeit des Punktes; unter der lebendigen Kraft eines Massensystems: die Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Massenelemente des Systems. Wir wollen zur Abkürzung für die lebendige Kraft eines Massensystems hier den Buchstaben T einführen und setzen:

$$(5) \qquad T = \sum \frac{mv^2}{2}.$$

Wir verstehen unter Arbeit einer Kraft auf einen Massenpunkt während einer Verschiebung um das Wegelement ds, welches während des Zeitelements dt zurückgelegt wird: die Summe der Kraftcomponenten auf diesen Massenpunkt, jede multiplicirt mit der zugehörigen Wegcomponente; unter Arbeit eines Kräftesystems oder eines Systems: die Summe über alle die elementaren Arbeitsausdrücke, von denen jeder sich auf das einzelne Massenelement des Systems bezieht. Wir wollen zur Abkürzung für die Arbeit auf ein Massenelement beziehungweise Massensystem den Buchstaben A einführen und setzen:

$$(6) \qquad dA = Xdx + Ydy + Zdz \text{ bezw. } \sum(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Noch erscheint der so eingeführte Arbeitsbegriff zu verwickelt, um daran unsere Anschauung bilden zu können; dies gelingt erst, wenn wir in (6) von den Componenten der Kraft X, Y, Z und des Weges dx, dy, dz zu ihren Resultanten R und ds übergehen: Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} dA &= Rds\,(\cos(Rx)\cos(dsx) + \cos(Ry)\cos(dsy) \\ &\qquad + \cos(Rz)\cos(dsz)) \\ &= Rds\cos(Rds). \end{aligned} \tag{6^a}$$

Indem wir nun $\cos(Rds)$ einmal mit dem Factor R, das andere Mal mit dem Factor ds verbinden, erhalten wir die beiden anschaulichen Definitionen:

Verschiebt sich ein Massenelement unter Einwirkung einer Kraft R um das Wegelement ds, so verstehen wir unter der Arbeit der Kraft auf das Massenelement: das Product aus Kraftcomponente, genommen nach der Richtung des Weges, in das Wegelement oder: das Product aus Wegcomponente, genommen nach der Richtung der Kraft, in die Kraft.

Besonders anschaulich ist der Fall, in dem die Kraftrichtung und Wegrichtung zusammenfallen; das geschieht z. B. wenn eine Masse sich unter Einwirkung der Schwere in der Verticalen bewegt. Es ist dann für eine endliche verticale Wegstrecke h:

$$A = \int Rds = \int mg\,ds = mgh. \tag{7}$$

Dieser specielle Fall hat für die Entwickelung und Ausarbeitung des Arbeitsbegriffs eine gewisse Rolle gespielt, sodass es wohl gerechtfertigt erscheint, dabei noch einen Augenblick zu verweilen. Die technische Maasseinheit für Arbeitsgrössen knüpft an diesen besonderen Fall. Die technischen Einheiten für die Länge und die Kraft sind Meter und Kilogrammgewicht. Physikalisch hat das Wort Kilogramm eine doppelte Bedeutung als Masse und als Gewicht. Wir verstehen unter dem Gewicht Kilogramm: die Kraft, mit der die Schwere auf die Masse eines Kilogramms wirkt. Insofern die Schwere nun auf der Erdoberfläche nicht ganz constant ist — sie nimmt vom Aequator zu den Polen zu — wird auch die Kraft, welche das Gewicht 1 Kilogramm unter verschiedenen Breiten darstellt, nicht immer genau dieselbe sein.

Dieses vorausgeschickt, versteht man nun in der Technik unter der Arbeit von „Ein Kilogramm-Meter" die Arbeit, welche die

Schwerkraft an einem Kilogramm-Gewicht verrichtet, wenn dieses sich unter Einwirkung der Schwere um ein Meter senkt. Diese Arbeitsgrösse wird in der Technik als Einheit der Arbeit festgesetzt, und in dieser Arbeitseinheit werden alle technischen Arbeitsgrössen ausgedrückt.

Sinkt das Gewicht unter Einwirkung der Schwere, ist also der Ausdruck für die Arbeit positiv, so sagt man: die Schwere leistet eine Arbeit. Hebt man ein Gewicht entgegen der Schwere, ist also der Ausdruck für die Arbeit der Schwere negativ, so sagt man: die Schwere erleidet eine Arbeit. Diese activen und passiven Ausdrücke „leisten" und „erleiden" überträgt man auch auf beliebige andere physikalische Arbeitsgrössen und wendet sie an, je nachdem die Arbeitsausdrücke positiv oder negativ ausfallen.

§ 62. Der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Begriff des Kreisprocesses, des conservativen Systems und der conservativen Kräfte.

Der Satz von der lebendigen Kraft § 61 (4):

$$(1) \qquad T - T_0 = \int_{t_0}^{t} \sum \sum (X dx + Y dy + Z dz)$$

wird zum Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, wenn der Ausdruck für die Arbeit der auf ein System wirkenden Kräfte während eines beliebigen endlichen Zeitintervalls von t_0 bis t ausschliesslich abhängig von dem Anfangs- und Endzustand des Systems ist, unabhängig von dem Wege, auf dem die Ueberführung von dem Anfangszustand in den Endzustand stattfindet. Kehrt ein solches System nämlich nach einer endlichen Zeit wieder einmal in die anfängliche Configuration zurück, dann wird der Ausdruck für die Arbeit auf der rechten Seite in (1), angewandt auf die Anfangs- und Endposition, verschwinden, es wird $T = T_0$, sein, d. h., die lebendige Kraft ist erhalten geblieben, und nach diesem Specialfall trägt der eben erwähnte Satz seinen Namen: Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Wir wollen nun wieder in die Betrachtung die Bezeichnungen „Innen" und „Aussen" einführen. Wir grenzen dadurch in scheinbar willkürlicher Weise ein System von einem anderen ab. Ein Vortheil wird in dieser Unterscheidung natürlich nur liegen, wenn sie zweckmässig getroffen wird. Wir sprechen so in der § 50 eingeführten Terminologie von den inneren Kräften eines Systems und den von aussen auf das System wirkenden Kräften.

Der Satz von der lebendigen Kraft (1), beziehungsweise der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft kann dann unter Einführung des Index i für die inneren Kräfte, des Index a für die äusseren Kräfte geschrieben werden:

$$
(2) \qquad \begin{aligned} T - T_0 = & \int_{t_0}^{t} \sum\nolimits_i (X dx + Y dy + Z dz) \\ & + \int_{t_0}^{t} \sum\nolimits_a (X dx + Y dy + Z dz). \end{aligned}
$$

Wir haben der Einfachheit halber hier statt der Doppelsumme in (1) eine einfache Summe geschrieben, es bedeuten entsprechend in (2) X, Y, Z die Gesammtheit der inneren beziehungsweise der äusseren Kraftcomponenten auf das einzelne Massenelement, in Bezug auf welches dann über das gesammte System zu summiren ist.

Bringen wir jetzt in (2) Alles, was auf innere Zustände und Einwirkungen Bezug hat, auf die rechte Seite, das andere, was auf äussere Einwirkungen Bezug hat, auf die linke Seite, so können wir (2) schreiben:

$$
(3) \qquad \begin{aligned} & \int_{t_0}^{t} \sum\nolimits_a (X dx + Y dy + Z dz) \\ & = T - T_0 - \int_{t_0}^{t} \sum\nolimits_i (X dx + Y dy + Z dz). \end{aligned}
$$

Je nachdem nun der Ausdruck links positiv oder negativ ist, können wir unter Aufnahme der, Ende § 61 eingeführten Terminologie sagen: Die äusseren Kräfte leisten auf das System eine Arbeit, das System erleidet eine Arbeit — oder: Die inneren Kräfte leisten nach aussen eine Arbeit, das System leistet eine Arbeit, die äusseren Kräfte erleiden eine Arbeit.

Wir können äussere Kräfte benutzen, um ein System auf einem beliebigen Wege aus einer Anfangs- in eine Endposition überzuführen. Ist dann der Ausdruck für die Arbeit der inneren Kräfte in (3),

$$\int_{t_0}^{t} \sum_i (X dx + Y dy + Z dz),$$

unabhängig von dem Wege, auf dem die Configuration des Systems von der Anfangsposition in die Endposition übergeführt wird, ist also dieser Ausdruck nur abhängig von der Anfangs- und Endposition dieses Systems — mit anderen Worten, gilt für dieses System der Satz von der Erhaltung der Kraft, dann empfiehlt es sich, für ein derartiges System oder für die Kräfte desselben einen besonderen Namen einzuführen. Die englischen Physiker haben um die Mitte dieses Jahrhunderts für ein solches System die Bezeichnung „conservatives System“, für die inneren Kräfte eines solchen die Bezeichnung „conservative Kräfte“ eingeführt.

Führen wir nun durch irgend welche äusseren Kräfte ein solches conservatives System auf einen gegebenen Anfangszustand zurück, d. h., auf eine gleiche Configuration und eine gleiche lebendige Kraft der Theile, dann wird nach (3) die von aussen auf das System dabei geleistete Gesammtarbeit Null sein. Wir bezeichnen eine derartige Folge von Zustandsänderungen, durch welche ein System unter äusserer Einwirkung wieder auf den anfänglichen Zustand zurückgeführt wird, als Kreisprocess.

In dieser soeben eingeführten Terminologie werden wir also sagen können: Bei einem an einem conservativen System vorgenommenen Kreisprocess wird Arbeit von aussen weder geleistet noch von aussen erlitten.

Vom Standpunkt der reinen Mechanik, d. h. der Bewegungslehre der ponderabeln Materie werden wir die Widerstands- und Reibungskräfte als nicht conservative Kräfte zu bezeichnen haben, dagegen würden die Kräfte der Galilei'schen Schwere und der Newton'schen Gravitation als conservative zu bezeichnen sein.

§ 63. Einführung der Begriffe des Potentials, der Energie, der kinetischen und potentiellen Energie.

Wir können unsere Ausdrucksweise noch übersichtlicher und einfacher durch Einführung des Potentialbegriffs gestalten. Wir definiren die Kräftefunction oder das Potential als eine Function, deren positive oder negative Differentialquotienten nach den Coordinaten für einen Punkt die Kraftcomponenten in diesem Punkt darstellen. Beide Definitionen, die sich durch das Vorzeichen unterscheiden, kommen in der Literatur vor; wir wollen daher beiden Definitionen durch Einführung der verschiedenen Zeichen U und V Rechnung tragen und definiren:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$(1) \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Gehen wir von diesen Ausdrücken zum Begriff der Arbeit über, so folgt:

$$(2) \qquad Xdx + Ydy + Zdz = dU = -dV,$$

eine Gleichung, welche gleichfalls sich als Definition des Potentials eignen würde, und welche besagt: Die Aenderung des Potentials ist — je nach der Verwerthung von U oder V — positiv oder negativ genommen gleich der Arbeitsleistung, die der durch die Potentialänderung bedingten Zustandsänderung entspricht.

Ebenso wie wir den Begriff des Potentials zunächst auf ein Massenelement, welches einer Wirkung unterliegt, bezogen haben, so können wir den Begriff des Potentials ausdehnen auf ein Massensystem. Das Potential eines Massensystems ist dann die Summe der Potentiale aller Massenelemente.

Vorausgesetzt bei der Einführung des Potentialbegriffs ist natürlich die Existenz einer solchen Function. Setzen wir diese Existenz voraus und bezeichnen mit V das Potential des Systems, so können wir den Satz von der lebendigen Kraft in Form der Gleichung § 62 (3) schreiben:

$$(3) \qquad \int_{t_0}^{t} \sum_a (Xdx + Ydy + Zdz) = T + V - (T_0 + V_0)$$

und im Falle keine äusseren Kräfte vorhanden sind:

$$(4) \qquad T + V = T_0 + V_0 = \text{Const.}$$

Wir bezeichnen die Summe der lebendigen Kraft und des Potentials eines Systems für einen Zeitpunkt als die mechanische Gesammt-Energie für diesen Zeitpunkt und ihre Theile: die lebendige Kraft des Systems als die kinetische Energie des Systems, das Potential des Systems als die potentielle Energie des Systems.

Gilt der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, so würde in unserer neu eingeführten Terminologie damit gesagt sein, dass das Potential des Systems, die potentielle Energie des Systems eine eindeutige Function der Configuration oder Lage des Systems ist.

Die Gleichung (4) würde besagen: Ohne Einwirkung äusserer Kräfte ist die Energie eines conservativen Systems eine constante Grösse. Die Formen der Energie innerhalb eines solchen Systems können sich ändern: auf Kosten der potentiellen Energie kann die kinetische Energie vermehrt werden, und umgekehrt auf Kosten der kinetischen Energie kann die potentielle Energie zunehmen; ihre Summe bleibt aber immer dieselbe.

Die Gleichung (3) würde besagen: Wirken auf das System äussere Kräfte, so wird die Gesammtenergie des Systems vermehrt, wenn das System von den äusseren Kräften eine Arbeit erleidet. Wirkt dagegen das System selbst nach aussen, so leistet das System nach aussen eine Arbeit, die Gesammtenergie des Systems wird dadurch vermindert.

In dieser Weise aufgefasst, gewinnt der Begriff der Energie die Bedeutung Arbeitsfähigkeit, Leistungsfähigkeit, Arbeitsvorrath (F. Neumann).

§ 64. Veranschaulichung der Potential- und Energiebegriffe an den Beispielen des Falls, des Wurfs, des Pendels und der Planetenbewegung.

Ohne bis jetzt für die Mechanik durch Einführung des Energiebegriffs etwas anderes als eine neue Bezeichnungsweise gewonnen zu haben, wird es gut sein, den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft mit der neu eingeführten Terminologie der Energiebegriffe, der kinetischen und der potentiellen Energie, an den Beispielen zu erläutern, die wir bisher in der Vorlesung behandelt haben.

Die bisher behandelten Beispiele bezogen sich auf den unelastischen Stoss (§ 41), auf den freien Fall und Wurf der Körper (§§ 31 u. 32), auf die Planetenbewegung (§§ 42—44) und auf das mathematische Pendel (§ 49).

Die Theorie des unelastischen Stosses haben wir hier zunächst auszuscheiden. Schon in dem Satz von der lebendigen Kraft, § 61 (4), war die Voraussetzung enthalten, dass die Integration beim Uebergang von (3) zu (4) glatt durchführbar sei — mit anderen Worten, dass die lebendige Kraft des Systems eine stetige Function der Zeit sei. Diese Voraussetzung ist bei dem Vorgang des unelastischen Stosses nicht erfüllt, und darum fällt dieses Beispiel nicht unter den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Uns wird aber dieses

Beispiel gelegentlich der Erläuterung des allgemeinen physikalischen Princips der Energie von Nutzen sein.

In den Beispielen des freien Falls, des Wurfs der Körper und des mathematischen Pendels ist die Schwere die wirkende Kraft. Hier gilt der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, wenigstens so lange der fallende Körper nicht auf die Ebene aufschlägt, durch welche die disponible Fallhöhe bedingt wird (Boden, Erdoberfläche). Bezeichnen wir die in jedem Augenblick disponible Fallhöhe vertical nach oben mit $+z$, so haben wir als Potential der Schwerkraft den Ausdruck zu schreiben:

(1) $$V = + mgz.$$

Wir verificiren die Richtigkeit des Ausdrucks sehr einfach, indem $-\partial V/\partial z = -mg$ die Schwerkraft auf die Masse m in der Richtung der Verticalen nach oben ausdrückt.

Knüpfen wir nun direct an den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft in der Form des Princips der Energie, so werden wir $mv^2/2$ als kinetische Energie, $+mgz$ als potentielle Energie einzuführen haben, und wir können sofort hinschreiben:

für den freien Fall:

(2) $$m\frac{v^2}{2} + mgz = mgz_0,$$

für den Wurf:

(3) $$m\frac{v^2}{2} + mgz = m\frac{v_0^2}{2},$$

für das Pendel:

(4) $$m\frac{v^2}{2} + mgz = mgz_0.$$

In diesen Gleichungen (2—4) beziehen sich die Werthe z_0 und v_0 auf die anfängliche disponible Fallhöhe z beziehungsweise auf den anfänglichen Geschwindigkeitswerth v zur Zeit $t = 0$. Alle drei Gleichungen sind in unseren früheren Theorien des freien Falls, des Wurfs und des Pendels enthalten, und können wir sie — wenn auch theilweise in anderen Bezeichnungen — dort wiederfinden. Die Masse hebt sich allenthalben heraus, insofern die Schwere der Masse m proportional wirkt.

Wir können nun vom Standpunkt des Princips der Energie die Gleichungen (2—4) in folgender Weise interpretiren:

Beim freien Fall (2) ist wie beim Pendel (4) an der höchsten Stelle die kinetische Energie Null, die potentielle Energie ein Maximum. Der physikalische Vorgang besteht nun darin, dass in dem Maasse, in dem die potentielle Energie abnimmt, die kinetische Energie zunimmt. Beim Aufschlagen ist die potentielle Energie Null geworden, die kinetische Energie hatte kurz zuvor ihr Maximum erreicht.

Während beim freien Fall mit dem Aufschlagen des fallenden Körpers auf den Erdboden der Energieumsatz sein Ende erreicht hat, geht beim Pendel (4) vom tiefsten Punkte an der Energieumsatz in entgegengesetzter Richtung wie vorher vor sich; in dem Maasse, in dem sich das Pendel erhebt, nimmt die kinetische Energie ab, die potentielle Energie zu, bis im höchsten Punkt der Erhebung die kinetische Energie Null geworden ist und die potentielle Energie ihr Maximum erreicht hat. Dieser wechselseitige Umsatz der Energieformen wiederholt sich beim Pendel periodisch.

Beim Wurf von der Erdoberfläche (3) ist die gesammte anfängliche Energie die kinetische Energie $mv_0^2/2$, diese setzt sich beim Erheben über die Erdoberfläche im Allgemeinen nur zum Theil in potentielle Energie um — nur im Fall der Wurf vertical vor sich geht, wird der Umsatz ein vollständiger. Im höchsten Punkt der Wurfbahn erreicht jedenfalls die potentielle Energie ihr Maximum, die kinetische ihr Minimum, und nun geht der Umsatz wieder in entgegengesetzter Richtung vor sich.

In dem Beispiel der Planetenbewegung — des Zweikörperproblems — ist die Newton'sche Gravitation die wirkende Kraft. Hier gilt wie bei der Schwere der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Bezeichnen wir die in jedem Augenblick disponible Entfernung des Planeten von der Sonne mit r, so haben wir als Potential der Gravitation im Zweikörperproblem für den Planeten mit der Masse m den Ausdruck zu schreiben:

$$V = -f\frac{(M+m)\,m}{r}. \tag{5}$$

Setzen wir in der Bezeichnung des § 43 $r^2 = \xi^2 + \eta^2$, so werden die Kraftcomponenten auf den Planeten mit der Masse m:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial \xi} = -f\frac{(M+m)\,m}{r^2}\cdot\frac{\xi}{r}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial \eta} = -f\frac{(M+m)\,m}{r^2}\cdot\frac{\eta}{r}.$$

In der Uebereinstimmung dieser Ausdrücke mit denen in § 43 (7) liegt die Berechtigung, dass wir für das Potential beziehungsweise die potentielle Energie im Zweikörperproblem den Ausdruck (5) in Ansatz gebracht haben. Die kinetische Energie des Planeten ist wieder $mv^2/2$, und wir können in Uebereinstimmung mit § 43 (13) schreiben:

$$(6) \qquad m\frac{v^2}{2} - f(M+m)\frac{m}{r} = m\frac{v_0^2}{2} - f(M+m)\frac{m}{r_0}.$$

Hierin mögen sich die Werthe r_0 und v_0 auf das Perihel beziehen, und wir können vom Standpunkt des Princips der Energie die Gleichung (6) in folgender Weise interpretiren: Die Planetenbewegung besteht in einem beständigen Umsatz von kinetischer Energie in potentielle und umgekehrt. Im Perihel hat die kinetische Energie ihr Maximum erreicht, die potentielle Energie ihr Minimum; im Aphel hat die kinetische Energie ihr Minimum erreicht, die potentielle Energie ihr Maximum.

Um den Begriff der Theilenergieen stets positiv zu haben, können wir die Gleichung (6) auch in der Form schreiben:

$$m\frac{v^2}{2} + f(M+m)m\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = m\frac{v_0^2}{2}.$$

Wir können uns dann so ausdrücken: In der Planetenbewegung ist für den einzelnen Augenblick als disponibel nur der Fallraum $r_0 - r$ gegen die Sonne zu betrachten. Es wäre:

$$f(M+m)m\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

als potentielle Energie zu fassen; im Perihel wäre die potentielle Energie erschöpft, und im Aphel hätte sie ihr Maximum erreicht. Das Beispiel gewinnt dann eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Beispiel des Wurfs (3).

§ 65. Das allgemeine Princip der Energie als physikalisches Postulat. Sein Verhältniss zur Frage nach der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile und nach der ausnahmslosen Existenz conservativer Kräfte.

Wenn das Princip der Energie in seiner universellen Fassung als Postulat der gesammten Physik den Anwendungen dieser Vorlesung auch fern liegt, so wollen wir doch um der Bedeutung dieses Princips willen hier die Bemerkungen anschliessen, welche an den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft knüpfen und formell thatsächlich auch den Ausgangspunkt zur Aufstellung dieses Postulats gebildet haben. Wir thun es um so lieber, um den allgemeinen Auseinandersetzungen über Natur und Wesen physikalischer Postulate an einem bedeutenden Beispiel den realen Untergrund zu geben, dessen diese Postulate bedürfen, und den sie niemals entbehren können.

Vom Standpunkt der reinen Mechanik können wir eine Anzahl

Kräfte namhaft machen, welche dem Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft widerstreiten, und welche wir daher als nicht conservative Kräfte bezeichnen müssen. Dahin gehören alle Widerstands-, Reibungs- und Stosskräfte. Eine aufmerksame Naturbetrachtung ergiebt nun aber, dass mit dem Auftreten dieser nicht conservativen Kräfte andere physikalische Erscheinungen untrennbar verbunden sind: Wärmeentwickelungen, elektrische Wirkungen und andere Erscheinungen.

Das Princip der Energie wirft nun die Frage auf, ob wir in diesen der Mechanik nicht angehörenden Erscheinungen ein Aequivalent für den Verlust von lebendiger Kraft zu sehen haben. Diese Frage lässt sich auch dahin modificiren, ob — wenn wir den speciellen Boden der Mechanik verlassen und den allgemeinen Standpunkt der Physik einnehmen — die in der Natur, also in der Wirklichkeit vorkommenden Kräfte als ausnahmslos conservativ zu bezeichnen sind oder doch nur als theilweise conservativ.

Die Frage deckt sich theilweise mit einer anderen, die in der Geschichte der Entwickelung der physikalischen Wissenschaft eine gewisse Rolle gespielt hat, mit der Frage: Giebt es ein perpetuum mobile oder nicht? Wir verstehen unter einem perpetuum mobile irgend eine Maschine, welche gestattet, aus endlicher Arbeit durch Uebertragung oder Umsatz unendliche Arbeit zu gewinnen, derart, dass dieselbe nutzbringend verwerthet werden kann. Die Bezeichnung „perpetuum mobile“ stellt also physikalisch einen ganz bestimmten terminus technicus dar, der eben seine Definition gefunden hat, und der nicht etwa das in sich schliesst, was die wörtliche Uebersetzung wiedergeben würde: etwas ewig Bewegliches — denn das bietet die Natur z. B. in den Bewegungserscheinungen des Planetensystems dar.

An den Bemühungen, ein perpetuum mobile zu construiren, haben sich in früheren Jahrhunderten nicht die schlechtesten Köpfe versucht; aber alle Bemühungen erwiesen sich als vergeblich.[1]) Der Pariser Akademie wurden im vorigen Jahrhundert so viele angebliche Constructionen eines perpetuum mobile übersandt, dass dieselbe 1775 den Beschluss fasste, keine Arbeit über die angebliche Entdeckung eines perpetuum mobile zu berücksichtigen, ebensowenig wie die angeblichen

---

1) Man vergleiche für das Folgende den sehr instructiven Vortrag von Helmholtz, „Ueber die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physik“, vom Jahre 1854. Vorträge und Reden, IV. Auflage, Braunschweig 1896. Bd. I, S. 51 u. f., insbesondere auch S. 404.

Lösungen der Quadratur des Cirkels. In der Begründung dieses Beschlusses wurde ganz kurz und bestimmt gesagt: „Le mouvement perpétuel est absolument impossible". Für die angebliche Lösung der Quadratur des Cirkels würde heute ein derartiger Beschluss überflüssig sein, nachdem Herr Professor Lindemann 1882 den Beweis für die Unmöglichkeit derselben geliefert hat. In Bezug auf das perpetuum mobile verhält es sich wesentlich anders: Wir können nur sagen: Nach unserer bisherigen Erkenntniss der Natur ist es absolut unwahrscheinlich, dass es ein perpetuum mobile giebt.[1]) Um diese Erkenntniss für das System der physikalischen Wissenschaft zu verwerthen, stellen wir subjectiv den Satz von der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile als Axiom auf, objectiv fordern wir die allgemeine Gültigkeit des Satzes als Postulat. Indem wir dem Satz diese bevorzugte Stellung einräumen, nehmen wir den Standpunkt ein, dass wir den Inbegriff dieses Satzes für ausserordentlich wichtig und fundamental halten und für geeignet befinden, ihn zum Ausgangspunkt deductiver Schlussketten zu machen.

Wir haben oben gesagt, dass sich die Frage nach der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile nur theilweise deckt mit der Frage nach der ausnahmslosen Existenz conservativer Kräfte in der Natur. Wir treten jetzt dem Verhältniss dieser Fragen zu einander näher.

Gäbe es in der Natur nicht conservative Systeme, so wäre für solche die Ausführung von Kreisprocessen denkbar, bei denen einmal dauernd endliche Arbeit gewonnen werden könnte, bei denen zweitens dauernd endliche Arbeit verloren gehen könnte. Man hätte solche Kreisprocesse nur beliebig oft zu wiederholen, um ins Unbegrenzte Arbeit zu schaffen oder zu vernichten.

Es ist nun klar, dass die Frage nach der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile nur die Existenz nicht conservativer Kräfte ausschliessen würde, mit Hülfe derer ein Gewinn von Arbeit erzielt werden könnte. Die Existenz nicht conservativer Kräfte, welche mit

---

1) Lehrer der Physik werden auch heute noch immer zuweilen von Leuten aufgesucht, die angeblich die Construction eines perpetuum mobile ersonnen haben wollen. Solchen Leuten wird man am besten von vorneherein mit der Frage begegnen, auf welche Kräfte der Natur sie ihre angebliche Construction basiren wollen. Wenn sie nun z. B. antworten: auf die Schwere und Elasticität, so wird man ihnen sofort sagen können, dass aus der mathematisch genauen Kenntniss dieser Kräfte sich die Unmöglichkeit eines perpetuum mobile direct beweisen lasse. Immer wird es darauf ankommen nachzusehen, welche mathematische Form sie für die angewandten Kräfte in Ansatz gebracht haben.

Verlust von Arbeit wirken, wäre aber auch mit der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile verträglich.

Die Frage nach der ausnahmslosen Existenz conservativer Kräfte oder Systeme erscheint somit allgemeiner als die Frage nach der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile. Ihre Beantwortung in positivem Sinne ist der Inbegriff des Princips der Energie.

Wir werden uns den Inbegriff des Princips an einer Reihe von Beispielen im nächsten Paragraphen klar machen. Hier nur einige Bemerkungen über Geschichte und Entwickelung des Princips:

Die Geschichte der Aufdeckung des Princips der Energie knüpft der Hauptsache nach an die Forschungen von J. R. Mayer (1841), J. P. Joule (1843) und H. Helmholtz (1847). Mayer hat zuerst die Universalität des Princips in seiner Bedeutung für die gesammte Physik erkannt und — was sehr wesentlich ist — durch geschickte Combination und Verwerthung älterer Beobachtungen anderer Autoren die erste Berechnung des mechanischen Wärmeäquivalentes (über die Bedeutung desselben siehe Ende des nächsten Paragraphen) geliefert. Joule hat, unabhängig von Mayer, sich um die Ausbildung der ersten, directen, präcisen Methoden zur Bestimmung des Wärmeäquivalents verdient gemacht, die von ihm abgeleiteten Werthe stehen noch heute auf der Höhe der Beobachtungskunst. Helmholtz hat unabhängig von beiden in besonders klarer Weise[1]) das Princip als das hingestellt, was es thatsächlich zunächst war, als noch die reiche empirische Bestätigung fehlte, als „eine physikalische Voraussetzung", „einen Führer innerhalb der Forschung".

Die Geschichte des Princips der Energie ist in hohem Grade geeignet, klar zu machen, unter welchen Verhältnissen man daran gehen kann, physikalische Postulate als solche in die Wissenschaft einzuführen, und überhaupt zu veranschaulichen, wie Postulate zu Stande kommen. Unter diesem Gesichtspunkte mögen hier die Worte wiederholt werden, mit denen Helmholtz seine Abhandlung über die Erhaltung der Kraft 1847 schliesst:

„Ich glaube durch das Angeführte bewiesen zu haben, dass das besprochene Gesetz keiner der bisher bekannten Thatsachen der Naturwissenschaften widerspricht, von einer grossen Zahl derselben aber in einer auffallenden Weise bestätigt wird. Ich habe mich bemüht, die

1) Die Voraussetzung der Auflösbarkeit aller Kräfte in Punktkräfte ist vom heutigen Standpunkte aus wohl der schwächste Theil der theoretischen Erörterungen in der berühmten Abhandlung vom Jahre 1847.

Folgerungen möglichst vollständig aufzustellen, welche aus der Combination desselben mit den bisher bekannten Gesetzen der Naturerscheinungen sich ergeben, und welche ihre Bestätigung durch das Experiment noch erwarten müssen. Der Zweck dieser Untersuchung, der mich zugleich wegen der hypothetischen Theile derselben entschuldigen mag, war, den Physikern in möglichster Vollständigkeit die theoretische, praktische und heuristische Wichtigkeit dieses Gesetzes darzulegen, dessen vollständige Bestätigung wohl als eine der Hauptaufgaben der nächsten Zukunft der Physik betrachtet werden muss."

§ 66. Anwendungen des allgemeinen Energieprincips auf den elastischen und den unelastischen Stoss, auf den Umsatz von kinetischer und potentieller Energie. Das mechanische Wärmeäquivalent.

Nachdem wir das allgemeine physikalische Princip der Energie formell im Anschluss an den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft entwickelt haben, wird es sich empfehlen, ihm an der Hand einer Reihe von Beispielen auch bis zu einem gewissen Grade einen anschaulichen materiellen Inhalt zu geben, der dann wieder fähig ist, rückwärts die Tragweite und Anwendbarkeit des Princips als allgemeines physikalisches Postulat zu erläutern.

Wir beginnen mit dem elastischen Stoss. Der elastische Stoss ist dadurch charakterisirt, dass die lebendige Kraft der beiden aufeinander stossenden Massen m_1, m_2 in ihrer Summe dieselbe bleibt; die beiden Massen bleiben dann im Gegensatz zum unelastischen Stoss nicht zusammen, sondern jede nimmt eine neue Geschwindigkeit an. Bezeichnen wir die Geschwindigkeiten der Massen m_1, m_2 vor dem Stoss mit v_1, v_2, nach dem Stoss mit V_1, V_2, so wäre also nach unserer Definition des elastischen Stosses:

$$m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} = m_1 \frac{V_1^2}{2} + m_2 \frac{V_2^2}{2}$$

oder:

$$(1) \qquad m_1 (v_1^2 - V_1^2) = m_2 (V_2^2 - v_2^2).$$

Wir fügen dazu die durch das Reactionsprincip gegebene Gleichung:

$$(2) \qquad m_1 (v_1 - V_1) = m_2 (V_2 - v_2)$$

und erhalten durch Division von (2) in (1):

$$(3) \qquad v_1 + V_1 = V_2 + v_2.$$

Die Auflösung von (2) und (3) nach V_1 und V_2 giebt:

$$(4)\quad V_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad V_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Es ist nun von Interesse, auch den **unelastischen Stoss** vom Standpunkt des Princips der Energie zu behandeln. Wir haben § 41 (2) die resultirende gemeinsame Geschwindigkeit der beiden Massen m_1, m_2 für den unelastischen Stoss erhalten:

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

und wir werden so vom Standpunkt des Princips der Energie die lebendige Kraft der Massen vor dem Stoss T_V mit der lebendigen Kraft der Massen nach dem Stoss T_N zu vergleichen haben; es ist:

$$2T_V = m_1v_1^2 + m_2v_2^2,$$
$$2T_N = (m_1 + m_2)v^2$$
$$= m_1v_1^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} + m_2v_2^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} + 2\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}v_1v_2.$$

Hieraus folgt dann:

$$2(T_V - T_N) = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2.$$

Es folgt also, dass beim Vorgang des unelastischen Stosses lebendige Kraft verloren gegangen ist.

Von dieser verloren gegangenen lebendigen Kraft behauptet nun das allgemeine Princip der Energie als allgemeines Postulat, dass sie in andere Energieformen übergegangen ist, in erster Linie werden wir dabei an Umsatz in Wärme zu denken haben.

Es mag noch bemerkt werden, dass vom Standpunkt der Wirklichkeit sowohl der von uns behandelte Fall des elastischen wie des unelastischen Stosses eine Abstraction ist; diese behandelten Fälle sind Grenzfälle. Der wirkliche Stossvorgang wird zwischen diesen Grenzfällen liegen, dadurch gewinnen aber gerade diese Grenzfälle ein besonderes theoretisches Interesse, und darum sind wir auf diese Grenzfälle eingegangen.

Wir behandeln noch eine Reihe weiterer Beispiele und werfen zunächst im Anschluss an den unelastischen Stoss die Frage auf: was wird aus der kinetischen Energie, mit welcher ein Körper beim freien Fall oder beim Wurf auf die Erde aufschlägt? Wir sahen: seine potentielle Energie war ohnehin kurz vor dem Aufschlagen so gut wie erschöpft, nun wird auch noch seine kinetische Energie vernichtet. Nach unserer soeben gegebenen Behandlung des unelastischen Stosses vom Standpunkt des Princips der Energie kann kein Zweifel sein, dass wir im Wesentlichen in erster Linie wieder einen Umsatz in Wärme in Ansatz zu bringen haben werden. — In analoger Weise werden wir das Aufleuchten der Meteore, die mit grosser relativer Geschwindigkeit zur Erde in die Erdatmosphäre treten, auf den Verlust an lebendiger Kraft zurückzuführen haben, den sie in Folge des Widerstandes der Luft erleiden.

Wenn wir noch weiter bei dem Fall der Körper zur Erde und bei seiner Verwerthung zum Umsatz in andere Energieformen stehen bleiben, wenn wir daran erinnern, dass ein Körper im Fallen ein Quantum potentieller und kinetischer Energie aufweist, dann wollen wir noch folgende Anwendungen der potentiellen wie der kinetischen Energie hervorheben:

Wir benutzen die potentielle Energie der Schwere zur Verwandlung in Arbeit, wo es auf eine stetige Wirkung und Kraftübertragung ankommt, z. B. bei Gewichtsuhren. Die Masse des Gewichts wirkt hier bei seiner Geschwindigkeit Null rein potentiell, so lange es nicht abgelaufen ist und von dem Erdboden absteht. Diese potentielle Energie überwindet die Reibungswiderstände der Räder, durch welche eine geringe Wärmeentwickelung bedingt wird, und erhält damit das Uhrwerk in Gang, vor Allem ertheilt sie indirect durch Uebertragung der Räder dem Pendel neue Impulse, ohne welche das Pendel, welches den gleichmässigen Gang regulirt, bald stillstehen würde. — An Stelle der potentiellen Energie eines aufgezogenen Gewichts tritt in den Federuhren (Taschenuhren) die potentielle Energie einer gespannten Feder.

Wir benutzen die kinetische Energie einer fallenden Masse zur Verwandlung in Arbeit, wo es auf eine momentane, grosse Wirkung und Kraftübertragung ankommt, z. B. beim Einrammen von Pfählen.

Was den Umsatz mechanischer Energie in Wärme betrifft, so weist das Princip der Energie die Frage, in welcher Weise dieser Umsatz im Einzelnen vor sich geht, ebenso ab, wie die Frage, wie beim elastischen Stoss sich die Vorgänge während des Stosses physikalisch gestalten. Das Princip der Energie ist kein Elementarprincip, es ist, wie etwa das Newton'sche Reactionsprincip, ein Integralprincip.

Dagegen wirft das Princip der Energie die Frage nach den

Grössenverhältnissen zwischen der mechanischen Arbeitseinheit (in Kilogramm-Metern, Kilogramm als Gewicht) und zwischen der calorischen Wärmeeinheit (Wärme, welche 1 Kilogramm Wasser um 1° C. erhöht) auf. Diese Frage wird durch die Bestimmung des sogenannten mechanischen Wärmeäquivalents beantwortet. Danach ist die Arbeit von 430 Kilogramm-Metern der calorischen Wärmeeinheit äquivalent.

Es können hier die mannigfaltigen Methoden zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents nicht aufgeführt werden, das gehört in die Vorlesung über die mechanische Wärmetheorie. Es muss aber hier hervorgehoben werden, dass die Grösse der Uebereinstimmung der Werthe für das mechanische Wärmeäquivalent die empirische Grundlage bildet, auf der heute im Wesentlichen das Princip der Energie als Postulat für die Physik mit ruht. Diese Bedeutung des Werthes für das mechanische Wärmeäquivalent als Postulat rechtfertigt es hinlänglich, dass Bestimmungen dieser wichtigen physikalischen Constanten fortgesetzt unternommen werden und ihre Bedeutung behalten, indem verschiedene Methoden für sie erdacht werden, und jede Methode mit der Genauigkeit ausgeführt wird, welche der Höhe des jeweiligen Zustandes der Präcisionsmesskunst entspricht.

Die Unterschätzung der physikalischen Präcisionsmessungen in ihrer Bedeutung für die Wissenschaft und ihr System hält die Grundlagen für sicherer und fester, als sie der inductiven naturwissenschaftlichen Methode entsprechend sein können. Wenn die inductive naturwissenschaftliche Erkenntniss aus der Schärfe der physikalischen Präcisionsmessungen schon für die Naturgesetze, ihre Formulirung und ihre Grenzen die werthvollste Nahrung zieht und ziehen muss, so wird das in noch viel höherem Grade für die Frage nach der allgemeinen Gültigkeit ihrer Postulate der Fall sein; denn die speciellen Naturgesetze haben die Postulate nach Inhalt und Form zur Voraussetzung und haben als solche sich ihnen unterzuordnen. Das Princip der Energie im Speciellen hat übrigens heute bereits die Stellung im wissenschaftlichen System erreicht, dass wir in den Fällen, in denen uns eine Abweichung vom Princip entgegenzutreten scheint, unsere Aufmerksamkeit eher auf die Aufdeckung von Umsatzformen der Energie richten werden, von denen wir annehmen, dass sie uns entgangen sind, als dass wir an der Gültigkeit des Princips als Postulat zweifeln. Auch nach dieser Richtung hin bilden Präcisionsmessungen eines der wesentlichsten Hülfsmittel zum Weiterbau und zur Controlle des Systems.

III. 4) Zur Statik eines Massensystems.

§ 67. Allgemeine Bedingungen für das Gleichgewicht eines Massensystems. Das Dirichlet'sche Kriterium für stabile und labile Gleichgewichtszustände.

Wir hatten schon Ende des § 38 im Anschluss an die Darstellung des Newton'schen Actionsprincips die Gleichgewichtsbedingungen für ein einzelnes Massenelement in der Form hingeschrieben:

$$(1)\qquad X = \Sigma X_h = 0,\quad Y = \Sigma Y_h = 0,\quad Z = \Sigma Z_h = 0.$$

Handelt es sich nun um die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Systems, so werden selbstverständlich für jedes einzelne Massenelement dieses Systems die Gleichgewichtsbedingungen (1) erfüllt sein müssen.

Insofern ein System aus sehr vielen Elementen besteht, kann es umständlich sein, jedes einzelne Element auf die Bedingungen (1) hin zu untersuchen, und so lenkt sich der Blick auf die Schwerpunkts- und Flächensätze hin, um nachzusehen, unter welchen Umständen diese allgemeinen Sätze für ein Massensystem vereinfachte Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen gestatten; im Besonderen entsteht unter Hinblick auf die Gleichungen § 51 (2) und § 55 (3) die Frage, unter welchen Umständen die Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\Sigma X = 0, && \Sigma Y = 0, && \Sigma Z = 0, \\ &\Sigma(Zy - Yz) = 0, && \Sigma(Xz - Zx) = 0, && \Sigma(Yx - Xy) = 0 \end{aligned}$$

Gleichgewichtsbedingungen des Systems darstellen, wobei sich die Summen nur noch auf äussere Kraftcomponenten und Drehungsmomente beziehen.

Im Allgemeinen lassen diese Gleichungen (2), wie aus der Ableitung der Schwerpunktssätze (§ 51) und der Flächensätze (§ 55) hervorgeht, bei einem System, das aus discreten Theilen besteht, noch innere Bewegungen dieser Theile zu. Das Planetensystem ist ein solches System, für welches die Gleichungen (2) insofern gelten, als die äusseren Kräfte der Fixsternwelt verschwinden, wir werden darum aber nicht behaupten können, dass sich das Planetensystem in einem Gleichgewichtszustand befindet.

Damit die Gleichungen (2) Bedingungen für ein Gleichgewicht darstellen, werden wir sie also auf starre Systeme zu beziehen haben, welche äusseren Kräften unterliegen. In diesem Falle gewähren in der That die Gleichungen (2) als Gleichgewichtsbedingungen einen Vortheil vor den Gleichungen (1). In allen anderen Fällen bleibt nichts übrig, als auf die Gleichungen (1), welche sich auf ein einzelnes Massenelement beziehen, zurückzugehen.

Im Falle starrer Systeme ist es in Beziehung auf den Gleichgewichtszustand üblich, neben dem Ausdruck „Drehungsmoment“ den Ausdruck „Statisches Moment“ zu gebrauchen. Von Bewegungen und Drehungen kann man ja im Zustand des Gleichgewichts überhaupt nicht reden, höchstens von Bewegungs- beziehungsweise Drehungstendenzen, welche eben im Zustand des Gleichgewichts zum Verschwinden gebracht werden. Ebensowenig wie man nun im Zustand des Gleichgewichts von Drehungen sprechen kann, wird man streng genommen von Drehungsmomenten sprechen, und davon geht die Bezeichnung „Statisches Moment“ aus.

Die Gleichgewichtsbedingungen (2) für ein starres System hängen auf das Innigste mit einem kinematischen Satz zusammen, den wir hier nicht zur Ableitung gebracht haben, auf den wir aber bei dieser Gelegenheit hinweisen wollen, dass nämlich der allgemeinste Bewegungszustand eines starren Körpers in einem einzelnen Zeitelement als zusammengesetzt aus einer Parallelverschiebung und aus einer Drehung dargestellt werden kann — also in jedem Augenblick einer Schraubenbewegung gleichkommt. Im Zustand des Gleichgewichts wird es weder zu einer Parallelverschiebung noch zu einer Drehung kommen können, insofern das Gleichgewicht der äusseren Kraftcomponenten eine Parallelverschiebung, und insofern das Gleichgewicht der äusseren Drehungsmomente eine Drehung nicht zu Stande kommen lässt.

Liefern in dieser Weise sowohl die Schwerpunktssätze wie die Flächensätze einen werthvollen Beitrag zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen starrer Systeme, so ist es nun sehr merkwürdig, dass auch der Satz von der lebendigen Kraft in sich die Mittel gewährt, einen Beitrag zur Lehre vom Gleichgewicht — und zwar für ein beliebiges System — zu liefern. Dieser Beitrag besteht in der

Beantwortung der Frage, ob in dem einzelnen Falle stabiles oder labiles Gleichgewicht vorliegt, und hat ein zuerst von Dirichlet aufgestelltes Kriterium zum Inhalt.

Wenden wir den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft in der Form des § 63 (4) $T + V =$ Const. auf ein im Gleichgewicht befindliches System an, so wird sich dieser Satz, insofern im Zustand des Gleichgewichts die kinetische Energie des Systems verschwinden muss, auf $V_0 =$ Const. reduciren. Der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft lehrt nun, wie die folgende Ausführung zeigt, dass das Potential V_0 im Zustand des Gleichgewichts einen ausgezeichneten Werth der Function V darstellt, d. h. im Allgemeinen entweder ein Maximum oder ein Minimum sein wird.

Bringen wir das System nämlich ein wenig aus der Gleichgewichtslage heraus, so folgt aus

$$T + V = T_0 + V_0 = \text{Const.}$$

$$(3) \qquad T - T_0 + V - V_0 = 0.$$

Der labile Gleichgewichtszustand ist nun dadurch charakterisirt, dass das im Gleichgewicht befindliche System, ein wenig aus der Gleichgewichtslage herausgebracht, sich mit wachsender Geschwindigkeit von der Gleichgewichtslage entfernt. Insofern T endliche positive, grösser werdende Werthe annimmt, wird also im Zustande des labilen Gleichgewichts $(V - V_0)$ endliche negative Werthe desselben absoluten Betrages annehmen müssen, d. h., es wird im Zustand des labilen Gleichgewichts $V_0 > V$, also V_0 ein Maximum sein müssen.

Der stabile Gleichgewichtszustand ist dadurch charakterisirt, dass das im Gleichgewicht befindliche System, ein wenig aus der Gleichgewichtslage herausgebracht, mit wachsender Geschwindigkeit der Gleichgewichtslage wieder zustrebt, es wird $T_0 > T$, mithin $V_0 < V$ sein, d. h., es wird V_0 ein Minimum sein müssen.

Im Zustand des Gleichgewichts stellt also das Potential V eines Systems einen ausgezeichneten Werth dar, der ein Maximum oder ein Minimum sein kann; jeder dieser Fälle hat seine gesonderte physikalische Bedeutung, wie soeben auseinandergesetzt ist. Die Fälle, in denen das Potential auch noch einen ausgezeichneten Werth darstellt, aber weder ein Maximum noch ein Minimum vorliegt, sollen hier nicht behandelt werden.

Historische Uebersicht zu III.

(Man vergleiche die historische Einleitung in Lagrange Mécanique analytique Part. II Dynamique, auch das Biographisch-Literarische Handwörterbuch von J. C. Poggendorff.)

Christian Huygens 1629—1695.
Isaac Newton 1642—1726.
Johann Bernoulli 1667—1748.
Daniell Bernoulli 1700—1782.
Leonhard Euler 1707—1783.
Jean le Rond d'Alembert 1717—1783.
Patrick d'Arcy 1725—1779.
Joseph Louis Lagrange 1736—1813.
Pierre Simon Marquis de Laplace 1749—1827.
Peter Gustav Lejeune-Dirichlet 1805—1859.

Julius Robert Mayer 1814—1878.
James Prescott Joule 1818—1889.
Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz 1821—1894.

Die Schwerpunktssätze sind zurückzuführen auf Newton (Principia 1687) und auf d'Alembert (Traité de Dynamique Paris 1743).

Die Flächensätze sind zurückzuführen auf Euler (Solutio problematis mechanici de motu corporum tubis mobilibus inclusorum. Opuscula varii argumenti Vol. I, 1746), auf Daniell Bernoulli (Problème de déterminer le mouvement variable d'un tyon mobile autour d'un point fixe etc. Mém. Berlin 1745) und auf d'Arcy (Mém. Paris 1752).

Der Satz von der lebendigen Kraft ist zurückzuführen auf Huygens, auf Johann Bernoulli (Theorema selecta pro conservatione virium vivarum demonstranda et experimentis confirmanda. Comm. Petrop. I) und auf Daniell Bernoulli (Hydrodynamica 1738. Sur le principe de la conservation des forces vives etc. Mém. Berlin 1748).

Der Begriff des Potentials lässt sich, abgesehen von den ersten Ansätzen bei Clairaut (Théorie de la figure de la terre, Paris 1743), zurückverfolgen bis auf Lagrange (Mém. Berlin 1777) und Laplace (Mém. Paris 1785), wo er zuerst im Anschluss an die im umgekehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Kräfte verwerthet wird.

Das Verhalten des Potentials in stabilen und labilen Gleichgewichtslagen ist von Dirichlet 1846 in seiner Abhandlung „Ueber die Stabilität des Gleichgewichts", Crelle Journal Bd. 32, aufgedeckt worden.

Die Geschichte des Princips der Energie knüpft an die Abhandlungen von Mayer: „Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur", 1842, Liebig's Annalen 42, — von Joule: „On the calorific effects of magnetoelectricity and on the mechanical value of heat", 1843, Philosophical magazin Ser. III, Vol. 23 — und von Helmholtz: „Ueber die Erhaltung der Kraft. Eine physikalische Abhandlung." Berlin 1847. (Ostwald's Klassiker Nr. 1.)

IV. Anwendungen insbesondere der Flächensätze auf Methoden- und Instrumentenlehre der praktischen Physik.

1) Allgemeine Vorbemerkungen über Wesen und Bedeutung der praktischen Physik für die wissenschaftliche Systematik und Methodik.

68. Verhältniss und Aufgaben der praktischen Physik im Rahmen der allgemeinen Physik. 69. Die Bedeutung der praktischen Präcisionsmesskunst für die Physik, insbesondere für die physikalische Systematik. 70. Charakteristik der praktischen Physik als Kunst in der Ausarbeitung physikalischer Methoden und im Bau physikalischer Instrumente. 71. Verwerthung des Begriffs der Grössenordnung als Hülfsmittel der praktischen Physik im Allgemeinen und als Genauigkeitsgrenze im Besonderen.

2) Theorie der Instrumente mit verticaler Schwingungsfähigkeit und ihrer Methoden.

72. Das physikalische Pendel. Das Fadenkugelpendel. 73. Bessel's Pendeluntersuchungen. Studium der Aufhängungsart. 74. Studium des Einflusses des umgebenden Mediums (der Luft). 75. Das Reversionspendel. Bessel's Verbesserungen daran.

76. Die Wage. Theoretische Gesichtspunkte, welche für ihre Construction maassgebend sind.

3) Theorie der Instrumente mit horizontaler Schwingungsfähigkeit und ihrer Methoden.

77. Allgemeine Uebersicht über die in diesem Abschnitt zu behandelnden Methoden.

78. Methode der unifilaren Aufhängung eines Stabes unter alleiniger Einwirkung der Torsion der Aufhängung. 79. Methode der unifilaren Aufhängung eines Magneten unter alleiniger Einwirkung des Erdmagnetismus. 80. Methode der unifilaren Aufhängung eines Magneten unter Rücksicht auf die Torsion.

81. Methode der bifilaren Aufhängung ohne Rücksicht auf die Torsion der Aufhängungsdrähte. 82. Methode der bifilaren Aufhängung unter Rücksicht auf die Torsion der Aufhängungsdrähte.

83. Gemeinsame Betrachtungen über die unifilare und bifilare Aufhängung. Methoden, Directionsmoment und Trägheitsmoment zu bestimmen.

84. Theorie der Horizontalwage (Torsionswage) in ihrer statischen, dynamischen und ballistischen Anwendung.

85. Theorie der Astasirung magnetischer Richtsysteme.

IV. 1) Allgemeine Vorbemerkungen über Wesen und Bedeutung der praktischen Physik für die wissenschaftliche Systematik und Methodik.

§ 68. Verhältniss und Aufgaben der praktischen Physik im Rahmen der allgemeinen Physik.

Wir werden in diesem Abschnitt eine Reihe von Anwendungen der bisher im Ganzen abstract entwickelten allgemeinen Sätze der Mechanik eines Massensystems für continuirliche Massen (III) geben, insbesondere soll es sich dabei um Anwendung der Flächensätze (III, 2) handeln.

Diese Anwendungen werden, insofern sie sich auf concrete Dinge beziehen, ein tiefer gehendes Verständniss jener abstract entwickelten allgemeinen Sätze nach sich ziehen, sowie sie die mit diesen Sätzen zu verbindenden Anschauungen ausbilden und vertiefen lehren. Sie werden weiter — und das soll die Hauptsache für diesen Abschnitt sein — die praktischen, realen Mittel anzeigen, welche im Stande sind, die rückwirkende Verfestigung des gesammten physikalischen Systems zu gewähren, deren Nothwendigkeit wir von Anbeginn der Vorlesung an (§ 1) betont haben.

Der theoretische Theil der Vorlesung war bisher dadurch charakterisirt, dass für eine Reihe von Grundsätzen: die Newton'schen Axiome oder Postulate, die Erweiterung des Reactionsprincips gelegentlich der Flächensätze, das Princip der Energie — die volle mathematische Strenge gefordert wurde. Diese Strenge der Grundsätze war absolut nöthig, weil diese Grundsätze die Grundlage für das physikalische System abgeben sollten, welches wir unter Benutzung mathematischer Hülfsmittel (Seite 13) entwickeln wollten.

Wir sind dieser mathematischen Strenge getreu geblieben bei den Anwendungen der erwähnten Grundsätze auf die zunächst gleichfalls als streng richtig vorausgesetzten Gesetze der Galilei'schen Schwere (Constanz von g) und der Newton'schen Gravitation — ferner bei der Ableitung der allgemeinen Sätze und Begriffe, die den

Gegenstand des III. Abschnittes der Vorlesung ausmachten, bei der Ableitung der Schwerpunktssätze, der Flächensätze und des Satzes von der lebendigen Kraft. Nachdem die Grundlagen des Systems in Form unserer Axiome oder Postulate festgelegt waren, konnten wir uns so vielleicht im Laufe des III. Abschnittes die Meinung bilden, dass Physik und Mathematik gar nicht einmal so sehr verschiedene Disciplinen seien.

Der folgende IV. Abschnitt wird uns eines anderen belehren, er wird uns viele von den erkennnisstheoretischen Betrachtungen in Erinnerung rufen, mit denen wir die Vorlesung einleitend begannen (I). Es wird sich jetzt darum handeln, die Beziehungen aufzudecken, welche zwischen den Grundlagen des Systems und seinen entwickelten Consequenzen einerseits und der äusseren Wirklichkeit, soweit sie uns zugänglich erscheint, andererseits bestehen. Die Wirklichkeit will nicht allein durch theoretische Speculationen erfasst, sondern vor Allem durch Beobachtung und Messung studirt sein. Speculation und Messung haben sich gegenseitig zu befruchten und müssen daher auch theoretisch in das rechte Verhältniss zu einander gesetzt werden.

Die Entwickelung der Grundsätze, nach denen Beobachtungen und Messungen wirklicher Verhältnisse vorzunehmen und zu verwerthen sind, bildet den Gegenstand der praktischen Physik. Wenn das Studium dieser praktischen Disciplin mit Erfolg auch nur im Laboratorium getrieben werden kann, so muss doch nach der ganzen Anlage der Vorlesung eine Reihe von Gesichtspunkten, welche für die praktische Physik maassgebend sind, hier in der theoretischen Vorlesung auseinander gesetzt werden.

Hier kommen die Dinge zur Sprache, auf welche wir zu einem Theil von vorneherein Bezug genommen haben und Bezug nehmen mussten, um die Wahl unserer systematischen Grundlagen und ihres Ausdrucks zu motiviren. Hier handelt es sich, die Bausteine zur Systematik aufzuzeigen, die dem ganzen System die rückwirkende Verfestigung zu geben haben, deren Existenz und Nothwendigkeit die Vorlesung im Unterschied von einer rein mathematischen Behandlung der Mechanik durchdringen soll.

Das physikalische System will objectiv wie jedes wissenschaftliche System ein in sich geschlossenes, lückenloses Ganzes sein, das ohne Fehler und Makel dasteht (Seite 7); die praktische Physik will subjectiv mit der Beschränktheit und Begrenztheit ihrer Mittel der Behandlung dieser Aufgabe geeignetes Material überweisen, sie hat bei Lösung dieser ihrer Aufgabe mit Schwierigkeiten zu kämpfen, welche wir, sofern sie bekannt sind, als Hemmungen, sofern sie nicht bekannt sind, als Fehler bezeichnen können. Diese Schwierigkeiten der praktischen Physik, welche die Ausbildung der Methoden und Instrumente zu überwinden sucht, liegen 1) in der äusseren Wirklichkeit und den dadurch gegebenen Verhältnissen (objectives Moment), 2) in der Begrenztheit und in den Schranken unserer sinnlichen Hülfsmittel (subjectives Moment). Dazu kann in beiden Fällen als weitere Hemmung noch die zeitige Unvollkommenheit der mathematischen Hülfsmittel treten.

Die Kunst der praktischen Physik wird nun entsprechend 1) darin bestehen, in dem inneren und äusseren Widerstreit dieser Schwierigkeiten und Hemmungen einen Compromiss zu schliessen, welcher einmal der Forderung unserer Postulate nach unbegrenzter Genauigkeit Rechnung trägt, welcher gleichzeitig aber auch die Grenze des Möglichen und Erreichbaren niemals aus dem Auge verliert. Die Kunst der praktischen Physik wird 2) darin bestehen, die durch die Natur der Sinne und ihrer Hülfsmittel (der Instrumente) gegebene Schranke und Grenze (S. 11) nicht nur theoretisch zu markiren, sondern auch als eine gegebene Grösse geradezu theoretisch zu verwerthen.

So bildet die praktische Physik — im besten Sinne des Wortes — ein subjectives Moment der Forschung; denn es können sehr wohl Zweifel darüber bestehen, auf welchem Wege man der Systematik zu ihrer rückwirkenden Verfestigung geeignetes Material zuzuführen hat, ja welches dieses Material überhaupt ist. Der Weg ist durchaus nicht immer vorgeschrieben, auf dem die praktische Physik diese ihre Aufgabe zu erfüllen hat; er kann es um so weniger sein, als die praktische Physik wirklich eine Kunst ist, welche von jeher mit einer gewissen Freiheit die Conflicte zu lösen versucht hat, welche die Wirklichkeit mit ihren Hemmungen und die Sinne mit ihren Schranken ihr als Gegenstand dargeboten haben. Die einzige Lehrmeisterin, welche in der Ausübung dieser Kunst hier Anleitung und Anregung geben kann, ist die Geschichte der praktischen Physik, wie sie sich dem Studium besonders an wenigen typischen Beispielen darbietet — Beispiele, welche wir auch in diesem Abschnitt bevorzugen werden.

Wir können uns das subjective Moment der Forschung, welches der praktischen Physik zu Grunde liegt, auch sehr gut an Folgendem klar machen: Wir haben §§ 16 und 17 für die physikalische Systematik die Frage nach Gründen und Zwecken, nach dem Warum und

Wozu abgelehnt. Hier in der praktischen Physik werden wir diese Frage mit einigem Recht wieder aufnehmen können. Wenn die praktische Physik der wissenschaftlichen Systematik das empirische Material zuzuführen hat, dessen sie bedarf, so werden ihre Methoden diese Zuführung in bestimmten Zielen und Richtungen verfolgen, sie werden Instrumente zu bestimmten Zwecken schaffen, und sie werden bei der Anwendung dieser Instrumente aus besonderen Gründen verfahren.

§ 69. Die Bedeutung der praktischen Präcisionsmesskunst für die Physik, insbesondere für die physikalische Systematik.

Die praktische Physik unterscheidet zwischen Experimentaluntersuchungen und Präcisionsmessungen. Unsere Forschung muss ebenso auf Erweiterung der Erkenntniss in unbekannte Gebiete wie auf Vertiefung und Befestigung der bisher gewonnenen Erkenntniss gerichtet sein. Experimentaluntersuchungen, die auf Erweiterung der Erkenntniss gerichtet sind, entsprechen dem naiven Standpunkt der Forschung; Präcisionsmessungen, die auf Vertiefung und Befestigung der bisher gewonnenen Erkenntniss gerichtet sind, entsprechen dem kritischen Standpunkt der Forschung. Die Wissenschaft bedarf beider Formen der Forschung.

In der Präcisionsmesskunst hat die Astronomie für die Physik vorbildlich gewirkt. Das Ziel der Präcisionsmessungen ist die exacte Bestimmung physikalischer Constanten. Die Thatsache der Existenz einer Constanten ist einer der vielen Ausdrücke für die Thatsache der Existenz eines Postulats oder eines Naturgesetzes. Wir können hier zwischen absoluten und relativen Constanten unterscheiden. Die Existenz des Princips der Energie als Postulat bedingt die Existenz gewisser absolut constanter Werthe; in diesem Sinne werden wir z. B. den experimentell zu bestimmenden Werth für das mechanische Wärmeäquivalent als eine absolute Constante fordern müssen, wenn uns dieser Werth zur Zeit auch nur bis auf $\frac{1}{100}$ bekannt ist. Die Existenz des Naturgesetzes von der Galilei'schen Beschleunigung durch die Schwere oder von der Newton'schen Gravitation bedingt die Existenz gewisser Werthe, denen im Allgemeinen wohl nur eine relative Constanz zugesprochen werden kann, wenn uns die Beschleunigung durch die Schwere z. B. für einzelne Erdorte zur Zeit auch bis auf $\frac{1}{1000000}$ bekannt ist.

Wenn H. Hertz bei seiner Doctorpromotion 1880 in seiner ersten These behauptete: „Ein Fehler von $\frac{1}{100}$ des wahren Werthes bildet die Grenze für die wünschenswerthe Genauigkeit, ein Fehler von $^1/_{1000}$ des wahren Werthes die Grenze für die mögliche Genauigkeit in der Bestimmung einer physikalischen Constanten; genauer als bis auf $^1/_{10000}$ ihres Werthes lässt sich kaum eine physikalische Constante auch nur definiren." — so charakterisirte er, abgesehen von einer geringen Anzahl von Ausnahmen, damit in dem ersten Theil der These ungefähr den Standpunkt der physikalischen Präcisionsmesskunst des Jahrhunderts; in dem letzten Satz denkt er aber wohl nur an die den physikalischen Gesetzen, nicht an die den physikalischen Postulaten zu Grunde liegenden Constanten.

Als eine Ausnahme von der Hertz'schen Charakteristik werden wir die von Bessel bestimmte Länge des einfachen Secundenpendels anzusehen haben. Wenn Bessel im Mittel aus seinen Beobachtungen als Länge des einfachen Secundenpendels für die Königsberger Sternwarte 440,8147 Linien berechnet,[1]) so werden wir unter Bezugnahme auf seine weiteren Angaben sagen können, dass dieser Werth etwa bis auf $^1/_{1000000}$ richtig sein wird. Die Definition dieser Grösse als wirkliche Constante für einen genau präcisirten Erdort wird sich aber bis auf $^1/_{10000000}$ durchführen lassen; von dieser Ordnung ist nämlich gerade die durch die Gravitation des Mondes bedingte Aenderung der Beschleunigung durch die Schwere, wie sie sich in den Erscheinungen der Ebbe und Fluth auch im grossen Maassstab äussert, und damit auch die zugehörige Aenderung der Länge des einfachen Secundenpendels.

Vom Standpunkt der wissenschaftlichen Systematik handelt es sich bei den exacten Constantenbestimmungen weniger darum, für eine physikalische Constante eine übertriebene Genauigkeit des Werthes festzustellen, als einmal die Strenge und Schärfe der Grundsätze und Naturgesetze zu prüfen, auf denen das systematische Gebäude der Physik aufgeführt erscheint, und durch welche dieses in erster Linie bedingt ist; sodann auf Einflüsse und Erscheinungen geführt zu werden, die sich bisher einer wissenschaftlichen Wahrnehmung oder auch überhaupt dem wissenschaftlichen Bewusstsein entzogen haben und gerade dadurch vielleicht die erwünschte Strenge und Schärfe jener Grundsätze und Naturgesetze getrübt und herabgemindert erscheinen liessen. Indem es nicht ausgeschlossen erscheint, dass genaue physikalische Constantenbestimmungen eine Erkenntnissquelle neuer Erscheinungs-

---

1) F. W. Bessel: Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels, 1826. Ostwald's Klassiker Nr. 7, S. 56.

classen der Natur werden können, stellen sich Präcisionsmessungen neben ihrem ursprünglichen directen Zweck auch als eines der indirecten Mittel der Forschung dar, die auf Erweiterung der Erkenntniss in unbekannte Gebiete gerichtet ist.

