

Na prawach rękopisu

bez ograniczeń

I N S T Y T U T M A T E M A T Y K I
P O L I T E C H N I K I W R O C Ł A W S K I E J

Raport Serii PREPRINTY nr 56

DWUPUNKTOWE ZAGADNIENIA BRZEGOWE

/praca doktorska/

Marian Gewert

Promotor: Doc.dr Zbigniew Romanowicz

Słowa kluczowe: zagadnienie brzegowe,
macierz Jacobiego.

Wrocław 1980

W S T E P

Zagadnienia dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązań układów jak i równań różniczkowych wyższych rzędów z warunkami brzegowymi już od dawna /1897 Nicoletti/ interesowały matematyków i są w dalszym ciągu przedmiotem wielu publikacji. Problematyka ta jest ważna ze względów czysto teoretycznych i ma duże znaczenie w zastosowaniach teorii równań różniczkowych. Wiadomo, że założenia gwarantujące rozwiązalność zagadnień początkowych i przedłużalność rozwiązań na dany przedział na ogół nie wystarczają do rozstrzygnięcia zagadnień brzegowych. Z tego powodu większość wyników dotyczących zagadnień brzegowych uzyskuje się przy pewnych dodatkowych założeniach, które postulują odpowiednie własności rodziny wszystkich rozwiązań danego równania lub nakładają na prawe strony równań różnego typu ograniczenia również ilościowej natury. Ostatnia grupa założeń daje zwykle tylko warunki dostateczne. Ma jednak ona tę zaletę, że tak sformułowane warunki są wygodniejsze do efektywnego sprawdzania.

Spośród wielu prac traktujących o wielopunktowych zagadnieniach brzegowych odnotujmy grupę publikacji, w których warunki istnienia i jednoznaczności lub tylko jednoznaczności rozwiązań ujęto w formie układów nierówności dla elementów macierzy Jacobiego prawych stron równań. Ta grupa publikacji ze względu na formułowane tam warunki, jest najbliższa zagadnieniom rozpatrywanym w niniejszej pracy. W przypadku zagadnień z warunkami brzegowymi wielopunktowymi należy wymienić tu pra-

ce [4-8], [11], [16], [17] dotyczące układów rzędu pierwszego oraz prace [1], [3], [14] i [15] dotyczące równań rzędu wyższego niż drugi. Układy równań rzędu drugiego z dwupunktowymi warunkami brzegowymi badane były np. w pracach [2], [10]. Warto tu nadmienić, że dowód twierdzenia 1 w pracy [2], dotyczącego istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowego, opiera się na fałszywej przesłance, że macierz jest dodatnio określona gdy wszystkie jej minory główne są nieujemne.

Nie wymieniamy tu licznej grupy prac dotyczących dwupunktowych zagadnień brzegowych dla równań drugiego rzędu, które często badane były bardzo specjalnymi metodami właściwymi dla danego typu równań.

Praca ta dotyczyć będzie układów równań różniczkowych rzędu pierwszego / liniowych i nieliniowych /

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x), \quad t \in [t_1, t_2], \quad x \in R^n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (0.1)$$

z warunkami brzegowymi postaci

$$x^i(t_1) = \alpha^i, \quad x^j(t_2) = \beta^j, \quad i \in M, \quad j \in N, \quad (0.2)$$

gdzie M i N są dowolnymi podzbiorami zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ niekoniecznie rozłącznymi, spełniającymi warunek $\text{card } M + \text{card } N = n$.

Rozpatrywana klasa warunków brzegowych (0.2) zawiera w sobie jako szczególne przypadki różne typy warunków rozważanych np. w pracach [1], [3], [6-8], [14], [15], [17].

Będziemy zakładać, że funkcje f^i i ich pochodne $f_{x^j}^i$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, są ciągłe na zbiorze $[t_1, t_2] \times R^n$.

Celem podstawowym niniejszej pracy jest jednolite ujęcie

warunków, gwarantujących istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia (0.1), (0.2), dla układów liniowych i nieliniowych. Warunki te wyrażone będą w formie pewnych nierówności dla elementów macierzy Jacobiego funkcji $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)$, a dokładniej mówiąc ustalają one pewien rozkład znaków elementów tej macierzy.

Aby sprecyzować dokładnie jakiego rodzaju rozkłady znaków będą rozpatrywane oznaczmy przez $\Lambda = (\lambda_{ij}^i) = \lambda \cdot \lambda^T$, macierz kwadratową stopnia m wyznaczoną przez wektor kolumnowy $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m)$, gdzie $|\lambda^i| = 1$, $i = 1, 2, \dots, m$. Powiemy, że macierz kwadratowa $A(t) = (a_{ij}^i(t))$ stopnia m jest klasy $D_\Lambda(J)$ jeżeli

$$\lambda_{ij}^i a_{ij}^i(t) \geq 0 \quad \text{dla } t \in J, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Jeśli teraz dla danej macierzy kwadratowej A stopnia n oraz ustalonej liczby k , $1 \leq k \leq n-1$, określimy macierz $B_{n-k}(\Lambda)$ stopnia $m = \binom{n}{n-k}$, / por. wzór (2.1) /, to wspomniany rozkład znaków dla elementów macierzy A jest wyznaczony przez warunek $B_{n-k}(A) \in D_\Lambda$, gdzie Λ jest pewną macierzą stopnia m określoną powyżej. Liczba k jest związana z warunkiem brzegowym (0.2) i $k = \text{card } M$.

Łatwo zauważyć się, że jeśli $k = n-1$, to $B_{n-k}(A) = A$ i wtedy rozkład znaków elementów macierzy A jest ustalony przez warunek $A \in D_\Lambda$, st $\Lambda = n$.

Główne wyniki pracy dotyczą istnienia i jednoznaczności zagadnienia (0.1), (0.2) przy założeniu, że macierz Jacobiego $F = (f_{xj}^i)$ prawych stron układu (0.1) spełnia warunek $B_{n-k}(F) \in D$, dla choćby jednej macierzy Λ , st $\Lambda = \binom{n}{n-k}$, $k = \text{card } M$.

Warunek ten zapisuje się jednolicie dla równań liniowych i nieliniowych, gdyż w przypadku równań liniowych o macierzy A , mamy oczywiście $F = A\delta$.

Dla przykładu zauważmy, że udowodnione w pracy [6] twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia brzegowego

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t), \quad t \in [t_1, t_2], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$x^i(t_1) = \alpha^i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad x^n(t_2) = \alpha^n$$

przy założonych warunkach dotyczących elementów macierzy A

$$a_{j,n}^i(t)a_n^i(t)a_n^j(t) > 0, \quad t \in [t_1, t_2], \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad i \neq j,$$

$$a_n^i(t)a_i^n(t) > 0, \quad t \in [t_1, t_2], \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

mieści się w schemacie rozważanym w niniejszej pracy, gdyż z powyższych nierówności wynika, że $A \in D_\Lambda([t_1, t_2])$, gdzie Λ jest macierzą generowaną przez wektor

$$\lambda = (\operatorname{sgn} a_1^n, \operatorname{sgn} a_2^n, \dots, \operatorname{sgn} a_{n-1}^n, 1).$$

W ten sposób wyniki zawarte w niniejszej rozprawie stanowią uogólnienie rezultatów uzyskanych w pracach [3], [6], [7], [15], oraz w pracy [2], gdzie rozważano zagadnienie (0.1), (0.2) w przypadku $\operatorname{card} M = n-1$ przy warunku $F \in D_\Lambda$.

Autor pragnie podkreślić, że inspiracją do badań prowadzonych w tej rozprawie, była głównie wspomniana już praca [6].

Rozprawę można zasadniczo podzielić na dwie części. Część pierwsza obejmująca punkty 1 - 3, dotyczy układów liniowych, a druga, punkty 4 - 6, poświęcona jest układom nieliniowym.

Punkty 1,2 mają charakter przygotowawczy i zawierają podstawowe własności klas $D_{\Lambda}(J)$ oraz macierzy $B_{n-k}(A)$.

Punkt 3 zawiera dwa twierdzenia / 3.1 i 3.2 / dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia (O.1), (O.2) w przypadku układów liniowych.

Twierdzenie 3.1 gwarantuje istnienie i jednoznaczność zagadnienia brzegowego (O.1), (O.2) w przypadku liniowym dla dowolnych $M, N, M \cap N = \emptyset$, $\text{card } M = k$, przy założeniu, że istnieje macierz Λ stopnia $(n-k)$, przy której $B_{n-k}(A) \in D_{\Lambda}([t_1, t_2])$.

Jeżeli dodatkowo założymy, że macierz $B_{n-k}(A)$ spełnia tzw. warunek nieredukowalności, to założenie $M \cap N = \emptyset$ może być pominięte / twierdzenie 3.2 /.

Wyniki tego punktu zawierają jako szczególne przypadki pewne rezultaty prac [3], [6], [7] i [15].

Punkt 4 ma charakter przygotowawczy do tej części pracy, która dotyczy układów nieliniowych.

W oparciu o twierdzenie A. Lasoty [12, Tw.1] dowodzimy lemat 4.5 o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dwupunktowego zagadnienia brzegowego, który pozwala przenieść wyniki punktu 3 na układy nieliniowe. Dowód tego lematu jak i w konsekwencji twierdzenia 5.1 uzyskuje się przy "niewdzięcznym" założeniu, że macierz jacobiego prawych stron układu (O.1) jest ograniczona. Lemat ten koresponduje z pewnym wynikiem o jednoznaczności rozwiązań przedstawionym w pracy [11, Pr.3.1]

Wspomniane twierdzenie 5.1 jest naturalnym uogólnieniem twierdzenia 3.2. Punkt 5 pracy zawiera ponadto wnioski z twierdzenia 5.1 dla pewnych specjalnych układów nieliniowych o "addy-

tywnie rozdzielonych zmiennych" oraz dla równań n -tego rzędu postaci $x^{(n)} = g(t, x)$.

W ostatnim punkcie pracy rozważa się układ (0.1) z warunkiem brzegowym (0.2) postaci $\text{card } M = n-1$, $\text{card } N = 1$, gdzie na innej drodze niż w punkcie 5 uzyskuje się twierdzenie analogiczne do twierdzenia 5.1, przy osłabionym warunku dotyczącym ograniczości macierzy Jacobiego prawych stron układu (0.1).

Wyniki uzyskane w tej części pracy uogólniają niektóre rezultaty zawarte w pracach [1], [8] i są zbliżone do rezultatów uzyskanych w [17, Tw.2.1-2.4, s.82].

1. Oznaczmy przez $R_{n \times n}$ zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych stopnia n . W zbiorze $R_{n \times n}$ wprowadzamy tzw. iloczyn Hadamara $A \circ B$ macierzy A i B , tj. $A \circ B = (a_j^i b_j^i)$, gdy $A = (a_j^i)$, oraz $B = (b_j^i)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Oczywiście tak określone mnożenie jest przemienne i spełnia prawo rozdzielności względem dodawania macierzy.

Zapis $A \geq 0$ ($A > 0$) oznaczać będzie, że wszystkie elementy macierzy A są nieujemne (dodatnie). Będziemy również pisać $A \geq B$ ($A > B$) jeśli $A - B \geq 0$ ($A - B > 0$).

Przez $\Delta_{n \times n}$ oznaczać będziemy podzbiór zbioru $R_{n \times n}$ zawierający wszystkie macierze Λ postaci

$$\Lambda = \lambda \cdot \lambda^T, \quad (1.1)$$

gdzie λ jest n -wymiarowym wektorem kolumnowym o współrzędnych $|\lambda^i| = 1$, $1 \leq i \leq n$, a λ^T jest jego transpozycją.

Łatwo zauważyć, że macierze generowane przez wektory λ i $-\lambda$ są takie same, jeśli natomiast $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i $\lambda_1 \neq -\lambda_2$ to $\lambda_1 \cdot \lambda_1^T \neq \lambda_2 \cdot \lambda_2^T$. Zatem zbiór $\Delta_{n \times n}$ zawiera dokładnie 2^{n-1} różnych elementów. W przypadku $n = 3$ zbiór $\Delta_{3 \times 3}$ złożony jest z czterech macierzy

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

generowanych odpowiednio przez wektory $\lambda_1 = (1, 1, 1)$ i $-\lambda_1 = (-1, -1, -1)$, $\lambda_2 = (-1, 1, 1)$ i $-\lambda_2 = (1, -1, -1)$,

$\lambda_3 = (1, -1, 1)$ i $-\lambda_3 = (-1, 1, -1)$ oraz $\lambda_4 = (1, 1, -1)$ i $-\lambda_4 = (-1, -1, 1)$.

