

Józef Kupczyk

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

WYCENA OPCJI POGODOWEJ METODAMI AKTUARIALNYMI

1. Wstęp

Jednym z najnowszych osiągnięć inżynierii finansowej są pogodowe instrumenty pochodne (*weather derivatives*). Skonstruowano je do zarządzania ryzykiem pogodowym (*weather risk*). Wycena pogodowych instrumentów pochodnych nie została dotychczas opracowana w zadowalający sposób. Jest ona znacznie utrudniona z powodu braku płynności obrotu tymi instrumentami, a przede wszystkim ze względu na specyfikę ich instrumentów podstawowych – indeksów pogodowych (*weather indices*), które nie pochodzą z rynku finansowego, nie mają swojej ceny, ani też nie można powiązać ich wartości z ceną jakiegoś instrumentu finansowego (jak ma to miejsce np. w przypadku takich instrumentów podstawowych, jak indeksy giełdowe czy stopy procentowe).

Pogodowe instrumenty pochodne są przedmiotem kontraktów zawieranych przede wszystkim w Stanach Zjednoczonych, w Europie Zachodniej oraz w Azji. Należy spodziewać się pojawiania się ich na rynku pozagiełdowym w Polsce. Z tego też względu uzasadnione wydaje się być podjęcie rozważań na temat wyceny jednego z podstawowych rodzajów pogodowych instrumentów pochodnych, czyli opcji pogodowej, co jest celem tego artykułu. Przedstawione tu, najczęściej stosowane obecnie w praktyce aktuarialne metody wyceny opcji pogodowej ilustruje przykład wyceny kontraktu, którego przedmiotem jest opcja pogodowa o specyfikacji odpowiedniej dla polskich warunków.

W artykule rozważana jest wycena opcji pogodowej typu europejskiego, gdyż tego typu opcje pogodowe są najbardziej popularne.

2. Opcja pogodowa – podstawowe informacje

Opcja pogodowa to instrument finansowy, którego wartość zależy od wartości indeksu pogodowego. Indeksy pogodowe wyliczane są na podstawie parametrów pogody, tzn. temperatury powietrza, opadu deszczu, opadu śniegu, prędkości wiatru itd. Najbardziej popularnym indeksem pogodowym jest indeks HDD (*heating degree day*), mierzący ujemne odchylenia średniej dobowej temperatury powietrza T_i od wartości 65°F (18,3°C) w danym okresie. Jego wartość po n dniach notowania jest wyliczana za pomocą następującego wzoru:

$$HDD_n = \sum_{i=1}^n HDD_i, \quad (1)$$

gdzie: $HDD_i = \max\{65^\circ\text{F} - T_i, 0\}$. Średnia dobową temperaturę powietrza T_i jest wyliczana jako średnia arytmetyczna minimalnej i maksymalnej dobowej wielkości temperatury.

Funkcja wypłaty dla długiej pozycji w pogodowej opcji *call* z limitem w wysokości L_* jest dana następującym wzorem:

$$h_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < K \\ \alpha(x - K) & \text{dla } K \leq x \leq L, \\ L_* & \text{dla } x > L \end{cases}, \quad (2)$$

gdzie: K – cena wykonania, $\alpha > 0$ – wartość jednostki indeksu pogodowego, L – górna granica indeksu taka, że $L_* = \alpha(L - K)$.

Limity wypłat mają zwykle kontrakty pogodowe zawierane na rynku pozagiełdowym.

3. Uwagi na temat wyceny pogodowych instrumentów pochodnych

Podstawową metodą wyceny instrumentów pochodnych jest wycena arbitrażowa (*arbitrage pricing*). Gdy wycena arbitrażowa jest utrudniona, wtedy stosowana bywa wycena aktuarialna (*actuarial pricing*), za pomocą której wyceniane są instrumenty rynku ubezpieczeniowego.