Dass die Präcisionsmesskunst besondere Rücksicht auf die Verfestigung des wissenschaftlichen Systems zu nehmen hat, welches im Sinne von § 1 durchaus von dem Grundsatz der gegenseitigen Antheilnahme ihrer Theile getragen wird, das ist wohl auch der tiefer liegende Grund, weshalb das physikalische Interesse von jeher einige wenige Anwendungen in besonderem Grade bevorzugt hat — Anwendungen, die daher in sich geradezu eine Geschichte aufweisen und darum besonders lehrreich geworden sind. Ich denke hier wieder in erster Linie an die Entwickelung der Methoden, welche an die Theorie des physikalischen Pendels und an seine Anwendung zur Bestimmung der Beschleunigung durch die Schwere knüpfen.

Die Bestimmung dieser physikalischen Constanten für Königsberg und Berlin durch Bessel pflegt, so lange sie existirt, als das typische Muster einer Präcisionsmessung hingestellt zu werden. Es dürfte keine physikalische Constante geben, von der man sagen kann, dass sie so genau bekannt sei wie diese. Der Unkundige mag die Frage aufwerfen, ob denn nicht vielleicht die Genauigkeit, mit der gerade diese Constante bekannt ist, — und eigentlich noch dazu nur für eine oder zwei Stellen der Erdoberfläche von minimaler Ausdehnung, den beiden Sternwarten von Königsberg und Berlin — eine Uebertreibung ist, und ob einer solchen übertriebenen Genauigkeit ein wissenschaftlicher Werth oder eine wissenschaftliche Bedeutung abgewonnen werden kann?

Wir können hierauf einfach antworten: Diese Frage wird nicht der Unterscheidung gerecht, welche wir § 3 bei der Gegenüberstellung objectiver und subjectiver Auffassungsmomente der Erfahrung getroffen haben; sie entspricht dem Standpunkt, welchen ich als Objectivirung der Forschung bezeichnet habe. Zugleich weise ich auf die Ausführungen über die durch die Schranken der sinnlichen Wahrnehmung bedingte Erkenntniss (§ 5), sowie über die physikalischen Postulate (§ 6) und über die physikalischen Naturgesetze (§ 8) zurück.

Der Genauigkeitsgrad unserer Präcisionsmessungen muss ebenso wie der Genauigkeitsgrad unserer sinnlichen Wahrnehmung gegenüber der absoluten Genauigkeit der von uns behufs mathematischer Verwerthung präcisirten Postulate und Naturgesetze als ein zufälliger bezeichnet werden. Diesen in der Natur der Verhältnisse bedingten Unterschied der praktisch erreichbaren und der theoretisch unbegrenzt geforderten Genauigkeit zu verwischen, wäre eine Unaufrichtigkeit der Forschung, und so muss von diesem Standpunkt aus das Streben der Wissenschaft vollauf berechtigt erscheinen, diese Differenz zwischen praktisch Erreichbarem und theoretisch Gefordertem, dem jeweiligen Stande der Messkunst entsprechend, so klein wie möglich zu machen.

Im Besonderen weist die von Bessel unter verschiedenen Bedingungen festgestellte Beschleunigung der Schwere die verschiedensten Rückwirkungen auf die Verfestigung der Grundlagen des Newton'schen Systems auf, worauf wir bereits § 35 vorgreifend hingewiesen haben. Sollte endlich noch die Thatsache bemängelt werden, dass die Bessel'schen Messungen sich nur auf zwei Stellen der Erdoberfläche von minimaler Ausdehnung beziehen, so wäre darauf hinzuweisen, dass diese Messungen allein schon einen enormen geistigen und physischen Arbeitsaufwand in sich schliessen, und dass es vom Standpunkt der Präcisionsmessungen allgemein gesagt werden kann: Der wissenschaftlichen Systematik und ihrer Befestigung ist besser gedient durch wenige, mit grosser Sorgfalt angestellte Messungen als durch sehr viele Messungen, die bei der Schwierigkeit der Einzelmessung immer nur auf Kosten der Sorgfalt angestellt sein können.

Bei dem Umfang des Gebiets, in dem sich die physikalische Präcisionsmesskunst bethätigen kann, wird es darauf ankommen, die in Betracht kommenden Aufgaben so geschickt zu wählen und einzuschränken, dass trotz aller Einschränkung auf die Verfestigung des wissenschaftlichen Systems doch der möglichst grösste Gewinn zurückfällt. Auch in dieser Richtung können die Arbeiten Bessel's als vorbildlich hingestellt werden.

§ 70. Charakteristik der praktischen Physik als Kunst in der Ausarbeitung physikalischer Methoden und im Bau physikalischer Instrumente.

Die Methodik der praktischen Präcisionsphysik hat sich vorzugsweise an den wenigen Beispielen entwickelt, welche wir theilweise schon erwähnt, und welche in den folgenden Paragraphen behandelt werden sollen. Es wird daher nicht weiter auffallend sein, dass diese wenigen Beispiele vor anderen Beispielen zugleich einen allgemeinen typischen Charakter tragen. Der Studirende kann sich an ihnen —

soweit das in einer theoretischen Vorlesung möglich ist — die Grundsätze veranschaulichen, nach denen physikalische Maassmethoden auszuarbeiten sind, und nach denen der Bau physikalischer Instrumente zu entwerfen ist. Wird dieser Abschnitt somit geeignet sein, in die praktische Physik einzuführen, so soll mit ihm keineswegs beabsichtigt sein, Dingen vorzugreifen, die wesentlich in ein physikalisches Praktikum gehören, und die nur an der Hand eigener Anschauung, Beobachtung und Erfahrung begriffen werden können.

Wenn die Disciplin der praktischen Physik auf den ersten Blick sich auch als eine praktische darstellen mag, so wird sich im Anschluss an die Entwickelung der Disciplin doch eine Reihe von theoretischen Gesichtspunkten aufstellen lassen, welche heute für die praktische Physik nicht mehr entbehrt werden können, und welche geeignet erscheinen, die Disciplin weiter zu fördern, wie sie denn auf dem Boden der Praxis erwachsen sind. Handelt es sich bei unseren Vorlesungen um eine Einführung in das Studium der theoretischen Physik überhaupt, so wird dieser Abschnitt nicht fehlen dürfen. Diese einleitenden Vorlesungen sollen eine Anschauung von dem Reichthum der Gesichtspunkte geben, die bei der Ausarbeitung der physikalischen Einzeldisciplinen maassgebend sind, und zu diesen Disciplinen werden wir auch die praktische Physik zu rechnen haben.

Die allgemeinen Gesichtspunkte für die Ausarbeitung physikalischer Methoden und den Bau physikalischer Instrumente haben viel Gemeinsames. Es liegt das in der Natur der Sache; denn die physikalischen Methoden kommen an der Hand von Instrumenten zur Ausführung, und umgekehrt die physikalischen Instrumente werden für die Handhabung und Anwendung physikalischer Methoden geschaffen. Für Beides, für die Ausarbeitung physikalischer Methoden, wie für den Bau physikalischer Instrumente, giebt eine sogenannte schematische Theorie den ersten Anhalt und den leitenden Gesichtspunkt, in Wirklichkeit kann aber dieser leitende Gesichtspunkt aus sehr zwingenden praktischen Gründen niemals seine reine Realisirung finden. So erfährt der ursprüngliche leitende Gesichtspunkt durch die Wirklichkeit eine Hemmung, und die Kunst der Beobachtungsmethode und des Instrumentenbaus wird darin bestehen, diesem ursprünglich leitenden Gesichtspunkt trotz aller realer Hemmungen und Hindernisse zum Durchbruch zu verhelfen.

Nach dieser Richtung wird im Folgenden die Theorie und Construction des Pendels und der Wage besonders lehrreich sein. Die Auseinandersetzung der Gesichtspunkte, welche hier maassgebend sind, wird in mehrfacher Hinsicht Anschauungen gewähren, welche einer Verallgemeinerung sehr wohl fähig sind, und für welche wir daher ein erweitertes Interesse beanspruchen müssen.

Die Ausarbeitung der Theorie der Wage, die wir hier als besonderes typisches Beispiel hervorheben, wird zeigen, dass der ideellen Construction einer Wage eine Reihe in der Wirklichkeit einander widerstreitender Momente entgegensteht, denen einzeln Rechnung getragen werden muss. Mit diesen einander widerstreitenden Momenten muss ein Compromiss geschlossen werden. Dieser Compromiss stellt sich beim Bau der physikalischen Instrumente ebenso als ein Kunstwerk dar, wie die Ausarbeitung physikalisch-praktischer Methoden und ihre Handhabung durchaus als eine Kunst charakterisirt werden muss.

Wir haben bei der Wage, als einem typischen Beispiel, an den Widerstreit uns bekannter realer Momente und Forderungen gedacht. Die Geschichte des Studiums des Pendels und die Ausarbeitung der einschlägigen Beobachtungsmethoden kann nach anderer Richtung als typisch hingestellt werden. Hier waren nicht immer alle Momente bekannt, welche die Erscheinungen der Pendelvorgänge beeinflussen; sie wurden im Laufe der Entwickelung einzeln aufgedeckt. Wir bezeichnen solche uns nicht ohne Weiteres bekannte Momente als „Fehler“ und ihr Studium als „Fehlerstudium“ oder „Studium der Fehlerquellen“.

Die Nothwendigkeit des Studiums der Fehlerquellen ist ein Punkt, dem auch heute noch selbst von namhaften Experimentalphysikern nicht immer genügend Rechnung getragen wird. Es ist das erste Erforderniss einer exacten Präcisionsmessung, überhaupt wohl jeder Experimentaluntersuchung, dass man nicht etwa von vorneherein von dem blossen Bestreben ausgeht, Fehler nach Möglichkeit zu vermeiden und in diesem Sinne etwa einem Studium der Fehlerquellen aus dem Wege zu gehen. Nein! Das Studium etwaiger Fehlerquellen muss gerade aufgesucht werden, es müssen experimentell Bedingungen geschaffen werden, unter denen die einzelnen Fehler in möglichster Stärke und Nacktheit erscheinen. Erst nach einem solchen Studium darf man zu dem eigentlichen Gegenstande einer physikalischen Constantenbestimmung schreiten; erst dann wird man befähigt sein, ein definitives Experimental-Arrangement zu ersinnen, in dem die Fehler, wenn auch nicht vermieden, so doch in ihrem Einfluss auf ein Minimum herabgedrückt, jedenfalls in ihrem dann übrig bleibenden Einfluss der Grösse nach geschätzt werden können.

§ 71. Verwerthung des Begriffs der Grössenordnung als Hülfsmittel der praktischen Physik im Allgemeinen und als Genauigkeitsgrenze im Besonderen.[1])

Durch die Präcisionsmessungen sollen die physikalischen Fundamentalbegriffe ebenso wie die physikalischen Grundsätze und Naturgesetze die naturgemässe Prüfung auf ihre Brauchbarkeit und Richtigkeit finden. Die Schwierigkeit dieser Prüfung besteht in der experimentellen Isolirung, bei welcher der zu untersuchende Begriff, der Grundsatz oder das Naturgesetz in grösster Reinheit zur Erscheinung kommt Nur in den seltensten Fällen wird sich eine solche Isolirung in voller Reinheit durchführen lassen, in allen anderen Fällen wird man auf eine theilweise Isolirung oder auf eine Isolirung im Wesentlichen angewiesen sein.

Wir wollen hier die methodischen Hülfsmittel besprechen, die sich zum Zweck einer solchen theilweisen Isolirung darbieten. Wenn Seite 22 in der Anmerkung darauf hingewiesen wurde, dass, im Falle ein Begriff A in Beziehung zu einer Reihe anderer Begriffe B, C, D gesetzt ist, jede Präcisirung von B, C, D rückwirkend eine solche von A zur Folge hat, so können wir das auch auf die Grössenwerthe der Begriffe übertragen. Die Kunst der praktischen Physik besteht darin, ein Beobachtungs-Arrangement zu ersinnen, bei dem die Beziehung zu A seitens derjenigen der Grössen B, C, D überwiegt, welche am besten bekannt sind. Sind so A und B relativ gut bekannt, so sind weitere Beobachtungs-Arrangements zu ersinnen, bei denen C oder D ihre Bestimmung überwiegend durch A und B finden.

Die Kunst der praktischen Physik wird, anders ausgedrückt, also darin bestehen, dass wir die Theorie der Anwendungen nicht ausschliesslich vom mathematischen Standpunkt zu fördern suchen, welcher lediglich nur die gegenseitige Abhängigkeit der physikalischen Grössen von einander in Ansatz bringt, sondern auch wesentlich vom physikalischen Standpunkt, welcher auf die Grössenverhältnisse selbst unter einander Bezug nimmt, dem verschiedenen Einfluss der einzelnen physikalischen Grössen auf ein abzuleitendes Endresultat Rechnung trägt und auf die genaue Verfolgung einer Hülfsgrösse in den Fällen verzichtet, in denen eine grössere Genauigkeit der-

---

1) Man vergleiche meine erkenntnisstheoretischen Grundzüge der Naturwissenschaften, siebenter Vortrag: Einführung des Begriffs der Grössenordnung, S. 98—114.

selben doch einflusslos auf die Genauigkeit des Endresultates bleiben würde.

Wir tragen in der praktischen Physik diesem Gedanken dadurch Rechnung, dass wir möglichst danach streben, den Werth einer Grösse in seiner Abhängigkeit von anderen in Form einer Summe von Gliedern oder in Form einer Reihe darzustellen, bei der jedes folgende Glied wesentlich kleiner als das vorhergehende ist. Man spricht dann in Bezug auf jedes einzelne Glied von der Grössenordnung des Gliedes im Verhältniss zu anderen Gliedern und übersieht mit einem Schlage, welche Werthe einflussreich sind, welche nicht.

Selbst in den Fällen, in denen die Ableitung eines strengen Ausdrucks aus der Theorie keine Schwierigkeit bereitet, in denen aber der streng abgeleitete Ausdruck in seiner Zusammensetzung unübersichtlich erscheint, ordnen oder entwickeln wir den Ausdruck nach den Grössenordnungen und tragen damit einer der Forderungen der praktischen Physik Rechnung, den Einfluss der einzelnen Glieder ihrer Grössenordnung nach auf das Endresultat besser übersehen zu können. Aus demselben Grunde wird es — unbeschadet der Seite 28 angeführten Bemerkung von Thomson — für die praktische Physik keinen Zweck haben, z. B. auf die strenge Behandlung einer Differentialgleichung in den Fällen Werth zu legen, in denen einer solchen theoretische Unbequemlichkeiten oder Schwierigkeiten entgegenstehen würden, und in denen die strenge Lösung doch keine grössere physikalische Genauigkeit ergeben würde. Mit um so grösserem Rechte werden wir so in allen den Fällen völlig correct verfahren, in denen wir von vorneherein auf Näherungsmethoden angewiesen sind. Ohne damit eine Nachlässigkeit zu begehen, vernachlässigen wir kleine Werthe gegenüber grösseren; wir bleiben im Gebiet des Exakten, wenn wir die Fehlergrösse in jedem Augenblick angeben können.

Ergiebt sich so die Beachtung der Grössenordnung und der Grössenverhältnisse der einzelnen Werthe, welche in eine Messung eingehen, für die Präcisionsmesskunst von der grössten Bedeutung, so erfährt diese Behandlungsweise noch eine weitere, vertiefte Begründung, wenn wir unter den verschiedenen, eingeführten Grössenordnungen diejenige besonders hervorheben, welche wir in Beziehung zur Grenze unserer sinnlichen Wahrnehmung setzen können. Die sinnliche Auffassung mit ihren Grenzen, als Thatsache genommen, unterstützt da gerade die Auffassung, welche wir als das Ziel einer realen

Erkenntniss hinstellen müssen und hingestellt haben (S. 44), dass in der Erkenntniss stets das Wesentliche den Vorrang gegenüber dem Vollständigen haben muss.

Wenn es wahr ist, dass die sinnlichen Hülfsmittel (Sinne und Instrumente) der vollständigen, präcisen Erfassung der Postulate und Naturgesetze unübersteigbare Hindernisse entgegenstellen (S. 11), deren Grenzen durch Verbesserung unserer instrumentellen Hülfsmittel verschoben, aber niemals aufgehoben werden können, dann wird es dem wissenschaftlichen Standpunkt angemessen erscheinen, diese Grenze, wie schon § 68 ausgeführt wurde, nicht nur theoretisch zu markiren, sondern auch theoretisch zu verwerthen.

Wir werden die im Folgenden zu behandelnde Materie nach zwei Gesichtspunkten eintheilen. Wir behandeln zuerst Methoden und Instrumente, bei denen die Schwere voll zur Wirkung kommt. Es wird sich hier um Messungen der Schwerewirkung selbst handeln; die anzuwendenden Instrumente lassen Schwingungen um horizontale Axen zu, die Schwingungen selbst gehen in verticalen Ebenen vor sich. — Wir behandeln zweitens Methoden und Intrumente, bei denen Vorgänge beobachtet werden, die entweder ganz oder doch zum grössten Theil der Einwirkung der Schwere entzogen werden. Es handelt sich hier um die Angabe von Methoden, welche die Möglichkeit gewähren, Messungen von Kräften auszuführen, die der Schwerkraft gegenüber als klein zu bezeichnen sind. Die anzuwendenden Instrumente lassen Schwingungen um verticale Axen zu, die Schwingungen selbst gehen in horizontalen Ebenen vor sich.

Die ganze Ausarbeitung der hier zur Geltung kommenden Gesichtspunkte im Allgemeinen und Einzelnen bildet einen Gegenstand voll des Reizes, wie er der theoretischen Physik im Allgemeinen, der praktischen Physik im Speciellen eigenartig ist.

IV. 2) Theorie der Instrumente mit verticaler Schwingungsfähigkeit und ihrer Methoden.

§ 72. Das physikalische Pendel. Das Fadenkugelpendel.

Das physikalische Pendel ist ein starrer Körper, welcher unter Einwirkung der Schwere um eine feste Axe schwingt. Das mathematische Pendel (§ 49) ist dem physikalischen Pendel gegenüber eine Abstraction; wir konnten es uns z. B. unter dem Bilde vorstellen, dass ein materieller Massenpunkt, an einem gewichtslosen Faden befestigt, unter Einwirkung der Schwere Schwingungen ausführte. Eine Hauptfrage in der Theorie des physikalischen Pendels ist für uns die: wie lang ist das mathematische Pendel, welches gleiche Schwingungsdauer mit einem gegebenen physikalischen Pendel hat, oder wie man sich auch ausdrückt: welches ist die Länge des mit einem gegebenen physikalischen Pendel isochron schwingenden mathematischen Pendels?

Wir gehen von dem Flächensatz, bezogen auf die x-Axe als Drehungsaxe, in der Form des § 55 (3) aus. Angewandt auf ein starres System, wie es das physikalische Pendel sein soll, ist die Winkelbeschleunigung für alle Punkte die gleiche, und wir können die erste der Gleichungen § 55 (3) als Ausgangspunkt unserer theoretischen Betrachtung in der Form folgender Gleichung wählen:

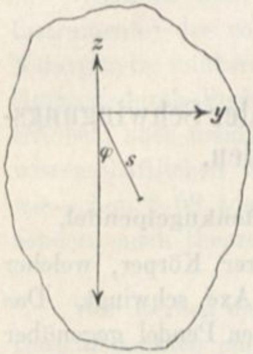
$$(1) \qquad \left(\sum m r_1^2\right) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum (Zy - Yz).$$

Um die Anschauung zu fixiren, beziehen wir den Winkel φ selbst auf die Elongation der durch Drehungsaxe (x) und Schwerpunkt gelegten Ebene aus der durch Drehungsaxe und Verticale gelegten Ebene. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment um die x-Axe mit $\mathsf{M} = \Sigma m r_1^2$ und legen in Uebereinstimmung mit dem Coordinatensystem, wie es den Gleichungen § 55 (3) zu Grunde liegt, die y-Axe nach rechts, die z-Axe nach oben, dann wird (1):

$$(2) \qquad \mathsf{M} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g \sum m y = -g M \bar{y} = -g M s \cdot \sin\varphi.$$

Hierin bedeutet $\bar{y}$ in Uebereinstimmung mit der Bezeichnung § 51 (3) die y-Coordinate des Schwerpunkts, M die gesammte Masse des physikalischen Pendels, s den Abstand des Schwerpunkts von der Drehungsaxe. Der Vergleich der Formel (2) mit der Formel für das mathematische Pendel § 49 (4):

Fig. 8.



$$(3)\qquad l\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi$$

lehrt nun sofort die Länge des mit dem physikalischen Pendel isochron schwingenden mathematischen Pendels kennen:

$$(4)\qquad l = \frac{\mathsf{M}}{Ms}.$$

Die gesuchte Länge ist danach gleich dem Trägheitsmoment des Pendels, bezogen auf seine Drehungsaxe, dividirt durch das Product aus der Masse des Pendels in den Abstand des Schwerpunkts dieser Masse von der Drehungsaxe.

Haben wir § 49 (8) für die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels bei unendlich kleiner Schwingungsweite die Formel:

$$(5)\qquad T_0 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

kennen gelernt, so liefert der Ausdruck (4) eingesetzt in (5) die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels bei unendlich kleiner Schwingungsweite:

$$(6)\qquad T_0 = \pi\sqrt{\frac{\mathsf{M}}{Msg}}.$$

Nach Auseinandersetzung dieser Beziehungen zwischen den Formeln des mathematischen und physikalischen Pendels ist es klar, dass auch der § 49 (11) gegebene Zusammenhang zwischen der Schwingungsdauer bei endlicher Schwingungsweite und bei unendlich kleiner Schwingungsweite unmittelbar für das physikalische Pendel übernommen werden kann.

Das physikalische Pendel gewährt nun die vorzüglichsten Mittel, die Beschleunigung der Schwere und, was damit zusammenhängt, die Länge des einfachen Secundenpendels zu bestimmen. Aus den Gleichungen (5) und (6) folgen:

$$(7)\qquad g = \pi^2\frac{l}{T_0^2} = \frac{\pi^2}{T_0^2}\cdot\frac{\mathsf{M}}{Ms}$$

und für $T_0 = 1$ Secunde die Länge des Secundenpendels l_s:

$$l_s = \frac{g}{\pi^2} = \frac{l}{T_0^2} = \frac{1}{T_0^2} \cdot \frac{\mathsf{M}}{Ms}. \tag{8}$$

Mit diesen Bemerkungen ist aber das, was sich über die Beobachtungsmethode und die Construction des Pendels als physikalischen Instrumentes sagen lässt, nicht erschöpft.

Am nächstliegendsten mag es erscheinen, dem physikalischen Pendel eine möglichst einfache geometrische Gestalt bei homogener Massenvertheilung zu geben. Eine solche sehr einfache Gestalt bietet das „Fadenkugelpendel" dar; dieses besteht, wie der Name andeutet, aus einem leichten Faden — vielleicht aus einem leichten Draht in Cylinderform — und einer schweren Kugel, welche den Faden hinlänglich spannt.

Die Kugel habe den Radius R, der Faden in Form eines Cylinders die Länge L und den Radius ϱ. Bezeichnen wir die Massen der Kugel und des Fadens mit M_k und M_f, die Trägheitsmomente der Kugel und des Fadens bezogen auf die Drehungsaxe des Pendels mit M_k und M_f, so haben wir unter Bezugnahme auf § 59 (3^a) und (5) in Verbindung mit § 58 (1):

$$\mathsf{M}_k = M_k\Big((L+R)^2 + \frac{2}{5} R^2\Big),$$

$$\mathsf{M}_f = M_f\Big(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{12} + \frac{\varrho^2}{4}\Big).$$

Ferner ist:

$$M_k s_k = M_k(L+R), \qquad M_f s_f = M_f \frac{L}{2}.$$

Mithin erhalten wir nach (4) für die Länge des mit dem Fadenkugelpendel isochron schwingenden mathematischen Pendels:

$$l = \frac{M_k\Big((L+R)^2 + \frac{2}{5} R^2\Big) + M_f\Big(\frac{L^2}{3} + \frac{\varrho^2}{4}\Big)}{M_k(L+R) + M_f \frac{L}{2}}. \tag{9}$$

Im Falle wir die Masse des Fadens als klein vernachlässigen dürfen, reducirt sich die Formel (9) auf:

$$l = L + R + \frac{2}{5} \frac{R^2}{L+R}. \tag{10}$$

Bezeichnen wir mit Huygens als Schwingungsmittelpunkt den Punkt des physikalischen Pendels, welcher mit dem Massenpunkt des isochron schwingenden mathematischen Pendels sich in gleichem

Bewegungszustand befindet, so erkennen wir unter Bezugnahme auf (10): der Schwingungsmittelpunkt eines Fadenkugelpendels mit leichtem Faden liegt um $\frac{2}{5} R^2/(L+R)$ tiefer als der Kugelmittelpunkt.

Setzen wir die Kugel des Pendels als homogen voraus, so würde zur Bestimmung von g in (7) oder von l_s in (8) die Schwingungsdauer T_0 experimentell zu bestimmen und der Werth für l aus (9) oder (10) zu übernehmen sein. Bestehen Zweifel an der Homogenität der Kugel, so wird man die Kugel in verschiedenen Lagen an dem Faden des Pendels befestigen und nachsehen, in wieweit sich etwa durch verschiedene Lagen die zu beobachtende Schwingungsdauer ändert. Nur in dem Falle, in dem keine Aenderung der Schwingungsdauer bei verschiedener Lagerung stattfindet, erscheinen Zweifel an der Homogenität der Kugel beseitigt.

§ 73. Bessel's Pendeluntersuchungen. Studium der Aufhängungsart.

Wir haben an dieser Stelle der Vorlesung der Arbeiten Friedrich Wilhelm Bessel's über das Pendel und seine Anwendung zur Bestimmung der Beschleunigung der Schwere zu gedenken. Wir thun es um so lieber, als der Name Bessel's, eines der grössten Astronomen des nun hinter uns liegenden Jahrhunderts, für immer auf das glänzendste mit der Geschichte unserer Universität Königsberg verknüpft sein wird. In den Zeiten tiefsten nationalen Unglücks war es, als unter Bessel's Leitung und Autorität die hiesige Sternwarte gebaut wurde, um für einige Jahrzehnte eine maassgebende Stellung in der Wissenschaft einzunehmen.

Bessel's „Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels“[1]) werden für alle Zeiten das Muster einer exacten Präcisionsuntersuchung bilden, insbesondere auch gerade nach der Seite des Studiums der Fehlerquellen. Bessel hat als Astronom die Untersuchungen über das Secundenpendel in Angriff genommen; das ist charakteristisch für die Tiefe seiner wissenschaftlichen Auffassung. Der Astronom hat im Wesentlichen mit Präcisionsmessungen zweierlei Art zu thun, der Zeit und der Winkel. Wir werden nicht allzuweit fehl gehen, wenn wir den inneren, tieferen Grund zu Bessel's Studien des Secundenpendels in der Frage nach der Unveränderlichkeit unseres

---

1) Abhandlungen der Berliner Akademie von den Jahren 1826, 1830 und 1835. Die Abhandlung vom Jahre 1826 wieder abgedruckt in Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften, Nr. 7, Leipzig 1889.

Zeitmaasses, der Secunde, sehen. So lassen sich diese Studien in Beziehung zu § 20 unserer Vorlesungen setzen, wo wir von der Postulirung des Zeitbegriffs gesprochen haben.

Eine Hauptfrage von Bessel war die, von wo ab die Länge des Pendels zu messen wäre. Die Drehungsaxe des physikalischen Pendels ist, streng genommen, keine geometrische Linie, wie es die Theorie voraussetzt, d. h. keine absolut scharfe Schneide. Das Charakteristische und für die theoretische Physik Principielle liegt hier darin, dass man mit rein theoretischen Untersuchungen in der Beantwortung von solchen Fragen, wie die eben aufgeworfene, nicht durchkommt. Theorie und Beobachtung müssen hier Hand in Hand gehen.

Der praktische Kunstgriff Bessel's zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage war der, dass er Pendel von verschiedener Länge bei identischer Aufhängung anwandte, um einmal die Einflüsse der Aufhängungsart selbst nachzuweisen und zu studiren, und um sodann die Bestimmung der Pendellänge von der Aufhängungsart ganz unabhängig zu machen. In dieser Weise untersuchte Bessel Fadenkugelpendel, die 1) um Schneiden auf ebenen harten Unterlagen schwangen, deren Aufhängungsfäden 2) eingeklemmt waren, deren Fäden 3) sich bei den Schwingungen auf einem Kreiscylinder auf- und abwickelten. Diese letzte Idee eines „Fadenabwickelungspendels“ ist Bessel ganz eigen, sie hat vor den anderen Aufhängungsarten den Vorzug der Unveränderlichkeit; denn es liegt auf der Hand, dass Schneiden, die auf Unterlagen schwingen, mit der Zeit eine Abnutzung erfahren werden.

Die Bessel'schen Fadenpendel waren so eingerichtet, dass ihre Länge um eine sehr genau gegebene Grösse z — die sogenannte Toise de Perou — geändert werden konnte. Man unterscheidet bekanntlich Strichmaasse und Endmaasse (Contactmaasse); die Toise de Perou war ein Endmaass.

Schematisch wird Bessel's Methode durch folgende Gleichungen erläutert:

$$(1)\qquad \begin{aligned} T_1^2 &= \pi^2 \frac{l}{g}, \\ T_2^2 &= \pi^2 \frac{l+z}{g}, \end{aligned} \qquad T_2^2 - T_1^2 = \pi^2 \frac{z}{g}.$$

Es folgt mithin nach § 72 (8) für die Beschleunigung durch die Schwere g und die Länge des einfachen Secundenpendels l_s:

$$(2)\qquad g = \pi^2 l_s = \frac{\pi^2 z}{T_2^2 - T_1^2}.$$

Aus dieser Formel (2) wird sich die Länge des einfachen Secundenpendels l_s unabhängig oder wenigstens sehr nahe unabhängig von der Aufhängungsart des Pendels ergeben. Setzen wir nun rückwärts den aus (2) gefundenen Werth von g in die Gleichungen (1) für T_1^2 und T_2^2 ein, so können wir daraus die Grössen l und $l + z$ berechnen und dann die so berechneten Werthe l und $l + z$ mit den nach der Theorie des Fadenkugelpendels § 72 (9) direct gemessenen Werthen l und $l + z$ vergleichen. Die Vergleichung dieser berechneten und gemessenen Werthe l und $l + z$ gewährt aber das praktische Mittel, den Einfluss der Aufhängungsart des Fadenpendels zu bestimmen.

Bessel hat auf diese Weise eingehend den Einfluss der Schneide auf die Schwingungsdauer des Pendels und damit auf die Bestimmung der Pendellänge untersucht. Die Fehlerquelle besteht darin, dass die Schneide nicht eine Linie, sondern ein Cylinder ist; die Bewegung ist also keine im eigentlichen Sinne des Wortes drehende, sie ist eine wälzende. Bessel untersucht theoretisch besonders den Fall, in dem diese Cylinderfläche durch einen Kegelschnitt erzeugt wird, welchen die ebenen Seitenflächen der Schneide tangiren.

Im Falle der Aufhängungsfaden des Pendels eingeklemmt ist, entsteht in Folge der Steifigkeit des Fadens ein Zweifel, von wo ab die Pendellänge zu rechnen ist. Es ist hier, wie im ersten Fall, in dem das Pendel um eine Schneide schwingt, nicht schwer die Anschauung soweit zu entwickeln, dass man erkennt: in beiden Fällen wird die theoretisch in Betracht zu ziehende Drehungsaxe etwas unterhalb der Linie liegen, welche man auf den ersten Blick geneigt sein möchte für die Drehungsaxe zu halten, nämlich in dem ersten Fall der Schneide unterhalb der Berührungslinie der Schneide mit der ebenen Unterlage, in dem zweiten Fall der Klemme unterhalb der Stelle, an welcher der Aufhängungsfaden die ebenen Pressbacken der Klemme verlässt.

Bei der Bessel speciell eigenthümlichen Aufhängungsmethode, bei der sich das Fadenpendel auf einem Kreiscylinder ab- und aufwickelt, liegt es auf der Hand, dass von einer fest als Drehungsaxe zu rechnenden Linie überhaupt nicht gesprochen werden kann. Die wirkliche Drehungsaxe ist hier in jedem Augenblick eine andere, sie hebt sich beim Abwickeln, sie senkt sich beim Aufwickeln, und so wird man nur von einer mittleren Drehungsaxe sprechen können, mit der in diesem Falle praktisch zu rechnen ist.

§ 74. Bessel's Pendeluntersuchungen. Studium des Einflusses des umgebenden Mediums (der Luft).

Wir haben weiter des Einflusses des umgebenden Mediums (der Luft) auf die Pendelbewegung zu gedenken. Eine Einwirkung hydrostatischer Natur wurde schon von Newton berücksichtigt. Es ist die einfache Anwendung des Princips von Archimedes, wonach jeder Körper in einer Flüssigkeit und daher auch in Luft soviel an Gewicht verliert, wie ein gleich grosses Volumen dieser Flüssigkeit beziehungsweise der Luft wiegt.

Bezeichnen wir die verdrängte Luftmasse — im Sinne des Archimedischen Princips — mit M', den Abstand ihres Schwerpunkts von der Drehungsaxe mit s', so wird im Anschluss an die Bezeichnung der beiden letzten Paragraphen die Differentialgleichung der Pendelbewegung:

$$\mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgs\sin\varphi + M'gs'\sin\varphi. \tag{1}$$

Die Länge des zugehörigen einfachen Secundenpendels wird also:

$$l = \frac{\mathsf{M}}{Ms - M's'}. \tag{2}$$

Wir wenden hier den ersten allgemeinen Satz über die Trägheitsmomente starrer Körper an (§ 58), nach dem das Trägheitsmoment um eine beliebige Axe gleich der Summe aus dem Trägheitsmoment der im Schwerpunkt vereinigten Gesammtmasse des Körpers um die Axe und aus dem Trägheitsmoment der Masse des Körpers um eine dazu parallel gerichtete, durch den Schwerpunkt gehende Axe, ist. Schreiben wir das Trägheitsmoment, bezogen auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe, $M\lambda^2$, so können wir in (2) setzen:

$$\mathsf{M} = M(s^2 + \lambda^2)$$

und erhalten:

$$l = \frac{\frac{s^2+\lambda^2}{s}}{1 - \frac{M's'}{Ms}}. \tag{3}$$

Unter Rücksicht auf alle im vorigen Paragraphen erwähnten Einflüsse und auf diesen hydrostatischen Einfluss fand Bessel im Lauf seiner Untersuchungen aber doch noch kleine Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung, welche die Grösse der von ihm geschätzten Genauigkeitsgrenze des Endresultats überstiegen. Es musste also ein Einfluss, eine Fehlerquelle noch übersehen sein.

Die Aufdeckung dieser letzten Fehlerquelle spricht ebenso für die Genauigkeit der Beobachtungen wie für den Scharfsinn Bessel's. Sie warnt uns an einem Beispiel eindringlich vor einer Ueberschätzung unserer intellectuellen Fähigkeiten, die sich so leicht anmaassen, alle Verhältnisse a priori übersehen zu können. Das ist ja überhaupt die grosse Schule, in welche die Naturwissenschaft den Menschen nimmt, dass sie dem Intellect immer von Neuem nahe legt, dass er einer äusseren Führung, der Erfahrung, bedarf, um nicht in Irrungen zu gerathen. Die Fehlerquelle, welche Bessel aufgedeckt hat, ist die, dass durch Pendelschwingungen in einem umgebenden Medium das in Rechnung zu setzende Trägheitsmoment der schwingenden Masse eine Aenderung erfährt. Diese Aenderung beruht darauf, dass das umgebende Medium bis zu einem gewissen Grade mitschwingt und dadurch das Trägheitsmoment vergrössert.

Bessel beobachtete Pendelschwingungen im luftleeren Raum, dann wieder in Luft, schliesslich in Wasser, um den Einfluss des umgebenden Mediums zu studiren. Er konnte seine Beobachtungen unter der Form darstellen:

$$l = \frac{M(s^2 + \lambda^2) + M'K}{Ms - M's'} \tag{4}$$

und konnte nachweisen, dass dann K von der Form des Pendels abhing; für das Fadenkugelpendel konnte $K = ks^2$ gesetzt und dann k als eine von der Pendellänge im Wesentlichen unabhängige Grösse angesehen werden. Wir können so (4) in der Form schreiben:

$$l = \frac{s^2 + \lambda^2 + \frac{M'}{M} s^2 k}{s - \frac{M'}{M} s'}, \tag{5}$$

oder, wenn wir λ^2 als klein gegenüber s^2 ansehen:

$$l = \frac{\frac{s^2 + \lambda^2}{s}\left(1 + \frac{M'}{M} k\right)}{1 - \frac{M's'}{Ms}}. \tag{6}$$

Nachdem Bessel alle Fehlerquellen studirt hatte, konnte er sich an die Bestimmung der Beschleunigung durch die Schwere g für einige Erdorte machen, und er hat diese Bestimmung für Königsberg und Berlin durchgeführt. Wir haben schon § 35 gelegentlich der Newton'schen Definition des Massenbegriffs erwähnt, dass Bessel auch die alte schon von Newton angeregte Frage aufgenommen hat, ob die Beschleunigung durch die Schwere für alle Körper dieselbe sei. Bessel wandte dabei Hohlcylinder an, die er mit den zu untersuchenden Substanzen füllte.

Es ist über das Resultat der Bessel'schen Untersuchungen im Zusammenhang mit den Resultaten anderer Forscher schon S. 76 berichtet worden. Es soll hier nur noch darauf hingewiesen werden, dass für Flüssigkeiten, mit denen etwa der pendelnde Hohlcylinder auszufüllen wäre, die Frage, ob die Schwere für alle Substanzen dieselbe sei, in der einfachen Weise nicht geprüft werden kann, wie für feste pulverförmige Körper. Flüssigkeiten sind eben keine starren Systeme, wie wir es für die Theorie des physikalischen Pendels vorausgesetzt haben. Vermöge der leichten Verschiebbarkeit ihrer Theilchen werden Flüssigkeiten im Inneren des Hohlcylinders Eigenbewegungen ausführen, welche mit in Rechnung gezogen werden müssen.

§ 75. Das Reversionspendel. Bessel's Verbesserungen daran.

Die bisherigen Auseinandersetzungen über die praktische Verwendung des physikalischen Pendels knüpften an einfache geometrische Gestalten bei homogener Massenvertheilung. Der Wunsch, von diesen Voraussetzungen ganz unabhängig zu werden, ist nicht nur vom Standpunkt der Theorie, sondern auch vom Standpunkt der Beobachtungsmethode berechtigt. Das unter dem Namen „Reversionspendel" bekannte physikalische Pendel befriedigt diesen Wunsch. Erfunden von Bohnenberger, war es vor Bessel's Untersuchungen von dem englischen Physiker Kater vielfach angewandt worden.[1])

Um zunächst die Idee und das Schema der Methode zu entwickeln, knüpfen wir die Vorstellung an einen beliebigen starren Körper, welcher praktisch die Möglichkeit gewährt, Schwingungen um zwei parallele verschiedene Axen unter Einwirkung der Schwere auszuführen. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Pendels, bezogen auf eine zu den gegebenen Axen parallel gerichtete Axe, durch den Schwerpunkt mit $M\lambda^2$, mit s_1 den Abstand des Schwerpunkts von der einen Drehungsaxe, mit s_2 den Abstand des Schwerpunkts von der anderen Drehungsaxe und knüpfen an die Formel § 72 (4) S. 184:

$$(1) \qquad l = \frac{\mathsf{M}}{Ms} = \frac{M(s^2 + \lambda^2)}{Ms} = \frac{s^2 + \lambda^2}{s},$$

1) Die Erfindung von Bohnenberger datirt von 1811, die Beschreibung von Kater von 1818.

so wirft die Idee des Reversionspendels die Frage auf, unter welchen Bedingungen aus dem Abstand der gegebenen Axen auf die Länge des zugehörigen einfachen mathematischen Pendels geschlossen werden kann. Nehmen wir an, die beiden Drehungsaxen hätten zur Massenvertheilung eine derartige Lage, dass die zu beobachtende Schwingungsdauer um beide Axen die gleiche wäre, so würde auch die Länge des zugehörigen einfachen Pendels für beide Axen die gleiche l sein, und wir könnten aus (1) folgern:

$$\begin{aligned} l s_1 &= s_1^2 + \lambda^2 \\ l s_2 &= s_2^2 + \lambda^2 \end{aligned} \quad \text{also:} \quad l(s_1 - s_2) = s_1^2 - s_2^2. \tag{2}$$

Wäre nun die Massenvertheilung des Pendels zum Schwerpunkt symmetrisch, dann wäre $s_1 = s_2$, und die Gleichung (2) würde physikalisch zu keinen weiteren Folgerungen führen; nur im Falle s_1 und s_2 verschiedene Längen darstellen, gestattet die Gleichung (2), einen weiteren Schritt vorwärts zu thun, und dieser besteht darin, dass wir dann aus (2) schliessen können:

$$l = s_1 + s_2. \tag{3}$$

Diese Gleichung besagt: Gelingt es, bei unsymmetrischer Massenvertheilung ein Reversionspendel herzustellen, welches um beide Axen mit gleicher Schwingungsdauer pendelt, so ist der Abstand der beiden Axen gleich der Länge des zu beiden Fällen zugehörenden einfachen mathematischen Pendels. Ein derartiges Pendel würde uns also von jeglicher Bestimmung eines Trägheitsmoments entheben; die Kenntniss der Massenvertheilung wäre völlig gleichgültig, der Abstand der Schneiden das einzig Ausschlaggebende.

Es ist vielleicht nützlich, zur Ausbildung der Anschauung sich die Möglichkeit der Realisirung der Idee, von der das Reversionspendel ausgeht, an einem einfachen Beispiel zu vergegenwärtigen. Fassen wir für den Augenblick einmal ein physikalisches Pendel ins Auge, das im Wesentlichen aus zwei getrennten Massencomplexen besteht. Eine grosse Schwingungsdauer ergiebt sich nun in diesem Falle einmal, wenn das Pendel seine Drehungsaxe etwas oberhalb des Schwerpunkts hat, das andere Mal, wenn die Drehungsaxe erheblich oberhalb der beiden Massencomplexe liegt. Durch Verstellung, beziehungsweise Aenderung der Massencomplexe oder der Drehungsaxen wird es daher immer möglich sein, das Pendel auf völlige Gleichheit der Schwingungsdauer für beide Axen einzustellen.

Entsprechend der bisher entwickelten Idee der Methode war bei den Reversionspendeln älterer Construction ein bewegliches Gewicht angebracht, welches eine völlige Gleichheit der Schwingungsdauer um beide Axen herzustellen gestattete. Bessel hat aber neben einer Reihe anderer constructiver Verbesserungen darauf hingewiesen, dass eine näherungsweise Gleichheit der Schwingungsdauer nicht nur genügt, sondern sogar vorzuziehen ist.

Wir wollen diese constructiven Verbesserungen von Bessel hier um so lieber besprechen, als sie für die Ausarbeitung physikalischer Methoden und der dadurch bedingten instrumentellen Einrichtungen durchaus typisch sind. Wir behandeln die Theorie dieser Verbesserungen einzeln, nicht nur der Uebersichtlichkeit wegen, sondern auch, weil es dem Wege der Forschung entspricht, dass solche Verbesserungen einzeln gefunden werden. Wir haben es hier mit der Anwendung einer der methodischen Regeln der Forschung zu thun, welche wir § 12 Isolation und Superposition genannt haben.

1) Sind die Schwingungsdauern T_1, T_2 um die beiden Axen nicht genau die gleichen, sondern besteht zwischen beiden eine kleine Differenz $T_2 - T_1 = \varDelta$, so wird auch zwischen den beiden zugehörigen einfachen Pendellängen l_1, l_2 eine kleine Differenz $l_2 - l_1 = \delta$ bestehen, und wir haben nach § 75 (1) und § 72 (7):

$$\begin{aligned} l_1 \qquad &= \frac{s_1^2 + \lambda^2}{s_1} = \frac{T_1^2 g}{\pi^2}, \\ l_2 = l_1 + \delta &= \frac{s_2^2 + \lambda^2}{s_2} = \frac{T_2^2 g}{\pi^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus diesen Gleichungen folgt einmal:

$$\begin{aligned} l_1(s_1 - s_2) - \delta s_2 &= s_1^2 - s_2^2, \\ l_1 &= s_1 + s_2 + \delta \frac{s_2}{s_1 - s_2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Sodann:

$$\delta = \frac{g}{\pi^2}(T_2^2 - T_1^2) = \frac{g}{\pi^2}\left((T_1 + \varDelta)^2 - T_1^2\right) = \frac{g}{\pi^2}(2\varDelta T_1 + \varDelta^2).$$

Diesen Werth δ in (5) eingesetzt, erhalten wir unter Vernachlässigung des Gliedes zweiter Ordnung:

$$l_1 = s_1 + s_2 + \varDelta \frac{2gT_1}{\pi_2} \cdot \frac{s_2}{s_1 - s_2}. \tag{6}$$

Die Formel (6) giebt in dem Gliede erster Ordnung die Abweichung von der schematischen Theorie, wie sie der Formel (3) zu Grunde liegt. Die Grössen, die in diesem Gliede erster Ordnung vorkommen, wie g, s_1, s_2, brauchen alle nur sehr näherungsweise bekannt zu sein, insofern der Factor Δ das Glied als ein Correctionsglied charakterisirt.

Der Verzicht auf die Herstellung völliger Gleichheit der Schwingungsdauer des Reversionspendels durch ein besonderes Laufgewicht trägt zur Erfüllung der Forderung einer möglichsten Unveränderlichkeit wesentlich bei und lässt das Reversionspendel in der Bessel'schen Form zu einem Reiseinstrument geeignet erscheinen, wie denn in der That mit dem Reversionspendel die Beschleunigung der Schwere an den verschiedensten Orten der Erdoberfläche gemessen ist.

2) Bessel hat ferner unter Rücksicht auf seine Entdeckung, dass die mitschwingende Luft das Trägheitsmoment des Pendels vergrössert, in Vorschlag gebracht, dem Reversionspendel bei ungleicher Massenvertheilung, wie sie die schematische Theorie fordert, eine äussere geometrisch symmetrische Gestalt zum geometrischen Mittelpunkt und zu den Schneiden zu geben. Er befestigt an einem cylindrischen Stabe 2 gleich grosse Linsen von gleichem äusseren Volumen, eine hohl, die andere massiv. Die Luft wird dann das eine Mal bei den Schwingungen um die eine Axe genau ebenso mitschwingen, wie das andere Mal bei den Schwingungen um die andere Axe. Die Erweiterung unserer schematischen Theorie des Reversionspendels ergiebt dann unter Bezugnahme von § 74 (4):

$$l = \frac{s_1^2 + \lambda^2 + \left(\frac{M'}{M}\right) K}{s_1 - \frac{M'}{M} \cdot s'}, \qquad l = \frac{s_2^2 + \lambda^2 + \left(\frac{M'}{M}\right) K}{s_2 - \frac{M'}{M} \cdot s'},$$

$$ls_1 - \frac{M'}{M} ls' = s_1^2 + \lambda^2 + \frac{M'}{M} \cdot K,$$

$$ls_2 - \frac{M'}{M} ls' = s_2^2 + \lambda^2 + \frac{M'}{M} \cdot K,$$

mithin in Uebereinstimmung mit der schematischen Theorie des Reversionspendels:

$$l(s_1 - s_2) = s_1^2 - s_2^2, \qquad l = s_1 + s_2.$$

Wir erkennen, dass bei der Bessel'schen Anordnung die ursprüngliche Idee, auf der das Reversionspendel beruht, durch die mitschwingende Luft nicht die geringste Trübung erfährt.

3) Bessel hat endlich durch die Einrichtung einer Vertauschbarkeit der Schneiden es erreicht, dass auch die Einwirkung der

Schneiden eliminirt werden kann. Mit theilweisem Anschluss an Bessel's eigene Darstellung können wir ausführen:

„Wenn man die Länge des einfachen Pendels, mit welchem das sich auf der cylindrischen Schneide bewegende gleiche Schwingungszeit hat, durch l' bezeichnet; die Länge eines zweiten einfachen Pendels, welches mit dem Schneidenpendel gleiche Zeit halten würde, wenn dieses sich um den Scheitelpunkt der Schneide drehte, durch l, so findet sich (experimentell und theoretisch):

$$l' = l - \frac{l}{s} \cdot bq,$$

wo s die Entfernung des Schwerpunkts von der Schneide, und q eine von der Figur des Cylinders und dem Schwingungswinkel abhängige Grösse ist; b bedeutet eine der Schneide individuelle Constante, welche mit der Abstumpfung der Schneide zusammenhängt."

Setzt man nun der Allgemeinheit wegen voraus, dass beide Schneiden des Reversionspendels durch verschiedene Cylinder begrenzt werden, die beobachteten Schwingungszeiten um beide Schneiden aber als gleich beobachtet sind, so hat man für die eine Schneide:

$$l' = l_1 - \frac{l_1}{s_1} b_1 q_1, \quad l_1 = \frac{\lambda^2 + s_1^2}{s_1},$$

für die andere Schneide:

$$l' = l_2 - \frac{l_2}{s_2} b_2 q_2, \quad l_2 = \frac{\lambda^2 + s_2^2}{s_2}.$$

Die Combination beider Gleichungen liefert:

$$l' = s_1 + s_2 - \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} (b_1 q_1 - b_2 q_2).$$

Damit ist das Resultat erhalten:

„Die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels ist nur dann der Entfernung der Scheitel der cylindrischen Schneiden gleich, wenn $b_1 q_1$ und $b_2 q_2$ gleich sind. Es ist aber ein leichtes Mittel vorhanden, den Einfluss der Cylindricität ganz zu eliminiren: man richtet das Pendel so ein, dass die Schneiden mit einander verwechselt werden können, und macht die Versuche sowohl vor als nach der Verwechselung. Dadurch kommt der Fehler in gleicher Grösse auf entgegengesetzte Seiten, und das Mittel ist frei davon."

Wir haben bisher immer vorausgesetzt, dass die Schneiden des Reversionspendels vollständig parallel gerichtet seien. Von Helmholtz rührt ein sehr einfaches Mittel her dieses zu prüfen. Bringen wir in die geometrische Mitte zwischen den Schneiden des Pendels einen Spiegel an, so können wir mit Hülfe der Poggendorff-Gauss'schen Spiegelmethode sehr einfach die Spiegelebene senkrecht zu der Schneide stellen, um welche das Pendel schwingt. Es darf dann bei der Schwingung keine Verschiebung des Fadenkreuzes gegenüber der Skala stattfinden. Lassen wir nun das Pendel um die andere Schneide schwingen, und findet wieder keine Verschiebung des Fadenkreuzes gegenüber der Skala statt, so wissen wir, dass auch die andere Schneide senkrecht zur Spiegelebene steht, und dass somit beide Schneiden einander parallel sind.

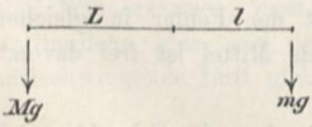
§ 76. Die Wage. Theoretische Gesichtspunkte, welche für ihre Construction maassgebend sind.

Haben wir in dem Pendel das vollkommenste Mittel kennen gelernt, die Constanz der Beschleunigung der Schwere auf alle Massen — wie eine solche die Galilei'sche Physik behauptet — zu prüfen und zu bestimmen, so liegt in der Wage das vollkommenste Mittel vor, Massen ihrer Grösse nach mit einander zu vergleichen. Die Wage bietet sich so als eines der wichtigsten Hülfsmittel dar, dem Newton'schen Begriff der Masse, wie dem Postulat von der Erhaltung der Masse überhaupt, das empirische Material zuzuführen, welches die Newton'sche Systematik zu ihrer rückwirkenden Verfestigung bedarf.

Die Wage ist das wohl am meisten technisch durchgearbeitete Instrument der physikalischen Praxis. Bau und Construction der Wage stehen auf einer hohen Stufe technischer Vollendung, und so kann denn die Theorie der Wage — wie schon § 70 ausgeführt wurde — als ein besonders gutes typisches Beispiel hingestellt werden, um an ihm Grundsätze zu entwickeln, wie sie sich auch sonst für den Bau physikalischer Instrumente als vorbildlich ergeben dürften.

Das einfachste Schema der Wage bildet ein gewichtsloser, gerader, starrer Hebel mit den Armlängen L und l; die Wagschalen, auf denen die Massen M und m unter Wirkung der Schwere aufliegen, können wir uns gleichfalls als gewichtslos vorstellen. Gleichgewicht besteht, wenn die statischen Momente — das ist der statische Ausdruck für Drehungsmomente — gleich sind, also wenn:

Fig. 9.

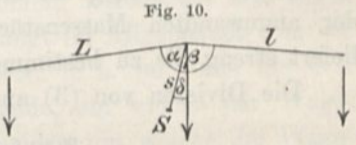


(1) $$MgL = mgl \text{ oder } ML = ml.$$

Eine Wage ist nach diesem Schema ebenso geeignet, Gewichte, also Kräfte, mit einander zu vergleichen, wie Massen.

Wir gehen zu einem etwas complicirten Schema über: Die eben schematisch behandelte Wage würde bei Gleichheit der statischen Momente in allen Lagen im Gleichgewicht sein, die geringste Bewegung des Hebelarms würde sich als Rotationsbewegung fortsetzen, das geringste Uebergewicht ein Umschlagen des Hebelarms zur Folge haben. Wir brauchen aber eine Wage, welche schwingt, welche wie das Pendel eine Gleichgewichtslage hat; aus diesem Grunde legen wir der weiteren Betrachtung ein Schema zu Grunde, bei dem die Masse des Hebelarms in Rechnung gezogen wird, und bei dem der Schwerpunkt dieser Masse unterhalb der Drehungsaxe des Hebelarms liegt. Die Hebelarme L und l bilden gegen die durch Schwerpunkt und Drehpunkt gezogene Linie die Winkel α und β, diese Linie bilde ferner mit der Verticalen den Winkel δ. S sei die Masse des Wagebalkens, s der Abstand des Schwerpunkts vom Drehpunkt. Die Massen der Wagschalen seien M' und m'.

Fig. 10.



Die Gleichheit der statischen Momente führt dann im belasteten Zustand zu der Gleichung:

(2) $$S \cdot s \sin\delta + (M + M')L \sin(\alpha + \delta) - (m + m')l \sin(\beta - \delta) = 0,$$

im unbelasteten Zustand zu der Gleichung:

(2^a) $$S \cdot s \sin\delta + M'L \sin(\alpha + \delta) - m'l \sin(\beta - \delta) = 0.$$

In beiden Fällen (2) und (2^a) wird — zunächst schematisch betrachtet — δ gleichgemacht, es folgt also durch Subtraction:

(2^b) $$ML \sin(\alpha + \delta) = ml \sin(\beta - \delta),$$

(3) $$M = m \frac{l \sin(\beta - \delta)}{L \sin(\alpha + \delta)}.$$

Wir bezeichnen die Abweichung des Ausdrucks

$$\frac{l \sin(\beta - \delta)}{L \sin(\alpha + \delta)}$$

von der Einheit, also die Grösse

$$\frac{l \sin(\beta - \delta)}{L \sin(\alpha + \delta)} - 1,$$

als den Fehler der Wage, und stellen uns die Aufgaben: 1) unbeschadet dieses Fehlers richtig zu wägen, 2) diesen Fehler der Wage durch Wägungen zu bestimmen.

Die Methode der Doppelwägung löst diese Aufgaben. Die Beziehung zwischen M und m giebt einmal die Gleichung (3), nun vertauschen wir M und m, werden aber, um wieder den Ausschlag δ zu erhalten, m um das kleine Massenstück z zu vermehren haben. Wir erhalten so zu (3) gehörig die Gleichung:

$$M = (m + z)\frac{L \sin(\alpha + \delta)}{l \sin(\beta - \delta)}. \tag{3a}$$

Die Multiplication von (3) und (3a) liefert nun:

$$M = \sqrt{m(m+z)} \text{ bezw. entwickelt: } m\left(1 + \frac{1}{2}\frac{z}{m}\right)$$

und damit die Lösung der ersten Aufgabe. Das geometrische Mittel der angewandten Massenstücke des Gewichtssatzes m und $m + z$ liefert streng die zu bestimmende Masse M.

Die Division von (3) und (3a) liefert ferner:

$$\frac{m+z}{m} = \left(\frac{l \sin(\beta - \delta)}{L \sin(\alpha + \delta)}\right)^2$$

und damit den Fehler der Wage:

$$\frac{l \sin(\beta - \delta)}{L \sin(\alpha + \delta)} - 1 = \sqrt{\frac{m+z}{m}} - 1 = \frac{z}{2m}.$$

Wir benutzen nun weiter die aus dem Schema der Wage abgeleitete Formel (2), um daran eine theoretische Discussion über die Erfordernisse einer guten Wage zu knüpfen. Den Ausgangspunkt dieser Discussion bildet die Frage, welchen Einfluss eine zu m hinzugefügte Masse dm auf die Aenderung von δ ausübt; wir wollen diese Aenderung mit $d\delta$ bezeichnen, sie ist es, die im Verhältniss zu dm die Empfindlichkeit der Wage bestimmt. Empfindlichkeit wäre danach das Verhältniss des Ausschlags $d\delta$ einer Wage zu dem kleinen Zusatzgewicht, welches diesen Ausschlag hervorruft. Um den Ausschlag $d\delta$ bequem ablesen zu können, sind die Wagen mit langen Zeigern versehen, welche über einer festen Skala schwingen; Wagebalken und Zeiger bilden ein starres Ganzes, und so ist es zur Messung des Ausschlages $d\delta$ ganz gleichgültig, ob der Zeiger die Richtung der Verbindungslinie von Schwerpunkt und Drehpunkt angiebt oder nicht.

Wir können den gewünschten Zusammenhang zwischen dm und

$d\delta$ einmal dadurch erhalten, dass wir in (2) statt m und δ einsetzen: $m + dm$ und $\delta + d\delta$ und die so gewonnene Gleichung von (2) subtrahiren. Zu demselben Resultat führt schneller die Differentiation von (2) nach m und δ. Wir erhalten so in Verbindung mit (2):

$$(2) \quad S \cdot s \sin\delta + (M + M')L\sin(\alpha + \delta) - (m + m')l\sin(\beta - \delta) = 0,$$

$$[S \cdot s\cos\delta + (M + M')L\cos(\alpha + \delta) + (m + m')l\cos(\beta - \delta)]d\delta - l\sin(\beta - \delta)dm = 0.$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit $-\cos(\alpha + \delta)d\delta$, die zweite Gleichung mit $\sin(\alpha + \delta)$ und addiren so folgt:

$$[Ss\sin\alpha + (m + m')l\sin(\alpha + \beta)]d\delta = l\sin(\beta - \delta)\sin(\alpha + \delta)dm,$$

$$(4) \quad d\delta = dm\,\frac{l\sin(\beta - \delta)\sin(\alpha + \delta)}{Ss\sin\alpha + (m + m')l\sin(\alpha + \beta)}.$$

Insofern im Nenner $(m + m')$ vorkommt, werden wir also sagen können: die Empfindlichkeit der Wage hängt im Allgemeinen von der Belastung ab, nur im Falle $(\alpha + \beta) = \pi$, d. h. im Falle die drei Schneiden der Wage, die mittlere Schneide, um welche der Wagebalken schwingt, und die seitlichen Schneiden, um welche die Wageschalen schwingen, in einer geraden Linie liegen, wird die Empfindlichkeit von der Belastung unabhängig, in diesem Falle wird (4):

$$(4^a) \quad d\delta = dm\,\frac{l\sin^2(\alpha + \delta)}{Ss\sin\alpha}.$$

Dieser Ausdruck lehrt: Die Empfindlichkeit ist proportional der Länge der Hebelarme, umgekehrt proportional der Masse (dem Gewicht) des Wagebalkens und dem Abstand des Schwerpunkts vom Drehpunkt. Wir können so als Forderung für eine empfindliche Wage aufstellen: l möglichst gross, S und s möglichst klein zu wählen.

Diese Forderungen, wie sie durch schematische Betrachtungen gewonnen sind, erhalten nun eine Einschränkung und Begrenzung durch die Natur der uns zum Wagenbau zur Verfügung stehenden Materialien:

Je länger wir den Wagebalken l, je kleiner wir seine Masse S wählen, desto eher wird der Wagebalken Durchbiegungen ausgesetzt sein, welche einmal die Voraussetzungen aufheben, unter denen die Gleichung (4^a) als gültig abgeleitet ist, welche sodann aber die Grenzen der Elasticität und Festigkeit überschreiten können, welche die Unveränderlichkeit der Wage garantiren sollen. Es wird also die Länge, ebenso wie die Leichtigkeit des Wagebalkens eine praktisch geforderte

Grenze haben. **Bunge** in Hamburg baut darum die Wagebalken ganz kurz und ersetzt durch Länge des Zeigers, was durch Kürze des Wagebalkens verloren geht. Alle Constructionen liefern die Wagearme behufs Leichtigkeit in durchbrochener Arbeit. Vollständig werden sich Durchbiegungen nicht vermeiden lassen; um trotzdem die Voraussetzungen der Gleichung (4^a) näherungsweise zu erfüllen, werden bei guten, empfindlichen Wagen die Schneiden der Wagschalen minimal in die Höhe gesetzt, derart, dass für mittlere Belastungen alle drei Schneiden in einer Linie liegen. Bei stärkeren Belastungen liegen dann die beiden äusseren Schneiden um ebensoviel unterhalb der Mittellinie des Wagebalkens, wie bei geringeren Belastungen oberhalb.

Von besonderem Interesse ist die Abhängigkeit der Empfindlichkeit von s, dem Abstand des Schwerpunkts vom Drehpunkt. Um diese Grösse ändern zu können, befindet sich bei empfindlichen Wagen oberhalb des Wagebalkens ein Laufgewicht angebracht. Es hat aber praktisch keinen Werth, s übertrieben klein zu machen. Wird $s = 0$, so ist die Wage labil, sie schwingt nicht, sondern schlägt um; ist s zu klein, so ist die Wage überempfindlich, die grössere Empfindlichkeit verhilft zu keiner grösseren Genauigkeit, weil die geringsten Störungen thermischer, elastischer und mechanischer Art die Einstellung auf die Ruhelage, wie sie durch δ gegeben ist, ändern. Es ist nur die Empfindlichkeit brauchbar, bei der die Genauigkeit der Zeigerablesung an der Wage sich einigermaassen mit der Grenze deckt, welche die Ruhelage in ihrer Constanz einhält.

Die Abhängigkeit der Empfindlichkeit der Wage von Ss — nach (4^a) — steht übrigens in einfachster Beziehung zur Schwingungsdauer der Wage. Diese Beziehung kann in gewisser Weise als typisch für alle die Instrumente angesehen werden, in denen Ausschläge beobachtet werden, wie sie sich dann z. B. auf das Studium der Empfindlichkeit von Galvanometern übertragen lässt.

Es ist gelegentlich der Theorie des physikalischen Pendels § 72 (6) abgeleitet worden:

$$T_0^2 = \pi^2 \frac{\mathsf{M}}{Msg}.$$

Dieser Ausdruck ergiebt in Verbindung mit (4^a), wonach $d\delta$ umgekehrt proportional $S \cdot s$ gefunden wurde: $d\delta$ proportional T_0^2, d. h. die Empfindlichkeit wächst mit dem Quadrat der Schwingungsdauer.

Nach unseren kurz vorhin ausgeführten Bemerkungen wird nun die Kenntniss der Schwingungsdauer von besonderem Interesse sein, für welche die Empfindlichkeit der Wage eine derartige ist, dass sich die Genauigkeit der Zeigerablesung mit der Grenze deckt, welche die Ruhelage der Wage einigermaassen innehält. Die Kenntniss dieser Schwingungsdauer giebt einen ungefähren Anhalt, um Wagen verschiedener Construction in ihrer relativen Leistungsfähigkeit zu vergleichen. Es werden Wagen mit kleiner Schwingungsdauer bei gleicher Empfindlichkeit Wagen mit grosser Schwingungsdauer vorzuziehen sein, denn abgesehen von der Möglichkeit einer schnelleren Wägung werden solche Wagen mit grösserer Aussicht auf Erfolg gestatten, durch Verkleinerung des Abstandes des Drehpunktes vom Schwerpunkt s die Empfindlichkeit der Wage weiter zu vergrössern, als wenn die Wage schon von vorneherein mit einer grossen Schwingungsdauer behaftet wäre.

