

Kamila Galin

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

WYZNACZANIE ZMIENNOŚCI STÓP ZWROTU CEN AKCJI Z UWZGLĘDNIENIEM DŁUGOZASIĘGOWYCH ZALEŻNOŚCI ABSOLUTNYCH STÓP ZWROTU

1. Wstęp

Punktem wyjścia do oceny ryzyka inwestycji w akcje (a także w portfel akcji) jest właściwe wyznaczenie zmienności zwrotów cen akcji. Im zmienność jest większa, tym większe ryzyko inwestycji. Analizy szeregów cen akcji pokazują, że warunkowa wariancja zwrotów jest zmienna w czasie, a jej określenie nie jest prostym zadaniem. Aby wyznaczyć warunkową wariancję zwrotów, dopasowuje się teoretyczny model do szeregu finansowego. Jest to dość skomplikowana metoda wiążąca się z koniecznością estymacji wielu nieznanymi parametrów. Zupełnie innym, znacznie prostszym rozwiązaniem jest zastosowanie metody proponowanej przez RiskMetrics. W artykule przedstawiona zostanie propozycja modyfikacji tej ostatniej metody, która uwzględnia specyficzny rodzaj zależności, jakie występują w szeregu absolutnych zwrotów.

2. Analiza zwrotów cen akcji

Założmy, że S_t oznacza cenę akcji w momencie t . Rozważmy szereg czasowy opisujący zwroty logarytmiczne cen akcji, czyli taki, którego kolejne wyrazy są postaci: $\ln \frac{S_{t+1}}{S_t}$. W dalszej części zwroty logarytmiczne będą nazywane krótko zwrotami. W klasycznym modelu Blacka-Scholesa zakłada się, że zwroty mają

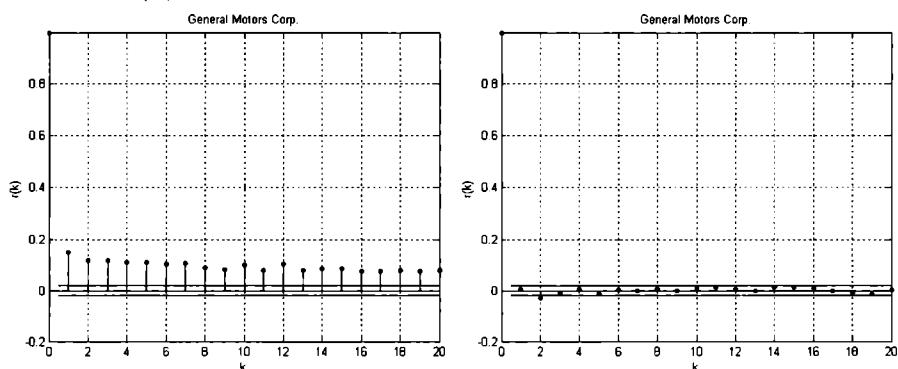
rozkład normalny i są od siebie niezależne. Z faktu tego wynika w szczególności, że warunkowa wariancja procesu zwrotów jest stała.

Najczęściej stosowaną miarą zależności poszczególnych wyrazów szeregu czasowego jest funkcja autokorelacji. Aby móc zastosować funkcję autokorelacji, badany szereg musi być procesem stacjonarnym w szerokim sensie, czyli takim, który ma skończoną wariancję, stałą wartość oczekiwaną, a korelacje pomiędzy dwoma elementami szeregu zależą tylko od dystansu, jaki je dzieli. Dla szeregu $(X_t, t = 1, 2, \dots)$, spełniającego te

warunki, funkcję autokorelacji $r(k)$ definiujemy następująco:
$$r(k) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_{k+1})}{\text{Var}X_1},$$

