

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej

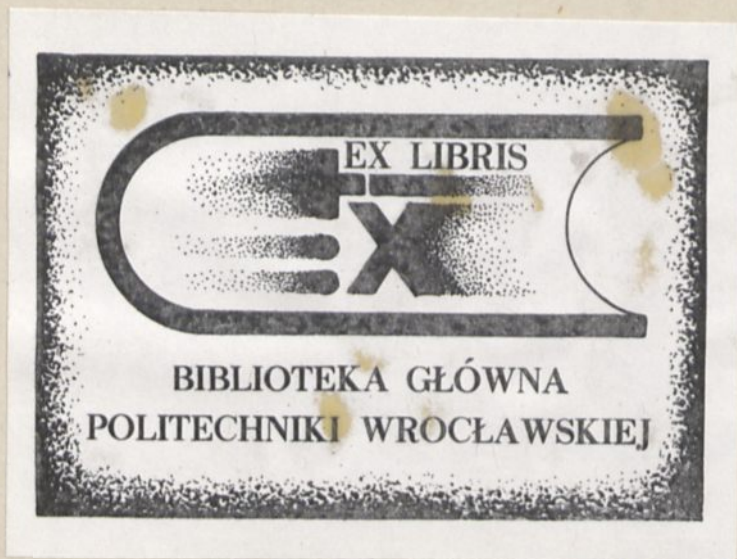


100100370310

~~27590~~

E 102
m

Archiwum



DIE
SCHWINGUNGEN EINES TRÄGERS
MIT BEWEGTER LAST.

DR. H. ZIMMERMANN,

DIE SCHWINGUNGEN EINES TRÄGERS
MIT BEWEGTER LAST.





POSTAGE WILL BE PAID BY ADDRESSEE
NO POSTAGE
NECESSARY
IF MAILED
IN THE
UNITED STATES

2

DIE
SCHWINGUNGEN EINES TRÄGERS
MIT BEWEGTER LAST.

VON

DR. H. ZIMMERMANN,
GEHEIMER OBER-BAURATH.

MIT 9 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN,
4 TABELLEN UND 4 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.



1911. 2134.

BERLIN 1896.
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.
(GROPIUS'SCHE BUCH- UND KUNSTHANDLUNG.)



Im. 19692.

357483L/1

Vorwort.

Ueber den Zweck dieser Abhandlung giebt die Einleitung die nöthige Auskunft. Es mögen deshalb hier nur einige Worte über die Darstellungsweise vorausgeschickt werden. Da der Verfasser naturgemäfs den Wunsch hegt, recht viele Leser zu finden, so hat er beträchtliche Mühe darauf verwendet, die Entwicklung und den Bau der Gleichungen so übersichtlich, einfach und regelmäfsig zu gestalten, wie nur irgend möglich. Dazu bedurfte es der Anwendung einer Reihe abkürzender Bezeichnungen. Die betreffenden Buchstaben sind an der Stelle, wo sie zuerst auftreten, stets durch fetteren Druck hervorgehoben und bei passender Gelegenheit wiederholt erklärt. Die Gleichungen sind in ausgiebiger Weise mit Nummern versehen, so dafs alle Bezugnahmen mit voller Bestimmtheit bewirkt werden konnten. Ferner ist darauf Gewicht gelegt, auch den Formelsatz möglichst regelmäfsig aufzubauen, da das bei sorgloser Anordnung entstehende wirre Durcheinander längerer, dicht aufeinander folgender Formeln den Ueberblick sehr erschwert und vom Lesen abschreckt. Die Entwicklungen durch Weglassen einer gröfseren Zahl von Zwischengleichungen zu kürzen, ist ein Mittel, das zwar den Schein einer eleganten Einfachheit erwecken kann, das aber oft mehr schadet als nützt, da der Leser das Gestrichene selbst wieder herstellen mufs, wenn er den Faden der Rechnung genauer verfolgen will. Ich habe daher so viel beibehalten, wie der von der Verlagshandlung bewilligte Raum erlaubte. Für das hierbei, sowie auch in der Ausstattung des Schriftchens mit Abbildungen mir bewiesene Entgegenkommen sage ich derselben an dieser Stelle meinen besten Dank.

Berlin, im Mai 1896.

Zimmermann.

Inhaltsverzeichniss.

	Seite
Einleitung	1
§ 1. Differentialgleichung der Bahn der bewegten Masse	3
§ 2. Allgemeine Integration der Differentialgleichung	6
§ 3. Eigenschaften der Stammgleichung. Rechnungsprobe	9
§ 4. Darstellung der Gröfsen η_1 und η_2 für $\alpha \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 1$	12
§ 5. Allgemeine Bestimmung der Integrationsfestwerthe	18
§ 6. Anwendung auf zwei Hauptfälle. (Wagerechte und senkrechte Schwingungen)	19
§ 7. Weitere Untersuchung des zweiten Hauptfalles. Umformung der Bahngleichung	21
§ 8. Werthe der unbestimmten Integrale	23
§ 9. Werthe der bestimmten Integrale	25
§ 10. Andere Form der Bahngleichung. Gröfsen W und W'_0	27
§ 11. Grenzfälle $\alpha = \infty$ und $\alpha = 0$	30
§ 12. Gestalt der Bahn für beliebige Werthe von α	32
§ 13. Beanspruchung des Trägers	34
§ 14. Anwendung	37
§ 15. Schlufsbetrachtung	40
Tabellen und Tafeln	43

Inhaltsverzeichnis

1	1. Einleitung
2	2. Die Aufgabenstellung
3	3. Die Lösungsmethoden
4	4. Die Ergebnisse
5	5. Zusammenfassung
6	6. Literaturverzeichnis
7	7. Anhang
8	8. Schlusswort
9	9. Bibliographie
10	10. Index
11	11. Register
12	12. Nachwort
13	13. Danksagung
14	14. Impressum
15	15. Verlagsangaben
16	16. Kontaktinformationen
17	17. Copyright
18	18. Druckdaten
19	19. Auflagen
20	20. Nachdruck
21	21. Reproduktion
22	22. Fotokopieren
23	23. Zitieren
24	24. Übersetzung
25	25. Sonstige Rechte
26	26. Haftung
27	27. Gewährleistung
28	28. Rückgabe
29	29. Abbruch
30	30. Sonstige



Einleitung.

Die Frage, welchen Einfluss der Umstand auf die Formänderung und Beanspruchung eines Brückenträgers ausübt, dass die Lasten nicht auf dem Träger ruhen, wie es die statische Berechnung stillschweigend voraussetzt, sondern ihn mit einer endlichen, bei Eisenbahnbrücken sehr bedeutenden Geschwindigkeit überschreiten, hat die Fachleute schon viel beschäftigt. Soweit dieser Einfluss aus den Unregelmäßigkeiten der Bahn oder der Lastbewegung entspringt, ist eine rechnerische Ermittlung natürlich nicht möglich. Man hat sich hier durch Einführung von mehr oder minder willkürlichen Coefficienten geholfen, die entweder auf eine Erhöhung der rechnerischen Ruhelast oder auf eine Verminderung der zugelassenen Beanspruchung hinauslaufen. Außer den unregelmäßigen bestehen aber auch regelmäßige Wirkungen der Geschwindigkeit. Der Träger ändert seine Form unter der Last, diese beschreibt also bei ihrer Fahrt keine gerade Linie, selbst wenn die Bahn ursprünglich vollkommen gerade und zwangsläufig, die Bewegung des Lastpunktes beim Auftritt parallel zur Bahnachse und das — im allgemeinen veränderliche — Lastsystem frei von störenden, gegenseitigen Bewegungen seiner Theile ist. Die Bewegung eines Körpers in gekrümmter Bahn ist aber bekanntlich mit dem Auftreten eines Druckes, der Fliehkraft, verknüpft, dessen Größe nicht von dem Gewichte, sondern von der Masse der bewegten Last sowie von deren Geschwindigkeit abhängt. Der Druck, den die Last als solche auf den Träger ausübt, wird also beeinflusst durch die Biegung des letzteren und durch die Fahrgeschwindigkeit, und dieser Druck beeinflusst seinerseits wieder die Durchbiegung des Trägers und damit die Form der Bahn. So verwickelt nun auch das Gesetz der gegenseitigen Abhängigkeit dieser Größen sein mag, so ist doch klar, dass dasselbe einer rechnerischen Untersuchung zugänglich sein muss. In der That besitzen wir eine Reihe von Arbeiten über diese Frage, die zum Theil von namhaften Fachleuten herrühren; sie streng und erschöpfend zu beantworten, ist bisher jedoch nicht geglückt. Abgesehen von einigen ganz verfehlten Versuchen und groben Irrthümern (wie z. B. der Verwechslung der vorerwähnten Bahn mit der elastischen Linie des Trägers) ist die Lösung meist daran gescheitert, dass

sich die Forscher durch die mathematische Schwierigkeit des Falles zu vereinfachenden Annahmen haben drängen lassen, die entweder der Wirklichkeit nicht entsprachen oder gerade das als bekannt voraussetzten, was erst bewiesen werden sollte.

Einer derer, die sich am eingehendsten mit der Aufgabe befaßt und solche willkürliche Annahmen zu vermeiden gesucht haben, ist der französische Ingenieur Souleyre. Aber auch dieser gewandte Rechner hat in seiner großen Abhandlung Nebenwege eingeschlagen, die zu einer befriedigenden Lösung nicht führen und dabei keineswegs einfach sind.¹⁾ Der Grund, den er dafür angiebt, ist so bemerkenswerth, daß wir ihn wörtlich wiedergeben möchten. Nachdem er dargelegt, warum die Untersuchungen seiner Vorgänger keinen Erfolg hatten, fährt er fort: „La question est donc loin d'être épuisée; mais tout effort à tenter dans la voie de l'intégration des équations différentielles nous paraît d'avance condamné à la stérilité.“ Es ist also die Schwierigkeit der Integration der in Betracht kommenden Differentialgleichung, die Souleyre von dem geraden Wege abgeschreckt hat. Allerdings gehört diese Gleichung selbst für den einfachsten Fall eines gewichtlos gedachten Trägers mit überall gleichem Querschnitt auf nur zwei starren Stützen und mit einer unveränderlichen Einzellast zu einer Gattung, deren allgemeines Intregal bisher nicht bekannt war. Trotzdem ist Schreiber dieser Zeilen stets der Ueberzeugung gewesen, daß gerade die — wenn auch nur näherungsweise — Integration einer strengen Grundgleichung am besten geeignet sein würde, der Unsicherheit auf diesem Gebiete ein Ende zu machen. Wie groß letztere ist, und wie weit die Ansichten über den Einfluß der Geschwindigkeit auf die Durchbiegung eiserner Brückenträger auseinander gehen, lehren zahlreiche Mittheilungen und Erörterungen in der Fachpresse, von denen hier nur auf die in den letzten Jahrgängen des Centralbl. d. Bauverw. enthaltenen hingewiesen werden möge.²⁾ Die Bemühungen in der angedeuteten Richtung hatten den Erfolg, daß das allgemeine Intregal für den bezeichneten Fall

1) Annales des Ponts et Chaussées 1889, II, S. 341 bis 441.

2) Centralbl. d. Bauverw. 1890, S. 317; 1891, S. 448; 1892, S. 159, 199, 215; 1895, S. 474. — Die Erörterungen im Jahrg. 1892 beziehen sich auf einige Abhandlungen von Glauser. Es scheint, daß die an denselben geübte Kritik die im Jahre 1894 auf S. 56 und 59 von Glasers Annalen für Gewerbe und Bauwesen erschienene, sehr bemerkenswerthe Arbeit angeregt hat, in der Glauser mittels einer näherungsweise Integration der vom Schreiber dieser Zeilen auf S. 215 des Centralbl. d. Bauverw. für 1892 abgeleiteten Differentialgleichung zum erstenmale ziemlich richtige Ergebnisse bringt. Die Lösung ist jedoch unvollkommen, da die angewandte Entwicklung nach einer Potenzreihe für einen Theil des Trägers versagt und überdies das eigentliche Bewegungsgesetz im dunkeln läßt. — Das allgemeine Integral der Differentialgleichung war mir schon im Jahre 1892 bekannt. Die Veröffentlichung ist bisher unterblieben, weil es wünschenswerth schien, nicht nur die Möglichkeit der Integration nachzuweisen, sondern auch gleich ein praktisch brauchbares Rechnungsverfahren auszubilden und dasselbe auf eine Reihe von Beispielen anzuwenden. Hierzu war ein nicht unbeträchtlicher Aufwand an Arbeit und Zeit erforderlich, wodurch sich die Vorbereitung für den Druck lange verzögert hat.

gefunden wurde. Wie zu erwarten war, zeigte sich, dafs dasselbe die Bahn des Lastpunktes nicht nur für die der regelmässigen Einwirkung der Schwere und des Federdruckes unterworfenen, sondern auch für die beliebigen, störenden Einflüssen ausgesetzte Masse ergab, d. h. dafs die Lösung das allgemeine Gesetz mit umschloss, nach dem die Schwingungen eines Trägers unter gleichmässig fortschreitender Last, also z. B. auch die Seitenschwankungen, vor sich gehen. Wenn auch nach letzterer Richtung die Schwierigkeit einer zahlenmässigen Darstellung des ganzen Vorganges deswegen bestehen bleibt, weil die störenden Einflüsse meist nach Art und Grösse weder bekannt sind, noch auch theoretisch gefunden werden können, so dürfte doch die Annehmlichkeit nicht zu unterschätzen sein, welche die Kenntnifs des Schwingungsgesetzes in vielen Beziehungen bietet.

Schliesslich erscheint bemerkenswerth, dafs das hier angewandte und nunmehr vorzuführende Integrationsverfahren auch dann noch eine Lösung ergibt, wenn die auf die bewegte Masse wirkende Kraft nicht unveränderlich, sondern eine Function der Laststellung ist. Dieser Umstand eröffnet die Möglichkeit, den Einfluss der Veränderlichkeit des Federdruckes wenigstens näherungsweise zu ermitteln.

§ 1. Differentialgleichung der Bahn der bewegten Masse.

Ein gerader, biegsamer Stab von überall gleichem Querschnitte mit dem Trägheitsmoment J , dem Elasticitätsmafs E und der Länge $2l$ ruhe auf zwei starren Stützen. Ein im Abstände x von der Mitte auf den Stab ausgeübter Druck erzeugt dort eine Durchbiegung y , die sich (vorausgesetzt, dafs die Kraftebene den Querschnitt in einer Hauptachse schneidet, und dafs J das zur anderen Hauptachse gehörige Trägheitsmoment ist) aus der bekannten Gleichung

$$1) \quad y = \frac{Ql^3}{6EJ} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^2$$

ergiebt.³⁾ Denkt man sich den Angriffspunkt des Druckes allmählich über den ganzen Stab verschoben, so beschreibt er eine Curve, deren Form durch 1) bestimmt ist. Bei unveränderlichem Q hängt der Verlauf der Curve lediglich von den beiden Klammerausdrücken ab; sie hat dann die durch nebenstehende Abb. 1 veranschaulichte Gestalt. Wenn es sich um die Bewegung einer Masse handelt, ist die Unveränderlichkeit von Q im allgemeinen nur bei sehr kleinen Geschwindigkeiten annähernd vorhanden. Demgemäss bezeichnet

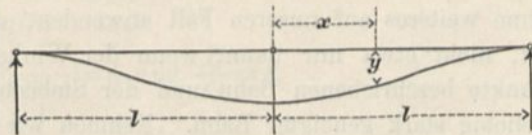


Abb. 1.

man die in Abb. 1 dargestellte Linie als Curve der Senkungen für ruhende Last. Welche Form die Curve bei grösseren Geschwindigkeiten annimmt, das zu ermitteln ist der Zweck der vorliegenden Untersuchung.

3) Siehe des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte“, 1890, Abth. I, S. 293.

Eine Masse m (Abb. 2) bewege sich unter dem Einfluss der lothrechten Kraft V in einer beliebigen Bahn, die in irgend einem Punkte x, y

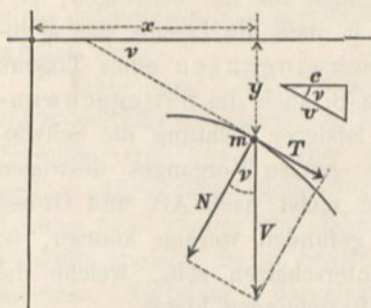


Abb. 2.

unter dem Winkel ν gegen die Wagerechte geneigt ist und dort den Krümmungshalbmesser r besitzt. V lässt sich ersetzen durch die Seitenkräfte $T = V \sin \nu$ in der Richtung der Bahn und $N = V \cos \nu$ rechtwinklig dazu. Dann muſs bekanntlich, wenn sonstige Einwirkungen auf m nicht vorhanden sind, die sogenannte Fliehkraft von m der Kraft N entgegengesetzt gleich sein. Ist v die Geschwindigkeit in der Richtung von T , und c die entsprechende

wagerechte Geschwindigkeit, wonach also $v = c : \cos \nu$, so ergibt sich

$$N = V \cos \nu = \frac{mv^2}{r} = \frac{mc^2}{r \cos^2 \nu}.$$

Setzt man hierin für den Krümmungshalbmesser den Ausdruck

$$r = \frac{\sec^3 \nu}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{1}{\cos^3 \nu \frac{d^2 y}{dx^2}},$$

so erhält man $V = mc^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$, also unabhängig von der Neigung ν der Bahn.

Diese Gleichung ergibt die auf m einwirkende Kraft V in dem Sinne von $+y$ (also nach unten) positiv, wenn die Bahn in derselben Richtung hohl gekrümmt ist. Rechnet man die Kraft, die m der Einwirkung von außen entgegengesetzt, ebenfalls nach unten (im Sinne einer Lastvermehrung) positiv, so ist diese Gegenkraft $= -V$ zu setzen.

Unter der stets erfüllten (der gesamten Elasticitätslehre zu Grunde liegenden) Annahme, daſs die Formänderungen des Stabes so klein seien, daſs die Tangente des Neigungswinkels der elastischen Linie überall gegen die Einheit vernachlässigt werden darf, und unter der Voraussetzung, daſs die Richtung des Führungsdrucks nur sehr wenig von dem rechten Winkel gegen die Stabachse abweichen könne, läſst sich die vorstehende Entwicklung ohne weiteres auf unseren Fall anwenden, und zwar, was bemerkenswerth ist, nicht etwa nur dann, wenn der Winkel zwischen der von dem Lastpunkte beschriebenen Bahn und der Stabachse klein ist, sondern auch bei beliebig stark geneigter Bahn. Nehmen wir nun noch an, daſs auſser dem von der Masse m , der Geschwindigkeit c und der Krümmung der Bahn abhängigen (vorläufig unbekanntem) Druck V , auf die bewegte Masse und durch deren Vermittlung auch auf den sie tragenden Stab eine beliebige lothrechte Kraft P (z. B. Schwerkraft $+$ Federdruck) einwirke, so ergibt sich

$$Q = P - V = P - mc^2 \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Führen wir diesen Werth von Q in die Gleichung 1) ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen als Differentialgleichung der von der Masse m beschriebenen Bahn:

$$2^a) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{6 EJ}{l^3} \frac{1}{mc^2} \frac{y}{[1 - (x/l)^2]^2} - P \frac{1}{mc^2} = 0.$$

Wir setzen zur Vereinfachung der Schreibweise fortan $x:l = \xi$ und behalten im Auge, daß ξ ein zwischen -1 und $+1$ liegender echter Bruch ist. Bezeichnet ferner G das Gewicht der Masse m und g die Beschleunigung der Schwere, so geht Gleichung 2^a) mit $dx^2 = l^2 d\xi^2$ und $m = G : g$ über in

$$2^b) \quad \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{6 EJ}{Gl^3} \frac{gl^2}{c^2} \frac{y}{(1 - \xi^2)^2} - \frac{P}{G} \frac{gl^2}{c^2} = 0.$$

Es empfiehlt sich, die Bedeutung der einzelnen Ausdrücke etwas näher zu prüfen. Mit $x=0$ und $Q=G$ ergibt sich aus Gleichung 1) für die Senkung y_0 , die die Masse m erleiden würde, wenn sie in der Mitte des betrachteten Stabes ruhte ($c=0$), der Werth $y_0 = Gl^3 : 6 EJ$.

Ferner ist $t_0 = \frac{l}{c}$ die Zeit, die die Masse gebrauchen würde, um die Länge l mit der Geschwindigkeit c zu durchlaufen. Bezeichnet man die Höhe, die die Masse in derselben Zeit frei durchfallen würde, mit h , so ist $2h = gt_0^2 = gl^2 : c^2$. Hiernach kann die Gleichung 2^b) in der Form

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{2h}{y_0} \frac{y}{(1 - \xi^2)^2} - \frac{P}{G} 2h = 0$$

geschrieben werden.

Wir wollen nun die Fallhöhe $2h$ als Maß für y benutzen und den mit dieser Einheit gemessenen Werth mit η bezeichnen, sodafs also

$$\eta = \frac{y}{2h} \quad \text{und} \quad d^2 \eta = \frac{d^2 y}{2h}.$$

Theilt man die vorhergehende Gleichung durch $2h$ (was zulässig, so lange nicht c unendlich groß ist), so ergibt sich

$$2^c) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{2h}{y_0} \frac{\eta}{(1 - \xi^2)^2} - \frac{P}{G} = 0.$$

Setzen wir zur weiteren Vereinfachung

$$3) \quad \frac{2h}{y_0} = \frac{\frac{gl^2}{c^2}}{Gl^3} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{P}{G} = \beta,$$

dann sind α und β Festwerthe, wenn P und c , wie dies nunmehr geschehen soll, als unveränderlich angenommen werden.⁴⁾ Damit lautet die den Gegen-

4) Es möge hier die Bemerkung Platz finden, daß das weiterhin angewandte Integrationsverfahren auch dann zum Ziele führt, wenn β nicht unveränderlich, sondern eine beliebige Function von ξ ist. Man hat dann nur β unter, statt vor das Integralzeichen zu setzen.

stand der weiteren Untersuchung bildende Differentialgleichung in übersichtlichster Form

$$4) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{\alpha}{(1-\xi^2)^2} \eta - \beta = 0.$$

Der Vollständigkeit wegen wiederholen wir noch die für die Veränderlichen ξ und η bestimmenden Gleichungen

$$4^a) \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \eta = \frac{y}{2h}; \quad 2h = \frac{gl^2}{c^2} = \alpha y_0.$$

Aus 3) und 4^a) läßt sich dann die Bedeutung aller in der Grundgleichung 4) auftretenden Größen bequem übersehen⁵⁾.

§ 2. Allgemeine Integration der Differentialgleichung.

