

Magdalena Homa

Politechnika Wrocławska

PROCES RYZYKA I PRAWDOPODOBIENSTWO RUINY DLA UBEZPIECZEŃ WIELOOPCYJNYCH

1. Wstęp

Działalność ubezpieczeniowa związana jest z występowaniem ryzyka. Ryzyko w ubezpieczeniach wieloopcyjnych można badać w dwóch aspektach: jako ryzyko związane z przedmiotem ubezpieczenia i aspekt finansowy ryzyka (por. [1; 7]). Aspekt finansowy ryzyka związanego z działalnością ubezpieczyciela dotyczy kalkulacji składek ubezpieczeniowych, tworzenia rezerw matematycznych czy analizy procesu ryzyka. Przedmiotem rozważań pracy jest analiza procesu ryzyka dla ubezpieczeń wieloopcyjnych i oszacowanie prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela stanowiących podstawę umożliwiającą ubezpieczycielowi zabezpieczenie wypłacalności i uniknięcie ruiny.

2. Proces ryzyka

Analiza procesów ryzyka stanowi probabilistyczny rdzeń matematyki ubezpieczeń. W modelach aktuarialnych klasyczny proces ryzyka generowany jest przez kapitał początkowy oznaczony u , intensywność napływu składki oznaczoną c oraz proces skumulowanych roszczeń $S(t)$. W literaturze formułowanych jest wiele dodatkowych założeń dotyczących procesu napływu składki i skumulowanych roszczeń. Osłabienie nie zawsze zgodnych z rzeczywistością założeń dotyczących klasycznego modelu ryzyka prowadzi do jego uogólnień. Należy zauważyć, że w tym klasycznym modelu zaniedbane są również kwestie zmienności wartości pieniądza w czasie, które należy uwzględnić przy określaniu procesu ryzyka dla ubezpieczeń wieloopcyjnych. Istotny krok w kierunku urealniania modeli ryzyka stanowi analiza procesów, w których uwzględnia się aspekt

ekonomiczny. Pionierskie badania w tym zakresie prowadził Norberg i Harrison w latach dziewięćdziesiątych (por. [5; 6]), którzy rozważali ogólny ciągły proces postaci:

$$U(t) = u + \int_0^t v(\tau) dX(\tau), \quad (1)$$

gdzie u stanowi kapitał początkowy ubezpieczyciela (w chwili 0).

Proces zaktualizowanych aktywów określony wzorem (1) stanowi podstawę określenia procesu ryzyka dla ubezpieczeń wieloopcyjnych.

Rozważmy zatem portfel złożony z m polis wieloopcyjnych zawartych z osobami w wieku $x_1, x_2, \dots, x_m$ odpowiednio na okres ubezpieczenia $n_1, n_2, \dots, n_m$. Zakłada się niezależność szkód wynikających z różnych kontraktów ubezpieczeniowych. Założenie to powoduje, że przedstawiony proces ryzyka odpowiada tylko niektórym szczególnym grupom ubezpieczeń. Dobrze opisuje on grupę ubezpieczeń na życie, do których zaliczamy ubezpieczenia wieloopcyjne. Ograniczmy się przy tym do analizy zasobów finansowych, jakimi dysponuje firma w dowolnym momencie czasu t . Proces ten nazywa się procesem ryzyka i w pracy oznaczono go symbolem Γ^{PTF} . Wówczas dla dowolnego $t \geq s \geq 0$, zgodnie ze wzorem (1), proces ten określa następujące równanie:

$$\Gamma^{PTF}(s, t) = \frac{v(s)}{v(t)} \Gamma^{PTF}(s) + \int_s^t \frac{v(\tau)}{v(t)} d(-B(\tau)). \quad (2)$$

Wzór ten stanowi formalny zapis zasobów ubezpieczyciela w chwili t uwzględniającego jego zaktualizowane w momencie t dochody i wydatki poniesione w okresie $[s, t)$ oraz zaktualizowany kapitał początkowy, jakim dysponował w chwili s . W szczególności proces ryzyka określa przepływy pieniężne ubezpieczyciela od momentu $t_0 = 0$ do chwili t . Zakładamy, że firma ubezpieczeniowa rozpoczyna swą działalność w momencie $t_0 = 0$, dysponując początkowym kapitałem $\Gamma^{PTF}(0)$. Kapitał ten powiększany jest na skutek wpłacanych składek, pomniejszany jest zaś o wielkość wypłacanych świadczeń. Wówczas proces ryzyka dla portfela polis wieloopcyjnych jest postaci:

$$\Gamma^{PTF}(t) = \frac{1}{v(t)} \Gamma^{PTF}(0) + \int_0^t \frac{v(\tau)}{v(t)} d(-B^{PTF}(\tau)), \quad (3)$$

gdzie $B^{PTF}(t)$ określa łączne przepływy pieniężne dla portfela.