Durch diese Ueberlegungen lernen wir einen tieferen theoretischen Grund für den Vorzug der Bunge'schen Construction der Wage kennen; denn die Kürze des Wagebalkens ist es eben, welche nicht bloss durch die Möglichkeit einer geringeren Masse, sondern vor Allem durch die Möglichkeit eines geringeren Trägheitsmoments eine geringere Schwingungsdauer bedingt. Der Vorzug einer grösseren Unveränderlichkeit des Wagebalkens bei seiner Kürze ist schon früher hervorgehoben worden.

Damit wäre das einigermaassen erschöpft, was sich theoretisch über die Construction der Wage sagen lässt; nicht erschöpft ist das, was für die praktische Handhabung der Wage, überhaupt für das praktische Wägen in Betracht kommt. Aber das gehört nicht in eine theoretische Vorlesung, sondern in ein Praktikum und wird von Handbüchern behandelt, welche sich die Anleitung zur praktischen Physik im Besonderen angelegen sein lassen.[1])

1) F. Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik. 8. Aufl. Lpzg. 1896.

IV. 3) Theorie der Instrumente mit horizontaler Schwingungsfähigkeit und ihrer Methoden.

§ 77. Allgemeine Uebersicht über die in diesem Abschnitt zu behandelnden Methoden.

In dem Folgenden handelt es sich, die Grundlagen für praktische Methoden theoretisch zu entwickeln und zu verfolgen, welche die Möglichkeit gewähren, schwache Kräfte auf starre Körper messen zu können. Dazu erscheint es erforderlich, diese Körper der Schwere, welche wir als starke Kraft ansehen, entweder ganz oder wenigstens zu einem grossen Theile zu entziehen. Man kann das in sehr mannigfaltiger Weise erreichen.

Denken wir z. B. an eine Compassnadel, die entweder in ihrem Schwerpunkt durch eine Spitze unterstützt wird und sich um diese drehen kann, oder die in starrer Verbindung mit einem auf einer Flüssigkeit schwimmenden Körper auf diesen eine Richtkraft ausübt. Vom Standpunkt der Präcisionsmessung wären jedoch diese Mittel als verhältnissmässig roh zu betrachten. Die Bewegung der Nadel erscheint unter den erwähnten Bedingungen mit Reibung behaftet und daher träge — eine Eigenschaft, die für die Praxis aber gerade in vielen Fällen empfehlenswerth ist.

Das einfachste Mittel, welches sich der Präcisionsmesskunst darbietet, ein starres Massensystem der Schwerewirkung zu entziehen, ist die Aufhängung an einem dünnen Faden oder Draht, in dessen verticaler Verlängerung der Schwerpunkt des Systems liegt. Wir bezeichnen diese Aufhängung als unifilar. Ueben nun Kräfte irgend welcher Art, deren Wirkung und Eigenschaften studirt und erforscht werden sollen, ein Drehungsmoment auf einen unifilar aufgehängten Körper aus, so können wir einmal daran denken, diese Kräfte mit den Torsionskräften des Aufhängungsfadens ins Spiel treten zu lassen, sodann aber auch mit den Kräften des Erdmagnetismus, insofern wir einen Richtmagneten mit dem unifilar aufgehängten Körper starr verbinden. In diesen Fällen messen wir also die zu erforschende Kraft an der als bekannt vorauszusetzenden Torsionskraft, beziehungsweise magnetischen Kraft. Benutzen wir die Torsion als Gegenkraft, so haben wir in der Wahl mehr oder weniger starker Aufhängungsfäden oder -drähte das Mittel in der Hand, die Methode auf mehr oder weniger starke Kräfte anzuwenden. Benutzen wir den Erdmagnetismus als vergleichende Richtkraft, so haben wir in der Astasirung das Mittel, diese Richtkraft mehr oder weniger zu schwächen.

Von grossem Interesse ist das Studium der bifilaren Aufhängung. Dabei hängt das System, auf welches die zu untersuchenden Kräfte ein Drehungsmoment ausüben, an zwei Fäden. Bei jeder Drehung aus der Gleichgewichtslage wird das bifilar aufgehängte System ein wenig der Schwere entgegen gehoben, und so ist denn die Schwere die Gegenkraft, an der die zu untersuchenden Kräfte gemessen werden können. Die bifilare Aufhängung ist das Mittel, von dem oben gesagt wurde, dass es gestattet, Körper wenigstens zu einem grossen Theile der Schwere zu entziehen. In der Wahl des Abstandes der Fäden hat man die Möglichkeit in der Hand, die Methode auf stärkere und schwächere Kräfte anzuwenden.

Wir stellen uns in den folgenden Paragraphen die Aufgabe, die Theorie dieser verschiedenen Aufhängungsarten zu studiren, ohne dabei andere physikalische Kenntnisse voraussetzen zu wollen, als sie durch die Flächensätze gegeben sind. Wir werden dabei wieder zwischen Ausführungen, die in ein Praktikum und die in eine theoretische Vorlesung gehören, unterscheiden. Die Methoden, die Gleichgewichtslage und die Schwingungsdauer zu bestimmen, und ihre Besprechung gehören ebenso wie die Poggendorff-Gauss'sche Methode, kleine Winkel durch Fernrohr, Skala und Spiegel zu messen, in ein Praktikum und sollen hier nicht auseinandergesetzt werden.

Die Methoden der verschiedenen Aufhängungsarten und ihre theoretische Behandlung knüpfen an die Namen hervorragender Forscher, wie Coulomb, Gauss, W. Weber — Beweis genug, welche Bedeutung diese Methoden für die Präcisionsphysik haben. Coulomb ist wohl der erste, welcher die Torsion der Aufhängungsfäden und -drähte studirt hat; von ihm rührt die sogenannte Torsionswage her, mit deren Hülfe er das nach ihm benannte Gesetz der elektrostatischen und magnetischen Kräfte entdeckt hat. Gauss hat gelegentlich der Construction seines Bifilar-Magnetometers die bifilare Aufhängung in die Wissenschaft eingeführt. W. Weber hat beim Studium der unifilaren Aufhängung die elastische Nachwirkung entdeckt und dadurch die Anwendung dieser Methode einer weiteren Präcision fähig gemacht; doch soll im Folgenden darauf nicht näher eingegangen werden.

§ 78. Methode der unifilaren Aufhängung eines Stabes unter alleiniger Einwirkung der Torsion der Aufhängung.

Wir knüpfen die Betrachtung an einen unifilar — etwa an einen Draht — aufgehängten, unmagnetischen Stab, der im Zustand des Gleichgewichts eine horizontale Lage haben möge. Das experimentelle Arrangement bestehe etwa darin, dass der Aufhängungsdraht oben in einer Klemme, unten in einem gabelförmigen Gehänge endige, in welches als Lager der unmagnetische Stab eingelegt werden kann. Mit dem Gehänge starr verbunden ist ein Spiegel, welcher die hier als bekannt vorauszusetzende Poggendorff-Gauss'sche Spiegelablesung anzuwenden gestattet.

Drehen wir den Stab aus der Gleichgewichtslage, indem wir uns etwa eines Pinsels bedienen, so wird der Draht in sich tordirt; es werden in Folge dessen innerhalb des Drahtes elastische Kräfte erregt, welche ein Drehungsmoment auf den Draht ausüben, das zurück in die Gleichgewichtslage strebt.

Streng genommen handelt es sich um ein Problem, das in der Elasticitätstheorie behandelt wird: die Torsion eines Kreiscylinders um seine Axe. Wir wollen uns hier aber nicht darauf beziehen. Für die Einführung in die theoretische Physik ist es lehrreicher, durch unmittelbare Bezugnahme auf Beobachtung und Messung die Rechtfertigung eines Ansatzes zu versuchen, mit dem wir von vorneherein in die theoretische Behandlung gehen wollen. Dieser Ansatz besteht darin, dass wir von dem Drehungsmoment, herrührend von den inneren elastischen Kräften, annehmen, dass es gleich dem Torsionswinkel φ ist, um welchen der Stab in jedem Augenblick aus der Gleichgewichtslage herausgedreht erscheint, multiplicirt mit einer dem Draht individuellen Constanten, dem Torsionscoefficienten τ. Das Drehungsmoment ist ferner negativ in Ansatz zu bringen, weil es im Sinne einer Verkleinerung des Winkels φ wirkt. Der Flächensatz [§ 55 (3)], bezogen auf die verticale Cylinderaxe des Drahtes als Drehungsaxe, liefert dann die Gleichung:

$$(1) \qquad \mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\tau\varphi.$$

Hierin ist wieder M das Trägheitsmoment des Systems um die verticale Cylinderaxe. Die Gleichung (1) selbst wird von uns als die

Pendelgleichung für unendlich kleine Amplituden erkannt [§ 49 (4) und § 72 (2)], und wir können demgemäss aus (1) das Resultat entnehmen, dass die Schwingungsdauer des unifilar aufgehängten Stabes T unabhängig von der Grösse der angewandten Amplituden wird:

$$T = \pi \sqrt{\frac{\mathsf{M}}{\tau}}. \tag{2}$$

Diese Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Grösse der Schwingungsamplitude stellt sich hier als eine unmittelbare Folge unseres Ansatzes dar, und sie ist es, die einer genauen experimentellen Prüfung zugänglich erscheint.

Wir haben damit eines der vielen Beispiele kennen gelernt, welche für die Auffassung der theoretischen Physik so charakteristisch sind und darin bestehen, dass eine wechselseitige Beziehung zwischen Theorie und Beobachtung eingeleitet erscheint, welche ebenso auf die Bereicherung theoretischer Gesichtspunkte, wie auf die Ausarbeitung praktischer Methoden gerichtet ist.

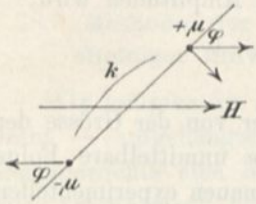
§ 79. **Methode der unifilaren Aufhängung eines Magneten unter alleiniger Einwirkung des Erdmagnetismus.**

Wir wollen jetzt die Theorie eines unifilar aufgehängten Magnetstabes unter Einwirkung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus ohne Rücksicht auf die Torsion des Aufhängungsdrahtes behandeln. Wir behalten uns vor, den gleichzeitigen Einfluss der Torsion des Drahtes nachher in die Betrachtung aufzunehmen. Es soll sich hier gleichzeitig um ein Beispiel für die Methodik der Behandlung zusammengesetzter Aufgaben handeln; diese Methodik besteht darin, dass wir die Aufgabe theilen, um die Aufmerksamkeit besser concentriren zu können, indem wir den Einfluss jedes Umstandes auf das Endresultat einzeln klarlegen.

Das experimentelle Arrangement ist das am Anfang des vorigen Paragraphen angegebene mit dem einen Unterschiede, dass in dem gabelförmigen Lager an Stelle des unmagnetischen Stabes ein magnetischer Stab eingelegt ist.

Wir beginnen zunächst mit einer schematischen Theorie. Wir sehen den Magneten als ein einziges magnetisches Polpaar mit gleichen und entgegengesetzten magnetischen Mengen $\pm \mu$ an, auf welche die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus H mit der Kraft $\pm H\mu$ wirkt. Die magnetischen Pole befinden sich in dem Abstand $k/2$ von der Drehungsaxe (dem Aufhängungsfaden). Im Zustand des Gleichgewichts weist die Verbindungslinie der beiden Pole in die Richtung des magnetischen Meridians. Ist diese Verbindungslinie um den Winkel φ aus der Gleichgewichtslage herausgedreht, so wirkt das von der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus ausgeübte Drehungsmoment auf das Polpaar mit der Stärke $-H\mu k \sin\varphi$ in die Gleichgewichtslage zurück, und wir erhalten unter Bezugnahme auf den Flächensatz § 55 (3) und auf die geometrische Veranschaulichung des Begriffs des Drehungsmoments (§ 57) als Differentialgleichung des schwingenden Magnetstabes:

Fig. 11.

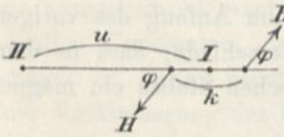


$$(1) \qquad \mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -H\mu k \cdot \sin\varphi.$$

Unser nächstes Ziel ist, an der Hand des behandelten Schemas einen engeren Anschluss an die Wirklichkeit zu gewinnen. Dazu verhilft uns die § 57 behandelte Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung der Drehungsmomente in Componenten, die § 57 gewonnene Bemerkung, nach der wir bei einem auf einen starren Körper ausgeübten Drehungsmoment den Angriffspunkt einer Kraft beliebig in ihrer Richtung verlegen können, und endlich ein nun aus der Theorie der Kräftepaare zu entwickelnder Satz.

Wir bezeichnen ein derartiges Drehungsmoment, wie es auf ein magnetisches Polpaar ausgeübt wird, als ein Kräftepaar. Für den Begriff des Kräftepaares ist es charakteristisch, dass zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte in zwei verschiedenen Punkten eines starren Körpers ihren Angriffspunkt haben und dadurch ein Drehungsmoment ausüben. Von einem solchen Kräftepaar lässt sich nun beweisen, dass das von ihm ausgeübte Drehungsmoment um alle parallelen Axen dasselbe ist.

Fig. 12.



Wir beweisen den Satz zunächst für alle parallelen Axen innerhalb desselben Hebelarms oder seiner Verlängerung. In der That, bezogen auf die Drehungsaxe I erhalten wir als Drehungsmoment $Hk \sin\varphi$, bezogen auf die Drehungsaxe II — unter u den Abstand der Axen I und II verstanden:

$$H\left(u + \frac{k}{2}\right)\sin\varphi - H\left(u - \frac{k}{2}\right)\sin\varphi = Hk\sin\varphi,$$

und damit ist der Satz für alle parallelen Axen innerhalb desselben

Hebelarms oder seiner Verlängerung bewiesen. Er gilt dann aber allgemein für alle parallelen Axen überhaupt, denn ich kann mir für einen starren Körper das angreifende Kräftepaar sammt Hebelarm um jede einzelne Axe ohne Aenderung der Wirkung oder der Grösse gedreht denken, und dann wird die Drehungsaxe nach dem eben geführten Beweise wieder innerhalb des neu gerichteten Hebelarmes oder seiner Verlängerung verlegt werden können.

Ein wirklicher Magnet kann nun von uns als ein System von sehr vielen magnetischen Polpaaren angesehen werden, auf welche der Erdmagnetismus in Form von Kräftepaaren wirkt.

Betrachten wir den Magneten zunächst in der Gleichgewichtslage. Ein System von zahllosen Kräftepaaren, herrührend von der erdmagnetischen Kraft, wirkt auf den Magneten ein. Als wirkungsfähig ist aber nur die Horizontalcomponente H der erdmagnetischen Kraft anzusehen, weil es sich ausschliesslich nur um die Möglichkeit der Drehung um eine verticale Axe handelt. Die Thatsache der Existenz einer Gleichgewichtslage lehrt nun, dass es eine bestimmte Lage des Magneten giebt, in der sich die Summe der von den Kräftepaaren der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus ausgeübten Drehungsmomente aufhebt. Wir denken uns in dieser Lage eine verticale Ebene durch Aufhängungsdraht und Richtung der erdmagnetischen Kraft gelegt, denken uns diese Ebene ferner an der Oberfläche des Magnetstabes irgendwie markirt und bezeichnen die horizontale Richtung innerhalb dieser Ebene im Magnet als „magnetische Axe“ des Magnetstabes. Wir können mit Hülfe der Poggendorff Gauss'schen Methode diese Lage zu einer bestimmten Stelle der Skala in Beziehung setzen.

Betrachten wir nun den Magneten in einer Lage, die um den Winkel φ von der Gleichgewichtslage abweicht, so können wir die Kräfte des Systems der wieder zahllos vorhandenen Kräftepaare in der zuvor als Axe des Magnetstabes definirten Richtung und senkrecht dazu zerlegt denken. Ebenso wie früher in der Gleichgewichtslage des Systems die Summe der Kräfte $H\mu$ — in der Richtung der Axe wirkend — kein Drehungsmoment ausübte, wird jetzt in der abgelenkten Lage des Systems die Gesammtheit der Kraftcomponenten $H\mu \cos\varphi$ — in der Richtung der Axe wirkend — auch kein Drehungsmoment ausüben können; dagegen wird die Gesammtheit der Kraftcomponenten $H\mu \sin\varphi$ — senkrecht zur Richtung der magnetischen Axe wirkend — ein Drehungsmoment um den Aufhängungsdraht als

Drehungsaxe ausüben. Mit der Bestimmung dieses Drehungsmoments haben wir uns jetzt zu beschäftigen.

Da das System ein starres ist, können wir uns den Angriffspunkt der einzelnen Kraftcomponente in ihrer Richtung bis zum Schnitt mit der durch Aufhängungsdraht und magnetische Axe gelegten Verticalebene verlegt denken. Ferner ist zu beachten, dass im Allgemeinen der Hebelarm des einzelnen Kräftepaares aus der horizontalen Richtung herausfallen wird; da nur die Drehung um die Verticalaxe des Aufhängungsdrahtes in Betracht kommt, werden wir also als wirksamen Hebelarm nur die Componente des ursprünglichen Hebelarms nach der Horizontalen in Rechnung zu ziehen haben.

Nehmen wir nun noch unseren Satz hinzu, nach dem das Drehungsmoment eines Kräftepaares um eine Axe unveränderlich bleibt, wenn wir die Axe parallel mit sich — hier in der Richtung des wirksamen Hebelarms — verschieben, so erkennen wir, dass der Charakter der Gleichung (1), welche unsere schematische Theorie lieferte, ungeändert bleibt, insofern an Stelle von $H\mu k : H\Sigma\mu k$ tritt. Hierbei ist $\Sigma\mu k$ das, was in der Theorie des Magnetismus als magnetisches Moment bezeichnet wird — ein Werth, der eine Grösse und Richtung darstellt, der also als Vectorgrösse gefasst werden kann. Die Richtung des magnetischen Moments wird dabei als identisch mit der Richtung der magnetischen Axe betrachtet.

Bezeichnen wir nun zur Abkürzung $H\Sigma\mu k = D$ und nennen D das Directionsmoment, so tritt an Stelle der Gleichung (1):

$$\text{(2)} \qquad \mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -H(\Sigma\mu k)\sin\varphi = -D\sin\varphi.$$

Das ist die gewöhnliche Pendelgleichung, und wir erhalten entsprechend für die auf kleine Amplituden reducirte Schwingungsdauer:

$$\text{(3)} \qquad T_0 = \pi\sqrt{\frac{\mathsf{M}}{D}}.$$

Die Kenntniss von T_0 und M würde hiernach das Directionsmoment D zu bestimmen gestatten.

§ 80. Methode der unifilaren Aufhängung eines Magneten unter Rücksicht auf die Torsion.

Wir behandeln jetzt die Theorie des unifilar aufgehängten Magnetstabes unter Rücksicht auf die Torsion des Aufhängungsdrahtes oder -fadens.

Das experimentelle Arrangement, das wir unserer theoretischen Betrachtung zu Grunde legen, besteht oben in einem Torsionsknopf oder in einer Torsionsscheibe, in deren centraler Axe der Aufhängungsdraht endigt, — unten in einem gabelförmigen Lager, welches gestattet, einmal den Magnetstab aufzunehmen, sodann aber den Magneten mit einem unmagnetischen Metallstab von gleicher geometrischer Gestalt und womöglich auch von gleicher Masse zu vertauschen. Die Torsionsscheibe ist mit einer Theilung versehen und gestattet dem Draht von oben her eine bestimmte Drehung mitzutheilen. Ist nun das Gehänge, das sich unten an dem Draht befindet, unmagnetisch, so wird dasselbe in der neuen Gleichgewichtslage unten um denselben Winkel gefolgt sein, um welchen oben die Torsionsscheibe gedreht ist. Liegt dagegen in dem unteren Lager der Magnet, so wird das Gehänge in der neuen Gleichgewichtslage unten nur zu einem Theil der oberen Drehung gefolgt sein.

Gehen wir nun zunächst theoretisch davon aus, dass der Draht mit dem magnetischen Gehänge im Zustand des Gleichgewichts ohne Torsion sei, und drehen wir die Torsionsscheibe um den Winkel ψ_1, dann wird unter Einwirkung dieser Torsion und des Erdmagnetismus der Magnetstab um den Winkel φ_1 gedreht erscheinen, und wir haben im Zustand des Gleichgewichts:

$$(1) \qquad 0 = -D\sin\varphi_1 + \tau(\psi_1 - \varphi_1).$$

Von dieser Gleichung werden wir auch auszugehen haben, wenn der Draht ursprünglich mit einer Torsion behaftet ist, die wir nicht kennen; es sind dann φ_1 und ψ_1 Unbekannte. Dieser Fall wird in der Wirklichkeit stets vorliegen. Wir können dann aber diese Unbekannten φ_1 und ψ_1 durch Beobachtung der Gleichgewichtslagen des magnetischen und des unmagnetischen Stabes beliebig klein machen, indem wir die Torsionsscheibe so lange drehen, bis diese Gleichgewichtslagen beliebig nahe zusammenfallen. Von einer völlig genauen Zurückführung beider Gleichgewichtslagen auf einander befreit folgende Methode.

Wir drehen die Torsionsscheibe um einen bekannten Winkel ω (z. B. bei sehr dünnen Aufhängungsfäden $\omega = 2\pi$); der Magnet nimmt dann eine neue Gleichgewichtslage $\varphi_1 + \varphi'$ an, wobei φ' beobachtbar ist, und wir erhalten, entsprechend der Gleichung (1):

$$(2) \qquad 0 = -D\sin(\varphi_1 + \varphi') + \tau(\psi_1 + \omega - \varphi_1 - \varphi').$$

Die Subtraction beider Gleichungen (1) von (2) liefert:

$$(3) \qquad 0 = -D\left(\sin(\varphi_1 + \varphi') - \sin\varphi_1\right) + \tau(\omega - \varphi').$$

Hatten wir vorher schon das Mittel namhaft gemacht, φ_1 und ψ_1 klein zu machen, so werden wir es experimentell so einrichten, dass auch φ' klein bleibt — die ganze Winkelbeobachtung von φ_1 und φ' bleibt ja auf die Poggendorff-Gauss'sche Ablesung mit Spiegel, Fernrohr und Skala beschränkt. Wir können dann in (3) den Sinus mit dem Bogen vertauschen und gewinnen aus (3):

$$(3^a) \qquad 0 = -D\varphi' + \tau(\omega - \varphi'),$$

eine Gleichung, welche uns eine Methode zur Bestimmung des sogenannten Torsionsverhältnisses $\Theta = \tau/D = \varphi'/(\omega - \varphi')$ an die Hand giebt.

Drehen wir die Torsionsscheibe wieder in die ursprüngliche Lage zurück, auf welche sich die Gleichung (1) bezieht, wobei φ_1 und ψ_1 sehr kleine Winkel darstellen mögen, und bringen das magnetische Gehänge etwa durch einen vorübergehend genäherten Hülfsmagneten aus der Gleichgewichtslage in Schwingungen, die dann nur unter Einwirkung des Erdmagnetismus und der Torsion des Aufhängungsdrahtes vor sich gehen, so wird bei der variabeln Ablenkung des magnetischen Gehänges φ aus der Gleichgewichtslage die Differentialgleichung gelten:

$$(4) \qquad \mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\sin(\varphi_1 + \varphi) + \tau(\psi_1 - \varphi_1 - \varphi).$$

Die Subtraction dieser Gleichung und der Gleichung (1) liefert unter Rücksicht auf die Kleinheit von φ_1:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -D\left(\sin(\varphi_1 + \varphi) - \sin\varphi_1\right) - \tau\varphi \\ &= -D\sin\varphi - \tau\varphi. \end{aligned}$$

— Letztere Gleichung ist richtig bis auf $\varphi_1\varphi/2$ gegen 1.

Richten wir es weiter experimentell so ein, dass das Torsionsverhältniss Θ möglichst klein wird, — wählen wir also den Aufhängungsfaden möglichst dünn, — dann können wir (5) schreiben:

$$(5^a) \qquad \mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D(1 + \Theta)\sin\varphi.$$

— Letztere Gleichung ist richtig bis auf $\Theta\varphi^2/3$ gegen 1.

Wir haben damit die Gleichung des unifilar schwingenden Magnetstabes — unter Rücksicht auf die Torsion des Aufhängungsfadens — auf die gewöhnliche Pendelgleichung zurückgeführt und erhalten für die auf kleine Amplituden reducirte Schwingungsdauer

$$(6) \qquad T_0 = \pi \sqrt{\frac{\mathsf{M}}{D(1+\Theta)}}.$$

Die Kenntniss von T_0, M und Θ würde hiernach die Bestimmung des Directionsmoments D gestatten. Wir können die Grösse $D(1+\Theta)$ als modificirtes Directionsmoment D' bezeichnen.

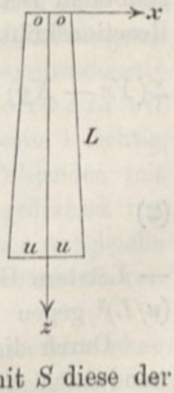
§ 81. Methode der bifilaren Aufhängung ohne Rücksicht auf die Torsion der Aufhängungsdrähte.

Wir behandeln nun die Theorie eines bifilar aufgehängten unmagnetischen Stabes — zunächst ohne Rücksicht auf die Torsion der Aufhängungsdrähte.

Das experimentelle Arrangement, das wir unserer theoretischen Betrachtung zu Grunde legen, besteht darin, dass die beiden Aufhängungsfäden von der Länge L oben in einem festen Abstand $2o$, unten in einem festen Abstand $2u$ endigen. In der Regel wird o kleiner als u gewählt werden, indem sich praktisch dann die Art der Befestigung bequemer gestaltet. Die Unveränderlichkeit des Abstandes kann z. B. durch Klemmvorrichtungen erreicht werden. An die untere Klemmvorrichtung schliesst sich starr ein Gehänge zur Aufnahme von unmagnetischen (eventuell auch magnetischen) Stäben; an dem Gehänge befindet sich gleichfalls starr auch der Spiegel für die Poggendorff-Gauss'sche Methode. Der Schwerpunkt des Gehänges liege in einer Verticalen, die sowohl den oberen wie den unteren Abstand der Aufhängungsfäden halbirt.

Wir rechnen die z-Axe von dem Halbirungspunkt von $2o$ in der Richtung der Schwere positiv nach unten, die xy-Ebene liege senkrecht dazu, die x-Axe in der verticalen Ebene, welche sich im Zustand des Gleichgewichts durch die Aufhängungsfäden legen lässt, die y-Axe senkrecht dazu in die Ebene der Zeichnung (Figur 13) hinein. Nun werde der Stab um den Winkel φ aus der Gleichgewichtslage gedreht und die Axe des Stabes in der neuen Lage auf die xy-Ebene projicirt; wir erhalten so Figur 14.

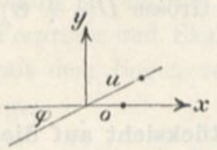
Fig. 13.



Die Aufhängungsfäden sind in Folge des Gewichts des angehängten Stabes gespannt. Durch das Gewicht des Stabes sind im Inneren der Fäden elastische Kräfte erregt, die nach dem Newton'schen Reactionsprincip (§ 39) der Schwere entgegenwirken. Bezeichnen wir mit S diese der

Schwere entgegen in der Richtung des Fadens wirkende Gegenkraft, so sind die Richtungscosinus dieser Reactionskraft für den rechten Faden sämmtlich negativ:

Fig. 14.



$$-\frac{u\cos\varphi - o}{L}, \quad -\frac{u\sin\varphi}{L}, \quad -\frac{z}{L}.$$

Es werden entsprechend die Componenten dieser Reactionskraft für den rechten Faden:

$$-S\frac{u\cos\varphi - o}{L}, \quad -S\frac{u\sin\varphi}{L}, \quad -S\frac{z}{L}.$$

Wir erhalten ebenso die Componenten dieser Reactionskraft für den linken Faden:

$$+S\frac{u\cos\varphi - o}{L}, \quad +S\frac{u\sin\varphi}{L}, \quad -S\frac{z}{L}.$$

Diese elastischen Kraftcomponenten wirken zusammen mit der Schwerkraft auf das starre Gehänge ein und werden im Zustand des Gleichgewichts die Bedingungen des Gleichgewichts für starre Systeme (§ 67 (2) erfüllen:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$
$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Wir erkennen, die Bedingungen $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$ werden schon von selbst erfüllt, die Bedingung $\Sigma Z = 0$ führt zur Bestimmung der elastischen Reactionskraft S aus dem Gewicht des starren Gehänges Mg mit der Masse M. Es folgt nämlich aus $\Sigma Z = 0$:

(1) $$Mg - 2S\frac{z}{L} = 0, \quad \text{also:} \quad S = \frac{MgL}{2z}.$$

Von den Drehungsmomenten kommt nur das um die z-Axe ausgeübte in Betracht. Das Drehungsmoment, soweit es die elastischen Reactionskräfte um die z-Axe ausüben, ist:

$$\Sigma(Yx - Xy) = 2u\cos\varphi\left(-S\frac{u\sin\varphi}{L}\right) + 2u\sin\varphi\left(+S\frac{u\cos\varphi - o}{L}\right)$$
$$= -2S\frac{ou\sin\varphi}{L} = -Mg\frac{ou\sin\varphi}{z}$$

(2) $$= -\frac{Mg\,ou\sin\varphi}{\sqrt{L^2 - (o^2 + u^2 - 2ou\cos\varphi)}} = -\frac{Mg\,ou}{L}\sin\varphi.$$

— Letztere Gleichung ist richtig bis auf Glieder von der Ordnung $(u/L)^2$ gegen 1.

Durch dieses Drehungsmoment (2) können wir z. B. bei den Anwendungen auf Elektricität und Magnetismus die von elektrischen oder magnetischen Kräften ausgeübten Drehungsmomente messen. Existiren keine solche fremden Drehungsmomente, so dreht sich der bifilar aufgehängte Stab unter Einwirkung des Drehungsmoments (2) in die Gleichgewichtslage zurück und vollführt um dieselbe Schwingungen, die nach den Flächensätzen durch die Differentialgleichung:

$$(3) \qquad \mathsf{M} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mgou}{L} \sin\varphi$$

gegeben sind. Das ist aber wieder die bekannte Form der Pendelgleichung, und wir erhalten für die Schwingungsdauer, bezogen auf kleine Amplituden:

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{\mathsf{M} \cdot L}{Mgou}}.$$

Als Directionsmoment der bifilaren Aufhängung hat sich hier die Grösse ergeben:

$$D = \frac{Mgou}{L}.$$

§ 82. Methode der bifilaren Aufhängung unter Rücksicht auf die Torsion der Aufhängungsdrähte.

Wir führen jetzt in die Behandlung der bifilaren Aufhängung die Torsion der Aufhängungsdrähte ein. Das experimentelle Arrangement erfährt nur dadurch eine Bereicherung, dass unmittelbar unterhalb der oberen Befestigung der Drähte kleine Torsionsscheiben den Verlauf der Aufhängungsdrähte unterbrechen, welche gestatten, die Drähte einzeln in sich zu tordiren.

Die Drehungsaxen der einzelnen Drähte (L) und die Drehungsaxe der bifilaren Aufhängung (z) fallen nun nicht ganz zusammen. Ertheilen wir dem einen Aufhängungsdraht durch Drehen um den Winkel φ das Torsionsmoment $\tau\varphi$, so wird für die bifilare Aufhängung danach streng genommen nur die Componente dieses Torsionsmoments um die z-Axe als Drehungsaxe in Betracht kommen, also $\tau\varphi\, z/L$; wir haben aber bereits in § 81 Gleichung (2) bis auf $(u/L)^2$ gegen 1 richtig z gleich L gesetzt. In diesem Sinne werden wir im Folgenden mit $\tau\varphi$ als dem Torsionsmoment des einzelnen Aufhängungsdrahtes um die z-Axe oder eine dazu parallele Axe rechnen. (Man vergleiche den Satz über die Gleichheit der Drehungsmomente herrührend von Kräftepaaren um parallele Axen, § 79, S. 206).

Sind die Aufhängungsdrähte im Zustand des Gleichgewichts ohne Torsion, und werden nun die beiden kleinen Torsionsscheiben, an denen die Drähte befestigt sind, um ψ_1 und ψ_1' gedreht, so erfährt der bifilar aufgehängte Stab eine Ablenkung φ_1, und die neue Gleichgewichtslage ist gegeben durch:

$$(1) \qquad 0 = -\frac{Mgou}{L}\sin\varphi_1 + \tau(\psi_1 + \psi_1' - 2\varphi_1).$$

Von dieser Gleichung werden wir auch auszugehen haben, wenn die Aufhängungsdrähte ursprünglich mit einer Torsion behaftet sind, die wir nicht kennen; es sind dann φ_1, ψ_1, ψ_1' Unbekannte. Dieser Fall wird in der Wirklichkeit stets vorliegen. Um eine Gleichung mit nur bekannten Winkeln zu erhalten, verfahren wir dann so, dass wir etwa die Torsionsscheibe des einen Aufhängungsdrahtes um ω drehen, die Gleichgewichtslage würde dann um den Winkel α geändert, und wir erhalten:

$$(2) \qquad 0 = -\frac{Mgou}{L}\sin(\varphi_1 + \alpha) + \tau(\psi_1 + \psi_1' + \omega - 2\varphi_1 - 2\alpha).$$

Unter Beschränkung auf kleine Ausschlagswinkel, wie sie die Spiegelmethode in sich schliesst, erhalten wir aus der Differenz beider Gleichungen (1) und (2) in starker Annäherung:

$$(3) \qquad 0 = -\frac{Mgou}{L}\alpha + \tau(\omega - 2\alpha).$$

Wir definiren jetzt als das **Torsionsverhältniss der bifilaren Aufhängung** Θ den Werth:

$$(4) \qquad \Theta = \frac{2\alpha}{\omega - 2\alpha} = \frac{2\tau L}{Mgou}.$$

Bringen wir die Torsionsscheibe wieder in die ursprüngliche Lage zurück, gehen also von der durch (1) definirten Gleichgewichtslage aus, setzen das bifilare System in Schwingungen und bezeichnen mit φ den veränderlichen Ablenkungswinkel, so erhalten wir nach dem Flächensatz als Differentialgleichung des bifilar schwingenden Systems:

$$(5) \qquad \mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mgou}{L}\sin(\varphi_1 + \varphi) + \tau(\psi_1 + \psi_1' - 2\varphi_1 - 2\varphi).$$

Von dieser Gleichung die Gleichung (1) subtrahirt und berücksichtigt die Kleinheit von φ_1, die sich jederzeit experimentell herstellen lässt, erhalten wir in starker Annäherung:

$$(6) \qquad \mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mgou}{L}\sin\varphi - 2\tau\varphi.$$

Richten wir es weiter experimentell so ein, dass das Torsionsverhältniss Θ möglichst klein wird, — wählen wir also die Aufhängungsfäden möglichst dünn, — dann können wir (6) schreiben:

$$(7)\quad \mathsf{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(\frac{Mgou}{L} + 2\tau\right)\sin\varphi = -\frac{Mgou}{L}(1+\Theta)\sin\varphi.$$

— Letztere Gleichung ist richtig bis auf $\Theta\varphi^2/3$ gegen 1.

Wir haben damit die Gleichung des bifilar schwingenden Systems — auch unter Rücksicht auf die Torsion der Aufhängungsdrähte — auf die Pendelgleichung zurückgeführt und erhalten für die auf kleine Amplituden reducirte Schwingungsdauer:

$$T_0 = \pi\sqrt{\frac{\mathsf{M}}{\frac{Mgou}{L}(1+\Theta)}}.$$

Wir können die Grösse $(Mgou/L)(1+\Theta)$ als das unter Rücksicht auf die Torsion der Aufhängung modificirte Directionsmoment D' bezeichnen.

§ 83. **Gemeinsame Betrachtungen über die unifilare und bifilare Aufhängung. Methoden, Directionsmoment und Trägheitsmoment zu bestimmen.**

Unsere Studien über die unifilare und bifilare Aufhängung hatten das Gemeinsame, dass sie für die Schwingungsdauer T oder T_0 auf einen Ausdruck von der Form $\pi\sqrt{\mathsf{M}/D}$, beziehungsweise $\pi\sqrt{\mathsf{M}/D'}$ führten. Das Unterscheidende lag in der Verschiedenheit des Ausdrucks für das Directionsmoment D, beziehungsweise D'. Für die einfachen Torsionsschwingungen ergab sich $D = \tau$, für den Magnetstab $D = \Sigma\mu k$, beziehungsweise $(\Sigma\mu k)(1+\Theta)$, für die bifilare Aufhängung $D = Mgou/L$, beziehungsweise $(Mgou/L)(1+\Theta)$. Es wird in der Folge kaum nöthig sein, weiter D und D' besonders zu unterscheiden; welches von beiden in Betracht kommt, ergiebt der Zusammenhang.

Dieses Directionsmoment $D = (\pi^2/T^2)\,\mathsf{M}$ ist die Grösse, welche wir brauchen, wenn es sich darum handelt fremde Kräfte zu messen, deren Natur erforscht werden soll. Um dieses Directionsmoment recht genau zu erhalten, werden wir uns nicht allein darauf beschränken dürfen, das Trägheitsmoment etwa rechnerisch unter der Voraussetzung homogener Massenvertheilung abzuleiten. So manche Theile der bifilaren Aufhängung, wie das gabelförmige Lager, würden sich ohnehin ihrer verwickelten geometrischen Gestalt wegen einer Berechnung entziehen. Es wird also darauf ankommen, für die Bestimmung des Trägheitsmoments experimentelle Methoden anzugeben. Solche Methoden rühren von Gauss her und knüpfen an die entwickelten Theorien der unifilaren und bifilaren Aufhängung.

Die Gauss'sche Methode besteht darin, dass wir an den schwingenden Stab in verschiedenen Abständen l_1, l_2 von der Drehungsaxe (z) cylindrische Gewichte von der Masse m anhängen und die zugehörigen Schwingungsdauern T_1, T_2 bestimmen. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment eines einzelnen cylindrischen Gewichtes um die durch den Schwerpunkt gehende Cylinderaxe mit $m\lambda^2$, so wird nach dem bekannten Satz aus § 58 das Trägheitsmoment des Gewichtes m um die dazu parallel gerichtete z-Axe sein: $m(\lambda^2 + l_1^2)$, beziehungsweise $m(\lambda^2 + l_2^2)$.

Bei der unifilaren Aufhängung ist nun das Directionsmoment erfahrungsgemäss unabhängig von der Belastung, und wir erhalten, im Anschluss an die Gauss'sche Methode, die Gleichungen:

$$T^2 D = \pi^2 \mathsf{M},$$

$$T_1^2 D = \pi^2\left(\mathsf{M} + 2m(\lambda^2 + l_1^2)\right),$$

$$T_2^2 D = \pi^2\left(\mathsf{M} + 2m(\lambda^2 + l_2^2)\right).$$

Die Differenz der beiden letzten Gleichungen liefert:

$$(T_2^2 - T_1^2) D = \pi^2 2m(l_2^2 - l_1^2),$$

also:

$$D = \pi^2 2m \frac{l_2^2 - l_1^2}{T_2^2 - T_1^2}. \tag{1}$$

Diesen Werth in die erste Gleichung eingesetzt, erhalten wir für das zu bestimmende Trägheitsmoment:

$$\mathsf{M} = T^2 \cdot 2m \frac{l_2^2 - l_1^2}{T_2^2 - T_1^2}. \tag{2}$$

Bei der bifilaren Aufhängung ist das Directionsmoment

$$D = \frac{Mgou}{L}(1 + \Theta),$$

mithin abhängig von der Belastung Mg, beziehungsweise $(M + 2m)g$. Doch lässt sich auch hier die Gauss'sche Methode übertragen, insofern wir haben:

$$T_1^2 (M + 2m)\frac{gou}{L}(1 + \Theta) = \pi^2\left(\mathsf{M} + 2m(\lambda^2 + l_1^2)\right),$$

$$T_2^2 (M + 2m)\frac{gou}{L}(1 + \Theta) = \pi^2\left(\mathsf{M} + 2m(\lambda^2 + l_2^2)\right).$$

Die Differenz beider Gleichungen liefert:

$$(T_2^2 - T_1^2)(M + 2m)\frac{gou}{L}(1 + \Theta) = \pi^2 2m(l_2^2 - l_1^2),$$

woraus sich bestimmt:

$$(3) \qquad D = \frac{Mgou}{L}(1 + \Theta) = \pi^2 M \frac{2m}{M + 2m} \frac{l_2^2 - l_1^2}{T_2^2 - T_1^2}.$$

Auf den ersten Blick mag es vielleicht scheinen, als wäre für die bifilare Aufhängung die indirecte Bestimmung des Directionsmomentes D mit Hülfe der Schwingungsdauern T_1, T_2 unnöthig, und die directe Bestimmung durch Ausmessung der Werthe M, o, u, L vorzuziehen. Demgegenüber ist aber darauf hinzuweisen, dass insbesondere für stärkere Aufhängungsdrähte Zweifel darüber bestehen können, wie die Längen o und u zu rechnen sind. Die Gleichung (3) bietet in sich die Mittel dazu, diese Zweifel zu heben, und so hat denn Kreichgauer[1]) unter Benutzung von (3) aus eigens dazu angestellten Beobachtungen ableiten können, dass die Entfernungen o und u nicht vom Mittelpunkt der Aufhängungsdrähte zu rechnen sind, sondern von Punkten, die mehr nach der Hauptdrehungsaxe z zu liegen; o und u sind also kleiner, als man auf den ersten Blick in Ansatz zu bringen geneigt sein könnte.

Die Verbindung der Gleichung (3) mit der ursprünglichen $T^2 D = \pi^2 \mathsf{M}$ liefert auch für die bifilare Aufhängung eine Methode Trägheitsmomente zu bestimmen

$$(4) \qquad \mathsf{M} = \frac{T^2}{\pi^2}\frac{Mgou}{L}(1 + \Theta) = T^2 \frac{2m}{1 + \frac{2m}{M}} \cdot \frac{l_2^2 - l_1^2}{T_2^2 - T_1^2}.$$

Um das Trägheitsmoment eines beliebig gestalteten, nicht gerade in Stabform gegebenen Körpers zu bestimmen, bringen wir zunächst einen passenden Rahmen mit Stab an und untersuchen das Trägheitsmoment dieses Gehänges M nach der Gauss'schen Methode. Darauf legen wir auf den Rahmen den Körper, dessen Trägheitsmoment μ bestimmt werden soll, und bestimmen das Trägheitsmoment $(\mathsf{M} + \mu)$ nach derselben Methode. Die Differenz beider so experimentell bestimmter Werthe liefert das gesuchte Trägheitsmoment μ.

---

1) Kreichgauer, Wiedemann's Annalen 25, S. 273. 1885.

§ 84. Theorie der Horizontalwagen (Torsionswage) in ihrer statischen, dynamischen und ballistischen Anwendung.

Wir haben auf Grund unserer Studien über die unifilare und bifilare Aufhängung nun alle Mittel gewonnen, die Theorie dieser Aufhängungsarten zur Ausarbeitung von Methoden zu verwerthen, welche die Messung äusserer fremder Drehungsmomente bezwecken. Wir wollen die Instrumente, welche zur Realisirung dieser Methoden hergestellt werden können, Horizontalwagen nennen im Unterschied zu der gewöhnlichen Gewichtswage, welche in dieser Terminologie als Verticalwage zu bezeichnen wäre.

Das Gehänge kann je nach den vorliegenden Zwecken in der mannigfaltigsten Weise variiren; es kann, wie bei der Coulomb'schen Torsionswage, ausgebildete Hebelarme aufweisen, oder es kann ohne Ausbildung der Hebelarme die verschiedenen Formen annehmen, die wir z. B. bei den Galvanometer-Constructionen wiederfinden. Der experimentelle Gedanke für das Folgende ist der, dass wir das Drehungsmoment D_a herrührend von äusseren, zu untersuchenden Kräften, welche wir kennen lernen und erforschen wollen, dem inneren Drehungsmoment, wie wir es für die einzelnen Arten der Aufhängung bestimmen gelernt haben, entgegenwirken lassen. Wir können uns bei der Ausarbeitung der Methoden von statischen und dynamischen Gesichtspunkten leiten lassen.

Statisch können wir so verfahren, dass wir dem äusseren Drehungsmoment D_a das Gleichgewicht durch das innere Drehungsmoment der Aufhängung halten lassen. Indem wir den Ausschlag aus der Gleichgewichtslage φ beobachten, erhalten wir:

(1) $$D_a = D \cdot \varphi, \text{ bezw. } = D \sin \varphi,$$

wobei D das Directionsmoment der Aufhängung bedeutet, also $D = \tau$, beziehungsweise $= (\Sigma \mu k)(1 + \Theta)$ oder $(Mgou/L)(1 + \Theta)$ ist, wie wir es nach den zuvor behandelten Methoden bestimmen gelernt haben. Bei der unifilaren Torsionswage werden wir statisch auch so verfahren können, dass wir durch Drehen der Torsionsscheibe um den Winkel φ die Torsionswage in der Gleichgewichtslage halten, womit der Vortheil verbunden ist, dass die Grösse D_a nur für eine einzige, bestimmte Lage der Torsionswage in Rechnung zu ziehen ist. Wie bei der gewöhnlichen Wage wird es bei diesen statischen Methoden nicht nöthig sein, die Gleichgewichtslage abzuwarten, im Gegentheil wird es sich empfehlen, die Gleichgewichtslage aus der Beobachtung von Schwingungen abzuleiten.

Dynamisch können wir so verfahren, dass wir die Horizontalwage mit und ohne Einwirkung der zu bestimmenden Kräfte schwingen lassen und die zugehörige Schwingungsdauer bestimmen. Greifen die zu untersuchenden Kräfte in Richtungen an, welche die Gleichgewichtslage als solche nicht ändern, so wird es sich empfehlen die Anordnung der Torsionswage in Anwendung zu bringen, bei der auch ohne Einwirkung der zu untersuchenden Kräfte die Schwingungen als Sinusschwingungen betrachtet werden können. Wir haben dann:

$$\mathsf{M}\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\sin\varphi, \qquad T_0 = \pi\sqrt{\frac{\mathsf{M}}{D}},$$

$$\mathsf{M}\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -(D - D_a)\sin\varphi, \qquad T_0' = \pi\sqrt{\frac{\mathsf{M}}{D - D_a}},$$

und wir können aus den Werthen:

$$D = \frac{\pi^2}{T_0^{\,2}}\,\mathsf{M}, \qquad D - D_a = \frac{\pi^2}{T_0'^{\,2}}\,\mathsf{M}$$

zur Bestimmung von D_a die Ausdrücke benutzen:

$$(2) \qquad D_a = \pi^2\mathsf{M}\left(\frac{1}{T_0^{\,2}} - \frac{1}{T_0'^{\,2}}\right) \quad \text{oder} \quad D_a = D\,\frac{T_0'^{\,2} - T_0^{\,2}}{T_0'^{\,2}}.$$

Zu den dynamischen Methoden können wir noch die sogenannte ballistische Methode rechnen, welche darin besteht, dass die Horizontalwage im Zustand des Gleichgewichts in Form einer plötzlich ertheilten Winkelgeschwindigkeit einen Stoss erhält, den wir durch den ersten Ausschlag messen können. Lassen wir das momentan wirkende äussere Gesammt-Drehungsmoment D_a in diesem Sinne als Stoss senkrecht zu der Kraftrichtung wirken, welche die Horizontalwage im Gleichgewicht hält, so können wir als Winkelbeschleunigung in unsere Schwingungsgleichung die im Gleichgewichtszustand ertheilte Winkelgeschwindigkeit $(d\varphi/dt)_{t=0}$ einführen. War nun unter Einwirkung des der Aufhängung eigenen Directionsmoments D die Schwingungsdauer der Horizontalwage T, so folgt aus

$$T = \pi\sqrt{\frac{\mathsf{M}}{D}}, \quad \text{also} \quad \mathsf{M} = \frac{T^2}{\pi^2}\,D:$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = \frac{D_a}{\mathsf{M}} = \frac{\pi^2}{T^2}\,\frac{D_a}{D}.$$

Der durch $(d\varphi/dt)_{t=0}$ bedingte Ausschlag ergiebt sich aber aus:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{\mathsf{M}}\,\varphi; \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{D}{\mathsf{M}}}\,(\varphi_0 - \varphi),$$

indem für $\varphi = 0$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = \sqrt{\frac{D}{\mathsf{M}}}\,\varphi_0 = \frac{\pi}{T}\,\varphi_0.$$

Es folgt so die für die ballistische Methode charakteristische Formel:

(3) $$D_a = D\,\frac{T}{\pi}\cdot\varphi_0.$$

Wir wollen noch einige Bemerkungen über den Begriff der Empfindlichkeit der Horizontalwage hinzufügen und uns dabei auf die statische und ballistische Empfindlichkeit beschränken. Wir verstehen unter der statischen Empfindlichkeit die Differenz zwischen zwei Gleichgewichtslagen, wie sie durch eine kleine Aenderung des äusseren Drehungsmoments D_a bedingt ist; wir verstehen unter der ballistischen Empfindlichkeit die Leichtigkeit, mit der die alte Gleichgewichtslage verlassen wird, um in eine neue Gleichgewichtslage überzugehen.

Die ballistische Empfindlichkeit spielt eine besondere Rolle in den sogenannten „Nullmethoden“. Bei diesen Nullmethoden kommt es darauf an, dass zwei zu vergleichende äussere Drehungsmomente D_a sich in der Weise das Gleichgewicht halten, dass die ursprünglich vorhandene und durch die Natur der Aufhängung und der Horizontalwage gegebene Gleichgewichtslage keine Aenderung erfährt. Der geringste Unterschied in der Wirkung der zu vergleichenden Drehungsmomente D_a hätte eine Störung des Gleichgewichts und damit einen Ausschlag zur Folge. Das Wesen der Nullmethode besteht nun darin, festzustellen, ob sich ein solcher Ausschlag nachweisen lässt oder nicht.

Die Ausdrücke:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{\mathsf{M}}\,\varphi = -\frac{\pi^2}{T^2}\,\varphi, \qquad T = \pi\sqrt{\frac{\mathsf{M}}{D}}$$

lehren, dass für eine ballistische Horizontalwage ein Gehänge mit kleiner Schwingungsdauer besonders empfindlich wirkt. Wir erzielen eine kleine Schwingungsdauer durch ein kleines Trägheitsmoment. Die Wahl des Werthes D wird sich nach der Grösse von D_a, die bestimmt werden soll, zu richten haben.

§ 85. Theorie der Astasirung magnetischer Richtsysteme.

Wir haben schon in dem einleitenden § 77 auf das Mittel der Astasirung hingewiesen, um — für den Fall, dass die erdmagnetischen Horizontalkräfte zu starke Richt- und Vergleichskräfte sind — eine

Schwächung derselben herbeizuführen. Es soll hier eine Theorie der Astasirung magnetischer Gehänge nach einigen Richtungen entwickelt werden, die für die Präcisionsmesskunst allgemeines Interesse darbietet und einige praktische Winke für die Wahl der anzuwendenden magnetischen Systeme an die Hand giebt.

Bezeichnen wir das magnetische Moment des Gehänges mit $m = \Sigma \mu k$, so wird das Directionsmoment des Gehänges unter Einwirkung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus H zu setzen sein: $D = Hm$. Hält nun ein äusseres Drehungsmoment D_a dem magnetischen Drehungsmoment der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus das Gleichgewicht, so haben wir:

(1) $$D_a = Hm \sin \varphi, \quad \text{bezw.} \quad = Hm\varphi,$$

bei kleinen Winkeln φ.

Wir wollen zunächst immer nur den Fall ins Auge fassen, in dem das äussere Drehungsmoment unabhängig von dem magnetischen Moment des Gehänges ist, in dem der Magnet also lediglich dazu bestimmt ist, dem Gehänge eine Richtung zu geben, und in dem keine anderen magnetischen Kräfte im Spiel stehen (bei der Anwendung der Galvanometer sind solche vorhanden).

Die statische Empfindlichkeit wird dann bei hinreichend kleinen Winkeln bedingt sein durch:

(2) $$\delta \varphi = \frac{\delta D_a}{Hm},$$

d. h., sie nimmt mit der Schwächung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus H und der Schwächung des magnetischen Moments zu. Wir erinnern ferner an das einfache Mittel, welches wir in der Beobachtung der Schwingungsdauer T haben, Hm zu bestimmen:

(3) $$Hm = \pi^2 \frac{M}{T^2}.$$

Im Anschluss an (2) können wir nun erläutern, dass sich zwei Arten der Astasirung zur Erhöhung der Empfindlichkeit darbieten: die Astasirung, die auf der Schwächung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus H beruht, und die Astasirung, die auf der Schwächung des magnetischen Moments des Gehänges m beruht. Wir erreichen die erste durch einen festen Magnetstab (Hauy'schen Stab), der dem Erdmagnetismus entgegenwirkt, die zweite durch das astatische Nadelpaar, d. h. durch Verdoppelung des magnetischen Gehänges in der Weise, dass der eine Theil des Gehänges dem anderen entgegenwirkt.

Von besonderem Interesse ist eine Verbindung beider Astasirungsmethoden, welche wir zum Schluss besprechen wollen.

1) Wir beginnen mit der Behandlung der Astasirung, die auf Schwächung von H beruht. Es bedeute h den Werth, um welchen H geschwächt wird, so erhalten wir an Stelle von (2) und (3):

$$(4) \qquad \delta\varphi = \frac{\delta D_a}{(H-h)m}, \qquad (H-h)m = \pi^2 \frac{\mathsf{M}}{T'^2}.$$

Die Beobachtung der Schwingungsdauern T und T' gestattet nun mit Hülfe von (3) und (4) h/H und h in der einfachsten Weise zu bestimmen, denn es folgt:

$$(5) \qquad \frac{h}{H} = \frac{T'^2 - T^2}{T'^2}, \qquad h = H\frac{T'^2 - T^2}{T'^2}.$$

Wie bei der Wage (§ 76) werden wir hier auch sagen können: Die Astasirung wird mit grösserem Erfolge auf ein leichtes magnetisches Gehänge mit geringem Trägheitsmoment als auf ein schweres magnetisches Gehänge mit grossem Trägheitsmoment angewandt werden können, denn das schwere magnetische Gehänge hat schon von vorneherein nach (3) eine relativ grosse Schwingungsdauer, während die Schwingungsdauer eines leichten magnetischen Gehänges vermöge seiner kurzen Schwingungsdauer durch die Astasirung mit Erfolg noch erheblich vergrössert werden kann.

Die Formel (3) zeigt, dass die Schwingungsdauer auch dadurch verkürzt werden kann, dass das magnetische Moment bei kleinem Trägheitsmoment möglichst vergrössert wird. Thomson hat aus diesem Grunde magnetische Gehänge in Form eines Systems sehr vieler dünner kurzer Magnetstäbchen construirt. Erfahrungsgemäss weist ein solches System ein höheres magnetisches Moment auf als ein einzelner Stab von gleichem Trägheitsmoment, auch zeichnet sich ein solches System durch höhere Constanz des magnetischen Moments aus; es nimmt auch schneller die Temperatur der Umgebung an, was insofern von Bedeutung ist, als die Grösse des magnetischen Moments sich erfahrungsgemäss als abhängig von der Temperatur ergiebt.

2) Wir behandeln nun die Astasirung, die auf der Schwächung des magnetischen Moments m beruht. Es bedeute in unserem astatischen System m_1 das magnetische Moment des einen, m_2 das magnetische Moment des anderen, gegenwirkenden Theiles,

M das Trägheitsmoment des ganzen Gehänges. Wir erhalten dann an Stelle der Gleichungen (2) und (3):

$$(6) \qquad \delta\varphi = \frac{\delta D_a}{H(m_1 - m_2)}, \qquad H(m_1 - m_2) = \pi^2 \frac{T'^2}{\mathsf{M}}.$$

Wir können die Schwächung des magnetischen Moments und damit die Vergrösserung der Empfindlichkeit bei einem solchen astatischen System sehr einfach bestimmen, wenn wir die Einrichtung treffen, dass wir den einen Theil gegenüber dem anderen drehbar herstellen. Das Trägheitsmoment M bleibt dabei dasselbe, und wenn wir beide Theile des Systems gleichgerichtet stellen, haben wir:

$$(7) \qquad \delta\varphi = \frac{\delta D_a}{H(m_1 + m_2)}, \qquad H(m_1 + m_2) = \pi^2 \frac{\mathsf{M}}{T''^2}.$$

Die Verbindung der letzten beiden Gleichungen (6) und (7) ergiebt unter Anderem:

$$(8) \qquad \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{T''^2}{T'^2} \text{ und } \frac{m_1 - m_2}{m_1} = \frac{2\,T''^2}{T''^2 + T'^2}.$$

Im Besonderen liefert die zweite Gleichung (8) die Schwächung des magnetischen Moments durch die Astasirung und damit die Vergrösserung der Empfindlichkeit des astatischen Paares gegenüber dem einfachen System.

3) Die Verbindung beider Astasirungsmethoden, auf welche wir anfänglich hinwiesen, besteht darin, dass wir nicht mehr den Erdmagnetismus ausschliesslich auf das astatische Paar wirken lassen, dass wir im Gegentheil durch äussere feste Magnete neue Richtkräfte einführen, welche an Stelle des Erdmagnetismus richtend wirken sollen. Die Tendenz dieser Methode lässt sich also einfach dahin aussprechen, dass das astatische Paar dem Erdmagnetismus und seinen Schwankungen überhaupt entzogen werden soll.

Es sei h_1 die Horizontalcomponente der neu eingeführten Richtkraft auf m_1, h_2 die Horizontalcomponente der neu eingeführten Richtkraft auf m_2, dann werden wir unter Einwirkung dieser Horizontalcomponenten und der des Erdmagnetismus H an Stelle von (2) und (3) erhalten:

$$(9) \qquad \begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{\delta D_a}{H(m_1 - m_2) + h_1 m_1 - h_2 m_2}, \\ H(m_1 - m_2) + h_1 m_1 - h_2 m_2 &= \pi^2 \frac{\mathsf{M}}{(T)^2}. \end{aligned}$$

Ist nun eine möglichste Gleichheit der magnetischen Momente der Theile m_1 und m_2 gelungen, so werden wir in $(h_1 m_1 - h_2 m_2)$ den wesentlichen Theil des Directionsmoments zu sehen haben, dem gegenüber $H(m_1 - m_2)$ nicht in Betracht kommt. Die Gleichungen (9) vereinfachen sich dann zu:

$$(9^a)\qquad \begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{\delta D_a}{h_1 m_1 - h_2 m_2}, & h_1 m_1 - h_2 m_2 &= \pi^2 \frac{\mathsf{M}}{(T)^2}, \\ &= \frac{\delta D_a}{(h_1 - h_2)\, m}, & (h_1 - h_2)\, m &= \pi^2 \frac{\mathsf{M}}{(T)^2}. \end{aligned}$$

Zum Studium eines so gerichteten astatischen Systems wird man am besten (7) und (9) verbinden. Wir erhalten dann:

$$\frac{T'''^2}{(T)^2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + \frac{h_1 m_1 - h_2 m_2}{H(m_1 + m_2)},$$

worin das wesentliche Glied den Werth $\frac{1}{2}(h_1 - h_2)/H$ haben wird.

Wir wollen diesen Vorzügen der Einrichtung gegenüber ihre Nachtheile nicht verschweigen. Die neu eingeführten Richtkräfte h_1, h_2 sind direct von den magnetischen Momenten der Hülfsstäbe abhängig, und die Stärke des magnetischen Moments ist, wie schon vorhin erwähnt, erfahrungsgemäss von der Temperatur abhängig. Die neu eingeführten Richtkräfte h erweisen sich so von neuen Factoren abhängig, von denen bei dem Erdmagnetismus als Richtkraft nicht die Rede war. Berücksichtigt man gleichzeitig den Einfluss der Temperatur auf das magnetische Moment des Gehänges, so wird in unsere Theorie der Astasirung dieser Temperatureinfluss zweimal eingehen.

Die Ausbildung der Theorie der Astasirung nach dieser combinirten Methode, welche meines Wissens zuerst in den von Thomson construirten Galvanometern eine Realisirung gefunden hat, bietet gegenwärtig ein besonderes Interesse für die physikalischen Institute, welche der Einwirkung von elektrischen Strassenbahnen mit Rückleitung durch die Schienen unterliegen. Von den Schienen gehen bei diesem Betriebssystem, insbesondere beim Ingangsetzen und beim Bremsen der einzelnen Wagen Starkstromstösse aus, welche sich flächenartig auf der Erdoberfläche auszubreiten scheinen.[1]) Insofern sich nun gleichzeitig Motorwagen an den verschiedensten Stellen der

1) Die Stromstösse wirken erfahrungsgemäss zu ebener Erde in gleicher Stärke wie in einer Höhe von fünfzehn Meter über dem Erdboden.

Betriebsstrecke befinden, ändern die in das Erdreich eingeleiteten Stromstösse beständig ihre Richtung und Stärke und ertheilen leichten magnetischen Gehängen in ballistischer Weise eine beständige Unruhe, welche auf keine sichere Gleichgewichtslage schliessen lässt. Die Anwendung der besonders empfindlichen Nullmethoden erscheint dadurch in ihrem Werth bedeutend herabgesetzt. Die natürlichen Schwankungen des Erdmagnetismus erscheinen den durch die vagabundirenden Ströme — wie man sie genannt hat — bedingten Schwankungen des magnetischen Feldes gegenüber nicht von Belang, denn jene gehen viel zu langsam vor sich, als dass sie ballistisch wirken könnten.

Einer besonderen Bemerkung bedarf noch der für die Galvanometrie so wichtige Fall, in dem das äussere Drehungsmoment D_a dem magnetischen Moment des Gehänges und der Stromstärke i proportional ist. Setzen wir in diesem Falle $D_a = f m i$, so wird für die Astasirung, welche auf der Schwächung von H beruht, nach (4):

$$\delta \varphi = f \frac{\delta i}{H - h};$$

für die Astasirung, welche auf der Schwächung des magnetischen Moments beruht, werden wir die einzelnen Theile des astatischen Systems mit entgegengesetzt gerichteten Stromrollen umgeben und nach (6) beziehungsweise (9ᵃ) erhalten:

$$\delta \varphi = f \frac{\delta i}{H} \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \quad \text{bezw.} \quad f \delta_i \frac{m_1 + m_2}{h_1 m_1 - h_2 m_2} \quad \text{oder} \quad f \frac{2 \delta i}{h_1 - h_2}.$$

Der Proportionalitätsfactor f hängt nun weiter von der Art der Windungen des Galvanometers ab, er ist um so grösser, je enger die Drahtwindungen des Galvanometers das magnetische Gehänge umgeben. So führt denn diese rein statische Ueberlegung zu den schon früher aufgestellten Forderungen zurück, das magnetische Gehänge möglichst klein und leicht auszuführen. Das Galvanometer wird auf diese Weise ebenso den Anforderungen der statischen wie der ballistischen Methoden und damit den Anforderungen der Nullmethoden entsprechen.

Historische Uebersicht zu IV.

(cf. Biographisch-Literarisches Handwörterbuch von J. C. Poggendorff.)

Christian Huygens 1629—1695.
Charles Augustin Coulomb 1736—1806.
Johann Gottlieb Friedrich Bohnenberger 1765—1831.
Henry Kater 1777—1835.
Karl Friedrich Gauss 1777—1855.
Friedrich Wilhelm Bessel 1784—1846.
Wilhelm Eduard Weber 1804—1891.

Huygens. Horologium oscillatorium, fol. Paris 1673. (Darin die Lehre vom Oscillationscentrum.)

Coulomb. Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal etc.; construction de différentes balances de torsion pour mesurer les plus petits degrés de force etc. Mém. Paris 1784.