Um die Gleichung 4) zu integrieren, setzen wir zunächst

$$5) \quad \eta = x e^{\int U d\xi}, \text{ wo } x \text{ und } U \text{ vorläufig unbekannte Funktionen von } \xi.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{dx}{d\xi} e^{\int U d\xi} + x U e^{\int U d\xi} = \left(\frac{dx}{d\xi} + x U \right) e^{\int U d\xi}; \\ \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} &= \left(\frac{d^2 x}{d\xi^2} + 2U \frac{dx}{d\xi} + x \frac{dU}{d\xi} + x U^2 \right) e^{\int U d\xi}. \end{aligned}$$

Führt man diese Werthe in 4) ein, so kommt

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + 2U \frac{dx}{d\xi} + \left(\frac{dU}{d\xi} + U^2 + \frac{\alpha}{(1-\xi^2)^2} \right) x = \beta e^{-\int U d\xi}.$$

Das zweite Glied der linken Seite ergibt durch Integrieren nach Theilen

$$\int 2U \frac{dx}{d\xi} = 2Ux - \int 2x \frac{dU}{d\xi} d\xi.$$

Hiermit liefert die vorhergehende Gleichung bei einmaligem Integrieren

$$6) \quad \frac{dx}{d\xi} + 2Ux + \int \left(-\frac{dU}{d\xi} + U^2 + \frac{\alpha}{(1-\xi^2)^2} \right) x d\xi = \beta \int e^{-\int U d\xi} d\xi + C_1.$$

Es soll nun geprüft werden, ob sich die bisher willkürliche Funktion U so bestimmen läßt, daß der unter dem Integral der linken Seite stehende Klammerausdruck Null wird. Zu diesem Zwecke ist die Hilfsgleichung

$$\frac{dU}{d\xi} - U^2 = \frac{\alpha}{(1-\xi^2)^2}$$

zu integrieren. Wir setzen

$$7) \quad U = \frac{u}{1-\xi^2}. \text{ Dann wird } \frac{dU}{d\xi} = \frac{(1-\xi^2) \frac{du}{d\xi} + 2\xi u}{(1-\xi^2)^2}.$$

Hiermit läßt sich die Hilfsgleichung auf eine Form bringen, die in der That mittels eines kleinen Kunstgriffes integriert werden kann. Man erhält nämlich

$$\frac{du}{d\xi} - \frac{u^2 - 2\xi u}{1-\xi^2} = \frac{\alpha}{1-\xi^2}.$$

5) Das Einprägen der Bezeichnungen dürfte durch die Bemerkung erleichtert werden, daß die griechischen Buchstaben überall Verhältniszahlen (Dimension Null) bezeichnen.

Fügt man hierzu

$$-\frac{\xi^2}{1-\xi^2} = \frac{-\xi^2}{1-\xi^2},$$

so kommt

$$\frac{du}{d\xi} - \frac{(u-\xi)^2}{1-\xi^2} = \frac{\alpha-\xi^2}{1-\xi^2}.$$

Ersetzt man hierin u durch eine neue Veränderliche gemäß

$$8) \quad u - \xi = q, \text{ und } du : d\xi - 1 = dq : d\xi,$$

so folgt

$$\frac{dq}{d\xi} - \frac{q^2}{1-\xi^2} = \frac{\alpha-\xi^2}{1-\xi^2} - 1$$

$$= \frac{\alpha-1}{1-\xi^2}$$

$$9) \text{ oder } \frac{dq}{\alpha-1+q^2} = \frac{d\xi}{1-\xi^2},$$

sodafs nunmehr die Veränderlichen getrennt sind. Die weitere Rechnung hängt davon ab, welchen Werth α hat. Wir nehmen zunächst an, α sei gröfser oder kleiner als 1. Da negative Werthe nach 3) überhaupt ausgeschlossen sind, so bleibt dann nur noch der Fall $\alpha = 1$ zu untersuchen.

I) $\alpha > 1$.

$$10) \text{ Gesetz: } \sqrt{\alpha-1} = k.$$

Die Gleichung 9) liefert

$$\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{q}{k} = \operatorname{Arctg} \xi,$$

woraus folgt:

$$q = k \operatorname{tang} (k \operatorname{Arctg} \xi).$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 7) und 8) wird also

$$11) \quad U = \frac{k \operatorname{tg} (k \operatorname{Arctg} \xi) + \xi}{1-\xi^2}$$

Es werde nun zur Vereinfachung gesetzt

$$12) \quad \operatorname{Arctg} \xi = w,$$

also

$$\frac{1}{1-\xi^2} = \frac{dw}{d\xi}.$$

Dann wird

$$U = k \operatorname{tg} kw \frac{dw}{d\xi} + \frac{\xi}{1-\xi^2}$$

$$\int U d\xi = -\operatorname{lg} \cos kw - \frac{1}{2} \operatorname{lg} (1-\xi^2)$$

$$= \operatorname{lg} \frac{1}{\cos kw \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$$

Hiermit giebt sich

$$e^{\int U d\xi} = \frac{1}{\cos kw \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$$

also nach 5):

$$13) \quad \eta = \frac{x}{\cos kw \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$$

II) $\alpha < 1$.

$$10) \quad \sqrt{1-\alpha} = f.$$

Die Gleichung 9) liefert

$$-\frac{1}{f} \operatorname{Arctg} \frac{q}{f} = \operatorname{Arctg} \xi,$$

woraus folgt:

$$q = f \operatorname{Tang} (-f \operatorname{Arctg} \xi).$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 7) und 8) wird also

$$U = \frac{f \operatorname{Tg} (-f \operatorname{Arctg} \xi) + \xi}{1-\xi^2}.$$

$$U = -f \operatorname{Tg} f w \frac{dw}{d\xi} + \frac{\xi}{1-\xi^2}$$

$$\int U d\xi = -\operatorname{lg} \operatorname{Cof} f w - \frac{1}{2} \operatorname{lg} (1-\xi^2)$$

$$= \operatorname{lg} \frac{1}{\operatorname{Cof} f w \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$$

Hiermit giebt sich

$$e^{\int U d\xi} = \frac{1}{\operatorname{Cof} f w \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$$

also nach 5):

$$\eta = \frac{x}{\operatorname{Cof} f w \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$$

Es ist jetzt nur noch der Werth von x zu ermitteln. Da U so bestimmt wurde, daß der unter dem Integral der linken Seite von 6) stehende Klammerausdruck und damit dieses Integral selbst verschwindet, und da ferner U nach 11) eine Function nur von ξ ist, so bildet 6) eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für x , deren Integral sofort angegeben werden kann. Dabei ist es nicht erforderlich, die beiden vorstehend getrennt behandelten Fälle noch weiter einzeln fortzuführen, da aus den bisherigen Ergebnissen schon folgt, daß sich dieselben — von den Beiwerten k und \mathfrak{k} abgesehen — nur dadurch unterscheiden, daß im Fall $\alpha > 1$ die Kreisfunctionen, im Fall $\alpha < 1$ die gleichnamigen Hyperbelfunctionen auftreten. Für den ersteren Fall findet man aus 6):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} + 2Ux &= C_1 + \beta \int e^{-\int U d\xi} d\xi = C_1 + \beta \int \cos kw \cdot \sqrt{1-\xi^2} d\xi \\ x = e^{-\int 2U d\xi} &\left[C_2 + \int e^{\int 2U d\xi} \left(C_1 + \beta \int \cos kw \cdot \sqrt{1-\xi^2} d\xi \right) d\xi \right] \\ &= \cos^2 kw (1-\xi^2) \left[C_2 + \frac{C_1}{k} \operatorname{tg} kw + \beta \int \frac{f \cos kw \cdot \sqrt{1-\xi^2} d\xi}{\cos^2 kw (1-\xi^2)} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Die Einführung dieses Werthes in 13) ergibt für

$$\begin{aligned} \alpha > 1 \\ \eta &= \cos kw \sqrt{1-\xi^2} \left[C_2 + \frac{C_1}{k} \operatorname{tg} kw + \beta \int \frac{f \cos kw \cdot \sqrt{1-\xi^2} d\xi}{\cos^2 kw (1-\xi^2)} d\xi \right] \\ \text{und für } \alpha < 1 \\ \eta &= \mathfrak{Cof} \mathfrak{k} w \sqrt{1-\xi^2} \left[C_2 + \frac{C_1}{\mathfrak{k}} \mathfrak{Xg} \mathfrak{k} w + \beta \int \frac{f \mathfrak{Cof} \mathfrak{k} w \cdot \sqrt{1-\xi^2} d\xi}{\mathfrak{Cof}^2 \mathfrak{k} w (1-\xi^2)} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke lassen sich noch auf eine regelmäÙigere und zugleich einfachere Form bringen, indem man das Doppelintegral durch Integriren nach Theilen entfernt. Da nämlich

$$\int \frac{f \cos kw \cdot \sqrt{1-\xi^2} d\xi}{\cos^2 kw (1-\xi^2)} d\xi = \frac{1}{k} \operatorname{tg} kw \int \cos kw \cdot \sqrt{1-\xi^2} d\xi - \frac{1}{k} \int \sin kw \cdot \sqrt{1-\xi^2} d\xi,$$

so ergibt sich mit anderer Bezeichnung der Integrationsfestwerthe als Gleichung der Bahn für

$$\alpha > 1 \text{ und } k = \sqrt{\alpha - 1}: \\ 14^I) \quad \eta = \sqrt{1-\xi^2} \left[A_1 \sin kw + A_2 \cos kw + \frac{\beta}{k} \left(\sin kw f \cos kw \sqrt{1-\xi^2} d\xi \right. \right. \\ \left. \left. - \cos kw f \sin kw \sqrt{1-\xi^2} d\xi \right) \right]$$

und für $\alpha < 1$ und $\mathfrak{k} = \sqrt{1-\alpha}$:

$$14^{II}) \quad \eta = \sqrt{1-\xi^2} \left[A_1 \mathfrak{Sin} \mathfrak{k} w + A_2 \mathfrak{Cof} \mathfrak{k} w + \frac{\beta}{k} \left(\mathfrak{Sin} \mathfrak{k} w f \mathfrak{Cof} \mathfrak{k} w \sqrt{1-\xi^2} d\xi \right. \right. \\ \left. \left. - \mathfrak{Cof} \mathfrak{k} w f \mathfrak{Sin} \mathfrak{k} w \sqrt{1-\xi^2} d\xi \right) \right],$$

worin nach 12) $w = \mathfrak{Arctg} \xi$, und α und β durch Gleichung 3) bestimmt sind.

Es ist noch zu ermitteln, wie sich die Gleichung der Bahn gestaltet, wenn III) $\alpha = 1$ ist.

Hiermit geht 9) über in

$$\frac{dq}{q^2} = \frac{d\xi}{1-\xi^2},$$

woraus leicht $-\frac{1}{q} = \text{arctg } \xi$ folgt. An Stelle von 11) tritt

$$U = \frac{1 - \text{arctg } \xi + \xi}{1-\xi^2}.$$

Benutzt man wieder die Abkürzung 12), so wird

$$U = -\frac{1}{w} \frac{dw}{d\xi} + \frac{\xi}{1-\xi^2}$$

also

$$\int U d\xi = -\lg w - \frac{1}{2} \lg(1-\xi^2)$$

$$= \lg \frac{1}{w \sqrt{1-\xi^2}}.$$

Hiernach ist
$$\eta = \alpha e^{\int U d\xi} = \frac{\alpha}{w \sqrt{1-\xi^2}}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den früher für $\alpha > 1$ gefundenen nur dadurch, daß 1 und $-1 : w$ an Stelle von k und $\text{tg } kw$ in U , sowie w an Stelle von $\cos kw$ im Integral von U erscheinen. Dieselbe Aenderung tritt, wie leicht nachzuweisen, in der oben ausgeführten Berechnung von α und daher auch in der Gleichung für η ein. Man findet demgemäß

$$\eta = w \sqrt{1-\xi^2} \left[C_2 - \frac{C_1}{w} + \beta \int \frac{fw \sqrt{1-\xi^2} d\xi}{w^2(1-\xi^2)} d\xi \right].$$

Die rechte Seite läßt sich durch Integriren nach Theilen in ganz ähnlicher Weise von dem Doppelintegral befreien, wie früher. Es wird also für $\alpha = 1$.

$$14^{III)} \quad \eta = \sqrt{1-\xi^2} [A_1 w + A_2 + \beta (w f \sqrt{1-\xi^2} d\xi - f w \sqrt{1-\xi^2} d\xi)].^{6)}$$

§ 3. Eigenschaften der Stammgleichung. Rechnungsprobe.

Ueberblickt man nun die drei Gleichungen 14), so zeigt sich zwischen ihnen — wie zu erwarten — eine nahe Verwandtschaft. Berücksichtigt man nämlich, daß $k = i\text{f}$ ist, und führt man letzteren Werth in Gleichung 14^I) ein, so nimmt sie wegen

$$\sin i\text{f}w = i \text{Sin } \text{f}w \quad \text{und} \quad \cos i\text{f}w = \text{Cos } \text{f}w$$

eine Form an, die sich von der der Gleichung 14^{II}) nur dadurch unterscheidet, daß $A_1 i$ an Stelle von A_1 getreten ist. Da aber dieser Integra-

6) Das erste Integral läßt sich ohne weiteres auswerthen. Es ist

$$\int \sqrt{1-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} (\arcsin \xi + \xi \sqrt{1-\xi^2}).$$

tionsfestwerth an sich willkürlich ist, so stimmen die beiden Gleichungen vollkommen überein und kann die eine die andere ersetzen. Nähert sich ferner in 14¹⁾ die Gröfse k der Null, so nähert sich für alle endlichen Werthe von w $\sin kw$ der Grenze kw und $\cos kw$ der Grenze 1.

Damit geht die Gleichung 14¹⁾ in 14^{III)} über; die letztere kann also ebenfalls durch die erstere ersetzt werden. Die drei Gleichungen lassen sich in eine zusammenfassen, wenn man für die mit A_1 und A_2 multiplicirten Ausdrücke und die Werthe k , \mathfrak{f} und 1 eine gemeinschaftliche Bezeichnung einführt. Wir setzen zu diesem Zwecke, wenn nach 3)

$$15) \quad \begin{array}{l} \alpha > 1 & \alpha = 1 & \alpha < 1 \text{ ist,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \sqrt{1-\xi^2} \sin kw; \quad \sqrt{1-\xi^2} w; \quad \sqrt{1-\xi^2} \mathfrak{S}in fw; \\ \eta_2 = \sqrt{1-\xi^2} \cos kw; \quad \sqrt{1-\xi^2}; \quad \sqrt{1-\xi^2} \mathfrak{C}of fw; \\ \gamma = \sqrt{\alpha-1} = k; \quad 1; \quad \sqrt{1-\alpha} = \mathfrak{f}, \end{array} \right. \end{array}$$

worin überall nach 4^{a)} $\xi = x : l$ und nach 12) $w = \mathfrak{A}rftg \xi$.

Damit ergibt sich für die drei Gleichungen 14) die gemeinsame Form

$$16) \quad \eta = A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \frac{\beta}{\gamma} \left(\eta_1 \int \eta_2 d\xi - \eta_2 \int \eta_1 d\xi \right).$$

Durch einmaliges Differenziren nach ξ folgt hieraus

$$17) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = A_1 \frac{d\eta_1}{d\xi} + A_2 \frac{d\eta_2}{d\xi} + \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{d\eta_1}{d\xi} \int \eta_2 d\xi - \frac{d\eta_2}{d\xi} \int \eta_1 d\xi \right).$$

Durch nochmaliges Differenziren nach ξ ergibt sich

$$18) \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = A_1 \frac{d^2\eta_1}{d\xi^2} + A_2 \frac{d^2\eta_2}{d\xi^2} + \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{d^2\eta_1}{d\xi^2} \int \eta_2 d\xi - \frac{d^2\eta_2}{d\xi^2} \int \eta_1 d\xi \right. \\ \left. + \frac{d\eta_1}{d\xi} \eta_2 - \frac{d\eta_2}{d\xi} \eta_1 \right).$$

Diese Gleichungen sollen nun zunächst zur Anstellung einer Rechenprobe benutzt werden, die dem Leser die Gewifsheit geben wird, daß bei den bisherigen, nicht ganz einfachen Entwicklungen kein Fehler begangen worden ist, und die außerdem geeignet erscheint, den Zusammenhang zwischen der Differentialgleichung 4) und ihren Stammgleichungen in ein helleres Licht zu rücken, sowie für die weiteren Rechnungen als bequeme Grundlage zu dienen.

Mit Benutzung der Beziehungen

$$\begin{array}{l} \frac{d \sin kw}{d\xi} = k \cos kw \frac{dw}{d\xi}; \quad \frac{d \cos kw}{d\xi} = -k \sin kw \frac{dw}{d\xi}; \\ \frac{d \mathfrak{S}in fw}{d\xi} = \mathfrak{f} \mathfrak{C}of fw \frac{dw}{d\xi}; \quad \frac{d \mathfrak{C}of fw}{d\xi} = -\mathfrak{f} \mathfrak{S}in fw \frac{dw}{d\xi}; \\ \frac{dw}{d\xi} = \frac{1}{1-\xi^2}; \quad \frac{d\sqrt{1-\xi^2}}{d\xi} = -\frac{\xi\sqrt{1-\xi^2}}{1-\xi^2} \end{array}$$

ergibt sich gemäß 15)

$$19) \quad \frac{d\eta_1}{d\xi} = -\frac{\xi}{1-\xi^2} \eta_1 + \frac{\gamma}{1-\xi^2} \eta_2 \text{ für } \alpha \text{ beliebig;}$$

ferner

$$20) \quad \frac{d\eta_2}{d\xi} = -\frac{\xi}{1-\xi^2} \eta_2 \mp \frac{\gamma}{1-\xi^2} \eta_1 \quad , \quad \alpha \geq 1.$$

$$\text{und} \quad = -\frac{\xi}{1-\xi^2} \eta_2 \quad , \quad \alpha = 1.$$

Mit Hülfe der weiteren Gleichungen

$$\frac{d}{d\xi} \frac{-\xi}{1-\xi^2} = -\frac{1+\xi^2}{(1-\xi^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\xi} \frac{\gamma}{1-\xi^2} = \frac{2\gamma\xi}{(1-\xi^2)^2}$$

folgt durch nochmaliges Differenzieren aus 19) für $\alpha \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta_1}{d\xi^2} &= -\frac{1+\xi^2}{(1-\xi^2)^2} \eta_1 + \frac{2\gamma\xi}{(1-\xi^2)^2} \eta_2 \\ &+ \frac{\xi^2}{(1-\xi^2)^2} \eta_1 - \frac{\gamma\xi}{(1-\xi^2)^2} \eta_2 \\ &\mp \frac{\gamma^2}{(1-\xi^2)^2} \eta_1 - \frac{\gamma\xi}{(1-\xi^2)^2} \eta_2 \end{aligned}$$

Wenn $\alpha = 1$ ist, fällt das erste Glied der letzten Zeile fort. Es wird also mit Rücksicht auf die durch 15) gegebene Bestimmung der Werthe von γ für beliebige Werthe von α :

$$21) \quad \frac{d^2\eta_1}{d\xi^2} = -\frac{\alpha}{(1-\xi^2)^2} \eta_1.$$

Ferner findet man für $\alpha \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta_2}{d\xi^2} &= -\frac{1+\xi^2}{(1-\xi^2)^2} \eta_2 \mp \frac{2\gamma\xi}{(1-\xi^2)^2} \eta_1 \\ &+ \frac{\xi^2}{(1-\xi^2)^2} \eta_2 \pm \frac{\gamma\xi}{(1-\xi^2)^2} \eta_1 \\ &\mp \frac{\gamma^2}{(1-\xi^2)^2} \eta_2 \pm \frac{\gamma\xi}{(1-\xi^2)^2} \eta_1. \end{aligned}$$

Wenn $\alpha = 1$ ist, fallen alle Glieder mit doppeltem Vorzeichen fort. Mithin wird für beliebige Werthe von α :

$$22) \quad \frac{d^2\eta_2}{d\xi^2} = -\frac{\alpha}{(1-\xi^2)^2} \eta_2.$$

Aus 19) und 20) folgt noch

$$23) \quad \frac{d\eta_1}{d\xi} \eta_2 - \frac{d\eta_2}{d\xi} \eta_1 = \frac{\gamma}{1-\xi^2} (\eta_2^2 \pm \eta_1^2) \quad \text{für } \alpha \geq 1$$

$$\text{und} \quad = \frac{\gamma}{1-\xi^2} \eta_2^2 \quad , \quad \alpha = 1,$$

$$\text{also} \quad = \gamma \quad , \quad \alpha \text{ beliebig,}$$

wie sich leicht ergibt, wenn man für η_1 und η_2 ihre Werthe aus 15) einsetzt.

Mit Benutzung von 21), 22) und 23) geht nun die Gleichung 18) in die Form

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{\alpha}{(1-\xi^2)^2} \left[A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \frac{\beta}{\gamma} (\eta_1 f \eta_2 d\xi - \eta_2 f \eta_1 d\xi) \right] + \beta$$

über. Da aber nach 16) der Ausdruck in der eckigen Klammer $= \eta$ ist, so ergibt sich

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = - \frac{\alpha}{(1 - \xi^2)^2} \eta + \beta \text{ in Uebereinstimmung mit 4).}$$

Die Gleichung 16) stellt mithin richtig ein Integral jener Differentialgleichung zweiter Ordnung dar, und da sie zwei willkürliche Festwerthe enthält, so liefert sie das allgemeine Integral.

Vielleicht könnte bei manchem Leser der Umstand Anstofs erregen, dafs die gefundene Stammgleichung noch zwei Quadraturen verlangt, durch deren Ausführung zwei weitere willkürliche Festwerthe in die Gleichung gelangen müßten, sodafs deren eine Ueberzahl vorhanden wäre. Dies Bedenken erkennt man aber sofort als hinfällig, wenn man die Gleichung 16) auf die Form

$$24) \quad \eta = \left(A_1 + \frac{\beta}{\gamma} \int \eta_2 d\xi \right) \eta_1 + \left(A_2 - \frac{\beta}{\gamma} \int \eta_1 d\xi \right) \eta_2$$

bringt, die zeigt, dafs die schon vorhandenen willkürlichen Gröfsen zugleich die Rolle der durch die beiden noch auszuführenden Quadraturen erfordernden Festwerthe spielen. Die Stammgleichung enthält mithin in der That — wie es sein muß — nur zwei von einander unabhängige willkürliche Festwerthe. Da jene Quadraturen sich leider nicht durch eine Integration in geschlossener Form bewerkstelligen lassen, so werden wir weiterhin ein anderes geeignetes Verfahren dafür entwickeln.