Wzór (3) stanowi uogólnienie znanych klasycznych modeli ryzyka (por. [2; 7]). Podczas uwzględniania specyfiki wieloopcyjnych ubezpieczeń na życie przy określeniu tego procesu należałoby również uwzględnić różnicę rezerw matematycznych składek. Środki te bowiem gromadzone przez ubezpieczyciela są własnością osób ubezpieczonych, natomiast firma ubezpieczeniowa jedynie dysponuje odpowiednią rezerwą w okresie trwania umowy ubezpieczeniowej. Wysokość rezerwy matematycznej składek, jaką powinien tworzyć ubezpieczyciel w momencie t , pomniejsza zatem jego dochód, a na jej zysk składa się dopiero zwalniana na koniec badanego okresu rezerwa. Przy określaniu procesu ryzyka dla portfela polis wieloopcyjnych w pracy uwzględniono również różnicę

wymaganych rezerw matematycznych składek. Wówczas proces ryzyka określony jest następującym wzorem:

$$\Gamma^{PTF}(t) = \frac{1}{v(t)} \Gamma^{PTF}(0) + \int_0^t \frac{v(\tau)}{v(t)} d(-B^{PTF}(\tau)) - V^{PTF}(t) + \frac{1}{v(t)} V^{PTF}(0). \quad (4)$$

Ponieważ początkowa rezerwa matematyczna składek równa się zero, wzór (4) można zapisać w równoważnej następującej postaci:

$$\Gamma^{PTF}(t) = \frac{1}{v(t)} \Gamma^{PTF}(0) + \int_0^t \frac{v(\tau)}{v(t)} d(-B^{PTF}(\tau)) - V^{PTF}(t). \quad (5)$$

Wzór ten określa wycenę procesu ryzyka dla portfela polis wieloopcyjnych. Proces ten powinien być postrzegany jako dający ważną informację o ryzyku finansowym związanym z portfelem. Informacje te są niezwykle przydatne w długoterminowym planowaniu. Są również istotne w celu zachowania wypłacalności ubezpieczyciela.

Tak określony proces ryzyka powiązany jest z procesem napływu składki oraz z procesami płatności reprezentującymi wielkości roszczeń z portfela. Są to procesy płatności świadczeń związanych z wypłacanymi rentami $\{C_j^{PTF}(t)\}$, jednorazowymi świadczeniami z tytułu dożycia $\{D_j^{PTF}(t)\}$ czy jednorazowymi świadczeniami wypłacanymi z tytułu zajścia objętych ubezpieczeniem przypadków życiowych $\{C_{jk}^{PTF}(t)\}$ oraz proces napływu składki oznaczony odpowiednio $\{\Pi_j^{PTF}(t)\}$. Wyceny poszczególnych strumieni dokonujemy, określając ich zaktualizowaną wartość.

Zaktualizowana wartość składek wpłaconych do chwili t dla portfela wyraża się wzorem:

$$Z\Pi_j^{PTF}(t) = \sum_j \int_0^t e^{-\delta \cdot \tau} I_{\{X^{PTF}(\tau)=j\}} d\Pi_j^{PTF}(\tau).$$

Analogicznie zaktualizowana wartość rent wypłaconych do chwili t z portfela ma następującą postać:

$$ZC_j^{PTF}(t) = \sum_j \int_0^t e^{-\delta \cdot \tau} I_{\{X^{PTF}(\tau)=j\}} dC_j^{PTF}(\tau).$$

W obu wzorach całki po prawej stronie są całkami Riemanna-Stieltjesa (R-S).