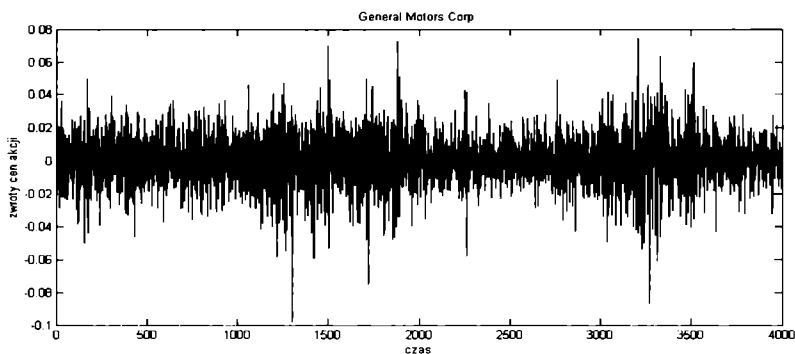
gdzie $\text{Cov}(X_1, X_{k+1}) = E[(X_1 - EX_1)(X_{k+1} - EX_{k+1})]$. Zatem $r(k)$ jest to kowariancja pomiędzy elementami szeregu, które są od siebie oddalane o k elementów, unormowana tak, że $r(0) = 1$. Funkcja $r(k)$ może przyjmować wartości z przedziału $[-1, 1]$. Im wartości $r(k)$ są bliższe zeru, tym mniejsze są liniowe zależności pomiędzy wyrazami szeregu. Dla szeregu o niezależnych wyrazach $r(k) = 0$, dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Niestety, zależność odwrotna nie jest prawdziwa. Jeżeli korelacja pomiędzy dwoma wyrazami szeregu jest zerowa, to wcale nie musi oznaczać ich niezależności. W dalszej części przebadane zostaną zwroty cen następujących akcji:

- General Motors Corp. (GM) 31.12.1969 r.-21.03.2005 r.
- Goodyear Tire & Rubber Co. (GT) 02.01.1970 r.-21.03.2005 r.
- Hewlett-Packard Co. (HPQ) 31.12.1969r-21.03.2005 r.
- Lockheed Martin Corp. (LMT) 03.01.1977 r.-21.03.2005 r.
- Raytheon Co. (RTN) 06.11.1993 r.-21.03.2005 r.
- AT&T Inc. (T) 19.07.1983 r.-21.03.2005 r.



Rys. 1. Funkcja autokorelacji zwrotów cen akcji (po lewej) oraz absolutnych zwrotów (po prawej) na przykładzie General Motors Corp

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Zwroty cen akcji na przykładzie General Motors Corp

Źródło: opracowanie własne.

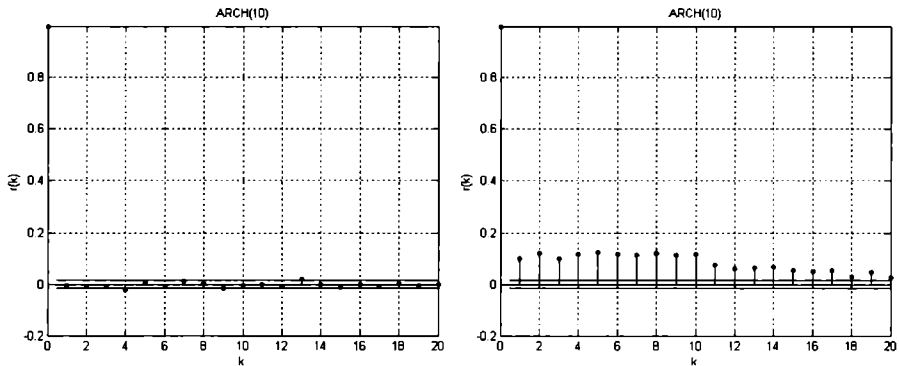
Rozważane będą dzienne notowania, a konkretnie ceny zamknięcia¹. Estymowane korelacje wyrazów badanych szeregów są bardzo bliskie zeru, co mogłoby świadczyć o wzajemnej niezależności zwrotów cen akcji. Jeśli faktycznie zwroty są niezależne, to niezależne będą także zwroty absolutne (wartości bezwzględne zwrotów) oraz zwroty kwadratowe (kwadraty zwrotów). W dalszej części przeanalizowana zostanie funkcja autokorelacji szeregu absolutnych zwrotów. Szereg kwadratowych zwrotów nie zostanie w ten sposób przebadany, gdyż istnieje przypuszczenie, że wariancja szeregu jest nieskończona.