Z określenia (1.1) macierzy $\Lambda = (\lambda_{ij}^i)$ wynika, że jest ona symetryczna i między jej elementami zachodzą następujące relacje

$$\lambda_{ik}^i \lambda_{jk}^k = \lambda_{ij}^i, \quad 1 \leq i, j, k \leq n. \quad (1.2)$$

Niech $J = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. Przez $C_n(J)$ ($C_{n \times n}(J)$) oznaczać będziemy klasę wszystkich funkcji wektorowych (macierzowych) ciągłych na J i przyjmujących wartości z $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}_{n \times n}$).

Symbolem $D_\Lambda(J)$, gdzie Λ jest ustaloną macierzą ze zbioru $\Delta_{n \times n}$, oznaczać będziemy klasę wszystkich macierzy $A \in C_{n \times n}(J)$ spełniających nierówność

$$\Lambda \circ A(t) \geq 0, \quad t \in J. \quad (1.3)$$

Zdefiniowana powyżej klasa jest oczywiście niepusta, w szczególności zawiera ona wszystkie macierze diagonalne o nieujemnych elementach.

Niektóre własności zbioru $D_\Lambda(J)$, niezbędne w dalszych rozważaniach, ujmemy w następującym lemacie

Lemat 1.1. Jeżeli $A, B \in D_\Lambda(J)$ i $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ to

$$A + B, \quad cA, \quad AB \in D_\Lambda(J).$$

Jeżeli natomiast $A_n \in D_\Lambda(J)$, $n = 1, 2, \dots$, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ na J , $A \in C_{n \times n}(J)$, to również

$$A \in D_\Lambda(J).$$

Dla dowodu wystarczy uzasadnić jedynie warunek $AB \in D_\Lambda(J)$,

który otrzymujemy natychmiast z równości

$$(\Lambda \circ A(t))(\Lambda \circ B(t)) = \Lambda \circ (A(t) B(t)) \quad , \quad t \in J \quad , \quad (1.4)$$

wynikającej bezpośrednio z (1.2) oraz określenia iloczynów $A B$ i $A \circ B$ macierzy A i B .

Uwaga. Klasa $D_\Lambda(J)$ jest zamknięta, ze względu na operację dodawania i mnożenia macierzy i jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $C_{n \times n}(J)$ z metryką jednostajną. Jest ona ponadto stożkiem wypukłym w $C_{n \times n}(J)$.

Lemat 1.2. Niech $A \in D_\Lambda(J)$. Jeżeli A_k jest ciągiem macierzy określonych następująco

$$\begin{cases} A_1(t) = I_n \quad , \\ A_k(t) = \int_{t_1}^t A(\tau) A_{k-1}(\tau) d\tau \quad \text{dla } t \in J \quad , \quad k = 2, 3, \dots \quad , \end{cases} \quad (1.5)$$

gdzie I_n oznacza macierz jednostkową stopnia n , to

$$A_k \in D_\Lambda(J) \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \quad .$$

Dowód. Ponieważ macierze A_k , $k = 1, 2, \dots$, należą do klasy $C_{n \times n}(J)$, więc wystarczy pokazać, że

$$\Lambda \circ A_k(t) \geq 0 \quad \text{dla } t \in J \quad , \quad k = 1, 2, \dots \quad . \quad (1.6)$$

Oczywiście nierówność (1.6) jest prawdziwa dla $k = 1$.

Łatwo również zauważyć, że jeśli dla pewnego $k-1$, $k > 1$,

$$\Lambda \circ A_{k-1}(t) \geq 0 \quad , \quad t \in J \quad ,$$

to dla macierzy A_k , zgodnie z określeniem ciągu $\{A_k\}$ mamy

$$\Lambda \circ \Lambda_k(t) = \int_{t_1}^t \Lambda \circ (\Lambda(\tau) \Lambda_{k-1}(\tau)) d\tau, \quad t \in J.$$

Stąd

$$\Lambda \circ \Lambda_{k-1}(t) \geq 0, \quad t \in J,$$

gdyż z lematu 1.1 i założenia $\Lambda \in D_{\Lambda}(J)$ mamy $\Lambda \Lambda_{k-1} \in D_{\Lambda}(J)$.

Na mocy zasady indukcji nierówność (1.6) jest więc prawdziwa dla każdego naturalnego k .

Rozważmy teraz macierzowe równanie różniczkowe

$$X' = A(t)X \quad \text{dla } t \in J = [t_1, t_2], \quad (1.7)$$

z warunkiem początkowym

$$X(t_1) = I_n, \quad (1.8)$$

gdzie macierz układu $A \in C_{n \times n}(J)$.

Niech w dalszym ciągu Λ będzie dowolną ale ustaloną macierzą ze zbioru $\Delta_{n \times n}$.

Lemat 1.3. Niech X będzie rozwiązaniem macierzowym zagadnienia początkowego (1.7), (1.8) na przedziale J . Jeżeli macierz A należy do klasy $D_{\Lambda}(J)$, to również X ma tę własność.

Dowód. Z (1.7) i (1.8) otrzymujemy równoważne równanie całkowe

$$X(t) = I_n + \int_{t_1}^t A(\tau) X(\tau) d\tau, \quad t \in J,$$

którego rozwiązanie można przedstawić w postaci jednostajnie

zbieżnego szeregu

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \quad , \quad t \in J \quad ,$$

gdzie ciąg macierzy $\{A_k\}$ określony jest wzorem (1.5) .

Warunek $X \in D_A(J)$ jest więc konsekwencją lematów 1.2 i 1.1 .

Uwaga. Lemat 1.3 orzeka, że jeżeli $X(t)$, $t \in J$ jest macierzą fundamentalną układu liniowego $x' = A(t)x$, $X(t_1) = I_n$ i $A \in D_A(J)$ to $X \in D_A(J)$.

Uwaga. Przy założeniach lematu 1.3 mamy również $X' \in D_A(J)$.
Jeśli ponadto A jest macierzą stałą, to $X^{(k)} \in D_A([t_1, +\infty))$,
dla każdego naturalnego k .

Kolejny lemat wymaga wprowadzenia pewnych dodatkowych oznaczeń.

Jeżeli A jest macierzą ze zbioru $C_{n \times n}(J)$, to przez A^0 oznaczać będziemy macierz powstałą z macierzy A przez zastąpienie w niej zerami elementów znajdujących się na głównej przekątnej tj.

$$A^0 = A - \text{diag}(a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n) \quad ,$$

gdzie a_i^i , $1 \leq i \leq n$, są elementami diagonalnymi macierzy A .

Natomiast przez H_A oznaczać będziemy macierz diagonalną określoną wzorem

$$H_A(t) = \text{diag}\left(\exp \int_{t_1}^t a_1^1(\tau) d\tau, \exp \int_{t_1}^t a_2^2(\tau) d\tau, \dots, \exp \int_{t_1}^t a_n^n(\tau) d\tau\right) \quad t \in J.$$

Oczywiście tak określona macierz jest nieosobliwa na przedziale J . Ponadto prawdą jest, że

$$H_A, H_A^{-1} \in D_A(J) \quad (1.9)$$

Lemat 1.4. Niech X będzie rozwiązaniem macierzowym zagadnienia początkowego (1.7), (1.8) na przedziale J . Jeżeli macierz A^0 należy do klasy $D_A(J)$, to również X ma tę własność.

Ponadto na przedziale J prawdziwe jest następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} A \circ X(t) \geq H_A(t) \left\{ I_n + \int_{t_1}^t d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \right. \\ \left. \dots \int_{t_1}^{\tau_{l-2}} \prod_{s=1}^{l-1} H_A^{-1}(\tau_s) (A \circ A^0(\tau_s)) H_A(\tau_s) d\tau_{l-1} \right\}, \quad \tau_0 = t \quad (1.10) \end{aligned}$$

dla każdej liczby naturalnej $l, l \geq 2$.

Dowód. Rozważmy następujące macierzowe zagadnienie początkowe

$$Y' = B(t)Y, \quad Y(t_1) = I_n, \quad t \in J, \quad (1.11)$$

gdzie macierz B określona jest wzorem

$$B = H_A^{-1} A^0 H_A.$$

Wobec (1.9) i założenia $A^0 \in D_A(J)$, na podstawie lematu 1.1 wnioskujemy, że $B \in D_A(J)$.

Niech teraz Y oznacza rozwiązanie macierzowe zagadnienia początkowego (1.11) określone na przedziale J . Wtedy na mocy lematu 1.3 otrzymujemy, że Y należy do klasy $D_A(J)$.

Stąd, wobec (1.9) i łatwego do sprawdzenia związku

$$H_A Y = X, \quad (1.12)$$

lemat 1.1 daje natychmiast $X \in D_{\Lambda}(J)$, co kończy pierwszą część dowodu.

Niech $\{B_i\}$ będzie ciągiem macierzy określonych rekurencyjnie przez macierz B wg wzoru (1.5), tzn.

$$B_1(t) = I_n, \quad B_i(t) = \int_{t_1}^t B(\tau) B_{i-1}(\tau) d\tau =$$

$$= \int_{t_1}^t d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_1}^{\tau_{i-1}} \prod_{s=1}^{i-1} H_{\Lambda}^{-1}(\tau_s) \Lambda^0(\tau_s) H_{\Lambda}(\tau_s) d\tau_{i-1}, \quad (\tau_0 = t).$$

$$i = 2, 3, \dots,$$

Wtedy $Y = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$, gdzie na podstawie lematu 1.2, mamy $B_i \in D_{\Lambda}(J)$, $i = 1, 2, \dots$. Ponieważ

$$Y - (I_n + B_1) = \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq 1}}^{\infty} B_i, \quad 1 \geq 2,$$

a prawa strona tej równości jest, wobec lematu 1.1, macierzą klasy $D_{\Lambda}(J)$, więc

$$\Lambda \circ (Y(t) - (I_n + B_1(t))) \geq 0, \quad t \in J, \quad 1 \geq 2.$$

Stąd na mocy związku (1.12) i oczywistej równości $\Lambda \circ I_n = I_n$, otrzymujemy

$$\Lambda \circ (H_{\Lambda}^{-1}(t) X(t)) \geq I_n + \Lambda \circ B_1(t), \quad t \in J, \quad 1 \geq 2.$$

Uwzględniając oczywistą równość $H_{\Lambda}^{-1} \circ \Lambda = H_{\Lambda}^{-1}$ oraz (1.4) mamy

$$\Lambda \circ (H_{\Lambda}^{-1} X) = H_{\Lambda}^{-1}(\Lambda \circ X)$$

i

$$\begin{aligned} \Lambda \circ B_1(t) &= \Lambda \circ \int_{t_1}^t d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_1}^{\tau_{1-2}} \prod_{s=1}^{1-1} H_{\mathbf{A}}^{-1}(\tau_s) \Lambda^0(\tau_s) H_{\mathbf{A}}(\tau_s) d\tau_{1-1} \\ &= \int_{t_1}^t d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_1}^{\tau_{1-2}} \prod_{s=1}^{1-1} H_{\mathbf{A}}^{-1}(\tau_s) (\Lambda \circ \Lambda^0(\tau_s)) H_{\mathbf{A}}(\tau_s) d\tau_{1-1}. \end{aligned}$$

Tak więc ostatnia nierówność przyjmie postać

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{A}}^{-1}(t) (\Lambda \circ X(t)) &\geq I_n + \int_{t_1}^t d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \\ &\dots \int_{t_1}^{\tau_{1-2}} \prod_{s=1}^{1-1} H_{\mathbf{A}}^{-1}(\tau_s) (\Lambda \circ \Lambda^0(\tau_s)) H_{\mathbf{A}}(\tau_s) d\tau_{1-1}, \end{aligned}$$

co wobec faktu, że $H_{\mathbf{A}}$ jest macierzą diagonalną o nieujemnych elementach, daje żadaną nierówność (1.10).

Ze względów technicznych sformułujemy i udowodnimy następujący wniosek

Wniosek 1.1. Elementy rozwiązania macierzowego $X = (x_j^i)$ zagadnienia początkowego (1.7), (1.8) spełniają na przedziale J następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} \lambda_j^i x_j^i(t) &\geq \exp\left(\int_{t_1}^t a_i^i(\tau) d\tau\right) \left\{ \delta_j^i + \int_{t_1}^t d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \right. \\ &\dots \int_{t_1}^{\tau_{1-2}} \left(\prod_{s=0}^{1-2} \lambda_{i_{s+1}}^{i_s} a_{i_{s+1}}^{i_s}(\tau_{s+1}) \exp \int_{t_1}^{\tau_{s+1}} (a_{i_{s+1}}^{i_{s+1}}(\tau) - a_{i_s}^{i_s}(\tau) d\tau) d\tau_{1-1} \right) \Big\} \geq \\ &\geq \delta_j^i \exp \int_{t_1}^t a_i^i(\tau) d\tau, \quad 1 \leq i, j \leq n, \end{aligned} \quad (1.13)$$

gdzie $i_0, i_1, \dots, i_{l-1}$ jest dowolnym układem liczb naturalnych ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ takich, że $i_0 = i$, $i_{l-1} = j$ oraz $i_s \neq i_{s+1}$ dla $s = 0, 1, \dots, l-2$.