Zaktualizowaną wartość jednorazowych sum wypłaconych z tytułu dożycia do chwili t dla portfela również można zapisać jako następującą całkę:

$$ZD_j^{PTF}(t) = \sum_j \int_0^t e^{-\delta \cdot \tau} I_{\{X^{PTF}(\tau)=j\}} dD_j^{PTF}(\tau).$$

Proces losowy o postaci:

$$ZC_{jk}^{PTF}(t) = \sum_j \sum_{k \neq j} \int_0^t e^{-\delta \cdot \tau} C_{jk}^{PTF}(\tau) dN_{jk}^{PTF}(\tau)$$

określa zaktualizowaną wartość jednorazowych świadczeń wypłaconych przez ubezpieczyciela z portfela.

Po uwzględnieniu wyceny poszczególnych strumieni płatności dla portfela polis, wzór (3) określający proces ryzyka generowany przez procesy płatności ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \Gamma^{PTF}(t) = & e^{\delta t} \Gamma^{PTF}(0) + \sum_j \int_0^t e^{-\delta(\tau-t)} I_{\{X^{PTF}(\tau)=j\}} \left(d\Pi_j^{PTF}(\tau) - dC_j^{PTF}(\tau) - dD_j^{PTF}(\tau) \right) - \\ & - \sum_j \sum_{k \neq j} \int_0^t e^{-\delta(\tau-t)} c_{jk}^{PTF}(\tau) dN_{jk}^{PTF}(\tau) - V^{PTF}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Proces ten określony jest w odniesieniu do portfela jako całości, nie zaś do indywidualnych polis tworzących ten portfel. W przypadku ubezpieczeń wieloopcyjnych, które sprzedawane są indywidualnie, poszczególne procesy płatności dla portfela są sumą strumieni płatności dla indywidualnych polis w portfelu, tak więc proces napływu składki generowany przez portfel jest sumą strumieni składki z poszczególnych polis i analogicznie proces świadczeń generowany przez portfel w całości jest sumą świadczeń wypłacanych z indywidualnych ubezpieczeń. Zgodnie z powyższym wzór (6) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \Gamma^{PTF}(t) = & e^{\delta t} \Gamma^{PTF}(0) + \int_0^t e^{-\delta(\tau-t)} \sum_j \sum_{l=1}^m I_{\{X^{(l)}(\tau)=j\}} \left(d\Pi_j^{(l)}(\tau) - dC_j^{(l)}(\tau) - dD_j^{(l)}(\tau) \right) - \\ & - \int_0^t e^{-\delta(\tau-t)} \sum_j \sum_{k \neq j} \sum_{l=1}^m c_{jk}^{(l)}(\tau) dN_{jk}^{(l)}(\tau) - \sum_{l=1}^m V^{(l)}(t) = \\ & = \sum_{l=1}^m \left[\int_0^t e^{-\delta(\tau-t)} \sum_j I_{\{X^{(l)}(\tau)=j\}} \cdot \left(d\Pi_j^{(l)}(\tau) - dC_j^{(l)}(\tau) - dD_j^{(l)}(\tau) \right) - \sum_{k \neq j} c_{jk}^{(l)}(\tau) dN_{jk}^{(l)}(\tau) \right] - \\ & - \sum_{l=1}^m V^{(l)}(t) + e^{\delta t} \Gamma^{PTF}(0). \end{aligned} \quad (7)$$

Zatem proces ryzyka generowany przez portfel dany wzorem (7) można przedstawić jako odpowiednią sumę strat wygenerowanych przez indywidualne polisy składające się na cały portfel w następujący sposób:

$$\Gamma^{PTF}(t) = e^{\delta t} \Gamma^{PTF}(0) - \sum_{l=1}^m ZL^{(l)}(t), \quad (8)$$

gdzie $ZL^{(l)}(t)$ oznacza stratę ubezpieczyciela w l -tym indywidualnym ubezpieczeniu z portfela.