W przypadku pogodowych instrumentów pochodnych wycena arbitrażowa jest istotnie utrudniona, gdyż indeksy pogodowe nie są przedmiotem obrotu i w związku z tym nie mają swojej ceny. Replikacja pogodowego instrumentu pochodnego jest zatem możliwa jedynie za pomocą innych, notowanych na rynku pogodowych instrumentów, opartych na tym samym indeksie (bądź na indeksach wysoko skorelowanych z indeksem danego instrumentu) i ma sens wtedy, gdy obrót nimi jest płynny (brak płynności uniemożliwia realizację dynamicznego zabezpieczenia). Niestety, indeksy pogodowe odzwierciedlają warunki pogodowe jedynie określo-

nego miejsca i jeżeli dla danej lokalizacji istnieje rynek pogodowych instrumentów pochodnych, to nie jest on zwykle płynny. Obecnie, są sytuacje, kiedy jest możliwa replikacja opcji pogodowej – gdy istnieje płynny rynek pogodowego kontraktu *forward* opartego na tym samym indeksie pogodowym bądź gdy występuje wysoka korelacja indeksu opcji pogodowej z indeksem takiego kontraktu. W przypadku pogodowego kontraktu *forward* replikacja nie jest praktycznie możliwa (choć teoretycznie długą pozycję w kontrakcie *forward* można otrzymać za pomocą złożenia długiej pozycji w opcji *call* i krótkiej pozycji w opcji *put* z tą samą ceną wykonania i tym samym terminem wygaśnięcia, podobnie można także zreplikować krótką pozycję w kontrakcie *forward*), zatem w tym wypadku rynek jest niezupełny.

Możliwa jest także wycena arbitrażowa pogodowych instrumentów pochodnych na rynkach niezupełnych, która nie prowadzi do wyznaczenia strategii zabezpieczającej. Polega ona na uwzględnieniu w przyjętym procesie opisującym kształtowanie się wielkości parametru pogody tzw. rynkowej ceny ryzyka w taki sposób, aby proces ceny danego instrumentu zdyskontowany po stopie wolnej od ryzyka był martyngałem. Parametry określające rynkową cenę ryzyka estymuje się poprzez kalibrację ceny instrumentu, jaką otrzymuje się z modelu, do historycznej ceny rynkowej. Taka wycena jest zatem możliwa, gdy istnieje płynny rynek danego instrumentu pogodowego.

W związku z przedstawionymi powyżej trudnościami wycena arbitrażowa nie znajduje obecnie większego zastosowania, a pogodowe instrumenty pochodne wyceniane są przede wszystkim metodą aktuarialną.

Wycena metodą aktuarialną polega na estymacji rozkładu funkcji wypłaty danego instrumentu na podstawie danych historycznych, a następnie wyliczeniu ceny instrumentu, za którą przyjmuje się zwykle sumę zdyskontowanej, po stopie wolnej od ryzyka, wartości oczekiwanej rozkładu funkcji wypłaty oraz premii za ryzyko.

Premia za ryzyko jest składnikiem ceny mogącym budzić kontrowersje. Jeżeli ceną kontraktu byłaby jedynie zdyskontowana, po stopie wolnej od ryzyka, wartość oczekiwana rozkładu funkcji wypłaty, wtedy owa wartość oczekiwana byłaby traktowana jako pewny przyszły przepływ pieniężny. Taka sytuacja oznaczałaby, że wypłata nie jest losowa, ale równa właśnie rozważanej wartości oczekiwanej. W rzeczywistości oczywiście tak nie jest, tzn. przyszła wysokość wypłaty zwykle różni się od wartości oczekiwanej. Wypłata z kontraktu pogodowego nie jest zatem pewna – związane jest z nią ryzyko – dlatego obecność premii za ryzyko w cenie znajduje uzasadnienie.

Obecność premii za ryzyko w cenie otrzymywanej metodą aktuarialną jest zatem uzasadniona, jednak sposób jej wyliczania może budzić wątpliwości. Zwykle brakuje bowiem argumentów, dlaczego akurat danej wielkości premia za ryzyko jest właściwą ceną danego ryzyka. Jest wiele metod wyznaczania premii za ryzyko, a to oznacza, że faktycznie nie ma zgodności co do sposobu jej wyliczania.