Widać wyraźnie, że w szeregu absolutnych zwrotów występują zależności (rys. 1). Przeczy to tezie o niezależności zwrotów logarytmicznych cen akcji. Absolutne zwroty są dodatnio skorelowane. Wynika stąd, że po zwrotach znacznie odległych od średniej (która w przypadku dziennych zwrotów jest bliska zeru) z większym prawdopodobieństwem wystąpi znowu zwrot o dużej wartości bezwzględnej. Natomiast po zwrotach bliskich średniej można się spodziewać kolejnego bliskiego średniej zwrotu. Faktycznie, analizując wykres historycznych zwrotów cen akcji (rys. 2), można zaobserwować, że występują przedziały, w których przeważają wartości znacznie odległe od średniej, oraz takie przedziały, w których występuje dużo zwrotów bliskich średniej. Ponieważ zależności te dotyczą wartości bezwzględnych i nie obserwuje się zależności pomiędzy występowaniem dodatnich zwrotów oraz ujemnych zwrotów, to w przedziałach o dużych wartościach bezwzględnych zwrotów występują zarówno te o dużych dodatnich, jak i o małych ujemnych wartościach. W tych właśnie przedziałach odchylenie standardowe jest duże. Z kolei w przedziałach, w których przeważają zwroty bliskie średniej, odchylenie standardowe jest małe. Wniosek z tych obserwacji jest następujący: wariancja zwrotów logarytmicznych w danym momencie zależy od przeszłych wartości. Zatem zwroty logarytmiczne cen akcji należy modelować szeregami czasowymi, których warunkowa wariancja nie jest stała.

¹ Historyczne ceny akcji pochodzą z: <http://finance.yahoo.com>.

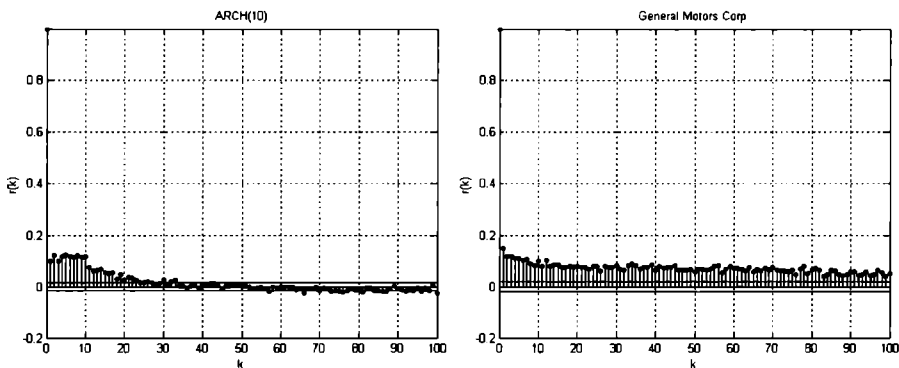
3. Modele heteroskedastyczne

Szereg czasowy, który spełnia postulat zależności warunkowej wariancji od przeszłych wartości, to szereg w modelu ARCH, zaproponowany przez Engle'a w 1982 r. [1]. Oto jak definiuje się szereg $X_t, t=1,2,\dots$ w modelu $ARCH(q)$: $X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$, $h_t = c_0 + \sum_{i=1}^q c_i X_{t-i}^2$, gdzie szum ε_t ma standardowy rozkład normalny, współczynniki c_0 i c_q są dodatnie, a pozostałe współczynniki są nieujemne. Wyrazy szeregu w tym modelu są nieskorelowane, natomiast wartości bezwzględne zwrotów są skorelowane (rys. 3), jednak korelacje maleją szybciej niż w przypadku absolutnych zwrotów cen akcji (rys. 4). Tak naprawdę występują tu dwa różne typy zależności.