3. Prawdopodobieństwo ruiny

Analiza procesu ryzyka pozwala określić stopień szkodowości portfela ubezpieczeń istotny z punktu widzenia ubezpieczyciela, który powinien dbać o równowagę finansową

portfela. Jedną z miar charakteryzującą stabilność funkcjonowania firmy ubezpieczeniowej jest tzw. prawdopodobieństwo ruiny. Chodzi tutaj, tak jak w klasycznym modelu Lundberga, o moment, kiedy ubezpieczyciel nie dysponuje żadnym kapitałem. Moment ten definiuje się jako następującą zmienną losową (por. [2; 7]):

$$T_r = \begin{cases} \inf\{t \geq 0: \Gamma^{PTF}(t) < 0\} \\ \infty & \text{gdy } \Gamma^{PTF}(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

Jest on matematycznym odpowiednikiem momentu ruiny ubezpieczyciela, czyli momentu, w którym proces ryzyka $\Gamma^{PTF}(t)$ przyjmie po raz pierwszy wartość ujemną, dlatego też prawdopodobieństwo ruiny to prawdopodobieństwo następującego zdarzenia:

$$\{T_r < \infty\} \equiv \left\{ \inf_{t \geq 0} \Gamma^{PTF}(t) < 0 \right\}. \quad (10)$$

Ponieważ zdarzenie określone wzorem (10) jest zdarzeniem losowym, można je scharakteryzować za pomocą prawdopodobieństwa jego realizacji, które często oznacza się symbolem greckiej litery Ψ . Formalnie jest to funkcja określona następująco:

$$\Psi(u) = P \left\{ \inf_{t \geq 0} \Gamma^{PTF}(t) < 0 \mid \Gamma^{PTF}(0) = u \right\}. \quad (11)$$

Wzór (11) określa warunkowe prawdopodobieństwo ruiny ubezpieczyciela, pod warunkiem że dysponuje on kapitałem początkowym w wysokości u . Zakładając, że ubezpieczyciel posiada kapitał początkowy tej wysokości, otrzymujemy następującą równoważną postać wzoru (11):

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= P \left\{ \inf_{t \geq 0} \left(e^{\delta t} \Gamma^{PTF}(0) + \int_0^t e^{-\delta(\tau-t)} dB^{PTF}(\tau) - V^{PTF}(t) \right) < 0 \mid \Gamma^{PTF}(0) = u \right\} = \\ &= P \left\{ \inf_{t \geq 0} \left(e^{\delta t} u + \int_0^t e^{-\delta(\tau-t)} dB^{PTF}(\tau) - V^{PTF}(t) \right) < 0 \right\} = \\ &= P \left\{ \sup_{t \geq 0} L^{PTF}(t) > e^{\delta t} u \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Korzystając z określenia procesu ryzyka dla ubezpieczeń wieloopcyjnych wzorem (8), prawdopodobieństwo ruiny oblicza się według wzoru:

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= P \left\{ \sup_{t \geq 0} L^{PTF}(t) > e^{\delta t} u \right\} = \\ &= P \left\{ \sup_{t \geq 0} \left(\sum_{l=1}^m ZL^{(l)}(t) \right) > e^{\delta t} u \right\} = \\ &= 1 - P \left\{ \sup_{t \geq 0} \left(\sum_{l=1}^m ZL^{(l)}(t) \right) \leq e^{\delta t} u \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Wzory (12)-(13) pokazują, że interesuje nas jedynie „ogon” dystrybuanty zdyskontowanej straty. Po skorzystaniu ze wzoru (13) można obliczyć dokładną wartość prawdopodobieństwa ruiny generowaną przez portfel w całości, jeśli znamy rozkłady poszczególnych zmiennych losowych określających straty w indywidualnych ubezpieczeniach. Znajomość rozkładu tych zmiennych w odniesieniu do polis składających się na portfel polis wieloopcyjnych umożliwia analizę jego szkodowości, jednak obliczenie dokładnej wartości prawdopodobieństwa ruiny i podanie dokładnego wzoru analitycznego, jawnie określającego funkcję (13), jest niemalże niemożliwe. Dlatego też zadowalamy się jego oszacowaniami. Prawdopodobieństwo ruiny szacowane było różnymi metodami i na różnym stopniu ogólności. W pracy przedstawiono wybrane wyniki oszacowań prawdopodobieństwa ruiny, których dowody można znaleźć m.in. w pracach [3; 8].