Metoda wyceny nie budzi kontrowersji wtedy, gdy umożliwia wyliczenie ceny „dobrej” w jakimś sensie, innymi słowy takiej, którą można obiektywnie uzasad-

nić. Metoda arbitrażowa pozwala na uzyskanie ceny, co do której nie ma zastrzeżeń, że jest „dobra”, gdyż, w najgorszym razie, co najmniej nie daje ona możliwości arbitrażu (w przypadku instrumentu replikowalnego cena obliczona metodą arbitrażową jest sprawiedliwa – gdyż wynosi tyle, ile kosztuje odpowiednia, idealnie zabezpieczająca, strategia). Ogólnie, cena otrzymywana w wyniku wyceny aktuarialnej nie jest „dobra” w żadnym sensie z powodu subiektywnie wyznaczonej premii za ryzyko. Jest to poważna wada tej metody. Jednak w szczególnych przypadkach cena uzyskiwana metodą aktuarialną może być „dobra” w pewnym sensie, a mianowicie:

- gdy za cenę przyjmowana jest jedynie wartość oczekiwana rozkładu funkcji wypłaty, zdyskontowana po stopie wolnej od ryzyka, wtedy cena taka jest „dobra” w tym sensie, że zawarcie dużej liczby analogicznych kontraktów o niezależnych wypłatach nie powoduje ani osiągnięcia zysku, ani poniesienia straty; w tym artykule taka cena jest nazywana E-sprawiedliwą ceną,
- gdy za cenę przyjmowana jest suma zdyskontowanej, po stopie wolnej od ryzyka, wartości oczekiwanej rozkładu funkcji wypłaty oraz premii za ryzyko, obliczonej na podstawie rynkowej ceny tego ryzyka, wtedy cena taka nie budzi zastrzeżeń, gdyż ryzyko jest oszacowane obiektywnie, na podstawie rynkowych cen instrumentu.

W ramach wyceny aktuarialnej pogodowych instrumentów pochodnych wyróżniane są następujące metody [5]:

- metoda *burn analysis*,
- modelowanie indeksu (*index modelling*), u podstaw którego leży modelowanie indeksu pogodowego w momencie wygaśnięcia opcji,
- modelowanie dzienne (*daily modelling*), oparte na modelowaniu dobowych wielkości parametru pogody.

4. Aktuarialne metody wyceny opcji pogodowej

Wycena opcji pogodowej polega na znalezieniu premii. E-sprawiedliwa premia p_E jest równa zdyskontowanej, po stopie wolnej od ryzyka, wartości oczekiwanej rozkładu funkcji wypłaty opcji, tzn.:

$$p_E = e^{-rT} E(h_K(X)) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} h_K(x) dF(x), \quad (3)$$

gdzie: $h_K(x)$ – funkcja wypłaty opcji, r – stopa procentowa wolna od ryzyka, T – długość okresu do terminu wygaśnięcia, $F(x)$ – dystrybuenta rozkładu wartości indeksu w momencie wygaśnięcia opcji. Innymi słowy, E-sprawiedliwa premia jest takiej wysokości, że oczekiwany zysk z zawarcia kontraktu jest dla jego obu stron równy zeru.

Wycena opcji pogodowej metodą *burn analysis* polega na wyliczeniu wartości funkcji wypłaty dla historycznych wartości indeksu, wyliczeniu średniej arytmetycznej z otrzymanych wartości i zdyskontowaniu jej, po stopie wolnej od ryzyka, na chwilę zawarcia kontraktu.

Wycena opcji pogodowej metodą *modelowanie indeksu* polega na wyliczeniu wartości indeksu w momencie wygaśnięcia opcji na podstawie historycznych wielkości parametru pogody, dopasowaniu rozkładu do wyliczonych wartości indeksu, wyliczeniu wartości oczekiwanej rozkładu funkcji wypłaty i zdyskontowaniu jej, po stopie wolnej od ryzyka, na moment wyceny. Jeżeli wyliczenie wartości oczekiwanej rozkładu funkcji wypłaty nie jest łatwe, wtedy E-sprawiedliwą premię można wyliczyć za pomocą metody symulacyjnej. W tym celu należy wygenerować dużą liczbę wartości indeksu z jego znalezionej rozkładu, dla każdej wyliczonej wartości indeksu obliczyć wartość funkcji wypłaty, a następnie obliczyć średnią arytmetyczną z otrzymanych wartości i zdyskontować ją na moment dokonywania wyceny.

