

Tadeusz Czernik, Daniel Iskra

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

WARUNKOWA MAKSYMALNA STRATA JAKO MIARA RYZYKA

1. Wstęp

W ciągu ostatnich kilku lat można zaobserwować szybki rozwój teorii ryzyka [27]. Nadal jednak jedną z częściej stosowanych miar ryzyka jest wariancja. Miara ta posiada wiele wad; np. nie rozróżnia wzrostów od spadków, w wielu przypadkach nie istnieje (w przypadku zmiennej losowej o rozkładzie Cauchy'ego, nie istnieje nawet wartość oczekiwana). Jedną z miar nie mającą powyższych wad jest wartość zagrożona – VaR . Miarę $VaR(\alpha, t)$ z poziomem ufności $1 - \alpha$ dla horyzontu czasu t definiujemy następująco:

$$P(S_t \leq S_0 - VaR(\alpha, t)) = P(S_0 - S_t \leq VaR(\alpha, t)) = 1 - \alpha, \quad (1)$$

gdzie: S_0, S_t – odpowiednio początkowa (zwykle deterministyczna) i końcowa (losowa) wartość procesu cen.

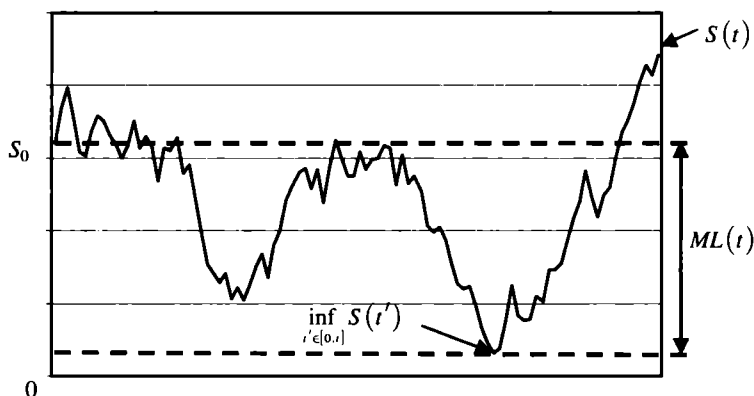
Miara ta również posiada pewne wady, m.in. nie jest wrażliwa na przebieg całej realizacji procesu S_t , a jedynie na jego wartość końcową i początkową, gdyż gęstość prawdopodobieństwa, wykorzystywaną do obliczenia VaR , definiujemy:

$$p(S, t) = \langle \delta(S - S_t) \rangle, \quad (2)$$

gdzie: $\langle \dots \rangle$ – średnia po realizacjach wartości końcowej S_t (powyższa definicja jest bardzo użyteczna, stanowi punkt wyjścia do wyznaczania gęstości prawdopodobieństwa metodą Monte Carlo),

$\delta(\cdot)$ – delta Diraca – funkcja uogólniona, dystrybucja [4; 21; 28; 29] (najczęściej spotykane uogólnienia funkcji wywodzą się z analizy funkcjonalnej, teorii ciągów funkcyjnych oraz teorii miary).

Do gęstości prawdopodobieństwa we wzorze (2) wnoszą wkład również realizacje osiągające wcześniej wartości małe (rys. 1).



Rys. 1. Przykładowa realizacja procesu losowego
Źródło: opracowanie własne.

W pracach [1; 6; 7] zaproponowano alternatywną miarę ryzyka: maksymalną stratę (ML) zdefiniowaną następująco:

$$P\left(S_0 - \inf_{s \in [0, t]} S_s \leq ML(\alpha, t)\right) = 1 - \alpha. \quad (3)$$

Wyrażenie po lewej stronie wzoru (3) jest prawdopodobieństwem zdarzenia: wartość instrumentu nie obniży się w całym horyzoncie t o więcej niż ML . Miara ta, w przeciwieństwie do wartości zagrożonej, śledzi wartość procesu w całym horyzoncie t .

Warto podkreślić, że koncepcja maksymalnej straty jest ściśle związana z prawdopodobieństwem ruiny występującym w naukach aktuarialnych [23]. Gęstość prawdopodobieństwa maksymalnej straty definiujemy jako:

$$p(ML, t) = \left\langle \delta \left(ML - \left(S_0 - \inf_{s \in [0, t]} S_s \right) \right) \right\rangle. \quad (4)$$

Jak wspomniano na początku artykułu, ostatnie lata zaowocowały nie tylko wieloma miarami ryzyka, ale również próbami aksjomatyzacji teorii ryzyka [5; 14]. Okazało się np., że wartość zagrożona nie jest koherentną miarą ryzyka [2], stąd podjęto próby modyfikacji wartości zagrożonej. Jedną z takich modyfikacji jest warunkowa wartość zagrożona ($CVaR$), zwana także *expected shortfall* (w pracy przedstawiono wersję zaadaptowaną dla procesów ciągłych) [2; 27]:

$$CVaR(\alpha, t) = E[S_t; S_t \leq S^*], \quad (5)$$

gdzie: $E[...]$ – wartość oczekiwana,

S^* – taka wartość instrumentu, że prawdopodobieństwo spadku wartości S , poniżej S^* wynosi α , tzn. $P(S_t \leq S^*) = \alpha$.

Warunkowa wartość zagrożona jest wartością oczekiwaną ceny instrumentu pod warunkiem, że wartość instrumentu będzie niższa od poziomu S^* .