Es erübrigt hier nur noch, einige Worte bezüglich der Vorzeichen der Wurzelgröfsen γ und $\sqrt{1 - \xi^2}$ zu sagen. Bisher sind diese Wurzeln stillschweigend als positiv angenommen worden. Wählt man statt dessen zunächst γ negativ, so ändert sich nach 15) nur das Vorzeichen von η_1 und damit auch das des ersten Gliedes der rechten Seite von 16), während alle übrigen Glieder offenbar ihr Vorzeichen behalten. Da nun aber das erste Glied mit dem willkürlichen Factor A_1 behaftet ist, an dessen Stelle auch $-A_1$ gesetzt werden kann, so ist die Aenderung des Zeichens von γ überhaupt ohne Einfluß. Nimmt man anderseits $\sqrt{1 - \xi^2}$ mit negativem Vorzeichen, so ändert sich nach 15) auch das von η_1 und η_2 . In Gleichung 16) werden dann die beiden ersten Glieder der rechten Seite negativ, während der Klammerausdruck ungeändert bleibt. Wegen der Willkürlichkeit von A_1 und A_2 greift dann aber dieselbe Erwägung Platz, wie vorher, womit bewiesen ist, dafs auch die zweite Wurzelgröfse mit beliebigem Vorzeichen in Rechnung gestellt werden darf.

§ 4. Darstellung der Gröfsen η_1 und η_2 für $\alpha \geq 1$.

Für die weitere Behandlung der Gleichung 16) oder der gleichwerthigen 24) ist eine Untersuchung der Functionen η_1 und η_2 sehr förderlich. Obgleich sich eine solche auch auf dem analytischen Wege leicht

durchführen lassen würde, ziehen wir doch die geometrische Betrachtungsweise vor, da diese den Vortheil größerer Anschaulichkeit bietet und die Frage nach der Auswerthbarkeit der in jenen Gleichungen noch vorhandenen Integrale bequem zu entscheiden gestattet.

Bezieht man die Größen ξ , η_1 und η_2 auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz (Abb. 3), so legen sie einen Punkt im Raume fest. Betrachten wir vorläufig η_1 und η_2 als unabhängig von ξ , so stellen diese Größen eine Fläche dar. Als Gleichung derselben ergibt sich, wenn zunächst der Fall

$$\alpha > 1$$

ins Auge gefasst wird, aus 15)

$$25) \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \xi^2 = 1.$$

Die Fläche ist also eine Kugel mit dem Halbmesser 1. Die Gleichung läßt sich noch in eine etwas andere, für die Anwendung bequemere Form bringen, wenn man den Abstand ϱ des Flächenpunktes von der ξ -Achse einführt. Dann ist

$$26) \quad \varrho = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} = \sqrt{1 - \xi^2}$$

und der in den Gleichungen 15) auftretende Winkel kw erscheint in der räumlichen Darstellung als Winkel zwischen ϱ und der Ebene $\xi\eta_2$.

Auf dieser Kugel liegen jedenfalls die durch ξ , η_1 und η_2 nach 15) bestimmten Punkte. Nun besteht aber außer letzteren Gleichungen auch noch eine durch 12) ausgedrückte Beziehung zwischen ξ und w , womit für jedes ξ ein bestimmter Punkt der Kugeloberfläche festgelegt ist. Die drei Gleichungen 12) und 15) zusammen stellen hiernach eine auf einer Kugel mit dem Halbmesser 1 liegende Raumcurve dar, und es sind insbesondere die beiden letzteren die Gleichungen der Projection dieser Raumcurve auf die Ebenen $\xi\eta_1$ und $\xi\eta_2$, während 26) in Verbindung mit 12) die Gleichung der Projection auf die Ebene $\eta_1\eta_2$ liefert. Aus 12) folgt $\xi = \text{Tang } w$; hiermit geht 26) über in

$$27) \quad \varrho = \sqrt{1 - \text{Tang}^2 w} = \frac{1}{\text{Cos } w}.$$

Trägt man die hieraus für ein gegebenes w berechneten Werthe ϱ vom Nullpunkt 0 des Achsenkreuzes aus auf einem Leitstrahl ab, der in der Ebene $\eta_1\eta_2$ unter dem Winkel kw gegen die Achse der η_2 gezogen wurde, so ergibt sich der zu dem fraglichen w gehörige Punkt der Projection der Raumcurve auf die genannte Ebene. Dieselbe Auftragung liefert dann leicht, wie Abb. 4 erkennen läßt, auch die Werthe von η_1 und η_2 , und da ξ als Function von w bekannt ist, so können aus der einen Projection die zum Auftragen

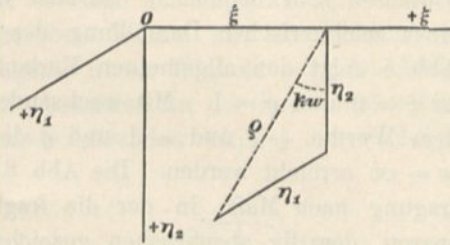


Abb. 3.

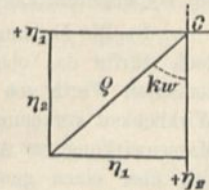


Abb. 4.

der beiden anderen erforderlichen Mafse ohne weiteres entnommen werden. Bei Anwendung der vorhandenen Tafeln der Hyperbelfunctionen ist das Verfahren sehr bequem.⁷⁾ Es läßt sich noch weiter vereinfachen mit Hülfe einer zeichnerischen Darstellung der Werthe $\xi = \text{Tang } w$ und $\varrho = 1 : \text{Coß } w$. Abb. 5 zeigt den allgemeinen Verlauf der betreffenden Linien. Für $w = 0$ ist $\xi = 0$ und $\varrho = 1$. Mit wachsendem oder abnehmendem w nähert sich ξ dem Werthe $+1$ und -1 und ϱ der Null, welche Grenzen jedoch erst für $w = \infty$ erreicht werden. Die Abb. 6 auf Tafel I enthält eine genauere Auftragung nach Mafs, in der die fraglichen Linien jedoch, um an Platz zu sparen, derartig abgebrochen gezeichnet sind, dafs sich die zu aufeinander folgenden Einheiten von w gehörigen und am linken Rande mit der unteren

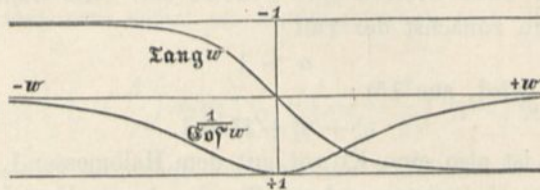


Abb. 5. Allgemeiner Verlauf von $\xi = \text{Tang } w$
und $\varrho = 1 : \text{Coß } w$.

Grenze der betreffenden Einheit bezeichneten Stücke übereinander geordnet vorfinden. — Um die Auftragung der Werthe von ϱ nach Mafsgabe der Abb. 4 möglichst zu vereinfachen, wird man nicht runde Werthe von w annehmen, sondern vielmehr den Winkel kw nach einfachen Bruchtheilen etwa eines rechten Winkels abstufen.

Nach dem beschriebenen Verfahren ist als Beispiel zu dem Fall $\alpha > 1$ in Abb. 7 die Projection einer Hälfte der Raumcurve auf die Ebene $\eta_1 \eta_2$, in Abb. 8 rechts die Projection der zu den positiven Werthen von ξ gehörigen Hälfte auf die Ebene $\xi \eta_2$, und links die Projection der anderen Hälfte auf die Ebene $\xi \eta_1$ für $\alpha = 38,8$, also $k = 6,15$ dargestellt.⁸⁾ Man erkennt, dafs die zur Veranschaulichung des Aenderungsgesetzes der Gröfsen η_1 und η_2 gewählte Raumcurve eine Schneckenlinie ist, die die Kugel von dem einen

7) S. Ligowski, Taschenbuch der Mathematik, sowie desselben Verfassers Tafeln der Hyperbelfunctionen (Berlin, Wilhelm Ernst u. Sohn).

8) Die Bedeutung von α ist zwar durch die Gleichung 3) vollkommen klargelegt, doch dürfte das obige Beispiel an Anschaulichkeit gewinnen, wenn noch einige auf den benutzten Werth von α führende Einzelannahmen hinzugefügt werden, wie sie etwa in der Wirklichkeit vorkommen könnten. Wählt man, um einen Fall von möglichst ausgesprochener Massenwirkung vor Augen zu haben, als Last eine starre Masse m von 7,5 t Gewicht, die sich über einen gewalzten Träger von 2 m Länge mit einem Trägheitsmoment von 9888 (Normalprofil 30) bewegt, so entspricht dem obigen Werthe von α eine Geschwindigkeit c von 20 m in der Secunde oder 72 km in der Stunde. Bei einem gefederten Eisenbahnfahrzeug mit 7,5 t Raddruck müfste man m wesentlich kleiner, also c entsprechend gröfser annehmen, um denselben Werth von α zu erhalten.

Pol ($\xi = -1$) zu dem entgegengesetzten ($\xi = +1$) hin in unzählig vielen Windungen umkreist. Ein näheres Eingehen auf die Natur dieser Linie ist für die vorliegende Aufgabe entbehrlich; es möge nur bemerkt werden, daß sie die Eigenschaft besitzt, überall denselben Winkel mit den Meridianen zu bilden, und zwar findet man die Tangente dieses Winkels $= k$. Die Linie ist also die sogenannte Loxodrome, die besonders in der Seeschifffahrt (als Bahn eines in unveränderlichem Kompaskurs fahrenden Schiffes) eine wichtige Rolle spielt.

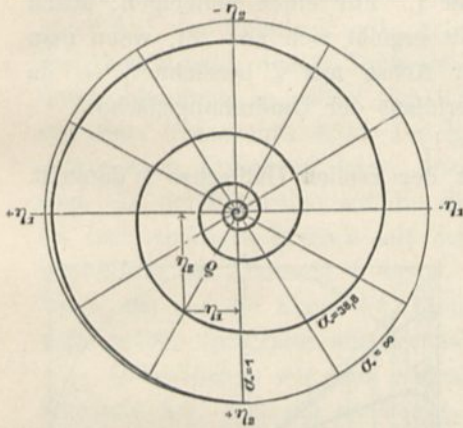


Abb. 7. Darstellung von ϱ , η_1 und η_2 als Function von kw für $\alpha \geq 1$.

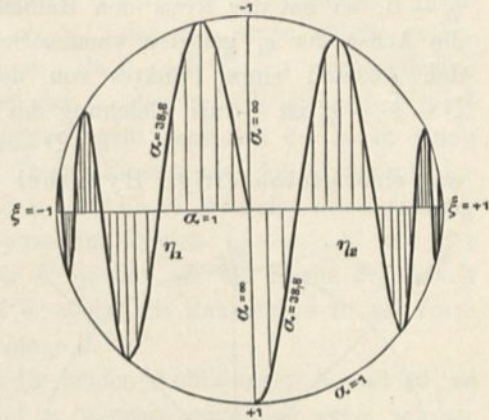


Abb. 8. Darstellung von η_1 und η_2 als Function von ξ für $\alpha \geq 1$.

Nach Gleichung 3) ist $k = \sqrt{\alpha - 1}$ sehr groß, wenn die Geschwindigkeit c sehr klein ist. Dann fallen die einzelnen Windungen der Schneckenlinie sehr nahe zusammen und wird die Wellenlänge der in Abb. 8 dargestellten Projektionen sehr kurz. Wächst die Geschwindigkeit, so nimmt die Wellenlänge zu, und wird $\alpha = 1$, also $k = 0$, so geht die Schneckenlinie in einen Meridian über.⁹⁾

Für noch größere Geschwindigkeiten wird $\alpha < 1$ und $k = i\beta$ imaginär. Dann tritt Gleichung 14^{II)} für Gleichung 14^{I)} ein und verliert die auf letztere gegründete räumliche Darstellung offenbar ihre Gültigkeit. Wenngleich dieser Fall für die Anwendung weniger wichtig ist, wollen wir ihn doch im Interesse einer erschöpfenden Lösung der Aufgabe nicht übergehen, zumal es nicht schwer ist, durch eine ganz ähnliche Betrachtungsweise wie vorher aus der Gleichung 14^{II)} auch ähnliche Schlüsse zu ziehen. Mit den für

$$\alpha < 1$$

aus 15) folgenden Werthen von η_1 und η_2 , nämlich

$$\eta_1 = \sqrt{1 - \xi^2} \operatorname{Sin} kw \quad \text{und} \quad \eta_2 = \sqrt{1 - \xi^2} \operatorname{Cos} kw \quad \text{ergibt sich statt 25):}$$

$$28) \quad -\eta_1^2 + \eta_2^2 + \xi^2 = 1.$$

9) Für den in Fußnote 8 gewählten Fall tritt dies bei einer Geschwindigkeit von 124,6 m i. d. Secunde = 449 km i. d. Stunde ein.

da der Verlauf der Curven ein solcher ist, dafs sich die angegebenen Linienzüge leicht voneinander unterscheiden lassen (was bei $\alpha > 1$ nicht der Fall gewesen wäre).¹⁰⁾ Aus Abb. 10 sind die zusammengehörigen η_1 und η_2 in Abb. 9 übertragen, womit dann die Raumcurve in allen drei Projectionen dargestellt ist. Sie ist in dem Grenzfalle $\alpha = 1$, also für $f = k = 0$, wie schon erwähnt, ein Kreis mit dem Halbmesser 1. Wächst die Geschwindigkeit, so wird $\alpha < 1$ und ist $f = \sqrt{1 - \alpha}$ ein echter Bruch. Die Raumcurve weicht dann von dem Kreise ab, schneidet denselben aber stets in den drei zu $\xi = -1, 0$ und $+1$ gehörigen Punkten und zwar im ersten und letzten dieser Punkte unter 45° , im Punkte $\xi = 0, \eta_1 = 0, \eta_2 = 1$, dagegen unter einem veränderlichen Winkel, dessen Tangente $= f$ ist. Da α nach 3) mit wachsendem c immer abnimmt, so nähert sich f dabei der 1, der in Rede stehende Winkel also dem Grenzwert 45° . Die Raumcurve geht dann mit $c = \infty$ in einen gebrochenen Linienzug über, dessen Theile Erzeugende des Hyperboloides sind. In der Projection auf die Ebene $\eta_1 \eta_2$ (Abb. 9) erscheint der Linienzug als rechtwinkliges Dreieck mit der Spitze im Punkte $\eta_1 = \eta_2 = 0$ und der Grundlinie im Abstände 1 davon. Die Projection auf die Ebene $\xi \eta_1$ ähnelt einem ∞ ; auf die Ebene $\xi \eta_2$ projicirt erscheint die Raumcurve in der Form eines halben Quadrates mit der Seitenlänge 2.

Ueberblicken wir nun nochmals die beiden Abbildungen 8 und 10, so erkennen wir, dafs die Gröfsen η_1 und η_2 niemals unendlich grofs werden, welches auch der Werth der Geschwindigkeit c sein möge, und dafs der Verlauf von η_1 und η_2 ein stetiger ist, so lange $c < \infty$. Die Flächen, welche die η_1 und η_2 darstellenden Curven mit der Achse der ξ und zwei beliebigen Ordinaten einschließen, sind ebenfalls immer von endlicher Gröfse und stetige Functionen von α und ξ . Sie ändern sich periodisch und liegen stets innerhalb eines Kreises vom Halbmesser 1, so lange $\alpha > 1$; sie sind unperiodisch und liegen stets innerhalb eines dem Kreise umschriebenen Quadrates für $\alpha \leq 1$. Hieraus ergibt sich die wichtige Folgerung, dafs die Werthe der in den Bahngleichungen 14^I), 14^{II}) und 14^{III}) auftretenden Integrale — die offenbar die allgemeinen Ausdrücke für die Gröfse der vorerwähnten Flächen darstellen — sich stets zahlenmäfsig bestimmen lassen müssen, sobald die Grenzen der Integration gegeben oder angenommen sind. Es könnte das z. B. mit Hülfe des Polarplanimeters geschehen; gerade für den praktisch wichtigen Fall $\alpha > 1$ wäre dies aber offenbar recht umständlich, da dann sehr viele Curvenpunkte berechnet und aufgetragen werden müfsten, um die wellenförmigen Curven η_1 und η_2 hinreichend genau festzulegen. Es soll deshalb später ein anderer, bequemerer Weg zur Bestimmung der Integralwerthe gezeigt werden.

10) Für den in Fufsnote 8 gewählten Fall entsprechen den in den Abb. 9 u. 10 genannten Werthen

$\alpha =$	1	0,75	0,19	0
die Geschwindigkeiten	124,6	143,9	286	∞ m i. d. Sec.
oder	449	518	1029	∞ km i. d. Std.

§ 5. Allgemeine Bestimmung der Integrationsfestwerthe.

Für die Aufsuchung eines zweckmäßigen Näherungsverfahrens ist es von Wichtigkeit, die Grenzen zu kennen, innerhalb deren die Integration auszuführen ist. Dabei spielen aber, wie schon erwähnt, auch die Integrationsfestwerthe A_1 und A_2 eine Rolle, sodafs es sich empfiehlt, zunächst die Bedingungen zu ermitteln, denen diese Werthe in einem gegebenen Falle genügen müssen. Wir nehmen zu diesem Zwecke an, es sei ein beliebiger Punkt x, y der Bahn der schwingenden Masse, sowie der dort vorhandene Neigungswinkel ν gegen die Achse der x gegeben. Der bequemerem Schreibung wegen soll eine besondere Kennzeichnung der gegebenen und der von ihnen abhängigen Gröfsen nicht eingeführt werden; es ist dann nur im Auge zu behalten, dafs sich dieselben nicht auf die laufenden Coordinaten, sondern auf einen ganz bestimmten Punkt beziehen. Ferner setzen wir zur Abkürzung — mit Andeutung des Factors \sin und \cos oder $\mathfrak{S}\sin$ und $\mathfrak{C}\cos$ in η_1 und η_2 — die bestimmten Integrale

$$29) \quad \int_{\eta_1}^{\xi} d\xi = S \quad \text{und} \quad \int_{\eta_2}^{\xi} d\xi = C.$$

Mit den gegebenen Werthen x, y und ν ergeben sich, gemäfs der Bedeutung von ξ und η deren zugehörige Werthe

$$30) \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \eta = \frac{y}{2h} \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{l}{2h} \frac{dy}{dx} = \frac{l}{2h} \tan \nu.$$

Setzt man diese Werthe in 16) und 17) ein, so erhält man zur Bestimmung von A_1 und A_2 die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2 &= \frac{y}{2h} - \frac{\beta}{\gamma} (\eta_1 C - \eta_2 S); \\ \frac{d\eta_1}{d\xi} A_1 + \frac{d\eta_2}{d\xi} A_2 &= \frac{l}{2h} \tan \nu - \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{d\eta_1}{d\xi} C - \frac{d\eta_2}{d\xi} S \right). \end{aligned}$$

Die allgemeine Auflösung dieser Gleichungen nach A_1 und A_2 liefert ziemlich verwickelte Ausdrücke, die sich vermeiden lassen, wenn man Folgendes beachtet. Die Nennerdeterminante wird nach 23)

$$31) \quad \eta_1 \frac{d\eta_2}{d\xi} - \eta_2 \frac{d\eta_1}{d\xi} = -\gamma.$$

Die Unterdeterminante für A_1 wird

$$\frac{y}{2h} \frac{d\eta_2}{d\xi} - \frac{l}{2h} \tan \nu \cdot \eta_2 + \frac{\beta}{\gamma} \left(-\eta_1 \frac{d\eta_2}{d\xi} + \eta_2 \frac{d\eta_1}{d\xi} \right) C$$

und diejenige für A_2 :

$$-\frac{y}{2h} \frac{d\eta_1}{d\xi} + \frac{l}{2h} \tan \nu \cdot \eta_1 + \frac{\beta}{\gamma} \left(-\eta_2 \frac{d\eta_1}{d\xi} + \eta_1 \frac{d\eta_2}{d\xi} \right) S.$$

Auch hier kann auf die Klammerausdrücke die Gleichung 23) angewendet werden. Damit ergibt sich, wenn man für S und C wieder ihre Werthe aus 29) setzt:

$$32) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{\gamma} \left(-\frac{y}{2h} \frac{d\eta_2}{d\xi} + \frac{l}{2h} \operatorname{tang} v \cdot \eta_2 - \beta f \eta_2 d\xi \right); \\ A_2 = -\frac{1}{\gamma} \left(-\frac{y}{2h} \frac{d\eta_1}{d\xi} + \frac{l}{2h} \operatorname{tang} v \cdot \eta_1 - \beta f \eta_1 d\xi \right). \end{cases}$$

Wir bringen in Erinnerung, daß die hierin auftretenden Größen durch die Gleichungen 3) für β und 15) für γ , η_1 und η_2 bestimmt, sowie daß die Differentialquotienten der letzteren nach $\xi = x : l$ in 19) und 20) ausgerechnet sind. Mit Beachtung der diesen Gleichungen beigefügten Grenzbedingungen gilt 32) für alle möglichen Werthe von α ; die Integrationsfestwerthe A_1 und A_2 sind also hierdurch allgemein bestimmt. Für die weitere Ausführung bedarf es nun näherer Annahmen über die Kraft P , die auf die schwingende Masse einwirkt. Wir können in dieser Beziehung zwei Hauptfälle unterscheiden.

§ 6. Anwendung auf zwei Hauptfälle.

Erster Fall: Die Kraft P ist Null; die Masse bewegt sich also ohne Einwirkung äußerer Kräfte. Mit P verschwindet nach 3) auch β und in den Gleichungen 16) und 32) das diesen Factor enthaltende Glied. Die Gleichungen werden dann frei von Integralen und geben also eine vollständige Lösung der Aufgabe in der Form

$$33) \quad \eta = A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2,$$

worin η , η_1 und η_2 die durch 4^a) und 15) festgelegte Bedeutung haben. Als Beispiel hierfür bieten sich die Schwingungen eines senkrecht belasteten Trägers in wagerechter Ebene dar. Obgleich dieser Fall für die Anwendung nicht ohne Wichtigkeit ist, müssen wir gegenwärtig auf eine eingehendere Behandlung verzichten und uns vorbehalten, bei Gelegenheit auf ihn zurückzukommen. Einige ohne weiteres aus den gefundenen Gleichungen zu ziehende Schlüsse mögen jedoch kurz angeführt werden.