Wzory na wartość oczekiwaną rozkładu funkcji wypłaty różnego rodzaju opcji pogodowych w przypadku, gdy rozkład indeksu jest rozkładem normalnym, znajdują się w pracy [5, s. 308-309, s. 312].

Metoda wyceny *modelowanie dzienne* w odniesieniu do opcji pogodowej polega na znalezieniu postaci modelu kształtowania się dobowych wielkości parametru pogody, znalezieniu wzoru na wartość oczekiwaną rozkładu funkcji wypłaty z uwzględnieniem przyjętej dynamiki wielkości parametru pogody (bądź skorzystaniu z istniejącego), wyliczeniu wartości oczekiwanej rozkładu funkcji wypłaty i zdyskontowaniu jej, po stopie wolnej od ryzyka, na moment wyceny opcji. Znalezienie wzoru na rozważaną wartość oczekiwaną nie jest zwykle łatwe. W razie braku jawnej postaci takiego wzoru, E-sprawiedliwą premię można znaleźć za pomocą metody symulacyjnej. Należy wówczas wygenerować dużą liczbę serii dobowych wielkości parametru pogody, dla każdej serii wygenerowanych danych wyliczyć wartość funkcji wypłaty, obliczyć średnią arytmetyczną z wartości wypłaty i zdyskontować ją na moment wyceny opcji.

Do modelowania temperatury powietrza F. Dornier i M. Queruel [4] zaproponowali proces stochastyczny spełniający następujące stochastyczne równanie różniczkowe:

$$dT_t = dT_t^m + a_t(T_t^m - T_t)dt + \sigma_t dW_t, \quad (4)$$

gdzie: T_t – średnia dobową temperaturą powietrza dla doby t , a_t – parametr szybkości powrotu do średniej, T_t^m – długoterminowa średnia temperatura powietrza dla doby t , do której powraca proces, σ_t – dobową zmienność temperatury powietrza, W_t – proces Wienera. Losowość przyrostów temperatury powietrza jest modelowana tutaj za pomocą przyrostów procesu Wienera, czyli za pomocą niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym.

Model dany wzorem (4) rozważali także P. Alaton i in. [1], z tym, że przyjęli stałą wartość parametru szybkości powrotu do średniej. Zaproponowano także inne modele temperatury powietrza (zob. np. [3; 2]).

Zawarcie kontraktu opcyjnego wymaga zwykle zwiększenia E-sprawiedliwej premii o premię za ryzyko. Premia za ryzyko może być wyrażona w procentach odchylenia standardowego rozkładu funkcji wypłaty. Na przykład może zostać ustalona na poziomie 20% odchylenia standardowego rozkładu funkcji wypłaty [5, s. 62].

5. Przykład wyceny opcji pogodowej

Przykład specyfikacji kontraktu, którego przedmiotem jest opcja pogodowa oparta na indeksie HDD wyliczanym dla Wrocławia, zawiera tab.1.

Do wyceny tego kontraktu autor wykorzystuje szereg czasowy średniej dobowej temperatury powietrza, wyliczony na podstawie szeregów czasowych dobowych wielkości minimalnej i maksymalnej temperatury powietrza z lat 1989-2002 uzyskanych ze stacji meteorologicznej wskazanej w specyfikacji kontraktu. Ponieważ do wyceny wykorzystywane są dane meteorologiczne z czternastu lat, w obliczeniach pomijana jest analiza występowania trendu w kształtowaniu się temperatury powietrza, związanego z występowaniem globalnego ocieplenia oraz rozwoju „miejskiej wyspy ciepła”. Ponieważ rok 2003 nie był rokiem przestępnym, autor odrzuca dane z 29 lutego z wykorzystywanego szeregu czasowego.