Oszacowanie I

Niech $\Phi(\cdot)$ będzie funkcją rosnącą i mierzalną. Wtedy dla dowolnego $u > 0$ zachodzi nierówność:

$$\Psi(u) \leq \frac{E[\Phi(L^{PTF})]}{\Phi(u)}, \quad (14)$$

gdzie L^{PTF} określa całkowitą zaktualizowaną wartość nadwyżki finansowej ubezpieczyciela dla portfela polis.

Po podstawieniu do wzoru (14) konkretnej postaci funkcji $\Phi(\cdot)$ otrzymuje się następujące oszacowania prawdopodobieństwa ruiny (por. [8]):

$$\Psi(u) \leq \frac{E[|L^{PTF}|^r]}{u^r}, \text{ dla } r \geq 1, \quad (15)$$

$$\Psi(u) \leq \min_{r \geq 1} \frac{E[|L^{PTF}|^r]}{u^r}, \quad (16)$$

$$\Psi(u) \leq E[\exp(r \cdot L^{PTF})] \cdot \exp(-r \cdot u), \text{ dla } r > 0, \quad (17)$$

$$\Psi(u) \leq \min_{r > 0} E[\exp(r \cdot L^{PTF})] \cdot \exp(-r \cdot u). \quad (18)$$

Oszacowanie II

Jeśli $E[L^{PTF}] < u$, to istnieje $\tilde{r}$ będące rozwiązaniem równania

$$\frac{dE[e^{r \cdot L^{PTF}}]}{dr} = u \cdot E[e^{r \cdot L^{PTF}}], \text{ takie że:}$$

$$\min_{r > 0} E[\exp(r \cdot L^{PTF})] \cdot \exp(-r \cdot u) = E[\exp(\tilde{r} \cdot L^{PTF})] \cdot \exp(-\tilde{r} \cdot u).$$

Wówczas oszacowanie dane wzorem (26) jest następujące:

$$\Psi(u) \leq E[\exp(\tilde{r} \cdot L^{PTF})] \cdot \exp(-\tilde{r} \cdot u). \quad (19)$$

Oszacowanie III

Jeśli $E[L^{PTF}] < 0$, to istnieje dodatnie R , takie że $E[\exp(R \cdot L^{PTF})] = 1$ i wtedy oszacowanie (18) przyjmuje postać:

$$\Psi(u) \leq \exp(-R \cdot u). \quad (20)$$

Oszacowanie prawdopodobieństwa ruiny dane wzorem (20) znane jest jako oszacowanie Lundberga (por. [3]). Dowód tego oszacowania bez założenia „poissonowskości” procesu zgłoszeń znaleźć można m.in. w pracach [3; 7; 8]).

Oszacowanie IV

Niech C oznacza zdarzenie $P\left\{\sup_{t \geq 0} L^{PTF}(t) \leq u\right\}$. Wtedy

$$(i) \quad \Psi(u) \leq \min_{r>0} \frac{E[\exp(r \cdot L^{PTF})] - \exp(r \cdot E[L^{PTF} | C])}{\exp(r \cdot u) - \exp(r \cdot E[L^{PTF} | C])}, \quad (21)$$

(ii) jeśli $L^{PTF} = \hat{L}^{PTF} - \hat{\hat{L}}^{PTF}$, gdzie $\hat{L}^{PTF}, \hat{\hat{L}}^{PTF} \geq 0$, to

$$\Psi(u) \leq \min_{r>0} \frac{E[\exp(r \cdot L^{PTF})] - \exp(r \cdot E[\hat{L}^{PTF} | C])}{\exp(r \cdot u) - \exp(r \cdot E[\hat{\hat{L}}^{PTF} | C])}, \quad (22)$$

(iii) jeśli dodatkowo $E[L^{PTF}] < 0$, to

$$\Psi(u) \leq \frac{1 - \exp(R \cdot E[\hat{\hat{L}}^{PTF} | C])}{\exp(R \cdot u) - \exp(R \cdot E[\hat{L}^{PTF} | C])}. \quad (23)$$

W przedstawionych oszacowaniach nie korzystano z założenia, że proces zgłoszeń ma rozkład Poissona. Dlatego też oszacowania te obejmują dość ogólną grupę ubezpieczeń, włączając w to ubezpieczenia na życie, a tym samym ubezpieczenia wieloopcyjne, i można je zastosować w tego typu ubezpieczeniach.