Rys. 3. Estymowana funkcja autokorelacji szeregu czasowego w modelu ARCH(10) (po lewej) oraz funkcja autokorelacji szeregu wartości bezwzględnych w tym modelu (po prawej)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Funkcja autokorelacji absolutnych zwrotów cen akcji na przykładzie General Motors Corp. (po lewej) oraz funkcja autokorelacji szeregu wartości bezwzględnych w modelu ARCH(10) (po prawej)

Źródło: opracowanie własne.

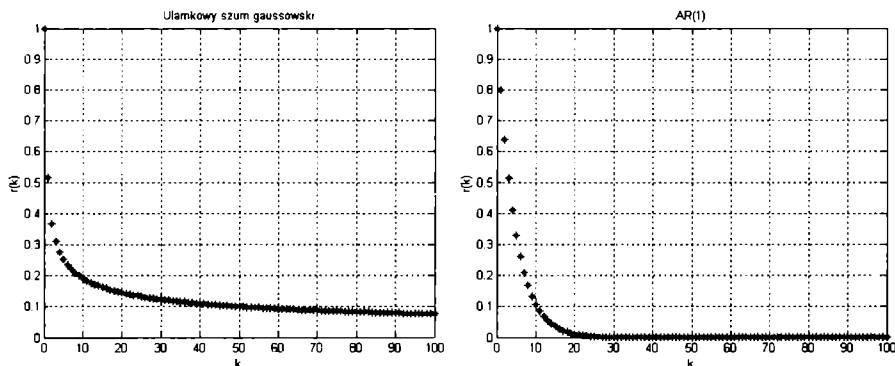
4. Analiza długozasięgowych zależności absolutnych zwrotów

W większości procesów stochastycznych, w których występują zależności, funkcja autokorelacji maleje wykładniczo, tzn. jeśli przez k oznaczmy odległości wyrazów procesu, to $r(k)$ jest proporcjonalna do α^k , gdzie α jest pewną stałą z przedziału $(0,1)$. O procesie, w którym występują tego typu zależności, mówi się, że ma „krótką pamięć”. Funkcja autokorelacji maleje w tym przypadku szybko, wyrazy szeregu, które oddalone są od siebie o kilkanaście (co najwyżej kilkadziesiąt) miejsc, są ze sobą nieskorelowane.

W procesach, o których mówi się, że mają „długą pamięć” („długozasięgowe zależności”, *long range dependence*, LRD), funkcja autokorelacji $r(k)$ zmienia się jak $k^{-\beta}$, gdzie β jest parametrem z przedziału $(0,1)$. Oczywiście tutaj również korelacje są coraz mniejsze, ale maleją do zera wolniej niż w przypadku procesu z „krótką pamięcią”. Suma $\sum_{k=0}^{\infty} r(k)$ jest nieskończona, co oznacza, że pomimo malejących wartości $r(k)$ ich skumulowany efekt jest istotny.