Oszacowanie (1.10) wyrażone poprzez elementy macierzy X , A i Λ ma dla dowolnego l , $l \geq 2$, postać

$$\begin{aligned} \lambda_j^i x_j^i(t) &\geq \exp \int_{t_1}^t a_i^i(\tau) d\tau \times \\ &\times \left\{ \delta_j^i + \int_{t_1}^t d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_1}^{\tau_{l-2}} \left(\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{l-2} \\ i_s \neq i_{s+1}, 0 \leq s \leq l-2 \\ i_0 = i, i_{l-1} = j}} \prod_{s=0}^{l-2} \lambda_{i_{s+1}}^{i_s} a_{i_{s+1}}^{i_s}(\tau_{s+1}) \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times \exp \int_{t_1}^{\tau_{s+1}} a_{i_{s+1}}^{i_{s+1}}(\tau) - a_{i_s}^{i_s}(\tau) d\tau \right) d\tau_{l-1} \right\}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (1.14) \end{aligned}$$

Ponieważ na przedziale J prawdziwa jest z założenia nierówność $\Lambda \circ A^0(t) \geq 0$, więc dla każdego skończonego ciągu liczb naturalnych $i_0, i_1, \dots, i_{l-1}$ ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ takich, że $i_s \neq i_{s+1}$, $0 \leq s \leq l-2$, zachodzą nierówności

$$\lambda_{i_{s+1}}^{i_s} a_{i_{s+1}}^{i_s}(t) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq l-2, \quad t \in J.$$

Z nierówności (1.14) otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} \lambda_j^i x_j^i(t) &\geq \left(\exp \int_{t_1}^t a_i^i(\tau) d\tau \right) \left\{ \delta_j^i + \int_{t_1}^t d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \right. \\ &\dots \int_{t_1}^{\tau_{l-2}} \left(\prod_{s=0}^{l-2} \lambda_{i_{s+1}}^{i_s} a_{i_{s+1}}^{i_s}(\tau_{s+1}) \exp \int_{t_1}^{\tau_{s+1}} a_{i_{s+1}}^{i_{s+1}}(\tau) - a_{i_s}^{i_s}(\tau) d\tau \right) d\tau_{l-1} \Big\} \geq \\ &\geq \delta_j^i \exp \int_{t_1}^t a_i^i(\tau) d\tau, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad t \in J \end{aligned}$$

czyli żadaną nierówność (1.13) .

Uwaga. Niech $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n)$, $|\lambda^i| = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$,
będzie wektorem generującym macierz $\Lambda = (\lambda_{ij}^i) \in \Delta_{n \times n}$. Określmy
zbiór Ω_λ następująco

$$\Omega_\lambda = \left\{ x = (x^1, x^2, \dots, x^n) : \lambda^i x^i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n \right\} .$$

Jeżeli macierz $A^0 \in D_\Lambda(J)$, to rozwiązanie $x(t)$, $t \in J$, układu
liniowego $x' = A(t) x$ z warunkiem początkowym $x(t_1) = x_0$
ma własność

$$x(t) \in \Omega_\lambda, \quad t \in J .$$

Dowód. Niech $X(t) = (x_j^i(t))$, $t \in J$, będzie macierzą funda-
mentalną rozważanego układu liniowego unormowaną w punkcie $t_1 = 0$.
Zatem na podstawie lematu 1.4 mamy

$$\lambda_{ij}^i x_j^i(t) \geq 0, \quad t \in J, \quad i, j = 1, 2, \dots, n .$$

Stąd, założenia $x_0 \in \Omega_\lambda$ oraz wzoru (1.1) otrzymujemy

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^i x_j^i(t) \lambda_{ij}^j x_0^j = \lambda^i \sum_{j=1}^n x_j^i(t) x_0^j, \quad t \in J,$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

czyli żądany układ nierówności.

2. Dla ustalonej liczby naturalnej r , $1 \leq r \leq n$, niech $G_{r,n}$ oznacza zbiór wszystkich ściśle rosnących ciągów r elementowych utworzonych ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Oczywiście $G_{r,n}$ zawiera dokładnie $\binom{n}{r}$ elementów, które uporządkowane leksykograficznie ponumerujemy liczbami od 1 do $\binom{n}{r}$. Przez h_α oznaczmy numer ciągu $\alpha \in G_{r,n}$ w takim uporządkowaniu. Oczywiście każdy ciąg α ma jednoznacznie określony numer h_α i każda liczba naturalna $h \in \{1, 2, \dots, \binom{n}{r}\}$ jednoznacznie wyznacza element α w klasie $G_{r,n}$ dla którego $h_\alpha = h$.

Dla danej macierzy $A = (a_{ij}^i)$ stopnia n i danych dwóch ciągów $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, $\beta = (j_1, j_2, \dots, j_r)$ (niekoniecznie z $G_{r,n}$) o elementach ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ oznaczmy przez

$$A_{\beta}^{\alpha} = A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ j_1, j_2, \dots, j_r \end{pmatrix}$$

wyznacznik podmacierzy A wyznaczonej przez wiersze z indeksami $i_1, i_2, \dots, i_r$ i kolumny z indeksami $j_1, j_2, \dots, j_r$, tj.

$$A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ j_1, j_2, \dots, j_r \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{j_1}^{i_1} & a_{j_2}^{i_1} & \dots & a_{j_r}^{i_1} \\ a_{j_1}^{i_2} & a_{j_2}^{i_2} & \dots & a_{j_r}^{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j_1}^{i_r} & a_{j_2}^{i_r} & \dots & a_{j_r}^{i_r} \end{bmatrix}$$

Przez $M_r(A)$, $1 \leq r \leq n$, oznaczać będziemy macierz stopnia $\binom{n}{r}$ o elementach $m_j^i(A)$, $1 \leq i, j \leq \binom{n}{r}$ określonych następująco

$$m_j^i(A) = A_\beta^\alpha,$$

gdzie $\alpha, \beta \in G_{r,n}$ takie, że $h_\alpha = j$, $h_\beta = i$.

Oczywiście główna przekątna tak określonej macierzy zawiera wszystkie minory główne stopnia r macierzy A .

W celu określenia kolejnej macierzy stopnia $\binom{n}{r}$ wprowadzimy symbol $b_\beta^\alpha(A)$, $\alpha, \beta \in G_{r,n}$, $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, $\beta = (j_1, j_2, \dots, j_r)$, określony w następujący sposób

$$b_\beta^\alpha(A) = b_{j_1, j_2, \dots, j_r}^{i_1, i_2, \dots, i_r}(A) = \begin{cases} \sum_{s=1}^r a_{i_s}^{i_s}, & \text{jeśli } \alpha = \beta, \\ & \alpha = (i_1, i_2, \dots, i_r), \\ (-1)^{p+q} a_{j_q}^{i_p}, & \text{jeśli } \alpha \setminus \beta = \{i_p\}, \\ & \beta \setminus \alpha = \{j_q\} \quad (2.1) \\ 0 & \text{jeśli zbiór } \alpha \cap \beta \\ & \text{ma co najwyżej} \\ & r - 2 \text{ elementów} \end{cases}$$

Przez $B_r(A) = (b_j^i(A))$, $1 \leq r \leq n$, oznaczać będziemy macierz stopnia $\binom{n}{r}$, w której $b_j^i(A) = b_\beta^\alpha(A)$, gdzie $\alpha, \beta \in G_{r,n}$ wyznaczone są przez warunki $h_\alpha = i$, $h_\beta = j$.

Bezpośrednio z określenia macierzy $B_r(A)$ wynika, że w przypadku $r = 1$ i $r = n$ mamy odpowiednio

$$B_1(A) = A \text{ i } B_n(A) = \text{Tr } A,$$

gdzie $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_i^i$ oznacza ślad macierzy.

Na uwagę zasługuje również przypadek $r = n-1$.

Wtedy elementy macierzy $B_{n-1}(A)$, $A = (a_{ij}^i)$, określone są następująco

$$b_{ij}^i(A) = (-1)^{i+j+1} a_{n+1-i}^{n+1-j}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j,$$

$$b_{ii}^i(A) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq n+1-i}}^n a_s^s, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dla ilustracji rozpatrzmy jeszcze następujący przykład.

Przykład 2.1. Niech $A = (a_{ij}^i)$ będzie macierzą stopnia czwartego i niech $r = 2$. Wtedy macierz $B_2(A)$ jest stopnia szóstego i ma postać

$$\begin{bmatrix} a_1^1 + a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & -a_1^3 & -a_4^1 & 0 \\ a_2^3 & a_1^1 + a_3^3 & a_4^3 & a_2^1 & 0 & -a_4^1 \\ a_2^4 & a_3^4 & a_1^1 + a_4^4 & 0 & a_2^1 & a_3^1 \\ -a_1^3 & a_1^2 & 0 & a_2^2 + a_3^3 & a_4^3 & -a_4^2 \\ -a_1^4 & 0 & a_1^2 & a_3^4 & a_2^2 + a_4^4 & a_3^2 \\ 0 & -a_1^4 & a_1^3 & -a_2^4 & a_2^3 & a_3^3 + a_4^4 \end{bmatrix}.$$

Uwaga. Jeżeli $A \in C_{n \times n}(J)$ wtedy

$$B_r(A) \in C_{n \times n}(J), \quad N = \binom{n}{r}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Udowodnimy teraz następujący lemat.

Lemat 2.1. Niech X będzie określonym na przedziale J rozwiązaniem równania (1.7) z warunkiem początkowym (1.8). Wtedy dla każdego r , $1 \leq r \leq n$, $M_r(X)$ jest rozwiązaniem układu

$$Y' = B_r(A(t)) Y, \quad t \in J, \quad (2.2)$$

z warunkiem początkowym

$$Y(t_1) = I_N, \quad (2.3)$$

gdzie I_N jest macierzą jednostkową stopnia $N = \binom{n}{r}$.

Dowód. Niech r będzie dowolnym, ustalonym elementem zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ i niech ponadto $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, $\beta = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ będą elementami zbioru $G_{r,n}$.

Dla wykazania, że macierz $M_r(X(t))$, $t \in J$, jest rozwiązaniem układu (2.2) wystarczy udowodnić następującą równość

$$\frac{d}{dt} X_{\alpha}^{\beta}(t) = \sum_{\substack{\gamma = (j_1, j_2, \dots, j_r) \\ \gamma \in G_{r,n}}} b_{\alpha}^{\gamma}(A(t)) X_{\gamma}^{\beta}(t), \quad t \in J, \quad (2.4)$$

gdzie współczynniki b_{α}^{γ} przyjmują wartości określone wzorem (2.1).

W tym celu różniczkując minor X_{α}^{β} i korzystając z faktu, że macierz X spełnia równanie (1.7), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X_{\alpha}^{\beta}(t) = & \sum_{s=1}^n a_{i_1}^s(t) X_{(k_1, k_2, \dots, k_r)}^{(s, i_2, \dots, i_r)} + \sum_{s=1}^n a_{i_2}^s(t) X_{(k_1, k_2, k_3, \dots, k_r)}^{(i_1, s, i_3, \dots, i_r)} + \\ & + \dots + \sum_{s=1}^n a_{i_r}^s(t) X_{(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r)}^{(i_1, \dots, i_{r-1}, s)}, \quad t \in J. \end{aligned}$$

Ponieważ wyznacznik, w którym dwa wiersze są identyczne znika, więc powyższą równość możemy przepisać w postaci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X_{\alpha}^{\beta}(t) = & \sum_{\substack{s=1 \\ s \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}}}^n a_{i_1}^s(t) X_{(k_1, k_2, \dots, k_r)}^{(s, i_2, \dots, i_r)} + \\ & + \sum_{\substack{s=1 \\ s \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}}}^n a_{i_2}^s(t) X_{(k_1, k_2, k_3, \dots, k_r)}^{(i_1, s, i_3, \dots, i_r)} + \dots + \sum_{\substack{s=1 \\ s \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}}}^n a_{i_r}^s(t) X_{(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r)}^{(i_1, \dots, i_{r-1}, s)} + \\ & + X_{(k_1, k_2, \dots, k_r)}^{(i_1, i_2, \dots, i_r)} \sum_{s=1}^r a_{i_s}^s(t), \quad t \in J, \quad (2.5) \end{aligned}$$

Zauważmy, że po naturalnym uporządkowaniu elementów zbioru

$\{i_1, \dots, i_{l-1}, s, i_{l+1}, \dots, i_r\}$, prawą stronę (2.5) możemy zapisać jako kombinację minorów $X_{(k_1, k_2, \dots, k_r)}^{(j_1, j_2, \dots, j_r)}$ występujących w (2.4). Łatwo sprawdza się, że współczynniki w tej kombinacji mają postać (2.1). Tym samym równość (2.4) jest prawdziwa.