Wycena przebiega w następujący sposób: w pierwszej kolejności przedstawiona zostaje postać funkcji wypłaty rozważanego kontraktu i wzór na E-sprawiedliwą cenę, a następnie zostaje wyliczona E-sprawiedliwa premia kolejno metodami: *burn analysis*, modelowanie indeksu i modelowanie dzienne.

Tabela 1. Przykład specyfikacji kontraktu pogodowego odpowiedniego dla polskich warunków

Pogodowy kontrakt opcyjny	
Typ opcji:	kupna (<i>call</i>)
Styl wykonania opcji:	europejska
Instrument podstawowy:	indeks HDD*
Wartość jednego punktu indeksowego:	10 000 zł
Wartość kontraktu:	mnożnik × wartość indeksu
Minimalna zmiana wartości kontraktu:	1 punkt indeksowy, czyli 10 000 zł
Okres notowania:	01.01.2003-31.03.2003
Stacja meteorologiczna:	Wrocław-Strachowice (stacja IMGW), WMO 12424**
Cena wykonania (<i>strike</i>):	1 410 zł
Maksymalna wypłata:	2 500 000 zł
*indeks HDD wyliczany jest na podstawie temperatury powietrza mierzonej w stopniach Celsjusza, temperatura odniesienia wynosi 18,0°C	
**kod stacji według Światowej Organizacji Meteorologicznej (<i>World Meteorological Organization</i> – WMO)	

Źródło: opracowanie własne.

Funkcja wypłaty rozważanego kontraktu opcyjnego jest dana wzorem:

$$h_{1410}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1410 \\ 10\,000(x - 1410) & \text{dla } 1410 \leq x \leq 1660, \\ 2\,500\,000 & \text{dla } x > 1660 \end{cases}$$

natomiast wzór na E-sprawiedliwą premię przybiera następującą postać:

$$P_E = e^{-0,25r} E(h_{1410}(X)) = e^{-0,25r} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1410}(x) dF(x),$$

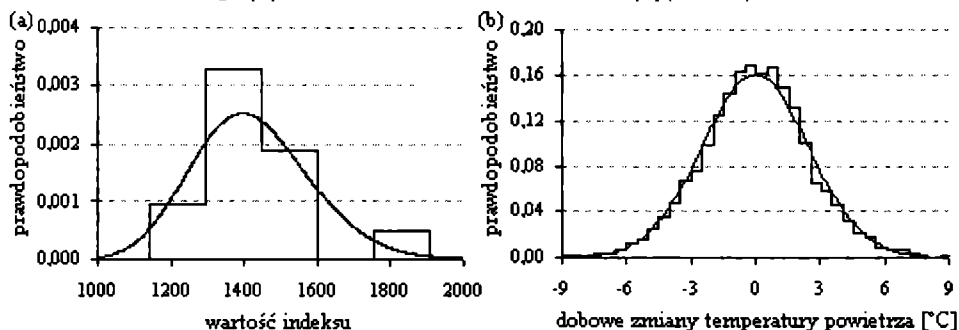
gdzie: r – stopa procentowa wolna od ryzyka, $F(x)$ – dystrybuanta rozkładu wartości indeksu.

Szczegóły wyceny metodą *burn analysis* ze względu na jej prostotę autor pomija. E-sprawiedliwa premia wyliczona tą metodą dla $r = 0$ wynosi 452 143 zł.

W metodzie wyceny modelowanie indeksu wartości indeksu w momencie wygaśnięcia kontraktu autor modeluje za pomocą zmiennej losowej o rozkładzie logarytmiczno-normalnym.