Angenommen, die die Bahn der schwingenden Masse bestimmende Curve η habe ein Element mit der zu der betreffenden Geschwindigkeit gehörigen Curve η_1 gemein, sodafs nach 30) $y : 2h = \eta_1$ und $l \operatorname{tang} v : 2h = d\eta_1 : d\xi$ ist. Dann wird nach 31) und 32)

$$A_1 = 1 \quad \text{und} \quad A_2 = 0,$$

mithin

$$\eta = \eta_1,$$

wonach die Curve η ganz mit der Curve η_1 zusammenfällt. Hätte dagegen erstere ein Element mit der Curve η_2 gemein, so wäre nach denselben Gleichungen

$$A_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 = 1,$$

also

$$\eta = \eta_2,$$

und es fiel die Curve η ganz mit der Curve η_1 zusammen. Die früher eingehend untersuchten und in den Abbildungen 8 und 10 veranschaulichten Curven η_1 und η_2 stellen also unter gewissen Bedingungen (verzerrt gezeichnete) Bilder der Bahn der schwingenden Masse dar, und zwar zeigen

sie die Längen im Maßstabe $1:l$ und die Höhen im Maßstabe $1:2h$.¹¹⁾ Ganz ähnliche Erwägungen greifen Platz, wenn an irgend einer Stelle zwischen $y:2h$ und η_1 oder η_2 und zwischen $l \tan \nu:2h$ und $d\eta_1:d\xi$ oder $d\eta_2:d\xi$ nicht Gleichheit, sondern nur Proportionalität nach einem gleichen Verhältniß besteht. In diesem Falle sind die Curven η und η_1 oder η_2 nicht gleich, aber verwandt. Es tritt dann nämlich in obigen Gleichungen der betreffende Proportionalitätsfactor an die Stelle der Einheit, d. h. es ändert sich nur der Maßstab, mit dem die Höhen in den Abbildungen von η_1 oder η_2 zu messen sind, wenn dieselben als Darstellungen der Bahncurve η betrachtet werden sollen.

Ferner lehren die Gleichungen 32), daß A_1 und A_2 verschwinden, daß mithin $\eta = 0$ und die Bahn der bewegten Masse eine Gerade wird, falls in irgend einem Punkte der Bahn $y = 0$ und $\tan \nu = 0$ ist. Hiernach treten Schwingungen überhaupt nicht ein, wenn die von einem der Auflager her über den Stab gleitende Masse nicht durch irgend welche besondere Ursache aus der geradlinigen Bahn abgelenkt wird — ein selbstverständliches Ergebniß, auf dem gerade die Schwierigkeit der Berechnung der Seitenschwankungen eines Trägers beruht. Da diese durchaus von Zufälligkeiten abhängen, ist eine theoretische Ermittlung überhaupt ausgeschlossen. Dagegen bieten die hier abgeleiteten Formeln sehr wohl die Möglichkeit, die Bahn der bewegten Masse zu berechnen, sobald man irgend eine störende Einwirkung von bestimmter Art, z. B. etwa die eines Seitenstoßes gemessen oder angenommen hat. Die Gleichung der Bahn läßt sich sogar in eine noch einfachere Gestalt als 33) bringen, wenn man den Anfangspunkt der Zählung des durch 12) bestimmten Hilfswinkels w — je nach dem Werthe der Größen A_1 und A_2 — passend wählt. Die rechte Seite von 33) wird dann ein eingliedriger Ausdruck mit der Form von η_1 oder η_2 , sodafs also die Bahn auch in diesem allgemeinen Falle einen ähnlichen Verlauf zeigt, wie die Curven η_1 und η_2 .

Zweiter Fall: Die Kraft P ist von Null verschieden, dagegen treten irgend welche sonstige Einflüsse, die Schwingungen der bewegten Masse erzeugen könnten, nicht auf. Dann fällt in dem Stützpunkte, von welchem aus die Masse sich über den Stab hin bewegt, der Anfang der Bahn offenbar mit der Stabachse zusammen, d. h. es ist in 32) sowohl y , als auch $\tan \nu = 0$. Damit verschwindet das zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichungen, während das erste Glied, wie die Gleichungen 19) und 20) mit $\xi = \pm 1$ ergeben, in der unbestimmten Form $0:0$ erscheint. Der wahre Werth ist in bekannter Weise leicht zu ermitteln und findet sich $= 0$. Wählen wir als Anfangspunkt der Bewegung das zu $\xi = -1$ gehörige Stabende, so gehen die Gleichungen 32) in die folgenden über:

11) Wir erinnern daran, daß l die halbe Stützweite des elastischen Stabes und h die Höhe ist, welche die bewegte Masse in der Zeit frei durchfallen würde, die sie zum Durchlaufen der Länge l mit der (gegebenen) Geschwindigkeit c braucht.

$$34) \quad \begin{cases} A_1 = -\frac{\beta}{\gamma} \int_{-1}^{-1} \eta_2 d\xi = \frac{\beta}{\gamma} \int_{-1} \eta_2 d\xi, \\ A_2 = \frac{\beta}{\gamma} \int_{-1}^{-1} \eta_1 d\xi = -\frac{\beta}{\gamma} \int_{-1} \eta_1 d\xi. \end{cases}$$

Hiermit ergibt sich nun aus 16) die Gleichung der Bahn in der Gestalt

$$35) \quad \eta = \frac{\beta}{\gamma} \left(\eta_1 \int_{-1}^{\xi} \eta_2 d\xi - \eta_2 \int_{-1}^{\xi} \eta_1 d\xi \right),$$

wobei β durch 3) bestimmt und die Bedeutung von ξ und η aus 4^a) zu ersehen ist. Die allgemeinen Ausführungen am Schlusse des § 4 lassen sich nun für den vorliegenden Fall in die etwas bestimmtere Form der nachstehenden, den Sinn der Gleichung 35) in Worte fassenden Regel bringen: Man ermittle die Flächen der Curven η_1 und η_2 (Abb. 8 oder 10 je nach der Geschwindigkeit) von -1 bis ξ und multiplicire die erstere mit dem zu ξ gehörigen Werthe von η_2 , die zweite mit dem entsprechenden Werthe von η_1 , ziehe das erstere Product vom letzteren ab und multiplicire den Rest mit $\beta : \gamma$. Das Ergebniss ist der Abstand des zu $\xi = x : l$ gehörigen Punktes der Bahn von der ξ -Achse, gemessen mit $2h = gl^2 : c^2$ als Einheit. Multiplicirt man dieselben Flächen statt mit η_1 und η_2 mit den Ableitungen dieser Gröfsen nach ξ , so erhält man bei im übrigen gleichen Verfahren gemäfs 17) statt η den Werth $d\eta : d\xi$, und damit nach 30) den Neigungswinkel ν der Bahn. — Es handelt sich hiernach für den vorliegenden Fall im Wesentlichen nur noch um die zahlenmäfsige Bestimmung der fraglichen Flächen.

§ 7. Weitere Untersuchung des zweiten Hauptfalles. Umformung der Bahngleichung.

Die rechnerische Auswerthung der in 35) auftretenden Integrale erfordert, dafs eine der beiden in ihnen enthaltenen Gröfsen ξ und w entfernt wird. Es empfiehlt sich, die Veränderliche ξ mit Hilfe von 12) durch w auszudrücken. Aus $\xi = \mathfrak{T} \operatorname{ang} w$ folgt

$$36) \quad \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} w} \quad \text{und} \quad d\xi = \frac{dw}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 w}.$$

Setzt man den ersteren Werth in die Gleichungen 15) und die so gefundenen η_1 und η_2 nebst dem vorstehenden Ausdrucke für $d\xi$ in die Integrale ein, so enthalten sie nur noch die eine Veränderliche w und insbesondere im Nenner die Gröfse $\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^3 w$, während an Stelle von -1 und ξ die Grenzen $-\infty$ und w treten. Da jedoch die Reihenentwicklungen, die für die weitere Rechnung in Betracht kommen können, sich um so günstiger gestalten, je kleiner der Exponent von $\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} w$ ist, so wollen wir die Integrale auf eine Form bringen, bei der nur noch $\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} w$ im Nenner erscheint. Es läfst sich das auf verschiedene Art erreichen; der einfachste und übersicht-

lichste Weg dürfte der sein, daß man von der leicht zu beweisenden Beziehung

$$\frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 w} = \frac{1}{2\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dw^2} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w}$$

Gebrauch macht und die Differentialquotienten aus den entstehenden Einzelintegralen durch wiederholtes Integriren nach Theilen fortschafft. So ergibt sich zunächst für $\alpha > 1$:

$$37^a) \quad \int \frac{\sin kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 w} dw = \frac{1}{2} \int \frac{\sin kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw - \frac{1}{2} \int \sin kw \frac{d^2}{dw^2} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw;$$

$$37^b) \quad \int \frac{\cos kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 w} dw = \frac{1}{2} \int \frac{\cos kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw - \frac{1}{2} \int \cos kw \frac{d^2}{dw^2} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw.$$

$$38^a) \quad -\frac{1}{2} \int \sin kw \frac{d^2}{dw^2} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw = -\frac{1}{2} \frac{d}{dw} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} \sin kw + \frac{k}{2} \int \cos kw \frac{d}{dw} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw;$$

$$38^b) \quad -\frac{1}{2} \int \cos kw \frac{d^2}{dw^2} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw = -\frac{1}{2} \frac{d}{dw} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} \cos kw - \frac{k}{2} \int \sin kw \frac{d}{dw} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw.$$

$$39^a) \quad \frac{k}{2} \int \cos kw \frac{d}{dw} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw = \frac{k}{2} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} \cos kw + \frac{k^2}{2} \int \frac{\sin kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw;$$

$$39^b) \quad -\frac{k}{2} \int \sin kw \frac{d}{dw} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw = -\frac{k}{2} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} \sin kw + \frac{k^2}{2} \int \frac{\cos kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw.$$

Addirt man nun einfach die zusammengehörigen (mit demselben Buchstaben bezeichneten) Gleichungen, so folgt:

$$40^a) \quad \int \frac{\sin kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 w} dw = \frac{1+k^2}{2} \int \frac{\sin kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw - \frac{1}{2} \sin kw \frac{d}{dw} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} + \frac{k}{2} \frac{\cos kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w};$$

$$40^b) \quad \int \frac{\cos kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^3 w} dw = \frac{1+k^2}{2} \int \frac{\cos kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} dw - \frac{1}{2} \cos kw \frac{d}{dw} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w} - \frac{k}{2} \frac{\sin kw}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w}.$$

Wird die erste Gleichung mit $\cos kw : \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w$, die zweite mit $\sin kw : \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} w$ multiplicirt und das erste Product von dem zweiten abgezogen, das Ganze mit $\beta : k$ multiplicirt und wieder die Bezeichnung nach 15) eingeführt, so erhält man an Stelle von 35):

$$41) \quad \eta = \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left(\eta_1 \int_{-\infty}^w \eta_2 dw - \eta_2 \int_{-\infty}^w \eta_1 dw \right) - \frac{\beta}{2 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 w}.$$

Wenn $\alpha < 1$ ist, bleiben die Gleichungen 37) bis 39) im wesentlichen bestehen, da gemäß 15) nur \mathfrak{f} , $\mathfrak{S}\mathfrak{in}\mathfrak{f}w$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}w$ an Stelle von k , $\sin kw$ und $\cos kw$ treten. Dies hat zur Folge, daß sich die Vorzeichen des zweiten Gliedes auf der rechten Seite von 38^b) und 39^a), sowie sämtliche Vorzeichen in 39^b) ändern. Demgemäß tritt in 40^a) und 40^b) $1-k^2$ an Stelle von $1+k^2$ und wechselt in der letzteren Gleichung auch noch das dritte Glied sein Vorzeichen. Auf die Gleichung 41) aber üben alle diese Aenderungen, wie leicht nachzuweisen ist, keinerlei Einfluß aus.

Ist $\alpha = 1$, so tritt nach 15) 1, w und 1 an Stelle von k , $\sin kw$ und $\cos kw$. Dann fallen in den nach dem Vorbilde von 37) bis 40) zu entwickelnden Gleichungen die sämtlichen Glieder fort, die denjenigen entsprechen, welche bei dem vorher erörterten Uebergang von $\alpha > 1$ zu $\alpha < 1$ einen

Vorzeichenwechsel erleiden. Auch in diesem Falle bleibt die Gleichung 41) unverändert bestehen. Sie gilt mithin ebenso wie 35) ganz allgemein für jeden möglichen Werth von α .

Da es unter Umständen erwünscht sein kann, auch die Neigung der Bahn im Punkte ξ zu bestimmen, so möge hier noch die dazu erforderliche Gleichung für $d\eta : d\xi$ Platz finden. Durch Differenziren von 41) nach $\xi = \text{Tang } w$ findet man leicht:

$$42) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\alpha\beta}{2\gamma} \left(\frac{d\eta_1}{d\xi} \int_{-\infty}^w \eta_2 dw - \frac{d\eta_2}{d\xi} \int_{-\infty}^w \eta_1 dw \right) + \beta \text{Tang } w.$$

Diese Gleichung gilt ebenso wie 41) unter der Voraussetzung für alle möglichen Werthe von α , daß man den Zeichen γ , η_1 und η_2 die je nach Umständen verschiedenen, durch 15) bestimmten Bedeutungen beilegt. Die Ableitungen von η_1 und η_2 nach ξ sind in 19) und 20) berechnet.

§ 8. Werthe der unbestimmten Integrale.

Die in den Integralen der Gleichungen 41) und 42) auftretenden Größen η_1 und η_2 enthalten gemäß 15) beide den Factor $\sqrt{1-\xi^2} = 1 : \text{Cos } w$. Mittels der Beziehung

$$\frac{1}{\text{Cos } w} = \frac{2}{e^w + e^{-w}} = \frac{2e^{-w}}{1 + e^{-2w}}$$

läßt sich derselbe leicht in eine nach Potenzen von e^{-w} fortschreitende Reihe, nämlich

$$43) \quad \frac{1}{\text{Cos } w} = 2(e^{-w} - e^{-3w} + e^{-5w} - e^{-7w} + \dots) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-(2n-1)w}$$

entwickeln, die für alle positiven Werthe von w convergirt. Wird demgemäß w als positiv (> 0) vorausgesetzt, so erhält man durch Einführung der Reihe in η_1 und η_2 Ausdrücke, die allgemein integrirt werden können und dann summirt die den gesuchten Integralwerthen entsprechenden unbestimmten Integrale ergeben. Die Einsetzung der Grenzen, die natürlich nur positiv sein dürfen, liefert schließlich die Werthe der bestimmten Integrale.

Die Integrale der einzelnen Glieder von η_1 und η_2 sind von der Form:

$$44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int e^{-\mu w} \sin \gamma w dw = \frac{-\mu \sin \gamma w - \gamma \cos \gamma w}{\mu^2 + \gamma^2} e^{-\mu w} \\ \int e^{-\mu w} \cos \gamma w dw = \frac{-\mu \cos \gamma w + \gamma \sin \gamma w}{\mu^2 + \gamma^2} e^{-\mu w} \end{array} \right\} \text{für } \alpha > 1;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int e^{-\mu w} \text{Sin } \gamma w dw = \frac{-\mu \text{Sin } \gamma w - \gamma \text{Cos } \gamma w}{\mu^2 - \gamma^2} e^{-\mu w} \\ \int e^{-\mu w} \text{Cos } \gamma w dw = \frac{-\mu \text{Cos } \gamma w - \gamma \text{Sin } \gamma w}{\mu^2 - \gamma^2} e^{-\mu w} \end{array} \right\} \text{für } \alpha < 1;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int e^{-\mu w} w dw = \frac{-\mu w - 1}{\mu^2} e^{-\mu w} \\ \int e^{-\mu w} dw = \frac{-\mu}{\mu^2} e^{-\mu w} \end{array} \right\} \text{für } \alpha = 1.$$

Die (vorläufig unbestimmten) Gesamtintegrale werden gefunden, indem man hierin für μ der Reihe nach die Zahlen $1\ 3\ 5\ 7\ \dots = 2n-1$ setzt (wo n die Ordnungsziffer der Glieder der Reihe 43) bedeutet), alsdann jedem Einzelintegral gemäß 43) das Vorzeichen $(-1)^{n+1}$ ertheilt und die algebraische Summe bildet. Sondert man die gemeinschaftlichen Factoren der einzelnen Glieder aus, so bleiben Summenwerthe übrig, für die wir eine abgekürzte Bezeichnung einführen wollen. Mit Rücksicht darauf, dafs nach 15)

$$\text{für } \alpha > 1: \quad \gamma^2 = \alpha - 1, \text{ also } \mu^2 + \gamma^2 = \alpha - 1 + \mu^2$$

$$\text{für } \alpha < 1: \quad \gamma^2 = 1 - \alpha, \text{ also } \mu^2 - \gamma^2 = \alpha - 1 + \mu^2$$

ist, erhält man für die fraglichen Summenwerthe die bei jedem möglichen α geltenden Ausdrücke

$$45^a) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-(2n-1)w}}{\alpha - 1 + (2n-1)^2} = W(\alpha, w) \\ \text{und } -2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)e^{-(2n-1)w}}{\alpha - 1 + (2n-1)^2} = W'(\alpha, w), \end{array} \right.$$

oder in entwickelter Form und noch einfacherer Bezeichnung

$$45^b) \quad \left\{ \begin{array}{l} W = 2 \left(\frac{e^{-w}}{\alpha} - \frac{e^{-3w}}{\alpha + 8} + \frac{e^{-5w}}{\alpha + 24} - \frac{e^{-7w}}{\alpha + 48} + \dots \right) \\ \text{und } W' = -2 \left(\frac{e^{-w}}{\alpha} - \frac{3e^{-3w}}{\alpha + 8} + \frac{5e^{-5w}}{\alpha + 24} - \frac{7e^{-7w}}{\alpha + 48} + \dots \right). \end{array} \right.$$

Diese Reihen convergiren offenbar auch für $w=0$ und im übrigen noch schneller, als die Reihe 43), da jedes Glied vom zweiten an kleiner ist, als das entsprechende Glied der letzteren. Nur das erste Glied ist gröfser, wenn $\alpha < 1$; es wächst ins Unendliche, wenn α sich der Null nähert, d. h. nach 3) wenn die Geschwindigkeit c der bewegten Masse unendlich grofs wird. Sehen wir einstweilen von diesem leicht zu behandelnden Grenzfalle ab, so ergeben sich aus 45) für jedes w das ≥ 0 ist, endliche Werthe von W und W' , die absolut genommen stets kleiner sein müssen als

$$\frac{1}{\text{Cos } w} + 2 \frac{1 - \alpha}{\alpha} e^{-w}.$$

Die für die zweite Reihe von 45) gewählte Bezeichnung bringt zum Ausdruck, dafs diese Reihe, wie leicht zu ersehen, der Ableitung von W nach w gleich ist. Ausserdem besteht noch die bemerkenswerthe Beziehung

$$46) \quad (\alpha - 1) W + W'' = \frac{1}{\text{Cos } w}.$$

Mit Benutzung von 44) und 45) ergibt sich nun

$$47) \quad \begin{aligned} f\eta_1 dw &= -k W \cos kw + W' \sin kw \quad \text{für } \alpha > 1; \\ &= -f W \text{Cos } fw + W' \text{Sin } fw \quad \text{„ } \alpha < 1; \\ &= -W \quad + W' \quad \cdot \quad w \quad \text{„ } \alpha = 1; \end{aligned}$$

$$48) \quad \begin{aligned} f\eta_2 dw &= k W \sin kw + W' \cos kw \quad \text{„ } \alpha > 1; \\ &= -f W \text{Sin } fw + W' \text{Cos } fw \quad \text{„ } \alpha < 1; \\ &= \quad \quad \quad W' \quad \quad \quad \text{„ } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichungen überzeugt man sich am einfachsten durch differenziren nach w . Mit Benutzung von 46) erhält man so in der That auf der rechten Seite wieder die durch 15) und 36) bestimmten Werthe von η_1 und η_2 .

§ 9. Werthe der bestimmten Integrale. Einführung in die Gleichung der Bahn.

Die Gleichungen 47) und 48) gelten (wie 45)) nur für $w \geq 0$. Die Integrale in 41) und 42), um deren Auswerthung es sich handelt, haben aber die untere Grenze $w = -\infty$ und für die eine Hälfte der zu bestimmenden Bahn auch negative obere Grenzen. Die scheinbar hierin liegende Schwierigkeit läßt sich indes leicht mit Hülfe der früher (in § 4) angestellten Untersuchung der Gröfsen η_1 und η_2 überwinden. Wie die Gleichungen 15) oder die Abbildungen 8 und 10 lehren, ist η_1 eine ungerade, η_2 dagegen eine gerade Function von w , sodafs — wenn wir η_1 und η_2 als Functionenzeichen betrachten —

$$\eta_1(-w) = -\eta_1(w) \quad \text{u.} \quad \eta_2(-w) = \eta_2(w).$$

Hieraus folgen unmittelbar die allgemeinen Beziehungen:

$$\int_{-w}^0 \eta_1 dw = -\int_0^{+w} \eta_1 dw \quad \text{u.} \quad \int_{-w}^0 \eta_2 dw = \int_0^{+w} \eta_2 dw.$$

Auf die in 41) und 42) vorliegenden Integrale angewendet ergeben dieselben

$$49) \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+w} \eta_1 dw = -\int_0^{+\infty} \eta_1 dw + \int_0^{+w} \eta_1 dw = -\int_0^{+\infty} \eta_1 dw \\ \text{und} \int_{-\infty}^{+w} \eta_2 dw = 2 \int_0^{+\infty} \eta_2 dw - \int_0^{+w} \eta_2 dw, \end{array} \right.$$

$$50) \left\{ \begin{array}{l} \text{sowie} \int_{-\infty}^{-w} \eta_1 dw = \int_{-\infty}^{+w} \eta_1 dw = -\int_0^{+\infty} \eta_1 dw \\ \text{und} \int_{-\infty}^{-w} \eta_2 dw = \int_0^{+\infty} \eta_2 dw. \end{array} \right.$$

Mittels dieser Gleichungen läßt sich jedes Integral mit negativen Grenzen auf ein solches zurückführen, das nur positive Grenzen besitzt.