4. Prawdopodobieństwo ruiny dla przykładowych polis wieloopcyjnych

W ubezpieczeniach wieloopcyjnych, które sprzedawane są indywidualnie, proces ryzyka generowany przez cały portfel zgodnie ze wzorem (8) jest sumą strat $ZL^{(i)}(t)$ wygenerowanych przez indywidualne ubezpieczenia w portfelu. Rozważmy więc portfel indywidualnych ubezpieczeń na życie. Całkowita strata w indywidualnym n -letnim ubezpieczeniu na życie ma postać:

$$\begin{aligned}
ZL^{(I)}(n) &= ce^{-\delta T_x} \cdot I_{|T_x \leq n|} - \pi \int_0^{\min(T_x, n)} e^{-\delta \tau} d\tau = \\
&= ce^{-\delta T_x} \cdot I_{|T_x \leq n|} - \pi \frac{1 - e^{-\delta \cdot \min(T_x, n)}}{\delta} = \\
&= e^{-\delta T_x} \cdot I_{|T_x \leq n|} - \pi \overline{a}_{\min(T_x, n)}
\end{aligned}$$

$ZL^{(I)}(n)$ jest zatem zmienną losową o postaci:

$$ZL^{(I)}(n) = \begin{cases} e^{-\delta T_x} - \pi \overline{a}_{T_x} & \text{gdy } 0 < T_x \leq n \\ -\pi \overline{a}_n & \text{gdy } T_x > n \end{cases}$$

Moment ruiny ubezpieczyciela to moment, w którym wysokość wypłacanego świadczenia przekroczy kapitał, jakim dysponuje ubezpieczyciel. W związku z tym w tab. 1 przedstawiono wartości zmiennej $ZL^{(I)}(t)$ wraz z odpowiednimi prawdopodobieństwami śmierci 30-letniego mężczyzny w okresie t lat. Obliczeń dokonano, przyjmując okres ubezpieczenia równy 20 lat.

Tabela 1. Wartości straty ubezpieczyciela wraz z prawdopodobieństwami dla ubezpieczenia UŻ

t	$1 - {}_t p_x$	$ZL^{(I)}(t)$	t	$1 - {}_t p_x$	$ZL^{(I)}(t)$
1	0,00063441	0,951066	11	0,0100044	0,573212
2	0,00130313	0,904463	12	0,0114609	0,544602
3	0,00201123	0,860078	13	0,0130722	0,517354
4	0,00276453	0,817807	14	0,0148605	0,491403
5	0,00356968	0,777549	15	0,0168516	0,466688
6	0,00443432	0,739208	16	0,0190745	0,443150
7	0,00536719	0,702693	17	0,0215626	0,420733
8	0,00637830	0,667917	18	0,0243537	0,399383
9	0,00747914	0,634797	19	0,0274908	0,379050
10	0,00868282	0,603253	20	0,0310229	0,359685

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 1 w odniesieniu do kolejnych lat trwania ubezpieczenia zamieszczono zaktualizowaną wartość (na moment $t_0 = 0$) strat ubezpieczyciela, jakie osiągnął on w chwili t , jeśli ubezpieczony do tego momentu opłacał składki, natomiast ubezpieczyciel w związku ze śmiercią ubezpieczonego w momencie t trwania umowy z prawdopodobieństwem ${}_t q_x$ wypłacił ubezpieczonemu zgodnie z umową sumę ubezpieczenia w wysokości $1 j.p.$ Uzyskane wyniki umożliwiają obliczenie prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u)$ określonego wzorem (13). Na przykład, jeśli $u \geq 0,951066$, to ruina ubezpieczyciela nigdy nie nastąpi, jeśli ubezpieczyciel posiada kapitał początkowy w wysokości $0,904463 \leq u < 0,951066$, to prawdopo-

dobieństwo ruiny wynosi odpowiednio 0,00063441 itd. Prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela w zależności od wysokości kapitału u zamieszczono w tab. 2.