O wyborze tego modelu przesądza wykres histogramu wartości indeksu oraz gęstości rozkładu logarytmiczno-normalnego z parametrami wyestymowanymi metodą największej wiarygodności z próby $Y_1 = \ln(X_1)$, $Y_2 = \ln(X_2)$, ..., $Y_{14} = \ln(X_{14})$, gdzie $X_1, X_2, \dots, X_{14}$ to posiadana próba wartości indeksu (zob. rys. 1a). Wartości estymatorów parametrów μ oraz σ^2 rozkładu logarytmiczno-normalnego wynoszą:

$$\hat{\mu} = 1/14 \sum_{i=1}^{14} Y_i = \bar{Y} = 7,253, \quad \hat{\sigma}^2 = 1/14 \sum_{i=1}^{14} (Y_i - \bar{Y})^2 = 0,013.$$



Rys.1. Unormowany histogram wartości indeksu HDD i gęstość rozkładu logarytmiczno-normalnego (a) oraz unormowany histogram dobowych zmian temperatury powietrza i gęstość rozkładu normalnego (b)

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem danych Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej (tj. temperatury powietrza odnotowanej na stacji Wrocław-Strachowice).

Trafność wyboru modelu autor weryfikuje za pomocą testu Kołmogorowa na poziomie istotności $\alpha = 0,01$. Wartość statystyki testowej, wyliczonej na podstawie następującego wzoru:

$$D_n = \sup_{-\infty < s < \infty} |F_n(s) - F_0(s)|, \quad (5)$$

gdzie: F_n – dystrybuenta empiryczna, F_0 – dystrybuenta rozkładu logarytmiczno-normalnego, wynosi $D_{14} = 0,168$. Wartość ta nie należy do zbioru $W = [0,418; 1]$, będącego zbiorem krytycznym dla 14-elementowej próby i poziomu istotności $\alpha = 0,01$. Nie ma zatem podstaw do odrzucenia hipotezy, że wartości indeksu mają rozkład logarytmiczno-normalny z danymi parametrami oraz na przyjętym poziomie istotności.

W celu wyliczenia E-sprawiedliwej ceny opcji autor generuje 10000 wartości z wyznaczonego rozkładu logarytmiczno-normalnego, wylicza odpowiadające im wartości funkcji wypłaty, które następnie uśrednia. W efekcie dla $r = 0$ E-sprawiedliwa cena kontraktu wyliczona metodą modelowania indeksu wynosi 624 659 zł.

Do modelowania dobowych wielkości temperatury powietrza, będących elementem wyceny metodą modelowania dzienne, autor wykorzystuje proces stochastyczny spełniający równanie (4). Za przyjęciem tego procesu przemawia widoczny na rys. 1b wysoki stopień dopasowania rozkładu normalnego do histogramu wyznaczonego dla 5112-elementowej próby, którą stanowią dobowe zmiany temperatury powietrza z lat 1989-2002. Parametry rozkładu normalnego μ i σ^2 autor estymuje na podstawie wspomnianej próby metodą największej wiarygodności i otrzymuje $\hat{\mu} = -0,002$ oraz $\hat{\sigma}^2 = 6,145$. Autor weryfikuje trafność wyboru modelu za pomocą testu Kołmogorowa na poziomie istotności $\alpha = 0,01$. Ze względu na dużą licznosc próby korzysta ze statystyki testowej danej wzorem:

$$\lambda = \sqrt{n} D_n, \quad (6)$$

która ma dla $n \rightarrow \infty$ rozkład graniczny (nazywany rozkładem Kołmogorowa). W wyniku obliczeń uzyskuje $D_{5112} \approx 0,018$, a następnie $\lambda = \sqrt{5112} D_{5112} \approx 1,310$. Wartość statystyki λ nie należy do zbioru $W = [1,628; \infty)$, który jest zbiorem krytycznym dla poziomu istotności $\alpha = 0,01$, a zatem nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że badana próba pochodzi z rozkładu normalnego $N(-0,002; 6,145)$.

Parametry procesu stochastycznego, tj. parametr a – prędkości powrotu do średniej, T_t^m – długoterminowej średniej temperatury powietrza dla doby t oraz σ_t – dobowej zmienności temperatury powietrza autor estymuje z dobowych wielkości temperatury powietrza z lat 1989-2002.