Dotychczas nie wiadomo, czy maksymalna strata jest koherentną miarą ryzyka, niemniej jednak można podobnie jak w przypadku VaR zmodyfikować ją do postaci:

$$CML(\alpha, t) = E[ML_t; ML_t \geq ML^*], \quad (6)$$

gdzie: ML^* jest taką wartością maksymalnej straty, że prawdopodobieństwo tego, że wartość ML_t przekroczy ML^* wynosi α , tzn. $P(ML_t \geq ML^*) = \alpha$.

Warunkowa maksymalna strata jest wartością oczekiwaną maksymalnej straty pod warunkiem, że maksymalna strata jest większa niż ML^* .

Celem artykułu jest wykazanie możliwości zastosowania warunkowej maksymalnej straty do optymalizacji strategii inwestycyjnej, w przypadku gdy ewolucja instrumentów opisana jest geometrycznym ruchem Browna. Otrzymane rezultaty porównano z wynikami dla warunkowej wartości zagrożonej.

2. Liniowy portfel papierów wartościowych

Klasycznym modelem dynamiki cen akcji jest geometryczny ruch Browna (wszelkie różniczki stochastyczne rozważane w pracy rozumiane są w sensie Ito [11; 19; 22; 26]):

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW, \quad (7)$$

gdzie: S – wartość akcji,

μ – wielkość proporcjonalna do oczekiwanej stopy zwrotu z akcji

$(\mu = \frac{1}{dt} E\left(\frac{dS}{S}\right))$ – w dalszej części pracy wielkość μ będzie nazywana oczekiwaną stopą zwrotu),

σ – zmienność ($\sigma^2 = \frac{1}{dt} D^2\left(\frac{dS}{S}\right)$, gdzie D^2 oznacza wariancję),

$W(t)$ – proces Wienera.

Geometryczny ruch Browna jest najprostszą, akceptowalną idealizacją rzeczywistej dynamiki cen. Rezultaty (w postaci analitycznej) otrzymane w tym przypadku stanowią punkt wyjścia do dalszych uogólnień (stochastyczna zmienność, efekty pamięci, zmiany strukturalne dynamiki, nieciągłość zmian cen itp.). Ponieważ w asymptotycznych reżimach (krótkie i długie horyzonty inwestycji), wyprowadzone

wyrażenia redukują się do wyrażeń zależnych od zmienności σ oraz zmodyfikowanego współczynnika zmienności $\frac{\mu}{\sigma^2}$, przeprowadzone rozważania wnoszą nowe spojrzenie na klasyczne miary ryzyka i atrakcyjności inwestycji [12].

Można pokazać (korzystając z elementarnych własności procesu Wienera), że dynamika wartości portfela o stałej strukturze wartościowej ($w_i = \text{const}$) również jest geometrycznym ruchem Browna (proces Wienera jest procesem gaussowskim, suma procesów gaussowskich jest procesem gaussowskim [19]):

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \mu_{\Pi} dt + \sigma_{\Pi} dW, \quad (8)$$

gdzie: $\mu_{\Pi} = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \text{const}$ – oczekiwana stopa zwrotu portfela,

$$\sigma_{\Pi} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \right)} = \text{const} \text{ – zmienność portfela,}$$

w_i – udział instrumentu i w portfelu ($\sum_{i=1}^n w_i = 1$),

μ_i – oczekiwana stopa zwrotu i -tego instrumentu,

σ_i – zmienność i -tego instrumentu,

n – liczba rodzajów akcji,

$$\rho_{ij} = \text{cor} \left(\frac{dS_i}{S_i}, \frac{dS_j}{S_j} \right) = \text{cor} (dW_i, dW_j) = \text{const} \text{ – korelacja stóp zwrotu instrumentów } i \text{ oraz } j \text{ (własność geometrycznego ruchu Browna).}$$

W celu pomiaru i minimalizacji ryzyka instrumentu finansowego, jakim jest portfel akcji, można oczywiście zastosować warunkową wartość zagrożoną oraz warunkową maksymalną stratę.

W artykule rozważono portfel złożony z dwóch instrumentów. W przypadku tym struktura portfela jest całkowicie zdeterminowana przez jedną zmienną (swoobodną), np. wagę pierwszego instrumentu lub μ_{Π} (analiza własności miar ryzyka jest stosunkowo prosta). Wprowadzenie ograniczeń dwustronnych ($=$), np. na oczekiwaną stopę zwrotu portfela, wymusza wprowadzenie dodatkowego (dodatkowych) instrumentu (instrumentów).

3. Warunkowa wartość narażona na ryzyko

Korzystając z równania Kołmogorowa [16], można wyznaczyć ewolucję gęstości prawdopodobieństwa, a następnie samo prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na

tym, iż wartość portfela nie będzie wyższa od wartości Π_t w chwili t (dystrybuantę). Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X_t = \ln(\frac{\Pi_t}{\Pi_0})$ wyraża się wzorem:

$$p(x_t, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\Pi^2 t}} \exp\left(-\frac{[x_t - (\mu_\Pi - \frac{1}{2}\sigma_\Pi^2)t]^2}{2\sigma_\Pi^2 t}\right). \quad (9)$$

W dalszej części artykułu oznaczono $\Pi_t = \Pi_0 - \Delta\Pi_t$ ($\Delta\Pi_t > 0$ – spadek wartości portfela poniżej wartości Π_0 , $\Delta\Pi_t < 0$ wzrost wartości portfela powyżej wartości Π_0).