Dla zakończenia dowodu zauważmy, że warunek (2.3) jest spełniony, gdyż $X(t_1) = I_n$ i $M_r(I_n) = I_N$.

Wynik zawarty w lemacie 2.1 dla układów równań różniczkowych (2.2) generowanych przez równania liniowe 3 - go i 4 - go rzędu można znaleźć w pracy [15] .

Uwaga. Ponieważ dla $r = n$ mamy $M_n(X) = \det X$ oraz, jak już poprzednio zauważyliśmy, $B_n(A) = \text{Tr } A$, więc z lematu 2.1 otrzymujemy dobrze znane równanie różniczkowe Liouville'a

$$\frac{d}{dt} \det X(t) = \text{Tr } A(t) \cdot \det X(t) \quad , \quad t \in J \quad .$$

Zanotujmy jeszcze jeden lemat, będący bezpośrednim wnioskiem z lematu 1.4 i lematu 2.1 .

Lemat 2.2. Niech X będzie rozwiązaniem macierzowym zagadnienia początkowego (1.7) , (1.8) określonym na przedziale J . Niech $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ i niech ponadto dana będzie macierz Δ ze zbioru $\Delta_{N \times N}$, $N = \binom{n}{r}$, taka, że

$$B_r^0(A) \in D_\Delta(J) \quad .$$

Wtedy macierz minorów $M_r(X)$ również należy do klasy $D_\Delta(J)$.

Ponadto wobec wniosku 1.1 dla elementów macierzy $M_r(X)$, $(1 \leq r \leq n)$, a więc dla minorów macierzy X prawdziwe jest na przedziale J następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
\lambda_j^i m_j^i(X(t)) &= \lambda_j^i x_\alpha^\beta(t) \geq (\exp \int_{t_1}^t b_i^i(\tau) d\tau) \left\{ \delta_j^i + \int_{t_1}^t d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \right. \\
&\dots \int_{t_1}^{\tau_{l-2}} \left(\prod_{s=0}^{l-2} \lambda_{i_{s+1}}^{i_s} b_{i_{s+1}}^{i_s}(\tau_{s+1}) \exp \int_{t_1}^{\tau_{s+1}} b_{i_{s+1}}^{i_{s+1}}(\tau) - b_{i_s}^{i_s}(\tau) d\tau \right) d\tau_{l-1} \Big\} \geq \\
&\geq \delta_j^i \exp \int_{t_1}^t b_i^i(\tau) d\tau, \quad 1 \leq i, j \leq \binom{n}{r}, \quad (2.6)
\end{aligned}$$

gdzie $\alpha, \beta \in G_{r,n}$ są wyznaczone przez warunki $h_\alpha = j$, $h_\beta = i$, oraz $i_0, i_1, \dots, i_{l-1}$ jest dowolnym układem liczb naturalnych ze zbioru $\{1, 2, \dots, \binom{n}{r}\}$, dla których $i_0 = i$, $i_{l-1} = j$ oraz $i_s \neq i_{s+1}$, $0 \leq s \leq l-2$, natomiast m_j^i , b_j^i i λ_j^i oznaczają odpowiednio elementy macierzy $M_r(X)$, $B_r(A)$ i Λ .

Dla elementów diagonalnych macierzy $M_r(X)$ tj. minorów głównych x_β^β rozwiązania macierzowego X zagadnienia (1.7), (1.8), mamy w szczególności następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
x_\beta^\beta(t) &\geq \exp \int_{t_1}^t b_\beta^\beta(\tau) d\tau = \\
&= \exp \int_{t_1}^t \sum_{s=1}^r a_{j_s}^{j_s}(\tau) d\tau, \quad \beta = (j_1, \dots, j_r), \quad t \in J, \quad (2.7)
\end{aligned}$$

wyrażone bezpośrednio przez elementy macierzy A .

Na zakończenie tej części pracy zanotujmy jeszcze jedną uwagę.

Uwaga. Ponieważ $B_r^0(A) = B_r(A^0)$ dla każdego r , $1 \leq r \leq n$, więc w lemacie 2.2, założenie $B_r^0(A) \in D_\Lambda(J)$ można zastąpić założeniem

$$B_r(A^0) \in D_\Lambda(J) \quad .$$

3. Rozważmy układ liniowych równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t) \quad , \quad t \in J = [t_1, t_2] \quad , \quad (3.1)$$

gdzie $A \in C_{n \times n}(J)$, $g \in C_n(J)$,

z warunkiem brzegowym

$$P x(t_1) + Q x(t_2) = c \quad , \quad (3.2)$$

gdzie P i Q są stałymi macierzami stopnia n , oraz c jest n - wymiarowym wektorem kolumnowym.

W dalszym ciągu przez $X(t;A)$ oznaczać będziemy macierz fundamentalną układu (3.1) unormowaną w punkcie t_1 tj. rozwiązanie macierzowe równania (1.7) z warunkiem początkowym (1.8).

Rozwiązanie układu liniowego (3.1) z warunkiem początkowym $x(t_1)$ można zatem przedstawić w postaci

$$x(t) = X(t;A)x(t_1) + v(t) \quad , \quad t \in J \quad ,$$

gdzie

$$v(t) = \int_{t_1}^t X(t;A)X^{-1}(\tau,A)g(\tau)d\tau \quad , \quad t \in J \quad .$$

Ponieważ

$$x(t_2) = X(t_2;A)x(t_1) + v(t_2) \quad ,$$

więc rozwiązanie powyższe spełnia warunek brzegowy (3.2) jeśli

$$(P + Q X(t_2;A)) x(t_1) = c - Q v(t_2) \quad .$$

Prawdziwy jest więc następujący znany lemat (por. np. [11] i [16]).

Lemat 3.1. Jeżeli macierz $P + Q X(t_2; A)$ jest nieosobliwa to zagadnienie brzegowe (3.1), (3.2) ma jednoznaczne rozwiązanie wyznaczone przez warunek początkowy

$$x_0 = x(t_1) = (P + Q X(t_2; A))^{-1} (c - Q v(t_2)). \quad (3.3)$$

Dalsze nasze rozważania dotyczyć będą tylko pewnych szczególnych przypadków warunków brzegowych postaci (3.2). W tym celu wprowadźmy pewne dodatkowe oznaczenia.

Przez I_q^p , $1 \leq p, q \leq n$, oznaczmy macierz stopnia n , której wszystkie elementy są równe zero z wyjątkiem elementu stojącego na przecięciu p -tego wiersza i q -tej kolumny, który równy jest 1. Oczywiście $I_q^p = (\delta_i^q \delta_p^j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Natomiast dla dowolnych dwóch ciągów / niekoniecznie różnych / $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ i $\beta = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ ze zbioru $G_{k,n}$, $(1 \leq k \leq n-1)$, przez I_β^α oznaczmy macierz stopnia n określoną wzorem

$$I_\beta^\alpha = I_{j_1}^{i_1} + I_{j_2}^{i_2} + \dots + I_{j_k}^{i_k}.$$

Ponadto dla każdego ciągu $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in G_{k,n}$, $(1 \leq k \leq n-1)$, przez $\bar{\alpha}$ oznaczać będziemy ściśle rosnący ciąg utworzony ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \alpha$. Oczywiście $\bar{\alpha} \in G_{n-k,n}$.

Położmy teraz $P = I_\alpha^\alpha$ i $Q = I_\beta^{\bar{\alpha}}$, gdzie α i β są odpowiednio elementami zbiorów $G_{k,n}$ i $G_{n-k,n}$ $(1 \leq k \leq n-1)$. Wtedy warunek brzegowy (3.2) przyjmie postać

$$I_\alpha^\alpha x(t_1) + I_\beta^{\bar{\alpha}} x(t_2) = c. \quad (3.4)$$

Łatwo zauważyć, że dane dwa ciągi $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in G_{k,n}$ i $\beta = (j_1, j_2, \dots, j_{n-k}) \in G_{n-k,n}$, $(1 \leq k \leq n-1)$, wyznaczają zbiory - niekoniecznie różne - tych współrzędnych rozwiązania x , dla których zadane są wartości odpowiednio w chwilach t_1 i t_2 .

Zauważmy też, że macierz $I_{\beta}^{\bar{\alpha}} X$, $\bar{\alpha}, \beta \in G_{n-k,n}$, $X \in R_{n \times n}$, ma zerowe wiersze o numerach należących do α oraz wiersze tej macierzy o numerach należących do $\bar{\alpha}$ pokrywają się kolejno z wierszami macierzy X o numerach należących do β . Stąd korzystając z twierdzenia Laplace'a o rozwijaniu wyznaczników, otrzymujemy

$$\det(I_{\alpha}^{\bar{\alpha}} + I_{\beta}^{\bar{\alpha}} X(t_2; A)) = X_{\bar{\alpha}}^{\beta}(t_2; A),$$

co z kolei na podstawie lematu 3.1 pozwala nam sformułować następujący wniosek.

Wniosek 3.1. Niech $\alpha \in G_{k,n}$ i $\beta \in G_{n-k,n}$, $(1 \leq k \leq n-1)$, będą ustalone. Jeżeli

$$X_{\bar{\alpha}}^{\beta}(t_2; A) \neq 0, \quad (3.5)$$

to zagadnienie brzegowe (3.1), (3.4) ma jednoznaczne rozwiązanie.

Sprowadzając rozważane w pracy [15] dwupunktowe zagadnienie brzegowe dla liniowego równania różniczkowego / rzędu trzeciego i czwartego / do równoważnego mu zagadnienia dla układu liniowego i korzystając z lematu 2.1, możemy udowodnione tam twierdzenia 1 i 4 otrzymać jako szczególne przypadki wniosku 3.1.

Przejdźmy teraz do pierwszego z dwóch twierdzeń, które udowodnimy w tej części pracy. Dotyczy ono zagadnienia istnienia i jednoznaczności rozwiązań układu liniowego (3.1) z warunkiem brzegowym postaci

$$I_{\alpha}^{\alpha} x(t_1) + I_{\alpha}^{\bar{\alpha}} x(t_2) = c, \quad \alpha \in G_{k,n}, \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (3.6)$$

Problem ten stanowi oczywiście szczególny przypadek zagadnienia brzegowego (3.1), (3.4). Warunek (3.6) oznacza, że każda ze współrzędnych rozwiązania x jest zadana bądź w chwili t_1 bądź w chwili t_2 .

Twierdzenie 3.1. Niech k , $1 \leq k \leq n-1$, będzie ustalone i niech ponadto dana będzie macierz $\Lambda \in \Delta_{N \times N}$, $N = \binom{n}{n-k}$, taka, że

$$B_{n-k}(A^0) \in D_{\Lambda}(J). \quad (3.7)$$

Wtedy zagadnienie brzegowe (3.1), (3.6) ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnego ciągu $\alpha \in G_{k,n}$ i dla dowolnego wektora $c \in \mathbb{R}^n$.

Dowód. Ustalmy dowolny ciąg $\alpha \in G_{k,n}$ i przyjmijmy $\bar{\alpha} = (\bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots, \bar{i}_{n-k})$. Zgodnie z wnioskiem 3.1, dla dowodu twierdzenia wystarczy sprawdzić warunek (3.5) w przypadku $\beta = \bar{\alpha}$.

W tym celu zauważmy, że wobec (3.7), spełnione są założenia lematu 2.2 przy $r = n-k$. Zatem oszacowanie (2.7) dla $\beta = \bar{\alpha}$ daje nierówność

$$x_{\bar{\alpha}}^{\alpha}(t_2; A) \geq \exp \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{n-k} a_{\bar{i}_s}^{\bar{i}_s}(\tau) d\tau = \nu > 0, \quad$$

co dowodzi żadanego warunku i kończy dowód twierdzenia.

Uwaga. Twierdzenie 3.1 daje dość ogólny schemat uzyskiwania konkretnych warunków gwarantujących istnienie i jednoznaczność zagadnienia (3.1), (3.6), wyrażonych poprzez elementy macierzy A . Wystarczy bowiem ustalić dowolne $\Lambda \in \Delta_{N \times N}$ i zagwarantować warunek (3.7). Prowadzi to do pewnego układu nierówności dla elementów macierzy A .

Jako prosty przykład zastosowania powyżej udowodnionego twierdzenia, rozważmy następujące zagadnienie brzegowe dla równania liniowego rzędu n

$$x^{(n)} = \sum_{p=0}^{n-1} a_p(t) x^{(p)} + u(t), \quad x^{(0)} = x, \quad (3.8)$$

$$x^{(m)}(t_1) = c^m, \quad x^{(p)}(t_2) = c^p, \quad p = 0, 1, \dots, n-1, \\ p \neq m, \quad (3.9)$$

gdzie współczynniki a_p , $p = 0, 1, \dots, n-1$, oraz u są funkcjami ciągłymi na przedziale $J = [t_1, t_2]$.