W przypadku parametru σ_t autor uznaje za wystarczającą estymację zmienności dla poszczególnych miesięcy (por. [1, s. 8]). Do estymacji parametrów σ_s ,

$\delta = 1, 2, \dots, 12$ (σ_1 oznacza zmienność w styczniu, σ_2 – zmienność w lutym itd.) autor wykorzystuje statystykę daną wzorem [1, s. 11]:

$$\hat{\sigma}_\delta^2 = \frac{1}{N_\delta} \sum_{i=0}^{N_\delta-1} (T_{i+1} - T_i)^2, \quad (7)$$

gdzie: N_δ – liczba dni w miesiącu δ , $\delta = 1, 2, \dots, 12$, natomiast do estymacji parametru a – statystykę następującej postaci [1, s. 12]:

$$\hat{a}_n = -\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{T_{i-1}^m - T_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2} (T_i - T_i^m) \right) / \left(\sum_{i=1}^n \frac{T_{i-1}^m - T_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2} (T_{i-1} - T_{i-1}^m) \right). \quad (8)$$

Estymacja tych parametrów daje następujące wyniki: $\hat{\sigma}_1 = 4,422$, $\hat{\sigma}_2 = 2,206$, $\hat{\sigma}_3 = 2,357$, $\hat{\sigma}_4 = 2,320$, $\hat{\sigma}_5 = 2,157$, $\hat{\sigma}_6 = 2,443$, $\hat{\sigma}_7 = 1,905$, $\hat{\sigma}_8 = 2,633$, $\hat{\sigma}_9 = 2,183$, $\hat{\sigma}_{10} = 2,715$, $\hat{\sigma}_{11} = 2,633$, $\hat{\sigma}_{12} = 3,256$ oraz $\hat{a} = 0,241$.

Za długoterminową średnią temperaturę powietrza T_t^m dla doby t autor przyjmuje średnią z dobowych wielkości temperatury powietrza z lat 1989-2002, gdyż uznaje, iż wykorzystywane dane z czternastoletniego okresu nie dadzą możliwości estymacji trendu.

W celu wyliczenia E-sprawiedliwej ceny, autor generuje 10 000 trajektorii procesu stochastycznego, z których każda stanowi możliwy przebieg dobowych wielkości temperatury powietrza w 2003 r. Następnie, kolejno wylicza wartości indeksu HDD dla okresu od 01.01.2003 do 31.03.2003 r., odpowiadające im wartości funkcji wypłaty oraz średnią arytmetyczną z wyliczonych wartości funkcji wypłaty. W efekcie dla $r = 0$ wartość kontraktu wynosi 358 363 zł.

Tabela 2. Wyniki wyceny kontraktu pogodowego określonego w tab. 1

Metoda wyceny	E-sprawiedliwa premia ($r = 0$)
<i>Burn analysis</i>	452 143 zł
Modelowanie indeksu	624 659 zł
Modelowanie dzienne	358 363 zł

Źródło: opracowanie własne.

E-sprawiedliwe ceny kontraktu opcyjnego, wyliczone za pomocą poszczególnych metod aktuarialnych, zostały zebrane w tab. 2.

Wyliczone E-sprawiedliwe premie różnią się dość istotnie. Premia obliczona metodą *burn analysis* jest większa o 26% od najniższej, otrzymanej za pomocą metody modelowanie dzienne. Z kolei premia wyliczona metodą modelowanie indeksu jest wyższa od premii uzyskanej za pomocą metody *burn analysis* o 38%. Powodem tego jest obecność w próbie historycznych wartości indeksu HDD jednej wartości znacznie przewyższającej pozostałe, co jest widoczne na wykresie histogramu na rys. 1a. Zdaniem autora pojawienie się tej wartości oznacza zrealizowanie się zdarzenia mało prawdopodobnego. Wartość ta zawyża wysokość premii otrzymanej za pomocą metody *burn analysis*. W jeszcze większym stopniu wpływa