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, iż dla ustalonego czasu t i ustalonej wartości x^* zajdzie warunek:

$$X_t \leq x^* \text{ (czyli } \ln(\frac{\Pi_t}{\Pi_0}) \leq \ln(\frac{\Pi^*}{\Pi_0}) \text{),} \quad (10)$$

gdzie $x^* = \ln(\frac{\Pi^*}{\Pi_0}) = \ln\left(1 - \frac{\Delta\Pi^*}{\Pi_0}\right)$,

który gwarantuje również spełnienie nierówność $\Pi_t \leq \Pi^*$, wynosi:

$$P(\Pi_t \leq \Pi^*, t) = P(X_t \leq x^*, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\Pi^2 t}} \int_{-\infty}^{x^*} \exp\left(-\frac{[x - (\mu_\Pi - \frac{1}{2}\sigma_\Pi^2)t]^2}{2\sigma_\Pi^2 t}\right) dx. \quad (11)$$

Gęstość prawdopodobieństwa warunkowego zmiennej losowej X_t wyraża się wzorem:

$$p(x_t, t; X_t \leq x^*) = \begin{cases} \frac{p(x_t, t)}{\int_{-\infty}^{x^*} p(x, t) dx} & \text{dla } x_t \leq x^* \\ 0 & \text{dla } x_t > x^* \end{cases} \quad (12)$$

Korzystając ze wzoru na wartość oczekiwaną dla zmiennej losowej [24]:

$$g(X_t) = 1 - e^{X_t} = 1 - e^{\ln(1 - \frac{\Delta\Pi_t}{\Pi_0})} = \frac{\Delta\Pi_t}{\Pi_0}, \quad (13)$$

znajdujemy:

$$E(g(X_t), t; X_t \leq x^*) = \frac{\int_{-\infty}^{x^*} (1 - e^x) \exp\left(-\frac{[x - (\mu_\Pi - \frac{1}{2}\sigma_\Pi^2)t]^2}{2\sigma_\Pi^2 t}\right) dx}{\int_{-\infty}^{x^*} \exp\left(-\frac{[x - (\mu_\Pi - \frac{1}{2}\sigma_\Pi^2)t]^2}{2\sigma_\Pi^2 t}\right) dx} = \quad (14)$$

$$= 1 - \frac{\int_{-\infty}^{x^*} e^{\lambda} \exp\left(-\frac{[x - (\mu_{\Pi} - \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2)t]^2}{2\sigma_{\Pi}^2 t}\right) dx}{\int_{-\infty}^{x^*} \exp\left(-\frac{[x - (\mu_{\Pi} - \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2)t]^2}{2\sigma_{\Pi}^2 t}\right) dx}.$$

Po podstawieniu $z = \frac{x - (\mu_{\Pi} - \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2)t}{\sigma_{\Pi}\sqrt{t}}$ we wzorze (14) otrzymano:

$$E(g(X_t), t; X_t \leq x^*) = 1 - \frac{e^{(\mu_{\Pi} - \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2)t} \int_{-\infty}^{z^*} e^{\frac{z^2}{2}} dz}{\int_{-\infty}^{z^*} e^{\frac{-z^2}{2}} dz} = 1 - \frac{e^{\mu_{\Pi} t} \int_{-\infty}^{z^*} e^{\frac{1}{2}(z - \sigma_{\Pi}\sqrt{t})^2} dz}{\int_{-\infty}^{z^*} e^{\frac{-z^2}{2}} dz}. \quad (15)$$

Jeśli zastosuje się kolejne podstawienie $w = z - \sigma_{\Pi}\sqrt{t}$ w całce $\int_{-\infty}^{z^*} e^{\frac{1}{2}(z - \sigma_{\Pi}\sqrt{t})^2} dz$, wzór (15) przybierze postać:

$$\frac{CVaR(\alpha, t)}{\Pi_0} = E(g(X_t), t; X_t \leq x^*) = 1 - e^{\mu_{\Pi} t} \frac{\int_{-\infty}^{w^*} e^{\frac{-w^2}{2}} dw}{\int_{-\infty}^{z^*} e^{\frac{-z^2}{2}} dz} = 1 - e^{\mu_{\Pi} t} \frac{N(w^*)}{N(z^*)}. \quad (16)$$

gdzie:

$$z^* = \frac{x^* - \left(\mu_{\Pi} - \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2\right)t}{\sigma_{\Pi}\sqrt{t}} = \frac{\ln\left(1 - \frac{\Delta\Pi^*}{\Pi_0}\right) - \left(\mu_{\Pi} - \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2\right)t}{\sigma_{\Pi}\sqrt{t}},$$

$$w^* = z^* - \sigma_{\Pi}\sqrt{t} = \frac{\ln\left(1 - \frac{\Delta\Pi^*}{\Pi_0}\right) - \left(\mu_{\Pi} + \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2\right)t}{\sigma_{\Pi}\sqrt{t}},$$

$N(y)$ – dystrybucja standardowego rozkładu normalnego,
zapis $E(A; B)$ oznacza wartość oczekiwaną A pod warunkiem B .