Tabela 2. Prawdopodobieństwo ruiny dla ubezpieczenia UŻ

u	$\Psi(u)$	u	$\Psi(u)$
$u \geq 0,951066$	0	$0,573212 \leq u < 0,603253$	0,00868282
$0,904463 \leq u < 0,951066$	0,00063441	$0,544602 \leq u < 0,573212$	0,0100044
$0,860078 \leq u < 0,904463$	0,00130313	$0,517354 \leq u < 0,544602$	0,0114609
$0,817807 \leq u < 0,860078$	0,00201123	$0,491403 \leq u < 0,517354$	0,0130722
$0,777549 \leq u < 0,817807$	0,00276453	$0,466688 \leq u < 0,491403$	0,0148605
$0,739208 \leq u < 0,777549$	0,00356968	$0,44315 \leq u < 0,466688$	0,0168516
$0,702693 \leq u < 0,739208$	0,00443432	$0,420733 \leq u < 0,44315$	0,0190745
$0,667917 \leq u < 0,702693$	0,00536719	$0,399383 \leq u < 0,420733$	0,0215626
$0,634797 \leq u < 0,667917$	0,0063783	$0,37905 \leq u < 0,399383$	0,0243537
$0,603253 \leq u < 0,634797$	0,00747914	$0,359685 \leq u < 0,37905$	0,0274908

Źródło: opracowanie własne.

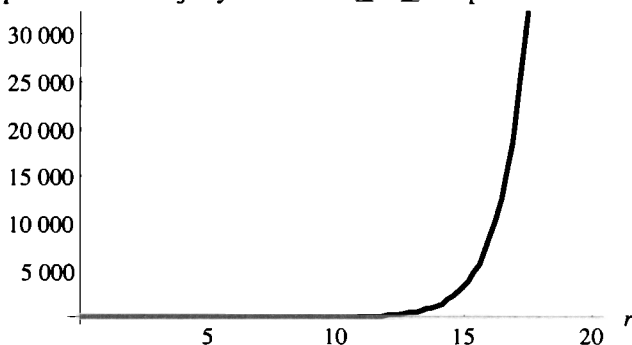
Obliczenie dokładnej wartości prawdopodobieństwa ruiny i podanie dokładnego wzoru analitycznego w przypadku bardziej złożonych ubezpieczeń jest niemalże niemożliwe, dlatego też zadowolamy się jego oszacowaniami. Aby dokonać porównania, w tab. 3 przedstawiono wyniki oszacowań prawdopodobieństwa ruiny wraz z rzeczywistymi wartościami dla wybranych wartości kapitału u . W kolumnie 3 tabeli przedstawiono wyniki oszacowania Lundberga (oszacowanie III) otrzymane dla R spełniającego warunek $E[e^{r \cdot L}] = 1$. W kolumnach 4 i 5 przedstawiono oszacowanie prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u)$ uzyskane ze wzorów (22) i (23) (oszacowanie IV), w których uwzględniono $\hat{L} = \pi \bar{a}_{\bar{n}}$. Pierwsze z tych oszacowań przedstawiono wraz z wartościami $r_{\min}$ minimalizującymi wyrażenie $\min_{r>0} \frac{E[e^{r \cdot L}] - e^{r \cdot \pi \bar{a}_{\bar{n}}}}{e^{r \cdot u} - e^{r \cdot \pi \bar{a}_{\bar{n}}}}$. Natomiast oszacowanie drugie uzyskano, przyjmując $R = 0,1223674$.

Tabela 3. Oszacowania prawdopodobieństwa ruiny dla ubezpieczenia UŻ

u	$\Psi(u)$	Oszacowanie III	$r_{\min}$	Oszacowanie IV(ii)	Oszacowanie IV (iii)
1	2	3		4	5
0,95	0,00063441	0,988442405	22,3997	0,00186753	0,0176842
0,90	0,00130313	0,989047356	12,8904	0,00427029	0,0186539
0,85	0,00201123	0,989652677	9,5196	0,00741019	0,0197355
0,80	0,00276453	0,990258368	7,4286	0,0112932	0,0209494
0,75	0,00356968	0,99086443	5,7548	0,0157177	0,0223215
0,70	0,00536719	0,991470863	4,1939	0,0202893	0,023885
0,65	0,0063783	0,992077667	2,5622	0,0244859	0,0256828
0,60	0,00868282	0,992684843	0,6638	0,0278007	0,0277719

Źródło: opracowanie własne.