Powyższe zagadnienie jest oczywiście równoważne zagadnieniu postaci (3.1), (3.6), w którym A jest macierzą układu równoważnego równaniu różniczkowemu (3.8); $g(t) = (0, \dots, 0, u(t))$ oraz $\alpha = (m) \in G_{1,n}$. Przyjmując, że Λ jest macierzą ze zbioru $\Delta_{n \times n}$ wyznaczoną przez wektor $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ i korzystając z uwagi po twierdzeniu 3.1, otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.2. Jeżeli współczynniki a_p , $0 \leq p \leq n-2$, równania (3.8), spełniają na przedziale J następujące nierówności

$$(-1)^{n-p} a_p \geq 0, \quad 0 \leq p \leq n-2,$$

to zagadnienie brzegowe (3.8) , (3.9) ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnego m , $0 \leq m \leq n-1$ i dowolnego układu liczb $c^1, c^2, \dots, c^n$.

Nieco słabszy rezultat w stosunku do wniosku 3.2 uzyskano w pracy [3, Tw.1] .

Niech $A(t) = (a_{ij}^i(t))$, $t \in J$, będzie macierzą kwadratową stopnia n . Powiemy, że macierz A jest nieredukowalna na J względem pary indeksów (i, j) , $i \neq j$, / i - tego wiersza i j - tej kolumny / , jeżeli istnieje ciąg $i_0, i_1, \dots, i_{l-1}$ elementów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ taki, że $i_0 = i$, $i_{l-1} = j$, $i_s \neq i_{s+1}$ dla $s = 0, 1, \dots, l-2$, oraz nierosnący ciąg ξ_s , $s = 1, 2, \dots, l-1$, $\xi_s \in J$, że

$$a_{i_{s+1}}^{i_s}(\xi_{s+1}) \neq 0 \quad , \quad 0 \leq s \leq l-2 \quad .$$

Jest oczywiste, że wystarczy ograniczyć się do $1 \leq n$.

Macierz nieredukowalną na J względem każdej pary indeksów (i, j) , $i \neq j$, będziemy nazywać krótko nieredukowalną na J . Zwróćmy uwagę na fakt, że jeżeli macierz A jest nieredukowalna na J to również macierz A^0 jest nieredukowalna na tym przedziale, i odwrotnie.

Sens pojęcia nieredukowalności wyjaśnimy na przykładzie macierzy stałej. Z macierzą $A = (a_{ij}^i)$ stopnia n , możemy związać graf skierowany $G = \langle V, \Gamma \rangle$, gdzie $V = \{1, 2, \dots, n\}$ jest zbiorem wierzchołków, a Γ jest odwzorowaniem $V \rightarrow 2^V$ określonym następująco

$$\Gamma(i) = \{j \in V \setminus \{i\} : a_{ij}^i \neq 0\} \quad .$$

Wtedy nieredukowalność macierzy A odpowiada silnej spójności grafu $G^{1/}$. W równaniu różniczkowym $\dot{x} = Ax$ oznaczano, że każda współrzędna $\dot{x}^i$ wektora prędkości zależy pośrednio od wszystkich współrzędnych x^j , $j \neq i$, wektora stanu.

Uwaga. Jeżeli istnieje $t_0 \in J$, że macierz stała $A(t_0)$ jest nieredukowalna, to macierz $A(t)$ jest nieredukowalna na J .

Lemat 3.2. Niech założenia twierdzenia 3.1 będą spełnione. Niech ponadto dane będą dwa ciągi $\alpha \in G_{k,n}$ i $\beta \in G_{n-k,n}$ ($1 \leq k \leq n-1$), $\beta \neq \bar{\alpha}$. Jeżeli macierz $B_{n-k}(A^0)$ jest nieredukowalna na J względem pary indeksów $(i,j) = (h_\beta, h_{\bar{\alpha}})$, to zagadnienie brzegowe (3.1), (3.4) dla danych $\alpha \in G_{k,n}$ i $\beta \in G_{n-k,n}$ ma jednoznaczne rozwiązanie przy dowolnym $c \in R^n$.

Dowód. Metoda dowodu jest analogiczna jak w twierdzeniu 3.1 i polega na sprawdzeniu warunku (3.5) z wniosku 3.1.

Z założenia o nieredukowalności $B_{n-k}(A^0)$ względem pary indeksów $(h_\beta, h_{\bar{\alpha}})$ oraz warunku $B_{n-k}(A^0) \in D_\Lambda(J)$ wynika, że

$$\lambda_{i_{s+1}}^{i_s} b_{i_{s+1}}^{i_s} (A(\xi_{s+1})) > 0, \quad 0 \leq s \leq l-2, \quad (i_0 = h_\beta, \quad i_{l-1} = h_{\bar{\alpha}}),$$

gdzie $i_0, i_1, \dots, i_{l-1}$, $i_s \neq i_{s+1}$, jest pewnym ciągiem elementów zbioru $\{1, 2, \dots, \binom{n}{n-k}\}$. Ponadto

$$\lambda_{i_{s+1}}^{i_s} b_{i_{s+1}}^{i_s} (A(t)) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq l-2, \quad t \in J,$$

$$(i_0 = h_\beta, \quad i_{l-1} = h_{\bar{\alpha}}).$$

^{1/} Graf $G = \langle V, \Gamma \rangle$ jest silnie spójny, gdy dla dowolnych dwóch różniących wierzchołków i, j istnieje droga skierowana łącząca i z j . W teorii grafów dowodzi się łatwo, że graf G jest silnie spójny wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej nie-trywialnej partycji $T \cup S$ zbioru V istnieje takie $i \in V$, że $\Gamma(i) \cap S \neq \emptyset$.

Z nierówności (2.6) otrzymujemy więc

$$\lambda_{i_{1-1}}^{i_0} x_{\alpha}^{\beta}(t_2) \geq (\exp \int_{t_1}^{t_2} b_{i_0}^{i_0}(A(\tau)) d\tau) \left\{ \delta_{i_{1-1}}^{i_0} + \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \right. \\ \left. \dots \int_{t_1}^{\tau_{1-2}} \left(\prod_{s=0}^{1-2} \lambda_{i_{s+1}}^{i_s} b_{i_{s+1}}^{i_s}(A(\tau_{s+1})) \exp \int_{t_1}^{\tau_{s+1}} b_{i_{s+1}}^{i_{s+1}}(A(\tau)) - b_{i_s}^{i_s}(A(\tau)) d\tau \right) d\tau_{1-1} \right\} > 0,$$

stąd, wobec $\lambda_{i_{1-1}}^{i_0} \neq 0$, mamy natychmiast warunek (3.5).

Zestawiając teraz twierdzenie 3.1 i lemat 3.2 możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2. Niech $k, 1 \leq k \leq n-1$, będzie dane i niech

$$B_{n-k}(A^0) \in D_{\Lambda}(J),$$

gdzie Λ jest pewną macierzą ze zbioru $\Delta_{N \times N}$, $N = \binom{n}{n-k}$.

Jeżeli ponadto macierz $B_{n-k}(A^0)$ jest nieredukowalna na przedziale J , to wtedy zagadnienie brzegowe (3.1), (3.4) ma jednoznaczne rozwiązanie dla każdej pary ciągów $(\alpha, \beta) \in G_{k,n} \times G_{n-k,n}$ i dla dowolnego wektora $c \in R^n$.

W pracy [6] rozważano m. in. dwupunktowe zagadnienie brzegowe (3.1), (3.4) w przypadku $\alpha = (1, 2, \dots, n-1)$ i $\beta = (n)$ i uodowodniono następujące twierdzenie

Twierdzenie. Niech

$$(a) \quad a_j^i(t) a_n^i(t) a_n^j(t) > 0, \quad t \in J, \quad 1 \leq i, j \leq n-1, \quad i \neq j,$$

$$(b) \quad a_n^i(t) a_i^n(t) > 0, \quad t \in J, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

gdzie a_j^i oznaczają elementy macierzy układu (3.1). Wtedy zaga-

dnienie brzegowe (3.1), (3.4) dla $\alpha = (1, 2, \dots, n-1)$ i $\beta = (n)$ ma jednoznaczne rozwiązanie.

Łatwo sprawdza się, że jeżeli elementy macierzy A spełniają warunki (a) i (b), to $A^0 \in D_{\wedge}(J)$, gdzie $\wedge$ jest macierzą generowaną przez wektor λ określony następująco

$$\lambda = (\operatorname{sgn} a_1^n, \operatorname{sgn} a_2^n, \dots, \operatorname{sgn} a_{n-1}^n, 1) \quad .$$

Macierz A jest oczywiście nieredukowalna na J . Zatem twierdzenie 3.2 / w przypadku $k = n-1$ / implikuje mocniejszą wersję powyższego twierdzenia.

Ogólniejsze wyniki od uzyskanego wyżej rezultatu J.B. Garnera i L.P. Burtona, wynikające również z twierdzenia 3.2, przedstawione są w pracy [7]:

Rozważania dotyczące układów liniowych zakończymy dwoma prostymi przykładami ilustrującymi otrzymane wyniki.

Przykład 3.1. Niech dany będzie liniowy układ równań różniczkowych

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx^1}{dt} = -x^2 \\ \frac{dx^2}{dt} = -x^1 - x^3 \\ \frac{dx^3}{dt} = -x^4 \\ \frac{dx^4}{dt} = x^1 - x^3 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

i niech A oznacza macierz tego układu. Kładąc $k = 2$ otrzymujemy / por. przykład 2.1 /.

$$B_2(A^0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Jest to macierz nieredukowalna, należąca do klasy D_{Λ} generowanej przez

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Układ (3.10) spełnia więc założenia twierdzenia 3.2 przy $k = 2$. Ma on zatem jednoznacznie określone rozwiązanie z warunkiem brzegowym postaci (3.6) gdzie $\alpha, \beta \in G_{2,4} = \{(1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4)\}$ oraz $c \in \mathbb{R}^4$.

Przykład 3.2. Niech teraz dany będzie następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = x^1 - x^2 + 4\frac{1}{2}x^3 \\ \frac{dx^2}{dt} = -2x^1 + 3x^3 \\ \frac{dx^3}{dt} = -x^1 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 \end{cases} \quad (3.11)$$

z warunkiem brzegowym

$$x^1(0) = c^1, \quad x^3(0) = c^3, \quad x^3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pi\right) = c^2, \quad (3.12)$$

gdzie c^1, c^2, c^3 są dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $c^3 \neq -c^2 \exp \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Rozważane zagadnienie jest więc zagadnieniem brzegowym postaci (3.1), (3.4), gdzie $\alpha = (1, 3) \in G_{2,3}$, $\beta = (3) \in G_{1,3}$ oraz $c = (c^1, c^2, c^3)$.

Znajdując macierz fundamentalną układu (3.11), unormowaną w punkcie $t_1 = 0$, łatwo sprawdza się, że zagadnienie brzegowe (3.11), (3.12) nie ma rozwiązania.

Przeanalizujmy zatem, które z założeń twierdzenia 3.2 nie jest spełnione.

W rozważanym przypadku mamy $k = 2$, oraz

$$B_1(A^0) = A^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4\frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} .$$

Założenie o nieredukowalności macierzy $B_1(A^0)$ jest więc spełnione. Łatwo natomiast sprawdzić, że $B_1(A^0)$ nie należy do żadnej z możliwych w tym przypadku klas D_{Λ_i} , $i = 1, 2, 3, 4$, gdzie dopuszczalne macierze Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 i Λ_4 pokazane są na początku punktu 1 tej pracy.

4. Rozważmy teraz układ równań różniczkowych nieliniowych

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad , \quad (4.1)$$

gdzie x i $f(t, x)$ są n - wymiarowymi wektorami kolumnowymi.

O prawej stronie powyższego układu zakładamy będziemy, że spełnia następujący warunek:

(A) Funkcja $f(t, x) = (f^1(t, x), f^2(t, x), \dots, f^n(t, x))$ i jej macierz Jacobiego $F(t, x) = (f_{x_i}^j(t, x))$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, względem zmiennej x są określone i ciągłe na zbiorze $J \times \mathbb{R}^n$, $J = [t_1, t_2]$.

Rozważać będziemy zagadnienie istnienia i jednoznaczności rozwiązań układu (4.1) spełniających warunek brzegowy (3.2) tj.

$$P x(t_1) + Q x(t_2) = c \quad .$$

Przy czym, analogicznie jak w części dotyczącej układów liniowych, zagadnienie to będziemy badać szczegółowo dla warunku brzegowego postaci (3.4), tj.

$$I_{\alpha}^{\alpha} x(t_1) + I_{\beta}^{\beta} x(t_2) = c \quad .$$

Inspiracją przeniesienia pewnych rezultatów uzyskanych w punkcie 3 na przypadek układów nieliniowych było następujące twierdzenie udowodnione przez A. Lasotę [12]

Twierdzenie L. Niech dana będzie trójka $(f, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$, gdzie $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ są zbiorami macierzy stopnia n a $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą spełniającą następujący warunek :

(C) Dla każdego punktu $(t_0, c_0) \in J \times \mathbb{R}^n$, istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (4.1) z warunkiem początkowym $x(t_0) = c_0$ i jest ono przedłużalne na cały przedział J .