Możemy więc napisać:

$$\frac{CVaR(\alpha, t)}{\Pi_0} = 1 - e^{\mu_{\Pi} t} \frac{\int_{-\infty}^{w^*} e^{-\frac{w^2}{2}} dw}{\int_{-\infty}^{z^*} e^{-\frac{z^2}{2}} dz} = 1 - e^{\mu_{\Pi} t} \frac{N(w^*)}{N(z^*)}. \quad (17)$$

Interesujące jest również asymptotyczne zachowanie warunkowej wartości zagrożonej. Jeżeli $\Delta\Pi^* > 0$ (spadek wartości portfela) oraz $t \rightarrow 0^+$, to z^* oraz w^* dążą do $-\infty$.

Korzystając z wzoru na rozwinięcie całki [14]:

$$\int_y^\infty e^{-t^2} dt \approx \frac{e^{-y^2}}{2y} \quad y \rightarrow \infty,$$

oraz z jej własności:

$$\int_{-\infty}^{-y} e^{-t^2} dt = \int_y^\infty e^{-t^2} dt.$$

można wyprowadzić asymptotyczne rozwinięcie $CVaR / \Pi_0$ dla krótkiego horyzontu t :

$$\frac{CVaR(\alpha, t)}{\Pi_0} = \left(1 - e^{\mu_{\Pi} t} \frac{\int_{-\infty}^{w^*} e^{-\frac{w^2}{2}} dw}{\int_{-\infty}^{z^*} e^{-\frac{z^2}{2}} dz} \right) \approx \left(\frac{\Delta\Pi^*}{\Pi_0} - \frac{\left(1 - \frac{\Delta\Pi^*}{\Pi_0} \right)}{\ln \left(1 - \frac{\Delta\Pi^*}{\Pi_0} \right)} \sigma_{\Pi}^2 t \right). \quad (18)$$

Zatem asymptotyczne rozwinięcie $CVaR$ dla krótkich horyzontów inwestycji można zapisać następująco:

$$CVaR(\alpha, t) \approx \Pi_0 \left(\frac{\Delta\Pi^*}{\Pi_0} - \frac{\left(1 - \frac{\Delta\Pi^*}{\Pi_0} \right)}{\ln \left(1 - \frac{\Delta\Pi^*}{\Pi_0} \right)} \sigma_{\Pi}^2 t \right), \quad (19)$$

czyli:

$$CVaR(\alpha, t) \approx \Delta\Pi^* - \frac{\Pi^*}{\ln \left(1 - \frac{\Delta\Pi^*}{\Pi_0} \right)} \sigma_{\Pi}^2 t, \quad (20)$$

gdzie α jest oczywiście związana z Π^* relacją:

$$P(\Pi_t < \Pi^*) = \alpha = N \left(\frac{\ln \left(\frac{\Pi^*}{\Pi_0} \right) - \left(\mu_\Pi - \frac{1}{2} \sigma_\Pi^2 \right) t}{\sigma_\Pi \sqrt{t}} \right). \quad (21)$$

Ze wzoru (20) wynika, iż dla odpowiednio krótkich czasów (reszta rozwinięcia pominięta w powyższych rozważaniach powinna być dużo mniejsza niż otrzymane przybliżenie – zagadnienie to wykracza poza ramy pracy) optymalizacja warunkowej wartości zagrożonej jest równoważna minimalizacji zmienności portfela. Zatem dla krótkich czasów wyznaczenie optymalnej struktury wartości portfela ze względu na *CVaR* sprowadza się do zbudowania portfela metodą Markowitza.

Warto podkreślić, że optymalizacja portfela ze względu na warunkową wartość zagrożoną minimalizuje oczekiwane straty, o ile do nich dojdzie. Struktura portfela optymalnego ze względu na *CVaR* zapewnia maksymalną oczekiwaną wartość portfela w przypadku scenariuszy (losowych), w których doszłoby do spadku wartości portfela poniżej z góry określonej granicy. Każdy inny skład portfela w opisanej sytuacji, skutkuje mniejszą wartością oczekiwaną portfela.

4. Warunkowa maksymalna strata

Z definicji maksymalnej straty (ML_t) wynika, iż jest ona nieujemną zmienną losową (w ustalonym horyzoncie czasu) o następującej dystrybucji [6]:

$$F(x, t) = P(ML_t \leq \Delta \Pi) = P\left(\frac{ML_t}{\Pi_0} \leq \frac{\Delta \Pi}{\Pi_0}\right) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \Delta \Pi \in (-\infty, 0) \\ 1 - 2e^{-\frac{\mu_\Pi - 0.5\sigma_\Pi^2}{\sigma_\Pi^2} \ln\left(\frac{\Pi_0 - \Delta \Pi}{\Pi_0}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-\ln\left(\frac{\Pi_0 - \Delta \Pi}{\Pi_0}\right)}{\sigma_\Pi \sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\frac{(\mu_\Pi - 0.5\sigma_\Pi^2)^2 \ln^2\left(\frac{\Pi_0 - \Delta \Pi}{\Pi_0}\right)}{2\sigma_\Pi^4 z^2}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz & \text{dla } \Delta \Pi \in [0, \Pi_0) \\ 1 & \text{dla } \Delta \Pi \in [\Pi_0, +\infty) \end{cases}, \quad (22)$$

stąd wartość oczekiwana maksymalnej straty może być wyrażona wzorem:

$$EML(t) = \int_0^{\Pi_0} (1 - F(\Delta \Pi)) d(\Delta \Pi). \quad (23)$$

W pracy [7] pokazano, iż:

$$EML(t) =$$

$$\Pi_0 \left[1 - \left(1 + \frac{\sigma_{\Pi}^2}{2\mu_{\Pi}} \right) e^{\mu_{\Pi} t} + \left(1 + \frac{\sigma_{\Pi}^2}{2\mu_{\Pi}} \right) e^{\mu_{\Pi} t} N \left(\frac{\mu_{\Pi} + \frac{\sigma_{\Pi}^2}{2}}{\sigma_{\Pi}} \sqrt{t} \right) - \left(1 - \frac{\sigma_{\Pi}^2}{2\mu_{\Pi}} \right) N \left(\frac{\mu_{\Pi} - \frac{\sigma_{\Pi}^2}{2}}{\sigma_{\Pi}} \sqrt{t} \right) \right], \quad (24)$$

gdzie $N(x)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

W celu obliczenia wyrażenia na warunkową maksymalną stratę oznaczmy $P(ML_t \geq ML^*) = \alpha$, co pozwoli znaleźć dystrybuantę warunkowej maksymalnej straty:

$$\begin{aligned} F(x; ML_t \geq ML^*) &= \frac{P(ML_t \leq x, ML_t \geq ML^*)}{P(ML_t \geq ML^*)} = \\ &= \frac{P(ML_t \leq x, ML_t \geq ML^*)}{\alpha} = \frac{(F(x) - F(ML^*))\theta(x - ML^*)}{\alpha}, \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie $\theta(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 & z \geq 0 \end{cases}$ – funkcja Heaviside’a.

Aby wyznaczyć warunkową maksymalną stratę (CML), należy zauważyć, że:

$$CML(t) = \int_0^{\Pi_0} x d F(x; ML_t \geq ML^*) = \int_{ML^*}^{\Pi_0} x d F(x; ML_t \geq ML^*). \quad (26)$$

Całkując przez części, otrzymujemy:

$$CML(t) = \left[x (F(x; ML_t \geq ML^*) - 1) \right]_{ML^*}^{\Pi_0} + \int_{ML^*}^{\Pi_0} (1 - F(x; ML_t \geq ML^*)) dx, \quad (27)$$

czyli mamy

$$\begin{aligned} CML(t) &= ML^* + \int_{ML^*}^{\Pi_0} (1 - F(x; ML_t \geq ML^*)) dx = ML^* + \int_{ML^*}^{\Pi_0} \left(1 - \frac{(F(x) - F(ML^*))\theta(x - ML^*)}{\alpha} \right) dx \\ CML(t) &= ML^* + \frac{1}{\alpha} \int_{ML^*}^{\Pi_0} (1 - F(x)) dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Podstawiając do wzoru (28) wyrażenie (22), otrzymamy (ze względu na ograniczoną objętość pracy nie przedstawiamy szczegółów obliczeń):

$$CML(t) = \Pi_0 \left[1 - \right.$$

$$\left. \left(1 - \frac{\sigma_{\Pi}^2}{2\mu_{\Pi}} \right) \left(1 - \frac{ML}{\Pi_0} \right)^{\frac{2\mu_{\Pi}}{\sigma_{\Pi}^2}} N \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{ML}{\Pi_0} \right) + \left(\mu_{\Pi} - \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 \right) t}{\sigma_{\Pi} \sqrt{t}} \right] + \left(1 + \frac{\sigma_{\Pi}^2}{2\mu_{\Pi}} \right) e^{\mu_{\Pi} t} N \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{ML}{\Pi_0} \right) - \left(\mu_{\Pi} + \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 \right) t}{\sigma_{\Pi} \sqrt{t}} \right] \right) \right. \\ \left. N \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{ML}{\Pi_0} \right) - \left(\mu_{\Pi} - \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 \right) t}{\sigma_{\Pi} \sqrt{t}} \right] + \left(1 - \frac{ML}{\Pi_0} \right)^{\frac{2\mu_{\Pi}}{\sigma_{\Pi}^2} - 1} N \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{ML}{\Pi_0} \right) + \left(\mu_{\Pi} - \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 \right) t}{\sigma_{\Pi} \sqrt{t}} \right] \right] \quad (29)$$

Zauważmy ponadto, że prawdopodobieństwo przekroczenia przez maksymalną stratę, z góry ustalonej wartości, można przedstawić w postaci:

$$P(ML \geq ML^*) = \alpha = \\ = N \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{ML^*}{\Pi_0} \right) - \left(\mu_{\Pi} - \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 \right) t}{\sigma_{\Pi} \sqrt{t}} \right] + \left(1 - \frac{ML^*}{\Pi_0} \right)^{\frac{2\mu_{\Pi}}{\sigma_{\Pi}^2} - 1} N \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{ML^*}{\Pi_0} \right) + \left(\mu_{\Pi} - \frac{1}{2} \sigma_{\Pi}^2 \right) t}{\sigma_{\Pi} \sqrt{t}} \right] \quad (30)$$

Ze względu na złożoną postać CML wszelkie analizy wykonane zostały za pomocą algorytmów numerycznych.