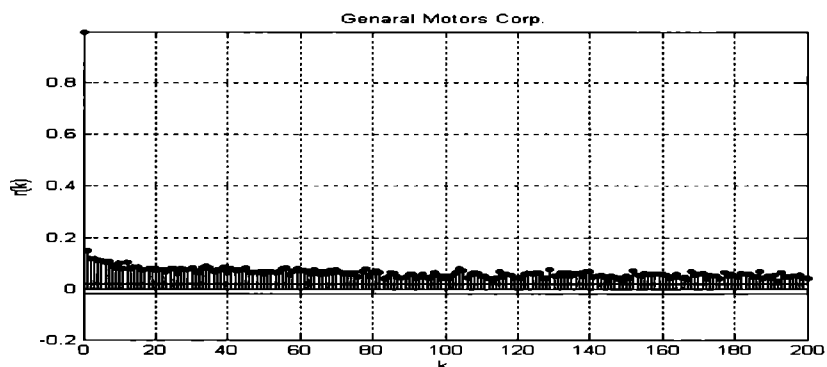
Na rysunku 5 pokazano, w jaki sposób zanikają korelacje pomiędzy elementami szeregu z „krótką pamięcią” oraz szeregu z „długą pamięcią”. W tym pierwszym przypadku oddziaływania liniowe pomiędzy wyrazami, które dzieli dystans 25 elementów, już nie występują. Natomiast w przypadku szeregu z własnością LRD współczynnik korelacji tak oddalonych wyrazów szeregu przyjmuje wartość ok. 0,13, a dla oddległych o 100 elementów korelacja jest nadal zdecydowanie różna od zera i wynosi ok. 0,08 [2].

Własność „długiej pamięci” jako pierwszy zauważył brytyjski hydrolog H.E. Hurst w pierwszej połowie XX w. badając zmiany poziomu Nilu. Lata dziewięćdziesiąte przyniosły duże zainteresowanie tym pojęciem, głównie w odniesieniu do przepływów w sieciach informatycznych. Liczne badania pokazały, że np. szereg czasowy opisujący liczbę przesyłanych pakietów ma „długą pamięć” [6]. Obecnie coraz częściej długozasięgowych zależności szuka się w finansowych szeregach czasowych [5; 7].



Rys. 5. Korelacje procesu z „krótką pamięcią” – AR(1) (po lewej) oraz procesu z „długą pamięcią” – ułamkowego szumu gaussowskiego (po prawej)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Funkcja autokorelacji absolutnych zwrotów cen akcji

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 6 widać, że estymowana funkcja autokorelacji absolutnych zwrotów cen akcji zanika wolno, skorelowane są ze sobą nawet znacznie odległe wyrazy szeregu. Aby potwierdzić tezę o obecności „długiej pamięci” w szeregu absolutnych zwrotów, w dalszej części przeprowadzona zostanie dokładna analiza występujących tu zależności.

Tabela 1. Współczynnik Hursta szeregów absolutnych zwrotów cen akcji

Symbol	Metoda wartości absolutnej	Metoda wariancji reziduwów	Periodogram	Metoda wariancji
GM	0,88	0,78	0,76	0,84
GT	0,85	0,85	0,86	0,87
HPQ	0,85	0,84	0,79	0,80
LMT	0,89	0,87	0,78	0,81
RTN	0,88	0,80	0,80	0,82
T	0,92	0,83	0,80	0,86

Źródło: opracowanie własne.

Istnieje wiele testów pozwalających stwierdzić obecność „długiej pamięci” w procesie stochastycznym, a także określić tempo zanikania korelacji [4]. Dwa parametry niosą informacje o charakterze zależności – H (zwany wykładnikiem Hursta) oraz d . Parametr H przyjmuje wartości z przedziału $(0,1)$. Jeśli badany szereg czasowy ma skończoną wariancję, wówczas spełniona jest następująca zależność: $H = d + 0,5$. O obecności długozasięgowych zależności świadczy wartość wykładnika Hursta większa od $H = 0,5$ lub równoważnie wartość parametru d większa niż zero. Im większe jest H , tym wolniej zanikają korelacje. Jeśli wyrazy szeregu są niezależne, wówczas $H = 0,5$. W przypadku „krótkiej pamięci” $H = 0,5$ lub rzadziej $H < 0,5$. Wystarczy zatem wyestymować wartość parametru H lub d , aby stwierdzić, jakiego typu zależności występują w badanym szeregu. Oczywiście, zarówno przeprowadzając testy na obecność „długiej pamięci”, jak i estymując funkcję autokorelacji, trzeba dysponować odpowiednio dużą próbką danych. Badane w pracy szeregi absolutnych zwrotów mają długości rzędu kilku tysięcy.