Niech ponadto, co najmniej jeden ze zbiorów $\mathcal{P}$ lub $\mathcal{Q}$, będzie otwarty.

Założmy teraz, że dla każdej macierzy $P \in \mathcal{P}$ i $Q \in \mathcal{Q}$ oraz dla dowolnego wektora $c \in \mathbb{R}^n$ istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie zagadnienia brzegowego (4.1), (3.2). Wtedy dla każdego $P \in \mathcal{P}$, $Q \in \mathcal{Q}$ i $c \in \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia brzegowego (4.1), (3.2).

Przez $\|\cdot\|$ oznaczać będziemy normę taksówkową w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}_{n \times n}$.

Dalsze określenia i oznaczenia wprowadzać będziemy konsekwentnie w miarę potrzeby ich wykorzystania.

Sformułujemy teraz prosty lemat, którego dowód pomijamy.

Lemat 4.1. Niech dana będzie rodzina $\mathcal{K}$ złożona z macierzy $K, K \in \mathbb{R}_{n \times n}$, wspólnie ograniczonych stałą dodatnią ν tzn.

$$\|K\| \leq \nu, \quad K \in \mathcal{K}. \quad (4.2)$$

Niech ponadto istnieje stała dodatnia δ taka, że

$$|\det K| \geq \delta, \quad K \in \mathcal{K}. \quad (4.3)$$

Wtedy rodzina $\mathcal{K}^{-1}$ złożona z macierzy odwrotnych do macierzy rodziny $\mathcal{K}$ jest również ograniczona w normie $\|\cdot\|$.

Niech $x_1, x_2 \in C_n(J)$. Oznaczmy przez $\tilde{F}(t, x_1, x_2)$ macierz stopnia n określoną wzorem

$$F(t, x_1, x_2) = \int_0^1 F(t, s x_2(t) + (1-s)x_1(t)) ds \quad (4.4)$$

Wobec przyjętego założenia (A) prawdą jest, że

$$\tilde{F}(t, x_1, x_2) \in C_{n \times n}(J) \quad .$$

Symbolem $\mathcal{F}$ oznaczać będziemy rodzinę wszystkich macierzy $F(t, x)$, gdzie x przebiega cały zbiór $C_n(J)$. Natomiast przez $\tilde{\mathcal{F}}$ analogicznie jak powyżej oznaczymy rodzinę macierzy $\tilde{F}(t, x_1, x_2)$, gdzie $(x_1, x_2) \in C_n(J) \times C_n(J)$.

Zanotujmy teraz następujący lemat.

Lemat 4.2. Niech wszystkie macierze rodziny $\mathcal{F}$ będą wspólnie ograniczone, na przedziale J stałą dodatnią μ ,

$$\|F(t, x)\| \leq \mu, \quad t \in J, \quad x \in C_n(J). \quad (4.5)$$

Wtedy również wszystkie macierze rodziny $\tilde{\mathcal{F}}$ są wspólnie ograniczone na J , przez tą samą stałą μ .

Rzeczywiście, wystarczy zauważyć, że jeśli $x_1, x_2 \in C_n(J)$ to na mocy założenia (4.5) mamy

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}(t, x_1, x_2)\| &= \left\| \int_0^1 F(t, s x_2(t) + (1-s) x_1(t)) ds \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|F(t, s x_2(t) + (1-s) x_1(t))\| ds \leq \mu, \quad t \in J. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Niech $x_1, x_2 \in C_n(J)$. Rozważmy następujący liniowy układ równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{F}(t, x_1(t), x_2(t)) \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.7)$$

określony na przedziale J .

Macierz fundamentalną powyższego układu unormowaną w punkcie t_1 zgodnie z wcześniej przyjętą symboliką oznaczmy przez $X(t; \tilde{F}(t, x_1, x_2))$ lub po prostu $X(t; \tilde{F})$.

Przez $D(x_1, x_2)$, oznaczać będziemy stałą macierz stopnia n określoną wzorem

$$D(x_1, x_2) = P + Q X(t_2; \tilde{F}(t, x_1, x_2))$$

Rodzinę wszystkich macierzy $D(x_1, x_2)$, gdzie $x_1, x_2 \in C_n(J)$ oznaczmy symbolem $\mathcal{D}$.

Lemat 4.3. Niech rodzina $\mathcal{F}$ spełnia założenia poprzedniego lematu. Niech ponadto istnieje stała dodatnia δ taka, że

$$d(x_1, x_2) = |\det D(x_1, x_2)| \geq \delta, \quad x_1, x_2 \in C_n(J). \quad (4.8)$$

Wtedy rodziny $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}^{-1}$, gdzie $\mathcal{D}^{-1}$ oznacza rodzinę złożoną z macierzy odwrotnych do macierzy rodziny $\mathcal{D}$, są ograniczone w normie $\|\cdot\|$.

Dowód. Niech $x_1, x_2 \in C_n(J)$. Macierz fundamentalna układu (4.7) spełnia następujące równanie całkowe

$$X(t; \tilde{F}) = I_n + \int_{t_1}^t \tilde{F}(\tau, x_1, x_2) X(\tau; \tilde{F}) d\tau, \quad t \in J.$$

Stąd na przedziale J prawdziwa jest nierówność

$$\|X(t; \tilde{F})\| \leq n + \int_{t_1}^t \|\tilde{F}(\tau, x_1, x_2)\| \|X(\tau; \tilde{F})\| d\tau,$$

z której wobec lematu Gronwalla otrzymujemy

$$\|X(t; \tilde{F})\| \leq n \exp \int_{t_1}^t \|\tilde{F}(\tau, x_1, x_2)\| d\tau, \quad t \in J.$$

Zatem na mocy nierówności (4.6), mamy

$$\|X(t_2; \tilde{F})\| \leq \exp(t_2 - t_1) \mu.$$

Wobec tego

$$\|D(x_1, x_2)\| = \|P + Q X(t_2; \tilde{F})\| \leq p + q n \exp(t_2 - t_1) \mu,$$

gdzie p i q są normami macierzy P i odpowiednio Q .

Ponieważ stała dodatnia $\nu = p + q n \exp(t_2 - t_1) \mu$ jest niezależna od wyboru $x_1, x_2 \in C_n(J)$, więc rodzina $\mathcal{D}$ jest ograniczona.

Ograniczoność rodziny $\mathcal{D}^{-1}$ otrzymujemy teraz z lematu 4.1, wobec założenia (4.8).

Lemat 4.4. Niech dane będą macierze P i Q stopnia n , i niech założenia lematu 4.3 będą spełnione. Wtedy istnieje stała dodatnia η taka, że dla wszystkich macierzy $S \in R_{n \times n}$ spełniających nierówność

$$\|P - S\| < \eta \tag{4.9}$$

i dla każdego wektora $c \in R_n$, układ równań różniczkowych (4.1)

z warunkiem brzegowym

$$S x(t_1) + Q x(t_2) = c \quad (4.10)$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Dowód. Na mocy lematu 4.3 wiemy, że istnieje stała dodatnia ρ taka, że dla dowolnej pary funkcji wektorowych $x_1, x_2 \in C_n(J)$ zachodzi nierówność

$$\|D^{-1}(x_1, x_2)\| \leq \rho \quad (4.11)$$

Niech $\eta = \frac{1}{\rho} > 0$. Załóżmy teraz, że dla pewnego $S \in R_{n \times n}$ spełniającego warunek (4.9) z wyżej ustalonym η i dla pewnego wektora $c \in R^n$, zagadnienie brzegowe (4.1), (4.10) ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 . Kładąc $x = x_1 - x_2$ i korzystając z lematu Hadamarda, mamy

$$f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t)) = \int_0^1 F(t, s x_2(t) + (1-s) x_1(t)) ds \cdot x(t), \quad t \in J,$$

a więc x jest rozwiązaniem układu liniowego (4.7).

Rozwiązanie to spełnia ponadto warunek brzegowy

$$P x(t_1) + Q x(t_2) = \bar{c},$$

gdzie $\bar{c} = (P - S) x(t_1)$.

Zatem na mocy lematu 3.1, otrzymujemy

$$x(t_1) = D^{-1}(x_1, x_2) \bar{c} \quad ,$$

a więc z określenia liczby η oraz nierówności (4.9) i (4.11), mamy

$$\|\bar{c}\| = \|(P - S)x(t_1)\| \leq \|P - S\| \|x(t_1)\| < \|\bar{c}\| \quad ,$$

co nie jest możliwe. Tym samym dowód lematu został zakończony.

Uwaga. Aby uzyskać tezę, że zagadnienie (4.1), (3.2) przy ustalonych macierzach P i Q , ma co najwyżej jedno rozwiązanie, wystarczy założyć, że $d(x_1, x_2) > 0$ dla $x_1, x_2 \in C_n(J)$ (por. [11, Pr.4.2]).

Powyższy cykl lematów zakończymy następującym lematem o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia brzegowego (4.1), (3.2).

Lemat 4.5. Niech dana będzie funkcja $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $J = [t_1, t_2]$, spełniająca warunek (A) i niech ponadto dane będą macierze $P, Q \in \mathbb{R}_{n \times n}$.

Założmy, że wszystkie macierze rodziny $\mathcal{F}$ są wspólnie ograniczone oraz, że istnieje stała dodatnia δ taka, że dla dowolnej pary funkcji wektorowych $x_1, x_2 \in C_n(J)$ zachodzi nierówność

$$d(x_1, x_2) = |\det(P + Q X(t_2; \tilde{F}(t, x_1, x_2)))| \geq \delta$$

Wtedy dla każdego wektora $c \in \mathbb{R}^n$ zagadnienie brzegowe (4.1), (3.2) ma jednoznaczne rozwiązanie.

Dowód. Ponieważ w rozważanym przypadku spełnione są założenia lematu 4.4 , więc istnieje kula otwarta $\mathcal{K}(P, \eta)$ w $R_{n \times n}$ o środku w P i promieniu η taka, że dla każdej macierzy $S \in \mathcal{K}(P, \eta)$ i danej macierzy Q oraz dla dowolnego $c \in R^n$, zagadnienie brzegowe (4.1), (4.10) ma co najwyżej jedno rozwiązanie. Kładąc więc

$$\mathcal{P} = \mathcal{K}(P, \eta) \quad \text{ i } \quad \mathcal{Q} = \{Q\} \quad ,$$

oraz korzystając z warunku (A) i wspólnej ograniczoności wszystkich macierzy rodziny $\mathcal{F}$ stwierdzamy, że spełnione są założenia twierdzenia Lasoty, co kończy dowód lematu 4.5.

5. W tym punkcie pracy rozważania ograniczymy do zagadnienia brzegowego postaci (4.1), (3.4) .

Niech Λ będzie dowolną ale ustaloną macierzą ze zbioru $\Delta_{n \times n}$. Rodzinę macierzy $\mathcal{K} \subset D_{\Lambda}(J)$ będziemy nazywali nieredukowalną na przedziale J , jeżeli istnieje macierz $U \in D_{\Lambda}(J)$, nieredukowalna, taka, że na J spełniona jest następująca nierówność

$$\Lambda \circ K^0 \succ \Lambda \circ U^0, \quad K \in \mathcal{K}.$$

Macierz U nazywać będziemy minorantą rodziny $\mathcal{K}$.

Uwaga. Niech $K \in D_{\Lambda}(J)$. Rodzina $\mathcal{K} = \{K\}$ złożona z jednej macierzy K jest nieredukowalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz K jest nieredukowalna.

Podamy teraz twierdzenie, które jest naturalnym uogólnieniem udowodnionego wcześniej twierdzenia 3.2.

Twierdzenie 5.1. Niech dana będzie funkcja $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $J = [t_1, t_2]$, spełniająca warunek (A) i niech wszystkie macierze rodziny $\mathcal{F}$ będą wspólnie ograniczone stałą dodatnią μ . Niech ponadto $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Założmy teraz, że dana jest macierz $\Lambda \in \Delta_{N \times N}$, $N = \binom{n}{n-k}$, taka, że

$$B_{n-k}(F^0(t, x)) \in D_{\Lambda}(J), \quad x \in C_n(J) \quad (5.1)$$

i rodzina macierzy $\{B_{n-k} F(t, x)\}_{x \in C_n(J)}$ jest nieredukowalna na przedziale J . Wtedy zagadnienie brzegowe (4.1), (3.4) ma jednoznaczne rozwiązanie dla każdej pary ciągów (α, β) , $\alpha \in G_{k,n}$, $\beta \in G_{n-k,n}$ i dla dowolnego wektora $c \in \mathbb{R}^n$.