5. Optymalizacja portfela inwestycyjnego – analiza numeryczna

W artykułach [3; 13; 15; 17; 18; 25] wykorzystano VaR oraz warunkową wartość narażoną na ryzyko do optymalizacji portfela inwestycyjnego. W pracach [8; 9; 10; 12] wykazano możliwość wykorzystania pewnych miar z rodziny FPRM (*first passage risk measures* – maksymalna strata oraz zysk przed stratą należą do tej rodziny) do kwantyfikacji i optymalizacji ryzyka inwestycyjnego. Ponadto pokazano zależności pomiędzy klasycznymi miarami ryzyka (wariancją, współczynnikiem zmienności) a FPRM.

Optymalizację portfela przeprowadzono, zakładając pewien poziom:

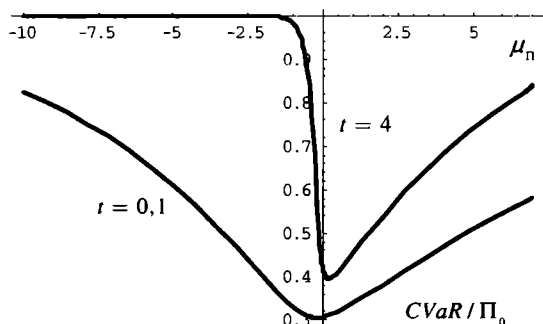
$$\Delta \Pi^* / \Pi_0 = ML^* / \Pi_0.$$

Jak widać na rys. 2 i 3 (przykładowe obliczenia wykonano dla horyzontów inwestycji $t = 0,1$ oraz $t = 4$ lat i parametrów $\mu_1 = 0,4$, $\sigma_1 = 0,3$, $\mu_2 = -0,5$, $\sigma_2 = 0,2$, $\rho_{12} = -0,2$, $\Delta \Pi / \Pi_0 = \frac{ML^*}{\Pi_0} = 0,3$). Względna warunkowa wartość zagrożona

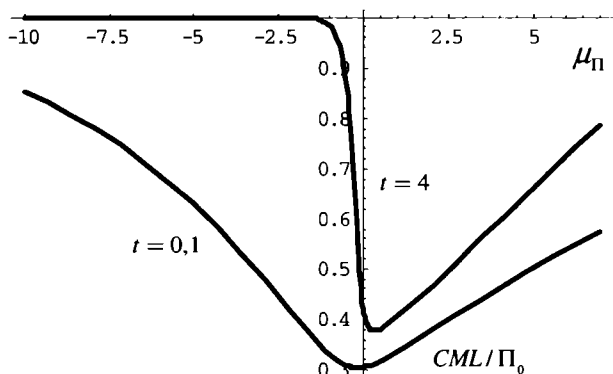
($CVAR / \Pi_0$) oraz względna warunkowa maksymalna strata (CML / Π_0) mają minima ze

względę na oczekiwaną stopę zwrotu portfela (w przypadku portfela dwuskładnikowego ustalenie wartości oczekiwanej stopy zwrotu portfela jednoznacznie ustala wartości wag).

W zależności od wartości parametrów opisujących dynamikę cen akcji oraz horyzontu inwestycji, optymalne składy portfeli zbudowanych na podstawie *CVaR* oraz *CML* są mniej lub bardziej zbliżone. Zaobserwowano następującą zależność między optymalnymi składami: im krótszy horyzont inwestycji, tym bardziej zbliżone składy portfeli. Własność ta jest naturalna, gdyż dla krótkich horyzontów inwestycji założony poziom ML^* będzie przekroczony najprawdopodobniej tuż pod koniec okresu inwestycji (pamiętajmy, że wartość zagrożona kalkulowana jest właśnie w odniesieniu do końca horyzontu inwestycji).



Rys. 2. Względna warunkowa wartość narażona na ryzyko
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Względna warunkowa maksymalna strata
Źródło: opracowanie własne.

Warto również podkreślić, że w przypadku dwóch instrumentów różnica optymalnych oczekiwanych stóp zwrotu portfeli związana jest relacją z różnicą optymalnych wag w_i (np. pierwszego instrumentu):

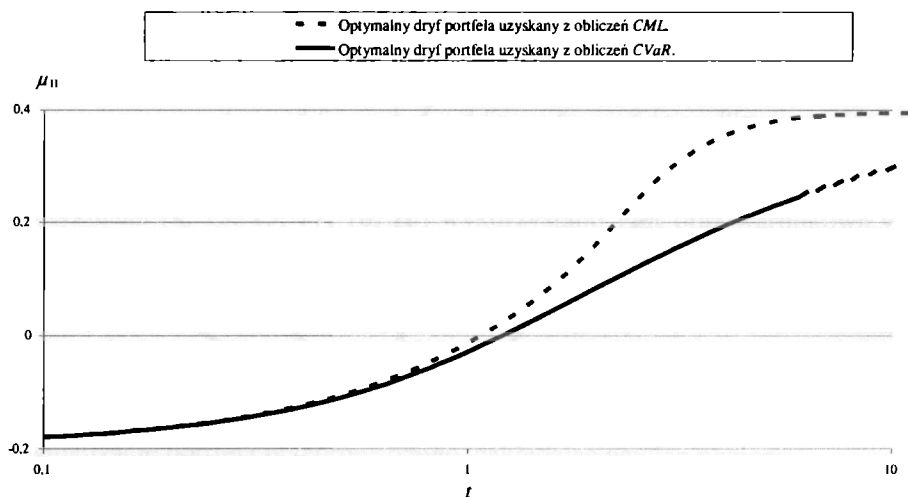
$$\Delta w_1 = w_1^{CML} - w_1^{CVaR} = \frac{\Delta \mu_{\Pi}}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{\mu_{\Pi}^{CML} - \mu_{\Pi}^{CVaR}}{\mu_1 - \mu_2}, \quad (31)$$

gdzie: μ_{Π}^{CML} – oczekiwana stopa zwrotu portfela optymalnego ze względu na *CML*,
 μ_{Π}^{CVaR} – oczekiwana stopa zwrotu portfela optymalnego ze względu na *CVaR*.