Do obliczeń wykorzystywana jest następująca wartość oczekiwana $E[e^{rL}]$, która jest funkcją parametru r . Jej wykres dla $0 \leq r \leq 20$ przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Wartości $E[e^{rL}]$ dla różnych $r > 0$

Źródło: opracowanie własne.

Interesujące są bardzo duże wartości $\tilde{r}$ i $r_{\min}$ w porównaniu z parametrem R z oszacowania Lundberga. W tym szczególnym przykładzie oszacowanie Lundberga okazało się najgorsze. Oszacowania według wzorów (22) i (23) dla wartości $u \leq 0,70$ są bardzo podobne, ale już dla wartości $0,70 < u \leq 0,95$ lepsze okazało się oszacowanie (20) z parametrem $R = 0,1223674$.

5. Uwagi końcowe

Analiza szkodowości portfela, to innymi słowy, analiza zasobów finansowych, jakimi dysponuje firma w dowolnym momencie czasu t . Proces ten nazywa się procesem ryzyka. Przy określaniu procesu ryzyka dla ubezpieczeń wieloopcyjnych uwzględniono zarówno zaniedbane w klasycznym modelu kwestie zmienności wartości pieniądza w czasie, jak również różnicę rezerw matematycznych składek wynikającą ze specyfiki ubezpieczeń wieloopcyjnych. Uzyskana postać procesu ryzyka stanowi uogólnienie znanych klasycznych modeli ryzyka indywidualnego i kolektywnego (por. [2; 3; 7]). Proces ten powinien być postrzegany jako dający ważną informację o ryzyku finansowym związanym z portfelem, umożliwiającą określenie prawdopodobieństwa bankructwa ubezpieczyciela. Obliczenie dokładnej wartości prawdopodobieństwa ruiny i podanie dokładnego wzoru analitycznego jest jednak niemalże niemożliwe. W pracy przedstawiono wybrane oszacowania prawdopodobieństwa ruiny (por. [3; 8]), w których nie korzystano z założenia, że proces zgłoszeń ma rozkład Poissona, dlatego też oszacowania te obejmują dość ogólną kategorię ubezpieczeń, w tym ubezpieczenia wieloopcyjne. Właśnie prawdopodobieństwo ruiny jest obliczonym wskaźnikiem stabilności funkcjonowania

firmy ubezpieczeniowej oferującej ubezpieczenia wieloopcyjne. Rozważania teoretyczne zilustrowano przykładem najprostszego ubezpieczenia wieloopcyjnego.

Literatura

- [1] Błaszczyszyn B., Rolski T., *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
- [2] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Schamburg 1986.
- [3] Grandell J., *Aspects of Risk Theory*, Springer-Verlang, New York 1992.
- [4] Habermann S., Butt Z., Rickayzen B., *Multiple State Models, Simulation and Insurer Insolvency*, materiały znalezione na stronie internetowej.
- [5] Harrison M., *Ruin Problems with Compounding Assets*, „Stochastic Processes and their Applications” 1997 nr 5, s. 67-79.
- [6] Norberg R., *Ruin Problems with Assets and Liabilities Type*, „Scandinavian Actuarial Journal” 1999, s. 255-269.
- [7] Ostasiewicz W. (red.) *Modele aktuarialne*, AE, Wrocław 2000.
- [8] Papatriandafylou A., Waters H.R., *Martingales in Life Insurance*, „Scandinavian Actuarial Journal” 1984, s. 210-230.

RISK PROCESS AND RUIN PROBABILITY IN MULTI-STATE INSURANCE

Summary

In the literature there are described the methods of analyzing and pricing in traditional life insurance. But in practice the traditional life insurance respects only the basic insurance products, which in reality are more complicated. This reason determined that in my article I consider a multi-state insurance policies, which are more attractive and better adopted to needs of clients.

All activity of the insurer are connected with the risk. Risk in multi-state insurance can be investigate in two aspects: protection and financial risk (connected with calculation of premium, calculation of mathematical reserves or analysis of risk process). The essence of my work is the discussion on the form of risk process and probability of ruin in multi-state insurance. I presented the form of the risk process and methods of estimation of ruin probability. Knowledge of risk process permits to describe and estimate the “riskness” of the insurance portfolio. Ruin probability determines essential measure of financial activity of the insurer.