Die Gröfsen W und W' verschwinden für $w = \infty$. Daraus folgt, dafs sich lediglich die Vorzeichen der Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen 47) und 48) umkehren, wenn man für die links stehenden Integrale w als untere und $w = \infty$ als obere Grenze wählt. Läfst man das (als positiv vorausgesetzte) w sich der Null nähern, so ergibt sich — wegen der Stetigkeit aller vorhandenen Functionen — mit leicht verständlicher Be-

zeichnung des der unteren Grenze Null entsprechenden Werthes von W' aus 48) insbesondere

$$51) \quad \int_0^{\infty} \eta_2 dw = -W'_0 = 2 \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{\alpha+8} + \frac{5}{\alpha+24} \dots \right).$$

Es wird also für positive w nach 47), 48), 49) und 51):

$$52) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^w \eta_1 dw &= -kW \cos kw + W' \sin kw && \text{für } \alpha > 1; \\ &= -\mathfrak{f} W \mathfrak{Cof} kw + W' \mathfrak{Sin} kw && \text{„ } \alpha < 1; \\ &= -W + W' \cdot w && \text{„ } \alpha = 1; \end{aligned}$$

$$53) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^w \eta_2 dw &= kW \sin kw + W' \cos kw - 2W'_0 && \text{für } \alpha > 1; \\ &= -\mathfrak{f} W \mathfrak{Sin} kw + W' \mathfrak{Cof} kw - 2W'_0 && \text{„ } \alpha < 1; \\ &= W' && \text{„ } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Ist die obere Grenze w negativ, so bezeichnen wir sie mit $-[w]$, verstehen also unter $[w]$ den Absolutwerth derselben. Dann ergeben sich nach 50) für das erste Integral die gleichen Ausdrücke wie in 52), nur mit $[w]$ an Stelle von w . Dieselbe Aenderung tritt bei dem zweiten Integral ein; außerdem unterscheidet sich dieses aber von dem durch 53) gegebenen Werthen — wie aus einem Vergleich von 49) und 50) ohne weiteres hervorgeht — dadurch, daß das dritte Glied der rechten Seite von 53) fortfällt, und daß die übrigen Glieder ihre Vorzeichen wechseln. Setzt man wieder das algebraisch aufzufassende Zeichen w an Stelle von $-[w]$, also $-w$ für $[w]$, so ändert sich in beiden Integralen das Vorzeichen der Glieder, die einen Sinus oder w selbst enthalten. Unter der Voraussetzung, daß W und W' immer mit dem Absolutwerth von w berechnet werden, gelten hiernach für negative w (d. h. für die Stabhälfte, von der aus die Masse ihre Bewegung beginnt) die folgenden Gleichungen:

$$54) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^w \eta_1 dw &= -kW \cos kw - W' \sin kw && \text{für } \alpha > 1; \\ &= -\mathfrak{f} W \mathfrak{Cof} kw - W' \mathfrak{Sin} kw && \text{„ } \alpha < 1; \\ &= -W - W' \cdot w && \text{„ } \alpha = 1; \end{aligned}$$

$$55) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^w \eta_2 dw &= kW \sin kw - W' \cos kw && \text{„ } \alpha > 1; \\ &= -\mathfrak{f} W \mathfrak{Sin} kw - W' \mathfrak{Cof} kw && \text{„ } \alpha < 1; \\ &= -W' && \text{„ } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Diese Werthe sind nun in die Gleichung 41) einzusetzen. Nennen wir die Hälfte des Stabes, von der aus die Bewegung beginnt, kurz die erste, die andere die zweite Hälfte, und bezeichnen wir die zugehörigen Werthe von η mit η_I und η_{II} , so ergibt sich mit Berücksichtigung von 15) und 36) aus 41) nach einigen Umformungen sehr einfach und für alle möglichen Werthe von α geltend

$$56^1) \quad \eta_I = \frac{\alpha\beta}{2} \frac{W}{\mathfrak{Cof} w} - \frac{\beta}{2 \mathfrak{Cof}^2 w}$$

$$56^{\text{II}}) \quad \text{und} \quad \eta_{\text{II}} = \frac{\alpha\beta}{2} \frac{W}{\text{Cos} w} - \frac{\beta}{2 \text{Cos}^2 w} - \frac{\alpha\beta}{\gamma} W'_0 \eta_1.$$

In ähnlicher Weise läßt sich durch Einführung der gefundenen Integralwerthe in die Gleichung 42) ein von Integralen freier Ausdruck für $d\eta:d\xi$ gewinnen. Dasselbe erreicht man natürlich auch durch Differenziren von 56) nach ξ , wobei es jedoch zur richtigen Bestimmung der Zeichen einiger Vorsicht bedarf. Mit denselben Grenzbedingungen wie zuvor findet man

$$57^{\text{I}}) \quad \frac{d\eta_{\text{I}}}{d\xi} = \beta \text{Tang} w - \frac{\alpha\beta}{2} (W \text{Sin} w + W' \text{Cos} w)$$

$$57^{\text{II}}) \quad \text{und} \quad \frac{d\eta_{\text{II}}}{d\xi} = \beta \text{Tang} w - \frac{\alpha\beta}{2} (W \text{Sin} w - W' \text{Cos} w) \\ + \frac{\alpha\beta}{\gamma} (\eta_1 \text{Sin} w - \gamma \eta_2 \text{Cos} w) W'_0 \text{Cos} w.$$

Die Bedeutung der in den Gleichungen 56) und 57) auftretenden Größen braucht wohl, soweit dieselben schon in 41) und 42) vorhanden, hier nicht nochmals erläutert zu werden; neu hinzugekommen sind nur W , W' und W'_0 . Die beiden ersteren sind nach 45) Functionen von α und w , also abhängig insbesondere von der Geschwindigkeit und von der Lage des betrachteten Punktes gegen die Stabmitte. In W'_0 — gemäß 51) der Werth, den W' für $w=0$ annimmt — tritt demnach nur noch α auf.

§ 10. Andere Form der Bahngleichung. Größen W und W'_0 .

Die durch 56) bestimmten Werthe η_{I} und η_{II} von η stellen nach 4^a) die Ordinaten $y_{c,w}$ der Bahn, bezogen auf die Einheit $2h$ dar. Zur Gewinnung eines Maßstabes für den Einfluß, den die Geschwindigkeit c auf die Form der Bahn ausübt, erscheint es zweckmäÙig, nunmehr von einer anderen Verhältnißzahl Gebrauch zu machen, in der die Senkung der Mitte des Stabes ($w=0$) bei ruhender Last ($c=0$) die Einheit bildet. Wir haben früher (im § 1) die Senkung desselben Punktes unter der ruhenden Last G (Gewicht der bewegten Masse) mit y_0 bezeichnet. Da hier nicht die Wirkung von G allein, sondern die der Gesamtlast $P=\beta G$ in Betracht kommt, so ist βy_0 die fragliche Einheit; sie möge — als besonderer Werth von $y_{c,w}$ aufgefaßt — die Bezeichnung $y_{0,0}$ erhalten. Wird dann die gesuchte Verhältnißzahl kurz Y genannt, so ergibt sich mit Rücksicht auf 4^a)

$$58) \quad y_{0,0} = \beta y_0 = \frac{\beta}{\alpha} 2h, \text{ also } Y = \frac{y_{c,w}}{y_{0,0}} = \frac{\alpha}{\beta} \eta.$$

Hiermit geht 56) über in

$$59^{\text{I}}) \quad Y_{\text{I}} = \frac{\alpha}{2 \text{Cos} w} \left(\alpha W - \frac{1}{\text{Cos} w} \right) \quad \text{für } w < 0$$

$$59^{\text{II}}) \quad \text{und} \quad Y_{\text{II}} = \frac{\alpha}{2 \text{Cos} w} \left(\alpha W - \frac{1}{\text{Cos} w} \right) - \frac{\alpha^2}{\gamma} W'_0 \eta_1 \quad \text{für } w > 0.$$

Diese Gleichungen enthalten rechts nur noch α und w ; sie bieten daher die Möglichkeit zur Berechnung von Tabellen für Y_{I} und Y_{II} , sowie zur

Herstellung einer für die Veranschaulichung des Einflusses einer beliebigen Geschwindigkeit ausreichenden Reihe von Curvenbildern. Bevor wir hierzu schreiten, wollen wir sie jedoch erst noch einer allgemeinen Besprechung unterziehen.

Wie früher (im § 9) hervorgehoben, ist W stets mit dem Absolutwerth von w zu berechnen. Ferner ist $\text{Cof } w$ eine gerade Function von w . Daraus folgt, daß der zu einem beliebigen w gehörige Werth des ersten Gliedes der rechten Seite von 59¹¹⁾ nach Gröfse und Vorzeichen gleich ist dem zu $-w$ gehörigen Werthe von Y_I . Hiernach wird die zweite Hälfte der Bahn erhalten, wenn man von dem (auf die Stabmitte bezogenen) Spiegelbilde der ersten Hälfte aus den Werth $\alpha^2 W'_0 \eta_1 : \gamma$ abgetragen denkt. Hierin ist nur η_1 mit w veränderlich; und da wir den gesetzmäßigen Verlauf dieser durch 15) bestimmten Gröfse aus der eingehenden Darstellung in § 4 schon für alle möglichen Werthe von α kennen, so erübrigt zur Gewinnung eines allgemeinen Bildes von der Gestalt der Bahn nur noch die Ermittlung des Verlaufes von Y_I als Function von α und w , sowie von W'_0 als Function von α . Welcher Art dieser Verlauf aber auch sein möge, immer muß nach Vorstehendem die Gestalt der Bahn eine unsymmetrische sein, so lange nicht das zweite Glied von Y_{II} für alle Werthe von w Null ist. Es wird sich zeigen, daß letzteres nur eintritt wenn $\alpha = \infty$ und wenn $\alpha = 0$ ist. Der ersteren Bedingung entspricht die Geschwindigkeit Null; dann muß die Bahn der bewegten Masse mit der Senkungslinie für ruhende Last zusammenfallen. Der zweiten Bedingung wird durch die Annahme einer unendlich großen Geschwindigkeit genügt; dann ist die Bahn offenbar eine gerade Linie.

Wenden wir uns nun zu den Gröfsen W , W' und W'_0 . Es ist nicht zu erwarten, daß sich die Reihen 45) für W und W' allgemein summiren lassen; denn damit wären geschlossene Ausdrücke für die als nicht in solcher Weise auswerthbar anzusehenden Integrale in 41) gefunden. Wohl aber ist die Möglichkeit der Summirung in besonderen Fällen, also z. B. für $w = 0$ oder für gewisse Grenzwerte von α ins Auge zu fassen.¹²⁾ Hierbei kommt in erster Linie die Reihe 51) für W'_0 in Betracht, da diese bei einigermaßen großen Werthen von α sehr langsam convergirt, also zur Berechnung des Zahlenwerthes von W'_0 wenig geeignet ist.

Es empfiehlt sich, bei der Untersuchung von W'_0 wieder die Fälle $\alpha > 1$ und $\alpha < 1$ zu trennen, und von der Bezeichnung nach 15) Gebrauch zu machen, wo im ersteren Falle $\gamma = \sqrt{\alpha - 1}$, im anderen $\gamma = \sqrt{1 - \alpha}$ gesetzt wurde. Damit ergibt sich:

$$-\frac{W'_0}{2} = \frac{1}{1 \pm \gamma^2} - \frac{3}{3^2 \pm \gamma^2} + \frac{5}{5^2 \pm \gamma^2} - \dots \text{ für } \alpha \gtrless 1.$$

12) Ein derartiger Fall ist schon in § 2, Fußnote 6, erwähnt. Die dort ausgeführte Integration deutet darauf hin, daß sich W' in geschlossener Form darstellen läßt, wenn $\alpha = 1$ wird. In der That ist dann $W' = -2 \arctang e^{-w}$. Diese Summirung hat aber für die vorliegende Aufgabe keinen besonderen Werth.

Ein Vergleich mit den Reihen

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{2} x} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{3^2+x^2} + \frac{5}{5^2+x^2} - \dots \quad \text{und}$$

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{2} x} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{3}{3^2-x^2} + \frac{5}{5^2-x^2} - \dots,$$

die zwar in den gebräuchlichen Formelsammlungen nicht vorhanden sind, aber wohl als bekannt vorausgesetzt werden dürfen¹³⁾, läßt die völlige Uebereinstimmung ohne weiteres erkennen. Der Fall $\alpha = 1$ erledigt sich einfach dadurch, daß in vorstehenden Reihen $x = 0$ gesetzt wird; auch ergibt die Gleichung 51) mit $\alpha = 1$ unmittelbar die bekannte Leibnizsche Reihe für $\pi : 4$. Damit ist die angestrebte Summirung bewirkt und lautet das Ergebniß für

$$60) \quad -W'_0 = \begin{cases} \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} \gamma} & ; \quad \alpha > 1 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad \alpha = 1 \\ \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} \gamma} & ; \quad \alpha < 1 \end{cases},^{14)}$$

wo

$$\gamma = \sqrt{\alpha - 1} \quad \text{für} \quad \alpha > 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - \alpha} \quad \text{für} \quad \alpha < 1.$$

Hieraus läßt sich W'_0 leicht berechnen; da aber in 59¹¹⁾ nicht W'_0 allein, sondern der Ausdruck $\alpha^2 W'_0 : \gamma$ auftritt, so ziehen wir vor, gleich für diesen einige Werthe anzugeben. In der am Schlusse folgenden Tabelle II sind dieselben mit den zugehörigen Werthen von α und γ zusammengestellt. Für $\alpha = 1$ ist $\gamma = 1$ und $-\alpha^2 W'_0 : \gamma = \frac{1}{2} \pi = 1,5708$.

Wie die berechneten Zahlenreihen zeigen, ist $-\alpha^2 W'_0 : \gamma$ eine stets positive Gröfse, die von 0 bis ∞ wächst, wenn α von 0 bis 1 zu-, oder von ∞ bis 1 abnimmt. Zur weiteren Veranschaulichung der Abhängigkeit dieser Gröfse von α mögen die Abbildungen 11 und 12 auf Tafel II dienen, in die auch gleich die Curven für $\gamma = k = \sqrt{1 - \alpha}$ und $\gamma = k = \sqrt{\alpha - 1}$, die offenbar Parabeln sind, mit eingetragen wurden. Für die im Bereiche der praktischen Anwendung liegenden Werthe $\alpha = 30$ bis $\alpha = 100$ ist $\alpha^2 W'_0 : \gamma$ so klein, daß es zweckmäfsig erschien, den betreffenden Curventheil in einem größeren Mafsstabe aufzutragen; dieser ist daher für die rechte Seite der Abbildung 12 hundertmal gröfser gewählt, als für die übrige Darstellung.

Besser als die Reihe für W'_0 convergirt die Reihe für W , die nur bei großem α und kleinem w , d. h. bei kleinen Geschwindigkeiten und für Punkte,

13) S. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. I (5. Aufl.) Seite 239 und 280, wo die obigen Reihen in etwas anderer Form angeführt sind.

14) Hierzu ist vielleicht die Bemerkung nicht überflüssig, daß W'_0 im Falle $\alpha < 1$ nicht etwa eine periodische Function ist, wie es nach 60) scheinen könnte; denn γ ist dann stets < 1 .

die nahe bei der Mitte des Stabes liegen, die Berücksichtigung einer größeren Zahl von Gliedern erfordert. Wenn $w=0$ ist (also für den Mittelpunkt der Stablänge) kann diesem Mangel zwar durch eine Umformung der Reihe abgeholfen werden; da es sich aber hierbei um einen bloßen Rechenvortheil handelt, so verzichten wir darauf die ziemlich weitläufige Entwicklung vorzuführen.¹⁵⁾

§ 11. Grenzfälle $\alpha = \infty$ und $\alpha = 0$.

Wenn $\alpha = \infty$ wird — entsprechend der Geschwindigkeit $c=0$ — so muß die Bahn, wie schon bemerkt wurde, mit der nach Gleichung 1) bestimmten Senkungslinie für ruhende Last übereinstimmen, die für den vorliegenden Fall mit Rücksicht darauf, daß die Last $Q=P=\beta G$ ist, mit Benutzung von 58) in der Form

$$61) \quad Y = \frac{y_{0,w}}{y_{0,0}} = (1 - \xi^2)^2 = \frac{1}{\cos^4 w}$$

geschrieben werden kann. Wir wollen versuchen, ob sich die Gleichung 59) mit $\alpha = \infty$ in diese Form überführen läßt. Zunächst ergibt sich hiermit nach den Vorhergehenden $-\alpha^2 W'_0: \gamma = 0$; die Bahn ist dann also jedenfalls symmetrisch zur Mitte. Nach 45^b) ist

$$62) \quad \alpha W = 2 \left(e^{-w} - \frac{\alpha}{\alpha+8} e^{-3w} + \frac{\alpha}{\alpha+24} e^{-5w} - \dots \right).$$

$$\text{Hiervon} \quad \frac{1}{\cos w} = 2 \left(e^{-w} - \frac{\alpha+8}{\alpha+8} e^{-3w} + \frac{\alpha+24}{\alpha+24} e^{-5w} - \dots \right)$$

$$\text{ergibt:} \quad \alpha W - \frac{1}{\cos w} = 2 \left(\frac{8}{\alpha+8} e^{-3w} + \frac{24}{\alpha+24} e^{-5w} - \dots \right).$$

Führt man dies in die Gleichung 59) ein, so folgt

$$63) \quad Y = \frac{1}{\cos w} \left(\frac{8\alpha}{\alpha+8} e^{-3w} - \frac{24\alpha}{\alpha+24} e^{-5w} + \dots \right) \\ = \frac{1}{\cos w} \left(\frac{8}{1+\frac{8}{\alpha}} e^{-3w} - \frac{24}{1+\frac{24}{\alpha}} e^{-5w} + \dots \right).$$

Die Gleichung 63) gilt (nur mit der Beschränkung auf die erste Stabhälfte) noch für beliebige Werthe von α . Wird jetzt $\alpha = \infty$, so ergibt sich

$$Y = \frac{1}{\cos w} \left(8 e^{-3w} - 24 e^{-5w} + 48 e^{-7w} - 80 e^{-9w} + \dots \right).$$

Da nun die eingeklammerte Reihe, wie sich — z. B. durch einfache Division mit $(1 + e^{-2w})^3$ in $8 e^{-3w}$ — leicht zeigen läßt, den Werth

$$\left(\frac{2}{e^w + e^{-w}} \right)^3 = \frac{1}{\cos^3 w}$$

15) Die oben erwähnte Umformung läuft darauf hinaus, eine Anzahl Glieder der Reihe für W_0 unmittelbar zu summiren und für den Rest eine Summenformel mit sehr schnell abnehmenden Gliedern zu entwickeln.

hat, so ist bewiesen, dafs 59) in der That mit $\alpha = \infty$ in 61) übergeht, dafs also die durch die vorliegende Untersuchung bestimmte Bahn der bewegten Masse, wie gefordert werden mufs, bei unendlich kleiner Geschwindigkeit der Senkungslinie für ruhende Last gleich ist.

Der Fall $\alpha = 0$ — entsprechend einer unendlich grossen Geschwindigkeit — erledigt sich unmittelbar durch die Gleichungen 59) selber. Da nämlich nach den früheren Untersuchungen keine der hierin auftretenden Gröfsen (aufer α) unendlich gross werden kann, so ergibt sich mit $\alpha = 0$ aus 59)

$$Y = 0,$$

d. i. die Gleichung einer mit der x -Achse zusammenfallenden geraden Linie.¹⁶⁾ Gröfseres Interesse als dieser selbstverständliche Grenzfall bietet die Frage, welche Form die Bahn annimmt, wenn α zwar nicht Null, aber doch sehr klein ist. Dann können in der Reihe 62) alle auf das erste folgenden Glieder gegen dieses vernachlässigt werden, wodurch sich

$$\alpha W = 2 e^{-w}$$

ergiebt. Hiermit wird

$$\alpha W - \frac{1}{\text{Cof } w} = 2 e^{-w} - \frac{2}{e^w + e^{-w}} = \frac{2 e^{-2w}}{e^w + e^{-w}} = \frac{e^{-2w}}{\text{Cof } w},$$

also nach Gleichung 59¹⁾ und 36)

$$64) \quad Y_1 = \frac{\alpha}{2} \frac{e^{-2w}}{\text{Cof}^2 w} = \frac{\alpha}{2} e^{-2w} (1 - \xi^2).$$

Um w zu entfernen, benutzen wir die Gleichung 12), wobei jedoch zu beachten, dafs für die erste Stabhälfte zwar w an sich negativ, aber nach dem, was im § 9 über die Berechnung von W gesagt wurde, hier absolut zu nehmen ist. Verstehen wir dagegen unter ξ einen algebraischen Werth, so folgt mit Hilfe der bekannten Beziehung zwischen Arkustangens und Logarithmus aus 12) bei negativem ξ :

$$-2w = 2 \text{Arftang } \xi = \log \frac{1 + \xi}{1 - \xi},$$

$$\text{also} \quad e^{-2w} = \frac{1 + \xi}{1 - \xi}.$$

Die Einsetzung dieses Werthes in die Gleichung 64) ergiebt:

$$65) \quad Y = \frac{\alpha}{2} (1 + \xi)^2.$$

Dies gilt zunächst nur für die erste Stabhälfte, und zwar um so genauer, je gröfser w (also auch $-\xi$), weil dann die in der Reihe 62) auf das erste folgenden, hier vernachlässigten Glieder um so kleiner sind. Die

16) Rein theoretisch könnte nach 3) auch der Fall in Betracht kommen, dafs α nicht durch $c = \infty$, sondern durch $y_{0,0} = \infty$ Null wird, wobei der Stab gewissermaßen eine unendlich grosse Biegsamkeit besitzen würde. Diese Annahme wird durch die gleich folgende Untersuchung der Bahn für kleine Werthe von α mit erledigt.

Gleichung 65) gilt aber bei hinreichend kleinem α wegen der nothwendig vorhandenen Stetigkeit der Bahn — nur mit geringerer Annäherung — auch noch für den an die Mitte grenzenden Theil der zweiten Hälfte, weshalb wir Y statt Y_I geschrieben haben. Sie stellt eine Parabel mit lothrechter Achse dar, deren Scheitel in den Anfangspunkt der Bahn fällt. Es liegt nahe, einen Vergleich anzustellen zwischen dieser und derjenigen Parabel — wir wollen sie kurz Wurfparabel nennen — in welcher sich die Masse m unter dem senkrechten Druck P bewegen würde, wenn die Unterstützung durch den biegsamen Stab ganz fehlte. Nach 3) und 58) kann gesetzt werden:

$$Y = \frac{y}{y_{0,0}} = \frac{\alpha y}{2 \beta h} = \frac{\alpha G y}{2 P h}.$$

Damit erhält Gleichung 65) die Form

$$66) \quad y = \frac{P}{G} h (1 + \xi)^2.$$

Hierin bezeichnet h nach § 1 die Höhe, um welche die Masse $m = G : g$ in der Zeit, die sie gebraucht um die halbe Stablänge l mit der vorgeschriebenen Geschwindigkeit c zu durchlaufen, herabfallen würde, wenn sie nur dem Einflusse ihres Gewichtes G , oder mit anderen Worten der Beschleunigung g der Schwere unterworfen wäre. Wirkt statt G die Kraft P , so tritt an Stelle von g die Beschleunigung $Pg : G$ und (bei gleicher Masse und Zeit) an Stelle von h die Fallhöhe $Ph : G$. Denselben Werth ergibt aber Gleichung 66) für $\xi = x : l = 0$ als Ordinate der Bahn der bewegten Masse in der Mitte des Stabes. Daraus folgt, dafs — soweit der Näherungsgrad von 66) reicht — die Bahn mit der Wurfparabel zusammenfällt. Die Voraussetzung hierfür, dafs α sehr klein sei, kann nach 3) entweder durch eine sehr grofse Geschwindigkeit c , oder durch eine grofse Biegsamkeit des Stabes (grofses y_0) erfüllt werden. Je nachdem mehr der eine oder andere Fall vorliegt, ist die Parabel mehr oder weniger flach.