Ze wzoru (31) wynika, iż w sytuacji, gdy oczekiwane stopy zwrotu instrumentów posiadają zbliżone wartości, niewielka różnica optymalnych stóp zwrotu portfeli skutkuje znaczną różnicą składu portfeli optymalnych ze względu na *CVaR* oraz *CML*. Dla przyjętych w przykładach wartości parametrów $\Delta w_1 = \frac{\Delta \mu_{\Pi}}{0,9}$.

wielka różnica optymalnych stóp zwrotu portfela rzędu 0,1 sprawia, że zawartość pierwszego instrumentu w portfelu optymalnym ze względu na warunkową maksymalną stratę jest o ok. 11% większa niż w portfelu optymalnym ze względu na warunkową wartość zagrożoną.

Na rysunku 4 widzimy, że optymalna oczekiwana stopa zwrotu portfela otrzymana na drodze minimalizacji *CML* jest większa od oczekiwanej stopy zwrotu minimalizującej *CVaR*. Wynika to najprawdopodobniej z faktu, iż *FPRM* w odróżnieniu od miar z rodziny *VaR*, śledzą proces w całym horyzoncie inwestycji. Dokładniej aby np. maksymalna strata była jak najmniejsza, proces powinien przeciętnie szybciej oddalać się od założonego poziomu ML^* niż w przypadku *VaR*, w przeciwnym razie szansa na spadek poniżej założonego poziomu w dowolnym momencie czasu byłaby duża.



Rys. 4. Optymalne dryfy portfela uzyskane za pomocą *CML* i *CVaR*

$$\mu_1 = 0,4; \sigma_1 = 0,3; \mu_2 = -0,5; \sigma_2 = 0,2; \rho_{12} = -0,2; \Delta \Pi^* / \Pi_0 = 0,3 = ML^* / \Pi_0$$

Źródło: opracowanie własne.

Z rysunku 4 wynika również, że optymalna stopa zwrotu portfela dla horyzontów krótszych niż mniej więcej rok jest ujemna (dla $\mu_1 = 0,4$; $\sigma_1 = 0,3$; $\mu_2 = -0,5$; $\sigma_2 = 0,2$; $\rho_{12} = -0,2$; $\Delta \Pi^* / \Pi_0 = 0,3 = ML^* / \Pi_0$). Nie ma w tym nic paradoksal-

nego. Po pierwsze, portfel otrzymany na drodze minimalizacji wariancji ma również ujemną oczekiwaną stopę zwrotu, w przybliżeniu $-0,2$ (dla krótkich horyzontów dynamikę dominuje czynnik losowy). Po drugie, wynika stąd prosty wniosek: nie powinniśmy konstruować portfela dwuskładnikowego na podstawie instrumentów o przedstawionych parametrach dynamiki losowej. Oczywiście nawet w przypadku krótkiego horyzontu inwestycji można skonstruować portfel o dodatniej oczekiwanej stopie zwrotu z wykorzystaniem tych instrumentów, lecz nie będzie on optymalny z punktu widzenia *CML* oraz *CVaR* (z założonym poziomem spadku).

Przeprowadzone analizy numeryczne dla innych parametrów modelu pokazują, że minimum istnieje w szerokim zakresie parametrów (można przypuszczać, że zawsze), co oznacza, że zaprezentowane miary można wykorzystać do optymalizacji portfela inwestycyjnego.

Wybór miary (zwykle funkcji zmiennej losowej) używanej do optymalizacji ryzyka jest ściśle związany z preferencjami inwestora. Na przykład inwestor może założyć, że spadek wartości portfela poniżej pewnego poziomu w dowolnym momencie trwania inwestycji jest niepożądany, wtedy wybierze miary z rodziny *FPRM* (maksymalną stratę, zysk przed stratą itp.). Jeżeli interesuje go jedynie wartość końcowa inwestycji, to wybierze np. miary z rodziny *VaR*. W przypadku gdy zamierza zabezpieczyć portfel przed katastroficznymi stratami (w razie gdyby do nich doszło), powinien stosować opisane miary warunkowe. W podejściu tym godzimy się na małe straty (niskie oczekiwane zyski), lecz duże staramy się minimalizować.

Warto podkreślić, iż miary z rodziny *first passage risk measure* można wprowadzać do standardowych procedur optymalizacyjnych nie w charakterze funkcji celu, lecz jako dodatkowe ograniczenia.

6. Podsumowanie

Z przedstawionej analizy widać, że zarówno *CVaR*, jak i *CML* stanowią ciekawą alternatywę dla klasycznych miar ryzyka. Ponieważ miary te posiadają minima ze względu na wagi, można stosować je do optymalizacji przedsięwzięć inwestycyjnych.

CML, w przeciwieństwie do *CVaR* i innych miar ryzyka, może służyć do zabezpieczania przed dużymi spadkami w dowolnym momencie czasu.