Dowód powyższego twierdzenia poprzedzimy dwoma lematami.

Lemat 5.1. Niech $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ i niech dana będzie macierz $\Lambda \in \Delta_{N \times N}$, $N = \binom{n}{r}$, taka, że

$$B_r(F^0(t, x)) \in D_\Lambda(J), \quad x \in C_n(J).$$

Wtedy również

$$B_r(\tilde{F}^0(t, x_1, x_2)) \in D_\Lambda(J), \quad x_1, x_2 \in C_n(J).$$

Dowód. Z założenia lematu wynika, że dla dowolnej, ustalonej pary funkcji wektorowych $x_1, x_2 \in C_n(J)$, mamy

$$\Lambda \circ B_r(F^0(t, sx_2(t) + (1-s)x_1(t))) \geq 0, \quad t \in J, s \in [0, 1].$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} B_r(\tilde{F}^0(t, x_1, x_2)) &= B_r\left(\int_0^1 F^0(t, sx_2(t) + (1-s)x_1(t)) ds\right) = \\ &= \int_0^1 B_r(F^0(t, sx_2(t) + (1-s)x_1(t))) ds, \quad t \in J, \end{aligned} \quad (5.2)$$

więc

$$\begin{aligned} \Lambda \circ B_r(\tilde{F}^0(t, x_1, x_2)) &= \Lambda \circ \int_0^1 B_r(F^0(t, sx_2(t) + (1-s)x_1(t))) ds = \\ &= \int_0^1 \Lambda \circ B_r(F^0(t, sx_2(t) + (1-s)x_1(t))) ds \geq 0, \end{aligned}$$

$$t \in J,$$

co kończy dowód lematu.

Lemat 5.2. Niech założenia poprzedniego lematu będą spełnione. Niech ponadto rodzina $\{B_r(F(t,x))\}_{x \in C_n(J)}$ będzie nieredukowalna na przedziale J . Wtedy również rodzina

$\{B_r(\tilde{F}(t,x_1,x_2))\}_{x_1,x_2 \in C_n(J)}$ jest nieredukowalna na J .

Dowód. Analogicznie jak poprzednio, z założenia lematu wynika, że dla dowolnej ustalonej pary funkcji wektorowych $x_1, x_2 \in C_n(J)$, mamy

$$\Lambda \circ B_r(F^0(t, sx_2(t) + (1-s)x_1(t))) \geq \Lambda \circ U^0(t), \quad t \in J, s \in [0,1],$$

gdzie $U \in D_\Lambda(J)$ jest nieredukowalną minorantą rodziny

$\{B_r(F(t,x))\}_{x \in C_n(J)}$. Stąd, oraz wobec (5.2), otrzymujemy

$$\Lambda \circ B_r(\tilde{F}^0(t,x_1,x_2)) \geq \Lambda \circ U^0(t), \quad t \in J,$$

co kończy dowód.

Dowód twierdzenia 5.1. Ustalmy dowolne ciągi $\alpha \in G_{k,n}$ i $\beta \in G_{n-k,n}$ oraz dowolne dwie funkcje wektorowe $x_1, x_2 \in C_n(J)$.

Macierz fundamentalna $X(t, \tilde{F}(t,x_1,x_2))$ układu (4.7) / dla powyżej ustalonej pary funkcji x_1, x_2 / unormowana w punkcie t_1 jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego (1.7), (1.8), gdzie $A(t) = \tilde{F}(t, x_1(t), x_2(t))$.

Kładąc $r = n-k$ i korzystając z (5.1) otrzymujemy na mocy lematu 5.1, że spełnione są założenia lematu 2.2, gdzie $r = n-k$ i $A = \tilde{F}$. Zatem dla pary indeksów (i,j) , $(1 \leq i, j \leq \binom{n}{n-k})$, określonych jednoznacznie równaniami $i = h_\beta$ i $j = h_\alpha$, oszacowanie

(2.6) z lematu 2.2 daje

$$\begin{aligned} \lambda_j^i x_\alpha^B(t_2; \tilde{F}) &\geq \left(\exp \int_{t_1}^{t_2} b_i^i(\tilde{F}(\tau, x_1, x_2)) d\tau \right) \times \\ &\times \left\{ \delta_j^i + \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_1}^{\tau_{l-2}} \left(\prod_{s=0}^{l-2} \lambda_{i_{s+1}}^{i_s} b_{i_{s+1}}^{i_s}(\tilde{F}(\tau_{s+1}, x_1, x_2)) \right) \times \right. \\ &\times \left. \exp \int_{t_1}^{\tau_{s+1}} b_{i_{s+1}}^{i_{s+1}}(\tilde{F}(\tau, x_1, x_2)) - b_{i_s}^{i_s}(\tilde{F}(\tau, x_1, x_2)) d\tau \right\} d\tau_{l-1} \}, \quad (5.3) \end{aligned}$$

gdzie $i_0 = i$, $i_{l-1} = j$.

Wobec lematu 4.2 prawdziwe jest następujące oszacowanie elementów diagonalnych macierzy $\tilde{F}$

$$-\mu \leq \tilde{F}_j^j(t, x_1, x_2) \leq \mu, \quad t \in J,$$

co z określenia (2.1) elementów macierzy $B_{n-k}(\tilde{F})$ daje

$$\exp \int_{t_1}^{t_2} b_i^i(\tilde{F}(\tau, x_1, x_2)) d\tau \geq \exp(-(n-k)(t_2-t_1)\mu),$$

i

$$\exp \int_{t_1}^{\tau_{s+1}} b_{i_{s+1}}^{i_{s+1}}(\tilde{F}(\tau, x_1, x_2)) - b_{i_s}^{i_s}(\tilde{F}(\tau, x_1, x_2)) d\tau \geq \exp(-2(n-k)(t_2-t_1)\mu).$$

Natomiast wobec lematu 5.2, którego założenia są spełnione

przy $r = n-k$ otrzymujemy, że rodzina $\{B_{n-k}(\tilde{F}(t, x_1, x_2))\}_{x_1, x_2 \in C_n(J)}$

jest nieredukowalna. Jeśli więc $U = (u_j^i)$ jest minorantą tej rodziny, to uwzględniając ostatnie dwie nierówności, otrzymujemy na podstawie oszacowania (5.3)

$$\lambda_j^i x_\alpha^\beta(t_2; \tilde{F}) \geq (\exp(-(n-k)\mu(t_2-t_1))) \left\{ \delta_j^i + \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \right. \\ \left. \dots \int_{t_1}^{\tau_{l-2}} \left(\prod_{s=0}^{l-2} \lambda_{i_{s+1}}^{i_s} u_{i_{s+1}}^{i_s}(\tau_{s+1}) \exp(2(k-n)(1-l)\mu) d\tau_{l-1} \right) \right\} . \quad (5.4)$$

Stąd wobec nieredukowalności U oraz założenia $U \in D_\Lambda(J)$, mamy

$$\eta = \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_1}^{\tau_{l-2}} \left(\prod_{s=0}^{l-2} \lambda_{i_{s+1}}^{i_s} u_{i_{s+1}}^{i_s}(\tau_{s+1}) \right) d\tau_{l-1} > 0 ,$$

$$1 < \binom{n}{n-k} + 1 ,$$

więc

$$\lambda_j^i x_\alpha^\beta(t_2; \tilde{F}) \geq \left\{ \delta_j^i + \eta \exp(2(k-n) \binom{n}{n-k} \mu) \right\} \exp(k-n)\mu . \quad (5.5)$$

Zauważmy teraz, że w przypadku rozważanego warunku brzegowego (3.4), mamy

$$d(x_1, x_2) = |\det(I_\alpha^\alpha + I_\beta^\beta X(t_2; \tilde{F}(t, x_1, x_2)))| = |X_\alpha^\beta(t_2; \tilde{F}(t, x_1, x_2))| .$$

Zatem wobec oszacowania (5.5), prawdziwego dla dowolnej pary funkcji wektorowych $x_1, x_2 \in C_n(J)$, założenia lematu 4.5 są spełnione jeżeli tylko liczbę δ określimy wzorem

$$\delta = \eta \exp \left\{ (k-n)\mu \left(1 + 2 \binom{n}{n-k} \right) \right\} > 0$$

Tak więc teza twierdzenia 5.1 wynika z tezy lematu 4.5.

Uwaga. W przypadku zagadnienia (4.1), (3.6), tj. w przypadku $\beta = \bar{\alpha}$, założenie o nieredukowalności rodziny $\{B_{n-k}(F(t, x))\}_{x \in C_n(J)}$ a w konsekwencji rodziny $\{B_{n-k}(\tilde{F}(t; x_1, x_2))\}_{x_1, x_2 \in C_n(J)}$, można pominąć, gdyż dla $i = j$ nierówność (5.4) przyjmuje postać

$$\lambda_j^i x_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}}(t_2; \tilde{F}) \geq \exp(k-n)\mu ,$$

niezależnie od tego czy rodzina $\{B_{n-k}(\tilde{F}(t, x_1, x_2))\}_{x_1, x_2 \in C_n(J)}$ jest nieredukowalna. Wtedy założenia lematu 4.5 są spełnione przy

$$\delta = \exp(k-n)\mu .$$

Na zakończenie podamy dwa wnioski z twierdzenia 5.1 dotyczące szczególnego typu układu równań różniczkowych oraz równania różniczkowego rzędu n .

Niech

$$\frac{dx}{dt} = A(t)g(x) , \quad (5.6)$$

będzie danym układem równań różniczkowych, w którym A jest ciągłą macierzą stopnia n , a $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ oraz $g(x) = (g^1(x^1), g^2(x^2), \dots, g^n(x^n))$, są n - wymiarowymi wektorami kolumnowymi. Ze względu na postać prawej strony (5.6) możemy mówić, że jest to układ o addytywnie rozdzielonych zmiennych $x^1, x^2, \dots, x^n$. W przypadku $g^i(x^i) = x^i$, $1 \leq i \leq n$, układ (5.6) jest oczywiście liniowy.

Wniosek 5.1. Niech funkcja $g : R^n \rightarrow R^n$ spełnia warunek (A) oraz następujący układ nierówności

$$d_1 \leq \frac{d}{dt} g^i(u) \leq d_2, \quad u \in R, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Jeżeli macierz A spełnia założenia twierdzenia (3.1) oraz $d_1 \geq 0$, to zagadnienie brzegowe (5.6), (3.6) ma jednoznaczne rozwiązanie dla każdego $\alpha \in G_{k,n}$ i dowolnego $c \in R^n$.

Jeżeli natomiast macierz A spełnia założenia twierdzenia 3.2 oraz $d_1 > 0$, to zagadnienie brzegowe (5.6), (3.4) ma jednoznaczne rozwiązanie dla każdej pary (α, β) , $\alpha \in G_{k,n}$, $\beta \in G_{n-k,n}$ i dla dowolnego wektora $c \in R^n$.

Rozważmy teraz równanie różniczkowe rzędu n postaci

$$x^{(n)} = g(t, x), \quad x \in R \quad (5.7)$$

z warunkiem brzegowym

$$\begin{aligned} x^{(i_1)}(t_1) = c^{i_1}, x^{(i_2)}(t_1) = c^{i_2}, \dots, x^{(i_k)}(t_1) = c^{i_k}, \quad 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1, \\ x^{(i)}(t_2) = c^i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad i \neq i_1, i_2, \dots, i_k \end{aligned} \quad (5.8)$$

Zagadnienie to równoważne jest zagadnieniu brzegowemu (4.1), (3.6), gdzie $f(t, x) = (x^2, x^3, \dots, x^n, g(t, x^1))$ oraz $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in G_{k,n}$. Zatem, elementy macierzy Jacobiego $F(t, x) = (f_{x^i}^j(t, x))$ równoważnego układu mają postać

$$f_{x^{i+1}}^i(t, x) = 1, \quad f_{x^1}^n(t, x) = g_{x^1}(t, x^1), \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

pozostałe elementy tej macierzy są równe zero.

Łatwo więc sprawdzić, korzystając z określenia (2.1), że elementy $f_{x_{i+1}}^i$ występują w macierzy $B_{n-k}(F^0)$ tylko ze znakiem plus. Natomiast element $f_{x_1}^n$ występuje w tej macierzy / niekoniecznie tylko raz / zawsze z tym samym znakiem określonym wzorem $(-1)^{n-k+1}$.

Niech teraz Λ będzie macierzą ze zbioru $\Delta_{N \times N}$, $N = \binom{n}{n-k}$, generowaną przez wektor $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$. Oczywiście wszystkie elementy tej macierzy są jedynkami. Zatem jeżeli tylko spełniona jest nierówność $(-1)^{n-k+1} f_{x_1}^n(t, x) \geq 0$, dla $x \in C_n(J)$ to $B_{n-k}(F^0(t, x)) \in D_{\Lambda}(J)$, dla $x \in C_n(J)$. Możemy więc na podstawie twierdzenia 5.1 i powyższych rozważań, sformułować następujący wniosek.