Wyniki, jakie zostały otrzymane przy zastosowaniu czterech testów – metody wartości absolutnej, metody wariancji residuów, periodogramu oraz metody wariancji, wskazują na występowanie długozasięgowych zależności w szeregach absolutnych zwrotów cen akcji (tab. 1). Wykładnik Hursta w każdym przypadku przyjmuje wartość zdecydowanie większą od 0,5. Oczywiście, estymacja parametru H obarczona jest pewnym błędem, stąd wyniki uzyskane różnymi metodami nie są identyczne. Średnie wartości tego parametru dla badanych szeregów to ok. 0,80-0,85.

5. Wyznaczanie zmienności zwrotów cen akcji

Metodologie pomiaru ryzyka opracowane przez RiskMetrics, takie jak Value at Risk czy RiskGrade bazują na estymowanej wartości zmienności zwrotów [2]. Zakłada się, że warunkowa wariancja procesu zwrotów cen akcji nie jest stała i zależy od przeszłych wartości. Ponieważ średnie dzienne zwroty są bliskie zeru, to wariancja zwrotów jest dobrze przybliżana wartością oczekiwaną kwadratu zwrotu. W metodzie proponowanej przez RiskMetrics wariancję estymuje się nie jako średnią arytmetyczną z poprzednich wartości kwadratów zwrotów, lecz jako średnią ważoną z wagami wykładniczymi z tychże kwadratów. W artykule pokazano, że korelacje pomiędzy absolutnymi zwrotami maleją wraz ze zwiększaniem dystansu, zatem i zależności pomiędzy kwadratami zwrotów są mniejsze dla tych bardziej odległych wyrazów szeregu. Fakt ten jest uwzględniony w modelu RiskMetrics poprzez wprowadzenie malejących wag. W rzeczywistości po dużych co do wartości bezwzględnej zwrotach cen akcji występują przeważnie kolejne duże co do wartości bezwzględnej zwroty. Taka zależność jest również prawdziwa dla kwadratów zwrotów. Cecha ta została uwzględniona w modelu średniej ważonej, estymującej przyszłą wariancję.

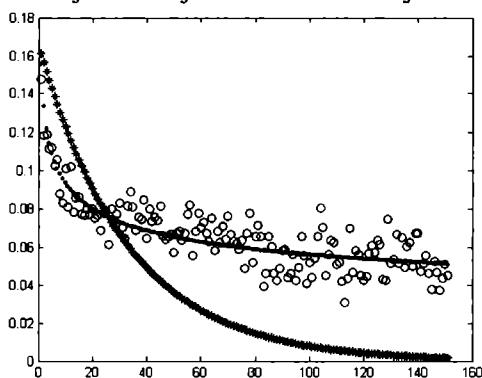
Podczas analizy metodologii RiskMetrics nasuwa się pytanie, czy wagi malejące wykładniczo są dobrymi wagami? W tym modelu wagi dla dziennych zwrotów dobrane są tak, że każda kolejna stanowi 0,97 poprzedniej. Oznacza to, że np. waga pięćdziesiąta stanowi ok. jednej piątej pierwszej wagi. Czy rzeczywiście wpływ przeszłych wartości maleje tak szybko? W przypadku procesów z „krótką pamięcią” korelacje zanikają wykładniczo, ale, jak było wcześniej pokazane, bezwzględne zwroty cen akcji mają długozasięgowe zależności, czyli ich korelacje maleją wolno. Zatem takie jest również tempo zanikania zależności pomiędzy kwadratami zwrotów, stąd wniosek, że być może bardziej właściwe byłoby zastosowanie w średniej ważonej wag malejących wolno, czyli potęgowo.