W pracy niestety nie przedstawiono optymalizacji w przypadku założonego poziomu ufności (przypadek najczęściej spotykany w literaturze poświęconej *VaR*). Przyczyną były niestabilności numeryczne napotkane w analizie *CML*. Aby ominąć ten problem, należy zaadaptować inną analityczną postać *CML*.

Przedstawione miary stanowią również narzędzie oceny już istniejących inwestycji (kwantyfikacja ryzyka).

Należy podkreślić, że otrzymane rezultaty mają przede wszystkim charakter teoretyczny. Powód jest oczywisty: geometryczny ruch Browna nie jest przydatny

w procesie poprawnie odzwierciedlającym dynamikę cen akcji. Stanowi on jednak niezbędny punkt wyjścia do dalszych badań. Rezultaty otrzymane w przypadku lepiej odzwierciedlających rzeczywistość procesów losowych będą mogły być odniesione do analogicznych wielkości charakteryzujących geometryczny ruch Browna. Pozwoli to na weryfikację poprawności przeprowadzonych rozważań oraz na głębszą analizę wyników.

Dalszych badań wymagają oczywiście zależności między warunkowymi miarami i ich bezwarunkowymi odpowiednikami, portfele złożone z wielu instrumentów (w tym instrumentów wolnych od ryzyka), portfele nieliniowe oraz przypadek nieklasycznej dynamiki instrumentów.

Literatura

- [1] Acar E., James S., *Maximum Loss and Maximum Drawdown in Financial Markets*, „International Conference Forecasting Financial Markets”, London 1997.
- [2] Acerbi C., Tasche D., *On the Coherence of Expected Shortfall*, „Journal of Banking and Finance” 2002, 26, s. 1487-1503.
- [3] Alexander G.J., Baptista A.M., *CVaR as a Measure of Risk: Implications for Portfolio Selection*, Annual Conference Paper No. 235, EFA, 2003.
- [4] Antosik P., Mikusiński J., Sikorski R., *Teoria dystrybucji. Podejście ciągowe*, Mir, Moskwa 1976.
- [5] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., *Coherent Measures of Risk*, „Mathematical Finance” 1999, 9, s. 203-228.
- [6] Czernik T., *Maksymalna strata jako miara ryzyka*, [w:] T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a ryzyko*, AE, Katowice 2003.
- [7] Czernik T., *Miary ryzyka z rodziny ML*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 991, AE, Wrocław 2003, s. 91-97.
- [8] Czernik T., *Optymalizacja pewnej strategii inwestycyjnej z punktu widzenia maksymalnej straty*, „Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie”, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 389, Szczecin 2004.
- [9] Czernik T., *Optymalizacja portfela z punktu widzenia oczekiwanej maksymalnej straty*, materiały nie opublikowane, 2004.
- [10] Czernik T., *Portfel MML – optymalny*, materiały nie opublikowane, 2004.
- [11] Czernik T., *Skazani na formalizm Ito?*, w druku.
- [12] Czernik T., *Zysk przed stratą jako miara ryzyka*, w trakcie procesu recenzyjnego, 2005.
- [13] Denault M., *Coherent Allocation of Risk Capital*, „The Journal of Risk 4” 2001, no. 1, s. 1-34.
- [14] Föllmer H., Schied A., *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*, „Finance & Stochastics” 2002, 6(4), s. 429-447.

- [15] Gaivoronski A.A., Pflug G., *Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach*, NTNU, Department of Industrial Economics and Technology Management, Working paper, July 2000.
- [16] Gardiner C.W., *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, Springer-Verlag, New York 1990.
- [17] Iskra D., *VaR – optymalny liniowy portfel inwestycyjny z ograniczeniami*, [w:] *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, AE, Wrocław 2005.
- [18] Iskra D., *VaR – optymalny portfel papierów wartościowych*, w trakcie procesu recenzyjnego, 2004.
- [19] Klebaner F.C., *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press, London 2005.
- [20] Lebediew N.N., *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1957.
- [21] Marcinkowska H., *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*, PWN, Warszawa 1993.
- [22] Merton R.C., *Continuous-Time Finance*, Blackwell, Oxford 2001.
- [23] Panjer H.H., Willmot G.E., *Insurance Risk Models*, „Society of Actuaries”, 1992.
- [24] Papoulis A., *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa 1972.
- [25] Rockafellar R.T., Uryasev S., *Optimization of Conditional Value at Risk*, „The Journal of Risk” 2000, vol. 2, no. 3, s. 21-41.
- [26] Rogers L.C.G., Williams D., *Diffusions, Markov Processes and Martingales, v. II, Ito Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.
- [27] Szegö G. (red.), *Risk Measures for the 21st Century*, John Wiley & Sons, New York 2004.
- [28] Wyderka Z., *Linear Differential Equations with Measure as Coefficients and Control Theory*, Wyd. Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1994;
- [29] Zemanian A.H., *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN, Warszawa 1969.

CONDITIONAL MAXIMAL LOSS – AN EXAMPLE OF THE FIRST PASSAGE RISK MEASURE

Summary

Conditional Maximal Loss (CML) has been proposed as a risk measure. It has been shown that CML has the ability to portfolio optimization. For a geometric brownian motion environment, analytical results was derived. A comparison to Conditional Value at Risk has been presented.