Bohnenberger. Astronomie, Tübingen 1811. (Darin S. 448 das Reversionspendel beschrieben.)

Kater. Experiments for determining the length of the pendulum vibrating seconds in latitude of London. — Experiments for determining the variation in the length of the pendulum vibrating seconds — Philos. Transactions 1818.

Bessel. Untersuchungen der Länge des einfachen Secundenpendels, 1826. Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht, 1830. Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels für Berlin, 1831. — Abhandlungen der Berliner Akademie. Die Abhandlung von 1826 wieder abgedruckt in Ostwald's Klassiker Nr. 7.

Weber. Ueber die Elasticität der Seidenfäden, 1835. Ueber die Elasticität fester Körper, 1841. Poggendorff's Annalen 34 und 54.

— — Comment. de fil. bombycini vi elastica (Comment. recent. Soc. Gott. a. 1832—37. VIII. 1841).

Gauss. Ueber ein neues, zunächst zur unmittelbaren Beobachtung der Veränderungen in der Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus bestimmtes Instrument, 1837. Zur Bestimmung der Constanten des Bifilarmagnetometers, 1840. — Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, 1837 (I, S. 1—19), 1840 (I, S. 1—25). Gauss Werke V, S. 357—373, 404—426.

V. Theorie der Hydrostatik.

1) Definition der Aggregatzustände. Discussion über die für eine Theorie der Hydrostatik in Betracht kommenden Voraussetzungen.

86. Möglichkeit mechanischer und thermischer Definitionen der Aggregatzustände. 87. Mechanische Definitionen des festen, flüssigen und gasförmigen Zustandes. 88. Bedeutungslosigkeit molekularer Veranschaulichungen der Aggregatzustände für unsere Zwecke.

89. Charakteristik weiterer Eigenschaften der Flüssigkeiten und ihrer theoretischen Consequenzen. 90. Specielle Gesichtspunkte für die theoretische Behandlung der Hydrostatik. 91. Bedeutungslosigkeit molekularer Anschauungen für eine mechanische Theorie der Hydrostatik. 92. Ueber nothwendige und nicht nothwendige Verwerthung der Atomistik in der Naturwissenschaft überhaupt.

2) Die Hydrostatik in Bezug auf innere Theile der Flüssigkeiten (Hydrostatik im gewöhnlichen Sinne des Wortes).

93. Einführung des Druckbegriffs in die Hydrostatik. Ableitung der Grundgleichungen der Hydrostatik (Euler). Die hydraulische Presse. 94. Einführung des Potentialbegriffs in die Hydrostatik. Die Flächen gleichen Potentials, Niveaus oder Drucks (Clairaut). Die Beziehungen zwischen Druck und Potential bei tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

95. Anwendung auf eine unter Einwirkung der Schwere ruhende Flüssigkeitsmenge. Satz von den communicirenden Röhren. 96. Anwendung auf eine unter Einwirkung der Schwere in einem cylindrischen Gefäss rotirende Flüssigkeitsmenge.

97. Die auf einen Körper im Innern einer Flüssigkeit ausgeübten hydrostatischen Druckkräfte und Drehungsmomente. Hülfssatz von der Verwandlung eines Raumintegrals in ein Flächenintegral. 98. Das Princip des Archimedes. Das hydrostatische Paradoxon (Stevinus).

3) Die Hydrostatik in Bezug auf Theile der Oberfläche und Trennungsfläche der Flüssigkeiten (Capillaritätstheorie).

99. Begriff der Cohäsionskraft, des normalen Oberflächendrucks und der tangentialen Oberflächenspannung. 100. Begriff der Oberflächenenergie. 101. Beziehungen zwischen dem normalen Oberflächendruck, der tangentialen Ober-

flächenspannung und der Oberflächenenergie. Aufstellung eines Ausdrucks für den normalen Oberflächendruck in seiner Abhängigkeit von der Krümmung der Oberfläche.

102. Einführung der Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten. 103. Einführung des Randwinkels. F. Neumann's Satz. Physikalische Discussion über Randwinkelwerthe und ihre Bedeutung. 104. Aufstellung der hydrostatischen Gleichgewichtsbedingungen unter Rücksicht auf die Cohäsions- und Adhäsionskräfte. Minimalflächen. Die Differentialgleichung der Flüssigkeitsoberfläche unter Einwirkung der Schwere.

105. Abweichung der freien Oberfläche von der Horizontalen in Folge der Gefässwände, insbesondere bei ebener Wandung. 106. Die Erhebung (bezw. Depression) einer Flüssigkeit in einem Rohr von kreisförmigem Querschnitt (Theorie des Capillarrohres).

107. Ueber die Möglichkeit der Anstellung von Präcisionsmessungen in dem Gebiet der Capillaritätserscheinungen der Flüssigkeiten. 108. Uebersicht über meine eigenen Arbeiten zum Erweise der Möglichkeit von Präcisionsmessungen auf dem Gebiet der Capillaritätserscheinungen.

V. 1) Definition der Aggregatzustände. Discussion über die für eine Theorie der Hydrostatik in Betracht kommenden Voraussetzungen.

§ 86. Möglichkeit mechanischer und thermischer Definitionen der Aggregatzustände.

Im III. Abschnitt haben wir für die Mechanik ausgedehnter Massensysteme einige allgemeine Sätze entwickelt. Es war hervorgehoben worden, dass, soweit wie irgend möglich, die Angabe specieller Eigenschaften dieser Massensysteme unterbleiben sollte; ein um so allgemeinerer Werth musste den abgeleiteten Sätzen zukommen. Im Besonderen blieb es vollständig dahingestellt, ob die Massensysteme discret (molekular, atomistisch) oder continuirlich den Raum oder Theile des Raums erfüllten. Auch im Folgenden soll mit Absicht diese Frage offen bleiben, sie erscheint gerade im Hinblick auf die abzuleitenden Consequenzen unwesentlich, so wenig ihre Bedeutung für andere naturwissenschaftliche Fragen unterschätzt werden soll.

Es muss als eine der theoretischen Aufgaben der Wissenschaft bezeichnet werden, zur Darstellung zu bringen, von welchen Thatsachen oder Beziehungen gewisse Erscheinungen, sei es vollständig, sei es im Wesentlichen, abhängen. Die Lösung und Klärung dieser Aufgabe wird erschwert, wenn von Anbeginn der Darstellung an Voraussetzungen in die Behandlung eingeführt werden, deren Werth unzweifelhaft auf anderen Gebieten der Wissenschaft zu suchen ist. Gewisse Voraussetzungen haben darum, weil sie sich auf dem einen Gebiet von Werth erwiesen haben, noch nicht eine Existenzberechtigung für andere Gebiete erlangt. Es handelt sich hier nicht darum, was ist, und was nicht ist, sondern darum, welche Thatbestände für die Existenz gewisser Beziehungen aus der Fülle der Wirklichkeit unzweifelhaft als wesentlich hervorgehoben werden müssen.

Wenn nun in diesem V. Abschnitt die ausgedehnten Massensysteme im Speciellen Flüssigkeiten sein sollen, und für diese die Mechanik nach der einen oder anderen Richtung ausgearbeitet werden soll, stellt sich uns zunächst die Aufgabe, zu definiren, was wir hier unter Flüssigkeiten verstehen wollen. Wir erweitern diese Aufgabe hier gleich des allgemeinen Interesses wegen und suchen die Frage zu beantworten, wodurch wir überhaupt die Aggregatzustände des Festen, Flüssigen und Gasförmigen unterscheiden.

Die Frage nach den Aggregatzuständen hat eine mechanische und eine thermische (thermodynamische) Seite. Mechanisch werden wir die Aggregatzustände nach ihrem Verhalten äusseren mechanischen Einwirkungen gegenüber zu charakterisiren haben, thermisch nach ihrem Verhalten thermischen Einwirkungen gegenüber.

Mechanisch knüpfen wir die zu entwickelnde Charakteristik der drei Aggregatzustände an die Begriffe der Gestalt und des Volumens eines im Wesentlichen nach den drei Dimensionen des Raumes ausgedehnten, nicht zu grossen und nicht zu kleinen materiellen Körpers. Unter Gestalt verstehen wir dabei mathematisch einen Aehnlichkeitsbegriff, unter Volumen einen Grössenbegriff.

Es werde nun auf Gestalt und Volumen des materiellen Körpers, dessen Aggregatzustand festgestellt werden soll, eine äussere mechanische, nicht zu starke Einwirkung ausgeübt. Wir wissen allerdings zunächst nicht, ob wir diese Einwirkung als klein oder gross bezeichnen sollen, und gehen darum zu immer kleineren Einwirkungen auf Gestalt und Volumen über. Wenn der Charakter der Reaction gegen die äussere Einwirkung sich im Wesentlichen dann nicht mehr ändert, wissen wir, dass die anfängliche Einwirkung schon so klein gewählt war, wie wir sie zur Charakteristik des Aggregatzustandes brauchen. Welcher Art die äussere Einwirkung ist, soll, abgesehen davon, dass sie mechanischer Art ist, gleichgültig sein; sie kann als Stoss, Druck, Spannung, Biegung, Torsion gedacht werden. Insbesondere dürften Einwirkungen auf die Elasticität der Körper sich als zweckmässig zur Charakteristik der Aggregatzustände erweisen. Ueber die Zeit, während welcher Einwirkungen zur Prüfung des Aggregatzustandes statthaben, sollen specielle Angaben nicht gemacht werden; im Zweifelsfalle werden wir die Zeit eher länger als kürzer wählen.

Thermisch verfolgen wir den Weg, auf dem ein Körper in seinen Zustand gelangt ist. Jede discontinuirliche Aenderung seiner Eigenschaften auf diesem Wege deutet auf eine Zustandsänderung, insbesondere macht der Uebergang von einem niederen zu einem höheren Aggregatzustand bei gleichem Druck den Aufwand einer besonderen „latenten Wärme“ nothwendig.

Beide Auffassungen, die mechanische und thermische, verfolgen verschiedene Ziele, und es ist nicht weiter wunderbar, wenn beide Charakteristiken sich in allen ihren Consequenzen nicht immer vollkommen decken werden. Streben wir nach einer Uebereinstimmung beider Charakteristiken, so werden wir in Ermangelung einer solchen darum nicht gleich die eine oder die andere Formulirung verwerfen, sondern wir werden uns einfach des Präliminariencharakters der Festsetzungen so lange bewusst zu bleiben haben, bis etwa eine solche Uebereinstimmung gelungen ist.

Für das Folgende versteht es sich von selbst, dass wir die mechanische Seite der Aggregatzustände zu bevorzugen haben. Die von thermodynamischer Seite gegen die mechanische Charakteristik neuerdings erhobenen Bedenken scheinen mir ihren Werth nur sehr theilweise zu beeinträchtigen, vor Allem werden sie den Bedürfnissen der Mechanik so wenig gerecht, dass sie zur Zeit als ein genügender Ersatz für die alten, an den Begriff der Gestalt und des Volumens knüpfenden Merkmale nicht angesehen werden können. Es muss als ein Vorzug der mechanischen Merkmale bezeichnet werden, dass sie aus den in jedem Augenblick vorliegenden Eigenschaften des Zustandes heraus gestatten zu entscheiden, ob ein Körper fest, flüssig oder gasförmig ist, und nicht aus Vorgängen und Erscheinungen, die diesem Zustande vorhergegangen sind oder vielleicht noch folgen können.

§ 87. Mechanische Definition des festen, flüssigen und gasförmigen Zustandes.

Wir bezeichnen den Aggregatzustand, in dem ein nach den drei Dimensionen endlich ausgedehntes Stück Materie mit einer gewissen Beharrlichkeit oder mit einem gewissen Widerstande äusseren kleinen

Einwirkungen gegenüber an der einmal uns vorliegenden Gestalt und an dem einmal uns vorliegenden Volumen festhält, als den festen. Ein fester Körper hat bei aller Mannigfaltigkeit möglicher Gestalten und Volumina eine Gestalt und ein Volumen, welche beide für ihn bis auf Weiteres, d. h. bei Ausschluss grober Einwirkungen, als im Wesentlichen unveränderlich angesehen und daher z. B. als Wiedererkennungszeichen gewählt werden können.

Der schönste Typus für einen festen homogenen Körper ist ein Krystall, hier ist die Gestalt noch als ursprünglich und natürlich zu bezeichnen. Wir werden von unserem Standpunkt der Mechanik aber auch einen amorphen Körper[1]), dem wir durch starke grobe Einwirkungen eine bis zu einem gewissen Grade zufällige Gestalt und Grösse geben, mechanisch als fest ansehen können. Für beide Gestalten, für natürliche und zufällige (künstliche) gilt dann in gleicher Weise die gegebene Charakteristik fester Körper.

Es ist zur Charakteristik des festen Aggregatzustandes zweckmässig, die Betrachtung an ein nach drei Dimensionen endlich ausgedehntes Stück Materie anzuknüpfen, da nur ein solches äusseren Gestaltseinwirkungen wesentlichen Widerstand entgegensetzt. Ein gerade ausgezogener Draht kann ohne Schwierigkeit kreisförmig, ein ebenes Blatt ohne Schwierigkeit cylinderförmig oder kegelförmig gebogen werden.

Wir gehen zur Charakteristik des flüssigen Aggregatzustandes über und beziehen uns wieder auf eine im Wesentlichen nach drei Dimensionen endlich ausgedehnte Menge Materie. Flüssigkeiten haben mit festen Körpern das Bestreben gemein, am Volumen im Wesentlichen festzuhalten. Während aber feste Körper mit einer gewissen Stärke auch an ihrer gerade vorliegenden Gestalt festhalten, kann man das von flüssigen Körpern nicht sagen. Würden nicht der Schwere entzogene Flüssigkeiten sämmtlich ohne Unterschied Kugelform annehmen, wie das der bekannte Plateau'sche Versuch zeigt, — wäre danach also nicht die Kugelgestalt die gewissermaassen ursprüngliche und natürliche Gestalt der Flüssigkeiten, so könnte man versucht sein zu sagen: Flüssigkeiten haben überhaupt keine wesentliche Gestalt. Jedenfalls haben flüssige Körper keine Gestaltsmannigfaltigkeit, wie feste Körper; unter allen Umständen weisen sie bei gegebenem Volumen

1) Die zuvor erwähnten thermodynamischen Präcisirungen fassen amorphe Stoffe als Flüssigkeiten von sehr grosser innerer Reibung auf.

die kleinste Oberfläche auf, dadurch wird ihre Gestaltsmannigfaltigkeit wesentlich beschränkt.

Unsere Anschauungen vom flüssigen Zustand beziehen sich in der Regel auf das Verhalten der Flüssigkeiten unter Wirkung der Schwere. Zur Aufnahme eines Volumens Wasser ist ein hohles, festes Gefäss nöthig, welches oben nicht geschlossen zu sein braucht. Giesst man in ein solches ein bestimmtes Quantum Wasser, so findet die Gestalt, welche in jedem einzelnen Fall das Wasser annimmt, ihre Begrenzung in einer im Wesentlichen horizontalen Ebene und der darunter befindlichen inneren Gefässwandung. In welche Gefässformen man eine gewisse Menge Flüssigkeit auch giessen möge, das Volumen wird immer dasselbe sein.

Untersucht man das Verhalten sehr kleiner Flüssigkeitsmengen, so entzieht man die Flüssigkeit insofern der Schwerewirkung, als die Schwere proportional der Masse wirkt. Es zeigt sich dann wieder die Gestaltbildung der Flüssigkeiten mit minimaler Oberfläche. Seifenblasen und Seifenlamellen, zwischen Drahtfiguren gebildet, zeigen federnde, elastische Eigenschaften, wie feste Körper, ebenso Regentropfen und Quecksilberkugeln. Mit Bezug auf diese Erscheinungen bezeichnet man näher den flüssigen Aggregatzustand als tropfbar flüssig im Gegensatz zu gasförmig flüssig. Man erkennt zugleich die Zweckmässigkeit, Körper, die nur theilweise, nach einer oder zwei Dimensionen, ausgebildet sind, und Körper, die nach allen drei Dimensionen sehr wenig ausgebildet sind, für sich zu betrachten, und die Charakteristik der Aggregatzustände an Körper zu knüpfen, die im Wesentlichen nach drei Dimensionen endlich ausgebildet sind.

Der Aggregatzustand, in dem eine nach drei Dimensionen endlich ausgedehnte Menge Materie äusseren kleinen Einwirkungen gegenüber weder am Volumen noch an der Gestalt festhält, wird gasförmig genannt. Ein gasförmiger Körper hat keine wesentliche Gestalt und kein wesentliches Volumen.

Zur Aufnahme eines Quantums Luft ist unter gewöhnlichen Verhältnissen ein Hohlraum nöthig, welcher in jedem Falle geschlossen sein muss. Ein Quantum Luft nimmt jedes Volumen und jede Gestalt an, wie sie ihm dargeboten werden. Zwei Hohlräume, von denen einer mit Luft gefüllt, der andere luftleer ist, werden durch Umdrehen eines Verbindungshahnes zu einem Hohlraum vereinigt; sofort stürzt die Luft in den leeren Raum, beide Räume mit gleicher Dichte erfüllend.

Es ist zur Charakteristik des gasförmigen Aggregatzustandes nöthig, die Betrachtung an eine nach drei Dimensionen endlich ausgedehnte Menge Materie anzuknüpfen, da Gase in Lamellenform, wie solche unter gewissen Bedingungen an der Oberfläche fester und flüssiger Körper entstehen, in mancher Beziehung den Flüssigkeiten in ihrem Verhalten gleichen.

Man bezeichnet bisweilen auch die gasförmigen Körper als Flüssigkeiten. Es geschieht das in den Fällen, in denen das physikalische Verhalten nur im Inneren in Betracht kommt (Druckvertheilung, Archimedisches Princip). Die Unterscheidung zwischen tropfbar flüssigen und nicht tropfbar flüssigen Körpern wird dann erst nöthig, wenn das Verhalten der Oberfläche in Betracht kommt. Gase haben nicht die Fähigkeit, Tropfen zu bilden.

Wir haben bisher bei der Charakteristik der Aggregatzustände zwar Gründe entwickelt, aus denen wir Körper von kleinen Dimensionen ausschlossen. Wir wollen hier noch die Gründe nachtragen, warum wir auch Körper von grossen Dimensionen zur Charakteristik ausschliessen müssen. Mit Körpern von grossen Dimensionen, wie sie die Erde hat, treten Gravitationswirkungen untrennbar verbunden auf, welche zu stark sind, als dass von der Anwendung unserer Kriterien die Rede sein könnte. Unter dem gewaltigen Druck der auf der Oberfläche lagernden Felsmassen würden im Innern der Erde alle Gestalten zermalmt werden, und es würde die Erde — für den Augenblick einmal als aus Felsblöcken zusammengesetzt gedacht — ebenso Kugelgestalt annehmen, als wäre sie aus Sandkörnern zusammengesetzt oder als wäre sie eine Flüssigkeit. Jedenfalls hat die Höhe der Gebirge nach dieser Vorstellung eine gewisse maximale Grenze, welche bei der Grösse der Erde den Charakter der Kugelgestalt nur unwesentlich zu ändern vermag.[1])

§ 88. Bedeutungslosigkeit molekularer Veranschaulichungen der Aggregatzustände für unsere Zwecke.

Die mechanische Unterscheidung der Aggregatzustände, wie wir sie gegeben haben, mag zugleich charakterisiren, worauf es bei physikalischen Definitionen und Begriffserklärungen ankommt. Es dürfen

1) E. Mach, Die Gestalten der Flüssigkeit, 1868. Populär-wissenschaftliche Vorlesungen S. 3.

dabei nicht unnöthiger Weise fremde Gesichtspunkte und Hülfsmittel in die Betrachtung gezogen werden, die für andere Zwecke vielleicht förderlich sind, welche aber für den gerade vorliegenden Zweck die Aufmerksamkeit nur von den thatsächlichen Merkmalen ablenken, auf die es allein ankommt. Die Naturwissenschaft hat die Aufgabe, äussere Dinge sich begrifflich anzueignen und begrifflich zu beherrschen, sie unterstützt darum in hervorragender Weise die Fähigkeit, Begriffe zu bilden, überhaupt Vorgänge begrifflich zu fassen, und kann darin vorbildlich dienen.

Man findet wohl in den Lehrbüchern zur Unterscheidung der Aggregatzustände die molekulare Constitution der Materie herangezogen. Man spricht von anziehenden und abstossenden Kräften der Moleküle und sagt: bei den festen Körpern überwiegen die anziehenden Kräfte, bei den flüssigen halten im Wesentlichen die anziehenden Kräfte den abstossenden das Gleichgewicht, bei den gasförmigen Körpern überwiegen die abstossenden Kräfte.

Diese Aussagen sind weit entfernt, eine Definition der Aggregatzustände zu geben; sie weisen vielmehr nur eine Form auf, unter der man sich das Zustandekommen der früher hervorgehobenen und als Definition verwertheten Eigenschaften denken kann, wenn überhaupt die Vorstellung anziehender und abstossender Kräfte befriedigend genannt werden darf.

Einen grösseren Vorzug verdient die Vorstellung, nach der heftige Bewegungszustände der Molekeln die Rolle der abstossenden Kräfte übernehmen, damit erscheint die Möglichkeit einer speciellen Ausarbeitung im Sinne der kinetischen Gastheorie eröffnet. Diese Vorstellung ist besonders bequem, um sich den Uebergang der Materie aus einem Aggregatzustand in den anderen zu veranschaulichen.

Wärme ist nach der kinetischen Vorstellung ein molekularer Bewegungszustand, dessen Intensität mit der Temperatur zunimmt. Im festen Zustand reicht der Bewegungszustand der Molekeln nicht hin, die einzelne Molekel aus dem Bereich zu entfernen, in dem sie den anziehenden Kräften der benachbarten Molekeln unterliegt. Durch Wärmezuführung wird die Intensität des Bewegungszustandes verstärkt; der Körper wird flüssig, wenn der Bewegungszustand der Molekeln gerade dazu hinreicht, die einzelne Molekel aus dem Anziehungsbereich der benachbarten Molekeln zu entfernen. Im gasförmigen Zustand findet die Bewegung der Molekeln grösstentheils ausserhalb des gegenseitigen Anziehungsbereichs statt.

Es liegt auf der Hand, dass dieser kinetischen Veranschaulichung der Aggregatzustände nur eine thermische Bedeutung zuzusprechen ist, und für die mechanische Seite der Frage, welche uns hier gerade interessirt, jene Veranschaulichung nur eine untergeordnete Bedeutung hat. Uns kann, wenn wir daran gehen wollen die Mechanik der Flüssigkeiten zu entwickeln, nicht damit gedient sein atomistische Hypothesen einzuführen; wir werden in erster Linie vielmehr unsere Aufgabe darin zu suchen haben die thatsächlichen Beziehungen hervorzuheben, auf Grund derer wir durch einfache Mittel der Mechanik entscheiden können, ob ein Körper fest, flüssig oder gasförmig ist, und auf Grund derer wir eine einfache Theorie der Mechanik der Flüssigkeiten in dem Sinne entwickeln können, dass die Consequenzen geschickt und passend gewählter Erfahrungsthatsachen möglichst klar und einfach auf der Hand liegen.

Unsere molekularen Vorstellungen werden z. B. uns absolut nicht dazu verhelfen können festzustellen, in welchem Aggregatzustande sich bei gewöhnlicher Temperatur Siegellack, Pech oder eine Talgkerze befinden. Dagegen geben unsere mechanischen Kriterien, wenn man nur den äusseren Einwirkungen, z. B. der Schwere, hinlänglich Zeit lässt, unzweideutig an die Hand, dass man, mechanisch betrachtet, Siegellack und Pech als eine Flüssigkeit, eine Talgkerze als einen festen Körper zu bezeichnen haben wird. Eine Siegellackstange auf zwei schneidenartige Lager gelegt krümmt sich mit der Zeit, eine Talgkerze bleibt gerade. Die Erscheinung, dass Pech fliesst, ist bekannt und wird praktisch verwerthet.

Diese von Maxwell[1]) entnommenen Beispiele zeigen, dass ein Körper wie Pech hart und spröde sein kann und doch dabei flüssig, und dass ein Körper wie Talg weich sein kann und doch dabei fest.

§ 89. Charakteristik weiterer Eigenschaften der Flüssigkeiten und ihrer theoretischen Consequenzen.

Die physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeiten bilden eine grosse Mannigfaltigkeit und bieten vom Standpunkt der methodischen Behandlung eine Reihe bemerkenswerther Gesichtspunkte dar. Es wäre eine verfehlte Auffassung, wollte man von der Theorie fordern, diese Mannigfaltigkeit der Eigenschaften unter einem einheitlichen Gesichtspunkt darzustellen. Dieser Forderung gegenüber wäre die Frage

1) Maxwell, Theorie der Wärme. Uebersetzung von Neesen S. 336.

aufzuwerfen, ob denn überhaupt die Mannigfaltigkeit dieser Eigenschaften einer einheitlichen Auffassung fähig ist.

Wir erinnern hier an die Auffassung, nach der die Mehrzahl der in der Natur auftretenden Erscheinungen sich als zusammengesetzt ergiebt (§ 12). Auf solche zusammengesetzte Erscheinungen wird aber die Regel der Analyse und Synthese, der Isolation und Superposition in Anwendung zu bringen sein. Unter diesen Umständen wird es Aufgabe der Theorie sein, jede Eigenschaft einzeln in ihrer Tragweite zu untersuchen und zur Darstellung zu bringen.

Wenn wir Flüssigkeiten als Körper definirt haben, denen keine specifische Gestaltbildung zukommt, so ist innerhalb dieser Definition für die Wirklichkeit noch der grösste Reichthum specieller Eigenschaften denkbar und möglich. Wir geben der Thatsache, dass Flüssigkeiten keine Mannigfaltigkeit der Gestaltbildung, wie feste Körper, aufweisen, den anderen Ausdruck, dass Flüssigkeiten, wenn wir zunächst nur an das Innere denken, die Eigenschaft einer allseitigen Verschiebbarkeit ihrer Theile innerhalb beliebiger Grenzen zukommt, während feste Körper nur in sehr begrenztem Maasse eine solche aufweisen. Nehmen wir weiter noch die Eigenschaft der mehr oder weniger ausgebildeten Compressibilität hinzu, welche wir schon theilweise zur Unterscheidung des gasförmigen und tropfbar flüssigen Zustandes verwerthet haben, so haben wir damit auf eine Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten der Wirklichkeit hingewiesen, welche z. B. für die Ausarbeitung der hydrodynamischen Theorieen (der Lehre der Flüssigkeitsbewegungen) sehr wesentlich sind und eine Reihe bemerkenswerther Gesichtspunkte an die Hand geben.

Wir können die Gültigkeit und Tragweite dieser Gesichtspunkte sehr schön an den einschlägigen Arbeiten von Helmholtz erläutern. Von ihm rührt aus verschiedenen Jahren eine Reihe hydrodynamischer Untersuchungen her, die dadurch charakterisirt werden können, dass jede für sich die Consequenzen der Flüssigkeitseigenschaften einzeln verfolgt.

Wenn wir bei der Verschiebbarkeit der Theilchen der Flüssigkeiten zunächst an keine Compression oder Dilatation denken, so können wir hydrodynamisch die Flüssigkeiten danach unterscheiden, dass diese Verschiebung der Theilchen leicht oder schwer vor sich geht. Geht die Verschiebung der Theilchen sehr leicht vor sich, so bezeichnen wir die Flüssigkeit als reibungslos, geht sie schwer vor sich, so bezeichnen wir sie als zäh, als mit Reibung behaftet. Reibungslose Flüssigkeiten sind, streng genommen, eine Abstraction, aber ihr Studium für sich wäre, auch wenn es in Wirklichkeit keine reibungslosen Flüssigkeiten gäbe, zur Erforschung der Natur schon darum nothwendig, weil man wissen muss, welche Erscheinungen sich als Consequenz der Eigenschaft des Flüssigen, welche sich als Consequenz der Reibung nachweisen lassen. Die Helmholtz'schen Studien über Wirbelbewegungen vom Jahre 1858 beziehen sich auf reibungslose Flüssigkeiten. Das Studium der Reibung tropfbarer Flüssigkeiten bildet den Gegenstand einer anderen Arbeit von Helmholtz aus dem Jahre 1860.

Wir kennen weiter Flüssigkeiten, die sehr wenig comprimirbar sind, das sind tropfbare Flüssigkeiten, und wir kennen Flüssigkeiten, die sehr stark comprimirbar sind, das sind Gase. Wenn wir die Betrachtung auf incompressible Flüssigkeiten beschränken, dann mag es auf den ersten Blick so scheinen, als wenn wir uns von der Wirklichkeit erheblich entfernen könnten; nichts destoweniger wird eine solche Beschränkung selbst für stark compressible Flüssigkeiten nicht nur eine erlaubte, sondern eine logisch durchaus gebotene Abstraction sein, denn wir müssen wissen, für welche Erscheinungsclassen die Compressibilität der Flüssigkeiten eine wesentliche Rolle spielt, für welche nicht. Die Erscheinungen des Schalls beruhen wesentlich auf der Thatsache der Compressibilität der Flüssigkeiten, und so tritt denn diese in Hemholtz's epochemachender Arbeit aus dem Jahre 1859 „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden" in den Vordergrund, während sie für die Theorie der Wirbelbewegungen aus dem Jahre 1858 unwesentlich bleibt.

Diese Eigenschaften der Flüssigkeiten und ihre wechselnde Verbindung mit einander eröffnen die Möglichkeit einer verhältnissmässig grossen physikalischen Mannigfaltigkeit. Darin ist der Grund zu sehen, dass wir in der Hydromechanik anders wie in der gewöhnlichen Mechanik verfahren. In der Mechanik haben wir die Statik als besonderen Fall der Dynamik behandelt und haben mit der Dynamik begonnen. In der Hydromechanik wird es zweckmässig sein mit der Hydrostatik zu beginnen. Es ist wesentlich der Gesichtspunkt der Isolation, welcher die Trennung von Hydrostatik und Hydrodynamik ebenso empfiehlt, wie die Theilung der Hydrodynamik etwa nach den von Helmholtz entwickelten Momenten. Derselbe Gesichtspunkt der Isolation käme in der Mechanik fester Körper für die Trennung der Elasticitätstheorie von der gewöhnlichen Mechanik in Betracht, nicht aber für eine Trennung der üblichen Statik und Dynamik.

Wir werden uns in diesen Vorlesungen auf die Behandlung der Hydrostatik beschränken.

§ 90. Specielle Gesichtspunkte für die theoretische Behandlung der Hydrostatik.

Fassen wir nun die Theorie der hydrostatischen Erscheinungen ins Auge, so haben wir sofort zu bemerken, dass für sie die innere Reibung oder Zähigkeit der Flüssigkeiten vollkommen unwesentlich ist. Die Hydrostatik hat die Aufgabe, die Eigenschaften der Gleichgewichtszustände zu untersuchen, also der Zustände, in denen die Verschiebbarkeit der Theilchen actuell nicht weiter in Erscheinung tritt, wenn sie auch virtuell[1]) thatsächlich vorhanden sein muss.

Wir werden im Speciellen die virtuelle Verschiebbarkeit der Theile im Innern einer Flüssigkeit und der Theile an Oberflächen und Grenzflächen einer Flüssigkeit zu unterscheiden haben. Die hier allein in Betracht kommende virtuelle Verschiebbarkeit der Theile im Innern (ohne Rücksicht auf Reibungs- und Widerstandskräfte) geht arbeitslos vor sich, die der Theile an der Oberfläche nur unter Compensation von Arbeit. Auf der Eigenschaft der allseitigen, arbeitslosen Verschiebbarkeit der Theile im Innern beruhen die hydrostatischen Erscheinungen im gewöhnlichen, engeren Sinne des Wortes; auf der Eigenschaft der nur unter Aufwand von Arbeit vorzunehmenden Verschiebbarkeit eines Theiles der Oberfläche oder Grenzfläche von Flüssigkeiten beruhen die Oberflächenspannungserscheinungen, — in anderer üblicher Bezeichnungsweise die Erscheinungen der Capillarität.

Die Eigenschaft der allseitigen, arbeitslosen Verschiebbarkeit der Flüssigkeitstheile im Innern findet ihre nächstliegende Aeusserung in dem Umstande, dass Flüssigkeiten im Allgemeinen keine Gestalt aufweisen, dass sie im tropfbaren Zustand, z. B. unter Wirkung der Schwere, sich in beliebige Formen giessen lassen, dass sie im gasförmigen Zustand jedes beliebige, ihnen dargebotene Volumen ausfüllen, — also in dem Verhalten, durch welches wir die Aggregatzustände charakterisirt haben. Diese enge Beziehung zu der Charakteristik der Aggregatzustände giebt uns von vorneherein die Gewähr, dass unsere Voraussetzungen die nothwendige und hinreichende Be-

---

1) Man versteht unter virtueller Verschiebung im Allgemeinen eine willkürliche, beliebig kleine Verschiebung, die unter Umständen noch an besondere Bedingungen geknüpft ist (cf. § 121). Insofern die virtuelle Verschiebung beliebig klein ist, und dabei über die Geschwindigkeit, mit der sie vorgenommen wird, nichts ausgesagt wird, versteht es sich von selbst, dass sie unabhängig bleibt von den Eigenschaften der Reibung oder Zähigkeit der Flüssigkeiten. — Actuell ist das thatsächlich Eintretende.

dingung für die Gesetze und Erscheinungen sind, die wir für die Hydrostatik abzuleiten haben.

Wir werden für die Anschauung im Folgenden in erster Linie Flüssigkeiten im Auge haben, deren Theile leicht, ja unendlich leicht gegen einander verschiebbar sind. Bei solchen Flüssigkeiten ist es praktisch leicht festzustellen, ob wirklich ein Gleichgewichtszustand vorliegt oder nicht, d. h., ob die an und für sich leicht gegen einander verschiebbaren Theile wirklich nicht mehr gegen einander verschoben werden, ob also praktisch wirklich die Bedingungen vorliegen, unter denen unsere Theorie ausschliesslich gilt. Die Sätze vom Gleichgewicht gelten ebenso auch für zähe Flüssigkeiten, d. h. für Flüssigkeiten, deren Theile sich schwer gegeneinander verschieben; hier ist es nur praktisch nicht so leicht festzustellen, ob ein Gleichgewichtszustand wirklich vorliegt oder nicht.

In erster Linie wird es sich im Folgenden nur um wirkliche Gleichgewichtszustände handeln, es kann dann streng genommen, wo ein Bedürfniss dazu vorliegt, auch nur immer von Bewegungstendenzen gesprochen werden. Sowie wirkliche Bewegungen eintreten, verlieren unsere hydrostatischen Grundsätze ihre Gültigkeit, und die auftretenden Erscheinungen schlagen in das Gebiet der Hydrodynamik.

In zweiter Linie werden wir aber auch insofern Bewegungszustände von Flüssigkeiten in die Hydrostatik einordnen können, als diese Bewegungszustände einen gewissen stationären Charakter aufweisen, bei dem eine Verschiebung benachbarter Theile gegen einander nicht stattfindet, wenngleich sich die gesammte Flüssigkeitsmasse in einem Bewegungszustande befindet. Hierher gehören die rotirenden Gleichgewichtsfiguren der Flüssigkeiten, bei denen durch Einführung der Centrifugalkräfte in der Form von statischen Kräften das an und für sich hydrodynamische Problem auf ein hydrostatisches Problem zurückgeführt erscheint.

§ 91. Bedeutungslosigkeit molekularer Anschauungen für eine mechanische Theorie der Hydrostatik.

Wir nehmen zum Schluss dieser einleitenden Betrachtungen noch einmal die Frage nach der molekularen Constitution der Materie und ihre Beziehungen speciell zur Hydrostatik auf. Man pflegt häufig im Besonderen die Erscheinungen der Capillarität zu den Molekularerscheinungen der Materie zu rechnen und ihre Behandlung in das Gebiet der Molekularphysik zu verweisen.

Demgegenüber ist Folgendes auszuführen: An und für sich ist zunächst natürlich nicht ohne Weiteres zu übersehen, inwieweit die Erscheinungen der Oberflächenspannung (der Capillarität) molekularen Charakter tragen. Thatsache ist, dass die classischen Theorien der Capillarität von Laplace, Gauss, Poisson an Flüssigkeiten knüpfen, welche continuirlich den Raum erfüllen, und zu Consequenzen geführt haben, welche sich als durchaus in Uebereinstimmung mit einschlägigen Präcisionsmessungen erwiesen haben. Sollte es nun auch weiter gelingen, dieselbe Uebereinstimmung auf Grund molekularer Anschauungen zu erzielen, so würde daraus zu folgern sein, dass die feinere molekulare Hypothese für die Erscheinungen der Capillarität unwesentlich ist, dass wir durch Einführung der molekularen Hypothese ohne Zwang der Verhältnisse der Wirklichkeit Thatsächliches und Hypothetisches in einer Form vereinigt haben, welche der Forderung der Oekonomie nicht gerecht wird und uns im Unklaren darüber lässt, welche Thatsachen denn nun eigentlich für die Hydrostatik oder Capillarität wesentlich sind oder nicht.[1])

Ganz wie die Newton'sche Theorie zur Berechnung der gravitirenden Wirkungen endlich ausgedehnter Körper von den Volumelementen und ihren Wirkungen aufeinander ausgeht, so knüpfen die Capillaritätstheorien von Laplace, Gauss und Poisson an die Wirkung von Volumelementen an. Für die Capillaritätstheorien erscheint dieser Ausgangspunkt nur noch insofern principieller und bedeutungsvoller, als das darin benutzte Wirkungsgesetz ein Verschwinden der Wirkung für alle endlichen Entfernungen fordert, die ganze Wirkungssphäre also von vorneherein auf ein Gebiet eingeschränkt wird, dessen Dimensionen in der Molekularwelt ihren naturgemässen Maassstab finden. Ist also die Materie wirklich molekular constituirt, so scheint hier das Bedenken berechtigt, ob es einer Capillaritätstheorie trotz der molekularen Wirkungssphäre gestattet sein kann, die molekulare Constitution der Materie zu ignoriren und dafür mit einer stetig den Raum erfüllenden Materie zu rechnen.

Die Erfolge, welche die Capillaritätstheorien innerhalb ihres Gebietes aufgezeigt haben, weisen nur zu sehr auf die vollständige Be-

---

1) Die nun folgenden Betrachtungen einschliesslich § 92 sind grösstentheils einer 1897 von mir in Wiedemann's Annalen Bd. 61, S. 196—203 veröffentlichten Besprechung entlehnt, deren Ueberschrift für § 92 mit übernommen wurde. Nicht mit aufgenommen sind die hier zu weit abliegenden Ausführungen über die Beziehungen der Elasticitätstheorie zur Molekularphysik, welche Interessenten dort nachlesen können.

rechtigung ihres Ausgangspunktes hin. Ja diese Behandlung der Capillaritätstheorien bringt schliesslich sogar noch der Molekulartheorie Gewinn, insofern gewisse Vorgänge, bei denen die Uebereinstimmung mit der Capillaritätstheorie aufzuhören scheint — die Erscheinung des scharf abgegrenzten schwarzen Fleckes bei Seifenblasen vor dem Zerspringen — benutzt werden konnten, Anhaltspunkte für die Grösse der Dimensionen der molekularen Welt zu gewinnen.

Man hat der Capillaritätstheorie den Vorwurf gemacht, dass sie von der Thatsache der Verdampfung keine Rechenschaft ablegt. Ein solcher Vorwurf beruht auf einer vollständigen Verkennung der Rolle, welche die Theorien innerhalb der Wissenschaft zu spielen berufen sind. Eine Theorie will und darf die Wirklichkeit immer nur von einer Seite erfassen. Die theoretische Durcharbeitung eines Gebietes lehrt eben die Züge, welche innerlich zusammengehören, von den Zügen, welche daneben bestehen, scheiden, ohne dass sich darum diese Züge gegenseitig ausschliessen müssen.

Welche Züge zusammen gehören, lässt sich nicht immer von vorneherein übersehen, so einfach liegen die Verhältnisse in der Regel nicht. Und wenn die Theorie der Capillarität von der Thatsache der Verdampfung keine Rechenschaft ablegt, so lehrt dies nichts anderes, als dass die Verdampfung ein molekularer, also ein feinerer Vorgang ist, während die Erscheinungen der Capillarität gröbere Vorgänge sind, für welche es genügt, auf Volumelemente zurückzugehen.

Man wende dagegen nicht ein, dass das W. Thomson'sche Theorem, nach dem der Gleichgewichtszustand zwischen einer Flüssigkeit und ihrem Dampf von der Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche abhängig ist, dagegen spricht. In diesem Theorem spielt der Dampf keine andere Rolle, als die einer Flüssigkeit. Auf den Vorgang der Verdampfung kann dies Theorem um so weniger Anwendung finden, als die Verdampfung ein wesentlich dynamischer Vorgang ist, während das W. Thomson'sche Theorem, wie überhaupt die Capillaritätstheorie, es mit statischen, also mit Gleichgewichtszuständen zu thun hat.

Die Natur stellt uns in der Mannigfaltigkeit ihrer Erscheinungen ein Spiel von Vorgängen und Kräften dar, die sich bald in sichtbaren Bewegungsvorgängen äussern, bald in Gleichgewichtszuständen, mögen sie nun scheinbare oder wirkliche sein. Das Gleichgewicht von Kräften kann uns unter Umständen vortäuschen, dass überhaupt keine Kräfte vorhanden sind, wo wir physikalisch solche aufzusuchen haben werden, und wo wir uns von vorneherein einer einheitlichen Auffassung des Ganzen nicht hingeben dürfen. Eine verfeinerte (molekulare) Anschauung mag uns dann weiter noch zeigen, dass die Gleichgewichtszustände, welche uns, grob betrachtet, als Ruhezustände erschienen, keine Ruhezustände, sondern etwa stationäre Bewegungszustände sind. Die Möglichkeit, grob sehen zu müssen, erscheint nicht immer als Hinderniss, sondern kann auch der Forschung zu gut kommen, welche — bildlich ausgedrückt — je nach Zweck und Ziel der Aufgabe bald des Fernrohrs, bald des Mikroskops, in vielen Fällen aber auch geradezu des unbewaffneten Auges bedarf, um für die Betrachtung der Natur den richtigen Standpunkt und Maassstab zu gewinnen.

§ 92. Ueber nothwendige und nicht nothwendige Verwerthung der Atomistik in der Naturwissenschaft überhaupt.

Es ist kein Zweifel, dass die atomistische Anschauung von der Constitution der Materie eine genauere, verfeinerte Auffassung der uns umgebenden Welt bedeuten will als „die Annahme, dass die Materie stetig den Raum erfüllt, wie sie es zu thun scheint“ — eine Annahme, die Kirchhoff der Darstellung seiner Mechanik zu Grunde gelegt hat. Wenn es gestattet ist, den mathematischen Begriff der Grössenordnung, welcher ja auch in der theoretischen Physik eine so hervorragende Rolle spielt, hier zu verwerthen, wird man sagen können: die physikalischen Erscheinungen, welche sich auf Grund der Annahme einer continuirlich den Raum erfüllenden Materie mit wirklichem Erfolge behandeln lassen, sind gröbere Erscheinungen; die physikalischen Erscheinungen, für deren erfolgreiche theoretische Behandlung die Heranziehung der atomistischen Anschauung von der Constitution der Materie nothwendig erscheint, sind feinere Erscheinungen. Mit diesen Bezeichnungen „grob“ und „fein“ soll aber nicht das geringste Urtheil vorweg genommen werden, welche Erscheinungen und Auffassungen denn, die groben oder die feinen, für die Wissenschaft als die fundamentaleren zu betrachten sind. Diese Frage ist eine Frage für sich, ganz unabhängig von unseren allgemeinen Betrachtungen, in jedem Falle einer besonderen Beantwortung bedürftig.

Darf man in dieser von mir charakterisirten Weise den mathematischen Begriff der Grössenordnung für die allgemeine theoretische Behandlung der Physik und Chemie verwerthen, dann wird man auch in Bezug auf die Frage nach dem Werth oder Unwerth der Atomistik die gesammte Physik und Chemie in drei Gebiete theilen können. Das eine Gebiet wäre dadurch zu charakterisiren, dass für dieses die atomistische Auffassung gänzlich unwesentlich, also unnöthig erscheint; jede Verwerthung der Atomistik für dieses Gebiet könnte dann unter Umständen sogar als unrichtig bezeichnet werden. Das andere Gebiet wäre dadurch zu charakterisiren, dass für dieses die atomistische Auffassung sehr wesentlich, also nothwendig erscheint; die Verwerthung der Atomistik für dieses Gebiet wäre jedenfalls richtig. Dazwischen liegt das Gebiet, für welches ein Zweifel bestehen kann, ob die atomistische Auffassung wesentlich und nothwendig ist. Für dieses mittlere Gebiet wird die feinere und die gröbere Auffassung — oder wie man modern zu sagen pflegt die Atomistik und die Phänomenologie — so lange mit gleichem Eifer zu pflegen sein, als bis auch hier sich eine Entscheidung zu Gunsten der einen oder der anderen Auffassung treffen lässt.

Die drei von mir charakterisirten Gebiete werden sich nicht in allen Fällen schroff gegeneinander abscheiden lassen; es sind Fälle denkbar, in denen sich die vorgenommene Theilung nur im Wesentlichen durchführen lässt, — Fälle, in denen z. B. die Atomistik für wesentliche Züge nicht nothwendig, in einigen unwesentlichen Zügen doch nothwendig erscheint, ähnlich einer physikalischen Formel, die nach der Grössenordnung entwickelt in ihren Hauptgliedern unabhängig von gewissen Parametern ist, in ihren Gliedern höherer Ordnung doch diese Parameter aufweist.

Man halte diese Eintheilung nicht für belanglos, sie mag als selbstverständlich gelten, aber sie muss ausgesprochen werden. Man sehe in dieser Eintheilung auch nicht eine innere Inconsequenz, welche die Atomistik in dem einen Gebiete pflegt, in dem anderen aufgiebt. Davon kann garnicht die Rede sein.

Wenn man als eine der Aufgaben der theoretischen Physik die begriffliche Durcharbeitung physikalischer Gebiete, d. h. die Darstellung der logischen Verhältnisse von Voraussetzung und Folge, von Forderung und Festsetzung in ihnen ansehen kann, dann ist es sehr wesentlich zu wissen, ob die atomistische Anschauung für das Verständniss gewisser Erscheinungen belanglos ist oder nicht, ob über den Werth der Atomistik für die Klärung gewisser Fälle ein Zweifel bestehen kann.

Die vorstehenden Auseinandersetzungen mögen den tieferen Grund dafür andeuten, wie es kommen kann, dass Naturforscher je nach ihrem Arbeitsgebiet eine sehr verschiedene Stellung der Atomistik

16*

gegenüber einnehmen, ja dass ein und derselbe Naturforscher sich zu verschiedenen Zeiten sehr verschieden über den Werth der Atomistik für die Naturwissenschaft äussern kann.

Es darf hier vielleicht an einen Ausspruch von Helmholtz aus dem Jahre 1871 erinnert werden[1]:

„Ueber die Atome in der theoretischen Physik sagt Sir W. Thomson sehr bezeichnend, dass ihre Annahme keine Eigenschaft der Körper erklären kann, die man nicht vorher den Atomen selbst beigelegt hat. Ich will mich, indem ich diesem Ausspruche beipflichte, hiermit keineswegs gegen die Existenz der Atome erklären, sondern nur gegen das Streben, aus rein hypothetischen Annahmen über Atombau der Naturkörper die Grundlagen der theoretischen Physik herzuleiten."

Diese Aeusserungen von Thomson und Helmholtz dürften als Reaction gegen eine früher in der Physik missbräuchlich verwerthete Atomistik anzusehen sein und haben als solche auch heute noch ihre Bedeutung. Die Theile der Physik, für welche die atomistische Anschauung von der Constitution der Materie wesentlich erscheint, haben erst verhältnissmässig spät eine theoretische Durcharbeitung erfahren; dahin rechne ich z. B. die Theorien der Dispersion und Absorption des Lichtes, die Theorie der Electrolyse — die kinetische Gastheorie hatte allerdings schon früher werthvolle Bearbeitungen aufzuweisen.

Die nothwendige nähere Ausarbeitung der atomistischen Hypothese fiel sehr verschieden aus, je nach dem Ausgangspunkt der Forschung oder nach den Zwecken, welchen die Forschung dienen sollte. Es mag hier an die Vorstellung der Atome als Aetherwirbel von W. Thomson oder an die Behandlung kugelförmiger Atome, welche aus concentrischen Schichten verschiedener Elasticität bestehen, gleichfalls bei W. Thomson[2]), erinnert werden.

Wenn ich hier weiter der Arbeiten von Helmholtz über Dispersion und Electrolyse gedenke, in denen von der Atomistik ausgiebig Gebrauch gemacht wird, vermag ich noch keinen Widerspruch mit obigem Citat zu erblicken. Es handelt sich hier nicht um eine Inconsequenz, welche die Atomistik in einer Disciplin anerkennt, in einer anderen bestreitet; es handelt sich vielmehr darum, in einer Disciplin mit Hülfe der Atomistik gefördert, in einer anderen Disciplin durch die Atomistik nicht gehemmt zu werden.

---

1) Helmholtz, Vorträge und Reden 1884. 2. p. 47 in der Gedächtnissrede auf Magnus.

2) W. Thomson, Lectures on Molecular Dynamics. John Hopkin's University, Baltimore, October 1884 (autographirt).

Wenn es zweifellos ist, dass für eine ganze Reihe von physikalischen Vorgängen die atomistische Constitution der Materie gänzlich unwesentlich ist, während sie für andere Vorgänge wesentlich erscheint, dann wird es auch naturwissenschaftlich von Bedeutung sein, diesen Unterschied theoretisch zum Ausdruck zu bringen. Es würde der Erkenntnissstandpunkt getrübt werden, wenn man diesen Unterschied einem falschen Monismus zu Liebe verwischen oder gar unterdrücken wollte.

Die Stärke der Theorien beruht, von diesem Standpunkt aus angesehen, ebensowohl in dem, was sie von der Natur wiedergeben, wie in dem, was sie nicht wiedergeben. Dadurch wird präcise zum Ausdruck gebracht, welche Bedingungen für eine Erscheinung wesentlich, welche unwesentlich sind; und darauf kommt viel an.

V. 2) Die Hydrostatik in Bezug auf innere Theile der Flüssigkeiten (Hydrostatik im gewöhnlichen Sinne des Wortes).

§ 93. **Einführung des Druckbegriffs in die Hydrostatik. Ableitung der Grundgleichungen der Hydrostatik (Euler). Die hydraulische Presse.**

Die Hydrostatik verbindet die Vorstellung der allseitigen Verschiebbarkeit der Flüssigkeitstheilchen im Innern mit dem Begriff des Drucks. Wir verstehen unter Druckkraft eine Kraft, welche auf eine Fläche wirkt, im Gegensatz zu einer Fernkraft, welche auf ein Massen- oder Volumelement wirkt. Ein Gewicht, auf eine feste Unterlage aufgesetzt, drückt auf die gemeinsame Berührungsfläche mit dieser Unterlage, und wir bezeichnen in diesem speciellen Fall das Verhältniss des Gewichts zur gemeinsamen Berührungsfläche mit der Unterlage als Druck; Druck ist also die Druckkraft auf die Flächeneinheit der gemeinsamen Berührungsfläche.

Ohne die Elasticitätstheorie voraussetzen zu wollen, können wir zur Ausbildung der Anschauung hier aus der Elasticitätstheorie Folgendes mittheilen: In der Elasticitätstheorie fester Körper wird gezeigt, wie im Zustand des Gleichgewichts der Druck im Allgemeinen schief zu dem Flächenelement gerichtet ist, auf welches er als wirkend zu betrachten ist. Dreht man ein Flächenelement um einen Punkt, so gehört zu jeder Lage des Flächenelementes ein anderer Druck. Die Vertheilung der Druckkräfte um einen Punkt auf ein so beliebig gedrehtes Flächenelement lässt sich durch die Oberfläche eines Ellipsoides veranschaulichen: durch das sogenannte Druckellipsoid.

Ein cylindrischer Stab, durch ein äusseres Drehungsmoment um seine Axe gedreht, weist im Innern Druckkräfte auf, welche schiebend in der Fläche wirken, zu der sie gehören. Die senkrecht zur Cylinderaxe gelegenen Querschnitte haben sich drehend gegen einander verschoben und streben vermöge der inneren Druckkräfte in die Gleichgewichtslage zurück, ohne dass senkrecht zu ihnen Druckkräfte wirken. Es ist dies ein sehr specieller Fall der elastischen Druckvertheilung im Innern, welcher ohne genaue Kenntniss der Elasticitätstheorie, für die Anschauung hinreichend zugänglich, erweisen soll, dass physikalisch ein Druck im Allgemeinen nicht senkrecht zu dem Flächenelement gerichtet zu sein braucht, auf welches er wirkt.

Wollten wir nun diese allgemeinen Vorstellungen über die Vertheilung der Druckkräfte um einen Punkt auf das Innere von Flüssigkeiten übertragen, so würde die ungleiche Vertheilung dieser Druckkräfte einen inneren Bewegungszustand der Flüssigkeit zur Folge haben müssen, wie ein solcher eben im Zustand des Gleichgewichts ausgeschlossen sein soll. Mit dem Gleichgewichtszustand einer Flüssigkeit verträglich kann es nur sein, wenn zu jedem Flächenelement ein senkrecht gerichteter Druck gehört und der Druck für jeden Punkt nur einen Werth hat, unabhängig von der Lage des Flächenelementes, welches ihm zur Wirkung geboten wird. Der Druck wird für Gleichgewichtszustände eine eindeutige und stetige Function des Ortes x, y, z sein müssen.

Beziehen wir nun eine Flüssigkeitsmasse auf ein geradliniges rechtwinkliges Coordinatensystem x, y, z, und betrachten wir ein nach diesen Coordinaten orientirtes unendlich kleines Prisma im Innern der Flüssigkeit, so werden im Gleichgewichtszustand die Componenten der in Summa von aussen auf dieses Prisma einwirkenden Kräfte einander aufheben müssen. Diese Kräfte werden sich im Allgemeinen aus hydrostatischen Druckkräften zusammensetzen, welche auf die Oberfläche des Prismas wirken, und aus Fernkräften irgend welcher Art, welche auf die Masse des Prismas wirken.

Bezeichnen wir den Druck für eine Stelle im Innern der Flüssigkeit mit p und betrachten p als Function von x, y, z, so wirkt auf das dem Coordinatenanfangspunkt zugewandte Flächenelement $dy\,dz$ in der Richtung der x-Axe von aussen die Druckkraft $p_x dy\,dz$, auf das gegenüberliegende, dem Coordinatenanfangspunkt abgewandte Flächenelement von aussen die Druckkraft $-p_{x+dx} dy\,dz$. Bezeichnen wir ferner die Componenten der fernwirkenden Kraft auf die Masseneinheit mit X, Y, Z, mit ε die Dichte der Flüssigkeit, so wird die in die Richtung der x-Axe fallende Componente der fernwirkenden Kraft auf das Prisma sein $\varepsilon X dx\,dy\,dz$. Nach den Grundsätzen der Statik ist dann im Zustand des Gleichgewichts:

$$(1) \qquad \varepsilon X dx\,dy\,dz + p_x dy\,dz - p_{x+dx} dy\,dz = 0.$$

Nun lässt sich p_{x+dx} in eine sogenannte Taylor'sche Reihe entwickeln. Diese Entwickelung lehrt eine Function in der Nachbarschaft eines Punktes kennen, wenn für diesen Punkt selbst die Function mit ihren Eigenschaften bekannt ist. Es lässt sich so entwickeln:

$$p_{x+dx} = p_x + dx\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_x + \frac{dx^2}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_x + \cdots$$

Diese Entwickelung in (1) eingesetzt, können wir uns bei hinreichend kleiner Wahl des Flüssigkeitsprismas, welcher nichts entgegensteht, welche im Gegentheil die Präcision des Druckbegriffs p fordert, auf die beiden ersten Glieder der Entwickelung beschränken und erhalten:

$$\varepsilon X dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0,$$

oder unter Fortlassung des Volumelementes $dx dy dz$:

$$\varepsilon X = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Knüpfte die Ableitung dieser Gleichung an die Druckkräfte auf die Flächenelemente $dy dz$ unseres Prismas und an die Componenten der Fernkräfte in der Richtung der x-Axe, so erhalten wir analoge Gleichungen, indem wir an die Druckkräfte auf die Flächenelemente $dz dx$, $dx dy$ unseres Prismas und an die Componenten der Fernkräfte Y, Z knüpfen. In dieser Weise ergeben sich die von Euler herrührenden Grundgleichungen der Hydrostatik:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon X, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon Y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon Z.$$

Diese Gleichungen lassen sich weiter in der Form zusammenziehen:

$$\text{(3)} \qquad dp = \varepsilon(X dx + Y dy + Z dz).$$

Diese Formel lehrt, in welcher Weise die Druckzunahme im Innern einer Flüssigkeit durch die von aussen wirkenden Fernkräfte gegeben ist.

Wirken gar keine äusseren fernwirkenden Kräfte auf die Flüssigkeitsmasse, dann werden $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, und es folgt aus (3) $p =$ Const. Der Druck ist für eine solche Flüssigkeit an allen Stellen im Innern derselbe, er ist wesentlich gegeben durch den Druck, der an der Oberfläche der Flüssigkeit herrscht. Schliessen wir eine Flüssigkeit in ein Gefäss ein und üben mit Hülfe eines Stempels einen Druck auf das Innere aus, so pflanzt sich der Druck mit gleicher Stärke durch die ganze Flüssigkeitsmasse fort (Satz von Pascal).

Eine praktische Verwerthung dieses Satzes bietet die hydraulische Presse. Hier kann man durch geringen Kraftaufwand auf einen Stempel mit kleinem Querschnitt einen grossen Kraftaufwand auf den Boden der Presse mit grossem Querschnitt ausüben. Wenn auch die Flüssigkeit innerhalb der Presse (Wasser) der Schwerewirkung unterliegt, so spielt diese gegenüber dem hydrostatisch durch den Stempel ausgeübten Druck doch eine ganz unwesentliche Rolle, wie aus der Darstellung von § 95 hervorgehen wird. Wollen wir trotzdem den durch die Schwerewirkung hervorgerufenen Antheil des Drucks berücksichtigen, so ist zu bemerken, dass diese verschiedenen Antheile des Gesammtdrucks einfach den Satz der Superposition befolgen.

Wirken äussere fernwirkende Kräfte auf die Flüssigkeitsmasse ein, und berücksichtigen wir, dass sich die Dichtigkeit einer Flüssigkeit als eine Function des Druckes darstellen lassen wird, so können wir (3) in der Form schreiben:

$$\frac{dp}{\varepsilon} = Xdx + Ydy + Zdz \tag{4}$$

und die linke Seite der Gleichung als ein vollständiges Differential auffassen. Unsere hydrostatische Grundgleichung (4) fordert, dass dann auch die rechte Seite ein vollständiges Differential ist. Diese Forderung steht in Zusammenhang mit einer anderen Forderung, mit der wir uns gelegentlich der Behandlung des Satzes von der lebendigen Kraft beschäftigt haben, das ist die Forderung, dass die in den Componenten X, Y, Z vorliegenden Fernkräfte ein Potential haben müssen.

§ 94. Einführung des Potentialbegriffs in die Hydrostatik. Die Flächen gleichen Potentials, Niveaus oder Drucks (Clairaut). Die Beziehungen zwischen Druck und Potential bei tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten.

Lassen wir für den Augenblick einmal die Frage ganz dahingestellt, ob die in der Natur vorliegenden Kräfte ausnahmslos ein Potential haben oder nicht (cf. § 65), so würde sich als Folge der Ende des vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen ergeben, dass nur bei solchen Fernkräften hydrostatische Gleichgewichtszustände möglich sind, die ein Potential haben. Für die Eigenschaften dieses

Potentials werden wir aber noch weiter die Forderung aufzustellen haben, dass das Potential eine eindeutige stetige Function des Ortes ist; es hängt das mit der gleichfalls im vorigen Paragraphen aufgestellten Forderung zusammen, dass der Druck für Gleichgewichtszustände eine eindeutige und stetige Function des Ortes sein muss. Es giebt Fälle, in denen das Potential keine eindeutige Function des Ortes ist, das Potential elektromagnetischer Kräfte ist eine solche Function, dann sind hydrostatische Gleichgewichtszustände unmöglich.

Wir setzen im Folgenden die Existenz eines Potentials als eindeutige Function des Ortes voraus und genügen damit den anschliessenden Anwendungen. Unter Bezugnahme auf § 63 (1) setzen wir:

$$(1) \qquad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

dann führt die Grundgleichung der Hydrostatik § 93 (3) auf die Gleichung:

$$(2) \qquad dp = \varepsilon dU.$$

Wir können diese Gleichung in der mannigfaltigsten Weise zur Ausarbeitung und Vertiefung unserer Anschauung verwerthen. Wir können uns die ganze Flüssigkeitsmasse von Flächen $U = \text{const.}$ durchzogen denken. Man bezeichnet diese Flächen als Flächen constanten Potentials, als Niveauflächen. Diese Flächen sind einmal dadurch charakterisirt, dass, wenn man in ihnen um eine Wegstrecke ds, deren Componenten dx, dy, dz sind, fortschreitet, ist:

$$(3) \qquad 0 = dU = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Bezeichnet man die Resultante, deren Componenten X, Y, Z sind, mit R, so folgt aus (3):

$$(4) \qquad 0 = \frac{X}{R} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}\frac{dz}{ds} = \cos(Rds),$$

das besagt: die Potentialflächen verlaufen senkrecht zu den Kraftrichtungen, zu den Kraftfäden.

Im Hinblick auf Schwere, Gravitation und andere Kräfte können wir dann weiter die Anschauung entwickeln: Die Potentialflächen verlaufen entweder in sich geschlossen oder sie endigen in starren Grenzflächen, durch welche die Flüssigkeit in ihrer Gesammtmasse zusammengehalten wird, wie z. B. im Falle der Schwere. Wir werden im letzten Falle die Niveauflächen als Theile geschlossener Flächen aufzufassen haben, welche von den Gefässwänden ausgeschnitten werden.

Die Gleichung (2) liefert nun weiter zur Ausarbeitung unserer Anschauung das Resultat, dass die Flächen constanten Potentials zugleich Flächen constanten Drucks sind — oder wie wir sie im Hinblick auf den hydrostatischen Charakter nennen können: Gleichgewichtsflächen.

Eine solche Niveau- und Gleichgewichtsfläche wird auch die freie Oberfläche sein; würde in ihr eine Druckänderung vorkommen, so würde dies einer Bewegungstendenz gleichkommen, welche bei Gleichgewichtszuständen ausgeschlossen ist.

Eine solche Niveau- und Gleichgewichtsfläche ist auch, wie sogleich gezeigt werden soll, die Trennungsfläche zweier aneinander grenzenden Flüssigkeiten. Bezeichnen wir die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten mit ε_1 und ε_2, so werden für die beiden Flüssigkeiten nach (2) einzeln die Gleichungen gelten:

$$(5) \qquad dp = \varepsilon_1 dU, \qquad dp = \varepsilon_2 dU.$$

Diese Gleichungen sollen an der Trennungsfläche zusammen bestehen, das ist nur möglich, wenn beim Fortschreiten längs der Trennungsfläche $dp = 0$ auch $dU = 0$ ist, und damit ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen, nach der auch die gemeinsame Trennungsfläche zweier aneinander grenzenden Flüssigkeiten eine Niveau- und Gleichgewichtsfläche ist.

Wir wenden nun zur weiteren Behandlung die fundamentale Gleichung (2) auf die beiden Haupttypen von Flüssigkeiten an, mit denen wir es in der Wirklichkeit zu thun haben: auf tropfbare und gasförmige Flüssigkeiten. Tropfbare Flüssigkeiten sind hinsichtlich ihres Verhaltens der Dichte gegenüber Druckkräften dadurch charakterisirt, dass ihre Dichte im Wesentlichen eine Constante ist oder nicht allzuviel davon verschieden. Gase befolgen im Wesentlichen das Mariotte'sche Gesetz, nach dem die Dichte proportional dem Druck zunimmt.