Rysunek 7 przedstawia tempo zanikania wag proponowanych przez RiskMetrics oraz wag potęgowych. Te drugie zostały dopasowane tak, aby malały tak samo, jak maleje funkcja autokorelacji absolutnych zwrotów cen akcji $r(k)$. Funkcja ta została przeskalowana, tak aby otrzymana w ten sposób funkcja $\tilde{r}(k)$ spełniała następujący warunek:

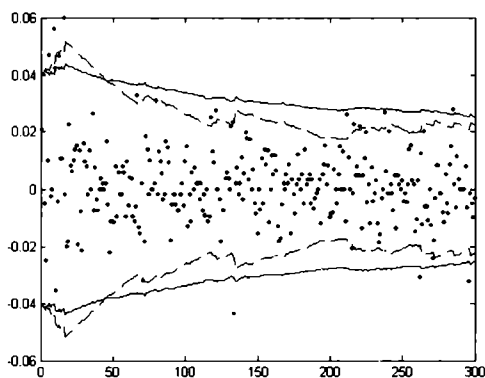
$$\sum_{k=1}^{151} \tilde{r}(k) = 1. \text{ Widać, że dla } k = 151 \text{ przeskalowana wartość } \tilde{r}(k) \text{ jest znacznie}$$

oddalona od zera. Z pewnością obliczając średnią z wagami potęgowymi, należałoby uwzględnić o wiele dłuższą przeszłość niż 151 obserwacji. Taka liczba została tutaj wybrana dlatego, że porównywane są dwa rodzaje średnich ważonych, a w metodzie RiskMetrics w przypadku dziennych zwrotów rozważa się 151 przeszłych obserwacji.

W przypadku średniej z wagami wykładniczymi wpływ przeszłych obserwacji na przyszłą wariancję maleje szybko, co oznacza, że bardzo duże znaczenie ma kilka ostatnich obserwacji. W praktyce oznacza to, że kilka dużych co do wartości bezwzględnej zwrotów ceny akcji powoduje znaczne zwiększenie przewidywanej wariancji. Wykres oczekiwanej wariancji w kolejnych momentach zmienia się znacznie. Inaczej jest w przypadku modelu średniej z wagami potęgowymi. Tutaj wpływ przeszłych zwrotów na przyszłą wariancję maleje powoli i dlatego kilka odległych znacznie od zera wartości nieznacznie tylko zwiększa oczekiwaną wariancję. Wykres warunkowej wariancji zwrotów cen akcji zmienia się tu łagodniej.



Rys. 7. Przeskalowana funkcja autokorelacji absolutnych zwrotów (na przykładzie General Motors Corporation) – „kółka”. Wagi wykładnicze proponowane przez RiskMetrics – „gwiazdki” – oraz wagi potęgowe, dopasowane metodą najmniejszych kwadratów (wykładnik równy $-0,22$) – „kropki”
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 8. Zwroty cen akcji General Motors Corp. oraz 95% przedziały ufności uzyskane na podstawie wariancji obliczonej jako średnia z wagami wykładniczymi (linia przerywana) oraz z wagami potęgowymi (linia ciągła)
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 8 przedstawia 300 wartości zwrotów cen akcji General Motors Corp. oraz 95% przedziały ufności wyznaczone dwoma sposobami. W każdym z 300 momentów obliczona została wariancja jako średnia z wagami wykładniczymi i z wagami potęgowymi. Następnie na tej podstawie, przy założeniu, że zwroty są gaussowskie, wyliczone zostały przedziały ufności, przy czym w pierwszym przypadku, zgodnie z zaleceniami RiskMetrics, uwzględniono 151 przeszłych obserwacji, w drugim natomiast – 300 wartości historycznych. W tym przypadku 19 wartości nie zmieściło się w przedziale ufności wyznaczonym metodą stosowaną przez RiskMetrics. Stanowi to ok. 6% wszystkich obserwacji. Natomiast w przedziale ufności, do którego wyznaczenia wariancja została obliczona jako średnia z wagami potęgowymi, nie zmieściło się tylko 9 wartości. Stanowi to zaledwie 3% spośród 300 rozważanych wartości. Oczywiście otrzymane w ten sposób wyniki są jedynie orientacyjne, gdyż rozważane tu było zaledwie 300 obserwacji. W przypadku 5000 obserwacji okazuje się, że do przedziału ufności wyznaczonego na podstawie średniej ważonej stosowanej przez RiskMetrics nie należy ok. 6,4% wartości. Natomiast do przedziału ufności obliczonego na podstawie wariancji wyznaczonej jako średnia z wagami potęgowymi nie należy 5,8% wszystkich obserwacji. Obie te wartości są większe niż 5%, jednak druga z nich jest bliższa wartości teoretycznej.