§ 12. Gestalt der Bahn für beliebige Werthe von α .

Durch die Ausführungen im § 12 dürften die Grenzfälle $\alpha = \infty$ und $\alpha = 0$ hinreichend klar gestellt sein. Um nun auch noch einen Ueberblick über die verschiedenen Formen zu geben, welche die Bahn annimmt, wenn α innerhalb jener Grenzen liegt, haben wir Y_I nach 59¹⁾ für die Mitte des Stabes und sieben Punkte der ersten Hälfte mit zwölf Werthen von α berechnet.¹⁷⁾ Die Ergebnisse sind in Tabelle III zusammengefaßt und auferdem behufs besserer Veranschaulichung in Abb. 13, Tafel III, als Functionen von α nach Mafß aufgetragen, wodurch zugleich ein bequemes Mittel zur Bestimmung von Y_I für beliebige andere α , als die zur Rechnung benutzten,

17) Da es für den vorliegenden Zweck nicht auf eine ganz gleichmäfsige Vertheilung der Punkte ankam, so wurden dieselben der bequemerer Rechnung wegen so gewählt, dafs sich runde Werthe von e^{-u} ergaben. Die dazu gehörigen ξ sind in die Tabelle III mit aufgenommen.

geboden ist. Die den einzelnen Curven beigefügten Ziffern bezeichnen die entsprechenden Werthe von $100e^{-w}$. Da die Curven natürlich nicht für den ganzen Bereich von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \infty$ abgebildet werden konnten, so sind die zur letzteren Grenze gehörigen Werthe als Asymptoten — um das Bild nicht zu verwirren, jedoch nur durch kurze Linienstücke — dargestellt. Diese Curvenschaar lehrt, daß die Senkung Y_I bei kleinem α , d. h. bei sehr großer Geschwindigkeit sehr klein ist und daß sie mit zunehmendem α schnell wächst. In den dem Anfange des Stabes benachbarten Theilen der Bahn nähert sie sich dabei fortwährend dem zu $\alpha = \infty$, d. h. zur Geschwindigkeit Null gehörigen Werthe, den sie schon bei $\alpha = 20$ nahezu erreicht, jedenfalls aber nie überschreitet. In den folgenden, der Mitte des Stabes näher liegenden Theilen der Bahn wächst dagegen Y_I , wie schon die Curve für $e^{-w} = 0,60$ erkennen läßt, über den zu $\alpha = \infty$ gehörigen Werth hinaus, und zwar um so schneller und beträchtlicher, je näher der betreffende Punkt der Stabmitte liegt, um dann bei noch weiter zunehmendem α in demselben Verhältnisse wieder kleiner zu werden. Die entsprechenden Curven schneiden also erst ihre Asymptoten und nähern sich ihnen dann von der entgegengesetzten Seite. Der größte Werth — etwa 1,32 — wird in der Stabmitte ungefähr bei $\alpha = 11$ erreicht.

Ein ähnliche Darstellung könnte auch für die zweite Hälfte der Bahn versucht werden. Da aber das zweite Glied von Y_{II} nach 15) für $\alpha > 1$ eine periodische Function von kw , die Curve Y_{II} also eine Wellenlinie ist, und da mit wachsendem α und w die Länge und Höhe der einzelnen Wellen fortwährend abnimmt, so müßte man eine außerordentlich große Zahl von Curven berechnen und auftragen, wenn die Darstellung nicht ein ganz unzulängliches oder selbst irreführendes Bild der Beziehungen zwischen Y_{II} , w und α geben sollte. Wir sehen deshalb hiervon umsomehr ab, als die Auftragung als Function von α ohnehin nicht Selbstzweck, sondern nur ein Hilfsmittel zur Bestimmung der zweiten Hälfte der Bahn sein würde, die auch ohne ein solches nach dem, was im § 10 über die Gleichungen 59) gesagt wurde, mit Benutzung der zuvor berechneten Werthe von Y_I und $\alpha^2 W'_0 : \gamma$ leicht gefunden werden kann. Als Beispiele hierfür mögen die Abb. 14 bis 21, Tafel III und IV, dienen, in welchen die Größen Y_I und Y_{II} als Functionen von w für die Werthe von α aufgetragen sind, die zur Berechnung der Tabelle III benutzt wurden. Diese Curven stellen also unmittelbar die Bahn der bewegten Masse dar. Das zur Antragung der Werthe $\alpha^2 W'_0 : \gamma$ benutzte Spiegelbild der ersten Hälfte der Bahn ist überall durch eine schwache, gestrichelte Linie bezeichnet; außerdem ist in einem Theile der Abbildungen des Vergleiches halber auch die Senkungslinie für ruhende Last ($\alpha = \infty$) als schwach ausgezogene Linie beigefügt. Wie schon im § 10 bemerkt wurde, ist die Bahn unsymmetrisch, sobald α nicht Null oder unendlich ist. Aus den vorliegenden Abbildungen ergibt sich aber, daß die Unsymmetrie, sowie auch der wellenförmige Verlauf der zweiten Hälfte der Bahn schon bei ziemlich kleinen Werthen von α für das Auge fast ver-

schwindet; für $\alpha \geq 60$ ist deswegen immer nur die erste Hälfte der Bahn dargestellt.¹⁸⁾ Als Maßstab für den Grad der Unsymmetrie (wie auch als Probe für die Genauigkeit der Auftragung bei kleineren Werthen von α) kann die Neigung der Curve Y in der Mitte des Stabes dienen. Für die Tangente des Neigungswinkels an dieser Stelle erhält man leicht aus einer der Gleichungen 57), indem man $w = 0$ setzt und η nach 58) durch Y ausdrückt den Werth

$$67) \quad \left(\frac{dY}{d\xi}\right)_0 = -\frac{\alpha^2}{2} W'_0.$$

Hiernach kann das Neigungsverhältniß bequem durch Multiplication des in Tab. II zu findenden Werthes von $-\alpha^2 W'_0 : \gamma$ mit der Hälfte des darüber stehenden γ berechnet werden. Das entsprechende Verhältniß für die wirkliche Bahn, von der ja die Curve Y nur ein verzerrtes Bild giebt, wird hieraus erhalten, indem man Y durch y und ξ durch x ausdrückt, d. h. nach 4^a) und 58) durch Multiplication mit $y_{0,0} : l$.

Die parabelartige Gestalt, welche die erste Hälfte der Bahn bei kleinen Werthen von α annimmt, tritt in Abb. 18 für $\alpha = 5$ schon sehr deutlich hervor. In Abb. 19 für $\alpha = 1$ erstreckt sich diese Form sogar bis über den größeren Teil der zweiten Hälfte und in Abb. 21 für $\alpha = 0,1$ fast bis an das Ende des Stabes. Je kleiner α , desto schärfer wendet sich die Bahn dann nach oben, um mit senkrechter Richtung in den Stützpunkt des Stabes zu münden. Aehnliches gilt übrigens auch für $\alpha > 1$, wie der im § 4 untersuchte Verlauf der Größe η_1 erkennen läßt. Dieser befremdlich erscheinende Umstand wird weiterhin noch erörtert werden.

§ 13. Beanspruchung des Trägers.

Die Biegemomente und Beanspruchungen in einem gegebenen Punkte des Trägers verhalten sich bei verschiedenen Geschwindigkeiten wie die Senkungen, und diese wiederum wie die Ordinaten der Bahn der bewegten Masse in dem betreffenden Punkte. Ein Vergleich der Bahn mit der Senkungslinie für ruhende Last läßt also ohne Weiteres erkennen, in welchem Maße das Biegemoment an irgend einer Stelle durch den Einfluß der Fahrgeschwindigkeit gegen den Ruhewerth vermehrt oder vermindert wird. Für die Tragfähigkeit des Stabes von überall gleichem Querschnitt ist aber nicht das Verhältniß der zu ein und demselben Punkte gehörigen Momente entscheidend, sondern das Verhältniß der Höchstwerthe, welches daher jetzt bestimmt werden soll.

18) Da die Länge und Höhe der Wellen, wie schon erwähnt, auch bei kleineren Werthen von α nach dem Ende der Bahn hin fortwährend (bis zu Null) abnimmt, so ist die Möglichkeit der bildlichen Darstellung hier durch die der Größe des Maßstabes gesteckte Grenze beschränkt. Das darf aber nicht etwa als eine Unbestimmtheit oder Unzulänglichkeit der Lösung gedeutet werden; denn durch Zahlen läßt sich die Form der Bahn in ihrer ganzen Erstreckung mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit bestimmen. Vergl. hierzu die Ausführungen in § 13.

Wird zunächst das Moment im Punkte ξ bei der Geschwindigkeit c mit $M_{c,\xi}$, die zugehörige Senkung mit $y_{c,\xi}$ bezeichnet, so ist nach vorstehendem

$$68) \quad \frac{M_{c,\xi}}{M_{0,\xi}} = \frac{y_{c,\xi}}{y_{0,\xi}}$$

Das Moment $M_{0,\xi}$ im Abstände $\xi = x : l$ von der Mitte des Stabes bei ruhender Last steht zu dem Momente $M_{0,0}$ für die Mitte ($\xi = 0$) bekanntlich in der Beziehung:

$$M_{0,\xi} = M_{0,0} (1 - \xi^2).$$

Aehnlich ist $y_{0,\xi} = y_{0,0} (1 - \xi^2)^2$ gemäß Gleichung 1). Führt man diese Werthe in 68) ein, indem man zugleich $y_{c,\xi}$ (was von $y_{c,w}$ nur in der Bezeichnung verschieden ist) nach 58) durch Y ausdrückt, so ergibt sich das Verhältniß des Momentes $M_{c,\xi}$ in dem beliebigen Punkte ξ bei der Geschwindigkeit c zu dem größten Momente $M_{0,0}$ bei ruhender Last:

$$69) \quad M = \frac{M_{c,\xi}}{M_{0,0}} = \frac{Y}{1 - \xi^2} = Y \cos^2 w.$$

Diese Gleichung liefert in Verbindung mit den Tabellen und Curven für Y die Zahlenwerthe des gesuchten Momentenverhältnisses (das wir kurz mit M bezeichnet haben, da es auch als ein Moment, gemessen mit der Einheit $M_{0,0}$, aufgefaßt werden kann) für alle Punkte des Stabes in höchst einfacher Weise. Durch Auftragen der Ergebnisse würde leicht ein anschauliches Bild des Verlaufes von M zu gewinnen und zugleich der Ort des Größtwerthes, sowie der letztere selbst zu finden sein. Wir müssen, um die vorliegende Abhandlung nicht allzu weit auszudehnen, die Durchführung dieses Gedankens dem Leser überlassen und uns mit einigen Bemerkungen über die wichtigsten Eigenschaften der Function M begnügen.

Eine allgemeine Vorstellung von dem Verlaufe dieser GröÙe ergibt sich schon aus der Erwägung, daß man die Höhen der betreffenden Curve erhält, wenn man die Höhen der Curve Y in dem Verhältniß $1 : 1 - \xi^2$ vergrößert und dabei beachtet, daß der Ausdruck $1 - \xi^2$ die Höhe einer zur Stabmitte symmetrischen, durch die Stützpunkte gehenden Parabel darstellt. In der Mitte ($\xi = 0$) haben die Curven M und Y die gleiche Höhe und Neigung gegen die ξ -Achse; denn aus 69) folgt mit $\xi = 0$

$$M = Y \text{ und } \frac{dM}{d\xi} = \frac{dY}{d\xi}$$

Nahe der Mitte entfernen sich die Curven nur wenig von einander, da $1 - \xi^2$ mit wachsendem $\pm \xi$ sehr langsam abnimmt. Wenn Y seinen größten Werth in nicht zu beträchtlichem Abstände von der Mitte erreicht (d. h. wenn α nicht sehr klein ist), so gilt das gleiche auch für M . Der Scheitel der zugehörigen Curve liegt dann um ein geringes Maß weiter gegen den nächsten Stützpunkt hin, als der Scheitel der Curve Y . So erreicht z. B. Y für $\alpha = 20$ seinen Größtwerth 1,31 mit $\xi = 0,1$, während M bei $\xi = 0,2$ am größten, und zwar = 1,33 wird. Der gemeinschaftliche Werth von M und Y in der Mitte ist 1,274 (s. Abb. 16 u. Tab. III). Diese drei Zahlen weichen also nur wenig von einander ab. Bei größeren Werthen von α wird der

Unterschied so gering, daß er für die Zwecke der Anwendung unbedenklich vernachlässigt werden kann.

Der weitere Verlauf von M in größerem Abstände von der Stabmitte ist leicht zu verfolgen. Ueberall, wo Y kleiner ist, als bei ruhender Last, gilt dies auch für M , wie die Einsetzung des Werthes von Y aus 61) in 69) lehrt. Wo Y Null wird, verschwindet M ebenfalls, so lange $\xi^2 < 1$ ist; die Curven Y und M haben also (bei $\alpha > 1$) gemeinschaftliche Schnittpunkte mit der Stabachse. Daraus folgt, daß die Zahl, Länge und Vertheilung der Wellen für Y und M die gleiche ist. Nahe dem Ende des Stabes wird die Wellenlänge so klein, daß die bildliche Darstellung der Curve auf Schwierigkeiten stoßen würde; die Ausrechnung bleibt aber immer durchführbar.¹⁹⁾ Sie vereinfacht sich sogar noch, wenn ξ so groß wird, daß das erste Glied auf der rechten Seite von 59^{II)} gegen das zweite vernachlässigt werden darf, da dann die Natur der Curven Y und M lediglich von der in § 4 eingehend untersuchten Function η_1 abhängt. Die Grenze, von welcher ab dies zutrifft, kann etwa bei $\xi = 0,98$ angenommen werden. Diesem ξ entspricht der Werth $w = 2,3$, wofür $\text{Co}f w = 5,04$ und $\frac{1}{2} e^w = 4,99$ ist. Man begeht daher nur einen geringen und bei noch weiter wachsendem ξ immer kleiner werdenden Fehler, wenn man $\text{Co}f w$ durch $\frac{1}{2} e^w$ ersetzt. Hiermit wird nun nach vorstehendem für Punkte in der Nähe des Endauflagers

$$\begin{aligned}
 70) \quad M &= -\frac{\alpha^2}{\gamma} W'_0 \frac{e^w \sin kw}{2} \quad \text{für } \alpha > 1; \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{e^w w}{2} \quad \text{für } \alpha = 1; \\
 &= -\frac{\alpha^2}{\gamma} W'_0 \frac{e^w \text{Si}n kw}{2} \quad \text{für } \alpha < 1.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nicht nur zur zahlenmäßigen Berechnung von M dienen (wobei $-\alpha^2 W'_0 : \gamma$ aus Tab. II zu entnehmen ist), sondern lassen auch den Verlauf von M mit wachsendem w unmittelbar erkennen. Aus der zweiten und dritten folgt nämlich, daß M bei $\alpha \leq 1$ stets wächst und unendlich groß wird für $\xi = 1$ oder $w = \infty$. Die erste Gleichung dagegen lehrt, daß M , wenn $\alpha > 1$ ist, bei zunehmendem w abwechselnd positive und negative Werthe durchläuft, deren absolute Größe ebenfalls fortwährend zunimmt. Am deutlichsten tritt dies hervor, wenn man w um $\pi : k$ wachsen läßt; dann bleibt $\sin kw$ der Größe nach ungeändert, wogegen e^w in $e^{w+\pi:k} = e^w e^{\pi:k}$ übergeht. Die Ordinaten ähnlich liegender Punkte der auf einander folgenden Wellenhälften der Curve M stehen also zu einander in dem unveränderlichen Verhältnisse $e^{\pi:k} : 1$.

Die Gleichungen 70) ergeben M zunächst als Function von w . Unter den bei ihrer Ableitung hinsichtlich der letzteren Größe gemachten Voraussetzungen ist nun aber

$$71) \quad \xi = 1 - 2e^{-2w}.$$

19) Vergl. § 12, Fußnote 18.

Hieraus ergibt sich leicht, daß im Fall $\alpha > 1$ bei Darstellung von M als Function von ξ die Länge zweier auf einander folgenden Wellenhälften in dem unveränderlichen Verhältnisse $e^{-2\pi:k}:1$ steht. Die Curve M ist also bei $\alpha > 1$ eine Wellenlinie, deren Wellenhöhen eine steigende und deren Wellenlängen eine fallende geometrische Reihe bilden.

Dieses Ergebnifs ist insofern ein auffallendes, als das unbegrenzte Anwachsen der Biegemomente gegen das Ende des Stabes hin auch ein eben solches Anwachsen der Spannungen und damit den Bruch des Stabes zur Folge haben müßte, was der Erfahrung widerspricht. Die Erklärung hierfür wird im § 15 gegeben werden.

§ 14. Anwendung.

Wie aus den bisherigen Untersuchungen hervorgeht, spielt die Größe α bei der Bestimmung der Bahn der bewegten Masse eine entscheidende Rolle. Es wird daher, wenn es sich um Anwendung der Ergebnisse handelt, in erster Linie zu ermitteln sein, welche Werthe diese Größe in der Wirklichkeit annehmen kann. Nach § 1 stellt sie das Verhältniß zweier Längen dar, nämlich der Höhe $2h$, wo $h = gl^2 : c^2$, und der Senkung y_0 der Mitte des Stabes bei der Geschwindigkeit Null unter dem Gewicht G der bewegten Masse, und zwar ist $y_0 = Gl^3 : 6EI$. Ist die Anordnung des Trägers und die Größe dieser Masse gegeben, so hängt α nur noch von der Geschwindigkeit c ab und ist dem Quadrate derselben umgekehrt proportional. Dagegen ist α ganz unabhängig von der Größe P , d. h. von dem auf die Masse einwirkendem Gesamtdruck, welcher mithin auf das Verhältniß der Senkungen ein und desselben Punktes bei bewegter und bei ruhender Last keinen Einfluß übt. Ändert sich P , so ändern sich die Höhen der Senkungslinie für ruhende Last und die zugehörigen Höhen der Bahn der bewegten Masse in demselben Verhältnisse. Vorausgesetzt ist dabei aber, daß eine solche Änderung nicht etwa eintritt, während sich die Masse über den Stab hin bewegt.²⁰⁾ Diese Bedingung ist jedenfalls erfüllt einmal, wenn der ganze über den Stab bewegte Körper eine einzige starre Masse bildet; sodann aber auch, wenn derselbe aus zwei Massen besteht, von welchen die eine unmittelbar auf dem Stab, die andere durch Vermittlung einer Feder von unendlich großer Biegsamkeit auf der ersten ruht. Es sind dies offenbar zwei Grenzfälle, denen in der Anwendung ein Fahrzeug mit sehr wenig wirksamer und ein solches mit möglichst vollkommener Federung wenigstens annähernd entsprechen würde. In beiden Fällen ist P das auf ein Rad treffende Gesamtgewicht. G dagegen ist verschieden, nämlich im ersten Falle $= P$, im zweiten gleich dem Gewichte des ungefederten Theiles von P . Da die Wirkung auf den Träger jedenfalls um so stärker wird, je größer P und G , so sind für die Zahlenwerthe dieser Größen bei Eisenbahnbrücken die Gewichte der schwersten

20) S. § 1, Bemerkung zu Gl. 3).

Locomotiven und ihrer Theile (Räder, Achsen, Achsbuchsen und Zubehör) maßgebend. Zur Zeit kann demgemäß etwa gesetzt werden

$$\begin{array}{ll} \text{bei fehlender Federung} & \text{bei vollkommener Federung} \\ P = 8t; & P = 8t; \\ G = 8t = P; & G = 2t. \end{array}$$

Hiernach ist y_0 bei mangelnder Federung gleich der Durchbiegung unter voller, ruhender Last und viermal so groß, als bei vollkommener Federung. Umgekehrt ist α im letzteren Falle viermal so groß, als im ersteren. Wir können daher den einen Grenzwert von α mittels derselben Zahlenwerthe bestimmen, die zur Berechnung der Tragfähigkeit des Stabes dienen, und daraus den andern Grenzwert durch Vervielfachung ableiten. Um dies auszuführen, bezeichnen wir die Trägerhöhe mit a und die Biegunsspannung im äußersten Querschnittspunkte mit σ . Dann ist die Festigkeitsbedingung für den Stab:

$$72) \quad \frac{Pl}{2} = \frac{2J}{a} \sigma.$$

Setzt man dies in Gleichung 3), indem man nach vorstehenden Ausführungen zunächst $G = P$ annimmt, so wird für den Fall eines ungefederten Fahrzeuges

$$73) \quad \alpha_u = \frac{2h}{y_0} = \frac{\frac{gl^2}{c^2}}{\frac{Pl^3}{6EJ}} = \frac{\frac{gl^2}{c^2}}{\frac{2}{3} \frac{l^2 \sigma}{a E}} = \frac{3}{2} \frac{ga E}{c^2 \sigma},$$

und für ein Fahrzeug mit vollkommener Federung

$$74) \quad \alpha_v = 4\alpha_u = 6 \frac{ga E}{c^2 \sigma},$$

also unabhängig von der Länge des Stabes. Trotzdem gelten die Gleichungen 73) und 74) aber nicht für alle beliebigen Stützweiten; denn es ist ja vorausgesetzt, daß sich immer nur eine Einzellast auf dem Träger befinde, und dies trifft in der Wirklichkeit nur bei mäßigen Weiten — höchstens bis ungefähr 4 m — zu. Demgemäß liegt auch a innerhalb enger Grenzen, etwa zwischen 30 und 50 cm, sodafs es zur Erlangung einer allgemeinen Uebersicht genügt, nur einige wenige Werthe von a in Rechnung zu stellen. Die Größen E und σ können für diesen Zweck als gegeben und unveränderlich zu rund 2000 t und 0,6 t/qcm angenommen werden; ferner ist, wie bekannt, $g = 981$ cm. Da in allen diesen Zahlenwerthen als Längeneinheit das Centimeter auftritt, so müßte eigentlich auch die Geschwindigkeit c in Centimetern für die Secunde ausgedrückt werden; die hierdurch bedingten großen Zahlen für c^2 lassen sich vermeiden, wenn man $c = 100 C$ setzt, wo nun C die Geschwindigkeit in Metern für die Sekunde bezeichnet. Hiermit ergibt sich abgerundet

$$75) \quad \alpha_u = 500 \frac{a}{C^2} \quad \text{und} \quad \alpha_v = 2000 \frac{a}{C^2}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich die in § 10 und § 12 erörterten Tabellen und bildlichen Darstellungen am zweckmäßigsten in der Weise für die Anwendung nutzbar machen, daß man aus 75) die Geschwindigkeiten berechnet, die den Werthen von α entsprechen, welche jenen Tabellen und Darstellungen zu Grunde gelegt sind. Hiernach ist die Tabelle IV unter Annahme der Trägerhöhe a zu 30, 40 und 50 cm angefertigt. Daraus ergibt sich, wenn man eine Fahrgeschwindigkeit von 100 km als obere Grenze ansieht, der kleinste überhaupt in Betracht kommende Werth von α mit $a = 30$ cm bei ungefedertem Fahrzeug zu 20 und bei vollkommener Federung zu 80. Da die Lagerung des Fahrzeuges auf den Achsen in Wirklichkeit nie ganz starr ist, so dürfte man mit $\alpha = 40$ als unterem Grenzwerthe ganz sicher gehen. Dann liegt der tiefste Punkt der Bahn, wie Abb. 15 lehrt, schon so nahe bei der Mitte und werden die Schwingungen so klein, daß man für alle Fahrgeschwindigkeiten von weniger als 100 km unbedenklich die Bahn als eine zur Mitte symmetrische Curve betrachten, also den Einfluß der Geschwindigkeit auf die Beanspruchung aus der Senkung der Stabmitte berechnen kann.²¹⁾ Der hierfür maßgebende Werth von Y läßt sich nun mit großer Annäherung durch die Gleichung

$$76) Y_0 = 1 + \frac{3,97}{\alpha - 11,52}, \text{ oder genau genug durch } Y_0 = 1 + \frac{4}{\alpha - 12}$$

ausdrücken. Danach wird die kurz mit V bezeichnete größte verhältnißmäßige Zunahme der Senkung oder die ebenso große Zunahme des Biegemomentes und der Beanspruchung:

$$77) V = \frac{1}{\frac{1}{4}\alpha - 3}. \quad (\text{Bed.: } \alpha \geq 40)$$

Diese Formel liefert beispielsweise

für	$\alpha =$	40	60	80	100	120	∞
	$V =$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{\infty}$
	$=$	0,1428	0,0833	0,0588	0,0455	0,0370	0
Der genaue Werth ist	$=$	0,1394	0,0843	0,0592	0,0454	0,0366	0
also der Fehler	$=$	+0,0034	-0,0010	-0,0004	+0,0001	+0,0004	0.