Im Allgemeinen würden wir die Dichte einer Flüssigkeit als eine empirisch zu bestimmende Function des Drucks einzuführen haben, diese empirisch zu bestimmende Function wird sich aber thatsächlich immer entweder an den einen oder an den anderen der beiden soeben charakterisirten Typen anlehnen lassen. Darin liegt die Berechtigung, diese Typen einzeln theoretisch zu behandeln.

Für tropfbare Flüssigkeiten, für welche die Dichte ε im Wesentlichen als eine Constante zu behandeln ist, liefert die Integration von (2):

(6) $$p - p_0 = \varepsilon(U - U_0).$$

Für Gase, für welche die Dichte ε im Wesentlichen proportional dem Druck zu setzen ist, also $\varepsilon = cp$, liefert die Integration von (2):

(7) $$\log p - \log p_0 = c(U - U_0).$$

In diesen Gleichungen (6) und (7) bedeuten die Werthe p und U ohne Index, ebenso wie die Werthe p_0 und U_0 mit Index zusammengehörende Werthe von Druck und Potential. Wir haben in (6) und (7) für den jedesmaligen speciell vorliegenden Fall nur den Werth für das Potential U einzusetzen, um ein vollständiges Bild der Druckvertheilung im Innern der Flüssigkeit zu erhalten, wie im Folgenden an einigen einfachen Beispielen gezeigt werden soll.

§ 95. Anwendung auf eine unter Einwirkung der Schwere ruhende Flüssigkeitsmenge. Satz von den communicirenden Röhren.

Wir wenden die Gleichung § 94 (6) auf eine Flüssigkeitsmasse an, welche keiner anderen Kraft, als der Schwere an der Erdoberfläche unterliegt. Nach dem S. 250 Beigebrachten haben wir dann entweder ein unendliches Niveau in Betracht zu ziehen, oder wir haben die Flüssigkeitsmenge durch starre Wände eines Gefässes zu umschliessen, welches nur nach oben offen sein kann — andernfalls ist ein Gleichgewicht der Flüssigkeit unmöglich.

Rechnen wir die z-Axe vertical nach unten in der Richtung der Schwere, dann ist:

(1) $$U = gz, \qquad p = p_0 + \varepsilon g(z - z_0).$$

Hierin beziehen sich die durch den Index 0 ausgezeichneten Werthe p_0 und z_0 auf irgend eine Stelle der Flüssigkeitsmenge, sie können z. B. auch auf eine Stelle der Oberfläche bezogen werden. Von den capillaren Erhebungen der Oberfläche am Rande des Gefässes sehen wir hier als unwesentlich ab; die Flüssigkeitstheile an diesen Stellen haben nicht die Eigenschaft, welche wir für das Innere der Flüssigkeit vorausgesetzt haben: Allseitige, arbeitslose Verschiebbarkeit.

Die Gleichungen (1) besagen nun, dass für eine der Schwere im Zustand des Gleichgewichts unterworfene Flüssigkeit, für welche die Dichte ε als eine Constante angesehen werden kann, die Niveau- und Druckflächen horizontal verlaufen. Indem die freie Oberfläche als eine solche Niveau- und Druckfläche angesehen werden kann, wird auch die freie Oberfläche — abgesehen von den hier ausgeschlossenen capillaren Erhebungen — horizontal verlaufen. Der Druck nimmt proportional mit der Tiefe zu, er hängt z. B. in keiner Weise von der Gestalt des Gefässes ab.

Als eine unmittelbare Folge der zuletzt entwickelten Thatsache ergiebt sich der sogenannte Satz von den communicirenden Röhren. Füllen wir eine Flüssigkeit ohne Luftblasen in Röhren von beliebiger Weite — es dürfen nur keine sogenannten capillaren Röhren sein —, die mit einander in Verbindung stehen (die communiciren), so wird in beiden Schenkeln die Flüssigkeit gleich hoch stehen. Nehmen wir einen horizontalen Querschnitt im Innern, so ist dieser eine Fläche constanten Drucks, ob wir nach (1) den Druck von der einen oder von der anderen Seite in Rechnung ziehen, es ist derselbe, bedingt durch die gleiche Höhe der Flüssigkeitssäulen in beiden Schenkeln, unabhängig von der — etwa auch wechselnden — Weite der Röhren. Darauf beruht das Gleichgewicht einer und derselben Flüssigkeit in den communicirenden Röhren.

Giessen wir aber in ein System communicirender Röhren nach einander zwei verschiedene sich nicht mischende Flüssigkeiten, zuerst die schwerere mit der Dichte ε_1, dann die leichtere mit der Dichte ε_2, so werden beide Flüssigkeiten in den Schenkeln ungleich hoch stehen. Die Trennungsfläche beider Flüssigkeiten gegen einander ist nach § 94 (5) eine Fläche constanten Drucks, auf sie wird von der einen Seite der hydrostatische Druck $\varepsilon_1 g h_1$, von der anderen Seite der hydrostatische Druck $\varepsilon_2 g h_2$ ausgeübt. Im Zustand des Gleichgewichts müssen wieder beide Drucke einander gleich sein, d. h. es muss sein:

$$\varepsilon_1 h_1 = \varepsilon_2 h_2 \quad \text{oder} \quad h_1 : h_2 = \frac{1}{\varepsilon_1} : \frac{1}{\varepsilon_2}.$$

Die Höhen verschiedener Flüssigkeitssäulen in communicirenden Röhren über der gemeinsamen Trennungsfläche verhalten sich umgekehrt wie die Dichtigkeiten unabhängig von der — etwa auch wechselnden — Weite der Röhren.

§ 96. Anwendung auf eine unter Einwirkung der Schwere in einem cylindrischen Gefäss rotirende Flüssigkeitsmenge.

Wir machen endlich von unseren hydrostatischen Grundgleichungen § 94 (2) beziehungsweise (6) eine Anwendung auf rotirende Flüssigkeitsmengen unter Einwirkung der Schwere. Es ist schon § 90 am

Ende darauf hingewiesen, dass die Möglichkeit der Anwendung der Hydrostatik auf rotirende Flüssigkeitsmassen, also auf Flüssigkeiten im Zustand der Bewegung darauf beruht, dass im stationären Zustand keine Verschiebung der Theilchen gegen einander eintritt; dieses war aber bisher die Grundlage, auf der wir die Hydrostatik entwickelt haben. Man spricht in diesem Sinne von der Gleichgewichtsgestalt rotirender Flüssigkeiten.

Die Behandlung besteht nun darin, dass wir die Centrifugalkraft als statisch wirkende Kraft ebenso wie die Schwere von vorneherein einführen. Die Flüssigkeit befinde sich in einem Gefäss, z. B. in einem Kreiscylinder, der um seine verticale Axe rotire. Die Form des Gefässes ist solange gleichgültig, als nicht etwa durch sie der Eintritt eines stationären Bewegungszustandes gehindert wird.

Es sei T die Umlaufszeit, dann ist $2\pi/T$ die Rotationsgeschwindigkeit, die Centrifugalkraft auf die Masseneinheit also $(4\pi^2/T^2)r$, ihre Componenten nach den horizontalen Axen x und y : $(4\pi^2/T^2)x$ und $(4\pi^2/T^2)y$. Rechnen wir die z-Axe positiv nach oben, also der Schwere entgegen, so haben wir:

$$(1) \qquad X = \frac{4\pi^2}{T^2}x, \qquad Y = \frac{4\pi^2}{T^2}y, \qquad Z = -g,$$

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{4\pi^2}{T^2}(xdx + ydy) - gdz,$$

$$(2) \qquad U = \frac{2\pi^2}{T^2}(x^2 + y^2) - gz + \text{Const.}$$

Die Niveauflächen, beziehungsweise Druckflächen werden also nach (2) durch ein System congruenter paralleler Rotationsparaboloide gebildet. Ein solches Rotationsparaboloid ist auch die freie Oberfläche.

Wir können die Constante der Gleichung (2) — oder wie man sich auch auszudrücken pflegt den Parameter für die freie Oberfläche — in verschiedener Weise bestimmen: Einmal können wir die Gleichung (2) auf einen Punkt der Oberfläche anwenden, als solcher erscheint besonders geeignet der Punkt, in dem die Rotationsaxe die Oberfläche schneidet, es ist dieses der Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = h$, wobei h die Höhe des Punktes über dem horizontalen ebenen Boden des rotirenden Gefässes bedeute. Wir erhalten auf diese Weise als Gleichung für die freie Oberfläche unserer rotirenden Flüssigkeit:

$$(3) \qquad 0 = \frac{2\pi^2}{T^2}(x^2 + y^2) - g(z - h).$$

Wir können die Constante der Gleichung (2) auch z. B. unter Bezugnahme auf das Volumen V der Flüssigkeitsmenge bestimmen. Bezeichnen wir die Höhe der freien Oberfläche in dem ruhenden Cylinder mit H, den Radius des Cylinders mit R, so haben wir:

$$V = R^2 \pi H = 2\pi \int_0^R z \cdot r dr.$$

Nun ist nach (2):

$$z = \frac{1}{g}\left(\frac{2\pi^2}{T^2} r^2 + c\right),$$

also wird:

$$V = \frac{2\pi}{g}\int_0^R r dr \left(\frac{2\pi^2}{T^2} r^2 + c\right) = \frac{\pi}{g}\left(\frac{\pi^2 R^4}{T^2} + cR^2\right).$$

Hieraus lässt sich c durch V ausdrücken, oder wenn wir V durch $R^2 \pi H$ ersetzen, bestimmt sich:

$$c = Hg - \frac{\pi^2 R^2}{T^2},$$

und es lässt sich die Gleichung der Oberfläche somit in der Form schreiben:

$$(4) \qquad 0 = \frac{\pi^2}{T^2}(2r^2 - R^2) + g(H - z).$$

Es bestimmt sich hieraus die tiefste Stelle der Oberfläche des rotirenden Flüssigkeitscylinders für $r = 0$:

$$z = H - \frac{\pi^2}{gT^2} R^2,$$

die höchste Stelle des rotirenden Flüssigkeitscylinders für $r = R$:

$$z = H + \frac{\pi^2}{gT^2} R^2.$$

Es folgt also für den rotirenden Flüssigkeitscylinder der Satz, dass sich die höchste Stelle der Oberfläche um denselben Betrag $(\pi^2/gT^2) R^2$ über das ursprüngliche Niveau der ruhenden Oberfläche hebt, um den sich die tiefste Stelle der Oberfläche senkt.

Der Brown'sche Tourenzähler benutzt diese Consequenz und gestattet aus der Messung dieses Betrages $(\pi^2/gT^2) R^2$ auf die Umlaufszeit einer rotirenden Axe, auf welche der Tourenzähler aufgesetzt wird, zurückzuschliessen.

Was schliesslich die Vertheilung des Drucks unserer unter Einwirkung der Schwere rotirenden Flüssigkeitsmenge betrifft, so liefert die Gleichung § 94 (6) in Verbindung mit unserer Gleichung (2):

$$p = p_0 + \varepsilon(U - U_0) = p_0 + \varepsilon g(z - z_0),$$

also unverändert das Resultat unserer Gleichung § 95 (1). Wir können also sagen: Ob die Flüssigkeitsmenge rotirt oder nicht, der Druck im Innern unter Einwirkung der Schwere ist bestimmt durch die Höhe der verticalen Flüssigkeitssäule über dem in Betracht kommenden Punkt.

§ 97. **Die auf einen Körper im Innern einer Flüssigkeit ausgeübten hydrostatischen Druckkräfte und Drehungsmomente. Hülfssatz von der Verwandlung eines Raumintegrals in ein Flächenintegral.**

Haben wir irgend eine Flüssigkeit (oder ein Gas), auf welche äussere Kräfte wirken, und tauchen wir irgend einen Körper, auf welchen gleichfalls äussere Kräfte wirken, in diese Flüssigkeit ein, so werden im Zustand des Gleichgewichts auf jedes Oberflächenelement des eingetauchten Körpers do hydrostatische Druckkräfte: $p\,do$ wirken, wo p den hydrostatischen Druck im Innern der Flüssigkeit an der Stelle bedeutet, an der sich das Oberflächenelement do befindet. Dieser Druck wirkt senkrecht zu do in der Richtung der Normalen n in das Innere des eingetauchten Körpers hinein. Die Gesammtheit der Componenten der hydrostatischen Druckkräfte parallel der x-, y-, z-Axe wird so:

$$X' = \int p \cos(nx)\, do,$$

(1) $$Y' = \int p \cos(ny)\, do,$$

$$Z' = \int p \cos(nz)\, do.$$

Diese Integrale haben nun eine Form, die in einem wichtigen Hülfssatz der Analysis vorkommt; es ist das ein unter dem Namen: „Satz von der Verwandlung des Raumintegrals in ein Flächenintegral" bekannter Satz, den wir hier zunächst beweisen wollen. Es sei p eine in einem geschlossenen Raume allenthalben endliche und stetige Function, so besagt dieser Satz, dass

$$\iiint \frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \pm \int p \cos(nx)\, do,$$

wobei sich Integral rechts über die Oberfläche des geschlossenen Raumes erstreckt, und das obere Vorzeichen gilt, wenn die Normale n

wird der Charakter der Adhäsionskräfte derselbe sein wie der der Cohäsionskräfte, insofern die Wirkungssphäre der Adhäsionskräfte ebenso wie die der Cohäsionskräfte als eine nur sehr wenig ausgedehnte einzuführen sein wird.

Wir gehen zur Aufstellung des allgemeinen Ausdrucks für den normalen Trennungsflächendruck zweier Flüssigkeiten (1) und (2) in das Innere von (1) hinein.[1]) Wir schreiben zur Abkürzung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'},$$

und bezeichnen durch die Indices 1 und 2 das, was sich auf die Flüssigkeiten (1) und (2) bezieht, und zwar besage z. B. die Reihenfolge (12), dass die Wirkung von (1) auf (2) in Betracht komme. Um Vorzeichenfehler zu vermeiden, werden wir am besten von einer ebenen Trennungsfläche ausgehen. Eine gekrümmte Trennungsfläche behandeln wir dann so, dass wir in dem in Betracht kommenden Punkt eine Tangentialebene legen; fällt die Tangentialebene in das Innere der Flüssigkeit (1), so kommt zu der Wirkung des durch diese Ebene begrenzten Theiles der Flüssigkeit (1) noch ein weiterer von (1) herrührender Term hinzu — fällt die Tangentialebene ausserhalb, so ist er in Abzug zu bringen.

In dieser Weise ergiebt sich dem Vorzeichen nach richtig in dem bisherigen Sinne:

$$\begin{aligned} N &= \left(K_{11} \pm \frac{S_{11}}{R}\right) - \left(K_{22} \mp \frac{S_{22}}{R}\right) + \left(K_{12} \mp \frac{S_{12}}{R}\right) - \left(K_{21} \pm \frac{S_{21}}{R}\right) \\ &= K_{11} - K_{22} + K_{12} - K_{21} \pm \frac{1}{R}(S_{11} + S_{22} - S_{12} - S_{21}). \end{aligned}$$

Hierin gilt das obere Vorzeichen für convexe Oberflächen (1) von (2) aus gesehen, das untere Vorzeichen für concave Oberflächen (1) von (2) aus gesehen.

Schreiben wir wie bisher:

$$N = K \pm \frac{S}{R},$$

so haben wir also:

1) Die folgende Darstellung enthält die Widerlegung einer Reihe von van der Mensbrugghe geltend gemachter Einwände gegen die Theorie von Laplace, sie lehnt sich an meine in Wiedemann's Annalen Bd. 16 veröffentlichte Arbeit aus dem Jahre 1882, welche ich damals betitelte: „Ueber die Molekularanziehung von Flüssigkeiten auf einander" — eine Bezeichnungsweise, die ich heute nach den Auseinandersetzungen von § 99 nicht mehr vertrete.

$$K = K_{11} - K_{22} + K_{12} - K_{21},$$
$$S = S_{11} + S_{22} - S_{12} - S_{21}.$$

Unter Bezugnahme auf das allgemeine Reactionsprincip wird nun in unserer Bezeichnung sein:

$$K_{12} = K_{21}, \qquad S_{12} = S_{21},$$

mithin:

$$K = K_{11} - K_{22}, \tag{1}$$
$$S = S_{11} + S_{22} - 2S_{12}.$$

Die Gleichungen (1) geben die einfache Erklärung dafür ab, wie es kommt, dass z. B. die Verunreinigung oder auch physikalische Modification *ebener* Oberflächenstücke von Flüssigkeiten die Erscheinung des Ansteigens in capillaren Röhren in keiner Weise beeinflusst, während die leiseste Verunreinigung der *gekrümmten* Oberfläche innerhalb des Capillarrohres die Steighöhe sehr wesentlich modificirt.

Fassen wir die Verunreinigung als dünne Oberflächenschicht (2) auf, so werden wir die Gesammtheit der ebenen Binnendrucke, in das Innere von (1) gerichtet, erhalten:

$$K = K_{11} - K_{22} + K_{22} = K_{11}. \tag{2}$$

Der ebene Binnendruck bleibt also wesentlich derselbe, gleichviel ob auf der ebenen Oberfläche von (1) eine dünne Schicht (2) ausgebreitet ist oder nicht; er würde nur dann eine Modification erleiden, wenn die Schicht (2) eine endliche Dicke erreichte, und die Schwerewirkung bei einer Differenz der specifischen Gewichte von (1) und (2) in Rechnung zu ziehen wäre.

Die Verunreinigung der gekrümmten Oberfläche im Innern eines Capillarrohrs würde aber an Stelle von S_{11} ergeben:

$$S = S_{22} + (S_{11} + S_{22} - 2S_{12}). \tag{3}$$

Es wird also bei experimentellen Untersuchungen der von uns als Oberflächenspannung oder Oberflächenenergie einer Flüssigkeit eingeführten Grösse Alles auf die Reinheit der gekrümmten Oberfläche im Inneren des Capillarrohres ankommen.

Die Ausdrücke (1) werden streng genommen auch für eine sogenannte freie Oberfläche in Betracht zu ziehen sein, denn physikalisch wird es freie Oberflächen in dem bisher verwertheten Sinne nicht geben. Jede Flüssigkeitsoberfläche verdampft, und so wird es sich streng genommen auch bei sogenannten freien Oberflächen um Trennungsflächen handeln, in denen eine Flüssigkeitsoberfläche sich mit ihrem eigenen Dampf im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. In der Regel wird es sich aber weiter auch um Flüssigkeitsoberflächen handeln, die mit der umgebenden atmosphärischen Luft in unmittelbarer Berührung stehen.

Man pflegt in der Mehrzahl der Fälle von den Cohäsions- und Adhäsionswerthen des Dampfes und der umgebenden Luft abzusehen und in (1) zu setzen $S_{22} = 0$, $S_{12} = 0$. Wir werden dann einfach $S = S_{11} = S_1$ schreiben und von den nominellen Werthen der Oberflächenenergie beziehungsweise Oberflächenspannung im Gegensatz zu den wirklichen Werthen der Oberflächenenergie und Oberflächenspannung sprechen, welche durch (1) ihre Definition gefunden haben.

Der Einfluss der umgebenden Luft (Absorption) und der Vorgang der Verdampfung mögen es zu einem Theil[1]) bedingen, dass frisch gebildete Oberflächen nicht sofort eine constante Oberflächenspannung aufweisen, und dass z. B. Beobachtungen mit luftgesättigtem Wasser constantere Resultate liefern, als Beobachtungen mit ausgekochtem Wasser. Die Oberfläche muss sich eben zunächst mit ihrer Umgebung in Gleichgewicht setzen.

Von Interesse für die Tragweite unserer Auseinandersetzungen ist die Bemerkung, dass unsere theoretischen Entwickelungen die Bedingungen dafür enthalten, in welchen Fällen zwei Flüssigkeiten als nicht mischbar und in welchen Fällen zwei Flüssigkeiten als mischbar bezeichnet werden können.

Zwei Flüssigkeiten sind als nicht mischbar zu betrachten, wenn sie sich in einer Trennungsfläche gegen einander abgrenzen, wenn sie also eine Trennungsflächenspannung oder -energie gegen einander aufweisen, welche sich als wesentlich positiver Werth darstellen muss. Bezeichnen wir diesen Energiewerth mit S'_{12}, so wird also sein müssen:

---

1) Ein anderer Einfluss ist von mir Wiedemann's Annalen, Bd. 53, Seite 659 und folgende (1894), besprochen worden.

$$(4^a) \qquad S'_{12} = S_{11} + S_{22} - 2S_{12} \geqq 0, \quad S_{12} \leqq \frac{S_{11} + S_{22}}{2}.$$

Im Falle jedoch:

$$(4^b) \qquad S'_{12} = S_{11} + S_{22} - 2S_{12} \lesseqgtr 0, \quad S_{12} \gtreqless \frac{S_{11} + S_{22}}{2}$$

ist, wird die Existenz einer Grenzfläche unmöglich sein, die beiden Flüssigkeiten sind mischbar.

Sind Flüssigkeiten mischbar, so können wir physikalisch die beiden Fälle unterscheiden, in denen die Mischung eine rein äussere, wie man zu sagen pflegt „mechanische“ ist, und in denen die Mischung eine mehr innere „physikalische“ ist. Den ersten Fall werden wir dadurch definiren können, dass für ihn ist:

$$(4^c) \qquad S'_{12} = S_{11} + S_{22} - 2S_{12} = 0.$$

Dieser Fall wird z. B. vorliegen, wenn es sich um Mischung einer und derselben Flüssigkeit bei verschiedenen Temperaturen handelt.

Wenn wir z. B. die gekrümmte Oberfläche im Innern eines Capillarrohrs lokalen Temperaturänderungen aussetzen, derart, dass wir die Oberfläche als mit einer dünnen Schicht gleicher Flüssigkeit aber etwas anderer Temperatur bedeckt ansehen können, dann liefert die Anwendung von (4^c) auf (3) das Resultat:

$$S = S_{22} + (S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) = S_{22}.$$

Diese Gleichung besagt: Bei Beobachtung capillarer Steighöhen einer Flüssigkeit wird es auf die Temperatur der gekrümmten Oberfläche im Innern des Steigrohrs ankommen, während die Temperatur der darunter liegenden Flüssigkeit das Phänomen nur insofern unwesentlich bedingt, als das specifische Gewicht der Flüssigkeit von der Temperatur in geringem Maasse beeinflusst wird.

§ 103. Einführung des Randwinkels. F. Neumann's Satz. Physikalische Discussion über Randwinkelwerthe und ihre Bedeutung.

Charakteristisch für sich nicht mischende Flüssigkeiten ist der Randwinkel, unter dem dieselben zusammenstossen. Nehmen wir drei nicht mischbare Flüssigkeiten (1), (2), (3), welche längs eines Curvenzuges zusammenstossen und concentriren wir die Aufmerksamkeit auf ein Element dieses Curvenzuges dl_{123}. Nach der Entwickelung des Begriffs der Oberflächenspannung werden dann tangential zu den drei Trennungsflächen (12), (23), (31) und senkrecht zu dl_{123} die

Oberflächenspannkräfte T'_{12}, T'_{23}, T'_{31} angreifen. Damit diese einander das Gleichgewicht halten, wird einfach der Satz vom Parallelogramm der Kräfte erfüllt sein müssen, d. h. jede der drei Grössen T'_{12}, T'_{23}, T'_{31}, entgegengesetzt gerechnet, wird als Diagonale des Parallelogramms, welches aus den beiden anderen Grössen gebildet werden kann, anzusehen sein. Andere Kräfte als die tangentialen Spannkräfte können aber die Winkel, unter denen die drei Flüssigkeiten längs dl_{123} zusammenstossen, nicht beeinflussen, denn nur diese greifen dl_{123} selbst an; die normalen Druckkräfte wirken auf die Trennungsflächen selbst, und die Schwere wirkt auf ausgedehnte Volumina.

Dieser Satz von dem Gleichgewicht, welches sich die tangentialen Spannkräfte dreier Flüssigkeiten unter bestimmten Winkeln halten, ist in anderer Form zuerst von F. Neumann abgeleitet worden. Er enthält den Satz von der Constanz des Randwinkels, abhängig von der Natur der aneinandergrenzenden Medien, in sich; zugleich lehrt seine Ableitung die Bedingungen kennen, unter denen allein von einer Constanz des Randwinkels die Rede sein kann.

Die erste Voraussetzung des Satzes ist die Verschiebungsfähigkeit der Elemente der Trennungsfläche gegen einander, die zweite Voraussetzung ist die physikalische Unveränderlichkeit der aneinandergrenzenden Oberflächenelemente der verschiedenen Flüssigkeiten. Beide Voraussetzungen sind bei endlichen Randwinkeln kaum praktisch vorhanden oder herstellbar; wir werden daher dem Satz von der Constanz endlicher Randwinkel, abhängig von der Natur der aneinandergrenzenden Flüssigkeiten, einen ausschliesslich theoretischen, keinen praktischen Werth zuzusprechen haben.

Führen wir nun eine beliebige zu dl_{123} senkrechte Richtung als Orientirungsrichtung ein, z. B. x, so folgt aus dem soeben abgeleiteten Satz von Neumann, dass die Summe der Componenten der Oberflächenspannkräfte in dieser Richtung verschwinden muss, d. h. also, dass sein muss:

$$(1) \qquad T'_{12}\cos(T'_{12}x) + T'_{23}\cos(T'_{23}x) + T'_{31}\cos(T'_{31}x) = 0.$$

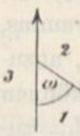
Ersetzen wir die Flüssigkeit (3) durch eine ebene feste Platte, dann werden die Richtungen von T'_{23} und T'_{31} entgegengesetzt; legen wir nun weiter die willkürlich verfügbare Richtung x in die Richtung von T'_{23} selbst, so wird (1):

$$(2) \qquad T'_{12}\cos(T'_{12}T'_{23}) + T'_{23} - T'_{31} = 0.$$

Bezeichnen wir nun als Randwinkel den Winkel

$$\omega = (T'_{31}\, T'_{12}),$$

Fig. 16a.



dann ist:

$$(T'_{12}\, T'_{23}) = \pi - \omega,$$

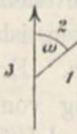
und die Gleichung (2) liefert die Beziehung:

$$\cos\omega = \frac{T'_{23} - T'_{31}}{T'_{12}}. \tag{3^a}$$

Bezeichnen wir als Randwinkel den Winkel

$$\omega = (T'_{12}\, T'_{23}),$$

Fig. 16b.



dann liefert die Gleichung (2) die Beziehung:

$$\cos\omega = \frac{T'_{31} - T'_{23}}{T'_{12}}. \tag{3^b}$$

Bezieht sich der Index (2) auf Luft als angrenzende Flüssigkeit, so ist die erste Bezeichnung für Flüssigkeiten (1) üblich, die in Capillarröhren ansteigen (Wasser), die zweite für Flüssigkeiten, die in Capillarröhren eine Depression aufweisen (Quecksilber).

Führen wir in diesem Fall, dass die Flüssigkeit (2) Luft ist, die nominellen Werthe der Oberflächenspannung T_1 beziehungsweise der Oberflächenenergie S_1 ein, so können wir in den Ausdrücken:

$$T'_{12} = T_{11} + T_{22} - 2\,T_{12},$$
$$T'_{23} = T_{22} + T_{33} - 2\,T_{23},$$
$$T'_{31} = T_{33} + T_{11} - 2\,T_{31}$$

$$T_{22} = 0, \quad T_{12} = 0, \quad T_{23} = 0$$

setzen, und erhalten:

$$\cos\omega = \frac{2\,T_{31} - T_1}{T_1}, \quad \text{bezw.} \quad \cos\omega = \frac{T_1 - 2\,T_{31}}{T_1}. \tag{4}$$

Zur Interpretation der Gleichungen (4) ziehen wir es vor uns der Begriffe der Cohäsion und Adhäsion zu bedienen, von denen wir ja § 99 und 102 erwiesen haben, dass sie zu den Begriffen der tangentialen Spannung längs einer freien Oberfläche oder längs der Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten in einfacher Beziehung stehen.

Sehen wir hier die Oberflächenspannung T_1 als ein Maass für die Cohäsion der Flüssigkeit (1) selbst an, die Grösse T_{31} als ein Maass für die Adhäsion der festen Wand (3) auf die Flüssigkeit (1), so können wir sagen:

Solange die Adhäsion der festen Wand (3) auf die Flüssigkeit (1) die Cohäsion der Flüssigkeit (1) überwiegt, solange also $T_{31} > T_1$ ist, weist der erste Ausdruck von Gleichung (4) einen imaginären Werth von ω auf. Wir deuten dieses Ergebniss physikalisch dahin, dass wir sagen: in diesem Fall kann überhaupt von einem Randwinkel der Flüssigkeit gegenüber der festen Wand nicht gesprochen werden, die Wand überzieht sich in diesem Falle vollkommen mit der Flüssigkeit (1), die Flüssigkeit (1) benetzt die Wand vollkommen, und es kann immer nur von einer Contactlinie gesprochen werden, in der Elemente derselben Flüssigkeit an einander stossen. Wir haben dann in der ersten Gleichung (4) T_{31} durch T_1 zu ersetzen, und finden $\cos\omega = 1$, d. h. $\omega = 0$. Benetzende Flüssigkeiten weisen einen verschwindenden Randwinkel auf.

In hervorragendem Grade weisen Glasflächen gegenüber Petroleum eine sehr vollkommene Benetzbarkeit auf. Die kleinste Berührung eines Stückes Glas in einem kleinen Oberflächenstück mit Petroleum genügt, um mit der Zeit die gesammte Oberfläche des Glases mit Petroleum zu überziehen. Bei Petroleumlampen umzieht das Petroleum von Innen aus die ganze äussere Oberfläche des Bassins. — Das sogenannte Kriechen der Salze bietet eine ähnliche Erscheinung dar.

Kehren wir zur allgemeinen Interpretation der Gleichung (4) zurück und fassen, um die Vorstellung zu fixiren, eine in eine Flüssigkeit eingetauchte verticale Glasplatte oder ein Capillarrohr ins Auge, so steigt die Flüssigkeit im Falle vollkommener Benetzung der festen Wandung der Platte oder des Rohres an einer eigenen Flüssigkeitsschicht empor. Es ist dann $T_{31} > T_1$. Dieser Fall findet z. B. als der bei weitem gewöhnliche an vollkommen reinen Glasflächen bei Alkohol und Oel unter gewöhnlicher Temperatur statt. Insbesondere wird es nicht schwer fallen, vollkommene Benetzung zu erzielen, wenn man die Platte oder das Rohr zunächst tiefer unter die Flüssigkeitsoberfläche taucht, als es die Beobachtung erfordert. Auch Wasser wird man in dieser Weise mit vollkommen reinen Glasflächen zur Benetzung bringen können.

Sobald $T_{31} = T_1$ wird, hört die Flüssigkeit auf, die Glasfläche zu benetzen, oder vielleicht noch präciser ausgedrückt, die Fähigkeit der Benetzung geht verloren. Der Randwinkel fängt mit $T_{31} < T_1$ an endlich zu werden, die Flüssigkeit bewahrt aber auch zunächst ihre concave Gestalt. Dieser Fall tritt z. B. bei jedem nicht besonders gereinigten Glasrohr und Wasser ein. Ein geringes Heben und Senken des Rohres zeigt aber zugleich, dass die Contactlinie sich nicht als verschiebbar erweist, dass somit der Satz von der Constanz des Randwinkels seine praktische Bedeutung verloren hat. Sobald die theoretisch geforderte Verschiebbarkeit der Contactlinie nicht vorhanden ist, wird man nur innerhalb gewisser Grenzen berechtigt sein, aus etwa gemessenen Werthen von ω unter Beziehung auf (4) einen Rückschluss auf das Verhältniss von T_{31} zu T_1 zu machen, abgesehen davon, dass die Contactflächen in ihrer physikalischen Beschaffenheit bei der Kleinheit der Wirkungssphäre der Adhäsionskräfte schwer zu definiren und in unveränderlicher Constanz zu erhalten sein dürften.

Sobald $T_{31} = \frac{1}{2} T_1$, würde theoretisch $\omega = \pi/2$ sein und die Flüssigkeit also eine völlige Ebene bilden; sobald $T_{31} < \frac{1}{2} T_1$, würde die Flüssigkeit in eine convexe Oberflächenform übergehen, wie das bei Quecksilber gegen Glas der Fall ist. Aber auch hier gelten innerhalb ziemlich weiter Grenzen unsere Bemerkungen über den Unterschied des theoretischen und praktischen Werthes des Satzes von der Constanz des Randwinkels. In der That weisen die verschieden ausgeführten Messungen des Randwinkels von Quecksilber gegen Glas solche Unterschiede auf, dass die Ausdrucksweise nicht unberechtigt erscheint: diese Werthe des Randwinkels sind durch eine Reihe von Zufälligkeiten bedingt. Von Zufall wird in der praktischen Physik aber in allen den Fällen zu reden sein, in denen der Experimentator nicht in der Lage ist, die äusseren Verhältnisse beherrschen zu können.

Sehr schön wird das verschiedene Verhalten der Glaswand und Flüssigkeit durch Beobachtungen von Wolff[1]) an einer und derselben Flüssigkeit bei verschiedenen Temperaturen zur Anschauung gebracht. Wolff beobachtete die capillare Steighöhe von Aether, Schwefelkohlenstoff, Naphta, Alkohol bei steigenden Temperaturen bis zur kritischen Temperatur. Die Flüssigkeit im Capillarrohr durchlief dann vom benetzenden Zustand alle die Erscheinungen, welche wir zuvor beschrieben haben, in der Nähe der kritischen Temperatur wurde die Oberfläche convex.

---

1) Wolff: Annales de chimie (3) Bd. 49. Poggendorff's Annalen 102, S. 583 u. folg., 1857.

§ 104. **Aufstellung der hydrostatischen Gleichgewichtsbedingungen unter Rücksicht auf die Cohäsions- und Adhäsionskräfte. Minimalflächen. Die Differentialgleichung der Flüssigkeitsoberfläche unter Einwirkung der Schwere.**

Wir haben § 67 als Kriterium für stabile und labile Gleichgewichtszustände den Satz von Dirichlet kennen gelernt, nach dem für stabile Gleichgewichtszustände das Potential V ein Minimum, für labile Gleichgewichtszustände ein Maximum darstellt.

Da nun die Cohäsions- und Adhäsionskräfte einer Flüssigkeitsmenge, wie wir erkannt haben, ein Potential haben, ist somit die allgemeine mathematische Bedingung für hydrostatische Gleichgewichtszustände sofort gegeben. Es müssen sich, wie wir unter Rücksicht auf das Dirichlet'sche Kriterium gleich näher ausführen können, die Oberflächen und Trennungsflächen gegebener Flüssigkeitsmengen als Minimalflächen darstellen.

Diese Minimalflächen finden in grösster Reinheit, d. h. ohne Nebenbedingungen, physikalisch ihre Realisirung, wenn weiter keine Kräfte auf die gegebene Flüssigkeitsmenge wirken. Flüssigkeiten lassen sich in einfachster Weise der Schwerewirkung entziehen, wenn wir sie in genügend geringen Massen den Oberflächenspannkräften aussetzen. Das geschieht z. B. bei den bekannten Plateau'schen Versuchen, in denen Drahtfiguren verschiedener Form in eine geeignete Seifenlösung getaucht und herausgehoben werden. Die Drähte bilden dann die festen gegebenen Randcurven, zwischen denen sich dünne Seifenlamellen in Form von Minimalflächen spannen werden; das Gewicht der Seifenlamellen selbst ist zu gering, als dass die Schwere darauf in Betracht käme. Die gewöhnlichen Seifenblasen in Kugelform stellen ebenso Minimalflächen dar, bei denen jede als fest gegebene Begrenzung fehlt.

In anderen Fällen, in denen die Wirkung der Schwere in die Betrachtung aufzunehmen ist, werden wir in der einfachsten Weise zu dem Gauss'schen Oberflächenpotential nur das Potential der Schwere hinzuzufügen haben, und für die Summe beider Potentiale das Minimum aufzusuchen haben.

Haben wir eine Flüssigkeitsmenge unter Wirkung der Schwere mit theilweise freier Oberfläche, theilweise fester Begrenzungsfläche gegen starre Gefässwände, so wird sich das Gesammtpotential, für welches das Minimum aufzusuchen ist, darstellen: aus der Summe der

Gauss'schen Potentiale für die freie Oberfläche und für die Trennungsfläche der Flüssigkeit gegen die Gefässwände vermehrt um das Potential der Schwerewirkung auf die gesammte Flüssigkeitsmenge. Rechnen wir die z-Axe entgegengesetzt der Richtung der Schwere nach oben, so würden wir haben:

$$(1) \qquad V = S_1 O_1 + S'_{12} O_{12} + \varepsilon g \int z d\tau .$$

Hierin bedeutet S_1 die Oberflächenenergie, O_1 die Grösse der freien Oberfläche — $S'_{12} = (S_1 + S_2 - 2 S_{12})$ die Energie, O_{12} die Grösse der gemeinsamen Trennungsfläche — ε die Dichte, $d\tau$ das Volumelement der Flüssigkeitsmenge, g die Beschleunigung durch die Schwere.

Die Forderung, dass das Potential V einen ausgezeichneten Werth darstelle, besagt nun, dass minimale, sonst beliebige Verschiebungen der Oberflächenelemente, soweit sie mit den Bedingungen der Continuität der Oberfläche verträglich sind, — wir sagen „virtuelle Verschiebungen“ — eine Aenderung des Potentialausdrucks V nicht hervorrufen. Das ist die Bedingung des Gleichgewichts. Wir wollen eine solche Aenderung des Potentialausdrucks V, hervorgerufen durch virtuelle Verschiebungen, durch δV bezeichnen und sie die erste Variation des Ausdrucks V nennen. Bedingung des Gleichgewichts ist dann, dass

$$(2) \qquad 0 = \delta V = S_1 \delta O_1 + S'_{12} \delta O_{12} + \varepsilon g \delta \int z d\tau .$$

Die virtuellen Aenderungen von O_1 können nun theilweise durch virtuelle normale Verschiebungscomponenten ν, theilweise durch virtuelle tangentiale Verschiebungscomponenten μ hervorgerufen sein, — die virtuellen Aenderungen von O_{12} können dagegen nur durch tangentiale Verschiebungen μ hervorgerufen sein. Bei der vollen Willkür der virtuellen Verschiebungen können wir uns auch von vorneherein nur auf normale Verschiebungen ν oder nur auf tangentiale Verschiebungen μ beschränken. Die einen (ν) geben die Differentialgleichungen für die Gestalt der Oberfläche, die anderen (μ) führen auf die wohlbekannten Randbedingungen zurück, welche wir im allgemeinen Falle § 103 discutirt haben.

Die virtuellen Normalverschiebungen ν geben unter Rücksicht darauf, dass die Compressibilität der Flüssigkeit dabei nicht in Anspruch genommen wird, mit Bezug auf die schon § 101 durchgeführten Rechnungen:

$$S_1 \delta O_1 = \pm S_1 \int \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) v do,$$

$$\varepsilon g \delta \int z d\tau = \quad \varepsilon g \int z v do.$$

Es folgt so als Gleichgewichtsbedingung:

$$\int v do \left[\pm S_1 \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) + \varepsilon g z\right] = 0,$$

oder insofern v für jedes Oberflächenelement, soweit die Continuität der Oberfläche es zulässt, unabhängig von dem benachbarten Oberflächenelement gewählt werden kann, und insofern wieder von einer Inanspruchnahme der Compressibilität bei der beliebigen Kleinheit der virtuellen Verschiebung nicht die Rede sein kann:

$$(3) \qquad \pm S_1 \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) + \varepsilon g z = \text{const.}$$

Damit ist die Differentialgleichung einer freien Flüssigkeitsoberfläche unter Einwirkung der Schwere und der Cohäsionskräfte gewonnen. Rechnen wir die z-Axe von den ebenen Theilen der Flüssigkeitsoberfläche nach oben, so bestimmt sich aus diesen Theilen der Oberfläche die Constante in (3) zu Null, und wir erhalten als Differentialgleichung der freien Oberfläche:

$$(4) \qquad \pm S_1 \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) + \varepsilon g z = 0.$$

Angewandt auf Trennungsflächen, in denen zwei Flüssigkeiten mit den Dichten ε, ε' zusammenstossen, von denen z. B. die zweite Flüssigkeit Luft ist, erhalten wir an Stelle von (4):

$$(5) \qquad \pm S_{12}' \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) + \varepsilon g z = \varepsilon' g z.$$

Das obere Zeichen gilt immer in Bezug auf äussere Punkte von convexen, das untere von concaven Theilen der Flüssigkeit.

Die Constante $2 S_1/\varepsilon g$, beziehungsweise $2 S_{12}'/(\varepsilon - \varepsilon')g$ pflegt in der Literatur abgekürzt mit a^2 bezeichnet zu werden und wird Capillaritätsconstante genannt. Wir erhalten so als Differentialgleichung einer Flüssigkeitsoberfläche unter Wirkung der Schwere:

$$(6) \qquad \pm a^2 \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) + z = 0.$$

Die Differentialgleichung allein genügt nicht zur Durchführung der einschlägigen Aufgaben, es müssen noch die in jedem einzelnen

Falle individuell gegebenen Grenzbedingungen hinzutreten; ihre Mannigfaltigkeit ist es, welche das einschlägige Erscheinungsgebiet so reich erscheinen lässt.

Endigen die freien Flüssigkeitsoberflächen in festen oder flüssigen Trennungsflächen, so spielt der Randwinkel, unter dem die letzten Flächenelemente zusammenstossen, eine Rolle; endigen die freien Flüssigkeitsoberflächen in scharfen Randcurven fester Flächen, dann wird von einem Randwinkel überhaupt nicht die Rede sein können.

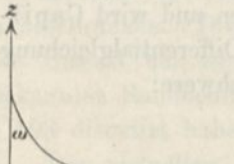
Unter den Erscheinungen, welche in das einschlägige Gebiet fallen, mögen hier aufgezählt werden: Die Tropfen von Flüssigkeiten in aufliegendem und hängendem Zustand, die Blasenform von Gasen in Flüssigkeiten, die Adhäsionsplatten, die Abweichung der freien Oberfläche von der Horizontalen in Folge der Gefässwände, die Erscheinung in Capillarröhren, sämmtliche Erscheinungen im Zustand des Gleichgewichts. Wir beschränken uns im Folgenden auf die theoretische Durchführung in der Behandlung der beiden letzten Erscheinungen.

§ 105. Abweichung der freien Oberfläche von der Horizontalen in Folge der Gefässwände, insbesondere bei ebener Wandung.

Ohne Beziehung auf die Cohäsions- und Adhäsionskräfte haben wir nach den allgemeinen Grundsätzen der Hydrostatik § 95 abgeleitet, dass die freie Oberfläche einer Flüssigkeit unter Einwirkung der Schwere eine horizontale Ebene ist. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, für eine in einem Gefäss eingeschlossene Flüssigkeitsmenge die Abweichung der freien Oberfläche von der Horizontalen unter Rücksicht auf die Cohäsions- und Adhäsionskräfte zu studiren.

Bei Gefässen mit weitem Querschnitt ist die Abweichung der freien Oberfläche von der Horizontalen nur in der Nähe des Randes der Gefässwände merklich. Wir wollen diese Abweichung in dem speciellen Falle untersuchen, dass die Gefässwandung eben ist. Das Problem deckt sich mit der Bestimmung der Oberfläche in der Nähe einer eingetauchten Platte.

Fig. 17.



Nehmen wir die ebene Wandung zunächst vertical an: Wir legen einen Schnitt senkrecht zur ebenen Wandung und zur Flüssigkeitsoberfläche, das sei die Ebene der Zeichnung, die xz-Ebene. Der eine Hauptkrümmungsradius ist dann unendlich gross, der zugehörige Kreis hat seine Lage senkrecht zur Ebene der Zeichnung.

Der andere Hauptkrümmungsradius gehört einer ebenen Curve an, sein reciproker Werth wird in der Theorie der ebenen Curven abgeleitet zu:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{z''}{\sqrt{1+z'^2}^3}.$$

Als Differentialgleichung der zu bestimmenden ebenen Curve ergiebt sich also unter Bezugnahme auf § 104 (6):

(1) $$\frac{a^2}{2} \cdot \frac{z''}{\sqrt{1+z'^2}^3} = z.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergiebt nach Multiplication mit dz:

(2) $$-\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{z^2}{a^2} + c.$$

Die Integrationsconstante bestimmt sich hierin aus dem Werth für $z = 0$, d. h., für die ebenen Theile des Niveaus, für welche $z' = 0$ ist, zu $c = -1$. Die Gleichung (2) lässt sich nun schreiben:

(3) $$1 - \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{z^2}{a^2},$$

und liefert, auf die Randtheile angewandt, welche unter dem Randwinkel ω gegen die ebene verticale Wandung stossen:

(3ª) $$1 - \sin\omega = \frac{z^2}{a^2}.$$

Die Vorbereitung auf die weitere Integration von (3) führt auf:

$$dx = \frac{\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right) dz}{\frac{z}{a}\sqrt{2-\frac{z^2}{a^2}}} = \frac{\frac{a}{z}\, dz}{\sqrt{2-\frac{z^2}{a^2}}} - \frac{\frac{z}{a}\, dz}{\sqrt{2-\frac{z^2}{a^2}}}.$$

Die Integration selbst liefert:

(4) $$\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1}{z}\left(4 - 2\sqrt{2}\sqrt{2-\frac{z^2}{a^2}}\right) + \sqrt{2-\frac{z^2}{a^2}} + c.$$

Im Falle nun die Flüssigkeit die verticale Wandung benetzt, im Falle also $\omega = 0$, folgt aus (3ª), dass $x = 0$, $z = a$ zusammengehörige Werthpaare sind; dadurch findet die Integrationsconstante in (4) ihre Bestimmung, indem dann:

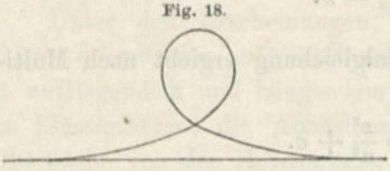
$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{1}{a}\left(4 - 2\sqrt{2}\right) + 1 + c.$$

Wir erhalten so als Gleichung für den Verticalschnitt mit der gesuchten Flüssigkeitsoberfläche:

$$(5) \qquad \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \frac{z^2}{a^2}}}{\frac{z}{a}(\sqrt{2} - 1)} + \sqrt{2 - \frac{z^2}{a^2}} - 1.$$

Es ist von Interesse, die durch die Gleichung (5) gegebene Curve aufzuzeichnen, indem wir als Ordinaten die Werthe x/a und z/a zu Grunde legen. Es ergiebt sich dann die in Figur 18 gezeichnete Schleifenform. Zu gewissen Werthen x/a gehören zwei Werthe z/a.

Fig. 18.



Die nähere Untersuchung lehrt, dass wir die Aufgabe, die Abweichung der freien Oberfläche von der Horizontalen festzustellen, für den Fall einer ebenen Begrenzung durch die Gleichung (5) und die zugehörige gezeichnete Curve allgemein für beliebige Neigung der Begrenzungsebene und für beliebige Randwinkel gelöst haben:

Im Falle die Platte oder ebene Begrenzung von der Flüssigkeit benetzt wird, haben wir nur zu der gegebenen Neigung eine parallele Tangentialebene an die gezeichnete Curve zu legen, um das allein in Betracht kommende Stück der Curve zu erhalten. Im Falle die Platte oder ebene Begrenzung gegen das letzte Flüssigkeitselement den Randwinkel ω bildet, haben wir bei gegebener Neigung die Begrenzungsebene so lange parallel zu verschieben, bis die Ebene die Curve unter dem gegebenen Randwinkel schneidet.

Für Flüssigkeiten, welche an dem Rande des Gefässes nicht Erhebungen, sondern Depressionen zeigen, wie z. B. Quecksilber, hat die gezeichnete Curve eine andere Lage mit der Schleife nach unten, sonst bleibt die Discussion dieselbe.

§ 106. **Die Erhebung (bezw. Depression) einer Flüssigkeit in einem Rohr von kreisförmigem Querschnitt (Theorie des Capillarrohres).**

Wir behandeln schliesslich die Erhebung einer Flüssigkeit in einem Capillarrohr von kreisförmigem Querschnitt. Den Ausgangspunkt der Theorie bildet die Gleichung:

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) = z.$$

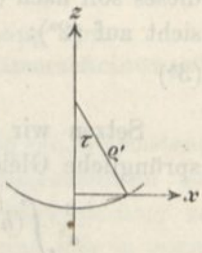
Es ist wieder

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{z''}{\sqrt{1 + z'^2}^3}$$

zu setzen, und es handelt sich nun weiter den entsprechenden Ausdruck für $1/\varrho'$ abzuleiten.

Die Oberfläche im Capillarrohr ist eine Rotationsfläche, bezogen auf die Axe des Rohres als Rotationsaxe. Es wird daher das Centrum für den zweiten Hauptkrümmungskreis ϱ' auf der Rotationsaxe liegen müssen. Der analytische Ausdruck für $1/\varrho'$ folgt dann aus:

Fig. 19.



$$\frac{x}{\varrho'} = \sin\tau = \frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}}.$$

Somit wird:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{z''}{\sqrt{1+z'^2}^3} + \frac{z'}{x\sqrt{1+z'^2}}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{z''x}{\sqrt{1+z'^2}^3} + \frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}}\right) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{xz'}{\sqrt{1+z'^2}}\right).$$

Wir haben somit für die capillare Oberfläche innerhalb des Rohres gefunden:

$$(1) \qquad \frac{2}{a^2}\int zx\,dx = \frac{xz'}{\sqrt{1+z'^2}} + \text{const.}$$

Wir verlegen nun den Anfangspunkt der z-Axe aus dem unendlichen Niveau in den tiefsten Punkt des Meniscus; wir bezeichnen dieses Stück als die capillare Steighöhe h, ersetzen also z durch $h+z$. In erster Näherung können wir dann z gegen h vernachlässigen und erhalten:

$$\frac{2}{a^2}h\int x\,dx = \frac{h}{a^2}x^2 = \frac{xz'}{\sqrt{1+z'^2}} + \text{const.}$$

Indem nun für $x = 0 : z' = 0$ ist, bestimmt sich die Integrationsconstante gleich 0, und wir erhalten in erster Näherung:

$$(2) \qquad \frac{h}{a^2}x = \frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} = \sin\tau,$$

angewandt auf die Randelemente $x = R$ (Radius des Querschnitts an der Contactlinie):

$$(2^a) \qquad \frac{h}{a^2}R = \cos\omega, \qquad a^2 = \frac{hR}{\cos\omega}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung (2) würde auf die Kugel als capillare Oberfläche in erster Näherung führen. Setzen wir

$$(3) \qquad z = b - \sqrt{b^2 - x^2},$$

substituiren also als capillare Oberfläche eine Kugel vom Radius b, so erhalten wir für:

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{x}{b},$$

dieses soll nach (2) $= (h/a^2)\,x$ sein, es würde also folgen unter Rücksicht auf (2^a):

$$(3^a) \qquad b = \frac{a^2}{h} = \frac{R}{\cos\omega}.$$

Setzen wir nun den so bestimmten Werth z aus (3) in die ursprüngliche Gleichung (1) ein, so folgt als zweite Näherung aus:

$$\frac{2}{a^2}\int (h+z)x\,dx = \frac{xz'}{\sqrt{1+z'^2}} + \text{const.},$$

$$\frac{x^2}{b} + \frac{2}{a^2}\int\left(b - \sqrt{b^2-x^2}\right)x\,dx = x\sin\tau + \text{const.},$$

$$\frac{x^2}{b} + \frac{b}{a^2}x^2 + \frac{2}{3a^2}\sqrt{b^2-x^2}^3 = x\sin\tau + \text{const.}$$

Die Integrationsconstante aus (1) bestimmt sich bei dieser zweiten Näherung nicht mehr gleich Null, es folgt vielmehr aus $x=0$, $\tau=0$:

$$\frac{2}{3}\,\frac{b^3}{a^2} = \text{const.}$$

und wir haben:

$$(4) \qquad \frac{x^2}{b} + \frac{b}{a^2}x^2 + \frac{2}{3a^2}\left(\sqrt{b^2-x^2}^3 - b^3\right) = x\sin\tau.$$

Für $x = R$, $\tau = \pi/2 - \omega$ folgt nun:

$$\frac{1}{b} = \frac{h}{a^2} = \frac{\cos\omega}{R} - \frac{R}{a^2\cos\omega} - \frac{2}{3a^2}R\,\frac{\sin^3\omega - 1}{\cos^3\omega}$$

$$= \frac{\cos\omega}{R} - \frac{R}{3a^2\cos\omega}\left(1 - 2\,\frac{\sin^2\omega}{1+\sin\omega}\right),$$

im Falle eines verschwindenden Randwinkels $\omega = 0$:

$$(5) \qquad \frac{1}{b} = \frac{h}{a^2} = \frac{1}{R} - \frac{R}{3a^2}, \qquad a^2 = Rh\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{R}{h}\right).$$

Um zu weiteren Näherungen fortzuschreiten, hätten wir zu setzen:

$$z = b - \sqrt{b^2-x^2} + \delta,$$

$$z' = \frac{x}{\sqrt{b^2-x^2}} + \delta',$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{x}{b} + \delta'\,\frac{\sqrt{b^2-x^2}^3}{b^3},$$

die Gleichungen für δ' und für δ aufzustellen, und den so gefundenen Werth δ in (1) einzusetzen, worin an Stelle von $z : z + h + \delta$ zu treten hätte. Doch soll die weitere Rechnung nicht durchgeführt werden; das ist in meiner Seite 291 citirten Dissertation geschehen.

§ 107. Ueber die Möglichkeit der Anstellung von Präcisionsmessungen in dem Gebiet der Capillaritätserscheinungen der Flüssigkeiten.

Die Erscheinungen der Capillarität sind so häufig ein Gegenstand experimenteller Arbeiten gewesen, dass es hier ausgeschlossen ist, einen auch nur einigermaassen vollständigen Ueberblick darüber zu entwerfen. Nach der ganzen Anlage der Vorlesung sind hier in erster Linie die Arbeiten hervorzuheben, welche das Studium der Capillaritätserscheinungen in der Richtung von Präcisionsmessungen in günstigem und in ungünstigem Sinne beeinflusst haben.

Bei jedem theoretisch und experimentell durchforschten Gebiet wird nach Abschluss einer gewissen Entwickelungsstufe die Frage aufzuwerfen sein, ob das Gebiet exacter Präcisionsmessungen fähig ist oder nicht. Wir haben schon § 69 darauf hingewiesen, dass die praktische Physik zwischen Experimentaluntersuchungen und Präcisionsmessungen unterscheidet, dass die Wissenschaft beider Formen der Forschung bedarf, der naiven und kritischen Form — beider im besten Sinne des Wortes.

Ein Gebiet ist exacter Präcisionsmessungen fähig, wenn einerseits seine theoretische Behandlung wirkliche Erfolge zum mindesten in einer Richtung aufzuweisen hat, wenn andererseits die praktische Beobachtungskunst auf diesem Gebiete erwiesen hat, dass sie einigermaassen die Bedingungen in der Hand hat und beherrscht, welche die Theorie mit ihren Consequenzen voraussetzt und fordert. Schon aus diesem Zusammenhang ergiebt sich, dass nur der Physiker überhaupt im Stande sein wird, Präcisionsmessungen mit Erfolg anzustellen, welcher die Tragweite der Theorie vollkommen beherrscht und die Beobachtungen in ihrer Mannigfaltigkeit und Zusammensetzung zu analysiren und zu deuten versteht. Mit der blossen Behauptung, dies oder jenes beobachtet zu haben, ist hier um so weniger gewonnen, je unvollkommener und unvollständiger jene Beobachtungen mit ihren Bedingungen, unter denen sie angestellt sind, bekannt gegeben und mitgetheilt sind.

Unter den älteren Beobachtungen, welche hier als Präcisionsmessungen zur Stütze der Theorie und ihrer Grundlagen herangezogen werden können, zeichnen sich die von G. Hagen[1]) aus. Es wird eine grosse Mannigfaltigkeit von Oberflächenspannungserscheinungen messend verfolgt, welche sich in Uebereinstimmung mit der Theorie ergeben. Wir werden die Arbeiten von Hagen um so höher zu veranschlagen haben, als sie aus einer Zeit stammen, in der die Hülfsmittel der Präcisionsmesskunst nach mancher Richtung noch wenig entwickelt waren.

Der Zustand der Präcisionsmesskunst um die Mitte des Jahrhunderts wird z. B. durch an und für sich sehr sorgfältige Beobachtungen von C. Wolff[2]) charakterisirt, der die Steighöhe des Wassers in zwei Röhren von verschiedenem Glase bei verschiedenen Temperaturen beobachtet. Die Beobachtungen stimmen in sich an jedem Rohre in befriedigender Weise überein und zeigen, dass die einschlägigen Messungen sehr wohl einer Präcision fähig sind; aber die Werthe, die unter denselben Verhältnissen an den beiden verschiedenen Röhren erhalten sind, weichen von einander ab und lenken die Aufmerksamkeit auf die Schwierigkeit der Durchmesserbestimmung an der Contactstelle, auf welche es ankommt. Wolff ist sich auch dieser Schwierigkeit bewusst gewesen, aber er unterschätzt sie jedenfalls noch, wenn er sich aus Beobachtungen an zwei Röhren zu dem Schlusse berechtigt glaubt, dass das Aufsteigen einer und derselben Flüssigkeit unter sonst gleichen Umständen auch von der Natur der Röhren abhängt.

Die weitere Entwickelung der Präcisionsmessungen auf dem Gebiet der Capillaritätserscheinungen wurde durch zwei Forscher ungünstig beeinflusst, denen die Wissenschaft manche Anregung und Förderung verdankt, die aber gerade vermöge ihrer Autorität in der Lage waren, hemmend einwirken zu können: Wilhelmy und Quincke. Die Geschichte der Wissenschaft bietet häufig derartige Erscheinungen. Ich erinnere, wie hemmend seiner Zeit Newton auf die Entwickelung der praktischen Optik durch sein Vorurtheil eingewirkt hat, nach dem alle Gläser dieselbe Dispersion aufweisen sollten.

Wilhelmy und Quincke gingen beide von dem theoretisch durchaus berechtigten Wunsch aus, Erscheinungen zur Darstellung zu

---

1) G. Hagen: Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten. Denkschriften der Berliner Akademie 1845. Poggendorff's Annalen Bd. 67, 1846.

2) C. Wolff: De l'influence de la température sur les phénomènes, qui se passent dans les tubes capillaires. Ann. de chimie (3) Bd. 49. Poggendorff's Annalen Bd. 101 u. 102, 1857.

bringen, welche die Möglichkeit gewähren sollten, einen Anhaltspunkt für die Grösse der Wirkungssphäre der Cohäsions- und Adhäsionskräfte zu gewinnen. Indem die Theorie diese Wirkungssphäre verschwindend klein setzt, konnte jede Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung im Sinne einer endlichen, nicht verschwindend kleinen Wirkungssphäre jener Kräfte gedeutet werden.

Wilhelmy[1]) bestimmte das Gewicht der von Cylindern und Platten capillar gehobenen Flüssigkeitsmengen bei verschiedener Tiefe des Eintauchens und glaubte aus seinen Messungen nicht nur auf eine Abhängigkeit der Capillaritätsconstante von der Krümmung der Wand, sondern auch auf eine bedeutende Verdichtung der Flüssigkeit an der Oberfläche der eingetauchten Cylinder und Platten schliessen zu dürfen. In meiner Dissertation[2]) habe ich aber des Näheren ausgeführt, dass Wilhelmy's merkwürdige Resultate in einen sehr einfachen Zusammenhang mit den Querschnitten der angewandten Cylinder und Platten zu bringen sind, welcher unabhängig von der Substanz, aus der Cylinder und Platten bestehen, gestattet, die Wilhelmy'schen Resultate im voraus zu berechnen.

Quincke[3]) hat einmal in einer Reihe von Arbeiten die Messung von Randwinkeln in einer Weise theoretisch zu verwerthen gesucht, in der sie nach den Auseinandersetzungen von § 103 entschieden nicht verwerthet werden dürfen. Seinen Randwinkelwerthen fehlt die freie Beweglichkeit der Contactlinie, welche eine Voraussetzung des Satzes von der Constanz des Randwinkels ist, und daher können diese Werthe auch nicht constant wiederkehren.

Quincke[4]) hat ferner in einer Reihe von Arbeiten die Mannigfaltigkeit der Oberflächenspannungserscheinungen nach den verschiedensten Richtungen hin studirt. Er hat aber bei diesen Studien je länger je mehr den naiven Standpunkt der Forschung eingenommen, der mehr darauf gerichtet war, sich des Reichthums der Erscheinungen zu erfreuen, als die Bedingungen genau zu präcisiren, unter denen

---

1) Wilhelmy: Poggendorff's Annalen Bd. 119, 121 u. 122, Arbeiten aus den Jahren 1863 u. 1864.

2) Ueber den Einfluss der Krümmung der Wand auf die Constanten der Capillarität bei benetzenden Flüssigkeiten. Diss. Königsberg i. Pr. 1880, im Auszug: Wiedemann's Annalen Bd. 11.

3) Quincke: Poggendorff's Annalen 137 (1869), 160 (1877); Wiedemann's Annalen 2 (1877).

4) Quincke: Poggendorff's Annalen 105 (1858), 135 (1868), 138 (1869), 139 (1870), 160 (1877); Wiedemann's Annalen 35 (1888), 52 u. 53 (1894).

jene Erscheinungen zu Stande kommen. Seine Arbeiten erscheinen so wenig den Forderungen der Präcisionsmesskunst zugewandt, dass man ihnen eher die Anschauung entnehmen könnte: das Gebiet der Capillaritätserscheinungen ist zur Zeit exacter Präcisionsmessungen nicht fähig, als das Gegentheil.

Präcisionsmessungen erfordern in erster Linie, dass man genau gleiche Bedingungen des Oefteren herzustellen versucht, unter denen man Messungen wiederholen kann, und dass man mit aller Energie danach strebt, unter gleichen Bedingungen auch genau gleiche Resultate zu erzielen. Indem Quincke bei seinen Messungen der Steighöhen in Capillarröhren z. B. sich darauf beschränkt, jedes Rohr nur einmal zu beobachten, entzieht er seine Beobachtungen der für Präcisionsmessungen so nöthigen Selbstcontrolle. So konnte er die Schwierigkeit unterschätzen, welche die ganze Entwickelung der Methode der Steighöhen beherrscht, und welche darin besteht, genau für die Stelle der Contactlinie auch genau den Querschnitt des Rohres auszumessen — eine Schwierigkeit, welche mit der Enge des Rohres zunimmt. Man wende dagegen nicht ein, dass ein Rohr beim zweiten Gebrauch eben nicht mehr dasselbe ist, sondern bereits veränderte Bedingungen aufweist. Ist das der Fall, so würde es eben Aufgabe der Präcisionsmesskunst sein, solange die Bedingungen zu studiren, bis es gelingt, constante Resultate zu erzielen, d. h. im vorliegenden Fall die Röhren so zu behandeln, dass sie constante Steighöhen aufweisen.

§ 108. **Uebersicht über meine eigenen Arbeiten zum Erweise der Möglichkeit von Präcisionsmessungen auf dem Gebiet der Capillaritätserscheinungen.**

Meine eigenen einschlägigen Arbeiten[1]) gehen nunmehr zwanzig Jahre zurück und haben die Entwickelung genommen, dass mir der Nachweis vollkommen gelungen erscheint, dass Erscheinungen der Capillarität sowohl in theoretischer wie in praktischer Hinsicht sehr wohl exacter Präcisionsmessungen fähig sind.