6. Podsumowanie

Aby jak najlepiej zarządzać ryzykiem portfela akcji, konieczna jest znajomość parametrów opisujących zachowanie poszczególnych walorów. Wartość oczekiwana zwrotów niesie informację o potencjalnych zyskach, natomiast zmienność lub wariancja opisują stopień ryzyka, jakim obarczona jest inwestycja w daną akcję. Jeżeli warunkowa wariancja zwrotów byłaby stała, to wystarczyłoby wówczas obliczyć średnią arytmetyczną np. ze stu przeszłych zwrotów kwadratowych, aby wyestymować jej wartość. Analizy pokazują jednak, że warunkowa wariancja stale się zmienia, wobec czego zastosowanie średniej arytmetycznej nie jest tu możliwe. Przedstawiona w artykule modyfikacja metody wyznaczania warunkowej wariancji stosowanej przez RiskMetrics uwzględnia malejące wolno zależności pomiędzy zwrotami absolutnymi (a także zwrotami kwadratowymi). Pomysł ten został jedynie naszkicowany w niniejszym artykule. Nie rozstrzygnięto tu kwestii doboru uniwersalnego dla wszystkich akcji wykładnika, z jakim mają maleć potęgowo wagi, a także wyboru odpowiedniej długości uwzględnianej historii.

Ostatni przykład pokazuje, że metoda z wagami potęgowymi może dawać rezultaty lepsze niż metoda z wagami wykładniczymi. Modyfikacja metody RiskMetrics jest być może szansą na dokładniejsze przewidywanie przyszłej wariancji, co pozwoliłoby na lepsze zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym.

Literatura

- [1] Engle R.F., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, „Econometrica” 1982, vol. 50, nr 4.
- [2] Galin K., *Wycena opcji europejskiej w modelu H-samopodobnym z „długą pamięcią”*, „Rynek Terminowy” 2005, nr 3.
- [3] Kim J., Mina J., *RiskGrades Technical Document*, RiskMetrics 2001, www.riskmetrics.com.
- [4] Taqqu M.S., Teverovsky V., *On Estimating the Intensity of Long-Range Dependence in Finite and Infinite Variance Time Series*, Preprint 1996.
- [5] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1998.
- [6] Willinger W., Taqqu M.S., Leland W.E., Wilson D.V., *Self-Similarity in High-Speed Packet Traffic: Analysis and Modeling of Ethernet Traffic Measurements*, „Statistical Science” 1995, vol. 10, nr 1.
- [7] Willinger W., Taqqu M.S., Teverovsky V., *Stock Market Prices and Long-Range Dependence*, „Finance and Stochastics” 1999, nr 3.

ESTIMATING STOCK VOLATILITY WITH RESPECT TO LONG MEMORY OF ABSOLUTE RATES OF RETURN

Summary

This paper presents a new approach to estimating stock volatility. There is strong evidence of long-range dependence in absolute returns. The autocorrelation function of absolute return time series decay slowly like a power function. That is the reason why calculating volatility by using average with slowly decaying weights seems to be more suitable for estimating volatility than the method with exponentially weighted average, proposed by RiskMetrics.