Die größte praktisch in Betracht kommende Zunahme beläuft sich hiernach auf rund 14 v. H. des Werthes für ruhende Belastung.

21) In der früher (s. Fußnote 2) erwähnten Abhandlung Glausers vom Jahre 1894 ist der Einfluß der Federung nicht berücksichtigt und deshalb α viel zu klein in Rechnung gestellt. Die von Glauser geäußerte Meinung, daß für den gefederten Theil des Wagens kein Anlaß vorliege, eine andere Bahn zu beschreiben, als für die ungefederte Masse, ist offenbar irrig; denn auf den ersteren wirken Schwerkraft und Federdruck in entgegengesetztem, auf die letztere aber in gleichem Sinne. Es ist ja gerade der Zweck der Federung, die Bahn des Obertheiles gegen die des Untertheiles abzuflachen.

§ 15. Schlufsbetrachtung.

Die vorausgegangenen Untersuchungen haben gezeigt, dafs bei Geschwindigkeiten, wie sie im Eisenbahnbetriebe vorkommen, der Lastpunkt seine tiefste Lage ziemlich nahe der Mitte des Trägers (und zwar stets etwas hinter derselben) erreicht, und dafs auch das Biegemoment in der Nähe dieser Stelle (nur wiederum etwas dahinter) einen Gröfsewerth besitzt. Weiter nach dem Ende zu nehmen die Senkung und das Biegemoment wieder ab; beide Gröfsen werden dann Null und sogar negativ. Hier zeigt sich eine Lücke in der Lösung der Aufgabe, denn die angestellte Rechnung beruht auf der Voraussetzung, dafs die bewegliche Masse stets mit dem Stabe in Berührung bleibe; wenn sie nun aber beim Durchlaufen ihrer Bahn in eine Lage kommt, wo eine solche Berührung die Durchbiegung des Stabes nach oben erfordern würde, so mufs offenbar eine Trennung, ein Abheben stattfinden, da ja eine auch nach oben hin wirksame Verbindung zwischen der Last und dem Stabe nicht besteht. Die Abbildungen zu § 12 lehren jedoch, dafs durch diesen Umstand nur ein kleiner Theil der Bahn beeinflusst wird, dessen Länge sowohl, als auch dessen Erhebung über die Auflagerwagerechte nach Abb. 15 schon bei $\alpha = 40$ fast verschwindet.

Hier könnte nun die Frage angeknüpft werden, wie es denn überhaupt möglich sei, dafs die in wagerechter Richtung auf den Stab gelangende Masse nachdem sie anfänglich in gekrümmter Bahn herabgesunken ist, sich später über die Auflagerwagerechte, erheben könne, und woher die Arbeit stamme, die zu dieser Hebung nöthig ist. Dafs weder die Schwerkraft, noch der elastische Stab jene Arbeit geleistet haben kann ist klar; es mufs also eine andere Quelle dafür vorhanden sein, die allerdings nicht ohne weiteres ersichtlich ist. Die Antwort ergibt sich aus folgender Betrachtung. Unter den grundlegenden Annahmen befindet sich auch die, dafs die wagerechte Geschwindigkeit c unveränderlich sei. Das ist bei wagerechter Bahn gleichbedeutend mit der Annahme, dafs der Masse weder Arbeit zugeführt, noch entzogen werde, setzt aber bei fallender oder steigender Bahn umgekehrt das Hinzutreten einer negativen oder positiven Arbeit voraus. Die zwischen zwei gleich hoch liegenden Punkten einer abwechselnd fallenden und steigenden Bahn aufzuwendenden Arbeitsmengen tilgen sich nur dann, wenn auch die Richtung der Bahn in beiden Punkten die gleiche ist. Im vorliegenden Falle ist diese Bedingung nicht erfüllt, denn die Bahn schneidet die Auffahrtsrichtung; der wagerechten Geschwindigkeit c entspricht am Schnittpunkte die gröfsere Geschwindigkeit v in der Richtung der Bahn. Das Arbeitsvermögen der Masse ist im Augenblicke des Auffahrens $\frac{1}{2} m c^2$, beim späteren Schneiden der Auffahrtsrichtung dagegen $\frac{1}{2} m v^2$, also gröfser. Der Unterschied mufs, wenn c immer denselben Werth behalten soll, von aufsen zugeführt werden. Die Quelle dafür ist das Arbeitsvermögen der Locomotive, und dieser entstammt auch

die Arbeit, die zum Heben der Masse über die wagerechte Auffahrtsrichtung hinaus erforderlich ist.²²⁾

Mit Vorstehendem hängt ein anderes, befremdendes Ergebnis zusammen, das schon in § 13 besprochen wurde, nämlich der Umstand, daß uns die Rechnung auf ein starkes, theoretisch sogar unbegrenztes Anwachsen der Biegemomente gegen das Ende des Stabes hin geführt hat. Auch dieses entspringt aus der Annahme eines unveränderlichen c ; denn da die Bahn nach dem Ende zu die Auflagerwagerechte unter immer größeren Winkeln schneidet, so wächst an diesen Stellen der Unterschied zwischen c und v fortwährend. Damit wachsen auch die Arbeitsmengen, die der Masse m von aufsen zugeführt werden müssen, wenn c immer dieselbe GröÙe behalten soll. Der Wechsel zwischen $\frac{1}{2}mc^2$ und $\frac{1}{2}mv^2$ muß aber mit um so größeren Kraftäußerungen verknüpft sein, je kürzer die Wegelängen sind, auf denen diese Aenderungen des Arbeitsvermögens stattfinden. Da nun die Auflager des Stabes vollkommen starr angenommen wurden, so müssen die Schwingungen der Masse — und damit auch jene Wegelängen — zuletzt unendlich klein, die Kräfte also unendlich groß gefunden werden. Das Nichteintreten derartiger Kraftwirkungen erklärt sich daraus, daß weder die Stützung des Stabes, noch die Masse selber eine vollkommen starre, und daß der Stab nicht nur einer elastischen Biegung, sondern auch ebensolchen Zusammendrückungen (in der Richtung seiner Höhe) unterworfen ist.²³⁾ Diese Formänderungen sind im allgemeinen sehr klein im Vergleich zu den durch die Biegung veranlaßten Senkungen der mittleren Strecke des Stabes und können daher gegen dieselben vernachlässigt werden. Für die nahe den Stützpunkten gelegenen Theile des Stabes gilt das nicht mehr; und an den Stützpunkten selbst sind die aus der Biegung entspringenden Formänderungen sogar unendlich klein gegenüber denjenigen, die sich aus den anderen, eben erwähnten Ursachen ergeben. Der Anfang der Bahn wird (aus leicht ersichtlichen Gründen) hierdurch nicht beeinflusst, wohl aber das Ende, dessen genauere Bestimmung also die Berücksichtigung jener Nebenumstände erforderlich machen würde. Schon die Einführung einer elastischen Stützensenkung verwickelt aber die Aufgabe so, daß wir vorläufig von der Untersuchung des Einflusses einer solchen Senkung Abstand nehmen. Schon aus den vorliegenden Ergebnissen läßt sich wenigstens so viel ersehen, daß

22) Wäre die bewegliche Masse nicht ein Eisenbahnfahrzeug, sondern ein abgefeuertes Geschöß, so würde die Bedingung, daß c unveränderlich sei, nicht mehr streng erfüllbar, aber in Wirklichkeit doch mit großer Annäherung erfüllt sein und die vorliegende Untersuchung umsomehr brauchbare Ergebnisse liefern, wenn in dem betreffenden Fall $\alpha \leq 1$ wäre, da dann ein Abprallen nach oben nicht stattfindet.

23) Wenn oben gesagt wird, daß die bewegte Masse selber nicht vollkommen starr sei, so soll sich dies nicht auf den Einfluß der im § 14 erörterten eigentlichen Federung, sondern auf den unterhalb der Federn liegenden, sogenannten ungefederten Theil des Fahrzeuges beziehen. Auch dieser ist kein vollkommen starrer Körper, sondern theils elastischen, theils bleibenden Formänderungen (Oberflächenverdrückungen) unterworfen.

das Abfahrtsende des Stabes und die zugehörige Stütze bei schneller Fahrt eigenthümlichen, stofsartigen Beanspruchungen ausgesetzt sind, deren Grenze um so höher liegt, je starrer die Stützung und das Gefüge der an die Laufflächen angrenzenden Massentheile (Fahrschienen und Radkranz) ist.

Leichter als der Einfluß der Stützensenkung läßt sich derjenige des Spieles der Federn zwischen dem Unter- und dem Obertheil des Wagens berücksichtigen. Da indes die hierzu erforderlichen mathematischen Entwicklungen einerseits einen bedeutenden Raum beanspruchen, und anderseits in mancher Beziehung ein selbständiges Interesse bieten, so behalten wir uns vor, in anderem Zusammenhange auf diesen Gegenstand zurückzukommen.



Tabelle I. Werthe von $\xi = \text{Tang } w$ und $\varrho = 1 : \text{Coj } w$. (S. § 4.)

w	ξ	ϱ	w	ξ	ϱ	w	ξ	ϱ
0,0	0,0000	1,0000	2,0	0,9640	0,2658	4,0	0,99933	0,03662
0,1	0,0997	0,9950	2,1	0,9705	0,2413	4,1	0,99945	0,03314
0,2	0,1974	0,9803	2,2	0,9757	0,2189	4,2	0,99955	0,02998
0,3	0,2913	0,9566	2,3	0,9801	0,1985	4,3	0,99963	0,02713
0,4	0,3799	0,9250	2,4	0,9837	0,1800	4,4	0,99970	0,02455
0,5	0,4621	0,8868	2,5	0,9866	0,1631	4,5	0,99975	0,02222
0,6	0,5370	0,8436	2,6	0,9890	0,1477	4,6	0,99980	0,02010
0,7	0,6044	0,7967	2,7	0,9910	0,1338	4,7	0,99983	0,01819
0,8	0,6640	0,7477	2,8	0,9926	0,1212	4,8	0,99986	0,01646
0,9	0,7163	0,6978	2,9	0,9940	0,1097	4,9	0,99989	0,01489
1,0	0,7616	0,6481	3,0	0,9951	0,0993	5,0	0,99991	0,01348
1,1	0,8005	0,5993	3,1	0,9959	0,0899	5,1	0,99993	0,01219
1,2	0,8337	0,5523	3,2	0,9967	0,0814	5,2	0,99994	0,01103
1,3	0,8617	0,5074	3,3	0,9973	0,0737	5,3	0,99995	0,00998
1,4	0,8854	0,4649	3,4	0,9978	0,0667	5,4	0,99996	0,00903
1,5	0,9051	0,4251	3,5	0,9982	0,0603	5,5	0,99997	0,00817
1,6	0,9217	0,3880	3,6	0,9985	0,0546	5,6	0,99997	0,00740
1,7	0,9354	0,3536	3,7	0,9988	0,0494	5,7	0,99998	0,00669
1,8	0,9468	0,3218	3,8	0,9990	0,0447	5,8	0,99998	0,00606
1,9	0,9562	0,2926	3,9	0,9992	0,0405	5,9	0,99999	0,00548
2,0	0,9640	0,2658	4,0	0,9993	0,0366	6,0	0,99999	0,00496

(Die Größen ξ und ϱ sind in Abbildung 6 auf Tafel I durch Curven dargestellt.)

Tabelle II. (S. § 10.)

A. Werthe von $\gamma = \sqrt{1-\alpha} = f$ und $-\frac{\alpha^2}{\gamma} W_0'$ für $\alpha < 1$.

α	=	0,01	0,05	0,10	0,30	0,50	0,60
γ	=	0,9950	0,9747	0,9487	0,8367	0,7071	0,6325
$-\frac{\alpha^2 W_0'}{\gamma}$	=	0,0201	0,1013	0,2056	0,6659	1,2508	1,6382
α	=	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
γ	=	0,5477	0,4472	0,3162	0,2236	0,1414	0,1000
$-\frac{\alpha^2 W_0'}{\gamma}$	=	2,1548	2,9453	4,5767	6,7522	10,936	15,588

B. Werthe von $\gamma = \sqrt{\alpha-1} = k$ und $-\frac{\alpha^2}{\gamma} W_0'$ für $\alpha > 1$.

α	=	1,01	1,05	1,10	1,20	1,30	1,40
γ	=	0,1000	0,2236	0,3162	0,4472	0,5477	0,6325
$-\frac{\alpha^2 W_0'}{\gamma}$	=	15,828	7,2905	5,3381	4,0235	3,4780	3,1704
α	=	1,50	1,70	1,90	2,00	3,00	5,00
γ	=	0,7071	0,8367	0,9487	1,0000	1,4142	2,0000
$-\frac{\alpha^2 W_0'}{\gamma}$	=	2,9700	2,7195	2,5636	2,5041	2,1431	1,6938
α	=	7,5	10	15	20	30	40
γ	=	2,5495	3,0000	3,7417	4,3589	5,3852	6,2450
$-\frac{\alpha^2 W_0'}{\gamma}$	=	1,2608	0,9407	0,5294	0,3064	0,1113	0,04420
α	=	50	60	70	80	90	100
γ	=	7,0000	7,6811	8,3066	8,8882	9,4340	9,9499
$-\frac{\alpha^2 W_0'}{\gamma}$	=	0,01882	0,00847	0,00399	0,00195	0,00103	0,00054

(Die Tabellenwerthe sind in Abbildung 11 und 12 auf Tafel II durch Curven dargestellt.)

Tabelle III. Werthe von $Y_I = \frac{\alpha}{2 \operatorname{Coj} w} \left(\alpha W - \frac{1}{\operatorname{Coj} w} \right)$ und $\xi = \operatorname{Tang} w$. (S. § 12).

$e^{-w} =$	0,10	0,20	0,35	0,50	0,65	0,80	0,90	1,00	$= e^{-w}$
$\frac{x}{l} =$	-0,9802	-0,9231	-0,7817	-0,6000	-0,4060	-0,2195	-0,1050	0,00	$= \xi = \frac{x}{l}$
α									α
0,1	0,00002	0,0003	0,0023	0,0079	0,0174	0,0299	0,0393	0,0490	0,1
0,5	0,00009	0,0014	0,0112	0,0373	0,0817	0,1401	0,1832	0,2275	0,5
1,0	0,00016	0,0026	0,0210	0,0698	0,1521	0,2588	0,3369	0,4160	1,0
5	0,00060	0,0090	0,0703	0,2267	0,4741	0,7676	0,9641	1,1443	5
10	0,00087	0,0128	0,0986	0,3087	0,6210	0,9596	1,1611	1,3245	10
20	0,00110	0,0163	0,1220	0,3672	0,7020	1,0195	1,1765	1,2743	20
40	0,00129	0,0188	0,1367	0,3956	0,7381	0,9879	1,0954	1,1394	40
60	0,00136	0,0197	0,1418	0,4026	0,7167	0,9625	1,0535	1,0843	60
80	0,00140	0,0202	0,1443	0,4053	0,7133	0,9481	1,0325	1,0592	80
100	0,00143	0,0206	0,1458	0,4066	0,7106	0,9394	1,0203	1,0454	100
120	0,00145	0,0208	0,1467	0,4074	0,7087	0,9334	1,0126	1,0366	120
∞	0,00154	0,0219	0,1512	0,4096	0,6975	0,9060	0,9781	1,0000	∞

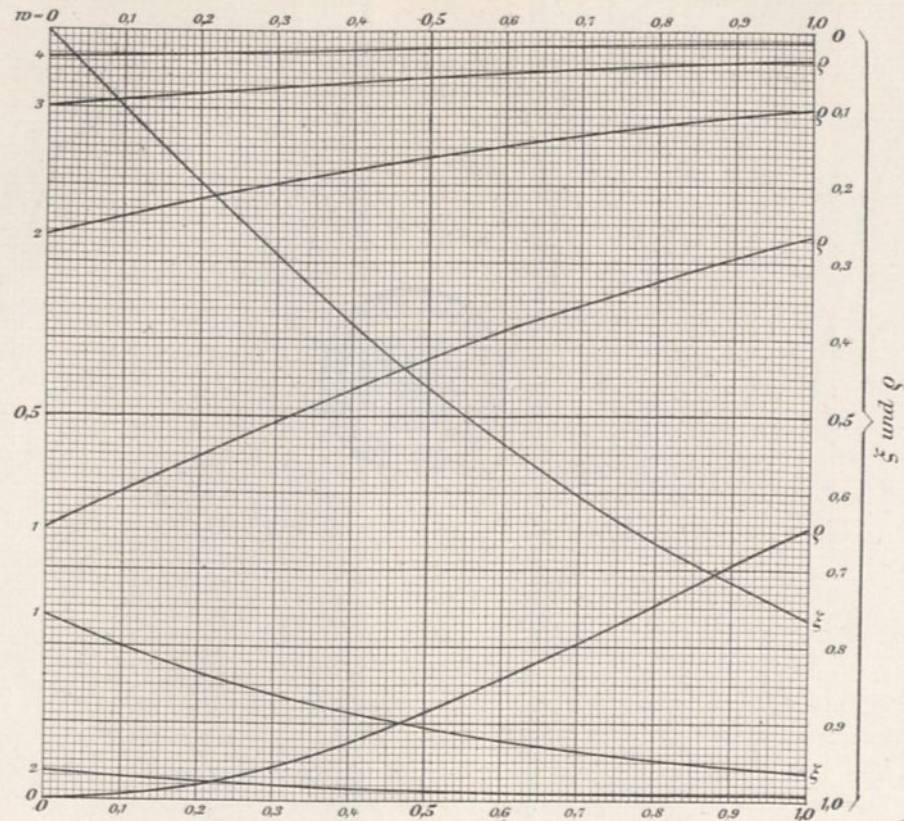
(Y_I ist auf Tafel III und IV in Abbildung 13 als Function von α , in den Abbildungen 14 bis 21 als Function von ξ dargestellt.)

Tabelle IV. Werthe von $C_u = \sqrt{\frac{500 a}{\alpha}}$ und $C_v = \sqrt{\frac{2000 a}{\alpha}}$. (S. § 14).

Bemerkung. Die Geschwindigkeiten C_u und C_v sind durchweg in Secundenmetern, und nur soweit die betreffenden Werthe die Grenze 200 nicht überschreiten, auch in Stundenkilometern angegeben.

α	Trägerhöhe $a = 30$ cm.				Trägerhöhe $a = 40$ cm.				Trägerhöhe $a = 50$ cm.				α
	Fahrzeug		Fahrzeug		Fahrzeug		Fahrzeug		Fahrzeug		Fahrzeug		
	ungefedert C_u	vollkommen gef. C_v	ungefedert C_u	vollkommen gef. C_v	ungefedert C_u	vollkommen gef. C_v	ungefedert C_u	vollkommen gef. C_v	ungefedert C_u	vollkommen gef. C_v	ungefedert C_u	vollkommen gef. C_v	
	m/sec	km/st	m/sec	km/st	m/sec	km/st	m/sec	km/st	m/sec	km/st	m/sec	km/st	
0,1	387	—	775	—	447	—	894	—	500	—	1000	—	0,1
0,5	173	—	346	—	200	—	400	—	224	—	447	—	0,5
1	122	—	245	—	141	—	283	—	158	—	316	—	1
5	54,8	197	110	—	63,2	—	126	—	70,7	—	141	—	5
10	38,7	139	77,5	—	44,7	161	89,4	—	50,0	180	100	—	10
20	27,4	98,6	54,8	197	31,6	114	63,2	—	35,6	128	70,7	—	20
40	19,4	69,7	38,7	139	22,4	80,5	44,7	161	25,0	90,0	50,0	180	40
60	15,8	56,9	31,6	114	18,3	65,7	36,5	131	20,4	73,5	40,8	147	60
80	13,7	49,3	27,4	98,6	15,8	56,9	31,6	114	17,7	63,6	35,4	127	80
100	12,2	44,1	24,5	88,2	14,1	50,9	28,3	105	15,8	56,9	31,6	114	100
120	11,2	40,2	22,4	80,5	12,9	46,5	25,8	93,0	14,4	52,0	28,9	104	120
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	∞

Abb. 6. Darstellung von $\xi = \text{tang } w$ und $\rho = 1: \mathcal{L}c/w$.
(S. Tabelle I)



Zimmermann, Schwingungen eines Trägers
mit bewegter Last.

Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin.

B Gisevius gest.



Abb. 11. Darstellung von $\gamma - \sqrt{1-\alpha}$ und $\frac{-\alpha^2 W_0'}{\gamma}$ für $\alpha < 1$.
(S. Tabelle II)

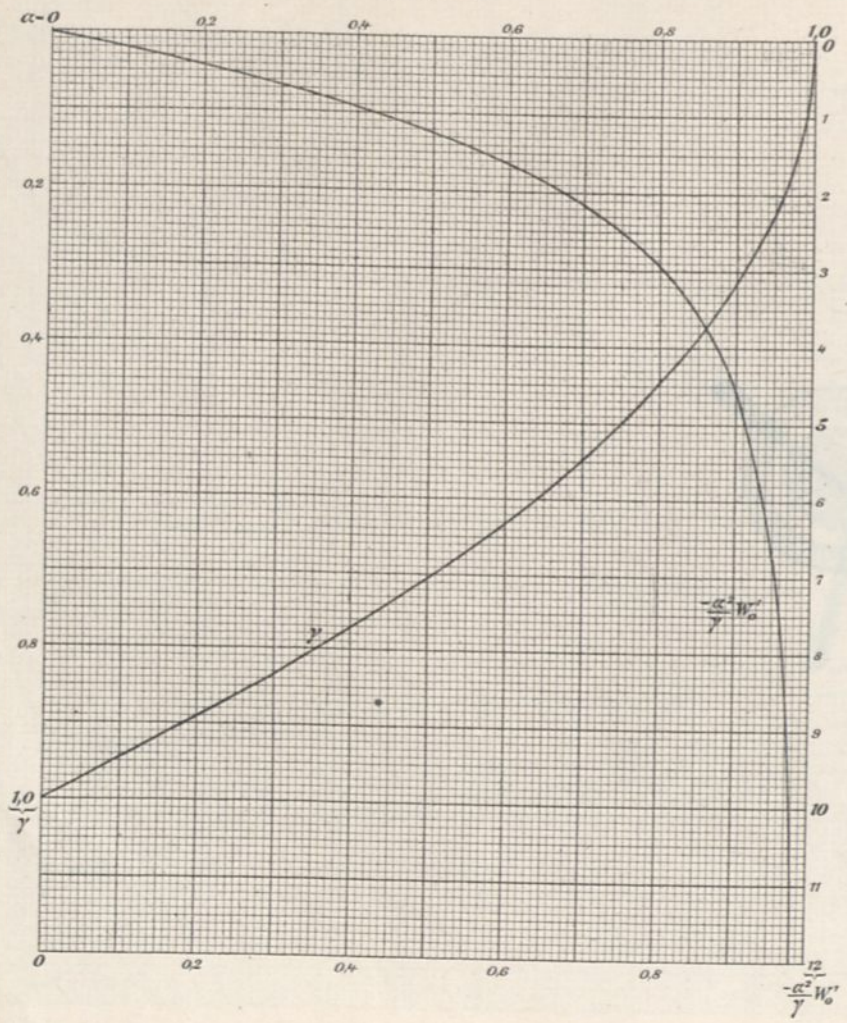
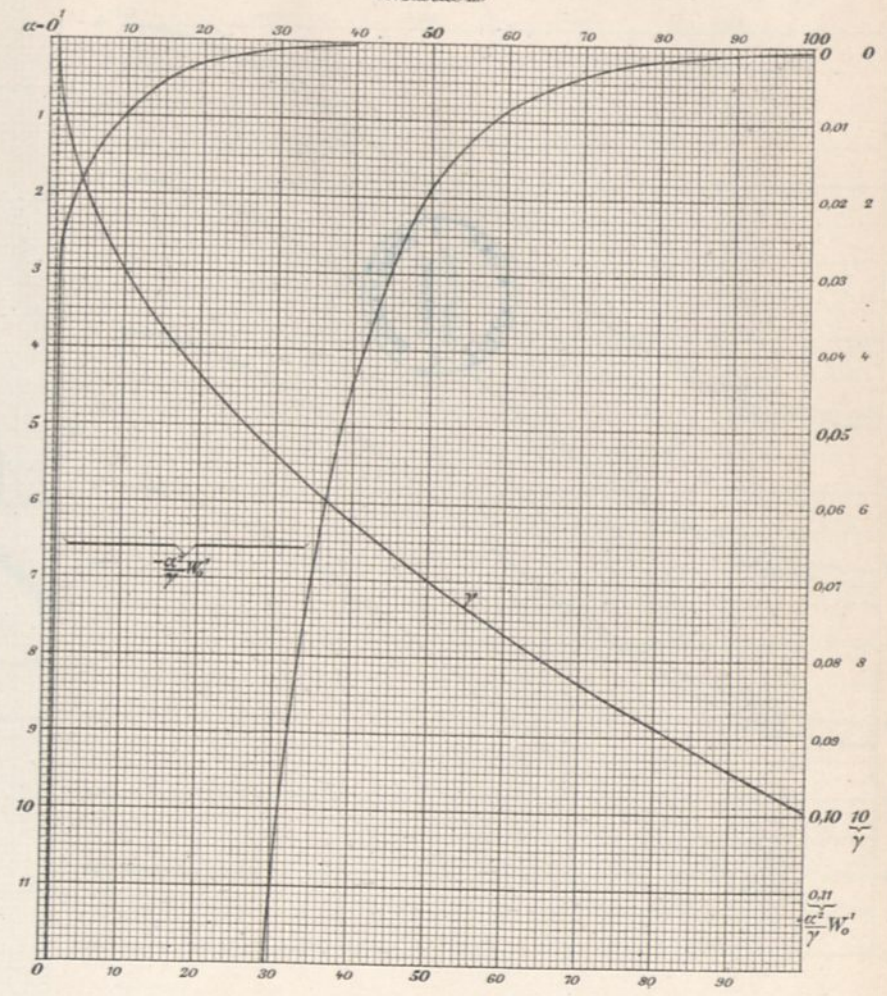


Abb. 12. Darstellung von $\gamma - \sqrt{\alpha-1}$ und $\frac{-\alpha^2 W_0'}{\gamma}$ für $\alpha > 1$.
(S. Tabelle II)



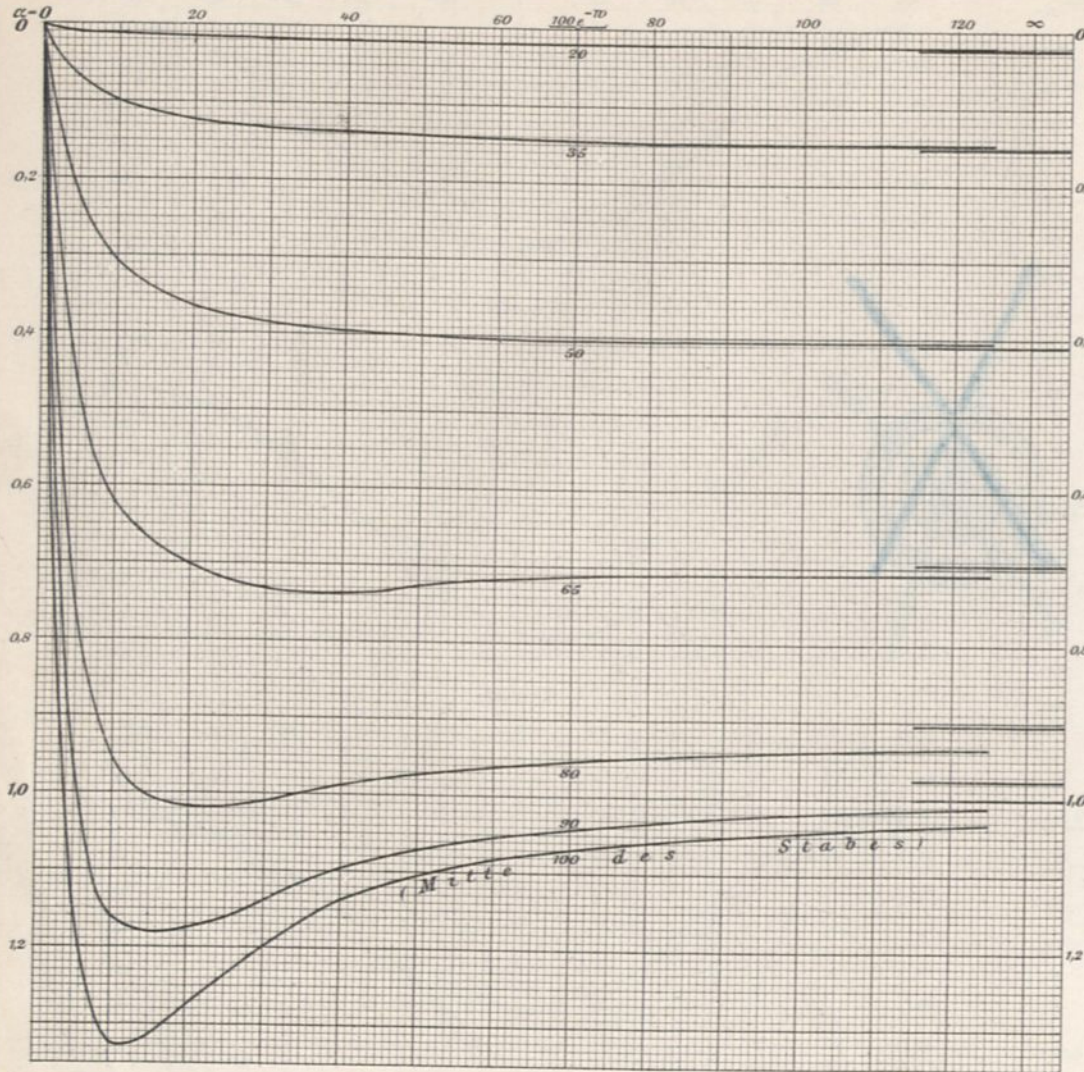
Zimmermann, Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last.

Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin.

B. Gisevius gest.

Abb. 13. Darstellung von $Y_I = \frac{\alpha}{2 \cdot \epsilon \cdot r_0} (\alpha W - \frac{1}{\epsilon \cdot r_0})$ als Function von α .

(S. Tabelle III)



(Mittlere des Staabes)

Abb. 14.

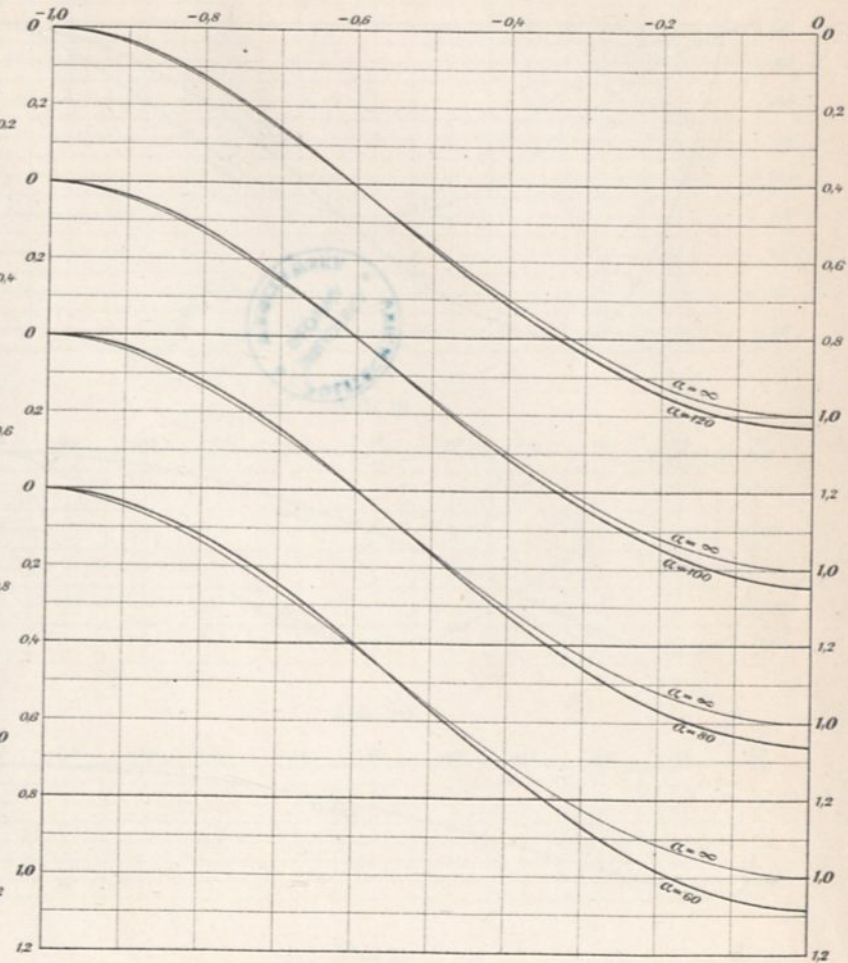


Abb. 15.

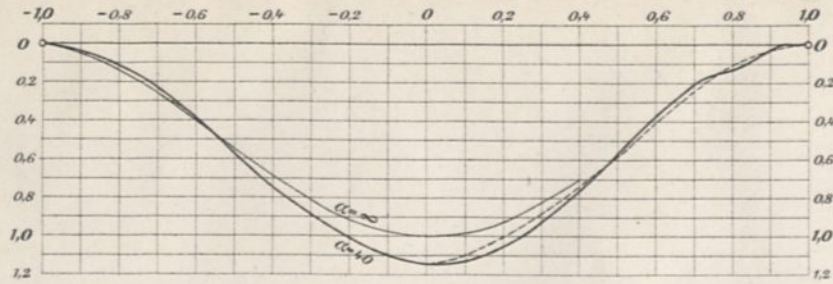


Abb. 16.

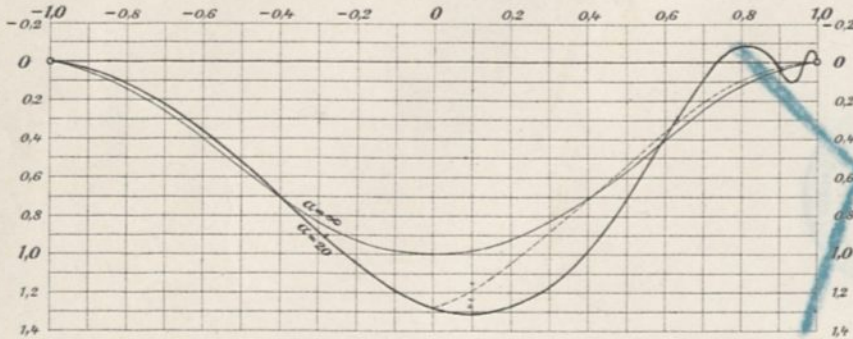
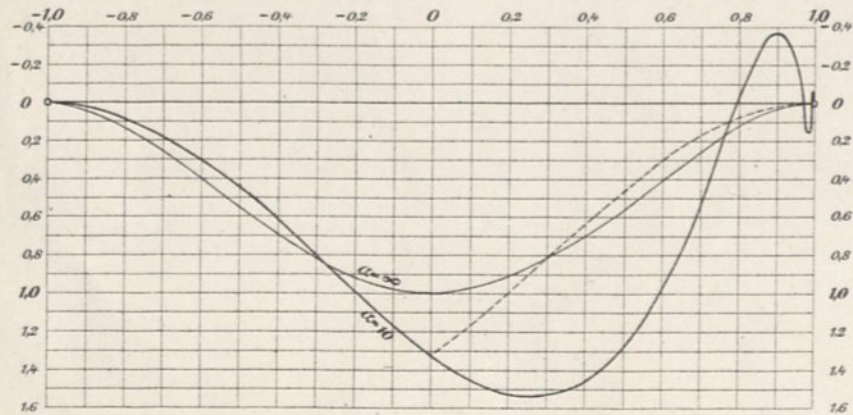
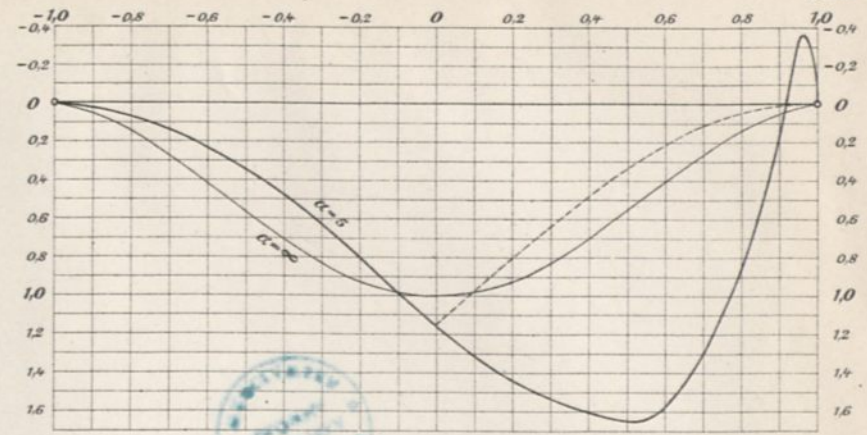


Abb. 17.



Zimmermann, Schwingungen eines Trägers
mit bewegter Last.

Abb. 18.



Tafel IV.

Abb. 19.

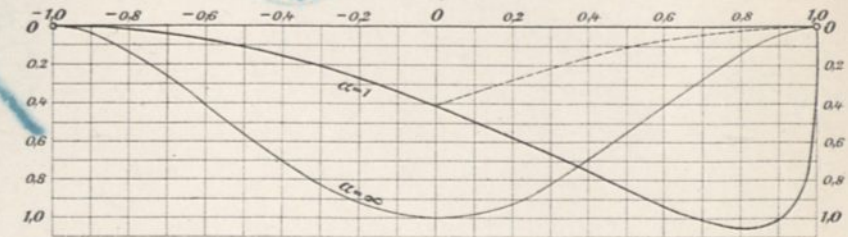


Abb. 20.

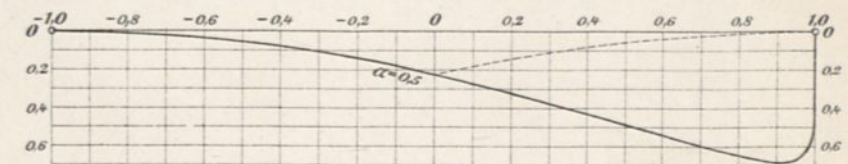
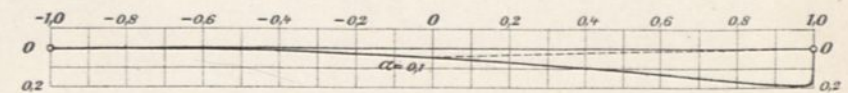
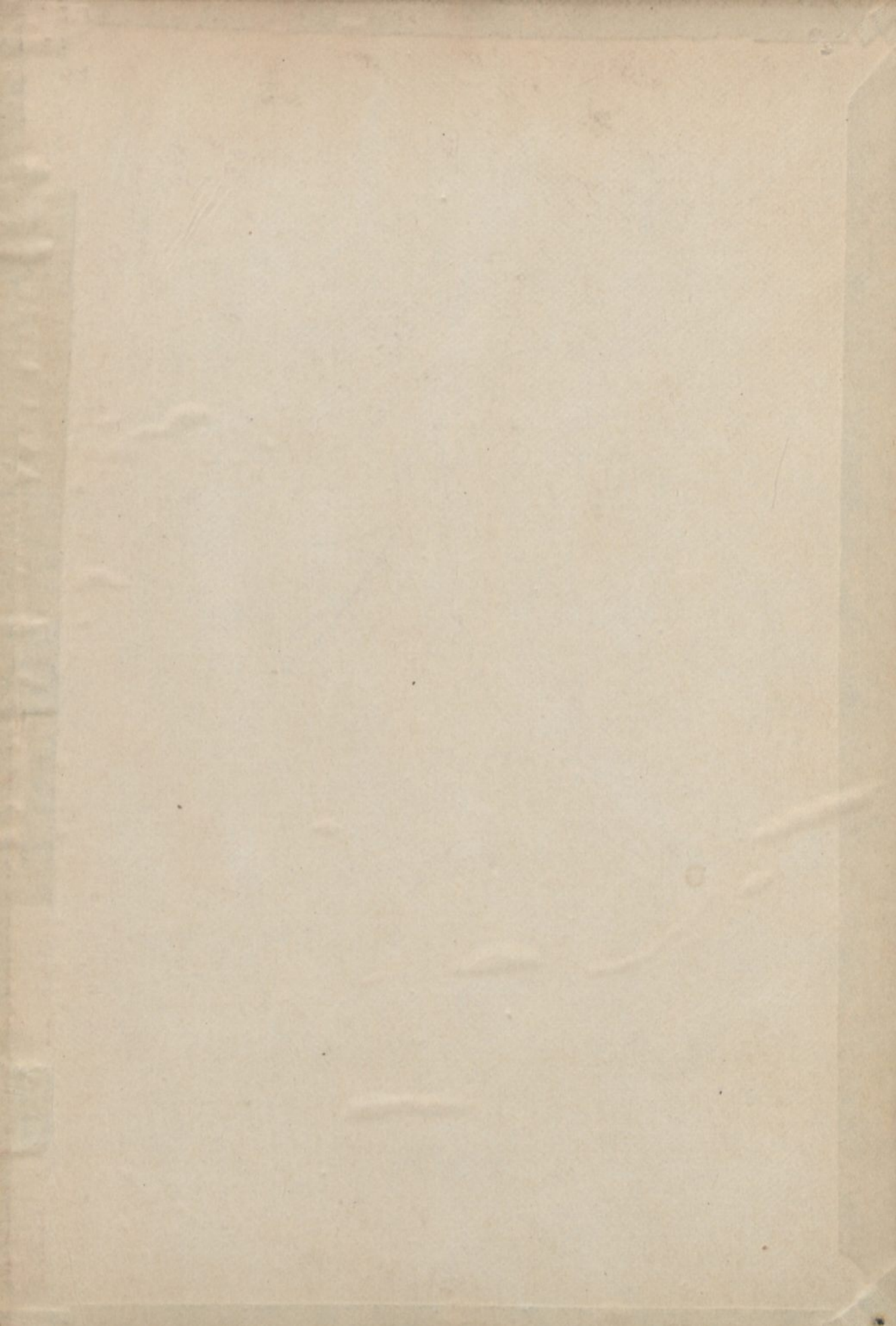


Abb. 21.



Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin.

B. Gisevius gest.





BIBLIOTEKA GŁÓWNA

357483L/1