Meine ersten Arbeiten aus den Jahren 1880 und 1882 litten noch unter den mangelhaften Hülfsmitteln, welche mir damals zur Bestimmung der Röhrenquerschnitte an den Contactstellen zur Verfügung standen. Nichtsdestoweniger machte damals bereits die Verbindung

---

1) Wiedemann's Annalen Bd. 11 (1880), 17 (1882), 53 (1894), 56 (1895), 66 (1898).

von Steighöhenbeobachtungen gut benetzender Flüssigkeiten zwischen planparallelen Platten und in Röhren von nahezu kreisförmigem Querschnitt einen Einfluss der Krümmung der Wandung im Sinne der Anschauungen von Wilhelmy und Quincke sehr unwahrscheinlich. Bei meiner Arbeit vom Jahre 1882 über die Cohäsion von Wasser und wässrigen Salzlösungen habe ich mich um so mehr auf Röhren von nahezu kreisförmigem Querschnitt beschränkt, da es sich als schwierig erwies, planparallele Platten in ihrer Flächenausdehnung in gut benetzbarem Zustand mit Wasser herzustellen und längere Zeit zu erhalten. Bei Röhren mit ihren inneren, gegen äussere Einwirkungen gut geschützten, nicht zu sehr ausgedehnten Wandungen war das leichter zu erreichen; nur durften die Röhren nicht zu eng gewählt werden, weil sich eine intensive Reinigung der inneren Wandung durch Säuren oder Alkalien und Nachspülen mit Wasser in Folge der dann auftretenden starken inneren Reibung als unmöglich erwies. Meine Vorgänger hatten wohl ausnahmslos mit zu engen Röhren gearbeitet.

Ich habe auf Herstellung guter Benetzbarkeit meiner Röhren von Anbeginn den grössten Werth gelegt, da ich mir sagte, dass nur im Falle vollkommener Benetzbarkeit ($\omega = 0$) die Ausführung wirklicher Präcisionsmessungen überhaupt möglich sei. Theoretisch würde es ja allerdings bei genauer Kenntniss des jedesmal vorhandenen Randwinkels gleichgültig sein, ob die Flüssigkeit die Röhrenwandung benetzt oder nicht; aber die Methode von Quincke[1]), welche den Rand winkel auszumessen gestattet, hat nicht den Genauigkeitsgrad, um mit der Genauigkeit von Capillaritätsmessungen netzender Flüssigkeiten rivalisiren zu können, und erfordert für den Fall, dass gleichzeitig Steighöhen gemessen werden sollen, praktisch zu lange Zeit, um die zusammengehörigen Werthe von Steighöhe und Randwinkel mit Sicherheit zu geben. Unter solchen Umständen kam für meine Messungen Alles darauf an, die in Betracht kommenden Wandungen so vorzubereiten, dass die Benetzbarkeit an der Contactstelle wenigstens für die Zeit der Beobachtung erhalten blieb.

Als Kriterium vollkommener Benetzbarkeit ergaben sich mir im Sinne der Ausführungen von § 103: 1) Absolut leichte Verschiebbarkeit der Contactlinie, welche sich bei Wasser dadurch sehr deutlich äusserte, dass geeignete Erschütterungen die Flüssigkeitkuppe in Schwingungen um die Gleichgewichtslage versetzten. — 2) Voll-

---

1) Quincke: Wiedemann's Annalen 52 (1894).

kommene Uebereinstimmung der unter gleichen äusseren Bedingungen angestellten Höhenmessungen. Bei der Empfindlichkeit endlicher Randwinkelwerthe geringfügigen Nebenumständen gegenüber wäre eine solche Constanz bei Existenz endlicher Randwinkel völlig ausgeschlossen gewesen.

Bei meinen Beobachtungen aus den Jahren 1880 und 1882 war ich mir der Unsicherheit der Querschnittsbestimmungen in Folge unvollkommener mikroscopischer Hülfsmittel sehr wohl bewusst. Es hatte darum für mich einen eigenen Reiz die Frage nach der Möglichkeit exacter Präcisionsmessungen auf dem Gebiet der Capillaritätserscheinungen von Neuem aufzunehmen, als Quincke 1894 Beobachtungen veröffentlichte, die sich auf Capillarröhren von verschiedenem Querschnitt und verschiedener Substanz bezogen, deren Resultat einfach dahin zu deuten war, dass das einschlägige Gebiet noch nicht reif für Präcisionsmessungen sei — und als ich seit einiger Zeit in einem Zeiss'schen Mikroscop verbunden mit einem Objectschraubenmikrometer ein Mittel besass, mit äusserster Genauigkeit Röhrenquerschnitte ohne optische, parallaktische und mechanische Fehler ausmessen zu können.

Der Erfolg meiner Bemühungen war ein in jeder Beziehung positiver. In meiner Arbeit von 1894 konnte ich die Einflusslosigkeit der Röhrensubstanz und des Röhrenquerschnitts auf Steighöhenmessungen von Wasser im Sinne der Theorie nachweisen, im Jahre 1895 ging ich dann zu der definitiven Aufgabe über, die Präcisionsmessungen für reines Wasser unter genauer Angabe aller Nebenumstände zwischen 0^0 und 40^0 Celsius durchzuführen. 1898 konnte ich auch auf frisch ausgezogene[1]), sehr enge Capillarröhren, die unter Wasser aufbewahrt wurden, die Fähigkeit der Methode für Präcisionsmessungen ausdehnen. Immer war in erster Linie die Forderung zu erfüllen, dass an verschieden Tagen unter gleichen Bedingungen an denselben Röhren ausgeführte Messungen auch dasselbe Resultat ergaben.

Als definitives Ergebniss meiner Messungen kann ich präcisiren, dass es heute möglich erscheint die Capillaritätsconstanten des Wassers für eine gegebene Temperatur bis nahezu $^2/_{10000}$ des Werthes zu definiren.[2]) Dabei werden gegenüber älteren Messungen die Fortschritte

---

1) Frisch ausgezogene Capillarröhren sind zuerst von Quincke 1894 in der auf voriger Seite citirten Arbeit als gut benetzbar erkannt, aber immer nur zu einmaligen Messungen verwandt worden.

2) Aus den Resultaten meiner Arbeit führe ich an: Als Capillaritätsconstante

in Erwägung zu ziehen sein, welche in den letzten Jahrzehnten Thermometrie und Metronomik (Herstellung von Theormometern und Meter-Normalen sowie ihre Vergleichung) gemacht haben — Fortschritte, die ich bei meinen Arbeiten nicht unberücksichtigt gelassen habe.

Wie für jede Arbeit, so will auch für meine Arbeiten der Standpunkt aufgesucht sein, von dem aus sie zu beurtheilen sind. Nur wer den Charakter und die Bedeutung der Präcisionsmessungen verkennt, wird daran Anstoss nehmen, dass ich wiederholt auf denselben Gegenstand zurückgekehrt bin und meine Messungen auf ein verhältnissmässig enges Gebiet beschränkt habe. Präcisionsmessungen, wenn sie Erfolg haben sollen, — und gerade die Geschichte der einschlägigen Beobachtungen der Oberflächenspannung zeigt, wie leicht der Erfolg ausbleiben kann, — setzen eine sehr genaue Kenntniss der Forderungen und Consequenzen der Theorie in Verbindung mit praktischen Erfahrungen und Fertigkeiten voraus und können eigentlich nur bei wiederholter Inangriffnahme[1]) auf die Stufe der Vollkommenheit gehoben werden, deren sie bei den instrumentellen Hülfsmitteln der Zeit fähig sind. In Anbetracht der Sorgfalt und Zeit, welche sie voraussetzen, fordern sie geradezu die Einschränkung auf ein enges Gebiet, indem sie davon ausgehen, dass der wissenschaftlichen Systematik mehr gedient ist durch ein sehr gründliches in die Tiefe gehendes Studium eines engen Erscheinungsgebietes als durch ein mehr in die Breite gehendes Studium weiterer Erscheinungsclassen.

---

des reinen Wassers bei 15° Celsius ergab sich für Königsberg: 14,969 [mm^2], als wirklicher Werth der Oberflächenspannung an der Grenze von feuchter Luft bei circa 750 mm Druck: 7,469 [mg/mm] beziehungsweise 73,30 [gr/sec^2]; cf. Wiedemann's Annalen 56 (1895), S. 483.

1) Ich darf hier vielleicht aus den beiden letzten Jahrzehnten an die wiederholten Ohm-Bestimmungen, an die wiederholten Bestimmungen des elektrochemischen Aequivalents des Silbers durch F. Kohlrausch erinnern, und ich darf hier vielleicht die Worte anführen, mit denen die Herren Richarz und Krigar-Menzel ihren Bericht über die Bestimmung der Gravitationsconstanten in den Berliner Sitzungsberichten 1896 schliessen: „Alle diese Schädlichkeiten, deren Einfluss sich erst während der Arbeit herausstellte, würden sich bei einer etwaigen Wiederholung der Versuche erheblich herabsetzen lassen, sodass bei einer solchen, unter Benutzung der von uns gewonnenen Erfahrungen, eine beträchtlich vermehrte Sicherheit der Wägungen mit Bestimmtheit zu erwarten wäre.“ — Kann sich der einzelne Forscher zu einer Wiederholung seiner Präcisionsmessungen in erneuter Arbeit nicht entschliessen, so bleibt damit immer für lange Zeit ein guter Theil von den werthvollen Erfahrungen verloren, welche eine erhöhte Präcision der Bestimmung einer Constante gewährleisten würden.

Ich darf hier vielleicht an die sehr ähnlich liegende Stellung der Bessel'schen Pendelbeobachtungen zur wissenschaftlichen Systematik erinnern.

Das durchaus berechtigte subjective Moment meiner praktischen Forschung wird im vorliegenden Fall darin zu sehen sein, dass ich als das enge Gebiet, welches mir zum Präcisionsstudium der Oberflächenspannungserscheinungen besonders geeignet erschien, die Messung der Steighöhen in Röhren von kreisförmigem Querschnitt ausgesucht habe. Wenn andere Forscher dieses von mir ausgewählte Gebiet als ganz besonders ungeeignet ansehen sollten, würden sie verpflichtet sein, das von ihnen näher zu bezeichnende Gebiet mindestens auf die von mir erreichte Höhe der Präcisionsmessung zu heben, andernfalls die Kritik als eine durchaus unfruchtbare und nichtssagende zu bezeichnen sein dürfte.

Historische Uebersicht zu V.

(Man vergleiche die historische Einleitung in Lagrange Mécanique analytique Part. I, Sect. VI, auch das Biographisch-Literarische Handwörterbuch von J. C. Poggendorff.)

Archimedes 287—212 (vor Christus).
Simon Stevinus 1548—1620.
Blaise Pascal 1623—1662.
Leonhard Euler 1707—1783.
Alexis Claude Clairaut 1713—1765.

Pierre Simon Laplace 1749—1827.
Thomas Young 1773—1829.
Karl Friedrich Gauss 1777—1855.
Siméon Denis Poisson 1781—1840.
Franz Ernst Neumann 1798—1895.

Von Archimedes rührt das nach ihm benannte Princip her, von Stevinus das hydrostatische Paradoxon (Hypomnemata mathematica, Bd. III, Ausgabe von Snellius, Leiden 1608). Auf Pascal ist der Satz zurückzuführen, dass der Druck sich gleichförmig nach allen Seiten verbreitet (Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air, 12°, Paris 1662), auf Clairaut der Begriff und die Untersuchung der Niveauflächen (Théorie de la figure de la terre, Paris 1743), auf Euler die Grundgleichungen der Hydrostatik (Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides. Mém. Berlin 1755).

Die Hydrostatik der Oberflächentheile einer Flüssigkeit knüpft an folgende Arbeiten: Th. Young, An essay on the cohesion of fluids (Philosophical Transactions 1805); Laplace, Théorie de l'action capillaire (Mécanique céleste, Vol. IV, Supplement, Paris 1806/7); Gauss, Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, Göttingen 1829 (bezw. 1830); Poisson, Théorie nouvelle de l'action capillaire, 4°, Paris 1835.

Der Satz von F. Neumann über die Constanz der Randwinkel dreier an einander stossender Flüssigkeiten und ihre Beziehung zu den zugehörigen Spannungswerthen der Trennungsflächen findet sich zuerst gedruckt in der Dissertation von Paul du Bois-Reymond (Berlin 1859).

VI. Einführung in die Behandlung geophysikalischer Fragen.

1) Theoretische Vorbemerkungen und Vorstudien zur Geophysik.

109. Charakteristik und Stellung der Geophysik im Rahmen der physikalischen Systematik. 110. Charakteristik der in der Geophysik anzuwendenden Methoden.

111. Allgemeine Studien über die Lage eines Gravitationsmittelpunkts. 112. Die Gravitation von Kugelschalen und Kugeln auf äussere und innere Punkte (Newton).

2) Ueber den inneren Zusammenhang der Schwere und der Gravitation.

113. Gleichgewichtsfigur der rotirenden Erde. Aenderung der Schwere mit der geographischen Breite. Clairaut's Satz. 114. Geophysikalische Studien über die Druckvertheilung im Innern der Erde. 115. Aenderung der Schwere in Folge lokaler Einflüsse. Die Gravitation eines Kreiscylinders auf einen Punkt der Axe. Poisson's Correction der Schwereformel.

116. Historische Rückblicke. Newton's Nachweis der Identität der Schwere und der Gravitation. 117. Ueber die directen Beweise für die Erddrehung durch die Fallversuche von Benzenberg und Reich und durch Foucault's Pendelversuch.

118. Ueber die Methoden zur Bestimmung der Gravitationsconstanten und der mittleren Dichte der Erde.

VI. 1) Theoretische Vorbemerkungen und Vorstudien zur Geophysik.

§ 109. **Charakteristik und Stellung der Geophysik im Rahmen der physikalischen Systematik.**

Wir knüpfen an die Auseinandersetzungen des IV. Abschnitts, welche die Bedeutung der praktischen Präcisionsmessungen für die Physik, insbesondere für die physikalische Systematik in das rechte

Licht setzen sollten, und welche die praktische Physik als Kunst in der Ausarbeitung physikalischer Methoden und im Bau physikalischer Instrumente charakterisirten. In den näheren Ausführungen wurde in erster Linie an Messungen im Laboratorium, an das Experiment gedacht, bei dem man die Bedingungen, unter denen eine Erscheinung eintritt, vollkommen in der Hand hat. Gerade die Abänderung solcher Bedingungen und die Untersuchung ihres Erfolges lässt das Studium der Natur und ihrer Gesetze als einer besonderen Präcision fähig erscheinen.

Von diesen Präcisionsmessungen unterscheidet sich eine andere Classe von Beobachtungen, nicht minder wichtig für den Aufbau der wissenschaftlichen Systematik und nicht minder geeignet zur Ausarbeitung einer besonderen Methodik — Beobachtungen, im weiteren Sinne des Wortes, bei denen wir das Laboratorium verlassen und die Natur in ihrer eigenen grossen Werkstätte aufsuchen, um sie in ihrem Walten und Wirken zu studiren, ohne in der Lage zu sein, in die Bedingungen eingreifen zu können, unter denen Erscheinungen eintreten. Ausgerüstet mit den Erfahrungen und Kenntnissen, welche das Studium der praktischen Physik im Laboratorium in Verbindung mit unseren theoretisch entwickelten Vorstellungen gereift hat, wird es unsere Aufgabe sein, rückwärts in dem Walten der äusseren, grossen Natur die Bedingungen wiederzuerkennen, die wir im Laboratorium als wesentlich für gewisse Erfolge erkannt haben.

Die Ausführung der hier einschlägigen Beobachtungen übersteigt in der überwiegenden Mehrzahl von Fällen das Können und Vermögen des Einzelnen. Hier hat an Stelle des einzelnen Forschers die Organisation eines wohlgeleiteten, mit allen Hülfsmitteln ausgestatteten Centralinstituts zu treten. Hier setzt, soweit es sich um die Lösung detailirter Fragen handelt, die Thätigkeit wissenschaftlicher Expeditionen ein.

Die Wichtigkeit dieser Classe von Beobachtungen für die wissenschaftliche Systematik darf nicht unterschätzt werden. Es handelt sich einmal hier darum, in der grossen, äusseren Natur die Tragweite unserer wissenschaftlichen Grundsätze auf eine sehr bedeutsame, eigenartige Probe zu stellen, es handelt sich weiter darum, den postulirenden Grundsätzen unseres Systems und den Naturgesetzen von einer anderen Seite die rückwirkende Verfestigung zu geben, deren Nothwendigkeit wir von Anbeginn betont haben.

Unsere wissenschaftlichen Grundsätze sollen in diesem Abschnitt ihre Anwendung auf wesentlich andere Grössenverhältnisse finden, wie in IV. und II. 3). In IV. handelte es sich um Grössenverhältnisse, wie sie bei Laboratoriumsversuchen vorliegen, in II. 3) handelte es sich um Grössenverhältnisse, wie sie in der Planetenwelt vorliegen. Hier kommen Grössenverhältnisse in Betracht, wie sie durch die Dimensionen der Erde gegeben sind. Auch darüber hinaus werden einige der anzustellenden theoretischen Untersuchungen ihre Bedeutung haben. Ich erinnere daran, dass wir in II. 3) die Massen der Sonne und der Planeten punktförmig gesetzt haben, diese Festsetzung wird in § 112 ihre nähere, rückwirkende Begründung erhalten. Die folgenden Betrachtungen werden überhaupt von vorneherein ausgedehnte Massen ins Auge fassen.

Als die postulirenden Grundbegriffe des Newton'schen Systems, die hier von anderer Seite eine rückwirkende Verfestigung finden, wären die Begriffe von der absoluten Orientirung in Raum und Zeit hervorzuheben (cf. §§ 21—23). Wir sind nun einmal mit unseren Beobachtungen und Messungen auf die Erde angewiesen, und wir haben uns in Folge dessen zu vergegenwärtigen, dass beim Auf- und Ausbau unseres wissenschaftlichen Systems gerade durch unseren geocentrischen Standpunkt praktische Schwierigkeiten entstehen können. Es giebt keinen anderen Weg, diese Schwierigkeiten zu überwinden, als den durch unsere Theorien gegebenen, welche uns den absoluten Standpunkt anweisen, den praktisch einzunehmen uns ein für alle Mal versagt ist, dessen nothwendige Existenz wir aber ungeachtet uns vielleicht vorgeworfener metaphysischer Verdächtigungen theoretisch postuliren müssen. Es ist das der Weg, welcher die Lücken ausfüllt, die directe sinnliche Betrachtung offen lässt, — der Weg, welcher allein die Möglichkeit eröffnet, das wissenschaftliche System als das in sich geschlossene Ganze darzustellen, das uns als Ziel dauernd vorschwebt (cf. § 3).

So kann heute kein Zweifel bestehen, dass die Thatsache der Rotation der Erde die Aufstellung und Entwickelung des Galilei-Newton'schen Systems lange Zeit gehemmt und unmöglich gemacht. Als Consequenz der Newton'schen Gravitationsanschauungen wird hier ferner die bisher gänzlich unerörtert gelassene Frage nach dem Zusammenhang der Galilei'schen Schwere und der Newton'schen Gravitation zu behandeln sein.

Wir haben in dem Vorhergehenden die systematische Seite geophysikalischer Untersuchungen und Messungen für die physikalische

Wissenschaft hervorgehoben. Wir dürfen darum die Bedeutung der engeren Disciplin, der Geophysik in sich nicht vergessen. Die Geophysik ist wie jede wissenschaftliche Disciplin sich selbst Zweck; sie entnimmt zur Erreichung ihres Zieles: der genauen Kenntniss der Gestalt der Erde und ihrer physikalischen Zustände Hülfsmittel, wo sie solche findet, von der Astronomie, Geodäsie, Physik und geht dabei von der Richtigkeit des systematischen Gebäudes dieser Disciplinen aus, während wir umgekehrt die Erfolge, welche die Geophysik bei diesen ihren Arbeiten und Bemühungen zu verzeichnen hat, für die Tragweite und Sicherung unseres physikalischen Systems verwerthen wollen.

Es soll damit von Neuem auf die Thatsache der gegenseitigen Stützung und Bezugnahme der Wissenschaft und ihrer Theile hingewiesen werden, welche einen wiederholten Kreislauf der Erkenntniss im Sinne des § 1 nothwendig macht. Jeder neuer Kreislauf wird dann mit einer wesentlichen Bereicherung unserer Kenntnisse und unseres Standpunkts verbunden sein. Wenn ich es im Folgenden unternehme, eine bescheidene Umschau in der Behandlung geophysikalischer Fragen zu halten, soll dabei wesentlich die Rückwirkung auf die physikalische Systematik leitender Gesichtspunkt bleiben. Die Disciplin der Geophysik selbst ist zu umfangreich, als dass es möglich wäre im Rahmen dieser Vorlesung eine auch nur einigermaassen befriedigende Skizze entwerfen zu können. In dieser Beziehung muss auf die Werke von Helmert[1]) und Günther[2]) verwiesen werden.

§ 110. Charakteristik der in der Geophysik anzuwendenden Methoden.

Die Methode, deren wir uns bedienen werden, können wir in folgender Weise charakterisiren:

Wir werden unsere systematischen Grundsätze und Naturgesetze theoretisch auf Massenvertheilungen in Anwendung bringen, deren Anordnung uns durch die in der Natur vorliegenden geometrischen Formen besonders nahe gelegt wird. Zu diesen Formen werden wir vor Allem die Kugelgestalt zu rechnen haben; wir finden die Kugelgestalt in auffallender Weise aus directer Beobachtung an Sonne,

1) F. R. Helmert: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Leipzig, Bd. 1, 1880; Bd. 2, 1884.

2) S. Günther: Lehrbuch der Geophysik. 2. Aufl., Stuttgart 1897.

Mond und Planeten verkörpert, aus indirecter Beobachtung sehr nahe auch an der Erde.

In hervorragendem Grade interessirt bei so ausgedehnten Massen, wie sie in Sonne, Erde und Mond vorliegen, die Frage nach der Newton'schen Gravitation. Giebt es allgemein einen Punkt, einen Gravitationsmittelpunkt, für den man die gravitirende Wirkung der Gesammtmasse auf einen äusseren Punkt in Ansatz bringen kann? Giebt es im Speciellen einen solchen Punkt für die homogene Kugel und für die homogene Kugelschale? und wo ist dieser Punkt? Diese Fragen finden bereits in Newton's Principien ihre Beantwortung.

Nach strenger, mathematischer Ableitung der Newton'schen Sätze kann der Frage näher getreten werden, deren Beantwortung Newton als eine der Hauptleistungen seiner Forschung betrachtet hat, dass die Galilei'sche Schwere ein specieller Fall der Gravitation ist und aus ihr abgeleitet werden kann. Die Art und Form dieses Nachweises ist geeignet, uns das zu vergegenwärtigen, was wir in mancher Hinsicht bei geophysikalischen Anwendungen als charakteristisch für die Methode hervorheben können: Die Verbindung von mathematisch präcisirten und mathematisch streng durchgeführten Aufgaben in sich auf der einen Seite mit Verhältnissen der Wirklichkeit auf der anderen Seite, bei denen es zweifelhaft erscheinen kann, inwiefern die Voraussetzungen erfüllt sind, unter denen die mathematische Behandlung durchgeführt wurde.

Wir werden hier andererseits eingedenk der Regel der Isolation und Superposition (§ 12) Schritt um Schritt vorwärts schreiten. Wir werden beginnen mit dem, was der Grössenordnung nach das Ausschlaggebende, Wesentliche ist, und erst dann, wenn wir unsere Anschauung an dem Wesentlichen ausgebildet haben, zu einer Verfeinerung, beziehungsweise einer Ergänzung der Behandlung schreiten, welche der Abweichung von dem Wesentlichen Rechnung trägt.

Eine solche verfeinerte Ausarbeitung der Anschauung wäre die, dass die Erdschwere nicht ausschliesslich durch die Gravitation der Erdmasse gegeben ist, dass sie, wenn auch in geringem Grade in Folge der Rotation der Erde durch die damit verbundene Centrifugalkraft modificirt erscheint.

Eine andere verfeinerte Ausarbeitung der Anschauung wäre die, dass die Erde nicht genau eine Kugel ist, sondern nur näherungsweise. Die Abweichungen von der Kugelgestalt sind genereller und lokaler Art. Die Thatsache der generellen Abweichung der Erde von der Kugelgestalt — die Erde nähert sich ihrer Figur nach einem abgeplatteten Rotationsellipsoid — giebt Veranlassung, Beziehungen zwischen Hydrostatik und Geophysik aufzusuchen, wie solche in dem theoretischen Studium und in der praktischen Erforschung der Gleichgewichtsfigur der Erde ihren Ausdruck gefunden haben (Satz von Clairaut). Die Thatsache der lokalen Abweichung giebt Veranlassung zum Studium verschiedener Massenformen; wir werden die Gravitation eines Kreiscylinders auf einen Punkt der Axe behandeln, insofern wir die praktische Frage nach der Gravitation eines Hochplateaus in Zusammenhang bringen könnnen mit der theoretischen Frage nach der Gravitation eines niedrigen auf die Kugeloberfläche aufgesetzten Kreiscylinders.

Es handelt sich hier nicht um vage und zweifelhafte Anwendungen unserer wissenschaftlichen Grundsätze, es handelt sich darum, für das Studium der in der grossen Wirklichkeit auftretenden Erscheinungen die leitenden Gesichtspunkte zu finden und aufzustellen, nach denen wir allein hoffen können, das Chaos der äusseren Wirklichkeit mit ihrer zerstreuenden Mannigfaltigkeit von Erscheinungen ihrem Werth und ihrer Bedeutung nach zu ordnen und zu sichten. Es handelt sich weiter darum, für die Erscheinungen im Grossen, für welche uns zunächst Anschauungen fehlen, einen Maassstab zu gewinnen.

Wir werden auch hier von einer gewissen Präcision der Behandlung reden können. Können wir die numerischen Verhältnisse der äusseren Wirklichkeit, z. B. die Massenverhältnisse auch nicht immer als gegebene ansehen, so werden sie, wo eine Messung ausgeschlossen erscheint, doch einer gewissen Schätzung zugänglich sein.

Ich kann hier nur das wiederholen, was ich an anderer Stelle ausgeführt habe[1]): Eine schätzende Behandlung eines Gegenstandes schliesst ebensowenig wie eine messende Behandlung Exactheit aus. In beiden Fällen haben wir Grenzwerthe aufzustellen, zwischen denen der wahre gesuchte Werth liegt. Der Unterschied zwischen schätzender und messender Behandlung besteht streng genommen nur darin, dass bei schätzender Behandlung die Grenzwerthe weiter auseinanderliegen, als bei messender Behandlung. Auch wenn bei schätzender Behandlung die gesuchte Grösse zwischen dem einfachen und zehnfachen Werth schwankt, wir haben doch eine Anschauung gewonnen. Die Aufsuchung eines Grenzwerthes ist Sache einer vollkommen exacten Rechnung, für welche die Daten sicher so zu wählen sind, dass sie

---

1) Erkenntnisstheoretische Grundzüge, S. 103.

auf der einen Seite der Wirklichkeit liegen. Es gelingt nicht immer Grenzwerthe zu finden, zwischen denen die Wirklichkeit liegt, in vielen Fällen wird man sich mit einer oberen oder einer unteren Grenze begnügen müssen.

§ 111. Allgemeine Studien über die Lage eines Gravitationsmittelpunktes.

Wir beginnen mit allgemeinen theoretischen Studien über die Wirkung ausgedehnter Massensysteme auf einen Massenpunkt unter Zugrundelegung des Newton'schen Gravitationsgesetzes, nach dem die Wirkung zwischen zwei Massenelementen direct proportional den Massen, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung erfolgt. Den Punkt, auf den die Wirkung untersucht werden soll, bezeichnet Boltzmann als Aufpunkt; wir schliessen uns dieser Terminologie an.

Ein System von Massenelementen $\mu_1, \mu_2 \cdots$ habe die Coordinaten $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2 \cdots$, der Aufpunkt habe die Masse m und die Coordinaten x, y, z; bezeichnen wir weiter die Entfernungen der Massenelemente $\mu_1, \mu_2 \cdots$ von m mit $\varrho_1, \varrho_2 \cdots$, so haben wir für die Componenten der resultirenden Wirkung des gesammten Systems auf m nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz:

$$\begin{aligned} X &= fm\left(\mu_1 \frac{\xi_1 - x}{\varrho_1{}^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - x}{\varrho_2{}^3} + \cdots\right), \\ Y &= fm\left(\mu_1 \frac{\eta_1 - y}{\varrho_1{}^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - y}{\varrho_2{}^3} + \cdots\right), \qquad (1) \\ Z &= fm\left(\mu_1 \frac{\zeta_1 - z}{\varrho_1{}^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - z}{\varrho_2{}^3} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Erfüllen die wirkenden Massen $\Sigma\mu$ den Raum stetig, so werden die Ausdrücke (1):

$$\begin{aligned} X &= fm \iiint \varepsilon \frac{\xi - x}{\varrho^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \\ Y &= fm \iiint \varepsilon \frac{\eta - y}{\varrho^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \qquad (2) \\ Z &= fm \iiint \varepsilon \frac{\zeta - z}{\varrho^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet ε die Dichte der den Raum stetig erfüllenden Masse, ϱ die Entfernung des variabeln Massen- oder Volumelementes vom Aufpunkt.

Wir definiren nun als Gravitationsmittelpunkt des Systems einen Punkt (ξ), (η), (ζ), in dem wir die Gesammtmasse des Systems $\Sigma\mu = M$ uns vereinigt denken können, ohne dass dadurch die gravitirende Wirkung auf den Aufpunkt eine Aenderung erfährt. Bezeichnen wir die Entfernung des so definirten Gravitationsmittelpunkts vom Aufpunkt mit (ϱ), so ist der analytische Ausdruck unserer Definition des Massenmittelpunkts gegeben durch:

$$(3) \qquad \begin{aligned} X &= fmM\frac{(\xi)-x}{(\varrho)^3}, \\ Y &= fmM\frac{(\eta)-y}{(\varrho)^3}, \\ Z &= fmM\frac{(\zeta)-z}{(\varrho)^3}. \end{aligned}$$

Es handelt sich für uns nun darum, Anschauungen über die Lage dieses so definirten Gravitationsmittelpunktes zu gewinnen, insbesondere den Versuch zu machen, die Lage des Gravitationsmittelpunktes in Beziehung zu setzen zur Lage des § 51 definirten Massenmittelpunktes.

Zunächst können wir die Aussage machen, dass der Gravitationsmittelpunkt ebensowenig in die wirkende Masse hineinzufallen braucht, wie das beim Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) der Fall sein kann. Die einfachsten Hohlkörper liefern hier passende Beispiele.

Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück und verlegen jetzt den Coordinatenanfangspunkt in den Massenmittelpunkt des wirkenden Körpers. Sind dann die Dimensionen des wirkenden Körpers klein gegenüber den Entfernungen seiner einzelnen Theile vom Aufpunkt m, so werden wir in (2):

$$\frac{\xi - x}{\varrho^3}, \quad \frac{\eta - y}{\varrho^3}, \quad \frac{\zeta - z}{\varrho^3}$$

in eine Taylor'sche Reihe entwickeln können und z. B. erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\xi - x}{\varrho^3} = \left(\frac{\xi - x}{\varrho^3}\right)_0 &+ \xi\left(\frac{\partial \frac{\xi - x}{\varrho^3}}{\partial \xi}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial \frac{\eta - y}{\varrho^3}}{\partial \eta}\right)_0 + \zeta\left(\frac{\partial \frac{\zeta - z}{\varrho^3}}{\partial \zeta}\right)_0 \\ &+ \frac{\xi^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \frac{\xi - x}{\varrho^3}}{\partial \xi^2}\right)_0 + \cdots \end{aligned}$$

Hierin beziehen sich die Klammerausdrücke mit dem Index 0 auf den Massenmittelpunkt. Da der Massenmittelpunkt jetzt der Coordinatenanfangspunkt ist, wird nach § 52 (3):

$$\iiint \varepsilon \xi \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = 0,$$
$$\iiint \varepsilon \eta \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = 0,$$
$$\iiint \varepsilon \zeta \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = 0,$$

und die Ausdrücke (2) gestalten sich zu:

$$X = fmM\left(\frac{\xi - x}{\varrho^3}\right)_0 + f\frac{m}{2}\left(\frac{\partial^2 \frac{\xi - x}{\varrho^3}}{\partial \xi^2}\right)_0 \iiint \varepsilon \xi^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta + \cdots$$

$$(4) \quad Y = fmM\left(\frac{\eta - y}{\varrho^3}\right)_0 + f\frac{m}{2}\left(\frac{\partial^2 \frac{\eta - y}{\varrho^3}}{\partial \xi^2}\right)_0 \iiint \varepsilon \xi^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta + \cdots$$

$$Z = fmM\left(\frac{\zeta - z}{\varrho^3}\right)_0 + f\frac{m}{2}\left(\frac{\partial^2 \frac{\zeta - z}{\varrho^3}}{\partial \xi^2}\right)_0 \iiint \varepsilon \xi^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta + \cdots$$

Diese Gleichungen lehren, dass der Gravitationsmittelpunkt im Allgemeinen durchaus nicht mit dem Massenmittelpunkt zusammenfällt. Die Vergleichung mit (3) zeigt, dass dies nur der Fall ist, wenn sich die Ausdrücke für X, Y, Z in (4) auf den ersten Term reduciren.

Dieses wäre der Fall, wenn einmal sämmtliche Integrale von der Form:

$$\iiint \varepsilon \xi^l \eta^m \zeta^n \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

für ganzzahlige l, m, n verschwinden würden.

Dies wäre aber auch der Fall, wenn die Ausdrücke:

$$\left(\frac{\partial^2 \frac{\xi - x}{\varrho^3}}{\partial \xi^2}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 \frac{\eta - y}{\varrho^3}}{\partial \xi^2}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 \frac{\zeta - z}{\varrho^3}}{\partial \xi^2}\right)_0 \cdots$$

für sich verschwinden würden. Dann liegt der Aufpunkt m hinreichend von der wirkenden Masse entfernt und wir können sagen:

Der Gravitationsmittelpunkt entfernt sich um so mehr vom Massenmittelpunkt, je näher der Aufpunkt m den wirkenden Massen $\Sigma\mu$ rückt; er nähert sich um so mehr dem Massenmittelpunkt, je weiter sich der Aufpunkt von den wirkenden Massen $\Sigma\mu$ entfernt. Bei parallel wirkenden Kräften fallen beide Punkte, Gravitationsmittelpunkt und Massenmittelpunkt, zusammen.

§ 112. Die Gravitation von Kugelschalen und Kugeln auf äussere und innere Punkte (Newton).

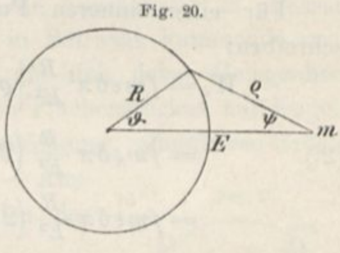
Indem wir uns jetzt dem Studium der gravitirenden Wirkungen von Kugelschalen und Vollkugeln zuwenden, knüpfen wir nicht an die allgemeinen Betrachtungen des vorigen Paragraphen, sondern stellen directe, specielle Rechnungen an:

Es sei δ die Dicke der Schale, ε die Dichte, welche gleichförmig die Kugelschale erfülle, dann ist die gravitirende Wirkung eines Oberflächenelementes $\delta\, d\omega$ auf den Aufpunkt m in der Richtung der Verbindungslinie ϱ:

$$f m \varepsilon \delta \frac{d\omega}{\varrho^2}.$$

Zu jedem Element $d\omega$ wählen wir nun ein symmetrisch zur Verbindungslinie (E) von Kugelmittelpunkt und Aufpunkt gelegenes Element $d\omega'$; beide Elemente haben dann dieselbe Componente parallel zu E, eine gleiche aber entgegengesetzte Componente senkrecht zu E. In Summa werden so alle Componenten senkrecht zu E verschwinden, und nur die Componenten parallel zu E übrig bleiben, sodass wir als Ausdruck für die gesammte Wirkung der Kugelschale auf den Aufpunkt m erhalten:

Fig. 20.



$$W = f m \varepsilon \delta \int \frac{d\omega \cos\psi}{\varrho^2}$$

$$(1) \qquad = f m \varepsilon \delta 2\pi \int_0^\pi \frac{R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta (E - R\cos\vartheta)}{\varrho^3},$$

indem:

$$d\omega = R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi, \quad \cos\psi = \frac{E - R\cos\vartheta}{\varrho},$$

R den Kugelradius, ϑ eine der geographischen Breite, φ eine der geographischen Länge äquivalente Grösse bedeutet.

Wir ersetzen nunmehr die Integration nach ϑ in (1) durch eine solche nach ϱ, dazu verhelfen uns die Beziehungen:

$$\varrho^2 = R^2 + E^2 - 2RE\cos\vartheta, \quad \varrho\, d\varrho = RE \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

mithin können wir setzen:

$$\frac{R \sin\vartheta\, d\vartheta}{\varrho} = \frac{d\varrho}{E}, \quad E - R\cos\vartheta = \frac{E^2 - R^2 + \varrho^2}{2E}.$$

Der Ausdruck (1) lässt nun eine Integration zu, indem:

$$(2) \quad W = f m \varepsilon \delta \pi \frac{R}{E^2} \int \frac{E^2 - R^2 + \varrho^2}{\varrho^2} d\varrho = f m \varepsilon \delta \pi \frac{R}{E^2} \left| \varrho - \frac{E^2 - R^2}{\varrho} \right|.$$

An dieser Stelle der Rechnung haben wir nun die Unterscheidung einzuführen, ob der Aufpunkt m ein äusserer oder ein innerer Punkt bezogen auf die Kugelschale ist. Die Entfernungsgrössen ϱ sind ihrer ganzen physikalischen Bedeutung nach stets als wesentlich positive Grössen zu behandeln, und so werden wir in (2) als Grenzen für äussere Punkte m die Werthe $E - R$ und $E + R$, für innere Punkte m die Werthe $R - E$ und $R + E$ zu betrachten haben.

Für einen äusseren Punkt haben wir also den Ausdruck (2) zu schreiben:

$$\begin{aligned} W_a &= fm\varepsilon\delta\pi \frac{R}{E^2} \left| \varrho - \frac{E^2 - R^2}{\varrho} \right|_{E-R}^{E+R} \\ &= fm\varepsilon\delta\pi \frac{R}{E^2} \left(2R - \frac{E^2 - R^2}{E + R} + \frac{E^2 - R^2}{E - R}\right) \\ &= fm\varepsilon\delta\pi \frac{R}{E^2} \left(2R - (E - R) + (E + R)\right) = fm\varepsilon\delta \frac{4\pi R^2}{E^2}. \end{aligned}$$

Führen wir die Gesammtmasse der Kugelschale $M = \delta\varepsilon 4\pi R^2$ ein, so erhalten wir für die gravitirende Wirkung einer Kugelschale auf einen äusseren Punkt m:

$$W_a = f\frac{mM}{E^2}. \tag{2^a}$$

Für einen inneren Punkt haben wir den Ausdruck (2) zu schreiben:

$$\begin{aligned} W_i &= fm\varepsilon\delta\pi \frac{R}{E^2} \left| \varrho - \frac{E^2 - R^2}{\varrho} \right|_{R-E}^{R+E} \\ &= fm\varepsilon\delta\pi \frac{R}{E^2} \left(2E - \frac{E^2 - R^2}{R + E} + \frac{E^2 - R^2}{R - E}\right) \qquad (2^i) \\ &= fm\varepsilon\delta\pi \frac{R}{E^2} \left(2E + (R - E) - (R + E)\right) = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2^a) und (2^i) enthalten für kugelförmige Schalen von homogener Dichte und constanter Dicke folgendes, mathematisch strenges Resultat: Eine Kugelschale wirkt nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz auf äussere Punkte so, als wäre die Gesammtmasse der Kugelschale im Mittelpunkt vereint; eine Kugelschale wirkt nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz auf innere Punkte überhaupt nicht. Für äussere Punkte fällt also Gravitationsmittelpunkt und Massenmittelpunkt einer Kugelschale zusammen.

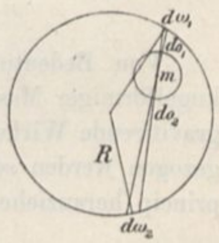
Diese Resultate sind für die im umgekehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Kräfte charakteristisch. Sie finden ebenso auf Newton's Gravitationsgesetz, wie auf Coulomb's elektrostatisches Gesetz ihre Anwendung.

Wir haben in den Gleichungen (2^a) und (2^i) die Mittel gewonnen, die Wirkung von Vollkugeln nach dem Newton'schen Gesetz auf äussere und innere Punkte anzugeben. Dabei ist es nicht nöthig die Vollkugel als mit homogener Dichte erfüllt anzunehmen, wir können sie auch als zusammengesetzt aus einem System concentrischer Schalen, von denen jede mit einer anderen Dichte homogen erfüllt ist, ansehen. Gerade in dieser allgemeinen Fassung erscheinen die nun für Vollkugeln auszusprechenden Sätze von besonderer Bedeutung für die Geophysik. Diese Sätze lauten:

Eine Vollkugel wirkt nach aussen wie eine Kugelschale so, als wäre ihre Gesammtmasse im Kugelmittelpunkt vereinigt. Eine Vollkugel wirkt auf innere Punkte so, als wäre nur die Gesammtmasse der concentrischen Kugel, auf deren Oberfläche der innere Punkt liegt, im Kugelmittelpunkt vereinigt, als wirke die ausserhalb liegende Kugelschale überhaupt nicht.

Das Resultat, dass eine Kugelschale von homogener Dichte auf einen inneren Punkt nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz überhaupt keine Wirkung ausübt, ist so einfach, dass das Bedürfniss erweckt wird, das Resultat directer durch die Anschauung zu erfassen und zu begreifen. Ich schalte hier die in Betracht kommende geometrische Ableitung um so lieber ein, als sich dabei Gelegenheit bietet, auf Ausdrücke für Projectionen von Flächenstücken auf Kugelflächen und damit auf den Begriff der Kegelöffnung, scheinbaren Grösse oder des räumlichen Winkels hinzuweisen — Ausdrücke und Begriffe, die in allen Theilen der Physik Verwendung finden.

Fig. 21.



Wir legen durch den Aufpunkt m im Innern eine Kegelfläche mit unendlich kleiner Oeffnung, diese Kegelfläche schneide aus der gegebenen Kugelfläche mit dem Radius R die Flächenelemente $d\omega_1$ und $d\omega_2$ und aus einer um den Aufpunkt m beschriebenen Kugelfläche mit dem Radius 1 die Flächenelemente do_1 und do_2 aus. Beide Flächenelemente do_1 und do_2 sind gleich gross — wir schreiben dafür do — und können als die Centralprojectionen der Flächenelemente $d\omega_1$ und $d\omega_2$ auf die Einheitskugelfläche um m aufgefasst werden.

Dieses vorausgeschickt können wir nun schreiben:

Die Wirkung von $\varepsilon\delta d\omega_1$ auf m:

$$f m \varepsilon \delta \frac{d\omega_1}{\varrho_1^2} = f m \varepsilon \delta \frac{d o_1}{\cos(\varrho_1 R)};$$

die Wirkung von $\varepsilon\delta d\omega_2$ auf m:

$$f m \varepsilon \delta \frac{d\omega_2}{\varrho_2^2} = f m \varepsilon \delta \frac{d o_2}{\cos(\varrho_2 R)}.$$

Indem nun $do_1 = do_2$ und wegen der Kleinheit der angewandten Kegelöffnung auch $\cos(\varrho_1 R) = \cos(\varrho_2 R)$ ist, erkennen wir, dass beide Elementarwirkungen gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, sich also in Summa aufheben. Es lässt sich aber in dieser Weise die gesammte Wirkung der Kugelschale auf einen inneren Punkt in Paare von einander aufhebenden Elementarwirkungen zerlegen. So kommt, anschaulich behandelt, das Resultat zu Stande, welches wir vorhin lediglich rechnerisch abgeleitet haben, dass die Gesammtwirkung der Gravitation einer Kugelschale auf innere Punkte verschwindet.[1])

Wir haben bisher lediglich die elementaren Stücke do_1, do_2 als Kegelöffnungen bezeichnet und können uns nach dem Obigen ihre geometrische Bedeutung als scheinbare Grösse von $d\omega_1$, $d\omega_2$ klar machen. Wir fügen hier nur noch die Bemerkung hinzu, dass diese Bezeichnungen sich unmittelbar auf die endlichen Flächenstücke

$$\int do_1 = \int \frac{d\omega_1 \cos(\varrho_1 R)}{\varrho_1^2}, \qquad \int do_2 = \int \frac{d\omega_2 \cos(\varrho_2 R)}{\varrho_2^2}$$

übertragen. Die Bezeichnung Kegelöffnung rührt von F. E. Neumann her.

Von Bedeutung ist die Ausdehnung unserer Gravitationssätze kugelförmiger Massen auf äussere Punkte, welche darin liegt, dass die gravitirende Wirkung kugelförmiger Massen auf einander in Betracht gezogen werden soll. Wir können dann das Newton'sche Reactionsprincip heranziehen und sagen: Wenn die Wirkung einer Kugel mit

---

1) Newton, der in Liber I, Sectio XII seiner Principien (S. 189—210 der Thomson'schen Ausgabe) die Gravitation kugelförmiger Körper behandelt, giebt sowohl für innere wie für äussere Aufpunkte geometrisch anschauliche Ableitungen, wie denn überhaupt die mathematische Behandlung Newton's als eine synthetisch geometrische zu bezeichnen ist. Die Ableitung für innere Aufpunkte erscheint bei Newton noch kürzer als bei uns, da es ihm nicht darauf ankommt, den Begriff der Kegelöffnung zu entwickeln.

der Masse M_1 auf einen äusseren Massenpunkt m_2 so angesehen werden kann, als ob M_1 im Kugelmittelpunkt vereinigt wäre, dann wird nach dem Reactionsprincip auch umgekehrt die Wirkung von m_2 auf M_1 so angesehen werden können, als ob M_1 im Mittelpunkt der Kugel vereinigt wäre. Man sieht so den Satz ein: Zwei Vollkugeln, die entweder homogen sind oder aus concentrischen homogenen Schichten bestehen, ziehen einander gravitirend so an, als ob ihre Massen im Massenmittelpunkt vereinigt wären.

VI. 2) Ueber den inneren Zusammenhang der Schwere und der Gravitation.

§ 113. Gleichgewichtsfigur der rotirenden Erde. Aenderung der Schwere mit der geographischen Breite. Clairaut's Satz.

Für die Bestimmung der Gleichgewichtsfigur der Erde könnten wir einmal davon ausgehen, dass die Gleichgewichtsfigur im Wesentlichen ihre Bestimmung zu einer Zeit fand, in der noch das ganze Innere der Erde flüssig war. Wir können uns aber auch der Ende des § 87 ausgeführten Gedanken erinnern, dass für so ausgedehnte Massen, wie sie die Erde darstellt, der Effect in Folge der Grösse, welche die Gravitation und damit der Druck der Theile gegen einander im Innern erreicht, in mancher Hinsicht auf dasselbe herauskommen wird, wenn wir die Erde als aus starren Theilen bestehend behandeln. Die Schwierigkeit der Behandlung liegt in der gegenseitigen Gravitation der Massentheile, deren Dichtigkeitsvertheilung uns unbekannt ist.

Das hydrostatische Problem der Gleichgewichtsfigur einer rotirenden Flüssigkeitsmasse homogener Dichte unter Einwirkung der Gravitation hat zuerst von Dirichlet und Jacobi eine Lösung erfahren. Jacobi wies für gewisse Umdrehungsgeschwindigkeiten auf die Möglichkeit eines schwächer und eines stärker abgeplatteten Rotationsellipsoides hin und, was besonders auffallend war, unter Umständen auch auf die Möglichkeit eines dreiaxigen Ellipsoides als Gleichgewichtsfigur.

Für uns kommt als Gleichgewichtsfigur der rotirenden Erde nur eine wenig von der Kugel abweichende Gestalt in Betracht. Wir wollen der Einfachheit wegen im Folgenden an eine Vorstellung knüpfen, die auch F. Neumann in seiner einleitenden Vorlesung zu benutzen pflegte, nach der die Erde aus einem festen kugelförmigen

Kern bestehe, den wir uns durch eine in den beiden Erdpolen tangirende Kugel herausgeschnitten denken können; dieser feste Kern sei mit einer verhältnissmässig dünnen Flüssigkeitsschicht (Wasser) bedeckt, deren Dicke von den Polen zum Aequator stetig zunimmt. Die umgebende Flüssigkeitsschicht hat dann eine zu geringe Masse, als dass ihre gravitirende Wirkung in Betracht käme.

Wir gehen mit der Vorstellung in die Rechnung, dass die an der Erdoberfläche beobachtete Schwerkraft nichts anderes ist, als die Resultante, welche sich aus den Gravitationskräften des Kugelkerns und aus der Centrifugalkraft in Folge der Umdrehung der Erde um ihre eigene Achse zusammensetzt. Ganz wie bei der Entwickelung des physikalischen Systems mancherlei im voraus vorweg genommen werden musste, um später durch die daraus folgenden Consequenzen seine wesentliche, rückwirkende Stütze zu finden, so werden wir auch hier vorweg auf die directen Beweise Bezug nehmen können, welche für die Drehung der Erde um ihre Axe erbracht sind. Der Hauptsache nach will auch die hier vorzutragende Theorie mit ihren Consequenzen als ein in sich geschlossenes Ganzes aufgefasst sein, das nicht nur an keiner Stelle einen Widerspruch aufweist, im Gegentheil noch die Anregung gewährt, manche Erscheinung in einem neuen Zusammenhang und von neuen Gesichtspunkten aus anzusehen.

Bezeichnen wir mit G die Erdschwere am Pol, mit R den Radius des hier tangirenden festen Kugelkerns, so wird nach den zu Grunde gelegten Vorstellungen an den Erdpolen die Schwere G identisch mit der Gravitation sein müssen, d. h. nach dem Newton'schen Satz von der Gravitation einer Vollkugel (§ 112) wird sein:

$$G = f\frac{M}{R^2},$$

und ebenso die gravitirende Wirkung des Kugelkerns im Abstand r:

$$f\frac{M}{r^2} = G\frac{R^2}{r^2}.$$

Bezeichnen wir nun weiter mit r den Radiusvector vom Kugelmittelpunkt nach dem veränderlichen Punkt der freien flüssigen Oberfläche, legen den Coordinatenanfangspunkt in den Mittelpunkt des Kugelkerns, die z-Axe durch die Pole, die x-, y-Axen in die Aequatorealebene und setzen endlich $\omega = 2\pi/T$, wo T die Umdrehungszeit der Erde bedeutet, dann wirken auf die Masseneinheit an der Erdoberfläche die Componenten:

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
X &= -G\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{x}{r} + \omega^2 x,\\
Y &= -G\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{y}{r} + \omega^2 y,\\
Z &= -G\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{z}{r}.
\end{aligned}
$$

Nach den Grundsätzen der Hydrostatik § 94 (3) bilden wir nun:

$$
\begin{aligned}
dU &= Xdx + Ydy + Zdz\\
&= -GR^2\frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} + \omega^2(xdx + ydy)
\end{aligned}
$$

und erhalten als Niveauflächengleichung:

$$
(2) \qquad U = G\frac{R^2}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{const.}
$$

Der Parameter der Niveaufläche $U = \text{const.}$, welcher der freien Oberfläche entspricht, bestimmt sich durch die Lage der Pole, für welche:

$$
x = 0, \quad y = 0, \quad z = R,
$$

also auch $r = R$ ist.

Wir erhalten so als Gleichung der Oberfläche aus (2):

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
GR &= G\frac{R^2}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),\\
\frac{1}{r} &= \frac{1}{R} - \frac{\omega^2}{2GR^2}(x^2 + y^2).
\end{aligned}
$$

Mit der Bestimmung der Gleichgewichtsfigur der Erde durch (3) haben wir nun weiter die Mittel gewonnen, die geophysikalisch wichtige Frage nach der durch Centrifugalkraft und Entfernung vom Kugelcentrum modificirten Schwerkraft nach Grösse und Richtung beantworten zu können. Es hängt damit die andere Frage nach der Abweichung des als geographische Breite bekannten Winkels ψ von dem durch Radiusvector von Erdcentrum nach Oberflächenort r und Aequatorealebene gegebenen Winkel φ zusammen.

Berücksichtigen wir gleich mit, dass bei der gegenwärtigen Rotationsgeschwindigkeit der Erde

$$
\frac{\omega^2 R}{G} = \frac{1}{291}
$$

klein gegen 1 ist, dass wir bei der geringen Abweichung der Erde von der Kugelgestalt in den Gliedern höherer Ordnung r durch R ersetzen können, so folgt aus (1) in Verbindung mit (3):

$$(4)\quad \begin{aligned} g = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} &= G\frac{R^2}{r^2}\sqrt{1-2\frac{\omega^2 R}{G}\cos^2\varphi} \\ &= G\left(1-\frac{\omega^2 R}{G}\cos^2\varphi\right)^2 = G\left(1-2\frac{\omega^2 R}{G}\cos^2\varphi\right). \end{aligned}$$

Als geographische Breite ψ wird der Winkel definirt, den die Richtung der Erdschwere, wie sie sich aus Gravitation und Centrifugalkraft zusammensetzt, mit der Aequatorealebene bildet. Wir haben somit:

$$(5)\quad \begin{aligned} \operatorname{tang}\psi = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{\omega^2 R}{G}}} \\ &= \operatorname{tang}\varphi\left(1+\frac{\omega^2 R}{G}\right). \end{aligned}$$

Es folgt hieraus, dass, wie zu erwarten stand, ψ und φ nur wenig von einander abweichen. Man darf daher setzen:

$$\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\varphi + \frac{\psi-\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Der Vergleich dieser Formel mit Gleichung (5) ergiebt:

$$(6)\quad \psi-\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,\frac{\omega^2 R}{G} = \frac{1}{2}\sin 2\psi\,\frac{\omega^2 R}{G}.$$

Wir werden daher auch in (4) φ durch die geographische Breite ψ ersetzen dürfen. Alle Ausdrücke (4), (5), (6) sind richtig bis auf Glieder erster Ordnung (eingeschlossen).

Wir bedienen uns jetzt der Gleichungen (3) und (4), um Ausdrücke für die Abplattung der Erde und für die Zunahme der Schwere vom Aequator zum Pol aufzustellen. Die Verbindung beider Ausdrücke führt uns zu dem berühmten, für die Geophysik so wichtigen Clairaut'schen Satz.

Definiren wir als Abplattung der Erde die Grösse:

$$A = \frac{R_a - R}{R} = \frac{R_a}{R} - 1,$$

worin R_a den Aequatorealradius bedeutet, R, wie vorhin, den Polarradiusvector, und berücksichtigen wir, dass aus (3) richtig bis auf Glieder erster Ordnung folgt:

$$r = R\left(1+\frac{\omega^2 R}{2G}\cos^2\varphi\right),$$

so berechnet sich

$$(7)\quad A = \frac{R_a - R}{R} = \frac{\omega^2 R}{2G}.$$

Definiren wir weiter als Zunahme der Schwere vom Aequator zum Pol die Grösse:

$$Z = \frac{G - G_a}{G} = 1 - \frac{G_a}{G},$$

worin G_a die Schwere unter dem Aequator bedeutet, so berechnet sich nach (4):

$$(8) \qquad Z = \frac{G - G_a}{G} = \frac{2\omega^2 R}{G}.$$

Die Verbindung der Gleichungen (7) und (8) und zwar die einfache Addition liefert nun den berühmten Clairaut'schen Satz:

$$(9) \qquad Z + A = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 R}{G}.$$

Es ist aber hervorzuheben, dass Clairaut seinen Satz wesentlich strenger begründet hat, als wir es bei unserer mehr veranschaulichenden Rechnung gethan haben. Clairaut geht bei seiner Ableitung davon aus, dass die verschiedenen Massen im Inneren der Erde nach ihrer Dichtigkeit in concentrischen, ellipsoidischen Schalen um den Mittelpunkt vertheilt liegen, wobei es auf die Dichteänderung von Schale zu Schale nicht weiter ankommt. Diesem Umstande entspricht es denn auch, dass dem Clairaut'schen Satze für die Geophysik eine wesentlich grössere Bedeutung zukommt, als den theoretischen Werthen, die sich für A und Z berechnen lassen, auch wenn wir von unserer näherungsweisen Berechnung von A und Z durch die Gleichungen (7) und (8) ganz absehen.

Setzen wir in den Clairaut'schen Satz (9) die bekannten Werthe:

$$Z = \frac{1}{192}, \quad \frac{\omega^2 R}{G} = \frac{1}{291},$$

so folgt als Grösse der Abplattung $A = \frac{1}{288}$, während Bessel dafür aus Gradmessungen den Werth $1/_{300}$ abgeleitet hat.

Wenn wir jetzt die Abweichung dieses Werthes $A = \frac{1}{300}$ von dem numerischen Werth $1/_{582}$ nach (7) constatiren[1]), ebenso die Abweichung des beobachteten Werthes $Z = \frac{1}{192}$ von dem numerischen Werth $1/_{145}$ nach (8), so werden wir uns der Voraussetzungen unserer Berechnung zu erinnern haben, welche mit der Annahme eines festen kugelförmigen

1) Die unter Voraussetzung einer rotirenden Flüssigkeitsmasse von homogener Dichte berechnete Abplattung hat auf den Werth $1/_{232}$ geführt, ein Resultat, das nach der anderen Seite von der Wirklichkeit abweicht und theoretisch abweichen muss, da wir wissen, dass die Dichte der Erde nach dem Erdinnern zunimmt.

Kernes auf die Entwickelungsgeschichte des Erdballs keine Rücksicht genommen hat. Der Werth unserer einfachen Rechnung wird aber darin zu erblicken sein, dass sie im Ganzen eine richtige Anschauung von den in Betracht kommenden Grössenverhältnissen giebt.

§ 114. Geophysikalische Studien über die Druckvertheilung im Innern der Erde.

Wir knüpfen an die Behandlung der Gleichgewichtsfigur der Erde noch einige Studien über die im Inneren der Erde vorliegenden Druckverhältnisse, wollen dabei aber der Einfachheit halber wieder an die Kugelgestalt anknüpfen und von der Centrifugalkraft absehen.

Wir gehen von der hydrostatischen Grundgleichung § 93 (3) aus:

$$dp = \varepsilon(Xdx + Ydy + Zdz) = \varepsilon R dr,$$

indem wir die Betrachtung zunächst an eine flüssige Erde knüpfen, — auf die Berechtigung dieses Verfahrens kommen wir weiter unten zurück — und erinnern an den Satz über die Gravitation von homogenen Kugeln und Kugelschalen (§ 112), nach dem nur der innere Kugelkern, auf dessen Oberfläche der Aufpunkt liegt, eine Wirkung ausübt. Bezeichnen wir die Masse des Kugelkerns von dem Radius r mit m, so haben wir für eine homogene Kugel von der Dichte ε:

$$dp = -\varepsilon f \frac{m}{r^2} dr = -\varepsilon^2 f \frac{4\pi}{3} r dr.$$

Die Integration liefert:

$$p = p_0 + \varepsilon^2 f \frac{4\pi}{6} (R^2 - r^2).$$

p_0 ist hierin der Druck von 1 Atmosphäre an der Erdoberfläche für $r = R$, welcher gegenüber den gleich zu errechnenden enormen Druckkräften im Inneren nicht in Betracht kommt. Wir schreiben daher abgekürzt:

$$(1) \qquad p = \varepsilon^2 f \frac{4\pi}{6} (R^2 - r^2).$$

Führen wir die Tiefe unter der Erdoberfläche h ein, so wird für $r = R - h$:

$$p = \varepsilon^2 f \frac{4\pi}{6} \left(R^2 - (R - h)^2\right).$$

Als hydrostatischen Druck im Erdmittelpunkt erhalten wir aus (1) für $r = 0$:

$$(1^a) \qquad p_i = \varepsilon^2 f \frac{4\pi}{6} R^2.$$

Für eine Kugel von der Grösse der Erde berechnet sich dieser Druck bei der Dichte $\varepsilon = 1$ zu circa 50000 Atmosphären, bei der Dichte $\varepsilon = 5{,}5$ zu circa 1,5 Millionen Atmosphären. Diese Werthe haben keinen anderen Zweck, als uns eine Anschauung davon zu geben, um welche Grössenverhältnisse es sich etwa bei dem Druck im Inneren der Erde handelt. Der erste Werth dürfte für den Erdmittelpunkt zu kleine, der zweite zu grosse Zahlengrössen darstellen.

Eine andere Anschauung gewährt die Einführung der Schwere an der Oberfläche der homogenen Flüssigkeitskugel $(g) = f \cdot \varepsilon \frac{4\pi}{3} R$; es würde dann aus ($1^a$) folgen: $p_i = \varepsilon (g) R/2$. Der Druck im Centrum der Flüssigkeitskugel entspricht dem halben Druck einer Flüssigkeitssäule von der Höhe des Erdradius unter Einwirkung der Schwere.

Die enorm hohen Druckkräfte regen dazu an, eine Reihe von Consequenzen für die physikalischen Zustände im Erdinnern zu ziehen:

Man hat einmal versucht, die Dichtevermehrung nach dem Inneren der Erde als Folge des zunehmenden Drucks zu erklären. Diesem Versuch steht aber wohl gegenüber, dass für das Erdinnere eine erhebliche Compressibilität der Materie nicht in Betracht kommen kann.

Von grösserer Tragweite erscheinen thermodynamische Consequenzen. Unter gewöhnlichen Druckverhältnissen ist mit solch hohen Temperaturen, wie sie im Erdinnern vorliegen, die Vorstellung des flüssigen Aggregatzustandes verbunden, wie wir ihn auch den vorstehenden Rechnungen zu Grunde gelegt haben. Nun lehrt aber die Thermodynamik, dass der Schmelzpunkt einer Substanz durch hohen Druck ansteigt, wenn beim Erstarren eine Volumverminderung eintritt; wir dürfen danach unsere den gewöhnlichen Druckverhältnissen entsprechenden Anschauungen nicht ohne Weiteres auf die physikalischen Zustände im Erdinnern übertragen. Im Gegentheil erfordern die thermodynamischen Grundsätze, das Erdinnere als starr anzusehen. Diese Consequenz befindet sich im Einklang mit Folgerungen, welche aus den numerischen Werthen der Präcession und Nutation gezogen werden konnten.

Mit diesen Auseinandersetzungen scheinen dem Ausgangspunkt unserer Rechnungen die Grundlagen entzogen, insofern die Erde nicht flüssig, sondern fest ist. Demgegenüber wäre auszuführen, dass die Erde in einem früheren Stadium der Entwickelung jedenfalls flüssig war; gehen wir aber von einem solchen flüssigen Zustand aus, so lässt sich übersehen, dass beim Erstarren eines Körpers, wie es die

Erde ist, sich die Druckverhältnisse nur unwesentlich geändert haben werden. Wir können aber auch wieder auf die Ende § 87 ausgeführten Gedanken Bezug nehmen.

§ 115. Aenderung der Schwere in Folge lokaler Einflüsse. Die Gravitation eines Kreiscylinders auf einen Punkt der Axe. Poisson's Correction der Schwereformel.

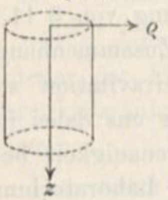
Wir haben in der Uebereinstimmung unserer Speculationen mit geophysikalischen Beobachtungen, wie sie die Behandlung von § 113 aufwies, einen der möglichen Beweise für den inneren Zusammenhang der Galilei'schen Schwere und der Newton'schen Gravitation zu erblicken. Es liegt in der Natur der Sache, dass wir uns dabei in mancher Hinsicht mit einem geringeren Grade der Genauigkeit begnügen müssen, als wir bei Präcisionsmessungen im Laboratorium gewohnt sind. Die Verhältnisse, auf welche wir die Gravitation irdischer Massen anzuwenden haben, im Besonderen die Dichtevertheilung der Massen im Erdinnern, sind uns zu wenig bekannt, als dass wir hier Präcisionswerthe ableiten könnten.

Die Möglichkeit einer grösseren Präcision der Darstellung, als wir sie im vorigen Paragraphen gegeben haben, soll nicht geleugnet werden, und sie ist durch eine Reihe von Werken und Arbeiten erwiesen — es möge hier nur auf das ausgezeichnete Werk von Helmert „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie“ (Leipzig 1880 u. 1884) verwiesen werden. Aber die von uns im vorigen Paragraphen vorgetragene Darstellung reicht für eine erste Einführung in die Disciplin der Geophysik vielleicht aus, zu veranschaulichen, welchen Charakter die theoretischen Behandlungen hier aufweisen.