na wysokość premii wyliczonej metodą modelowanie indeksu, gdyż w efekcie jej obecności modelem lepszym od spodziewanego rozkładu normalnego okazuje się rozkład logarytmiczno-normalny z cięższym prawym ogonem. Wartości wygenerowane z tego rozkładu zawierają większą niż w historycznym szeregu liczbę wysokich wartości, w wyniku czego premia uzyskana metodą modelowanie indeksu znacznie przewyższa premię wyliczoną metodą *burn analysis*. Z powyższych względów, zdaniem autora, najbliższa faktycznej wartości rozważanego kontraktu opcyjnego jest premia wyliczona metodą modelowanieienne. W wyniku wykorzystania całej historii danych premia ta nie jest obciążona błędem wynikającym z przeszacowania zdarzeń mało prawdopodobnych. Oczywiście można także sformułować pewne krytyczne uwagi na temat przeprowadzonej wyceny metodą modelowanieienne. Wątpliwości może budzić dobór modelu procesu stochastycznego, wykorzystanego do generowania dobowych wielkości temperatury powietrza. Wydaje się, że lepszy efekt dałoby wykorzystanie procesu, w którym losowe części przyrostów są zależne. W każdym razie, dyskutując na temat doboru procesów stochastycznych do wyceny pogodowych instrumentów pochodnych, należy mieć na względzie, iż badania prowadzone w tym zakresie są w początkowej fazie rozwoju.

Z przedstawionej argumentacji wynika, iż należałoby nie uwzględnić w obliczeniach premii wspomnianej ekstremalnej wartości, która spowodowała tak istotne wypaczenia. W praktycznej sytuacji byłoby to zapewne właściwe rozwiązanie. Autor nie uczynił tego, gdyż, pomijając kwestię kontrowersyjności takich zabiegów, wycena przeprowadzona w obecnej postaci stanowi dobry przykład do ilustracji zalet i wad aktuarialnych metod wyceny.

6. Podsumowanie

Zabezpieczanie ryzyka związanego z losowością wypłaty opcji pogodowej jest znacznie utrudnione, dlatego podstawowa metoda wyceny instrumentów pochodnych, czyli metoda arbitrażowa, nie znajduje obecnie zastosowania w przypadku tego typu instrumentów. W stosowanej powszechnie wycenie aktuarialnej opcji pogodowej problematyczne są przede wszystkim kwestia wyznaczania premii za ryzyko oraz wybór sposobu przeprowadzenia wyceny – metodami *burn analysis*, modelowanie indeksu czy modelowanieienne.

Przedstawiony przykład wyceny aktuarialnej opcji pogodowej pokazuje, że nie jest ona łatwym zadaniem. Uwidacznia zwłaszcza trudności, jakie mogą towarzyszyć wyborowi metody wyceny w ramach wyceny aktuarialnej.

Należy się spodziewać, że w miarę wzrostu płynności rynku pogodowych instrumentów pochodnych przeważająca obecnie w praktyce wycena metodą aktuarialną będzie ustępowała miejsca metodzie arbitrażowej.

Literatura

- [1] Alaton P., Djehiche B., Stillberger D., *On Modelling and Pricing Weather Derivatives*, http://www.energyforum.net/downloads/reports/fat_1.pdf, 2002.
- [2] Benth F.A., Šaltytė-Benth J., *Stochastic Modelling of Temperature Variations with a View towards Weather Derivatives*, <http://folk.uio.no/fredb/temp-analysis.pdf>, 2004.
- [3] Brody D. C., Syroka J., Zervos M., *Dynamical Pricing of Weather Derivatives*, „Quantitative Finance” 2002 vol. 3, s. 189-198.
- [4] Dornier F., Queruel M., *Caution to the Wind*, „Weather Risk. A Risk and Energy & Power Risk Management Special Report”, The Grange Press, Southwick, 2000, s. 30-32.
- [5] Jewson S., Brix A., Ziehmman Ch., *Weather Derivative Valuation. The Meteorological, Statistical, Financial and Mathematical Foundations*, Cambridge University Press, Cambridge 2005.

VALUATION OF THE WEATHER OPTION WITH ACTUARIAL METHODS

Summary

A weather option is one of the newest achievements of financial engineering. One should expect appearing of instruments of this type on the financial market in Poland.

Valuation of the weather option, alike like of remained weather derivative securities, has not been, like to date, worked out in the satisfying way. In the article actuarial methods of the valuation of the weather option, widely used at present in practice, are considered. An example of the valuation of the weather option contract, with specification for Polish conditions, illustrates the considerations.