Wniosek 5.2. Niech $g : J \times R \rightarrow R$ będzie funkcją spełniającą warunek (A) oraz taką, że na przedziale J ma miejsce oszacowanie

$$|g_x(t, x)| \leq \quad , \quad x \in C_1(J) \quad .$$

Założmy teraz, że na rozważanym przedziale spełniona jest następująca nierówność

$$(-1)^{n-k+1} g_x(t, x) \geq 0 \quad , \quad x \in C_1(J) \quad .$$

Wtedy zagadnienie brzegowe (5.7), (5.8) ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnego ciągu $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in G_{k,n}$ i dla dowolnego układu liczb $c^1, c^2, \dots, c^n$.

6. Rozważmy raz jeszcze układ równań różniczkowych (4.1) tj.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

i warunek brzegowy (3.4) przy $\alpha \in G_{n-1, n}$, $\beta \in G_{1, n}$.

Jeżeli przyjmiemy $\alpha = (1, \dots, p-1, p+1, \dots, n)$ i $\beta = (q)$ to warunek (3.4) ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1(t_1) \\ \cdot \\ x^{p-1}(t_1) \\ x^p(t_1) \\ x^{p+1}(t_1) \\ \cdot \\ x^n(t_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1(t_2) \\ \cdot \\ x^p(t_2) \\ \cdot \\ x^n(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^1 \\ \cdot \\ c^p \\ \cdot \\ c^n \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

p q

Dla tego szczególnego przypadku udowodnimy twierdzenie analogiczne do twierdzenia 5.1 jednak przy nieco słabszych założeniach.

Twierdzenie 6.1. Niech dana będzie funkcja $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $J = [t_1, t_2]$, spełniająca warunki (A) i (C) i niech dane będą macierze $\Lambda \in \Delta_{n \times n}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_{n \times n}$ takie, że

$$F^0(t, x) \in D_{\Lambda}(J), \quad x \in C_n(J), \quad (6.2)$$

$$C_1 \leq F(t, x) - F^0(t, x) \leq C_2, \quad x \in C_n(J). \quad (6.3)$$

Założmy ponadto, że rodzina $\mathcal{F} = \{F(t, x)\}_{x \in C_n(J)}$ jest nieredukowalna na przedziale J . Wtedy dla dowolnej pary ciągów $\alpha \in G_{n-1, n}$, $\beta \in G_{1, n}$ oraz dla każdego $c \in R^n$ zagadnienie brzegowe (4.1), (6.1) ma jednoznaczne rozwiązanie.

Dowód. Niech $c = (c^1, c^2, \dots, c^n) \in R^n$ oraz $\alpha = (1, \dots, p-1, p+1, \dots, n) \in G_{n-1, n}$ i $\beta = (q) \in G_{1, n}$.

Przez $x(t; c)$ oznaczmy jednoznaczne rozwiązanie układu (4.1) z warunkiem początkowym $x(t_1; c) = c$, przedłużalne na cały przedział J . Istnienie takiego rozwiązania / dla każdego $c \in R^n$ / gwarantuje warunek (C). Ponadto niech $X(t; c)$ oznacza macierz Jacobiego rozwiązania $x(t; c)$ względem warunków początkowych tj.

$$X(t; c) = (x_{c,j}^i(t; c)) \quad .$$

Macierz $X(t; c)$ spełnia tzw. równanie w wariacjach

$$\frac{d}{dt} X(t; c) = F(t, x(t; c)) X(t; c), \quad t \in J, \quad (6.4)$$

z warunkiem początkowym

$$X(t_1; c) = I_n \quad (6.5)$$

Dla każdej liczby rzeczywistej τ określmy wektor $c(p, \tau) \in R^n$ równaniem

$$c(p, \tau) = (c^1, \dots, c^{p-1}, \tau, c^{p+1}, \dots, c^n) \quad .$$

Zauważmy teraz, że dla każdego $\tau \in R$ z (6.2) wynika, że

$$F^0(t, x(t; c(p, \tau))) \in D_{\lambda}(J) \quad . \quad (6.6)$$

Zatem założenia lematu 1.4 odnośnie zagadnienia (6.4), (6.5) są spełnione dla $c = c(p, \tau)$. Z oszacowania (1.13) danego we wniosku z lematu 1.4 otrzymujemy dla każdego $\tau \in R$ nierówność

$$\begin{aligned} \lambda_p^q x_{c^p}^q(t_2; c(p, \tau)) &\geq (\exp \int_{t_1}^{t_2} f_{x^q}^q(v, x(v; c(p, \tau))) dv) \times \\ &\times \left\{ \delta_p^q + \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_1}^{\tau_{l-2}} \left(\prod_{s=0}^{l-2} \lambda_{i_{s+1}}^{i_s} f_{x^{i_{s+1}}}^{i_s}(\tau_{s+1}, x(\tau_{s+1}, c(p, \tau))) \right) \times \right. \\ &\times \exp \int_{t_1}^{\tau_{s+1}} f_{x^{i_{s+1}}}^{i_{s+1}}(v, x(v; c(p, \tau))) - f_{x^{i_s}}^{i_s}(v, x(v; c(p, \tau))) dv \Big) d\tau_{l-1} \Big\} , \\ &\quad (i_0 = q ; i_{l-1} = p) , \end{aligned}$$

co wobec założenia (6.3) i nieredukowalności rodziny

$\{F(t, x)\}_{x \in C_n(J)}$, analogicznie jak w dowodzie nierówności (5.5) daje następujący warunek

$$\lambda_p^q x_{c^p}^q(t_2; c(p, \tau)) \geq \delta > 0 \quad , \quad \tau \in R \quad . \quad (6.7)$$

Niech teraz h będzie odwzorowaniem $R \rightarrow R$ określonym wzorem

$$h(\tau) = x^q(t_2; c(p, \tau)) \quad .$$

Ponieważ $|\lambda_p^q| = 1$, więc z oszacowania (6.7) wynika, że h jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznaczny i $h(R) = R$. Zatem istnieje liczba $T \in R$ taka, że

$$h(T) = x^q(t_2, c(p, T)) = c^p.$$

Twierdzenie zostało więc udowodnione.

Zanotujmy analogiczną uwagę jak po dowodzie twierdzenia 5.1.

Uwaga. W przypadku $q = p$ teza twierdzenia 6.1 pozostaje prawdziwa jeżeli zrezygnujemy z założenia o nieredukowalności rodziny $\mathcal{F}$ jak również z lewostronnego oszacowania $F(t, x) - F^0(t, x)$, w (6.3), /por. [8]/. Natomiast dla uzyskania tezy twierdzenia 6.1 przy ustalonym warunku brzegowym (6.1), gdzie $p \neq q$ w miejsce założenia o nieredukowalności rodziny $\mathcal{F}$ wystarczy zagwarantować tylko nieredukowalność $\mathcal{F}$ względem pary indeksów (q, p) tzn. zagwarantować nieredukowalność minoranty rodziny $\mathcal{F}$ względem (q, p) .

Jako prosty przykład zastosowania powyżej udowodnionego twierdzenia rozważmy następujące zagadnienie brzegowe dla równania nieliniowego trzeciego rzędu

$$x''' = g(t, x, x', x'') \quad , \quad x \in R \quad (6.8)$$

$$x(t_1) = c^1, \quad x''(t_1) = c^2, \quad x(t_2) = c^3, \quad (6.9)$$

gdzie g jest funkcją spełniającą warunek (A) na zbiorze $J \times R^3$.

Zagadnienie to równoważne jest zagadnieniu brzegowemu (4.1), (6.1), gdzie $f(t, x) = (x^2, x^3, g(t, x^1, x^2, x^3))$ oraz $\alpha = (1, 3), \beta = (1)$. Przyjmując, że Λ jest macierzą ze zbioru $\Delta_{3 \times 3}$ generowaną przez wektor $\lambda = (1, 1, 1)$ i korzystając z postaci macierzy Jacobiego równoważnego układu wobec uwagi po twierdzeniu 6.1 otrzymujemy następujący wniosek

Wniosek 6.1. Niech równanie (6.8) spełnia warunek (C) na $J \times \mathbb{R}^3$, $J = [t_1, t_2]$. Jeżeli ponadto

$$g_{x^1}(t, x) \geq 0, \quad g_{x^2}(t, x) \geq 0, \quad x = (x^1, x^2, x^3) \in C_3(J),$$

to zagadnienie brzegowe (6.8), (6.9) ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnego układu liczb c^1, c^2, c^3 .

W przypadku równań (6.8) z prawą stroną spełniającą warunek (A) wniosek 6.1 implikuje mocniejszą wersję rezultatu uzyskanego w pracy [1, L.2.1].

Uwaga. Gdy z założeń twierdzenia 6.1 całkowicie wyeliminujemy warunek (6.3) oraz założenie o nieredukowalności rodziny $\mathcal{F}$ zastąpimy następującą nierównością

$$\Lambda \circ F^0(t, x) > 0, \quad x \in \mathbb{C}_n(J),$$

to w miejsce (6.7) otrzymujemy

$$\lambda_p^q x_{c^p}^q(t_2, c(p, T)) > 0$$

Wtedy odwzorowanie h określone w dowodzie powyższego twierdzenia jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym lecz niekoniecznie musi być $h(R) = R$, a więc możemy jedynie stwierdzić, że zagadnienie brzegowe (4.1), (6.1) ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Podobnego typu rezultaty dotyczące jednoznaczności rozwiązań w przypadku układów drugiego rzędu zawarte są w pracy [17, Tw.2.1 - 2.4, s.82] .

Bibliografia

- [1] BARR, D. and T. SHERMAN, Existence and uniqueness of solutions of three-point boundary value problems, J. Diff. Eqs., 13 /1973/, 197 - 212.
- [2] CLEAVE, J.P., Two-point boundary value problems for systems of second order ordinary differential equations, J. London Math. Soc. 2 , 7 /1973/, 55-63.
- [3] GARNER, J.B., Boundary conditions for the linear differential equation, Amer. Math. Monthly, 69 /1962/, 47-50.
- [4] GARNER, J.B., A multiple-point boundary condition for linear differential systems, Amer. Math. Monthly 70 /1963/, 850-852.
- [5] GARNER, J.B., Solutions of linear differential systems satisfying multiple-point boundary conditions, Amer. Math. Monthly 73 /1966/, 6-10.
- [6] GARNER, J.B. and L.P. BARTON, Solutions of linear differential systems conditions in the large, Proc. Amer. Math. Soc. 12 /1961/, 100-106.
- [7] GEWERT, M., On two-point boundary value problem for a system of linear differential equations , Fasc. Math. / w druku /.
- [8] GEWERT, M., On two-point boundary value problem for a system of nonlinear differential equations, / przesłana do druku w Ann. Polon. Math. /.
- [9] HARTMAN, P., Ordinary differential equations, John Wiley and Sons, New York /1964/.
- [10] HARTMAN, P., On boundary value problems for systems of ordinary, nonlinear, second order, differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 96 /1960/, 493-509.

- [1] GINGOLD, H., Uniqueness of linear boundary value problems for differential systems, Pacific J. Math. 75 /1978/, 107-136.
- [2] LASOTA, A., On two-point boundary value problems for systems of ordinary non-linear, first-order differential equations, Ann. Polon. Math. 29 /1975/, 391-396.
- [3] MARCUS, M. and H. MINC, A survey of matrix theory and matrix inequalities, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1964.
- [4] MORTONI, V.R.G. and J.B. GARNER, Existence-uniqueness theorems for three-point boundary value problems for nth-order nonlinear differential equations, J. Diff. Eqs. 29 /1978/, 205-213.
- [5] ЧУРИКОВ, В.А., ДРОГОВЗОВ, З.И., САМБОРСКАЯ, А.Н., Об однозначной разрешимости двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения 8 /1972/, 995-1003.
- [6] УРБАНОВИЧ, М.И., О матрице Грина для одного класса линейных двухточечных краевых задач, Дифференц. уравнения 2 /1966/, 1043-1051 .
- [7] ГУДКОВ, В.В., КЛОКОВ, Ю.А., ЛЕПИН, А.Я., ПОНОМАРЕВ, В.Д., Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, Рига, 1973 .

Raport złożony w Redakcji Instytutu

7.XI.80

ODBIORCY:

egz.

1. Z. Romanowicz, Wrocław	1
2. K. Kołodziejczyk, Wrocław	1
3. Z. Skoczylas, Wrocław	1
4. M. Pietrzyk, Wrocław	1
5. Recenzenci	2
6. Autor	3
7. Biblioteka Gł.	1
8. Biblioteka I-18	1
9. Biblioteka Inst. Mat. U. Wr	1
10. Redakcja I-18	1
Razem	14