Tragen die Behandlungen von § 113 einen mehr generellen Charakter — wir erinnern an die Frage nach der Aenderung der Schwere mit der geographischen Breite — so soll der vorliegende Paragraph erläutern, inwiefern man durch theoretische Rechnungen auch nach dem Studium lokaler Verhältnisse hin der Geophysik werthvolle Stützpunkte gewähren kann. Wir wollen die Frage nach Aenderung der Schwere in Folge lokaler gravitirender Einflüsse aufwerfen. Wir wollen uns im Speciellen mit der Gravitation eines Kreiscylinders auf einen Punkt seiner Axe beschäftigen und dann davon eine Anwendung machen auf die Aenderung der Schwere durch Hochplateaus. Wir kommen dadurch auf einen mathematischen Ausdruck, der bekannt ist unter dem Namen: „**Poisson's Correction der Schwereformel**“.

Die Höhe des Cylinders sei h, der Radius c, wir wollen z vertical nach unten in der Richtung der Cylinderaxe, die Polaraxe ϱ senkrecht dazu rechnen, ε' sei die Massendichtigkeit des Cylinders. Wir beschränken uns darauf, die gravitirende Wirkung auf die Masseneinheit für den Punkt der oberen Basisfläche in der Cylinderaxe zu berechnen.

Fig. 22.



Die Wirkung des Massenelementes $\varepsilon'\varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz$ auf die Masseneinheit ist:

$$f\,\frac{\varepsilon'\varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz}{\varrho^2+z^2}.$$

Zu jedem Massenelement lässt sich ein symmetrisch zur Cylinderaxe gelegenes Massenelement angeben, welches die Wirkungscomponente senkrecht zur z-Axe aufhebt; es kommen so für die Wirkung des Cylinders auf den Punkt der Axe in der oberen Basisfläche nur die Componenten parallel zur z-Axe allein in Betracht. Die Componente der Elementarwirkung in der Richtung der z-Axe ergiebt sich aber:

$$dW = f\varepsilon'\,\frac{\varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz}{\varrho^2+z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{\varrho^2+z^2}}.$$

Als Gesammtwirkung des Cylinders folgt so:

$$(1) \qquad W = f\varepsilon' 2\pi \int_0^h\!\!\int_0^c \frac{\varrho\, d\varrho\, z\, dz}{\sqrt{\varrho^2+z^2}^3}.$$

Die weitere Ausrechnung ergiebt:

$$W = f\varepsilon' 2\pi \int_0^c \varrho\, d\varrho \left| -\frac{1}{\sqrt{\varrho^2+z^2}} \right|_0^h = f\varepsilon' 2\pi \int_0^c \varrho\, d\varrho \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sqrt{\varrho^2+h^2}}\right)$$

$$= f\varepsilon' 2\pi \left| \varrho - \sqrt{\varrho^2+h^2} \right|_0^c = f\varepsilon' 2\pi\left(c - \sqrt{c^2+h^2}+h\right).$$

Für die uns vorschwebende geophysikalische Anwendung kommt nun im Besonderen der Fall in Betracht, dass der Cylinder im Verhältniss zur Breite niedrig ist, dass also h als klein gegenüber c betrachtet werden kann. Wir können dann entwickeln:

$$\sqrt{c^2+h^2} = c\left(1+\frac{1}{2}\frac{h^2}{c^2}\right)$$

und erhalten für die gravitirende Wirkung eines niedrigen Cylinders auf den Axialpunkt seiner Oberfläche:

$$(2) \qquad W = f\varepsilon' 2\pi h\left(1 - \frac{h}{2c}\right) \quad \text{bezw.:} \quad = f\varepsilon' 2\pi h.$$

Die gravitirende Wirkung eines sehr niedrigen Cylinders auf den Axialpunkt seiner Oberfläche stellt sich hiernach als im Wesentlichen unabhängig von seiner Breite dar, und wir können schliessen, dass durch den Ausdruck (2) die gravitirende Wirkung auf Oberflächenpunkte der Basis in hinreichendem Abstande von der Cylindermantelfläche überhaupt dargestellt werden wird. Darauf beruht die geophysikalische Anwendung des letzten Ausdrucks in (2) auf die Aenderung der Schwere durch Hochplateaus, die wir uns auf die etwa dem Clairaut'schen Satze entsprechende Figur der Erde aufgesetzt denken.

Bezeichnen wir die Schwere, wie sie der theoretischen Erdoberfläche etwa im Sinne des Clairaut'schen Satzes entspricht mit g, den Abstand vom Kugelcentrum der Erde im Sinne der Behandlung des vorigen Paragraphen mit R, so haben wir, abgesehen von dem Unterschiede der Centrifugalkräfte auf der Oberfläche und unterhalb des Hochplateaus, als Schwere auf der Oberfläche des Plateaus von der Höhe h:

$$g_0 = g \frac{R^2}{(R+h)^2} + f\varepsilon' 2\pi h.$$

Indem wir noch in dem Correctionsglied f durch die mittlere Dichte der Erde ε ausdrücken, für welche wir hier als in einem Correctionsgliede Kugelgestalt voraussetzen können:

$$f\frac{M}{R^2} = g, \quad M = \frac{4\pi}{3}\varepsilon R^3, \quad \text{also: } f = \frac{3g}{4\pi\varepsilon R},$$

erhalten wir unter Berücksichtigung der Kleinheit von h gegen R:

$$(3) \qquad g_0 = g\left[1 - \frac{h}{R}\left(2 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)\right].$$

Diese Beziehung stellt die von Poisson herrührende Correction der Schwereformel in Folge von Hochplateaus, die der theoretischen Figur der Erde aufgesetzt erscheinen, dar. Um eine Anschauung für die Grössenordnung des Correctionsgliedes zu geben, setzen wir z. B.:

$$\varepsilon = 5{,}53, \qquad \varepsilon' = 2{,}50$$

und erhalten in diesem Fall aus (3):

$$g_0 = g\left(1 - 1{,}32\,\frac{h}{R}\right).$$

§ 116. Historischer Rückblick. Newton's Nachweis der Identität der Schwere und der Gravitation.

Der innere Zusammenhang zwischen Schwere und Gravitation trat in den bisherigen Untersuchungen mehr indirect hervor. Wir wollen im Folgenden historisch der Momente gedenken, welche diesen Zusammenhang noch directer aufdecken, insofern sie den Zusammenhang der irdischen Schwere mit der Gravitation der Erde auf den Mond erweisen, insofern sie sodann directe Beweise für die Umdrehung der Erde liefern, und damit die Einführung der Centrifugalkraft in § 113 von Neuem rechtfertigen. Diese Zusammenstellung soll uns an die Ausführungen von § 1 erinnern, nach denen das physikalische System durch und durch auf gegenseitiger Stützung seiner einzelnen Theile beruht.

Der Zusammenhang der irdischen Schwere und der Gravitation der Himmelskörper hat eine besondere Rolle in der Geschichte der Newton'schen Entdeckungen gespielt. Brewster[1]) berichtet darüber in der von ihm verfassten Lebensbeschreibung Newton's:

„Nachdem Newton das Gesetz der Kraft, wodurch die Planeten zu der Sonne hingezogen werden, erhalten hatte (1666), war sein nächster Zweck, sich zu vergewissern, ob eine solche von der Erde ausgehende Kraft, nach dem Monde gerichtet und in dem quadratischen Verhältniss der Entfernung geschwächt, genüge, ihn in seiner Bahn zurückzuhalten. Bei der Ausführung dieser Berechnung war es nöthig, den Raum, durch den die schweren Körper bei gegebener Entfernung von dem Mittelpunkt der Erde, z. B. an ihrer Oberfläche, in einer Secunde fallen, mit dem Raume zu vergleichen, durch welchen der Mond in einer Secunde bei seinem Umlauf in einer kreisförmigen Bahn gleichsam zu der Erde fällt. Da er bei der Anstellung dieser Berechnung keine Bücher bei der Hand hatte, so behielt er die gewöhnliche Schätzung des damals von den Geographen und Seefahrern angenommenen Durchmessers der Erde bei und setzte voraus, dass jeder Grad der Breite 60 englische Meilen enthielte. Auf diesem Wege fand er, dass die den Mond in seiner Bahn zurückhaltende Kraft, als hergeleitet von derjenigen Kraft, welche den Fall der schweren Körper auf der Erdoberfläche verursacht, ein Sechstel grösser wäre, als die,

1) Im XI. Capitel. Deutsche Uebersetzung von Goldberg, Leipzig 1833, S. 119 u. folgende.

welche in seiner kreisförmigen Bahn wirklich beobachtet wird. Diese Differenz warf auf alle seine Speculationen einen Zweifel und verhinderte ihn, dem Publicum darüber eine Nachricht zu geben."

„Jedoch bewog ihn ein sehr interessanter Zufall, seine vorigen Forschungen wieder aufzunehmen. Als er im Jahre 1682 zu London einer Sitzung der königlichen Societät beiwohnte, wurde die von Picard 1679 ausgeführte Messung eines Grades des Meridians der Gegenstand der Unterhaltung. Newton nahm eine Abschrift des von dem französischen Astronomen erhaltenen Resultats, und nachdem er daraus die Grösse des Durchmessers der Erde gefolgert hatte, nahm er sogleich seine Berechnungen von 1666 wieder vor und fing an, selbige mit diesen neuen Daten zu wiederholen. Im Verfolg der Berechnung sah er, dass das von ihm zuvor erwartete Resultat herauszukommen schien, und er gerieth in einen solchen Zustand von Nervenreizbarkeit, dass er nicht im Stande war, die Berechnung fortzusetzen. In diesem Geisteszustande vertraute er sich einem seiner Freunde, und er hatte das hohe Vergnügen, seine früheren Ansichten vollkommen gegründet zu finden. Es wurde gefunden, dass die Schwerkraft, welche den Fall der Körper auf der Oberfläche der Erde bestimmt, wenn sie sich wie das Quadrat der Entfernung des Mondes von der Erde verringert, wirklich genau gleich ist der Centrifugalkraft des Mondes, sowie diese aus seiner beobachteten Entfernung und Geschwindigkeit gefolgert wird."

„Der Einfluss eines solchen Resultates auf einen solchen Geist kann mehr gedacht als beschrieben werden. Das ganze materielle Universum lag offen vor ihm; — die Sonne mit allen ihr angehörenden Planeten; — die Planeten mit allen ihren Trabanten; — die Cometen, welche in jeder Richtung in ihren excentrischen Bahnen rollen; — und die Systeme der Fixsterne, die sich bis in die entferntesten Grenzen des Raumes erstrecken. Mit einem Wort, alle die mannigfaltigen und verwickelten Bewegungen der Himmelskörper mussten sich auf einmal seinem Geiste als das nothwendige Resultat des Gesetzes darstellen, welches er in Beziehung auf die Erde und den Mond bewiesen hatte."

„Nachdem er dieses Gesetz auf die andern Körper des Systems ausgedehnt hatte, verfasste er eine Reihe von Sätzen über die Bewegung der Hauptplaneten um die Sonne, welche gegen Ende des Jahres 1683 nach London geschickt und bald darauf der königl. Societät mitgetheilt wurden."

Schematisch können wir uns Newton's Gedankengang durch folgende Formeln klar machen: Bezeichnen wir Masse und Radius der Erdkugel mit M und R, die grosse Axe der Mondbahn mit a, die Umlaufszeit des Mondes um die Erde mit T, so haben wir unter Bezugnahme auf das dritte Kepler'sche Gesetz § 46 (8) bezw. (9):

$$g = f\frac{M}{R^2}, \qquad fM = 4\pi\frac{a^3}{T^2},$$

mithin:

$$gR^2 = 4\pi\frac{a^3}{T^2}, \tag{1}$$

Präciser[1]) wird heute in der Astronomie nach dem Vorgang von Hansen (Darlegung der theoretischen Berechnungen der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Abhandlungen der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften, 1863 u. 1865) die hier nur schematisch angedeutete Beziehung zur Bestimmung der Mondparallaxe verwerthet, d. h. zur Bestimmung der scheinbaren Grösse des Aequatorealradius der Erde vom Mondmittelpunkt in mittlerer Entfernung der Erde gesehen. Es scheint damit die genauste Methode zur Bestimmung der Mondparallaxe gegeben zu sein. Während die besten directen Bestimmungen dafür Werthe zwischen 57′2″ und 57′3″ ergeben, findet nach der erwähnten Methode:

Hansen 1865: 57′ 2″,25,
Newcomb 1895: 57′ 2″,68.

§ 117. Ueber die directen Beweise für die Erddrehung durch die Fallversuche von Benzenberg und Reich und durch Foucault's Pendelversuch.

Wir haben § 113 die Schwerkraft an der Erdoberfläche aus Gravitation und Centrifugalkraft zusammengesetzt. Der Antheil der Schwere, der in der Centrifugalkraft seinen Ausdruck findet, hat darin seinen Ursprung aus, dass sich die Erde um ihre Axe dreht, wie es die Betrachtung der täglichen scheinbaren Bewegung des Fixsternhimmels nahelegt. Insofern der dort aufgestellte Ausdruck für g — und in erhöhtem Maasse thut es der von den Geodäten der Gegenwart präcisirte Ausdruck für g — eine generelle Uebereinstimmung mit den zahlreich auf der Erdoberfläche ausgeführten Bestimmungen der Beschleunigung g aufweist, werden wir darin rückwärts einen

1) Ich verdanke diese Angaben meinem geehrten Collegen Herrn Privatdocenten Dr. F. Cohn.

indirecten Beweis für die Thatsache der Umdrehung der Erde gegen Newton's absoluten Raum zu sehen haben. Es erscheint der Wunsch begreiflich, für die Umdrehung der Erde um ihre Axe auch directe physikalische Beweise heranzuziehen. Es kommen dabei in Betracht: Die Fallversuche, die in bedeutender Höhe eine östliche Abweichung aufweisen und die Drehung der Ebene, in der das Foucault'sche Pendel schwingt.

Die Verwerthung von Fallversuchen zum Beweise der Drehung der Erde hat schon Newton[1]) in Vorschlag gebracht. Später sind Versuche von Benzenberg (1801) und Reich (1832) ausgeführt. Die Versuche von Benzenberg haben Gauss[2]) (1803) Veranlassung gegeben, die Fundamentalgleichungen für die Bewegung schwerer Körper auf der rotirenden Erde aufzustellen.

Wir können eine Theorie dieser Versuche sehr einfach dadurch geben, dass wir den fallenden Stein als Trabanten auffassen, der sich um den Erdmittelpunkt als Attractionscentrum bewegt. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit des Trabanten innerhalb der Bahnebene, vom Erdmittelpunkt aus gerechnet, mit $d\varphi/dt$, mit n die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe, dann wird jene Winkelgeschwindigkeit des Trabanten in der Höhe h über der Erdoberfläche $n' = n\cos\psi$ sein, worin ψ die geographische Breite des Beobachtungsorts bedeuten möge, und wir erhalten unter Anwendung der ersten Kepler'schen Regel (§ 45) und der Galilei'schen Fallgesetze (§ 31 (5)):

$$\left(R + h - \frac{g}{2}\,t^2\right)^2 \frac{d\varphi}{dt} = (R + h)^2 n \cos\psi,$$

$$(1) \qquad d\varphi = \frac{n\cos\psi \cdot dt}{\left(1 - \frac{g}{2(R+h)}\,t^2\right)^2} = n\cos\psi\left(1 + \frac{g}{R+h}\,t^2\right) dt.$$

Der fallende Stein fällt auf die Erdoberfläche zur Zeit:

$$t = \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

In dieser Zeit wird der Stein als Trabant nach (1) den Winkel beschrieben haben:

$$\varphi = n\cos\psi\left(\tau + \frac{g}{R+h}\cdot\frac{\tau^3}{3}\right).$$

Die Erdoberfläche hat sich in dieser Zeit τ um das Stück $n\cos\psi\cdot\tau$ gedreht. Die gesuchte östliche Abweichung ist somit gegeben durch:

---

1) Brewster: Newton's Leben, Cap. 11, deutsche Uebersetzung S. 120, 121.

2) Gauss Werke, Bd. V, S. 495—503.

$$(2) \qquad R(\varphi - n\cos\psi\cdot\tau) = n\cos\psi\cdot g\,\frac{\tau^3}{3} = n\,\frac{\cos\psi}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\,.$$

Zur Vertiefung der Anschauung mag die Bemerkung hinzugefügt werden, dass die in Betracht kommende östliche Abweichung auch daraus abgeleitet werden kann, dass in Folge der Umdrehung der Erde, welche dem fallenden Stein eine anfängliche, nicht unbeträchtliche Horizontalgeschwindigkeit mittheilt, die Richtung der Schwerkraft auf den fallenden Stein während des Falles nicht genau dieselbe bleibt.

Reich[1]) verfügte bei seinen Beobachtungen im Dreibrüderschacht bei Freiberg über eine Fallhöhe von 158,5 Meter. Die Fallzeit betrug nach der Beobachtung im Mittel 6,01 Secunden, nach der Berechnung 5,685 Secunden. Als östliche Abweichung ergab die Beobachtung im Mittel 28,4 mm, die Berechnung 27,5 mm. Die einzelnen Beobachtungen weichen indessen ziemlich beträchtlich untereinander ab und zeigen dadurch, dass die einschlägigen Messungen keiner allzugrossen Präcision fähig sind.

Dasselbe wird man im Ganzen auch von den Messungen durch das Foucault'sche Pendel (1851) behaupten können, insofern es praktisch überaus schwierig erscheint festzustellen, ob das Foucault'sche Pendel wirklich in einer Ebene schwingt. Die geringste Störung macht aus dem Foucault'schen Pendel, das in einer Ebene schwingen soll, ein Raumpendel, bei dem sich die einzelnen Schwingungen als Ellipsen mit fortschreitender eigener Drehung darstellen; die Drehung fällt um so stärker aus, je excentrischer die Ellipse ist, und der Sinn der Drehung hängt von der Richtung ab, in der die Schwingungsellipsen durchlaufen werden.

Es soll die Theorie des Foucault'schen Pendels[2]) hier nicht weiter entwickelt werden. Es soll nur noch hervorgehoben werden, dass die Drehung des Foucault'schen Pendels am stärksten an den Polen der Erde ist, dass sie am Aequator verschwindet. Die vorhin behandelten Fallversuche gestatten umgekehrt für den Aequator am deutlichsten die Feststellung der Erdrotation, an den Polen versagen sie.

---

1) Reich: Poggendorff's Annalen, Bd. 29, S. 494—501.

2) Man findet eine solche z. B. in Kirchhoff's Mechanik, IX. Vorl., § 3.

§ 118. Ueber die Methoden zur Bestimmung der Gravitationsconstanten und der mittleren Dichte der Erde.

Die hier zu besprechenden Methoden und ihr Ziel haben in erster Linie geophysikalisches Interesse. Die Astronomie hat insofern kein wesentliches Interesse an der Bestimmung der Gravitationsconstanten, als in ihr die Masse überhaupt nur als ein Rechnungsausdruck eingeführt erscheint und nach dem dritten Kepler'schen Gesetz in einem besonderen Maasse — dem Gravitationsmaasse — Ausdruck findet, welches die Gravitationsconstante zu 1 macht. Für die Physik muss hervorgehoben werden, dass die bisher hier ausgeführten einschlägigen Präcisionsmessungen sich der Natur der Sache nach nur auf ein sehr beschränktes Entfernungsintervall beziehen, welches in den geophysikalischen Anwendungen übrigens erheblich übertroffen wird. So bleibt die für die physikalische Systematik wichtige Frage, in wiefern die Gravitationsconstante für alle Entfernungen wirklich als eine Constante zu betrachten ist, gänzlich unerledigt. So kommt es, dass die Physik mehr indirect an der Entwickelung und Ausarbeitung der Methoden als solcher interessirt ist, als an den bisherigen Resultaten der Bestimmung selbst.

Den Zusammenhang beider Grössen, der Gravitationsconstanten f und der mittleren Dichte der Erde ε, können wir uns theoretisch an dem Ausdruck[1]) § 113 (4) klar machen:

$$(1) \qquad g = G\left(1 - 2\,\frac{\omega^2 R}{G}\cos^2\varphi\right).$$

Setzen wir in dem Hauptgliede

$$G = f\varepsilon\,\frac{4}{3}\,\frac{R^3\pi}{R^2} = f\varepsilon\,\frac{4}{3}\,R\pi\,,$$

so ist damit erwiesen, wie die Bestimmung der Gravitationsconstanten f die Bestimmung der mittleren Erddichte ε unmittelbar zur Folge hat und umgekehrt die Bestimmung von ε die von f. Es liegt aber auf der Hand, dass die Präcisionsmessungen wesentlich zugängliche Grösse direct allein die Gravitationsconstante f und nicht die mittlere Erddichte ε sein wird.

---

1) Die genauere hier in Betracht kommende Formel geben im Anschluss an Helmert, Theorieen der höheren Geodäsie, z. B. Richarz u. Krigar-Menzel S. 111 der Publication in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1898. Für g ist dann der aus Pendelmessungen abgeleitete mittlere Werth einer geographischen Breite (reducirt auf Meereshöhe) einzusetzen:

$$g = 978{,}00\,(1 + 0{,}005310\,\sin^2\psi)\,\frac{cm}{sec^2}\,.$$

Wir beginnen mit der Besprechung der beiden historischen Methoden, denen auch heute ein gewisses geophysikalisches Interesse nicht abzusprechen ist, um daran die Besprechung der classischen Methoden zu knüpfen, welche die Ausführung von wirklichen Präcisionsmessungen gestatten.

Die historische Methode von Maskelyne und Hutton (1775, 1778, 1780) knüpft an die Lothablenkung eines isolirten Berges (des Shehallien in Schottland) von näherungsweise bekannter Masse. Es handelt sich, anders ausgedrückt, um die Differenz der wahren geographischen Breite, aus Interpolation von Beobachtungen der weiteren Umgegend entnommen, und der scheinbaren geographischen Breite, bezogen auf den Quecksilberhorizont oder die Resultante der Schwere in nächster Nähe des Berges.

Bezeichnen wir den Unterschied dieser Winkel, das ist die Grösse der Lothablenkung, mit δ, mit h die horizontale Gravitationsbeschleunigung, herrührend von der Bergmasse M, in dem Abstand R vom Gravitationsmittelpunkt der Bergmasse, g die Beschleunigung der Schwere, so ist:

$$\delta = \operatorname{tang} \delta = \frac{h}{g}, \quad h = f \frac{M}{R^2},$$

$$f = \frac{R^2 h}{M} = \frac{R^2 g}{M} \delta.$$

Die historische Methode von Airy (1856) knüpft an die Bestimmung der Schwere durch das Pendel an der Erdoberfläche g_0 und am Grunde eines Kohlenbergwerksschachts g_u (im Harton-Kohlenbergwerk) in der Tiefe h unter der Erdoberfläche.

Fassen wir die Erde als Kugel vom Radius R, bestehend aus einem Kugelkern vom Radius $R - h$ und der mittleren Dichte ε und aus einer Kugelschale von der Dicke h und der Dichte ε' in der Nähe der Erdoberfläche, welche der Beobachtung wenigstens einigermaassen zugänglich ist, so haben wir nach den abgeleiteten Kugelsätzen aus der Gravitationslehre § 112:

$$g_u = f\varepsilon \frac{4\pi}{3} (R - h),$$

$$g_0 = f\varepsilon \frac{4\pi}{3} \frac{(R-h)^3}{R^2} + f\varepsilon' \frac{4\pi}{3} \left(R - \frac{(R-h)^3}{R^2}\right),$$

oder unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$g_0 = g_u \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) + 4\pi h f \varepsilon'. \tag{2}$$

Dieses ist die Gleichung, welche nach der Airy'schen Methode gestattet, die Gravitationsconstante f zu bestimmen.

Von geophysikalischem Interesse ist die Folgerung aus (2):

$$g_0 - g_u = 4\pi h f \varepsilon' - 2\frac{h}{R} g_u = 4\pi h f \varepsilon' - \frac{8\pi}{3} f \varepsilon h$$

$$= 4\pi h f \varepsilon' \left(1 - \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right).$$

Indem nun $\frac{2}{3}\varepsilon > \varepsilon'$ (Airy schätzte ε' zwischen 2,75 und 2,06), folgt die Thatsache, dass die Schwere nach dem Erdinneren zunächst zunimmt. Es hängt das damit zusammen, dass zunächst die dichteren Massen in der Nähe der Erdmitte in ihrem Einfluss überwiegen.

Die Bestimmung der Gravitationsconstanten durch wirkliche Präcisionsmessungen, zu der wir jetzt übergehen, ermöglicht einmal die statische und dynamische Anwendung der Horizontalwage, wie wir sie § 84 besprochen haben, sodann auch die Anwendung der gewöhnlichen Verticalwage. Es soll hier die Theorie der Methoden nur schematisch angedeutet werden:

Die Anwendung der Horizontalwage, sei es in unifilarer, sei es in bifilarer Form, wurde zuerst von Cavendish (1798), dann von Reich (1837), Baily (1843), Cornu und Baille (1878), in neuerer Zeit von C. V. Boys, C. Braun und v. Eötvös zur Bestimmung der Gravitationsconstanten verwerthet.

Das äussere Drehungsmoment D_a in dem Ausdruck § 84 (1)

$$D_a = D\varphi \text{ bzw. } = D \sin\varphi$$

wird hervorgerufen durch die etwa senkrecht zum Hebelarm der Torsionswage l angreifende Gravitationskraft zweier Kugeln im Abstand R, einer Standkugel mit der grossen Masse M und einer am Ende des Hebelarmes angebrachten und mit dem Hebelarm beweglichen kleineren Masse m. Es ist dann:

$$P = f\frac{Mm}{R^2}, \quad Pl = D_a = D\varphi, \quad D = \frac{\pi^2}{T^2}\mathsf{M},$$

mithin:

$$f = \frac{R^2 P}{Mm} = \frac{R^2 D\varphi}{Mml} = \pi^2 \frac{\mathsf{M} R^2 \varphi}{T^2 Mml}.$$

Mit dieser Methode, welche an die Horizontalwage knüpft, ist sehr nahe verwandt die Methode von Wilsing (1885, 1889), welche an Stelle der Torsionswage ein Pendel benutzt, dessen Schwerpunkt dicht unter der Drehungsaxe liegt, dessen Schwingungsdauer also eine sehr grosse ist.

Die Anwendung der gewöhnlichen Verticalwage wurde zur Bestimmung der Gravitationsconstanten zuerst von Jolly (1881), dann vereint von König, Richarz und Krigar-Menzel (1885—1896) und von Poynting (1891) verwerthet.

Jolly und Poynting beobachten die gravitirende Wirkung von Kugeln mit Hülfe der Wage, einer grossen Standkugel mit der Masse M und einer kleinen Kugel mit der Masse m, die einmal in erheblicher Höhe über der Masse M, sodann in unmittelbarer Nähe über der Masse M gewogen wird. Bezeichnen wir die Massen, welche in beiden Fällen die Wage im Gleichgewicht halten, mit μ und μ', so können wir schematisch schreiben:

$$\mu g = mg,$$

$$\mu' g = mg + f\,\frac{Mm}{R^2}.$$

Die Differenz beider Gleichungen liefert:

$$(\mu - \mu')g = f\,\frac{Mm}{R^2}, \quad f = \frac{(\mu - \mu')\,g\,R^2}{M\,.\,m}.$$

König, Richarz und Krigar-Menzel beobachten die gravitirende Einwirkung eines aus einzelnen Stücken in Ziegelform zusammengesetzten Bleiwürfels von der Höhe h und der Dichte ε', die zu wägende Masse befindet sich einmal unmittelbar über, das andere Mal unmittelbar unter dem Bleiwürfel. Unter Anwendung des für einen niedrigen Cylinder erhaltenen Resultats (§ 115) erhalten wir entsprechend dem obigen Schema:

$$\mu g = mg + f\varepsilon' 2\pi h,$$

$$\mu' g = mg - f\varepsilon' 2\pi h.$$

Die Differenz beider Gleichungen liefert:

$$(\mu - \mu')\,g = f\varepsilon' 4\pi h, \quad f = \frac{(\mu - \mu')\,g}{\varepsilon' 4\pi h}.$$

An und für sich könnte der Einwand erhoben werden, dass sich bei der Wägungsmethode die Grösse, auf die es in erster Linie ankommt: $(\mu - \mu')$, aus der Differenz zweier grossen und nahezu gleichen Werthe ergiebt, was man im Allgemeinen zu vermeiden pflegt. Demgegenüber wäre aber darauf hinzuweisen, dass die Wage zu den empfindlichsten und vollkommensten Instrumenten gehört, die wir besitzen; und von dieser Thatsache wollen eben die Wägungsmethoden Gebrauch machen.

Ich schliesse diese kurze, schematische Besprechung mit der Zusammenstellung der genausten Resultate, welche das letzte Jahrzehnt für die Gravitationsconstante f und für die mittlere Dichte der Erde ε aufweist, da der Vergleich nicht ohne Interesse ist. Es beobachteten:

Wilsing	1889		$\varepsilon = 5,579 \pm 0,012$,
Poynting	1891	$f = 66,984 . 10^{-9}$	$5,4934$,
Boys	1894	$66,576 . 10^{-9}$	$5,5270$,
Braun	1896	$66,578 . 10^{-9}$	$5,5273 \pm 0,0012$,
Richarz u. Krigar-Menzel	1896	$66,85 . 10^{-9}$	$5,505 \pm 0,009$.

Anhangsweise sei noch bemerkt, dass es von besonderem Interesse wäre, die Unabhängigkeit der Gravitationsconstanten von der Natur der angewandten Materialien zu prüfen. Man darf hierfür, worauf mein hochgeehrter Kollege, Herr Professor Dr. H. Struve, vor einigen Jahren in einem Vortrag aufmerksam machte, nicht ohne Weiteres die Bessel'schen Pendelversuche (§ 35 S. 76) heranziehen, welche erwiesen, dass die Schwere auf verschiedene Materialien dieselbe Beschleunigung bewirke.

Nehmen wir an, dass die Gravitationsconstante abhängig von der Natur der angewandten Materialien wäre, so könnte die Vertheilung der Materialien im Erdinnern eine derartige sein, dass trotz Aenderung der Pendelsubstanzen und trotz der dadurch bedingten Aenderung der einzelnen Gravitationsconstanten ein nahezu gleich grosser Mittelwerth für die Gravitationsconstante der in Betracht kommenden Materialien resultire. Die Möglichkeit einer solchen Verdeckung etwaiger Verschiedenheiten ist bei Schwerebestimmungen verschiedener Materialien für die Erdoberfläche eine grössere als für Stellen im Erdinneren, insofern die Schwere an der Erdoberfläche sich als Gravitationswirkung aus einer Summe von Gliedern mit denselben Vorzeichen zusammensetzt, die Schwere im Erdinneren aus einer Summe von Gliedern mit verschiedenen Vorzeichen.

Historische Uebersicht zu VI.

Isaac Newton 1642—1726.
Alexis Claude Clairaut 1713—1765.

Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica. I. Auflage. 1687.
Clairaut, Théorie de la figure de la terre. Paris 1743.

VII. Einführung in die allgemeinen Principe der Mechanik.

1) Die Entwickelung der mechanischen Principe und ihrer Hülfsbegriffe.

119. Rückblick auf die bisherige Darstellung der Mechanik nach ihrer principiellen Seite. Ziel der allgemeinen mechanischen Principe.

120. Die Principe von D'Alembert und Lagrange, ihre Uebereinstimmung mit den Newton'schen Grundsätzen und ihre über diese Grundsätze hinausgehenden Postulirungen. 121. Die Verbindung der Principe von D'Alembert und Lagrange. Unterscheidung holonomer und nicht holonomer Systeme (Hertz). Begriff der virtuellen Verrückung (Hölder). 122. Die Principe von Hamilton und Maupertuis (Hölder).

123. Die Lagrange'schen Differentialgleichungen der Mechanik der ersten und zweiten Form. Die Hamilton'schen Differentialgleichungen. 124. Einführung cyklischer Coordinaten in die Lagrange'schen Differentialgleichungen. Monocyklische und bicyklische Systeme. Mechanische Analogieen und Modelle.

2) Historische Rückblicke. Fragen der Gegenwart.

125. Rückblicke auf Motivirungen mechanischer Principe. Das Princip des kleinsten Zwanges von Gauss. 126. Die Postulate der Mechanik und die Darstellungen der Mechanik von Hertz und Boltzmann.

VII. 1) Die Entwickelung der mechanischen Principe und ihrer Hülfsbegriffe.

§ 119. Rückblick auf die bisherige Darstellung der Mechanik nach ihrer principiellen Seite. Ziel der allgemeinen mechanischen Principe.

Wir haben bei der bisherigen Darstellung die Entwickelung der Mechanik im Wesentlichen auf die drei Newton'schen Bewegungsgesetze basirt; nur die an den Begriff der Energie geknüpften Betrachtungen gingen über Newton hinaus. Es kann kein Zweifel sein, dass für eine Einführung in das Studium der Mechanik kein Weg sich so sehr empfiehlt, wie der, welcher an die thatsächliche, geschichtliche Entwickelung der Disciplin knüpft, und dieser wird immer auf Newton zurückführen. Dieser Weg deckt die wahren Grundlagen der Wissenschaft auf und lässt über ihre Natur keinen Zweifel; wir werden gezwungen, uns den Charakter dieser Grundlagen nach seiner erkenntnisstheoretischen Seite klar zu machen und unterscheiden je nach diesem Charakter: Postulate (Axiome), Hypothesen und Naturgesetze, wovon die Postulate oder Axiome für die Grundlegung der Mechanik von besonderer Bedeutung sind.

Eine andere Frage ist die nach den naturgemässen Grundlagen, eine andere die nach ihrer formellen Ausbildung und Gestaltung. Hat Newton der Beantwortung der ersten im Wesentlichen den richtigen Weg gewiesen, so findet die zweite ihre Behandlung in der Aufstellung der allgemeinen Principe der Mechanik von D'Alembert und Lagrange an bis auf Gauss und Hamilton — eine Behandlung, die noch keineswegs ihren Abschluss gefunden zu haben scheint.

Eine formelle Ausbildung der Mechanik kann in zwei Richtungen gesucht werden: in der Ausbildung der Methoden für die freie Bewegung und in der Ausbildung der Methoden für die bedingte Bewegung. Die Ausbildung der Methoden für die freie Bewegung interessirt zur Zeit in erster Linie die Astronomie, wir denken hier an die Bemühungen in der Lösung des sogenannten Drei-Körperproblems, beziehungsweise des n-Körperproblems. Die Ausbildung der Methoden für die bedingte Bewegung interessirt zur Zeit in erster Linie die Physik, im Speciellen die Mechanik. Der hier vorliegenden Schwierigkeiten suchen die Principe der Mechanik Herr zu werden.

Wenn wir hier einen Rückblick auf die bisher entwickelte Behandlung der bedingten Bewegung werfen, so kommen dabei für die bedingte Bewegung eines Massenpunktes Abschnitt II, 4 (S. 106—117), für die bedingte Bewegung eines Massensystems die Ausführungen über starre Systeme in III in Betracht, insbesondere auch der Schlussabschnitt von § 56 auf S. 135, auf dem ganz wesentlich die Anwendung der Flächensätze auf Methoden- und Instrumenten-Lehre der praktischen Physik im Abschnitt IV beruhte. Auch der Abschnitt III, 3, welcher den Satz von der lebendigen Kraft und seine Consequenzen behandelt, knüpfte an die bedingte Bewegung an.

Die Behandlung der bedingten Bewegung eines Massenpunkts in II, 4 wies den Mangel auf, dass sie sich auf eine geringe Anzahl anschaulicher Beispiele beschränkte, insbesondere erschien die reibungslose Bewegung eines Massenpunkts auf einer Oberfläche oder auf einer Raumcurve bevorzugt. Die Behandlung der bedingten Bewegung eines Massensystems beschränkte sich im Wesentlichen auf fortschreitende Bewegungen starrer Systeme und auf drehende Bewegungen starrer Systeme um feste Axen.

Wir können es als Aufgabe der allgemeinen Principe der Mechanik bezeichnen, in erster Linie für die Behandlung der bedingten Bewegung beliebig gegebener Massensysteme allgemeine, allumfassende mathematische Ausdrücke und Beziehungen aufzustellen, welche für die Lösung gegebener Probleme der Mechanik eine praktisch brauchbare und theoretisch einwurfsfreie, allgemein anwendbare Methode gewährleisten.

§ 120. **Die Principe von D'Alembert und Lagrange, ihre Uebereinstimmung mit den Newton'schen Grundsätzen und ihre über diese Grundsätze hinausgehenden Postulirungen.**

Das von D'Alembert 1743 aufgestellte Princip[1]) führt die Dynamik auf die Statik zurück. In der heutigen Terminologie können wir es in folgender Weise zum Ausdruck bringen:

Hat man irgend ein Massensystem, auf dessen Theile irgend welche Kräfte wirken, deren Componenten mit X, Y, Z bezeichnet werden mögen, und sind die unter Einwirkung dieser Kräfte auf das einzelne Massenelement m eintretenden Actionen den Componenten nach mx'', my'', mz'', so können wir die gegebenen Kräfte zerlegen in einen zur Wirkung kommenden Antheil mx'', my'', mz'' und in einen nicht zur Wirkung kommenden Antheil $X - mx''$, $Y - my''$, $Z - mz''$, dem wir die Bezeichnung verlorene Kräfte geben. Das D'Alembert'sche Princip besagt nun, dass sich das System bei der jedesmaligen Configuration seiner Theile unter ausschliesslicher Einwirkung der verlorenen Kräfte im Gleichgewicht befindet.

Ist das System ein freies, so werden entsprechend den Newton-schen Grundsätzen die gegebenen Kräfte den eintretenden Actionen gleich sein; in diesem Falle bleibt für die verlorenen Kräfte nichts übrig und das D'Alembert'sche Princip liefert nichts neues. Der Fortschritt, den das D'Alembert'sche Princip gewährt, liegt wesentlich in der Anwendung auf bedingte Systeme, über deren Natur das Princip die allgemeinsten Voraussetzungen und Verfügungen

1) Man vergleiche Ostwald's Klassiker Nr. 106 S. 57 u. 58.

ohne irgend eine Einschränkung und ohne vorzeitige Specialisirung offen lässt.

Wir können uns die Gültigkeit des D'Alembert'schen Principes in allen den Fällen klar machen, in denen uns die Anwendung der Newton'schen Grundsätze unter Verwerthung des Reactionsprincipes zum Ziele führte. Wir postuliren nun aber auch darüber hinaus die Gültigkeit des D'Alembert'schen Principes. In gewissem Sinne können wir in dieser Postulirung eine neue Erweiterung des Newton'schen Reactionsprincips erblicken.

Historisch bemerken wir, dass D'Alembert 1743 nur an die Gleichgewichtsbedingungen anknüpfen konnte, welche damals bekannt waren. Die Tragweite des D'Alembert'schen Principes konnte erst voll in Erscheinung treten, als Lagrange zum ersten Male 1764 den Gleichgewichtsbedingungen die analytische Formvollendung gab, deren dieselben fähig sind. Dieses Princip des Gleichgewichts, in der heutigen Terminologie „Princip der virtuellen Verrückungen“, bei Lagrange „Princip der virtuellen Geschwindigkeiten“ genannt, lautet in der von Lagrange gegebenen Fassung[1]):

„Wenn ein beliebiges System von beliebig vielen Körpern oder Punkten, deren jeder durch beliebige Kräfte angegriffen wird, im Gleichgewicht ist, und man diesem System beliebig kleine Bewegungen ertheilt, in Folge deren jeder Punkt eine unendlich kleine Strecke durchläuft, so ist die Summe aller Kräfte, jede multiplicirt mit der Strecke, welche der Punkt, an dem sie wirkt, in der Richtung dieser Kraft durchläuft, — eine Strecke, die man als Maass der virtuellen Geschwindigkeit ansehen und geradezu als virtuelle Geschwindigkeit bezeichnen kann — immer gleich Null, wenn man die kleinen im Sinne der Kräfte durchlaufenen Strecken als positiv, die im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen als negativ ansieht.“

Bezeichnen wir die Componenten der Kräfte auf das einzelne Element des Systems mit X_h, Y_h, Z_h, die Componenten der virtuellen Verrückungen (der Lagrange'schen virtuellen Geschwindigkeiten) desselben Elementes mit δx_h, δy_h, δz_h, so liefert die analytische Formulirung des Lagrange'schen Princips die Gleichung:

(1) $$\sum (X_h \delta x_h + Y_h \delta y_h + Z_h \delta z_h) = 0.$$

Unter Benutzung des § 60 (6) definirten Arbeitsbegriffs können

1) Man vergleiche die deutsche Ausgabe der analytischen Mechanik von Lagrange, herausgegeben von Servus. Berlin 1887, S. 19.

wir dann das Princip physikalisch kurz so ausdrücken: Ein System befindet sich im Gleichgewicht, wenn bei beliebig vorgenommenen virtuellen Verrückungen seiner Theile in der Gesammtheit keine Arbeit geleistet wird.

Der Begriff der virtuellen Verrückung hängt auf das engste mit dem mathematischen Begriff der Variation zusammen, der hier gleich seine Erläuterung finden soll. Wir verstehen unter der Variation einer Function $f(x, y, z)$ die Aenderung, welche diese Function erfährt, wenn wir ihre unabhängigen Veränderlichen x, y, z um ganz beliebige, sehr kleine Werthe δx, δy, δz ändern, — Werthe, die, im Falle irgend welche Bedingungen zwischen x, y, z bestehen, so zu wählen wären, dass sie mit diesen Bedingungen verträglich sind. Unter Benutzung der Bezeichnung „virtuelle Verrückung" werden wir also auch kurz sagen können: Wir verstehen unter der Variation einer Function $f(x, y, z)$ die Aenderung, welche diese Function erfährt, wenn wir ihre unabhängigen Veränderlichen x, y, z virtuell verrücken.

Nach dieser Definition wäre also die Variation der Function $f(x, y, z)$:

(2) $$\delta f = f(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta x) - f(x, y, z).$$

Berücksichtigen wir nun die beliebige Kleinheit der δx, δy, δz, so können wir nach Taylor entwickeln und haben:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = f(x, y, z) + \delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \delta z \frac{\partial f}{\partial z} + \cdots$$

Diesen Werth in (2) eingesetzt, definiren wir als erste Variation der Function f:

(3) $$\delta_1 f = \delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \delta z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Führen wir nun in den Ausdruck des Princips von Lagrange (1) den Begriff des Potentials ein, setzen also für das System und seine Kräfte die Existenz eines Potentials voraus:

$$X_h = -\frac{\partial V_h}{\partial x}, \quad Y_h = -\frac{\partial V_h}{\partial y}, \quad Z_h = -\frac{\partial V_h}{\partial z}$$

und bezeichnen das Potential des gesammten Systems mit:

$$V = \sum V_h,$$

so folgt aus (1) in Verbindung mit (3) als Gleichgewichtsbedingung:

$$\sum \frac{\partial V_h}{\partial x} \delta x_h + \frac{\partial V_h}{\partial y} \delta y_h + \frac{\partial V_h}{\partial z} \delta z_h = \sum \delta_1 V_h = \delta_1 \sum V_h = \delta_1 V = 0.$$

Diese Gleichgewichtsbedingung ist aber identisch mit der § 67 von uns aus dem Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft abgeleiteten, nach der das Potential eines Systems im Zustand des Gleichgewichts einen ausgezeichneten Werth darstellt, ein Minimum oder Maximum. Das Dirichlet'sche Kriterium charakterisirte näher diese Gleichgewichtszustände als stabile oder labile, worauf hier aber nicht noch einmal eingegangen werden soll.

Haben wir so das Lagrange'sche Princip der virtuellen Verrückungen als in Uebereinstimmung mit den bisher entwickelten Grundsätzen und Vorstellungen erwiesen, so haben wir jetzt darauf aufmerksam zu machen, dass die Formulirung des Lagrange'schen Princips durch (1) vollkommen frei ist von allen den beschränkenden Voraussetzungen, unter denen die Gleichgewichtsbedingungen § 67 abgeleitet waren. Es waren das dieselben beschränkenden Voraussetzungen, unter denen § 61 der Satz von der lebendigen Kraft abgeleitet wurde, als dessen Consequenz sich das Dirichlet'sche Kriterium ergab. Diese Voraussetzungen sind im Besonderen in der Form der Gleichungen § 61 (1) zu sehen, denen ganz wesentlich wieder die Newton'schen Grundsätze unter Verwerthung des Newton'schen Reactionsprincips zu Grunde liegen.

So können wir denn sagen: Wir haben die Gültigkeit des Lagrange'schen Princips ebenso wie die des D'Alembert'schen Princips unter Anwendung der Newton'schen Grundsätze erweisen können. Ebenso wie wir aber vorhin darüber hinaus eine allgemeinere Gültigkeit des D'Alembert'schen Princips postulirten, so postuliren wir jetzt über die Newton'schen Grundsätze hinaus eine allgemeinere Gültigkeit des Lagrange'schen Princips.

Der Vortheil, der in diesen Postulirungen liegt, ist der, dass wir uns vollständig unabhängig von irgend welchen beschränkenden Voraussetzungen über die Natur der Kräfte und der in jedem Fall gegebenen Bedingungen machen. Die Postulirung ist der einzige Weg zur Aufhebung der Schranken, welche die Ausdehnung der Forschung auf bisher unbearbeitete Gebiete hemmt. Der inductive Charakter der Mechanik kommt hier an zwei hervorragenden Beispielen deutlich zum Durchbruch. Der Erfolg durch die Wirklichkeit und durch die Erfahrung hat hier allein darüber zu entscheiden, ob der postulirte Schritt fruchtbar ist und zum Ziele führt.

§ 121. Die Verbindung der Principe von D'Alembert und Lagrange. Unterscheidung holonomer und nicht holonomer Systeme (Hertz). Begriff der virtuellen Verrückung (Hölder).

Nachdem wir die Principe von D'Alembert und Lagrange aufgestellt haben, ist der nächste, naturgemässe Schritt die Verbindung beider. Wenn nach dem D'Alembert'schen Princip die verlorenen Kräfte mit ihren Componenten

$$X - mx'', \quad Y - my'', \quad Z - mz''$$

statischen Charakter haben sollen, so werden auch D'Alembert's verlorene Kräfte das Lagrange'sche Princip der virtuellen Verrückungen erfüllen müssen, d. h. es wird sein müssen:

$$(1) \quad \sum (X - mx'')\,\delta x + (Y - my'')\,\delta y + (Z - mz'')\,\delta z = 0.$$

Diese Gleichung ist es, die man heute im Speciellen als das D'Alembert'sche Princip zu bezeichnen pflegt; thatsächlich aber stellt sie die Verbindung des D'Alembert'schen und des Lagrange'schen Princips dar. Sie ist es, die wir als das Grundprincip der Dynamik zu betrachten haben, sie enthält Newton's dynamische Principien in sich, gewährt aber in dem Hülfsmittel der virtuellen Verrückungen die Mittel, darüber hinauszugehen.

Wir haben den Begriff der virtuellen Verrückung bisher im Anschluss an das Lagrange'sche Princip unter Rücksicht auf Gleichgewichtsfälle entwickelt; es entsteht die Frage, ob der Begriff unter Rücksicht auf Bewegungszustände eine Aenderung erfährt. Wenn in der Statik z. B. die räumliche Lage der Massenelemente eines Systems an gewisse Gleichungen von der Form $\varphi(x, y, z) = 0$ gebunden sein soll, dann liegt es für die Dynamik nahe, den Fall ins Auge zu fassen, in dem diese Gleichungen noch die Zeit enthalten, also von der Form $\varphi(x, y, z, t) = 0$ sind. Es entsteht die Frage, wie dann der Begriff der virtuellen Verrückung zu fassen ist. Das D'Alembert'sche Princip lässt in der Beantwortung dieser Frage keinen Zweifel; indem das D'Alembert'sche Princip die Probleme der Dynamik auf solche der Statik zurückführt, wird der allgemeine Begriff der virtuellen Verrückung unabhängig von der Zeit zu fassen sein. Liegen also für das dynamische Problem Bedingungen von der Form $\varphi(x, y, z, t) = 0$ vor, so werden wir zur Definition der virtuellen Verrückungen in diesem Falle $t = \text{const.}$ zu setzen haben und es werden die sonst beliebigen virtuellen Verrückungen der analytischen Bedingung unterliegen müssen:

$$(2)\qquad \delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \delta y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \delta z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Wir wollen an dieser Stelle aus unseren Postulirungen gleich eine Consequenz ziehen, welche besonders deutlich die Möglichkeit zeigt, über die Newton'schen Grundsätze hinauszugehen, und welche die gegenwärtige Forschung beschäftigt: die Unterscheidung von holonomen und nicht holonomen Bedingungen und Systemen.

Die Bedingungen, wie wir sie bisher eingeführt und verwerthet haben, knüpften immer an geschlossene Functionen der räumlichen Coordinaten an, wie wir solche z. B. § 47 gelegentlich der Behandlung der bedingten Bewegung eines Massenpunktes einführten.

Es ist nun seit H. Hertz auch die Untersuchung allgemeinerer Bedingungsgleichungen in Aufnahme gekommen, in denen die Coordinaten der Punkte der Systeme in der Form von Differentialen auftreten, wie z. B. in der Gleichung:

$$(3)\qquad \sum\nolimits_{\nu} (\varphi_{i\nu} dx_\nu + \psi_{i\nu} dy_\nu + \chi_{i\nu} dz_\nu) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots),$$

wo die mit den Buchstaben φ, ψ, χ bezeichneten Grössen Functionen der Coordinaten

$$x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2, \ldots$$

der materiellen Punkte sind.

In dem Fall nun, in dem die Bedingungen (3) in ihrer Gesammtheit einem Complex von Bedingungen der Form:

$$(4)\qquad d\Phi_1 = 0, \quad d\Phi_2 = 0, \ldots$$

gleichwerthig sind, in dem Falle also, in dem die Bedingungen (3) „unbeschränkt integrabel" sind, nennt Hertz[1]) das materielle System holonom; in dem Falle, in dem dies weder ganz noch theilweise stattfindet, nennt Hertz das materielle System nicht holonom.

Die Einführung der Unterscheidung zwischen holonomen und nicht holonomen Systemen und der damit zu verbindenden Begriffe erscheint in erster Linie rein analytisch ohne jede Anschauung. Es ist Aufgabe der Mechanik, diesen abstracten Unterscheidungen an der Hand von speciellen Beispielen einen realen, anschaulichen Untergrund zu geben. Die Behandlung eines hierher gehörenden Beispiels ist

1) H. Hertz, Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Leipzig 1894.

durch Hertz in Anregung gebracht: die Bewegung einer rollenden Kugel auf einer Ebene ohne Gleitung. Die exacte Aufstellung der zugehörigen Bedingungsgleichung findet sich in einer Arbeit von O. Hölder[1]), „Über die Principien von Hamilton und Maupertuis" — sie zeigt in der That, dass die Kugel, welche auf der Ebene rollen aber nicht gleiten kann, ein nicht holonomes materielles System im Sinne von Hertz darstellt.

Einer besondern Sorgfalt bedarf bei Bedingungsgleichungen von der Form (3) die Untersuchung, was in jedem einzelnen Fall unter dem Begriff der virtuellen Verrückung zu verstehen ist. Solche Untersuchungen finden sich in der erwähnten, ausgezeichneten Abhandlung von O. Hölder, welche ebenso für die Mechanik wie für die Variationsrechnung werthvolle Beiträge liefert.

Hölder erläutert zunächst den Begriff der Bewegungsvariation an der Bewegung eines freien materiellen Punktes. Er führt neben der wirklich stattfindenden Bewegungsbahn des Punktes von A nach B eine unendlich wenig verschiedene neue Bahn ein, welche gleichfalls in A beginnt und in B aufhört. Es kann dann die neue Bahn Punkt für Punkt auf die alte Bahn in der mannigfaltigsten Weise bezogen werden; es kann die Zuordnung z. B. so getroffen werden, dass beide Bahnen von A nach B gleichzeitig durchmessen werden, es kann die Zuordnung aber auch so definirt werden, dass beide Bewegungen zwar gleichzeitig in A beginnen, aber nicht gleichzeitig in B ankommen. In beiden Fällen haben wir unter virtueller Verrückung die einfache Lagenvariation zu verstehen, wie sie durch die mathematische Hülfsconstruction der Zuordnung der Punkte beider Bahnen gegeben ist, ohne dass wir daran eine physikalische Nebenbedeutung zu knüpfen haben. Die Willkürlichkeit der virtuellen Verrückung ist durch die Willkür des Gesichtspunkts bedingt, nach dem die Zuordnung erfolgt.

Soll nun die Bewegung des materiellen Punktes nicht mehr frei, sondern an Bedingungsgleichungen geknüpft sein, so zeigt Hölder, dass dadurch nicht ausgeschlossen wird, die wirkliche Bewegung von A nach B mit einer diesen Bedingungen nicht genügenden, variirten Bewegung zu vergleichen. Er erläutert die Nothwendigkeit einer Unterscheidung zwischen wirklicher, möglicher und variirter Bahn. Die variirte Bahn ist nicht immer mögliche Bahn,

1) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse, 1896, Heft 2.

d. h. eine solche, die denselben Bedingungen genügt, wie die wirkliche Bahn — das ist nur bei holonomen Systemen der Fall. Wir werden auch hier, im Falle die Bewegung eine bedingte ist, unter virtueller Verrückung eine einfache Lagenvariation zu verstehen haben.

§ 122. Die Principe von Hamilton und Maupertuis (Hölder).

Wir leiten aus dem D'Alembert-Lagrange'schen Princip noch zwei andere Formen her, welche unter Umständen gewisse formelle Vortheile bieten: die Principe von Hamilton und Maupertuis. Richtig gefasst, besitzen diese Principe dieselbe allgemeine Gültigkeit wie das D'Alembert-Lagrange'sche Princip.

Wir bilden aus diesem Princip den Ausdruck:

$$(1)\quad \int_{t_0}^{t} dt \sum [(X - mx'')\,\delta x + (Y - my'')\,\delta y + (Z - mz'')\,\delta z] = 0,$$

worin t_0 einen als beliebig gewählten Anfangspunkt der Zeit bedeute, und setzen zur Abkürzung:

$$\delta' U = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

ein Ausdruck, der, im Falle das System ein Potential V hat, nach unserer früheren Festsetzung [§ 63 (1)] $-\delta V$ zu schreiben wäre, so haben wir:

$$(2)\quad \int_{t_0}^{t} dt \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \int_{t_0}^{t} dt\,\delta' U \text{ bezhw. } = -\int_{t_0}^{t} dt\,\delta V.$$

Die Ableitung der Principe von Hamilton und Maupertuis trifft nun in der Wahl der virtuellen Verrückungen, deren Willkürlichkeit aus dem im vorigen Paragraphen entwickelten Begriff der Lagenvariation hervorgeht, specielle charakteristische Verfügungen.

Das Princip von Hamilton wählt in seiner vollkommensten Fassung die Zuordnung der Punkte der im vorigen Paragraphen charakterisirten wirklichen und variirten Bahn von A nach B derart, dass entsprechende Stellen beider Bahnen gleichzeitig durchschritten werden, dass beide Bewegungen, die wirkliche und die variirte, zu gleicher Zeit in A anfangen und in B endigen; die Zeit wird dann für die Rechnung nicht zu variiren sein, es wird mithin zu setzen sein:

$$(3)\quad \delta t = 0.$$

Insofern es sich also um eine Variation zwischen festen Grenzen handelt, haben wir:

$$\int_{t_0}^{t} x''\delta x\,dt = \left| x'\delta x \right|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} x'\frac{d\delta x}{dt}\,dt = -\int_{t_0}^{t} x'\frac{d\delta x}{dt}\,dt.$$

Nun ist nach der Definition des Variationsbegriffes (cf. § 120, 121):

$$\delta\frac{dx}{dt} = \frac{d(x+\delta x)}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{d\delta x}{dt},$$

somit folgt:

$$\int_{t_0}^{t} x''\delta x\,dt = -\int_{t_0}^{t} x'\delta x'\,dt = -\int_{t_0}^{t}\delta\frac{x'^2}{2}\,dt = -\delta\int_{t_0}^{t}\frac{x'^2}{2}\,dt,$$

mithin:

$$(4)\qquad \begin{aligned} -\int_{t_0}^{t} dt\sum m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) &= \delta\int_{t_0}^{t} dt\sum\frac{m}{2}(x'^2+y'^2+z'^2) \\ &= \delta\int_{t_0}^{t} dt\cdot T, \end{aligned}$$

worin T die lebendige Kraft des Systems bedeutet.

Der Ausdruck (1) führt in Verbindung mit (2) und (4) auf diese Weise zu:

$$(5)\qquad \int_{t_0}^{t} dt\,(\delta T + \delta' U) \text{ bezhw. } \delta\int_{t_0}^{t} dt\,(T - V) = 0,$$

und diese Gleichung ist das Hamilton'sche Princip der Mechanik. Es mag als charakteristisch für den Ausdruck des Princips hervorgehoben werden, dass hier die kinetische und potentielle Energie in der Verbindung $T - V$ vorkommen, während sie im Princip der Energie in der Verbindung $T + V$ vorkommen.

Da in der Ableitung des Hamilton'schen Principes $\delta t = 0$ gesetzt wird, ist es für die Gültigkeit des Ausdrucks (4) ganz gleichgültig, ob die eingeführten Functionen U beziehungsweise V die Zeit enthalten oder nicht.

Das Princip von Maupertuis[1]) — auch vielfach das Princip der kleinsten Wirkung genannt — wählt in seiner vollkommen-

1) Von Maupertuis rührt nur die Idee des Princips, nicht die Präcisirung her.

sten Fassung die Zuordnung der Punkte der im vorigen Paragraphen charakterisirten wirklichen und variirten Bahn von A nach B derart, dass, im Falle von einer potentiellen Energie gesprochen werden kann, für entsprechende Zustände der verglichenen Bewegungen die gesammte Energie dieselbe ist — oder noch allgemeiner formulirt, dass der Unterschied der lebendigen Kraft für entsprechende Zustände beider Bewegungen gleich sein soll der Arbeit, welche die wirkenden Kräfte für eine die entsprechenden Lagen verbindende Verrückung leisten würden. Es wird mithin zu setzen sein:

$$\delta T = \delta' U. \tag{6}$$

Die Bewegung auf beiden Bahnen braucht dann, wenn sie gleichzeitig in A anfängt, nicht gleichzeitig in B anzukommen, es wird also bei dieser Variationsart die Zeit zu variiren sein, es wird δt nicht Null sein. Es folgt mithin jetzt für die Variation der lebendigen Kraft:

$$\delta T = \sum m \left(\frac{dx}{dt}\,\delta\,\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\delta\,\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\delta\,\frac{dz}{dt}\right),$$

und da:

$$\delta\,\frac{dx}{dt} = \frac{\delta dx \cdot dt - \delta dt \cdot dx}{dt^2} = \frac{d\delta x \cdot dt - d\delta t \cdot dx}{dt^2} = \frac{d\delta x}{dt} - \frac{d\delta t}{dt} \cdot x',$$

$$\delta T = \sum m \left(\frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\delta z}{dt}\right) - 2T\,\frac{d\delta t}{dt}.$$

Nach der schon zuvor S. 342 ausgeführten partiellen Integration:

$$\int_{t_0}^{t} x''\,\delta x\,dt = -\int_{t_0}^{t} x'\,\frac{d\delta x}{dt}\,dt$$

folgt nun weiter:

$$\int_{t_0}^{t} \delta T \cdot dt = -\int_{t_0}^{t} dt \sum m\,(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) - 2\int_{t_0}^{t} T\,d\delta t. \tag{7}$$

Es wird daher die Gleichung (1) unter Rücksicht auf (2) und (7):

$$\int_{t_0}^{t} dt \sum [(X - mx'')\delta x + (Y - my'')\delta y + (Z - mz'')\delta z]$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(2T d\delta t + (\delta T + \delta' U)\,dt\right) = 0.$$

Indem wir an dieser Stelle $\delta t = 0$ setzen, können wir noch einmal das Hamilton'sche Princip (5) verificiren. Indem wir jetzt der Verfügung (6) entsprechend $\delta T = \delta' U$ setzen, folgt:

$$(8)\qquad \begin{aligned}\int (T d\delta t + \delta T dt) &= \int (T\delta\, dt + \delta T dt)\\ &= \int \delta\,(T dt) = \delta \int T dt = 0.\end{aligned}$$

Dies ist das Princip der kleinsten Wirkung in seiner weiteren Form. Die engere Form des Princips setzt voraus, dass die wirkliche Bewegung dem Satz von der Constanz der Energie gehorcht, es existirt dann eine von der Zeit unabhängige Kräftefunction U und die Zeit tritt auch in den Bedingungsgleichungen nicht auf.

§ 123. Die Lagrange'schen Differentialgleichungen der Mechanik der ersten und zweiten Form. Die Hamilton'schen Differentialgleichungen.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Lagrange'schen Differentialgleichungen der ersten und zweiten Form, sowie einige damit verwandte Formen aufstellen.

Als Lagrange'sche Differentialgleichungen der ersten Form werden Differentialgleichungen von der Form bezeichnet, wie wir sie § 47 (3) und (4), beziehungsweise § 50 (2) kennen gelernt haben. Es handelt sich hier um die Ableitung analoger Differentialgleichungen aus dem D'Alembert-Lagrange'schen Princip unter Verwerthung des Begriffs der virtuellen Verrückung. Das System bestehe aus n Massenelementen beziehungsweise Massenpunkten, deren geometrische Lage in jedem Augenblick durch die $3n$ Coordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ dargestellt sei.

Existiren keinerlei Bedingungsgleichungen, so werden die $3n$ virtuellen Verrückungen $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2 \ldots$ vollkommen willkürlich sein; wir können in diesem Falle sagen, das System besitzt $3n$ Freiheitsgrade. Das D'Alembert-Lagrange'sche Princip § 121 (1) zerfällt in diesem Falle in die bekannten $3n$ Newton'schen Differentialgleichungen für die freie Bewegung:

$$mx'' = X, \quad my'' = Y, \quad mz'' = Z.$$

Existiren hingegen noch besondere Bedingungsgleichungen, deren Anzahl μ sei, so werden die virtuellen Verrückungen $\delta x, \delta y, \delta z$ nicht mehr vollkommen willkürlich sein, sondern es werden zwischen ihnen gleichfalls noch μ Beziehungen bestehen; wir können in diesem Falle sagen, das System besitzt $3n - \mu$ Freiheitsgrade.

Die Lagrange'schen Differentialgleichungen der ersten Form werden nun in dem Falle in Betracht kommen, in dem diese μ Beziehungen zwischen den virtuellen Verrückungen für die einzelnen Massenelemente m die Form haben:

$$(1) \qquad \sum_{\nu} (\varphi_{i\nu}\delta x_{\nu} + \psi_{i\nu}\delta y_{\nu} + \chi_{i\nu}\delta z_{\nu}) = 0, \qquad (i = 1, 2 \cdots \mu).$$

Um eine symmetrische Behandlung des Problems in diesem Falle durchzuführen, verfahren wir nach dem Vorgange von Lagrange, indem wir die μ Bedingungen (1) mit zunächst vollkommen unbestimmten Coefficienten λ_i multipliciren — die Lagrange'schen Multiplicatoren, — welche wir so definiren, dass der Ausdruck:

$$\sum_i \lambda_i \sum_{\nu} (\varphi_{i\nu}\delta x_{\nu} + \psi_{i\nu}\delta y_{\nu} + \chi_{i\nu}\delta z_{\nu})$$

zu dem D'Alembert-Lagrange'schen Princip § 121 (1) addirt, also der Ausdruck:

$$\sum \Big[\Big(X + \sum \lambda_i\varphi_i - mx''\Big)\delta x + \Big(Y + \sum \lambda_i\psi_i - my''\Big)\delta y$$
$$+ \Big(Z + \sum \lambda_i\chi_i - mz''\Big)\delta z\Big] = 0$$

in die Theile zerfällt:

$$(2) \qquad \begin{aligned} mx'' &= X + \sum \lambda_i\varphi_i, \\ my'' &= Y + \sum \lambda_i\psi_i, \\ mz'' &= Z + \sum \lambda_i\chi_i. \end{aligned}$$

Diese $3n$ Gleichungen (2) werden die Lagrange'schen Differentialgleichungen der ersten Form genannt, sie gestatten theoretisch zusammen mit den μ Bedingungsgleichungen (1) die $3n$ Grössen x, y, z und die μ Grössen λ zu bestimmen.

Die Lagrange'schen Differentialgleichungen der zweiten Form gehen davon aus, dass, im Falle die Bewegung des Systems keine freie ist, die Coordinaten der Massenpunkte einen Ueberschuss von Bestimmungsstücken bedeuten. Lagrange hat sich nun die Aufgabe gestellt, nur soviel Parameter einzuführen, als gerade zur Bestimmung des Problems nothwendig sind, und diese geringste Anzahl nothwendiger Parameter als allgemeine Coordinaten bezeichnet. Im Falle das System $3n - \mu$ Freiheitsgrade besitzt, wird es sich also um die Einführung einer gleich grossen Zahl neuer Variablen q handeln, durch welche schon allein in jedem Augenblick die Configuration des

Systems vollständig bestimmt wird. Auf diese $3n-\mu$ allgemeinen Coordinaten oder Parameter sind die Differentialgleichungen der Bewegung zu beziehen.

Der Erfolg ist die Auffindung einer höchst beachtenswerthen, allgemeinen Form von Differentialgleichungen, deren Bedeutung sich nicht blos auf die Mechanik beschränkt erweist, sondern berufen erscheint, in ähnlicher Weise eine Rolle für die gesammte Physik zu spielen, wie das Princip der Energie, das zunächst doch auch nur für den engen Rahmen der Mechanik aufgestellt, eine Bedeutung über die Mechanik hinaus für die gesammte Physik gewonnen hat.

Sind $q_1, q_2, \cdots$ die $3n-\mu$ allgemeinen Parameter, durch welche die Configuration des Systems in jedem Augenblick bestimmt sei, und lassen sich die einzelnen Raumcoordinaten des Systems x_i, y_i, z_i als Functionen der $q_1, q_2 \cdots$ darstellen, so dass etwa geschrieben werden kann:

$$x_i = \Phi_i(q_1, q_2 \cdots),$$
$$y_i = X_i(q_1, q_2 \cdots),$$
$$z_i = \Psi_i(q_1, q_2 \cdots),$$

dann haben wir:

$$x_i' = \sum\nolimits_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} q_h', \qquad y_i' = \sum\nolimits_h \frac{\partial y_i}{\partial q_h} q_h', \qquad z_i' = \sum\nolimits_h \frac{\partial z_i}{\partial q_h} q_h'.$$

Der Ausdruck für die lebendige Kraft des Systems:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

lässt sich dann als eine homogene Function zweiten Grades der q' darstellen, deren Coefficienten nur von den q abhängen werden — im Falle die Bedingungen noch die Zeit enthalten, auch noch von der Zeit. Lassen wir ferner, den in der Natur vorliegenden Fällen entsprechend, das Potential V nicht von q', sondern nur von q (der Configuration) abhängen, dann ergiebt das Hamilton'sche Princip:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} &\delta \int_{t_0}^{t} dt (T - V) \\ &= \int_{t_0}^{t} dt \left(\sum \frac{\partial T}{\partial q_h} \delta q_h + \sum \frac{\partial T}{\partial q_h'} \delta q_h' - \sum \frac{\partial V}{\partial q_h} \delta q_h \right) = 0. \end{aligned}$$

Es ist nun:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial T}{\partial q'} \delta q' = \left| \frac{\partial T}{\partial q'} \delta q \right|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'} \right) \delta q .$$

Da wir zwischen festen Grenzen variiren, fällt der zwischen den Grenzen t_0 und t zu nehmende integrirte Werth fort, und es reducirt sich das Hamilton'sche Princip in der Formel (3) auf:

$$(4) \qquad \int_{t_0}^{t} dt \sum\nolimits_h \left(\frac{\partial (T-V)}{\partial q_h} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_h} \right) \right) \delta q_h = 0 .$$

Nun sind die $3n - \mu$ Grössen δq_h völlig unabhängig von einander und dabei als virtuelle Werthe völlig willkürlich, es wird also die Gleichung (4) nicht anders erfüllt werden können als durch das System der $(3n - \mu)$ Differentialgleichungen der Form:

$$(5) \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_h} \right) = \frac{\partial (T-V)}{\partial q_h} .$$

In diesen Gleichungen haben wir die Lagrange'schen Differentialgleichungen der zweiten Form vor uns.

An die Gleichungen (5) lässt sich noch die Aufstellung einiger verwandter Formen von Differentialgleichungen knüpfen, welche der Hamilton'schen Forschung angehören.

Zunächst können wir als neue Parameter die Momente p einführen, welche wir durch die Gleichungen definiren:

$$(6) \qquad p_h = \frac{\partial T}{\partial q'_h} .$$

Wir können dann die Lagrange'schen Differentialgleichungen in den Formen schreiben:

$$(7) \qquad p_h = \frac{\partial T}{\partial q'_h}, \qquad \frac{dp_h}{dt} = \frac{\partial (T-V)}{\partial q_h} .$$

Insofern nun T als eine ganze homogene Function zweiten Grades in q' von uns erkannt ist, können wir nach einem bekannten Satz aus der Theorie der ganzen homogenen Functionen, der hier vorausgesetzt wird, schreiben:

$$2T = q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + \cdots$$

Wir schreiben diese Gleichung unter Benutzung von (7) in etwas modificirter Form:

$$(8) \qquad (T) = \sum q'_h p_h - T,$$

und wollen nun auf der linken Seite (T) als Function der p und q auffassen, was durch eine Klammer angedeutet werden möge, während wir auf der rechten Seite wie früher T als Function der q und q' auffassen. Die erste der Gleichungen (7) deutet die Existenz eines Systems linearer Beziehungen zwischen p_h und q'_h an, woraus dann ohne Weiteres die Möglichkeit ersichtlich ist, (T) als Function der p und q wirklich darstellen zu können, wie eine solche soeben vorausgesetzt wurde.

Die Variation des Ausdrucks (8) liefert nun:

$$\sum \left(\frac{\partial T}{\partial p_h}\right) \delta p_h + \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_h}\right) \delta q_h = \sum q'_h \delta p_h + \sum p_h \delta q'_h$$
$$- \sum \frac{\partial T}{\partial q_h} \delta q_h - \sum \frac{\partial T}{\partial q'_h} \delta q'_h = \sum q'_h \delta p_h - \sum \frac{\partial T}{\partial q_h} \delta q_h.$$

Der Vergleich der beiden Seiten liefert die Hamilton'sche Form der Differentialgleichungen der Mechanik:

$$(9) \qquad \frac{dq_h}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial p_h}\right), \qquad -\frac{\partial T}{\partial q_h} = \left(\frac{\partial T}{\partial q_h}\right).$$

Setzen wir die letzte dieser Gleichungen in die Lagrange'sche Form (5) beziehungsweise (7) ein, so folgt:

$$(10) \qquad \frac{dp_h}{dt} = -\left(\frac{\partial (T+V)}{\partial q_h}\right),$$

eine Gleichung, in der nun wieder in $(T+V)$ die Gesammtenergie des Systems, wie im Princip der Energie auftritt. Setzen wir $T + V = H$[1]) und fassen wie vorhin die potentielle Energie V nur als Function der q_h, so giebt die Verbindung der Gleichungen (9) und (10) die sogenannte canonische Form der Differentialgleichungen der Mechanik:

$$(11) \qquad \frac{dp_h}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_h}\right), \qquad \frac{dq_h}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_h}\right).$$

Kommt in H die Zeit nicht explicit vor, so können die Gleichungen (11) in der überaus kurzen Form:

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

geschrieben werden, andernfalls wäre diese Form:

$$\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

---

1) Bei Hamilton wird diese Function „charakteristische Function" ge-

§ 124. Einführung cyklischer Coordinaten in die Lagrange'schen Differentialgleichungen. Monocyklische und bicyklische Systeme. Mechanische Analogien und Modelle.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Lagrange'schen Differentialgleichungen der zweiten Form auf sogenannte „cyklische Systeme" anwenden. Wir thun es wesentlich zu dem Zweck, um an einem Beispiel den Begriff der „mechanischen Analogie" (cf. § 13 S. 32) zu erläutern und damit einen Beitrag zu den Gedanken zu geben, welche § 18 betreffs der Stellung der Mechanik als Grunddisciplin innerhalb des physikalischen Systems eine theilweise Ausführung fanden. Wir schliessen uns im Folgenden an die Darstellung Boltzmann's im ersten Theil seiner Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichts (Leipzig 1891) an.

Wir verstehen unter einem cyklischen System ein derartiges Bewegungssystem, „dass an Stelle jedes Theilchens, das seinen Ort verlässt, sogleich ein gleichbeschaffenes, gleichbewegtes tritt, so dass sich der Zustand des Systems während der Bewegung in keiner Weise ändert" (cf. S. 14 bei Boltzmann).

Wir bezeichnen l als eine cyklische Coordinate, wenn deren Veränderung eine derartige cyklische Bewegung darstellt. Die lebendige Kraft des Systems ist dann eine Function von $l' = dl/dt$, ausserdem setzen wir sie noch als Function einer langsam veränderlichen Coordinate (oder eines langsam veränderlichen Parameters) k an; die Abhängigkeit von k gestattet, dass das System von einem Zustand in einen anderen übergehen kann.

Unter einem monocyklischen System soll nun ein solches verstanden werden, in dem nur eine cyklische Coordinate, beziehungsweise deren Aenderung mit der Zeit vorkommt, unter einem bicyklischen System soll ein solches verstanden werden, in dem nur zwei cyklische Coordinaten, beziehungsweise deren Aenderung mit der Zeit vorkommen. Das einfachste mechanische Beispiel für ein cyklisches System bietet der Kreisel.

Ohne zunächst an ein bestimmtes mechanisches Modell zu denken, können wir in abstracter Weise ausführen: Haben wir ein System aus n Massenpunkten m_i und bezeichnen wir die Geschwindigkeit

---

nannt. Man sehe die Darstellung in Jacobi's „Vorlesungen über Dynamik", Ausgabe von 1884, S. 3 u. 4, 67—71.

jedes einzelnen Massenpunktes mit v_i, so ist das System ein bicyklisches, wenn jedes v_i gegeben ist durch eine Gleichung von der Form:

$$v_i = a_i l_1' + b_i l_2', \qquad i = 1, 2 \cdots n.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$A = \sum_{1,n}^{i} m_i a_i^2, \quad B = \sum_{1,n}^{i} m_i b_i^2, \quad C = \sum_{1,n}^{i} m_i a_i b_i,$$

so lässt sich die lebendige Kraft des Systems schreiben:

$$T = \frac{A}{2} l_1'^2 + \frac{B}{2} l_2'^2 + C l_1' l_2'.$$

Nach den Lagrange'schen Gleichungen in der Form § 123 (7) können wir nun schreiben:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial l_1'} = A l_1' + C l_2',$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial l_2'} = C l_1' + B l_2',$$

und weiter, insofern T unabhängig von l_1 und l_2 selbst ist:[1])

$$(1) \qquad \begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial l_1} &= \frac{d p_1}{d t} = \frac{d}{d t}(A l_1' + C l_2'), \\ -\frac{\partial V}{\partial l_2} &= \frac{d p_2}{d t} = \frac{d}{d t}(C l_1' + B l_2'), \end{aligned}$$

und endlich, insofern T unabhängig von $k' = dk/dt$ gesetzt ist:

$$(2) \qquad -\frac{\partial V}{\partial k} = -\frac{\partial T}{\partial k} = -\frac{l_1'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - \frac{l_2'^2}{2}\frac{\partial B}{\partial k} - l_1' l_2' \frac{\partial C}{\partial k}.$$

Gehen wir nun auf den Potentialbegriff § 63 (1) zurück, und denken uns diesen auf beliebige Coordinaten, beziehungsweise Parameter erweitert, so werden in (1) die Ausdrücke $-\partial V/\partial l_1$ und $-\partial V/\partial l_2$ die Kräfte darstellen, welche im Sinne einer Vergrösserung der cyklischen Coordinaten l_1 und l_2 wirken; ebenso wird in (2) der Ausdruck $-\partial V/\partial k$ die Kraft darstellen, welche im Sinne einer Vergrösserung der nur langsam veränderlichen Coordinate k wirkt.

Können wir schon diese Erweiterung des Potentialbegriffs uns als eine mechanische Analogie veranschaulichen, so können wir Charakter und Bedeutung der mechanischen Analogie noch weiter durch den Hinweis erläutern, dass die Form der Gleichungen (1) und (2) einen

---

1) Von den Bewegungshindernissen soll hier der Einfachheit halber nicht die Rede sein (cf. Boltzmann a. o. O. S. 23 u. 24).

völligen Vergleich mit den Gleichungen zulässt, welche in der Theorie der Elektrodynamik für die elektromotorischen (inducirten) und ponderomotorischen Kräfte zweier geschlossener Stromleiter von F. Neumann aufgestellt sind.

Bezeichnen wir die Stromstärken in zwei Stromleitern mit i_1 und i_2, die Neumann'schen elektrodynamischen Potentiale der Leiter (1) und (2) auf sich und auf einander mit V_1, V_2, V_{12}, dann sind die inducirten elektromotorischen Kräfte gegeben durch:

$$(3)\qquad \begin{aligned} E_1 &= \frac{d}{dt}(V_1 i_1 + V_{12} i_2), \\ E_2 &= \frac{d}{dt}(V_{12} i_1 + V_2 i_2), \end{aligned}$$

die ponderomotorischen Kräfte z. B. in der Richtung x durch:

$$(4)\qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{i_1^2}{2}\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{i_2^2}{2}\frac{\partial V_2}{\partial x} - i_1 i_2 \frac{\partial V_{12}}{\partial x}.$$

Die Form der Gleichungen (3) und (4) zeigt eine völlige Uebereinstimmung mit der Form der mechanischen Gleichungen (1) und (2). Diese Uebereinstimmung der Formen ist die mechanische Analogie, die wir hier an einem Beispiel zur Anschauung bringen wollen.

Hier setzt nun eine der Maxwell'schen Speculationen über die Natur des elektrischen Stromes ein. Danach ist ein Strom ein Monocykel, zwei Ströme stellen ein bicyklisches System dar. Die Stromstärken i_1 und i_2 entsprechen den Geschwindigkeiten der cyklischen Coordinaten l_1 und l_2, also: l_1' und l_2'. Die Massenpunkte des Systems m_i können ebensowohl auf die Strombahn, wie etwa auf die Theile des umgebenden Aethers bezogen werden. Die Grössen A, B, C hängen ausschliesslich von der geometrischen Configuration des Systems ab, sie sind aus elektrischen Messungen abzuleiten, die mathematischen Ausdrücke dafür hat zuerst F. E. Neumann aufgestellt; es sind das Ausdrücke von der Form:

$$\iint \frac{ds_1\, ds_2}{r} \cos\varepsilon,$$

hierin bedeutet ds_1 das Element der einen Strombahn, ds_2 das Element der zweiten Strombahn, r den Abstand beider Elemente, ε den Winkel, welchen diese Elemente räumlich mit einander bilden. Im Falle es sich um die Selbstpotentiale V_1 und V_2 handelt, beziehen sich die Elemente ds_1 und ds_2 auf Elemente desselben Stromleiters; im Falle das Potential V_{12} in Betracht kommt, beziehen sich ds_1 und ds_2 auf Elemente verschiedener Stromleiter.

Am bekanntesten ist die Formulirung der elektrodynamischen Gesetze, bei der der Stromleiter, für den die inducirte elektromotorische Kraft bestimmt werden soll, stromlos gedacht ist, und bei der weiter die Stromleiter starr und nur gegen einander beweglich gedacht sind. Es werden dann die Gleichungen (3) und (4):

$$E_1 = i_2 \frac{dV_{12}}{dt}, \quad E_2 = i_1 \frac{dV_{12}}{dt}, \quad X = - i_1 i_2 \frac{dV_{12}}{dx}.$$

Man hat vielfach versucht diesen mechanischen Analogieen auch eine materielle Darstellung zu geben. So sind die sogenannten „mechanischen Modelle“ entstanden; es mag hier die Darstellung solcher mechanischen Modelle von Maxwell, Boltzmann und Ebert erwähnt werden.

VII. 2) Historische Rückblicke. Fragen der Gegenwart.

§ 125. Rückblick auf Motivirungen mechanischer Principe. Das Princip des kleinsten Zwanges von Gauss.

Wir wollen zum Schluss der Vorlesungen einen historischen Rückblick auf die mannigfaltig wechselnden Anschauungen werfen, welche die Entwickelung der Mechanik und ihrer Principe begleitet haben und noch begleiten. Der diesen Vorlesungen zu Grunde liegende Standpunkt kann dadurch nur seine weitere Klärung und Vertiefung finden.

Wir erinnern an unsere Auseinandersetzungen im I. Abschnitt über die allgemeinen methodischen Grundlagen der Physik, insbesondere der Mechanik mit ihren für die Forschung in Betracht kommenden objectiven und subjectiven Momenten. Hier kommen diese Erwägungen im Speciellen für die Grundlagen der Mechanik in Betracht, für welche wir noch in diesem VII. Abschnitt auf Grund des D'Alembert-Lagrange'schen Princips eine weitere Entwickelung über Newton hinaus nachweisen konnten. Wir nannten § 6 diese allgemeinsten Grundlagen, soweit ihre objective Seite in Betracht kam, Postulate — soweit ihre subjective Seite in Betracht kam, Axiome; inhaltlich sollten sich beide decken oder es war ihre Deckung anzubahnen.

Es liegt in der Natur der Sache, dass die Forschung nach der subjectiven Seite hin stets einen grösseren Spielraum aufweisen wird. Diese subjective Seite der Forschung soll in den folgenden Schlussparagraphen in einigen Zügen zur Anschauung gebracht werden.

Hatte Newton den Postulaten oder Axiomen der Mechanik die Stellung zugewiesen, die ihnen meines Dafürhaltens der Sache nach zukommt, und die ich im Anschluss an Newton richtig gezeichnet zu haben glaube, so traten unter seinen Nachfolgern Tendenzen für die Begründung solcher Postulate und Axiome auf, für welche der Ausdruck Princip aufkam. Wir haben hier einmal an die Ueberlegungen zu erinnern, durch welche Lagrange das nach ihm benannte Princip der virtuellen Verrückungen, oder wie er es nennt, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten plausibel zu machen sucht. Wir denken sodann an die Speculationen, die von Maupertuis' Princip der kleinsten Wirkung bis zu Gauss' Princip des kleinsten Zwanges ihren Nebenausdruck darin fanden, dass die Natur in ihren Vorgängen mit einer gewissen Oekonomie gewisse Absichten und Zwecke realisire.

„Was die Natur des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten betrifft — das sind etwa Lagrange's eigene Worte — so muss man zugeben, dass dieses Princip an sich nicht evident genug ist, dass es als ursprüngliches Axiom hingestellt werden kann.“ Lagrange begründet darauf das Bedürfniss eines Beweises für dieses Princip, und er liefert einen solchen Beweis, indem er die Kräfte eines Systems durch Flaschenzüge mit einer entsprechenden Rollenanzahl ersetzt, welche in den materiellen Punkten beziehungweise Elementen des Systems angebracht werden und alle durch dieselbe fortlaufende Schnur verbunden sind. Die Schnur beginnt in irgend einem als fest gedachten Punkt und endigt mit einem der Schwere unterworfenen Gewicht. Die Theorie des Flaschenzuges vorausgesetzt, wird dann das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für commensurable Kräfte bewiesen; es wird dann auch, fügt Lagrange hinzu, „für beliebige incommensurable Kräfte gelten, da man weiss, dass jeder Satz, den man für commensurable Grössen beweisen kann, auf gleiche Art durch die Zurückführung aufs Absurde bewiesen werden kann, wenn diese Grössen incommensurabel sind.“

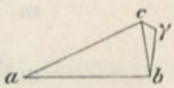
Ich verzichte hier um so mehr auf die Wiedergabe des Lagrange'schen Beweises, als das Princip der virtuellen Verrückungen als Postulat, d. h. als Voraussetzung hinzustellen sein wird, die lediglich in ihrer Uebereinstimmung mit der Erfahrung ihre nachträgliche Rechtfertigung zu finden hat und als solche eines mathematischen Beweises weder bedürftig noch fähig ist. Ueberdies ist darauf hinzuweisen, dass die Ersetzung der Kräfte des Systems durch Flaschenzüge lediglich die ausnahmslose Existenz von Centralkräften zur Voraussetzung hat — eine Einschränkung, die nach unseren Ausführungen des Newton'schen Systems der Mechanik (cf. z. B. §§ 40 u. 55) weder als wünschenswerth noch als zulässig anzusehen ist.

Was das Princip der kleinsten Wirkung betrifft, so ist dasselbe in seiner präcisen Fassung § 122 entwickelt. Auf Maupertuis ist lediglich der Name zurückzuführen, welcher den in der Natur vor sich gehenden Bewegungen eine gewisse ökonomische Tendenz unterschieben will. Indem wir aber § 121 gesehen haben, dass die wirkliche Bewegung im allgemeinsten Fall mit der variirten Bewegung ungleichartig ist, folgt, dass die wirkliche Bewegung, auch wenn sie in der That weniger Zeit erfordert, nicht unter den Bewegungen ihrer Art ausgezeichnet ist, und dass daher der Name des Princips der kleinsten Wirkung nicht mehr zu dem eigentlichen Inhalt des Princips passt. Damit aber wird für den allgemeinen Fall die von Maupertuis in den Satz hineingelegte Tendenz hinfällig.

Ausführlicher soll hier noch das Princip des kleinsten Zwanges von Gauss[1]) behandelt werden. Dasselbe lautet in der von Gauss gegebenen Fassung: „Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglich grösster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglich kleinstem Zwange, indem man als Maass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Producte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punkts von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet.“

Fassen wir einen Massenpunkt m des Systems in das Auge, für einen Moment sei die Lage a. Wäre nun die Bewegung eine freie, so würde im nächsten Moment m nach b rücken, das geschieht nun nicht, da noch besondere Bedingungen bestehen sollen, der Punkt m rückt thatsächlich nach c. Würde er statt nach c z. B. nach γ rücken, so besagt das Gauss'sche Princip, dass c dadurch ausgezeichnet ist, dass ist:

Fig. 23.



$$(1) \qquad \sum m(bc)^2 \leqq \sum m(b\gamma)^2.$$

Es ist nun:

$$(b\gamma)^2 = (bc)^2 + (c\gamma)^2 - 2(bc)(c\gamma)\cos\vartheta,$$

wenn wir mit ϑ den von (bc) und $(c\gamma)$ eingeschlossenen Winkel bezeichnen. Aus der Formulirung des Gauss'schen Princips des kleinsten Zwanges in (1) folgt dann, dass auch:

$$(2) \qquad 2\sum m(bc)(c\gamma)\cos\vartheta - \sum m(c\gamma)^2 \overline{\gtrless} 0.$$

1) Gauss, Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik, 1829, Gauss Werke Bd. 5, S. 23.

Wir können nun $(c\gamma)$ beliebig klein fassen, dann ist das zweite Glied in (2) unendlich klein zweiter Ordnung gegenüber dem ersten Gliede in (2), welches unendlich klein erster Ordnung ist. Es wird dann (2):

$$(3) \qquad \sum m(bc)(c\gamma)\cos\vartheta \lessgtr 0.$$

Bezeichnen wir die Projectionen von (bc) auf ein nun eingeführtes geradliniges rechtwinkliges Coordinatensystem x, y, z mit (b_1c_1), (b_2c_2), (b_3c_3), die Projectionen von $(c\gamma)$ mit δx, δy, δz, und schreiben wir entsprechend:

$$\begin{aligned} (b_1c_1) &= (bc)\cos\alpha, & \delta x &= (c\gamma)\cos\alpha_1, \\ (b_2c_2) &= (bc)\cos\beta, & \delta y &= (c\gamma)\cos\beta_1, \\ (b_3c_3) &= (bc)\cos\gamma, & \delta z &= (c\gamma)\cos\gamma_1, \end{aligned}$$

dann wird:

$$(bc)(c\gamma)\cos\vartheta = (b_1c_1)\delta x + (b_2c_2)\delta y + (b_3c_3)\delta z.$$

Die Gleichung (3) nimmt nun die Form an:

$$(4) \qquad \sum m\big((b_1c_1)\delta x + (b_2c_2)\delta y + (b_3c_3)\delta z\big) \lessgtr 0.$$

Sind nun die Geschwindigkeitscomponenten des Massenpunktes m in a gegeben durch u, v, w, so können wir in alter Bedeutung schreiben:

$$\begin{aligned} m\frac{(a_1b_1 - u\,dt)}{dt^2} &= X, & m\frac{(a_1c_1 - u\,dt)}{dt^2} &= mx'', \\ m\frac{(a_2b_2 - v\,dt)}{dt^2} &= Y, & m\frac{(a_2c_2 - v\,dt)}{dt^2} &= my'', \\ m\frac{(a_3b_3 - w\,dt)}{dt^2} &= Z, & m\frac{(a_3c_3 - w\,dt)}{dt^2} &= mz''. \end{aligned}$$

Es sind hierin die Projectionen von (ab) und (ac) auf x, y, z durch Indices entsprechend bezeichnet, wie die von (bc) oben bezeichneten. Es folgt weiter:

$$X - mx'' = m\frac{(b_1c_1)}{dt^2}, \quad Y - my'' = m\frac{(b_2c_2)}{dt^2}, \quad Z - mz'' = m\frac{(b_3c_3)}{dt^2}.$$

Damit ist die Gleichung (4) auf die bekannte Form des D'Alembert-Lagrange'schen Principes gebracht:

$$(5) \qquad \sum (X - mx'')\delta x + (Y - my'')\delta y + (Z - mz'')\delta z \overset{=}{\lessgtr} 0,$$

und damit die Gleichwerthigkeit des Gauss'schen Princips des kleinsten Zwanges (1) mit dem D'Alembert-Lagrange'schen Princip erwiesen. Zugleich tritt hier das D'Alembert-Lagrange'sche Princip mit einem Ungleichheitszeichen auf — eine Form des Princips, die in der Litteratur vielfach wiederkehrt und darauf beruht, dass der Ableitung eine etwas andere Verfügung des Begriffs der virtuellen Verrückung (δx, δy, δz) zu Grunde liegt, als sie § 121 allgemein getroffen wurde.

Als charakteristisch für das Princip des kleinsten Zwanges werden wir hier nun wieder die Tendenz hervorzuheben haben, welcher Gauss am Anfang seiner Abhandlung den Ausdruck giebt:

„Der eigenthümliche Charakter des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten besteht darin, dass es eine allgemeine Formel zur Auflösung aller Aufgaben der Mechanik giebt, und so der Stellvertreter aller anderen Principe ist, ohne jedoch das Creditiv dazu so unmittelbar aufzuweisen, dass es sich, so wie es nur ausgesprochen wird, schon von selbst als plausibel empfähle. In dieser Beziehung scheint das Princip, welches ich hier aufstellen werde, den Vorzug zu haben".

Gauss schliesst seine Abhandlung mit den Worten:

„Es ist sehr merkwürdig, dass die freien Bewegungen, wenn sie mit den nothwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modificirt werden, wie der rechnende Mathematiker, nach der Methode der kleinsten Quadrate, Erfahrungen ausgleicht, die sich auf unter einander durch nothwendige Abhängigkeit verknüpfte Grössen beziehen. Diese Analogie liesse sich noch weiter verfolgen, was jedoch gegenwärtig nicht zu meiner Absicht gehört."

§ 126. Die Postulate der Mechanik und die Darstellungen der Mechanik von Hertz und Boltzmann.

Wir haben im vorigen Paragraphen von einigen Anschauungen historisch Notiz genommen, welche die Mechanik und ihre Principe begleitet haben. Mögen diese Anschauungen vielfach die Impulse zu fruchtbaren Speculationen und Präcisirungen abgegeben haben, so entsprechen diese Anschauungen doch keineswegs unseren heutigen Vorstellungen, wie wir solche z. B. § 17 in dem Abschnitt über „Auffassung und Bedeutung der physikalischen Vorgänge als eines Mechanismus" Ausdruck gegeben haben. Die Natur handelt weder nach Gründen noch nach Zwecken, sie ist nichts anderes als ein naturnothwendiger Mechanismus, der beschrieben und erforscht sein will.

Unsere Vorlesungen haben von Anbeginn bis zum Schluss eigentlich keine anderen Vorstellungen begleitet, als die, welche Newton seinen Principien zu Grunde gelegt hat, oder welche sich als eine consequente Entwickelung seines Systems ergaben. Wir wollen noch einmal in Kürze die charakteristischen Merkmale dieses Systems hervorheben und an einigen Erscheinungen des wissenschaftlichen Lebens der Gegenwart zur Anschauung bringen.

Ebenso wie die Geometrie besonderer Grundlagen bedarf, auf denen sie ihr Gebäude aufführt, und welche sie Axiome nennt, so bedarf die Mechanik in erweitertem Umfang solcher Grundlagen, welche wir ebenso Axiome nennen können. Indem es sich nach mancher Richtung empfiehlt an den Doppelcharakter des wissenschaftlichen Systems nach seiner objectiven und subjectiven Seite (§ 3) zu erinnern, habe ich die Doppelbezeichnung Postulate und Axiome vorgezogen.

Abgesehen von einer Reihe von Postulirungen, auf denen die Anwendung der Mathematik beruht, und die hier nicht besonders aufgeführt werden sollen, haben wir im Sinne Newtons 1) eine Reihe mechanischer Begriffe, 2) eine Reihe mechanischer Sätze zu postuliren. So sind Raum, Zeit und Masse die von Newton postulirten Grundbegriffe, — Trägheitssatz, Actionsprincip und Reactionsprincip die von Newton postulirten Grundsätze. Beide erscheinen bei der Einführung zunächst vollkommen inhaltsleer, sie erhalten ihren Inhalt erst beim Ausbau des wissenschaftlichen Systems.

Bei den Begriffspostulaten handelt es sich um Grössen, auf welche der ganze Inhalt der mechanischen und physikalischen Erscheinungswelt zu beziehen ist. Ebenso wie man in der Geometrie räumliche Gebilde auf ein Coordinatensystem bezieht, kann man sich vielleicht auch hier des Ausdrucks bedienen, dass Raum, Zeit und Masse in der Mechanik und Physik die Rolle von Coordinaten — in erweitertem Sinne des Wortes — übernehmen. Nimmt man diesen Vergleich auf, dann entsteht wohl auch die Frage, ob nicht vielleicht, ebenso wie das Coordinatensystem der Geometrie ein fremdes Beiwerk ist, welches von uns nur zur bequemeren begrifflichen Beherrschung geschaffen ist, die von uns postulirten Begriffe des Raumes, der Zeit und der Masse ein den Dingen und Erscheinungen an sich fremdes Beiwerk darstellen, welches uns von Geburt an zur bequemeren Orientirung in der Wirklichkeit mitgegeben ist. Diese Speculationen führen zu Kant's Lehre von den aprioristischen Anschauungsformen des Raumes und der Zeit — wir fügen hier noch die der Masse hinzu.

Wir lassen diese Lehre in der Mechanik ganz dahingestellt. Für unser Denken und Forschen giebt es keine Erscheinung, in welche nicht Raum, Zeit und Masse theilweise oder zusammen eingehen.

Allenthalben treten diese Begriffe untrennbar mit den Erscheinungen auf, ja sie scheinen auf das engste mit ihnen verbunden, gerade darum aber fordern wir ihre Unabhängigkeit von einander und von den Erscheinungen und postuliren [1]) sie zu unseren naturgemässen unabhängigen Grundbegriffen, auf welche alle Erscheinungen zu beziehen sind.

Bei den von Newton postulirten Grundsätzen der Trägheit, der Actio und der Reactio handelt es sich um Anweisungen, die in der Natur auftretenden Erscheinungen auf einander zu beziehen. Auch diese Anweisungen sind zunächst ganz inhaltsleer, erst durch die Anwendungen bekommen sie ihren der Anschauung zugänglichen Inhalt, durch welche sie ebenso wie die postulirten Grundbegriffe ihre rückwirkende Verfestigung und Sicherung erfahren. Die Ausarbeitung des Systems giebt diesen Anweisungen unter Umständen noch eine erweiterte Bedeutung, ich erinnere an die Erweiterung des Reactionsprincips, wie sie die Flächensätze an die Hand geben (§ 55).

Eine besondere Stellung unter den Postulaten nimmt das Energieprincip ein. Es mag das daran liegen, dass wir mit dem Energieprincip schon den engeren Boden der Mechanik verlassen haben, es ist bereits ein allgemeines physikalisches Princip. So erscheint es in gewisser Hinsicht als ein postulirter Begriff, in anderer Hinsicht als ein postulirter Satz.

Die Reihe von Postulirungen ist, wie unsere im Ganzen historische Darstellung ergeben hat, damit nicht erschöpft. Wir gedenken der Postulirungen, welche mit der Aufstellung des D'Alembert'schen und des Lagrange'schen Princips verbunden waren (§ 120). Es handelt sich hierbei im Wesentlichen um die Frage nach der bedingten Bewegung.

Die Newton'sche Mechanik hatte sich im Wesentlichen im Anschluss an die Behandlung der freien Bewegung entwickelt. Die noch an besondere Bedingungen geknüpfte Bewegung wird nach Newton von Fall zu Fall behandelt, indem die Bedingungen durch Kräfte ersetzt werden, welche das Reactionsprincip befolgen. Diese Methode befriedigt für die Theorie der bedingten Bewegung materieller Punkte, aber für eine allgemeine Theorie der bedingten Bewegung materieller

---

1) In seinem Vortrag über „Das Problem der Zeit" (1898) bezeichnet W. Ostwald die Zeit als das allgemeinste Naturgesetz. Er meint damit wohl dasselbe, wie ich; nur ziehe ich die in Vorschlag gebrachte Terminologie vor, nach der ich zwischen postulirten Grundbegriffen, postulirten Grundsätzen und Naturgesetzen unterscheide. Die Zeit ist danach ein postulirter Grundbegriff.

Systeme versagt sie; hier füllt nun die Verbindung des D'Alembert-schen und des Lagrange'schen Princips die Lücke aus. Soweit die Newton'sche Methode zum Ziele führt, befindet sie sich mit dem D'Alembert-Lagrange'schen Princip in völliger Uebereinstimmung, sobald die Newton'sche Methode versagt, treten die über die Newton'schen Grundsätze hinausgehenden Postulirungen ein, vermöge deren das D'Alembert-Lagrange'sche Princip sich als leistungsfähiger erweist. Es ergiebt sich hier der wesentlich mathematische Begriff der virtuellen Verrückung als besonders fruchtbar.

Was dieser weitere, über Newton hinausgehende Inhalt des D'Alembert-Lagrange'schen Princips physikalisch bedeutet, das wird schwer zu sagen sein. Wir werden jedenfalls darin eine weitere Präcisirung des Newton'schen Reactionsprincips zu sehen haben.

Hier setzt nun die neuere — durch das von Hertz nachgelassene Werk „Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt", Leipzig 1894 — inaugurirte Forschung ein. Wir erinnern an das Beispiel, dessen wir § 121 S. 340 gedachten: die Bewegung einer rollenden Kugel auf einer Ebene ohne Gleitung. Dieses Beispiel scheint auf die Richtung der Hertz'schen Forschung von bedeutendem Einfluss gewesen zu sein. An der Hand dieses Beispiels hat sich Hertz die Vorstellung gebildet, dass die bisherigen mechanischen Principe, auf nicht holonome Systeme angewandt, zu falschen Resultaten führen (cf. S. 23 der Principien), und von hier aus hat er geglaubt, für die Mechanik ein neues Grundgesetz aufstellen zu müssen. Sein Grundgesetz erscheint als eine Verbindung des Galilei'schen Trägheitssatzes und des Gauss'schen Princips des kleinsten Zwanges; er präcisirt es S. 162 dahin: „Jedes freie System beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geradesten Bahn".

Nachdem aber Hölder in seiner früher erwähnten Arbeit nachgewiesen hat, dass die Anschauung bei Hertz auf einer unpräcisen Fassung des Hamilton'schen Princips und des in ihm vorkommenden Begriffs der virtuellen Verrückung beruht, muss gerade der Theil der Hertz'schen Forschung, welchen wir als Ausgangspunkt aufgefasst haben, als irrthümlich bezeichnet werden. Sein Grundgesetz wird als gleichwerthig mit den alten mechanischen Principen zu betrachten sein, vorausgesetzt, dass diese richtig gefasst und angewandt werden.

So bleibt denn nur die Tendenz des Hertz'schen Werkes übrig, die sich als eine der Newton'schen Auffassung entgegengerichtete darstellt. Bildete bei Newton das Actionsprincip der Kräfte als Postulat zunächst für die freie Bewegung, dann unter geschickter Verwerthung des Reactionsprincips auch für die bedingte Bewegung den Ausgangspunkt der Forschung, so postulirt demgegenüber Hertz die kräftelose Mechanik, an Stelle der Newton'schen Kräfte treten bei Hertz nur Bedingungen. Wenn sein Grundgesetz nach dem Wortlaut auch nur Aussagen enthält, welche sich auf freie Systeme beziehen, so lassen sich doch sofort aus dem Grundgesetz Folgerungen ableiten, welche sich auf unfreie Systeme beziehen, da jeder Theil eines freien Systems ein unfreies System ist (S. 162).

Der Auffassung von Hertz stellt Boltzmann in seinen „Vorlesungen über die Principe der Mechanik", I. Theil, Leipzig 1897, eine Form der Darstellung der Mechanik gegenüber, welche er „die alte classische" (Vorwort) nennt, welche im Wesentlichen darin besteht, dass ausnahmslos Centralkräfte behandelt werden, dass die Bedingungen consequent durch Kräfte ersetzt werden sollen, und dass, im Falle dieser Ersatz auf Schwierigkeiten stösst, der atomistische Bau der Materie mit seinem Reichthum eventuell verfügbarer molekularer Kräfte herangezogen wird. Der kräftelosen Mechanik von Hertz kann so die bedingungslose Mechanik von Boltzmann gegenübergestellt werden.

Dass diese Heranziehung des molekularen Baus der Materie und der ausnahmslosen Existenz von Centralkräften für das System der Mechanik als classisch im Sinne ihrer Entwicklung von Galilei und Newton bis auf die neuere Zeit bezeichnet werden darf, möchte ich denn doch bestreiten. Bei Lagrange liesse sich nur der S. 354 erwähnte Beweis für das Princip der virtuellen Verrückung allenfalls dafür heranziehen; sonst wird man wohl nicht sagen können, dass Atomistik und Centralkräfte eine bevorzugte Stellung in der analytischen Mechanik von Lagrange einnehmen. Nach meinen Studien hat sich die classische Mechanik insbesondere unabhängig von der Hypothese der atomistischen Constitution der Materie entwickelt: ich glaube in dieser Hinsicht die classische Mechanik als Grunddisciplin innerhalb des physikalischen Systems § 18 richtig charakterisirt zu haben. Als classische Mechanik möchte ich die Mechanik bezeichnen, welche ebensowohl mit Kräften wie mit Bedingungen operirt. Die Schranken dieser Mechanik mögen dann vielleicht auf denselben Umständen, wie die Schranken des rein mechanischen Satzes von der lebendigen Kraft beruhen, welche innerhalb der reinen Mechanik den

Fortschritt des Satzes der lebendigen Kraft zum Energieprincip hindern.

Jedenfalls möchte ich eine vorzeitige Einführung der Atomistik in das System der Mechanik vermieden sehen. Die vorzeitige Einführung der Atomistik hat erkenntnisstheoretisch den Nachtheil, dass die systematischen Grundlagen der Mechanik den vollkommen durchsichtigen euklidischen Charakter verlieren, den sie Dank der Forschung eines Galilei und Newton erhalten haben. Auch wenn sich im Sinne der Boltzmann'schen Darstellung die Nothwendigkeit der Einführung der Atomistik in die Mechanik ergeben sollte, dürfte es sich empfehlen, diese Einführung erst an der Stelle der Mechanik vorzunehmen, an der eine innere Nöthigung dazu vorliegt; das Princip der Oekonomie (§ 14) fordert dies.

Der diesen Vorlesungen zu Grunde liegenden, historisch-kritischen Auffassung der Mechanik scheint die Forschung der Gegenwart trotz ihrer einer Erkenntnisstheorie freundlichen Richtung nicht besonders günstig zu sein. In mancher Beziehung kann ich mich der Charakteristik anschliessen, welche Boltzmann[1]) neuerdings in seinem geistvollen Vortrag „Ueber die Entwickelung der Methöden der theoretischen Physik in neuerer Zeit“ von den Strömungen der Gegenwart gegeben hat. Allen den dort geschilderten Richtungen: der Energetik[2]), der Phänomenologie, der Atomistik haftet ein gesunder inductiver Zug an, der sich von der erst von den Nachfolgern Newton's aufgenommenen unerlaubten Form der Metaphysik fern hält. Diese Richtungen sind nicht von Grund aus falsch oder richtig, ihre Schwäche scheint mir vielmehr in ihrer Einseitigkeit zu liegen, die sie immerhin befähigt, gewisse Erfolge zu erzielen. Alle Richtungen tragen einen stark monistischen Zug, welcher der historischen Entwickelung der Disciplin nicht genügend gerecht wird (§ 2) und schon aus diesem Grunde erkenntnisstheoretisch nicht befriedigen kann. So kommt es, dass die Frage nach den Postulaten oder Axiomen von den aufgeführten Richtungen entweder nur sehr theilweise oder gar nicht

1) Vortrag gehalten in der zweiten allgemeinen Sitzung der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu München am 22. Sept. 1899. Naturwissenschaftliche Rundschau Nr. 39—41.

2) Eine consequente Ausbildung eines energetischen Systems hätte vor Allem der Thatsache Rechnung zu tragen, dass in dem consequent ausgebildeten Newton'schem System das Energieprincip ähnlich wie das Reactionsprincip ein Integral- oder Summationsprincip ist, dessen Verwendung als Elementarprincip nur von Fall zu Fall zu rechtfertigen wäre.

behandelt wird; ja die phänomenologische Richtung der Forschung, welche nicht über die Erfahrung hinausgehen will, leugnet vielleicht überhaupt die innere Nöthigung zur Aufstellung der Postulate. Nur die Berücksichtigung der objectiven und subjectiven Momente der Forschung (§ 3) und die Herstellung ihres naturgemässen Gleichgewichts scheint mir den Weg anzuzeigen, auf dem die Einseitigkeiten vermieden werden können, in denen die erwähnten Richtungen ihre Stärke sehen, welche die Gegner als Schwäche deuten.

In der reinen Mathematik, speciell in der Geometrie ist die Frage nach den Axiomen eigentlich niemals zur Ruhe gekommen.[1]) Demgegenüber ist es sehr merkwürdig, dass die Frage nach den Axiomen oder Postulaten in der Physik so lange geschlummert hat, dass das Verständnis dafür, welche Anforderungen man an physikalische Postulate zu erheben hat, in weiten Kreisen vorloren gegangen zu sein scheint. Die zutreffendste Würdigung der Stelle, welche das Postulat in der modernen Wissenschaft einzunehmen hat, und ihre ökonomische Verwerthung habe ich bei Helmholtz gefunden, während Kirchhoff's Mechanik darüber völlig hinweggeht.

Ich habe es mit als Aufgabe dieser Vorlesungen betrachtet, diese Fragen von Neuem in den Vordergrund des Interesses zu rücken und habe gefunden, dass gerade Newton in diesen Fragen auch heute noch in mancher Richtung den Weg ebenen kann. Wenn Newton den Einfluss während der letzten Decennien nicht ausgeübt hat, den er thatsächlich hätte ausüben können, so lag das in einer Reihe mehr zufälliger Umstände — unter anderen in einer gerade für die hier in Betracht kommenden Fragen unvollkommenen Uebersetzung, welche Newton mit Unrecht zu dem Metaphysiker stempelte, als welcher er ebenso fälschlich vielleicht um die Mitte des Jahrhunderts gefeiert, wie gegen das Ende des Jahrhunderts angegriffen wurde. Die Newton'sche Metaphysik ist keine andere, als die diesen Vorlesungen zu Grunde liegende Anschauung (§ 3), welche an die Grenzen unseres sinnlichen Wahrnehmungsvermögens und damit an die nothwendigen Lücken unserer subjectiven Erkenntniss knüpft, welche auszufüllen Aufgabe der objectiven Erkenntniss ist. Der Aufbau des wissenschaftlichen Systems wird beide Formen der Erkenntniss in sich aufnehmen und verarbeiten müssen.

---

1) Ich erwähne hier nur die noch jüngst erschienene Arbeit von D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig 1899.

Historische Uebersicht zu VII.

Pierre Louis Moreau de Maupertuis 1698—1759.
Jean le Rond d'Alembert 1717—1783.
Joseph Louis Lagrange 1736—1813.
Karl Friedrich Gauss 1777—1855.
Karl Gustav Jacob Jacobi 1804—1851.
Sir William Rowan Hamilton 1805—1865.
Heinrich Rudolph Hertz 1857—1894.

D'Alembert, Traité de Dynamique. Paris 1743. Ostwald's Klassiker Nr. 106.

Maupertuis, Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles. Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris 1744. — Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique. Histoire de l'Acad. Royale de Berlin 1746.

Lagrange, Mécanique analytique. 1 Vol. 4°. Paris 1788.

— — Nouv. édit. 2 vol. 4°. Paris 1811—15. Deutsch herausgegeben von Servus. Berlin 1887.

Gauss, Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik 1829. Gauss Werke. Bd. 5.

Hamilton, General method in dynamics, by which t. study of t. motions of all free systems of points is reduced to t. search a. differential, of one central relation. London Philosophical Transactions 1834. T. II p. 247—308; 1835 T. I p. 95—144.

Jacobi, Vorlesungen über Dynamik (1842—43) herausgegeben von Clebsch. 1. Aufl. 1866. 2. Aufl. 1884.

Hertz, Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt. Leipzig 1894.

Namenregister.

Adams 51.
Airy 328, 329.
d'Alembert 169, 333—338, 341, 345, 353, 356, 359, 360, 364.
Archimedes 189, 259—262, 297.

Baille 329.
Baily 329.
Benzenberg 53, 325.
Bernoulli, Dan., 122, 169.
Bernoulli, Joh., 169.
Bessel 76, 175, 177, 186—195, 226, 296, 316, 331.
Biot 134.
Bohnenberger 191, 226.
du Bois Reymond, P., 297.
Boltzmann 21, 44, 45, 133, 304, 349, 350, 352, 357, 361, 362 (cf. auch Vorwort).
Boys 329, 331.
Braun, C., 329, 331.
Brewster 322, 325.
Brown 255.
Bunge 200, 201.

Cavendish 329.
Clairaut 169, 249, 297, 303, 312—316, 321, 331.
Clebsch 364.
Cohn, F., 324.
Cornu 329.
Coulomb 12, 17, 18, 203, 218, 226, 308.

Delauny 51.
Dirichlet 168, 169, 281, 312, 337.

Ebert 352.
Eötvös 76, 329.
Euklid 13, 53, 78, 79.
Euler 169, 246, 248, 297.

Faraday 19, 132.
Foucault 53, 324—326.
Fourier 64.

Galilei 12, 42, 48—69, 70, 71, 73, 80, 82, 91, 106, 114, 118, 123, 153, 171, 174, 196, 300, 302, 319, 325, 360—362.
Gauss 53, 117, 196, 203, 204, 207, 210, 211, 216, 217, 226, 240, 264, 266, 268—270, 281, 297, 325, 333, 353—357, 360, 364.
Günther 301.

Hagen 290.
Hamilton 333, 340, 341—343, 346—348, 360, 364.
Hansen 324.
Hauy 221.
Hegel 8.
Helmert 301, 319, 327.
Helmholtz 25, 37, 45, 103, 131, 159, 161, 169, 195, 236, 237, 244, 363 (cf. auch Vorwort).
Hermann, L., 46.
Hertz, H., 10, 21, 32, 35, 45, 54, 55, 174, 175, 339, 340, 357, 360, 371, 364 (cf. auch Vorwort).
Hilbert, D., 363.
Hölder 340—344, 360.
Hutton 328.
Huygens 30, 74, 112, 118, 169, 185, 226.

Jacobi 312, 349, 364.
Jolly 330.
Joule 161, 169.

Kant 5, 21, 38, 50, 358.
Kater 191, 226.
Kelvin siehe Thomson.
Kepler 34, 97—103, 118, 324, 327.
Kirchhoff 44, 133, 242, 363 (cf. auch Vorwort).
König, A., 330.
Kohlrausch, F., 117, 201, 295.
Kopernikus 54.
Kreichgauer 76, 217.
Krigar-Menzel 295, 327, 330, 331.

Lagrange 118, 169, 330, 334—338, 341, 344—350, 353—356, 359—361, 364 (cf. auch Vorwort).
Landolt 76.
Laplace 14, 51, 134, 145, 169, 240, 264, 273, 297.
Lindemann 160.
Lotze 41.

Mach, E., 18, 21, 25, 26, 29, 30, 31, 33, 45, 233 (cf. auch Vorwort).
Mariotte 251.
Maskelyne 328.
Maupertuis 340—342, 354, 355, 364.
Maxwell 18, 19, 45, 132, 235, 268, 349, 351, 352 (cf. auch Vorwort).
Mayer, J. R., 161, 169.
Mensbrugghe 273.

Napoleon 14.
Neumann, C., 18, 89.
Neumann, F., 155, 276, 277, 297, 312, 351 (cf. auch Vorwort).
Newcomb 324.
Newton 12, 14, 15, 17, 18, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 34, 39, 41, 45, 49, 54, 70—92, 98—109, 113, 114, 118, 120—123, 127, 128, 131, 132, 134, 148, 153, 157, 166, 169, 171, 174, 189, 190, 196, 211, 240, 290, 300, 302, 304, 307—311, 313, 319, 322—325, 331—335, 337—339, 344, 353, 357—363 (cf. auch Vorwort).

Ostwald 45, 359.

Pascal 249, 297.
Picard 323.
Plateau 231, 268, 281.
Poggendorff 118, 169, 226 (cf. auch Gauss).
Poisson 240, 264, 297, 319—321.
Poynting 330, 331.
Ptolemäus 54.

Quincke 290—294.

Reich 325, 326, 329.
Richarz 295, 327, 330, 331.
Rickert, H., 7.
Riemann 14, 15.

Savart 134.
Schönflies 131.
Seeliger 18, 89.
Stas 76.
Stevinus 260, 297.
Struve, H., 331.

Tait cf. Thomson.
Taylor 248, 305, 336.
Thomson, W., 10, 24, 25, 28, 49, 51, 70, 74, 181, 224, 241, 244 (cf. auch Vorwort).

Voigt, W., 133.

Weber, W., 203, 226.
Wiechert 138.
Wiener 16.
Wilhelmy 290, 291, 293.
Wilsing 329, 331.
Wolff 280, 290.

Young, Th., 266, 297.

Zeiss 294.

Sachregister.

Abplattung der Erde 315, 316.
Absolut 49, 53, 300.
Actio, Actionsprincip 77, 81, 82, 86, 87, 90, 106, 120, 121.
Adhäsion 272, 273, 278, 279.
Aether, Weltäther 15, 54.
Aggregatzustände 228—235.
Analogie 25, 30—33.
— mechanische 32, 349—352.
Analyse 25, 28—30, 58.
Anomalie (bei Planeten) 96, 97.
Anpassung 31.
Anthropomorphismus 38, 39 (cf. auch Vorwort).
Aprioristische Vorstellung 5, 6.
Arbeit, Arbeitsfähigkeit, Arbeitsvorrath 149—155, 160.
Astasirung 203, 220—225.
Atomistik 12, 15, 16, 28, 43, 44, 228, 233—235, 239—245, 265, 361, 362.
Aufhängung, unifilare u. bifilare, 202—217.
Aufpunkt 304.
Auftrieb 261.
Aussen-Innen 120, 151—153.
Axiom siehe Postulat.

Ballistische Methoden 219, 220.
Bedingte Bewegungen und Systeme 106—117, 135, 333, 334, 339—348, 359.
Begriff, Begriffssystem, Begriffsbildung 3, 4, 19, 20, 23, 34, 63, 233—234.
Benetzbarkeit 279, 280, 293.
Beobachtung 299.
Beschleunigung 48, 49, 61—63, 66.
Bewegungsgesetze siehe Postulate.
Bicyklisches System 349—352.
Binnendruck 266, 271, 274.
Breite, geographische, 314, 315.

Capillarität 238, 239—241, 264—296.
Capillaritätsconstante 283.
Capillarrohrtheorie 286—289.
Causal, Causalität 36—40.
Centralkräfte 120, 133, 134, 354, 361.
Centrifugal-, Centripetalkräfte 109—113, 254.
Centrifugalkraft der Erde 313, 314.
Cohäsion 264, 265, 278, 279.
Communicirende Röhren 253.
Compressibilität und Incompressibilität 237, 271, 283.
Compromiss in der praktischen Physik 173, 179.
Consequenzen und Inconsequenzen 243, 244.
Conservative Kräfte und Systeme 153, 159—161.
Constante, physikalische 174, 175, 179.
Coordinaten 55, 56, 57.
— allgemeine (Lagrange) 345, 346.
— cyklische 349—352.
Cultur 7, 41.

Deduction siehe Induction.
Definition, definiren 20—23, 55, 59, 60, 62, 72—75, 233, 234.
Denknothwendig 40, 41.
Dichte der Erde 327—331.
Differentialgleichungen der Mechanik 344—348.
Dimensionen, Theorie der, 63—65.

Directionsmoment 208, 211, 213, 215—217.
Drehungsmoment 130, 132, 135—138.
Druckbegriff 246—249.
Druckkräfte 84, 85.
Druck im Innern der Erde 317, 318.

Einheiten 104, 105.
Einheitlich 242 (cf. auch Monismus).
Elektromotorische Kräfte 351.
Elementarprincip 164.
Empfindlichkeit (prakt. Physik) 198—201, 220—225.
Energetik 362.
Energie, Energieprincip 12, 18, 153—165, 359.
Entwickelung der Wissenschaft 42, 44.
— der Mechanik 332—352.
Erddrehung, Beweise für, 324—326.
Erfahrung 4—7 (cf. auch Vorwort).
Erkenntniss, Erkenntnisstheorie 2—46, 362, 363.
Exact 303.

Fall (freier Fall), Fallgesetze 65—67, 155—157.
Fehler, Fehlerbegriff 174, 175, 179, 186, 188, 190, 198.
Fernkräfte 84, 85.
Flächensätze 92, 93, 128—147.
— Anwendungen 170—226.
Freie Bewegung (Systeme) 48—105, 122, 128, 135, 333.
Freiheitsgrade 345—347.

Genauigkeit 175—182.
Geophysik 298—331.
Geschichte 4—6, 42, 43 (cf. auch Vorwort).
Geschwindigkeit 60, 61.
Gleichgewichtsbedingungen 166—168, 281—284, 335, 336.
Gleichgewichtsflächen 251, 254, 266.
Gleichgewichtsfigur der Erde 312—317.
Gravitation 12, 78, 84, 88—105, 302—331.
Gravitationsconstante 101—105, 327—331.
Gravitationsmittelpunkt 304—311.
Gravitation von Kugelschalen und Kugeln 307—311.
Grenzwerthe 303, 304.
Grössenordnung (praktisch) 180, 181, 242, 243.
Grössenverhältniss 300.
Gründe 40, 173, 174, 357.
Grunddisciplin 41—44.
Grundlagen (methodisch) 8, 10—23.
Gyrationsradius siehe Trägheitsradius.

Historische Uebersicht 118, 169, 226, 297, 331, 364.
Holonome und nicht holonome Systeme 121, 338—341, 360.
Horizontalwage 218—220.
Hydraulische Presse 249.
Hydrodynamik 236, 237.
Hydromechanik 237.
Hydrostatik 228—297.
Hypothese 11, 13, 14—17, 19, 24, 34, 43, 244 (cf. auch Vorwort).

Ideal, Ideen siehe Real, Realitäten.
Identität 8, 32.
Impuls siehe Stoss.
Incompressibilität siehe Compressibilität.
Inconsequenzen siehe Consequenzen.
Induction-Deduction 24—35, 42, 71, 79, 84, 165, 337, 362.
Innen-Aussen 120, 151—153.
Instrumentenlehre 170—226.
Integralprincip 131, 134, 164.
Invariable Ebene 145.
Isolation siehe Superposition.

Kegelöffnung 309, 310.
Kinematik 48—69.
Kinetik 70—85.
Kraft 39, 77, 81.
— lebendige 93, 148—165.
— Messung von starken Kräften 183—201.
— Messung von schwachen Kräften 202—225.
Kräftemittelpunkt 123.
Kräftepaar 206—207.
Kreislauf der Erkenntniss 2—4.
Kreisprocess 151—153, 160.
Kunst der praktischen Physik 173, 177—179, 180.

Labiles Gleichgewicht 168.
Literatur zur Erkenntnisstheorie 45, 46, siehe auch historische Uebersicht.
Logik siehe Denknothwendig.

Magnetismus 205—208, 220—225.
Masse 12, 18, 19, 49, 64, 71, 73—77, 86, 87, 104.
Massenbegriff der praktischen Astronomie 100—105.
Massenmittelpunkt 91, 122, 305, 306.
Massensystem 119—169.
Mathematik 11, 13, 27, 28, 34, 38, 43, 78, 79 (cf. auch Vorwort).
Materialismus 8.
Mechanik 41—44, 332—364 (cf. auch (Vorwort).
— Galilei'sche 48—69.
— Newton'sche 70—85, 106—117.
Mechanismus (naturnothwendiger) 40, 41.
Metaphysik 10, 11, 16, 300, 362, 363.
Methodenlehre der praktischen Physik 170—226 insbes. 193—196.
— der Geophysik 301—304.
Methodische Grundlagen 10—23.
— Methodische Regeln 24—35.
Minimalflächen 281.
Mischbare und nicht mischbare Flüssigkeiten 275, 276.
Mittelwerth 124.
Modell, mechanisches, 352.
Molekular siehe Atomistik.
Monismus 245, 382.
Monocyklisches System 349, 351.

Naturgesetz 11, 13, 14, 17—20, 24, 34, 43, 78, 88, 89, 104, 174, 176.
Naturnothwendig 40, 41.
Nöthigung (innere logische) 16, 19, 54.
Nothwendig 242—245, siehe auch Denknothwendig, Naturnothwendig.
Nullmethoden 220, 225.
Nutation 144, 145, 318.

Oberflächendruck, Oberflächenenergie, Oberflächenspannung 264—272, siehe auch Capillarität.
Oberfläche, freie, der Flüssigkeiten an Gefässwänden 284—286, siehe auch Gleichgewichtsflächen.
Objectiv—Subjectiv 6, 7, 10—12, 15—20, 25—31, 37, 38, 42, 43, 46, 78, 172, 173, 176, 296, 353, 363 (cf. auch Vorwort).
Objectivirung 8, 27, 37, 46 (cf. auch Vorwort).
Oekonomie 25, 33—35, 43, 240.
Oscillation 8, 25, 30—33.

Paradoxon, hydrostatisches, 260—263.
Parallelogramm der Kräfte 58, 82, siehe auch Superposition und Vorwort.
Pendel 114—117, 155—157, 179, 183—196.
Perpetuum mobile 159—161.
Phänomenologie 243, 362.
Planetenbewegung 88—105.
Ponderomotorische Kräfte 351.
Postulat (Axiom), Postulirende Grundbegriffe u. Grundsätze 11, 12—14, 19, 24, 50—54, 55, 71, 72, 77—84, 89, 104, 131, 132, 158—163, 165, 174, 176, 187, 300, 334—337, 353, 354, 357—363 (cf. auch Vorwort).
Potential, Potentielle Energie 153—158, 249—251, 268, 281, 282, 336.
— elektrodynamisches 351.
Präcession 144, 145, 318.
Präcisionsmessungen, Präcisionsmesskunst 165, 174—182, 186, 202, 203, 221, 240, 289—296, 298, 299, 327, 329.
Präliminarien 22, 72—74, 230.
Praktische Physik 170—226, 289—296, 299.
Princip des Archimedes 260—262.
— der Energie 158—165, 362.
Principe der Mechanik 332—364.
Punktkräfte 161.

Randwinkel (Capillarität) 276—280, 284, 291, 293.
Raum 52—54.
Reaction, Reactionsprincip 77, 82—84, 86, 90, 106, 122, 123, 130—135, 162, 211, 274, 310, 311, 335, 337, 359, 360.
Realität (Idealität) 8.

Regel siehe Methodische Regeln.
Reversionspendel 191—196.
Richtungsgrösse siehe Vector.
Rotationsmoment 130, 138.
Rotoren 138.
Rückwirkende Verfestigung des Systems 4, 13, 14, 22, 51, 63, 71, 75, 78, 80. 105, 171—173, 177, 196, 299—301, 313 (cf. auch Vorwort).

Schätzung 303.
Schema, Schematische Theorie 178, 191, 192, 196, 197, 199, 205, 206.
Schwelle (psychophysisch) 11.
Schwere (Galilei'sche) 66—69.
— innerer Zusammenhang mit Gravitation 302, 312—317, 319—324.
Schwerpunkt siehe Massenmittelpunkt.
Schwerpunktssätze 90, 91, 120—127.
Schwingungsdauer (Pendel) 116, 117.
Schwingungsmittelpunkt 185.
Secunde 50, 51.
Sinne (Schranken der) 6, 10, 11, 13, 15, 16, 19, 38, 53, 54 (cf. auch Vorwort).
Sprache 14, 21, siehe auch Terminologie.
Stabiles Gleichgewicht 168.
Statik 166—168, 334—337, 338.
Statisches Moment 167.
Stoss 61, 78, 81, 86, 87, 162—164.
Strecke 58, 59.
Subjectiv siehe Objectiv.
Subjectivirung siehe Objectivirung.
Summationsprincip siehe Integralprincip.
Superposition—Isolation 25, 28—30, 56—58, 63, 180, 236, 249.
Synthese 25, 28—30, 236.
System, Systematik 2, 4, 17, 41—44, 51, 53, 54, 76, 171—176, 298—301.

Terminologie 14, 20—23.
Thatsachen der Erfahrung, Thatsächlich 5, 235, 240.
Theorie 241—245.
Torsion 204, 205, 209, 210, 213—215.
Torsionsverhältniss 210, 214.
Torsionswage (siehe auch Horizontalwage) 203.
Trägheit, Trägheitsprincip 12, 48, 49, 54, 55, 62, 63, 73, 74, 77, 80, 81, 86, 89, 112 (cf. auch Vorwort).
Trägheitsellipsoid 141.
Trägheitsmoment 130, 132, 139—144, 216—217.
Trägheitsradius (Gyrationsradius) 132, 133.
Trennungsfläche 272—276.

Umbildung 31.

Vagabundirende Ströme 225.
Variation 336, 340—348.
Vectoren (Richtungsgrössen) 55—63, 137.
Verdrängte Flüssigkeitsmasse 259.
Vergleichung siehe Analogie.
Verlorene Kräfte 334.
Vernachlässigung 181.
Verwandlung eines Raumintegrals in ein Flächenintegral 256—258.
Virtuell 238, 282, 335—348, 360.
Vollständig siehe Wesentlich.

Wärmeäquivalent 161—165.
Wage 179, 196—201.
Weg, Wegelement 58, 59.
Weltäther 53, 54.
Wesentlich 26, 28, 31, 36, 44, 182, 228, 240, 243, 245, 302.
Wiederholung 2.
Wirkung siehe Actio.
— kleinste 342, 354.
Wurf, Wurfgesetz 67, 69, 155—157.

Zeit 50, 51, 103, 104.
Zufall 280.
Zwang (kleinster) 353—357.
Zweck 40, 173—174, 357.
Zweikörperproblem siehe Planetenbewegung.